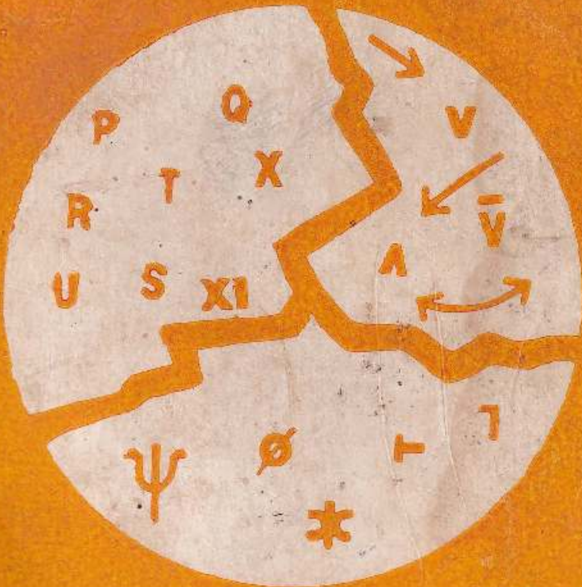
குறியீட்டு அளவையியல்

SYMBOLIC LOGIC



LANKA

வே. யுகபாலசிங்கம்

குறியீட்டு அளவையியல்
SYMBOLIC LOGIC

வே. யுகபாலசிங்கம்
B. A. Hons. (Cey.) Dip-in-Ed. (Cey.)
முன்னாள் மெய்யியற்றுறை உதவி விரிவுரையாளர்,
பேராதனைப் பல்கலைக் கழகம்,
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக் கழகம்.

வெளியீடு:
பட்டப் படிப்புகள் கல்லூரி,
148/1, ஸ்ரான்லி வீதி,
யாழ்ப்பாணம்.
1990

வெளியீடு — 14

முதற் பதிப்பு டிசம்பர் — 1985
திருத்திய பதிப்பு யூன் — 1990

அச்சுப்பதிவு :
திருமகள் அழுத்தகம்
சுன்னாகம்
1990

விலை :
ரூ. 30-00

முன்னுரை

கால தேவைக்கு ஏற்ப சில புதிய அலகுகளுடன் திருத்திய பதிப்பாக இந் நூலை மீண்டும் வெளியிடுவதில் மகிழ்ச்சியடைகின்றேன்.

மேலைநாட்டில் குறியீட்டு அளவை நன்கு கதைமயமாக்கப்பட்ட அளவை முறையாக அபிவிருத்தியடைந்துள்ளது. பௌதீகம் (Physics), பொறிநுட்பம் (Engineering), கணனி (Computer) போன்ற அறிவியற் துறைகளுக்கு உதவும் முறையாகவும் வளர்ச்சியடைந்துள்ள இவ்வேளையில், எமது மொழியில் இப்பாடநெறி அறிமுக நிலையிலேயே இருக்கின்றது. இதனை இத்துறை சார்ந்த அறிஞர்கள் அறிந்தும் வாளாதிருப்பது கவலைக்குரியதே.

இத்துறையைச் செவ்வனே கற்க விரும்பும் என்போன்ற பலர் எதனை மூல நூலாகக் கொள்வது, எதை ஏற்றுக்கொள்வது, இக் கருத்துக்கள் ஏற்புடையனவா என உரைத்துப் பார்க்க உரைகல் எதுவுமின்றிக் கல்வி உலகில் அவதியுறுகின்றோம்.

இந் நூலின் ஆக்கத்திற்குத் தூண்டுகோலாக விருந்த பட்டப் படிப்புகள் கல்லூரிக்கும், அதன் இயக்குனர் திரு. இராசா சத்தீஸ்வரன் அவர்களுக்கும், தெளிவாக அழகுற அச்சிட்டுத் தந்த சுன்னாகம் திருமகள் அழுத்தகத்தினருக்கும் எனது நன்றிகள்.

வே. யுகபாலசிங்கம்

மெய்யியற்துறை,
பட்டப்படிப்புகள் கல்லூரி.
யாழ்ப்பாணம்.

தீயினுற் சுட்ட புண்
கற்சுவர்க்கே கறையாகும்.

உன்,
அறிவினுற் சுட்ட வடு
கல் இடுக்கில் மறைந்திடுமோ.

என்
உயர்வுக்கு களந் தந்து
வேகாது உயர்ந்து நிற்கும்
யாழ் நூலகத்திற்கு
இச் சிறு ஆக்கம்

சமர்ப்பணம்.

பொருளடக்கம்

பக்கம்

குறியீட்டு அளவையியல்

1. பாரம்பரிய அளவைமுறை

கிரேக்க சிந்தனைகளில் தோன்றிய அறிவியற்றுறைகளில் அளவையியலும் ஒன்ருகும். கி. மு. 324இல் வாழ்ந்த கிரேக்க ஞானியாகிய அரிஸ்டோட்டிலே மேலைத்தேய அளவையியலின் தந்தையாவார். இவரே அளவைமுறை பற்றியும் அளவை விதிகள் பற்றியும் திட்டவட்டமான ஓர் ஆய்வினை நிகழ்த்தியவர். தமது உய்த்தறி அளவைமுறை பற்றிய அறிமுகத்தை அவர் மிகச் செம்மையாக ஆற்றியளித்தார் என்பதற்கு அவரது அளவையியலும் — அளவைமுறையும் இன்றும் பிரயோகத்திலிருப்பதே தக்க சான்ருகும். அறிவு பெறும் வாயில்களில் ஒன்ருகிய அனுமானம் பற்றிய ஆய்வு இவரது அளவைமுறையில் அதிக முக்கியத்துவம் பெறுகின்றது. அனுமானத்தில் நியமம் என ஒன்று உளதென முதலில் தெளிவாக நிறுவியவர் அரிஸ்டோட்டிலே. இவரது நியாயத்தொடைபற்றிய கொள்கையும்—முக்கூற்றுவாத அமைவும் அறிவுபற்றிய ஆய்வாளனுக்கு அரிய கருத்துக்களை அளிப்பவையாக உள்ளன. அளவையியல் அறிவியலாக வளர்ச்சியடைவதற்கான அணுகுமுறைகளை, அடிப்படை உண்மைகளை வெளிப்படையாக இவரே முதன்முதலாக வகுத்துத்தந்தார்.

ஆயினும், இவரது அளவைமுறை வாக்கிய (எடுப்பு) அளவைமுறையாக இருந்ததால், பிற்கால அறிவியல் வளர்ச்சிப்போக்குக்கு ஏற்ப வளர்ச்சியடையவில்லை. கணிதமும் அளவையியலும் ஒரேவகையான விஞ்ஞானத்தைச் சார்ந்தவையாயினும், கணிதத்துறை போன்று அளவைமுறை, பிற்காலத்தில் வளர்ச்சியடையவில்லை. அத்துடன் அளவைமுறை எதனையும் விருத்தி செய்யவில்லை. அறிவியலுக்கு அவசியமான ஓர் அறிவியல் முறையாகக் கணிதம் வளர்ந்தமை போன்று அளவையியல் வளரவில்லை. இதனை 18ஆம் நூற்ருண்டில் வாழ்ந்த காண்ட் (Kant) என்னும் மெய்யியலாளர் பின்வருமாறு குறிப்பிட்டார். ''18ஆம் நூற்ருண்டளவுக்குப் பிந்திய காலத்திலுமே எவ்வகை முன்னேற்றமும் அடையாது ஆரம்பநிலையிலிருக்கும் விஞ்ஞானம் அளவையியலே'' என்று.

இதற்குப் பல காரணங்கள் உண்டு. குறியீட்டு அளவைமுறையின் வருகையும் அவசியமும் இக் காரணங்களில் தங்கியுள்ளதைக் காணலாம். அரிஸ்டோட்டிலின் அளவைமுறை மொழியாலானது. கணிதம் குறியீடுகளால் ஆன முறையாகும். அரிஸ்டோட்டிலும் அவரைப்

பின்பற்றிஞேரும் ஆரம்பத்தில் நுணுக்கமான மொழியை உருவாக்கி யிருந்தாலும் பிற்காலத்தில் இதேபோல மொழியை வளர்க்க வாய்ப்பும் அக்கறையும் இருக்கவில்லை. இவ்வகையில் தொடர்ந்து அறிவியலுக் குரிய சிந்தனைகளைத் தெளிவாகவும், நுட்பமாகவும் முன்வைப்பதற்கு ஏற்ற சாதனமாக மொழி அமைந்திருக்கவில்லை. சிந்தனையில் தேர்ச்சி யுடையோர் கூட அளவை இயலால் ஈர்க்கப்பெருது கணித இயலிலே தமது முழுக் கருத்தையும் செலுத்தியமைக்கு அதுவுமொரு காரண மாகும். அத்துடன் மொழியின் அலகுகளாகிய பதங்கள் ஈரடி இயல் புடையனவாகவும்-கருத்துமயக்கத்தையுடையனவாகவும் -கருத்தமைவில் ஒன்ருேடு ஒன்று தழுவியனவாகவும் காணப்படுகின்றன. உதாரணமாக, ''படி இடறி வீழ்ந்தனன்'' என்ற வாக்கியத்தை நோக்கின், சிலர் வீட்டுப்படியில் இடறி வீழ்ந்துவிட்டான் எனவும், சிலர் பாரிய பொருட் களை நிறுக்கப் பயன்படுத்தும் படியில் இடறி வீழ்த்துவிட்டான் என வும், சிலர் படித்தல் என்ற கற்றல் தொழிலில் இடறி வீழ்ந்துவிட் டான் எனவும் விளக்கம் கொள்ள இடமுண்டு. இங்கு படி என்ற பதம் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொருளையுடையதாக இருக்கின்றது. இவ்வாறே அன்பு. நட்பு, பாசம், நேசம் பந்தம், கருணை போன்ற பதங்களின் கருத்துக்கள் தனித்தனியாக வரைவிலக்கணப்படுத்த முடி யாதவாறு ஒன்ருேடொன்று தழுவியிருப்பதைக் காணலாம். இதே போல், 'முடிவற்றது' என்ற பதம், வாழ்க்கை முடிவற்றது என்ற வாக்கியத்தில் ஒருவகையான அர்த்தத்தையும் இவ்விதி முடிவற்றது என்ற வாக்கியத்தில் ஒருவகையான அர்த்தத்தையும் அளிப்பதைக் காணலாம். இக் குறைபாடுகளோடு மொழி இடத்துக்கிடம், மக்க ளுக்கு மக்கள் வேறுபடுவதையும் மொழிக்குமொழி இலக்கண அமை வில் நெகிழ்ச்சிகளிலிருப்பதும், அளவைமுறை கணிதமுறை போன்று வளர்ச்சி அடையாததற்குக் காரணங்கள் எனலாம். கணிதமொழி இத்தகையன அல்ல. கணிதக் குறியீடுகள் எல்லா மக்களுக்கும் பொது வானவையாகும். அதன் அமைவும் விதிகளும் எல்லா மக்களாலும் எவ்விடத்திலும் பொதுமொழியாக ஏற்றுக்கொள்ளமுடியாது. உதாரண மாக '2+2=4' என்ற விளக்கம் எல்லா மக்களுக்கும் பொதுவானதே. இதனுல்தான் அரிஸ்டோட்டில் அளவையியலில் கண்ட பகுப்பாய்வு வெற்றிகளைவிட, பைத்தோகரஸ், யூக்கிலிட் போன்ற கணித மேதைகள் தமது கணித இயலின் அமைப்பில் அளவையியல் பாகுபாட்டைப் புகுத்திக் கண்ட வெற்றி மேலானதாகும் என ஆய்வாளர்கள் குறிப் பிடுவர். இவ்வாறு பாரம்பரிய அளவைமுறையில் கண்ட குறைபாடு களே குறியீட்டு அளவைமுறையின் வருகைக்கு அடிப்படைக் காரணங்க ளாயின.

2. 1. கணித அளவை

முதல் முதலில் இக் குறைபாடுகளை ஓரளவு உணர்ந்து கொண்டவர் லெபினிஸ்ட் (Leibniz—*1646—1716*) என்னும் ஐரோப்பிய தத்துவ ஞானியே. இவரே குறியீட்டு அளவைமுறையின் தோற்றத்துக்கு வித்திட்டவர். கணித முறைகளை மெய்யியலிற் பயன்படுத்தி மெய்யியற் பிரச்சினைக்குத் தீர்வுகாண முற்பட்ட மெய்யியலாளர்களில் ஒருவராகிய இவர் அளவையியலிலும் அத்தகைய அவசியத்தை வலியுறுத்தினர். அளவையியலைக் கணிதத்தில் பயன்படும் உய்த்தறி நியாயமுறைகளோடு தொடர்புபடுத்தவேண்டும் என்ற கருத்தை வலியுறுத்தினர். கணிதக் குறியீட்டு முறையை அளவையியலில் கையாள்வதன் மூலம் செம்மையான வாத வடிவத்தை உருவாக்கலாம் என்றுர். பதங்களைக் கணிதக் குறியீடுகள் மூலம் சீரான முறையில் கணித விதிகளுக்கு இணையத் தொடர்புபடுத்தும்போது ஓர் உய்த்தறி அமைப்பு விரிவாக அமையும் என்றுர். இக் கருத்துக்களை நன்கு உணர்ந்துகொண்டு இவருடைய பகுப்பாய்வு முறையை அன்றே அளவையியலில் புகுத்தியிருந்தால் குறியீட்டுமுறையின் வளர்ச்சி என்றோ ஆரம்பித்திருக்கும் ஆனல் இவரது ஆய்வுகளும்—விளக்கங்களும் இவரைத் தொடர்ந்து துலக்கமுறவில்லை. பலரால் அறியப்படாத கருத்தாகவே இருந்தது.

19ஆம் நூற்றுண்டின் நடுப்பகுதியில்தான் மீண்டும் இக் கருத்துக்கள் வெளிச்சத்துக்குவரத் தொடங்கின. இக்காலத்தில் வாழ்ந்த பூல் (Boole,) டிமோர்கன் (De Margan) போன்ற கணித அறிஞர்கள் அளவையியலின் அடிப்படையான உண்மைகளைக் குறியீட்டு வடிவத்தில் அமைக்க முற்பட்டனர். இவர்கள் எழுதிய முறையே The Mathamatical Analysis of logic, Formal logic என்ற நூல்கள் *1847*இல் வெளிவந்தன. இவர்களைத் தொடர்ந்து ஜீ. பியனே (G. Peano), பியர்ஸ் (C. S. Peirce), சார்டர் (E. Scheder), பிருகே (G. Frege), பேட்டண்ட் ரசல் (Beetant Russell) போன்றவர்கள் குறியீட்டு அளவை முறையின் செம்மையான ஆக்க வளர்ச்சிக்கு உதவினுர்கள். இவர்களில் இரசலைக் குறியீட்டு அளவைமுறையின் தந்தை என்றும், பிருகே என்பவரைக் கேத்திர கணித அளவை முறையின் தந்தை என்றும் அழைப்பார்கள்.

அரிஸ்டோட்டிலின் அளவையியல் பொருட்களின் வகுப்புகளைப் பற்றியது எனக் கூறிய பூல் சாதாரண அட்சரகணிதத்திலிருந்து வேறுபட்ட வேறோர் அட்சரகணித முறையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், அவரின் நியாயத் தொடைக் கொள்கை முழுவதையும் உய்த்தறியலாம் என்றுர். அவரின் வகுப்புக்களை, x, y, z போன்ற குறியீடுகளால் குறிப்பதன்மூலம் நியாயத்தொடை வடிவத்துக்குரிய அட்சரகணித வடிவ

முறையை விருத்திசெய்தார். ஆயினும் இவரும் அரிஸ்டோட்டிலைப் போன்றே எடுப்புக்களை எழுவாய் வகுப்பு, பயனிலை வகுப்பு என வகுத்து எடுத்தார்.

