G. C. E. A/L

உதவி நூல்

ஆள்கூற்றுக்

கேத்திரகணிதம்

தொகுப்பு :

S. F. அசோகாந்தன் B,Tec (IIT)

J. M. பிரான்சிஸ் B.Sc (Eng)

Problems & Exercises
in

Coordinate Geometry

for G.C.E A/L

பதிப்புரிமை
தபால் புத்தக சேவை

Price: 100/=

Distributor
DANIELS BOOK SHOP
287. Galle Road,
Wellawatta.

Digitized by Noolaham Foundation
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

G. C. E. A/L

உதவி நூல்

ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

தொகுப்பு ;

S. F. அசோகாந்தன் B.Tec(IIT)

J. M. பிரான்சிஸ் B.Sc(Eng)

Problems & Exercises
in

Coordinate Geometry

forG.C.E A/L

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உள்ளுறை

அலகு		பக்கம்
1.	நேர்கோடுகள்	1
2.	வட்டங்கள்	10
3.	பரவளைவுகள்	20
4.	அதிபரவளைவு	28
5.	நீள்வளையம்	33
	விடைகள்	56

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 1

நேர் கோடுகள்

1. செவ்வகம் ABCD இன் உச்சிகள் A,C என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே (2,3); (9,4) என்பனவாகும். மூலைவிட்டம் BD, $x+y=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயின் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   AECF என்பது செவ்வகம் ABCD இன் பரப்பைப்போல, ஐந்து மடங்கு பரப்புடைய ஒரு சாய் சதுரமாயின், மூலை விட்டம் EF இன் நீளம் $15\sqrt{2}$ அலகு என நிறுவுக. AC இற்குச் சமாந்தரமாக E,F இற்கூடாகச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

2. உற்பத்தி O முக்கோணி ABCஇன் மையப் போலியாகும். BO, CO என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $4x-y=0$; $2+y=0$ ஆகவும், Aஇன் ஆள்கூறுகள் (t,t) ஆகவும் இருப்பின் B,C என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

   கோடு AB இல் C இன் ஆடிவிம்பம் D ஆயின், t மாறும்போது BD இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $11x+7y=0$ எனக் காட்டுக.

3. செவ்வக தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளைக் குறித்து, முக்கோணியின் உச்சிகள் (1,3) (5,3) (4,6) என்னும் புள்ளிகளாகும். முக்கோணியின் மையப்போலி G, சுற்றுவட்ட மையம் S, நிமிர் மையம் H என்பவற்றைத் துணிக. G, SHஐ 1:2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்குக.

4. $y=x$ என்னும் கோட்டின்மீது $y=mx$ என்னுங் கோட்டினது தெறிப்பினது சமன்பாட்டைக் காண்க.

   OABC என்பது ஒரு சாய்சதுரம். இங்கு O என்பது உற்பத்தியாகும். மூலைவிட்டம் OB இனது சமன்பாடு $x-y=0$ ஆகும். A என்பது கோடு $2x-y+6=0$ இற் கிடக்கிறது. AB ஆனது புள்ளி (−8,8) இனூடாகச் செல்கிறது. அச் சாய்சதுரத்தினது பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் மேல் புள்ளி (α,β) இன் ஆடிவிம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்வரைகள் $x-y=0$ என்னும் கோட்டுடன் சமகோணங்களை உண்டாக்கிக் கொண்டு கோடு $x=2$ஐ A, B இல் வெட்டுகின்றன. $2x-y+1=0$ என்னும் கோட்டின்மேல் AB இன் நடுப்புள்ளியின் விம்பம் y— அச்சில் கிடப்பின், இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6. $(lx_1+my_1+n)/(lz_2+my_2+n)$ என்பது நேர் அல்லது எதிர் என்பதிற்கேற்ப $(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ என்னும் புள்ளிகள் $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப் பக்கத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

$x+y+2=0$ $x-7y-6=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கூர்ங்கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க, $(3,1)$ என்னும் புள்ளி இக்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள விரிகோணத்திற்குள்ளே கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

7. ABCD என்னும் இணைகரம் உச்சிகள் A, C என்பன $x+y=0$ என்னும் கோட்டிலும், உச்சிகள் B, D என்பன முறையே $x-y=0$ $5x-y+9=0$ என்னும் கோடுகளிலும் இருக்கும் வண்ணம் அமைந்ததாகும். AB, BC என்னும் பக்கங்கள் முறையே $x-2y=0$ $x-3y=0$ என்னும் கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாயின் இணைகரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க

8. $x+y=0$ என்னும் கோட்டின்மேல் $4x+3y=0$ என்னும் கோட்டின் ஆடிவிம்பத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

I என்பது முக்கோணி ABC இன் உற்மையம், AB, BC, CI என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $5x+12y+3=0$, $4x+3y+2=0$ $x+y+1=0$ என்பனவையாகும். A, I என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

9. (h,k) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $ax+byc=0$ என்னும் கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தின் நீளம் $\left|\dfrac{ah+bk+c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right|$ என நிறுவுக

$4x+3y-1=0$, $12x+5y+9=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள விரிகோணத்திற்குள்ளே இக்கோடுகளைத் தொடும் 4 அலகு ஆரையுடைய இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. வட்டத்தின் மற்றைய இரு பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளை காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

10. $lx+my+n=0$ என்னும் கேட்டின்மேல் புள்ளி (α, β) இன் ஆடிவிப்பத்தின் அள்கூறுகளேக் காண்க.

முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் AB, AC என்பவற்றின் இரு கூறுக்கிச் செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x-y=0$ $x-3y=0$ என்பனவாகும். A என்பது $x=y=0$ இல் கிடக்க, பக்கம் BC, $(-2, 11)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகச் சென்ருல், முச்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

11 (ax_1+by_1+c) $(ax_2+by_2+c_2)$ என்பது நேர் அர்லது எதிர் என்பதற்கேற்ப· (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்னும் புள்ளிகள் $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கத்திற் கிடக்குமென நிறுவுக.

முக்கோணி A B C இன் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-y=0, 2x+y+p=0, 11x-2y-2p=0$ என்பனவாகும். இங்கு p என்பது ஒருமை. கோணம் BCA இன் இரு கூறுக்கியின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

இவ்விருகூறுக்கி ABஐ D இற் சந்திக்க, கோணம் B C D இன் இருகூறுக்கி $(1, 4)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்ருல், $p=4$ என நிறுவுக.

12. $lx+my+n=0$ என்ற கோட்டின்மேல் புள்ளி (α, β) இன் ஆடிவிம்பத்தின் ஆள்கூறுகளேக் காண்க.

ABCD என்னும் சாய்சதுரத்தின் மூலேவிட்டம் BD இன் சமன்பாடு $x+2y+1=0$ ஆகும். உச்சிகள் A, C என்பன முறையே $x-y=0$, $3x+y+8=0$ எற்னும் கோட்டில் கிடக்குத்போது பக்கம் AB, $7x+4y=0$ எற்னும் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாயின் சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளேக் காண்க.

13. முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றின் சவன்பாடுகள் முறையே $x+y+4=0$, $7x+y-8=0$, $x+7y-8=0$ என்பனவாகும், கோணம் BAC இன் இருகூறுக்கிகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்விருகூறுக்கி BCஐ Dஇற் சந்திப்பின், முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி, முக்கோணி ABD இற்குள் கிடக்குமென நிறுவுக.

14. $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டின்மேல் புள்ளி (α, β) இன் ஆடிவிம்பத்தின் ஆள்கூறுகளேக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

முக்கோணி A B C இன் உச்சிகள் A, A, C என்பன முறையே $y=x$, $y=2x$, $y=3x$ என்னும் கோடுகளின்மேல் கிடக்கின்றன் பக்கம் AB இன் இருகூறுக்கிச் செங்குத்தின் சமன்பாடு $6x+8y-3=0$ ஆகவும் பக்கம் BC கோடு $11x-4y='$ இற்குச் சமாந்தரமாவுமிருப்பின், முக்கேணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

15. $c(a\alpha+b\beta+c)$ நேர் அல்லது எதிர் என்பதற்கேற்ப உற்பத்தியும (α,β) என்னும் புள்ளியும். $ax+by+b=0$ என்னும் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கத்தில் கிடப்குமென நிறுவுக முக்கோணி ABC இன் பக்கம் AB இன் சமன்பாடு $x-2y+4=0$ ஆகும் கேணம் BAC இன் இருகூறுக்கியின் சமன்பாடு $x-\lambda=0$ ஆகும் பக்கம் AC இன் சமன்பாட்டைக் காண்க. உற்பத்தி முக்கோணி A B C இன் உள்மையமாகவும், பக்கம் BC என்பது $11x-2y=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகவுமிருந்தால் இப்பக்கத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. A B C D என்பது ஒரு வட்ட நாற்கோணி (நாற்பக்கல்), AB , BC , CA என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-3y=0$ $4x-3y-9=0$, $x+4y+4=0$ ஆகும் BC இன் நீள்ம் 5/3 அலகுகளாயின், பக்கம் CD இருக்கக்கூய இரு வரைகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. புள்ளிகள் (x_1,y_1) (x_2,y_2) ஐ இணைக்கும் வரையின் இரசமவெட்டிங் செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x+y=0$ $x-2y=0$ ஆகும். பக்கம் BC $(1,2)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கிறது. A இன் ஒழுக்கு $x^2+y^2-x+7y=0$ எனக் காட்டுக.

18. புள்ளிகள் $P\equiv(x_1,y_1)$, $Q\equiv(x_2,y_2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டை $lx+my=0$ என்னும் வரை செங்குத்தாக இருசம் கூறிடுகிறது.

$$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{-2(lx_1+my_1)}{l^2+m^2}$$ எனக்

காட்டுக.

புள்ளியொன்றின், $lx+my=0$ $lx-my=0$ என்னும் நேர் வரைகளின் மேலுள்ள மறுபடிவங்கள் (h,k) என்ற நிலையான புள்ளியுடன் ஒரே வரையில் இருப்பின், அப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $(l^2-m^2)(x^2+y^2)+(l^2+m^2)(hx-ky)=9$ என்னும் வட்டம் எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

19. முறையே (1, p); (1, q); (1, r) என்பவற்றை ஆள்கூறுகளாகக் கொண்ட P, Q, R என்னும் புள்ளிகள் x = l எனும் கோட்டில் கிடக்கின்றன இங்கு p > q > r ஆகும். O என்பது உற்பத்தியாகும். OP, OQ, OR என்பவற்றிற்கு முறையே P, Q, R இலுள்ள செங்குத்துக்கள் XYZ என்ற முக்கோணியை ஆக்குகின்றன, இம் முக்கோணியின் பரப்பு $\frac{1}{2}(q-r)(r-p)(p-q)$ என நிறுவுக.

20. (i) புள்ளி A (1, 2) இற்கூடாக ஒரு கோடு $2y = 3x - 5$ என்ற கோட்டை P இலும் $x + y = 12$ என்ற கோட்டை Q இலும் வெட்டும்படி வரையப்படுகிறது. AQ = 2AP ஆயின், P, Q இனது ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

21. P (h, k) ஆனது உற்பத்தி புள்ளிகள் A (a, 0) B (0, b) C (a, b) என்பவற்றால் ஆக்கப்டும் செவ்வகத்திற்குள் உள்ள யாதுமொரு புள்ளியாகும. L, M என்பன முறையே P இலிருந்து x — அச்சு y — அச்சிற்கு வரைந்த செங்குத்துக்களின் அடிகளாகும். AM, BL இன் வெட்டும் புள்ளி நீட்டப்பட்ட CP இல் கிடக்கிறதென்றும். CP ஐ வெளிப்புறமாக ab : hk என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதென்றும் காட்டுக.

22. O என்பதை உற்பத்தியாகவுடைய முதற் காற்பகுதியில் P என்பது $x + y = a$ இலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியகும். N என்பது P இலிருன்து x அச்சிற்குள்ள செங்குத்தின் அடியாகும், ΔOPN இன் (i) சுற்றுவட்ட மெயம். (ii) திணிவு மெயம் என்பவற்றின் ஒழுங்குகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

முக்கோணி $O_1 P_1 N$ இன் சுற்றுவட்ட மையம் முக்கோண $O P_2 N_2$ இன் திணிவு மெயத்துடன் பொருந்தும் வண்ணம் P_1N_1, P_2N_2 என்னும் நிலைத்தூரங்கள் (Ordinates) காணப்படலாம் என நிறுவுக. P_1, P_2 இன் ஆள்கூறுகளையும் தந்து P_2 ஆனது ΔOP_1N_1 இன் சுற்றுவட்டத்தில் கிடக்குமெனவும் காட்டுக.

23. சதுரம் OABC இன் உச்சிகள் O, A, B என்பன முறையே (0, 0) : (1, 0) : (1, 1) என்ற புள்ளிகளாகும். P என்பது BC இலுள்ள ஒருமாறும் புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட OP, நீட்டப்பட்ட AB ஐ Q இலும் B இற்கூடாக CQ இற்குச் சமாந்தரமான கோடு OP ஐ R இலும் சந்திக்கின்றன. $CP = (\sqrt{5} - 1)/2$ ஆகும்போது R ஆனது மூலைவிட்டம் AC இற் கிடக்குமென நிறுவுக. P மாறும் போது R இன் ஒழுக்கைச் காண்பதுடன், அதன் பருமட்டான வரைபடத்தையும் தருக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

24\. A என்பது (2,3) என்னும் புள்ளியாகும். B ஆனது $y=1$ ஆற் தரப்படும் PQ என்னும் கோட்டிலுள்ள A இன் ஆடிவிம்பமாகும் C ஆனது $4y=6x-3$ ஆற் தரப்படும், RR_1 என்னும் கோட்டிலுள்ள ஆடிவிம்பமாகும். C இன் ஆள்கூற்றையும், AC இன் நீளத்தையும் காண்க.

A ஆனது P இற்கூடாக CA இற்கும் செங்குத்தான கோட்டிலுள்ள C இன் ஆடிவிம்பம் எனக் காட்டுக.
முக்கோணி ABC இனது சுற்றுவட்டத்தின் சமன்பாட்டை எளிய வடிவிற் காண்க.

25\. (h_2, k_2) என்னும் புள்ளி $lx+my+n=0$ என்ற கோட்டில் புள்ளி (h_1, k_1) இன் ஆடிவிம்பபாயின்.

$l(h_1+h_2) + m(k_1+k_2) = -2n$ என்னும்

$m(h_1-h_2) - l(k_1-k_2) = 0$ என்னும் காட்டுக.

$y=0$; $x=0$, $2x+3y=q$ என்ற கோடுகளின்மேல் (2,1) என்னும்புள்ளியின் விம்பங்களை உச்சிகளாகவுடைய முக்கோணியின் பரப்பைக் காண்க.

26\. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் முறையே $A(-16,0)$ $B(9,0)$ $C(0,12)$ இம் முக்கோணியின் கோணம் A இன் உள்ளிருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $x-3y+16=0$ எனக் காட்டுக.

கோணம் B இன் உள் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாலோ இம் முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களையும் தொடும். வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

27\. m சாய்வாகக் கொண்ட ஒரு நேர்கோடு $c(h,0)$ இனூடாக $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வளையத்தை P,Q இல் சந்திக்கின்றது

PQ இன் நடுப்புள்ளி R ஆனது.
$\left(\frac{a^2hm^2}{a^2m^2+b^2}, \frac{-b^2hm}{a^2m^2+b^2}\right)$ என்ற ஆள்கூற்றைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

m ஆனது மாறும்போது R எப்பொழுதும்
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{hx}{a^2}$ இல் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

P_0 (x_0y_0)இலிருந்து $ax+by \times c=0$ என்னும் நேர்கோடிற்கு வரைப் யப்பட்ட செங்குத்தின் அடி N ஆகும், N இன் ஆள்கூறுகள் (x_0+at, y_0+bt) ஆகுமெனை நிறுவுக;

இங்கு $t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$;Tஎன்பது பரமானமாகவும்,

$l^2+m^2=1$ ஆகவும் இருக்க ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாடானது $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=$ T என்னும் பரமான வடிவில் எடுத்துரைக்கப் பட்டால், |T| என்பது $P_1(x_1, y_1)$ என்னும் நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து $P(x_1+lT, y_1+mT)$ என்னும் புள்ளியின் தூரமாகும் எனக் காட்டுக.

A(2, 1) என்பது சாய்சதுரமொன்றின் ஒரு உச்சியாகும்; அதன் மூலைவிட்டங்களில், $4\sqrt{5}$ நீளமுடைய ஒன்று $x-2y+5=0$ என்ற நேர்கோட்டின் மீது கிடக்கின்றது. சாய்சதுரத்தின் ஏனைய உச்சிகளைக் காண்க.

28. (i) $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டுடன் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியொன்றை உருவாக்கும் வண்ணம், இரு செங்குத்தான நேர்கோடுகள் உற்பத்தியினூடாக வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் சமன்பாடுகள் $(a-b)x+(a+b)y=0$, $(a+b)x-(a-b)y=0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(ii) $\dfrac{a}{h}=\dfrac{h}{b}=\dfrac{g}{f}$ எனின்,

$ax^2+2hxy+by^2+2g+2fy+c=0$ என்னும் சமன்பாடு சம்மந்தமான இரு நேர்கொடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

29. P(h, k) என்னும் புள்ளியினூடாக $l\equiv ax+by+c=0$ என்னும் நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் மீதுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை $(h+at, k+bt)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக; இங்கு t ஒரு பரமானம்.

