[illegible]

# மன்பாடுகள்

பியாகியோ

சக்தி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

# வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

## பிரயோகங்கள் என்பன பற்றிய ஆரம்ப விரிநூல்

H. T. H. பியாகியோ, M.A., D.Sc.
நொற்றிங்காம் பல்கலைக்கழகத்து முன்னைநாட் கணிதப் பேராசிரியர்
கேம்பிரிட்ஜ் சென்ற் ஜோன்ஸ் கல்லூரி முன்னைய மூதறிஞர்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்துக்காக
இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்திற் பதிப்பிக்கப்பட்டது

முதற் பதிப்பு 1975

பதிப்புரிமை பெற்றது

**AN ELEMENTARY TREATISE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS**

*by*

**H. T. H. Piaggio, M.A., D.Sc.**

Translated and published in Ceylon

*by*

THE EDUCATIONAL PUBLICATIONS DEPARTMENT

*by arrangement with*

G. BELL AND SONS, LTD., LONDON.

லண்டன் வரையறுத்த பெல் மக்கள் இசைவுடன் கல்வி வெளியீட்டுத்
திணைக்களத்தால் வெளியிடப்பட்டது

# அறிமுகம்

இது H. T. H. பியாஜியோ என்பவர் எழுதிய **"Differential Equations"** என்னும் ஆங்கில நூலின் மொழிபெயர்ப்பாகும்.

விஞ்ஞானமாணிப் பொதுப் பட்டத்துக்குத் தோற்றும் மாணவர்க்கு வழக்கமாகத் தேவைப்படும் பாடத்திட்டத்தை இது அடக்குகின்றது. அத்துடன் முதுவிஞ்ஞானப் பட்டத்துக்குத் தேவையான சில பகுதிகளையுங் கொண்டுள்ளதெனலாம். இத்துறையில் முன்னறிவில்லாதவர்களும் இலகுவில் விளங்கிக் கொள்ளும் வகையிலே, இவ்வியலின் மையக்கருத்துக்களை நன்கு கையாள்கிறது, இந்நூல்.

ஒவ்வோர் அத்தியாய முடிவிலும் தரப்பட்டுள்ள பலவினப் பயிற்சிகள் ஓரளவு கடின [illegible] வை. எனினும், அவற்றை மாணவன் எவ்வித இடருமின்றித் [illegible] தற்கு வேண்டிய ஆதாரங்கள் தரப்பட்டுள. செய்த உதாரணங்களு [illegible] செய்யப்படாத பயிற்சிகளும் பல தரப்பட்டுள்ளன. பயிற்சிகளுக்குரிய விடைகள் நூலின் இறுதியிலே தரப்பட்டுள்ளன.

இந்நூலை மொழிபெயர்த்து உதவிய சி. நடராசர் எம். ஏ., பி. எஸ்சி அவர்களுக்கு இத்திணைக்களம் மிகவும் கடமைப்பட்டுள்ளது.

**டபிள்யூ. டி. சி. மஹதந்தில**
ஆணையாளர்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
58, சேர், எணெஸ்ற் டி சில்வா மாவத்தை,
கொழும்பு-3.

# පෙරවදන

" *Differential Equations by H. T. H. Piaggio* " නම් ඉංග්‍රීසි මුල් පොතේ දෙමළ පරිවර්තනය යි මේ.

ඕනෑ ම විශ්ව විද්‍යාලයයෙක සාමාන්‍ය උපාධිය සඳහා අවශ්‍ය අවකල සමීකරණ පිළිබඳ පාඩම් මාලාව මේ පොතේ ඇතුළත් ය. ඇත්ත වශයෙන් ම එම්. එස්සී. උපාධියට අවශ්‍ය ඇතැම් කරුණුත් මේ පොතට අඩංගු වී ඇති බව පෙනෙයි. විෂයය පිළිබඳ ව කලින් දැනුමක් නැති අයට වුව ද ගැළැපෙන පරිදි හැකි තාක් සරල ලෙස විෂයයේ ප්‍රධාන කොටස ගැන විස්තරයක් මේ පොතේ ඇත.

ඒ ඒ පරිච්ඡේද අග දී ඇති ප්‍රකීර්ණක අභ්‍යාස තරමක් අමාරු වුව ද සිසුනට ඒවා විසඳනු හැකි වන පරිදි ඒවාට ඉගි සපයා ඇත. නිදසුන් ද අභ්‍යාස ද සංඛ්‍යාව ඉතා විශාලය; අභ්‍යාස සඳහා උත්තර, පොතේ අග දී තිබෙයි.

කෙටි කාලයෙක දී මේ පොත පරිවර්තනය කර දීමෙන් මහත් සේ සහාය වූ කථිකාචාර්ය ඇස්. නඩරාසා. ඇම්. ඒ., බී. එස්සි; මහතාට දෙපාර්තමේන්තුවේ කෘතඥතාව හිමි වෙයි.

ඩබ්. ඩී. සී. මහතන්තිල
කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව.

කොළඹ 3.
ශ්‍රීමත් අර්නස්ට් ද සිල්වා මාවතේ, අංක 58හි
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ දී ය.

# முகவுரை

“வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கையே நவீன கணிதத்தின் மிக முக்கிய கிளை” என்று கூறியுள்ளார், சோஃபஸ் லை. பல்வேறு இயல்களின் வளர்ச்சி நெறிகளுக்கும், நடுநாயகமாக விளங்குவது இப்பாடம் எனலாம். தூய பகுப்பு நெறியைப் பின்பற்றுவோமாயின், முடிவில் தொடர்கள், இருப்புத் தேற்றங்கள், சார்புக் கொள்கைகள் என்பவற்றைச் சென்றடைவோம். மற்றுமொரு நெறியோவெனில், வளையிகள், பரப்புகள் பற்றிய வகையீட்டுக் கேத்திரகணிதத்துக்கு நம்மை இட்டுச் செல்லும். இவ்விரு நெறிகளுக்கும் இடையே அமைந்து கிடப்பதே, லை என்பார் முதலிலே கண்டறிந்த நெறி. அது, உருமாற்றத் தொடர்ச்சிக் கூட்டங்களுக்கும், அவற்றின் கேத்திரகணித விளக்கங்களுக்கும் நம்மை உய்த்துவிடும். மற்றொரு திசையிற் கிளைத்துச் செல்லும் நெறி, எல்லாவிதமான பொறியியல்—மின்னியல் அதிர்வுகள் பற்றியும், பரிவென்னும் முக்கிய தோற்றப்பாடு பற்றியுமான படிப்புக்கு நம்மைச் செலுத்தும். வெப்பக் கடத்தல், மின் அலை ஊடுகடத்தல் பற்றிய படிப்புக்கும், மற்றும் பல பௌதிகக் கிளைகளுக்குமெல்லாம் பிள்ளையார் சுழி போல அமைவன சில பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளே. திணிவுத் தாக்க விதியையும் பிறவற்றையுமிட்டுப் பேசும் பௌதிக இரசாயனத்தின் பெரும் பகுதி சில வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைப் பற்றியனவேயாகும்.

இக்கணிதம் பற்றிய முன்னறிவு இலார்க்கும், இயன்றளவு எளிய முறையில் விளக்கந் தருவதோடு, எவ்வெத் துறைகளில் இது முன்னேற்றமடையக் கூடியது என்பதையும் எடுத்துக் காட்டுவதே இந்நூலின் முக்கிய நோக்காகும்.

இந்நூலின் சில பகுதிகளும், பயிற்சிகளும் இலகுவானவை. இந்நூலைப் படிப்போர் அறிந்திருக்க வேண்டியன வகையீட்டு, தொகையீட்டு நுண் கணித மூலகங்களும், சிறிது ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதமுமே. பல்வேறு அதிகாரங்களுக்கும் முடிவிலே தரப்பட்ட பலவினப் பயிற்சிகள் சற்றுக் கடினமானவை. சிறு முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தேற்றங்களையும் அவற்றின் தீர்வுக்கான குறிப்புகளையும் இந்நூல் கொண்டுள்ளது. அவை கேத்திரகணித, பௌதிகப் பிரயோகங்களையுங் கொண்டுள்ளன. எனினும், இங்கு பௌதிக அறிவு முற்றாகத் தேவைப்படாதவாறு கேள்விகளை ஆக்குவதில் முக்கிய கவனஞ் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. உதாரணமாக, ஒரு கேள்வியிலே, சில மாறிலிகள், மாறிகள் ஆகியவற்றின் தொடர்பிற் குறித்த ஒரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வொன்று வினவப்பட்டிருக்கின்றது என்போம். இதனைத் தூயகணிதத்தின் ஓர் அம்சமாகக் கருதலாம்; ஆனால் இது மிக வழக்கிலுள்ள வெப்பப் பரிசோதனையொன்றைச் சுட்டுவதோடு சம்பந்தப்பட்ட மாறிலிகள், மாறிகளின் பௌதி

கக் கருத்துக்களையுந் தரும் என்ற உடனடியான ஒரு விளக்கத்தையுங் கொள்ளும். கடைசியாக நூலின் முடிவில் பல்கலைக்கழகப் பரீட்சை வினாத் தாள்களிலிருந்து மிகுதியாக எடுக்கப்பட்ட மிகக் கடினமான 115 பயிற்சிகள் தரப்பட்டுள்ளன. (இவற்றை என் நூலிற் பயன்படுத்துவதற்கு இயைந்து உதவிய லண்டன், ஷெவீல்ட், வேல்ஸ் சர்வகலாசாலைகளுக்கும் கேம்பிறிட்ஜ் பல்கலைக்கழக அச்சகத்தினர்க்கும் நன்றியுடையேன்.) இந்நூல், லண்டன் கௌரவ **B.Sc.** இற்கும், கேம்பிறிட்ஜ் கணிதப் பரீட்சை, பகுதி **II**, அட்டவணை **A** யிற்கும் வேண்டிய வகையீட்டுச் சமன்பாட்டு அதிகாரங்களையும் லண்டன் **M.Sc.** அல்லது கணிதப் பரீட்சை, அட்டவணை **B** யிற்கு வேண்டிய சில பயிற்சிகளையுங் கொண்டுள்ளது. செய்த, செய்யப்படாத பயிற்சிகளின் தொகை அதிகமாக உள்ளது. செய்யப்படாத பயிற்சிகளுக்குரிய விடைகள் நூலின் முடிவிலே தரப்பட்டுள்ளன. விசேட அம்சங்கள் சில இங்கு குறிப்பிடற்பாலன. (கலாநிதி புரோடெற்ஸ்கி என்பவரால் கணிதச் சங்க முன்னிலையிற் சமர்ப்பிக்கப்பட்ட பின்னர் எனக்கு அன்பளிப்பாகக் கிடைத்த அவரது வெளியீட்டுக் கையெழுத்துப் பிரதியையும், பேராசிரியர் தேக்கியோ வாடா என்பவரின் ஏறக்குறைய அதேயனைய வெளியீட்டையுந் தழுவிய) அத்தியாயம் 1 இலுள்ள வரைபு முறை ஏற்கெனவே எந்த நூலிலும் தரப்படவில்லை. என் தொகையிடல் பற்றிய அதிகாரம் வழக்கத்தை விட முற்றாக விடயத்தை எடுத்தாளுகின்றது. இந்நூல் றங்கே, பிக்காட் என்பவர்களின் முறைகளையே பிரதானமாகப் பின்பற்றுகின்றது. எனினும் இந்நூலாசிரியராலான புதிய முறையின் விளக்கமொன்றையும் இது தருகின்றது.

மாறிலிக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய அதிகாரம் "முடிவில் மாறிலிகளைக்" கொண்ட திருப்தியற்ற நிறுவல்களை விலக்கி அமைந்துள்ளது. குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் காண்பதிற் பயன்படும் செயலியை வழக்கமாகக் காட்டப்படுவதை விட அதிக நியாயம் காட்டி நிறுவுதல் அவசியமாகும். இங்கு கையாளப்படும் முறையானது, முதலிலே செயலியை ஆதாரமாகப் பயன்படுத்திப் பேற்றைப் பெற்றுக் கொண்டு, பின்னர் நேரடியான வகையிடலால் அப்பேற்றைச் சரிபிழை காணுதலேயாம்.

இவ்வத்தியாயத்திற்கு அடுத்ததாக (ஊறமான் என்பாரின் "பகுதி வகையிடல்" நூலைத் தழுவிய) எளிய பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய அத்தியாயம் உள்ளது. இதிலே தந்துள்ள முறைகள் யாவும் முந்திய அதிகாரத்தின் விரியே என்பது கண்கூடு. இம்முறைகள் பௌதிக முக்கியத்துவம் மிக வாய்ந்தவை. ஆதலின் மிகக் கடினமான பாடங்களை முக்கியமாக எடுத்தாளும் நூலின் பின் அத்தியாயங்கள் வரை இவற்றைத் தள்ளி வைக்க வேண்டியிருப்பது துரதிட்டமே.

லகிராஞ்சியின் எகபரிமாணப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய பிரிவுகளில் **M. J. M.** ஹில் என்பாரின் அண்மைக் காலத்து வெளியீட்டிலிருந்து இரண்டு உதாரணங்கள் அன்னாரின் முறைகளை எடுத்துக் காட்டுவதற்காகச் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

தொடர்கள் பற்றிய தீர்வை எடுத்தாளுகையில், ஃபுறோபீனியசின் முறைக்கு முதலிடம் அளிக்கப்பட்டுள்ளது. உண்மை உதாரணங்களைச் செய்வதிலே இம்முறை எவ்வாறு பயன்படுகின்றதென ஓர் அதிகாரம் கூறுகின்றது. அடுத்து, கையாளப்பட்ட எடுகோள்கள், சம்பந்தப்பட்ட கடினமான ஒருங்கற் பிரசினங்கள் ஆகியவற்றை மெய்ப்பிக்கும் அதிகாரம் உள்ளது. சிக்கல் எங்குள்ளது, ஓரளவு பின்னலான நிறுவல்களின் பொதுக் கருத்து என்ன என்பவற்றை மிகத் தெளிவாகவும் வரையறையாகவும் கூற இவ்வதிகாரத்தில் எத்தனிக்கப்பட்டுள்ளது. மாணாக்கருட் பலர், நீண்ட "எப்சைலன்–நிறுவலை" முதன் முதலாகப் பயிலுமிடத்து அதிகப்படி விபரங்களைக் கண்டு மிரண்டு போவதால், பொதுப் போக்குப் பற்றிய தெளிவான கருத்தைப் பெறுவதில்லை. இது அனுபவ உண்மை. இவ்வத்தியாயத்திற்கு பெரும் உதவி அளித்த கேம்பிறிட்ஜ், ட்ரினிற்றிக் கல்லூரியைச் சேர்ந்த திரு. பொலாட், **B.A.** இற்கு என் நன்றி. மற்றப் பகுதிகளை விட இந்நூலின் மிக உயர்தரப் பகுதியாக இது இருப்பதோடு, முடிவில் தொடர் பற்றிய அறிவு சிறிதும் இதற்குத் தேவைப்படுகிறது. எனினும் பயன்படுத்திய இத்தகைய தேற்றத்திற்கும் நியம நூல்களில் உசாச்சுட்டுக்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

தொடர்ந்து ஊக்கமளித்தும் வாத விவாதஞ் செய்தும் எனக்கு உதவிய பேராசிரியர் **W. P.** மில்ன் அவர்களுக்கும், பயிற்சிகளைச் சரிபார்த்தும், வரிப்படங்கள் வரைந்தும் உதவிய எனது கூட்டு வேலையாளர்களாகிய திரு. ரி. மாஷல், **M.A., B.Sc.,** செல்வி **H. M.** பிறவுணிங் **M.Sc.** ஆகியோர்க்கும், நான் கடமைப்பாடுடையேன்.

இந்நூலைப் படிப்போரிடமிருந்து வருந் திருத்தங்களும் ஆலோசனைகளும் நன்றியுடன் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

**H. T- H.** பியாகியோ

பல்கலைக்கழகக் கல்லூரி, நொற்றிங்காம்,
பெப்ரவரி **1920.**

# திருத்தி விரித்த பதிப்பு

## முகவுரை

இப்பதிப்பில் ஒரு புதிய அதிகாரம் உண்டு. துணைநிறைவுத் தன்மையுள்ள இவ்வதிகாரத்தில், ஒன்றித்தீர்வுக் கொள்கையையிட்ட வில்லங்கங்கள் பற்றியும், வரைப்புகளாக எண்ணப்படும் பிரித்துக்காட்டி ஒழுக்குகளையிட்ட அதிகம் அறியப்படாத கருத்துக்கள் சில பற்றியும் ; றிக்கற்றியின் சமன்பாடு பற்றியும் ; மொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்குரிய இரு மேலதிக முறைகள் பற்றியும் (மேயரின் பொதுமுறையும், ஏகவினைச் சமன்பாடுகளுக்குத் தொகையிட்டுக் காரணியின் பயன்பாடும்) ; இரண்டாம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தொடரிலான தீர்வுகள் பற்றியும் (ஃபுஷ்ஷின் தேற்றம், சாதாரண ஒன்றிப் புள்ளிகள், ஃபுஷ் வகைச் சமன்பாடுகள், சிறப்பியல்புச் சுட்டி, செவ்வன்–உபசெவ்வன் தொகையீடுகள்– ; கணிதப் பௌதிகச் சமன்பாடுகள் சில பற்றியும் (குறிப்பாக அதிரும் இழைச் சமன்பாடும், முப்பரிமாண அலைச்சமன்பாடும்) ; அண்ணளவு எண்முறைத் தீர்வு பற்றியும் (அடமின் முறையும் றீம்சின் அண்மைய ஆராய்ச்சிகள் சிலவும்) கூறியுள்ளோம். நூலின் ஏனைய பாகங்களைத் திருத்தி, பயிற்சிகளை அதிகரித்துள்ளோம். அவசியமான இடங்களில், உசாச்சுட்டுகளை மாற்றியுள்ளோம்.

திரு. H. B. மிச்செல், முன்னைநாட் பேராசிரியர், கொலம்பியாப் பல்கலைக் கழகம், நியூயோர்க், பேராசிரியர் E. H. நெவில், றீடிங் பல்கலைக்கழகம், என் சகபாடி திரு. F. அண்டவூட் முதலாம் நண்பர்கள் அரிய உதவியும் ஆலோசனையும் நல்கினர். அவர்களுக்கு நன்றியுடையேன்.

H. T. H. பியாகியோ.

மே 1928.

# திருத்திய பதிப்பு 1952

## முகவுரை

லாகிராஞ்சியின் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் கையாட்சியில், குறிப்பாக பிரிவு 124, 125 என்பவற்றில், சில மாற்றங்கள் செய்யப்பட்டுள்ளன. நூலின் இறுதியில், சுட்டிக்குச் சற்று முன்பாக, எல்லைத் தீர்வுகள் பற்றிய குறிப்பொன்று சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. வேறு பல சிறு மாற்றங்கள் அல்லது திருத்தங்கள் உள்ளன.

H. T. H. P

மே, 1952.

# உள்ளடக்கம்

## அத்தியாயம் I

### முன்னுரையும் வரைவிலக்கணங்களும். நீக்கல் வரைபு வகைக்குறிப்பு

## அத்தியாயம் II

### முதல்வரிசையிலும் முதற்படியிலுமுள்ள சமன்பாடுகள்

## அத்தியாயம் III

### மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்

## அத்தியாயம் IV

## எளிய பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

## அத்தியாயம் V

## முதல்வரிசையாகி முதற்படியல்லாத சமன்பாடுகள்

# அத்தியாயம் VI

## தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள்

# அத்தியாயம் VII

## இரண்டாம் வரிசையிலும் உயர்வரிசையிலுமுள்ள சமன்பாடுகளுக்குப் பலவின முறைகள்

# அத்தியாயம் VIII

## வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளுக்கு எண்ணண்ணளவாக்கம்

## அத்தியாயம் IX

## தொடர்முறைத் தீர்வு. ஃபுரோபீனியசின் முறை

## அத்தியாயம் X

## பிக்காட், கோசி, ஃபுரோபீனியஸ் ஆகியோரின் உண்மைத் தேற்றங்கள்

## அத்தியாயம் XI

## மூன்று மாறிகள் கொண்ட சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளும் ஒத்த வளையிகளும் பரப்புக்களும்

# அத்தியாயம் XII

## முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள். குறிப்பிட்ட முறைகள்

# அத்தியாயம் XIII

## முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பொது முறைகள்

## அத்தியாயம் XIV

## இரண்டாம் வரிசையிலும் அதனிலும் உயர்ந்த வரிசையிலுமுள்ள பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

## அத்தியாயம் XV

## பலவின முறைகள்

## பின்னிணைப்பு A

## பின்னிணைப்பு B

## பின்னிணைப்பு C

## பின்னிணைப்பு D

## வரலாற்று முன்னுரை

வகையீட்டு, தொகையீட்டு நுண்கணிதம் கண்டு பிடிக்கப்பட்டதும், அதன் இயற்கைப் பின் தொடர்ச்சியாக, வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கல்வி ஆரம்பித்தது. எனினும் 11 வருடங்களின் பின்பே 1665 இல் நியூற்றன் என்பார், வகையீட்டு நுண்கணிதத்தில் பாயல் வடிவத்தைக் கண்டுபிடித்தார். பின்னர் 11 வருடங்களுக்குப் பின்பே, அதாவது, 1676 இல் முடிவில் தொடரொன்றைப் பயன்படுத்தி, ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு கண்டார். எனினும், லைபினிற்ஸ் என்பாரின் ஆராய்ச்சியிலே வகையீட்டுச் சமன்பாடு முதன் முதலாக 1693 இற் பயன்படுத்தப்படும் வரை இம்முடிபுகள் பகிரங்கமாக்கப்படவில்லை (லைபினிற்சின் வகையீட்டு நுண்கணித விளக்கம் 1684 இல் வெளியாக்கப்பட்டது).

இது அடுத்த சில ஆண்டுகளில் விரைவாக முன்னேற்றம் அடைந்தது. 1694–97 இல் பேணூலி என்பவர் "மாறிகளை வேறுக்கல்" முறையை விளக்கி, முதல் வரிசையிலுள்ள ஏகவின வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை, மாறிகள் வேறுக்கத்தகு சமன்பாட்டிற்கு எவ்வாறு ஒடுக்கலாம் எனக் காட்டினார். நிமிர்கோணக் கடவைப் பிரசினங்களுக்கும் இம்முறைகளைப் பயன்படுத்தினார். அவரும் ("பேணூலியின் சமன்பாடு" என்னும் பெயரீட்டுக்குக் காரணமாகிய) அவரின் சகோதரர் யேக்கப் என்பாரும் தீர்க்கக்கூடிய வடிவங்களுக்குப் பெருந்தொகையான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை ஒடுக்கினர். தொகையீட்டுக் காரணிகளை லைபினிற்சே வழங்கினார் எனக் கொண்டபோதிலும் ஒயிலர் (1734), ஃபொன்ரேன், கிளாரோ என்போரால், தனித் தனியாக ஒரு வேளை அவை கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கலாம். லைபிறஸ் (1694), புறூக் தெயிலர் (1715) என்போராற் கவனிக்கப்பட்ட தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள், கிளேரு (1734) என்னும் பெயரோடு பொதுவாக அழைக்கப்படுகின்றன. லகிராஞ்சியால், 1774 இற் கேத்திர கணிதக் கருத்துக்கள் தரப்பட்டன. ஆனால், தற்கால வடிவிலுள்ள கொள்கை, பல வருடங்களுக்குப் பிறகு கெயிலி (1872), M. G. M. ஹில் (1885) என்போராலே தரப்பட்டதாகும்.

மாறாக் குணகங்களைக் கொண்ட, இரண்டாம் அல்லது மேல் வரிசைகளிலுள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முதலாவது முறைகள் ஒயிலராலே தரப்பட்டவை. துணைச் சமன்பாடுகள் சம மூலகங்களைக் கொள்ளும் வகை பற்றி தலம்பெயர் எடுத்தாண்டுள்ளார். குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் காணும் குறியீட்டு முறைகளுட் சில, ஏறத்தாழ நூறாண்டுகளுக்குப் பின்னரே லொபாற்றோ (1835), பூல் (1857) என்போரால் தரப்பட்டுள்ளன.

முதல் முதலாகக் கவனித்த வகையீட்டுச் சமன்பாடானது, ஓர் அதிரும் இழையின் வடிவத்தைத் தந்தது. இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள இச்சமன்பாடு, ஒயிலர், தலம்பெயர் என்பவர்களால் 1747 இல் ஆராயப்பட்டது.

இச் சமன்பாட்டின் தீர்வை லகிராஞ்சி பூர்த்தி செய்ததோடு, **1772–1785** வரை பல கட்டுரைகளிலும் முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை எடுத்தாண்டுமுள்ளார். மேலும், அவர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தொகையீட்டைத் தந்தும், சமன்பாடு ஏகபரிமாணமாகாவிடத்துச் சாத்தியமாகும் பல்வேறு வகைத் தொகையீடுகளை வகுத்தும் உள்ளார்.

இக்கொள்கைகள் இன்னும் முற்றுப் பெறாத நிலையிலேயே இருக்கின்றன; அண்மையில் கிறிஸ்ரல் **(1897)** ஹில் **(1917)** என்போரும் இவை பற்றிய கருத்துக்களைத் தந்துதவினர். முதலாம் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்குரிய வேறு முறைகள் சாப்பிற் **(1784)** யக்கோபி **(1836)** என்போரால் தரப்பட்டன. உயர் வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்குரிய மிக முக்கியமான ஆராய்வுகள் லப்புளாஸ் **(1773)**, மொஞ் **(1784)** அம்பியர் **(1814)**, டாபூ **(1870)** என்பவர்களாற் செய்யப்பட்டன.

ஏறக்குறைய **1800** இல், வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுப் பாடமானது, ஒரு முடிவுள்ள தொகையான தெரிந்த சார்புகளை (அல்லது அவற்றின் தொகையீடுகளை) கொண்ட வடிவத்தில் தன் தீர்வுள்ளதாய் தொடக்க நோக்கிலும் இன்றுள்ள அதே நிலையிலிருந்தது. ஆரம்பத்தில், ஒவ்வொரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும் இதே முறையாலே தீர்க்கலாமெனக் கணிதர்கள் நம்பினர். ஆனால் அதுவும் ஐந்தாம், அல்லது மேலதிகப் படியிலுள்ள பொது அட்சரகணிதச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தற்கு முற்காலக் கணிதர்கள் எத்தனித்து அடைந்த தோல்வி போலாயிற்று. இப்பொழுது இப்பாடமானது சார்புக் கொள்கையுடன் நெருங்கிய உறவுடையதாய் உருமாற்றம் பெற்றுள்ளது. **1823** இல் கோஷி என்பவர், வகையீட்டுச் சமன்பாடொன்றிலிருந்து பெறப்படும் முடிவில் தொடரானது ஒருங்குமெனவும், இதன் காரணமாக, சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தும் சார்பொன்றை வரையறுக்கும் எனவும் நிரூபித்துள்ளார். ஒருங்கற் பிரசினங்கள், (இவை பற்றிய பரிசோதனைகள் முதன்முதலாகக் கோஷியினால் தரப்பட்டன) வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுப் படிப்பின் இரண்டாம் கட்டத்து ஆராய்ச்சிகள் எல்லாவற்றிலும் முதலிடம் பெற்றன. இதன் காரணமாகப் பாடம் சூக்குமமாகி விடுவதோடு மாணவனின் கிரகிப்புக்கு அகப்படாமற் போய் விடுவது கவலைக்குரியது. முதற் காலத்தில் சமன்பாடுகள் யாவும் தம்மளவிலே எளியவையாயும் இவ்வேலையின் ஆரம்ப நோக்கமான பொறியியல், பௌதிகவியல்களோடு நெருங்கிய தொடர்பு கொண்டு படிக்கப்பட்டனவாயும் உள்ளன.

கோஷியின் இவ்வாராய்ச்சிகள் **1845** இல் பிறியோ **(Briot)** பூக்கே **(Bouqet)** எனபவர்களால் தொடர்ந்து ஆராயப்பட்டன. பின்னரும் அண்ணளவாக்கங்கள் என்னும் புதிய முறையொன்று பிக்காட் **(1890)** என்பவரால் தரப்பட்டுள்ளது. ஃபுஷ் **(1866)** ஃபுறேபீனியஸ் **(1873)** என்போர், மாறுங் குணகங்களைக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை மேல்வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளை ஆராய்ந்தனர். லையின் தொடர் கூட்டக்

கொள்கையானது 1884 இலிருந்து தொடர்பில்லாதன போன்று தோற்றும் முறைகளுக்கிடையேயான ஒற்றுமையை வெளிப்படுத்துகின்றது. உஷிவாஸ் கிளையின், கோசாற் என்போர், வரைபு முறைக்கருத்துக்களைப் புகுத்தி, தம் வேலையின் விளக்கத்தை எளிதாக்கியுள்ளனர். வாடா (1917) என்பாரின் அண்மைக் காலத்து வெளியீடொன்று, பிக்காட், புவன்காரே ஆகியோரின் முடிபுகளுக்கு ஒரு வரைபுமுறை வகைக்குறிப்பைத் தந்துள்ளது. ரங்கேயும் (1895), மற்றோரும் எண்முறை அண்ணளவாக்கங்கள் பற்றி ஆராய்ந்துள்ளனர்.

மேலதிகமான வரலாற்றுக் குறிப்புகள் இந்நூலில் உரிய இடங்களிற் காணப்படும். கூடுதலான விபரங்களுக்கு றவுஸ் போலின் '**கணிதத்தின் குறு வரலாறு**' என்னும் நூலைப் பார்க்க.

## அத்தியாயம் I

# முன்னுரையும் வரைவிலக்கணங்களும் நீக்கல் வரைபு வகைக்குறிப்பு

**1.** வகையீட்டுக் குணகங்களோடு சம்பந்தப்பட்ட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2y \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$2\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 10y = e^{-3x} \text{ சைன் } 5x \dots\dots (2)$$

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = 3\frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{1/3}(1 + x^{1/3})} \dots\dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

என்பன போன்ற சமன்பாடுகள் **வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்** எனப்படும்.

(1) (2) (3) (4) என்னுஞ் சமன்பாடுகளில் $x$ ஆனது சாராமாறியும் $y$ ஆனது சார்மாறியுமாகும். (5) இல் $x$, $t$ என்பன இரு சாராமாறிகளும் $y$ என்பது சார்மாறியுமாகும்.

**2.** அட்சரகணிதம், கேத்திரகணிதம், பொறியியல், பௌதிகவியல் இரசாயனவியல் ஆகியவற்றின் பல பிரசினங்களில் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் எழும். இந்நூலிற் பல்வேறு இடங்களில் இவற்றின் உதாரணங்கள் தருவோம் ; இவை நீக்கல் தொடுதகவு. விளைவு, சூழிகள், பொறியியற் றொகுதிகளினதும் மின்னோட்டங்களினதும் அலைவுகள், வளைகளின் கூனல், வெப்பக் கடத்தல், கரைப்பான்களின் பரவல், இரசாயனத் தாக்கவேகம் ஆகியவற்றிற்கும் வேறும் இவ்வாறுள்ளவற்றிற்கும் பிரயோகமுடையன.

**3.** ஒரு சாராமாறியை மட்டுங் கொண்ட (1), (2), (3), (4) என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் **சாதாரண** வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட சாராமாறிகளையும் அவற்றைக் குறித்துள்ள பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களையும் **கொண்டுள்ள** (5) போன்றன **பகுதி** வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளெனப்படும்.

இரண்டாம் வகையீட்டுக் குணகத்தையேயன்றி வேறு உயர்வரிசையிலுள்ள யாதொன்றையும் கொண்டிராத (1) போன்ற சமன்பாடு இரண்டாம் வரிசையிலுள்ளதெனப்படும். (4) என்பது முதலாம் வரிசையிலும் (3), (5) என்பன இரண்டாம் வரிசையிலும் (2) என்பது மூன்றும் வரிசையிலும் உள்ளன.

சமன்பாடு, வகையீட்டுக் குணகங்களைப் பொறுத்தவரை விகிதமுறு முழுவெண் சமன்பாடாக்கப்படுமிடத்து மிகவுயர்ந்த வகையீட்டுக் குணகத்தின் படி சமன்பாட்டின் படி யெனப்படும். ஆயின் (1), (2), (4), (5) என்பன முதற்படியைச் சேர்ந்தவை.

(3) ஐ விகிதமுறச் செய்தற்கு அது வர்க்கிக்கப்படல்வேண்டும். ஆயின் $\frac{d^2y}{dx^2}$ என வர்க்கிக்கக் கிடைப்பதால் இச்சமன்பாடு இரண்டாம் படியிலுள்ளது

படியின் இவ்வரைவிலக்கணம் $x$ அல்லது $y$ என்பது விகிதமுறுவதாகவே முழுவெண்ணாகவோ வரவேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனிக்க. வேண்டியவிடத்து வேறு வரைவிலக்கணங்கள் தரப்படும்.

## 4. நீக்கலால் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை ஆக்கல்.

நீக்கற்பிரசினம் இப்போது எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும்; ஏனெனில் ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாடு எவ்வினத் தீர்வை எடுக்கும் என்பது பற்றி இது எமக்கு ஒரு கருத்தைத் தரும்.

**சாதாரண** வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை ஆக்கலால் எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்கும் சில உதாரணங்களை இப்போது தருவோம். பின்னர் (அத்தியாயம் IV) எதேச்சை மாறிலிகளை அல்லது எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்கலால் **பகுதி** வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை ஆக்கலாமெனக் காண்போம்.

## 5. உதாரணங்கள்

(i) எளிய இசை இயக்கச் சமன்பாடாகிய $x = A$ கோசை $(pt - \alpha)$ என்பதை எடுக்க. $A$, $\alpha$ என்னும் எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்குவோம்.

வகையிட, $\frac{dx}{dt} = -pA$ சைன் $(pt - \alpha)$,

$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2A$ கோசை $(pt - \alpha) = -px^2$.

ஆயின், இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடாகிய $\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2x$ என்பதே வேண்டிய முடிபாகும்; இதன் கருத்து ஆர்முடுகல் உற்பத்தியிலிருந்துள்ள தூரத்தைப் போல் மாறுமென்பதே.

(ii) ஈற்று முடிபிலிருந்து $p$ யை நீக்குக.

மீண்டும் வகையிட, $\dfrac{d^3x}{dt^3}=-p^2\dfrac{dx}{dt}$.

ஆகவே $\dfrac{d^3x}{dt^3}\bigg/\dfrac{dx}{dt}=-p^2=\dfrac{d^2x}{dt^2}\bigg/x$, (ஈற்று முடிபிலிருந்து).

பெருக்குமிடத்து $x.\dfrac{d^3x}{dt^3}=\dfrac{dx}{dt}.\dfrac{d^2x}{dt^2}$ என்னும் மூன்றும் வரிசைச் சமன்பாடு பெறப்படும்.

(iii) $x$ – அச்சை அச்சாகவுள்ள பரவளைவுகள் எல்லாவற்றின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும் ஆக்குக. அத்தகைப் பரவளைவொன்று, வடிவம்

$$y^2=4a\ (x-h)$$

இல் சமன்பாடு உடையது. இருமுறை வகையிட,

$$2y\frac{dy}{dx}=4a,$$

அல்லது,

$$y\frac{dy}{dx}=2a,$$

என்பதும், இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$ என்பதும் பெற்றோம்,

**பயிற்சிகள்**

பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்குக :

(1) $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$

(2) $y=A$ கோசை $3x+B$ சைன் $3x$

(3) $y=Ae^{Bx}$

(4) $y=Ax+A^3$.

(5) $x^2+y^2=a^2$ ஆயின், $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ என்பதை நிறுவி இம்முடிபைக் கேத்திரகணிதமுறையாக விளக்குக.

(6) உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் யாதுமொரு நேர்கோட்டுக்கு $\dfrac{y}{x}=\dfrac{dy}{dx}$ என நிறுவி இதன் கருத்தைக் கூறுக.

(7) யாதுமொரு நேர் கோட்டுக்கு $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ என நிறுவுக. இதன் கருத்தைக் கூறுக.

### 6. $n$ எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்கற்கு (பொதுவாக) $n$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாடு வேண்டும்.

படிப்போன் பிரிவு 5 இலுள்ள உதாரணங்களிலிருந்து தானாகவே இம் முடிபுக்கு வந்திருக்கலாம். $n$ எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டை $n$ முறை வகையிடுவோமாயின் எல்லாமாக $(n+1)$ சமன்

பாடுகள் பெறுவோம்; இவற்றிலிருந்து $n$ மாறிலிகளும் நீக்கப்படலாம். முடிபு $n$ ஆம் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் கொண்டிருத்தலால் அது $n$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாடாகும்.

நூலில் இந்நியாயமுறையே வழக்கமாகத் தரப்படும்; ஆனால் தேறிய மாணாக்கன் இதனிற் சில நொய்ப்புள்ளிகளைக் கவனிப்பான். எவையேனும் $n+1$ சமன்பாடுகளின் இயற்கை எதுவாயினும், அவற்றிலிருந்து $n$ கணியங்கள் நீக்கப்படலாமென்னுங் கூற்று உண்மையாகாது. வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகளைப் பற்றிய செப்பமான கூற்று மிகச் சிக்கலாகும்.

சில சமயங்களில் $n+1$ இலுங் குறைந்த சமன்பாடுகள் வேண்டியனவாகும். கண்கூடாகும் ஒரு வகை $y=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x$; இங்கு ஈர் எதேச்சை மாறலிகளும் உண்மையில் ஒன்றிற்குச் சமவலுவாகுமாறு நிகழும்.

குறைதலாகக் கண்கூடாகும் ஒருவகை $y^2=2\mathrm{A}xy+\mathrm{B}x^2$. இது உற்பத்திக்கு ஊடாகச் செல்லும் இருநேர் கோடுகளைக் குறிக்கும், $y=m_1x$, $y=m_2x$ என்க; இவை ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து இரண்டாம் வரிசைக்குப் பதிலாக முதலாம் வரிசையிலுள்ள $\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}$ என்பதை எளிதிற் பெறுவோம். மாணாக்கன் தொடக்கச் சமன்பாட்டை வகையிட்டுக் கொண்டு $\mathrm{B}$ யை நீக்கி இம்முடிபைப் பெறல் வேண்டும். இது $(y-x\frac{dy}{dx})\ (y-\mathrm{A}x)=0$ என்பதைத் தரும்.

## 7. $n$ ஆம் வரிசையிலுள்ள சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் மிகப் பொதுவான தீர்வு $n$ எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும்.

$n$ எதேச்சை மாறிலிகள் $n$ ஆம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டால் நீக்கப்படலாமென்னுமாறு நிலைத்தேற்றத்திலிருந்து இது கண்கூடாகுமெனத் தோற்றலாம். ஆனால் ஒரு கடு நிறுவல் மிகக் கடினமாகும்.

எனினும், ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இன் ஏறு முழுவெண்வலுக்கள் கொண்ட ஒருங்கு தொடராக விரிக்கத்தகு தீர்வு ஒன்று உண்டெனக் கொள்வோமாயின் எதேச்சை மாறிலிகளின் தொகை $n$ ஆக வேண்டுமென எளிதிற் காண்போம். [ஆனால், இவ்வெடுகோள் என்றும் உண்மையாகாதென்பதை மாணாக்கன் பின்வரும் அத்தியாயங்களிற் காண்பான்.]

உதாரணமாக மூன்றும் வரிசையிலுள்ள $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$ என்பதை எடுக்க;

$y=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots.+a_n\frac{x^n}{n!}+\ldots\ldots$ முடிவிலிக்கு எனக் கொள்க.

ஆயின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட.

$$a_3+a_4x+a_5\frac{x^2}{2!}+\ldots.+a_n\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}=a_1+a_2x+a_3\frac{x^2}{2!}+\ldots.+a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$$

ஆகவே $a_3=a_1$

$a_4=a_2$

$a_5=a_3=a_1,$

$$a_n=a_{n-2}=a_{n-4}=\ldots..$$

ஆகவே $y=a_0+a_1\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)+a_2\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\cdots\right)$

$=a_0+a_1$ அசைன் $x+a_2$ (அகோசை $x-1$) ; இது $a_0$, $a_1$, $a_2$ என்னும் மூன்று எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும்.

இதேமாதிரி நியாய முறை.

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்குப் பிரயோகிக்கலாம்.

இயக்கவியலில் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பொதுவாக இரண்டாம் வரிசையினுள்ள; உ—ம். $\frac{d^2y}{dt^2}+p^2y=0$, என்னும் எளிய இசையியக்கச் சமன்பாடு. எதேச்சை மாறிலிகள் இல்லாத் தீர்வு பெறுதற்கு எமக்கு இரு நிபந்தனைகள் வேண்டும்; இவை தொடக்க இடப்பெயர்ச்சியையும் வேகத்தையுந் தருவனவாகிய $t=0$ ஆகுமிடத்து $y$, $\frac{dy}{dt}$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் போன்றன.

## 8. முற்றிய மூலி, குறிப்பிட்ட தொகையீடு, தனிச்சிறப்புத் தீர்வு.

முழுத்தொகை எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு முற்றிய மூலியெனப்படும்.

முற்றிய மூலியிலிருந்து இம் மாறிலிகளுக்குக் குறிப்பிட்ட பெறுமானங்களைக் கொடுத்தலாற் பெறப்படும் யாதுமொரு தீர்வு ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு எனப்படும்.

ஆயின் $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}$ என்பதன் முற்றிய மூலி

$$y=a_0+a_1\text{ அசைன் }x+a_2\text{ (அகோசை }x-1),$$

அல்லது $y=c+a_1$ அசைன் $x+a_2$ அகோசை $x$ ; இங்கு $c=a_0-a_2$,

அல்லது $y=c+ae^x+be^{-x}$, $a=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ ; இங்கு, $b=\frac{1}{2}(a_2-a_1)$.

முற்றிய மூலியைப் பல முறையும் பல் வேறு (ஆனால் உண்மையில் சமவலு) வழிகளில் எழுதலாமென்னும் உண்மையை இது எடுத்துக்காட்டும்.

பின்வருவன, குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள்:

$y=4$, $c=4$, $a_1=a_2=0$ என எடுக்குமிடத்து ;

$y=5$ அசைன் $x$, $a_1=5$, $c=a_2=0$ என எடுக்குமிடத்து ;

$y=6$ அகோசை $x-4$, $a_2=6$, $a_1=0$, $c=-4$, என எடுக்குமிடத்து ;

$y=2+e^x-3e^{-x}$, $c=2$, $a=1$, $b=-3$ என எடுக்குமிடத்து ;

அனேக சமன்பாடுகளில் முற்றிய மூலியிலிருந்து எதேச்சை மாறிலிகளுக் குத்தக்க பெறுமானங்கள் கொடுத்தலால் ஒவ்வொரு தீர்வும் பெறப்படலாம். எனினும், சில புற நடைவகைகளிலே, இவ்வழியிற் பெற முடியாத தீர்வு ஒன்றை தனிச்சிறப்புத் தீர்வு எனப்படும் வழியாற் காண்போம். இவை அத்தியாயம் VI இல் எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும்.

**பயிற்சி**

*பிரிவு 7 இன் முறையால்*

(1) $\dfrac{dy}{dx}=y$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-y$

என்பவற்றைத் தீர்க்க

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ இற்கு இம்முறை தவறுமெனக் காட்டுக.

[மட $x$ என்பதை மக்கிளோரினின் தொடராக விரிக்க முடியாது.]

(4 $c$ யை நீக்கலால் $y=cx+\dfrac{1}{c}$ என்பது $y=x\dfrac{dy}{dx}+1\Big/\dfrac{dy}{dx}$ இன் முற்றிய மூலியா எனச் சரி, பிழை பார்க்க. $y^2=4x$ என்பது இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலியிலிருந்து பெற முடியாத ஒரு தீர்வு (அதாவது தனிச்சிறப்புத் தீர்வு) என்பதையும் வாய்ப்புப்பார்க்க. தனிச்சிறப்புத் தீர்வு, முற்றிய மூலியாற் குறிக்கப்படும் கோட்டுக் குடும்பத்தின் சூழியெனக் காட்டுக. இதனை ஒரு வரைபால் விளக்கிக் காட்டுக.

## 9. வரைபு வகைக்குறிப்பு.

இப்போது $\dfrac{dy}{dx}=f(x, y)$ என்பதன் முற்றிய மூலி குறிக்கும் வளையிக் குடும்பத்தின் பொது வடிவத்தை, விரைவாகப் பரும்படியாய் வரையும் முறையை விளக்கும் சில உதாரணங்களைத் தருவோம்; இங்கு $f(x, y)$ என்பது $x, y$ ஆகியவற்றின் முடிவுள்ள பெறுமானச் சோடி ஒவ்வொன்றிற்கும் நிறைவாய் வரையறுத்த முடிவுள்ள பெறுமானமுள்ள $x, y$ என்பவற்றின் சார்பாகும்.

இக்குடும்பத்தின் வளையிகள் சமன்பாட்டின் சிறப்பியல்புகள் எனப்படும்.

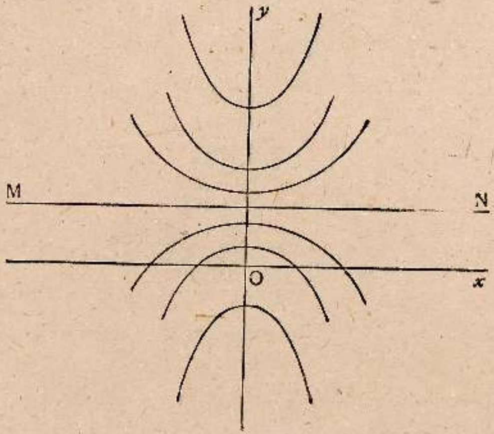
உ-ம் (i) $\dfrac{dy}{dx}=x(y-1)$.

இங்கு $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y-1+x\dfrac{dy}{dx}=(x^2+1)(y-1)$.

இனி இரண்டாம் வகையீட்டுக் குணகம் நேராகுமிடத்து வளையியின் குழிவு மேல் முகமாகும். ஆகவே சிறப்பியல்புகள் $y=1$ இற்கு மேலே மேன் முகமாகக் குழிவாகவும் இக்கோட்டுக்குக் கீழே கீழ் முகமாகக் குழிவாகவும்

இருக்கும். $x=0$ இல் $\frac{dy}{dx}=0$ ஆதலால் உயர்வு இழிவுப் புள்ளிகள் $x=0$ இற் கிடக்கும். குடும்பத்தின் ஓர் அங்கமாகிய $y=1$ இன் அண்மையிலுள்ள சிறப்பியல்புகள் தூரத்திலுள்ளவற்றிலுங் கூடுதலாகத் தட்டையாகும்.

இக்கருத்துக்கள் காட்டுவது படம் 1 இற்காட்டிய பொது வடிவத்தைக் குடும்பம் கொள்ளும் என்பதே.

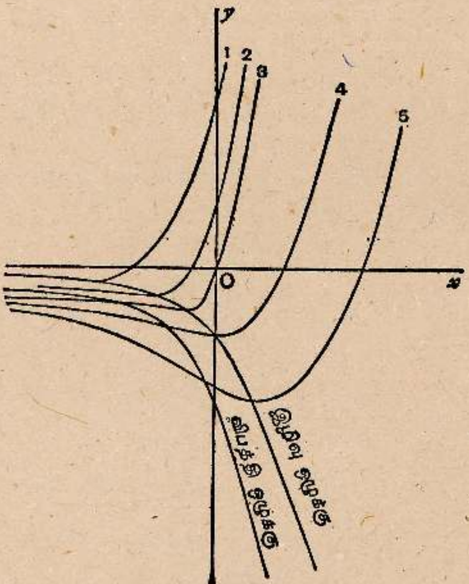


படம் 1.

உ-ம் (ii) $\frac{dy}{dx}=y+e^x.$

இங்கு $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+e^x=y+2e^x.$

$y+e^x=0$ என்னும் உயர்வு இழிவு வளையியையும் $y+2e^x=0$ என்னும் விபத்தி வளையியையும் வரைந்து கொண்டு தொடங்குவோம். உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் சிறப்பியல்பை எடுத்துச் சிந்திக்க. இப்புள்ளியில் இரு வகையீட்டுக் குணகங்களும் நேராதலால் $x$ கூடுதலுற $y$ கூடுதலுற்று வளையி மேன்முகமாய்க் குழிவாய் உள்ளது. இது படம் 2 இல் 3 எனக் குறிக்கப்படும் சிறப்பியல்பின் வலக்கைப் பாகத்தைத் தரும். இதன் மீது இடப்பக்கமாய்ச் செல்வோமாயின் இழிவு வளையியை அடைவோம். இடைவெட்டுப் புள்ளியில் தொடலி $Ox$ இற்குச் சமாந்தரம். இதன்பின் மீண்டும் ஏறிக்கொண்டு விபத்தி வளையியைச் சந்திப்போம். இதனைக்கடந்த பின்னர் சிறப்பியல்பு மேன்முகமாகக் குவிவாகும். அது இன்னும் ஏறும்.



படம். 2

படம் காட்டுவது அது மீண்டும் இழிவு வளையியை வெட்டுமாயின் தொடலி $Ox$ இற்குச் சமாந்தரமாக முடியாதென்பதே ; ஆகவே அது அதனை மீண்டும் வெட்டாது ; ஆனல் அதற்கு அணுகுகோட்டுத் தொடர்பு கொள்ளும்.

மற்றைச் சிறப்பியல்புகளும் இதேபோன்ற இயல்பை உடையன. [இம் முறை புரேடொக்கி, உவாடா என்பவர்களாலாயது.]

**பயிற்சிகள்.**

பின்வருவனவற்றின் சிறப்பியல்புகளைப் பரும்படியாய் வரைக :

(1) $\dfrac{dy}{dx}=y\,(1-x).$

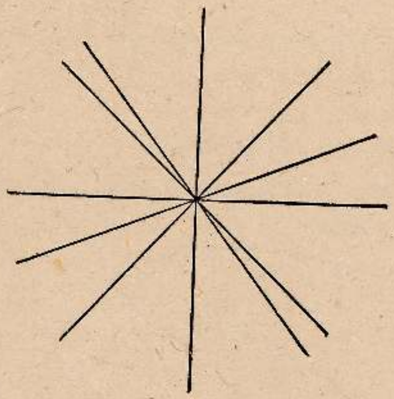
(2) $\dfrac{dy}{dx}=x^2y.$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=y+x^2.$

**10. தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள்.** ஈற்றுப் பிரிவிலுள்ள உதாரணங்கள் போன்றவை எல்லாவற்றிலும், தளப்புள்ளியொவ்வொன்றிற்கு மூடாக ஒரேயொரு சிறப்பியல்பை மட்டுமே பெறுவோம். $\dfrac{dy}{dx}=0,\ \ \dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ என்

னும் வளையிகளை வரைதலால் தொகுதியை எளிதிற் பருமபடியாய் வரையலாம். எனினும், (தனிச்சிறப்புப் புள்ளி எனப்படும்) ஒரு புள்ளியிலே ஒன்றின் மேற்பட்ட புள்ளிகளிலே $f(x, y)$ ஆனது தோராததாயின் இப்புள்ளிகளின் அயலில் தொகுதியைப் பரும்படியாய் வரைதல் பெரும்பாலும் மிகக் கடினமாகும். ஆனால் பின்வரும் உதாரணங்கள் கேத்திர கணிதமுறையில் பரிகரிக்கப்படலாம். பொதுவாக, ஒரு சிக்கலான பகுப்புப் பரிகாரம் வேண்டும்.

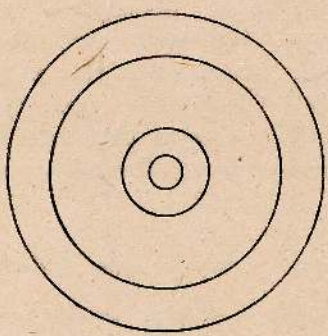
உ-ம் (i) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. இங்கு உற்பத்தி ஒரு தனிச்சிறப்புப் புள்ளி. இச்சமன்பாட்டின் கேத்திரகணிதக் கருத்து ஆரைக் காவிக்கும் தொடலிக்கும் ஒரே படித்திறன் உண்டு என்பதே ; உற்பத்திக்கூடாக செல்லும் நேர்கோடுகளுக்கே இது உண்மையாகும். இவற்றின் தொகை முடிவில்லாமையால் இவ்வகையில் தனிச்சிறப்புப் புள்ளிக்கூடாக முடிவில்லாத் தொகைச் சிறப்பியல்புகள் செல்லும்.



படம் 3.

உ-ம் (ii) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, அதாவது $\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=-1$.

இதன் பொருள் ஆரைக்காவியும் தொடலியும் தம்பெருக்கம் $-1$ ஆகுமாறுள்ள படித்திறன்கள் உடையன, அதாவது அவை செங்குத்தானவை, என்பதே. ஆகவே சிறப்பியல்புகள் உற்பத்தியில் மையமும் யாதும் ஆரையுமுள்ள வட்டங்களாகும். இவ்வகையில் தனிச்சிறப்புப் புள்ளி தன்னண்மையிலுள்ள சிறப்பியல்புகளின் எல்லை வடிவமாகிய பூச்சிய ஆரையுள்ள வட்டமாகக் கருதப்படலாம்; ஆனால் முடிவுள்ள பருமன் உள்ள எச்சிறப்பியல்பும் அதற்கூடாகச் செல்லாது.



படம். 4

உ-ம் (iii) **(iii)** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-kx}{x+ky}$.

$$\frac{dy}{dx}=\text{தான் }\psi,\ y/x=\text{தான் }\theta \text{ என எழுத தான் }\psi=\frac{\text{தான் }\theta-k}{1+k\text{ தான் }\theta},$$

அதாவது $\text{தான் }\psi+k\text{ தான் }\psi\text{ தான் }\theta=\text{தான் }\theta-k$,

அதாவது $\dfrac{\text{தான் }\theta-\text{தான் }\psi}{1+\text{தான் }\theta\text{ தான் }\psi}=k$,

அதாவது $\text{தான் }(\theta-\psi)=k$(மாறிலி).

ஆகவே சிறப்பியல்புகள் தனிச்சிறப்புப் புள்ளி (உற்பத்தி) குவியமாயுள்ள சமகோணச் சுருளிகளாகும்.

படம். 5

இம்மூன்று எளிய உதாரணங்களும் மூன்று வகைகளை எடுத்துக்காட்டும். சிலசமயங்களில் ஒரு முடிவுள்ள தொகைச் சிறப்பியல்புகள் ஒருதனிச் சிறப்புப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும், ஆனால் இதன் உதாரணம் மிகச் சிக்கலானதால் இங்கு தரமுடியாது.

## அத்தியாயம் I இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றில் எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்குக :

(1) $y = Ae^{x} + Be^{-x} + C$

(2) $y = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{-x}$.

[ பின்னடும் வகையிடலால் பெறப்படும் நாலு சமன்பாடுகளிலிருந்து $A, B, C$ என்பவற்றை நீக்கற்கு ஒரு துணிகோவை வழங்கப்படலாம் .]

(3) $y = e^{x}$ ($A$ கோசை $x + B$ சைன் $x$).

(4) $y = c$ அகோசை $\frac{x}{c}$ (சங்கிலியம்).

பின்வருவனவற்றின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க :

(5) $y$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமான அச்சுக்களுள்ள பரவளைவுகள் எல்லாவற்றினதும்

(6) $a$ என்னும் ஆரையுள்ள வட்டங்கள் எல்லாவற்றினதும்

(7) உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள் எல்லாவற்றினதும்

(8) வட்டங்கள் எல்லாவற்றினதும் ( அவற்றின் ஆரைகளோ $xOy$ தளத்தில் அவற்றின் நிலைகளோ எவையாயினும்) [ பயிற்சி 6 இன் முடிபு பயன்படுத்தப்படலாம் ].

(9) $$2y = x\frac{dy}{dx} + ax \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

என்பதிலிருந்து $a$ யையும்

$$y = x\frac{dy}{dx} - bx^{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

என்பதிலிருந்து $b$ யையும் நீக்கிப் பெறும் முடிபுகள் ஒவ்வொரு வகையினும்

$$x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

ஆகுமெனக் காட்டுக.

[ (3) ஐ (1) இதிலிருந்து பெறத்தகுமாதலால் (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலி, (3) என்னுஞ் சமன்பாட்டை திருத்திப்படுத்த வேண்டும். இம்மூலி $a$ யையும் ஓர் எதேச்சை மாறிலியையுங் கொள்ளும். ஆயின் அது (3) இன் இரு மாறிலிகளைக் கொண்ட ஒரு தீர்வாகும் ;

$a$ ஆனது (3) என்னுஞ் சமன்பாட்டில் வராமையால் இச்சமன்பாட்டைப் பொறுத்தவரை இம் மாறிலிகள் இரண்டும் எதேச்சையாகும். உண்மையில், இத்தீர்வு (3) இன் முற்றிய மூலி ஆதல் வேண்டும். இதேமாதிரி (2), (3) என்பவற்றின் முற்றிய மூலிகள் ஒன்றாகும். ஆகவே (1), (2) என்பவற்றிற்கு ஒரு பொது முற்றிய மூலி உண்டு.]

(10) $y+\frac{dy}{dx}=2ae^{x}, \quad y-\frac{dy}{dx}=2be^{-x}$

என்பவற்றிற்கு ஒரு பொது முற்றிய மூலி உண்டென நிறுவுதற்கு ஈற்றுப் பயிற்சியிலுள்ள முறையைப் பிரயோகிக்க.

(11) பயிற்சி 9 இனது முதல் இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொது முற்றிய மூலி உண்டெனக் கொண்டு அதனது $x, y$ மாறிலிகள் ஆகியவற்றின் (1) தொடர்பில் $\frac{dy}{dx}$ இன் பெறுமானங்களைச் சமப்படுத்திக் காண்க. அது பயிற்சி 9 இல் (3) ஆவது சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமெனச் சரி பிழை பார்க்க.

(12) இதே மாதிரி, பயிற்சி 10 இனது இரு சமன்பாடுகளின் பொது முற்றிய மூலியைப் பெறுக.

(13) $\frac{dy}{dx}=1+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}+x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்திப்படுத்தும் வளையிகளெல்லாம் $y$ அச்சை 45° இல் வெட்டுமென நிறுவுக.

(14) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}=y^{2}-2x+x^{2}$ ஐத் திருத்திப்படுத்துவதோடு (1, 2) என்னும் புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் இரு வளையிகளினது $x$ – அச்சுச் சாய்வை இப்புள்ளியிற் காண்க.

(15 பயிற்சி 14 இல் வரும் வளையிகள் ஒவ்வொன்றினதும் வளைவாரை (1,2) என்னும் புள்ளியில் 4 என நிறுவுக.

(16) பொதுவாக யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாக, $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}+y\frac{dy}{dx}+1=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் இருவளையிகள் செல்லுமெனவும், ஆனால் இவ் வளையித் தொகுதியின் சூழியாயமையும் ஒரு குறித்த பரவளைவின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியில் இரு வளையிகளும் பொருந்துமெனவும் நிறுவுக.

(17) ஒரு புள்ளிக்கூடாக பயிற்சி 16 இல் வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்திப் படுத்திக் கொண்டு செல்லும் இருவளையிகள் (i) நிமிர் கோணத்தில் (ii) 45° இல் வெட்டு மாயின் அத்தகைப்புள்ளியின் ஒழுக்கை ஒவ்வொரு வகையிலும் காண்க.

(18) $\frac{dy}{dx}=x+e^{y}$ யின் சிறப்பியல்புகளை (புரேடெற்ஸ்கி வாடாலினர் முறையால்) பரும்படியாய் வரைக.

(19) ($y_1$, $y_2$ என்பன முறையே $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்பவற்றைக் குறிக்குமாறுள்ள பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளினது தீர்வுகளை (பிரிவு 7 இல் உள்ளது போல்) $x$ இன் ஏறு முழுவெண் வலுக்கள் கொண்ட தொடர்முறையிற் பெறுக :

(i) $y_2-xy_1-y=0$ ; (ii) $xy_2+xy_1+y=0$ ;

(iii) $x^2y_2-2xy_1+2y=0$ ; (iv) $(1-x^2)y_2+2y=0$ ;

(v) $(x-x^2)y_2+(1-5x)y_1-4y=0.$

விடைகள் :

(i) $y=a_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.4}+\frac{x^6}{2.4.6}+\dots\right)+a_1\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.3}+\frac{x^5}{1.3.5}+\dots\right)$;

(ii) $y=a_1\left(x-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\dots\right)=a_1xe^{-x}$ ; ஓர் எதேச்சை மாறிலியையே கொள்ளும். இத்தீர்வு முற்றிய மூலியாகாது ; ஏனெனின் இங்கு எடுத்துக்கொள்ளப்படும் வடிவத்திலில்லா வேறொரு தீர்வும் உண்டு (அத்தியாயம் IX) ;

(iii) $y=a_1x+\frac{1}{2}a_2x^2$ ;

(iv) $y=a_0(1-x^2)+a_1\left(x-\frac{x^3}{1.3}-\frac{x^5}{3.5}-\frac{x^7}{5.7}-\dots\right)$ ;

(v) $y=a_0(1^2+2^2x+3^2x^2+\dots)$ ;[பிரிவு 97 ஐப் பார்க்க.]

# அத்தியாயம் II

# முதல் வரிசையிலும் முதற் படியிலுமுள்ள சமன்பாடுகள்

**11.** இவ்வத்தியாயத்தில்

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள சமன்பாடுகளை எடுத்துச் சிந்திப்போம் ; இங்கு $M$, $N$ என்பன $x$, $y$ என்பவற்றின் சார்புகள்.

இச்சமன்பாடுகள், பலமுறையும்

$$Mdx + Ndy = 0$$

எனச் சமச்சீராக எழுதப்படும்.

இவ்வடிவத்திலுள்ள பொதுச் சமன்பாட்டை ஒரு முடிவுள்ள தொகையான தெரிந்த சார்புகளின் தொடர்பில், தீர்த்தல் இயலாது ; ஆனல் இவ்வாறு செய்யக்கூடிய சில விசேட வகைகளை எடுத்துத் தர்க்கிப்போம்.

இவ்வகைகளை பின்வருமாறு வகுப்பது வழக்கமாகும் :

(1) செப்பமான சமன்பாடுகள்.

(2) மாறிகளை வேருக்கலால் தீர்க்கத்தகு சமன்பாடுகள்.

(3) ஏகவினச் சமன்பாடுகள்.

(4) முதல் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்.

இவ்வத்தியாயத்தின் முறைகள் தன்காலத்தில் மிக்க ஊக்கம் ஊட்டும் ஆசிரியனுயிருந்த யோன் பேனூயீ (1667–1748) என்பவராலும் அவரின் மாணுக்கனுகிய லேனுட் ஓயிலர் (1707–1783) என்பவராலும் ஆயன. ஓயிலர் ஆனவர் அட்சரகணிதம், திரிகோணகணிதம், நுண்கணிதம், விறைப்பு இயக்கவியல், நீரியக்கவியல், வானியல் என்பவற்றிற்கும் வேறு பாடங்களுக்கும் பெரும் நன்கொடை அளித்துள்ளார்.

## 12. செப்பமான சமன்பாடுகள்

உ–ம் (i) $y\,dx + x\,dy$ என்னுங் கோவை ஒரு செப்பமான வகையீடு.

ஆயின், $d(yx) = 0$, அதாவது $y x = c$

எனத்தரும் $y dx + x dy = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு செப்பமான சமன்பாடு எனப் படும்.

[$Mdx + Ndy = 0$ என்பது செப்பமாதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை பற்றி பின்னிணைப்பு $A$ யைப் பார்க்க.]

உ-ம் (ii) $\text{தான் } y.dx + \text{தான் } x.\ dy = 0$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

இது தன் உண்மை நிலையிற் செப்பமாகாது ; ஆனால் கோசை $x$ கோசை $y$ என்பதாற் பெருக்குவோமாயின் இது செப்பமான சமன்பாடு

$$\text{சைன் } y \text{ கோசை } x\,dx + \text{ சைன் } x \text{ கோசை } y\,dy = 0$$

என வரும்.

இதன் தீர்வு சைன் $y$ சைன் $x = c$ ஆகும்.

**13. தொகையீட்டுக் காரணிகள்.** ஈற்று உதாரணத்தில் கோசை $x$ கோசை $y$ என்பது ஒரு **தொகையீட்டுக் காரணி** எனப்படும் ; ஏனெனின் சமன்பாட்டை அதனாற் பெருக்கி உடனடியாகத் தொகையிடக்கூடிய ஒரு செப்பமான சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

சில குறிப்பிட்ட சமன்பாட்டு வகுப்புகளுக்கு வேண்டிய தொகையீட்டுக் காரணிகளைத் துணிதற்கு வழக்கமாகத் தரப்படும் பல்வேறு நெறிகளுண்டு. இவை இவ்வத்தியாய முடிவிலுள்ள பலவினப் பயிற்சிகளிற் காணப்படும். இந்நெறிகளின் நிறுவல் கவர்ச்சியான வேலையானபோதிலும் அவற்றைப் பயன்படுத்தாது பயிற்சிகளைத் தீர்த்தல் எளிதாகும்.

**14. மாறிகள் வேறாக்கத்தகும்.**

உ-ம் (i) $\dfrac{dx}{x} = \text{தான் } y\ dy$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில் இடக்கைப் பக்கம் தனித்து $x$ ஐயும் வலக்கைப் பக்கம் தனித்து $y$ ஐயும் கொண்டுள்ளதாதலால் மாறிகள் வேறாக்கத்தகும்.

தொகையிட

$$\text{மட } x = - \text{ மட (கோசை } y) + c,$$

$$\text{அதாவது மட } (x \text{ கோசை } y) = c,$$

$$x \text{ கோசை } y = e^c = a \text{ (என்க)}.$$

உ-ம் (ii)

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

இங்கு மாறிகள் வேறாக்கியில்லை, ஆனால் அவை எளிதில் அவ்வாறு செய்யப்படலாம். $dx$ ஆற் பெருக்கி $y$ ஆல் வகுக்க. அப்பொழுது

$$\frac{dy}{y} = 2x\ dx.$$

$$\text{தொகையிட, மட } y = x^2 + c.$$

$c$ ஆனது எதேச்சையாதலால் அதற்குப் பதிலாக மட $a$ இடப்படலாம், $a$ ஆனது வேறோர் எதேச்சை மாறிலியாகும்.

ஆயின், இறுதியில்,

$$[y = ae^{x^2}.]$$

**பயிற்சிகள்.**

(1) $(12x+5y-9)\,dx+(5x+2y-4)dy=0$

(2) [(கோசை $x$ தான் $y+$ கோசை $(x+y)]\,dx+$ [சைன் $x$ சீக்$^2y+$ கோசை $(x+y)]dy=0$.

(3) (சீக் $x$ தான் $x$ தான் $y-e^{x}$) $dx+$ சீக் $x$ சீக் $^2y\,dy=0$,

(4) $(x+y)\,(dx-dy)=dx+dy$

(5) $y\,dx-x\,dy+3x^2y^2e^{x^3}dx=0$

(6) $y\,dx-x\,dy=0$

(7) (சைன் $x+$ கோசை $x)dy+$ (கோசை $x-$ சைன் $x$) $dx=0$

(8) $\dfrac{dy}{dx}=x^3y^3$

(9) $y\,dx-x\,dy=xy\,dx$

(10) தான் $x\,dy=$ கோதா $y\,dx$

**15. ஏகவினச் சமன்பாடுகள்.** முதல் வரிசையிலும் முதற் படியிலுமுள்ள ஏகவினச் சமன்பாடு

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

$x$, $y$ ஆகியவற்றின் ஒரு சார்பு வலக்கைப்பக்க வடிவத்தில் எழுதப்படலாமா என்பதைச் சோதித்தற்கு $\dfrac{y}{x}=v$ அல்லது $y=vx$ என இடுதல் இசைவாகும்.

முடிபு $f(v)$ என்னும் வடிவமாயின், அதாவது $x$ கள் எல்லாம் வெட்டுமாயின், சோதனை திருத்தியாகும்.

உ-ம் (i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$ என்பது $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+v^2}{2}$ ஆகும். இச்சமன்பாடு ஏகவினமாகும்.

உ-ம் (ii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^3}{x^2}$ ஆனது $\dfrac{dy}{dx}=xv^3$ ஆகும். இது ஏகவினமாகாது.

**16. தீர்வுமுறை.** ஓர் ஏகவினச் சமன்பாட்டின் வலக்கைப்பக்கத்தில் $y=vx$ எனப் பிரதியிடலால் அது $\dfrac{dy}{dx}=f(v)$ யிற்கு ஒடுக்கப்படும். ஆதலால் இடக்கைப்பக்கத்திலும் இப்பிரதியீட்டின் விளைவை ஆராய்தல் இயற்கையாகும். உண்மையில் இப்பிரதியீட்டால் இச்சமன்பாடு என்றும் தீர்க்கப்படலாம் (இவ்வத்தியாய முடிவிலுள்ள பலவினப் பயிற்சிகளில் 10 ஆவதைப் பார்க்க). இங்கு "தீர்க்கப்படலாம்" என்பது சாதாரண

தொகையிடலுக்கு ஒடுக்கப்படல் என்னும் பொருள் கொள்ளும். ஆனால் இத்தொகையீட்டைச் சாதாரண ஆரம்பச் சார்புகளின் தொடர்பில் உணர்த்துதல் முடியாததாகலாம்.

உ-ம் (i) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$.

$y=vx$ ஆயின்,

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$, (ஏனெனின் $y$ ஆனது $x$ இன் சார்பாயின் $v$ என்பதும் அவ்வாறே).

சமன்பாடு, ஆகின்றது. $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$

அதாவது $2x\,dv=(1+v^2-2v)\,dx$.

மாறிகளை வேறுக்குமிடத்து, $\frac{2dv}{(v-1)^2}=\frac{dx}{x}$.

தொகையிட, $\frac{-2}{v-1}=$ மட $x+c$.

ஆனால், $v=\frac{y}{x}$; ஆதலால், $\frac{-2}{v-1}=\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}=\frac{-2x}{y-x}=\frac{2x}{x-y}$.

$x-y$ என்பதாற் பெருக்க, $2x=(x-y)$ (மட $x+c$).

உ-ம் (ii) $(x+y)\,dy+(x-y\,dx=0$.

இது, $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$.

எனத் தரும். $y=vx$ எனப் பிரதியிட்டுக் கொண்டு முன்போற் செய்யுமிடத்து

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1},$$

அதாவது, $x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{v+1}-v=-\frac{v^2+1}{v+1}$.

மாறிகளை வேறுக்க, $-\frac{(v+1)dv}{v^2+1}=\frac{dx}{x}$,

அதாவது, $\frac{-vdv}{v^2+1}-\frac{dv}{v^2+1}=\frac{dx}{x}$.

தொகையிட, $-\frac{1}{2}$ மட $(v^2+1)-$ தான் $^{-1}v=$ மட $x+c$,

அதாவது 2 மட $x+$ மட $(v^2+1)+2$ தான் $^{-1}v+2c=0$,

மட $x^2(v^2+1)+2$ தான் $^{-1}v+a=0$, $2c=a$.

$v$ இற்குப் பிரதியிட, மட $(y^2+x^2)+2$ தான்$^{-1}\frac{y}{x}+a=0$.

### 17. ஏகவின வடிவத்திற்கு ஒடுக்கத்தகு சமன்பாடுகள்.

உ–ம் (i) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$ என்னுஞ் சமன்பாடு ஏகவினமானதல்ல.

இச்சமன்பாடு, $\dfrac{y-x}{y+x}$ இற்குப் பதிலாக $\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$ உண்டு என்பது தவிர ஈற்றுப் பிரிவின் உ–ம். (ii) போன்றது. இனி $y-x=0$, $y+x=0$ என்பன உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$y-x+1=0$, $y+x+5=0$ என்பவற்றின் இடைவெட்டு $(-2,-3)$ என்பது எளிதிற் காணப்படும்.

$x=X-2$, $y=Y-3$ என இடுக. இது $(-2, -3)$ என்பது புதிய உற்பத்தியாகப் பழைய அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமான புதிய அச்சுக்கள் எடுத்தலாகும்.

ஆயின், $y-x+1=Y-X$, $y+x+5=Y+X$.

அன்றியும் $dx=dX$, $dy=dY$.

அப்பொழுது சமன்பாடு $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{Y-X}{Y+X}$.

என வரும். ஈற்றுப் பிரிவிலுள்ளதுபோல், தீர்வு

$$\text{மட}\,(Y^2+X^2)+2\;\text{தான்}^{-1}\frac{Y}{X}+a=0,$$

அதாவது மட $[(y+3)^2+(x+2)^2]+2$ தான்$^{-1}\dfrac{y+3}{x+2}+a=0$ ஆகும்.

உ–ம் (ii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y-x+5}$.

இச்சமன்பாட்டை ஈற்று உதாரணத்தைப்போற் செய்ய முடியாது; ஏனெனின் $y-x+1=0$, $y-x+5=0$ என்னுங் கோடுகள் சமாந்தரமாகும்.

வலக்கைப் பக்கம் $y-x$ இன் சார்பாதலால் $y-x=z$, அதாவது $\dfrac{dy}{dx}-1=\dfrac{dz}{dx}$, என இடுவோம்.

அப்பொழுது சமன்பாடு

$$1+\frac{dz}{dx}=\frac{z+1}{z+5},\ \text{என வரும்.}$$

அதாவது $$\frac{dz}{dx}=\frac{-4}{z+5}.$$

மாறிகளை வேறாக்க, $(z+5)\,dz=-4dx$.

தொகையிட, $\frac{1}{2}z^2+5z=-4x+c$,

அதாவது $z^2+10z+8x=2c$.

$z$ இற்குப் பிரதியிட, $(y-x)^2+10\,(y-x)+8x=2c$,

அதாவது $2c=a$ என இட $(y-x)^2+10y-2x=a$,

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $(2x-y)\,dy=(2y-x)\,dx$

(2) $(x^2-y^2)\dfrac{dy}{dx}=xy$

(3) $2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$

(4) $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{(x^2+y^2)}$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+9y-20}{6x+2y-10}$

(6) $(12x+21y-9)\,dx+(47x+40y+7)\,dy=0$

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$

(8) $(x+2y)\,(dx-dy)=dx+dy$

## 18. ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்

$\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்னுஞ் சமன்பாடு, $P$, $Q$ என்பன ($y$ இன் சார்புகளாகாது) $x$ இன் சார்புகளாகுமிடத்து, முதல்வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு எனப்படும்.

ஓர் எளிய உதாரணம் $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}\cdot y=x^2$ ஆகும்.

ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $x$ ஆற் பெருக்குவோமாயின் இது

$$x\frac{dy}{dx}+y=x^3$$

அதாவது $$\frac{d}{dx}(xy)=x^3.$$

ஆகவே, தொகையிட, $xy=\frac{1}{4}x^4+c$.

கண்கூடாகத் தொகையீட்டுக் காரணியாகும் $x$ ஐப் பயன்படுத்தி இவ்வுதாரணத்தைத் தீர்த்துள்ளோம்.

**19.** பொது வகையில் தொகையீட்டுக் காரணியைக் காண முயல்வோம். $R$ அத்தகைக் காரணியாயின்

$$R\frac{dy}{dx}+RPy=RQ$$

என்பதன் இடக்கைப்பக்கம் ஏதோ பெருக்கத்தின் வகையீட்டுக் குணகமாகும்; $R\dfrac{dy}{dx}$ என்னும் முதலுறுப்புக் காட்டுவது, இப்பெருக்கம் $Ry$ ஆதல் வேண்டுமென்பதே.

ஆகவே, $R\dfrac{dy}{dx}+RPy=\dfrac{d}{dx}(Ry)=R\dfrac{dy}{dx}+y\dfrac{dR}{dx}$ என இடுக. இது

$$RPy=y\frac{dR}{dx},$$

அதாவது $Pdx=\dfrac{dR}{R}$,

அதாவது $\displaystyle\int Pdx=$ மட $R$,

$$R=e^{\int Pdx}$$

இது பின்வரும் நெறியைத் தரும் :

$\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்பதைத் தீர்த்தற்கு ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும் $e^{\int Pdx}$ என்பதாற் பெருக்க.

## 20. உதாரணங்கள்

(i) பிரிவு 18 இல் கருதப்பட்ட உதாரணமாகிய

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y=x^2$$

என்பதை எடுக்க. இங்கு $P=\dfrac{1}{x}$, $\displaystyle\int Pdx=$ மட $x$, $e^{\text{மட}\ x}=x$. ஆயின் இந்நெறி, முன் பயன்படுத்திய அதே காரணியே.

(ii) $$\frac{dy}{dx}+2xy=2e^{-x^2}.$$

இங்கு $P=2x$, $\displaystyle\int Pdx=x^2$, தொகையீட்டுக் காரணி $e^{x^2}$.

இதனாற் பெருக்க, $e^{x^2}\dfrac{dy}{dx}+2xe^{x^2}y=2$,

அதாவது $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right)=2$.

தொகையிட, $ye^{x^2}=2x+c$, $y=(2x+c)e^{-x^2}$.

(iii) $$\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x}.$$

இங்கு தொகையீட்டுக் காரணி $e^{3x}$.

இதனாற் பெருக்க, $e^{3x}\dfrac{dy}{dx}+3e^{3x}y=e^{5x}$,

அதாவது $\dfrac{d}{dx}(ye^{3x})=e^{5x}$.

தொகையிட, $ye^{3x}=\dfrac{1}{5}e^{5x}+c$,

$$y=\frac{1}{5}e^{2x}+ce^{-3x}.$$

## 21. ஏகபரிமாண வடிவத்திற்கு ஒடுக்கத்தகு சமன்பாடுகள்.

உ-ம் (i) $xy-\dfrac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$.

வலக்கைப்பக்கம் $y$ கொள்ளாவாறு $y^3$ ஆல் வகுக்க.

$$x.\ \frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}=e^{-x^2},$$

அதாவது $x.\ \dfrac{1}{y^2}+\frac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)=e^{-x^2}$.

$\dfrac{1}{y^2}=z$ எனப் பிரதியிட,

$$2xz+\frac{dz}{dx}=2e^{-x^2}.$$

இது ஏகபரிமாணமாகும் ; ஈற்றுப்பிரிவின் உ-ம் (ii) இல் $y$ இற்குப் பதிலாக $z$ ஐ இடுதலால் இது பெறப்படும்.

ஆகவே தீர்வு $z=(2x+c)e^{-x^2}$,

அதாவது $\dfrac{1}{y^2}=(2x+c)\,e^{-x^2}$,

$$y=\pm\ \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{(2x+c)}}.$$

$P$, $Q$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாயுள்ள

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$$

என்னும் "பேணுலீயின் சமன்பாட்டின்" ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாக இவ்வுதாரணம் உள்ளது. யேக்கப் பேணூலீ (1654–1705) இதனை 1695 இல் படித்தார்.

உ-ம் (ii) $(2x-10y^3)\dfrac{dy}{dx}+y=0$.

இது தனது உண்மை நிலையில் ஏகபரிமாணமாகாது ; ஆனால் $\dfrac{dx}{dy}$ ஆல் பெருக்குமிடத்து

$$2x - 10y^3 + y\ \frac{dx}{dy} = 0,$$

அதாவது $$\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = 10y^2.$$

$y$ யைச் சாராமாறியாகக் கொள்ளுமிடத்து இது ஏகபரிமாணமாகும்.

முன்போலச் செய்ய $y^2$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணியெனவும் தீர்வு

$$y^2x = 2y^5 + c,$$

அதாவது $$x = 2y^3 + cy^{-2}$$

எனவுங் காண்போம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(x+a)\ \dfrac{dy}{dx} - 3y = (x+a)^5$

(2) $x$ கோசை $x\ \dfrac{dy}{dx} + y$ ($x$ சைன் $x +$ கோசை $x$) $= 1$

(3) $x$ மட $x\ \dfrac{dy}{dx} + y = 2$ மட $x$.

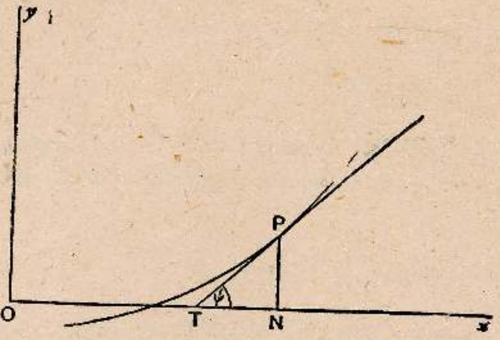
(4) $x^2y - x^3\ \dfrac{dy}{dx} = y^4$ கோசை $x$.

(5) $y + 2\ \dfrac{dy}{dx} = y^3\ (x-1)$

(6) $(x + 2y^3)\ \dfrac{dy}{dx} = y$

(7) $dx + x\,dy = e^{-y}$ சீக$^2 y\ dy$

**22. கேத்திரகணிதப் பிரசினங்கள்.** **நிமிர்கோணக் கடவைகள்** வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்கு வழிகாட்டுஞ் சில கேத்திரகணிதப் பிரசினங்களை இப்போது எடுத்துச் சிந்திப்போம்.



படம் 6.

**உ–ம் (i) உபதொடலி மாறிலியாகும் வளையியைக் காண்க.**

உபதொடலியாகிய $TN = PN$ கோதா $\psi = y\,\frac{dx}{dy}$.

ஆகவே
$$y\frac{dx}{dy} = k,$$
$$dx = k\frac{dy}{y},$$
$$x + c = k\ \text{மட}\ y,$$
$$y = ae^{\frac{x}{k}}, \quad c = k\ \text{மட}\ a.$$

**உ–ம் (ii) $P$, $Q$ என்னும் எவையேனும் இருபுள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தனது நீளம் $O$ என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து $P$, $Q$ என்பவற்றின் தூரங்களினது வித்தியாசத்திற்கு விகிதசமமாகும் வளையியைக் காண்க.**

$P$ யை நிலையாக வைப்போமாயின் $QP$ என்னும் வில் ($OQ$—மாறிலி) என்பதைப் போல் மாறும். $O$ வை முனைவாகவும் $OP$ யைத் தொடக்கக் கோடாகவும் எடுத்து முனைவாள் கூறுகளைப் பயன்படுத்துக. அப்பொழுது, $Q$ ஆனது $(r, \theta)$ ஆயின், $s = kr - kr_0$.

ஆனால், நுண்கணித நூல்களிற் காட்டப்படுவது போல்
$$(ds)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2.$$

ஆகவே, பிரசினத்தில்
$$k^2\,(dr)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2,$$

அதாவது
$$d\theta = \pm\sqrt{(k^2 - 1)}\,\frac{dr}{r}$$
$$= \frac{1}{a}\,\frac{dr}{r}, \quad \text{என்க ;}$$

இது சம கோணச் சுருளியாகிய $r = ce^{a\theta}$ யைத் தரும்.

**உ–ம் (iii) $a$ ஆனது மாறும் பரமானமாக $ay^2 = x^3$ என்னுங் குறை முப்படிப் பரவளைவுக் குடும்பத்தின் நிமிர்கோணக் கடவைகளைக் காண்க.**

ஒரு குடும்பத்தின் ஒவ்வோர் அங்கமும் மற்றைக் குடும்பத்தின் ஒவ்வோர் அங்கத்தையும் செங்கோணங்களில் வெட்டுமாறு உள்ள இரு வளையிக் குடும்பங்கள் நிமிர்கோணக் கடவைகள் எனப்படும்.

முதன் முதலில் $a$ யை நீக்கித் தந்த குடும்பத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

$$ay^2 = x^3 \text{ ஐ வகையிட}$$
$$2ay = \frac{dy}{dx} = 3x^2 ;$$

ஆகவே, வகுத்தலால்,

$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

இனி $\psi$ ஆனது $x$ – அச்சோடு தொடலியின் சாய்வாயின் $\dfrac{dy}{dx}=$ தான் $\psi$. கடவைக்கு $\psi$ இன் பெறுமானம், $\psi'$ எனக,

$$\psi=\psi'\pm\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\text{அதாவது தான் } \psi=-\text{ கோதா } \psi'.$$

என்பதாலே தரப்படும்; அதாவது தந்த குடும்பத்தின் $\dfrac{dy}{dx}$, கடவையின் $-\dfrac{dx}{dy}$ என்பதால் இடமாற்றப்படும்.

இம்மாற்றத்தை (1) இற் செய்ய

$$-\frac{2}{y}\frac{dx}{dy}=\frac{3}{x},$$

$$2x\,dx+3y\,dy=0,$$

$$2x^2+3y^2=c\ ;$$

இது இயல்பொத்தனவும் இயல்பொத்தமைந்தனவுமான நீள்வளையக் குடும்பம்.

**உ–ம் (i) $r=a\theta$ என்னுஞ் சுருளிக் குடும்பத்தை மாறுக் கோணம் $\alpha$ இல் வெட்டும் வளையிக் குடும்பத்தைக் காண்க.**

முன்போல் $a$ யை நீக்கித் தொடங்குவோம். இது தருவது $r\dfrac{d\theta}{dr}=\theta$.

இனி $r\dfrac{d\theta}{dr}=$ தான் $\phi$; இங்கு $\phi$ என்பது தொடலிக்கும் ஆரைக்காவிக்குமிடையேயுள்ள கோணம். $\phi'$ ஆனது இரண்டாங் குடும்பத்திற்கு ஒத்த கோணமாயின்

$$\phi'=\phi\pm\alpha,$$

$$\text{தான் } \phi'=\frac{\text{தான் } \phi\pm\text{தான் } \alpha}{1\pm\text{தான் } \phi\text{ தான் } \alpha}=\frac{\theta+k}{1-k\theta}\ ;$$

இங்கு தான் $\phi$ இற்குக் காணப்பட்ட பெறுமானத்தை இட்டு, $\pm$ தான் $\alpha$ இற்குப் பதிலாக $k$ எழுதப்பட்டுள்ளது.

ஆயின் இரண்டாங் குடும்பத்திற்கு

$$r\frac{d\theta}{dr}=\frac{\theta+k}{1-k\theta}.$$

இதனைத் தீர்த்தல் மாணக்கன் செய்ய வேண்டிய வேலையாக விடப்பட்டுள்ளது. முடிபு

$$r=c\,(\theta+k)^{k^2+1}e^{-k\theta}$$

எனக் காணப்படும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) உப செவ்வன் மாறிலியாகும் வளையியைக் காண்க.

(2) ஒரு வளையியின் $P$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள தொடலி, $x$ – அச்சை $T$ யில் சந்திக்கும். $O$ உற்பத்தியாக $OP=PT$ ஆகும் வளையியைக் காண்க.

(3) தொடலிக்கும் ஆரைக் காவிக்குமிடையேயுள்ள கோணம் காவிக் கோணத்தின் இரு மடங்காகும் வளையியைக் காண்க.

(4 செவ்வன் மீது நிலைக்கூற்றின் எறியம் மாறிலியாகும் வளையியைக் காண்க.

பின்வரும் வளையிக் குடும்பங்களினது நிமிர் கோணக் கடவைகளைக் காண்க :

(5) $x^2-y^2=a^2$. (6) $x^{4/3}+y^{4/3}=a^{4/3}$.

(7) $px^2+qy^2=a^2$, ($p$, $q$ என்பன மாறிலிகள்)

(8) $r\theta=a$. (9) $r=\dfrac{a\theta}{1+\theta}$.

(10) ஓர் ஒருமை வட்டக் குடும்பத்தை $\alpha$ என்னும் மாறாக் கோணத்தில் வெட்டும் வளையிக் குடும்பத்தைக் காண்க.

## அத்தியாயம் II இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $(3y^2-x)\dfrac{dy}{dx}=y$. (2) $x\dfrac{dy}{dx}=y+2\sqrt{(y^2-x^2)}$.

(3) $\text{தான் } x \text{ கோசை } y\, dy+\text{சைன் } y\, dx+e^{\text{சைன் } x}\, dx=0$

(4) $x^3\dfrac{dy}{dx}+3y^2=xy^3$.

(5) $x^3\dfrac{dy}{dx}=y^3+y^2\sqrt{(y^2-x^2)}$.

(6) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ax+hy+g}{hx+by+f}$ என்பது ஒரு கூம்பு வளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

(7) $y\, dx-2x\, dy=0$ என்பது பொது அச்சும் பொது உச்சித் தொடலியுமுள்ள பரவளைவுத் தொகுதியைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

(8) $(4x+3y+1)\, dx+(3x+2y+1)\, dy=0$ என்பது $x+y=0$, $2x+y+1=0$ என்னும் கோடுகள் அணுகு கோடுகளாயுள்ள அதிபரவளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

(9) $\dfrac{dy}{dx}+2y$ தான் $x=$ சைன் $x$ ஆகி $x=\frac{1}{3}\pi$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆயின் $y$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{1}{8}$ எனக் காட்டுக.

(10) $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ என்னும் முதல் வரிசையிலும் படியிலுமுள்ள பொது ஏகவினச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$\text{மட } x=\int\frac{dv}{f(v)-v}+c$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு $v=y/x$.