பிறுகே எடுப்புக்களை எழுவாய், பயனிலை வகுப்புக்களாய் வகுத்தெடுப்பதை விடுத்து அளவையியல் எடுப்புக்கள் யாவும் உறுதியான எடுப்புக்களே எனக் கொண்டார். அளவையியலில் இருந்து ஆரம்பிக்கும் முறை ஒன்றிலேயே கணிதத்தின் அடிப்படையைக் காணவேண்டும் எனக் குறிப்பிட்டார். கி. மு. 5ஆம் நூற்றாண்டளவில் வாழ்ந்த இயூகிலிட் என்னும் கணித அறிஞர் தமது கேத்திர கணிதத்தை விருத்தி செய்கையில் கையாண்ட பொது வரைவிலக்கண முறையையே இவரும் அளவையியலை ஆராய்வதற்குப் பயன்படுத்தினார். உய்த்தறி முறையில் சில வரைவிலக்கணங்களையும் முதலெடுப்புக்களையும் எடுகோளாய்க் கொண்டு தேற்றங்களை நிறுவினார். வாதத்தின் எடுகூற்றுக்களுக்கும் அனுமான விதிகளுக்கும் இடையிலான வேறுபாட்டைத் தெளிவாக விளக்குவதன்மூலம் அளவையியலில் குறியீட்டுமுறையின் அவசியத்தை உணர்த்தினார். அத்துடன் கணிதக் குறியீட்டின் அடிப்படையில் அமையாத பிறிதோர் குறியீட்டு வடிவமொன்றை அறிமுகம் செய்தார். இதேபோல் எண்கணிதம் முழுவதையும் அளவைமுறையின் அடிப்படையில் அமைக்கவும் முயன்றார். இவரின் இத்தகைய பெரு முயற்சிகளே கேத்திரகணித அளவையியலின் தந்தை என அழைக்கக் காரணமாயிற்று.

இவரைத் தொடர்ந்து குறியீட்டு அளவைமுறையின் வரலாற்றில் பேட்டண்ட் ரசல், வைற்கெட் (White head) ஆகிய கணித மேதைகள் அதிக முக்கியத்துவம் பெறுகின்றனர். ரசல் எழுதிய 'பிறின்சிப்பியா மதமற்றிக்கா' (Principia Mathematica) எனும் நூல் தெளிவான குறியீட்டு அளவைமுறையின் ஆக்கத்துக்கு மிகவும் உதவியது. 20ஆம் நூற்றாண்டில் விருத்தியடைந்த குறியீட்டு அளவைமுறையின் செழிப்பான வளர்ச்சிக்கு இந்நூலே களமாகியது. லைபினிஸ் என்ற தத்துவ ஞானியால் ஆரம்பித்து வைத்த குறியீட்டு அளவைமுறை பற்றிய கருத்தும், கணிதத்தின் அடிப்படை பற்றியதுமான கருத்தும் இந்நூலின் வருகையோடு விருத்தியடைந்தது. இதனையே "இந்த நூற்றாண்டில் ஏற்பட்ட மிகப் பெரிய லாபம்" என ரசல் வர்ணித்தார். இவருடன் சேர்ந்து வைற் கெட்டும் இவ்வாக்க முயற்சிக்குப் பெருந் தொண்டாற்றினார். சொற்களால் அமையும் மொழியானது சிக்கல்மிக்க அளவையியல் உறவுகளை விளக்க வல்லதன்று எனத் தெளிவாக விளக்கிய இவர், கணிதமும் அளவையும் முற்றொருமை உடையன என்றும் அளவையியலின் ஒரு பிரிவே கணிதம் என்றும் வரையறுத்து விளக்குவதன்மூலம் செம்மையான குறியீட்டு அளவை முறையை அமைத்து அளித்தனர்.

குறியீட்டு அளவையியலின் வருகை வரலாற்று அமைவில் அளவையியல் அறிஞர்களுக்குப் புதிய தென்பை அளித்தது. இதன் வழி கணிதம் சார்ந்த அளவை அறிஞர்கள் பலர் உருவாகினார்கள். புதிய புதிய விருத்திகள் ஏற்படலாயிற்று, இதனை ரிச்சன் பேர்க் (Hans Reichanback) எனும் அறிஞர் இவ்வாறு குறிப்பிட்டார்: ''அளவையியல், அறிவுத் தோட்டத்தில் ஒருகாலத்தில் வறண்ட நிலையில் விளங்கியது. இப்போது அந்நிலம் மிகுந்த வளர்ச்சியுடைய கணிதமுறைகளால் பண்படுத்தப்பெற்று விருந்தியடைந்துள்ளது'' என. இன்று குறியீட்டு அளவைமுறை நன்கு விருத்தியடைந்து வருகின்றது. கணிதம் சார்ந்த துறைகளில் ஏற்படும் இடர்ப்பாடுகளை, முரண்பாடுகளை, தவறான கற்பிதங்களைத் தெளிவுபடுத்தும் துறையாகவும் உளது. பொறிநுட்பம், கணனி போன்ற துறைகளில் குறியீட்டு அளவை முறையின் பிரயோகமுளது. இருமதிப்பு அளவை, பல்பதிப்பு அளவை, ஆதார அளவை போன்ற பல அளவைமுறைகள் விருத்தியடைந்துள்ளன.

2.2. எடுப்புக்கள்

எடுப்புக்களைக் குறியீட்டு வடிவத்தில் அமைக்கும்போது முதலில் மாணவர்கள் எடுப்புக்கள்பற்றியும் — எடுப்பு வகைகள் பற்றியும் அறிந்திருத்தல்வேண்டும். குறியீட்டு அளவையின் வருகையோடு எடுப்புக்கள் பற்றிய கருத்துக்களும் விருத்தியடைந்துவந்துள்ளன. எமது மொழியின் அமைவுக்குரிய வகையில் எடுப்புக்களைப்பற்றிய தெளிவான அறிவிருத்தலே செம்மையான குறியீட்டாக்கத்துக்கு வழியாகும். பாரம்பரிய எடுப்பு வடிவங்களை மட்டும் அறிந்திருப்போர் எடுப்புக்களைக் குறியீட்டு மொழிக்குக் கொண்டுவரும்போது சில கருத்து மயக்கங்களுக்கு உட்படுவதைக் காணலாம். எடுப்புக்களைக் குறியீட்டில் மொழிபெயர்க்கும்போது பின்வருமாறு வகுத்தெடுப்பது இலகுவாகும்.

(i) எளிய எடுப்புக்கள்

(ii) கூட்டு எடுப்புக்கள்

(iii) இணைப்பெடுப்புக்கள்.

எளிய எடுப்புக்கள் என்பன ஒரு பொருள்பற்றி உரைப்பனவாக அமையும் எடுப்புக்களாகும். ஓர் உறுப்பு வடிவமாக அமைந்திருக்கும் விதிஎடுப்புக்கள் யாவும் எளிய எடுப்புக்களாகும். பாரம்பரிய அளவையியலில் முற்பிரிவுத் திட்டத்திலுள்ள அறுதி எடுப்பும், புதிய வகையீட்டில் உள்ள தொகுப்பெடுப்பும் இங்கு எளிய எடுப்பு வடிவமாகக் கொள்ளலாம். உதாரணமாக,

சூரியன் உதிக்கின்றது

மழை பெய்கிறது

மாலா ஆலயம் சென்றாள்

போன்ற எடுப்புக்கள் எளிய எடுப்புக்களாகும்.

இரண்டு எளிய எடுப்புக்களைக்கொண்டமையும் எடுப்புக்களைக் கூட்டு எடுப்புக்கள் என்பர். இது இணைப்பு வடிவமாகவும், நிபந்தனை வடிவமாகவும், உறழ்வு வடிவமாகவும் அமையும். உதாரணமாக,

மாலா நூல் நிலையம் செல்வாள் அத்துடன் அவள் ஆலயமும்செல்வாள்.
மாலா ஆலயம் செல்வாளாயின் அவள் நூல்நிலையமும் செல்வாள்.
மாலா ஆலயம் செல்வாள் அல்லது அவள் நூல் நிலையம் செல்வாள்.

இவ்வாறு இரண்டுக்கு மேற்பட்ட எளிய எடுப்புக்களைக் கொண்டும் கூட்டு எடுப்புக்கள் அமையலாம். உதாரணமாக,

மாலா நூல் நிலையம் செல்வாள் அத்துடன் அவள் ஆலயம் செல்வாள் அத்துடன் அவள் கடற்கரைக்கும் செல்வாள்.

இதனை இணைப்பு எடுப்புக்கள் என்றும் அழைப்பர். பாரம்பரிய அளவையியலில் உள்ள நாற்பிரிவுத் திட்ட எடுப்புக்கள் யாவும் இங்கு எளிய எடுப்பு வடிவங்களே. விதி எடுப்புக்களை எளிய எடுப்புக்கள் என்றும், மறை எடுப்புக்களை எளிய மறை எடுப்புக்கள் என்றும் கொள்ளலாம்.

2.3. எடுப்பு மாறிகள்

எடுப்புக்களைக் குறியீட்டு வடிவத்தில் அமைப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் குறியீடுகளையே மாறிகள் என்பர். மாறிகள் எடுப்புக்களைப் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துவதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் குறியீடுகளாகும். இன்று பொதுவாக ஆங்கில எழுத்துக்களான P. Q. R. S- T. U போன்ற வடிவங்களையே குறியீடுகளாகப் பயன்படுத்துவர். உதாரணமாக,

மாலா விவேகமுடையவள் — P
பாலன் அறிவுடையவன் — Q என.

இவ்வடிவங்கள் மொழிக்கு மொழி வேறுபடலாம். ஆரம்பகாலத்தில் தமிழில் ப, ம, ச, ற போன்ற எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தியமையுமுண்டு. β, 7, x போன்ற கேத்திர கணித வடிவங்களும் பயன் படுத்தப்பட்டிருக்கின்றன: சில அளவையியலாளர்கள் A, B. C, D

போன்ற எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தினர். X, Y போன்ற எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தும்போது எடுப்புக்களின் முதல் எழுத்தும் சேர்த்துக் கொள்ளப்படவேண்டும். உதாரணமாக,

மாலா அழகியவள் — Xமா என.

ஏனெனில் P என்ற எழுத்து வடிவம் குறியீட்டு அளவையியில் பெறும் முக்கியத்துவம் தனி X என்ற குறியீட்டுக்கு இல்லை. அட்சரகணிதத்தில் X எனும் குறியீடு எந்த எண்ணின் மதிப்பையும் பெறவல்லதாய் இருப்பது போலவே அளவையியலிலும் 'P' போன்ற குறியீடு அந்த எடுப்பிற்கும் நிற்கவல்லது. இதனால் இதனை எடுப்புச் சார்புகள் எனவும் அழைப்பர்.

2 . 4. அளவை மாறிலிகள்

எளிய இரு குறியீட்டு எடுப்புக்களை இணைக்கும் சொல்லுக்கு வழங்கும் குறியீட்டு வடிவமே மாறிலியாகும். எளிய எடுப்புக்களைக் குறியீட்டில் அமைப்பதன் மூலம் கூட்டு எடுப்புக்களை உருவாக்கும்போது பயன்படும் வடிவமே மாறிலி. தனியே எடுப்பு மாறிகளைக் கொண்டு கூட்டு எடுப்புக்களை உருவாக்க முடியாது. உதாரணமாக,

P Q என.

இங்கு கணிதத்திலும் அட்சரகணிதத்திலும் மாறிலிகள் மாறாத பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பது போலவே இவையும் என்றும் மாறாத பெறுமானத்தை யுடையவை. மாறிலிகளைக் கொண்டே குறியீட்டு எடுப்பு வடிவங்கள் இனங்கண்டு கொள்ளப்படும். ஏனெனில் கூட்டு எடுப்புக்களில் இடம் பெறும் இணைக்கும் சொல்லுக்கு ஏற்ப மாறிலியின் வடிவமும் மாறுபடும். மாறிலிகளைக்கொண்டே குறியீட்டு வாதங்களின் வலிமை, வலிமையின்மை நிச்சயிக்கப்படும். குறியீட்டாக்கத்தில் மாறிலிகளின் முக்கியத்துவத்தைக் குறியீட்டு வாதங்கள் நிறுவப்படும்போது கண்டு கொள்ளலாம். பின்வரும் மாறிலி வடிவங்கள் குறியீட்டாக்கத்தில் பயன்படுத்தப்படும். ∧, ⟶ ⟵, <—>, ∨, $\underline{\overline{\vee}}$, —, முன்பு இவற்றுக்குப் பதிலாக முறையே ●, c, ɔ, ≡, ∧, ∀ போன்ற வடிவங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. இன்று அச்சு வசதி காரணமாக முதலிற் குறிப்பிட்ட வடிவங்களே பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

2 . 5. அளவை மாறிலிகளும் — தமிழில் இணைக்கும் சொற்களும்

i. மறுப்பு மாறிலி

·· - அன்று, அல்ல, இல்லை,

(என்பது உண்மையன்று)

ii. இணைப்பு மாறிலி

∧ - அத்துடன், ஆனல், ஆனலும், உம்

iii. நிபந்தனை மாறிலிகள்

⟶ - ஆயின், எனின், ஆல், ஆகவே, அவ்வாருயின்

⟵ - ஆயினே (வலிதான நிபந்தனை)

⟷ - ஆயின் ஆயினே (இருபால் நிபந்தனை)

iv. உறழ்வு மாறிலிகள்

∨ — அல்லது, (மெல் உறழ்வு) அன்றில்

$\underline{\vee}$ — வல் உறழ்வு

இங்கு, எமது மொழியில் வலிதான நிபந்தனை, வல்உறழ்வு போன்ற வற்றுக்கு ஏற்ற எடுப்புக்களை நிச்சயித்துக் கூறுவது கடினம். வலிதான நிபந்தனையையும், வல்உறழ்வையும் பல்கலைக்கழக மாணவர் எடுப்பின் அமைவிலிருந்தே கண்டுகொள்ளவேண்டும். நிபந்தனையில் முக்கூற்று நிச்சயமாக, உறுதியாக விதித்து அமையும்போது வலிதான நிபந்தனையாகும். உதாரணமாக,

மாலா நிச்சயம் ஆலயம் வந்தால்தான் பாலனும் ஆலயம் வருவான்.

மாலா ஆலயம் வந்தால் மட்டுமே பாலனும் ஆலயம் வருவான். வலிதான உறழ்வும் இவ்வாறே.

ஒன்றில் மாலா நிச்சயம் ஆலயம் வருவாள் அல்லது நூல்நிலையம் செல்வாள்.

மாலா ஆலயம் வருவாள் அல்லது மாலா ஆலயம் வரமாட்டாள்.

இருபால் நிபந்தனை எடுப்பும் இவ்வாறே. ஆயின்ஆயினே எனும் இணைக்கும் சொல் இடம் பெருமலும் எடுப்புக்கள் அமைந்து வரலாம். உதாரணமாக,

வேலையையும் செய்து முடித்தான் அதற்கேற்ற கூலியையும் பெற்ருன்.

இன்று மாணவர் வசதி கருதியே ஆயினே, ஆயின்ஆயினே என்ற சொற்கள் சேர்க்கப்படுகின்றன. தமிழில் குறியீட்டு அளவை முறை அறிமுகஞ் செய்யப்பட்டு 1981ஆம் ஆண்டு வரை இவ்வாறே பயன் படுத்தப்பட்டு வந்தன. க. பொ. த. உயர் வகுப்புகளுக்கு குறியீட்டு அளவைமுறை அறிமுகம் செய்யப்பட்ட போது, சில அலகுகள் நீக்கப் பட்டிருந்ததாலேயே இவை இடம் பெறவில்லை. இன்று காலதேவைக்கு ஏற்ப மாணவர்களின் பூரணமான அறிவு வேண்டப்படுவதால் மாண வர்கள் இவற்றையும் அறிந்திருத்தல் அவசியம். உதாரணமாக, 1989ஆம் ஆண்டு க. பொ. த. உயர்தர அளவையியல் வினுக்களைக் கவனத்தில்

எடுத்துக் கொள்க. மேற் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளுக்குரிய இணைக்கும் சொற்கள் தமிழில் அனேகமுண்டு. அவற்றை வாதங்களின் அமைவிலிருந்தே இனங் கண்டுகொள்ளவேண்டும். பொதுவாக வாதங்களில் எடுப்புக்களின் அமைவைப் பொறுத்து பொருத்தமான இணைக்கும் சொற்களுக்குரிய குறியீட்டு மாறிலியைப் பயன் படுத்துதல் பயிற்சியால் ஏற்படும். போதிய பயிற்சி இன்மையும், மொழிக் குறைபாடுமே மாறிலிகளைப் பிரயோகிப்பதில் ஏற்படும் தவறுகளுக்குக் காரணம்.