P யிலிருந்து $l=0$ ஆகிய கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிக்கு ஒத்த t யின் பெறுமானத்தைக் காண்க; இச் செங்குத்தின் நீளம் $|ah+bk+c|/\sqrt{a^2+b^2}$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, $a_1x + b_2y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கிடையேயானதும் உற்பத்தியைக் கொண்டிருப்பதுமான கோணத்தினுடைய இரு கூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இங்கு, $(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,\ c_1 < 0,\ c_2 < 0)$

30. பின்வரும் கோடுகளினால் ஆக்கப்படும் இணைகரத்தினுடைய மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$$ax + by + c = 0 \qquad ax + by + d = 0$$

$$ax' + b'y + c' = 0 \qquad a'x + b'y + d' = 0$$

(i) $(a^2 + b^2)(c' - d')^2 = (a^2 + b^2)(c - d)^2$ ஆக இருப்பின் மேற்படி இணைகரம் சாய்சதுரமாகுமெனவும்,

(ii) இணைகரத்தின் பரப்பளவு $\left|\dfrac{(c-d)(c^1-d^1)}{ab^1 - a^1b}\right|$ ஆகுமெனவும் காட்டுக.

31. P(h,k) என்னும் புள்ளியினூடாக $ax + by + c = 0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் மீதுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(h + at,\ k + bt)$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக; இங்கு t என்பது ஒரு பரமானமாகும்.

P இலிருந்து $ax + by + c = 0$ என்னும் கோட்டின் மீதுள்ள செங்குத்தின் அடிக்கு ஒத்த k இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு இச்செங்குத்தின் நீளம் $|ah + bk + c| / \sqrt{a^2 + b^2}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

32 S என்னும் ஒரு வளையியானது, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ என்னும் சமன்பாடுகளினுலே தரப்படுகின்றது; இங்கு θ என்பது ஒரு பரமானமமகும். அத்துடன் $0 \leq \theta < 2\pi$ ஆகும். l என்பது $7x + y + 12\sqrt{2} = 0$ என்னும் நேர்கோடாகும். S மீதுள்ளதும் l இற்கு மிகவும் கிட்டவுள்ளதுமான புள்ளி P_0 இன் ஆள் கூறுகளைக் காண்க. P_0 இலிருந்து l இற்குள்ள (ஆகவுங் குறுகிய) தூரத்தையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

33. A(0—4), B(7,3), C(5,3/2) ஆகியன நாற்பக்கல் ABCD இன் மூன்று உச்சிகளாகும். 11y—10x=0 என்னும் கோட்டுக்கு BD சமாந்தரமாகவும் 4y+3x=0, என்னும் கோட்டுக்கு AD செங்குத்தாகவும் இருப்பின் D இன் ஆள்கூறுகளையும், கோடுகள் BC உம் AD உம் நீட்டப்பட்டால் இவை சந்திக்கும் புள்ளி P ஐயும் காண்க.

இதிலிருந்து (a) AB, CD க்குச் சமாந்தரம் எனவும்.
(b) Δ ABP ஒரு இரு சமப்க்க முக்கோணி என்றும் காட்டுக.

Δ PCD இன் பரப்பு: PAB இன் பரப்பு=1 :4 என உய்த்தறிக.

34. புள்ளி (x_0, y_0) இல் இருந்து கோடு $ax+by+C=0$ க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம்.

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ எனக் காட்டுக.

(i) இரு சமாந்தரக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் x—அச்சின் நேர்த் திசையுடன் α கோணத்தை அமைக்கின்றன. ஒரு கோடு (h,k) ஊடாகவும் மற்றைய கோடு (m,n) ஊடாகவும் செல்கின்றன. இந்தக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரம் |(h—m)சைன்α—(k—n) கோசை| எனக் காட்டுக

(ii) 13 சதுர அலகுகலைப் பரப்பாகக் கொண்ட ஒரு சதுரத்தின் மையம் $(-\frac{1}{2}, 1)$ இதன் இரண்டு பக்கங்கள், $12x+5y=0$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகும். இச் சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

35. வட்டமொன்றின் தளல்திலுளள O என்னுமோர் புள்ளியூடாக 1,1 எனும் இரு நேர்கோடுகள், வட்டத்தை முறையே P,Q;R,S எனும் புள்ளிகளில் வெட்டும் வண்ணம் வரையப்படின்,

OP,OQ=OR.OS என நிறுவுக

ABC எனுமோர் முக்கோணியின் பக்கங்களாக BC,CA,AB ஆகியவற்றில் முறையே அமைந்துள்ள D,E,F எனும் புள்ளிகள் AD,BE,CF எனும் மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமாறு உள்ளன. D.E,F என்பவற்றிற்கூடான வட்டமானது BC,CA,AB என்பவற்றை மீண்டும் முறையே D'. E', F' என்பவற்றில் சந்திக்கின்றது. AD',BE',CF' என்பனவும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென நிறுவுக

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

36. A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ABC எனுமோர் முக்கோணியின் உச்சிகளாகும். AB, AC என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x - y - 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ ஆகும். $(-2, -2)$ என்பது BC யின் நடுப்புள்ளியாகும் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) AC நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

(ii) பக்கம் BC யின் சமன்பாடு

(iii) Δ ABC யின் பரப்பளவு

(iv) Δ ABC யின் சுற்றுமையத்தின் ஆள்கூறுகள்.

அலகு 2

வட்டங்கள்

1. λ இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும், $x^2 + y^2 - 9 - 2\lambda(x + y - 3) = 0$ என்னும் சமன்பாடு, P, Q என்னும் இரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக் எனக் காட்டுக.

$3x + 4y - 6 = 0$ என்னும் கோட்டைத் தொடும்படி P, Q இற்கூடாக இரு வட்டங்கள் வரைலாமெனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

2. $(2, 0)$, $(0, 2)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டங்களில் இரண்டின் பரிதியை $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 10 = 0$ என்னும் வட்டம் இரு கூறிடுமென நிறுவி, இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டும் எனக் காட்டுக.

3. ஒருமைகள் g, f என்பவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy - a^2 = 0$ என்னும் வட்டம் $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு கூறிடுமென நிறுவுக.

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு கூறிடக் கூடியதாகவும் $y + 5 = 0$ என்னும் கோட்டைத் தொடக்கூடியதாகவும் $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக இரு வட்டம் வரையலாமெனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. $(1, 0)$; $(0, 1)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவற்றில் இரு வட்டங்கள் $x^2+y^2-2x-8y-3=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமெனக் காட்டி, இவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க. இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டுமெனவும் காட்டுக.

5. $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-8x+7=0$, $x^2+y^2-6y+5=0$ என்னும் மூன்று வட்டங்களில் ஒவ்வொன்றும் மற்றைய இரண்டையும் தொடுமெனக் காட்டுக.

தொடுபுள்ளிகளிலுள்ள மூன்று பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளையும் கண்டு மூன்று தொடலிகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்குக. தரப்பட்ட மூன்று வட்டங்களையும் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

6. $(1, 0)$ $(-1, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவற்றுள் இரு வட்டங்கள் $2x-y-3=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடுமென நிறுவி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டுமெனவும் நிறுவுக.

7. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) இலிருந்து வரையப்படும் தொடரொனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P என்பது x—அச்சில் ஒரு மாறும் புள்ளியாகும். Q, R என்பன $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு P இலிருந்து வரையும் தொடலிகளின் தொடுபுள்ளியாகும் Q R இன் நடுப்புள்ளி $3(x^2+y^2)-6x+14y+18=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

8. $S=0$, $S^1=0$ என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாயின் $S+\lambda S^1=0$ என்னும் சமன்பாட்டை விளக்குக, இங்கு λ ஓர் ஒருமை

$x^2+y^2-2x+4y-3=0$ என்னும் வட்டத்தால் பரிதிகள் இரு கூறிடப்படும் வண்ணம் $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக வரையப்படும் வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரு வட்டத்தில் கிடக்குமெனக் காட்டி இவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

9. t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்.
$(1-t^2)(x-h)+2t(y-k) = r(1+t^2)$ என்னும் கோடு, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

$5(x^2+y^2)-6x+8y-35=0$ என்னும் வட்டத்தில் 4 அலகு நீளமுடைய இரு நாண்கள், $x^2+y^2-2x-4y-11=0$ எனும் வட்டத்தனைத் தொடும்படி வரையலாமென நிறுவி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

10. x— அச்சை (1;0) என்னும் புள்ளியில் தொடும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவற்றுள் இரு வட்டங்கள் $x^2+y^2-4x+8y+11=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமெனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

11. $(x_1 y_1)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடலியினது நீளத்தைக் காண்க
(2,3) எனும் புள்ளியிலிருந்து S இற்கு வரையும் தொடலின் நீளம் Sஇன் ஆரையின் இரு மடங்குக்குச் சமமாகும் வண்ணம் S என்பது (1,1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு மாறும் வட்டமாகும். S இன் மையம் $4(x^2+y^2)-6x-4y-3=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

12. $2g_1g_2+2f_1f_2= c_1+c_2$ ஆயின் $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$ $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுமெனக் காட்டுக.

$x^2+y^2-x+3y-1=0$ எனும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டக்கூடியதாகவும், $x+2y+1=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடக்கூடியதாகவும் உற்பத்திக்கூடாக இரு வட்டங்கள் வரையலாமெனக் காட்டி, இவ்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க

13. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் வட்டத்திற்கு (x_1,y_1) இலிருந்து வரையும் தொடலிகளின் நீளத்தைக் காண்க.

(3,4) என்னும் புள்ளியிலிருந்து Sஇற்கு வரையும் தொடலின் நீளம் Sஇன் ஆரையின் இருமடங்காகும் வண்ணமுள்ள S என்னும் மாறும் வட்டம் $x^2+y^2+2x+4y-1=0$ என்னும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றது. S இன் மையம் $x^2+y^2+4x+7y-10=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்குமென நிறுவுக,

14. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டம். $x^2+y^2=r^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொட்டால் $4r^2(g^2+f^2)=(c+r^2)^2$ என நிறுவுக

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x^2+y^2=4$ எனும் வட்டத்தைத் தொடுகின்றதும். $x^2+y^2+8x-4y+12=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு கூறிடுகின்றது மான ஒரு மாறும் வட்டம் Sஆகும். Sஇன் மையம் $3x^2-4xy+25x-12y+36=0$ என்னும் கூம்பில் கிடைக்குமெனநிறுவுக.

15. புள்ளி (x_1, y_1) இலிருந்து வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இற்கு வரைந்த தொடலியினது நீளத்தைக் காண்க.
A,B என்பவை கோடு $x-y=0$ இலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். வட்டம் $S\equiv x^2+y^2-4x+8y+10=0$ இற்கு அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து வரைந்த ஒரு தொடலியினது நீளம் 4 அலகு ஆயின் A,B என்பவற்றினது ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
புள்ளிகள் A,B இனூடாகச் செல்லுகின்ற எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
இதிலிருந்தோ வேறு வழியினாலோ புள்ளிகள் A,B இனூடாகச் சென்று வட்டம் $S=0$ இன் பரிதியை இருகூறாக்குகின்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+3y^2-4x+16y-18=0$ எனக் காட்டுக.

16. புள்ளி (x_1, y_1) இலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரைந்த ஒரு தொடலியினது நீளத்தைக் காண்க. P என்னும் ஒரு புள்ளியானது; அப்புள்ளியிலிருந்து முறையே S_1, S_2 என்னுந் தரப்பட்ட இரு வட்டங்களுக்கு வரைந்த தொடலிகளினது நீளங்கள், 1 : k என்னும் தரப்பட்ட விகிதத்தில் இருக்கும் வண்ணம் இயங்குகின்றது. இங்கு $k\neq 1$: பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) P இன் ஒழுக்கானது S_1S_2 என்பவற்றாலே துணியப்பட்ட பொதுவச்சுத் தொகுதியின் S என்னும் ஒரு வட்டமாகும்
(ii) S இன் மையமானது S_1, S_2 ஆனவற்றின் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோட்டை $k^2 : 1$ எனும் விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகக் பிரிக்கின்றது.

17. $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x+12=0$
எனும் வட்டங்களின் பொதுத் தொடலிகள் வெட்டும் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டுள்ளதும், இவ்வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க

18. $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$
எனும் சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனைகளைக் காண்க.
m, —m என்பவற்றைச் சாய்வு விதங்களாகக் கொண்ட இரு நேர்கோடுகள் $px^2+qy^2=1$ என்ற கூம்பை நான்கு வேறுவேறான

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. இந் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு பரிதி யிலுள்ளன என நிறுவுக.

19. $x^2+y^2+6x-4y-12=0$, $x^2+y^2-4x+16y-32=0$ என்ற இரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக. மூன்றாவது வட்டமொன்று இவ்விரண்டிற்கும் செங்குத் தாயின் இதன், மையம் (2 [illegible]) இல் இருக்குமென நிறுவுக. இங்கு λ ஒரு மாறி. λஇன் உறுப்புக்களில் இதன் ஆரையையும் காண்க.

20. O என்பது ஆள்கூற்றச்சின் உற்பத்தியாகும். $A(a,o)$ $B(o,b)$ என்பன இரு புள்ளிகள், மாறும் புள்ளி P ஆனது $PO/PA=\frac{BO}{BA}$ ஆகும் வண்ணம் தளம் OABஇல் அசைகிறது. Pஆனது $\frac{b}{a}\sqrt{(a^2+b^2)}$ ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்திற் கிடக்குமெனவும் அதன் மையம் C_1 ஆனது O இலிருந்து b^2/a தூரத்தில் இருக் குமெனவும் காட்டுக.

$QO/QB=AO/AB$ ஆகும் வண்ணம் Q என்ற வேறொரு புள்ளி அசையுமாயின், Q கிடக்கும் வட்டத்தின் ஆரையையும் அதன் மையம் C_2ஐயும் முன்னையதைப்போல் பெறுக.

C_1 இனுலும் C_2 இனுலும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட் டும் புள்ளிகளிலொன்றினுலும் ஆக்கப்படும் முக்கோணியைக் கருதுவதன் மூலம் இரு வட்டங்களும் 60^0 இல் ஒன்றையொன்று வெட்டும் எனக் காட்டுக.

21. $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ என்ற வட்டம் x அச்சை தொடுகிற தெனக் காட்டி, தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
ஒரு வட்டம் நேர் (positive) x — அச்சைத் தொட்டுக்கொண்டு $P(1,3/2)$ $Q(7,6)$ என்ற புள்ளிகளுக்கூடாகவும் செல்கின்றது அதன் சமன்பாடு.

$2(x^2+y^2)-16x-15y+32=0$ எனக் காட்டுக.
PQ இற்குச் செங்குத்தான விட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

22. (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனும் புள்ளிகளை விட்டத்தின் முனைவுகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
மேலேயுள்ள விட்டத்திற்குச் செங்குத்தான விட்டத்தின் முனைவு களின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

23. ஒருமைகள் p,q இன் எல்லாப்பெறுமானங்களுக்கும் $(x-a)\ (x-a+p)\ +\ (y-b)\ (y-b+q)=r^2$ என்னும் வட்டம் $(x-a^2+(y-b)^2=r^2$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருசம கூறிடும் எனக் காட்டுக

$(x-y)=0$ என்னும் கோட்டை எற்பத்தியில் தொட்டுக்கொண்டும், $x^2+y^2+2y=3$ எனும் வட்டத்தின் பரிதியை இருசமகூறிட்டுக்கொண்டும் இருக்கும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க

24. y அச்சைத் தொடுவதும் தனக்குச் சார்பாக உற்பத்தியில் முனையை (polar) $x+py=1$ ஆகவும் கொண்டுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. உற்பத்தியிலிருந்து வரையப்படும் மாற்றத் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P மாறின் வட்ட மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு எனக் காட்டி வட்டம் எப்பொழுதும் $2(x^2+y^2)=x$ எனும் நிலையான வட்டத்தைத் தொடும் எனவும் காட்டுக.

25. (i) A என்பது ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும், நிலையான வட்டமொன்றின் மாறுகின்ற விட்டங்களை முனைகளில் வெட்டுவதுமான ஒரு மாறுகின்ற வட்டமாகும் மாறுகின்ற வட்டமையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்வரை எனக் காட்டுக.
(ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்தின் சார்பாக உற்பத்தியின் முனைவு வட்டத்தை PQ இல் வெட்டுகின்றது. PQஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு. $(f^2+g^2)\ (x^2+y^2)+2gcx+2fcy+2c^2-c\ (g^2+f^2)=0$ எனக் காட்டுக

26. $4x-3y+2a=0,\ 3x-4y+12a=0,\ 3x+4y-12a=0$ என்னும் நேர்வரைகளின் மேல் பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணியின் உள்வட்டத்தின் மைய ஆள்கூற்றையும் ஆரையின் நீளத்தையும்

27. $lx+my+n=x$ என்ற கோட்டின்மேல் அமைந்துள்ள $(x-c)^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் நாண். உற்பத்தியில் செங்கோணத்தை அமைப்பதற்குரிய நிபந்தனைகளைக் காண்க,

28. $x^2+y^2=a^2$ எனுக் வட்டத்திற்கு $T(a \cos\theta, a \sin\theta)$ எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை காண்க. இத் தொடலி $x+a=0$ யை R இல் வெட்டுகிறது. RT,P வரை, நீட்டப்படுகிறது இங்கு RT=TP P ஆனது Pயின் ஆள்கூறுகளை θ வின் சார்பில் y அச்சை சந்திக்குகபோது அதன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

29. Q(-5.0), R $(7,6)$ யை இணைக்கும் கோட்டின் செங்குத்து இரு கூறுக்கியை காண்க; இவ்விருகூறுக்கி y அச்சை S இல் சந்திக்கிறது. Q இனூடாக வரையும் QS இற்கு செங்குத்தான கோடு, இச் செங்குத்து இருகூறுக்கியை வெட்டும் புள்ளி Pயைக் காண்க. Q.R.S இனூடான வட்டம், p யினூடாகவும் செல்லும் எனக் காட்டி வட்டத்தின் மையத்தைக் காண்க.

