ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதம்

பகுதி I

க. பொ. த. உயர்தர வகுப்புகளுக்கு

ஆக்கியோன்
M. ஆறுமுகசாமி *B. Sc.*

ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதம்

பகுதி I

க. பொ. த. உயர்தர வகுப்புகளுக்கு

ஆக்கியோன்

M. ஆறுமுகசாமி *B. Sc.*

பொருளடக்கம்

நீள்வளையம்

1. ஒரு வெளிப்புள்ளி $P(h, k)$ இலிருந்து $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் PQ, PR ஆகும். QR இன் சமன்பாடு $\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=1$ எனக் காட்டுக. QR இன் சமன்பாடு $lx+my=-n$ எனின் P இன் ஆள்கூறுகளை l, m, n இற் தருக.

Q இனூடாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனை Q' ஆகும். $Q'R$ ஆனது PO இற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக. O உற்பத்தித் தானமாகும்.

2. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இல் புள்ளிகள் 'α', 'β' ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இந் நாண் $x^2+y^2=r^2$ எனும் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. இந்நாணின் முனைகளிலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $x^2/a^4+y^2/b^4=\frac{1}{r^2}$ எனக் காட்டுக.

3. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்கு புள்ளி $A(a$ கோசை θ, b சைன் $\theta)$ இலுள்ள செவ்வன் $x-$ அச்சை M இலும், $y-$ அச்சை N இலும் சந்திக்கின்றது. O உற்பத்தித் தானமெனின் முக்கோணி OMN இன் பரப்பைக் காண்க இப்பரப்பின் அதி உயர் பெறுமானம் என்ன? முக்கோணி OMN இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $9a^2x^2+9b^2y^2=(a^2-b^2)^2$ என்னும் நீள்வளையமெனக் காட்டுக.

4. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ இன் நாண் AB இன் நடுப்புள்ளி M (α, β) ஆகும். AB இன் சமன்பாடு,

$$\frac{\alpha}{a^2}(x-\alpha)+\frac{\beta}{b^2}(y-\beta)=0$$ எனக் காட்டுக.

AB ஆனது $x-$ அச்சை P இலும், $y-$ அச்சை Q இலும் வெட்டுகின்றது. $\frac{a^2}{OP^2}+\frac{b^2}{OQ^2}$ ஒரு மாறிலி எனின் (O உற்பத்தி) AB இன் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

5. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்குக் கீறப்பட்ட இரு செங்குத்தான தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு ஒருமைய வட்டமெனக் காட்டுக.

T என்பது இவ்வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி. T இலிருந்து நீள்வளையத்திற்குக் கீறிய இரு தொடலிகள் நீள்வளையத்தை முறையே A, B இலும், வட்டத்தை முறையே C, D இலும் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி TCD இன் அதிஉயர் பரப்பு a^2+b^2 எனவும், குறைந்த பரப்பு $2ab$ எனவும் காட்டுக.

6. ஒரு வெளிப்புள்ளி $T(h, k)$ இலிருந்து நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண் PQ இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

PQ இன் நடுப்புள்ளி $M(p, q)$ எனின், PQ இன் சமன்பாட்டை p, q இற் தருக.

பின்வரும் வகைகளில் M இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(a) T ஆனது, கோடு $x+y+1=0$ இல் கிடக்கின்றது.

(b) PQ ஆனது புள்ளி $(2, 3)$ இனூடாகச் செல்கின்றது.

(c) PQ இன் படித்திறன் ஒரு ஒருமை m.

(d) PQ இன் செங்குத்துச் சமகூறுக்கி புள்ளி $(a, 2a)$ இனூடாகச் செல்கின்றது.

7. $a+b$ $(a \neq b)$ நீளமுடைய கோலொன்றின் முனைகள் P, Q என்பவை முறையே x, y அச்சுகளின் வழியே வழுக்கிச் செல்கின்றன. M என்பது PQ இல் $PM=b$, $MQ=a$ ஆகுமாறு ஒரு புள்ளியாகும். M இன் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமெனக் காட்டுக. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

செவ்வகம் $OPQR$ ஆனது பூர்த்திசெய்யப்படுமாயின் (O உற்பத்தித்தானம்) இந்நீள்வளையத்திற்கு M இலுள்ள செவ்வன் MR எனக் காட்டுக.

இது துணைகொண்டு, ஒரு நீள்வளையத்திற்கு ஏதாவதொரு புள்ளி M இலுள்ள செவ்வன் மையத்தினூடாகச் செல்லுமாயின் P ஆனது நீள்வளையத்தின் அச்சுகளின் முனைகளில் இருக்க வேண்டுமெனக் காட்டுக.

8. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^3=a^2b^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி புள்ளிகள் $A(a, o)$, $A^1(-a, o)$ இலுள்ள தொடலிகளை முறையே T, T^1 இற் சந்திக்கின்றது.

(i) $AT \cdot A^1T^1 = b^2$

(ii) TT^1 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் $x-$ அச்சில் இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்கின்றது எனக் காட்டுக.

9. $lx+my+n=c$ என்னும் கோடு $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு ஒரு தொடலியாயின் $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ எனவும்,

இக்கோடு, $y^2 = 4px$ என்னும் பரவளைவிற்கு ஒரு தொடலியாயின் $pm^2 = ln$ எனவும் காட்டுக.

ஒரு நேர்கோட்டானது x, y அச்சுகளை முறையே M, N இற் சந்திக்கின்றது. $3OM^2 + 4ON^2 = OM^2 \cdot ON^2$ ஆகுமாறு கோடு MN அசைகின்றது. இக்கோடு ஒரு நிலையான நீள்வளையத்தைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக. இதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இந்நீள்வளையத்தினதும், பரவளைவு $y^2 = 4x$ இனதும் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

10. ஒரு நிலையான புள்ளி $Q(x_0, y_0)$ இனூடாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி P இன் ஆள்கூறுகளை ($x_0 + \gamma$ கோசை θ, $y_0 + \gamma$ சைன் θ) என்னும் வடிவில் இடலாமெனக் காட்டுக.

P ஆனது நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இல் கிடத்தற்கு வேண்டிய நிபந்தனையை r இலுள்ள ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகப் பெறுக.

இது துணைகொண்டு, Q இனூடாகச் செல்லும் படித்திறன் தான் θ உடைய நேர்கோடொன்று நீள்வளையத்தை H, K இல் (HK இன் நடுப்புள்ளி Q ஆகுமாறு) சந்தித்தால்,

தான் $\theta = -\dfrac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$ எனக் காட்டுக.

(x_0, y_0) இல் சமகூறிடப்படும், நீள்வளையத்தின் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. (a கோசை α, b சைன் α), (a கோசை β, b சைன் β) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} \text{ கோசை } \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{y}{b} \text{ சைன் } \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{கோசை } \frac{\alpha - \beta}{2}$$

எனக் காட்டுக.

$x = a(1 - t^2)/(1 + t^2$, $y = 2bt/(1 + t^2)$ என்னும் நீள்வளையத்தில் t_1, t_2 என்னும் சாராமாறிகளையுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}(1 - t_1 t_2) + \frac{y}{b}(t_1 + t_2) = 1 + t_1 t_2 \text{ என உய்த்தறிக}$$

இக்கோடு $x^2 + y^2 = b^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமாயின்,

$$e(1 - t_1 t_2) = \pm (t_1 - t_2)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு $b^2 = a^2(1 - e^2)$ ஆகும்.

12. E, E^1 என்னும் இரு நீள்வளையங்கள் ஒவ்வொன்றினது குவியங்களும் மற்றையதின் சிற்றச்சின் முனைகளில் உள்ளன.

(i) E, E^1 என்பவற்றின் பேரச்சுகள் சமன்.

(ii) E, E^1 இன் மையவகற்சித் திறன்கள் முறையே e, e^1 எனின், $e^2 + e^{12} = 1$,

(iii) E, E^1 இன் பொதுத்தொடலிகள், E இன் பேரச்சுடன் சைன் ^{-1}e என்னும் கோணமமைக்கின்றன,

எனக் காட்டுக.

13. CD, EF என்பன நீள்வளையம் $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ இன் இரு மாறும் விட்டங்கள் C, E என்பனவற்றின் மையவகற்சிக் கோணங்கள் முறையே θ, ϕ எனின் D, F இன் மையவகற்சிக் கோணங்களைக் காண்க.

C இலுள்ள தொடலி OE இற்குச் சமாந்தரமாயின் (O உற்பத்தித்தானம்), θ, ϕ என்பன $\pi/2$ இன் ஒற்றை மடங்கின் பெருக்குத் தொகையால் வித்தியாசப் படுகின்றனவெனக் காட்டுக. CE இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு

$4b^2 x^2 + 4a^2 y^2 = a^2 b^2$ எனக் காட்டுக.

$CD^2 + EF^2 = 4(a^2 + b^2)$ எனக் காட்டுக.

14. நீள்வளையம் $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ இன் பேரச்சினதும், சிற்றச்சினதும் முனைகள் முறையே A, B ஆகும். P என்பது நீள்வளையத்தில் ஒரு மாறும் புள்ளியாயின் முக்கோணி PAB இன் நிமிர் மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமெனக் காட்டுக.

15. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ என்னும் நீள்வளையத்தின் ஒரு விட்டம் PQ ஆகும். நீள்வளையத்திற்கு P இலுள்ள செவ்வன் X, Y அச்சுக்களை முறையே H, K இற் சந்திக்கின்றது. இணைகரம் $OHRK$ பூர்த்தியாக்கப் படுகிறது. (O உற்பத்தித்தானம்) P அசையும்போது

(i) QR இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமெனக் காட்டுக.

(ii) $PH/PK = b^2$ எனக் காட்டுக.

(iii) R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

16. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ இல், மையவகற்சிக் கோணங்கள் $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு bx கோசை $\alpha + ay$ சைன் $\alpha = ab$ கோசை β எனக் காட்டுக.

இது ஒரு குவியநாணாயின் அதன் நீளம் $2a$ சைன் $^2\beta$ எனக் காட்டுக.

17. நீள்வளையம் $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ இன் மையத்திலிருந்து புள்ளி $P[\theta]$ இலுள்ள தொடலிக்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி N இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

N இலிருந்து நீள்வளையத்திற்குக் கீறிய மறு தொடலியின் தொடுபுள்ளி $Q[\phi]$ ஆகும்.

a^2 தான் $\theta = b^2$ தான் $(\theta + \phi)/2$ என நிறுவுக.
Q இனூடாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையினூடாக P இலுள்ள செவ்வன் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

18. ஒரு வெளிப்புள்ளி $T(h, k)$ இலிருந்து நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இற்கு இரு தொடலிகள் TP, TQ கீறப்பட்டுள்ளன. O உற்பத்தித் தானமாயின் நாற்கோணி $OPTQ$ இன் பரப்பு $\sqrt{(b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2)}$ எனக் காட்டுக.

PQ ஆனது நீள்வளையம் $9(b^2x^2 + a^2y^2) = a^2b^2$ ஐத் தொடுமாயின் T இன் ஒழுக்கு $b^2x^2 + a^2y^2 = 9a^2b^2$ என்னும் நீள்வளையமெனக் காட்டுக.

இம் மூன்று நீள்வளையங்களையும் ஒரே அச்சு குறித்துக் கீறிக் காட்டுக.

19. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இல் P ஒரு மாறும் புள்ளி. இந் நீள்வளையத்தின் பேரச்சு AA^1 ஆகும். சிற்றச்சின் ஒரு முனை B ஆகும். P இலுள்ள தொடலிக்குச் சமாந்தரமான விட்டம் PA, PA^1 ஐ முறையே X, Y இற் சந்திக்கின்றது. முக்கோணி BXY இன் பரப்பு P இன் நிலையிற் தங்கியிருக்கவில்லையெனக் காட்டுக.

20. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இல், மையவகற்சிக் கோணங்கள் α, β ஆகவுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}(1 - \text{தான் } \alpha \text{ தான் } \beta) + \frac{y}{b}\left(\text{தான்} \frac{\alpha}{2} + \text{தான் } \frac{\beta}{2}\right) = 1 + \text{தான்} \frac{\alpha}{2} \text{ தான் } \frac{\beta}{2}$$

எனக் காட்டுக.

இந் நீள்வளையத்தின் ஒரு நாண் PQ ஆனது (m, a, o) என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது சிறிய அச்சில் $P[\alpha]$ இன் ஆடிவிம்பம் R ஆகும். RQ இன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}(1 - m \sin \alpha) + \frac{my}{b} \sin\alpha = m - \cos \alpha$$ எனக் காட்டுக.

21. PCP^1, QCQ^1 என்பன, நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இன் இரு உடன் உடன்புணரி விட்டங்கள். குவியங்கள் S, S^1 இலிருந்து

முறையே PCP^1, QCQ^1 இற்குக் கீறிய செங்குத்துகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

22. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இலுள்ள புள்ளியொன்றின் ஆள் கூறுகளை $\left(a\,\dfrac{1-p^2}{1+p^2},\ \dfrac{2bp}{1+p^2}\right)$ என இடலாமெனக் காட்டுக.

பரமானங்கள் p, q உடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இதிலிருந்து முதாலாவது புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இது துணைகொண்டு (h, k) என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் தொடலிகள்

$$p^2\left(1+\frac{h}{a}\right)-\frac{2pk}{b}+1-\frac{h}{a}=O$$ என்னும் இருபடிச்சமன்பாட்டால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இந் நீள்வளையத்திற்குக் கீறிய ஒரு மாறும் தொடலி, வரைகள் $x=\pm 1$ ஐ M, N இற் சந்திக்கின்றது. M, N இலிருந்து நீள்வளையத்திற்குத் கீறிய மறு தொடலிகள் L இற் சந்திக்கின்றன. L இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

23. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்கு புள்ளிகள் $P[\theta]$, $Q[\phi]$ இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளி $R[a$ கோசை $\frac{1}{2}\ (\theta+\phi)/$ கோசை $\frac{1}{2}(\theta-\phi)$, b சைன் $\frac{1}{2}\ (\theta+\phi)\ /$ கோசை $\frac{1}{2}\ (\theta-\phi)]$ எனக் காட்டுக.

$\theta-\phi$ என்பது ஒருமையாக இருக்குமாறு P, Q அசையுமாயின் R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

$\phi=3\theta$ ஆயின், R இன் ஒழுக்கைக்காண்க.

24. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி X, Y அச்சுகளை முறையே A, B இற் சந்திக்கின்றது. P இலுள்ள செவ்வன் X, Y அச்சுகளை முறையே C, D இற் சந்திக்கின்றது. O நீள்வளையத்தின் மையமாகும். நிறுவுக:

(a) $OA\cdot OC$, PC/PD என்பவை P இன் நிலையிற் தங்கியிருக்கவில்லை.

(b) AD ஆனது BC ற்கு செங்குத்து

(c) CD இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு, தந்த நீள்வளையத்தின் மையவகற்சித் திறன் உடைய ஒரு நீள்வளையம்.

———

அதிபரவளைவு

1. அதிபரவளைவு $xy = c^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி x, y அச்சுகளை முறையே A, B இற் சந்திக்கின்றது. O அதிபரவளைவின் மையம் POQ ஒரு விட்டம். BQ, $x-$ அச்சை C இற் சந்திக்கின்றது முக்கோணிகள் BOA QOC என்பவற்றின் பரப்புகள் முறையே $2c^2$, $c^2/3$ எனக் காட்டுக

2 அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P 't' இலுள்ள தொடலி x, y அச்சுகளை முறையே A, B இலும், P இலுள்ள செவ்வன், வரைகள் $y=x$, $y=-x$ஐ முறையே C, D இலும் சந்திக்கின்றன. $ACBD$ ஒரு சாய் சதுரமெனக் காட்டுக. $(t^2 \neq 1)$

3. அதிபரவளைவு $xy=k^2$ இன் ஒரு மாறும் நாணின் நடுப்புள்ளி, $y-$ அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நிலையான கோட்டிற் கிடக்கின்றது. இந்நாணின் முனைகளிலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

4. அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி, பரவளைவு $y^2=4ax$ இன் குவியத்தினூடாகச் செல்கின்றது. P இன் ஆள்கூறுகளை a, c இற் தருக. P ஆனது பரவளைவில் கிடக்குமாயின் $a^4=2c^4$ எனவும், P இல் இருவளையிகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் தான் $^{-1}\sqrt{2}$ எனவும் காட்டுக.

5. அதிபரவளைவு $2xy=ab$ உம், நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $((a>b)$ உம் ஒன்றையொன்று புள்ளி $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ இல் தொடுகின்றனவெனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்தின் மையத்திலிருந்து, P இலுள்ள பொதுத் தொடலிக்குக் கீறிய செங்குத்து அதிபரவளைவை Q இற் சந்திக்கின்றது. அதிபரவளைவிற்கு Q இலுள்ள தொடலி, நீள்வளையத்தின் குவியத்தினூடாகச் செல்லுமாயின், $a^2=3b^2$ எனக் காட்டுக.

6. $xy=c^2$ என்றும் செங்கோண அதிபரவளைவில் $P[p]$ $Q[q]$, $R[r]$ என்பவை மூன்று புள்ளிகள். p, q r என்பவை $t^3+at-b=0$ என்றும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். புள்ளிகள் P, Q, R இல் அதிபரவளைவுக்குள்ள தொடலிகள் QR, RP, PQ ஐ முறையே L, M, N இல் சந்திக்கின்றன. L இன் ஆள்கூறுகள் $[c(3b-a)/a,$ $-cp/a]$ எனக் காட்டுக.

L, M, N என்பவை $3ax-a^2y=9cb$ எனும் கோட்டில் கிடக்கின்றன எனக் காட்டுக.

7. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = c^2$ இல் PQ ஒரு நாணாகும். PQ வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதிபரவளைவை மீண்டும் R, S இற் சந்திக்கின்றது. RS உற்பத்தித் தானத்தினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

PQ உம் RS உம் H இல் சந்திக்கின்றன. PQ எப்பொழுதும் புள்ளி $(1, 2)$ இனூடாகச் செல்லுமாயின், H இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

8. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = 2a^2b^2$ ஆனது, அதிபரவளைவு $xy = ab$ ஐத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்திற்கு அதிலுள்ள புள்ளி A இலுள்ள தொடலி அதிபரவளைவை B, C இற் சந்திக்கின்றது. அதிபரவளைவிற்கு B, C இலுள்ள தொடலிகள் நீள்வளையத்தில் ஒரு புள்ளி D இற் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்திற்கு D இலுள்ள தொடலி, அதிபரவளைவை P, Q இற் சந்திப்பின், AP, AQ என்பன அதிபரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் எனக் காட்டுக.

9. $x = 4u$, $y = 4/u$ என்னும் அதிபரவளைவினதும் $x = t^2$, $y = 2t$ என்னும் பரவளைவினதும் பொதுப்புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. P யில் $u = 1$, $t = 2$ எனக் காட்டுக.

பரவளைவிற்கு P யிலுள்ள தொடலி அதிபரவளைவை M இற் சந்திக்கின்றது, அதிபரவளைவிற்கு P யிலுள்ள தொடலி பரவளைவை N இல் சந்திக்கின்றது. M, N இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

MN ஆனது பரவளைவிற்கு N இல் ஒரு தொடலியெனவும் அதிபரவளைவிற்கு M இல் ஒரு தொடலியெனவும் காட்டுக.

10. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = C^2$ இற்கு புள்ளி $P(ct, c/t)$ $(t > 1)$ இலுள்ள தொடலி, செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இவற்றிற்கு, உற்பத்தித்தானம் O இலிருந்து கீறிய செங்குத்துகளின் நீளங்களைக் காண்க. இவ்விரு செங்குத்துகளும் தொடலி, செவ்வன் ஆகியவற்றுடன் சேர்ந்து ஒரு சதுரத்தை அமைக்கின்றனவெனின் $t^2 = 1 + \sqrt{2}$ எனக் காட்டுக

11. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = c^2$ இல் $P(ct, c/t)$ $Q(cu, c/u)$ என்பவை இரு புள்ளிகளாகும். PQ ஆனது வளையியிற்குப் P இல் ஒரு செவ்வனாகும். $t^3u + 1 = 0$ எனக் காட்டுக.

Q இலுள்ள செவ்வன், வளையியை மீண்டும் N இற் சந்திக்கின்றது. PN இன் சமன்பாடு $x + t^{10}y = ct(1 + t^8)$ எனக் காட்டுக.

12. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி x, y அச்சுக்களை முறையே A, B இலும் P இலுள்ள செவ்வன் x, y அச்சுகளை முறையே C, D இலும் சந்திக்கின்றன. AD இன் நடுப்புள்ளி M. BC இன் நடுப்புள்ளி N. M இன் ஒழுக்கு $2c^2xy=c^4-x^4$ எனவும், N இன் ஒழுக்கு $2c^2xy=c^4-y^4$ எனவும் காட்டுக.

13. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=k^2$ இல் $A[a]$ $B[b]$, $C[c]$ மூன்று மாறும் புள்ளிகள். AB ஆனது AC இற்குச் செங்குத்து. A யிலிருந்து X அச்சிற்குக் கீறிய செங்குத்தின் அடியினூடாக BC செல்கின்றது.

(i) $a^2bc+1=0$, (ii) $a=b+c$ என நிறுவுக.

முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

14. அதிபரவளைவு $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ இலுள்ள ஒரு புள்ளியின் பரமானக் குறியீடு $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ ஆகுமெனக்காட்டுக.

$t=u$, $t=v$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}(1+uv)+\frac{y}{b}(1-uv)=u+v$ எனக் காட்டுக.

இந்நாண் அதிபரவளைவை A, B இலும், அணுகு கோடுகளை C, D இலும் வெட்டினால் $AC=BD$ எனக் காட்டுக.

15. $(Cp_r, C/p_r)$, $r=1, 2, 3, 4$ என்பவை $xy=C^2$ இல் நாலு புள்ளிகள். இவை ஒரு பரிதிப் புள்ளிகளாயின் $t_1t_2t_3t_4=1$ எனக் காட்டுக.

$xy=c^2$ இன் ஒரு விட்டம் AB ஆகும். அதிபரவளைவை A இற் தொட்டுக் கொண்டு B இனூடாகச் செல்லும் வட்டம், அதிபரவளைவை மீண்டும் C இற் சந்திக்கின்றது. வளையியிற்கு A இலுள்ள செவ்வன் AC எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் மையம் O ஆயின், $3OA^2+OC^2=AC^2$ எனக் காட்டுக.

16. $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ என்னும் அதிபரவளைவின், (h, k) யை நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (h, k) வளையியில் இருக்கும்போது வரும் முடிபை விளக்குக.

இவ் அதிபரவளையின் ஒரு மாறும் நாண், $x^2+y^2=r^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு ஒரு தொடலியாகும். இந்நாணின் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு,

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = r^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

17. $x^2 - y^2 = a^2$ என்னும் அதிபரவளைவில் $P[\theta]$, $Q[\theta + \pi/2]$ என்பவை புள்ளிகள். PQ இன் நடுப்புள்ளி $R(x_1 y_1)$ ஆகும். $\frac{y_1}{x_1}$ = சைன் θ + கோசை θ எனக் காட்டுக.

R இன் ஒழுக்கைக் காண்க

18. $x^2 - y^2 = a^2$ என்னும் அதிபரவளைவில் (a சீக α. b தான் α), (a சீக β, b தான் β) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு,

$$x \text{ கோசை} \frac{(\alpha - \beta)}{2} - y \text{சைன்} \frac{\alpha + \beta}{2} = a \text{ கோசை } \frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

எனக் காட்டுக.

இவ் வதிபரவளைவிலுள்ள புள்ளிகள் P, Q இன் சாராமாறிகள் முறையே $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ஆகும். A. A^1 என்பவை அதிபரவளைவின் உச்சிகள். α ஒரு ஒருமையாக விருக்க β மாறும் போது, AP, A^1Q என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு, $x^2 + y^2 - 2ay$ தான் $\alpha = a^2$ எனக் காட்டுக.

19. P Q, R என்பவை $xy = c^2$ இல் மூன்று புள்ளிகள். $\triangle PQR$ இன் நிமிர்மையம் H வளையியில் கிடக்கின்றது எனக்காட்டுக. QR, PH என்பவற்றின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு O வில் செங்கோணம் அமைக்கின்றது எனக் காட்டுக. (O உற்பத்தி)

20. PQ, PR என்பவை $xy = C^2$ இல் செங்குத்தாகவுள்ள இரு நாண்கள். P யிலுள்ள செவ்வன் QR இற்கு சமாந்தரம் எனக்காட்டுக.

P யில் இருந்து X அச்சுக்கு கீறிய செங்குத்தின் அடியினூடாக QR செல்லுமாயின் $\triangle PQR$ இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $72\, C^2 xy - 16C^4 + 8 . x^4 = 0$ எனக் காட்டு.

21. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = C^2$ இல் P ஒரு மாறும்புள்ளி உற்பத்தி O வில் இருந்து P யிலுள்ள தொடலிக்கு கீறிய செங்குத்தின் அடி Q ஆகும்

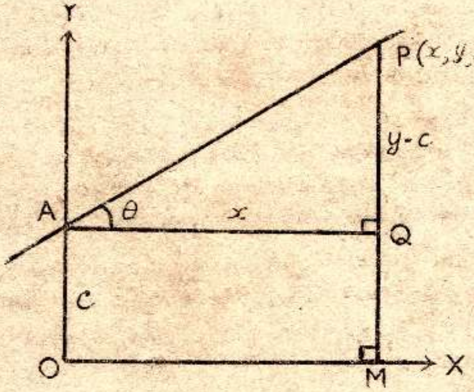
(i) $OP \cdot OQ$ = மாறிலி எனக்காட்டுக.

(ii) Q வின் ஒழுக்கை காண்க.

22. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = C^2$ க்கு புள்ளி P யில் உள்ள தொடலி $x - y = O$, $x + y = O$ என்னும் கோடுகளை முறையே A B யில் சந்திக்கின்றது O உற்பத்தி முக்கோணி OAB யின் பரப்பு $\triangle$ ஆகும். P யிலுள்ள செவ்வன் X—அச்சை C யிலும், Y அச்சை D யிலுப் சந்திக்கின்றது. முக்கோணி ODC யின் பரப்பு $\triangle_1$ ஆகும் $\triangle^2\ \triangle_1 = 8C^6$ எனக் காட்டுக.

நேர் கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

1. சாய்வு விகிதம் m உம், y-அச்சில் வெட்டுத்துண்டு c உம் உடைய நேர் கோட்டின் சமன்பாடு.

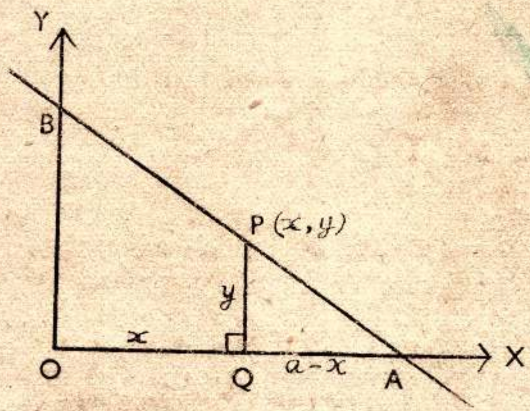


ஒரு நேர்கோட்டின் சாய்வு விகிதத்தை m எனவும், y அச்சில் அக்கோடு ஆக்கும் வெட்டுத்துண்டை c எனவும் கொள்க. இக் கோட்டில் $P(x, y)$ ஏதாவதொரு புள்ளியாகுக.

$$\therefore \text{ தான் } \theta = m = \frac{y-c}{x}$$

$$y = mx + c$$

2. x, y அச்சுகளில் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே a, b ஆக்கும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு.



இந்நேர்கோட்டில் $P\,(x,\ y)$ ஏதாவதொரு புள்ளியாயின், வடிவொத்த முக்கோணிகள் APQ, ABO இலிருந்து

$$\frac{a-x}{y} = \frac{a}{b}$$ ஆகும்.

அ-து $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

3. படித்திறன் m உடையதும், புள்ளி $(x,\ y)$ இனூடாகச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $y = mx + e$ என எழுதலாம்.

இக்கோடு $A(x_1, y_1)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$y_1 = mx_1 + c \text{ ஆகும்.}$$
$$\therefore \ c = y_1 - mx_1$$
$$\text{ஆகவே } \ y - y_1 = m(x - x_1)$$

உதாரணம்:-

X-அச்சின் நேர்த்திசையுடன் தான்$^{-1}$ $3/2$ கோணமமைத்து $(4, -5)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க

$$y + 5 = 3/2 \ (x - 4)$$
$$3x - 2y - 22 = 0$$

(4) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\text{A B இன் படித்திறன் } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\text{AB இன் சமன்பாடு } y, - y_1 = m \ (x - x_1)$$

$$\text{அ-து. } \ y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \ (x - x_1)$$

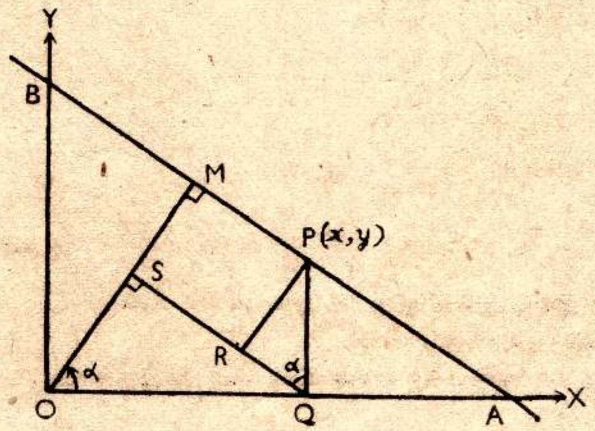
உதாரணம்:-

$A(1, -2)$, $B(-3, 4)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB இன் சமன்பாடு,

$$y + 2 = \frac{-2-4}{1+3}(x - 1)$$
$$3x + 2y + 1 = 0$$

(5) நியமச் சமன்பாடு



AB என்னும் நேர்கோட்டில் **P**(x, y) என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. உற்பத்தி **O** இலிருந்து **AB** க்குக் கீறிய செங்குத்து **OM** இன் நீளம் p ஆகுக. $(p>0)$

OM ஆனது **X**-அச்சின் நேர்த்திசையுடன் அமைக்கும் கோணம் α ஆகுக. ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$ ஆகவும் கொள்ளப்படும்)

PQ, QS, PR என்பவற்றை முறையே **X**-அச்சு, **OM**, **QS** என்பவற்றிற்குச் செங்குத்தாக வரையவும்.

$OM = p = OS + SM = x$ கோசை $\alpha + y$ சைன் α

அ-து x கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha = p$.

இதுவே **AB** இன் சமன்பாடாகும்.

M இன் ஆள்கூறுகள் (p கோசை α, p சைன் α) ஆகும்.

செங்குத்தெறிய முறை:-

OM உடன் **OX** ஆக்கும் கோணம் α ஆயின் **OM** உடன் **OY** ஆக்கும் கோணம் $-(\pi/2-\alpha)$ ஆகும்.

$OM = p = OM$ மீது முறிகோடு **OQP** இன் செங்குத்தெறியம்

$= OQ$ கோசை $\alpha + OP$ கோசை $\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$

$= x$ கோசை $\alpha + y$ சைன் α

α வின் எப்பெறுமானத்திற்கும் இம்முறை பொருந்தும் என்பதை அவதானிக்கவும்.

$ax+by+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டை நியம வடிவிற்கு மாற்றுதல்

$\sqrt{(a^2+b^2)} = r > 0$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{ax}{r} + \frac{by}{r} = -\frac{c}{r}$$

(i) $c<0$ எனின், $-\frac{c}{r}>0$ ஆகும்.

$p = -\frac{c}{r}$, கோசை $\alpha = \frac{a}{r}$, சைன் $\alpha = \frac{b}{r}$ ஆகவிருக்குமாறு $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ இல் α இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு.

ஆகவே இச்சமன்பாட்டை

x கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha = p$ என எழுதலாம்.

(ii) $c>0$ எனின் $-\frac{c}{r}<0$ ஆகும்.

$$\frac{-ax}{r}\ \frac{by}{r} = -\frac{c}{r}$$

$p=\frac{c}{r}$, கோசைα $=-\frac{a}{r}$, சைன் α $=-\frac{b}{r}$ ஆகவிருக்குமாறு $0\leqslant \alpha<2\pi$ இல் α இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு.

எனவே x கோசை α + y சைன் α = p ஆகும்.

$$p = \left|\frac{c}{r}\right| = \left|\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right|$$

ஆகவே உற்பத்தியிலிருந்து $ax+by+c=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளம் $=\left|\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right|$ ஆகும்.

உ-ம்:- 1

உற்பத்தியிலிருந்து $\sqrt{3}x-y+8=0$ என்னும் கோட்டின் செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க. இச் செங்குத்து X-அச்சின் நேர்த் திசையுடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க. இச்செங்குத்தின் அடியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$$\sqrt{3}x-y=-8$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{y}{2}=4$$

கோசை $\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, சைன் $\alpha=\frac{1}{2}$ ஆகுமாறு α என்பது நேர்க் கூர்ங்கோணமாயின், $\alpha=150°$ ஆகும்.

ஆகவே இக்கோட்டின் சமன்பாடு

x கோசை $150°$ + y சைன் $150° = 4$

உற்பத்தியிலிருந்து வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் = 4 அலகு. இது X-அச்சுடன் $150°$ கோணமமைக்கின்றது.

செங்குத்தின் அடியின் ஆள்கூறுகள் $=\left[4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 4\times\frac{1}{2}\right]$

$$=(-2\sqrt{3}, 2)$$

உ-ம்: 2 ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $3x-4y+8=0$ ஆகும். அச்சுகளின் திசையை மாற்ருமல் உற்பத்தியை $(2, -3)$ என்னும் புள்ளிக்கு மாற்றும்போது அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க. இது துணை கொண்டு $(2, -3)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $3x-4y+8=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

உற்பத்தியை $(2, -3)$ற்கு மாற்றும்போது கோட்டின் புதிய சமன்பாடு $x=X-2$, $y=Y+3$ எனப் பிரதியிடுவதால் பெறப்படும்.

$$\therefore\ 3(X-2)-4(Y+3)+8=0$$

$$3X-4Y-10=0$$

$$\frac{3X}{5}-\frac{4Y}{5}=2$$

இதனை x கோசை $\alpha+y$ சைன் $\alpha=p$ உடன் ஒப்பிடுக.

ஆகவே $(2, -3)$ இலிருந்து, $3x-4y+8=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளம் 2 அலகுகள் ஆகும்.

நேர் கோடுகளின் பரமானச் சமன்பாடுகள்

(6) $A(\alpha, \beta)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் படித்திறன் m/l உடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

A இனூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$$y-\beta=\frac{m}{l}(x-\alpha) \text{ என எழுதலாம்.}$$

இதனை $\dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=t$ என எழுதலாம்; இங்கு t ஒரு பரமானம்

$$\therefore\ x=\alpha+lt$$

$$y=\beta+mt$$

t இன் வேறுவேருன எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் x, y ஆனது தந்த கோட்டிலுள்ள வேறுவேருன புள்ளிகளைக் குறிக்கும்.

t இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் அக்கோட்டின் மீது ஒரேயொரு புள்ளியே இருக்கும்; மேலும் அக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கு ஒத்ததாய் t இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானமே உண்டு.

ஆகவே $x = \alpha + lt$, $y = \beta + mt$ என்பன தந்த நேர்கோட்டின் பரமானச் சமன்பாடுகளாகும்.

உதாரணம்: ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $2x + 3y - 1 = 0$ ஆகும். அதிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை பரமானக் குறிப்பில் தருக.

தந்த கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$2(x+1) + 3(y-1) = 0$$

அதாவது, $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = t$ (எனக் கொள்க)

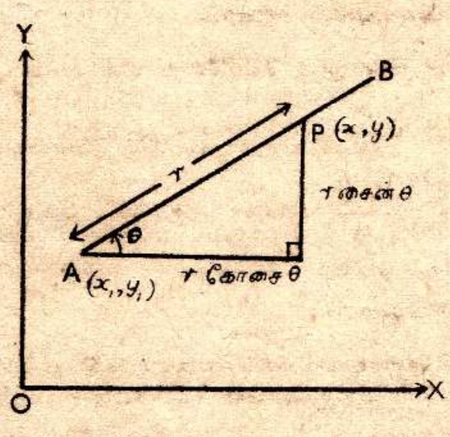
இங்கு t ஒரு பரமானமாகும்.

ஆகவே $x = 3t - 1$

$y = -2t + 1$

இதுவே அக்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் பரமானக் குறிப்பாகும்.

(7) **$A(x_1, y_1)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் சென்று X-அச்சின் நேர்த்திசையுடன் θ கோணமமைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.**



A இனூடாகச் செல்லும் AB என்னும் கோட்டின்மீது, P(x, y) என்பது AB இன் போக்கிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக.

AP = r என்க.

ஆகவே

$$x-x_1 = r \text{ கோசை } \theta$$
$$y-y_1 = r \text{ சைன் } \theta$$

அதாவது

$$x = x_1 + r \text{ கோசை } \theta$$
$$y = y_1 + r \text{ சைன் } \theta$$

(AP ஆனது AB க்கு எதிர்ப்போக்கில் இருப்பின் r எதிரெனக் கொள்ளப்படும்.)

r இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கு அக்கோட்டின் மீது ஒரேயொரு புள்ளியே உண்டு. அக்கோட்டின்மீதுள்ள எப்புள்ளிக்கும் ஒத்ததாய் r இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானமே உண்டு.

எனவே இவை தந்த நேர்கோட்டின் பரமானச் சமன்பாடுகளாகும்.

முறை II:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \text{ தான் } \theta = \frac{\text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta}$$

$$\therefore \frac{y-y_1}{\text{சைன் } \theta} = \frac{x-x_1}{\text{கோசை } \theta} = r \text{ (என்க)}$$

$$\therefore \quad x = x_1 + r \text{ கோசை } \theta$$
$$y = y_1 + r \text{ சைன் } \theta$$

இங்கு r ஒரு பரமானமாகும்.

(8 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் பரமானச் சமன்பாடு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோட்டை $\lambda : 1$ என்னும் விகிதத்தில் கூறிடும் புள்ளியின் ஆள் கூறுகள்,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

என முன்பு காட்டப்பட்டுள்ளது.

λ இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு x, y என்பன இக்கோட்டிலுள்ள வெவ்வேறு புள்ளிகளைக் குறிக்கும்.

எனவே இவை இக்கோட்டின் பரமானச் சமன்பாடுகளாகும்.

(9) இரு நேர்கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு.

$$l \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$l^1 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$$

என்பன இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகுக.

இவ்விரு கோடுகளும் சமாந்தரமல்லாவிடின்,

அதாவது $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ (அல்லது $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$) எனின்,

இவ்விரு கோடுகளும் ஒரு புள்ளி (x_0, y_0) இல் இடைவெட்டும்.

λ என்பது x, y ஐச் சாராத ஒரு பரமானமாகுக.

$$l+\lambda l^1 = a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

என்னும் சமன்பாட்டை ஆராய்க.

இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

மேலும், புள்ளி (x_0, y_0) என்பது $l=0$, $l^1=0$ இற் கிடத்த லால்,

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1=0$$
$$a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்

$$a_1x_0+b_1y_0+c_1+\lambda(a_2x_0+b_2y_0+c_2)=0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே (x_0, y_0) என்னும் புள்ளி λ இன் எப் பெறுமானத்திற்கும்

$$ax_1+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

என்னும் நேர்கோட்டில் கிடக்கின்றது.

ஆகவே λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $l+\lambda l^1=0$ என்னும் கோடு $l=0$, $l^1=0$ என்னும் கோடுகள் இடை வெட்டும் புள்ளியி னூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கின்றது.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \text{ ஆயின் } \frac{a_1+\lambda a_2}{b_1+\lambda b_1}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ $l=0$ உம் $l^1=0$ சமாந்தரமாயின், அதாவது $a_1b_2-a_2b_1=0$ எனின், $l+\lambda l^1=0$ என்னும் கோடு $l=0$, $(l^1=0)$ என்பவற்குச் சமாந்தரமான கோட்டின் சமன்பாட்டைக் குறிக்கும்.

உ-ம்:

(1) $x(2+3t)+y(1-t)=5+2t$ என்னும் சமன்பாடு t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக. அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

தந்த சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$2x+y-5+t(3x-y-2)=0$$

இது $l+\lambda l^1=0$ என்ற வடிவில் உள்ளது. ஆகவே இது $2x+y-5=0$, $3x-y-2=0$ என்னும் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோட்டைக் குறிக்கும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்தலால்,

$$x=\frac{7}{5},\ y=\frac{11}{5}$$ ஆகும்.

வெட்டுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{7}{5},\ \frac{11}{5}\right)$

(2) $2x-3y+4=0$, $3x+4y-5=0$ என்னும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியினூடாகச் சென்று $6x-7y+8=0$ இற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முதலிரு கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$2x-3y+4+k(3x+4y-5)=0$$

இங்கு k ஒரு பரமானம்.

அதாவது $(2+3k)x+(4k-3)y+4-5k=0$

இது $6x-7y+8=0$ இற்குச் செங்குத்தான படியால்,

$$-\frac{2+3k}{4k-3}=-\frac{7}{6}$$

$$\therefore\ k=\frac{33}{10}$$

வேண்டிய கோட்டின் சமன்பாடு,

$$119x+102y-125=0$$

பயிற்சி 2

1. பின்வரும் நேர் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

a) Y-அச்சில் -5 அலகு வெட்டுத்துண்டும் X-அச்சின் நேர்த்திசையுடன் 135° கோணமுமமைக்கும் கோடு.

b) X, Y அச்சுகளில் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே -2, 1 அலகுகள் உடைய கோடு.

(c) X-அச்சில் 3 அலகு வெட்டுத்துண்டும் $(-4, 1)$ என்னும் புள்ளியினூடாகவும் செல்லும் கோடு.

d) $(-1, 3)$, $(6, -7)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு.

(e) (a கோசை α, b சைன் α), (a கோசை β, b சைன் β) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு.