2.6. மொழிவடிவங்களைக் குறியீட்டில் அமைத்தல்

(1) மாலா நூல்நிலையம் சென்றாள்.
P

(2) மாலா நூல்நிலையம் செல்லவில்லை.
—P

(3) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் அத்துடன் அவள் ஆலயமும் செல்வாள்.
(P ∧ Q)

(4) மாலா நூல்நிலையம் செல்லவில்லை என்பது பொய்
— —P

(5) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் ஆயின் அவள் ஆலயமும் செல்வாள்.
(P ⟶ Q)

(6) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் அல்லது அவள் ஆலயம் செல்வாள்.
(P ∨ Q)

(7) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் ஆயினே அவள் ஆலயமும் செல்வாள்.
(P ⟵ Q)

(8) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் ஆயின் ஆயினே அவள் ஆலயமும் செல்வாள்.
(P ⟷ Q)

(9) மாலா ஆலயம் செல்வாள் என்பதும் அவள் நூல் நிலையம் செல்வாள் என்பதும் பொய்.
—(P ∧ Q)

(10) மாலா ஆலயம் வந்தால்ஒழியப் பாலன் ஆலயம் வருவதற்கில்லை.
(P ∨ — Q)

(11) மாலா ஆலயம் வருவாள் அல்லது அவள் நூல்நிலையம் செல்வாள் என்பதும் உண்மையல்ல.

$-(P \vee Q)$ எனவும் $(-P \wedge -Q)$ எனவும் அமையலாம்.

(12) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் அத்துடன் அவள் ஆலயமும் செல்வாள். அவள் ஆலயம் செல்வாள் ஆயின் பூங்காவிற்கும் செல்வாள்.

$$\left[(P \wedge Q) \wedge (Q \longrightarrow R)\right]$$

(13) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள்ஆயின் அவள் ஆலயமும்செல்வாள். அவள் ஆலயத்திற்குச் செல்வாள் அல்லது அவள் பூங்காவிற்குச் செல்வாள். ஆகவே மாலா நூல்நிலையம் செல்வதும் அவள் ஆலயம் செல்வதும் உண்மை.

$$\left[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \vee R)\right] \longrightarrow (P \wedge Q)$$

(14) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள்எனின் நாதன் விரிவுரைக்குச் செல்வான். பாலன் ஆலயம் செல்வான் ஆயினே மாலா நூல் நிலையம் செல்வாள். மாலா பூங்காவிற்குச் சென்றாலும் நாதன் நூல்நிலையம் செல்வான். ஆகவே மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் ஆயின் பாலன் ஆலயம் செல்வான்.

(அ) P — மாலா நூல்நிலையம் செல்லுதல்

Q — நாதன் விரிவுரைக்குச் சென்றான்.

R — பாலன் ஆலயம் சென்றான்.

S — மாலா பூங்காவிற்குச் சென்றாள்.

T — நாதன் நூல்நிலையம் சென்றான்.

(ஆ) $\left[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longleftarrow P) \wedge (S \wedge T)\right] \longrightarrow (P \longrightarrow R)$

(இ) $\left[(P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R) \wedge (S \wedge T)\right] \longrightarrow (P \longrightarrow R)$

(15) மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள் என எடுத்துக்கொண்டால் அவள் ஆலயம் செல்வாளாயின் அவள் பூங்காவிற்கும் செல்வாள். ஆனால் பாலன் விரிவுரைக்குச் செல்லவில்லை. ஆகவே பாலன் நூல்நிலையம் சென்றதும் மாலா ஆலயம் சென்றாள் என்பதும் பொய்.

சுருக்கத் திட்டம்

P — மாலா நூல்நிலையம் செல்வாள்.

Q — அவள் ஆலயம் செல்வாள்.

R — அவள் பூங்காவிற்குச் செல்லுதல்.

S — பாலன் விரிவுரைக்குச் செல்லுதல்.

T — பாலன் நூல்நிலையம் செல்லுதல்.

$$\Big[\big((P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)\big) \wedge - S\Big] \longrightarrow -(S \wedge Q)$$

2.7. கருத்திற் கொள்ளவேண்டிய சில அம்சங்கள்

இங்கு 1ஆம், 2ஆம் எடுப்புக்கள் எளிய எடுப்புக்கள் என்பதால் அவற்றினை அடைப்புக்குறிக்குள் உள்ளடக்கவில்லை. ஏனைய எடுப்புக்கள் யாவும் கூட்டு எடுப்புக்களாக அமைவதால் அவற்றினை அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ளடக்கலாம்.

12ஆவது குறியீட்டு வடிவத்தில் இரண்டு கூட்டு எடுப்புக்கள் மட்டும் தரப்பட்டு இருப்பதால் இரண்டையும் ஒன்றாக இணைப்பதற்காக இரண்டு கூட்டு எடுப்புக்களையும் ஒரு பெரிய அடைப்புக் குறிக்குள் உள்ளடக்கலாம். அடைப்புக் குறிகள் குறியீட்டுமுறையின் ஒரு பகுதியாகும். ஒரு வாதத்தின் ஒழுங்கும் உறுதியும் அதன் அமைப்பில் தங்கியுள்ளது. அடைப்புக்குறிகள் மூலமே அமைப்பை நிர்ணயிக்கலாம். ஒரு செம்மையான குறியீட்டுவாதம் அடைப்புக் குறியீடுகளால் ஒழுங்காக வகுத்து வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும். ஆக்கப்படும் குறியீட்டுத் தொடர்களைத் தொகுதியாக்குவதற்கும் நிறுத்தல் அடையாளங்களுக்காகவும் இவை பயன்படும்.

13ஆவது அமைப்பில் ஆகவே என்ற சொல் இடம்பெறுவதைக் கவனியுங்கள். ஒரு வாதத்தின் முடிவிடம் அதுவே. வாதத்தின் முடிச்சு என்றுங் கூறுவர். முதற் கூறப்பட்ட நியாயங்கள் யாவும் இறுதியாக விதிக்கப்படுகின்றது. அதனால் ஆகவே என அமையும் இடத்தில் குறியீட்டுத் தொடர்கள் தொகுதியாக்கப்படுகின்றன. இங்கு ஆகவே என்பதற்கு '∴' என்ற அடையாளத்தையோ, ⟶ எனும் அடையாளத்தையோ பயன்படுத்தலாம். பெறுகை முறைகள் மூலம் வாதங்களின் வாய்ப்பை ஆராயும் குறியீட்டு வாதங்களில் '∴' அடையாளத்தைப் பயன்படுத்துவது பொருத்தமானதாகும்.

14ஆவது வாத அமைப்பில் (அ) பகுதி சுருக்கத்திட்டம் என்பர். பெரிய குறியீட்டுவாதங்களில் எடுப்புக்கள் யாவும் தெளிவாக இடம் பெறுவதற்கு முதற்கண் சுருக்கதிட்டம் ஒன்றை வகுத்தல் நன்று. எடுப்புக்கள் தவறி விடாதிருப்பதற்கும் இது உதவும். சில எடுப்புக்கள் ஒரேமாதிரியான எடுப்பாக ஆரம்பத்தில் தென்படும். ஆகவே சுருக்கத் திட்டம் ஒன்றை முதலில் தருதல் நன்று.

14ஆவது வாத அமைப்பில் (ஆ) பகுதி வாதம் குறியீட்டில் அமைக்கப் பட்டுள்ளது. இங்கு 'ஆயினே' என்ற மாறிலி அப்படியே மொழி பெயர்க்கப்பட்டுள்ளது. குறியீட்டுவாதத்தின் வாய்ப்பை ஆராயும்போது குறிப்பிட்ட குறியீட்டின் வடிவத்தை (இ) பகுதியில் உள்ளது போல் அமைத்துக்கொள்ளலாம். வாதத்தின் வாய்ப்பை ஆராய்வது எளிதாக அமையும்.

15ஆவது வாத அமைப்பில் ஆயின் என்பதற்கும், 'என எடுத்துக் கொண்டால்' என்பதற்குமிடையில் குறியீட்டு அமைவில் வேறுபடா திருப்பதைக் கவனியுங்கள். அதற்கேற்பவே அடைப்புக் குறிகள் அமைதல் வேண்டும் என்பது பொய்என முடிபுக்கூற்று அமைந்துள் ளது. இங்கு மாறிகளின் மறுப்பாக அன்றி கூட்டெடுப்பின் மாறிலி யின் மறுப்பாகவே 'என்பது பொய்' அமைகின்றது.

இவ்வாறு அமையும் குறியீட்டு வாதவடிவங்கள் எடுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து விரிவுபடும். வாதங்களைக் குறியீட்டு வடிவத்திற்குக் கொணரும்போது சுருக்கத்திட்டம், குறியீட்டாக்கம், குறியீட்டு வடிவம் என்ற ஒழுங்கில் அமைப்பது நன்று. அவ்வாறு அமைக்கும்போது வாதவடிவம் திட்டவட்டமானதாகவும் செம்மையான தாகவும் அமையும்.

உதாரணமாக,

இசை இன்பமானதாயின் இசை மகிழ்ச்சியானது. இசை மகிழ்ச்சி யைத் தரா அன்றில் இசை துன்பத்தைத் தரும். இசை இன்பமான தல்ல. ஆகவே இசை மகிழ்ச்சியைத் தருமாயின் இசை துன்பமானதே.

சுருக்கத்திட்டம்

P — இசை இன்பமானது.

Q — இசை மகிழ்ச்சியானது.

R — இசை துன்பத்தைத் தரும்.

$(P \longrightarrow Q) . (-Q \vee R) . -P$ ஃ $(Q \longrightarrow R)$ குறியீட்டாக்கம்.

$$\Big[\big((P \longrightarrow Q) \wedge (-Q \vee R)\big) \wedge -P\Big] \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$$

குறியீட்டு வடிவம்.

அழகு இன்பமானது. அழகு இன்பமானதல்ல அன்றில் அழகு விரும்பத்தக்கது. இசை அழகானது எனின் அழகு விரும்பத்தக்கது அல்ல. ஆனாலும் அழகு கொடுமையானது. ஆகவே அழகு இன்பமானது எனின் அழகு மகிழ்ச்சியானது.

கருக்கத்திட்டம்

P — அழகு இன்பமானது.

Q — அழகு விரும்பத்தக்கது R — இசை அழகானது.

S — அழகு கொடுமையானது.

T — அழகு மகிழ்ச்சியானது.

$$P.\ (-P \vee Q).\ (R \longrightarrow -Q) \wedge S \ \% \ (P \longrightarrow T)$$

$$P \wedge \Big[(-P \vee Q) \wedge \big((R -) - Q) \wedge S \big) \Big] -)\ (P \longrightarrow T)$$

இங்கு தனி எடுப்புத் தரப்படும்போது அது வடிவத்தில் காட்டப் பட்டதுபோல் தனித்தே அமையவேண்டும். கூட்டு எடுப்போடு சேர்த்து அடைப்புக்குறிக்குள் உள்ளடக்கக்கூடாது. $(P \wedge (-P \vee Q))$ என அமைத்தால் கருத்து மாறுபடும். அதேவேளே, ஆனுலும் அழகு கொடுமையானது என்ற எடுப்பு அங்கு இணைக்கப்படவேண்டும். தரப் பட்ட உதாரணத்தில் அழகு இன்பமானது, என முதல் எடுப்புத் தனித்தே உளது. ஆனுலும் அழகு கொடுமையானது எனும் எடுப்பு முதற் கூட்டு எடுப்போடு இணைகிறது என்பதை அவதானிக்குக. மாறிலி களின் இணைப்பை வெளிப்படுத்துவதுடன் பொருள் மாற்றம் ஏற் படாமல் இருக்கவும் அடைப்புக்குறிகள் அவசியமாகும். மாறிலிகளைப் போன்றே அடைப்புக்கள் மாறி, மாறிலிகளையும் கட்டுப்படுத்துகின் றன. இவற்றின் எல்லேகளே அடைப்புக்களே நிர்ணயிக்கின்றன.

தமிழில் அமைந்திருக்கும் எடுப்புக்களேக் குறியீட்டு மொழிக்கு மொழிபெயர்க்கும் திறன் பயிற்சியால் வருவதாகும். நிபந்தனே, உறழ்வுச் சொற்களுக்குரிய குறியீட்டு வடிவம் ஒன்றுதான். ஆனல் அவ்வடிவத்துக்குரிய தமிழ்ச் சொற்கள் பல உண்டு.

அடைப்புக் குறிகளின் ஒழுங்கு

$$\Big\{ \Big[\big((\quad) \big) \Big] \Big\}$$

$$(P \longrightarrow Q)$$

$$\big((P \longrightarrow Q) \longrightarrow R) \big)$$

$$\Big[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \Big] \longrightarrow (P \longrightarrow R)$$

$$\Big[\big((P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \wedge (P) \big) \Big] \longrightarrow (P \longrightarrow R) \big)$$

$$\Big[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \wedge (P \longrightarrow Q) \Big] \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$$

$$\Big\{ \Big[\big((P \longrightarrow Q) \wedge P \big) \Big] \longrightarrow \Big[\big((P \longrightarrow Q) \big) \Big] \Big\} \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$$

2.8. குறியீட்டு வடிவங்களை மொழியில் பெயர்த்தல்

குறியீட்டு அளவை இயலில் குறியீட்டு எடுப்புக்களையும் குறியீட்டு வாதங்களையும் மொழியில் பெயர்த்லும் ஒரு முக்கிய அம்சமாகும். இப்பயிற்சி குறியீட்டைத் தெளிவாக அமைக்கவும், மொழி அமைதியைப் பெறவும், செம்மையாகச் சிந்திக்கவும் உதவுகின்றது.

குறியீட்டு வாதத்தை மொழியில் பெயர்க்கும்போது முதலில் அதில் இடம்பெறும் மாறிகளுக்கேற்ற சுருக்கத் திட்டம் ஒன்ற வரைதல் வேண்டும்.

உதாரணமாக

$\left[(P \longrightarrow Q) \wedge (-Q \longrightarrow R)\right] \longrightarrow -P$ எனும் வடிவில்

அமைந்த வாதத்தை நோக்குவோம். இங்கு முதலில் சுருக்கத் திட்டம் ஒன்றை அமைப்போம். இதற்கு மிக எளிதானவழி X என்னும் குறியீட்டை எடுத்துக்கொண்டு

P — X புத்தியுள்ளவன்

Q — X விவேகமுடையவன்

R — X மகிழ்ச்சியானவன் என அமைக்கலாம்.

அடுத்து குறியீட்டுவாதத்தை மொழிபெயர்க்கவேண்டும். அவ்வாறு மொழிபெயர்க்கும்போது, குறியீட்டுவாதத்தின் எளிய எடுப்புக்களின் மறுப்பைப் பெயர்த்தல் நன்று.

உதாரணமாக

X புத்தியுள்ளவன் ⟶ X விவேகமுடையவன்.
— X விவேகமுடையவன் ⟶ X மகிழ்ச்சியானவன்.
ஆகவே — X புத்தியுள்ளவன். என முதலிலும் பின்பு
X புத்தியுள்ளவன் ⟶ X விவேகமுடையவன்.
X விவேகமுடையவன் அல்ல ⟶ X மகிழ்ச்சியானவன்.
ஆகவே X புத்தியுள்ளவன் அல்ல, என்றும், பின்பு
X புத்தியுள்ளவன் ஆயின் X விவேகமுடையவன்.
X விவேகமுடையவன் அல்ல ஆயின் X மகிழ்ச்சியானவன்.
ஆகவே X புத்தியுள்ளவன் அல்ல.

என்றும் பெயர்க்கலாம். இவ்வாறு வகுத்து எழுதும்போது தவறுகள் பல தவிர்க்கப்படுகின்றன. சுருக்கத் திட்டத்தை வகுப்பதோடு உடனடியாகவும் பெயர்க்கலாம்.

2.9. மறும்புமாறிகள் பற்றி

குறியீட்டில் உள்ள மறுப்பு மாறிகளைப் பெயர்க்கும்போது, கருத்துப் பிழைகள் ஏற்படாவண்ணம் பெயர்த்தல் வேண்டும்.