30. P,Q என்பன புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆயின் PQவை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ எனக் காட்டுக.
உற்பத்தி O இலிருந்து $x^2+y^2-8x+10=0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடலிகள் வட்டத்தை A.B இல் தொடுமாயின் (a) வட்டம் OAB இன் சமன்பாட்டைக் காண்க (b) நேர் வரை AB இன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

31. இரு வட்டங்கள் x— அச்சையும் $3x-4y+3=0$ என்னும் கோட்டையும் தொடுகின்றன. இவற்றின் மையங்கள் $x+y=0$ இல் இருக்குமாயின் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ எனக் காட்டுக.

சற்றைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
மேலே தரப்பட்ட வட்டத்துக் உற்பத்தியிலிருந்து வரையப்படும் இரண்டாம் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

32. $(y+mx)^2=ky(3x+4y-9)$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாயின் மாறிலிகள் k,m என்பதன் பெறுமானம் காண்க.
k,m என்பதன் பெறுமாணங்களுக்குறிய இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. வரை $3x+4y-9=0$. இரு வட்டங்களையும் தொடுமெனக் காட்டுக. மேலும் மற்றைய பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

33. இரு ஆள்கூற்று அச்சுகளைத் தொடக் கூடியதாகவும் $(9,2)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகச் செல்லக் கூடியதாகவும் உள்ள இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைத் தருக.

(i) இவ்விருவட்டங்களின் இரண்டாவது இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு

(ii) இவ்விரு வட்டங்களின் பொது நாணின் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

34. மணிக்கூட்டுத் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் எழுத்திடப்பட்ட சதுரம் ABCD இன் உச்சி A, இன் ஆள்கூறு $(-1, -3)$ ஆகும். மூலை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விட்டம் BD, $x-2y+5=0$ என்னும் கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ளது.

(i) கணித்தலின் மூலம் C இன் ஆள்கூறு $(-5,5)$ என நிறுவி B, C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(ii) இச் சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களையும் தொடக்கூடியவாறு வரைந்த வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டம் உற்பத்தியினூடாகச் செல்லுகின்றது. என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

(iii) முதலாவது கால்வட்டத்துள் அடமந்திருக்கும் இச்சதுரத்தின் பாகத்தின் பரப்பினைக் காண்க. (இங்கு $x>0, y>0$)

35, 2α கோணம் அமைக்கும் இரு நேர்கோடுகளை OA, OB குறிக்கின்றன Pஐ மையமாகவும் aஐ அரையாகவுமுடைய வட்டம் OA, OBஐத் தொடுகிக்றது. வட்டங்கள் தொடர்ச்சியாக ஆரை குறையும் வண்ணமும் OA, OB ஐயயும் அதற்கடுத்துள்ள வட்டத்தையும் தொடும்படியும் வரையப்படுகின்றன. இவ்வட்டங்களின் பரப்புகள் ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அமையும் எனக் காட்டுக.

முதல் n பரப்புகளின் கூட்டுத்தொகை sn ஆகவும் முடிவிலிக் கூட்டுத்தொகை S ஆகவுமிருப்பின்

$S-S_n < \frac{1}{100}S$ என நிறுவுக

$$n < 1 \Big/ \log\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right) \quad [\log x = \log_{10} x]$$

மேலும் $\sin\alpha = 3-2\sqrt{2}$ ஆகும்போது, முதலாவது வட்டத்தின் பரப்பு, மற்றெல்லா வட்டங்களினதும் பரப்புகளினதும் கூட்டுத்தொகைக்கு சமமாகுமெனவும் நிறுவுக.

36. இரு மாறும் நேர் கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன இவை x அச்சை C, D இலும் y அச்சை E, F இலும் வெட்டுகின்றன. CD, EF இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே Aயும் B யும் ஆகும் A, B நிலையானவை ஆயின் இரு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கு, ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும் எனக் காட்டுக.

37. S_1 எனும் வட்டம், S_2 என்றவட்டத்தை வெளிப்புறமாக தொடுகிறது. S_1 இன் மையம் $C_1\,(a_1, b_1)$, அதன் ஆரை r_1, S_2 இன் மையம் $C_2\,(a_2, b_2)$, அதன் ஆரை r_2.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(a_1{}^2-a_2{}^2)+(b_1{}^2-b_2{}^2)=(r_1{}^2-r_2{}^2)$ என்பது தொடுபுள்ளியிலுள்ள தொடலி உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லின் உண்மையென நிறுவுக.

உற்பத்தில் இருந்து S_1 , S_2 இற்கு வரையப்பட்ட மற்றைய தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தெனில்

$|a_2b_1-a_1b_2|=|a_1a_2+b_1b_2|$ என நிறுவுக

இதிலிருந்து C_1 நிலையாக இருக்க, S_1 , S_2 மாறுபடின் C_2 என்பது $(a_1{}^2-b_1{}^2)(x_2-y_2)+a_1+b_1+xy=$ எனும் வளையியில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

27ம் கணக்கின் தொடர்ச்சி
இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ, Cஐ மையமாகவுடைய வட்டமொன்றின் நாலுகின்ற நாண் PQ, நிலையான ஒரு உட்புள்ளி O இல் செங்கோணத்தை அமைப்பின் O இலிருந்து PQ இங்கு வரையும் செங்குத்தின் அடியின் ஒழுக்கு வட்டம் என்றும் அதன் மையம் O இற்கும் C இற்கும் நடுவில் உள்ளதென்றும் நிறுவுக.

38. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y_2y+c_2=0$ என்னும் வட்டங்கள் செங்குத்தாயின் $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ எனக் காட்டுக.

A, B என்பன முறையே இவ்வட்டங்களின் மையங்களாகவும் C, D என்பன இவ்வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டும் புள்ளிகளாகவும் கொண்டு A, B, C, D, என்ற புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$2(x^2+y^2)+2(g_1+g_2)x+2(f_1+f_2)y+c_1+c_2=0$ எனக் காட்டுக
CDஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு
$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1+\lambda\{2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2\}=0$ என்னும் வடிவில் தரப்படலாம் எனக் கொண்டு $\lambda=-r_1{}^2/AB^2$ எனக் காட்டுக.
இங்கு r_1 என்பது முதல் வட்டத்தின் ஆரையாகும்.

39. $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு$(x_1, y_1$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரைந்த தொடலியின் நீளத்தைக் காண்க.
$t_1{}^2=\alpha at_2{}^2+\beta t_3{}^2+\gamma$ ஆயின் (x_1, y_1) என்பது $2x+4y-3a=0$ என்ற நிலையான நேர்வரையின்மேல் இருக்கும் வண்ணம் α, β.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆகிய ஒருமைகளின் பெறுமானங்கள் காணப்படலாம் என நிறுவுக.

இங்கு t_1, t_2, t_3 என்பன முறையே $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=2ax$ $x^2+y^2=2ay$ என்னும் வட்டங்களுக்கு யாதுமொரு புள்ளி(x_1, y_1) இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகளின் நீளங்களாகும்.

40 வட்டங்கள் $S \equiv x^2+y^2+2g_1x+2+2fy_1+c_1=0$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + 2g_2 + 2f_2y + c_2 = 0$$

ஆகியவற்றின் இடைவெட்டுகளுக்கு ஊடாகச் செல்லும் வட்டத்தை $S+\lambda S^1=0$ என்னும் சமன்பாடு குறிக்கிறது. என்பதைக் காட்டவும்; இங்கே λ ஒரு பரமாணம். புள்ளி $(15, -5)$ ஊடாகவும் வட்டங்கள் $x^2+y^2-10x=0$, $x^2y^2-4x-8y-30=0$ ஆகியவற்றின் இடைவெட்டுப் புள்ளிகளுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பின்வருவனற்றைக் காட்டுக

(a) இம்மூன்று வட்டங்களில் இரண்டு நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுகின்றன.

(b) இம்மூன்று வட்டங்களின் பொது நாணுனது, இவற்றுள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டம்.

41 $lx+my+n=0$ எனும் நேர்கோடானது $(x-a)^2 + (y-b^2) = r^2$ எனும் வட்டத்தைத் தொடுமாயின், $(al+bm+n)^2=(l^2+m^2)r^2$ என நிறுவுக.

$3x+4y=0$ எனும் நேர்கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாக $S \equiv (x+1)^2+(y+2)^2-1=0$ எனும் வட்டத்துக்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

ஒவ்வொன்றும் இந்த இரு தொடலிகளையும் $S=0$ எனும் வட்டத்தையும் தெடுேகின்ற இரு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 3

பரவளைவுகள்

1. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிலுள்ள புள்ளிகள் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ என்பவற்றை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB என்னும் நாண் $(2a, 0)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வண்ணம் A, B என்பன $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிலுள்ள மாறும் புள்ளிகளாகும். ABஇன் நடுப்புள்ளி $y^2 = 2a(x-2a)$ என்னும் பரவளைவில கிடக்குமெனக் காட்டுக

2. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு A, B இல் வரையப்படும் தொடலிகள் $x + 4a = 0$ என்னும் கோட்டில் வெட்டும் வண்ணம் A, B என்பன பரவளைவிலுள்ள இரு மாறும் புள்ளிகளாகும். AB இன் நடுப்புள்ளி $y^2 = 2a(x-4a)$ என்னும் பரவளைவில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

3. $y^2 = 4ax$ என்னுங் பரவளைவில் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ எனும் புள்ளிகள் இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
$(4a, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு மாறும் கோடு, $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவை AB இல் சந்திக்கிறது. AB என்ற நாண் உற்பத்தியில் செங்கோணத்தை அமைக்குமென நிறுவுக.

AB இரு நடுப்புள்ளி $y^2 = 2a(x-4a)$ என்னும் பரவளைவில் கிடக்குமெனவும் நிறுவுக.

4. $y^2 = 4ax$ எனும் பரவளைவிற்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்.

$y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு புள்ளிகள் $P(at_1^2, 2at_1$ $Q(at_2^2, 2at_2)$ இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திப்பின், T இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. T, $2x + y + 2a = 0$ என்னும் கோட்டின் கிடைக்கக்கூடியதாக P, Q என்பன பரவளைவில் அசையும் புள்ளிகளாயின், PQ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2 = a(2x - y - 2a$ என்னும் பரவளைவு என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. பரவளைவு $y^2 = 4ax$. இலுள்ள புள்ளிகள் P_1 $(at_1^2, 2at_1)$, $p_2(at^2, 2at_2)$ என்பவற்றைத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P_1P_2 என்பது அப்பரவளைவின் ஒரு குவிய நாணாயின், $t_1t_2 = -1$ எனக் காட்டுக.

AB, CD என்பவை பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இனது மாறுங் குவிய நாண்களாகும். AC என்பது புள்ளி $(2a, 0)$ இனூடாகச் செல்கின்றதெனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) BD என்பது புள்ளி $(a/2, 0)$ இனூடாகச் செல்கின்றது.

(ii) BD யின் நடுப்புள்ளியானது $y^2 = a(2x - a)$ இல் கிடக்கிறது.

6. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
AB இன் நடுப்புள்ளி $y - a = 0$ என்னும் கோட்டில் கிடக்கும் வண்ணம் A,B என்பன $y^2 = 4ax$ எனும் பரவளையிலுள்ள மாறும் புள்ளியாகும். பரவளைவிற்கு AB இலுள்ள செவ்வன்கள் சந்திக்கும் புள்ளி $x - y - 3a = 0$ என்ற கோட்டில் கிடக்குமென நிறுவுக

7. $y = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
PQ என்பது $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவின் குவிய நாண் ஆகும் பரவளைவிற்கு PQ இலுள்ள செவ்வன்கள் R இற் சந்திப்பின் PQ இன் நீளம், பரவலேவின் செலுத்தியிலிருந்து R இன் செங்குத்துத் தூரத்திற்குச் சமனென நிறுவுக.

8. $y^2 = 4ax$ என்னும்பரவளைவிற்கு புள்ளி $P(at^2, 2at)$ இலுள்ள தொடலி சேவ்னன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க'
P இலுள்ள தொடலி, செவ்வன் என்பன பரவளைவின் x--அச்சை முறையே T, N இல் சந்திக்கின்றன. S என்பது பரவலேவின் குவியம். P பரவளைவில் அசைய, முக்கோணி PSN இனது நிமிர் மையம் $xy^2 = a(x - a)^2$ என்ற வளையியை வரையும் எனக் காட்டுக.
முக்கோணி PST இனது நிமிர் மையத்தின் ஒழுக்கையும் காண்க.

9. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவிற்கு $P(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வன், பரவளைவை மீண்டும் புள்ளி $Q(aT^2, 2aT)$ இல் சந்திக்கிறது. $T = -(t + 2/t)$ என நிறுவுக. P.Q இலுள்ள பரவளைவின் தொடலிகள் R இற் சந்திப்பின், t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் R என்பது $y^2(x + 2a) + 4a^3 = 0$ என்ற வளையில் கிடக்குமெனவும் நிறுவுக,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

10. பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) a என்பது ஓர் ஒருமையாயின், $x=at^2$; $y=2at$ என்னுஞ் சமன்பாடுகள் ஒரு பரவளைவின் பரமானச் சமன்பாடுகளாகும்.

(ii) t என்னும் பரமானத்தை உடைய புள்ளியினூடாக அப் பரவளைவினது குவிநாணின் நீளம் $a(t+t^{-1})^2$ ஆகும். இதிலிருந்து அப்பரவளைவினது செங்கோணங்கள் வெட்டுஞ் சம நீளமுள்ள இரு குவிய நாண்களின் முனைப் புள்ளிகள் $\pm 1 \pm \sqrt{2}$ என்னும் பரமானங்களை உடைய புள்ளிகளாகுமெனக் காட்டுக.

11. $y^2=4a$ என்னும் பரவளைவில் $P(at_1^2, 2at)$, $Q(at_2^2, 2at_2)$ என்பவை இரு மாறும் புள்ளிகளாகும் PQ இன் நடுப்புள்ளி M ஆகும். PQ க்களிலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன.

(a) R இன் ஆள்கூறுகள் $[at_1t_2, a(t_1+t_2)]$ எனக் காட்டுக.
(b) புள்ளி R ஆனது $x=h$ என்னும் நேர்கோட்டிற் கிடந்தால் M இன் ஒழுக்கையும்.

(c) MR இன் நீளம் ஓர் ஒருமை C ஆயின், R இன் ஒழுக்கையும் காண்க.

12. $y^2+4ax=8a^2$, $y^2-4ax=4a^2$ ஆகிய இரு பரவளைவுகளினதும் குவியங்களினதும் உச்சிகளினதும் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இப்பரவளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளையும், வெட்டும் புள்ளிகளின் ஒன்றில் இரு பரவளைவுகளுக்கும் வரையப்பட்ட தொடலிகளுக்கு உட்பட்ட கூர்ங்கோணத்தையும் காண்க.

13. பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு $P(at^2, 2at)$, $Q(an^2t^2, 2ant)$ இலுள்ள தொடலிகள் R இற் சந்திக்கின்றன. இங்கு n ஒரு முழுவெண். t மாறும்போது R என்பது எப்போதும் $2y^2=9ax$ என்னும் பரவளைவிற் கிடப்பின் n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

P.Q இலுள்ள செவ்வண்களும், $y=-48a$ என்ற கோடும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பின், PQ இன் நீளத்தைக் காண்க.

14. பரவளைவுகள் $y^2=4ax$: $x^2=4ay$ என்ப வெட்டும் புள்ளிகள் O(உற்பத்தி), P ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தொடலிகளுக்கிடையிலுள்ள கோணங்களைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x^2=4ay$ இற்கு P இலுள்ள தொடலி x அச்சை Q இலும் $y^2=4ax$ இற்கு P இலுள்ள தொடலி y அச்சை R இலும் சந்திக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை காண்க.

(a) நாற்கோணி OQPK இன் பரப்பு.

(b) RP ஆனது Pஇலுள்ள தொடலியாகவும், OP ஆனது நாணாகவுமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு.

15. குவியத்தை முனைவாகவும், அச்சை ஆரம்பக் கோடாகவும் கொண்டு ஒரு பரவளைவின் முனைவுக்குறிய (polar) சமன்பாடு $1/r=1+$கோசை θ என்னும் வடிவில் தரப்படலாம் எனக் காட்டுக பரவளைவுக்கு $\theta-\alpha$ ஆகும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$1/r=$கோசை $\theta+$ கோசை $(\theta-\alpha)$ என நிறுவுக.

S_1, S_2 என்பன O என்பதைப் பொதுக் குவியமாகக் கொண்ட இரு பரவளைவுகளாகும். S_1 இன் செலுத்தி S_2இற்கு P_2 இலுள்ள தொடலியாகும்.

அவற்றின் முனைவுக்குறிய சமன்மாடுகளைக் காண்க. S_1 இற்கு P_1 இலுள்ள தொடலி. S_2 இற்கு P_2 இலுள்ள தொடலிக்குச் சமாந்தரமாயின், P_1, P_2. O இற்கூடாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

16. பரவளைவின் நாண் PQ. குவியம் S இற்கூடாகச் செல்கிறது. S இற்கூடாகச் சென்று பரவளைவை P இற் தொடும் வட்டம் S இற்கூடாகச் சென்று பரவளைவை Q இற் தொடும் வட்டத்திற்குச் செங்குத்து என நிறுவுக.

17. $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவுக்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
P,Q,R என்னும் மூன்று புள்ளிகள் இப்பரவளைவில் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. நாண் PQ செலுத்திக்குச் சமாந்தரம். P,R இலுள்ள தொடலிகள் $y^2=4a(2x+a)$ என்னும் பரவளைவில் சந்திக்கின்றன Q,R இலுள்ள தொடலிகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

18. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின் நாண் (α,β) இல் இருகூறிடப் படுகின்றது. இந்நாணின் சமன்பாடு $2ax-\beta y=2\alpha a-\beta^2$ எனக் காட்டுக.

