க. பொ. த. (உயர்தரம்)

G. C. E. A|L

பிரயோக கணிதப் பயிற்சி

பொறியியல்

Problems & Exercises in Applied Mathemetics Statics & Hydrostatics

(பதிப்புரிமை)

விலை 7/=

வெளியீடு
தபால் புத்தக சேவை
9/2 ஈச்சமோட்டை வீதி
யாழ்ப்பாணம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

க. பொ. த. (உயர்தரம்)

G. C. E. A/L

பிரயோக
கணிதப் பயிற்சி

பொறியியல்

Problems & Exercises
in
Applied Mathemetics
Statics & Hydrostatics

(பதிப்புரிமை)

விலை 7/=

வெளியீடு
தபால் புத்தக சேவை
9/2 ஈச்சமோட்டை வீதி
யாழ்ப்பாணம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பொறியியல்

★

நிலையியலும், நீர்நிலையியலும்

அலகு

1. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள்

2. ஒரு தள விசைகள் (காவிகள் பிரயோகங்கள் உட்பட)

3. வரைபு அமைப்புக்கள்

4. புவியீர்ப்பு மையம்

5. உராய்வு

6. பாயி அமுக்கம்

7. மாயவேலையும் அழுத்தச்சத்தியும்

8 காவிகள்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

நிலையியலும், நீர்நிலையியலும்

(பகுதி 11) அலகு 1

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள்

1. ஒவ்வொன்றும் '2a' நீளமுடைய AB, BC ஆகிய இரண்டு சீரான ஏணிகள் B இலே ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. W_1, W_2 என்பன முறையே AB, BC இன் நிறைகளாகும். இவ்வமைப்பு A உம் C உம் ஒப்பமான கிடைத்தரையிலே தொடுகையிலிருக்கும்படி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே வைக்கப்பட்டுள்ளது. A இற்கும் C இற்கும் இணைக்கப்பட்ட 4a ஐசன் ∝ நீளமுள்ள இலேசான இழையினால் இவ்வமைப்பு சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. W நிறையுடைய ஒரு மனிதன் தரையிலிருந்து ஆரம்பித்து மெதுவாக ஓர் ஏணியிலேறுகிறான். மனிதன் AB, வழியே ஏறினாலும் CB வழியே ஏறினாலும் இழையிலுள்ள இழுவை T=தான் α/4, $(W_1+W_2+W. d/a)$ எனக் காட்டுக. இங்கு d என்பது ஏணிவழியே ஏறிய தூரம். மனிதன் B இல் இருக்கும்போது B இல் உள்ள எதிர்த்தாக்கங்களைக் காண்க.

2. ஓர் இலேசான இழையின் இரண்டு முனைகளும் ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள AB ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கிணைக்கப்பட்டுள்ளன. முறையே 3 இரு., 4 இரு. நிறையுடைய P, Q ஆகிய இரண்டு துணிக்கைகள் இழையின் நீளத்தின் வழியே இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் P,Q ஆகியவற்றினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக்கள் AB ஐ முச்சமகூறிடுகின்றன. AB இல் இருந்து P, Q என்பவற்றின் ஆழங்களின் விகிதம் 10:11 எனக் காட்டுக.

3. சமநீளமுடைய AB, BC, CD, DA ஆகிய நான்கு கோல்கள் ஒரு சாய்சதுரத்தை ஆக்கும் வண்ணம் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் AB, AD இலேசானவை. கோல்கள் BC, CD ஆகியவை ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய சீரான கோல்கள் ஆகும். சட்டப்படல் A இலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B இற்கும், D இற்கும் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்ட வேறோர் சமநீளமுடைய இலேசான BD எனும் கோலினால் சட்டப்படல் நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கோலிலுள்ள உதைப்பு $\sqrt{3}.W/2$ எனக் காட்டுக.

4. 20 அடி நீளமுள்ள சீரில்லாப் பலகையொன்று ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள A, B எனும் தாங்கியில் அதன் முனைகளிலிருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு குழந்தை A இலிருந்து B இற்கு நடந்து சென்றபோது A இலும், B இலும் உள்ள உயர்மறுதாக்கங்கள் முறையே

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

60 இரு. நிறை 50 இரு நிறை எனவும், A இலே உள்ள இழிவு மறுதாக்கம் 20 இரு. நிறை எனவும் அவதானிக்கப்பட்டது. குழந்தையினதும் பலகையினதும் நிறையைக் காண்க. A இல் இருந்து பலகையின் ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தையும் காண்க.

5. ஓர் இலேசான இழையின் ஒரு முனை W நிறையுடைய AB எனும் கோலின் A எனும் முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழை P எனும் புள்ளியிலுள்ள நிலையான ஒப்பமான வளையத்தினூடாகவும் கோலின் முனையாகிய B இல் உள்ள சிறிய இலேசான வளையத்தினூடாகவும் சென்று அதன் மறுமுனையில் 2W நிறையைத் தாங்குகின்றது. சமநிலையில் $AP:BP=5:1$ என நிறுவுக.

6. ஒவ்வொன்றும் '2a' நீளமும், W நிறையுமுடைய AB, BC, CD, DA ஆகிய நான்கு கோல்கள் A, B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC இனதும் CD இனதும் நடுப்புள்ளிகள் 2a சைன் θ நீளமுடைய இலேசான கோலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல A இல் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அவ்விலேசான கோலிலுள்ள உதைப்பு 4W தான் θ எனக் காட்டுக. B இலும் C இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

7. W நிறையும் 25 அங். நீளமுமுடைய AB எனும் சீரான கோல் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்குச் செங்குத்தான தளத்திலே வைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை A சுவருக்கெதிராகவும் மறுமுனை B ஒப்பமான கிடைத்தளத்திலிருக்கும்படி கோலிலுள்ள C எனும் புள்ளிக்கும் சுவரினடியிலுள்ள P எனும் முனைக்கும் இணைக்கப்பட்ட இலேசான இழையினால் கோல் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. BC=9 அங் ஆகவும் PB=15 அங். ஆகவுமிருப்பின், இழையினிழுவை 15/14W இரு. நிறை எனக் காட்டுக. A இலும் B இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க

8. மூன்று ஒரே தளவிசைகள் சமநிலையிலிருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகளைத் தருக.

இலேசான நீளா இழையொன்றின் இரு முனைகளும் ஒரு பக்கம் 'a' ஆக உள்ள சீரான சமபக்க முக்கோணி அடரொன்றின் இரு முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழை ஒப்பமான சிறிய முனையொன்றிற்கு மேலாகச் செல்கின்றது. அடர் தன் ஒரு பக்கம் நிலைக்குத்தாயிருக்கும்படி சமநிலையிற் தொங்குகின்றது. இழையின் இரண்டு பகுதிகளும் நிலைக்குத்துடன் 30° சாய்விலிருக்கின்றன எனவும் இழையின் நீளம் $a\sqrt{3}$ எனவும் காட்டுக.

9. AB, BC, AC ஆகிய மூன்று சீரான சம[illegible]டைய கோல்கள் A, B C இலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. CA, AB ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் BC, 2W நிறையுமுடையன. சட்டப்படல் C இல்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது' BC கிடையுடன் தான் $^{1}(4/\sqrt{3})$ எனும் கோணத்தை அமைக்குமென நிறுவுக. A இலும் B இலும் உள்ள மறுதாக்கங்கள் என்ன?

10. AB என்பது அடியின் ஆரை a ஆகவும், நிறை W ஆகவும் உடைய சீரான செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் அடி விளிம்பின் விட்டம் ஆகும். AB யின் முனையாகிய A இல் 2W/5 என்ற நிறை தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கூம்பு O என்ற புள்ளியிலிருந்து O வையும் உச்சி V யையும் இணைக்கும் a நீளமுடைய மெல்லிய இழையினுலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. வேருேர் மெல்லிய இழையின் ஒரு முனை O இலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அது கூம்பின் விளிம்பிலுள்ள ஓர் புள்ளியின்மேலாகச் சென்று மறுமுனையிலே W என்ற நிறையைத் தாங்குகின்றது. இவ்வமைப்பு ஈர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாகத் தொங்கும்போது கூம்பினச்சு நிலைக்குத்தாய் உள்ளது. இரண்டாவது இழை விளிம்பை B இற் சந்திக்கின்றது. OV என்ற இழை விளிம்பை B இற் சந்திக்கின்றது OV என்ற இழை நிலைக்குத்துடன் 30° என்ற கோணத்தை அமைக்குமென நிறுவுக. கூம்பினுயரம் $(1-\sqrt{3}/4)a$ ஆயின் OV என்ற இழையிலுள்ள இழுவை என்ன?

11. ஒவ்வொன்றும் 8a நீளமுள்ள சீரான கோல்கள் AB, BC, CA என்பன A, B, C எனும் புள்ளிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC, CA எனும் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் AB ஆனது 2W நிறையும் உடையன. D, E என்பன BC என்ற கோலில் முறையே B இலும் C இலும் இருந்து 'a' தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளாகும். இச் சட்டப்படல் ஓர் நிலைக்குத்துத்தளத்தில் BC கிடையாகவும் ABC இன் மட்டத்துக்கு மேலாகவும் இருக்குமாறு D இலும், E இலும் உள்ள இரு கத்தி முனைகளில் வைத்துச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டுக்கள் A, B, C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களின் பருமன்கள் முறையே $W/2, \sqrt{13}W/2, \sqrt{7}W/2$ எனக் காட்டுக. D இலும், E இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

12. கிடையுடன் α கோணத்தை ஆக்கும் தளங்கள் இரண்டு l கிடைக்கோட்டிலே ஒன்றை ஒன்று வெட்டி ஓர் ஒப்பமான தவாளிப்பை ஆக்குகின்றன. C, A, B என்பன ஒவ்வொன்றும் நிறை W உடைய மூன்று ஒப்பமான சீரான செவ்வட்ட உருளைகளாகும். A யும் B யும் அவற்றின் அச்சுக்கள் l க்குச் சமாந்தரமாயும் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு தளத்தைத் தொடுமாறும் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. C என்பது அதன் அச்சு l க்குச் சமாந்தரமாய் இருக்குமாறு A யுக்கும் B யுக்கும் மேல் சமச்சீராய் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A க்கும், B க்கும் இடையில் உள்ள மறுதாக்கங்கள் என்ன? தான் $\alpha > \sqrt{3}/9$ ஆயின் அவை பிரியமாட்டா என்றும் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. அடியின் ஆரை a, அரை உச்சிக்கோணம் $30°$ யும் நிறை W உம் உடைய ஒரு சீரான செவ்வட்டக் கூம்பு அதன் வளைந்த பரப்பு பிறப்பாக்கியின் வழியே ஒரு ஒப்பமான சாய்தளத்துடன் தொடுகையில் இருக்கின்றது. இக்கூம்பு ஒரு முனை கூம்பின் அடியின் மையத்திற்கும் மற்றைய முனை சாய்தளத்தின் ஒரு புள்ளிக்கும் தொடுக்கப்பட்ட $a\sqrt{3'}$ நீளமுள்ள இலேசான நீளா இழையொன்றினல் தாங்கப்பட்டுள்ளது. தளம் கிடையுடன் α எனும் சாய்வை அமைப்பின், இழையிலுள்ள இழுவை $(2\sqrt{3}W$ சைன்$\alpha /3)$ என நிறுவுக. சாய்தளத்திற்கும் வளைபரப்பிற்கும் இடையில் உள்ள R என்ற மறுதாக்கத்தைக் காண்க. R இன் தாக்கக்கோடு கூம்பின் அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளி கூம்பின் உச்சியிலிருந்து

$3\ [3\sqrt{3}$ கோசை $\alpha + 5$ சைன் $\alpha] \ /\ 4\ [3$ கோசை$\alpha + \sqrt{3}$சைன்$\alpha]$ எனும் தூரத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

14. ஒரே தள விசைத்தொடை ஒன்றின் சமநிலைக்குப் போதிய நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

ஒவ்வொன்றும் அடிக்கு w நிறையுடைய AB, BC ஆகிய இரண்டு சீரான கோல்கள் B இலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB=6 அடி BC=8 அடி. AB, BC இன் மையப்புள்ளிகள் 5 அடி நீளமுள்ள இலேசான நீளாக் கம்பியினல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A, C என்பன ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் இருக்கும்படியும், B என்பது A இற்கும் C க்கும் ஊடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலும் இருக்குமாறு கோல்கள் ஓய்விலுள்ளன. கம்பியிலுள்ள இழுவையையும் B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

15. a ஆரையுடைய ஓர் அரைக்கோளக் குவளை, அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், விளிம்பு மேன்முகமாகவும் நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. l நீளமுடைய ஓர் அழுத்தமான கோல் AB, அதன் முனை A குவளையின் உட்பரப்பைத் தொடவும், A க்கும் B க்கும் இடையில் உள்ள ஒரு புள்ளி குவளையின் விளிம்பைத் தொடவும் சமநிலையில் உள்ளது, கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகும். $AG=kl (k<1)$ $2a=kl$ கோசை θ இனூற் கொடுபடும் என நிறுவுக.

$k=\frac{1}{2}$ ஆயின், கோலின் இச்சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு, கோலின் நீளம் $\sqrt{(8/3)}\,a$ க்கும் 4a க்கும் இடையில் இருக்கவேண்டும் எனநிறுவுக.

16. பரிதியில் ஒரு புள்ளி ஒரு நிலைத்த கிடைத்தளத்தைத் தொடச் சுயாதீனமாக இயங்கக்கூடிய ஒரு சீரற்ற வட்டத்தட்டின் உறுதிச் சமநிலைக்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க. இந்நிபந்தனை தளத்தின் அழுத்த அல்லது கரட்டுத்தன்மைகளிற் சாராதென நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு சீரான வட்டத்தட்டின் திணிவு m, மையம் O AC, BD அதன் இரு செங்குத்து விட்டங்கள் ஆகும். A, B, C, D புள்ளிகளில் முறையே 2m, 8m, 6m, 5m திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பரிதியின் ஒரு புள்ளி ஒரு நிலைத்த கிடைத்தளத்தில் சுயாதீனமாக இயங்குமாறு தட்டு வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத் தளங்களில் மேல் நிலைக்கோட்டுடன் OA யின் சரிவைக் காண்க. சமநிலையை நடுநிலை ஆக்குவதற்குப் பரிதியில் கட்டவேண்டிய திணிவின் பருமனையும் நிலையையும் காண்க.

17. மடிக்கக்கூடிய ஓர் ஏணி AC, BC என்னும் சமநீளமுள்ள சீரான உறுப்புக்களைக் கொண்டது. அவற்றின் நிறைகள் முறையே 40 இரு., 20 இரு. ஆகும். உறுப்புக்கள் C யில் பிணைக்கப்பட்டு, DE எனும் இலேசான கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் $AD = \frac{1}{3}AC$, $BE = \frac{2}{3}BC$. இவ்வேணி ஓர் அழுத்தமான கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு, F இல் 120 இரு. நிறையுள்ள ஒரு நிறை வைக்கப்பட்டது. இதில் $FC = \frac{1}{3}AC$ ஆகும். AB = BC ஆயின் கயிற்றிலுள்ள இழுவிசை $(55\sqrt{3})/2$ இரு. நிறை எனக் காட்டுக. C இல் உறுப்புக்களுக்கிடையில் உள்ள தாக்கத்தின் கிடை நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும் காண்க.

18. a ஆரையுடைய ஓர் அழுத்தமான அரைக்கோளக் குவளை, அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக அமைய நிறுவப்பட்டுள்ளது. ஒரு சீரான கோல் ACB அதனுள் சமநிலையில் உள்ளது. கோலின் கீழ்முனை A குவளையின் வளைபரப்பிற் தங்க, கோலில் ஒரு புள்ளி C குவளையின் விளிம்பைத் தொடுகிறது. கிடையுடன் கோலின் சரிவு 30° ஆயின் கோலின் நீளம் $a(4\sqrt{3})/3$ என நிறுவுக. கோலின் நிறை W எனின் A யிலும் C யிலும் கோலில் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

19. ஒரு சாய்சதுரம் ABCD ஒவ்வொன்றும் 2a நீளத்தையும், W நிறையையுமுடைய நான்கு சீரான கோல்கள் AB, BC, CD, DA களினால் A, B, C, D என்பவற்றில் அழுத்தமாகப் பிணைத்து ஆக்கப்பட்டுள்ளது; இது A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டு, B ஐயும், D ஐயும் இணைக்கும் ஒரு மெல்லிய இலேசான கோல் BD இனால் ஒடுங்காமல் தடைசெய்யப்பட்டுள்ளது. $\angle BAD = 2\alpha$ ஆயின், பிணையல் C இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் கணித்து, கோல் BD இலுள்ள உதைப்பு 2W தான் α என நிறுவுக.

20. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும், 2a நீளமுள்ள OA, AB, BC எனும் ஒரு சீர்கோல்கள் மூன்று A, B என்பவற்றிலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளது. O ஆனது ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்கு ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. C யில் ஒரு கிடைவிசை W பிரயோகிக்கப்பட்டது. சமநிலைத்தானத்தில் BC யானது நிலைக்குத்திற்குக் கோணம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தான்$^{-1}$ 2 இற் சாய்ந்திருக்குமெனக் காட்டுக. நிலைக்குத்துடன் AB, OA என்பவற்றின் சாய்வுகளையும் O, A B என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களையும் துணிக.

21 ஒவ்வொன்றும் 4a நீளமும், முறையே w_1, w_2, w_3 எனும் வேறு வேறான நிறையுமுடைய BC, CA, BA என்னும் மூன்று சீரான கோல்கள் ஒரு முக்கோணி வடிவில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அம்முக்கோணியானது, ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள P, Q எனுமிரண்டு ஒப்பமான முளைகளை AB தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறும் AB க்குக் கீழே C இருக்குமாறும் ஓய்விலிருக்கின்றது. இங்கு AP = BQ = a. W_1, W_2 எனும் நிறைகள் முறையே புள்ளிகள் A, B என்பவற்றிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. சமநிலைக்கு,

$$W_3 + 2W_1 + 3W_2 - W_1 \geqslant 0$$

$$W_3 + 2W_2 - W_2 + 3W_1 \geqslant 0$$ எனக் காட்டுக.

கோல் BC மீது மூட்டு C யினது மறுதாக்கத்தைத் துணிக.

22. ABCD என்பது ஒரு சீரான ஒரு செவ்வகத்தட்டு. AB=2a, AD=2b. அத்தட்டானது ஒப்பமான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள O எனும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து l நீளமுள்ள நீட்டமுடியாத ஒரு மெல்லிய இழை OA யினாலே தூக்கப்படுகின்றது. D ஆனது அச் சுவரைத் தொட்டுககொண்டிருக்க, அத்தட்டு O வினூடாக அச் சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஓய்விலிருக்கின்றது. θ, ϕ என்பன நிலைக்குத்துடன் முறையே OA, AD என்பவற்றின் சாய்வுகளாயின், இவை $l/b = (2\text{சைன்}\phi) / \text{சைன்}\theta)a/b$ தான் $\phi + 2$தான்θ எனும் சமன்பாடுகளினாலே துணியப்படும் எனக் காட்டுக.

23. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, BC' CD, DA என்னும் நான்கு கோல்கள் A, B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள E, F எனும் ஒப்பமான இரு முளைகளின் மீது AB, AD என்பவை தாங்கப்பட்டுள்ளன A ஆனது C இற்கு நிலைக்குத்தாய் மேலே இருக்கும்படி ABCD ஆனது ஒரு சதுர உருவத்திலே தொங்கினால், E, F ஆனவை முறையே AB AD ஆனவற்றை இரு கூறிடுமெனக் காட்டுக. C, A ஆனவற்றிலும், முளைகளிலுமுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

24 2a எனும் நீளமும், m எனும் திணிவுமுடைய AB எனும் ஒரு சீர்க்கோலொன்று, ஓர் ஒப்பமான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து b எனும் செங்குத்துத்தூரத்திலுள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான முளை C மீது செல்லுகின்றது. முனை A ஆனன அச்சுவரைத் தொடுகின்றது. அக்கோலினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத்தளம் சுவருக்குச்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

செங்குத்தாக உள்ள C இனூடாகச் செல்லும் கிடைத்தளத்தை, பூச்சிய அழுத்தச் சத்தி மட்டமாக எடுத்துக்கொண்டு, அக்கோலுக்கும் A இனூடாகச் செல்லுகின்ற மேல்நோக்கும் நிலைக்குத்துக்கு மிடையே உள்ள கோணம் θ ஆயிருக்கும்போது அக்கோலின் அழுத்தச் சத்தி V ஆனது V = mg (a கோசை θ — b கோதா θ) என்பதால் தரப் படும் எனக் காட்டுக.

அக்கோலின் சமநிலையைக் காண்க. இந்நிலை உறுதியற்றது எனக் காட்டுக.

25. 3a நீளமுடைய நேரிய கோலொன்றின் திணிவுமையம் கோலின் முச்சமகூறிடும் புள்ளியொன்றில் உள்ளது. கோலின் முனைகளானது, 6a நீளமுள்ள இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் முனைகளுக்குத் தொடுக்கப்பட்டு இழையானது, அழுத்தமான முளையின் மேற்செல்ல ஓய்வுநிலையில் தொங்குகிறது. கோல் கிடையுடன் தான் $^{-1}\sqrt{(3/5)}$ என்னும் கோணத்தில் சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

26. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும், 2a நீளமுமுடைய இரு ஒரு சீரான கோல்கள் AB, CD, என்பன AB யின் முனை B, CD இன் நடுப்புள்ளிக்கு அழுத்தமாக மூட்டப்பட ஓய்விலிருக்கின்றன. முனைகள் A உம் D உம் ஒரு சுவருக்கு அழுத்தமாக மூட்டப்பட, கோல்கள் சமநிலையிலிருக்கின்றன; இங்கு A ஆனது D இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே 2a தூரத்திலுள்ளது. C இலிருந்து 2W நிறை தொங்குகிறது. கணிக்குக.

(i) பிணையில் D இலுள்ள எதிர்த்தாக்கத்தின் பருமனும் திசையும்

(ii) B இலுள்ள எதிர்த்தாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்கூறுகள்.

27. r ஆரையுள்ள உருளையொன்று அதன் அச்சு கிடையாகவும் அதன் பிறப்பாக்கிக் கோட்டு வழியே ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடும் வண்ணமும் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. ஒரு தட்டையான சீரான, 2l நீளமுள்ள, W திணிவுள்ள வளையொன்று அதன் இரு அந்தங்கள் சுவரிலும், உருளையிலும் இருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சுவரிலும், உருளையிலும் உராய்வு இல்லை. கிடையுடன் வளை ∝ கோணத்தை ஆக்கின்,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \text{ சீக } \propto \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{தான்}^{2} \propto)}} \right\}$$ எனக் காட்டுக. சுவரில் உள்ள அழுத்தத்தையும், உருளையின் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

28. இரு அழுத்தமான கம்பிகள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தை ஆக்கும் வண்ணம் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. சமதிணிவும் சமநீளமும் கொண்ட இரு கோல்கள் ஓர் முனையில் ஒன்றாகப் பிணைக்கப்பட்டு மறுமுனைகள் சிறிய வளையங்கள் மூலம் அக்கம்பிகளிலே வழுக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு கோலினதும் திணிவிற்குச் சமமான ஓர் திணிவு பிணையலில் தொங்கவிடப்பட்டது. சமநிலையில் ஒவ்வொரு கோலினதும் சாய்வு நிலைக்குத்துடன் θ ஆயின் தான் θ. தான் $\alpha = 3/2$ எனக் காட்டுக. தான் $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$ போன்ற நிலைகளுக்குரிய படங்களை வரைக. அத்துடன் $\alpha + \theta > 90°$ எனவும் நிறுவுக.

29. m திணிவும் r ஆரையுமுள்ள ஒரு கோளமானது l நீளமுள்ள இழையால் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. $2a$ நீளமும் m திணிவுமுள்ள ஒரு சீர்க்கோலானது அதன் ஒரு முனை நிலைத்த புள்ளியில் அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டு கோளத்துடன் தொடுகை நிலையில் உள்ளது. இழையின் சாய்வு நிலைக்குத்துடன் θ ஆயின் தான் $\theta = (M\alpha r) / [m(l+r)^2 - M\alpha\sqrt{l(l+2r)}]$ என நிறுவுக.

30. தமது நிறை தம் நீளத்திற்கு விகித சமமாகவுள்ள இரு கோல்கள் C யில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. A, B என்ற முனைகள் ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. C யில் கோல்களுக்கிடையேயிருக்கும் மறுதாக்கம் கோணம் ACB யின் இரு சம வெட்டிவழியே தாக்கும் என நிறுவுக.

31. $2a$ நீளமும் W நிறையுமுள்ள AB, BC எனும் இரு சீர்க் கோல்கள் B யில் அழுத்தமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு மெல்லிய வளையமானது C யில் இணைக்கப்பட்டு ஒரு கிடையான அழுத்தமான கம்பியில் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. A யானது இடைக்கம்பியிலிருந்து 3α ஆழத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் சுயாதீனமாக நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. யாதுமொரு கோல் நிலைக்குத்தாக இருப்பின் மாத்திரம் சமநிலை உண்டென நிறுவிக் கோல் C யிலுள்ள மறுதாக்கத்தைப் பின்வரும் நிலைகளில் காண்க.

(i) AB நிலைக்குத்தாயிருக்கும்போது

(ii) BC நிலைக்குத்தாயிருக்கும்போது

32. ஒரு கூம்புப்பாத்திரமானது h உயரமும் உச்சிக்கோணம் 90° உடையது. அதன் உச்சி கீழ்நோக்கி இருக்கும் வண்ணம் அது நிலைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது. ஒரு அழுத்தமான சீர்க்கோல் அதன் ஓர் முனை கூம்பினுட் புறமும் மறுமுனை கூம்புக்கு வெளியிலிருக்கும் வண்ணமும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சமநிலையிலுள்ளது. கோலானது கிடையுடன் $\theta (< 45°)$ கோணத்தை யமைப்பின் கோலின் நீளம் 4h/கோசை θ (கோசைθ + சைன்θ)^2 என நிறுவுக.

33. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய ஐந்து சமச்சீர்க்கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு ஒரு ஐங் கோணத்தை ஆக்குகின்றன இந்த ஐங்கோணமானது ஓரிழையின் மூலம் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஒரு உச்சியில் கட்டித் தொங்க விடப் பட்டுள்ளது. அதன் அடுத்த மூலைகள் இரண்டும் ஒரு இலேசான சேர்க்கோலினுலிணைக்கப்பட்டு ஐங்கோணத்தின் உருவம் பேணப்படு கிறது. இக்கோலிலுள்ள தகைப்பு W {tan 18° + tan 54°} என நிறுவி ஐங்கோணத்தின் மூலைகளிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

34. திணிவு M உடைய ஒரு அழுத்தச் செவ்வகக் குற்றி அழுத்தமான இரு கிடைத்தளங்களிடையே சுயாதீனமாக இயங்கவல்லது. அக் குற்றியில் கால் வட்டத்தின் அமைப்பிலுள்ள குழாய் அதன் எல்லை ஆரைகளில் ஒன்று கீழ்த்தளத்தோடும் மற் றது கனத்தின் நிலைக்குத்தான பக்கத்தோடும் உள்ளவாறு செருகப் பட்டுள்ளது. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று கிடையாக v என்ற வேகத்துடன் குழாய்க்குள் செலுத்தப்படுகிறது. துணிக்கை அடித் தளத்தை அடித்தபின் குற்றிக்குத் தொடர்பாக v_1 வேகத்துடன் விட்டகல்கிறது.

$$v_1^2 = e^2v^2 - 2ag(1-e^2)(1+m/M)$$ என நிறுவுக.

35. AB என்பது கிடையான அழுத்தமான ஒரு தண்டவாளம், M திணிவுள்ள P எனும் ஒரு வளையம் அதில் வழுக்கவல்லது. ஒரு இலேசான விறைப்பான கோலின் ஒரு முனை P யில் அழுத்தமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளது மறுமுனையில் m திணிவுள்ள Q எனும் சிறு கோளம் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. $\angle BPQ = \alpha$ $(\alpha < \pi/2)$ ஆகுமாறு Q ஆனது AB க்குக் கீழுள்ள நிலையான ஒரு அழுத்தமான கிடைத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. R எனும் Q வைப்போன்ற கோளம் Q வை அடிக்குமாறு u எனும் வேகத்துடன் உருட்டி விடப்படுகிறது. கணத்தாக்கத்தின் பின் R இன் கதி,

$$\left|\left(1 - \frac{1+e}{1+k}\right)\right| u$$ எனக் காட்டுக.

இங்கு k = m / [M(1 + கோசை$^2\alpha$).] இதன் எல்லைகளையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 2

ஒரு தள விசைகள்

1. D என்பது $BD/CD = \frac{1}{3}$ ஆகுமாறு முக்கோணி ABC இன் BC என்னும் பக்கத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும் 2BC, 2AC, 3BA, 3AD ஆகிய விசைகள் முறையே BC, AC, BA; AD ஆகிய பக்கங்களின் வழியே தாக்குகின்றன, இவ்விசையமைப்பின் விளையுள் AB ஐ R இலும் AC ஐ S இலும் சந்தித்தால் AR/RB, AS/SC ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க.

இவ்வமைப்பின் விளையுள் RS இன் வழியே **15/2** RS எனவும் காட்டுக.

2. $\lambda.\overrightarrow{OA}$, $\mu.\overrightarrow{OB}$ இனற் குறிக்கப்படும் இரண்டு விசைகளின் விளையுள் $(\lambda+\mu).\overrightarrow{OC}$ எனக் காட்டுக். இங்கு $AC : CB = \mu : \lambda$ ஆகும் வண்ணம் C என்பது AB யிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

G என்பது முக்கோணி ABC இன் மையப்புள்ளியாகும். 3 BG 3CG, 3GA, 2CB ஆகிய விசைகள் முறையே BG, CG, GA, BC வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் CA க்கு சமாந்தரமென நிறுவுக. அதன் பருமனையும் தாக்கக்கோட்டையுங் காண்க.

3. D, E, F ஆகியவை முறையே முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களாய் BC, CA, AB இல் உள்ளன.

$$\frac{BD}{DC} = p, \frac{CE}{EA} = q, \frac{AF}{FB} = r$$ ஆக உள்ளன—

பருமனிலும் திசையிலும் AC, BE, CF இனற் கொடுக்கப்படும் மூன்று விசைகளும்.

$p = q = r = 1$ என்னும் ஒரேயொரு சமன்பாட்டிற்கு அமையுமாயின் (if and only if) சமநிலையிலிருக்கும் எனவும்.

(ii) $p = q = r \neq 1$ எனும் ஒரேயொரு தொடர்பிற்கு அமையுமாயின் (if and only if) ஓர் இணைக்குத் தாழ்த்தப்படலாம் எனவும் காட்டுக.

4. சமநிலையிலில்லாத ஒரே தள விசை அமைப்பொன்று எல்லா வழிகளிலும் (respect) அதே தளத்திலுள்ள முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களின் வழியே எடுக்கப்பட்ட விசைகளினற் கொடுக்கப்படுமென நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

A, B, C, D என்பன ஒரு செவ்வகத்தின் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட உச்சிகளாகும், AB=6 அங். BC=4 அங் E என்பது AB இன் நடுப் புள்ளி 3P, 6P, 12P, 10P இரு. நிறை ஆகிய விசைகள் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ஆகிய பக்கங்களின் வழியே தாக்குகின்றன. இவ்வமைப்பிற்குச் சமனுக முக்கோணி CDE இன் பக்கங்களின் வழியே உள்ள விசைகளைக் காண்க. விளைவு நீட்டப்பட்ட EC யை R இற் சந்தித்தால் $ER/CR={}^4/_3$ என நிறுவுக.

5. பருமனிலும், திசையிலும், தாக்கக்கோட்டிலும் $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\mu\overrightarrow{AC}$ என்பவற்றினுற் கொடுக்கப்படும் இரண்டு விசைகளும் $(\lambda+\mu)$ $\overrightarrow{AD}$ என்பதற்குச் சமன் என நிறுவுக. இங்கு D என்பது BC என்பதை $\mu:\lambda$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகும்.