உதாரணமாக,

— P என்பதை

X புத்தியுள்ளவன் என்பது பொய் எனவும்,
X புத்தியுள்ளவன் என்பது உண்மையில்லை எனவும்,
X புத்தியுள்ளவன் அல்ல எனவும் பெயர்க்கலாம்.

$-(P \wedge Q)$ என்பதை

X புத்தியுள்ளவன் அத்துடன் X விவேகமுள்ளவன் என்பதும் பொய்.

$-(P \wedge Q)$

X புத்தியுள்ளவன் என்பதும் X விவேகமுள்ளவன் என்பதும் உண்மையில்லை எனவும் பெயர்க்கலாம்.

$(-P \wedge -Q)$ என்பதை

X புத்தியுள்ளவன் என்பதும் X விவேகமுள்ளவன் என்பதும் பொய் எனப் பெபர்க்க முடியாது. மறை மாறிகள் மறையாகவே பெயர்க்கப்படல் வேண்டும்.

$(-P \wedge -Q)$ என்பதும்
$-(P \wedge Q)$ என்பதும் ஒன்றல்ல

ஆனல் குறியீட்டாக்கத்தில் தெரிவித்ததுபோல் $(-P \wedge -Q)$ எனும் வடிவம் $-(P \vee Q)$ எனவும் வரலாம்.

இவ்வாறு வெவ்வேறு பெறுமானமுடைய கூட்டு எடுப்புக்களைக் கருத்தில்கொண்டு தமிழில் பெயர்த்தல் வேண்டும்.

2.10. பொருளொத்த எடுப்பு வடிவங்கள்

எடுப்புக்களைக் குறியீட்டிலமைக்கும்போது குறியீட்டு வடிவங்களும் மாறுபடும் என்பதற்கு இவ் எடுப்புக்களை உதாரணமாகச் சொள்ளலாம். இங்கு,

$P \longleftarrow Q$ என்பதை
$Q \longrightarrow P$ எனவும்

அமைக்கலாம். பொதுவாக வலிதான நிபந்தனை எடுப்புக்களைக் குறியீட்டிலமைக்கும்போது மூல எடுப்பின் முன்னெடுப்பும் பின்னிணைவும் இடமாறியமையலாம் (1) ஆயினே என்ற சொல்லை வலி

தான நிபந்தனைக்குப் பயன்படுத்தும்போது, உண்மை அட்டவணைமுறை மூலம் வாய்ப்புப்பார்க்கும் குறியீட்டுவடிவத்தில், எடுகூற்றுக்களை இட மாற்றுமலே அமைத்து வாய்ப்பினைத் துணியலாம். வலிதான நிபந்தனைக் குரிய உண்மைப் பெறுமானமானமுளது. ஆனால் பெறுகை முறைமூலந் தேற்றங்களை அமைத்து நிறுவுகின்ற வாதபடிவத்தில் (P ←— Q) என்பதைப் (Q —→ P)என மாற்றவேண்டும். வலிதான உறழ்வு எடுப்புக்களைத் தமிழில் நிபந்தனை போன்று வேறுபடுத்திக் காட்டுதல் பொதுவாக ஒன்றில், நிச்சயம் என்ற சொற்களைச் சேர்ப்பதன்மூலம் வலிதான உறழ்வை வேறுபடுத்தலாம். உதாரணமாக

X புத்திசாலி அல்லது X விவேகமுடையவன் என்பதை மெல் உறழ்வாகவும், வலிதான உறழ்வை

ஒன்றில் X புத்திசாலி அல்லது X புத்தியற்றவன் என எதிர்மறைச் சொற்களால் வேறுபடுத்திக் காட்டலாம். சரிசமம், அல்லது ஆயின் ஆயினே எனும் மாறிலியைப் பயன்படுத்தும்போது, எடுப்பின் அமைவைக் கருத்தில் எத்துக்கொண்டு குறியீட்டில் அமைக்கலாம். முன்பு இவ்வாறே அமைக்கப்பட்டன. உதாரணமாக

இராமன் வேலையும் செய்தான் கூலியும் பெற்றான்.

(P <—> Q)

நீர் பணமும் செலுத்தினுல் மன்ற உறுப்பினருமாவீர்.

(P <—> Q)

என அமையும். இன்று இதனை இலகுபடுத்துவதற்காகவே 'ஆயின் ஆயினே' என்ற சொல்லை இணைக்கும் சொல்லாகப் பயன்படுத்துகின்றனர். சிலர்,

'மாலா ஆலயம் சென்றால் மட்டுமே பாலனும் ஆலயம் செல்வான். என்ற இடத்திலும் வலுச் சமன் மாறிலியைப் பயன்படுத்தலாம் என்பர். ஆனால் வலிதான நிபந்தனையை மெல் நிபந்தனையிலிருந்து வேறுபடுத்திக் காட்டவே, தமிழில் நீண்டகாலமாகப் பயன்படுத்திவந்தனர்.

உதாரணமாக

மாலா ஆலயம் சென்றால் பாலனும் ஆலயம் செல்வான்.

(P —→ Q)

மாலா ஆலயம் சென்றால் மட்டுமே பாலனும் ஆலயம் செல்வான்.

(P ←— Q) என இதனால் ஆயின் ஆயினே என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துவதே இங்கு ஒருமைப்பாட்டை ஏற்படுத்தும்.

ஒரு நீண்டவாத அமைவில் குறிப்பிட்ட எடுப்பில் இடம்பெறும் பெயர்ச் சொல்லிற்காக அவன், அவள், அது, இது முதலிய சுட்டுப் பெயர்களை இட்டு எழுதும்போதும் இவ்வாறு பொருளொத்த நடைபேதம் ஏற்படலாம்.

உதாரணமாக,

மாலா நூல் நிலையம் செல்வாள் ஆயின் பாலன் ஆலயம் செல்வான். அவள் நூல்நிலையம் செல்லவில்லை ஆகவே அவனும் ஆலயம் செல்லவில்லை எனவும்,

பொருட்கள் விலையுயர்ந்தன எனின் பொருட்கள் ஏற்றுமதி செய்யப்படும். அவை விலையுயர்ந்தன அல்ல எனவும் அமைந்து வரலாம். இதேபோன்று பொருளொத்த ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பதங்களும் ஒரே வாதத்தில் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

உதாரணமாக,

பூக்கள் அழகானவையாயின் வண்டுகளுக்கு மகிழ்ச்சி வண்டுகளுக்கு மகிழ்ச்சியில்லை. ஆகவே மலர்கள் அழகானவை அல்ல.

குறியீட்டுவாதங்களைத் தமிழிற்குப் பெயர்க்கும்போது ஒரே பொருளைத் தரக்கூடிய பல எடுப்புவடிவங்களிருப்பதைக் காணலாம். இருவர் ஒரு குறியீட்டிலமைந்த கூட்டெடுப்பைத் தமிழிற்குப் பெயர்க்கும் போது ஒரே பொருளைத் தரக்கூடிய நடையால் மட்டும் வேறுபட்ட இரண்டு வாக்கியங்களைத் தரலாம். இவ்வகையில் பொருளொத்த வாக்கியங்கள்பற்றிப் பயில்வோர் கருத்திலெடுத்தல் நன்று.

உதாரணமாக,

— P என்பதை

X புத்திசாலி என்பது உண்மையில்லை,
X புத்திசாலி என்பது பொய்,
X புத்திசாலி அல்ல,
X புத்திசாலி ஆகான்,
X புத்தியற்றவன்,

எனவும் எழுதப்படலாம். இங்கு என்பது பொய், என்பது உண்மையில்லை என்பவற்றின் பொருள் சாதாரணமாய் அல்ல என்பதாலோ, இல்லை, ஆகான், அற்றவன் என்பதாலோ எடுத்துரைக்கப்படுகின்றது.

இவ்வாறே — — P என்பதை

X புத்திசாலி என்பது பொய் என்பது உண்மையல்ல, என்பதற்குப் பதிலாக X புத்தியற்றவன் என்பது பொய் எனவும் எழுதப்படலாம்.

உதாரணமாக,

X புத்திசாலி ஆயின் X விவேகமுடையவன் என்பதை X புத்திசாலி என எடுத்துக்கொண்டால் X விவேகமுடையவன் ஆவான் எனவும் எழுதப்படலாம். இதேபோல் இவ் எடுப்புக்களுக்குச் சமமான பொருள் உள்ள எடுப்புக்களாகப் பின்வருவனவும் கொள்ளப்படும்.

X புத்திசாலி எனின்மட்டுமே X விவேகமுடையவன்.
X புத்திசாலி எனின் மாத்திரமே X விவேகமுடையவன்.
X புத்திசாலி ஆயினே X விவேகமுடையவன்.

இவை வலிதான நிபந்தனைக்குரியது.

இவ்வாறு உறழ்வு, இணைப்பு மாறிலிகள் பயன்படுமிடங்களிலும் பொருளொத்த வெவ்வேறு சொற்றொடர்கள் இடம்பெறலாம். அல்லது என்ற சொல்லுக்குப் பதிலாக, இந்தால் ஒழிய, அன்றில் என்ற சொற்களும் அத்துடன் என்ற இணைப்புச் சொல்லுககுப் பதில். ஆனால், ஆனாலும் என்ற சொற்களும் அமைந்து வந்து பொருளொத்த எடுப்பு வடிவங்களைத் தரலாம்.

இவ்வாறு தமிழ் மொழியின் பிரயோகத்தில் பொருளொத்த வாக்கிய வடிவங்களைப் பயில்வோர் தெளிவாக இனங்கண்டுகொள்தல் அவசியம்.

3.1. வாதங்களின் வாய்ப்பினைத் துணிதல்

குறியீட்டு வடிவில் அமையும் வாதங்களின் வாய்ப்பினைத் துணியும் அளவை முறைபற்றி இங்கு நோக்குவோம். குறியீட்டிலமைந்த வலிதான, முரண்வலிதான, வலிதற்ற வாதங்களை இனங்கண்டு கொள்வதற்குப் பல அளவை முறைகள் கையாளப்படுகின்றன. இவற்றுள் உண்மை அட்டவணை முறையும் ஒன்றாகும். அளவை எடுப்புக்கள் ஒன்றில் உண்மை அல்லது பொய் என அமைவனவாகும். குறியீட்டிலமையும் எடுப்பு மாறிகளுக்கும் இது பொருந்தும். எனவே குறியீட்டு மாறிகளுக்குரிய உண்மை பொய்ப் பெறுமானத்தைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

உதாரணமாக,

P
T
F

இது தனிமாறிக்குரிய பெறுமான அட்டவணை.

(P	Q)
T	T
T	F
F	T
F	F

கூட்டு எடுப்புக்குரிய பெறுமான அட்டவணை,

இங்கு, X புத்திசாலி ஆவான், என்ற அளவை எடுப்பிற்கு குறியீட்டு வடிவ மாறியாகப் P என்ற வடிவத்தை வழங்கினோம். இவ் எடுப்பு உண்மையாகவும் அமையலாம் பொய்யாகவும் அமையலாம் என்பதற்காக உண்மை (True) பொய் (Fales) என வழங்குகிறோம். விதிமாறிக்கு T என வழங்கினால் மறுப்பு மாறிக்கு F வழங்கலாம். இதற்குப் பதிலாக I, O எனவும் வழங்கலாம்.

உதாரணமாக,

P	— P
T	F
F எனின்	T ஆகும்.

மாறிகளின் பெறுமானம் உண்மைச் சார்பின் அடிப்படையில் அமைகின்றது. கூட்டு எடுப்பில் இடம்பெறும் மாறிலிகளின் பெறுமானம் அக்கூட்டு எடுப்புக்களில் உள்ள மாறிலிகளுக்குரிய பெறுமானத்தால் நிர்ணயிக்கப்படும். இதனையே மாறிலிகளின் உண்மைச்சார்பு என்பர். உண்மை அட்டவணை முறையில் இப் பெறுமானத்தைக் கொண்டே வாதங்களின் தரம் நிச்சயிக்கப்படுகின்றன.

3.2. மாறிலிகளின் பெறுமானம்

இணைப்பு மாறிலி (P∧Q) X புத்திசாலி அத்துடன் X விவேகமுடையவன்

T T T *1/2*
T F F *3*
F F T *4*
F F F

இங்கு *1*ஆம் சந்தர்ப்பம் உண்மையாகவும் 2ஆம், 3ஆம், 4ஆம் சந்தர்ப்பங்கள் பொய் எனவும் அமைகின்றன.

உட்கிடை மாறிலி (P ⟶ Q)

T T T *1*
T F F *3*
F T T *4/2*ஆம் சந்தர்ப்பம் பொய்.
F T F

வலிதான உட்கிடை
மாறிலி P ⟵ Q

T T T *1*
T T F *2*
F F T $\frac{4}{3}$ ஆம் சந்தர்ப்பம் பொய்.
F T F

உறழ்வு மாறிலி P V Q

T T T
T T F *1*
F T T *2*
F F F $\frac{3}{4}$ஆம் சந்தர்ப்பம் பொய்.

வல் உறழ்வு

மாறிலி	P	$\overline{\vee}$	Q	
	T	F	T	2
	T	T	F	$\frac{3}{1}$
	F	T	T	4ஆம் சந்தர்ப்பங்கள் பொம்
	F	F	F	

இருபால் நிபந்தனை

மாறிலி	P	$\longleftrightarrow$	Q	
	T	T	T	
	T	F	F	
	F	F	T	$\frac{1}{4}$
	F	T	F	$\frac{2}{3}$ ஆம் சந்தர்ப்பங்கள் பொய்.

3 . 3. வலிதான மாறிலிகள்பற்றி

எடுப்புக்களின் உண்மைச் சார்பு அடிப்படையில் இப் பெறுமானங்கள் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு மெல் நிபந்தனையில் 2ஆம் சந்தர்ப்பம் பொய்யாகவும், வலிதான நிபந்தனையில் 3ஆம் சந்தர்ப்பம் பொய்யாகவும் அமைகின்றது. வலிதான நிபந்தனையை வசதி கருதி $(Q \longrightarrow P)$ என்றும் அமைப்பர். இவ்வாறு அமையும்போது கிடைக்கும் உண்மைப் பெறுமானமும் $(P \longleftarrow Q)$ க்குரிய உண்மைப் பெறுமானமும் ஒன்றேயாம். உதாரணமாக,

P	$\longleftarrow$	Q	
T	T	T	1
T	T	F	2
F	F	T	4
F	T	F	3

Q	$\longrightarrow$	P	
T	T	T	1
F	T	T	2
T	F	F	4
F	T	F	3

உறழ்வு மாறிலியில் மெல் உறழ்வுக்கும் வல்உறழ்வுக்கும் இடையிலான பெறுமானத்தை நோக்கின் மெல் உறழ்வில் 4ஆம் சந்தர்ப்பம் பொய்யாகவும் வல் உறழ்வில் 1ஆம் 4ஆம் சந்தர்ப்பங்கள் பொய்யாகவும் அமைகின்றன. நிச்சயம் ஏதாவது ஒரு சந்தர்ப்பமே நிகழக்கூடியது என்ற வலிதான உறழ்வுக்கு உரிய வகையில் அதன் பெறுமானம் அமைவதைக் காணலாம்.

3.4. உண்மை அட்டவணை நேர்முறை

ஒரு குறியீட்டுவாதத்தில் நேரடியாகவே உண்மை அட்டவணையைப் பிரயோகிப்பதன்மூலம் அதன் வாய்ப்பினை ஆராயலாம். இதனையே உண்மை அட்டவணை நேர்முறை நிறுவல் என்பர். ஒரு வாதத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கூட்டு எடுப்புக்களுக்குமுரிய மாறிலிகளின் பெறுமானத்தைக் கணித்து அவற்றை இணைப்பதன் மூலம் வாதத்தின் பெறுமானத்தைத் துணியலாம். ஒரு குறியீட்டுவாதத்தின் முடிவிடம் ஆகவே என்ற குறியீட்டைப் பெறுமிடமாகும். ஒழுங்கான ஒரு குறியீட்டுவாத அமைவில் பிரதான தர்க்கமாறியைக்கொண்டமையுமிடமே அதன் முடிவிடமாகும். இதனை வாதத்தின் முடிச்சு என்றும் அழைப்பர். இவ்விடத்தில் வைத்தே வாதத்தின் வலிமை, முரண் வலிமை, வலிமையின்மை என்பன தீர்மானிக்கப்படும். ஒரு வாதத்தில் இரண்டு மாறிகள் மட்டும் இடம்பெறுமாயின் நான்கு சந்தர்ப்பங்கள் உள்ள அட்டவணையையும், மூன்று மாறிகள் இடம்பெறுமாயின் எட்டு சந்தர்ப்பங்கள் கொண்ட அட்டவணையையும், நான்கு மாறிகள் இடம் பெறுமாயின் பதினாறு சந்தர்ப்பங்கள் கொண்ட அட்டவணையையும் பிரயோகிப்பர். இவ்வாறு வாதமொன்றில் அதிகரிக்கும் மாறிகளுக்கு ஏற்ப அட்டவணை இரட்டிப்பு எண்ணிக்கையில் அதிகரிக்கும்.