$y^2+=4ax=0$ என்ற பரவளைவைத் தொடுகின்ற $y^2=4ax$ இற்கு வரையப்பட்ட. நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் ஒழுக்கைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

19. $y^2=4ax$ இற்கு $(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P.(at_1{}^2, 2at_1)$, $Q(at_2{}^2, 2at_2)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்கள் பரவளைவில் $R(aT^2, 2aT)$ இல் சந்திக்கின்றன. t_1 உம், t_2 உம் $t^2+tT+2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக் காட்டுக, T இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும். நாண் PQ இன் மையப்புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவெனக் காட்டுக.

20. $y^2=4ax$ இற்கு $(at^2, 2at)$ இலுள்ள தொடலியினதும், செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$y^2=4ax$ என்ற பரவளைவைக் குறித்து A இன் முனைவு (Polar) பரவளைவை P, Q இல் வெட்டுகிறது. PQ இலுள்ள செவ்வன்கள் B இல் சந்திக்கின்றன. A என்பது $xy=c^2$ என்ற அதிபரவளைவில் இருப்பின். B இன் ஒழுக்கு ஒரு நேர்வரையெனக் காட்டுக.

21. $y^2=4ax$ இற்கு $(at^2\ 2at)$ இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

குவநாணின ஒரு முனையிலுள்ள செவ்வன், புள்ளி $(15a, 12a)$ இனூடாகச் செல்லும் என நிறுவுக. இப்புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட எஞ்சிய செவ்வன்களின் அடிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

22. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவிற்கு புள்ளி $P(4a, 4a)$ இல் அமையும் தொடலியின் சமன்பாட்டினை பெறுக. இத்தொடலியானது x அச்சினை புள்ளி $R(-4a, 0)$ இல் சந்திக்குமெனக் காட்டுக. பரவளைவுக்கு R இலிருந்து வரையப்படும் மற்ற தொடலியானது பரவளைவை Q இல் சந்திப்பின், Q இன் ஆள்கூறுக காண்க. தொடலிகள் RP, RQ, என்பவற்றாலும் பரவளைவாலும் அடைக்கப்படும் பரப்பினை காண்க.

23. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவிற்கு புள்ளி $T(at^2, 2at)$ இல் அமையும் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. S என்பது பரவளைவின் குவியமாய் இருக்க நாண் QSR. ஆனது T இலுள்ள தொடலிக்கு சமாந்தரமாகுமாறு வரையப்படுமாயின், அந்நாணின் சமன்பாட்டை காண்க. $QR=4TS$ எனவும் நிறுவுக.

24. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவிற்கு $P(at^2, 2at)$ எனும் புள்ளியிலான தொடலியைக் காண்க.

உற்பத்தி O வினூடான P யிலான தொடலிக்கு சமாந்தரமான கோடு பரவளைவை Q வில் சந்திக்கிறது. பரவளைவின் அச்சுக்கு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சமாந்தரமான P இனூடான கோடு, OQ வின் நடுப்புள்ளிக்கு ஊடாக செல்லும் எனக் காட்டுக.
P யிலான தொடலியும், செவ்வனும் x அச்சை முறையே T யிலும் N இலும் வெட்டின் முக்கோணி TPN இன் பரப்பு $2a^2t(1+t^2)$ என நிறுவுக,

25. $(at^2, 2at)$ எனும் புள்ளியில் $y^2=4ax$ எனும் பரவளேவின் சாய்வைக் காண்க. இதிலிருந்து இப்புள்ளியில் அமையும் தொடலியின் சமன்பாடு $x-ty+at^2=0$ எனக் காட்டுக.
இத்தொடலியானது y அச்சை T இல் சந்திக்கிறது, O உற்பத்தி O, P, T எனும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $(\frac{1}{2}at^2+a, \frac{1}{2}at)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து t மாறும்போது மையத்தின் ஒழுக்கு இன்னொரு பரவளேவென உய்த்தறிக.

26. $y^2=15x$ எனும் பரவளேவிற்கு, m பூச்சியமல் இலிருக்க $y=mx+\frac{15}{4m}$ என்பது தொடலி என நிறுவுக,
இதை பிரயோகித்து அல்லது வேறுவிதமாக பரவளேவிற்கும், $x^2+y^2=16$ எனும் வட்டத்திற்கும் ஆன பொது தொடலியின் சமன்பாடுகளே காண்க.

27. $x^2+y^2-24x+24=0$ என்ற வட்டம் $y^2=9x$ என்ற பரவளேவை P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது PQRS இன் பரப்பையும், நாற்பக்கலின் ஒவ்வொரு கோணத்தையும் கணிக்க, பரவளேவில் இரு புள்ளிகளே தொட்டுக்கொண்டு செல்லும் முன்னேய வட்டத்தின் மையத்தை மையாகக் கொண்டு வரையப்படும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

28. பரவளேவு $y^2=4ax$ என்பதற்கு புள்ளிகள் $P(ap^2, 2ap)$ $Q(aq^2, 2aq)$ இதிலிருந்து வரையும் தொடலிகள் R இல் சந்திக்கின்றன. R இன் ஆள்கூறுகளேக் காண்க
Δ PQR இன் பரப்பு $|\frac{1}{2}a^2(p-p)^3|$ எனக் காட்டுக
Δ PQR இன் பரப்பு $4a^2$ ஆகுமாறு புள்ளிகள் P, Q என்பன பரவளேவில் அசையுமாயின் R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

29. பரவளேவு $y^2=4ax$ இலுள்ள புள்ளிகள் $P(ap^2, 2ap)$ $Q(aq^2, 2aq)$ என்பவற்றை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு
$$2x-(p+q)y+2pq=0$$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பரவளைவின் குவியம் S PQ இன் நடுப்புள்ளி M ஆகும். S இலிருந்து PQ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து செலுத்தியை R இல் சந்திப்பின், 2RM= SP+SQ என நிறுவுக.

30. பரவளைவு $y^2=4ax$ இலுள்ள புள்ளிகள் $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$ PQ ஒரு நிலைத்த புள்ளி $(a, 0)$ இனூடாகச் செல்லும் வண்ணம் அமைந்துள்ளன $qp=-1$ என நிறுவுக.
மேலும் p, q, $pq=-1$ என்பதற்கேற்ப மாறினால் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) p, Q இல் பரவளைவிற்கு உள்ள தொடலிகள் வெட்டும் புள்ளி ஒரு நிலையான கோட்டில் அமைந்துள்ளது. (இக் கோட்டின் சமன்பாடு காணப்படலாம்)

(ii) PQ இன் நடுப்புள்ளி $y^2=2a(x-a)$ என்னும் வளையியில் அமைந்துள்ளது.

31. பரவளைவு $y^2=4ax$ இல் $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$ ஆகிய புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் T இல் சந்திக்கின்றன. T இன் ஆள்கூறுகளை a, p, q இல் கண்டு பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) முக்கோணி PTQ இன் பரப்பு $\frac{1}{2}a^2\,(p-q)^3$

(ii) சைன் $\angle PTQ = \dfrac{p-q}{\sqrt{\{(1+p^2)(1+q^2)\}}}$

32. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவின் மீதுள்ள $P(at^2, 2at)$ எனும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு $y+tx=2at+at^3$ என நிறுவுக P இல் உள்ள செவ்வன் மீண்டும் பரவளைவை Q என்னும் புள்ளியில் சந்தித்தால், Q இன் ஆள்கூறுகளை t இல் காண்க, O ஆனது பரவளைவின் உச்சி எனின். P பரவளைவில் மாறும்போது. முக்கோணி OPQ இன் சுற்றுமையத்தின் ஒழுக்கு $2y^2=a(x-a)$ எனும் பரவளைவாகும் எனக் காட்டுக,

33. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவின் மீதுள்ள $P_1(at_1^2, 2at_1)$, $P_2(at_2^2, 2at_2)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு $(t_1+t_2)y=2x+2at_1t_2$ ஆகுமென நிறுவுக.
இந்நாண், $(a, 0)$ எனும் குவியத்தினூடுக செல்மாயின் $t_1t_2=-1$ ஆகுமென்பதை உய்த்தறிக.
இப்பரவளைவின் இரு நாண்களான P_1P_2, P_3P_4 எனும் நாண்கள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கு $x+a=0$ எனும் செலுத்தலியாகுமென நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

34. $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவுக்கு $P(at^2, 2at)$ என்னும் புள்ளியிலே வரையப்படும் செவ்வனின் சமன்பாடு $y+tx-2at-at^3=0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, பொதுவாகப் பரவளைவின் மூன்று செவ்வன்கள், பரவளைவின் தளத்திலேயுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி Q ஊடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

Q என்பது $(aT^2, 2aT)$ என்னும் புள்ளியாயின், Q ஊடாகச் செல்கின்ற மூன்று செவ்வன்களும் பரவளைவின் நாண்களான QR, QQ_1, QQ_2 ஆகுமெனக் காட்டுக; இங்கு பரவளைவின் மீதுள்ள R, Q_1, Q_2 என்னும் புள்ளிகளின் பரமானங்கள் முறையே

$$-\frac{2}{T}-T, \frac{1}{2}\left(-T+\sqrt{T^2-8}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(-T-\sqrt{T^2-8}\right)$$ ஆகவும் Q R என்பது Q விலுள்ள செவ்வனும் ஆகும்.

QR, QQ_1, QQ_2 என்னும் நாண்கள் ஒவ்வொன்றும் பரவளைவுக்கு ஒரு செவ்வன் ஆகும். பொதுவான நிபந்தனையைப் பயன்படுத்தி, இந்நாண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மூனைப்புள்ளிகளில் வரையப்படும் இருதொடலிகளினதும் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $y^2(x+2a)+4a^3=0$ எனும் வளையியாகும் எனக் காட்டுக.

35. $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவுக்கு $P_1(at_1^2, 2at_1)$, $P_2(at_2^2, 2at_2)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் R இல் சந்திக்கின்றன. புள்ளி R இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ஒரு பரவளைவிலுள்ள மூன்று புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் அப்புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பளவில் இரு மடங்காகுமெனக் காட்டுக.

36. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவிலுள்ள $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் நாணின் சமன்பாடு $2x-(p+q)y+2apq=0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து பரவளைவிற்கு P என்னும் புள்ளிவிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. PQ என்னும் மாறும் நாணொன்று பரவளைவின் அச்சுமீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடாகச் செல்லுமாயின், P யிலும் Q விலும் உள்ள செவ்வன்களினுடைய வெட்டுப் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவாகுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

37. $y^2 = 36x$ என்னும் பரவளைவுமீதுள்ள $P_1 \equiv (1,6)$ $P_2 \equiv (4,12)$ என்னும் புள்ளிகளில் வரையப்பட்டிருக்கும் தொடலிகள் $T \equiv (2,9)$ என்னும் புள்ளியில் இடைவெட்டுமென நிறுவுக.

P_1T, P_2T ஆகிய தொடலிகளினுலுங் பரவளைவின் P_1P_2 என்னும் வில்லினுலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க. பரவளைவின் P_1P_2 ஆகிய வில்லினுலும் P_1P_2 என்னும் நாணினுலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவானது x அச்சுப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகிறது. இங்கு பிரப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

38. $(at^2, 2at)$ இலே $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவுக்கான செவ்வன் $tx + y = at(t^2 + 2)$ இனுல் தரப்படுமெனக் காட்டுக. பரவளைவு மீதுள்ள புள்ளிகள் P, Q ஆகியவற்றின் பரமானங்கள் முறையே t_1, t_2 ஆகும். இங்கு $t_1 t_2 = 2$ ஆகும். P, Q இலுள்ள செவ்வன்கள் பரவளைவு மீது சந்திக்கின்றன எனவும். PQ என்னும் நாணனது பரவளைவினது அச்சை ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலே வெட்டுகின்றது எனவும் காட்டுக.

அலகு 4

அதிபரவளைவு

1. C (h, k) என்னும் நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு மாறும் கோடு $xy = a^2$ என்னும் அதிபரவளைவை A, B களில் சந்திக்கின்றது. AB இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கானது $2xy = kx + hy$ என்பதனுல் தரப்படும் என நிறுவுக. இவ் ஒழுக்கானது $xy = a^2$ என்னும் அதிபரவளைவைத் தொடுமாயின், C ஆனது இவ்வதிபரவளைவில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

2. $xy = c^2$ என்னும் செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு $(ct, c/t)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இப்புள்ளியிலுள்ள செங்கோட்டின் சமன்பாடு $t^3x - ty = c(t^4 - 1)$ எனக் காட்டுக. $xy = c^2$ என்னும் அதிபரவளைக்கு P இலுள்ள தொடலி x அச்சை T இலும் y அச்சை T^1 இலும் சந்திக்கின்றது. $TP = PT^1$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

P இலுள்ள செவ்வன x அச்சை N இலும் y அச்சை N_1 இலும் சந்திக்கின்றன. N'' ஆனது y அச்சில் N இனது தெறிப்பாகும் T,N',N'',T' ஆகிய நான்கு புள்ளிகளும் P இலுள்ள செங்கோட்டில் தன் மையத்தை உடைய ஒரு வட்டத்தில் உள்ளன என நிறுவுக.

3. $xy=c^2$ என்னும் அதிபரவளைவில் உள்ள புள்ளிகள் P(ct,c/t), $Q(ct^1,c/t^4)$ ஐத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாடு
$x+tt^1$, $y=c\ (t+t^1)$ எனக் காட்டுக.
PQ இனூடாக அணுகு கோடுகளுக்கு சமாந்தரமாக கோடுகளால் ஒரு செவ்வகம் ஆக்கப்படுகிறது. நாண் PQ ஒரு நிலையான புள்ளி R(h.k) இனூடாகச் செல்லுமாயின், செவ்வகத்தின் மறு உச்சிகள் $xy-kx-hy+c_2=0$ இல் கிடக்கின்றன எனக் காட்டுக.

4. $xy=c^2$ க்கு, P(ct,c/t) இலுள்ள செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
P இலுள்ள செங்கோடு, வளையியை மீண்டும் Q இல் சந்திக்கின்றது. Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. Q இனூடாகச் செல்லும் நாண் QR ஆக அசையும் பொழுது PR இன் மத்திய புள்ளியின் ஒழுக்கு $4x^3y^3=c^2(x^2+y^2)^2$ எனக் காட்டுக.

5. நேர்கோடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)t_1t_2-(t_1+t_2)=0$

அதிபரவளைவு $\frac{x/a+y/b}{t^2}=\frac{x/a-y/b}{1}=\frac{1}{t}$ ஐ (t ஒரு சாரமாறி)

வெட்டும் புள்ளிகளின் t இன் பெறுமானங்கள் t_1, t_2 எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து இவ்விரு புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணின் படித்திறன் m ஆயின், $(am-b)t_1t_2=am+b$ எனக் காட்டுக. ஓர் அதிபரவளைவில் P_1, P_2, P_2, P_4, என்பன மாறு புள்ளிகள் P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 என்பவற்றின் படித்திறன்கள் மாறிலியாயின் P_1P_4 இன் படித்திறன் மாறிலி எனக் காட்டுக.

6. P(a சீக θ,b தான் θ) என்பது $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ இல் ஒரு புள்ளியாகும்

P இன் y ஆள்கூறு PL ஆகும் LQ என்னும் கோடு $x^2+y^2=a^2$ஐ Q இல் தொடுகின்றது. (P,Q. x அச்சின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கின்றன, $\angle PLQ=\theta$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இவ்வதிபரவளைவு ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு ஆயின், PL=LQ எனக் காட்டுக. P அசையும்போழுது PQ ஒரு நிலையான புள்ளிக் கூடாகச் செல்கின்றது எனக் காட்டுக.

7. Z(a சீகθ, b தான்θ) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ இல் கிடக்கின்றது.

அதிபரவளைவின் மையம் O ஆகும். Z இல் உள்ள தொடலி அணுகு கோடுகளை X,Y இல் வெட்டுகின்றது. Z மாறும் பொழுது ΔOXY இன் பரப்பு ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக.

8. SS' என்பன அதிபரவளைவின் இரு குவியங்களாகும், P என்பது அதிபரவளைவிலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாயின், PS—PS' ஓர் ஒருமை என நிறுவுக.
C, C' என்பன இரு நிலைத்த வட்டங்கள்: அவற்றின் மையங்கள் 6cm. தூரத்திலுள்ளன. அவற்றின் ஆரைகள் முறையே 1cm3cm ஆகும். C,C' இரண்டையும் C'' என்ற மாறுவட்டம் வெளிப்புறமாகத் தொடுகிறது. C'' இன் மையத்தின் ஒழுக்கு ஓர் அதிபரவளைவு எனக் காட்டுக.

9. அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ இற்குப் புள்ளி P(a சீகθ , b தான்θ)

இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. P இலுள்ள

தொடலியானது $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ எனும் நேர்கோடுகளை முறையே

T,T' என்னும் புள்ளிகளிலே சந்திக்கின்றது, S, S' என்பவை அதிபரவளைவின் குவிங்களாயிருக்க, O என்பது அதன் மையமாயின், OT. OT'=OS. OS' எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்தோ வேறுவழியாலோ, S,S',T,T' ஆனவை ஒரு பரிதிப் புள்ளிகளெனக் காட்டுக.

10. x கோசை α+y சைன் α=q எனும் கோடு

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் அதிபரவளைவுக்கு தொடலியாவதற்கு

a^2 கோசை^{2} α—b^2 சைன் $^2\alpha$=p^2 ஆதல்வேண்டும் எனக் காட்டுக. தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க $x^2+y^2=9$ ஐத் தொடு $9x^2-16y^2=144$ என்னும் அதிபரவளைவின் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

11. அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு $P(ct.0/t)$ இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க P இலுள்ள செவ்வன் அதிபரவளைவை மீண்டும் P′ இற் சந்திப்பின் P′ இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க P′ இலுள்ள செவ்வன் அதிபரவளைவை மீண்டும் வெட்டும் புள்ளி P″ இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
PP″ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைக் காண்க;

12. செவ்வக அதிபரவளைவு $x=a\lambda$, $y=a/\lambda$ இல் λr, $(r=1, 2, 3, 4.)$ என்பது நான்கு புள்ளிகளின் சாராமாறிகளாய் இருப்பதுடன், $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4=1$ ஆகவிருப்பின், நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்திலுள்ளன என நிறுவுக.