A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளாகும் D என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி. ஒரே தள விசைத்தொகுதி ஒன்று விசைகள் $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$ என்பவற்ருலும் ABC என்ற போக்கில் உள்ளதும் முக்கோணியின் பரப்பின் இரு மடங்கு திருப்புதிறன் உடையதுமாகிய சுழலிணை ஒன்றினுலும் பூரணமாகக் கொடுக்கப்படுகிறது. இந்தத் தொகுதியின் விளையுள் 6PQ என நிறுவுக. P,Q என்பன AP/PB=2 ஆகவும், $BQ/QC=\frac{1}{3}$ ஆகவும் இருக்குமாறு முறையே AB, BC இல் உள்ள இரண்டு புள்ளிகளாகும்.

6. O, A, B, C என்பன நான்கு ஒரே தளப்புள்ளிகள் ஆகும். திசையிலும், பருமனிலும் தாக்கக்கோட்டிலும் $l\overrightarrow{OA}$, $m\overrightarrow{OB}$, $n\overrightarrow{OC}$ என்பவற்ருற் கொடுக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $(l+m+n)$ $\overrightarrow{OG}$ இனுற் கொடுக்கப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு G என்பது முறையே A, B, C ஆகியவற்றில் வைக்கப்பட்ட l, m, n ஆகிய திணிவுகளின் ஈர்ப்பு மையமாகும்.

$\frac{l}{\text{தான் } A}=\frac{m}{\text{தான் } B}=\frac{n}{\text{தான் } C}$ ஆயின், விளையுள் முக்கோணி ABC இன் நிமிர் மையத்தினூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

O இன் எல்லா நிலைகளுக்கும் விளையுள் முக்கோணி ABC இன் சுற்று மையத்தினூடாகச் செல்லுமாயின் $l:m:n$ என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. A, B, C, D என்பது ஒரு சதுர வடிவான தகடாகும். 5, 6 $2\sqrt{2}$. $5\sqrt{2}$ அலகு அளவுகளுடைய விசைகள் முறையே AD, BC, CA, DB வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு முறைப்படியுள்ள திசைகளிற் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.

இத்தட்டின் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் மேலதிகமான விசைகளினுல் இத்தகடு சமநிலையில் வைக்கவேண்டியிருக்கின்றது. தேவையான விசைகளின் அதி குறைந்த எண்ணிக்கை யாது? தகுதியான பெறுமானங்களைக் குறிப்பிடுக

8. A_1, A_2, A_3, A_4 என்பன ஒரே தளத்தில் உள்ள நான்கு நிலைத்த புள்ளிகள். P என்பது அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி ஆகும். $\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PA_2}$, $\overrightarrow{PA_3}$, $\overrightarrow{PA_4}$ எனும் விசைகளின் விளையுள் R ஆகும். R இன் பருமன் நிலைத்ததாயின், P இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமென நிறுவுக. ஆனல், R இன் திசை நிலைத்ததாயின், P யின் நேர்கோடென நிறுவுக.

$\lambda\overrightarrow{OA}$, $\mu\overrightarrow{OB}$ என்னும் இரு விசைகளின் விளையுள் $(\lambda+\mu)$ OC என நிறுவுக. இங்கு C, AB ஐ μ, λ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

9. ABC என்பது ஒரு முக்கோணி. P என்பது அதே தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, என்பவற்ருற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $3\overrightarrow{PG}$ ஆற் குறிக்கப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு G என்பது முக்கோணி ABC யின் மையப்போலியாகும்.

a, b, c என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் நிலைடங்களாயிருக்க I என்பது $\triangle$ ABC யினது உள்மையமாயிருந்தால் a. $\overrightarrow{PA}$ b. $\overrightarrow{PB}$ c. $\overrightarrow{PC}$ என்பவற்ருற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $(a+b+c)\ \overrightarrow{PI}$ ஆற் குறிக்கப்படுமெனவும் காட்டுக.

10. ABCD என்பது ஓர் இணைகரம் ஒரு விசைத்தொகுதி பருமனிலும் திசையிலும், நிலையிலும் $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\mu\overrightarrow{BC}$, $v\overrightarrow{CD}$, $\sigma\overrightarrow{DA}$, $\mu\overrightarrow{DB}$ $\sigma\overrightarrow{AC}$ என்பவற்ருலே குறிக்கப்படுகின்றன. $\lambda+\mu-v+\sigma=0$ எனின், அவ்விசைத்தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. $\lambda+\mu-v+\sigma\neq0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனின் அத்தொகுதி ஒரு விசைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி, அதன் தாசகக் கோட்டையும் காண்க.

11. ஒரு காவி என்பது என்ன? λ என்பது ஓர் எண்ணி ஆகும். **a** என்பது ஒரு காவியைக் குறித்தால், λa எனும் காவியை வரையறுக்க.

O என்னும் ஓர் உற்பத்தி குறித்து A B எனும் இரு புள்ளிகளின் தானங்கள் முறையே **a**, **b** எனும் காவிகளாற் குறிக்கப்படுகின்றன. AB ஐ $\lambda:\mu$ $(\lambda-\mu\neq 0)$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P இனது தானம் $\frac{\mu a+\lambda}{\lambda+\mu}$ எனும் காவியால் குறிக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

$\alpha+\beta+\gamma=0$ ஆயும், $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$ ஆயுமிருந்தால் a, b, c இனாற் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளவை என உய்த்தறிக.

12. (i) அலகுக்காவி I ஒன்றிற்கும்

(ii) காவி λI இற்கும்

வரைவிலக்கணம் கூறுக. இதில் λ ஆனது ஒரு நேரெண்ணி ஆகும்.

செங்கோண ஆள்கூற்றுத் தொகுதியொன்றின் Ox, Oy எனும் அச்சுகளிற்குச் சமாந்தரமான அலகுக்காவிகள் முறையே **i**, **j** ஆகும். தளம் Oxy இலிருக்கும் A எனும் புள்ளியொன்றின் தானக்காவி $\overrightarrow{OA}$ ஐ

$$r=a(\text{கோசை }\alpha i+\text{ சைன் }\alpha j)$$

என எழுதுதல் முடியுமெனக் காட்டுக. இங்கே a=OA, POX=α ஆகும்.

OA ஐ தளம் Oxy மீது புள்ளி O பற்றி 90° ஆல் இடஞ்சுழியாகத் திருப்பி OA′ என்பது பெறபடுகிறது. A′ யின் தானக்காவி OA′ ஐ பெறுக.

இதிலிருந்து சதுரம் OAO′A′ இனுடைய உச்சி O′ இன் தானக் காவி $\overrightarrow{OO'}$ ஐக் காண்க.

13. m_1, m_2 எனும் திணிவுகள் உடைய P_1, P_2 எனும் துணிக்கைகள் இரண்டின் திணிவுமையமானது P_1, P_2 ஐ $m_2 : m_1$ எனும் விகிதப்படி பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

O எனும் புள்ளியொன்றைக் குறித்து P_1, P_2 என்பவற்றின் தானக்காவிகள் r_1, r_2 ஆயின், திணிவுமையத்தின் $r = (m_1 r_1 + m_2 r_2)/(m_1 + m_2)$ என எழுதுதல் முடியுமெனக் காட்டு.

தொகுத்தறிவு கோட்பாட்டால், அல்லது வேறு முறையால், n எனும் எண்ணிக்கையுடைய துணிக்கைகளின் திணிவுமையம் G இன் தானக்காவி r ஐ

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)$$

எனும் தொடர்பால் தருதல் முடியுமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{P_i G} = O$$ ஆகும் என உய்த்தறிக.

14. ஒரு தளத்திலுள்ள செங்கோண அச்சுக்கள் Ox, Oy குறித்து ஆள்கூறுகள் xi, yi உடைய புள்ளிகள் Pi இலே பருமன்கள் Fi $(i = 1/2 \ldots\ldots\ldots, n)$ ஐக் கொண்டுள்ள சமாந்தர விசைகள் அத்தளத்திலே தாக்குகின்றன. ஒவ்வொரு விசையும் OX உடன் θ என்னும் அதே கோணத்திலே சாய்ந்துள்ளது. அவ்விசைகளின் விளையுள்ளினது தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

θ ஆவது மாறும்பொழுது, ஒத்த விளையுளானது அத்தளத்திலே நிலைத்த ஒரு புள்ளி G இனூடாகச் செல்லும் என உய்த்தறிக.

ஒரு தந்த தள அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தினது இடங்காண்பதற்கு, இம்முடிவை ஆதாரமாகக்கொண்ட எளிய பரிசோதனை ஒன்றை சுருக்கமான ஒரு விளக்கத்துடன் விபரிக்குக.

15. Ox, Oy என்னும் ஆள்கூற்றச்சுகளுக்குச் சமாந்தரமாக முறையே X, Y என்னும் விசைக் கூறுகளைக் கொண்ட விசையொன்றை $F = Xi + Yj$ எனும் காவியால் குறித்தல் முடியும் இதில் i, j என்பவை முறையே Ox, Oy இற்குச் சமாந்தரமான அலகுக் காவிகளாகும்.

ஒரு விசைத்தொகுதியானது ஒரு செவ்வகத்தின் *(0, 0), (3, 0), (3. 4), (0.4)* என்னும் உச்சிகளிலே முறைப்படி தாக்குபவையான 3i. 4j. 2i, 5j என்னும் விசைகளையும் புள்ளி *(a, 0)* இல் தாக்கும் Pi + Oj எனும் ஐந்தாம் விசை ஒன்றையும் கொண்டதாகும். உச்சிகள் *(0,0), (3, 0), 3, 4)* ஆனவை பற்றி இவ்விசைத்தொகுதியின் இடஞ்சுழியான திருப்பங்கள் முறையே m_1, m_2, m_3 ஆகும். P, Q, a என்பவற்றை m_1, m_2, m_3 ஆனவை சார்பாகக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(a) (i) $M_1 - m_2 = 2$ ஆயிருக்கும்போது ஐந்தாம் விசையானது அச்சு Ox வழியேயிருக்குமெனக் காட்டுக.

(ii) $m_3 - m_2 = 20$ ஆயிருக்கும்போது ஐந்தாம் விசையானது அச்சு Oy இற்கு சமாந்தரமாயிருக்குமெனக் காட்டுக

(b) இவ்விசைத் தொகுதியானது சமநிலையிலிருக்கும்போது ஐந்தாம் விசையின் பருமனையும், திசையையும் தாக்கக் கோட்டையும் காண்க.

16. G என்பது ∇XYZ இன் மையப் போலியாகவும் மூன்று விசைகள் $\overrightarrow{Gx}, \overrightarrow{Gy}, \overrightarrow{Gz}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப் படுவதாகவும் இருந்தால் $\overrightarrow{Gx} + \overrightarrow{Gy} + \overrightarrow{Gz} = 0$ என நிறுவுக. ஒரு தள முக்கோணிகள் ABC, DEF என்பவற்றின் மையப் போலிகள் முறையே P, Q என்பனவாகும். $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகள் $3\overrightarrow{PQ}$ வால் குறிக்கப்படும் ஒரு விசைக்கும் இணைக்கும் சமமென நிறுவுக.

17. O என்பது முக்கோணம் ABC யின் சுற்று மையமாகும். BC, CA, AB ஆகியவற்றிற்கு விகிதமான விசைகள் O விலிருந்து முறையே OA, OB, OC என்பனவற்றில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் △ABC யின் உள்வட்ட மையத்தினூடாகத் தாக்குமென நிறுவுக.

18. G என்பது △ABC யின் மையப் போலியாகும். O என்பது அம்முக்கோணத்தில் தளத்திலல்லாத யாதுமொரு புள்ளி. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OG}$ ஆகியவற்றின் விளையுளைக் காண்க.

$p\,\overrightarrow{OA}, q\,\overrightarrow{OB}, r\,\overrightarrow{OC}$ என்ற விசைகளின் விளையுள் △ABC யின் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக அமைவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

19. $\lambda\overrightarrow{AD}, \mu\overrightarrow{BE}, r\overrightarrow{CF}$, என்ற விசைகள் முறையே D, E, F என்பவற்றினூடாகத் தாக்குகின்றன. இங்கு

$$\frac{BD}{DC} = 3 \text{ உம் } \frac{CE}{AE} = 4 \text{ உம்}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆகும். தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் $\frac{AF}{FB}$ ஐக் காண்க, $\frac{\lambda}{16}=\frac{\mu}{5}=\frac{r}{13}$ என நிறுவுக

20. $\lambda\overrightarrow{BC}$, $\mu\overrightarrow{CA}$, $r\overrightarrow{AB}$, என்பன $\triangle ABC$ யின் பக்கங்களிற் தாக்குகின்றன (தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட) X, Y, Z என்ற புள்ளிகளைக் சந்திப்பின் $(r-\mu)\overrightarrow{XC}=r\overrightarrow{BC}$ எனவும் $\frac{\overrightarrow{yz}}{\lambda(\mu-r)}=\frac{\overrightarrow{zx}}{\mu(a-\lambda)}=\frac{\overrightarrow{xy}}{r(\lambda-\mu)}$ எனவும் நிறுவுக.

21. P, Q, R, S என்பன ABCD என்ற நாற்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளியாகும். O என்பது நாற்கோணத்தின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ என்பனவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைத்தொகுதியின் விளையுளும் $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைத் தொகுதியின் விளையுளும் சமனென நிறுவுக

22. $\alpha\overrightarrow{AB}$, $\beta\overrightarrow{BC}$ $\alpha\overrightarrow{CD}$, $\beta\overrightarrow{DA}$ என்ற விசைகள் ஒரு நாற்கோணத்தின் பக்கங்களிற் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுள் ஓரிணைக்குச் சமனெனின் $\alpha=\beta$ அல்லது ABCD ஒரு இணைகரமென நிறுவுக.

23. A, B, C, D என்பன நிலைத்த புள்ளிகளும் O என்பது ஒரு மாறும் புள்ளியும் ஆகும். $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ என்பவற்றில் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையின் பருமனும், திசையும் நிலைத்தவை (fixed) எனக் காட்டுக.

23. P என்பது A B C D என்னும் செவ்வகத்தின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும் $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{DC}$, $l\overrightarrow{PA}$, $l\overrightarrow{BA}$, $m\overrightarrow{CP}$, $m\overrightarrow{PD}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும். விசைத்தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் l ஐ m இன் சார்பாகக் காண்க. P என்பது AB க்குச் சமாந்தரமான நேர் கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி என நிறுவி இக்கோடு A D ஐ வெட்டும் விகிதத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

25. முக்கோணம் ABC யில் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களில் D E F என்ற புள்ளிகளுண்டு. அவை ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் m : n என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன. AD, BE, CF ஆல் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $[2(n-m)/(n+m)]\triangle$ என்ற திருப்புதிறனையுடைய இணைக்குச் சமனெனக் காட்டுக. இங்கு $\triangle$ = முக்கோணத்தின் பரப்பு

26. AB = a, BC = 2a ∠B = 90° ஆகுமாறு ABC ஒரு முக்கோணமாகும். A B C யின் தளத்திலுள்ள ஒரு தொகுதி விசைகளின் A, B, C பற்றிய திருப்பங்கள் முறையே $+M_1, +M_2, -M_3$ உம் ஆகும் மணிக்கூட்டுக் கம்பியின் திசைக் கெதிர்த்திசை (anti-clock wise) யிலுள்ள திருப்பக்கள் நேரானவை எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன தொகுதியின் விசைகளின் விளையுளையும், அதன் தாக்கக் கோடு BC ஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

விளையுளானது ACக்குச் செங்குத்தாயின் $4M_1 = 5M_2 + M_3$ எனவும் நிறுவுக.

27. ABCD என்பது ஒரு செவ்வகம். AB = a, BC = b. M, BC யின் நடுப்புள்ளியாகும், மூன்று விசைகள் $k\overrightarrow{AM}$, $k\overrightarrow{MC}$, $k\overrightarrow{CD}$, என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு k > O விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு A யிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலுள்ளதெனவும் காண்க.

இத் தொகுதியின் விளையுளானது AB யின் நடுப்புள்ளியினூடாகச் செல்வதற்கு இம்மூன்று விசைகளுடன் சேர்க்கப்படவேண்டிய இணையின் பருமனைக் காண்க. இவ்விணையின் போக்கை ஒரு வரிப்படத்தால் (Diagram) குறிக்க.

28. ஒரு முக்கோணம் ABC யின் செங்குத்து மையம் H சுற்றும் மையம் O. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக

(i) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$

(ii) $\overrightarrow{AH}\tan A + \overrightarrow{BH}\tan B + \overrightarrow{CH}\tan C = 0$

(iii) $\overrightarrow{AO}$ சைன் 2A + $\overrightarrow{BO}$ சைன் 2B + $\overrightarrow{CO}$ சைன் 2C = 0

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

29: α பக்கமுள்ள ABCD என்னும் சதுர தளத்தில் ஒரு தொகுதி விசைகள் தாக்குகின்றன; தொகுதியின் A, B. C என்பவற்றை பற்றிய திருப்புதிறன்கள் முறையே M_1, M_2, M_3 ஆகும்.

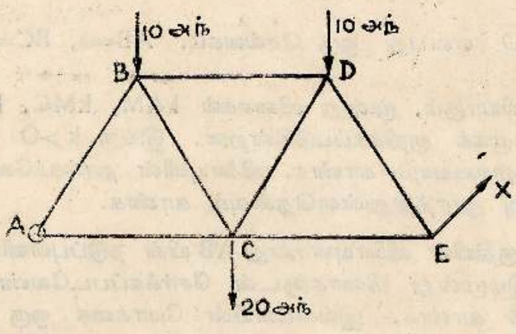
(i) D பற்றி தொகுதியின் திருப்புதிறனைக் காண்க.

(ii) தொகுதியின் விளையுளின் பருமன்

(iii) விளையுளின் தாக்கக்கோடு A B ஐப் பிரிக்கும் விகிதம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

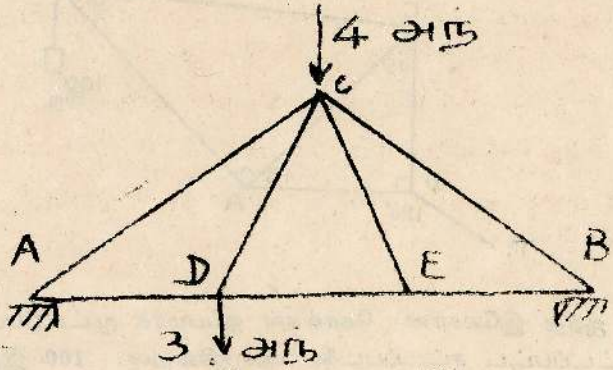
அலகு 3

வரைபு அமைப்புகள்

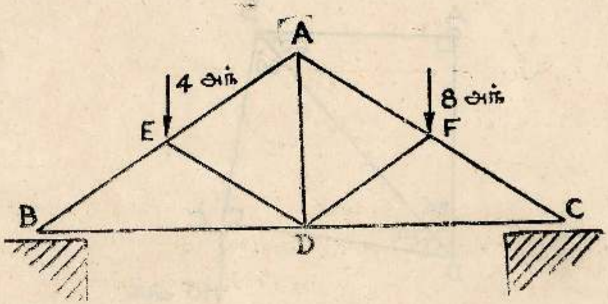


1. ஏழு சமமான இலேசான கோல்கள் படத்திற் காட்டப்பட்ட சட்டப்படலை ஆக்குமாறு ஒன்ருக ஒப்ப மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படலிலுள்ள B, C, D ஆகியவற்றில் முறையே 10, 20, 10 அந்தர் சுமைகளேற்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப்படல் நிலையான தாங்கியொன்றிற்கு A இலே ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. E இலே தாக்கும் X என்னும் விசையினுல் இச்சட்டப்படல் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் BD, ACE கிடையாகவுமிருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விசை Y சட்டப்படலின் தளத்திலே நீட்டப்பட்ட AE உடன் ஓர் கூர்ங்கோணத்தையாக்குமாறு தாக்குகின்றன. X இன் கிடைக்கூறு 15 அந்தராயின் X இன் பருமன் 25 அந்தரெனக் காட்டுக. எல்லாக் கோல்களிலுமுள்ள உதைப்புகளையும் இழுவைகளையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

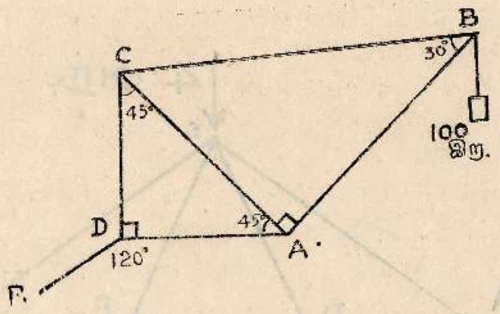


2. படத்திற் காட்டப்பட்ட சட்டப்படல் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட 7 இலேசான வளைகளாலானது. BC யையும் CA யையும் தவிர்ந்த மற்றைய எல்லா வளைகளும் சம நீளமுடையன. இச்சட்டப்படல் ADEB கிடையாக இருக்கும்படி A இலும் B இலும் இரண்டு ஒப்பமான விளிம்புகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. வளைகள் வழியே உள்ள உதைப்புகளையும் இழுவைகளையும் காண்க.

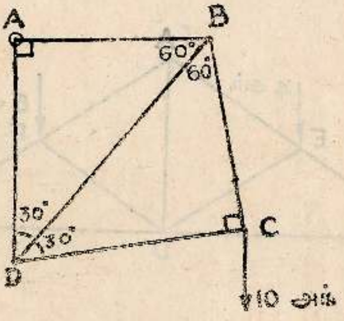


3. படத்தில் காட்டப்பட்ட சட்டப்படல் ஒன்பது சட்டங்களாலானது, சட்டங்கள் BD, DC கிடையாயும் B உம் C உம் இரண்டு ஒப்பமான விளிம்புகளில் ஓய்விலிருக்கும்படியும், சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே வைக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றைய ஏழு சட்டங்களும் சமநீளமுடையன. $\angle FCD = \angle EBD = 30°$ 4 அந்தர் 8 அந்தர் சுமைகள் முறையே E இலும் F இலும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. வரைபு முறையாகவோ அல்லது வேறு முறையாகவோ சட்டங்களின் வழியே உள்ள விசைகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



4. ஐந்து இலேசான கோல்கள் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு படத்திற் காட்டப்பட்ட சட்டப்படலை ஆக்குகின்றன. 100 இரு. நிறையொன்று B இற்குத் தொடுக்கப்பட்டது. இச்சட்டப்படல் A இல் இருந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே அசைவதற்குச் சுயாதீனமுடையது. DR என்ற கயிற்றிலுள்ள இழுவையினலே AD கிடையாகயிருக்கும்படி சட்டப்படல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. வரைபு முறையாலோ அல்லது வேறு வழியினலோ கோல்களின் வழியேயுள்ள விசைகளைக் காண்க. கயிற்றிலுள்ள இழுவை 200 இரு. நிறை எனவும் காட்டுக.



5. ஐந்து பாரமற்ற கோல்கள் படத்திற் காட்டிய சட்டப்படலை அமைக்குமாறு ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. 10 அந்தர் நிறை ஒன்று C இற்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் A இல் உள்ள கிடை ஊசியொன்றிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படலின் தளத்தின் D இல் பிரயோகிக்கப்பட்ட கிடைவிசையினுல் சட்டப்படல் AD நிலைக்குத்தாயிருக்க சமநிலையில் நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளது.

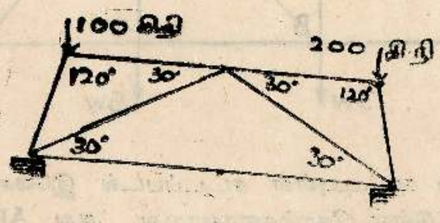
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வரைபுமுறையாலோ அல்லது வேறு முறையாலோ கோல்களின் வழியேயுள்ள விசைகளைத் துணிக மேலும் ஊசி A யின் வழியேயுள்ள விசைகளைத் துணிக. மேலும் ஊசி A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமன் $5\sqrt{7}$ அந்தர் எனக் காட்டுக.

6. இலேசான ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட கோல்களாலான ABCD EF எனும் ஒழுங்கான அறுகோணி AC, AD, AE ஆகிய இலேசான குறுக்குச் சட்டங்களினால் இறுக்கமாக வைக்கப்பட்டுள்ளது.

BC, EF இற்குக் கீழே இருக்கும்படி E உம் F உம் ஒரே கிடைத் தள மட்டத்திலுள்ள ஒப்பமான புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. X, Y ஆகிய நிறைகள் முறையே B இலும் C இலும் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டால் AC இலுள்ள தகைப்பு $\frac{1}{3}[x-y]$ எனக் காட்டுக. மற்றைய கோல்கள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள தகைப்புகளையும் காண்க.

X=10 இருத்தலாகவும் கோல்கள் ஏதாவதோர் அல்லது குறுக்குச் சட்டம் தாங்கக்கூடிய உயர் தகைப்பு 20 இருத்தலுமாயின் சட்டப்படலை நட்டப்படுத்தாமல் Y அடையக்கூடிய உயர் பெறுமானம் என்ன?

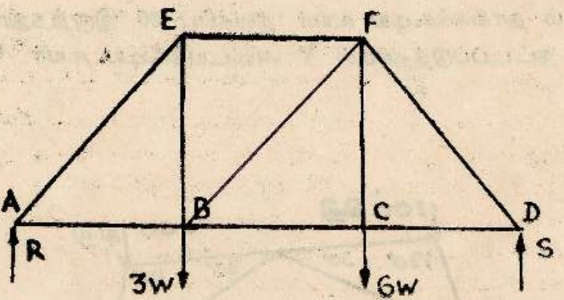


7. படத்திற் காட்டியுள்ள சட்டப்படல் 7 இலேசான அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்ட கோல்களினாலாயது. AB=BC. D, E எனும் ஈர் அழுத்தமான கிடைத்தாங்கிகளில் இச்சட்டப்படல் ஒரு நிலைகுத்துத் தளத்தில் தங்குகிறது DE கிடையாய் உள்ளது. படத்தில் காட்டிய வாறு சுமைகள் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படலின் எல்லாக் கோல்களிலும் நெட்டாங்கு விசைகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஏதும் ஒரு கோல் தாங்கக்கூடிய அதியுயர் நெட்டாங்கு விசை 500 இருத்தல் நிறையாயின் சட்டப்படலை அழிக்காமல் இருப்பதற்கு B யில் இருந்து தொங்கவிடக்கூடிய அதியுயர் மேலதிக சுமையைக் காண்க.

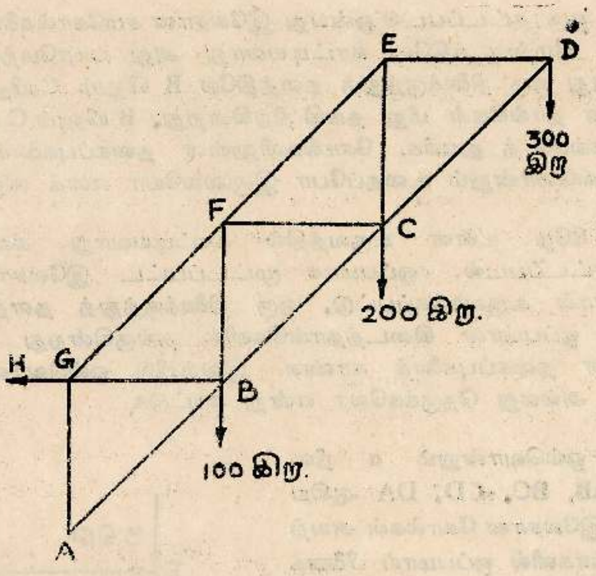
8. ABCDEF எனும் அறுகோண வடிவுடைய ஒரு சட்டப்படல் ஆறு இலேசான கோல்களைக் கொண்டது அது BF, CE, CF எனும் இலேசான கோல்களினால் ஓர் ஒழுங்கான அறு கோணவடிவம் பெற இறுக்கப்பட்டுள்ளது. AB, CF, DE என்பன கிடையிலிருக்கும் வண்ணம் A, B என்பவற்றில் உள்ள நிலைக்குத்து விசைகளினால் இச்சட்டப்படல் தாக்கப்பட்டுள்ளது. D, E என்பவற்றில் முறையே 60 இரு. 100 இரு. உடைய நிலைக்குத்துப்பாரங்கள் கட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படலின் உறுப்புக்களிலுள்ள விசைகளைத் துணிக. அவை இழு விசையோ அல்லது அழுத்த விசையோ எனவும் தெளிவாகக் குறிக்க



9. படத்திற் காட்டியுள்ள சட்டப்படல் இலேசாக அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ள கோல்களாலாயது. அது ABCD கிடையாகவும், BE, CF நிலைக்குத்தாகவும் இருக்க நிறுவப்பட்டுள்ளது. AB=BC=CD=BE=CF ஆகும். 3W, 6W சுமைகள் முறையே B இலும் C இலும் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப்படல் A யிலும் D யிலும் தாக்கும் R, S எனும் இரு நிலைக்குத்து விசைகளால் தாங்கப்படுகிறது. R ஐயும், S ஐயும் கணித்துத் தகைப்புப் படத்தின் மூலம் கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.

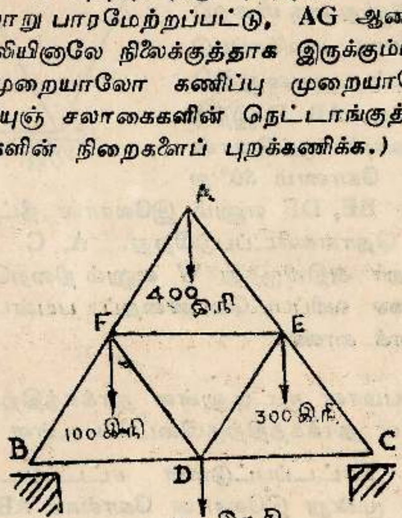
(திருத்தம்: BF இணைக்க.)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



10. மேலே உள்ள உருவம் ABCDEFG என்னும் ஒப்பமாக மூட்டக்கூடிய சட்டப்படல் ஒன்றைக் காட்டுகின்றது. இதிலுள்ள முக்கோணிகள் எல்லாம் இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணிகளாகும்.

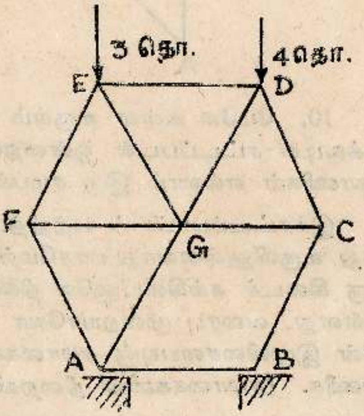
இச்சட்டப்படல் A பற்றித் திரும்புவதற்குச் சுயாதீனமுடையது. இது உருவிலுள்ளவாறு பாரமேற்றப்பட்டு, AG ஆனது GH என்னும் ஒரு கிடைச் சங்கிலியினாலே நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. வரைபு முறையாலோ கணிப்பு முறையாலோ இச்சங்கிலியின் இழுவிசையையுஞ் சலாகைகளின் நெட்டாங்குத் தகைப்புகளையும் துணிக. (சலாகைகளின் நிறைகளைப் புறக்கணிக்க.)



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

11. ஒரு சட்டப்படல் ஒன்பது இலேசான சமகோல்களைக் கொண்டுள்ளது. மேற்படத்திலே காட்டியவாறு அது பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது. அது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே B யிலும் C யிலும் உள்ள ஒப்பமான தாங்கிகள் மீது தங்கி நிற்கின்றது. B யிலும் C யிலுமுள்ள மறுதாக்கங்களைத் துணிக. கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளைக் காண்க. அவை ஒவ்வொன்றும் உதைப்போ இழுவையோ எனக் கூறுக.

