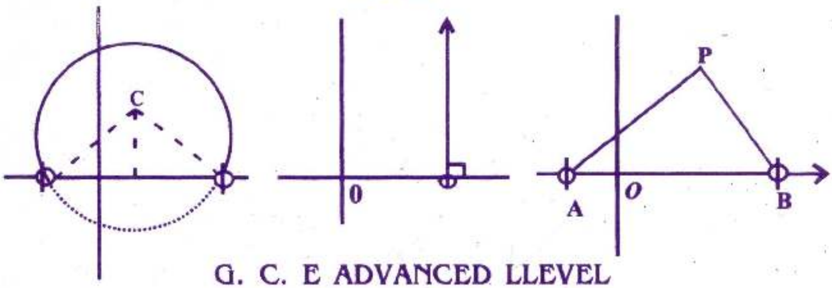
க.பொ.த. உயர் தரம்

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப்பகுதி)

அட்சரகணிதம்

பகுதி -II



G. C. E ADVANCED LLEVEL

COMBINED MATHEMATICS

(Pure Mathematics Component) Algebra Part - II

திருத்திய பதிப்பு

கா. கணேசலிங்கம்

(தூய கணிதப்பகுதி)

அட்சர கணிதம்

பகுதி - II

(திருத்திய பதிப்பு)

K. GANESHALINGAM. B.Sc, Dip-in-Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4 - B, Pamankada Road,
Colombo - 06.
T. P : 2366707

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title : INNAINTHA KANITHAM
[PURE MATHEMATICS - COMPONENT]
ALGEBRA PART - II

Language : Tamil

Author : Karthigesu Ganeshalingam. B. Sc; Dip-in-Ed.
Puttalai, Puloly

Publication : Sai Educational Publication
36/4 -B, Pamankada Road. Colombo - 06.

Date of issue : Revised Edition - January 2009

No. of Pages : 276

Copyright : Sai Educational Publication

Type Setting : Miss. Mathivathani.A. Colombo - 06.

நூலின் விபரம்

தலைப்பு : க. பொ. த. உயர்தரம்
இணைந்த கணிதம் (தூயகணிதப் பகுதி)
அட்சரகணிதம் - பகுதி - II
(திருத்திய பதிப்பு)

மொழி : தமிழ்

ஆசிரியர் : கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம்
புற்றளை, புலோலி.

வெளியீடு : சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்
36/4 -B, பாமன்கட வீதி, கொழும்பு - 06.

பிரசுரத் திகதி : திருத்திய பதிப்பு - தை 2009.

பக்கங்கள் : 276

பதிப்புரிமை : சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்

கணணிப்பதிவு : செல்வி. மதிவதனி.ஆ., கொழும்பு - 06.

என்னுரை

மீள் புதுப்பாக்கம் செய்யப்பட்டு வெளிவந்த **அட்சரகணிதம்** எனும் நூலின் **பகுதி II** இப்போது வெளிவருகிறது.

இந்நூலில் புதிதாகப் பாடத்திட்டத்தில் சேர்க்கப்பட்டுள்ள உத்திக்கணக்குகளும் சேர்க்கப்பட்டு மாணவர்கள் அட்சர கணித பாடத்தை இலகுவாக விளங்கிக் கொள்ளவும், தரப்பட்டுள்ள பிரசினங்களை செய்து தெளிவுறுவதன் மூலம் அட்சரகணிதம் சார்ந்த தெளிவான அறிவைப் பெறவும் இந்நூல் உதவும். எளிமையிலிருந்து சிக்கலான பயிற்சி களுக்குச் செல்லும் விதமாக பயிற்சிகள் ஒழுங்குபடுத்தப் பட்டுள்ளன.

இந்நூலை மாணவ உலகமும், ஆசிரிய உலகமும் பெற்றுப் பயன் பெறுவார்கள் என எதிர்பார்க்கிறேன். நிறைவு கள் ஏற்று குறைவுகள் சுட்டி மேலும் ஏற்கனவே வெளிவந்த நூல்களை மீள் புதுப்பாக்கம் செய்ய ஆக்கமும், ஊக்கமும் தருவார்களென கல்விச் சமூகத்தைக் கேட்டு இந்நூலை புத்தக உருவில் கொணர்ந்த சாயி கல்வி வெளியீட்டகத் திற்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

நன்றி

ஜனவரி - 2009 ஆசிரியர்

பொருளடக்கம்

தொடர்கள் (Series)

தொடரி (Sequence)

நேர் நிறையெண் தொடையிலிருந்து மெய்யெண்ணிற்கான சார்பு **தொடரி** எனப்படும்.

$f: A \longrightarrow R; \quad A=\{1,2,3,----\}$

$f(n)= 3n-1$ ஐக் கருதுக.

$f(1)=3\times 1-1=2$

$f(2)=3\times 2-1=5$

$f(3)=3\times 3-1=8$

$f(4)=3\times 4-1=11$

$2,5,8,11,------$ என்பது தொடரியாகும். இத்தொடரியை $\{3n-2\}$ என அல்லது $\{an\}: an=3n-2$ என எழுதலாம்.

$g: A \longrightarrow R; \quad A=\{1,2,3,----\}$

$g(n)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ஐக் கருதுக.

$g(1)=\frac{(-1)^2}{1}=1$

$g(2)=\frac{(-1)^3}{2}=-\frac{1}{2}$

$g(3)=\frac{(-1)^4}{3}=\frac{1}{3}$

$g(4)=\frac{(-1)^5}{4}=-\frac{1}{4}$

$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},------$ என்பது ஒரு தொடரியாகும்.

இத்தொடரியை $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ என அல்லது $\{bn\}; bn=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ என எழுதலாம்.

தொடர் (Series)

2,5,8,11,- - - - - -என்பது தொடரியாகும்.

2+5+8+11+ - - - - - - என்பது தொடர் ஆகும்.

$\{a_n\}$ என்பது தொடரி.

$a_1, a_2, a_3, ----a_n, ----$ தொடர் ஆகும்.

$a_1 + a_2 + a_3 + ---- + a_n$ தொடரி ஆகும்.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ---- + a_{10} = \sum_{r=1}^{10} a_r$$ என எழுதலாம்.

$$u_1 + u_2 + u_3 + ---- + u_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$$ என எழுதலாம்.

$$w_{10} + w_{11} + w_{12} + ---- + w_n = \sum_{r=10}^{n} w_r$$ என எழுதலாம்.

$$\sum_{r=1}^{25} (2r-1) = 1 + 3 + 5 + ---- + 49$$ ஆகும்.

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ---- + \frac{1}{n}$$ ஆகும்.

கூட்டல் தொடரி / கூட்டல் விருத்தி (Arithmetic sequence / Progression)

அடுத்துள்ள இரு உறுப்புக்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஒரு மாறிலியாக அமையும் தொடரி, கூட்டல் தொடரி / கூட்டல் விருத்தி எனப்படும்.

1,4,7,10,13,- - - கூட்டல் விருத்தியாகும்.

$a_1, a_2, a_3, ---- a_n, ----$ என்னும் தொடரி, எந்த ஒரு நேர் நிறையெண் k இற்கும் $a_{k+1} - a_k = d$ ஆகுமாறு d எனும் ஒரு மெய்யெண் இருப்பின்

$a_1, a_2, a_3, \_\_ a_n, \_$

ஒரு கூட்டல் தொடரியாகும். d என்பது பொது வித்தியாசம் எனப்படும்.

1,4,7,10,13,- - - - கூட்டல் தொடரி.

1+4+7+10−13,- - - - கூட்டல் தொடர் ஆகும்.

கூட்டல் தொடர் ஒன்றைக் கருதுக.

முதலாம் உறுப்பு a

பொது வித்தியாசம் d என்க.

r ஆம் உறுப்பு $\mathrm{T}r = a + (r-1)d$ ஆகும்.

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $S_n = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + ---- + \mathrm{T}_n$ ஆகும்.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{T}r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a + (r-1)d$$

$$= a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + ------ + [a + (n-1)d]$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ------ + T_n$$

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + ------ + T_n \text{ ———— } (1)$$

$$S_n = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} + ----- + T_1 \text{ ———— } (2)$$

$$(1) + (2) \quad 2S_n = (T_1 + T_n) + (T_2 + T_{n-1}) + (T_3 + T_{n-2}) + ---- + (T_n + T_1)$$

$$T_1 + T_n = a + [a + (n-1)d] = 2a + (n-1)d$$

$$T_2 + T_{n-1} = (a+d) + [a + (n-2)d] = 2a + (n-1)d$$

$$T_3 + T_{n-2} = (a+2d) + [a + (n-3)d] = 2a + (n-1)d$$

எனவே $\quad 2.S_n = n[2a + (n-1)d]$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \text{ ———— } (*)$$

n ஆவது உறுப்பு $\quad T_n = a + (n-1)d$

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[T_1 + T_n] \text{ ———— } (*)$$

எனவே முதல் உறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d ஆகவுள்ள கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் n ஆவது உறுப்பு $T_n = a + (n-1)d$ ஆகும். முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n என்க. (ℓ ஆனது n ஆம் உறுப்பு).

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \quad \text{அல்லது} \quad S_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$$

உதாரணம் 1

கூட்டல் விருத்தி ஒன்றின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $2n$ ஆகும். முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை n ஆகும். முதல் $4n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

முதலாம் உறுப்பு a, பொதுவித்தியாசம் d என்க.

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$ என்ற வாய்ப்பாட்டை உபயோகிக்க.

$$S_n = 2n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$2a + (n-1)d = 4 \text{ ———— } (1)$$

$$S_{2n} = n = \frac{2n}{2}\left[2a + (2n-1)d\right]$$

$$2a + (2n-1)d = 1 \text{ ———— } (2)$$

முதல் $4n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_{4n} என்க.

$$S_{4n} = \frac{4n}{2}\left[2a + (4n-1)d\right]$$

$$= 2n\left[2a + (4n-1)d\right] \text{ ———— } (3)$$

$(2)-(1) \Rightarrow nd = -3$

$(3),\ S_{4n} = 2n\left[2a + (n-1)d + 3nd\right]$

$= 2n\left[4 + 3\times(-3)\right]$ (1) இலிருந்து

$= 2n\left[4-9\right] = -10n$ ஆகும்.

$4n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $-10n$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, எந்த ஒரு n இற்கும் கூட்டல் தொடர்கள் இரண்டின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைகளின் விகிதம் $2n : n+1$ ஆகும்.

(i) தொடர்களின் முதல் உறுப்புக்கள் இரண்டும் சமம் எனக் காட்டுக.
(ii) தொடர்களின் எட்டாம் உறுப்புக்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

முதலாம் உறுப்பு a முதலாம் உறுப்பு a'
பொதுவித்தியாசம் d பொதுவித்தியாசம் d'
n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S'_n

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \qquad S^1{}_n = \frac{n}{2}\left[2a^1 + (n-1)d^1\right]$$

மேலும் $$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{\left[2a + (n-1)d\right]}{\left[2a' + (n-1)d'\right]} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\frac{2a + (n-1)d}{2a' + (n-1)d'} = \frac{2n}{n+1} \text{ ——— } \textbf{(1)}$$

(1) இல் $n = 1$ ஆக, $\frac{a}{a'} = \frac{2}{2} = 1$

எனவே $a = a'$

எட்டாம் உறுப்புக்கள் முறையே $a + 7d,\ a' + 7d'$ ஆகும்.

$n = 15$ என (1) இல் பிரதியிட,

$$\frac{2a + 14d}{2a' + 14d'} = \frac{30}{16}$$

$$\frac{a + 7d}{a' + 7d'} = \frac{15}{8}$$ ஆகும்.

பெருக்கல் தொடரி/விருத்தி
(Geometric sequence/ Progression)

தொடரி ஒன்றின், முதல் உறுப்புக்குப் பின்னருள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும், அதற்கு முன் உள்ள உறுப்பை, மாறாப் பெறுமானம் ஒன்றால் பெருக்கிப் பெற முடியும் எனின் இத்தொடரி பெருக்கல் தொடரி எனப்படும். இம்மாறப்பெறுமானம் பொதுவிகிதம் எனப்படும்.

2,6,18,54,------ என்பது ஒரு பெருக்கல் தொடரி.

பொதுவிகிதம் $=\frac{6}{2}=\frac{18}{6}=\frac{54}{18}=3$ ஆகும்.

$a_1, a_2, a_3, ---- a_n, ----$ என்ற தொடரியை கருதுக.

எல்லா நேர் நிறையெண் k இற்கும் $a_{k+1}=r\ a_k$ ஆகுமாறு பூச்சியமற்ற ஒரு மெய்யெண் r இருப்பின் தொடரி $a_1, a_2, a_3, --$ என்பது ஒரு பெருக்கல் தொடரி எனப்படும். பூச்சியமற்ற மெய்யெண் r பொதுவிகிதம் எனப்படும்.

$a_1 + a_2 + a_3 + ----+ a_n, ----$ பெருக்கல் தொடர் ஆகும்.

பெருக்கல் தொடரி ஒன்றின்

முதலாம் உறுப்பு $=a$, பொதுவிகிதம் $=r$ என்க.

தொடரி $a, \ ar, ar^2, ar^3, \ - \ ar^{n-1}, ----$ என அமையும்.

முதலாம் உறுப்பு $T_1 = a$

இரண்டாம் உறுப்பு $T_2 = ar$

மூன்றாம் உறுப்பு $T_3 = ar^2$

----

p ஆவது உறுப்பு $T_p = ar^{p-1}$ ஆகும்.

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n எனின்,

$$S_n = a + ar + ar^2 + ---- + ar^{n-1}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} ar^{p-1}$$ ஆகும்.

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \text{------} + ar^{n-1} \text{——————} (1)$$

$$r.S_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \text{-------} + ar^{n-1} + ar^n \text{——————} (2)$$

$$(1)-(2) \quad S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$r=1$ எனின், $S_n = a + a + a + \text{----} + a = na$ ஆகும்.

$$\boxed{\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \text{ ஆக} \\ &= na & r = 1 \text{ ஆக} \end{aligned}}$$

தொடர் ஒன்றின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$\sum u_r$ என்ற தொடரைக் கருதுக.

$S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ என்க.

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to \ell$ (முடிவுள்ள எல்லை) எனின், முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை ℓ ஆகும்.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ell$ ஆகும். தொடர், ஒருங்கு தொடர் எனப்படும்.

பெருக்கல் தொடர் ஒன்று ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனை

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} ar^{p-1} \qquad (r \neq 1)$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{ஆகும்.}$$

(i) $-1 < r < 1$ எனின், $n \to \infty$ ஆக, $r^n \to 0$ ஆகும்.

$$n \to \infty \text{ ஆக, } S_n \to \frac{a}{1-r} \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $r > 1$ எனின், $n \to \infty$ ஆக, $r^n \to \infty$ ஆகும்.

(iii) $r < -1$ எனின், $n \to \infty$ ஆக, r^n முடிவின்றி அலையும்.

(iv) மேலும் $r = 1$ எனின், $S_n = na$

$n \to \infty$ ஆக, $S_n \to \infty$ $(a > 0$ எனின்$)$

$n \to \infty$ ஆக, $S_n \to -\infty$ $(a < 0$ எனின்$)$

(v) $r = -1$ எனின்,

$$S_n = a - a + a - a + a - - - - + (-1)^n . a \quad \text{ஆகும்.}$$

$= 0$ (n. இரட்டை எனின்)

$= a$ (n ஒற்றை எனின்)

$n \to \infty$ ஆக, S_n ஒரு எல்லைப் பெறுமானத்தை எடுக்காது. $n \to \infty$ ஆக, S_n முடிவுள்ளதாக அலையும் (Oscillates finitely).

பெருக்கல் தொடர் ஒருங்க பொதுவிகிதம் r ஆனது $-1 < r < 1$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது $|r| < 1$.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\left[1 - r^n\right]$$

$-1 < r < 1$ ஆக $n \to \infty$ ஆக $r^n \to 0$ ஆதலால் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுதொகை $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ ஆகும்.

$-1 < r < 1$ எனின் $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} ar^{p-1} = \frac{a}{1-r}$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{9}{4}$ உம், முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 2 ஆகவும் இருப்பின் தொடரைக் காண்க.

முதலாம் உறுப்பு a, பொதுவிகிதம் r என்க.

$$a + ar + ar^2 = \frac{9}{4},\ a\left(1 + r + r^2\right) = \frac{9}{4} \qquad \text{———————} (1)$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = 2 \qquad \text{———————} (2)$$

$a = 2(1-r)$ என (1) இல் பிரதியிட.

$$2(1-r)\left(1 + r + r^2\right) = \frac{9}{4}$$

$$\left(1 - r^3\right) = \frac{9}{8}$$

$$r^3 = -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

ஆகவே, $r = -\frac{1}{2},\ a = 3$ ஆகும்.

$$3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \text{---------}$$

உதாரணம் 4

பின்வரும் இரு பெருக்கல் தொடர்களும் ஒருங்கத்தக்கதாக x இற்குப் பொதுப்பெறுமானம் யாதும் இல்லை எனக் காட்டுக.

(i) $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^r$ (ii) $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^r$

(i) $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^r = 1 + \frac{5x-6}{3x-2} + \left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^2 + \text{---------}$

தொடர் ஒருங்க $|r|=\left|\dfrac{5x-6}{3x-2}\right|<1$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^2<1$$

$$\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^2-1<0$$

$$(5x-6)^2-(3x-2)^2<0$$

$$(2x-4)(8x-8)<0$$

$$(x-2)(x-1)<0$$

$$1<x<2 \text{ ——————————— } \textbf{(A)}$$

முதலாவது தொடர் ஒருங்க $1<x<2$ ஆகும்

(ii) $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^r$

$$=1+\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)+\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^2+---------$$

தொடர் ஒருங்க $|r|=\left|\dfrac{2x-1}{4x-5}\right|<1$

$$\left(\frac{2x-1^{2}}{4x-5}\right)^2<1$$

$$(2x-1)^2-(4x-5)^2<0$$

$$(-2x+4)(6x-6)<0$$

$$-(x-2)(x-1)<0$$

$$(x-2)(x-1)>0$$

$x<1$ அல்லது $x<2$ ——————————— **(B)**

இரண்டாவது தொடர் ஒருங்க $x<1$ அல்லது $x<2$. எனவே இரு தொடர்களும் ஒருங்கத்தக்கதாக x இற்குப் பொதுப்பெறுமானம் இல்லை.

உதாரணம் 5

முதலாம் உறுப்பு a, பொதுவிகிதம் r ஆகவுள்ள பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n எனின் $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ என நிறுவுக.

$\dfrac{S_{3n} - S_{2n}}{S_n} = r^{2n}$ என நிறுவுக.

$r = \dfrac{1}{2}$ எனின் $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{S_{3n} - S_{2n}}{S_n}$ ஐக் காண்க.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad S_{2n} = \frac{a(1-r^{2n})}{(1-r)}, \ S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{(1-r)}$$

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{a}{1-r}\left[r^{2n} - r^{3n}\right]$$

$$= \frac{a}{1-r} \times r^{2n}(1-r^n)$$

$$\frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_n} = r^{2n}$$ ஆகும்.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$$

$r = \dfrac{1}{2}$ எனின், $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (r^2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

இது ஒரு பெருக்கல் தொடர்.

முதலாம் உறுப்பு $a = \dfrac{1}{4}$ பொதுவிகிதம் $r = \dfrac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$ ஆகும்.

கூட்டல் பெருக்கல் தொடர்

$$\sum_{r=1}^{n} r.3^{r-1} = \frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right]$$ எனக் காட்டுக.

$$\sum_{r=1}^{n} r.3^{r-1} = 1.3^0 + 2.3^1 + 3.3^2 + 4.3^3 + 5.3^4 + \cdots + n.3^{n-1}$$

இங்கு 1, 3, 2, - 4, n என்பன கூட்டல் தொடரியாகவும், $3^0\ 3^1\ 3^2, - - - 3^n$ என்பன பெருக்கல் தொடரியாகவும் அமைந்துள்ளன. எனவே இது கூட்டல் பெருக்கல் தொடர் எனப்படும்.

$$S_n = 1.3^0 + 2.3^1 + 3.3^2 + \cdots + n.3^{n-1} \quad \text{---------} (1)$$

$$3S_n = 1.3^1 + 2.3^2 + 3.3^3 - - - + (n-1)3^{n-1} + n.3^n \quad \text{---------} (2)$$

$$(1)-(2), -2S_n = 1.3^0 + 1.3^1 + 1.3^2 + - - - + 3^{n-1} - n.3^n$$

$$-2S_n = \left(1 + 3 + 3^2 + - - - - + 3^{n-1}\right) - n.3^n$$

$$= \frac{1(3^n - 1)}{3-1} - n.3^n$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{3^n - 1}{2} - n.3^n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2n.3^n - 3^n + 1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2n-1)3^n + 1\right]$$

உதாரணம் 6

$\sum_{r=1}^{n} r^2.2^r$ ஐக் காண்க.

$$S_n = 1^2.2 + 2^2.2^2 + 3^2.2^3 + 4^2.2^4 + ---- + n^2.2^n \quad \text{—— (1)}$$
$$2S_n = \quad 1^2.2^2 + 2^2.2^3 + 3^2.2^4 + ---- + (n-1)^2.2^n + n^2.2^{n+1} \quad \text{—— (2)}$$

(1) – (2),

$$-S_n = 1.2 + 3.2^2 + 5.2^3 + 7.2^4 + ---- + (2n-1).2^n - n^2.2^{n+1}$$
$$2S_n = \quad 1.2^2 + 3.2^3 + 5.2^4 + ---- + (2n-3)2^n + (2n-1)2^{n+1} - n^2.2^{n+2}$$

$$S_n = 1.2 + 2.2^2 + 2.2^3 + 2.2^4 + ------ + 2.2^n - (n-1)^2 2^{n+1} + n^2.2^{n+2}$$
$$= 2 + (2^3 + 2^4 + 2^5 + ---- + 2^{n+1}) + 2^{n+1}\left[2n^2 - (n-1)^2\right]$$
$$= 2 + 2^3(1 + 2 + 2^2 + ---- + 2^{n-2}) + 2^{n-1}(n^2 + 2n - 1)$$

$\left[(1 + 2 + 2^2 + ----- + 2^{n-2}) \right.$ – பெருக்கல் தொடர் $(n-1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன$\left.\right]$

$$= 2 + 2^3\left[\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}\right] + 2^{n-1}(n^2 + 2n - 1)$$
$$= 2 + 2^3(2^{n-1} - 1) + 2^{n-1}(n^2 + 2n - 1)$$
$$= 2 - 2^3 + 2^{n-1}(n^2 + 2n - 1 + 8)$$
$$= \quad 2^{n-1}(n^2 + 2n + 7) - 6$$

$\{a_n\}, \{b_n\}$ என்பன இருதொடரிகளாகவும், k ஓர் ஒருமையாகவும் இருக்க,

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r + b_r) = \sum_{r=1}^{n} a_r + \sum_{r=1}^{n} b_r$$

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r - b_r) = \sum_{r=1}^{n} a_r - \sum_{r=1}^{n} b_r$$

(iii) $\sum_{r=1}^{n} k.a_r = k.\sum_{r=1}^{n} a_r$ ஆகும்.

(i) $$\sum_{r=1}^{n}(a_r + b_r) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \_\_\_\_ + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \_\_\_ + a_n) + (b_1 + b_2 + \_\_\_ + b_n)$$
$$= \sum_{r=1}^{n} a_r + \sum_{r=1}^{n} b_r$$

(ii) $$\sum_{r=1}^{n}(a_r - b_r) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \_\_\_\_ + (a_n - b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \_\_\_ + a_n) - (b_1 + b_2 + \_\_\_ + b_n)$$
$$= \sum_{r=1}^{n} a_r - \sum_{r=1}^{n} b_r$$

(iii) $$\sum_{r=1}^{n} k.a_r = k.a_1 + k.a_2 + k.a_3 + k.a_4 + \_\_\_\_ + k.a_n$$
$$= k(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \_\_\_ + a_n)$$
$$= k.\sum_{r=1}^{n} a_r$$

(i) $\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + 4 + \_\_\_\_ + n$ ஆகும்.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \_\_\_\_ + n^2$ ஆகும்.

(iii) $\sum_{r=1}^{n} r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \_\_\_\_ + n^2$ ஆகும்.

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ ஆகும்.

இம் முடிபுகளைப் பயன்படுத்தி தொடர்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணும் முறையை இங்கு பார்போம்.

உதாரணம் 7

$1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ------$ எனும் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

r ஆம் உறுப்பு $u_r = r(r+1)$ ஆகும்.

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \sum_{r=1}^{n}(r^2 + r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^2 + \sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}[(2n+1)+3]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

உதாரணம் 8

$$\sum_{r=1}^{n} r(2r-1)(r+3) \text{ ஐக் காண்க.}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r(2r-1)(r+3) = \sum_{r=1}^{n} r\left(2r^2+5r-3\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left(2r^3+5r^2-3r\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} 2r^3 + \sum_{r=1}^{n} 5r^2 - \sum_{r=1}^{n} 3r$$

$$= 2\sum_{r=1}^{n} r^3 + 5\sum_{r=1}^{n} r^2 - 3\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= 2\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[n(n+1) + \frac{5(2n+1)}{3} - 3\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3n(n+1)+5(2n+1)-9}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)\left(3n^2+13n-4\right)}{6}$$

உதாரணம் 9

$$\sum_{r=1}^{n}(r+1)(r+2) \text{ ஐக் காண்க.}$$

$$\sum_{r=1}^{n}(r+1)(r+2) = \sum_{r=1}^{n} r^2+3r+2$$

$$=\sum_{r=1}^{n} r^2+\sum_{r=1}^{n} 3r+\sum_{r=1}^{n} 2$$

$$=\sum_{r=1}^{n} r^2+3.\sum_{r=1}^{n} r+\sum_{r=1}^{n} 2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+2n$$

$$=\frac{n}{6}[(n+1)(2n+1)+9(n+1)+12]$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2+12n+22)$$

$$=\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$$

உதாரணம் 10

(i) $\sum_{r=51}^{100} r^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ எனின் $\sum_{r=1}^{n}(r+1)(r+2)$ ஐக் காண்க.

(i) $\sum_{r=51}^{100} r^2=51^2+52^2+53^2+----+100^2$

$$=(1^2+2^2+3^2+----+50^2+51^2+52^2+----+100^2)-(1^2+2^2+---+50^2)$$

$$=\sum_{r=1}^{100} r^2 - \sum_{r=1}^{50} r^2$$

$$=\frac{100\times101\times201}{6}-\frac{50\times51\times101}{6}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ இல் பிரதியிட}\right]$$

$$=\frac{50\times101}{6}[402-51]$$

$$=\frac{50\times101\times351}{6}$$

$$=25\times101\times117$$

(ii) $$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \longrightarrow \text{(A)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=1.2+2.3+3.4+4.5+----+n(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} (r+1)(r+2)=2.3+3.4+4.5+---+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$

$$=1.2+2.3+3.4+4.5+----+(n+1)(n+2)-1.2$$

$$=\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)-2$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}-2$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{3} \qquad \text{[(A) யிலிருந்து]}$$

$$=\frac{n^3+6n^2+11n+6-6}{3}$$

$$=\frac{n^3+6n^2+11n}{30}=\frac{n}{3}\left(n^2+6n+11\right)$$

உதாரணம் 11

$4+44+444+4444+ ----$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$U_1 = 4$$
$$U_2 = 4 + 4\times 10$$
$$U_3 = 4 + 4\times 10 + 4\times 10^2$$
$$U_4 = 4 + 4\times 10 + 4\times 10^2 + 4\times 10^3$$

$$U_r = 4 + 4\times 10 + 4\times 10^2 + 4\times 10^3 + --- + 4\times 10^{r-1}$$
$$U_n = 4 + 4\times 10 + 4\times 10^2 + 4\times 10^3 + ---+--- + 4\times 10^{n-1}$$
$$U_r = 4 + 4\times 10 + 4\times 10^2 + --- + 4\times 10^{r-1}$$
$$= 4\left[1 + 10 + 10^2 + --- + 10^{r-1}\right]$$
$$= 4\left(\frac{10^r - 1}{10-1}\right) = \frac{4}{9}\left(10^r - 1\right)$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{4}{9}\left(10^r - 1\right)$$
$$= \frac{4}{9}\left[\sum_{r=1}^{n} 10^r - \sum_{r=1}^{n} 1\right]$$
$$= \frac{4}{9}\left[\left(10 + 10^2 + -- + 10^n\right) - n\right]$$
$$= \frac{4}{9}\left[\frac{10\left(10^n - 1\right)}{10-1} - n\right]$$
$$= \frac{4}{81}\left[10^{n+1} - 9n - 10\right]$$

$\sum_{r=1}^{n} r$ இன் பெறுமானம் காண்பதற்குரிய முறை

முறை (1) $f(r)=r^2$ என்க.

$$f(r)-f(r-1)=r^2-(r-1)^2$$
$$=2r-1$$

$2r-1=f(r)-f(r-1)$ இல்

$r=1$ ஆக $\quad 2.1-1=f(1)-f(0)$

$r=2$, ஆக $\quad 2.2-1=f(2)-f(1)$

$r=3$, ஆக $\quad 2.3-1=f(3)-f(2)$

$r=n$-1, $\quad 2(n-1)-1=f(n-1)-f(n-2)$

$r=n \quad 2.n-1=f(n)-f(n-1)$

$$2.\sum_{r=1}^{n} r-n=f(n)-f(0)$$

$$2.\sum_{r=1}^{n} r-n=n^2-0$$

$$2.\sum_{r=1}^{n} r=n^2+n$$

$$2.\sum_{r=1}^{n} r=\frac{n(n+1)}{2}$$

முறை (2) $f(r)=Ar^2+Br$ என்க.

$r=f(r)-f(r-1)$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் A,B ஐக் காணவேண்டும்.

$$r = (Ar^2 + Br) - \left[A(r-1)^2 + B(r-1)\right]$$

$$= A\left[r^2 - (r-1)^2\right] + B\left[r - (r-1)\right]$$

$$= A(2r-1) + B$$

$$= 2Ar + (B - A)$$

எனவே $2A = 1, \quad B - A = 0$

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

$\underline{r = f(r) - f(r-1)}$ இல்

$r = 1$ ஆக $\quad 1 = f(1) - f(0)$

$r = 2, \quad 2 = f(2) - f(1)$

$r = 3, \quad 3 = f(3) - f(2)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$r = n\text{-}1 \quad n - 1 = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n \quad n = f(n) - f(n-1)$

$$\sum_{r=1}^{n} r = f(n) - f(0)$$

$$= (An^2 + Bn) - 0$$

$$= An^2 + Bn = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$$

$\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காணும் முறை

முறை (1) $f(r)=r^3$ என்க

$$f(r)-f(r-1)=r^3-(r-1)^3$$
$$=[r-(r-1)][r^2+r(r-1)+(r-1)^2]$$
$$=1\times[3r^2-3r+1]$$

$$3r^2-3r+1=f(r)-f(r-1)$$

$r=1$ $\quad 3.1^2-3.1+1=f(1)-f(0)$

$r=2,$ $\quad 3.2^2-3.2+1=f(2)-f(1)$

$r=3,$ $\quad 3.3^2-3.3+1=f(3)-f(2)$

- - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - -

$r=n\text{-}1,$ $\quad 3.(n-1)^2-3(n-1)+1=f(n-1)-f(n-2)$

$r=n$ $\quad 3.n^2-3.n+1=f(n)-f(n-1)$

$$3.\sum_{r=1}^{n} r^2-3.\sum_{r=1}^{n} r+n=f(n)-f(0)$$

$$3.\sum_{r=1}^{n} r^2=n^3-0+3\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

முறை (2) $\quad f(r) = Ar^3 + Br^2 + cr$ என்க.

$f(r) - f(r-1) = r^2$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் A,B ஐக் காணவேண்டும்.

$$\begin{aligned}
r^2 &= (Ar^3 + Br^2 + cr) - \left[A(r-1)^3 + B(r-1)^2 + C(r-1)\right] \\
&= A\left[r^3 - (r-1)^3\right] + B\left[r^2 - (r-1)^2\right] + c\left[r - (r-1)\right] \\
&= A\left[3r^2 - 3r + 1\right] + B\left[2r - 1\right] + C \\
&= 3Ar^2 + (2B - 3A)r + (A - B + C)
\end{aligned}$$

$$3A = 1, \quad 2B - 3A = 0, \quad A - B + C = 0$$

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{1}{2}, \qquad C = \frac{1}{6}$$

$$r^2 = f(r) - f(r-1)$$

$r = 1$ ஆக $\quad 1^2 = f(1) - f(0)$

$r = 2, \quad 2^2 = f(2) - f(1)$

$r = 3, \quad 3^2 = f(3) - f(2)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$r = n\text{-}1 \quad (n-1)^2 = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n \quad n^2 = f(n) - f(n-1)$

$$\begin{aligned}
\sum r^2 &= f(n) - f(0) \\
&= (An^3 + Bn^2 + Cn) - 0 \\
&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n \\
&= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

$\sum_{r=1}^{n} r^3$ ஐக் காணும் முறை

$f(r) = A\ {}^4r + Br^3 \quad C\ {}^2r + D$ rஎன்க.

$f(r) - f(r - \ ) = r^3$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் A, B, C, D ஐக் காண வேண்டும்.

$r^3 \ = f(r) - f\ r(\quad) - 1$

$= \left[Ar^4 + B \quad r^3 C\ {}^2r + Dr\right] - \left(A(r-1)^4 + B(r-1)^3 + \quad (r-1)^2 + D(r-1)\right)$

$= A\left[r^4 - r(-1)^4\right] + B\left[r^2 - (r-1)^3\right] \quad C + \left[r - (r-1)^2\right] \quad D + r\left[-(r-1)\right]$

$= A\left[4r^3 - 6r^2 + 4r - 1\right] + B\left[3\ {}^2 r - 3 \quad + r1\right] + C\left[2r - 1\right] + D$

$= 4Ar^3 + (\quad 3\ 6B)r^2 + (4A - 3 \quad + B\ 2C)r + (-A + B - C \quad + D)$

$4A = 1,\ 3 \quad B\ 6A = 0,\ 4A - 3 \quad + B 2C \quad 0,\ -A + B - C \quad + D \quad 0$

$A = \frac{1}{4}, \qquad B \frac{1}{2}, \qquad C = \frac{1}{4}, \qquad D \quad 0$

$\underline{r^3 = f(r) - f(r-1} \quad)$

$1^3 = f(1) - f(0)$

$2^3 = f(2) - f(1)$

$3 \ {}^3 = f\ 3) - f(2)$

$4^3 = f(4) - f(3)$

$(n-1)^3 = f(n-1) - f(n-2)$

$n^3 = f(n) - f(n \quad - \quad 1)$

$\sum_{r=1}^{n} r^3 = f(n) - f(0)$

$= An^4 + Bn^3 \quad C\ n^2 + Dn - 0$

$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

உதாரணம் 12

$$\sum_{r+1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு விதமாகவோ பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ----- + (2n+1)^2$

(ii) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ----- - (2n)^2$ **(iii)** $\sum_{r=1}^{n} r(r+4)$

(i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + --- + (2n+1)^2$

$$= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + --+(2n)^2 + (2n+1)^2\right] - \left(2^2 + 4^2 + 6^2 + --+(2n)^2\right)$$

$$= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + --+(2n+1)^2\right] - 2^2\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + --+ n^2\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{2n+1} r^2 - 4\sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\left[2(4n+3) - 4n\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{3}\left[(4n+3) - 2n\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

(ii) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 ----(2n)^2$

$$= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + --- + (2n)^2\right] - 2\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + -- + (2n)^2\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{2n} r^2 - 8\sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{8 \times n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n(2n+1)}{6}\left[(4n+1) - 4(n+1)\right]$$

$$= \frac{n(2n+1)}{3} \times (-3) = -n(2n+1)$$

(iii) $\sum_{r=1}^{r} r(r+4)$

முறை I $\quad \sum_{r=1}^{n} r(r+4)$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^2 + 4r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\left[(2n+1) + 12\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

முறை II

$$U_r = r(r+4) = r^2 + 4r$$

$f(r) = Ar^3 + Br^2 + Cr$ என்க.

$f(r) - f(r-1) = r^2 + 4r$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் A, B, C ஐக் காண வேண்டும்.

$$r^2 + 4r = \left[Ar^3 + Br^2 + Cr\right] - \left[A(r-1)^3 + B(r-1)^2 + C(r-1)\right]$$

$$= A\left[r^3 - (r-1)^3\right] + B\left[r^2 - (r-1)^2\right] + C\left[r - (r-1)\right]$$

$$= A\left(3r^2 - 3r + 1\right) + B(2r-1) + C$$

$$= 3Ar^2 + (2B - 3A)r + (A - B + C)$$

$$3A = 1, \quad 2B - 3A = 4, \quad A - B + C = 0$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{5}{2}, \quad C = \frac{13}{6}$$

$$\underline{U_r = f(r) - f(r-1)}$$

$$U_1 = f(1) - f(0)$$

$$U_2 = f(2) - f(1)$$

$$U_3 = f(3) - f(2)$$

$$U_n - 1 = f(n-1) - f(n-2)$$

$$U_n = f(n) - f(n-1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0)$$

$$= \left(An^3 + Bn^2 + Cn\right) - 0$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{13}{6}n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

பகுதிப்பின்னங்களாக்குதல் மூலம் கூட்டுத்தொகை காணல்

உதாரணம் 13

பகுதிப்பின்னங்களாக்குவதன் மூலம் பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ (ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)}$

(iii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$

(iv) $\dfrac{8}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{10}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{12}{3\cdot4\cdot5}+---$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்கள்.

(i) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)} = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r+1}$

$$= \frac{A(r+1)+Br}{r(r+1)}$$

$$= \frac{(A+B)r + A}{r(r+1)}$$

$A+B=0, \qquad A=1$

ஆகவே $A=1, \quad B=-1$

$$\boxed{U_r = \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}}$$

$$\boxed{U_r = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}}$$

$$U_1 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$U_2 = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$U_3 = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$U_{n-1} = \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}$$

$$U_n = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(ii) $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)} = \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r+2}$

$$= \frac{A(r+2) + Br}{r(r+2)}$$

$$= \frac{(A+B)r + 2A}{r(r+2)}$$

$A + B = 0; \qquad 2A = 1$ ஆகவே $A = \dfrac{1}{2}, \qquad B = -\dfrac{1}{2}$

$$U_r = \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2(r+2)}$$

$$U_1 \quad = \quad \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{6}}$$

$$U_2 \quad = \quad \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{8}}$$

$$U_3 \quad = \quad \cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{10}$$

$$U_4 \quad = \quad \cancel{\frac{1}{8}} - \frac{1}{12}$$

$$U_{n-2} \quad = \quad \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}$$

$$U_{n-1} \quad = \quad \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$U_n \quad = \quad \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

(iii) $U_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$

$$= \frac{A}{(2r-1)} + \frac{B}{2r+1} + \frac{C}{2r+3}$$

$$= \frac{A(2r+1)(2r+3) + B(2r-1)(2r+3) + C(2r-1)(2r+1)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$$

$$1 = A(2r+1)(2r+3) + (2r-1)(2r+3) + C(2r-1)(2r+1)$$

$$r = \frac{1}{2}, \qquad 1 = A \times 2 \times 4, \qquad 1 = 8A, \qquad A = \frac{1}{8}$$

$$r = -\frac{1}{2}, \qquad 1 = B \times (-2)(2) \qquad 1 = -4B, \qquad B = -\frac{1}{4}$$

$$r = -\frac{3}{2}, \qquad 1 = C \times (-4)(-2) \qquad 1 = 8C, \qquad C = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{\boldsymbol{U_r = \frac{1}{8(2r-1)} - \frac{1}{4(2r+1)} + \frac{1}{8(2r+3)}}}$$

$$U_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{40}$$

$$U_2 = \frac{1}{24} - \frac{1}{20} + \frac{1}{56}$$

$$U_3 = \frac{1}{40} - \frac{1}{28} + \frac{1}{72}$$

$$U_4 = \frac{1}{56} - \frac{1}{36} + \frac{1}{88}$$

$$U_{n-2} = \frac{1}{8(2n-5)} - \frac{1}{4(2n-3)} + \frac{1}{8(2n-1)}$$

$$U_{n-1} = \frac{1}{8(2n-3)} - \frac{1}{4(2n-1)} + \frac{1}{8(2n+1)}$$

$$U_n \cong \frac{1}{8(2n-1)} - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8(2n+1)} - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

$$= \frac{3+1-2}{24} + \frac{1}{8(2n+1)} - \frac{2}{8(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{8(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

(iv) $\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{10}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{12}{3\cdot 4\cdot 5}$

தொகுதி 8, 10, 12 என கூட்டல் விருத்தியில் அமைவதால்,

r ஆம் உறுப்பு $8 + (r-1) \times 2 = 2r + 6$

எனவே தொடரின் r ம் உறுப்பு $U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)}$ ஆகும்.

$$U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+2}$$

$$= \frac{A(r+1)(r+2) + Br(r+2) + Cr(r+1)}{r(r+1)(r+2)}$$

$$2r + 6 = A(r+1)(r+2) + Br(r+2) + Cr(r+1)$$

$r = 0,\quad 6 = 2A,\quad A = 3$

$r = -1,\quad 4 = B \times (-1) \times 1,\quad B = -4$

$r = -2,\quad 2 = C \times (-2) \times (-1),\quad C = 1$

$$U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)} = \frac{3}{r} - \frac{4}{r+1} + \frac{1}{r+2}$$

$$\boxed{U_r = \frac{3}{r} - \frac{4}{r+1} + \frac{1}{r+2}}$$

$r = 1, \qquad U_1 = \frac{3}{1} - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}$

$r = 2, \qquad U_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}$

$r = 3, \qquad U_3 = \frac{3}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5}$

$r = 4, \qquad U_4 = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$

$r = n-2, \qquad U_{n-2} = \frac{3}{n-2} - \frac{4}{n-1} + \frac{1}{n}$

$r = n-1, \qquad U_{n-1} = \frac{3}{n-1} - \frac{4}{n} + \frac{1}{n+1}$

$r = n, \qquad U_n = \frac{3}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = 3 - 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{4}{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

வித்தியாசமுறை *(Difference Method)* மூலம் கூட்டுத் தொகை காணல்

உதாரணம் 14

$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + ---$ எனும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக.

எல்லா நேர்நிறையெண் r இற்கும் $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$U_r \quad = r(r+1)$ ஆகும்.

$f(r) \ = \lambda r\,(r+1)(r+2)$ எனக.

$$\begin{aligned}
U_r &= f(r) - f(r-1) \\
&= \lambda r(r+1)(r+2) - \lambda(r-1)\,r\,(r+1) \\
&= \lambda r\,(r+1)\left[(r+2)-(r-1)\right] \\
&= 3\lambda r\,(r+1)
\end{aligned}$$

$U_r = r(r+1)$ என்பதால் $3\lambda = 1, \quad \lambda = \dfrac{1}{3}$

$$\boxed{\boldsymbol{U_r = f(r) - f(r-1)}}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= f(1) - f(0) \\
U_2 &= f(2) - f(1) \\
U_3 &= f(3) - f(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{n-1} &= f(n-1) - f(n-2) \\
\underline{U_n} \ &\underline{= f(n) - f(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0)$$

$$= f(n) - 0 = f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

உதாரணம் 15

$1\cdot 4\cdot 7 + 4\cdot 7\cdot 10 + 7\cdot 11\cdot 14 + ---$ எனும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக. $U_r = g(r) - g(r-1)$ ஆகுமாறு $g(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$1\cdot 4\cdot 7 + 4\cdot 7\cdot 10 + 7\cdot 11\cdot 14 + ---$

$$U_r = (3r-2)(3r+1)(3r+4)$$

$$g(r) = \lambda\,(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)$$

$$\begin{aligned} U_r &= g(r) - g(r-1) \\ &= \lambda(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7) - \lambda\,(3r-5)(3r-2)(3r-1)(3r+4) \\ &= \lambda(3r-2)(3r+1)(3r+4)\left[(3r+7)-(3r-5)\right] \\ &= 12\lambda \cdot Ur \end{aligned}$$

எனவே $\lambda = \frac{1}{12}$

ஆகவே $g(r) = \frac{1}{12}\left[3(r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)\right]$

$$\boxed{U_r = g(r) - g(r-1)}$$

$$U_1 = g(1) - g(0)$$
$$U_2 = g(2) - g(1)$$

$$U_3 = g(3) - g(2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$U_{n-1} = g(n-1) - g(n-2)$$

$$\underline{\underline{U_n = g(n) - g(n-1)}}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(n) - g(0)$$

$$= \frac{1}{12}\left[(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7) + 56\right]$$

உதாரணம் 16

$U_r = \dfrac{1}{r(r-1)(r+2)}$ எனின். $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு $f(r)$

ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$f(r) = \dfrac{\lambda}{r(r+1)}$ என்க. $\qquad f(r+1) = \dfrac{\lambda}{(r+1)(r+2)}$

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{\lambda}{r(r+1)} - \frac{\lambda}{(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{\lambda\left[(r+2) - r\right]}{r(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{2\lambda}{r(r+1)(r+2)}$$

$$= 2\lambda \cdot U_r$$

எனவே $\lambda = \frac{1}{2}$, ஆகவே $f(r) = \frac{1}{2r(r+1)}$

$$\boxed{U_r = f(r) - f(r+1)}$$

$$U_1 = f(1) - f(2)$$
$$U_2 = f(2) - f(3)$$
$$U_3 = f(3) - f(4)$$
$$-----------$$
$$-----------$$
$$U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$
$$U_n = f(n) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

உதாரணம் 17

$U_r = \frac{1}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)}$ எனின், $U_r = g(r) - g(r+1)$

ஆகுமாறு $g(r)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$g(r) = \frac{\lambda}{(3r-2)(3r+1)}$ என்க.

$$g(r+1)=\frac{\lambda}{(3r+1)(3r+4)}$$

$$U_r = g(r)-g(r+1)$$

$$=\frac{\lambda}{(3r-2)(3r+1)}-\frac{\lambda}{(3r+1)(3r+4)}$$

$$=\frac{\lambda\left[(3r+4)-(3r-2)\right]}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)}$$

$$=\frac{6\lambda}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)}$$

$$U_r = 6\lambda \cdot U_r$$

ஆகவே $\lambda=\dfrac{1}{6}$

$$\boxed{U_r = g(r)-g(r+1)}$$

$$U_1 = g(1)-g(2)$$
$$U_2 = g(2)-g(3)$$
$$U_3 = g(3)-g(4)$$

$$U_{n-1} = g(n-1)-g(n)$$
$$\underline{U_n = g(n)-g(n+1)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = g(1)-g(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

உதாரணம் 18

$$U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)}$$ எனின்,

$U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$$f(r) = \frac{Ar+B}{r(r+1)}$$ என்க.

$$f(r+1) = \frac{A(r+1)+B}{(r+1)(r+2)}$$ ஆகும்.

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)} = \frac{Ar+B}{r(r+1)} - \frac{Ar+(A+B)}{(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{(Ar+B)(r+2) - r[Ar+(A+B)]}{r(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{Ar+2B}{r(r+1)(r+2)}$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த A = 2, B = 3

$$\boxed{U_r = f(r) - f(r+1)}$$

$$U_1 = f(1) - f(2)$$
$$U_2 = f(2) - f(3)$$
$$U_3 = f(3) - f(4)$$

$$U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$

$$\underline{U_n = f(n) - f(n+1)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)}$$

உதாரணம் 19

$U_r = \dfrac{1}{r(r+2)}$ எனின், $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு

$f(r)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$$U_r = \frac{1}{r(r+2)} = \frac{r+1}{r(r+1)(r+2)}$$

$f(r) = \dfrac{Ar+B}{r(r+1)}$ என்க.

$f(r+1) = \dfrac{A(r+1)+B}{(r+1)(r+2)}$ ஆகும்.

$$U_r = f(r) - f(r+1)$$

$$\frac{r+1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{Ar+B}{r(r+1)} - \frac{A(r+1)+B}{(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{(Ar+B)(r+2) - r[A(r+1)+B]}{r(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{Ar+2B}{r(r+1)(r+2)}$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த A = 1, 2B = 1

$$\boxed{U_r = f(r) - f(r+1)}$$

$$U_1 = f(1) - f(2)$$
$$U_2 = f(2) - f(3)$$
$$U_3 = f(3) - f(4)$$
$$\text{-----------}$$
$$\text{-----------}$$
$$U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$$
$$U_n = f(n) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$

$$= \frac{A+B}{2} - \frac{A(n+1)+B}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

கணிதத் தொகுத்தறிமுறை *(Mathematical Induction)*

எல்லா நேர் நிறையெண்களுக்கும் உண்மையான முடிவுகளை நிறுவுவதற்கு கணிதத் தொகுத்தறிமுறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. நிறுவலின்போது பின்வரும் படிமுறைகள் பின்பற்றப்படும்.

1. $n = 1$ இற்கு முடிபு உண்மை எனக் காட்டுக.

2. $n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை எனக் கொள்க $(p \geq 1)$.

3. $n = p + 1$ இற்கு முடிபு உண்மை எனக் காட்டுக.

உதாரணம் 20

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ என நிறுவுக.

$n = 1$ ஆக. இ. கை. ப $= 1^2 = 1$

வ. கை. ப $= \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$

இ. கை. ப = வ. கை. ப

ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$n = p + 1$ ஆக,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots\dots + p^2 + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(p+1)}{6}\left[p(2p+1)+6(p+1)\right]$$

$$= \frac{(p+1)}{6}\left[2p^2+7p+6\right]$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)\left[(p+1)+1\right]\left[2(p+1)+1\right]}{6}$$

ஆகவே $n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

$$1^2+2^2+3^2+ \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 21

$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

$n=1$ ஆக இ. கை. ப $= \sum_{r=1}^{1} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

$n=1$ ஆக வ. கை. ப $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

இ. கை. ப = வ. கை. ப

ஆகவே $n=1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r(r+1)} = 1 - \frac{1}{p+1}$$

$$\sum_{r=1}^{p+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= 1 \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{p+2}$$

$n = p + 1$ ஆக முடிபு உண்மை

எனவே கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும்

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 22

n ஒரு நேர் நிறைவெண்ணாக இருக்க.

$$n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2)\,3 + \ldots\ldots\ldots + 2(n-1) + 1 \cdot n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

எனக் கணிதத் தொகுத்தறியால் நிறுவுக.

$n = 1$ ஆக, இ. கை. ப $= 1 \cdot 1 = 1$

வ. கை. ப $= \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$

ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$S_p = p \cdot 1 + (p-1)2 + (p-2)\,3 + \ldots + 2(p-1) + 1 \cdot p$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{6}$$

$$S_{p+1} = (p+1) \cdot 1 + p \cdot 2 + (p-1)3 + \ldots + 3(p-1) + 2 \cdot p + 1 \cdot (p+1)$$

இப்பொழுது,

$$S_{p+1} - S_p = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 + \cdots + (p-1)\cdot 1 + p\cdot 1 + (p+1)\cdot 1$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1)$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

$$S_{p+1} = S_p + \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{6} + \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{6}\left[p+3\right]$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}$$

ஆகவே $n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையால், எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்.

$$p\cdot 1 + (p-1)\cdot 2 + (p-2)\cdot 3 + \cdots + 2(p-1) + 1\cdot p = \frac{p(p+1)(p+2)}{6}$$

ஆகும்.

உதாரணம் 23

யாதேனும் ஒரு நேர்நிறையெண் n இற்கு

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}$$

எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் காட்டுக.

தரப்பட்ட தொடரைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\sum_{r=1}^{2n} (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{r} = \sum_{r=n+1}^{2n} \frac{1}{r}$$

$n = 1$ ஆக, இ. கை. ப $= \sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n = 1$ ஆக, வ. கை. ப $= \sum_{r=2}^{2} \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$

ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$\sum_{r=1}^{2p} (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{r} = \sum_{r=p+1}^{2p} \frac{1}{r}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2p}$$

$n = p + 1$ ஆக,

$$\sum_{r=1}^{2(p+1)} (-1)^{r+1} \cdot \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$$

$$= \sum_{r=p+1}^{2p} \frac{1}{r} - \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$$

$$= \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2p} \right) - \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$$

$$= \left(\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2p} \right) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \right)$$

$$= \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots\dots\dots + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}$$

$$= \sum_{p+2}^{2(p+1)} \frac{1}{r}$$

ஆகவே $n = p + 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும்

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 24

n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, கணிதத் தொகுத்தறி முறையால், $3^{2n+2} - 8n - 9$, 64 ஆல் (மீதியின்றி) வகுபடும் எனக் காட்டுக.

$f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ என்க.

$f(1) = 3^4 - 8 - 9 = 64$

64, $f(1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

எனவே 64, $f(p) = 3^{2p+2} - 8p - 9$ ஐப் பிரிக்கும்.

$$\begin{aligned} f(p+1) &= 3^{2p+2} - 8(p+1) - 9 \\ &= 3^2 \,.\, 3^{2p} - 8p - 17 \\ &= 3^2\left[3^{2p} - 8p - 9\right] + 64p + 81 - 17 \\ &= 9\left[3^{2p} - 8p - 9\right] + 64p + 64 \\ &= 9f(p) + 64(p+1) \end{aligned}$$

எனவே 64, $f(p+1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் 64, $3^{2n+2} - 8n - 9$ ஐப் பிரிக்கும்.

உதாரணம் 25

n ஓர் இரட்டையெண்ணாக இருக்க $x^n - y^n$ என்பது $x + y$ ஆல் வகுபடும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால் நிறுவுக.

n இரட்டை எண் $n = 2k\ (k = 1, 2, 3, 4, ...)$

$k = 1$ ஆக. $x^n - y^n = x^2 - y^2$

$(x + y)$, $(x^2 - y^2)$ ஐப் பிரிக்கும்.

ஆகவே $k = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$k = p$ ஆக முடிபு உண்மை என்க.

$x + y$, $x^{2p} - y^{2p}$ ஐப் பிரிக்கும்.

$k = p + 1$ ஆக,

$$x^{2(p+1)} - y^{2(p+1)} = x^{2p+2} - y^{2p+2}$$

$$= x^{2p+2} - x^{2p} \cdot y^2 + x^{2p}\, y^2 - y^{2p+2}$$

$$= x^{2p}\left(x^2 - y^2\right) + y^2\left(x^{2p} - y^{2p}\right)$$

$(x + y)$, $(x^2 - y^2)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$(x + y)$, $(x^{2p} - y^{2p})$ ஐப் பிரிக்கும். ($n = p$ ஆக முடிபு உண்மை என்பதால்)

ஆகவே $(x + y)$, $x^{2p+2} - y^{2p+2}$ ஐப் பிரிக்கும்.