(11) $$\frac{h+1}{p}=\frac{k+1}{q},\ \frac{h+m+1}{r}=\frac{k+n+1}{s}$$ ஆயின் $x^h y^k$

என்பது $$py\,dx+qx\,dy+x^m y^n\,(ry\,dx+sx\,dy)=0$$

இன் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியென்பதை நிறுவுக.

இம்முறையைப் பயன்படுத்தி

$$3y\,dx-2x\,dy+x^2y^{-1}\,(10y\,dx-6x\,dy)=0$$

ஐத் தீர்க்க.

(12) $$\int\frac{f\,(xy)+F\,(xy)}{f\,(xy)-F\,(xy)}\,\frac{d\,(xy)}{xy}+\text{மட}\,\frac{x}{y}=c$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை வகையிடுதலால்

$$\frac{1}{xy\,\{f\,(xy)-F\,(xy)\}}$$

என்பது $f\,(xy)\,y\,dx+F\,(xy)\,x\,dy=0$ இன் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியென்பதை சரி பிழை பார்க்க.

அது துணைகொண்டு

$$(x^2y^2+xy+1)\,y\,dx-(x^2y^2-xy+1)\,x\,dy=0$$

என்பதைத் தீர்க்க.

(13) $M\,dx+N\,dy=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு செப்பமாயின்

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

ஐ நிறுவுக.

[மாறுநிலையினது நிறுவல் பின்னிணைப்பு $A$ யில் உண்டு.]

(14) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}+Q\,f\,(x)$ ஆயின் செப்பமான சமன்பாடு பற்றிய நிபந்தனை

$$(P\,dx+Q\,dy)\,e^{\int f\,(x)\,dx}=0$$

என்பதால் திருத்தியாக்கப்படுமென்பதைச் சரி பிழை பார்க்க.

அது துணைகொண்டு

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]$$

என்பது $x$ இன் சார்பாகவேயிருக்குமாயின் $P\,dx+Q\,dy=0$ விற்கு என்றும் ஒரு தொகையீட்டுக்காரணியைக் காணலாமெனக் காட்டுக. இம்முறையால் $(x^3+xy^4)\,dx+2y^3dy=0$ என்பதைத் தீர்க்க.

(15) (i) முனைவ உபதொடலி மாறிலியாகும். (ii) முனைவ உபசெவ்வன் மாறிலியாகும் வளையியைக் காண்க.

(16) உற்பத்திக் கூடாகச் செல்வதும் தனக்கும் நிலைக்கூற்றுக்கும் $x$ – அச்சுக்குமிடையே உள்ள பரப்பளவு நிலக்கூறின் முப்படியினது $k$ மடங்கு ஆகுமாறுள்ளதுமான வளையியைக் காண்க.

(17) $PG$ என்னும் ஒரு வளையியின் செவ்வன் $x$ – அச்சை $G$ இல் வெட்டும். உற்பத்தியிலிருந்து $G$ இன் தூரம் $P$ இன் கிடைக்கூறின் இரு மடங்காயின் வளையி ஒரு செங்கோண அதிபரவளைவு என நிறுவுக.

(18) உற்பத்திக்கும் தனது யாதுமொரு புள்ளியிலுமுள்ள தொடலிக்குமிடையே வெட்டப்படும் $x$ – அச்சுப்பாகம் அப்புள்ளியின் நிலைக்கூறுக்கு விகிதசமமாகுமாறுள்ள வளையியைக் காண்க.

(19) பின்வரும் வளையிக் குடும்பங்களின் செங்கோணக் கடவைகள் காண்க :

(i) $(x-1)^2+y^2+2ax=0$

(ii) $r=a\theta$

(iii) $r=a+$ கோசை $n\theta$ ;

முதன் முடிபைக் கேத்திரகணித முறையில் விளக்குக.

(20) $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ என்னும் பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுத் தொகுதியின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெற்று அது துணைகொண்டு இத்தொகுதி, தானே தன் நிமிர்கோணக் கடவையெனக் காட்டுக.

(21) $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவுக் குடும்பத்தை 45° இல் வெட்டும் வளையித் தொகுதியைக் காண்க.

(22) $u$, $v$, $x$, $y$ என்பனவெல்லாம் மெய்யாக $u+iv=f(x+iy)$ ஆயின் $u=$ மாறிலி $v=$ மாறிலி என்னுங் குடும்பங்கள் நிமிர்கோணக் கடவைகள் என நிறுவுக.

அன்றியும் $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ ஆகுமென்பதையும் நிறுவுக.

[இத்தேற்றம் மின்நிலையியலில் விசைக்கோடுகளையும் மாறுவழுத்தக் கோடுகளையும் நீரியக்கவியலில் அருவிக் கோடுகளையும் பெறுதற்கு மிகப் பயன்படும். $u$, $v$ என்பன உடன்புணரிச் சார்புகள் எனப்படும்.]

(23) இரேடியத்தின் தேய்வுவீதம் எஞ்சியுள்ள தொகைக்கு விகிதசமமாகும். $t$ என்னும் எந்நேரத்திலும் உள்ள தொகை $A=A_0e^{-kt}$ என்பதாலே தரப்படுமென்பதை நிறுவுக.

(24) $\frac{dv}{dt}=g\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right)$ ஆகி $t=0$ ஆகுமிடத்து $v=0$ ஆயின் $v=k$ அதான் $\frac{gt}{k}$ என்பதை நிறுவுக.

[இது வெளியில் விழும் பொருளினது வேகத்தைத் தரும். வளியினது தடை $v^2$ இற்கு விகிதசமமாகுமெனக் கொள்ளுமிடத்து $t$ கூடுதலுற $v$ ஆனது $k$ என்னும் எல்லைப் பெறுமானத்தை அணுகும். இதேபோன்ற சமன்பாடு $t$ என்னும் நேரத்திற்கு அயனாக்கப்படும் ஒரு வாயுவின் அயனாக்கத்தைத் தரும்.]

(25) இரு திரவங்கள் ஒரு பாண்டத்திற் கொதிக்கின்றன. யாதுமொரு கணத்தில் ஆவியாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு திரவத்தின் தொகை இன்னும் திரவநிலையிலிருக்கும் தொகைகளின் விகிதத்திற்கு விகிதசமமெனக் காணப்படும். இத்தொகைகள் ($x$, $y$ எனக) $y=cx^k$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள தொடர்பால் தொடுக்கப்படுமென்பதை நிறுவுக.

[பாட்ரிங்ரன் எழுதிய " இரசாயனவியல் மாணாக்கருக்குரிய உயர்கணிதம் " என்பதிலிருந்து பக்கம் 220.]

# அத்தியாயம் III

## மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்

**23.** இவ்வத்தியாயத்தில் எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும் சமன்பாடுகள்

$$p_0\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x)\dots\dots\dots(1)$$

என்னும் வடிவமாகும் ; இங்கு $f(x)$ ஆனது $x$ இன் சார்பாகவும் $p$ கள் எல்லாம் மாறிலியாகவுமுள்ளன.

பொறியியல், ஒலியியல், மின்னியல் ஆகியவற்றின் எல்லா இன அதிர்வுகள் பற்றிய படிப்பில் இச்சமன்பாடுகள் மிக முக்கியமாகும். இவ்வத்தியாய முடிவிற் பல்வினப் பயிற்சிகளால் இது எடுத்துக் காட்டப்படும். கீழே தரப்படும் முறைகள் பிரதானமாய் ஒயிலர், தலம்பெயர் என்போராலாயன.

இவ்வடிவத்திலுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத் தொகுதிகளையும் எளிய உருமாற்றத்தால் இவ்வடிவத்திற்கு ஒடுக்கத்தகு சமன்பாடுகளையும் இப்பொழுது எடுத்துச் சிந்திப்போம்.

**24. மிக எளிய வகை ; முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகள்.**

$n=1$, $f(x)=0$ என எடுப்போமாயின் (1) என்னுஞ் சமன்பாடு.

$$p_0\frac{dy}{dx}+p_1y=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2),$$

என வரும்

அதாவது
$$p_0\frac{dy}{y}+p_1dx=0,$$

அல்லது
$$p_0 \text{ மட } y+p_1x=\text{மாறிலி}.$$

$$\text{மட } y=-p_1x/p_0+\text{மாறிலி}.$$

$$=-p_1x/p_0+\text{மட } A, \text{ என்க ;}$$

இது
$$y=Ae^{-p_1x/p_0}.$$

எனத் தரும்.

**25. இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடுகள்.** $n=2$, $f(x)=0$ என எடுப்போமாயின் (1) என்னுஞ் சமன்பாடு

$$p_0\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}+p_2y=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3),$$

என வரும்.

(2) என்னுஞ் சமன்பாட்டினது தீர்வு காட்டுவது $m$ ஆனது மாறிலியாக $y=Ae^{mx}$ என்பது (3) என்பதைத் திருத்தியாக்கலாம் என்பதே.

$y$ இன் இப்பெறுமானத்தோடு (3) என்னுஞ் சமன்பாடு

$$Ae^{mx}(p_0m^2+p_1m+p_2)=0 \text{ இற்கு ஒடுங்கும்.}$$

ஆயின், $m$ ஆனது,

$$p_0m^2+p_1m+p_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

இன் ஒரு மூலமாயின் $A$ யின் பெறுமானம் எதுவாயினும் $y=Ae^{mx}$ என்பது (3) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும்.

(4) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha$, $\beta$ ஆகுக. ஆயின், $\alpha$, $\beta$ சமமில்லாவிடின் சமன்பாடு (3) இற்கு $y=Ae^{\alpha x}$, $y=Be^{\beta x}$ என்னும் இரு தீர்வுகளைப் பெறுவோம்.

இனி, சமன்பாடு (3) இல் $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ எனப் பிரதியிடுவோமாயின்

$$Ae^{\alpha x}(p_0\alpha^2+p_1\alpha+p_2)+Be^{\beta x}(p_0\beta^2+p_1\beta+p_2)=0\;;$$

$\alpha$, $\beta$ என்பன சமன்பாடு (4) இன் தீர்வுகளாதலால் இது கண்கூடான உண்மையாகும்.

இவ்வாறு, இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மூன்றும் தீர்வைத் தரும் (சமன்பாடு (3) ஏகபரிமாணமென்னும் உண்மையிலிருந்து இது உடனடியாகப் புலனாகும்). இம் மூன்றும் தீர்வு தொகையில், சமன்பாட்டு வரிசைக்குச் சமமாகும் ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளுதலால் இதனைப் பொதுத் தீர்வு எனக் கொள்ளலாம்.

சமன்பாடு (4), " துணைச் சமன்பாடு " எனப்படும்.

**உதாரணம்**

$2\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ வைத் தீர்த்தற்கு $y=Ae^{mx}$ என்பதைப் பரீட்சைத் தீர்வாக இடுக. $m=-2$ அல்லது $-\frac{1}{2}$ ஆகுமிடத்து திருத்திப்படுத்தும்

$$Ae^{mx}(2m^2+5m+2)=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை இது தருகின்றது.

ஆகவே, பொதுத் தீர்வு

$$y=Ae^{-2x}+Be^{-\frac{1}{2}x} \text{ ஆகும்.}$$

### 26. துணைச் சமன்பாடு கற்பனை அல்லது சிக்கல் மூலங்கள் கொள்ளுமிடத்து வேண்டிய திரிவு.

(4) என்னுந் துணைச் சமன்பாடு, $i^2=-1$ ஆக, $p+iq$, $p-iq$ என்னும் வடிவத்தில் மூலங்கள் கொள்ளுமிடத்து

$$y=Ae^{(p+iq)x}+Be^{(p-iq)x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

என்னுந் தீர்வு கற்பனைக் கணியங்கள் கொள்ளாதவாறு திரிவு செய்தல் நன்றாகும்.

இது செய்தற்கு (பகுப்புத் திரிகோண கணிதநூல் எதனிலும் தரப்படும்).

$$e^{iqx} = \text{கோசை } qx + i \text{ சைன் } qx,$$

$$e^{-iqx} = \text{கோசை } qx - i \text{ சைன் } qx.$$

என்னுந் தேற்றங்களை வழங்குவோம்.

(5) என்னுஞ் சமன்பாடு ஆவது

$$y = e^{px}\{A(\text{கோசை } qx + i \text{ சைன் } qx) + B\,(\text{கோசை } qx - i \text{ சைன் } qx)\}$$
$$= e^{px}(E \text{ கோசை } qx + F \text{ சைன் } qx).$$

$A+B$ ஆகும் $E$ என்பதும் $i\,(A-B)$ ஆகும் $F$ என்பதும் $A$, $B$ என்பவற்றைப் போல் எதேச்சை ஒருமைகளாகும். முதற் பார்வையில் $F$ ஆனது கற்பனையாதல் வேண்டுமெனத் தோற்றும். ஆனால் அது கட்டாயம் அவ்வாறாதல் வேண்டியதில்லை. உதாரணமாக,

$$A = 1+2i, \quad B = 1-2i, \quad \text{ஆயின் } E = 2, \quad F = -4.$$

**உதாரணம்**

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$ என்பது $m = 3 \pm 2i$ என்னு மூலங்களுள்ள $m^2 - 6m + 13 = 0$ என்னுந் துணைச் சமன்பாடு தரும்.

தீர்வு ஆனது $y = Ae^{(3+2i)x} + Be^{(3-2i)x}$,

அல்லது $\quad y = e^{3x}(E \text{ கோசை } 2x + F \text{ சைன் } 2x)$ ,

அல்லது $\quad y = Ce^{3x} \text{ கோசை } (2x - \alpha)$.

என எழுதப்படலாம் ; இங்கு $C$ கோசை $\alpha = E$, $C$ சைன் $\alpha = F$ ஆதலால்,

$C = \sqrt{(E^2+F^2)}$, தான் $\alpha = \dfrac{F}{E}$.

## 27. சமமூல வகையின் விசேட இயல்பு.

துணைச் சமன்பாடு $\alpha = \beta$ ஆகுமாறு சம மூலங்களைக் கொள்ளுமிடத்து

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

என்னுந் தீர்வு $y = (A+B)e^{\alpha x}$ இற்கு ஒடுங்கும்.

இனி, ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளின் கூட்டுத் தொகையாகிய $A+B$ என்பது உண்மையில் ஒரு தனி எதேச்சை மாறிலியாகும். ஆயின் இத்தீர்வு மிகப் பொதுவான தீர்வு ஆகாது.

பொதுத் தீர்வு $y = (A+Bx)e^{\alpha x}$ ஆகுமெனப் பின்னர் (பிரிவு 34) நிறுவுவோம்.

## 28. இரண்டிலும் உயர்ந்த வரிசைகளுக்கு விரித்தல்

பிரிவுகள் 25, 26 ஆகியவற்றின் முறைகள் $n$ இன் பெறுமானம் யாதெனினும் $f(x)=0$ ஆகும் வரை (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்குப் பிரயோகிக்கலாம்.

உ-ம் (i)
$$\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0.$$

துணைச் சமன்பாடு $m=1,\ 2,$ அல்லது 3 எனத் தரும்.

$$m^3-6m^2+11m-6=0 \quad \text{ஆகும்.}$$

ஆயின்,
$$y=Ae^{x}+Be^{2x}+Ce^{3x}.$$

உ-ம் (ii)
$$\frac{d^3y}{dx^3}-8y=0.$$

துணைச் சமன்பாடு $m^3-8=0,$

அதாவது, $(m-2)\ (m^2+2m+4)=0$ ஆகும் ;

இது தருவது $m=2,$ அல்லது $-1\pm i\sqrt{3}.$

ஆயின் $y=Ae^{2x}+e^{-x}(E$ கோசை $x\sqrt{3}+F$ சைன் $x\sqrt{3}),$

அல்லது $y=Ae^{2x}+Ce^{-x}$ கோசை $(x\sqrt{3}-\alpha).$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+3y=0$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+12y=0.$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dt}+5y=0.$

(5) $\frac{d^2s}{dt^2}+4\frac{ds}{dt}+13s=0.$

(6) $\frac{d^2s}{dt^2}+4\frac{ds}{dt}+0.$

(7) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0.$

(8) $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=1,\ \frac{dy}{dx}=0$ என்பன தொடக்க நிபந்தனைகளாகவும் $x=+\propto$ அகுமிடத்து $y$ முடிவில்லாததாயும் ஈற்றுப் பயிற்சியில் தீர்வு யாது ?

(9) $\frac{d^4y}{dx^4}+13\frac{d^2y}{dx^2}+36y=0$

(10) $\frac{d^4y}{dx^4}-13\frac{d^2y}{dx^2}+36y=0$

(11) $\frac{d^3y}{dx^3}+8y=0$

(12) $\frac{d^6y}{dx^6}-64y=0$

(13) $t=0$ ஆகுமிடத்து $\theta=\alpha,\ \frac{d\theta}{dt}=0$ எனத் தரப்பட்டவிடத்து, $l\frac{d^2\theta}{dt^2}+g\theta=0$ ;

[நிலைக்குத்தோடு $\propto$ என்னுஞ் சாய்வு கொள்ளும் நிலையில் ஓய்விலிருந்து தொடங்கும் நீளம் $l$ உள்ள எளிய ஊசலினது சிற்றலைவுகள் பற்றிய அண்ணளவுச் சமன்பாடு.]

(14) $m\frac{d^2s}{dt^2}+k\frac{ds}{dt}+cs=0$ என்பதின் தீர்வில் திரிகோணகணித உறுப்புக்கள் தோன்றுதற்கு நிபந்தனை காண்க.

[தனது இயக்கக் கோட்டிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு அப்புள்ளியிலிருந்துள்ள தனது தூரத்தின் **c** மடங்காகும் விசையாற் கவரப்பட்டு தனது வேகத்தின் **k** மடங்காகும். உராய்வு தடையாலே தணிக்கப்படும் திணிவு உள்ள துணிக்கையின் இயக்கச் சமன்பாடு. வேண்டிய நிபந்தனை ஆனது இயக்கம் அலைவியக்கம் ஆதல் வேண்டுமென்பதை உணர்த்தும்; உதாரணமாக வளியில் அதிரும் ஓர் இசைக்கவர்; இங்கு அதனைச் சமநிலைக்கு மீளச் செய்தற்கு நாடும் மீள்தன்மை விசை இடப் பெயர்ச்சிக்கு விகிதசமமாக வளித்தடை வேகத்திற்கு விகித சமமாகும்.]

(15) $k^2/mc$ புறக்கணிக்கத்தகுமாறு $k$ மிகச் சிறிதாயின் பயிற்சி (14) இலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வானது அண்ணளவாகப் பூச்சியமாகுமிடத்து உள்ள தீர்வின் $e^{-kt/2m}$ மடங்காகுமென நிறுவுக.

[இது காட்டுவது : சிறு தணிப்பானது, மீடிறனைச் செய்முறையில் மாறாது வைத்து பின்னரும் அதிர்வுகளின் வீச்சத்தைப் பெருக்கல் விருத்தியிற் குறைதலுறச் செய்யுமென்பதே.]

(16) $t=0$ ஆகுமிடத்து $Q=Q_0$, $dQ=0$ எனவும் $cR^2 \angle 4L$ எனவும் தரப்படின், $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$ என்பதைத் தீர்க்க.

[$t=0$ ஆகுமிடத்து தடை R உம் தற்றூண்டுகைக் குணகம் $L$ உம் உடைய கம்பியால் தொடுக்கப்படும் பூச்சுக்கள் உடைய, கொள்ளளவு C உள்ள லேடன் சாடியினது ஒரு பூச்சில் Q ஆனது நேரம் $t$ யில் ஏற்றமாகும்.]

## 29. நிரப்பு சார்பும் குறிப்பிட்ட தொகையீடும்

இதுவரை சமன்பாடு (1) இன் $f(x)$ என்பது பூச்சியத்திற்குச் சமனாகும் உதாரணங்களையே எடுத்துள்ளோம். இப்போது $f(x)$ பூச்சியமாகாத சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கும் $f(x)$ ஐப் பூச்சியத்தால் இடமாற்றுதலாற் பெறப்படும் எளிய சமன்பாட்டின் தீர்வுக்குமுள்ள தொடர்பைக் காட்டுவோம்.

ஓர் எளிய உதாரணத்தோடு தொடங்கற்கு

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+2y=5+2x$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுத்துச் சிந்திக்க.

$y=x$ ஒரு தீர்வு என்பது கண்கூடு. எதேச்சை மாறிலிகள் எவையேனும் கொள்ளா அத்தகைத் தீர்வு குறிப்பிட்ட தொகையீடு எனப்படும்.

இனி $y=x+v$ என எழுதுவோமாயின் வகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$2\frac{d^2v}{dr^2}+5(1+\frac{dv}{dx})+2(x+v)=5+2x$$

என ஆகும். அதாவது $2\frac{d^2v}{dx^2}+5\frac{dv}{dr}+2v=0$ ;

இது தருவது $v=Ae^{-2x}+Be^{-\frac{1}{2}x}$ ஆதலால்

$$y=x+Ae^{-2x}+Be^{-\frac{1}{2}x}$$

எதேச்சை மாறிலிகள் கொள்ளும் உறுப்புக்கள் நிரப்பு சார்பு எனப்படும்.)

இதனை எளிதிற் பொதுமைப்படுத்தலாம்.

$$p_0\frac{d^nu}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots+p_{n-1}\frac{du}{dx}+p_nu=f(x)\ldots\ldots\ldots(6)$$

ஆகுமாறு $y=u$ என்பது

$$p_0\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=f(x)\ldots\ldots(7)$$

என்பதன் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடாயின் சமன்பாடு (6) இல் $y=u+v$ எனப் பிரதியிட்டுக்கொண்டு சமன்பாடு (7) ஐக் கழிக்க.

இது

$$p_0\frac{d^nv}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots\ldots+{}^{p}{}_{n-1}\frac{dv}{dx}+p_nv=0\ldots\ldots\ldots(8).$$

(8) இன் தீர்வு $n$ எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும் $v=\mathbf{F}(x)$ ஆயின் (6) இன் பொதுத்தீர்வு $y=u+\mathbf{F}(x)$ ஆகும் ; $\mathbf{F}(x)$ ஆனது நிரப்புசார்பு எனப்படும்.

ஆயின், மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஓர் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு ஒரு குறிப்பிடப்பட்ட தொகையீட்டினதும் நிரப்பு சார்பினதும் கூட்டுத்தொகையாகும் ; பின்னது இங்கு நிகழும் $x$ இன் சார்புக்குப் பூச்சியத்தைப் பிரதியிடுதலாற் பெறப்படுஞ் சமன்பாட்டின் தீர்வு.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

தந்த சார்புகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளா என வாய்ப்புப் பார்த்துப் பொதுத்தீர்வுகள் காண்க :

(1) $e^x$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=e^x$. (2) 3 ; $\frac{d^2y}{dx^2}-13\frac{dy}{dx}+12y=36$.

(3) 2 சைன் $3x$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=-10$ சைன் $3x$.

மாறிலிகளின் எப்பெறுமானங்களுக்கு, தந்த சார்புகள் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் :

(4) $ae^{bx}$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}+13\frac{dy}{dx}+42y=112e^x$.

(5) $ae^{bt}$ ; $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=60e^{-t}$. (6) $a$ சைன் $px$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}+y=12$ சைன் $2x$.

(7) $a$ சைன் $px+b$ கோசை $px$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+3y=8$ கோசை $x-6$ சைன் $x$

(8) $a$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=12$

பின்வருவனவற்றின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளைப் பரீட்சை முறையாற் பெறுக :

(9) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y=80e^{3x}$.

(10) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+37y=300e^{7x}$.

(11) $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=40$ சைன் $5x$.

(12) $\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+9y=40$ சைன் $5x$.

(13) $\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+25y=50$.

## 30. D என்னுஞ் செயலியும் அட்சரகணித அடிப்படை விதிகளும்

ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு கண்காணிப்பாற் கண்கூடாததாயின் $\frac{d}{dx}$ ஐக் குறிக்கும் D என்னுஞ் செயலியைக் கொண்ட சில முறைகளை உபயோகித்தல் இசைவாகும். துணைச் சமன்பாட்டு மூலங்கள் சமமாகுமிடத்து இச் செயலி நிரப்புசார்பின் வடிவம் நிறுவுதற்கும் பயன்படும்.

$D^2$ என்பது $\frac{d^2}{dx^2}$ இற்கும் $D^3$ என்பது $\frac{d^3}{dx^3}$ இற்கும் பயன்படுத்தப்படும், பிறவும் இவ்வாறே.

ஆயின், $2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+2y$ என்பது

$$2D^2y+5Dy+2y,$$

அல்லது $(2D^2+5D+2)y$

என எழுதப்படலாம்.

இதனை $(2D+1)$ $(D+2)$ $y$ என்னுங் காரணிப்படுத்திய வடிவத்திலும் எழுதுவோம் ; இங்கு $D$ என்பது ஒரு சாதாரண அட்சரகணிதக் கணியம் போலக் கவனிக்கப்பட்டு $D$ யிலுள்ள கோவை காரணிப்படுத்தப்படும். இதனை மெய்ப்பிக்கலாமா ?

சாதாரண அட்சரகணிதத்திற் செய்யப்படுஞ் செய்கைகள் மூன்று விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டன :

I. பரம்பல் விதி

$$m(a+b)=ma+mb\ ;$$

II. பரிவர்த்தனை விதி

$$ab=ba\ ;$$

III. சுட்டி விதி $a^m.a^n=a^{m+n}$

இனி, $D$ ஆனது இவ்விதிகளுள் முதலாவதையும் மூன்றாவதையுந் திருத்தியாக்கும் ; ஏனெனின்

$$D(u+v)=Du+Dv,$$

$D^m D^n u = D^{m+n} u$, ($m,n$ என்பன நேர்முகவெண்களாக). $D(cu) = cDu$ என்னும் இரண்டாம் விதி $c$ மாறிலியாயின் உண்மையாகும், ஆனால் $c$ என்பது மாறியாயின் உண்மையாகாது.

. அன்றியும் $D^m(D^n u) = D^n(D^m u)$, ($m$, $n$ நேர்முழுவெண்களாக). ஆயின் $D$ மாறிகளோடு பரிவர்த்தித்தலின்றிய அட்சரகணித அடிப்படை விதிகளைத் திருத்தியாக்கும். பின்வருவனவற்றில்

$$F(D) \equiv p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + \dots\dots\dots\dots P_{n-1} D + p_n,$$

என எழுதுவோம்; இங்கு $p$ கள் மாறிலிகளாக $n$ ஆனது நேர் முழுவெண்ணாகும். இதனைக் காரணிப்படுத்தற்கோ அட்சரகணித அடிப் படை விதிகளைச் சாரும் வேறு செய்கைகள் எவையேனும் செய்தற்கோ நியாயம் உண்டு. $D$ இன் மறைவலுக்கள் நிகழுமிடத்து, செயலிகளுக்கு பரிவர்த்தனை விதி எவ்வாறு உண்மையாகாதென்பது பற்றிய ஓர் உதாரணத்தை பிரிவு 37 உ-ம் (iii) இற் பார்க்க.

**31. $\mathbf{F(D)\, e^{ax} = e^{ax}\, F(a)}$.**

$$D\, e^{ax} = a\, e^{ax},$$

$$D^2\, e^{ax} = a^2\, e^{ax},$$

இவ்வாறே பிறவுமாம், ஆதலால்,

$$\begin{aligned} F(D)\, e^{ax} &= (p_0 D^n + p_1\, D^{n-1} + \dots + p_{n-1}\, D + p_n)\, e^{ax} \\ &= (p_0 a^n + p_1\ \ a^{n-1} + \dots + p_{n-1}\, a + p_n)\, e^{ax} \\ &= e^{ax}\, F(a). \end{aligned}$$

**32. $\mathbf{V}$ ஆனது $\mathbf{x}$ இன் யாதுமொரு சார்பாக $\mathbf{F(D)\{e^{ax}\, V\} = e^{ax}\, F(D+a)V}$.**

ஒரு பெருக்கத்தின் $n$ ஆம் வகையீட்டுக்குணகம் பற்றிய லைப்னிசின் தேற்றத்தால்

$$\begin{aligned} D^n(e^{ax}\ V) &= (D^n\, e^{ax})V + n(D^{n-1}\, e^{ax})\,(DV) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} n\,(n-1)\,(D^{n-2}\, e^{ax})\,(D^2\, V) + \dots + e^{ax}\,(D^n V) \\ &= a^n e^{ax} V + n\, a^{n-1} e^{ax} DV + \tfrac{1}{2}\, n(n-1) a^{n-2} e^{ax} D^2 V + \dots + e^{ax}(D^n V) \\ &= e^{ax}(a^n + n\, a^{n-1} D + \tfrac{1}{2}\, n(n-1) a^{n-2} D^2 + \dots + D^n) V \\ &= e^{ax}(D+a)^n V. \end{aligned}$$

இதேமாதிரி $D^{n-1}\{e^{ax} V\} = e^{ax}(D+a)^{n-1} V$, இவ்வாறே பிறவுமாம்.

ஆகவே,

$$\begin{aligned} F(D)\{e^{ax} V\} &= (p_0 D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_{n-1} D + p_n)\,\{e^{ax} V\} \\ &= e^{ax}\{p_0(D+a)^n + p_1(D+a)^{n-1} + \dots + p_{n-1}(D+a) + p_n\} V \\ &= e^{ax} F(D+a)\, V. \end{aligned}$$

### 33. $\mathbf{F(D^2)}$ கோசை $\mathbf{ax = F(-a^2)}$ கோசை $\mathbf{ax}$.

$$D^2 \text{ (கோசை } ax) = -a^2 \text{ கோசை } ax,$$

$$D^4 \text{ (கோசை } ax) = (-a^2)^2 \text{ கோசை } ax,$$

இவ்வாறே பிறவும். ஆதலால்,

$$F(D^2) \text{ கோசை } ax = (p_0 D^{2n} + p_1 D^{2n-2} + \ldots + p_{n-1} D^2 + p_n) \text{ கோசை } ax$$
$$= \{p_0(-a^2)^n + p_1(-a^2)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(-a^2) + p_n\} \text{ கோசை } ax$$
$$= F(-a^2) \text{ கோசை } ax.$$

இதேமாதிரி $F(D^2)$ சைன் $ax = F(-a^2)$ சைன் $ax$.

### 34. துணைச்சமன்பாடு சமமூலங்களைக் கொள்ளுமிடத்து நிரப்புசார்பு.

துணைச்சமன்பாடு சம மூலங்கள் $\alpha$ ஐக் கொள்ளுமிடத்து அது

$$m^2 - 2m\alpha + \alpha^2$$

என எழுதப்படலாம்.

ஆயின் தொடக்க வகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\alpha\frac{dy}{dx} + \alpha^2 y = 0,$$

$$\text{அதாவது} \quad (D^2 - 2\alpha D + \alpha^2)y = 0,$$

$$(D - \alpha)^2 y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

$y = Ae^{\alpha x}$ என்பது ஒரு தீர்வாகுமென்பதை ஏற்கெனவே கண்டுள்ளோம். அதி பொதுத் தீர்வு காண்டற்கு $V$ என்பது $x$ இன் சார்பாக $y = e^{\alpha x} V$ என இடுக.

பிரிவு 32 ஆல், $(D - \alpha)^2\{e^{\alpha x} V\} = e^{\alpha x}(D - \alpha + \alpha)^2 V = e^{\alpha x} D^2 V$.

ஆயின், சமன்பாடு (9) தருவது

$$D^2 V = 0,$$

$$\text{அது} \quad V = A + Bx;$$

ஆகவே $$y = (A + Bx)e^{\alpha x}.$$

இதேமாதிரி $(D - \alpha)^p y = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $D^p V = 0$ இற்கு ஒடுங்கும்; இது தருவன

$$V = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_p x^{p-1}),$$
$$y = e^{\alpha x}(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_p x^{p-1}).$$

$$(D - \alpha)^p (D - \beta)^q (D - r)^r y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

என்பதிலுள்ளதுபோல் பல்வேறு மறிதந்த மூலங்கள் உண்டெனின், செயலிகள் பரிவர்த்திக்கப்படலாமாதலால், இச்சமன்பாட்டை

$$(D - \beta)^q (D - r)^r \{(D - \alpha)^p y\} = 0$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதலாமென்பதைக் கவனிப்போம்; ஆகவே, இது

$$(D-\alpha)^p y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

என்னும் எளிய சமன்பாட்டின் யாதுமொரு தீர்வால் திருத்தியாக்கப்படும். இதேமாதிரி, சமன்பாடு (10) ஆனது

$$(D-\beta)^q y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

$$(D-r)^r y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

என்பனவற்றுள் யாதுமொன்றினது எத்தீர்வாலுந் திருத்தியாக்கப்படும்.

(10) இன் பொதுத் தீர்வு (11), (12), (13) ஆகியவற்றின் பொதுத் தீர்வுகளினது கூட்டுத் தொகையாகும்; இது $(p+q+r)$ எதேச்சை மாறிலிகள் கொள்ளும்.

உ–ம் (i) $$(D^4-8D^2+16)y=0,$$

அதாவது $$(D^2-4)^2 y = 0.$$

என்பதைத் தீர்க்க.

துணைச் சமன்பாடு $(m^2-4)^2=0$ ஆகும்,

$m=2$ (இரு முறை) அல்லது $-2$ (இரு முறை),

ஆயின் நெறியின்படி தீர்வு

$$y=(A+Bx)e^{2x}+(E+Fx)e^{-2x}.$$

உ–ம் (ii) $(D^2+1)^2 y = 0$ என்பதைத் தீர்க்க,

துணைச் சமன்பாடு $(m^2+1)^2=0$,

$m=i$ (இரு முறை) அல்லது $-i$ (இரு முறை),

ஆயின் $$y=(A+Bx)e^{ix}+(E+Fx)e^{-ix},$$

அல்லது $y=(P+Qx)$ கோசை $x+(R+Sx)$ சைன் $x$.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $(D^4+2D^3+D^2)y=0.$ (2) $(D^6+3D^4+3D^2+1)y=0.$

(3) $(D^4-2D^3+2D^2-2D+1)y=0.$ (4) $(4D^5-3D^3-D^2)y=0.$

(5) $F(D^2)$ $(P$ அகோசை $ax+Q$ அசைன் $ax)$

$= F(a^2)$ $(P$ அகோசை $ax+Q$ அசைன் $ax)$

எனக் காட்டுக.

(6) $(D-a)^{4n}$ $(e^{ax}$ சைன் $px) = p^{4n}e^{ax}$ சைன் $px$.

எனக் காட்டுக.

## 35. $f(x)=e^{ax}$ ஆகுமிடத்து, குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் காண்டற்குரிய குறியீட்டு முறைகள்.

பின்வரும் முறைகள், $D$ என்னுஞ் செயலியை ஒரு சாதாரண அட்சர கணிதக் கணியமாகப் பாவிக்கப்படும் கருத்தின் விருத்தியாகும். முதன் முதல் தக்கனவெனத் தோற்றும் செய்கைகள் எவையையுஞ் செய்து கொண்டு பின்னர் இவ்வண்ணம் ஒரு முடிபு பெறப்படுமிடத்து அதனை நேரடி வகையிடலால் வாய்ப்புப் பார்த்துப் பரிசோதனை முறையில் முன்னேறுவோம். $F(D)y=f(x)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் குறித்தற்கு குறிப்பீடு வழங்குவோம். $\frac{1}{F(D)}f(x)$.

(i) $f(x)=e^{ax}$ ஆயின் பிரிவு 31 இன்

$$F(D)e^{ax}=e^{ax}F(a)$$

என்னும் முடிபு காட்டுவது $F(a)\neq 0$ ஆகும் வரை $\frac{1}{F(a)}e^{ax}$ என்பது $\frac{1}{F(D)}e^{ax}$ இன் ஒரு பெறுமானமாகலாமென்பதே. இதனை எளிதில் சரிபார்க்கலாம் ; ஏனெனின்

$$F(D)\left\{\frac{1}{F(a)}e^{ax}\right\}=\frac{e^{ax}(Fa)}{F(a)},\quad \text{பிரிவு 31 ஆல்,}$$
$$=e^{ax}.$$

(ii) $F(a)=0$ ஆயின் $(D-a)$ ஆனது $F(D)$ இன் ஒரு காரணி ஆதல் வேண்டும். $Q(a)\neq 0$ ஆக, $F(D)=(D-a)^p\,Q(D)$ என உத்தேசிக்க.

ஆயின் பிரிவு 32 இன்

$$F(D)\{e^{ax}V\}=e^{ax}F(D+a)V$$

என்னு முடிபு காட்டுவது $V$ ஆனது 1 ஆயின் பின்வருவது உண்மையாகலாமென்பதே :

$$\frac{1}{F(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^p\phi(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^p}\left\{\frac{e^{ax}.1}{\phi(a)}\right\}=\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{1}{D^p}.1$$
$$=\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{x^p}{p!};$$

இங்கு, $\frac{1}{D}$ என்பது $D$ இன்கு நேர்மாறான செயலியாக, அதாவது $x$ ஐக் குறித்துத் தொகையிடுஞ் செயலியாக, $\frac{1}{D^p}$ ஆனது $p$ முறை தொகையிடும் என்னும் இயற்கையான எண்ணம் கொள்ளப்படும். பரிசோதனை முறையிற் பெறப்படும் இம்முடிபு எளிதில் வாய்ப்புப் பார்க்கப்படலாம் ;

ஏனெனின்

$$F(D)\left\{\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{x^p}{p!}\right\}=(D-a)^p\phi(D)\left\{\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{x^p}{p!}\right\}$$

$$=\phi(D)\left[(D-a)^p\left\{\frac{e^{ax}}{\phi(a)}\frac{x^p}{p!}\right\}\right]$$

$$=\phi(D)\left[\frac{e^{ax}}{\phi(a)}D^p\frac{x^p}{p!}\right], \quad \text{பிரிவு 32 ஆல்,}$$

$$=\phi(D)\left[\frac{e^{ax}}{\phi(a)}.1\right]$$

$$=e^{ax}, \quad \text{பிரிவு 31 ஆல்}$$

எண் பயிற்சிகளைச் செய்யுமிடத்துப் பரிசோதனை முறைகளை சரி பிழை பார்த்தல் வேண்டியதில்லை,

உ-ம் (i) $$(D+3)^2y=50e^{2x}.$$

குறிப்பிட்ட தொகையீடு

$$\frac{1}{(D+3)^2}.\,50e^{2x}=\frac{50e^{2x}}{(2+3)^2}=2e^{2x}.$$

நிரப்பு சார்பைச் சேர்க்க

$$y=2e^{2x}+(A+Bx)e^{-3x}.$$

உ-ம் (ii). $$(D-2)^2y=50e^{2x}.$$

$\dfrac{1}{(D-2)^2}50e^{2x}$ இல் $D$ இற்கு 2 ஐப் பிரதியிடுவோமாயின் முடிவிலியைப் பெறுவோம்.

மற்றை முறையை வழங்கில்

$$\frac{1}{(D-2)^2}.\,50e^{2x}=50e^{2x}\frac{1}{D^2}.\,1=50e^{2x}\,.\,\tfrac{1}{2}x^2=25x^2e^{2x}.$$

நிரப்பு சார்பைச் சேர்க்க

$$y=25x^2e^{2x}+(A+Bx)e^{2x}.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(D^2+6D+25)y=104e^{3x}$.

(2) $(D^2+2pD+p^2+q^2)y=e^{ax}$.

(3) $(D^2-9)y=54e^{3x}$.

(4) $(D^3-D)y=e^x+e^{-x}$.

(5) $(D^2-p^2)y=a$ அசைன் $px$.

(6) $(D^3+4D^2+4D)y=8e^{-2x}$.

**36. f(x) = கோசை ax ஆகுமிடத்து, குறிப்பிட்ட தொகையீடு.**

பிரிவு 33 இலிருந்து

$$\phi(D^2)\ \text{கோசை}\ ax = \phi(-a^2)\ \text{கோசை}\ ax.$$

இது, $D^2$ ஆனது இருக்கும் இடமெல்லாம் $-a^2$ ஐ எழுதுதலால் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைப் பெறலாமென்பதையே காட்டுகின்றது.

உ—ம் (i) $(D^2+3D+2)y = \text{கோசை}\ 2x.$

$$\frac{1}{D^2+3D+2}\ \text{கோசை}\ 2x\ \frac{1}{-4+3D+2}\cdot\text{கோசை}\ 2x = \frac{1}{3D-2}\cdot\text{கோசை}\ 2x$$

பகுதியில் $D^2$ ஐப் பெறுதற்கு, சேடுகளுக்குக் கையாளப்படும் வழக்கமான முறை காட்டுவதுபோல்,

$$\frac{1}{3D-2} = \frac{3D+2}{9D^2-4}\ \text{என எழுதுக}$$

$$\text{இது} \quad = \frac{3D+2}{-36-4}\ \text{கோசை}\ 2x$$

$$= -\frac{1}{40}(3D\ \text{கோசை}\ 2x + 2\ \text{கோசை}\ 2x)$$

$$= -\frac{1}{40}(-6\ \text{சைன்}\ 2x + 2\ \text{கோசை}\ 2x)$$

$$= \frac{1}{20}(3\ \text{சைன்}\ 2x - \text{கோசை}\ 2x)$$

உ—ம் (ii) $(D^3+6D^2+11D+6)\ y = 2\ \text{சைன்}\ 3x.$

$$\frac{1}{D^3+6D^2+11D+6}\ 2\ \text{சைன்}\ 3x = \frac{1}{2-9D-54+11D+6}\ \text{சைன்}\ 3x$$

$$= \frac{1}{D-24}\ \text{சைன்}\ 3x$$

$$= \frac{D+24}{D^2-576}\ \text{சைன்}\ 3x$$

$$= -\frac{1}{585}(3\ \text{கோசை}\ 3x + 24\ \text{சைன்}\ 3x)$$

$$= -\frac{1}{195}(\text{கோசை}\ 3x + 8\ \text{சைன்}\ 3x)$$

பெற்ற முடிபுகள் திருத்தமாகுமென்பதை இனி நேரடி வகையிடலாற் காட்டுவோம்.

இம்முறை $P$, $Q$, $a$, என்பன மாறிலிகளாகும் $[\phi(D^2)+D\psi(D^2)]$ $y = P\ \text{கோசை}\ ax + Q\ \text{சைன்}\ ax$ என்பதற்குப் பிரயோகிக்கப்பட

$$\frac{\phi(-a^2)(P\ \text{கோசை}\ ax + Q\ \text{சைன்}\ ax) + a\psi(-a^2).(P\ \text{சைன்}\ ax - Q\ \text{கோசை}\ ax)}{\{\phi(-a^2)\}^2 + a^2\ \{\psi(-a^2)\}^2.}$$

பகுதி மறையாதாயின் இதை உண்மையில் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடெனக் காட்டுவது எளிதாகும். புறநடை வகை பின்னர் எடுத்து ஆளப்படும் (பிரிவு 38).

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(D+1)y = 0$ சைன் $2x$. (2) $(D^2-5D+6)y = 100$ சைன் $4x$

(3) $(D^2+8D+2)y = 48$ கோசை $x - 16$ சைன் $x$

(4) $(D^2+D+401)y =$ சைன் $20x + 40$ கோசை $20x$

(5) $\frac{d^2s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} + p^2s = a$ கோசை $qt$

என்பதன் குறிப்பிட்ட தொகையீடு $b$ கோசை $(qt - \epsilon)$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாமெண்பதை நிறுவுக ; இங்கு $b = a/\{(p^2-q^2)^2 + 4k^2q^2\}^{\frac{1}{2}}$, தான் $\epsilon = 2kq/(p^2-q^2)$.

அது துணைகொண்டு $q$ ஆனது மாறியாகவும் $k$, $p$, $a$ என்பன மாறிலிகளாகவும் $k$ மிகச் சிறிதாகவும் இருப்பின் அண்ணளவாக $q = \sqrt{(p^2-2k^2)} = p$ ஆகுமிடத்து $b$ மிகப் பெரிதெனவும் அண்ணளவாக $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, $b = a/2kp$ எனவும் நிறுவுக.

[இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு வேகத்திற்கு விகிதசமமாகும் விசையால் தணிக்கப்பட்டு, ஓர் ஆவர்த்தன வெளி விசையால் தாக்கப்படும் அதிரும் தொகுதியொன்றைப் பற்றியது. குறிப்பிட்ட தொகையீடு வலிந்த அதிர்வுகளையும், நிரப்புசார்பு விரைவாகத் தணிக்கப்படும் சுயாதீன அதிர்வுகளையும் தரும் (பிரிவு 28 ஐப் பின் தொடரும் பயிற்சி 15 ஐ பார்க்க).]

வெளி விசையின் $2\pi/q$ என்னும் ஆவர்த்தனம் ($2\pi/\sqrt{(p^2-k^2)}$ அல்லது அண்ணளவாக $2\pi/p$ ஆகும்) சுயாதீன அதிர்வுகளின் ஆவர்த்தனத்திற்கு ஏறக்குறையச் சமமாகுமாயின் வலிந்த அதிர்வுகள் மிகப்பெரிய வீச்சம் கொள்ள $\epsilon$ என்னும் வெளி விசைக்கும் மறுகைக்குமுள்ள அவத்தை வித்தியாசம் அண்ணளவாக $\frac{\pi}{2}$ ஆகும். இது "மருவிசை" என்னும் முக்கியமான தோற்றப்பாடு ; இது ஒலியியலிலும் எந்திரவியலிலும் கம்பியில்லாத் தந்திமுறையிலும் முக்கியமான பிரயோகங்களை உடையது.]

**37. m என்பது நேர்முழுவெண்ணாக $f(x) = x^m$ ஆகுமிடத்து, குறிப்பிட்ட தொகையீடு**

இவ்வகையிற் பரிசோதனை முறையானது, $\frac{1}{F(D)}$ என்பதை $D$ இன் ஏறு வலுக்களில் விரித்தலாகும்.

உ–ம் (1)

$$\frac{1}{D^2+4}x^2 = \tfrac{1}{4}(1+\tfrac{1}{4}D^2)^{-1}x^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{1}{4}D^2 + \tfrac{1}{16}D^4 \ldots)x^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(x^2 - \tfrac{1}{2}).$$

ஆகவே நிரப்பு சார்பைச் சேர்க்க

$$(D^2+4)y=x^2$$

என்பதற்குக் காட்டப்படுந் தீர்வு

$$y=\tfrac{1}{4}(x^2-\tfrac{1}{2})+A \text{ கோசை } 2x+B \text{ சைன் } 2x.$$

உ-ம் (ii) $\dfrac{1}{D^2-4+3}\,x^3=\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-D}-\dfrac{1}{3-D}\right)x^3$, பகுதிப் பின்னங்களால்,

$$=\tfrac{1}{2}\left\{(1+D+D^2+D^3+D^4+\ldots)-\tfrac{1}{3}\left(1+\frac{D}{3}+\frac{D^2}{9}+\frac{D^3}{27}+\frac{D^4}{81}+\ldots\right)\right\}x^3$$

$$=\{\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{9}D+\tfrac{13}{27}D^2+\tfrac{40}{81}D^3+\tfrac{121}{243}D^4+\ldots\}x^3$$

$$=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{4}{3}x^2+\tfrac{26}{9}x+\tfrac{80}{27}.$$

நிரப்பு சார்பைச் சேர்க்க

$$(D^2-4D+3)y=x^3$$

என்பதற்குக் காட்டப்படும் தீர்வு

$$y=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{26}{9}x+\tfrac{80}{27}+Ae^x+Be^{3x}.$$

உ-ம் (iii)

$$\frac{1}{D^2(D^2+4)}\cdot 96x^2=96\cdot\frac{1}{D^2}\left\{\frac{1}{D^2+4}x^2\right\}$$

$$=96\cdot\frac{1}{D^2}\cdot\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{2}\right), \text{ உ–ம் (i) இலிருந்து,}$$

$$=96\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$=2x^4-6x^2$$

ஆகவே, $D^2(D^2+4)\,y=96x^2$ என்பதன் தீர்வு

$$y=2x^4-6x^2+A \text{ கோசை } 2x+B \text{ சைன் } 2x+E+Fx.$$

**வேறு முறை**

$$\frac{1}{D^2(D^2+4)}\cdot 96x^2=\frac{96}{D^2}\cdot\tfrac{1}{4}\,(1-\tfrac{1}{4}D^2+\tfrac{1}{16}D^4-\ldots)\,x^2$$

$$=(24D^{-2}-6+\tfrac{3}{2}D^2-\ldots)\,x^2$$

$$=2x^4-6x^2+3.$$

இது நிரப்பு சார்பில் உட்படுத்தப்படும் 3 என்னும் மேலதிகமான உறுப்பைத் தரும்.

உதாரணங்கள் **(1), (11)** என்பவற்றில் $F(D)$ ஆனது $D$ யை ஒரு காரணியாக் கொள்ளாவிடத்து வழங்கப்படும் முறை பின்வருமாறு மெய்ப்பிக்கப் படலாம். விரிகள் சாதாரண நீள்வகுத்தலாற் பெறப்பட்டனவென உத்தேசிக்க. பகுதிப் பின்னங்கள் வழங்கல் செய்முறையிற் கூடுதலாக

இசைவாகிய போதிலும் இது என்றும் சாத்தியமாகும். ஈவு $D^m$ என்பதைக் கொள்ளும்வரை வகுத்தல் தொடர்ந்து செய்யப்படுமாயின், மீதி, $D^{m+1}$ என்பதை ஒரு காரணியாகக் கொள்ளும். அதனை $\phi(D).D^{m+1}$ எனக் கூறுக. ஆயின்

$$\frac{1}{F(D)}=c_0+c_1D+c_2D^2+\dots c_mD^m+\frac{\phi(D).D^{m+1}}{F(D)}\dots\dots\dots(1).$$

இது $$1=F(D)\{c_0+c_1D+c_2D^2+\dots c_mD^m\}+\phi(D).D^{m+1}\dots\dots\dots(2)$$
என்பதற்கு வழிகாட்டும் ஓர் அட்சரகணிதச் சர்வசமன்பாடாகும்.

$D$ ஆனது ஓர் அட்சரகணிதக் கணியமாகுமிடத்து உண்மையாகும் சமன்பாடு (2), $D$ என்னுஞ் செயலிக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாமெனக் காட்டப்பட்டுள்ள ஆரம்ப அட்சரகணித விதிகளையே சாரும் எளிய வடிவமாகும்: அது, $D$ இன் சார்புகளால் வகுக்குமிடத்து எழும் வில்லங்கங்களைக் கொண்டிராது. ஆகவே (2), அதன் ஒவ்வொரு பக்கமும் ஒரு செயலியாகக் கருதப்படுமிடத்தும் உண்மையாகும். $D^{m+1}x^m=0$ ஆதலால் $x^m$ இற் செயல் புரிய

$$x^m=F(D)\{(c_0+c_1D+c_2D^2+\dots+c_mD^m)x^m\},\dots\dots\dots\dots(3);$$

மீதியைப் புறக்கணித்துக்கொண்டு (1) இற் பெறப்படும் விரி $F(D)y=x^m$ இன் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைத் தரும் என்பதை இது நிறுவும்.

$D$ இன் அட்சரகணிதப் பெறுமானங்களுக்கு இவ்விரி விரிகின்றவிடத்தும் இம்முறை உண்மையாகுமென்பதைக் கவனித்தல் கவர்ச்சிக்குரியது.

முதன் முறையை உ-ம் (iii) போன்ற வகைகளில் பார்த்தற்கு

$$\frac{1}{D^r}\cdot\{(c_0+c_1D+c_2D^2+\dots+c_mD^m)x^m\},$$

அதாவது $$(c_0D^{-r}+c_1D^{-r+1}+c_2D^{-r+2}+\dots+c_mD^{-r+m})x^m$$

என்பது $\{F(D)\cdot D^r\}y=x^m$ என்பதன் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு என நிறுவல் வேண்டும், அதாவது

$$\{F(D)\cdot D^r\}\{(C_0D^{-r}+c_1D^{-r+1}+c_2D^{-r+2}$$
$$+\dots+c_mD^{-r+m})x^m\}=x^m\dots\dots\dots\dots(4).$$

இனி, $$\{F(D)\cdot D^r\}u=F(D)\cdot\{D^ru\},$$

அன்றியும் $$D^r\{(c_sD^{-r+s})x^m\}=(c_sD^s)x^m;$$

ஆகவே (4) இன் இடக்கைப் பக்கக் கோவை

$$F(D)\{c_0+c_1D+c_2D^2+\dots+c_mD^m)x^m\}=x^m,\quad (3)\text{ ஆல்};$$

இதுவே நிறுவவேண்டியது.

மற்றை முறையில் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டில் மேலதிகமான $r$ உறுப்புக்கள் பெறுவோம்,

$$(c_{m+1}D^{-r+m+1}+\dots+c_{m+r}D^m)x^m \text{ என்க.}$$

இவை $x$ இன் $(r-1)$ ஆம் வலுக்களையும் கீழ் வலுக்கானவையையும் தரும். ஆனால் இவையெல்லாம் நிரப்புசார்பில் நிகழ்வன. ஆகவே முதன் முறை இதை விடச் சிறந்தது.

$D^{-1}u$ என்பது எதேச்சை மாறிலி யாதுமில்லா $u$ இன் தொகையீட்டின் மிக எளிய வடிவத்தைக் குறிக்குமென்பதைக் கவனிக்க.

$$D^{-1}(D.1)=D^{-1}.0=0 \quad \text{ஆகும்,} \quad \text{ஆனால்}$$

$$D(D^{-1}.1)=D.x=1\,; \quad \text{ஆகவே}$$

$$D(D^{-1}.1)\neq D^{-1}.(D.1).$$

இதேமாதிரி $m$ ஆனது $n$ இலும் பெரிதாயின்

$$D^m(D^{-m}.x^n)\neq D^{-m}(D^m.x^n).$$

ஆயின், $D$ இன் மறை வலுக்களைப் பொறுத்தவரை அட்சரகணித விதிகள் என்றும் உண்மையாகா. உ–ம் (iii) இல் வழங்கிய இரு வேறுவேறான முறைகள் வேறுவேறான முடிபுகளைத் தருதற்கு இதுவே காரணம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $(D+1)\,y=x^3.$

(2) $(D^2+2D)\,y=24x$

(3) $(D^2-6D+9)\,y=54x+18.$

(4) $(D^4-6D^3+9D^2)\,y=54x+18$

(5) $(D^2-D-2)\,y=44-76x-48x^2.$

(6) $(D^3-D^2-2D)\,y=44-76x-48x^2.$

## 38. மற்றை எளிய வகைகளில் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் :

முன்னுள்ள பிரிவுகளில் எடுத்தாளப்படாத சில எளிய வகைகளில், குறிப்பிட்ட தொகையீட்டின் பெறுமானங் கணித்தல் பற்றிய சிலவகை உதாரணங்களை இப்போது தருவோம். முன்போல் இம்முறையும் பரிசோதனை முறையாகும். குறுக்கத்தின் பொருட்டு, சரி பிழை பார்த்தல் விலக்கப்பட்டுள்ளது ; இது ஏற்கெனவே தரப்பட்டுள்ள சரிபார்த்தலைப் போன்றது.

உ–ம் (i). $$(D^2+4)\,y=\text{சைன் } 2x.$$

பிரிவு 36 இலுள்ளது போல் $D^2$ இற்குப் பதிலாக $-2^2$ எழுதி $\dfrac{1}{D^2+4}$ சைன் $2x$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணித்தல் முடியாது ; எனெனின் இது பகுதியில் பூச்சியம் தரும்.

ஆனால் $i$ சைன் $2x$ ஆனது $e^{2ix}$ இனது கற்பனைப் பகுதியாகும் ;

$$\frac{1}{D^2+4}\,e^{2ix}=e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+4}\cdot 1, \quad \text{பிரிவு 35 இலுள்ளதுபோல்,}$$

$$=e^{2ix}\frac{1}{D(D+4i)}\cdot 1$$

$$=e^{2ix}\frac{1}{4iD}\left(1+\frac{D}{4i}\right)^{-1}\cdot 1$$

$$=e^{2ix}\frac{1}{4iD}\left\{\left(1-\frac{D}{4i}+\frac{D^2}{4^2i^2}-\dots\right)\cdot 1\right\}\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$=e^{2ix}\frac{1}{4iD}\cdot 1=e^{2ix}\frac{x}{4i}$$

$$=-\tfrac{1}{4}ix\ (\text{கோசை } 2x+i\text{ சைன் } 2x).$$

$$\left[\text{அல்லது, }\frac{1}{D^2+4}e^{2ix}=\frac{1}{D-2i}\left(\frac{1}{D+2i}e^{2ix}\right)=\frac{1}{D-2i}\left(\frac{1}{4i}e^{2ix}\right)\right.$$

$$\left.=e^{2ix}\frac{D}{1}\cdot\frac{1}{4i}=e^{2ix}\frac{x}{4i}\right];$$

ஆகவே, கற்பனைப் பகுதியையெடுக்க ;

$$\frac{1}{D^2+4}\text{ சைன் } 2x=-\tfrac{1}{4}x\text{ கோசை } 2x.$$

நிரப்புசார்பைச் சேர்க்க.

$$y=A\text{ கோசை } 2x+B\text{ சைன் } 2x-\tfrac{1}{4}x\text{ கோசை } 2x.$$

**உ-ம் (ii)** $(D^2-5D+6)\,y=e^{2x}x^3.$

$$\frac{1}{D^2-5D+6}\cdot e^{2x}x^3=\left(\frac{1}{2-D}-\frac{1}{3-D}\right)\cdot e^{2x}x^3$$

$$=e^{2x}\left(-\frac{1}{D}-\frac{1}{1-D}\right)x^3$$

$$=e^{2x}\left(-\frac{1}{D}-1-D-D^2-D^3-D^4-\dots\right)x^3$$

$$=e^{2x}\left(-\tfrac{1}{4}x^4-x^3-3x^2-6x-6\right).$$

நிரப்பு சார்பைச் சேர்க்க [இங்கு $Be^{2x}$ இல் $-6e^{2x}$ என்னுமுறுப்பும் உட்பட].

$$y=Ae^{3x}-e^{2x}\left(\tfrac{1}{4}x^4+x^3+3x^2+6x-B\right).$$

**உ-ம் (iii)** $(D^2-6D+13)\,y=8\,e^{3x}$ சைன் $2x.$

$$\frac{1}{D^2-6D+13}\cdot 8\,e^{3x}\text{ சைன் } 2x=8\,e^{3x}\frac{1}{\{(D+3)^2-6(D+3)+13\}}\cdot\text{சைன் } 2x$$

$$=8e^{3x}\frac{1}{D^2+4}\text{ சைன் } 2x$$

$$=8e^{3x}\left(-\tfrac{1}{4}x\text{ கோசை } 2x\right)\ (\text{உ-ம் (i) பார்க்க})$$

$$=-\ 2xe^{3x}\text{ கோசை } 2x.$$

நிரப்பு சார்பைச் சேர்க்க

$$y=e^{3x}\ (A\text{ கோசை } 2x+B\text{ சைன் } 2x-2x\text{ கோசை } 2x).$$

இம்முறைகள் மாணுக்கன் சந்திக்கும் நேரிடக் கூடிய ஏறக்குறைய எல்லாக் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளின் பெறுமானக் கணிப்புக்கும் போதியனவாகும். மற்றை வகைகள் யாவும் இவ்வத்தியாய முடிவிலுள்ள (33), (34) ஆகிய பலவினப் பயிற்சிகளிற் சுட்டிக்காட்டிய வழிகளில் எடுத்தாளப்படலாம்,

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $(D^2+1)y=4$ கோசை $x$

(2) $(D-\ )y=(x+3)e^{2x}$

(3) $(D^3-3D-2)y=540x^3e^{-x}$

(4) $(D^2+2D+2)y=2e^{-x}$ சைன் $x$.

(5) $(D^2+1)^2y=24x$ கோசை $x$

(6) $(D^5-D)(y=12e^x+8$ சைன்$x-2x$.

(7) $D^2-6D+25)y=2e^{3x}$ கோசை $4x+8e^{3x}(1-2x)$ சைன் $4x$

## 39. ஏகவினமான ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு.

இது $(p_0x^nD^n+p_1x^{n-1}D^{n-1}+\ldots\ldots+p_n)y=f(x)$ என்னும் வடிவத்திற்குக் கொடுக்கப்படும் பெயர்.

$x=e^t$ எனப் பிரதியிடுவோமாயின் இது முன்னர் சிந்திக்கப்பட்டுள்ள வகைக்கு ஒடுங்கும்.

உ-ம். $(x^3D^3+3x^2D^2+xD)y=24x^2$.

$x=e^t$ ஆயின், $\dfrac{dx}{dt}=e^t=x$ ஆதலால்

$$D=\frac{d}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}=\frac{1}{x}\frac{d}{dt};$$

$$D^2=D\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}+\frac{1}{x}D\frac{d}{dt}=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{d}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}\right);$$

$$D^3=D\frac{1}{x^2}\left(-\frac{d}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}\right)=-\frac{2}{x^3}\left(-\frac{d}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}\right)+\frac{1}{x^2}D\left(-\frac{d}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}\right)$$

$$=-\frac{2}{x^3}\left(-\frac{d}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}\right)+\frac{1}{x^3}\left(-\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d^3}{dt^3}\right)$$

$$=\frac{1}{x^3}\left(2\frac{d}{dt}-3\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d^3}{dt^3}\right);$$

ஆயின் தந்த வகையீட்டுச் சமன்பாடு $\dfrac{d^3y}{dt^3}=24e^{2t}$, என்பதற்கு ஒடுங்கி

$$y=A+Bt+Ct^2+3e^{2t}$$

$$=A+B\,\text{மட}\,x+C\,(\text{மட}\,x)^2+3x^2$$

என்பதைத் தரும்.

வேறு முறை இவ்வத்தியாய முடிவில் (28)—(30) ஆகிய பலவினப் பயிற்சிகளிற் சுட்டிக்காட்டப்படும்.

$$p_0(a+bx)^nD^ny+p_1(a+bx)^{n-1}D^{n-1}y+\ldots\ldots+p_ny=f(x)$$

என்னுஞ் சமன்பாடு $z=a+bx$ எனப் பிரதியிடுதலால் எகவினமான ஏகபரிமாண வடிவத்திற்கு ஒடுக்கப்படலாம்; இது தருவது

$$Dy=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=b\frac{dy}{dz}.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=4x^3.$ (2) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+9x\frac{dy}{dx}+25y=50.$

(3) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+8y=65$ கோசை (மட $x$).

(4) $x^4\frac{d^4y}{dx^4}+2x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=$ மட$x$.

(5) $(1+2x)^2\frac{d^2y}{dx^2}-6(1+2x)\frac{dy}{dx}+16y=8(1+2x)^2.$

(6) $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1+x)\frac{dy}{dx}+y=4$ கோசை மட $(1+z)$

### 40. மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்.

செய்முறை ஓர் உதாரணத்தால் எடுத்துக்காட்டப்படும். $y,z$ என்னும் இரு சார்மாறிகளும் $x$ என்னும் ஒரு சாராமாறியும் எமக்கு உண்டு. முன்போல் $D$ என்பது $\frac{d}{dx}$ ஐக் குறிக்கும்.

$$(5D+4)y-(2D+1)z=e^{-x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

$$(D+8)y-3z=5e^{-x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

என்பவற்றை எடுக்க.

ஆரம்ப அட்சரகணிதத்திலுள்ள ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளிற் செய்தல் போல $z$ ஐ நீக்குக. இதைச் செய்தற்கு சமன்பாடு (1) ஐ 3 ஆற் பெருக்கி சமன்பாடு (2) இல் $(2D+1)$ என்பதாற் செய்கை புரிக. முடிபுகளைக் கழிக்க

$$\{3(5D+4)-(2D+1)(D+8)\}y=3e^{-x}-(2D+1)5e^{-x},$$

அதாவது $$(-2D^2-2D+4)y=8e^{-x},$$

அல்லது $$(D^2+D-2)y=-4e^{-x}.$$

வழக்கமான முறையில் இதைத் தீர்க்க

$$y=2e^{-x}+Ae^{x}+Be^{-2x}.$$

இவ்வுதாரணத்தில் $z$ ஐப் பெறுதற்கு மிக எளியவழி, $z$ இன் வகையீட்டுக் குணகம் எதனையும் கொண்டிராத சமன்பாடு (2) ஐ உபயோகித்தலே.

(2) இல் $y$ இற்குப் பிரதியிட

$$14e^{-x}+9Ae^{x}+6Be^{-2x}-3z=5e^{-x}$$

அல்லது $$z=3e^{-x}+3Ae^{x}+2Be^{-2x}.$$

எனினும், சன்பாடுகள் $z$ ஐக் காண்டற்கு அத்தகைய எளிய முறையை அனுமதிக்காவிடின் $y$ யை நீக்கலாம்.

இவ்வகையில் இது தருவது

$$\{-(D+8)(2D+1)+3(5D+4)\}z=(D+8)e^{-x}-(5D+4)5e^{-x}$$

அதாவது $$(-2D^2-2D+4)z=12e^{-x};$$

இது தருவது $$z=3e^{-x}+Ee^{x}+Fe^{-2x}.$$

$A, B, E, F$ என்னும் நான்கு மாறிலிகளின் தொடர்பு காண்டற்குத் தொடக்கச் சமன்பாடுகள் யாதுமொன்றில், (2) என்க, பிரதியிடுக. இது தருவது

$$(D+8)(2e^{-x}+Ae^{x}+Be^{-2x})-3(3e^{-x}+Ee^{x}+Fe^{-2x})=5e^{-x},$$

அதாவது $$(9A-3E)e^{x}+(6B-3F)e^{-2x}=0.$$

ஆகவே, $$E=3A,\ F=2B, \text{ ஆகி}$$

$$z=3e^{-x}+Ee^{x}+Fe^{-2x}=3e^{-x}+3Ae^{x}+2Be^{-2x}, \text{ முன்போலவேயாம்.}$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $Dy-z=0,$
$(D-1)y-(D+1)z=0.$

(2) $(D-17)y+(2D-8)z=0,$
$(13D-53)y-2z=0.$

(3) $(2D^2-D+9)y-(D^2+D+3)z=0,$
$(2D^2+D+7)y-(D^2-D+5)z=0.$

(4) $(D+1)y=z+e^{x},$
$(D+1)z=y+e^{x}.$

(5) $(D^2+5)y-4z=-36$ கோசை $7x,$
$y+D^2z=99$ கோசை $7x.$

(6) $(2D+1)y+(D+32)z=91e^{-x}+147$ சைன் $2x+135$ கோசை $2x,$
$y-(D-8)z=29e^{-x}+47$ சைன் $2x+23$ கோசை $2x.$

## அத்தியாயம் III இற் பலவினப் பயிற்சிகள்

**பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க**

(1) $(D-1)^3y=16e^{3x}.$ (2) $(4D^2+12D+9)y=144xe^{-\frac{3}{2}x}$

(3) $(D^4+6D^3+11D^2+6D)y=20e^{-2x}$ சைன் $x.$

(4) $(D^3-D^2+4D-4)y=18e^{x}$ சைன் $2x.$

(5) $(D^4-6D^2-8D-3)y=256(x+1)e^{3x}.$

(6) $(D^4-8D^2-9)y=50$ அசைன் $2x.$ (7) $(D^4-2D^2+1)y=40$ அகோசை $x.$

(8) $(D-2)^2y=8(x^2+e^{2x}+$ சைன் $2x).$ (9) $(D-2)^2y=8x^2e^{2x}$ சைன் $2x.$

(10) $(D^2+1)\ y=3$ கோசை$^2 x+2$ சைன்$^3 x$

(11) $(D^4+10D^2+9)\,y=96$ சைன் $2x$ கோசை $x$.

(12) $(D-a)^4\,y=a^x$, $a$ ஆனது ஒரு நேர்முழுவெண் என்க.

(13) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1dy}{xdx}=\dfrac{2\text{ மட }x}{x^2}$. (14) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}=10$.

(15) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{6y}{x^3}$. (16) $(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\dfrac{dy}{dx}=(2x+3)(2x+4)$.

(17) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=y,$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=25x+16e^t$$

(18) $\dfrac{dx}{dt}=2y:\ \dfrac{dy}{dt}=2z;\ \dfrac{dz}{dt}=2x$. (19) $t\dfrac{dx}{dt}+y=0;\ t\dfrac{dy}{dt}+x=0$.

(20) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+t\dfrac{dx}{dt}+2y=0,$

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}-2x=0.$$

(21) $(D^{2n+1}-1)\,y=0$ என்பதன் தீர்வு $Ae^x$ என்பதாலும் $e^{cx}$ ($B_r$ கோசை $sx+C_r$ சைன் $sx$) என்னும் வடிவத்திலுள்ள $n$ உறுப்புச் சோடிகளாலும் ஆக்கப்படுமெனக் காட்டுக; இங்கு

$$c=\text{கோசை }\frac{2\pi r}{n+1},\quad s=\text{சைன் }\frac{2\pi r}{2n+1},$$

$$r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ n\text{ பின்னடுத்து.}$$

(22) $(D-a)\,u=0$, $(D-a)\,v=u$, $(D-a)\,y=v$ ஆயின $u$, $v$, $y$ என்பவற்றைப் பின்னடுத்துக்கண்டு அது துணைகொண்டு $(D-a)^3\,y=0$ ஐத் தீர்க்க.

(23) $(D-a)(D-a-h)(D-a-2h)\,y=0$ என்பதன் தீர்வு

$$Ae^{ax}+Be^{ax}\frac{(e^{hx}-1)}{h}+Ce^{ax}\frac{(e^{2hx}-2e^{hx}+1)}{h^2}.$$

என எழுதப்படலாமெனக் காட்டுக.

அதன துணைகொண்டு $(D-a)^3\,y=0$ என்பதின தீர்வை உய்த்தறிக.

[இம்முறை தலம் பெயராலாயது. வேறு நியாய முறையில்லாது இது முற்றாய்த் திருத்தியாகா தென்பதைத் தேறிய மாணாக்கன் கவனிப்பான். இரண்டாம் வகையீட்டுச் சமன்பாடு முதலாவதன் எல்லையென்பது கண்கூடு. ஆனால் இரண்டாவதன் தீர்வு முதலாவதன் தீர்வினது எல்லையென்பது கண்கூடாகாது],

(24) $(D-a)^3\,e^{mx}$ ஆனது $z$ ஆல் குறிக்கப்படுமாயின் $z,\ \dfrac{\partial z}{\partial m},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial m^2}$ என்பன யாவும் $m=a$ ஆகுமிடத்து மறையுமென்பதை நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு $e^{ax}$, $xe^{ax}$, $x^2e^{ax}$ என்பன யாவும் $(D-a)^3\,y=0$ இன் தீர் என்பதை நிறுவுக.

[$(D-a)^3$, $\dfrac{\partial}{\partial m}$ என்பன பரிவர்த்தனைச் செயலிகள் என்பதைக் கவனிக்க.]

(25) $\dfrac{\text{கோசை } ax - \text{கோசை } (a+h)\, x}{(a+h)^2 - a^2}$ என்பது

$(D^2+a^2)\, y =$ கோசை $(a+h)\, x$ இன் தீர்வு எனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு $(D^2+a^2)\ y =$ கோசை $ax$ என்பதன் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டை உய்த்தறிக.

[இதற்கும் பயிற்சி 23 இற்கு உள்ள அதேமறுப்பு உண்டு.]

(26) $V$ ஆனது $x$ இன் ஒரு சார்பாக $F(D)$ ஆனது வழக்கமான பொருள் கொள்ளுமாயின்

(i) $D^n (xV) = xD^nV + nD^{n-1}V,$

(ii) $F(D)\,[xV] = x\,F(D)\,V + F'(D)\,V,$

(iii) $\dfrac{1}{F(D)}\left[xV\right] = \left\{x - \dfrac{1}{F(D)}.\ F'(D)\right\}\dfrac{1}{F(D)}\,V,$

(iv) $\dfrac{1}{F(D)}\left[x^nV\right] = \left\{x - \dfrac{1}{F(D)}.\ F'(D)\right\}^n\dfrac{1}{F(D)}\,V$

என்பவற்றை நிறுவுக.

செயலிகள் முறையிலான வரிசையில் உபயோகிக்கப்படல் வேண்டும். **வேலை சில சமயங்களிற் சிரமமாகும்.**

(27) ஈற்றுப் பயிற்சியின் (iii), (iv) ஆகிய முடிபுகளை உபயோகித்து

(i) $(D-1)\,y = xe^{2x}$

(ii) $(D+1)\,y = x^3$ கோசை $x$

என்பவற்றின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளைப் பெறுக.

(28) $\theta$ ஆனது $x\dfrac{d}{dx}$ ஐக் குறிக்குமாயின் தொகுத்தறி முறையால், அல்லது வேறுமாதிரி,

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = \theta\,(\theta-1)\,(\theta-2)\ldots(\theta-n+1)\,y.$$

என்பதை நிறுவுக.

(29) (i) $F(\theta)\,x^m = x^m\,F(m),$

(ii) $\dfrac{1}{F(\theta)}x^m = \dfrac{x^m}{F(m)},\ F(m) \neq 0$ ஆயின்,

(iii) $V$ ஆனது $x$ இன் சார்பாக,

$$\frac{1}{F(\theta)}\,[x^mV] = x^m.\,\frac{1}{F(\theta+m)}\,V$$

என்பனவற்றை நிறுவுக.

(30) ஈற்றுப் பயிற்சியின் முடிபுகளை உபயோகித்து

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = x^5$$

என்பதன் தீர்வு $\frac{1}{6}x^5 + Ax^a + Bx^b$ என நிறுவுக ; இங்கு $a, b$ என்பன $m(m-1) - 4m + 6 = 0$ என்பதன் மூலங்களாகிய 2, 3 ஆகும்.

(31) $(D-1)\,y=e^{2x}$ ஆயின், $(D-1)\,(D-2)\,y=0$ ஐ நிறுவுக.

இரண்டாவது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் (இரு தெரியா மாறிலிகளைக் கொண்டது) பொதுத்தீர்வை எழுதிக்கொண்டு அதனை முதலாவதிற் பிரதியிடுதலால் முதலாவது சமன்பாட்டினது தீர்வைப் பெறுமாறு மாறிலிகளுள் ஒன்றன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

(32) ஈற்றுப் பயிற்சியிலுள்ள முறையால் $\dfrac{d^2y}{dx^2}+p^2y=$ சைன் $a\,x$ என்பதைத் தீர்க்க.

(33) $u_1$ ஆனது $e^{ax}\displaystyle\int ue^{-ax}dx$ என்பதைக் குறிக்கின்றது.

$u_2$ ஆனது $e^{bx}\displaystyle\int u_1e^{-bx}dx$ என்பதைக் குறிக்கின்றது.

வேறும் இவ்வாறேயாயின், $F(D)$ ஆனது $(D-a)(D-b)$.......... என்னும் $n$ காரணிகளின் பெருக்கமாகுமிடத்து $F(D)\,y=u$ இன் தீர்வு $y=u_n$ என எழுதப்படலாமென நிறுவுக.

$F(D)$ இன் காரணிகள் எல்லாம் வேறு வேறுகாவிடினும் இது உண்மையாகும்.

அது துணைகொண்டு $(D-a)(D-b)\,y=e^{ax}$மட $x$ என்பதைத் தீர்க்க.

(34) $\dfrac{1}{F(D)}$ என்பதைப் பகுதிப் பின்னங்களாக இட்டுவரும் $F(D)\,y=u$ வின் தீர்வு, $F(D)$ இன் காரணிகள் எல்லாம் வேறு வேறுகுமாயின்,

$$\Sigma\frac{1}{F'(a)}\,e^{ax}\int ue^{-ax}dx$$

என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாமென நிறுவுக.

[$F(D)$ இன் காரணிகள் எல்லாம் வேறு வேறுகாவிடின் மறிதந்த தொகையிடல்களைப் பெறுவோம்].

அறிமுறையில் இப்பயிற்சியினதும் ஈற்றுப்பயிற்சியினதும் முறைகள் மாறுக்குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு எதனையுந் தீர்த்தற்கு உதவும். ஆனால் $u$ ஆனது இந்நூலில் எடுத்துச் சிந்திக்கப்பட்டுள்ள எளிய சார்புகளுள் (அடுக்குக் குறிகள், சைன்கள், கோசைன்கள், பல்லுறுப்பிகள் ஆகியவற்றின் பெருக்கங்களுள்) ஒன்று ஆனாலன்றிப் பொதுவாகச் செய்யமுடியாத வரையறுத் தொகையிடலோடு விடப்படுவோம்.

$u=f(x)$ ஆயின் $e^{ax}\displaystyle\int ue^{-ax}dx$ என்பதை

$\displaystyle\int_k^x f(t)\,e^{a(x-t)}\,dt$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதலாம்; இங்கு $k$ என்னுங் கீழெல்லை ஓர் எதேச்சை மாறிலி.

(35) (i) $y=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_k^x f(t)$ சைன் $p\,(x-t)\,dt$ என்பது

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+p^2y=f(x)$ இன் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு என்பதை சரிபிழை பார்க்க.

[$a$, $b$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாயின்

$$\frac{d}{dc}\int_a^b F(x,t)\,dt=F(x,b)\,\frac{db}{dx}-F(x,a)\frac{da}{dx}+\int_a^b\frac{d\,F(x,t)}{dx}\,dt$$

என்பதை ஞாபகத்தில் வைக்க.]

(ii) ஈற்றுப் பயிற்சியின் முடிபை உபயோகித்து இக்குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைப் பெறுக.

(iii) அதன் துணைகொண்டு $(D^2+1)\,y=$ கோசீ $x$ என்பதைத் தீர்க்க.

(iv) $f(x)$ ஆனது தான் $x$, கோதா $x$, சீக் $x$ என்னுஞ் சார்புகளுள் யாதுமொன்றாயின் இம்முறை

$$(D^2+1)\,y=f\,(x)$$

இதன் தீர்வையும் (தொகையிடற் குறிகள் கொள்ளா வடிவத்தில்) தருமெனக் காட்டுக.

(36) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+p^3y=k$ கோசை $pt$ யின் குறிப்பிட்ட தொகையீடு, வரையறையின்றி அதிகரிக்கும் வீச்சம் கொண்ட ஓர் அலைவைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

[முன்னர் கூறிய "மருவிசை" என்னுந் தோற்றப்பாடு இதுவே (பிரிவு 36 பயிற்சி 5). ஆனால் இவ்வகையிலுள்ள பௌதிகச் சமன்பாடுகள் எல்லாம் அண்ணளவாதலால் அலைவு உண்மையில் முடிவில்லாததெனக் கொள்ள முடியாது. எனினும் அது காவலைக் கெடுதி செய்யுமாறு அதே பெரிதாகலாம். இக்காரணத்தாலேயே போர்வீரர் ஒரு பாலத்தைக் கடக்குமிடத்து, தமது படிகள் அமைப்பின் இயற்கை அலைவோடு இசைவாகாதவாறு அவற்றை மாற்றுவார்கள்]

(37) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2h\dfrac{dy}{dt}+(h^2+p^2)\,y=ke^{-ht}$ கோசை $pt$ யின் குறிப்பிட்ட தொகையீடு $\dfrac{k}{2p}te^{-ht}$ என்னு மாறும் வீச்சம் கொண்ட ஓர் அலைவைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

இவ்வீச்சத்தின் உயர்வு பெறுமானத்தைக் கண்டு $h$ ஆனது மிகச் சிறிதாகுமிடத்து அது மிகப் பெரிதாகுமெனக் காட்டுக. முடிவில்லா நேரத்தின் பின் வீச்சப் பெறுமானம் யாது?

[ஒரு வலுக்கருவியோடு **மருவிசை**கொள்ளும் ஒரு தொகுதியின் வலிந்த அதிர்வை, இரண்டும் உராய்வாலே **தணிக்கப்**படுமிடத்து, இது குறிக்கும். இம்முடிபு காட்டுவது உராய்வு சிறிதாயின் வலிந்த அதிர்வுகள் ஈற்றுப் பிரிவிலுள்ளதுபோல் முடிவில்லாதன அல்லாத போதிலும் விரைவில் பெரியனவாகுமென்பதே. இது சிலவகைகளில் நயமாகும். கம்பியில்லாத்தந்தி முறையில் வாங்கு கருவிகள் ஆட்டிசின் அலைகளோடு மருவிசைகொள்ளாவிடின் விளைவுகள் உணர்த்தற்கு மிகச் சிறியனவாகும்.]

(38) $\dfrac{d^4y}{dx^4}-n^4y=0$ வைத் தீர்க்க.

[இச்சமன்பாடானது $x$ ஆனது சிந்திக்கப்படும் பாகத்தின் நிலைக்குத்து உயரமாக, விரைவான சுழற்சி கொள்ளும் ஒரு மெல்லிய நிலைக்குத்துத் தண்டினது யாதுமொரு பாகத்தின் $y$ என்னும் பக்கப் பெயர்ச்சியைத் தரும்.]

(39) ஈற்றுப் பயிற்சியில் $x=0$ ஆகுமிடத்தும் $x=l$ ஆகுமிடத்தும் $\dfrac{dy}{dx}=y=0$ ஆயின்

$y=E$ (கோசை $nx$ – அகோசை $nx$) $+F$ (சைன் $nx$ – அசைன் $nx$) என்பதையும் கோசை $nl$ அகோசை $nl=1$ என்பதையும் நிறுவுக.

[இதன் பொருள், ஒன்று மற்றையதன் மேல் $l$ என்னும் உயரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளில் தண்டு தாங்கப்பட்டு இப்புள்ளிகளில் நிலைக்குத்தாகுமாறு விகாரப்படும் என்பதே. $l$ தெரியப் படுமிடத்து ஈற்றுச் சமன்பாடு $n$ ஐ தரும்.]

(40) $l$ ஆனது போதிய அளவு அதிகரிக்குமிடத்து

$$\frac{d^3y}{dt^3}+3\,\frac{d^2y}{dt^2}+4\,\frac{dy}{dt}+2y=40$$

என்பதன் நிரப்பு சார்பு புறக்கணிக்கத்தகுமென்பதையும்

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 40$$

இன் நிரப்பு சார்பு வரையறையின்றி அதிகரிக்கும் வீச்சத்தோடு அலையுமென்பதையும் நிறுவுக.

[இவ்வகைச் சமன்பாடு ஒரு **நீராவிச் சுழல் சக்கரத்தின்** ஆள் கருவியினது கோண வேகத்திற்கு அண்ணளவாக உண்மையாகும். முதற் சமன்பாடு **உறுதிச்** சுற்றலியக்கத்திற்கு ஒத்ததாக இரண்டாவது **உறுதியில்** இயக்கத்திற்கு ஒக்கும். பெரியின் **நீராவி எஞ்சின்** என்னும் நூலைப் பார்க்க.]

**(41)** $m, V. H, e$ என்பன மாறிலிகளாக

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Ve - He\frac{dy}{dt}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = He\frac{dx}{dt}$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வு

$$x = A + B \text{ கோசை } (\omega t - \alpha),$$

$$y = \frac{V}{H}t + C + B \text{ சைன் } (\omega t - \text{சைன் } \alpha)$$

ஆகுமென்பதை நிறுவுக ; இங்கு $\omega = \frac{He}{m}$ ஆக $A, B, C, \alpha$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளாகும்.

$t = 0$ ஆகுமிடத்து $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = x = y = 0$ ஆயின், இவை

$$x = \frac{V}{\omega H}(1 - \text{கோசை } \omega t),$$

$$y = \frac{V}{\omega H}(\omega t - \text{சைன் } \omega t)$$

என்னும் சக்கரப்போலிச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

[இச்சமன்பாடுகள் ஊதாக் கடந்த ஒளியால் விளங்குவதும் மறை ஏற்றம் பெற்றதுமான ஒரு நாகத்தகட்டால் தள்ளப்பட்டு இத்தகட்டின் பரப்புக்குச் சமாந்தரமான காந்தப் புலம் $H$ இலுள்ள திணிவு $m$ உம் ஏற்றம் $e$ உம் கொண்ட சிறு துணிக்கையின் பாதையைத் தரும். $V$ ஆனது ஏற்றம் பெற்ற பரப்பாலாய மின்செறிவு. $x$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைப் பரிசோதனை முறையிற் காண்பதால் **J. J.** தொம்சன் $\frac{2V}{\omega H}$ ஐத் துணிந்தார் ; இதனிலிருந்து $\frac{m}{e}$ என்னு முக்கிய விகிதம் $V, H$ என்பவை தெரியப்படுமிடத்துக் கணிக்கப்படும்.]

**(42)** $L_1, L_2, M, c_1, c_2, E, p$ என்பன மாறிலிகளாக

$$L_1\frac{d^2I_1}{dt^2} + M\frac{d^2I_2}{dt^2} + \frac{I_1}{c_1} = Ep \text{ கோசை } pt,$$

$$L_2\frac{d^2I_2}{dt^2} + M\frac{d^2I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{c_2} = 0$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் தரப்பட $I_1$ ஆனது

$a_1$ கோசை $pt+A_1$ கோசை $(mt-\alpha)+B_1$ கோசை $(nt-\beta)$ என்னும் வடிவமும் $I_2$ ஆனது

$a_2$ கோசை $pt+A_2$ கோசை $(mt-\alpha)+B_2$ கோசை $(nt-\beta)$ என்னும் வடிவமும் கொள்ளுமென்பதை நிறுவுக ;

இங்கு
$$a_1 = \frac{E}{k} pc_1 (1-p^2c_2L_2),$$

$$a_2 = \frac{EM}{k} p^3c_1c_2,$$

$$k = (L_1L_2 - M^2)\, c_1c_2p^4 - (L_1c_1 + L_2c_2)p^2 + 1,$$

$m$, $n$ என்பன குறித்த வரையறுத்த மாறிலிகள், $A_1$, $B_1$, $\alpha$, $\beta$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகள், $A_2$ ஆனது $A_1$ பற்றியும் $B_2$ ஆனது $B_1$ பற்றியும் உணர்த்தப்படலாம்.

அன்றியும் $L_1$, $L_2$, $M$, $c_1$, $c_2$ என்பன மெய்யும் நேருமாகி $L_1\,L_2 > M^2$ ஆயின் $m$, $n$ என்பன மெய்யாகுமென்பதை நிறுவுக.

[இச்சமன்பாடுகள் ஒரு மாறியில் சுற்றுக்கள் $c_1$, $c_2$ என்னும் கொள்ளளவுகளுள்ள ஒடுக்கிகளைக் கொள்ளுமிடத்து $I_1$, $I_2$ என்னும் முதல் ஓட்டத்தையும் துணை ஓட்டத்தையும் தரும். $L_1$, $L_2$ என்பன தற்றூண்டுகைக் குணகங்களும் $M$ என்பது தம்முள் தூண்டுகைக் குணகமுமாகும். (வழக்கமாக மிகச் சிறியனவாகும்) தடைகள் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன. $E$ சைன் $pt$ என்பது முதலின் அழுத்திய மின்னியக்க விசையாகும்.]

## ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குரிய வேறுமுறைகள்.

பிரிவு 40 பயிற்சி 3 இல் $y$ ஐக் கண்ட பின்னர் தந்த சமன்பாடுகளில் முறையே D, D + 2 என்பவற்றாற் செயல் புரிந்து கொண்டு கழித்தலால் தொகையிடல் செய்யாது $z$ ஐக் காணலாம். D கொள்ளும் பொதுக் காரணி யாதுமில்லா $f$(D), F(D) என்பனவற்றில் எவையேனும் D பற்றிய இரு பல்லுறுப்பிகள் தரப்படுமாயின்

$$\phi(\mathrm{D})f(\mathrm{D}) - \psi(\mathrm{D})\mathrm{F}(\mathrm{D}) = 1$$

ஆகுமாறு $\phi$ (D), 4 (D) என்னும் வேறு பல்லுறுப்பிகளைக் காணக் கூடும். (சிமிதின் "அட்சரகணிதம்" பிரிவு 100.) எளிய வகைகளில் $\phi$(D), $\psi$(D) என்பனவற்றைக் கண்கணிப்பாற் பெறக்கூடும்.

வேறுமாதிரியாக, பயிற்சி 3 இன் தந்த சமன்பாடுகளை அவற்றின் கூட்டுத் தொகையாலும் வித்தியாசத்தாலும் இடமாற்றஞ் செய்யலாம். இதேமாதிரி பயிற்சி 4 இலும் முன்னேறி $y+z$, $y-z$ என்பவற்றைப் புது மாறிகளாக எடுக்கலாம்.

# அத்தியாயம் IV

## எளிய பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

**41.** இவ்வத்தியாயத்தில் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் எழும் வழிகள் சிலவற்றையும் எளிய குறிப்பிட்ட தீர்வுகளின் அமைப்பையும் குறிப்பிட்ட தீர்வுகளின் முடிவில் தொடரிலிருந்து சிக்கலான தீர்வுகள் ஆக்கப்படுதலையும் எடுத்துச் சிந்திப்போம். இச்சிக்கலான தீர்வுகள் தந்த நிபந்தனைகளைத் திருத்திப்படுவதற்குப் பூரியே தொடர் பிரயோகிக்கப்படுவதையும் விளக்கிக் காட்டுவோம்.

சிந்திக்கப்படும் சமன்பாடுகள் வெப்பக்கடத்தல், இழை அதிர்வுகள், நிலை மின்னியலும் ஈர்ப்பும், தொலைபன்னிகள், மின்காந்த அலைகள், கரைதிரவப் பரவல் ஆகியவற்றின் பிரச்சினைகளில் நிகழும் சமன்பாடுகளைக் கொண்டன.