15. கீழே உள்ள உருவத்தில் காட்டியவாறு சுமையேற்றப்பட்ட சட்டப்படல். ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான 11 சமகோல்களால் உருவாக்கப்பட்டு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் A, B இலுள்ள ஒப்பமான கிடைத்தாங்கிகளில் தங்குகின்றது அக்கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளைக் காண்க. இவற்றில் ஒவ்வொன்றும் இழுவையோ அல்லது நெருக்கலோ என்று காட்டுக



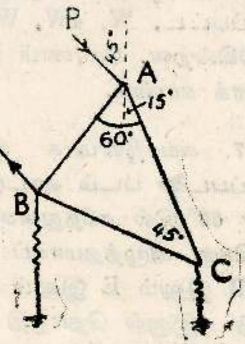
13. ஒவ்வொன்றும் a நீளமுள்ள AB, BC, CD, DA ஆகிய நான்கு இலேசான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாய் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. A, C எனும் முனைகளில் சுயாதீனமாய் பிணைக்கப்பட்டதும் $a\sqrt{3}$ நீளமுள்ளதுமான இன்னொரு இலேசான கோலாகிய AC ஆல் ABCD ஆனது ஒரு விறைப்பான சாய்சதுரமாக வைக்கப்படுகிறது. இச் சட்டப்படலானது BD கிடையிலிருக்குமாறு, AB D இற்கு வெளியிலிருப்பவையும் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் 30° ஐ ஆக்குபவையுமான BE, DF எனும் இலேசான நீட்டமுடியாத 'இழைகள் இரண்டால் தொங்கவிடப்படுகிறது. A, C எனும் புள்ளிகளில் எது கீழிருக்கிறதோ அதிலிருந்து W எனும் நிறையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. விசை வரிப்படமொன்றைப் பயன்படுத்தி இக்கோல்களின் தகைப்புகளைக் காண்க.

14. ஓர் ஒப்பமான மூட்டிலுள்ள தாக்கத்திற்கும், ஒரு பரும்படியான மூட்டிலுள்ள தாக்கத்திற்குமிடையே உள்ள வித்தியாசம் யாது?

உருவத்திலே காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படலானது ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ள மூன்று இலேசான கோல்கள் AB, BC, CA இனால் ஆக்கப்பட்டு B இலும் C, இலும் உள்ள நிலைக்குத்தான வில்களினால்

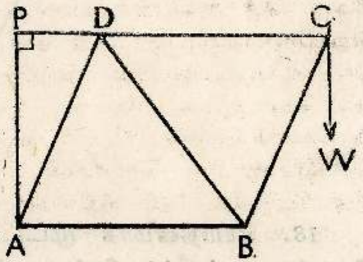
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தாங்கப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கோணம் 45° இரு ஒரு விசை P ஆனது A இலே பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. B இலிருக்கும் வில்லிலுள்ள இழுவையின் பருமனானது C இல் இருக்கும் வில்லிலுள்ள விசையினது பருமனின் ஆரையாய் இருப்பதற்கு B யிலே பிரயோகிக்கவேண்டிய விசையை, விசை வரிப்படமொன்றைப் பயன்படுத்திக் காண்க. [இவ்வகையில் அக் கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு அவை இழுவையோ நெருக்கலோ எனக் கூறுக.



15. சட்டப்படல் ABCD (படம்) ஐந்து இலேசான சமகோல்கள் AB, BC, CD, DA, DB ஐ கொண்டுள்ளது. கோல்கள் அழுத்தமாக மூட்டப்பட்டு நிலைப்புள்ளி A இற்கு அழுத்தமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளதுடன், திணிவு W ஐ C இல் காவும்போது, ஒரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் A, D இல் இணைக்கப்பட்டு, அழுத்தமான முளை P இன் மேற் சென்று சமநிலையிற் பேணப்படுகிறது.

P ஆனது A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயும் CD உடன் கிடை நேர்கோட்டிலும் இருப்பின், வரைபு முறையினாலோ அல்லது வேறு வழியினாலோ, பின்வருவனவற்றைக் காண்க.



(a) முளை P இலுள்ள உதைப்பு

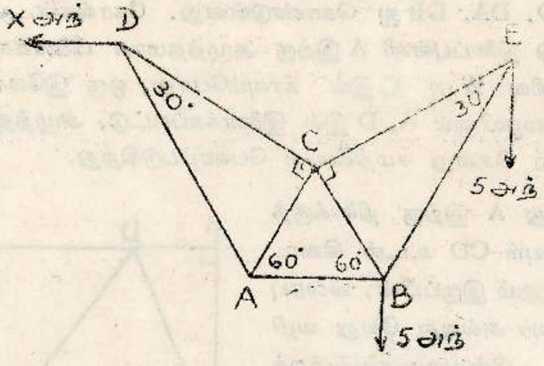
(b) பிணையல் A இலுள்ள தாக்கம்

(c) கோல்களிலுள்ள விசைகள் எவையெவை இழுவை, எவையெவை உதைப்பு எனவும் குறிப்பிடுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

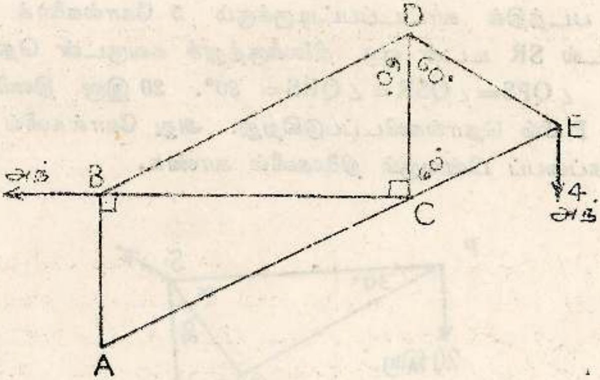
16. 1 நீளமுள்ள நான்கு இலேசான கோல்கள் AB, BC, CD, DE என்பன B, C, D இல் அழுத்தமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. தொகுதி ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு நிலைத்த புள்ளிகள் A, E இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட, W, 4W, W நிறைகள் முறையே B, C, D இல் இணைக்கப்படுகின்றன. கோணம் BAE, 60° எனின், கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

17. சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களின் சட்டப்படலை படம் காட்டுகிறது. AD, AC, BC, BE என்பன கிடையுடன் 60° இல் சரிந்துள்ளன. சட்டப்படல் A இலுள்ள நிலையான தாங்கிக்கு அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளதுடன், 5 அந். திணிவுகளை B இலும் E இலும் கொண்டுள்ளது. D இலுள்ள கிடைவிசை X அந். இனல் தொகுதி சம நிலையில் பேணப்படுகிறது. விசைப் படத்தைக் கீறுவதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாலோ, பின்வருவனவற்றைக் காண்க (a) X இன் பெறுமானம்; (b) A இலுள்ள தாக்கத்தின் பருமன், திசை; (c) AB, BC இலுள்ள தகைப்புகள்.



18. சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படலைப் படம் காட்டுகிறது. BC கிடையாகவுள்ளது. AB, CD நிலைக்குத்தாகவுள்ளன. AC, BD, CE, DE என்பன நிலையுடன் 60° இற் சாய்ந்துள்ளன. சட்டப்படல் A இலுள்ள நிலையானமுனையுடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளதுடன். E இல் 4 அந். ஐயும் கொண்டுள்ளது. B இலுள்ள கிடைவிசை F அந். இனல் சமநிலை பேணப்படுகின்றது. விசைப்படத்தை வரைவதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாலோ, பின்வருவனவற்றைக் கணிக்குக.

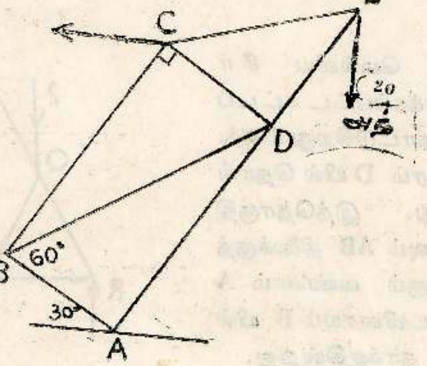
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



(a) F இன் பெறுமானம்
(d) A இலுள்ள தாக்கத்தின் பருமன், திசை
(c) BC, CD இலுள்ள தகைப்பு.

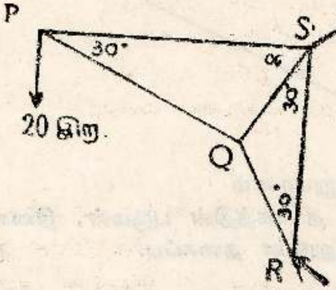
19. சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படலை படம் காட்டுகிறது. AD, DE, BC என்பன நிலையுடன் 30° இல் சாய்ந்திருக்க AB, DC, BD, CE என்பன நிலையுடன் 60° இல் சாய்ந்துள்ளன. சட்டப்படல் A இலுள்ள நிலையான தாங்கிக்கு சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளதுடன் E இல் 20 அந். திணிவையும் கொண்டுள்ளது. C இல் இணைக்கப்பட்டுள்ள கிடைக் கயிற்றால் சமநிலை பேணப்படுகிறது. வரைபட முறையாலோ அல்லது வேறு வழியாலோ,

(a) கயிறிலுள்ள இழுவை
(b) A இலுள்ள தாக்கத்தின் பருமன், திசை
(c) CB, CD இலுள்ள தகைப்பு என்பவற்றைக் காண்க.



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

20. படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கும் 5 கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் SR உடன் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையில் உள்ளது. ∠QPS = ∠QSR = ∠QRS = 30°. 20 இரு. திணிவுள்ள ஒரு பொருள் P யில் தொங்கவிடப்படுகிறது. அது கோல்களில் ஏற்படுத்திய தகைப்பைப் பின்வரும் நிலைகளில் காண்க.

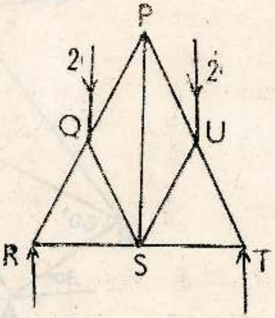


(a) S இலுள்ள தாக்கம் கிடையாகும்போது.

(b) R இலுள்ள தாக்கம் கிடையாகும்போது.

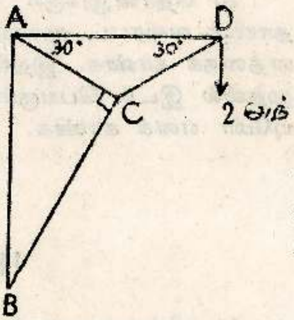
21. PQRSTU என்ற சமபக்க முக்கோணவடிவ சட்டப்படலில் Q, U, S என்பன முறையே PR, PT, RT என்பவற்றில் நடுப்புள்ளிகள் Q விலும் U விலும் 2 தொன் திணிவுகள் வைக்கப்படின் ஒவ்வொரு தாங்கியிலும் உள்ள அமுக்கத்தைக் காண்க. கோல்களில் உள்ள தகைப்பையும் காண்க.

22. ஐந்து மெல்லிய சீர் கோல்களினுலாக்கப்பட்ட சட்டப்படலைப் படம் காட்டுகிறது 2 அந். திணிவுள்ள பாரம் D யில் தொங்கவிடப்படுகிறது. இத்தொகுதி AD கிடையாகவும் AB நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கும் வண்ணம் A யில் ஒரு கிடைவிசையும் B யில் ஒரு விசையும் தாக்குகின்றது.



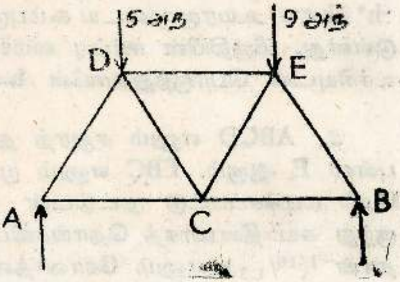
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

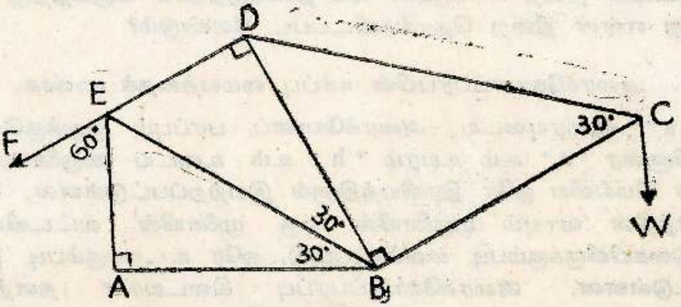
விசைகளைக் காண்க; வரைபு மூலமாக கோல்களில் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு, அவை இழுவையோ, உதைப்போ என வேறுபடுத்தி அறிக.



23. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல் 7 இலேசான ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட சம்மான கோல்களைக் காட்டுகிறது AB கிடையாக A யிலும் B யிலும் சட்டப்படல் தாங்கப்படுகிறது. படத்தில் காட்டிய வாறு D யிலும் E யிலும் சுமைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன.

24. 7 இலேசான சீர்கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படலைப் படம் காட்டுகிறது. AB யும் CD யும் கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் உள்ளன. இச்சட்டப்படலானது A யிலுள்ள தாங்கியில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பெற்று C யில் ஒரு நிறை W ஐத் தாங்குகிறது. படத்தில் காட்டியவாறு E யில் F எனும் ஒரு விசை தாங்குகிறது. F இன் பெறுமானத்தையும் A யில் உள்ள தாக்கத்தின் திசையையும் காண்க.





A யிலும் B யிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் கண்டு, கோல்களில் உள்ள தகைப்பைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

20 தொன்னுக்குக் கூடிய விசையை எக்கோலும் தாங்கமுடியா தாயின் வரைபட மூலமாக W இன் இயலக்கூடிய அதியுயர் பெறுமானத்தைக் காண்க. இதன் பெறுமானம் சிறிது அதிகரிப்பின் எக்கோல் முதலில் இடம் பெயரும்? அக்கோல் உடையுமோ அல்லது தொய்யுமோ எனக் காண்க.

அலகு 4

புவியீர்ப்பு மையம்

1. பின்வருவனவற்றின் ஈர்ப்பு மையங்களைக் காண்க.

ஓர் சீரான திண்ம

(i) ஆரை 'a' உடைய அரைக் கோளம்

(ii) அடியின் ஆரை 'a' உம், உயரம் h உம் உடைய செவ்வட்டக் கூம்பு.

'a' ஆரையுடைய அரைவட்டத்தின் மத்தியில் அதே அடியும் 'h' [h< a] உயரமுமுடைய கூம்புருவத்தில் குழியொன்று தோண்டப்பட்டுள்ளது. மிகுதியின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. ஈ. மை. குழியின் உச்சியுடன் பொருந்துமாயின் $h = [(4-\sqrt{7})a]/3$ எனக் காட்டுக.

2. ABCD எனும் சதுரத் தட்டின் AB எனும் பக்கத்தின் நடுப் புள்ளி E ஆகும். EBC எனும் முக்கோணப்பகுதி CE வழியே தட்டின் மேல் மடிக்கப்பட்டு தட்டுடன் ஒட்டப்பட்டுள்ளது தட்டு A இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டிருப்பின் AE நிலைக்குத்துடன் தான்$^{-1}(^{16}/_{13})$ எனும் கோணத்தை ஆக்குமென நிறுவுக.

தட்டின் நிறை W ஆயின் AC நிலைக்குத்தாக வருவதற்கு E இல் இருந்து என்ன நிறை தொங்கவிடப்பட வேண்டும்?

3. அரைக்கோளப்பரப்பின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

'a' ஆரையுடைய அரைக்கோளப் பரப்பும் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பினாரை 'a' உம் உயரம் 'h' உம் உடைய உருளைப்பரப்பும் சீரான மெல்லிய ஒரே திரவியத்தினால் இயற்றப்பட்டுள்ளன. அரைக் கோளத்தின் வாயும் உருளையின் ஒரு முனையின் வட்டவிளிம்பும் தொடுகையிலிருக்கும்படி வைக்கப்பட்டு, ஒரே உடலாகும்படி இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அரைக்கோளப்பரப்பு கிடையான தளத்துடன் தொடுகையிலிருக்கும்படி சமச்சீரான நிலையில் அவ்வுடல் வைக்கப்பட்டுள்ளது $h \gtreqless a$ ஆயின் சமநிலை அதற்கேற்ப நிலையானது. அல்லது நடுநிலையானது அல்லது நிலையற்றது எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. சீரான செவ்வட்டக் கூம்பினுருவத்திலுள்ள ஓட்டின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

சீரான மெல்லிய உலோகத்தால், செவ்வட்டக் கூம்பினடித்துண் டினுருவத்தில் செய்யப்பட்ட பாத்திரத்தின் சிறிய அடி மூடப்பட் டுள்ளது: பாத்திரத்தினுயரம் h ஆகும். வட்ட முனைகளின் ஆரைகள் a, 2a ஆகும். பாத்திரத்தின் ஈர்ப்பு மையம் சிறிய முனையிலிருந்து $(5lh) / (9l + 3a)$ எனும் தூரத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

இங்கு $l = [\sqrt{(a^2 + b^2)}]$ ஆகும். பாத்திரத்தினுயரமாகிய $h = 49/a$ ஆயின், பாத்திரம் தன் வளைந்த பரப்பு கிடையான தளத்துடன் தொடுகையிலிருக்கும்படி சமநிலையிலிருக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக.

5. அரைக்கோளத்தின் மேற்பரப்பின் ஈர்ப்புமையத்தைக் காண்க. 5r ஆரை உடைய ஓர் அரைக்கோளப் பரப்பும் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பின் ஆரை 4r உடையதும் உயரம் h உடையதுமான செவ்வட்ட வுருளையின் பரப்பும் ஒரே சீரான மெல்லிய திரவியத்தினால் ஆக்கப் பட்டுள்ளன உருளையின் வட்டவிளிம்பு அரைக்கோளத்தின் உட்பரப் பைத் தொடுமாறும் உருளையின் அச்சு அரைவட்ட விளிம்பிற்குச் செங்குத்தாய் இருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டு இரண்டும் ஒரே உடல் ஆகுமாறு இயற்றப்பட்டுள்ளன. ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் அரைக் கோளப் பரப்பு தளத்துடன் தொடுகையில் இருக்குமாறு அப்பொருள் சமச்சீராய்ச் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $2h \lesseqgtr [(16l + 6)r]$ ஆயின், சமநிலை நிலையானது, அல்லது நடுநிலையானது, அல்லது நிலை யற்றது என நிறுவுக.

6. (x_r, y_r) இல் வைக்கப்பட்ட M_r துணிக்கைகளால் ஆன அமைப்பின் ஈர்ப்பு மையம் புள்ளிகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ இல்,

$$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r} \text{ இனாலும் } \bar{y} = \frac{\sum m_r y_r}{\sum m_r} \text{ இனாலும் கொடுக்கப்}$$

படும் எனக் காட்டுக,

இங்கு $r = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots n$.

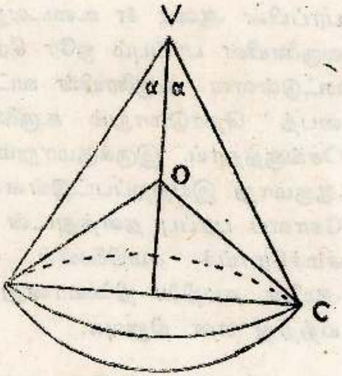
ABCD என்பது 6 இறுத்தல் திணிவுடைய சீரான சதுர அட் டையாகும். 1, 2, 3, 4 இறுத்தற் துணிக்கைகள் முறையே A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அட்டை A என்னும் புள்ளியிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படுமாயின் AB கிடை யுடன் அமைக்கும் சாய்வு $\tan^{-1}(4/5)$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. பம்பரம் ஒன்று ஆரை r உம் உயரம் h உம் உடைய நேர் செவ் வட்டக் கூம்பிற்கு இணைக்கப்பட்ட r ஆரை உடைய அரைக் கோளத்தினுல் இயற்றப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் தளப்பரப்பும் அரைக் கோளத்தின் தளப்பரப்பும் தொடுகையிலுள்ளன. பம்பரம் அரைக் கொளப்பரப்பு கிடைத்தளத்துடன் தொடுகையிலிருக்கச் சமநிலையி லிருக்குமாயின் $h \lesseqgtr r\sqrt{3}$ இற்குத் தக்க மாதிரி சமநிலையாகவோ அல்லது நிலையற்றதாகவோ இருக்கும் எனக் காட்டுக. பம்பரத்தின் அடர்த்தி P உம், $h=2r$ உம் ஆயின் சமநிலையை நடுநிலையாக்குவதற்கு பம்பரத்தின் இழிவுப்புள்ளிக்கு இணைக்கப்படவேண்டிய நுணிக்கையின் திணிவென்ன?

$h=r$ ஆயின் சமநிலையை நடுநிலையாக்குவதற்குப் பம்பரத்தின் உச்சியில் இணைககப்படவேண்டிய துணிக்கையின் திணிவென்ன?

8. மேற்காட்டியுள்ள படம், O மையமாகவும் a ஆரையுமுடைய ஒரு கோளத் துண்டத்தினுலும், அரையுச்சிக்கோணம் α உம் அடி ஆரை a சைன் 2α உம் உடைய ஒரு செல்வட்டக் கூம்பினுலும் ஆக்கப்பட்ட ஒரு சீரான திண்மமாகும், இத்திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் AC யிற் கிடப்பின் α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



9. ஒரு சீரான ஒரு கம்பித் துண்டு a ஆரையுமுடை ACB ($AC=CB$) என்னும் வட்ட வில் உருவமாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ் வட்ட வில் 2θ என்னும் கோணத்தை O என்னும் வட்ட மையத்தில் எதிரமைக்கிறது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் OC என்னும் நடு ஆரையில் O விலிருந்து a சைன் θ/θ என்னுந் தூரத்தில் இருக்கு மெனக் காட்டுக.

அதே சீருடைய வேறு இரண்டு கம்பித்துண்டுகளில் ஒன்று அரை வட்டவில் வடிவுடையதும், மற்றையது வட்ட மையத்தில் ($2\theta<\pi$) என்னுங் கோணத்தை எதிரமைக்கும் ஒரு வட்டவில் வடிவுடையது மாகும். இவ்விரண்டும் ஒரு பிறை வடிவம் அமையுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. புவியீர்ப்பு மையம் உள்வில்லில் இருக்குமாறு θ இருப்பின் இது பின்வரும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சைன்$^2\theta$ + சைன் $\theta = \pi/2$ சைன் θ (1 — கோசைθ) + θ

10. உறுதிச் சமநிலை, உறுதியற்ற சமநிலை, நடுநிலைச் சமநிலை என்னும் பதங்களை விளக்குக.

உச்சிக்கோணம் α உடைய இரு சமபக்க முக்கோண வடிவிலுள்ள ஒரு தகடு, அதனுடைய தளம் நிலைக்குத்திலும் சம பக்கங்களுள் ஒன்று கோளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டும் இருக்க r ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தின்மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அம்முக்கோணத்தை அதனுடைய தளத்திற் சற்று இடம் பெயர்த்தால் சமநிலை, a சைன் $\alpha \lessgtr 3r$ என்பதற்கிணங்க உறுதியானதாக அல்லது உறுதியற்றதாக இருக்குமெனக் காட்டுக: இதில் a என்பது முக்கோணத்தின் சமபக்கங்களுள் ஒன்றாகும்.

11. ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்புப் மையத்தைத் துணிக.

M திணிவுள்ள சீர்திண்ம அரைக்கோளமொன்று கிடையுடன் α யிற் சாய்ந்துள்ள நிறை சரடான தளமொன்றோடு அதன் வளை பரப்பைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்க ஓய்விலிருக்கிறது. கிடையுடன் தள முகத்தின் சாய்வு θ என்பது சைன் $\theta = {}^8/_3$ சைன் α என்பதாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

ஒரு பூச்சி அரைக்கோளத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலே இப்போது தங்குகிறது. சமநிலை நிறுவப்படும்போது அரைக்கோளத்தின் தளப்பரப்பு அச்சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாயிருக்கின்றது. அப்பூச்சியின் திணிவைத் துணிக.

12. ஒரு வாளியின் வளைபரப்பு, அரை உச்சிக்கோணம் 30° யாயுடைய ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டாகும். அதன் அடி a ஆரையுடைய ஒரு தட்டு. அதன் விளிம்பு 2a ஆரையுடைய ஒரு வட்டம்; இவ்வாளி, சீரான பரப்படர்த்தி m உடைய மெல்லிய உலோகத்தினலானதாயின், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. இவ்வாளி அதன் வளைபரப்பு ஒரு கிடை நிலத்தைத் தொட ஓய்வில் இருக்குமென நிறுவுக: நிலம் நிறை கரடானதாயின், அதன் தளம் அடிநிலத்தில் தங்கச் செய்ய வாளியை அந்நிலையில் இருந்து திருப்புவதற்கு வேண்டிய இழிவு விசையைக் காண்க.

13. r_1 ஆரையுள்ள கோளமொன்று r_2 ஆரையுள்ள நிலைத்த கரடான கோளமொன்றின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிற் சமநிலையிலே

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தங்கியிருக்கின்றது. முதற்கோணத்தின் ஈர்ப்பு மையமானது தொடுகைப் புள்ளிக்கு மேலே h உயரத்திலிருக்க,

$1/h > (1/r_1 + 1/r_2)$ எனின், சமநிலை உறுதியானதென நிறுவுக.

a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோளமொன்று b ஆரையுள்ள நிலைத்த கரடான கோளமொன்றின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிற் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கின்றது. (i) அரைக்கோளத்தின் தளமுகமானது நிலைத்த கோளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும்போது (ii) அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பானது நிலைத்த கோளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும்போது உறுதிப்பாட்டுக்கான நிபந்தனைகளைத் துணிக.

14. W நிறையுள்ள ஓர் ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளம், தனது தளமுகம் கிடையுடன் ∝ கோணத்தை ஆக்க, வளைந்த பரப்பு ஒரு கிடைத்தரையிலும் நிலைக்குத்துச் சுவரிலும் தொட ஓய்விலிருக்கிறது. தொடர்புகளுக்கூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளம் திணிவு மையத்தினூடாகச் செல்கிறது. தரை, சுவர் இரண்டிலுமுள்ள உராய்வுக் கோணம் λ ஆயின், அரைக்கோளம் வழுக்கும் தறுவாயிலிருப்பின்,

3 சைன் ∝ = 8 சைன் λ (கோசை λ + சைன் λ) எனக் காட்டுக. தரையிலும் சுவரிலும் உள்ள எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

15. ஒரு கூம்பினடித்துண்டின் தளமுகங்களின் ஆரைகள் ∝, 2∝ ஆகும். இரண்டும் 1 தூரத்தில் உள்ளன. பெரிய தளமுகத்திலிருந்து இதன் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

வளைந்தமுகம் கிடைத்தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க, சமநிலையில் ஓய்வில் இருப்பதற்கு 1 இல் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. ∝ ஆரையுடைய ஓர் ஒரு சீரான மெல்லிய கோளக் கலம் மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்திலும், அதற்குச் சமாந்தரமானதும் கோளத்தை r ஆரையுடைய வட்டமாக்கும் தளத்திலும் வெட்டப்படுகிறது. வலயத்தின் (zone) புவியீர்ப்பு மையம், இரு தளங்களிலிருந்தும் சமதூரத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

இவ்விதமான வலயம், r ஆரையுடைய தட்டினால் பொருத்தப்பட்டு, ஒரு பாத்திரமாகப் பயன்படுகிறது. இப்பாத்திரம் முதலில், விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்தும், பின்னர் அடியின் பகுதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் தொங்கவிடப்படுகிறது. அடி. சமநிலையில், நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் இருசந்தர்ப்பங்களிலும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒன்றுயின், வளைபரப்பின் திணிவிற்கும், அடித்தட்டின் திணிவுகளுக்குமுள்ள விகிதம் $2r : (\alpha - r)$ எனக் காட்டுக.

17. ஒரு ஒருசீரான மேற்பரப்பில் $AB = BC = 2\alpha$; $AC = 2\alpha\sqrt{2}$ ஆகும் வண்ணம் முக்கோணி ABC வரையப்படுகிறது. BC ஐ விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு அரைவட்டம் A இலிருந்து BC இற்கு எதிர்ப் பக்கத்தில் வரையப்படுகிறது. அரைவட்டத்தாலும், முக்கோணியினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. உண்டாகும் மேற்பரப்பு B இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படுகிறது. AB, நிலையுடன் தான் $^{-1}$ $(2 + \frac{3}{4}\pi)$ கோணத்தை ஆக்கும் எனக் காட்டுக.

AB இல் P என்னும் ஒரு புள்ளி எடுக்கப்பட்டு, முக்கோணி APC வெட்டி எடுக்கப்பட்டபின் மீதி, BC நிலைக்குத்தாக இருக்கும் வண்ணம் சுயாதீனமாகத் தொங்கினால், BP இன் தூரத்தைக் காண்க.

18. $AB = AC = 2a$ ஆகவும் கோணம் $BAC = 2\alpha$ ஆகவும் இருக்கும் வண்ணம் முக்கோணி ABC ஆனது W நிறையுள்ள ஓர் ஒருசீரான தகடாகும். பக்கம் AB ஆனது, ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் விட்டத்தின் வழியே நிலைப்படுத்தப்பட்டு, தட்டின் தளம், அரைக்கோளத்தின் தளமுகத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கிறது. அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பின் ஒரு புள்ளி கிடைமேசையைத் தொட. BC நிலைக்குத்தாக இருக்க, தொகுதி சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. அரைக்கோளத்தின் திணிவு 8/9 W கோதா α எனக் காட்டுக.

W நிறையுள்ள துணிக்கையொன்று AB இலுள்ள ஒரு புள்ளி P இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது; இங்கு $AP = \frac{2}{3}a$ இப்போது தொகுதியானது. BC இன் நடுப்புள்ளி A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயிருக்க சமநிலையில் இருக்கின்றது. தான் $\alpha = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

19. $y = 2\sqrt{(ax)}$ என்ற வளையிக்கும் $x = h$ என்ற நேர்கோட்டிற்கும் இடையில் உள்ள பரப்பு x அச்சுபற்றிச் சுழற்றப்படுவதால் ஒரு திண்மம் ஒன்று உண்டாக்கப்படுகிறது. திண்மத்தின் மையப்போலி உச்சியிலிருந்து $\frac{2}{3}h$ எனும் தூரத்தில் உள்ளது என நிறுவுக.

இத் திண்மத்தினுடைய சடத்துவ திருப்புதிறனை x அச்சு பற்றியும், மையப் போலியினூடாக y அச்சுக்குச் சமாந்தரமான அச்சு பற்றியும் காண்க.

20. ஒரு அடரானது ஒரு வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட இரு தொடலிகளானது. அத்துடன் அவ் விற்பகுதி அதிலின்றும் நீக்கப்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பட்டுள்ளது. இவ்வடரின் புவி ஈர்ப்பு மைய நிலை வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து (a தான்$^2\alpha$ சைன் α)/(3 தான் $\alpha - \alpha$) என நிறுவுக. இங்கு 2α வில் மையத்திலெதிரமைக்கும் கோணம்; a அவ்வட்டத்தின் ஆரை.

21. ஒரு அரியத்தின் நடுக்குறுக்குவெட்டு ABCD எனும் சரிவகமாகும். இங்கு A, D என்பன செங்கோணங்கள். AD=CD=a; AB=b AB யிலிருந்தும் AD யிலிருந்தும் இத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்புமையத் தூரங்களைக் காண்க.

AB யினூடாக ஒரு கிடைத்தளத்தில் இத் திண்மம் நிற்கவியலுமாயின் b/a யின் இயலக்கூடிய இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ என நிறுவுக.

22. ஒரு திண்மக் கூம்பானது அடர்த்தி p யும், ஆரை r உம் உயரம் 4 r உம் கொண்டது. இக் கூம்பானது ஆரை r உம் அடர்த்தி σ வும் உள்ள ஒரு அரைகோளத்துடன் தளமுகங்கள் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. முழுத்திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது பொதுத் தளப் பரப்பிலிருந்து $\frac{r}{8}\left[\frac{16p-3\sigma}{2p+\sigma}\right]$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

p=σ எனக் கொண்டு இத் திண்மமானது பொதுத் தளப் பரப்புள்ள விளிம்பில் ஓர் இழையால் கட்டித் தொங்கவிடப்படும்போது கூம்பின் அச்சு நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் தான்$^{-1}$ (24/13) என நிறுவுக.