$k = p + 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

எனவே எல்லா நேர் நிறையெண் k இற்கும் (எல்லா இரட்டை எண்கள் n இற்கும்) $(x + y)$, $x^n - y^n$ ஐப் பிரிக்கும்.

உதாரணம் 26

கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு நேர் நிறையெண் n இற்கும் $n^7 - n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

$$F(n) = n^7 - n$$

$F(1) = 1^7 - 1 = 1 - 1 = 0$

7, பூச்சியத்தைப் $(F(1))$ பிரிக்கும்.

$n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

7, $F(p) = p^7 - p$ ஐப் பிரிக்கும்.

$F(p+1) \quad = (p+1)^7 - (p+1)$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} F(p+1) - F(p) &= \left[(p+1)^7 - (p+1)\right] - \left[p^7 - p\right] \\ &= (p+1)^7 - p^7 - 1 \\ &= \left[p^7 + 7C_1 p^6 + 7C_2 p^5 + 7C_3 p^4 + 7C_4 p^3 \right. \\ &\qquad \left. + 7C_5 p^2 + 7C_6 p + 1\right] - \left[p^7 - 1\right] \\ &= 7C_1 p^6 + 7C_2 p^5 + 7C_3 p^4 \\ &\qquad + 7C_4 p^3 + 7C_5 p^2 + 7C_5 p^2 + 7C_6 p \\ &= 7k \quad (k \text{ - நேர் நிறையெண்}) \end{aligned}$$

எனவே $F(p+1) - F(p) = 7k$ என்பது 7 ஆல் வகுபடும்.

$F(p+1) = F(p) + 7k$, 7 ஆல் வகுபடும்.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் 7, $n^7 - n$ ஐப் பிரிக்கும்.

(குறிப்பு $7C_1, 7C_2, 7C_3, ...7C_6$ எல்லாம் 7 இன் மடங்குகள்)

உதாரணம் 27

கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்பது 54 இன் மடங்காகும் என நிறுவுக.

$F(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

$$F(1) = 2^3 - 9 \times 1^2 + 3 \times 1 - 2$$
$$= 8 - 9 + 3 - 2 = 0$$

54, 0 ஐப் பிரிக்கும்.

$n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

54, $F(p) = 2^{2p+1} - 9p^2 + 3p - 2$ ஐப் பிரிக்கும்.

$$F(p+1) = 2^{2p+3} - 9(p+1)^2 + 3(p+1) - 2$$
$$= 2^2 \cdot 2^{2p+1} - 9(p^2 + 2p + 1) + 3p + 3 - 2$$
$$= 4 \cdot 2^{2p+1} - 9p^2 - 15p - 8$$
$$= 4\left[2^{2p+1} - 9p^2 + 3p - 2\right] + 27p^2 - 27p$$
$$= 4F(p) + 27p(p-1)$$

[$p(p-1)$ இல் $p = 1$ எனின் $p(p-1) = 0$

$p > 1$ எனின் p இரட்டை எண் எனின் 2, $p(p-1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

p ஒற்றை எனின் $p-1$ இரட்டை. 2, $p(p-1)$ ஐப் பிரிக்கும்.]

$F(p+1) = 4F(p) + 27 \times 2k = 4F(p) + 54k$

54, $F(p)$ ஐப் பிரிக்கும், 54, $54k$ ஐப் பிரிக்கும்.

எனவே 54, $F(p+1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் 54, $F(n)$ ஐப் பிரிக்கும்.

உதாரணம் 28

n ஒரு நேர்நிறையெண் எனின் கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $2^{2n+2} + 3^{2n}$ ஆனது, 120 ஆல் வகுபடும்போது மீதி 25 ஆகுமெனக் காட்டுக.

$$F(n) = 2^{2n+2} + 3^{2n}$$

$$F(1) = 2^4 + 3^2 = 25 = 0 \times 120 + 25$$

ஈவு 0, மீதி 25 ஆகும். ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$F(p) = 2^{2p+2} + 3^{2p}$ ஐ 120 ஆல் பிரிக்க மீதி 25 ஆகும்.

$$F(p) = 120k + 25$$

$$F(p+1) = 2^{2p+4} + 3^{2p+2}$$

$$= 4 \cdot 2^{2p+2} + 9 \cdot 3^{2p}$$

$$= \left(2^{2p+2} + 3^{2p}\right) + \left(3 \cdot 2^{2p+2} + 8 \cdot 3^{2p}\right)$$

$$= F(p) + 3 \times 2^3 \times 2^{2p-1} + 8 \times 3 \times 3^{2p-1}$$

$$= F(p) + 24\left(2^{2p-1} + 3^{2p-1}\right)$$

[$2 + 3$, என்பது $2^{2p-1} + 3^{2p-1}$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

$5, 2^{2p-1} + 3^{2p-1}$ இன் ஒரு காரணி]

$$F(p+1) = 120k + 25 + 120 \times \left(2^{2p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3^{2p-2}\right)$$

$F(p+1)$ ஐ 120 ஆல் பிரிக்க மீதி 25 ஆகும்.

$n = p + 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும். $F(n)$ ஐ 120 ஆல் பிரிக்க மீதி 25 ஆகும்.

உதாரணம் 29

அடுத்து வரும் மூன்று நேர்நிறை எண்களின் பெருக்கம் 6 ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

முறை I

அடுத்துவரும் 3 நேர்நிறையெண்களின் பெருக்கம் $P(n) = n(n+1)(n+2)$ என்க.

$n=1$ ஆக, $P(1)=1\times 2\times 3=6$

$6,\ P(1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

ஆகவே $n=1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n=p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$P(p)=p(p+1)(p+2)$ ஆகும். $6,\ P(p)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$$\begin{aligned} P(p+1) &= (p+1)(p+2)(p+3) \\ &= p(p+1)(p+2)+3(p+1)(p+2) \\ &= P(p)+3(p+1)(p+2) \end{aligned}$$

[$(p+1),\ (p+2)$ என்பன அடுத்து வரும் எண்கள். எனவே இவற்றுள் ஒன்று இரட்டை எண்]

$6,\ 3(p+1)(p+2)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$6,\ P(p+1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$n=p+1$ ஆக முடிபு உண்மை.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும் $6,\ n(n+1)(n+2)$ ஐப் பிரிக்கும்.

முறை II

அடுத்து வரும் மூன்று நேர் நிறையெண்களின் பெருக்கம் $n(n+1)(n+2)$ என்க.

$n(n+1)(n+2)$ [$n\geq 1$ ஆகும்.]

$n=3k$ அல்லது $3k+1$, அல்லது $3k+2$ ஆகும். $(k=0,\ 1,\ 2,---)$

(i) $n=3k$ எனின்,

$$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)$$

$3k$, 3 ஆல் பிரிபடக் கூடியது.

$3k,\ 3k+1,\ 3k+2$ என்பவற்றுள் ஒன்றாவது இரட்டை எண்.

எனவே $n(n+1)(n+2)$, 6 ஆல் வகுபடும்.

(ii) $n = 3k + 1$ எனின்,

$$n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$$

$(3k+3)$, 3 ஆல் பிரிபடக் கூடியது.

$(3k+1)(3k+2)(3k+3)$ இவற்றுள் ஒன்றாவது இரட்டை எண்.

எனவே $n(n+1)(n+2)$, 6 ஆல் வகுபடும்.

(iii) $n = 3k + 2$ எனின்,

$$n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$$

$(3k+3)$, 3 ஆல் வகுபடக் கூடியது.

$(3k+2)$, $(3k+3)$, $(3k+4)$ இவற்றுள் ஒன்றாவது இரட்டை எண்.

எனவே $n(n+1)(n+2)$ 6 ஆல் வகுபடும்.

ஆகவே $n(n+1)(n+2)$, 6 ஆல் வகுபடும்.

உதாரணம் 30

அடுத்து வரும் நான்கு நிறையெண்களின் பெருக்கம் 24 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

அடுத்துவரும் நான்கு நிறையெண்களின் பெருக்கம் $n(n+1)(n+2)(n+3)$ என்க.

$P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$ என்க.

$P(1) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

24, $P(1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

24, $p(p) = p(p+1)(p+2)(p+3)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$$\begin{aligned} P(p+1) &= (p+1)(p+2)(p+3)(p+4) \\ &= P(p+1)(p+2)(p+3) + 4(p+1)(p+2)(p+3) \\ &= P(p) + 4(p+1)(p+2)(p+3) \end{aligned}$$

அடுத்துவரும் மூன்று நிறையெண்களின் பெருக்கம் 6 ஆல் வகுபடும். எனவே $4(p+1)(p+2)(p+3)$, 24 ஆல் வகுபடும்.

எனவே 24, $P(p+1)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும் 24, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ஐப் பிரிக்கும்.

உதாரணம் 31

p இரட்டை எண் எனின் மட்டுமே p^2 இரட்டை எண் ஆகும் என நிறுவுக.

p இரட்டை எண் $\Leftrightarrow p^2$ இரட்டை எண்

p இரட்டை எண் என்க.

$p = 2k \ (k = 1, 2, 3, ...)$

$p^2 = (2k)^2 = 2(2k)^2 = 2m$ (m நிறையெண்)

ஆகவே p^2 இரட்டை எண் ஆகும்.

p இரட்டை எண் $\Rightarrow p^2$ இரட்டை எண் ———————— **(A)**

மறுதலையாக p^2 இரட்டை எண் என்க.

p இரட்டை எண் அல்ல என்க. எனவே p ஒற்றை எண்

$p = 2k-1$ என எழுதலாம். $(k = 1, 2, 3, ...)$

$p^2 = 4k^2 - 4k + 1$

$= 2(2k^2 - 2k) + 1$

$= 2n + 1$ (n - நிறையெண்)

$2n+1$ ஒற்றையெண்

ஆகவே p^2 ஒற்றையெண்

இது தரவிற்கு முரணானது.

எனவே p இரட்டையெண் அல்ல என எடுத்த எடுகோள் பிழையானது.

ஆகவே p இரட்டை எண் ஆகும்.

p^2 இரட்டை எண் $\Rightarrow p$ இரட்டை எண். ———————— (B)

(A), (B) இலிருந்து

p இரட்டை எண் $\Leftrightarrow p^2$ இரட்டைஎண்.

உதாரணம் 32

$\sqrt{2}$ - விகிதமுறா எண் என நிறுவுக.

$\sqrt{2}$ - விகிதமுறு எண் என்க.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathrm{Z}, \quad b \neq 0; \quad (a,\ b) = 1$$

[a, b இன் பொதுக்காரணி 1 மட்டுமேயாகும்.]

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ இரட்டை எண்

$\Rightarrow a$, இரட்டை எண்

$\Rightarrow a = 2k \ (k \in \mathrm{Z})$

$\Rightarrow a^2 = 4k^2$

$\Rightarrow b^2 = 2k^2$

$\Rightarrow b^2$ இரட்டை எண்

$\Rightarrow b$ இரட்டை எண்

$\Rightarrow b = 2m \ (m \in \mathrm{Z})$

எனவே a, b இற்கு 2 ஒரு பொதுக்காரணி
இது ஒரு எதிர்மறுப்பு

எனவே $\sqrt{2}$ ஐ $\frac{a}{b}$ எனும் வடிவில் எழுதமுடியாது.

$\sqrt{2}$ விகிதமுறா எண் ஆகும்.

உதாரணம் 33

a, b என்பன $a < b$ ஆகவுள்ள எவையேனும் இரு மெய்யெண்கள் என்க. $a < \dfrac{a-b}{2} < b$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $x > \dfrac{1}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும். மிகச்சிறிய மெய்யெண் இல்லை எனக் காட்டுக.

a, b மெய்யெண்கள் $a < b$ ஆகும்.

$a < b$ எனின் $a - b < 0$ ஆகும்.

$$a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(a-b) < 0$$

ஆகவே $a < \dfrac{a+b}{2}$ ———————— (1)

$$\frac{a+b}{2} - b = \frac{1}{2}(a-b) < 0$$

ஆகவே $\dfrac{a+b}{2} < b$ ———————— (2)

(1), (2) இலிருந்து $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ ஆகும்.

$x > \dfrac{1}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் மிகச்சிறிய (x இன்) பெறுமானம் a என்க.

இப்பொழுது $a > \dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

அதாவது $\dfrac{1}{2}$ இலும் பெரிதான மிகச்சிறிய மெய்யெண் a ஆகும்.

முதற்பகுதியிலிருந்து.

$$\frac{1}{2} < a \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + a\right) < a$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a < a$$

$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a\right)$ என்னும் எண் $\frac{1}{2}$ இலும் பெரியது. ஆனால் a இலும் சிறியது.

இது $\frac{1}{2}$ இலும் பெரிதான மிகச்சிறிய மெய்யெண் a என்பதற்கு முரணானது. இது ஓர் எதிர்மறுப்பு ஆகும்.

எனவே $x > \frac{1}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் மிகச்சிறிய மெய்யெண் இல்லை

தொடர் ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனை

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடர் எனின் $n \to \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow 0$ ஆகும் என நிறுவுக.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r, \quad S_m = \sum_{r=1}^{m} U_r \quad \text{என்க.}$$

தொடர் ஒருங்கு தொடராவதால்,

$n \longrightarrow \infty$ ஆக $S_n \longrightarrow \ell$ (முடிவுள்ள பெறுமானம்) ஆகும்.

$m \longrightarrow \infty$ ஆக $S_m \longrightarrow \ell$ ஆகும்.

$m = n - 1$ என்க.

$$\left[S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n\right]$$
$$\left[S_{n-1} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_{n-1}\right]$$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $S_n - S_{n-1} \longrightarrow 0$ ஆகும்.

ஆகவே $n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow 0$ ஆகும் $\left[S_n - S_{n-1} = U_n\right]$.

குறிப்பு $n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow 0$ எனின்,

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடராக இருக்கும் என நிச்சயமாகக் கூறமுடியாது. மேலே நிறுவிய முடிவின் மறுதலை எப்போதும் உண்மையல்ல.

$$\boxed{n \longrightarrow \infty \text{ ஆக } U_n \longrightarrow 0 \;\not\Longrightarrow\; \sum U_n \text{ ஒருங்கு தொடர்}}$$

இதனைப் பின்வரும் உதாரணம் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

$\sum \frac{1}{n}$ என்ற தொடரைக் கருதுக.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{16}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{17} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{32}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$n = 2^p$ ஆக,

முதலாம் உறுப்பு $= 1$

இரண்டாம் உறுப்பு $= \frac{1}{2}$

மூன்றாம் உறுப்பு $= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{2}$

நான்காம் உறுப்பு $= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \frac{1}{2}$

ஐந்தாம் உறுப்பு $= \left(\frac{1}{9} + ------- \frac{1}{16}\right) > \frac{1}{2}$

எனவே $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ----- + \frac{1}{2}}_{p \text{ தடவைகள்}} = 1 + \frac{p}{2}$

மேலே உள்ள தொடரில் இரண்டாம் உறுப்பிலிருந்து தொடங்கி ஒவ்வொரு உறுப்பும் $\frac{1}{2}$ இற்குச் சமம். இது ஒரு பெருக்கல் தொடர். பொது விகிதம் 1 ஆகும்.

எனவே இத்தொடர் விரிதொடர்.

எனவே $\sum \frac{1}{n}$ விரிதொடர் ஆகும்.

குறிப்பு :

$$\boxed{p \Rightarrow q \text{ எனின் } \sim q \Longrightarrow \sim p \text{ ஆகும்}}$$

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடராகும் $\Rightarrow n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடராகும், என்பது p என்க.

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow 0$ ஆகும், என்பது q என்க.

இப்பொழுது $p \Rightarrow q$

$\sim q$ என்பது, $n \longrightarrow \infty$ ஆக $U_n \not\longrightarrow 0$

$\sim p$ என்பது, $\sum U_n$ ஒருங்கு தொடரல்ல.

எனவே $\boxed{n \to \infty \text{ ஆக}, U_n \longrightarrow 0 \not\Longrightarrow \sum U_n \text{ ஒருங்கு தொடரல்ல}}$

இம் முடிபினைப் பின்வருமாறும் நிறுவலாம்.

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \not\longrightarrow 0$ (தரவு)

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடர் என்க.

$\sum U_n$ ஒருங்குவதால் $n \not\longrightarrow \infty$ ஆக $U_n \longrightarrow 0$ ஆகும்.

இது தரவிற்கு முரணானது. எதிர்மறுப்பாகும்

எனவே $\sum U_n$ ஒருங்காது.

உதாரணம் 34

பின்வரும் தொடர்கள் விரிதொடர்கள் என நிறுவுக.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} 1+\frac{1}{n^2}$

(i) $U_n = n(n+1)$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow \infty$ ஆகும்.

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \not\longrightarrow 0$

ஆகவே $\sum n(n+1)$ ஒருங்காது. விரிதொடர் ஆகும்.

(ii) $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \longrightarrow 1$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $U_n \not\longrightarrow 0$ ஆகும்.

எனவே $\sum_{n=1}^{\infty} 1+\frac{1}{n^2}$ ஒருங்காது. விரிதொடராகும்.

பயிற்சி 6

1. கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் முதல் m உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 21. முதல் $2m$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 78. பொது வித்தியாசம் 4 எனின், முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

2. நேரெண்களைக் கொண்ட கூட்டல் விருத்தி ஒன்றின் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 21. அவ்வுறுப்புக்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 165 எனின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

3. கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R ஆகும். $p(Q-R)+q(R-P)+r(P-Q)=0$ எனக் காட்டுக.

4. எல்லா நேர் நிறைஎண் n இற்கும், இரு கூட்டல் தொடர்களின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைகளின் விகிதம் $13-7n:3n+1$ ஆகும். இத் தொடர்களின் முதலாம் உறுப்புக்களின் விகிதம் $3:2$ எனவும், இரண்டாம் உறுப்புக்களின் விகிதம் $-4:5$ எனவும் காட்டுக.

5. $U_1+U_2+U_3+U_4+\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots$ என்னும் கூட்டல் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஆகும். $U_m=4,\quad U_{4m}=24$ $S_{4m}=44S_m$ எனின் U_1 இனதும் m இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும், பொதுவிகிதம் r ஆகவும் உடைய பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை S_n குறிக்கின்றது. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\left(S_{2n}-S_n\right)^2$

(ii) $r^{m-n}=\dfrac{S_{m+p}-S_m}{S_{n+p}-S_n}$

7. நேரான உறுப்புக்களைக் கொண்ட பெருக்கல்தொடர் ஒன்றின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R ஆகும்.
$(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0$ என நிறுவுக.

8. $1+\left(\frac{3x+2}{x+10}\right)+\left(\frac{3x+2}{x+10}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1+\left(\frac{3x-9}{x+1}\right)+\left(\frac{3x-9}{x+1}\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

என்ற பெருக்கல் தொடர்கள் இரண்டும் ஒருங்குவதற்கான x இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க.

S_1, S_2 என்பன முறையே இரு தொடர்களினதும் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாயின் $2S_1 = 13S_2$ ஆவதற்கு x இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானம் மட்டுமே உண்டெனக் காட்டுக.

9. (i) x இன் குறிப்பிட்ட வீச்சுக்களுக்கு

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{3x^2-9x-1}{2x+3}\right)^r = \frac{3+2x}{4+11x-3x^2}$$ என நிறுவி

இவ்வீச்சுகளைக் காண்க.

(ii) $r \neq 1$ எனின், $1+2r+3r^2+4r^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+nr^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ என்னும் முடிவிலித் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை

$$\frac{1-r^n}{(1-r)^2}-\frac{nr^n}{1-r}$$ என நிறுவுக.

$-1<r<1$ எனின் $n \longrightarrow \infty$ ஆக $nr^n \longrightarrow 0$ என எடுத்து $-1<r<1$ எனின் முடிவில் உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

10. (i) $\sum_{r=0}^{\infty}\left(x^2-2x-2\right)^r$ என்னும் தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இன் வீச்சுகளைக் காண்க.

(ii) $U_r = (2r-1)\,3^r$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

11. **(i)** $\sum_{r=1}^{n} r^2 \cdot 2^r$ ஐக் காண்க.

(ii) $x = \frac{1}{3}$ உம், $x = \frac{1}{2}$ உம் ஆகும்போது

$1 + \frac{2x}{ax+b} + \left(\frac{2x}{ax+b}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை முறையே 2 உம் 3 உம் ஆகும். a, b இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு தொடர் ஒருங்குவதற்கான x ன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

12. $U_r = a_r + b_r$, $V_r = a_r - b_r$ k ஒரு மாறிலி என்க.

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} a_r + \sum_{r=1}^{n} b_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} v_r = \sum_{r=1}^{n} a_r + \sum_{r=1}^{n} b_r, \quad \sum_{r=1}^{n} kU_r = k \cdot \sum_{r=1}^{n} U_r$$ என நிறுவுக.

$U_r = \frac{2^r - 1}{3^{r+1}}$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ என நிறுவுக.

13. $5 + 55 + 555 + 5555 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{5}{81}\left[10^{n+1} - 9n - 10\right]$ எனக் காட்டுக.

14. $1 + \frac{x}{a}(1+x) + \frac{x^2}{a^2}\left(1 + x + x^2\right) + \frac{x^3}{a^3}\left(1 + x + x^2 + x^3\right) + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் r ம் உறுப்பை எழுதிச் சுருக்குக. இதிலிருந்து இத் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

15. $1+(1+x)\sin\theta+\left(1+x+x^2\right)\sin^2\theta+\ldots\ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. $-1<x<1$ ஆகவும் $-1<\sin\theta<1$ ஆகவும் இருக்க தொடர் ஒருங்கும் என நிறுவி முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\dfrac{1}{(1-x\sin\theta)(1-\sin\theta)}$ என நிறுவுக.

16. $\sum_{r=1}^{n} r^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(2n)^2$

(b) $1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(2n-1)^2$

(c) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots\ldots\ldots\ldots-(2n)^2+(2n+1)^2$

(d) $\sum_{r=n}^{2n}\dfrac{r^2}{n^2}$ (e) $\sum_{r=1}^{51}(98+2r)^2$

(f) $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\ldots\ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை.

17. $\sum_{r=1}^{n} r^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\ldots\ldots+(-1)^{r+1}r^2+\ldots\ldots\ldots$

எனும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

(i) $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, n ஒற்றை எனின்

(ii) $-\dfrac{1}{2}n(n+1)$, n இரட்டை எனின் எனக்காட்டுக.

18. $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனக் காட்டுக.

$a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 + \ldots\ldots + (a+nd)^2$

$= \frac{1}{6}(n+1)\left[6a(a+nd) + d^2 n(2n+1)\right]$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து,

$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots\ldots + m^2 = \frac{m}{6}(m+1)(m+2)$ (m - இரட்டை எண்)

$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots + m^2 = \frac{m}{6}(m+1)(m+2)$ (m - ஒற்றை எண்)

எனக் காட்டுக.

19. (a) $f(r) = Ar^2 + Br$ எனின், $f(r) - f(r-1) = r$ ஆகுமாறு A, B ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r$ ஐக் காண்க.

(b) $g(r) = Ar^3 + Br^2 + Cr$ ஆகும். $g(r) - g(r-1) = r^2$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் A, B, C ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காண்க.

$1^2 + 4^2 + 7^2 + 10^2 + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$1\cdot1 + 2\cdot3 + 3\cdot5 + 4\cdot7 + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $1\cdot(2n-1) + 2(2n-3) + \ldots\ldots + n\left[2n - (2n-1)\right]$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

20. **(a)** $f(r) = Ar^4 + Br^3 + Cr^2 + Dr$ ஆகும்.

$f(r) - f(r-1) = r^3$ ஆகுமாறு A, B, C, D யின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r^3$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) முதல் n இரட்டை எண்களின் கனங்களை உய்த்தறிக.

(c) $1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-2)n(n+2)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(e) $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

21. பகுதிப் பின்னங்களாக்குவதன் மூலம் பின்வருவனவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. ஒவ்வொரு தொடர்களும் ஒருங்குமெனக் காட்டி, முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் S_n காண்க.

(i) $\frac{1}{4} - S_n < 10^{-4}$ ஆகுமாறு n இன் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை S ஐக் காண்க. இத் தொடரில் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும், S இற்கு மிடையேயான வித்தியாசம் 10^{-3} இலும் குறைவாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

(b) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இத் தொடர் ஒருங்கு தொடர் என நிறுவுக.

(c) $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து

$\sum_{r=1}^{n} \frac{r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

22. $f(r) = \frac{1}{r^2}$ எனின், $f(r) - f(r+1)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து

$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரென நிறுவி இதன் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

23. (a) $U_r = (3r-2)(3r-1)(3r+4)(3r+7)$ எனின்,

$f(r) - f(r-1) = U_r$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

(b) $V_r = \frac{1}{(3r-2)(3r-1)(3r+4)(3r+7)}$ எனின்,

$V_r = g(r) - g(r+1)$ ஆகுமாறு $g(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} V_r$ ஐக் காண்க. இத் தொடர் ஒருங்கு தொடர் என நிறுவி, இதன் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

24. (a) $f(r) = r!$ எனின், $f(r+1) - f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து என்னும் $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots\ldots\ldots\ldots$ தொடரின் முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(b) $g(r) = \frac{1}{r!}$ எனின், $g(r) - g(r+1)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!}$ ஐக் காண்க.

இத் தொடர் ஒருங்கு தொடர் என நிறுவி, அதன் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

25. (a) r ஆவது உறுப்பு முறையே (i) $\frac{1}{2r(2r+2)}$ (ii) $\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ ஆகவுள்ள தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இதிலிருந்து r ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{r(r+2)}$ ஆகவுள்ள தொடரின் முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை உய்த்தறிக.

(b) $f(r) = \cos 2r\theta$ எனின் $f(r) - f(r+1)$ ஐச் சுருக்குக.
இதிலிருந்து $\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \ldots\ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

26. (a) $f(r) = \log\left(1 + \frac{1}{r}\right)$ எனின்,

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$$ என நிறுவுக.

(b) முடிவிலி பெருக்கல் தொடர் ஒன்றை உபயோகித்து,

$0 \cdot 43\overline{2}\overline{1} = \frac{713}{1650}$ எனக் காட்டுக.

$\left[0 \cdot 43\overline{2}\overline{1} = 0 \cdot 43212121 \ldots\ldots\ldots\right]$

27. (a) $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ .... எனும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐக் காண்க. முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S எனின் $S-S_n<\frac{1}{10^3}$ ஆகுமாறு n இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $-1<r<1$ ஆகவும் $S_n=\sum_{p=1}^{n} r^p$ ஆகவும் இருப்பின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\lim_{n\to\infty} S_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot r^n$ (iii) $\sum_{q=1}^{n} S_q$

28. பின்வருனவற்றை கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

(i) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+ .... +n\cdot n!=(n+1)!-1$

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r\cdot 2^{r-1}=1+(n-1)\,2^n$

(iii) $\sum_{r=1}^{n} r^3=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

29. (a) கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $n^3+(n+1)^3 \quad (n+2)^3$ என்பது 9 ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

(b) தொடரி $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$a_1=4, \quad a_{n+1}=\frac{1}{8}\left(a_n^2+15\right), n=1, 2, 3,$ .... இற்கு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ இற்கு

$a_{n+1} < a_n$ என நிறுவுக.

30. (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்னும் தொடரி

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}, \; n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$$

இற்கு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் $a_n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1}$ என நிறுவுக.

(b) $\{b_r\}_{r=1}^{\alpha}$ எனும் தொடரி

$$b_r = \frac{2^r - 3^{r-1}}{4^r}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$ எனத் தரப்படுகிறது.

$\sum_{r=1}^{n} b_r$ ஐக் காண்க. $\sum_{r=1}^{\infty} b_r$ ஒருங்கு தொடரா எனத் தீர்மானிக்க.

31. (a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ எனும் தொடரி $a_1 = \dfrac{11}{27}, \; a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left[2a_n + \dfrac{1}{3}\right]$ என

வரையறுக்கப்படுகிறது. கணிதத் தொகுத்தறிமுறையினால்

$a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2^n}{3^{n+2}}$ என நிறுவுக.

$\sum_{r=1}^{n} a_r$ ஐக் காண்க. $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ ஒருங்குமா எனத் தீர்மானிக்க.

(b) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + r \cdot 2^{r-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்னும்

தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஆகும். கணிதத்

தொகுத்தறி முறையால் $S_n = (n-1)2^n + 1$ என நிறுவுக. $S_n > 100$ ஆக உள்ள n இன் மிகச் சிறிய பெறுமானம் யாது?

32. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க.

$U_1 = 2, \quad U_2 = 5, \quad 5U_{n+2} - 6U_{n+1} + U_n = 0$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $U_{n+1} - U_n = 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $U_n = \frac{23}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5^{n-2}}\right)$ எனக் காட்டுக.

33. (a) கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் n இற்கு

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

என நிறுவுக.

(b) முடிவில் தொடர் ஒன்றின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஆனது,

$\frac{1}{r^2 (r+2)(r+4)^2}$ ஆகும். $U_r = f(r) - f(r+2)$ ஆகுமாறு ஒரு சார்பு f ஐக் காண்க.

$$\sum_{r=1}^{n} [f(r) - f(r+2)] = [f(1) + f(2)] - [f(n+1) - f(n+2)]$$

எனக் காட்டுக.

தொடர் $\sum U_r$ ஒருங்குகிறதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

34. (a) n ஓர் ஒற்றை நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $x^n + y^n$, $x + y$ ஆல் வகுபடும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

(b) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க,

(i) $n^7 - n$, 7 ஆல் வகுபடும் எனவும்,

(ii) $n^{13} - n$ 13 ஆல் வகுபடும் எனவும் நிறுவுக.

(c) அடுத்து வரும் 4 நிறையெண்களின் பெருக்கமானது, நிறை வர்க்கத்திலும் ஒன்று குறைவானதெனக் காட்டுக.

35. (a) நேர் நிறையெண்கள் பின்வருமாறு அடைப்புக்குள் இடப்பட்டுள்ளன. $(1), (2, 3), (4, 5, 6), ...$ இங்கு r ஆவது அடைப்பினுள் r நிறையெண்கள் உள்ளன. r ஆவது அடைப்பினுள் உள்ள முதல் எண்ணிற்கும், கடைசி எண்ணிற்கும் கோவை ஒன்றைப் பெறுக.
முதல் 20 அடைப்பினுள் உள்ள எல்லா நிறையெண்களினதும் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.
r ஆவது அடைப்பினுள் உள்ள நிறையெண்களின் கூட்டுத்தொகை

$\frac{r}{2}\left(r^2+1\right)$ என நிறுவுக.

(b) $\frac{4}{3} + \frac{9}{8} + \frac{16}{15} + ... + \frac{n^2}{n^2-1}$ எனும் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

36. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **(ii)** $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ என்னும் தொடர்கள் x இன் குறிப்பிட்ட வீச்சுக்களுக்கு ஒருங்குகின்றன. அவ்வீச்சுக்களைக் குறிப்பிடுக. இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுத்தொகை முதலாவது தொடரின் கூட்டுத்தொகையின் இருமடங்கெனின் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) $n(n+1) = (n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $n \geq 3$ ஆகும் போது,

$$\frac{n(n+1)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ.

$$1\cdot2 + \frac{2\cdot3}{1!} + \frac{3\cdot4}{2!} + \frac{4\cdot5}{3!} + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{(n-1)!} + \ldots\ldots$$ என்னும் தொடரின் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

37. (i) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகவும் $f(n) = 3^{2n} + 7$ ஆகவும் இருப்பின் $f(n+1) - f(n)$ ஆனது 8 இனாற் செப்பமாகப் பிரிக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

(ii) $-1 < a < 1$ ஆக இருக்க, $n \longrightarrow \infty$ ஆகும்போது $na^n \longrightarrow 0$ ஆக இருப்பின், $n \longrightarrow \infty$ ஆகும் போது $a^n \longrightarrow 0$ ஆகும் என்பதை உய்த்தறிக.

$-1 < a < 1$ ஆகவும், $U_r = a^{r-1}$ ஆகவும் இருப்பின் $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்பதோடு இது ஒருங்கும் எனவும் காட்டுக. மேலும் $V_r = ra^{r-1}$ ஆக இருப்பின் $(1-a)\sum_{r=1}^{n} V_r = \sum_{r=1}^{n} U_r - na^n$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} V_r$ என்பது ஒருங்குமெனக் காட்டி, அதன் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

38. $Ur \equiv f(r+1) - f(r)$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n+1) - f(1)$ என நிறுவுக.

(i) பொருத்தமான λ விற்கு $f(r) = \frac{\lambda(4r+1)}{r(r+1)}$ என எடுத்து

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்குமென நிறுவி, முடிவிலி வரைக்குமான அதன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ii) பொருத்தமான μ விற்கு $f(r) = \mu(r-1)\, r(r+2)$ என எடுத்து

$\sum_{r=1}^{n} r(3r+5)$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்குவதில்லையென நிறுவுக.

(iii) $U_r = \cos\left[\theta + (r-1)\,\alpha\right]$ எனின் $2\sin\frac{\alpha}{2}\, U_r = f(r+1) - f(r)$

ஆக இருக்குமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து α ஆனது 2π

யின் ஒரு மடங்காக இராத போது $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

39. **(i)** $f(r) = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$ எனின், $f(r) - f(r-1) = r^2$ எனக் காட்டுக

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காண்க.

எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r(7r-1) = \sum_{r=n+1}^{2n} r(r+1)$ என நிறுவுக.

(ii) $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஆயின், கணிதத் தொகுத்தறிவைக் கொண்டு,

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து (அ) $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதையும்,

(ஆ) எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

$$\frac{1}{6} \le \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} < \frac{1}{4}$$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

40. $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனின், $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ என நிறுவுவதற்கு கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்துக.

$S_n' = \frac{1}{r(r+1)}$ எனின், $\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$ என எழுதுவதனால் S_n' ஐக் காண்க.

$p\,,\,q$ என்பன ஒருமைகளாக இருக்க.

$S_n'' = \sum_{r=1}^{n} \frac{pr+q}{r(r+1)(r+2)}$ எனின், $S_n'' = p\left[S_{n+1}' - \frac{1}{2}\right] + q \cdot S_n$

என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து $p\,,\,q$ என்பவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் மேலே குறிக்கப்பட்ட கடைசித் தொடரானது ஒருங்குமெனக் காட்டி, முடிவிலி வரைக்கு மான அதன் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

41. (i) $U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ எனின் $U_n - U_{n+1}$ ஐச் சுருக்குக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ஐக் காண்க.,

இத்தொடரின் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொயையைக் காண்க.

(ii) $\frac{6-7x}{(1-x)(2-x)}$ என்பதைப் பகுதிப்பின்னங்களில் தருக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு முறையிலோ

$$\frac{6-7x}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\alpha} a_n x^n$$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $a_n = 2^{2-n} - 1$ ஆகும். x இன் எந்தப் பெறுமானங்களுக்கு இவ்விரிவு வலிதானதாக இருக்கும் எனக் கூறுக.

42. $U_r = \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ எனின், $U_r = \dfrac{A}{r+1} + \dfrac{B}{r+2} + \dfrac{C}{r+3}$ என அமையக்கூடியதாக A, B, C ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் இதே முடிவைத் தனியாகப் பெறுக. இத்தொடரானது ஒருங்குமெனக் காட்டி முடிவிலி வரைக்கும் இதன் கூட்டுத் தொகையைக் காணக.

43. (i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் நிறுவுக.

$r^3 - (r-1)^3 \equiv 3r^2 - 3r + 1$ எனும் சமன்பாட்டை உபயோகித்து

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2$ என்பதைக் காண்க. இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(3r+1)$ ஐக் காண்க.

(ii) $\dfrac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)} = \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{(r+3)} + \dfrac{C}{(r+4)}$ என அமையின் A, B, C ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க.

இதனால் $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$ என்பதன் பெறுமானங் காண்க.

இத் தொடர் ஒருங்கும் என உய்த்தறிந்து முடிவிலி வரைக்கும் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

44. $U_r = (ar+b)(ar+b+a)(ar+b+2a) \ldots\ldots [ar+b+(k-1)a]$ என்க.

(i) $U_r = V_{r-1} - V_{r-1}$ ஆகுமாறு V_r ஐக் காண்பதுடன்,

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} (3r-2)(3r+1)(3r+7)$ ஐக் காண்க.

(ii) $\frac{1}{U_r} = W_r - W_{r+1}$ ஆகுமாறு W_r ஐக் காண்பதுடன் $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{Ur}$ ஐக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)}$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்குதொடர் எனநிறுவி, இதன் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் கானக.

45. கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி

$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, n \in Z^+$ என நிறுவுக.

$\sum_{r=1}^{2n} r^3$ ஐக் கருதுவதன் மூலம் $S_n = \sum_{r=1}^{n} (2r-1)^3$

$T_n = \sum_{r=1}^{n} (2r)^3$ என்பவற்றைக் காண்க. $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{T_n}$ ஐக் காண்க.

46. எல்லா $x \in R$ இற்கும் $(x \geq 1)$

$\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = 1$ எனக் காட்டுக.

$U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ஆகவுள்ள தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களின்

கூட்டுத்தொகை $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

(i) எல்லா $n \geq n_\circ$ இற்கும் $S_n > 999$ ஆகுமாறு $n_\circ$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $\sum_{n=1}^{\alpha} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ஒருங்குதொடரா என்பதைத் தீர்மானிக்க.

47. (b) 10, 13, 16 19, 22, 25, ..., 307 என்ற கூட்டல் விருத்தியின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.. மேலுள்ள விருத்தியின் ஒவ்வொரு மூன்றாம் உறுப்பும் அகற்றப்படின் மீதியாக உள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(b) $f(x) \equiv (2x-1)(2x+1), x \in R,$ எனத் தரப்படின் $\dfrac{1}{f(x)}$ ஐப்

பகுதிப்பின்னங்களாக உணர்த்துக. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \dfrac{1}{f(r)} = \dfrac{n}{2n+1}$

எனக் காட்டுக. $\sum_{r=1}^{\alpha} \dfrac{1}{f(r)}$ ஐக் காண்க.

(c) நேர் நிறையெண்கள் $U_1, U_2, ... U_n, ...$ ஆன தொடரி ஒன்று n நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க $n \geq 1$ இற்கு

$U_1 = 1, U_{n+1} = 3U_n + 2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$U_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ எனக் காட்டுக.

48. $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ ஐக் கண்டு $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ என உய்த்தறிக.

யாதாயினும் ஒரு நேர்நிறையெண் n இற்கு $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} < 2$ எனக் காட்டுக. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$ என உய்த்தறிக.

(i) யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறையெண் n இற்கு $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாடு.

ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறையெண் n

இற்கு $\frac{n^n}{2^n \cdot n!} > \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$

ஒருங்குவதில்லையெனக் காட்டுக.

49. யாதாயினும் நேர் நிறையெண் $n \geq 2$ இற்கு

$\frac{2n^2 + n + 1}{n!} = \frac{A}{(n-2)!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{n!}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C

என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$\frac{4}{1!} + \frac{11}{2!} + \frac{22}{3!} + \frac{37}{4!} + \ldots\ldots = 6e - 1$ என நிறுவுக.

இங்கு $e = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!}$ ஆகும்.

50. (i) $U_r = \frac{r+4}{r(r+1)(r+2)}$ எனின்,

$U_r = 2V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு ஒருமை k ஐக் காண்க.

இங்கு $V_r = \dfrac{k}{r(r+1)}$ ஆகும். இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{U_r}{2^{r+1}}$ ஐக் காண்க.

(ii) $\ell n(1-x) = -\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} \left(|x| < 1\right)$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$\ell n\,(2) = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r$, $\ell n(3) = \ell n(2) + \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{3}\right)^r$ என நிறுவுக.

$W_r = \dfrac{1}{r(r+1)}$ எனின், $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{W_r}{2^r} = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^r} - \frac{1}{(n+1)2^n}$

எனக் காட்டுக.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{W_r}{2^r} = 1 - \ell n(2)$ என உய்த்தறிக.

51. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, கணிதத் தொகுத்தறி முறையால்,

(a) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{3^r(r+1)}{(r+4)!} = \frac{1}{8} - \frac{3^{n+1}}{(n+4)!}$

(b) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \sin^2(2r-1)\theta = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4n\theta}{4\sin 2\theta}$ என நிறுவுக.

52. (a) m என்பது ஓர் ஒற்றை நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, $\left(m^2+3\right)\left(m^2+15\right)$ என்பது 32 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

(b) n ஓர் ஒற்றை நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, $5^{2n}+1$ என்பது 13 ஆல் வகுபடும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால் நிறுவுக.

53. (a) n ஓர் நேர் நிறையெண் ஆகும். $A_n = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ எனின், கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி 7, A_n ஐ வகுக்கும் எனக்காட்டுக.

(b) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகவும் $n \geq 2$ ஆகவும் இருக்க,

$$\frac{1}{2}n < \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{2n-1}{2n} < n - \frac{1}{2}$$ எனக் காட்டுக.

54. (a) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(b) $\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos b\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots$ 6

ஆகிய ஒவ்வொரு தொடரினதும் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(c) n ஓர் நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $3^{2n} + 11$ ஆனது, 4 ஆல் வகுபடும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

55. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி

(a) $$n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2(n-1) + 1 \cdot n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(b) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

என நிறுவுக.

7. வரிசைமாற்றம், சேர்மானம்

காரணியக் குறிப்பீடு *(Factorial Notation)*

n ஒரு நேர் நிறைவெண்ணாக இருக்க, $n!$ அல்லது $\underline{|n}$ என்பது

$n! = n(n-1)(n-2)\text{.........}\times 3\times 2\times 1$ என வரையறுக்கப்படும்.

$0! = 1$ என வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணம் : $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ ஆகும்.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!} = 720$$ ஆகும்.

காரணியம் பின்வருமாறும் வரையறுக்கப்படும்.

$F(0) = 1,\quad F(n) = n\,F(n-1)$ இங்கு $n \in Z^{+}$ ஆகும்.

$F(1) = 1\times F(0) = 1\times 1 = 1$

$F(2) = 2\times F(1) = 2\times 1 = 2$

$F(3) = 3\times F(2) = 3\times 2 = 6$

$F(4) = 4\times F(3) = 4\times 3\times 2 = 24$

இம்முடிபைக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவலாம்.

$F(0) = 1 \qquad F(n) = n.\,F(n-1)$

நிறுவவேண்டியது $F(n) = n!$

$n = 1$ ஆக, இ. கை. ப $F(1) = 1\times F(0) = 1\times 1 = 1$

வ. கை. ப $= 1! = 1$

ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$F(p) = p!$ ஆகும்.

$F(p+1) = (p+1)F(p)$

$= (p+1)\times p! = (p+1)!$

$n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால், எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $F(n) = n!$ ஆகும்.

வரிசை மாற்றம் *(Permutation)*

ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையான பொருட்களின் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஒழுங்கு அவற்றின் வரிசைமாற்றம் எனப்படும்.

இருவேறு எழுத்துக்கள் a, b ஐக் கருதுக. இரு எழுத்துக்களையும் பாவித்து செய்யப்படக் கூடிய வரிசை மாற்றம் ab, ba ஆகும். இருவரிசைமாற்றங்கள் பெறப்படும்.

மூன்று வேறு வேறான பொருட்களின் வரிசை மாற்றம்.

பொருட்களை a, b, c எனப் பெயரிடுக.

மூன்று எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்திப் பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்கள்.

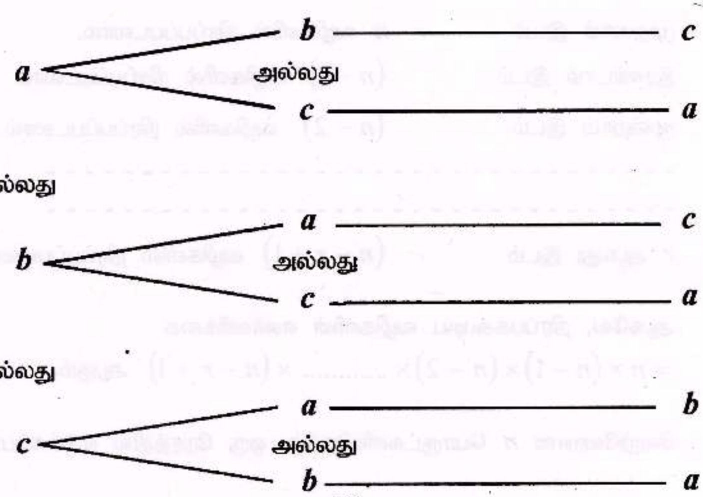
$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba$ ஆகும்.

6 வரிசை மாற்றங்கள் பெறப்படும்.

முதலாவது இடம் 3 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். முதலாம் இடம் நிரப்பப்பட்ட பின் இரு எழுத்துக்கள் எஞ்சியிருக்கும்.

எனவே இரண்டாம் இடம் 2 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். முதல் இரு இடங்களும் நிரப்பப்பட்டபின் ஒரு எழுத்து எஞ்சியிருக்கும். எனவே மூன்றாம் இடம் 1 முறையில் நிரப்பப்படலாம்.

முதலாம் இடம்   இரண்டாம் இடம்   மூன்றாம் இடம்



முதலாம் இடம் 3 வழிகளில் (a அல்லது b அல்லது c) நிரப்பப்படலாம். முதலாம் இடம் நிரப்பப்படும் ஒவ்வொரு முறைக்கும் இரண்டாம் இடம் 2 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். முதலிரண்டும் நிரப்பப்பட்ட பின் மூன்றாம் இடம் 1 முறையில் நிரப்பப்படலாம்.

ஆகவே, வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $3 \times 2 \times 1 = 6$

வேறுவேறான n பொருட்களின் வரிசை மாற்றம்

வேறு வேறான n பொருட்கள் உள்ளன என்க.

முதலாம் இடம் n வழிகளிலும், இரண்டாம் இடம் $(n-1)$ வழிகளிலும், மூன்றாம் இடம் $(n-2)$ வழிகளிலும் நிரப்பப்படலாம். இவ்வாறே மீதி இடங்களும் நிரப்பப்படும். எனவே எல்லாம் வேறு வேறான n பொருட்களின் வரிசை மாற்றம் $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ ஆகும்.

வேறுவேறான n பொருட்களிலிருந்து ஒருநேரத்தில் எடுக்கப்பட்ட r பொருட்களின் வரிசைமாற்றம்

இங்கு வேறு வேறான n பொருட்கள் உள்ளன. r இடங்கள் உள்ளன என்க.

□	□	□	-----------	□
1ஆம் இடம்	2ஆம் இடம்	3ஆம் இடம்		r ஆம் இடம்

முதலாம் இடம் n வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

இரண்டாம் இடம் $(n-1)$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்

மூன்றாம் இடம் $(n-2)$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

- -

- -

r ஆவது இடம் $(n-r+1)$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

ஆகவே, நிரப்பக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times (n-r+1)$ ஆகும்.

வேறுவேறான n பொருட்களிலிருந்து ஒரு நேரத்தில் எடுக்கப்பட்ட r

பொருட்களின் வரிசை மாற்றம் ${}^{n}P_{r}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$$ {}^{n}P_{r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots \times (n-r+1) $$

$$ = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1} $$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!}$ ஆகும். (இங்கு $r \leq n$ ஆகும்)

$$ \boxed{{}^{n}\mathbf{P}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}} $$

$$ {}^{n}p_{n} = \frac{n!}{0!} = n! \qquad [\ 0! = 1 \text{ ஆகும் }] $$

உதாரணம் : ${}^{6}P_{4} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 350$

எல்லாம் வித்தியாசமல்லாத பொருட்களின் வரிசைமாற்றங்கள்

பின்வரும் உதாரணத்தை அவதானிக்க.

a, b, c, d, e, e, e என்பவற்றிலிருந்து எல்லா எழுத்துக்களையும் ஒரு நேரத்தில் பயன்படுத்திப் பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களைக் காண்போம்.

இங்கு a, b, c, d எல்லாம் வேறானவை. e யின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்.

a, b, c, d, e, e, e ஐப் பயன்படுத்திப் பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை x என்க. இவ்வரிசை மாற்றங்களுள் $a.b\,c\,d\,e\,e\,e$ என்ற வரிசை மாற்றம் ஒன்றைக் கருதுக. e, e, e இற்குப் பதிலாக l, m, n எனும் எழுத்துக்கள் இருந்திருப்பின் $abcdeee$ என்பது, $abcdlmn$, $abcdlnm$, $abcdmln$, $abcdmnl$, $abcdnlm$, $abcdnlm$ என்ற வரிசை மாற்றங்களாகப் பெறப்படும். ஏழு எழுத்துக்களும் வேறு வேறானவையெனின் பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 7!.

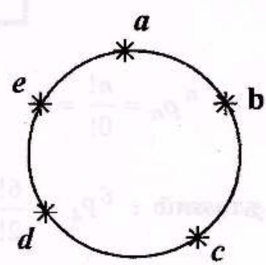
$$ x \times 3! = 7! $$

$$ x = \frac{7!}{3!} $$

n பொருட்களில் r பொருட்கள் ஒரே மாதிரியானவை எனின் n பொருட்களிலிருந்து பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{r!}$ ஆகும்.

n பொருட்களில் r_1 பொருட்கள் ஒரே மாதிரியானவை. r_2 பொருட்கள் வேறொரு வகையானவை r_3 பொருட்கள் இன்னொரு வகையானவை எனின், n பொருட்களிலிருந்தும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n!}{r_1!\ r_2!\ r_3!}$ ஆகும்.

வட்டம் ஒன்றில் வரிசை மாற்றங்கள் *(Orcular Permutations)*

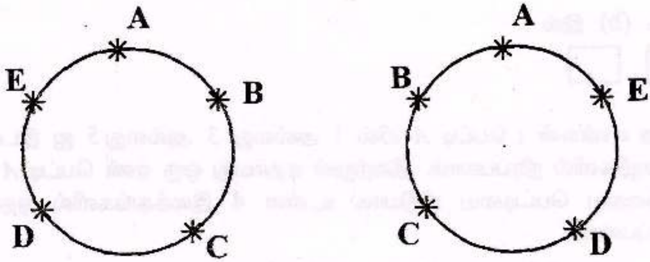


a, b, c, d, e என்பவற்றை வட்டம் ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைப் பார்ப்போம்.

a, b, c, d, e என்பவற்றை நேர்கோடு ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $5!$ ஆகும். வட்ட ஒழுங்கில், $abcde, bcdea, cdeab, deabc\ \ eabcd$ ஆகிய ஐந்தும் நேர்கோட்டு ஒழுங்கில் வேறு வேறானவை.
ஆனால் வட்ட ஒழுங்கில் இந்த ஐந்தும் ஒன்றாகும். (அதாவது $abcde$, என்ற ஒழுங்கில் a, b இற்கும், b, c இற்கும், c, d இற்கும், d, e இற்கும், e, a இற்கும் செல்லும்போது இடங்கள் மாறுகின்றன. ஆனால் ஒழுங்கில் மாற்றமில்லை) ஆகவே,

$$\text{வட்ட ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{1}{5} \times 5!$$
$$= 4! = 24 \quad \text{ஆகும்.}$$

n வேறு வேறான பொருட்களின் வட்ட ஒழுங்கிலான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n-1)!$ ஆகும். n பொருட்களில் ஒன்று வட்டத்தின் ஏதாவது ஒரு இடத்தில் வைக்கப்பட்டபின், ஏனைய $(n-1)$ பொருட்களும் $(n-1)!$ வழிகளில் வைக்கப்படலாம் என்பதேயாகும். மேலும் இடஞ்சுழி, வலஞ்சுழி என்பவற்றை வேறுபடுத்தாது இருப்பின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{1}{2}(n-1)!$ எனப் பெறப்படும்.



ABCDE வலஞ்சுழியாக ABCDE இடஞ்சுழியாக

உதாரணம் 1

1, 2, 3, 4, 5 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி

(a) எத்தனை இரு இலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?

(b) எத்தனை இரு வித்தியாசமான இலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?

(c) ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒற்றை எண்கள், இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(a) $\square$ $\square$

இங்கு ஒரு இலக்கத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தலாம். எனவே எண்களின் எண்ணிக்கை $5 \times 5 = 25$

(b) இரு வித்தியாசமான இலக்க எண்கள். எனவே ஒரு இலக்கத்தை ஒருமுறை மட்டும் பயன்படுத்தலாம்.

எண்களின் எண்ணிக்கை $= 5 \times 4 = 20$

(c) $\square$ $\underset{A}{\square}$

வகை (a) இல்

ஒற்றை எண்கள் : பெட்டி A யில் 1, 3, அல்லது 5 ஐ இடவேண்டும். முதலாவது பெட்டியில் எந்த ஒரு எண்ணையும் இடலாம். ஆகவே ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை $5 \times 3 = 15$

இரட்டை எண்கள் : பெட்டி A யில் 2 அல்லது 4 ஐ இடவேண்டும். அதாவது பெட்டி A ஐ 2 வழிகளில் நிரப்பலாம். இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை $5 \times 2 = 10$

எனவே மொத்தம் $15 + 10 = 25$

வகை (b) இல்

$\square \quad \square$
$\qquad\quad A$

ஒற்றை எண்கள் : பெட்டி A யில் 1 அல்லது 3 அல்லது 5 ஐ இடலாம். பெட்டி A ஐ 3 வழிகளில் நிரப்பலாம். இவற்றுள் ஏதாவது ஒரு எண் பெட்டி A யில் போட்டபின் மற்றைய பெட்டியை மீதியாக உள்ள 4 இலக்கங்களில் ஏதாவது ஒன்றினால் நிரப்பலாம்.

எனவே ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 3 = 12$

இரட்டை எண்கள் : பெட்டி A யில் 2 அல்லது 4 ஐ இடவேண்டும். பெட்டி A ஐ 2 வழிகளில் நிரப்பலாம், மற்றைய பெட்டியை 4 வழிகளில் நிரப்பலாம்.
இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 2 = 8$

மொத்த எண்ணிக்கை $= 12 + 8 = 20$

உதாரணம் 2

0, 1, 2, 3, 4 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி
(a) எத்தனை 3 இலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?
(i) ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(ii) இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(b) ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை ஒருமுறை மட்டும் பயன்படுத்தலாம் எனின் எத்தனை 3 இலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?
(i) ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை யாது?
(ii) இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை யாது?