உதாரணமாக,

P	Q	$[(P \wedge Q) \wedge Q] \rightarrow P$			
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	F

P	Q	R	$[(P \wedge Q) \wedge R] \rightarrow (P \wedge R)$				
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F

என அமையும்

வாதங்களின் வாய்ப்பினைத் துணிவோம்

$[(P \wedge Q) \wedge P] \longrightarrow Q$

P	∧	Q	∧	P	→	Q
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F
	1		3	2	5	4

இங்கு முடிவிடத்தில் எல்லாம் உண்மையாக அமைவதால் வாதம் வலிதானது ஆகும்.

$[(P \longrightarrow Q \wedge (P \wedge -Q)]$

T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	T
	1		3		2	

இங்கு முடிவிடத்தில் எல்லாம் பொய் என அமைவதால் வாதம் முரண் வலிதானது ஆகும்.

$[(P \wedge Q) \wedge P] \longrightarrow -P$

P	∧	Q	∧	P	→	−P
T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	T	T
	1		3	2	5	4

இங்கு முடிவிடத்தில் உண்மையும் பொய்யும் கலந்து வருவதால் வாதம் வலிதற்றது ஆகும்.

இங்கு வாதத்தின் அமைவைப் பொறுத்தே படிமுறையாகக் கூட்டு எடுப்புக்களை இணைத்துச் செல்லவேண்டும். இது பயிற்சியைப் பொறுத்து அமைவதாகும். இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் கொண்டமையும் பெரிய வாதங்களில் இணைக்கும் இடங்களைத் தெளிவாகக் காட்டல் வேண்டும்.

உதாரணமாக,

$$[(P \wedge Q) \wedge (Q \longrightarrow P)] \longrightarrow (P \wedge Q)$$

$$=$$

$$[(P \wedge Q) \wedge ((Q \longrightarrow R) \longrightarrow (Q \wedge R))] \longrightarrow (P \wedge Q)$$

$$=$$

$$P \wedge [(P \longrightarrow Q) \wedge ((P \wedge Q) \wedge (P \wedge Q))] \longrightarrow -(P \wedge Q)$$

இங்கு உண்மை அட்டவணை வரையாமல் கூட்டு எடுப்புக்கள் எவ்வாறு இணைத்தல் என்பதை ஒழுங்குபடுத்திக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$[(P \wedge Q) \wedge ((R \longrightarrow -Q) \longrightarrow (Q \wedge P))] \longrightarrow -(P \wedge Q)$$

(P ∧ Q)	∧	(R → −Q)	→	(Q ∧ P)	→	−	(P ∧ Q)
T T T	T	T E F	T	T T T	F	F	T T T
T T T	T	F T F	T	T T T	F	F	T T T
T F F	F	T T T	F	F F T	T	T	T F F
T F F	F	F F T	T	F F T	T	T	T F F
F F T	F	T F F	T	T F F	T	T	F E T
F F T	F	F T F	F	T F F	T	T	F F T
F F F	F	T T T	E	F F F	T	T	F F F
F F F	F	F T T	F	F F F	T	T	F F F
1		2	4	3		7	6

3 . 5. உண்மை அட்டவணை நேரில் முறை

குறியீட்டுவாதங்களின் வாய்ப்பினைத் துணிவதற்கு நேர்முறையைக் கையாள்வதுபோல் மறைமுக முறையையும் கையாளலாம். உண்மை அட்டவணையின் அடிப்படையில்தான் இம்முறையும் பிரயோகிக்கப் படுகின்றது. நீண்ட குறியீட்டுவாதங்களின் வலிமையை ஆராய இம் முறை உதவுகின்றது. நேர்முறைமூலம் மூன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் இடம்பெறும் வாதங்களை ஆராய்வது கால, இடப் பிரச்சினைகளை ஏற் படுத்தும். அதனால் இவ்வாறு அமையும் வாதங்களை நேரில் முறை யால் ஆராய்வர். வாதத்தின் முடிவிடமாகிய முக்கிய தர்க்க மாறிலி யைப் பொய் என மறுத்து எடுப்பதன் மூலம் வாதத்தின் நிலையை ஆராய்வதே நேரில் முறையாகும். வாதத்தைப் பொய் என மறுத்து எடுத்துக்கொண்டு அதற்கேற்ப பின்னோக்கி எடுப்புக்களுக்குரிய பெறு மானத்தை அறிந்த உரிய பெறுமானத்தைச் சரியாகப் பெற்றுள்ளதா என வாய்ப்புப் பார்ப்பர். மாறிகளுக்குரிய பெறுமானம் ஏதாவது ஓரிடத் தில் ஒன்றுக்கொன்று முரண்படுமாயின் வாதம் வாய்ப்பானதாகும். எந்தவிடத்திலும் மாறி முரண்படாதபோது வாதம் வாய்ப்பற்றதாகும். ஒரு வாதத்தைப் பொய் என மறுத்து எடுத்துக்கொண்டு வலிமையைத் துணியும்போது முடிபும் பொய்க்குமாயின் உண்மையில் வாதம் வலி தானதே.

உதாரணமாக :

$[(P \wedge Q) \wedge P] \rightarrow Q$
1
F பொய் என மறுத்து எடுத்தல்

$[(P \wedge Q) \wedge P] \rightarrow Q$
1
T F F பொய்யாக இருப்பதற்குரிய நிலையை காணுதல்.

$[(P \wedge Q) \wedge P] \rightarrow Q$
1
T TT FF அதன் அடிப்படையின் ஏனைய மாறிலி களுக்குரிய பெறுமானத்தை இடல்.

$[(P \wedge Q) \wedge P] \longrightarrow Q$
1
TTT TT F F

இங்கு Q உரிய பெறுமானம் முரண்படுகிறது. (P ∧ Q) வில் T வருவதற்கு முடிவில் Q பெற்ற பெறுமானத்தை இடமுடியாது. ஆகவே Q மாறி முரண்படுவதால் வாதம் வலிதானதாகும்.

$$[(P \wedge Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \wedge (R \longrightarrow S)] \underset{F}{\overset{}{\underset{1}{\longrightarrow}}} (S \longrightarrow P)$$

$$[(P \wedge Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \wedge (R \underset{T}{\underset{1}{\longrightarrow}} S)] \underset{F}{\longrightarrow} (S \underset{F}{\underset{1}{\longrightarrow}} P)$$

$$[(P \wedge Q) \wedge (Q \longrightarrow R) \wedge (R \longrightarrow S)] \longrightarrow (S \longrightarrow P)$$

1 1 1 1 1 1 1

TTT TTT TTT TT F T F F

P மாறி முரண்படுகின்றது. முடிபில் F பெற்றதைப்போல் முதற் கூட்டு எடுப்பில் P, Fஐப் பெற முடியாது. அதனால் வாதம் முரண் படுவதால் வலிதானது.

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R)] \longrightarrow (R \longrightarrow Q)$$

F T F T F T T 1 F T F F

இங்கு 1ஆம் கூட்டு எடுப்பில் QT எனக் கொண்டு இறுதியில் F என உளது. அதனால் முரண்படுகின்றது எனக் கொள்ள முடியாது. ஏன் எனில் முடிபில் Q, Fஐப் பெற்றதுபோல் 1ஆம் கூட்டு எடுப்பில் Q, Fஐப் பெற்றதும் உண்மை என அமையலாம். அதனால் இங்கு மாறி கள் எதுவும் முரண்படாததால் வாதம் வலிதற்றது. சில வாதங்களின் முடிபில் பொய்ப் பெறுமானம் மூன்று சந்தர்ப்பங்களைக்கொண்ட தாகவும் அமையும். அத்தருணம் மூன்றும் பிரயோகிக்கப்பட்டு அவதா னிக்கப்படவேண்டும். ஒரு சந்தர்ப்பததில் முரண்படுவதாகவும் மற்றோர் சந்தர்ப்பத்தில் முரண்படாததாகவும் அமையலாம். அப்போது வாதம் வலிதற்றதாகிவிடும். எல்லாச் சந்தர்ப்பத்திலும் முரண்படுவதாக வாதம் அமைந்தால்தான் அது வலிதான வாதமாகும்.

உதாரணமாக,

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R)] \longrightarrow (Q \wedge P)$$

T T T T T T T 1 F F F T

முரண்படுவதால் வாதம் வலிதானது என எடுக்கமுடியாது. முடிபில் உள்ள கூட்டு எடுப்பு பொய்யாக அமைய மேலும் இரு சந்தர்ப்பங்கள் உள்ளன.

$$[\,(P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow R)\,] \longrightarrow (Q \wedge P)$$

F T F T F T T   F F F F

இங்கு அதேவாதம் முரண்படாது அமைகின்றது. ஆகவே வாதத்தின் வலிமையை நிச்சயிக்கும்போது உண்மை, பொய்யாக அமையக்கூடிய சந்தர்ப்பங்கள் யாவும் கருத்திற் கொள்ளப்பட வேண்டும். முதற் சந்தர்ப்பத்திலேயே வாதம் முரண்படாது அமைந்துவிட்டால் மீண்டும் ஏனைய சந்தர்ப்பங்கள் நோக்கப்படத் தேவையில்லை. வாதம் உண்மை பொய் எனக் கலந்து வந்தாலும் வலிதற்றதே. முரண்படும் போதே அஃது எல்லாச் சந்தர்ப்பத்திலும் முரண்படுகிறதா என அறிதல் வேண்டும். ஒன்றுக்கு ஒன்று முரண்படும் மாறியைக் குறித்துக் காட்டுதல் அவசியம்.

3.6. உண்மைச் சந்தர்ப்ப பிரயோக முறை

இவ்வாறு வாதங்களின் வாய்ப்பை ஆராய்வதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் நேரில் முறையில் மற்றொரு வழியும் உளது. இம்முறை மூலம் ஆரம்பத்தில் மாதங்களின் வாய்ப்பை ஆராய்ந்தனர். இன்று இம்முறையின் முக்கியத்துவம் குறைந்துவிட்டது. ஒரு வாதத்தில் இடம் பெறும் ஆரம்பக் கூட்டு எடுப்பின் மாறிலிக்குரிய உண்மைச் சந்தர்ப்பங்களை வாதத்தில் உள்ள எல்லா மாறிக்கும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் வாதத்தின் வலிமையைத் துணியலாம்.

உதாரணமாக,

$$[\,(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow P)\,] \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

இங்கு முதலாவது கூட்டு எடுப்பிற்குரிய உண்மமச் சந்தர்ப்பம் ஒன்றாகும் T T எனும் முதலாம் சந்தர்ப்பம் மட்டுமே உளது. இதனை எல்லா மாறிக்கும் பிரயோகிப்பதன் மூலம் வாதத்தின் வலிமையை நேரடியாகத் துணியலாம்.

$$P \wedge Q \;[\,(P \wedge Q) \wedge (Q \longrightarrow P)\,] \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$$

T T T T T   T T T   T T T

T   T

= என

$P \longrightarrow Q \; [\, (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P) \,] \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$

T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	E	T	F

= வாதம் வலிது.

இங்கு இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் இடம்பெறும்போது உண்மை அட்டவணை ஒழுங்கில் மாறிகளுக்குரிய பெறுமானத்தை வழங்கலாம்.

3.7. நற் சூத்திரங்களின் சமனையும் முரண்மையையும் அறிதல்

குறியீட்டு வடிவில் பூரண தர்க்கவடிவமொடு அமைந்திருக்கும் வாதங்கள் நற்சூத்திரங்களாகும். இவற்றின் ஒன்றுக்கு ஒன்று சமனான சூத்திரங்களையும் ஒன்றுக்கு ஒன்று முரண்படும் சூத்திரங்களையும் உண்மை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இனங் கண்டுகொள்ளலாம்.

உதாரணமாக,

(i) $-(P \vee Q)$ (ii) $(-P \wedge -Q)$

(ii) $(P \vee Q)$ (iv) $(-P \longrightarrow Q)$

$-(P \vee Q)$		$(-P \wedge -Q)$	
F T T T	4/1	F F F	
F T T F	2	F F T	4/1 ஒன்றுக்கு
F F T T	3	T F F	2 ஒன்று சமன்.
T F F F		T T T	3

$(P \vee Q)$		$(-P \rightarrow Q)$	
T T T	1	F T T	1
T T F	2	F T F	2
F T T	3/4	T T T	3/4 ஒன்றுக்கொன்று சமன்.
F F F		T F F	

3.8. முரண்மையை அறிதல்

(i) $P \rightarrow Q)$ (ii) $-(-P \vee Q)$

(iii) $(P \wedge Q)$ (iv) $(-P \wedge -Q)$

$(P \rightarrow Q)$		$-(-P \vee Q)$		
T T T	1	F	F T T	2
T F F	3	T	F F F	1
F T T	4/2	F	T T T	3 ஒன்றுக்கொன்று முரண்.
F T F		F	T T F	4

$(P \wedge Q)$		$(-P \vee -Q)$	
T T T	*1*	F F F	*2*
T F F	*2*	F T T	*3*
F F T	*3*	T T F	*4/1* ஒன்றுக்கொன்று முரண்
F F F	*4*	T T T	

3.9. உண்மை அட்டவணையை வரையாமல் குறியீட்டு வாதத்தின் வாய்ப்பைத் துணிதல்

ஒரு குறியீட்டு வாதத்தின் வலிமையை ஆராய்வதற்கு முழுமையாக அவ்வாதத்தில் உண்மை அட்டவணையைப் பிரயோகிக்காமல் ஒவ்வொரு கூட்டு எடுப்பாக ஆராயும் முறை இதுவாகும். இங்கு எடுப்பில் உள்ள மாறி ஒன்றிற்கோ அல்லது அனைத்திற்குமோ முன் கூட்டியே பெறுமானம் அளிக்கப்படும். அதை அடிப்படையாக வைத்துக்கொண்டே வாதத்தின் வலிமையைத் துணிவர். வாதத்தின் வலிமையைத் துணியும்போது சிக்கன வழிகளைப் பின்பற்றுதலே நன்று.

உதாரணமாக,

Pயை உண்மை என எடுத்துக்கொண்டு பின்வரும் வாதத்தின் வலிமையை நிச்சயிக்குக.

$$[(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow P)] \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

இங்கு P உண்மை எனின் 1ஆம் கூட்டு எடுப்பின் நெறுமதி எப்போதும் பொய்யாகும். ஏனெனில் Q உண்மையாகவும் அமையலாம். பொய் எனவும் அமையலாம் என்பதாலாகும்.

அடுத்த கூட்டு எடுப்பில் P எப்போதும் உண்மையாகையால் அதன் பெறுமானம் உண்மையாகும். முக்கூற்று உண்மையாக இருந்தாலும் பொய்யாக இருந்தாலும் உட்கிடை உண்மைப் பெறுமானத்தையே பெறும்.

மூன்றுவதாக இரண்டு கூட்டு எடுப்பின் பெறுமானத்தையும் இணைக்கும்போது F T எனப் பெறுமானம் இருப்பதால் நிச்சயம் இணைப்பின் பெறுமானம் பொய் ஆகும். முடிபில் உள்ள கூட்டு எடுப்பில் P உண்மை ஆகையால் அதன் பெறுமானம் பொய்யாகும். ஏனெனில் Q T ஆகவும் F ஆகவுமிருக்கலாம் என்பதால்.

ஆதலால் முடிபிடத்திற்கு வரும்போது இருபக்கமும் F, F என வருவதால் உட்கிடையின் பெறுமானம் T ஆகும். ஆகவே வாதம் வாய்ப்பானது.