2. $(2, 4)$, $(-4, 1)$, $(2, -3)$ என்னும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ என்னும் கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. $(3, -4)$, $(2, 1)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இக்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக $(-2, 2)$ இனூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க

5. உற்பத்தித் தானத்திலிருந்து $2x + 3y = 1$ எனும் கோட்டின் தூரத்தைக் காண்க. இதிலும் இருமடங்கு தூரத்திலுள்ள, இக்கோட்டுக்குச் சமாந்தரமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. $x + 2y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகவும், $x + 7y - 1 = 0$, $2x - 3y + 2 = 0$ என்னும் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. (25, 10), (−5, −5) என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நேர்கோட்டை முதற் புள்ளியிலிருந்து 1 : 3 என்னும் விகிதத்தில பிரிக்கும் புள்ளியினூடாக இக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல் லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. (3, −2) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $\sqrt{3}x + y = 1$ என்னும் கோட்டுடன் 60° கோணமமைக்கும் இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

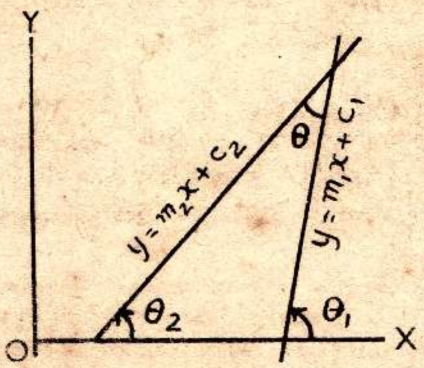
9. (−1, 2·5) என்னும் புள்ளி $2x + y = 3$, $x + y = 1$, $2x + 3y = 5$ என்னும் கோடுகளை தனது பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணிக்கு உள்ளேயா அல்லது வெளியேயா உள்ளது?

10. P (4, 2), Q (1, −2), R (−3, 1) என்பன இணைகரம் PQRS இன் மூன்று உச்சிகளாகும். S இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இவ்விணைகரத்தின் பரப்பு, OS ஐ ஒரு பக்கமாகக் கொண்ட சதுரத் தின் பரப்பிற்குச் சமனெனக் காட்டுக. இங்கு O ஆனது உற்பத்தித் தானமாகும்.

அலகு 3

இரு நேர்கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம்

$y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ என்பன ஒன்றையொன்று இடை வெட்டும் இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகுக. அவை X-அச்சின் நேர்த்திசையுடன், முறையே θ_1, θ_2 என்னும் கோணங்களை அமைக்கின்றனவெனக் கொள்க.



இரு நேர்கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனின்,

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \text{தான் } \theta = \frac{\text{தான் } \theta_1 - \text{தான் } \theta_2}{1 + \text{தான் } \theta_1 \text{ தான் } \theta_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

இக்கோவையின் பெறுமானம் நேராயின், கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கூர்ங்கோணத்தின் தாஞ்சனையும், எதிராயின் விரிகோணத்தின் தாஞ்சனையும் குறிக்கும்.

(i) இரு கோடுகளும் சமாந்தரமாயின், $\theta = 0$ ஆகும். எனவே $m_1 = m_2$ ஆகும்.

(ii) இரு கோடுகளும் செங்குத்தாயின், $\theta = 90^\circ$ ஆகும். ஆகவே $1+m_1m_2 = 0$. $m_1m_2 = -1$ ஆகும்.

$a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ ஆகிய இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்.

$$m_1 = -a_1/b_1, \quad m_2 = -a_2/b_2$$

என தான் θ இற்குரிய கோவையில் பிரதியிடுவதால்,

$$\text{தான் } \theta = \frac{-a_1/b_1+a_2/b_2}{1+a_1a_2/b_1b_2} = \frac{-(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1a_2+b_1b_2}$$

இவ்விரு கோடுகளும்

சமாந்தரமாயின், $-\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{-a_2}{b_2}$ ஆகும்.

அதாவது $a_1b_2-a_2b_1 = 0$

இவ்விரு கோடுகளும் செங்குத்தாயின்,

$$\frac{-a_1}{b_1}\left(\frac{-a_2}{b_2}\right) = -1 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $a_1a_2+b_1b_2=0$

$ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள யாதுமொரு கோட்டின் சமன்பாட்டை $bx-ay+c_2=0$ என எழுதலாம். $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான யாதுமொரு கோட்டின் சமன்பாட்டை $ax+by+c_1=0$ என எழுதலாம். இங்கு c_1, c_2 என்பவை பொருத்தமான ஒருமைகளாகும்.

உதாரணம்:

(1). $2x+y+1=0$, $3x-2y-2=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

$$m_1 = -2, \; m_2 = 3/2.$$

இவ்விரு கோடுகளுக்குமிடைப்பட்ட கோணம் θ ஆயின்,

$$\text{தான் } \theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\,m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{-2-3/2}{1+(-2)\,3/2}\right| = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ\ 15'$$

(2). $3x+5y-1=0$ என்னும் நேர்வரைக்குச் சமாந்தரமாக, $(1, -2)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நேர்வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$3x+5y-1=0$ இற்குச் சமாந்தரமான நேர்வரையின் சமன்பாட்டை $3x+5y+c=0$ என எழுதலாம்.

இது புள்ளி $(1, -2)$ இனூடாகச் செல்வதால்

$$3.1+5(-2)+c=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad c=7$$

நேர்வரையின் சமன்பாடு $3x+5y+7=0$ ஆகும்.

(3). $A\equiv(-2, 4)$, $B\equiv(4, -8)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்வரையின் நடுப்புள்ளிக்கூடாகச் சென்று AB இற்குச் செங்குத்தான நேர்வரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB இன் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $=(1, -2)$

AB இன் சமன்பாடு $\dfrac{y-4}{x+2}=\dfrac{4+8}{-2-4}=-2$

$$\therefore y+2x=0$$

AB இற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள நேர்வரை CD இன் சமன்பாட்டை $2y-x+c=0$ எனும் வடிவில் எழுதலாம்.

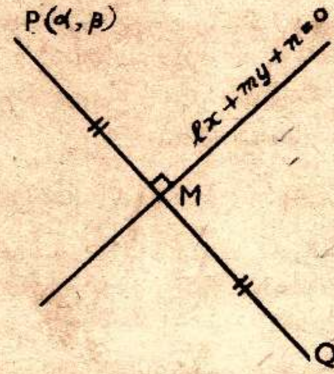
இது, $(1, -2)$ இனூடாகச் செல்வதால்

$$-4-1+c=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore c=5$$

CD இன் சமன்பாடு $2y-x+5=0$

3.2 $lx+my+n=0$ என்னும் நேர்கோட்டில் $P(\alpha, \beta)$ என்னும் புள்ளியின் ஆடி விம்பம்:



P இன் ஆடிவிம்பம் Q எனக் கொள்க. PQ ஆனது $lx+my+n=0$ இற்குச் செங்குத்து ஆகவே PQ இன் சமன்பாட்டை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)\left(-\frac{m}{l}\right)=-1$$

$\therefore \dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=t$ எனக் கொள்க. இங்கு t ஒரு பரமானம்.

$t=t^1$ ஆகும்போது புள்ளி Qஐக் குறிக்குக.

ஆகவே $Q\equiv(\alpha+lt^1, \beta+mt^1)$ ஆகும்.

PQ வின் மத்தியபுள்ளி M இன் ஆள்கூறுகள்

$$\left(\alpha+\frac{lt^1}{2}, \beta+\frac{mt^1}{2}\right)$$ ஆகும்.

M ஆனது $lx+my+n=0$ இற் கிடத்தலால்,

$$l\left(\alpha+\frac{lt^1}{2}\right)+m\left(\beta+\frac{mt^1}{2}\right)+n=0$$ ஆகும்.

$$\therefore t^1=-2\frac{(l\alpha+m\beta+n)}{l^2+m^2}$$

Q இன் ஆள்கூறுகள்,

$$\alpha + lt^1 = \alpha - 2l \ \frac{(l\alpha + m\beta + n)}{l^2 + m^2} = \frac{\alpha m^2 - \alpha l^2 - 2l\beta m - 2ln}{l^2 + m^2}$$

$$\beta + mt^1 = \beta - \frac{2m(l\alpha + m\beta + n)}{l^2 + m^2} = \frac{\beta l^2 - \beta m^2 - 2\alpha lm - 2mn}{l^2 + m^2}$$

குறிப்பு: $lx + my + n = 0$ இலிருந்து P இன் செங்குத்துத்தூரத்தை இம் முறையால் காணலாம்.

$$PM^2 = \left(\alpha - \alpha - \frac{lt^1}{2} + \right)^2 \left(\beta - \beta - \frac{mt'}{2}\right)^2 = (l^2 + m^2)\ \frac{t^{1\ 2}}{2^2}$$

$$PM = \left| \sqrt{(l^2 + m^2)}\ \frac{t^1}{2} \right|$$

t^1 க்குப் பிரதியிடுவதால்,

$$PM = \left| \frac{l\alpha + m\beta + n}{\sqrt{(l^2 + m^2)}} \right|$$

3.3 $lx + my + n = 0$ என்னும் நேர் கோட்டில், $ax + by + c = 0$ என்னும் நேர் கோட்டின் ஆடி விம்பம்.

(i) தந்த இரு கோடுகளும் இடைவெட்டும் வகையைச் சார்ந்தன வெனக் கொள்க.

இவற்றின் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலாற் வெட்டுப்புள்ளி A இன் ஆள்கூறுகள் (x_0, y_0) பெறப்படும்.

முறை 1:

$ax + by + c = 0$ இல் ஏதாவதொரு புள்ளி $P(\alpha, \beta)$ ஐ எடுக்கவும்.

மேற்கூறிய முறையால் $lx + my + n = 0$ இல் புள்ளி $P(\alpha, \beta)$ இன் ஆடிவிம்பம் Q இன் ஆள்கூறுகளைப் பெறலாம்.

எனவே AQ வே $ax + by + c = 0$ இன் ஆடி விம்பமாகும்.

இதனைப் பின்வரும் உதாரணம் விளக்குகின்றது.

$x + y = 0$ என்னும் நேர்கோட்டில் $3x + 4y + 1 = 0$ என்னும் நேர் கோட்டின் ஆடி விம்பத்தைக் காண்க.

இவ்விரு கோடுகளினதும் பொது வெட்டுப்புள்ளி $A(1, -1)$ ஆகும். $3x + 4y + 1 = 0$ இல் $x = 0$ எனப் பிரதியிட $y = -\frac{1}{4}$ எனப் பெறப்படும்.

$\therefore$ $3x + 4y + 1 = 0$ இல் $P(0, -\frac{1}{4})$ என்பது ஒரு புள்ளியாகும்.

$x + y = 0$ இல் P இன் ஆடி விம்பம் Q எனின் பரமானம்

$$t^1 = \frac{-2}{l^2+m^2}(l\alpha + m\beta + n)$$

$$= \frac{-2}{2}\left[1 \times 0 + 1(-\tfrac{1}{4}) + 0\right] = \tfrac{1}{4}$$

ஆகவே Q இன் ஆள்கூறுகள் $[\alpha + lt^1,\ \beta + mt^1]$

$$= [0 + 1 \times \tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{4} + 1 \times \tfrac{1}{4}] = (\tfrac{1}{4}, 0)$$

AQ இன் சமன்பாடு $y - 0 = \dfrac{-1}{1-\frac{1}{4}}(x - \tfrac{1}{4})$

அ-து $4x + 3y - 1 = 0$

ஆகவே, $x + y = 0$ இல் $3x + 4y + 1 = 0$ இன் ஆடிவிம்பம் $4x + 3y - 1 = 0$ ஆகும்.

முறை 2;

$lx + my + n = 0$, $ax + by + c = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி A (x_0, y_0) இனூடாகச் செல்லும் எந்நேர்கோட்டினது சமன்பாட்டையும் $y - y_0 = m_1(x - x_0)$ என எழுதலாம்.

இந்நேர்கோடு, $lx + my + n = 0$ இல் $ax + by + c = 0$ இன் ஆடி விம்பமாயின், இது தந்த நேர்கோடுகளுடன் சமகோணமமைக்கும்.

ஆகவே $\left|\dfrac{m_1 + l/m}{1 - m_1 l/m}\right| = \left|\dfrac{-l/m + a/b}{1 + la/bm}\right|$

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்தலாற் m_1 பெறப்படும்.

உதாரணம்:

நேர்கோடு $2x - 2y - 3 = 0$ இல், நேர்கோடு $x + 2y + 1 = 0$ இன் ஆடிவிம்பத்தைக் காண்க.

தந்த கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளி A இன் ஆள்கூறுகள்

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{-5}{6}\right)$$

A இனூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y + \tfrac{5}{6} = m(x - \tfrac{2}{3})$$

இக்கோடு தந்த கோடுகளுடன் சமகோணமமைக்குமாயின்

$$\left|\frac{m-1}{1+m}\right| = \left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| \text{ ஆகும்}$$

$$\therefore \quad \frac{m-1}{1+m} = \pm 3$$

$m = \frac{1}{2}$ அல்லது -2.

$m = -\frac{1}{2}$ எனின் $x+2y+1=0$ ஆகும். (இது தந்த கோடாகும்)
$m = -2$ எனின் $4x+2y-1=0$ ஆகும்.

ஆகவே $2x-2y-3=0$ இல் $x+2y+1=0$ இன் ஆடிவிம்பம் $4x+2y-1=0$ ஆகும்.

முறை 3:

A இனூடாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை $2x-2y-3+t(x+2y+1)=0$ என எழுதலாம். இங்கு t ஒரு பரமாணம்.

$$\text{இதன் படித்திறன்} = \frac{2+t}{2-2t}$$

இக்கோடு தந்த கோடுகளுடன் சமகோணமமைக்குமாயின்

$$\left|\frac{\frac{2+t}{2-2t}-1}{1+\frac{2+t}{2+2t}}\right| = \left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{3t}{4-t} = \pm 3; \quad t=2 \text{ அல்லது } \infty$$

$t=\infty$ தந்த கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தரும்.
$t=2$ விம்பத்தின் சமன்பாடு $4x+2y-1=0$ ஐத் தரும்

(ii) தந்த இரு கோடுகளும் சமாந்தரமாயின்

$ax+by+c=0$ உம் அதன் ஆடி விம்பமும் $lx+my+n=0$ இலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.

ஆடி விம்பத்தின் சமன்பாட்டை $ax+by+c_1=0$ என எழுதலாம்

$ax+by+c=0$ இற்கும் $lx+my+n=0$ இற்கும் இடையிலுள்ள செங்குத்துத்தூரம் $= \left|\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} - \frac{n}{\sqrt{(l^2+m^2)}}\right|$

$ax+by+c_1=0$ இற்கும் $lx+my+n=0$ இற்கும் இடையிலுள்ள செங்குத்துத்தூரம் $= \left|\dfrac{n}{\sqrt{(l^2+m^2)}} - \dfrac{c_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right|$

ஆகவே

$$\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} - \frac{n}{\sqrt{(l^2+m^2)}} = \pm\left[\frac{n}{\sqrt{(l^2+m^2)}} - \frac{c_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right]$$

$$\therefore \quad c_1=c \text{ அல்லது } \frac{c_1+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{2n}{\sqrt{(l^2+m^2)}}$$

ஆகவே ஆடி விம்பத்தின் சமன்பாடு $ax+by+2n\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{l^2+m^2}} - c = 0$ ஆகும். ($c_1=c$ தந்தகோட்டைக் குறிக்கும்)

உதாரணம்:

$6x+8y+3=0$ என்னும் கோட்டில் $3x+4y+2=0$ என்னும் கோட்டின் ஆடி விம்பத்தைக் காண்க.

ஆடிவிம்பத்தின் சமன்பாட்டை $3x+4y+c=0$ எனக் கொள்க. எனவே மேலுள்ளவாறு

$$\frac{3}{10} - \frac{2}{5} = \pm\left(\frac{c}{5} - \frac{3}{10}\right)$$

$\therefore \quad c=1$ அல்லது 2

ஆடிவிம்பத்தின் சமன்பாடு $3x+4y+1=0$.

$lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டிலிருந்து $P\equiv(\alpha,\beta)$ என்னும் புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரம்.

P இலிருந்து $lx+my+n=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் அடி M ஆகுக.

$$PM \text{ இன் படித்திறன் } = \frac{m}{l}$$

$$PM \text{ இன் சமன்பாடு, } \frac{y-\beta}{x-\alpha} = \frac{m}{l}$$

ஆகவே $\dfrac{x-\alpha}{l} = \dfrac{y-\beta}{m} = t$ (எனக் கொள்க: இங்கு t ஒரு பரமானம்)

$\therefore \; x=\alpha+lt; \quad y=\beta+mt.$

$t=t_0$ ஆகுகையில் புள்ளி M ஐக் குறிக்குக.

$\therefore \quad M \equiv [(\alpha+lt_0),\ (\beta+mt_0)]$

M ஆனது $lx+my+n=0$ இற் கிடத்தலால்,

$l(\alpha+lt_0)+m(\beta+mt_0)+n=0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad t_0 = -\frac{l\alpha + m\beta + n}{l^2 + m^2}$$

$$PM^2 = (\alpha + lt_0 - \alpha)^2 + (\beta + mt_0 - \beta)^2$$
$$= (l^2 + m^2)t_0^{\,2}$$

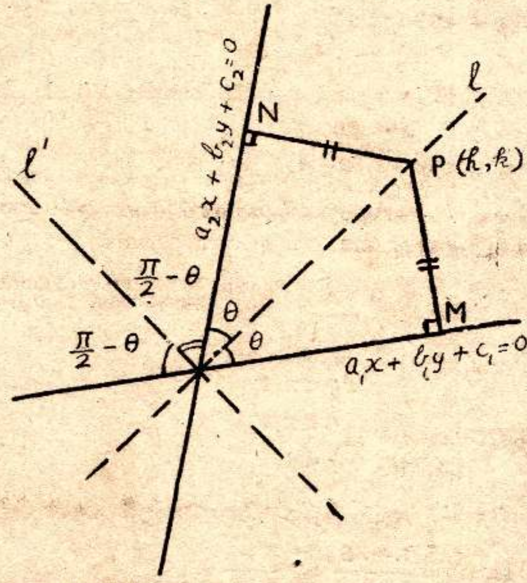
t_0 ற்குப் பிரதியிடுவதால்,

$$PM = \left|\frac{l\alpha + m\beta + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right|$$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக் கிடைப்பட்ட கோணங்களின் இருகூறுக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

இரு கோடுகளும் சமாந்தரமில்லாவிடின், அதாவது $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ எனின், அவை ஒன்றையொன்று இடை வெட்டும்.

அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணங்களில் ஒன்று கூர்ங்கோண மும் மற்றையது விரிகோணமும் (அல்லது இரண்டும் செங்கோணங் களும்) ஆகும். ஆகவே இரண்டு இருகூறுக்கிகள் உள்ளன.



ஒரு இரு கூறுக்கியில் P(h, k) ஏதாவதொரு புள்ளியாயின், P இலிருந்து இத்தந்தகோடுகளுக்குக் கீறிய செங்குத்துத்தூரங்கள் PM, PN ஆகியவை சமனாகும்.

$$\therefore \; PM = PN$$

$$\left|\frac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}\right| = \left|\frac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}}\right|$$

ஆகவே

$$\frac{a_1h+b_1k+c_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2}} = \pm \frac{a_2h+b_2k+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}}$$

ஆகவே P என்னும் புள்ளியின் ஒழுக்கு (நடை ஆள்கூறுகளுக்கு மாற்றுவதால்),

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}} \text{ ஆகும்.}$$

இவைகளே இருகூறுக்கிகளின் சமன்பாடுகளாகும். இவற்றுள் ஒன்று கூர்ங்கோணத்தினதும், மற்றையது விரிகோணத்தினதும் கூறுக்கியின் சமன்பாடு ஆகும்.

இவ்விரு இருகூறுக்கிகளும் ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

கூர்ங்கோணத்தினது (அல்லது விரிகோணத்தினது) இருகூறுக்கியைக் காணல்.

கூர்ங் கோணத்தை 2θ எனக் கொள்க. கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறுக்கியை l எனவும் விரிகோணத்தினதை l^1 எனவும் கொள்க. (35-ம் பக்கத்திலுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்)

ஆகவே l இற்கும் தந்த கோடுகளுள் ஒன்றிற்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ ஆகும்.

$$2\theta < \pi/2$$
$$\therefore \; \theta < \pi/4$$
$$|\text{தான் } \theta| < 1$$

இவ்வாறே l^1 ற்கும் தந்த கோடுகளுள் ஒன்றிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $= \dfrac{\pi - 2\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \theta.$

$$\pi/2 - \theta > \pi/4$$
$$|\text{தான் } (\pi/2-\theta)| > 1.$$

ஆகவே ஓர் இருகூறுக்கிக்கும், தந்த கோடொன்றிற்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தின் தான்சனின் எண்பெறுமானம் 1 இலும் சிறிது அல்லது பெரிது என்பதற்கேற்ப இவ்விரு கூறுக்கி முறையே கூர்ங் கோணத்தினது அல்லது விரிகோணத்தினது ஆகும்.

(இதைப் பின்வரும் உதாரணத்தால் விளக்கிக் காட்டலாம்.)

$3x+4y-2=0$, $5x+12y-6=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடைப் பட்ட விரிகோணத்தின் இரு கூறுக்கியைக் காண்க.

இரு கூறுக்கிகளின் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{3x+4y-2}{5} = \pm \frac{5x+12y-6}{13} \text{ ஆகும்.}$$

அ-து; $39x+52y-26 = \pm(25x+60y-30)$

$14x-8y+4=0$ அல்லது $64x+112y-56=0$

அதாவது, $7x-4y+2=0$ அல்லது $8x+14y-7=0$

(இவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதை நாம் அவதானிக்கலாம்.)

$7x-4y+2=0$ இன் படித்திறன் $= 7/4$.

$3x+4y-2=0$ இன் படித்திறன் $= -3/4$.

இவையிரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனின்,

$$\text{தான் } \theta = \left|\frac{\frac{7}{4}+\frac{3}{4}}{1-\frac{7}{4}\times\frac{3}{4}}\right| = 8>1$$

ஆகவே $7x-4y+2=0$ என்பது விரிகோணத்தினது இருகூறுக்கியாகும்.

உற்பத்தித் தானத்தைக் கொண்டுள்ள கோணத்தின் இருகூறுக்கியைக் காணல்.

தந்த கோடுகளை $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ எனக் கொள்க.

(x_1, y_1) என்பது ஒரு இருகூறுக்கியில் குறித்த ஒரு புள்ளி என்க.

(x_1, y_1) உம், $(0, 0)$ உம் தந்த கோடுகளுக்கு ஒரே பக்கத்தில் இருப்பின்

$a_1x_1+b_1y_1+c_1$ உம் c_1 உம் ஒரே குறியுடையனவாயிருத்தல் வேண்டும்.

(இது பின்னர் நிறுவப்படும்)

இவ்வாறே, $a_2x_1+b_2y_1+c_2$ உம் c_2 உம் ஒரே குறியுடையன வாயிருத்தல் வேண்டும்.

c_1 உம் c_2 உம் ஒரே குறியுடையனவாயின், $a_1x_1+b_1y_1+c_1$ உம் $a_2x_1+b_2y_1+c_2$ உம் ஒரே குறியுடையனவாகும்.

எனவே உற்பத்தித்தானத்தைக் கொண்டுள்ள கோணத்தின் இருசமவெட்டியின் சமன்பாடு,

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}} \text{ ஆகும்.}$$

c_1, c_2 முரண் குறியுடையனவாயின் மற்றச் சமன்பாடு பொருந்தும்.

உதாரணம்:

$x+y+2=0$, $x+7y+1=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடைப் பட்ட, உற்பத்தியைக் கொண்ட கோணத்தின் இரு சமவெட்டியைக் காண்க.

(x_1, y_1) என்பது ஒரு இருசமவெட்டியில் ஒரு புள்ளி என்க.

(x_1, y_1) உம் $(0,0)$ உம் $x+y+2=0$ இற்கும், $x+7y+1=0$ இற்கும் ஒரே பக்கத்தில் இருப்பின்,

x_1+y_1+2 உம் $0+0+2$ உம் ஒரே குறியுடையனவாக வேண்டும்.

இவ்வாறே x_1+7y_1+1 உம் 1 உம் ஒரே குறியுடையனவாக வேண்டும்.

ஆகவே x_1+y_1+2 உம் x_1+7y_1+1 உம் ஒரே குறியுடையனவை.

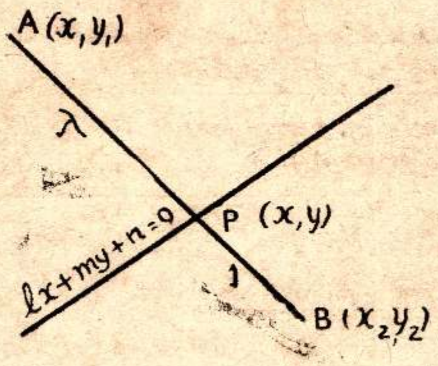
$\therefore$ உற்பத்தியைக் கொண்ட கோணத்தின் இரு சமவெட்டியிலுள்ள புள்ளிக்கு

$$\frac{x_1+y_1+2}{\sqrt{2}}=\frac{x_1+7y_1+1}{5\sqrt{2}} \text{ ஆகும்.}$$

அ-து $4x_1-2y_1+9=0$

உற்பத்தியைக் கொண்ட கோணத்தின் இரு சமவெட்டியின் சமன்பாடு $4x - 2y + 9 = 0$ ஆகும்.

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகள் $U \equiv lx + my + n = 0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப் பக்கத்தில் இருத்தற்காய நிபந்தனை.



(i) A உம், B உம் தந்த கோட்டில் கிடப்பின்,

$$lx_1 + my_1 + n = 0.$$

$$lx_2 + my_2 + n = 0.$$ ஆகும்.

(ii) AB ஆனது $U = 0$ இற்குச் சமாந்தரமாயின் A உம், B உம் தந்தகோட்டிற்கு ஒரேபக்கத்தில் கிடக்கும்.

(iii) A, B என்பன தந்தகோட்டிற் கிடவாத புள்ளிகளாகவும், AB, தந்த கோட்டிற்கு சமாந்தரமல்லாததாகவும் இருப்பின் AB (அல்லது நீட்டப்பட்ட AB) $U = 0$ ஐ P இற் சந்திக்கின்றதெனக் கொள்க.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\lambda}{1}$$ ஆகுக.

A, B என்பன $U = 0$ இன் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருப்பின் P ஆனது A, B என்பவற்றிற்கு இடையில் கிடக்கும். இவ்வகையில் $\lambda > 0$ ஆகும்.

A, B என்பன $U = 0$ இற்கு ஒரே பக்கத்தில் இருப்பின் P ஆனது A, B என்பவற்றிற்கு வெளியில் கிடக்கும். இவ்வகையில் $\lambda < 0$ ஆகும்.

ஆகவே λ என்பது நேர் அல்லது எதிர் என்பதற்கேற்ப **A, B** என்பவை **U**$=0$ இற்கு எதிர்ப்பக்கத்தில் அல்லது ஓரேபக்கத்தில் கிடக்கும்.

Pஇன் ஆள்கூறுகள் பின்வருமாறு தரப்படும்.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

P ஆனது **U** $= 0$ இற் கிடத்தலால்

$$\frac{l(x_1 + \lambda x_2)}{1+\lambda} + \frac{m(y_1 + \lambda y_2)}{1+\lambda} + n = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \lambda = -(lx_1 + my_1 + n) \,/\, (lx_2 + my_2 + n)$$

$$= \frac{-(lx_1 + my_1 + n)\,(lx_2 + my_2 + n)}{(lx_2 + my_2 + n)^2}$$

(i) $(lx_1 + my_1 + n)\,(lx_2 + my_2 + n)$ என்பது நேராயின், அதாவது $lx_1 + my_1 + n$, $lx_2 + my_2 + n$ என்பவை ஓரே குறியுடையனவாக இருப்பின் $\lambda < 0$ ஆகும். ஆகவே (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகள் $lx + my + n = 0$ இற்கு ஓரே பக்கத்தில் கிடக்கும்.

(ii) $lx_1 + my_1 + n)\,(lx_2 + my_2 + n)$ எதிராயின் அதாவது $(lx_1 + my_1 + n)$, $(lx_2 + my_2 + n)$ என்பவை முரண் குறிகள் உடையனவாக இருப்பின், $\lambda > 0$ ஆகும். ஆகவே (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகள் $lx + my + n = 0$ இற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் கிடக்கும்.

(உ-ம்)

(i) $(-1, -2)$, $(2, 3)$ என்னும் புள்ளிகளுள் $7x - 6y - 3 = 0$ இற்கு உற்பத்தி இருக்கும் அதே பக்கத்தில் உள்ளது எது?

$(0, 0)$ $(-1, -2)$ $(2, 3)$ என்னும் புள்ளிகளை $7x - 6y - 3$ இல் பிரதியிடும்போது நாம் பெறுவது முறையே

$$0 - 0 - 3 < 0$$

$$-7 + 12 - 3 > 0$$

$$14 - 18 - 3 < 0$$

ஆகவே $(0, 0)$ உம், $(2, 3)$ உம் $7x - 6y - 3 = 0$ இற்கு ஓரே பக்கத்தில் உள்ளன.

(ii) ஒரு வளையியின் சமன்பாடு பின்வருமாறு தரப்படுகின்றது; $x = t(1-t)^2$, $y = t^2(1-t)$ இங்கு t ஒரு பரமானம். $t = \frac{1}{2}$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. வளையி முழுவதும் இத்தொடலிக்கு ஒரு பக்கத்தில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

$$\frac{dx}{dt} = (1-t)^2 - 2t(1-t) = (1-t)(1-3t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t(1-t) - t^2 = 2t - 3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t-3t^2}{(1-t)(1-3t)}$$

$t = \frac{1}{2}$ இல் படித்திறன் $= \dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})} = -1$

$t = \frac{1}{2}$ இல் $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{8}$

$t = \frac{1}{2}$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$$y - \tfrac{1}{8} = -1\left(x - \tfrac{1}{8}\right)$$

$$8x + 8y - 2 = 0$$

அ-து. $4x + 4y - 1 = 0$

வளையியிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $[\,t(1-t)^2, t^2(1-t)\,]$ ஐ, $4x + 4y - 1$ இற் பிரதியிடும்போது நாம் பெறுவது,

$$4t(1-t)^2 + 4t^2(1-t) - 1$$

$$= -4t^2 + 4t - 1$$

$$= -(2t-1)^2$$

≤ 0, (t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்)

ஆகவே வளையி முழுவதும் $t = \frac{1}{2}$ இலுள்ள தொடலிக்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

1. $(3, -7)$, $(2, 3)$, $(-1, 5)$, $(0-5)$ என்னும் நான்கு புள்ளிகளும் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளெனக் காட்டுக. அதன் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அதன் பரப்பையும் காண்க.

$(3, -7)$, $(-1, 5)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

$$= \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-7+5}{2}\right) = (1, -1)$$

இவ்வாறே $(2, 3)$, $(0, -5)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின நடுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $= (1, -1)$ ஆகும்.

ஆகவே மேற்கூறிய இரு சோடிப் புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோடுகள் ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களாகும். இந்நான்கு புள்ளிகளும் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும்.

மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகள்;

(i) $y+7 = \frac{5+7}{-1-3}(x-3)$

$3x+y-2=0$

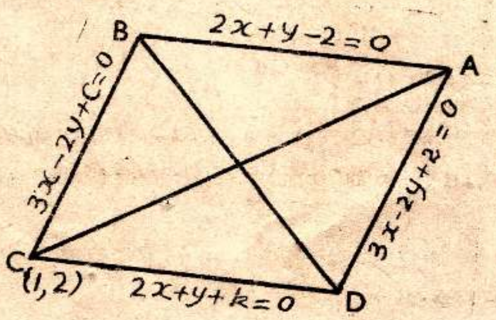
(ii) $y-3 = \frac{-5-3}{0-2}(x-2)$

$4x-y-5=0$

இணைகரத்தின் பரப்பு $=$ மட்டு $2 \times \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= |-5(0+1)+(-3-10)| \quad = 18$ சது அலகு.

2. இணைகரம் ABCD இன் பக்கங்கள் AB, AD என்பவை முறையே $2x+y-2=0$, $3x-2y+2=0$ என்னும் கோடுகளின் வழியே கிடக்கின்றன. C ஆனது $(1, 2)$ என்னும் புள்ளியாகும். BC, CD, AC, BD என்பவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



BC ஆனது AD க்குச் சமாந்தரமானபடியால் அதன் சமன் பாட்டை

$3x-2y+c=0$ என எழுதலாம்;

BC, (1, 2) இனூடாகச் செல்வதால்,

$3-4+c=0, \quad c=1$

BC இன் சமன்பாடு, $3x-2y+1=0$

இவ்வாறே CD இன் சமன்பாட்டை

$2x+y+k=0$ என எழுதலாம்.

CD, (1, 2) இனூடாகச் செல்வதால்

$2+2+k=0, \quad k=-4$

CD இன் சமன்பாடு, $2x+y-4=0$

D இன் ஆள்கூறுகள் $2x+y-4=0$, $3x-2y+2=0$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$$2(2x+y=4)$$
$$3x-2y=-2$$
$$7x=6$$
$$x=\frac{6}{7}$$
$$y=\frac{16}{7}$$

BD ஆனது AB, BC என்பவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதால் அதன் சமன்பாட்டை

$$3x-2y+1+\lambda(2x+y-2)=0$$

என எழுதலாம். இங்கு λ ஒரு சாராமாறி.

BD ஆனது $D\left(\frac{6}{7}, \frac{16}{7}\right)$ இனூடாகச் செல்வதால்

$$\frac{18}{7}-\frac{32}{7}+1+\lambda\left(\frac{12}{7}+\frac{16}{7}-2\right)=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \lambda=\tfrac{1}{2}$$

BD இன் சமன்பாடு; $8x-3y=0$

AC இன் சமன்பாடு,

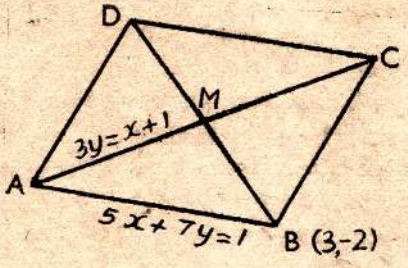
$$3x-2y+2+\lambda_1(2x+y-2)=0 \quad (\lambda_1 = \text{ஒரு சாராமாறி})$$

இது C (1, 2) இனூடாகச் செல்வதால்.

$$3-2+2+\lambda_1(2+2-2)=0$$
$$3+2\lambda_1=0$$
$$\therefore \quad \lambda_1=-3/2$$

AC இன் சமன்பாடு, $7y-10=0$

3 ஒரு சாய்சதுரத்தின் ஒருபக்கம் $5x+7y=1$ என்னும் கோட்டின் வழியே கிடக்கின்றது. அதன் ஒரு உச்சி $(3,-2)$ ஆகும். அதன் ஒரு மூலைவிட்டம் $3y=x+1$ என்னும் கோடாகும். மறு உச்சிகளின் ஆள் கூறுகளையும் மறு பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.



$(3,-2)$ என்னும் புள்ளி $5x+7y=1$ இல் கிடக்கின்றது.

Aஇன்ஆள் கூறுகள், $3y=x+1$, $5x+7y=1$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலாற்பெறப்படும்.

$$5(3y-1)+7y=1$$

$$22y=6\ ;\ y=\tfrac{3}{11}$$

$$\therefore x=-\tfrac{2}{11}$$

$$A\equiv\left(-\tfrac{2}{11},\tfrac{3}{11}\right)$$

BD, ACக்கு செங்குத்தாகும்.

BD இன் சமன்பாடு, $y+2=-3(x-3)$

$$3x+y-7=0$$

BD உம், AC உம் வெட்டும் புள்ளி M இன் ஆள்கூறுகள் $3x+y=7$ $3y-x=1$ ஆகியவற்றை தீர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$$3(3y-1)+y=7$$

$$10y=10$$

$$y=1$$

$$x=2$$

$$M\equiv(2,1)$$

D இன் ஆள்கூறுகள் $=(2\times 2-3,\ 2\times 1+2)$

$$=(1,4)$$

C இன் ஆள்கூறுகள் $=\left(2\times 2+\dfrac{2}{11},\ 2\times 1-\dfrac{3}{11}\right)$

$$=\left(4\frac{2}{11},\ 1\frac{8}{11}\right)$$

CD இன் சமன்பாடு, $5x + 7y = c$ என்க
இது D $(1, 4)$ இனூடாகச் செல்வதால், $C = 33$
ஆகவே CD இன் சமன்பாடு $5x + 7y = 33$ ஆகும்.
BC இன் சமன்பாடு

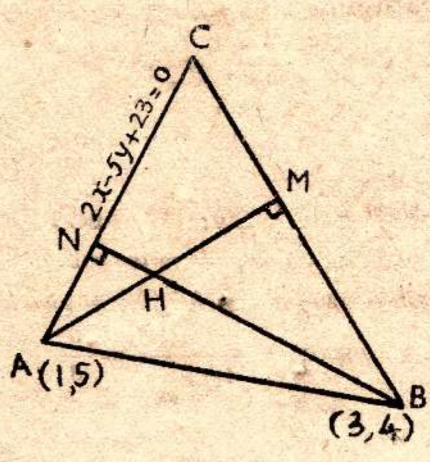
$$y + 2 = \frac{\frac{19}{11} + 2}{\frac{46}{11} - 3}\ (x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{41}{13}(x - 3)$$

$$41x - 13y - 149 = 0$$

AD இன் சமன்பாடு, $41x - 13y = c_1$ ஆகும்
இது D $(1, 4)$ இனூடாகச் செல்வதால் $c_1 = -11$
ஆகவே AD இன் சமன்பாடு $41x - 13y + 11 = 0$ ஆகும்.

4. ஒரு முக்கோனி ABC முழுவதும் முதலாம் கால்வட்டத்துள் கிடக்கின்றது. அதன் பரப்பு $4\frac{1}{2}$ ச. அலகுகளாகும். அதன் ஒரு பக்கத்தின் சமன்பாடு $2x - 5y + 23 = 0$ ஆகும். உச்சிகள் A, B இன் ஆள்கூறுகள் முறையே $(1, 5)$, $(3, 4)$ ஆகும். மறு பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும், கோணம் BAC யையும், நிமிர் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.



$C \equiv (h, k)$ எனக் கொள்க.

முக்கோணி ABC இன் பரப்பு $= \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} h & k & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$9 = h + 2k - 11$$

$$h + 2k = 20 \quad \text{———— (i)}$$

$C(h, k)$, $2x - 5y + 23 = 0$ இற் கிடத்தலாற்

$$2h - 5k = -23 \quad \text{———— (ii)}$$

(i), (ii) இலிருந்து,

$$2h + 4k = 40$$

$$\underline{2h - 5k = -23}$$

$$9k = 63$$

$$k = 7$$

$$\therefore h = 6$$

$$C \equiv (6, 7)$$

AB இன் சமன்பாடு, $y - 5 = \frac{5-4}{1-3}(x - 1)$

$$y - 5 = \frac{1}{-2}(x - 1)$$

$$x + 2y = 11$$

BC இன் சமன்பாடு,

$$y - 4 = \frac{7-4}{6-3}(x - 3)$$

$$y - 4 = \frac{3}{3}(x - 3)$$

$$x - y + 1 = 0$$

$BC = \sqrt{18}$, $CA = \sqrt{29}$; $\therefore \angle ABC > \angle BAC$

எனவே $\angle BAC$ ஒரு கூர்ங்கோணமாகும்.

AB இன் படித்திறன் $= -\frac{1}{2}$; AC இன் படித்திறன் $= 5/2$

தான் $\angle BAC = \dfrac{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \dfrac{9}{8}$

$$\angle BAC = 48^\circ\ 22'$$

AM, BN என்பன **BC, AC** என்பவற்றிற்குச் செங்குத்தாகும்:

AM இன் சமன்பாடு, $y-5=-(x-1)$

$$x+y=6$$

BN இன் சமன்பாடு, $y-4=-5/2\ (x-3)$

$$5x+2y=19$$

நிமிர்மையம் **H** இன் ஆள்கூறுகள் $x+y=6$, $5x+2y=19$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$$\begin{array}{r} 5x+2y=19 \\ 2x+2y=12 \\ \hline 3x=7\ , \quad x=7/3 \end{array}$$

$$y=\frac{11}{3}$$

நிமிர்மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$

5. $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டில் $x_1, y_1)$ என்னும் புள்ளியின் ஆடி விம்பம் (x_1, y_1) எனின்,

$$a(x_1+x_1)+b(y_1+y_1)=-2c,$$

$$b(x_1-x_1)-a(y_1-y_1)=0 \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

$y=0$, $x=0$, $2x+3y=9$ என்னும் கோடுகளில் $(2,1)$ என்னும் புள்ளியின் ஆடிவிம்பங்களை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணியின் பரப்பைக் காண்க.

$P \equiv (x_1, y_1)$, $Q \equiv (x_1, y_1$ எனக் கொள்க.