முதலாவது இரண்டாவது மூன்றாவது

(a) மூன்று இலக்க எண்கள் $\square \qquad \square \qquad \square$

எண் ஒன்று 0 இல் ஆரம்பிப்பதில்லை. எனவே முதலாவது பெட்டியை 4 வழிகளிலும், ஏனைய ஒவ்வொன்றையும் 5 வழிகளிலும் நிரப்பலாம்.
எனவே எண்களின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 5 \times 5 = 100$

ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 5 \times 2 = 40$
(மூன்றாவது பெட்டி 2 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். 1 அல்லது 3)

இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 5 \times 3 = 60$
(மூன்றாவது பெட்டி 3 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். 0 அல்லது 1 அல்லது 3)

	முதலாவது	இரண்டாவது	மூன்றாவது	
(b)	☐	☐	☐	0, 1, 2, 3, 4

ஒரு இலக்கத்தை ஒரு முறை மட்டுமே பயன்படுத்தலாம். முதலாவது பெட்டியை 0 தவிர்ந்த ஏனைய 4 இலக்கங்களில் ஒன்றினால் நிரப்பலாம். எனவே முதலாவது பெட்டி 4 வழிகளிலும், இரண்டாவது பெட்டி 4 வழிகளிலும், மூன்றாவது பெட்டி 3 வழிகளிலுமாக,

$4 \times 4 \times 3 = 48$ எண்கள் உண்டு.

☐ ☐ ☐

(i) ஒற்றை எண்கள் $= 3 \times 3 \times 2 = 18$

(மூன்றாவது பெட்டி 2 வழிகளிலும் (1 அல்லது 3), முதலாவது பெட்டி 3 வழிகளிலும், இரண்டாவது பெட்டி 3 வழிகளிலும் நிரப்பப்படலாம்).

(ii) இரட்டை எண்கள்

☐ ☐ ☐

0 இல் முடிவடையும் எண்கள் $4 \times 3 \times 1 = 12$

2 அல்லது 4 இல் முடிவடையும் எண்கள். $3 \times 3 \times 2 = 18$

இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை $12 + 18 = 30$

அல்லது

48 - ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை

$= 48 - 18 = 30$

உதாரணம் 3

(a) மூன்று வேறு வேறான இலக்கங்களாலான எல்லா நேர்நிறையெண்களையும் கருதுக.

(i) ஒற்றை எண்கள் எத்தனை?

(ii) இரட்டை எண்கள் எத்தனை?

(iii) 5 ஆல் பிரிபடும் எண்கள் எத்தனை?

(b) ஒரு வகுப்பில் 20 மாணவர்கள் உள்ளனர். இரு வேறு வேறான பரிசுகள் உண்டு. ஒரு மாணவனுக்கு ஒரு பரிசு மட்டுமே வழங்கப்படலாம் எனின் அவ்விரு பரிசுகளையும் வழங்கப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(c) ELEVEN என்ற சொல்லில் உள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் எடுத்துப் பெறக் கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றுள்

(i) எத்தனை E இல் தொடங்கி E இல் முடிவடையும்.
(ii) எத்தனை E இல் தொடங்கி N இல் முடிவடையும்.
(iii) எத்தனை 3 E யும் ஒன்றாக வரும்.
(iv) எத்தனை 2 E மட்டும் ஒன்றாக வரும்.
(v) எத்தனை E எல்லாம் தனியாக வரும்.

(a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\square \quad \square \quad \square$

மூன்று வேறு, வேறான இலக்கங்களாலான எண்களின்

எண்ணிக்கை $= 9 \times 9 \times 8 = 648$

ஒற்றை எண்கள் 1, 3, 5, 7, 9 இல் முடிவடையும்.

(i) ஒற்றை எண்களைப் பெறுவதற்கு மூன்றாவது பெட்டியை 5 வழிகளில் நிரப்பலாம். மூன்றாவது பெட்டியை நிரப்பியபின், முதலாவது பெட்டியை 8 வழிகளிலும் இரண்டாவது பெட்டியை 8 வழிகளிலும் நிரப்பலாம்.

ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை $8 \times 8 \times 5 = 320$

(ii) இரட்டை எண்களின் எண்ணிக்கை $648 - 320 = 328$

(iii) 5 ஆல் பிரிபடும் எண்கள், 0 இல் அல்லது 5 இல் முடியும்.

0 இல் முடியும் எண்கள். $\square \quad \square \quad \boxed{0}$

$$9 \times 8 \times 1 = 72$$

5 இல் முடியும் எண்கள். $\square \quad \square \quad \boxed{5}$

$$8 \times 8 \times 1 = 64$$

5 ஆல் பிரிபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $72 + 64 = 136$

(b) இரு வித்தியாசமான பரிசுகள் உள்ளன. ஒரு மாணவனுக்கு ஒரு பரிசு மட்டும் உண்டு. முதலாவது பரிசை 20 வழிகளில் கொடுக்கலாம். முதலாவது பரிசு கொடுக்கும் ஒவ்வொரு வழிக்கும் இரண்டாவது பரிசு 19 வழிகளில் கொடுக்கப்படலாம். எனவே பரிசு வழங்கப்படக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 20 \times 19 = 380$

(c) ELEVEN

E - 3, L - 1, V - 1, N - 1 - மொத்தம் 6 எழுத்துக்கள். வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $= \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$

(i) E இல் ஆரம்பித்து E இல் முடிவடைதல் வேண்டும்.

$\boxed{E}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{E}$

மீதியாக உள்ள எழுத்துக்கள் E - 1, L - 1, V - 1, N - 1

மீதியாக உள்ள எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றம் $= 4! = 24$

(ii) E இல் தொடங்கி N இல் முடிவடையும் வரிசைமாற்றம்

$\boxed{E}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{N}$

E - 2, L - 1, V - 1

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{4!}{2!}$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

(iii) 3E யும் ஒன்றாக வரும்போது

EEE - 1, L - 1, V - 1, N - 1

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 4!$

$= 24$ ——————— (A)

(iv) EE, E, L, V N

L V N ஆகிய மூன்று எழுத்துக்களினதும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 3! = 6$ ஆகும்.

L V N

↑ ↑ ↑ ↑

இப்பொழுது EE, E என்பவற்றை அம்புக்குறியால் காட்டிய இடங்களில் இடவேண்டும்.

EE என்பதை 4 வழிகளில் இடலாம் எனின், மற்றைய E ஐ 3 வழிகளில் இடலாம்.

எனவே EE, E என்பவற்றை இடக்கூடிய வழிகள் $4 \times 3 = 12$

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $12 \times 6 = 72$ ——————— (B)

(v) E தனியாக வருதல்.

L, V, N

3 எழுத்துக்களும் 3! வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம். L, V, N இன் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $3! = 6$ ஆகும்.

L   V   N

↑   ↑   ↑   ↑

E_1, E_2, E_3 என இருப்பின் E_1, E_2, E_3 ஐ அம்புக்குறிகளில் காட்டிய இடங்களில் இடக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $4 \times 3 \times 2 = 24$

இங்கு E_1, E_2, E_3 மூன்றும் ஓர் எழுத்து E ஆக இருப்பதால்,

வெவ்வேறான வழிகளின் எண்ணிக்கை $\frac{24}{3!} = \frac{24}{6} = 4$

எனவே E எல்லாம் தனியாக வரும் வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $= 4 \times 6 = 24$ ———————————— (C)

(இங்கு $(A) + (B) + (C) = 24 + 72 + 24 = 120 =$ மொத்த வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை)

உதாரணம் 4

4 ஆண்களும், 3 பெண்களும் வரிசையொன்றில் இருக்கக் கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) ஆண்களும், பெண்களும் மாறி மாறி இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

(ii) ஆண்கள் ஒன்றாகவும், பெண்கள் ஒன்றாகவும் இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) எந்த இரு பெண்களும் ஒன்றாக இருக்க மாட்டார்களெனின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

$4B$, $3G$ 7 பேரின் வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

(i) $B * B * B * B$

G   G   G

BG BG BG B என்ற ஒழுங்கில் அமையும்.

4 ஆண்களினதும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $4! = 24$

3 பெண்களினதும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $3! = 6$

மொத்த ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 4! \times 3!$

$= 24 \times 6 = 144$

(ii) GGG BBBB அல்லது BBBB GGG

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 2 \times 3! \times 4!$

$= 2 \times 6 \times 24 = 288$

(iii) இரு பெண்கள் ஒன்றாக இராதவாறு,

$$\begin{array}{ccccccccc} & B & & B & & B & & B & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ G & & G & & & & & & G \end{array}$$

4 ஆண்களினதும் வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $= 4! = 24$

3 பெண்கள் இருக்கக் கூடிய இடங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இதற்கான வழிமுறைகள் $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

ஆகவே வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 24 \times 60 = 1440$

உதாரணம் 5

எல்லாம் வேறுவேறான 6 புத்தகங்கள் உள்ளன. இவற்றை ஒழுங்குபடுத்தக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(i) குறித்த 3 புத்தங்கள் எப்போதும் ஒன்றாக இருக்கக் கூடியதாக எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

(ii) குறித்த 3 புத்தகங்களில் 2 புத்தங்கள் மட்டும் ஒன்றாக இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

(iii) குறித்த 3 புத்தகங்களும் எப்போதும் வேறு வேறாக இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

6 வேறுவேறான புத்தகங்களின் வரிசை மாற்றம் $6! = 720$ ஆகும்.

(i) $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ என்பவற்றில்

$M_1 \; M_2 \; M_3$ எப்போதும் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும் என்க.

$\boxed{M_1 \; M_2 \; M_3}$ M_4, M_5, M_6

$\boxed{M_1 \; M_2 \; M_3}$ ஒரு புத்தகமாகக் கருதப்படின், 4 புத்தகங்களின் வரிசை

மாற்றம் $= 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

இப்பொழுது $M_1\ M_2\ M_3$ என்பன தம்முள் $3!$ முறையில் மாறுபடும்.
எனவே வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144 \text{ ——————— } \mathbf{(A)}$$

(ii) $M_1\ M_2\ M_3$ இல் ஏதாவது இரு புத்தகங்கள் ஒன்றாகவும், மற்றையது வேறாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

இப்பொழுது M_4, M_5, M_6 இன் வரிசை மாற்றங்கள் $= 3! = 6$

$$\begin{array}{ccccccc} & M_4 & & M_5 & & M_6 & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{*\ *} & & & & & & \boxed{*} \end{array}$$

$M_1\ M_2\ M_3$ இலிருந்து $\boxed{M_1\ M_2}$, $\boxed{M_2\ M_3}$ $\boxed{M_3\ M_1}$
என 3 வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். ஒவ்வொரு முறையில் அவை தம்முள் இடம் மாறும். (அதாவது $M_1\ M_2$, $M_2\ M_1$)
இப்பொழுது ஒவ்வொரு முறையிலும் 2 புத்தகங்கள் வைக்கப்படக் கூடிய வழிமுறைகள் 4, 1 புத்தகம் வைக்கப்படக் கூடிய வழிமுறை 3
ஆகவே வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$3! \times 3 \times (4 \times 3) \times 2 = 432 \text{ ——————— } \mathbf{(B)}$$

(iii)

$$\begin{array}{cccccccc} & M_4 & & M_5 & & M_6 & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \quad M_1\ M_2\ M_3 \end{array}$$

3 புத்தகங்கள் M_4, M_5, M_6 இன் வரிசை மாற்றங்கள் $= 3! = 6$

இப்பொழுது M_1, 4 வழிகளிலும், M_2, 3 வழிகளிலும், M_3, 2 வழிகளிலும் வைக்கப்படலாம்.
எனவே வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 6 \times (4 \times 3 \times 2) = 144 \quad \text{————— } \mathbf{(C)}$$

$$[(A) + (B) + (C) = 144 + 432 + 144 = 720]$$

உதாரணம் 6

4 ஆண்களும், 4 பெண்களும் வரிசையொன்றில் இருக்கக் கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) ஆண், பெண் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று (மாறி மாறி) இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) ஆண், பெண் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று இருக்குமாறும் குறித்த ஒரு ஆணும் ஒரு பெண்ணும் அருகருகே இருப்பதற்குமான ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையாது?

(iii) ஆண், பெண் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று இருக்குமாறும் குறித்த ஒரு ஆணும், ஒரு பெண்ணும் அருகருகே இருக்காமலும் உள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?

4B, 4G. வரிசையொன்றில் 8 பேரின் வரிசைமாற்றம் $= 8! = 40320$

(i) B, G , B, G , B, G , B, G அல்லது G , B , G , B, G , B , G , B என்றவாறு ஒழுங்குகள் அமையும்.

B_1, B_2, B_3, B_4 இன் வரிசை மாற்றங்களின்
எண்ணிக்கை $= 4! = 24$

G_1, G_2, G_3, G_4 இன் வரிசை மாற்றங்களின்
எண்ணிக்கை $= 4! = 24$

எனவே ஆண், பெண் மாறி மாறி இருக்கும் வரிசை மாற்றங்களின்
எண்ணிக்கை $= 2 \times 24 \times 24 = 1152$

(ii) குறித்த ஆணும் பெண்ணும் B_1, G_1 என்க. B_1, G_1 ஐத் தவிர்த்து ஏனைய மூன்று ஆண்களும், மூன்று பெண்களும் மாறி மாறி இருக்கும் ஒழுங்குகள்

(1) $\boxed{\text{BGBGBG}}$ அல்லது (2) $\boxed{\text{GBGBGB}}$ ஆகும்.

ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $3! \times 3! = 36$

(1) $\boxed{\text{BG BG BG}}$ - ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை
↑ ↑ ↑ ↑

$\boxed{B_1, G_1}$ $3! \times 3! \times 4$ ஆகும்.

(1) $\boxed{B \;\; G \;\; B \;\; G \;\; B \;\; G}$ - ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை

$\boxed{G_1\, B_1}$ $3! \times 3! \times 3$ ஆகும்.

வகை 1 இல் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$4 \times 3! \times 3! + 3 \times 3! \times 3!$$

$$7 \times 3! \times 3! = 252$$

வகை 2

$\boxed{GB \quad GB \quad GB}$

$\boxed{G_1\, B_1}$

ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 3! \times 3! \times 4 = 144$

$\boxed{G \;\; B \;\; G \;\; B \;\; G \;\; B}$

$\boxed{G_1\, B_1}$

ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $3! \times 3! \times 3 = 108$

வகை (2) இல் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 144 + 108 = 252$

குறித்த ஆணும், பெண்ணும் ஒன்றாக இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 252 + 252 = 504$

(iii) ஆண், பெண் மாறி மாறி இருக்கும்போது குறித்த ஆணும், பெண்ணும் ஒன்றாது இருக்காமல் உள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$= 1152 - 504$$

$$= 648$$

உதாரணம் 7

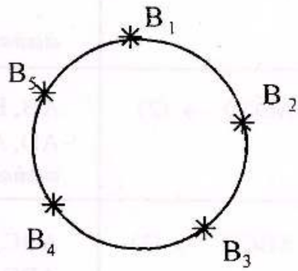
(i) 5 பேர் வட்ட மேசையொன்றைச் சுற்றி வர இருக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது.

(ii) 5 ஆண்களும், 5 பெண்களும் வட்டமேசையொன்றைச் சுற்றிவர, இரு பெண்கள் ஒன்றாக இல்லாதவாறு எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்.

(i) 5 பேர் வட்டமேசை ஒன்றைச் சுற்றிவர இருக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை. $= (5-1)!$

$= 4! = 24$

(ii) 5 ஆண்கள் வட்டமேசை ஒன்றைச் சுற்றிவர அமரக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை. $= 4! = 24$



இப்பொழுது 5 பெண்கள், இரு ஆண் களுக்கு மத்தியில் ஒருவர் வீதம் $5! = 120$ வழிகளில் அமரலாம்.

எனவே மொத்த வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை.

$$= 4! \times 5! = 24 \times 120$$

$$= 2880$$

சேர்மானங்கள் *(Combinations)*

A, B, C எனும் 3 வேறுவேறான பொருட்களைக் கருதுக. 3 பொருட்களிலிருந்து 2 பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள், AB, BC, AC ஆகும். இங்கு 3 வழிகள் உள்ளன.

A, B, C, D எனும் வேறுவேறான 4 பொருட்களைக் கருதுக. 4 பொருட்களி லிருந்து 2 பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள் AB, BC, CD, AD, AC, BD என்பனவாகும். 4 பொருட்களிலிருந்து 2 பொருட்களின் சேர்மானம் 6 ஆகும்.

4 பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள் ABC, BCD, ACD, ABD ஆகும். இங்கு 4 கூட்டங்கள் உண்டு. ஒழுங்கு கவனிக்கப்படு வதில்லை.

எண்ணிக்கை	சேர்மானம்	வரிசைமாற்றம்
A, B, C $\rightarrow$ (2)	AB, BC, AC எண்ணிக்கை 3	AB, BA, BC, CB, AC, CA எண்ணிக்கை 6
ABC $\rightarrow$ (3)	ABC எண்ணிக்கை 1	ABC, ACB, BAC, BCA CAB, CBA எண்ணிக்கை 6
ABCD $\rightarrow$ (2)	AB, BC, CD AD, AC, BD எண்ணிக்கை 6	AB, BA, BC, CB, CD, DC AD, DA, AC, CA, BD, DB எண்ணிக்கை 12
ABCD $\rightarrow$ (3)	ABC, BCD, ACD ABD எண்ணிக்கை 4	எண்ணிக்கை 24

தரப்பட்ட ஒரு தொகைப் பொருட்களிலிருந்து குறித்த எண்ணிக்கையான பொருட்களைத் தெரிவு செய்யக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை சேர்மானம் எனப்படும்.

எல்லாம் வேறு வேறான n பொருட்களிலிருந்து தடவைக்கு $r(\leq n)$

பொருட்களைத் தெரிவு செய்யும் எண்ணிக்கை ${}^nC_r$ எனப்படும்.

${}^nC_r$ இற்கான சூத்திரம்

${}^nC_r = x$ என்க.

n வேறு வேறான பொருட்களிலிருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுக்கக் கூடிய தடவைகள் x என்க.

ஒவ்வொரு தடவையும் எடுக்கும் r பொருட்களின் வரிசைமாற்றம் $= r!$ ஆகும்.

x தடவைகள் எடுக்கும்போது பெறப்படும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $x \times r!$

ஆனால் வேறுவேறான n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களின் வரிசை மாற்றம் ${}^{n}P_{r}$ ஆகும்.

ஆகவே $= x \times r! = {}^{n}P_{r}$

$$x = \frac{{}^{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$\boxed{{}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

உதாரணம் 8

(a) ${}^{28}C_{r+4} = {}^{28}C_{r-2}$ எனின் r ஐக் காண்க.

(b) ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$ எனக் காட்டுக.

$${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \qquad {}^{n}C_{n-r} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

எனவே ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$

$${}^{28}C_{r+4} = {}^{28}C_{r-2}$$

$r + 4 \neq r - 2$ எனவே $r + 4 = 28 - (r-2)$

$$2r = 26,\ r = 13$$

(b) $${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!\ (r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ (r-1)!}\left[\frac{n-r+1+r}{r\,(n-r+1)}\right]$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(n-r)! \times (r-1)! \times r \times (n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_{r}$$

உதாரணம் 9

7 ஆசிரியர்களிலிருந்தும் 4 மாணவர்களிலிருந்தும் 6 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்று எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

(i) 2 மாணவர்களைக் கொண்ட குழுக்கள் எத்தனை?
(ii) குறைந்தது 1 மாணவனாவது இருக்கும் குழுக்கள் எத்தனை?

7 ஆசிரியர்கள், 4 மாணவர்கள்
11 பேரிலிருந்து 6 பேரைக் கொண்ட குழுக்களைத்

தெரிவு செய்யும் வழிகள் $${}^{11}C_{6} = \frac{11!}{6! \times 5!}$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$$

(i) குழுவில் 2 மாணவர்களும், 4 ஆசிரியர்களும் இருக்க வேண்டுமெனின் குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$${}^{7}C_{4} \times {}^{4}C_{2} = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$= 35 \times 6 = 210$$

(ii) ஒருமாணவனும் இல்லாத குழுக்களின் எண்ணிக்கை $^7C_6 = 7$

எனவே, குறைந்தது ஒரு மாணவனைக் கொண்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை $= 462 - 7 = 455$

அல்லது

(4) மாணவர்	(7) ஆசிரியர்	குழுக்களின் எண்ணிக்கை
1	5	$^4C_1 \times {}^7C_5 = 4 \times 21 = 84$
2	4	$^4C_2 \times {}^7C_4 = 6 \times 35 = 210$
3	3	$^4C_3 \times {}^7C_3 = 4 \times 35 = 140$
4	2	$^4C_4 \times {}^7C_2 = 1 \times 21 = 21$
		455

உதாரணம் 10

11 பிரதிநிதிகள் மாநாடான்றிற்கு வந்திருந்தனர்.

(i) இவர்களிலிருந்து 5 பேரைக் கொண்ட குழுவை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

(ii) இவர்களில் குறித்த இருவர், தெரிவு செய்யப்படின் அவர்கள் ஒன்றாகத் தெரிவு செய்யப்படவேண்டும் எனின் 5 பேரைக் கொண்ட குழுவை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

(iii) இவர்களில் குறித்த இருவர், ஒருவர் குழுவில் இருப்பின் மற்றையவர் குழுவில் இருக்கமாட்டார் எனின் 5 பேரைக் கொண்ட குழுவை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

(i) $$^{11}C_5 = \frac{11!}{6! \times 5!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$$

(ii) குறித்த இருவர் தெரிவு செய்யப்படின், ஏனைய 9 பேரிலிருந்து 3 பேரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

தெரிவு செய்யப்படும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை $1 \times 9C_3 = 84$

குறித்த இருவரும் தெரிவு செய்யப்படாவிடின், ஏனைய 9 பேரிலிருந்தும் 5 பேரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

தெரிவு செய்யப்படும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை $= {}^9C_5 = 126$

மொத்த எண்ணிக்கை $= 84 + 126 = 210$

(iii) 11 பேரிலிருந்து 5 பேரைத் தெரிவு செய்யும் வழிகளின்

எண்ணிக்கை $= {}^{11}C_5 = 462$

குறித்த இருவரையும் கொண்டுள்ள குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$= 1 \times {}^9C_3 = 84$

தெரிவு செய்யப்படக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$462 - 84 = 378$

அல்லது

குறித்த இருவரையும் தவிர்த்து ஏனைய 9 பேரிலிருந்து 5 பேரைத் தெரிவு செய்யலாம் அல்லது குறித்த இருவரிலிருந்து ஒருவரையும் ஏனைய 9 பேரிலிருந்து 4 பேரையும் தெரிவு செய்யலாம்.

தெரிவு செய்யப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^9C_5 + {}^2C_1 \times {}^9C_4$$

$$= 126 + 2 \times 126 = 378$$

உதாரணம் 11

7 ஆண்களிலிருந்தும், 5 பெண்களிலிருந்து 5 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்றை இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்து முகமாக ஆனால் குறிப்பிட்ட ஒரு ஆணையும் குறிப்பிட்ட ஒரு பெண்ணையும் ஒன்றாகக் குழுவில் வைத்திருக்கா வண்ணம் எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம் எனக் காண்க.
7 ஆண்களிலிருந்தும், 5 பெண்களிலிருந்தும், இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப் படுத்துமாறு நிபந்தனையின்றித் தெரிவு செய்யப்படும் முறைகள்.

7 5

ஆண்	பெண்		தெரிவு செய்யப்படும் வழிகளின் எண்ணிக்கை
4	1	$\longrightarrow$	${}^7C_4 \times {}^5C_1 = 35 \times 5 = 175$
3	2	$\longrightarrow$	${}^7C_3 \times {}^5C_2 = 35 \times 10 = 350$
2	3	$\longrightarrow$	${}^7C_2 \times {}^5C_3 = 21 \times 10 = 210$
1	4	$\longrightarrow$	${}^7C_1 \times {}^5C_4 = 7 \times 5 = 35$
			770

குறித்த ஆணும், பெண்ணும் தெரிவு செய்யப்படுமிடத்து 5 பேரைத் தெரிவு செய்யும் வழிகள்

எஞ்சியுள்ள ஆண்கள் 6; பெண்கள் 4. இவர்களிலிருந்து யாராவது 3 பேரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

10 பேரிலிருந்து 3 பேரைத் தெரிவு செய்யும் வழிகளின்

எண்ணிக்கை $= {}^{10}C_3 = 120$

ஆகவே, குறிப்பிட்ட ஒரு ஆணையும், பெண்ணையும் ஒன்றாக வைத்திருக்கா வண்ணம் இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துமாறு தெரிவு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 770 - 120 = 650$

உதாரணம் 12

(a) எல்லாம் வேறுவேறான 10 பொருட்களிலிருந்து தடவைக்கு 4 பொருட்களைத் தெரிவு செய்யும் கூட்டங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
இவற்றுள் குறித்த ஒரு பொருள் எத்தனை கூட்டங்களில் இருக்கும்.

(b) ENGINEERING எனும் சொல்லிலுள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன் படுத்தி செய்யத்தக்க வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) இவற்றுள் எத்தனையில் 3E களும் முதலில் இருக்கும்

(ii) இவற்றுள் எத்தனையில் 3E களும் ஒருமித்து இருக்கும்.

(iii) இவற்றுள் எத்தனையில் 2E கள் மட்டும் ஒருமித்து இருக்கும்.

(iv) இவற்றுள் எத்தனையில் E எல்லாம் தனியாக இருக்கும்.

(a) 10 பொருட்களிலிருந்து தடவைக்கு 4 பொருட்களாக எடுக்கக்

கூடிய வழிகள் $^{10}C_4 = 210$

குறித்த ஒரு பொருள் உள்ள கூட்டங்களைக் காண்பதற்கு குறித்த ஒரு பொருளுடன், மிகுதியாக உள்ள 9 பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

குறித்த பொருள் உள்ள கூட்டங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 1 \times {}^{9}C_3 = 84$$

(b) ENGINEERING ———— 11 எழுத்துக்கள் உள்ளன.

$E-3, N-3, G-2, I-2, R-1$

எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்திப் பெறக்கூடிய

வரிசை மாற்றங்கள் $= \dfrac{11!}{3! \times 3! \times 2! \times 2!}$

$$= 277200$$

(i) 3E யும் ஆரம்பத்தில் இருக்க வேண்டும் எனின்

$N-3, G-2, I-2, R-1$ இலிருந்து பெறப்படும்

வரிசை மாற்றங்கள் $= \dfrac{8!}{3! \times 2! \times 2!} = 1680$

(ii) 3E உம் ஒன்றாக இருக்க,

$\boxed{EEE} - 1,\ N-3,\ G-2,\ I-2,\ R-1$

இலிருந்து பெறப்படும் வரிசை மாற்றங்கள்

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 1680 \times 9 = 15120 \text{ ———— (A)}$$

(iii) 2E மட்டும் ஒன்றாக இருத்தல்

N N N G G I I R என்னும் எழுத்துக்களின் வரிசை

மாற்றங்கள் $= \dfrac{8!}{3! \times 2! \times 2!}$

இப்பொழுது $\boxed{EE}$ உம் $\boxed{E}$ உம் உள்ளன.

இவ்வெழுத்துக்களை மேலே உள்ள ஒழுங்கு ஒன்றில் முறையே 9 வழிகளிலும், 8 வழிகளிலும் இடலாம்.
எனவே தேவையான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= \left(\frac{8!}{3! \times 2! \times 2!}\right) \times 9 \times 8$$

$$= 1680 \times 9 \times 8 = 120960 \quad \text{———} (B)$$

(iv) E மூன்றும் தனித்தனியாக வருதல்.
N N N G G I I R எனும் எழுத்துக்களின்

வரிசை மாற்றங்கள் $= \dfrac{8!}{3! \times 2! \times 2!}$

இப்பொழுது மேலே உள்ள ஒழுங்கு ஒன்றில் E மூன்றும் $\dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!}$ வழிகளில் இடப்படலாம்.

எனவே E எல்லாம் தனியாக வரும் வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $= \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!} \times \left(\dfrac{8!}{3! \times 2! \times 2!}\right)$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} \times 1680$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{6} \times 1680 = 141120 \quad \text{———} (C)$$

$$\left[(A) + (B) + (C) = 15120 + 120960 + 141120 = 277200\right]$$

உதாரணம் 13

(a) ஆங்கில அரிச்சுவடியிலுள்ள 5 உயிரெழுத்துக்கள், 20 மெய்யெழுத்துக்கள் என்பவற்றிலிருந்து 3 எழுத்துக்கள் உள்ள சொற்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. முதலாம், மூன்றாம் எழுத்துக்கள் மெய்யெழுத்துக்களாகவும் இரண்டாம் எழுத்து உயிரெழுத்தாகவும் இருக்குமாறு பெறப்படும் வரிசை மாற்றங்களைக் காண்க.

(b) 32 அட்டைகள் கொண்ட தொகுதி ஒன்றில் 8 கறுப்பு நிற அட்டைகளும், 8 நீலநிற அட்டைகளும், 8 பச்சை நிற அட்டைகளும், 8 சிவப்பு நிற அட்டைகளும் உள்ளன. ஒரே நிறத்தைக் கொண்ட அட்டைகள் யாவும் வித்தியாசமானவை.

(i) தொகுதியிலிருந்து 3 அட்டைகள் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படக் கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) அதோடு (i) இல் உள்ள தெரிவுகளின் எத்தனை எண்ணிக்கையில் தெரிவுகள் யாவும் வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிருக்கமாட்டாது?

(a) $\square \quad \square \quad \square$ உயிரெழுத்து 5 – மெய்யழுச்து 20

நடுஎழுத்து ${}^{5}C_1\ (=5)$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். மெய்யெழுத்து ${}^{20}C_2$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். ${}^{20}C_2 \times 2$ வழிகளில் முதலாம், மூன்றாம் இடங்களை நிரப்பலாம்.

உயிரெழுத்து நடுவில் அமையுமாறு வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $= 5 \times \left({}^{20}C_2 \times 2\right)$

$= 5 \times (20 \times 19) = 1900$

(b) (i)

கறுப்பு	நீலம்	பச்சை	சிவப்பு
8	8	8	8

32 அட்டைகளும் வேறுவேறானவை எனவே

32 அட்டைகளிலிருந்து 3 அட்டைகளைத்

தெரிவு செய்யும் வழிகள் ${}^{32}C_3$

$$= \frac{32!}{29! \times 3!} = \frac{32 \times 31 \times 30}{6} = 4960$$

(ii) தெரிவு செய்யப்படும் அட்டைகள் எல்லாம் வேறுவேறு நிறமாக இருக்கும் வகைகளைப் பார்ப்போம்.

4 வேறு வேறு நிறங்களிலிருந்து 3 நிறங்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். பின்னர் ஒவ்வொரு நிறத்திலிருந்தும் ஒரு அட்டையைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். எல்லாம் வேறு வேறு நிறமாக இருக்கும் கூட்டங்களின் எண்ணிக்கை. $= {}^{4}C_3 \times \left({}^{8}C_1 \times {}^{8}C_1 \times {}^{8}C_2\right)$

$= 4 \times (8 \times 8 \times 8) = 2048$

எல்லாம் வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிராத தெரிவுகள்

$$4960 - 2048 = 2912$$

அல்லது

எல்லாம் ஒரே நிறங்களைக் கொண்டிருக்கும் தெரிவுகள்

$$= {}^4C_1 \times {}^8C_3 = 4 \times 56 = 224$$

இரண்டு ஒரே நிறமும், மற்றைய இன்னொரு நிறமும் கொண்டிருக்கும் தெரிவுகள்.

$$= \left({}^4C_1 \times {}^8C_2\right) \times \left({}^3C_1 \times {}^8C_1\right)$$

$$= (4 \times 28) \times (3 \times 8)$$

$$= 112 \times 24 = 2688$$

எல்லாம் வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிராத

தெரிவுகள் $= 224 + 2688 = 2912$

$$\left[224 + 2688 + 2048 = 4960\right]$$

உதாரணம் 14

(a) தளமொன்றில் A, B, C ...., J ஆகிய 10 புள்ளிகள் உள்ளன. எந்த ஒரு மூன்று புள்ளிகளும் நேர் கோடொன்றில் அமைந்திருக்கவில்லை.

(i) இப்புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் பெறக்கூடிய நேர் கோடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) A அல்லது B யினூடாகச் செல்லாத நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) இப்புள்ளிகளால் பெறக்கூடிய முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iv) இம் முக்கோணிகளில் எத்தனை முக்கோணிகள் A ஐ உச்சியாகக் கொண்டுள்ளன.

(v) இம் முக்கோணிகளில் எத்தனை முக்கோணிகள் AB ஐ ஒரு பக்கமாகக் கொண்டுள்ளன.

(b) 9 பொருட்களில் 4 பொருட்கள் ஒரே வகையானவை; 2 பொருட்கள் இன்னொரு வகையானவை; ஏனைய 3 உம் வெவ்வேறானவை. இந்தப் பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

(a) (i) எந்த ஒரு 3 புள்ளிகளும் நேர்கோடொன்றில் அமையவில்லை. ஆகவே எந்த இருபுள்ளிகளையும் இணைக்கும் நேர்கோடுகள் வேறுவேறானவை.

நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{10}C_2 = 45$

(ii) A அல்லது B யினூடாகச் செல்லாத நேர்கோடுகள், ஏனைய 8 புள்ளிகளிலிருந்து பெறப்படும் நேர்கோடுகளாகும்.

அவற்றின் எண்ணிக்கை ${}^{8}C_2 = 26$

(iii) முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை ${}^{10}C_3 = 120$

(iv) உச்சி A ஐயும், ஏனைய 9 புள்ளிகளில் இரண்டையும் இணைத்துப் பெறப்படும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை ${}^{9}C_2 = 36$

(v) A, B என்ற இருபுள்ளிகளையும், ஏனைய 8 புள்ளிகளில் ஒருபுள்ளியையும் இணைத்துப் பெறப்படும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை ${}^{8}C_1 = 8$

(b) AAAA BB CDE – 9 பொருட்கள்

9 பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை எடுக்கும்போது

(i) 3 பொருட்களும் ஒரே இனம்

(ii) இரு பொருட்கள் ஒரே இனம், மற்றையது வேறு இனம்.

(iii) எல்லாம் வெவ்வேறானவை

(i) ${}^{1}C_1 = 1$ வழியிலும்

(ii) ${}^{2}C_1 \times {}^{4}C_1 = 8$ வழிகளிலும்

(iii) ${}^{5}C_3 = 10$ வழிகளிலும் பெறப்படும்

மொத்தம் $1 + 8 + 10 = 19$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்.

உதாரணம் 15

(a) அடுத்து வரும் p எண்ணிக்கையான நிறையெண்களின் பெருக்கம் $p!$ ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

(b) $(n+1)$ வேறுவேறான பொருட்களிலிருந்து தடவைக்கு r பொருட்களை எடுக்கும் முறையைக் கருதி ${}^{n+1}C_r = {}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1}$ எனக் காட்டுக.

(a) அடுத்துவரும் p நிறையெண்கள் $n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots\ldots,\ [n + (p-1)]$ என்க. பெருக்கம் $= n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots[n + (p-1)]$ ஆகும்.

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)......(n+p-1)}{p!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3).....(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3 ....p}$$

$$=\frac{1\times 2\times 3\times ....\times(n-1)}{1\times 2\times 3\times ....\times(n-1)}\times\frac{n(n+1)(n+2)........(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3 ....p}$$

$$=\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}=\frac{(n-1+p)!}{(n-1)!\,p!}={}^{n-1+p}C_p$$

இது ஒரு நேர்நிறையெண்

எனவே அடுத்துவரும் p, நேர்நிறையெண்களின் பெருக்கம் $p!$ ஆல் வகுபடும்.

(b) $A_1, A_2, A_3, ...A_n, A_{n+1}$ என்னும் எல்லாம் வேறுவேறான பொருட் களைக் கருதுக.

இவற்றிலிருந்து தடவைக்கு r பொருட்கள் வீதம் எடுக்கும் எண்ணிக்கை ${}^{n+1}C_r$ ஆகும்.

r பொருட்களை எடுக்கும் போது குறித்த ஒரு பொருள் (A_1 என்க) உள்ள கூட்டங்களின் எண்ணிக்கையானது, அப்பொருளைத் தவிர்த்து ஏனைய n பொருட்களிலிருந்து $(r-1)$ பொருட்களை எடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக் கைக்கு சமமாகும். இதன் பெறுமானம் ${}^{n}C_{r-1}$

இப்பொழுது குறித்த அப்பொருள் (A_1) இல்லாத கூட்டங்களின் எண்ணிக்கை, அப்பொருளைத் தவிர்த்து ஏனைய n பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை எடுக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாகும் இதன் பெறுமானம் ${}^{n}C_r$

ஆகவே ${}^{n+1}C_r = {}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1}$

எல்லாம் வேறுபடாத பொருட்களினுடைய வரிசைமாற்றங்களும் சேர்மானமும்.

எல்லாம் வேறுபடாத பொருட்களினுடைய வரிசைமாற்றங்களும் சேர்மானமும்

உதாரணம் 16

(a) GONAPINUWALA என்னும் சொல்லின் எழுத்துக்களைக் கொண்டு செய்யத் தக்க வேறுவேறான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை

(i) ஒருதடவை எல்லாப் பன்னிரண்டு எழுத்துக்களையும் எடுக்கும்போது,

(ii) பன்னிரண்டு எழுத்துக்களிலிருந்து ஒருதடவை எவையேனும் நான்கு எழுத்துக்களை எடுக்கும்போது காண்க.

GONAPINUWALA ——————— 12 எழுத்துக்கள்

G - 1, O - 1, N - 2, A - 3, P - 1, I - 1, U - 1, W - 1, L - 1

(i) 12 எழுத்துக்களையும் எடுக்கும்போது வரிசை மாற்றங்களின்

எண்ணிக்கை $= \dfrac{12!}{3! \times 2!}$

(ii) தடவைக்கு நான்காக எடுக்கும் போது பின்வரும் முறைகளில் நிகழலாம்.

	தெரியும் வழிகள்	வரிசை மாற்றங்கள்
(i) 3 ஒரேஇனம், 1 வேறுஇனம் - 3, 1	${}^1C_1 \times {}^8C_1 = 8$	$8 \times \dfrac{4!}{3!} = 32$
(ii) 2 ஒரே இனம், 2 இன்னொருஇனம் - 2, 2	${}^2C_2 = 1$	$1 \times \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$
(iii) 2 ஒரே இனம், மற்றைய இரண்டும் வேறானவை - 2, 1, 1	${}^2C_1 \times {}^8C_2 = 56$	$56 \times \dfrac{4!}{2!} = 672$
(iv) எல்லாம் வேறானவை - 1, 1, 1, 1	${}^9C_4 = 126$	$126 \times 4! = 3024$

வரிசைமாற்றங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 32 + 6 + 672 + 3024$
$= 3734$

உதாரணம் 16

ALLITERATION என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு நான்காக எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

ALLITERATION ———— 12 எழுத்துக்கள்

A - 2, L - 2, I - 2, E - 1, R - 1, T - 2, O - 1, N - 1

2 ஒரே இனம், மற்றைய 2 இன் இன்னொரு இனம் 2,2	${}^{4}C_{2} = 6$
2 ஒரே இனம் மற்றைய இரண்டும் வேறு வேறானவை 2, 1, 1	${}^{4}C_{1} \times {}^{7}C_{2}$ $= 4 \times 21 = 84$
எல்லாம் வேறு வேறானவை 1, 1, 1, 1	${}^{8}C_{4} = 70$
மொத்தத் தெரிவுகள்	160

ஒரு தொகுதி பொருட்களை வேறு வேறு கூட்டங்களாகப் பிரித்தல்

(i) $(m+n)$ எண்ணிக்கையான பொருட்களை முறையே m, n கொண்ட இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை, ${}^{m+n}C_{m}$ அல்லது ${}^{m+n}C_{n}$ ஆகும்.

$(m+n)$ பொருட்களிலிருந்து m பொருட்களை எடுக்கும்போது மீதி n பொருட்களும் ஒரு கூட்டமாக அமையும்.

கூட்டங்களின் எண்ணிக்கை ${}^{m+n}C_{m} = \dfrac{(m+n)!}{m! \times n!}$ ஆகும்.

A, B, C என்ற 3 பொருட்களை கருதுக. 2, 1 எண்ணிக்கை கொண்ட கூட்டங்களாக ${}^{3}C_{2}\left(= {}^{3}C_{1}\right)$ வழிகளில் பிரிக்கலாம்.

AB C	———— (1)
AC B	———— (2) 3 வழிகளில் பிரிக்கலாம்.
BC A	———— (3)

$2n$ எண்ணிக்கையான பொருட்களை ஒவ்வொன்றும் n எண்ணிக்கையான இருகூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை.

$2n$ பொருட்களிலிருந்து n பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள் $= {}^{2n}C_n$ ஆகும்.

இங்கு மீதி n உம் ஒரு கூட்டமாக அமையும். இங்கு ஒவ்வொரு கூட்டங்களும் சம எண்ணிக்கையாக இருப்பதால், சம இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{2n}C_n \times \frac{1}{2!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \times \frac{1}{2!}$ ஆகும்.

A, B, C, D ஆகிய 4 பொருட்களைக் கருதுக. ஒவ்வொன்றும் 2 கொண்ட இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளைப் பார்ப்போம்.

4 பொருட்களிலிருந்து 2 பொருட்களை ${}^4C_2$ வழிகளில் $\left({}^4C_2 = 6\right)$ எடுக்கலாம்.
A, B, C, D இல் 2 பொருட்களை எடுக்கும் வழிகள் AB, AC, AD BC, CD, BD ஆகும். இங்கு AB ஐ ஒரு கூட்டமாக எடுக்கும் போது CD இன்னொரு கூட்டமாவதைக் காணலாம்.

AB CD	—— (1)
AC BD	—— (2)
AD BC	—— (3)
BC AD	———— * (3)
CD AB	———— * (1)
BD AC	———— * (2)

இங்கு 6 வழிகள் அல்ல 3 வழிகளே உண்டு என்பதை அவதானிக்கவும்.
கூட்டமாக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை.

$$= {}^4C_2 \times \frac{1}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{1}{2!} = 3$$

A, B, C, D ஆகிய 4 பொருட்களை 3, 1 எண்ணிக்கையான இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $^{4}C_3 = 4$ ஆகும்.

ABC	D
ACD	B
ABD	C
BCD	A

நான்கு வழிகளில் 3, 1 எண்ணிக்கை கொண்ட இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(ii) $(m+n+p)$ எண்ணிக்கையான பொருட்களை முறையே m, n, p கொண்ட மூன்று கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகள்.

முதலில் $(m+n+p)$ பொருட்களிலிருந்து m பொருட்களை $^{m+n+p}C_m$ வழிகளில் எடுக்கலாம். பின்னர் மீதி $(n+p)$ பொருட்களிலிருந்து n பொருட்களை $^{n+p}C_n$ வழிகளில் எடுக்கலாம்.

ஆகவே m, n, p கொண்ட கூட்டங்களாக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{m+n+p}C_m \times {}^{n+p}C_n$$

$$= \frac{(m+n+p)!}{m!\,(n+p)!} \times \frac{(n+p)!}{n!\,p!}$$

$$= \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $m = n = p$ எனின், கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{3m!}{m!\,m!\,m!} \times \dfrac{1}{3!}$ எனக் காட்டலாம்.

உதாரணம் 18

(a) வேறுவேறான 6 பொருட்களை 3, 2, 1 கொண்ட மூன்று கூட்டங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

(b) வேறுவேறான 6 பொருட்களை 2, 2, 2, கொண்ட மூன்று கூட்டங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

(a) 6 பொருட்களை 3, 2, 1 கொண்ட கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^6C_3 \times {}^3C_2 = 20 \times 3 = 60 \text{ வழிகளில்}$$

பொருட்கள் A, B, C, D, E, F
6 பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை

${}^6C_3 = 20$ வழிகளில் எடுக்கலாம். அவற்றுள் ABC ஐக் கருதுக.

ABC	DE	F
ABC	DE	E
ABC	EF	D

இவ்வாறு $20 \times 3 = 60$ வழிகள் உண்டு

(b) 6 பொருட்களை 2, 2, 2, கொண்ட மூன்று கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times \frac{1}{3!}$$

$$= \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{1}{3!}$$

$$= \frac{6!}{2! \times 2! \times 2! \times 3!} = 15 \text{ வழிகள்}$$

உதாரணம் 19

(a) 6 வேறுவேறான பரிசுகளை 3 மாணவர்களுக்கிடையில் 3, 2, 1 என்றவாறு எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

(b) 6 வேறுவேறான பரிசுகளை ஒவ்வொருவருக்கும் 2 பரிசுகள் வீதம் 3 மாணவர்களுக்கிடையில் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

(a) 6 வேறு வேறான பரிசுகளை 3, 2, 1 எண்ணிக்கையான கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^6C_3 \times {}^3C_2 = 20 \times 3 = 60 \text{ வழிகள்}$$

1 வழியில் பெறப்பட்ட பரிசை 3 மாணவர்களுக்கிடையில் 3! வழிகளில் கொடுக்கலாம்.

எனவே கொடுக்கப்படக் கூடிய வழிகள் $= 60 \times 3!$

$= 360$

(b) 6 வேறு வேறான பரிசுகளை $2, 2, 2$ எண்ணிக்கையான கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 \times \frac{1}{3!}$$

$$= \frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} \times \frac{1}{3!}$$

ஒவ்வொரு முறையிலும் 3 மாணவர்களுக்கிடையில் 3! வழிகளில் கொடுக்கலாம்.

எனவே கொடுக்கப்படக் கூடிய வழிகள் $= \dfrac{6!}{2! \times 2! \times 2!} \times \dfrac{1}{3!} \times 3!$

$= 90$

எல்லாம் வித்தியாசமற்ற n பொருட்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் எந்த ஒரு எண்ணிக்கையிலான பொருட்களை எடுக்கக்கூடிய சேர்மானங்கள்

n பொருட்களில் p ஒருவகையானவை; q இன்னொருவகையானவை; r மூன்றாவது வகையானவை என்க.

ஒரே வகையான p பொருட்களில் 0, 1, 2, 3, ... அல்லது p பொருட்களை எடுக்கலாம். எனவே $(p+1)$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். இங்கு O என்பது, p பொருட்களில் எந்த ஒரு பொருளையும் தெரிவு செய்யாது விடுதல் ஆகும்.

இவ்வாறே q பொருட்களையும், r பொருட்களையும் கருதுவதால், மொத்தத் தெரிவு களின் எண்ணிக்கை $= (p+1)(q+1)(r+1)$ ஆகும்.

இங்கு $p=0$ உம், $q=0$ உம், $r=0$ உம் என்பது எந்த ஒரு பொருளையும் தெரிவு செய்யாதிருத்தல் என்பதாகும். எனவே தெரிவு செய்யப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $(p+1)(q+1)(r+1) - 1$ ஆகும்.

பின்வரும் உதாரணத்தை அவதானிக்க

$a \; a \; a \quad b \; b \; b \; b \quad c \; c \; c \; c \; c, \; d, \; e$

என்பவற்றிலிருந்து ஒரு தடவையில் எந்த ஒரு எண்ணிக்கையான எழுத்தையும் எடுக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை.

எடுக்கக்கூடிய a இன் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, ——— 4 வழிகள்

எடுக்கக்கூடிய b இன் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, 4 ——— 5 வழிகள்

எடுக்கக்கூடிய c இன் எண்ணிக்கை 0, 1, 2, 3, 4, 5 ——— 6 வழிகள்

எடுக்கக்கூடிய d இன் எண்ணிக்கை 0, 1, ——— 2 வழிகள்

எடுக்கக்கூடிய e இன் எண்ணிக்கை 0, 1, ——— 2 வழிகள்

எடுக்கக்கூடிய மொத்த வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= (4 \times 5 \times 6 \times 2 \times 2) - 1$ ஆகும்.

$= 480 - 1 = 479$

[இங்கு a, b, c, d, e இன் எண்ணிக்கை **எல்லாம்** பூச்சியமாகும் போது எந்த ஒரு எழுத்தும் எடுக்கப்படவில்லை என்பதே கருத்தாகும். எனவே 1 கழிக்கப்படுகிறது.]

உதாரணம் 20

(a) 80 இன் காரணிகள் எத்தனை?

(b) 360 இன் காரணிகள் எத்தனை?

(c) 98 ஐ இரு நேர்நிறையெண்களின் பெருக்கமாக எத்தனை வழிகளில் எழுதலாம்?

(d) 144 ஐ இரு நேர்நிறையெண்களின் பெருக்கமாக எத்தனை வழிகளில் எழுதலாம்?

(a) 80 ஐ முதன்மைக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதவேண்டும்.

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5^1$$

இங்கு 2, நான்கு தடவைகள் உள்ளன. 5, ஒரு தடவை உள்ளது. எந்த ஒரு எண்ணிக்கையான எண்களையும் எடுக்கக் கூடிய வழிகள்

$= 5 \times 2 - 1 = 9$ ஆகும்.

9 காரணிகள் பெறப்படும். மேலும் 1 என்பதும் ஒரு காரணி என்பதால், காரணிகளின் எண்ணிக்கை 10 ஆகும்.

காரணிகள் $\{1,2,4,5,8,10,16,20,40,80\}$

(b) 360 ஐ முதன்மைக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுத வேண்டும்.

$360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ ஆகும்.

காரணிகள் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36,$

$40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$

(c) $98 = 2 \times 7 \times 7 = 2^1 \times 7^2$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 2 \times 3 = 6$

எனவே இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக 3 வழிகளில் எழுதலாம்.

98 இன் காரணிகள் $= \{1, 2, 7, 14, 49, 98\}$

$1 \times 98, \quad 2 \times 49, \quad 7 \times 14$ ——— 3 வழிகள்.

(d) $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 5 \times 3 = 15$

144 இன் காரணிகள் $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, \boxed{12}, 16, 18, 24, 36,$

$48, 72, 144\}$

12 ஐத் தவிர்த்து ஏனைய காரணிகளின் எண்ணிக்கை 14. இவற்றினை 7 வழிகளில் இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதலாம். $12 \times 12 = 144$ எனவே மொத்தம் 8 வழிகளில் எழுதலாம்.

$1 \times 144, \ 2 \times 72, \ 3 \times 48, \ 4 \times 36, \ 6 \times 24$

$8 \times 18, \ 9 \times 16, \ 12 \times 12$ என்பவையே 8 வழிகளாகும்.

குறிப்பு : சதுர எண் ஒன்றின் காரணிகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றையெண்ணாகவும், ஏனைய எண்களின் காரணிகளின் எண்ணிக்கை இரட்டை எண்ணாகவும் இருக்கும்.

உதாரணம் 21

10 ஆண்களிலிருந்தும், 10 பெண்களிலிருந்தும் கலந்த இரட்டை ரெனிஸ் விளையாட்டுக்கு, வீரர்களைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது. அவ்விரண்டு எதிர்ப்பக்கங்களுக்கும் ஆக்கப்படத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

B - 10, G - 10

10 ஆண்களிலிருந்து 2 ஆண்களையும், 10 பெண்களிலிருந்து 2 பெண்களையும் தெரிவு செய்யக்கூடிய வெவ்வேறான

வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{10}C_2 \times {}^{10}C_2$

$= 45 \times 45 = 2025$

அவற்றுள் ஒரு தெரிவு $B_1\, B_2\, G_1\, G_2$ ஐக் கருதுக. இவர்களிலிருந்து 1 ஆணையும், 1 பெண்ணையும் தெரிவு செய்யும் வழிகள்

${}^2C_1 \times {}^2C_1 = 2 \times 2 = 4$ ஆகும்.

$\left[B_1 G_1,\ B_2 G_2,\ B_1 G_2,\ B_2 G_2\right]$

$$\left.\begin{array}{l} B_1 G_1 \text{——} B_2 G_2 \\ B_1 G_2 \text{——} B_2 G_1 \end{array}\right\} \text{2 வழிகள்}$$

எனவே இருபக்கங்களும் ஆக்கப்படத்தக்க வழிகள்

$2025 \times 2 = 4050$ ஆகும்

பயிற்சி 7

1. (i) $\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{50}{7!}$

   (ii) $100! = 2^{50} \times 50! \left(1 \times 3 \times 5 \ldots. \times 99\right)$ எனக் காட்டுக

2. ${}^{2n}P_3 = 12 \cdot {}^{n}P_2$ எனின் n ஐக் காண்க.

3. $n! = 5040$ எனின் n ஐக் காண்க.

4. ${}^{m+n}P_2 = 56, \quad {}^{m-n}P_2 = 12$ எனின் m, n ஐக் காண்க.

5. ${}^{n}P_4 = 18 \times {}^{n-1}P_2$ எனின் n ஐக் காண்க.

6. விளையாட்டு மைதானம் ஒன்றிற்கு 4 வாயில்கள் உண்டு. ஒரு வாயிலால் மைதானத்தினுள் உட்சென்று இன்னொரு வாயிலால் வெளியேறுவதற்கான எண்ணிக்கை யாது?

7. ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை ஒரு முறைமட்டும் பயன்படுத்தி $1, 2, 3, 4, 5$ ஆகிய இலக்கங்களைக் கொண்டு எத்தனை நிறை எண்கள் அமைக்கலாம்?

8. 1870 என்ற எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை ஒரு முறை மட்டும் பயன்படுத்தலாம் எனின், எத்தனை நிறை எண்கள் அமைக்கலாம்?

9. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ஆகிய இலக்கங்களை ஓர் எண்ணில் ஒரு முறை மட்டும் பயன்படுத்தி 5000 க்கும் 6000 க்குமிடைப்பட்ட எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

10. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ஆகிய எல்லா இலக்கங்களையும் ஒரு எண்ணில் ஒருமுறை மட்டும் பயன்டுத்தி எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

    (i) ஒற்றை எண்கள்   (ii) இரட்டை எண்கள்

    (iii) 5 ஆல் பிரிபடும் எண்கள்   (iii) 25 ஆல் பிரிபடும் எண்கள்

    என்பவற்றின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

11. 0, 1, 2, 5, 6, 8 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி ஓர் எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை திரும்பவும் பயன்படுத்தலாம் எனின் எத்தனை 4 இலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?
   (i) இவற்றுள் இரட்டை எண்கள் எத்தனை?
   (ii) 5 ஆல் பிரிபடும் எண்கள் எத்தனை?