23. ஒரு சீரான திண்மமானது r ஆரையும் r உயரமுமுடைய ஒரு உருளையையும் அதன்மேல் பொருத்தப்பட்ட r ஆரையுடைய அரைக்கோளத்தையும் கொண்டது. அரைக்கோளத்தின் தளப்பரப்பின் மையமானது உருளையின் அச்சில் உள்ளது. இத்திண்மமானது தன் தளப்பரப்பு ஓர் கரடான தரையில் வைக்கப்பட்டு அதன் தளமுகமானது சமநிலை குலையும்வரை கிடைநிலையிலிருந்து சிறிது மேல்நோக்கி உயர்த்தப்பட்டது. இவ்வுடலானது கவிழாமல் வழுக்குவதற்கு உராய்வுக் குணகமானது 20/17 ஐ விடக் குறைவாக இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக.

24. a ஆரையும் W நிறையுமுடைய ஒரு சீரான வட்ட அடர் கிடையுடன் 45° சாய்விலுள்ள இரு கரடான சாய்தளங்களில் தன் தளம் நிலைக்குத்தாய் இருக்கும் வண்ணம் ஓய்விலுள்ளது. சாய்தளங்களின் வெட்டும் கோடானது அடரின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுள்ளது. ஒவ்வோர் தொடுகையிலும் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆயின் அடரின் மையத்தைப்பற்றி அதைச் சுழற்றுவதற்குத் தேவைப்படும் இணையின் அதி குறைந்த பெறுமானம் $2\sqrt{2}$ (wa)/5 என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

25. a ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தின் கோளத்துண்டு ஒன்று மையத்தில் 2α கோணமமைக்கிறது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் மையத்திலிருந்து $\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)$ தூரத்தில் உளளதெனக் காட்டுக.

26. அரை உச்சிக்கோணம் α; சாய்நீளம் $\frac{3}{2}l$. திணிவு m உடைய ஒரு அடித்தளமற்ற பொட்கூம்பு சீரான தடிப்புடைய கண்ணாடியினால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது; a ஆரையும் அரை உச்சிக்கோணம் α உம் திணிவு M உம் உடைய திண்மக் கோளச் சிறையுடன் அவற்றின் அச்சு ஒரே நேர்கோட்டிலமையும் வண்ணம் இரு உச்சிகளும் தொடுக்கப்பட்டு ஒரு பூச்சாடியை ஆக்குகின்றன. இத்தொகுதி ஒப்பமற்ற ஒரு கிடை மேசைமீது வைக்கப்பட்டால் சுழற்சி இடப்பெயர்ச்சிக்கு உறுதிச் சம நிலையிலிருக்க $m/M < [(9a/16l)/(1+\text{சீக}\ \alpha)]$ என நிறுவுக.

27. a ஆரையுடைய ஒரு அரைவட்டத் தள அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் அதன் மையத்திலிருந்து $4a/3\pi$ தூரத்தில் உள்ளது என நிறுவுக.

2a ஆரையுடையதும் O வை மையமாக உடையதுமான ஒரு அரைவட்ட அடரின் அடியானது AOB ஆகும். அடியை AO ஆகவும் ஆரை a ஆகவும் கொண்ட ஒரு அரைவட்ட அடர் இதிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதி A யில் தொங்கவிடப்படின் சமநிலையில் AOB யின் சாய்வு தான்$^{-1}(4/3\pi)$ என நிறுவுக.

28. ஒரு திண்மச் செவ்வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

ஒரு செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பின் ஒரு பகுதி h உயரமுடையது. இதன் வட்ட முகங்கள் a, b ஆரைகளை உடையன $(b>a)$. இக்கூம்பு a ஆரையுள்ள வட்டத்தின் பரிதியில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கட்டி தொங்க விடப்பட்டால் அச்சு நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் θ பின்வரும் சமன்பாட்டினால் பெறப்படுமெனக் காட்டுக.
$(a^2+2ab+3b^2)h\tan\theta = 4a(a^2+ab+b^2)$

அலகு 5

உராய்வு

1. '2a' நீளமும் W நிறையுமுடைய AB என்னும் சீரான கோல் அதன் முனை A கரடான தரையில் தொடுகையிலிருக்கும்படி கிடையுடன் 30° சாய்விலே வைக்கப்பட்டுள்ளது. B யின் மட்டத்திற்கு மேலேயுள்ள P எனும் புள்ளியையும் B ஐயும் இணைக்கும் இலேசான

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இழையிறைற் கோல் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலும் இழையும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளன. கிடையுடன் இழையின் சாய்வு 60°; A இல் உள்ள உராய்வுக்குணகம் μ. P உம், A உம் B இற்கு ஊடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்திற்கு ஒரே பக்கத்திலிருப்பின் $\mu \geqslant (\sqrt{3})/5$ எனக் காட்டுக.

P உம் A உம் B இற்கு ஊடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்திற்கு எதிர்ப் பக்கங்களிலிருப்பின் $\mu \geqslant \sqrt{3}$ எனவும் காட்டுக.

2. 21 நீளமும் W நிறையுமுடைய சீரான AB எனும் கோல் அதன் கீழ்முனை 'A', கரடான தரையிலும் மேல்முனை 'B' ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிராயும் இருக்கும்படி சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளது. கிடையுடன் கோலின் சாய்வு 30°; A யிலே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின் $\mu \geqslant \sqrt{3}/2$ எனக் காட்டுக.

ஒழுங்காக அதிகரிக்கும் விசையொன்று கோலின் நடுப்புள்ளிக்குப் பிரயோகிக்கப் படுகின்றது. அதன் திசை சுவருக்குச் செங்குத்தாகவும் அதிலிருந்து விலகியுமுள்ளது. $\mu > \sqrt{3}$ ஆயின் கோல், A இலே சுழல்வதின் மூலம் சமநிலை உடைக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

3. சீரான W_1 நிறையுடைய AB என்னும் ஏணியும் $W_2 (< W_1)$ நிறையுடைய சீரான பலகை BC உம் '2a' என்னும் ஒரே நீளமுடையன. அவை B இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு A உம் C உம் கரடான கிடைத்தளத்திலிருக்கும்படி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே வைக்கப்பட்டுள்ளன. A இலும் C இலும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். W நிறையுடைய மனிதன் A இல் இருந்து ஆரம்பித்து ஏணியிலேறுகிறான். மனிதன் ஒரு குறிப்பிட்ட தூரம் ஏறியவுடன் ஏணி சறுக்க ஆரம்பிக்குமாயின், அது C இல் முதலில் நிகழுமெனக் காட்டுக.

$\angle ABC = 2\theta$ ஆயின், சறுக்க ஆரம்பிப்பதற்கு முன்னர் மனிதன் ஏறிய தூரத்தைக் காண்க.

4. உராய்வுக் கோணத்திற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக. சீரான W நிறையுடைய ஏணியொன்று 4 'a' உயரமுள்ள சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சமநிலையிலுள்ளது. ஏணியினடி கிடைத்தளத்திலே சுவரினடியிலிருந்து 3 a தூரத்திலிருக்கும்படியும் ஏணியின் 'a' என்னும் நீளம் சுவருக்கப்பால் நீட்டிக்கொண்டிருக்கும்படியும் ஏணி உள்ளது. நிலம் கரடாகவும் சுவரின் உச்சி ஒப்பமாகவும் உள்ளன. ஏணிக்கும் நிலத்திற்கும் இடையிலுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின், $\mu > 18/49$ என நிறுவுக. W நிறையுடைய பையனொருவன் ஏணியிலேறுகிறான். $\mu = 48/89$ ஆயின், அவன் சுவரின் உச்சி வரைக்கும் ஏறுவானென நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. சீரான பாரமான W நிறையுடைய AB என்ற கோல் A என்னும் முனை கரடான கிடைத்தளத்திலும் B என்னும் முனை கரடான சுவருக்கெதிராயும், கோல் சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே இருக்குமாறும், சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A யிலும் B யிலும் உள்ள உராய்வுக் கோணம் 30° கோல் கிடையுடன் அமைக்குஞ் சாய்வு θ ஆயின் θ > 30° என நிறுவுக. A க்கு W என்ற நிறை தொடுக்கப்படின், கோல் கிடையுடன் எச் சாய்விலிருந்தாலும் சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

6. "a" நீளமுள்ள AB என்னும் கோல் 'a' ஆரையுடைய பொட்கோளத்தினுள்ளே ஒய்விலுள்ளது. கோல் மையத்தினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே முற்றாகக் கிடக்கின்றது.

கோல் சீராயும் கோலுக்கும்; கோளத்திற்கும் இடையில் உள்ள உராய்வுக் குணகம் $1/\sqrt{3}$ ஆயின், கோல் கிடைத்தளத்துடன் அமைக்கக்கூடிய உயர்சாய்வுப் பெறுமானம் தான்$^{-1}$ $(\sqrt{3}/2)$ எனக் காட்டுக.

கோல் சீரற்றதாகவும் அதன் ஈர்ப்பு மையம் ABயை 1 : 2 எனும் விகிதத்திலும் பிரித்தால் கோல் கிடையுடன் ஆக்கக்கூடிய உயர் சாய்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. இருசம, சீரான இருசமபக்க ஆப்புகள் ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் உச்சிக்கோணம் 2 θ வும் உடையன. இவைகளின் அடிகள் ஒரு கரடான கிடைத்தளத்திற்றிறங்கவும் விளிம்புகள் ஒன்றையொன்று தொடவும் இவை பக்கம் பக்கமாக வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு ஆப்பின் ஒரு முகத்தைத் தொடுமாறு w நிறையும் r ஆரையுமுடைய ஓர் அழுத்தமான கோளம் ஆப்புக்களுக்கிடையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோளத்ினதும் இரு ஆப்புக்களினதும், மையப் போலிகள் ஒரே நிலைத்தளத்தில் இருக்க இவை சமநிலையிலிருப்பின்,

$\mu > w$ கோதா $\theta/$ $(2W + w)$ எனவும்,

$r < l$ $(W + w)$ சைன் θ தான் θ/w எனவும் நிறுவுக.

இங்கு μ உராய்வுக் குணகம், l ஒவ்வோர் ஆப்பின் அடி அகலம்.

8. உராய்வு விதிகளைக் கூறுக.

ஒரு மரக்கட்டை a ஆரையும் l நீளமும் உடைய ஒரே சீரான நேர்வட்ட உருளையின் வடிவமுடையது. அம்மரக்கட்டையின் வட்ட வடிவமான விளிம்புகளில் ஒன்று கரடுமுரடான ஒரு கிடைத்தரையில் ஒய்விலிருக்கிறது. மற்றயது ஒரு கரடு முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரில் தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது. அம்மரக்கட்டையின் அச்சு சுவருக்குச்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

செங்குத்தாகவுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருக்கிறது. இரண்டு தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வுக்குணகம் μ ஆயின் இம்மரக்கட்டை சறுக்கப்போகுந் தருணத்தில், அது கிடையுடன் அமைக்குஞ் சாய்வினைத் துணிக. (இரண்டு தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வு எல்லையுராய்வு எனக் கொள்க)

9. W நிறையும் 2a நீளத்தையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB, அதன் முனைகள் A, B முறையே m, n என்னும் ஒரு நிலைச் சுவர்களைத் தொட, சுவர்களுக்கிடையில் ஓய்விலுள்ளது. சுவர்களுக் கிடைத்தூரம் 2d ($<2a$) கோலுக்கூடாகச் செல்லும் நிலைத்தளம் சுவர்களுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. A, B க்குக் கீழுயுள்ளது' சுவர் m சரடானதும் சுவர் n அழுத்தமானதும் ஆயின் $\mu > 2\sqrt{(a^2-d^2)}/d$ என நிறுவுக. இங்கு μ சுவர் m -- கோல் இடையுராய்வுக் குணகம்; சுவர் m அழுத்தமானதும் n கரடானதுமாயின், என்ன சம்பவிக்கும்?

10. a நீளமுள்ள ஒரு சீர்க்கோலொன்று a ஆரையுள்ள கரடான நிலைக்கோளப் பரப்பொன்றினிற்குள்ளே தனது ஒரு முனை அப்பரப்பின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலே கிடக்க எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கின்றது. உராய்வுக் குணகம் ($\sqrt{15}-\sqrt{12}$) ஆகுமெனக் காட்டுக.

11. ABCD என்னுஞ் சதுர அடர் AB யானது கரடான கிடைமேசையொன்றைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஓய்விலிருக்கின்றது. உறுதியாக அதிகரிக்குங் கிடைவிசையொன்று அவ்வடரின் தளத்திலே C யிற் பிரயோகிக்கப்பட்டால், அவ்வடருக்கும் அம்மேசைக்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ இலும் பெரிய அல்லது சிறிதாதற்கேற்பச் சமநிலையானது அவ்வடர் கவிழ்ந்து விழுவதால் அல்லது வழுக்குதலால் குறையுமெனக் காட்டுக.

12. W என்னும் நிறையும் 2a என்னும் நீளமுமுடைய AB என்னும் ஒது சீர்க் கோலொன்று, அதே நீளமுள்ள BC என்னும் ஓர் இலேசான கோலுக்கு B இல் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. BC ஆனது C இல் ஒரு கிடைமேசைக்குப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை A ஆனது மேசையைத் தொடும் படியும், AB ஆனது நிலைக் குத்துடன் கோணம் θ ஆக்கும்படியும், இரு கோல்களும் ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்தில் கிடக்கின்றன. முனை A இற்கும் மேசைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். சமநிலைக்கு தான் $\theta \leq 3\mu$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

13. ''நிலையுராய்வுக் குணகம்'' ''உராய்வுக் கோணம்'' என்பவற்றால் அறியக்கிடப்பதைத் தெளிவாக விளக்குக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு சீரான திண்மம் அரைக்கோளமொன்றுனது தன் வளைபரப்பு ஒரு கரடான கிடைமேசையைத் தொட்டவண்ணம் இருக்கும்படி ஓய்வு நிலையிலுள்ளது. அதன் தளமுகத்தின் விளிம்பிலிருக்கும் புள்ளியொன்றின்மேல் படிப்படியாக அதிகரிக்கும் P எனும் உதைப்பொன்று தளமுகத்திற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது. மேசைக்கும் அரைக்கோளத்திற்கும் இடையேயான நிலையுராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும். அரைக்கோளமானது நழுவ ஆரம்பிக்கையில் தளமுகம் கிடையுடன் கோணம் α $(<\pi/2)$ ஆக்குவதாகவும் இருப்பின்,

μ [சைன்α (கோசை $\alpha - {}^8/_3$) $+ {}^8/_3$] $=$ சைன்$^2\alpha$ எனக் காட்டுக.

14. நிறை 3W உம், ஆரை α உம், அடியின் மையம் C உம் கொண்ட ஒருசீர் அரைக்கோளமொன்று, தன்முகம் ஒரு கிடை மேசையைத் தொடும்படி ஓய்வுநிலையிலுள்ளது நீளம் 4α உம், நிறை 2W உம் கொண்ட ஓர் ஒருசீர்க்கோல் OA இன் முனை O ஆனது மேசையிலுள்ள நிலையான புள்ளியொன்றிற்குச் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. OC இனூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத்தளத்திலே அக்கோல் அவ்வரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பின் மீது ஓய்வுநிலையிலுள்ளது. உராய்வுக்குணகம் $\mu = 1$ ஆயிருக்கும் வகையில் அரைக்கோளத்திற்கும், மேசைக்குமிடையே உள்ள தொடுகை பரும்படியானது. கோலுக்கும், அரைக்கோளத்திற்குமிடையே உள்ள தொடுகை ஒப்பமானது. அத்தொகுதி எல்லைச் சமநிலையிலிருந்தால்

(i) அரைக்கோளத்தின் தளமுகத்திலே மேசையினது மறுதாக்கத்தின் விளையுள் மையத்திலே தாக்குகின்றது எனவும்

(ii) நிலைக்குத்துடன் அக்கோலின் சாய்வு α, என்பது கோசை $(\pi/_4 + 2\alpha) = 1/(2\sqrt{2})$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் காட்டுக.

15. ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை ABCD ஆனது B இல் W நிறையையும் C இல் 60 இரு. நிறையையும் தாங்க, முனைகள் A,D என்பன முறையே 10,5 இரு. திணிவுள்ள வளையங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டு, நிலையான கரட்டுக்கிடைக் கம்பியில் வழுக்கக் கூடியதாகவுள்ளன. AB, கிடையுடன் 60° இலும் BC கிடையுடன் 30° இலும் CD கிடையுடன் 60° இலும் இருக்க, தொகுதி சமநிலையில் இருக்கிறது. C என்பது B இற்குக் கீழேயுள்ளது. W இன் பெறுமானத்தையும், இழையின் வேறுவேறு பகுதிகளின் இழுவையையும் காண்க.

உராய்வுக் குணகம் μ, இரண்டு வளையங்களுக்கும் சமமாயின், μ இன் இழிவுப்பெறுமானம் $(3\sqrt{3})/10$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

16. ஒரு பாரமான ஒரு சீரான கோல் AB, முனை B கரட்டுக் கிடைத்தளத்திலிருக்க, கோல் கிடையுடன் $\propto$ கோணத்தை ஆக்கும் வண்ணம் முனை A இல் இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினுல் தாங்கப்படுகிறது. இழை, A இனூடாகச் செல்லும் மேல் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை ஆக்கிக் கோல் எல்லைச் சமநிலையில் இருக்க θ இன் இரு சாத்தியமான பெறுமானங்கள் கோதா θ = கோதா $\lambda - 2$ தான் $\propto$ இனுலும் கோதா θ = கோதா $\lambda +$ 2 தான் $\propto$ இனுலும் தரப்படும் என நிறுவுக இங்கு λ ஆனது உராய்வுக் கோணமாயிருக்க $\propto + \lambda < \pi/2$ ஆகும்.

ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் தொடலி உராய்வு விசையை $\propto$, λ, W இன் உறுப்புகளிற் காண்க. இங்கு W, கோலின் நிறையாகும்.

17. சமமான, நீளமும் முறையே 2W, W நிறைகளுமுடைய இரு ஒருசீரான கோல்கள் AB, AC என்பன, A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. B யும், C யும் கரட்டுக் கிடைத்தளத்திலிருக்க, கோல்கள் நிலைக்குத்து த்தளத்தில் ஓய்விலிருக்கின்றன. ஒவ்வொரு தொடுகைப்புள்ளியிலும் உராய்வுக்குணகம் μ ஆகும் எல்லைச் சமநிலையில், வழுக்குதல், B இலா C இலா நிகழும் எனத் தீர்மானிக்குக.

இந்நிலையில், A இலுள்ள எதிர்த்தாக்கத்தைக் கண்டு, $\angle$ABC, தான்$^{-1}$ [3/ (5μ)] எனவும் காட்டுக.

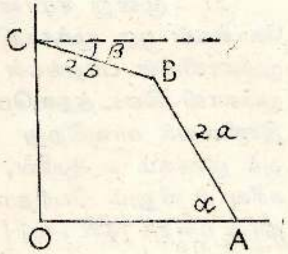
18. AOB, a ஆரையும், மையம் O ஐயும் உடைய வட்டத்தின் விட்டமாகும். CED, விட்டத்தை E இல் செங்கோணமாக வெட்டும் வட்டத்தின் நாணுகும். கோணம் COB = $\propto$ ($< \pi/2$) விற்கள் CBD யும் CED யும் ஒரு நிலையான கரட்டுக் கம்பியை உருவாக்க, அதன்மேல் ஒரு சிறிய மணி வழுக்கக்கூடியதாக இருக்கிறது. மணியானது கம்பியிலுள்ள புள்ளி X இல் இருக்கும்போது, XA திசையிலுள்ளதும் பருமன் P உடையதுமான விசையினுல் தாக்கப்படுகிறது. λ ஆனது உராய்வுக் கோணமாகவும் $\propto \leq 2\lambda$ ஆகவும் இருப்பின், மணி கம்பியின் எந்தப் புள்ளியிலும் ஓய்விலிருக்கும் என நிறுவுக.

மணி B இலுள்ளபோது ஏற்ற தொடலி விசையினுல் C இற்கு இடம் பெயர்க்கப்படுகிறது. P = K/AX^2 எனில், உராய்வுக்கெதிராகச் செய்த வேலை, [k தான்λ) / (2$\propto$)] மட (சீக$\propto$/2 + தான்$\propto$/2) என நிறுவுக.

19. இரு ஒருசீரான கோல்கள் AB, BC என்பன ஒவ்வொன்றும் W நிறையும், 2a, 2b நீளங்களுமுடையன. கோல்கள் B இல் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட, A கரட்டுக் கிடைத்தளத்திலும், C கரட்டு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

நிலைக்குத்துச் சுவரிலும் இருக்க, தளம் ABC சுவருக்குச் செங்குத்தாகவும் இருக்க, சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. O, A இலிருந்து சுவருக்குள்ள செங்குத்தின் அடியாகும் கோல்கள், படத்தில் காட்டியபடி கிடையுடன் α, β கோணங்களை ஆக்குகின்றன. இங்கு $\alpha > \beta$ A, C இலுள்ள தாக்கங்களின் செங்குத்துக் கூறுகள் முறையே,



$$\frac{(3 \text{ தான் } \alpha - \text{ தான் } \beta)W}{2(\text{தான் } \alpha - \text{ தான் } \beta)}, \quad \frac{W}{\text{தான் } \alpha - \text{ தான் } \beta}$$ எனக் காட்டுக.

A இலுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆக இருக்க, சமநிலை A இல் எல்லையில் இருப்பின் 3 தான் α − தான் $\beta = 4$ என நிறுவுக. C இலுள்ள உராய்வுக் குணகமும் $\frac{1}{2}$ ஆயின், சமநிலை C இலும் எல்லையில் இருப்பின் C மேல் அல்லது கீழ் வழுக்கும் தறுவாயில் இருப்பதற்கேற்ப, தான் $\beta = \frac{7}{8}$ அல்லது $\frac{1}{8}$ எனக் காட்டுக.

20. கிடையுடன் θ கோணமேந்தும் ஓர் கரடான சாய்தளத்தின் மேல் W திணிவுடைய ஓர் கனவடிவக் குற்றி வைக்கப்பட்டுள்ளது. அக்குற்றியின் கிடையாகவுள்ளதும் மேலேயுள்ளதுமான விளிம்பின் நடுப்புள்ளியில் படிப்படியாகக் கூடும் விசையொன்று பிரயோகிக்கப்படுகிறது. அக்குற்றியின் சமநிலை வழுக்குவதால் அல்லது சரிவதால் குழப்பப்படுவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை முறையே,

$$\mu \gtrless \frac{1 - \text{தான் } \theta}{1 + \text{தான் } \theta + \text{தான்}^2 \theta}$$ எனக் காட்டுக. μ இப் பெறுமானத்திலும் கூடமுடியாதாயின் குற்றி திரும்புவதற்கு விசையை φ கோணத்தினூடாகக் கீழ்ழ திருப்புதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக. இங்கு (μ + தான் θ) கோசை ($\theta + \varphi$) = $\frac{1}{2}$ (சைன் θ + கோசைθ) (1 − μ தான்θ)

21. ஓர் சீரான திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு ஓர் அழுத்தமற்ற கிடைத்தளத்திலும், அழுத்தமற்ற நிலைக்குத்துச் சுவரிலும் தொட எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் இரு தொடுபுள்ளிகளிலும் μ ஆயின், இரு புள்ளிகளிலுமுள்ள முழு எதிர்த் தாக்கங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து $a(1-\mu)/(1+\mu^2)$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக. அவ்வரைக்கோளத்தின் தட்டையான விளிம்புத் தளம் கிடையுடன் ஏந்தும் கோணம் சைன்$^{-1}$ $\{8(1+\mu^2)/(3+3\mu^2)\}$ எனவும் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

21. மூன்று சீரான, சமமான ஒவ்வொன்றும் W திணிவுள்ள கோல்கள் ஒரு முக்காலியை ஆக்கும் வண்ணம் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. முக்காலியின் பாதங்கள் சமனான இடைவெளி கொண்டுள்ளவை. அம் முக்காலி கிடைத்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டு, உச்சியில் ω என்னும் திணிவைக் காவுகிறது நிலத்திற்கும் கோலுக்குமிடையிலுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின், ஒவ்வொரு கோலினதும் நிலைக்குத்துடனான சரிவு θ விலும் பெரிதாக அமையக்கூடாது எனக் காட்டுக. இங்கு தான் $\theta = 2\mu\ [3W + \omega] \,/\, [3W + 2\omega]$

23. 2 l நீளத்தையுடைய ஒரு சீரான கோல் ஆரை a ஐ உடைய ஒரு பொட்கோளத்திற்குள்ளே அக்கோளத்தின் மையத்திற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒய்வில் இருக்கிறது. அக்கோளம் கரடானது: உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். $l < a$ கோசை λ எனின், கிடையுடன் அக்கோல் ஓய்வில் இருக்கக்கூடிய மிகப்பெரிய சாய்வு $(2l^2 - a^2)$ சைன் θ - a^2 சைன் $(\theta - 2\lambda) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக. $l > a$ கோசை λ எனின், அக்கோல் எவ்வாறு ஓய்வில் இருக்கும்?

24. l நீளமுடைய ஒரு சீரான கோல் AB ஆனது, தனது முனை A ஒரு கிடைத்தளத்திலிருக்க, அதி தாழ்ந்த புள்ளி C தளத்திலிருக்கும் நிலையான அழுத்தக் கோளத்திற்கெதிராக சமநிலையிலிருக்கிறது. கோலைக் கொண்டிருக்கும் நிலைக்குத்துத்தளம், கோளத்தின் மையத்திற்கூடாகச் செல்கிறது. கோல் நிலைக்குத்துத்தளத்தில் வழுக்கும் தறுவாயில் இருந்தால், கோலிற்கும், தளத்திற்குமிடையிலுள்ள உராய்வுக் குணகத்தை,

(a) $AC = {}^{1}/_{2} l$ (b) $AC = {}^{5}/_{8} l$ ஆகும்போது காண்க.

25. 2 l நீளமும் W நிறையுமுள்ள ஓர் சீர்க்கோல் அதன் ஓர் முனை ஓர் கிடைத்தளத்தில் அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. r ஆரையும், பிறப்பாக்கி தளத்திலும் உள்ள ஒரு உருளையின் மீது இக்கோலின் நடுப்புள்ளி தங்கும்வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளையானது கோலினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுள்ளது. கோலுக்கும் உருளைக்குமிடையிலுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ. அத்துடன் கிடைத்தளமானது உருளை அதன் மீது வழுக்காதிருக்கும் வண்ணம் போதிய கரடானது. உருளையானது உருளும் கணத்தில் $\mu = r/l$ என நிறுவுக.

இத்துடன் பிணையிலுள்ள மறுதாக்கம் μW என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

26. கிடையுடன் α சாய்ந்துள்ள ஒரு நிலைத்த கரடான நேர்க்கோலில் m திணிவுள்ள இரு சிறிய வளையங்கள் கோர்க்கப்பட்டுள்ளன. தனது நடுப்புள்ளியில் m திணிவுடைய துணிக்கை இணைக்கப்பட்ட ஓரிழையினால் இவ்வளையங்கள் தொடுக்கப்படுகின்றன. இழைகளின் இரு பகுதிகளுக்கிடையிலுள்ள கோணம் $2\theta\ (>2\alpha)$ ஆகும் வண்ணம் சமநிலையிலுள்ளது. மேலுள்ள வளையத்தின் சமநிலையைக் கருதி யாதுமொரு வளையத்திற்கும் கோலுக்குமிடையில் உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின் $\mu \geq [(3\tan\alpha + \tan\theta / \tan\alpha + 3\tan\theta)] \tan\theta$ என நிறுவுக.

27. ஒரு மெல்லிய சீர்க்கோலின் மேல்முனையானது ஒரு கரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிலும் கீழ்முனை கரடான கிடைத்தரையிலும் உள்ளது. கோலானது சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் இருக்கின்றது. கோலானது வழுக்க ஆரம்பிக்கும்போது அதன் சாய்வு கிடையுடன் θ ஆயின், தான் $\theta = (1 - \mu\mu^1) / (2\mu^1)$.
இங்கு μ, μ^1 என்பன சுவரினதும், தரையினதும் உராய்வுக் குணகங்கள்.

சுவரும், தரையும் சமகரடாயின் கோலின் சாய்வு θ வை உராய்வுக் கோணம் λ இல் காண்க.

28. r ஆரையுடைய ஒரு சீரான வட்டத்தகடு 2a இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு சம கரடான கிடை முனைகளின் மீது ஓய்வுறுகின்றன. இங்கு $a < r$ ஆகும். அத்தட்டின் தளம் முனைகளின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாகும். இரு தொடுகைப் புள்ளியிலும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். ஒரு படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடைவிசையானது தட்டின் உயர் புள்ளிக்கு பிரயோகிக்கப்படுகிறது.

$\mu\{r + \sqrt{(r^2 - a^2)}\}\{r - \mu a\} < a\sqrt{(r^2 - a^2)}$ ஆயின் தட்டானது யாதுமொரு முனையைப் பற்றித் திரும்புமுன் வழுக்கும் எனக் காட்டுக.

29. ஒவ்வொன்றும் W_1, W_2 நிறையுள்ள இரு சமநீளச் சீரான கோல்கள் அவற்றின் ஒரு முனையில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ஒரு படியேணியாகின்றது. நிலத்திற்கும் ஒவ்வொரு கோலுக்கும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனில் ஏணி நழுவுந் தறுவாயில் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணமென்ன? $(W_1 > W_2)$

30. திணிவு M ஐயுடைய ஒரு வளையம் ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் ஒரு கரடான முளையிலே தூங்குகின்றது. திணிவு m ஐயுடைய ஒரு பூச்சி அவ்வளையத்தின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டு மெதுவாய் மேல்முகமாக நகருகின்றது. λ யானது அவ்வளையத்துக்கும் முளைக்கும் இடையேயான உராய்வுக் கோணமாயும் a யானது அவ் வளையத்தின் ஆரையாயும் இருக்குமிடத்து,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சைன் $\lambda > m/(m+M)$ எனின், அப்பூச்சி முனையை அடைதல் முடியும் என்றும், மற்றும், சைன் $\lambda < m/(M+m)$ ஆயின் அப்பூச்சி,

$$a\left[\lambda + \text{சைன்}^{-1}\left(\frac{M+m}{m}\right)\text{சைன் } \lambda\right]$$

என்னும் ஒரு விற்றூரஞ் சென்றவிடத்து அவ்வளையம் அம்முனையில் வழுக்கும் என்றும் நிறுவுக.

அலகு 6

பாயி அமுக்கம்

1. உட்குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு 1 ச. அடியும், ஒரு முனை திறந்த தாகவுமுள்ள ஒரு உருளை வடிவமான பாத்திரம் அதன் அடி கிடையாகவும் அச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்கும்படி நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பாத்திரத்தினுள் செப்பமாகப் பொருந்தக்கூடியதும் அதனுள் உராய்வின்றிச் சுயாதீனமாக அசையக்கூடியதும், $15\frac{3}{4}$ இருத்தல் நிறையுடையதுமான சீரான முசலம் ஒன்று ஒரு குறிப்பிட்ட கன அளவு வளியைப் பாத்திரத்தினுள் சிறைப்பிடிக்கின்றது. முசலத்திற்கு மேலே x அடி உயரத்திற்கு நீர் ஊற்றப்பட்டபோது வளி நிரலினுயரம் y அடியாகக் காணப்பட்டது $x = 2\frac{3}{4}$ ஆகவிருக்கும்போது $y = 1\frac{1}{12}$ ஆகவும், $x = 5\frac{3}{4}$ ஆகவிமிருக்கும்போது $y = 1$ ஆகவும் இருந்தால் நீர்ப் பாரமானியின் உயர அளவில் வளிமண்டல அமுக்கம் 33 அடி எனக் காட்டுக.

அவ்வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 1 க. அடி. வளியின் நிறை 1.3 அவு. ஆயின் பாத்திரத்தினுள் அடைக்கப்பட்ட வளியின் நிறையைக் காண்க. (1 க. அடி நீர் 62.5 இரு.)

2. ஆக்கிமிடீசின் தத்துவத்தை எழுதுக.

தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{2}$ உடைய எண்ணெய் பெரிய நீர்த்தாங்கியின் நீர்ப் பரப்பிற்கு மேலே h தடிப்புள்ள படையை ஆக்குகின்றது. உயரம் 2h உம். தன்னீர்ப்பு s உம் உடைய நேர்வட்ட உருளை ஒன்று அதனச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்கும்படி மிதக்கின்றது.

(i) $\frac{1}{4} < s < \frac{3}{4}$ ஆயின், $h(4s-1)/2$ என்னும் உயரத்திற்கு உருளை நீரினுள் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்குமெனவும்,

(ii) $\frac{3}{4} \leqslant s < 1$ ஆயின், $2h(2s-1)$ எனும் உயரத்திற்கு உருளை நீரினுள் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்குமெனவும் காட்டுக.

3. சொற்ப இரசத்தைக் கொண்டுள்ள சீரான குறுக்குவெட்டுப் பரப்புடைய U குழாயொன்று அதன் புயங்களாகிய A, B நிலைக்குத்தாயிருக்கும்படி நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. புயம் A மூடப்பட்டும் புயம் B திறந்துமுள்ளன. A யின் உச்சியில் வெற்றிடமொன்று உண்டு. இரண்டு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

புயங்களிலுமுள்ள இரசமட்டங்களின் வித்தியாசம் 30 அங்குலமாகும். வளிமண்டல அமுக்கத்திலே 40 அங். நீளமுள்ள வளிநிரலை உள்ளடக்கும்படி B இன் உச்சி மூட்டப்பட்டுள்ளது. A இன் உச்சி திறக்கப்பட்டால் புயம் B இல் உள்ள இரசமட்டத்திலுள்ள உயர்வைக் காண்க.

4. W நிறையும் '2a' நீளமுமுடைய AB எனும் சீரான கோலுக்கு W எனும் நிறை (புறக்கணிக்கத்தக்க கனவளவு) A என்னும் முனையிலே பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கோலின் தன்னீர்ப்பு ஒரு குறித்த நிலையான பெறுமதியுடையதாயின் கோல் நிலைக்குத்துடன் எந்தச் சாய்விலிருந்தாலும் நீரில் சுயாதீனமாக மிதத்தல் இயலுமெனக் காட்டுக.

தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{6}$ ஆயிருக்கும்போது நீர்ப்பரப்பிற்கு மேலே 'a' உயரத்திலுள்ள பிணைப்பிற்கு கோலின் முனை B சுயாதீனமாக இணைந்திருக்கக் கோல் ஓர் சாய்நிலையில் நீரில் மிதக்குமாயின் கோல் நிலைக்குத்திற்கு 45° சாய்விலிருக்குமெனக் காட்டுக.

5. ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள்ளே அதன் ஒரு பககம் பரப்பிலிலிருக்கும்படி அமிழ்த்தப்பட்ட செவ்வடரின் அமுக்கமையத்தைக் காண்க

ஒரு பக்கம் 'a' நீளமுடைய சதுர அடரின் பக்கங்களாகிய BC, AD இனது நடுப்புள்ளிகள் முறையே E உம் F உம் ஆகும். இவ்வடர் ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள்ளே A, B பரப்பிலிருகும்படி அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது செவ்வகம் CDFE இலுள்ள திரவ அமுக்கம் செவ்வகம் ABEF இலுள்ள திரவ அமுக்கத்தின் மூன்று மடங்கெனக் காட்டுக.

இவ்விரண்டு பரப்புகளின் அமுக்க மையங்களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் 4a/9 எனவும் காட்டுக.

6. 8W நிறையும் $^{1}/_{5}$ தன்னீர்ப்புமுடைய சீரான கோளமொன்றின் பரப்பிலுள்ள A எனும் புள்ளிக்கு W நிறையுடைய துணிக்கையொன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது, இக்கோளம் பொள்ளான பாத்திரமொன்றினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் இழையின் ஒரு முனை பாத்திரத்தினடிக்கும் மறுமுனை கோளத்தின் பரப்பிலுள்ள B என்னும் புள்ளிக்குமிணைக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு B இன் ஊடாகச் செல்லும் கோளத்தினுரை A இல் உள்ள ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும். கோளத்தினரைப்பங்கு அமிழுமட்டும் நீருள் பாத்திரத்தினுள்ளே மெதுவாக நீர் ஊற்றப்படுகின்றது. B இனூடாகச் செல்லும் கோளத்தினுரை நிலைக்குத்துடன் தான் ¹2 எனும் கோணத்தை ஆக்குமென நிறுவுக.

முழுக்கோளமும் அமிழ்ந்தும்படி மேலும் நீர் ஊற்றப்பட்டால் B இன் ஊடாகச் செல்லும் கோளத்தினுரை நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் ஒத்த சாய்வைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. AB=BC ஆயுள்ள ஒரு முக்கோண அடரில் A, BC இல் இருந்து h எனும் செங்குத்துத் தூரத்தில் உள்ளது. இது ஓர் ஏக வினத் திரவத்தினுள் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாயிருக்குமாறு முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. BC திரவத்தின் பரப்பிலிருந்தால் அடரின் அமுக்க மையமென்ன?

PQRS என்ற சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் PR '2a' நீளமுடையது PR நிலைக்குத்தாயிருக்கும்படி இது ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள் முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. QRS என்ற முக்கோணியின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க. இதைப் பிரயோகித்து முழு அடர் PQRS இன் அமுக்கமையம் P இல் இருந்து 7a/[illegible] என்னும் ஆழத்திலிருக்குமென நிறுவுக.

8. 2h உயரமும் அடியினாரை 'a' யும் உடைய பொள்ளான செவ்வட்டவுருளை மெல்லிய சீரான திரவியத்தால் செய்யப்பட்டது, இரண்டு பக்கங்களும் மூட்டப்பட்ட இவ்வுருளை W நிறையுடைய ஓர் ஏகவினத்திரவத்தால் முற்றாக நிரப்பப்பட்டு மேல் விளிம்புக்கு இணைக்கப்பட்ட இழையினால் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. θ=தான்$^{-1}$h/a ஆயின் உருளையின் வளைந்த பரப்பிலுள்ள முழு உதைப்பும் W கோசை θ என நிறுவுக. உதைப்பு நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணமென்ன?

9. இரண்டு சமமான சீரான AB, AC ஆகிய கோல்கள் S(S>1) என்னும் தன்னீர்ப்புடைய திரவியத்தினால் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் 13 அடி நீளமும் W இரு. நிறையுமுடையன. இரண்டும் A இலே மூட்டப்பட்டு அவைகளின் நடுப்புள்ளிகள் 5 அடி நீளமுள்ள பாரமற்ற நீளா இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இக் கோல்கள் இழை இறுக்கமாயும் B, C என்பன ஓர் வெற்றுத் தண்ணீர்த் தாங்கியின் கிடையான அடியின் மேலிருக்கும்படியும் ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்திலே வைக்கப்பட்டுள்ளன. நீர் மெதுவாக ஊற்றப்படுகின்றது. தாங்கியினுள்ளே x உயரத்திற்குத் தண்ணீர் இருக்கும்போது இழையிலுள்ள இழுவை T ஆயின் இது $T = {}^{5}/_{12}\ W(1-x^2/144S)$ இரு. நிறையினாற் கொடுக்கப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு $x \leqq 12$.

10. a ஆரையுடைய ஒரு வட்ட அடர் அதன் பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி சுயாதீனப்பரப்பிலும் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு ஒரு ஏகவினத்திரவத்தில் முற்றாக உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இவ்வட்ட அடரின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க.

அடியுடைய்தும் பொள்ளானதுமான ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு மெல்லிய திரவியத்தினால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரம் 3'a' அடியின் ஆரை 'a'; இது ஓர் அலகு கனவளவிற்கு W நிறையுடைய

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஏகவினத்திரவத்தால் முற்றாக நிரப்பப்பட்டு இதன் அச்சு கிடையாக இருக்குமாறு நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது, வளைந்த பரப்பிலுள்ள திரவ உதைப்பு R இன் பருமன் $\sqrt{2}(\pi a^3 W)$ எனக் காட்டுக. R இன் தாக்கக்கோடு அச்சை அடியின் மையத்திலிருந்து a/2 தூரத்திலுள்ள ஓர் புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனவும் நிறுவுக.

11. முறையே $22\frac{1}{2}''$, $40''$ நீளமுள்ள AB, BC என்ற சீரான கோல்கள் ஒரே குறுக்குவெட்டுப் பரப்புடையனவாயும் ஒரே திரவியத்தாற் செய்யப்பட்டனவாயும் உள்ளன. அவை $\angle ABC = 90^\circ$ ஆகும்படி B யிலே விறைப்பாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் பகுதி பகுதியாக நீர்த்தேக்கம் ஒன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளன. B யில் தொடுக்கப்பட்ட நிலைக்குத்து இழையொன்றினால் B சுயாதீனப் பரப்பிற்கு மேலே $12''$ தில் இருக்குமாறும் கோல்கள் நிலைக்குத்துத்தளத்திலே சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கிடையுடன் AB யின் சாய்வு தான்$^{-1}\frac{3}{4}$ ஆயின், கோல்களை ஆக்கிய திரவியத்தின் தன்னீர்ப்பு $\frac{3}{4}$ என நிறுவுக. கோல்கள் முழுவதும் நீருள் அமிழ்ந்தும்படி இந்தத் தொகுதி உள்ளாழ்த்தப்படின் கிடையுடன் AB அமைக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

12. செவ்வக அடரொன்று திரவமொன்றினுள் உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இரண்டு விளிம்புகள், கிடையாகவும் பயன்படு பரப்பின்கீழ் d_1, d_2 ஆகிய ஆழத்திலுமுள்ளன. அமுக்க மையத்தின் ஆழம், $\frac{2}{3}[(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)/(d_1+d_2)]$ எனக் காட்டுக.

நீரைக் கொண்டுள்ள தாங்கியின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திலுள்ள ABCD என்னும் செவ்வகக் கதவில், AB = a, BC = b. AB கிடையாகவும் நீர்ப்பரப்பின்கீழ் h என்னும் ஆழத்திலுமுள்ளது, CD, AB யின் கீழ் உள்ளது. கதவு AB யின் வழியே ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருப்பின் நீர் செல்வதைத் தடைசெய்வதற்குக் கதவிற்குப் பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய மிகச் சிறிய விசை என்ன?

13. மிதக்கும் பொருளின் சமநிலைக்குத் தேவையான நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

ஸமயக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பாக முக்கோணி ABC ஐ உடைய அரியம் நீரிலே சுயாதீனமாக மிதக்கிறது. A இற்கூடாகச் செல்லும் விளிம்பு பரப்பிலும் B இற்கூடாகச் செல்லும் விளிம்பு அதற்குக் கீழேயும் உள்ளது. BC யைக் கொண்டுள்ள அரியத்தின் முகம் கட்டாயமாக நிலைக்குத்தாகவே இருக்குமெனக் காட்டுக. அதிலிருந்து அரியத்தின் தன்னீர்ப்பு 1/(1 + தான் B கோதா C) எனவும் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

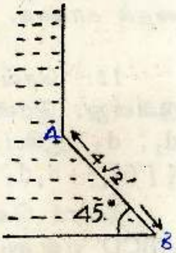
14. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) திரவத்திலுள் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட தளப்பரப்பின்மேலுள்ள முழு உதைப்பு அதன் பரப்பினதும், அதன் மையப்போலியிலுள்ள அமுக்கத்தினதும் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமனென நிறுவுக.

(b) ஒரு திரவத்திலுள் உள்ளாழ்த்தப்பட்ட மூடிய பரப்பின் மேலுள்ள உதைப்பு. இப்பரப்பினுல் உள்ளடைத்த திரவத்தின் நிறைக்குச் சமனும் எதிரும், ஆகும்.

கிடையான மேசையில் ஓய்வு நிலையிலுள்ள அரைக்கோள வட்டக் கிண்ணம் நீரினுல் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. கிண்ணத்தின் அச்சினூடாகச் செல்லும் இரண்டு செங்குத்துத் தளங்களினுல் கிண்ணத்தின் பரப்பு நான்கு சம பங்குகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. கிண்ணத்தின் நான்கு பகுதிகளில் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள விளையுள் உதைப்பைக் காண்க.

15. மேற்காட்டியுள்ள படம் ஒரு தேகத்திலுள்ள அதியுயர் ஆழமுள்ள நீரைக் கொள்வதற்கு ஓர் உபாயத்தைக் குறிக்கிறது. தேக்கத்தின் ஒரு நிலைப் பக்கத்திற் பிணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு சீரான செவ்வகக் கதவை AB குறிக்கின்றது. கதவு அதன்மேல் விளிம்பு பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பும் தன்மையுடையது. கதவின் கீழ் விளிம்பு தேக்கத்தின் கிடை அடியில் தங்குகிறது. கதவின் நீளம் 5 அடி, அகலம் $4\sqrt{2}$ அடி. அதன் நிறை 2·5 தொன் ஆயின், கதவைத் திறப்பதற்கு வேண்டிய நீரின் ஆழத்தைக் காண்க. நீரின் அடர்த்தி 62·5 இரு. / 1 க. அடி.



16. ஓர் ஆழ்மணி l நீளம் r ஆரையுடைய ஓர் உருளையினுலும் அதன் மேலுள்ள r ஆரையுடைய ஓர் அரைக்கோளத்தினுலுமாயது. நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் h ஆயின், அரைக்கோளப் பகுதியில் மட்டுமே வளியிருப்பதற்கு ஆழ்மணியை எவ்வளவு தூரம் தாழ்த்த வேண்டுமெனக் காண்க. மணியின் இந்நிலையில் மணியிலுள்ள நீர் முழுவதையும் வெளியேற்ற, அதனுள் பம்பப்படவேண்டிய வளியமுக்கத்திலுள்ள காற்றின் கனவளவு $\pi rl/6h\,[(3h+2r)]/[(3+2r)]$ என நிறுவுக.

17. ஆக்கிமிடீசின் தத்துவத்தைக் கூறி நிறுவுக.

ஒரு சீரான சடப்பொருளினுலான சீரான தடிப்புடைய ஓர் சிறிய அரைவட்ட அடரின் விட்டத்தின் முனைகள் A, B ஆகும். AB யின் நடுப்புள்ளி நீரின் மேற்பரப்பில் இருக்குமாறும் அடரின் கனவளவிற் பாதியிலும் கூடிய பங்கு நீரில் தாழ்ந்தும் இருக்க, நீரின்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பரப்பிற்கு மேலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் A அழுத்தமாக பிணைக்கப்பட்டு அடர் சமநிலையிலுள்ளது. நீரின் பரப்புடன் AB யின் சரிவு θ ஆரையன் (θ கூர்ங்கோணம்) ஆயின் அடரின் தன்னீர்ப்பு $[3(\pi-\theta)-2$ தான் $\theta]/[3\pi-4$ தான் $\theta]$ என நிறுவுக.

18. மேலே தட்டையான விளிம்புகளால் மூடப்பட்டு, கீழே திறந்தவாறுள்ள இரண்டு உருளைவடிவான ஆழ்மணிகள், அவற்றின் மூடப்பட்ட விளிம்புகள் நீர், மட்டத்திற்கு 2 அடிமேலே இருக்கத் தக்கதாக நீரில் அமிழ்த்தப்படுகின்றன. மணிகளின் உள்ளேயிருக்கும் நீர், வெளியேயுள்ள மட்டத்திற்குக் கீழே 4 அடி 2 அடி மட்டங்களில் நிற்கின்றது. ஒரு சிறு குழாயினால் அவ்விரண்டு மணிகளுக்கிடையில் தொடர்பை ஏற்படுத்திய பொழுது இரண்டிலுமுள்ள நீர் வெளியேயுள்ள மட்டத்திற்கு 3 அடி கீழே ஒரு பொதுமட்டத்தை அடைகின்றதெனத் தரப்படுகின்றது. அவற்றினுடைய குறுக்கு வெட்டு முகப் பரப்புகள் 20 : 21 என்ற விகிதத்திலுள்ளனவெனக் காட்டுக.

(நீர்ப் பாரமானியின் உயரம் 33′ யாகும். வெளியேயுள்ள நீரின் மட்டத்திலுண்டாகும் மாற்றத்தைப் புறக்கணிக்க.)

19. ஒரு பாத்திரம் ஒரு தலைகீழான கூம்பகத்தின் வடிவமுடையது, அப்பாத்திரத்தினுடைய நான்கு முகங்களில் ஒவ்வொன்றும் a பக்கத்தையுடைய ஓர் இலேசான சமபக்க முக்கோண வடிவுள்ள தகடாகும். அப்பாத்திரத்தினுடைய விளிம்பு ABCD என்ற சதுரமாகும். O என்பது அதன் உச்சியாகும். ABO என்ற பக்கம் AO என்ற விளிம்பிற் பிணைக்கப்பட்டு B யிலுள்ள ஒரு கொழுக்கியினால் அது இறுக்கமாகக் கொழுவப்பட்டிருக்கிறது. p அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவம் அப்பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்புகிறது. அத்திரவம் காரணமாக ஒரு முகத்திலுள்ள அமுக்கமையத்தின் நிலையையும் B யிலுள்ள கொழுக்கிமீதுள்ள விசையையுங் காண்க.

20. ஓய்விலுள்ள ஒரு திரவத்தில் ஒரு திண்மம் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கிறது. திண்மத்தின்மீது திரவத்தினுடைய உதைப்பின் விளைவு இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமானதும் எதிரானதுமான ஒரு விசையெனவும், இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கித் தாக்குகின்றது எனவுங் காட்டுக.

a ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தின் துண்டு a/2 தடிப்புடையது. அது p அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்திற்குள் அதன் தட்டை அடி நிலையுடன் θ என்னும் கோணம் அமைக்கும் வண்ணம், பூரணமாக அமிழ்த்தப்படுகிறது. தட்டை அடியின் மையம் திரவத்தின் மேல்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மட்டத்திலிருந்து h ஆழத்தில் இருக்கிறது. வட்டமான தட்டைப் பரப்பு வளைபரப்பிற்கு மேலேயுள்தெனக்கொண்டு, வளைபரப்பின் மீது தாக்கும் விளைவு விசையைத் துணிக.

21. a ஆரையும் h நீளமுமுடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளை p அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தினுள் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. உருளையின் அச்சுக் கிடையாகவும், திரவத்தின் மேற்பரப்பின் கீழ் (d>a) ஆழத்திலுமுள்ளது. இவ்வுருளை நான்கு சமபகுதிகளாக அதன் அச்சினூடாகச் செல்லும் தம்முட் செங்குத்தான இரு தளங்களாற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு தளமுங் கிடையுடன் 45° யிற் சாய்ந்துள்ளது. உருளையின் நான்கு பகுதிகளில் ஒவ்வொன்றினது வளைபரப்பிலுள்ள விளைவு திரவ உதைப்பிற் பருமனைக் காண்க.

22. ஓர் உடலின் ஒரு புள்ளி ஓர் ஏகவினத் திரவத்தின் மேற்பரப்பின் மேல் ஒரு புள்ளியிற் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்க, அப்பொருள் அத்திரவத்தினுட் பகுதியாக அமிழ்ந்து சமநிலையில் இருப்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளைத் துணிக. ACB என்னும் சமபக்க முக்கோண வடிவுடைய ஒரு சீரான தட்டு W நிறையுடைது. திரவ மேற்பரப்பின்மேல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் இதன் ஓர் உச்சி A சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு இத்தகடு பகுதியாய் நீரிலமிழ்ந்து ஒரு நிலைத் தளத்திற் சமநிலையிலுள்ளது. உச்சி B நீரின் மேற்பரப்பிலிருக்கப் பக்கம் AC யின் $\frac{3}{4}$ பங்கு அமிழ்ந்திருப்பின், தகட்டின் தன்னீர்ப்பு $^{19}/_{24}$ என நிறுவுக. பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் துணிக.

23. ஒரு தாங்கியின் நிலைப்பக்கத்திலுள்ள ஒரு கதவு 2a பக்கமுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ABC யின் வடிவையுடையது BC கிடையாயும் A, BC க்கு மேலாகவுமுள்ளது. தாங்கியிலுள்ள திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருந்து d ஆழத்தில் A உள்ளது BC வழியே கதவு சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருப்பின், திரவம் வெளியே ஓடாமற் தடுப்பதற்குக் கதவுக்குப் பிரயோகிக்கவேண்டிய மிகக் குறைந்த விசை $(3a+2\sqrt{3}d)\,a^2\,pg/6$ என நிறுவுக.

இங்கு p திரவத்தினடர்த்தி. BC க்குப் பதிலாக AB வழியே கதவு பிணைக்கப்பட்டிருப்பின், பிரயோகிக்கவேண்டிய மிகக்குறைந்த விசையையுங் காண்க.

24. உயரம் h ஆயும் நிறை W ஆயுமுள்ள செவ்வட்டத் திண்ம உருளையொன்று, தன்னடர்த்தியின் இருமடங்கான அடர்த்தியையுடையதும், ஒரு செவ்வட்ட உருளைக் கலனிலுள்ளதுமான ஒரு திரவத்திலே தன்னச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்க மிதக்கின்றது. அக்கலனின்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆரை அத்திண்மவுருளையின் ஆரையின் இருமடங்காயிருக்க, அத்திண்ம உருளையானது தூரம் x இற்கூடாக நிலைக்குத்தாக அமுக்கப்பட்டால் $9Wx/3h$ என்னும் பருமனுள்ள கீழ்நோக்கிய ஒரு நிலைக்குத்து விசையின் ஆதிக்கத்தில் அத்தானத்திலே அது சமநிலையிலே நிலைத்திருக்குமெனக் கட்டுக.

25. (i) a ஆரையுள்ள வட்டத் தட்டொன்று, தனது மையம் ஒரு திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழே h என்னும் ஆழத்திலே இருக்கும்படியுந் தனது தளம் நிலைக்குத்துடன் $\propto$ என்னுங் கோணத்திலே இருக்கும்படியும் அத்திரவத்திலே முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றது. அச்சுயாதீனப் பரப்பிலே அமுக்கம் பூச்சியமாயின் அத்தட்டின் ஒரு பக்கத்திலே திரவவுதைமைப்பின் அமுக்க மையம் அத்தட்டின் மையத்திலிருந்து தூரம் a^2 கோசை $\propto/4h$ இலுள்ளது எனக் காட்டுக.

(ii) திண்ம அரைக்கோளமொன்று நீரின் சுயாதீனப் பரப்பிலே தனது விளிம்பின் ஒரு புள்ளி இருக்கும்படி நீருக்குள்ளே முற்றாக அமிழ்ந்தப்பட்டிருக்கின்றது. அதனடி நிலைக்குத்துடன் $\propto$ என்னுங் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. அதன் வளைபரப்பு மீதுள்ள விளைவு உதைப்பானது. நிலைக்குத்துடன் கோணம்,

தான்$^{-1}$ [3 / (2 தான்^{2} $\propto$ + 3 தான் $\propto$ + 2)] இலே சாய்ந்துள்ள ஒரு தனி விசையெனக் காட்டுக.

26. ஒரு சீரான சிறு துளையையுடைய ஒரு மூடிய நேர்க்குழாய் தனது ஒவ்வொரு முனையிலுமுள்ள காற்றின் இரு பகுதிகளையும் பிரிக்கும் ஒரு துளி இரசத்தைக் கொண்டுள்ளது. அக்குழாய் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்போது காற்றிலே கொள்ளப்படும் பகுதிகளின் நீளங்கள் a, b ஆகும். அக்குழாய் தலைகீழாக இருக்கும்போது இப்பகுதிகளின் நீளங்கள் முறையே a^1, b^1 ஆகும். அக்குழாய் கிடையாக இருக்கும்போது, இப்பகுதிகளின் நீளங்களைக் காண்க.

27. நிறைவாக நீருள்ளதும் ஒப்பமானதுமான அரைக்கோளக் கிண்ணமொன்று அதன் விளிம்புத்தளம் கிடையாயிருக்குமாறு நிலையாக்கப்பட்டுள்ளது. 2a நீளமுள்ள ஒரு சீரிய கோலொன்று அதன் ஒரு புள்ளி அக் கிண்ணத்தினது விளிம்பின்கண் இருக்குமாறும், ஒரு முனை அக் கிண்ணத்தின் உட்பரப்பைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறும் ஓய்விலிருக்கின்றது. $\propto$ என்பது கிடைக்கு அக் கோலின் சாய்வாயிருக்க, r என்பது அக் கிண்ணத்தின் ஆரையெனின், அக் கோலின் தன்னீர்ப்பு [r^2 கோசை $\propto$ (3 கோசை^{2} $\propto$ − 2)] / [a (4r கோசை^{2}$\propto$ − a கோசை $\propto$ − 2r)] ஆகுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

28. ஓர் ஆழ்மணியானது ,a ஆரையுள்ள ஓர் அரைக்கோளத்தையும், a ஆரையையும h உயரத்தையுமுடைய ஒரு செவ்வட்டவுருளையையும் கொண்டுள்ளது. அவ்வரைக்கோளமும் அவ்வுருளையும் ஒரு வட்டவடிவில் பொருத்தப்பட்டு, அப்போது வட்ட அடியின் எதிர்ப்பக்கங்களிலே இருக்கின்றன. அவ்வாழ்மணியானது, அதன் உட்புறத்திலே h உயரத்திற்கு நீர் எழும்பும் வரைக்கும் நீரிலே தாழ்த்தப்படுகின்றது. நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் H எனின், இறந்தமுளையின் ஆழம் $h\,[1 + (3H/2a)]$ எனக் காட்டுக.

29. பக்க நீளம் 2a உள்ள சமபக்க முக்கோண அடரொன்று, அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும், ஒரு பக்கம் கிடையாக இருக்குமாறும், எதிர்மூலை கீழ்முகமாக இருக்குமாறும் நீரிலே உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அக் கிடைப்பக்கம் நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழ் h ஆழத்தில் இருந்தால், வளிபண்டல அமுக்கத்தைப் புறக்கணித்து அமுக்க மையமானது கிடைப்பக்கத்தில் கீழே $\frac{3a + 2\sqrt{3h}}{2\sqrt{3a + 6h}}\,a$ ஆழத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

ஒரு நிலைக்குத்துப் பூட்டுக் கதவின் அடியிலுள்ள ABC என்னும் முக்கோண வாயிலொன்று ஒரு முக்கோணப் பொறிக்கதவு ABCயினாலே மூடப்பட்டுள்ளது. AB = BC = CA = 2a ஆகும். AB யானது கிடையாயிருக்க, C யானது AB யின் கீழே இருக்கின்றது. அப் பொறிக்கதவு AB பற்றிப் பிணைக்கப்பட்டு நீரின் அமுக்கத்திற்கு எதிராக C யிலுள்ள தாழ்ப்பாளினாலே தாங்கப்பட்டுள்ளது. C யிற்கு மேலே அப் பூட்டுக்கதவின் ஒரு பக்கத்திலே நீர்ப்பரப்பு $4\sqrt{(3a)}$ என்னும் உயரத்திலிருக்க மறுபக்கத்திலே நீர்ப்பரப்பு $2\sqrt{(3a)}$ என்னும் உயரத்திலிருக்கின்றது. P நீரின் அடர்த்தியாயின் அத் தாழ்ப்பாளில் உஞற்றப்படும் விசை $2\,Pga^3$ எனக் காட்டுக. மையம் நுனையின் கீழான ஓரத்திலிருக்குமென்றும் காட்டுக.

30. ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள் முற்றாக உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ள ஒரு உடல் பற்றிய ஆக்கிமிடீசுவின் கோட்பாட்டைக் கூறி அதை நிறுவுக.

a ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளம், p என்னும் அடர்த்தியுள்ள ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள், அதன் அச்சு கிடையாகச் சுயாதீனப் பரப்பின் கீழ் d என்னும் ஆழத்தில் இருக்கும்படி, முற்றாக உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. வளைபரப்பு மீதுள்ள உதைப்பு ஒரு தனி விசையென்று காட்டி, அவ்விசையின் பருமனையும், திசையையும், தாக்கக் கோட்டையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

31. பக்கம் 2a நீளமுள்ள ஒரு சதுரவடர் ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினது சுயாதீனப்பரப்பின் கீழ், சதுரத்தின் மையம் O ஆனது ($h<a$) என்னும் ஆழத்தில் இருக்கும்படியும் ஒருசோடி எதிர் ஓரங்கள் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படியும் முற்றாக உள்ளாழ்த்தப்படுள்ளது. சுயாதீனப் பரப்பிலிருந்து அமுக்கமையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

O என்பதை மையமாகவும் 2b என்பதை ஒவ்வொரு பக்கத்தின் நீளமாகவுமுடைய சதுரத்துளையொன்று, தன் ஓரங்கள் அவ்வடரின் ஓரங்களுக்குச் சமாந்தரமாய் இருக்கும்படி, அவ்வடரிலிருந்து வெட்டப்படுகின்றது. $h=a$ ஆயின், $b/a=(3-\sqrt{5})/2$ ஆகும்போது அமுக்க மையம் துளையின் கீழான ஓரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக.

32. h நீளமுள்ளதும், மூடிய முனைகளையுடையதுமான ஒரு உள்ளீடில் (பொள்) செவ்வட்டவுருளை π என்னும் வளிமண்டல அமுக்கத்தில் வளியைக் கொண்டுள்ளது. அவ்வுருளையானது தன் அச்சு நிலைக்குத்தாய் இருக்கும்படி, p என்னும் அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தினுள் வைக்கப்படுகின்றது. அது தன் நீளத்தின் அரைப்பாகம் உள்ளாழ்ந்திருக்கும்வண்ணம், மிதக்கின்றது. அப்பொழுது அதன் அடியில் ஒரு சிறு வாயில் உண்டாக்கப்படுகின்றது. உள்ளடைக்கப்பட்ட வளியின் நிறையையும், உருளையினது சுவர்களின் தடிப்பையும் புறக்கணித்து, $p\pi h<2\pi$ எனின், அவ்வுருளையானது தொடர்ந்து மிதக்கும் எனக் காட்டுக. அவ்வுருளை இறங்கும் தூரம் $pgh^2/(2\pi+p\pi h)$ எனவும் காட்டுக.

33. ஆக்கிமீடிசுவின் கோட்பாட்டைக் கூறுக. திண்மமொன்று ஊதுதளமுகங்கள் ஒவ்வொன்றொன்று இணைக்கப்பட்டவையான அரைக்கோளமொன்றையும் செவ்வட்டக் கூம்பொன்றையும் கொண்டது. கூம்பின் உயரமும் தளமுகங்களொவ்வொன்றின் ஆரையும் a ஆகும். கூம்பின் உச்சிக்கு இணைக்கப்பட்ட W எனும் நிறையுள்ள துணிக்கையொன்றானது திண்மத்தை திரவமொன்றில், திண்மத்தின் வட்ட ஓரம் திரவப்பரப்பிலும் துணிக்கை திரவப்பரப்பிற்கு மேலும் இருக்குமாறு மிதக்கச் செய்கின்றது. துணிக்கைக்குப் பதிலாக W/2 எனும் நிறையுடைய இன்னொரு துணிக்கையை வைக்கும்பொழுது, திண்மத்தை அதன் வட்ட ஓரம் திரவப்பரப்பிலேயே இருக்குமாறும் ஆனால் துணிக்கை திரவப்பரப்பிற்குக் கீழே இருக்குமாறும் திரும்பவும் மிதக்கச் செய்யலாம். திண்மத்தின் நிறை பூச்சியமாகுமெனக் காட்டுக.