இவ்வத்தியாயத்தின் முறைகள் பிரதானமாக ஓயிலர், தலம்பயர், இலகிராஞ்சி என்போராலாயன.

**42. எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்கல்.** அத்தியாயம் 1 இல் எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்கலால் எவ்வாறு சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை ஆக்கலாமெனக் காட்டியுள்ளோம். பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள், பலமுறையும் எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்கலால் ஆக்கப்படலாம்.

**உம் (i)** $$y=f(x-at)+F(x+at) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்பதிலிருந்து $f$, F என்னும் எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்குக. அப்பொழுது

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x-at)+F'(x+at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x-at)+F''(x+at) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-af'(x-at)+aF'(x+at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=a^2f''(x-at)+a^2F''(x+at) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2), (3) என்பவற்றிலிருந்து இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடாகிய

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்பதைப் பெறுவோம்.

உம் (ii) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பதிலிருந்து $f$ என்னும் எதேச்சைச் சார்பை நீக்குக.

இங்கு,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right);$$

ஆயின் $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்குக.

(1) $z = f\,(x + ay)$.

(2) $z = f\,(x + iy) + F\,(x - iy),\ i^2 = -1$.

(3) $z = f\,(x$ கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha - at) + F\,(x$ கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha + at)$.

(4) $z = f\,(x^2 - y^2)$.

(5) $z = e^{ax+by} f\,(ax - by)$

(6) $z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$.

**43. எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்கல்.** அத்தியாயம் I இல் சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளால் எவ்வாறு எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்கலாமெனக் கண்டுள்ளோம். பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளாலும் இது செய்யப்படலாம்.

உம் (i) $A,\ p$ என்பவற்றை $z = Ae^{pt}$ சைன் $px$ என்பதிலிருந்து நீக்குக.

இங்கு,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -p^2 Ae^{pt} \text{ சைன் } px,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = p^2 Ae^{pt} \text{ சைன் } px;$$

ஆகவே $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

உம் (ii) $a,\ b,\ c$ என்பவற்றை

$$z = a\,(x + y) + b\,(x - y) + abt + c$$

என்பதிலிருந்து நீக்குக.

இங்கு

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a + b,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a - b,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = ab.$$

ஆனல் $$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

ஆகவே, $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial z}{\partial t}.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்குக :

(1) $z = Ae^{-p^2t}$ கோசை $px$.

(2) $z = Ae^{-pt}$ கோசை $qx$ சைன் $ry$, $p^2 = q^2 + r^2$.

(3) $z = ax + (1 - a)y + b$.

(4) $z = ax + by + a^2 + b^2$.

(5) $z = (x - a)^2 + (y - b)^2$.

(6) $az + b = a^2x + y$.

**44. பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளில் விசேட வில்லங்கங்கள்.** அத்தியாயம் 1 இற் கூறியுள்ளதுபோல் $n$ ஆம் வரிசையிலுள்ள ஒவ்வொரு சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடும் $n$ எதேச்சை **மாறிலிகளைக்** கொள்ளும் ஒரு தீர்விலிருந்து பெறப்படுவதாகக் கருதப்படலாம்.

[சில புறநடை வகைகளில் ஒரு சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு எதேச்சை மாறிலிகள் கொண்ட தீர்வோடு தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகளும் உண்டு என்பது பின்னர் அத்தியாயம் **IV** இல் காட்டப்படும். இத்தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள் சாதாரண தீர்வில் மாறிலிகளுக்குக் குறிப்பிட்ட பெறுமானங்களைக் கொடுத்தலாற் பெறப்படாது முற்றாய் வேறாகும் வடிவமாகும்.]

$n$ ஆம் வரிசையிலுள்ள ஒவ்வொரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடும் இதே மாதிரி $n$ எதேச்சைச் **சார்புகளைக்** கொள்ளும் ஒரு தீர்விலிருந்து பெறப்படுமென உத்தேசிக்கப்படலாம். எனினும் இது உண்மையாகாது. பொதுவாக $n$ எதேச்சைச் சார்புகளின் நீக்குறுவை $n$ ஆம் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடாக உணர்த்தல் முடியாது. இதனிலும் உயர் வரிசைச் சமன்பாடு வேண்டியதாகும், அன்றியும் முடிபு ஒரு தனியாகாது.

[எட்வேட்டின் '**வகையீட்டு நுண்கணிதம்**', பிரிவுகள் 512, 513 அல்லது வில்**லியஞ்சனின்** '**வகையீட்டு நுண்கணிதம்**' பிரிவு 317 பார்க்க.]

இவ்வத்தியாயத்தில் குறிப்பிட்ட தீர்வுகளைக் காண்பதற்கே முயல்வோம். இவற்றின் மூலம் பௌதிக சிந்தனைகளிலிருந்து மிகப் பொதுவாக எழும் பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம்.

[அத்தகைப் பிரசினம் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு தீர்வு உண்டென்பதும் இத்தீர்வு ஒரு தனியதாகுமென்பதும் கண்கூடாகுமெனப் பௌதிகவறிஞன் கொள்ளலாம். ஆனால் தூயகணித நோக்கில் முதலாவது உண்மையை நிறுவல் மிகக் கடினமாகும் ; இந்நிறுவல் சொற்ப காலத்துக்கு முன்னரே தொகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தித் தரப்பட்டுள்ளது. இரண்டாவது உண்மை கிரீனின் தேற்றத்தை வழங்கி எளிதாய் நிறுவப்படும். காசிலோவின் " வெப்பக்கடத்தல் " என்பதைப் பார்க்க, பக்கம் 14.]

மிகப் பொதுவான தீர்வு காணமுடியாதது பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டியதல்லை ; ஏனெனின் அவை காணப்பட்டுள்ள வகைகளில் அவற்றை யாதுங் குறிப்பிட்ட பிரச்சினைக்குப் பிரயோகித்தல் மிகக் கடினமாகுமென்பது காணப்பட்டுள்ளது.

உதாரணமாக, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$

என்னும் லப்பிலாசின் சமன்பாட்டினது மிகப் பொதுவான தீர்வு

$$V=\int_0^{2\pi} f\,(x \text{ கோசை } t+y \text{ சைன் } t+iz,t)\,dt$$

என விற்றேக்கர் நிறுவியுள்ளார்; ஆனால் ஒரு தந்த பரப்பில் சில தந்த நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும் ஒரு தீர்வைக் காண்பதற்கு வழக்கமாய் முடிவில் தொடர் வடிவத்திலுள்ள ஒரு தீர்வை வழங்குவோம்.]

## 45. எளிய குறிப்பிட்ட தீர்வுகள்.

உ-ம் (i) ஒரு பரிமாணத்தில் வெப்பக்கடத்தல் தரும்)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial z}{\partial t}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

இச்சமன்பாடு ஏகபரிமாணமாகும். சாதாரண ஏகபரிமாண சமன்பாடுகளின் கையாளுகயில் அடுக்குக் குறிகள் மிகப் பயன்படுமெனக் கண்டுள்ளோம். $z=e^{mx+nt}$ என்பது ஒரு பரீட்சைத் தீர்வாகுமென இது காட்டும். வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட

$$m^2e^{mx+nt}=\frac{1}{a^2}\,ne^{mx+nt};$$

$n=m^2a^2$ ஆயின் இது உண்மையாகும்.

ஆயின் $e^{mx+m^2a^2t}$ ஆனது ஒரு தீர்வு.

$m$ இன் குறியை மாற்ற $e^{-mx+m2a2t}$ என்பதும் ஒரு தீர்வு என்பது பெறுவோம்.

உ-ம் (ii). $t=+\infty$ ஆகுமிடத்து மறையும் இதே சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வைக் காண்க.

முன்னுள்ள தீர்வுகளில் $t$ ஆனது $e^{m2a2t}$ இல் நிகழும். $m$, $a$ என்பன மெய்யாயின் $m^2a^2$ நேர் ஆதலால் $e^{m2a2t}$ ஆனது $t$ ஒடு அதிகரிக்கும். அதனைக் குறைதலுறச் செய்தற்கு $m^2a^2=-p^2a^2$ ஆகுமாறு $m=ip$ என இடுக.

இதுதருவது $e^{ipx-p2a2t}$ என்பது ஒரு தீர்வு என்பதே. இதேமாதிரி $e^{-ipx-p2a2t}$ யும் ஒரு தீர்வு. ஆகவே, வகையீட்டுச் சமன்பாடு ஏகபரிமாணமாதலால் $e^{-p2a2t}(Ae^{ipx}+Be^{-ipx})$ என்பது ஒரு தீர்வாகும்; இதற்குப் பதிலாக வழக்கம்போல் $e^{-p2a2t}(E \text{ கோசை } px+F \text{ சைன் } px)$ உம் எழுதப்படலாம்.

உ-ம் (iii). $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ என்பதின் ஒரு தீர்வு $y=+\propto$ ஆகுமிடத்தும் $x=0$ ஆகுமிடத்தும் மறையுமாறு காண்க.

$z=e^{mx+ny}$ எனப் பிரதியிட $(m^2+n^2)e^{mx+ny}=0$ ; ஆகவே $m^2+n^2=0$. $y=+\infty$ ஆகுமிடத்து வேண்டிய நிபந்தனைக்கு $n$ ஆனது மெய்யும் மறையும் ஆதல் வேண்டும், $n=-p$ என்க.

ஆயின் $$m=\pm ip.$$

ஆகவே, $$e^{-py}(Ae^{ipy}+Be^{-ipx}) \text{ ஆனது ஒரு தீர்வு,}$$

அதாவது $$e^{-py}(E \text{ கோசை } px+F \text{ சைன் } px) \text{ ஒரு தீர்வு.}$$

ஆனால் $$x=0 \text{ ஆயின் } z=0\text{ ; ஆயின் } E=0.$$

ஆகவே, $$\text{வேண்டிய தீர்வு } Fe^{-py} \text{ சைன் } px.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $x=+\infty$ ஆகுமிடத்தும் $t=+\infty$ ஆகுமிடத்தும் $y=0$ எனத் தரப்பட

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

(2) $z$ ஆனது ($x$, $y$ என்பனவற்றின் எம்மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும்) ஒருபோதும் முடிவில்லாததாகாதெனவும் $x=y=0$ ஆகுமிடத்து $z=0$ எனவும் தரப்பட.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

(3) $z$ ஆனது ஒருபோதும் முடிவில்லாததாகாதெனவும் $x=y=0$ ஆகுமிடத்து $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ எனவும் தரப்பட.

$$\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

(4) $x=+\infty$ ஆகுமிடத்தும் $y=-\infty$ ஆகுமிடத்தும் $z=0$ ஆகுமிடத்தும் $V=0$ எனத் தரப்பட.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

(5) $V$ ஆனது ஒருபோதும் முடிவில்லாததாகாதெனவும் $x=y=z=0$ ஆகுமிடத்து $V=C,\ \frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$ எனவும் தரப்பட.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}.$$

(6) $t=+\infty$ ஆகுமிடத்தும் $x=0$ அல்லது $l$ ஆகுமிடத்தும் $y=0$ அல்லது $l$ ஆகுமிடத்தும் $V=0$ ஆகுமெனத் தரப்பட

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial^2 t}.$$

### 46. கூடுதலாகச் சிக்கலாகும் தொடக்க நிபந்தனைகளும் வரைப்பாட்டு நிபந்தனைகளும்.

[$t$ ஆனது வழக்கமாய் நேரத்தையும் $x$, $y$ என்பன செங்கோண ஆட்கூறுகளையுங் குறித்தலால் $t=0$ ஆகுமிடத்து $z=0$ ஆகும் என்பது போன்ற நிபந்தனை தொடக்க நிபந்தனை $x=0$ அல்லது $x=l$ அல்லது $y=x$ ஆயின் $z=0$ ஆகும் என்பது போன்ற நிபந்தனை வரைப்பாட்டு நிபந்தனை எனப்படும்.]

பிரிவு 45 இன் உ-ம் (iii) இல் $Fe^{-py}$ சைன் $px$ என்பது $y=+\infty$ அல்லது $x=0$ ஆயின் $z=0$ என்னும் நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும்.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

என்பதன் ஒரு தீர்வு எனக் கண்டுள்ளோம். $x=l$ ஆயின் $z=0$ ஆகுமெனவும் 0, $l$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $y=0$ ஆயின் $z=lx-x^2$ ஆகுமெனவும் இரு மேலதிகமான நிபந்தனைகளை இடுவோமென உத்தேசிக்க.

[இது $l$ என்னும் அகலமுள்ள குறை முடிவிலிச் செவ்வக உலோகத் தகட்டில் முடிவில்லாப் பக்கங்கள் 0° இலும் அடி $(lx-x^2)°$ இலும் வைக்கப்படுமிடத்து உறுதி வெப்பநிலைப் பரம்பலைக் காணும் பிரசினமாகும்.]

முதலாவது நிபந்தனை தருவது சைன் $pl=0$, அதாவது $pl=n\pi$, $n$ ஆனது யாதுமொரு முழுவெண் என்க.

முதன் முதலில், $l=\pi$ எனக் கொள்வோம்; இது தருவது $p=n$ (யாதுமொரு முழுவெண்).

இரண்டாவது நிபந்தனை தருவது 0, $\pi$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $F$ சைன் $px=\pi x-x^2$. இது அசாத்தியம்.

எனினும், சமன்பாடு ஏகபரிமாணமாதலால், ஒன்றி உறுப்பாகும் தீர்வுக்குப் பதிலாக $p$ இற்கு 1, 2, 3,............ என்னும் பெறுமானங்களைக் கொடுத்து முடிபுகள் கூட்டுதலாற் பெறப்படும்.

$F_1e^{-y}$ சைன் $x+F_2e^{-2y}$ சைன் $2x+F_3e^{-3y}$ சைன் $3x+..$ என்பதை எடுக்கலாம் (இது தெளிவாகாவிடின் அத்தியாயம் III பிரிவு 25 பார்க்க).

$y=0$ என இட்டுக்கொண்டு $\pi x-x^2$ இற்குச் சமப்படுத்தலால், 0, $\pi$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்.

$$F_1 \text{ சைன } x+F_2 \text{ சைன் } 2x+F_3 \text{ சைன் } 3x+\ldots.$$
$$=\pi x-x^2.$$

இச் சமன்பாடும் மற்றையதைப்போல் திருத்தியாக்கப்படுதல் அசாத்தியமென மாணாக்கன் நினைக்கலாம், ஆனால் இது உண்மையாகுமாறு $F$ களின் பெறுமானங்களைத் தேரலாமென்பது ஒரு முக்கியமான உண்மையாகும்.

இது இப்போது விவரிக்கப்போகின்ற பொதுத் தேற்றத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாகும்.

## 47. பூரியேயின் அரைவீச்சுத் தொடர்.

சில நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும் $x$ இன் ஒவ்வொரு சார்பும் $0$, $\pi$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் (ஆனால் கட்டாயமாய் $x=0$, $x=\pi$ என்னும் பெறுமானங்களுக்கல்ல).

$f(x)=a_1$ சைன் $x+a_2$ சைன் $2x+a_3$ சைன் $3x+\dots.$ முடிவிலிக்கு என்னும் வடிவத்தில் ஓர் ஒருங்கு தொடராக விரிக்கப்படலாம்.

**இது பூரி யயின் அரை வீச்சுச் சைன் தொடர் எனப்படும்.**

[இத்தொடர் யேன் பப்ரிசிற் யோசேப் பூரியே (1768–1830 என்பவராலாயது. வெப்பக்கடத்தற் பிரசினங்களின் தீர்வில் இத்தொடர் எழுந்தது.]

குறித்த நிபந்தனைகள் செய்முறையில் ஒவ்வொரு பௌதிக பிரசினத்திலுந் திருத்தியாக்கப்படும்.

$f(x)$ ஆனது ஒன்றிப் பெறுமானமுள்ளதாயும் முடிவுள்ளதாயும் தொடர்ச்சியானதாயும் $x=0$. $x=\pi$ ஆகியவற்றிற்கிடையே எல்லைப்பட்ட தொகை உயர்வுகள் இழிவுகள் உள்ளதாயும் இருத்தல் போதியதாகும். எனினும் இந்நிபந்தனைகள் வேண்டியனவல்ல. வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகள் இன்னும் வெளியாக்கப்படவில்லை.

இந்நிபந்தனைகளோடு $f(x)$ ஆனது

$$b_0+b_1 \text{ கோசை } x+b_2 \text{ கோசை } 2x+b_3 \text{ கோசை } 3x+\dots.$$

என்னும் அரை வீச்சுக் கோசைன் தொடராக விரிக்கப்படலாம்.

இத்தொடர்கள் அரை வீச்சுத் தொடர்கள் எனப்படும்; $0$, $2\pi$ என்பவற்றிற்கிடையே வலிதாகுந் தொடர் சைன் உறுப்புக்களையும் கோசைன் உறுப்புக்களையுங் கொள்ளும்.

இத்தேற்றங்களின் நிறுவல்கள் மிக நீளமும் கடினமுமானவை. [காசிலோவின் " பூரியேயின் தொடர்களும் தொகையீடுகளும் ", என்பதையும் கொப்சனின் " சார்புக்கொள்கை " என்பதையும் பார்க்க.] எனினும், இவ்விரிகள் சாத்தியமாகுமெனக் கொள்ளப்படுமாயின் குணகங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்டல் எளிதாகும்.

சைன் தொடரை சைன் $nx$ ஆற் பெருக்கிக்கொண்டு உறுப்பு உறுப்பாகத் தொகையிடுக [இது முறையாகுமென்னும் எடுகோள் மெய்ப்பிக்கவேண்டிய வேறொரு விடயமாகும்]; இது தருவது

$$\int_0^\pi f(x) \text{ சைன் } nx\,dx=a_1\int_0^\pi \text{சைன் } x \text{ சைன் } nx\,dx+a_2\int_0^\pi \text{சைன் } 2x \text{ சைன் } nx\,dx$$
$$+\dots\dots\dots\dots$$

$a_n$ ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்பு,

$$a_n\int_0^\pi \text{சைன்}^2\, nx\,dx=\frac{a_n}{2}\int_0^\pi(1-\text{கோசை } 2\,nx)\,dx$$
$$=\frac{a_n}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\text{ சைன் } 2\,nx\right]_0^\pi$$
$$=\tfrac{1}{2}a_n\pi.$$

$a_r$ என்னும் வேறு யாதுமொரு குணகத்தைக் கொண்ட உறுப்பு

$$a_r \int_0^{\pi} \text{சைன் } rx \text{ சைன் } nx dx$$

$$= \frac{a_r}{2} \int_0^{\pi} \left\{ \text{கோசை } (n-r)\,x - \text{கோசை } (n+r)x \right\} dx$$

$$= \frac{a_r}{2} \left[ \frac{\text{சைன் } (n-r)\,x}{n-r} - \frac{\text{சைன் } (n+r)\,x}{n+r} \right]_0^{\pi} = 0.$$

ஆயின் வலப்பக்கத்தில் ஓர் உறுப்பைத்தவிர மறறை உறுப்புக்கள் யாவும் மறையும்.

ஆகவே $$\int_0^{\pi} f(x) \text{ சைன் } nx\, dx = \frac{1}{2} a_n \pi,$$

அல்லது $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{ சைன் } nx\, dx.$$

இதேமாதிரி $o, \pi$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$$f(x) = b_0 + b_1 \text{ கோசை } x + b_2 \text{ கோசை } 2x + \ldots\ldots$$

ஆயின், $b_0 = \frac{1}{\pi} \int f(x)\, dx,\; b_n = \frac{2}{\pi} \int f(x) \text{ கோசை } nx\, dx,\; n \neq 0.$

### 48 பூரியே தொடரினது உதாரணங்கள்

(i) $\pi x - x^2$ என்பதை $x = 0$, $x = \pi$ என்பவற்றிற்கிடையே வலிதாகும் அரைவீச்சுச் சைன் தொடராக விரிக்க.

ஈற்றுப் பிரிவில் நிறுவிய சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாதுவிடல் நன்று.

$\pi x - x^2 = a_1 \text{ சைன் } x + a_2 \text{ சைன் } 2x + a_3 \text{ சைன் } 3x + \ldots\ldots$ ஆகுக.

சைன் $nx$ ஆல் பெருக்கி 0 இலிருந்து $\pi$ இற்குத் தொகையிடுக ; இது தருவது

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \text{ சைன் } nx\, dx = a_n \int_0^{\pi} \text{சைன்}^2\, nx\, dx = \frac{\pi}{2} a_n.$$

இனிப் பகுதிகளாகத் தொகையிட

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \text{ சைன் } nx\, dx = \left[ -\frac{1}{n} (\pi x - x^2) \text{ கோசை } nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \text{ கோசை } nx\, dx$$

$$= 0 + \left[ \frac{1}{n^2} (\pi - 2x) \text{ சைன் } nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2} \int_0^{\pi} \text{சைன் } nx\, dx$$

$$= 0 - \frac{2}{n^3} \left[ \text{கோசை } nx \right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{n^3},\ n \text{ ஆனது ஒற்றையாயின்}$$

$$=0,\ n \text{ ஆனது இரட்டையாயின்}$$

ஆயின், $a_n=\frac{8}{\pi n^3}$, $n$ ஆனது ஒற்றையாயின்

$$=0,\ n \text{ ஆனது இரட்டையாயின் ;}$$

இறுதியில் இது தருவது

$$\pi x-x^2=\frac{8}{\pi}\left(\text{சைன் } x+\frac{1}{27}\text{ சைன் } 3x+\frac{1}{125}\text{ சைன் } 5x\ldots\ldots\right)$$

(ii) $f(x)=mx$ ; $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ என்பவற்றுக்கிடையே,

$$=m\,(\pi-x)\ ;\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi \text{ என்பவற்றுக்கிடையே,}$$

ஆயின் $f(x)$ என்பதை $x=0$, $x=\pi$ என்பவற்றுக்கிடையே வலிதாகும் அரை-வீச்சுத் தொடராக விவரிக்க.

இவ்வகையில் $f(x)$ ஆனது வீச்சின் வேறு வேறான பாகங்களில் வேறு வேறான பகுப்புக் கோவைகளாலே தரப்படும். தொகையீடுகளின் பெறுமானங் கணித்தலிலேயே இதன் புதுமை உண்டு.

இவ்வகையில்

$$\int_0^\pi f(x)\text{ சைன் } nx\,dx=\int_0^{\pi/2} f(x)\text{ சைன் } nx\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\text{ சைன் } nx\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2} mx\text{ சைன் } nx\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi} m\,(\pi-x)\text{ சைன் } nx\,dx.$$

எஞ்சிய வேலையை மாணாக்கன் செய்யலாம். பெறப்படும் முடிவு

$$\frac{4m}{\pi}\left(\text{சைன் } x-\frac{1}{9}\text{ சைன் } 3x+\frac{1}{25}\text{ சைன் } 5x-\frac{1}{49}\text{ சைன் } 7x+\ldots\right)$$

மாணாக்கன் தந்த சார்பின் வரைபை வரைந்து அதனை விரியிலுள்ள முதலுறுப்பின் வரைபோடும் முதல் ஈர் உறுப்புக்களினது கூட்டுத்தொகையின் வரைபோடும் ஒப்பிடல் வேண்டும்.

[$f(x)$ ஆனது பகுப்புக்கோவை யாதுமில்லா வரைபாலே தரப்படுமிடத்தும் பிரிவு 47 இல் கூறிய நிபந்தனைகள் திருத்தியாக்கப்படுமாயின் பூரியேயின் தேற்றம் பிரயோகிக்கலாம். வரைபுமுறையில் தரப்படும் சார்புக்கு இத்தொகையீடுகள் எண்கணித அண்ணளவாக்கத்தால் அல்லது " இசைப்பகுப்பி " என்னுங் கருவியால் துணியப்படலாம்.]

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

$x=0$, $\pi=x$ என்பவற்றுக்கிடையே வலிதாகும் அரைவீச்சுச் சைன் தொடராகப் பின்வரும் சார்புகளை விரிக்க :

**(1)** 1. **(2)** $x$. **(3)** $x^3$. **(4)** கோசை $x$ **(5)** $e^x$.

(6) $f(x)=0$ ; $x=0$ இலிருந்து $x=\frac{\pi}{4}$ இற்கும், $x=\frac{3\pi}{4}$ இலிருந்து $x=\pi$ இற்கும் ; $f(x)=(4x-\pi)(3\pi-4x)$ ; $x=\frac{\pi}{4}$ இலிருந்து $x=\frac{3\pi}{4}$ இற்கு.

(7) இவ் விரிகளில் எவை (*a*) $x=0$ இற்கு (*b*) $x=\pi$ இற்கு உண்மையாகும் ?

### 49. வரைபாட்டு நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கற்குப் பூரியேயின் தொடர் பிரயோகித்தல்.

இப்போது பிரிவு 46 இன் பிரச்சினையினது தீர்வை முற்றுக்கலாம். 0, $\pi$ என்பவற்றுக்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$F_1$ சைன் $x+F_2$ சைன் $2x+F_3$ சைன் $3x+\ldots\ldots=\pi x-x^2$

ஆயின், $F_1e^{-y}$ சைன் $x+F_2e^{-2y}$ சைன் $2x+F_3e^{-3y}$ சைன் $3x+\ldots\ldots$

என்பது எல்லா நிபந்தனைகளையும் திருத்தியாக்குமெனப் பிரிவு 46 இல் கண்டுள்ளோம்.

உ-ம் (i) இல், 0, $\pi$ என்பவற்றுக்கிடையே,,

$$\frac{8}{\pi}\left(\text{சைன் } x+\frac{1}{27}\text{ சைன் } 3x+\frac{1}{125}\text{ சைன் } 5x+\ldots\ldots\right)=\pi x-x^2$$

எனக் கண்டுள்ளோம்.

ஆயின் வேண்டிய தீர்வு

$$\frac{8}{\pi}\left(e^{-y}\text{ சைன் } x+\frac{1}{27}e^{-3y}\text{ சைன் } 3\,x+\frac{1}{125}e^{-5y}\text{ சைன் } 5\,x+\ldots\ldots\ldots\right)$$

என்பதாகும்.

**50.** வரைப்பாட்டு நிபந்தனை $\pi$ இற்குப் பதிலாக $l$ ஐக் கொண்டுள்ள வகையில் $Fe^{-py}$ சைன் $px$ என்பது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது ஒரு தீர்வாகுமெனக் கண்டுள்ளோம் ; நிபந்தனைகள் காட்டுவது $p$ ஆனது $n$ என்னும் நேர் முழுவெண்ணுதற்குப் பதிலாக $n\pi/l$ என்னும் வடிவமாதல் வேண்டும் என்பதே.

ஆயின் $O$, $l$ என்பவற்றுக்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$F_1$ சைன் $\pi x/l+F_2$ சைன் $2\pi x/l+\ldots\ldots\ldots=lx-x^2$ ஆயின், $F_1e^{-\pi y/l}$ சைன் $\pi x/l+F_2e^{-2\pi y/l}$ சைன் $2\pi x/l+\ldots\ldots\ldots$

என்பது நிபந்தனைகள் எல்லாவற்றையுந் திருத்தியாக்கும். $\pi x/l = z$ ஆகுக. ஆயின் $lx - x^2 = \frac{l^2}{\pi^2}\left(\pi z - z^2\right)$. ஆகவே $F$ கள் முன்னுள்ளனவாயின் $\frac{l^2}{\pi^2}$ மடங்கு. ஆகவே, தீர்வு

$$\left(\frac{8l^2}{\pi^3}e^{-\pi y/l}\text{சைன் }\pi x/l + \frac{1}{27}e^{-3\pi y/l}\text{சைன் }3\pi x/l + \frac{1}{125}e^{-5\pi y/l}\text{சைன் }5\pi x/l + \ldots\right)$$

## அத்தியாயம் VI இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $V = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4kt}$ ஆனது $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}$ என்பதன் ஒரு தீர்வு என்பதைச் சரிபார்க்க.

(2) $V = Ae^{-px}$ சைன் $(2p^2Kt - px)$ என்பதிலிருந்து $A$, $p$ என்பவற்றை நீக்குக.

(3) $V = e^{-ht}W$ என இடுதலால்

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - hV$$

என்பதை $\frac{\partial W}{\partial t} = K\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ என்பதற்கு உருமாற்றுக.

[முதலாவது சமன்பாடு தனது பரப்பு பூச்சிய வெப்பநிலையிலுள்ள வளிக்கு வெப்பம் கதிர்க்குமாறு ஒரு கடத்தும் கோலின் வெப்பநிலையைத் தரும். தந்த உருமாற்றம் இப்பிரசினத்தைக் கதிர்ப்பு இல்லாப் பிரசினத்திற்கு ஒடுக்கும்.]

(4) $W = rV$ என இடுதலால்

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{K}{r^2}\frac{\partial}{\partial}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \text{ என்பதை } \frac{\partial W}{\partial t} = K\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$$

என்பதற்கு உருமாற்றுக.

[முதற் சமன்பாடு ஆரை வழியாக வெப்பம் பாயுமிடத்து ஒரு கோளத்தின் வெப்பநிலையைத் தரும்.]

(5) $V = \frac{1}{r}\left[f(r - at) + F(r + at)\right]$ என்பதிலிருந்து எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்குக.

(6) (i) $n$, $h$ என்பன மெய்யாக $e^{mx+int}$ ஆனது

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - hV$$

என்பதன் தீர்வாயின் $m$ ஆனது சிக்கலாதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

(ii) அது துணைகொண்டு, $K(g^2 - f^2) = h$, $n = 2Kfg$ ஆயின், $m = -g - if$ என இடுதலால் $V_0e^{-gx}$ சைன் $(nt - fx)$ ஆனது $x = 0$ ஆகுமிடத்து $V_0$ சைன் $nt$ என்பதற்கு ஒடுங்கும் ஒரு தீர்வெனக் காட்டுக.

(iii) $x = +\infty$ ஆகுமிடத்து $V = 0$ ஆயின் $K$, $n$ என்பன நேராகுமிடத்து $g, f$ என்பனவும் நேராகுமெனக் காட்டுக.

[$K$ (பரவற்றிறன்) என்பதை அளக்கும் அத்துரோமின் முறையில் ஒரு மிக நீண்ட சலாகை $V_0$ சைன் $nt$ என்னும் ஆவர்த்தன வெப்பநிலை மாற்றத்திற்கு உட்படுத்தப்படும். வெப்ப அலைகள் சலாகை நீளத்திற்குச் செல்தற்கு இது ஏதுவாகும். அவற்றின் வேகத்தையும் தேய்வு வீதத்தையும் அளத்தலால் $n/f$, $g$ என்பன காணப்படலாம். பின்னர் $K = n/2fg$ என்பதிலிருந்து $K$ கணிக்கப்படலாம்.]

(7) $x = 0$ ஆகுமிடத்து $V_0$ சைன் $nt$ என்பதற்கும் $x = +\infty$ ஆகுமிடத்து பூச்சியத்திற்கும் ஒடுங்கும்

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

என்பதன் ஒரு தீர்வைக் காண்க.

[இதுவே கதிர்ப்பு நிகழாவிடத்து ஈற்றுப் பயிற்சியிலுள்ள பிரசினம். ஒரு தளமுகத்தால் வரைப்புற்ற குறை முடிவிலித் திண்மத்தில் பாய்ச்சல் என்றும் முகத்திற்குச் செங்குத்தாயின் சலாகைக்குப் பதிலாக இத்திண்மம் எடுக்கப்படலாம். இம்முறையால் கெல்வின் எனபவர் புவிக்கு $K$ ஐக் கண்டுள்ளார்.]

(8) $g^2 - f^2 = RK - n^2LC,\ 2fg = n(RC + LK)$,

$I_0^2(R + iLn) = V_0^2(K + iCn)$ ஆயின்,

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RI + L\frac{\partial I}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = KV + C\frac{\partial V}{\partial t}$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

$$V = V_0 e^{-(g+if)x+int}$$

$$I = I_0 e^{-(g+if)x+int}$$

என்பவற்றால் திருத்தியாக்கப்படுமென்பதை நிறுவுக.

[இவை அலகு நீளத்திற்கு அளக்கப்படும் $R$ என்னுந் தடையும் $C$ என்னுங் கொள்ளளவும் $L$ என்னுந் தூண்டுதிறனும் $K$ என்னும் பொசிவும் உள்ள ஒரு தொலைபன்னி வடத்திற்கு எவிசைட்டின் சமன்பாடுகள். $I$ ஆனது ஓட்டமும் $V$ ஆனது மின்னியக்க விசையுமாகும்.]

(9) ஈற்றுப் பயிற்சியில் $RC = KL$ ஆயின் $g$ ஆனது $n$ ஐச் சாராது எனக் காட்டுக.

[அலையினது நொய்தாக்கல் பொதுவாக $n$ ஐச் சாருமாறுள்ள $g$ யைச் சாரும். ஆயின், ஓர் ஒலி வேறுவேறான மீடிறன்களுள்ள இசை அலைகளால் ஆக்கப்படுமாயின் இவ்வலைகள் வேறுவேறான நொய்தாக்கற் படிகளில் ஊடுகடத்தப்படும். ஆகவே, மற்றை முனையில் வாங்கப்படும் ஒலி திரிந்ததாகும். $RC = KL$ ஆகுமாறு $L$, $K$ என்பவற்றை அதிகரிக்கும் எவிசைட்டின் உபகரணம் இத்திரிவைத் தடுக்கும்.]

(10) பயிற்சி (8) இல் $L = K = 0$ ஆயின் $V$, $I$ ஆகிய இரண்டும் $\sqrt{(2n/RC)}$ என்னும் வேகத்தோடு செலுத்தப்படுமெனக் காட்டுக.

[வேகம் $n/f$ என்பதாலே தரப்படும்]

(11) $V = c/\sqrt{(k\mu)}$, $\beta_0 = -\sqrt{(k\mu)}\,R_0$ ஆயின்

$$\frac{k}{c}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}; \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z};$$

$$\frac{k}{c}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x};$$

$$\frac{k}{c}\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y};$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

$$P = 0; \quad \alpha = 0;$$
$$Q = 0; \quad \beta = \beta_0 \text{ சைன் } p(x - vt);$$
$$R = R_0 \text{ சைன் } p(x - vt) : \gamma = 0$$

என்பவற்றால் திருத்தியாக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

[இவை $k$ என்னுந் தற்றூண்டற் கொள்ளளவும் $\mu$ என்னும் உட்புகவிடுமியல்பும் உள்ள மின்னுழையகத்திற்கு மக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகள். $P$, $Q$, $R$ என்பன மின்செறிவுக் கூறுகளும் $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ என்பன காந்தச் செறிவுக் கூறுகளுமாகும். $c$ ஆனது மின்காந்த அலகு நிலையின் அலகுக்குக் கொள்ளும் விகிதம் (இது சுயாதீன ஈதரில் ஒளியின் வேகத்திற்குச் சமனாகும்.) தீர்வு காட்டுவது தளமின்காந்த அலைகள் $c/\sqrt{(k\mu)}$ என்னும் வேகத்தோடு செல்லுமென்பதும் மின்செறிவும் காந்தச்செறிவும் செலுத்துகைத் திசைக்குச் செங்குத்தாகி ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகுமென்பதுமே.]

(12) $t = +\infty$ ஆயின் $V \neq \infty$,
$x = 0$ அல்லது $\pi$ ஆயின் $t$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $V = 0$,
$t = 0$ ஆயின் $0$, $\pi$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்
$V = \pi x - x^2$ ஆகுமாறு $\dfrac{\partial V}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ என்பதன் ஒரு தீர்வு காண்க.

**கவனிக்க.** இதனை எத்தனித்தற்கு முன் பிரிவுகள் 46, 49 ஆகியவற்றை மீண்டும் படிக்க. $V$ ஆனது தனது முனைகள் 0° இல் வைக்கப்படும் $\pi$ என்னும் நீளமுள்ள கதிர்காக்கோலின் வெப்பநிலையாகும்; ஒரு முனையிலிருந்து தூரம் $x$ இல் கோலின் வெப்பநிலை தொடக்கத்தில் $(\pi x - x^2)^0$.

(13) ஈற்றுப் பயிற்சியில் கோலினது நீளம் $\pi$ இற்குப் பதிலாக $l$ ஆயின் தீர்வு எதுவாகும்?
[பிரிவு 50 இல் உள்ளதுபோல் செய்க.]

(14) பயிற்சி (12) இல் $x = 0$ அல்லது $\pi$ ஆகுமிடத்து $V = 0$ என்னும் நிபந்தனைகளுக்குப் பதிலாக $x = 0$ அல்லது $\pi$ ஆகுமிடத்து $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$ என்னும் நிபந்தனை இடப்படுமாயின் அதனைத் தீர்க்க.

[முனைகள் மாறா வெப்பநிலையாகுமென்பதற்குப் பதிலாக இங்கு அவற்றிற்கூடாக வெப்பம் செல்லாதெனக் கொள்ளப்படும்.]

(15) பயிற்சி 12 இல் $\pi x - x^2$ இற்குப் பதிலாக 100 இடப்படுமாயின் அதனைத் தீர்க்க.

(16) $t = +\infty$ ஆயின் $V \neq \infty$, $x = 0$ அல்லது $\pi$ ஆயின் $t$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $V = 100$, $t = 0$ ஆயின் $0$, $\pi$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $V = 0$ என்னும் நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்குமாறு

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

என்பதன் ஒரு தீர்வு காண்க.

[இங்கு தொடக்கத்தில் பனிக்குளிராயுள்ள கோலினது முனைகள் கொதிநீரில் வைக்கப்படும்.]

(17) பயிற்சி 15 இல் நீளமானது $\pi$ இற்குப் பதிலாக $l$ ஆயின் அதனைத் தீர்க்க. $l$ வரையறையின்றி அதிகரிக்குமாயின் முடிவில் தொடர்

$$\frac{200}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{1-e^{-K\alpha^2 t}}{\alpha}\text{ சைன் }\alpha x\,d\alpha$$

என்னுந் தொகையீடாகுமெனக் காட்டுக.

[கவனிக்க. இது பூரியேயின் தொகையீடு எனப்படும். இம்முடிபைப் பெறுதற்கு $(2r+1)\pi/l=\alpha.\ 2\pi/l=d\alpha$ என இடுக. கெல்வின் என்பவர் நிலத்தின் கீழ் வெப்பநிலை அதிகரிப்பு வீதம் பற்றிய நோக்கத்திலிருந்து தான் பெற்றுள்ள புவி வயது மதிப்பீட்டில் ஒரு தொகையீடு வழங்கியுள்ளார். (இந்நூலின் முடிவில் உள்ள பலவினப் பயிற்சிகளில் (107) என்பதைப் பார்க்க.) புவிக்குள் இரேடியத்தின் செய்கைகளால் வெப்பம் தொடர்ந்து பிறப்பிக்கப்படுமெனப் பின்னர் சிரட்டு என்பவர் காட்டியுள்ளது கெல்வினின் மதிப்பீடு மிகச் சிறியதாகுமெனக் காட்டும்.]

(18) $t=+\infty$ ஆக $V$ ஆனது முடிவுள்ளது ; $t$ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x=0$ ஆக $\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $x=l$ ஆக $V=0$ ; $o\ l$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $t=0$ ஆக, $V=Vo$ ; என்னும் நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும்

$$\frac{\partial V}{\partial t}=K\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

என்பதன் ஒரு தீர்வு காண்க.

(உப்புக்கரைசல் கொள்ளும் ஒரு சிறு சோதனைக்குழாய் நீர் நிரம்பிய ஒரு பெரிய பாண்டத்தில் கீழாழ்த்தப்படுமாயின் உப்பு மேலே பரவிச் சோதனைக் குழாயிலிருந்து வெளியே பெரிய பாண்டத்திலுள்ள நீருக்குட் செல்லும். $V_0$ ஆனது உப்பினது தொடக்கச் செறிவும் $l$ ஆனது அது நிரப்பும் சோதனைக் குழாயின் நீளமுமாயின் $V$ ஆனது யாதும் நேரத்தி சோதனைக்குழாய் அடியிலிருந்து $x$ என்னும் உயரத்தில் செறிவைத்தரும். $x=0$ ஆக $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ என்னும் நிபந்தனையின் பொருள், அடைத்த முனையில் பரவல் நிகழாது என்பதே. $x=l$ ஆக $V=0$ என்பதன் பொருள் சோதனைக்குழாய் உச்சியில் ஏறக்குறையத் தூயதாகும் நீர் உண்டு என்பதே.]

(19) $y$ ஆனது $x$ ஐத் திரிகோணகணித முறையில் உட்படுத்துமாறும் $t$ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x=0$ எல்லது $\pi$ ஆக $y=0$ ஆகுமாறும் $x$ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $t=0$ ஆக $\frac{\partial y}{\partial t}=0$ ஆகுமாறும் $t=0$ ஆகுமிடத்து $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ என்பவற்றிற்கிடையே $y=mx$ என்பதும் $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ என்பவற்றிற்கிடையே $y=m\ (\pi-x)$ என்பதும் ஆகுமாறும்

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

என்பதன் ஒரு தீர்வு காண்க.

[கவனிக்க.—பிரிவு 48 இன் இரண்டாவது செய்த உதாரணத்தைப் பார்க்க.

$y$ ஆனது ஒன்றிலிருந்தொன்று $\pi$ என்னுந் தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையே ஈர்க்கப்பட்டுள்ள ஓர் இழையின் குறுக்குப் பெயர்ச்சியாகும். இழை தனது நடுப்புள்ளியிலிருந்து $m\pi/2$ என்னுந் தூரத்திற்கு இழுக்கப்பட்டு விடப்படும்.]

(20) $D$ என்பது மாறிலியாக $\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$ என்பதன் தீர்வை $y = e^{xD}A + e^{-xD}B$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதி $D$ இற்கு $\frac{\partial}{\partial t}$ என்பதையும் $A, B$ என்பவற்றிற்கு முறையே $f(t), F(t)$ என்பவற்றையும் பிரதியிட்டு தெயிலரின் தேற்றத்தை

$$f(t+x) = e^{xD} f(t)$$

என்னும் குறியீட்டு வடிவத்தில் வழங்கி

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

என்பதன் தீர்வை $y = f(t+x) + F(t-x)$ என்றும் வடிவத்தில் உய்த்தறிக.

[இக்குறியீட்டு முறைகளால் பெறப்படும் முடிபுகள் **திருத்தமாய்** நிகழலாமென்று மட்டுமே நாம் கொள்ளலாம். வேறு வழியாக அவற்றை வாய்ப்புப் பார்த்தாலன்றி இந்நியாய முறையானது முடிபிலிருந்து வகையீட்டுச் சமன்பாட்டு குப் பின்முகமாகச் செலுத்தப்படலாமா என்பதைப் பற்றி மிக்க கவனமாய் ஆராய்தல் வேண்டும்.

எவிசைட்டு என்பவர் வேறுவிதமாகத் தீர்க்க முடியாப் பிரசினங்கள் சிலவற்றைத் தீர்த்தற்குக் குறியீட்டு முறைகள் வழங்கியுள்ளார். அவருடைய

'**மின்காந்தக் கொள்கை**' என்னும் நூலைப் பார்க்க.]

(21) $D$ என்பது மாறிலியாக $\frac{dy}{dx} = D^2y$ என்பதன் தீர்விலிருந்து $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ என்பதன் தீர்வை

$$y = f(t) + x\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial^4 f}{\partial t^4} +$$

என்னும் வடிவத்தில் உய்த்தறிக.

[தொடரானது ஒருங்கினாலன்றி இது தீர்வு ஆகாது.]

### $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ என்பதன் பொதுத்தீர்வு.

ஒரு பரீட்சைத் தீர்வாக $y = f(x+mt)$ என இடுக; இங்கு $m$ ஆனது மாறிலியாகும்.

இது தருவது $f''(x+mt) = \frac{m^2}{a^2} \cdot f''(x+mt)$ ; $m = \pm a$ ஆயின் இது திருப்தியாக்கப்படும்.

ஆயின் $y = f(x-at)$, $y = F(x+at)$ என்பன இரு தீர்வுகளாகும்; வகையீட்டுச் சமன்பாடு ஏகபரிமாணமாதலால் இச்சமன்பாட்டின் வரிசைக்குச் சமனான எதேச்சைச் சார்புத் தொகை கொள்ளும் $y = f(x-at) + F(x+at)$ என்பது ஒரு மூன்றுந் தீர்வு; கூடுதலாகப் பொதுவாகும் தீர்வை எதிர்பார்த்தல் முடியாது.

[பிரிவுகள் 178–181 இவ்வத்தியாயத்திற்கு பிற்சேர்வு ஆகும். அவை முக்கியமாக எடுத்தாள்வன அதிர்கின்ற இழைகள் பற்றிய சமன்பாடும் முப்பரிமாண அலைச் சமன்பாடுமே. பிரிவு 181 இன் முடிவில் கணிதபௌதிகவியல் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய சில பிரதானமான வேலைகள் தரப்படும்.]

# அத்தியாயம் V

## முதல் வரிசையாகி முதற்படியல்லாத சமன்பாடுகள்

**51.** இவ்வத்தியாயத்தில் முடிவில் தொடரை வழங்காது தமது தீர்வு சிலசமயங்களிற் காணப்படக்கூடிய முதல் வரிசையும் முதற் படியிலும் உயர்ந்த படியும் கொண்ட சில விசேட சமன்பாட்டு வகைகளை எடுத்துச் சிந்திப்போம். $\frac{dy}{dx}$ என்பது $p$ ஆல் குறிக்கப்படும்.

இவ்விசேட வகைகள் ஆவன

(1) $p$ இற்குத் தீர்க்கத்தக்கன,

(2) $y$ இற்குத் தீர்க்கத்தக்கன,

(3) $x$ இற்குத் தீர்க்கத்தக்கன.

**52.** **$p$ இற்குத் தீர்க்கத்தகு சமன்பாடுகள்,** $p$ இற்குத் தீர்க்கக்கூடுமாயின் $n$ ஆம் படியிலுள்ள சமன்பாடு முதற் படியிலுள்ள $n$ சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுக்கப்படும் ; இவற்றிற்கு அத்தியாயம் II இன் முறைகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

உ-ம் (1) $p^2+px+py+xy=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு தருவது $p=-x$ அல்லது $p=-y$ ; இவற்றிலிருந்து $2y=-x^2+c_1$ அல்லது $x=-\text{மட}y+c_2$ ; அல்லது ஒரு சமன்பாடாக உணர்த்தப்படுமிடத்து,

$$(2y+x^2-c_1)\,(x+\text{மட}\,y-c_2)=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

இந்நிலையில் எமக்கு ஒரு வில்லங்கம் ஏற்படும் ; முற்றிய மூலி தோற்றாவு முறையில் ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும், ஆனால் சமன்பாடு முதல் வரிசையாதலால் ஒன்றையே எதிர்பார்ப்போம்.

ஆனால் $$(2y+x^2-c)\,(x+\text{மட}\,y-c)=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னுந் தீர்வை எடுக்க. $c$, $c_1$, $c_2$ என்னும் மாறிலிகள் ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு பெறுமானத்தையே எடுப்போமாயின் இச்சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு வளையிச் சோடியைக் குறிக்கும் ; $(c=c_1=c_2)$ ஆனாலன்றி இச்சோடிகள் ஒன்றாகா. ஆனால் மாறிலிகளுக்கு $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ இற்கு உள்ள இயல்தகு பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றையும் கொடுத்தலாற் பெறப்படும் முடிவில் வளையிச் சோடித் தொடையை எடுத்துச் சிந்திப்போமாயின் எல்லாவற்றையும் ஒருங்கு எடுக்குமிடத்து அவற்றின் வரிசை வேறுவேறாகிய போதிலும் ஒரேமுடிவில் தொடையையே பெறுவோம். ஆயின் (2) என்பது முற்றிய மூலியாக எடுக்கப்படலாம்.

உ-ம் (ii) $$p^2+p-2=0.$$

இங்கு $p=1$ அல்லது $p=-2$ ; ஆயின் $y=x+c_1$ அல்லது $y=-2x+c_2$. முன்போல $(y-x-c)\ (y+2x-c)=0$ என்பதை முற்றிய மூலியாக எடுப்போம், $(y-x-c_1)\ (y+2x-c_2)=0$ என்பதையல்ல.

இச்சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் $y=x$ என்பதற்கோ $y=-2x$ என்பதற்கோ சமாந்தரமான கோடுகள் எல்லாவற்றையும் குறிக்கும்.
தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $p^2+p-6=0.$ (2) $p^2+2xp=3x^2.$ (3) $p^3=x^5.$
(4) $x+yp^2=p\,(1+xy).$ (5) $p^3-p\,(x^2+xy+y^2)+xy\,(x+y)=0.$
(6) $p^2-2p$ அகோசை $x+1=0.$

**53. y இற்குத் தீர்க்கத்தகு சமன்பாடுகள்,** சமன்பாடு $y$ இற்குத் தீர்க்கத் தகுமாயின் தீர்த்தெடுத்த வடிவத்தை $x$ என்பதைக் குறித்து வகையிடுவோம்

உ-ம் (I) $$p^2-py+x=0.$$

$$y \text{ இற்குத் தீர்க்க, } y=p+\frac{x}{p}.$$

வகையிட, $$p=\frac{dp}{dx}+\frac{1}{p}-\frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

அதாவது $$\left(p-\frac{1}{p}\right)\frac{dx}{dp}+\frac{x}{p^2}=1.$$

$p$ ஐச் சாராமாறியாகக் கொள்ளுமிடத்து இது முதல் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. பிரிவு 19 இலுள்ளது போல் முன்செல்ல மாணாக்கன்

$$x=p\,(c+\text{அகோசை}^{-1}\,p)\,(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

என்பதைப் பெறுவான்.

ஆகவே, $$y=p+\frac{x}{p}$$

ஆதலால், $$y=p+(c+\text{அகோசை}^{-1}\,p)\,(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$x$, $y$ என்பவற்றிற்கு $p$ பற்றியுள்ள இவ்விரு சமன்பாடுகளும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வின் பரமானச் சமன்பாடுகளைத் தரும். $c$ இன் யாதுமொரு தந்த பெறுமானத்தை எடுக்குமிடத்து $p$ இன் ஒவ்வொரு

பெறுமானத்திற்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளியை வரையறுக்கும் $x$ இன் ஒரு வரையறுத்த பெறுமானமும் $y$ இன் ஒரு வரையறுத்த பெறுமானமும் உண்டு. $p$ ஆனது மாற இப்புள்ளி இயங்கி ஒரு வளையியை வரையும். இவ்வுதாரணத்தில், $p$ ஐ நீக்கி $x$, $y$ என்பவற்றைத் தொடுக்கும் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்; ஆனால் வளையியை வரைதற்குப் பரமான வடிவங்கள் கூடுதலாக நன்றாகாவிட்டாலும் இதனைப் போலாதல் நன்றாகும்.

உ-ம் (ii) $$3p^5 - py + 1 = 0$$

$y$ இற்குத் தீர்க்க, $$y = 3p^4 + p^{-1}.$$

வகையிட, $$p = 12p^3 \frac{dp}{dx} - p^{-2} \frac{dp}{dx},$$

அதாவது $$dx = (12p^2 - p^{-3})\, dp.$$

தொகையிட, $$x = 4p^3 + \tfrac{1}{2}p^{-2} + c;$$

$$y = 3p^4 + p^{-1}.$$

மாணாக்கன் இதன் வரைபை $c$ இன் ஒரு குறிப்பிட்ட பெறுமானத்திற்கு வரைதல் வேண்டும் ($c = 0$ என்க).

**54. x இற்குத் தீர்க்கத்தகு சமன்பாடுகள்,** சமன்பாடு $x$ இற்குத் தீர்க்கத்தகுமாயின் தீர்த்தெடுத்த வடிவத்தை $y$ யைக் குறித்து வகையிட்டுக் கொண்டு $\dfrac{dx}{dy}$ என்பதை $\dfrac{1}{p}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதுவோம்.

உ-ம். $p^2 - py + x = 0$. ஈற்றுப் பிரிவில் $y$ இற்குத் தீர்த்தலால் இது தீர்க்கப்பட்டுள்ளது.

$x$ இற்குத் தீர்க்க, $$x = py - p^2.$$

$y$ என்பதைக் குறித்து வகையிட,

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} - 2p\frac{dp}{dy},$$

அதாவது $$\left(p - \frac{1}{p}\right)\frac{dy}{dp} + y = 2p;$$

$p$ ஐச் சாராமாறியாகவும் $y$ ஐ சார்மாறியாகவும் எடுக்க இது முதல் வரிசையிலுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. பிரிவு 19 இலுள்ளது போல் இது தீர்க்கப்படலாம். ஈற்றுப் பிரிவிற் காணப்பட்ட முடிவை மாணாக்கன் பெறுவான்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சி

(1) $x = 4p + 4p^3$.

(2) $p^2 - 2xp + 1 = 0$.

(3) $y = p^2x + p$.

(4) $y = x + p^3$.

(5) $p^3 + p = e^y$.

(6) $2y + p^2 + 2p = 2x\ (p + 1)$.

(7) $p^3 - p\ (y + 3) + x = 0$.

(8) $y = p\ \text{சைன்}\ p + \text{கோசை}\ p$.

(9) $y = p\ \text{தான்}\ p + \text{மட}\ (\text{கோசை}\ p)$.

(10) $e^{p-y} = p^2 - 1$.

(11) $p = \text{தான்}\left(x - \dfrac{p}{1+p^2}\right)$.

(12) பயிற்சி (1) இன் தீர்வால் தரப்படும் குடும்பத்தின் வளையிகள் எல்லாம் $y$ அச்சை செங்கோணங்களில் வெட்டுமெனக் காட்டுக. (0, 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் குடும்ப வளையியிற்கு $c$ யின் பெறுமானம் காண்க.

சதுரக் கோட்டுத்தாளில் இவ்வளையியை வரைக.

(13) பயிற்சி 9 இல் $c = 0$ ஆகுமாறுள்ள தீர்வால் தரப்படும் வளையியை வரைக. $p = 0$, $p = \cdot 1$, $p = \cdot 2$, $p = \cdot 3$ என்பவற்றால் தரப்படும் புள்ளிகளில் தொடலிகளை வரைந்து இத்தொடலிகளின் படித்திறன்கள் முறையே 0, .1, .2, .3, ஆகும் என்பதை அளவீட்டால் சரிபிழை பார்க்க.

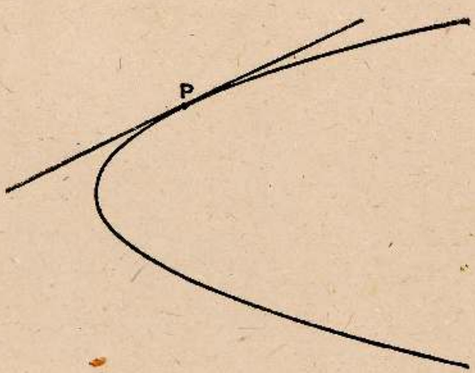
# அத்தியாயம் VI

## தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள்

[இவ்வத்தியாய நியாய முறைகள் கேத்திரகணித அனுமானத்தையே அடிப்படையாய்க் கொண்டன. ஆகவே முடிபுகள் நிறுவப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்ளல் முடியாது; அவை சில வகைகளில் உண்மையாகலாமென்பதே கூறப்பட்டுள்ளது. பகுப்பு அறிமுறை மிகக் கடினமானது.]

**55.** ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதத்திலிருந்து $y = mx + \frac{a}{m}$ என்னும் நேர்கோடு $m$ இன் பெறுமானம் எதுவாயினும் $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவைத் தொடும் என்பது தெரிந்ததே.

யாதுமொரு குறிப்பிட்ட தொடலியின் $P$ என்னுந் தொடுகைப் புள்ளியை எடுக்க. $P$ இல் தொடலிக்கும் பரவளைவுக்கும் ஒரே திசை உண்டு ; ஆயின் அவற்றிற்கு $\frac{dy}{dx}$ ஒரு பொதுப் பெறுமானம் கொள்ளும், அவ்வாறே $x, y$ என்பனவுமாம்.



படம் 7

ஆனால் தொடலிக்கு $m = \frac{dy}{dx} = p$ என்க ; ஆயின் தொடலி $y = px + \frac{a}{p}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்திப்படுத்தும்.

ஆகவே $P$ இல் இச்சமன்பாடு பரவளைவுக்கும் உண்மையாகும்; ஏனெனின், $P$ இல் பரவளைவுக்கு $x$, $y$, $p$ என்பன தொடலிக்கு உள்ளவையே.

$P$ ஆனது பரவளைவில் யாதுமொரு புள்ளியாதலால் $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவுச் சமன்பாடு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆதல் வேண்டும்; இதனை மாணுக்கன் எளிதில் சரிபிழை பார்க்கலாம்.

பொதுவாக, தமது சூழி*யெனப்படும் நிலையான வளையியைத் தொடும் வளையிகள் கொண்ட ஒன்றியாய் முடிவில்லாத் தொகுதி யாதும் உண்டெனின் இக்குடும்பம் யாதோ முதல் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலியைக் குறிக்குமிடத்து சூழியும் அவ்வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வைக் குறிக்கும். ஏனெனின் சூழிப்புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் $x, y, p$ என்பன சூழிக்கும் அதனை அங்கு தொடும் குடும்ப வளையிக்கும் ஒரே பெறுமானம் கொள்ளும்.

அத்தகைத் தீர்வு ஒரு தனிச்சிறப்புத் தீர்வு எனப்படும். அது எதேச்சை மாறிலி யாதும் கொள்ளாது. அன்றியும் புறநடை வகைகளிலன்றி (பிரிவு 160) முற்றிய மூலியில் எதேச்சை மாறிலிக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட பெறுமானத்தைக் கொடுத்தலால் அதனை உய்த்தறிதல் முடியாது.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சி

$x=y$ என்னுங் கோடு $y=x+\frac{1}{4}(x-c)^2$ என்னும் பரவளைவுக் குடும்பத்தின் சூழியென்பதை நிறுவுக. தொடுகைப் புள்ளி $(c,c)$ என்பதையும் இப்புள்ளியில் பரவளைவுக்கும் சூழிக்கும் $p=1$ என்பதையும் நிறுவுக. பரவளைவுக் குடும்பத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $y=x+(p-1^{2}$ என்னும் வடிவத்தில் பெற்றுக்கொண்டு இதனைச் சூழியின் சமன்பாடும் திருத்தியாக்குமென்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

சூழியையும், $c=0, 1, 2, \ldots$ என எடுத்து, குடும்பத்தின் பரவளைவுகள் சிலவற்றையும் வரைக.

**56.** தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகளை எவ்வாறு பெறலாமென்பதைப் பற்றி இப்போது சிந்திப்போம். முற்றிய மூலியாற் குறிக்கப்படும் வளையிகளினது சூழி ஒரு தனிச்சிறப்புத் தீர்வு தருமெனக் காட்டப்பட்டுள்ளது; ஆயின் சூழி காண்டல் முறையை ஆராய்ந்து தொடங்குவோம்.

பொது முறை, $f(x, y, c)=0$ என்னும் வளையிக் குடும்பச் சமன்பாட்டிலிருந்தும் $\frac{\partial f}{\partial c}=0$ என்பதிலிருந்தும் $c$ என்னும் பரமானத்தை நீக்கலேயாம்.

[லாமின் “**நுண்ணெண் நுண்கணிதம்**” பிரிவு 156 பார்க்க. $f(x, y, c)$ ஆனது $Lc^2+Mc+N$ என்னும் வடிவமாயின் முடிபு $M^2=4LN$ ஆகும். ஆயின் $y-cx-\frac{1}{c}=0$, அல்லது $c^2x-cy+1=0$, என்பதற்கு முடிபு $y^2=4x$ ஆகும்.]

---

*லாமின் “**நுண்ணெண் நுண்கணிதத்தில்**” (இரண்டாம் பதிப்பு, பிரிவு 155) ஒரு குடும்பத்தின் சூழியானது அக்குடும்பத்தினது அடுத்துவரும் வளையிகளினது இறுதி இடைவெட்டின் ஒழுக்கு என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு வரையறுக்கப்படுமிடத்து அது சூழிகளெனக் கூறியவற்றோடு அல்லது அவற்றிற்குப் பதிலாக கணு ஒழுக்குக்களையோ கூர் ஒழுக்குக்களையோ உட்கொள்ளலாம். [இதற்குப் பிரிவு 56 இல் கேத்திரகணித காரணம் கூறுவோம்: பகுப்பு நிறுவல் பற்றி லாமின் நூலைப் பார்க்க].

உதாரணமாக,

$f(x, y, c) = 0$ என்பது $y - cx - \frac{1}{c} = 0$ ஆயின், ....................(1)

$\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ என்பது $-x + \frac{1}{c^2} = 0$ ஆகும்; ..........................(2)

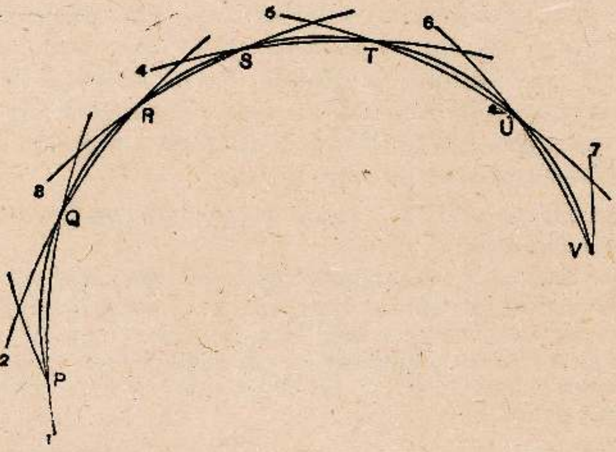
இது தருவது $c = \pm 1/\sqrt{x}.$

(1) இல் பிரதியிட, $y = \pm 2\sqrt{x}.$

அல்லது $y^2 = 4x.$

இந்த முறை ஆனது கணியம் $h$ இனால் வித்தியாசப்படும் பரமானங்கள் கொண்ட $f(x, y, c) = 0$, $f(x, y, c + h) = 0$ என்னும் இரு குடும்ப வளையிகளினது இடைவெட்டு ஒழுக்கைக் கண்டு, $h$ பூச்சியத்தை அணுகுமிடத்து எல்லை காண்பதற்குச் சமவலுவாகும். முடிபு $f(x, y, c) = 0$ என்பதன் $c$ – பிரித்துக்காட்டியெனப்படும்.

**57.** இனி வரிப்படங்கள் 8, 9, 10, 11 ஆகியவற்றைப் பற்றிச் சிந்திக்க.



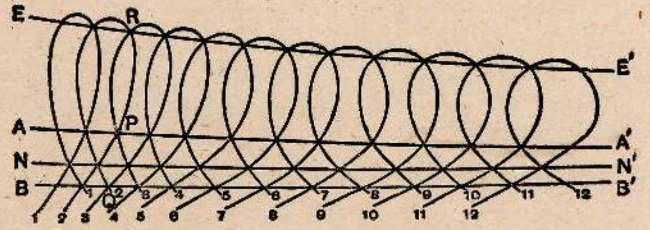
படம் 8.

குடும்பத்தின் வளையிகள் விசேடத் தனிச்சிறப்பு யாதும் கொள்ளா வகையை படம் 8 காட்டும். இறுதி இடைவெட்டுக்களின் ஒழுக்காகிய $PQRSTUV$ என்பது குடும்பத்தின் வளையிகள் ஒவ்வொன்றோடும் இரு புள்ளிகள் பொதுவாயுடைய ஒரு வளையியாகும் (உதாரணமாக, $Q$, $R$ என்பன இவ்வொழுக்கிலும் 2 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ள வளையியிலும் கிடக்கும்). ஆகவே, எல்லையில் $PQRSTUV$ என்னும் ஒழுக்கு குடும்பத்தினது ஒவ்வொரு வளையியையுந் தொட்டு சூழியென வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதாகும்.

படம் 9 இல் குடும்பத்தின் ஒவ்வொரு வளையியிற்கும் ஒரு கணு உண்டு. அடுத்துவரும் இரு வளையிகள் மூன்று புள்ளிகளில் இடைவெட்டும் (உதாரணமாக, 2, 3 என்னும் வளையிகள் $P, Q, R$ என்னும் புள்ளிகளில்).

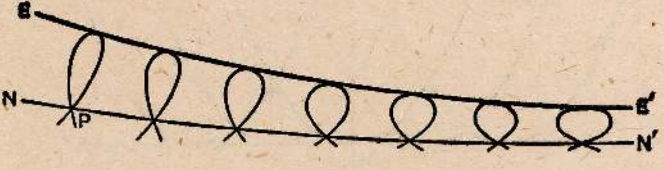
அத்தகைப் புள்ளிகளினது ஒழுக்கு $EE'$, $AA'$, $BB'$ என்னும் மூன்று வேறு வேறான பாகங்களால் ஆக்கப்படும்.

அடுத்துவரும் வளையிகளைக் கூடுதலாக நெருக்கமாயெடுத்துக் கொண்டு எல்லைக்குச் செல்வோமாயின் $AA'$, $BB'$ என்பன $NN'$ என்னும் கணு—ஒழுக்கோடு ஒன்றுபட $EE'$ என்பது சூழியாகும். ஆயின், இவ்வகையில் c-பிரித்துக் காட்டி ஆனது கணு—ஒழுக்குச் சமன்பாட்டின் வர்க்கத்தையும் சூழிச் சமன்பாட்டையும் கொள்ளுமெனை எதிர்பார்க்கலாம்.



படம் 9

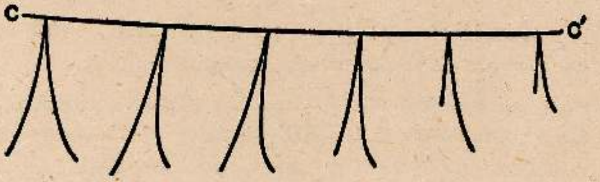
படம் 10 காட்டுவதுபோல் $NN'$ என்னுங் கணு—ஒழுக்கின் $P$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் அதன் திசை $P$ இல் கணு கொண்ட வளையியின் இரு கிளைகள் யாதுமொன்றினது திசையோடு பொதுவாக ஒன்றாகாது. $P$ இல் இவ்வளையியோடு கணு—ஒழுக்கு $x$, $y$ என்பவற்றைப் பொதுவாய்க் கொள்ளும், **ஆனால் $p$ பொதுவாகாது ; ஆயின் கணு—ஒழுக்கு இக்குடும்பத்தின் வளையிகளினது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகாது.** கணு ஒரு கூர் ஆகுமாறு



படம் 10

சுருங்குமாயின், படம் 10 இனது $EE'$, $NN'$ என்னும் ஒழுக்குக்கள் ஒன்றாகி படம் 11 இனது $CC'$ என்னும் கூர்—ஒழுக்கை ஆக்கும். $NN'$ என்பது உரு 9 இன் $AA'$, $BB'$ என்னும் ஈர் ஒழுக்குக்கள் ஒன்றுபடுதலாற் பெறப்படுமெனக் காட்டப்பட்டுள்ளது ; ஆயின் $CC'$ ஆனது, உண்மையில் மூன்று ஒழுக்குக்கள் ஒன்றுபடுதலாற் பெறப்பட்டு அதன் சமன்பாடு c-பிரித்துக்காட்டியில் முப்படியில் நிகழுமெனை எதிர்பார்க்கப்படும்.

படம் 11 காட்டுவது கூர்-ஒழுக்கு ஆனது, கணு- ஒழுக்கைப்போல், (பொதுவாக) வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது தீர்வு ஆகாது என்பதே.



படம் 11

**சுருக்கிக்கூறின், c-பிரித்துக்காட்டியானது (i) சூழியை (ii) கணு-ஒழுக்கை இருபடியில் (iii) கூர்-ஒழுக்கை முப்படியிற் கொள்ளுமென எதிர்பார்க்கலாம்.**

சூழி ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு, ஆனால் கணு—ஒழுக்கும் கூர்—ஒழுக்கும் (பொதுவாக) தீர்வுகளன்று. ["பொதுவாக" எனக் கூறுதற்குக் காரணம் சில விசேட உதாரணத்தில் கணு-ஒழுக்கு அல்லது கூர்-ஒழக்கு சூழியோடு அல்லது குடும்பத்தின் ஒரு வளையியோடு ஒன்றாகலாமென்பதே.]

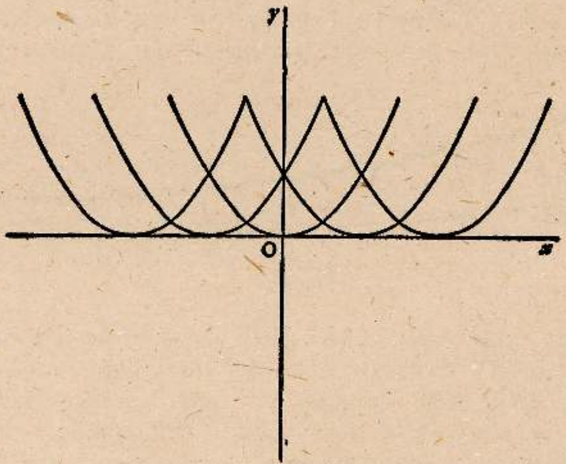
**58.** பின்வரும் உதாரணங்கள் முன்னுள்ள முடிபுகளை எடுத்துக்காட்டும்.

உ—ம். (i)
$$y = p^2$$

முற்றிய மூலி $4y = (x - c)^2$ என எளிதிற் காணலாம், அதாவது

$$c^2 - 2cx + x^2 - 4y = 0.$$

இது $c$ இல் இருபடிச் சமன்பாடு ஆதலால், பிரித்துக்காட்டியை, $(2x)^2 = 4(x^2 - 4y)$ அல்லது $y = 0$ என உடனடியாக எழுதலாம்; இது முற்றிய மூலியாலே தரப்படும் சமபரவளைவுக் குடும்பத்தின் சூழியை முதற் படியிற் குறிக்கும்.



படம் 12

உ—ம். (ii) $$3y = 2px - \frac{2p^2}{x}.$$

ஈற்று அத்தியாயத்திலுள்ளது போற் செய்யப் பெறுவது

$$3p = 2p + 2\frac{2p^2}{x^2} + \left(2x - 4\frac{p}{x}\right)\frac{dp}{dx},$$

அதாவது $px^2 - 2p^2 = (2x^3 - 4px)\frac{dp}{dx}$,

அதாவது $x^2 - 2p = 0$ அல்லது $p = 2x\frac{dp}{dx}$..................(A)

$\frac{dx}{x} = 2\frac{dp}{p}$ என்பது தருவது

மட $x = 2$ மட $p -$ மட $c$,

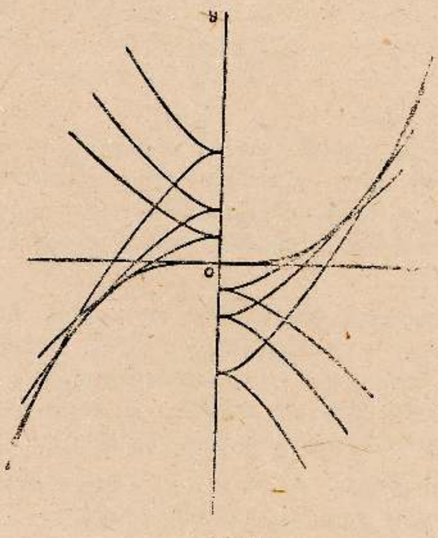
அல்லது $cx = p^2$ ; ஆகவே $3y = \pm 2c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - 2c$,

அல்லது $(3y + 2c)^2 = 4cx^3$, தமது கூர்கள் $y$ அச்சிலுள்ள குறை-முப்படி பரவளைவுகளின் குடும்பம்.

$c$ – பிரித்துக்காட்டி ஆவது $(3y - x^3)^2 = 9y^2$,

அல்லது $$x^3\,(6y - x^3) = 0.$$

கூர் – ஒழுக்கு முப்படியில் தோன்றுகின்றது, மற்றைக் காரணி சூழியைக் குறிக்கும்.



படம் 13

$6y = x^3$ என்பது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது ஒரு தீர்வு என எளிதில் வாய்ப்புப் பார்க்கப்படலாம். ஆனால் ($p = \infty$ எனத் தரும்) $x = 0$ என்பது தீர்வு ஆகாது.

$(A)$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுள் முதலாவதை எடுப்போமாயின், அதாவது $x^2 - 2p = 0$ ஆயின், வகையீட்டுச் சமன்பாட்டில் $p$ இற்குப் பிரதியிட $3y = \frac{1}{2}x^3$, அதாவது சூழி.

இது தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள் காண்டற்கு வேறொரு முறையை எடுத்துக் காட்டும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் முற்றிய மூலிகளையும் தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகளையும் (எவையேனும் உண்டெனின்) காண்க. பயிற்சிகள் 1–4 இல் வரைபுகளை வரைக :

(1) $4p^2 - 9x = 0$.

(2) $4p^2 (x - 2) = 1$

(3) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$

(4) $p^2 + y^2 - 1 = 0$

(5) $p^2 + 2xp - y = 0$

(6) $xp^2 - 2yp + 1 = 0$

(7) $4xp^2 + 4yp - 1 = 0$.

## 59. p – பிரித்துக்காட்டி

ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகளை, முற்றிய மூலியைக் காணாமலே எவ்வாறு நேரடியாகச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாமென்பதைப் பற்றி இப்போது சிந்திப்போம்.

$x^2p^2 - yp + 1 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

$x$, $y$ என்பவற்றிற்கு எவையேனும் குறிப்பிட்ட எண் பெறுமானங்களைக் கொடுப்போமாயின் $p$ இற்கு ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம். உதாரணமாக, $x = \sqrt{2}$, $y = 3$ ஆயின் $2p^2 - 3p + 1 = 0$ ஆகி $p = \frac{1}{2}$ அல்லது $1$ ஆகும்.

ஆயின், ஒவ்வொரு புள்ளிக்கூடாக இச்சமன்பாட்டைத் திருத்திப்படுத்தும் (குடும்பத்தின்) இரு வளையிகளுண்டு. சமன்பாடு $p$ இற்குச் சமமூலங்கள் தரும், அதாவது பிரித்துக்காட்டியாகிய $y^2 - 4x^2 = 0$ ஆகும், புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் இவ்விரு வளையிகளுக்கும் ஓரே தொடலி உண்டு.

$L$, $M$, $N$ என்பன $x$, $y$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாக $Lp^2 + Mp + N = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கும் இவை போன்ற முடிபுகள் உண்மையாகும். தளப்புள்ளி ஒவ்வொன்றிற்கூடாக இரு வளையிகளுண்டு, ஆனால் $M^2 - 4LN = 0$ என்னும் ஒழுக்கின் மீதுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் இவ்வளையிகள் ஒரே திசை கொள்ளும்.

கூடுதலாகப் பொதுவாக, $L$ கள் $x$, $y$ என்பவற்றின் சார்புகளாயின் $x$, $y$ ஆகியவற்றின ஒரு தந்த பெறுமானச் சோடிக்கு

$$f(x, y, p) \equiv L_0p^n + L_1p^{n-1} + L_2p^{n-2} + \dots\dots + L_n = 0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் $n$ வளையிகளுக்கு ஒக்க $p$ இன் $n$ பெறுமானங்களைத் தரும். இந்த $n$ வளையிகளுள் இரண்டு

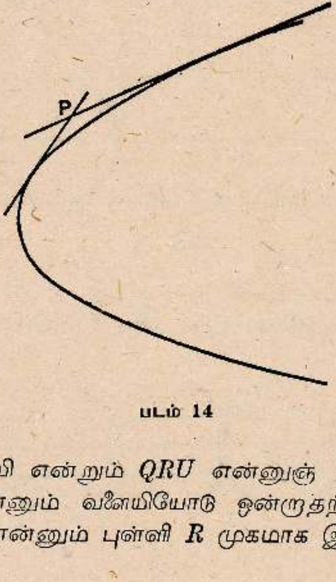
$$\begin{cases} f(x,y,p)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\delta p}=0, \end{cases}$$

என்பவற்றிலிருந்து, $p$ ஐ நீக்கிப் பெறப்படும் ஒழுக்கின் மீதுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் ஒரே தொடலி உடையன; ஏனெனின் மறிதந்த மூலம் இருத்தற்கு இதுவே சமன்பாட்டுக் கொள்கை நூல்களில் தரப்படும் நிபந்தனை. ஆகவே $p$ – பிரித்துக்காட்டிக்கு வழிகாட்டப்படுகிறோம். அதனாற் குறிக்கப்படும் ஒழுக்குக்களின் உடைமைகளை இப்போது நாம் ஆராய்வோம்.

**60.** சூழி $y=px+\dfrac{1}{p}$, அல்லது $p^2x-py+1=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் $p$ – பிரித்துக்காட்டி $y^2=4x$ ஆகும்.

முற்றிய மூலியானது தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகிய பரவளைவின் தொடலிகளால் ஆக்கப்படுமென ஏற்கெனவே கண்டுள்ளோம். தளத்திலுள்ள $P$ என்னும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கூடாகவும் இத் தொடலிகளுள் இரண்டு செல்லும்; சூழியின் மீதுள்ள புள்ளிகளுக்கு ஒத்த தொடலிகள் ஒன்றாகும்.

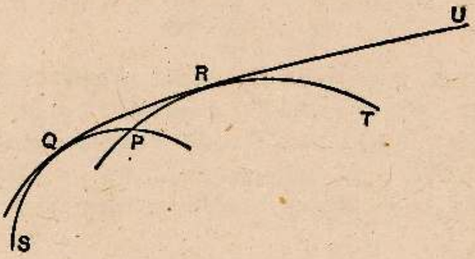
இது $p$ – பிரித்துக்காட்டியானது சூழியைக் குறிக்கும் ஓர் உதாரணமாகும். படம் 15 கூடுதலாகப் பொதுவாகும் வகை ஒன்றைக் காட்டும்.



படம் 14

$SQP$ என்னும் வளையி என்றும் $QRU$ என்னுஞ் சூழியோடு தொடுகை கொண்டு $PRT$ என்னும் வளையியோடு ஒன்றாதற்கு இயங்கிச் செல்லுமெனக் கருதுக. $P$ என்னும் புள்ளி $R$ முகமாக இயங்க $P$ இற் கூடாகச்

செல்லும் இரு வளையிகளின் தொடலிகள் இரண்டும் இறுதியில் சூழிக்கு $R$ இலுள்ள தொடலியோடு பொருந்தும். ஆகவே, $R$ ஆனது தனக கூடாகச் செல்லும் இரு (தொகுதி) வளையிகளின் $p$ கள் பொருந்து மாறுள்ள புள்ளியாகும் ; ஆயின் $p$ – பிரித்துக்காட்டி அங்கு மறையும்.

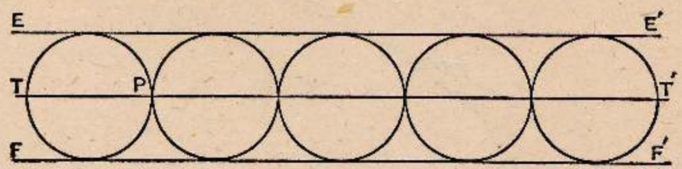


படம் 15

ஆகவே $p$ – பிரித்துக்காட்டி தொகுதியின் வளையிகளினது சூழியாகலாம் ; அவ்வாறுயின் பிரிவு 55 இற் காட்டியதுபோல் அது தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகும்.

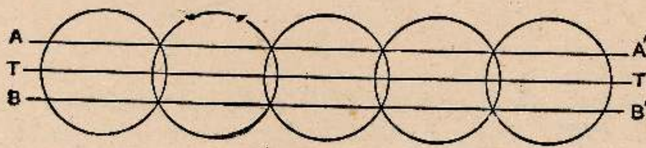
**61. பரிசவொழுக்கு.** ஆயின் சூழியானது குடும்பத்தினது இரண்டு அடுத்து வரும் புள்ளிகளுக்கு $p$ ஒரே பெறுமானம் கொள்ளுமாறு உள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்காகும். ஆனுல் இரண்டு அடுத்து வரா வளையிகள் ஒன்றையொன்று தொடுதல் சாத்தியமாகும்.

சம ஆரையும் ஒரு நேர் கோட்டில் மையங்களும் உள்ள வட்டங்கள் ஆக்குந் தொகுதியை எடுக்க.



படம் 16

படம் 16 காட்டுவது மையக்கோடு வட்டச் சோடிகளினது தொடுகைப் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு ஆகுமென்பதே. இது “ பரிசவொழுக்கு ” எனப்படும்.



படம் 17

ஒன்றையொன்று தொடாது $AA'$, $BB'$ என்னும் அயல் ஒழுக்குக்களிற் கிடக்கும் அயற் புள்ளிச் சோடுகளில் வெட்டும் வட்டங்களைப் படம் 17 காட்டும். தொடுகையாகும் எல்லை வகையில் இவ்விர் ஒழுக்குக்களும் பரிசவொழுக்கு $TT'$ ஒடு பொருந்தும். ஆகவே $p-$ பிரித்துக்காட்டியானது பரிசவொழுக்குச் சமன்பாட்டை இரு படியிற் கொள்ளுமென்பது எதிர் பார்க்கப்படலாம்.

படம் 16 இல் புள்ளி $P$ யில் பரிசவொழுக்கினது திசை இரு வட்டங்களினது திசையல்லவென்பது கண்கூடு. ஆயின் வட்டங்களாலே திருத்தியாக்கப்படும் $x$, $y$, $p$ என்பன பற்றிய தொடர்பு $P$ இல், அவையே $x$, $y$ உம் வேறு $p$ உம் உள்ள பரிசவொழுக்காலே திருத்தியாக்கப்படாது. பொதுவாக, பரிசவொழுக்கு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது தீர்வைத் தராது.

62. மையக்கோடு $Ox$ ஆயின் ஈற்றுப் பிரிவிலுள்ள வட்டங்கள் $(x+c)^2+y^2=r^2$ என்பதாலே குறிக்கப்படும்.

இது $$x+c=\pm\sqrt{(r^2-y^2)},$$

அல்லது $$1=\mp yp/\sqrt{(r^2-y^2)},$$

அதாவது $$y^2p^2+y^2-r^2=0.$$

இதன் $p-$ பிரித்துக்காட்டி $y^2(y^2-r^2)=0$ ஆகும்.

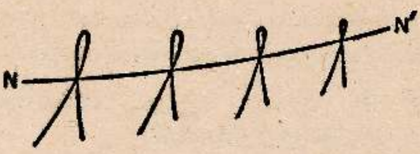
(எதிர்பார்க்கப்படுவது போல் இரு படியில் நிகழும்) $y=0$ என்னுங் கோடு பரிசவொழுக்காகும், $y=\pm r$ என்பன படம் 16 இன் $EE'$, $FF'$ என்னும் சூழிகளாகும் ;

$p=0$ எனத் தரும் $y=\pm+r$ என்பன வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள் ; ஆனுல் $y=0$ என்பது அதனைத் திருத்தியாக்காது.

63. **கூர்–ஒழுக்கு.** $p$ இற்குச் சம மூலங்கள் தரும் தொடுகை இரு வேறு வேருன வளையிகளுக்குப் பதிலாக ஒரே வளையியின் இரு கிளைகள் பற்றியதாகலாம், அதாவது $p-$ பிரித்துக்காட்டி ஒரு கூரில் மறையும்.

படம் 18

படம் 18 இற் காட்டப்படுவது போல், கூர்–ஒழுக்கினது திசை பொதுவாக $P$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் கூரினது தொடலித் திசையோடு ஒன்றுபடாது ; ஆயின் கூர் – ஒழுக்கு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது தீர்வு ஆகாது. $c$ – பிரித்துக் காட்டியிலுள்ளது போல் $p$ -- பிரித்துக்காட்டியிலும் கூர்–ஒழுக்குச் சமன்பாடு முப்படியிலே தோன்றுமா என வினவுதல் இயற்கையாகும். இதனைத் தீர்த்தற்கு, வளையிகள் மிகத் தட்டையான கணுக்கள் கொள்ளுமிடத்து இரு $p$ கள் முற்றாகச் சமமாகாது ஏறக்குறையச் சமமாகும் புள்ளிகளினது ஒழுக்கைப் பற்றிக் கருதுக. இது படம் 19 இன் $NN'$ என்னும் ஒழுக்கு.



படம் 19

எல்லையில், கணுக்கள் கூர்களாகச் சுருங்குமிடத்து, கூர் ஒழுக்கைப் பெறுவோம் ;இவ்வகையில் இரண்டு அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட ஒழுக்குக்கள் ஒன்றுதல் இன்றியமையாததால் $p$— பிரித்துக்காட்டி கூர்–ஒழுக்கின் சமன்பாட்டை முதல் வலுவிலேயே கொள்ளும் என எதிர்பார்ப்போம்.

## 64. முடிபுகளின் பொழிப்பு

ஆகவே $p$ – பிரித்துக்காட்டி

(i) சூழி
(ii) வர்க்கித்த பரிசவொழுக்கு
(iii) கூர்–ஒழுக்கு

ஆகியவற்றையும் $c$ – பிரித்துக்காட்டி

(i) சூழி
(ii) வர்க்கித்த கணு–ஒழுக்கு
(iii) முப்படியிலுள்ள கூர்–ஒழுக்கு

ஆகியவற்றையும் கொள்ளுமென எதிர்பார்க்கப்படலாம்.

இவற்றுள் சூழி மட்டுமே வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது தீர்வு.

## 65. உதாரணங்கள்

உ–ம் (i)

$$p^2(2-3y)^2=4(1-y).$$

இதனை

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{2-3y}{2\sqrt{(1-y)}}$$

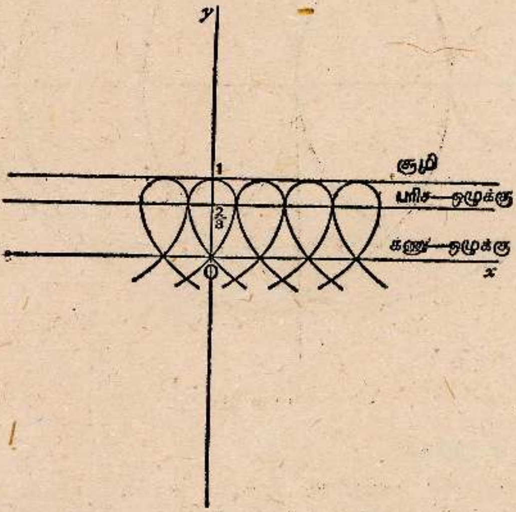
என்னும் வடிவத்தில் எழுதிக்கொண்டு முற்றிய மூலியை

$$(x-c)^2=y^2(1-y)$$

என்னும் வடிவத்தில் எளிதிற் காண்போம். $c$ – பிரித்துக்காட்டியும் $p$ – பிரித்துக்காட்டியும் முறையே $y^2(1-y)=0$, $(2-3y)^2(1-y)=0$ என்பன.

இரண்டிலும் முதற்படியில் நிகழும் $1-y=0$ என்பது சூழியைத் தரும்; $c$ – பிரித்துக்காட்டியில் வர்க்கித்து நிகழ்வதும் $p$ – பிரித்துக்காட்டியில் நிகழாததுமான $y=0$ என்பது கணு–ஒழுக்கத்தைத் தரும்; $p$ – பிரித்துக்காட்டியில் வர்க்கித்து நிகழ்வதும் $c$ – பிரித்துக்காட்டியில் நிகழாததுமான $2-3y=0$ என்பது பரிசவொழுக்கத்தைத் தரும்.

இம்மூன்று ஒழுக்குக்களுள் சூழிச் சமன்பாடு மட்டுமே வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென்பது எளிதில் சரிபிழை பார்க்கப்படலாம்.



படம் 20

உ-ம் (ii) $x^2+y^2+2cx+2c^2-1=0$ என்னும் வட்டக் குடும்பத்தை எடுக்க.