12. ஒருவர் 5 கடிதங்களை அனுப்ப வேண்டியுள்ளது. 3 தபால் அலுவலகங்கள் உள்ளன. எத்தனை வழிகளில் 5 கடிதங்களையும் அனுப்பலாம்?

13. 4 ஆண்களும், 4 பெண்களும் வரிசை ஒன்றில் அமரும் போது எந்த இரு பெண்களும் ஒன்றாக இராதவாறு உள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

14. 4 ஆண்களும், 4 பெண்களும் வரிசையொன்றில் அமரும் போது பெண்கள் எப்போதும் ஒன்றாக அமரும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

15. n மாணவர்கள் வரிசை ஒன்றில் அமரும் போது குறித்த இரு மாணவர்கள் எப்பொழுதும் பிரிந்திருப்பதற்கான ஒழுங்கு முறைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

16. மாணவன் ஒருவன் மூன்று பரிசுகளையும் பெறுவதற்குத் தகுதியுடையவன் எனின் 20 மாணவர்களைக் கொண்ட வகுப்பில் 3 பரிசுகளையும் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

17. 12 மாணவர்களுக்கிடையில் இருவேறு பரிசுகளை
   (i) ஒருவர் இரு பரிசுகளையும் பெறமுடியும் எனின்
   (ii) ஒருவர் ஒரு பரிசை மட்டும் பெறமுடியும் எனின்,
   எத்தனை வழிகளில் வழங்கலாம்?

18. ஓட்டப்பந்தயம் ஒன்றில் 10 போட்டியாளர்கள் பங்கு பற்றுகின்றனர். முதல் 3 பரிசுகளையும் பெறக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

19. 4 சிவப்புநிறம், 2 நீலநிறம், 2 பச்சைநிறம் கொண்ட கொடிகள் எல்லாவற்றையும் நிலைக்குத்துக்கம்பம் ஒன்றில் தொங்கவிடுவதன் மூலம் எத்தனை வித்தியாசமான சைகைகளைப் பெறலாம்?

20. 6 வித்தியாசமான புத்தகங்களை ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (i) 3 குறித்த புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒன்றாக இருப்பதற்குரிய
   (ii) 3 குறித்த புத்தகங்கள் எப்போதும் தனியாக இருப்பதற்குரிய
   வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

21. $1000, 10000$ என்பவற்றுக்கிடையில் வேறுவேறான இலக்கங்களையுடைய எத்தனை நிறையெண்கள் உள்ளன?

22. (வேறுவேறானவையாய் இருத்தல் வேண்டும் என்பதின்றிய) n இலக்கங்கள் கொண்ட நேர்நிறையெண்களின் எண்ணிக்கை $10^n - 10^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

23. வட்ட மேசை ஒன்றில் 5 பேர், அவர்களில் இருவர் எப்போதும் ஒன்றாக இருக்குமாறு அமரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

24. 6 வெவ்வேறு நிறங்களையுடைய மணிகளைக் கொண்டு ஒரு கழுத்துமாலை அமைக்கப்படுகிறது. எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

25. 5 ஆண்களும், 4 பெண்களும் ஒரு வட்ட மேசையில் இருக்கின்றனர். ஆசனங்கள் பற்றியும், வலஞ்சுழி, இடஞ்சுழிப் போக்குகள் பற்றியும் வேற்றுமையாதும் காணப்படாதெனின் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஆண்கள் ஒருங்கே, இருக்காதவாறு அவர்கள் இருத்தப்படக் கூடிய வேறு வேறு வழிகளின் தொகை 1440 எனக் காட்டுக.

26. Prevarication எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களுள்
(a) r எனும் ஈரெழுத்துக்களும் ஒருங்கே வராதவாறும்
(b) r எனும் ஓரெழுத்தும் i எனும் ஓரழுத்தும் ஒருங்கே வருமாறும் உள்ள அச்சொல்லின் எழுத்துக்களின் ஒழுக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

7 (b)

1. (i) $2 \times nC_4 = 35 \times {}^{\frac{n}{2}}C_3$ எனின், n ஐக் காண்க.

(ii) ${}^{28}C_{r+4} = {}^{28}C_{r-2}$ எனின் r ஐக் காண்க.

(iii) ${}^{n}P_r = 840,\ {}^{n}C_r = 35$ எனின் n, r என்பவற்றைக் காண்க.

2. 5 ஆசிரியர்களிலிருந்தும், 15 மாணவர்களிலிருந்தும், 2 ஆசிரியரையும் 3 மாணவர்களையும் கொண்ட குழுவொன்று தெரிவு செய்யப்படக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

3. 8 வேறுவேறான பொருட்களிலிருந்து தெரிவு செய்யக்கூடிய தெரிவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை யாது?

4. 9 சிறுவர்களிலிருந்தும், 3 சிறுமிகளிலிருந்தும் 4 பேரைக் கொண்ட குழுவொன்று எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்?
இக்குழுக்களில்
   (i) ஒருசிறுமி மட்டும் இருக்கும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?
   (ii) குறைந்தது ஒரு சிறுமியாவது இருக்கும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?

5. பரீட்சை ஒன்றில் 13 வினாக்களில் 10 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும்.
   (i) எத்தனை வழிகளில் வினாக்களைத் தெரிவு செய்யலாம்?
   (ii) முதல் இரண்டு வினாக்களுக்கும் கட்டாயம் விடையளிக்க வேண்டும் எனின்,
   (iii) முதலாம் அல்லது இரண்டாம் வினாவிற்கு விடையளிக்க வேண்டும்; ஆனால் இரண்டிற்கும் அல்ல.
   (iv) முதல் 5 வினாக்களில் ஏதேனும் 3 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் எனின்,
   (v) முதல் 5 வினாக்களில் ஆகக்குறைந்தது 3 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் எனின்,

   எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

6. m பக்கங்களையுடைய பல்கோணி ஒன்றின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{1}{2}m(m-3)$ என நிறுவுக.

7. m பக்கங்களையுடைய பல்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை இணைப்பதன் மூலம் பெறப்படும் வேறுவேறான முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

8. எல்லாம் சமநீளமுள்ள ஒன்பது, வித்தியாசமான நிறக்குச்சிகளிலிருந்து, உருவாக்கப்படக் கூடிய முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை யாது? இவற்றி லிருந்து மூன்று முக்கோணிகளை எத்தனை வித்தியாசமான வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

9. குறித்த நீளமுள்ள நேர்கோடு ஒன்று m புள்ளிகளில் வெட்டப்பட்டால், பெறப் படும் கோட்டுத்துண்டங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

10. வரிசை ஒன்றில் 8 ஆசனங்கள் உள்ளன.
   (i) எந்த ஒரு ஆசனத்திலும் இருக்கலாம் எனின், 6 பேர் இருக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) குறித்த இரு ஆசனங்களைப் பாவிக்க வேண்டும் எனின் 6 பேர் இருக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

11. ஆங்கில 5 உயிரெழுத்துக்களிலும், 21 மெய்யெழுத்துக்களிலுமிருந்து வேறு வேறு எழுத்துக்களைக் கொண்ட வரிசைமாற்றங்கள் உருவாக்கப்படு கின்றன. 2 உயிரெழுத்துக்களையும், 3 மெய்யெழுத்துக்களையும் கொண்ட வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

12. 3 பெரிய எழுத்துக்கள் (Capitals), 6 மெய்யெழுத்துக்கள், 4 உயிரெழுத்துக்கள் என்பன தரப்பட்டுள்ளன. பெரிய எழுத்து ஒன்றுடன் தொடங்கி 3 மெய்யெழுத்துக் களையும் 2 உயிரெழுத்துக்களையும் கொண்டிருக்கக் கூடியதாக எத்தனை சொற்கள் அமைக்கலாம்?

13. 123456 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் 4 இலக்கங்களை எடுத்து 4 இலக்கங்களையுடைய எண்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. 3, 4 எனும் இரு இலக்கங்களையும் கொண்டிருக்கும் எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

14. (i) 123456 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் 4 இலக்கங்களை எடுத்து,

(ii) 123450 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் 4 இலக்கங்களை எடுத்து,

25 ஆல் பிரிபடும் எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

15. 50 ஆண்களையும், 20 பெண்களையும், இரு பெண்கள் ஒன்றாக இருக்காதவாறு ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகளின் எண்ணிக்கை

$50! \times 20! \times 51C_{20}$ எனக் காட்டுக.

16. பக்கங்களில் ஒன்று 10 cm, 11 cm, 12 cm ஆக இருக்குமாறு எத்தனை முக்கோணிகள் அமைக்கலாம்?

17. "examination" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு மூன்றாக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் அமைக்கலாம்?

18. "alliteration" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு நான்காக எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

19. 9 பொருட்களில் 4 பொருட்கள் ஒரேமாதிரியானவை. 2 பொருட்கள் இன்னொரு வகையானவை. ஏனைய 3 பொருட்களும் வேறுவேறானவை. இவற்றிலிருந்து 3 பொருட்களைத் தெரிவு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

20. "devastation" என்ற சொல்லிலிருந்து தடவைக்கு 4 எழுத்துகள் எடுக்கப்பட்டு சொற்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. இரு மெய்யெழுத்துக்களையும் இரு உயிரெழுத்துக்களையும் கொண்டிருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை யாது? இவற்றுள் எத்தனை சொற்களில் இரண்டு t உம் ஒன்றாக வருகின்றன?

21. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து தடவைக்கு 5 இலக்கங்களை எடுத்து எத்தனை வித்தியாசமான எண்கள் அமைக்கலாம்?

22. வெவ்வேறான பத்துப் புத்தங்கள் (நான்கு பச்சைநிறம், நான்கு நீல நிறம், இரண்டு சிவப்பு நிறம்) தட்டு ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளன. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் எல்லாக் கணிப்புக்களையும் தெளிவாகக்காட்டிப் புத்தகங்கள் தட்டில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
(i) நிறமும், ஒழுங்கும் புறக்கணிக்கப்படும்போது,
(ii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமித்து வைக்கப்படும் போது,
(iii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும், ஒரே ஒழுங்கிலும் வைக்கப்படும்போது,
(iv) பச்சை நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும், ஒரே ஒழுங்கிலும் ஆனால் சிவப்பு நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் பிரித்து வைக்கப்படும் போது.

23. (a) 1 ஐந்து ரூபா நாணயத்தையும் 2, இரண்டு ரூபா நாணயங்களையும், 4 ஐம்பது சத நாணயங்களையும் ஒரு பை கொண்டுள்ளது. வெவ்வேறு வகையான 3 நாணயங்கள் எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

(b) HOMOGENEOUS எனும் சொல்லின் எழுத்துக்களை (எல்லாவற்றையும்) எடுத்து 3 326 400 வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம் எனக் காட்டுக. இவற்றுள் எத்தனை மெய்யெழுத்துக்களுடன் ஆரம்பித்து மெய்யெழுத்துக்களில் முடிவடைகின்றன.

(c) பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் 0, 1, 4, 5, 6, 7 ஆகியவற்றிலிருந்து எத்தனை நான்கு இலக்க எண்கள் ஆக்கப்படலாம்?
(i) இலக்கங்கள் மீள்வருவது அனுமதிக்கப்பட்டால்,
(ii) இலக்கங்கள் இருமுறைக்கு மேல் மீள்வருவது அனுமதிக்கப்படா விட்டால்.

24. (i) KANAKARAYAN KULUM என்னும் சொல்லின் பதினாறு எழுத்துக்களையும் கொண்டு தடவைக்கு எல்லா எழுத்துக்களையும் கொண்டு

செய்யத்தக்க வேறுவேறான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
அத்துடன் மேற்போந்த சொல்லின் உயிர்எழுத்துக்கள் A யும் U உம் தவிர்ந்த ஏனைய எழுத்துக்களைக் கொண்டு தடவைக்கு 4 எழுத்துக்களை எடுக்கும்போது செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை 41 எனக்காட்டுக.

(ii) எந்த இரு பெண்பிள்ளைகளும் ஒருவரையொருவர் அடுத்தடுத்து இராதவாறு ஆறு ஆண்பிள்ளைகளையும், நான்கு பெண்பிள்ளைகளையும் வட்டமொன்று வழியே எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

25. 12 அங்கத்தவர்களை முறையே 5, 4, 3 அங்கத்தவர்கள் கொண்ட மூன்று குழுக்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

26. 9 வேறுவேறான பொருட்களை ஒவ்வொரு குழந்தைக்கும் 3 பொருட்களாக, 3 குழந்தைகளுக்கிடையில் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

27. 9 மாணவர்களை, ஒவ்வொரு குழுவிலும் 3 மாணவர்கள் உள்ள 3 குழுக்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

28. 10 மாணவர்கள் மூன்று குழுக்களாக ஒன்றில் நான்கு பேரும், மற்றைய ஒவ்வொன்றிலும் 3 பேராக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

29. பெட்டி ஒன்றினுள் 12 பந்துகள் உள்ளன. மூன்று பந்துகளாக, அடுத்தடுத்து 4 தடவைகளில் பிரதி வைப்பின்றி எத்தனை வழிகளில் எடுக்கலாம்?

30. 120 காரணிகளின் பெருக்கமானது ஒவ்வொன்றும் 20 காரணிகளைக் கொண்ட 6 பெருக்கங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

31. 8 பொருட்களை ஒவ்வொன்றும் 2 பொருட்கள் கொண்ட கூட்டங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

32. 8 நாணயங்களிலிருந்தும் ஒவ்வொன்றும் நான்கு நாணயங்கள் கொண்டதாக எத்தனை பொதிகள் ஆக்கலாம்?
இவற்றுள் குறித்த ஒரு நாணயம் எத்தனை பொதிகளில் இருக்கும்?

33. n மாணவர்கள் இரு குழுக்களாக, குறைந்தது குழுவொன்றில் ஒரு மாணவனாவது இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

34. 14 அங்கத்தவர்கள் 6 குழுக்களாகப் பிரிக்கப்படுகின்றனர். இரு குழுக்களில் ஒவ்வொன்றிலும் 3 பேரும், மற்றைய ஒவ்வொன்றிலும் 2 பேரும் இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

35. ஒரே வகையான 7 பழங்களை நான்கு மனிதர்களிடையே

(i) குறைந்தது ஒருவர் ஒரு பழத்தையாவது பெறுமாறு

(ii) ஒருவருக்கோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டோருக்கோ பழங்கள் எதுவும் கிடைக்காமலிருப்பினும் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்.

36. (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 என்னும் ஏழு நிறையெண்களிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு மூன்று நிறையெண்களை எடுப்பதன் மூலம் செய்யத்க்க வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

இவ்வரிசை மாற்றங்களில் எத்தனை

(i) நிறையெண் 2 ஐக் கொண்டிருக்கும்?

(ii) 1, 4 என்னும் நிறையெண்களைக் கொண்டிருக்கும்?

(iii) 3,5 என்னும் நிறையெண்களைக் கொண்டிருக்கும்?

(b) முதலாம் பையில் செப்பமாக 8 பந்துகளைக் கொண்டிருக்கத்தக்கதாக வெவ்வேறான 10 பந்துகளை 5 பைகளில் எத்தனை விதங்களில் இடலாம்?

37. $2n$ எண்ணிக்கையானோரை இருவட்ட மேசைகளில் ஒவ்வொரு மேசையிலும் n எண்ணிகையானோர் இருக்குமாறு ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $\dfrac{(2p)!}{p^2}$ எனக் காட்டுக.

38. (a) 720 ஐ முதன்மைக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுக. இதிலிருந்து 720 இன் காரணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

720 ஐ இரு நேர்நிறை எண்களின் பெருக்கமாக எத்தனை வழிகளில் எழுதலாம்?

(b) எல்லாம் வேறுவேறான 8 முதன்மை எண்களைக் கொண்டு எத்தனை வேறுவேறான பெருக்கங்களை ஆக்கலாம்.

39. 10 ஆண்களிலிருந்தும், 10 பெண்களிலிருந்தும் கலந்த இரட்டை ரெனிஸ் ஆட்டமொன்றிற்கு விளையாடுவோர் தெரிவு செய்யப்பட வேண்டும். அவ் விரண்டு எதிர்ப்பக்கங்களுக்கும் ஆக்கப்படத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் தொகையைக் காண்க.

40. அடுத்துவரும் 10 நேர்நிறையெண்கள் உள்ளன. இவ்வெண்களிலிருந்து 5 எண்கள் எடுக்கப்படுகின்றன. எந்த இரு எண்களினதும் வித்தியாசம் 8 இற்கு சமமாகாதவாறு அவ்வெண்களை எடுக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை 146 எனக் காட்டுக.

41. n பக்கங்களையுடைய ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றைக் கருதுக.

(i) பல்கோணியின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை, மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கையின் 2 மடங்கு எனின் n ஐக் காண்க.

(ii) பல்கோணியின் உச்சிகளில், உச்சிகள் அமையுமாறு எத்தனை முக்கோணிகள் உண்டு?

(iii) மேலே (ii) இல் உள்ள முக்கோணிகளில், எத்தனை முக்கோணிகளில் சரியாக ஒருபக்கம் மட்டும், பல்கோணியின் ஒருபக்கத்துடன் பொருந்துகிறது.

(iv) மேலே (ii) உள்ள முக்கோணிகளில், எத்தனை முக்கோணிகளின் இருபக்கங்கள், பல்கோணியின் இரு பக்கங்களுடன் பொருந்துகின்றன.

இதிலிருந்து $n \geq 4$ ஆக, முக்கோணியின் உச்சிகள், பல்கோணியின் உச்சிகளில் அமையுமாறும், பக்கங்கள் பல்கோணியின் மூலைவிட்டங்களாகவும் அமையும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை $\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$ எனக் காட்டுக.

42. **(a)** 4 கணித ஆசிரியர்களையும், 3 உயிரியல் ஆசிரியர்களையும் கொண்ட ஒரு குழு உள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் அவர்கள் வரிசை ஒன்றில் இருக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

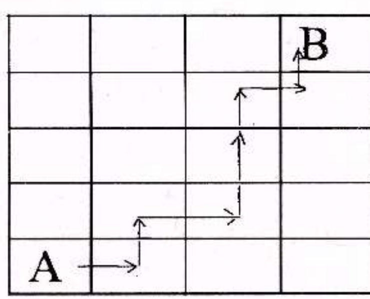
(i) எந்த ஒழுங்கிலும் அவர்கள் இருக்கலாம் எனின்

(ii) ஒரே பாட ஆசிரியர்கள் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும் எனின்

(iii) ஒரே பாடத்தைச் சேர்ந்த இரு ஆசிரியர்கள் ஒருவருக்குப் பக்கத்தில் மற்றவர் இருக்கக்கூடாதெனின்

(iv) ஒரே பாட ஆசிரியர்கள் ஒன்றாகவும், குறித்த ஒரு கணித ஆசிரியரும், உயிரியல் ஆசிரியரான அவருடைய மனைவியும் எப்போதும் ஒன்றாகவும் இருக்க வேண்டும்.

(b) செவ்வக வடிவான பாதை ஒன்றில் படத்தில் காட்டியவாறு 20 ஓடுகள் பதிக்கப்பட்டுள்ளன. குழந்தை ஒன்று A யிலிருந்து B யிற்குச் செல்ல விரும்புகிறது; அக்குழந்தை ஒரு ஓட்டிலிருந்து பக்கத்திலுள்ள ஓட்டிற்கு, வலது பக்கமாக அல்லது முன்னோக்கிப் பாய்ந்து செல்ல வேண்டும் (அவ்வாறான ஒருமுறை படத் தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.) எத்தனை வழிகள் அக்குழந்தை A யிலிருந்து B யிற்கு செல்லலாம்?



43. 6 கல்வியியலாளர்களிலிருந்தும், 9 புள்ளி விபரவியலாளர்களிலிருந்தும் 2 கல்வியியலாளர்களையும், 3 புள்ளி விபரவியலாளர்களையும் கொண்ட குழுவொன்று தெரிவு செய்யப்பட வேண்டியுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் தெரிவு செய்யப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) எந்த ஒரு கல்வியியலாளரும், எந்த ஒருபுள்ளி விபரவியலாளரும் தெரிவு செய்யப்படலாம் எனின்.

(ii) குறித்த ஒரு கல்வியியலாளர் குழுவில் இருக்க வேண்டும் எனின்,

(iii) குறித்த இரு கல்வியியலாளர்கள், ஒரே குழுவில் இருக்க முடியாதெனின்.

(iv) குறித்த ஒரு கல்வியியலாளரும், குறித்த ஒரு புள்ளிவிபரவியலாளரும் ஒரே குழுவில் இருக்க முடியாதெனின்,

44. (a) வரிசை ஒன்றில் உள்ள 6 கதிரைகளில் 3 ஆண்களும் 3 பெண்களும் இருக்க வேண்டும்.

(i) 3 பெண்களும் ஒன்றாக இருக்கவேண்டும் எனின்

(ii) ஆண்களும், பெண்களும் ஒன்றுவிட்ட ஒரு கதிரைகளில் இருக்க வேண்டும் எனின்.

அதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) தளம் ஒன்றில் 6 நேர்கோடுகள் வரையப்பட்டு, அவை வெட்டுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. எந்த மூன்று நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வில்லை எனவும், எந்த இரு நேர்கோடுகளும் சமாந்தரமில்லை எனவும் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) கோடுகள் இடை வெட்டும் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) இப்புள்ளிகளிலிருந்து, 3 புள்ளிகளை, அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர் கோட்டிலிருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப் படலாம்?

(iii) இடை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து 4 புள்ளிகளை, ஆகக்கூடியது 3 புள்ளிகள் மட்டும் ஒரு நேர்கோட்டிலிருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

8. ஈருறுப்பு விரிவு (Binomial Expansion)

$$(a+b)^{\circ} = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

இங்கு, விரிவின் உறுப்புக்களின் குணகங்கள் பின்வருமாறு உள்ளன.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

இது பஸ்காலின் முக்கோணி *(Pascal's triangle)* எனப்படும்.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் *(Binomial Theorem)*

- [நேர் நிறையெண் சுட்டிக்கானது]

n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots {}^nC_r a^{n-r} b^r$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + {}^nC_n b^n$$ ஆகும்.

இங்கு $^nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$ ஆகும்.

$$(a+b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1$$
$$= a+b$$

$$(a+b)^2 = {}^2C_0 a^2 + {}^2C_1 a^1 b^1 + {}^2C_2 b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = {}^3C_0 a^3 + {}^3C_1 a^2 b + {}^3C_2 ab^2 + {}^3C_3 b^3$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = {}^4C_0 a^4 + {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 + {}^4C_3 ab^3 + {}^4C_4 b^4$$
$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் நிறுவல்

கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவலாம்.

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + \ldots\ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots\ldots + {}^nC_n b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r a^{n-r} b^r \left(= \sum_{r=1}^{n+1} {}^nC_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1} \right)$$

$n=1$ ஆக, இ. கை. ப $= (a+b)^1 = (a+b) = a+b$

வ. கை. ப $= \sum_{r=0}^{1} {}^{1}C_r a^{1-r} b^r$

$= {}^{1}C_\circ a^1 \cdot b^\circ + {}^{1}C_1 a^\circ b^1$

$= a + b$

இ. கை. ப = வ. கை. ப

$n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$(a+b)^p = pC_\circ a^p + pC_1 a^{p-1} b + pC_2 a^{p-2} b^2$$
$$+ \ldots\ldots + pC_r a^{p-r} b^r + \ldots\ldots + pC_p b^p$$

$$(a+b)^{p+1} = (a+b)^p (a+b)$$

$$(1),\quad a(a+b)^p = pC_\circ a^{p+1} + pC_1 a^p b + pC_2 a^{p-1} b^2$$
$$+ \ldots\ldots + pC_r a^{p-r+1} \cdot b^r + \ldots\ldots + pC_p \cdot ab^p$$

$$(2),\quad b(a+b)^p = pC_\circ a^p b + pC_1 a^{p-1} b^2$$

$$+ \ldots\ldots + pC_{r-1} a^{p-r+1} \cdot b^r + pC_p - 1ab^p + pC_p \cdot b^{p+1}$$

$$(1) + (2)\quad (a+b)^{p+1} = {}^{p}C_\circ a^{p+1} + \left({}^{p}C_1 + {}^{p}C_\circ\right) a^p \cdot b +$$
$$\left({}^{p}C_2 + {}^{p}C_1\right) a^{p-1} b^2 + \ldots\ldots + \left({}^{p}C_r + {}^{p}C_{r-1}\right) a^{p-r+1} \cdot b^r$$
$$+ \ldots\ldots + \left(pC_p + pC_{p-1}\right) ab^p + pC_p b^{p+1}$$

$${}^{p}C_\circ a^{p+1} + {}^{p+1}C_1 a^p b + {}^{p+1}C_2 a^{p-1} b^2 + \ldots\ldots +$$
$$+ \ldots\ {}^{p+1}C_p ab^p + {}^{p}C_p b^{p+1}$$

$$= {}^{p+1}C_0 a^{p+1} + {}^{p+1}C_1 a^p b + \ldots\ldots\ldots + {}^{p+1}C_r a^{p+1-r} b^r$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + {}^{p+1}C_p ab^p + {}^{p+1}C_{p+1} b^{p+1}$$

$$\left[\begin{array}{c} {}^{p}C_{0} = {}^{p+1}C_{0} = 1, \ {}^{p}C_{p} = {}^{p+1}C_{p+1} = 1 \\ {}^{p}C_{r} + {}^{p}C_{r-1} = {}^{p+1}C_{r} \end{array}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r \, a^{p+1-r} \cdot b^r$$

எனவே $n = p + 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r \, a^{n-r} \, b^r \quad \text{ஆகும்.}$$

குறிப்பு : $(a+b)^n$ இன் விரிவில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன.

r ஆவது உறுப்பு $T_r = {}^{n}C_{r-1} \, a^{n-r+1} \cdot b^{r-1}$

$(r+1)$ ஆவது உறுப்பு $T_{r+1} = {}^{n}C_r \, a^{n-r} \cdot b^r$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

பின்வருவனவற்றின் விரிவை எழுதுக

(a) $(2+3x)^6$ **(b)** $\left(3xy - \frac{2}{y}\right)^5$

(a) $(2+3x)^6$

$$= {}^{6}C_0 2^6 + {}^{6}C_1 2^5 (3x) + {}^{6}C_2 2^4 (3x)^2 + {}^{6}C_3 \cdot 2^3 (3x)^3$$
$$+ {}^{6}C_4 2^2 (3x)^4 + {}^{6}C_5 2 \cdot (3x)^5 + {}^{6}C_6 (3x)^6$$
$$= 2^6 + 6 \times 32 \times 3x + 15 \times 16 \times 9x^2 + 20 \times 8 \times 27 \times x^3$$

$$+15\times 4\times 81x^4+6\times 2\times 243x^5+729x^6$$

$$=64+576x+2160x^2+4320x^3+4860x^4+2916x^5+729x^6$$

(b) $\left(3xy-\dfrac{2x}{y}\right)^5=\left[3xy+\left(\dfrac{-2x}{y}\right)\right]^5$

$$={}^5C_0(3xy)^5+{}^5C_1(3xy)^4\left(\frac{-2x}{y}\right)+{}^5C_2(3xy)^3\left(\frac{-2x}{y}\right)^2$$

$$+{}^5C_3(3xy)^2\left(\frac{-2x}{y}\right)^3+{}^5C_4(3xy)\left(\frac{-2x}{y}\right)^4+{}^5C_5\left(\frac{-2x}{y}\right)^5$$

$$=243x^5y^5+5\times 81\times(-2)x^5y^3+10\times 27\times 4x^5y$$

$$+10\times 9\times(-8)\frac{x^5}{y}+5\times 3\times 16\times\frac{x^5}{y^3}+(-32)\frac{x^5}{y}$$

$$=243x^5y^5-810x^5y^3+1080x^5y-\frac{720x^5}{y}+\frac{240x^5}{y^3}-\frac{32x^5}{y^5}$$

உதாரணம் 2

(a) $\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)^{10}$ இன் விரிவில் 7 ஆம் உறுப்பு

(b) $\left(\dfrac{1}{x^2}-x\right)^{18}$ இன் விரிவில் x^6 இன் குணகம்

(c) $\left(\dfrac{y\sqrt{x}}{3}-\dfrac{3}{x\sqrt{y}}\right)^{16}$ இன் விரிவில் நடு உறுப்பு என்பவற்றைக் காண்க.

(a) $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^{10}$ இன் விரிவில் 7 ஆம் உறுப்பு T_7 என்க.

$$T_7 = {}^{10}C_6 \times 1^4 \times \left(-\frac{1}{2}x\right)^6$$

$$= 210 \times \frac{x^6}{32} = \frac{105}{32}x^6$$

(b) $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{18}$ இன் விரிவில் $(r+1)$ ஆம் உறுப்பு T_{r+1} என்க.

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-r} (-x)^r$$

$$= (-1)^r \cdot {}^{18}C_r \, x^{3r-36}$$

$3r - 36 = 6$ ஆதல் வேண்டும்.

$$3r = 42$$

$$r = 14$$

எனவே $T_{15} = (-1)^{14} \, {}^{18}C_{14} \, x^6$

$$= {}^{18}C_{14} \, x^6$$

x^6 இன் குணகம் $= {}^{18}C_{14}$ ஆகும்.

(c) $\left(\frac{y\sqrt{x}}{3} - \frac{3}{x\sqrt{y}}\right)^{16}$ இன் விரிவில் 17 உறுப்புக்கள் உண்டு

நடு உறுப்பு, 9 ஆம் உறுப்பு ஆகும்.

$$T_9 = {}^{16}C_8 \left(\frac{y\sqrt{x}}{3}\right)^8 \times \left(\frac{-3}{x\sqrt{y}}\right)^8$$

$= {}^{16}C_8 \, \frac{y^4}{x^4}$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

(a) $\left(2x - \dfrac{3}{x^2}\right)^6$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பு யாது?

(b) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$(a + x)^n = 3b + 6bx + 5bx^2 + \dots\dots\dots$ எனின்

a, b, n என்பவற்றைக் காண்க.

(c) $(3 + 2x - x^2)(1 + x)^{34}$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகம் பூச்சியம் ஆகுமாறு r இற்கு ஒரு பெறுமானம் உண்டெனக் காட்டுக.

(a) $\left(2x - \dfrac{3}{x^2}\right)^6$

$$T_{r+1} = {}^6C_r\,(2x)^{6-r} \cdot \left(\frac{-3}{x^2}\right)^r$$

$$= {}^6C_r \cdot 2^r\,(-3)^r\,x^{6-3r}$$

x ஐச் சாராத உறுப்பைப் பெற $6 - 3r = 0 \qquad r = 2$

x ஐச் சாராத உறுப்பு $T_3 = {}^6C_2 \cdot 2^4\,(-3)^2$

$$= 15 \times 16 \times 9 = 2160$$

(b) $(a + x)^n = 3b + 6bx + 5bx^2 + \dots\dots\dots\dots$

$$(a + x)^n = {}^nC_0\,a^n + {}^nC_1\,a^{n-1}x + {}^nC_2\,a^{n-2}x^2 + \dots\dots$$

$$= a^n + {}^n a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \dots\dots$$

$$3b = a^n \qquad \text{———} \quad \textbf{(1)}$$

$$6b = n \cdot a^{n-1} \qquad \text{———} \quad \textbf{(2)}$$

$$5b = \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2} \qquad \text{———} \quad \textbf{(3)}$$

$(1) \div (2),\qquad \frac{1}{2} = \frac{a}{n}$ ————————— **(4)**

$(2) \div (3),\qquad \frac{6}{5} = \frac{2a}{(n-1)}$ ————————— **(5)**

(4) இலிருந்து $\quad n = 2a$

(5) இலிருந்து $\quad 2a = \frac{6(n-1)}{5}$

$$n = \frac{6(n-1)}{5}$$

$$5n = 6n - 6$$

$$n = 6,\ a = 3,\ b = 243$$

(c) $\left(3 + 2x - x^2\right)(1+x)^{34}$

$$\left(3 + 2x - x^2\right)\left[1 + {}^{34}C_1 x + \ldots\ldots + {}^{34}C_{r-2}\, x^{r-2} + {}^{34}C_{r-1}\, x^{r-1} + {}^{34}C_r\, x^r + \ldots\ldots\right]$$

x^r இன் குணகம் $= 3 \times {}^{34}C_r + 2 \times {}^{34}C_{r-1} - {}^{34}C_{r-2}$

$$= \frac{3 \times 34!}{(34-r)!\ r!} + \frac{2 \times 34!}{(35-r)!\ (r-1)!} - \frac{34!}{(36-r)!\ (r-2)!}$$

$$= \frac{34!}{(34-r)!\ (r-2)!}\left[\frac{3}{r(r-1)} + \frac{2}{(35-r)(r-1)} - \frac{1}{(36-r)(35-r)}\right]$$

$$= \frac{34!}{(34-r)!\ (r-2)!}\left[\frac{3(36-r)(35-r) + 2r(36-r) - r(r-1)}{(36-r)(35-r)\,r(r-1)}\right]$$

$$= \frac{34!}{(34-r)!\ (r-2)!}\left[\frac{(36-r)(105-r) - r(r-1)}{(36-r)(35-r)\,r(r-1)}\right]$$

x^r இன் குணகம் 0 ஆக,

$$(36 - r)(105 - r) - r(r - 1) = 0$$

$$36 \times 105 - 141r + r^2 - r^2 + r = 0$$

$$140r = 36 \times 105$$

$$r = \frac{36 \times 105}{140}$$

$$r = 27$$

எனவே x^{27} இன் குணகம் 0 ஆகும்.

உதாரணம் 4

(a) $\left(1+\sqrt{1 - x^2}\right)^5 + \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^5$ ஐச் சுருக்குக.

(b) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^7$ ஐச் சுருக்குக. இதிலிருந்து $\left(\sqrt{2} + 1\right)^7$ இன் பெறுமானத்தின் முழுஎண் பகுதியைக் காண்க.

(c) n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க $\left(5 + 2\sqrt{5}\right)^n$ இன் முழுவெண்ணும் பின்னமும் முறையே p, f என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் எனின்,

$f + \left(5 - 2\sqrt{5}\right)^n = 1$ ஆகுமென நிறுவுக.

அதிலிருந்து p ஆனது ஓர் ஒற்றை எண் என உய்த்தறிக.

மேலும் இதிலிருந்து $(1 - f)(p + f) = 5^n$,

$\left(5 + 2\sqrt{5}\right)^n = \dfrac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 - 5^n}$ என்பவற்றைக் காட்டுக.

(a) $\left(1+\sqrt{1 - x^2}\right)^5 + \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^5$

$\sqrt{1 - x^2} = y$ என்க.

$$(1 + y)^5 + (1 - y)^5$$

$$(1 + y)^5 = {}^5C_0 1^5 + {}^5C_1 \cdot y + {}^5C_3 y^2 + {}^5C_3 y^3 + {}^5C_4 y^4 + {}^5C_5 y^5$$

$$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5 \quad \text{———————} \quad \textbf{(1)}$$

$$(1 - y)^5 = 1 - 5y + 10y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5 \quad \text{———————} \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) + (2), \quad (1 + y)^5 + (1 - y)^5 = 2 + 20y^2 + 10y^4$$

$y = \sqrt{1 - x^2}$ எனப் பிரதியிட

$$\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^5 + \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^5 = 2 + 20\left(1 - x^2\right) + 10\left(1 - x^2\right)^2$$

$$= 2 + 20 - 20x^2 + 10 - 20x^2 + 10x^4$$

$$= 32 - 40x^2 + 10x^4$$

(b) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^7$

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 + {}^7C_1\left(\sqrt{2}\right)^6 + {}^7C_2\left(\sqrt{2}\right)^5 + {}^7C_3\left(\sqrt{2}\right)^4$$

$$+ {}^7C_4\left(\sqrt{2}\right)^3 + {}^7C_5\left(\sqrt{2}\right)^2 + {}^7C_6\left(\sqrt{2}\right) + 1$$

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 + 56 + 21\left(\sqrt{2}\right)^5 + 140 + 35\left(\sqrt{2}\right)^3 + 42 + 7\sqrt{2} + 1 - \textbf{(1)}$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 - 56 + 21\left(\sqrt{2}\right)^5 - 140 + 35\left(\sqrt{2}\right)^3 - 42 + 7\sqrt{2} - 1 - \textbf{(2)}$$

$$(1) - (2) \quad \left(\sqrt{2} + 1\right)^7 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^7 = 112 + 280 + 84 + 2$$

$$= 478$$

இப்பொழுது $\quad 0 < \left(\sqrt{2} - 1\right) < 1$

$$0 < \left(\sqrt{2} - 1\right)^7 < 1$$

$\left(\sqrt{2} - 1\right)^7 = f$ என்க. $0 < f < 1$

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 = 478 - f \cdot (0 < f < 1)$$

எனவே $477 < \left(\sqrt{2}+1\right)^7 < 478$

$\left(\sqrt{2}+1\right)$ இன் முழுவெண் பகுதி 477 ஆகும்.

(c) $\left(5+2\sqrt{5}\right)^n$

$$= 5^n + {}^nC_1\, 5^{n-1}\left(2\sqrt{5}\right) + {}^nC_2\, 5^{n-2}\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \dots\dots + {}^nC_{n-1}\, 5\cdot\left(2\sqrt{5}\right)^{n-1} + \left(2\sqrt{5}\right)^n$$

$\left(5-2\sqrt{5}\right)^n$

$$= 5^n - {}^nC_1\, 5^{n-1}\left(2\sqrt{5}\right) + {}^nC_2\, 5^{n-2}\left(2\sqrt{5}\right)^2 + \dots\dots + {}^nC_{n-1}\, 5\left(-2\sqrt{5}\right)^{n-1} + \left(-2\sqrt{5}\right)^n$$

$$\left(5+2\sqrt{5}\right)^n + \left(5-2\sqrt{5}\right)^n = 2\left[5^n + {}^nC_2 \times 20 + 5^{n-2} + \dots\dots\right] \text{— } \mathbf{(1)}$$

$2 < \sqrt{5} < 2{\cdot}5$ என்பதால்

$4 < 2\sqrt{5} < 5$

$0 < 5 - 2\sqrt{5} < 1$ ஆகும்.

எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும் $0 < \left(5-2\sqrt{5}\right)^n < 1$

(1) இலிருந்து $\left(5+2\sqrt{5}\right)^n + \left(5-2\sqrt{5}\right)^n = 2k$ (k - நேர் நிறையெண்)

$$\left(5+2\sqrt{5}\right)^n = 2k - \left(5-2\sqrt{5}\right)^n \qquad \text{———— } \mathbf{(1)}$$

$$= (2k-1) + \left[1 - \left(5-2\sqrt{5}\right)^n\right] \qquad \text{———— } \mathbf{(2)}$$

மேலும் $0 < 5 - 2\sqrt{5} < 1$ என்பதால்

$0 < \left(5-2\sqrt{5}\right)^n < 1$ ஆகும்.

$0 < \left[1 - \left(5-2\sqrt{5}\right)^n\right] < 1$ ஆகும்.

(2) இலிருந்து

$$\left(5+2\sqrt{5}\right)^n = (2k-1) + f \qquad [0 < f < 1]$$

$$= p + f$$

$p = (2k - 1)$ என்பதால் p ஒற்றையெண் ——————— (i)

$$1 - \left(5 - 2\sqrt{5}\right)^n = f \text{ என்பதால்}$$

$$1 = f + \left(5 - 2\sqrt{5}\right)^n \quad \text{——————— (ii)}$$

$$(1 - f)(p + f) = \left(5 - 2\sqrt{5}\right)^n \left(5 + 2\sqrt{5}\right)^n$$

$$= \left[\left(5 - 2\sqrt{5}\right)\left(5 + 2\sqrt{5}\right)\right]^n$$

$$= [25 - 20]^n = 5^n$$

$$\left(5 + 2\sqrt{5}\right)^n = p + f$$

$$= \frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2} - (1 - f)$$

$$= \frac{p+1}{2} + \sqrt{\left[\frac{p+1}{2} - (1 - f)^2\right]}$$

$$= \frac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - (p+1)(1-f) + (1-f)^2}$$

$$= \frac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - (1-f) + (p+f)}$$

$$= \frac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - 5^n}$$

உதாரணம் 5

m என்பது ஓர் ஒற்றை நேர்நிறையெண் எனின்,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^m = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + {}^mC_1\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right)$$

$$+ {}^mC_2\left(x^{m-4} + \frac{1}{x^{m-4}}\right) + \dots\dots\dots + {}^mC_{\frac{m-1}{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$ என நிறுவுக.

$\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$ எனின், $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3, \left(x + \frac{1}{x}\right)^5, \left(x + \frac{1}{x}\right)^7$

என்பவற்றை மேலே உள்ளவாறு விரிப்பதால்,

$x^3 + \frac{1}{x^3} = -2, \qquad x^5 + \frac{1}{x^5} = 1 = x^7 + \frac{1}{x^7}$ எனவும் நிறுவுக.

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^m$ இங்கு m ஒற்றை எண். விரிவில் $(m + 1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன. உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை இரட்டை எண் என்பதால் இரு நடு உறுப்புக்கள் உள்ளன. $\frac{m+1}{2}$ ஆம் உறுப்பு, $\frac{m+3}{2}$ ஆம் உறுப்பு நடு உறுப்புக்களாகும்.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^m = {}^mC_\circ\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1} \cdot \frac{1}{x} + {}^mC_2\, x^{m-2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots\dots\dots\dots$$

$$+ {}^mC_{\frac{m-1}{2}}\, x^{\frac{m+1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m-1}{2}} + {}^mC_{\frac{m+1}{2}}\, x^{\frac{m-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m+1}{2}} + \dots\dots$$

$$+ {}^mC_{m-1}\, x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{m-1} + {}^mC_m \left(\frac{1}{x}\right)^m$$

$$= x^m + {}^mC_1\, x^{m-2} + {}^mC_2\, x^{m-4} + \dots\dots\, {}^mC_{\frac{m-1}{2}}\, x + {}^mC_{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$+ \dots\dots\dots + {}^mC_{m-1} \cdot \frac{1}{x^{m-2}} + \frac{1}{x^m}$$

$\left[{}^mC_r = {}^mC_{m-r}\right.$ என் பதால் $\left.\right]$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+{}^mC_1\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)$$

$$+\ldots\ldots+{}^mC_{\frac{m-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} T_{\frac{m+1}{2}}={}^mC_{\frac{m-1}{2}}\,x^{\frac{m+1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m-1}{2}} \\ T_{\frac{m+3}{2}}={}^mC_{\frac{m+1}{2}}\,x^{\frac{m-1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m+1}{2}} \end{array}\right]$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+{}^3C_1\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$1=x^3+\frac{1}{x^3}+3$$

ஆகவே $x^3+\frac{1}{x^3}=-2$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+{}^5C_1\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+{}^5C_2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$1=\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+5\times(-2)+10\times 1$$

$$1=x^5+\frac{1}{x^5}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^7=\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+{}^7C_1\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)$$

$$+\ {}^7C_2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+{}^7C_3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$1 = x^7 + \frac{1}{x^7} + 7 \times 1 + 21 \times (-2) + 35 \times 1$$

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = 1$$

மிகப்பெரிய உறுப்பு *(Greatest Term)*

ஈருறுப்பு விரிவின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் மிகப் பெரிய உறுப்பு (மட்டுப் பெறுமானம்) காணும்முறை இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 6

$(x+4a)^8$ இன் விரிவில் $x = \frac{1}{2},\quad a = \frac{1}{3}$ ஆகும் போது மிகப் பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

$$(x+4a)^8$$

$$T_{r+1} = {}^8C_r\, x^{8-r}\, (4a)^r$$

$$T_r = {}^8C_{r-1}\, x^{9-r}\, (4a)^{r-1}$$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^8C_r}{{}^8C_{r-1}} \times \frac{4a}{x}$$

$x = \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{3}$ ஆக,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{9-r}{r} \times \frac{8}{3} = \frac{72-8r}{3r}$$

[இங்கு $T_{r+1}, T_r > 0$ ஆகும்]

$$\frac{72-8r}{3r} > 1 \text{ எனின் } \frac{T_{r+1}}{T_r} > 1$$

$$r < 6\frac{6}{11} \text{ எனின் } T_{r+1} > T_r \qquad \text{—— (1)}$$

$$\frac{72-8r}{3r} < 1 \text{ எனின் } \frac{T_{r+1}}{T_r} < 1$$

$$r > 6\frac{6}{11} \text{ எனின் } T_{r+1} < T_r \qquad \text{—— (2)}$$

(1) இலிருந்து $r \le 6$ எனின் $T_{r+1} > T_r$

(2) இலிருந்து $r \ge 7$ எனின் $T_{r+1} < T_r$ ஆகும்.

அதாவது $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6 < T_7 > T_8 > T_9$ ஆகும்.

மிகப் பெரிய உறுப்பு = 7 ஆம் உறுப்பு $= T_7$ ஆகும்.

$$T_7 = {}^8C_6 \cdot x^2 (4a)^6$$

$$= 28 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^6$$

$$= \frac{28672}{729}$$

உதாரணம் 7

$\left(\frac{1}{5} - \frac{5x}{16}\right)^{12}$ இன் விரிவில் $x = \frac{2}{5}$ ஆக, விரிவில் மிகப்பெரிய தனிப்பெறுமானம் *(absolute value)* உடைய உறுப்பைக் காண்க.

இங்கு விரிவில் 13 உறுப்புக்கள் உள்ளன. உறுப்புக்கள் எல்லாம் நேரானவை அல்ல. எனவே ஒவ்வொரு உறுப்பினதும் மட்டுப்பெறுமானத்தைக் கண்டு அவற்றுள் பெரியதைக் காண வேண்டும்.

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{5x}{16}\right)^{12}$$

$$T_{r+1} = {}^{12}C_r \left(\frac{1}{5}\right)^{12-r} \times \left(\frac{-5x}{16}\right)^r$$

$$T_r = {}^{12}C_{r-1} \left(\frac{1}{5}\right)^{13-r} \times \left(\frac{-5x}{16}\right)^{r-1}$$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{{}^{12}C_r}{{}^{12}C_{r-1}} \times 5 \times \left(\frac{-5x}{16}\right)$$

$x = \dfrac{2}{5}$ ஆக, $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{12 - r + 1}{r} \times 5 \times \left(-\dfrac{1}{8}\right)$

$$\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{13 - r}{r} \times \frac{5}{8}$$

$$\frac{|T_{r+1}|}{|T_r|} = \frac{5\,(13 - r)}{8r} = \frac{65 - 5r}{8r}$$

$\dfrac{65 - 5r}{8r} > 1$ எனின் $\dfrac{|T_{r+1}|}{|T_r|} > 1$

$r < 5$ எனின் $|T_{r+1}| > |T_r|$

$\dfrac{65 - 5r}{8r} < 1$ எனின் $\dfrac{|T_{r+1}|}{|T_r|} < 1$

$r > 5$ எனின் $|T_{r+1}| < |T_r|$

$\dfrac{65 - 5r}{8r} = 1$ எனின் $|T_{r+1}| = |T_r|$

$r = 5$ எனின் $|T_{r+1}| < |T_r|$

$$|T_1| < |T_2| < |T_3| < |T_4| < |T_5| = |T_6| > |T_7| \,........ > |T_{13}|.$$

மிகப் பெரிய உறுப்பு $|T_5| = |T_6|$

$$|T_5| = \left|{}^{12}C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{5x}{16}\right)^4\right|$$

$$= {}^{12}C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{16}\right)^4$$

$$|T_6| = \left|{}^{12}C_5 \left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5x}{16}\right)^5\right|$$

$$= {}^{12}C_5 \left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$|T_5| = |T_6|$ எனக் காட்டலாம்.

மிகப் பெரிய குணகம்

ஈருறுப்பு விரிவின் உறுப்புக்களில் மிகப் பெரிய குணகத்தைக் காணுதல்.

உதாரணம் 8

$(3 + 2x)^{15}$ இன் விரிவில் மிகப்பெரிய குணகத்தைக் காண்க.

$$T_{r+1} = {}^{15}C_r \, 3^{15-r} \cdot (2x)^r$$

$$T_r = {}^{15}C_{r-1} \, 3^{16-r} \cdot (2x)^{r-1}$$

T_r இன் குணகம் V_r என்க. $(1 \leq r \leq 16)$

$$V_{r+1} = {}^{15}C_r \cdot 3^{15-r}, \; 2^r, \qquad V_r = {}^{15}C_{r-1} \, 3^{16-r} \cdot 2^{r-1}$$

$$\frac{V_{r+1}}{V_r} = \frac{{}^{15}C_r}{{}^{15}C_{r-1}} \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{V_{r+1}}{V_r} = \frac{15 - r + 1}{r} \times \frac{2}{3} = \frac{2(16 - r)}{3r}$$

$$\frac{2(16 - r)}{3r} > 1 \text{ எனின் } \frac{V_{r+1}}{V_r} > 1$$

$$r < 6\frac{2}{5} \text{ எனின் } V_{r+1} > V_r$$

$$r \leq 6 \text{ எனின் } V_{r+1} > V_r \qquad \text{———————— (1)}$$

$$\frac{2(16 - r)}{3r} < 1 \text{ எனின் } \frac{V_{r+1}}{V_r} < 1$$

$$r > 6\frac{2}{5} \text{ எனின் } V_{r+1} > V_r$$

$$r \geq 7 \text{ எனின் } V_{r+1} > V_r \qquad \text{———————— (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து

$$V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < V_5 < V_6 < V_7 > V_8 > V_9 \ldots V_{16}$$

மிகப் பெரிய குணகம் $V_7 = {}^{15}C_6 \cdot 3^9 \cdot 2^6$

உதாரணம் 9

$(1 + x)^n$ இன் விரிவில் (x இன் ஏறடுக்குகளின் விரிவு)
மிகப் பெரிய குணகத்தை
(i) n ஒற்றையாகும் போது
(ii) n இரட்டையாகும் போது காண்க.

[பின்வரும் விரிவுகளைக் கருதுக.

$$(1 + x)^2 = {}^2C_0 1^2 + {}^2C_1 x + {}^2C_2 x^2$$

$$= 1 + 2x + x^2$$

$$(1+x)^3 = {}^3C_0 \cdot 1^3 + {}^3C_1 \cdot x + {}^3C_2\, x^2 + {}^3C_3\, x^3$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(1+x)^4 = {}^4C_0 \cdot 1^4 + {}^4C_1 x + {}^4C_2 x^2 + {}^4C_3\, x^3 + {}^4C_4 x^4$$

$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$(1+x)^5 = {}^5C_0 1^5 + {}^5C_1 \cdot x + {}^5C_2 x^2 + {}^5C_3 x^3 + {}^5C_4 x^4 + {}^5C_5 x^5$$

$$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + x^4 + x^5$$

இங்கு $(1+x)^2$ இன் விரிவில் மிகப் பெரிய குணகம் $2 = {}^2C_1$

$(1+x)^3$ இன் விரிவில் மிகப் பெரிய குணகம் $= 3$

இரு குணகங்கள் உண்டு ${}^3C_1$, ${}^3C_2$ என்பன

$(1+x)^4$ இன் விரிவில் மிகப் பெரிய குணகம் $6 = {}^4C_2$

$(1+x)^5$ இன் விரிவில் மிகப் பெரிய குணகம் $= 10$

இரு குணகங்கள் உண்டு. ${}^5C_2$, ${}^5C_3$ என்பன]

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots\dots\dots + {}^nC_r\, x^r + \dots\dots + {}^nC_n x^n$$

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^r, \quad T_r = {}^nC_{r-1}\, x^{r-1}$$

[T_r இன் குணகம் V_r என்க. $1 \le r \le n+1$]

$$V_{r+1} = {}^nC_r, \quad V_r = {}^nC_{r-1}$$

$$\frac{V_{r+1}}{V_r} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

$\dfrac{n-r+1}{r} \gtreqless 1$ என்பதற்கேற்ப $\dfrac{V_{r+1}}{V_r} \gtreqless 1$ ஆகும்.

$$\frac{n-r+1}{r} > 1 \quad \text{எனின்} \quad \frac{V_{r+1}}{V_r} > 1$$

$$r < \frac{n+1}{2} \quad \text{எனின்} \quad \frac{V_{r+1}}{V_r} > 1 \quad \text{———} \quad (1)$$

$$r > \frac{n+1}{2} \quad \text{எனின்} \quad \frac{V_{r+1}}{V_r} < 1 \quad \text{———} \quad (2)$$

$$r = \frac{n+1}{2} \quad \text{எனின்} \quad \frac{V_{r+1}}{V_r} = 1 \quad \text{———} \quad (3)$$

வகை I

(a) n இரட்டை எண் எனின்,

$r = \frac{n+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ முழுவெண் அல்ல.

எனவே $r = \frac{n+1}{2}$ பொருந்தாது (வகை (3))

(1) இலிருந்து $r < \frac{n+1}{2}$ எனின் $V_{r+1} > V_r$

$r < \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ எனின் $V_{r+1} > V_r$

$\frac{n}{2}$ - நேர் நிறையெண் (n - இரட்டை எண்)

(1) இலிருந்து, $r \leq \frac{n}{2}$ எனின் $V_{r+1} > V_r$

(1) இலிருந்து, $V_1 < V_2 < V_3 \ldots\ldots < V_{\frac{n}{2}} < V_{\frac{n}{2}+1}$ ——— (*)

(2) இலிருந்து, $r > \frac{n+1}{2}$, $r > \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$

$r \geq \frac{n}{2} + 1$ எனின் $V_{r+1} < V_r$

$V_{\frac{n}{2}+1} > V_{\frac{n}{2}+2,} > \dots\dots\dots V_{n+1}$ ———— **(*)**

மேலேயுள்ள இரு சமனிலிகளிலுமிருந்து

மிகப் பெரிய குணகம் $V_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}}$

வகை II

(b) n ஒற்றையெண் எனின்,

$n + 1$ இரட்டை எண் $\frac{n+1}{2}$ நேர்நிறையெண்

எனவே $r = \frac{n+1}{2}$ ஆக, $V_{r+1} = V_r$ ஆகும்.

(1) இலிருந்து $V \leq \frac{n+1}{2}$ எனின் $V_{r+1} > V_r$

(2) இலிருந்து $r \geq \frac{n+3}{2}$ எனின் $V_{r+1} < V_r$

$$V_1 < V_2 < V_3 \dots\dots < V_{\frac{n-1}{2}} < V_{\frac{n+1}{2}} = V_{\frac{n+3}{2}} > V_{\frac{n+5}{2}} \dots\dots\dots > V_{n+1}$$

எனவே இரு மிகப் பெரிய குணகங்கள் உண்டு.