அதிபரவளைவில் P ஒரு புள்ளியாயின், P இல் அதிபரவளைவைத் தொடுவதும் மீண்டும் வேறொரு புள்ளியில் தொடுவதுமாக இரு வட்டங்கள் உள்ளன என்றும், இரண்டாவது தொடுபுள்ளிகள் ஒரு வட்டத்திற்கு Q உம், மற்றைய வட்டத்திற்கு R உம் ஆயின் QR அதிபரவளைவின் விட்டம் என்றும், P இல் இது ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கும் என்றும் நிறுவுக.
இரண்டு வட்டங்களும் சமமான ஆரையுடையன என்றும் நிறுவுக

13. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=x$ என்னும் வட்டம் $x=at$, $y=a/t$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவை P_1, P_2, P_3, P_4 என்ற நான்கு புள்ளிகளிலும் சந்திக்கிறது. இவற்றின் சாராமறிலிகள் முறையே $t_1, t_2, t_3\ t_4$ ஆகும். t_1, t_1, t_3, t_4 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட நாற்படிச் சமன்பாட்டைக் காண்க, $t_1 t_2 t_8 t_4$; $t_1+t_2+t_3+t_4$

$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}$ இன் பெறுமானங்களையும் உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
(i) P_1P_2, P_3P_4 என்பன பேரச்சுடன் சமமாகச் சாய்ந்துள்ளன
(ii) நான்கி புள்ளிகளின் திணிவுமையம் வட்டத்தின் மையத்தையும் உற்பத்தியையும் இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி,
(iii) $P_1P_2P_3$ இன் நிமிர்மையம் P_4 இற்கு விட்டத்தின் வழி எதிரே அதிபரவளைவிலுள்ள புள்ளி.

14. செவ்வக அதிபரவளைவில் $A(ct_1, c/t_1)$, $B(ct_2, c/t_2)$ என்பவற்றை இணைக்கும் நாண் AB ஒருமையான நீளம் l ஐ உடையது. நாணின் நிலை மாறும்போது முக்கோணி A.O.B இன் திணிவுமையம் ஆனது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(9xy - 4c^2)(x^2 + y^2) = 12xy$ என்னும் வளைவில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக. இங்கு O என்பது உற்பத்தியாகும். G யின் ஆள்கூறு (c, 2c) ஆகும்போது முக்கோணி AOB இன் பரப்பையும் காண்க

15. $xy = c^2$ எனும் அதிபரவளைவில் t_1, t_2 என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AB என்பது செவ்வக அதிபரவளைவிலுள்ள நிலையான புள்ளி A இல் செங்கோணத்தை அமைக்கும் நாணாகும். BA என்பது நிலையான திசைக்குச் சமாந்தரம் எனக் காட்டுக. ABஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் பொதுவச்சு வட்டத்தொகுதியில் ஒன்று எனவும் காட்டுக.

16. $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவுக்குச் சார்பாக (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(x_1, y_1), $xy = a^2$ இல் கிடப்பின் முன்னைய முனைவு $a^2xy = c^4$ என்ற வளைவைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

17. செவ்வக அதிபரவளைவில் $xy = c^2$ இல் $(ct_1, c/t_1)$, $(ct_2, c/t_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க புள்ளிகள் P, Q இலுள்ள தொடலிகள் $xy = 4c^2$ என்ற அதிபரவளைவில் சந்திப்பின், PQ என்பது $4xy = c^2$ என்ற அதிபரவளைவைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

18. மூன்று புள்ளிகள் P, Q, R என்பன வளைவில் ஒடுக்கப்பட்டுள்ளன PQR இன் செங்குத்து மையம் H வளைவில் இருக்கும் என்றும் QR இனதும் RH இனதும் மையங்களை இணைக்கும் கோடு O இல் செங்கோணத்தை அமைக்கும் என்றும் காட்டுக.

19. இரண்டு புள்ளிகள் $P(4p, 4/p)$, $Q(4q, 4/q)$ $xy = 16$ என்னும் செவ்வக அதிபரவளைவின் ஒரே கிளையில் கிடக்கின்றன. நேர் வரை LPQM ஆனது அச்சுக்களை L, M இல் சந்திப்பின் LP = QM எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் மற்றைய கிளையின் T எனும் ஒரு புள்ளியிலான தொடலி அச்சுகளை R, S இல் சந்திப்பின் TR = TS என காட்டுக.

பரவளைவின் புள்ளிகள் P.Q இலுள்ள தொடலிகள் U இல் சந்திக்கின்றன. PQ//RS ஆயின் புள்ளிகள் T. U உற்பத்தி என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

20. அதிபரவளைவுக்கு $x=ct$ $y=c/t$ இற்கு புள்ளி $P(t=t_1)$ இல் அமையும் செவ்வன் வளையியை மீண்டும் $Q(t=t_2)$இல் சந்திப்பின் t_2ஐ t_1 இல் காண்க.
PQ வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதிபரவளைவை மீண்டும் R இல் அளமயும் செவ்வன் PQ இற்குச் சமாந்தரம் என நிறுவுக.

21. செவ்வக அதிபரவளைவு $(x-h)(y-k)=c^2$இன் அணுகுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும் எழுதுக. அதிபரவளைவுகள் $2x(y-2)=3$; $2y(x-1)-3$ என்பவற்றை பருமட்டாக வரைக. இவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
அதிபரவளைவுக்கு P, Q இல் அமையும் தொடலிகளினல் ஒரு ஓணகரம் உருவாக்கப்படுகிறதெனக் காட்டுக.

22. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ என்னும் அதிபரவளைவின் அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.
அதிபரவளைவின் புள்ளி $P(3\sec\theta, 4\tan\theta)$ இல் தொடலி அணுகு கோடுகள் X, Y இல் சந்திப்பின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
(a) P ஆனது XY இன் நடுப்புள்ளி;
(b) O உற்பத்தியாயின், ΔXOY இன் பரப்பு θ வில் தங்கியிராது

23. $x=ct$, $y=\dfrac{c}{t}$ எனும் அதிபரவளைவை, ஒரு வட்டம் P, Q, R, S இல் வெட்டுகிறது. PQ வின் நடுப்புள்ளி உற்பத்தி எனில் RS இன் நடுப்புள்ளி வட்டத்தின் மையம் என நிறுவுக.

24. நேர்கோடு $y=mx+b$ ஆள்கூற்று அச்சுக்களை P_1, Q_1 இல் சந்திக்கின்றது; செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=c^2$ ஐ P, Q இல் சந்திக்கின்றது. P_1 Q_1, PQ ஆகியன ஒரே நடுப்புள்ளியை கொண்டுள்ளன என நிறுவுக.
சமாந்தர நேர்கோட்டுத்தொடை ஒன்று அதிபரவளைவை வெட்டும்படி வரையப்பட்டால், பெறப்படும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக,

25. ஒரு அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ இஞர் தரப்படுகிறது.
இவ் அதிபரவளைவின் அணுகு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y^2=m^2x^2$ எனவும், அதிபரவளைவு $(a,0)$ இனூடு செல்லுகிறது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவும் தரப்படின் அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டை x, y, m, a என்பவற்றில் தருக.

அதிபரவளைவிலுள்ள புள்ளி P ஆனது x அச்சிலிருந்து தன் தூரம் அதிபரவளைவின் அணுகுகோடொன்றில் இருந்து தன் தூரத்திற்கு சமனாகுமாறு உள்ளது. m இன் எல்லா பெறுமானங்கட்கும். P ஆனது $(x^2-y^2)^2=4x^2(x^2-a^2)$ எனும் வளையியில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

26. $xy=c^2$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவில் $P\left(cp, \frac{c}{p}\right), Q\left(cp, \frac{c}{q}\right)$ என்பன இரு புள்ளிகள் நாண் PQ இன் சமன்பாடு $x+pqy=c(p+q)$ என நிறுவுக.

PQ ஆனது புள்ளி $)cp+cq-c, c)$ இனூடு செல்லுமாயின், புள்ளிகள் P, Q இல் அமையும் தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது $y=x$ எனும் கோட்டில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

27. $xy=c^2$ எனும் அதிபரவளைவிற்கு $x=ct$, $y=\frac{c}{t}$ இலான செவ்வனைக் காண்க. இச் செவ்வன் $P(h, k)$ இனூடாக செல்லின் $ct^4-ht^3+kt-c=0$ எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் நான்கு செவ்வன்கள் P யில் சந்திக்கின்றன. இச் செவ்வன்கள் அதிபரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆள் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை h இற்கும் y ஆள்கூறுகளின் கூட்டுத் தொகை k இற்கும் சமன் என நிறுவுக.

28. $xy=c^2$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவில் புள்ளி $p(ct.\ c/t)$ இல் அமையும் செவ்வனின் சமன்பாட்டை காண்க.

முறையே $t_1 . t_2, t_3\ t_4$ எனும் பரமானங்களையுடைய புள்ளிகள் P_1, P_2, P_3, P_4 என்பவற்றில் அமையும் செவ்வன்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பனவாயின், $t_1, t_2, t_3, t_4 = -1$ எனக் காட்டுக. இவ் வகையில் யாதுமிரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடானது மற்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தென காட்டுக. $\Delta P_1P_2P_3$ இன் நிமிர்மையத்தின் ஆள்கூறுகளை $t_1t_2t_3$ இல் உய்த்தறிக.

29. $xy=c^2$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவில் உள்ள இரு புள்ளிகள் $P(cp, c/p), Q(cq, c/q)$ என்பவற்றை இணைக்கும் நாணின் படித்திறன் $\frac{-1}{pq}$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

R என்பது $\angle QPR = 90^\circ$ ஆகுமாறு அதிபரவளையிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். QR ஆனது P இல் அமையும் தொடலிக்குச் செங்குத்தெனக் காட்டுக.

30. $xy = c^2$ என்னும் அதிபரவளைவில் $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$, $\left(cp, \frac{c}{q}\right)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டை காண்க.
PQ என்னும் கோடு $xy + c^2 = 0$ எனும் அதிபரவளைவை M இல் தொடுகிறது. P க்கும் Q க்கும் இடையே ஒரு தொடர்பைப் பெறுக. M, PQ வின் நடுப்புள்ளி எனவும் நிறுவுக.
$xy = c^2$ எனும் அதிபரவளைவிற்கு P,Q இலான தொடலிகள் T இல் சந்திப்பின் MT இன் நடுபுள்ளி உற்பத்தி என நிறுவுக.

31. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் அதிபரவளைவின் மீதுள்ள P(a சீக θ, b தான் θ) எனும் மாறும் புள்ளியிலான தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
P யிலான தொடலியானது அதிபரவளைவின் அணுகுகோடுகளை Q, R, எனும் புள்ளிகளிற் சந்திப்பின், QR இன் நடுப்புள்ளி P ஆகுமெனக் காட்டுக. ΔOQR இன் பரப்பளவானது மாறிலியாகும் எனவுங் காட்டுக; இங்கு O என்பது அதிபரவளைவின் மையமாகும். OQ, OR என்பவற்றின் செங்குத்து இருசமகூறாக்கிகளைக் கருதுவதன் மூலமாக அல்லது வேறுவிதமாக ΔOQR இன் சுற்றுமையானது $C\left(\frac{a^2+b^2}{2a} \text{சீக}\,\theta, \frac{a^2+b^2}{ab} \text{தான்}\,\theta\right)$ என்னும் புள்ளியாகுமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து P யின் நிலை அதிபரவளைவின்மீது மாறுகையில் C யின் ஒழுக்கைக் காண்க.

32. $xy = c^2$ எனும் அதிபரவளைவுக்கு $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
புள்ளி O ஆனது ஒரு செங்கோண அதிபரவளைவின் மையமாகும் P என்பது அதிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். P இல் அதிபரவளைவுக்கான தொடலிக்கு O இலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்தானது வளையியை O விலும் R இலும் சந்திக்கின்றது. PQ, PR என்னும் நாண்கள் அதிபரவளைவின் அணுகுகோடுகளுள் ஒன்றை U இலும் V இலும் சந்திக்கின்றன. M என்பது UV இன் நடுப்புள்ளியாயின், MP ஆனது அதிபரவளைவின் மற்றைய அணுகு கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

33. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபரவளைவினுடைய அணுகு கோடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் P,Q என்னும் புள்ளிகள் இருக்கின்றன. அவற்றின் ஆள்கூறுகளை (ap, bp) (aq—bq) என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக. இங்கு p,q என்பன பரமானங்களாகும். PQ வின் நடுப்புள்ளியான M அதிபரவளைவு மீது இருக்குமாயின், pq=1 எனவும் அவ்வாறாயின் PQ ஆனது அதிபரவளைவுக்கு M இல் உள்ள தொடலியாக இருக்கும் எனவும் காட்டுக. அதிபரவளைவின் மையம் C ஆகுமெனின், இச் சந்தர்ப்பத்தில், CPQ என்னும் முக்கோணியில் பரப்பளவானது மாறிலியாகும் எனவும் காட்டுக.

34. $xy=c^2$ எனும் அதிபரவளைவின்மீதுள்ள $(x_1=y_2)$ எனும் புள்ளியிலான தொடலியின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.
$xy=c^2$ எனும் செங்கோண அதிபரவளைவின் மீதுள்ள P எனும் ஏதேனுமொரு புள்ளியிலான தொடலியானது அணுகுகோடுகளை TT^1 என்பவற்றிலும், P யிலான செவ்வனானது $y=x$ எனும் கோட்டினை G இலும் சந்திக்கின்றன. $T.T^1$,G என்பனவும் அதிபரவளைவின் மையமும் P ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மீது கிடைக்குமெனக் காட்டுக.

35. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் அதிபரவளைவுக்கு

P(a சீக θ. b தான் θ) எனும் புள்ளியிலான செவ்வன்
ax சைன் $\theta + by = (a^2 + b^2)$ தான் θ எனக் காட்டுக.

S=0 க்கு P இல் உள்ள செவ்வன் x— அச்சை G இல் சந்திக்கிறது. P இன் ஊடாக y— அச்சுக்கு சமாந்தரமாகச் செல்லும் கோடு அணுகு கோடுகளை Q இலும் Q_1 இலும் சந்திக்கிறது O என்பது அதிபரவளைவின் மையமாக இருப்பின் OG ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் O,Q,G,Q^1 அமைந்துள்ளன என நிறுவுக.

36 செவ்வக அதிபரவளைவு $xy=k^2$ இல் Pi $(i=1,2,3)$ என்பன மூன்று புள்ளிகளாகும் முக்கோணி $P_1P_2P_3$ இன் சுற்றுவட்டம் அதிபரவளைவை t_4ஐ சாராமாறியாகக் கொண்ட நாலாவது புள்ளியில் வெட்டும் எனக் காட்டுக. இங்கு $t_4 = \frac{1}{t_1 t_2 t_3}$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

37. அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி x, y அச்சுகளை முறையே A, B இற் சந்திக்கின்றது. O அதிபரவளைவின் மையம் POQ ஒரு விட்டம். BQ. x— அச்சை C இற் சந்திக்கின்றது. முக்கோணிகள் BOA QOC என்பவற்றின் பரப்புகள் முறையே $2c^2$, $c^2/3$ எனக் காட்டுக.

38. அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P 't' இலுள்ள தொடலி x, y அச்சுகளை முறையே A, B இலும், P இலுள்ள செவ்வன் வரைகள் $y=x$, $y=-x$ஐ முறையே C, D இலும் சந்திக்கின்றன. ACBD ஒரு சாய்சதுரமெனக் காட்டுக. $(t^2 \neq 1)$

39. அதிபரவளைவு $xy=k^2$ இன் ஒரு மாறும் நாணின் நடுப்புள்ளி. y— அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நிலையான கோட்டிற் கிடக்கின்றது. இந்நாணின் முனைகளிலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

40. அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி பரவளைவு $y^2=4ax$ இன் குவியத்தினூடாகச் செல்கின்றது. P இன் ஆள்கூறுகளை a, c இற் தருக, P ஆனது பரவளைவில் கிடக்குமாயின் $a^4=2c^4$ எனவும். P இல் இருவளையிகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் தான் $^{-1}\sqrt{2}$ எனவும் காட்டுக.

41. அதிபரவளைபு $2xy=ab$ உம், நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b)$

உம் ஒன்றையொன்று புள்ளி P $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ இல் தொடுகின்றனவெனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்தின் மையத்திலிருந்து, P இலுள்ள பொதுத் தொடலிக்குக் கீறிய செங்குத்து அதிபரவளைவை Q இற் சந்திக்கின்றது. அதிபரவளைவிற்கு Q இலுள்ள தொடலி, நீள்வளையத்தின் குவியத்தினூடாகச் செல்லுமாயின், $a^2=3b^2$ எனக் காட்டுக

42. $xy=c^2$ என்றும் செங்கோண அதிபரவளைவில் P[p] Q [q], R[r] என்பவை மூன்று புள்ளிகள். p, q, r என்பவை $t^3+at-b=0$ என்றும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும் புள்ளிகுள் P, Q, R இல் அ பரவளைவுக்குள்ள தொடலிகள் QR, RP, PQ ஐ முறையே L, M, N இல் சந்திக்கின்றன. L இன் ஆள்கூறுகள் $[c(3b-a)/a, -cp/a]$ எனக் காட்டுக.

L, M, N என்பவை $3ax-a^2y=9cb$ எனும் கோட்டில் கிடக்கின்றன எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

43. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=c^2$இல் PQ ஒரு நாணுகும் PQவை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதிபரவளைவை மீண்டும் R, S இற் சந்திக்கின்றது. RS உற்பத்தித் தானத்தினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டு.