(அத்தியாயம் I இன் முறைகளால்) $c$ யை நீக்கலால் $2y^2p^2+2xyp+x^2+y^2-1=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

$c$ – பிரித்துக்காட்டியும் $p$ – பிரித்துக்காட்டியும் முறையே

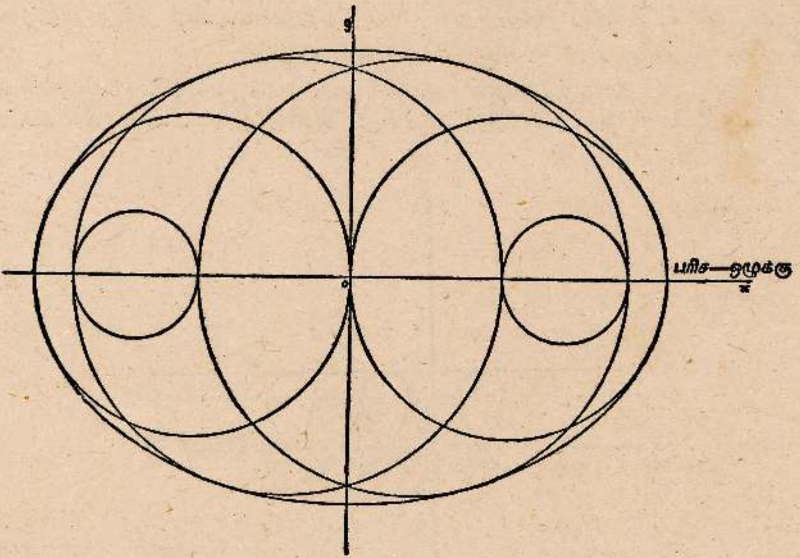
$$x^2-2(x^2+y^2-1)=0 \quad , \quad x^2y^2-2y^2(x^2+y^2-1)=0$$

அல்லது $$x^2+2y^2-2=0 \quad , \quad y^2(x^2+2y^2-2)=0$$

என்பன. $x^2+2y^2-2=0$ என்பது இரு பிரித்துக்காட்டிகளிலும் முதற்படியில் நிகழ்வதால் அது சூழியைத் தரும், $y=0$ என்பது $c$ – பிரித்துக்

காட்டியில் நிகழாது $p$ – பிரித்துக்காட்டியில் வர்க்கித்து நிகழ்தலால் அது பரிசவொழுக்கத்தைத் தரும். தொடக்கச் சமன்பாட்டால் தரப்படும் வட்டம் ஆனது குழியை

$\{-2c, \pm\sqrt{(1-2c^2)}\}$ என்னும் புள்ளிகளில் தொடும்; $c$ ஆனது எண் முறையில் $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ இலும் பெரிதாயின் இவை கற்பனையாகும்.



படம் 21

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் பயிற்சிகளில் வகையீட்டுச் சமன்பாடு தரப்படின் முற்றிய மூலியைக் காண்க, அல்லது முற்றிய மூலி தரப்படின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகள் (எவையேனுமிருப்பின்) காண்க. வரைபுகளை வரைக.

(1) $4x(x-1)(x-2)p^2-(3x^2-6x+2)^2=0.$

(2) $4xp^2-(3x-1)^2=0.$

(3) $yp^2-2xp+y=0.$

(4) $3xp^2-\ yp+x+2y=0.$

(5) $p^2+2px^3-4x^2y=0.$

(6) $p^3-4xyp+8y^2=0.$

(7) $x^2+y^2-2cx+c^2$ கோசை$^2$ $\alpha=0.$

(8) $c^2+2cy-x^2+1=0.$

(9) $c^2+(x+y)c+1-xy=0.$

(10) $x^2+y^2+2cxy+c^2-1=0.$

## 66. கிளெரோவின் வடிவம்

$y=px+\dfrac{a}{p}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுத்துச் சிந்தித்து இவ்வத்தியாயத்தைத் தொடங்கியுள்ளோம். இது

$$y=px+f(p)\text{.......................}(1)$$

என்னுங் கிளெரோவின் வடிவத்தினது ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாகும். இதனைத் தீர்த்தற்கு $x$ ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$p=p+\{x+f'(p)\}\frac{dp}{dx};$$

$$\therefore\ \frac{dp}{dx}=0,\ p=c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

அல்லது

$$0=x+f'(p)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1), (2) என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி முற்றிய மூலியாகிய

$$y=cx+f(c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்னும் நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தைப் பெறுவோம்.

(1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $p$ யை நீக்குவோமாயின் $p$ – பிரித்துக் காட்டியைப் பெறுவோம்.

$c$ – பிரித்துக்காட்டியைக் காண்பதற்கு $c$ யை (4) இலிருந்தும் (4) ஐ $c$ யைக் குறித்துப் பகுதியாய் வகையிடலாற் பெறப்படும் முடிபிலிருந்தும்

அதாவது

$$0=x+f'(c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

என்பதிலிருந்தும், நீக்குவோம்.

(4), (5) என்னுஞ் சமன்பாடுகள் (1), (3) என்பவற்றிலிருந்து வேருதல் $p$ இற்குப் பதிலாக $c$ இருத்தலாலேயாம். ஆகவே நீக்குறுகள் ஒன்றேயாகும். ஆயின் இரு பிரித்துக்காட்டிகளும் சூழியைக் குறித்தல் வேண்டும். [ஆனல் சிலவகைகளில் பிரித்துக்காட்டிகள் சூழியை மட்டுமல்ல அதன் விபத்தித் தொடலிகளையும் குறிக்கும் (பிரிவு 161).]

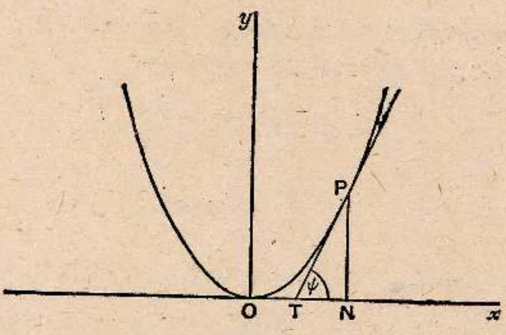
ஒரு நேர்கோட்டுக் குடும்பத்திற்கு கணு–ஒழுக்கோ கூர்–ஒழுக்கோ பரிசவொழுக்கோ இருத்தல் முடியாது என்பது கண்கூடு.

(4) என்னுஞ் சமன்பாடு தரும் பிரதானமான முடிபு

**கிளெரோவின் வடிவங் கொண்ட வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலியானது இற்குப் பதிலாக $c$ எழுதுதலால் உடனடியாக எழுதப்படலாமென்பதே.**

### 67. உதாரணம்

$O$ என்பது உற்பத்தியாக, ஒரு வளையியின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியில் தொடலியானது $x$ – அச்சோடு $\psi$ என்னுஞ் சாய்வு கொண்டு அவ்வச்சை $T$ இல் வெட்டுமாயின் $OT$ ஆனது தான் $\psi$ யைப் போல் மாறுமிடத்து அவ்வகை வளையியைக் காண்க.



படம் 22

படத்திலிருந்து, $OT=ON-TN$

$$=x-y\text{ கோதா }\psi$$

$$=x-\frac{y}{p};$$

ஆகவே $x-\frac{y}{p}=kp,$

அதாவது $y=px-kp^2.$

இது கிளெரோவின் வடிவம் ; ஆயின் முற்றிய மூலி $y=cx-kc^2$ ஆகி தனிச்சிறப்புத் தீர்வு $x^2-4ky=0$ என்னும் இதன் பிரித்துக்காட்டியாகும்.

வேண்டிய வளையி இத்தனிச்சிறப்புத் தீர்வாற் குறிக்கப்படும் பரவளைவு. முற்றிய மூலி இப்பரவளைவுக்குத் தொடலிமுறையிலுள்ள நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் முற்றிய மூலியையும் தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகளையும் காணக. (1), (2), (4), (7), (8), (9) என்னும் பயிற்சிகளில் வரைபுகளை வரைக.

(1) $y=px+p^2.$

(2) $y=px+p^3.$

(3) $y=px+$ கோசை $p.$

(4) $y=px+\sqrt{(a^2p^2+b^2)}.$

(5) $p=$ மட $(px-y).$

(6) சைன் $px$ கோசை $y=$ கோசை $px$ சைன் $y+p.$

(7) தொடலி ஆள்கூற்றச்சுக்களோடு $k^2$ என்னும் மாறிலிப் பரப்பளவு கொண்ட முக்கோணி ஆக்குமாறுள்ள வளையியின் வகையீட்டுச சமன்பாடு காண்க ; அது துணைகொண்டு வளையியின் சமனபாட்டைத் தொகையீட்டு வடிவத்திற் காண்க.

(8) தொடலியானது அச்சுக்களிலிருந்து தமது கூட்டுத்தொகை மாறிலியாகும் வெட்டுத் துண்டுகளை வெட்டுமாறுள்ள வளையி காண்க.

(9) அச்சுக்களுக்கிடையே வெட்டப்படும் தொடலிப்பாகம் மாறு நீளமாகுமாறுள்ள வளையி காண்க.

# அத்தியாயம் VI இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

சாத்தியமாகுமிடத்து தீர்வை ஒரு வரைபால் எடுத்துக் காட்டுக.

(1) $p^2+2px=3x^2$ இற்குத் தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகள் பற்றிப் பரிசோதிக்க.

(2) $X=x^2$, $Y=y^2$ என்னும் பிரதியீட்டால் $xyp^2-(x^2+y^2-1)\,p+xy=0$ என்பதை கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு ஒடுக்குக.

அது துணைகொண்டு இச்சமன்பாடு ஒரு சதுரத்தினது நாலுபக்கங்களையும் தொடும் கூம்புவளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

(3) $xyp^2+(x^2-y^2-h^2)\,p-xy=0$ என்பது $(\pm h, 0)$ இல் குவியங்கள் கொண்டு இக்குவியங்களை முடிவிலி வட்டப் புள்ளிகளுக்குத் தொடுக்கும் நாலு கற்பனைக் கோடுகளையுந் தொடும் பொதுக் குவியக் கூம்புவளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

(4 $x=aX+bY$, $y=a'X+b'Y$ என்னும் பிரதியீடு கிளெரோவின் வடிவத்திலுள்ள யாதுமொரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை கிளெரோவின் வடிவத்திலுள்ள வேறொரு சமன்பாட்டுக்கு மாற்றுமென்பதைக் கேத்திரகணித நியாய முறையாகவோ வேறு மாதிரியாகவோ காட்டுக.

(5) $8p^3x=y\ (12p^2-9)$ என்பதன் முற்றிய மூலி $(x+c)^3=3y^2c$ எனவும் $p$ – பிரித்துக்காட்டி $y^2\ (9x^2-4y^2)=0$ எனவும், $c$ – பிரித்துக்காட்டி $y^4\ (9x^2-4y^2)=0$ எனவும் காட்டுக.

இப் பிரித்துக்காட்டிகளை விளக்கிக் காட்டுக.

(6) $p=\dfrac{dy}{dx}$ ஆக $x^2p^2+yp\,(2x+y)+y^2=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $\xi=y$, $\eta=xy$ என்னும் பிரதியீட்டால் கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு ஒடுக்குக.

அது துணைகொண்டு, அல்லது வேறுமாதிரி, இச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$y+4x=0$ என்பது ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு என்பதை நிறுவுக ; $y=0$ என்பது சூழியின் ஒரு பாகமும் ஒரு சாதாரண தீர்வின் ஒரு பாகமும் என்பதையும் நிறுவுக.

(7) தக்க பிரதியீடுகளால் கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு உருமாற்றப்படக்கூடிய $y^2\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)=x^4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ என்பதைத் தீர்க்க.

(8) பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைத் தொகையிடுக :

$$\text{(i)}\quad 3\,(p+x)^2=(p-x)^3.$$

$$\text{(ii)}\quad y^2\,(1+4p^2)-2pxy-1=0.$$

(ii) இல் தனிச் சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க ; உள்ள எவையேனுங் காரணிகளின் பொருள் விளக்குக.

(9) $y^2-2cx^2y+c^2\,(x^4-x^3)=0$ என்னுங் குடும்பத்தின் வளையிகள் யாவும் $x$ அச்சைத் தொட்டுக் கொண்டு உற்பத்தியில் கூர் உடையனவெனக் காட்டுக.

$c$ ஐ நீக்கலால் இக்குடும்பத்தின் வகையீட்டுச சமன்பாட்டை

$$4p^2x^2\,(x-1)-4pxy\,(4x-3)+(16x-9)\,y^2=0$$

என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

இரு பிரித்துக்காட்டிகளும் $x^3y^2=0$ என்னும் வடிவம் எடுக்குமெனக் காட்டுக ; ஆனால் $x=0$ ஆனது ஒரு தீர்வு ஆகாது, $y=0$ ஆனது ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடாகும்.

[ இவ்வுதாரணம் காட்டுவது ஒரு நிலையான புள்ளியில் கூர் கொண்ட வளையிக் குடும்பத்திற்கு எமது அறிமுறை திரிவு இல்லாது பிரயோகிக்கப்பட முடியாது என்பதே.]

(10) $r^4+r^2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=a^4$ என்பதன் முற்றிய மூலி $r=a$ எண்ணும் வட்டத்தில் உள் வரையப்பட்ட $r^2=a^2$ கோசை $2(\theta-\alpha)$ என்னும் பெனூலீயின் சமஞானிகள் கொண்ட குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக; இவ்வட்டப் புள்ளி $r=0$ என்பது கணு-ஒழுக்கு ஆகுமாறுள்ள தனிச்சிறப்புத் தீர்வு.

(11) $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2-2ra=0$ வின் முற்றிய மூலியையுந் தனிச் சிறப்புத் தீர்வையும் பெற்று அவற்றை விளக்கிக் காட்டுக.

(12) $r=\theta\frac{dr}{d\theta}-\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ என்பதன் முற்றிய மூலி $r=c\theta-c^2$ எனவும் தனிச்சிறப்புத் தீர்வு $4r=\theta^2$ எனவும் காட்டுக.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு முற்றிய மூலியை $(c^2, 2c)$ என்னும் புள்ளியில் தொடுமென்பதையும் அங்கு பொதுத்தொடலி ஆரைக்காவியோடு தான்$^{-1}c$ என்னுங் கோணஞ் சாய்க்குமென்பதையும் சரி பார்க்க.

## அத்தியாயம் VII

# இரண்டாம் வரிசையிலும் உயர் வரிசையிலுமுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு பலவின முறைகள்

**68.** இவ்வத்தியாயத்தில் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடுகளை முதலாம் வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுக்குதலையே முக்கியமாய்க் கருதுவோம். சமன்பாடு (i) $y$ ஐ வெளியீடாகக் கொள்ளாவிடின் அல்லது (ii) $x$ ஐ வெளியீடாகக் கொள்ளாவிடின் அல்லது (iii) ஏகவினமாயின், வரிசை என்றும் இவ்வாறு ஒடுக்கப்படலாமெனக் காட்டுவோம்.

இயக்கவியலில் முக்கியமாகும் ஒரு விசேட சமன்பாட்டு வடிவத்தை, தொகையீட்டுக் காரணியைப் பயன்படுத்தி ஒடுக்கிப் பெறலாம்.

இவ்வத்தியாயத்தின் மீதியில் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும் ; அத்தியாயம் III இல் முற்றுகப் பரிகரிக்கப்பட்டுள்ள மாருக் குணகங்கள் கொண்ட எளிய வகை தவிர்க்கப்படும். இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டில் (i) செயலி காரணிப்படுத்தப்படுமாயின், அல்லது (ii) நிரப்பு சார்புக்குரிய யாதுமொரு தொகையீடு தெரியப்படுமாயின், அது முதலாம் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கப்படலாமெனக் காணப்படும்.

முற்றிய நிரப்பு சார்பு தெரியப்படுமாயின் **‘பரமானங்களின் மாறல்’** என்னும் முறையால் சமன்பாடு தீர்க்கப்படலாம். (லகிராஞ்சியாலாய) இந்த அழகான முறை எவ்வரிசையிலுமுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளுக்குப் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளைக் குறித்துச் செப்பமான சமன்பாடுகள் பற்றிய நிபந்தனை, செவ்வன் வடிவம், சமவன்மை பற்றிய மாற்றமிலி நிபந்தனை, சவாசியன் பெறுதி என்பன போன்ற கூடுதலான அறிவு இவ்வத்தியாய முடிவில் பலவினப் பயிற்சிகளுள் பிரசின வடிவில் காணப்படும். மாணாக்கன் தானாகவே செய்தற்குப் போதிய குறிப்புகளுமுண்டு.

$x$ என்பது பற்றிய வகையிடல்களைக் குறிப்பதற்குப் பிறகுறிகளை வழங்குவோம், உதாரணமாக, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ என்பதற்கு $y_2$ என்பதை ; ஆனால் சாராமாறி $x$ இல்லாத வேறு யாதுமாயின் வகையீட்டுக் குணகங்கள் முற்றாக எழுதப்படும்.

**69. y தோன்றாது.** இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டில் $y$ வெளிப்படையாய் இராதாயின், $y_1$ இற்குப் பதிலாக $p$ யையும் $y_2$ இற்குப் பதிலாக $\dfrac{dp}{dx}$ ஐயும் எழுதுக.

ஆயின் $\frac{dp}{dx}$, $p$, $x$ என்பவற்றையே கொள்ளும் ஒரு முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

உதாரணமாக, $xy_2+y_1=4x$ என்பதை எழுதுக.

இது $x\frac{dp}{xd}+p=4x$ என உருமாறும்; உடனடியாகத் தொகையிட,

$$xp=2x^2+a,$$

அதாவது

$$p=2x+\frac{a}{x}.$$

மீண்டும் தொகையிட, $y=x^2+a$ மட $x+b$; இங்கு $a$, $b$ எதேச்சை மாறிலிகள்.

$y$ யை வெளிப்படையாகக் கொள்ளாத $n$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாட்டை $(n-1)$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்குதற்கு இம்முறை வழங்கப்படலாம்.

**70. x தோன்றாது.** தோன்றா எழுத்து $x$ ஆயின், இன்னும் $y_1$ இற்குப் பதிலாக $p$ யை எழுதலாம், ஆனால் $y_2$ இற்குப் பதிலாக $p\frac{dp}{dy}$ யை எழுதுவோம்; ஏனெனின் $p\frac{dp}{dy}=\frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy}=\frac{dp}{dx}=y_2$ இச்செய்முறை $x$ இல்லாத இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டை $p$, $y$ என்னும் மாறிகளையுடைய முதலாம் வரிசையிலுள்ள சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கும்.

உதாரணமாக, $yy_2=y_1^2$ என்பது

$yp\frac{dp}{dy}=p^2$ என்பதற்கு உருமாறும்;

இதனிலிருந்து மாணாக்கன் $p=by$, $y=ae^{bx}$ என எளிதிற் பெறலாம்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

(1) $y_2$ கோசை$^2$ $x=1$. (2) $yy_2+y_1^2=y_1$. (3) $yy_2+1=y_1^2$.

(4) $y_1y_3+y_1^2=2y_2^2$ என்பதை முன்னுள்ள பயிற்சிக்கு ஒடுக்கி, அது துணைகொண்டு இதனைத் தீர்க்க.

(5) $xy_3+y_2=12x$. (6) $y_n-2y_{n-1}=e^x$.

(7) $\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}=k$ யைத் தொகையிட்டுக் கேத்திரகணித முறையில் விளக்கிக் காட்டுக.

(8) ஒரு குறித்த வளையியின் வளைவாரை வளையியிற்கும் $x$ – அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள செவ்வன் நீளத்திற்குச் சமனாகும். அது $x$ – அச்சுக்குக் குவிவு அல்லது குழிவு ஆதற்கேற்ப அது ஒரு சங்கிலியம் அல்லது வட்டமாகுமென்பதை நிறுவுக.

(9) $A$ என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து $P$ என்னும் மாறும் புள்ளிக்கு அளக்கப்படும் தனது வில் நீளம் $P$ யிலுள்ள தொடலிக்கும் $x$ அச்சுக்குமிடையேயுள்ள கோணத்தினது தான்சனுக்கு விகிதசமமாகுமாறு உள்ள வளையியின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைக் கண்டு அதனைத் தீர்க்க.

**71. ஏகவினைச் சமன்பாடுகள்.** $x$, $y$ என்பன பரிமாணம் 1 எனக் கருதப்படுமாயின்

$y_1$ ஆனது பரிமாணம் 0,  
$y_2$ ஆனது பரிமாணம் $-1$,  
$y_3$ ஆவது பரிமாணம் $-2$,

வேறும் இவ்வாறே.

ஏகவினச் சமன்பாடு என்பது எல்லா உறுப்புகளுக்கும் ஒரே பரிமாணமாகும் சமன்பாடு என வரைவிலக்கணம் கூறுவோம். அத்தியாயம் II இல் முதல் வரிசையிலும் முதற் படியிலுமுள்ள ஏகவினச் சமன்பாட்டையும், அத்தியாயம் III இல் ($A$, $B$, ……$H$, $K$ என்பன மாறிலிகளாக)

$$x^n y_n + Ax^{n-1} y_{n-1} + Bx^{n-2} y_{n-2} + \dots + Hxy_1 + Ky = 0$$

என்னும் ஏகவினமான ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டையும் எடுத்தாண்டுள்ளோம்; பின்னதான வகையில் $x = e^t$ அல்லது $t =$ மட $x$ எனப் பிரதியிட்டுள்ளோம்.

இதே பிரதியீட்டை

$$xyy_2 + xy_1^2 = 3yy_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

என்னும் ஏகவினச் சமன்பாட்டிற் செய்வோமாக.

$$y_1 = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

(1) இற் பிரதியிட்டுக் கொண்டு $x$ ஆற் பெருக்க,

$$y\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 3y\frac{dy}{dt},$$

அதாவது $y\dfrac{d^2y}{dt^2} + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 4y\dfrac{dy}{dt}.$

இது $t$ தோன்றாத சமன்பாடு, ஈற்றுப் பிரிவில் $x$ தோன்றாத சமன்பாடுகள் போன்றது.

$\dfrac{dy}{dt} = q$ எனப் பிரதியிட்டு, மாணாக்கன்

$yq = 2\,y^2 + b)$ என்பதை எளிதிற் பெறலாம்; இது தருவது $t + c = \frac{1}{4}$ மட $(y^2 + b)$.

எனவே $y^2+b=e^{4(t+c)}=ax^4$, $e^{4c}$ இற்குப் பதிலாக $a$ என்னும் வேறோர் எதேச்சை மாறிலியை எழுதுக.

**72.** பிரிவு 71 இன் உதாரணத்தில் $x^2$ ஐ $y_2$ ஓடும் $x$ ஐ $y_1$ ஓடும் சேர்த்தபின் மேலதிகமாக $x$ கள் விடப்படாதமையால் அது எளிதிற் செய்யப்பட்டுள்ளது.

உண்மையில் அது

$$y(x^2y_2)+(xy_1)^2=3y(xy_1)$$

என எழுதப்படலாம். ஆனால்

$$(x^2+y^2)(y-xy_1)+x^2y^2y_2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

என்பதை அவ்வாறு எழுதுதல் முடியாது. ஈற்று உதாரணத்திலுள்ளது போன்ற வடிவத்திற்கு இதனை ஒடுக்குதற்கு அத்தியாயம் II இல் பயன்படுத்திய $y=vx$ என்னும் பிரதியீட்டை உபயோகிக்க.

(2) தருவது $\quad (x^2+x^2v^2)\,(vx-v_1x^2-vx)+x^4v^2(xv_2+2v_1)=0,$

அதாவது
$$-(1+v^2)v_1+v^2(xv_2+2v_1)=0;$$

இது
$$v^2x^2v_2=(1-v^2)xv_1 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
என எழுதப்படலாம்.

இனி முன்போலச் செய்வோம்; $x=e^t$

ஆயின், $\quad xv_1=\dfrac{dv}{dt},\ x^2v_2=\dfrac{d^2v}{dt^2}-\dfrac{dv}{dt}.$

(3) தருவது $v^2\left(\dfrac{d^2v}{dt^2}-\dfrac{dv}{dt}\right)=(1-v^2)\,\dfrac{dv}{dt},$

அதாவது
$$v^2\frac{d^2v}{dt^2}=\frac{dv}{dt}, \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

இது $t$ தோன்றாத சமன்பாடு. முன்போல் $\dfrac{dv}{dt}=q,\ \dfrac{d^2v}{dt^2}=q\,\dfrac{dq}{dv}$ என இடுக.

(4) தருவது
$$v^2q\,\frac{dq}{dv}=q,$$

அல்லது $\dfrac{dq}{dv}=\dfrac{1}{v^2}$ ($y=cx$ எனத் தரும் $q=0$ என்பது உண்மையாகாவிடின்);

$$\frac{dv}{dt}=q=\frac{1}{a}-\frac{1}{v},\ dt=\frac{avdv}{v-a}=\left(a+\frac{a^2}{v-a}\right)dv,$$

$$t=av+a^2\ \text{மட}\ (v-a)\ +b,$$

இறுதியில் மட $x=ay/x+a^2$ மட $(y-ax)-a^2$ மட $x+b$.

**73.** ஈற்றுப் பிரிவிலுள்ளதுபோற் செய்தலால் இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள ஏகவினச் சமன்பாடு எதனையும் ஒடுக்கலாம். அத்தகைச் சமன்பாடு யாதும்

$$f\left(\frac{y}{x}, y_1, xy_2\right) = 0$$

என்னும் வடிவத்திலிடப்படலாம்.

உதாரணமாக, பிரிவு 71 இன் சமன்பாடு $x$ ஆல் வகுக்கப்படுமிடத்து தருவது

$$\left(\frac{y}{x}\right) xy_2 + y_1{}^2 = 3\left(\frac{y}{x}\right) y_1,$$

பிரிவு 72 இன் சமன்பாடு $x^2$ ஆல் வகுக்கப்படுமிடத்து தருவது

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{y}{x} - y_1\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 xy_2 = 0.$$

$y = vx$, $x = e^t$ என்னும் பிரதியீடுகள் $f\left(\frac{y}{x}, y_1, xy_2\right) = 0.$

என்பதை $f(v, xv_1 + v, x^2v_2 + 2xv_1) = 0$ இற்கும்

பின்னர் $f\left(v, \frac{dv}{dt} + v, \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}\right) = 0$ இற்கும் உருமாற்றும்.

இது $t$ தோன்றாத சமன்பாடு ஆதலால் முதல் வரிசைக்கு ஒடுக்கத்தகும். தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $x^2y_2 - xy_1 + y = 0$. (2) $x^2y_2 - xy_1 + 5y = 0.$

(3) $2x^2yy_2 + y^2 = x^2y_1{}^2.$

(4) $2x^2yy_2 + 4y^2 = x^2y_1{}^2 + 2xyy_1$ என்பதை $y = z^2$ எனனும் பிரதியீட்டால் ஏகவினமாக்கித் தீர்க்க.

## 74. இயக்கவிசையியலில் நிகழும் ஒரு சமன்பாடு

$y_2 = f(y)$ என்னும் வடிவம் பல முறையும் இயக்கவியலில் நிகழும்; விசேடமாக ஒரு நிலையான புள்ளிக்குத் திசையும் அப்புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரத்தையே சார்ந்த பருமனும் கொண்ட விசையினது தாக்கத்தாலாய இயக்கப் பிரசினங்களில்;

சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $2y_1$ ஆற் பெருக்குக.

$$2y_1y_2 = 2f(y)y_1.$$

தொகையிட, $y_1{}^2 = 2\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = 2\int f(y)dy.$

உண்மையில் இது சக்திச் சமன்பாடு.

இம்முறையை (எளிய இசையியக்கச் சமன்பாடு)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2x \text{ என்பதற்குப் பிரயோகிக்க}$$

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -2p^2x\frac{dx}{dt}.$$

$t$ ஐக் குறித்துத் தொகையிட,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -p^2x^2 + \text{மாறிலி} = p^2(a^2-x^2), \text{ எண்க.}$$

ஆகவே $\pm\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$,

$$\pm t = \frac{1}{p} \text{ சைன் }^{-1}\frac{x}{a} + \text{ மாறிலி},$$

$$x = a \text{ சைன் } (\pm pt + \epsilon).$$

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $y_2 = y^3 - y$, $y=1$ ஆகுமிடத்து $y_1 = 0$ எனத் தரப்பட.

(2) $y_2 = e^{2y}$, $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$, $y_1=1$ எனத் தரப்பட.

(3) $y_2 =$ சீ$^2y$ தான் $y$, $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$, $y_1=1$ எனத் தரப்பட.

(4) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g^2a}{x^2}$, $t=0$ ஆகுமிடத்து $x=h$, $\frac{dx}{dt}=0$ எனத் தரப்பட.

[$h-x$ என்பது புவி மையத்திலிருந்துள்ள தூரம் $x$ ஐப் போல் நேர்மாறாய் மாறும் புவியீர்ப்பில் வளித்தடையையும் அது போன்றவையையும் புறக்கணிக்குமிடத்து ஓய்விலிருந்து விழுந் தூரமாகும்.]

$$\text{(i) } P = \mu u^2, \qquad \text{(ii) } P = \mu u^3$$

என்னும் இருவகைகளில், $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$,

$u = \frac{1}{c}$ ஆகுமிடத்து $\theta = \frac{du}{d\theta} = 0$ எனத் தரப்பட ; $\mu$, $h$, $c$ என்பன மாறிலிகள்.

[இவை ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு $r$ என்னுந் தூரத்தின் வர்க்கத்தையும் கனத்தையும் போல் நேர்மாறாய் முறையே மாறும் விசையாற், கவரப்படும் துணிக்கையால் வரையப்படும் பாதையைத் தரும். $u$ ஆனது $r$ இன் நிகர்மாற்று, $\theta$ முனைவாள்கூறுகளிற் சாதாரண பொருள் கொள்ளும், $\mu$ அலகு தூரத்தில் ஆர்முடுகல், $h$ பரப்பளவு வேகத்தின் இரு மடங்கு.]

## 75. செயலியைக் காரணிப்படுத்தல்

$$(x+2)y_2 - (2x+5)y_1 + 2y = (x+1)e^x$$

என்னும் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு

$$\{(x+2)D^2 - (2x+5)D + 2\}y = (x+1)e^x$$

என எழுதப்படலாம் ; இங்கு $D$, அத்தியாயம் III இலுள்ளதுபோல் $\frac{d}{dx}$ ஐக் குறிக்கும்.

இவ்வுதாரணத்திற் செயலியைக் காரணிப்படுத்தலாம் ; இது தருவது

$$\{(x+2)D-1\}(D-2)y=(x+1)e^x.$$

$(D-2)y=v$ எனப் பிரதியிடுக.

ஆயின் $$\{(x+2)D-1\}v=(x+1)e^x$$

இது முதல் வரிசையிலுள்ள ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. பிரிவு 20 இலுள்ளது போல் தீர்க்க

$$v=c(x+2)+e^x,$$

அதாவது $(D-2)y=c(x+2)+e^x$; வேறோர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடாகிய இச்சமன்பாடு இறுதியில் தருவது $y=a(2x+5)+be^{2x}-e^x$, $a=-\frac{1}{4}c$.

ஆனால் விசேட வகைகளிலேயே செயலி காரணிப்படுத்தப்படலாம். இக் காரணிகள் முறையான வரிசையில் எழுதப்படல் வேண்டுமென்பதைக் கவனித்தல் முக்கியமாகும் ; அவற்றைப் பரிவர்த்தித்தல் முடியாது. ஏனெனின் இவ்வுதாரணத்தில் வரிசையைப் புறமாற்றுகையில்

$$(D-2)\{(x+2)D-1\}y=\{(x+2)D^2-(2x+4)D+2\}y.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $(x+1)y_2+(x-1)y_1-2y=0.$ (2) $xy_2+(x-1)y_1-y=0.$

(3) $xy_2+(x-1)y_1-y=x^2.$

(4) $xy_2+(x^2+1)y_1+2x=2x$ $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=2$, $y_1=0$ எனத் தரப்பட.

(5) $(x^2-1)y_2-(4x^2-3x-5)y_1+(4x^2-6x-5)y=e^{2x}$, $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=1$, $y_1=2$ எனத் தரப்பட.

## 76. நிரப்பு சார்புக்கு உரிய ஒரு தொகையீடு தெரியப்படும்.

$P$, $Q$, $R$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக

$$y_2+Py_1+Qy=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒரு தொகையீடு தெரியப்படுமாயின், $y=z$ என்க,

$$y_2+Py_1+Qy=R\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னும் கூடுதலாகப் பொதுவான இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடு $y=vz$ என்னும் பிரதியீட்டால் முதலாம் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கப்படலாம்.

வகையிட, $$y_1=v_1z+vz_1,$$
$$y_2=v_2z+2v_1z_1+vz_2.$$

ஆகவே (2) தருவது

$$v_2z+v_1(2z_1+Pz)+v(z_2+Pz_1+Qz)=R,$$

அதாவது $$z\frac{dv_1}{dx}+v_1(2z_1+Pz)=R\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

கருதுகோளால் $z_2+Pz_1+Qz=0$ ஆதலால்.

(3) என்பது $v_1$ இல் முதல் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. இதே மாதிரி $n$ ஆம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு ஒன்றின் நிரப்பு சார்புக்கு உரிய ஒரு தொகையீடு தெரியப்படுமாயின் அது $(n-1)$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கப்படலாம்.

[ஓர் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது பொதுத் தீர்வு ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டினதும் நிரப்பு சார்பினதும் கூட்டுத்தொகையாகுமென்பதன் நிறுவல் (பிரிவு 29) குணகங்கள் மாறிலிகளானுலோ $x$ இன் சார்புகளானுலோ உண்மையாகும்.]

### 77. உதாரணம்.

$$(x+2)y_2-(2x+5)y_1+2y=(x+1)e^x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை மீண்டும் எடுக்க.

$y=e^{2x}$ என்பது சமன்பாட்டின இடக்கைப் பக்கத்தைப் பூச்சிய மாக்குமென்பதைக் கவனிப்போமாயின் $y=ve^{2x}$ என இடலாம். ஆயின் $y_1=(v_1+2v)e^{2x}$, $y_2=(v_2+4v_1+4v)e^{2x}$. (4) இற் பிரதியிடத் தருவது

$$(x+2)v_2e^{2x}+\{4(x+2)-(2x+5)\}v_1e^{2x}$$
$$+\{4(x+2)-2(2x+5)+2\}ve^{2x}=(x+1)e^x,$$

$$\text{அதாவது} \quad (x+2)\frac{dv_1}{dx}+(2x+3)v_1=(x+1)e^{-x}.$$

இதனை வழக்கமான முறையில் (தொகையீட்டுக் காரணியைக் கண்டு) தீர்க்க,

$$v_1=e^{-x}+c(x+2)e^{-2x}.$$

தொகையிட, $$v=-e^{-x}-\tfrac{1}{4}c(2x+5)e^{-2x}+b,$$

ஆகவே $$y=ve^{2x}=-e^x-\tfrac{1}{4}c(2x+5)+be^{2x}.$$

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $y_2+Py_1+Qy=0$ என்பது, $1+P+Q=0$ ஆயின், $y=e^x$ என்பதாலும், $P+Qx=0$ ஆயின், $y=x$ என்பதாலும் திருத்தியாக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

(2) $x^2y_2+xy_1-y=8x^3$.

(3) $x^2y_2-(x^2+2x)y_1+(x+2)y=x^3e^x$.

(4) $xy_2-2(x+1)y_1+(x+2)y=(x-2)e^{2x}$.

(5) $x^2y_2+xy_1-9y=0$, $y=x^3$ என்பது ஒரு தீர்வு எனத் தரப்பட்டது.

(6) $xy_2\,(x \text{ கோசை } x-2 \text{ சைன் } x)+(x^2+2)y_1 \text{ சைன் } x-2y\,(x \text{ சைன் } x+\text{கோசை } x)=0$, $y=x^2$ என்பது ஒரு தீர்வு எனத் தரப்பட்டது.

### 78. பரமானங்களின் மாறல்

நிரப்பு சார்பு தெரியப்படும் ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலி காண்டற்கு இப்போது ஓர் அழகான, ஆனுல் சற்றே செயற்கையான, முறையை விளக்குவோம்.

இம்முறையை இரு வேறு வேறான வழிகளில் தீர்த்துள்ள உதாரணத்திற்குப் பிரயோகித்தலால், அதாவது $y=a\,(2x+5)+be^{2x}$ என்னும் நிரப்பு சார்பு உள்ள

$$(x+2)y_2-(2x+5)y_1+2y=(x+1)e^x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்பதற்குப் பிரயோகித்தலால், இதனை எடுத்துக்காட்டுவோம்.

$A$, $B$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக,

$$y=(2x+5)A+e^{2x}B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

எனக் கொள்க. இவ்வெடுகோள் பிரிவு 77 இன் $y=ve^{2x}$ என்பது போன்றது, ஆனால் கூடுதலாகச் சமச்சீரானது.

(2) என்பதை வகையிட,

$$y_1=(2x+5)A_1+e^{2x}B_1+2A+2e^{2x}B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

இனி, இதுவரை $A$, $B$ என்னும் இரு சார்புகள் (அல்லது பரமானங்கள்) ஓர் ஒன்றிச் சமன்பாட்டாலேயே தொடுக்கப்படும். அவை

$$(2x+5)A_1+e^{2x}B_1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

என்னும் வேறொரு சமன்பாட்டையும் திருத்தியாக்குமாறு செய்யலாம். ஆயின் (3) என்பது

$$y_1=2A+2e^{2x}B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

என்பதற்கு ஒடுங்கும்.

(5) என்பதை வகையிட,

$$y_2=4e^{2x}B+2A_1+2e^{2x}B_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

முறையே (2), (5), (6) என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலுள்ள $y$, $y_1$, $y_2$ ஆகியவற்றின் இப்பெறுமானங்களை (1) இல் பிரதியிடுக. $A$, $B$ என்பவற்றின் இணை காரணிகள் பூச்சியமாக

$$2(x+2)A_1+2(x+2)e^{2x}B_1=(x+1)e^x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

என்பது விடப்படும்.

(4), (7) என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளிலிருந்து $A_1$, $B_1$, ஆகியவற்றிற்குத் தீர்க்கலாம். இது தருவது

$$\frac{A_1}{e^{2x}}=\frac{B_1}{-(2x+5)}=\frac{(x+1)e^x}{2e^{2x}(x+2)\,(1-2x-5)}=-\frac{(x+1)e^{-x}}{4(x+2)^2}.$$

ஆகவே $\quad A_1=-\dfrac{(x+1)e^x}{4(x+2)^2}=-\dfrac{e^x}{4}\left\{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right\},$

தொகையிடலால், $A=-\dfrac{e^x}{4(x+2)}+a$, $a$ ஆனது மாறிலியாக.

இதேமாதிரி $\quad B_1=\dfrac{(2x+5)\,(x+1)e^{-x}}{4(x+2)^2}=\dfrac{e^{-x}}{4}\left\{2-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right\},$

$$B=\frac{e^{-x}}{4}\left\{\frac{1}{x+2}-2\right\}+b.$$

(2) இல் பிரதியிட, $y=(2x+5)\left\{\frac{-e^x}{4(x+2)}+a\right\}+\frac{e^x}{4}\left\{\frac{1}{x+2}-2\right\}+be^{2x}.$

$$=a(2x+5)+be^{2x}-e^x.$$

**79.** $a$, $b$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளும் $u$, $v$ என்பன $x$ இன் தெரிந்த சார்புகளும் ஆக $au+bv$ என்னுந் தெரிந்த நிரப்பு சார்பு உள்ள

$$y_2+Py_1+Qy=R.\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

என்னும் இரண்டாம் வரிசைப் பொது ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுக்கு இச்செய்கைகளைப் பிரியோகித்தற்கு $y=uA+vB.\dots\dots\dots\dots(2)$ எனக் கொள்வோம் ; இது தருவது

$$y_1=u_1A+v_1B.\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3),$$

$$uA_1+vB_1=0 \text{ ஆயின்}.\dots\dots\dots\dots(4).$$

(3) என்பதை வகையிட

$$y_2=u_2A+v_2B+u_1A_1+v_1B_1.\dots\dots\dots\dots(5)$$

(1) இல் $y_2$, $y_1$, $y$ என்பவற்றிற்குப் பிரதியிடுக.

$A$ ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள் $A(u_2+Pu_1+Qu)$ ஆகிப் பூச்சியமாகும், கருதுகோளின்படி $u_2+Pu_1+Qu=0$ ஆதலால். இதேமாதிரி $B$ ஐக் கொண்ட உறுப்புக்கள் மறைந்து (1) என்பது

$$u_1A_1+v_1B_1=R.\dots\dots\dots\dots\dots\dots(6)$$

என்பதற்கு ஒடுங்கும்.

(4), (6) என்பவற்றைத் தீர்க்க $\frac{A_1}{v}=\frac{B_1}{-u}=\frac{R}{vu_1-uv_1}$.

ஆயின் தொகையிடலால் $A$, $B$ என்பவற்றைப் பெறுவோம் ; $f(x)$, $F(x)$ என்பன $x$ இன் தெரிந்த சார்புகளும் $a$, $b$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளும் ஆக, $A=f(x)+a$, $B=F(x)+b$ ஆகுமெனக.

(2) இல் பிரதியிட இறுதியிற் பெறுவது

$$y=uf(x)+vF(x)+au+bv.$$

**80.** இம்முறை யாதும் வரிசையிலுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுக்கு விரிக்கப்படலாம்.

$y=au+bv+cw$ என்னும் நிரப்பு சார்பு தெரிந்த

$$y_3+Py_2+Qy_1+Ry=S\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

என்னும் மூன்றாம் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு மாணாக்கன்

$$y=uA+vB+wC.\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$y_1=u_1A+v_1B+w_1C.\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளை

$$0=uA_1+vB_1+wC_1\ \dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

ஆகுமிடத்து, எளிதிற் பெறலாம் ;

ஆகவே $$y_2 = u_2A + v_2B + w_2C \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

என்பது, $$0 = u_1A_1 + v_1B_1 + w_1C_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

ஆகுமிடத்து, பெறப்படும் ;

ஆயின் $$y_3 = u_3A + v_3B + w_3C + u_2A_1 + v_2B_1 + w_2C_1 \dots\dots\dots (7)$$

(1) இல் பிரதியிடுதலால், $S = u_2A_1 + v_2B_1 + w_2C_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8).$

ஆயின் $A_1$, $B_1$, $C_1$ என்பன (4), (6), (8) என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து காணப்படும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $y_2 + y =$ கோசீக $x$. (2) $y_2 + 4y = 4$ தான் $2x$.

(3) $y_2 - y = \dfrac{2}{1+e^x}$.

(4) $x^2y_2 + xy_1 - y = x^2e^x$, நிரப்புசார்பு $ax + bx^{-1}$ எனத் தரப்பட.

(5) $y_3 - 6y_2 + 11y_1 - 6y = e^{2x}$.

### 81. ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் வெவ்வேறு முறைகளை ஒப்பிடுதல்.

இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க வேண்டுமாயின் ஒரு விசேட முறையைச் சுட்டிக் காட்டாதவிடத்து நிரப்பு சார்புக்கு உரிய ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டை அனுமானிக்க முயன்று பிரிவு 76 இல் உள்ளது போல் செய்தல் பொதுவாக மிக நன்றாகும். இந்த முறை $n$ ஆம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டை $(n-1)$ ஆம் வரிசைக்கு ஒடுக்குதற்கு வழங்கப்படலாம்.

செயலியைக் காரணிப்படுத்துமுறை சில வகைகளில் அழகான தீர்வு தரும், ஆனால் இவை வழக்கமாக இந்நோக்கத்திற்கு விசேடமாய் அமைக்கப்பட்டுள்ள உதாரணங்கள். பொதுவாக, செயலியைக் காரணிப்படுத்த முடியாது.

பரமானங்களை மாற்று முறையானது செய்முறைப் பெறுமானத்தில் பிரிவு 76 இனது முறையினுந் தாழ்வு ; இதற்குக் காரணம் நிரப்பு சார்பின் ஒரு பாகத்திற்குப் பதிலாக முழுச் சார்பு பற்றிய அறிவு இங்கு வேண்டியதாகுமென்பதே. அன்றியும் மூன்றாம் வரிசையில் அல்லது உயர் வரிசையிலுள்ள சமன்பாடுகளுக்குப் பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து $A_1$, $B_1$, $C_1$, ....... ஆகியவற்றிற்குப் பெறப்படும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்துத் தொகையிடல்களைச் செய்தல் மிகச் சிரமமாகும்.

# அத்தியாயம் VII இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $yy_2 - y_1^2 + y_1 = 0.$

(2) $xy_2 + xy_1^2 - y_1 = 0.$

(3) $y_n^2 = 4y_{n-1}$

(4) $y_n + y_{n-2} = 8 \text{ கோசை } 3x$

(5) $(x^2 \text{ மட } x - x^2)\, y_2 - xy_1 + y = 0.$

(6) $(x^2 + 2x - 1)\, y_2 - (3x^2 + 8x - 1)\, y_1 + (2x^2 + 6x)\, y = 0.$

(7) கோசை $nx$ , சைன் $nx$ என்பன

$$y_2 + n^2 y = f(x)$$

இற்குத் தொகையீட்டுக் காரணிகள் என்பதைச் சரி பார்க்க.

அது துணைகொண்டு

$$y_2 + n^2 y = \text{சீக } nx$$

என்பதன் இரு முதற்றொகையீடுகள் பெற்று $y_1$ ஐ நீக்கலால் முற்றிய மூலியை உய்த்தறிக.

(8) $A,\ B,\ C,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ T$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக, அவற்றின் பின்னடும் வகையீட்டுக் குணகங்கள்

$$A - B_1 + C_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n S_n = 0$$

என்னுந் தொடர்பைத் திருத்தியாக்குமாயின்

$$Ay + By_1 + Cy_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Sy_n = T$$

என்னும் எகபரிமாணச் சமன்பாடு செப்பமாகும், அதாவது அடுத்த கீழ் வரிசையிலுள்ள ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து வகையிடலால் உடனடியாகப் பெறப்படலாம், என்பதைக் காட்டுக.

[பின்னடுத்துப் பகுதிகளாய்த் தொகையிடலால்

$$\int Sy_n dx = Sy_{n-1} - S_1 y_{n-2} + S_2 y_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1} y + \int (-1)^n S_n y dx.]$$

இந்நிபந்தனை பின்வரும் சமன்பாட்டால் திருத்தியாக்கப்படுமென்பதை வாய்ப்புப் பார்த்து அது துணைகொண்டு அதனைத் தீர்க்க :

$$(2x^2 + 3x)\, y_2 + (6x + 3)\, y_1 + 2y = (x + 1)\, e^x.$$

(9) பின்வரும் எகபரிமாணமல்லாச் சமன்பாடுகள் செப்பமானவையென்பதைச் சரி பார்த்து அவற்றைத் தீர்க்க.

$$\text{(i) } yy_2 + y_1^2 = 0.$$

$$\text{(ii) } xyy_2 + xy_1^2 + yy_1 = 0.$$

(10) $P,\ Q,\ R$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக, $y = ve^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$ என்னும் பிரதியீடு $y_2 + Py_1 + Qy = R$ என்பதை

$$v_2 + Iv = S$$

என்னுஞ் செவ்வன் வடிவத்திற்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக ; இங்கு $I = Q - \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{4}P^2$
$S = Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}.$

$$y_2 - 4xy_1 + (4x^2 - 1)\, y = -3e^{x^2} \text{ சைன் } 2x$$

என்பதைச் செவ்வன் வடிவத்திலிட்டு அது துணைகொண்டு அதனைத் தீர்க்க.

(11) $y_2+Py_1+Qy=0$, $z_2+pz_1+qz=0$ என்னுமிரு சமன்பாடுகள் ஒரே செவ்வன் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கப்படுமாயின், அவை ஒன்றிலிருந்து ஒன்றுக்கு

$$ye^{\frac{1}{2}\int Pdx}=ze^{\frac{1}{2}\int pdx}$$

என்னுந் தொடர்பால் உருமாற்றப்படலாமெனக் காட்டுக ; அதாவது சமவன்மை நிபந்தனை $I$ என்னும் மாற்றமிலி ஒன்றுதல் வேண்டுமென்பதே.

(12) $x^2y_2+2(x^3-x)y_1+(1-2x^2)y=0$,

$$x^2z_2+2(x^3+x)z_1-(1-2x^2)z=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே மாற்றமிலி உண்டு என்பதைக் காட்டி ஒன்றை மற்றையதற்கு உருமாற்றுந் தொடர்பு காண்க. இவ்வுருமாற்றத்தை உண்மையிற் செய்தலால் இதனைச் சரி பார்க்க.

(13) $u$, $su$ என்பன

$$v_2+Iv=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்பதன் இரு தீர்வுகளாயின்

$$\frac{s_2}{s_1}=-2\frac{u_1}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

என்பதை நிறுவி அது துணைகொண்டு

$$\frac{s_3}{s_1}-\frac{3}{2}\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2=2I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

என்பதை நிறுவுக.

$s$ ஆனது (3) இன் யாதுமொரு தீர்வாயின் $s_1^{-\frac{1}{2}}$, $ss_1^{-\frac{1}{2}}$, என்பன (1) இன் தீர்வுகளென்பதை (2) இலிருந்து காட்டுக.

[ (3) இன் இடக்கைப் பக்கத்திலுள்ள $s$ இனது வகையீட்டுக் குணகங்களின் சார்பு (**H. A.** சுவாஸ் என்பவரின் பெயரால்) சுவாசியன் பெறுமதியெனப்பட்டு $\{s, x\}$ என எழுதப்படும். அதிபரபெருக்கற்றொடர்க் கொள்கையில் அது முக்கியமானது.]

(14) $x^2y_2-(x^2+2x)y_1+(x+2)y=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினது $I$ என்னும் மாற்றமிலியைக் கணிக்க.

$s$ என்பதை $xe^x$, $x$ ஆகிய இரு தீர்வுகளினது ஈவு எனக் கொண்டு

$$\{s, x\}=2I$$

என்பதைச் சரி பார்த்து $s_1^{-\frac{1}{2}}$, $ss_1^{-\frac{1}{2}}$ என்பன தொடக்கச் சமன்பாட்டினது செவ்வன் வடிவத்தின் தீர்வுகள் என்பதைச் சரி பார்க்க.

(15) $u$, $v$ என்பன $y_2+Py_1+Qy=0$ என்பதன் இரு தீர்வுகளாயின் $uv_2-vu_2+P(uv_1-vu_1)=0$ என்பதை நிறுவி அது துணைகொண்டு

$$uv_1-vu_1=ae^{-\int Pdx}$$

என்பதை நிறுவுக.

ஈற்றுப் பயிற்சியினது சமன்பாட்டிற்கு இதனைச் சரி பார்க்க.

(16) $yy_1 =$ மாறிலி என்பது $y_2 + \frac{1}{y} y_1^2 + y = 0$ என்பதன் ஈற்று உறுப்பை விலக்கலால் ஆக்கப்படும் சமன்பாட்டின் ஒரு முதற்றொகையீடு எனக் காட்டுக.

$C$ என்பது $x$ இனது ஒரு சார்பு ஆக $yy_1 = C$ என இட்டுக்கொண்டு, $y$ ஆனது முழுச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆயின், $C_1 = -y^3$ எனக்காட்டி அது துணைகொண்டு $C^2 =$ மாறிலி $-\frac{1}{2}y^4$ எனக் காட்டுக ; இது இறுதியில் தருவது $y^2 = a$ சைன் $(x\sqrt{2} + b)$.

[இம்முறை $y_2 + y^2 f(y) + F(y) = 0$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள யாதுமொரு சமன்பாட்டுக்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம்.]

(17) சாராமாறியை மாற்றுதலால் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க ;

$$\text{(i)}\ x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 8x^3 \text{ சைன் } x^2,$$

$$\text{(ii)}\ (1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

(18) $z =$ சைன் $x$ ஆயின்,

$\frac{d^2y}{dx^2}$ கோசை $x + \frac{dy}{dx}$ சைன் $x - 2y$ கோசை$^3 x = 2$ கோசை$^5 x$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $z$ ஆனது சாராமாறியாகவுள்ள சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றி அதனைத் தீர்க்க.

(19) $z$ ஆனது $\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = 0$ என்பதைத் திருத்தியாக்குமாயின் சாராமாறியை $x$ இலிருந்து $z$ இற்கு மாற்றலால் $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$,

என்னுஞ் சமன்பாடு $\frac{d^2y}{dz^2} + Sy = T$ என்பதற்கு உருமாற்றப்படுமெனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + 4x^2ye^{-2x} = 4(x^2 + x^3)e^{-3x}$$

என்பதைத் தீர்க்க.

## அத்தியாயம் VIII

# வகையீட்டு சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணண்ணளவாக்கம்

முன்னுள்ள அத்தியாயங்களில் தீர்வுகளை முடிவுள்ள வடிவத்திற் பெறுதற்குத் தரப்பட்டுள்ள முறைகள் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுள் சில விசேட வகைகளுக்கே பிரயோகிக்கப்படலாமென்பதை மாணுக்கன் கவனித்திருப்பான். ஒரு சமன்பாடு இவ்விசேட வகைகளுள் ஒன்றிற்கு உரியதாயின் அண்ணளவு முறைகளை வழங்கல் வேண்டும். அத்தியாயம் *I* இல் தரப்பட்டுள்ள புரோடெற்ஸ்கியின் வரைபு முறை தீர்வின் இயல்பு பற்றி நல்ல பொதுவான எண்ணம் தரும், ஆனுல் எண் பெறுமானங்களைக் குறித்து அதனில் நம்பிக்கை வைக்க முடியாது.

இவ்வத்தியாயத்தில் பின்னடும் அட்சரகணித அண்ணளவாக்கங்களைப் பெறுதற்குப் பிக்காட்டின் முறையை முதன் முதல் தருவோம். இவற்றில் எண்களை இடுதலாற் பொதுவாக மிக நன்றுக எண் முடிபுகளைப் பெறலாம். ஆனுல் இம்முறையானது பின்னிடும் தொகையீடுகள் எளிதாகச் செய்யப்படக் கூடிய எல்லைப்பட்ட சமன்பாட்டு வகுப்புக்கு மட்டுமே பிரயோகிக்கப்படலாம்.

முற்றுய் எண் முறையானதும் மிகக் கூடுதலாகப் பிரயோகம் பெறுவதுமான இரண்டாவது முறை ரங்கே என்பவராலாயது. அது சில சமயங்களில் பெருந்தொகை எண்கணிதக் கணிப்புகளை உட்படுத்துமெனினும் முறைமையான கவனம் செலுத்தப்படுமிடத்து அநேக வகைகளில் நன்றுன முடிபுகளைத் தரும். அவற்றின் நன்மைகளை ஒப்பிடுதற்கு உதவுமாறு பல உதாரணங்களை இரு முறைகளாலும் பரிகரிப்போம்.

ரங்கேயின் முறையினது மாற்றங்கள் **கேன்**, **குற்று** என்போராலும் இந்நூலாசிரியராலும் தரப்பட்டுள்ளன.

**83. பின்னடும் அண்ணளவாக்கங்களைத் தொகையிடுதற்குப் பிக்காட்டின் முறை.**

$x=a$ ஆகுமிடத்து $y=b$ ஆகுமாறுள்ள

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$y=b+\int_a^x f(x, y)dx$$

என எழுதப்படலாம்.

ஒரு முதல் அண்ணளவாக்கத்திற்கு $f\ (x,\ y)$ இலுள்ள $y$ இற்குப் பதிலாக $b$ யை எழுதுவோம் ; இரண்டாம் அண்ணளவாக்கத்திற்கு $y$ இற்குப் பதிலாக முதல் அண்ணளவாக்கத்தையும் மூன்றும் அண்ணளவாக்கத்திற்கு $y$ இற்குப் பதிலாக இரண்டாம் அண்ணளவாக்கத்தையும், இவ்வாறே பிறவற்றையும், எழுதுவோம்.

உ-ம் (i) $$\frac{dy}{dx}=x+y^2,\ x=0 \text{ ஆகுமிடத்து } y=0 \text{ ஆக}$$

இங்கு $$y=\int_0^x(x+y^2)dx.$$

**முதல் அண்ணளவாக்கம்.** $x+y^2$ இல் $y=0$ என இடு

$$y=\int_0^x xdx=\tfrac{1}{2}x^2.$$

**இரண்டாம் அண்ணளவாக்கம்.** $x+y^2$ இல் $y=\frac{1}{2}x^2$ என இட

$$y=\int_0^x(x+\tfrac{1}{4}x^4)dx=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{20}x^5.$$

**மூன்றும் அண்ணளவாக்கம்.** $x+y^2$ இல் $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5$ என இட

$$\begin{aligned}y&=\int_0^x(x+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{20}x^7+\tfrac{1}{400}x^{10})dx\\&=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{20}x^5+\tfrac{1}{160}x^8+\tfrac{1}{4400}x^{11},\end{aligned}$$

இவ்வாறே வரையறையின்றி நிகழும்.

உ-ம் (ii) $$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=x^3(y+z),\end{cases}$$

$$x=0 \text{ ஆகுமிடத்து } y=1,\ z=\tfrac{1}{2} \text{ ஆக}$$

இங்கு $$y=1+\int_0^x z\,dx,\ z=\tfrac{1}{2}+\int_0^x x^3(y+z)dx.$$

**முதல் அண்ணளவாக்கம்.**

$$y=1+\int_0^x \tfrac{1}{2}\,dx=1+\tfrac{1}{2}x,$$

$$z=\tfrac{1}{2}+\int_0^x x^3(1+\tfrac{1}{2})dx=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}x^4$$

**இரண்டாம் அண்ணளவாக்கம்.**

$$y=1+\int_0^x(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}x^4)dx=1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{40}x^5,$$

$$z=\tfrac{1}{2}+\int_0^x x^3(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{8}x^4)dx=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}x^4+\tfrac{1}{10}x^5+\tfrac{3}{64}x^8.$$

மூன்றும் அண்ணளவாக்கம்.

$$y = 1 + \int_0^x (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{1}{10}x^5 + \tfrac{3}{64}x^8)dx$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{1}{60}x^6 + \tfrac{1}{192}x^9,$$

$$z = \tfrac{1}{2} + \int_0^x x^3(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{7}{40}x^5 + \tfrac{3}{64}x^8)dx$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{1}{10}x^5 + \tfrac{3}{64}x^8 + \tfrac{7}{360}x^9 + \tfrac{1}{256}x^{12}\text{ ; }$$ பிறவும் இவ்வாறே

உ-ம் (iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^3\left(\dfrac{dy}{dx} + y\right)$, $x = 0$ ஆகுமிடத்து $y = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}$ ஆக.

$\dfrac{dy}{dx} = z$ என இடுதலால் இதனை உ-ம் (ii) இற்கு ஒடுக்கலாம்.

பிக்காட்டினது முறையானது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை ஒரு தொகையீட்டுச் சமன்பாடு எனப்படும் தொகையீடுகளைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டுக்கு மாற்றுமென்பது குறிப்பிடப்படலாம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

பின்வரும் வகைகளில் மூன்றும் அண்ணளவாக்கம் காண்க. (1), (2) என்னும் பயிற்சிகளில் வழக்கமான முறைகளால் செப்பமான தீர்வுகளையும் பெறுக.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3$, $x = 0$ ஆகுமிடத்து $y = 2$ ஆக.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2 - \dfrac{y}{x}$, $x = 1$ ஆகுமிடத்து $y = 2$ ஆக.

(3) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3xy + x^2z, \end{cases}$$

$x = 0$ ஆகுமிடத்து $y = 2$, $z = 0$ ஆக.

(4) $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x^2z + x^4y, \end{cases}$$

$x = 0$ ஆகுமிடத்து $y = 5$, $z = 1$ ஆக.

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2\dfrac{dy}{dx} + x^4y$, $x = 0$ ஆகுமிடத்து $y = 5$, $\dfrac{dy}{dx} = 1$ ஆக.

### 84. இவ்வண்ணளவாக்கங்களிலிருந்து எண் பெறுமானங்களைத் துணிதல்.

ஈற்றுப் பிரிவின் உ–ம் (i) இல் $x=0{\cdot}3$ ஆகுமிடத்து $y$ இன் பெறுமானத்தை ஏழு தசமதானங்களுக்கு காண வேண்டுமென்க.

$x=0{\cdot}3$ எனப் பிரதியிட முதல் அண்ணளவாக்கத்திலிருந்து $\frac{1}{2}\,(0.3)^2$ அல்லது 0.045 எனப் பெறுவோம். இரண்டாம் அண்ணளவாக்கம் $\frac{1}{20}\,(0.3)^5$ அல்லது 0.0001215 என்பதைக் கூடுதலாகச் சேர்க்கும் ; மூன்றுவது $\frac{1}{160}\,(0.3)^8+\frac{1}{4400}+(0.3)^{11}$ அல்லது 0.00000041...... என்பதை இன்னுங் கூடுதலாகச் சேர்க்கும்.

இப்பின்னடும் எற்றங்கள் குறைதலுறும் விரைவைக் கவனிக்குமிடத்து, அடுத்த அண்ணளவாக்கம் முதல் ஏழு தசமதானங்களைப் பாதிக்காது என முடிபு கொள்ளலாம் ; ஆகவே, வேண்டிய பெறுமானம் 0.0451219 ......ஆகும்.

ஆனால் $x$ இன் கூடுதலாகப் பெரிதாகும் பெறுமானங்களுக்கு வேண்டிய செம்மைப்படிக்கு முடிபு பெறுதற்கு மூன்று அண்ணளவாக்கங்களுக்கு மேல் எடுத்தல் வேண்டும்.

பெறப்படும் முடிபுகள் சில நிபந்தனைகளோடு உண்மையில் ஓர் எல்லையை நாடுமென்பதையும் இவ்வெல்லை தீர்வைத் தருமென்பதையும் அத்தியாயம் X இல் நிறுவுவோம். இது **உண்மைத் தேற்றம்** எனப்படும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சி**

(i) பிரிவு 83 உ–ம் (ii) இல் $x=0.5$ என்பது $y=1.252......$, $z=0.526,......$ எனத் தருமென்பதையும் $x=0.2$ என்பது $y=1.100025......$, $z=0{\cdot}500632......$ எனத் தருமென்பதையும் காட்டுக.

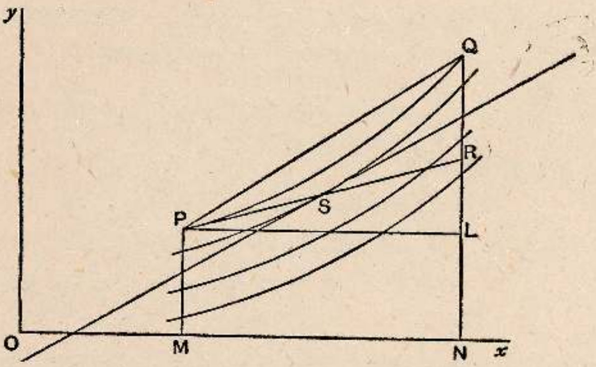
### 85. வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து நேரடியாகப் பெறப்படும் எண்ணண்ணளவாக்கம்.

பின்னடும் அண்ணளவாக்கங்களைத் தொகையிடும் முறையானது பல முறையும் உள்ளது போல் தொகையிடல்களைச் செய்தல் முடியாதாயின் பயன்படாது. ஆனால் என்றும் பிரயோகிக்கப்படக்கூடிய வேறு முறைகள் உண்டு. இப்பிரசினத்தைக் கேத்திரகணித முறையிற் சிந்திக்க.

$$\frac{dy}{dx}=f\,(x,y)$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடானது ஒன்றையொன்று இடைவெட்டாமல், தளப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிற்குமூடாக அவற்றுள் ஒன்று செல்லுமாறு உள்ள வளையிகளை ('சிறப்பியல்புகள்') ஆக்கும் ஒரு குடும்பத்தைத் துணியும்.

[இங்கு $f\,(x,y)$, தளப்புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் நிறைவாக வரையறுக்கப்படும் பெறுமானம் உடையது என்னும் எடுகோள் பயன்படுத்தப்படும். எனினும் $f\,(x,\;y)$ ஆனது சில புள்ளிகளில் நேராததாயின் அப்புள்ளிகள் சமன்பாட்டின் தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் எனப்படும் ; அத்தகைப் புள்ளிகளின் அண்மையில் சிறப்பியல்புகளினது நடத்தை பற்றி விசேட ஆராய்வு வேண்டும். பிரிவு 10 ஐ பார்க்க.]



படம் 23

$P(a, b)$ என்னும் புள்ளி தரப்பட $P$ இற்கூடாகச் செல்லும் சிறப்பியல்பினது படித்திறன் $f(a, b)$ ஆகும் என்பது தெரிந்ததே. இதே சிறப்பியல்பில் $x=ON=a+h$ (என்க) ஆகும் யாதுமொரு புள்ளியில் $y=NQ$ என்பதையே தீர்மானிக்க வேண்டும். ஒரு முதலாவது அண்ணளவாக்கம் $PQ$ என்னும் சிறப்பியல்புக்குப் பதிலாக $PR$ என்னும் தொடலியை எடுத்தலால் தரப்படும், அதாவது

$y=NL+LR=NL+PL$ தான் $\angle RPL=b+hf(a, b)=b+hf_0$ (என்க) என எடுத்தலால்,

ஆனால் $h$ மிகச் சிறியதானாலன்றி $RQ$ என்னும் வழு புறக்கணிக்கத் தக்கதன்று.

கூடுதலாக அனுமதிக்கத்தகு அண்ணளவாக்கம் $PQ$ என்னும் நாணை $PR$ இனது நடுப்புள்ளியாகிய $S$ இற்கூடாகச் செல்லும் சிறப்பியல்பின் தொடலிக்குச் சமாந்தரமாகக் கொள்ளுதலேயாம்.

$S$ ஆனது $(a+\frac{1}{2}h, b+\frac{1}{2}hf_0)$ ஆதலால் இது தருவது

$$y=NL+LQ=NL+PL \text{ தான் } \angle QPL=b+hf(a+\tfrac{1}{2}h, b+\tfrac{1}{2}hf_0).$$

இவ்வெளிய சூத்திரம், பின்வரும் உதாரணங்களிற் காணப்படுதல்போல், சில வகைகளில் நல்ல முடிபுகளைத் தரும் :

உ-ம் (i) $\dfrac{dy}{dx}=x+y^2$; $x=0$ ஆக $y=0$ ஆயின் $x=0\cdot 3$ ஆகுமிடத்து $y$ ஐக் காணவேண்டியது.

இங்கு $\qquad a=b=0,\ h=0\cdot 3,\ f(x, y)=x+y^2.$

ஆகவே $\qquad f_0=f(a, b)=0,\ a+\frac{1}{2}h=0\cdot 15,\ b+\frac{1}{2}hf_0=0,$

$$b+hf(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}hf_0)=0+0\cdot 3\times f(0.15, 0)=0\cdot 045.$$

பிரிவு 84 இல் காணப்பட்டுள்ள பெறுமானம் 0.0451219....ஆதலால் வழு 0.00012.... ஆகி, ஏறக்குறைய $\frac{1}{4}$ சதவீதமாகும்.

உ-ம் (ii) $\dfrac{dy}{dx}=2-\dfrac{y}{x}$; $x=1$ ஆகுமிடத்து $y=2$ எனத் தரப்பட $x=1{\cdot}2$ ஆகுமிடத்து $y$ ஐக் காண்க.

இங்கு $a=1,\ b=2,\ h=0{\cdot}2,\ f_0=2-\frac{2}{1}=0$

ஆகவே $b+hf\,(a+\frac{1}{2}h,\ b+\frac{1}{2}hf_0)=2+0{\cdot}2\times f\,(1{\cdot}1,\ 2)$

$$=2+0{\cdot}2\times\left(2-\frac{2}{1{\cdot}1}\right)=2{\cdot}036\ldots\ldots$$

இனி வகையீட்டுச் சமன்பாடு எளிதில் தொகையிடப்பட்டு $y=x+\dfrac{1}{x}$ ஆதலால் $x=1{\cdot}2$ ஆகுமிடத்து $y$ இன் பெறுமானம் $2{\cdot}033\ldots.$ ஆகும். வழு $0{\cdot}003\ldots.$ ஆகும்; $0{\cdot}033\ldots.$ என்னும் $y$ இனது ஏற்றத்தோடு ஒப்பிடப்படுமிடத்து இது பெரிதாகும்.

உ-ம் (iii)
$$\frac{dy}{dx}=z=f\,(x,\ y,\ z),\ \text{எனக,}$$
$$\frac{dz}{dx}=x^3\,(y+z)=g\,(x,\ y,\ z),\ \text{எனக};$$

$x=0$ ஆகுமிடத்து $y=1,\ z=0{\cdot}5$ எனத் தரப்பட்டால் $x=0{\cdot}5$ ஆகுமிடத்து $y,\ z$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

இங்கு $a=0,\ b=1,\ c$ ($z$ இன் தொடக்கப் பெறுமானம்) $=0{\cdot}5,\ h=0{\cdot}5.$

ஆகவே $f_0=f\,(0,\ 1,\ 0{\cdot}5)=0{\cdot}5$ ; $g_0=g\,(0,\ 1,\ 0{\cdot}5)=0.$

இரு மாறிகளுக்குள்ள முறையினது கண்கூடாகும் விரிவால்

$$y=b+hf\,(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}hf_0,\ c+\tfrac{1}{2}hg_0)=1+0{\cdot}5$$
$$\times f\,(0{\cdot}25,\ 1{\cdot}125,\ 0{\cdot}5)=1{\cdot}2500,$$
$$z=c+hg\,(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}hf_0+c+\tfrac{1}{2}hg_0)=0{\cdot}5+0{\cdot}5\times g\,(0{\cdot}25,\ 1{\cdot}125,\ 0{\cdot}5)$$
$$=0{\cdot}5127$$

என எடுக்கலாம்.

செம்மையான பெறுமானங்கள், பிரிவு 84 இல் காணப்பட்டுள்ளவாறு

$y=1{\cdot}252\ldots.,\ z=0{\cdot}526\ldots.$ ஆகும்.

ஆயின் $y$ இற்கு ஏறக்குறைய நல்ல முடிபையும் $z$ இற்கு மிகத் தவறான முடிபையும் பெற்றுக் கொள்வோம்.

முடிபின் செம்மைப்படி பற்றிய உறுதியின்மை இம்முறையின் தகுதியைக் குறைக்கும். எனினும், அடுத்த பிரிவில் விளக்கப்படும் ரங்கேயின் சிரமமான முறைக்கு இது ஒரு முன்னுரையாகும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $\dfrac{dy}{dx}=(x^2-y)^{\frac{1}{3}}-1$ ; $x=2{\cdot}3$ ஆகுமிடத்து $y=4$ எனத் தரப்பட்டால் $x=2{\cdot}7$ ஆகுமிடத்து $y=4.122$ என்னும் பெறுமானத்தைப் பெறுக. [ரங்கேயின் முறை தருவது 4.118.]

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\frac{1}{10}\{y^{\frac{1}{3}}-1+\text{மட}_e\,(x+y)\}$ ; $x=-1$ ஆகுமிடத்து $y=2$ எனத் தரப்பட்டால் $x=1$ ஆகுமிடத்து $y=2{\cdot}194$ என்னும் பெறுமானத்தைப் பெறுக. [ரங்கேயின் முறை தருவது 2·192.]

(3) $\dfrac{dy}{dx}=2x-\dfrac{y}{x}$ ; $x=1$ ஆகுமிடத்து $y=2$ எனத் தரப்பட்டால், $x=1{\cdot}2$ ஆகுமிடத்து $y=2{\cdot}076$ என்னும் பெறுமானத்தைப் பெறுக. அன்றியும் $y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3x}$ எனக்காட்டி $x=1{\cdot}2$ ஆகுமிடத்து $y$ உண்மையில் 2.071 ...... எனக் காட்டுக.

## 86. ரங்கேயின் Runge's முறை

$$\frac{dy}{dx}=f\,(x,\,y),\;\; x=a \text{ ஆகுமிடத்து } y=b,$$

என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படும் $y$ என்னுஞ் சார்பு $y=F(x)$ ஆற் குறிக்கப்படுமெனக.

இது தெயிலரின் தேற்றத்தால் விரிக்கப்படுமாயின்

$$F\,(a+h)=F\,(a)+hF'\,(a)+\frac{h^2}{2\,!}F''\,(a)+\frac{h^3}{3\,!}F'''\,(a)+\;\ldots.$$

இனி $$F'\,(x)=\frac{dy}{dx}=f\,(x,\,y)=f,\text{ எனக.}$$

$x$ ஐக் குறித்து மொத்த வகையீட்டுக் குணகம் எடுப்போம். (அதாவது $x$ இன் மாறல் காரணமாக $f$ இலுள்ள $y$ மாறுமெனக் கொண்டு ) பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களை

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\; q=\frac{\partial f}{\partial y},\; r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\; s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\; k=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

எனவும் $x=a,\; y=b$ ஆகுமிடத்து அவற்றின் பெறுமானங்களை $p_0,\, q_0,\ldots$ எனவும் குறிப்போம்.

ஆயின் $$F''\,(x)=\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)f=p+fq.$$

இதேமாதிரி $$F'''\,(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(p+fq)$$

$$=r+pq+fs+f\,(s+q^2+ft).$$

ஆயின் $$F\,(a+h)-F\,(a)=hf_0+\tfrac{1}{2}h^2\,(p_0+f_0q_0)+$$
$$\tfrac{1}{6}h^3\,(r_0+2f_0s_0+f_0{}^2t_0+p_0q_0+f_0q_0)+\;\ldots\ldots \quad (1)$$

முதலுறுப்பு பிரிவு 85 இல் கூறப்பட்டுத் தள்ளப்பட்டுள்ள முதல் அண்ணளவாக்கத்தைக் குறிக்கும்.

பிரிவு 85 இனது இரண்டாவது அண்ணளவாக்கம், அதாவது

$$y - b = hf\,(a + \tfrac{1}{2}h,\ b + \tfrac{1}{2}hf_0) = k_1,\text{என்க,}$$

இப்போது விரிக்கப்பட்டு (1) என்பதோடு ஒப்பிடப்படலாம்.

இனி, இரு சாராமாறிகள் பற்றிய தெயிலரின் தேற்றத்தால்

$$f\,(a + \tfrac{1}{2}h,\ \ b + \tfrac{1}{2}hf_0) = f_0 + \tfrac{1}{2}hp_0 + \tfrac{1}{2}hf_0q_0 + \frac{1}{2\,!}$$
$$(\tfrac{1}{4}h^2r_0 + \tfrac{1}{2}h^2f_0s_0 + \tfrac{1}{4}h^2f_0{}^2t_0) + \ldots\ldots\ ;$$

இது தருவது

$$k_1 = hf_0 + \tfrac{1}{2}h^2\,(p_0 + f_0q_0) + \tfrac{1}{8}h^3\,(r_0 + 2f_0s_0 + f_0{}^2t_0) + \ldots\ldots(2)$$

$k_1$ ஆனது $h^3$ இனது குணகத்திற் குறை கொண்டதென்பது கண்கூடு.

அடுத்தபடி $\dfrac{dy}{dx} = f\ (x)$ என்னும் எளிய வகையீட்டுச் சமன்பாடு பற்றிய எமது வழக்கமான எண்தொகையிடல் முறைகளாற் காட்டப்படும். [**லாமின் நுண்கணித நூலைப்** பார்க்க.]

இவ்வகையில் இரண்டாவது அண்ணளவாக்கம்

$$y - b = hf\,(a + \tfrac{1}{2})$$

என்னுஞ் சரிவகப்போலி நெறிக்கு ஒடுங்கும். கருதப்படும் அடுத்த அண்ணளவாக்கம் பொதுவாக

$$y - b = \tfrac{1}{6}h\{f(a) + 4f\,(a + \tfrac{1}{2}h) + f\,(a + h)\}$$

என எழுதப்படும் சிம்சன் நெறியாகும்.

இரு மாறிகளிலுள்ள ஒத்த சூத்திரத்தை, அதாவது

$$\tfrac{1}{6}h\{f_0 + 4f\,(a + \tfrac{1}{2}h, b + \tfrac{1}{2}hf_0) + f\,(a + h, b + hf_0)\}$$

என்பதை, விரிப்போமாயின்

$$hf_0 + \tfrac{1}{2}h^2(p_0 + f_0q_0) + \tfrac{1}{6}h^3(r_0 + 2f_0s_0 + f_0{}^2t_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\ ;$$

இது $k_1$ இலும் சிறந்த அண்ணளவாக்கமாயினும் (1) என்பதோடு முற்றுகப் பொருத்தமாகும் $h^3$ இன் குணகத்தைக் கொண்டிராது. $h^3$ இலுள்ள மேலதிகமான உறுப்புக்களைப் பெறுதற்கு ரங்கே

$$hf\,(a + h,\ b + hf_0)$$

என்பதை $k''' = hf\,(a + h,\ b + k'')$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்துள்ளார் ; இங்கு $k'' = hf(a + h, b + hf_0)$ ஆகும். $k' = hf_0,\ k_2 = \tfrac{1}{2}(k' + k''')$ ஆயின் திரிந்த சூத்திரம் $\tfrac{1}{6}\ (k' + 4k_1 + k''')$ அல்லது $\tfrac{2}{3}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 = k_1 + \tfrac{1}{3}(k_2 - k_1)$ என எழுதப்படலாம்.

ரங்கேயின் சூத்திரவிதி $h,\ h^2,\ h^3$, ஆகியவற்றிலுள்ள உறுப்புக்களைப் பொறுத்தவரை (1) இன் வலக்கைப் பக்கத்தோடு பொருந்தும் என்பதை மாணுக்கன் எளிதில் சரி பிழை பார்க்கலாம்.

ஆனால் (1) என்னுந் தொடர் மந்தமாய் ஒருங்குமாயின் இந்த முறை தவறான முடிபுகளைத் தரும்.

எண்ணளவில் $f_0>1$ ஆயின், சமன்பாட்டை

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}=F(x,y),\text{ என்க,}$$

என எழுதுவோம் ; எண்ணளவில் $F_0<1$ ஆக $y$ ஐ சாரா மாறியாக எடுப்போம்.

## 87. றங்கேயின் நெறியால் பயிற்சிகளைத் தீர்த்தல்.

மலைவு கொள்ளாதவாறு கணிப்புக்கள் பின்வருவனபோல் யாதோர வரையறுத்த வரிசையில் ஆக்கப்படல் வேண்டும் :

$$\begin{aligned}
k' &=hf_0,\\
k'' &=hf(a+h,b+k'),\\
k''' &=hf(a+h,b+k''),\\
k_1 &=hf(a+\tfrac{1}{2}h,b+\tfrac{1}{2}k'),\\
k_2 &=\tfrac{1}{2}(k'+k'''),
\end{aligned}$$

ஈற்றில், $k=k_1+\frac{1}{3}(k_2-k_1)$

என்பவற்றைப் **பி**ன்னடுத்துக் கணிக்க.

அன்றியும் $k_1$, தானே வேண்டிய பெறுமானத்திற்கு ஓர் அண்ணளவாக்கமாதலால் $k, k_1$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள வித்தியாசமாகிய $\frac{1}{3}(k_2-k_1)$ என்பது $k_1$, $k$ என்பவற்றோடு ஒப்பிடப்படுமிடத்து சிறிதாயின் $k$ இலுள்ள வழு அதனிலுஞ் சிறிதாகலாமென்பது தெளிவு.

உம் (i) $\dfrac{dy}{dx}=x+y^2$; $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ எனத் தரப்பட்டால், $x=0.3$ ஆகுமிடத்து $y$ ஐக் காண்க.

இங்கு $a=0,\ b=0,\ h=0.3,\ f(x,y)=x+y^2, f_0=0$ ;

$$\begin{aligned}
k' &=hf_0=0\ ;\\
k'' &=hf(a+h,b+k')=0.3\times f(0.3,0)=0.3\times 0.3 &&=0.0900\ ;\\
k''' &=hf(a+h,b+k'')=0.3\times f(0.3,0.09)=0.3\times(0.3+0.0081) &&=0.0924;\\
k_1 &=hf(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}k')=0.3\times f(0.15,0)=0{\cdot}3\times 0{\cdot}15 &&=0.0450\ ;\\
k_2 &=\tfrac{1}{2}(k'+k''')=\tfrac{1}{2}\times 0.0924 &&=0.0462\ ;\\
k &=k_1+\tfrac{1}{3}(k_2-k_1)=0.0450+0.0004 &&=0.0454.
\end{aligned}$$

$k=0.0454$, $k_1=0.0450$ என்பனவற்றின் வித்தியாசம் இவற்றுள் யாதோடும் ஒப்பிடப்படுமிடத்து மிகச் சிறிதாதலால் $k$ இலுள்ள வழு

0.0004 என்னும் இவ்வித்தியாசத்திலுஞ் சிறிதாதல் உயர் முறையில் நிகழத்தக்கது. அதாவது, மூன்று தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பெறுமானம் 0.045 ஆகுமென முடிபு கொள்ளலாம்.

பிரிவு 84 இற் பெறப்பட்ட 0.0451219 ....... என்னும் முடிபோடு ஒப்பிடுதலால் இம்முடிபைச் சோதிக்கலாம்.

**உம் (ii)** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y+x}$; $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=1$ எனத் தரப்பட்டால், $x=1$ ஆகுமிடத்து $y$ ஐக் காண்க.

இது ரங்கேயால் தொடக்கத்தில் தரப்பட்டுள்ள ஓர் உதாரணமாகும். வீச்சை மூன்று பாகங்களாகப் பிரிக்க ; 0 இலிருந்து 0.2 இற்கும், 0.2 இலிருந்து 0.5 இற்கும், 0.5 இலிருந்து 1 இற்கும். தொடக்கத்தில் $f(x,y)$ ஆனது மிகப் பெரிதாதலால் முதற்படியில் ஒரு சிறிய ஏற்றத்தை எடுப்போம்.

**முதற்படி** $a=0,\ b=1,\ h=0.2,\ f_0=1$ ;

$$\begin{aligned}
k' &= hf_0 && =0.200\ ;\\
k'' &= hf(a+h,b+k')=0.2\times f(0.2,1.2) && =0.143\ ;\\
k''' &= hf(a+h,b+k'')=0.2\times f(0.2,1.143) && =0{\cdot}140\ ;\\
k_1 &= hf(a+\tfrac{1}{2}h,b+\tfrac{1}{2}k')=0.2\times f(0.1,1.1) && =0.167\ ;\\
k_2 &= \tfrac{1}{2}(k'+k''')=\tfrac{1}{2}\times 0.340 && =0.170\ ;\\
k &= k_1+\tfrac{1}{3}(k_2-k_1)=0.167+0.001 && =0.168\ ;
\end{aligned}$$

இவை தருவன $x=0.2$ ஆகுமிடத்து $y=1.168$ என்பதே.

**இரண்டாம் படி**

$a=0.2,\ b=1.168,\ h=0.3,\ f_0=f(0.2,\ 1.168)=0.708.$ முன்போலச் செய்ய $k_1=0.170,\ k_2=0.173,\ k=0.171$ எனப்பெற்று $x=0.5$ ஆகுமிடத்து $y=1.168+0.171=1.339$ எனப் பெறுவோம்.

**மூன்றும் படி.** $a=0{\cdot}5,\ b=1{\cdot}339,\ h=0{\cdot}5.$

$k_1=k_2=k=0{\cdot}160$ எனக் கண்டு $x=1$ ஆகுமிடத்து $y=1{\cdot}499$ எனப் பெறுவோம்.

$k,\ k_1$ என்பவற்றையெடுத்துச் சிந்திக்குமிடத்து இம்முடிபிலுள்ள வழு முதற்படி இரண்டாம் படி ஒவ்வொன்றிலும் $0{\cdot}001$ என்பதிலுஞ் சிறிதாகி மூன்றும் படியில் (மூன்று தசம தானத்திற்கு) புறக்கணிக்கத்தகும், அதாவது மொத்தமாக 0.002 இலுஞ் சிறிதாகும்.

உண்மையில் $y$ இன் உண்மைப் பெறுமானம் $1{\cdot}498$, $1{\cdot}499$ என்பவற்றிற்கிடையே கிடத்தலால் இவ்வழு $0{\cdot}001$ இலுஞ் சிறிது. $y$ இனது இப் பெறுமானம் சமன்பாட்டைத் தொகையிடலாற் காணப்படும் ; இது தருவது

$\pi-2$ தான்$^{-1}\dfrac{y}{x}$ மட$_e$ $(x^2+y^2)$.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் பயிற்சிகளில் செம்மையாகும் நேர்தகவு உள்ள அத்தனை தசமதானங்களுக்கும் எண் முடிபுகள் தருக.

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10}\{y^{\frac{1}{3}} - 1 + \text{மட}_e(x+y)\}$ ; $x = -1$ ஆகுமிடத்து $y = 2$ எனத் தரப்பட்டால் $h = 2$ என எடுத்துக்கொண்டு ($f$ ஆனது மிகச் சிறிதாதலால்) $x = 1$ ஆகுமிடத்து $y$ ஐக் காண்க.

(2) இரு படிகள் எடுத்தலால் முன்னுள்ள பயிற்சியில் ஒரு கூடுதலாக நெருங்கிய அண்ணளவாக்கத்தைப் பெறுக.

(3) $\frac{dy}{dx} = (x^2 - y)^{\frac{1}{2}} - 1$ ; $x = 2{\cdot}3$ ஆகுமிடத்து $y = 4$ எனத் தரப்பட்டால் $x = 2{\cdot}7$ ஆகுமிடத்து (i) ஒரு படியில் (ii) இரு படியில் $y$ ஐக் காண்க.

(4) $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}$ ஆகவும் $x = 1$ ஆகுமிடத்து $y = 2$ ஆகவும் இருப்பின், $y = x + \frac{1}{x}$ எனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு ரங்கேயின் முறையால் தரப்படும் முடிபிலுள்ள வழுக்களை (i) $h = 0.4$ (ii) $h = 0{\cdot}2$ (iii) $h = 0{\cdot}1$ (ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒன்றிப்படி) என எடுத்துக்கொண்டு காண்க ; இவ்வழுக்களை அவற்றின் மதிப்பீட்டு மேல் எல்லைகளோடு ஒப்பிடுக.

(5) முதல் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை ரங்கேயின் முறையால் தீர்த்துப் பெற்ற முடிபின் வழு $E(h)$ ஆயின்

$$\text{எல்லை}_{h \to 0} \frac{E(h)}{E(nh)} = \frac{1}{n^4}.$$

என்பதை நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு ஓர் இருபடித் தீர்விலுள்ள வழு ஏறக்குறைய ஒருபடியாலே தரப்படுவதன் $\frac{1}{8}$ எனக் காட்டுக ; அதாவது படித்தொகையை இரட்டிப்பதால் விடையை (பரும்படியாய்) மேலதிகமான ஒரு தசமதானத்திற்குத் திருத்தமாய்ப் பெறுவோம்.

## 88. ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்கு விரித்தல்

இந்த முறை ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்கு எளிதில் விரிக்கப்படலாம். நிறுவல் நீண்டதானபோதிலும் பிரிவு 86 இலுள்ள வேலை போன்றதால் ஓர் உதாரணத்தை மட்டுமே தருவோம். இவ்வுதாரணமும் தீர்த்தற்குத் தரப்படும் பயிற்சிகளும், சிறு திரிவுகளோடு, ரங்கேயாலாயனவை.

உ-ம்.

$$\frac{dy}{dx} = 2z - \frac{y}{x} = f(x, y, z) \text{ என்க,}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\sqrt{(1 - y^2)}} = g(x, y, z,) \text{ என்க ;}$$

$x = 0{\cdot}2$ ஆகுமிடத்து $y = 0{\cdot}2027$, $z = 1{\cdot}0202$ எனத் தரப்பட்டால், $x = 0{\cdot}4$ ஆகுமிடத்து $y$, $z$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

இங்கு

$$a=0{\cdot}2,\ \ b=0{\cdot}2027,\ c=1{\cdot}0202,\ f_0=f(0{\cdot}2,\ 0{\cdot}2027,\ 1{\cdot}0202)=1.027,$$
$$g_0=0{\cdot}2070,\ h=0.2\ ;$$

$$\begin{aligned}
k' &= hf_0=0{\cdot}2\times1{\cdot}027 && =0.2054\ ;\\
l' &= hg_0=0{\cdot}2\times0{\cdot}2070 && =0.0414\ ;\\
k'' &= hf(a+h,\ b+k',\ c+l')=0{\cdot}2\times f(0{\cdot}4,0{\cdot}4081,1{\cdot}0616) && =0.2206\ ;\\
l'' &= hg(a+h,\ b+k',\ c+l')=0{\cdot}2\times g(0{\cdot}4,0{\cdot}4081,1{\cdot}0616) && =0.0894\ ;\\
k''' &= hf(a+h,\ b+k'',\ c+l'')=0{\cdot}2\times f(0{\cdot}4,0{\cdot}4233,1{\cdot}1096) && =0.2322\ ;\\
l''' &= hg(a+h,\ b+k'',\ c+l'')=0{\cdot}2\times g\ (0{\cdot}4,0{\cdot}4233,1{\cdot}1096) && =0{\cdot}0934\ ;\\
k_1 &= hf(a+\tfrac{1}{2}h,b+\tfrac{1}{2}k',c+\tfrac{1}{2}l')=0{\cdot}2\times f(0{\cdot}3,0{\cdot}3054,1{\cdot}0409) && =0{\cdot}2128\ ;\\
l_1 &= hg(a+\tfrac{1}{2}h,b+\tfrac{1}{2}k',c+\tfrac{1}{2}l')=0{\cdot}2\times g(0{\cdot}3,0{\cdot}3054,1{\cdot}0409) && =0{\cdot}0641\ ;\\
k_2 &= \tfrac{1}{2}\ (k'+k''') && =0.2188\ ;\\
l_2 &= \tfrac{1}{2}\ (l'+l''') && =0.0674\ ;\\
k &= k_1+\tfrac{1}{3}\ (k_2-k_1)=0{\cdot}2128+0{\cdot}0020 && =0.2148\ ;\\
l &= l_1+\tfrac{1}{3}\ \ (l_2-l_1)=0{\cdot}0641=0.0011 && =0.0652\ ;
\end{aligned}$$

இவை தருவன மூன்றும் தசமதானத்திற்குத் திருத்தமாய் வரக்கூடிய

$$y=0{\cdot}2027+0{\cdot}2148=0{\cdot}4175,$$
$$z=1.0202+0.0652=1.0854$$

என்பன.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) பிரிவு 88 இன் சமன்பாட்டோடு $x=0{\cdot}4$ ஆகுமிடத்து $y=0{\cdot}4175$, $z=1.0854$ ஆயின் $x=0{\cdot}6$ ஆகுமிடத்து $y=0{\cdot}6614$, $z=1{\cdot}2145$ (மூன்றும் தசமதானத்திற்குத் திருத்தமாய்) எனக் காட்டுக.