$V_{\frac{n+1}{2}}$, $V_{\frac{n+3}{2}}$ இரண்டும் சமமாகும்.

$V_{\frac{n+1}{2}} = {}^nC_{\frac{n-1}{2}}$, $V_{\frac{n+3}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}$

(i) n இரட்டை எனின் மிகப் பெரிய குணகம் ${}^nC_{\frac{n}{2}}$

(ii) n ஒற்றை எனின் மிகப் பெரிய குணகங்கள்

${}^nC_{\frac{n-1}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 10

(a) $\left(1+2x+3x^2\right)^4$ இன் விரிவை x இன் ஏறடுக்குகளில் x^4 வரை எழுதுக.

(b) $\left(1+x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ இன் விரிவை எழுதுக.

(c) $\left(1+x+\dfrac{2}{x}\right)^6$ இன் விரிவில் மாறிலி உறுப்பு யாது?

(d) ${}^7C_r + {}^7C_{r+1} + {}^8C_{7-r} = 2\cdot {}^8C_{r+1}$ என நிறுவுக. $(1 < r < 7)$

(a) $\left(1+2x+3x^2\right)^4 = \left[1+\left(2x+3x^2\right)\right]^4$

$$= 1 + {}^4C_1\left(2x+3x^2\right) + {}^4C_2\left(2x+3x^2\right)^2 + {}^4C_3\left(2x+3x^2\right)^3 + {}^4C_4\left(2x+3x^2\right)^4$$

$$= 1 + 4\left(2x+3x^2\right) + 6\left(4x^2+12x^3+9x^4\right) + 4\left(8x^3+36x^4+....\right) + \left(16x^4+........\right)$$

$$= 1 + 8x + 36x^2 + 104x^3 + 214x^4 + ...$$

(b) $\left(1+x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^5 = \left[1+\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]^5$

$$= 1 + {}^5C_1\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) + {}^5C_2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2 + {}^5C_3\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3 + {}^5C_4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^4 + {}^5C_5\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^5$$

$$= 1 + 5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right) + 10\left(x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^2}\right)$$

$$+ 5\left(x^8 - 4x^4 + 6 - \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}\right)$$

$$+ \left(x^{10} - 5x^6 + 10x^2 - \frac{10}{x^2} + \frac{5}{x^6} - \frac{1}{x^{10}}\right)$$

$$= x^{10} + 5x^8 + 5x^6 - 10x^4 - 15x^2 + 11 + \frac{15}{x^2} - \frac{10}{x^4} - \frac{5}{x^6}$$

$$+ \frac{5}{x^8} - \frac{1}{x^{10}}$$

(c) $\left(1 - x + \frac{2}{x}\right)^6 = \left[(1+x) + \frac{2}{x}\right]^6$

$$= {}^6C_0 (1+x)^6 + {}^6C_1 (1+x)^5 \times \frac{2}{x} + {}^6C_2 (1+x)^4 \times \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$+ {}^6C_3 (1+x)^3 \left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^6C_4 (1+x)^2 \times \left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$\times {}^6C_5 (1+x)\left(\frac{2}{x}\right)^5 + {}^6C_6 \left(\frac{2}{x}\right)^6$$

$$= 1(1+x)^6 + 6(1+x)^5 \times \frac{2}{x} + 15(1+x)^4 \times \frac{4}{x^2} + 20(1+x)^3 \times \frac{8}{x^3}$$

$$+ 15(1+x)^2 \times \left(\frac{16}{x^4}\right) + 6(1+x)\left(\frac{32}{x^5}\right) + \frac{64}{x^6}$$

மாறிலி உறுப்பு

$$= 1 + (6 \times 5 \times 2) + 15 \times {}^4C_2 \times 4 + 20 \times 1 \times 8$$

$$= 1 + 60 + 360 + 160$$

$$= 581$$

(d) ${}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ என நிறுவலாம்.

$$ {}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!} $$

$$ = \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right] $$

$$ = \frac{n! \qquad (n+1)}{(n-r)!\,(r-1)! \times r \times (n-r+1)} $$

$$ = \frac{(n+1)!}{(n-r+1)! \quad r!} = {}^{n+1}C_r $$

${}^{7}C_r + {}^{7}C_{r+1} + {}^{8}C_{7-r}$	
$= {}^{8}C_{r+1} + {}^{8}C_{7-r}$	${}^{n}C_r = {}^{n}C_{n-r}$ என்பதால்
$= {}^{8}C_{r+1} + {}^{8}C_{r+1}$	${}^{8}C_{7-r} = {}^{8}C_{8-(7-r)}$
$= 2 \times {}^{8}C_{r+1}$	${}^{8}C_{7-r} = {}^{8}C_{r+1}$

$(1+x)^n$ இன் விரிவின் குணகங்களின் பண்புகள்

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$ ———— (1)

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ ———— (2)

$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$ ———— (3)

$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$ ———— (4)

குணகங்களின் கூட்டுத்தொகையை அவதானிக்க

(1) இல் $1+2+1=4=2^2$

(2) இல் $1+3+3+1=8=2^3$

(3) இல் $1+4+6+4+1=16=2^4$

(4) இல் $1+5+10+10+5+1=32=2^5$

எனப் பெறப்படுகிறது.

(1) இல் $1-2+1=0$

(2) இல் $1-3+3-1=0$

(3) இல் $1-4+6-4+1=0$

(4) இல் $1-5+10-10+5-1=0$

எனப் பெறப்படுகிறது.

$(1+x)^n$ இன் விரிவைக் கருதுக.

$$(1+x)^n = {}^nC_\circ + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots\dots\dots\dots + {}^nC_n x^n$$

$$ {}^nC_\circ + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots\dots + {}^nC_n = 2^n$$

$$ {}^nC_\circ - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots\dots\dots\dots + (-1)^n \cdot {}^nC_n = 0$$

எனவும் நிறுவலாம்.

உதாரணம் 11

$(1+x)^n = {}^nC_\circ + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots\dots + {}^nC_r x^r + \dots\dots + {}^nC_n x^n$ ஆகும்

இங்கு $ {}^nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

(i) $ {}^nC_\circ + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots\dots + {}^nC_n = 2^n$

(ii) $ {}^nC_\circ - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots\dots + (-1)^n \cdot {}^nC_n = 0$

(iii) $1\frac{{}^nC_1}{{}^nC_\circ} + 2\frac{{}^nC_2}{{}^nC_1} + \ldots\ldots + r\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} + \ldots\ldots + n\frac{{}^nC_n}{{}^nC_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$

(iv) ${}^nC_0^2 + {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + \ldots\ldots\ldots {}^nC_r^2 + \ldots\ldots {}^nC_n^2 = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$

(v) ${}^nC_0^2 - {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot {}^nC_n^2 = 0$ (n ஒற்றை எனின்)

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$ (n இரட்டை எனின்)

(i) $(1+x)^n = {}^nC_\circ + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$

$x = 1$ என இருபக்கமும் பிரதியிட,

$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_n$

(ii) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$

$x = -1$ என, இருபக்கமும் பிரதியிட,

$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot {}^nC_n$

(iii) $1\cdot\frac{{}^nC_1}{{}^nC_0} + 2\frac{{}^nC_2}{{}^nC_1} + 3\frac{{}^nC_3}{{}^nC_2} + 4\frac{{}^nC_4}{{}^nC_3} + \ldots\ldots + r\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}$

$$+ \ldots\ldots + n\frac{{}^nC_n}{{}^nC_{n-1}}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \sum_{r=1}^{n} r\cdot\frac{n-r+1}{r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (n - r + 1)$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + ... + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

(iv) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + ... + {}^nC_r x^r$

$$+ .... + {}^nC_n x^n$$

$$\underline{(x+1)^n = \left({}^nC_0 + {}^nC_1 x^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2} + ... + {}^nC_r x^{n-r} + ... {}^nC_n\right)}$$

$$(1+x)^n (x+1)^n = \left({}^nC_0 + {}^nC_1 x + ... + {}^nC_n x^n\right)$$

$$\left({}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} + ... + {}^nC_n\right)$$

இ. கை. ப $= (1+x)^{2n}$

வ. கை. ப இல் x^n இன் குணகம்

$$= {}^nC_\circ^2 + {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + ... + {}^nC_r^2 + ... + {}^nC_n^2$$

இ. கை. ப இல் $T_{r+1} = {}^{2n}C_r x^{2n-r}$

$2n - r = n$ எனின், $r = n$ ஆகும்.

இ. கை. ப. இல் x^n இன் குணகம் ${}^{2n}C_n$ ஆகும்.

ஆகவே, ${}^nC_\circ^2 + {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + ... + {}^nC_n^2 = {}^{2n}C_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

(v) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots\dots + {}^nC_r x^r + \dots\dots + {}^nC_n x^n$

$(x-1)^n = {}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2} + \dots\dots + (-1)^{n-r} \cdot {}^nC_r x^r + \dots\dots + (-1)^n\, {}^nC_n$

$$(x+1)^n \cdot (x-1)^n = \left({}^nC_0 + {}^nC_1 x + \dots\dots + {}^nC_n x^n\right)\left({}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} + \dots\dots + (-1)^n \cdot {}^nC_n\right)$$

$$\left(x^2-1\right)^n = \left({}^nC_0 + {}^nC_1 x + \dots\dots + {}^nC_n x^n\right)\left({}^nC_0 x^n - {}^nC_1 x^{n-1} + \dots\dots + (-1)^n\, {}^nC_n\right)$$

வ. கை. ப இல் x^n இன் குணகம்

$$= {}^nC_0^2 - {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + \dots\dots + (-1)^n \cdot {}^nC_n^2$$

இ. கை. ப இல் $\quad T_{r+1} = {}^nC_r \left(x^2\right)^{n-r} (-1)^r$

$$= (-1)^r \cdot {}^nC_r\, x^{2n-2r}$$

இ. கை. ப இல் x^n ஐக் காண்பதற்கு $2n - 2r = n$

$$r = \frac{n}{2}$$

இ. கை. ப இல் x^n இன் குணகம் $= (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot {}^nC_{\frac{n}{2}}$

இங்கு $r = \dfrac{n}{2}$ நேர்நிறையெண் என்பதால் n இரட்டை எண்ணாக வேண்டும்.

n ஒற்றையெண் எனின் $\dfrac{n}{2}$ நிறையெண் அல்ல. எனவே அவ்வாறான உறுப்பு இல்லை.

$$\therefore {}^nC_0^2 - {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 - {}^nC_3^2 + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot {}^nC_n^2 = 0$$

(n - ஒற்றை எனின்)

$$= (-1)^n \cdot {}^nC_{\frac{n}{2}} \quad (n \text{ - இரட்டை எனின்})$$

உதாரணம் 12

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$ ஆகும்.

(i) $${}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + 3 \cdot {}^nC_3 + \ldots\ldots + n \cdot {}^nC_n = n \cdot 2^{n-1}$$

(ii) $${}^nC_0 + 2 \cdot {}^nC_1 + 3 \cdot {}^nC_2 + \ldots\ldots + (n+1) \cdot {}^nC_n = 2^n + n \cdot 2^{n-1}$$

(iii) $${}^nC_0 + \frac{1}{2} \cdot {}^nC_1 + \frac{1}{3} \cdot {}^nC_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1} \cdot {}^nC_n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

என நிறுவுக.

முறை I

(i) $$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n x^n$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$n(1+x)^{n-1} = {}^nC_1 + {}^nC_2 \cdot 2x + \ldots\ldots + {}^nC_n \cdot n x^{n-1}$$

$x = 1$ எனப்பிரதியிட

$$n \cdot 2^{n-1} = {}^nC_1 + {}^nC_2 \cdot 2 + {}^nC_3 \cdot 3 + \ldots\ldots + {}^nC_n \cdot n$$ ஆகும்.

முறை II

$${}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + 3 \cdot {}^nC_3 + \ldots\ldots + r \cdot {}^nC_r + \ldots\ldots + n \cdot {}^nC_n$$

ஐக் கருதுக.

r ஆம் உறுப்பு $U_r = r \cdot {}^nC_r$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot {}^nC_r = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$n\sum_{r=1}^{n} {}^{n-1}C_{r-1}$$

$$= n\left[{}^{n-}C_{\circ} + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + \dots\dots + {}^{n-1}C_{n-1}\right]$$

$$= n \cdot 2^{n-1}$$

முறை I

(ii) $(1+x)^n = {}^nC_{\circ} + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \dots\dots + {}^nC_r x^r$

$$+ \dots\dots + {}^nC_n x^n$$

இருபக்கமும் x ஆல் பெருக்க,

$$x(1+x)^n = {}^nC_{\circ} x + {}^nC_1 x^2 + {}^nC_2 x^3 + \dots\dots + {}^nC_n x^{n+1}$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட,

$$(1+x)^n + x \cdot n(1+x)^{n-1} = {}^nC_{\circ} + {}^nC_1 \cdot 2x + {}^nC_2 \cdot 3x^2$$

$$+ \dots\dots + {}^nC_n (n+1)x^n$$

$x = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$2^n + n \cdot 2^{n-1} = {}^nC_{\circ} + {}^nC_1 \cdot 2 + {}^nC_2 \cdot 3 + \dots\dots + {}^nC_n (n+1)$$

முறை II

$${}^nC_{\circ} + 2 \cdot {}^nC_1 + 3 \cdot {}^nC_2 + \dots\dots + (n+1) \cdot {}^nC_n$$

$$= \left({}^nC_{\circ} + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots\dots + {}^nC_n\right)$$

$$+ \left({}^nC_1 + 2 \cdot {}^nC_2 + 3 \cdot {}^nC_3 + \dots + n \cdot {}^nC_n\right)$$

$$= 2^n + \sum_{r=1}^{n} r \cdot {}^nC_r$$

$$= 2^n + \sum_{r=1}^{n} r \cdot \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

$$= 2^n + \sum_{r=1}^{n} \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$= 2^n + n\sum_{r=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}$$

$$= 2^n + n\sum_{r=1}^{n} {}^{n-1}C_{r-1}$$

$$= 2^n + n \cdot 2^{n-1}$$

(iii) $${}^nC_\circ + \frac{1}{2}\,{}^nC_1 + \frac{1}{3}\,{}^nC_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}\,{}^nC_n$$

முறை I

$$(1+x)^n = {}^nC_\circ + {}^nC_1\,x + {}^nC_2\,x^2 + \ldots.. + {}^nC_n\,x^n$$

இரு பக்கமும் x ஐக் குறித்து தொகையிட,

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = {}^nC_0\,x + {}^nC_1\,\frac{x^2}{2} + {}^nC_2\,\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + {}^nC_n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$

$x = 0$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{1}{n+1} = A$$

இப்பொழுது $x = 1$ எனப் பிரதியிட,

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} = {}^nC_\circ + \frac{{}^nC_1}{2} + \frac{{}^nC_2}{3} + \ldots + \frac{{}^nC_n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

ஆகவே $${}^nC_\circ + \frac{1}{2}\cdot{}^nC_1 + \frac{1}{3}\,{}^nC_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}\cdot{}^nC_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

முறை II

$$^{n}C_{0} + \frac{1}{2}\,{}^{n}C_{1} + \frac{1}{3}\,{}^{n}C_{2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n+1}\,{}^{n}C_{n}$$

இங்கு $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன.

$(r+1)$ ஆம் உறுப்பு $T_{r+1} = \frac{1}{r+1} \;:\; {}^{n}C_{r}$

$$\sum_{r=0}^{n} T_{r+1} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1} \cdot {}^{n}C_{r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1} \times \frac{n!}{(n-r)!\;r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!\;(r+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n-r)!\;(r+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=0}^{n} {}^{n+1}C_{r+1} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[{}^{n+1}C_{1} + {}^{n+1}C_{2} + \dots\dots + {}^{n+1}C_{n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[{}^{n+1}C_{0} + {}^{n+1}C_{1} + {}^{n+1}C_{2} + \dots\dots + {}^{n+1}C_{n+1} - {}^{n+1}C_{0} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[2^{n+1} - 1 \right]$$

உதாரணம் 13

(a) $(1+t)^n$ இன் விரிவை எழுதுக. இங்கு n ஒரு நேர்நிறையெண்.

(i) ${}^nC_k + 2\cdot {}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2} = {}^pC_k$ எனின்,

p ஐக் காண்க.

(ii) ${}^nC_i \cdot {}^iC_j = {}^nC_j \; {}^{n-j}C_{i-j}$ எனக் காட்டுக.

$n > 10$ இற்கு $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \; {}^nC_i \; {}^iC_{10} = 0$ என உய்த்தறிக.

(b) எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $n^7 - n$, 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

$$(1+t)^n = 1 + {}^nC_1 t + {}^nC_2 t^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r \cdot t^r + \ldots\ldots + {}^nC_n t^n$$

(i) ${}^nC_k + 2\cdot {}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2}$

$$= \left({}^nC_k + {}^nC_{k-1}\right) + \left({}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2}\right)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \left({}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2}\right)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] + \left({}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2}\right)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!}\left[\frac{n+1}{k(n-k+1)}\right] + \left({}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)} + \left({}^nC_{k-1} + {}^nC_{k-2}\right)$$

$$= {}^{n+1}C_k + {}^{n+1}C_{k-1} = {}^{n+2}C_k$$

ஆகவே $p = n + 2$

(ii) $${}^nC_i \; {}^iC_j = \frac{n!}{(n-i)!\;\; i!} \times \frac{i}{(i-J)!\; \underline{J}}$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\,(i-J)!\;\;J!}$$

$$= \frac{n!}{(n-J)!\;\;J!} \times \frac{(n-J)!}{(n-i)!\;(i-J)!}$$

$$= {}^{n}C_{J} \times {}^{n-J}C_{i-J}$$

மேலே பெற்ற முடிபில் $\tau = 10$ எனப்பிரதியிட,

${}^{n}C_{i}\;{}^{i}C_{10} = {}^{n}C_{10} \cdot {}^{n-10}C_{i-10}$ ஆகும்.

$$\sum_{i=10}^{n} (-1)^{n} \cdot {}^{n}C_{i}\;{}^{i}C_{10} \quad = \sum_{i=10}^{n} (-1)^{n} \cdot {}^{n}C_{10} \cdot \;{}^{n-10}C_{i-10}$$

$$= {}^{n}C_{10} \sum_{i=10}^{n} (-1)^{n} \cdot {}^{n-10}C_{i-10}$$

$$= {}^{n}C_{10} \left[{}^{n-10}C_{\circ} - {}^{n-10}C_{1} + {}^{n-10}C_{2} - {}^{n-10}C_{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n} \cdot {}^{n-10}C_{n-10} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} (1+x)^{n-10} = {}^{n-10}C_{\circ} + {}^{n-10}C_{1}\,x + {}^{n-10}C_{2}\,x^{2} + \ldots + {}^{n-10}C_{n-10}\,x^{n} \\ x = -1 \text{ என இருபக்கமும் பிரதியிட} \\ 0 = {}^{n-10}C_{\circ} - {}^{n-10}C_{1} + {}^{n-10}C_{2} + \ldots\ldots + (-1)^{n} \cdot {}^{n-10}C_{n-10} \end{array} \right]$$

$$= {}^{n}C_{10} \times 0 = 0$$

(b) $f(n) = n^{7} - n$

$f(1) = 1^{7} - 1 = 0$

$7,\; f(1) = 0$ ஐப் பிரிக்கும்.

எனவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$7,\;\; f(p) = \left(p^{7} - p\right)$ ஐப் பிரிக்கும்.

$$f(p+1) = (p+1)^7 - (p+1)$$

$$= p^7 + {}^7C_1 p^6 + {}^7C_2 p^5 + {}^7C_3 p^4 + {}^7C_4 p^3 + {}^7C_5 p^2 + {}^7C_6 p + 1 - (p+1)$$

$$= (p^7 - p) + {}^7C_1 p^6 + {}^7C_2 p^5 + {}^7C_3 p^4 + {}^7C_4 p^3 + {}^7C_5 p^2 + {}^7C_6 p$$

$(p^7 - p)$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும். ($n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை)

${}^7C_1 p^6 + {}^7C_2 p^5 + {}^7C_3 p^4 + {}^7C_4 p^3 + {}^7C_5 p^2 + {}^7C_6 p$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்.

ஆகவே $n = p + 1$ ஆக முடிபு உண்மை

எனவே கணிதத் தாகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும $n^7 - n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும்.

உதாரணம் 14

n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க $2 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{3n+1}$ என்பது 11 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

இம் முடிபைக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவலாம் நாம், ஈருறுப்பு விரிவைப் பாவித்து நிறுவுவோம்.

$$f(n) = 2 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{3n+1}$$

$$= 2 \times 4 \times 4^{2n} + 3 \times (3^3)^n = 8 \cdot 16^n + 3 \cdot 27^n$$

$$8 \cdot 16^n + 3 \cdot 27^n$$

$$= 8 \cdot 16^n + 3(16 + 11)^n$$

$$= 8 \cdot 16^n + 3\left[16^n + {}^nC_1 16^{n-1} \cdot 11 + {}^nC_2 \cdot 16^{n-2} 11^2 + \dots\dots + {}^nC_r 16^{n-r} 11^r + \dots\dots + 11^n\right]$$

$$= (8+3)16^n + {}^nC_1 16^{n-1} 11 + {}^nC_2 16^{n-2} 11^2 + \dots\dots + 11^n$$

$$= 11 \times 16^n + {}^nC_1 16^{n-1} \cdot 11 + {}^nC_2 16^{n-2} 11^2 + \dots\dots\dots + 11^n$$

ஆகவே 11, $f(n)$ ஐப்பிரிக்கும்.

பயிற்சி 8

1. $\left(5 + 4x^2\right)^4$ 2. $(a + 3x)^6$ 3. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$

4. $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{y}\right)^6$ 5. $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{10}$ 6. $(2x + 3y)^5$

பின்வருவனவற்றைக் காண்க

7. $\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^7$ இன் விரிவில் 5 ஆம் உறுப்பு

8. $\left(x^3 + 3xy\right)^9$ இன் விரிவில் 6 ஆம் உறுப்பு

9. $\left(\frac{a}{b} - \frac{2b}{a^2}\right)^{13}$ இன் விரிவில் 10 ஆம் உறுப்பு

10. $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x\right)^{n+2}$ இன் விரிவில் பொது உறுப்பு

11. $\left(\frac{1}{2}x - y\right)^9$ இன் விரிவில் இரு நடு உறுப்புகள்

12. $\left(x - \frac{2}{x^3}\right)^8$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பு

13. $\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ இன் விரிவில் y ஐச் சாராத உறுப்பு

14. $\left(x^2 + \frac{2y}{x}\right)^{10}$ இன் விரிவில் x^8 இன் குணகம்

15. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ இன் விரிவில் நடு உறுப்பு

$\frac{(-2)^n \, 1\cdot 3\cdot 5 \,......... \,(2n-1)}{n!}$ எனக்காட்டுக.

16. a, b, n என்பன நேர் நிறையெண்களாக இருக்க $(a+b)^n$ இன் விரிவில் முதல் மூன்று உறுப்புக்கள் முறையே $729, 2916, 4860$ எனின் a, b, n என்பவற்றைக் காண்க.

17. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x^3}\right)^{10}$ இன் விரிவில் x^5 இன் குணகத்தையும், x ஐச் சாராத உறுப்பையும் காண்க.

18. $(1+x)^{2n}$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகம், $(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவின் x^n இன் குணகத்தின் இருமடங்காகும் எனக் காட்டுக.

19. $\left(a^2-\frac{x}{a^3}\right)^{10}$ இன் விரிவில் a^{12} ஐக் கொண்ட உறுப்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

20. $\left(x^2+x^{-4}\right)^r$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க.

21. $\left(1+x^2\right)^2 \left(1+x\right)^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... +$ ஆகவும் a_o, a_1, a_2 என்பன ஒரு கூட்டல் விருத்தியிலுமிருப்பின் n இன் இயல்தகு இரு பெறுமானங்களையும் காண்க. இப்பெறுமானங்களுக்கு விரிவைப் பூரணமாக எழுதுக.

22. $(1+ax)^4 \, (2-x)^3$ இன் விரிவின் x^2 இன் குணகம் 6 எனின் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

23. $(1-3x)(1+x^3)^{10}$ இன் விரிவில் x^{22} இன் குணகத்தைக் காண்க.

24. $(1+ax)^8(1+3x)^4-(1+x)^3(1+2x)^4$ இன் விரிவில் x இன் குணகம் O எனின் a ஐக் காண்க. x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க.

25. $(1+x)^n$ இன் விரிவில்

(i) n இரட்டை எனின் நடு உறுப்பின் குணகம்

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\,.......\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\,..............\,\frac{n}{2}}\,2^{\frac{n}{2}}$$ எனவும்

(ii) n ஒற்றை எனின் இரு நடு உறுப்புகளுள் ஒவ்வொன்றினதும் குணகம்

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\,.......\,n}{1\cdot 2\cdot 3\,..............\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,2^{\frac{n-1}{2}}$$ எனவும் காட்டுக.

26. (a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$ எனின் $x^7+\frac{1}{x^7}=1$ எனக் காட்டுக.

(b) $(x+2y)^7$ இன் விரிவை எழுதுக. இதிலிருந்து $(1\cdot 02)^7$ இன் பெறுமானத்தை நான்கு பொருளுடைய இலக்கங்களுக்குத் தருக.

27. விரித்து எழுதிச் சுருக்குக.

(a) $\left(2\sqrt{a}+3\right)^6+\left(2\sqrt{a}-3\right)^6$

(b) $\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^4+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^4$

28. (a) n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க,

$(1+x)^n=(1+x)(1+x)\,..........\,n$ தடவைகள்

என்ற வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்தி $(1+x)^n$ இன் விரிவில்

$0 \leq r \leq n$ ஆக x^r இன் குணகம் ஒரு நிறையெண் ஆகுமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து P உம் Q உம் n இல் தங்கியுள்ள நேர்நிறையெண்களாக இருக்க $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ என்பதை $P+Q\sqrt{2}$ ஆக எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக.

$P^2 - 2Q^2 = (-1)^n$ எனவும் காட்டுக.

மேலும் $P = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$ எனக்காட்டி Q இற்கு ஓர் ஒத்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $\left(3x^2+1\right)$ உம் $\left(3x^2+3x+1\right)$ உம் $f(x) = 27x^6 + 1$ இன் காரணிகள் எனத் தரப்படுமிடத்து குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதன் மூலம் $f(x)$ இன் மற்ற இருபடிக் காரணியைக் காண்க. இதிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் 170000 இலும் பெரிதான மூன்று காரணிகளாக $3^{33}+1$ எனும் நிறையெண்ணைப் பிரிக்க.

$$\left[3^6 = 729,\ 3^{11} = 177\,147\right]$$

29. n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க,

$$\left(1+x\right)^n = 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r\, x^r \quad \text{என நிறுவுக. இங்கு} \quad {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

n என்பது ஒரு நேர் நிறைவெண்ணாக இருக்க $\left(5+2\sqrt{5}\right)^n$ இன் முழுவெண்ணும் பின்னமும் முறையே p, f என்பவற்றினால் குறிப்பிடப் படுமெனின்

$f + \left(5-2\sqrt{5}\right)^n = 1$ ஆகுமென நிறுவுக.

அதிலிருந்து p ஆனது ஓர் ஒற்றையெண் என உய்த்தறிக.

மேலும் இதிலிருந்து $(1-f)(p+f) = 5^n$ எனவும்

$$\left(5+2\sqrt{5}\right)^n = \frac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - 5^n} \quad \text{எனவும் காட்டுக.}$$

30. ${}^{n}C_r < n \cdot {}^{n-1}C_{r-1}$, $r = 2, 3, \ldots\ldots n$ என்பதை வழமையான குறிப்பீடு களைக் கொண்டு காட்டுக.

$$(1+x)^n = 1 + {}^{n}C_1 x + {}^{n}C_2 x^2 + \ldots\ldots + {}^{n}C_r x^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n x^n$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$(a+b)^n = a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} b + {}^{n}C_2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} b^r + \ldots\ldots + {}^{n}C_n b^n$$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து a உம் b உம் நேரெண்களாகவும் $n \geq 2$ ஆகவுமிருப்பின் $(a+b)^n - a^n < nb\,(a+b)^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

31. (a) r இன் எல்லா நேர்நிறையெண் பெறுமானங்களுக்கும் $\dfrac{1}{r!} \leq \dfrac{1}{2^{r-1}}$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு முறையினால் காட்டுக.

(b) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - 1$ ஐ ஈருறுப்புத் தேற்றத்தினால் வழமையான முறையில் விரிக்க. இவ்விரிவின் r ஆவது உறுப்பை $\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{r!}$ எனும் வடிவில் எழுதலாமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து இவ்வுறுப்பானது $\dfrac{1}{r!}$ இற்கு மேற்படாது எனக் காட்டுக.

மேலும் இவ்விரிவின் உறுப்புக்களைப் பொதுவிகிதம் $\dfrac{1}{2}$ ஆகவும், முதல் உறுப்பு 1 ஆகவுமுள்ள பெருக்கற்றொடரின் உறுப்புக்களுடன் ஒப்பிடுவதன் மூலம் n இன் எல்லா நேர் நிறையெண் பெறுமானங்களுக்கும்

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$ எனக் காட்டுக.

32. (i) $(a+b)^n$ இன் விரிவின் 2 ஆம் உறுப்புக்கும் 3 ஆம் உறுப்புக்குமிடையே உள்ள விகிதமும், $(a+b)^{n+2}$ இன் விரிவின் 3 ஆம் உறுப்புக்கும் 4 ஆம் உறுப்புக்குமிடையேயுள்ள விகிதமும் சமமெனின் $n=5$ எனக் காட்டுக.

(ii) n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, அடுத்து வரும் 3 உறுப்புக்களின் குணகங்கள் ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின் $(n+2)$ ஆனது நிறையெண் ஒன்றின் வர்க்கமாகும் எனக்காட்டுக. $n=7$ ஆகும் போது, குணகங்கள் மூன்றையும் காண்க.

33. பின்வரும் விரிவுகளில் மிகப்பெரிய தனிப் பெறுமானத்தைக் கொண்ட (மட்டுப் பெறுமானம்) உறுப்பைக் காண்க.

(a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)^4$ இன் விரிவில் $x=1$ ஆக.

(b) $(1+x)^7$ இன் விரிவில் $x=\frac{1}{2}$ ஆக.

(c) $(2-3x)^9$ இன் விரிவில் $x=\frac{3}{2}$ ஆக.

34. பின்வரும் விரிவுகளில் மிகப்பெரிய குணகத்தைக் காண்க. (மட்டுப்பெறுமானம்)

(i) $(1+x)^{75}$ இன் விரிவில்

(ii) $(1+x)^{20}$ இன் விரிவில்

(iii) $(2+3x)^9$ இன் விரிவில்

(iv) $(3-2x)^{15}$ இன் விரிவில்

35. (a) $\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^{20}$ இன் விரிவில்

(i) மிகப் பெரிய குணகத்தையும்

(ii) $x=\frac{1}{2}$ ஆக மிகப் பெரிய உறுப்பையும் காண்க.

(b) $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_n x^n$ ஆகும். ஈருறுப்புக் குணகங்களில் மிகப் பெரியது

(i) n இரட்டை எனின் ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ எனவும்

(ii) n ஒற்றை எனின் ${}^nC_{\frac{n-1}{2}} = {}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ எனவும் நிறுவுக.

36. (a) $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{12x^2}\right)^{15}$ இன் விரிவில்

(i) x ஐச் சாராத உறுப்பு.

(ii) $x = \dfrac{1}{4}$ ஆயின் மிகப்பெரிய உறுப்பு

(iii) மிகப்பெரிய குணகம் என்பவற்றைக் காண்க.

37. (a) $(1+x)^{72}$ இன் விரிவில் மிகப் பெரிய குணகத்தையுடைய உறுப்பு மிகப் பெரிய உறுப்பாக இருக்க $\dfrac{36}{37} < x < \dfrac{37}{36}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் எனக் காட்டுக.

(b) $\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^{4n}$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க. இவ்வுறுப்பு மிகப் பெரிய உறுப்பாக இருக்க $\dfrac{n}{3n+1} < x^4 < \dfrac{n+1}{3n}$ எனக் காட்டுக.

38. $(1+x)^{51}$ இன் விரிவில் மிகப் பெரிய குணகங்களைக் காண்க. மிகப் பெரிய குணகங்களைக் கொண்ட உறுப்புக்கள் மிகப் பெரிய உறுப்புக்களாயிருக்க x இன் பெறுமானம் யாது?

39. (a) $\left(1+\frac{x}{5}\right)^6$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் x இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்தி $(1 \cdot 01)^6$ ஐ நான்கு பொருளுடைய இலக்கங்களுக்கு திருத்தமாகக் காண்க.

(b) $(1-\lambda x)^6 = 1 - 12x + px^2 + qx^3 + \ldots\ldots$ எல்லா மெய் x இற்கும் எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

λ, p, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து

$(1+x)^2(1-4x)^6$ இன் விரிவில் x^3 இன் குணகத்தைக் காண்க.

(c) $\left(2x+\frac{k}{2x}\right)^9$ இன் விரிவில் x^5 இன் குணகம் 128 ஆகும். ஒருமை k இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

40. (a) $(x+2)^5$ ஐ விரித்து எழுதி, இதிலிருந்து $(x+2)^5 - (x-2)^5$ ஐ x இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாக உணர்த்துக.

$2 \cdot 1^5 + 1 \cdot 9^5$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $(1-2x)^6$ ஐ x இன் ஏறடுக்குகளில் விரிக்க. இதிலிருந்து $(0 \cdot 98)^6$ ஐயும் $(1 \cdot 02)^6$ ஐயும் ஐந்து தசமதானங்களுக்கு திருத்தமாகக் காண்க.

(c) $\left(x-\frac{3}{5x^2}\right)^7$ இன் விரிவில் x இனதும் $\frac{1}{x^5}$ இனதும் குணகங்களைக் காண்க.

(d) $\left(1+ax+x^2\right)^n$ இன் விரிவில் x^5 இன் குணகத்தைக் காண்க. a இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானத்தைப் பிரதியிடுவதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாகவோ

$${}^{2n}C_5 = {}^nC_5 + 6 \cdot {}^nC_3 + 32 \cdot {}^nC_4$$ எனக்காட்டுக.

41. (a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ இன் விரிவில் முழுவெண் பகுதியைக் காண்க. இது ஒற்றையெண் ஆகுமெனக் காட்டுக.

(b) $\left(3\sqrt{3}+5\right)^{2n+1}$ இன் பெறுமானத்தின் முழுவெண்பகுதி I, பின்னம் f எனின் $f\left(I+f\right)=2^{2n+1}$ என நிறுவுக.

42. (a) $\left(2+3x+2x^2\right)^5$ இன் விரிவை x இன் ஏறடுக்குகளில் x^3 வரை எழுதுக.

(b) $\left(1+2x+ax^2\right)^n$ இன் x இன் ஏறடுக்குகளின் விரிவில் மூன்றாம் உறுப்பு பூச்சியம் எனின் a ஐ n இல் காண்க.

(c) $\left(1+ax+bx^2+cx^3\right)^{10}$ இன் விரிவில் x, x^2, x^3 என்பவற்றின் குணகங்கள் முறையே 20, 200, 1000 எனின் a, b, c என்பவற்றைக் காண்க.

(d) $\left(1+2x+2x^2\right)^3$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகம் a_n எனின்

$a_0+a_2+a_4+a_6=63, \quad a_1+a_3+a_5=62$ என நிறுவுக.

43. (a) $\left(2-x+3x^2\right)^6$ இன் விரிவில் x^4 இன் குணகத்தைக் காண்க.

(b) $\left(1-3x+2x^2\right)^7$ இன் x இன் ஏறடுக்குகளிலான விரிவை x^3 வரை எழுதுக.

(c) $\left(2-x-x^2\right)^7$ இன் விரிவில் x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க.

(d) $\left(1-2x+2x^2\right)^{10}=1+ax+bx^2+\ldots\ldots$ எனின் $a, b,$ ஐக் காண்க.

44. $(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\ldots..+{}^nC_rx^r+\ldots..-{}^nC_nx^n$ ஆகும்.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

(i) ${}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+\ldots\ldots+{}^nC_n=2^n$

(ii) ${}^nC_0-{}^nC_1+{}^nC_2+\ldots\ldots+(-1)^n\cdot{}^nC_n=0$

(iii) $\dfrac{{}^nC_1}{{}^nC_\circ} + 2 \cdot \dfrac{{}^nC_2}{{}^nC_1} + 3 \cdot \dfrac{{}^nC_3}{{}^nC_2} + \ldots\ldots + n \cdot \dfrac{{}^nC_n}{{}^nC_{n-1}} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(iv) ${}^nC_1 - 2 \cdot {}^nC_2 + 3 \cdot {}^nC_3 + \ldots\ldots + n \cdot {}^nC_n = n \cdot 2^{n-1}$

(v) ${}^nC_1 - 2 \cdot {}^nC_2 + 3 \cdot {}^nC_3 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot {}^nC_n = O$

(vi) $1 \cdot {}^nC_\circ + 2 \cdot {}^nC_1 + 3 \cdot {}^nC_2 + 4 \cdot {}^nC_3$

$+ \ldots\ldots + (n+1) \cdot {}^nC_n = 2^{n-1}(n+2)$

(vii) ${}^nC_\circ + \dfrac{{}^nC_1}{2} + \dfrac{{}^nC_2}{3} + \ldots\ldots + \dfrac{{}^nC_n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(viii) ${}^nC_\circ + \dfrac{{}^nC_1}{2} + \dfrac{{}^nC_2}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{{}^nC_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

(ix) ${}^nC_\circ^2 + {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_n^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(x) ${}^nC_\circ^2 - {}^nC_1^2 + {}^nC_2^2 + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot {}^nC_n^2$ இன் பெறுமானம் n

ஒற்றை எனின் 0 n இரட்டை எனின் $(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$ ஆகும்.

(xi) ${}^nC_1^2 + 2 \cdot {}^nC_2^2 + 3 \cdot {}^nC_3^2 + \ldots\ldots + n \cdot {}^nC_n^2 = \dfrac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$

(xii) ${}^nC_\circ + {}^nC_1 + {}^nC_1 \cdot {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_{n-1} \cdot {}^nC_n = \dfrac{2n!}{(n+1)!\,(n-1)!}$

(xiii) ${}^nC_\circ + {}^nC_1 - {}^nC_1 \cdot {}^nC_2 + {}^nC_2 \cdot {}^nC_3 \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \cdot {}^nC_{n-1} \cdot {}^nC_n$

இன் பெறுமானம்,

n இரட்டை எனின் O

n ஒற்றை எனின் $\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!}$

(xiv) $^{n}C_{0} \cdot {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{1} \cdot {}^{n}C_{r+1} + {}^{n}C_{2} \cdot {}^{n}C_{r+2} + \ldots\ldots + {}^{n}C_{n-r} \cdot {}^{n}C_{n}$

$$= \frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}$$

(xv) $^{n}C_{0} \cdot {}^{n}C_{r} - {}^{n}C_{1} \cdot {}^{n}C_{r+1} + {}^{n}C_{2} \cdot {}^{n}C_{r+2}$

$+ \ \ldots\ldots + (-1)^{n-r} \cdot {}^{n}C_{n-r}\ {}^{n}C_{n}$ இன் பெறுமானம்,

$(n-r)$ ஒற்றை எனின் 0

$(n-r)$ இரட்டை எனின் $\dfrac{(-1)^{\frac{n-r}{2}} \cdot n!}{\left(\frac{n-r}{2}\right)!\left(\frac{n+r}{2}\right)!}$

45. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, ஈருறுப்பு விரிவைப் பயன்படுத்தி

(a) $5^{2n} + 2^{3n+4}$ என்பது 17 ஆல் வகுபடும்.

(b) $3^{4n+2} + 2^{6n+3}$ என்பது 17 ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

9. சிக்கலெண்கள்

$x^2 - 1 = 0$ இன் தீர்வைக் கருதுக.

$x^2 - 1 = 0,\ (x-1)(x+1) = 0;\quad x = -1$ அல்லது 1 ஆகும்.

$x^2 + 1 = 0$ இன் தீர்வைக் கருதுக.

$x^2 = -1$, எனவே மெய்த்தீர்வு இல்லை.

i எனும் குறியீடு $i^2 = -1$ ஆகுமாறுள்ள கணியத்தைக் குறிக்கிறது என்க.

$\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = i$ ஆகும்.

$$x^2 + 1 = 0; \qquad x^2 - i^2 = 0$$

$$(x-i)(x+i) = 0$$

$x = -i$ அல்லது i ஆகும்.

$x^2 - x + 1 = 0$ இன் தீர்வைக் கருதுக.

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,
$a = 1,\ b = -1,\ c = 1$ ஆகும்.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ என்பதில் பிரதியிட

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{i^2 \times 3}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$ அல்லது $$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ஆகும்.

சிக்கலெண் ஒன்றின் பொதுவடிவம்

a, b என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க, சிக்கலெண் Z ஆனது $Z = a + ib$ எனக் குறிக்கப்படும். இங்கு a என்பது Z இன் மெய்ப்பகுதி எனவும், b என்பது Z இன் கற்பனைப் பகுதி எனவும் குறிப்பிடப்படும்.

$Z = a + ib$ எனின்,

$\mathrm{Re}(Z) = a, \quad \mathrm{Im}(Z) = b$ ஆகும்.

$Z = a + ib$ இல் $a = 0$ எனின், $Z = ib$ ஆகும்.

இது தூய கற்பனை எண் எனப்படும்.

சிக்கலெண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல்

$Z_1 = a + ib, \quad Z_2 = c + id$ என்க.

$$Z_1 + Z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$Z_1 - Z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \times \frac{c - id}{c - id}$$

$$= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

பூச்சிய சிக்கலெண்

$Z = 0$ எனின், $Z = a + ib = 0$

இங்கு $a = 0, \quad b = 0$ ஆகும்.

$a + ib = 0 \Longleftrightarrow a = 0, \quad b = 0$

சம சிக்கலெண்கள்

$Z_1 = a + ib, \quad Z_2 = c + id$ என்க.

$Z_1 = Z_2$ எனின் $Z_1 - Z_2 = 0$

$(a - c) + i(b - d) = 0$

ஆகவே $a - c = 0, \quad b - d = 0$

$a = c, \quad b = d$

$a + ib = c + id \Longleftrightarrow a = c, \; b = d$ ஆகும்.

உடன் புணரிச் சிக்கலெண் *(Comples Conjugate)*

$Z = a + ib$ எனின், Z இன் உடன் புணரிச் சிக்கலெண்

$\overline{Z} = a - ib$ என வரையறுக்கப்படும்.

$Z + \overline{Z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$ – மெய்யெண்

$Z \cdot \overline{Z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$ – மெய்யெண்

மேலும் $a^2 + b^2 \geq 0$ ஆகும்.

இருபடிச் சமன்பாட்டின் சிக்கலெண் மூலங்கள்

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c$ - மெய்யெண்கள் $a \neq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(i) $b^2-4ac>0$ எனின் மூலங்கள் இரண்டும் மெய்யானவை, வேறு வேறானவை.

(ii) $b^2-4ac=0$ எனின், மூலங்கள் இரண்டும் மெய்யானவை, சமமானவை.

(iii) $b^2-4ac<0$ எனின் மூலங்கள் இரண்டும் கற்பனையானவை.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \left(b^2-4ac<0\right)$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{(-1)\left(4ac-b^2\right)}}{2a} \qquad \left(4ac-b^2>0\right)$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{i^2\left(4ac-b^2\right)}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$=\frac{-b}{2a}\pm i\,\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$= p\pm iq$ என எழுதலாம்.

இங்கு $p=-\dfrac{b}{2a},\ q=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

p, q - மெய்யெண்கள் ஆகும்.

ஒருமூலம் $p+iq$ எனும் வடிவில் இருப்பின் மற்றைய மூலம் அதன் உடன்புணரி $p-iq$ எனும் வடிவில் இருக்கும்.

உதாரணம் 1

(i) $2+i$ ஐ ஒரு மூலமாகக் கொண்ட மெய்க் குணகங்களுடனான இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) a, b மெய்யாகவும், $b \neq 0$ ஆகவும் இருக்க, $Z = a + ib$ ஆகவும் $Z + \omega$, $Z\omega$ என்பன மெய்யெண்களாகவும் இருப்பின் $\omega = a - ib$ என நிறுவுக.

(iii) $3 - 4i$ இன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

(iv) $x^2 - 2x + 10$ ஐ ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதி $\dfrac{x}{x^2 - 2x + 10}$ ஐப் பகுதிப் பின்னமாக எழுதுக.

(i) ஒரு மூலகம் $2 + i$ என்பதால், மற்ற மூலகம் $2 - i$ ஆகும்.
$2 + i$, $2 - i$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$[x - (2 + i)]\,[x - (2 - i)] = 0$$

$$x^2 - [(2 + i) + (2 - i)]x + (2 + i)(2 - i) = 0$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

(ii) $Z = a + ib$, $\omega = x + iy$ என்க.

$Z + \omega = (a + x) + i(b + y)$

$Z + \omega$ மெய்யெண். எனவே $b + y = 0$, $y = -b$

$$Z\omega = (ax - by) + i(ay + bx)$$

$Z\omega -$ மெய்யெண் $ay + bx = 0$

$$y = -b, \quad -ab + bx = 0$$

$$b(x - a) = 0$$

$b \neq 0$ என்பதால் $x - a = 0$, $x = a$

ஆகவே $\omega = a - ib$ ஆகும்.

(iii) $3 - 4i$ இன் வர்க்கமூலம் $a + ib$ என்க. a, b மெய்யெண்கள்

$$(a + ib)^2 = 3 - 4i$$

$$(a^2 - b^2) + i2ab = 3 - 4i$$

மெய்ப்பகுதிகளைச் சமப்படுத்த. $a^2 - b^2 = 3$

கற்பனைப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த, $2ab = -4$

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{———————} \quad \textbf{(1)}$$

$$ab = -2 \quad \text{———————} \quad \textbf{(2)}$$

$b = \dfrac{-2}{a}$ என (1) இல் பிரதியிட,

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$$

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$\left(a^2 - 4\right)\left(a^2 + 1\right) = 0$$

$a^2 + 1 \neq 0$; ஆகவே $a^2 - 4 = 0$

$$a = \pm 2$$

$a = 2$ எனின் $b = -1$

$a = -2$ எனின் $b = 1$

வர்க்கமூலம் $2 - i, -2 + i$

$= \pm(2 - i)$ ஆகும்.

$$x^2 - 2x + 10 = x^2 - 2x + 1 + 9$$

$$= (x-1)^2 - (3i)^2$$

$$= (x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i),$$

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 10} = \frac{x}{\left[x - (1 + 3i)\right]\left[x - (1 - 3i)\right]}$$

$$= \frac{A + iB}{x - (1 + 3i)} + \frac{C + iD}{x - (1 - 3i)}$$

$$= \frac{(A + iB)\left[x - (1 - 3i)\right] + (C + iD)\left[x - (1 + 3i)\right]}{\left[x - (1 + 3i)\right]\left[x - (1 - 3i)\right]}$$

$$x = (A + iB)[x - (1 - 3i)] + (C + iD)[x - (1 + 3i)]$$

$x = (1 - 3i)$ எனின்,

$$1 - 3i = 0 + (C + iD)[(1 - 3i) - (1 + 3i)]$$

$$1 - 3i = (C + iD)(-6i)$$

$$1 - 3i = 6D - i6C$$

$$6D = 1,\ \ 6C = 3, \qquad D = \frac{1}{6}, \qquad C = \frac{3}{6}$$

$x = (1 + 3i)$ எனின்,

$$1 + 3i = (A + iB)[(1 + 3i) - (1 - 3i)]$$

$$1 + 3i = (A + iB)(6i)$$

$$1 + 3i = -6B + i6A$$

$$B = -\frac{1}{6},\ \ A = \frac{3}{6}$$

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 10} = \frac{1}{6}\left[\frac{3 - i}{x - (1 + 3i)} + \frac{3 + i}{x - (1 - 3i)}\right]$$

உதாரணம் 2

Z_1, Z_2 என்பன இரு சிக்கலெண்களாகவும், அவற்றின் உடன்புணரிகள் முறையே $\overline{Z_1}, \overline{Z_2}$ ஆகவுமிருக்க, பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

(ii) $\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$

(iii) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = (\overline{Z_1}) \cdot (\overline{Z_2})$

(iv) $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

$Z_1 = x_1 + i y_1$, $Z_2 = x_2 + i y_2$ என்க.

இப்போது, $\overline{Z_1} = x_1 - i y_1$, $\overline{Z_2} = x_2 - i y_2$

i) $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned}\overline{Z_1 + Z_2} &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)\\ &= (x_1 - i y_1) + (x_2 - i y_2)\\ &= \overline{Z_1} + \overline{Z_2}\end{aligned}$$

(ii) $Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

$$\begin{aligned}\overline{Z_1 - Z_2} &= (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)\\ &= (x_1 - i y_1) - (x_2 - i y_2)\\ &= \overline{Z_1} - \overline{Z_2}\end{aligned}$$

(iii) $Z_1 Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$$\begin{aligned}\overline{Z_1 Z_2} &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\\ &= x_1 x_2 - i x_1 y_2 - i x_2 y_1 - y_1 y_2\\ &= x_1(x_2 - i y_2) - i y_1(x_2 - i y_2)\\ &= (x_1 - i y_1)(x_2 - i y_2)\\ &= \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}\end{aligned}$$

(iv) $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{i(bc - ad)}{c^2 + d^2}\\ &= \frac{1}{c^2 + d^2}\left[(ac - ibc) + bd + iad\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c^2 + d^2} \left[(a - ib)\, c + id\, (a - ib) \right]$$

$$= \frac{1}{c^2 + d^2} \times (a - ib)(c + id)$$

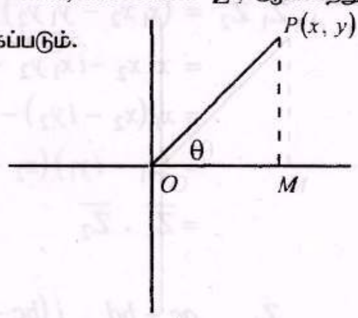
$$= \frac{(a - ib)(c + id)}{c - id\, (c + id)}$$

$$= \frac{a - ib}{c - id} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

ஆகன் வரிப்படம் *(Argand Diagram)*

சிக்கலெண் ஒன்றை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்தல்

ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் Ox, Oy அச்சுக்கள் முறையே மெய் அச்சு, கற்பனை அச்சு என எடுக்கப்படுகிறது. $Z = x + iy$ எனின், சிக்கலெண் Z, ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் புள்ளி $P(x, y)$ ஆல் குறிக்கப்படும்.



$$Z = x + iy \longleftrightarrow P(x, y)$$

$Z = x + iy$ எனின்,

Z இன் மட்டு $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

என வரையறுக்கப்படும்.

சிக்கலெண் ஒன்றை முனைவாள்கூறு வடிவத்தில் எழுதுதல்

$$Z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$= r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

இங்கு $r \geq 0$ ஆகும். $-\pi < \theta \leq \pi$ ஆகும்.

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

சிக்கலெண் Z இன்மட்டு *(modulus)* $|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

Z இன்வீச்சு *(argument)*, $\arg(Z) = \theta$

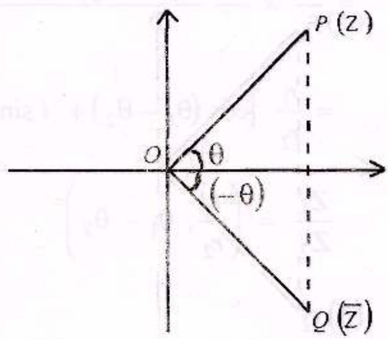
தலைமை வீசல் *(Principal argument)*, $Arg(Z)$

என்பதால் குறிக்கப்படும்.

$-\pi < \arg(Z) \leq \pi$ ஆகும்.

சிக்கலெண் Z இன் மட்டு, வீசல் தரப்படின், $\overline{Z}$ இன்மட்டு, வீசல்

$Z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.



இங்கு $|Z| = r$, $\arg(Z) = \theta$

$P \equiv (r, \theta)$ ஆகும்.

$$\overline{Z} = r\cos\theta - ir\sin\theta$$

$$= r[\cos\theta - i\sin\theta]$$

$$= r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$|\overline{Z}| = r,\ \ \arg(Z) = -\theta$ ஆகும்.

$|\overline{Z}| = |Z|,\ \arg(\overline{Z}) = -\arg(Z)$ ஆகும்.

$Z = x + iy$ எனின் $\overline{Z} = x - iy$ ஆகும்.

$$Z \cdot \overline{Z} = x^2 + y^2 = |Z|^2$$

எனவே $Z \cdot \overline{Z} = |Z|^2 = |\overline{Z}|^2$ ஆகும்.

$Z_1 \equiv (r_2, \theta_2),\ \ Z_2 \equiv (r_2, \theta_2)$ எனின் $Z_1 \cdot Z_2,\ \dfrac{Z_1}{Z_2}$ ஐக் காணல்.

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2\left[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\ \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2) + i\,(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2\right.$$

$$= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$Z_1 \cdot Z_2 \equiv (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \times \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right)$$

உதாரணம் 3

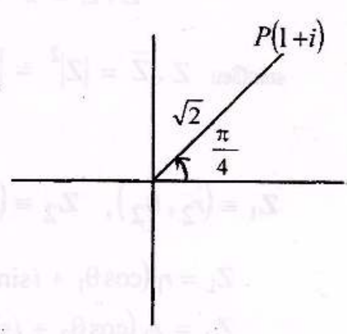
பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, தலைமை வீசல் என்பவற்றைக் காண்க

(i) $1+i$ **(ii)** $2i$ **(iii)** $-\sqrt{3}+i$ **(iv)** $-1-i\sqrt{3}$ **(v)** $1-i$

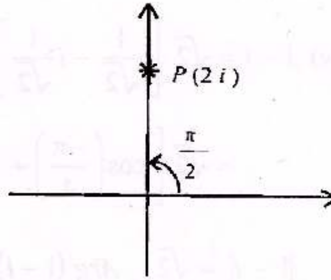
(i) $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$|1+i| = \sqrt{2}$, $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

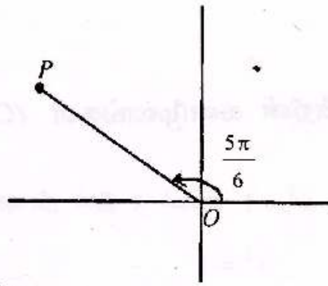


(ii) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$



$|2i| = 2, \quad Arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

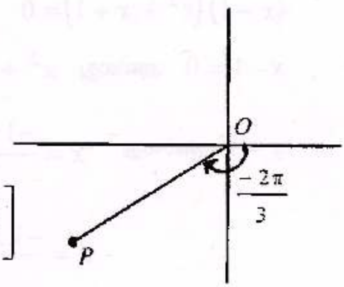
(iii) $-\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$



$= 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$

$\left|-\sqrt{3} + i\right| = 2, \quad Arg\left(-\sqrt{3} + i\right) = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad OP = 2$

(iv) $-1 - i\sqrt{3} = 2\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



$= 2\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$

அல்லது $= 2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

இங்கு $|Z| = 2, \quad Arg(Z) = \frac{-2\pi}{3}$

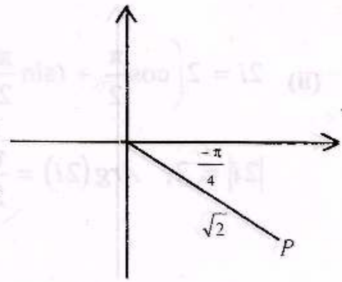
$\frac{4\pi}{3}$ – தலைமை வீசல் அல்ல.