PQ உம் RS உம் H இல் சந்திக்கின்றன. PQ எப்பொழுதும் புள்ளி $(1,2)$ இனூடாகச் செல்லுமாயின் H இல் ஒழுக்கைக் காண்க.

44. நீள் வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=2a^2b^2$ ஆனது, அதிபரவளைவு $xy=ab$ ஐத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்திற்கு அதிலுள்ள புள்ளி A இலுள்ள தொடலி அதிபரவளைவை BC இற் சந்திக்கின்றது. அதிபரவளைவிற்கு BC இலுள்ள தொடலிகள் நீள்வளையத்தில் ஒரு புள்ளி D இற் சந்திக்கின்றன. எனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்திற்கு C இலுள்ள தொடலி, அதிபரவளைவை PQ இற் சந்திப்பின், AP, AQ என்பன அதிபரவளைவிற்கு PQ இலுள்ள தொடலிகள் எனக் காட்டுக.

45. $x=4u$, $y=4/u$ என்னும் அதிபரவளைவினது $x=t^2, x=2t$ என்னும் பரவளைவினதும் பொதுப்புள்ளி P இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. Pயில் $u=1, t=2$ எனக் காட்டுக,

பரவளைவிற்கு P இலுள்ள தொடலி அதிபரவளைவை M இற் சந்திக்கின்றது. அதிபரவளைவிற்கு P இலுள்ள தொடலி பரவளைவை N இல் சந்திக்கின்றது. MN இன் ஆள்கூறுகளைக் ககண்க

MN ஆனது பரவளைவிற்கு N இல் ஒரு தொடலியெனவும் அதிபரவளைவிற்கு M இல் ஒரு தொடலியெனவும் காட்டுக.

46. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=C^2$ இற்கு புள்ளி $P(t, ct)$ (>1) இலுள்ள தொடலி: செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இவற்றிற்கு, உற்பத்தித்தானம் O இலிருந்து கீறிய செங்குத்துகளின் நீளங்களைக் காண்க. இவ்விரு செங்குத்துகளும் தொடலி செவ்வன் ஆகியவற்றுடன் சேர்ந்து ஒரு சதுரத்தை அமைக்கின்றனவெனின் $t^2=1+\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

47. சசங்கோண அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இல் $P(ct, c/t)$ $Q(cu, c/u)$ என்பவை இரு புள்ளிகளாகும். PQ ஆனது வளையியிற்குப் P இல் ஒரு செவ்வனுகும். $t^3u+1=x$ எனக் காட்டுக,

Q இலுள்ள செவ்வன், வளையை மீண்டும் N இற் சந்திக்கின்றது. PN இன் சமன்பாடு $x+t^{10}y=ct(1+t^8)$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

48; செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=c^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி x, y அச்சுகளை முறையே A, B இலும் P இலுள்ள செவ்வன் x, y அச்சுளை முறையே C, D இலும் சந்திக்கின்றன AD இன் நடுப்புள்ளி M. BC இன் நடுப்புள்ளி N, M இன் ஒழுக்கு $2c^2xy=c^4-x^4$ எனவும், N இன் ஒழுக்கு $2c^2xy=c^4-y^4$ எனவும் காட்டுக,

49. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy=k^2$ இல் A[a], B[b], C[c] மூன்று மாறும் புள்ளிகள். AB ஆனது AC இற்குச் செங்குத்து, A யிலிருந்து X அச்சிற்குக் கீறிய செங்குத்தின் அடியினூடாக BC செல்கின்றது.

(i) $a^2bc+1=0$, (ii) $a=b+c$ என நிறுவுக.

முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கைக் காண்க

50, அதிபரவளைவு $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ இலுள்ள ஒரு புள்ளியின் பரமானக் குறியீடு $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ ஆகுமெனக் காட்டுக

$t=u, t=v$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$\frac{x}{a}(1+uv)+\frac{y}{b}(1-uv)=u+v$ எனக் காட்டுக.

இந் நாண் அதிபரவளைவை A, B இலும், அணுகு கோடுகளை C, D இலும் வெட்டினால் AC=BD எனக் காட்டுக.

51. $(Cpr, C/pr)$, $r=1, 2, 3, 4$ என்பவை $xy=C^2$ இல் நாலு புள்ளிகள் இவை ஒரு பரிதிப் புள்ளிகளாயின் $t_1 t_2 t_3 t_4=1$ எனக் காட்டுக.

$xy=c^2$ இன் ஒரு விட்டம் AB ஆகும். அதிபரவளைவை A இற் தொட்டுக்கொண்டு B இனூடாகச் செல்லும் வட்டம், அதிபரவளைவை மீண்டும் C இற் சந்திக்கின்றது. வளையியிற்கு A இலுள்ள செவ்வன் AC எனக் காட்டுக.

அதிபரவளைவின் மையம் O ஆயின், $3OA^2+OC^2=AC^2$ எனக் காட்டுக.

52. $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ என்னும் அதிபரவளைவின், (h,k) யை நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (h,k) வளையியில் இருக்கும்போது வரும் முடியை விளக்குக.

இவ்வதிபரவளைவின் ஒரு மாறும் நாண், $x^2+y^2=r^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு ஒரு தொடலியாகும். இந்நாணின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = r^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$ எனக் காட்டுக.

53, $x^2 - y^2 = a^2$ என்னும் அதிபரவளைவில் $P[\theta]$, $Q[\theta + \pi/_2]$ என்பன புள்ளிகள். PQ இன் நடுப்புள்ளி $R(x_1 y_1)$ ஆகும், $\frac{y_1}{x_1}$ = சைன் θ + கோசை θ எனக் காட்டுக, R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

54. $x^2 - y^2 = a^2$ என்னும் அதிபரவலேவில் (a சீக α, b தான் α (a சீக β, b தான் β) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு.

$$x \text{ கோசை} \frac{(\alpha - \beta)}{2} - y \text{ சைன் } \frac{(\alpha + \beta)}{2} = a \text{ கோசை} \frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

எனக் காட்டுக.

இவ்வதிபரவளையிலுள்ள புள்ளிகள் P.Q இன் சாராமாறிகள் முறையே $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ஆகும் A, A^1 என்பவை அதிபரவளைவின் உச்சிகள், α ஒரு ஒருமையாக இருக்க β மாறும் போது, AP, A^1Q என்பவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு $x^2 + y^2 - 2ay$ தான் $\alpha = a^2$ எனக் காட்டுக,

55. P, Q, R என்பவை $xy = c^2$ இல் மூன்று புள்ளிகள் ΔPQR இன் நிமிர்மையம் H வளையியில் கிடக்கின்றது எனக் காட்டுக. QR, FH என்பவற்றில் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு O வில் செங்கோணம் அமைகின்றது எனக் காட்டுக. (O உற்பத்தி)

56. P,Q PR என்பவை $xy = C^2$ இல் செங்குத்தாகவுள்ள இரு நாண்கள். P யிலுள்ள செவ்வன் QR இற்கு சமாந்தரம் எனக் காட்டுக P யில் இருந்து X அச்சுக்கு கீறிய செங்குத்தின் அடியினூடாக QR செல்லுமாயின் ΔPQR இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $72C^2xy - 16C^4 + 8x^4 = 0$ எனக் காட்டுக.

57. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = C^2$ இல் P ஒரு மாறும் புள்ளி உற்பத்தி O வில் இருந்து P இலுள்ள தொடலிக்கு கீறிய செங்குத்தின் அடி Q ஆகும்.

(i) OP OQ = மறிலி எனக் காட்டுக.

(ii) Q வின் ஒழுக்கைக் காண்க.

58. செங்கோண அதிபரவளைவு $xy = C^2$ க்கு புள்ளி P யில் உள்ள தொடலி $x - y = 0$, $x + y = 0$ என்னும் கோடுகளை முறையே A B யில் சந்திக்கின்றது O உற்பத்தி முக்கோணி OAB யின் பரப்பு Δ ஆகும் P இலுள்ள செவ்வன் X— அச்சை C இலும் Y அச்சை D யிலும் சந்திக்கின்றது, முக்கோணி ODC யின் பரப்பு Δ_1 ஆகும் $\Delta^2 \Delta_1 = 8C_6$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 5

நீள்வளையம்

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு,

(a கோசை θ, b சைன் θ) என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ என்னும் நீள்வளையத்தை தொடும்படி வரையப்படும் 2 அலகு நீளமுடைய $x^2+y^2=6$ என்னும் வட்டத்தின் எல்லா நாண்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2, $a^2l^2+b^2m^2=n$ எனின், $lx+my+n=0$ எனும் கோடு,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள்வளையத்தைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

(10,5) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^4+4y^2=4$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளின் சமன்பாடுகளையும் அவற்றின் தொடுபுள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

3. θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$\frac{x}{a}$ கோசைθ $+\frac{y}{b}$ சைன் $\theta=1$ எனும் கோடு, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

எனும் நீள்வளையத்தை தொடுமென நிறுவுக.

$x^2+y^2=r^2$ எனும் வட்டத்தின் மாறும் தொடலி x—அச்சை A இலும் y— அச்சை B இலும் வெட்டுகிறது C என்பது OA இன் நடுப்புள்ளியாயின், BC எனும் கோடு $4x^2+y^2=r^2$ எனும் நீள்வளையத்தை தொடுமென நிறுவுக.

இங்கு O என்பது உற்பத்தியாகும்.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு (a கோசை θ,

h சைன் θ) என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

ஆள். 6

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நீள்வளையத்தின் தொடலிக்கு குவியங்களின் செங்குத்துத் தூரங்களின் பெருக்குத் தொகை b^2 என நிறுவுக.

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு P யிலுள்ள தொடலி

QO இற்குச் சமாந்தரமாகுமாறு, P (a கோசை θ, b சைன் θ), Q(a கோசை φ, b சைன் φ) என்பன நீள்வளையத்திலுள்ள இரு மாறும் புள்ளிகளாகும். இங்கு O என்பது உற்பத்தி, θ,φ என்பன π/2 இன் ஒற்றை மடங்கின் பெருக்குத்தொகையால் வித்தியாசப்படுமென நிறுவுக. PQ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கையும் காண்க.

6. நீள்வளையத்திலுள்ள புள்ளியொன்றின் மையவகற்சிக் கோணம் என்பதால் என்ன கருதப்படுகிறது என்பதை விளக்குக. நீள்வளையத்திலுள்ள P, Q, R, என்ற புள்ளிகளின் மையகவற்சிக் கோணங்கள முறையே θ, (θ+α), (θ−α) என்பனவாகும். α ஒருமையாக இருக்க. θ மாற்றக்கூடியுதாக P, Q, R என்பன நீள்வளையத்தில் அசைகின்றன. முக்கோணி PQR இன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளும் மையப்போலியும் நீள்வளையங்களை வரையுமென நிறுவுக.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு (a கோசை θ, b சைன் θ)

எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க

P, Q என்பன $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள்வளையத்திலுள்ள இரு

மாறும் புள்ளிகளாகும். நீள்வளையத்திற்கு Q இலுள்ள தொடலி OP இற்குச் சமாந்தரமாயின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) P, Q இன் மையவகற்சிக் கோணங்கள் π/2 இன் ஒற்றை மடங்கின் பெருக்குத் தொகையால் வித்தியாசப்படுகிறது.

(ii) $OP^2+OQ^2=a^2+b^2$

(iii) முக்கோணி OPQ இன் பரப்பு$=\frac{1}{2}ab$.

இங்கு O என்பது உற்பத்தி.

8. நீள்வளையம் $S\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ இற்கு அதிலுள்ள புள்ளி

(x_1,y_1) இலுள்ள தொடலியினதுஞ் செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

புள்ளி (x_0, y_0) இலிருந்து நீள்வளையம் $S=0$ இற்கு வரைந்த தொடலிகளின் தொகை நாணினது சமன்பாடு.

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$ எனக் காட்டுக.

P(a கோசை θ, b சைன் θ) என்பது நீள்வளையம் $S=0$ இலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாகும். அந் நீள் வளையத்திற்கு P இலுள்ள செவ்வன் அந் நீள்வளையத்தை மீண்டும் Q இற் சந்திக்கின்றது அந் நீள்வளையத்திற்கு P, Q இலுள்ள தொடலிகள் T இற் சந்திக்கின்றன T இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இதிலிருந்து T இன் ஒழுக்கு $b^6x^2+a^6y^2 = (a^2-b) x^2y^2$ என்னும் வளையி எனக் காட்டுக.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு a கோசை θ, b சைன் θ) என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P, Q என்பன $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ எனும் நீள்வளையத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும், அவற்றின் மையவெற்சி கோணங்கள் முறையே θ, (π—θ) ஆகும். நீள்வளையத்திற்கு P இலுள்ள செவ்வன் ஆள் கூற்று அச்சுகளை L, M இற் சந்திக்கிறது. LM இன் நடுப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும், உற்பத்தியை Q உடன் இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ளதுமான l எனும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. Q இன் எல்லாப் பெருமானங்களுக்கும் l என்னும் கோடு $25x^2+9y^2=64$ என்னும் நீள்வளையத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

10. ஒரே வரிப்படத்தில் $x^2+y=a^2$ என்னும் வட்டத்தையும்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \ a>b<0$$

என்னும் நீள்வளையங்களையும் காண்க.

P, Q, R என்பவை முறையே இம்மூன்று வளையிகளிலுள்ள மாறும் புள்ளிகளாகும். இப்புள்ளிகளானவை, RP ஆனது x— அச்சிற்குச் சமாந்தரமாயும், QP, ஆனது y அச்சிற்குச் சமாந்தரமாயும் இருக்கும் வண்ணம் ஒரே காற்பகுதியிற் கிடக்கின்றன. இந்நீள் வளையங்களிற்கு Q, R ஆனவற்றிலுள்ள செவ்வன்கள் இடை வெட்டும் புள்ளியின் ஒழுக்கு $x^2+y^2=(a+b)^2$ என்னும் வட்டமாகுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தில் 'θ', 'ϕ' ஐத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P,Q,R,S என்பன நீள்வளையத்திலுள்ள புள்ளிகள். அவற்றின் மையவகற்சிக் கோணக்கள் முறையே $\alpha, \pi + \alpha, \alpha - \beta, \alpha + \beta$ ஆகும். நாண் RS, PQ இலுள்ள தொடலிகளிக்கு சமாந்தரம் எனக் காட்டுக. R, S இலுள்ள தொடலிகள் PQ இல் வெட்டு கின்றன எனக் காட்டுக.

12. நீள்வளையத்திலுள்ள புள்ளிகள் P 'θ', Q 'ϕ' ஆகியவற்றைத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நாண் PQ, $x^2 + y^2 = t^2$ ஐத் தொடுகின்றது. P, Q இல் நீள்வளையத்துக்குக் கீறப்பட்ட தொடலிகளின் வெட்டுப் புள்ளி' $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{t^2}$ இல் கிடக்கிறது எனக் காட்டுக.

13. புள்ளி P $(1,1)$, நீள்வளையம் $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ இற் கிடக்கிறது. இங்கு $a > b$, p இலுள்ள தொடலி x—அச்சை Q இலும் y—அச்சை R இலும் சந்திக்கிறது. O ஆள்கூற்றச்சின் உற்பத்தி a இன் உறுப்புக்களின் OQ, OR இன் நீளத்தைக் காண்க.

நீள்வளையத்தின் அரைாபறச்சை விட்டமாகக் கொண்டு. கீறப்படும் வட்டம் நீள்வளையத்தை L, M இற் சந்திக்கின்றன, a இன் உறுப்புகளில் OL(அல்லது OM) இன் நீளத்தைக் காண்க,

14. $4x^2 + 9y^2 = 36$ என்னும் நீள்வளையமும், $4x^2 - y^2 = 4$ என்னும் அதிபரவளைவும் ஒரே குவியங்களையுடையன என்றும் இரண்டும் செங்கோணங்களில் வெட்டுகின்றன என்றும் நிறுவுக.

இரண்டு கூம்புகளும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

15. ஒரு நீள்வளையத்தின் பேரச்சு 2a, சிற்றச்சு 2na, இங்கு $n < 1$: ka ஐ ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் மையம், நீள்வளையத்தின் ஒரு குயியத்தில் இருக்கிறது. $k(2-k) > n^2$ எனத் தரப்படின் வட்டமும். நீள்வளையமும் இரண்டு மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும் என நிறுவுக. நீள்வளையத்திற்குள் உள்ள வட்டவில்லின் நீளத்தையும் காண்க.

வட்டமும் நீள்வளையமும் செங்குத்தாக வெட்ட இயலாதெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

16. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a<b)$ நீள்வளையத்திற்கு புள்ளி (a கோசை θ,

(b சைன் θ) இலுள்ள தொடலி நீள்வளையம் $a^2x^2+b^2y^2=a^4$ ஐ P, Q இற் சந்திக்கின்றன. P Q இன் நீளம் (a^4 சைன்^{2} θ + b^4 கோசை^{2} θ) $PQ^2=$
$4a^4$ (a^4-b^4) சைன்^{2} θ(a^2 சைன்^{2}θ + b^2 கோசை^{2}θ) ஆற் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$a^2<2b^2$ ஆயின், θ=0 அல்லது π ஆகும்போது PQ இழிவென்றும் θ=π/2 அல்லது $^3/_2\pi$ ஆகும்போது PQ உயர்வென்றும் காட்டுக

17. நீள்வளையம் $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ α இன் குவியம் S=P; (a கோசை α,

b சைன் α நீள்வளையத்திலுள்ள ஒரு புள்ள P இலுள்ள தொடலிக்கும் SP இற்குமிடையிலுள்ள கோணம்.
தான்$^{-1}$[$(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$/e சைன் α] என நிறுவுக. இங்கு e என்பது மையவகற்சித்திறன் S' என்பது மற்றைய குவியமாகவும், P இலுள்ள தொடலி x—அச்சை T இலும் சந்திப்பின், ST:S'T=TP:S'P என நிறுவுக.