(2) $\dfrac{dw}{dz}=-2z+\dfrac{\sqrt{(1-w^2)}}{r}\,;\dfrac{dr}{dz}=\dfrac{w}{\sqrt{(1-w^2)}}$; $z=1.2145$ ஆகுமிடத்து $w=0.7500$, $r=0{\cdot}6$ எனத்தரப்பட்டால், (சாராமாறியாக எடுக்கப்படும்) $z=1.3745$ ஆகுமிடத்து $w=0{\cdot}5163$, $r=0{\cdot}7348$ என்னும் பெறுமானங்களைப் பெறுக. $r$ இன் பெறுமானம் நாலு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாய் வரலாமெனவும் $w$ இன் பெறுமானத்தில் மூன்றும் தானம் வழுக்கொள்ளலாமெனவும் காட்டுக.

(3) ஈற்றுப் பயிற்சியில் $w=$கோசை $\phi$ எனவும் பிரிவு 88 இன் உதாரணத்தில் $y=$சைன் $\phi$, $x=r$ எனவும் இட்டுக்கொண்டு ஒவ்வொரு வகையிலும் இடைத்தளத்தில் ஓய்விலிருக்கும் நீர்த்துளியின் வடிவத்தைத் தரும்.

$\dfrac{dz}{dr}=\text{தான்}\ \phi\ ;\ 2z=\dfrac{\text{சைன்}\ \phi}{r}+\ \text{கோசை}\ \phi\dfrac{d\phi}{dr}$ என்னும் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

## 89. கேன்,குற்றா (*Heun and Kutta*) ஆகியோரின் முறைகள்.

இந்த முறைகள் ரங்கேயின் முறைகளைப் போன்றனவாதலால் அவற்றைச் சுருக்கமாகக் கூறுவோம். பிரசினம் பின்வருமாறு :—

$\frac{dy}{dx}=f\,(x,y)$ எனவும் $x=a$ ஆகுமிடத்து $y=b$ எனவும் தரப்பட்டால் $x$ இன் ஏற்றம் $h$ ஆகுமிடத்து $y$ இன் $k$ என்னும் ஏற்றம் காண்டல்.

கேன் ஆனவர்

$$\begin{aligned}k' &= hf(a,b),\\ k'' &= hf(a+\tfrac{1}{3}h,\ b+\tfrac{1}{3}k'),\\ k''' &= hf(a+\tfrac{2}{3}h,\ b+\tfrac{2}{3}k''),\end{aligned}$$

எனப் பின்னடுத்துக் கணித்து

$\frac{1}{4}\ (k'+3k''')$ ஐ $k$ இன் அண்ணளவுப் பெறுமானமாக எடுக்கிறார்.

குற்றா ஆனவர்

$$\begin{aligned}k' &= hf(a,b),\\ k'' &= hf(a+\tfrac{1}{3}h,\ b+\tfrac{1}{3}k'),\\ k''' &= hf(a+\tfrac{2}{3}h,\ b+k''-\tfrac{1}{3}k'),\\ k'''' &= hf(a+h,\ b+k'''-k''+k'),\end{aligned}$$

எனப் பின்னடுத்துக் கணித்து

$\frac{1}{8}\ (k'+3k''+3k'''+k'''')$ என்பதை $k$ இன் அண்ணளவுப் பெறுமானமாக எடுக்கிறார்.

இவ்வண்ணளவாக்கங்கள் ரங்கேயின் வகையிலுள்ளதுபோல் தெயிலரின் தொடராக விரித்தலால் சரி பிழை பார்க்கப்படலாம்.

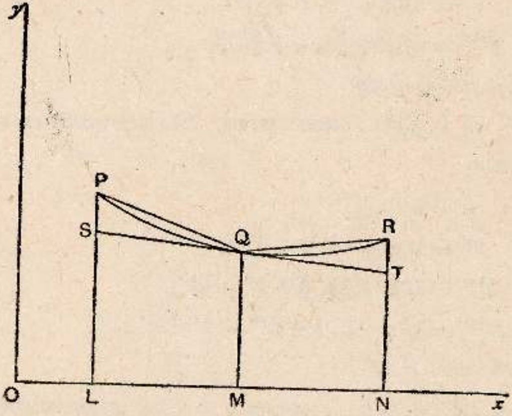
**தீர்த்தற்கான பயிற்சி**

$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$ எனவும் $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=1$ எனவும் தரப்பட்டால் $x=0.2$ ஆகுமிடத்து $y$ இன் பெறுமானத்தை (8 பொருளுடைய இலக்கங்களுக்கு) ரங்கே, கேன், குற்றா ஆகியோரின் முறைகளால் கண்டு அவற்றை 1.1678417 என்னும் செம்மையான பெறுமானத்தோடு ஒப்பிடுக.

**90. வழுபற்றிய எல்லைகளோடு வேறொரு வழி.** அவற்றுள் மிகப் பெரியதிற்கும் மிகச் சிறியதற்குமிடையே $y$ இனது வேண்டிய ஏற்றம் கிடக்குமாறு நாலு எண்கள் தரும் நாலு சூத்திரங்களை இந்நூலாசிரியர் கண்டுள்ளார். இவற்றிலிருந்து ஒரு புதிய அண்ணளவுச் சூத்திரம் பெறலாம். ரங்கேயின் உதாரணத்திற்குப் பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து இப்புதிய சூத்திரம் முன்னுள்ள யாது முறை தருவதிலும் கூடுதலாகச் செம்மையாகும் முடிபுகளைத் தரும்.

இந்த முறை வரையறுத்த தொகையீடுகளைப் பற்றி நன்றாகத் தெரிந்த பின்வரும் முடிவுகளின் ஒரு விரியாகும்.

**91. ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டின் பெறுமானத்தினது எல்லைகள்.** $F(x)$ ஆனது அதுவும் அதனது முதலாம் இரண்டாம் வகையீட்டுக் குணகங்களும் $x=a$, $x=a+h$ என்பவற்றிற்கிடையே தொடர்ச்சியானவையாகும் ஒரு சார்பு ஆகுக. $F''(x)$ ஆனது ஆயிடையில் மாறாக் குறியுள்ளதாகுக. உருவத்தில் வளையி, மேல் முகமாகக் குழிவாகுமாறு இக்குறி நேராக எடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 24

$LP$, $MQ$, $NR$ என்பன $y$ அச்சுக்குச் சமாந்தரம், $M$ ஆனது $LN$ இனது நடுப்புள்ளி, $SQT$ ஆனது $Q$ இல் தொடலி. $OL=a$, $LN=h$.

ஆயின் $PLNR$ என்னும் பரப்பளவு $SLNT$ என்னுஞ் சரிவகத்தின் பரப்பளவுக்கும் $PLMQ$, $QMNR$ என்னுஞ் சரிவகப் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குமிடையே கிடக்கும்.

$$\text{அதாவது} \int_a^{a+h} F(x)dx \text{ என்பது}$$

$$hF(a+\tfrac{1}{2}h)=A, \text{ எனக,}$$

என்பதற்கும்

$$\tfrac{1}{4}h\{F(a)+2F(a+\tfrac{1}{2}h)+F(a+h)\}=B, \text{ எனக,}$$

என்பதற்குமிடையே கிடக்கும்.

உருவத்தில் $F''(x)$ ஆனது நேராகி $A$ ஆனது கீழெல்லையும், $B$ ஆனது மேலெல்லையுமாகும்.

$F''(x)$ மறையாகின் $A$ ஆனது மேலெல்லையும் $B$ கீழெல்லையுமாகும்.

தொகையீட்டின் பெறுமானத்திற்கு ஓர் அண்ணளவாக்கமாக, $A$, $B$ ஆகியவற்றின் கூட்டலிடையை எடாது, $\frac{2}{3}B+\frac{1}{3}A$ என்பதை எடுத்தல் மிக நன்று ; $PQR$ ஆனது $y$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமான அச்சு உள்ள பரவளைவு வில்லாகுமிடத்து இது செப்பமுடைத்து. சிம்சனின் நெறி பற்றிய விவாதத்தில் நுண்கணித நூல்கள் பலவற்றில் நிறுவப்பட்டுள்ளதுபோல் இது

$$F(x)=a+bx+cx^2+ex^3$$

என்னும் கூடுதலாகப் பொதுவான வகையிலும் செப்பமுடைத்து.

## 92. வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படும் சார்புகளுக்கு முன்னுள்ள முடிபுகளை விரித்தல்.

$$\frac{dy}{dx}f(x,y),\ x=a \text{ ஆகுமிடத்து } y=b,$$

ஆகுமாறு வரையறுக்கப்படும் சார்பை எடுத்துச் சிந்திக்க ; இங்கு $f(x,y)$ ஆனது $a$ இலிருந்து $a+h$ இற்கு உள்ள $x$ இன் பெறுமான வீச்சிலும் $b-h$ இலிருந்து $b+h$ இற்கு உள்ள $y$ இன் பெறுமான வீச்சுக்கும் பின்வரும் எல்லைப்பாடுகளுக்குள் அடங்கும். பின்வருவதிலிருந்து $y$ இன் ஏற்றம் எண்ணளவில் $h$ இலும் சிறிதாகுமென்பது புலனாகும் ; ஆகவே $y$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாம் மேற்கூறிய வீச்சினுள் வரும் எல்லைப்பாடுகள் ஆவன:

(1) $f(x,y)$ என்பதும் அதன் முதலாம் இரண்டாம் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களும் முடிவுள்ளனவும் தொடர்ச்சியுள்ளனவும்.

(2) அது எண்ணளவில் ஒருபோதும் ஒன்றை அதிகரிக்காது. இந்நிபந்தனை திருத்தியாகாவிடின் $x$ இற்குப் பதிலாக $y$ ஐச் சாராமாறியாக எடுத்தலால் இதனைத் திருத்தியாக்கும் ஒரு புதிய சமன்பாட்டை பொதுவாகப் பெறலாம்.

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}$ ஆதல் $\frac{\partial f}{\partial y}$ ஆதல் குறி மாறாது.

$$-1\leqq m<f<M\leqq 1$$

ஆகுமாறு $m$, $M$ என்பன எவையேனும் ஈர் எண்களாகுக.

ஆயின் $x$ ஆனது $a+\frac{1}{2}h$, $a+h$ என்னும் பெறுமானங்கள் கொள்ளுமிடத்து $y$ இன் பெறுமானங்கள் முறையே $b+j$, $b+k$, என்பவற்றாற் குறிக்கப்படுமாயின்

$$-\tfrac{1}{2}h\leq\tfrac{1}{2}mh<j<\tfrac{1}{2}Mh\leq\tfrac{1}{2}h, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

$$-h\leq mh<k<Mh\leqq h \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

[இச்சமனிலிகள் $h$ நேராகுமிடத்தே உண்மையாகும். $h$ மறையாயின் அவை திரிவு கொள்ளல் வேண்டும், ஆனால் இப்பிரிவின் முடிவிற் கூறிய இறுதி முடிபு இங்கும் உண்மையாகும்.]

$y$ என்பதை

$$y=b+\int_a^x F(x)dx$$

என்பதால் வரையறுக்கப்படும் சார்பாக எடுத்துக் கொண்டு ஈற்றுப் பிரிவுச் சூத்திரங்களை இப்போது பிரயோகிப்போம் ; ஆயின் $k=\int_a^{a+h} F(x)dx$. $F$ இற்குப் பதிலாக $f$ என்பது பற்றி சூத்திரங்களை உணர்த்தல் வேண்டும்.

இனி, $x=a$ ஆகுமிடத்து $\frac{dy}{dx}$ இன் பெறுமானம் $F(a)$ ஆதலால் $F(a) =f(a,b)$.

இதேமாதிரி
$$F(a+\tfrac{1}{2}h)=f(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+j),$$
$$F(a+h)=f(a+h,\ b+k).$$

இனி, $\frac{\partial f}{\partial y}$ நேராயின் $f$ ஆனது $y$ யோடு அதிகரித்தலால் (1), (2) என்னும் சமனிலிகள்

$$f(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}mh)<f(a+\tfrac{1}{2}h, b+j)<f(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}Mh), \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$
$$f(a+h,\ b+mh)<f(a+h,\ b+k)<f(a+h,\ b+Mh) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4);$$

என்பவற்றிற்கு வழிகாட்டும்

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ஆனது மறையாயின்,

$$f(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}mh)>f(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+j)>f(a+\tfrac{1}{2}h,\ b+\tfrac{1}{2}Mh), \quad \ldots\ldots(5)$$
$$f(a+h,\ b+mh)>f(a+h,\ b+k)>f(a+h,\ b+Mh) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ஆயின் $F''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$ ஆனதும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ ஆனதும் நேராயின் பிரிவு 91 இனது $A<k<B$ என்னும் முடிபு $p<k<Q<$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்யப்படலாம் ; இங்கு $p=hf(a+\tfrac{1}{2}h, b+\tfrac{1}{2}mh)$,

$$Q=\tfrac{1}{4}h\{f(a,b)+2f(a+\tfrac{1}{2}h, b+\tfrac{1}{2}Mh)+f(a+h, b+Mh)\};$$

$F''(x)$ நேராகி $\frac{\partial f}{\partial y}$ மறையாயின்,

$$P<k<q\ ; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8);$$

இங்கு
$$P=hf(a+\tfrac{1}{2}h, b+\tfrac{1}{2}Mh),$$
$$q=\tfrac{1}{4}h\{f(a,b)+2f(a+\tfrac{1}{2}h, b+\tfrac{1}{2}mh)+f(a+h,\ b+mh)\}.$$

இதேமாதிரி $F''(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ என்பன இரண்டும் மறையாயின்

$$p>k>Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9);$$

$F''(x)$ மறையாகி $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ நேராயின்

$$P > k > q \qquad\qquad (10)$$

இம்முடிபுகள் ஒவ்வொரு வகையிலும் (இப்பிரிவின் தொடக்கத்திற் கூறிய $f$ பற்றிய எல்லைப்பாடுகளுக்கடங்க) $k$ ஆனது $p, P, q, Q$ என்னும் நாலு எண்களுள் மிகப் பெரியதற்கும் மிகச் சிறியதற்கும் இடையே கிடக்குமெனப் பொழிப்பாகக் கூறப்படலாம்.

$B$ யை $Q$ ஆல் அல்லது $q$ ஆல் இடமாற்றம் செய்து கொண்டும் $A$ என்பதை $p$ ஆல் அல்லது $P$ ஆல் இடமாற்றம் செய்து கொண்டும் $k \doteqdot \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A$ என்பதை ஓர் அண்ணளவுச் சூத்திரமாக வழங்குவோம்.

### 93. ஓர் எண்ணுதாரணத்திற்குப் பிரயோகம்.

ரங்கே, குற்றா ஆகியோரின் முறைகளை எடுத்துக் காட்டுதற்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட உதாரணமாகிய

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}\,;\ x = 0 \text{ ஆகுமிடத்து } y = 1,$$

என்பதை எடுத்துச் சிந்திக்க.

$x$ ஆனது 0.2 என்பதால் அதிகரிக்குமிடத்து $y$ இனது ஏற்றமாகிய $k$ ஐக் காணல் வேண்டும். இங்கு $f(x, y) = (y-x)/(y+x)$. இச்சார்பு ஈற்றுப் பிரிவில் இடப்பட்ட நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும்.

[$f(x, y)$ நேராதலால் $y$ ஆனது 1, 1.2 என்பவற்றிற்கிடையே கிடக்கும். $M$, $m$ என்பவற்றைக் காணுமிடத்து $y$ இற்குக் காணக்கூடிய மிகச் சிறிய வீச்சை எப்போதும் எடுப்போம். ($m<f<M$) என்னும் நிபந்தனைகள் $m \leq f \leq M$ என்பவற்றால் இடமாற்றம் செய்யப்படலாம்; இது சில $<$ என்னுங் குறிகளை $\leq$ என்னுங் குறிகளாலே இடமாற்றம் செய்தல் தவிர இறுதி முடிவைப் பாதிக்காது.]

$M = 1$, $m = (1 - .02)/(1.2 + 0.2) = \frac{4}{7}$ என நாம் எடுப்போம்.

ஆயின்,

$$p = 0.1654321$$
$$P = 0.1666667$$
$$q = 0.1674987$$
$$Q = 0.1690476$$

$k$ ஆனது $p$, $Q$ என்பவற்றிற்கிடையே கிடக்கும்.

| | வழு |
|---|---|
| $\frac{2}{3}Q + \frac{1}{3}p = 0.1678424$ | 0.0000007 |
| குற்றாவின் பெறுமானம் 0.1678449 | 0.0000032 |
| ரங்கேயின் பெறுமானம் 0.1678487 | 0.0000070 |
| கேனின் பெறுமானம் 0.1680250 | 0.0001833 |

இவற்றுள் இரண்டாவதும் மூன்றுவதும் நாலாவதும் குற்றுவால் கணிக்கப்பட்டன. இக்குறிப்பிட்ட உதாரணம்

$$\text{மட}\ (x^2+y^2)-2\ \text{தான்}^{-1}\ (x/y)=0$$

எனத் தருமாறு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடுதற்கு இடங் கொடுக்கும். ஆகவே $k$ இன் செம்மைப் பெறுமானத்தைக் காணலாம்; செம்மைப் பெறுமானம் $=0.1678417$. ஆயின் இவ்வுதாரணத்தில் முடிவு செம்மைப் பெறுமானத்திற்கு மிக்க அண்மையிலுள்ளதாகும். வழுக்கள் மேற்கூறியவாறு.

$h=1$ என்னும் கூடுதலாகப் பெரிதாகும் ஆயிடையை எடுத்தலாலும் இந்த முறையைச் சோதிக்கலாம். ஆனல் முடிவு பெறுதற்குக் கூடுதலாகச் செம்மையாகும் வழி, ரங்கே செய்வது போல், $h=0.2,\ 0.3,\ 0.5$ எனப் பல படிகளை எடுத்தலேயாம்.

எனினும் பெரிய ஆயிடைக்கு முடிபுகள் எவ்வளவு பிழையுடையன எனக் கவனித்தல் கவர்ச்சிக்குரியது.

$$M=1,\ m=\frac{1-1}{2+1}=0 \text{ என எடுப்போம்.}$$

ஆயின், $\frac{2}{3}Q+\frac{1}{3}p=0.50000.$

உண்மைப் பெறுமானம் $=\ 0.49828.$

| | | வழு |
|---|---|---|
| குற்றுவின் பெறுமானம் | $=\ 0.49914$ | 0.00086 |
| எமது பெறுமானம் | $=\ 0.50000$ | 0.00172 |
| கேனின் பெறுமானம் | $=\ 0.51613$ | 0.01785 |
| ரங்கேயின் பெறுமானம் | $=\ 0.52381$ | 0.02553 |

இங்கு குற்றுவின் பெறுமானம் மிக்க அண்மையிலுள்ளதும் எமது பெறுமானம் இரண்டாவதுமாய் உள்ளன.

[$M$, $m$ என்பவற்றைத் துணிதற்கு முறைமையான முறை பற்றியும் பிரிவுகள் 90–93 இன் முறையினது றீமிசின் விரி பற்றியும் பிரிவு 183 ஐப் பார்க்க. (எல்லாவற்றுள்ளும் உத்தமமான) அடம்சின் எண் முறை பற்றி பிரிவு 182 ஐப் பார்க்க.]

# அத்தியாயம் IX

## தொடர்முறைத் தீர்வு ஃபிரோபீனியசின் முறை

**94.** அத்தியாயம் VII இல்

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள பல்வேறு சமன்பாடுகளினது தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளோம் ; இங்கு $P$, $Q$ என்பன $x$ இன் சார்புகள்.

ஒவ்வொரு வகையிலும் தீர்வு

$$y=af(x)+b\,F(x)$$

என்னும் வடிவம் கொண்டுள்ளது ; இங்கு $a$, $b$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகள்.

$f(x)$, $F(x)$ என்னுஞ் சார்புகள் பொதுவாக $(1+2x)\,e^x$, சைன் $x+x$ கோசை $x$, $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, $x+$ மட $x$, $e^{1/x}$ என்பன போன்ற $x$ இன் முழுவெண் வலுக்கள் அல்லது பின்ன வலுக்கள், சைன்கள் அல்லது கோசைன்கள், அடுக்குக் குறிகள், மடக்கைகள் ஆகியவற்றால் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சார்புகளுள் முதலாவதும் இரண்டாவதும் மக்கிளோரினின் தேற்றத்தால் $x$ இன் ஏறு முழுவெண் வலுக்களில் விரிக்கப்படலாம் ; மற்றையவையை அவ்வாறு விரித்தல் முடியாது, ஈற்றுச் சார்பை $1/x$ பற்றியே விரிக்கலாம்.

இவ்வத்தியாயத்தில் பிஃரோபீனியஸ் என்பவரைப் பின்பற்றி, $a$ கள் மாறிலிகளாக,

$$y=x^c\,(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{முடிவிலிக்கு})$$

என்னும் பரீட்சைத் தீர்வு எடுப்போம்.

$c$ என்னுஞ் சுட்டியானது **சுட்டிசார் சமன்பாடு** எனப்படும் ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டாலே துணியப்படும். இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாகலாம், வேறுவேறாகி முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படலாம். வேறு வேறாகி முழுவெண்ணல்லாத கணியத்தால் வித்தியாசப்படலாம். இவ்வகைகள் வேறு வேறாகத் தர்க்கிக்கப்படல் வேண்டும்.

ஃபுரோபீனியஸ் வழங்கிய பரீட்சைத் தீர்வு வடிவத்தின் விசேட நன்மையானது வகையீட்டுச் சமன்பாடு இரண்டாம் வடிவத் தீர்வு கொள்ளுமிடத்து மட $x$ என்பதைக் கொண்ட வேறொரு வடிவத் தீர்வுக்கு அது வழிகாட்டும் என்பதே.

$e^{\frac{1}{x}}$ போன்ற சார்பு $x$ இன் ஏறு வலுக்களில் விரிக்கப்பட முடியாமையால் இவ்வியற்கைத் தீர்வு கொள்ளும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்கு இந்த முறை பயன்படாதென்பதை எதிர்பார்த்தல் வேண்டும். எச்சமன்பாடுகளுக்கு ஃபுரோபீனியசின் வடிவங்கள் (ஒழுங்கான தொகையீடுகள்) கொள்ளும் தீர்வுகள் உண்டு என்பதையும், $x$ இன் எப்பெறுமான வீச்சுக்கு இத்தீர்வுகள் ஒருங்கும் என்பதையும் உடனடியாகத் துணிதற்கு ஒரு முறை சுட்டிக் காட்டப்படும்.

இவ்வத்தியாயத்தின் நோக்கம் உதாரணங்களை எவ்வாறு பரிகரிக்கலாமெனக் காட்டுதலே. வேண்டிய தேற்றங்களின் வழக்கமான நிறுவல்கள் அடுத்த அத்தியாயத்திலே தரப்படும்.

உதாரணங்களுள் பெசல், லசாந்தர், றிக்காற்றி ஆகியோரின் பிரதானமான சமன்பாடுகள் காணப்படும். அன்றியும் அதிபர பெருக்கற் சமன்பாடு அல்லது கவுசுச் சமன்பாடும், அதன் இருபத்து நாலு தீர்வுகளும் சுருக்கமாகத் தரப்படும்.

[ஃபிரிடிறிக் விலெம் பெசல் (1784—1846) என்பவர் கொனிக்ஸ்பேக்கில் வானோக்கு நிலையத் தலைவராயிருந்தார். " பெசலின் சார்புகள் " மூலமாக அவர் நன்குய் அறியப்படுவார்.

அட்றியன் மாறி லசாந்தர் (1752—1833) என்பவர் " வலய இசையங்கள் " அல்லது " லசாந்தரின் குணகங்கள் " மூலமாக நன்குய் அறியப்படுவார். நீள்வளையத் தொகையீடுகள் பற்றியும் எண்கொள்கை பற்றியும் பெருந்தொகை வேலை செய்துள்ளார்.

யக்கோபோ பிரான்செஸ்கோ, கவுண்ட்றிக்காற்றி (1676—1754) என்பவர் " றிக்காற்றியின் சமன்பாடு " பற்றியும் ஒரு தந்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் வரிசையைத் தாழ்த்தல் பற்றியும் எழுதியுள்ளார்.

" பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டின் ஆக்கிமிடீஸ் " ஆகிய காள்ஃபிரிடிறிக் கவுஸ் (1777—1855) என்பவர் எண்கொள்கை, துணிகோவை, முடிவில் தொடர், வழுக்கொள்கை, வானியல், கோளப்பாத்தியல், மின்னியல், காந்தவியல் என்பவற்றை உட்படுத்தும் பெருவீச்சுப் பாடங்களில் புதுமைகளை வெளியாக்கியுள்ளார்.]

**95. வகை I. சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் சமமின்றி முழு வெண்ணல்லாக் கணியத்தால் வித்தியாசப்படும்.**

$$(2x+x^3)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6xy=0 \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுத்துச் சிந்திக்க.

$a_0\neq 0$ ஆக, $z=x^c(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots$ என), இடுவோமாயின்

$$\frac{dz}{dx}=a_0cx^{c-1}+a_1(c+1)x^{c}+a_2(c+2)x^{c+1}+\dots\dots,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=a_0c(c-1)x^{c-2}+a_1(c+1)cx^{-1}+a_2(c+2)(c+1)x^{c}+\dots\dots$$

என்பன பெறப்படும்.

[$x$ இன் ஏறுவலுக்களிலுள்ள தொடரை ஒருங்கற் பிரதேசத்தில் இவ்வாறு உறுப்புறுப்பாக வகையிடல் முறைமையாகும். பிரோமிச், " முடிவில் தொடர் " பிரிவு 52 ஐப் பார்க்க.]

(I) இல் $y=z$ எனப் பிரதியிட்டுக்கொண்டு $x$ இனது பின்னடும் வலுக்களின் குணகங்களைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

$x$ இன் மிகத் தாழ்ந்த வலு $x^{c-1}$ ஆகும். அதன் குணகத்தைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துதலினால்,

$$a_0\{2c(c-1)-c\}=0,$$

அதாவது $$c(2c-3)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$a_0 \neq 0$ ஆதலால்.

(2) என்பது **சுட்டிசார் சமன்பாடு** எனப்படும்.

$x^c$ இன் குணகத்தைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துதலினால்,

$$a_1\{2(c+1)c-(c+1)\}=0 \text{ அதாவது } a_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

கூடுதலாக உறுப்புக்களைக் கொள்ளும் $x^{c+1}$ இன் குணகம் தருவது

$$a_2\{2(c+2)(c+1)-(c+2)\}+a_0\{c(c-1)-6\}=0,$$

அதாவது $$a_2(c+2)(2c+1)+a_0(c+2)(c-3)=0,$$

அதாவது $$a_2(2c+1)+a_0(c-3)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

இதேமாதிரி $$a_3(2c+3)+a_1(c-2)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

$$a_4(2c+5)+a_2(c-1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6);$$

வேறும் இவ்வாறே.

(3), (5), ................ ஆகியவற்றிலிருந்து

$$0=a_1=a_3=a_5= \ \ldots\ldots \ =a_{2n+1}.$$

(4), (6), ................ ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{a_2}{a_0}=-\frac{c-3}{2c+1}, \ \frac{a_4}{a_2}=-\frac{c-1}{2c+5},$$

$$\frac{a_6}{a_4}=-\frac{c+1}{2c+9}, \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}=-\frac{c+2n-5}{2c+4n-3}$$

ஆனால் (2) இலிருந்து $c=0$ அல்லது $\frac{3}{2}$.

ஆயின், $c=0$ ஆகுமிடத்து

$$z=a\{1+3x^2+\frac{3}{5}x^4-\frac{1}{15}x^6+\frac{1}{65}x^8\ldots\}=au, \text{என்க} \ ;$$

இங்கு $a_0$ என்பது $a$ ஆல் இடமாற்றஞ் செய்யப்பட்டுள்ளது.

$c=\frac{3}{2}$ ஆகுமிடத்து

$$z=bx^{3/2}\{1+\frac{3}{8}x^2-\frac{1.3}{8.16}x^4+\frac{1.3.5}{8.16.24}x^6-\frac{1.3.5.9}{8.16.24.3}x^8\ldots\}$$

$=bv$, என்க ; எதேச்சையாகும் $a_0$ என்பது இங்கு $b$ ஆல் இடமாற்றஞ் செய்யப்படும். ஆயின் $y=au+bv$ என்பது ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும் ஒரு தீர்வு ஆதலால் அது முற்றிய மூலியாக எடுக்கப்படலாம்.

பொதுவாக, சுட்டிசார் சமன்பாடு ஒரு முழுவெண்ணல்லாக் கணியத்தால் வித்தியாசப்படாத $\alpha.\beta$ என்னும் சமனில்லா மூலங்கள் உடையதாயின் $c$ இன் இப்பெறுமானங்களை $z$ பற்றிய தொடரில் பிரதியிடுதலால் இரு சாராத் தீர்வுகளைப் பெறுவோம்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $4x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=0.$

(2) $2x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\dfrac{dy}{dx}+3y=0$

(3) $9x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-12\dfrac{dy}{dx}+4y=0.$

(4) $2n$ முழுவெண்ணாகாதிருக்க

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

## 96. ஈற்றுப் பிரிவில் பெறப்பட்டுள்ள தொடரின் ஒருங்கல்

உயர் அட்சரகணிதம் அல்லது பகுப்புப் பற்றிய ஏறக்குறைய ஒவ்வொரு நூலிலும்

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left|\frac{Un^{+1}}{Un}\right|\angle.1$$

ஆயின் $u_1+u_2+u_3+$ ………… என்னும் முடிவில் தொடர் ஒருங்குமென்பது நிறுவப்பட்டுள்ளது.

இங்கு பெற்றுள்ள தொடரில்

$$U_n=a_{2n-2}x^{c+2n-2}\text{ , அதாவது}$$

$$\frac{Un_{n+1}}{U_n}=\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}x^2=-\frac{c+2n-5}{2c+4n-3}x^2\ ;$$

$n\to\infty$ ஆகுமிடத்து இதன் எல்லை $c$ இன் பெறுமானத்தைச் சாராத $-\frac{1}{2}x^2$ ஆகும்.

ஆகவே $|x|\angle\sqrt{2}$ ஆகுமிடத்து, பெறப்பட்டுள்ள இரு தொடர்களும் ஒருங்கும்.

இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xp(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கப்படுமாயின்

$-\dfrac{1}{2+x^2}$ ஆகிய $p(x)$ என்பதும்

$\dfrac{-6x^2}{2+x^2}$ ஆகிய $q(x)$ என்பதும் $|x|\angle\sqrt{_2}$ ஆகுமாறுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒருங்கு வலுத்தொடராக விரிக்கத்தகும் என்பதைக் கவனித்தல் கவர்ச்சிக்குரியது.

அதாவது, இவ்வுதாரணத்தில் ஒருங்கற் பிரதேசமானது $p(x)$, $q(x)$ என்பன ஒருங்கு வலுத்தொடராக விரிக்கத்தகும் பிரதேசத்தோடு சர்வ சமனாகும். இத்தேற்றம் பொதுவாக உண்மையாகுமென்பதை அத்தியாயம் X இல் காட்டுவோம்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

*ஈற்றுப் பயிற்சித் தொடையின் தீர்வுகளுக்கு ஒருங்கற் பிரதேசம் காண்க. ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒருங்கற் பிரதேசம் $p(x)$, $q(x)$ என்பன ஒருங்கு வலுத்தொடராக விரிக்கத்தகும் பிரதேசத்தோடு சர்வசமனாகுமென்பதைச் சரிபிழை பார்க்க.*

*தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்*

### 97. வகை II. சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் சமமாகும்.

$$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-5x)\frac{dy}{dx}-4y=0.$$

என்னும் சமன்பாட்டை எடுத்துச் சிந்திக்க.

$$z=x^c(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.)$$

என இட்டுக்கொண்டு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட்ட பின்னர் பிரிவு 95 இல் உள்ளதுபோல் $x$ இன் பின்னடும் வலுக்களின் குணகங்களைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக. அப்பொழுது,

$$a_0\{c(c-1)+c\}=0$$

அதாவது $$c^2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$a_1\{(c+1)c+c+1\}-a_0\{c(c-1)+5c+4\}=0,$$

அதாவது $$a_1(c+1)^2-a_0(c+2)^2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$a_2(c+2)^2-a_1(c+3)^2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$a_3(c+3)^2-a_2(c+4)^2=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

வேறும் இவ்வாறே.

ஆகவே, $c=0$ ஆயின்

$$z=a_0\,x^c\{1+\left(\frac{c+2}{c+1}\right)^2x+\left(\frac{c+3}{c+1}\right)^2x^2+\left(\frac{c+4}{c+1}\right)^2x^3+\ldots.\}$$

என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

இது ஒரு தொடரையே தரும்.

ஆனால் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் இடக்கைப்பக்கத்தில் தொடரை ($c=0$ என இடாமல்) பிரதியிடுவோமாயின் $a_0c^2x^{c-1}$ என்னும் ஒன்றி உறுப்பைப் பெறுவோம். இது $c$ இன் வர்க்கத்தைக் கொள்ளலால் $c$ குறித்து இதன் பகுதி வகையீட்டுக் குணகமாகிய $2a_0cx^{c-1}+a_0c^2x^{c-1}$ மட $x$ என்பதும் $c=0$ ஆகுமிடத்து மறையும்.

அதாவது

$$\frac{\partial}{\partial c}\left[(x-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-5x)\frac{d}{dx}-4\right]z=2a_0cx^{c-1}+a_0c^2x^{c-1}\text{ மட }x.$$

வகையீட்டுச் செயலிகள் பரிவர்த்தனைக்கு உரியனவாதலால், இது

$$\left[(x-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+(1-5x)\frac{d}{dx}-4\right]\frac{\partial z}{\partial c}=2\,a_0cx^{c-1}+a_0c^2x^{c-1}\quad\text{மட }x$$

என எழுதப்படலாம்.

ஆகவே $\frac{\partial z}{\partial c}$ ஆனது, வகையிடலுக்குப் பின்னர் $c$ ஆனது பூச்சியத்திற்குச் சமமென இடப்படுமிடத்து, வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது இரண்டாம் தீர்வு ஆகும்.

வகையிட,

$$\frac{\partial z}{\partial c}=z\text{ மட }x+a_0x^c\left\{2\left(\frac{c+2}{c+1}\right).\frac{-1}{(c+1)^2}x+2\left(\frac{c+3}{c+1}\right).\frac{-2}{(c+1)^2}x^2\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{c+4}{c+1}\right).\frac{-3}{(c+1)^2}x^3+\ldots.\right\}.$$

$c=0$ எனவும் இரு தொடர்களிலும் முறையே $a_0=a,\ b$ எனவும் இட,

$$z=a(1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+5^2x^4+\ \ldots.)=au\qquad\text{என்க,}$$

$$\frac{\partial z}{\partial c}=bu\text{ மட }x-2b(1.2x+2.3x^2+3.4x^3+\ldots.)=bv\text{ என்க.}$$

முற்றிய மூலி $au+bv$ ஆகும்.

பொதுவாக, சுட்டிச்சார் சமன்பாட்டுக்கு $c=\alpha$ என்னும் இரு சம மூலங்கள் உண்டெனின் $c$ இனது இப்பெறுமானத்தை $z$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ என்பனவற்றிற் பிரதியிடலால் இரு சாராத் தீர்வுகளைப் பெறுவோம். இரண்டாம் தீர்வு முதல் தீர்வினதும் (அல்லது அதன் ஓர் எண் மடங்கினதும்) மட $x$ இனதும் பெருக்கத்தை வேறொரு தொடருக்குச் சேர்த்தலால் ஆக்கப்படும்.

குறிப்பிட்ட உதாரணத்தை மீள நோக்குமிடத்து பிரிவு 96 இல் உள்ளது போல் $p\ (x)$, $q\ (x)$ என்பன பற்றிய சிந்தனை காட்டுவது $|x|<|$ ஆயின் தொடர்கள் ஒருங்குமென்பதே. இது திருத்தமாகுமென்பதை எளிதிற் காட்டலாம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(x - x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} + (1 - x) \dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

(2) பெசலின் பூச்சிய வரிசைச் சமன்பாடாகிய $x \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0.$

(3) $x \dfrac{d^2y}{dx^2} + (1 + x) \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$

(4) $4 (x^4 - x^3) \dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x^3 \dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

**98. வகை III. $z$ இன் குணகத்தை முடிவில்லாததாக்குமாறு சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் ஒரு முழுவெண்ணுல் வித்தியாசப்படும்.**

பெசலின் முதல் வரிசைச் சமன்பாடாகிய

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1) y = 0$$

என்பதை எடுத்துச் சிந்திக்க.

பிரிவு 95 இல் உள்ளது போல் தொடர்ந்து செய்ய

$$a_0 \{ c(c-1) + c - 1 \} = 0,$$

$$\text{அதாவது } c^2 - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$a_1 \{ (c+1)^2 - 1 \} = 0,$$

$$\text{அதாவது } a_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$a_2 \{ (c+2)^2 - 1 \} + a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$a_n \{ (c+n)^2 - 1 \} + a_{n-2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

இவை தருவது

$$z = a_0 x^c \left\{ 1 - \frac{1}{(c+1)(c+3)} x^2 + \frac{1}{(c+1)(c+3)^2(c+5)} x^4 - \frac{1}{(c+1)(c+3)^2(c+5)^2(c+7)} x^6 + \ldots \right\}.$$

(1) என்னும் சுட்டிசார் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $c = 1$ அல்லது $-1$. ஆனுல் இத்தொடரில் $c = -1$ என இடுவோமாயின் பகுதியில் $c+1$ என்னுங் காரணியிருத்தலால் குணகங்கள் முடிவில்லாதனவாகும்.

இவ்வில்லங்கத்தைத் தீர்ப்பதற்கு $a_0$ இற்குப் பதிலாக $(c+1)\ k$ யை எழுதுவோம் $k \neq 0$ ; இது தருவன

$$z = kx^c \left\{ (c+1) - \frac{1}{c+3} x^2 + \frac{1}{(c+3)^2(c+5)} x^4 - \frac{1}{(c+3)^2(c+5)^2(c+7)} x^6 + \ldots \right\} \quad . (5),$$

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} + (x^2 - 1) z = kx^c (c+1)(c^2 - 1) = kx^c (c+1)^2 (c-1).$$

வகை II இல் உள்ளது போல் அதே மாதிரி $(c+1)^2$ என்னும் வர்க்கித்த காரணியினது நிகழுகை காட்டுவது $z$ மட்டுமல்ல $\dfrac{\partial z}{\partial c}$ என்பதும் $c=-1$ ஆகுமிடத்து வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்குமென்பதே. அன்றியும் $z$ இல் $c=1$ என இடுதலும் ஒரு தீர்**வு** தரும். ஆகவே தோற்றமாக இரண்டாம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளோம்.

அவற்றைச் செய்யுமிடத்து முறையே பெறுவன

$$kx^{-1}\left\{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^2.4}x^4-\frac{1}{2^2.4^2.6}x^6+\dots\right\}=ku, \text{ எனக,}$$

$$ku\,\text{மட}\,x+kx^{-1}\left\{1+\frac{1}{2^2}x^2-\frac{1}{2^2.4}\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)x^4+\frac{1}{2^2.4^2.6}\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)x^6+\dots\right\}=kv, \text{ எனக,}$$

$$kx\left\{2-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4^2.6}x^4-\frac{1}{4^2.6^2.8}x^6+\dots\right\}=kw, \text{ எனக.}$$

$w=-4u$ என்பது கண்கூடாதலால் ஏகபரிமாணமுறையாய்ச் சாராத இரு தீர்வுகள் மட்டுமே கண்டுள்ளோம்; முற்றிய மூலி $au+bv$ ஆகும். தொடர்கள் $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒருங்குமென்பது எளிதில் நிறுவப்படலாம்.

$z$ பற்றிய கோவையில் முறையே $c=-1$, $c=1$ எனப் பிரதியிடலால் (ஓர் மாறு மடங்கைத் தவிர்த்து) பெறப்படும் சர்வசமன் தற்செயலானதல்ல. அது (4) என்னுந் தொடர்பாகிய

$$a_n\{(c+n)^2-1\}+a_{n-2}=0$$

என்பதிலிருந்து உடனடியாகப் புலனாகும்.

$c=1$ ஆயின், இது தருவது $a_n\{(1+n)^2-1\}+a_{n-2}=0 \dots\dots\dots(6).$

$c=-1$ ஆயின், $a_n\{(-1+n)^2-1\}+a_{n-2}=0$ ;

ஆகவே $n$ இற்குப் பதிலாக $n+2$ எழுத

$$a_{n+2}\{(1+n)^2-1\}+a_n=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(7).$$

ஆகவே $$\left[\frac{a_{n+2}}{a_n}\right]_{c=-1}=\left[\frac{a_n}{a_{n-2}}\right]_{c=1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(8).$$

அடைப்புக்குப் புறத்தே $[z]_{c=-1}$ என்பது $x^{-1}$ என்னுங் காரணியும் $[z]_{c=1}$ என்பது $x$ என்னுங் காரணியும் கொள்வதால் (8) என்னுந் தொடர்பினது உண்மைப் பொருள் இரு தொடர்களிலும் $x$ இன் ஒத்த வலுக்களின் குணகங்கள் மாறு விகிதத்தில் உள்ளன என்பதே. முதல்

தொடர் தோற்றமாக $x^{-1}$ என்பதைக் கொள்ளும் ஒரு மேலதிகமான உறுப்பைக் கொள்ளும், ஆனால் $(c+1)$ என்பது காரணியாகுங் காரணத்தால் இது மறையும்.

பொதுவாக, சுட்டிசார் சமன்பாடு முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படும் $\alpha$, $\beta$ ($\alpha>\beta$ என்க) என்னும் இரு மூலங்கள் உடையதாயினும் $c=\beta$ ஆகுமிடத்து $z$ இன் சில குணகங்கள் முடிவில்லாதனவாயினும் $a_0$ இற்குப் பதிலாக $k(c-\beta)$ என எழுதுதலால் $z$ இன் வடிவத்தில் திரிவு செய்வோம். $z$ இனது திரிந்த வடிவத்திலும் $\dfrac{\partial z}{\partial c}$ இலும் $c=\beta$ என இடுதலால் இரு சாராத் தீர்வுகளைப் பெறுவோம். $z$ இல் $c=\alpha$ என இடுதலாற் பெறப்படும் முடிபு $c=\beta$ என இடுதலாற் பெறப்படும் முடிபின் ஓர் எண்மடங்கை மட்டுமே தரும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) பெசலின் இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடாகிய

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-4)\,y=0.$$

(2) $x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

(3) $x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-(1+3x)\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

(4) $(x+x^2+x^3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x^2\dfrac{dy}{dx}-2y=0.$

**99. வகை IV $z$ இனது ஒரு குணகம் தேராததாகுமாறு சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் ஒரு முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படும்.**

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+y=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

வழக்கம்போல் தொடர்ந்து செய்ய

$$c(c-1)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_1(c+1)c=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a_2(c+2)(c+1)+a_0\{-c(c-1)+2c+1\}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$a_3(c+3)(c+2)+a_1\{-(c+1)c+2(c+1)+1\}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

வேறும் இவ்வாறே.

(1) தருவது $c=0$ அல்லது 1.

(2) இல் $a_1$ இன் குணகம் $c=0$ ஆகுமிடத்து மறையும் ;

சமன்பாட்டில் வேறு உறுப்பு இல்லாமையால் $a_1$ ஆனது **முடிவில்லாதது** ஆதற்குப் பதிலாக **தேராததாகும்.**

$c=1$ ஆயின் $a_1=0$.

ஆயின் $c=0$ ஆகுமிடத்து (3), (4), ...... என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$2a_2+a_0=0,$$
$$6a_3+3a_1=0,$$
$$12a_4+3a_2=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots:$$
$$\dots\dots\dots\dots;$$

ஆகவே, $$[z]_{c=0}=a_0\left\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{80}x^6\dots\right\}$$
$$+a_1\left\{x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{40}x^5+\frac{3}{560}x^7+\dots\right\}.$$

இது ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளுதலால் இது முற்றிய மூலியாக எடுக்கப்படலாம். $|x|<|$ ஆயின் இத்தொடர் ஒருங்குமென்பது நிறுவப்படலாம்.

ஆனால் $c=1$ என்பதாலே தரப்படும் மற்றைத் தீர்வும் உண்டு. குணகங்களைக் கணித்து,

$$[z]_{c-1}=a_0x\left\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{40}x^4+\frac{3}{560}x^6\dots\right\};$$

இது முதல் தீர்விலுள்ள இரண்டாம் தொடரின் மாரு மடங்கு.

வகை III இல் உள்ளது போன்ற நியாய முறையிலிருந்து இது முன்னறியப்படும்.

பொதுவாக, சுட்டிசார் சமன்பாடு ஒரு முழுவெண்ணல் வித்தியாசப்படும் $\alpha$, $\beta$ $(\alpha>\beta)$ என்னும் மூலங்கள் உடையதாயினும் $z$ இனது குணகங்கள் ஒன்று $c=\beta$ ஆகுமிடத்து தேராததாயினும் முற்றிய மூலி $z$ இல் $c=\beta$ என இடுதலாற் பெறப்படும் ; இது ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும். $z$ இல் $c=\alpha$ என இடுதல் முதலாம் தீர்வுகொண்ட தொடர் ஒன்றின் எண்மடங்கையே தரும்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

(1) லசாந்தரின் முதலாம் வரிசைச் சமன்பாடாகிய

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

(2) லசாந்தரின் $n$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாடாகிய

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n\,(n+1)\,y=0.$$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+x^2y=0$. (4) $(2+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(1+x)\,y=0$.

## 100 இந்த முறை பயன்படாத சில வகைகள்.

$e^{\frac{1}{x}}$ ஆனது $x$ இன் ஏறு வலுக்களில் விரிக்கப்படாமையால் வகையீட்டுச் சமன்பாடு இத்தகைத் தீர்வு கொள்ளுமிடத்து இந்த முறை எந்த வழியிலும் பயன்படாது என்பதை எதிர்பார்த்தல் வேண்டும். ஓர் உதாரணம் அமைத்தற்கு $e^z$, $e^{-z}$ என்பன தீர்வுகளாகும் $\dfrac{d^2y}{dz^2} - y = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுத்து $z = \dfrac{1}{x}$ என இடுதலால் அதனை உருமாற்றுக.

அப்பொழுது $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{dx}{dz} \cdot \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dy}{dx} = -x^2\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{dx}{dz}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) = -x^2\frac{d}{dx}\left(-x^2\frac{dy}{dx}\right) = x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx}.$$

ஆகவே புதிய சமன்பாடு $x^4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ ஆகும்.

வழக்கமான முறையைப் பிரயோகிக்க முயல்வோமாயின் $-a_0 = 0$ என்னுஞ் சுட்டிசார் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம் ; கருதுகோளின்படி $a_0 \neq 0$ ஆதலால் இதற்கு மூலங்களில்லை (அல்லது இரு முடிவில்லா மூலங்கள் உண்டு எனக் கூறலாம்).

இத்தகை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இன் ஏறு வலுக்களில் ஒழுங்கான தொகையீடு யாதுமில்லை எனப்படும். ஆனால் $e^{\frac{1}{x}}$, $e^{-\frac{1}{x}}$ என்பன $\dfrac{1}{x}$ இன் வலுக்களில் விரிக்கப்படலாம்.

பின்வரும் உதாரணங்கள் சுட்டிசார் சமன்பாடு ஒருங்குதொடர் தருவதாகவோ தராததாகவோ ஒரு மூலமே கொள்ளுதல் போன்ற வேறு நேர்தகவுகளை எடுத்துக்காட்டும்.

சமன்பாடு $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + xp(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படுமாயின் இந்த முறை பயன்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு வகையினும் $x = 0$ ஆகுமிடத்து $p(x)$, $q(x)$ என்பன முடிவுள்ளன என்பதும் ஆனால் பயன்படா வகைகள் எல்லாவற்றிலும் இந்நிபந்தனை திருத்தியாகாது என்பதும் கவனிக்கப்படும்.

உதாரணமாக, மேலுள்ள உதாரணத்தில்

$$p\,(x) = 2,$$

$$q\,(x) = -\frac{1}{x^2}\,,\ \text{(இது } x = 0 \text{ ஆயின் முடிவில்லாதது)}$$

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

(1) பெசலின் சமன்பாட்டை $x=\frac{1}{z}$ என்னும் பிரதியீட்டால் உருமாற்றுக. அது துணை கொண்டு $x$ இன் இறங்கு வலுக்களில் ஒழுங்கானதாகும் யாது தொகையீடுமில்லையெனக் காட்டுக.

(2) பின்வரும் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இன் ஏறு வலுக்களில் ஒழுங்கானதாகும் தொகையீடு ஒன்றே உண்டு என்பதைக் காட்டி அதனைத் துணிக :

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}+x\,(1-2x)\,\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

(3) $y=vx^2(1+2x)$ என இட்டுக் கொண்டு முன்னுள்ள பயிற்சியில் முற்றிய மூலியைத் துணிக.

(4) பின்வரும் சமன்பாட்டுக்குப் பெறப்படும் ஒரே தொடர் $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் விரிதலால் $x$ இன் ஏறு வலுக்களில் ஒழுங்கானதாகும் தொகையீடு யாதுமில்லையெனக் காட்டுக :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-(1-3x)\frac{dy}{dx}+y=0.$$

(5) ஈற்றுப் பயிற்சியில் $x$ இனது இறங்கு வலுக்களில் ஒழுங்கானவையான இரு தொகையீடுகளைப் பெறுக.

(6) பின்வரும் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இனது ஏறு வலுக்களிலோ இறங்கு வலுக்களிலோ ஒழுங்கானதாகும் தொகையீடு யாதுமில்லையெனக் காட்டுக :

$$x^4(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-(1-x^2)^3y=0.$$

[இது $ae^{x+x^{-1}}+be^{-x-x^{-1}}$ என்னும் மூலியுள்ள சமன்பாடு.]

## அத்தியாயம் IX இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1)
$$9x^2\frac{d^3y}{dx^3}+27x\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}-y=0$$

என்பதன் மூன்று சாராத் தீர்வுகளைப் பெறுக.

(2)
$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+3x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0.$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டினது மூன்று சாராத் தீர்வுகள் $z$, ஐயும், $\frac{\partial z}{\partial c}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial c^2}$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

(3)
$$y=\frac{1}{bv}\frac{dv}{dx} \text{ என்னும் உருமாற்றம்}$$

$$\frac{dy}{dx}+by^2=cx^m$$

என்னும் றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டை

$$\frac{d^2v}{dx^2}-bcvx^m=0$$

என்னும் ஏகபரிமாண வடிவத்திற்கு ஒடுக்குமெனக் காட்டுக.

(4) $\gamma$ ஆனது பூச்சியமோ முழுவெண்ணோ ஆகாதாயின்,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

என்னும் அதிபர பெருக்கற் சமன்பாட்டுக்கு

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x),\ x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$$

என்னும் ($|x|<-1$ ஆயின் ஒருங்கும்) தீர்வுகள் உண்டு என்பதைக் காட்டுக ; இங்கு $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ என்பது

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma\ (\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\cdots$$

என்னும் அதிபர பெருக்கற்றொடரைக் குறிக்கும்.

(5) $x=1-z,\ x=1/z$ என்னும் பிரதியீடுகள் அதிபர பெருக்கற் சமன்பாட்டை முறையே

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\{\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0,$$

$$z^2(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+z\{(1-\alpha-\beta)-(2-\gamma)z\}\frac{dy}{dz}+\alpha\beta y=0.$$

என்பவற்றிற்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக ; இவற்றுள் முதலாவதும் அதிபர பெருக்கல் வடிவமாகும்.

அது துணை கொண்டு ஈற்றுப் பயிற்சியிலிருந்து தொடக்கச் சமன்பாட்டுக்குப் பின்வரும் நாலு கூடுதலான தீர்வுகள் உண்டு என்பதை உய்த்தறிக :

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x),$$

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,1+\gamma-\alpha-\beta,1-x),$$

$$x^{-\alpha}F(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,x^{-1}),$$

$$x^{-\beta}F(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,x^{-1}).$$

(6) $n=\gamma-\alpha-\beta$ ஆயின், $y=(1-x)^n\,\gamma$ என்னும் பிரதியீடு அதிபர பெருக்கற் சமன்பாட்டை வேறோர் அதிபர பெருக்கற் சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக.

அது துணை கொண்டு தொடக்கச் சமன்பாட்டுக்குப் பின்வரும் இரு கூடுதலான தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டுக :

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x),$$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x).$$

[**குறிப்பு.**—அதிபர பெருக்கற் சமன்பாட்டினது இரு தொடக்கத் தீர்வுகளிலிருந்து. $x=1-z$, $x=1/z$ என்னும் உருமாற்றங்கள் ஒவ்வொன்றாலும் இரண்டு மற்றைத் தீர்வுகள் எவ்வாறு உய்த்தறியப்படலாமெனப் பயிற்சி 5 காட்டியுள்ளது. இதே மாதிரி $x=\frac{1}{1-z}, x=\frac{z}{z-1}, x=\frac{z-1}{z}$ என்னும் உருமாற்றங்கள் ஒவ்வொன்றும் இரண்டு தீர்வுகள் கூடுதலாகத் தர மொத்தத் தீர்வுகள் பன்னிரண்டாகும். பயிற்சி 6 இற் காட்டியது போல் தொடர்ந்து செய்யத் தொகை இரட்டிக்கப்பட்டு மொத்தத் தொகை **இருபத்து நாலு** ஆகும். இந்த ஐந்து உருமாற்றங்களும் $x=z$ என்னும் **சர்வசம உருமாற்றமும்** ஒருங்கு சேர்ந்து ஒரு **கூட்டம்** ஆக்குமெனப்படும் ; அதாவது அத்தகை உருமாற்றங்களுள் இரண்டைப் பின்னடுத்துச் செய்தலால் என்றும் தொடக்கத் தொடையிலுள்ள உருமாற்றமொன்றைப் பெறுவோம்.]

(7) $2n$ ஆனது ஓர் ஒற்றை (நேரோ, மறையோ) முழுவெண்ணாலன்றி

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n-f1)y=0.$$

என்னும் லசாந்தரின் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இன் இறங்கு வலுக்களில் ஒழுங்கானவையாகும்.

$$x^{-n-1}F(\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}n+1, n+\tfrac{3}{2}, x^{-2}),$$

$$x^nF(-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}-n, x^{-2})$$

என்னும் தீர்வுகள் உண்டு எனக் காட்டுக.

{$2n=-1$ என்னும் வகைக்குத் தீர்வு பிரிவு 97 ஐப் பின் தொடர்ந்து வரும் பயிற்சி 4 இன் முடிபில் $x$ என்பதை $x^{-1}$ இற்கு மாற்றலாற் பெறப்படும்.]

(8) பெசலின் $n$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம், சுட்டிசார் சமன்பாட்டின் தீர்வு வடிவம், சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்களின் வித்தியாசம் $n$ அல்லது $2n$ ஆகிய போதிலும், $n$ ஆனது பூச்சியமோ முழுவெண்ணோ முழுவெண்ணல்லவோ என்பதைச் சாருமெனக் காட்டுக.

# அத்தியாயம் X

## பிக்காட், கோசி, ஃபுரோபீனியஸ் ஆகியோரின் உண்மைத் தேற்றங்கள்

*[ஓகஸ்றின் லூயி கோசி என்பவர் (1789—1857) சார்புக் கொள்கையினதும் தற்கால வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கையினதும் ஆக்கியோனாகக் கருதப்படலாம். உருவரைத் தொகையிடலால் வரையறுத்த தொகையீடுகளைத் துணியும் முறையை அவர் ஏற்படுத்தினார்.]*

### 101. பிரசின இயல்பு

**101.** முன்னுள்ள அத்தியாயங்களில் சில விசேட வடிவங்களிலுள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைப் பெறுதற்குப் பல உபாயங்களைப் படித்துள்ளோம். ஒரு காலத்தில் கணிதவறிஞர் யாதுமொரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வை ஒரு முடிவுள்ள தொகைச் சார்புகள் அல்லது அவற்றின் தொகையீடுகள் பற்றி உணர்த்தற்குரிய முறையொன்றைத் தம்மால் வெளியாக்கல் கூடுமென்னும் நம்பிக்கை கொண்டிருந்தனர். இது அசாத்தியமென மெய்ப்பிக்கப்பட்டபோது ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்குப் பொதுவாக ஒரு தீர்வு உண்டா, அவ்வாறு உண்டெனின் அது எவ்வினமானது என்னும் வினா எழுந்தது.

இவ்வினாவைப் பற்றிச் சிந்தித்தற்கு இரு வேறுவேறான முறைகள் உண்டு. பிக்காட் என்பவராலாய ஒரு முறை உதாரணங்களால் (பிரிவுகள் 83, 84) ஏற்கெனவே எடுத்துக்காட்டப்பட்டுள்ளது. ஓர் எல்லையைத் தோற்றமாக நாடும் பின்னடும் அண்ணளவாக்கங்கள் பெற்றுள்ளோம். இவ்வண்ணளவாக்கங்கள் உண்மையில் ஓர் எல்லையை நாடுமெனவும் இவ்வெல்லை தீர்வு தருமெனவும் இப்போது நிறுவுவோம். ஆயின் ஏறக்குறையப் பொதுவாகும் வகையிலுள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது தீர்வின் உண்மையை நிறுவுவோம். இவ்வினத் தேற்றம் ஓர் **உண்மைத் தேற்றம்** எனப்படும். பிக்காட்டின் முறை கடினமற்றதாதலால் இரண்டாவது முறையைப் பற்றி யாதுங் கூறுதற்கு முன் இதற்கு உடனடியாகச் செல்வோம், இவ்வத்தியாயத்தின் நோக்கம் குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகளுக்குச் செய்முறையிற் பயன்படும் தீர்வுகளைப் பெறுதலல்ல என்பதை மனதில் வைத்தலேயாம். இப்போது எமது குறிக்கோள் இத்தீர்வுகளைப் பெறுதற்கு ஆக்கப்பட்டுள்ள எடுகோள்கள் திருத்தமென நிறுவுதலும், முன்னர் எடுத்தாளப்பட்டவை போன்ற, ஆனால் இயன்றவரை பொதுமைப்படுத்திய சமன்பாடுகளில் திருத்தத்தை நிச்சயப்படுத்தற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளைச் செப்பமாகக் கூறுதலுமே.

**102. பிக்காட்டின் பின்னடும் அண்ணளவாக்க முறை.** $\frac{dy}{dx} = f\ (x,\ y)$ ஆகி $x=a$ ஆகுமிடத்து $y=b$ ஆயின், $x$ இன் சார்பாகும். $y$ இன் பெறுமானத்திற்குப் பின்னடும் அண்ணளவாக்கங்கள் ஆவன

$$b+\int_a^x f\ (x,b)\ \ dx=y_1, \quad \text{எண்க,}$$

$$b+\int_a^x f\ (x,y_1)\ dx=y_2, \quad \text{எண்க,}$$

$$b+\int_a^x f\ (x,y_2)\ dx=y_3, \quad \text{எண்க,}$$

..............................

..............................

ஏற்கெனவே (பிரிவுகள் 83, 84) உதாரணங்கள் பற்றி இம் முறையின் பிரயோகத்தை விளக்கியுள்ளோம். $f(x, y)=x+y^2, b=a=0$ என்னும் வகையை எடுத்து

$$y_1=\tfrac{1}{2}x^2,$$
$$y_2=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{20}x^5,$$
$$y_3=\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{20}x^5+\tfrac{1}{160}x^8+\tfrac{1}{4400}x^{11}$$

எனக் கண்டுள்ளோம்.

இச்சார்புகள் $x$ இன் போதிய அளவு சிறிய பெறுமானங்களுக்காதல் ஓர் எல்லையை நாடுமென்பது வெள்ளிடை. இப்பிரிவின் நோக்கம், இந்தக் குறிப்பிட்ட உதாரணத்தில் மட்டுமல்ல, $f\ (x,y)$ ஆனது குறித்த சில நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும் ஒவ்வொரு பொழுதும் இது உண்மையாகுமென்பதை நிறுவுதலேயாம்.

இந்நிபந்தனைகளாவன $h,\ k$ என்னும் நேர் எண்களின் தகுதியான தேர்வின்பின் $a-h,\ a+h$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள், எல்லாவற்றிற்கும் $b-k,\ b+k$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள $y$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $M,\ A$ என்னும் நேர் எண்கள்,

(i) $|f(x,y)| < M$ ஆகுமாறும்

(ii) எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும் வீச்சில் $y,\ y'$ என்பன $y$ இன் எவையேனும் இரு பெறுமானங்களாக, $|f(x,y)-f(x,y')|<A|y-y'|$ ஆகுமாறும்; காணலாம் என்பதை வற்புறுத்தலேயாம்.

$f(x,y)=x+y^2$ என்னும் உதாரணத்தில், $M$ என்பதை $|a|+h+\{|b|+k\}^2$ என்பதிலும் பெரிதாகும் யாதுமோர் நேர் எண்ணாக எடுக்குமிடத்து, நிபந்தனை (1) கண்கூடாகத் திருத்தியாக்கப்படும்.

அன்றியும் $|(x+y^2)-(x+y'^2)|=|y+y'||y-y'|<2(|b|+k)|y-y'|$ ஆதலால், $A=2\ (|b|+k)$ ஆகுமிடத்து (ii) என்னும் நிபந்தனையும் திருத்தியாக்கப்படும்.

பொது வகைக்கு மீளச் சென்று பின்னடும் அண்ணளவாக்கங்களின் வித்தியாசங்களை எடுத்துச் சிந்திப்போம்.

வரைவிலக்கணத்தின்படி $$y_1 - b = \int_a^x f(x,b)dx,$$

ஆனால் (i) ஆம் நிபந்தனையால் $$|f(x,b) < M\,;$$

ஆகவே $$|y_1 - b| < \left| \int_a^x M dx \right| \text{அ-து} < M|x-a| < Mh \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

அன்றியும் வரைவிலக்கணத்தின்படி,

$$y_2 - y_1 = b + \int_a^x f(x,y_1)dx - b - \int_a^x f(x,b)dx = \int_a^x \{f(x,y_1) - f(x,b)\}dx\,;$$

ஆனால் $$|f(x,y_1) - f(x,b)| < A|y_1 - b|, \quad \text{(ii) என்னும் நிபந்தனையால்}$$
$$< AM|x-a|, \qquad \text{(i) என்பதிலிருந்து;}$$

ஆகவே, $$|y_2 - y_1| < \left| \int_a^x AM(x-a)dx \right| > \text{அ-து}\ \tfrac{1}{2}AM(x-a)^2 < \tfrac{1}{2}AMh^2 \ldots (2)$$

இதேமாதிரி, $$|y_n - y_{n-1}| < \frac{1}{n!} MA^{n-1}h^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

இனி, $$b + Mh + \tfrac{1}{2}MAh^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}MA^{n-1}h^n \ldots\ldots\ldots$$

என்னும் முடிவில் தொடர் $\dfrac{M}{A}(e^{Ah} - 1) + b$ யிற்குச் சமனாகி $h, A, M$ என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒருங்கும்.

ஆகவே,

$$b + (y_1 - b) + (y_2 - y_1) \ldots\ldots\ldots\ldots + y_n - y_{n-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

என்னும் முடிவில் தொடரின் உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் முன்னுள்ள தொடரின் ஒத்த உறுப்பைக் குறித்து தனிப் பெறுமானத்திற் சமனாகவோ சிறிதாகவோ இருத்தலால் இத்தொடரும் ஒருங்கும்.

அதாவது, $$y_1 = b + (y_1 - b),$$
$$y_2 = b + (y_1 - b) + (y_2 - y_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

என்னுந் தொடரி ஒரு வரையறுத்த எல்லை, $\gamma(x)$ எனக, நாடும். இதுவே நிறுவவேண்டியது.

இனி $Y$ ஆனது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் என்பதை நிறுவவேண்டும்.

முதற் கண்கணிப்பில் இது கண்கூடாகுமெனத் தோற்றும், ஆனால் உண்மையில் அவ்வாறல்ல ; ஏனெனின் நிறுவலின்றி

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}} \int_a^x f(x,y_{n-1})dx = \int_a^n f(x, \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\ y_{n-1})dx$$

என்பதை எடுத்துக்கொள்ள முடியாது.

ஒருசீர் ஒருங்கல் என்னும் எண்ணம் பற்றி விளங்கிய மாணாக்கன் எமது தொடரின் ஒருங்கலை நிறுவுதற்குப் பயன்படுத்திய (1), (2), (3) என்னும் சமனிலிகள் உண்மையில் அதன் ஒருசீர் ஒருங்கலையும் நிறுவும் என்பதைக் கவனிப்பான். ஆயின், $f(x, y)$ ஆனது தொடர்ச்சியானதாகுமிடத்து $y_1, y_2, \ldots$ என்பனவும் தொடர்ச்சியானவையாகி $Y$ ஆனது ஒருசீராய் ஒருங்கும் தொடர் சார்புத் தொடராகும்; அதாவது $Y$ தானும் தொடர்ச்சியானதாகி $Y - y_{n-1}$ என்பது $n$ ஆனது அதிகரிக்க ஒருசீராய்ப் பூச்சியத்தை நாடும். [புரோமிச, "முடிவில்தொடர்", பிரிவு 45.]

ஆகவே, (ii) என்னும் நிபந்தனையிலிருந்து $f(x, Y) - f(x, y_{n-1})$ ஒருசீராய்ப் பூச்சியத்தை நாடும்.

இதனிலிருந்து

$$\int_a^x \{f(x, Y) - f(x, y_{n-1})\}\, dx$$

பூச்சியத்தை நாடும் என்பதை உய்த்தறிவோம்.

ஆயின்,
$$y_n = b + \int_a^x f(x, y_{n-1})\, dx$$

என்னுந் தொடர்பின் எல்லை

$$Y = b + \int_a^x f(x, Y)\, dx;$$

ஆகவே $\dfrac{dY}{dx} = f(x, Y)$ ஆகி $x = a$ ஆகுமிடத்து $Y = b$ ஆகும்.

இது நிறுவலை நிறைவாக்குகின்றது.

**103. கோசியின் முறை. வேண்டிய முடிவில் தொடர்த் தேற்றங்கள்.** வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து ஒரு முடிவில் தொடரைப் பெற்று அதனை வேறொரு முடிவில் தொடரோடு ஒப்பிடுதலால் அது ஒருங்குமென நிறுவுதலே கோசியின் முறையாகும். இரண்டாவது முடிவில் தொடரானது சமன்பாட்டினது ஒரு தீர்வு அல்ல ; ஆனால் அதன் குணகங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு தொடக்கத் தொடரின் குணகங்களுக்கிடையேயுள்ளதிலும் எளிதாகும். இம்முறை பற்றி முதல் உதாரணம்

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y$$

என்னும் முதல் வரிசையிலுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடாகிய எளிய வகையாகும்.

இச்சமன்பாடு மாறிகளை வேருக்கலால்

$$மட\ y=c+\int p\,(x)\,dx$$

எனத் தருமாறு உடனடியாகத் தீர்க்கப்படலாம். எனினும், முடிவில் தொடர் பற்றியே தர்க்கிப்போம் ; ஏனெனின் இது

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\,(x)\cdot\frac{dy}{dx}+q\,(x)\cdot y$$

என்பதினதும் வேறு உயர் வரிசைச் சமன்பாடுகளினதும் சற்றே கூடுதலாகக் கடினமாகும் தர்க்கத்திற்கு ஏறக்குறையச் செப்பமாய் இயல் பொத்ததாகும்.

பின்வரும் வலுத் தொடர் பற்றிய தேற்றங்கள் எமக்கு வேண்டும். $x$ என்னும் மாறி சிக்கலானதென உத்தேசிக்கப்படும். குறுக்கத்தின் பொருட்டு தனிப் பெறுமானங்களைப் பேர் எழுத்துக்களாற் குறிப்போம், உதாரணமாக $|a_n|$ என்பது $A_n$ ஆற் குறிக்கப்படும்.

**(A)** $\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ என்னும் வலுத்தொடர் $|x|=R$ என்னும் ஒருங்கல் வட்டத்தின் அகப் புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அறவொருங்கும்.

**(B)** $R$ என்னும் இவ்வட்டத்தின் ஆரை

$$\frac{1}{R}=\underset{n\to\infty}{எல்லை}\ \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

என்பதாலே தரப்படும் (இவ்வெல்லை இருப்பின்).

**(C)** $\dfrac{d}{dx}\left(\sum\limits_0^\infty a_nx^n\right)=\sum\limits_0^\infty na_nx_n{}^{-1}$, $|x|=R$ இன் அகத்தில்.

**(D)** எமக்கு இரு வலுத் தொடர்கள் உண்டெனின் அவற்றின் ஒருங்கல் வட்டங்களுக்குப் பொதுவான வட்டத்தின் அகப் புள்ளிகளில்

$$\left(\sum_0^\infty a_nx^n\right)\left(\sum_0^\infty b_nx^n\right)=\sum_0^\infty(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\ldots.+a_0b_n)\,x^n.$$

**(E)** $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் அகத்திலுள்ள $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$$\sum_0^\infty a_nx^n=\sum_0^\infty b_nx^n$$

ஆயின்,

$$a_n=b_n.$$

**(F)** தொடர் ஒருங்கும் $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளில் தொடரின் கூட்டுத்தொகையினது தனிப் பெறுமானத்தை $M$ ஆனது அதிகரிக்குமாயின் $A_n \angle MR^{-n}$.

இத்தேற்றங்களின் நிறுவல் புரோமிச்சின் "முடிவில் தொடர்" இற் காணப்படும் :

*A* என்பது பிரிவு 82 இல் (இரண்டாம் பதிப்பில் பிரிவு 84 இல்),

*B* என்பது தலம்பெயரின் விகித சோதனையிலிருந்து கண்கூடாகும். உய்த்தறிதல், பிரிவு 12, (இரண்டாம் பதிப்பில் பிரிவு 12 ஆவது பிரிவு 12.2),

*C* என்பது பிரிவு 52 இல்,

*D* என்பது பிரிவு 54 இல்,

*E* என்பது பிரிவு 52 இல்,

*F* என்பது பிரிவு 82 இல் (இரண்டாம் பதிப்பில் பிரிவு 84).

ஒருசீர் ஒருங்கல் பற்றி இரு தேற்றங்கள் பின்னர் வேண்டும், ஆனால் அவை தேவைப்படும்வரை அவற்றைத் தள்ளி வைப்போம்.

### 104. $\frac{dy}{dx}=yp(x)$ என்பதன் தொடர்முறைத் தீர்வின் ஒருங்கல்.

$p(x)$ ஆனது $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் மீதும் அகத்திலும் எங்கும் ஒருங்கும் $\sum\limits_0^\infty p_n x^n$ என்னும் வலுத் தொடராக விரிக்கத்தகுமெனக.

இவ்வட்டத்தின் அகத்தில் ஒருங்கும் $y=\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ என்னும் ஒரு தீர்வு பெறலாமென்பதை நிறுவுவோம்.

வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிற் பிரதியிடப் பெறுவது

$$\sum_0^\infty na_n x^{n-1}=\sum_0^\infty a_n x^n \sum_0^\infty p_n x^n \qquad (\text{தேற்றம் } C).$$

$$=\sum_0^\infty (a_n p_0+a_{n-1}p_1+a_{n-2}p_2+\ldots\ldots+a_0p_n)\,x^n. \qquad (\text{தேற்றம் } D).$$

$x^{n-1}$ இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்த, (தேற்றம் *E*).

$$na_n=a_{n-1}p_0+a_{n-2}p_1+a_{n-3}p_2+\ldots\ldots+a_0p_{n-1}.\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

ஆகவே ஒத்த பேர் எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும் *a* கள், *p* கள் ஆகியவற்றின் தனிப் பெறுமானங்கள் பற்றிப் பெறுவது

$$nA_n \leq A_{n-1}P_0+A_{n-2}P_1+A_{n-3}P_2+\ldots\ldots A_0P_{n-1}.\ \ldots\ldots(2)$$

*M* ஆனது $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் மீது $p$ $(x)$ இன் தனிப் பெறுமானத்தை அதிகரிக்கும் ஓர் நேர் எண்ணின்,

$$P_n < MR^{-n}\ \ldots\ldots\ldots(3) \qquad (\text{தேற்றம் } F).$$

ஆகவே (2), (3) என்பவற்றிலிருந்து

$$A_n<\frac{M}{n}(A_{n-1}+A_{n-2}R^{-1}+A_{n-3}R^{-2}\ldots\ldots+A_0R^{-n+1}).\ \ldots\ldots\ldots(4).$$

$B_n\ (n>0)$ என்பது (4) இன் வலக்கைப் பக்கத்தைக் குறிக்க $B_0$ ஆனது $A_0$ இலும் பெரிதாகும் யாதும் ஒரு நேர் எண்ணாகுக ; ஆயின் $A_n < B_n$.

ஆனால் $$\frac{M}{n}(A_{n-1}+A_{n-2}R^{-1}+A_{n-3}R^{-2}+\ldots\ldots+A_0R^{-n+1})$$

$$=\frac{M}{n}A_{n-1}+\frac{n-1}{nR}\,\frac{M}{n-1}(A_{n-2}+A_{n-3}R^{-1}+\ldots\ldots+A_0R^{-n+2})$$

ஆகவே, $B_n$ ஐ மேற்கூறியதுபோல் வரையறுக்க,

$$B_n=\frac{M}{n}A_{n-1}+\frac{(n-1)}{n}\,\frac{B_{n-1}}{R}\,;$$

$0 \leq k < 1$ ஆகுமாறு $k=(A_{n-1})/B_{n-1}$ ஆயின்,

$B_{n-1}$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{B_n}{B_{n-1}}=\frac{Mk}{n}+\frac{1}{R}-\frac{1}{nR}\,;$$

ஆகவே $$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\frac{B_n}{B_{n-1}}=\frac{1}{R}.$$

ஆகவே $\sum\limits_0^\infty B_nx^n$ என்னுந் தொடர் $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் அகத்தில் ஒருங்கும்.

$A_n \angle B_n$ ஆதலால் $\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ என்னுந் தொடர் அதே வட்டத்தின் அகத்திற் கூடுதலாக ஒருங்கும்.

$a_1, a_2, \ldots\ldots$ என்னுங் குணகங்கள் தெரிந்துள்ள $p$ கள் பற்றியும் $a_0$ என்னும் எதேச்சை மாறிலி பற்றியும் (1) இலிருந்து காணப்படலாம்.

## 105. இந்நிறுவல் பற்றிக் குறிப்புக்கள்.

ஈற்றுப் பிரிவை விளங்கிக் கொள்வது மாணாக்கனுக்குக் கடினமாகலாம். இவ்வேலை பற்றிய விவரணங்களால் மலைவு கொள்ளாதிருத்தல் பிரதானமாகும். முக்கியமாகக் கவனிக்க வேண்டியது இது :

$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\dfrac{A_n}{A_{n-1}}=\dfrac{1}{R}$ என்பதை நிறுவ முயல வேண்டும். ஆனால் $A$ களை வரையறுக்குந் தொடர்பு சிக்கலானது. முதன் முதலிலே $P_0, P_1, \ldots\ldots, P_{n-1}$ என்னும் $n$ கணியங்களை நீக்கலால் இதனைச் சுருக்குவோம். தொடர்பு $n$ $A$ களை உட்படுத்தலால் அது இன்னும் சிக்கலாகவேயிருக்கும். இரண்டு $A$ களையே உட்படுத்தும் எளிய தொடர்பு ஒன்று எமக்கு வேண்டும். $B_n$ இன் ஒரு தகுதியான வரைவிலக்கணத்தை எடுத்தலால்.

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\frac{B_n}{B_{n-1}}=\frac{1}{R}$$

என்பதற்கு வழிகாட்டும் அத்தகைத் தொடர்பு ஒன்றை $B_n, B_{n-1}$ ஆகியவற்றிற்கிடையே பெறுவோம்.

ஒரு மிக எளிய சமன்பாட்டுக்கு இத்தகையச் சிக்கலான தர்க்கத்தைத் தருவதன் நோக்கம் வேறு வகைகளில் மாணாக்கன் பின்பற்றுதற்கு ஒரு மாதிரியுரு வழங்குவதே என்பதை மீண்டும் கூறுவோம்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

1. $p\ (x)$, $q\ (x)$ என்பன $x=R$ என்னும் வட்டத்தின் மீதும் அகத்திலும் உள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் ஒருங்கும் வலுத்தொடராக விரிக்கப்படுமாயின் அதே வட்டத்தில் ஒருங்கும் ஒரு வலுத்தொடர்.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=p\ (x).\ \frac{dy}{dx}+q\ (x).y$$

என்பதைத் திருத்தியாக்குமாறு முதல் இரு குணகங்கள் (எதேச்சை மாறிலிகள்) பற்றிக் காணப்படலாம் என்பதை நிறுவுக.

[இங்கு $n\ (n-1)a_n=(n-1)\ \ a_{n-1}\ p_0+(n-2)a_{n-2}\ \ p_1+\dots\dots\dots\dots+a_1p_{n-2}$

$$+a_{n-2}\,q_0+a_{n-3}\,q_1+\dots\dots\dots\dots+a_0\,q_{n-2}.$$

ஆகவே, $M$ ஆனது $X=R$ என்னும் வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் $p\ (x)$ ,$q\ (x)$ என்பன இரண்டினதும் தனிப்பெறுமானங்களை அதிகரிக்கும் யாதும் ஓர் எண்ணாயின்

$$A_n<\frac{M}{n}\{(A_{n-1}+A_{n-2}\,R^{-1}+\dots\dots\dots\dots+A_1\,R^{-n+2})$$

$$+(A_{n-2}+A_{n-3}\,R^{-1}+\dots\dots\dots\dots+A_0\,R-^{n+2})\}$$

$$<\frac{M}{n}(1+R)\,(A_{n-1}+A_{n-2}\,R^{-1}+\dots\dots\dots\dots+A_0\,R^{-n+1}).$$

இச்சமனிலியின் வலக்கைப் பக்கத்தை $B_n$ என வரையறுத்துக் கொண்டு முன்போலச் செய்க],

(2) இவைபோன்ற முடிபுகள் :

$$\frac{d^3y}{dx^3}=(px).\ \frac{d^3y}{dx^2}+q\ (x).\ \frac{dy}{dx}+r\ (x)\ y$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்கு நிறுவுக.

## 106. ஃபுரோபீனியசின் முறை. முன்னங்க தர்க்கம்.

ஈற்றுப் பிரிவை மாணாக்கன் நன்றாக விளங்கிக் கொண்ட பின்னர் ஃபுரோபீனியசின் முறையாலே தரப்படும் தொடரின் ஒருங்கலை ஆராயும் கடினம் மிகு பிரசினத்திற்கு அவன் தயாராயிருப்பான். முன்னேறிச் செல்ல (முன்னர் நன்றாகத் தெரியப்பட வேண்டிய) முன்னுள்ள அத்தியாயத்தில் சில வகைகளில் $x$ இன் வலுக்களை மட்டுமே கொண்ட இரு தொடர்கள் பெற்றுள்ளோம், மற்றையவையில் மடக்கைகள் தோன்றியுள்ளன.

முதல் வகையிற் செய்முறை ஈற்றுப் பிரிவிலுள்ளதைப் போன்றது. ஆனால் இரண்டாம் வகையில் ஒரு புது வில்லங்கம் எழும். மடக்கை கொண்ட தொடர் $c$ என்னும் பரமானத்தைக் குறித்து ஒரு தொடரை வகையிடலாற் பெறப்பட்டுள்ளது. வகையிடலானது ஓர் எல்லையை எடுக்கும் செய்கை எனவும், ஒரு முடிவில் தொடரைக் கூட்டல், ஓர் எல்லையை

யெடுக்கும் வேறொரு செய்கை எனவும் கருதப்படுகின்றன. இவ்விரு செய்கைகளுள் எதனையும் முதன் முதற் செய்யப்படுமிடத்தும், வகையீட்டுக் குணகத் தொடர் ஒருங்குமாயினும், முடிபு ஒன்றே ஆகுமென்பது எவ்விதத்திலும் கண்கூடாகாது.

எனினும் இங்கு வகையிடல் முறைமையானது என நிறுவுவோம்; ஆனால் உறுப்புறுப்பாக வகையிடலை மெய்ப்பிப்பதற்குப் போதிய நிபந்தனைகளைத் தொடர் திருத்தியாக்கும் என்பதன் இந்நிறுவல் நீண்டதும் மலைவு தருவதுமாகும்.

பின்வரும் வேலையை மெச்சுதற்கு மாணாக்கன் முதன் முதல் அட்சரகணித விவரணங்களைப் புறக்கணித்துக்கொண்டு நியாய முறையின் பொதுப் போக்கைக் கவனித்தல் வேண்டும். இது தெளிவான பின்னர் அவன் பின்முகமாகச் சென்று முதற் படிப்பில் நம்பிக்கை முறையில் எடுத்துக்கொண்ட பிரதானம் குறைந்த படிகளைச் சரி பிழை பார்க்கலாம்.

**107. சுட்டிச்சார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் ஒரு முழுவெண்ணாலோ பூச்சியத்தாலோ வித்தியாசப்படாவிடத்து ஃபுரோபீனியசின் தொடரில் குணகங்களைப் பெறுதல்.**

$p(x)$, $q(x)$ என்பன இரண்டும் $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் மீதும் அகத்திலும் ஒருங்கும் $\sum\limits_0^\infty p_n x^n, \sum\limits_0^\infty q_n x^n$ என்னும் வலுத் தொடர்களாக விரிக்கத் தகுமாயின்

$$x^2\frac{dy^2}{dx^2}-x\,p\,(x)\cdot\frac{dy}{dx}-q\,(x)\cdot y=\phi\,\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) \text{ என்க,}$$

என்னும் கோவையைப் பற்றிக் கருதுக.

அப்பொழுது,

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது தீர்வைப் பெறுதற்கு முயல்வோம்.

$y$ ஆனது $x^c\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்யப்படுமாயின், $(a_0\neq o)$,

$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ஆவது

$$\sum_0^\infty a_n x^{c+n}\{(c+n)\,(c+n-1)-(c+n)\,p(x)-q\,(x)\}$$

$$=\sum_0^\infty g_n x^{c+n}, \text{ என்க ; இங்கு}$$

$$g_0=a_0\{c(c-1)-p_0c-q_0\},$$

$$g_n=a_n\{(c+n)(c+n-1)-p_0(c+n)-q_0\}-a_{n-1}\{p_1(c+n-1)+q_1\}$$
$$-a_{n-2}\{p_2(c+n-2)+q_2\}\ldots\ldots\ldots\ldots-a_0(p_nc+q_n).$$

குறுக்கத்தின் பொருட்டு $c(c-1)-p_0c-q_0$ என்பதை $f(c)$ ஆற் குறிக்க ; ஆகவே

$$(c+n)(c+n-1)-p_0(c+n)-q_0=f(c+n).$$

ஆயின் $a_nf(c+n)=a_{n-1}\{p_1(c+n-1)+q_1\}+a_{n-2}\{p_2(c+n-2)+q_2\}$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_0(p_nc+q_n)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ஆகுமிடத்து, $g_n=0$ ஆகும்.

$g$ கள் எல்லாம் மறையுமாறு $a$ களைத் தேரக்கூடுமாயினும் அவ்வாறு பெறப்படும் $\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ என்னுந் தொடர் ஒருங்குமாயினும் (1) என்பதன் ஒரு தீர்வு பெறப்படும்.

இனி $a_0\neq0$ ஆதலால், $g_0=0$ என்பது தருவது

$$c(c-1)-p_0c-q_0=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

இது $c$ இல் இருபடிச் சமன்பாடாகும். இது **சுட்டிசார் சமன்பாடு** எனப்படும்.

அதன் மூலங்கள் $\alpha$, $\beta$ ஆகுக.

இப்பெறுமானங்களுள் எதுவேனும் $g_1=0$, $g_2=0$, $g_3=0,\ldots\ldots\ldots$ என்னும் சமன்பாடுகளில் $c$ இற்குப் பிரதியிடப்படுமிடத்து $a_1$, $a_2$, $a_3,\ldots.$ என்பவற்றிற்குப் பெறுமானங்கள்

$$a_n=a_0h_n(c)/[f(c+n)f(c+n-1)\ldots\ldots f(c+1)]\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்னும் வடிவத்திற் காணப்படும் ; இங்கு $h_n(c)$ என்பது $c$ இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாகும். மாணாக்கனுக்கு இந்நிலையில் யாதும் வில்லங்கம் தோன்றுமாயின் $a_1$, $a_2$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை அவன் முற்றாகச் செய்தல் வேண்டும்.

(2) இலிருந்து $a_n$ பெறுதற்கு வேண்டிய செய்கை $f(c+n)$ என்பதால் வகுத்தலை உட்கொள்ளும். $f(c+n)\neq0$ ஆனால் மட்டுமே இது முறைமையாகும்.

இனி, $f(c)=(c-\alpha)(c-\beta)$ ஆதலால்,

$$f(c+n)=(c+n-\alpha)(c+n-\beta);$$

ஆகவே

$$f(\alpha+n)=n(\alpha+n-\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

$$f(\beta+n)=n(\beta+n-\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

ஆயின், $\alpha$, $\beta$ என்பன ஒரு முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படாவிடின் வகுத்திகள் மறைய முடியாது ; ஆகவே $a$ களைப் பெறுதற்கு மேலுள்ள செய்கை திருத்தியானது. $\alpha=\beta$ ஆயின் ஒரு தொடர் மட்டுமே பெறப்படும்.

### 108. இவ்வாறு பெறப்படும் தொடரின் ஒருங்கல்.

$M$ ஆனது $|x|=R$ என்னும் வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் $p(x), q(x)$ ஆகியவற்றின் தனிப் பெறுமானங்களை அதிகரிக்கும் ஒரு நேர் எண்ணுருக. ஆயின் $P_s<MR^{-s}$,

$$Q_s<MR^{-s};$$

ஆகவே $|p_s(c+n-s)+q_s|<M(C+n-s+1)R^{-s}$

இச்சமனிலிகளிலும் (2) இலும் இருந்து

$$A_n<M\{A_{n-1}(C+n)R^{-1}+\ldots\ldots+A_0(C+1)R^{-n}\}/F(c+n);\ldots.(7).$$

இதன் வலக்கைப் பக்கத்தை $B_n$ என்பதாற் குறித்துக் கொண்டு $A_n<B_n$ என்க. $n>0$ ஆயின் இது $B_n$ ஐ வரையறுக்கும். $B_0$ என்பது $A_0$ இலும் பெரிதாகும் யாதுமொரு நேர் எண்ணென வரையறுக்க. $B_n$ இனது இவ்வரையறை தருவது

$$B_{n+1}F(c+n+1)-B_nF(c+n)R^{-1}=A_nM(C+n+1)R^{-1}$$

$$=k\,B_nM(C+n+1)R^{-1},\text{ இங்கு } 0\leqslant k<1;$$

ஆகவே
$$\frac{B_{n+1}}{B_n}=\frac{F(c+n)+kM(C+n+1)}{RF(c+n+1)}$$

$$=\frac{\{(c+n)(c+n-1)-p_0(c+n)-q_0\}+kM(C+n+1)}{R\{(c+n+1)(c+n)-p_0(c+n+1)-q_0\}}$$

இனி, $n$ இனது பெரும் பெறுமானங்களுக்கு வலப்பக்கக் கோவை

$$\frac{n^2}{Rn^2}=\frac{1}{R}$$

என்னும் பெறுமானத்தை அணுகும்.

ஆயின் $\lim\limits_{n\to\infty}$ எல்லை $\dfrac{B_{n+1}}{B_n}=\dfrac{1}{R}.$

ஆகவே $\sum\limits_0^\infty B_nx^n$ என்னுந் தொடர் $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் அகத்தில் ஒருங்கும்; $\sum\limits_0^\infty a_nx^n$ என்னுந் தொடர் கூடுதலாக ஒருங்கும்.

ஆயின், $\alpha$, $\beta$ என்பன ஒரு முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படாவிடத்து வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் இரு ஒருங்கு முடிவில் தொடர்களைப் பெறுவோம்.

### 109. சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் பூச்சியத்தாலோ முழுவெண்ணாலோ வித்தியாசப்படுமிடத்து வேண்டிய திரிவு.

$\alpha$, $\beta$ என்பன சமமாகுமிடத்து இந்த முறையால் ஒரு தொடரைப் பெறுவோம்.