PQ இன் நடுப் புள்ளி **M** இன் ஆள்கூறுகள்

$$=\left(\frac{x_1+x_1}{2}, \frac{y_1+y_1}{2}\right)$$

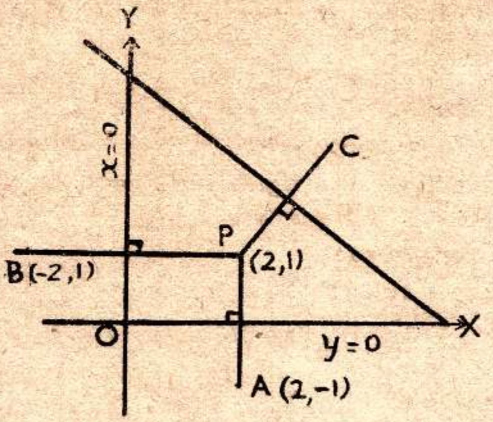
M, $ax+by+c=0$ இற் கிடத்தலால்

$$a\left(\frac{x_1+x_1}{2}\right)+b\left(\frac{y_1+y_1}{2}\right)+c=0$$

$$\therefore\ a(x_1+x_1)+b(y_1+y_1)=-2c$$

PQ இன் படித்திறன் $=\dfrac{y_1-y_1}{x_1-x_1}=\dfrac{b}{a}$

$$b(x_1-x_1)-a(y_1-y_1)=0$$



$y = 0$ இல் P $(2,1)$ இன் விம்பம் A இன் ஆள் கூறுகள் $= (2, -1)$
$x = 0$ இல் P இன் விம்பம் B இன் ஆள்கூறுகள் $= (-2, 1)$

$2x + 3y - 9 = 0$ இல் P இன் விம்பம் C (x_2, y_2) ஆகுக. ஆகவே,

$$2(2 + x_2) + 3(1 + y_2) = 18$$
$$3(2 - x_2) - 2(1 - y_2) = 0$$

அ-து $\quad 2x_2 + 3y_2 - 11 = 0$
$$3x_2 - 2y_2 - 4 = 0$$

x_2, y_2 ஐத் தீர்த்தலாற்,

$$\frac{x_2}{-12-22} = \frac{y_2}{-33+8} = \frac{1}{-4-9}$$

$$x_2 = \frac{34}{13},\ y_2 = \frac{25}{13}$$

பரப்பு $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{34}{13} & \frac{25}{13} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{34}{13} & \frac{25}{13} & 1 \end{vmatrix}$

$$= \left| \frac{1}{2} \times 2\left(-\frac{50}{13} - \frac{34}{13}\right) \right| = \frac{84}{13}$$ ச. அலகு

6. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$ ஆகும். இங்கு h உம், k உம் $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{c}$, (c ஒரு மாறிலி) ஆக விருக்குமாறு மாறுகின்றன. இக்கோடு ஒரு நிலையான புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$$

$$\frac{x}{h} + y\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{h}\right) = 1$$

$$\frac{1}{h}(x-y) + \left(\frac{y}{c} - 1\right) = 0$$

ஆகவே h இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் இக்கோடு $x-y=0$, $y-c=0$ என்னும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றது.

7. $2x$ சைன் $\theta - 2y$ கோசை $\theta = 3$ சைன் $\theta - 4$ கோசை θ என்னும் கோடு ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

தந்த சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$(2x-3)$ சைன் $\theta - (2y-4)$ கோசை $\theta = 0$

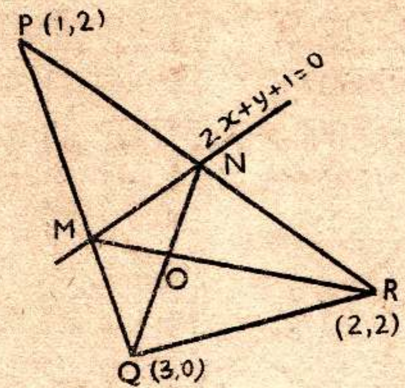
சைன் θ ஆல் வகுத்தலால்,

$(2x-3) -$ கோதா $\theta\,(2y-4) = 0$

(இது $l + \lambda l^1 = 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது)

இக்கோடு $2x-3=0$, $2y-4=0$ என்னும் நிலையான கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டைக் குறிக்கும்.

8. $P(1,2)$, $Q(3,0)$, $R(2,2)$ என்பவை மூன்று புள்ளிகளாகும். கோடு $2x+y+1=0$ ஆனது PQ, PR என்பவற்றை முறையே M, N இல் சந்திக்கின்றது. QN, RM என்பவை O இற் சந்திப்பின் OP இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.



PQ இன் சமன்பாடு, $y = \frac{2-0}{1-3}(x-3)$

$$x+y-3=0$$

PR இன் சமன்பாடு, $y-2=0$

RM இன் சமன்பாடு,

$x+y-3+\lambda\ (2x+y+1)=0$ (λ ஒரு சாராமாறி)

இது R $(2, 2)$ இனூடாகச் செல்வதால்

$$2+2-3+\lambda\ (4+2+1)=0$$

$$\lambda=-1/7$$

RM இன் சமன்பாடு, $5x+6y-22=0$

QN இன் சமன்பாடு, $2x+y+1+\lambda_1\ (y-2)=0$

இது Q $(3, 0)$ இனூடாகச் செல்வதால்

$$6+0+1+\lambda_1(0-2)=0$$

$$\lambda_1=7/2$$

QN இன் சமன்பாடு, $4x+9y-12=0$

OP இன் சமன்பாடு, $5x+6y-22+\lambda_2\ (4x+9y-12)=0$

இது P $(1, 2)$ இனூடாகச் செல்வதால்

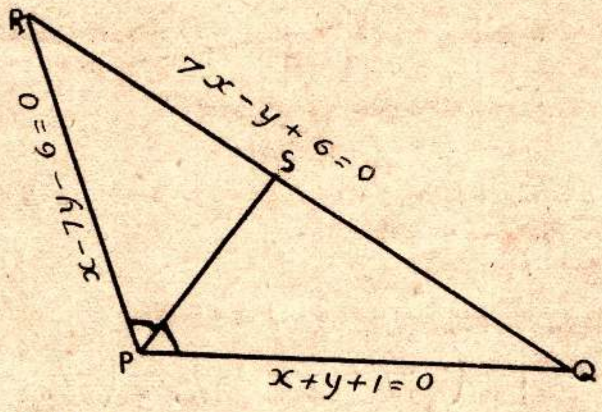
$$5+12-22+\lambda_2\ (4+18-12)=0$$

$$\lambda_2=\tfrac{1}{2}$$

OP இன் சமன்பாடு, $14x+21y-\cancel{34}^{56}=0$

9. முக்கோணி **PQR** இன் பக்கங்கள் **PQ, QR, RP** என்பவை முறையே $x+y+1=0$, $7x-y+6=0$, $x-7y-6=0$ என்னும் கோடுகளின் வழியே கிடக்கின்றன. கோணம் **QPR** இன் இரு கூறுக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்விரு கூறுக்கி **QR** ஐ **S** இற் சந்திப்பின் முக்கோணி **PQR** இன் மையப் போலி, முக்கோணி **PQS** இற்குள் கிடக்குமென நிறுவுக.



கோணம் **QPR** இன் இரு கூறுக்கியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-7y-6}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{x+y+1}{\sqrt{2}} \text{ ஆகும்.}$$

$$x-7y-6 = \pm(5x+5y+5)$$

$$6x-2y-1=0 \text{ அல்லது } 4x+12y+11=0$$

R இன் ஆள்கூறுகள் $x-7y-6=0$, $7x-y+6=0$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலால் பெறப்படும்.

$$x-7y=6$$
$$7x-y=-6$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \end{array}\right\} \quad \therefore R \equiv (-1, -1)$$

இவ்வாறே **Q** இன் ஆள்கூறுகள் $7x-y+6=0$, $x+y+1=0$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலால் பெறப்படும்.

$$x=-\tfrac{7}{8},\ y=-\tfrac{1}{8}$$

$$Q \equiv \left(-\tfrac{7}{8}, -\tfrac{1}{8}\right)$$

Q வும், R உம், கோணம் QPR இன் இருகூறுக்கியின் எதிர்ப் பக்கங்களில் இருத்தலால், அவற்றின் ஆள்கூறுகளை இருகூறுக்கியின் சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது எதிர்க்குறிகள் பெறப்படவேண்டும்.

$6x-2y-1=0$ என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்கவும். Q இன் ஆள்கூறுகளைப் பிரதியிடும்போது

$$-\frac{42}{8}+\frac{2}{8}-1<0$$

இவ்வாறே R இன் ஆள்கூறுகள் $(-1, -1)$ ஐப் பிரதியிடும்போது

$$6+1-1<0$$

ஆகவே கோணம் QPR இன் இருகூறுக்கி

$$4x+12y+11=0 \text{ ஆகும்.}$$

P இன் ஆள் கூறுகள் $x+y+1=0$, $x-7y-6=0$ ஐத் தீர்த்தலால் பெறப்படும்.

$$P\equiv(-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{7}{8})$$

$\triangle$ PQR இன் மையப் போலியின் (G) ஆள்கூறுகள்.

$$=\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}-\frac{7}{8}-1\right), \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{8}-\frac{1}{8}-1\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

PS இன் சமன்பாட்டில் $\left(4x+12y+11=0\right)$, $Q\equiv\left(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$

$G\equiv\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ஐப் பிரதியிடும்போது

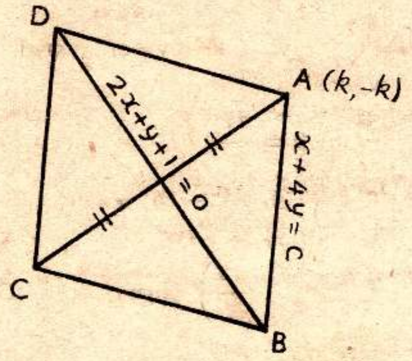
$$-\frac{7}{2}-\frac{12}{8}+11>0$$

$$-\frac{8}{3}-\frac{24}{3}+11>0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே Q வும், G உம் PS இன் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளன.
ஆகவே G, $\triangle$PQS இன் உள்ளே கிடக்கும்.

10. $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டின்மீது புள்ளி (α, β) இன் ஆடிவிம்பத்தைக் காண்க.

சாய்சதுரம் ABCD இன் மூலைவிட்டம் BD யின் சமன்பாடு $2x+y+1=0$ ஆகும். உச்சிகள் A, C என்பன முறையே $x+y=0$, $3x+y+1=0$ என்னும் கோடுகளில் கிடக்கின்றன. AB ஆனது $x+4y=0$ இற்குச் சமாந்தரம். சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



$lx+my+n=0$ இல் (α, β) இன் ஆடிவிம்பத்தின் ஆள்கூறுகள்

$$\equiv [\,(\alpha+lt),\ (\beta+mt)\,]$$

$$\text{இங்கு}\quad t=-2\,\frac{(l\alpha+m\beta+n)}{l^2+m^2}$$

என முன்பு காட்டப்பட்டுள்ளது.

BD ஆனது AC யின் செங்குத்துச் சமவெட்டியாகும்.

$\therefore$ $2x+y+1=0$ இல் A யின் ஆடிவிம்பம் C ஆகும்.

$A\equiv(k,\ -k)$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ t=\frac{-2}{5}(2k-k+1)\ =\frac{-2}{5}(k+1)$$

$$\text{C இன் ஆள்கூறுகள்} =\left[\ k-\frac{4}{5}(k+1),\ -k-\frac{2}{5}(k+1)\ \right]$$

$$=\left(\frac{k-4}{5},\ \frac{-7k-2}{5}\right)$$

C ஆனது $3x+y+1=0$ இற் கிடத்தலாற்

$$\frac{3}{5}(k-4)-\frac{7k+2}{5}+1=0$$

$$k = -\frac{9}{4}$$

$$C \equiv \left(-\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

$$A \equiv \left(-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

AB இன் சமன்பாட்டை $x+4y=c$ எனக் கொள்க. இது A இனூடாகச் செல்வதால்

$$c = -\frac{9}{4} + 9 = \frac{27}{4}$$

$\therefore$ AB இன் சமன்பாடு, $4x+16y=27$

CD இன் சமன்பாடு, $x+4y=c_1$

இது C $\left(-\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$c_1 = -\frac{5}{4} + 11 = \frac{39}{4}$$

$\therefore$ CD இன் சமன்பாடு $4x+16y=39$

BC இன் சமன்பாடு

$4x+16y-27+\lambda\ (2x+y+1)=0$

(λ ஒரு சாராமாறி) இது C இனூடாகச் செல்வதால்,

$$-5+44-27+\lambda\left(-\frac{5}{2}+\frac{11}{4}+1\right)=0$$

$$\lambda = -\frac{48}{5}$$

$\therefore$ BC இன் சமன்பாடு

$$76x-32y+183=0$$

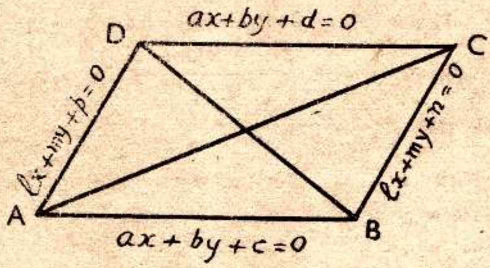
AD இன் சமன்பாடு $76x-32y=c_2$

இது $A(-9/4,\ 9/4)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$c_2 = -171-72 = -243$$

AD இன் சமன்பாடு $76x-32y+243=0$

11. ஓரிணைகரத்தினுடைய பக்கங்கள், $ax+by+c=0$, $lx+my+n=0$, $ax+by+d=0$, $lx+my+p=0$ என்றும் சமன்பாடுகளாலே தரப்படுகின்றன. அதனுடைய மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



AB, BC என்பவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாக **BD** செல்வதால் அதன் சமன்பாடு,

$ax + by + c + \lambda (lx + my + n) = 0$ ஆகும். இங்கு λ ஒரு பரமானம்

CD, DA என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிக்கூடாகவும் **BD** செல்வதால், அதன் சமன்பாட்டை பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$ax + by + d + \mu (lx + my + p) = 0$; இங்கு μ ஒரு பரமானம் ஆகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளின் குணகங்களின் விகிதங்களைச் சமப்படுத்துவதால்,

$$\frac{a + \lambda l}{a + \mu l} = \frac{b + \lambda m}{b + \mu m} = \frac{c + \lambda n}{d + \mu p}$$

$$\therefore (a + \lambda l)(b + \mu m) = (a + \mu l)(b + \lambda m)$$

அதாவது, $(\lambda - \mu)(bl - am) = 0$

$ax + by + c = 0$, $lx + my + n = 0$ என்பவை சமாந்தரமல்லாதவையாகையால், $lb \neq am$

$$\therefore \lambda = \mu$$

ஆகவே $\dfrac{c + \lambda n}{d + \mu p} = 1$

$$\therefore \lambda = \frac{c - d}{p - n} = \mu \text{ ஆகும்.}$$

BD இன் சமன்பாடு,

$$(p - n)(ax + by + c) + (c - d)(lx + my + n) = 0$$

AC இன் சமன்பாடு,

$$(p - n)(ax + by + c) - (c - d)(lx + my + n) = 0$$

பயிற்சி 3

1. புள்ளி (h, k) இலிருந்து கோடு $ax+by+c=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளம் $\pm \dfrac{ah+bk+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ எனக் காட்டுக. இதிலுள்ள குறியீரடியை விளக்குக.

கோடு $5x-12y=7$ இற்குச் சமாந்தரமானதும், இதிலிருந்து, உற்பத்தியிருக்கும் அதே பக்கத்தில் 2 அலகு தூரத்திலுள்ளதுமான கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக, $A(h,k)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை $(h+lt, k+mt)$ என்ற வடிவில் தரலாமெனக் காட்டுக. இங்கு t ஒரு பரமானம்.

A இலிருந்து $lx+my+n=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் அடிக்குரிய t இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இச் செங்குத்தின் நீளத்தையும் காண்க.

$5x-12y+5=0$, $5x-12y-2=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

3. ஓர் இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $5x+4y-4=0$, $2x+7y+11=0$ ஆகும். ஒரு மூலைவிட்டத்தின் சமன்பாடு $7x+11y+16=0$ ஆகும். உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

4. λ என்பது ஒரு மாறும் சாராமாறியாயின் (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின்மீதுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$ என்னும் வடிவத்தில் இடலாமெனக் காட்டுக.

P, Q, R என்னும் மூன்று புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(2,1)$, $(1,-1)$, $(7,2)$ ஆகும். கோடு $3x-y=17$ இல் **A** என்னும் ஒரு புள்ளி கிடக்கின்றது. **AP** ஆனது **QR** ஐ **B** இற் சந்திக்கின்றது. **AP** $=$ **2PB** எனின், **A** இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

5. முக்கோணி **ABC** இன் உள்மையம் I ஆகும். **AB, AC, CI** என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $6x-17y+23=0$, $3x-2y=0$, $x-y+1=0$ ஆகும். **B, I** இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. முக்கோணி ABCஇன் பக்கம் ABஇன் சமன்பாடு $4x+3y-1=0$ ஆகும். கோணம் BAC இன் இருகூறுக்கியின் சமன்பாடு $x+y=0$ ஆகும். AC இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A க்கு எதிராகவுள்ள வெளிவட்டத்தின் மையத்தின் ஆள் கூறுகள் $\left(-\frac{29}{11}, \frac{29}{11}\right)$ ஆகும். பக்கம் BC இன் படித்திறன் $-\frac{12}{5}$ எனின், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முக்கோணி ABC இன் உள் மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

7. ஓர் இணைகரம் ABCD இன் உச்சிகள் A, B, C, D இன் ஆள்கூறுகள் (x_r, y_r) என்பதால் முறையே $r = 1, 2, 3, 4$ ஆகும்போது தரப்படுகின்றன.

$x_1+x_3 = x_2+x_4$ எனவும் $y_1+y_3 = y_2+y_4$ எனவும் காட்டுக. இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிறுவுக;

(i) A B C D ஒரு செவ்வகமெனின்,
$$x_1 x_3 - x_2 x_4 = y_2 y_4 - y_1 y_3$$
(ii) A B C D ஒரு சதுரமாயின்,
$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = (y_1 - y_3)(y_4 - y_2)$$

8. முக்கோணி PQR இன் உச்சி P ஆனது, கோடு $x-2y=0$இல் கிடக்கின்றது. PQ, QR இன் இருகூறாக்கிச் செங்குத்துகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $x+y+1 = 0$, $2x+y+2=0$ ஆகும். QR ஆனது புள்ளி $(1, 9)$ இனூடாகச் செல்கின்றது. முக்கோணி PQR இன் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளையும், பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

9. ஓர் இணைகரம் A B C D இன் மூலைவிட்டம் BD ஆனது $x-2y+4=0$ என்னும் கோட்டின் வழியே கிடக்கின்றது. அதன் உச்சிகள் A, C என்பன முறையே $9x+8y=0$, $13x+8y=0$ என்னும் கோடுகளில் இருக்கின்றன. AD, AB என்பவை முறையே $2x+y+1=0$, $x+y+2=0$ என்னும் கோடுகளுக்குச் சமாந்தரம். இணைகரத்தின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளையும், பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

10. ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $x-3y+3=0$, $3x-y+7=0$, $x+y-1=0$ ஆகும். அதன் பரப்பு, கோணங்கள், சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

11. ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $x+y-4=0$, $x+7y+8=0$, $7x+y+8=0$ ஆகும். இதன் உள்மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

12. $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டின்மேல், (α, β) என்னும் புள்ளியின் ஆடி விம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

AB, AC என்னும் இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $y-1=0$, $6x-4y-3=0$ ஆகும். கோடு AB இல், புள்ளி P $(2, 3)$ இன் ஆடிவிம்பம் Q ஆகும். கோடு AC இல் புள்ளி Q இன் ஆடி விம்பம் R ஆகும். Q, R இன் ஆள்கூறுகளையும், PR இன் நீளத்தையும் காண்க. A இனூடாகச் செல்வதும், PR இற்குச் செங்குத்தானதுமான கோட்டில் P இன் ஆடிவிம்பம் R எனக் காட்டுக.

13. $x+2y+1=0$, $2x+11y+1=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $(1, -2)$ என்னும் புள்ளி இக்கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கூர்ங்கோணத்துள் கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

14. ஒரு முக்கோணி PQR இன் உச்சிகள் P, Q, R இலிருந்து எதிர்பக்கங்களுக்குக் கீறிய செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x+y=0$, $x-4y=0$, $2x-y=0$ ஆகும். A இன் ஆள்கூறுகள் $(t, -t)$ எனின், B, C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

t மாறும்போது, முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $x+5y=0$ எனக் காட்டுக.

15. A என்பது $x+y+1=0$ என்னுங் கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி. AB என்பது $2x+3y+5=0$ என்னும் கோட்டை B இற் சந்திக்குமாறு அதற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது. $BC=AB$ ஆகுமாறு AB ஆனது C இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. C இன் ஒழுக்கு $13(x+y+1)-10(2x+3y+5)=0$ எனக் காட்டுக.

16. $x-2y-1=0$ என்னும் கோட்டுடன் $45°$ கோணமமைத்து $(2, 3)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இம்மூன்று கோடுகளாலும் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பைக் காண்க.

17. ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு உச்சி புள்ளி $(2, -1)$ ஆகும். அதன் பக்கங்கள் ஆள்கூற்று அச்சுகளுடன் சமசரிவில் உள்ளன. ஒரு மூலைவிட்டம், $x-4y+10=0$ என்னும் கோட்டின் வழியேயும், ஒரு சோடி பக்கங்கள் $3x+4y=0$ இற்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ளன. இணைகரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

18. **PQRS** ஓர் இணைகரம் **PQ** ஆனது x-அச்சின் வழியேயும் **PS** ஆனது $y=2x$ இன் வழியேயும் கிடக்கின்றன. $Q\equiv(4,2)$ ஆகும். (i) **Q, S** இன் ஆள்கூறுகள் (ii) மூலைவிட்டம் **QS** இன் சமன்பாடு (iii) நீட்டப்பட்ட **QR** இல், பரப்பு $\triangle$ **PMQ** = 2 பரப்பு இணைகரம் **PQRS** ஆகுமாறு. **M** ஒரு புள்ளியெனின், **M** இன் ஆள்கூறுகள்; ஆகியவற்றைக் காண்க.

19. ஒரு முக்கோணி **ABC** இன் உச்சிகள் **A, B, C** என்பன முறையே $y=m_1x, y=m_2x, y=m_3x$ என்னும் கோடுகளில் கிடக்கின்றன. அதன் நிமிர் மையம் உற்பத்தியில் கிடக்கின்றது. முக்கோணி **ABC** யின் மையப்போலியின் ஒழுக்கைக் காண்க. இம்மூன்று கோடுகளும் ஒன்றுடனொன்று சமசாய்வில் இருப்பின், மையப்போலியின் ஒழுக்கு ஒரு புள்ளியாகுமெனக் காட்டுக.

20. **P** (p, o), **Q** (o, q), **R** (p, q), **O** (o, o) என்பன ஒரு செவ்வகத்தின் உச்சிகளாகும். இச் செவ்வகத்துள் **A** (a, b) என்பது ஒரு புள்ளி. **A** இலிருந்து x, y அச்சுகளுக்குக் கீறிய செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே **B, C** ஆகும். **PC, QB** என்பனவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியானது நீட்டப்பட்ட **RA** இல் கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக. இப்புள்ளியானது **RA** ஐ pq : ab என்னும் விகிதத்தில் புறக்கூறிடுகின்றதெனக் காட்டுக.

21. ஒரு சதுரத்தின் ஒரு உச்சியின் ஆள்கூறுகள் (2, 1) ஆகும். இவ்வுச்சியினூடாகச் செல்லாத மூலை விட்டத்தின் சமன்பாடு $x+7y=59$ ஆகும். சதுரத்தின் மறு உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளையும், பரப்பையும் காண்க.

22. ஒரு சாய்சதுரம் **PQRS** இன் உச்சிகள் **P, R** இன் ஆள்கூறுகள் முறையே $(-3, -4)$, $(5, 4)$ ஆகும். **QS** இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. **QR** இன் படித்திறன் 2 எனின், **Q, S** இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. சாய்சதுரத்தின் பரப்பையும் காண்க.

23. $y = 2x$ என்னும் கோட்டுடன் $45°$ கோணமமைத்து உற்பத்தியூடாகச் செல்லும் இரு நேர்வரைகளின் சமன்பாடுகளேயும் காண்க.

இவ்விரு நேர்வரைகளேயும் தனது அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்களாகவும், நேர்வரை $y = 2x$ ஐ ஒரு மூலேவிட்டமாகவும் கொண்ட ஒரு சதுரம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் ஒரு பக்கம் $(3, 5)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றது. இரு சதுரங்கள் வரையப்படலாமெனக் காட்டி அவற்றின் மறு மூலேவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

24. சாய்சதுரம் PQRS இன் மூன்று உச்சிகள் $P(3, 26)$ $Q(-15, 2,)$ $R(0, 2)$ ஆகும். RS இன் சமன்பாடு $4x-3y+6=0$ ஆகும். PS இன் படித்திறன் $-\frac{24}{7}$ ஆகும். பின்வருவனவற்றை நிறுவுக. (i) PQ ஆனது RS இற்குச் சமாந்தரம் (ii) $\angle QPS = \angle PQR$

PS உம் QR உம் A இற் சந்திக்கின்றன. A இன் ஆள்கூறுகளேக் காண்க. முக்கோணிகள் ARS, APQ இன் பரப்புகள் $4 : 25$ என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

25. $ax+by+c=0$ என்னும் நேர்வரையுடன் $45°$ கோணமமைக்கும் வரைகளின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

ஒரு சதுரத்தின் உச்சி $P(2, 5)$ ஆகும். அதன் மூலேவிட்டம் QS, $5x+3y-8=0$ என்னும் வரையின் வழியே கிடக்கின்றது. R இனூடாகச் செல்லும் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

26. $A(1, a)$, $B(1, b)$, $C(1, c)$ என்பவை மூன்று புள்ளிகள். $a>b>c$ ஆகும். O உற்பத்தித் தானமாகும். OA, OB, OC என்பவற்றிற்கு முறையே A, B, C இலுள்ள செவ்வன்கள் முக்கோணி PQR ஐ அமைக்கின்றன. இதன் பரப்பு $-\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$ எனக் காட்டுக.

27. கோடு $x-3y=9$ இற்கு புள்ளி $A(2, 1)$ இலிருந்து கீறிய செங்குத்தின் அடி B ஆகும். AB ஆனது $AB = BC$ ஆகுமாறு C இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. C இனூடாகச் செல்லும் m படித்திறனுடைய கோடு, $x-3y=9$ ஐ D இற் சந்திக்கின்றது. C, D இன் ஆள்கூறுகள், m இன் பெறுமானங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

28. ஒரு சதுரம் **PQRS** இன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் ஒரு ஒருமை l ஆகும். **PQ, PS** என்பவை எப்போதும் முறையே புள்ளிகள் $(0, 0)$ (k, o) இனூடாகச் செல்கின்றன. **PR** ஆனது x-அச்சுடன் θ என்னும் கோணமமைக்கின்றது. **P** ஆனது நாலாம் கால்வட்டத்துள் இருப்பின் அதன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

PR இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. இது எப்போதும் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டி அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

29. **P** (p, o), **Q** (o, q) என்பவை இரு நிலையான புள்ளிகளாகும், **M** (m, o), **N** (o, n) என்பவை இரு மாறும் புள்ளிகளாகும். **MN** எப்பொழுதும் ஒரு நிலையான புள்ளி **A** (α, β) இனூடாகச் செல்கின்றது. **PN, QM** என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. **M, N** அசையும்போது இப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

A, PQ வில் கிடக்குமாயின் இவ்வொழுக்கைக் காண்க.

30. $lx + my + n = 0$, $mx + ly + p = 0$ என்னும் கோடுகளுக்கு இடையில் உற்பத்தித் தானத்தைக் கொண்ட கோணத்தின் இருகூறுக்கியின் சமன்பாடு, $np > o$ எனின், $(l - m)(x - y) + n - p = 0$ என்றும்; $np < o$ எனின், $(l + m)(x + y) + n + p = 0$ என்றும் காட்டுக.

31. $ax + by + c = 0$, $ax + by + d = 0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட செங்குத்துத்தூரம் $\dfrac{|c - d|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ எனக் காட்டுக.

$(ax_1 + by_1 + c)(c - d) > 0$ எனின், (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி இந்நேர்கோடுகளுக்கிடையிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

32. $ax + by + c = 0$, $lx + my + n = 0$ என்பவை ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இரு கோடுகளாகும். $al + bm \neq 0$ ஆகும். புள்ளி **A** (α, β) இலிருந்து முதலாம் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்து இவ்விரு கோடுகளையும் முறையே **B, C** இற் சந்திக்கின்றது. **AC** இன் மீதுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை $(\alpha + at, \beta + bt)$ என்னும் வடிவில் உணர்த்தலாமெனக் காட்டுக; இங்கு t ஒரு பரமானம். **B, C** இற்கு ஒத்த t இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இது துணைகொண்டு,

$$(a\alpha + b\beta + c)(l\alpha + m\beta + n)(al + bm) \gtrless 0$$

என்பதற்கேற்ப, A ஆனது தந்த கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள விரிகோணத்துள்ளே அல்லது கூர்ங்கோணத்துள்ளே கிடக்குமென நிறுவுக.

33. ஒரு நாற்பக்கல் PQRS இன் பக்கங்கள் PQ, QR, RS, SP, ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $u = 0$, $v = 0$, $\lambda w + \mu v = 0$, $\lambda' w + \mu' v = 0$ ஆகும். இங்கு u, v, w என்பவை x, y இன் ஒரு படிச் சார்புகள்;

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ என்பவை ஒருமைகள். மூலைவிட்டங்கள் PR, QS ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$u \equiv l_1 x + m_1 y + n_1$, $v \equiv l_2 x + m_2 y + n_2$, $w = l_3 x + m_3 y + n_3$ எனின், முக்கோணி PQR இன் பக்கம் QR இன் மையக்கோட்டின் சமன்பாடு

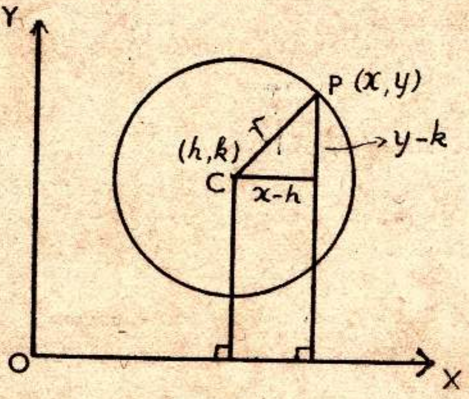
$$\frac{u}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} - \frac{w}{\begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix}} = 0$$ எனக் காட்டுக.

வட்டம்

4·1 ஒரு தளத்திலுள்ள நிலைத்த புள்ளியொன்றிலிருந்து ஒரு குறித்த தூரத்தில் அதேதளத்தில் அசையும் ஒரு புள்ளி வரையும் பாதை ஒரு வட்டமாகும்.

அந்நிலைத்த புள்ளி அவ்வட்டத்தின் மையமென்றும், அக்குறித்த தூரம் ஆரையென்றும், வரையப்பட்ட பாதை பரிதியென்றும் கூறப்படும்.

P(x, y) என்பது பரிதியிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாகவும் C(h, k) என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகவு மிருப்பின்,



$PC^2 = (x-h)^2 + (y-k^2) \equiv r^2$ (எனக்கொள்க). இச்சமன்பாடு (h, k)ஐ மையமாகவும், r ஐ ஆரையாகவும் உள்ள ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

வட்டத்தின் மையம் உற்பத்தியாயின், வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = r^2$ ஆகும்.

மறுதலையாக, புள்ளி P ஆனது அதன் ஆள்கூறுகள் (x, y) என்பன,

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்னும் தொடர்பிற்கு அமையும்வண்ணம் இயங்குமாயின் (இங்கு g, f, c என்பன ஒருமைகள்), P ஆனது ஒரு குறித்த வட்டத்தின் பரிதியில் இருக்குமெனக் காட்டலாம்.

$S=0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்,

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

இங்கு g^2+f^2-c ஒரு மாறிலியாகும்.

$(x+g)^2+(y+f)^2$ என்பது $P(x, y)$ என்னும் மாறும் புள்ளிக்கும் $C(-g, -f)$ என்னும் நிலைத்த புள்ளிகளுக்கு மிடைப்பட்ட தூரத்தின் வர்க்கத்தைக் குறிக்கும்.

ஆகவே புள்ளி P இனது ஒழுக்கு, $(-g, -f)$ ஐ மையமாகவும் $\sqrt{(g^2+f^2-c)}$ ஐ ஆரையாகவுமுடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதியாகும்.

$S=0$ என்னும் வட்டம் மெய்யாவதற்கு, அதன் ஆரை $\geqslant 0$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது $g^2+f^2-c\geqslant 0$ ஆகவேண்டும்.

$g^2+f^2-c=0$ ஆயின், $S=0$ ஆனது $(-g, -f)$ இல் ஒரு புள்ளி வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

மேலும் $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ என்னும் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்குமென முன்பு காட்டப்பட்டது. இதை பின்வருமாறு எழுதலாம்;

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

இது, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வடிவிலுள்ளது.

ஆகவே g, f, c என்பவை மெய்யொருமைகளாயிருக்க $g^2+f^2-c\geqslant 0$ ஆகும்போது, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்பது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

இதனை ஒரு வட்டத்தின் நியமச் சமன்பாடாகக் கொள்கிறோம்.

$ax^2+ay^2+2mx+2ny+p=0$ என்னும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை ஆராய்க.

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$x^2+y^2+\frac{2mx}{a}+\frac{2ny}{a}+\frac{p}{a}=0 \qquad (a\neq 0)$$

$$\left(x+\frac{m}{a}\right)^2+\left(y+\frac{n}{a}\right)^2=\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}-\frac{p}{a}$$

இவ்வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $=\left(-\frac{m}{a}\ ,\ -\frac{n}{a}\right)$

இதன் ஆரை $=\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{a^2}-\frac{p}{a}\right)}$ ஆகும்.

x, y இல் இரண்டாம் படியிலுள்ள ஒரு பொதுச் சமன்பாடு $ax^2+by^2+2hxy+gx+fy+c=0$, ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்க வேண்டுமாயின், (மேலுள்ள வட்டங்களின் சமன்பாடுகளுடன் ஒப்பிட்டு ஆராய்வதால்)

(1) x^2, y^2 என்பவற்றின் குணகங்கள் சமனுயிருக்க வேண்டும். அ-து $a=b$ ஆகவேண்டும்.

(2) xy இன் குணகம் பூச்சியமாயிருத்தல் வேண்டும், அ-து $h=0$ ஆகவேண்டும்.

(3) ஆரை $=\sqrt{\left(\frac{g^2}{4a^2}+\frac{f^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\geqslant 0$ ஆயின் மட்டுமே மெய் வட்டமுண்டு.

எனவே தந்த பொதுச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்க வேண்டுமாயின், அது $ax^2+ay^2+gx+fy+c=0$ என்னும் வடிவில் இருத்தல் வேண்டும்.

4·2 $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்தின் சில குறித்த நிலைகள்.

$S=0$ என்னும் வட்டம்

(1) உற்பத்தித் தானத்தில் மையமுடையதாயின், $g=f=0$ ஆகும். ஆகவே $S=x^2+y^2+c=0$ ஆகும்.

(2) உற்பத்தித் தானத்தூடு செல்லுமாயின் $c=0$ ஆகும். ஆகவே $S=x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ஆகும்.

A 5

(3) X-அச்சைத் தொடுமாயின், ஆரை = மையத்தின் Y-ஆள் கூறு.

$$\therefore \quad g^2+f^2-c=f^2; \quad \therefore \quad c=g^2$$

ஆகவே $S = x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ ஆகும்.

(4) Y-அச்சைத் தொடுமாயின், $c=f^2$ ஆகும்.
ஆகவே $S = x^2+y^2+2gx+2fy+f^2=0$ ஆகும்.

(5) இரு அச்சுக்களையும் தொடுமாயின், $c=g^2=f^2$ ஆகும்.
ஆகவே $S = x^2+y^2 \pm 2gx \pm 2gy+g^2=0$ ஆகும்.

(6) X-அச்சை உற்பத்தியில் தொடுமாயின், $c=g^2=0$ ஆகும்.
ஆகவே $S = x^2+y^2+2fy=0$ ஆகும்,

(7) Y-அச்சை உற்பத்தியில் தொடுமாயின், $c=f^2=0$ ஆகும்.
ஆகவே $S = x^2+y^2+2gx=0$ ஆகும்.

உதாரணம்:

(1) Y-அச்சை உற்பத்தித்தானத்தில் தொட்டுக்கொண்டு (1, 2) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்க. உற்பத்தியினூடாக இவ்வட்டம் செல்வதால் $c=0$ ஆகும். மேலும் இவ்வட்டம் Y-அச்சை உற்பத்தியில் தொடுவதால், அதன் மையம் X- அச்சில் கிடக்கவேண்டும். ஆகவே $f=0$ ஆகும்.

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2+y^2+2gx=0$ ஆகும்.

இது புள்ளி (1, 2) இனூடாகச் செல்வதால்,

$$1+4+2g=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad g=-\tfrac{5}{2}$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$x^2+y^2-5x=0$$

(2) f, g என்பவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ என்னும் வட்டம் X- அச்சைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

$(1, -2)$, $(3, -4)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் சென்று X-அச்சைத் தொடும் இரு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இவற்றின் மையங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரம் $5\sqrt{2}$ அலகுகள் எனக் காட்டுக.

x- அச்சைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + g^2 = 0$ என எழுதலாம்.

இவ்வட்டம் புள்ளிகள் $(1, -2)$, $(3 - 4)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$1 + 4 + 2g - 4f + g^2 = 0$$

$$9 + 16 + 6g - 8f + g^2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இவற்றைத் தீர்த்தலாற், $g^2 - 2g - 15 = 0$

$$(g + 3)(g - 5) = 0$$

$\therefore \quad g = -3$ அல்லது 5

$f = \quad 2$ அல்லது 10

ஆகவே வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

மையங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரம் $= \sqrt{[(3 + 2)^2 + (-5 + 10)^2]}$

$= 5\sqrt{2}$ அலகு.

3. y- அச்சை உற்பத்தியிலிருந்து 4 அலகு தூரத்தில் தொட்டுக்கொண்டு, x - அச்சில் 6 அலகு நீளத்துண்டை வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க,

இவ்வட்டம் y- அச்சைத் தொடுவதால், $f = -4$ ஆகும்.

$x = 0$ ஆகும்போது $y^2 + 2fy + c = 0$ ஆகும்.

வட்டம், y- அச்சைத் தொடுவதால் இச்சமன்பாட்டிற்குச் சமமான மூலகங்கள் இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad y^2 - 8y + c \equiv (y - 4)^2 = 0$$

ஆகவே $c = 16$ ஆகும்,

x - அச்சில் 6 அலகு நீள நாணை வெட்டுவதால், வட்டத்தின் ஆரை $= \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$

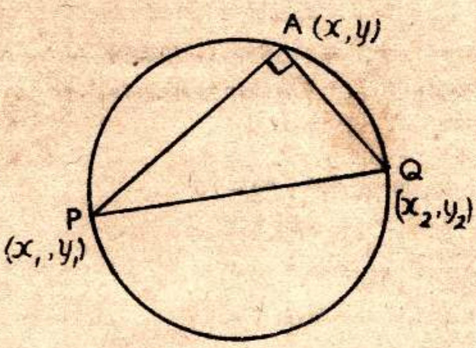
$= \sqrt{(g^2 + 16 - 16)}$

$\therefore \quad g = \pm 5$

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்;

$$x^2+y^2 \pm 10x - 8y + 16 = 0$$

4·3 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் வரையை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.



முறை 1

வட்டத்தின் பரிதியில் A (x, y) என்னும் ஏதாவதொரு புள்ளியை எடுக்கவும்.

$\therefore$ $\angle PAQ = 90^\circ$ ஆகும் ($\because$ PQ ஒரு விட்டம்)

AP இன் படித்திறன் $\times$ AQ இன் படித்திறன் $= -1$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

அ-து $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

இதுவே வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

முறை 2:

வட்டத்தின் மையம் $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

ஆரை $= \frac{1}{2}\sqrt{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]}$

வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]$$

இதனைச் சுருக்குவதால், பின்வரும் சமன்பாடு பெறப்படும்.

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$$

இதனைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

உதாரணம்

$(1, -2)$, $(-3, -4)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் வரையை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முறை 1:

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-1)(x+3)+(y+2)(y+4)=0$$

$$x^2+y^2+2x+6y+5=0$$

முறை 2:

$$\text{வட்டத்தின் மையம்}=\left(\frac{1-3}{2}, \frac{-2-4}{2}\right)=(-1, -3)$$

$$\text{அதன் (ஆரை)}^2=\tfrac{1}{4}(1+3)^2+\tfrac{1}{4}(-2+4)^2=5$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x+1)^2+(y+3)^2=5$$

$$x^2+y^2+2x+6y+5=0$$

4. 4 குறியீடுகள்

$$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c$$

$$= x\,x+y\,y+g\,(x+x)+f\,(y+y)+c$$

என்று குறிப்போமாயின்

$$S_1 = x\,x_1+y\,y_1+g\,(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$

$$S_{12} = x_1\,x_2+y_1\,y_2+g\,(x_1+x_2)+f\,(y_1+y_2)+c$$

$$S_{11} = x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+2gx_1+2fy_1+c$$

என்று குறிக்கலாம்.

4. 5 வட்டமும், நேர்கோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனவும், நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $U=lx+my+n=0$ எனவும் கொள்க.

$S = 0$ இன் ஆரை $= \sqrt{(g^2+f^2-c)}$

$S = 0$ இன் மையத்திலிருந்து $U = 0$ இற்குச் செங்குத்துத் தூரம் $= \left| \frac{-lg - mf + n}{\sqrt{(l^2 + m^2)}} \right|$

$$\left| \frac{-lg - mf + n}{\sqrt{(l^2 + m^2)}} \right| \ \substack{\leqslant \\ >} \ \sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$$

என்பதற்கேற்ப $S = 0$ உம், $U = 0$ உம் முறையே இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன அல்லது ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன அல்லது ஒருபோதும் இடைவெட்டா.

வேறு வழி

$S = 0$, $U = 0$ என்னும் சமன் பாடுகளைத் தீர்த்தலாற்,

$x^2 + \left(\frac{lx+n}{m}\right)^2 + 2gx - \frac{2f}{m}(lx+n) + c = 0$ என்னும் சமன்பாடு பெறப்படும்.

இது x இலுள்ள ஒரு இரு படிச் சமன்பாடாகும். இதன் தன்மைகாட்டி $\substack{\geqslant \\ <} 0$ என்பதற்கேற்ப இச்சமன்பாட்டிற்கு முறையே இரு வேறுவேறான, பொருந்தும் அல்லது கற்பனை மூலங்கள் உண்டு.