18. $bx^2+ay^2=a^2b^2$ஒன்றை நீள்வளையத்திற்குச் சார்பாக, $lx+my=1$ என்ற கோட்டின் முனைவு (Pole) P இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க வரையும் நீள்வளையம் தொடுவதற்குறிய நிபந்தனையையும் உய்த்தறிக. அல்லது வேறு வழியால் காண்க.
O என்பது மேலேயுள்ள நீள்வளையத்தின் மையமாகும்; M உம் N உம் P இன் முனைவுக்கு O இலும் P இலும் இருந்துள்ள செங்குத்துக்களின் அடிகளாகும்,
OM, PN =λ ஆயின் முனைவு

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}=1$$ என்ற நீள்வளையத்தைத் தொடும் எனக் காட்டுக. இங்கு λ ஓர் ஒருமை.

19. P(α,β) ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நீள்வளையம்,
$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இன் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x\alpha}{a^2}+\frac{y\beta}{b^2}=\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}$$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இந்நாணின் முனை (pole) வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ இல் இருப்பின் P ஆனது $a^2b^4(x^2+y^2)=(b^2x^2+a^2y^2)^2$ என்ற வளையியில் உள்ளது எனக் காட்டுக.

வட்டத்திலுள்ள $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ என்ற புள்ளிக்கொத்து p என்ற புள்ளியைக் காண்க.

20. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள் வளையத்தில் θ, Φ என்னும் மையவகற்சிக் கோணங்களையுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\text{ கோசை}\left(\frac{\theta+\Phi}{2}\right)+\frac{y}{b}\text{ சைன்}\left(\frac{\theta+\Phi}{2}\right)=\text{கோசை}\left(\frac{\theta-\Phi}{2}\right)$$

எனக் காட்டுக.

இந்நாண் இந்நீள் வளையத்தின் சிற்றச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தைத் தொடுமாயின், நாணின் நீளம் a சைன் (θ—Φ) என நிறுவுக.

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வளையத்தில் (α+β,) (α—β) ஐ மையவகற்சிக் கோணங்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு,

bx கோசை α+ay சைன் α=ab கோசை β எனக் காட்டுக; இந்நாண் யாதுமொரு குவியத்தினூடாகச் சென்றால், இதன் நீளம் 2a சைன் β எனக் காட்டுக;

22. நீள் வளையம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ இல் α, β ஐ மையவகற்சிக் கோணங்களாக கொண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x}{a}\right)\left(1-\text{தான்}\frac{\alpha}{2}\text{ தான்}\frac{\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\left(\text{தான்}\,\alpha/2+\text{தான்}\frac{\beta}{2}\right)=1+\text{தான்}\frac{\alpha}{2}\text{ தான்}\frac{\beta}{2}$$

23. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ y அச்சை A, C இலும் மறை அச்சை B இலும் வெட்டுகின்றது. A, B, C என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+3x-4=0$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

நீள்வளையத்தின் புள்ளி $\left(\frac{12}{7}, \frac{4\sqrt{10}}{7}\right)$ இல் அமையும் தொடலி யின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலி வட்டத்தையும் தொடுமெனக் காட்டுக.

24. $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ எனும் நீள்வளையத்தின் $(a \cos\theta, b \sin\theta)$ புள்ளி யில் அமையும் தொடலியின் சமன்பாடு,

$$\frac{x \cos\theta}{a} + \frac{y \sin\theta}{b} = 1$$ எனக் காட்டுக.

நீள்வளையத்தில் P யாதுமோர் புள்ளியாகும் P இல் அமையும் தொடலி ஆள்கூற்றச்சுகளை Q, R இல் சந்திக்கின்றது. P ஆனது QR இன் நடுப்புள்ளியாயின் நீள்தளத்தின் சுற்றுருவமாகவும் பக்கங்கள் ஆள்கூற்று அச்சுகளுக்குச் சமாந்தரமாகவும் வரையப் படும். செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டத்தில் P இருக்குமெனக் காட்டுக QR இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

25. $x^2/a^2+y^2b^2 = 1$ என்னும் நீள்வளையத்தின் புள்ளி $P(a \cos\theta, b \sin\theta)$ வில் அமையும் செவ்வனின் சமன்பாடு,
$ax \sin\theta - by \cos\theta = (a^2-b^2) \sin\theta \cos\theta$ எனக் காட்டுக.
$x^2/_{25}+y^2/_9 = 1$ என்னும் நீள்வளையத்தின் புள்ளி Q வில் அமை யும் செவ்வன் ஆள்கூற்றச்சுக்களை முறையே A, B இல் சந்திக்கி ன்றது. Q மாறும்போது AB யின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு இன் னொரு நீள்வளையமாகுமென காட்டுக.
இவ்விரண்டாம் நீள்வளையத்தின் குவியங்களின் ஆள்கூறுகளைத் தருக.

26. $y=mx+c$ எனும்கோடு $x^2+y^2=16$ எனும் நீள்வளையத்தை P,Q வில் வெட்டுகின்றன. PQ நடுப்புள்ளி வின் M இன் ஆள்கூறுகள்

$$x = \frac{-4mc}{4m^2+1},\quad y = \frac{c}{4m^2+1}$$ என நிறுவுக.

நாண் P,Q(2,0) எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செவவன், $Mx^2+4y^2=2x$ எனும் நீள்வளையத்தில் இருக்கும் எனக் காட்டுக. இரு நீள்வளை யங்களையும் ஒரே படத்தில் கீறுக.

27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தின் குவியங்கள் $S_1 S'$ ஆகும் நீள்வளையத்தில் யாதுமோர் புள்ளி P இலிருந்து வரையப்பட்ட

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

செவ்வனது SP, S'P என்பவற்றுடன் சம கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளதெனக் காட்டுக.

P இல் அமையும் தொடலிக்கு உற்பத்தி O இலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்தானது, SP ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட SP ஐ G இல் சந்திக்கிறது. G இன் ஒழுக்கு S ஐ மையமாயும a ஐ ஆரையாயும் உடைய ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக.

26. $y = mx + c$ எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு தொடலியாக அமைய $a^2m^2 = c^2 - b^2$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. $y = mx + c$ என்பது $\left(\frac{5}{4}, 5\right)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும், $8x^2 + 3y^2 = 35$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு தொடலியும் எனில் $c = \frac{35}{3}$ அல்லது $\frac{35}{9}$ எனக் காட்டுக.

$\left(\frac{5}{4}, 5\right)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து நீள்வளையத்துக்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுபுள்ளிகளைக் காண்க.

29. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ இலான சாய்வைக் காண்க

P இலுள்ள தொடலியும் T இல் சந்திக்கின்றன. O உற்பத்தி எனின் OPTQ ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டி அதன் பரப்பைக் காண்க.

θ மாற புள்ளி T இன் ஒழுக்கு.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ எனும் நீள்வளையம் எனக் காட்டுக.

38. $P_0(x_0, y_0)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $S \equiv \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் நீள்வளையத்துக்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளினதும் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு.

$\frac{xx_0}{a^2} \; \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இதிலிருந்து $S=0$ என்னும் நீள்வளையத்தின் நாணின $lx+my+n=0$ இன் முனைப்புள்ளிகளிலே $S=0$ எனும் நீள்வளையத்துக்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளினதும் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்க.

$S=0$ என்னும் நீள்வளையத்தின் ஒரு தொடை நாண்கள் ஒவ்வொன்றும் $x^2+y^2-a^2=0$ என்னும் வட்டத்துக்குத் தொடலியாகும். இத்தகைய நாண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் முனைவுப் புள்ளிகளிலே, இந்நீள்வளையத்துக்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளினதும் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^4}-\frac{1}{a^4}=0$$ என்னும் நீள்வளையமாகும் என நிறுவுக.

31, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு P(a கோசை θ, b சைன் θ) எனும் புள்ளியிலான செவ்வனின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

நீள்வளையத்திற்கு P யிலான செவ்வனுனது x — அச்சை A யிலும் y—அச்சை B யிலும் சந்திக்கின்றது. AB யினது நடுப்புள்ளியான Q வின் ஒழுக்கானது ஆரம்ப நீள்வளையத்தின் அதே மையவகற்சித் திறனைக் கொண்ட ஒரு நீள்வளையமாகுமெனக் காட்டுக. P யினது மையவகற்சிக் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ ஆயின் முதலாவது நீள்வளையத்திற்கு P இலுள்ள செவ்வனுனது இரண்டாவது நீள்வளையத்திற்கு Q இலுள்ள தொடலியாகுமெனவும் காட்டுக

32, T என்னும் ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ என்னும் நீள்வளையத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் TP, TQ ஆகும்.

(i) T = (h, k) ஆயின் PQ இன் சமன்பாடு $\frac{bx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}=1$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(ii) PQ இன் சமன்பாடு $lx+my+n=0$ ஆயின் T இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

P யை ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி O உடன் இணைக்கும் நேர்கோடானது. மீண்டும் நீள்வளையத்தை R இற் சந்திக்குமாயின் QR ஆனது TO இற்கு சமாந்தரமாகும் எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

33. $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $(a > b > 0)$ எனும் நீள்வளையத்துக்கு அதன் மீதுள்ள (x_0, y_0) எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நீள்வளையத்துக்கு வெளியே (x^1, y^1) எனும் புள்ளில் இருந்து $S = 0$ க்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் தொடுகை நாண் $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy^1}{b^2} - 1 = 0$ என உய்த்தறிக.

$S = 0$ என்னும் நீள்வளையத்தின் சிறியச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மேலுள்ள P எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலி நீள்வளையத்தை Q இலும் R இலும் சந்திக்கிறது. நீள்வளையத்துக்கு Q இலும் R இலும் உள்ள தொடலிகள் T இல் இடைவெட்டுகின்றன. PT நீள்வளையத்தின் பெரியச்சுக்கு சமாந்தரம் என நிறுவுக.

34. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் நீள்வளையத்துக்கு P(aகோசை θ, bசைன் θ) எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P. Q $\left\{ a \text{ கோசை} \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), b \text{ சைன்} \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right\}$ என்பவற்றிலுள்ள தொடலிகள் T எனும் புள்ளியில் இடைவெட்டுகின்றன O என்பது உற்பத்தியாயின், POQT என்பது ஒரு இணைகரமாகுமெனக் காட்டுக.

P ஆனது நீள்வளையத்தின்மீது மாறும்போது, T இன் ஒழுக்கு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$ எனும் நீள்வளையமாகுமெனவுங் காட்டுக.

35. ஒரு வெளிப்புள்ளி P(h,k) இலிருந்து $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் PQ, PR ஆகும். QR இன் சமன்பாடு $\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = 1$ எனக் காட்டுக. QR இன் சமன்பாடு $lx + my = -n$ எனின் P இன் ஆள்கூறுகளை l, m, n இற் தருக.

Q இனூடாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனை Q' ஆகும். Q'R ஆனது PO இற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக. O உற்பத்தித் தானமாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

36. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இல் புள்ளிகள் 'α','β' ஐ இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இந் நாண் $x^2+y^2=r^2$ எனும் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. இந்நாணின் முனைகளிலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $x^2/a^4+b^4=\frac{1}{r^2}$ எனக் காட்டுக.

37. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்கு புள்ளி A(a கோசை θ, b சைன் θ) இலுள்ள செவ்வன் x—அச்சை M இலும், y—அச்சை N இலும் சந்திக்கின்றது. O உற்பத்தித் தானமெனின் முக்கோணி OMN இன் பரப்பைக் காண்க. இப்பரப்பின் அதி உயர் பெறுமானம் என்ன? முக்கோணி OMN இன் மையப்போலியின் ஒழுக்கு $9a^2x^2+9b^2y^2=(a^2-b^2)^2$ என்னும் நீள்வளையமெனக் காட்டுக

38. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ இன் நாண் AB இன் நடுப்புள்ளி M (α,β) ஆகும். AB இன் சமன்பாடு

$$\frac{\alpha}{c^2}(x-\alpha)+\frac{\beta}{b^2}(y-\beta)=0$$ எனக் காட்டுக.

AB ஆனது x—அச்சை P இலும், y— அச்சை Q இலும்) வெட்டுகின்றது. $\frac{a^2}{OP^2}+\frac{b^2}{OQ^2}$ ஒரு மாறிலி எனின் (O உற்பத்தி AB இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

39. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்குக் கீறப்பட்ட ஒரு செங்குத்தான தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு ஒருமைய வட்டமெனக் காட்டுக.

T என்பது இவ்வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி. T இலிருந்து நீள்வளைத்திற்குக் கீறிய இரு தொடலிகள் நீள்வளையத்தை முறையே A,B இலும், வட்டத்தை முறையே C,D இலும் சந்திக்கின்றன முக்கோணி TCD இன் அதி உயர் பரப்பு a^2+b^2 எனவும், குறைந்த பரப்பு 2ab எனவும் காட்டுக.

40. ஒரு வெளிப்புள்ளி T (h,k) இலிருந்து நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்குக் கீறிய தொடலிகளின் தொடுகை நாண் PQ இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

PQ இன் நடுப்புள்ளி M (p,q) எனின், PQ இன் சமன் பாட்டை p, q இற் தருக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பின்வரும் வரைகளில் M இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(a) T ஆனது, கோடு $x+y+1=0$ இல் கிடக்கின்றது.

(b) PQ ஆனது புள்ளி (2,3) இனூடாகச் செல்கின்றது.

(c) PQ இன் படித்திறன் ஒரு ஒருமை m

(d) PQ இன் செங்குத்துச் சமகூறாக்கி புள்ளி (a, 2a) இனூடாகச் செல்கின்றது.

41. $a+b$ $(a \neq b)$ நீளமுடைய கோலொன்றின் முனைகள் P, Q என்பவை முறையே x, y அச்சுகளின் வழியே வழுக்கிச் செல்கின்றன. M என்பது PQ இல் $PM=b$, $MQ=a$ ஆகுமாறு ஒரு புள்ளியாகும். M இன் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமெனக் காட்டுக. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க,

செவ்வகம் OPQR ஆனது பூர்த்திசெய்யப்படுமாயின் (O உற்பத்தித்தானம்) இந்நீள்வளையத்திற்கு M இலுள்ள செவ்வன் MR எனக் காட்டுக.

இது துணைகொண்டு, ஒரு நீள்வளையத்திற்கு ஏதாவதொரு புள்ளி M இலுள்ள செவ்வன் மையத்தினூடாகச் செல்லுமாயின் P ஆனது நீள்வளையத்தின் அச்சுகளின் முனைகளில் இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக.

42, நீள்வளையம் $b^2x + a^2b^2 = a^2b^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி புள்ளிகள் $A(a, 0)$, $A^1(-a, 0)$ இலுள்ள தொடலிகளை முறையே T, T^1 சந்திக்கின்றன.

(i) $AT, A^1T^1 = b^2$

(ii) TT^1 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் x— அச்சில் இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்கின்றது. எனக் காட்டுக

43 $lx+my+n=c$ எனும் கோடு $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு ஒரு தொடலியாயின் $a^2l^2+b\ m^2=n^2$ எனவும் இக்கோடு, $y^2=4Px$ என்னும் பரவளைவிற்கு ஒரு தொடலியாயின் $pm^2=ln$ எனவும் காட்டுக.

ஒரு நேர்கோடானது x, y அச்சுகளை முறையே M, N இற் சந்திக்கின்றது. $3OM^2+4ON^2=OM^2 . ON^2$ ஆகுமாறு கோடு MN அசைகின்றது. இக்கோடு ஒரு நிலையான நீள்வளையத்தைத் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக. இதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இந்நீள்வளையத்தினதும், பரப்பளவு $y^2=4x$ இனதும் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

44, ஒரு நிலையான புள்ளி $Q(x_0, y_0)$ இனூடாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் மீதுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி P இன் ஆளகூறுகளை $(x_0 + r$ கோசை θ, $y_0 + r$ சைன் $\theta)$ என்னும் வடிவில் இடலாமெனக் காட்டுக.

P ஆனது நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இல் கிடத்தற்கு வேண்டிய நிபந்தனையை r இலுள்ள ஒரு இருபடிச் சமன்பாடாகப் பெறுக.

இது துணைகொண்டு, Q இனூடாகச் செல்லும் படித்திறன் தான் θ உடைய நேர்கோடொன்று நீள்வளையத்தை H, K இல் (HK இன் நடுப்புள்ளி Q ஆகுமாறு) சந்தித்தால்,

$$\text{தான் } \theta = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$$ எனக் காட்டுக.

(x_0, y_0) இல் சம கூறிடப்படும், நீள்வளையத்தின் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

45. (a கோசை α, b சைன் α), (a கோசை β, b சைன் β) எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} \text{ கோசை } \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{y}{b} \text{ சைன் } \frac{\alpha+\beta}{2} = \text{கோசை } \frac{\alpha-\beta}{2}$$ எனக்காட்டுக

$x = a(1-t^2)/(1+t^2)$, $y = 2bt/(1+t^2)$ என்னும் நீள்வளையத்தில் $t_1 t_2$ என்னும் சாராமாறிகளையுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{x}{a}(1 - t_1 t_2) + \frac{y}{b}(t_1 + t_2) = 1 + t_1 t_2$$ என உய்த்தறிக.

இக்கோடு $x^2 + y^2 = b^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமாயின்,

$$e(1 - t_1 t_2) = \pm (t_1 - t_2)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு $b^2 = a^2(1 - e^2)$ ஆகும்.

46. E, E^1 என்னும் இரு நீள்வளையங்கள் ஒவ்வொன்றினது குவியங்களும் மற்றயதின் சிற்றச்சின் முனைகளில் உள்ளன.

(i) E, E^1, என்பவற்றின் பேரச்சுகள் சமன்.

(ii) E, E^1 இன் மையவகற்சித் திறன்கள் முறையே e, e^1 எனில் $e^2 + e^{12} = 1$.