இவ்வாறு வாதங்களின் வாய்ப்பை அதில் அட்டவணையைப் பிர யோகிக்காமல் துணியலாம். ஒவ்வொரு கூட்டு எடுப்பையும் படிப்படி யாக விளக்குதல் வலிமையை எளிதாகக் கண்டுகொள்வதற்கு உதவும். எனினும் இங்கு சிக்கன வழியைப் பின்பற்றுதலே, சிறப்பானது. மாறிலி களின் பெறுமானத்தை அறிந்து கொள்வதன்மூலம் சிக்கனமாக விடை காணும் பயிற்சியை விருத்திசெய்யவேண்டும்.

இங்கு வலிதானதோ, வலிதற்றதோ எனக் கேட்கும்போது ஒரு மாறிக்குத் தரப்படும் பெறுமானத்தைக் கொண்டும் வாய்ப்பினை நிச்ச யிக்கலாம். உதாரணமாக (P ⟶ Q) என்ற இடத்தில் P T எனின், Qக்குத் தரப்படாதவிடத்தில் நிச்சயம் பொய்யானதே. ஆனால் வலிதா னதோ, வலிதற்றதோ, நிச்சயிக்க முடியாததோ என வினவும்போது, Pக்கு மட்டும் பெறுமானம் தரப்பட்டதால், நிச்சயிக்கமுடியாது.

உதாரணமாக

P T எனக்கொண்டால்

$[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \vee P)] \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$ன் பெறுமா னத்தை நிச்சயிக்கும்போது $P \longrightarrow Q$ன் பெறுமானத்தையோ, $(Q \longrightarrow R)$ன் பெறுமானத்தையோ நிச்சயிக்கமுடியாது. $(R \vee P)$ ன் பெறுமானத்தை நிச்சயிக்கலாமன்றோ. உறழ்வுமாறிலிக்கு ஒரு உண்மைப் பெறுமானமே போதுமானது. இங்கு வலிதானதோ, வலிதற்றதோ என மட்டும் வினவும்போது பிற்கூற்றும், முற்பகுதியும் பொய்யாக அமைவதால் வாதம் வலிதானது எனத் தீர்மானிக்கலாம்.

4.1. பெறுகை முறை

குறியீட்டு வாதத்தின் முடிபை அதன் எடுகூற்றுக்களின் ஊடாகப் பெறுவதன்மூலம் அவ்வாதம் வாய்ப்பானது எனத் துணியும்முறை இதுவாகும். இதனைப் பெறுகைமுறை என அழைப்பர். பெறுகைஎன்பது முடிபு சரியாகப் பெறப்பட்டுள்ளது என எடுகூற்றின் வழியாக முடிபை ஏற்க எம்மை அழைத்துச் செல்லும்முறை எனப் பொருள்கொள்ளலாம். அனுமான விதிகளைப் பயன்படுத்தி வாதத்தின் எடுகூற்றுக்களிலிருந்து படிப்படியாக முடிபுக்குச் செல்கின்றோம். இங்கு முடிபுக்கூற்று நாம் ஏற்கனவே ஏற்றுக்கொண்ட ஏதாவதொரு நியாயத்தின்படி பெறப்பட் டுள்ளதா எனப் பார்க்கிறோம். இதற்குச் சில அனுமான விதிகளை நாம் பயன்படுத்துகின்றோம். இவ்வனுமான விதிகள் வெளிப்படையான உண்மைகளாகும். இவ்வனுமான விதிகள் பற்றிய அறிவும் பயிற்சியும் வாதங்களை நிறுவுவோனுக்கு அவசியமாகும்.

பெறுகைமுறைமூலம் ஆராயப்படும் உய்த்தறி முறையை இயற்கை உய்த்தறிமுறை யென்பர். இயற்கை உய்த்தறிமூலம் நிறுவப்படும் வாதங்களே தேற்றங்களாகும். அனுமான விதிகளால் நிறுவக்கூடிய வாதங்கள் யாவும் தேற்றங்களே. ஒரு தேற்றம் ஒரு அனுமான விதி யால் நிறுவப்படலாம்; பல அனுமான விதிகளாலும் நிறுவப்படலாம். அவ்வாறே ஒரு பெறுகைமுறையாலோ, பல பெறுகை முறைகளாலோ நிறுவலாம்.

4.2. அனுமான விதிகள்

அனுமானவிதிகள் பல உள. தேற்றங்களை நிறுவும்போது நிறுவு வோன் பெறுகைவழியில் தர்க்கரீதியான இசைவுடைய புதிய விதிகளை யும் உருவாக்கமுடியும். பொதுவாகப் பின்வரும் விதிகள் முக்கியத்து வம் பெறுகின்றன.

மீட்டல் விதி

$$\frac{P}{P}$$

P என்பதிலிருந்து மீட்டலாக P என்பதைப் பெறலாம்.

P என ஒரு எடுப்பை மட்டும் கொண்டமைந்த வாதத்தில் அதன் முடி பாக P யையே மீட்டுப் பெறலாம்.

இரட்டை மறுப்பு விதி

(i) $\dfrac{P}{--P}$ P என்பதிலிருந்து −−P என்பதைப் பெறலாம். இதேபோல்,

(ii) $\dfrac{--P}{P}$ −−P என்பதிலிருந்து P என்பதைப் பெறலாம்.

P என் ஒரு எடுப்பைமட்டும் கொண்டமைந்த வாதத்திலிருந்து முடி பாக அதனை மறுத்து மறுத்துப் பெறலாம். இவ்வாறு மறுத்து மறுத் தமையும் ஒரு எடுப்பைக் கொண்டமைந்த வாதத்திலிருந்து அதன் முடிபாகத் தனிவிதிமாறியைப் பெறலாம்.

விதித்து விதித்தல் விதி

$$\frac{P \longrightarrow Q \qquad P}{\therefore Q}$$

P → Q என்ற கூட்டு எடுப்பையும் P என்ற தனிவிதி எடுப்பையும் கொண்டு ∴ Q என்பதைப் பெறலாம்.

இதனை உடன்பட்டு உடன்படல் விதி எனவும் அழைப்பர். ஒரு நிபந்தனை எடுப்பின் முற்கூற்று மீண்டும் எடுகூற்றாய்த் தரப்படின்

அதிலிருந்து முடிபாக பிற்கூற்றைப் பெறலாம். இங்கு கலப்பு நிபந்தனை நியாயத் தொடையின் முதலாம் விதியைக் கருத்தில் கொள்ளலாம்.

மறுத்து மறுத்தல் விதி

$$\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ -\ Q \\ \hline \therefore\ -\ P \end{array}$$

$P \longrightarrow Q$ என்ற கூட்டு எடுப்பையும்,
$-\ Q$ என்ற தனிமறை எடுப்பையும் கொண்டு
$\therefore\ -\ P$ என்பதைப் பெறலாம்.

ஒரு நிபந்தனை எடுப்பும் அதன் பிற்கூற்று மீண்டும் மறுத்தமைந்து இருக்குமாயின் அதிலிருந்து முன் எடுப்பின் மறுப்பைப் பெறலாம். இங்கு கலப்பு நிபந்தனை நியாயத் தொடையின் இரண்டாம் விதியைக் கருத்தில் கொள்ளலாம்.

உடன்பட்டு மறுத்தல் விதி

$P \vee Q$ என்ற கூட்டு எடுப்பையும்
P என்ற தனிவிதி எடுப்பையும் கொண்டு
$\therefore -Q$ பெறலாம்.

ஒரு உறழ்வு எடுப்பும் அதன் முதல் மாற்றும் தரப்படின் அதிலிருந்து முடிபாக அடுத்த மாற்றினை மறுப்பாகப் பெறலாம். உறழ்வு எடுப்புக்களில் மாற்றுக்கள் உடன்படுமாயின் முடிபு மறுப்பதாகவும், மாற்றுக்கள் மறுப்பதாக அமைந்தால் முடிபு உடன்படுவதாகவும் அமையும். இங்கு கலப்பு உறழ்வு நியாயத் தொடைக்குரிய விதிகளைக் கருத்தில் கொள்க.

மறுத்து உடன்படல் விதி

$P \vee Q$ என்ற கூட்டு எடுப்பும்
$-Q$ என்ற தனிமறை எடுப்பையும் கொண்டு
$\therefore Q$ பெறலாம்.

இருபால் நிபந்தனை விதி

$P \longleftrightarrow Q$ என்ற கூட்டு எடுப்பிலிருந்து இரு வடிவங்களைப் பெறலாம்:

(i) $\dfrac{P \longleftrightarrow Q}{P \longrightarrow Q}$ எனவும்

(ii) $\dfrac{P \longleftrightarrow Q}{Q \longrightarrow P}$ எனவும் பெறலாம்.

நிபந்தனை நிபந்தனை இருபால் நிபந்தனை விதி

இங்கு $P \longrightarrow Q$ என்ற கூட்டு எடுப்பையும் $Q \longrightarrow P$ என்ற கூட்டு எடுப்பையும் கொண்டு $P \longleftrightarrow Q$ என்ற கூட்டு எடுப்பை முடிபாகப் பெறலாம்.

உதாரணமாக,

$$\frac{\begin{array}{c} P \longrightarrow Q \\ Q \longrightarrow P \end{array}}{P \longleftrightarrow Q}$$ எனப் பெறலாம்.

இணைப்பு விதி

P — எனும் தனிவிதி எடுப்பும்
Q — எனும் தனிவிதி எடுப்பும் தரப்படின்
$P \wedge Q$ எனப் பெறலாம்.

இங்கு இரண்டும் இணைக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு இணைத்து அமையும் ஒரு இணைப்பெடுப்பிலிருந்து தனி எடுப்புக்களைப் பெறுதல் எளிமையாக்கல் என்பர்.

உதாரணமாக,

(i) $\dfrac{P \wedge Q}{P}$ யையும்

(ii) $\dfrac{P \wedge Q}{Q}$ வையும் எளிமையாக்கிப் பெறலாம்.

கூட்டல் விதி

(i) $\dfrac{P}{P \vee Q}$ எனும் தனிவிதி எடுப்பொன்றை எனப் பெறலாம். அவ்வாறே

(ii) $\dfrac{Q}{P \vee Q}$ எனவும் பெறலாம்.

அடிப்படை இருதலைக்கோள் விதி

$(P \longrightarrow Q) \quad \wedge \quad (R \longrightarrow S)$ — எனத் தரப்பட்டு

$$\frac{P \quad \vee \quad R}{Q \quad \vee \quad S}$$

— எனும் கூட்டு எடுப்பும் தரப் [பட்டால்
— பெறலாம்.

இக் கூட்டு நிபந்தனை எடுப்புக்கள் தரப்படுவதோடு கூட்டு எடுப் புக்களில் உள்ள முக்கூற்றுக்களைக் கொண்ட ஒரு உறழ்வு எடுப்பும் தரப்படும்போது அவை இரண்டிலிருந்து பிற்கூற்றுக்களைக் கொண்ட ஒரு உறழ்வு எடுப்பை முடிவாகப் பெறலாம்.

நிபந்தனைப்பேறு விதி

$$\frac{P \longrightarrow Q}{P \longrightarrow (P \wedge Q)}$$

எனத் தரப்பட்ட ஒருகூட்டு எடுப்பிலிருந்து என்பதை ஊகமாகப் பெறலாம்.

இது முக்கூற்றிலிருந்து ஒரு மேலதிக ஊகமாகப் பெறப்படலாம் என்பதைக் குறிப்பிடுகின்றது.

முக்கூற்று நிபந்தனை விதி

$$\frac{\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ Q \longrightarrow R \end{array}}{P \longrightarrow R}$$

என்பதும் என்பதும் தரப்படின் இரண்டையும் இணைத்து என்பதைப் பெறலாம்.

இவ்வனுமான விதிகளுடன், ஒன்றுக்கு ஒன்று சமனான தேற்றங்களும் உள்ளன. இவற்றையும் வாதங்களை நிறுவுவதற்குப் பயன்படுத்லாம்.

1. (i) $-(P \wedge Q)$க்கு $(-P \vee -Q)$ என்பது சமன்
   (ii) $-(P \vee Q)$க்கு $(-P \wedge -Q)$ என்பது சமன்
   இவை டிமோகன் தேற்றம். (டி. மோ. வி.)

2. (i) $P \vee (Q \wedge R)$க்கு $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ம்
   (ii) $P \wedge (Q \vee R)$க்கு $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ம்
   வியாத்திவிதியாகும்.

3. (i) $(P \vee Q)$ம் $(Q \vee P)$
   (ii) $(P \wedge Q)$ம் $(Q \wedge P)$ சமன் விதி

4. (i) $P \vee (Q \vee R)$ம் $(P \vee Q) \vee R$
   (ii) $P \wedge (Q \wedge R)$ம் $(P \wedge Q) \wedge R$ உறவு விதி

5. (i) $(P \longleftrightarrow Q)$ ம், $(P \longrightarrow Q$ ம் $(Q \longrightarrow P)$
   (ii) $(P \longleftrightarrow Q)$ ம், $(P \wedge Q) \vee (-P \wedge -Q)$
   பொருட்சமன் விதி

6. $(P \longrightarrow Q)$ ம், $(-Q \longrightarrow -P)$ ம்
   பரிமாற்ற விதி

7. $(P \longrightarrow Q)$, $(-P \vee Q)$
   பொருள் உட்கிடை விதி

8. $(P \wedge Q) \longrightarrow R$, $P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$
   பொருள் ஏற்று விதி

அனுமான விதிகள் குறிப்பிட்ட வரிகளுக்கான பிரயோகத் தன்மையையும், இத் தேற்றங்கள் இரண்டு வரிகளைச் சேர்த்து நிறுவுவதற்கான பிரயோகத் தன்மையையும் கொண்டுள்ளன. இவ்விரு நிபந்தனைகளின் அடிப்படையிலேயே இவை பிரயோகிக்கப்படுகின்றன.

4 . 3. தேற்றங்களை நிறுவுதல்

இவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தித் தேற்றங்களை நிறுவும்போது, எடு கூற்றுக்களை வரிசைப்படுத்துவதும் பெறுகை வழிகளைத் திருத்தமாகக் குறிப்பிடுவதும் முக்கியம். பெறுகை வழிகளைப் பார்த்தே தேற்றங்கள் பொருத்தமான விதிகளைப் பயன்படுத்திச் சரியாக நிறுவப்பட்டுள்ளதா என அறிந்துகொள்ளலாம். ஒவ்வொரு வரிக்குமுரிய விளக்கமாக இப் பெறுகை வழி அமையும்.

உதாரணமாக,

$[(P \rightarrow Q) . P] \therefore Q$

1.	Q	எனக்காட்டுக
2.	$P \rightarrow Q$	1ம் எடுகூற்று
3.	P	2ம் எடுகூற்று
4.	Q	2ம் 3ம் விதித்து விதித்துப் பெறப்பட்டது.

இவ்வாறு வாதம் நிறுவப்படும் இடதுபக்கமுள்ள பகுதிகள், எடு கூற்றுக்கள் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளதைக் குறிக்கும். வலதுபக்க முள்ளவை விளக்கங்களாகும். இதனையே பெறுகை வழிகள் என்பர். வாதம் நிறுவப்பட்டதும், எனக் காட்டுக என்ற விளக்கம் கீறப்படும். எடுகூற்று வரிகள் யாவும் ஒரு அடைப்புக்குறியால் அடக்கிக் காட்டப் படும்.

உதாரணமாக,

$[(P \longrightarrow Q) \ P] \therefore Q$

1.	Q	எனக் காட்டுக.
2.	$P -> Q$	1ம் எடுகூற்று
3.	P	2ம் எடுகூற்று
4.	Q	2ம், 3ம் விதி, விதி.

இவ்வாறு தேற்றங்களை நிறுவுவதற்கு மூன்று பெறுகை வழிகளைப் பயன்படுத்துவர். அவற்றை முறையே, நேர்ப் பெறுகை, நேரல் பெறுகை, நிபந்தனைப் பெறுகை என வழங்குவர். ஒரு குறியீட்டு வாதத்தை நன்கு அவதானிப்பதன் மூலம் அதனை நிறுவுவதற்கு ஏற்ற பெறுகையைத் தீர்மானிக்கலாம்.

4 . 4. நேர்ப் பெறுகை

ஒரு குறியீட்டு வாதத்தில் இடம்பெறும் எடுகூற்றுக்களை நேரடியாகவே எடுகோளாகக்கொண்டு, வாதத்தை நிறுவும்முறை இதுவாகும்.