$\alpha$, $\beta$ என்பன ஒரு முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படுமிடத்து இந்த முறை பெரியதற்குப் பயன்படும், ஆனால் சிறியதற்குப் பயன்படாது; ஏனெனின் $\alpha-\beta=r$ (ஒரு நேர் முழுவெண்) ஆயின், (5), (6) என்பவற்றிலிருந்து

$$f(\alpha+n)=n\,(\alpha+n-\beta)=n\,(n+r)$$

ஆனால் $f(\beta+n)=n\,(\beta+n-\alpha)=n\,(n-r$; இது $n=r$ ஆகுமிடத்து மறைதலால் $c=\beta$ ஆகுமிடத்து $a_r$ இனது பகுதியில் ஒரு பூச்சியக் காரணியைத் தரும். முன்னுள்ள அத்தியாயத்தின் பிரிவுகள் 98, 99 இல் உதாரணங்கள் வழியாகக் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல் இது $a$ கள் சிலவற்றிற்கு முடிவில் பெறுமானமோ தேராப் பெறுமானமோ தரும். $a_0$ என்பதை $k\,(c-\beta)$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்து $y$ இற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட வடிவத்தில் திரிவு செய்தலால் இவ்வில்லங்கம் நீக்கப்படலாம். $c$ என்பதை $\beta$ இற்குச் சமப்படுத்துமிடத்து இது $a_0, a_1, \ldots . a_{r-1}$ என்பன எல்லாவற்றையும் பூச்சியமாக்கி $a_r$, $a_{r+1} \cdots\cdots$ ஆகியவற்றை முடிவுள்ளனவாக்கும். $y$ இற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்படும் வடிவத்தில் இம்மாற்றம் $a$ களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை மாற்றாமையால் மேலுள்ள ஒருங்கல் ஆராய்வைப் பாதிக்காது.

### 110. சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் ஒரு முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படுமிடத்து முடிவில் தொடரை $c$ என்னும் பிரமாணம் குறித்து வகையிடல்.

பிரிவு 107 இல் $a$ கள் $c$ இன் சார்புகளாக $x^c \sum\limits_0^\infty a_n x^n$ என்னும் முடிவில் தொடர் பெற்றுள்ளோம். முன் சென்ற அத்தியாயத்திலுள்ளது போல் இத்தொடரை $c$ என்பதைக் குறித்து வகையிடல் பற்றி நாம் சிந்தித்தல் வேண்டும்; வகையிட்டபின் $c$ ஆனது $\beta$ என்னும் சிறிய மூலத்திற்குச் சமப்படுத்தப்படும்.

இனி, இவ்வகையிடல் செய்யப்படுமிடத்து $x$ ஆனது மாறிலியெனக் கொள்ளலாம். ஆயின் தொடரானது $c$ என்னும் மாறிலியின் சார்புகளாலாய தொடராகக் கருதப்படலாம், $\sum\limits_0^\infty \psi_n(c)$ என்க; இங்கு

$$\begin{aligned}\psi_n(c)&=x^{c+n}a_n\\&=x^{c+n}a_0 h_n(c)/[f\,(c+n)\,f\,(c+n-1)..f\,(c+1)],\end{aligned}$$ (4) இலிருந்து; $a_0=k(c-\beta)$ ஆகி, பகுதியில் $c-\beta$ என்னுங் காரணி நிகழுமாயின் அது வகுத்தலால் நீக்கப்படல் வேண்டும்.

இனி, கோசாற்று என்பவர் ('பகுப்புநூல்', பாகம் II, இரண்டாம் பதிப்பு, பக்கம் 98) பின்வருவதை நிறுவியுள்ளார்.

(i) $\psi$ கள் எல்லாம் ஓர் அடைத்த உருவரையால் வரைப்புற்ற பிரதேசத்தில் பகுப்புக்குரியனவும் நிறையுருவானவையுமாகி அவ்வுருவரையில் தொடர்ச்சியானவையுமாயினும்,

(ii) $\psi$ களால் ஆய தொடர் அவ்வுருவரையில் ஒருசீராயொருங்குமாயினும்

உறுப்புறுப்பாக வகையிடலானது தனது கூட்டுத்தொகை தொடக்கத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையினது வகையீட்டுக் குணகமாகும் ஓர் ஒருங்கு தொடரைத் தரும்.

" நிறையுருவான ", " பகுப்புக்குரிய " என்பவற்றின் வரைவிலக்கணங்கள் பற்றி கோசாற்றின் பாகம் II இன் தொடக்கத்தைப் பார்க்க. $\psi$ களை முடிவில்லாதனவாக்கும் $c$ இன் பெறுமானங்களிலிருந்து தூர நிற்போமாயின் $\psi$ கள் இவ்வரைவிலக்கணங்களைத் திருத்தியாக்குமென்றும் தொடர்ச்சியானவை என்பதும் புலனாகும். இப்பெறுமானங்கள் $\alpha-1$, $\beta-1$, $\alpha-2$, $\beta-2$,...ஆகும். இவற்றை விலக்குதற்கு $c=\beta$ என்னுமையமும் ஒன்றிலுஞ் சிறிய யாதும் ஆரையும் கொண்ட வட்டத்தின் அகப்பிரதேசத்தை எடுக்க.

இப்பிரதேசத்தின் அகத்தில் எங்கும் ஒருசீராய்த் தொடர் ஒருங்கும் என்பதை இப்போது நாம் நிறுவுவோம். இப்பிரதேசத்தின் அகத்திலுள்ள இயல்பொத்த சற்றே சிறிய பிரதேசத்தின் உருவரையில் தொடர் ஒருசீராய் ஒருங்குமென்பதை இது நிறுவும்.

$s$ ஆனது பெரிய பிரதேசத்தின் அகத்தில் $C$ இனது மிகப் பெரிய பெறுமானத்தை அதிகரிக்கும் ஒரு நேர்முழுவெண்ணாகுக.

ஆயின் இப்பிரதேசத்தின் அகத்திலுள்ள $c$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும், $s$ ஐ அதிகரிக்கும் $n$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்,

$F(c+n)=|(c+n)(c+n-1)-p_0(c+n)-q_0|$, $F$ இன் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து,

$\geqslant(C+n)^2-(P_0+1)(C+n)-Q_0$, $|u-v|\geqslant|u|-|v|=$ ஆதலால்,

$>(n-s)^2-(M+1)(s+n)-M$, $P_0<M$, $Q_0<M$ ஆதலால்,

$>n^2+In+J$, என்க ; இங்கு $I$, $J$ என்பன

$n$, $x$, $c$ என்பவற்றுள் எதனையும் சாரா ..........(8).

$n$ இனது போதிய அளவு பெரிய பெறுமானங்களுக்கு, $n>m$ என்க, ஈற்றுக் கோவை என்றும் நேராகும். $H$ ஆனது இப்பிரதேசத்தில் $c$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$$M[A_{m-1}(C+m)R^{-1}+A_{m-2}(C+m-1)R^{-2}+\dots+A_0(C+1)R^{-m}] \quad ...(9)$$

என்பதன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் குறிக்க. ஆயின் $E_m$ என்பது $B_m$ இலும் பெரிதாகும் யாதுமொரு நேர் எண்ணாக $m$ இலும் பெரிதாகும். $n$ இன் பெறுமானங்களுக்கு $E_n$ ஆனது

$$E_u=\frac{M\{E_{n-1}(s+n)R^{-1}+\dots E_m(s+m+1)R^{-n+m}\}+HR^{-n+m}}{n^2+In+J} \quad ...(10$$

என்பதால் வரையறுக்கப்படுமாயின்,

$$E_{m+1}=\frac{ME_m(s+m+1)R^{-1}+HR^{-1}}{(m+1)^2+I(m+1)+J};$$

(8), (9) என்பவற்றிலிருந்தும் $B_n$ ஆனது (7) இன் வலக்கைப் பக்கமாகுமென்னும் வரைவிலக்கணத்திலிருந்தும் $E_{m+1}$ இனது தொகுதி $B_{m+1}$ இனது தொகுதியிலும் பெரிதாகி $E_{m+1}$ இனது பகுதி $B_{m+1}$ இனது பகுதியிலும் சிறிதாதலால்

$$E_{m+1}>B_{m+1}$$

என்பது எமக்குப் புலனாகும்.

இதேமாதிரி $n>m$ ஆகும் $n$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $E_n>B_n$.

(10) இலிருந்து, $\underset{n\to\infty}{\text{எல்லா}}\dfrac{E_{n+1}}{E_n}=\dfrac{1}{R}$ என்பதை நிறுவுவோம். இவ்வேலை பிரிவு 108 இன் முடிவிலுள்ள ஒத்தவேலை போன்றமையால் மாணாக்கனுக்கு ஒரு பயிற்சியாக விடப்படும்.

ஆகவே, $R_1<R$ ஆயின் $\sum\limits_m^\infty E_nR_1^{\,n}$ ஒருங்கும்.

ஆகவே $|x|=R_1$ என்னும் வட்டத்தின் அகத்திலும் $c$ இற்குக் குறிப்பிட்ட பிரதேசத்தின் அகத்திலும்

$$|a_nx^{c+n}|<A_nR_1^{\,s+n}<B_nR_1^{\,s+n}<E_nR_1^{\,s+n}.$$

$R_1, s, E$ கள் என்பனவெல்லாம் $c$ யைச் சாராமையால் இது காட்டுவது $\Sigma a_nx^{c+n}$ என்பது ஒருசீர் ஒருங்கல் பற்றிய வைத்திராசின் $M$ – சோதனையைத் திருத்தியாக்குமென்பதே (புரோமிச், பிரிவு 44).

இது $\Sigma\psi_n=\Sigma a_nx^{c+n}$ என்பது குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகள் எல்லாவற்றையும் திருத்தியாக்குமென்பதன் நிறுவலை நிறைவாக்கும்; ஆகவே $c$ என்பதைக் குறித்து வகையிடல் இப்போது மெய்ப்பிக்கப்பட்டுள்ளது. இது $|x|=R_1$ என்னும் வட்டத்தின் அகத்தில் உண்மையாகும். $|x|=R$ என்னும் வட்டத்தின் அகத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியை உட்கொள்ளுமாறு $R_1$ என்பதைப் போதிய அளவு பெரிதாக எடுக்கலாம்.

சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் முழுவெண்ணால் வித்தியாசப்படுதற்குப் பதிலாக சமமாகுமாயின் மேலுள்ள வேலையில் வேறுபாடு $a_0$ என்பது $k(c-\beta)$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்யப்படுதலில்லை என்பதே; ஏனென்னின் $a_n$ இன் பகுதியில் $c-\beta$ என யாதும் நிகழாது.

[அத்தியாயங்கள் IX, X ஆகியவற்றிற்குப் பிற்சேர்வாக பிரிவுகள் 171-177 ஆகியவற்றைப் பார்க்க. அவை ஒழுங்கான தொகையீடுகள், பூசின் தேற்றம், சாதாரண புள்ளிகளும் ஒழுங்கான புள்ளிகளும், பூசின் வகைச் சமன்பாடுகள், சிறப்பியல்புச் சுட்டி, செவ்வன் தொகையீடுகளும் உபசெவ்வன் தொகையீடுகளும் ஆகியவற்றை எடுத்தாளும். தொகையீட்டின் ஒரு தனிமை பற்றிய தர்க்கத்தை உட்படுத்தும் பிரிவு 102 இன் முற்றிய விவரம் பற்றி இன்சின் "சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்", பிரிவுகள் 3.2, 3.21 ஆகியவற்றை பார்க்க.]

## அத்தியாயம் XI

# மூன்று மாறிகள் கொண்ட சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளும் ஒத்த வளையிகளும் பரப்புக்களும்

**111.** நாம் இப்போது வெளியிலுள்ள வளையிகளினதும் அவை கிடக்கும் அல்லது நிமிர்கோண முறையில் வெட்டும் பரப்புக்களினதும் உடைமைகளை உணர்த்தும் சில எளிய வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை எடுத்துச் சிந்திப்போம். (உதாரணமாக நிலைமின்னியலில் சமவழுத்தப் பரப்புக்கள் விசைக் கோடுகளை நிமிர்கோண முறையில் வெட்டும்.)

இவ்வத்தியாயத்தின் சாதாரண (அதாவது பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களைக் கொள்ளாத) வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் அடுத்த அத்தியாயத்தின் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளோடு சமீபத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மேலும் படித்தற்கு முன்னர் மாணாக்கன் திண்மக் கேத்திரகணிதத்தை மறுமுறை படித்தல் வேண்டும். முக்கியமாக ஒரு வளையியின் தொடலியினது திசைக் கோசைன்கள் $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$ ஆகும், அதாவது $dx : dy : dz$ என்னும் விகிதத்திலுள்ளன, என்னும் உண்மை வேண்டும்.

மாறாக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாண ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் ஏற்கெனவே அத்தியாயம் III இல் எடுத்துச் சிந்திக்கப்பட்டுள்ளன.

**112.** $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{P}}=\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{Q}}=\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{R}}$ **என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்.** இச்சமன்பாடுகள் உணர்த்துவது ஒரு குறித்த வளையியின் மீது $(x, y, z)$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் தொடலிக்கு $(P, Q, R)$ என்பவற்றிற்கு விகித சமமாகும் திசைக்கோசைன்கள் உண்டு என்பதே. $P$, $Q$, $R$ என்பன மாறிலிகளாயின் ஒரு நேர்கோட்டைப் பெறுவோம், யாதுமொரு வெளிப் புள்ளிக்கூடாக அத்தகைக் கோடு ஒன்று செல்லுதலால் உண்மையில் இரட்டையாய் முடிவில்லா நேர் கோட்டுத் தொகுதி ஒன்றைப் பெறுவோம். எனினும் $P$, $Q$, $R$ என்பன $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாயின் ஒரு வளையித் தொகுதியைப் பெறுவோம் ; இவ்வளையிகளுள் யாதுமொன்று தனது இயக்கத் திசையைத் தொடர்ச்சியாக மாற்றும் ஓர் இயங்கு புள்ளியாற் பிறப்பிக்கப்படுவதாகச் சிந்திக்கப்படலாம். நிலை மின்னியலில் விசைக்கோடுகள் அத்தகைத் தொகுதியை ஆக்கும்.

[$V$ ஆனது அழுத்தச் சார்பாக விசைக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $dx\Big/\frac{\partial V}{\partial x}=dy\Big/\frac{\partial V}{\partial y}=dz\Big/\frac{\partial V}{\partial z}$ ஆகும்.]

உ-ம் (i)
$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

கண்கூடாகும் தொகையீடுகள் ஆவன

$$x-z=a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y-z=b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

இவை
$$\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{1}=\frac{z}{1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்னுங் கோட்டில் இடைவெட்டும் இரு தளங்களின் சமன்பாடுகள் ; $a$, $b$ என்னும் எதேச்சை மாறிலிகளின் தகுதியான தேர்வால் இக்கோடு யாதுமொரு தந்த புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமாறு செய்யலாம், உதாரணமாக $a=f-h$, $b=g-h$ ஆயின் அது $(f, g, h)$ இற்கூடாகச் செல்லும்.

ஒரு தந்த புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் தொகுதியின் ஒன்றிக் கோட்டைத் தேர்ந்தெடுத்தற்குப் பதிலாக ஒரு தந்த வளையியை, உதாரணமாக $x^2+y^2=4$, $z=0$ என்னும் வட்டத்தை, இடைவெட்டும் அத்தகைக் கோட்டு முடிவிலியை எடுக்க.

இவ்வட்டத்தின் சமன்பாடுகள் (2), (3) என்பவற்றோடு எடுக்கப்படுமிடத்து தருவன

$$x=a,$$

$$y=b,$$

$$a^2+b^2=4\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

கோடு வட்டத்தை இடைவெட்டுதற்கு $a$, $b$ என்பவற்றிற்கிடையே உண்மையாக வேண்டிய தொடர்பு இதுவே. (2), (3), (5) என்பவற்றிலிருந்து $a$, $b$ ஆகியவற்றை நீக்குமிடத்து வட்டத்தை வெட்டுந் தொகுதிக் கோடுகளால் ஆக்கப்படும் நீள்வளைய உருளையாகிய

$$(x-z)^2+(y-z)^2=4$$

என்பதைப் பெறுவோம்.

இதேமாதிரி $Q(x, y)=0$, $z=0$ என்னும் வளையியை வெட்டும் தொகுதிக் கோடுகள் $Q(x-z, y-z)=0$ என்னும் பரப்பை ஆக்கும்.

உ-ம் (ii)
$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{o}=\frac{dz}{-x}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

கண்கூடாகும் தொகையீடுகள் ஆவன

$$x^2+z^2=a\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$y=b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)\ ;$$

இவை தருவன ஒரு செவ்வட்ட உருளையும் அதனை ஒரு வட்டத்தில் வெட்டும் ஒரு தளமும்.

ஆகவே, வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் தமது மையங்கள் எல்லாம் $y$ அச்சிற் கிடக்குமாறும் தமது தளங்கள் இவ்வச்சுக்குச் செங்குத்தாகுமாறும் உள்ள வட்டங்கள் ஆக்கும் ஒரு தொகுதியைக் குறிக்கும்.

வெளிப்புள்ளி யாதுமொன்றிற்கூடாக அத்தகை வட்டம் ஒன்றே செல்லும். $(f, g, h)$ இற்கூடாகச் செல்வது $x^2+z^2=f^2+h^2$, $y=g$ என்பது.

ஒரு தந்த வளையியை இடைவெட்டும் தொகுதி வட்டங்களால் ஒரு பரப்பு ஆக்கப்படும்.

தந்த வளையி $\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}=1$, $z=0$ என்னும் அதிபரவளைவாயின் இவ்வதிபரவளைவை வெட்டும் வட்டத்திற்கு (7), (8) என்பன $x^2=a$, $y=b$ எனத் தருதலால்,

$$\frac{a}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}=1 \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

(7), (8), (9) ஆகியவற்றிலிருந்து $a$, $b$ என்பவற்றை நீக்குமிடத்து அதிபரவளைவை இடைவெட்டும் தொகுதி வட்டங்களால் ஆக்கப்படும் ஒருமடி அதிபரவளைவுருவாகிய

$$\frac{x^2+z^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$$

என்பதைப் பெறுவோம்.

இதேமாதிரி $\phi(x^2, y)=0$, $z=0$ என்னும் வளையியிலிருந்து தொடங்கி $\phi(x^2+z^2, y)=0$ என்னும் சுற்றற் பரப்பைப் பெறுவோம்.

## 113. இத்தகைச் சமன்பாடுகளைப் பெருக்களாலே தீர்த்தல்.

$\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ ஆயின், இப்பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றும்

$$\frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR}$$

என்பதற்குச் சமனாகும்.

இந்த முறை சில உதாரணங்களில் பூச்சியப் பகுதியையும் செப்பமான வகையீடாகுந் தொகுதியையும், அல்லது தொகுதி தனது வகையீடாகும் பூச்சியமல்லாப் பகுதியையும் பெறுமாறு நயமாக பயன்படுத்தப்படலாம்.

உ-ம் (i)
$$\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

ஒவ்வொரு பின்னமும்

$$=\frac{xdx-ydy-zdz}{xz(x+y)-yz(x-y)-z(x^2+y^2)}=\frac{xdx-ydy-zdz}{0};$$

ஆகவே $$xdx-ydy-zdz=0,$$

அதாவது $$x^2 - y^2 - z^2 = a.$$

இதேமாதிரி $$ydx + xdy - zdz = 0,$$

அதாவது $$2xy - z^2 = b.$$

உ-ம் (ii) $$\frac{dx}{1+y} = \frac{dy}{1+x} = \frac{dz}{z}.$$

இங்கு $$\frac{dz}{z} = \frac{dx+dy}{2+x+y} = \frac{dx-dy}{y-x};$$

இது தருவது மட $z =$ மட $(2+x+y) +$ மட $a = -$ மட $(x-y) +$ மட $b$,

அதாவது $$z = a\ (2+x+y) = b/(x-y).$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

பின்வரும் ஒருங்கமை வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைத் திருத்தியாக்கும் வளையித் தொகுதியை, ஒவ்வொன்றும் ஓர் எதேச்சை மாறிலி கொள்ளும் இரு சமன்பாடுகளால் வரையறுத்துப் பெறுக. சாத்தியமாகுமிடத்து கேத்திரகணித முறையில் விளக்கிக் காட்டுக.

(1) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$.

(2) $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} = \dfrac{dz}{ly - mx}$.

(3) $\dfrac{dx}{y^2 + z^2 - x^2} = \dfrac{dy}{-2xy} = \dfrac{dz}{-2xz}$.

(4) $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{zx} = \dfrac{dz}{xy}$.

(5) $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{z+x} = \dfrac{dz}{x+y}$.

(6) $\dfrac{xdx}{z^2 - 2yz - y^3} = \dfrac{dy}{y+z} = \dfrac{dz}{y-z}$.

(7) $(0, -n, m)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் பயிற்சி 2 இனது வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

(8) $y^3 + z^3 = 1$, $x = 0$ என்னும் வட்டத்தை இடைவெட்டும் பயிற்சி 4 இனது வளையிகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

(9) $x^2 + y^2 = r^2$, $z = k$ தான்$^{-1}\,\dfrac{y}{x}$ என்னுஞ் சுரியை இடைவெட்டும் பயிற்சி 1 இனது கோடுகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

(10) யாதுமொரு புள்ளியில் தனது தொடலியினது திசைக் கோசைன்கள் அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளினது வர்க்கங்களின் விகிதத்திலிருக்குமாறு $(1, 2, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வளையியைக் காண்க.

## 114. முதற்றொகையீட்டின் உதவியால் இரண்டாம் தொகையீட்டைக் காண்டல்.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2} = \frac{dz}{3x^2 \text{ சைன் } (y+2x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளை எடுக்க.

கண்கூடாகுந் தொகையீடு ஒன்று

$$y + 2x = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

இத்தொடர்பை உபயோகித்து,

$$\frac{dx}{1}=\frac{dz}{3x^2 \text{ சைன் } a};$$

இது தருவது $z-x^3$ சைன் $a=b$,

$a$ இற்குப் பிரதியிட, $z-x^3$ சைன் $(y+2x)=b$..........(3)

(3) ஆனது உண்மையில் (1) இனது ஒரு தொகையீடா ?

(3) என்பதை வகையிட,

$\{dz-3x^2dx$ சைன் $(y+2x)\}-x^3$ கோசை $(y+2x).\ \{dy+2dx\}=0$ ;

(1) என்பதன் பலத்தால் இது உண்மையாகும். ஆகவே (3) ஒரு தொகையீடாகும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{3}=\dfrac{dz}{5z+\text{தான்}\,(y-3x)}$.  (2) $\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{-z}=\dfrac{dz}{z^2+(y+x)^2}$.

(3) $\dfrac{dx}{xz\,(z^2+xy)}=\dfrac{dy}{-yz\,(z^2+xy)}=\dfrac{dz}{x^4}$.  (4) $\dfrac{dx}{xy}=\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dz}{zxy-2x^2}$.

### 115. ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் பொதுத் தொகையீடுகளும் விசேட தொகையீடுகளும்.

$u=a,\ v=b$ என்பன

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் இரு சாராத் தொகையீடுகளாயின் $\phi\,(u,\ v)=0$ என்பது தொகுதியின் வளையிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு பரப்பைக் குறித்தலால் அது $\phi$ என்னுஞ் சார்பின் வடிவம் எது வாயினும் வேறொரு தொகையீட்டைத் தரும்.

இதன் பகுப்பு நிறுவல் அடுத்த அத்தியாயத்திற்கு ஒதுக்கப்படும் ; ஏனெனின் அதன் முக்கியம் பிரதானமாய்ப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்கே உரியது. $\phi\,(u,v)=0$ என்பது **பொதுத் தொகையீடு** எனப்படும். சில ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குப் பொதுத் தொகையீட்டில் உட்படுத்தப் படாத **விசேடத்** தொகையீடுகள் எனப்படும் தொகையீடுகள் உண்டு.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) பிரிவு 113 இனது உதாரணத்தில் $u=x^2-y^2-z^2,\ v=2xy-z^2$ ஆதலால் பொதுத் தொகையீடு $\phi\,(x^2-y^2-z^2,\ 2xy-z^2)=0$ ஆகும். இதனை மாணுக்கன்

$$\phi\,(u,v)=u-v,\ \phi\,(u,v)=\frac{v+1}{u-2}$$

என்னும் எளிய வகைகளில் வாய்ப்புப் பார்த்தல் வேண்டும்.

(2) $\dfrac{dx}{1+\sqrt{(z-x-y)}}=\dfrac{dy}{1}=\dfrac{dz}{2}$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்கு $\phi\,\{2y-z,\ y+2\sqrt{(z-x-y)}\}=0$ என்பது பொதுத் தொகையீடும் $z=x+y$ என்பது ஒரு விசேட தொகையீடும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

## 116. $Pdx+Qdy+Rdz=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் கேத்திரகணித விளக்கம்.

இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு உணர்த்துவது ஒரு வளையியினது தொடலி ஒரு குறித்த கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகுமென்பதே ; இத்தொடலியினதும் கோட்டினதும் திசைக் கோசைன்கள் முறையே $(dx, dy, dz)$, $(P, Q, R)$ என்பவற்றிற்கு விகிதசமமாகும்.

ஆனால் $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் ஒரு வளையியினது தொடலி $(P, Q, R)$ என்னுங் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகுமென்பதை உணர்த்துமெனக் கண்டுள்ளோம். ஆயின் எமக்கு இரு வளையித் தொடைகள் உண்டு. ஒரு தொடையில் ஒன்றாகவுள்ள இரு வளையிகள் இடைவெட்டுமாயின் அவை செங்கோணங்களில் வெட்டல் வேண்டும்.

இனி இரு வகைகள் எழும். $Pdx+Qdy+Rdz=0$ என்பது தொகையிடத்தகு சமன்பாடாகலாம். இதன் பொருள் ஒவ்வொரு பரப்பிலுமுள்ள வளையிகள் எல்லாம் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாலே குறிக்கப்படும் வளையிகள். இப்பரப்பை வெட்டும் புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அவற்றிற்குச் செங்குத்தாகுமாறு ஒரு பரப்புக் குடும்பம் காணப்படலாம் என்பதே. உண்மையில் ஓர் இரட்டையாய் முடிவில்லா வளையித் தொடையை நிமிர்கோண முறையில் வெட்டுமாறு ஒரு முடிவில் தொகை பரப்புகள் வரையப்படக்கூடுமாயின் இவ்வகை பெறப்படும் ; அதாவது நிலை மின்னியலில் விசைக் கோடுகளை சமவழுத்தப் பரப்புக்கள் வெட்டுமாப்போலாகும். ஆனால் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாற் குறிக்கப்படும் வளையிகள் அத்தகைய நிமிர்கோண பரப்புக் குடும்பத்திற்கு இடங்கொடாதிருக்கலாம். இவ்வகையில் ஒன்றிச் சமன்பாடு தொகையிடத் தகாது.

உ–ம் (1) $dx+dy+dz=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு சமாந்தரத் தளங்களால் ஆக்கப்படும் குடும்பமாகிய $x+y+z=c$ என்பதற்குத் தொகையிடும்.

பிரிவு 112, உ–ம் (i) இன் படி

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1}$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{1}=\frac{z}{1}$$

என்னுஞ் சமாந்தரக்கோட்டு குடும்பத்தைக் குறிக்குமென்பதைக் கண்டோம்.

தளங்கள் கோடுகளினது நிமிர்கோணக் கடவைகளாகும்.

உ–ம் (ii) $zdx-xdz=0$, அதாவது $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}=0$, என்பது $y$ – அச்சுக் கூடாகச் செல்லும் தளக் குடும்பமாகிய $z=cx$ என்பதற்குத் தொகையிடும்.

பிரிவு 112, உ–ம் (11) இல் $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{o}=\frac{dz}{-x}$ என்னும் ஒத்த ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் தமது அச்சுக்கள் எல்லாம் $y$ – அச்சு நீளத்திற்குக் கிடக்கும் வட்டங்களாலாய தொகுதியைக் குறிக்குமெனக் கண்டுள்ளோம் ; ஆகவே தளங்கள் வட்டங்களினது நிமிர்கோணக் கடவைகள்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தொகையிடுக ; சாத்தியமாகுமிடத்து முடிபுகளைக் கேத்திரகணித முறையில் விளக்கிக் காட்டி பரப்புக்கள் ஒத்த ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாற் குறிக்கப்படும் வளையிகளினது நிமிர்கோணக் கடவைகளாகுமென்பதை சரி பிழை பார்க்க.

(1) $xdx+ydy+zdz=0.$

(2) $(y^2+z^2-x^2)dx-2xydy-2xzdz=0.$ [$x^2$ ஆல் வகுக்க.]

(3) $yzdx+zxdy+xydz=0.$

(4) $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$

(5) $z(ydx-xdy)=y^2dz.$

(6) $xdx+zdy+(y+2z)dz=0.$

## 117. தீர்வு கண்கூடாகாதவிடத்து, தொகையிடல் முறை.

$Pdx+Qdy+Rdz=0$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள தொகையிடத்தகு சமன்பாடு கண்கணிப்பு முறையில் தீர்க்கப்படாதாயின் $z$ மாறிலியாகி $dz=0$ ஆகும் எளிய வகையை முதன் முதல் எடுத்துச் சிந்தித்து ஒரு தீர்வைத் தேடுவோம்.

உதாரணமாக $yzdx+2zxdz-3xydz=0$ என்பது, $z$ மாறிலியாயின், $ydx+2xdy=0$ ஆகும் ; இது $xy^2=a$, எனத் தரும்.

z என்னும் மாறி மாறிலியாகுமென்னும் உத்தேசத்தில் இது பெறப்பட்டமையால் தொடக்கச் சமன்பாட்டினது தீர்வு $a$ என்னும் மாறிலிக்குப் பதிலாக $z$ இனது யாதோ சார்பை வைத்தலாற் பெறப்படுமென்பது நிகழலாம் ; இது $xy^2=f(z)$ என்பதைத் தந்து $y^2dx+2xydy-\frac{df}{dz}dz=0$ என்பதற்கு வழிகாட்டும். இது தொடக்கச் சமன்பாட்டோடு சர்வசமனுதற்கு

$$\frac{y^2}{yz}=\frac{2xy}{2zx}=\frac{\frac{-df}{dz}}{-3xy} \quad \text{ஆதல் வேண்டும் ;}$$

அதாவது

$$\frac{df}{dz}=\frac{3xy^2}{z}=\frac{3f(z)}{z},$$

$$\frac{df}{f}=\frac{3dz}{z},$$

$$f(z)=cz^3 ;$$

இது $xy^2=cz^3$ என்னும் இறுதித் தீர்வைத் தரும்.

இந்த முறை, தொகையிடத்தகு சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகுமென்பதன் நிறுவல் பற்றி பிரிவு 119 பார்க்க.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $yz$ மட $zdx - zx$ மட $zdy + xydz = 0$.

(2) $2yzdx + zxdy - xy(1 + z)dz = 0$.

(3) $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0$. [முதன் முதல் $x$ மாறிலியாகுமெனக் கொள்க.]

(4) $(y^2 + yz)dx + (zx + z^2)dy + (y^2 - xy)dz = 0$.

(5) $x^2y - y^3 - y^2z)dx + (xy^2 - x^2z - x^3)dy + (xy^2 + x^2y)dz = 0$.

(6) பின்வரும் சமன்பாட்டினது தொகையீடு ஒரு பொது இடைவெட்டுக் கோடு கொண்ட தளங்களாலாய குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனவும், இத்தளங்கள் பிரிவு 113 இன் பின்வரும் பயிற்சி 2 இன் வட்டங்களினது நிமிர்கோணக் கடவைகள் எனவும் காட்டுக :

$$(mz - ny)dx + (nx - lz)dy + (ly - mx)dz = 0.$$

## 118. ஒரு சமன்பாடு தொகையிடப்படுதற்கு வேண்டிய நிபந்தனை.

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ஆனது வகையிடலின் பின்

$$\frac{\partial\phi}{dz}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0.$$

என்பது தரும் $\phi\ (x, y, z) = c$ என்னும் தொகையீடு உடையதாயின்

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lambda P, \frac{\partial\phi}{\partial y} = \lambda Q, \frac{\partial\phi}{\partial z} = \lambda R.$$

ஆகவே
$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda R) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda Q),$$

அதாவது
$$\lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\frac{\partial\lambda}{\partial z} - R\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

இதேமாதிரி
$$\lambda\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\frac{\partial\lambda}{\partial z} - P\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\frac{\partial\lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

(2), (3), (4) என்னுஞ் சமன்பாடுகளை முறையே $P$, $Q$, $R$ என்பவற்றாற் பெருக்கிக் கூட்டுக.

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

(1) என்னுஞ் சமன்பாடு தொகையிடத் தகுமாயின் இந்நிபந்தனை திருத்தியாக்கப்படல் வேண்டும்.

$P$, $Q$, $R$ என்பன **A** என்னுங் காவியின் கூறுகளாயின் இந்நிபந்தனை

$$\mathbf{A}.\ \text{சுருட்டை}\ \mathbf{A} = 0$$

என எழுதப்படலாமென்பது காவிப்பகுப்போடு பழக்கமான மாணக்கனுக்குப் புலனாகும்.

உ-ம். ஈற்றுப் பிரிவிற் செய்த உதாரணமாகிய

$$yz\,dx + 2zx\,dy - 3xy\,dz = 0$$

என்பதில் $P = yz,\ Q = 2zx,\ R = -3xy.$

நிபந்தனை தருவது

$$yz(2x + 3x) + 2zx(-3y - y) - 3xy(z - 2z) = 0,$$

அதாவது $5xyz - 8xyz + 3xyz = 0$ ;

இது உண்மையாகும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

**(1)** ஈற்று இரு பயிற்சித் தொடைகளிலுமுள்ள சமன்பாடுகள் இந்நிபந்தனையைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{1}$$

**(2)** என்பவற்றாலே தரப்படும் வளையிகளுக்கு நிமிர்கோண முறையில் யாதும் பரப்புத் தொடை இல்லை எனக் காட்டுக.

**119. தொகையிடற்றகவு நிபந்தனை வேண்டியது மட்டுமல்ல போதியதுமாகும்.** நிபந்தனை திருத்தியாக்கப்படுமிடத்து தீர்வு தருதற்குப் பிரிவு 117 இனது முறை என்றும் வெற்றியாகுமெனக் காட்டுதலால் நிபந்தனை போதியதாகுமென்பதை நிறுவுவோம்.

$P$, $Q$, $R$ என்பன நிபந்தனையைத் திருத்தியாக்குமாயின், $\lambda$ ஆனது $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் யாது சார்பாயினும், $P_1 = \lambda P,\ Q_1 = \lambda Q,\ R_1 = \lambda R$ என்பனவும் அவ்வாறே செய்யும் என்னும் உண்மை ஒரு கொளுவாக எமக்கு வேண்டும். இதனை மாணுக்கனுக்கு ஒரு பயிற்சியாக விடுவோம்.

பிரிவு 117 இல் $z$ ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு $Pdx + Qdy = 0$ இன் ஒரு தீர்வைப் பெறலாமென உத்தேசித்துள்ளோம்.

இத்தீர்வு $F(x,y,z) = a$ ஆகுக ;

இது $$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$ எனத் தருதலால்

$$\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/ P = \frac{\partial F}{\partial y}\bigg/ Q = \lambda,$$ என்க.

$\lambda P = P_1,\ \lambda Q = Q_1,\ \lambda R = R_1$ என இடுக.

அடுத்தபடி $a$ இற்குப் பதிலாக $f(z)$ வைத்தல் ;

இது $$F(x,y,z) = f(z) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

எனத் தருதலால்

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{df}{dz}\right)dz = 0,$$

அதாவது $$P_1dx+Q_1dy+\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}\right)dz=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

இது $Pdx+Qdy+Rdz=0$ என்பதோடு சர்வசமனாதற்கு

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}=\lambda R=R_1,$$

அதாவது $$\frac{df}{dz}=\frac{\partial F}{\partial z}-R_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ஆதல் வேண்டும்.

பிரிவு 117 இனது உதாரணத்தில், $xy^2=f(z)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் பலத்தால் $x, y$ என்பன விலக்கப்பட,

$$\frac{df}{dz}=\frac{3xy^2}{z}=\frac{3f(z)}{z}.$$

நிறுவ வேண்டியது (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் பலத்தால் (3) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் வலக்கைப் பக்கத்திலிருந்து $x$, $y$ என்பன என்றும் விலக்கப்படலாமென்பதே.

வேறு மாதிரிக் கூறின் $\frac{\partial F}{\partial z}-R_1$ என்பது $x$, $y$ ஆகியவற்றை $F$ இன் சார்பாக மட்டுமே உட்கொள்ளும் என்பதைக் காட்டல் வேண்டும்.

சர்வசமனாக $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F}{\partial z}-R_1\right\}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial z}-R_1\right\}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ஆகுமாயின் இது உண்மையாகும். [எட்வேட்சின் '**வகையீட்டு நுண் கணிதம்**', பிரிவு 510.]

இனி, கொளுவின்படி, $P$, $Q$, $R$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு

$$P_1\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial y}\right\}+Q_1\left\{\frac{\partial R_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\right\}+R_1\left\{\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right\}=0$$

என்னும் இயல்பொத்த தொடர்புக்கு வழிகாட்டும்; அன்றியும் (2) என்னுஞ் சமன்பாடு தொகையிடத்தகுமாதலால்

$$P_1\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}\right)\right\}+Q_1\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}\right)-\frac{\partial P_1}{\partial z}\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)=0.$$

ஈற்று இரு சமன்பாடுகளைக் கழித்தலால்

$$P_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}-R_1\right)-Q_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}-R_1\right)$$
$$-\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}-R_1\right)\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)=0 \quad \ldots\ldots(5).$$

ஆனால் $P_1=\frac{\partial F}{\partial x}, Q_1=\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dz}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{dz}\right)=0,$

$f$ ஆனது தனித்த $x$ இன் சார்பு ஆதலால்.

ஆகவே (5) என்பது (4) என்பதற்கு ஒடுங்கும்.

அதாவது $\frac{\partial F}{\partial z}-R_1$ என்பது $F$, $z$ என்பவற்றின் சார்பாக உணர்த்தப்படலாம், $\psi(F, z)$ என்க.

ஆகவே, (1), (3) என்பவற்றிலிருந்து

$$\frac{df}{dz}=\psi(f, z).$$

இதன் தீர்வு $f=\chi(z)$ ஆயின், $F(x, y, z)=\chi(z)$ என்பது

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

இன் ஒரு தீர்வாகும்; ஆயின் $P$, $Q$, $R$ என்பன பிரிவு 118 இனது நிபந்தனையைத் திருத்தியாக்குமிடத்து இச்சமன்பாடு தொகையிடத்தகுமென்பது நிறுவப்பட்டுள்ளது.

## 120. தொகையிடத்தகா ஒன்றிச் சமன்பாடு

தொகையிடற்றகவு நிபந்தனை திருத்தியாக்கப்படாவிடத்து

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னுஞ் சமன்பாடு

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாற் குறிக்கப்படும் வளையிக் குடும்பத்திற்கு நிமிர்கோண முறையிலுள்ள வளையிகளாலாய குடும்பத்தைக் குறிக்கும்; ஆனால் இவ்வகையில் இரண்டாம் வளையிக் குடும்பத்திற்கு நிமிர்கோண முறையில் பரப்புக் குடும்பம் யாதுமில்லை.

எனினும், அச்சமன்பாடு தொகையிடத்தகுமோ தகாதோ, யாதுமொரு தந்த பரப்பிற் கிடந்து (1) என்பதைத் திருத்தியாக்கும் ஒரு முடிவில் தொகை வளையிகளைக் காணலாம்.

**உ–ம்.** $$ydx+(z-y)dy+xdz=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்பதன் தீர்வாற் குறிக்கப்பட்டு

$$2x-y-z=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும் வளையிகளைக் காண்க.

[தொகையிடற்றகவு நிபந்தனை திருத்தியாக்கப்படவில்லையென்பதை எளிதில் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.]

செயன்முறை இவ்விரு சமன்பாடுகள் அவற்றுள் இரண்டாவதன் வகையீடு ஆகியவற்றிலிருந்து மாறிகளுள் ஒன்றையும் அதன் வகையீட்டையும் ($z$, $dz$ ஆகியன எனக) நீக்கலே.

(2) என்பதை வகையிட, $2dx - dy - dz = 0$.

$x$ ஆற் பெருக்கி (1) இற்குக்கூட்ட,

$$(y+2x)\,dx+(z-x-y)dy=0\,;$$

(2) என்பதை உபயோகிக்க $(y+2x)\,dx+(x-2y-1)\,dy=0$ ஆகி

$$xy+x^2-y^2-y=c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

என்பது பெறப்படும்.

ஆயின் (2) என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும் குடும்ப வளையிகள் (3) என்னும் முடிவில் செங்கோண அதிபரவளைவு உருளைத் தொடையில் அத்தளத்தாலாய வெட்டுக்களாகும்.

இவ்வுதாரணத்தின் முடிபு பின்வருமாறும் உணர்த்தப்படலாம்: (2) என்னுந் தளத்திற் கிடந்து (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் வளையிகளினது $xy$–தள எறியங்கள் ஒரேமையும் கொண்டு இயல்பொத்தனவும் இயல்பொத்தமைந்தனவுமான செங்கோண அதிபரவளைவுகளாலாய குடும்பமாகும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $dz=2y\,dx+x\,dy$ என்பதற்கு ஒன்றித் தொகையீடு யாதுமில்லையெனக் காட்டுக.

$z=x+y$ யிற் கிடக்கும் இச்சமன்பாட்டு வளையிகள் $(x-1)^2(2y-1)=c$ என்னுங் குடும்பத்துப் பரப்புக்களிலும் கிடக்குமென்பதை நிறுவுக.

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ என்னும் நீள்வளையவுருவிற் கிடக்கும்

$$x\,dx+y\,dy+c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dz=0$$

என்பதன் வளையிகள்

$$x^2+y^2+z^2=k^2$$

என்னும் ஒருமையக் கோளக் குடும்பத்திலும் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

(3) $3z=x^2+y^2$ என்னும் பரவளைவுருவிற் கிடந்து

$$2dz=(x+z)\,dx+y\,dy$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் வளையிகளினது $xz$ – தள நிமிர்கோண எறியத்தைக் காண்க.

(4) $y$ – அச்சுக்குச் சமாந்தரமான பிறப்பாக்கிகள் கொண்டு $(2, 1, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகவும் $x^2+y^2+z^2=4$ என்னுங் கோளத்திற் கிடக்கும் ஒரு வளையிக்கூடாகவும் சென்று

$$(xy+2xz)\,dx+y^2\,dy+(x^2yz)\,dz=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் உருளையின் சமன்பாடு காண்க.

# அத்தியாயம் XI இல் பலவினப்பயிற்சிகள்

(1) $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{xy}$.  (2) $\dfrac{dx}{y^3x-2x^4}=\dfrac{dy}{2y^4-x^3y}=\dfrac{dz}{9z\,(x^3-y^3)}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=z\,;\;\; \dfrac{dz}{dx}=y$.

(4) $(z+z^3)$ கோசை $x\,\dfrac{dx}{dt}-(z+z^3)\dfrac{dy}{dt}+(1-z^2)\,(y-$ சைன் $x)\dfrac{dz}{dt}=0$.

(5) $(2x+y^2+2xz)\,\dfrac{dx}{dt}+2xy\,\dfrac{dy}{dt}+x^3\dfrac{dz}{dt}=1$,

(6) $f\,(y)\,dx-zx\,dy-xy$ மட $ydz=0$ என்பது தொகையிடத்தகுமாயின் $f\,(y)$ என்பதைக் காண்க.

ஒத்த தொகையீடு காண்க.

(7) பின்வரும் சமன்பாடு தொகையிடத்தகாது எனக் காட்டுக :

$$3y\,dx+(z-3y)\,dy+xdz=0.$$

இச்சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கி $2x+y-z=a$ என்னுந் தளத்திற் கிடக்கும் வளையிகளினது $xy$ – தள எறியங்கள்

$$x^2+3xy-y^2-ay=b$$

என்னும் செங்கோண அதிபரவளைவுகள் என்பதை நிறுவுக.

(8) $y=ax^2, y^2=bzx$ என்னும் திருகிய முப்படி வளையிகளாலாய குடும்பத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் காண்க. இவ்வளையிகள் எல்லாம்

$$x^2+2y^2+3z^2=c^2$$

என்னும் நீள்வளையவுருக் குடும்பத்தை நிமிர்கோண முறையில் வெட்டுமெனக் காட்டுக.

(9) (3, 2, 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $x+yz=c$ என்னும் பரப்புக் குடும்பத்தை நிமிர்கோண முறையில் வெட்டும் வளையியினது சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(10) $x=uz,\; y=vz$ என இட்டுக்கொண்டு பின்வரும் ஏகவினச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $(x^2-y^2-z^2+2xy+2xz)\,dx+(y^2-z^2-x^2+2yz+2yx)\,dy$
$\qquad\qquad +(z^2-x^2-y^2+2zx+2zy)\,dz=0$,

(ii) $(2xz-yz)\,dx+(2yz-xz)\,dy-(x^2-xy+y^2)\,dz=0$,

(iii) $z^2\,dx+(z^2-2yz)\,dy+(2y^2-yz-xz)\,dz=0$,

(11) $P_1\,dx_1+P_2\,dx_2+P_3\,dx_3+P_2\,dx_4=0$

என்னுஞ் சமன்பாடு தொகையிடத் தகுமாயின்

$$P_r\left(\frac{\partial P_s}{\partial x_t}-\frac{\partial P_t}{\partial x_s}\right)+P_s\left(\frac{\partial P_t}{\partial x_r}-\frac{\partial P_r}{\partial x_t}\right)+P_t\left(\frac{\partial P_r}{\partial x_s}-\frac{\partial P_s}{\partial x_r}\right)=0$$

என்பதை நிறுவுக ; இங்கு $r$, $s$, $t$ என்பன 1, 2, 3, 4 என்னும் நாலு பிற்குறிகளுள் எவையேனும் மூன்று.

இத்தொடர்பை $C_{rst}=0$ என்பதாற் குறித்துக்கொண்டு சர்வசமனாக

$$P_1C_{234}-P_2C_{134}+P_3C_{124}-P_4C_{123}=0,$$

ஆகுமென்பதைச் சரிபார்த்து இந்நாலு தொடர்புகளுள் மூன்று மட்டுமே சாராதன எனக் காட்டுக.

இந்நிபந்தனைகள்

$$(x_1^3-x_2x_3x_4)\,dx_1+C(x_2^3-x_1x_3x_4)\,dx_2+C(x_3^3-x_1x_2x_4)\,dx_3+(x_4^3-x_1x_2x_3)\,dx_4=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்குத் திருத்தியாக்கப்படும் என்பதைச் சரிபார்க்க.

(12) பயிற்சி (II) இன் சமன்பாட்டைப் பின்வரும் செய்கையால் தொகையிடுக :

(i) $x_3$, $x_4$ என்பன மாறிலிகள் என உத்தேசித்துக்கொண்டு $x_1^4+x_2^4-4x_1x_2x_3x_4=a$ என்பதைப் பெறுக.

(ii) $a$ இற்குப் பதிலாக $f(x_3,\ x_4)$ என்பதை வைக்க. வகையிடலாலும் தொடக்கச் சமன்பாட்டோடு ஒப்பிடலாலும் $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_4}$ என்பவற்றைப் பெற்று அது துணைகொண்டு $f$ ஐயும்

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4-4x_1x_2x_3x_4=c$$

என்னுந் தீர்வையும் பெறுக.

(13) பயிற்சி (II) இன் சமன்பாட்டை $x_1=ux_4$, $x_2=vx_4$, $x_3=wx_4$ என இடுதலால் தொகையிடுக.

(14) பின்வரும் சமன்பாடு தொகையிடற்றகவு நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டி அதன் தொகையீட்டைப் பெறுக :

$$y \text{ சைன் } w\,dx+x \text{ சைன் } w\,dy-xy \text{ சைன் } w\,dz-xy \text{ கோசை } w\,dw=0.$$

(15) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ஆயின்

$$a\,dx^2+b\,dy^2+c\,dz^2+2f dy\,dz+2g\,dzdx+2h\,dxdy=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடு

$$Pdx+Qdy+Rdz=$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள இரு சமன்பாடுகளுக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. (கூம்புவளைவியலில் ஒரு முடிபோடு ஒப்பிடுக.)

அது துணைகொண்டு

$$xyz\,(dx^2+dy^2+dz^2)+x\,(y^2+z^2)\,dy\,dz+y\,(z^2+x^2)\,dz\,dx+z\,(x^2+y^2)\,dxdy=0$$

என்பதன் தீர்வு

$$(x^2+y^2+z^2-c)\,(xyz-c)=0$$

எனக் காட்டுக. (பிரிவு 52 ஒடு ஒப்பிடுக.)

(16)
$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

என்பதன் தொகையிடற்றகவு நிபந்தனையானது

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2),$$

$$\frac{dx}{\left(\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}\right)}=\frac{dy}{\left(\dfrac{\partial R}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)}=\frac{dz}{\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

ஆகிய குடும்பங்களினது இடைவெட்டும் வளையிகளாலாய எச்சோடியினதும் நிமிர்கோணவியலைப் பொருட்படுத்துமெனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு (3) இனது வளையிகளெல்லாம் (1) இனது பரப்புக்களிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

$P = ny - mz$, $Q = lz - nx$, $R = mx - ly$ ஆகுமிடத்து இம்முடிபைச் சரிபார்க்க.

(ஒத்த சமன்பாடுகளின் தீர்வு பற்றி இவ்வத்தியாயத்தின் முந்தின உதாரணங்களைப் பார்க்க.)

(17) முன் சென்ற பயிற்சி தெரிவிப்பது $\alpha =$ மாறிலி, $\beta =$ மாறிலி, என்பன (3) என்னும் சமன்பாடுகளினது இரு தொகையீடுகளாயின் (1) என்னும் சமன்பாட்டினது ஒரு தொகையீடு $f(\alpha, \beta) =$ மாறிலி என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்பட்டு அது துணைகொண்டு $Pdx + Qdy + Rdz$ என்பது, $A$, $B$ என்பன $\alpha$, $\beta$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாக, $Ad\alpha + Bd\beta$ என உணர்த்தத் தகுமென்பதே.

$$P = yz \text{ மட } z, \; Q = -zx \text{ மட } z, \; R = xy$$

என்னும் வகையில்

$$\alpha = yz^{\frac{1}{2}}, \; \beta = zx^{\frac{1}{2}} \text{ மட } z, \; A = -\beta, \; B = \alpha$$

ஆகுமென்பதைச் சரிபார்க்க.

அது துணைகொண்டு (1) இனது தொகையீட்டை

$\alpha = c\beta$, அல்லது $y = cx$ மட $z$, என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

[இவ்வத்தியாயத்தின் பிற்சேர்வு பற்றிப் பிரிவுகள் 168–170 பார்க்க. அங்கு ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளின் தொகையீட்டுக் காரணி பற்றியும் மேயரின் முறை பற்றியும் சிந்திக்கப்படும். இந்த முறையினது விரி ஒன்று "கணிதப் பத்திரிகை" XXXVII, 1953, பக்கம் 59 இல் வெளிவந்த "ஒரு மொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தொகையிடல் பற்றிய பேட்டிராணின் முறையினது சுருக்கல்" என்னும் எனது வெளியாக்கலில் தரப்படும் உ-ம். 17 இல் சுட்டிக் காட்டப்படும்.]

## அத்தியாயம் XII

# முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் குறிப்பிட்ட முறைகள்

**121.** எற்கெனவே (அத்தியாயம் IV) எதேச்சைச் சார்புகளை நீக்கலாலோ எதேச்சை மாறிலிகளின் நீக்கலாலோ பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் ஆக்கப்படுதலைப்பற்றித் தர்க்கித்துள்ளோம். கணித பௌதிகவியலில் மிக முக்கியமான சில சமன்பாடுகளில் எவ்வாறு எளிய குறிப்பிட்ட தீர்வுகள் காணப்பட்டு அவற்றின் உதவியால் கூடுதலாகச் சிக்கலான தீர்வுகள் பௌதிகப் பிரச்சினைகளில் வழக்கமாக நிகழும் தொடக்க நிபந்தனைகளையும் வரைப்பாட்டு நிபந்தனைகளையும் திருத்தியாக்குமாறு அமைக்கப்படலாமென்பதையும் காட்டியுள்ளோம்.

இவ்வத்தியாயத்தில் கேத்திரகணிதமுறைக் கவர்ச்சியுள்ள சமன்பாடுகளை முக்கியமாக அவாவிக் கொண்டு பல்வேறு (“பொதுவான”, “முற்றிய”, “தனிச்சிறப்பான”) வடிவங்களில் தொகையீடுகளையும் அவற்றின் கேத்திர கணிதமுறை விளக்கங்களையும் தேடுவோம். புறநடைச் சமன்பாடுகள் “விசேட”த் தொகையீடுகள் எனப்படும் வேறு வடிவத் தொகையீடுகள் உடையன என்பது காணப்படும்.

### 122. வேண்டிய கேத்திர கணிதத் தேற்றங்கள்

எந்தத் திண்மக் கேத்திரகணித நூலிலும் தரப்பட்டுள்ள பின்வரும் தேற்றங்களை மாணாக்கன் மறுமுறை படித்தல் வேண்டும் :

(1) $f(x, y, z)=0$ என்னும் பரப்பிற்கு $(x, y, z)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வனினது திசைக் கோசைன்கள்

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}$$

என்னும் விகிதத்திலிருக்கும்.

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial x}=p\ (\text{எண்க}),\quad -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial y}=q\ (\text{எண்க})$$

ஆதலால் இவ்விகிதம் $p : q : -1$ எனவும் எழுதப்படலாம்.

இவ்வத்தியாயம் முழுவதிலும் $p$, $q$ என்னுங் குறியீடுகள் இங்கு வரையறுக்கப்படுவது போல் சிந்திக்கப்படல் வேண்டும்.

(ii) $a, b$ என்பன மாறும் பரமானங்களாக,

$$f(x, y, z, a, b)=0$$

என்னும் பரப்புத் தொகுதியின் சூழியானது

$$f=0,\ \frac{\partial f}{\partial a}=0,\ \frac{\partial f}{\partial b}=0$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து $a, b$ ஆகியவற்றின் நீக்கலாற் காணப்படும். இம்முடிபு சூழியல்லாத வேறு ஒழுக்குக்களையும் கொள்ளலாம். (அத்தியாயம் **VI**).

### 123. லகிராஞ்சியின் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடும் அதன் கேத்திரகணித முறை விளக்கமும்.

இது $$Pp+Qq=R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்குக் கொடுக்கப்படும் பெயர்; இங்கு $P$, $Q$, $R$ என்பன $x, y, z$ ஆகியவற்றின் சார்புகள்.

கேத்திரகணிதமுறை விளக்கம் ஒரு குறித்த பரப்புக்குச் செவ்வன் $P\,;\,Q\,;\,R$ என்றும் விகிதத்திலுள்ள திசைக் கோசைன்கள் கொண்ட கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகுமென்பதே. ஆனால் ஈற்று அத்தியாயத்தில்

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் யாதுமொரு புள்ளியில் தொடலியானது $P\,;\,Q\,;\,R$ என்னும் விகிதத்திலுள்ள திசைக் கோசைன்கள் கொள்ளும் வளையிக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனவும் ($u=$ மாறிலி, $v=$ மாறிலி, என்பன இவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளின் இரு குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளாகுமிடத்து) $\phi(u, v)=0$ என்பது அத்தகை வளையிகளுக்கூடாகச் செல்லும் பரப்பைக் குறிக்குமெனவுங் கண்டுள்ளோம்.

அத்தகைப் பரப்பினது ஒவ்வொரு புள்ளிக்கூடாகவும் முழுவதும் பரப்பிற் கிடக்குமாறு ஒரு வளையி செல்லும். ஆகவே, பரப்புச் செவ்வன் இவ்வளையியினது தொடலிக்குச் செங்குத்தாதல் வேண்டும், அதாவது $P;\ Q\,;\ R$ என்னும் விகிதத்திலுள்ள திசைக் கோசைன்கள் கொண்ட கோட்டுக்குச் செங்குத்தாதல் வேண்டும். இதுவே பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டால் வேண்டப்படுவது.

ஆயின் (1) என்னும் சமன்பாட்டின் பரப்புக்கள் சோடிகளாக எடுக்கப்படுமிடத்து (2) என்னும் சமன்பாடுகளின் வளையிகளைத் தருவனவாகும். (2) என்னும் சமன்பாடுகள் துணைச் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

ஆகவே, $u=$ மாறிலி, $v=$ மாறிலி, என்பன (2) என்னும் துணைச் சமன்பாடுகளினது எவையேனும் இரு சாராத் தீர்வுகளாக, $\phi$ ஆனது யாதும் எதேச்சைச் சார்பாயின், $\phi(u, v) = 0$ என்பது (1) இன் தொகையீடாகும். இது லகிராஞ்சின் ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தொகையீடு எனப்படும்.

உ-ம் (i) $$p+q=1.$$

துணைச் சமன்பாடுகள் பிரிவு 112, உ-ம் (1) இல் சிந்திக்கப்பட்டுள்ளனவாகும் ; அவை சமாந்தர நேர் கோட்டுக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும்

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{1} \text{ என்பன.}$$

இரு சாராத் தொகையீடுகள் இந்நேர் கோடுகளைக் கொள்ளும் இரு தளக் குடும்பங்களைக் குறிக்கும்

$$x-z=a,$$
$$y-z=b$$

என்பனவாகும்.

பொதுத் தொகையீடாகிய, $\phi(x-z, \ y-z)=0$ என்பது, $\phi(x,y)=0$, $z=0$ என்னும் வளையிக்கூடாகச் செல்லும் குடும்பக் கோடுகளால் ஆக்கப்படும் பரப்பைக் குறிக்கும்.

ஒரு வரையறுத்த வளையி, $x^2+y^2=4$, $z=0$ என்னும் வட்டத்தைப் போன்றது போல், எமக்குத் தரப்படுமாயின் தந்த வட்டத்தைச் சந்திக்கும் குடும்பக் கோடுகளால் ஆக்கப்படும் நீள்வளைய உருளையாகிய

$$(x-z)^2+(y-z)^2=4$$

என்னும் ஒத்த குறிப்பிட்ட தொகையீட்டை அமைக்கலாம்.

உ-ம் (ii) $zp=-x$. (பிரிவு 112, உ-ம் (ii) பார்க்க.)

துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{0}=-\frac{dz}{x}$$

ஆகும் ; இவற்றின் இரு தொகையீடுகள் $x^2+z^2=a$, $y=b$ ஆகும்.

$\phi(x^2+z^2, y)=0$ என்னும் பொதுத் தொகையீடு

$$\phi(x^2, y)=0, \ \ z=0$$

என்னும் வளையியை இடைவெட்டும் குடும்ப வளையிகளால் (இவ்வகையில் வட்டங்களால்) ஆக்கப்படும் சுற்றற் பரப்பைக் குறிக்கும்.

உ-ம் (iii) தனது தொடலித் தளங்கள் $z$- அச்சிலிருந்து $k$ என்னும் ஒருமை நீளமுள்ள வெட்டுத்துண்டு வெட்டும் பரப்பைக் காண்க.

$(x, y, z)$ இல் தொடலித்தளம் ஆவது

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

$X=y=0$ ஆயின், $Z=z-px-qy=k.$

துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z\text{-}k}$$

ஆகும் ; $y=ax$, $z\text{-}k=bx$ என்பன இவற்றின் தொகையீடுகள்.

$\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z\text{-}k}{x}\right)=0$ என்னும் பொதுத் தொகையீடு தனது உச்சி $(o, o, k)$ இலுள்ள யாதுமொரு கூம்பைக் குறிக்கும் ; இப்பரப்புகளுக்கு வேண்டிய உடைமை உண்டு என்பது தெளிவு.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுத் தொகையீடுகளைப் பெறுக. [அத்தியாயம் XI இலுள்ள முதற் பயிற்சித் தொடையோடு ஒப்பிடுக.]

(1) $xp+yq=z$

(2) $(mz-ny)p+(nx-lz)q=ly-mx.$

(3) $(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0$

(4) $yzp+zxq=xy.$

(5) $(y+z)p+(z+x)q=x+y.$

(6) $(z^2-2yz-y^2)p+(xy+xz)q=xy-xz.$

(7) $p+3q=5z+$ தான் $(y-3x)$

(8) $zp-zq=z^2+(y+x)^2$

(9) $y^2=4x$, $z=1$ என்னும் பரவளைவைச் சந்திக்கும் பரப்பு ஒன்றைக் குறிக்கும் பயிற்சி (1) இனது ஒரு தீர்வு காண்க.

(10) ஒரு கூம்பு வளைவுருவைக் குறிக்கும் பயிற்சி (4) இனது மிகப் பொதுவான தீர்வு காண்க

(11) பயிற்சி (6) இனது தீர்வு ஒரு கோளத்தைக் குறிக்குமாயின், மையம் உற்பத்தியிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

(12) தமது செவ்வன்கள் எல்லாம் $z$ – அச்சை இடைவெட்டுமாறுள்ள பரப்புக்களைக் காண்க.

## 124. பொதுத் தொகையீடு பற்றி பகுப்பு ஆராய்வு.

$a$, $b$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளாக, $u(x,y,z)=a$, $v(x,y,z)=b$ என்பன

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

என்னும் சமன்பாடுகளினது எவையேனும் இரு சாராத் தொகையீடுகள் ஆகுக.

வகையிடலால் $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\partial u\frac{dz}{\partial z}=0$ ஆதலால்,

(1) இலிருந்து $P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)

(2) என்பதன் இடக்கைப் பக்கம் $a$ என்னும் மாறிலியைக் கொள்ளாமையால் அது $u=a$ என்னுந் தொடர்பின் காரியமாக மறைதல் முடியாது. ஆகவே (2) என்பது சர்வசமனாகத் திருத்தியாக்கப்படும்.

இதேபோல் சர்வசமனாக $P\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+Q\dfrac{\partial v}{\partial y}+R\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$ ஆகும் .......... (3)

இனி, $w(x,y,z)=c$ என்பது

$$Pp+Qq=R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

என்னும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது $c$ என்னும் மாறிலியைக் கொள்ளும் யாதும் ஒரு தொகையீடாகுக. $z$ ஐ $x$, $y$ ஆகியவற்றின் சார்பாக எடுத்துக்கொண்டு $x$ ஐ குறித்தும் பின்னர் $y$ ஐக் குறித்தும் பகுதியாய் வகையிடுமிடத்து

$$\frac{\partial w}{\partial x}+p\ \frac{\partial w}{\partial z}=0=\frac{\partial w}{\partial y}+q\ \frac{\partial w}{\partial z},$$

இவற்றிலிருந்து (4) என்பது $-\dfrac{\partial w}{\partial z}$ ஆல் பெருக்கப்பட்ட பின் சர்வ சமனாகத் தருவது

$$P\frac{\partial w}{\partial x}+Q\frac{\partial w}{\partial y}+R\frac{\partial w}{\partial z}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

(2), (3), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து $P$, $Q$, $R$ என்பவற்றை நீக்கல் தருவது

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

என்னும் யக்கோபியன் சர்வசமனாகப் பூச்சியமாகுமென்பதே.

ஆகவே $w$ ஆனது $u$, $v$ ஆகியவற்றின் சார்பாகி $w-c$ என்பதும் அவ்வாறே ஆகும், $w-c=\phi(u, v)$ என்க : அதாவது

ஓர் எதேச்சை மாறிலியைக் கொள்ளும் (4) இனது யாதும் ஒரு தொகையீடு $\phi(u, v)=0$ என்னும் பொதுத் தொகையீட்டில் உட்படுத்தப்படும்.

இந்நியாய முறையின் வலிமைக்குப் போதிய நிபந்தனைகளாக ஆவன அவாவப்படும் ஒன்பது பகுதிப் பெறுதிகள் தொடர்ச்சியானவை என்பதும் $P$, $Q$, $R$ என்பன யாவும் ஒருங்கு மறைதலில்லையென்பதும் உள்ளன.

## 125. விசேட தொகையீடுகள்

பிரிவு 124 இனது நியாயமுறை ஓர் எதேச்சை மாறிலி கொள்ளாத தொகையீடு, $w=0$ என்க, பற்றி உண்மையாகாதிருக்கலாம்; ஏனெனின் (5) என்னுஞ் சமன்பாடு சர்வசமன்பாடாகாது $w=0$ என்பதன் காரியமாகலாம். உதாரணமாக,

$$xp+yq=z$$

என்பதற்கு $u=z/x$, $v=z/y$ என எடுக்கலாம். ஆயின் $w=z^2-xy$ என்பது (5) இனது இடக்கைப் பக்கத்தை $2(z^2-xy)=2w$ என்பதற்கு ஒடுக்கும்; இது $w=0$ ஆகுமிடத்து மறையும். $2z(z^2-xy)/x^2y^2$ என்பதற்கு ஒடுங்கும் யக்கோபியனும் $w=0$ ஆகுமிடத்து மறையும். $z^2-xy=\phi(z/x, z/y)$ என்னும் வடிவத்தில் யாது தொடரும் இல்லை, ஆனால் $z^2-xy=0$ என்பது $uv-1=0$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் ஒரு வழியாதலால் அது பொதுத் தொகையீட்டில் உட்படுத்தப்படும். அத்தகைத் தொகையீட்டைச் சிலர் விசேட தொகையீடு என்பார்கள், ஆனால் அதனை **இரண்டாம் இனச் சாதாரண தொகையீடு** என்பது நன்றாகும். இதேமாதிரி $z=0$ என்னுந் தொகையீட்டுக்குமாகும்.

(5) என்னுஞ் சமன்பாடு $w=0$ என்பதன் பயனாக மட்டுமே திருத்தியாக்கப்படுதலோடு ஒன்பது பகுதிப் பெறுதிகளுட் சில $w=0$ ஆகுமிடத்து முடிவில்லாதனவாகுமிடத்து இந்நியாய முறையின் கூடுதலான தோல்வி நிகழலாம். உதாரணமாக

$$p-q=2\sqrt{z}$$

என்பதற்கு $u=x+y$, $v=x-\sqrt{z}$ என எடுக்கலாம். ஆயின் $w=z$ என்பது (5) இனது இடதுகைப் பக்கத்தை $2\sqrt{z}$ இற்கு ஒடுக்கும். $z=0$ ஆகுமிடத்து இது மறையும். ஆனால் $\dfrac{\partial v}{\partial z}$ ஆனது முடிவில்லாததாகி (3) இன் இடக்கைப் பக்கம் தேராததாகும்; ஆகவே (3), (5) என்பன ஒருங்கே உண்மையாகுமென இங்கு வற்புறுத்தல் முடியாது. யக்கோபியன் $-1$ ஆதலால் பூச்சியமாகாது என்பது உறுதி. $z=0$ என்னுந் தொகையீடு பொதுத் தொகையீட்டில் உட்படுத்தப்படாது என்பது உறுதி; இது **விசேட தொகையீடு** எனப்படும். கோசாற், கிறிஸ்ரல் ஆகியோரால் வெளியாக்கப்பட்டுள்ள அத்தகைத் தொகையீடுகள் ஃபோசைத் J. M. ஹில் ஆகியோரால் தர்க்கிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு விசேட தொகையீட்டை $P$, $Q$, $R$ என்னுங் குணகங்களினது இயற்கையோடு தொடுக்கும் ஒரு பொதுத் தேற்றமும் அத்தகைத் தொகையீடுகளைக் காணும் முறைகளும் அவற்றின் கேத்திரகணித முறை வகைக்குறிப்பும் எனது வெளியாக்கல்களிலே தரப்படும்(**லண்டன் கணித சங்கப் பத்திரிகை** 1938, 1939). ஒரு விசேட தொகையீடு நிகழ்தற்கு $P$, $Q$, $R$ என்பன $x$, $y$, $z$ என்பவற்றின் முழுவெண்வலுக்கள் கொண்ட தொடராக விரிக்கத்தகாதன என்பது வேண்டியதாகும். ஆனால் இந்நிபந்தனை போதியதல்ல.

இந்நியாயமுறை தோல்வி **அடையும்** மூன்ரும் வழி $w=0$ ஆகுமிடத்து $P, Q, R$ என்பன **யா**வும் மறைதலே. வழக்க**மா**க நிகழ்வதுபோல $P, Q, R$ ஆகியவற்றை ஒரு தகுதியான காரணியால் வகுத்தலால் இது விலக்கப் படுமாயின் (சிலர் **தனிச்சிறப்புத்** தொகையீடு எனக் **கூ**றும்) அத்தகைத் தொகையீடு நிரணமானது எனப்படுதல் மிக நன்ருகும்.

**உதாரணமாக,** $z=0$ **என்பது** $zp+z^2q=z$ **என்பதற்குத்** திரணமான தொகையீடாகும் ; ஆனல் $p+zq=1$ என்பதற்கு அவ்வாறு ஆகாது.

## 126. $n$ சாராமாறிகள் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு.

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\frac{dx_3}{P_3}=\,..\,=\frac{dz}{R}.$$

என்னுந் துணைச் சமன்பாடுகளினது எவையேனும் $n$ சாராத் தொகையீடுகள், $u_1=$ மாறிலி, $u_2=$ மாறிலி ............ஆயின்

$$P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3+\,..\,+P_np_n=R$$

என்பதன் பொதுத் தொகையீடு $(\phi u_1, u_2, u_3\,..\,u_n)=0$ ஆகும் ; இங்கு $p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}, p_2=\frac{\partial z}{\partial x_2}$, ஆகி $P$ களும் $R$ உம் $x$ களினதும் $z$ இனதும் சார்புகளாகும்.

பிரிவு 124 இல் உள்ளது போல் இது சரி பார்க்கப்படலாம். மூன்று சாரா மாறிகளின் வகையில் மாணுக்கன் நிறுவலை எழுதல் வேண்டும்.

இரு சாரா மாறிகளின் வகையிலுள்ளதுபோல், புறநடைச் சமன்பாடுகளுக்குப் பொதுத் தொகையீட்டோடு விசேட தொகையீடுகளுமுண்டு.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $p_2+p_3=1+p_1.$

(2) $x_1p_1+2x_2p_2+3x_3p_3+4x_4p_4=0.$

(3) $(x_3-x_2)p_1+x_2p_2-x_3p_3=x_2(x_1+x_3)-x_2^2.$

(4) $x_2x_3p_1+x_3x_1p_2+x_1x_2p_3+x_1x_2x_3=0.$

(5) $p_1+x_1p_2+x_1x_2p_3=x_1x_2x_3\sqrt{z}.$

(6) $p_1+p_2+p_3\{1+\sqrt{(z-x_1-x_2-x_3)}\}=3.$

## 127. $P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial t}{\partial z}=0.$ என்னுஞ் சமன்பாடு.

$P$, $Q$, $R$ என்பன $f$ இன் சார்பாகாது $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாயின் இச்சமன்பாடு இரு வேறுவேருன நிலைகளிலிருந்து நோக்கப் படலாம்.

உதாரணமாக,

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+2\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்பதை எடுத்துக் கருதுக. இது, $\phi(x+y,\ x-\sqrt{z})=0$ என்னும் பொதுத் தொகையீடும் $z-0$ என்னும் விசேட தொகையீடும் கொண்ட

$$p-q=2\sqrt{z}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னும் முப்பரிமாணச் சமன்பாட்டுக்குச் சமவலுவாகுமெனக் கருதப்படலாம்.

வேறு மாதிரியாக, **(1)** ஐ நாலு மாறிகள் கொண்ட சமன்பாடாக எடுக்குமிடத்து.

$$\phi(f, x+y, x-\sqrt{z})=0$$

என்னும் பொதுத் தொகையீட்டைப் பெறுவோம்; $\psi$ ஆனது எதேச்சைச் சார்பாக, இது $f=\psi(x+y, x-\sqrt{z})$ என்பதற்குச் சமவலுவாகும். ஆனால் $f=z$ ஆயின்

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+2\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=2\sqrt{z}=2\sqrt{f}.$$

ஆகவே, $f=z=0$ என்பது உண்மையில் **(1)** இனது ஒரு தீர்வைத் தந்தபோதிலும் $f=z$ என்பது தீர்வாகாது.

பொதுவாக, $P$, $Q$, $R$ என்பன $f$ ஐக் கொள்ளாதிருக்க.

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

ஆனது நாற்பரிமாணமானதாகக் கொள்ளப்படுமாயின் அதற்கு விசேட தொகையீடு யாதுமில்லை (**பின்னிணைப்பு** $B$ பார்க்க). இது போன்ற தேற்றம் எத்தொகைச் சாரா மாறிகளுக்கும் உண்மையாகும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $f=x$ ஆயின், $f=0$ என்னும் பரப்பு $\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0$ என்பதைத் திருத்தியாக்குமா என வாய்ப்புப் பார்த்து, அது துணைகொண்டு, இச்சமன்பாடு முப்பரிமாண முறையில் விளக்கப்படுமிடத்து $x=0$, $y=0$, $z=0$ என்னும் மூன்று விசேட தொகையீடுகளும் $\phi(\sqrt{z}-\sqrt{x},\ \sqrt{z}-\sqrt{y})=0$ என்னும் பொதுத் தொகையீடும் கொண்டது என்பதையும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(2) உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லாது ஆள்கூற்றுத் தளங்களைத் தொடுமாறேனு அவற்றுள் ஒன்றில் முழுக்கக் கிடக்குமாறேனு உள்ள வளையிகளுக்கூடாகச் செல்லும் பரப்புக்களை ஈற்றுப் பயிற்சியினது தொகையீடு குறிக்குமெனக் காட்டுக.

[குறிப்பு. $\frac{dx}{ds}=\sqrt{\left(\frac{x}{x+y+z}\right)}$ எனவும் $x=0$ ஆயின் $x$, $y$, $z$ என்பன எல்லாம் பூச்சியமானாலன்றி $\frac{dx}{ds}=0$ எனவும் நிறுவுக.]

(3) $\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y}=0$ என்பது இரு பரிமாண முறையிற் சிந்திக்கப்படுமிடத்து, $\sqrt{y}=\sqrt{x}+c$ (என்னும் பரவளைவுக் குடும்பத்தையும் அதன் சூழியையும், $x=0$, $y=0$ என்னும் ஆள்கூற்றச்சுக்களையும் குறிக்குமெனக் காட்டுக; ஆனால் முப்பரிமாண முறையிற் சிந்திக்கப்படுமிடத்து அது $z=\phi(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})$ என்னும் பரப்புக்களைக் குறிக்கும்.

**128. ஏகபரிமாணமல்லாச் சமன்பாடுகள்.** முதலாவதிலும் வேறான படியில் $p$, $q$ என்பன நிகழும் சமன்பாடுகளை இப்போது எடுத்துக் கருதுவோம். பொதுத் தீர்வைத் தருதற்கு முன்னர் நாலு எளிய நியம வடிவங்களைப் பற்றித் தர்க்கிப்போம் ; இவற்றிற்கு "முற்றிய தொகையீடு" ஒன்றை (அதாவது ஈர் எதேச்சை ஒருமைகளை உட்படுத்தும் தொகையீடு) கண்கணிப்பாலோ வேறு எளிய வழியிலோ பெறலாம். முற்றிய தொகையீடுகளிலிருந்து எவ்வாறு பொதுத் தொகையீடுகளும் தனிச்சிறப்புத் தொகையீடுகளும் உய்த்தறியப்படலாமெனப் பிரிவுகள் 133—135 இல் காட்டுவோம்.

**129. நியமம் I. p, q என்பன மட்டுமே தோன்றும்.** உதாரணமாக $q=3p^2$ என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்க. மிகக் கண்கூடான தீர்வு $p$, $q$ என்பவற்றைச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் மாறிலிகளாக எடுத்தலே, $p=a$, $q=3a^2$ என்க.

ஆயின் $dz=p\,dx+q\,dy=a\,dx+3a^2\,dy$ ஆதலால்

$$z=ax+3a^2y+c.$$

இது $a$, $c$ என்னும் ஈர் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும் முற்றிய தீர்வு.

பொதுவாக, $f(p, q)=0$ என்பதன் முற்றிய தீர்வு,

$a$, $b$ என்பன $f(a, b)=0$ என்னுந் தொடர்பால் தொடுக்கப்பட, $z=ax+by+c=0$ ஆகும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

பின்வருவனவற்றின் முற்றிய தீர்வுகளைக் காண்க :

(1) $p=2q^2+1$.

(2) $p^2+q^2=1$.

(3) $p=e^q$.

(4) $p^2q^3=1$.

(5) $p^2-q^2=4$.

(6) $pq=p+q$.

**130. நியமம் II p, q, z என்பன மட்டுமே தோன்றும்**

$$z^2(p^2z^2+q^2)=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்க. ஒரு பரீட்சைத் தீர்வாக $z$ ஆனது $x+ay$ $(=u$, என்க) என்பதன் சார்பாகுமெனக் கொள்க ; இங்கு $a$ ஆனது ஓர் எதேச்சை மாறிலி ஆயின்

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du}\;;\; q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{dz}{du}$$

(1) இல் பிரதியிட, $z^2\left(\dfrac{dz}{du}\right)^2(z^2+a^2)=1,$

அதாவது $$\frac{du}{dz}=\pm z(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}},$$

அதாவது $$u+b=\pm\tfrac{1}{3}(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}},$$

அதாவது $$9(x+ay+b)^2=(z^2+a^2)^3.$$

பொதுவாக இந்த முறை $f(z, p, q)=0$ என்பதை

$$f\left(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}\right)=0$$

என்னும் சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

பின்வருவனவற்றின் முற்றிய தொகையீடுகளைக் காண்க :

(1) $4z=pq$.

(2) $z^2=1+p^2+q^2$.

(3) $q^2=z^2p^2(1-p^2)$.

(4) $p^3+q^3=27z$.

(5) $p(z+p)+q=0$.

(6) $p^2=zq$.

### 131. நியமம் III. $\mathbf{f(x, p)=F(y, q)}$

$$p-3x^2=q^2-y$$

என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்க.

பரீட்சைத் தீர்வாகச் சமன்பாட்டினது ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $a$ என்னும் எதேச்சை மாறிலிக்குச் சமப்படுத்துக ; இது தருவன

$$p=3x^2+a,\ q=\pm\sqrt{(y+a)}.$$

ஆனால்

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx+q\,dy \\ &= (3x^2+a)\,dx \pm\sqrt{(y+a)}\,dy\ ; \end{aligned}$$

ஆகவே

$$z=x^3+ax\pm\tfrac{2}{3}(y+a)^{\frac{3}{2}}+b\ ,$$

இதுவே வேண்டிய முற்றிய தொகையீடு.

பின்வருவனவற்றின் முற்றிய தொகையீடுகளைக் காண்க :

(1) $p^2=q+x$.

(2) $pq=xy$.

(3) $yp=2yx+$ மட $q$.

(4) $q=xy\,p^2$.

(5) $pe^y=qe^x$.

(6) $q(p-$ கோசை $x)=$ கோசை $y$.

### 132. நியமம் IV. கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு ஒப்பான பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.

$y=px+f(p)$ என்பதன் முற்றிய மூலி நேர்கோட்டுக் குடும்பமாகிய $y=cx+f(c)$ ஆகுமென்பதை அத்தியாயம் VI இல் காட்டியுள்ளோம். இதேமாதிரி

$$z=px+qy+f(p, q)$$

என்னும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது முற்றிய தொகையீடு தளக் குடும்பமாகிய $z=ax+by+f(a, b)$ ஆகும். உதாரணமாக, $z=px+qy+p^2+q^2$ என்பதன் முற்றிய தொகையீடு $z=ax+by+a^2+b^2$ ஆகும்.

நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தின் சூழியைத் தரும் கிளெரோவின் வடிவத் தனிச்சிறப்புத் தீர்வுக்கு ஒக்க தளக் குடும்பத்தின் சூழியைத் தரும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் "தனிச்சிறப்புத் தொகையீட்டை" அடுத்த பிரிவில் காண்போம்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $z = px + qy - 2p - 3q$ என்பதன் முற்றிய தொகையீடு, (2, 3, 0) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் இயல்தகு தளங்கள் எல்லாவற்றையும் குறிக்குமென்பதை நிறுவுக.

(2) $z = px + qy + \sqrt{(p^2 + q^2 + 1)}$ என்பதன் முற்றிய தொகையீடு உற்பத்தியிலிருந்து அலகு தூரத்திலுள்ள தளங்கள் எல்லாவற்றையும் குறிக்குமென்பதை நிறுவுக.

(3) $z = px + qy + pq/(pq - p - q)$ என்பதன் முற்றிய தொகையீடு ஆள்கூற்றச்சுக்களில் ஆக்கப்படும் வெட்டுத் துண்டுகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை ஒன்று ஆகுமாறுள்ள தளங்கள் எல்லாவற்றையுங் குறிக்குமென்பதை நிறுவுக.

**133. தனிச்சிறப்புத் தொகையீடுகள்.** ஒரு சாதாரணமான முதல் வரிசைச் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலியாற் குறிக்கப்படும் வளையிக் குடும்பத்திற்கு ஒரு சூழி உண்டெனின் இச்சூழியின் சமன்பாடு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகுமென்பதை, அத்தியாயம் VI இல் காட்டியுள்ளோம். இதுபோன்ற தேற்றம் ஒன்று முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் முற்றிய தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் பரப்புக் குடும்பம் பற்றி உண்மையாகும். அக்குடும்பத்திற்கு ஒரு சூழி உண்டெனின் அதன் சமன்பாடு "தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு" எனப்படும். இது உண்மையில் ஒரு தொகையீடாகுமென்பது புலனுதற்கு சூழியினது யாது புள்ளியிலும் அதனைத் தொடும் ஒரு குடும்பப்பரப்பு உண்டு என்பதைக் கவனித்தல் மட்டுமே வேண்டும். ஆகவே, சூழிக்கும் இப்பரப்புக்கும் செவ்வன்கள் பொருந்துதலால் சூழியின் யாதுமொரு புள்ளியில் $p$, $q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் யாதோ குடும்பப் பரப்பு ஒன்றிற்கு உள்ள அவையே பெறுமானங்களாகி, இக்காரணத்தால் அதே சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும்.

தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகள் காணும் இரு முறைகள் $c$ – பிரித்துக்காட்டியிலிருந்தும் $p$ – பிரித்துக்காட்டியிலிருந்தும் தந்துள்ளோம்; இம்முறைகள் தமது சமன்பாடுகள் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்காத கணு–ஒழுக்குக்கள், கூர் ஒழுக்குக்கள், பரிசவொழுக்குக்கள் ஆகியவற்றையுந் தரும் எனக் காட்டியுள்ளோம். அத்தியாயம் VI இல் உள்ள கேத்திரகணித நியாயமுறை பரப்புக்களுக்கும் திரிக்கப்படலாம், ஆனால் தனிச்சிறப்புத் தொகையீடுகள் தரா அன்னிய ஒழுக்குக்கள் பற்றிய தர்க்கம் கூடுதலாகச் சிக்கலாகும். சூழியைப் பொறுத்தவரை அத்தியாயம் VI ஐ விளங்கிக் கொண்ட மாணுக்கனுக்கு இப்பரப்பு

$$f(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

என்னும் முற்றிய தொகையீடு, இரு பெற்ற சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றிலிருந்து $a$, $b$ என்பவற்றை நீக்குதலாலோ

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு, இரு பெற்ற சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றிலிருந்து $p$, $q$ என்பவற்றை நீக்குதலாலோ பெறப்படும் பரப்புக்களில் அடங்குமென்பதை விளங்கிக் கொள்ளல் கடினமாகாது. யாதும் உண்மையான உதாரணத்தில் தோற்றமாகத் தனிச்சிறப்புத் தொகையீடாவது உண்மையில் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமா என்பது பற்றிச் சோதித்தல் வேண்டும்.

உ-ம் (i). பிரிவு 132 இலிலுள்ள சமன்பாட்டின் முற்றிய தொகையீடு

$$z=ax+by+a^2+b^2.$$

$a$ யைக் குறித்து வகையிட,

$$o=x+2a.$$

இதே மாதிரி $0=y+2b$

$a$, $b$ ஆகியவற்றை நீக்க, $4z=-(x^2+y^2)$.

இது $z=px+qy+p^2+q^2$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென்பதும் முற்றிய தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் தளங்கள் எல்லாவற்றினதும் சூழியாகிய சுற்றற் பரவளைவுருவைக் குறிக்குமென்பதும் எளிதிற் சரிபார்க்கப்படலாம்.

உ-ம் (ii) பிரிவு 130 இலுள்ள சமன்பாட்டின் முற்றிய தொகையீடு

$$9\ (x+ay+b)^2=(z^2+a^2)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

$a$ யைக் குறித்து வகையிட

$$18y\,(x+ay+b)=6a(z^2+a^2)^2 \ldots\ldots\ldots(2).$$

$$\text{இதே மாதிரி } 18\ (x+ay+b)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

$$\text{ஆகவே (2) இலிருந்து } \quad a=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து (1) இல் பிரதியிட, $z=0$. ஆனால் $z=0$ என்பது $p=q=0$ எனத் தரும்; இப்பெறுமானங்கள் $z^2\ (p^2z^2+q^2)=1$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கா.

ஆகவே $z=0$ என்பது தனிச் சிறப்புத் தொகையீடல்ல.

உ-ம் (iii) $p^2 = zq$ என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்க. $p$ யைக் குறித்து வகையிட, $2p = 0$.

$$\text{இதே மாதிரி } 0 = z.$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து $p$, $q$ ஆகியவற்றை நீக்க $z = 0$.

இது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கலால் இது உண்மையில் ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகும்.

ஆனால் எளிதில் முற்றிய தொகையீடு எனக் காணப்படும்

$$z = be^{ax+2}a^{2y}$$

என்பதில் $b = 0$ என இடுதலால் அது பெறப்படும்.

ஆகவே $z = 0$ என்பது தனிச் சிறப்புத் தொகையீடு ஆவதுமன்றி முற்றிய தொகையீட்டினது ஒரு குறிப்பிட்ட வகையுமாகும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

பின்வருவனவற்றின் தனிச்சிறப்புத் தொகையீடுகளைக் காண்க :

(1) $z = px + qy + \text{மட}.pq$.

(2) $z = px + qy + p^2 + pq + q^2$

(3) $z = px + qy + \frac{1}{2}p^2q^2$.

(4) $z = px + qy + p/q$.

(5) $4z = pq$.

(6) $z^2 = 1 + p^2 + q^2$.

(7) $p^3 + q^3 = 27z$.

(8) நியமம் I இற்கோ III இற்கோ உரிய யாதுமொரு சமன்பாட்டுக்கும் தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு இல்லையெனக் காட்டுக. [வழக்கமான செய்கை $0 = 1$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு வழிகாட்டும்.]

(9) $z = 0$ என்பது $q^2 = z^2p^2(1 - p)$ என்பதன் ஒரு தனிச் சிறப்புத் தொகையீடும் முற்றிய தொகையீட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையும் ஆகுமென்பதைக் காட்டுக.

## 134. பொதுத் தொகையீடுகள்

$$z = ax + by + a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னும் முற்றிய தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் தளங்கள் எல்லாம்

$$4z = -(x^2 + y^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னும் தனிச் சிறப்புத் தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் சுற்றற் பரவளைவுருவைத் தொடும் என்பதை ஈற்றுப் பிரிவின் உ-ம் (1) இற் கண்டுள்ளோம்.

இனி, இத்தளங்கள் எல்லாவற்றையுமல்ல $y = 0$ என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்தானவையையே எடுத்துக் கருதுக. (1) இல் $b = 0$ என இடுதலால் இவை பெறப்படும் ; இது தருவது

$$4z = -x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

என்னும் பரவளைவுருளையைச் சூழியாகக் கொள்ளும் $z = ax^2 + a^2$.

(0, 0, 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வேறொரு தொடை எடுக்க.

(1) இலிருந்து $1=a^2+b^2$ ஆதலால், (1) ஆனது

$$z=ax\pm y\sqrt{(1-a^2)}+1 \text{ ஆகும் ; இதன் சூழி}$$

$$(z=1)^2=x^2+y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

என்னும் செவ்வட்டக் கூம்பு என்பது எளிதிற் காணப்படும்.

பொதுவாக, $f$ ஆனது $a$ இன் யாதுமொரு சார்பாக $b=f\,(a)$ என இடலாம் ; இது தருவது

$$z=ax+yf\,(a)+a^2+\{f\,(a)\}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

(5) என்பதன் சூழி அதனிலிருந்தும் அதனை $a$ ஐ குறித்துப் பகுதியாய் வகையிடலாற் பெறப்படும் சமன்பாட்டிலிருந்தும், அதாவது

$$0=x+yf'\,(a)+2a+2f\,(a)\,f'(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

என்பதிலிருந்தும், $a$ ஐ நீக்கலாற் பெறப்படும். $f$ என்பது பூரணமாக எதேச்சையாகுஞ் சார்பாக விடப்படுமாயின் நீக்குறு தொடக்க வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் "பொதுத் தொகையீடு" எனப்படும். (3), (4) என்னும் சமன்பாடுகள் பொதுத் தொகையீட்டிலிருந்து பெறப்படும் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளாகும்.