தலைமை வீசல் $Arg(Z) = \frac{-2\pi}{3}$ ஆகும்.

(v) $1 - i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$$

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad Arg\,(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$$



ஒன்றின் கனமூலங்கள் *(Cube root of unity)*

$x^3 = 1$ எனின் x இன் தீர்வுகள் 1 இன் கனமூலங்களைத் தரும்.

$$x^3 = 1$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$x - 1 = 0$ அல்லது $x^2 + x + 1 = 0$

$x = 1$ அல்லது $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$x = 1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகிய மூன்றும் 1 இன் கனமூலங்கள் ஆகும். இங்கு ஒரு மூலம் மெய்யாகவும், மற்றைய இரண்டும் கற்பனை மூலங்களாகவும் உள்ளன. மேலும் 3 மூலங்களினதும் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவும் உள்ளது.

$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்க.

$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\omega = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ என்க.

$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

எனவே கற்பனை மூலங்களில் ஒன்று w எனின் மற்றையது ω^2 ஆகும். 1 இன் கனமூலங்கள் $1, \omega, \omega^2$ ஆகும். இம் மூலங்களை $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ எனும் வடிவில் எழுதுவோம்.

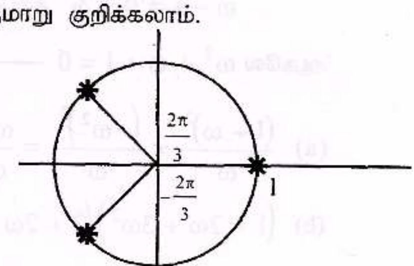
$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \text{ அல்லது}$$

$$= 1\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

ஆகன் வரிப்படத்தில் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



உதாரணம் 4

(i) $(1+i)^{20}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) 1 இன் கனமூலங்களில் கற்பனை மூலங்களில் ஒன்று ω எனின்,

$\omega^3 = 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

(a) $\dfrac{(1+\omega)^2}{\omega}$ **(b)** $(1+2\omega+3\omega^2)(3+2\omega+\omega^2)$

(c) $\omega^7 + \omega^8 + \omega^9$ என்பவற்றின் பெறுமானாங்களைக் காண்க.

(i) $(1+i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10}$

$= \left[1 + 2i + i^2\right]^{10}$

$= (2i)^{10} = i^{10} \times 2^{10} = (i^2)^5 \times 2^{10} = (-1)^5 \times 2^{10} = -2^{10}$

(ii) $x^3 = 1$ இன் தீர்வுகள் 1 இன் கனமூலங்கள் ஆகும். கற்பனை மூலங்களில் ஒன்று ω ஆகும்.

ω, $x^3 - 1 = 0$ ஐத் திருப்தியாக்கும்.

ஆகவே $\omega^3 - 1 = 0$

$\omega^3 = 1$ ——————— **(1)**

$\omega^3 - 1 = 0$

$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$

$\omega - 1 \neq 0$ (ω கற்பனை மூலம் என்பதால்)

ஆகவே $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ——————— **(2)**

(a) $\dfrac{(1+\omega)^2}{\omega} = \dfrac{(-\omega^2)^2}{\omega} = \dfrac{\omega^4}{\omega} = \omega^3 = 1$

(b) $(1+2\omega+3\omega^2)(3+2\omega+\omega^2)$

$$= \left[\left(1+\omega+\omega^2\right)+\left(\omega+\omega^2\right)+\omega^2\right]\left[\left(1+\omega+\omega^2\right)+\left(2+\omega\right)\right]$$
$$= \left[0-1+\omega^2\right]\ \left[0+2+\omega\right]$$
$$= \left[\omega^2-1\right]\left[\omega+2\right] = \omega^3+2\omega^2-\omega-2$$
$$= 1+2\omega^2+\left(1+\omega^2\right)-2$$
$$= 3\omega^2$$

(c) $\omega^7+\omega^8+\omega^9 = \omega^7\left(1+\omega+\omega^2\right)$

$$= \omega^7 \times 0 = 0$$

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண்களை வகை குறித்தல்

Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்கள் தரப்படின்

(i) Z_1+Z_2 **(ii)** Z_1-Z_2 **(iii)** $Z_1 \cdot Z_2$ **(iv)** $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

ஆகிய சிக்கலெண்களை வகைகுறித்தல்.

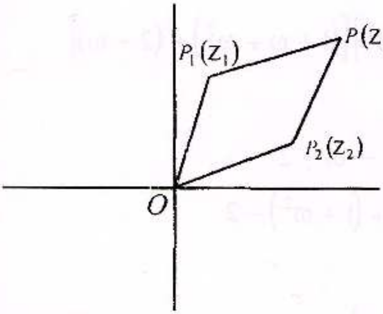
$Z_1 = x_1+iy_1$, $Z_2 = x_2+iy_2$ என்க.

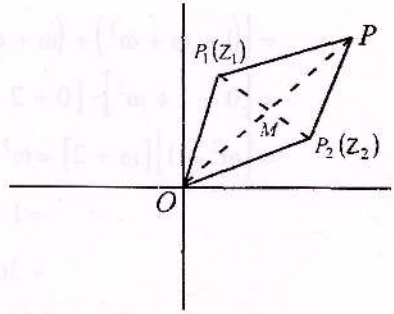
சிக்கலெண்கள் Z_1, Z_2 என்பன ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே P_1, P_2 எனும் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன

$P_1 \equiv (x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ ஆகும்.

(i) Z_1+Z_2

OP_1, OP_2 என்பவற்றை அயல் பக்கங்களாகக் கொண்டு இணைகரம் $OP_1\ P\ P_2$ ஐப் பூர்த்தியாக்குக. புள்ளி P, சிக்கலெண் Z_1+Z_2 ஐக் குறிக்கும்.





நிறுவல்:

இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் OP, $P_1 P_2$ என்பன M இல் இடை வெட்டுகின்றன.

$P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ ஆகவே $M \equiv \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right)$

$O = (0, 0)$ என்பதால் $P \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

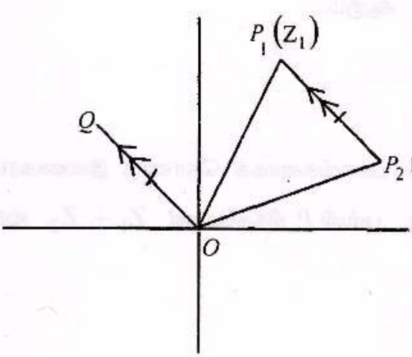
P குறிக்கும் சிக்கலெண் $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

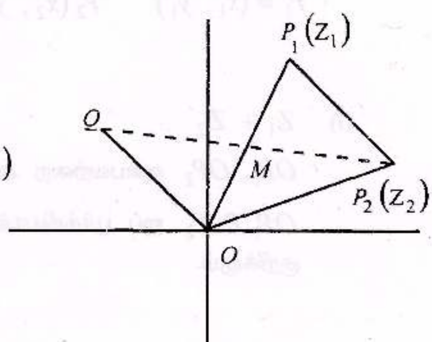
$$= (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2)$$

$$= Z_1 + Z_2$$

[குறிப்பு : $OP = |Z_1 + Z_2|$ ஆகும்]

(ii) $Z_1 - Z_2$





$P_2 P_1$ இற்கு சமனும், சமாந்தரமுமாக OQ வை வரைக. புள்ளி Q குறிக்கும் சிக்கலெண் $Z_1 - Z_2$ ஆகும்.

நிறுவல் :

$$OQ = P_2 P_1, \qquad OQ \parallel P_2 P_1$$

ஆகவே $OP_2 P_1 Q$ இணைகரம்

மூலைவிட்டங்கள் OP_1, $P_2 Q$ என்பன M இல் இடை வெட்டுகின்றன.

$O \equiv (0, 0), \quad P_1 (x_1, y_1)$

OM = MP என்பதால் $M \equiv \left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{y_1}{2}\right)$

இப்பொழுது $P_2 M = QM$

$$P_2 \equiv (x_2, y_2), \qquad M \equiv \left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$$

ஆகவே $Q \equiv (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ ஆகும்.

Q குறிக்கும் சிக்கலெண் $(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ ஆகும்.

$$= (x_1 + i y_1) - (x_2 + i y_2)$$

$$= Z_1 - Z_2 \text{ ஆகும்.}$$

[குறிப்பு : $OQ = P_1 P_2 = |Z_1 - Z_2|$ ஆகும்]

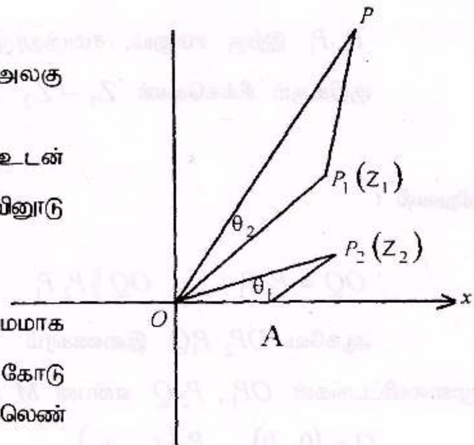
(iii) $Z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $Z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ என்க.

$Z_1 \equiv (r_1, \theta_1), \quad Z_2 \equiv (r_2, \theta_2)$ எனின்,

$Z_1 Z_2 \equiv (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$ ஆகும்.

$OP_1 = r_1, \quad \angle P_1 Ox = \theta_1, \quad OP_2 = r_2, \quad \angle P_2 Ox = \theta_2$ ஆகும்.

அச்சு Ox இல் OA = 1 அலகு ஆகுமாறு புள்ளி A ஐ எடுக்க. P_2A ஐ இணைக்க. OP_1 உடன் கோணம் θ_2 அமைக்குமாறு O வினூடு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது.



OAP_2 எனும் கோணத்துக்கு சமமாக OP_1P வரையப்படுகிறது. இரு கோடுகளும் சந்திக்கும்புள்ளி P, சிக்கலெண் $Z_1 Z_2$ ஐ குறிக்கும்.

நிறுவல் :

$$\angle POx = \theta_1 + \theta_2 \qquad \text{———} \quad (1)$$

ΔOP_1P, ΔOAP_2 இயல்பொத்தவை

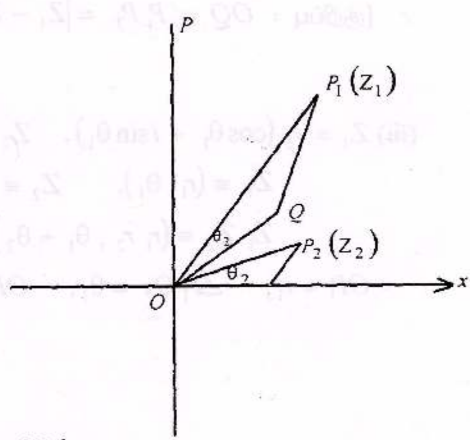
$$\frac{OP_1}{OA} = \frac{OP}{OP_2}$$

$$\frac{r_1}{1} = \frac{OP}{r_2}, \qquad OP = r_1 r_2 \qquad \text{———} \quad (2)$$

ஆகவே $P \equiv (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$

(iv) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

அச்சு Ox இல் OA = 1 அலகு ஆகுமாறு A என்னும் புள்ளியை எடுக்க. OP_1 உடன் θ_2 எனும் கோணம் அமைக்குமாறு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது. OP_2A எனும் கோணத்திற்கு சமமாக கோணம்



OP_1Q வரையப்படுகிறது. இருகோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி Q குறிக்கும் சிக்கலெண் $\frac{Z_1}{Z_2}$ ஆகும்.

நிறுவல் :

$\Delta\, OQP_1$, $\Delta\, OAP$ இயல்பொத்தவை.

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OP_1}{OP_2}$$

$$\frac{OQ}{1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$OQ = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{———} \quad (1)$$

$$\angle QOx = \theta_1 - \theta_2 \quad \text{———} \quad (2)$$

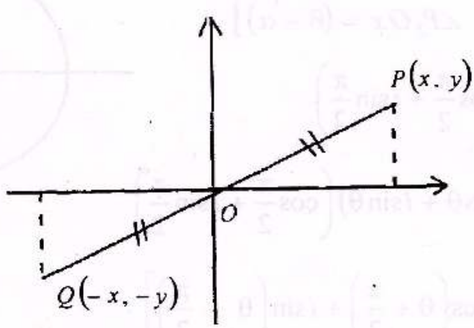
$$Q \equiv \left(\frac{r_1}{r_2},\, \theta_1 - \theta_2\right)$$

Z எனும் சிக்கலெண் தரப்படின் $-Z$ ஐக் காணல்

$Z = x + iy \longrightarrow P(x, y)$

$-Z = -x - iy \longrightarrow Q(-x, -y)$

$PO = OQ$ ஆகுமாறு PO நீட்டப்பட Q பெறப்படும்.

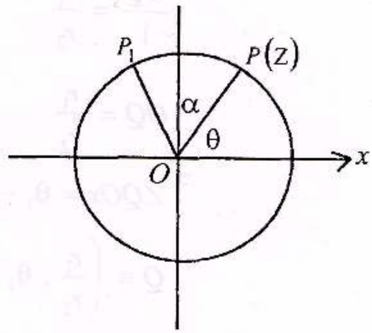


சிக்கலெண் Z தரப்படின் $Z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ஐ ஆகன் வரிப் படத்தில் வகைகுறித்தல்

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்க.

$$Z(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$= r\left[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\right]$$
$$Z(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (r, \theta+\alpha)$$

$OP = r \qquad \angle POx = \theta$



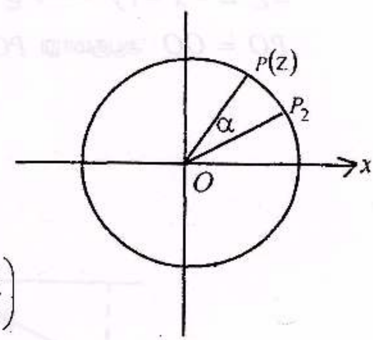
புள்ளி P, சிக்கலெண் Z ஐக் குறிப்பின், புள்ளி P_1, $Z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ஐக் குறிக்கும். இங்கு P ஆனது இடஞ் சுழியாக, O பற்றி α கோணத்தினூடு திருப்பப்படுகிறது.

$$\left[OP_1 = r,\ \angle P_1Ox = \theta + \alpha\right]$$

$$Z(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)\left[\cos(-\alpha) + i\sin(1-\alpha)\right]$$
$$= r\left[\cos(\theta-\alpha) + i\sin(\theta-\alpha)\right]$$

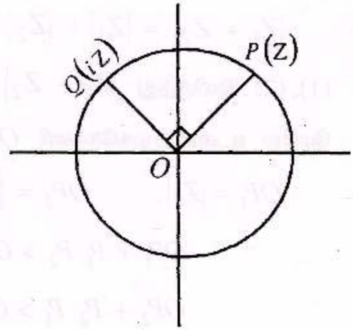
புள்ளி P_2, $Z(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ ஐ வகை குறிக்கும்.

$$\left[OP_2 = r,\ \angle P_2Ox = (\theta-\alpha)\right]$$



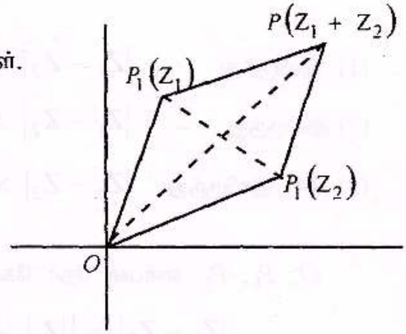
$$iZ = Z\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

P ஆனது O பற்றி இடஞ்சுழியாக 90° யினூடு திருப்பப்படின் பெறப்படும் புள்ளி Q சிக்கலெண் iZ ஐக் குறிக்கிறது.



P ஆனது O பற்றி வலஞ்சுழியாக 90° யினூடு திருப்பப்படின் பெறப்படும் புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் $-iZ$ ஆகும்.

Z_1, Z_2 என்பன இரு சிக்கலெண்கள்.



(i) $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

(ii) $|Z_1 - Z_2| \ge \big||Z_1| - |Z_2|\big|$ ஆகும்.

$\Delta\, OP_1 P, \quad \Delta\, OP_2 P$ இல்

$OP_1 = P_2 P = |Z_1|, \quad OP_2 = P_1 P = |Z_2|$

$OP = |Z_1 + Z_2| \qquad P_1 P_2 = |Z_1 - Z_2|$ ஆகும்.

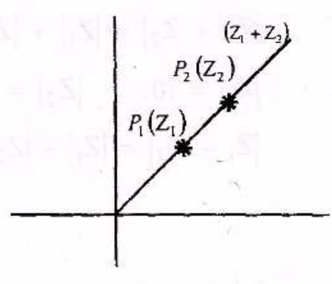
"முக்கோணி ஒன்றின் எந்த இருபக்கங்களினதும் கூட்டுத்தொகை, மூன்றாம் பக்கத்திலும் பெரிதாகும்." — என்ற கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தின்படி,

$$OP_2 + P_2 P > OP$$

$$|Z_2| + |Z_1| > |Z_1 + Z_2|$$

ஆகவே $|Z_1 + Z_2| < |Z_1 + Z_2|$ ———————— **(1)**

O, P_1, P_2 என்பன ஒரேநேர் கோட்டில், படத்தில் காட்டியவாறு இருப்பின்



$$OP = OP_1 + P_1 P..$$

$$= OP_1 + OP_2$$

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \qquad \text{——————— (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

மேலே உள்ள முக்கோணி $OP_1 P_2$ இல்

$$OP_1 = |Z_1|, \qquad OP_2 = |Z_2|, \qquad P_1 P_2 = |Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_1|$$

$$OP_1 + P_1 P_2 > OP_2, \qquad |Z_1| + |Z_1 - Z_2| > |Z_2| \text{ —— (1)}$$

$$OP_2 + P_2 P_1 > OP_1, \qquad |Z_2| + |Z_1 - Z_2| > |Z_1| \text{ —— (2)}$$

(1) இலிருந்து $\quad |Z_1 - Z_2| > |Z_1| - |Z_2|$ ——————— (3)

(2) இலிருந்து $\quad |Z_1 - Z_2| > |Z_2| - |Z_1|$ ——————— (4)

(3), (4) இலிருந்து $\quad |Z_1 - Z_2| > \big||Z_1| - |Z_2|\big|$

O, P_1, P_2 என்பன நேர் கோட்டில் அமையும் போது

$|Z_1 - Z_2| = \big||Z_1| - |Z_2|\big|$ எனக் காட்டலாம்.

ஆகவே, $|Z_1 - Z_2| \ge \big||Z_1| - |Z_2|\big|$ ஆகும்.

$Z_1 = 6 + 8i, \quad Z_2 = 3 + 4i$ என்க.

$Z_1 + Z_2 = (6 + 8i) + (3 + 4i) = 9 + 12i$

$Z_1 - Z_2 = (6 + 8i) - (3 + 4i) = 3 - 4i$

$|Z_1| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad |Z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|Z_1 + Z_2| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருப்பதைக் காணலாம்.

$|Z_1| = 10, \quad |Z_2| = 5, \quad |Z_1 - Z_2| = 5$

$|Z_1 - Z_2| = |Z_1| - |Z_2|$ ஆக உள்ளது

பின்வரும் முடிபுகளை அட்சரகணித முறையில் நிறுவலாம்.

(i) $|Z_1 Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$ (ii) $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|$

(iii) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ (iv) $|Z_1 - Z_2| \geq \big||Z_1| + |Z_2|\big|$

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} \quad |Z_1 Z_2|^2 &= (Z_1 Z_2)\left(\overline{Z_1 Z_2}\right) \\
&= (Z_1 Z_2)\left(\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}\right) \\
&= \left(Z_1 \cdot \overline{Z_1}\right) \cdot \left(Z_2 \cdot \overline{Z_2}\right) \\
&= |Z_1|^2 \cdot |Z_2|^2
\end{aligned}
$$

$|Z_1 Z_2|, \; |Z_1|, \; |Z_2| \geq 0$ என்பதால்

$|Z_1 Z_2| = |Z_1| \, |Z_2|$

(ii) $Z_1 = \dfrac{Z_1}{Z_2} \cdot Z_2$

$$|Z_1| = \left|\frac{Z_1}{Z_2} \cdot Z_2\right|$$

$$= \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| \cdot |Z_2|$$ ((i) இன் நிறுவலின்படி)

$$\frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|$$

ஆகவே $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$ ஆகும்.

$$
\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad |Z_1 + Z_2|^2 &= (Z_1 + Z_2)\left(\overline{Z_1 + Z_2}\right) \\
&= (Z_1 + Z_2)\left(\overline{Z_1} + \overline{Z_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$= Z_1 \cdot \overline{Z_1} + Z_2 \cdot \overline{Z_2} + Z_1 \cdot \overline{Z_2} + \overline{Z_1} \cdot Z_2$$

$$= Z_1 \cdot \overline{Z_1} + Z_2 \cdot \overline{Z_2} + Z_1 \overline{Z_2} + \left(\overline{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}\right)$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(Z_1 \overline{Z_2}\right)$$

$$\leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2\left|Z_1 \overline{Z_2}\right|$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1|\left|\overline{Z_2}\right|$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 < \left(|Z_1| + |Z_2|\right)^2, \quad |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

(iv) $|Z_1 - Z_2|^2 = (Z_1 - Z_2)\left(\overline{Z_1 - Z_2}\right)$

$$= (Z_1 - Z_2)\left(\overline{Z_1} - \overline{Z_2}\right)$$

$$= Z_1 \overline{Z_1} + Z_2 \cdot \overline{Z_2} - \left(Z_1 \cdot \overline{Z_2} + \overline{Z_1} Z_2\right)$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(Z_1 \overline{Z_2}\right)$$

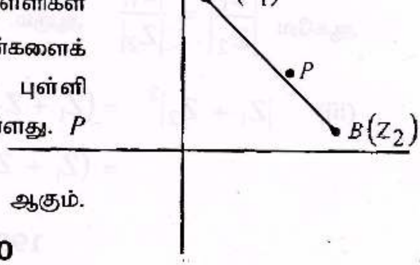
$$\geq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2\left|Z_1 \overline{Z_2}\right|$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1|\left|\overline{Z_2}\right|$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|$$

$$= \left(|Z_1| - |Z_2|\right)^2$$

$$|Z_1 - Z_2| \geq \left||Z_1| - |Z_2|\right|$$



ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B எனும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கிறது. AB யில் P எனும் புள்ளி $AP : PB = m : n$ ஆகுமாறு உள்ளது. P குறிக்கும் சிக்கலெண் $\dfrac{nZ_1 + mZ_2}{n + m}$ ஆகும்.

$$Z_1 = x_1 + i\,y_1, \quad Z_2 = x_2 + i\,y_2$$

$$A \equiv (x_1,\ y_1), \qquad B \equiv (x_2,\ y_2)$$

$$AP : PB = m : n$$

ஆகவே $P \equiv \left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{n + m},\ \dfrac{ny_1 + my_2}{n + m} \right)$

P குறிக்கும் சிக்கலெண் $\dfrac{nx_1 + mx_2}{n + m} + i\,\dfrac{ny_1 + my_2}{n + m}$

$$= \frac{1}{n + m}\left[(n x_1 + i n y_1) + (m x_2 + i m y_2)\right]$$

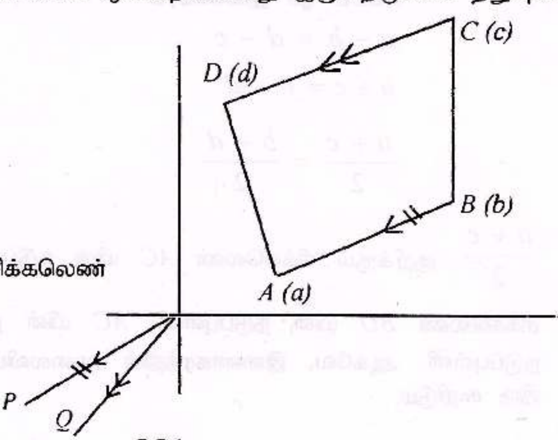
$$= \frac{1}{n + m}\left[n(x_1 + i\,y_1) + m(x_2 + i\,y_2)\right]$$

$$= \frac{nZ_1 + mZ_2}{n + m}$$

உதாரணம் 5

ஆகன் வரிப்படத்தில் உச்சிகள் A, B, C, D என்பன முறையே a, b, c, d எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. $ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனின் மட்டுமே $a - b = d - c$ என நிறுவுக.

ஓர் இணைகரத்தின் மேற்கூறிய உடைமையைப் பயன்படுத்தி இணைகரமொன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடுமென நிறுவுக.



$ABCD$ நாற்பக்கல்.

$$\left.\begin{aligned} OP &= BA \\ OP &\parallel BA \end{aligned}\right\}$$

புள்ளி P குறிக்கும் சிக்கலெண் $a - b$ ஆகும்.

$$\left.\begin{array}{l} OQ = CD \\ OQ \parallel CD \end{array}\right\}$$

புள்ளி Q குறிக்கும் சிக்கலெண் $d - c$ ஆகும்.

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் என்க.

$$AB = DC : \qquad AB \parallel DC$$

ஆகவே $OP = OQ$, $\quad OP \parallel OQ$

P உம், Q உம் ஒரே புள்ளியாக அமையும்.

$$P \equiv Q$$

$$a - b = d - c$$

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனின் $a - b = d - c$ ——————— (1)

மறுதலையாக $a - b = d - c$ என்க.

$$P \equiv Q$$

$$OP = OQ, \qquad OP \parallel OQ$$

$$AB = DC, \qquad AB \parallel DC$$

ஆகவே $ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

$a - b = d - c$ எனின் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் ——————— (2)

(1), (2) இலிருந்து, $ABCD$ இணைகரம் $\Longleftrightarrow a - b = d - c$

$ABCD$ ஓர் இணைகரம்

$$a - b = d - c$$

$$a + c = b + d$$

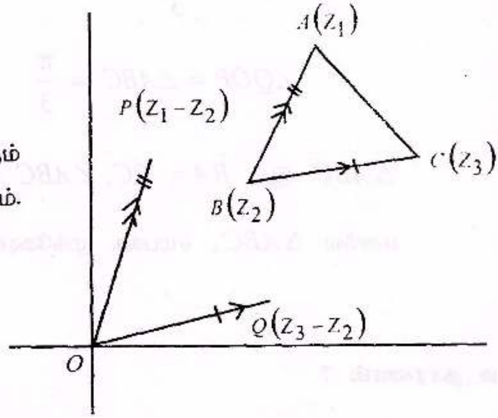
$$\frac{a + c}{2} = \frac{b + d}{2}$$

$\dfrac{a + c}{2}$ குறிக்கும் சிக்கலெண் AC யின் நடுப்புள்ளி $\dfrac{b + d}{2}$ குறிக்கும் சிக்கலெண் BD யின் நடுப்புள்ளி. AC யின் நடுப்புள்ளி $\equiv BD$ யின் நடுப்புள்ளி. ஆகவே, இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு கூறிடும்.

உதாரணம் 6

ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B, C என்பன இடஞ்சுழியாக எடுக்கப்பட்ட முக்கோணி ABC இன் உச்சிகளாகும். A, B, C என்பன முறையே Z_1, Z_2, Z_3 எனும் சிக்கலெண்களை வகை குறிக்கின்றன.

$\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ எனின், ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி என நிறுவுக.



$OP = BA$

$OP \parallel BA$ ஆகுமாறு OP வரையப்படுகிறது. P குறிக்கும் சிக்கலெண் $Z_1 - Z_2$ ஆகும்.

$OQ = BC$

$OQ \parallel BC$ ஆகுமாறு OQ வரையப்படுகிறது. Q குறிக்கும் சிக்கலெண் $Z_3 - Z_2$ ஆகும்.

$$Z_1 - Z_2 = (Z_3 - Z_2)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$|Z_1 - Z_2| = \left|(Z_3 - Z_2)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$|Z_1 - Z_2| = |Z_3 - Z_2| \left|\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right|$$

$$|Z_1 - Z_2| = |Z_3 - Z_2| \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}}$$

$$|Z_1 - Z_2| = |Z_3 - Z_2| \times 1 = |Z_3 - Z_2|$$

$OQ = OP$ ஆகும்.

எனவே $BA = BC$

$$(Z_1 - Z_2) = (Z_3 - Z_2)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ என்பதால்

OQ வை இடஞ்சுழியாக, O பற்றி $\frac{\pi}{3}$ கோணத்தினூடு திருப்ப, OP பெறப்படும்.

எனவே $\angle QOP = \frac{\pi}{3}$

$$\angle QOP = \angle ABC = \frac{\pi}{3}$$

ΔABC இல் $BA = BC, \angle ABC = \frac{\pi}{3}$

எனவே ΔABC, சமபக்க முக்கோணி ஆகும்.

உதாரணம் 7

(a) OPQ எனும் முக்கோணியில், பக்கம் PQ இன் நடுப்புள்ளி R எனின் கேத்திரகணித முறைப்படி $OP^2 + OQ^2 = 2(OR^2 + PR^2)$ என நிறுவுக.

(b) Z_1, Z_2 என்பன இருசிக்கலெண்களாக இருக்க.

$$|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = 2\left\{|Z_1|^2 + |Z_2|^2\right\}$$ என

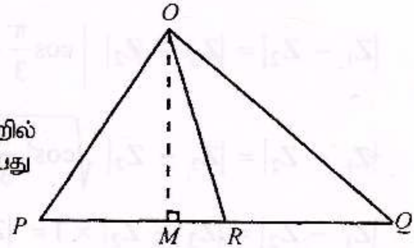
(i) அட்சரகணித முறையில்

(ii) ஆகன் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

ΔOPQ வில், $PR = RQ$

OM, PQ விற்கு செங்குத்து.

கோணங்கள் ORQ, ORP என்பவற்றில் ஒன்று விரிகோணமாயின், மற்றையது கூர்ங்கோணமாக அமையும்.



விரிகோண முக்கோணி ORQ இல்

$$OQ^2 = RO^2 + RQ^2 - 2RQ \cdot RM \quad \text{——— (1)}$$

கூர்ங்கோண முக்கோணி ORP இல்

$$OP^2 = RO^2 + RP^2 + 2RP \cdot RM \quad \text{——— (2)}$$

(1) + (2), $OP^2 + OQ^2 = 2\left(OR^2 + RP^2\right)$ [$PR = RQ$ என்பதால்]

(b) (i) $Z_1 = x_1 + iy_1$, $Z_2 = x_2 + iy_2$, என்க.

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

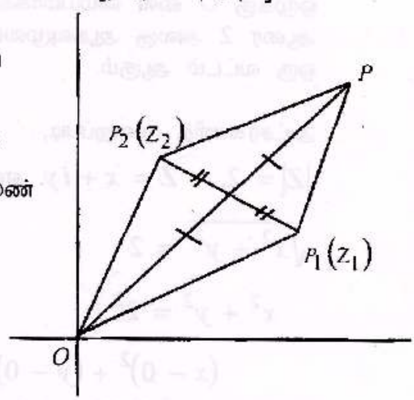
$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2\right] + \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

$$= 2\left(x_1^2 + y_1^2\right) + 2\left(x_2^2 + y_2^2\right)$$

$$= 2\left[|Z_1|^2 + |Z_2|^2\right]$$

(ii) ஆகன் வரிப்படத்தைப் பாவித்து நிறுவுதல்



புள்ளி P_1 சிக்கலெண் Z_1 ஐக் குறிக்கிறது. புள்ளி P_2 சிக்கலெண் Z_2 ஐக் குறிக்கிறது. $OP_1\,PP_2$ இணைகரம்

எனவே புள்ளி P சிக்கலெண் $(Z_1 + Z_2)$ ஐக் குறிக்கும்.

$$OP_1 = |Z_1|, \quad OP_2 = |Z_2|, \quad OP = |Z_1 + Z_2|$$

$$OM = \frac{1}{2}\ OP = \frac{1}{2}|Z_1 + Z_2|$$

$$P_1P_2 = |Z_1 - Z_2|$$

$$P_1M = MP_2 = \frac{1}{2}|Z_1 - Z_2|$$

$\Delta OP_1 P_2$ இல், $P_1 M = M P_2$

மேலே நிறுவிய தேற்றத்தின்படி

$$OP_1^2 + OP_2^2 = 2\left[OM^2 + MP_2^2\right]$$

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 2\left[\frac{1}{4}|Z_1 + Z_2|^2 + \frac{1}{4}|Z_1 - Z_2|^2\right]$$

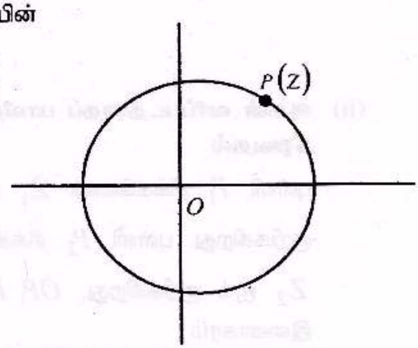
$$2|Z_1|^2 + 2|Z_2|^2 = |Z_1 + Z_2|^2 + |Z_1 - Z_2|^2$$ ஆகும்.

ஒழுக்குகள் *(Loci)*

(a) (i) ஆகன் வரிப்படத்தில் $|Z| = 2$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி Z இன் ஒழுக்கைக் காண்போம்.

புள்ளி Z, P யினால் குறிக்கப்படும் எனின் $|Z| = OP$ ஆகும்.

$OP = 2$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளியின் ஒழுக்கு O வை மையமாகவும், ஆரை 2 அலகு ஆகவுமுடைய ஒரு வட்டம் ஆகும்.



அட்சரகணித முறைப்படி,

$|Z| = 2, \quad Z = x + iy$ என்க.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

இது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு

வட்டத்தின் மையம் $(0, 0)$ ஆரை 2 ஆகும்.

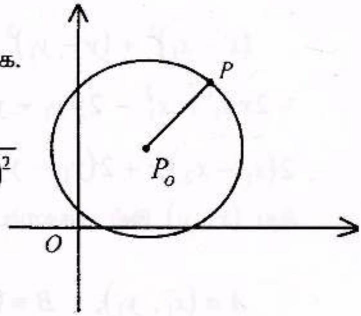
(ii) Z_o என்பது தரப்பட்ட ஓர் எண்ணாக இருக்க, $|Z - Z_o| = r\ (>o)$ ஆகுமாறு அசையும் புள்ளியின் ஒழுக்கு.

Z_o என்பது புள்ளி P_o இனால் குறிக்கப்படுகிறது என்க. மாறும்புள்ளி Z, P இனால் குறிக்கப்படுகிறது என்க.

இங்கு P_o நிலையான புள்ளி

$$|Z - Z_o| = P P_o \text{ ஆகும்.}$$

$PP_o = r$ எனின், P இன் ஒழுக்கு, P_o ஐ மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் ஆகும்.



அட்சரகணித முறைப்படி

$Z_o = x_o + i y_o, \quad Z = x + i y$ என்க.

$$Z - Z_o = (x - x_o) + i(y - y_o)$$

$$|Z - Z_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = r$$

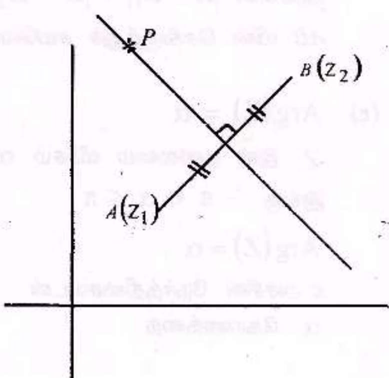
$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

எனவே P இன் ஒழுக்கு (x_o, y_o) ஐ மையமாகவும், r ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆகும்.

(b) Z_1, Z_2 என்னும் புள்ளிகள் தரப்பட்டிருக்க, $|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$ ஆகுமாறு Z, இனால் தரப்படும் புள்ளியின் ஒழுக்கு.

Z_1, Z_2 என்பன ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே புள்ளிகள் A, B என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகிறது என்க. மாறும்புள்ளி Z, P யினால் குறிக்கப்படுகிறது என்க.

$$|Z - Z_1| = PA, \qquad |Z - Z_2| = PB$$



A, B என்பன நிலையான புள்ளிகள் $PA = PB$ ஆகுமாறு அசையும் புள்ளி P இன் ஒழுக்கு AB யின் சமவெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

அட்சரகணித முறைப்படி,

$Z_1 = x_1 + i y_1, \quad Z_2 = x_2 + i y_2, \quad Z = x + i y$ என்க.

$$Z - Z_1 = (x - x_1) + i(y - y_1), \quad Z - Z_2 = (x - x_2) + i(y - y_2)$$

$$|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$-2x x_1 + x_1^2 - 2y y_1 + y_1^2 = -2x x_2 + x_2^2 - 2y y_2 + y_2^2$$

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2 \text{ ———— } (1)$$

இது (x, y) இல் முதலாம்படிச் சமன்பாடு. எனவே நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$A \equiv (x_1, y_1), \quad B \equiv (x_2, y_2)$$

AB யின் படித்திறன் $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

மேலே உள்ள கோட்டின் படித்திறன் $= \dfrac{-(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$

எனவே இக்கோடு AB இற்கு செங்குத்தானதாகும். மேலும் (1) இலுள்ள சமன்பாட்டில் $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ எனப்பிரதியிட, சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துவதால், இந்நேர்கோடு AB யின் நடுப்புள்ளியினூடு செல்லும்.

ஆகவே, $|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$ ஆகுமாறு இயங்கும் புள்ளி P யின் ஒழுக்கு AB யின் செங்குத்துச் சமவெட்டி ஆகும்.

(c) $\operatorname{Arg}(Z) = \alpha$

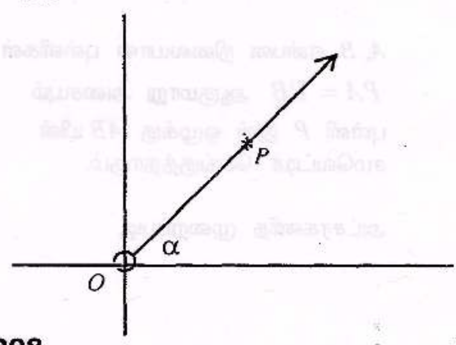
Z இன் தலைமை வீச்சம் α

இங்கு $-\pi < \alpha \le \pi$

$\operatorname{Arg}(Z) = \alpha$

x அச்சின் நேர்த்திசையுடன்

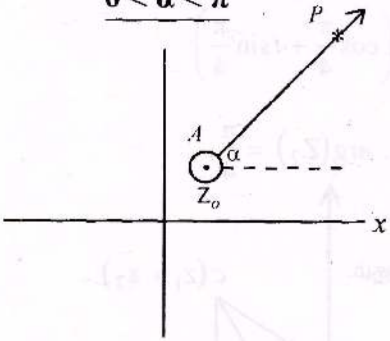
α கோணத்தை



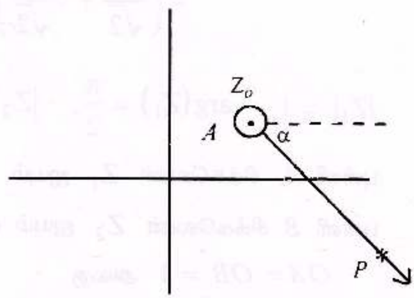
அமைக்கும் கோட்டில் புள்ளி Z இருக்கும் (உற்பத்தி தவிர்ந்த) படத்தில் காட்டிய கோட்டின் வழியே இருக்கும்.

(d) கோணம் α தரப்பட்டிருக்க, $\text{Arg}(Z - Z_o) = \alpha$ ஆகுமாறு உள்ள சிக்கலெண் Z இன் ஒழுக்கு

$\mathbf{0 < \alpha < \pi}$



$\mathbf{-\pi < \alpha < 0}$



Z_o, A யினால் குறிக்கப்படுகிறது. A ஐத் **தவிர்த்து** AP என்ற கோட்டின் வழியே அமையும் கோடு (Ox உடன் α கோணம்)

உதாரணம் 8

$Z_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$, $\quad Z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$ ஆகிய சிக்கலெண்களின் மட்டுவீசல் என்பவற்றைக் காண்க.

ஆகன் வரிப்படம் ஒன்றில் Z_1, Z_2, $Z_1 + Z_2$ ஆகிய சிக்கலெண்களைக் குறிக்க.

$\tan \dfrac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ என உய்த்தறிக.

$$Z_1 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

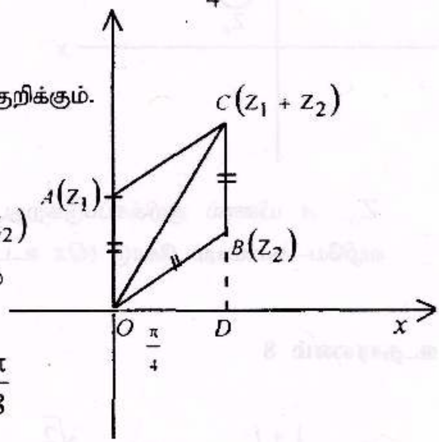
$$= \frac{2i}{2} = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$|Z_1| = 1, \quad \arg(Z_1) = \frac{\pi}{2}, \quad |Z_2| = 1, \ \arg(Z_2) = \frac{\pi}{4},$$



புள்ளி A, சிக்கலெண் Z_1 ஐயும்

புள்ளி B சிக்கலெண் Z_2 ஐயும் குறிக்கும்.

$OA = OB = 1$ அலகு

$OACB$ இணைகரம்

C குறிக்கும் சிக்கலெண் $(Z_1 + Z_2)$

$OA = OB$ என்பதால்

$OACB$ சாய்சதுரம்

ஆகவே $\angle AOC = \angle BOC = \frac{\pi}{8}$

ΔOCD யில், $\angle COD = \frac{3\pi}{8}$

$$\tan COD = \frac{CD}{OD}$$

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \frac{1 + 1\sin 45}{1\cos 45}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$= \sqrt{2} + 1$$

உதாரணம் 9

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z, புள்ளி P யினால் குறிக்கப்படுகிறது.

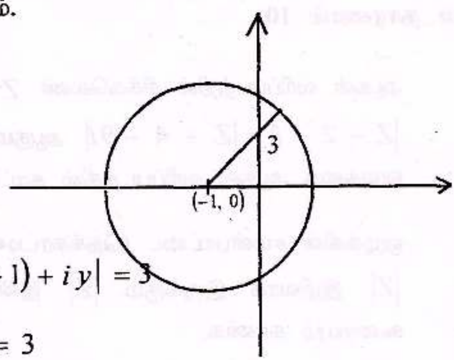
(i) $|Z+1|=3$ (ii) $|Z+2-i|=4$ என

வரையறுக்கப்படும் புள்ளி P யின் ஒழுக்கு யாது.
ஒழுக்குகளின் தெக்காட்டின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(i) $|Z+1|=3, \quad |Z-(-1)|=3$

என்வே Z இன் ஒழுக்கு $(-1, 0)$ ஐ மையமாகவும், 3 ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் ஆகும். ஒழுக்கின் (வட்டம்) சமன்பாடு

$(x+1)^2+y^2=3^2$ ஆகும்.



அல்லது

$Z=x+iy$ என்க.

$$|Z+1|=3 \; |(x+1)+iy|=3$$

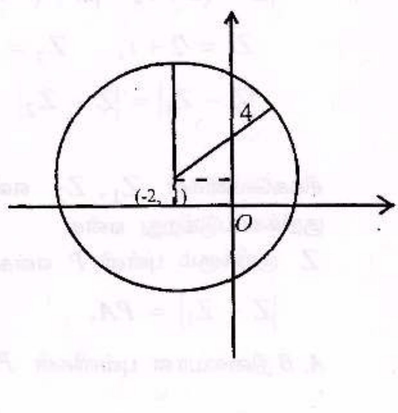
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=3$$

$$(x+1)^2+y^2=3^2$$

மையம் $(-1, 0)$ ஆகவும், ஆரை 3 ஆகவுமுள்ள வட்டம் ஆகும்.

(ii) $|Z+2-i|=4$

$|Z-(-2+i)|=4$



Z இன் ஒழுக்கு $(-2, 1)$ ஐ மையமாகவும், ஆரை 4 ஆகவும் உடைய ஒருவட்டம் ஆகும்.

அல்லது

$Z=x+iy$ என்க.

$$|Z + 2 - i| = 4$$

$$|(x+2) + i(y-1)| = 4$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 4$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

Z இன் ஒழுக்கு $(-2, 1)$ ஐ மையமாகவும், ஆரை 4 ஆகவும் உடைய ஒருவட்டம் ஆகும்.

உதாரணம் 10

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z குறிக்கும் புள்ளி P ஆகும்.
$|Z - 2 - i| = |Z + 4 - 9i|$ ஆகுமாறு புள்ளி P அசையும் எனின் P இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் காட்டுக.

ஒழுக்கின் சமன்பாட்டை (தெக்காட்டின் ஆள்கூற்றில்) தருக.
$|Z|$ இழிவாக இருக்கும் $|Z|$ இன் பெறுமானத்தையும் Z இன் ஆள் கூறையும் காண்க.

முறை 1

$$|Z - 2 - i| = |Z + 4 - 9i|$$

$$|Z - (2+i)| = |Z - (-4+9i)|$$

$Z_1 = 2 + i, \quad Z_2 = -4 + 9i$ என்க.

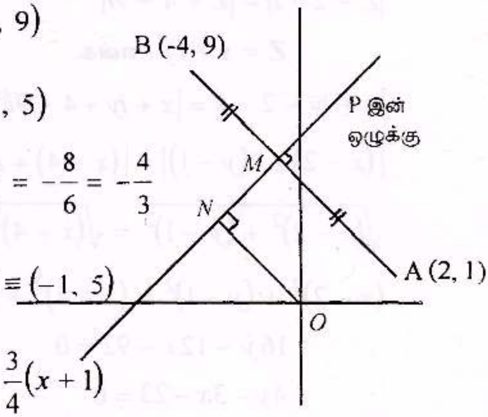
$$|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$$

சிக்கலெண்கள் Z_1, Z_2 என்பன முறையே புள்ளிகள் A, B என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகிறது என்க.
Z குறிக்கும் புள்ளி P என்க.

$|Z - Z_1| = PA, \qquad |Z - Z_2| = PB$

A, B நிலையான புள்ளிகள் $PA = PB$ ஆகுமாறு அசையும் புள்ளி P இன்

ஒழுக்கு AB யின் இருசம வெட்டிச் செங்குத்து ஆகும். P இன் ஒழுக்கு AB யின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து ஆகும்.



$$A \equiv (2,\ 1), \qquad B \equiv (-4,\ 9)$$

AB யின் நடுப்புள்ளி $M \equiv (-1, 5)$

AB யின் படித்திறன் $= \dfrac{9-1}{-4-2} = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3}$

ஒழுக்கின் படித்திறன் $= \dfrac{3}{4},\ M \equiv (-1,\ 5)$

ஒழுக்கின் சமன்பாடு $y - 5 = \dfrac{3}{4}(x+1)$

$$4y - 3x = 23$$

$|Z|$ என்பது உற்பத்தியிலிருந்து புள்ளி (மாறும்புள்ளி) P இற்கான தூரம் ஆகும். OP இழிவாக இருப்பது, P தானம் N இல் இருக்கும் போது நிகழும்.

$|Z|$ இன் இழிவு ON ஆகும்.

$(0, 0)$ இலிருந்து $4y - 3x - 23 = 0$ இற்குரிய செங்குத்துத் தூரம்

$$ON = \frac{|0 - 0 - 23|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{23}{5} \text{ ஆகும்.}$$

ON இன் சமன்பாடு $y = -\dfrac{4}{3}x$ (AB யின் ப. கி. $-\dfrac{4}{3}$ என்பதால்)

$$4x + 3y = 0$$

இப்பொழுது $4x + 3y = 0$

$4y - 3x = 23$ என்ற இரு

சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க $x = \dfrac{-69}{25},\ y = \dfrac{92}{25}$

N குறிக்கும் சிக்கலெண் $\dfrac{-69}{25} + i\dfrac{92}{25}$ ஆகும்.

முறை 2

$$|Z-2-i| = |Z+4-9i|$$

$Z = x + iy$ என்க.

$$|x+iy-2-i| = |x+iy+4-9i|$$

$$|(x-2)+i(y-1)| = |(x+4)+i(y-9)|$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+4)^2+(y-9)^2}$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = (x+4)^2+(y-9)^2$$

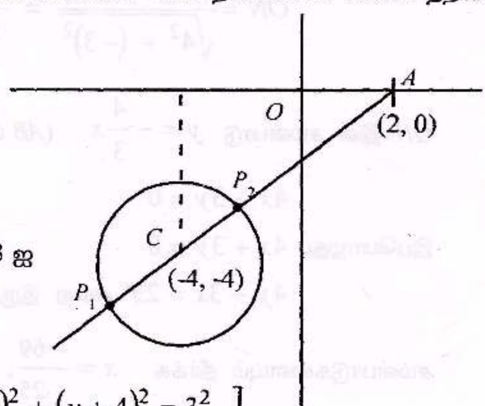
$$16y-12x-92=0$$

$$4y-3x-23=0$$

ஆகவே P யின் ஒழுக்கு $4y-3x-23=0$ என்னும் நேர்கோடு ஆகும்.

உதாரணம் 11

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z, புள்ளி P யினால் குறிக்கப்படுகிறது. $|Z+4+4i|=3$ ஆகுமாறு புள்ளி P அசைகிறது. $|Z-2|$ இன் அதிஉயர் மிகக் குறைந்த பெறுமானங்களைக் காண்க. P யின் நிலைகளை வரிப்படத்தில் காட்டுக.



$$|Z+4+4i|=3$$

$$|Z-(-4-4i)|=3$$

எனவே Z இன் ஒழுக்கு $(-4,-4)$ ஐ மையமாகவும் 3 ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒருவட்டம் ஆகும்.

[வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x+4)^2+(y+4)^2=3^2$]

$|Z-2|$ என்பது $(2, 0)$ ஐயும், வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டின் நீளமாகும்.

$A \equiv (2,\ 0)$ என்க. வட்டத்தின் மையம் $C \equiv (-4,\ -4)$ என்க.
AC ஐ இணைக்க.
மிகக்கூடிய நீளம் AP_1
மிகக் குறைந்த நீளம் AP_2 ஆகும்.

$$AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

$$AP_1 = \sqrt{52} + 3$$

$$AP_2 = \sqrt{52} - 3$$ ஆகும்.

உதாரணம் 12

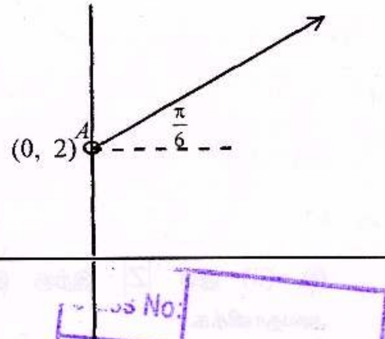
பின்வரும் ஒவ்வொருவகையிலும் Z இன் ஒழுக்கை வரைக.

(i) $Arg(Z - 2i) = \frac{\pi}{6}$ (ii) $Arg(Z - 2) = \frac{\pi}{2}$

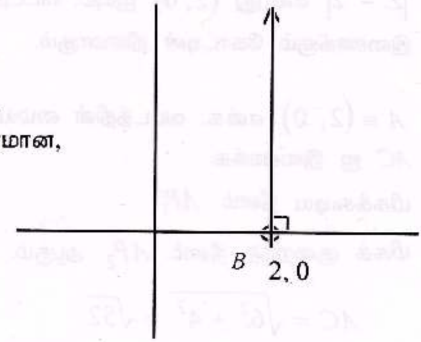
(iii) $Arg(Z - 4 + i) = \frac{5\pi}{6}$

வகை (iii) இல் $|Z|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?

(i) புள்ளி A ஐத் **தவிர்த்து** A யினூடான மெய் அச்சிற்கு சமாந்தரமான கோட்டுடன் $\frac{\pi}{6}$ ஐ அமைக்கும் (படத்தில் காட்டிய) நேர்கோடு.



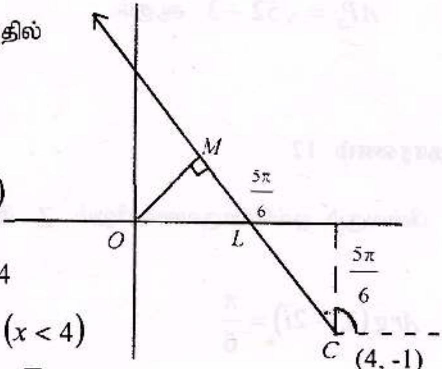
(ii) $Arg(Z-2)=\frac{\pi}{2}$



புள்ளி $B(2,0)$ ஐத் தவிர்த்து, B யினூடு y அச்சிற்கு சமாந்தரமான, (படத்தில் காட்டிய) நேர்கோடு.

$$Arg(Z-4+i)=\frac{5\pi}{6}$$

$$Arg(Z-(4-i))=\frac{5\pi}{6}$$



புள்ளி C ஐத் தவிர்த்து, படத்தில் காட்டிய நேர்கோடு ஆகும்.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y+1=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$$

$$\sqrt{3}\,y+\sqrt{3}=-x+4$$

$$\sqrt{3}\,y+x=4-\sqrt{3}\ \ (x<4)$$

இங்கு $y=0$ ஆக, $x=4-\sqrt{3}$

$$OL=4-\sqrt{3}$$

$|Z|$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் $=OM$

$$=OL\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\left(4-\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i), (ii) இல் $|Z|$ இற்கு இழிவுப் பெறுமானம் இல்லை என்பதை அவதானிக்க.