திண்மத்தின் அச்சின் முனைகளிலே இரண்டு துணிக்கைகளை இணைத்து திண்மமானது அதன் அச்சு முத்திய திரவத்தின் பரப்பிலேயே இருக்குமாறு மிதக்கச் செய்யப்படுகின்றது. துணிக்கைகளின் நிறைகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

34. தடாகமொன்றிற்கு 3a எனும் உயரமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்தான செவ்வக வாசலுண்டு. இவ்வாசலுடன் மட்டுமட்டாகப் பொருந்தக்கூடிய கதவொன்றிற்கு ஒரு நிலைத்த கிடையச்சுப் பற்றிச் சுழலச் சுயாதீனமுண்டு. இந்த அச்சானது வாசலின் கீழ்க்கிடையோரத்திலிருந்து a எனும் உயரத்திலிருக்கிறது. கதவை நிலைக்குத்து நிலையில் பிடித்தவண்ணம், நிலைத்த அச்சின் மட்டம்வரை 3p எனும் அடர்த்தியுள்ள திரவமொன்றை தடாகத்துள் ஊற்றிவிட்டு, பின் அச்சிலிருந்து (2a + b) என்னும் உயரம்வரை 2p என்னும் அடர்த்தியுள்ள வேறொரு திரவம் ஊற்றி வைக்கப்படுகின்றது. கதவை இப்பொழுது பிடியாது விட்டுவிட்டால்

$b \gtrless \frac{a}{9}$ என்பதற்கேற்ப கதவின் கீழ்ப்பகுதி முறையே உள்ளே அல்லது வெளியே நகர்ந்து கதவு திறபடும் எனக் காட்டுக.

a = 9b ஆயின் நிகழ்வது என்ன?

35. ஒரு செவ்வகத் தள அடர், ஓர் ஓரம் ஒரு திரவத்தின் பரப்பிலிருக்குமாறு நிலைக்குத்தாகப் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வடரைத் தாக்கும் விளையுளுதைப்புக்கும், அதன் அமுக்கமையத்தின் தானத்திற்கும் கோவைகள் பெறுக.

ஒரு செவ்வக வெட்டுடைய, மூடிய பொள்குழாயொன்று தவிர்க்கத்தக்க தடிப்புள்ள சுவர்களைக் கொண்டுள்ளது. அது, தன் நீளம் கிடையாகவும், தன் மேல்முகம் நீரின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குச் சமாந்தரமாகவும் இருக்குமாறு, அப்பரப்பிலிருந்து அப்மேல்முகம் ஆழம் d இலே கீழாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அதன் முனைவெட்டினது கிடையானதும், நிலைக்குத்துமான ஓரங்களின் நீளங்கள் முறையே b, h ஆகும். முனைமூடிகளின்மீது விளையுளுதைப்பு யாதுமில்லை என்று உறுதியாக்குவதற்கு, அக்குழாயினுள் இருக்கும் காற்றின் அமுக்கத்தை எப்பெறுமானத்துக்கு ஏற்றவேண்டும்? இவ்வகையில் ஒவ்வொரு முனைமூடியினுமுள்ள விளையுள் முறுக்குதிறனைக் கணிக்குக.

36. ஆக்கிமிடீசுவின் கோட்பாட்டைக் கூறுக.

தம் அச்சுக்கள் சமாந்தரமானதும், ஒரு வரியிலே ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டதுமான, நீரிலே மிதக்கும், மூடிய பீப்பாய்த் தொடரின்மேல் குறுக்காக ஒரு பலகை வைக்கப்பட்டு, ஒரு படகுப்பாலம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. பீப்பாய் ஒவ்வொன்றினது நீளம் 10 அடி, விட்டம் 3 அடி ஆகும். அப்பலகையின் மட்டம் நீர்ப்பரப்பிலிருப்பது 1 அடி உயரத்திலுள்ளது எனக் காணப்படுகின்றது. அப்பலகையின்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மட்டத்தின் உயரத்தை 6 அங்குலத்தினுற் குறைப்பதற்கு ஒவ்வொரு பீப்பாவினுள்ளும் அண்ணளவாக எத்தனை கலன் நீரைப் புகுத்துவீர்?

[கன அடி நீர் = 10 கலன்]

37. ஓர் திண்மக் கூம்புத் துண்டின் வட்ட முகங்களின் ஆரைகள் முறையே a, 4a ஆகும். அவற்றின் இடைத்தூரம் 3a. இக் கூம்புத் துண்டு அச்சுக்கிடையாகத் திரவமட்டத்திலிருந்து 6a ஆழத்தில் அமுக்கப்பட்டுள்ளது. வளைந்த பரப்பிலுள்ள விளையுள்ளமுக்கம் $(W/7)\sqrt{949}$ எனக் காட்டுக.

இதில் W வெளியேற்றப்பட்ட திரவத்தின் நிறை.

38. அடி கிடையாகவுள்ள ஒரு சாயுருளையில் முறையே p, σ அடர்த்தியுடைய (σ<p) இரு திரவங்கள் h ஆழத்தில் ஊற்றப்பட்டுள்ளன. இத்திரவங்களினுல் வளைபரப்பில் ஏற்படும் உதைப்பு $\frac{1}{2}$Wh ∝ [(3p+σ)/(p+σ)] கோதா என்ற திருப்பத்தையுடைய இணைக் குச்சமமெனக் காட்டுக. இங்கு W திரவத்தின் முழு நிறை. ∝ அடியுடன் உருளையின் அச்சின் சாய்வு.

39. ஓர் பக்கம் திரவ மட்டத்துடன் உள்ள ஒரு செவ்வக அடரின் அமுக்க மையத்தை காண்க.

நீளம் l, அகலம் b, உயரம் h, உடைய ஓர் செவ்வகத் தொட்டியில் அரைப்பங்கு நீர் உள்ளது. l நீளமுள்ள தளத்திலுள்ள விளிம்பைப் பற்றி நீர் மட்டாக வெளியேறும் வரை தாங்கி இருப்பப்படுகிறது. சரிந்த முகங்கள் இரண்டிலும் தாக்கும் உதைப்பின் பருமனையும் தாக்கப் புள்ளிகளையும் காண்க.

இரு தளங்களும் சந்திக்கும் கோட்டைப் பற்றி இவ்வுதைப்புகளின் திருப்புதிறன்

$W(b^2-h^2)/3\sqrt{(b^2+h^2)}$ எனக் காட்டுக.

இதில் W அதிலுள்ள நீரின் நிறை.

40. l நீளமுள்ள ஓர் உருளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக ஓர் பாரமான திரவத்தில் மிதக்கிறது. d_1 தன்னீர்ப்புடைய பாரம் குறைந்த ஓர் திரவம் முதல் திரவத்தின்மேல் d_1 உயரத்திக்கு விடப்பட்டபோது உருளை மட்டுமட்டாக தாழ்ந்தது. தன்னீர்ப்பு d_2 உடைய திரவம் உபயோகிக்கப்படும்போது உருளை மட்டாகத்தாழ்வ

க. ப; H. 8.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தற்கு இரண்டாம் திரவத்தின் உயரம் d_2 ஆகக் காணப்பட்டது. உருளையின் தன்னீர்ப்பு,
$[d_1 \sigma_1 (l-d) - d_2 \sigma_2 (l-d_1)] / l(d_1 - d_2)$ எனக் காட்டுக.

41. a ஆரையும் தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{2}$ ம் உள்ள ஒரு கோளம் b ஆரையுடைய ஒரு உருளையின் அடியில் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன்மேல் d உயரத்திற்கு நீர் விடப்படுகிறது. அக்கோளம் விடுதலையாக்கப்படத் தன் சமநிலையாகிய நிலையை எடுத்துக்கொள்கிறது. W அக்கோளத்தின் நிறையாயிருக்குமிடத்து, இழுக்கப்பட்ட நிலைச்சத்தி

$$W\left[d - \frac{11a}{8} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\right]$$ என நிறுவுக.

42. தளம் கிடையுடன் θ கோணத்திலும் மையம் திரவமட்டத்திலிருந்து h ஆழத்திலும் அமுக்கப்பட்ட a ஆரையுடைய வட்டத்தட்டின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க.

கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்த a ஆரையும் W திணிவுமுடைய ஓர் வட்டக் கதவு ஓர் தாங்கிக்குப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கதவின் அதியுயர் புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்டு அதிதாழ் புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கதவின் அமுக்கம் கதவிற்குச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கியுள்ளது. கதவின் மையத்திலிருந்து 4a உயரத்திற்கு நீர் தாங்கியில் உள்ளது. பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கதவிற்குச் சமாந்தரமான, செங்குத்தான கூறுகள் முறையே W சைன் θ, $\frac{1}{8}(16W^1 - W^1 \text{சைன்}\,\theta - 4W\,\text{கோசை}\,\theta)$ எனக் காட்டுக. (இதில் $W^1 = \pi a^3 w$) ஓரலகு கன நீரின் நிறை.

43. ஒரு தாங்கியின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்தின் ஒரு பாகத்திற்கு a ஆரையுடைய வட்டத் தட்டொன்று பொருத்தப்பட்டுள்ளது. தளத்திற்குச் செங்குத்தான மூன்று விசைகள் P, Q, R என்பவற்றால் இது தாங்கப்படுகிறது. இவ்விசைகள் முறையே பரிதியில் உள்ள A, B, C என்ற புள்ளிகளில் தாங்கப்படுகின்றன. இவற்றுள் AB என்ற புள்ளிகள் மையத்தின் மேல் a/2 உயரத்தில் உள்ளன. C என்ற புள்ளி நிலைக்குத்தாக C க்குக் கீழேயுள்ளது. தாங்கிக்குள் தட்டின் மையத்தின்மேல் h(>a) உயரத்திற்கு நீர் இருப்பின்,

$$\frac{P}{a} = \frac{Q}{2h} = \frac{R}{2h+a} = \frac{\pi a^2 \sigma}{4}$$ என நிறுவுக.

இங்கு σ நீரின் அடர்த்தி.

44. a ஆரையுடைய ஒரு அரை வட்டத்தின் திணிவு மையம் மையத்திலிருந்து $4a/3\pi$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

a ஆரையும் உயரம் a கோதா ∝ உம் உடைய ஒரு அரைக் கூம்புருவான பாத்திரம் அச்சுத்தளம் ஒரு முக்கோணத் தட்டினால் மூடப்பட்டதும் அரைவட்ட ஒரு கிடைத்தளத்தில் இருக்கக்கூடியதாக வைக்கப்பட்டு உச்சியிலுள்ள ஒரு சிறு துவாரத்தினூடாக நீரினால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. பாத்திரத்தின் வளைபரப்பில் உதைப்பின் கிடைநிலைக்கூறுகளைக் காண்க. மேலும் வளைபரப்பில் உதைப்பின் தாக்கக்கோடு அச்சுடன் தான்$^{-1}$[(2/π) கோதா ∝] கோணம் அமைந்திருக்கிறதெனவும் நிறுவுக.

45. நிலைக்குத்து உயரம் h உம் குறுக்குவெட்டுப்பரப்பு b ஐயும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையொன்று ρ அடர்த்தியுடைய திரவத்தைக் கொண்டுள்ளது. உள்ளீடான நிறையற்ற குறுக்குவெட்டுப்பரப்பு a ஐக் கொண்டுள்ள இன்னொரு உருளையானது, அதன் மேல்வாய் திறந்தவண்ணம் மேல்நோக்கி இருக்க அதனது அடியானது முன்கூறிய உருளையின் அடியுடன் ஓர் மீள்தன்மை இழையினால் திரவம் இருக்கத்தக்கதாகக் கட்டப்பட்டுள்ளது. மீள்தன்மை இழையின் இயற்கை நீளம் $\frac{1}{2}$h, அதன் மீள்தன்மை மட்டு $\frac{1}{2}$ gpah, பின் σ தன்னீர்ப்பை உடைய ஒரு திரவமானது மெதுவாக உள்ளே உள்ள உருளையில் இரு திரவங்களின் மட்டங்களுக்குச் சமனாகும் வரையில் விடப்பட்டது. இரண்டாம் உருளை அமிழ்ந்த ஆழம் $\frac{1}{2}$h / (2—a/b—/σp) எனவும் σ< p (2—a/b) எனவும் காட்டுக. வில்லின் கனவளவைத் தவிர்க்க.

46. ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ABC யானது நிறை W உம் தன்னீர்ப்பு d யும் கொண்டது. இது நீரின் மேற்பரப்புக்கு மேலேயுள்ள ஒரு நிலைத்த அழுத்த பிணையல் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. இம்முக்கோணம் சமநிலையின் ஓர் நிலையில் AB கிடையாகவும் C அமிழ்ந்தும் உள்ளது. மறு சமநிலையில் B யும், C யும் BC கிடையாகும்வண்ணம் சமநிலையிலிருப்பின் பிணையிலுள்ள அமுக்கம்,

$$2W(1-\sqrt{d}) / \sqrt{d}$$ என நிறுவுக.

47. ஒரு கல்லாலான குற்றியொன்று அதன் மேற்பகுதி நீரின் மேற்பரப்புடன் இருக்குமாறு ஒரு தொட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. நீரின் மேற்பரப்பிலிருந்து கல்லைச் சற்று வெளியே எடுக்கச்செய்யப்படவேண்டிய வேலை (W—$\frac{1}{2}$W^{1})l (1—A/B) என நிறுவுக.

W குற்றியின் நிறை. W^{1} குற்றியால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை A யானது குற்றியின் குறுக்குப்பரப்பு, B யானது தாங்கியின் குறுக்குப்பரப்பு. l குற்றியின் உயரம்.

48. ஒரு பாயியில் உள்ள அமுக்கம் p ஆனது புவியீர்ப்பின் கீழ் ஆழம் z உடன் dp/dz=gp எனும் விதிக்கிணங்கமாகும் என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இங்கு p= ஆழம் z இல் பாயியின் அடர்த்தி. h உயரமுள்ள ஒரு உருளையானது மாறுவெப்பநிலை வாயுவால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. உருளையின் அடியில் பாயியின் அடர்த்தி ρ_0 உம், அமுக்கம் p_0 உம் ஆயின் மேற்பகுதியில் பாயியின் அடர்த்தி $p_0 e^{-kh}$ என நிறுவுக.

இங்கு $k=(gp_0)/(p_0)$

49. 12 அங். உயரமுள்ள ஓர் ஒருசீரான சமபக்க முக்கோணத் தட்டு ABC இன் தன்னீர்ப்பு 2 ஆகும். தட்டு வெற்றுப்பாத்திரத்தினுள் உச்சி A இற்கும், நிலையான புள்ளி D இற்கும் இணைக்கப்பட்ட நீளம் இலேசான மீள்தன்மையிழையினால் சமநிலையில் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. இழையின் இயற்கை நீளம் 9 அங். நீட்டப்பட்ட நீளம் 18 அங். D இற்குக் கீழே நீர் மட்டம் 18 அங். இல் இருக்கும்வரை பாத்திரத்தினுள் நீர் மெதுவாக ஊற்றப்படுகிறது. நீர் மட்டத்திற்கு மேல் A யின் உயரத்தைக் காண்க.

50. 2/3 தன்னீர்ப்புள்ள ஓர் மரக்குற்றி, நீர்த்தாங்கியினுள் மிதக்கிறது. அதற்கு இணைக்கப்பட்ட இழை, ஒரு சீரான உலோகக் கோல் AB இலுள்ள புள்ளி C இற்கு ஒட்டப்பட்டுள்ளது. C, AB ஐ 5, 4 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. W நிறையும், தன்னீர்ப்பு 8 உம் உடைய இக்கோல், A தாங்கியின் அடியில் ஓய்விலிருக்க, நிலைக்குத்துடன் சரிவாக முற்றாக அமிழ்ந்த நிலையில், சமநிலையில் இருக்கிறது. A இலுள்ள தாக்கத்தின் பருமன் திசையையும், மிதக்கும் மரக்குற்றியின் திணிவின் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் காண்க.

51. ஒரு செவ்வகத்தட்டு ABCD இல் AB=10 அங்; AD=20 அங். தட்டு பகுதி நீரில் அமிழ்த்தப்பட்ட நிலையில் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்விலிருக்கிறது. உச்சி B, மேலுள்ளது அது A இலுள்ள நிலையான சுழற்சித்தானத்தைப் பற்றி சுயாதீனமாகச் சுழலக்கூடியது. A, மட்டத்திற்குமேல் 8 அங். இல் உள்ளது. தட்டின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

52 சீரான அடரென்று கருதக்கூடிய M திணிவுள்ள பட்டமொன்று பருமட்டாக ஓய்விற் பறக்கிறது. m திணிவுள்ள சிறிய பொருளொன்று அடியிற் கட்டப்பட்டுள்ளது. பட்டத்தின் பரப்பு A ஆகும். அது பறக்கும் இடத்தில் காற்று அமுக்கம் நிலைக்குத்தான திசையில் p ஆகும். பட்டத்தின் கயிறு நிலைக்குத்துடன் φ கோணத்தையும் பட்டம் θ கோணத்தையும் ஆக்குகின்றன எனின்,

தான் $\varphi = (pA\ \text{கோசை}^2\theta) / (pA\ \text{சைன்}\ \theta\ \text{கோசை}\ \theta - (M+m))$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து φ ஒரு வீச்சுப் பெறுமானங்களுக்கிடையில் அமையாதெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

53. ஒரு மெல்லிய அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் திணிவு m ஆகும். அது m^1 திணிவுள்ள நீரைக் கொண்டுள்ளது, இக் கிண்ணமானது ஒரு கிடையுடன் ∝ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு கரடான தளத்தில் ஒய்விலுள்ளது. கிண்ணத்தின் விளிம்பின் தளம் கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்திருப்பின் சைன் $\theta = 2\,[(1 + m/m^1)]$ சைன் ∝ என நிறுவுக

54. a நீளமுள்ள AB என்னும் ஓர் சீர்க்கோல் அதன் முனை A பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. A ஆனது ஓர் நீர்ப்பரப்பிற்கு மேல் a உயரத்திலுள்ள ஓர் புள்ளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. கோலானது நீரில் ஓர் பகுதி அமிழ்ந்த நிலையிலுள்ளது. கோல் ஆக்கப்பட்ட பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு S, $S < \frac{3}{4}$ ஆயிருப்பதற்கேற்ப கோலுக்கு ஒரு சாய்ந்த நிலையில் சமநிலை உண்டென நிறுவி கோலின் சாய்வு நிலைக்குத்துடன் இந்நிலையில் என்னவாகும் எனவும் காண்க.

55. a ஆரையுடைய ஒரு அரைவட்டத் தகடானது தன் விட்டம் AB நிலத்தின் மேற்பரப்பில் இருக்கும் வண்ணம் ஓர் ஒரினத் திரவத்தில் தன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்கும் வண்ணம் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அதன் அமுக்க மையம் AB க்குக் கீழ $3\pi a/16$ தூரத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

அடரானது தளம் நிலைக்குத்தாயிருக்கவும் AB கிடையாக இருக்கவும் திரவத்தில் h ஆழம் அமிழ்த்தப்பட்டது. அமுக்கமையம் AB யின் கீழ் $a(16h + 3\pi a) / 4(4a + 3\pi h)$ ஆழத்திலுள்ளது என நிறுவுக

56. ∠ABC செங்கோணமாகவுள்ள முக்கோணத்தகடு ABC யின் பக்கங்கள் a, b, c ஆகும். இத்தகடு p அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் நிலைக்குத்தாக மிதக்கிறது. AB நிலைக்குத்தாகவும் A யானது B க்கு மேலேயும் உள்ளது. உச்சி A யானது மேற்பரப்பிலிருந்து d ஆழத்தில் உள்ளதாயின் தட்டின் அமுக்கமைய ஆழம் A யின் கீழே,

$c(4d + 3c) / 2(3d + 2c)$ தூரத்திலுள்ளது என நிறுவுக.

57. ஓர் பக்கம் திரவத்தின் மேற்பரப்பிலிருக்கும் ஒரு முக்கோணத்தின் அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்க:

பக்க நீளம் 2a உடைய ஓர் சமபக்க முக்கோணம் ABC யானது A மேற்பரப்பிலிருக்கும் வண்ணமும் AB நிலைக்குத்தாயிருக்கும் வண்ணமும் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. D யானது C க்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள புள்ளியாகும். DC, DB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை அமுக்க மையம் வெளிப்புறமாக 4:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக அமுக்கமைய ஆழத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

58. ஒரு வட்ட உருளையுள் p அடர்த்தியுள்ள திரவம் 8b உயரத்துக்கு ஊற்றப்பட்டுள்ளது.

b ஆரையும் p/2 அடர்த்தியும் 2b உயரமுமுடைய ஒரு திண்ம உருளை பெரிய உருளையின் அடியில் கட்டப்பட்ட ஒரு நூலின் உதவியால் சிறியதன் அடி பெரியதன் அடியிலிருந்து 2b உயரத்தில் இருக்குமாறு கட்டப்பட்டது. சிறிய உருளை இந்நிலையில் இருக்கும்போது தொகுதியின் நிலைச்சத்திக்கும் சுயாதீனமாக மிதக்கும்போதும் உள்ள நிலைச்சத்தியில் வித்தியாசம் $39/8 pg\pi b^4$ என நிறுவுக.

அலகு 7

மாயவேலையும், அழுத்தச் சத்தியும்

1. பின்வரும் உதாரணத்தில் மாயவேலைக் கோட்பாட்டின் பிரயோகத்தை எடுத்துக் காட்டுக.

OA, OB எனும் ஈர் ஒரு சீர்க்கோல்கள், ஒவ்வொன்றும் நீளம் 2a உம், நிறை w உம் கொண்டவை. அவை O இலே சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டும், w எனும் சுமையைத் தாங்கியும் தம் முனைகள் A, B ஆனவை ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசை மீது இருக்குமாறு, நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் சமச்சீராக நிற்கின்றன. ஒவ்வொன்றும் நீளம் b உள்ள CO, CE, CF எனும் மூன்று இலேசான உதைச் சட்டங்கள் O ஐயும், முறையே OA, OB இலுள்ள புள்ளிகள் E, F ஐயும் O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழேயுள்ள ஒரு பொது ஒப்பமான மூட்டு C இற்குத் தொடுக்கின்றன. அக்கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் கோணங்கள் θ ஆக்குமாறு பிடிக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்வுதைச் சட்டங்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

8. ஒரு காப்புநிலை விசை என்பது யாது?

நீளம் 2a உள்ள ஓர ஓரசீர்க்கோலின் கீழ்முனை b எனும் நீளம் உள்ள ஓர் இலேசான நீட்டமுடியா இழையினால் ஒரு நிலையான புள்ளி O இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உயரம் b இல் நிலையாக உள்ள ஓர் ஒப்பமான கிடை அடியின்மீது அக்கோல் ஓய்வு நிலையில் இருக்கின்றது அக்கோலினூடான நிலைக்குத்துத்தளம் அவ்வடிக்குச் செங்குத்தானது. யாதுமொரு நிலையில் அத்தொகுதியின் அழுத்தச் சத்திக்கு ஒரு கோவை பெறுக. $a<4b$ எனின் அக்கோலுக்கு இரு சமநிலைகள் உண்டு எனக் காட்டி, இவற்றுள் ஒன்று நிலைக்குத்தானதென்றும், சாய்ந்திருக்கும் அதன் சமநிலை உறுதியானதென்றும் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, BC என்னும் ஒரு சீரான சமனுன கோல்கள் இரண்டு B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB இன் முனை A ஆனது நிலையுள்ள புள்ளியொன்றிற்கு ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அம் முழுத்தொகுதிக்கு A யினூடாக நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் இயங்குவதற்குச் சுயாதீனமுண்டு. தளம் ABC இல் 2W எனும் கிடைவிசையொன்று B ஐ எதிர்நோக்கி முனை C இல் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. தொகுதியானது சமநிலையிலிருக்கும் போது கோல்கள் AB, BC என்பன நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் சாய்வுக் கோணங்களை மாயவேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

4. நிறை 2W உம் நீளம் 2a உம் கொண்ட AB என்னும் ஒரு சீரான கோலொன்றின் முனை A ஆனது நிலைத்த புள்ளியொன்றிற்கு சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை B இல் இணைக்கப்பட்டதும் நீளம் l ($4a<l<6a$) கொண்டதுமான நீட்டமுடியாத இழையொன்று A இற்கு நிலைக்குத்தாய் மேலிருக்கும் ஒப்பமான C எனும் முளையொன்றின்மேல் சென்று தன் சுயாதீனமான முனையில் W எனும் நிறையொன்றைத் தாங்குகிறது. AC = 2a ஆகும் கோல் AB ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\theta\,(<\pi)$ ஆக்கும்போது, அத்தொகுதியின் அழுத்தச் சத்தியைக் காண்க. அதிலிருந்து உறுதிச் சமநிலைகளையோ காண்க.

5. A யில் அழுத்தமாக மூட்டப்பட்ட பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாக திரும்பக்கூடிய இலேசான கோல் AB, முனை B யில் தொங்கும் திணிவு m ஐக் கொண்டிருக்கிறது. 2a நீளமுள்ள இலேசான இழையொன்று B இற் பொருத்தப்பட்டு A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள முனை C இன் மேலாகச் சென்று சுயாதீன முனையில் திணிவு Km ஐக் கொண்டிருக்கிறது. AC=AB=a ஆயின், நிலைக்குத்துக்குச் சாய்வாக, கோல் சம நிலை சாத்தியமாவதற்கு, K இன் வீச்சுக்களைக் காண்க.

கோல் கிடையாக இருக்க சமநிலை சாத்தியமெனத் தரப்பட்டால்' K இன் பெறுமானத்தை காண்க. கிடைச் சமநிலையிலிருந்து கோலானது சிறிது குழப்பப்பட்டால், கோல் மீண்டும் கிடைநிலைக்கு வருமா வராதா எனத் தீர்மானிக்குக.

6· W நிறையுடைய ஒரு சீரான கோல் AB தனது முனை A கிடைத்தரையிலும், முச்சமகூறிடும் மேல்புள்ளி கோலுக்குச் செங்குத்தான அழுத்தக் கிடைத் தண்டவாளத்திலும் தொட்டுக் கொண்டிருக்க ஓய்விலிருக்கின்றது. ஒரு நிறை λ முனை, B இல் தொங்கக் கோலைக் கொண்டிருக்கும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கிடையாக A இல் பிரயோ

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கிக்கப்படும் விசை P இனால் கோல் வழுக்காமல் தடுக்கப்படுகிறது. கோல் கிடையுடன் θ ஐ அமைக்க, முனை A ஆனது தரையிலிருந்து தூக்கப்படுவதால் கோலின் சமநிலை உடைக்கப்படுமாயின், தான் $\theta < 1/\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

7. இரு சீர்கோல்கள் AB, BC என்பன ஒரே பதார்த்தத்தில் செய்யப்பட்டதுடன் ஒரே குறுக்கு முகப்பரப்பையும் கொண்டவை. அவை B யில் ஒரு செங்கோணத்தை ஆக்குமாறு B யில் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உச்சி B யானது கீழ்முகமாக இருக்கும்வண்ணம் இவை ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஒரே கிடை மட்டத்திலும் C இடைத்தூரத்திலுமுள்ள இரு அழுத்தமான முனைகளில் தாங்கப்படுகின்றன. சமநிலையில் கோல் BC, θ கோணத்தை அமைப்பின் θ ஆனது.

$2(a+b)c$ கோசை $2\theta = b^2$ கோசை $\theta - a^2$ சைன் θ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டுக. இங்கு $AB = a$, $BC = b$.

8. ஒரு பக்கம் a நீளமுள்ள சதுரத் தட்டொன்று, அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகும் வண்ணம், b தூரத்திற் கிடையில் ஒரே உயரத்திலமைந்த இரு முனைகளுக்கிடையில் தாங்கப்படுகின்றது. இரு விளிம்புகள் θ கோணத்தில் கிடையுடன் சரிந்துள்ளனவாயின் தட்டின் மையம் முனைகளுக்குமேல் $a/2$ (சைன் θ + கோசை $\theta - b/2$ சைன் 2θ) என்ற உயரத்தில் உள்ளது எனக் காட்டி,

(i) $a < 2b\sqrt{2}$ ஆயின் மூன்று நிலைகளில் சமநிலை சாத்தியம் எனக் காட்டுக.

(ii) $a > 2b\sqrt{2}$ ஆயின் ஒரு நிலையியல் மட்டுமே சமநிலை உள்ளதெனவும் காட்டுக.

9. ஓர் இலேசான விறைப்பான கோலொன்று மையத்தில் θ கோணத்தை ஆக்கும் வில்லின் வடிவத்தில் உள்ளது. அதன் அந்தங்களில் M, m திணிவுள்ள இரு துணிக்கைகள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. அவ்வில் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகும் வண்ணம், ஒரு கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. விற் பகுதி தளத்துடனிருக்குமாறு தொகுதி ஓய்விலுள்ளது. எந் நிபந்தனையில் சமநிலை உறுதியானது எனக் காண்க.

10. ஒரு மெல்லிய பொள்ளரைக் கோளத்தின் திணிவு m, ஆரை r. இது R ஆரையுடைய ஒரு கரடு முரடான கோளத்தின் நுனியில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிலையில் அதன் விளிம்பு மேலேயும் கிடையாகவும் உள்ளது. இந்நிலையில் இருந்து சிறு உருளும் இடப்பெயர்ச்சி கொடுக்கப்பட்டால் அதன் நிலைப்பண்புச் சக்தி,

$$\frac{mg}{a}\left[2(R+r) \text{ கோசை } \theta - r \text{ கோசை } \left\{\frac{R+r}{r}\theta\right\}\right] + \text{ மாறிலி}$$

என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இங்கு θ என்பது மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடு மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் அமைக்குங் கோணமாகும். இதை உபயோகித்து அல்லது வேறு வழியாக $R \lessgtr r$ என்பதற்கிணங்க ஆரப்பநிலை உறுதி அல்லது உறுதியற் சமநிலை என நிறுவுக. $R=r$ என்ற வகையில் சமநிலையைப் பற்றி ஆராய்க.

11. M திணிவும் ஒரு சீரானதும் ஆன ஒரு சதுரப் பலகையானது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே a இடைத்தூரத்தில் (கிடையாக) உள்ள இரு அழுத்தமான முனைகளால் தாங்கப்படுகின்றன. இவ்வடசின் மூலை விட்டத்தின் நீளம் D. $(D > 4a)$. ஒரு மூலைவிட்டம் நிலைக்குத்தாகவும் அதன் கீழ் முனையில் ஒரு m திணிவு இணைக்கப்பட்டும் இருப்பின் $4\,am > M\,(D-4\,a)$ ஆயின், சமநிலை உறுதியானது என நிறுவுக.

12. ஒவ்வொன்றும் நீளம் 21 ஆயும் நிறை W வாயுமுள்ள DA, DB, DC என்னும் மூன்று சீரான சமகோல்கள் D யில் ஒருங்கே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, பக்க நீளம் a யாயும் தளம் கிடையாயுமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் மூலைகளிலுள்ள மூன்று சிறிய ஒப்பமான நிலையான வளையங்களுக்கூடாக முறையே செல்கின்றன. அன்றியும் ஒரு நிறை w வானது D இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது;

$\frac{1}{3}(w/W) < \sqrt{3}\,(1/a-1)$ எனின் சமநிலையின் ஒரு சமச்சீரான நிலை இருத்தல் முடியுமென நிறுவுக.

அன்றியும் அப்போது சமநிலையின் இரு சமச்சீர் நிலைகள் இருக்குமென நிறுவி அவற்றின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

13, மாய வேலைக் கோட்பாட்டைக் கூறுக.

ஒவ்வொன்றும் a நீளமுள்ள ஐந்து இலேசான கோல்கள் BD ஐ மூலைவிட்டமாகக் கொள்ளுமாறு ஒரு சாய்சதுர வடிவில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சாய்சதுரம் BD கிடையாக இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே, AB யும் AD யும் E, F என்னும் இரு முனைகள் மீது தங்கும் வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளன. E யும் F உம் ஒரே கிடைக்கோட்டில் C தூரத்தில் உள்ளன. C யில் ஒரு நிறை W தொங்கவிடப்படுமாயின் அது BD யில், $(W/a\sqrt{3})/(a-2c)$ என்பதற்குச் சமமான தகைப்பை உண்டாக்கும் என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

14. அரை உச்சிக்கோணம் α வாக அமைந்த, அழுத்தமான கூம்பொன்று அதன் உச்சி கீழே அமையும் வண்ணம் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. $2\pi R$ நீளமுள்ள மீள்தன்மைக் குணகம் λ ஆகவுள்ள W நிறையுள்ள வளையமொன்று அக்கூம்பினுள் கிடையாக வைக்கப்படுகிறது, மாயவேலைத் தத்துவத்தைப் பிரயோகித்து ஒய்வு நிலையில் வளையத்தின் மையம், கூம்பின் உச்சியிலிருந்து,

$$R\left[1-\frac{W}{2\pi\lambda}\text{ கோதா }\alpha\right]\text{ கோதா }\alpha$$ தூரத்திலிருக்கும் என நிறுவுக.