அதாவது $U=0$ ஆனது $S=0$ ஐ இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் வெட்டும் அல்லது தொடும் அல்லது வெட்டாது.

உதாரணம்:

வரை $2x-3y-1=0$ இல், வட்டம் $x^2+y^2+5x-9y-6=0$ வெட்டும் நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

தந்த இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்தலாற்,

$$\left(\frac{3y+1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{5}{2}(3y+1) - 9y - 6 = 0$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \quad y = 1 \text{ அல்லது } -1$$

$$x = 2 \text{ அல்லது } -1$$

வட்டமும், வரையும் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $(2, 1)$, $(-1, -1)$.

நாணின் நீளம் $= \sqrt{[(2+1)^2 + (1+1)^2]} = \sqrt{13}$ அலகுகள்.

உ—ம்

$3x-4y+k=0$ என்னும் கோடு, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு ஒரு தொடலியாயின் k ஐக் காண்க.

முறை (i) வட்டத்தின் மையம் $= (2, 1)$

அதன் ஆரை $= \sqrt{(4+1-4)} = 1$

புள்ளி $(2, 1)$ இலிருந்து $3x-4y+k=0$ இன் செங்குத்துத் தூரம் = வட்டத்தின் ஆரை

$$\therefore \quad \frac{6-4+k}{5} = \pm 1$$

$$k = 3 \text{ அல்லது } -7$$

முறை (ii) வட்டமும் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளின் y ஆள்கூறுகள் பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படும்;

$$\left(\frac{4y-k}{3}\right)^2 + y^2 - \frac{4}{3}(4y-k) - 2y + 4 = 0$$

$$25y^2 - y(8k+66) + k^2 + 12k + 36 = 0$$

$$25y^2 - y(8k+66) + (k+6)^2 = 0$$

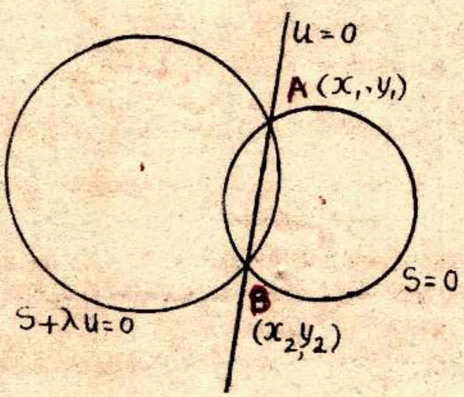
y இற்குப் பெருந்தும் மூலங்கள் இருப்பின்,

$[5y \pm (k+6)]^2 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad (8k+66) = \pm 2 \times 5(k+6$$

$$\therefore \quad k = 3 \text{ அல்லது } -7$$

4·6 ஒரு வட்டமும் ஒரு கோடும் வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள்



$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$
$$U = lx + my + n = 0$$

என்பன ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும், முறையே ஒரு வட்டத்தினதும் ஒரு நேர் கோட்டினதும் சமன்பாடுகளாகுக.

λ என்பது x, y ஐச் சாராத ஒரு பரமானமாகுக;

$S + \lambda U = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை ஆராய்க. இது λ இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$S = 0$ உம் $U = 0$ உம் ஒன்றையொன்று $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றனவெனக் கொள்க.

ஆகவே $S_{11} = 0$; $S_{22} = 0$
$U_1 = 0$; $U_2 = 0$ ஆகும்.

எனவே λ இன் எம் மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும்
$S_{11} + \lambda U_1 = 0$;
$S_{22} + \lambda U_2 = 0$ ஆகும்.

அதாவது $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகள் $S + \lambda U = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றன. அதாவது $S + \lambda U = 0$ என்னும் வட்டம், புள்ளிகள் A, B இனூடாகச் செல்கின்றது.

ஆகவே, λ இன் எம் மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும் $S + \lambda U = 0$ என்னும் வட்டம், $S = 0$ என்னும் வட்டமும், $U = 0$ என்னும் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது.

உ-ம்:

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ என்னும் வட்டமும் $x + y + 9 = 0$ என்னும் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடாகச் சென்று, x-அச்சைத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$, $x + y + 9 = 0$ என்பவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \lambda(x + y + 9) = 0$ ஆகும், இங்கு λ ஒரு பரமானம்.

இதன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $= [-(2 + \lambda), -(2 + \lambda)]$
இதன் ஆரை $= \sqrt{[(2 + \lambda)^2 + (2 + \lambda)^2 + 2 - 9\lambda]}$
இவ்வட்டம் x-அச்சைத் தொடுவதால்,
$(2 + \lambda)^2 = (2 + \lambda)^2 + (2 + \lambda)^2 + 2 - 9\lambda$ ஆகும்.

அ-து $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\therefore \quad \lambda = 2$ அல்லது 3

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்;

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5x + 5y + 25 = 0$$

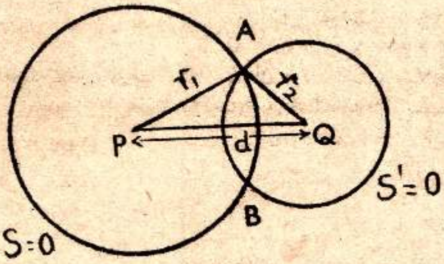
4. 7 இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்:

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S^1 \equiv x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0$$

என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக.

இவ்விரு வட்டங்களினதும் ஆரைகள் முறையே r_1, r_2 உம், அவற்றின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் d உம் எனக் கொள்க.



r_1, r_2, d எனும் நீளப் பக்கங்களுடைய ஒரு முக்கோணி வரைய முடியுமாயின், $S = 0$ உம் $S^1 = 0$ உம் இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் வெட்டும்.

முக்கோணி APQ இல்

இரு பக்கங்களின் வித்தியாசம் < மூன்றாவது பக்கம் < இரு பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

அதாவது, $AP \backsim AQ < PQ < AP + AQ$

$r_1 \backsim r_2 < d < r_1 + r_2$ ஆகும்.

(i) $r_1 \backsim r_2 = d$ எனின், இரு வட்டங்களும் உள்ளாகத் தொடும்

(ii) $r_1 + r_2 = d$ எனின், இருவட்டங்களும் வெளியாகத் தொடும்.

(iii) $r_1 + r_2 < d$ எனின், வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டா. (அவை ஒன்றுக்கொன்று வெளியாகக் கிடக்கும்)

(iv) $r_1 \sim r_2 > d$ எனின், வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டா. (சிறு வட்டம் பெருவட்டத்திற்குள் கிடக்கும்).

உதாரணம்:

$$x^2+y^2-2x-4y+4=0, \quad x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டா எனக் காட்டுக. முதலாவது வட்டம் மற்றையதனுள் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

முதலாவது வட்டத்தின் ஆரை $= \sqrt{(1+4-4)} = 1$

அதன் மையம் $= (1, 2)$

இரண்டாவது வட்டத்தின் ஆரை $= \sqrt{(4+1+20)} = 5$

அதன் மையம் $= (2, -1)$

மையங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரம் $= \sqrt{(1+9)} = \sqrt{10}$

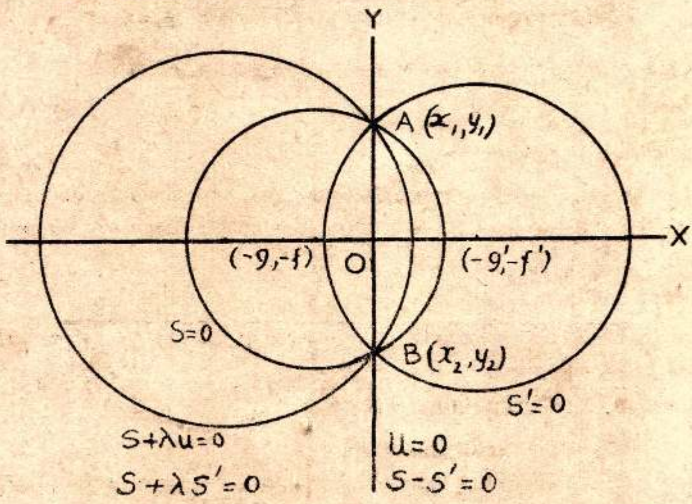
ஆரைகளின் வித்தியாசம் $= 5-1 = 4 > \sqrt{10}$

ஆகவே இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டா. மேலும் முதலாவது வட்டம் இரண்டாவது வட்டத்துள் கிடக்கும்.

4.8 இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள்.

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0;$

$S^1 \equiv x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$ என்பன ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் இருவட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக.



$S + \lambda S^1 = 0 \; (\lambda \neq -1)$ என்னும் சமன்பாட்டை ஆராய்க. இங்கு λ ஆனது x, y ஐச் சாராத ஒரு பரமானமாகும்.

இச்சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$S = 0$, $S^1 = 0$ என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிகளை $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, $S_{11} = 0$, $S_{22} = 0$

$S^1_{11} = 0$, $S^1_{22} = 0$ ஆகும்.

λ இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$$S_{11} + \lambda S_{22} = 0$$

$$S^1_{11} + \lambda S^1_{22} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகள் $S + \lambda S^1 = 0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கின்றன.

அதாவது $S + \lambda S^1 = 0$ என்னும் வட்டம் A, B என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்கின்றது.

ஆகவே λ இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $(\lambda \neq -1)$, $S + \lambda S^1 = 0$ என்னும் சமன்பாடு $S = 0, S^1 = 0$ என்னும் வட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது.

(i) $\lambda = -1$ எனின், $S - S^1 = 0$ ஆகும்.

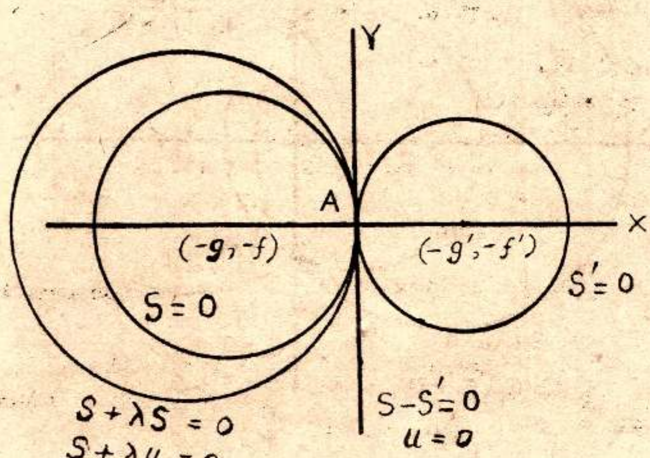
$S - S^1 = 2(g - g^1)x + 2(f - f^1)y + c - c^1 = 0$

இது A, Bயினூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

(ii) $\lambda = 0$ ஆயின், $S = 0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

(iii) $\lambda \longrightarrow \infty$ ஆக, $S + \lambda S^1 = \dfrac{S}{\lambda} + S^1 \longrightarrow S^1$ ஆகும்.

ஆகவே $S^1 = 0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.



$S = 0$ உம் S^1 உம் தொடுமாயின் $S + \lambda S^1 = 0$ அவற்றின் தொடுபுள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

$S - S^1 = 0$ அவற்றின் பொதுத் தொடலியைக் குறிக்கும்.

உதாரணம்:-

$x^2+y^2+x-2y+1 = 0$, $x^2+y^2+3x-y-2 = 0$ என்னும் வட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வதும்,

(a) புள்ளி $(1, 0)$ இனூடாகச் செல்வதுமான வட்டம்;

(b) $\sqrt{5}$ அலகு ஆரையுடைய வட்டம்; ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தந்த வட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை,

$x^2+y^2+x-2y+1+\lambda(x^2+y^2+3x-y-2) = 0$ என எழுதலாம்.

இங்கு λ ஒரு பரமானம் $(\neq 1)$ ஆகும். ——— (1)

(a) இவ்வட்டம் புள்ளி $(1, 0)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$1+0+1-0+1+\lambda(1+0+3-0-2)=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \lambda = -3/2$$

ஆகவே வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+7x+y-8 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

(b) சமன்பாடு (1) ஐப் பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

$$(1+\lambda)(x^2+y^2)+(1+3\lambda)x-(2+\lambda)y+1-2\lambda = 0$$

$$\text{இவ்வட்டத்தின் (ஆரை)}^2 = \left[\frac{1+3\lambda}{2(1+\lambda)}\right]^2 + \left[\frac{2+\lambda}{2(1+\lambda)}\right]^2 - \frac{1-2\lambda}{1+\lambda}$$
$$= 5$$

இதனைச் சுருக்குவதால்,

$$9\lambda^2+7\lambda-2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \lambda = -1 \text{ அல்லது } 2/9 \quad (\lambda \neq -1)$$

ஆகவே வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$11(x^2+y^2)+15x-20y+5=0 \text{ ஆகும்.}$$

4.9 வட்டம் $S=0$ இன் பரிதியை வட்டம் $S^1=0$ சமகூறிடுவதற்குரிய நிபந்தனை.

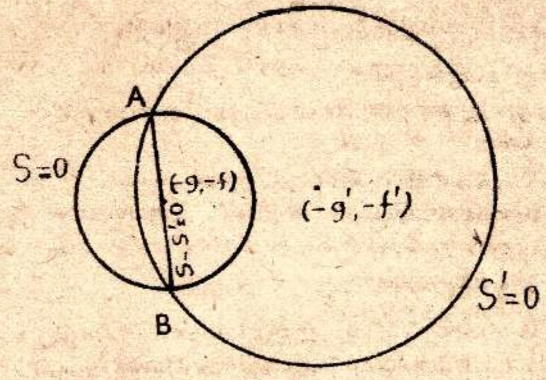
வட்டம் $S^1=0$ ஆனது வட்டம் $S = 0$ இன் பரிதியைச் சமகூறிடுமாயின் $S=0$ இன் மையம் $(-g, -f)$ ஆனது இருவட்டங்களினதும் பொதுநாண் $S-S^1=0$ இற் கிடக்கும்.

$$S - S^1 = 2(g - g^1)x + 2(f - f^1)y + c - c^1 = 0$$

$(-g, -f)$ இதிற் கிடத்தலால்,

$$-2(g - g^1)g - 2(f - f^1)f + c - c^1 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அ-து $\quad 2g(g - g^1) + 2f(f - f^1) - c - c^1 = 0$



உ-ம்: *(1, 0), (0, -1)* எனும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டங்களில் இரண்டின் பரிதிலைய, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 14 = 0$ என்னும் வட்டம் சமகூறிடுமென நிறுவி, அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க.

இவ்வட்டம் *(1, 0), (0, -1)* என்னும் புள்ளிகளூடாகச் செல்வதால்,

$$2 + 2g + c = 0;$$

$$2 - 2f + c = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே $\quad g = -f$

$$c = -2g - 2$$

வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2gx - 2gy - 2g - 2 = 0$$

இவ்வட்டத்தின் பரிதியை வட்டம் $x^2+y^2-2x+4y-14=0$ ஆனது சமகூறிடுவதால், பொது நாணில் முந்திய வட்டத்தின் மையம் $(-g, g)$ இருக்கவேண்டும்.

பொது நாணின் சமன்பாடு,

$$(2g+2)x-(2g+4)y-2g+12=0$$ ஆகும்.

$(-g, g)$ இதிற் கிடத்தலாற்,

$-g(2g+2)-g(2g+4)-2g+12=0$ ஆகும்.

அ-து $4(g^2+2g-3)=0$

$\therefore$ $g=1$ அல்லது -3

$f=-1$ அல்லது 3

$c=-4$ அல்லது 4

g, f இற்கு இரு பெறுமானங்கள் இருப்பதால் இரு வட்டங்கள் கீறலாம். அவற்றின் சமன்பாடுகள்,

$$x^2+y^2+2x-2y-4=0$$

$$x^2+y^2-6x+6y+4=0$$ ஆகும்.

4.10 $S=0$ என்னும் வட்டம் குறித்து புள்ளி $P(x_1, y_1)$ இன் நிலை

$S=0$ இன் ஆரை $=\sqrt{(g^2+f^2-c)}$

$S=0$ இன் மையத்திற்கும் புள்ளி (x_1, y_1) இற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $=\sqrt{[(x_1+g)^2+(y_1+f)^2]}$

ஆகவே, $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \gtreqless g^2+f^2-c$

அதாவது, $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \gtreqless 0$

என்பதற்கேற்றவாறு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ ஆனது முறையே வட்டத்திற்கு வெளியே அல்லது வட்டத்தில் அல்லது வட்டத்திற்குள் கிடக்கும்.

உதாரணம்:

உற்பத்தியும், $(-1, 3)$ என்னும் புள்ளியும் $3x^2+3y^2+8x-10y+1=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு முறையே வெளியிலும், உள்ளும் கிடக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் $(0, 0)$, $(-1, 3)$ என்பவற்றைப் பிரதியிடும்போது,

$$0+1>0$$

$$3+27-8-30+1<0$$

ஆகவே உற்பத்தியானது வட்டத்திற்கு வெளியிலும், புள்ளி $(-1, 3)$ ஆனது வட்டத்திற்குள்ளும் கிடக்கின்றன.

4.11 S=0 என்னும் வட்டத்திற்கு P $(x_1\ y_1)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு.

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

இச்சமன்பாட்டை x சார்பாக வகையிடுவதால்,

$$2x+2y.\frac{dy}{dx}+2g+2f.\frac{dy}{dx}=0 \text{ ஆகும்.}$$

P இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $= -\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

P இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு;

$$y-y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)$$

$xx_1+yy_1+gx+fy-x_1^2-y_1^2-gx-fy=0$

$P(x_1, y_1)$ வட்டத்தில் இருப்பதால்,

$x_1^2+y_1^2+2gx_1+fy_1+c=0$ ஆகும்.

$x_1^2+y_1^2$ இற்குப் பிரதியிடுவதால்,

$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

இதனை $S_1=0$ என எழுதலாம்.

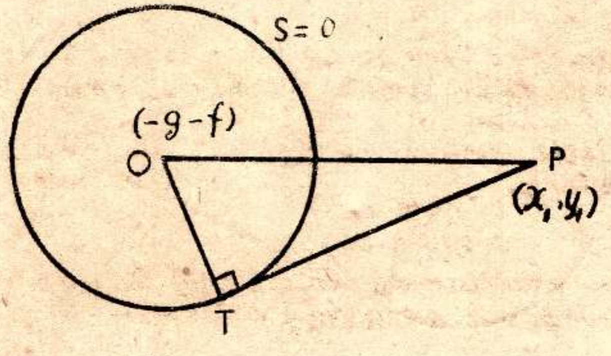
உ-ம்: $x^2+y^2-4x+2y-27=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு, புள்ளி $(-2, 3)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தொடலியின் சமன்பாடு, $S_1=0$ ஆகும்.

அதாவது,

$-2x+3y-2(x-2)+(y+3)-27=0;\ x-y+5=0$

4.12 P (x_1, y_1) என்னும் வெளிப்புள்ளியிலிருந்து S=0 இற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளம்.



வட்டம் S = 0 இற்கு புள்ளி P இலிருந்து வரைந்த ஒரு தொடலி PT ஆகும். O வட்டத்தின் மையமெனின்,

$$PT^2 = PO^2 - OT^2$$
$$= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

தொடலியின் நீளம் $= \sqrt{(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)} = \sqrt{S_{11}}$

குறிப்பு:

(i) P வட்டத்திற்கு வெளியிலிருப்பின் $S_{11} < 0$ ஆகும்.

(ii) P வட்டத்தில் இருப்பின் $S_{11} = 0$ ஆகும்.

(iii) P வட்டத்திற்குள் இருப்பின் $S_{11} < 0$ ஆகும். ஆகவே தொடலிகள் கீற இயலாது.

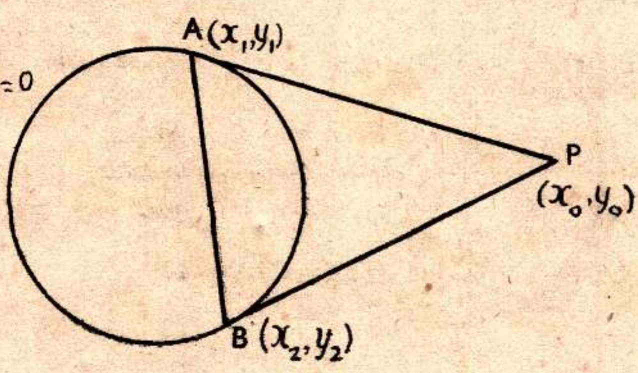
உ – ம்:

ஒரு மாறும் புள்ளி P ஆனது, அதனிலிருந்து $x^2+y^2-3x-2x+1=0$ என்னும் வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலியின் நீளம் 1 அலகு ஆகவிருக்குமாறு அசைகின்றது. P இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

$P \equiv (h, k)$ எனக் கொள்க.

P இலிருந்து, வட்டம் $x^2+y^2-3x-2x+1=0$ இற்குக் கீறிய தொடலியின் $(\text{நீளம்})^2 = h^2+k^2-3h-2k+1=1$
ஆகவே நடை ஆள்கூறுகளுக்கு மாற்றுவதால் புள்ளி P இன் ஒழுக்கு, $x^2+y^2-3x-2y=0$ என்னும் வட்டமாகும்.

4.13 தொடுகை நாண்



ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாண் தொடுகை நாண் எனப்படும்.

PA, PB என்பவை புள்ளி P லிருந்து வட்டம் $S = 0$ இற்குக் கீறிய இரு தொடலிகளாகும். வட்டத்துடன் இத்தொடலிகளின் தொடு புள்ளிகள் A, B ஐ இணைக்கும் நாண் AB ஒரு தொடுகை நாணாகும்.

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$, $P \equiv (x_0, y_0)$ என்க.

PA இன் சமன்பாடு; $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

PB இன் சமன்பாடு; $xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0$

(x_0, y_0) இவ்விரு கோடுகளிலும் கிடத்தலால்,

$$x_0x_1 + y_0y_1 + g(x_0 + x_1) + f(y_0 + y_1) + c = 0$$

$$x_0x_2 + y_0x_2 + g(x_0 + x_2) + f(y_0 + y_2) + c = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகள்

$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$ என்னும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றன. (அதாவது இக்கோடு A, B இனூடாகச் செல்கிறது.)

எனவே இதுவே தொடுகை நாண் AB இன் சமன்பாடாகும்.

உதாரணம்:

நேர்வரை $x - y + 2 = 0$ இலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி P இலிருந்து வட்டம் $2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண், புள்ளி $(2, -1)$ இனூடாகச் செல்கின்றது. P இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$P \equiv (h, k)$ என்க.

P இலிருந்து வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு,

$2xh + 2yk + 2(x + h) + 3(y + k) + 1 = 0$ ஆகும்.

இது புள்ளி $(2, -1)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$4h - 2k + 2(2 + h) + 3(-1 + k) + 1 = 0$ ஆகும்.

அ-து $6h + k + 2 = 0$ ———— (1)

P ஆனது $x - y + 2 = 0$ இற் கிடத்தலால்,

$$h - k + 2 = 0 \text{ ———— } (2)$$

A 6

(1), (2) ஐத் தீர்த்தலால்,

$$h = -4/7,\ k = 10/7 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே $P \equiv (-4/7,\ 10/7)$ ஆகும்.

4.14 $P(x_1, y_1)$ என்னும் வெளிப்புள்ளியிலிருந்து $S = 0$ என்னும் வட்டத்திற்குரிய தொடலிகள்.

P இனூடாகச் செல்லும் m படிதிறனுடைய ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ ஆகும்.}$$

இது, வட்டம் $S=0$ இற்கு ஒரு தொடலியாயின், இவ்வட்டத்தின் ஆரை = மையத்திலிருந்து இக்கோட்டின் செங்குத்துத்தூரம்

$$\text{அ-து } g^2 + f^2 - c = \frac{(-f + mg - y_1 + mx_1)^2}{1 + m^2}$$

இது m இலுள்ள ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

(i) இதன் தன்மைகாட்டி $\triangle > 0$ ஆயின், m இற்கு இரு வேறு வேறான பெறுமானங்கள் உண்டு ஆகவே P இலிருந்து வட்டம் $S = 0$ இற்கு இரு தொடலிகள் கீறலாம்.

(ii) $\triangle = 0$ ஆயின், m இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு. மற்றைய தொடலி y-அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும். அதன் சமன்பாடு $x - x_1 = 0$ ஆகும்.

(iii) $\triangle < 0$ ஆயின் m இற்கு மெய்ப்பெறுமானங்கள் இல்லை. ஆகவே தொடலிகள் கீற இயலாது.

உதாரணம்:

புள்ளி (1, 2) இலிருந்து வட்டம் $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ இற்குக் கீறிய இரு தொடலிகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

புள்ளி (1, 2) இனூடாகச் செல்லும் எக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும்

$$y - 2 = m(x - 1) \text{ என எழுதலாம்.}$$

வட்டத்தின் மையம் = (3, 1)

வட்டத்தின் ஆரை $= \sqrt{(9 + 1 - 9)} = 1$

$(3, 1)$ இலிருந்து $mx - y + 2 - m = 0$ இன் செங்குத்துத் தூரம்

$$= \left| \frac{3m - 1 + 2 - m}{\sqrt{(1 + m^2)}} \right| = 1$$

$$3m^2 + 4m = 0$$

$$\therefore \quad m = 0 \text{ அல்லது } -4/3$$

தொடலிகளின் சமன்பாடுகள்,

$$y - 2 = 0$$

$$4x + 3y - 10 = 0$$

(ii) புள்ளி $(1, 2)$ இலிருந்து வட்டம் $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடு புள்ளிகளைக் காண்க.

புள்ளி $(1, 2)$ இலிருந்து வட்டத்திற்குக், கீறிய தொடுகை நாணின் சமன்பாடு,

$$x + 2y + 2(x + 1) + (y + 2) - 4 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அ-து} \quad x + y = 0$$

$x + y = 0$ ஐயும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் தீர்த்தலால்;

$$x^2 + x^2 + 4x - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore \quad x = 1 \text{ அல்லது } -2$$

$$y = -1 \text{ அல்லது } 2$$

தொடு புள்ளிகள்: $(1, -1); (-2, 2)$

(iii) ஒரு மாறும் புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ என்னும் வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண், $x^2 + y^2 = 1$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. இம் மாறும் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

மாறும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை (h, k) எனக் கொள்க.

முதலாவது வட்டத்திற்கு (h, k) இலிருந்து கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண்,

$$hx + ky + (x + h) - 3(y + k) - 1 = 0 \text{ ஆகும்;}$$

இது $x^2+y^2=1$ இற்கு தொடலியாக இருத்தற்கு புள்ளி (0, 0) இலிருந்து இதன் செங்குத்துத்தூரம் = ஆரை = 1 ஆகவேண்டும்.

$$\therefore \quad 1 = \frac{(h-3k-1)^2}{(h+1)^2+(k-3)^2}$$

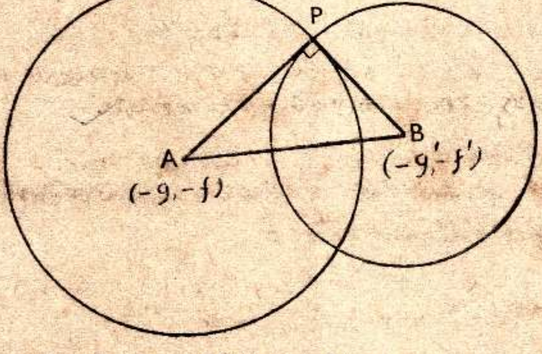
$$(h-3k-1)^2 = (h+1)^2+(k-3)^2$$

$$8k^2-4h+12k-6hk-9=0$$

ஆகவே புள்ளி (h, k) இன் ஒழுக்கு,

$$8y^2-4x+12y-6xy-9=0$$

4.15 இரு வட்டங்களுக் கிடைப்பட்ட கோணம்; நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும் வட்டங்கள்,



$$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0;$$
$$S^1 \equiv x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$$

என்பன ஒன்றையொன்று P, Q என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டும் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக.

வெட்டுப் புள்ளி P இல் (அல்லது Q இல்) ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் உரிய தொடலிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் அவ் வட்டங்களுக்கிடைப்பட்ட கோண மெனப்படும்.

இக் கோணம் ஒரு செங்கோணமாயின், வட்டங்கள் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன வெனப்படும்.

இவ்வகையில் வெட்டுப்புள்ளி P இல் (அல்லது Q இல்) ஒவ்வொரு வட்டத்திற்குமுரிய தொடலி மற்றைய வட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும்.

படத்தில் **A, B** என்பவை முறையே வட்டங்கள் $S = 0, S^1 = 0$ இன் மையங்களாகும். **PB, PA** என்பவை இவ்வட்டங்களுக்கு **P** இலுள்ள தொடலிகளாகும்.

கோணம் **APB** ஒரு செங்கோணமாகும்.

$\therefore \quad AB^2 = AP^2 + BP^2$ ஆகும்.

$$(g - g^1)^2 + (f - f^1)^2 = g^2 + f^2 - c + g^{12} + f^{12} - c^1$$

அ-து $\quad 2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

இதுவே $S = 0,\ S^1 = 0$ என்னும் இரு வட்டங்கள் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுதற்குரிய நிபந்தனையாகும்.

உதாரணம்:

(i) $S_1 = 4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y - 11 = 0,$

$S_2 = 4x^2 + 4y^2 - 60x + 48y + 173 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றனவெனக் காட்டுக.

$S = 12(x^2 + y^2) - 92x + 171 = 0$ என்னும் வட்டம் மேற்கூறிய இரு வட்டங்களையும் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.

$S_1 = 0$ இன் மையம் $= (3/2,\ 2)$

அதன் ஆரை $= \sqrt{\left(\frac{9}{4} + \frac{16}{4} + \frac{11}{4}\right)} = 3$

$S_2 = 0$ இன் மையம் $= \left(\frac{15}{2},\ -6\right)$

அதன் ஆரை $= \sqrt{\left(\frac{225}{4} + \frac{144}{4} - \frac{173}{4}\right)} = 7$

மையங்களுக்கிடைப்பட்டதூரம் $= \sqrt{\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{15}{2}\right)^2 + (2+6)^2\right]} = 10$

ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை $= 10$

ஆகவே இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன.

$S = 0$ இன் மையம் $= \left(\frac{23}{6},\ 0\right)$

$S = 0$, $S_1 = 0$ என்னும் வட்டங்களுக்கு,
$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ என்னும் சூத்திரத்தின்படி

$$\text{இ. கை. ப.} = 2 \times \frac{23}{6} \times \frac{3}{2} + 0 = \frac{23}{2}$$

$$\text{வ. கை. ப.} = \frac{171}{12} - \frac{11}{4} = \frac{23}{2}$$

ஆகவே இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன.

இவ்வாறே $S = 0$, $S_2 = 0$ என்னும் வட்டங்களுக்கும்

$$2gg^1 + 2ff^1 = 2 \times \frac{23}{6} \times \frac{15}{2} + 0 = \frac{115}{2}$$

$$c + c^1 = \frac{171}{12} + \frac{173}{4} = \frac{115}{2}$$

ஆகவே $S = 0$, $S_5 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன.

(2) $S_1 = x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

$S_2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$ என்னும் வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகளினூடாகச் சென்று $S_1 = 0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ என்னும் வட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8) = 0$ ஆகும்.

இங்கு λ ஒரு பரமானம்.

அ-து $x^2 + y^2 + \dfrac{2(2-\lambda)}{1+\lambda}x - \dfrac{2(3-4\lambda)}{1+\lambda} - \dfrac{3+8\lambda}{1+\lambda} = 0$ ஆகும்.

இவ்வட்டம் $S_1 = 0$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதால்,

$$2.2.\frac{(2-\lambda)}{1+\lambda} + 2(-3)\left(-\frac{3-4\lambda}{1+\lambda}\right) = -3 - \frac{3+8y}{1+\lambda} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \lambda = \frac{32}{17}$$

வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$49(x^2 + y^2) + 4x + 154y - 307 = 0$$

எடுத்துக் காட்டுகள்

1. $(-1, 2)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் வட்டம் S இன் பரிதியை, $x^2+y^2-4x-6y+1=0$ என்னும் வட்டம் சமகூறிடுகின்றது. S இன் மையம் $x^2+y^2-x-5y+3=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

S இன் சமன்பாட்டை $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்க. இதுபுள்ளி $(-1, 2)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$1+4-2g+4f+c=0 \text{ ஆகும் } \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

தந்த வட்டத்தினதும், $S=0$ இனதும் பொதுநாணின் சமன்பாடு;

$$(2g+4)x+(2f+6)y+c-1=0$$

S இன் மையம் $(-g, -f)$, இதிற் கிடத்தலாற்,

$$-g(2g+4)-f(2f+6)+c-1=0 \text{ ஆகும்.}$$

அ-து $-2g^2-2f^2-4g-6f+c-1=0$

(i) இலிருந்து c இற்குப் பிரதியிடுவதால்,

$$g^2+f^2+g+5f+3=0 \text{ ஆகும்.}$$

$-g=x$, $-f=y$ எனப் பிரதியிடுவதால், S இன் மையத்தின் ஒழுக்கு,

$$x^2+y^2-x-5y+3=0 \text{ ஆகும்.}$$

2. $(1, 2)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட்டம் S இற்குக் கீறப்பட்ட தொடலியின் நீளம் அதன் ஆரையின் அரை மடங்காகும். S ஆனது, $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ என்னும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றது. S இன் மையத்தின் ஒழுக்கைக் காண்க.

S இன் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

புள்ளி $(1, 2)$ இலிருந்து S இற்குக் கீறிய தொடலியின் $(\text{நீளம்})^2$

$$=1+4+2g+4f+c=\tfrac{1}{4}(g^2+f^2-c)$$

$$\therefore \quad g^2+f^2-8g-16f-20-5c=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

S ஆனது வட்டம் $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ ஐ நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுவதால்,

$$2g.2+2f.1=c+1 \text{ ஆகும்.}$$
$$\therefore \quad c=4g+2f-1$$

(i) இல் c இற்குப் பிரதியிடுவதால்,

$$g^2+f^2-28g-26f-15=0 \text{ ஆகும்.}$$

$-g=x,\ -f=y$ எனப் பிரதியிடுவதால் S இன் மையத்தின் ஒழுக்கு;

$$x^2+y^2+28x+26y-15=0$$

3 கோடு $lx+my+n=0$ என்பது வட்டம் $(x-x_0)^2+(y-y_0)=r^2$ ஐத் தொடுமாயின், $(lx_0+my_0+n)^2=r^2(l^2+m^2)$ எனக் காட்டுக.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரை ஓரலகு. அதன் மையம் முதலாம் கால்வட்டத்துள் கிடக்கின்றது. அது x- அச்சையும், கோடு $3y=4x$ ஐயும் தொடுகின்றது. வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ் வட்டம் கோடு $3x+4y=15$ ஐத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

x-அச்சு, கோடுகள் $3y=4x$, $3x+4y=15$ என்பவற்றைத் தொடும் முதலாம் கால் வட்டத்துள் தனது மையத்தைக் கொண்ட இன்னொரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ எனக் கொள்க.

இவ்வட்டம் x- அச்சைத் தொடுவதால், $y_0=r=1$ ஆகும்.
$4x=3y$ ஐத் தொடுவதால்,

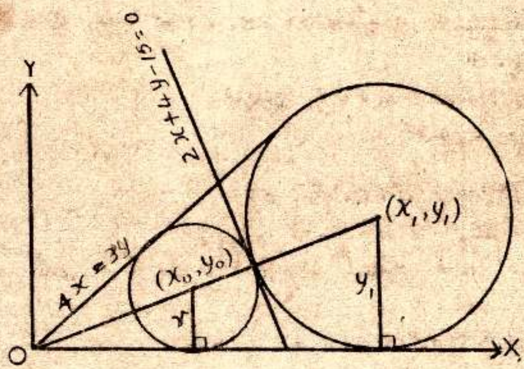
$$(4x_0-3y_0)^2=r^2(4^2+3^2)=25$$
$$4x_0-3y_0=\pm 5$$

$y_0=1$ எனப் பிரதியிடுவதால், $x_0=-\frac{1}{2}$ அல்லது 2 ஆகும்.

வட்டத்தின் மையம் முதலாம் கால்வட்டத்துள் இருப்பதால் $x_0=2$ ஆகும்.

ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$
$$x^2+y^2-4x-2y+4=0$$



இவ் வட்டத்தின் மையம் (2, 1) இலிருந்து கோடு $3x+4y-15=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்துத் தூரம்

$$= \left|\frac{6+4-15}{5}\right| = 1 = \text{வட்டத்தின் ஆரை}$$

ஆகவே கோடு $3x+4y-15=0$, இவ்வட்டத்தைத் தொடுகின்றது.

கோடுகள் $y=0$, $4x=3y$, $3x+4y-15=0$ என்பவற்றைத் தொடும் இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் (x_1, y_1) எனக் கொள்க.

ஆகவே $\frac{r}{y_1} = \frac{x_0}{x_1}$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{1}{y_1} = \frac{2}{x_1}; \quad x_1 = 2y_1$$

(x_1, y_1) இலிருந்து, கோடு $3x+4y-15=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளம்

$$= \left|\frac{3x_1+4y_1-15}{5}\right| = y_1$$

$$3x_1+4y_1-15 = \pm 5y_1$$

$$6y_1+4y_1-15 = \pm 5y_1$$

$$y_1 = 1 \text{ அல்லது } 3$$

$$x_1 = 2 \text{ அல்லது } 6$$

இரண்டாவது வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$(x-6)^2+(y-3)^2 = 9$$

அ-து $x^2+y^2-12x-6y+36=0$

4. வட்டம் $x^2+y^2=4$ உம், கோடு $x+y=1$ உம் வெட்டும் புள்ளிகளுக் கூடாக ஒரு மாறும் வட்டம் சென்று வட்டம் $x^2+y^2-2x-1=0$ ஐ, புள்ளிகள் P, Q இல் வெட்டுகின்றது. P, Q ஆனது ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

வட்டம் $x^2+y^2-4=0$ உம் கோடு $x+y-1=0$ உம் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2+y^2-4+\lambda(x+y-1)=0$ ஆகும். இங்கு λ ஒரு சாராமாறியாகும்.

இவ்வட்டத்தினதும், வட்டம் $x^2+y^2-2x-1=0$ இனதும் பொது நாண் PQ ஆகும். இதன் சமன்பாடு,

$$\lambda(x+y-1)-4+2x+1=0 \text{ ஆகும்.}$$

அ-து $2x-3+\lambda(x+y-1)=0$

இது $2x-3=0$, $x+y-1=0$ என்னும் நிலையான கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி $(3/2, -\frac{1}{2})$ இனூடாகச் செல்லும் கோட்டைக் குறிக்கும்.

5. ஒருமைகள் p, q இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $S_1=(x-a)(x-a+p)+(y-b)(y-b+q)-r^2=0$ என்னும் வட்டம் $S_2=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியைச் சமகூறிடுகின்றதெனக் காட்டுக.

$x^2+y^2+2y-3=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை சமகூறிட்டு $x-y=0$ ஐ உற்பத்தியில் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பொது நாணின் சமன்பாடு, $S_1-S_2=0$ ஆகும்.

அ-து $(x-a)p+(y-b)q=0$

$S_2=0$ இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $= [a, b]$

ஆகவே p, q இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் புள்ளி (a, b) பொதுநாண் $(x-a)p+(y-b)q=0$ இற் கிடக்கின்றது.

அதாவது $S_1 = 0$ என்னும் வட்டம் $S_2=0$ இன் பரிதியைச் சமகூறிடுகின்றது.

$x^2+y^2+2y-3 = x^2+(y+1)^2-4 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியைச் சமகூறிடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை,

$x(x+p)+(y+1)(y+1+q)-4=0$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $x^2+y^2+px+(q+2)y+q-3=0$

இது உற்பத்தியூடு செல்வதால், $q=3$ ஆகும்.

ஆகவே $x^2+y^2+px+5y=0$ ஆகும்.

இவ்வட்டம் $x-y=0$ ஐத் தொடுவதால்,

$$\left(\frac{-p/2+5/2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{p^2}{4}+\frac{25}{4}$$ ஆகும்.

$p^2+10p+25=0;\ (p+5)^2=0;\ \therefore\ p=-5$

வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு;

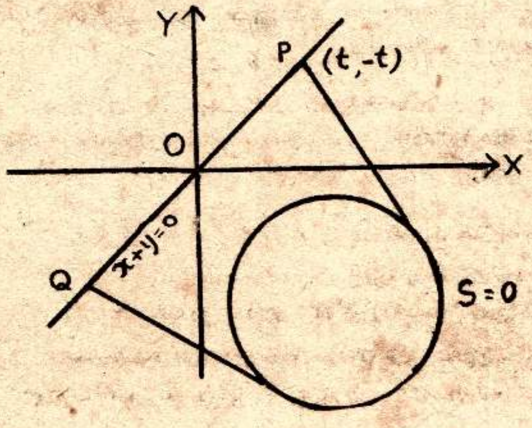
$$x^2+y^2-5x+5y=0$$

5. P, Q என்பவை கோடு $x+y=0$, இலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். வட்டம் $S \equiv x^2+y^2-2x+4y+1=0$ இற்கு P, Q களிலிருந்து வரைந்த ஒவ்வொரு தொடலியினது நீளமும் 3 அலகுகள் ஆயின், P, Q என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

P, Q இனூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளிகள் P, Q இனூடாகச் சென்று $S=0$ இன் பரிதியை சமகூறிடுகின்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2+y^2+x+7y-8=0$ எனக் காட்டுக.



P இன் ஆள்கூறுகளை $(t, -t)$ எனக் குறிக்கலாம்.

P இலிருந்து $S = 0$ இற்குக் கீறிய தொடலியின் நீளம்

$$\sqrt{(t^2 + t^2 - 2t - 4t + 1)} = 3$$

$$2t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$2(t + 1)(t - 4) = 0$$

$$\therefore \quad t = -1 \text{ அல்லது } 4$$

$$P \equiv (-1, 1), \quad Q \equiv (4, -4)$$

P, Q இனூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க.