உதாரணமாக,

$$\left[(P \longrightarrow Q) \cdot (Q \longrightarrow R) \cdot P \right] \therefore R$$

1.	R	எனக் காட்டுக.
2.	$P \longrightarrow Q$	1ம் எடுகூற்று
3.	$Q \longrightarrow R$	2ம் எடுகூற்று
4.	P	3ம் எடுகூற்று
5.	Q	2ம், 4ம் விதி, விதி.
6.	R	3ம், 5ம் விதி, விதி.

இங்கு நேர்ப்பெறுகையைக் கையாளும்போது குறிப்பிட்ட வாதத்தில் எடுகூற்றுக்களை நிறுவக்கூடிய தனிஎடுப்பு ஒன்று இடம்பெறவேண்டும். அதனை எடுகோளாகக்கொண்டே முடிபுக்கூற்றை அடைய முடியும். ஒரு எடுகூற்றைப் பயன்படுத்தி கூட்டு எடுப்புக்களை எத்தனைமுறையும் நிறுவலாம். ஆனால் நிறுவப்பட்ட ஒருகூட்டு எடுப்பு மீண்டும் நிறுவப்படலாகாது. தனி எடுப்புக்கள் இடம்பெறாதபோது எளிமையாக்கல், கூட்டல் விதிகள்மூலம் தனி எடுப்பைப் பெறக்கூடிய கூட்டு எடுப்புக்கள் உளவா என நோக்கவேண்டும்.

உதாரணமாக,

$$\left[(P \longrightarrow Q) \cdot (Q \longrightarrow R) \cdot (P \wedge Q) \right] \therefore R$$

1.	R	எனக் காட்டுக.
2.	$P \longrightarrow Q$	1ம் எடு கூ.
3.	$Q \longrightarrow R$	2ம் எடு கூ.
4.	$P \wedge Q$	3ம் எடு கூ.
5.	P	4. எளிமையாக்கிப் பெற
6.	Q	2ம் 5ம் விதி, விதி.
7.	R	3ம். 6ம் விதி, விதி.

4 . 5. நேரல் பெறுகை

வாதமொன்றின் முடிபினை மறுப்பதன் மூலம் தேற்றத்தை நிறுவிக்காட்டும் முறையாகும். முடிபுக்கூற்றை மறுத்து எடுப்பதன்மூலம் எடுகோள்களுக்கிடையே பொருத்தம் காணப்படவில்லை எனக் காட்ட முயல்கின்றோம். ஒரு பொருந்தா முடிபைப் பெறும் முறையே இதுவாகும். முடிபுக்கூற்றை மறுத்து எடுகோளாகக் கொள்வதன்மூலம் அதனைப் பயன்படுத்தி வாதத்தினை நிறுவவேண்டும். நிறுவும்போது பெறப்படும் எடுப்பு முரண்பாட்டைக் கொண்டதாக அமையும். ஒரு உடன்பாடான எடுப்பையும் அதன் மறுப்பையும் பெறவேண்டும்.

உதாரணமாக,

$$\left[\ (P \vee Q) . (R \longrightarrow -Q) . (-P \longrightarrow R)\ \right] \therefore P$$

1.	P	எனக் காட்டுக
2.	$-P$	நேரல் பெறுகை எடுகோள்
3.	$P \vee Q$	1ம் எடுகூற்று
4.	$R \longrightarrow -Q$	2ம் எடுகூற்று
5.	$-P \longrightarrow R$	3ம் எடுகூற்று
6.	Q	2ம், 3ம் மறு. உட.
7.	$-R$	4ம், 6ம், மறு. மறு.
8.	R	2ம், 5ம் வி. வி.

நேரல் பெறுகையைப் பல சந்தர்ப்பங்களில் பயன்படுத்தலாம். ஒரு வாதத்தின் முடிபுக்கூற்றுக்கும் எடுகூற்றுக்களுக்குமிடையில் தொடர்பெதுவும் இல்லாத அமைவுகளிலும் இப் பெறுகையைப் பயன்படுத்தியே நிறுவுதல் வேண்டும். அங்கும் அனுமான விதிகளின் உதவியோடு ஒரு முரண்பாட்டை அதாவது ஒரு எடுப்பையும் (மாறி) அதன் மறுப்பையும் பெறுகின்றோம்.

4 . 6. நிபந்தனைப் பெறுகை

முடிபுக்கூற்று நிபந்தனை மாறிலியைக் கொண்டமையும் கூட்டு எடுப்புக்களைக் கொண்ட வாதங்களிலேயே நிபந்தனைப் பெறுகையைக் கையாள்வர். முடிபுக்கூற்று நிபந்தனையாய் அமைதல் வேண்டும் அந்நிபந்தனை எடுப்பின் முற்கூற்றை எடுகோளாகக் கொண்டு அதன் பிற்கூற்றினை எடுகூற்றுக்களின் வழியாகப் பெறுகின்றோம். இவ்வாறு பிற்கூற்றினைப் பெற்றதும் நிபந்தனைப் பெறுகை முடிவுறுகின்றது.

உதாரணமாக,

$$\left[(P \longrightarrow Q) . (Q \longrightarrow R) . (P \longrightarrow S)\right] \therefore (P \longrightarrow S)$$

1.	$P \longrightarrow S$	எனக் காட்டுக
2.	P	நிபந்தனைப் பெ. எடுகோள்
3.	$P \longrightarrow Q$	1ம் எடுகூற்று
4.	Q	2, 3ம் விதி, விதி.
5.	$Q \longrightarrow R$	2ம் எடு. கூற்.
6.	R	4ம். 5ம் வி. வி.
7.	$P \longrightarrow S$	3ம் எ. கூ.
8.	S	2ம், 7ம் வி. வி.

இங்கு முடிபுக்கூற்றில் உள்ள முதல் எடுப்பை எடுகோளாக எடுத்து பிற்கூற்றை நிறுவும்போது 2ஆம் வரியையும் 7ஆம் வரியையும் கொண்டு உடனடியாக முடிவுக்கூற்றைப் பெறுதல் தவறாகும். ஒரு வாதத்தில் உள்ள எடுகூற்றுக்கள் யாவும் நிறுவப்பட வேண்டும். நிபந்தனைப் பெறுகையில் ஒவ்வொரு எடுகூற்றையும் நிறுவி நிறுவிச் செல்வதே பொதுமரபாகும்.

4, 7. துணைப் பெறுகைகள்

ஒரு குறியீட்டு வாதத்தின் முடிபை நிறுவுவதற்குப் பிரதான பெறுகைக்கு உதவியாக ஒரு துணைப் பெறுகையை அல்லது பல துணைப் பெறுகைகளைப் பிரயோகிக்கவேண்டி ஏற்படும். பிரதான பெறுகைகள் மூலம் வாதங்கள் நிறுவப்படும்போது முடிபை அடைய இயலாதவாறு சில எடுகூற்றுகள், கூட்டு எடுப்புக்கள் அமைந்திருக்கும். அவ்வாறான கூற்றுக்களையும் நிறுவி முடிபினை அடையப் பயன்படுத்தப்படும் பெறுகைகளையே இவ்வாறு அழைக்கின்றோம்.

உதாரணமாக

$$\left[(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)) \cdot (S \longrightarrow Q)\right] \therefore (P \longrightarrow R)$$

1.	$P \longrightarrow R$	எனக் காட்டுக
2.	P	நிப. பெ. எடு.
3.	$P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$	1ம் எடு. கூ.
4.	$(Q \longrightarrow R)$	2ம், 3ம் வி. வி.
5.	$(S \longrightarrow Q)$	2ம் எடு. கூ.

இங்கு 5ஆவது வரியையும் 4ஆவது வரியையும் நிறுவுவதற்கு எடுகோள்கள் எதுவுமில்லை. அதனால் இப் பெறுகையை முடித்தற்கு முன் ஒரு துணைப் பெறுகை அவசியமாகின்றது. அதனால் 5ஆவது வரியை மீண்டும் எனக் காட்டுக எனக் கொண்டு அதில் உள்ள முற்கூற்றை துணை நிபந்தனைப் பெறுகையாக எடுத்துக்கொள்கின்றோம். இப்போது குறிப்பிட்ட வாதத்தினை நிறுவ முடிகின்றது.

1.	$P \longrightarrow Q$	எனக் காட்டுக.
2.	P	நிப. பெ. எடு.
3.	$P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$	1ம் எடு. கூ.
4	$(Q \longrightarrow R)$	2ம், 3ம் விதி, விதி.
5.	$S \longrightarrow Q$	2ம் எடு. கூ.
6.	$S \longrightarrow Q$	எனக் காட்டுக.
7.	S	நி. பெ. து. எடு.
8.	Q	6ம், 7ம் வி. வி.
9.	R	6ம், 8ம் வி. வி.

மேலும் ஓர் உதாரணம்

$$[\,P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)\,.\,P \longrightarrow (R \longrightarrow S)\,] \therefore P \longrightarrow (Q \longrightarrow S)$$

1.	$P \longrightarrow (Q \longrightarrow S)$	எனக் காட்டுக
2.	P	நி. பெ. எடு.
3.	$P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$	1ம் எ. கூ.
4.	$(Q \longrightarrow R)$	2ம், 3ம் வி. வி.
5.	$P \longrightarrow (R) \longrightarrow S)$	2ம் எ. கூ.
6.	$(R \longrightarrow S)$	2ம் 5ம் வி. வி.
7.	$Q \longrightarrow S$	எனக் காட்டுக.
8.	Q	நி. பெ. து. எ.
9.	R	4ம், 8ம் வி. வி.
10.	S	6ம், 9ம் வி. வி.

இங்கு எனக் காட்டுக எனும் வரிகள் கீறப்பட்டு வாதம் நிறுவப்பட்டுள்ளதை நிரூபிக்கலாம். அனுமான விதிகளைப் பயன்படுத்தி நிறுவக்கூடிய பல வழிகள் இருக்கலாம். அவற்றை விடுத்து உடனடியாகவே துணைப் பெறுகையின் உதவியை நாடக்கூடாது. பிழையான பொருந்தாத இடங்களில் எடுகோள்களைப் பிரயோகிக்கக்கூடாது. இங்கு மீட்டல் விதியைப் பிரயோகிக்கையில் நிறுவப்பட்ட துணைப் பெறுகை அடக்கிக் காட்டப்படும் எந்த வரியையும் மீளப் பயன்படுத்தக்கூடாது. முற்றாக நிறுவப்படாத துணைப் பெறுகையின் எந்த வரியையும் அதற்குள் திரும்பப் பயன்படுத்தக்கூடாது.

4 . 8. தேற்றங்கள்

அனுமான விதிகளில் பூரணமாக நிறுவப்படக்கூடிய ஒரு குறியீட்டு வாதமே தேற்றமாகும். உண்மையான ஒரு குறியீட்டு வாக்கியமாக இது அமைந்திருக்கும். ஒரு முறையில் முதலெடுப்பாய் ஏற்கப்படுவது பிறிதோர்முறையில் தேற்றமாயும் அமைந்து வரலாம். இதனுற்தான் பூரணமாய் நிறுவப்பட்ட ஒரு வாதத்தின் முடிபுக்கூற்றே தேற்றம் எனவும் வர்ணிக்கின்றனர்.

உதாரணமாக

$(P \longrightarrow P)$ என்ற எடுப்பு பூரணமாக நிறுவப்படக் கூடியது என்பதால் இதனைத் தேற்றம் என்பர்.

1. $(P \longrightarrow P)$ எனக் காட்டுக.
2. | P   நி. பெ. எடு.
3. | P   2 மீட். வி.

இவ்வாறு பல தேற்றங்கள் உள்ளன.

2. $Q \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$
3. $(P \longrightarrow Q) \longrightarrow \big((Q \longrightarrow R) \longrightarrow (P \longrightarrow R)\big)$
4. $\big((P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)\big) \longrightarrow \big((P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)\big)$
5. $\big((P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)\big) \longrightarrow (Q \longrightarrow (P \longrightarrow R)$
6. $(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (-Q \longrightarrow -P)$
7. $-(P \longrightarrow Q) \longrightarrow -Q$
8. $(\longrightarrow -P) \longrightarrow -P$
9. $-(P \longrightarrow Q) \longrightarrow P$
10. $\big((P \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow R)\big) \longrightarrow (P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$

என்பன சில.

உதாரணமாக,

$\big(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)\big) \longrightarrow (Q \longrightarrow (P \longrightarrow R)$ என்ற தேற்றத்தை எடுத்துக்கொண்டால் இதனைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ எனக் காட்டுக.
2. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ நி. பெ. எ.
3. $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ எ. கூ.
4. $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ எனக் காட்டுக.
5. Q நி. பெ. து. எ.
6. $P \rightarrow R)$ எ. கூ.
7. $(P \rightarrow R)$ எனக் காட்டுக.
8. P நி. பெ. து. எ.
9. $(Q \rightarrow R)$ 2, 8ம் வி. வி.
10. R 5. 9ம் வி. வி.

உதாரணமாக,

1. $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ எனக் காட்டுக.
2. $Q \rightarrow R$ நி. பெ. எடு.
3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ எ. கூ.
4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ எனக் காட்டுக.
5. $P \rightarrow Q$ நி. பெ. து.
6. $P \rightarrow R$ 4, 5. எ. கூ.
7. $P \rightarrow R$ எனக் காட்டுக.
8. P நி. து. எ.
9. Q 5, 8. வி. வி.
10. R 9, 2. வி. வி.

உதாரணமாக,

1.	$((P \wedge R) \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	எனக் காட்டுக.
2.	$(P \wedge R) \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	எனக் காட்டுக,
3.	$(P \wedge R) \rightarrow R$	நி. து. பெ.
4.	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	எனக் காட்டுக.
5.	P	நி. து. பெ.
6.	$Q \rightarrow R$	எ. கூ.
7.	Q	நி. து. பெ.
8.	$(P \wedge Q)$	5, 7ம் இ. வி.
9.	R	3, 8. வி. வி.
10.	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R))$	எனக் காட்டுக.
11.	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	நி. து. பெ.
12.	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	எனக் காட்டுக.
13.	$(P \wedge Q)$	து. பெ.
14.	P	13. எளி.
15.	$Q \rightarrow R$	11ம், 14ம் வி: வி.
16.	Q	13. எளி
17.	R	15, 16. வி. வி.

4.9–5. பிரதியீட்டுப் பேறும் விளக்கமும்

தேற்றங்களை நிறுவும்போது குறியீடாய்த் தரப்படும் மாறிகளுக்குப் பதிலாயும், கூட்டு எடுப்புகளுக்குப் பதிலாகவும் வேறு குறியீட்டுமாறிகளையும் மாறிலிகளையும் பயன்படுத்தலாம். இதனையே பிரதியீடு என்பர்.

உதாரணமாக,

$P \rightarrow P$ என்பதை

$Q \rightarrow Q$ எனப் பிரதியிடலாம்.

$(-R \rightarrow Q) \rightarrow (-R \rightarrow Q)$ எனவும் பிரதியிடலாம்.

இங்கு Pக்குப் பதிலாக Qவைப் பிரதியிட்டதைப்போல் $(-R \rightarrow Q)$ என்பதை Pக்குப் பதிலாகவும் பிரதியிடலாம். பிரதியீடு செய்யப்படும் ஒவ்வொரு மாறியும் ஒரே குறியீட்டு வாக்கியத்தினால் அல்லது வாக்கிய மாறியினால் பிரதியீடு செய்யப்படும். தேற்றங்களின் பிரதியீட்டுப் பேறுகளும் தேற்றங்களாகும்.

உதாரணமாக,

$P \rightarrow (Q \rightarrow --Q)$ என்பதை

$Q \rightarrow --Q$ எனப் பிரதியீட்டால் பெறலாம்.

தேற்றம் 6

$P \rightarrow --P$ என

$(6\ P / Q)$.

பயிற்சி

சில உதாரணங்கள்

இசை இன்பமானது ஆனாலும் இசை மயக்கம் தரக்கூடியது. ஆயினே தவில் துன்பமானது ஆகும். தவில் துன்பமானது என்பதோடு இசை மயக்கம் தரக்கூடியது அல்ல. ஆகவே இசை இன்பமானது.