(iii) E, E^1 இன் பொதுத்தொடலிகள், E இன் பேரச்சுடன் சைன் $^{-1}$e என்னும் கோணம் அமைகின்றன, எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

47. CD, EF என்பன நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இன் இரு மாறும் விட்டங்கள் C, E என்பவற்றின் மையவகற்சிக் கோணங்கள் முறையே θ, ϕ எனின் D, F இன் மையவகற்சிக் கோணங்களைக் காண்க.

C இலுள்ள தொடலி OE இற்குச் சமாந்தரமாயின் (O உற்பத்தித்தானம்), θ, Φ என்பன $\pi/2$ இன் ஒற்றைமடங்கின் பெருக்குத் தொகையால் வித்தியாசப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக.
CE இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு
$4b^2x^2 + 4a^2y^2 = a^2b^2$ எனக் காட்டுக.
$CD^2 + EF^2 = 4(a^2 + b^2)$ எனக் காட்டுக.

48. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இன் பேரச்சினதும், சிற்றச்சினதும் முனைகள் முறையே A, B ஆகும். P என்பது நீள்வளையத்தில் ஒரு மாறும் புள்ளியாயின் முக்கோணி PAB இன் நிமிர்மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமெனக் காட்டுக.

49. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ என்னும் நீள்வளையத்தின் ஒரு விட்டம் PQ ஆகும். நீள்வளையத்திற்கு P இலுள்ள செவ்வன் X, Y அச்சுக்களை முறையே H, K இற் சந்திக்கின்றது. இணைகரம் OHRK பூர்த்தியாக்கப்படுகிறது, (O உற்பத்தித்தானம்) அசையும்போது
(i) QR இன் நடுப்புள்ளியாயின் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமெனக் ககட்டுக
(ii) $PH/PK = b^2$ எனக் காட்டுக.
(iii) R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

50. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ இல், மையவகற்சிக் கோணங்கள் $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு bx கோசை α + ay சைன் α = ab கோசை β எனக் காட்டுக.

இது ஒரு குவியநாணுவின் அதன் நீளம் 2a சைன்^{2} β எனக் காட்டுக,

51. நீள்வளையம் $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ இன் மையத்திலிருந்து புள்ளி $P[\theta]$ இலுள்ள தொடலிக்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி N இன் இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
N இலிருந்து நீள்வளையத்திற்குக் கீறிய மறு தொடலியின் தொடுபுள்ளி $Q[\Phi]$ ஆகும்.
a^2 தான் $\theta = b^2$ தான் $(\theta + \Phi)/2$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Q இனூடாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையினூடாக P இலுள்ள செவ்வன் செல்கின்றபதனைக் காட்டுக.

52. ஒரு வெளிப்புள்ளி T (h, k) இதிலிருந்து நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்கு இரு தொடலிகள் TP, TQ கீறப்பட்டுள்ளன. O உற்பத்தித் தானமாயின் நாற்கோணி OPTQ இன் பரப்பு $\sqrt{(b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2)}$ எனக் காட்டுக.

PQ ஆனது நீள்வளையம் $9(b^2x^2+a^2y^2)=a^2b^2$ ஐத் தொடுமாயின் T இன் ஒழுக்கு $b^2x^2+a^2y^2=9a^2b^2$ என்னும் நீள்வளையமெனக் காட்டுக.

இம் மூன்று நீள்வளையங்களையும் ஒரே அச்சுகுறித்துக் கீறிக் காட்டுக.

53. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இல் P ஒரு மாறும் புள்ளி, இந் நீள்வளையத்தின் பேரச்சு AA^1 ஆகும். சிற்றச்சின் ஒருமுனை B ஆகும், P இலுள்ள தொடலிக்குச் சமாந்தரமான விட்டம் PA, PA^1 ஐ முறையே X,Y இற் சந்திக்கின்றது முக்கோணி BXY இன் பரப்பு P இன் நிலையிற் தங்கியிருக்கவில்லையெனக் காட்டுக.

54. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இல், மையவகற்சிக் கோணங்கள் α, β ஆகவுள்ள புள்ளிகளை இணைக்கும் வரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}(1-\text{தான் }\alpha\text{ தான் }\beta)+\frac{y}{b}\left(\text{தான்}\frac{\alpha}{2}+\text{தான்}\frac{\beta}{2}\right)=1+\text{தான்}\frac{\alpha}{2}\text{ தான்}\frac{\beta}{2}$$

எனக் காட்டுக.

இந் நீள்வளையத்தின் ஒரு நாண் PQ ஆனது (m,a,o) என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது. சீறிய அச்சில் P[α] இன் ஆடிவிம்பம் R ஆகும் RQ இன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}(1-m\sin\alpha)+\frac{my}{b}\sin\alpha=m-\cos\alpha$$ எனக் காட்டுக

55. PCP^1, QCQ^1 என்பவை நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இன் இரு உடன் உடன்புணரி விட்டங்கள். குவியங்கள் S,S^1 இலிருந்து முறையே PCP^1 QCQ^1 இற்குக் கீறிய செங்குத்துகளின் வெட்டுப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க,

56. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இலுள்ள புள்ளியொன்றின் ஆள்கூறுகளை $\left(a\frac{1-p^2}{1+p^2}, \frac{2bp}{1+p^2}\right)$ என இடலாமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பரமாணங்கள் p, q உடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இதிலிருந்து முதலாவது புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இது துணைகொண்டு (h, k) என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் தொடலிகள்.

$$p^2\left(1+\frac{h}{a}\right)-\frac{2pk}{b}+1-\frac{h}{a}=0$$ என்னும் இரு

படிச்சமன்பாட்டால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

இந் நீள்வளையத்திற்கு கீறிய ஒரு மாறும் தொடலி, வரைகள் $x = \pm 1$ ஐ M, N இற் சந்திக்கின்றது. M. N இலிருந்து நீள்வளையத்திற்குத் கீறிய மறு தொடலிகள் L இற் சந்திக்கின்றன. L இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

57. நீள்வளையம் $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ இற்கு புள்ளிகள் P[θ], Q[ϕ] இலுள்ள தொடலிகளின் வெட்டுப்புள்ளி R[a கோசை $\frac{1}{2}(\theta-\Phi)$/ கோசை $\frac{1}{2}(\theta-\Phi)$, b சைன் $\frac{1}{2}(\theta-\Phi)$ / கோசை $\frac{1}{2}(\theta-\Phi)$] எனக் காட்டுக.

θ—Φ என்பது ஒருமையாக இருக்குமாறு P, Q அசையுமாயின் R இன் எழுக்கைக் காண்க.

Φ = 0 3 ஆயின். R இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

58. நீள்வளையம் $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ இற்கு புள்ளி P இலுள்ள தொடலி X, Y அச்சுகளை முறையே A, B இற் சந்திக்கின்றது. P இலுள்ள செவ்வன் X, Y அச்சுகளை முறையே C, D இற் சந்திக்கின்றது O நீள்வளையத்தின் மையமாகும். நிறுவுக.

(a) OA, OC, PC/PD என்பவை P இன் நிலையிற் தங்கியிருக்கவில்லை.

(b) AD ஆனது BC இற்கு செங்குத்து

(c) CD இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு, தந்த நீள்வளையத்தில் மையவகறசித் திறன் உடைய ஒரு நீள்வளையம்.

மாசில்பதிப்பகம் A/L பயிற்சி நூல்கள்

நுண்கணிதம், அட்சரகணிதம்,
இயக்கவியல், பொறியியல்
பௌதிகப்பயிற்சி i, ii, iii
இரசாயனப் பயிற்சி C_1, சேதன C_2. பௌதிகம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடைகள்

அலகு I

1. (i) $2x+y-22=0$; $2x+y-7=0$;
$x-2y+4=0$; $x-2y-1=0$
(ii) $x-7y+94=0$; $x-7y-56=0$
2. $B(-\frac{1}{2}t, -2t)$; $C(-\frac{1}{2}t, t)$
3. $G(3\frac{1}{2}, 4)$, $H(4, 4)$, $S(3, 2)$
4. $y=5x$; $5y=x$; $x-5y+48=0$; $5x-y-48=0$
5. $2x-y=0$; $x-2y=0$;
6. $3y+x+4=0$
7. $x-2y+1=0$; $2x-4y-3=0$;
$x-3y+2=0$, $3x-9y+4=0$
8. $A(-3, 1)$, $I(-2/3, -1/3)$
9. $4x^2+4y^2+4x-8y+61=0$;
$4(x^2+y^6)-12x-40y+45=0$
10. $4x+3y-25=0$, $x+2y-15=0$, $3x+y-20=0$
11. $7x+y+p=0$
12. $7x+4y-33=0$, $x-8y+21=0$
$7x+4y+27=0$, $x-8y+39=0$
13. $x+2y+2=0$
14. $11x-4y+3=0$
$4x-3y+2=0$
$7x-y-12=0$
15. $2x-y-5=0$ — AC இன் சமன்பாடு
$11x=2y+-25=0$ — BC இன் சமன்பாடு
26. $x+2y-9=0$; $x^2+y^2+2x-10y+1=0$
27. $A\equiv(-3,1)$ $B\equiv(2,1)$ $C\equiv(5.5)$ $D\equiv(0,5)$
28. $d=2\left|\dfrac{y^2-ac}{a^2+b^2}\right|^{\frac{1}{2}}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}}$$

30. AC இன் சமன்பாடு $ax+by+c-\lambda\ (a^1x+b^1y+d^1)=0$
BD இன் சமன்பாடு $ax+by+c+\ \frac{c-d}{c^1-d},\ (a^1x+b^1y+d)=0$

31. 1 அலகு
33. $P\equiv(3,0)$
34. BC இன் சமன்பாடு $10x-24y+29+13\sqrt{13}=0$
AD இன் சமன்பாடு $10x-24y+29-13\sqrt{13}=0$
36. (i) $(-1,0)$; BC சமன்பாடு $\frac{-3+1}{-1+3}(x+1)$
(iii) 6 அலகு (iv) $(-{}^2/_3,\ -{}^2/_3)$

அலகு 2

1. $x^2+y^2+9-6\ (x+y)=0$
$x^2+y^2-126(x+y)+369=0$
2. $x^2+y^2-3x-3y+2=0$
$x^2+y^2-2x-2y-8=0$
3. $x^2+y^2+22x-20y-4=0$
$x^2+y^2-2x+4y-4=0$
4. $x^2+y^2-4x+4y+3=0$
$x^2+y^2-{}^2/_3x-{}^2/_3y-\frac{1}{3}=0$
5. $x=1;y=1;\ 3y-4y-4x+1=0$
$x+y^2+2x-2y+1=0$
6. $x^2+y^2+2fy-1=0$
$x^2+y^2-4y-1=0$
$(x^2+y^2)+y-7=0$
8. $2(x^2+y^2)-4x+2y-1=0$
9. $3y+4x+10=0$
$3x-4y-15=0$
10. $x^2+y^2-2x+2fy+1=0$
$x^2+y^2-2x+8y+1=0$
$x^2+y^2-2x+{}^8/_7y+1=0$

12. $x^2+y^2-4x-2y=0$
$5(x^2+y^2)4x-2y=0$
15. (i) $A(1,1), B(-3,-3)$
16. (ii) $x^2+y^2+2gx+2(2-g)y-6=0$

27 ம் கணக்கின் தொடர்ச்சியை பக்கம் 18 இல் காண்க.

29. $x\cos\theta+y\sin\theta=a$
$[a(2\cos\theta+1).\ a(2\sin^2\theta-1-\cos\theta/\sin\theta]$
$(0,-1'155a),(0,1.155a)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

30. $x(x-4)+y(y-2)=0,\ 2x+y=5$

31. $(x+3)^2+(y-6)^2=36;\ 4x-3y=0$

32. $k=-2,\ m=-3,\ x^2+y^2=2y$

$k={}^2/_9\ m={}^1/_3\ x^2+y^2+18y=0\ 3x-4y+9=0;y=0$

38. $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

$x^2+y^2-34x-34y+289=0$

34, (i) B, D என்பன $(1,3)\ (-7,-1)$

(ii) $x^2+y^2+6x-2y=0$

(iii) $1\,{}^2/_3$ சதுர அலகு

40. $x^2+y^2-16x+8y+30=0$

41. $y+2x=5,\ (10,-15)$

அலகு 3

4, $[\ at_1t_2\ ,\ a(t_1+t_2)\ ]$

8, $ay^2=x(x-a^2)$

12. $V\ (2a,0)\ ;\ (-a,\ 0);F\ (a,0);\ (0,0);$

$\left(\frac{a}{2},\sqrt{6a}\right);7^0\ 28'$

13. $n=2;\ PQ=4a\sqrt{10}$

14. 90^0; தான்$^{-1}$ $(3/4)$

(a) $8a^2$; (b) $x+y2-16ax+8ay=0$

15. $S_1\equiv\frac{1}{r}-1+$ கோசை 0; $S_2\equiv\frac{21}{r}=1+$ கோசை 0

17. $ty=x+at^2t,\ y^2=4a(a-x)$

18. $y^2=4ax$

21. $(9a,16a);\ (6a,\ 8a)$

22, $32a\ {}^2/_3$

26. $y=\pm\left(\frac{3x}{4}+5\right)$

27. பரப்பு $=21\ (2+\sqrt{11})$

$\angle$கள் $=61^0,\ 61^\circ,\ 119^\circ,\ 119^0$

$x^2+y^2-24x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

28. $[apq, a(p+q)]$; $y^2 = 3a(x+a)$

30. (i) $x = -a$

31. $R \equiv [at_1 \; t_2; \; a(t_1+t_2)]$

35. $R \equiv [at_1t_1 \; ; \; a(t_1+t_2)]$

அலகு 4

10. $\left(\frac{a^2}{p} \text{ கோசை } \alpha - \frac{b^2}{P} \text{ சைன் } \alpha\right)$

$\pm\sqrt{3}\sqrt{2}x \pm \sqrt{7}y = 15$ (4 தொடலிகள்)

11. $\left(-\frac{c}{t^3}, -ct^3\right)$; $\left(ct^9, \frac{e}{t^9}\right)$

$4x^3y^3 - c^2(x^2-y^2)^2 = 0$

12. — 13. $1-2g/a, -2f/c$ 14. $3\sqrt{7}c^2$

20. $t_2 = -1/t_1{}^3$

21. (h,k), $x=h$, $y=k$

$P(1\frac{1}{2}, 3)$, $Q(-\frac{1}{2}, -1)$

22. $y = \pm\, 4x/_3$ (b) பரப்பு $= 12$

28. $ct^4 - t^3x + ty - c = 0$

30. $x + pay = cp + cq$

$(p+q)^2 + 4pq = 0$

31. $bx \sec\theta; ay \tan\theta - ab = 0$

$4a^2x^2 + 4b^2y^2 = (a^2+b^2)$

32. $x + t^2y = 2ct$

34. $x_1y + y_1x = 2c^2$

$bx \sec\theta \; ay \tan\theta - ab = 0$;

c இன் ஒழுக்கு $4a^2x^2 + 4b^2y^2 = (a^2+b^2)$

$x + t^2y = 2ct$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அலகு 5

1. $x+2y-5=0;$ $2y-x+5=0$

   $x+y+5=0;$ $2y-x-5=0$

2. $2x-3y-5=0$ தொடுபுள்ளி $(1^3/_5, -^3/_5)$

   $3x-8y-10=0$ ஆள்கூறுகள் $(-1^1/_5, ^4/_5)$

5. $\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}=1$

8. (a^3 சீக θ, $-b^3$ கோசீ θ)

9. $3y$ சைன் θ — $5x$ கோசை $\theta+8=0$

13. $OQ=a^2;$ $OR=a^2/(a^2-1);$ $OL=a/\sqrt{(a^2-2)}$

14. $x^2+y^2=5$ ($4x^2+9y^2$ எனக் கணக்கில் திருத்துக.)

15. $2K$ a தான்$^{-1}$ $[n\sqrt{k(2-k)}-n^2/(k-n)]$

18. $p\equiv(la^2, mb^2);$ $l^2a^2+m^2b^2=l$

19. $\left(\frac{\sqrt{2}ab^2}{a^2+b^2}, \frac{\sqrt{2}ab^2}{a^2+b^2}\right)$

23. $3x+4\sqrt{10}y=28$

24. $(a^2+x^2)+(b^2/y^2)=a$

25. $25x^2+Qy^2=64$ $(0\pm{}^{32}/_{15})$

28. $9y=-48x+105,$ தொடுபுள்ளி $(2,1)$

    $9y=8x+35$ தொடுபுள்ளி $(-1,3)$

29. $-b/a\ \cot\theta;$ பரப்பு $= ab$

30. $a^2l,\ b^2m$

31. $(y-b\sin\theta)=\frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x-a\cos\theta)$

32. (ii) $\left(\frac{-a^2l}{n}, b^2\frac{m}{n}\right)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

35. $P \equiv \left(\frac{a^2 l}{n}, -\frac{b^2 m}{n} \right)$

40. i) $\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = 1$

ii) $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}$

iii) a) $a^2b^2(x+y) + b^2x^2 + a^2y^2 = 0$

b) $b^2(x^2 - 2x) + a^2(y^2 - 3y) = 0$

c) $b^2x + a^2my = 0$

d) $a^3y - 2ab^2x = xy(a^2 - b^2)$

41. $(x/a)^2 + (y/b)^2 - 1$

44. i) $(b^2\cos^2\theta + a^2b^2\theta)r^2 + 2(x_0\cos\theta + y_0h\theta)r + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$

ii) $\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$

47. $\{(\pi+\theta), (\pi+\Phi)\}$

49. $a^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 - b^2)^2$

51. $\{a \sec\theta \;\; b \operatorname{cosec}\theta\}$

56. i) $bx + apy - ap = 0$

57. $\frac{x^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{y^2\cos^2\theta}{b^2} = 0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org