15. ஒரு ஒழுங்கான எண் முகியானது m திணிவுடைய சீர்க்கோல்களாலாக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தொகுதி ஒரு மூலையிலிருந்து தொங்கவிடப்படின் ஒவ்வொரு கிடைக்கோலிலுமுள்ள உதைப்பு $(3mg)/(\sqrt{2})$ எனக் காட்டுக.

16. ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணியுருவத்திலுள்ள கோல்களானது ஒரு மூலையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் உருவமானது நிறையற்ற இடையான இரு கோல்களினால் பாதுகாக்கப்படுகிறது. அறுகோணியாக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோலினதும் திணிவு m ஆயின் அக்கிடைக் கோல்களில் உள்ள உதைப்பைக் காண்க.

17. ஐந்து இலேசான சீர்க்கோல்கள் ஒரு சதுரம் ABCD ஆகவும் அதன் மூலைவிட்டம் BD யும் ஆகின்றது. BD இடையுடன் 30° சாய்விலிருக்க, இச்சட்டப்படல் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்விலிருக்கிறது. B, D யில் முறையே 3, 5 நிறைகள் தொங்குகின்றது. A, C இல் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிய விசைகள் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. BD யில் உள்ள தகைப்பின் தன்மையையும் பருமனையும் காண்க.

18. a நீளமும் W நிறையுமுடைய சீர்க்கோல் AB முனை A யில் சுயாதீனமாகச் சுழலக்கூடியதாக ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்கு இறுக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனை B ஒரு இலேசான நீளா இழையினால் W நிறையுள்ள துணிக்கைக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A யின் மட்டத்திலும் A யிலிருந்து a தூரத்திலும் நிலையாகவுள்ள ஒரு அழுத்தமான வளையத்திற்கூடாக இழை செல்கிறது. கோல் கிடைக்கு மேலே θ கோணம் ஆக்கும்போது துணிக்கை சுயாதீனமாகத் தொங்கினால் தொகுதியின் நிலைச்சக்தி,

$$aW\left[\tfrac{1}{2}\text{ சைன் }\theta+2\text{ சைன் }\frac{\theta}{2}\right]$$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\pi - \leq \theta \leq \pi$ ஆகும்போது தொகுதியின் நிலைச்சத்தியின் வரைவை உபயோகித்துச் சமநிலைத்தானங்களைக் காண்க. இவற்றின் உறுதிப் பாட்டைத் துணிக.

19. 2l நீளமும் W நிறையுமுடைய சீர்க்கோல் AB யும் 2a நீளமும் (a<l) நிறையுமுடைய சீர்க்கோல் BC யும் B யில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இரண்டாம் கோலின் முனை ஓர் அழுத்தமான நிலைக்குத்துத் தவாளியினுள் அசையக்கூடியது. முதற்கோலின் முனை A தவாளியிலுள்ள நிலையான புள்ளியில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. CA இரண்டினதும் மட்டத்துக்குக் கீழே B இருக்கும்போது இரு கோல்களின் திணிவு மையங்கள் தவாளியிலிருந்து x தூரத்திலிருக்குமாயின் தொகுதியின் நிலைச்சக்தி,

$$V = W (a^2 - x^2)^{1/2} - (w + 2W)/(l^2 - x^2)^{1/2} + k$$

Wl < (w + 2W) x ஆயின் ஒரு சாய்ந்த சமநிலை உண்டென்றும் அது உறுதியில் சமநிலை எனவும் காட்டுக.

20. AB, AC என்பன ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் W நிறையுமுடைய சீர்க்கோல்களாகும். அவை A யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. B, C யில் 4a நீளமுள்ள ஒரு இலேசான இழையின் முனைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன, இழையின் மையத்தில் ω நிறை தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. ஒரே கிடை மட்டத்தில் 2c இடைத்தூரத்தில் உள்ள இரு ஒப்பமான முளைகள் மீது AB, AC சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை ஆக்குமாயின் மாயவேலை முறைப்படி,

$$\text{சைன்}^3\theta = \frac{2W + \omega}{2W + 4\omega} \cdot \frac{c}{a}$$ எனக் காட்டுக.

21. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள மூன்று சீரான சமநீள கோல்கள் ஒன்றாக மூன்றின் முனைகளும் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டு கீழ் முனைகள் ஓர் அழுத்தக் கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு ஒரு முக்காலி வடிவத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துக்கு θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளன. முக்காலியின் கீழ் முனைகள் மூன்று இலேசான சமநீள இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. மாயவேலைக் கோட்பாட்டைப் பிரயோகித்து ஒவ்வோர் இழையின் இழுவை,

$(W \text{ தான் } \theta)/(2\sqrt{3})$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 8

காவிகள்

1. (i) O ஆள் கூற்றுக்களின் உற்பத்தியாகும். OA, AB, OB இன் சமன்பாடுகள் முறையே $5y = 12x$; $y = 3$; $4y = 3x$ ஆகும். முறையே $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BO}$ திசையில் தாக்கும் 13, 9, 20 அலகுகள் பருமனுள்ள விசைகளின் விளையுளின் பருமனைக் காண்க, இவ்விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(ii) முக்கோணி PQ இன் மையக்கோடுகள் G இற் சந்திப்பின் $\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{GQ}$, $\overrightarrow{GR}$ இனால் குறிக்கப்படும் தொடைவிசைகள் சமநிலையில் இருக்கும் என நிறுவுக.

2. O என்பது கூர்ங்கோண முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்ட மையமாகும். பருமனில் BC, CA, AB இன் நீளங்களுக்கு விகிதசமமான விசைகள், முறையே பக்கங்கள் BC, CA, AB இன் செங்குத்து இருசமவெட்டியின் வழியே தாக்குகின்றன. எல்லாம் O ஐ நோக்கியுள்ளன. இத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்குமென நிறுவுக.

ABCDE என்பது ஒரு குவிந்த பல்கோணியாகும் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EA}$ என்னும் தொகுதி விசைகள் ஒரு இணைக்குச் சமமென நிறுவுக.

3. நான்முகி ABCD இன் உச்சிகள் A, B, C, D இன் நிலைக்காவிகள், உற்பத்தி O இற்குச் சார்பாக, முறையே a, b, c, d ஆகும், விசைகள் $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda\overrightarrow{AC}$, $\lambda\overrightarrow{AD}$, $\mu\overrightarrow{OB}$, $\mu\overrightarrow{OC}$, $\mu\overrightarrow{OD}$ என்பன முறையே விளிம்புகள் AB AC, AD, OB, OC, OD இன் வழியே தாக்குகின்றன, இங்கு λ, μ என்பன ஒருமைகளாகும். இத்தொகுதி விசைகளின் விளையுளைக் காண்க.

$\lambda = 2$; $\mu = 3$; $a = 15i; + 5j$; $b = +i - 5k$; $c = 3i + 2j - 3k$; $d = -4i - 8j + 2k$ ஆயின், நான்முகி விளிம்பு BC வழியே பிணைக்கப்பட்டால், தொகுதியைச் சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்கு தேவையான இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. செவ்வக அச்சுகள் ox, oy இற்குச் சார்பாக, ஒரு செம்பக்க முக்கோணத் தகடு, தனது உச்சிகளை $(2a/\sqrt{3}, o)$; $(-a/\sqrt{3}, o)$; $(-a/\sqrt{3}, -a)$ எனும் புள்ளிகளில் கொண்டுள்ளது. சமமான பருமன் P ஐ உடைய இரு விசைகள் ox, oy இன் திசைகளில் O இல் தாக்கு கின்றன. தகட்டின் மூன்று பக்கங்களின் வழியாகவும் தாக்கும் விசைகளினால் தொகுதி சமநிலையில் பேணப்படுகிறது. இவ்விசைக ளின் பருமன்களையும், திசைகளையும் காண்க.

5. விசைகள் 3p, 4p 5p என்பன a பக்கமுடைய ஓர் சமபக்க முக்கோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CA வழியாக எழுத்துக்களின் ஒழுங்குத்திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பரு மன், திசையையும், அதன் தாக்கக்கோடு AB (அல்லது நீட்டப் பட்ட AB) ஐ சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

2pa பருமனுள்ள இணையொன்று, முக்கோணியின் தளத்தின் CBA ஒழுங்குத் திசையில் தாக்க. தொகுதியானது விசை Q இன் சேர்க்கையால் சமநிலையில் பேணப்படுகிறது. Q இன் பருமன், திசை தாக்கக்கோடு என்பவற்றைக் காண்க.

6. (a, —a; (2a 2a); (o, a) எனும் புள்ளிகள் பற்றி மணிக் கூட்டு எதிர்த்திசையில் ap, 6ap, 11 ap திருப்பங்களையுடைய ஒரு தொடைவிசைகள் செவ்வக அச்சுக்கள் Ox, Oy இன் இடத்தில் தாக்கு கின்றன. தொகுதியை, அச்சுக்களின் திசையில் x, y கூறுகளையு டைய O இலுள்ள ஒரு தனிவிசையாகவும் ஒரு இணை G ஆகவும் ஒடுக்குக. x, y, G இன் பெறுமானங்களையும் தருக.

(3t+2a, 4t) புள்ளிபற்றி தொகுதியின் திருப்பம், t இன் எல் லாப் பெறுமானங்களுக்கும் பூச்சியம் எனக்காட்டி, தொகுதியின் விளை யுளின் தாக்கக் கோட்டுச் சமன்பாட்டையும் காண்க.

7. x இலிருந்து y நோக்கி xy வழியே தாக்கும் xy பருமனுள்ள விசை xy இனால் குறிக்கப்படும் ABCD ஒரு நாற்பக்கல், AB, pAD, pCB, pqCD இன் விளையுள் AC ஐ m இலும் BD ஐ N இலும் வெட்டுகிறது. $\frac{AM}{MC} = q$ எனவும், $\frac{BN}{ND} = p$ எனவும் விளையுள், $(p+1)(q+1)$ MN எனவும் காட்டுக.

(a) M உம் N உம் பொருந்துவனவாயின்,

(b) $p = -1$; $q \neq -1$ ஆயின்,

(c) $p = q = -1$ ஆயின், விளையுளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பிற் சேர்க்கை

1 O என்னும் உற்பத்தியொன்று பற்றி AB என்னும் புள்ளிகள் இரண்டின் தானக்காவிகள் முறையே a உம், b உம் ஆகும். AB ஐ p : q என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கின்ற C எனும் புள்ளியின் தானக்காவியைக் கண்டு, அதை $\lambda a+\mu b$ என்ற வடிவத்திலும் எழுதுதல் முடியுமெனக் காட்டுக. இதில் $\lambda+\mu=1$.

ABCD எனும் நான்கு ஒரு தளப் புள்ளிகளின் தானக்காவிகளாகிய a, b, c, d என்பவை $d=\lambda a+\mu b+vc$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன: இதில் $\lambda+\mu+v=1$. AB, DC என்பன E இல் சந்தித்தால் E இன் தானக் காவி $\frac{1}{\lambda+\mu}$, $(\lambda a+\mu b)$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

2. (a) ஒரு காவியை வரையறுத்து கூட்டல் விதியைக் கூறுக. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள் ஏன் காவிகளால் வகைக்குறிக்க முடியும் என்பதற்குக் காரணங்கள் தருக. காவியினுல் வகைக்குறிக்கப் படக்கூடிய பௌதிக கணியங்களில் வேறொன்றை உதாரணமாகத் தருக

காவிகளின் முறையை உபயோகித்து,

(i) விசை முக்கோணித் தோற்றத்தையும்

(ii) (a) $\lambda>\mu$, $\mu>0$ ஆயிருக்கும்போதும்)b) $\lambda\mu<0$, $\lambda+\mu\neq0$ ஆயிருக்கும்போதும் விசைகளுக்கான $-\lambda\mu$ தேற்றத்தையும் நிறுவுக.

(b) p, q, r எனும் மூன்று காவிகள் ஒரு தளத்திலிருப்பதற்கு வேண்டிய ஒரு போதிய நிபந்தனை $\lambda p+\mu p+vr=0$ ஆகுமாறு எல்லாம் பூச்சியமாக இல்லாத λ, μ, v எனும் எண்ணிகள் இருப்பதாகும் என்று நிறுவுக. i, j, k என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயிருக்கும் மூன்று அச்சுகள் வழியே அமைந்துள்ள அலகுக் காவிகளாகும். மூன்று காவிகள்,

$$p=2i+3j+5k$$
$$q=3i+7j+k$$
$$r=16i+14j+\alpha k$$

என்பவற்றுல் தரப்பட்டுள்ளன. அவை ஒரு தளத்திலிருந்தால் α இன் பெறுமானத்தைக் கணித்து அதிலிருந்து அவற்றின் கூட்டுத்தொகையான R ஐக் காண்க. மூன்று அச்சுகளுடன் R ஆக்கும் கோணங்களையும் காண்க.

3. (a, 0), (0, α) எனும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் ஒப்பவளையியொன்று $x=\alpha$ சைன்$^3\theta$, $y=\alpha$ கோசை$^3\theta$, $0\leq\theta\leq\pi/2$ என்ற சமன்பாடுகளாற் தரப்படுகின்றது. வளையியாலும் ஆள்கூற்று அச்சுக்களாலும் வரைப்புற்ற ஒரு சீர்த்தள அடரொன்றின் ஈர்ப்புமையத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. ஒவ்வொன்றும் நீளம் 21 உம் நிறை W உம் உள்ள AB, BC எனும் ஒருசீர் ஏணிகள் இரண்டு B இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப் பட்டுள்ளன. முனைகள் A உம் C உம் கரடான கிடைத்தளமொன்றில் ஓய்விலுள்ளன. கோணம் ABC ஆனது 2 α ஆகும். A இலும் C இலும் உராய்வுக்குணகம் μ ஆகும். ($\mu <$ தான் $\alpha < 2\mu$). w எனும் நிறையுடைய ஒருவன் ஏணிவழியே $[2lW(2\mu -$ தான் $\alpha)]/[w$ தான் $\alpha - \mu)]$ என்பதிலும் கூடிய தூரத்திற்கு ஏறுதல் முடியாதென நிறுவுக.

5. ஒவ்வொன்றும் நீளம் a உம் நிறை w உம் உள்ள AB, BC, CD, DE எனும் ஒரு சீர்க்கோல்கள் நான்கு, B, C, D என்பவையில் ஒன்றோடொன்று சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. முனைகள் A உம் E உம் ஒரே மட்டத்தில் 14a/5 என்ற இடைத்தூரத்திலுள்ள நிலைத்த தாங்கிகளில் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. B, D ஆனவை 8a/5 என்ற நீளமுள்ள இலேசான இழையொன்றால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாயவேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி இழையின் இழுவை 11 W/24 ஆகுமெனக் காட்டுக.

6. முறையே $2l_1$, $2l_2$, $2l_3$ நீளமும், w_1, w_2, w_3 நிறையும் உடைய AB, BC, CD எனும் மூன்று சீரான கோல்கள் B யிலும் C யிலும் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியொன்றுடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது.

பின்வரும் ஒவ்வொரு நிலையிலும் சமநிலைத்தானத்தில் கோல்களின் சாய்வுகளைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(அ) தொகுதியை சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்கு முனை D இல் F எனும் கிடையான விசை பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது.

(ஆ) A உடன் ஒரே கிடைமட்டத்திலும் A இலிருந்து 2l தூரத்திலுமுள்ள நிலைத்த ஒரு புள்ளியுடன் முனை D சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது.

7. ஓய்விலிருக்குமாறு உடலொன்றின்மீது உராய்வுவிசை பிரயோகிக்கப்படின் (O எனும் புள்ளியில் தாக்கும்) செவ்வன் மறுதாக்கம் R இனதும், உராய்வுவிசை F இனதும் விளையுள் ஆனது, உச்சி O ஆகவும் அரை உச்சிக்கோணம் λ ஆகவும் அச்சு R வழியே ஆகவும் உடைய நேர்மாற்றுச் செவ்வட்டக் கூம்புக்குள்ளே கிடக்கும் எனக் காட்டுக. இங்கு $\lambda = \tan^{-1}\mu$ ஆகும், μ உராய்வுக்குணகமாகும்.

கிடையுடன் கோணம் α சாய்வுடைய கரடான தளமொன்றின் மீது பொருளொன்று அதன் ஒரு புள்ளி மட்டும் தளத்தைத் தொட்ட வண்ணம் வைக்கப்படுகின்றது. பொருளுக்கும், சாய்தளத்திற்கும் இடையிலுள்ள உராய்வுக்குணகம் $\mu = \tan\lambda$ ஆயின்,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(அ) $\alpha > \lambda$, (ஆ) $\alpha = \lambda$, (இ) $\alpha < \lambda$

எனும் நிலைகளில் பொருளின் சமநிலையை ஆராய்க.

பொருள் சமநிலையில் அமையாவிடின் அதை சமநிலையில் அமர்த்துமாறு விசை P பிரயோகிக்கப்படுமாயின் P இன் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. புவியீர்ப்பிற்குக் கட்டுப்பட்ட நிலையியற் தொகுதியொன்றின் சமநிலையின் உறுதிப்பாட்டிற்கு போதிய நிபந்தனையொன்றைக் கூறுக.

தடிப்பு h உள்ள ஒரு சீர்ப்பலகையொன்று ஆரை a உள்ள நிலைத்த கோளமொன்றின்மீது கிடைநிலையாகச் சமநிலைப்படுத்துகின்றது. நழுவலைத் தடுத்தற்குப் போதிய உராய்வு இருக்கின்றதெனில் $h < 2a$ ஆக இருந்தால் சமநிலை உறுதியானதெனக் காட்டுக.

9. நிறை w வும் நீளம் 2a யும் உடைய BC எனும் ஒருசீரான கோல் C இல் சுயாதீனமாய் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கோலின் முனை B ஆனது. இயற்கை நீளம் $\sqrt{3}a$ யும் மீள்தன்மை மட்டு λ வும் உடைய மீள்தன்மை இழையொன்றினால் C இலிருந்து 2a தூரத்திலும் C உடன் ஒரே கிடைமட்டத்திலும் இருக்கும் A எனும் புள்ளியுடன் தொடுக்கப்பட்டு இருக்கின்றது. தொகுதியின் பொது நிலையிற்கான அழுத்தச் சக்தியை ஒரு பரமானத்தின் சார்பாக எழுதி அதிலிருந்து சமநிலைத் தானத்தில் பரமானத்தின் பெறுமானத்தைத் துணிவதற்கான சமன்பாடு ஒன்றைப் பெறுக.

பின்வரும் ஒவ்வொரு நிலைகளிலும் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதற்கு λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

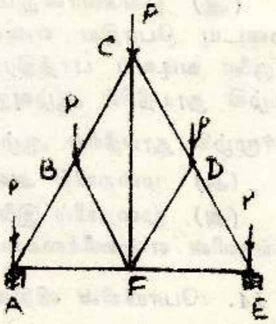
(அ) BC நிலைக்குத்தாயிருக்கும்போது

(ஆ) ABC சமபக்க முக்கோணியாயிருக்கும்போது

மேற்கண்ட நிலைகளில் தொகுதியின் சமநிலையுறுதிப்பாட்டை ஆராய்க.

10. கூரையொன்றின் குறுக்குவெட்டு, கீழே தரப்பட்ட உருவத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அது முனைகள் சுயாதீனமாய் பிணைக்கப்பட்ட, ஒவ்வொன்றும் a நீளமுள்ள AB, BC, CD, DE, EF, FA, BF, FD ஆகிய எட்டு சமனான இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. $\sqrt{3}a$ நீளமுள்ள இலேசான கோலொன்றினால் C, F என்னும் முனைகள் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தொகுதி ஒரே கிடைமட்டத்திலிருக்கும் A, E என்பவற்றிலுள்ள தாங்கிகளின் மீது ஓய்விலிருக்கிறது. கூரையின் ஓடுகளின் நிறை A B, C, D, E என்பவற்றில் தாக்கும் ஐந்து சமனான நிலைக்குத்து விசையினால் மாற்றீடு செய்யமுடியும் என எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

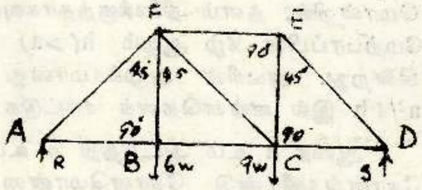


ஒவ்வொரு கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புகளைக் கணித்து இழுவை, உதைப்பு என வேறுபடுத்தி எழுதுக.

CF எனும் நிலைக்குத்துக்கோலை BD எனும் கிடைக்கோலினுல் மாற்றீடு செய்தால் கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் எவையாகும்?

புதிய அமைப்பில் நன்மைகள் குறைபாடுகள் (ஏதும் இருந்தால்) அவற்றை ஆராய்க.

11. தரப்பட்டுள்ள வரிபடமானது A, B, C, D, E, F என்பவையில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஒன்பது இலேசான கோல்களாலான நிலைக்குத்துச் சுமைகள் 6 W, 9 W என்பன முறையே B இலும் C இலும் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. சட்டப்படலானது A இலும் D இலுமுள்ள R, S என்ற நிலைக்குத்து விசைகளாற் தாங்கப்பட்டுள்ளது. A உம் D உம் ஒரே மட்டத்திலுள்ளன, விசைவரிப்படமொன்றை வரைந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு அவற்றில் எவை உதைப்புகள் எவை இழுவைகளெனக் கூறுக.



12. நீரிலே சுயாதீனமாக மிதக்கும் பொருளொன்றின் சமநிலை நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியொன்றின் வடிவத்திலுள்ள $\frac{1}{2}$ என்ற தன்னீர்ப்புடைய, ஒருசீர் அடரொன்று நீரில், செம்பக்கம் நீருக்கு முற்றிலும் வெளியேயும் கிடையுடன் 30° கோணத்தில் சாய்ந்தும் இருக்க, மிதக்க முடியுமெனக் காட்டுக.

13. ஆக்கிமிடிஸ் கோட்பாட்டைக் கூறுக.

41 தொன் நிறையுள்ள நீர்மூழ்கிக்கு 1·025 தன்னீர்ப்புடைய கடல் முற்றிலும் கிழாந்தமாக மட்டுமட்டால் மிதக்கமுடியும்.

(அ) நீர் சேமிப்புத்தொட்டிகளிலிருந்து (கடல்) நீரை அகற்றுவதினுல் அல்லது,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ஆ) ஒவ்வொன்றும் 401 இரு. நிறையும், 10 கனவடி கனவளவு முடைய போதிய எண்ணிக்கையையுடைய நீரிறுக்கமான வெறும் உருளை வடிவப் பாத்திரங்களை நீர் மூழ்கியுடன் இணைப்பதால் நீர் மூழ்கி தூயநீரில் ஆழ்வுறுவதைத் தவிர்க்கலாம்.

நீர்மூழ்கி தூயநீரில் ஆழ்வுறுவதைத் தவிர்ப்பதற்கு

(அ) முறையில் அகற்றப்பட வேண்டிய கடல் நீரின் அளவையும்

(ஆ) முறையில் இணைக்கப்பட வேண்டிய உருளை வடிவப் பாத்திரங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

14. போயிலின் விதியைக் கூறுக.

உருளையொன்று, ஒட்சிசனை 100 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் கொண்டுள்ளது. 20 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் உள்ள 1 கனஅடி ஒட்சிசன், உருளைக்குள் புகுத்தப்பட்டதும் உருளையிலுள்ள அமுக்கமானது 150 வளிமண்டல அமுக்கமாகிறது. வளிமண்டல அமுக்கத்தில் உருளையிலுள்ள ஒட்சிசனின் அளவு இப்பொழுது என்னவாகும்?

15. ஆரை a உடைய வட்டத்தள அடரொன்று, ஏகவினத்திரவமொன்றில், தளம் நிலைக்குத்தாகவும் மையம் திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பின் கீழ் ஆழம் $h(>a)$ இலும் இருக்க உற்ளாழ்த்தப்படுகின்றது. அடரின் அமுக்கமானது அதன் மையத்தின் கீழ் ஆழம் $a^2/4h$ இல் உள்ளதெனக் காட்டுக.

ஆரை a உம் அடர்த்தி ρ உம் உடைய சமஞன ஒருசீர் அரைக்கோளங்களிரண்டு கோளமொன்றை உருவாக்குமாறு தளமுகங்கள் தொடுகையிலிருக்க வைக்கப்பட்டுள்ளன. கோளமானது, அடர்த்தி $\sigma(\sigma<q)$ உடைய ஏகவினத் திரவமொன்றை ஆழம் 4a இற்குக் கொண்டுள்ள பாண்டமொன்றின் அடியில், வெட்டுத்தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்க ஓய்விலுள்ளது. $q<12\sigma$ எனின் அரைக்கோளங்களிரண்டும் ஒன்றைவிட்டொன்று பிரியமாட்டாவெனக் காட்டுக.

16. வாயுக்கூண்டொன்று $t=0$ என்ற நேரத்தில் நிலத்திலிருந்து மென்மையாக விடப்படுகின்றது. அது f எனும் ஒருசீர் ஆர்முடுகலுடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எழுகின்றது. a=T என்ற நேரத்தில் நிலத்திலுள்ள அதேபுள்ளியிலிருந்து கல்லொன்று வேகம் U உடன் நிலைக்குத்துத் திசையில் எறியப்படுகின்றது. வாயுக்கூண்டிற்கும் கல்லிற்கும் வேக நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. கல் வாயுக்கூண்டை மட்டுமட்டாகத் தொடுதற்குரிய நிபந்தனை $U=[f+\sqrt{f^2+gf}]T$ என நிறுவுக.

கல் அதன் உச்ச உயரத்தை அடையும்பொழுது நிலத்திலிருந்து வாயுக்கூண்டின் தூரத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

17. புள்ளியொன்றிற் றாக்குகின்ற எத்தனை விசைகளையும், பருமனிலும் திசையிலும், பல்கோணியொன்றின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களாற் குறிக்க முடியுமெனின், விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமெனக் காவிமுறையாகக் காட்டுக.

A2A1……...An என்பது n பக்கங்கள் கொண்ட பல்கோணியொன்றாகும். O எனும் புள்ளியொன்றில் A_1A_2, $2A_2A_3$, $3A_3A_4$ ……..$(n-1)\ A_{n-1}A_n, nA_nA_1$ என்பவைக்குச் சமாந்தரமும் விகித சமமுமுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுள் $(n-1)GA_1$ இற்குச் சமாந்தரமும் விகிதசமமுடையதெனக் காட்டுக. இதில் G ஆனது A_2, A_3 ……..An என்ற புள்ளிகளின் மையப்போலியாகும்.

18. ஒரு நேர்பாதையில் செல்லும் கப்பலொன்று, ஓய்விலிருந்து அதன் வேகம் அ/செ 16 ஆகும்வரை அ/செ^{2} என்னும் 8 எனும் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது. அதன்பின் அக்கப்பல் ஒரு சீரான வேகத்துடன் செல்கிறது. கப்பல் இயங்கும் திசைக்குச் செங்குத்தாய் A, B, C என்னும் மூன்று திசைகள் A, B இடையிலுள்ள தூரமும் BC இடையிலுள்ள தூரமும் 156 அடி ஆகுமாறு கப்பலின் தட்டிலிருக்கின்றன. கப்பல் இயங்கும் திசையில் அ/செ 200 வேகத்துடன் இயங்கும் ஒரு குண்டு கப்பல் இயங்கத் தொடங்கும் கணத்தில் திரை A ஐ ஊடுருவி பின்னர் திரை B ஐயும் அதன் பின்னர் திரை C ஐயும் ஊடுருவிச் செல்கின்றது. திரையொன்றை ஊடுருவிச் சென்றவுடனே பூமிக்குத் தொடர்பாய் குண்டின் வேகம் அது ஊடுருவிச் செல்வதற்கு ஒரு கணம் முன்புள்ள வேகத்தின் ஐந்தில் நாலாகும். திரைகளுக்கிடையில் குண்டு ஒரு சீரான வேகத்துடன் இயங்குகின்றது. குண்டுக்கும், கப்பலுக்குமான வேக – நேர வளைகோடுகளை ஒரே உருவத்தில் வரைக.

அந்த உருவத்தை மாத்திரம் பயன்படுத்தி A இலிருந்து B இற்குக் குண்டு செல்ல எடுக்கும் நேரம் 1 செக்கன் எனக் காட்டுக.

மேலும் B இலிருந்து C இற்குக் குண்டு செல்ல எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

19. l எனும் நேர்கோடொன்றில் v எனும் கதியுடன் இயங்குகின்ற (m_1+m_2) எனும் திணிவுள்ள பொருளொன்று உள்வெடிப்பொன்று காரணமாக m_1, m_2 எனும் திணிவுகளுள்ள இரண்டு துண்டுகளாக உடைகின்றது. துண்டுகள் l இன் வழியே இயங்குகின்றன. ஒரு துண்டு தொடர்பாக மற்றத்துண்டின் கதி u ஆகும். இயக்கப்பாட்டுச் சத்தியின் அதிகரிப்பு $\frac{1}{2}[(m_1m_2)/(m_1+m_2)]u^2$ எனக் காட்டி அது ஏன் v இல் சார்ந்திருக்கவில்லையென விளக்குக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒருவன் ஓர் ஓடத்தை ஓர் உறுதியான ஆற்றின் குறுக்கே ஒரு சீர்க் கதியுடன் ஓட்டுகிறான். அவனால் அலகு நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலை W ஆகும், நேரம் t இல் நீரின் இயக்கப்பாட்டுச் சத்தியின் அதிகரிப்பைக் காண்க. இது ஆற்றின் வேகத்தில் சார்ந்திருக்கிறதா?

20. ABC என்பது M எனும் திணிவுள்ள ஒழுங்கான ஒப்ப ஆப்பொன்றின் மையக்குறுக்குவெட்டாகும். ஆப்பிற்கு AB மேசையுடன் தொடுகையிலிருந்தவாறு கிடைமேசையொன்றின் மீது இயங்கச் சுயாதீனமுண்டு. $\angle ACB=90°$; $\angle CAB=\alpha$. m_1, m_2 என்னும் திணிவுகளுள்ள P, Q எனும் துணிக்கைகள் இரண்டு ஆப்பின் C என்னும் புள்ளிக்கு அண்மையில் வைக்கப்பட்டு பின் தொகுதி முழுவதும் ஓய்விலிருந்து மென்மையாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. P, Q எனும் துணிக்கைகள் முறையே CA, CB என்ற சாய்தளங்களிற் கீழே வழுக்குகின்றன. ஆப்பினதும் துணிக்கைகளினதும் ஆர்முடுகல்களைத் துணிதற்கு போதிய எண்ணிக்கையான சமன்பாடுகளைக் காண்க. பின் நிகழும் இயக்கம் முற்றிலும் P, Q என்ற கோடு கிடையா இருந்தால்,

M கோசை $2\alpha=m_1$ சைன்$^2\alpha-m_2$ கோசை$^2\alpha$ எனக் காட்டுக.

21. ஒரு துணிக்கைத் தொகுதிக்கு ஏகபரிமான உந்தக்காப்புக் கோட்பாடு வலிதானதாயிருப்பதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

ஒப்பமான பனிக்கட்டிப்படை ஒன்றில் கிடையாக இருக்கும் ஒரு பலகை மீது ஓய்வில் நிற்கும் ஒரு மனிதனிடம் ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள n மாபிள்கள் இருக்கின்றன. மனிதனும் பலகையும் ஒரு நேர்பாதையில், ஒருமை நேர ஆயிடை T இற்கு தரம் ஒன்றாக மனிதன் தனக்குத் தொடர்பாய் ஒருமை வேகம் V உடன் எதிர்த்திசையில் மாபிள்களை வீசுவதினால் முன் நோக்கிச் செல்கின்றன; மாபிள்கள் உட்பட மனிதனினதும், பலகையினதும் தொடக்கத் திணிவு M ஆகும். r ஆவது மாபிள் வீசியபின் மனிதனின் வேகம் Vr ஆயின், Vr இற்கும், V_{r+1} இற்கும் உள்ள தொடர்பு

$$V_{r+1}-V_r=(mV)/(M-rm)$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து மனிதன் அடையக்கூடிய உயர் வேகம்

$$\sum_{r=0}^{n-1}\frac{mV}{M-rm}$$ எனக் காட்டுக.