ஆகவே,

$$1 + 1 + 2f - 2g + c = 0$$

$$16 + 16 + 8g - 8f + c = 0$$

இவற்றைத் தீர்த்தலால், $c = -8;\ f = g + 3$ ஆகும்.

ஆகவே P, Q இனூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2(g + 3)y - 8 = 0$ ஆகும்.

இவ்வட்டம், $S = 0$ இன் பரிதியைச் சமகூறிடுமாயின் $S = 0$ இன் மையம், இவ்விரு வட்டங்களின் பொதுநாணில் கிடக்க வேண்டும்.

பொதுநாணின் சமன்பாடு;

$$(2g + 2)x - 2(g + 1)y - 9 = 0$$

$S = 0$ இன் மையம் $(1, -2)$, இதிற் கிடத்தலாற்,

$(2g + 2)1 + 4(g + 1) - 9 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad g = \tfrac{1}{2}$$

ஆகவே P, Q இற்கூடாகச் சென்று $S = 0$ இன் பரிதியைச் சமகூறிடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$x^2 + y^2 + x + 7y - 8 = 0$$

7. t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$l = (1 - t^2)(x - h) + 2t(y - k) - r(1 + t^2) = 0$ என்னும் கோடு $S = (x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

$x^2+y^2+2x-4y+3=0$ என்னும் வட்டத்தில் 2 அலகு நீளமுடைய 4 நாண்கள், $x^3+y^2+6x+2y+6=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும்படி வரையலாம் என நிறுவி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

வட்டம் $S=0$ இன் மையம் (h, k) இலிருந்து கோடு $l=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளம்

$$=\frac{|-r(1+t^2)|}{\sqrt{[(1-t^2)^2+4t^2]}}=\frac{r(1+t^2)}{(1+t^2)}=r$$

இது $S=0$ இன் ஆரைக்குச் சமனாகும்.

ஆகவே t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், $l=0$ ஆனது, வட்டம் $S=0$ ஐத் தொடும்

$S=x^2+y^2+6x+2y+6=(x+3)^2+(y+1)^2-4=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும் கோட்டின் சமன்பாட்டை

$l=(1-t^2)(x+3)+2t(y+1)-2(1+t^2)=0$ என எழுதலாம்.

$S_1=x^2+y^2+2x-4y+3=0$ என்னும் வட்டத்தின் ஆரை

$$=\sqrt{(1+4-3)}=\sqrt{2}$$

மையம் $\equiv(-1, 2)$

$S_1=0$ இன் மையத்திலிருந்து $l=0$ இற்குக் கீறிய செங்குத்தின் நீளம் $=\sqrt{(2-1)}=1$

$$=\left|\frac{(1-t^2)(-1+3)+2t(2+1)-2(1+t^2)}{\sqrt{[(1-t^2)^2+4t^2]}}\right|$$

$$=\left|\frac{6t-4t^2}{1+t^2}\right|$$

$$\therefore \frac{6t-4t^2}{1+t^2}=\pm 1$$

$5t^2-6t+1=0$ அல்லது $3t^2-6t-1=0$

$(5t-1)(t-1)=0$ அல்லது $t=\dfrac{6\pm4\sqrt{3}}{6}$

$$\therefore \quad t=1, \ \tfrac{1}{5}, \ \frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}.$$

t இற்கு 4 பெறுமானங்கள் இருப்பதால், 4 நாண்கள் கீறலாம் அவற்றின் சமன்பாடுகள் ;

$t = 1$ எனின் ; $y - 1 = 0$

$t = \frac{1}{5}$ எனின் ;

$$\left(1 - \frac{1}{25}\right)(x+3) + \frac{2}{5}(y+1) - 2\left(1 + \frac{1}{25}\right) = 0$$

$$12x + 5y - 11 = 0$$

$t = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$ எனின் ;

$$(2 \pm 2\sqrt{3})x - (3 \pm 2\sqrt{3})y + (13 \pm 8\sqrt{3}) = 0.$$

பயிற்சி 4 வட்டம்

1. கோடு $x - y + 1 = 0$ இல் தமது மையமும், 3 அலகு ஆரையுமுடைய இரு வட்டங்கள் புள்ளி $(3, 7)$ இனூடாகக் கீறப்படலாமெனக் காட்டுக. அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன வெனக் காட்டுக.

2. θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், கோடு $(x+1)$ கோசை $\theta + (y+1)$ சைன் $\theta = 3$ என்பது வட்டம் $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$ ஐத் தொடுகின்றது எனக் காட்டுக.

θ இன் என்ன பெறுமானங்களுக்கு இக்கோடு வட்டம் $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$ ஐத் தொடும்?

3. வட்டம் $a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$ இற்கு புள்ளி (h, k) இலிருந்து கீறிய தொடலியின் நீளத்தைக் காண்க.

புள்ளி P இலிருந்து வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ இற்கு கீறிய தொடலியின் நீளம், வட்டம் $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ இற்குக் கீறிய தொடலியின் நீளத்தின் k மடங்காகும். $k \neq -1$ எனின், P ஒரு வட்டத்தில் கிடக்கின்றதெனவும் இம்மூன்று வட்டங்களும் இரு பொதுப்புள்ளிகளினூடாகச் செல்கின்றதெனவும் காட்டுக.

4. புள்ளி (2, 0) இனூடாகச் சென்று $x^2+y^2=1$ என்னும் வட்டத்தைச் சமகூறிட்டு, $x^2+y^2-4x-5=0$ என்னும் வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. உற்பத்தியில் தனது மையத்தைக் கொண்டதும், $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும் சிறிய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அவற்றின் தொடுபுள்ளி (2.4, 1.8 எனக் காட்டுக. அவற்றின் தொடுபுள்ளியிலுள்ள பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

மறு பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளையும், நீளங்களையும் காண்க.

6. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ என்னும் வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி P இன் ஆள்கூறுகளை ($a+r$ கோசை θ, $b+r$ சைன் θ) என எழுதலாமெனக் காட்டுக.

P இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $(x-a)$ கோசை θ + $(y-b)$ சைன் $\theta = r$ எனக் காட்டுக. இத் தொடலிக்கு உற்பத்தியிலிருந்து கீறிய செங்குத்தின் அடி N இன் ஆள்கூறுகள் y கோசை $\theta = x$ சைன் θ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கின்றன எனக் காட்டுக. P அசையும் போது N இன் ஒழுக்கு $[\,x(x-a)+y(y-b)\,]=r^2(x^2+y^2)$ எனக் காட்டுக.

7. x- அச்சைத் தொட்டுக் கொண்டும், $2y=x$ இல் மையமும் (14, 2) என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்வதுமான இரு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

வரை $3y=4x$ ஆனது இவ்விரு வட்டங்களுக்கும் ஒரு பொதுத் தொடலியெனக் காட்டுக.

8. ஒரு முக்கோணி PAB இன் பக்கம் AB x- அச்சின் வழியே கிடக்கின்றது. O உற்பத்தித் தானமாகும். O இலிருந்து AP, BP இற்குக் கீறிய செங்குத்துக்கள் சமநீளமாயிருக்குமாறு P அசைகின்றது. P இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக.

எவ்வகையில் இது பொருந்தாது?

9. வட்டம் $x^2+y^2=r^2$ இற்கு (r கோசை θ, r சைன் θ) இலுள்ள தொடலி ஆள்கூற்றச்சுக்களை A, B யில் சந்திக்கின்றது. AB யின் நடுப்புள்ளி C யின் ஒழுக்கைக் காண்க.

10. a இன் என்ன பெறுமானங்களுக்கு $x^2+y^2+x-3y+a=0$, $x^2+y^2+4x-2y-5=0$ என்னும் வட்டங்கள் தொடுமெனக் காண்க. ஒவ்வொரு வகையிலும் அவை உட்புறமாகவோ அல்லது வெளிப்புறமாகவோ தொடும்?

11. $x^2+y^2+2x+4y+3=0$, $x^2+y^2+3x+5y=0$, $x^2+y^2+4x+5y-1=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-2x-4y-13=0$ எனக் காட்டுக.

12. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2=3$ என்னும் வட்டங்களை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டி, $y-1=0$ ஐத் தொடும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

13. புள்ளி $(3, 1)$ இல் தன் மையத்தைக் கொண்டதும், வட்டம் $x^2+y^2=1$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளி $(3, 1)$ இனூடாகச் சென்று, வட்டம் $x^2+y^2=1$ இற்கு தொடலியாயமையும் நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

14. புள்ளி $(1, 2)$ இல் தனது மையத்தையுடைய ஒரு வட்டம் கோடு $2x-y+3=0$ ஐத் தொடுகின்றது. இதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கோடுகள் $2x-y+3=0$, $x=0$ என்பவற்றைத் தொடும் $\sqrt{5}r$ அலகு ஆரையுடைய நான்கு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

15. $3x+4y+5=0$, $4x+3y-5=0$, $y=1$ என்னும் வரைகளை தனது பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணியின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ஒரு முக்கோணி **ABC** இன் பக்கங்கள் **AB BC, CA** இன் சமன் பாடுகள் முறையே $3x+4y+5=0$, $4x+3y-5=0$, $y=1$. **AB, BC, CA** என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே **D, E, F** இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. வட்டம் **DEF** இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ் வட்டமானது முக்கோணி **ABC** இன் உள்வட்டத்தை தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

16. வட்டம் $x^2+y^2-6y=0$ இலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை (3 கோசை θ, $3+3$ சைன் θ) என்னும் வடிவில் தரலாமெனக் காட்டுக. இப்புள்ளியில் வட்டத்திற்குரிய தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டத்திற்கு **A, B** என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் $4(x^2+y^2)=9$ என்னும் வட்டத்தை முறையே **C, D** என்னும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. **AC, BD** என்பவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியைக் காண்க.

வட்டம் **ABDC** இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A என்பது y- அச்சில் ஒரு மாறும் புள்ளி. **A** இலிருந்து வட்டம் $x^2+y^2-2x-4y-1=0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

18. (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளத்தைக் காண்க.

புள்ளி $(1, 2)$ இலிருந்து ஒரு மாறும் வட்டம் **S** இற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளம், **S** இன் ஆரையின் இருமடங்காகும். **S** ஆனது புள்ளி $(-1, -1)$ இனூடாகச் செல்லுமாயின் அதன் மையத்தின் ஒழுக்கைக் காண்க

19. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+2g^1y+2f^1y+c^1=0$ என்னும் வட்டங்கள் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதற்குரிய நிபந்தனையைப் பெறுக.

ஒரு மாறும் வட்டம் **S** ஆனது, வட்டம் $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ இன் பரிதியைச் சமகூறிட்டு வட்டம் $3(x^2+y^2)-5x+7y-1=0$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகிறது. **S** இன் மையம் $x-y+1=0$ இல் கிடக்கின்றது. **S** இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. $x^2+y^2-9=0$, $x^2+y^2-8x+12=0$ என்னும் இரு வட்டங்களினது பொதுத் தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளியில் தனது மையத்தைக் கொண்டதும், தரப்பட்ட இரு வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

21. $x^2+y^2+2x-4y-8=0$, $x^2+y^2-6x+8y+12=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன வெனக் காட்டுக. அவற்றின் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

22. புள்ளி $(1, 3)$ இல் சமகூறிடப்படும், வட்டம் $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ இன் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

புள்ளி $(3, 5)$ இலிருந்து இவ்வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலிகளின் நீளத்தைக் காண்க. இத் தொடலிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

23. புள்ளிகள் $(3, 2)$, $(0, 1)$ என்பவற்றைத் தமது மையங்களாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களினது பொதுத் தொடலி $3x+4y-8=0$ ஆகும். இவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. மற்றைய பொதுத் தொடலி x-அச்சிற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

24. வட்டங்கள், $x^2+y^2-2x+4y=0$, $x^2+y^2-10x+20=0$ என்பன ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன வெனக் காட்டுக. இத் தொடுபுள்ளி A இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ஒரு மாறும் புள்ளியானது, அதனிலிருந்து முதலாவது வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலியின் நீளம் இரண்டாவது வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலியின் நீளத்தின் அரைமடங்காகும் வண்ணம் அசைகின்றது. இப்புள்ளியின் ஒழுக்கு A இனூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

25. தமது மையம், வரை $x-y-1=0$ இலும், ஆரை 3 அலகும், புள்ளி $(7, 3)$ இனூடாகவுஞ் செல்லக் கூடியதாக இரு வட்டங்கள் கீறலாமெனக் காட்டுக. அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இவற்றுள் ஒரு வட்டம் x- அச்சைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

26. முதலாம் காற்பகுதியில் தன் மையத்தைக கொண்டதும் x- அச்சை புள்ளி $(3, 0)$ இல் தொடுவதும், $4y=3x+36$ எனும் கோட்டைத் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இன்னொரு வட்டமானது முதலாம் வட்டத்தையும், x-அச்சையும், $4y=3x+36$ ஐயும் தொடுகிறது. இதன் ஆரையின் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

27. வட்டம் $x^2+y^2=9$ ஐக் சுற்றி ஒரு சதுரம் வரையப்பட்டுள்ளது. இதன் ஒரு சோடிப் பக்கங்கள், கோடு $y=3x$ இற்குச் சமாந்தரம். சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

28. $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தை $y-k=m(x-h)$ தொடுமாயின்,

$(h^2-a^2)m^2-2hkm+k^2-a^2=0$ எனக் காட்டுக.

(7, 4) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2=64$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

29. x- அச்சில் *3* அலகு நீள வெட்டுத்துண்டை வெட்டி, y- அச்சைத் தொடும் எல்லா வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாட்டை $x^2+y^2-x(2h+3)-2ky+k^2=0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக. இங்கு $k^2=h^2+3h$ ஆகும். இவ்வட்டங்களின் மையங்களின் ஒழுக்கைக் காண்க.

30. ஒரு மாறும் வட்டமானது ஒரு நிலையான புள்ளி (k, o) இனூடாகச் சென்று இரு ஆள்கூற்று அச்சுகளையும் வெட்டுகின்றது. x-அச்சிலுள்ள வெட்டுத்துண்டு y- அச்சிலுள்ள வெட்டுத்துண்டிலும் பார்க்க இருமடங்காகும். இவ்வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கைக் காண்க.

31. $x^2+y^2-6x-8y=0$ $x^2+y^2-3x-4y-50=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடுமெனக் காட்டி, தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

தனது மையத்தை x-அச்சில் கொண்டதும் மேற்கூறிய இரு வட்டங்களையும் செங்குத்தாக வெட்டிச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

32. *(2, 0)* என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்வதும், $x^2+y^2=1$ என்னும் வட்டத்தை அதன் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளில் வெட்டுவதும், $x^2+y^2-4y-5=0$ எனும் வட்டத்தை நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

33. புள்ளி $(-16, 0)$ இலிருந்து, வட்டம் $x^2+y^2=16$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுபுள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இவ்விரு தொடலிகளும் வட்டம் $x^2+y^2-24x+95=0$ இற்கும் தொடலிகளாகும் எனக் காட்டுக.

34. *(0, 1)*, *(1, 0)* என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டங்களில் இரண்டின் பரிதியை $x^2+y^2+4x+6y-13=0$ என்னும் வட்டம் இரு கூறிடுமென நிறுவி அவற்றின் சமன்பாடு களைக் காண்க.

35. t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் கோடு $(1-t^2)(x-a)+2t(y-b)=r(1+t^2)$ ஆனது வட்டம் $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ஐத் தொடு மெனக் காட்டுக.

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$ என்னும் வட்டத்தில் 6 அலகு நீளமுள்ள இரு நாண்கள் $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ ஐத் தொடுமாறு வரையலா மெனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

36. $x^2+y^2-22x+4y+100=0$, $x^2+y^2+22x-4y-100=0$ என்னும் வட்டங்களின் நான்கு பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுக ளையும் காண்க.

37. θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், $(x-a)$ கோசை $\theta+(y-b)$ சைன்$\theta=r$ என்னும் கோடு $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு ஒரு தொடலியாகுமெனக் காட்டுக.

(h, k) என்னும் புள்ளியிலிருந்து இவ்வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலிகளின் சமன்பாடு,

$r^2\{(x-h)^2+(y-k)^2\}=\{(x-a)(k-b)-(y-b)(h-a)\}^2$ எனக் காட்டுக.

38. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமாயின் $4a^2(g^2+f^2)=(c+a)^2$ எனக் காட்டுக.

$x^2+y^2-2x+2y-7=0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர் கோணத் தில் வெட்டுவதும் $x^2+y^2+4x+8y+5=0$ என்னும் வட்டத்தை இரு கூறிடுவதும், $x^2+y^2=1$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுவது மாக இரு வட்டங்கள் உள்ளன எனக் காட்டுக. அவற்றின் சமன் பாடுகளைக் காண்க. இவற்றுள் ஒரு வட்டம் $x^2+y^2=1$ ஐ உட்புற மாகவும் மற்றையது வெளிப்புறமாகவும் தொடுகின்றதெனக் காட் டுக.

39. $P(2, -1)$, $Q(-2, 3)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் வரையை $3:1$ என்னும் விகிதத்தில் அகக்கூறிடும், புறக்கூறிடும் புள்ளிகள் முறையே H, K இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

A என்னும் புள்ளியானது $AP : AQ = 3 : 1$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. A இன் ஒழுக்கு $x^2+y^2+5x-7y+14=0$ எனக் காட்டுக இவ்வட்டத்தின் மையம், HK இன் நடுப்புள்ளியெனக் காட்டுக.

40. S, S_1, S_2 என்பவை மூன்று வட்டங்கள். S ஆனது S_1 ஐச் சமகூறிடுகின்றது. S_2 ஆனது S ஐச் சமகூறிடுகின்றது. S_1, S_2 என்பவை நிலையான வட்டங்களாயின், S இன் மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக. இதன் மையம் S_1, S_2 இன் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி எனக் காட்டுக.

41. x- அச்சில் மையத்தை உடையதும, y- அச்சை உற்பத்தியில் தொடுவதும், ஆரை r உம் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இதிலிருந்து, y- அச்சில் மையத்தை உடையதும், x- அச்சை உற்பத்தியில் தொடுவதும், ஆரை r உடையதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

$y = ax$ என்னும் வரை இவ்விரு வட்டங்களையும் வெட்டுகின்றது. உற்பத்தித் தானம் தவிர்ந்த ஏனைய புள்ளிகளில், வட்டங்களுக்குரிய தொடலிகளின் சமன்பாடுகளை $(a^2-1)x-2ay+2r=0$, $(a^2-1)y+2ax-2a^2r=0$ என்னும் வடிவில் தரலாமெனக் காட்டுக. a மாறும் போது இத்தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

42. வரை $4x-3y+24=0$ ஐ புள்ளி $(0, 8)$ ல் தொட்டுக் கொண்டும், புள்ளி $(7, 9)$ இனூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-8x-10y+16=0$ எனக் காட்டுக. இவ்வட்டம் x- அச்சைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

தந்த கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள வட்டத்தின் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

43. (a, o), $(-a, o)$ என்னும் இரு நிலையான புள்ளிகளினூடாக ஒரு தொகுதி வட்டங்கள் செல்கின்றன; $c^2>a^2$ எனின், m இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $y=m(x-c)$ என்னும் வரை, இத் தொகுதியின் இரு வட்டங்களைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

இவ்விரு வட்டங்களும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுமாயின், இக் கோடு நீள் வளையம் $\frac{1}{2}x^2+y^2=c^2$ ஐத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

44. ஒரு மாறும் வட்டம் S ஆனது, வட்டம் $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ ஐ வெளிப்புறமாகவும், வட்டம் $x^2+y^2-4y+3=0$ ஐ உட்புற மாகவும் தொடுகின்றது. S இன் மையத்தின் ஒழுக்கு

$12x^2+16y^2-12x+64y+55=0$ எனக் காட்டுக.

45. ஒரு முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C இன் ஆள் கூறுகள் முறையே $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 8)$ ஆகும். இதன் பக்கங்க ளின் நடுப்புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இம்முக்கோணியின் உள்வட்டத்தின் மையத்தையும் அதன் சமன் பாட்டையும் காண்க.

மேலுள்ள இரு வட்டங்களும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன வெனக் காட்டுக.

46. தந்த மூன்று வட்டங்களை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டக் கூடி யதாகப் பொதுவாக ஒரு வட்டமே உண்டு எனக் காட்டுக.

$x^2+y^2-12x-8y+34=0$, $x^2+y^2-6x-12y+32=0$, $x^2+y^2-10x-6y+30=0$ என்னும் வட்டங்களை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

47. g, f இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2+y^2+2gx+2fy-a^2=0$ என்னும் வட்டம், $x^2+y^2-a^2=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு கூறிடுமெனக் காட்டுக.

ஒரு வட்டத்தின் மையம் $x+y+1=0$ இல் கிடக்கின்றது. இவ் வட்டம் $(-1, 2)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் சென்று, $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ என்னும் வட்டத்தை இரு கூறிடுகின்றது. இவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

√**48.** $S=0$, $U=0$ என்பன முறையே ஒரு வட்டத்தினதும் ஒரு நேர்கோட்டினதும் சமன்பாடுகளாயின் $S+\lambda U=0$ என்னும் சமன்பாட்டை விளக்குக. இங்கு λ ஒரு பரமானம்

$x^2+y^2-2x-2y-3+\lambda(x+y-3)=0$ என்னும் சமன்பாடு, λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்களைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

இப்புள்ளிகளுனூடாகச் சென்று $x^2+y^2-6x-2y+2=0$ என் னும் வட்டத்தை நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

49. $S = 0$, $S^1 = 0$ என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாயின், λ ஒரு மாறும் பரமானமாயிருக்கும் போது $S + \lambda S^1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை ஆராய்க.

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ என்னும் வட்டங்களின் வெட்டுப்புள்ளிக் கூடாகச் சென்று வரை $36x - 27y - 121 = 0$ ஐத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

50. $O(0, 0)$, $P\ (p, o)$, $Q(o, q)$, $R(x, y)$ என்னும் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்திலுள்ளன. $RO/RP = QO/QP$ ஆகுமாறு R அசைகின்றது. R ன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக. O விலிருந்து இதன் மையம் C_1 இன் தூரத்தையும் காண்க.

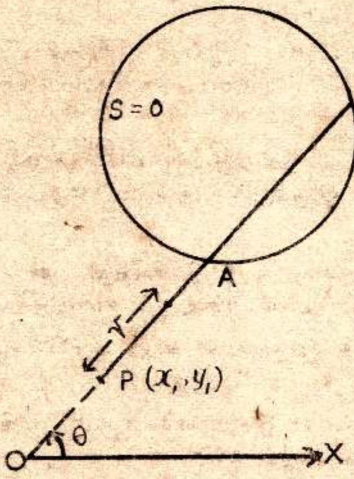
இன்னொரு புள்ளி S ஆனது $\dfrac{SO}{SQ} = \dfrac{PO}{PQ}$ ஆகுமாறு அசையுமாயின் இது கிடக்கும் வட்டத்தின் மையம் C_2 எனின் OC_2 ஐக் காண்க.

இவ்விரு வட்டங்களும் 60° கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

அலகு 5

பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி

5.1 $S=0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறித்து, $P\ (x_1, y_1)$ என்னும் புள்ளியின் வலு.



$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகுக.

P இனூடாக X-அச்சின் நேர்த்திசையுடன் θ கோணமமைக்கும் ஒரு நேர்கோடு வரைக.

இக்கோட்டின் வழியே P இலிருந்து r என்னும் தூரத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\equiv (x_1 + r$ கோசை $\theta, y_1 + r$ சைன் $\theta)$ ஆகும்.

இப்புள்ளி, வட்டத்தில் கிடக்குமாயின்,

$(x_1 + r$ கோசை $\theta)^2 + (y_1 + r$ சைன் $\theta)^2 + 2g\,(x_1 + r$ கோசை $\theta)$
$+ 2f\,(y_1 + r$ சைன் $\theta) + c = 0$ ஆகும்.

அ-து $r^2 + 2r(x_1$ கோசை $\theta + y_1$ சைன் $\theta + g$ கோசை $\theta + f$ சைன் $\theta)$
$+ x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

இது r இலுள்ள ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

தந்த கோடு வட்டத்தை இரு வேறு வேறன புள்ளிகள் A, B இல் வெட்டுமாயின், r இற்கு இரு மெய்ப் பெறுமானங்கள் r_1, r_2 உண்டு.

$\therefore$ $PA = r_1$, $PB = r_2$ ஆகும்.

மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை $= r_1 r_2$

$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = S_{11}$

$=$ ஒரு மாறிலி

வட்டத்தையும், புள்ளி P இனது நிலையையுமே சார்ந்த இம் மாறுப் பெறுமானம் S_{11}, அவ்வட்டத்தைக் குறித்து, புள்ளி P இன் வலு எனப்படும்.

(i) P என்பது வட்டத்திற்கு வெளியே இருந்தால் r_1, r_2 என்பவற்றிற்கு ஒரே குறி இருக்கும். ஆகவே வலு நேராகும். அதாவது $S_{11} > 0$ ஆகும்.

இவ்வகையில் வலுவானது P இலிருந்து, வட்டத்திற்குக் கீறிய தொடலியின் நீளத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமனாகும்.

(2) P வட்டத்தில் இருந்தால் வலு பூச்சியமாகும்.

அதாவது $S_{11} = 0$ ஆகும்.

(3) P வட்டத்திற்குள் இருந்தால் r_1, r_2 எதிராகும்.

ஆகவே P இன் வலு எதிராகும்.

அதாவது $S_{11} < 0$

குறிப்பு:

ஒரு புள்ளியின் வலு நேராயின் அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடலிகள் வரையலாம்.

வலு பூச்சியமாயின், அப்புள்ளி வட்டத்திலிருக்கும்.

வலு எதிராயின் அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடலிகள் வரைய முடியாது. (புள்ளி வட்டத்திற்குள் இருக்கும்.)

5.2 இரு வட்டங்களின் சமத் தொடுகோட்டச்சு (மூலிகவச்சு)

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S^1 = x^2 + y^2 + 2g^1x + f^1y + c^1 = 0$$

என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக. (Px_1, y_1) என்பது அவ்விரு வட்டங்களையும் குறித்து ஒரே வலுவுள்ள ஒரு புள்ளியாயின்,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + fy_1 + c = x_1^2 + y_1^2 + 2g^1x_1 + 2f^1y_1 + c^1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 2(g - g^1)x_1 + 2(f - f^1)y_1 + c - c^1 = 0$$

ஆகவே அவ்விரு வட்டங்களையும் குறித்து ஒரே வலுவுள்ள புள்ளியின் ஒழுக்கு,

$$2(g-g^1)x+2(f-f^1)y+c-c^1=0.$$

என்னும் நேர் கோடாகும். இது அவ்விரு வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சு அல்லது மூலிகவச்சு எனப்படும்.

(a) இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டினுல் சமத்தொடு கோட்டச்சு அவற்றின் பொது நாணுகும்.

(b) இரு வட்டங்களும் தொடுமாயின் சமத்தொடு கோட்டச்சு அவற்றின் பொதுத் தொடலியாகும்.

(c) இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாவாயின் சமத்தொடு கோட்டச்சு அவ்வட்டங்களை வெட்டாத ஒரு நேர்கோடாகும்.

5.3 பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி.

ஒரு தொகுதி வட்டங்களின் ஒவ்வொரு சோடி வட்டமும் ஒரே சமத்தொடு கோட்டச்சை யுடையனவாயின், அத்தொகுதி ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி எனப்படும்.

(i) $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0;$

$U \equiv lx+my+n=0$

என்பன முறையே ஒரு வட்டத்தினதும் ஒரு கோட்டினதும் சமன்பாடுகள் ஆகுக.

$S+\lambda U=0$ என்னும் சமன்பாட்டை ஆராய்க. இங்கு λ ஒரு பரமானம்.

இது λ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

கோடு $U=0$ இல் $P(x_1, y_1)$ ஏதாவதொரு புள்ளியாயின், $U_1=0$ ஆகும்.

$S+\lambda U=0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறித்து புள்ளி P இன் வலு

$= S_{11}+\lambda U_1$ ஆகும்.

$= S_{11}$ $\qquad (\because U_1=0)$

= ஒரு ஒருமை.

= வட்டம் $S=0$ ஐக் குறித்து புள்ளி P இன் வலு.

ஆகவே $S+\lambda U=0$, $S=0$ என்னும் வட்டங்களின் சமத்தொடு கோட்டச்சு $U=0$ என்னும் கோடாகும்.

λ இன் வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்குப் பெறப்படும் வட்டங்கள் $U = 0$ என்னும் சமத்தொடு கோட்டச்சோடு கூடிய ஒரு பொது வச்சு வட்டத் தொகுதியை ஆக்கும்.

(a) $S = 0$, $U = 0$ என்பவை ஒன்றையொன்று வெட்டுமாயின், தொகுதியின் வட்டங்கள் எல்லாம் இவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும். ஆகவே $S + \lambda U = 0$ என்னும் சமன்பாடு ஒரு வெட்டும் பொதுவச்சுத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

(b) $U = 0$ ஆனது $S = 0$ ஐத் தொடுமாயின், $S + \lambda U = 0$ என்னும் வட்டத்தையும் தொடும். ஆகவே $S + \lambda U = 0$ என்பது ஒன்றையொன்று தொடும் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

(c) $U = 0$ என்பது $S = 0$ஐ வெட்டாதாயின், $S + \lambda U = 0$ என்னும் வட்டத்தையும் வெட்டாது. ஆகவே $S + \lambda U = 0$ என்னும் சமன்பாடு ஒன்றையொன்று வெட்டாப் பொதுவச்சித் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

(iii) $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S^1 \equiv x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0$

என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாகுக.

$S + \lambda S^1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை ஆராய்க.

$\lambda \neq -1$ எனின், இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$U \equiv S - S^1 = 0$ எனக் கொள்க.

ஆகவே $S + \lambda S^1 = S + \lambda (S - U)$

$$= (1 + \lambda) S - \lambda U = 0$$

$$\therefore S - \frac{\lambda}{1 + \lambda} U = 0 ; (1 + \lambda \neq 0)$$

இது, $U = S - S^1 = 0$ ஐ தனது சமத்தொடுகோட்டச்சாகக் கொண்ட ஒரு பொது பொது வச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும். $S = 0$ $S^1 = 0$ என்பவை இத்தொகுதியின் இரு வட்டங்களாகும்.

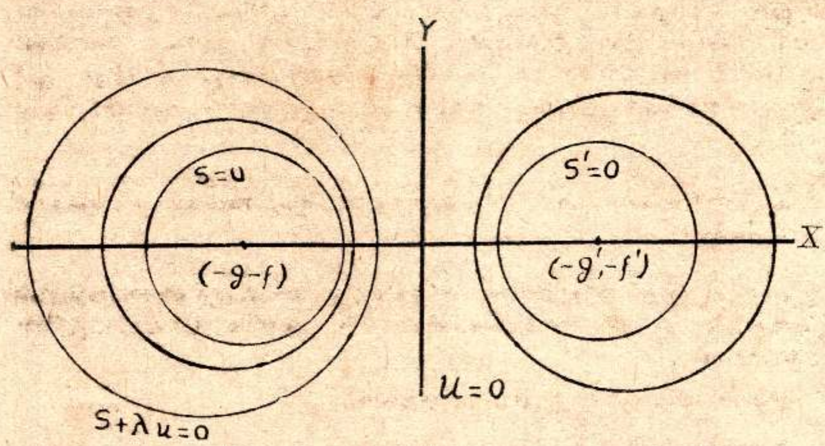
$\lambda = -1$ ஆயின் சமத்தொடு கோட்டச்சு $U = S - S^1 = 0$ பெறப்படும்.

$$U = S - S^1 = 2x (g - g^1) + 2y (f - f^1) + c - c^1 = 0$$

$S = 0$, $S^1 = 0$ என்னும் வட்டங்களின் மையமிணை கோட்டின் சமன்பாடு $(y + f) (g - g^1) = (x + g) (f - f^1)$ ஆகும்.

ஆகவே சமத்தொடுகோட்டச்சும் மையமிணை கோடும் ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாகும்,

5.4 ஒன்றையொன்று வெட்டும், வெட்டா, தொடும் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதிகள்.



$S = 0$, $S^1 = 0$ என்பவற்றைத் தீர்க்கும் புள்ளிகள் A, B உண்டெனின், அவ்வெட்டுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $S - S^1 = 0$ ஐயும் $S + \lambda S^1 = 0$ ஐயும் தீர்க்கும். ஆகவே $S - S^1 = 0$ உம் $S + \lambda S^1 = 0$ உம் அவ்வெட்டுப்புள்ளிகள் A,B இனூடாகச் செல்லும். இத்தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டும் பொதுவச்சுத் தொகுதி வட்டங்களாகும்.

இதனை $S = 0$, $S^1 = 0$ ஆகியவற்றுள் ஒன்று மூலிகவச்சு $S - {}^1S = 0$ உடன் வெட்டுகின்றதாவெனப் பரிசீலனை செய்து கூறலாம்.

$S = 0$, $S^1 = 0$ ஒன்றையொன்று தொடுமாயின் அவற்றின் பொதுத்தொடுகோடு $S - S^1 = 0$ ஆகும். மேலும் தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறுகள், $S + \lambda S^1 = 0$ ஐயும் தீர்க்கும். வேறு பொதுப் புள்ளிகள் கிடையாது ஆதலால்,, அதே தொடுபுள்ளியில் $S + \lambda S^1 = 0$ என்னும் ஒவ்வொரு வட்டமும் $S - S^1 = 0$ ஐத் தொடும்.

இத் தொகுதி ஒன்றையொன்று தொடும் பொதுவச்சுத் தொகுதியாகும்.

$S = 0$, $S - S^1 = 0$ என்பவை வெட்டாவாயின், $S + \lambda S^1 = 0$ இன் எந்த இரு வட்டங்களும் பொதுப் புள்ளிகள் உடையனவாக இருக்க முடியாது.

இத் தொகுதி ஒன்றையொன்று வெட்டாப் பொதுவச்சுத் தொகுதி எனப்படும்.

5.5 பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் நியமச் சமன்பாடு.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியின் மூலிகவச்சு மையமிணை கோடு என்பன ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தான நிலைத்த கோடுகள் என முன்பு கண்டுள்ளோம். இவ்விரு கோடுகளையும் குறித்து இப் பொதுவச்சுத்தொகுதியின் சமன்பாட்டை ஒரு எளிய வடிவிற் பெறலாம்.

மையமிணைகோட்டை x- அச்சாகவும், மூலிகவச்சை y- அச்சாகவும் கொள்க.

எனவே இத்தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகளை $(\lambda, 0)$ எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே இவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$x^2+y^2-2\lambda x+c=0$ என எழுதலாம்.

உற்பத்தியானது, மூலிகவச்சில் கிடத்தலால், தொகுதியின் எல்லாவட்டங்களையும் குறித்து உற்பத்தியின் வலு ஒரே பெறுமானமுடையதாயிருத்தல் வேண்டும்.

$x^2+y^2-2\lambda x+c=0$ என்னும் வட்டத்தைக் குறித்து உற்பத்தியின் வலு$=c$ ஆகும்.

எனவே c என்பது எல்லா வட்டங்களுக்கும் பொதுவான ஒரு மாறிலியாக இருத்தல் வேண்டும்.

c ஒரு மாறிலியாகவும், λ ஒரு மாறும் பரமானமாகவும் இருக்கும்போது $x^2+y^2-2\lambda x+c=0$ அதாவது $x^2+y^2+c-2\lambda x=0$ சமன்பாடு, கோடு $x=0$ ஐ தனது மூலிகவச்சாகவும், கோடு $y=0$ ஐத் தனது மையமிணை கோடாகவும் கொண்ட ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும் இது ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் நியமச் சமன்பாடு எனப்படும்.

5.6 ஒன்றையொன்று வெட்டும், வெட்டா, தொடும் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதிகள்

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஏதாவதொரு வட்டத்தின் நியமச் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-2\lambda x+c=0 \text{ ஆகும்}$$

இத் தொகுதியின் மூலிகவச்சின் சமன்பாடு $x=0$ ஆகும். இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் தீர்த்தலால்,

$$0+y^2-0+c=0$$

அதாவது $\quad y^2=-c$ ஆகும்.

வகை (i) $c<0$ எனின், y இற்கு மெய்மூலங்கள் உண்டு.

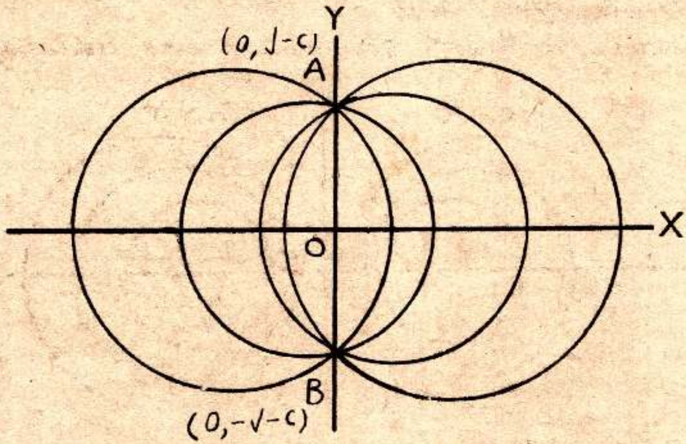
$$\therefore\ y=\pm\sqrt{-c}$$

எனவே மூலிகவச்சு இவ்வட்டத்தை இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் $(0, \pm\sqrt{-c})$இல் இடைவெட்டுகின்றது.

இப்புள்ளிகள் λ ஐச் சாராமையினுல், தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களும் மூலிகவச்சை இதே புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன.

இப் புள்ளிகள் தொகுதியின் பொதுப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

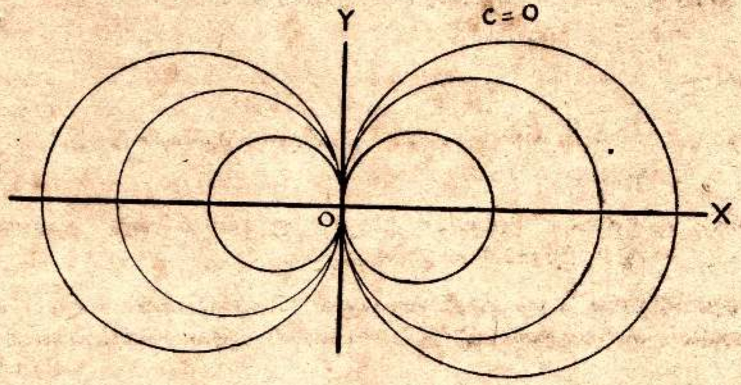
இவ்வகையான வட்டத் தொகுதி இடைவெட்டும் தொகுதி வகை எனப்படும்.



வகை (ii) $c=0$ எனின், $y^2=0$ ஆகும்.

பொதுப்புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $=(0,0)$ ஆகும். எனவே இவ் வட்டம் மூலிகவச்சை உற்பத்தியில் தொடுகின்றது. அதாவது எல்லா வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று உற்பத்தியில் தொடுகின்றன.

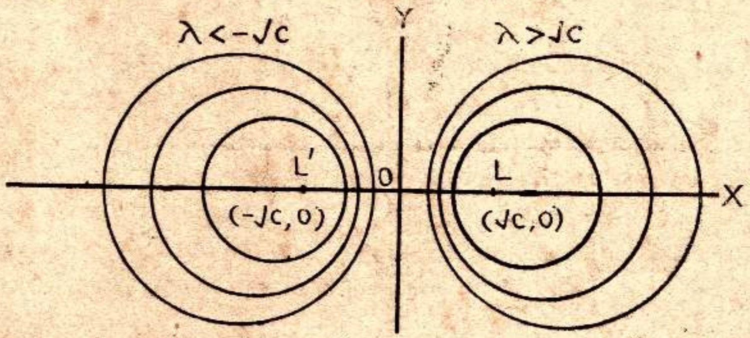
இவ்வகையான தொகுதி ஒன்றையொன்று தொடும் வகை எனப் படும்.



வகை (iii) $c>0$ எனின், y இற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை. ஆகவே மூலிகவச்சு இவவட்டத்தை இடை வெட்டாது.

எனவே இத்தொகுதியின் ஒரு வட்டமும் மூலிகவச்சை இடை வெட்டாது. மேலும் தொகுதியில் உள்ள எந்த இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று இடை வெட்டா.

இவ்வகையான தொகுதி இடைவெட்டா வகை எனப்படும்.



5. 7 எல்லைப் புள்ளிகள்.

$x^2+y^2-2\lambda x+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(x-\lambda)^2+y^2=\lambda^2-c$$

இத்தொகுதி வட்டத்தின் ஆரை $=\sqrt{(\lambda^2-c)}$

c ஒரு நேர் மாறிலியாயின், $\lambda^2 < c$ எனின், இச் சமன்பாடு பொருள்படாது.

ஆகவே $\lambda^2 - c \geqslant$ ஆயின் மட்டுமே, தொகுதி வட்டங்களின் ஆரைகள் மெய்யாகும். அதாவது மெய் வட்டங்கள் பெறப்படும்.

$\lambda^2 - c = 0$ எனின், அதாவது $\lambda = \pm\sqrt{c}$ எனின் பூச்சிய ஆரையுடைய இரு வட்டங்கள் பெறப்படும். இவற்றின் மையங்களின் ஆள்கூறுகள் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ ஆகும். இப்புள்ளிகள் அப்பொது வச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

இவ்வெல்லைப் புள்ளிகள், மூலிகவச்சிற்கு $(x=0)$ சமச்சீராக உள்ளன.

$c > 0$ எனின், தொகுதியானது வெட்டாப் பொதுவச்சுத் தொகுதியாகும் என முன்பு காட்டப்பட்டது. எனவே எல்லைப் புள்ளிகள் வெட்டாப் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியிலேயே உண்டு. 111-ம் பக்கத்திலுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.

5.8 ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எவ்வட்டத்திற்கும் அதன் மையம், எல்லைப்புள்ளிகளுக்கு இடையில் இராது.