சுருக்கத்திட்டம்

P — இசை இன்பமானது.
Q — இசை மயக்கந்தருவது.
R — தவில் துன்பமானது. இவ்வாறு சுருக்கத்திட்டம் அமைக்குக.

$(P \vee Q) \longleftarrow R.\ (R \wedge -Q) \therefore P$ என்பதை
$(R \longrightarrow (P \vee Q) \cdot (R \wedge -Q) \therefore P$ என அமைத்தல் வேண்டும்.

1.	P	எனக் காட்டுக.
2.	$R \longrightarrow (p \vee Q)$	1ம் எடு கூற்று
2.	$R \wedge -Q$	2ம் எடு கூற்று
4.	R	3 எளி. பெற.
5.	$(P \vee Q)$	2ம், 4ம் வி. வி.
6.	$-Q$	3 எளி. பெற.
7.	P	5ம், 6. ம. உ.

$[(P \wedge O). (Q \longrightarrow -R). (-R \longrightarrow S). (P \longrightarrow -S)] \therefore (T \longrightarrow U)$

1.	$T \longrightarrow U$	எனக் காட்டுக.
2.	T	நி. பெ. எடு. இதனல் நிறுவமுடியாது. ஆகையால்
3.	U	எனக் காட்டுக.
4.	$-U$	நே. பெ. எ.
5.	$P \wedge Q$	1ஆம் எ. கூ.
6.	Q	5 எளி. பெ.
7.	$Q \longrightarrow -R$	2ம் எ. கூ.
8.	$-R \longrightarrow S$	3ம் எ. கூ.
9.	$P \longrightarrow -S$	8ம் எ. கூ.
10.	$-R$	6, 7, வி. வி.
11.	S	8, 10 வி. வி.
12.	P	5 எளி. எ.
13.	$-S$	9, 12. வி. வி.

$[(P \wedge -Q) \cdot (-Q \longrightarrow -R) \cdot (-R \longrightarrow -S) \cdot (P \longrightarrow S] \therefore T$

1.	T	எனக் காட்டுக.
2.	$-T$	நே. பெ. எ.
3.	$P \wedge -Q$	1ம் எ. கூ.
4.	$-Q \longrightarrow -R$	2ம் எ. கூ.
5.	$-R \longrightarrow -S$	3ம் எ. கூ.
6.	$P \longrightarrow S$	4ம் எ. கூ.
7.	P	3 எளி. பெ.
8.	S	6, 7. வி. வி.
9.	R	5, 8. ம. மறு.
10.	Q	9, 4. ம. மறு.
11.	$-Q$	3 எளி. பெ.

$[P \longrightarrow (Q \wedge R) \cdot (Q \vee S) \longrightarrow T \cdot (S \vee P)] \therefore T$

1.	T	எனக் காட்டுக.
2.	$-T$	நே. பெ. எ.
3.	$P \longrightarrow (Q \wedge R)$	1ம். எ. கூ.
4.	$(Q \vee S) \longrightarrow T$	2ம் எ. கூ.
5.	$(S \vee P)$	3ம் எ. கூ.
6.	$-(Q \wedge S)$	2ம், 4. மறு. மறு.
7.	$-Q \wedge -S$	6 மீ. மோ. தே.
8,	$-S \wedge -Q$	7. பொ. வி.
9.	$-S$	8. எளி.
10.	P	5, 9. மறு. உட.
11.	$(Q \wedge R)$	10. 3. வி. வி.
12.	Q	11. எளி.
13.	$-Q$	7. எளி.

$[(P \vee Q) \longrightarrow [(R \vee S) \longrightarrow T]$ ஃ $P \longrightarrow [(R \wedge S) \longrightarrow T$ எனக் காட்டுக.

1.	$P \longrightarrow (R \wedge S) \longrightarrow T$	
2.	P	நி. எ. எ.
3.	$P \vee Q$	2. கூ. வி.
4.	$(P \vee Q \longrightarrow (R \vee S) \longrightarrow T$	1ம் எ.
5.	$(R \vee S) \longrightarrow T$	3, 4, வி. வி.
6.	$R \wedge S$	
7.	R	6 எ. பெ.
8.	$R \vee S$	7 கூ. வி.
9.	T	5, 8ம். வி. வி.
10.	$(R \wedge S) \longrightarrow T$	
11.	$P \longrightarrow [(R \wedge S) \longrightarrow T]$	

$[(P \vee Q) \longrightarrow (R \wedge S) . (S \vee T) \longrightarrow u]$ ஃ $P \longrightarrow U$ எனக் காட்டுக.

1.	$P \longrightarrow U$	
2.	P	நி. பெ.
3.	$(P \vee Q) \longrightarrow (R \wedge S)$	1ம் எ.
4.	$(S \vee T \longrightarrow U$	2ம் எ.
5.	$P \vee Q$	2. கூ. வி.
6.	$(R \wedge S)$	3. 5. வி. வி.
7.	S	6. எளி. எ.
8.	$(S \vee T)$	7. கூ. வி.
9.	U	4. 8. வி. வி.

1987, 88ஆம், 89ஆம் ஆண்டு வினாக்களில் இடம்பெற்ற முக்கிய தேற்றங்கள் இங்கு பயில்வதற்கும், பயிற்சிக்காகவும் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $(p \vee Q \longrightarrow (R \wedge S)) . R \therefore - Q$

1.	Q	என. காட்.
2.	Q	நே. பெ. எ.
3.	$(P \vee Q) \longrightarrow (R \wedge S)$	1ம். எ. கூ.
4.	$- R$	2ம். எ. கூ.
5.	$(P \vee Q$	2. கூட். வி.
6.	$R \wedge S$	3ம், 5ம், விதி. விதி.
7.	R	6. எளி. பெ.
8.	$- R$	4. மீ. விதி.

(ii) $(P \wedge Q) \longrightarrow (P \longrightarrow (R \wedge S)) . P (Q \wedge T) \therefore R \vee S$

1.	$R \vee S$	என. காட்
2.	$(P \wedge Q) \longrightarrow (P \longrightarrow (R \wedge S)$	1ம். எ. கூ.
3.	P	2ம். எ. கூ.
4.	$Q \wedge T$	3ம். எ. கூ.
5.	Q	4. எளி.
6.	$(P \wedge Q)$	3. 5, கூட். விதி.
7.	$P \longrightarrow (R \wedge S$	2. 6. விதி, விதி.
8.	$(R \wedge S)$	3. 7. விதி. விதி.
9.	R	8. எளி. எ.
10.	$R \vee S$	9. கூட், விதி.

(iii) $(P \longrightarrow Q) . (Q \vee R) . - (Q \wedge R) \therefore P \longrightarrow - R$

1.	$P \longrightarrow - R$	என. காட்.
2.	P	நி. பெ. எடு.
3.	$P \longrightarrow Q$	1ம். எ. கூ.
4.	Q	2, 3, விதி. விதி
5.	$- R$	என. காட்.
6.	R	நே. பெ. எ.
7.	Q	4, மீட், வி.
8.	$(Q \wedge R)$	6, 7, இணை. வி.
9.	$-(Q \wedge R)$	3. எ. கூ.

(iv) $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow -(P \wedge -Q)$

1.	$(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow -(P \wedge -Q)$	எண, காட்.
2.	$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow -(P \wedge Q)$	எண, காட்.
3.	$P \longrightarrow Q$	நி. பெ. எ.
4.	$-(P \wedge -Q)$	எ. காட்.
5.	$(P \wedge -Q)$	நே. பெ. எ.
6.	P	5. எளி. வி.
7.	$-Q$	5. எளி. வி.
8.	$P \longrightarrow Q$	3. மீ. வி.
9.	$-P$	7. 8. ம. ம.
10.	$-(P \wedge \longrightarrow Q) \longrightarrow (P \longrightarrow Q)$	எ. காட்.
11.	$-(P \wedge -Q)$	நி. எ. எ.
12.	$P \longrightarrow Q$	எண. காட்.
13.	P	நி. எ. எ.
14.	Q	காட்.
15.	$-Q$	நே. பெ. எ.
16.	P	13. மீ. வி.
17.	$P \wedge -Q$	15, 16, கூ. வி.
18.	$-(P \wedge -Q)$	11, மீ. வி.

(v) $((P \longrightarrow Q) \longrightarrow R) . -R \therefore Q \longrightarrow P$

1.	$Q \longrightarrow P$	எண. காட்.
2.	Q	நி. பெ. எ.
3.	$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow R$	1ம், எ. கூ.
4.	$-R$	2ம், எ. கூ.
5.	$-(P \longrightarrow Q)$	3, 4, மறு. மறு.
6.	$(P \longrightarrow Q)$	எ. கூ. காட்.
7.	P	நி. பெ. எ.
8.	Q	2. மீட்.
9.	P	எ. காட்.
10.	$-P$	நே. பெ. எ.
11.	$P \longrightarrow Q$	6. மீட்.
12.	$-(P \longrightarrow Q)$	5. மீட்.

(vi) $(-P \longleftrightarrow (-Q \vee R)).(P \longrightarrow R)$ ஃ $\longrightarrow (S \wedge T)$

1.	$(P \longrightarrow (S \wedge T)$	எ. காட்
2.	P	நி. பெ. எடு.
3.	$(-P \longleftrightarrow (-Q \vee R)$	1ம். எ. கூ.
4.	$(-Q \vee R) \longrightarrow -P$	3. இரு. நி. வி.
5.	$-(-Q \vee R)$	2, 4, மறு. மறு.
6.	$P - R$	2ம். எ. கூ.
7.	R	2, 6. வி. வி.
8.	$(-Q \vee R)$	7, கூட். விதி.
9.	$(S \wedge T)$	எ. காட்.
10.	$-(S \wedge T)$	நே. பெ. எ.
11.	$(-Q \vee R$	8 மீட். வி.
12.	$-(-Q \vee R)$	5. மீட். வி.

(vii) $P \vee -P$

1.	$P \vee -P$	என. காட்.
2.	$-(P \vee -P)$	நே. பெ. எ.
3.	P	எ. காட்.
4.	$-P$	நே. பெ. எ.
5.	$(P \vee -P)$	4. கூ. வி.
6.	$-(P \vee -P)$	2. மீட்.
7.	$(P \vee -P)$	3. கூட்.

(viii) $(-P \wedge -Q) \longrightarrow (P \longleftrightarrow Q)$

1.	$(\ P \wedge -Q) \longrightarrow (P \longleftrightarrow Q)$	எ. காட்.
2.	$(-P \wedge -Q)$	நி. பெ.
3.	$P \longleftrightarrow Q$	எ. காட்.
4.	$P \longrightarrow Q$	எ. காட்.
5.	P	நி. பெ. எ.
6.	Q	எ. காட்.
7.	$-Q$	நே. பெ. எ.
8.	P	5. மீட்.
9.	$-P$	2. எளி.
10.	$Q \longrightarrow P$	எ. காட்.
11.	Q	நி. பெ. எ.
12.	P	எ. கா.
13.	$-P$	நே. பெ. எ.
14.	Q	11. மீட்.
15.	$-Q$	2. எளி.
16.	$P \longleftrightarrow Q$	4, 10. இ நி.

தமிழில் அனுமான விதிகளைக் குறிக்கும் சுருக்க விளக்கங்கள்

Modus Ponens	M. P.	வி. வி. / உ. உ.
Modus Tollens	M. T.	ம. ம.
Disjunctive Syllogism	D. S.	ம. உ.
Hypothetical Syllogism	H. S.	நி. வி.
Conditional Proof	C. P.	நி. நி.
Addition	Add	சே. வி.
Conjunction	Conj	இணை. வி.
Simplification	Sim	எளி. வி.
Consteuctive Dilemma	C. D,	இரு. அ. வி.
Absoeption	Abs	உட். வி,
Commulation	Com	சம. வி.
Association	Asso	உற. வி.
Maveeial Equvalonee	M. E	பொ. சம்.
Mateial implication	M. I.	பொ. உ.
Double Nogation'	D. N.	இர. மறு.
Toransposition	Ton	பரிமா. வி.
Tautology	Tau	கூ. கூ. வி.
Expoctation	Expo	பொ. ஏற். வி.
Distribution	Dis	வியா. வி.
De mergn theoeams	Dem	தா. மோ. வி.
Adjunction	Adj	கூ. வி.
Conditional Biconnitional	C. B.	இ. நி. இநி. வி.

அறிந்திருக்க வேண்டிய பதங்கள்

1.	ஆதார விதி	Assumption
2.	அளவையியல் குறியீடுகள்	Logical Symbols
3.	அளவையியல் மாறிகள்	Logical Variables
4.	அளவையியல் மாறிலிகள்	Logical Constants
5.	அளவுபடுத்தப்பட்ட குறியீடுகள்	Quantification Symbols
6.	அடைப்புக்குறிகள்	Punctuation Marks
7.	இணைப்பு	Conjunction (Conj.)
8.	இரட்டை மறுப்பு	Doubles Nagation (Dn.)
9.	இருபால் நிபந்தனை மாறிலி	Biconditional Constants
10.	இருபால் நிபந்தனை விதி	Biconditional Conditional
11.	உடன்பாட்டு எடுப்பு	Affirmative
12.	உண்மைச் சார்பு	Truths Function
13.	உண்மை அட்டவணை	Truth Table
14.	உப பெறுகை	Sub-Derivation
15.	உறழ்வு மாறிலி	Diajunction
16.	உறழ்வு எடுப்பு	Categorical proposition
17.	எடுப்பு	Proposition
18.	எதிர்மறை எடுப்பு	Negatiue Proposition
19.	ஏற்புடைமை	Formal Validity
20.	உட்கிடை	Implication
21.	எளிமையாக்கல் விதி	Simplification
22.	நிபந்தனை எடுப்பு	Hypotholical Proposition
23.	நிரூபணம்	Proof
24.	கூட்டல் விதி	Adjuncton Law
25.	சுருக்கத்திட்டம்	Scheme of abbreviation
26.	நற்சூத்திரம்	Welformal Formulas
27.	நேர்ப்பெறுகை	Direct Derivation
28.	நேரல் பெறுகை	Indirect Derivation
29.	நேர் முறை	Direct Method
30.	நேரல் முறை	Indirect Method
31.	நிபந்தனைப் பெறுகை	Conditional Derivation
32.	விதித்து விதித்தல்	Modus Ponens
33.	மறுத்து மறுத்தல்	Modus Tollens
34.	உடன்பட்டு மறுத்தல்	Disjunctive Syllogism
35.	வாய்ப்பு	Valid
36.	வாய்ப்பின்மை	Anvalid

உசாத்துணை நூல்கள்

1. Peter Alexander : An Introduction to logic, The Criticism cf Arguments. London Georga Allem and unwin Ltd., 1969

2. E. J. Lemmon : Beginning logic. Califorinia Grauda School.

3. Irving. M. Copi : Symbolic logic. Fourth Edition
   (A) The Macmillan Company. New York, 1973.
   (B) Interduction to logic. Fourth Printing. 1966.

4. P. Balasubramaniam : M. A. (Phi.) M. A. (Psy.) Phid An Invitation to Symbolic logic University of Madras, 1977.

5. Hans. Reichanbach : (தமிழாக்கம்) அறிவியல்சார்ந்த மெய்ப்பொருளியலின் தோற்றம். தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனம் 1973.

6. Wiliard Van or Man Quine : From A Logilcal Point of Vicus Harvard University Press, Cam-bridgc, 1961.

7. R. D. Gunaratna. S. V. Kasinathan : அளவையியலும் விஞ்ஞான முறையும்–இரண்டாம் பகுதி. கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம், இலங்கை, 1977.

8. குறியீட்டு அளவையியல் : 1981, தயா அச்சகம், யாழ்ப்பாணம், க. த. இராசரத்தினம்.

இவ் ஆசிரியரின் ஆக்கங்கள் :

(1) விஞ்ஞானமும் விஞ்ஞானமுறையும்
(2) பொது உளச்சார்பும் பொது அறிவும்
(3) அளவையியலும் அளவையிற் போலிகளும்
(4) சில மெய்யியற் பிரச்சினைகள்
(5) பொது உளவியல் (அச்சில்)
(6) விஞ்ஞானிகளும் -
விஞ்ஞானமுறையியலாளர்களும் (அச்சில்)

திருமகள் அழுத்தகம், சுன்னாகம்