உதாரணம் 13

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z, புள்ளி P யால் வகை குறிக்கப்படுகிறது. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் Z இன் ஒழுக்கை வரைந்து காட்டுக.

(i) $Arg\left(\dfrac{Z-3}{Z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (ii) $Arg\left(\dfrac{Z-3}{Z+1}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

(iii) $Arg\left(\dfrac{Z-3}{Z+1}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ (iv) $Arg\left(\dfrac{Z+1}{Z-3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

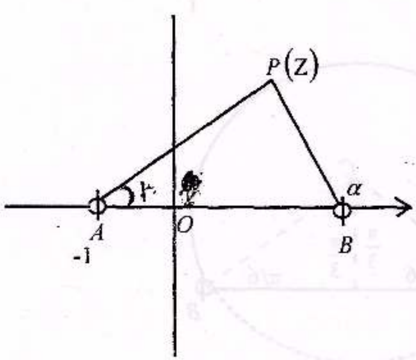
(v) $Arg\left(\dfrac{Z+i}{Z-i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (vi) $Arg\left(\dfrac{Z-i}{Z+i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

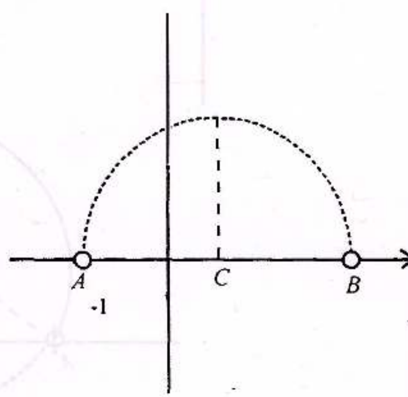
(i) $Arg\left(\dfrac{Z-3}{Z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$$Arg(Z-3) - Arg(Z+1) = \frac{\pi}{2}$$

$$Arg(Z-3) - Arg(Z-(-1)) = \frac{\pi}{2}$$

$A \equiv (-1, 0)$, $B \equiv (3, 0)$ என்க.





$Arg(Z - 3) = \alpha. \quad Arg(Z - 1) = \beta$

$\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}, \quad \angle APB = \dfrac{\pi}{2}$

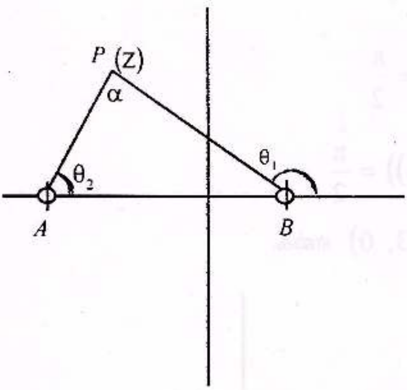
ஆகவே, P யின் ஒழுக்கு AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட (A, B தவிர்ந்த) x அச்சின் மேல் உள்ள அரைவட்டமாகும்.

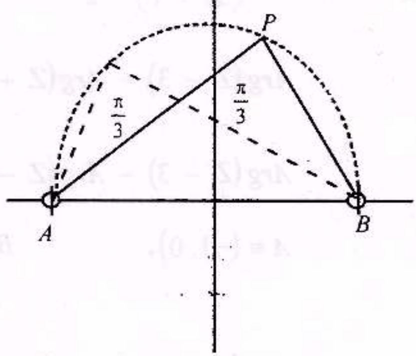
வட்டத்தின் மையம் $C \equiv (1, 0)$ ஆரை 2 ஆகும்.

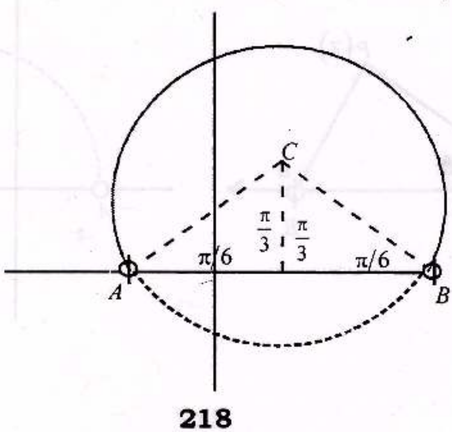
(ii) $Arg\left(\dfrac{Z-3}{Z+1}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$Arg(Z-3) - Arg(Z-(-1)) = \dfrac{\pi}{3}$

$A \equiv (-1, 0) \qquad B \equiv (3, 0)$







$Arg(Z-3) = \theta_1$, $\qquad Arg(Z+1) = \theta_2$

$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ மையம் $C \equiv \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ ஆரை $CB = \frac{4}{\sqrt{3}}$

இங்கு ஒரு துண்டக் கோணங்கள் சமம் என்பதைப் பயன்படுத்தி, நாண் AB யினூடு செல்லும் வட்டத்தின் (A, B தவிர்ந்த) x அச்சின் மேல் உள்ள பெரிய வில் ஆகும்.

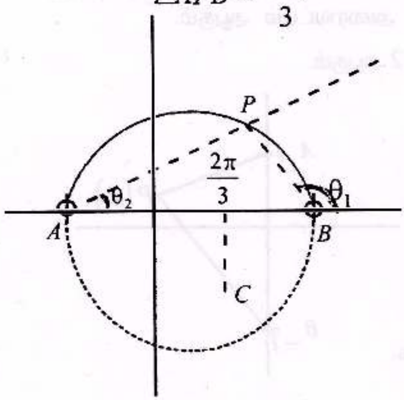
மையம் $C \equiv \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $\qquad$ ஆரை $= \frac{4}{\sqrt{3}}$

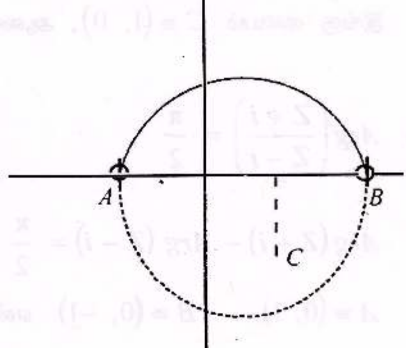
(iii) $Arg\left(\frac{Z-3}{Z+1}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$$Arg(Z-3) - Arg(Z+1) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

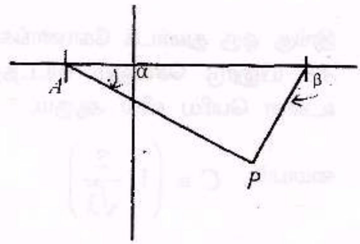
$$\angle APB = \frac{2\pi}{3}$$





ஒரு துண்டக் கோணங்கள் சமம் என்பதால் P யின் ஒழுக்கு நாண் AB யின் மேற்பகுதியில் அமைந்துள்ள A, B தவிர்ந்த சிறிய வில்லாகும்.

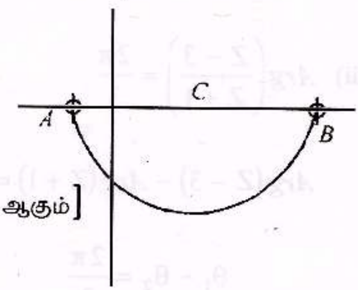
இங்கு மையம் $C \equiv \left(1, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$. ஆரை $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ ஆகும்.



(iv) $Arg\left(\dfrac{Z+1}{Z-3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$$Arg(Z+1) - Arg(Z-3) = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$



$$\angle APB = \frac{\pi}{2}$$

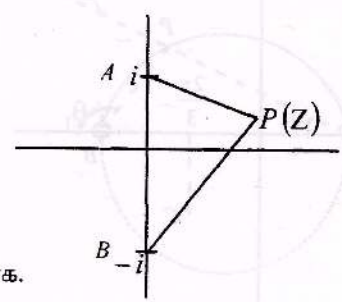
$[-\pi < \alpha < 0, \quad -\pi < \beta < 0$ ஆகும்$]$

$$A \equiv (-1, 0), \quad B \equiv (3, 0)$$

ஆகவே P யின் ஒழுக்கு AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட (A, B தவிர்ந்த x அச்சின் கீழ்ப்பகுதியில் அமையும் அரைவட்டம் ஆகும்.

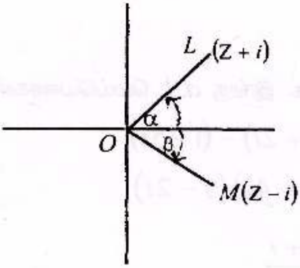
இங்கு மையம் $C \equiv (1, 0)$, ஆரை 2 ஆகும்.

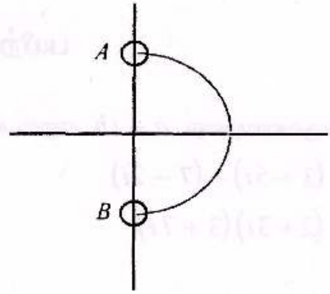
(v) $Arg\left(\dfrac{Z+i}{Z-i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$



$$Arg(Z+i) - Arg(Z-i) = \frac{\pi}{2}$$

$A \equiv (0, 1), \quad B \equiv (0, -1)$ என்க.





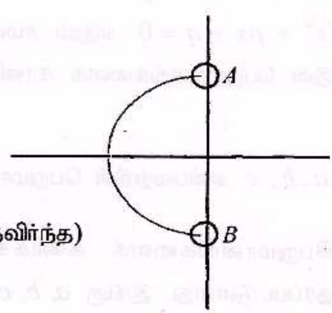
இங்கு $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \qquad \dfrac{-\pi}{2} < \beta < 0$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle LOM = \frac{\pi}{2} = \angle APB$$

ஆகவே AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட (A, B தவிர்ந்த) அரை வட்டம். மையம் உற்பத்தி ஆரை 1 ஆகும்.

(vi) $Arg\left(\dfrac{Z+i}{Z-i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$



$$Arg(Z - i) - Arg(Z + i) = \frac{\pi}{2}$$

உற்பத்தியை மையமாகவும், ஆரை 1
ஆகவும் AB ஐ விட்டமாகவும் (A, B தவிர்ந்த)
உடைய அரை வட்டம்.

பயிற்சி 9

1. பின்வருவனவற்றை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு a, b மெய்யெண்கள்

(i) $(3+5i)+(7-2i)$ (ii) $(4+2i)-(1-5i)$

(iii) $(2+3i)(3+7i)$ (iv) $(2+4i)(5-2i)$

(v) $(5+3i)^2$ (vi) $\dfrac{3+i}{5-i}$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $x^2 - x + 3 = 0$ (ii) $x^2 - 2\cos\theta + 1 = 0$

(iii) $x^2 + 1 = 0$ (iv) $x^2 + 2x + 2 = 0$

3. பின்வருவனவற்றை ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுக.

(i) $x^2 + 2x + 5$ (ii) $x^2 + 4x + 5$

(iii) $4x^2 - 4x + 2$ (iv) $x^2 + 2ax + (a^2 + b^2)$

4. பகுதியை சிக்கலெண்ணின் ஏகபரிமாணக் காரணியாக எழுதுவதன் மூலம் பகுதிப்பின்னமாக்குக.

(i) $\dfrac{6}{x^2 - 2x + 10}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2 + 1}$

5. $x^2 + px + q = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $2 - 3i$ எனின் p, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. a, b, c என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்காது $\dfrac{b}{a}, \dfrac{c}{a}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் ஒரு மூலம் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள்.

(i) $2 + i$ (ii) $3 - 4i$ (iii) i (iv) $5i - 12$ (v) $-1 - i$

7. பின்வரும் சிக்கலெண்களின் வர்க்கமூலங்களைக் காண்க.

(i) $21-20i$ (ii) $2i$ (iii) $-2i$

8. $x^4+11x^2-10x+50=0$ இன் ஒரு மூலம் $1-2i$ எனின், ஏனைய மூலங்களைக் காண்க.

9. $(3+i)$, $(1+3i)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட x இன் நான்காம் படியிலான சமன்பாடு ஒன்றைப் பெறுக.

10. $8x^3-44x^2+86x-65=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களில் ஒன்று $\frac{1}{2}(3-2i)$ எனின், ஏனைய மூலங்களைக் காண்க.

11. $x^3+ax-4c^3=0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் சிக்கலெண்களாகும். மெய்மூலம் $x=2c$ எனின் சிக்கல் மூலங்களை c யின் உறுப்புகளில் காண்க.

12. தீர்க்க. $x^4-x^3-x+1=0$

13. $x^3+px+q=0$ இன் ஒரு மூலம் $\alpha+i\beta$ எனின் (இங்கு α, β, p, q என்பன மெய்யெண்கள்)

(i) $2\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)=q$ (ii) $3\alpha^2-\beta^2=-p$ என நிறுவுக.

(iii) α என்பது $8x^3+2px-q=0$ இன் மூலம் எனக் காட்டுக.

14. 1 இன் கன மூலங்கள் $1, \omega, \omega^2$ எனின்,

(i) $1+\omega+\omega^2=0$ (ii) $\omega^3=1$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=0$

(b) $1+\omega^4+\omega^8=0$

(c) $\left(1-\omega+\omega^{2}\right)\left(1+\omega-\omega^{2}\right)\left(1-\omega-\omega^{2}\right)=8$

(d) $(1-\omega)^{5}=-9(2+\omega)$

(e) $x=a+b,\ y=a\omega+b\omega^{2},\ Z=a\omega^{2}+b\omega$ எனின்

$xyZ=a^{3}+b^{3}$ எனக் காட்டுக.

(f) $S_{n}=1-\omega+\omega^{2}-\omega^{3}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\omega^{n-1}$ ஆகும்.

(i) $n=3m,$ (ii) $n=3m+1$ (iii) $n=3m+2$

$(m=0,1,2,\ldots\ldots)$ ஆகும் போது S_{n} ஐக் காண்க.

15. $x^{3}+1=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து -1 இன் கன மூலங்களைக் காண்க. சிக்கல் மூலங்களில் ஒன்று λ எனின், மற்றைய மூலத்தை λ வில் காண்க.

$1+\lambda^{2}=\lambda$ என உய்த்தறிக.

16. பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, வீசல் என்பவற்றைக் காண்க.

(i) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{3-i}$ (ii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2}$ (iii) $-i$

17. சிக்கலெண் Z இன் உடன் புணரி $\overline{Z}$ ஆகவும் n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாகவும் இருக்க, $\overline{(Z^{n})}=(\overline{Z})^{n}$ என கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

$a_{o}, a_{1}, a_{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n}$ என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க,

$f(Z)=a_{o}Z^{n}+a_{1}Z^{n-1}+a_{2}Z^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}Z+a_{n}$ என்க.

$Z=Z_{o}$ ஆக $f(Z_{o})=0$ எனின், $f(\overline{Z_{o}})=0$ எனக் காட்டுக.

18. Z_{1}, Z_{2}, Z என்பன சிக்கலெண்களாகவும், n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாகவும் இருக்க.

(i) $|Z_{1}Z_{2}|=|Z_{1}|\,|Z_{2}|$ எனவும்

(ii) $|Z^{n}|=|Z|^{n}$ எனவும் (கணிதத்தொகுத்தறி முறை) நிறுவுக.

$\left|(2-i)^6\right|$ ஐக் காண்க.

19. **(a)** சிக்கலெண் $Z = -\sqrt{3} + i$ ஆகும்.

(i) $|Z|$ **(ii)** $Arg(Z)$ **(iii)** $Arg\left(\dfrac{i}{Z}\right)$ என்பவற்றைக் காண்க.

(b) Z எனும் சிக்கலெண்ணின் மட்டு 4 உம் $Arg(Z) = \dfrac{\pi}{3}$ உம் ஆகும்.

பின்வரும் சிக்கலெண்களை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக.

(i) Z^2 **(ii)** $\dfrac{1}{Z}$ **(iii)** $i^3 Z$

20. $Z_1 = 1 + 2i$, $Z_2 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$ எனின்,

$Z_1 Z_2$, $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ என்பவற்றை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு

$a, b \in R$ $|Z_1 Z_2|$, $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|$ ஐக் காண்க. ஆகன் வரிப்படத்தில் உற்பத்தி O,

$Z_1 Z_2$, $\dfrac{Z_1}{Z_2}$, Z_3 ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள் சாய்சதுரம் ஒன்றின் உச்சிகளாக

அமையும் எனின் Z_3 ஐக் காண்க. $|Z_3| = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ எனக் காட்டுக.

21. சிக்கலெண்கள் $Z_1 = 24 + 7i$, $Z_2 = 4 - 3i$ ஆகும்.

(a) k ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க $Z_1 + kZ_2$ மெய்யாக இருப்பின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $Z_1 + (p + iq)Z_2 = 0$ ஆகுமாறு மெய்யெண்கள் p, q வைச் காண்க.

22. சிக்கலெண் $Z = (1+3i)(p+qi)$ ஆகும். இங்கு p, q மெய்யெண்கள்.

$p > 0$, $\quad Arg\, Z = \dfrac{\pi}{4}$ எனின்,

(a) $p + 2q = 0$ எனக் காட்டுக.

$|Z| = 10\sqrt{2}$ எனின் p, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. $Arg(\overline{Z})$ இன் பெறுமானம் யாது?

23. $Z = \dfrac{3+i}{2-i}$ எனின் $|Z|$, $Arg(Z)$ என்பவற்றைக் காண்க. O வை உற்பத்தியாகவுடைய ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z புள்ளி P யால் குறிக்கப்படுகிறது. சிக்கலெண் $-5 + ki$ புள்ளி Q வால் குறிக்கப்படுகிறது.

$\angle POQ = 90^\circ$ எனின்,

(i) k இன் பெறுமானம்.

(ii) PQ இன் நடுப்புள்ளி M குறிக்கும் சிக்கலெண் என்பவற்றைக் காண்க.

24. (a) Z என்பது 1 இன் கன மூலங்களில் ஏதாவதொன்று எனின், $1 + Z + Z^2$ என்ற கோவையின் இரு இயல்தகு பெறுமானங்களையும் காண்க.
1 இனது கன மூலங்களில் சிக்கல் மூலம் ω எனின்,
$(1 + 3\omega + \omega^2)^2$, $\quad (1 + \omega + 3\omega^2)^2$ ஆகிய இரு கோவைகளினதும் பெருக்கம் 16 எனவும், கூட்டுத்தொகை -4 எனவும் காட்டுக.

(b) $Z_1 = 1 - i$, $\quad Z_2 = 7 + i$ எனின்,

(i) $Z_1 - Z_2$ $\qquad$ (ii) $Z_1 Z_2$ $\qquad$ (iii) $\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 - Z_2}$

என்பவற்றின் மட்டுக்களைக் காண்க.

(c) ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z ஐ புள்ளி P குறிக்கிறது. $|Z - 1| = |Z - 3i|$ ஆகுமாறு உள்ள Z இன் ஒழுக்கை வரைக.
இந்த ஒழுக்கில் $|Z|$ இழிவாக இருக்கும் Z ஐக் காண்க.

25. **(a)** $1, \omega, \omega^2$ என்பன 1 இன் கன மூலங்கள் எனின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $1+\omega+\omega^2$ (ii) $\left(1+2\omega+3\omega^2\right)\left(1+3\omega+2\omega^2\right)$

$x^3-1=0, \quad px^5+qx+r=0$ என்னும் சமன்பாடுகள் பொது மூலம் ஒன்றைக் கொண்டிருப்பின்.

$\left(p+q+r\right)\left(p\omega^5+q\omega+r\right)\left(p\omega^{10}+q\omega^2+r\right)=0$ எனக் காட்டுக.

(b) $|Z-1|=3|2+1|$ ஆயின், ஆகன் வரிப்படத்தில் Z இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக. இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரையையும் காண்க.

26. **(a)** $(3+2i)(7+5i)$ என்பதை $a+ib$ எனும் வடிவில் தருக. $11-29i$ இன் ஒரு சோடி காரணிகளை உய்த்தறிக. இதிலிருந்து 11^2+29^2 என்பதை இரு நேர்நிறையெண்களின் பெருக்கமாகத் தருக.

(b) ஆகன் வரிப்படத்தில் P யும் Q வும் முறையே Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. $|Z_1-Z_2|=|Z_1+Z_2|$ எனின் OP என்பது OQ இற்கு செங்குத்தாகும் எனக் காட்டுக.

(c) $|Z+1|+|Z-1|=4$ ஆகவும், $Arg(iZ)=\pi$ ஆகவும் உள்ள Z எனும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

27. **(a)** $Z=4-3i$ எனின் $Z+\dfrac{1}{Z}$ ஐ $a+ib$ வடிவில் தருக.

(b) $4i$ இன் வர்க்கமூலங்கள் இரண்டினையும் $a+ib$ வடிவில் தருக.

(c) $Z_1=5-5i, \quad Z_2=-1+7i$ எனின்,

$|Z_1+Z_2|<|Z_1-Z_2|<|Z_1|+|Z_2|$ எனக் காட்டுக.

28. **(a)** சிக்கலெண்கள் $Z_1=\dfrac{a}{1+i}, \quad Z_2=\dfrac{b}{1+2i}$ என்க.

$Z_1+Z_2=1$ ஆகுமாறுள்ளன. இங்கு a, b மெய்யெண்கள் a, b ஐக் காண்க.

a, b இன் இப் பெறுமானங்களுக்கு ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண்கள் Z_1, Z_2 குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கிடையேயான தூரத்தைக் காண்க.

(b) $Z = 3 + 4i$ எனின் $\dfrac{1}{Z^2}$, $\sqrt{Z}$ என்பவற்றை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக.

(c) $|Z - 3 + 6i| = 2|Z|$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி Z இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் வரைக.

29. (a) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5+i}$ ஒரு மெய்யெண் எனக் காட்டுக.

(b) $\dfrac{1}{i}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{2i}{\sqrt{5}}\right)^2$ ஐ சுருக்குக.

(c) $\dfrac{Z+2}{Z-2} = i$ எனின் Z ஐக் காண்க.

(d) $Z^2 = \left(\overline{Z}\right)^2$ எனின் Z மெய்யெண் அல்லது தூய கற்பனையெண் எனக் காட்டுக.

(e) $\left|\dfrac{Z+1}{Z-1}\right| = 1$ எனின் Z தூய கற்பனையானது எனக் காட்டுக.

30. (a) ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z ஆல் குறிப்பிடப்படும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கை பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் காண்க.

(i) $|Z - i| = 1$ (ii) $Arg(Z - i) = \dfrac{\pi}{3}$ (iii) $|Z - i| = |Z - 3i|$

(b) $|Z| = 3$ ஆல் வரையறுக்கப்படும் ஒழுக்கை வரைக. $c = 5 + i$ எனவும், $|Z| = 3$ எனவும் தரப்படின் $|Z + c|$ இன் உயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

31. (a) $Z = \cos\theta + i\sin\theta$; இங்கு θ - மெய் ஆகும்.

$$\frac{1}{1+Z} = \frac{1}{2}\left(1 - i\tan\frac{\theta}{2}\right)$$ எனக் காட்டுக.

(i) $\dfrac{2Z}{1+Z^2}$

(ii) $\dfrac{1-Z^2}{1+Z^2}$ என்பவற்றை $a+ib$ என்னும் வடிவில் தருக.

இங்கு a, b θ இன் சார்புகள்

(b) ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B எனும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன.

இங்கு $O < Arg\, Z_2 < Arg\, Z_1 < \dfrac{\pi}{2}$ ஆகும். $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$ என்பன குறிக்கும் புள்ளிகள் C, D ஐக் காண்பதற்கான கேத்திரகணித அமைப்புக்களைத் தருக.

$Arg(Z_1 - Z_2) - Arg(Z_1 + Z_2) = \dfrac{\pi}{2}$ எனின் $|Z_1| = |Z_2|$ என நிறுவுக.

32. (a) $(3+2i)^2$, $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$ என்பவற்றை $a+ib$ வடிவில் எழுதுக. இங்கு a, b - மெய்யெண்கள்

(b) $Z = 3 + 4i$ எனின் $Z + \dfrac{25}{Z}$ ஐ $a+ib$ வடிவில் எழுதுக.

இங்கு a, b - மெய்யெண்கள்.

(c) ஆகன் வரிப்படத்தில் $|Z - 1| = 3\,|Z + i|$ ஆகுமாறு Z என்னும் சிக்கலெண் உள்ளது. Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

இவ்வொழுக்கில் $|Z| = |Z - 1 + i|$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் புள்ளிகளைக் குறித்துக் காட்டுக.

33. (a) Z என்பது ஒரு சிக்கலெண்ணாக இருக்க. $\mathrm{Im}\left(Z + \dfrac{1}{Z}\right) = 0$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு யாது?

(b) $|Z-i|=1$ ஆக இருக்கும்போது $|Z+1|$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத் திற்கும், இழிவுப் பெறுமானத்திற்குமிடையேயுள்ள விகிதம் என்ன?

(c) சிக்கலெண் Z உம், உடன் புணரி $\overline{Z}$ உம் $Z\overline{Z}+2iZ=12+6i$ எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துமெனின் Z இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

34. (a) (i) $|Z-1-i|=2$ எனின்

(ii) $\text{Re}(Z)=1$ உம் $-\dfrac{\pi}{3}\leq Arg\,Z\leq\dfrac{\pi}{4}$ உம் எனின்

ஒவ்வொரு வகையிலும் ஆகன் வரிப்படத்தில் Z இன் ஒழுக்கை வரைக. ஒவ்வொரு வகையிலும் $|Z|$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) ஆகன் வரிப்படத்தில் புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகும். P குறிக்கும் சிக்கலெண் $Z=x+iy$ ஆகும். இரண்டாவது ஆகன் வரிப்படத்தில் Q இன் ஆள் கூறுகள் (u, v) ஆகும். Q குறிக்கும் சிக்கலெண் ω ஐ எழுதுக.

$Z=\omega^2$ எனின் x, y ஐ u, v இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

P, $x^2+y^2=16$ எனும் வட்டத்தில் கிடக்குமெனின்

Q, $u^2+v^2=4$ எனும் வட்டத்தில் கிடக்கும் என நிறுவுக.

35. (a) $2+\cos\theta+i\sin\theta$ இன் மட்டு $(5+4\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\dfrac{2+\cos\theta+i\sin\theta}{2+\cos\theta-i\sin\theta}$ இன் மட்டு 1 என உய்த்தறிக.

(b) $|Z+1|+|Z-1|=4$ எனின் Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(c) ஆகன் வரிப்படத்தில், Z_1 தரப்பட்ட ஒரு சிக்கலெண்ணாக இருக்க, $|Z-Z_1|=|Z_1|$ ஆகுமாறுள்ள Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(d) ஆகன் வரிப்படத்தில், சிக்கலெண் Z, $\left|\dfrac{Z}{Z-3}\right|=\dfrac{1}{2}$ ஆகுமாறு இருப்பின் Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

36. (a) (i) $\dfrac{1-i}{(3-i)^2}$ (ii) $(c+i)^4$

என்பவற்றை $a+ib$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு a, b, c மெய்யானவை.

(b) $Z = x+iy$, $Z^2 = a+ib$ இங்கு a, b, x, y மெய்யானவை

$2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a$ எனக் காட்டுக.

(c) $Z^4 + 6Z^2 + 25 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து இச்சமன்பாட்டின் நான்கு மூலங்களையும் $x+iy$ எனும் வடிவில் தருக.

37. Z இன் வீசல் $Arg(Z)$ ஆனது $-\pi < Arg(Z) \leq \pi$ ஆகும்.

(a) சிக்கலெண் Z இன் மட்டு r, வீசல் θ ஆகும். $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, வீசல் என்பவற்றை r, θ, இல் காண்க.

(i) Z^2 (ii) $\dfrac{1}{Z}$ (iii) iZ (iv) $-Z$

(b) சிக்கலெண் Z ஆனது $|Z| = 1$ ஆகுமாறு இருப்பின் $1 \leq |2+Z| \leq 3$

எனவும் $-\dfrac{\pi}{6} \leq Arg(Z+2) \leq \dfrac{\pi}{6}$ எனக் காட்டுக.

(c) ஆகன் வரிப்படத்தில் $|Z + 2i - 1| < |Z - i|$ ஆகுமாறு Z இனால் குறிக்கப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

38. (a) $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும்.

α, β இன் மட்டு, வீசல் என்பவற்றைக் காண்க.

$(\alpha + \beta + 4i)(\alpha\beta + 8i)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) சிக்கலெண் $\dfrac{(1+i)^4}{(-1+i)^2}$ இன் மட்டு, வீசல் என்பவற்றைக் காண்க.

(c) பின்வரும் வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் P யின் ஒழுக்கை முழுமையாக விபரிக்க.

(i) $|Z + 2 - i| = \sqrt{5}$ (ii) $Arg\left(Z + 2\right) = \frac{\pi}{2}$

இரு ஒழுக்குகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. அவற்றின் பொதுப்புள்ளியின் நேரொத்த சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

39. **(a)** சிக்கல் எண்களின் மட்டினதும், சிக்கல் உடன் புணரியினதும் பின்வரும் இயல்புகளை நிறுவுக.

(i) $|Z|^2 = Z \cdot \overline{Z}$ (ii) $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$

(iii) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ (iv) $|Z_1 Z_2| = |Z_1|\,|Z_2|$

a_0, a_1, a_2 என்பன மெய்மாறிலிகளாகவும், α என்பது

$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ இன் ஒரு சிக்கல் மூலமாகவும் இருப்பின் $\overline{\alpha}$ உம் தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனக் காட்டுக.

(b) இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + ax + b = 0$ ஐக் கருதுக. இங்கு a, b மெய்யானவை. α, β என்பன இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

$|\alpha| = |\beta| = 1$ எனின் $|b| = 1$ எனக் காட்டுக.

a, b, ஆகியவற்றிற்குத் தக்க பெறுமானங்களைத் தெரிந்தெடுத்து $|b| = 1$ எனின் $|\alpha| = |\beta| = 1$ பின் தொடராது எனக் காட்டுக.

ஆயினும் α, β மெய்யாக இராதபோது $|b| = 1$ எனின் $|\alpha| = |\beta| = 1$ எனக் காட்டுக.

40. ஆகன் வரிப்படத்தில் P_1, P_2 எனும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்களை வகை குறிக்கின்றன. P_1, P_2 மீது P எனும் புள்ளி $\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{m}{n}$ ஆகுமாறு உள்ளது. இங்கு $m, n > 0$. P யினால் வகை குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

P_1, P_2, P_3 என்பன ஆகன் வரிப்படத்தில் Z_1, Z_2, Z_3 எனும் சிக்கலெண்களை வகை குறிக்கும் ஒரே கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகளாகும். முக்கோணி $P_1 P_2 P_3$ இன் மையப்போலி G ஆனது, சிக்கலெண் $\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3}$ ஐ வகை குறிக்கிறதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக.

$|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_3| = |Z_3 - Z_1|$ எனின்,

$$|Z_1 + Z_2 - 2Z_3| = |Z_1 + Z_3 - 2Z_2| = |Z_2 + Z_3 - 2Z_1|$$

எனக் காட்டுக.

41. ஆகன் வரிப்படத்தில் Z_1, Z_2, Z_3 ஆகிய சிக்கலெண்கள் முறையே P_1, P_2, P_3 ஆகிய புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. $|Z_1| = |Z_2| = |Z_3|$ ஆகவும் $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$ ஆகவும் இருப்பின் $P_1\, P_2\, P_3$ ஒரு சமபக்க முக்கோணி என நிறுவுக.

42. $Z = x + iy,\ \ x > 0,\ \ y > 0$ என்பதால் தரப்படும் சிக்கலெண் Z ஆனது ஆகன் வரிப்படம் ஒன்றிலே புள்ளி P யினால் வகை குறிக்கப்படுகிறது. அதே வரிப்படத்தில் புள்ளி Q ஆனது $i\sqrt{3}\,Z$ என்னும் எண்ணை வகை குறிப்பின் Q எவ்வாறு துணியப்படலாம் என்பதைக் காட்டுக. அத்துடன் முறையே $Z + i\sqrt{3}\,Z,\quad Z - i\sqrt{3}\,Z$ ஆகியவற்றை வகை குறிக்கின்ற R, R^1 எனும் புள்ளிகளைப் பரும்படியாகக் குறிக்க. Z இன் வீசல் θ ஆகும்.

(i) R என்பது கற்பனை அச்சில் கிடந்தால் θ வைக் காண்க.

(ii) Z^2 ஐ வகை குறிக்கின்ற புள்ளி, உற்பத்தி, R என்பன ஒரே கோட்டிலிருப்பின் $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

(iii) ஆகன் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தியோ, வேறுவிதமாகவோ,

$$\left|Z + i\sqrt{3}\,Z\right|^2 + \left|Z - i\sqrt{3}\,Z\right|^2 = 8|Z|^2$$ எனக் காட்டுக.

43. (i) $Arg\left(\dfrac{Z}{Z+2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, (ii) $Arg\left(\dfrac{Z}{Z+2i}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

(iii) $Arg\left(\dfrac{Z-1}{Z-2i}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ எனின் ஒவ்வொரு வகையிலும் Z இன் ஒழுக்கை விபரிக்க.

மீட்டற் பயிற்சிகள் 2

1. $k > 1$ எனின், $\frac{(2k-1)}{2k} > \frac{(2k-2)}{(2k-1)}$ எனக் காட்டுக.

$U_n = \frac{1\cdot3\cdot5........(2n-1)}{2\cdot4\cdot6........2n}$ ஆகவும்

$V_n = \frac{1\cdot2\cdot4....(2n-2)}{2\cdot3\cdot5......(2n-1)}$; $(n > 1)$ ஆகவுமிருப்பின்

$U_n > V_n$ எனக் காட்டுக.

$\left\{\frac{1\cdot3\cdot5.....(2n-1)}{2\cdot4\cdot6.....2n}\right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}\ (n>)$ என உய்த்தறிக.

$W_n = \frac{1\cdot3\cdot5.....(2n-1)}{2\cdot4\cdot6.....2n}(2n+1)$ எனின், $W_{n+1} - W_n$ ஐக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n+1} U_r = (W_{n+1} - 1)$ எனவும், முடிவுறாத் தொடரி

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்காது எனவும், உய்த்தறிக. (1982)

2. **(i)** **(a)** n ஒரு நேர்நிறையெண் எனின் ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$,

இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ எனக் காட்டுக.

(b) n யாதுமோர் நேர்நிறையெண் எனின்,

$(1+x)^n = {}^nC_o + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_rx^r + ... + {}^nC_nx^n$

எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

(c) $(1+x)^{2n} = (1+x)^n\,(1+x)^n$ என்பதையும் ஈருப்பு வி...

பயன்படுத்தி

$${}^{2n}C_n = \left({}^{n}C_o\right)^2 + \left({}^{n}C_1\right)^2 + \ldots + \left({}^{n}C_r\right)^2 + \ldots + \left({}^{n}C_n\right)^2$$ எனக் காட்டுக.

(ii) 15 துடுப்பாட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஊர் சுற்றும் குழு 7 துடுப்படிப் போரையும், 6 பந்து எறிவோரையும், 2 விக்கற் காவலர்களையும் கொண்டது. 11 ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும் குறைந்தது 5 துடுப்படிப்போரும், 4 பந்து எறிவோரும், 1 விக்கற் காவலனும் இருத்தல் வேண்டும்.

(a) துடுப்படிப்பவன் ஒருவனும், விக்கற் காவலன் ஒருவனும் காயமடைந்தனரெனின் தெரியப்படக்கூடிய வேறுபட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) எல்லா ஆட்டக்காரர்களும் உள்ளனர் எனின் எத்தனை வேறுபட்ட குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?

(1982)

3. (i) U_n உம் V_n உம், $U_n = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k}$, $V_n = \sum_{k=1}^{4n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இங்கு n ஒரு நேர்நிறையெண் கணிதத் தொகுத்தறி தத்துவத்தின் மூலம் $U_n = V_n$ என நிறுவுக.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} r^k$ எனும் பெருக்கற் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$-1 < r < 1$ எனின் $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} r^k$ உண்டு என உய்த்தறிக.

$r < -2$ அல்லது $r \geq 0$ எனின் $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{r}{(1+r)^k}$ உண்டு எனக் காட்டுக.

(1983)

4. (i) a_r என்பது $\left(1 + x + x^2\right)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகத்தைக் குறிக்கின்றது. இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண் $a_3 = 2a_2$ எனின், $n = 5$ என நிறுவுக.

(ii) 7 மனிதர்களிலிருந்தும் 5 சிமாட்டிகளிலிருந்தும் 5 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்றை இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துமுகமாக ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட மனிதனையும் ஒரு குறிப்பிட்ட சீமாட்டியையும் ஒன்றாகக் குழுவில் வைத்திருக்காவண்ணம் எத்தனை முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம் எனக் காண்க.

(1983)

5. $Z = x + iy$ என்னும் சிக்கலெண் ஒன்றின் உடன் புணரி $\overline{Z}$ என்பது $\overline{Z} = x - iy$ இனால் தரப்படின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ (ii) $\overline{(\alpha - \beta)} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$

(iii) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ (iv) $\overline{\left(\alpha^{-1}\right)} = \left(\overline{\alpha}\right)^{-1}$ (v) $\left(\overline{\alpha^n}\right) = \left(\overline{\alpha}\right)^n$

இங்கு α, β என்பன சிக்கலெண்களும் n ஒரு நேர்நிறையெண்ணும் ஆகும்.

$a_o Z^n + a_1 Z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} Z + a_n$ என்னும் மெய்யெண்களுடனான பல்லுறுப்பி $Z = Z_o$ இல் மறையும் எனின் $Z = \overline{Z_o}$ இலும் மறையும் எனக் காட்டுக.

(1983)

6. (i) $n \geq 1$ என்பதற்கு, $tan\theta_{n+1} = tan\theta_n \; Sec\theta_1 + Sec\theta_n \cdot tan\theta_1$ என அமையுமாறு $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots$ என்பன கூர்ங்கோணங்களின் தொடரியாகும். $n \geq 1$ என்பதற்கு

$Sec\theta_{n+1} = Sec\theta_n \cdot Sec\theta_1 + tan\theta_n \cdot tan\theta_1$ எனக் காட்டுக.

$n \geq 1$ என்பதற்கு $tan\theta_n + Sec\theta_n = \left(tan\theta_1 + Sec\theta_1\right)^n$ என்பதைக் கணிதத்தொகுத்தறி முறையால் காட்டுக.

(ii) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ என்னும் பெருக்கல் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$-1 < r < 1$ எனின் $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ உண்டு என உய்த்தறிக.

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{10^r}, \quad S = \lim_{n \to \infty} S_n$$ எனக் கொண்டு $S - S_n < 10^{-20}$ என்பதற்கு

n இனது மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1984)

7. Z உம் ω உம் சிக்கலெண்களாகும். $\overline{Z}$ உம் $\overline{\omega}$ உம் இவற்றின் சிக்கலெண் உடன் புணரிகளைக் குறிக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $Z\overline{\omega} + \overline{Z}\omega = 2\,\mathrm{Re}\left(Z\overline{\omega}\right)$

(ii) $(Z+\omega)\left(\overline{Z+\omega}\right) = Z\overline{Z} + \omega\overline{\omega} + 2\,\mathrm{Re}\left(Z\overline{\omega}\right)$

(iii) $2|Re\,Z|\,|Im z| \le |Z|^2$ **(iv)** $|Z| \le |Re\,Z| + |Im\,z| \le \sqrt{2}\,|Z|$

(v) $|Z+\omega| \le |Z| + |\omega|$

இங்கு $Re Z$ உம் $Im Z$ உம் Z இன் மெய்ப்பகுதியையும் கற்பனைப்பகுதியையும் குறிக்கின்றன. (கேத்திர கணித நிறுவல்கள் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட மாட்டாது)

(1984)

8. (i) நேர் நிறை எண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக. p உம் n உம் நிறையெண் எனின்,

p^n என்பது $(1+p)^{p^{n-1}} - 1$ என்பதை வகுக்கும் என நிறுவுக.

$$\left[(1+p)^{p^n} = (1+p)^{p^{n-1}}\ (1+p)^{p^{n-1}} \ldots\ldots\ (1+p)^{p^{n-1}}\ ;\right.$$

p காரணிகள் என்பதை உதவியாகக் கொள்ளலாம்]

(ii) PREPOSSESSED என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் ஒருமுறைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்களை அமைக்கலாம்?

(1984)

9. (i) எல்லா $n \ge 1$ இற்கும்

$$S_1 > \sqrt{3}\ ; \quad S_{n+1} = \frac{3(1+S_n)}{3+S_n}$$ என அமையும் வண்ணம்

$S_1, S_2\ S_3, \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ என்பது நேர் எண்களின் தொடரியாகும்.

$\left(S_{n+1}^2 - 3\right)$ என்பதை S_n இல் தருக.

கணிதத் தொகுத்தறிக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $S_n > \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் $S_{n+1} < S_n$ என உய்த்தறிக.

(ii) $tan\frac{x}{2} = cot\ \frac{x}{2} - 2cot\,x\ (o < x < \pi)$ என்னும் தொடர்பைப்

$$\text{பயன்படுத்தி } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\ tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} cot\frac{x}{2^n} - cot\,x$$

எனக்காட்டுக.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\ tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - cot\ x \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

(1985)

0. (i) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r\, x^r$ எனின், இங்கு $C_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ஆகும்.

$$\sum_{r=0}^{n} (r+1)C_r\, x^r = \{1+(n+1)x\}\ (1+x)^{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

இதிலிருந்து $\sum_{r=0}^{n} (r+1){C_r}^2$, $\{1+(n+1)x\}\ (1+x)^{2n-1}$ இன்

விரிவில் x^n என்பதன் குணகம் $\frac{(n+2)\,(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$ இற்குச் சமம் எனக்

காட்டுக.

(ii) TISSAMAHARAMA என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் எனக் காட்டுக. **(1985)**

11. (i) $k > 0$ ஆயிருக்க, $x^2 - x - k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் நேரான மறையான மூலங்கள் முறையே $\alpha, -\beta$ ஆகும். எல்லா $n \geq 1$ இற்கும் $S_1 > \alpha$, $S_{n+1} = \sqrt{k + S_n}$ ஆகுமாறு $S_1, S_2\ S_3, \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ என்பது நேர் நிறை எண்களின் தொடரியாகும்

$S_{n+2}^2 - S_{n+1}^2 = S_{n+1} - S_n$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா நேர் நிறை எண்களுக்கும் $S_{n+1} < S_n$ எனவும், $S_n > \alpha$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dfrac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots\ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் n ஆம் உறுப்பு U_n ஐ எழுதுக.

U_n ஐ $V_n - V_{n+1}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதக் கூடியதாக V_n ஐ கண்டு $\sum_{r=1}^{n} U_r = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$ உண்டு என உய்த்தறிக. **(1986)**

12. (i) நேர் நிறையெண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

$\left(3\sqrt{2}\,x - \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$ என்னும் பல்லுறுப்பியின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) KAHATAGASDIGILIYA என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

(1986)

13. (i) $U_r = \dfrac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$, $\quad f(r) = \dfrac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)}$

$f(r) - f(r-1) = U_r$ ஆகுமாறு λ, μ எனும் ஒருமைகளைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

தொடரானது ஒருங்குமென நிறுவி அதன் முடிவிலிக் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) அடுத்துவரும் நான்கு நிறையெண்களின் பெருக்கமானது 24 ஆல் பிரிக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

$n \geq 2$ எனின் கணிதத் தொகுத்தறிமுறையைப் பயன்படுத்தி $n^5 - 5n^3 + 60n^2 - 56n$ ஆனது 120 இனால் வகுபடும் என நிறுவுக.

(1987)

14. (i) $3\left(cos^4\theta + sin^4\theta\right) - 2\left(cos^6\theta + sin^6\theta\right) = 1$ எனக் காட்டுக.

(ii) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$ ஐத் தீர்க்க.

15. (i) $\frac{3}{1\cdot2\cdot4} + \frac{4}{2\cdot3\cdot5} + \frac{5}{3\cdot4\cdot6} + \ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக.

U_r ஐ $f(r) - f(r-1)$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்தோ வேறுவிதமாகவோ, $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்கும் போது $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ ஆனது 54 இனால் வகுபடத்தக்கது என நிறுவுக.

(1988)

16. (i) நேர் நிறையெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

$\left(x^{1/2} + x^{-3/4}\right)^n$ இன் விரிவில் உள்ள அதியுயர் குணகமானது 9

ஆவது உறுப்பில் மட்டும் இருப்பதாகத் தரப்பட்டுள்ளது. n ஐயும் விரிவில் x^4 இன் குணகத்தையும் காண்க.

(ii) சைகையாளர் ஒருவரிடம் ஆறுகொடிகள் இருக்கின்றன. அவற்றுள் ஒரு கொடி நீலமானது. இரண்டு கொடிகள் வெண்ணிறமானவை. எஞ்சியவை சிவப்பு நிறமானவை. அவர் கொடித்கம்பம் ஒன்றிலே கொடிகளை உயர்த்தி செய்திகளை அனுப்புகிறார். இங்கு கொடிகள் அமைந்திருக்கும் வரிசைக் கிரமத்தின் மூலம் செய்திகள் அறியப்படுகின்றன. அவர்

(அ) எல்லா ஆறு கொடிகளையும் பயன்படுத்தி

(ஆ) சரியாக ஐந்து கொடிகளைப் பயன்படுத்தி அனுப்பத்தக்க செய்திகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(1988)

17. (i) $$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot4}{2\cdot5}+\frac{1\cdot4\cdot7}{2\cdot5\cdot8}+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{2\cdot5\cdot8\cdot11}+\ldots\ldots\ldots$$

என்னும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஆகும். U_{r+1} ஐ U_r இன் சார்பில் எடுத்துரைக்க. $f(r)-f(r-1)=U_r$ ஆகவும்,

$f(r)=(Ar+B)\cdot U_{r+1}$ ஆகவும் இருக்கதக்கதாக $f(r)$ என்பது r இன் ஒரு சார்பாகும். இங்கு A, B ஆகியன மாறிலிகள். A B இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு, இதிலிருந்து

$$\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{1}{2}\left\{\frac{4\cdot7\cdot10\ldots\ldots\ldots(3n+1)}{2\cdot5\cdot8\ldots\ldots\ldots(3n-1)}-1\right\}$$ எனக்காட்டுக.

(ii) நேர்நிறையெண் n இற்கு, $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$ ஆனது 17 இனால் வகுபடத்தக்கதெனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் நிறுவுக. அதோடு, இம்முடிவினை வேறொரு முறையிலும் நிறுவுக.

(1989)

18. (i) ஒரு அலுமாரியில் வெவ்வேறு வகையான 16 பாடநூல்கள் உள்ளன. இவற்றில் 3 அட்சர கணித நூல்களும் 4 நுண்கணித நூல்களும், 3 கேத்திர கணித நூல்களும், ஏனையவை திரிகோண கணித நூல்களும் ஆகும். இந்நூல்களை எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம். மேலும், ஒவ்வொரு பாடத்துறை பற்றிய நூல்கள் ஒருமிக்க இருக்க வேண்டியபோதுள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(ii) $\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{1}{3}} - \left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{1}{3}}$ ஆனது 2 இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(1989)

19. நேர்நிறையெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(a) $x = \frac{1}{3}$ ஆக இருக்கும் போது x இன் ஏறுவலுக்களில் $\left(\frac{1}{2} + x\right)^9$ இன் விரிவில் உள்ள அதியுயர் உறுப்பின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $(1+x)^n = C_o + C_1 x + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n x^n$ எனின்

$\frac{C_r}{C_{r-1}} r\left(C_r + C_{r-1}\right) = (n+1)\cdot C_{r-1}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $C_o + 3\cdot C_1 + 5\cdot C_2 + \ldots\ldots + (2n+1)\cdot C_n = 2^n(n+1)$ என நிறுவுக.

(1989)

20. (i) $\frac{1}{3!}, \frac{5}{4!}, \frac{11}{5!}, \frac{19}{6!}, \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$U_n = \frac{\lambda}{n!} + \frac{\mu}{(n+1)!} + \frac{\nu}{(n+2)!}$ எனும் வடிவிலான

தொடர்பொன்றினைத் திருப்தி செய்கிறது. $n = 1, 2, 3$ எனப் பிரதியிட்டு λ, μ, ν ஐக் காண்க.
$n = 4$ இற்கு வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ, $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$

எனக் காட்டுக. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குமா? காரணம் தருக?

(ii) $x^{p+1} + y^{p+1} = (x+y)\left(x^p + y^p\right) - x\,y\left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ n நேர் நிறையெண் ஆக,

$\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$ என்பது 2^n ஆல் வகுபடும். எனக் காட்டுக.

$\left(3+\sqrt{5}\right)^n$ இன் முழு எண் பகுதியை ஒன்றால் அதிகரிப்பதால் பெறும்

எண் 2^n இன் ஓர் முழு எண் மடங்காகும் என உய்த்தறிக.

(1990)

21. (a) OBSEQUIOUSNESS இன் எல்லா எழுத்துக்களும் இருக்கும் ஒழுங்குகளில் எண்ணிக்கையை

(i) எழுத்துக்களின் ஒழுங்குகளில் எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லா திருக்கும்போது காண்க.

(ii) Q என்னும் எழுத்தை எப்போதும் ஒரு U தொடரும் போது காண்க.

(b) 14 ஆண்பிள்ளைகளையும் 12 பெண்பிள்ளைகளையும் உடைய வகுப்பொன்றிலிருந்து 3 ஆண்பிள்ளைகளையும், 3 பெண்பிள்ளைகளையும் கொண்ட குழுவொன்றைத் தெரியக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை

(i) எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாதபோது காண்க.

(ii) ஒரு குறித்த ஆண்பிள்ளையும் ஒரு குறித்த பெண்பிள்ளையும் ஒருங்கு சேவை செய்ய விரும்பாத போது காண்க.

(1990)

22. நேர்நிறையெண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக?

(i) $x = 4$ ஆக, $(10+3x)^{15}$ இன் விரிவில் அதிஉயர் உறுப்பைக் காண்க.

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{x}(1+x)^n\right] = -\dfrac{1}{x^2}(1+x)^n + \dfrac{n}{x}(1+x)^{n-1}$ என்னும்

முடிவைப் பாவித்தோ, வேறுவிதமாகவோ

$$\sum_{r=1}^{n-1} r \cdot {}^nC_{r+1} = 1 + (n-2)\,2^{n-1}$$ எனக் காட்டுக.

(1990)

23. (i) $$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \equiv n^3$$

$$\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{8}\left(n-\frac{1}{2}\right) \equiv n^3$$

என்னும் சர்வசமன்பாடுகளை வாய்ப்புப் பார்த்து, அவற்றைப் பயன்படுத்தி

$\sum_{r=1}^{n} r^3, \quad \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்பது 54 இன் மடங்காகும் என நிறுவுக.

(1990 விசேட)

24. (i) RELATIVISTIC என்னும் சொல்லின் எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக் களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

அவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்கள் 3I களும் ஒருமிக்க வரும்? அவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்களில் 3I களுள் இரண்டு ஒருமித்தும் மூன்றாவது அவற்றை அடுத்து வராமலும் இருக்கும்.

(ii) பை ஒன்றில் வெவ்வேறான 8 வெள்ளி நாணயங்களும், 4 செப்பு நாணயங்களும் உள்ளன. 7 நாணயங்களின் வெவ்வேறு தெரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றுள் எத்தனை தெரிவுகளில குறைந்தபட்சம் ஒரு வெள்ளி நாணயமேனும் இருக்கும்.

(1990 விசேட)

25. n என்பது ஓர் நேர் நிறையெண் எனின் $(a+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரிவைத் தந்து அதனை நிறுவுக.

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^{15}$ இன் விரிவில் x இல் தங்கியிராத உறுப்பையும் $x = \frac{1}{4}$ ஆக இருக்க அதிஉயர் உறுப்பையும் காண்க.

$(1+x)^4 \left(1-x^2\right)^n, \ (1-x)^n (1+x)^{n+4}$ என்னும் விரிவுகளில்

$x^r \ (n \geq 2r)$ இன் குணகங்களைக் கண்டு

$$(-1)^r\left[{}^nC_r-6\cdot{}^nC_{r-}+{}^nC_{r-2}\right]={}^nC_o\cdot{}^{n+4}C_{2r}-{}^nC_1\cdot{}^{n+4}C_{2r-1}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}^nC_{2r}\cdot{}^{n+4}C_o$$ எனக் காட்டுக.

(1990 விசேட)

26. (i) $f(r)=\dfrac{1}{r^2}\quad(r\neq 0)$ எனின், $f(r)-f(r+1)=\dfrac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$

எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\dfrac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots\ldots\ldots$

இனுடைய முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. மேலே உள்ள தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உமது விடைக்குக் காரணம் தருக.

(ii) $|x|<1$ இற்கு $ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\ldots\ldots-\dfrac{x^n}{n}\ldots\ldots$

எனக் கொண்டு

$$\ell n_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots$$

எனக் காட்டுக.

$\dfrac{1}{r(r+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைப்பதன் மூலம்

$$S_n=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r=1-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r-\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

எனக் காட்டுக. $n\longrightarrow\infty$ ஆகும் போது, $S_n\longrightarrow 1-ln2$ என உய்த்தறிக.

(1991 விசேட)

27. நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றிற்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(i) $\sum_{r=1}^{n} r\cdot{}^nC_r\,x^{r-1}=n(1+x)^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $n(1+x)^{n-1}$; $(1+x)^n$ என்பவற்றின் இருவிரிவுகளையும் எடுத்து நோக்குவதன் மூலம் $\sum_{r=1}^{n} r\cdot\left({}^nC_r\right)^2$ ஆனது, $n(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவிலுள்ள x^{n-1} இன் குணகத்துக்கு சமமாகும் எனக் காட்டுக.

(iii) $\sum_{r=1}^{n} r\left({}^nC_r\right)^2 = \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1991)

28. (i) $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\frac{a+15}{16}+$.......... எனும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இங்கு a ஒரு மாறிலி.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் கண்டு

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

(iii) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறுவிதமாக $7^{2n}-48n-1$ என்பது 2304 என்பதால் வகுபடும் என நிறுவுக.

(1991 விசேட)

29. (i) நேர் முழு எண் சுட்டி ஒன்றிற்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

$(1+x)^n$ விரிவில் x^r இன் குணகம் C_r எனின்,

(a) பகுதிப் பின்னம் முறைமாகவோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\text{.........}(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{C_r}{(x+r)}$$ எனவும்

(b) $\sum_{r=0}^{n} C_r^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\left(2x - \dfrac{1}{4x^2}\right)^{15}$ இன் விரிவில்

(a) x ஐச் சாராத உறுப்பு

(b) அதிஉயர் எண் பெறுமானத்தைபுடைய குணகம்.