$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் தொகுதி வட்டங்கள் மெய்யாயிருத்தற்கு அவற்றின் ஆரை மெய்யாயிருத்தல் வேண்டும்.

$$(x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - c$$

இது ஒரு வெட்டாப் பொதுவச்சுத் தொகுதி ஆனபடியால், $c > 0$ ஆகும்.

ஆரை மெய்யாயிருப்பதற்கு, $\lambda^2 - c \geqslant 0$ ஆகவேண்டும்.

அ-து $(\lambda + \sqrt{c})(\lambda - \sqrt{c}) \geqslant 0$ ஆகவேண்டும்.

எனவே $\lambda \leqslant -\sqrt{c}$ அல்லது $\lambda \leqslant \sqrt{c}$ ஆகும்.

எனவே தொகுதி வட்டங்களின் மையங்கள் $(\lambda, 0)$ என்பன எல்லைப் புள்ளிகள் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ என்பவற்றிற்கிடையில் இருக்கமாட்டா.

5.9 எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் மூலிகவச்சிற்கு அவை இருக்கும் அதே பக்கத்திலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்குள்ளும் கிடக்கும்.

$L \equiv (\sqrt{c}, 0)$; $L^1 \equiv (-\sqrt{c}, 0)$ என்க.

மூலிகவச்சிற்கு L இருக்கும் அதே பக்கத்தில் இருக்கும் வட்டங்கள் $\lambda (< \sqrt{c})$ இனுடைய நேர்ப் பெறுமானங்களால் தரப்படும்.

இத்தகைய வட்டமொன்றின் சமன்பாடு $x^2+y^2-2\lambda x+c=0$ ஆகுக.

$x^2+y^2-2\lambda x+c$ என்னும் கோவையில் $x=\sqrt{c}$, $y=0$ எனப் பிரதியிட்டால் நாம்பெறுவது

$$c+0-2\lambda\sqrt{c}+c$$

$$=2\sqrt{c}(\sqrt{c}-\lambda) \text{ என்பதாகும்.}$$

இது எப்பொழுதும் எதிராகும். $(\because \lambda\sqrt{c})$

ஆகவே L என்பது இத்தகைய வட்டம் ஒவ்வொன்றிற்குள்ளும் கிடக்கும்.

இவ்வாறே L^1 என்பதும், மூலிகவச்சிற்கு அது இருக்கும் அதே பக்கத்திலுள்ள எல்லா வட்டங்களுக்குள்ளும் கிடக்குமெனக் காட்டலாம்.

ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால் எல்லைப் புள்ளிகள் பொதுத் தொடு புள்ளியோடு பொருந்தும்.

ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டங்கள் இரு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டினல், அத் தொகுதிக்கு எல்லைப் புள்ளிகள் இல்லை.

5.10 செங்குத்துப் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி

வரைவிலக்கணம்

தரப்பட்ட பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எல்லா வட்டங்களையும் தன் தொகுதியிலுள்ள வட்டங்கள் யாவும் செங்குத்தாக வெட்டும் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி, முந்தியதன் செங்குத்துப் பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதி எனப்படும்.

$V\equiv x^2+y^2-2\lambda x+c=0$, (இங்கு λ ஒரு மாறும் பரமானம்) என்னும் பொதுச் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியை ஆராய்க.

இதன் மூலிகவச்சு $x=0$ உம், மையமிணை கோடு $y=0$ உம் ஆகும்.

இம் மூலிகவச்சு, $(0, \mu)$ என்பது, $V=0$ ஆல் தரப்படும் வட்டங்களுக்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளாகுக.

இப் புள்ளியிலிருந்து அத்தொகுதியின் யாதுமொரு வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளம்

$$= \sqrt{(0+\mu^2+0+c)} = \sqrt{(\mu^2+c)}$$

ஆகவே மையம் புள்ளி $(0, \mu)$ இலும், ஆரை $= \sqrt{(\mu^2+c)}$ ஆகவும் உடைய வட்டம் $V = 0$ இன் ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுகின்றது.

இவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$x^2+(y-\mu)^2 = \mu^2+c$$

அ-து $W \equiv x^2+y^2-2\mu y-c = 0$

$V = 0$ இன் ஒருமை c யானது $W = 0$ இல் முரண்குறியுடன் அமைவதை அவதானிக்கலாம்.

இரு வட்டங்கள் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதற்குரிய நிபந்தனை $2gg^1+2ff^1=c+c^1$ ஐப் பிரயோகிப்பதால் λ, μ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களும் $V=0$ ஆற் தரப்படும் வட்டங்கள், $W=0$ ஆற் தரப்படும் வட்டங்களை நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுகின்றன வென்றும் காட்டலாம்.

$$2gg^1+2ff^1 = 2\lambda.\,0+2.\,\mu\,0 = 0$$

$$c+c^1 = c-c = 0$$

$W=0$ என்னும் பொதுச் சமன்பாடு, கோடு $y=0$ ஐ மூலிகவச்சாகவும், கோடு $x = 0$ ஐ மையமினை கோடாகவும் உடைய ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைக் குறிக்கும். இது $V=0$ இன் செங்குத்துத் தொகுதி எனப்படும்.

$W = 0$ இற்கும், மூலிகவச்சு $y = 0$ இற்கும் பொதுவான புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள்

$$x^2 = c\ ,\ y = 0$$

என்னும் சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யவேண்டும்.

வகை (i) $c<0$ ஆகுக.

ஆகவே $x^2=c$ இற்கு மெய்ப் பெறுமானங்கள் இல்லை.

ஆகவே மூலிகவச்சு தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தையும் வெட்டாது. எனவே இத்தொகுதி ஒரு இடை வெட்டா வகையைச் சார்ந்தது. ஆனால் $c<0$ எனின் $V=0$ என்னும் தொகுதி இடைவெட்டும் வகையைச் சார்ந்ததென முன்பு காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் பொதுப் புள்ளிகள் $A\ (0, \sqrt{-c})$, $B\ (0, -\sqrt{-c})$ ஆகும்.

எனவே தரப்பட்ட தொகுதி ($V=0$), இடை வெட்டும் வகையைச் சார்ந்ததாயின், இதன் செங்குத்துப் பொதுவச்சுத் தொகுதி ($W=0$), இடை வெட்டா வகையைச் சார்ந்ததாகும். (ஒரே ஒருமை c யானது $V=0$, $W=0$ இல் முரண் குறிகளுடன் அமைவதிலிருந்து இவ்விரு தொகுதிகளும் அத்தகைய பண்புடையன என்பதை அவதானிக்கலாம்.)

$W=0$ இன் எல்லைப் புள்ளிகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

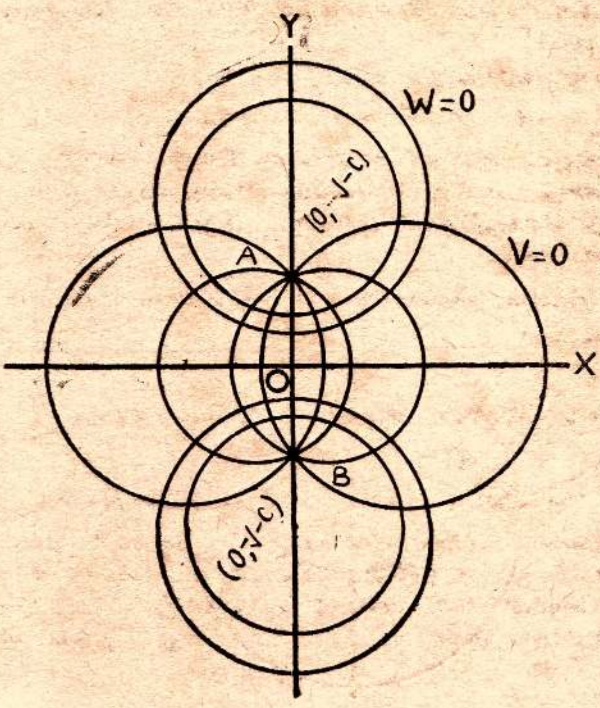
$x^2+(y-\mu)^2=\mu^2+c$

புள்ளி வட்டங்களுக்கு, ஆரை $=\sqrt{(\mu^2+c)}=0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \mu=\pm\sqrt{-c}$$

புள்ளி வட்டங்களின் மையங்கள் அதாவது எல்லைப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $(0,\sqrt{-c})$; $(0,-\sqrt{-c})$ ஆகும்.

எனவே $V=0$ இன் பொதுப் புள்ளிகள் A, B என்பவை $W=0$ இன் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.



வகை (ii) $c = 0$ ஆகுக.

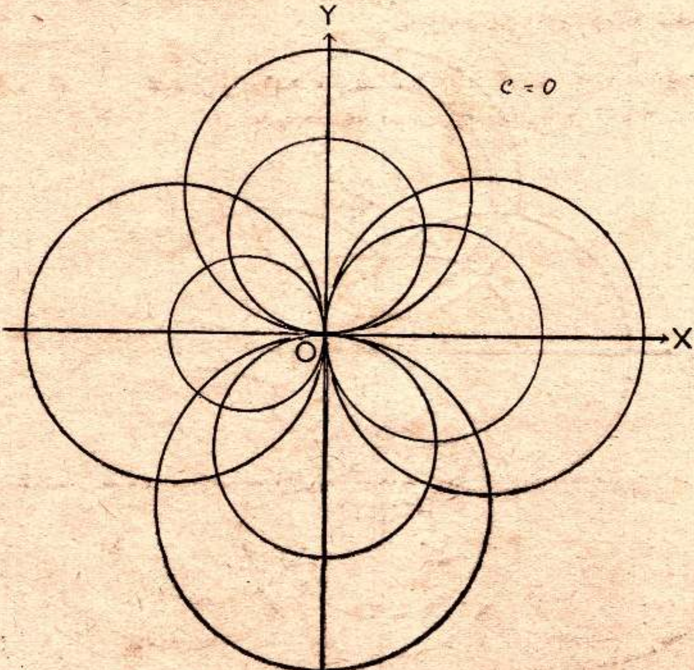
$$\therefore \quad x^2 = c = 0$$

பொதுப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் = (0,0)

ஆகவே $W = 0$ இன் வட்டங்கள் எல்லாம், மூலிகவச்சை உற்பத்தியில் தொடும். அதாவது எல்லா வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று உற்பத்தியில் தொடும்.

ஆனால் $c=0$ எனின், $V=0$ என்னும் தொகுதி ஒன்றையொன்று உற்பத்தியில் தொடும் வகையைச் சார்ந்ததென முன்பு காட்டப்பட்டுள்ளது.

எனவே தரப்பட்ட பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி $V=0$ தொடும் வகையைச் சார்ந்ததாயின், இதன் செங்குத்துப் பொதுவச்சுத் தொகுதியும் $(W = 0)$ தொடும் வகையைச் சார்ந்ததாகும். மேலும் இரு தொகுதிகளும் ஒரே தொடு புள்ளியையே (உற்பத்தித்தானம் உடையன.



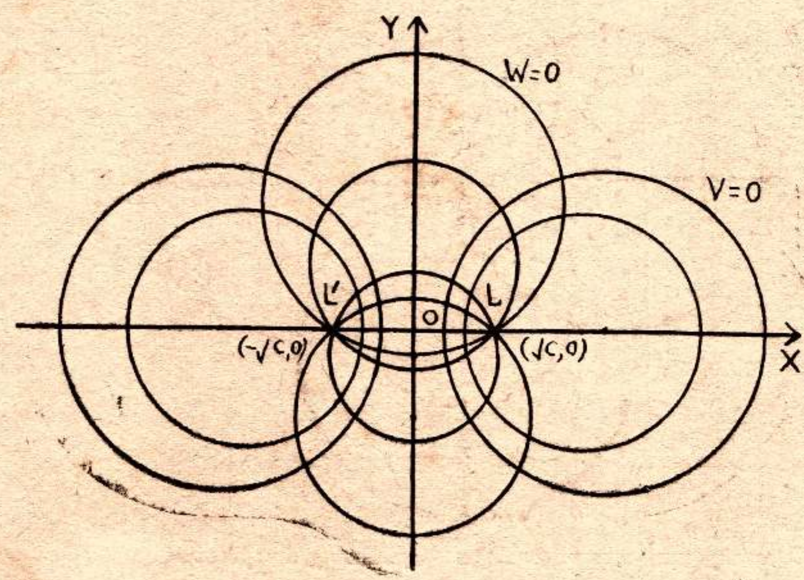
வகை (iii) $c>0$ ஆகுக.

x இற்கு இரு மெய்ப்பெறுமானங்கள் $x = \pm\sqrt{c}$ உண்டு. பொதுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $= (\pm\sqrt{c}, 0)$ ஆகும். எனவே, மூலிகவச்சானது, $W=0$ இன் வட்டங்களை இரு வேறு வேருன புள்ளிகள் L, L^1 இல் இடை வெட்டும். இவ்விரு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ ஆனது μ ஐச் சாராததால், $W=0$ இன் எல்லா வட்டங்களும் அதே இரு புள்ளிகளில் இடை வெட்டுகின்றன.

ஆனல் $c>0$ எனின், $V=0$ என்னும் தொகுதி இடைவெட்டா வகையைச் சார்ந்ததெனு முன்பு காட்டப்பட்டுள்ளது. இதன் எல்லைப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $= (\pm\sqrt{c}, 0)$ ஆகும்.

எனவே, தந்த தொகுதி ($V=0$) இடை வெட்டா வகையைச் சார்ந்ததாயின் இதன் செங்குத்துத் தொகுதி ($W=0$) இடைவெட்டும் வகையைச் சார்ந்ததாகும்.

மேலும் $V=0$ இன் எல்லைப் புள்ளிகள் $L(\sqrt{c}, 0)$, $L^1(-\sqrt{c}, 0)$ என்பன, $W=0$ இன் பொதுப்புள்ளிகளாகும்.



எடுத்துக் காட்டுகள்:

1. $x^2+y^2-6-2\lambda(x+y-4)=0$ என்னும் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க. இப்புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் 2 அலகு ஆரையுடைய வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இத்தொகுதியின் ஏதாவதொரு வட்டத்தின் ஆரை

$$= \sqrt{(\lambda^2+\lambda^2+6-8\lambda}$$

புள்ளி வட்டங்களுக்கு,

$$2\lambda^2-8\lambda+6=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

$\lambda=1$ அல்லது 3.

எல்லைப் புள்ளிகள் $(1,1)$; $(3,3)$

எல்லைப் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்க.

எனவே,

$$1+1+2g+2f+c=0$$

$$9+9+6g+6f+c=0$$

$$\therefore \quad c=6$$

$$g+f=-4$$

வட்டத்தின் ஆரை $=\sqrt{(g^2+f^2-6)}=2$

$$\therefore \quad g^2+f^2-6=4$$

$f=-g-4$ எனப் பிரதியிடுவதால்,

$$g^2+(g+4)^2-10=0$$

$$g^2+4g+3=0$$

$g=-1$ அல்லது -3

$f=-3$ அல்லது -1

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்;

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0$$

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0$$

2. $x^2+y^2-6ax+5a^2=0$, $x^2+y^2-6ay+5a^2=0$

என்னும் வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வாறான எல்லா வட்டங்களும், பொதுப் புள்ளிகளையுடைய ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சார்ந்தன எனக் காட்டுக; அப்பொதுப் புள்ளிகளைக் காண்க;

தந்த இரு வட்டங்களையும் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, ($2gg^1+2ff^1=c+c^1$ என்பதன்படி)

$$2g(-3a)+0=c+5a^2$$

$$0+2f(-3a)=c+5a^2$$

ஆகவே, $g=f$

$$c=-6ag-5a^2$$

வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு;

$$x^2+y^2+2gx+2gy-6ag-5a^2=0$$

இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்,

$$x^2+y^2-5a^2+2g(x+y-3a)=a$$

இச்சமன்பாடு $x+y-3a=0$ ஐ மூலிகவச்சாகவுடைய ஒரு பொது வச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும்:

$x^2+y^2-5a^2=0$, $x+y-3a=0$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலாற் பொதுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$x^2+(3a-x)^2-5a^2=0$$

$$(x-a)(x-2a)=0$$

$x=a$ அல்லது $2a$

$y=2a$ அல்லது a

பொதுப் புள்ளிகள்; $(a, 2a)$; $(2a, a)$

3. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகள் $(1, 2)$ $(-1, 1)$ ஆகும். அத்தொகுதியின் சமன்பாட்டையும், மூலிகவச்சின் சமன்பாட்டையும், காண்க.

(i) $(2, 0)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும்;

(ii) $x^2+y^2-4x-6y+2=0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும்; இத் தொகுதியின் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

பொதுவச்சுத் தொகுதியின் சமன்பாடு,

$(x-1)^2+(y-2)^2+k[(x+1)^3+(y-1)^2]=0$ ஆகும்.

இங்கு k ஒரு மாறும் பரமானம். $k\neq-1$ ஆகும். இதனைச் சுருக்குவதால்,

$$(1+k)(x^2+y^2)-2(1-k)x-2(2+k)y+5+2k=0 \quad\text{—— (1)}$$

மூலிகவச்சின் சமன்பாடு;

$$(x-1)^2+(y-2)^2-(x+1)^2-(y-1)^2=0$$
$$\therefore \quad 4x+2y-3=0$$

(i) சமன்பாடு (1) ஆல் தரப்படும் வட்டம் (2, 0) இனூடாகச் செல்வதால்;

$$(1+k)4-2(1-k)2+5+2k=0$$
$$\therefore \quad k=-\tfrac{1}{2}$$

ஆகவே இவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$x^2+y^2-6x-6y+8=0$$

(ii) சமன்பாடு (1) ஆல் தரப்படும் வட்டம்,

$x^2+y^2-4x-6y+2=0$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுமாயின் $2gg^1+2ff^1=c+c^1$ என்பதன்படி

$$2\ (-2)\left(-\frac{1-k}{1+k}\right)+2(-3)\left(-\frac{2+k}{1+k}\right)=\frac{5+2k}{1+k}+2$$
$$\therefore \quad k=9/2$$

இவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$11(x^2+y^2)+14x-26y+28=0$$

இதனைப் பின்வரும் முறையாலும் செய்யலாம்.

தொகுதியின் சமன்பாடு;

$$(x-1)^2+(y-2)^2+k(4x+2y-3)=0$$

அ-து $x^2+y^2-(2-4k)x-(4-2k)+5-3k=0$

(i) இத்தொகுதியின் ஒரு வட்டம், (2, 0) இனூடாகச் செல்வதால்,

$$1+4+k(8-3)=0$$
$$k=-1$$

இவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$x^2+y^2-6x-6y+8=0$$

(ii) இத் தொகுதியின் ஒரு வட்டமும், $x^2+y^2-4x-6y+2=0$ உம் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதால்,

$$2\ (-2)\ \frac{(4k-2)}{2}+2(-3)\frac{(2k-4)}{2}=2-5+3k$$
$$k=\frac{9}{2}$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$11x^2+11y^2+14x-26y+28=0$$

4. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் ஒரு எல்லைப்புள்ளி $(1,1)$; அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+4x-5y+5=0$ ஆகும். இத்தொகுதியின் மூலிகவச்சின் சமன்பாட்டையும் மறு எல்லைப் புள்ளியையும் காண்க.

இவ்வெல்லைப் புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று வட்டம் $x^2+y^2=1$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

எல்லைப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு; $(x-1)^2+(y-1)^2=0$

$\therefore$ மூலிகவச்சின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+4x-5y+5\ -\ (x-1)^2-(y-1)^2=0$$

அ-து, $2x-y+1=0$

தொகுதியின் சமன்மாட்டை பின்வருமாறு எழுதலாம்;

$$x^2+y^2+2x-4y+4+k\,(2x-y+1)=0$$

இங்கு k – ஒருமாறும் பரமானம்.

தொகுதியின் எதாவது ஒரு வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகள்

$$\left[-(1+k)\ ,\ \frac{4+k}{2}\right]$$

இவ்வட்டத்தின் ஆரை $=\sqrt{\left[(1+k)^2+\left(\frac{4+k}{2}\right)^2-4-k\right]}$

புள்ளிவட்டங்களுக்கு ஆரை $=0$

$$\therefore\ (1+k)^2+\left(\frac{4+k}{2}\right)^2-4-k=0$$

$$5k^2+12k+4=0$$

$$(5k+2)(k+2)=0\quad\therefore\quad k=-2 \text{ அல்லது } -\frac{2}{5}$$

$k=-\frac{2}{5}$ ஆகும்பொழுது, புள்ளி வட்டத்தின் மையம் $\left(-\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$

$k=-2$ ஆகும்பொழுது, தந்த எல்லைப் புள்ளி $(1,1)$ பெறப்படும்.

தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்க.

இவ்வட்டம் $(1, 1)$, $\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$ இனூடாகச் செல்வதால்;

$$1 + 1 + 2g + 2f + c = 0 \quad — \text{(i)}$$

$$\frac{9}{25} + \frac{81}{25} - \frac{6g}{5} + \frac{18f}{5} + c = 0 \quad — \text{(ii)}$$

இவ்வட்டம் $x^2 + y^2 = 1$ ஐ நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுவதால்;

$$g.0 + f.0 = c - 1$$

$$\therefore \quad c = 1 \qquad — \text{(iii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii), (iii) ஐத் தீர்த்தலால்,

$$g = -\frac{1}{6}, \; f = -\frac{4}{3}$$

∴ வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$3(x^2 + y^2) - x - 8y + 3 = 0.$$

5: ஒரு மாறும் வட்டம் S குறித்து புள்ளிகள் $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(1, 3)$ என்பவற்றின் வலுக்கள் முறையே l, m, n ஆகும். $l = \frac{21 - m}{4} = n - 6$ ஆகும். S ஆனது ஒன்றையொன்று வெட்டா ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் ஒரு உறுப்பு எனக் காட்டுக. இத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

S இன் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க ஆகவே,

$$l = 0 + c \qquad —— \quad (1)$$

$$m = 1 + 4 + 2g - 4f + c \qquad —— \quad (2)$$

$$n = 1 + 9 + 2g + 6f + c \qquad —— \quad (3)$$

மேலும், $l = n - 6$

$$\frac{21 - m}{4} = n - 6$$

$$\therefore \quad m = 45 - 4n$$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3) இல் l, m, ஐ n இல் உணர்த்துவதால்,

$$2g - 4f = 46 - 5n$$

$$2g + 6f = -4$$

$$-10f = 50 - 5n$$

$$\therefore \quad 2f = n - 10$$

$$2g = 26 - 3n$$

S இன் சமன்பாடு;

$$x^2+y^2+(26-3n)x+(n-10)y+n-6=0$$

அ-து $\quad x^2+y^2+26x-10y-6-n(3x-y-1)=0$

இது, $3x-y-1=0$ ஐ மூலிகவச்சாக உடைய ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

இத்தொகுதியின் ஒரு வட்டம் $x^2+y^2+26x-10y-6=0$ ஆகும்.

இதன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $=(-13,5)$

இதன் ஆரை $=\sqrt{(169+25+6)}=\sqrt{200}=14{\cdot}14$

இவ்வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து மூலிகவச்சின் செங்குத்துத் தூரம்,

$$=\left|\frac{-39-5-1}{\sqrt{10}}\right|=\frac{45}{\sqrt{10}}=14{\cdot}23$$

ஆகவே இவ்வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து மூலிகவச்சின் செங்குத்துத் தூரம், அதன் ஆரையிலும் கூடியது.

எனவே மூலிகவச்சு இவ்வட்டத்தை அதாவது தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தையும் வெட்டாது.

எனவே இது ஒரு இடைவெட்டாத் தொகுதியாகும்.

இத்தொகுதியின் ஏதாவதொரு வட்டத்தின் ஆரை

$$\text{வர்க்கம்} = \left(\frac{26-3n}{2}\right)^2=\left(\frac{n-10}{2}\right)^2-n-6$$

$$=\tfrac{1}{4}(10n^2-180n+800)$$

புள்ளி வட்டங்களுக்கு, ஆரை $=0$ ஆகும்;

ஆகவே $\quad 10n^2-180n+800=0$

$$(n-8)(n-10)=0$$

$$n=8 \text{ அல்லது } 10$$

புள்ளி வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகள்

$$=\left(-\frac{26-3n}{2},-\frac{n-10}{2}\right)$$

$n=8, 10$ ஆகும்போது இவற்றின் பெறுமானங்கள் முறையே $(-1,1)$, $(2,0)$

ஆகவே இத்தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள்;

$$(-1,1);\ (2,0) \text{ ஆகும்.}$$

6. ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதி V இன் மூலிகவச்சு $x-y+1=0$ ஆகும்; இத் தொகுதியின் மிகக்

குறைந்த ஆரையுடைய வட்டம் S ஆனது புள்ளி $(1, 1)$ இனூடாகச் செல்கின்றது. V இன் செங்குத்துத் தொகுதி W வின் ஓர் எல்லைப்புள்ளி, வரை $2x + y + 2 = 0$ இல் கிடக்கின்றது. S இன் சமன்பாட்டையும், W வின் மறுஎல்லைப் புள்ளியையும் காண்க.

V இன் குறைந்த ஆரையுடைய வட்டமானது அதன் பொதுப் புள்ளிகளை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்.

செங்குத்துத் தொகுதி W வின் எல்லைப்புள்ளிகள் V இன் பொதுப் புள்ளிகளாகும். மேலும் V இன் மூலிகவச்சு W வின் மையமிணை கோடாகும்.

எனவே W வின் எல்லைப் புள்ளிகள் $x - y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டில் கிடக்கவேண்டும்.

ஆனுல், ஓர் எல்லைப் புள்ளி $2x + y + 2 = 0$ என்னும் கோட்டிலும் கிடக்கின்றது.

ஆகவே, $x - y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ என்பவற்றைத் தீர்த்தலால் அதன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$x - y + 1 = 0$$
$$2x + y + 2 = 0$$
$$3x + 3 = 0$$
$$x = -1$$
$$y = 0$$

ஆகவே ஓர் எல்லைப் புள்ளி A யின் ஆள்கூறுகள் $= (-1,\ 0)$

மறு எல்லைப் புள்ளி B எனின், அதன் ஆட்கூறுகளை $(t, t+1)$ எனக் கொள்ளலாம்.

ஆகவே AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S இன் சமன்பாடு,

$$(x+1)\ (x-t) + y\ (y-t-1) = 0$$

இவ்வட்டம் புள்ளி $(1,1)$ இனூடாகச் செல்வதால்,

$$2\ (1-t) + (-t) = 0$$

$$\therefore\quad t = 2/3$$

$$B \equiv \left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{5}{3}\right)$$

S இன் சமன்பாடு

$$3\ (x^2 + y^2) + x - 5y - 2 = 0$$

7. தந்த ஏதாவது இருவட்டங்களின் சமன்பாடுகளை உகந்த அச்சுகளின் தெரிவால் $S \equiv x^2+y^2+2g_1x+c^2=0$, $S^1 \equiv x^2+y^2+2g_2x+c^2=0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக.

A என்பது $S=0$ இல் ஒரு மாறும் புள்ளி. $S=0$ இற்கு A இல் கீறிய தொடலி, A இலிருந்து $S^1=0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணை B இல் சந்திக்கின்றது. AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், $(\pm c, 0)$ என்பவற்றைப் பொதுப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சார்ந்ததெனக் காட்டுக. இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த வட்டங்கள், $S=0$, $S^1=0$ என்னும் சமன்பாடுகளால் தரப்படும் தொகுதிகளுக்குச் செங்குத்தெனக் காட்டுக.

$A \equiv (x_1, y_1)$ எனக் கொள்க.

$S=0$ இற்குக் A இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு;

$$xx_1+yy_1+g_1(x+x_1)+c^2=0 \qquad \text{—— (1)}$$

A இலிருந்து $S^1=0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு;

$$xx_1+yy_1+g_2(x+x_1)+c^2=0 \qquad \text{—— (2)}$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஐத் தீர்த்தலாற் B இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$(g_1-g_2)(x+x_1)=0$$

$$\therefore \quad x=-x_1$$

$$y=\frac{x_1^2-c^2}{y_1}$$

$$B \equiv \left(-x_1, \frac{x_1^2-c^2}{y_1}\right)$$

AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு;

$$(x-x_1)(x+x_1)+(y-y_1)\left(y-\frac{x_1^2-c^2}{y_1}\right)=0$$

அ-து $$x^2+y^2-x_1^2-yy_1-y\frac{x_1^2-c^2}{y_1}+x_1^2-c^2=0$$

$$S_1 \equiv x^2+y^2-c^2-\frac{1}{y_1}(x_1^2+y_1^2-c^2)\,y=0$$

இது $S+\lambda l=0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

ஆகவே இச்சமன்பாடு $y = 0$ ஐ மூலிகவச்சாகவும், $x^2 + y^2 - c^2 = 0$ ஐ அதன் ஓர் உறுப்பாகவும் உடைய ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

இத் தொகுதியின் சமன்பாட்டையும், மூலிகவச்சின் சமன்பாட்டையும் தீர்த்தலால்,

$$x^2 = c^2 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad x = \pm c$$

ஆகவே பொதுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $(\pm c, 0)$ ஆகும்.

$S_1 = 0, S^1 = 0$ என்னும் தொகுதி வட்டங்களுக்கு, நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதற்காய நிபந்தனை $2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ ஐ உபயோகிப்போமாயின்,

இ. கை. ப. $= 0$

வ. கை. ப. $= -c^2 + c^2 = 0$

ஆகவே இவ்விரு தொகுதி வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன.

இவ்வாறே $S^1 = 0$ உம் $S_1 = 0$ உம் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் காட்டலாம்.

8. x– அச்சில் **A** ஒரு மாறும் புள்ளி, **A** இலிருந்து வட்டம் $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண் y – அச்சை **B** இற் சந்திக்கின்றது. **AB** யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் ஒரு வெட்டும் பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சார்ந்ததெனக் காட்டுக. அவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளைக் காண்க.

$\mathbf{A} \equiv (h, 0)$ எனக் கொள்க.

A இலிருந்து $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ இற்கு கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு;

$$xh + 0 - (x + h) - 2(y + 0) + 4 = 0$$

$$\mathbf{B} \equiv \left(0, \frac{4 - h}{2}\right)$$

AB யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x - h)x + y\left(y - \frac{4 - h}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y - h\left(x - \frac{y}{2}\right) = 0$$

இது $x - y/2 = 0$ ஐ மூலிகவச்சாக உடைய ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சார்ந்ததாகும்.

இத்தொகுதியின் ஒரு வட்டம் $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ஐயும் மூலிக வச்சு $2x - y =$ ஐயும் தீர்க்கும்போது;

$$x^2 + 4x^2 - 4x = 0$$

$$x = 0 \text{ அல்லது } 4/5$$

$$\therefore \quad y = 0 \text{ அல்லது } 8/5$$

x,y இற்கு மெய்ப்பெறுமானங்கள் இருத்தலால் இது வெட்டும் தொகுதியாகும்.

பொதுப் புள்ளிகள் $(0,0)$; $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

9. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் இரு வட்டங்கள் $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$, $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$ ஆகும். இத் தொகுதியின் மூலிகவச்சின் சமன்பாட்டையும் எல்லைப் புள்ளிகளை யும் காண்க.

A என்பது மூலிகவச்சில் ஒரு நிலையான புள்ளி. A இலிருந்து இத்தொகுதியின் எந்தவொரு வட்டத்திற்கும் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண், மூலிகவச்சை ஒரு நிலையான புள்ளியில் வெட்டு கின்றதெனக் காட்டுக.

மூலிகவச்சின் சமன்பாடு,

$$S_1 - S_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $\quad x - 2y = 0$

இத்தொகுதியின் சமன்பாடு;

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 + h\,(x - 2y) = 0$; இங்கு h ஒரு மாறும் பர மானம்.

இத்தொகுதி வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகள்

$$= \left(-\frac{4+h}{2}, \frac{4+2h}{2}\right)$$

இதன் ஆரை வர்க்கம் $= \left(\frac{4+h}{2}\right)^2 + \left(\frac{4+2h}{2}\right)^2 - 1$

$$= \tfrac{1}{4}\,(5h^2 + 24h + 28)$$

புள்ளி வட்டங்களுக்கு,

$$5h^2+24h+28=0 \text{ ஆகும்.}$$

$$(5h+14)\ (h+2)=0$$

$$\therefore\ h=-\frac{14}{5} \text{ அல்லது } -2$$

இப் பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த வட்டங்களின் மையங்களின் அல்லது எல்லைப்புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$, $(-1,\ 0)$ ஆகும்.

A ஆனது $x-2y=0$ இற் கிடத்தலால் அதன் ஆள்கூறுகளை $(2t,\ t)$ எனக் கொள்ளலாம்.

A இலிருந்து இத்தொகுதியின் ஏதாவதொரு வட்டம் $x^2+y^2+(4+h)x-(4+2h)y+1=0$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு;

$$2tx+ty+\frac{(4+h)}{2}(x+2t)-\frac{(4+2h)}{2}(y+t)+1=0$$

அ-து $2(t+1)\ x+(t-2)y+2t+1+\frac{h}{2}(x-2y)=0$

இக்கோடு, h இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x-2y=0$ (மூலிகவச்சு), $2\,(t+1)x+(t-2)y+2t+1=0$ (t மாறிலி) என்னும் நிலையான கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் கோட்டைக் குறிக்கின்றது.

10. வட்டம் $x^2+y^2=1$ இன் பரிதியை சமகூறிட்டும் வட்டம் $x^2+y^2+2x-6y+4=0$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டங்கள், ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சார்ந்தன எனக் காட்டுக. அவற்றின் பொதுப் புள்ளிகளைக் காண்க.

இத்தொகுதியின் செங்குத்துத் தொகுதியின் சமன்பாட்டையும் மிகக் குறைந்த ஆரையுடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

$x^2+y^2=1$ இன் பரிதியை சமகூறிடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனக் கொள்க.

இவ்விரு வட்டங்களின் பொதுநாண் $2gx+2fy+c+1=0$ ஆகும். $x^2+y^2=1$ இன் மையம் $(0,0)$ இப்பொதுநாணில் கிடத்தலால்,

$$0+0+c+1=0$$

$$\therefore\ c=-1$$

S ஆனது வட்டம் $x^2+y^2+2x-6y+4=0$ ஐ நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதால், $2gg^1+2ff^1=c+c^1$ என்பதன்படி,

$$2g.1-2f.3=-1+4$$

$$2g=6f+3$$

ஆகவே S இன் சமன்பாடு;

$$x^2+y^2+(6f+3)x+2fy-1=0$$

அ-து $\quad x^2+y^2+3x-1+2f(3x+y)=0$

இச் சமன்பாடு f இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $3x+y=0$ ஐ மூலிகவச்சாக உடைய ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

$3x+y=0$ ஐயும் இத்தொகுதியின் சமன்பாட்டையும் தீர்த்தலால்

$x^2+y^2+3x-1=0$ ஆகும்.

அ-து $\quad x^2+9x^2+3x-1=0$

$$(5x-1)(2x+1)=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{5} \text{ அல்லது } -\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{3}{5} \text{ அல்லது } \frac{3}{2}$$

பொதுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right);\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

இப் பொதுப் புள்ளிகள் செங்குத்துத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளாகும். செங்குத்துத் தொகுதியின் மிகக் குறைந்த ஆரையுடைய வட்டமானது இவ்வெல்லைப் புள்ளிகளை ஒரு விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்.

இதன் சமன்பாடு,

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(y+\frac{3}{5}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$$

அ-து $\quad 10(x^2+y^2)+3x-9y-10=0$

செங்குத்துத் தொகுதியின் சமன்பாடு;

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2+\lambda\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\right]=0$$

பயிற்சி 5

1. $x^2+y^2+4x+4y-16+\lambda(x+y-3)=0$ என்னும் சமன்பாடு λ இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு ஒன்றையொன்று இடைவெட்டாப் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக. இதன் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

2. $x^2+y^2+8x-7y-1=0$, $2x^2+2y^2+x+y-2=0$ என்னும் வட்டங்களை தனது உறுப்புக்களாகக் கொண்ட பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சேர்ந்த புள்ளி, $(2,1)$ இனூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $x^2+y^2-3x+5y-1=0$ என்னும் வட்டத்தை ஓர் உறுப்பாகவும், $5x-5y-3=0$ என்னும் கோட்டை மூலிகவச்சாகவும் உடைய பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு வட்டங்கள் $2x+y-3=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடுகின்றனவெனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

4. $x^2+y^2+x+2y-7=0$, $3x^2+3y^2+2x+6y-18=0$ என்னும் வட்டங்களை உறுப்புக்களாகக் கொண்ட பொதுவச்சுத் தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இதன் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

இவ்வெல்லைப் புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று $x^2+y^2-2x-4y+2=0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. ஒரு புள்ளியானது $x^2+y^2+3x+4y-1=0$ என்னும் வட்டம் குறித்து அதன் வலு, $x^2+y^2-2x-y-1=0$ என்னும் வட்டம் குறித்து அதன் வலுவின் k மடங்காகும் வண்ணம் அசைகின்றது. இப்புள்ளியின் ஒழுக்கு, ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியெனக் காட்டுக. இதன் பொதுப்புள்ளிகளைக் காண்க.

இத் தொகுதியின் நிமிர்கோண தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. θ ஒரு ஒருமைக் கோணமாகவிருக்க,
$x^2+y^2-2px\ சீக\theta-p^2=0$, $x^2+y^2-2py\ கோசே\ \theta-p^2=0$ என்னும் வட்டங்கள் இரண்டும், ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றவெனக் காட்டுக. இத்தொகுதியின் மூலிகவச்சையும், எல்லைப் புள்ளிகளையும் காண்க.

7. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 5x - y + 2 = 0$ ஆகும். இது ஒரு இடைவெட்டா வகையைச் சார்ந்தது எனக் காட்டுக. இதன் பொதுப் புள்ளிகளைக் காண்க. இத் தொகுதியின் ஆகக் குறைந்த ஆரையுடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. λ ஒரு மாறும் பரமானம் எனின்,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c + 2\lambda(gx - fy + 1) = 0$, என்னும் சமன்பாடு ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியைக் குறிக்கின்றதெனக் காட்டுக. இதன் செங்குத்துத் தொகுதியின் சமன்பாடு,

$2gf(x^2 + y^2) + f(c + 2)x + g(c - 2)y + \mu(fx + gy + 2gf) = 0$ எனக் காட்டுக.

9. S என்னும் வட்டத்தின் மையம் x – அச்சின் மீது கிடக்கின்றது. A என்பது y – அச்சின்மீது ஒரு மாறும் புள்ளி. A இலிருந்து S இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண் y – அச்சை B இற் சந்திக்கின்றது. AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் x – அச்சை மூலிகவச்சாக உடைய ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதி S^1 இன் ஓர் உறுப்பாகுமெனக் காட்டுக.

S என்பது y – அச்சை வெட்டுகின்றது அல்லது வெட்டுகிறதில்லை என்பதற்கேற்ப, S^1 ஆனது ஒன்றையொன்று வெட்டா அல்லது வெட்டும் தொகுதி எனக் காட்டுக.

10. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் ஒரு எல்லைப் புள்ளி $(1, -3)$ ஆகும். அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டம் $3x^2 + 3y^2 + 26y + 23 = 0$ ஆகும். மூலிகவச்சின் சமன்பாட்டையும், மறு எல்லைப் புள்ளியையும் காண்க.

இவ்வெல்லைப் புள்ளிகளினூடாகச் சென்று $x^2 + y^2 - 1 = 0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் மூலிகவச்சு $x - y = 0$ என்னும் கோடாகும். அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டம் $2x^2 + 2y^2 + 7x - 11y + 10 = 0$ ஆகும். A என்பது மூலிகவச்சில் ஒரு நிலையான புள்ளியாகும். A இலிருந்து இத்தொகுதியின் எந்தவொரு வட்டத்திற்கும் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண், மூலிகவச்சில் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

12. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஓர் எல்லைப் புள்ளி $(-1, 1)$ ஆகும். அத்தொகுதியின் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+3x-3y=0$ ஆகும். மூலிகவச்சின் சமன்பாட்டையும், தொகுதியின் சமன்பாட்டையும் காண்க. மறு எல்லைப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத் தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x-1=0$ஐத் தொடும் செங்குத்துத் தொகுதியின் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

13. $x^2+y^2-1=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியைச் சமகூறிட்டு, $x^2+y^2+6x-2y+4=0$ என்னும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டமானது, ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சேர்ந்ததெனக் காட்டுக. இத் தொகுதியின் பொதுப்புள்ளிகளைக் காண்க.

14. ஒரு பொதுவச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகள் $(0, 1)$, $(1, -1)$ ஆகும். இத்தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $(2, -3)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் இத் தொகுதியின் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

மேற்கூறிய தொகுதியின் செங்குத்துத் தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $\sqrt{5}$ அலகு ஆரையுடைய இத் தொகுதியின் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

15. ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் $(-1, 2)$, $(2, -1)$ ஆகும். அதன் மூலிக வச்சின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத் தொகுதியின் செங்குத்துத் தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. c என்பது ஒரு ஒருமையாகவும், λ என்பது ஒரு பரமானமாகவும் இருக்கும்போது, $x^2+y^2+2\lambda x-c^2=0$ என்னும் சமன்பாடு ஒன்றையொன்று வெட்டும் ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைக் குறிக்கும் என நிறுவி, இத்தொகுதியின் பொதுப் புள்ளிகள் P, Q இன் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

இத்தொகுதியின் இரு வட்டங்கள் S_1, S_2 என்பவை பொது வாக, யாதாயினும் ஒரு கோடு l ஐத் தொடுமென நிறுவுக.

S_1, S_2 என்பன ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுகின் றன. P, Q இலிருந்து l இற்கு வரைந்த செங்குத்துகளின் நீளங்கள் முறையே a, b எனின் $ab = c^2$ என நிறுவுக.

17. $x^2+y^2-14x+6y-2=0$, $x^2+y^2-20x+8y-4=0$ என்னும் வட்டங்களால் ஆக்கப்படும் பொது வச்சுத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகள் $(1,-1)$, $(-2, 0)$ எனக் காட்டுக.