ஒரு முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் பொதுத் தொகையீடு ஆனது முற்றிய தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் இரட்டையாய் முடிவில்லாப் பரப்புத் தொடையிலிருந்து தேரப்படும் ஒவ்வோர் இயல்தகு ஒன்றியாய் முடிவில்லாத் தொடையினது சூழித் திரளைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகுமென வரையறுக்கலாம். முற்றிய தொகையீட்டில் $b=f\,(a)$ என இடுதலால் இத்தொடைகள் வரையறுக்கப்படும்.

சூழியை தரும் இரு சமன்பாடுகளில் $f$ என்னும் எதேச்சைச் சார்பும் அதன் வகையீட்டுக் குணகமும் இருத்தலால் அவற்றிலிருந்து $a$ என்பதை உண்மையில் நீக்கல் வழக்கமாக அசாத்தியமாகும். கேத்திர கணித முறைக் கவர்ச்சி $f$ என்பதை $a$ இனது யாதோ வரையறுத்த (எளிய) சார்பாக எடுத்தலால் ஆக்கப்படும் குறிப்பிட்ட வகைகளிலே முக்கியமாய்க் கிடக்கும்.

## 135. சிறப்பியல்புகள்

முற்றிய தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் பரப்புக்களிலிருந்து தேரப்படும் யாதும் ஒன்றியாய் முடிவில்லாத் தொடைக்கு உரிய ஈர் அடுத்துவரும் பரப்புக்களின் இடைவெட்டு வளையி ஒரு **சிறப்பியல்பு** எனப்படும்.

இனி, அத்தகைய வளையி பரப்புக் குடும்பச் சமன்பாட்டிலிருந்து சூழியைத் தரும் அதே இரு சமன்பாடுகளாற் காணப்படும். உதாரணமாக, ஈற்றுப் பிரிவின் (5), (6) என்னுஞ் சமன்பாடுகள் $a$, $f\,(a)$, $f'\,(a)$ ஆகியவற்றின் எவையேனும் வரையறுத்த எண் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு நேர் கோட்டை (இரு தளங்களினது இடைவெட்டாக) வரையறுக்கும் ;

இந்நேர்கோடு ஒரு சிறப்பியல்பாகும். இவ்வுதாரணத்தில் சிறப்பியல்புகள் (2) என்னும் சுற்றற் பரவளைவுருவைத் தொடும் மும்மையாய் முடிவில்லா நேர்கோட்டுத் தொடையாகும்.

(3) என்னும் பரவளைவுருளை $y=0$ என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும் ஓர் ஒன்றியாய் முடிவில்லாத சிறப்பியல்புத் தொடையாற் பிறப்பிக்கப்படும், (4) என்னுங் கூம்பு (0, 0, 1) என்னும் நிலையான புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் வேருெரு சிறப்பியல்புத் தொடையாற் பிறப்பிக்கப் படும். ஆயின் பொதுத் தொகையீடு சிறப்பியல்புகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் அத்தகைப் பரப்புக்கள் எல்லாவற்றினதுந் திரளைக் குறிக்குமென்பது புலனுகும்.

தனிச் சிறப்புத் தொகையீடு ஒன்று உண்டெனின் அது சிறப்பியல்புகள் எல்லாவற்றுலும் தொடப்படும்; ஆகவே அது பொதுத் தொகையீடு குறிக்கும் அவற்றின் குறிப்பிட்ட தொடைகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்புக்களாலும் தொடப்படும். ஈற்றுப் பிரிவின் பரவளைவுருளையும், செவ்வட்டக் கூம்பும் சுற்றற் பரவளைவுருவைத் தொடுமென்பது எளிதிற் சரி பார்க்கப் படலாம்.

**136. ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டின் சிறப்புக்கள்.** இம்மாதிரி

$$Pp+Qq=R\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னும் ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டைப் பற்றித் தர்க்கித்தற்கு

$$u=\text{மாறிலி}$$

$$v=\text{மாறிலி}$$

என்பன துணைச் சமன்பாடுகளினது இரு சாராத் தொகையீடுகள் என உத்தேசிக்க. [$u$, $v$ என்பன சாராதனவாதலால் அவற்றுள் ஒன்று ஆதல் $z$ கொள்ளல் வேண்டும். இந்த ஒன்று $u$ என்க. இக்கட்டுப் பாட்டை ஆக்குவது $u+av+b$ என்பது $x$, $y$ ஆகியவற்றின் சார்பாக மட்டுமே இருத்தலைத் தடுத்தற்கேயாம்; ஏனெனின் இவ்வகையில் $u+av+b=0$ என்பது (1) என்பதைச் சாதாரண வழியில் திருத்தியாக்குவதற்குப் பதிலாக அதனிலுள்ள உறுப்புக்களைத் தேராதனவாக்கும்.]

ஆயின் (1) இனது ஒரு தொகையீடு

$$u+av+b=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்பது எளிதில் வாய்ப்புப் பார்க்கப்படலாம். இது முற்றிய தொகையீடாக எடுக்கப்படலாம். பொதுத் தொகையீடு

$$u+av+f(a)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$v+f'(a)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்பனவற்றிலிருந்து காணப்படும்.

(4) இலிருந்து $a$ ஆனது தனித்த $v$ இனது சார்பாகும், $a = F(v)$ **என்க.** (3) இற் பிரதியிட, $u$ ஆனது $v$ இன் சார்பாகும், $u = \psi(v)$ என்க ; இது இவ்வத்தியாயத் தொடக்கத்திற் கண்டுள்ள $\psi(u, v) = 0$ என்னும் பொதுத் தொகையீட்டுக்குச் சமவலுவாகும்.

தனது (2) என்னும் முற்றிய தொகையீடு பொதுத் தொகையீட்டினது ஒரு குறிப்பிட்ட வகை ஆகுமென்பது ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டின் புற நடையாகும். அதன் வேறொரு சிறப்பு, துணைச் சமன்பாடுகளாற் குறிக்கப்படும் வளையிகளாகிய அதன் சிறப்பியல்புகள் தொகையில் மும்மையாய முடிவில்லாதன ஆதற்குப் பதிலாக இரட்டையாய் முடிவில்லாதனவாகும் என்பதே. ஒரு தந்த புள்ளிக்கூடாக (பொதுவாக) ஒன்றே செல்லும். ஈற்றுப் பிரிவில் உதாரணமாகக் காட்டிய ஏகபரிமாணமல்லா வகையில் ஒரு முடிவில் தொகை அவ்வாறு உண்டு. இவை ஒரு பரப்பை அமைக்கும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

(1) $x$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமான

$$z = px + qy + p^2 + pq + q^2$$

என்பதன் சிறப்பியல்புகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க. அது உண்மையில வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென்பதையும் தனிச்சிறப்புத் தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படும் பரப்பைத் தொடுமென்பதையும் சரிபார்க்க.

(2) $z^2 = 4xy$ என்பது $z = px + qy +$ மட $pq$ என்பதன் ஒரு தொகையீடாகுமென்பதையும் முற்றிய தொகையீட்டில் உட்படுத்தப்பட்டு உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் தளங்களினது சூழியைக் குறிக்குமென்பதையும் நிறுவுக.

(3) $(-1, 0, 0)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் $q = 3p^2$ என்பதன் சிறப்பியல்புகள் $(x+1)^2 + 12yz = 0$ என்னுங் கூம்பைப் பிறப்பிக்குமென்பதை நிறுவுக.

(4) $z = px + qy + p/q$ என்பதன் தொகையீடாகிய $(y+1)^2 + 4xz = 0$ என்னும் தொகையீட்டின் இயற்கை என்ன ?

(5) $$z = (x+y)^2 + ax + by, \quad z = (x+y)^2 + \frac{mx^2 + ny^2}{x+y}$$

என்னும் சமன்பாடுகளுள் யாதுமொன்று ஒரு குறித்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் முற்றிய தொகையீடாகலாமென்பதையும், அதனிலிருந்து மற்றையது பொதுத் தொகையீட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாக உய்த்தறியப்படலாமென்பதையும் காட்டுக.

(6) $z = (x+a)^2 e^{by}$ என்பது $p^2 = 4ze^{qy/z}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு முற்றிய தொகையீடு என்பதைக் காட்டுக.

$y^2 z = 4\left(\frac{xy}{2-y}\right)^{2-y}$ ஆனது இதே சமன்பாட்டின் பொதுத் தொகையீட்டினது பாகமெனக்காட்டி அதனை மேலே தரப்பட்டுள்ள முற்றிய தொகையீட்டிலிருந்து உய்த்தறிக.

# அத்தியாயம் XII இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $z = px + qy - p^2q.$

(2) $o = px + qy - (px + z)^2q.$

(3) $z(z^2 + xy)(px - qy) = x^4.$

(4) $p^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{3}} = 3x - 2y.$

(5) $p_1^2 + 2x_2p_2 + x^2p_3 = 0.$

(6) $x_3p_1 + x_2p_2 + x_1p_3 = 0.$

(7) $p^3 + q^3 - 3pqz = 0.$

(8) $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 4z.$

(9) $p_1 + p_2 + p_3 = 4z.$

(10) $p^2 + 6p + 2q + 4 = 0.$

(11) $z^2p^2y + 6zpxy + 2zqx^2 + 4x^2y = 0.$

(12) $zpy^2 = x(y^2 + z^2q^2).$

(13) $p^2z^2 + q^2 = p^2q.$

(14) $(z - px - qy)x^3y^2 = q^2zx^3 - 3p^3z^2y^3.$

**(15)** $p + q = pq$ என்பதன் முற்றிய தொகையீட்டில் அடங்கி **(1, 1, 1)** என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுந் தளங்களின் சூழியைக் குறிக்கும் பொதுத் தொகையீட்டினது குறிப்பிட்ட வகையைக் காண்க.

**(16)** $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடு தொகையிடத் தகுமாயின் அது $Pp + Qq = R$ என்பதாற் குறிக்கப்படும் குடும்பத்திற்கு நிமிர்கோணமுறையாகும் பரப்புக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமென்பதை நிறுவுக.

அது துணை கொண்டு

$$\phi\{z(x + y)^2, x^2 - y^2\} = 0.$$

என்பதற்கு நிமிர்கோண முறையாகும் குடும்பங் காண்க.

**(17)** தமது தொடலித் தளங்கள் எல்லாம் உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் பரப்புக்களைக் காண்க.

**(18)** தமது செவ்வன்கள் எல்லாம் $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ என்னும் வட்டத்தை இடைவெட்டும் பரப்புக்களைக் காண்க.

**(19)** தமது தொடலித் தளங்கள் எல்லாம் ஆள்கூற்றுத் தளங்களோடு மாறாக் கனவளவு நான்முகி ஆக்கும் பரப்புக்களைக் காண்க.

**(20)** ஒவ்வொரு தொடலித் தளமும் அச்சுக்களிலிருந்து பூச்சிய அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகையுள்ள வெட்டுத்துண்டுகள் வெட்டுமாறு யாதும் விரிதகுப் பரப்பு இல்லை என்பதை நிறுவுக.

**(21)** இரு பரப்புக்கள் $x^2 + y^2 = 2z$ என்னும் இருபடியத்தைக் குறித்து முனைவு நிகர் மாற்றுக்களாயினும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடலித்தளம் மற்றையதன் முனைவுத்தளமாகுமாறு $(x, y, z)$, $(X, Y, Z)$ என்பன (ஒவ்வொரு பரப்பிலும் ஒன்றாக) ஈர் ஒத்த புள்ளிகளாயினும்

$$X = p;\ Y = q;\ Z = px + qy - z;\ x = P;\ y = Q$$

எனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு ஒரு பரப்பு $f(x, y, z, p, q) = 0$ என்பதைத் திருத்தியாக்குமாயின் மற்றையது $f(P, Q, PX + QY - Z, X, Y) = 0$ என்பதைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

(இச்சமன்பாடுகள் ஒன்றிலிருந்து ஒன்று இருமைக் கோட்பாட்டாற் பெறப்படும் எனப்படும்.

**(22)** $z = px + qy + pq$ என்பதற்கு இருமை முறையிலுள்ள சமன்பாடு

$$x = P = \frac{\partial Z}{\partial X} = -Y,\ y = Q = -X,$$

$$z = PX + QY - Z = -XY$$

எனத்தரும் $O = Z + XY$ என்பது எனக் காட்டுக. அது துணைகொண்டு (முதற் சமன்பாட்டினது தொகையீடாக) $z = -xy$ என்பதைப் பெறுக.

(23) ஒரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டு வழியால்

$$x+y+z=f(x^2+y^2+z^2)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டிலிருந்து எதேச்சைச் சார்பை நீக்குக.

[$x$, $y$ என்பவற்றைக் குறித்துப் பகுதியாய் வகையிட

$$1+p=\{f'(x^2+y^2+z^2)\}(2x+2zp),$$

$$1+q=\{f'(x^2+y^2+z^2)\}(2y+2zq).$$

ஆகவே $\quad (1+p)(y+zq)=(1+q)(x+zp),$

அல்லது $\quad (y-z)p+(z-x)q=x-y.$

(24) பிரிவு 123 இன் பயிற்சிகளின் தீர்வுகளைச் சரி பார்த்தற்குப் பயிற்சி 23 இன் முறையை வழங்குக.

(25) தந்த வளையிகளுக்கூடாகச் செல்லும் பரப்புக்களைக் குறிக்குமாறு பின்வரும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளினது குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளைக் காண்க.

(i) $p+q=1$ ; $x=0$, $y^2=z$. (ii) $xp+yq=z$ ; $x+y=1$, $yz=1$.

(iii) $(y-z)p+(z-x)q=x-y$ ; $z=0$, $y=2x$.

(iv) $x(y-z)p+y(z-x)q=z(x-y)$; $x=y=z$

(v) $yp-2xyq=2xz$ ; $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

(vi) $(y-z)\{2xyp+(x^2-y^2)q\}+z(x^2-y^2)=0$ ; $x=t^2$, $y=0$, $z=t^3$.

[வளையியின் இரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் துணைச் சமன்பாடுகளின் $u(x,y,z)=a$, $v(x,y,z)=b$ என்னும் இரு சாராத் தொகையீடுகளிலிருந்தும் $x$, $y$, $z$ என்பவற்றை நீக்குக. இது $a$, $b$ ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தொடர்பைத் தரும். $a$ யை $u(x, y, z)$ ஆலும் $b$ யை $v(x, y, z)$ ஆலும் இடமாற்றம் செய்ய வேண்டிய தொகையீட்டைப் பெறுவோம்.

உதாரணமாக, (i) இல் $u(x, y, z)=x-z=a$, $v(x, y, z)\equiv y-z=b$. இவற்றிலிருந்தும் $x=0$, $y^2=z$ என்னும் வளையிச் சமன்பாடுகளிலிருந்தும்

$$a=-y^2,\ b=y-y^2\ ;\quad \text{ஆயின்}\ (b-a)^2=-a.$$

$a$ யை $x-z$ ஆலும் $b$ யை $y-z$ ஆலும் இடமாற்றம் செய்ய, $(y-x)^2=z-x$ என்னுந் தொகையீட்டைப் பெறுவோம். இதே மாதிரி (ii), (iii), (iv) என்பவற்றிற்கும். (v), (vi) என்பவற்றில் $x$, $y$, $z$, $t$ என்பவற்றை ஐந்து சமன்பாடுகளிலிருந்து நீக்குவோம்.]

**விடைகள் :**

(ii) $yz=(x+y)^2$. (iii) $5(x+y+z)^2=9(x^2+y^2+z^2)$

(iv) $(x+y+z)^3=27xyz$. (v) $(x^2+y)^5=32y^2z^2$.

(vi) $x^3-3xy^2=z^3-2yz$.

# அத்தியாயம் XIII

## முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.

### பொது முறைகள்.

**137.** இப்போது இரு சாராமாறிகளைக் கொள்ளும் சமன்பாடுகளைப் பரிகரிக்கும் சாப்பிற்றின் முறையையும் எத்தொகைச் சாரா மாறிகளையுங் கொள்ளும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் யக்கோபியின் முறையையும் விளக்குவோம். யக்கோபியின் முறை இயற்கையாக ஒருங்கமை பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய தர்க்கத்திற்கு வழிகாட்டும்.

இவ்வத்தியாயத்தின் முறைகள் ஈற்று அத்தியாயத்தின் முறைகளிலும் மிகச் சிக்கல் நிறைந்தன. ஆகவே அவற்றை அவற்றின் மிக எளிய வடிவத்திற் காட்டிச் சிரமமாகும் பல பாகங்களைப் பற்றி இலேசாகக் குறிப்பிடுவோம்.

### 138. சாப்பிற்றின் முறை.

[பகுதியாய் லகிராஞ்சியாலாய இந்த முறை சாப்பிற்றால் நிறைவாக்கப்பட்டது. சாப்பிற்றின் வாசகம் பரிஸ் விஞ்ஞானச் சங்கத்திற்கு 1784 இல் கொடுக்கப்பட்டது. அவர் பின்னர் சொற்ப காலத்துள் மரணமானதால் அது அச்சிடப்படவில்லை.]

பிரிவு 131 இல்

$$p-3x^2=q^2-y \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தற்கு

$$p-3x^2=a \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னும் வேறொரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $p$, $q$ என்பவற்றிற்கு $x$, $y$ என்பன பற்றித் தீர்த்து

$$dz=pdx+qdy \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

என்பதிற் பிரதியிட்டுள்ளோம்; இது $x$, $y$, $z$ என்னும் மூன்று மாறிகளில் சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடாகக் கருதப்படுமிடத்து தொகையிடத் தகுந்ததாகும்.

இப்போது ஓரளவு இது போன்ற முறையை இரு சாராமாறிகள் கொண்ட பொது முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடாகிய

$$F(x,y,z,p,q)=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்பதற்குப் பிரயோகிப்போம். இப்பொழுது

$$f(x,y,zp,q)=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

என்னும் வேறொரு சமன்பாட்டை (4), (5) என்பவற்றிலிருந்து $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாகக் காணப்படும் $p$, $q$ என்பன (3) என்பதைத்

தொகையிடத்தக்கதாக்குமாறு காணல் வேண்டும். (3) ஆனது தொகையிடத் தக்கதாதற்கு வேண்டிய போதிய, நிபந்தனை

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0 \text{ (சர்வசமனுக)}$$

என்பதே ; இங்கு $P=p$, $Q=q$, $R=-1$ ; அதாவது

$$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$y$, $z$ ஆகியவற்றை மாறிலியாக வைத்து $p$, $q$ என்பன (4), (5) என்பவற்றைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும் $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் சார்புகளைக் குறிக்குமெனக் கொண்டு (4) என்பதை $x$ ஐ குறித்துப் பகுதியாய் வகையிடலால்,

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

இதே மாதிரி

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

(7), (8) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$J\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9);$$

இங்கு

$$J=\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

இதே மாதிரி

$$J\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

$$J\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

$$J\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

[$J$ சர்வசமனுக மறைதல் முடியாது ; ஏனெனின் இது பொருள்கொள்வது $F$, $f$ என்பன $p$, $q$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாகக் கருதப்படுமிடத்து அவை சாராதன அல்ல என்பதே. இது (4), (5) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து $p$, $q$ ஆகியவற்றிற்குத் தீர்க்கப்படலாம் என்னும் எமது கருதுகோளுக்கு எதிரிடையாகும்.]

(6) இலே பிரதியிட்டுக் கொண்டு $J$ ஆற் பெருக்க

$$p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

அல்லது

$$-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y}-\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

இது $x, y, z, p, q$ என்பன சாரா மாறிகளாகி $f$ ஆனது சார் மாறியாக பிரிவு 126 இல் எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும் வடிவமுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. ஒத்த துணைச் சமன்பாடுகளாவன

$$\frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{df}{0} \quad \ldots\ldots(14).$$

இச்சமன்பாடுகளின் யாதுமொரு தொகையீடு $p$ என்பதையோ $q$ என்பதையோ இரண்டையுமோ உள்ளடக்குமாறு காணப்படுமாயின் இத்தொகையீடு (4) உடன் இணைந்து (3) ஐத் தொகையிடத்தக்கதாகச் செய்யும் $p$, $q$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் தரும் (5) என்னும் வேறொரு வகையீட்டுச் சமன்பாடாக எடுக்கப்படலாம். இது (4) இன் ஒரு முற்றிய தொகையீட்டைத் தரும் ; இதனிலிருந்து வழக்கமான வழியில் பொதுத் தொகையீடும் தனிச் சிறப்புத் தொகையீடும் உய்த்தறியப்படலாம்.

**139.** இந்த முறையின் பிரயோகத்தின் ஓர் உதாரணமாக

$$2xz-px^2-2qxy+pq=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுக்க.

இச்சமன்பாட்டின் இடக்கைப்பக்கத்தை $F$ என எடுத்துக் கொண்டு ஈற்றுப் பிரிவின் (14) என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளிற் பிரதியிட

$$\frac{dx}{x^2-q}=\frac{dy}{2xy-p}=\frac{dz}{px^2+2xyq-2pq}=\frac{dp}{2z-2qy}=\frac{dq}{0}=\frac{df}{0};$$

இவற்றின் ஒரு தொகையீடு

$$q=a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) என்பவற்றிலிருந்து $p=\frac{2x(z-ay)}{x^2-a}$.

ஆகவே $$dz=pdx+qdy=\frac{2x(z-ay)}{x^2-a}\,dx+ady,$$

அதாவது $$\frac{dz-ady}{z-ay}=\frac{2xdx}{x^2-a},$$

அதாவது $$z=ay+b(x^2-a).$$

இதுவே முற்றிய தொகையீடு. $z=x^2y$ என்னும் தனிச் சிறப்புத் தொகையீட்டை இப்பொழுது உய்த்தறிதல் எளிது. முற்றிய தொகையீட்டின் வடிவம் காட்டுவது

(1) ஆனது
$$x^2 = X, \;\; P = \frac{\partial z}{\partial X} = \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}$$
என்னும் உருமாற்றத்தால் ஒரு நியமவடிவத்தின் குறிப்பிட்ட வகையாகிய
$$z = PX + qy - Pq$$
என்பதற்கு ஒடுக்கப்படலாமென்பதே.

சாப்பிற்றின் முறையால் தீர்க்கப்படும் சமன்பாடுகள் யாதோ அத்தகை உருமாற்றத்தால் பல முறையும் எளிதில் தீர்க்கப்படலாம்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றின் முற்றிய தொகையீடுகளைக் காண்டற்கு சாப்பிற்றின் முறையைப் பிரயோகிக்க :

(1) $2z + p^2 + qy + 2y^2 = 0$.

(2) $yzp^2 = q$.

(3) $pxy + pq + qy = yz$.

(4) $2x(z^2q^2 + 1) = pz$.

(5) $q = 3p^2$. (பிரிவு 129 பார்க்க).

(6) $z^2(p^2z^2 + q^2) = 1$. (பிரிவு 130 பார்க்க)

(7) $p - 3x^2 = q^2 - y$ (பிரிவு 131 பார்க்க)

(8) $z = px + qy + p^2 + q^2$ (பிரிவு 132 பார்க்க)

(9) பயிற்சி 2 ஐ $y^2 = Y$, $z^2 = Z$ என இட்டுக்கொண்டு தீர்க்க.

(10) பயிற்சி 4 ஐ மாறிகளின் தகுதியான உருமாற்றத்தாலே தீர்க்க.

### 140. மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட சாராமாறிகள். யக்கோபீயின் முறை.

$z$ என்னும் சார்மாறி $x_1, x_2, x_3$ என்னும் மூன்று சாராமாறிகளைக் குறித்துப் பெறப்படும் $p_1$, $p_2$, $p_3$ என்னும் தன் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்கள் மூலமாக அன்றி, நிகழாத
$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்க. யக்கோபியினது முறையின் அடிப்படைக் கருத்து சாப்பிற்றினது போன்றதாகும்.

($a_1$, $a_2$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளாக)
$$F_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
என்னும் வேறு இரு சமன்பாடுகள், (1), (2), (3) என்பவற்றிலிருந்து $x_1$, $x_2$, $x_3$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாகக் காணப்படும் $p_1$, $p_2$, $p_3$ என்பன
$$dz = p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$
என்பதைத் தொகையிடத்தக்கதாக்குமாறு, காண முயல்வோம் ; இதற்கு நிபந்தனைகள்
$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial p_1}{\partial x_2}\;; \quad \frac{\partial p_3}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_3}\;; \quad \frac{\partial p_3}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_3} \ldots\ldots\ldots(5)$$
என்பனவாகும்.

இனி, $x_2$, $x_3$ ஆகியவற்றை மாறிலிகளாகவும் $p_1$, $p_2$, $p_3$ என்பவற்றை (1), (2), (3) ஆகியவற்றைத் தீர்த்தலாற் பெறப்படும் $x_1$, $x_2$, $x_3$ என்பவற்றின் சார்புகளாகவும் வைத்துக்கொண்டு (1) ஐ $x_1$, பற்றிப் பகுதியாய் வகையிடலால்

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

இதேமாதிரி

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

(6), (7) என்பவற்றிலிருந்து

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_3,p_1)}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8);$$

இங்கு $\dfrac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}$ என்பது $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial p_1}-\dfrac{\partial F}{\partial p_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$ என்னும் "யக்கோபியனைக்" குறிக்கும்.

இதேமாதிரி

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_2p_2)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_3,p_2)}\frac{\partial p_3}{\partial x_2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_3,p_3)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_3)}\frac{\partial p_1}{\partial x_3}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_3)}\frac{\partial p_2}{\partial x_3}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

(8), (9), (10) என்னும் சமன்பாடுகளைக் கூட்டுக.

ஈர் உறுப்புக்கள் தருவது

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}\left\{\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\right\}=0$$

இதே மாதிரி ஈர் உறுப்புச் சோடிகள் மறைந்து

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_3,p_3)}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

என்பது விடப்படும் : அதாவது

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_1}-\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial p_2}-\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial F_1}{\partial p_3}-\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial F_1}{\partial x_3}=0 \ldots (12).$$

இச் சமன்பாடு பொதுவாக $(F,F_1) = 0$ என எழுதப்படும். இதேமாதிரி $(F,F_2) = 0$, $(F_1,F_2) = 0$.

**ஆனால் இவை** பிரிவு 126 இன் வடிவம் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்.

ஆகவே பின்வரும் நெறியைப் பெறுவோம் :

$$\frac{dx_1}{-\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}=\frac{dx_2}{-\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial F}{\partial p_3}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial F}{\partial x_3}}$$

என்னுந் துணைச் சமன்பாடுகளின் $F_1 = a_1$, $F_2 = a_2$ என்னும் இரு சாராத் தொகையீடுகளைக் காண்பதற்கு முயல்க. இவை

$$(F_1, F_2) \equiv \Sigma \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\frac{\partial F_2}{\partial p_r} - \frac{\partial F_1}{\partial p_r}\frac{\partial F_2}{\partial x_r}\right) = 0.$$

என்னும் நிபந்தனையைத் திருத்தியாக்குமாயினும்

$$F = F_1 - a_1 = F_2 - a_2 = 0$$

என்பவற்றிலிருந்து $p$ கள் $x$ களின் சார்புகளாகக் காணப்படுமாயினும் இச் சார்புகளை

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3dx_3$$

என்பதிற் பிரதியிடுதலால் ஆக்கப்படும் சமன்பாட்டைத் தொகையிடுக. இச் சமன்பாடு என்றும் தொகையிடத்தகுமென்பதன் நிறுவல் பற்றி பின்னிணைப்பு $C$ பார்க்க.

[கான் குஸ்ராவ் யேக்கப் யக்கோபி (1804—1851) என்பவர் நீள்வளையச் சார்புக் கொள்கையை ஆக்கியோரில் ஒருவராகக் கருதப்படலாம். “ யக்கோபியன் ” அல்லது “ சார்புத் துணிகோவை ” என்பது துணிகோவைகளின் பொதுப் பிரயோகம் பற்றி அவரினது பெரு முயற்சியை எமக்கு நினைவுபடுத்தும்.]

## 141. யக்கோபியின் முறை பற்றி உதாரணங்கள்

உ-ம் (i) $$2p_1x_1x_3 + 3p_2x_3^2 + p_2^2p_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx_1}{-2x_1x_3} = \frac{dp_1}{2p_1x_3} = \frac{dx_2}{-3x_3^2 - 2p_2p_3} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dx_3}{-p_2^2} = \frac{dp_3}{2p_1x_1 + 6p_2x_3}$$

ஆகும் ; இவற்றின் தொகையீடுகள்

$$F_1 \equiv p_1x_1 = a_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$F_2 \equiv p_2 = a_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

என்பன.

இப்பெறுமானங்களோடு $(F_1, F_2)$ ஆனது கண்கூடாகப் பூச்சியமாதலால் (2), (3) என்பன வேண்டிய வேறு இரு சமன்பாடுகளாக எடுக்கப்படலாம்.

$$p_1 = a_1x_1^{-1},\ p_2 = a_2,\ p_3 = -a_2^{-2}\,(2a_1x_3 + 3a_2x_3^2).$$

ஆகவே $$dz = a_1x_1^{-1}dx_1 + a_2dx_2 - a_2^{-2}(2a_1x_3 + 3a_2x_3^2)dx_3,$$

அல்லது $z = a_1$ மட $x_1 + a_2x_2 - a_2^{-2}\ (a_1x_3^2 + a_2x_3^3) + a_3$ இது முற்றிய தொகையீடு.

உ-ம் (ii) $$(x_2 + x_3)\,(p_2 + p_3)^2 + zp_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

இச்சமன்பாடு $z$ என்பதைக் கொண்டிருப்பதால் பிரிவு 140 இல் சிந்திக்கப்பட்டுள்ள வடிவமாகாது. ஆனால் $u=0$ என்பது (4) இனது ஒரு தொகையீடாயின்

$$z=x^4,\ p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}=\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=-\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_4}=-P_1/P_4 \quad \text{என்க.}$$

இதேமாதிரி $p_2=-P_2/P_4;\ p_3=-P_3/P_4.$

(4) ஆனது $u$ என்னும் சார் மாறி கொள்ளாது நாலு சாராமாறிகள் கொண்ட

$$(x_2+x_3)(P_2+P_3)^2-x_4P_1P_4=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

என்னும் சமன்பாடாகும்.

துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx_1}{x_4P_4}=\frac{dP_1}{0}=\frac{dx_2}{-2(x_2+x_3)(P_2+P_3)}=\frac{dP_2}{(P_2+P_3)^2}=\frac{dx_3}{-2(x_2+x_3)(P_2+P_3)}$$

$$=\frac{dP_3}{(P_2+P_3)^2}=\frac{dx_4}{x_4P_1}=\frac{dP_4}{-P_1P_4}$$

ஆகும் : இவற்றின் தொகையீடுகள்

$$F_1\equiv P_1=a_1, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(6),$$

$$F_2\equiv P_2-P_3=a_2, \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(7),$$

$$F_3\equiv x_4P_4=a_3. \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(8),$$

என்பன, $r, s$ என்பன 1, 2, 3 என்னும் சுட்டிகளுள் எவையேனும் இரண்டாயின் $(Fr, Fs)=0$ என்பதை உறுதியாக்க வேண்டும். இது உண்மையென்பது எளிதிற் புலனாகும்.

(5), (6), (7), (8) என்பவற்றைத் தீர்க்க

$P_1=a_1;\ P_4=a_3x_4{}^{-1};\ 2P_2=a_2\pm\sqrt{\{a_1a_3/(x_2+x_3)\}};\ P_3=P_2-a_2$ ; ஆகவே

$$du=a_1dx_1+a_3x_4{}^{-1}dx_4+\tfrac{1}{2}a_2\ (dx_2-dx_3)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\{a_1a_3/(x_2+x_3)\}}\ (dx_2+dx_3):$$

அதாவது $u=a_1x_1+a_3\ \text{மட}\ x_4+\frac{1}{2}a_2(x_2-x_3)\pm\sqrt{\{a_1a_3(x_2+x_3)\}}+a_4.$

ஆயின் $x_4$ ஐ $z$ ஆலும் $a_1/a_3$ யை $A_1$ ஆலும் $\frac{1}{2}a_2/a_3$ யை $A_2$ ஆலும் $a_4/a_3$ யை $A_3$ ஆலும் இடமாற்றம் செய்ய $u=0$ என்பது

$$\text{மட}\ z+A_1x_1+A_2(x_2-x_3)\pm\sqrt{\{A_1(x_2+x_3)\}}+A_3=0$$

என்னும் (4) இன் முற்றிய தொகையீட்டைத் தரும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வருவனவற்றின் முற்றிய தொகையீடுகள் காண்டற்கு சாப்பிற்றின் முறையைப் பிரயோசிக்க :

(1) $p_1^3+p_2^2+p_3=1.$

(2) $x_3^2p_1^2p_2^2p_3^2+p_1^2p_2^2-p_3^2=0.$

(3) $p_1x_1+p_3x_3=p_3^2.$

(4) $p_1p_2p_3+p_4^3x_1x_2x_3x_4^3=0.$

(5) $p_1p_2p_3=z^3x_1x_2x_3.$

(6) $p_3x_3(p_1+p_2)+x_1+x_2=0.$

(7) $p_1^2+p_2p_3-z(p_2+p_3)=0.$

(8) $(p_1+x_1)^2+(p_2+x_2)^2+(p_3+x_3)^2=3(x_1+x_2+x_3).$

## 142. ஒருங்கமை பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.

பின்வரும் உதாரணங்கள் சில வகைக்குறிப்பு வகைகளை எடுத்துக்காட்டும் :

**உ-ம் (i)**

$$F\equiv p_1^2+p_2p_3x_2x_3^2=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

$$F_1\equiv p_1+p_2x_2=0.\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

இங்கு
$$(F,F_1)=\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial F_1}{\partial p_r}-\frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\right)=(p_2p_3x_3^2)x_2\ -\ (p_3x_2x_3^2)p_2=0.$$

ஆயின் இப்பிரசினையானது வேலையில் ஒரு பாகம் ($F_1$ என்பதைக் காண்டல்) ஏற்கெனவே செய்யப்பட்டுள்ளதான (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் பிரசினமாகும்.

அடுத்தபடி $(F,\ F_2)=0=(F_1,\ F_2)$ ஆகுமாறு $F_2$ ஐக் காண்டல்.

$F$ இலிருந்து யக்கோபியின் செய்கையாற் பெறப்படும் துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx_1}{-2p_1}=\frac{dp_1}{0}=\frac{dx_2}{-p_3x_2x_3^2}=\frac{dp_2}{p_2p_3x_3^2}=\frac{dx_3}{-p_2x_2x_3^2}=\frac{dp_3}{2p_2p_3x_2x_3}$$

என்பன, ஒரு தொகையீடு

$$p_1=a.\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

இங்கு $F_2$ வை $p_1$ ஆக எடுக்கலாம் ; எனெனின் இது $(F,\ F_2)=0=(F_1,\ F_2)$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும்.

(1), (2), (3) என்பவற்றைத் தீர்த்துக்கொண்டு $dz=p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3$ என்பதிற் பிரதியிட, ,

$$dz=a\ dx_1-ax_2^{-1}dx_2+ax_3^{-2}dx_3$$

$$z=a(x_1-\text{மட}\ x_2-x_3^{-1})+b \text{ ஆகும்.}$$

**உ-ம் (ii).**

$$F\equiv p_1x_1+p_2x_2-p_3^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

$$F_1\equiv p_1-p_2+p_3-1=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

இங்கு
$$(F,\ F_1)=p_1+p_2(-1)=p_1-p_2.$$

$dz$ பற்றிய கோவை தொகையிடத்தகுமாறு இருத்தற்கு இது மறைதல் வேண்டும். ஆகவே

$$p_1-p_2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

என்னும் வேறு சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

(4), (5), (6) என்பவற்றைத் தீர்த்துக்கொண்டு பிரதியிட,

$$dz = \frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2} + dx_3,$$

$$z = \text{மட}(x_1 + x_2) + x_3 + a.$$

இவ்வகை உதாரணங்களில் துணைச்சமன்பாடுகளைப் பிரயோகிக்க வேண்டியதில்லை, முடிபு ஓர் எதேச்சை மாறிலியையே கொள்ளும், ஆனால் உ-ம் (1 இல் இரண்டு பெற்றுள்ளோம்.

உ-ம் **(iii)**

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + p_3 = 0 \text{ ..................(7),}$$

$$F \equiv p_1 + p_2 + x_3^2 = 0 \text{ ..................(8).}$$

இங்கு $(F, F_1) = 2x_1 + 2x_2 - 2x_3$

$x_1, x_2, x_3$ என்பன சாரா மாறிகளாதலால் இது என்றும் பூச்சியமாதல் முடியாது.

ஆகவே இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து $dz$ இற்கு ஒரு தொகையிடத்தகு கோவையைக் காண்டல் முடியாது ; இவற்றிற்குப் பொதுத் தொகையீடு யாதுமில்லை.

உ-ம் **(iv)**

$$F \equiv p_1 + p_2 + p_3^2 - 3x_1 - 3x_2 - 4x_3^2 = 0 \text{ ............(9)}$$

$$F_1 \equiv x_1 p_1 - x_2 p_2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \text{ ................(10),}$$

$$F_2 \equiv p_3 - 2x_3 = 0 \text{ ..............................(11).}$$

(9), (10), (11) ஆகியவற்றைத் தீர்த்து $dz$ பற்றிய கோவையில் பிரதியிட,

$$dz = (2x_1 + x_2)dx_1 + (x_1 + 2x_2)dx_2 + 2x_3 dx_3,$$

$$z = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 + a.$$

இங்கு $(F, F_1), (F, F_2), (F_1, F_2)$ என்பவற்றைச் செய்யவேண்டிய தேவையில்லை.

உ-ம் **(v)**

$$F \equiv p_1 + p_2 - 1 - {}_2 = 0 \text{ ..................(12) ,}$$

$$F_1 \equiv p_1 + p_3 - x_1 - x_2 = 0 \text{ ................(13),}$$

$$F_2 \equiv p_2 + p_3 - 1 - x_1 = 0 \text{ ................(14),}$$

இவை தருவது $dz = x_2\, dx_1 + dx_2 + x_1\, dx_3.$

இது தொகையிடப்பட முடியாமையால் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குப் பொதுத் தொகையீடு யாதுமில்லை.

உ-ம் (vi)

$$F \equiv x_1p_1 - x_2p_2 + p_3 - p_4 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (15).$$

$$F_1 \equiv p_1 + p_2 - x_1 - x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (16).$$

இங்கு $(F, F_1) = p_1 - x_1(-1) - p_2 + x_2(-1) = p_1 - p_2 + x_1 - x_2$.

உ-ம் (ii) இல் உள்ளதுபோல் இது

$$F_2 \equiv p_1 - p_2 + x_1 - x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (17).$$

என்னும் ஒரு புதிய சமன்பாட்டைத் தரும்.

இனி $(F, F_2) = p_1 - x_1 - p_2(-1) + x_2(-1) = F_1 = 0,$

$$(F_1, F_2) = (-1) - 1 + (-1)(-1) - (-1) = 0.$$

ஆதலால் இந்த முறையால் இன்னும் வேறு சமன்பாடுகளைப் பெறுதல் முடியாது.

$F$ இலிருந்து பெறப்படும் துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx_1}{-x_1} = \frac{dp_1}{p_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dp_2}{-p_2} = \frac{dx_3}{-1} = \frac{dp_3}{0} = \frac{dx_4}{1} = \frac{dp_4}{0}$$

என்பன. ஒரு தகுதியான தொகையீடு

$$F_3 \equiv p_3 = a \quad \dots\dots\dots\dots\dots (18)$$

ஆகும்; ஏனெனின் இது $(F, F_3) = (F_1, F_3) = (F_2, F_3) = 0$ என்பவற்றைத் திருத்தியாக்கும். இப்போது (15, (16), (17), (18) என்னும் நாலு சமன்பாடுகள் உண்டு. இவை தருவன

$$p_1 = x_2,\ p_2 = x_1,\ p_3 = a,\ p_4 = a;$$

ஆகவே $z = x_1x_2 + a(x_3 + x_4) + b.$

ஆனால் இவ்வுதாரணத்தில் கூடுதலாகப் பொதுவாகுந் தொகையீடு ஒன்றைப் பெறலாம். (15), (16) என்னும் தந்த இரு சமன்பாடுகளும் (17) என்னும் பெற்ற சமன்பாடும்

$$p_1 = x_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

$$p_2 = x_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

$$p_3 - p_4 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (21)$$

என்னும் கூடுதலாக எளிதாகும் தொடைக்குச் சமவலுவாகும். (19), (20) என்பவற்றிலிருந்து.

$z = x_1x_2 + x_3$, $x_4$ ஆகியவற்றின் யாதுமொரு சார்பு.

(21) என்பது லகிராஞ்சியின் வகை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடாகி அதன் பொதுத் தொகையீடு

$\phi\,(z,\ x_3 + x_4) = 0$ ஆகும்;

அதாவது $z$ ஆனது $(x_3 + x_4)$ இனது யாதுமொரு சார்பாகி $x_1$, $x_2$ என்பவற்றையும் கொண்டிருக்கலாம்.

ஆகவே இம் மூன்று சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றினதும் அல்லது தந்த இரு சமன்பாடுகளின், ஒரு பொதுத் தொகையீடு ஓர் எதேச்சைச் சார்பைக் கொண்ட

$$z=x_1x_2+\psi(x_3+x_4) \text{ ஆகும்.}$$

மற்றை முறையாற் பெறப்படும் முற்றிய தொகையீடு ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாகச் சேர்க்கப்படும். பிரிவு 134 இலுள்ளது போல் பொதுத் தொகையீடு முற்றிய தொகையீட்டிலிருந்து பெறப்படலாம்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்கு (சாத்தியமாயின்) பொது முற்றிய தொகையீடுகள் பெறுக :

(1) $p_1^2+p_2^2-8\ (x_1+x_2)^2=0,$
$(p_1-p_2)\ (x_1-x_2)+p_3x_3-1=0.$

(2) $x_1^2p_2p_3=x_2^2p_3p_1=x_3^2p_1p_2=1.$

(3) $p_1p_2p_3-8x_1x_2x_3=0$
$p_2+p_3-2x_2-2x_3=0.$

(4) $2x_3p_1p_3-x_4p_4=0,$
$2p_1-p_2=0,$

(5) $p_1x_3^2+p_3=0,$
$p_2x_3^2+p_3x_2^2=0.$

(6) $p_2^3+p_3^3+x_1+2x_2+3x_3=0,$
$p_1+p_4^2x_4-1=0:$

(7) $2p_1+p_2+p_3+2p_4=0,$
$p_1p_3-p_2p_4=0.$

(8) பயிற்சி (5) இன் பொதுத் தொகையீட்டைக் காண்க.

(9) பயிற்சி (7) இன் பொதுத் தொகையீட்டைக் காண்க.

## அத்தியாயம் XIII இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $2x_1x_3zp_1p_3+x_2p_2=0.$

(2) $x_2p_3+x_1p_4=p_1p_3-p_2p_4+x_4^2=0$

(3) $9x_1x_4p_1(p_2+p_3)-4p_4^2=0,$
$p_1x_1+p_2-p_3=0$

(4) $9x_1zp_1(p_2+p_3)-4=0,$
$p_1x_1+p_2-p_3=0.$

(5) $x_1p_2p_3=x_2p_3p_1=x_3p_1p_2=z^2x_1x_2x_3.$

(6) $p_1z^2-x_1^2=p_2z^2-x_2^2=p_3z^2-x_3^2=0.$

(7) $z=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_1^2+p_2^2+p_3^2$

என்பதன் முற்றிய தொகையீட்டில் உள்ளடங்கும் அதிபரபரப்புக்கள் (இவ்வகையில் அதிபரத் தளங்கள்) எல்லாவற்றின் சூழியையுங் குறிக்கும் தனிச்சிறப்புத் தொகையீட்டைக் காண்க.

(8) $F(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=0$ என்னும் வடிவச் சமன்பாடு எதற்கும் தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு இல்லையெனக் காட்டுக.

(9) $F(x,y,z,p,q)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில் $z$ தோன்றுதாயின் சாப்பிற்றின் முறையானது யக்கோபியின் முறையோடு பொருந்துமெனக் காட்டுக.

(10) $p$ களில் ஏகபரிமாணமும் ஏகவினமுமாகும் ஒரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு, $u$ கள் $x$ களின் சார்புகளாக,

$$z=a_1u_1+a_2u_2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

என்னும் பொதுத் தொகையீடு ஒன்று உண்டெனின்

$$z=\phi(u_1,u_2,\ldots\ldots\ldots)$$

என்பது கூடுதலாகப் பொதுவாகும் தொகையீடு எனக் காட்டுக.

$$x_1p_1 - x_2p_2 + x_2p_3 = 0,$$
$$x_4p_3 - x_4p_4 + x_5p_5 = 0$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் ஒரு பொதுத் தொகையீட்டைக் காண்க.

(11) $p_1, p_2$ என்பன $F(x_1,x_2,p_1p_2)=0=F_1(x_1,x_2,p_1,p_2)$ என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் திருத்தியாக்கும் $x_1$, $x_2$ என்னும் சாராமாறிகளின் சார்புகளாயின்

$$(F,\ F_1)+\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}=0$$

என்பதை நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு, இவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகள் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளாயெடுக்கப்படுமிடத்து அவற்றில் ஒரு பொதுத் தொகையீடு உண்டெனின், $(F,F_1)=0$ என்பது ஒரு வேண்டிய நிபந்தனையாகும்; ஆனால் போதிய நிபந்தனையல்ல என்பதைக் காட்டுக.

பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடிகளைப் பரிசோதிக்க :

$$\text{(i)}\ F \equiv p_1 + 2p_2 - 2 = 0,$$
$$F_1 \equiv (p_1+2p_2)^2 - 1 = 0.$$

[இங்கு சர்வசமனாக $\dfrac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}=0$ ஆதலால் சமன்பாடுகளை $p_1, p_2$ என்பன பற்றித் தீர்த்தல் முடியாது.

$$\text{(ii)}\ F \equiv p_1 - p_2{}^2 = 0,$$
$$F_1 \equiv p_1 + 2p_2x_1 + x_1{}^2 = 0,$$

[இங்கு $(F,F_1)$, $\dfrac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}$ என்பன இரண்டும், $p$ கள், ஆனவை $x_1, x_2$ என்பன பற்றிய அவற்றின் பெறுமானங்களால் இடமாற்றம் செய்யப்படுமிடத்து, மறையும் சார்புகளாகும். இங்கு ஒரு பொதுத் தொகையீடும் இல்லை.]

$$\text{(iii)}\ F \equiv p_1 - p_2{}^2 + x_2 = 0,$$
$$F_1 \equiv p_1 + 2p_2x_1 + x_1{}^2 + x_2 = 0$$

[$\dfrac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}$ என்பது $p$ கள் தமது பெறுமானங்களால் இடமாற்றம் செய்யப்படுமிடத்து மறைந்தபோதிலும் இவற்றிற்கு ஒரு பொதுத் தொகையீடு உண்டு.]

## சாப்பிற்றின் முறை பற்றிய குறிப்பு (பிரிவுகள் 138, 139)

சில வேளையில் $f(x, y, z, p, q) = 0$ என்னுமொரு சமன்பாடு, (14) என்னுந் துணைச் சமன்பாடுகளின் தொகையீடாகாது, ஆனால் இவற்றிலிருந்து (4) என்னுந் தொடக்க வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை உபயோகித்துப் பெறப்படும் எளிய சமன்பாடுகளின் தொகையீடாகக் காணலாம். இது (13) என்பதை, சர்வசமனாக்காது, ஆனால் (4) இன் பலத்தினால் திருத்தியாக்கி (4) உடன் இணைந்து (3) ஐத் தொகையிடத்தக்கதாக்கும். உதாரணமாக, பிரிவு 139, பயிற்சி 2 இல் $pz=a$ என்பது $dz/(-2yzp^2+q)=dp/yp^3$ என்பதன் தொகையீடாகாது ஆனால் $dz/(-yzp^2)=dp/yp^3$ என்பதன் தொகையீடாகி இறுதியில் முறைமையான முடிபைத் தரும். இது போலவே யக்கோபியின் முறைபற்றியுமாம்.

## அத்தியாயம் XIV

# இரண்டாம் வரிசையிலும் அதனிலும் உயர்ந்த வரிசையிலுமுள்ள பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

**143.** முதன்முதல் கண்கணிப்பால் தொகையிடப்படும் சில எளிய உதாரணங்களைத் தருவோம். இதன் பின் மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாணப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை எடுத்துச் சிந்திப்போம்; இவை மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட சாதாரண ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளுக்கு வழங்கிய முறைகள் போன்றனவற்றாற் பரிகரிக்கப்படும். இவ்வத்தியாயத்தின் எஞ்சிய பாகத்தில் மிகக் கடினமான பாடமாகிய மொஞ்சுவின் முறைகள் பற்றிச் சிந்திக்கப்படும். மாணாக்கன் பயிற்சிகளைத் தீர்த்தற்கு உதவுதற்கும் இம்முறையின் திருத்தம் பற்றி நம்பிக்கைகொள்ளச் செய்தற்கும் இவ்வெடுத்தாளல் முறை போதிய அளவு நிறைவுடைத்தென நம்பப்படும், ஆனால் அறிமுறையைப் பற்றிய தர்க்கம் எத்தனிக்கப்படவில்லை.

கேத்திரகணித நிபந்தனைகளாற் பெறப்படும் தீர்வுகளோடு சம்பந்தப்பட்ட எதேச்சைச் சார்புகளின் துணிபு பற்றிப் பல உதாரணங்களிற் கருதப்படும்.

இவ்வத்தியாய முடிவில் உள்ள பலவினப் பயிற்சிகள் ஆனவை இழைகள், சலாகைகள், மென்றகடுகள் ஆகியன பற்றிய அதிர்வுக் கொள்கையில் நிகழும் பல முக்கியமான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைக் கொள்ளும்.

$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ என்னும் இரண்டாம் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்கள் முறையே $r$, $s$, $t$ என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும்.

**144. கண்கணிப்பால் தொகையிடத்தகு சமன்பாடுகள்.**

**உம் (i)**

$$s = 2x + 2y$$

($y$ யை மாறிலியாக வைத்து) $x$ ஐக் குறித்துத் தொகையிட,

$$q = x^2 + 2xy + \phi(y)$$

இதேமாதிரி $y$ யைக் குறித்துத் தொகையிட,

$$z = x^2y + xy^2 + \int \phi\,(y)dy + f(x)$$

$$= x^2y + xy^2 + f(x) + F(y), \quad \text{என்க.}$$

**உம் (ii)** $(z = 0,\ y^2 = 4ax)$, $(z = 1, y^2 = -4ax)$ என்னும் பரவளைவுகளுக்கூடாகச் சென்று $xr + 2p = 0$ ஐத் திருத்தியாக்கும் பரப்பைக் காண்க.

$x\dfrac{\partial p}{\partial x}+2p=0$ என்னும் இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு தருவது $x^2p=f(y)$, $p=\dfrac{1}{x^2}f(y)$, $z=-\dfrac{1}{x}f(y)+F(y)$. $f$, $F$ என்னுஞ் சார்புகள் கேத்திரகணித நிபந்தனைகளிலிருந்து துணியப்படும்.

$z=0$, $x=y^2/4a$ என இட,

$$0=-\frac{4a}{y^2}f(y)+F(y).$$

இதேமாதிரி

$$1=\frac{4a}{y^2}f(y)+F(y).$$

ஆகவே

$$F(y)=\frac{1}{2},\, f(y)=\frac{y^2}{8a},$$

$$z=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{8ax},$$

அதாவது $8axz=4ax-y^2$, ஒரு கூம்புவளைவுரு.

**தீர்த்தற்கு பயிற்சிகள்**

(1) $r=6x$.

(2) $xys=1$.

(3) $t=$ சைன் $xy$.

(4) $xr+p=9x^2y^3$.

(5) $ys+p=$ கோசை $(x+y)-y$ சைன் $(x+y)$.

(6) $t-xq=x^2$.

(7) $s=8xy$ என்பதைத் திருத்தியாக்கி $z=0=x^2+y^2-1$ என்னும் வட்டத்திற்கூடாகச் செல்லும் பரப்பு ஒன்று காண்க.

(8) $xs+q=4x+2y+2$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் மிகப் பொதுவான கூம்பு வளைவுரு காண்க.

(9) $z=0$ என்பதைத் தொட்டுக் கொண்டு $r=12x^2+4y^2$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் சற்றற் பரப்பு ஒன்றைக் காண்க.

(10) $t=6x^3y$ யைத் திருத்தியாக்கி $y=0=z$, $y=1=z$ என்னும் இரு கோடுகளைக் கொள்ளும் பரப்பு ஒன்றைக் காண்க.

## 145. மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகவினமான ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்.

அத்தியாயம் III இல், $D\equiv\dfrac{d}{dx}$ ஆக,

$$(D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n)y=f(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைப் பற்றிக் கருதப்பட்டுள்ளது. இப்போது இரு சாராமாறிகள் கொண்ட ஒத்த சமன்பாடாகிய

$$(D^n+a_1D^{n-1}D'+a_2D^{n-2}D'^2+\ldots\ldots+a_nD'^n)z=f(x,y)\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்பதைப் பற்றிச் சுருக்கமாகச் சிந்திப்போம் ; இங்கு

$$D\equiv\frac{\partial}{\partial x},\, D'\equiv\frac{\partial}{\partial y}.$$

மிக எளிய வகை $(D - mD')\,z = 0$, அதாவது $p - mq = 0$, ஆகும் ; இதன் தீர்வு $\phi(z, y + mx) = 0$, அதாவது $z = F(y + mx)$, ஆகும்.

இது தெரிவிப்பது $f(x,y) = 0$ ஆயின் (2) என்பதன் தீர்வு $z = F_1(y + m_1x) + F_2(y + m_2x) + \ldots\ldots\ldots\ldots + F_n(y + m_nx)$ ஆகும் என்பதே ; இங்கு $m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots m_n$ என்பன

$$m^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = 0.$$

என்பதன் (எல்லாம் வேறுவேறாகுமெனக் கருதப்படும்) மூலங்கள் ; இதனை எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

உ-ம்.
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

அதாவது
$$(D^3 - 3D^2D' + 2DD'^2)z = 0.$$

$m^3 - 3m^2 + 2m = 0$ என்பதன் மூலங்கள் 0, 1, 2.

ஆகவே
$$z = F_1(y) + F_2(y + x) + F_3(y + 2x).$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்**

(1) $(D^3 - 6D^2D' + 11DD'^2 - 6D'^3)z = 0.$

(2) $2r + 5s + 2t = 0.$

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

(4) $r + s = 0$ என்பதைத் திருத்தியாக்கி $z = 4x^2 + y^2$ என்னும் நீள்வளையப் பரவளைவுருவை அதன் $y = 2x + 1$ என்னுந் தளவெட்டு நீளத்திற்குத் தொடும் பரப்பு ஒன்று காண்க. [$p$ இன் பெறுமானங்கள் இரு பரப்புக்களுக்கும் $y = 2x + 1$ ஆகும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சமமாதல் வேண்டும் ; அவ்வாறே $q$ விற்கும்.]

## 146. துணைச் சமன்பாடு சம மூலகங்கள் கொள்ளும் வகை.

$$(D - mD')^2 z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்னும் சமன்பாடு எடுக்க.

$$(D - mD')\,z = u \text{ என இடுக.}$$

(1) என்பது
$$(D - mD')\,u = 0 \text{ ஆகி}$$

$$u = F(y + mx) \text{ என்பதைத் தரும் ;}$$

ஆகவே
$$(D - mD')z = F(y + mx),$$

அல்லது
$$p - mq = F(y + mx).$$

துணைச் சமன்பாடுகள்
$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{F(y + mx)}$$

ஆகி,
$$y + mx = a,$$
$$dz - F(a)dx = 0,$$

அதாவது
$$z - x\,F(y + mx) = h.$$

என்பன தரும் ; ஆகவே பொதுத் தொகையீடு

$$\phi\{z - x\,F(y+mx),\ y+mx\} = 0, \text{ அல்லது } z = x\,F(y+mx) + F_1(y+mx),$$

ஆகும்.

இதே மாதிரி $(D - mD')^n z = 0$ என்பதன் தொகையீடு

$$z = x^{n-1} F(y+mx) + x^{n-2} F_1(y+mx) + \ldots\ldots\ldots + F_{n-1}(y+mx)$$

ஆகும் என்பதை நிறுவலாம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(4D^2 + 12DD' + 9D'^2)z = 0.$ (2) $25r - 40s + 16t = 0.$

(3) $(D^3 - 4D^2D' + 4DD'^2)z = 0.$

(4) $z = x = 0,\ z - 1 = x - y = 0$ என்னும் இரு கோடுகளுக்கூடாகச் சென்று $r - 4s + 4t = 0$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் பரப்பு ஒன்றைக் காண்க.

**147. குறிப்பிட்ட தொகையீடு.** இப்போது பிரிவு 145 இனது (2) என்னும் சமன்பாட்டை மீண்டும் எடுத்து அதனைக் குறுக்கத்தின் பொருட்டு $F(D, D')z = f(x, y)$ என எழுதுவோம்.

அத்தியாயம் III ஐப் படிபடியாகப் பின்பற்றி $z$ இனது மிகப் பொதுவான பெறுமானம் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டினதும் (வகையீட்டுச் சமன்பாட்டில் $f(x, y)$ இற்குப் பதிலாகப் பூச்சியம் எழுதப்படுமிடத்து $z$ இனது பெறுமானமாகும்) நிரப்பு சார்பினதும் கூட்டுத்தொகையாகும் என்பதை நிறுவலாம்.

குறிப்பிட்ட தொகையீடு $\dfrac{1}{F(D, D')} \cdot f(x, y)$ என எழுதப்பட்டுக் குறியீட்டுச் சார்பை தனித்த $D$ இன் சார்பு பற்றிச் செய்துள்ளதுபோல், காரணிப் படுத்தியோ பகுதிப் பின்னங்களாகத் துணித்தோ முடிவில் தொடராக விரித்தோ எடுத்தாளலாம்.

உதாரணமாக,

$$\frac{1}{D^2 - 6DD' + 9D'^2}(12x^2 + 36xy) = \frac{1}{D^2}\left(1 - \frac{3D'}{D}\right)^{-2}(12x^2 + 36xy)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(1 + \frac{6D'}{D} + 27\frac{D'^2}{D^2} + \ldots\right) \cdot (12x^2 + 36xy)$$

$$= \frac{1}{D^2} \cdot (12x^2 + 36xy) + \frac{6}{D^3} \cdot 36x$$

$$= x^4 + 6x^3y + 9x^4 = 10x^4 + 6x^3y\ ;$$

ஆயின், $(D^2 - 6DD' + 9D'^2)z = 12x^2 + 36xy$ என்பதன் தீர்வு

$$z = 10x^4 + 6x^3y + \phi(y + 3x) + x\psi(y + 3x).$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(D^2-2DD'+D'^2)z=12xy$.

(2) $(2D^2-5DD'+2D'^2)z=24\,(y-x)$.

(3) $y=0$ ஆகுமிடத்துப் பூச்சியத்திற்கு ஒடுங்கி $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-4\pi(x^2+y^2)$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் $V$ என்னும் $x$, $y$ ஆகியவற்றின் மெய்ச் சார்பு ஒன்றைக் காண்க.

**148. குறுமுறைகள்.** $f(x,\ y)$ ஆனது $ax+by$ என்பதன் சார்பாகுமிடத்து குறுமுறைகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

$$D\phi(ax+by)=a\phi'(ax+by)\ ;\ D'\phi(ax+by)=b\phi'(ax+by).$$

ஆகவே $\quad F(D,\ D')\phi(ax+by)=F(a,\ b)\phi^{(n)}(ax+by)$ ;

இங்கு $n$ ஆனது $F(D,\ D')$ இனது படியாக $\phi^{(n)}$ என்பது $\phi$ இனது $n$ ஆம் பெற்ற சார்பு ஆகும்.

மாறுநிலையாக, $F(a,\ b)\neq 0$ ஆயின்,

$$\frac{1}{F(D,\ D')}\phi^{(n)}(ax+by)=\frac{1}{F(a,\ b)}\phi\,(ax+by)\ldots\ldots\ldots\ldots(A).$$

உதாரணமாக, $\phi'''(2x+3y)=$ கோசை $(2x+3y)$ ஆயின் $\phi(2x+3y)$ ஆனது $-$ சைன் $(2x+3y)$ ஆகலாம் என்பதால்,

$$\frac{1}{D^3-4D^2D'+4DD'^2}\text{கோசை }(2x+3y)=\frac{-\text{ சைன் }(2x+3y)}{2^3-4\,.\,2^2\,.\,3+4\,.\,2\,.\,3^2}$$

$$=-\frac{1}{32}\text{ சைன் }(2x+3y).$$

$F(a,\ b)=0$ ஆகும் வகையை எடுத்தாளுவதற்கு

$$(D-mD')\,z\equiv p-mq=x^r\psi(y+mx)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைப் பற்றிச் சிந்திப்போம். இதன் தீர்வு

$$z=\frac{x^{r+1}}{r+1}\psi(y+mx)+\phi(y+mx)$$

ஆகுமென்பது எளிதிற் காணப்படுவதால்

$$\frac{1}{D-mD'}\,.\,x^r\psi(y+mx)=\frac{x^{r+1}}{r+1}\psi(y+mx)$$

என எடுக்கலாம்.

ஆகவே,

$$\frac{1}{(D-mD')^n}\psi(y+mx)=\frac{1}{(D-mD')^{n-1}}\,.\,x\,\psi(y+mx)=\ldots\ldots$$

$$=\frac{x^n}{n!}\psi(y+mx)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (B).$$

உதாரணமாக,

$$\frac{1}{D^2-2DD'+D'^2}\text{ தான் }(y+x)=\tfrac{1}{2}x^2\text{ தான் }(y+x),$$

$$\frac{1}{D^2-5DD'+4D'^2}\text{ சைன் }(4x+y)=\frac{1}{D-4D'}\cdot\frac{1}{D-D'}\text{ சைன் }(4x+y)$$

$$=\frac{1}{D-4D'}\cdot-\tfrac{1}{3}\text{ கோசை }(4x+y),\ \text{(A) ஆல்,}$$

$$=-\tfrac{1}{3}x\text{ கோசை }(4x+y),\ \text{(B) ஆல்.}$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(D^2-2DD'+D'^2)z=e^{x+2y}$.

(2) $(D^2-6DD'+9D'^2)z=6x+2y$.

(3) $(D^3-4D^2D'+4DD'^2)z=4\text{ சைன் }(2x+y)$.

(4) $2r-s-2t=5e^x/e^y$.

(5) $\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}=12(x+y)$.

(6) $4r-4s+t=16\text{ மட }(x+2y)$.

**149. பொதுமுறை :** ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு பெறுவதற்குரிய ஒரு பொது முறையைக் காண்டற்கு

$$(D-mD')z\equiv p-mq=f(x,y)$$

என்பதை எடுத்துக் கருதுக.

துணைச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{f(x,y)}$$

ஆகி இவற்றின் ஒரு தொகையீடு $y+mx=c$ ஆகும். வேறொரு தொகையீடு காண்டற்கு இதனைப் பயன்படுத்துமிடத்து

$$dz=f(x,c-mx)dx,$$

$$z=\int f(x,c-mx)dx+\text{ மாறிலி };$$

இங்கு தொகையிடலுக்குப் பின் $c$ ஆனது $y+mx$ ஆல் இடமாற்றஞ் செய்யப்படல் வேண்டும்.

ஆகவே $\frac{1}{D-mD'}\cdot f(x,y)$ ஆனது $\int f(x,\ c-mx)dx$ என எடுக்கப்படலாம்; இங்கு தொகையிடலுக்குப்பின் $c$ ஆனது $y+mx$ ஆல் இடமாற்றம் செய்யப்படல் வேண்டும்.

உ–ம். $(D-2D')\,(D+D')z=(y-1)e^x.$

இங்கு $\int f(x,\,c-2x)dx=\int(c-2x-1)e^x\,dx=(c-2x+1)e^x.$

ஆகவே $\dfrac{1}{D-2D'}\cdot(y-1)e^x=(y+1)e^x$, $y+2x$ என்பதை $c$ இற்குப் பதிலாக எழுத.

இதே மாதிரி $\dfrac{1}{(D+D')}\cdot(y+1)e^x$ ஆனது $\int(c+x+1)e^x\,dx=(c+x)e^x$ என்பதிலிருந்து $c$ இற்குப் பதிலாக $y-x$ எழுதப்படுதலாற் காணப்பட்டு $ye^x$ என்னும் வேண்டிய குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைத் தரும்.

ஆகவே $$z=ye^x+\phi\,(y+2x)+\psi\,(y-x).$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(D^2+2DD'+D'^2)\,z=2\text{ கோசை }y-x\text{ சைன் }y.$

(2) $(D^2-2DD'-15D'^2)\,z=12xy.$ (3) $r+s-6t=y\text{ கோசை }x.$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2x^2+xy-y^2)\text{ சைன் }xy-\text{கோசை }xy.$

(5) $r-t=\text{தான்}^3\,x\text{ தான் }y-\text{தான் }x\text{ தான் }^3y.$

(6) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\dfrac{4x}{t^2}-\dfrac{t}{x^2}.$

## 150. ஏகவினமல்லா ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு.

மிக எளிய வகையாகிய
$$(D-mD'-a)\,z=0,$$
அதாவது $$p-mq=az,$$
என்பது தருவது $$\phi\,(ze^{-ax},\,y+mx)=0$$
அல்லது $$z=e^{ax}\,\psi(y+mx).$$

இதே மாதிரி
$$(D-mD'-a)\,(D-nD'-b)\,z=0$$
என்பதன் தொகையீடு $z=e^{ax}f\,(y+mx)+e^{bx}F\,(y+nx)$ எனவும் $(D-mD'-a)^2z=0$ என்பதன் தொகையீடு $z=e^{ax}f\,(y+mx)+xe^{ax}F(y+mx)$ எனவும் காட்டலாம். ஆனல் குறியீட்டுச் செயலி $D$, $D'$ என்பவற்றில் ஏகபரிமாண காரணிகளாகத் துணிக்கப்படாத சமன்பாடுகள் இம் மாதிரித் தொகையிடப்படல் முடியாது.

உதாரணமாக $(D^2-D')\,z=0$ என்பதை எடுக்க.

ஒரு பரீட்சைத் தீர்வாக $z=e^{hx+ky}$ என இடுக;

இது தருவது $(D^2-D')z=(h^2-k)\,e^{hx+ky}$

ஆயின் $z = e^{h(x+hy)}$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடாகி ஒரு பொதுத் தொகையீடு $\Sigma Ae^{h(x+hy)}$ ஆகும்; இங்கு $A$, $h$ என்பன ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் எதேச்சையாக எத்தொகை உறுப்புக்களும் எடுக்கப்படலாம்.

அத்தியாயம் IV இல் விளக்கியது போல் பௌதிக பிரசினங்களுக்கு இத்தொகையீட்டு வடிவம் மிக நன்ருகத் தகுதியாகும். மாருக் குணகங்கள் கொண்ட யாதுமோர் ஏகபரிமாணப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தொகையீடு தானும் இவ்வாறு உணர்த்தப்படலாம், ஆனால் எதேச்சை சார்புகளை உட்கொள்ளும் குறுவடிவங்கள் பொதுவாகக் கூடுதலாக இசைவாகும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $DD'(D-2D'-3)z=0.$

(2) $r+2s+t+2p+2q+z=0.$

(3) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\dfrac{\partial V}{\partial t}.$

(4) $(D^2-D'^2+D-D')z=0.$

(5) $(2D^4-3D^2D'+D'^2)z=0.$

(6) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=n^2V.$

(7) $(D-2D'-1)(D-2D'^2-1)z=0.$

(8) $x=+\infty$ ஆகுமிடத்து 1 இற்கும் $x=0$ ஆகுமிடத்து $y^2$ இற்கும் ஒடுங்கும் பயிற்சி (4) இற்கு ஒரு தீர்வு காண்க.

## 151. குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள்.

ஏகவினமல்லாச் சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளைப் பெறும் முறைகள் அத்தியாயம் III இல் உள்ளவை போன்றமையால் சில உதாரணங்களை மட்டும் இங்கு தருவோம்.

**உ–ம் (i).**

$$(D^3-3DD'+D+1)z=e^{2x+3y}.$$

$$\frac{1}{D^3-3DD'+D+1}\cdot e^{2x+3y}=\frac{e^{2x+3y}}{2^3-3\,.\,2\,.\,3+2+1}=-\tfrac{1}{7}e^{2x+3y}.$$

ஆகவே,

$$h^3-3hk+h+1=0 \text{ ஆக,}$$

$$z=-\tfrac{1}{7}e^{2x+3y}+\Sigma Ae^{hx+ky}.$$

**உ–ம் (ii).**

$$(D+D'-1)(D+2D'-3)z=4+3x+6y$$

$$\frac{1}{D+D'-1}\,\frac{1}{D+2D'-3}=\tfrac{1}{3}\{1-(D+D')\}^{-1}\left\{1-\frac{D+2D'}{3}\right\}^{-1}$$

$$=\tfrac{1}{3}\{1+D+D'+\text{உயர்படி உறுப்புக்கள்}\}$$

$$\times\left\{1+\frac{D+2D'}{3}+\text{உயர்படி உறுப்புக்கள்}\right\}.$$

$$=\tfrac{1}{3}\left\{1+\frac{4D+5D'}{3}+\text{உயர்படி உறுப்புக்கள்}\right\}.$$

இச்செயலி $4+3x+6y$ இலே தாக்க

$\frac{1}{3}(4+3x+6y+4+10)=6+x+2y$ என்பது பெறப்படும். ஆகவே,

$$z=6+x+2y+e^{x}f(y-x)+e^{3x}F(y-2x).$$

உ-ம் (iii). $$(D^2-DD'-2D)\,z=\text{சைன்}\,(3x+4y).$$

$$\frac{1}{D^2-2DD'-2D}\cdot\text{சைன்}\,(3x+4y)=\frac{1}{-3^2-(-3.4)-2D}\cdot\text{சைன்}\,(3x+4y).$$

$$=\frac{1}{3-2D}\cdot\text{சைன்}\,(3x+4y)$$

$$=\frac{3+2D}{9-4D^2}\cdot\text{சைன்}\,(3x+4y)$$

$$=\frac{3\,\text{சைன்}\,(3x+4y)+6\,\text{கோசை}\,(3x+4y)}{9-4(-3^2)}$$

$$=\tfrac{1}{15}\,\text{சைன்}\,(3x+4y)+\tfrac{2}{15}\,\text{கோசை}\,(3x+4y).$$

ஆகவே $z=\frac{1}{15}\,\text{சைன்}\,(3x+4y)+\frac{2}{15}\,\text{கோசை}\,(3x+4y)+\Sigma Ae^{hx+ky}$;

இங்கு $$h^2-hk-2h=0.$$

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

(1) $(D-D'-1)(D-D'-2)z=e^{2x-y}$.

(2) $s+p-q=z+xy$

(3) $(D-D'^2)\,z=\text{கோசை}\,(x-3y)$.

(4) $r-s+p=1$.

(5) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=y+e^{x+z}$.

(6) $(D-3D'-2)^2z=2e^{2x}\,\text{தான்}\,(y+3x)$.

## 152. நீக்கல் பற்றிய உதாரணங்கள்.

ஒரு முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து ஓர் எதேச்சைச் சார்பை நீக்கலால் பெறப்படும் முடிபு பற்றி இப்போது சிந்திப்போம்.

உ-ம் (i). $$2px-qy=\phi(x^2y).$$

முதன் முதல் $x$ ஐ குறித்தும் அதன் பின் $y$ ஐ குறித்தும் பகுதியாய் வகையிட

$$2rx-sy+2p=2xy\phi'(x^2y),$$

$$2sx-ty-q=x^2\phi'(x^2y);$$

ஆகவே $$x(2rx-sy+2p)=2y(2sx-ty-q),$$

அல்லது $$2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0;$$

இது $r$, $s$, $t$ என்பவற்றில் முதற்படியிலுள்ளது. இதே சமன்பாடு $px-2qy=\psi(xy^2)$ என்பதிலிருந்து $\psi$ நீக்கப்பட்டுப் பெறப்படும்.

உ-ம் (ii).
$$p^2+q=\phi\,(2x+y).$$

இது தருவன

$$2pr+s=2\phi'\,(2x+y),$$
$$2ps+t=\phi'\,(2x+y)\,;$$

ஆகவே மீண்டும் $r$, $s$, $t$ என்பவற்றில் முதற்படியிலுள்ள

$2pr+s=4ps+2t$ என்பது பெறப்படும்.

உ-ம் (iii).
$$y-p=\phi\,(x-q).$$

இது தருவன
$$-r=(1-s)\,\phi'\,(x-q),$$
$$1-s=-t\phi'\,(x-q)\;,$$

ஆகவே
$$rt=(1-s)^2,$$

அல்லது
$$2s+(rt-s^2)=1.$$

இவ்வுதாரணத்தில் $p$, $q$ என்பன எதேச்சைச் சார்பிலும் வேறு இடங்களிலும் நிகழ்தலால் இது மற்றையிரண்டிலும் வேருகும். முடிபு $(rt-s^2)$ இல் ஓர் உறுப்பு கொள்ளும்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.**

பின்வருவனவற்றிலிருந்து எதேச்சைச் சார்பை நீக்குக :—

(1) $py-q+3y^2=\phi\,(2x+y^2)$.

(2) $x-\dfrac{1}{q}=\phi\,(z)$.

(3) $p+x-y=\phi\,(q-x+y)$.

(4) $px+qy=\phi\,(p^2+q^2)$.

(5) $p^2-x=\phi\,(q^2-2y)$.

(6) $p+zq=\phi\,(z)$.

## 153. முன்சென்ற முடிபுகளைப் பொதுமைப்படுத்தல்.

$u$, $v$ என்பன $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ ஆகியவற்றின் தெரிந்த சார்புகளாயின் $u=\phi\,(v)$ என்னும் சமன்பாட்டை முன்போல் எடுத்தாளுமிடத்து

$$r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}=\left(r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\phi'\,(v),$$
$$s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}=\left(s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\phi'\,(v).$$

$\phi'\,(v)$ என்பதை நீக்க $rs$, $st$ என்பவற்றிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டி

$$Rr+Ss+Tt+U\,(rt-s^2)=V.$$

என்னும் வடிவத்தில் முடிவிடப்படும் ; இங்கு $R$, $S$, $T$, $U$, $V$ என்பன $p$, $q$ என்பனவற்றையும் $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ ஆகியவற்றைக் குறித்துப் பெறப்படும் $u$, $v$ என்பனவற்றின் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களையும் உள்ளடக்கிய

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}$$ ஆகும் $U$ என்னுங் குணகம்,

$v$ ஆனது $p$ இனதோ $q$ இனதோ சார்பாகாது $x$, $y$, $z$ என்பன சார்பாகவே இருக்குமாயின், மறையும்.

இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாடுகளோடு தொடங்கி அவற்றிலிருந்து முதலாம் வரிசைச் சமன்பாடுகளைப் பெறுதற்கு முயல்வோமாயின் எதனை எதிர்பார்க்கலாம் என்பதைப் பற்றி இம்முடிபுகள் காட்டும்.

### 154. $Rr+Ss+Tt=V$ என்பதைத் தொகையிடுதற்கு மொஞ்சுவின் முறை

$r$, $s$, $t$ என்பவற்றில் முதற்படியாகித் தமது குணகங்களாகிய $R$, $S$, $T$, $V$ என்பன $p$, $q$, $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் சார்பாகும் சமன்பாடுகளை இப்போது எடுத்துப், பிரிவுகள் 152, 153 ஆகியவற்றினுள் செய்கையைப் புறமாற்ற முயல்வோம்.

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy=r\,dx+S\,dy,$$

$$dq=\frac{\partial q}{\partial x}dx+\frac{\partial q}{\partial y}dy=S\,dx+t\,dy.$$

ஆதலால் $Rr+Ss+Tt-V=0$ என்பது

$$R\left(\frac{dp-sdy}{dx}\right)+Ss+T\left(\frac{dq-sdx}{dy}\right)-V=0,$$

அதாவது $Rdp\ dy+Tdq\ dx-\ Vdy\ dx-s(Rdy^2-Sdy\ dx+Tdx^2)$ ஆகும்.

மொஞ்சுவின் முறையினது முக்கியமான சிறப்பியல்பு $p$, $q$, $x$, $y$, $z$ என்பன பற்றி (ஒவ்வொன்றும் ஓர் எதேச்சைச் சார்பு கொள்ளும்) ஒன்று அல்லது இரண்டு தொடர்புகள்

$$Rdy^2-Sdy\,dx+Tdx^2=0,$$

$$Rdp\,dy+Tdq\,dx-Vdy\,dx=0$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் திருத்தியாக்குமாறு பெறுதலே. இத்தொடர்புகள் மத்திய தொகையீடுகள் எனப்படும். செய்த உதாரணங்களைப் படித்தலால் செயன்முறையைப் பற்றி நன்றாக விளங்கிக் கொள்ளலாம்.

உ-ம் (i) $2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0.$

மேலுள்ளது போல் முன் செல்ல நாம்

$$2x^2dy^2+5xy\,dy\,dx+2y^2dx^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$2x^2dp\,dy+2y^2dq\,dx+2(px+qy)dy\,dx=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

என்னும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்.

(1) என்பது தருவது $(x\,dy+2ydx)(2x\,dy+ydy)=0,$

அதாவது $x^2y,=a$ அல்லது $xy^2=b.$

$x^2y=a$ என எடுத்துக் கொண்டு (2) இனது ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $x\,dy$ ஆலோ அதன் சமவலுவாகிய $-2ydx$ ஆலோ வகுப்போமாயின்

$$2x\,dp-ydq+2p\,dx-q\,dy=0,$$

அதாவது $$2px-qy=c.$$

இது $x^2y=a$ என்பதோடு இணைந்து

$$2\rho x-qy=\phi(x^2y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

என்னும் மத்திய தொகையீட்டைத் தரும்; இங்கு $\phi$ ஆனது எதேச்சைச் சார்பு. [பிரிவு 152, உ–ம். (1) பார்க்க.]

இதேமாதிரி $xy^2=b$ என்பதும் (2) என்னும் சமன்பாடும்

$$px-2qy=\Psi(xy^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

என்பதற்கு வழி காட்டும்.

(3), (4) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க,

$$3px=2\phi(x^2y)-\psi(xy^2),$$

$$3qy=\phi(x^2y)+2\psi(xy^2);$$

ஆயின், $dz=pdx+q\,dy=\frac{1}{3}\phi(x^2y).\left(\frac{2dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)-\frac{1}{3}\psi(xy^2).\left(\frac{dx}{x}+\frac{2dy}{y}\right),$

அதாவது $z=\frac{1}{3}\int\phi(x^2y).d\,\text{மட}\,(x^2y)-\frac{1}{3}\int\psi(xy^2).d\,\text{மட}\,(xy^2)$

$$=f(x^2y)+F\,(x^2y).$$

உ–ம் (ii) $$y^2r-2ys+t=p+6y.$$

முன்போல் $r$, $t$ என்பவற்றை நீக்க

$$y^2dy^2+2y\,dy\,dx+dx^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$y^2dp\,dy+dq\,dx-(p+6y)dy\,dx=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்.

(5) என்பது தருவது $(y\,dy+dx)^2=0,$

அதாவது $$2x+y^2=a.$$

இத்தொகையீட்டை உபயோகித்து (6) இனது ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $y\,dy$ ஆலோ அதன் சமவலுவாகிய $-dx$ ஆலோ வகுக்க

$$y\,dp-dq+(p+6y)dy=0,$$

அதாவது $$py-q+3y^2=c.$$

இது $py-q+3y^2=\phi(2x+y^2)$ என்னும் மத்திய தொகையீட்டைத் தரும். ஒரு மத்திய தொகையீட்டையே பெற்றுக் கொண்டமையால் இதனை லகிராஞ்சியின் முறையால் தொகையிடல் வேண்டும்.

துணைச் சமன்பாடுகள் ஆவன

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{-3y^2+\phi(2x+y^2)}.$$

ஒரு தொகையீடு $2x+y^2=a$ ஆகும். வேறொன்று காண்டற்கு இதனை உபயோகிக்க,

$$dz+\{-3y^2+\phi(a)\}dy=0,$$

அதாவது, $$z-y^3+y\phi(2x+y^2)=b.$$

ஆகவே பொதுத் தொகையீடு ஆவது

$$\psi\{z-y^3+y\phi(2x+y^2),\ 2x+y^2\}=0,$$

அல்லது $$z=y^3-y\phi(2x+y^2)+f(2x+y^2).$$

உ–ம் (iii) $$pt-qs=q^3.$$

ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் ஆவன

$$qdy\,dx+p\,dx^2=0, \qquad \ldots\ldots (7)$$

$$p\,dq\,dx-q^3\,dy\,dx=0 \qquad \ldots\ldots (8).$$

(7) என்பது தருவது $dx=0$ அல்லது $qdy+pdx(=dz)=0$,

அதாவது $$x=a \quad \text{அல்லது} \quad z=b.$$

$dx=0$ ஆயின் (8) என்பது $0=0$ என்பதற்கு ஒடுங்கும்.

$z=b$ ஆயின் $q\,dy=-p\,dx$ ஆகி (8) என்பது

$$p\,dq+q^2p\,dx=0,$$

அதாவது $$dq/q^2+dx=0,$$

என்பதற்கு ஒடுங்கும் ; இது தருவது

$$-\frac{1}{q}+x=c=\psi(z) \qquad \ldots\ldots (9).$$

(9) என்பது லகிராஞ்சியின் முறையால் தொகையிடப்படலாம், ஆனால் ஒரு குறு முறையானது இதனை

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{q}=x-\psi(z)$$

என எழுதுதலே ; இது தருவது

$$y=xz-\int\psi(z)+F\,x)$$

$$=xz+f(z)+F(x).$$

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $(r-t)$ கோசை $^2x+p$ தான் $x=0$

(2) $(x-y)(xr-xs-ys+yt)=(x+y)(p-q)$

(3) $(q+1)s=(p+1)t$. (4) $t-r$ சீக் $y^4=2q$ தான் $y$.

(5) $xy(t-r)+(x^2-y^2)(s-2)=py-qx$

(6) $(1+q)^2r-2(1+p+q+pq)s+(1+p)^2t=0$.

(7) $2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0$ ஐத் திருத்தியாக்கி $z=z^2-y^2$ என்னும் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை அதன் $y=1$ என்னுந் தளவெட்டின் நீளத்திற்குத் தொடும் பரப்பு ஒன்றை காண்க.

(8) $q^2r-2pqs+p^2t=0$ என்பதன் தொகையீட்டை

$$y+xf(z)=F(z)$$

என்னும் வடிவத்திற் பெற்று இது ஒரு நிலையான தளத்திற்குச் சமாந்தரமான நேர் கோடுகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

### 155. $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ என்பதைத் தொகையிடுதற்குரிய மொஞ்சுவின் முறை.

முன்போல $R$, $S$, $T$, $U$, $V$ என்னும் குணகங்கள் $p$, $q$, $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் சார்புகள்.

தீர்வு பற்றிய செய்கை இயற்கையாக இரு பாகங்களைக் கொள்ளும்

(i) மத்திய தொகையீடுகளை ஆக்கல்.

(ii) இத்தொகையீடுகளை மேலுந் தொகையிடுதல்.

தெளிவின் பொருட்டு நாம் இரு பாகங்களையும் தனித்தனியாக எடுத்துச் சிந்திப்போம்.

### 156. மத்திய தொகையீடுகள் ஆக்கல்.

பிரிவு 154 இல் உள்ளது போல்

$$r=(dp-s\,dy)/dx,$$
$$t=(dq-s\,dx)/dy.$$

$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ என்பதில் $r$, $t$ என்பவற்றிற்கு பிரதியிட்டுக் கொண்டு (பின்னங்களை விலக்குதற்கு) $dx$, $dy$ ஆகியவற்றுற் பெருக்க

$$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx+U\,dp\,dq-V\,dx\,dy$$
$$-s(R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy)=0,$$

$N-sM=0$ என்க.

இப்போது, $M=0$, $N=0$ என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகளைப் பெற முயல்வோம். இதுவரை பிரிவு 154 இல் உபயோகித்த முறைகளைப் பின்பற்றியுள்ளோம், ஆனால் இங்கு $M$ ஆனது $U\,dp\,dx+U\,dq\,dy$ என்னும் உறுப்புக்களைக் கொள்ளும் காரணத்தால் அதனைக் காரணிப்படுத்தல் முடியாது.

$M$ என்பதையோ $N$ என்பதையோ தனித்தனியாகக் காரணிப்படுத்த முடியாமையால், $\lambda$ என்பது பின்னர் துணியப்படும் யாதோ பெருக்கியாக, $M+\lambda N$ என்பதைக் காரணிப்படுத்த முயல்வோம்.

$M$, $N$ ஆகியவற்றை நிறைவாக எழுத, காரணிப்படுத்த வேண்டிய கோவை ஆவது

$$R\,dy^2+T\,dx^2-(S+\lambda V)\,dx\,dy+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy$$
$$+\lambda R\,dp\,dy+\lambda T\,dq\,dx+\lambda U\,dp\,dq.$$

$dp^2$ இலோ $dq^2$ இலோ உறுப்புக்கள் இல்லாமையால் $dp$ ஆனது ஒரு காரணியிலும் $dq$ ஆனது மற்றையதிலுமே தோன்றக் கூடும்.

$$A\,dy+B\,dx+C\,dp,\ E\,dy+F\,dx+G\,dq$$

என்பன காரணிகளாகுமென உத்தேசிக்க. ஆயின் $dy^2$, $dx^2$, $dp\,dq$ ஆகியவற்றின் குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$AE=R,\ BF=T,\ CG=\lambda U.$$
$$A=R,\ E=1,\ B=kT,\ F=1/k,\ C=mU,\ G=\lambda/m$$

என எடுக்கலாம்.

மற்றை ஐந்து உறுப்புக்களின் குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$kT+R/k=-(S+\lambda V),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$\lambda R/m=U,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$kT\lambda/m=\lambda T,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$mU=\lambda R,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$
$$mU/k=U.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(5) இலிருந்து $m=k$ ஆகும்; இது (3) ஐயும் திருத்தியாக்கும். (2) அல்லது (4) தருவது $m=\lambda R/U$. ஆகவே (1) இலிருந்து

$$\lambda^2(RT+UV)+\lambda US+U^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ஆகவே $\lambda$ ஆனது (6) இன் ஒரு மூலமாயின் வேண்டிய காரணிகள் ஆவன

$$\left(R\,dy+\lambda\frac{RT}{U}dx+\lambda R\,dp\right)\left(dy+\frac{U}{\lambda R}dx+\frac{U}{R}dq\right),$$

அல்லது $$\frac{R}{U}(U\,dy+\lambda T\,dx+\lambda U\,dp)\,.\,\frac{1}{\lambda R}(\lambda R\,dy+U\,dx+\lambda U\,dq).$$

ஆகவே, $\lambda$ ஆனது (6) என்பதைத் திருத்தியாக்க,

$$U\,dy+\lambda T\,dx+\lambda U\,dp=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$
$$\lambda R\,dy+U\,dx+\lambda U\,dq=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

என்னும் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளிலிருந்து தொகையீடுகளைப் பெறுதற்கு முயல்வோம். செயன் முறையின் மீதி செய்த உதாரணங்களிலிருந்து மிக நன்றாக விளங்கிக் கொள்ளலாம்.

### 157. உதாரணங்கள்

உ–ம் (i).

$$2s+(rt-s^2)=1.$$

ஈற்றுப் பிரிவின் (6) என்னும் சமன்பாட்டில் $R=T=0,\ S=2,\ U=V=1$ எனப் பிரதியிட்டுக் கொண்டு $-1,\ -1$ என்னும் சம மூலங்கள் உள்ள $\lambda^2+2\lambda+1=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

$\lambda=-1$ ஆயின், (7), (8) என்னும் சமன்பாடுகள் தருவன

$$dy-dp=0,$$
$$dx-dq=0;$$

இவற்றின் கண்கூடாகும் தொகையீடுகள்

$$y-p=\text{மாறிலி}$$
$$x-q=\text{மாறிலி}$$

பிரிவு 154 இல் உள்ளது போல் இவற்றைச் சேர்க்க $y-p=f(x-q)$ என்னும் மத்திய தொகையீட்டைப் பெறுவோம்.

உ–ம் (ii).

$$r+3s+t+(rt-s^2)=1.$$

$\lambda$ இல் இருபடிச் சமன்பாடு $2\lambda^2+3\lambda+1=0$ ஆதலால் $\lambda=-1$ அல்லது $-\frac{1}{2}$.

$\lambda=-1$ ஆயின், (7), (8) என்னுஞ் சமன்பாடுகள் தருவன

$$dy-dx-dp=0,$$
$$-dy+dx-dq=0;$$

இவற்றின் கண்கூடாகுந் தொகையீடுகள்

$$p+x-y=\text{மாறிலி} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$q-x+y=\text{மாறிலி} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

இதே மாதிரி $\lambda=-\frac{1}{2}$ என்பது தருவன

$$p+x-2y=\text{மாறிலி} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$q-2x+y=\text{மாறிலி} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

இந்த நாலு தொகையீடுகளையும் எச்சோடிகளாகச் சேர்க்கலாம் ?