(c) $x = \dfrac{3}{4}$ ஆக, அதிஉயர் எண் பெறுமானத்தையுடைய உறுப்பு

என்பவற்றைக் காண்க.

(1991 விசேட)

30. (i) $\dfrac{4}{2\cdot3\cdot4} + \dfrac{7}{3\cdot4\cdot5} + \ldots\ldots + \dfrac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ என்னும் தொடரின்

முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. மேலேயுள்ள தொடர் ஒருங்குமெனக் காட்டி, முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ii) எந்த ஒரு நேர் நிறையெண் n உம் $5m,\ 5m \pm 1,\ 5m \pm 2$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு m ஒரு நிறை வெண். இதிலிருந்து n^2 எனும் வடிவிலுள்ள எந்த ஒரு நிறையெண்ணும் 5 இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதியானது 0, 1, 4 ஆகியவற்றுள் ஏதாவது ஒன்றாகும் என்பதை உய்த்தறிக.

(1992)

31. n ஒரு நேர்நிறைவெண்ணாக இருக்க வழமையான குறிப்பீட்டுடன்

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \ldots + a^n$$

என நிறுவுக.

$\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ இன் விரிவில் x இன் குணகத்தைக் காண்க.

$\left(1-x^2\right)^n = (1-x)^n\,(1+x)^n$ இன் இருபக்கங்களையும் விரித்து

$$C_o C_r - C_1 C_{r-1} + C_2 C_{r-2} + \ldots (-1)^r C_r C_o = 0,\ r \text{ ஒற்றையெனில்}$$

$$= (-1)^{r/2}\, C_{\frac{r}{2}},\ r \text{ இரட்டையெனில்}$$

எனக் காட்டுக.

இங்கு $(1+x)^n = C_o + C_1 x + \ldots\ldots + C_r x^r + \ldots\ldots + C_n x^n$ ஆகும்.

(1992)

32. (a) $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ஆக இருக்கட்டும்.

இங்கு $U_r = r(r+1)(r+2)$

$S_n = \frac{1}{4} r(r+1)(r+2)(r+3)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\sum_{r=1}^{n} V_r$ ஐக் காண்க.

இங்கு $V_r = \frac{1}{S_r}$

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ எனும் தொடர் ஒருங்காது எனவும், ஆனால் $\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ எனும் தொடர் ஒருங்கும் எனவும் முடிவிலி வரைக்குமான அதன் கூட்டுத் தொகை $\frac{2}{9}$ ஆகும் எனவும் காட்டுக.

(b) n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $2^{2n+1} - 6n - 2$ என்பது 18 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக. **(1993)**

33. வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \ldots + x^n$$

என நிறுவுக. முழுமையான அட்சரகணித முறைகளைப் பயன்படுத்தி

(i) $C_1 + 2\cdot C_2 + 3\cdot C_3 + \ldots.. + n\cdot C_n = n\cdot 2^{n-1}$ எனவும்

(ii) $C_o - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ எனவும் காட்டுக.

 (1993)

34. **(a)** $U_r = r(r+1)$ ஆக இருக்கட்டும்

$$\sum_{r=1}^{n} U_r, \quad \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r}$$ ஆகியவற்றைக் கண்டு, தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$

ஒருங்காதெனவும். அதேவேளை தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r}$ ஒருங்குகிறதெனவும்

காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

r ஆம் உறுப்பு a_r ஆனது, $a_r = \dfrac{r^2\left(r^2+1\right)+2\left(r^3-1\right)}{r(r+1)}$

என்பதனால் கொடுக்கப்படும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ ஒருங்காதெனவும் காட்டுக.

(b) S_n என்பது, $\frac{3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{5}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots$

என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாக இருக்கட்டும். கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது

வேறுவிதமாக $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)2^n}$ எனக் காட்டுக. **(1994)**

35. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, $(1+x)^{2n}$ இன் ஈருறுப்புவிரிவை

எழுதுக. மேற்போந்த விரிவில் நடுஉறுப்பு $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}{n!}2^n x^n$ எனக்

காட்டுக.

x நேர் எனக் கொண்டு இவ்விரிவின் அதி உயர் உறுப்புக்கு அதிஉயர் குணகம் இருப்பதற்கான x இன் வீச்சைக் காண்க.

(1994)

36. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}$ .... என்னும் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு

U_r ஆகவும், $f(r)=\frac{1}{4(r+2)(r+4)}$ ஆகவும் இருப்பின்

$f(r)-f(r-2)=U_r$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது

வேறுவிதமாகவோ $\sum_{r=1}^{n}U_r$ ஐக் காண்க, $\sum_{r=1}^{\infty}U_r=\frac{11}{96}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) எந்தவொரு மறையில்லா நிறையெண் n இற்கும் n^7-n என்பது 7 இனால் வகுபடும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக. மறையான நிறையெண்களுக்கு இம் முடிபை உய்த்தறிக. எந்தவொரு ஒற்றை நிறையெண் n இற்கும் n^7-n என்பது 168 ஆல் வகுபடும் என்பதை உய்த்தறிக. **(1995)**

37. ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்கும் போது $(1+x)^n$ இற்கான ஈருறுப்பு விரிவைக் கூறி நிறுவுக.

மேற்போந்த விரிவைப் பயன்படுத்தி, அட்சரகணித முறைப்படி

${}^nC_o+2\,{}^nC_1x+3\,{}^nC_2x^2+.....+(n+1)\,{}^nC_n\,x^n$ என்பது

$\left[1+(n-1)x\right](1+x)^{n-1}$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

(i) $\left[1+(n+1)x\right](1+x)^{2n-1}$ என்பதை விரிப்பதன் மூலமும் x^n இன் குணகத்தைக் கருதுவதன் மூலமும்

$$\left({}^nC_o\right)^2+2\left({}^nC_1\right)^2+3\left({}^nC_2\right)^2+.....+(n+1)\left({}^nC_n\right)^2$$ இன்

கூட்டுத்தொகை $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(ii) n இரட்டையாயிருக்கும் போது

${}^nC_o+3\,{}^nC_2+5\,{}^nC_4+........(n+1)\,{}^nC_n$ இன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. **(1995)**

38. **(ii)** $V_r - V_{r-1} = 2r\ (r \geq 2)$ எனவும், $V_1 = 1$ ஆகவும் இருப்பின்

$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$ என்பதைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக

$V_n = n^2 + n - 1$ எனக் காட்டுக.

$U_r = \frac{V_r}{(r+2)!}$ எனத்தரப்படுமிடத்து $f(r) - f(r+1) = U_r$ ஆகுமாறு $f(r)$ என்னும் சார்பைக் கண்டு இதிலிருந்து

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$ எனக் காட்டுக.

$\sum U_r$ ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(ii) n ஒரு நேர் நிறையெண் ஆயின் $4 \cdot 6^n + 5^{n+1}$ என்பது 20 இனால் வகுபடும் போது மீதி 9 ஆகுமெனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக. **(1996)**

39. **(i)** n பொருட்களிலிருந்து ஒரு தடவை r ஆக எடுக்கப்படும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(ii) 75000 இலும் பெரிதான எத்தனை நிறையெண்கள் பின்வரும் நிபந்தனைகள் இரண்டையும் திருப்தி செய்யும்?

(a) நிறையெண்ணின் இலக்கங்கள் யாவும் வேறு வேறானவை.

(b) 0, 1 ஆகிய இலக்கங்கள் அவ்வெண்ணில் தோன்றுவதில்லை.

(iii) நிறையெண் ஒன்றின் இலக்கங்கள் 1 அல்லது 2 ஆக மாத்திரமே இருக்கலாம். அத்துடன் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை பத்தாகும். அத்தகைய நிறையெண்கள் எத்தனை உள்ளன. **(1996)**

40. நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றிற்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(i) $(3x + 2y)^{20}$ என்னும் விரிவில் **(a)** அதிஉயர் எண் குணகம்

(b) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{2}$ ஆகவும் இருக்க அதிஉயர் உறுப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) $(1+x)^n(1+x)^n \equiv (1+x)^{2n}$ என்னும் சர்வசமனின்

இருபக்கங்களிலுமுள்ள x^r இன் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம்

$$\sum_{S=0}^{r} {}^nC_r \cdot {}^nC_{r-s} = {}^{2n}C_r$$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து கூட்டுத்தொகை $\sum_{S=0}^{n}\left({}^nC_s\right)^2 = {}^{2n}C_n$ எனக்காட்டுக.

(iii) $(a+bx)^n$ என்னும் விரிவில் (i) x இன் ஒற்றை வலுக்களில்

(ii) x இன் இரட்டை வலுக்களில் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்

(199

41. (a) $r \geq 1$ இற்கு $U_r \dfrac{\sqrt{r}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{r})}$ எனத்தரப்பட்டுள்ள

$r > 1$ இற்கு $f(r-1) - f(r) = U_r$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

$$\sum_{r1}^{n} U_r = 2U_1 - \frac{U_n}{\sqrt{n}}$$ எனக்காட்டுக.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ என்னும் தொடரானது ஒருங்கும் என்பதற்கு மேற்போந்த

முடிவைப் பயன்படுத்துக.

(b) n ஒரு நேர்நிறையெண் எனில் கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $2^{2n+2} + 3^{2n}$ ஆனது 120 இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 25 ஆகுமெனக் காட்டுக. **(1997 – old)**

42. (a) coefficient என்னும் சொல்லின் 11 எழுத்துக்களைக் கொண்டு செய்யத்தக்க வேறுவேறான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

அத்துடன் coefficient என்ற சொல்லின் 11 எழுத்துக்களிலிருந்தும் செய்யத்தக்க 4 எழுத்துக்களின் வேறு வேறான தேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) 8 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 6 கறுப்புப் பந்துகளையும் பை A கொண்டிருக்க, 6 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 3 கறுப்புப் பந்துகளையும் பை B கொண்டுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் 4 வெள்ளைப்பந்துகளையும் 2 கறுப்புப் பந்துகளையும் கொண்டிருக்குமாறு 6 பந்துகள் உள்ள எத்தனை தொடைகள் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

(i) 6 பந்துகளும் ஒரே பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் போது

(ii) கறுப்புப் பந்துகள் இரண்டு பைகளில் ஏதாவதொன்றிலிருந்தும் வெள்ளைப் பந்துகள் மற்றப் பையிலிருந்து எடுக்கப்படும்போதும்

(iii) பந்துகள் எடுக்கப்படும் பைகள் தொடர்பாக எந்தவொரு நிபந்தனையும் இல்லாதபோது.

(1997 – old)

43. n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாயிருக்க $(1+x)^n$ இற்கான ஈருறுப்பு விரிவைக் கூறி அதனை நிறுவுக.

a, b என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க $(a+b)^n$ இற்கான விரிவை உய்த்தறிக.

(i) $1\cdot{}^nC_1 a\cdot b^{n-1} + 2.{}^nC_2 a^2 b^{n-2} + 3\cdot{}^nC_3 a^3 b^{n-3} + \ldots + n\cdot{}^nC_n\cdot a^n$

என்னும் கூட்டுத்தொகையை அட்சரகணித முறையாகப் பெறுமானம் கணித்து, $a+b=1$ எனில் அக்கூட்டுத்தொகை na இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(ii) $a+b=1$ ஆகுமாறு கொடுக்கப்பட்ட நேரான a, b இற்கு ${}^nC_r\, a^r\, b^{n-r}$ இன் மிகப்பெரிய பெறுமானமானது $r = r_0$ இல் நேர்கின்றதெனக் காட்டுக. இங்கு $na - b \le r_o \le na + a$, $o \le r \le n$ ஆகும்.

$a = b = \dfrac{1}{2}$ என்பதைக் கருத்திற் கொண்டு $n=4$ ஆகும்போதும் $n=5$ ஆகும்போதும் r_o இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

r_o இன் ஒருதனிமையை ஆராய்க. (1997- old)

44. (a) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r\, x^r$ எனக்கொண்டு,

$\sum_{r=0}^{n} C_r$ ஐயும் $\sum_{r=0}^{n} C_r^{\,2}$ ஐயும் காண்க.

இதிலிருந்து முறைக்கு இரண்டுவீதம் $C_o, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ எடுக்கப்படும்போது கிடைக்கும் பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(b) $(1-\lambda x)^9 = 1 - px + qx^2 - rx^3 + \ldots\ldots$ எனத்தரப்பட்டிருக்கும்போது p இன் பெறுமானம், q இன் பெறுமானம் r இன் பெறுமானம் ஆகியவற்றை λ இன் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து $(1-x)^9\,(1-3x)^9$ இன் விரிவில் x^3 இன் எண்குணகத்தைக் காண்க. **(1997)**

45. (a) r ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க,

$$U_r = \frac{2r+3}{r^2(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} \text{ எனவும்}$$

$$f(r) = \frac{k}{r^2(r+1)^2(r+2)^2} \text{ எனவும் கொள்க. இங்கு } k \text{ ஒரு மாறிலி}$$

$U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு k யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $g(r)$ என்பது, r நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, $U_r = g(r) - g(r+1)$ ஐயும் திருப்தியாக்குமெனின் $g(r) = f(r) + c$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு c ஒருமாறிலி.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் கண்டு, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

(b) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ n = 3, 4 \ldots\ldots$ இங்கு $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-2} + x_{n-1}\right)$ எனக. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேர்நிறையெண் n இற்கு $\left|x_n - x_{n+1}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$ என நிறுவுக. **(1998)**

46. **(a)** 3528 இன் நேர் வகுத்திகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

[குறிப்பு : $3528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$]

(b) விஞ்ஞான மாநாடு ஒன்றிலே 20 பல்கலைக்கழகங்கள் பங்குபற்றுகின்றன. ஒவ்வொரு பல்கலைக்கழகமும் தாவரவியலறிஞர் ஒருவரையும், இரசாயனவறிஞர் ஒருவரையும், கணிதர் ஒருவரையும், பௌதிகர் ஒருவரையும், விலங்கியலறிஞர் ஒருவரையும் ஆதரித்து அனுப்புகிறது. 10 உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும்,

(i) ஒவ்வொரு பாடத்துறையிலும் இருவர் வீதம்

(ii) குழுவின் ஒவ்வொரு உறுப்பினரும் வெவ்வேறு பல்கலைக்கழகத்திலிருந்து வருமாறு ஒவ்வொரு பாடத்துறையிலும் இருவர் வீதம்

(iii) மூன்று பல்கலைக்கழகத்திலிருந்து மூவர்விதமும் வேறொரு பல்கலைக் கழகத்திலிருந்து ஒருவர் வீதமும் இருக்குமாறு குழுக்களை எத்தனை விதங்களில் அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

(1998)

47. **(a)** n, k என்பன, $n \geq k$ ஆகுமாறுள்ள நேர்நிறையெண்கள் என்க. வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன்,

(i) $^{n+1}C_k = {}^nC_k + {}^nC_{k-1}$

(ii) $n > 1$ இற்கு $\sum_{r=k+1}^{n} {}^rC_k = {}^{n+1}C_{k+1} - 1$ என நிறுவுக.

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \text{ எனவும், } \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

என்பதையும் உய்த்தறிக.

(b) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2x} + x\right)^2 (2 + x)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகத்தைக் காண்க. இங்கு n நேர்நிறையெண்ணும் r என்பது $n+3$ இலும் குறைந்த மறையல்லா நிறையெண்ணும் ஆகும். x^3 இன் குணகம் $\frac{2^{n-2}}{3}\left(n^3 + 6n^2 - n\right)$ எனக்காட்டுக.

(1998)

48. (a) கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி யாதாயினும் ஒரு நேர்நிறையெண் n இற்கு

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)^2 (r+2) = \frac{1}{10} n(n+1)(n+2)(n+)(2n+3)$$ என நிறுவுக.

(b) முடிவில் தொடர் ஒன்றின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஆனது, $\dfrac{2(r+4)}{r(r+1)(r+2)}$

ஆகும். யாதாயினும் ஒரு நேர்நிறைஎண் r இற்கு

$U_r = A\{f(r) - f(r+1)\}$ ஆக இருக்குமாறு ஒருமாறிலி A ஐயும் சார்பு f ஐயும் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, மேற்குறித்த தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. தொடர் ஒருங்குகிறதெனக் காட்டி, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

49. (a) α , β என்பன சமன்பாடு $x^2 - px + q = 0$ இன் மூலகங்களாகும். $\alpha(\alpha+\beta)$, $\beta(\alpha+\beta)$ என்பவற்றை மூலகங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) கோவை $f(x, y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2 - 5y - 2$ ஆனது இரு ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதப்படுவதற்கு λ வின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(c) $\dfrac{2x^3 + x + 3}{x(x-1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைக்க. **(2000)**

50. (a) யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் n இற்கு

$$U_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \ldots\ldots + (n-1)\, 2 + n \cdot 1$$

எனக் கொள்வோம்.

கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைக் கொண்டு

$U_n = \dfrac{1}{6} n(n+1)(n+2)$ என நிறுவுக.

யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவெண் n இற்கு $\dfrac{1}{U_n} = V_n - V_{n+1}$ ஆக

இருக்குமாறு V_n ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{U_r} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)\,(n+2)}$ எனக்

காட்டுக. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(b) $(1+kx)^{10} = a_o + a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$, $x \in R$

எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a_2 = \frac{20}{9}$; k ஒரு நேர் மாறிலி. k யின்

பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{11^{10} - 7^{10}}{2 \cdot 9^{10}}$$ எனக் காட்டுக.

$a_o + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(2000)

51. (a) $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4}$ என்னும் சிக்கலெண்ணின் மட்டையும், வீசலையும் அட்சரகணித

முறையாகக் காண்க.

(b) P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகள் ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே Z_1 ; Z_2 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன. ஆகன் வரிப்படத்திலே சிக்கலெண் $Z_1 + Z_2$ ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியின் தானத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்குரிய கேத்திரகணித அமைப்பை தருக.

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ என்னும் சிக்கலெண்களை ஆகன்

வரிப்படத்தில் குறிக்க.

மேற்குறித்த பேறைப் பயன்படுத்தி $Z_1 + Z_2$ இன் தானத்தைக் காண்க.

$tqn\, \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ஐ உய்த்தறிக. **(2000)**

52. a) α, β என்பன சமன்பாடு $x^2 + px + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் எனவும்.

γ, δ என்பன சமன்பாடு $x^2 + \frac{1}{p}x + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் எனவும் கொள்வோம்.

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + 1)(\delta^2 + p\delta + 1)$$

எனக் காட்டி,

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2$$

என்பதை உய்த்தறிக.

b) a, b என்பன நேர் மெய் எண்களெனின், $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{1}{log_2 2001} + \frac{1}{log_3 2001} + \frac{1}{log_4 2001} + \ldots\ldots + \frac{1}{\log_{100} 2001} = \frac{1}{\log_{100!} 2001}$$

எனக் காட்டுக.

53. a) $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ இற்கு $A_{n+1} = (1 - \alpha)(1 - A_n) + A_n$ எனவும், $A_1 = \beta$ எனவும் கொள்வோம். இங்கு α, β ஆகியன மெய் எண்கள். கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு நேர் நிறைவெண் n இற்கும் $A_n = 1 - (1 - \beta)\alpha^{n-1}$ என நிறுவுக.

$\sum_{r=1}^{n} A_r$ ஐக் காண்க.

b) $1 \le k \le n$ ஆக இருக்குமாறு k, n என்னும் நிறைவெண்களுக்கு

$$k\,{}^nC_k = n\,{}^{n-1}C_{k-1}$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, யாதாயினும் $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $n \geq 0$ இற்கும்

$$\sum_{k=0}^{n} k \, {}^{n}C_{k} \, x^{k} \, (1-x)^{n-k} = nx$$ என நிறுவுக.

54. a) நிரையில் பெண் பிள்ளை ஒன்று முதலாவதாகவும், பெண் பிள்ளைகளும், ஆண்பிள்ளைகளும் மாறி மாறியும் இருக்குமாறு 7 ஆண்பிள்ளைகளும், 7 பெண் பிள்ளைகளும் நிரைப்படுத்தப்படத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

b) $y = 2|x+1| - 3$, $y = x + 2|x-1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து,

$$x + 2|x-1| > 2|x+1| - 3$$

ஐத் திருப்தியாக்கும் x ன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க. சமன்பாடு $x + 2|x-1| = 2|x+1| - 3$ ஐத் தீர்க்க.

55. a) $\mathrm{Arg}(Z - a) = \alpha$ எனின், Z இன் ஒழுக்கை விபரிக்க. இங்கு $x \in \mathbb{R}$ உம், $0 < \alpha < \pi$ உம் ஆகும்.

$$\mathrm{Arg}(Z+1) = \frac{\pi}{6} \text{ எனவும், } \mathrm{Arg}(Z-1) = \frac{2\pi}{3} \text{ எனவும்}$$

தரப்பட்டுள்ளது. முதற் பகுதியைப் பயன்படுத்தி Z ஐக் காண்க.

b) சிக்கலெண் $\dfrac{5-i}{2-3i}$ ஐ $\lambda(1+i)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு λ மெய்யானது, λ இன் பெறுமானத்தைக் கூறுக.

இதிலிருந்து $\left(\dfrac{5-i}{2-3i}\right)^{6}$ கற்பனையானதெனக் காட்டி, அதன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

(2001)

56. $f(x) = x^2 + 2x + 9;$ $x \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) α, β என்பன $f(x) = 0$ இன் மூலங்களெனின், $\alpha^2 - 1,\ \beta^2 - 1$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

(ii) சமன்பாடு $f(x) = k$ ஆனது x இற்குச் செப்பமாக ஒரு மெய்ம் மூலத்தைக் கொண்டிருக்குமாறு ஒரு மெய்மாறிலி k யின் பெறுமானத் தைக் காண்க.

(iii) $\dfrac{1}{f(x)}$ இன் அதியுயர் பெறுமானத்தைக் கண்டு, அது அடையப்படும் x இன் பெறுமானத்தையும் தருக.

(iv) சமன்பாடு $f(x) = \lambda x$ ஆனது x இற்கு மெய்த் தீர்வைக் கொண்டிராத வாறு ஒரு மெய்மாறிலி λ வின் பெறுமானத் தொடையைத் துணிக.

57. **a)** தகுதியுள்ள பன்னிரண்டு மாணவர்களிலிருந்து செப்பமாக நான்கு மாணவர்களைக் கொண்ட பாடசாலை விவாதக் குழு ஒன்றைத் தெரிவு செய்ய வேண்டியுள்ளது. இக்குழு தெரிவு செய்யப்படத்தக்க வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) குழுவில் முரளியும், கண்ணனும் இருத்தல்.
(ii) குழுவில் முரளி அல்லது கண்ணன் இருத்தல்.
(iii) குழுவில் முரளியோ, கண்ணனோ இராமை.

ஆகிய சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் குழு தெரிவு செய்யப் படத்தக்க வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

b) $\left(\dfrac{7}{6x} - \dfrac{6x}{7}\right)^{13}$ இன் விரிவைக் கருதுக.

(i) இவ்விரியில் x இன் இரட்டை வலுக்களோ, $\dfrac{1}{x}$ இன் இரட்டை வலுக்களோ இருப்பதில்லை எனவும்,

(ii) $\dfrac{1}{x}$ இன் குணகம் 2002 எனவும் காட்டுக.

58. **a)** கணிதத் தொகுத்தறி பற்றிய கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு நேர் நிறைவெண் n இற்கும் $n! \geq 2^{n-1}$ என நிறுவுக.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$ என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து $e \leq 3$ எனக் காட்டுக. e என்பது இயற்கை மடக்கைகளின் அடியாகும்.

b) $y = |3x - a|$, $y = |bx - 2|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப் படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இங்கு a, b என்பன நேர் எண்களாகும். சமனிலி $|3x - a| < |bx - 2|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களினதும் தொடை $\left\{x : x > \frac{4}{3}\right\}$ எனின் வரைபைப் பயன் படுத்தியோ, வேறுவிதமாகவோ a, b ஆகியவற்றைக் காண்க.

59. சிக்கலெண் Z ஆனது $Z = x + iy$, $x > 0$, $y > 0$ இனால் தரப்படுகின்றது. ஆகண் வரிப்படத்தில் $Z, 2iZ, Z + 2iZ$ ஆகியவற்றை நேரொத்த புள்ளிகள் A, B, C ஆகும். A, B, C ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து, $A\hat{O}B$, $\tan A\hat{O}C$ ஆகியவற்றைத் துணிக.

(i) C ஆனது கற்பனையச்சின் மீது கிடந்தால், x இற்கும் y இற்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமையைப் பெறுக.

(ii) $y = 2x$ எனின், சிக்கலெண் Z^2 ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியானது கோடு OC மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(iii) $|Z| \leq 4$ ஆகவும் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \operatorname{Arg} Z \leq \tan^{-1}(2)$ ஆகவும் இருக்கும் சிக்கலெண் Z ஐ வகை குறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசத்தை வேறொரு வரிப்படத்தில் நிழற்றுக. நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவை காண்க.

(2000)

60. $\lambda \in \mathbb{R}$ எனவும் $p(x) = (\lambda - 2)x^2 - 3(\lambda + 2)x + 6\lambda$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $P(x)$ நேராக இருக்கும் λ வின் மிகச் சிறிய நிறைவெண் (முழுவெண்) பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) λ வின் எப்பெறுமானங்களுக்குச் சமன்பாடு $p(x)=0$ இரு வே வேறான மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்?

(iii) $p(x)=0$ இன் மூலங்கள் மெய்யாகவும் அவ்விரு மூலகங்களினது வித்தியாசம் 3 இற்குச் சமமாகவும் இருப்பின் λ வைக் காண்க.

61. a) ஒரு குறித்த வகுப்பில் 8 மாணவர்கள் இருக்கின்றனர். ஒரு போட்டியில் பங்குற்றுவதற்கு வகுப்பாசிரியர் அம் மாணவர்களை நாலு குழுக்களாக பிரிக்க வேண்டியுள்ளது. குழுக்களின் பருமன்கள் எல்லாம் சமமா இருக்க வேண்டியதில்லை. மாணவன் ஒருவன் உள்ள குழுவு இருக்கலாம்.

தேவைப்படும் நாலு குழுக்களையும் 1701 வழிகளில் அமைக்கலாமெனக் காட்டுக.

b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில்

$0 \le r \le n-1$ இற்கு ${}^{n}C_{r+1} + {}^{n}C_{r} = {}^{n+1}C_{r+1}$

எனக் காட்டுக.

$0 \le r \le 2002$ இற்கு

$${}^{2003}C_r + {}^{2004}C_r + \dots\dots + {}^{2013}C_r = {}^{2014}C_{r+1} - {}^{2003}C_{r+1}$$

என்பதை உய்த்தறிக.

62. a) கணிதத் தொகுத்தறிவு பற்றிய கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி எல்லா நேர் நிறைவெண் (முழுவெண்) n இற்கும்

$8(n+1)! > 2^{n+1}(n+2)$ என நிறுவுக.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{2^k} > \frac{1}{16}\left(n^2+3n+4\right)$ என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து தொடர் $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ ஒருங்குவதில்லையெனக் காட்டுக.

b) சமனிலி $|x+2| + |x-1| > 5$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களினதும் தொடையைக் காண்க

63. சிக்கலெண் $\omega = \sqrt{3}+i$ ஐ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இங்கே $r>0$ அதோடு $0 \le \theta < 2\pi$ ஆக இருக்குமாறு θ ஆரையனில் உள்ளது.

$\omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$ ஆகியவற்றை மேற்குறித்த வடிவத்தில் பெறுக.

$6 < |Z| < 30$ ஆகவும் $\frac{\pi}{6} < Arg\,Z < \frac{5\pi}{6}$ ஆகவும்

இருக்குமாறு சிக்கலெண்கள் Z ஐ ஆகண் வரிப்படத்தில் வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

சிக்கலெண்கள் $\omega^n \left(n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 5\right)$ ஐ வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளிடையே எவை பிரதேசம் R இல் கிடக்கின்றனவெனத் துணிக.

(2003)

64. a) $\lambda \in \mathbb{R}$ எனவும் $p(x) = x^2 - 2\lambda(x-1) - 1$ எனவும் கொள்வோம்.

$p(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவையெனக் காட்டுக.

$p(x) = 0$ இன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை அம் மூலங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்குமாறு λ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

b) ஓர் இருபடிப் பல்லுறுப்பி $P(x)$ ஆனது முறையே $(x-1), (x-2), (x-3)$ ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ஆகும்.

$(x-1), (x-2), (x-3)$ என்பன $Q(x) = x\,P(x) - 1$ இனால் தரப்படும் பல்லுறுப்பி $Q(x)$ இன் காரணிகளெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $Q(x)$ ஐக் காண்க.

65. a) குறித்த ஒரு பரீட்சையிலே நீர் ஒன்பது வினாக்களில் ஆறு வினாக்களுக்கு விடை எழுத வேண்டும். அந்த ஆறு வினாக்களையும் தெரிந்தெடுக்கத் தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

அதோடு,

(i) முதல் மூன்று வினாக்களும் கட்டாயமாக இருக்குமெனின்

(ii) முதல் ஐந்து வினாக்களிலிருந்து குறைந்தபட்சம் நான்கு வினாக்களையேனும் தெரிந்தெடுக்க வேண்டுமெனின்

அந்த ஆறு வினாக்களையும் தெரிந்தெடுக்கத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

b) x இன் ஏறு வலுக்களில் $(1 + 7x)^{23}$ இன் ஈருறுப்பு விரியைக் கருதுக.

(i) அவ்விரியின் மிகப் பெரிய எண் குணகத்தையும் அதற்கு ஒத்த விரியின் உறுப்புகளையும் காண்க.

(ii) x நேரெனத் தரப்படும்போது அவ்விரியின் மிகப் பெரிய உறுப்பாக நான்காம் உறுப்பு இருக்குமாறு x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

66. a) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு நேர் நிறைவெண் n இற்கும்

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$$

என நிறுவுக.

தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+2)}$ ஒருங்குகிறது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

b) சமனிலி $|x-1|-\left|\frac{1}{2}x+1\right|<1$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களினதும் தொடையைக் காண்க.
தீர்வுத் தொடையின் மிகப் பெரிய நிறைவெண் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

67. Z என்பது சிக்கலெண் $\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ எனக் கொள்வோம்.

$2Z^2$, $\frac{3}{Z^2}$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டினையும், வீசலையும் காண்க. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்திலே O ஆனது உற்பத்தியையும் A ஆனது சிக்கலெண் $2Z^2$ ஐயும் B ஆனது சிக்கலெண் $\frac{3}{Z^2}$ ஐயும் வகைகுறிக்கின்றன.
O விற்கும் B யிற்கும் ஊடாகச் செல்லும் கோட்டின் மீது Z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளி கிடக்கின்றதா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.
$OACB$ ஓர் இணைகரமாக இருக்குமாறு புள்ளி C தெரிந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது.
C யினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண் $p+iq$ வைத் தெக்காட்டின் வடிவத்தில் துணிக.
$OACB$ யின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

(2004)

68. a) $f(x) = x^2 + bx + c$ எனவும் $g(x) = x^2 + qx + r$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கே $b, c, q, r \in \mathbb{R}$ உம் $c \neq r$ உம் ஆகும்.

α, β என்பன $g(x) = 0$ இன் மூலங்களெனக் கொள்வோம்.

$f(\alpha)\, f(\beta) = (c - r)^2 - (b - q)(cq - br)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $f(x) = 0$ உம் $g(x) = 0$ உம் ஒரு பொதுமூலத்தைக் கொண்டிருப்பின், அப்போது $b - q$, $c - r$, $cq - br$ ஆகியன பெருக்கல் விருத்தியில் இருக்குமென நிறுவுக.

α, γ ஆகியன $f(x) = 0$ இன் மூலங்களெனின் β, γ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$x^2 - \frac{(c + r)(q - b)}{(c - r)} x + \frac{cr(q - b)^2}{(c - r)^2} = 0$$ எனக் காட்டுக.

b) $p(x) = ax^3 + bx + c$ ஆனது $x + 1$, $x - 1$, $x - 2$ ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் முறைய 4, 0, 4 ஆகும் a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, $p(x)$ இன் எல்லா ஏகபரிமாணக் காரணிகளையும் துணிக.

69. a) 7 ஆண் பிள்ளைகளையும் 5 பெண் பிள்ளைகளையும் கொண்ட ஒரு கூட்டத்திலிருந்து 5 பேர்களைக் கொண்ட விவாதக் குழு ஒன்றைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டியுள்ளது.

(i) கூட்டத்தில் எவரேனும் 5 பேர்கள்.

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பெண் பிள்ளையேனும்

(iii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பெண் பிள்ளையும் ஓர் ஆண் பிள்ளையும்.

இருக்கத்தக்கதாக எத்தனை வழிகளில் இக்குழு ஆக்கப்படலாம்?

b) $(1 + 2x + kx^2)^5$ இன் விரியில் x^3 இன் குணகத்தை k யின் சார்பில் காண்க.

இக் குணகம் பூச்சியமெனின், k யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

k யின் இப் பெறுமானத்துக்கு $(1 + 2x + kx^2)^5$ இன் விரியில் உள்ள x^n இன் குணகத்தை a_n குறிக்குமெனின்

(i) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = -121$ எனவும்

(ii) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 122$ எனவும்

காட்டுக.

70. a) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு நேர் நிறைவெண் n இற்கும்

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+.....+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}$$

என நிறுவுக.

$\frac{1}{4}-\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)}<\frac{1}{100}$ ஆக இருக்கும் மிகச் சிறிய நிறைவெண் n ஐக் காண்க.

b) $\frac{1}{2}|x-1|>|x-4|$ ஆக இருக்கும் இன் மெய்ப் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

71. a) Z_1, Z_2 என்பன எவையேனும் இரு சிக்கலெண்களெனக் கொள்வோம். ஆகண் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் $Z_1 + Z_2$ ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியை அமைக்க.

$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை எடுத்துக்காட்டும் வரிப்படத்தை வரைக.

பொதுவாக $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$ ஆக இருப்பது ஏனெனக் கேத்திர கணித முறையில் விளக்குக.

$Z_1 = -12+5i$ ஆகவும் $|Z_2| = 5$ ஆகவும் இருப்பின், $|Z_1 + Z_2|$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

$|Z_1 + Z_2|$ அதன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் கொண்டும்

$\frac{\pi}{2} < \text{Arg}Z_2 < \pi$ ஆகவும் இருப்பின் Z_2 ஐ $p+iq$ வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க.

b) ஆகண் வரிப்படத்தில் A, B, C, D என்னும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன. AB யும் CD யும் செங்குத்தாக இடைவெட்டுமெனின், அப்போது

$\left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_4}\right)$ அறக் கற்பனையானதெனக் காட்டுக.

(2005)

72. a) இருபடிச் சமன்பாடு $px^2 + qx + r = 0$ ஆனது பொருந்தும் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்க; இங்கு p, q, r ஆகியன மெய்யெண்கள்.

a, b, c ஆகியன மெய்யெண்களாகவும் இருபடிச் சமன்பாடு

$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ஆனது பொருந்தும்

மூலங்களைக் கொண்டும் இருக்குமெனின், அப்போது $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ எனக் காட்டுக.

b) கோவை $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

73. a) வெவ்வேறு உயரங்களை உடைய 12 பிள்ளைகளை இரு குழுக்களாகப் பிரிக்க வேண்டியுள்ளது.

(i) ஒரு குழு 7 பிள்ளைகளையும் மற்றைய குழு 5 பிள்ளைகளையும் கொண்டிருப்பின்,

(ii) ஒவ்வொரு குழுவும் 6 பிள்ளைகளைக் கொண்டிருப்பின்,

(iii) ஒவ்வொரு குழுவும் 6 பிள்ளைகளைக் கொண்டிருப்பதோடு மிக உயரமானதும் மிகக் குட்டையானதுமான இரு பிள்ளைகளும் ஒரே குழுவில் இருக்க வேண்டுமெனின்,

மேற்குறித்தவாறு பிரிக்கத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

b) ஒரு நேர் நிறைவெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

கோவை $3(x+y)^n$ இல் x, y ஆகியவற்றுக்கு உகந்த பெறுமானங்களைத் தெரிந்தெடுத்து, 3^{2n+1} ஆனது வடிவம் $7k + 3(2^n)$ இல் எடுத்துரைக்கப்படலாமெனக் காட்டுக; இங்கு k, n ஆகியன நேர் நிறைவெண்கள் இதிலிருந்து நேர் நிறைவெண் n இற்கு $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ஆனது 7 இனால் வகுபடத்தக்கதெனக் காட்டுக.

74. a) p ஆனது ஒரு நிறைவெண்ணெனக் கொள்வோம். கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா நேர் நிறைவெண் n இற்கும் $p^{n+1}+(p+1)^{2n-1}$ ஆனது p^2+p+1 இனால் வகுபடத்தக்கதென நிறுவுக.

b) தொடர் $\dfrac{1}{1+1^2+1^4}+\dfrac{2}{1+2^2+2^4}+\dfrac{3}{1+3^2+3^4}+\ldots\ldots$ இன் r ஆவது உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக.

(i) $U_r=\dfrac{1}{2}\left\{f(r)-\dfrac{1}{1+r+r^2}\right\}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $f(r)$ ஆனது துணியப்பட வேண்டிய r இன் ஒரு சார்பாகும்.

(ii) $f(r+1)$ ஐக் கண்டு $U_r=\dfrac{1}{2}\{f(r)-f(r+1)\}$ எனக் காட்டுக.

(iii) தரப்பட்ட தொடரின் n உறுப்புகள் வரைக்குமான கூட்டுத்தொகை $\dfrac{n(n+1)}{2(1+n+n^2)}$ என நிறுவுக.

75. a) $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\cos\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ எனக் காட்டுக.

$Z_1=-1+i$ எனவும் $Z_2=1+i\sqrt{3}$ எனவும் கொள்வோம்.

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$ இன் மெய்க்கூறையும், கற்பனைக்கூறையும் காண்க.

Z_1, Z_2 ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $r>0$ உம் $0<\theta<\pi$ உம் ஆகும்.

$\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ ஐ உய்த்தறிக.

b) R என்பது ஆகண் வரிப்படத்தில் $0 \leq \operatorname{Im} Z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, |Z-2| \leq 1$ என்னும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் Z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ள பிரதேசமெனக் கொள்வோம். பிரதேசம் R ஐ நிழற்றி, சிக்கலெண் Z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளி பிரதேசம் R மீது மாறும்போது தலைமை வீசல் '$\operatorname{Arg} Z$' மிகப் பெரியதாக இருக்கும் Z ஐக் காண்க.

(2006)

76. a) α, β என்பன சமன்பாடு $x^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகும். α^3, β^3 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து $\alpha^3 + \frac{1}{\beta^3}, \beta^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

b) $f(x)$ என்பது படி 3 இலும் கூடியதும் x இல் உள்ளதுமான ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1), (x-2), (x-3)$ ஆகியவற்றினால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் முறையே a, b, c என்பனவாகும். மீதித் தேற்றத்தைத் திரும்பத் திரும்பப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $f(x)$ ஆனது $(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதியை $\lambda(x-1)(x-2) + \mu(x-1) + \upsilon$ என எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக; இங்கு λ, μ, υ ஆகியன மாறிலிகள்.

λ, μ, υ ஆகியவற்றை a, b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

77. a) ஒரு பரீட்சைக்குத் தோற்றும் பரீட்சார்த்தி ஒருவர் A, B, C என்னும் மூன்று பகுதிகளின் கீழ் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் நான்கு வினாக்கள் வீதம் தரப்பட்டுள்ள பன்னிரண்டு வினாக்களில் ஆறு வினாக்களுக்கு விடை எழுத வேண்டும்.

(i) ஒவ்வொரு பகுதியிலும் முதல் வினா கட்டாயமானது.

(ii) அவர் எந்தவொரு பகுதியிலிருந்தும் மூன்று வினாக்களுக்கு மேற்பட விடை எழுதவியலாது.

(iii) ஒவ்வொரு பகுதியிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு வினாவிற்கேனும் கட்டாயம் விடை எழுத வேண்டும்.

எனின், அப்பரீட்சார்த்தி ஆறு வினாக்களைத் தெரிந்தெடுக்கத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

b) ஒரு நேர் நிறைவெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

$a, b,$ என்பன $a = b + d$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள நிறைவெண் களாகும். $a^n - b^{n-1}(b + nd)$ ஆனது நேர் நிறைவெண் n இற்கு d^2 இனால் வகுபடத்தக்கதெனக் காட்டுக.

U என்பது முதல் உறுப்பு a ஆகவும் பொது வித்தியாசம் d ஆகவும் உள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் n ஆவது உறுப்பெனின்.

$a^n - (a - d)^{n-1} U$ ஆனது d^2 இனால் வகுபடத்தக்கதென நிறுவுக.

$7^{60} - 3^{64}$ ஆனது 16 இனால் வகுபடத்தக்கது என்பதை உய்த்தறிக.

78. a) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேர் நிறைவெண் n இற்கு $\dfrac{n^7}{7} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{34n}{105}$ என்பது ஒரு நிறைவெண்ணென நிறுவுக.

b) $\dfrac{3}{1\cdot 2}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{4}{2\cdot 3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{3\cdot 4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots$

என்னும் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு u_r ஐ எழுதுக.

$u_r = f(r-1) - f(r)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து, $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ ஐக் காண்க.

$\lim_{n \to \infty} S_n$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

79. a) $Z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}, \quad Z_2 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ என்னும் சிக்கலெண்கள் ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளினால்

வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. $\operatorname{Arg} Z_1$, $\operatorname{Arg} Z_2$ ஆகியவற்றைக் காண்க. $OACB$ என்பது ஆகண் வரிப்படத்தில் ஒரு சதுரமெனத் தரப்பட்டிருப்பின், C யினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணின் மட்டையும், வீசலையும் காண்க; இங்கு O ஆனது உற்பத்தியாகும்.

b) (i) $\left| Z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| \leq 2$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $|Z - 3|$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும், மிகப் பெரிய பெறுமானத்தையும் காண்க.

(ii) $\operatorname{Arg}(Z - 1) = \frac{\pi}{6}$ என்னும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $|Z|$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(2007)

80. a) சமன்பாடு $x^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும்; இங்கு $c \neq 0$ ஆகும். α^4, β^4 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1$, $\frac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

b) பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது $(x - \alpha)$ ஆல் வகுபடும்போது பெறப்படும் மீதி $f(\alpha)$ எனக் காட்டுக. பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது $(x - \alpha)(x - \beta)$ ஆல் வகுபடும்போது பெறப்படும் மீதி $Ax + B$ என்னும் வடிவத்தை எடுக்கின்றது; இங்கு $\alpha \neq \beta$. ஒருமைகள் A ஐயும் B ஐயும் $\alpha, \beta, f(\alpha), f(\beta)$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. இதிலிருந்து, $x^3 + kx^2 + k$ என்பது $(x - 1)(x + 2)$ ஆல் வகுபடும்போது பெறப்படும் மீதியானது மாறா (ஒருமை) உறுப்பைக் கொண்டிருக்காவிடின் ஒருமை k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

81. a) 7 பெண் பிள்ளைகளிலும் 8 ஆண் பிள்ளைகளிலும் இருந்து 5 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு விவாதக் குழுவைத் தெரிந்தெடுக்க வேண்டும்.

(i) குழுக்கள் இரண்டு பெண் பிள்ளைகளையும் மூன்று ஆண் பிள்ளைகளையும் கட்டாயமாகக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

(ii) குழுக்கள் உயர்ந்தபட்சம் மூன்று ஆண் பிள்ளைகளையேனும் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

(iii) ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண் பிள்ளையையும் ஒரு குறிப்பிட்ட பெண் பிள்ளையையும் ஒரே குழுவிற்குத் தெரிந்தெடுக்க முடியாது எனின். தெரிந்தெடுக்கப்படக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

b) $(1+x)^n$ இன் விரியிலுள்ள மூன்று அடுத்துவரும் குணகங்கள் 45, 120, 210 ஆகும்; இங்கு n ஒரு நேர் நிறைவெண் ஆகும். n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

c) $(1+x)^n$ இன் விரியிலுள்ள மூன்று அடுத்துவரும் குணகங்கள் பெருக்கல் விருத்தியில் இருக்க இயலுமா? இங்கு n ஒரு நேர் நிறைவெண் உம்முடைய விடையை நியாயப்படுத்துக.

82. a) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டினைப் பயன்படுத்தி நேர் நிறைவெண் n இற்கு $5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$ என்பது 6 ஆல் வகுபடுமென நிறுவுக.

b) (i) $\sum_{r=1}^{n} {}^nC_r$ ஐக் கண்டு நேர் நிறைவெண் n இற்கு $\frac{2^n}{n} > \frac{(n-1)}{2}$ ஐ உய்த்தறிக.

(ii) ஒரு முடிவில் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r என்பது

$$\frac{2^{r-1} r}{(r+1)(r+2)}$$ ஆல் தரப்படுகிறது.

$U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r = S_n$ ஐக் காண்க. R இல் $\lim_{n \to \infty} S_n$ இருக்குமா? உம்முடைய விடையை நியாயப்படுத்துக.

83. $Z^3 - 1$ ஐக் காரணிப்படுத்துவதால் சமன்பாடு $Z^3 - 1 = 0$ ஐத் தீர்க்க. மேலுள்ள சமன்பாட்டின் சிக்கல் மூலங்களில் ஒன்று ω எனின், மற்றையது ω^2 எனக் காட்டுக. $r = 1, 2, 3$ இற்கு $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1+\omega^r}\right) = \dfrac{1}{2}$ எனக் காட்டி இம்முடிவைக் கேத்திரகணித முறையில் விளக்குக. மூன்று சிக்கலெண்கள் Z_1, Z_2, Z_3 என்பன

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_1 Z_2 - Z_2 Z_3 - Z_3 Z_1 = 0$$

என்னும் தொடர்பைத் திருப்தி செய்கின்றன. Z_1 ஐ

$Z_1 = -\omega Z_2 - \omega^2 Z_3$ ஆகவோ, $Z_1 = -\omega^2 Z_2 - \omega Z_3$ ஆகவோ

எடுத்துரைக்க முடியுமெனக் காட்டுக. மூன்று சிக்கலெண்கள் Z_1, Z_2, Z_3 என்பன ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் உச்சிகளை வகைகுறிக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

(2008)

விடைகள்

பயிற்சி 6

1. 3 **2.** 4, 7, 10 **5.** $U_1 = -2,\ m = 10$

10. $-1 < x < 1 - \sqrt{2}$ அல்லது $1 + \sqrt{2} < x < 3$

14. $\left\{ \dfrac{a^n - x^n}{a - x} - \dfrac{a^n x - x^{2n-1}}{a - x} \right\} \Big/ a^{n-1}(1 - x)1$

16. (d) $\dfrac{1}{6n}\left[14n^2 + 15n + 1\right]$ (e) 1191700 **19.** $\dfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)$

21. (a) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+2)}$ 70, $\dfrac{1}{4}$, 21

25. $\dfrac{n}{4n+1},\ \dfrac{n}{2n+1},\ \dfrac{n(6n+5)}{(4n+1)(2n+1)}$

27. (a) 11 (b) $\dfrac{r}{1-r},\ \dfrac{r}{(1-r)^2},\ \dfrac{r\left[n - (n+1)r + r^{n+1}\right]}{(1-r)^2}$ **35.** 3 153 150

பயிற்சி 7 (a)

2. $n = 2$ **3.** $n = 7$ **4.** $m = 6,\ n = 2$ **5.** $n = 6$

6. 12 **7.** 325 **8.** 48 **9.** 336

10. 720, 360, 360, 120, 24 **11.** 1080, 720, 360 **12.** 243

13. $4! \times 5!$ **14.** 2880 **15.** $(n-1)!\,(n-2)$ **16.** 8000

17. 144, 132 **18.** 720 **19.** 420 **20.** 720, 144, 576

21. 4536 **23.** 12 **24.** 60 **26.** 658627260, $11 \times 11!$

பயிற்சி 7 (b)

1. 8, 13, 7, 4 **2.** 1050 **3.** 1023 **4.** 495, 252, 369

5. 286, 165, 110. 80. 276   7. $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ 8. 84. 95284

8. $\frac{1}{2}m(m+3)$ 9. $\frac{1}{2}m(m+3)$ 10. 20160, 10800   11. 1 596 000

12. 43200   13. 144   14. 12, 42   16. 10   17. 399   18. 160

19. 19   20. 1638. 39   21. 2111   22. $10!.\ 3!\times 4!\times 4!\times 2!$ 6, 3600

23. 15, $\frac{20\times 9!}{3!\times 2!}$, 1080, 975   24. $\frac{16!}{3!\,6!\,2!}$, 43200   25. 27, 720

26. 1680   27. 280   28. 2100   29. 369600

30. $\frac{(120)!}{6!(20)^6}$ 31. 105   32. 70, 35   33. $2^{n-1}-1$

34. 3 153 150   35. 20, 120   38. 30, 15, 247   39. 4050

41. $\frac{n(n-3)}{2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $n(n-4)$, n 42. 5040, 288, 144, 24, 35

43. (i) ${}^6C_2\times{}^9C_3$ (ii) ${}^5C_1\times{}^9C_3$ (iii) $({}^6C_2-1)\times{}^9C_3$

(iv) ${}^6C_2\times{}^9C_3-({}^5C_1\times{}^8C_2)$

44. (a) (i) 144   (ii) 72   (b) 15, 60, 1335

பயிற்சி 8

7. $70x^3y^4$ 8. $30618x^{17}y^5$ 9. $366080\ \frac{b^5}{a^{14}}$

10. $\frac{(n+3)!}{r!(n+3-r)!}\ \frac{x^r}{2^{n+3-r}\cdot 3^r}$ 11. $\frac{63}{16}x^5y^4$, $-\frac{63}{8}x^4y^5$ 12. 112

13. $\frac{105}{32}x^{10}$ 14. $3360y^4$ 16. $n=6,\ a=3,\ b=2$ 17. $-\frac{405}{16}$, $\frac{8505}{32}$

20. $\frac{(6r)!}{(2r)!\,(4r)!}$ 21. $n=2,\ 3$ 22. $a=0, 1$ 23. - 360   24. $-\frac{1}{8}$, $8\frac{9}{16}$

26. 1.149   27. (a) $2(64a^3+2160a^2+4860a+729)$ (b) $2+8x^2-8x^4$

33. (a) $T_2=T_3=\frac{1}{6}$ (b) $T_3=5\frac{1}{4}$ (d) T_7 34. (i) T_{38}, T_{39} (ii) T_{11}

பயிற்சி 9

1. (i) $10+3i$ (ii) $3+7i$ (iii) $-15+23i$ (iv) $18+16i$

(v) $16+30i$ (vi) $\frac{7}{13}+\frac{4}{13}i$

2. (i) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}$ (ii) $\cos\theta \pm i\sin\theta$ (iii) $\pm i$ (iv) $1 \pm i$

3. (i) $(x+1+2i)(x+1-2i)$ (ii) $(x+2+i)(x+2-i)$

(iii) $(2x-1-i)(2x-1+i)$ (iv) $(x+a+ib)(x+a-ib)$

4. (i) $\frac{i}{x-1+3i}-\frac{i}{x-1-3i}$ (ii) $\frac{i}{2(x+i)}-\frac{i}{2(x-i)}$

5. $p=4,\ q=13$

6. (i) $-4,\ 5$ (ii) $-6,\ 25$ (iii) $0,\ 1$ (iv) $2,\ 2$

7. (i) $\pm(5-2i)$ (ii) $\pm(1+i)$ (iii) $\pm(1-i)$

8. $(1+2i),\ (-1+3i),\ (-1-3i)$ 9. $x^4-8x^3+32x^2-80x+100=0$

10. $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}(3\pm 2i)$ 11. $-C(1\pm i)$ 12. $1,\ 1,\ \omega,\ \omega^2$

14. (f) (i) -2ω (ii) $\frac{1-\omega}{1+\omega}$ (iii) $\frac{1}{\omega}$ (m ஒற்றை)

(i) 0 (ii) 1 (iii) $1-\omega$ (m இரட்டை)

16. (i) $1,\ \frac{\pi}{2}$ (ii) $1,\ \pi$ (iii) $1,\ -\frac{\pi}{2}$.

19. (a) (i) 2 (ii) $\frac{5\pi}{6}$ (iii) $-\frac{\pi}{3}$ (b) $-8-i8\sqrt{3}$, $\frac{1}{8}(1-i\sqrt{3})$, $2(\sqrt{3}-i)$

20. $-1+2i,\ \frac{11}{5}+\frac{2}{5}i,\ \sqrt{5},\ \frac{6}{5}+\frac{12}{5}i$ 21. $k=\frac{7}{3},\ p=-3,\ q=-4$

22. $p=4,\ q=-2,\ -\frac{\pi}{4}$ 23. $\sqrt{2},\ 5-2+3i$

24. (b) $2\sqrt{10},\ 10,\ \frac{2\sqrt{10}}{10},\ \frac{10}{9}+i\frac{10}{27}$ 25. $\left(-\frac{5}{4},\ 0\right)$ ஆரை $\frac{\sqrt{7}}{4}$

29. (a) $-\frac{2}{5}$ (b) $\frac{4}{5}+i\frac{3}{5}$ (c) $Z=2i$

389

சாயி கல்வி வெளியீடுகள்

க.பொ.த. உயர் தரம்

1.	இணைந்த கணிதம்	–	அட்சரகணிதம் பகுதி – I
2.	இணைந்த கணிதம்	–	அட்சர கணிதம் பகுதி – II
3.	இணைந்த கணிதம்	–	நுண்கணிதம்
4.	இணைந்த கணிதம்	–	திரிகோண கணிதம்
5.	இணைந்த கணிதம்	–	ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதம்
6.	பிரயோக கணிதம்	–	நிலையியல்
7.	பிரயோக கணிதம்	–	இயக்கவியல் பயிற்சிகள் – I
8.	பிரயோக கணிதம்	–	இயக்கவியல் பயிற்சிகள் – II
9.	பிரயோக கணிதம்	–	நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
10.	சேதன இரசாயனம்	–	(பரீட்சை வழிகாட்டி)
11.	நவீன பௌதிகம்	–	ஒளியியல்

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4 - B, Pamankada Road,
Colombo - 06. T. P : 2366707