தந்த இரு வட்டங்களையும் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டி x–அச்சைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. $(-1, 1)$, $(2,-3)$ என்பவற்றை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஆரை $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ அலகுகளுடைய இத்தொகுதியின் இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

19. S என்பது ஒரு நிலையான வட்டம். l என்பது ஒரு நிலையான கோடு. l இற்குச் சமாந்தரமான தளமொன்றிலுள்ள m என்னும் ஒரு மாறும் கோடு வட்டம் S ஐ வெட்டுகின்றது. S, m என்பவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் S_1 ஆனது வட்டம் S ஐ நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுகின்றது. S_1 என்பது ஒன்றையொன்று இடைவெட்டா பொதுவச்சுத் தொகுதியைச் சார்ந்ததெனக் காட்டுக. இதன் எல்லைப் புள்ளிகள் S இற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

20 $A(c,0)$, $B(-c,0)$ என்னும் நிலையான புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு தொகுதி வட்டங்கள் செல்கின்றன. $a^2>c^2$ எனின் m இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $(\neq 0)$, $y=m(x-a)$ என்னும் கோட்டை இத் தொகுதியின் இரு மெய் வட்டங்கள் தொடுகின்றன எனக் காட்டுக. இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுமாயின், $y=m(x-a)$ ஆனது நீள்வளையம் $\dfrac{x^2}{2}+y^2=c^2$ ஐத் தொடுமெனக் காட்டுக.

21. S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களின் ஆரைகள் முறையே 9, 16 அலகுகள் ஆகும். அவற்றின் மையங்களுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 5 அலகுகள். இவ்விரு வட்டங்களும் K என்னும் ஒரு பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தனவாயின், S_1 இன் மையத்திலிருந்து K இன் மூலிகவச்சின் தூரத்தையும், அதன் பொதுப் புள்ளிகளின் தூரத்தையும் காண்க.

22. உகந்த அச்சுகளின் தெரிவால், ஒன்றையொன்று வெட்டாப் பொதுவச்சு வட்டத் தொகுதியின் சமன்பாட்டை $x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக. இங்கு λ ஒரு மாறும் சாராமாறி, a ஒரு ஒருமையாகும்.

λ இன் என்ன பெறுமானங்களுக்கு (λ_1, λ_2 எனக் கொள்க) இத் தொகுதியின் இரு வட்டங்கள், x கோசை α + y சைன் $\alpha = p$, (சைன் $\alpha \neq 0$) என்னும் கோட்டைத் தொடுமெனக் காண்க. $\lambda_1 + \lambda_2$ என்பது α இற் தங்கியிருக்கவில்லை எனக் காட்டுக.

23. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது $px + qy + r = 0$ ஐ தனது மூலிக வச்சாகக் கொண்ட ஒரு பொது வச்சுத் தொகுதியின் ஒரு வட்டமாகும். $lx + my + n = 0$ என்னும் கோடு, பொதுவாக இத் தொகுதியின் இரு வட்டங்களைத் தொடுமெனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 - 2x - y = 0$ என்பது ஒரு பொது வச்சுத் தொகுதியின் வட்டமாகும். இதன் மூலிக வச்சு $2x - y = 0$ ஆகும். இத்தொகுதியின் இரு வட்டங்கள் $y - 2 = 0$ ஐத் தொடுகின்றன வெனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இவ் விரு வட்டங்களும் $4x + 3y + 2 = 0$ ஐத் தொடுகின்றன வெனவும் காட்டுக.

அலகு 6

பரவளைவு

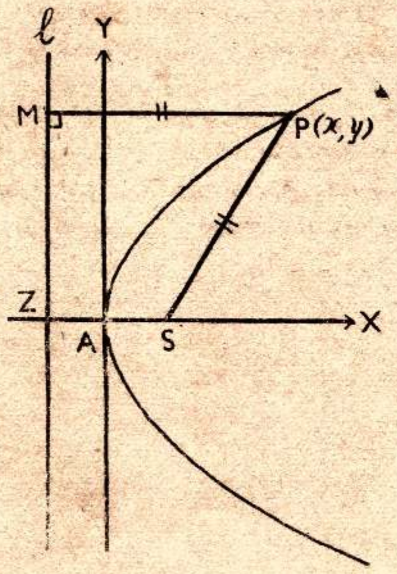
6.1 வரைவிலக்கணம்

l என்பது ஒரு தளத்திலேயுள்ள ஒரு நிலையான கோடும் S என்பது அத்தளத்தில் (l இல் கிடவாத) ஒரு நிலையான புள்ளியுமாகுக. அத்தளத்திலுள்ள P என்னும் ஒரு மாறும் புள்ளியானது, l இலிருந்து அதனது செங்குத்துத் தூரம் PM ஆனது. SP இற்குச் சமனாக இருக்குமாறு இயங்குமாயின், P இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு எனப்படும்.

$$\frac{SP}{PM} = 1 \text{ ஆகும்}$$

l என்பது அப் பரவளைவின் செலுத்தலி எனவும், S என்பது குவியம் எனவும் படும்.

SZ ஐ l இற்குச் செங்குத்தாக வரையவும். SZ இன் நடுப்புள்ளி A ஆயின். SA = AZ ஆகும். ஆகவே A ஆனது வளையியில் ஒரு புள்ளியாகும்.



AS ஐ X– அச்சாகவும், A இனூடாக, AX இற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் வரையை Y– அச்சாகவும் கொள்க.

AS = a எனக் கொள்க.

$\therefore \quad A \equiv (0,0)\ ;\ S \equiv (a,0)\ ;\ Z \equiv (-a,0)$

$P \equiv (x, y)$ எனக் கொள்க.

$$SP^2 = PM^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\therefore \quad y^2 = 4ax$$

இதுவே பரவளைவின் சமன்பாடாகும்

A என்பது பரவளைவின் உச்சி எனப்படும்.

AS என்பது பரவளைவின் அச்சு எனப்படும்.

6·2 பரவளைவின் சில உடைமைகள்

1. பரவளைவில் (x,y) ஏதாவதொரு புள்ளியாயின், $(x,-y)$ உம் பரவளைவில் ஒரு புள்ளியாகும். ஆகவே பரவளைவு x– அச்சு பற்றி சமச்சீராகவுள்ளது.

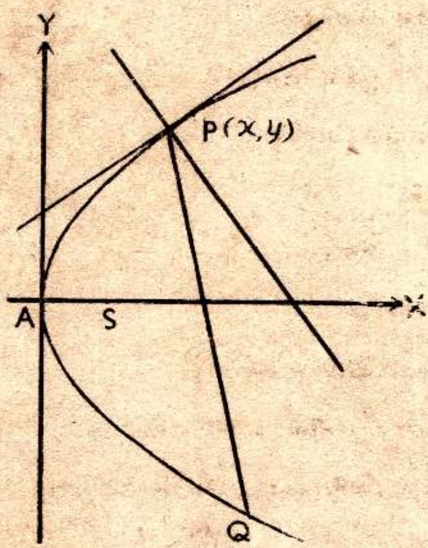
2. $a > 0$ ஆயின், x இன் எல்லா மெய் நேர்ப்பெறுமானங்களுக்கு மட்டுமே, y இற்கு மெய்ப் பெறுமானங்கள் உண்டு. ஆகவே வளையி முழுதும் y– அச்சிற்கு இடப்பக்கத்திற் கிடக்கும்.

3. $x \to \infty$ ஆக $y \to \pm\infty$ ஆகும். ஆகவே வளையியிற்கு இரு முடிவில் கிளைகள் உண்டு.

$x^2 = 4by$, $(b > 0)$ என்னும் பரவளைவானது y – அச்சு பற்றிச் சமச்சீராகவும், x– அச்சின் மேல் முழுவதும் கிடப்பதுவுமாகும்.

$x^2 = -4by$ ஆனது, x அச்சின் கீழ் முழுவதும் கிடக்கும்.

6·3 பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ இலுள்ள தொடலி, செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்.



$y^2 = 4ax$ ஐ x சார்பாக வகையிடுவதால்,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \text{ ஆகும்}$$

P இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $= \dfrac{2a}{y_1}$

தொடலியின் சமன்பாடு;

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

$$yy_1 = 2ax - 2ax_1 + y_1^2$$

புள்ளி (x_1, y_1) ஆனது, $y^2 = 4ax$ இல் கிடத்தலால்,

$$y_1^2 = 4ax_1 \text{ ஆகும்}$$

$$\text{ஆகவே } yy_1 = 2ax + 2ax_1 = 2a(x + x_1)$$

$S \equiv y^2 - 4ax = 0$ எனக் கொள்வோமாயின்,

தொடலியின் சமன்பாட்டை $S_1 = yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$ என எழுதலாம்.

P இலுள்ள செவ்வனின் படித்திறன் $= \frac{y_1}{2a}$

ஆகவே செவ்வனின் சமன்பாடு; $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

$$xy_1 + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1$$

6:4 ஒரு வளையின் பரமானச் சமன்பாடு.

ஒரு வளையின் சமன்பாட்டை $f(x, y) = 0$ என்க.

$$\left.\begin{array}{l} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{array}\right\} t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

என்பன t இன், தொடர்ச்சியான, (t_1, t_2) என்னும் வீச்சில் வகையிடத் தக்க சார்புகளாகுக.

இவை, வளையியின் பரமானச் சமன்பாடுகளாக இருக்க வேண்மாயின் பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு அமைய வேண்டும்.

(1) வளையியில் (x_0, y_0) என்னும் ஒரு புள்ளி தரப்படுமாயின், $x_0 = \phi(t_0)$, $y = \varphi(t_0)$ ஆகுமாறு t இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானம் t_0, $(t \leqslant t_0 \leqslant t_2)$ மாத்திரமே இருக்க வேண்டும்.

(2) t_0. $(t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2)$ தரப்படுமாயின், $x_0 = \phi(t_0)$, $y_0 = \varphi(t_0)$ ஆகுமாறு, வளையியில் ஒரேயொரு தனிப் புள்ளி (x_0, y_0) மாத்திரமே இருக்கவேண்டும்.

6·5 பரவளைவின் பரமானச் சமன்பாடு;

$x = at^2$, $y = 2at$ என்னும் புள்ளி, t இன் $(-\infty < t < \infty)$ எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $y^2 = 4ax$ இற் கிடக்கின்றது.

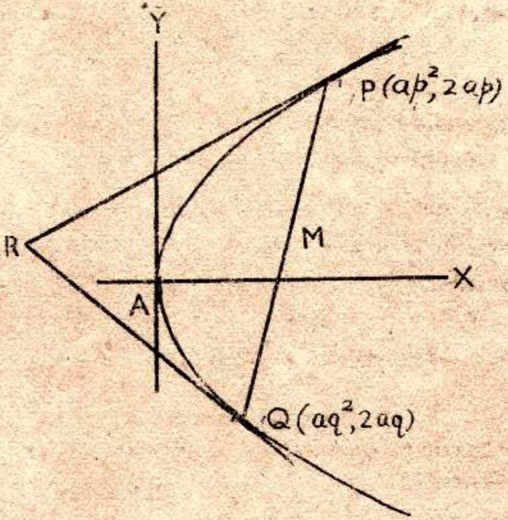
பரவளைவில் (x_0, y_0) என்னும் ஒரு புள்ளி தரப்படுமாயின், $x_0 = at_0^2$, $y_0 = 2at_0$ ஆகுமாறு t_0 இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானம் $t_0 = \frac{x_0}{2y_0}$ மாத்திரமே உண்டு; மேலும் t_0 தரப்படுமாயின், $x_0 = at_0^2$, $y = 2at_0$ ஆகுமாறு பரவளைவில் (x_0, y_0) என்னும் ஒரு தனிப்புள்ளி மாத்திரமே உண்டு.

ஆகவே $x = at^2$, $y = 2at$ என்பன $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவின் பரமானச் சமன்பாடுகளாகும்.

$t = 0$ ஆயின், பரவளைவின் உச்சி பெறப்படும். $t > 0$ ஆயின், x– அச்சிற்கு மேலுள்ள கிளையிலுள்ள புள்ளிகளும், $t < 0$ ஆயின் x– அச்சிற்கு கீழுள்ள கிளையிலுள்ள புள்ளிகளும் பெறப்படும்.

$(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளி, புள்ளி [t] எனவும் குறிக்கப்படும்.

6·6 பரவளைவு $y^2 = 4ax$இல் $P(at_1^2, 2at_1)$, $Q(at_2^2, 2at_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு.



PQ இன் சமன்பாடு :

$$y - 2at_1 = \frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)}(x - at_1^2)$$

$$= \frac{2}{t_1 + t_2}(x - at_1^2)$$

$$y(t_1 + t_2) - 2at_1(t_1 + t_2) = 2x - 2at_1^2$$

$$2x - (t_1 + t_2)y + 2at_1t_2 = 0$$

6.7 பரவளைவு $y^2 = 4ax$இற்கு புள்ளி $P(at^2, 2at)$இலுள்ள தொடலி செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்:

137-ம் பக்கத்திலுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.

$y^2 = 4ax$ ஐ x சார்பாக வகையிடுவதால்

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

P இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $= \dfrac{2a}{5at} = \dfrac{1}{t}$

தொடலியின் சமன்பாடு;

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

$$x - ty + at^2 = 0.$$

குறிப்பு: நாண் $2x - (t_1 + t_2)y - at_1 t_2 = 0$ இன் சமன்பாட்டில் $t_2 \rightarrow t_1$ ஆக, புள்ளி $[t_1]$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $x - t_1 y + at_1^2 = 0$ பெறப்படும்.

P இலுள்ள செவ்வனின் படித்திறன் $= -t$

செவ்வனின் சமன்பாடு;

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

$$tx + y - 2at - at^3 = 0$$

6.8 தந்த ஒரு புள்ளி $P(h,k)$ இலிருந்து, பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்குப் பொதுவாக மூன்று செவ்வன்கள் வரையலாம்.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் ஏதாவதொரு புள்ளி $(at^2, 2at$ இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு $tx + y - 2at - at^3 = 0$ என) முன்பு கண்டுள்ளோம்.

இச் செவ்வன் புள்ளி $P(h,k)$ இனூடாகச் செல்லுமாயின்

$$th + k - 2at - at^3 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அ-து $at^3 + (2a - h)t - k = 0$

இது t இலுள்ள ஒரு முப்படிச் சமன்பாடாகும். ஆகவே h,k இன் தந்த பெறுமானங்களுக்கு t இற்குப் பொதுவாக மூன்று பெறுமானங்கள் t_1, t_2, t_3 உண்டு. இவை மெய் அல்லது கற்பனையாக இருக்கலாம். எனவே புள்ளி $P(h,k)$ இலிருந்து மூன்று செவ்வன்கள் வரையலாம்.

$$t^2 \text{ இன் குணகம்} = t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

6.9 பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் $P[t_1]$, $Q[t_2]$ இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஆள் கூறுகள்.

139-ம் பக்கத்திலுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.

P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே,

$$x - t_1 y + at_1^2 = 0 \qquad \text{———}(1)$$
$$x - t_2 y + at_2^2 = 0 \qquad \text{———}(2)$$

இவற்றின் வெட்டுப் புள்ளி T இன் ஆள் கூறுகள் இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$(1)-(2) \qquad y(t_2 - t_1) + a(t_1^2 - t_2^2) = 0$

$$\therefore y = a(t_1 + t_2)$$
$$x = at_1(t_1 + t_2) - at_1^2 = at_1 t_2$$
$$T \equiv [at_1 t_2,\ a(t_1 + t_2)]$$

6.10 கோடு $y = mx + c$, பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ஐ தொடுவதற்கான நிபந்தனை.

இந் நேர்கோடும், பரவளைவும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x – ஆள் கூறுகள் பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படும்.

$$(mx + c)^2 = 4ax$$
$$m^2x^2 + 2x(mc - 2a) + c^2 = 0$$

x இற்கு சமமான மூலங்கள் இருத்தற்கு இதன் தன்மை காட்டி பூச்சியம் ஆகவேண்டும்.

$$\therefore \quad \Delta = 4(mc - 2a)^2 - 4m^2c^2 = 0$$
$$= 4[4a^2 - 4amc]$$

$c = \dfrac{4a^2}{4am} = \dfrac{a}{m}$ ஆயின் $\Delta = 0$ ஆகும்.

ஆகவே தொடலியின் சமன்பாடு; $y = mx + \dfrac{a}{m}$

பரவளைவிற்கு $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள (அதாவது

$t = \dfrac{1}{m}$ ஆகும்போது) தொடலியின் சமன்பாடு :

$$x - ty + at^2 = 0$$

$$x - \frac{y}{m} + \frac{a}{m^2} = 0$$

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

6 · 11 குவிய நாண்

P 't_1', Q 't_2' என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு,

$2x - (t_1 + t_2)y + 2at_1t_2 = 0$ என முன்பு கண்டுள்ளோம்.

இந்த நாணானது பரவளைவின் குவியம் S (a, 0) இனூடாகச் செல்லுமாயின்,

$$2a + 2at_1t_2 = 0 \text{ ஆகும்}$$

$$\therefore t_1t_2 = -1$$

$$t_2 = -\frac{1}{t_1}$$

$$P \equiv (at_1^2, 2at_1)$$

$$Q \equiv \left(\frac{a}{t_1^2}, \frac{-2a}{t_1}\right)$$

6. 12 தொடுகை நாண்

139-ம் பக்கத்திலுள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்.

T (x_1, y_1) என்பது ஒரு தந்த புள்ளியாகவும் T இலிருந்து பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்குக் கீறிய தொடலிகள் TP, TQ உம் ஆகுக. பரவளைவுடன் இத்தொடலிகளின் தொடுபுள்ளிகள் முறையே P (x_2, y_2), Q (x_3, y_3) ஆகுக. PQ ஒரு தொடுகை நாணாகும்.

பரவளைவிற்கு புள்ளிகள் P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$yy_2 = 2a(x + x_2)$$
$$yy_3 = 2a(x + x_3) \text{ ஆகும்.}$$

இவ்விரு தொடலிகளும் புள்ளி $T(x_1, y_1)$ இற் சந்திப்பதால்,

$$y_1\, y_2 = 2a\,(x_1 + x_2) \qquad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$y_1\, y_3 = 2a\,(x_1 + x_3) \text{ ஆகும்.} \qquad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) இலிருந்து, $P(x_2, y_2)$, $Q(x_3, y_3)$ என்னும் புள்ளிகள்

$$yy_1 = 2a\,(x + x_1)$$

என்னும் கோட்டில் கிடக்கின்றன என்பதை அறியலாம்.

ஆகவே PQ இன் சமன்பாடு அதாவது T இலிருந்து கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு

$$yy_1 = 2a\,(x + x_1) \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக் காட்டுகள் :

1. $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி P 't' இலுள்ள செவ்வன், பரவளைவை மீண்டும் Q 'T' இற் சந்திப்பின்

$$T = -\left(t + \frac{2}{t}\right) \text{ என நிறுவுக.}$$

பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இல் சந்திக்கின்றன. t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் R, $y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$ இல் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

P இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு;

$$tx + y - 2at - at^3 = 0$$

நாண் PQ இன் சமன்பாடு;

$$2x - (t + T)y + 2atT = 0$$

இவை இரண்டினது படித்திறன்களையும் சமப்படுத்துவதால்;

$$-t = \frac{2}{t + T}$$

$$\therefore\ T = -\left(t + \frac{2}{t}\right)$$

P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே;

$$x - ty + at^2 = 0$$
$$x - Ty + aT^2 = 0$$

இவற்றைத் தீர்த்தால் R இன் ஆள்கூறுகள் (h, k) பெறப்படும்.

$$k = a(t+T) = -\frac{2a}{t}$$

$$h = at(t+T) - at^2 = -2a - at^2$$

$$= -2a - \frac{4a^3}{k^2} \quad \left(t = -\frac{2a}{k} \text{ எனப் பிரதியிடுவதால்}\right)$$

$$\therefore\ k^2(h+2a) + 4a^3 = 0$$

நடை ஆள்கூறுகளுக்கு மாற்றுவதால் (h, k) இன் ஒழுக்கு,

$$y^2(x+2a) + 4a^3 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

2. $y^2 + 4ax = 8a^2$, $y^2 - 4ax = 4a^2$ என்னும் பரவளைவுகளின் உச்சிகளினதும், குவியங்களினதும் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

இப்பரவளைவுகளின் வெட்டுப்புள்ளிகளையும், அப்புள்ளிகளில் அவற்றிற்கிடைப்பட்ட கூர்ங்கோணங்களையும் காண்க.

$$y^2 = -4ax + 8a^2 = -4a(x-2a)$$

ஆள்கூற்றச்சுகளின் திசையை மாற்றுமல் உற்பத்தித் தானத்தை 2a,0) என்னும் புள்ளிக்கு மாற்றவும். ஆகவே இப்பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = -4ax$ என்ற வடிவில் பெறப்படும்.

இதன் உச்சியின் ஆள்கூறுகள் $=(2a, 0)$

குவியத்தின் ஆள்கூறுகள் $= (2a-a, 0) = (a, 0)$

இவ்வாறே பரவளைவு $y^2 = 4a(x+a)$ இன் உச்சி, குவியம் ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(-a, 0)$, $(0, 0)$ ஆகும்.

வெட்டுப்புள்ளிகள் P,Q இன் ஆள்கூறுகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$$y^2 + 4ax = 8a^2$$
$$y^2 - 4ax = 4a^2$$

$$2y^2 = 12a^2 \; ; \; y = \pm\sqrt{6}\, a$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$P \equiv \left(\frac{a}{2}, \sqrt{6a}\right) \quad ; \quad Q \equiv \left(\frac{a}{2}, -\sqrt{6}\, a\right)$$

$y^2 + 4ax = 8a^2$ ஐ வகையிடுவதால்,

$$2y\frac{dy}{dx} + 4a = 0 \quad ; \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{y}$$

இப்பரவளைவிற்கு P இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $= -\dfrac{2a}{\sqrt{6a}}$

இவ்வாறே $y^2 - 4ax = 4a^2$ இற்கு P இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $= \dfrac{2a}{\sqrt{6a}}$

இத் தொடலிகள் இரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட கூர்ங்கோணம் θ ஆயின்,

$$\text{தான் } \theta = \left| \frac{\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{2}{\sqrt{6}}} \right| = \frac{4}{\sqrt{6}} \Big/ \frac{1}{3} = 2\sqrt{6}$$

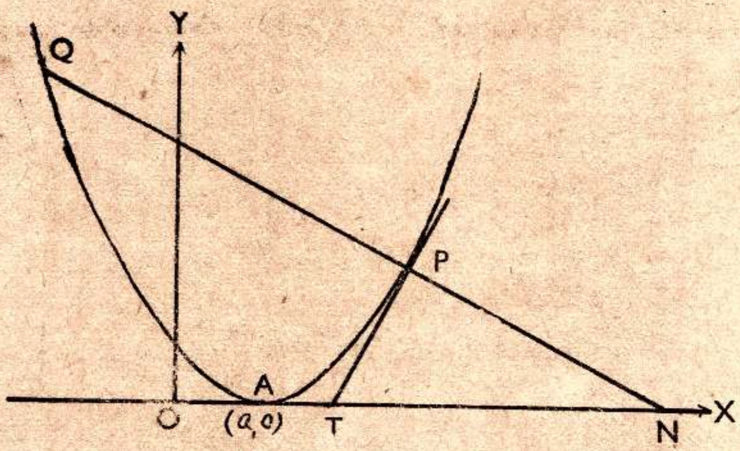
$$\therefore \theta = 78^\circ \; 28'$$

புள்ளிகள் P, Q என்பவை சமச்சீராக இருத்தலால், Q இல் வளையிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் $= 78^\circ \; 28'$

3. பரவளைவு $(x-a)^2 = 4ay$ இலுள்ள புள்ளி P இன் ஆள் கூறுகளை அதன் பரமானம் t இற் தருக. பரவளைவிற்கு P இலுள்ள தொடலி, செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இத்தொடலியும் செவ்வனும் X– அச்சை முறையே T, N இற் வெட்டினால் $PN/PT = t$ எனக் காட்டுக.

P இலுள்ள செவ்வன் பரவளைவை மீண்டும் Q இல் சந்தித்தால், PQ இன் நீளத்தைக் காண்க.



P இன் ஆள்கூறுகள் $= (a + 2at, at^2)$

$(x-a)^2 = 4ay$ ஐ x சார்பாக வகையிடுவதால்

$$2(x-a) = 4a\frac{dy}{dx}\,; \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-a}{2a}$$

P இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $= \dfrac{2at}{2a} = t$

இத்தொடலியின் சமன்பாடு;

$$y - at^2 = t(x - a - 2at)$$

அ-து $\quad tx - y - at - at^2 = 0$

P இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு,

$$y - at^2 = -\frac{1}{t}(x - a - 2at)$$

அ-து $\quad x + ty - a - 2at - at^3 = 0.$

$T \equiv (a + at, 0) \quad : \quad N \equiv (a + 2at + at^3, 0)$

$PN^2 = a^2t^6 + a^2t^4 = a^2t^4(1 + t^2)$

$PT^2 = a^2t^2 + a^2t^4 = a^2t^2(1 + t^2)$

$$\therefore \frac{PN}{PT} = t$$

Q இன் பரமானத்தை t_1 என்க

நான் PQ இன் படித்திறன் = P இலுள்ள செவ்வனின் படித் திறன்.

$$\therefore \frac{at^2 - at_1^2}{2at - 2at_1} = -\frac{1}{t}$$

$$\frac{t + t_1}{2} = -\frac{1}{t}$$

$$\therefore t_1 = -t - \frac{2}{t}$$

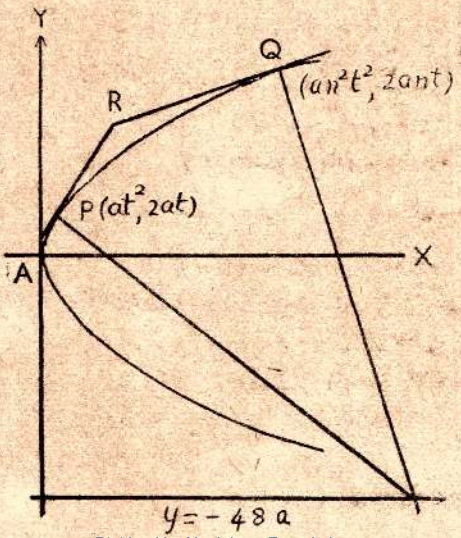
$$PQ^2 = 4a^2(t-t_1)^2 + a^2(t^2-t_1^2)^2$$

$$= a^2(t-t_1)^2\left[4 + (t+t_1)^2\right] = a^2\left(2t + \frac{2}{t}\right)^2\left[4 + \frac{4}{t^2}\right]$$

$$PQ = \frac{4a}{t^2}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

4. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் $P\,(at^2, 2at)$, $Q\,(an^2t^2, 2ant)$ இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. t மாறும்போது, R எப் போதும் பரவளைவு $3y^2 = 16ax$ இற் கிடக்குமாயின், n இன் பெறு மானத்தைக் காண்க. (n ஒரு முழுவெண்).

P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள், கோடு $y = -48a$ இல் சந்திக்கின் றன. t இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே;

$$x - ty + at^2 = 0$$

$$x - nty + an^2t^2 = 0$$

இவற்றைத் தீர்த்தலால் R இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$(nt - t)\, y = at^2(n^2 - 1)$$

$$y = at\,(n + 1)$$

$$x = at^2\,(n + 1) - at^2 = ant^2$$

$$R \equiv [ant^2,\ at\,(n + 1)]$$

R ஆனது $3y^2 = 16\,ax$ இற் கிடத்தலால்,

$$3\,a^2t^2\,(n + 1)^2 = 16\,a^2nt^2$$

$$3\,(n + 1)^2 = 16\,n$$

$$(3n - 1)\,(n - 3) = 0$$

$n = \frac{1}{3}$ அல்லது 3

n முழுவெண்ணுனபடியால் $\frac{1}{3}$ பொருந்தாது.

$$Q \equiv (9\,at^2,\ 6\,at)$$

P, Q இலுள்ள செவ்வன்களின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$tx + y - 2at - at^3 = 0$$

$3\,tx + y - 6at - 27at^3 = 0$ ஆகும்.

இவற்றைத் தீர்த்தலால், $y = -12\,at^3$ ஆகும்.

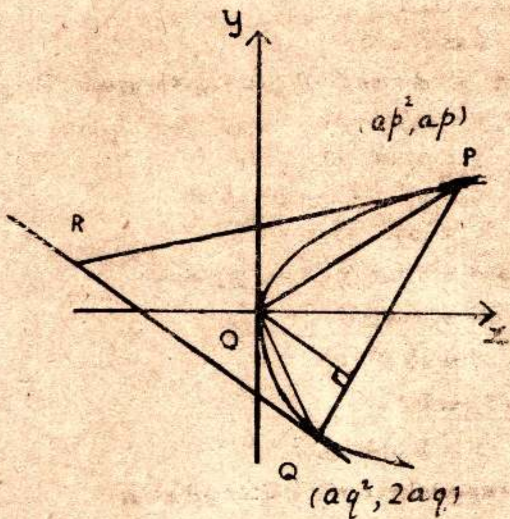
P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள் $y = -48a$ இற் சந்திப்பதால்,

$$-48a = -12at^3; \quad t^3 = 4$$

$$\therefore \quad t = 4^{\frac{1}{3}}$$

5. $P\,(ap^2, 2ap)$, $Q\,(aq^2, 2aq)$ என்பவை பரவளைவு $y^2 = 4\,ax$ இல் $(a > 0)$ இரு புள்ளிகள். P உம் Q உம் பரவளைவின் அச்சிற்கு எதிர்ப் பக்கத்தில் உள்ளன. உச்சி A இலிருந்து PQ இன் செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணிகள் RPQ, APQ ஆகியவற்றின் பரப்புகளின் விகிதம் 4 : 1 ஆகவிருக்குமாறு P உம், Q உம் அசைகின்றன. R இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.



நாண் PQ இன் சமன்பாடு,

$$y - 2ap = \frac{2a(p-q)}{a(p^2-q^2)}(x-ap^2)$$

$$y - 2ap = \frac{2}{p+q}(x-ap^2)$$

$$2x-(p+q)y + 2apq = 0$$

PQ இலிருந்து A இன் செங்குத்துத் தூரம் $d_1 = \left|\frac{2apq}{\sqrt{[4+(p+q)^2]}}\right|$

P உம் Q உம் X அச்சின் எதிர்ப்பக்கங்களின் கிடத்தலால் $pq<0$

ஆகவே செங்குத்துத் தூரம் $= \frac{-2apq}{\sqrt{[4+(p+q)^2]}}$

P இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு நாண் PQ இன் சமன்பாட்டில் $q=p$ எனப்பிரதியிடுவதால் பெறப்படும்

அதாவது, $x-py+ap^2=0$

இவ்வாறே Q இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$x-qy+aq^2=0$ ஆகும்.

இவற்றைத் தீர்த்தலால் R இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$(p-q)\,y = a\,(p^2-q^2)$$

$$y = a\,(p+q)$$

$$x = a\,(p+q)\,p - ap^2 = apq$$

$R \equiv [\,apq,\ a\,(p+q)\,]$

$\equiv [\,h,\ k\,]$ எனக் கொள்க.

PQ இலிருந்து R இன் செங்குத்துத் தூரம் d_2

$$= \left| \frac{2\,apq - a(p+q)^2 + 2\,apq}{\sqrt{[\,4+(p+q)^2\,]}} \right|$$

$$\frac{\text{பரப்பு } \triangle\ RPQ}{\text{பரப்பு } \triangle\ APQ} = \frac{4}{1} = \frac{d_2}{d_1} = \left| \frac{4pq-(p+q)^2}{2pq} \right|$$

$$\therefore\quad 4\,pq-(p+q)^2 = \pm\ 8\ pq$$

$(p+q)^2 = -4\ pq$ அல்லது $12\ pq$

$pq < 0$, ஆகவே $(p+q)^2 = -4\ pq$

$$\therefore\quad k^2/a^2 = -4\ h/a$$

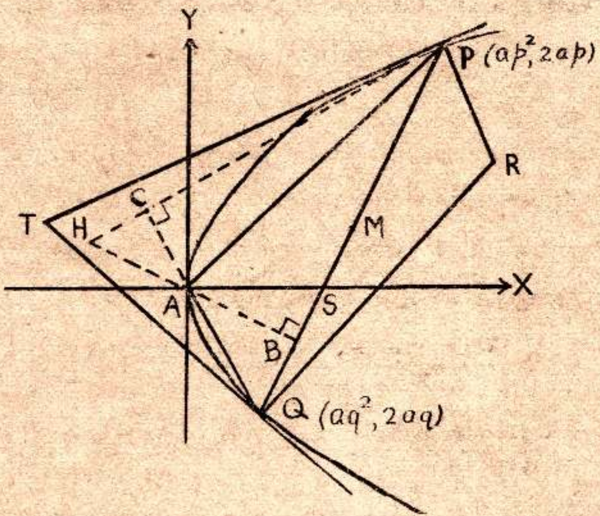
நடை ஆள்கூறுகளுக்கு மாற்றுவதால், R இன் ஒழுக்கு $y^2+4ax=0$ என்னும் பரவளைவாகும்.

6. பரவளைவு $y^2 = 4\ ax$ இல் $P\,(ap^2,\ 2ap)$, $Q\,(aq^2,\ 2aq)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P, Q இலுள்ள தொடலிகள் T இலும், செவ்வன்கள் R இலும் சந்திக்கின்றன. PQ இன் நடுப் புள்ளி M ஆகும். PQ குவியத்தினூடாகச் செல்லுமாயின், PQ மாறும்போது,

(a) T. (b) R, (c) M, (d) முக்கோணி APQ இன் மையப்போலி (A உற்பத்தித் தானம்) (e) முக்கோணி APQ இன் நிமிர்மையம்;

ஆகியவற்றின் ஒழுக்குகளைக் காண்க.



நாண் PQ இன் சமன்பாடு;

$$y - 2ap = \frac{2a\ (p-q)}{a\ (p^2-q^2)}\ (x - ap^2)$$

$$2x - (p+q)\ y + 2\ apq = 0$$

PQ ஆனது, குவியம் S (a, o) இனூடாகச் செல்வதால்

$$2\ a + 2\ apq = 0; \quad pq = -1$$

(a) P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x - py + ap^2 = 0$$

$$x - qy + aq^2 = 0$$ ஆகும்.

இவற்றைத் தீர்த்தால் T இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$y\ (p-q) = a\ (p^2 - q^2)$$

$$y = a\ (p+q)$$

$$x = apq$$

$$T \equiv [\ apq,\ \ a\ (p+q)\ ]$$

$\equiv [\ h,\ k\ ]$ எனக் கொள்க.

$$h = apq = -a$$

ஆகவே T இன் ஒழுக்கு $x + a = 0$ என்னும் நேர் வரை ஆகும்.

(b) P, Q இலுள்ள செவ்வன்களின் சமன்பாடுகள் முறையே'

$$px + y - 2ap - ap^3 = 0$$

$qx + y - 2aq - aq^3 = 0$ என முன்பு நிறுவப்பட்டது.

இவற்றைத் தீர்த்தலால் R இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$(p-q)\,x = 2a\,(p-q) + a\,(p^3 - q^3)$$

$$x = 2a + a\,(p^2 + pq + q^2)$$

$$= 2a + a(p^2 + q^2 - 1)$$

$$y = 2ap + ap^3 - px$$

$$= -apq\,(p+q) = a(p+q)$$

ஆகவே R இன் ஆள்கூறுகள் $[2a + a\,(p^2 + q^2 - 1), a(p+q)]$

$= [h_1, k_1]$ எனக் கொள்க.

$$h_1 = 2a + a(p+q)^2 + a = 3a + a(p+q)^2$$

$$k_1 = a\,(p+q)$$

$$h_1 = 3a + \frac{ak_1^2}{a^2}$$

$$ah_1 = 3a^2 + k_1^2$$

ஆகவே R (h_1, k_1) இன் ஒழுக்கு. $y^2 = ax - 3a^2$ ஆகும்.

(c) M இன் ஆள்கூறுகள் $= \left[\frac{a}{2}\,(p^2+q^2),\ a\,(p+q)\right]$

$\equiv [h_2, k_2]$ எனக் கொள்க.

$$h_2 = \frac{a}{2}\left[(p+q)^2 - 2pq\right] = \frac{a}{2}\left(\frac{k_2^2}{a^2} + 2\right)$$

$$2\,ah_2 = k_2^2 + 2a^2$$

ஆகவே M இன் ஒழுக்கு. $y^2 = 2ax - 2a^2$ என்னும் பரவளைவாகும்.

(d) முக்கோணி APQ இன் மையப்போலியின் ஆள்கூறுகள்

$$= \left[\frac{a}{3}(p^2+q^2),\ \frac{2a}{3}\,(p+q)\right]$$

$= [h_3, k_3]$ எனக் கொள்க

$$h_3 = \frac{a}{3}\left[(p+q)^2 - 2pq\right] = \frac{a}{3}\left(\frac{9k_3^2}{4a^2} + 2\right)$$

$$12ah_3 = 9k_3^2 + 8a^5$$

ஆகவே முக்கோணி APQ இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $9y^2 = 12\,ax - 8a^2$ என்னும் பரவளைவாகும்

(e) PQ இன் படித்திறன் $= \dfrac{2}{p+q}$

ஆகவே A இலிருந்து, PQ இற்கு கீறிய செங்குத்து AB இன் சமன்பாடு,

$$y = -\frac{p+q}{2}\,x$$

P இலிருந்து AQ இற்குக் கீறிய செங்குத்து PC இன் சமன்பாடு,

$$y - 2ap = -\frac{q}{2}(x - ap^2)$$

AB உம், PC உம் வெட்டும் புள்ளி H இன் x ஆள்கூறு இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும்.

$$-\frac{p+q}{2}\,x - 2ap = -\frac{q}{2}(x - ap^2)$$

$$-\frac{px}{2} = 2\,ap + \frac{a}{2}qp^2$$

$$x = -4a - apq = -4a + a = -3a$$

ஆகவே முக்கோணி APQ இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $x + 3a = 0$ ஆகும்.

7. (k, k) என்னும் புள்ளியிலிருந்து பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு, தொடலிகள் கீறப்பட்டுள்ளன. இத்தொடலிகளாலும் தொடுகை நாணாலும் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பு $\dfrac{1}{2a}(k^2 - 4ah)^{3/2}$

$A \equiv (at_1^2, 2at_1)$, $B \equiv (at_2^2, 2at_2)$ எனக் கொள்க.
AB இன் சமன்பாடு,

$$y - 2at_1 = \frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)}(x - at_1^2)$$

$$2x - (t_1 + t_2)\,y + 2at_1t_2 = 0 \qquad \text{———}(1)$$

T (h, k) இலிருந்து $y^2 = 4ax$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண் AB இன் சமன்பாடு,

$$yk = 2a(x + h) \qquad \text{———}(2)$$

(1), (2) இன் குணகங்களை விகித சமப்படுத்துவதால்,

$$\frac{2}{2a} = \frac{t_1 + t_2}{k} = \frac{2at_1 t_2}{2ah}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}\ ;\ \ t_1 t_2 = \frac{h}{a}$$

முக்கோணி TAB இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} h & k & 1 \\ at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \tfrac{1}{2}[h\,(2at_1 - 2at_2) - k(at_1^2 - at_2^2) + (2a^2t_1^2t_2 - 2a^2t_1t_2^2)]$$

$$= \frac{a}{2}(t_1 - t_2)\,[2h - k\,(t_1 + t_2) + 2a\,t_1 t_2]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a}\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4ha - k^2}{a}\right)$$

$$\because\ t_1 - t_2 = \sqrt{[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2]}$$

$$= \frac{-(k^2 - 4ah)^{\frac{3}{2}}}{2a}$$

$|$ பரப்பு $\triangle$TAB $| = \dfrac{(k^2 - 4ah)^{\frac{3}{2}}}{2a}$ ச. அ.

8. $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ என்னும் பரவளைவுகளின் பொதுத் தொடலியினதும், பொதுச் செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு, புள்ளி P $(at^2,\ 2at)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$$x - ty + at^2 = 0$$

பரவளைவு $x^2 = 4ay$ இற்கு, புள்ளி Q $(2aT,\ aT^2)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$$y - Tx + aT^2 = 0$$

PQ, இரு பரவளைவுகளுக்கும் ஒரு பொதுத் தொடலியாயின்;

$$\frac{1}{-T} = \frac{-t}{1} = \frac{t^2}{T^2}$$

$$\therefore \quad t^3 = -1, \quad t = -1$$

ஆகவே பொதுத் தொடலியின் சமன்பாடு

$$x + y + a = 0$$

வேறுமுறை

P இலுள்ள தொடலி, $x^2 = 4ay$ ஐ வெட்டும் புள்ளியின் ஆள் கூறுகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும.

$$x - ty + at^2 = 0; \quad x^2 = 4ay$$

$$x - \frac{tx^2}{4a} + at^2 = 0$$

$$tx^2 - 4ax - 4a^2t^2 = 0$$

P இலுள்ள தொடலி ஒரு பொதுத் தொடலியாக இருத்தற்கு, இச் சமன்பாட்டிற்குச் சமமான மூலங்கள் இருக்க வேண்டும்,

ஆகவே,

$$16a^2 + 16a^2t^3 = 0$$

$$t^3 = -1, \quad t = -1$$

பொதுத் தொடலியின் சமன்பாடு:

$$x + y + a = 0$$

பொதுச் செவ்வன்

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி R $(at_1^2, 2at_1)$ இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு,

$$t_1 x + y - 2at_1 - at_1^3 = 0$$

பரவளைவு $x^2 = 4ay$ இற்கு புள்ளி S $(2at_2, at_2^2)$ இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு,

$$x + t_2 y - 2at_2 - at_2^3 = 0$$

RS ஆனது இரு பரவளைவுகளுக்கும் ஒரு பொதுச்செவ்சவன் ஆயின்,

$$\frac{t_1}{1} = \frac{1}{t_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\therefore \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 1$$

பொதுச் செவ்வனின் சமன்பாடு,

$$x + y - a = 0$$

9. P $(ap^2, 2ap)$, Q $(aq^2, 2aq)$ என்பவை பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் இரு மாறும் புள்ளிகள். PQ இன் நடுப் புள்ளி M. P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன.