மேலும் ஆரம்பத்திலிருந்து கடைசி மாபிள் வீசும்வரை மனிதன் இயங்கிய தூரம்.

$$mVT\sum_{r=1}^{n-1}\frac{n-r}{M-(r-1)}$$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கொடுக்கப்பட்ட யாதொரு தருணத்தில் தொகுதியின் திணிவு மைய வேகம் என்ன?

22. திணிவு M உடைய ஒப்பமானதும், ஒழுங்கானதுமான ஆப்பொன்றின் மைய நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டு ABC ஆகும். $\hat{ABC}=\frac{\pi}{2}$ $\hat{BAC}=\alpha\left(<\frac{\pi}{4}\right)$ ஆகும். கிடையுடன் α கோணச் சாய்வுடைய தளமொன்றின் மீது B இன் கீழ் A ஆகவும், AB ஒரு உயர்சாய்வுக்கோடு வழியேயும் இருக்கும்படி ஆப்பு வைக்கப்பட்டுள்ளது. முறையே m_1, m_2 திணிவுடைய P, Q என்னும் துணிக்கைகள் C இன் மேல் செல்லும் நீட்டமுடியாத இலேசான இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டு AC, CB எனும் பக்கங்கள் மீது இழை ACB எனும் தளத்தில் கிடக்குமாறு, அமர்ந்துள்ளன. இழை இறுக்கமாகவும் தொகுதி ஓய்விலேயும் வைத்து பின் விடுவிக்கப்பட்டால், ஆப்புடன் துணிக்கைகள் தொடுகையிலிருக்குமென எடுத்துக்கொண்டு,

(அ) ஆப்புவின் ஆர்முடுகலையும்

(ஆ) ஆப்புக்கு தொடர்பாக P, Q என்பவற்றின் ஆர்முடுகலையும் காண்க.

தளத்தின்மீது ஆப்புவின் தாக்கத்தையும் காண்க. ஆப்புவுக்குத் தொடர்பாக P, Q என்பன ஓய்விலிருந்தால்,

$m_2 = m_1$ கோசன் α எனக் காட்டுக.

23 r ஆரையுடைய வட்டத்தில் V எனும் ஒரு சீரான வேகத்துடன் இயங்கும் துணிக்கையொன்றின் ஆர்முடுகல் V^2/r எனவும் அது மையத்தை நோக்கிய திசைகொண்டதென்றும் காட்டுக.

a ஆரையுடைய வட்டமான தட்டொன்று அதன் மையம் O வைப் பற்றி w எனும் ஒருமை கோணவேகத்துடன் கிடைத்தளத்தில் சுழலுமாறு செய்யப்பட்டுள்ளது. b ஆரையுடைய (தட்டுடன் ஒரு மையமுள்ள) வட்டத்திற்குள் இருக்கும் தட்டின் பரப்புப்பகுதி கரடானதாயும்' மிஞ்சிய பகுதி ஒப்பமாயும் இருக்கின்றன. கரடான பகுதியின் உராய்வுக்குணகம் μ ஆகும். நீட்டமுடியா இழையொன்றினால் இணைக்கப்பட்ட முறையே m_1, m_2 திணிவுடைய P_1, P_2 என்னும் துணிக்கைகள் ஓய்விலிருக்குமாறு தட்டின் ஒரே ஆரை வழியே வைக்கப்பட்டுள்ளன. P_1, P_2 என்பன O விலிருந்து முறையே r_1, r_2 தூரத்திலிருக்கின்றன. $(r_1<b<r_2<a)$ இழை தாங்கக்கூடிய உயர் இழுவை T_0 ஆகும். இழை இறுக்கமாகவும் இத்துணிக்கைகளும் தொடர்ந்து ஓய்விலிருந்தால்,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(m_1r_1 + m_2r_2)w^2 \geqslant \mu m_1 g$ எனவும்

$m_2r_2w^2 \geqslant T_0$ எனவும் காட்டுக.

w மென்மையாக அதிகரிக்கப்பட்டால் தொடர்புச் சமநிலை முடியும் முறையை ஆராய்க.

24. கிடையுடன் கோணம் β இல் சாய்ந்திருக்கும் தளமொன்றிலுள்ள O எனும் புள்ளியொன்றிலிருந்து துணிக்கைகள் இரண்டு u எனும் ஒரே கதியுடன் ஆனால் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் உயர்சாய்வுக் கோடொன்றூடான நிலைக்குத்துத்தளமொன்றில் எறியப்படுகின்றன. துணிக்கைகள் தளத்தை P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளில் மோதினால் துணிக்கைகளின் எறியக் கோணங்கள் என்னவாக இருந்தாலும்

$|OP_1 - OP_2| = (2u^2/g)$ தான் β சீக β எனக் காட்டுக.

25. AB எனும் சமனான கோளங்கள் இரண்டு இலேசான நீட்டமுடியாத இழையொன்றின் முனைகளுக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவை இழை மட்டுமட்டாக இறுக்கமாக இருக்க, ஒப்பமான கிடைமேசையொன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளன. AB உடன் கோணம் β ஆக்கும் திசையில் மேசை மீது இயங்குகின்ற C எனும் இன்னொரு சமனான கோளம் Bஐ u எனும் வேகத்துடன் மோதுகின்றது. A ஆனது $(1+e)$ u கோசை $\beta/3$ + சைன்$^2\beta$ என்ற கதியுடன் இயங்கத் தொடங்குமெனக் காட்டுக. இதில் e என்பது B இற்கும், C இற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகமாகும்.

4e>3 கோசை 2β எனின், கோளம் C ஆனது பின்னதைக்குமெனவும் காட்டுக.

26. திணிவு m_1 உடைய A என்னும் கோளம் ஒரு ஒப்பமான கிடைமேசைமேல் ஓய்விலிருக்கிறது. u வேகத்துடன் மேசைமேல் இயங்கும் ஒரே ஆரையும் m_2 திணிவுமுடைய B எனும் கோளம் u வின் திசையானது மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடுடன் கோணம் α ஆக்குமாறு A ஐ மோதுகின்றது. மோதலுக்குப்பின் u வின் திசையுடன் கோணம் β ஆக்கும் திசையில் B இயங்குகின்றது. இயக்கப்பாட்டுச் சத்தி காக்கப்படுமென்று எடுத்துக்கொண்டும் நியூற்றனின் மீளமைவு விதியை பயன்படுத்தாமலும்

$$\text{கோசை } \beta + \text{சைன் } \beta \text{ கோதா } \alpha = \left[1 + \frac{m_2 \text{ சைன்}^2 \beta}{m_1 \text{ சைன்}^2 \alpha} \right]^{\frac{1}{2}}$$ எனக் காட்டுக.

இந்த நிலையில் மீளமைவு குணகத்தைப்பற்றி குறிப்புரை எழுதுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

27. P எனும் துணிக்கையொன்று, புவியீர்ப்பு புலத்தில், அலகுத் திணிவுக்கு kv எனும் தடையை உண்டாக்கும் ஊடகமொன்றில் u எனும் கதியுடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. இதில் k ஒருமையென்றும் v தரப்பெற்றகணமொன்றில் P இன் கதியுமாகும். P ஆனது $k^2h = ku - g$ மட $\left(1 + \frac{ku}{g}\right)$ என்பதாற் தரப்பட்ட h எனும் உயரத்தை அடையுமெனக் காட்டுக.

P ஆனது எறியப்புள்ளிக்கு v எனும் கதியுடன் திரும்பி வந்தால் $k(u+v) = g$ மட $[(g+ku)/(g-kv)]$ எனக் காட்டுக.

28. திணிவுக்கும் நிறைக்குமுள்ள வேறுபாட்டைக் காட்டி அவற்றின் தனித்தனி பரிமாணங்களைத் தருக.

சந்திரவில ஒருவனின் நிறை புவியில் அவன் நிறையின் ஆறிலொன்றாகும். இறைறுகளைத் தோண்டப் பயன்படுத்தும் குழிதோண்டியொன்றின் உயர் பரிவலு H ஆகும். குழிதோண்டியானது சந்திரனுக்குக் கொண்டுசெல்லப்பட்டால் அதன் உயர்பரிவலு யாது? உமது விடை சரியென்பதற்கு காரணம் காட்டுக.

குழிதோண்டியானது புவிமேற்பரப்பில் கிணறொன்றை t செக்கன்களில் தோண்டுமாயின் அது சந்திரனின் மேற்பரப்பில் அதே குறுக்கு வெட்டுடைய ஆனால் அதிலும் அரையளவு ஆழமான கிணறொன்றைத் தோண்ட எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும்? புவியும் சந்திரனும், ஒரே கட்டமைப்பை உடையவை எனவும் குழிதோண்டி இரு இடங்களிலும் உயர் பரிவலுவில் வேலை செய்கின்றதெனவும் கொள்க.

(குழிதோண்டி மண்ணைத் தளர்த்துவதில் செய்த வேலையை நீர் புறக்கணித்தல் கூடும்.)

29. பரிவலு H உடைய இயந்திரத்தைக் கொண்ட ஒரு வாகனம் அதன் வேகத்திற்கு விகிதசமமான தடைக்கு உட்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அது அடையக்கூடிய உயர்வேகம் u ஆகும். வாகனம் ஆனது புள்ளி A யில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு t நேரத்திற்குப் பின் புள்ளி B ஐ அடைகின்றது. அங்கு அதன் வேகம் ½u ஆகும்.

$$t_1 = \frac{Mu^2}{1100\ Hg} \text{ மட } (4/3) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இப்பொழுது இயந்திரத்தை நிற்பாட்டி மேற்கூறிய தடையின் விளைபயனால் C எனும் புள்ளியில் வாகனம் ஓய்வுநிலையை அடைந்தால் மொத்தத்தூரம் AC ஐக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

30. ஓர் அச்சுப்பற்றி விறைப்பான பொருளொன்றின் சடத்து வத்திருப்பத்தை வரையறுக்க.

நீளம் 2l உம், திணிவு m உம் உள்ள ஒருசீர்க் கோலொன்றின் சடத்துவத்திருப்பம். கோலின் முனையொன்றூடாகக் கோலுடன் கோணம் α ஆக்கும் அச்சுப்பற்றி, $\frac{4}{3}ml^2$ சைன்$^2 \alpha$ ஆகுமென நிறுவுக.

முறையே m_1, m_2 எனும் திணிவுகளுள்ள AB, BC எனும் ஒரு சீர்க்கோல்கள் இரண்டு B இல் விறைப்பாகத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. AC இலிருந்து B இன் செங்குத்துத் தூரம் p எனத் தரப்பட்டால், AC இன் வழியேயுள்ள அச்சுப்பற்றி தொகுதியின் சடத்துவத்திருப் பத்தைக் காண்க.

தொகுதியானது A இற்கும் C இற்கும் பொருந்திய இலேசான வளையங்கள் மூலம் நிலைத்த ஒப்பக் கிடைக்கம்பியொன்றிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. இக்கம்பி பற்றித் தொகுதி சுயாதீனமாகச் சுழல வல்லது. தொகுதியின் சிறிய அலைவுகளின் காலம் $2\pi\sqrt{(2p/3g)}$ என நிறுவுக.

31. ஒரு அடரின் சடத்துவத் திருப்பத்திற்கு செங்குத்தச்சுத் தேற்றத்தையும் சமாந்தரவச்சுத் தேற்றத்தையும் நிறுவாமல் கூறுக.

m திணிவும், r ஆரையும் உடைய ஒரு மெல்லிய ஒருசீரான வட்டத்தட்டு அதன் விட்டம் ஒன்றைப்பற்றி $\frac{1}{4}mr^2$ சடத்துவத் திருப்ப முடையதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து a ஆரையையும், m திணிவுமுடைய ஒரு மெல்லிய ஒருசீரான ஒரு வட்டத்தட்டு அதன் விட்டம் ஒன்றைப்பற்றி $\frac{1}{4}ma^2$ சடத்துவத்திருப்பமுடையது எனக் காட்டுக. m திணிவும் A மையமும் a ஆரையுமுடைய ஒருசீரான வட்டவளையம் ஒன்றும் M திணிவும், B மையமும் b ஆரையுமுடைய ஒருசீரான வட்டத்தட்டு ஒன்றும் வளையத்தின் விளிம்பிலிருக்கும் P எனும் புள்ளியில், P ஆனது A, B இற்கிடையிலும், A, P, B ஒரே கோட்டிலும் இருக்குமாறு விறைப்பாய் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. APB இற்கு செங்குத்தான வளையத்தின் விட்டம் CAD ஆகும். தட்டும், வளையமும் ஒரே தளத்திலிருக்கின்றன.

கிடையாய் வைக்கப்பட்ட CD பற்றி தொகுதியினால் சுயாதீன மாய் சுழலமுடியும். சிறிய அலைவுக்காலம் $2\pi/\omega$ எனக் காட்டுக.

$$\omega^2 = \frac{4g(a+b)}{a^2\left(4+\frac{2m}{M}\right)+5b^2+3ab}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

32. எளிய இசை இயக்கத்தையும் ஆர்முடுகற்குவியத்தின் மையத்தையும் வரையறுக்க.

இயற்கை நீளம் 2a உம் மீள்தன்மை மட்டு λ உம் உள்ள இலேசான மீள்தன்மை இழையொன்றின் முனைகள் ஒப்பமான கிடைமேசையொன்றின் A, B என்னும் நிலைத்த புள்ளிகள் இரண்டிற்குப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. A இற்கும், B இற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 4a ஆகும். m எனும் திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று இழையின் நடுப் புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையானது AB இன் வழியே தூரம் b ஆல் பெயர்க்கப்பட்டு பின் மென்மையாக விடுவிக்கப்பட்டால், அது $b \leq a$ எனின், ஒரு குவியத்துடன் எளிய இசை இயக்கத்தைச் செய்யுமென நிறுவி அலைவுகாலத்தைக் காண்க.

$b=2a$ எனின், இயக்கத்தை விபரித்து, அலைவுகாலம்

$$4\sqrt{\frac{am}{\lambda}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{கோசை}^{-1}\sqrt{\frac{2}{7}}\right) + \text{கோசை}^{-1}\frac{2}{3}\right\}$$

ஆகுமென நிறுவுக.

33. முறையே 3m, 2m திணிவுடைய AB எனும் இரு துணிக்கைகள் இலேசான ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியொன்றின்மேல் செல்லும் AB என்னும் இலேசான நீட்டமுடியா இழையின் முனைகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. மீள்தன்மை மட்டு λ வும் இயற்கையான நீளம் a யுமுடைய ஒரு மீள்தன்மையிழையின் ஒரு முனை m திணிவுள்ள C எனும் துணிக்கைக்கும் மற்ற முனை B இற்கும் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. B இன்கீழ் C ஆகவும் BC இன் நீளம் a ஆகுமாறும் கப்பியைத் தொடாத இழைப்பாகங்கள் நிலைக்குத்தாயும், இறுக்கமாயும் இருக்குமாறு இத்தொகுதி ஓய்வில் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொழுது தொகுதியை மென்மையாய் விடுவித்தால் நேரம் t இல் BC இன் நீளம் y ஆனது வழமையான குறியீட்டில்,

$$\ddot{y} = \frac{-6\lambda}{5am}\left(y - a - \frac{amg}{\lambda}\right)$$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

$\lambda = mg$ ஆயின் (இயக்கத்தின் எந்த நிலையிலும் துணிக்கைகள் கப்பியை அடிக்காது எனக் கொண்டு) BC இன் உயர் நீளம் 3a எனக் காட்டுக. BC உயர் நீளத்தை அடையும்போது துணிக்கை B ஆனது அதன் ஆரம்ப நிலையிலிருந்து $\frac{1}{3}a$ எனும் உயரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

34. ஒரு ஒருதள விசைத்தொகுதியை ஒரு தனி விசையாக அல்லது ஒரு விசை இணையாக ஒடுக்கமுடியும் எனக் காட்டுக.

ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்று சமநிலையிலிருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைத் தொடைகள் இரண்டைக் கூறி அவை சமவலுவானவை எனக் காட்டுக.

(அ) ஒரே தளத்தில் அமையாத சமாந்தரமான மூன்று விசைகளைக் கொண்ட தொகுதியின் விளையுள் பெறுவது எவ்வாறு எனக் கூறுக.

(ஆ) ஒருசீரான முக்கோண அடரின் ஈர்ப்பு மையமானது அம்முக்கோணியின் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்ட மூன்று சமனான திணிவுகளின் ஈர்ப்புமையமேயாகும் எனக் காட்டுக.

35. மட்டமான நிலத்திலிருக்கும் O எனும் புள்ளியிலிருந்து ஒரே நிலைக்குத்துத்தளத்தில் ஒரே வேகம் u உடன் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயுள்ள திசைகள் வழியே அலகுத் திணிவுடைய P, Q என்னும் துணிக்கைகள் எறியப்பட்டுள்ளன. காற்றின் காரணமாக எறிதளத்தில் தாக்கும் $\lambda g e^{-kt}$ (இங்கு λ, k என்பன நேர் ஒருமைகள்) பருமனுடைய ஒரே கிடைவிசைக்கு இரண்டு துணிக்கைகளும் உட்படுத்தப்பட்டுள்ளன. α ஆனது P இன் எறிகோணமாகவும் காற்று P இன் இயக்கத்திற்கு உதவியாயும் இருந்தால் நேரம் t இல் O இலிருந்து அதன் கிடைத்தூரம்

$$\left(u \text{ கோசை } \alpha + \frac{\lambda g}{k} \right) t - \frac{\lambda g}{k^2} \left(1 - e^{-kt} \right)$$ எனக் காட்டுக.

இந்தக் கணத்தில் O இலிருந்து துணிக்கை Q வின் கிடைத்தூரத்திற்கு இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.

இதிலிருந்து துணிக்கைகள் நிலத்தில் விழும் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடைகள் பகுதி 2

அலகு 1

1. கிடைத்தாக்கம் = தான் $\alpha/4\,(w_1 + w_2 + 2W)$
நிலைக்குத்துத்தாக்கம்
AB இன் மேல்
BC இன் மேல்

4. 30 இரு; 50 இரு; 8′

6. C இல் $5w/2$ தான் θ
B இல் $W/2\sqrt{(9 \text{ தான்}^2\theta + 4)}$

7. A இல் $^6/_7$ w; B இல் [redacted] w $\times\frac{23}{14}$

9. கிடைக்கூறு AB இல் $(15\sqrt{3})/38$ w
நிலைக்குத்துக்கூறு,
A இல் $^8/_{19}$ w; B இல் $^{11}/_{19}$ w

10. $T = 72\,\dfrac{(3\sqrt{3}-4)W}{55}$

11. D இல் மறுதாக்கம் $7w/3$, E இல் மறுதாக்கம் $5w/3$

12. $R = \dfrac{W(3\sqrt{3} \text{ சைன் } \alpha - \text{கோசை } \alpha)}{2\sqrt{3} \text{ கோசை } \alpha}$

13. $R = W/3(3 \text{ கோசை } \alpha + \sqrt{3} \text{ சைன் } \alpha)$

14. $T = 168/25\,W$, $R = W/25\sqrt{(67^2 + 168^2)}$

16. OA இன் சரிவு, (நிலைக்குத்துடன்)
= தான்$^{-1}$ $(\frac{3}{4})$
திணிவு = 5 m

17. கிடைக்கூறு; $^{55}/_2\sqrt{3}$ இரு. நிறை→
நிலைக்கூறு; ↑45 இரு நிறை.

18. $w/2$ தான் α

19. $w/2$ தான் α

20. தான் $\theta_{AB} = 2/3$; தான் $\theta_{OA} = 2/5$; $R_O = \sqrt{10}\,W$
$R_A = \sqrt{5}\,W$; $R_B = \sqrt{2}\,W$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

21. $\sqrt{\left(\frac{W_1^2 \; W2^2 - W_1 \; W_2}{12}\right)}$

23. A இலுள்ள மறுதாக்கம்: $3/2$ W
C இலுள்ள மறுதாக்கம்: $\frac{1}{2}$ W
முனையிலுள்ள மறுதாக்கம்: $\sqrt{5}$ W

24. $\theta =$ சைன் $^{-1}$ $(b/2a)$

26. (i) $\frac{11}{16} W \sqrt{2556} = 2{\cdot}97$ W தான் $^{-1}$ $\left(\frac{21}{11\sqrt{15}}\right)$ (கிடையுடன்)

27. $\frac{W}{2}$ கோதா $\alpha = \frac{W}{2} \sqrt{(4 + \text{கோதா}^2 \, \alpha)}$

31. (i) $\frac{W}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$W

அலகு 2

1. $\frac{AR}{RB} = \frac{2}{3}, \; \frac{AS}{SC} = 2$

2. BC இன் நடுப்புள்ளி D ஆகவும் AB இன் நடுப்புள்ளி C ஆகவு
மிருப்பின் விளையுள் $= 8 \overrightarrow{DE}$

4. $\overrightarrow{DE}$, 15 P, $\overrightarrow{EC}$, 10 P, $\overrightarrow{CD}$, 24 P

6. l: m: n = சைன் 2 A: சைன் 2 B: சைன் 2 C.

7. (i) தொகுதி BC உடன் தான் $^{-1}$ $(\frac{3}{4})$ எனும் கோணத்தில் தாக்கி C இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளவிசை 5 இற்கு ஒடுக்கப்படுகிறது.

(ii) $3 \overrightarrow{CD}$ $4 \overrightarrow{CB}$ எனும் இரு விசைகள்

10. தாக்கக்கோடு BC ஐ V: $(\triangle + \lambda + \mu)$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும்

27. (i) kP, AD க்குச் சமாந்தரமாக
(ii) A யிலிருந்து $3a/2$ தூரத்தில்
(iii) இணை k ab

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 3

1. உதைப்பு:

$AB \frac{40}{\sqrt{3}}$; $DE \frac{40}{\sqrt{3}}$; $BD = 10\sqrt{3}$

இழுவை; $AC = 15 + 20/\sqrt{3}$; $BC = 20/\sqrt{3}$

$CE = 15 + 20/\sqrt{3}$; $CD = 20/\sqrt{3}$

2. இழுவை:

$AD = 4\sqrt{3}$; $DE = 3\sqrt{3}$; $DC = 2\sqrt{3}$; $BE = 3\sqrt{3}$

உதைப்பு; $CB = 6$; $CE = 0$; $CA = 8$

3. C இலுள்ள தாக்கம் 5 அந்., 7 அந்.

பக்கங்கள்	AE	BE	BD	DE	AD	AF	FD	FC	DC
இழுவை			$5\sqrt{3}$		6				$7\sqrt{3}$
உதைப்பு	6	10		4		6	8	14	

4. இழுவை: $BC = 100\sqrt{2}$; $DC = 100\sqrt{3}$; $AD = 100$

உதைப்பு, $AB = 50\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$

$CA = 50\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})$

5. இழுவை: $BC = 5\sqrt{3}$; $AB = 5\sqrt{3}$; $AD = 10$

உதைப்பு: $CD = 5$; $BD = 5\sqrt{3}$

6. $y = (40\sqrt{3} - 30$ இரு. நிறை)

8. உதைப்பு: $AB = 100/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

$BC = 200/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

$CD = 400/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

$AE = 200/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

$BE = 100/3$ இரு. நிறை

இழுவை: $DE = 150/\sqrt{3}$ இரு, நிறை

$BD = 100/3$ இரு. நிறை.

(ii) அதி உயர் சுமை $= 100/3\,[10\sqrt{3} - 3]$ இரு. நிறை

8. இழுவிசை; $AB = 100/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

$BC = 140/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

$CD = 120/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

DE$=60/\sqrt{3}$ இரு நிறை
EF$=180/\sqrt{3}$ இரு. நிறை
FA$=200/\sqrt{3}$ இரு. நிறை
CE$=20$ இரு. நிறை
அமுக்கவிசை: BF$=20$ இரு. நிறை, CF$=160/\sqrt{3}$ இரு. நிறை

9. R$=4$ W; S$=5$ W

10. சங்கிலியிலுள்ள இழுவை 1400 இரு.
இழுவை: AG$=800$; GF$=800\sqrt{2}$; EF$=300\sqrt{2}$;
ED$=$EC$=300$; FB$=$FC$=500$; BG$=60$
உதைப்பு: AB$=1400/\sqrt{2}$; BC$=800\sqrt{2}$; CD$=300\sqrt{2}$

11. BC இன் மறுதாக்கங்கள் முறையே 450, 550
இழுவை; BD$=150\sqrt{3}$; DC$=(550\sqrt{3})/3$;
DF$=(200\sqrt{3})/2$; DE$=200\sqrt{3}/3$
உதைப்பு:
AF $=\dfrac{500\sqrt{3}}{3}$; FB$=300\sqrt{3}$; EC$=\dfrac{1100\sqrt{3}}{3}$,
EA$=100\sqrt{3}$; EF$=\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$

12. இழுவை: EG$=$AG$=\sqrt{3}/3$; FG$=7\sqrt{3}/3$
CG$=8\sqrt{3}/$; DG$=0$
நெருக்கல்: AB$=$DE$=4\sqrt{3}/3$; BC$=$CD$=8\sqrt{}/3$
EF$=$FA$=(7\sqrt{3})/3$

15. (a) W$\sqrt{6}$, 45° கிடையுடன்
(b) $1{\cdot}9\,W$, 23° கிடையுடன்
(c) இழுவை; CD; $W\sqrt{3}/3$; BD; $2W\sqrt{3}/3$
உதைப்பு: AB, AD, BC எல்லாம் $2W\sqrt{3}/3$

16. $2\sqrt{3}\,W$, $\sqrt{7}\,W$, $\sqrt{7}\,W$, $2\sqrt{3}\,W$, $1[1+2\sqrt{(3/7)}]$

17. (a) $8{\cdot}7$
(b) $13{\cdot}2$ அங்., 49° கிடையுடன்
(c) AB : உதைப்பு $11{\cdot}5$ அந்.
BC : இழுவை $14{\cdot}4$ அந்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

18. (a) $6\sqrt{5}$ (b) $2\sqrt{3}$ அந். தான்$^{-1}$ $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ கிடையுடன்

(c) $4\sqrt{3}$ அந். இழுவை
4 அந். உதைப்பு

19. (a) $10\sqrt{3}$ அந்.

(b) $10\sqrt{7}$ அந். தான்$^{-1}$ $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ கிடையுடன்

(c) $5\sqrt{3}$ அந்.; 5 அந்.

20. இழுவை PS—34.6 இரு.
RS—20 அல்லது 40 இரு.

உதைப்பு PQ; 40 இரு.
QS; 23·1 இரு.
QK; 46.2 இரு.

22. A யில் $\sqrt{3}$ அந்., B யில் $\sqrt{7}$ அந்.
AD யில் இழுவை $2\sqrt{3}$ அந்.
CD யில் உதைப்பு 4 அந்.
AC யில் உதைப்பு 2 அந்.
BC யில் உதைப்பு $2\sqrt{3}$ அந்.

23. 6 அந்., 8 அந். $\frac{2}{\sqrt{3}}$ அந். இழுவை

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ அந். உதைப்பு $\frac{7}{\sqrt{3}}$ அந். உதைப்பு

24. 5W, $\sqrt{31}$W, தான்$^{-1}$ $[7/(\sqrt{3})]$ கிடைக்கு
$W \leq {}^{8}/_{3}\sqrt{8}$ தொன்; AB தொய்யும்

அலகு 4

1. $\overline{X} = \frac{3a^2-h^2}{4(2a-h)}$

2. நிறை $=W/5$

7. $m = \frac{\pi r^3 p}{12}$; $m = \frac{\pi r^2 P}{6}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

8. $\alpha =$ கோசை$^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

11. பூச்சியின் இணிவு. $^5/_8$ M $\frac{\text{சைன் }\alpha}{(\text{கோசை}\alpha - \text{சைன்}\alpha)}$

12. உயர்வுப் புள்ளியில் இடையாகத் தாக்கும்;

$\frac{ma^2}{4\sqrt{3}}(9-\pi)$ எனும் விசையாகும்

13. (i) $h<d$

(ii) $\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

14. W கோசை λ; W சைன் λ

15. 11l/28; $a\sqrt{(28/17)}$

17. $a\sqrt{2}$

அலகு 5

3. $x = \frac{a[\mu(W_1 + 3W_2) - (W_1 + W_2)\text{ தான் }\theta]}{W(\text{தான்}\theta - \mu)}$

6. தான்$^{-1}(2\sqrt{3})/3$

8. $\theta =$ தான்$^{-1}$ $\frac{1(\mu - 1/\mu)}{2[a(\mu + 1/\mu) - 1]}$

15. W=30; BC யில் இழுவை = 30 இரு. நி.
AB, CD யில் இழுவை = $30\sqrt{3}$ இரு. நி.

16. $\frac{W}{2}$/ [கோதாλ ± தான் α]

24. (a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

அலகு 6

1. 1.536 அடி.

3. 10 அங்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. த. ஈ. ¼ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

6. தான்$^{-1}$ $(\frac{1}{2})$

7. $\overline{X}=h/2$; QRS இன் அமுக்க மையத்தின்

ஆழம் $11a/8$

8. OB உடன் θ°

11. தான்$^{-1}=81/256$

12. ஒரு கனஅளவு நீரின் நிறை W

$$X=\frac{Wab\,(3h+2b)}{6}$$

14. $T=a^3P/6\sqrt{(\pi^2+8)}$

15. 3.6 அடி (ஏறத்தாள)

19. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{6}\,a^3p}{96}$

20. $\frac{\pi a^2pg}{24}\sqrt{144\,h^2+180\,ah\ \text{கோசை}\ \theta+25\,a^2}$

21. மேற்பகுதி: $R=\frac{1}{4}ahP\,[4\sqrt{2}d-2a-\pi a]$
கீழ்ப்பகுதி: $R=\frac{1}{4}ahP\,[4\sqrt{2}d+2a+\pi a]$
பக்கப்பகுதிகள்; $R=\frac{1}{4}ahP\,[32d^2+a^3(\pi-2)^2]^{\frac{1}{2}}$

22. $R={}^{53}/{}_{19}\,W$

23. விசை$=\frac{1}{2}ab\,[b+\frac{2}{3}\sqrt{3}a]^2$

26. $a_2=a\,[a_1b_1-bb_1+ab+b^2]\,/\,(a_1b_1+ab)$
$b_2=b\,[ab_1+a_1\,b_1\,Z\,/\,(a_1\,b_1+ab)$

30. கோளத்தின் மையத்தில் கீழ்நோக்கித் தாக்கும்.
$\frac{1}{3}\pi a^2b\,[3d-2a]$ எனும் விசையாகும்

49. 4 அங்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

50. $\frac{7W}{40}$ நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி $\frac{7W}{5}$

51. 0·8969

54. கோசை$^{-1}\left[\frac{1}{2\sqrt{(1-8)}}\right]$

அலகு 7

5. $2<k<2$; $k\leq\sqrt{2}$

9. $\theta<\pi$ ஆகும்போது

அலகு 8

1. 2; $2y = -37$

3. $[(\lambda+\mu)(b+c+d)-3\lambda a]$, Gக் கூடாக
(G, ABC யின் திணிவு மையம்) அல்லது

$3[(\lambda+\mu)\overrightarrow{PG}]$; இங்கு P, AO இலுள்ளது.
AP: PO$=\mu$: $60\sqrt{2^1}\lambda$
B

4. $(\sqrt{3}-1)p/3$; $2P/3$; $(\sqrt{3}+1)P/3$

5. $P\sqrt{3}$, B இற்கு $30°$ இல்
நீட்டப்பட்ட BA ஐ D இல் வெட்டுகிறது.
இங்கு $AD=4a$
$P\sqrt{3}$, AB இற்கு $30°$ இல், விளையுளுக்குச் சமாந்தரமாக: AD ஐ
E இல் சந்திக்கிறது. $DE=4a/\sqrt{3}$

6. 3P, 4P, 7Pa; $4x=3y+8a$

7. (a) பூச்சியம்.

(b) M இனூடாகச் செல்லும் $(q+1)\overrightarrow{DB}$ பருமனுள்ள விசை
DB இற்குச் சமாந்தரம்.

(c) 2x (பரப்பு ABCD) திருப்பமுள்ள இணை.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org