(a) R இன் ஆள்கூறுகள் $[\,apq,\ a(p+q)\,]$ எனக் காட்டுக.

(b) R ஆனது கோடு $x = h$ இல் கிடக்குமாயின் M இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(c) MR ஆனது ஒரு மாறு நீளம் c உடையதாயின் R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(a) P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x - py + ap^2 = 0$$

$$x - qy + aq^2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இவற்றைத் தீர்த்தலால் R இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$R = [\,apq,\ a(p+q)\,]$$

(b) $x = h$ இல் R கிடத்தலால்,

$$apq = h$$

149-ம் பக்கப் படம் பார்க்கவும்.

$$M \text{ இன் ஆள்கூறுகள்} = \left[\frac{a}{2}(p^2+q^2),\ a(p+q)\right]$$

$$= (\bar{x}, \bar{y}) \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2}\left[(p+q)^2 - 2pq\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{\bar{y}^2}{a^2} - \frac{2h}{a}\right)$$

$$2a\bar{x} = \bar{y}^2 - 2ah$$

ஆகவே M இன் ஒழுக்கு $y^2 = 2a(x+h)$ என்னும் பரவளைவாகும்.

(c) R இன் ஆள்கூறுகள் $\equiv [apq, \quad a(p+q)]$

$\equiv [X, Y]$ எனக் கொள்க.

$$MR = c = \frac{a}{2}(p^2+q^2) - apq$$

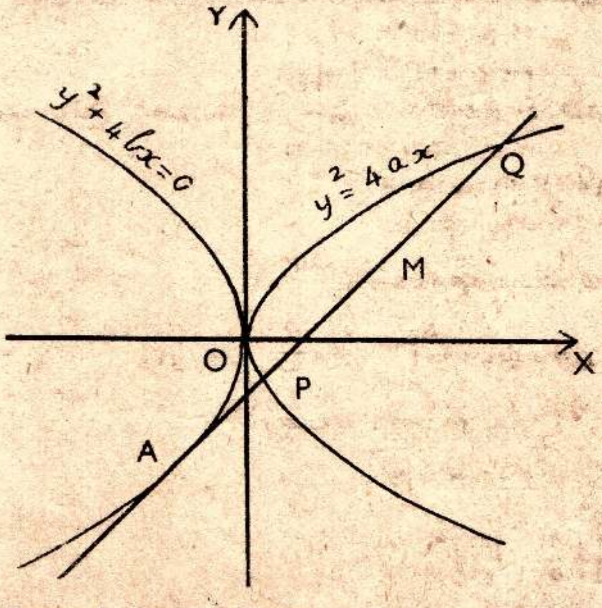
$$= \frac{a}{2}\left[(p+q)^2 - 4pq\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{Y^2}{a^2} - \frac{4X}{a}\right)$$

$$2ac = Y^2 - 4aX$$

ஆகவே R இன் ஒழுக்கு $y^2 = 2a\ (2x+c)$ என்னும் பரவளைவாகும்.

10. பரவளைவு $y^2+4bx=0$ இன் ஒரு மாறும் தொடலி, பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ஐ, புள்ளிகள் P, Q இற் சந்திக்கின்றது. PQ இன் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.



$P \equiv (at_1^2,\ 2at_1)$, $\quad Q \equiv (at_2^2,\ 2at_2)$ எனக் கொள்க.

நாண் PQ இன் சமன்பாடு;

$$y-2at_1=\frac{2a(t_1-t_2)}{a(t_1^2-t_2^2)}(x-at_1^2)$$

$$2x-(t_1+t_2)y+2at_1t_2=0 \qquad \text{———}(1)$$

இது, $y^2+4bx=0$ இற்கு புள்ளி $A(x_1, y_1)$ இலுள்ள தொடலியாயின், அதன் சமன்பாடு

$$yy_1+2b(x+x_1)=0 \qquad \text{———}(2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) இன் குணகங்களை விகித சமப்படுத்துவதால்

$$\frac{2}{2b}=\frac{-(t_1+t_2)}{y_1}=\frac{2at_1t_2}{2bx_1}$$

$$t_1+t_2=-\frac{y_1}{b}$$

$$t_1\ t_2=\frac{x_1}{a}$$

PO இன் நடுப் புள்ளி M இன் ஆள்கூறுகள்

$$=\left[\frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2),\ a(t_1+t_2)\right]$$

$$\equiv[h,\ k]$$

$$h=\frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2)=\frac{a}{2}\left[(t_1+t_2)^2-2t_1t_2\right]$$

$$=\frac{a}{2}\left[\frac{k^2}{a^2}-2t_1t_2\right]$$

$$\therefore t_1t_2=\frac{k^2-2ah}{2a^2}$$

$$x_1=at_1t_2=\frac{k^2-2ah}{2a}$$

$$y_1=-b(t_1+t_2)=-\frac{bk}{a}$$

புள்ளி (x_1, y_1), பரவளைவு y^2+4bx இற் கிடத்தலால்

$y_1^2+4bx_1=0$ ஆகும்.

$$\therefore\quad \frac{b^2k^2}{a^2}+\frac{4b}{2a}(k^2-2ah)=0$$

$$bk^2+2ak^2-4a^2h=0$$

$$k^2(2a+b)=4a^2h$$

ஆகவே PQ இன் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2(2a+b)=4a^2x$ என்னும் பரவளைவாகும்.

11. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு $P(at_1^2, 2at_1)$, $Q(at_2^2, 2at_2)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்கள் பரவளைவில் $(aT^2, 2aT)$ என்னும் புள்ளியில் சந்திப்பின் t_1, t_2 என்பவை $t^2+tT+2=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக் காட்டுக.

P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி PQR இன் மையப் போலியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

P இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு

$t_1x+y-2at_1-at_1^3=0$ என முன்பு காட்டப்பட்டுள்ளது.

P இலுள்ள செவ்வன் $A(aT^2, 2aT)$ இனூடாகச் செல்வதால், அதன் படித்திறன் = நாண் AP இன் படித்திறன்

$$\therefore \quad -t_1 = \frac{2a(t_1-T)}{a(t_1^2-T^2)}$$

$$t_1^2+t_1T+2=0$$

இவ்வாறே Q இலுள்ள செவ்வனின் படித்திறனைச் சமப்படுத்துவதால்,

$$t_2^2+t_2T+2=0$$

ஆகவே t_1, t_2 என்பவை

$t^2+tT+2=0$ இன் மூலகங்களாகும். எனவே $t_1t_2=2$

P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x-t_1y+at_1^2=0$$

$x-t_2y+at_2^2=0$ ஆகும்.

இவற்றைத் தீர்த்தலால் R இன் ஆள்கூறுகள் பெறப்படும்.

$$(t_1-t_2)y = a(t_1^2-t_2^2)$$
$$y = a(t_1+t_2)$$
$$x = at_1t_2$$

$$R = [at_1t_2,\ a(t_1+t_2)]$$

முக்கோணி PQR இன் மையப்போலியின் ஆள்கூறுகள்

$$= \left[\frac{a}{3}(t_1^2+t_2^2+t_1t_2),\ \frac{a}{3}(2t_1+2t_2+t_1+t_2)\right]$$

$$= \left[\frac{a}{3}\{(t_1+t_2)^2-t_1t_2\},\ a(t_1+t_2)\right]$$

$\equiv [h, k]$ எனக் கொள்க.

$$h = \frac{a}{3}\left[(t_1+t_2)^2-t_1t_2\right] = \frac{a}{3}\left(\frac{k^2}{a^2}-2\right)$$

$$3ah = k^2-2a^2$$

ஆகவே முக்கோணி PQR இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு

$y^2=3ax+2a^2$ என்னும் பரவளைவாகும்.

பரவளைவு

பயிற்சி 6

1. குவியம் $(1, -2)$ இலும், செலுத்தி $3x+4y-1=0$ ஆகவுமுடைய பரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. பின்வரும் பரவளைவுகளின் உச்சி, குவியம், செவ்வகலம் ஆகிய வற்றைக் காண்க.

   (i) $y^2 = 8x - 16$ (ii) $y^2 - 2y - 2x - 1 = 0$

3. பரவளைவு $y^2 = 4x$ இற்கு, புள்ளி $(4, -4)$ இலுள்ள தொடலி, செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

4. $y = mx + c$ என்னும் கோடு, பரவளைவு $y^2 = 4a(x+a)$ ஐத் தொடுமாயின், $c = am + \frac{a}{m}$ எனக் காட்டுக.

5. பின்வருவனவற்றின் பொதுத் தொடலிகளைக் காண்க.

   (i) பரவளைவுகள் $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4by$

   (ii) பரவளைவு $y^2 = 4ax$, வட்டம் $x^2 + y^2 = 4ax$.

6. $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ என்னும் பரவளைவுகளின் பொது வெட்டுப் புள்ளிகளைக் காண்க. அப்புள்ளிகளில் அவற்றிற்கிடைப் பட்ட கோணங்களைக் காண்க.

7. செலுத்தலியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பரவளைவிற்கு வரைந்த தொடலிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக. அவைகளின் தொடுகைநாண் குவியத்தினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

8. P, Q என்பவை பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் முறையே $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ என்னும் புள்ளிகளாகும். PQ இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   O உற்பத்தியாயின், OP உம், OQ உம் செங்குத்தாயின், நாண் PQ ஆனது P, Q இன் எல்லா நிலைகளுக்கும் x – அச்சை ஒரு நிலையான புள்ளியில் வெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.

9. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி $[t]$ இலுள்ள தொடலியின தும், செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இப்பரவளைவிற்கு புள்ளிகள் P, Q இலுள்ள தொடலிகள் T இலும், செவ்வன்கள் N இலும் சந்திக்கின்றன. TN ஆனது பரவளைவின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகும். PQ ஒரு குவிய நாணெ னக் காட்டுக, P, Q இலுள்ள தொடலிகள் ஒன்றற்கொன்று செங்குத் தெனவும் காட்டுக.

P, Q பரவளைவில் அசையும்போது N இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.

10. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு ஏதாவதொரு புள்ளி P இலுள்ள தொடலியும், செவ்வனும் $x-$ அச்சை முறையே E, F இற் சந் திக்கின்றன. முக்கோணி PEF இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.

11. $x^2+4y=4$, $x^2+2y=2x$ என்னும் பரவளைவுகள் ஒன்றையொ ன்று தொடுகின்றன எனக் காட்டுக. அவற்றின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டை யும் காண்க.

12. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் உச்சிக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா நாண் களினதும் நடுப் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைக் காண்க.

13. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி $P(at^2, 2at)$ இலுள்ள செவ் வன் வளையியை மீண்டும் Q இற் சந்திக்கின்றது. Q இன் ஆள் கூறுகளைக் காண்க; PQ இன் நீளத்தைக் காண்க.

P, Q இலுள்ள தொடலிகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கு $(x+2a)y^2+4a^2=0$ என நிறுவுக.

14. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் $[t_1]$, $[t_2]$ இலுள்ள தொடலிகளாலும், அவற்றின் தொடுநாணாலும் அமைக்கப்ப டும் முக்கோணியின் பரப்பு $\frac{a^2}{2}(t_1-t_2)^3$ எனக் காட்டுக.

15. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் ஏதாவது மூன்று புள்ளிகள் $P[t_1]$, $Q[t_2]$, $R[t_3]$ என்பவற்றால் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பு, அப்புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோ ணியின் பரப்பின் இருமடங்காகும் என நிறுவுக.

A 11

இப்புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்களால் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பு $\frac{a^2}{2}(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1+t_2+t_3)^2$ எனக் காட்டுக.

16. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி $P(at^2, 2at)$ இலுள்ள செவ்வன் வளையியை மீண்டும் Q இற் சந்திக்கின்றது. Q இன் சாராமாறி $-(2+t^2)/t$ எனக் காட்டுக.

பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. PR இன் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

17. பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு புள்ளிகள் $P(at_1^2, 2at_1)$, $Q(at_2^2, 2at_2)$ இலுள்ள செவ்வன்கள் வளையியில் புள்ளி $N(aT^2, 2aT)$இல் சந்திக்குமாயின், t_1, t_2 என்பவை $t^2+tT+2=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக் காட்டுக. N இன் எல்லா நிலைகளுக்கும், நாண் PQ ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனவும் PQ இன் நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனவும் காட்டுக.

பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திப்பின், முக்கோணி PQR இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

18. பரவளைவு $y^2=4ax$ இல் A, B, C என்பவை மூன்று புள்ளிகள். நாண் AB ஆனது செலுத்தலிக்குச் சமாந்தரம். A, C இலுள்ள தொடலிகள், பரவளைவு $y^2 = 4a(2x+a)$ இல் சந்திக்கின்றன. B, C இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2=4a(a-x)$ எனக் காட்டுக.

19. A, B, C என்பவை ஒரு பரவளைவில் மூன்று புள்ளிகளாகும். முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி G ஆகும். பரவளைவிற்கு A, B, C இலுள்ள தொடலிகளால் ஆக்கப்படும் முக்கோணியின் மையப்போலி H ஆகும். GH ஆனது பரவளைவின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

GH ஆனது பரவளைவை வெட்டும் புள்ளியானது GHஐ 1:3 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

20. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் P ஒரு மாறும் புள்ளி. P இலிருந்து பரவளைவிற்குக் கீறிய இரு செவ்வன்களின் அடிகள் Q, R ஆகும்; P, Q இலுள்ள தொடலிகள் A இலும்; P, R இலுள்ள தொடலிகள் B இலும் சந்திக்கின்றன. AB இன் மத்திய புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

21. பரவளைவு $y^2 + 4bx = 0$ இன் ஒரு தொடலி, பரவளைவு $y^2 - 4ax = 0$ ஐ A, B இல் வெட்டுகின்றது. AB இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2 (2a + b) = 4a^2x$ எனக் காட்டுக.

22. (h, k) ஐ தனது மத்திய புள்ளியாகக் கொண்ட $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவின் நாணின் சமன்பாடு $2ax - ky = 2ah - k^2$ எனக் காட்டுக.

மேற்கூறிய நாண் பரவளைவு $y^2 + 4ax = 0$ ஐத் தொடுமாயின் புள்ளி (h, k) இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

23. $y^2 = 4ax$, $(a > 0)$; $y^2 = 4bx$, $(b < 0)$ என்னும் பரவளைவுகளை x−அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு மாறும்கோடு முறையே A, B இல் வெட்டுகின்றது. AB இன் மத்திய புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.

24. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவின் உச்சி A ஆகும். AP, AQ என்பவை அதன் இரு செங்குத்தான நாண்களாகும். AP, AQ என்பவற்றை இரு பக்கங்களாகக் கொண்டு ஒரு இணைகரம் APBQ பூர்த்தியாக்கப்பட்டுள்ளது. B இன் ஒழுக்கு $y^2 = 4a (x - 8a)$ என்னும் பரவளைவெனக் காட்டுக.

25. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் செலுத்தலியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவிற்கு ஒரு தொடலி கீறப்பட்டுள்ளது. இத்தொடலியின் மத்திய புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2 (2x + a) = a (3x + a)^2$ எனக் காட்டுக.

26. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் குவியநாண் PQ ஆகும். பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள் N இற் சந்திக்கின்றன. பரவளைவின் உச்சி A ஆகும். PQ அசையும்போது பின்வருவனவற்றின் ஒழுக்கைக் காண்க.

(i) முக்கோணி APQ இன் மையப்போலி, நிமிர்மையம்;

(ii) புள்ளி N.

27. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு $P[t_1]$, $Q[t_2]$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் T இலும், செவ்வன்கள் N இலும் சந்திக்கின்றன. T, N இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

T ஆனது $x = 6a$ என்னும் கோட்டில் கிடக்குமாயின் N இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

N ஆனது $x = 6a$ இல் கிடக்குமாயின் T இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

28. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் $P[t_1]$, $Q[t_2]$, $R[t_3]$ என்பவை மூன்று புள்ளிகள். PRQ ஒரு செங்கோணம். $(t_1 + t_3)(t_2 + t_3) = -4$ என நிறுவுக.

R இலுள்ள செவ்வனும் PQ உம் வெட்டும் புள்ளி B இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

R அசையும்போது B இன் ஒழுக்கு $y^2 = 4a(x - 4a)$ என்னும் பரவளைவெனக் காட்டுக.

29. PQ என்பது பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் ஒரு குவியநாண். P, Q இலிருந்து செலுத்தலிக்கு கீறப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே H, K ஆகும். பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) HSK ஒரு செங்கோணம் (S குவியம்),

(b) PTQ ஒரு செங்கோணம்,

(c) T ஆனது HK இற் கிடக்கின்றது,

(d) ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் PT, TQ, KS, SH என்பவற்றின் வழியே கிடக்கின்றன.

30. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் ஒரு மாறும் நாண் AB ஆகும். AB இன் மத்திய புள்ளி M ஆகும். பின்வரும் வகைகளில் M இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(a) AB ஒரு குவிய நாண்,

(b) AB ஆனது புள்ளி $(3a, 0)$ இனூடாகச் செல்கின்றது,

(c) AB இன் நீளம் ஒரு ஒருமை l,

(d) பரவளைவிற்கு A, B இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளி, கோடு $x + 2a = 0$ இல் கிடக்கின்றது.

31. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் $A[t_1]$, $B[t_2]$ இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திக்கின்றன. T இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. AB இன் நடுப்புள்ளி M ஆனது $x = 2a$ இற் கிடக்குமாயின் T இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

T ஆனது $x + y + a = 0$ இற் கிடக்குமாயின் M இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

32. $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$ என்பன பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் இரு மாறும் புள்ளிகள். பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள் N இற் சந்திக்கின்றன. N இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. PQ ஒரு குவியநாணுயின் N இன் ஒழுக்கைக் காண்க. N ஆனது $y + a = 0$ இற் கிடக்குமாயின், PQ இன் மத்திய புள்ளி $y^3 - 2axy - 2a^3 = 0$ என்னும் வளையியில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

33. P [p], Q [q], R [r] என்பன பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் மூன்று புள்ளிகள். P, Q இலுள்ள தொடலிகள் R இலுள்ள தொடலியை முறையே C, B இற் சந்திக்கின்றன. P, Q இலுள்ள தொடலிகள் A இற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையம் செலுத்தலியில் கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

RB = BC எனின் $2q = p + r$ எனக் காட்டுக. AB ஆனது PR இற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

34. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி $(at^2, 2at)$ இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தந்த ஒரு புள்ளி (h, k) இலிருந்து பொதுவாக ஒரு பரவளைவிற்கு மூன்று செவ்வன்கள் கீறலாமெனக் காட்டுக. இம்மூன்று செவ்வன்களின் அடிகளின் y– ஆள்கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமெனக் காட்டுக.

இரு செவ்வன்கள் ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாயின் (h, k) இன் ஒழுக்கு $y^2 = a(x - 3a)$ என்னும் பரவளைவெனக் காட்டுக.

35. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் P, Q, R இலுள்ள செவ்வன்கள் ஒரு புள்ளி N (h, k) இற் சந்திக்கின்றன. பின்வருபவற்றை நிறுவுக.

(i) முக்கோணி PQR இன் மையப்போலி பரவளைவின் அச்சிற் கிடக்கின்றது.

(ii) P, Q, R இலுள்ள தொடலிகளால் ஆக்கப்படும் முக்கோணி யின் நிமிர்மையமும், புள்ளி N உம், பரவளைவின் அச்சி லிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன.

(iii) வட்டம் PQR இன் சமன்பாடு:
$2x^2 + 2y^2 - 2x(h + 2a) - ky = 0$

(iv) P நிலையானதாயின், QR இன் திசையும் நிலையானது; வட் டம் PQR இன் மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்வரை.

36. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் உள்ள நான்கு புள்ளிகள் $(at_r^2, 2at_r)$, $r = 1, 2, 3, 4$ என்பவை ஒரு பரிதிப் புள்ளிகளாயின்
$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ எனக் காட்டுக.

மையம் (h, k) இலும், உற்பத்தி இனூடாகவும் செல் லும் ஒரு வட்டம், பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ஐ, பரமானங்கள் t_1, t_2, t_3 உடைய புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. இம் மூன்று புள்ளி களிலுமுள்ள செவ்வன்கள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக. இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை h, k இற் தருக.

37. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் P_1, P_2, P_3 இலுள்ள செவ்வன்கள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. முக்கோணி $P_1P_2P_3$ இன் சுற்று வட்டம் பரவளைவின் உச்சியினூடாகச் செல்கின்ற தெனக் காட்டுக.

P, Q என்பவை $y^2 = 4ax$ இல் இரு மாறும் புள்ளிகள், PQ ஆனது $x - y + 1 = 0$ இற்குச் சமாந்தரம். P இல் பரவளைவைத் தொட்டுக்கொண்டு Q இனூடாகச் செல்லும் வட்டம், பர வளைவை மீண்டும் R இற் சந்திக்கின்றது. QR இன் மத்திய புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

38. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் A, B இலுள்ள செவ்வன் கள், மீண்டும் பரவளைவில் புள்ளி C இற் சந்திக்கின்றன. பர வளைவிற்கு C இலுள்ள செவ்வன் மீண்டும் பரவளைவை D இற் சந்திக்கின்றது. D இலிருந்து பரவளைவிற்குக கீறிய செவ்வன்க ளில் ஒன்று PQ இற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

39. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ க்கு புள்ளி P இலுள்ள செவ்வன், குவியத்தி னூடாக, P யிலுள்ள தொடலிக்கு, சமாந்தரமாகச் செல்லும் நேர்கோட்டை Q ல் சந்திக்கின்றது. Q ன் ஒழுக்கைக் காண்க.

40. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ க்கு ஏதாவது இரு புள்ளிகள் C, D ல் உள்ள தொடலிகள் T இல் சந்திப்பின் (i) $ST^2 = SC \cdot SD$.

(ii) $\dfrac{TC^2}{TD^2} = \dfrac{SC}{SD}$ எனக் காட்டுக. இங்கு S பரவளைவின் குவியம்.

41. புள்ளி (h, k) ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட, பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

குவியநாண் $y = x - a$ இல் K ஒரு புள்ளியாகும். K இல் சமகூறிடப்படும் நாண், பரவளைவு $(y + 2a)^2 = 8a(x - a)$ ஐத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

42. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் நாண், பரவளைவு $y^2 = 4bx$ ஐத் தொடுகின்றது. இந் நாணின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2 = \dfrac{4a^2}{2a - b}x$ எனக் காட்டுக.

43. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் ஒரு குவிய நாண் PQ ஆகும். இதன் குவியம் S ஆகும். S இனூடாகச் சென்று பரவளைவை P இற் தொடும் வட்டம், S இனூடாகச் சென்று பரவளைவை Q ிற் தொடும் வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.

44. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் P, Q இலுள்ள தொடலிகள் $y = bx$ என்னும் நிலையான வரையுடன் சமகோணமமைக்கின்றன. PQ ஆனது செலுத்தலியில் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

PQ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு

$by^2 - 2abx + a(b^2 - 1)y - 2a^2b = 0$ எனக் காட்டுக.

45. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் நாண் PQ, Z $(-a, 0)$ இனூடாகச் செல்கின்றது. பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள் N இற் சந்திக்கின்றன. PQ அசையும்போது N இன் ஒழுக்கு $y^2 = a(x - a)$ எனக் காட்டுக.

N இனூடாக பரவளைவிற்கு கீறக்கூடிய மூன்றுவது செவ்வனுக்கு NS செங்குத்தெனக் காட்டுக. (S குவியம்)

PQ இன் இன்னொரு நிலை P_1Q_1 ஆகவும் இதற்கொத்த N இன் நிலை N_1 ஆகவுமிருப்பின், NN_1 ஒரு நிலையான புள்ளிக் கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

46. பரவளைவு $y^2=4\,ax$ ற்கு புள்ளிகள் P, Q இலுள்ள தொடலிகள் ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தாகும்; P யிலுள்ள தொடலி PQ உடனும் x அச்சுடனும் சமகோணங்களை அமைக்கின்றதெனக் காட்டுக.

P அசையும்போது PQ ஆனது x அச்சில் ஒரு நிலையான புள்ளி S இனூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

S இலிருந்து தொடலிகளுக்குக் கீறிய செங்குத்துத் தூரங்கள் h, k எனின் $h^2 k^2=a^2 (h^2+k^2)$ எனக் காட்டுக.

47. பரவளைவுகள் $y^2 = 4ax$, $x^2=\frac{a}{2}y$ ஆகியவற்றின் பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இப் பொதுத் தொடலியின் தொடுபுள்ளிகள் P, Q ஆயின் ஆள்கூற்று அச்சுகள் PQஐ முக் கூறிடுகின்றன வெனக் காட்டுக.

48. வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, பரவளைவு $y^2 = 4\,ax$ ஐ, புள்ளிகள் P [p], Q [q], O [o] இல் வெட்டுகின்றது. p, q என்பவை $ar^3+(4a+2g)\,r^2+4\,f = 0$ என்னும் r இலுள்ள முப்படிச் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களெனக் காட்டுக.

PQ ஆனது எப்போதும் புள்ளி $(-4a,\ 4a)$ இனூடாகச் செல்லுமாயின், வட்டம் OPQ இன் மையத்தின் ஒழுக்கைக் காண்க.

49. பரவளைவு $y^2=a(x+2a)$ இல் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுபுள்ளிகள் A, B ஆகும். பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு A, B இலுள்ள செவ்வன்கள் C இற் சந்திக்கின்றன. C இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

50. பரவளைவு $y = 4ax$ இல் புள்ளிகள் A $[t_1]$, B $[t_2]$ எனபவற்றை இணைக்கும் நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டம், பரவளைவை மீண்டும் C, D இற் சந்திக்கின்றது. நாண் AB புள்ளி (6a, 0) இனூடாகச் செல்லுமாயின், நாண் CD புள்ளி (2a, 0) இனூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

51. ஒரு பரவளைவின் குவியநாணை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப் பட்ட வட்டம் செலுத்தலியைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் உள்ள மூன்று புள்ளிகள் D, E, F ஆல் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் மையப்போலி P ஆகும். பரவளைவிற்கு D, E, F இலுள்ள தொடலிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் மையப்போலி Q ஆகும். PQ, x அச்சிற்குச் சமாந்தரம் எனக் காட்டுக.

D, E இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திக்கின்றன. D, T, E இலிருந்து F இலுள்ள தொடலிக்கு கீறிய செங்குத்துகளின் நீளங் கள் பெருக்கல் விருத்தியிலுள்ளன எனக் காட்டுக.

52. $x + y - 3a = 0$ என்னும் வரையிலுள்ள புள்ளியொன்றிலிருந்து. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுபுள் ளிகள் P, Q ஆகும். PQ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $(y + a)^2 = a(2x + 7a)$ எனக் காட்டுக.

தந்த வரையானது, இவ்விரு பரவளைவுகளினதும் பொது நாணெனக் காட்டுக. இவ்விரு பரவளைவுகளினதும் பொது வெட்டுப் புள்ளிகளில், முதலாவது பரவளைவிற்குக் கீறிய தொட லிகளின் வெட்டுப்புள்ளி இரண்டாவது மரவளைவில் கிடக்கின்ற தெனக் காட்டுக.

53. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ற்கு புள்ளிகள் P [t], Q [u] லுள்ள தொட லிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. PQ குவியம் S இனூடாகச் செல் கின்றது. $PR^2 = a^2(t - u)^2 \ (1 + t^2)$ எனக் காட்டுக.

இது துணைகொண்டு அல்லது வேறுவழியால் $\dfrac{SP}{SQ} = \dfrac{RP^2}{RQ^2}$ எனக் காட்டுக.

54. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் உள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி P $(at^2, 2at)$ ஐ அதன் குவியம் S ற்கு இணைக்கும் வரை SP = PM ஆகுமாறு M ற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. Mன் ஒழுக்கு $y^2 = 8ax + 8a^2$ எனக் காட்டுக.

x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக P யினூடாகச் செல்லும்வரை பிந்திய பரவளைவை Qற் சந்திக்கின்றது. முதற் பரவளைவிற்கு P யிலுள்ள தொடலியும் இரண்டாம் பரவளைவிற்கு Q விலுள்ள தொடலியும் x அச்சிற் சந்திப்பின் $t^2 = 2$ எனக் காட்டுக.

55. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இல் PQ ஒரு நாணாகும். P, Q லுள்ள தொடலிகள் T யிற் சந்திக்கின்றன. PQ வின் நடுப்புள்ளி M ஆகும். TM ன் நடுப்புள்ளி N ஆகும். பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) TM ஆனது x அச்சிற்குச் சமாந்தரம்.

(ii) N, பரவளைவிற் கிடக்கின்றது.

(iii) பரவளைவிற்கு N இலுள்ள தொடலி PQஇற்குச் சமாந்தரம்.

56. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இன் நாண் PQ இன் படித்திறன் தான் α ஆகும். பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் H இலும், செவ்வன்கள் K இலும் சந்திக்கின்றன. H, K இன் ஒழுக்குகள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு ஒவ்வொரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக.

இவ்விரு நேர்கோடுகளும் M இற் சந்திப்பின் M இன் ஒழுக்கு $y^2 - ax + 3a^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

57. $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ ஆகிய பரவளைவுகளின், உற்பத்தித் தானம் தவிர்ந்த மறு பொதுப் புள்ளி P ஆகும். இரு பரவளைவுகளிலும் கிடவாத ஒரு நிலையான புள்ளி (h, k) இனூடாகச் செல்லும் ஒரு மாறும்கோடு பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ஐ C, D இல் சந்திக்கின்றது. கோடுகள் PC, PD என்பவை பரவளைவு $x^2 = 4ay$ ஐ E, F இல் சந்திக்கின்றன. கோடு EF ஒரு நிலையான புள்ளிக் கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக. இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

58. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளிகள் U [u], V [v] இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திக்கின்றன. TU, TV என்பவை x அச்சை முறையே P, Q வில் சந்திக்கின்றன. PQ = ஒரு ஒருமை c ஆகும். T யின் ஒழுக்கைக் காண்க.

59. $y^2 = 4\lambda (x + \lambda)$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள பரவளைவுகள் உற்பத்தித் தானத்தைக் குவியமாகவும் x அச்சு பற்றி சமச்சீராகவும் உடையன எனக் காட்டுக.

இவ்வகையைச் சேர்ந்த பரவளைவு (x_1, y_1) என்னும் நிலையான புள்ளியினூடாய்ச் செல்லுமாயின் λ இற்கு பொதுவாக இரு மெய்ப் பெறுமானங்கள் உண்டெனக் காட்டுக. இவ்விரு பரவளைவுகளும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன வெனவும் கூட்டுக.

60. பரவளைவு $y^2=3x$ இற்குப் புள்ளி [t] யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டையும் பரவளைவு $x^2=y$ ற்கு புள்ளி [u] இல் உள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

முதலாவது பரவளைவிற்குத் தொடலியாகவும் இரண்டாவதற்குச் செவ்வனுகவுமுள்ள எல்லாக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

61. பரவளைவு $y^2=4ax$ இன் குவியம் S ஊடாகச் செல்லும் நாண் PQ ஆகும். PQ வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் செலுத்தலியைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

இவ்வட்டம் பரவளைவை மீண்டும் புள்ளிகள் G, H இல் சந்திப்பின் கோடு GH ஒருநிலையான புள்ளி K இனூடாகச் செல்லுகின்ற தெனக் காட்டுக. K யும் S உம் செலுத்தலியிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

62. வட்டம் $x^2+y^2-3x+4y+5=0$ இன் மையம் M ஆகும். பரவளைவு $y^2=2x-4$ இன் குவியம் S ஆகும். வட்டத்திற்குப் புள்ளி $(2, -1)$ இலுள்ள தொடலி பரவளைவிற்கும் ஒரு தொடலியாகும் எனக் காட்டுக. பரவளைவைத் தொடும்புள்ளி T யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

O உற்பத்தித் தானம் எனின் OMTS ஒரு சாய்சதுரம் எனக் காட்டுக. அதன் பரப்பைக் காண்க,

பரவளைவின் செலுத்தலி x அச்சை z ல் சந்திப்பின் வட்டம் வட்டம் MZS இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

63. பரவளைவு $y^2=4ax$ இன் ஒரு நாணின் நீளம் $2a$ ஆகும். இது x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் θ கோணம் அமைக்கின்றது. இதன் நடுப்புள்ளி (h, k) இன் ஆள்கூறுகள் பின்வருமாறு தரப்படும் எனக் காட்டுக.

$h=a$ (கோதா$^2\,\theta+\frac{1}{4}$ சைன்$^2\,\theta$), $k=2a$ கோதா θ.

θ மாறும்போது புள்ளி (h, k) இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

64. பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு புள்ளிகள் P, Q இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திக்கின்றன. பின்வரும் வகைகளில் T இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(iv) நாண் PQ எப்பொழுதும் புள்ளி $(-a, 2a)$ இனூடாகச் செல்லுகின்றது.

(v) நாண் PQ எப்பொழுதும், பரவளைவு $y^2=4a(x-a)$ ஐத் தொடுகின்றது.

65. ஒரு மாறும் வரை $y=mx+c$ ஆனது பரவளைவு $y^2=4ax$ ஐ புள்ளிகள் P, Q இற் வெட்டுகின்றது. PQ இன் நடுப்புள்ளி H இன் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{2a-mc}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ எனக் காட்டுக.

(i) தந்த வரையானது, புள்ளி $(1, 1)$ இனூடாகச் செல்லுமாயின் H இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(ii) தந்த வரையானது, புள்ளி $(-2a, 0)$ இனூடாகச் செல்கின்றது. பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள் மீண்டும் பரவளைவில் புள்ளி N இற் சந்திக்கின்றனவெனக் காட்டுக. N இன் ஆள் ஆள்கூறுகள் $(4a/m^2, -4a/m)$ எனக் காட்டுக.

66. $y^2=4ax$ இற்கு புள்ளி $P(p)$ இலுள்ள செவ்வன், பரவளைவை மீண்டும் $Q(q)$ இற் சந்திக்கின்றது. q ஐ p இல் உணர்த்துக. PQ ஆனது பரவளைவின் உச்சியில் செங்கோணமமைப்பின் p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. PQ இன் நீளம் இழிவாயின் $p=\pm\sqrt{2}$ எனக் காட்டு.

67. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவில் ஏதாவதொரு புள்ளி P இலுள்ள செவ்வன் பரவளைவை மீண்டும் R இற் சந்திக்கின்றது. பரவளைவிற்கு வேறொரு புள்ளி Q இலுள்ள செவ்வனும் R இனூடாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

(a) R ஆனது பரவளைவின் ஒரு பகுதியில் இருக்க மாட்டாது எனக் காட்டுக.

(b) பரவளைவிற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடெனக் காட்டுக.

(c) வட்டம் PQR ஆனது பரவளைவின் உச்சியினூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

(d) முக்கோணி PQR இன் நிமிர்மையம் பரவளைவின் அச்சிற்குச் செங்குத்தெனக் காட்டுக.

(e) நாண் PQ எப்பொழுதும் பரவளைவின் அச்சிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

68. $x^2 = 4ay$, $y^2 = 4ax$ எனும் பரவளைவுகள் உற்பத்தியிலும், புள்ளி P இலும் இடைவெட்டுகின்றன. $x^2 = 4ay$ இற்கு P இலுள்ள தொடலி $y^2 = 4ax$ ஐ மீண்டும் A இற் சந்திக்கின்றது. $y^2 = 4ax$ இற்கு P இலுள்ள தொடலி $x^2 = 4ay$ ஐ மீண்டும் B இற் சந்திக்கின்றது. $\angle APB =$ தான் $^{-1}\frac{3}{4}$ எனக் காட்டுக. AB ஆனது இரு பரவளைவுகளுக்கும் ஒரு பொதுத் தொடலியெனக் காட்டுக.

69. $y^2 = 4ax$ இலுள்ள புள்ளிகள் $P(t_1)$, $Q(t_2)$ ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. PQ ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் பரவளைவை மீண்டும் புள்ளிகள் R, S இற் சந்தித்தால் R S இன் சமன்பாடு $2x + (t_1 + t_2)y + 2a(4 + t_1 t_2) = 0$ எனக் காட்டுக.

70. தமது உச்சியை உற்பத்தித் தானத்தில் கொண்டிராத இரு பரவளைவுகள் முறையே x, y அச்சுகள் பற்றி சமச்சீராகவுள்ளன. இவ்விரு பரவளைவுகளும் நான்கு புள்ளிகளில் இடைவெட்டினுல், இந் நான்கு புள்ளிகளினூடாகவும் ஒரு வட்டமும் ஒரு செங்கோண அதிபரவளைவும் செல்லுமெனவும், இவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி உற்பத்தித் தானத்தில் இருக்குமெனவும் காட்டுக.

71. $y^2 = 4ax$ எனும் பரவளைவின் உச்சியினூடாகச் செல்லும் செங்குத்தான இரு நாண்கள் OP, OQ ஆகும். இங்கு O பரவளைவின் உச்சி; $P(t_1)$, $Q(t_2)$ பரவளைவிலுள்ள புள்ளிகள்

(i) $t_1 t_2 = -4$ எனக் காட்டுக.

(ii) P_1, P_2 இலுள்ள தொடலிகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடெனக் காட்டுக.

(iii) P_1, P_2 இலுள்ள செவ்வன்களின் இடைவெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.

72. $y^2 = 4ax$ இற்கு, புள்ளிகள் 't_1', 't_2' இலுள்ள தொடலிகள் (x_0, y_0) இற் சந்திப்பின் $a^2(t_1 - t_2)^2 = y_0{}^2 - 4ax_0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

பரவளைவில் ஒரு மாறும் புள்ளி P இனூடாகச் செல்லும், மாறாப் படித்திறன் m உடைய நாண் வளையியை மீண்டும் Qஇற்

சந்திக்கின்றது. Q, R இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2 = 4ax + \frac{a^2}{m^2}$ எனக் காட்டுக.

73. $\left(\frac{a}{t^2}, \frac{2a}{t}\right)$ எனும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் ஒரு குவிய நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. குவிய நாண்களை விட்டமாகக் கொண்ட ஏதாவதிரு வட்டங்களின் பொது நாண் பரவளையின் உச்சியினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

74. ஒரு வட்டமானது பரவளைவு $y^2=4ax$ ஐ புள்ளிகள் P, Q இல் வெட்டுகின்றது. இப்புள்ளிகள் இரண்டும் x – அச்சுபற்றிச் சமச்சீராக உள்ளன. இவ்வட்டம் குவியம் F இனூடு செல்லுமாயின், PQ இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. வட்டத்தின்மையம் C யையும் காண்க. C F P என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணியெனக் காட்டுக.

75. $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி A[t] இலுள்ள செவ்வன் வளையியை மீண்டும் B இற் சந்திக்கின்றது B இன் ஆள்கூறுகளை காண்க A, B இலுள்ள தொடலிகள் C இற் சந்திப்பின் $AC^2 = 4a^2(1+t^2)^3/t^2$ என நிறுவுக. AC இன் நீளம் ஒரு இழிவாயின் $t = \mp 1/\sqrt{2}$ என நிறுவுக.

76. $y^2=4ax$ இற்கு புள்ளி A[t] இலுள்ள தொடலி x– அச்சை P இலும், செவ்வன் x – அச்சை Q இலும் சந்திக்கின்றன. A இலிருந்து y– அச்சுக்குக் கீறிய செங்குத்தின் அடி M ஆகும். OAMP ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக. (O உற்பத்தித் தானம்). OAMP OAQ சமபரப்பு உடையவையாயின் A இன் ஆள்கூறுகள் $(2a, \pm 2\sqrt{2}a)$ எனக் காட்டுக.

77. $y^2=4ax$ இன் நாண் AB ஆகும். S அதன் குவியம். AB இன் நடுப்புள்ளி C ஆகும். S இலிருந்து AB இற்குக் கீறிய செங்குத்து, செலுத்தலியை D இற் சந்திக்கின்றது. $2CD = SA+SB$ என நிறுவுக.

78. $y^2 = 4a(x-a)$ எனும் பரவளைவிற்கு புள்ளி $(at^2+a, 2at)$ இலுள்ள தொடலி, $y^2=4bx$ ஐ புள்ளிகள் P[p], Q[q] இற் சந்திக்

கின்றது. $p+q=2t$, $bpq=a(t^2-1)$ என நிறுவுக. $b>a>0$ ஆகும். t மாறும்போது PQ இன் நடுப்புள்ளியின் x, y சமன்பாட்டைக் காண்க.

79. P (h, k) எனும் புள்ளியிலிருந்து $y^2=4ax$ இற்கு மூன்றிற்கு மேற்பட்ட செவ்வன்கள் கீற இயலாது எனக் காட்டுக.

P இலிருந்து $y^2=4ax$ இற்குக் கீறிய மூன்று தொடலிகளின் அடிகள் $Q[t_1]$, $R[t_2]$, $S[t_3]$ ஆகும். $t_1+t_2+t_3=0$ எனக் காட்டுக. ${t_1}^2+{t_2}^2+{t_3}^2$ இன் பெறுமானம் காண்க. முக்கோணி QRS இன் மையப்போலி G இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. P ஆனது $x=h$ இல் அசையுமாயின், G இன் ஒழுக்கு ஒரு புள்ளியெனக் காட்டுக.

80. $y^2=4ax$ இன் ஒரு குவிய நாணின் முனைகளிலுள்ள செவ்வன்கள் ஒன்றற்கொன்று செங்குத்தெனக் காட்டுக. இச் செவ்வன்களின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக. இதன் குவியத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

81. $y^2=4ax$ இற்கு A[t] இலுள்ள செவ்வன் x– அச்சை L இற் சந்திக்கின்றது. $AB=\frac{3}{2}AL$ ஆகுமாறு நீட்டப்பட்ட AL இல் B ஒரு புள்ளி. t மாறும்போது B இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.

விலை: 9-00