ஈற்றுப் பிரிவில் $M=0,\ N=0$ என்பவற்றுற் குறிக்கப்படும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை மீண்டும் எடுத்துச் சிந்திக்க. இவை இரண்டும் திருத்தியாகப்படுமாயின் $M+\lambda_1N=0,\ M+\lambda_2N=0$ என்பனவும் இரண்டும் திருத்தியாக்கப்படும் (இங்கு $\lambda_1,\ \lambda_2$ என்பன $\lambda$ இலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின்

மூலங்கள்.) ஆகவே ஏகபரிமாணக் காரணிகளுள் ஒன்று $\lambda=\lambda_1$ ஆகுமிடத்தும் ஒன்று (கண்கூடாக மற்றையது, அன்றேல் $dy=0$) $\lambda=\lambda_2$ ஆகுமிடத்தும் மறையும்.

அதாவது, (1), (4) என்பவற்றைச் சேர்த்தும் (2), (3) என்பவற்றைச் சேர்த்தும்

$$p+x-y=f(q-2x+y)$$

$$p+x-2y=F(q-x+y)$$

என்னும் இரு மத்திய தொகையீடுகளைப் பெறுவோம்.

உ-ம் (iii). $$2yr+(px+qy)s+xt-xy(rt-s^2)=2-pq.$$

$\lambda$ இல் இருபடிச் சமன்பாடு

$$\lambda^2 xy\,pq-\lambda\,xy(px+qy)+x^2y^2=0$$

ஆகி $\lambda=y/p$ அல்லது $x/q$ எனத் தரும். ஈற்றுப் பிரிவின் (7), (8) என்பவற்றிற் பிரதியிட்டுக் கொண்டு ஒரு சிற்றொடுக்கத்தின் பின்

$$p\,dy-dx+y\,dp=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$2y\,dy-px\,dx-xy\,dq=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$-qy\,dy+x\,dx-xy\,dp=0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$-2dy+q\,dx+x\,dq=0.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

(5), (8) என்பவற்றின் கண்கூடாகும் தொகையீடுகளைச் சேர்க்க

$$yp-x=f(-2y+qx).$$

ஆனால் (6), (7) என்பன வகையிடத்தகாதவை. $p$, $q$ என்பன அவற்றில் நிகழும் வழியிலிருந்து இது புலனாகும். ஆயின் $\lambda$ இலுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு இரு வேறுவேறான மூலங்கள் கொண்ட போதிலும் நாம் ஒரு மத்திய தொகையீட்டையே பெறுவோம்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

பின்வருவனவற்றிற்கு ஒரு மத்திய தொகையீடு (அல்லது இரண்டு, சாத்தியமாயின்) பெறுக :

(1) $3r+4s+t+(rt-s^2)=1.$

(2) $r+t-(rt-s^2)=1.$

(3) $2r+te^x-(rt-s^2)=2e^x.$

(4) $rt-s^2+1=0.$

(5) $3s+(rt-s^2)=2.$

(6) $qxr+(x+y)s+pyt+xy(rt-s^2)=1-pq.$

(7) $(q^2-1)zr-2pqzs+(p^2-1)zt+z^2(rt-s^2)=p^2+q^2-1.$

## 158. மத்திய தொகையீடுகளை மேலும் தொகையிடல்

**உம் (i)** பிரிவு 157 இன் உ-ம் (i) இல் பெறப்பட்டுள்ள

$$y-p=f(x-q)$$

என்னும் மத்திய தொகையீட்டை எடுத்துச் சிந்திக்க.

$x-q=a,\ y-p=f(a)=b,$ எண்க, என இடுதலால் $a,\ b,\ c$ என்னும் எதேச்சை மாறிலிகளைக் கொள்ளும் ஒரு முற்றிய தொகையீட்டைப் பெறலாம்.

ஆகவே $$dz=pdx+qdy=(y-b)dx+(x-a)dy,$$

$$z=xy-bx-ay+c.$$

மத்திய தொகையீட்டில் நிகழும் $f$ என்னும் எதேச்சைச் சார்பு ஏக பரிமாணமென உத்தேசித்தலால் ஒரு மிகப் பொதுவாகும் வடிவங்கொண்ட தொகையீடு பெறப்படலாம் ;

இது தருவது $$y-p=m(x-q)+n.$$

இதனை லகிராஞ்சியின் முறையாலே தொகையிட நாம் பெறுவது

$$z=xy+\phi(y+mx)-nx.$$

**உம் (ii)** பிரிவு 157, உ-ம் (ii) இன் இரு மத்திய தொகையீடுகளை எடுத்துச் சிந்திக்க ;

$$p+x-y=f(q-2x+y),$$
$$p+x-2y=F(q-x+y).$$

**உம் (i)** இலுள்ள ஒன்றிச் சமன்பாட்டை எடுத்தாண்ட அதே மாதிரி இவ்வொருங்கு சமன்பாடுகளையும் எடுத்தாள எத்தனிப்போமாயின்

$$q-2x+y=\alpha,$$
$$q-x+y=\beta,$$
$$p+x-y=f(\alpha),$$
$$p+x-2y=F(\beta).$$

வலக்கைப் பக்கத்தின் உறுப்புக்கள் மாறிலிகளாயின் $x,\ y,\ p,\ q$ என்பன வெல்லாம் மாறிலிகளென்னும் அனர்த்தமான முடிவைப் பெறுவோம்.

ஆனால் $\alpha,\ \beta$ என்பன மாறிலிகளாகாது மாறல் கொள்ளும் பரமாணங்களாகுமென உத்தேசிக்க.

நாலு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க

$$x=\beta-\alpha$$
$$y=f(\alpha)-F(\beta),$$
$$p=y-x+f(\alpha),$$
$$q=x-y+\beta\ ;$$

இவை தருவது $dz = pdx + qdy$

$$= (y - x)\ (dx - dy) + f(\alpha)dx + \beta dy$$

$$= -\tfrac{1}{2}d(x - y)^2 + f(\alpha)d\beta - f(\alpha)d\alpha + \beta f'(\alpha)d\alpha - \beta F'(\beta)d\beta;$$

அதாவது $$z = -\tfrac{1}{2}(x - y)^2 - \int f(\alpha)d\alpha - \int \beta F'(\beta)d\beta + \beta f(\alpha).$$

தொகையீட்டுக் குறியீடுகள் கொள்ளாத முடிபு ஒன்றைப் பெறுதற்கு

$$\int f(\alpha)d\alpha = \phi(\alpha),\ \int F(\beta)d\beta = \psi(\beta)$$ என இடுக.

இனி, பகுதிகளாகத் தொகையிடலால்

$$\int \beta F'(\beta)d\beta = \beta F(\beta) - \int F(\beta)d\beta = \beta\psi'(\beta) - \psi(\beta).$$

ஆகவே, $$z = -\tfrac{1}{2}(x - y)^2 - \phi(\alpha) - \beta\psi'(\beta) + \psi(\beta) + \beta\phi'(\alpha),$$

அல்லது இறுதியில்

$$z = -\tfrac{1}{2}(x - y)^2 - \phi(\alpha) + \psi(\beta) + \beta y,$$

$$x = \beta - \alpha,$$

$$y = \phi'(\alpha) - \psi'(\beta).$$

இம்மூன்று சமன்பாடுகளும் ஒரு பரப்புச் சமன்பாட்டின் பரமான வடிவம் அமைக்கும். இத்தீர்வு ஈர் எதேச்சைச் சார்புகள் கொள்ளுதலால் இது இயல்தகு மிகப் பொதுவான வடிவம் எனக் கருதப்படலாம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.** (முன் சென்ற தொடையின் தீர்வை நிறைவாக்கல்)

மேலே விளக்கிய முறைகளால் தொகையிடுக :

(1) $p + x - 2y = f(q - 2x + 3y)$.

(2) $p - x = f(q - y)$.

(3) $p - e^x = f(q - 2y)$.

(4) $p - y = f(q + x)$,
$p + y = F(q - x)$.

(5) $p - y = f(q - 2x)$,
$p - 2y = F(q - x)$

(6) $px - y = f(qy - x)$

(7) $(zp - x) = f(zq - y)$.

(8) $\phi(\alpha) = -\tfrac{1}{2}\alpha^2, \psi(\beta) = \tfrac{1}{2}\beta^2$ என இட்டுக் கொண்டு $\alpha$, $\beta$ ஆகியவற்றை நீக்கலால் (4) இனது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு பெறுக.

## அத்தியாயம் XIV இல் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $r = 2y^3$.

(2) மட $s = x + y$.

(3) $2yq + y^2t = 1$.

(4) $r - 2s + t =$ சைன்$(2x + 3y)$.

(5) $x^2r - 2xs + t + q = 0$.

(6) $rx^2 - 3sxy + 2ty^3 + px + 2qy = x + 2y$.

(7) $y^2r + 2xys + x^2t + px + qy = 0$

(8) $5r+6s+3t+2(rt-s^2)+3=0.$

(9) $2pr+2qt-4pq(rt-s^2)=1.$

(10) $rt-s^2-s(\text{சைன் } x+\text{சைன் } y)=\text{சைன் } x \text{ சைன்} y.$

(11) $7r-8s-3t+(rt-s^2)=36.$

(12) $r=6x+2$ என்பதைத் திருத்தியாக்கிக் கொண்டு $z=x^3+y^3$ என்பதை அதன் $x+y+1=0$ என்னும் தளவெட்டு நீளத்திற்குத் தொடும் பரப்பு ஒன்றைக் காண்க.

(13) $r-2s+t=6$ என்பதைத் திருத்தியாக்கி $z=xy$ என்னும் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவை அதன் $y=x$ என்னும் தளவெட்டு நீளத்திற்குத் தொடும் பரப்பு ஒன்றைக் காண்க.

(14) $r+t=0$ என்பதைத் திருத்தியாக்கி $x^2+z^2=1$ என்பதை அதன் $y=0$ என்னும் வெட்டு நீளத்திற்குத் தொடும் பரப்பு ஒன்று வரையப்படும். அதன் சமன்பாட்டை $z^2(x^2+z^2-1)=y^2(x^2+z^2)$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

(15) $2r+qs+xt-x(rt-s^2)=2$ என்பதற்கு மொஞ்சுவின் முறையைப் பிரயோகித்தலாற் பெறப்படும் $x, y, p, q$ என்பன பற்றிய நாலு ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுள் இரண்டு தொகையிடத்தக்கவையாகி $p-x=f(qx-2y)$ என்னும் மத்திய தொகையீட்டுக்கு வழிகாட்டுமெனவும், மற்றையிரண்டும் தனித்தனியாகத் தொகையிடத்தகாதவையெனினும் $p+\frac{1}{2}q^2-x=a$ என்னும் தொகையீடு தருமாறு சேர்க்கப்படலாமெனவும் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு

$$z=\tfrac{1}{2}x^2-2mxy-\tfrac{2}{3}m^2x^3+nx+\phi(y+\tfrac{1}{2}mx^2),$$

$$z=(a-\tfrac{1}{4}b^2)x+\tfrac{1}{2}x^2+by+c$$

என்னும் தொகையீடுகளைப் பெற்று ஒன்று மற்றையதன் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாகுமெனக் காட்டுக.

(16) $x=0$ என்பதற்குச் சமாந்தரமான யாதுமொரு தளத்தாலாய தனது வெட்டு $x$–அச்சுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டமாகுமாறு ஒரு பரப்பு உண்டு. அது

$$y^2+z^2+yf(x)+zF(x)=0$$

என்னும் சார்புச் சமன்பாட்டையும்

$$(y^2+z^2)t+2(z-yq)\,(1+q^2)=0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும் திருத்தியாக்குமென்பதை நிறுவுக.

(17) $x^2r+2xys+y^2t=0$ என்பதன் தீர்வை

$$z=f\left(\frac{y}{x}\right)+xF\left(\frac{y}{x}\right)$$

என்னும் வடிவத்திற் பெற்று, $z$ அச்சை இடைவெட்டும் கோடுகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பு ஒன்றை இது குறிக்குமெனக் காட்டுக.

(18) $rt-s^2=0$ என்பது $z=ax+by+c$ என்னும் முற்றிய தொகையீட்டுக்கு வழிகாட்டுமென்பதைக் காட்டுக.

இதனிலிருந்து (பிரிவு 134 இலுள்ளதுபோல்) பெறப்படும் "பொதுத் தொகையீடு" ஒரு விரிதகு பரப்பைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக. (சிமிதின் "திண்மக் கேத்திரகணிதம்", பிரிவுகள் 222, 223 பார்க்க.)

அது துணைகொண்டு யாதுமொரு விரிதகு பரப்புக்கு $q=f\,(p)$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(19) $pq(r-t)-(p^2-q^2)s+(py-qx)(rt-s^2)=0$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் விரிதகு பரப்புக்கள் காண்க. [$q=f(p)$ எனக் கொள்க. இது புவசோனின் முறையெனப்படும். $q=ap$ அல்லது $p^2+q^2=b^2$ எனப் பெற்று $z=\phi(x+ay)$ அல்லது $z=bx$ கோசை $\alpha+by$ சைன் $\alpha+c$ எனத் தரப்படும். இத்தொகையீடுகளுள் இரண்டாவது ஒத்த "பொதுத்" தொகையீட்டாலே தரப்படும் விரிதகு பரப்பைப் பிறப்பிக்கும் தளத்தைக் குறிக்கும்.]

(20) $$X=p,\ Y=q,\ Z=px+qy-z \text{ ஆயின்}$$

$$r=T/(RT-S^2),\ s=-S/(RT-S^2),\ t=R/(RT-S^2)$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு $$R=\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \dots\dots\dots,$$

அது துணைகொண்டு $ar+bs+ct+e(rt-s^2)=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு $AT-BS+CR+E=0$ என்பதற்கு உருமாறுமெனக் காட்டுக ; இங்கு $a, b, c, e$ என்பன $x, y, p, q$ என்பவற்றின் எவையேனும் சார்புகளுமாக $A, B, C, E$ என்பன $P, Q, X, Y$ என்பவற்றின் ஒத்த சார்புகளாகும்.

$$pq(r-t)-(p^2-q^2)s+(py-qx)(rt-s^2)=0$$

என்பதன் இரு மத்திய தொகையீடுகள் பெறுதற்கு இவ்விருமைக் கோட்பாட்டைப் பிரயோகிக்க. (அத்தியாயம் **XII** இன் முடிவிலுள்ள பலவினப் பயிற்சிகளுள் இல. **21** பார்க்க.)

(21) $x, y, u, v$ என்பன மெய்யாக $u+iv=f(x+iy)$ ஆயின் $V=u$, $V=v$ என்பன இரண்டும்

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

என்பதன் தீர்வுகளாகுமென்பதையும், $u=$ மாறிலி $v=$ மாறிலி என்னும் இரு வளையித் தொகுதிகளும் தம்முள் நிமிர்கோணமுறையாகுமென்பதையும் நிறுவுக.

இவ்வுடமைகளை

$$\text{(i)}\quad u+iv=x+iy,$$
$$\text{(ii)}\quad u+iv=(x+iy)^2,$$
$$\text{(iii)}\quad u+iv=1/(x+iy)$$

என்னும் குறிப்பிட்ட வகைகள் பற்றி சரிபார்க்க.

[இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு ஆனது ஈர்ப்பு, நிலைமின்னியல், நீரியக்கவியல் ஆகியவற்றில் அடிப்படை முக்கியமாகும் லப்பிலாசின் சமன்பாட்டின் இரு பரிமாண வடிவமாகும். $u$, $v$ என்பன உடன் புணரிச் சார்புகள் எனப்படும்

[ராம்சேயின் "நீர்ப்பொறியியல், பாகம் **II** பிரிவு **41** பார்க்க.]

(22) $t=0$ ஆகுமிடத்து $y=f(x), \frac{\partial y}{\partial t}=F(x)$ என்னும் நிபந்தனைகட்கு அடங்குமாறு

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

என்பதன் தீர்வை

$$y=\tfrac{1}{2}f(x+at)+\tfrac{1}{2}f(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(\lambda)d\lambda$$

என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

[$y$ ஆனது $x$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் தனது தொடக்க இடப்பெயற்சியும் வேகமும் $f(x)$, $F(x)$ என்பவற்றுலே தரப்பட்டு முடிவில் நீளங் கொண்டு அதிர்கின்ற இழையின் குறுக்கிடப்பெயற்சியாகும். ராம்சேயின் " நீர்ப்பொறியியல் ", பாகம் **II**, பிரிவு **248** பார்க்க.]

(23) $y = f(x)$ கோசை $(nt+\alpha)$ என்பது

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

என்பதன் ஒரு தீர்வாயின்

$f(x) = A$ சைன் $mx + B$ கோசை $mx + H$ அசைன் $mx + K$ அகோசை $mx$ எனக் காட்டுக ;

இங்கு $m = \sqrt{(n/a^2)}$.

[இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு சுழற்சிச் சடத்துவத்தைப் புறக்கணிக்குமிடத்து சலாகைகளின் பக்க அதிர்வுகளால் அண்ணளவாய்த் திருத்தியாக்கப்படும். றேலியின் "ஒலி" பிரிவு 163 பார்க்க.]

(24) $m, n$ என்பன $(p/\pi)^2 = (m/a)^2 + (n/b)^2$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும் நேர் முழு வெண்களாயின்

$$w = A \text{ சைன் } (m\pi x/a) \text{ சைன் } (n\pi y/b) \text{ கோசை } (pct+\alpha)$$

என்பது
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

என்பதைத் திருத்தியாக்கி $x=0$, $y=0$, $x=a$ அல்லது $y=b$ ஆகுமிடத்து மறையுமெனக் காட்டுக.

[இது ஒரு நிலையான செவ்வக வரைப்பாடு கொண்டு அதிர்கின்ற மென்றகடு பற்றிய வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வைத் தரும். றேலியின் "ஒலி", பிரிவுகள் 194–199 பார்க்க.]

(25) $w = AJ_0(nr)$ கோசை $(nct+\alpha)$ என்பது

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

என்பதைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக ; இங்கு $J_0$ ஆனது பெசலின் பூச்சிய வகைச் சார்பாகும் (பிரிவு 97 இன் பின்வரும் தொடையின் பயிற்சி 2 பார்க்க).

[இது ஒரு நிலையான வட்ட வரைப்பாடு கொண்டு அதிர்கின்ற மென்றகடு பற்றிக் குறிக்கும். றேலியின் "ஒலி", பிரிவுகள் 200–206 பார்க்க.]

(26) $V = (Ar^n + Br^{-n-1})\, P_n$ (கோசை$\theta$) என்பது

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\text{கோதா}\,\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

என்பதைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக ; இங்கு $P_n$ என்பது இலசாந்தரின் $n$ ஆம் வரிசைச் சார்பாகும் (லசாந்தரின் சமன்பாடு பற்றிப் பிரிவு 99 இன் பின்வரும் பயிற்சி 2 பார்க்க).

[$\mu =$ கோசை $\theta$ என்பதைப் புதுமாறியாக எடுக்க. இச்சமன்பாடு, $V$ என்பது ஓர் அச்சுப் பற்றிச் சமச்சீராகுமெனத் தெரியப்படுமிடத்து, முப்பரிமாணத்தில் லப்பிலாசின் அழுத்தச் சமன்பாடு எடுக்கும் வடிவமாகும். ரவுதின் "பகுப்பு நிலையியல்", பாகம், II, பிரிவு 300 பார்க்க.]

## அத்தியாயம் XV

## பலவின முறைகள்

**159.** இவ்வத்தியாயம் ஆறு பிரிவுகளால் ஆக்கப்படும். முதலாவது (பிரிவுகள் 160–161) அத்தியாயம் VI ஆனதை மிகை நிரப்புவதாகித் தனிச் சிறப்புத் தீர்வுக் கொள்கையில் ஏற்படும் வில்லங்கங்கள் பற்றி, விசேடமாக ஒரு சூழியின் வரைவிலக்கணமும் பிரித்துக்காட்டிகளில் குறிப்பிட்ட தீர்வுகள் நிகழும் வழியும் பற்றி, ஆராய்வதாய் உள்ளது. பிரித்துக்காட்டி—ஒழுக்குக்கள் வரைப்பாடுகளாகு மென்னும் எண்ணக்கரு பற்றிய அறிவு மிகக் குறைவு என்பது தோன்றுகின்றது.

இரண்டாம் பிரிவு (பிரிவுகள் 162–167) றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டை முக்கியமாய் அதன் பொதுமைப்படுத்திய வடிவத்தில் எடுத்தாளும். உதாரணங்கள் எவ்வகைகளில் றிக்காற்றியின் தொடக்கச் சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடப்படலாமென்பதைச் சுட்டிக்காட்டும் ஒரு தொடரை உட்படுத்தும்.

மூன்றாம் பிரிவு (பிரிவுகள் 168–170) மொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை எடுத்தாளும் ; அது அத்தியாயம் XI ஐ மிகை நிரப்பும். ஏகவினைச் சமன்பாடுகளுக்குத் தொகையீட்டுக் காரணியை உபயோகித்தல் ஆரம்ப மாணாக்கனுக்கு திருத்தியளிக்கும் ; ஆனால் அறிமுறை பற்றிய நோக்கில் மேயரின் முறை மிகக் கவர்ச்சியானது.

நாலாம் பிரிவு (பிரிவுகள் 171–177) இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளையும் அவற்றின் தொடர் முறைத் தீர்வையும் எடுத்தாளும். அது அத்தியாயங்கள் IX, X என்பவற்றை மிகை நிரப்பும். உயர் வரிசைச் சமன்பாடுகள் பற்றிச் சில முடிபுகள் உட்படுத்தப்படும்.

ஐந்தாம் பிரிவு (பிரிவுகள் 178–181) சில கணித பௌதிகவியற் சமன்பாடுகளை குறிப்பாக அலையியக்கம் பற்றியவையை எடுத்தாளும். அது அத்தியாயங்கள் IV, XIV என்பவற்றை மிகை நிரப்பும்.

இறுதியில் ஆறாம் பிரிவு (பிரிவுகள் 182–183) வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக்கு எண்ணண்ணளவாக்கங்களை எடுத்தாளும். (அத்தியாயம் viii ஐ மிகைநிரப்பும்.) இதுவரை ஏற்படுத்தப்பட்டுள்ள மிக நன்றானதாகிய அடம்ஸின் முறையை அது விளக்கிக்கூறி இந்நூலாசிரியரின் முறையின் (பிரிவுகள் 90–93) சில விரிகளின் பொழிப்பைத் தரும்.

### 160. தனிச் சிறப்புத் தீர்வுக் கொள்கையில் சில வில்லங்கங்கள்

இப்போது சூழிகள் தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகள், குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் என்பன பற்றிச் சில வில்லங்கங்களைக் காட்டுதலால் அத்தியாயம் vi என்பதை மிகை நிரப்புவோம்.

**ஒரு வளையிக் குடும்பத்தின் சூழி அடுத்துவரும் வளையிகளினது ஈற்று இடைவெட்டுக்களின் ஒழுக்காகும் என்னும் பழைய வரைவிலக்கணம் தள்ளிவிடப்படல் வேண்டும் ; ஏனெனில் அது ஒரு வளையி தனது சொந்த** வளைவு வட்டங்களின் சூழியல்லவென்னும் அனர்த்தமான முடிபுக்கு வழிகாட்டுமெனக் காணப்பட்டுள்ளது.

[ஒரு வளையியிலுள்ள $P, P'$ என்னும் ஈர் அயற் புள்ளிகளுக்கு ஒத்த வளைவு மையங்களாகிய $C, C'$ என்பன அவ்வளையியினது மலரியிற் கிடக்கும். $CP$, $C'P'$ என்னும் வளைவாரைகளின் வித்தியாசம் $CC'$ என்னு மலரிவில்லாகும். இவ்வில் பொதுவாக $CC'$ என்னும் நாணினும் பெரிதாகும், அதாவது வளைவு மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்திலும் பெரிதாகும். ஆயின் ஒரு வட்டம் மற்றையதை முற்றாய் உள்ளடைத்தலால் மெய் இடைவெட்டுக்கள் இல்லை. பழைய வரைவிலக்கணம் தவறாகும் வேறு வகைகள் பற்றி பிரிவு 616 இன் பின்வரும் பயிற்சி 13 பார்க்க.]

டீலாவலேபூசோன் என்பவரின் வரைவிலக்கணம் **சூழியானது தனித்த சிறப்பியல்புப் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு** என்பதே (அதாவது ஒரு வளையியில் அயல் வளையிகளிலிருந்து தமது தூரம் முதல் வரிசையிலும் மேற்பட்ட வரிசையிற் சிறிதாகுமாறுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு.) எனினும் இதுவும் சில வழிகளில் திருத்தியாகாது என்பது காட்டப்பட்டுள்ளது. எமது நோக்கத்திற்குக் **குடும்பத்தின் ஒவ்வோர் அங்கத்தையும் தொடுவதும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் குடும்பத்தின் யாதோ அங்கத்தால் தொடப்படுவதுமான வளையி** என்பது மிக இசைவான வரைவிலக்கணமாகும். இது பிரிவு 55 இல் தரப்பட்டுள்ள வரைவிலக்கணத்தோடு பொருந்தும் ; வரைவிலக்கணத்தின் இரண்டாம் பாகம் அங்கு வெளியீடாகக் கூறப்படவில்லை, ஆனால் பின்வரும் வசனத்தில் உள்ளடங்கும்.

தனிச்சிறப்புத் தீர்வின் வேறு வேறான வரைவிலக்கணங்கள் மூன்றாதல் உண்டு. எமது வரைவிலக்கணம் (பிரிவு 55) ஆவது அது **முற்றிய மூலியாற் குறிக்கப்படும் வளையிக் குடும்பத்தின் சூழிக்கு ஒத்த தீர்வு** என்பதே. எனினும் சில புறநடை வகைகளில் சூழியானது குடும்பத்தின் ஒரு குறிப்பிட்ட வளையியுமாகலாம். உதாரணமாக, $y=c\ (x-c)^2$ என்னும் பரவளைவு $y=0$ என்னுங் கோட்டை $(c,\ 0)$ என்னும் புள்ளியில் தொடுதலால் $y=0$ என்பது $c$ இற்கு இயல்தகு பூச்சியமல்லாப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றையுங் கொடுத்தலாற் பெறப்படும் குடும்பத்தின் சூழியாதலுமல்லாமல் $c=0$ என்பதால் தரப்படும் குறிப்பிட்ட வளையியுமாகும். எமது வரைவிலக்கணத்திற்கு ஒக்க $y=0$ என்பது குடும்பத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டினது ஒரு தனிச்சிறப்புத் தீர்வும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடுமெனக் கருதப்படல் வேண்டும். (பயிற்சி 6, பிரிவு 65). ஆனால், சிலர் தனிச்சிறப்பு என்னும் சொல்லை **முற்றிய மூலியில் நிகழும் எதேச்சை மாறிலுக்கு யாதும் மாறாப் பெறுமானம் கொடுத்தலாற் பெறமுடியாத தீர்வுக்கே** உபயோகிப்பர். தனிச்சிறப்புத் தீர்வின் மூன்றாம் வரைவிலக்கணம் ஆவது அ-து **$P$ – பிரித்துக்காட்டியில் நிகழும் தீர்வு** என்பதே. அத்தகைத் தீர்வு சூழியைக் குறியாதிருக்கலாம் என்பது பிரிவு 161 இற் காட்டப்படும். அது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு ஆகலாம் அல்லது அதன் எல்லை வடிவமாகலாம்.

ஒரு பரமானத்தைச் சாரும் வளையிக் குடும்பம் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு சூழி உண்டெனவும் இக்காரணத்தால் முதற் படியிலும் உயர்ந்த படியிலுள்ள முதல் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாடு ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு உண்டெனவும் மாணுக்கன் உத்தேசித்தல் இயற்கையாகும். ஆனல் இது உண்மையாகாது. சூழிகளைப் பற்றித் தர்க்கிக்கையில் குடும்பச் சமன்பாட்டில் நிகழும் சார்புகள் தொடர்ச்சி பற்றிய சில நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்குமென்பது உள்ளீடாகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகளின் ஆரம்பப் பரிகரிப்பில் தரப்படும் எளிய வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் முற்றிய மூலிகளுக்கு இந்நிபந்தனைகள் வழக்கமாகத் திருத்தியாக்கப்படும் ; ஆனல் அத்தகை உதாரணங்களை அமைத்தற்கு முற்றிய மூலிகளே உண்மையில் தொடக்க நிலையாக எடுக்கப்படுதலே இதற்குக் காரணம். இயல்பொத்த வடிவம் கொண்ட மிகப் பொதுவான வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து தொடங்குவோமாயின் சூழியின் உண்மைக்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளை முற்றிய மூலி திருத்தியாக்குமென உத்தேசித்தற்கு யாது காரணமுமில்லை. உண்மையில் தனிச்சிறப்புத் தீர்வு உண்மையாதல் வழக்கமானதாகாது புறநடையாகுமெனச் சிந்திக்கப்படல் வேண்டும் எனக் கூறலாம்.

சூழிகளைக் காண்டற்கு வழக்கமான செய்கை (பிரிவு 56) முற்றிய மூலியின் ஒரு வடிவத்திற்குப் பயன்படாதபோதிலும் வேறொன்றுக்குப் பயன்படலாம். உதாரணமாக $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$ என்பதற்கோ $x+$சைன் $^{-1}y=c$ என்பதற்கோ அது பயன்படாது ; ஆனல் $(x+y-c)^2=4xy$ என்பதற்கோ $y=$சைன் $(c-x)$ என்பதற்கோ பயன்படும்.

$y=xp^2$ என்பதற்கு வழிகாட்டும் $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$ என்னுஞ் சமன்பாடு வேறொரு விடயத்தை எடுத்துக்காட்டும். இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாடு $y=0$ என்பதாலே திருத்தியாக்கப்படும், ஆனல் $p=\infty$ எனத் தந்து இரு பக்கங்களையும் தேராதனவாக்கும் $x=0$ என்பதால் திருத்தியாக்கப்படாது. எனினும் $x=0$, $y=0$ என்பன இரண்டும் (அச்சுக்களைத் தொடும்) பரவளைவுகளாகிய) வளையிகளாலாய குடும்பத்தின் சூழிகளாகி இரண்டும் $y(dx)^2=x(dy)^2$ என்பதைத் திருத்தியாக்கும்; இவ்வகையீட்டுத் தொடர்பு உண்மையில் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலுங் கூடுதலாகச் செம்மையாய்க் கேத்திரகணித உண்மைகளைக் குறிக்கும். (அத்தியாயம் vi பலவினப் பயிற்சி 9, முழுநூலிற் பலவினப்பயிற்சி ii ஆகியவற்றைப் பார்க்க. $x=0$ என்பது முதலாவதில் ஒரு குறிப்பிட்ட வளையியின் எல்லை வடிவமாகி இரண்டாவதில் சூழியும் கூர்–ஒழுக்குமாகும்.] இத்தகை வகைகளில் நாம் $x=0$ என்பதற்குத் தீர்வுகளுள் ஓர் இடங்கொடுத்தற்கு மறுத்தல் வேண்டும் ; ஆனல் இந்த மறுப்புக்குக் காரணம் வகையீட்டுச் சமன்பாடு $y$ - அச்சுக்குச் சமாந்தரமான திசைகளைக் குறித்தற்குத் தவறுதலேயன்றிச் சூழியினது யாது சிறப்பியல்புமல்ல எனக் கருதப்படலாம்.

## 161. பிரித்துக் காட்டிகள், குறிப்பிட்ட தீர்வுகள், வரைப்பாடுகள்.

இப்பிரிவில், $(f, x, y, c)$ என்பது

$$a_0(x,y)c^n + na_1(x,y)c^{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1)a_2(x,y)c^{n-2} + \ldots\ldots + a_n(x,y)$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படும் $x$, $y$, $c$ ஆகியவற்றிலுள்ள பல்லுறுப்பியாக, $f(x,y,c)$ என்னும் வடிவம் கொண்ட முற்றிய மூலிகளைப் பற்றியே சிந்திப்போம்.

$\Delta c$ என்னும் $c$ – பிரித்துக்காட்டி (ஓர் எண் காரணியைத் தவிர்த்து, ${a_0}^{2n-2}$ இனதும் மூல வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களினதும் பெருக்கமாக வரையறுக்கப்படும். ${a_0}^{2n-2}$ என்பதை உட்செலுத்துவது முடிபை $a_0$, $a_1 \ldots$ $a_n$ ஆகியவற்றில் பல்லுறுப்பியாக்குதற்கே. ஆயின் $n=2$, 3, 4 ஆகுமிடத்து முறையே

$$a_0a_2 - {a_1}^2$$

$$(a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_0a_2 - {a_1}^2)(a_1a_3 - {a_2}^2),$$

$$(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3{a_2}^2)^3 - 27(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0{a_3}^2 - {a_1}^2a_4 - {a_2}^3)^2.$$

அத்தியாயம் VI இல் உள்ளது போல் “பிரித்துக்காட்டி” என்னும் சொல்லை $\Delta c$ என்னும் சார்பை மட்டுமல்ல $\Delta_e = 0$ என்னும் சமன்பாட்டையும் இச்சமன்பாட்டாற் குறிக்கப்படும் ஒழுக்குகளையும் குறித்தற்குச் சில சமயங்களில் வழங்குவோம்.

தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகள் பற்றிப் பயிற்சிகள் செய்தற்குப் பிரித்துக்காட்டிகளைக் கணிக்கும் ஒரு முறைமையான முறையை உபயோகித்தல் விரும்பத்தக்கதாகும். இருபடியங்கள், முப்படியங்கள், நாற்படியங்கள் ஆகியவற்றிற்கு மேலுள்ள முடிபுகள் உபயோகிக்கப்படலாம். [இவற்றை உபயோகிக்குமிடத்து $a$ கள் ஈருறுப்பு எண் காரணிகள் கொள்ளும் உண்மையான குணகங்களல்ல என்பதை ஞாபகத்தில் வைக்க ; உதாரணமாக நாற்படியத்திற்கு $c^2$ இன் குணகம் $a_2$ ஆகாது $6a_2$ ஆகும்.] பிரிவு 56 இல் உள்ளது போல் நீக்கலால் $\Delta_c$ யைப் பெறுவோமாயின் சில காரணிகள் புறக்கணிக்கப்படுதல் நிகழலாம். இந்நீக்கல் செய்தற்குச் சில்வெத்தரின் “ஊடுதளர்த்துமுறை” வழங்கல் பெரும்பாலும் மெச்சப்படும். இதனை இங்கு பிரயோகித்தற்கு $f$ என்பதை $c^{n-2}$, $c^{n-3}$ ........, c, 1 என்பவற்றாலும் $\dfrac{\partial f}{\partial c}$ யை $c^{n-1}, c^{n-2}, \ldots\ldots c$, 1 என்பவற்றாலும் பெருக்கிக் கொண்டு அவ்வாறு ஆக்கப்படும் $(2n-1)$ சமன்பாடுகளிலிருந்து $c^{2n-2}, c^{2n-3}, \ldots\ldots c$ ஆகியவற்றை நீக்குவோம் ; இது $(2n-1)$ நிரைகளும் நிரல்களும் கொண்ட துணிகோவையைத் தரும். $a_0c^2 + 2a_1c + a_2 = 0$ என்னும் இருபடியத்திற்கு இது தருவது

$$\begin{vmatrix} a_0, & 2a_1, & a_2 \\ 2a_0, & 2a_1 & 0 \\ C & 2a_0 & 2a_1 \end{vmatrix} = 4a_0(a_0a_2 - {a_1}^2).$$

ஆனால் இது $a_0$ என்னும் மேலதிகமான காரணியைக் கொள்ளும். $f$ இனது படி எதுவாயினும், $(2n-2)$ என்னுமுறைமைப் படிக்குப் பதிலாச $(2n-1)$ என்னும் படிகொள்ளும் கோவையொன்றைத் தருமாறு, இதே மேலதிகமான காரணி நிகழுமென்பது எளிதிற் புலனாகும். இப்பிரிவின் முடிவிலுள்ள பயிற்சிகளுக்குச் சில்வெத்தரின் முறையை உபயோகிக்குமிடத்து, இக்காரணி நீக்கப்படல் வேண்டும்.

இப்பயிற்சிகளின் முதன்மை நோக்கம் $c$ – பிரித்துக் காட்டியாலும் $p$ – பிரித்துக் காட்டியாலும் குறிப்பிட்ட தீர்வுகளோ அவற்றின் எல்லை வடிவங்ககளோ தரப்படும் சில வழிகளை எடுத்துக் காட்டுதலே. சில வகைகளில் தீர்வுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட வளையியினது ஒரு பாகமாகவே நிகழும் (பயிற்சி 1). அவற்றின் கேத்திரகணிதப் பொருள் பல்வேறு வடிவங்கள் கொள்ளும். அவை சூழிகளாகி அக்காரணத்தால் தனிச்சிறப்புத் தீர்வுகளுமாகலாம் (பயிற்சி 2), அல்லது கணு–ஒழுக்குக்களோ (பயிற்சி 3) கூர்–ஒழுக்குக்களோ (பயிற்சி 4) பரிசவொழுக்குக்களோ (பயிற்சி 5) அணுகு கோடுகளோ (பயிற்சி 6) குடும்ப வளையிகள் எல்லாவற்றையும் ஒரே புள்ளியில் தொடும் தொடலிகளோ (பயிற்சி 8) ஆகலாம். அவை ஒரு குடும்பத்தின் பொதுப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் (தொடலிகளல்லா) கோடுகள் ஆகலாம் (பயிற்சி 7). கிளெரோவின் வடிவத் தொடர்பில் அவை சூழியின் விபத்தித் தொடலிகளாலே தரப்படும் (பயிற்சி 9).

பிரித்துக் காட்டிகளிற் குறிப்பிட்ட தீர்வுகள் நிகழுமிடத்து அவை $\Delta_c$ இல் முதல் வலுவிலும் $\Delta_p$ இல் மூன்றாம் வலுவிலும் நிகழும் என்பது சில வேளை கூறப்படும். இந்நெறி பிரிவு 64 இல் உள்ளனவோடு பின்வரும் குறியீட்டு வடிவத்திற் சேர்க்கப்படலாம் :

$$\Delta_c = EN^2C^3P,\quad \Delta p = ET^2CP^3;$$ இங்கு $E, N, C, P, T$

என்பன முறையே சூழி, கணு–ஒழுக்கு, கூர்–ஒழுக்கு, குறிப்பிட்ட தீர்வு, பரிசவொழுக்கு ஆகியவற்றைக் குறிக்கும். இந்நெறிகள் எளிய வகைகளிலே பயன்படும், ஆனால் இவை தவறாகும் உதாரணங்களும் எளிதில் அமைக்கப் படலாம் (பயிற்சிகள் 3, 4, 6, 13, 14).

இப்போது குறிப்பிட்ட தீர்வுகளும் வேறு புறநடை ஒழுக்குக்களும் வரைப்பாடுகள் ஆகுமென்னும் எண்ணக்கருவை விளக்குவோம்.

$f(x, y, c)$ என்பது $x, y, c,$ ஆகியவற்றில் பல்லுறுப்பியாகி $x, y$ என்பவற்றின் ஒவ்வொரு மெய்ப்பெறுமானச் சோடிக்குமொக்க மெய் வளையிகளுக்கு ஒத்த $m$ மெய் மூலங்களும் கற்பனை வளையிகளுக்கு ஒத்த $(n-m)$ கற்பனை மூலங்களும் கொண்ட ஒரு சமன்பாடு $c$ பற்றி $n$ என்னும் படியிற் பெறுமாறுள்ள வகையை மட்டுமே எடுப்போம். அன்றியும் $x, y$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாகும் இம் மூலகங்கள் $x, y$ என்பன தொடர்ச்சியாக மாறுமிடத்துத் தாமும் அவ்வாறே மாறுமெனக் கொள்வோம்.

$B(x,y)=0$ என்னும் (மடங்கு வடிவத்தில் நிகழாமலோ ஒரு தொகை எளிய வளையிகளினால் ஆக்கப்படாமலோ உள்ள) ஒரு குறித்த வளையி $m$ ஆனது ஒன்றிலே $M$ என்னும் பெறுமானம் எடுக்குமாறும், மற்றையதிலே $M-2$ என்னும் பெறுமானம் எடுக்குமாறும் உள்ள இரு பிரதேசங்களுக்கிடையே வரைப்பாடு ஆகுக. $(x, y)$ என்னும் புள்ளி முதற் பிரதேசத்திலிருந்து $B$ என்னும் வரைப்பாட்டுக்குக் குறுக்கே இரண்டாம் பிரதேசத்திற்குள் தொடர்ச்சியாக இயங்குமிடத்து ஒரு சோடி சமமில்லா மெய் மூலங்கள் சமமின்மையிற் குறைந்து பின்னர் ($B$ இல்) சமமாகி இறுதியில் (இரண்டாம் பிரதேசத்தில்) உடன்புணரிச் சிக்கலெண்களாகும். இம்மூலங்களின் வித்தியாசத்தினது வர்க்கத்தைக் கொண்ட $\Delta_c$ என்பது $B$ இல் மறைந்து பின்னர், ஈர் உடன்புணரிச் சிக்கல் மூலங்களின் வித்தியாசத்தினது வர்க்கம் மறையாதலால், குறிமாறும். $(x, y)$ என்பது $B(x, y)$ இற்குக் குறுக்கே இயங்குதலால் இதுவும் குறி மாறல் வேண்டும். மிகப் பொதுவாக, $r$ ஆனது ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணாகுமிடத்து $m$ ஆனது $M$ இலிருந்து $M-2r$ இற்கு மாறுமாயின் $\Delta_c$ என்பது குறி மாறும் ; $B(x, y)$ ஆனது $\Delta_c$ இல் ஒற்றை வலுவில் நிகழும் (இவ்வொற்றை வலு $r$ ஆகாதிருக்கலாம் ; பயிற்சி 14 இல் $r=1$ ஆனபோதிலும் $B(x, y)$ மூன்றாம் வலுவில் நிகழும்). $r$ ஆனது இரட்டை முழுவெண்ணாயின் $B(x, y)$ இரட்டை வலுவில் நிகழும். மாறு நிலையாக $B(x,y)$ ஒற்றை வலுவில் நிகழுமாயின் $r$ ஒற்றையாதல் வேண்டும். எனினும் $\Delta_c$ இன் குறி மாறாவாறு $B(x,y)$ ஆனது இரட்டை வலுவில் நிகழுமாயின் $r$ இரட்டையாதல் வேண்டியதில்லை ; பயிற்சி 13 இல் உள்ளது போல் அது பூச்சியமாகலாம் ; இங்கு $B$ ஆனது குடும்ப வளையிகள் எல்லாவற்றாலும் கடக்கப்படும் ஒரு சூழியாகும். இத்தகை வகைகளில் $\Delta_c=EN^2C^3P$ என்னும் நெறிக்கு எதிரிடையாகச் சூழி ஓர் இரட்டை வலுவில் நிகழ வேண்டும். ஒரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் மெய்வளையிகளின் தொகைக்குப் பதிலாக அதற்கூடாகவுள்ள திசைகளின் தொகையை எடுத்துச் சிந்தித்தால், $\Delta_p$ என்பதற்கு இது போன்ற நியாயமுறை உண்மையாகும். விசேடமாகக் கவர்ச்சிக்குரிய ஒருவகை கிளெரோவின் வடிவம் பற்றியது (பயிற்சி 9). சூழியின் விபத்தித தொடலி $p$ இன் இரு சமமூலங்களுக்கு ஒத்திருத்தலால் அது $\Delta p=0$ என்பதற்கு வழிகாட்டும். கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு $\Delta_c=\Delta_p$ ஆதலால் $\Delta_c=0$ என்பதும் பெறப்படும்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகளை ஆராயும் வேறொரு கேத்திரகணித முறை $p$ இற்குப் பதிலாக $z$ ஐ எழுதுதலாம் ; இது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை ஒரு பரப்பின் அட்சரகணிதச் சமன்பாட்டுக்கு மாற்றும். இதே மாதிரி முற்றிய மூலியிலும் $c$ இற்குப் பதிலாக $z$ எழுதப்படலாம். இந்த முறையின் தொடர்பில் பரப்புக் கேத்திரகணிதம் பற்றி நல்ல அறிவு வேண்டும்.

தனிச் சிறப்புத் தீர்வுக் கொள்கை பற்றிய வில்லங்கங்கள், குணகங்கள் $x$, $y$ ஆகியவற்றில் பல்லுறுப்பிகளாகும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைக் குறித்தே பெரிதாகும். குணகங்கள் பல்வேறு சிக்கற் படிகளில் தனிச் சிறப்புக்கள் கொண்ட அதீதச் சார்புகளாகுமிடத்து வில்லங்கங்கள் மிகக் கூடுதலாகும்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்.

[$\Delta_c$, $\Delta_p$, என்பன மேலே தரப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களிலிருந்து பெறப்படும், ஆனால் எண் காரணிகள் விலக்கப்பட்டுள்ளன.

ஒவ்வொரு வளையிக் குடும்பத்தினது அங்கங்கள் சிலவற்றின் வடிவத்தையும் பிரித்துக் காட்டிகளாலே தரப்படும் ஒழுக்குக்களின் தொடர்பில் அவற்றின் நிலையையும் காட்டும் பரும்படியான வரைபுகளை மாணுக்கன் ($x$, $y$ ஆகியவற்றின் செப்பமான பெறுமானங்களைக் கணிக்காது) வரைதல் வேண்டும்.]

(1) $y(x+c)+c^2=0$ என்னும் முற்றிய மூலிதரப்பட

$$x^2p^2+y(2x-y)p+y^2=0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்

$$\Delta_c=y(4x-y),\Delta_p=y^3(4x-y)$$

என்பவற்றையும் பெறுக.

[$C$ இனது பூச்சியமல்லாப் பெறுமானங்களுக்கு முற்றிய மூலி ஒரு செங்கோண அதிபர வளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும். $y=o$ என்பது இவ்வதிபரவளைவுகள் எல்லாவற்றிற்கும் ஓர் அணுகுகோடாகி முற்றிய மூலியில் $c=o$ என இடுதலாற் பெறப்படும் $xy=0$ என்னும் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டினது பாகமுமாகும். $y=4x$ என்பது ஒரு சூழி (தனிச்சிறப்புத் தீர்வு). $\Delta_c=EN^2C^3P$, $\Delta_p=ET^2CP^3$ என்னும் நெறிகள் உண்மையாகும். தளம் நாலு பிரதேசங்களாகப் பிரிக்கப்படலாம். அவற்றுள் இரண்டில் யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் குடும்ப மெய்வளையிகளினது தொகை இரண்டாக மற்றையிரு பிரதேசங்களிலும் இத்தொகை பூச்சியமாகும். இப்பிரதேசங்களுக்கிடையேயுள்ள வரைப்பாடுகள் பிரித்துக் காட்டிகளாலே தரப்படும் ஒழுக்குக்களாகும்; இவை இரண்டும் ஒற்றை வலுக்களில் நிகழும். இது எமது வரைபாட்டுக் கொள்கையோடு இசைவாகும்; ஏனெனின் இவ்வகையில் $M=2, M-2r=O$ ஆதலால் $r-1$ (ஒற்றையெண்) ஆகும்.]

(2) முற்றிய மூலி $y=c(x-c)^2$ எனத் தரப்பட

$$p^3-4xyp+8y^2=O$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்

$$\Delta_c=y(27y-4x^3),\ \Delta_p=y^3(27y-4x^3)$$

என்பவற்றையும் பெறுக.

[பிரிவு 160 இல் கூறப்பட்டுள்ளதுபோல் $y=o$ என்பது ஒரு சூழி (தனிச்சிறப்புத் தீர்வு) ஆகி ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடுமாகும். அன்றியும் அது ஒரு பரிசவொழுக்காகக் கருதப்படலாம். $27y=4x^3$ என்பது ஒரு சூழியாகும். இக்கேத்திரகணித விளக்கங்களுள் இரண்டாவதும் நாலாவதும் $\Delta_c=EN^2C^3P, \Delta_p=ET^2CP^3$ என்னும் நெறிகளால் தெரிவிக்கப்படும், ஆனால் முதலாவதும் மூன்றுவதும் அவ்வாறில்லை.]

(3) $4y^2 = 3c^2x\,(x - c)^2$ என்னும் முற்றிய மூலி தரப்பட

$$(2px - y)^4 = 3x^5\,(2px - 3y)^2$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்

$$\Delta_c = x^3y^4\,(3x^5 - 64y^2)\,,\ \Delta_p = x^{27}y^4\,(3x^5 - 64y^2)$$

[பிரித்துக்காட்டிகள் பற்றிய கணிப்பு சிரமமாகும். $y=0$ என்பது ஒரு கணு-ஒழுக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வுமாம். $x=0$ என்பது $c=0$ ஆகும் வளையியைத் தவிர்த்து மற்றை வளையிகள் எல்லாவற்றிற்கும் உற்பத்தியில் ஒரு பொதுத் தொடலியாகும். (பயிற்சி 8 பார்க்க.) $3x^5 = 64y^2$ என்பது சூழியாகும். பிரித்துக்காட்டிகளிலுள்ள பல்வேறு காரணிகள் ஒற்றை வலுக்களிலோ இரட்டை வலுக்களிலோ நிகழ்தலைப் பற்றி விளங்கிக்கொள்ளுவதற்கு, $x=0$ என்பது யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் மெய் வளையிகளினது தொகை பூச்சியத்திலிருந்து இரண்டுக்கு அதிகரிக்குமாறுள்ள பிரதேசங்களுக்கிடையே வரைப்பாடாகுமென்பதும் சூழியானது இத்தொகை இரண்டிலிருந்து நாலுக்கு அதிகரிக்குமாறுள்ள பிரதேசங்களுக்கிடையே வரைப்பாடாகுமென்பதும் நாம் கவனிக்க வேண்டியன. $y=0$ என்பதில் நாலும் சோடிகளாகப் பொருந்தும்; ஆனால் நேர்ப்பாகத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும், அதற்கும் சூழியினது ஒரு கிளைக்குமிடையில், தொகை நாலு ஆகும். $\Delta_c = EN^2C^3P$, $\Delta_p = ET^2CP^3$ என்னும் நெறிகள் $x=0, y=0$ என்னும் ஒழுக்குக்களின் கேத்திரகணித விளக்கம் தெரிவிக்கத் தவறும்.]

(4) $4y^3 = c\,(3x - c)^2$ என்னும் முற்றிய மூலி தரப்பட

$$yp^3 - 3xp + 2y = 0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்

$$\Delta_c = y^3\,(y^3 - x^3), \Delta_p = y\,(y^3 - x^3).$$

என்பனவற்றையும் பெறுக.

[$C$ இன் பூச்சியமல்லாப் பெறுமானங்களுக்கு முற்றிய மூலியானது கூர்-ஒழுக்கும் குறிப்பிட்ட தீர்வுமான $y=0$ என்பதிற் கூர்கள் கொண்ட குறைமுப்படிப் பரவளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும். $y^3 = x^3$ என்பது ஒரு சூழி (ஒரு தனிச்சிறப்புத் தீர்வு) $\Delta_c = EN^2C^3P, \Delta_p = ET^2CP^3$ என்னும் நெறிகள் $y=0$ என்பது ஒரு கூர்-ஒழுக்கு எனத் தெரிவிக்கும், ஆனால் அது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வும் என்பதைக் காட்டத் தவறும்.]

(5) $y^2 = c\,(3x - c^2)$ என்னும் முற்றிய மூலி தரப்பட

$$8y^2p^3 - 54xp + 27y = 0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்

$$\triangle_c = y^4 - 4x^3,\ \triangle_p = y^2\,(y^4 - 4x^3)$$

என்பனவற்றையும் பெறுக.

[$C$ இன் பூச்சியமல்லாப் பெறுமானங்களுக்கு முற்றிய மூலி $y=0$ என்பது அச்சாகவுள்ள பரவளைவுகளாலாய குடும்பத்தைக் குறிக்கும். இவ்வச்சின் யாதுமொரு புள்ளி எதிர் வழிகளிற் குழிவுகள் கொண்ட அத்தகைப் பரவளைவுகள் இரண்டின் உச்சியாகும். $y=0$ என்பது ஒரு பரவரிசவொழுக்கும் குறிப்பிட்ட தீர்வுமாகும். $y^4 = 4x^3$ என்பது ஒரு சூழி (ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு). $y^2 = c\,(3x - c^2)$ என்பது, $c$ மறையாகுமிடத்து கற்பனையாகும், $\{c^2 . \pm\sqrt{(2c^3)}\}$ என்னும் புள்ளிகளிற் சூழியைத் தொட்டுக்கொண்டு, $c$ நேராகுமிடத்து கற்பனையாகும், $\{\frac{1}{4}c^2, \pm\frac{1}{2}\sqrt{(-c^3)}\}$ என்னும் புள்ளிகளில் அதனை இடைவெட்டும். நெறிகள் பரிசவொழுக்கைத் தெரிவிக்கும்; ஆனாற் குறிப்பிட்ட தீர்வைத் தெரிவிக்கா.]

**(6) $m$ இன் பூச்சியமல்லாப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $y^{m-2}p^3=1$ என்பதன் முற்றிய மூலி $4y^m=m^3(x+c)^2$ எனக் காட்டுக.**

*$m$ ஆனது 1 இலும் பெரிய ஒற்றை நேர்முழுவெண், $m=1$, $m$ ஆனது ஒற்றை மறை முழுவெண், என்னும் மூன்று வகைகளில் $\Delta_c$, $\Delta_p$ என்பன முறையே*

$$y^m, y, \quad y^{-m},$$

$$y^{m-2}, y, y^{2-m},$$

*ஆகுமெனக் காட்டுக ; இப்பிரித்துக்காட்டிகள் $y$ இன் மறைவலுக்களை விலக்குதற்கு வேண்டிய $y$ இன் மிகச் சிறிய வலுவாற் பெருக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும்.*

*[$y=o$ என்பது முதல்வகையில் ஒரு கூர்-ஒழுக்கு, இரண்டாம் வகையில் ஒரு சூழி (தனிச் சிறப்புத் தீர்வு), மூன்றும் வகையில் முற்றிய மூலியில் உட்படுத்தப்படும் வளையிகள் எல்லாவற்றிற்கும் அணுகுகோட்டு முறையிலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வின் எல்லைவடிவம் $m$ ஆனது மறையாயின் $c=\infty$ என்பது $y^{-m}=0$ எனத் தரும் ; ஆகவே பொதுவாக ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டின் இவ்வெல்லைவடிவம் $y=0$ என்னுந் தீர்வை மடங்கு வடிவத்திற் கொள்ளும். $m=-1$ ஆனால் மட்டுமே இக்குறிப்பிட்ட தீர்வு $\Delta_c=EN^2C^3P$, $\Delta_p=ET^2CP^3$ என்னும் நெறிகளாலே தரப்படும் வலுக்களில் நிகழும். இந்நெறிகள் கூர்-ஒழுக்கின் வலுக்களை $m=3$ என்பதற்கு மட்டுமே திருத்தமாகத் தரும்.]*

**(7) $y=x(x+c)^2$ என்னும் முற்றிய மூலி தரப்பட**

$$x^2p^2-2xyp+y^3-4x^3y=0$$

**என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்**

$$\Delta_c=xy, \quad \Delta_p=x^5y$$

**என்பனவற்றையும் பெறுக.**

*$y=0$ என்பது ஒரு சூழி (தனிச்சிறப்புத் தீர்வு) ஆகுமெனவும் $x=0$ என்பது தானே தீர்வாகாது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வின் எல்லை வடிவம் ஆகுமெனவும் காட்டுக.*

*[குடும்ப வளையிகள் எல்லாவற்றினதும் பொதுப்புள்ளியாகிய உற்பத்தியில் பிரித்துக்காட்டிகள் மறைதல் எதிர்வு கூறப்பட்டிருக்கலாம். ஏனெனின் உற்பத்தியில் குடும்பச் சமன்பாடு $c$ இன் யாது பெறுமானத்திற்கும் திருத்தியாக்கப்படுதலால் $c$ இன் ஒவ்வொரு வலுவினது குணகமும் $c$ ஐச் சாராத உறுப்பும் அங்கு மறையும் ; ஆகவே அதனில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் மறைதலால் $\Delta_c=0$. பொதுப்புள்ளியில் வளையிகள் வேறுவேறான தொடலிகள் கொள்ளுதலால் அங்கு வகையீட்டுச் சமன்பாடு $p$ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் திருத்தியாக்கப்படும் ; ஆகவே $\Delta_c$ என்பது பற்றி உள்ளது போன்ற நியாய முறையால் $\Delta_p=0$ (அத்தியாயம் VI இல் பலவினப் பயிற்சி 7 பார்க்க).*

**(8) $c$ இன் பூச்சியமல்லாப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $y^2=x(x+c)^2$ என்னும் குடும்பத்தின் வளையிகள் $x=0$ ஐ உற்பத்தியில் தொடுமெனக் காட்டுக.**

$$4x^2p^2-4xyp+y^2-4x^3=0$$

**என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டையும்**

$$\Delta_c=xy^2, \quad \Delta_p=x^5$$

**என்பவற்றையும் பெறுக.**

$y=0$ என்பது ஒரு கணு-ஒழுக்கு ஆகுமெனவும் $x=0$ ஆனது (தானே ஒரு தீர்வு ஆகாத போதிலும்) ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வின் எல்லை வடிவமும் $c=0$ என்னும் வளையியைத் தவிர்த்து எல்லா வளையிகளையும் ஒரு புள்ளியிலே தொடும் ஒரு கோடும் ஆகுமெனவும் காட்டுக.

[அத்தகைய கோடு எமது சூழி வரைவிலக்கணத்தைத் திருத்தியாக்காது.]

[பிரிவு 7 இல் உள்ளது போல் $\Delta_c$ ஆனது உற்பத்தியில் மறைதல் வேண்டும். (இங்கு வளையிகள் வேறுவேறான தொடலிகள் கொள்ளாத போதிலும்) $\Delta_p$ என்பதும் மறையும். அத்தியாயம் *VI* இல் பலவினப் பயிற்சி 9 பார்க்க.]

(9) $(y-px)^2=p^3$ **என்னும் (கிளெரோவின் வடிவ) வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு**

$$\Delta_p=y^3\,(27\,y-4x^3)=\Delta_c$$

**எனக் காட்டுக.**

[$27\,y=4x^3$ என்பது சூழி (ஒரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு) ; $y^3=0$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு ஆகி சூழியின் விபத்தித் தொடலியைக் குறிக்கும். யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாக $27y=4x^3$ என்பதற்கு மூன்று தொடலிகள் வரையப்படலாம். இவையெல்லாம் முதற் காற் பகுதியில் வளையியிற்கும் $y=0$ என்பதற்கும் இடையே உள்ள பிரதேசத்திற்கும் மூன்றாம் காற் பகுதியில் அது போன்ற பிரதேசத்திற்கும் மெய்யாகும். மற்றைய பிரதேசங்களுக்கு இரண்டும் கற்பனையாகும். $y=0$ என்பதிலுள்ள புள்ளிக்கு இரண்டு பொருந்துதலால் $y=0$ என்பது பிரித்துக்காட்டிகளில் நிகழல் வேண்டும். இதே மாதிரி கிளேரோ வடிவத்திலுள்ள வேறு யாதுமொரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் சூழித் தீர்வு விபத்தித் தொடலிகள் உடையதாயின் இவை பிரித்துக்காட்டிகளில் நிகழும்.]

(10.)
$$f\,(x,\ y,\ p)=0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

**என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு தரப்பட**

$$\frac{\partial f}{\partial z}+p\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{dp}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial p}=0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad .(2)$$

**என்பதை உய்த்தறிக. அது துணைகொண்டு**

$$\frac{\partial f}{\partial p}=0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad .(3)$$

**என்பதைத் திருத்தியாக்கும்** $p$ – **பிரித்துக்காட்டியாலே தரப்படும் தீர்வின் யாதுமொரு புள்ளியில் :**

$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\,\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad .(4)$$

**ஆகுமெனக் காட்டுக.**

(1), (3), (4) என்னும் சமன்பாடுகள் தனிச் சிறப்புத் தீர்வுக்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளாகும். கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு $f\,(x,\ y,\ p)\equiv y-px-F(p)$ ஆதலால் (4) என்னும் சமன்பாடு சர்வசமனாகத் திருத்தியாக்கப்படும். ஆனால் பொதுவாக எல்லா மூன்றுக்கும் ஓர் ஒருங்கமை தீர்வு இருத்தற்குக் காரணம் யாதும் இல்லாமையால் ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்குப் பொதுவாக தனிச் சிறப்புத் தீர்வு யாதுமில்லை.

[இதனைப் பிரிவு 65 உ-ம் (i) இற்குப் பிரயோகிக்க

$$p^2\,(2-3y)^2=4\,(1-y),\ \ 2p\,(2-3y)^2=0,\ p\,\{-6p^2\,(2-3y)+4\}=0.$$

$p=0$ எனத்தரும் $1-y=0$ என்பது மூன்றையுந் திருத்தியாக்கும், ஆனால் $2-3y=0$ என்பது முதலாவதைத் திருத்தியாக்காது.]

(11.) [இப்பயிற்சியில் தனிச்சிறப்புத் தீர்வின் மூன்றும் வரைவிலக்கணம் (பிரிவு 160) வழங்கப்படல் வேண்டும். பயிற்சி 10 எல்லா மூன்று வரைவிலக்கணங்களுக்கும் உண்மையாகும்.]

தனது புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும்

$$f(x, y, \lambda)=0,\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

என்னும் மூன்று சமன்பாடுகளும் $\lambda$ இல் ஒரு பொதுத் தீர்வு கொள்ளுமாறு ஒரு வளையி உண்டெனின் அதன் நீளத்திற்கு $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial \lambda}d\lambda=0$ ஆகுமெனவும் அது துணைகொண்டு $-\lambda\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{df}{dy}dy=0$ ஆகுமெனவும் காட்டுக.

ஆகவே $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$ ஆயின், $\lambda=p$ ஆகுமெனவும் வளையி $f(x, y, p)=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தனிச் சிறப்புத் தீர்வாகுமெனவும் காட்டி $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ஆயின் $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

[இது காட்டுவது பயிற்சி 10 இல் இரு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு பற்றித் தரப்பட்டுள்ள வேண்டிய நிபந்தனைகள் $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$ என்னும் நிபந்தனையின் சேர்ப்பால் போதியனவாகும் என்பதே. ஆனால் இவ்வீற்று நிபந்தனை வேண்டியதல்ல. பயிற்சி 2 இல் $\frac{\partial f}{\partial y}=16y-4xp$. ஒரு சூழியாகிய $y=0$ என்பதற்கு இது பூச்சியமாகும், ஆனால் $27y=4x^3$ என்னும் மற்றையதற்கு அவ்வாறில்லை.]

(12.) பயிற்சி 10 இனது (1) என்னும் சமன்பாட்டின் முற்றிய மூலியாற் குறிக்கப்படும் வளையிகளின் விபத்திப் புள்ளி ஒழுக்கு பயிற்சி 10 இனது (4) என்னும் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக ; ஆகவே இவ்வொழுக்கு இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து $p$ யை நீக்கலாற் பெறப்படும் முடிபில் உட்படுத்தப்படும்.

இச்செய்கையைப் பயிற்சி 7 இன் சமன்பாடுகளுக்குப் பிரயோகித்து நீக்கல்களைச் சில்வெத்தரினது முறையாற் செய்து கொண்டு $x^6y(4y-x^3)=0$ என்பதைப் பெறுக.

[$\Delta_p$ என்பதன் ஒழுக்குகள் எல்லாவற்றோடும் $4y=x^3$ என்னும் விபத்தி ஒழுக்கும் உட்படுத்தப்படுமென்பதைக் கவனிக்க.]

(13 ) $y^2=(x-c)^3$, $y=(x-c)^3$, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{1}{3}}$ என்னும் சமன்பாடுகள் எல்லாம் அயல் வளையிகள் மெய்ப்புள்ளிகளில் இடைவெட்டாதிருக்குமாறுள்ள வளையிக் குடும்பங்களைக் குறித்த போதிலும் ஒரு சூழி உண்டு என்பதைக் காட்டுக. (மூன்றும் வகையில் $x=0$ என்பதும் ஒரு சூழியாகும்.)

ஒத்த வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளாகிய

$8p^3=27y$, $p^3=27y^2$, $xp^3+y=0$ என்பவற்றையும் $c$ – பிரித்துக்காட்டிகளாகிய $y^4$, $y^2$, $x^4y^4(x-y)^2(x+y)^2$ என்பவற்றையும்.

$p$ – பிரித்துக்காட்டிகளாகிய $y^2$, $y^4$, $x^2y^2$ என்பவற்றையும் பெறுக.

(இவ்வகைகள் எல்லாவற்றிலும் பிரித்துக்காட்டி ஒழுக்குகள் ஆனவை வரைப்பாடுகள் ஆதல் பற்றிய தர்க்கத்தில் தரப்படும் அதே காரணத்தால் சூழி ஓர் இரட்டை வலுவிஷ் நிகழுமென்பதைக் கவனிக்க. முதலாம் மூன்றும் குடும்பங்களுக்குச் சூழி ஒரு கூர்—ஒழுக்காகவும் இருத்தலால் சாதாரண நெறிகள் உண்மையாகும், ஆனால் இரண்டாம் குடும்பத்திற்கு இவ்வாறில்லை. மூன்றும் குடும்பச் சமன்பாட்டில் $c$ இனது மறைப் பெறுமானங்களாலே தரப்படும் இரு கற்பனை வளையிகள் பொருந்துதல் $x-y=0$, $x+y=0$ என்னும் ஒழுக்குக்களிலேயே.

(14.) $y=(x-c)^4$ என்பது $y=0$ என்னும் தனது சூழியோடு நாற்புள்ளித் தொடுகை கொள்ளும் வளையிக் குடும்பத்தைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

ஒத்த வகையீட்டுச் சமன்பாடாகிய $p^4=256y^3$ என்பதையும் $\Delta_c=y^3$, $\Delta_p=y^9$ என்னும் பிரித்துக்காட்டிகளையும் பெறுக.

[சூழி மீண்டும் முதலிலும் உயர்ந்த வலுவில் நிகழும். இங்கு வலு ஒற்றையாகும் ; யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் மெய் வளையிகளினது தொகை சூழியின் ஒருபக்கத்தில் இரண்டும் மற்றைப் பக்கத்திற் பூச்சியமுமாதலால் இது அவ்வாறே இருத்தல் வேண்டும்.]

(15.) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=c^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c$, $(x+y-c)^2=4xy$.

$(x+y-c^2)^2=4xy$ என்னும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றும் $x0y$ என்னுங் கோணத்தை இருகூறிடும் பொது அச்சும் $x=0$, $y=0$ என்னும் சூழிகளும் கொண்ட பரவளைவுக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும் என்பதைக் காட்டுக. $\Delta_c$ என்பதைத் துணிதற்கு எத்தனித்தல் முதலாம் இரண்டாம் வடிவங்கள் பற்றிப் பயன்படாது (அல்லது அது பரவளைவுகள் எல்லாவற்றையுந் தொடுமுடிவிலிக் கோட்டின் சமன்பாடாகிய $0=1$ என்பதைத் தருமெனச் சிந்திக்கப்படலாம்) என்பதையும் மூன்றுவதற்கு $\Delta_c=xy$ நாலாவதற்கு $\Delta_c=x^2y^2(x-y)^2$ என்பனவற்றையும் காட்டுக.

[$x-y=0$ என்பது $c=0$ என்பதற்கு ஒரு குறிப்பிட்ட வளையி. பிரித்துக்காட்டிகளைப் பற்றித் தர்க்கிக்குமிடத்து உறுப்புக்கள் ஒன்றிப் பெறுமானமுள்ளனவாகும் முதலாவதும் இரண்டாவதும் போன்ற வடிவங்களையும் வேறு வேறான வளையிகள் ($c$ அல்ல) $c^2$ இனது வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்கு ஒத்தனவாகும் நாலாவது போன்றனவையையும் விலக்கிக்கொள்ளல் வேண்டும்.]

## 162. றிக்காற்றியின் சமன்பாடு

இப்பெயர் தொடக்கத்தில்

$$y_1+by^2=cx^m,$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ; இங்கு $b$, $c$, $m$ என்பன மாறிலிகளாகும், (பிற்குறி $x$ பற்றி வகையிடலைக் குறிக்கும்). $m$ இனது ஒரு குறித்த தொடைப் பெறுமானங்களுக்கு இது முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடப்படலாம் (கீழ்வரும் பயிற்சிகள் 7—14 பார்க்க) ; ஆனால், பொதுவாகத் தீர்வைப் பெறுதற்கு பெசல் சார்புகளோடு நெருங்கிய தொடர்புடைய முடிவில் தொடர் வேண்டும்.

தற்போது றிக்காற்றியின் சமன்பாடு எனப்படுவது

$$y_1=P+Qy+Ry^2\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

என்னும் பொதுமைப்படுத்திய வடிவம் ; இங்கு $P$, $Q$, $R$ என்பன $x$ இன் சார்புகள். இச்சமன்பாடு வகையீட்டுக் கேத்திர கணிதத்தில் முக்கியமாகும்.

## 163. இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கல்.

$y=-\dfrac{u_1}{Ru}$ என இடுக ; இது தருவது $y_1=-\dfrac{u_2}{Ru}+\dfrac{{u_1}^2}{Ru^2}+\dfrac{R_1u_1}{R^2u}$.

(1) என்னும் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட ${u_1}^2$ இலுள்ள உறுப்புக்கள் மறையும். ஆகவே $R^2u$ ஆற் பெருக்க

$$-Ru_2+R_1u_1=PR^2u-QRu_1,$$

அதாவது $$Ru_2-(QR+R_1)u_1+PR^2u=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2);$$

இது ஓர் இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. (கீழ்வரும் பயிற்சிளிலுள்ளவை போல்) சில விசேட வகைகளில் இது முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடப்படலாம், ஆனால் பொதுவாகத் தொடர் முறைத் தீர்வு வேண்டும். எனினும் ஒவ்வொரு வகையிலும் தீர்வு

$$u = Af(x) + BF(x),$$

ஆகும் ; இது தருவது
$$y = -\frac{u_1}{Ru} = -\frac{Af_1(x) + BF_1(x)}{R\{Af(x) + BF(x)\}}$$
$$= -\frac{cf_1(x) + F_1(x)}{cRf(x) + RF(x)}, \quad c = A/B.$$

இது தரும் முக்கியமான முடிவு "றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டினது பொதுத் தொகையீடு. தொகையீட்டு மாறிலியின் ஓர் ஒவ்வரைபுடைசார்பு ஆகும்" என்பதே. மாறுநிலையாக (கீழ்வரும் பயிற்சி 6 இல் பொழிப்பாகத் தரப்படுவது போல்)

$$y = \frac{cg(x) + G(x)}{cf(x) + F(x)}.$$

எனனும் வடிவத்திலுள்ள யாதுமொரு சமன்பாட்டிலிருந்து $c$ என்னும் எதேச்சை மாறிலியை நீக்கலால் றிக்காற்றியின் சமன்பாடு ஒன்றைப் பெறுவோம்.

**164. றிக்காற்றியின் சமன்பாடு ஒன்றின் எவையேனும் நாலு குறிப்பிட்ட தொகையீடுகளின் குறுக்கு விகிதம் $x$ ஐச் சாராது.**

$\dfrac{cg(x) + G(x)}{cf(x) + F(x)}$ என்பதில் $c$ இற்கு $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ என்னும் விசேட பெறுமானங்கள் கொடுத்தலாற் பெறப்படும் $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ என்னும் நாலு தொகையீடுகளை எடுக்கலாம்.

ஆயின் $$p - q = \frac{\alpha g + G}{\alpha f + F} - \frac{\beta g + G}{\beta f + F} = \frac{(\alpha - \beta)(gF - fG)}{(\alpha f + F)(\beta f + F)};$$

$p$, $q$, $r$, $s$ என்பனவற்றுள் எவையேனும் இரண்டு பற்றிய மற்றை வித்தியாசங்களுக்கும் இது போன்ற கோவைகள் உண்டு. குறுக்கு விகிதத்தை ஆக்குமிடத்து $x$ இன் சார்புகளை உட்கொள்ளும் காரணிகள் ஒன்றையொன்று வெட்ட

$$\frac{(p - q)(r - s)}{(p - s)(r - q)} = \frac{(\alpha - \beta)(r - \delta)}{(\alpha - \delta)(r - \beta)} = C \text{ என்க ;}$$

இங்கு $C$ ஆனது $x$ ஐச் சாராது.

**165. மூன்று குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் தெரியப்படுமிடத்து தீர்த்தல் முறை.**

இவை $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ என்பன ஆகுக. ஆயின் ஈற்று முடிபில் $p(x)$ இற்குப் பதிலாக $y$ எழுதப்படுமிடத்து

$$\frac{\{y-q\ (x)\}\{r\ (x)-s\ (x)\}}{\{y-s\,(x)\}\{r\,(x)-q\,(x)\}}=C$$

என்பது பொதுத் தீர்வாகப் பெறப்படும் ; ஆகவே இவ்வகையில் பொதுத் தீர்வு ஆனது சதுரிப்பு வழங்காது (அதாவது தொகையிடல் வழங்காது) பெறப்பட்டுள்ளது.

**166. இரு குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் தெரியப்படுமிடத்து தீர்த்தல் முறை.**

இவை $q\ (x)$, $r\ (x)$ என்பன ஆகுக.

ஆயின்,
$$y_1=P+Qy+Ry^2,$$
$$q_1=P+Qq+Rq^2 \text{ ஆதலால்,}$$
$$y_1-q_1=(y-q)\ \{Q+(y+q)\,R\}.$$

இதேமாதிரி
$$y_1-r_1=(y-r)\{Q+(y+r)\,R\}.$$

ஆகவே,
$$\frac{y_1-q_1}{y-q}-\frac{y_1-r_1}{y-r}=(q-r)\ R \text{ ஆகி,}$$
$$\text{மட}\left(\frac{y-q}{y-r}\right)=c+\int(q-r)\,Rdx\,;$$

ஆகவே இவ்வகையில் பொதுத் தீர்வு பெறுதற்கு ஒரு சதுரிப்பு வேண்டும்.

**167. ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு தெரியப்படுமிடத்து தீர்த்தல் முறை.**

இது $q\ (x)$ ஆகுக.

$y=q\,(x)+\frac{1}{z}$ என்னும் பிரதியீடு (1) என்னும் சமன்பாட்டை

$$q_1-\frac{z_1}{z^2}=P+\left(q+\frac{1}{z}\right)Q+\left(q^2+\frac{2q}{z}+\frac{1}{z^2}\right)R$$

என்பதற்கு உருமாற்றும்.

ஆனல் $q\ (x)$ ஆனது ஒரு தொகையீடு ஆதலால்

$$q_1=P+qQ+q^2R.$$

கழித்துக் கொண்டு $z^2$ ஆல் பெருக்க

$$-z_1=zQ+(2zq+1)\ R,$$

அதாவது
$$z_1+(Q+2qR)\ z=\ -R;$$

இது
$$\{\int e(Q+2qR)\ dx\}$$

என்னும் தொகையீட்டுக் காரணியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கப்படக்கூடிய ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. இக்காரணியைத் துணிதற்கு ஒரு சதுரிப்பு வேண்டும், தீர்வை (பிரிவுகள் 18–20 இல் உள்ளதுபோல) நிறைவாக்குதற்கு வேறொன்று வேண்டும்.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பயிற்சிகள் 1–5 இல் மாணுக்கன் மேலே வழங்கிய முறைகளைப் பின்பற்றி முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து வேலை செய்தல் வேண்டும். முடிபுகளை மட்டுமே எடுத்து அவற்றிற் பிரதியிடல் கூடாது.

(1) ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்குதலால்

$$y_1 = -2 - 5y - 2y^2$$

என்பதன் தீர்வு $2y(ce^{3x}+1) = -(ce^{3x}+4)$ எனக் காட்டுக.

(2) $x^2y_1+2-2xy+x^2y^2=0$ என்பதன் தீர்வு

$y(x^2+cx)=2x+c$ எனக் காட்டுக.

(3) தான் $x$ என்பது $y_1=1+y^2$ என்பதன் ஒரு தொகையீடெனக் காட்டி அது துணைகொண்டு பொதுத் தீர்வை $y(c-\text{தான்}\ x)=c\ \text{தான்}\ x+1$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

(4) $k/x$ என்பது $x^2(y_1+y^2)=2$ என்பதன் ஒரு தொகையீடாகுமாறு $k$ என்னும் மாறிலிக்கு இரு பெறுமானங்கள் உண்டு எனக் காட்டி அது துணைகொண்டு பொதுத் தீர்வைப் பெறுக.

$$[k=2,\ -1\ ;\ y(cx^4-x)=2cx^3+1]$$

(5) 1, $x$, $x^2$ என்பன $x(x^2-1)y+x^2-(x^2-1)y-y^2=0$ என்பதன் மூன்று தொகையீடுகளெனக் காட்டி அது துணைகொண்டு $y(x+c)=x+cx^2$ என்னும் பொதுத் தீர்வைப் பெறுக.

(6)
$$y=\frac{cg(x)+G(x)}{cf(x)+F(x)}$$

என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து $c$ என்னும் எதேச்சை மாறிலியை நீக்கலால்

$$(gF-Gf)y_1=(gG_1-g_1G)+(Gf_1-G_1f-gF_1+g_1F)y+(fF_1-f_1F)y^2$$

என்னும் றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

(7) $m=0$ ஆகுமிடத்து $y_1+by^2=cx^m$ என்னும் றிக்காற்றியின் சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடப்படலாமெனக் காட்டுக.

[$yk(Ae^{2xk}+1)=c(Ae^{2xk}-1), k=\sqrt{(bc)}$, $bc$ ஆனது நேராயின் ;
$yk=c$ தான் $(A+kx)$, $k=\sqrt{(-bc)}$, $bc$ ஆனது மறையாயின் ;
$y=cx+A$, $b=0$ ஆயின் ;
$y(bx+A)=1$, $c=0$ ஆயின்.]

(8) $y=z/x$ என்னும் பிரதியீடு றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டை

$$xz_1-z+bz^2=cx^{m+2}$$

என்பதற்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டி அது துணைகொண்டு $m=0$ ஆயின், பின்னதான சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடப்படலாமெனக் காட்டுக.

[பயிற்சி 7 இன் முடிவைப் பயன்படுத்துக.]

(9) $z=yx^a$ என்னும் பிரதியீட்டால் $xz_1-az+bz^2=cx^n$ என்னும் சமன்பாட்டை $x^{1-a}y_1+by^2=cx^{n-2a}$ என்பதற்கு உருமாற்றுக.

$X=x^a$ என்னும் வேறு பிரதியீட்டால் $b$, $c$, $m$ என்பதற்குப் பதிலாக முறையே $b/a$, $c/a$, $(n-2a)/a$ என்பவற்றைக் கொள்ளும் றிக்காற்றியின் வடிவச் சமன்பாடு ஒன்றைப் பெறுக. அது துணைகொர்ண்டு இப்பயிற்சியினது முதற் சமன்பாடு, $n=2a$ ஆயின், முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடப்படலாமெனக் காட்டுக.

(10) $z=\frac{a}{b}+\frac{x^n}{u}$ என்னும் பிரதியீடு பயிற்சி 9 இனது முதற் சமன்பாட்டை $a$, $b$, $c$ என்பனவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $n+a$, $c$, $b$ என்பவற்றைக் கொள்ளும் அதே போன்ற வடிவமுள்ள சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக. அது துணைகொண்டு இவற்றுள் யாதுமொரு சமன்பாடு $n=2a$ ஆனாலோ $n=2(n+a)$ ஆனாலோ முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடத் தருமெனக் காட்டுக. இந்நியாயமுறையின் மறிதரலால் பயிற்சி 9 இனது முதற் சமன்பாடு, $n=2(sn+a)$ ஆயின், முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடத்தருமெனக் காட்டுக; இங்கு (பின்வரும் பயிற்சிகளிலுமுள்ளதுபோல்) $s$ ஆனது பூச்சியம் அல்லது யாதுமொரு நேர்முழுவெண்ணாகும்.

(11) $z=\frac{x^n}{u}$ என்னும் பிரதியீடு பயிற்சி 9 இன்து சமன்பாட்டை $a$, $b$, $c$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $n-a$, $c$, $b$ என்பவற்றைக் கொள்ளும் அதே போன்ற வடிவமுள்ள சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக.

$n=2(sn-a)$ ஆயின் இச்சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடத் தருமென்பதை உய்த்தறிக.

(12) $m+2=2s\,(m+2)\pm2$ ஆயின் பயிற்சிகள் 9, 10, 11 ஆகியவற்றிலிருந்து றிக்காற்றியின் சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடத் தருமென்பதை உய்த்தறிக.

இம்முடிபு, $r$ ஆனது $s$ என்பதைப்போல் பூச்சியம் அல்லது நேர்முழுவெண்ணாக $m=-4r/(2r\pm1)$ என்பதற்கோ $2/(m+2)=$ ஓர் ஒற்றை (நேரோ மறையோ) முழுவெண் என்பதற்கோ சமவலுவாகுமெனக் காட்டுக.

(13) $y=\frac{1}{bx}+\frac{1}{x^2Y}$, $X=x^{m+3}$ என்னும் பிரதியீடுகள் றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டை $b$, $c$, $m$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $c/(m+3)$, $b/(m+3)$, $-(m+4)/(m+3)$ என்பவற்றைக் கொள்ளும் அதே போன்ற வடிவமுள்ள வேறொரு சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக. $m$ ஆனது $-4s/(2s-1)$ என்னும் வடிவமாயின் இவ்வுருமாற்றம் $s$ என்பதை $s-1$ ஆல் இடமாற்றஞ் செய்யுமென்பதை உய்த்தறிக. அத்தகை $s$ உருமாற்றங்களை எடுத்துச் சிந்தித்தால் இவ்வகையில் றிக்காற்றியின் சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடத்தருமெனக் காட்டுக.

(14) $y=1/Y$, $X=x^{m+1}$ என்னும் பிரதியீடுகள் றிக்காற்றியின் சமன்பாட்டை $b$, $c$, $m$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $c/(m+1)$, $b/(m+1)$, $-m/(m+1)$ என்பவற்றை கொள்ளும் அதே போன்ற வடிவமுள்ள வேறொரு சமன்பாட்டுக்கு உருமாற்றுமெனக் காட்டுக. $m$ ஆனது $-4s/(2s+1)$ என்னும் வடிவமாயின் றிக்காற்றியின் சமன்பாடு முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் தொகையிடத் தருமென்பதை (பயிற்சி 13 இனது முடிபு வழங்கி) உய்த்தறிக.

## 168. Pdx + Qdy + Rdz = 0 என்னும் மொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தொகையிடுதற்கு இரு முறைகள்

ஏற்கெனவே (அத்தியாயம் XI) இல் இச்சமன்பாட்டின் வேண்டிய போதிய தொகையிடற்றகவு நிபந்தனையையும் இந்நிபந்தனை திருத்தியாக்கப்படுமிடத்து தொகையீட்டைப் பெறுதற்கு ஒரு பொது முறையையும் தந்துள்ளோம். இப்போது வேறு இரு முறைகளையுந் தருவோம். இவற்றுள் (தொகையீட்டுக் காரணியை உட்கொள்வது) ஒன்று சில ஏகவினைச் சமன்பாடுகளுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்தலாமென்னும் குறை கொண்டது, ஆனால் இச்சமன்பாடுகளுக்கு இதுவே எமக்கு எட்டக்கூடிய மிக எளிய முறையாகும். மற்றையது (மேயரினது முறை) மிகப் பொதுவானது.

இதற்கு ஒரு தொகையிடலே வேண்டியது ; இக்காரணத்தால் இரு தொகையிடல்களை வேண்டப்படும் மற்றைப் (பிரிவு 117) பொது முறையோடு ஒப்பிடுமிடத்து இதற்கு அறிமுறை நயம் உண்டு. எனினும் ஆரம்பத்தில் இம்முறையை உபயோகித்தல் புத்தியாகாது ; ஏனெனில் (இதிற் சம்பந்தப்பட்ட கோவைகளின் சமச்சீரின்மையால்) வேண்டிய ஒன்றித் தொகையிடல் செய்தல் பலமுறையும் பிரிவு 117 இல் வேண்டப்படும் இரு தொகையிடல்கள் செய்தலினுங் கடினமாகும். அன்றியும் மேயரினது முறை சில நிபந்தனைகளைப் பற்றிக் கவனம் செலுத்தாது பிரயோகிக்கப்படுமாயின் அது முற்றாய்த் தவறான முடிபுகளைத் தரக்கூடும்.

## 169. ஏகவினைச் சமன்பாடுகளின் தொகையீட்டுக் காரணி

$u=y/x$, $v=z/x$ ஆக, $P$, $Q$, $R$ என்பன முறையே

$$x^n f(u, v),\ x^n g(u, v),\ x^n h(u, v)$$

என்னும் வடிவங்களில் உணர்த்தப்படக்கூடிய $x$, $y$, $z$ என்பவற்றில் $n$ என்னும் ஒரே படியிலுள்ள ஏகவினைச் சார்புகளாகுமிடத்து

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்பது ஒரு தொகையிடத்தகு சமன்பாடு ஆகுக.

ஆயின் $$dy=u\,dx+x\,du,\quad dz=v\,dx+x\,dv.$$

ஆகவே, (1) என்னுஞ் சமன்பாடு ஆவது

$$x^n\{f(u, v)\,dx+g(u, v)(u\,dx+x\,du)+h(u, v)(v\,dx+x\,dv)\}=0,$$

அதாவது $$x^n\{(f+ug+vh)\,dx+x(g\,du+h\,dv)\}=0:$$

இதனிலிருந்து, பூச்சியமல்லாத $x^{n+1}(f+ug+vh)$ என்பதால் வகுக்க,

$$\frac{dx}{x}+\frac{g\,du+h\,dv}{f+ug+vh}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) என்னுஞ் சமன்பாடு தொகையிடத் தகுதலால் (2) என்பதும் உடனடியாகவோ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாற் பெருக்கப்பட்ட பின்னரோ அவ்வாறாகும். ஆனால் (2) என்னுஞ் சமன்பாட்டிலுள்ள முதலுறுப்பு $x$ ஐயே கொள்ளும், இரண்டாமுறுப்பு $u$, $v$ என்னுமாறிகளையே. ஒரு மாறி மற்றையிரண்டிலுமிருந்து வேறாக்கப்பட்டுள்ளது ; தொகையிடலுக்கு மிக இசைவாகும் வடிவத்தைத் தரும் இவ்வேறாக்கல் (மாறிலியல்லாத) யாதுமொரு காரணியாற் பெருக்கலால் கொடுக்கப்படும். ஆகவே ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியைத் தேட வேண்டியதில்லை ; (2) என்னுஞ் சமன்பாடு தான் கொள்ளும் வடிவத்தில் செப்பமாதல் வேண்டும். ஆனால் மாறி மாற்றத்தோடு (2) என்னுஞ் சமன்பாடு (1) என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து $Px+Qy+Rz$ என்பதற்குச் சமனாகும். $x^{n+1}(f+ug+vh)$ என்னுங் காரணியால் வகுத்தலாற் பெறப்படும்.

ஆகவே, $Px+Qy+Rz=0$ ஆனாலன்றி $1/(Px+Qy+Rz)$ என்பது $Pdx+Qdy+Rdz=0$ என்னும் ஏகவினமான தொகையிடத்தகு சமன்பாட்டின் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும். இதுபோன்ற தேற்றம் ஒன்று

$$P_1dx_1+P_2dx_2+\ldots+P_ndx_n=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்கும் உண்மையாகும்.

உ-ம். $$(y^2+yz)dx+(zx+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0.$$

இங்கு $$Px+Qy+Rz=xy^2+xyz+xyz+yz^2+y^2z-xyz$$
$$=y(xy+xz+z^2+yz)=y(x+z)(y+z)\,;$$

ஆயின் தொகையீட்டுக் காரணி $1/\{y(x+z)\,(y+z)\}$ ஆகும்.

வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை அதனாற் பெருக்க

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{zdy}{y(y+z)}+\frac{(y-x)dz}{(x+z)\,(y+z)}=0,$$

அதாவது $$\frac{dx}{x+z}+\frac{\{(y+z)-y\}dy}{y(y+z)}+\frac{\{(y+z)-(x+z)\}dz}{(x+z)\,(y+z)}=0,$$

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}+\frac{dz}{x+z}-\frac{dz}{y+z}=0,$$

$$\frac{dx+dz}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy+dz}{y+z}=0;$$

ஆகவே மட $(x+z)+$ மட $y-$ மட $(y+z)=$ மட $c$,

அதாவது $$y(x+z)=c(y+z).$$

$Px+Qy+Rz=0$ ஆயின் $y=ux$, $z=vx$ என இட்டு $x^{n+1}$ என்பதால் வகுக்க இரு மாறிகளைக் கொள்ளும் $gdu+hdv=0$ **என்பது** பெறுவோம்.

**170. மேயரின் முறை.** மொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை

$$dz=P\,(x,\,y,\,z)\,dx+Q\,(x,\,y,\,z)dy$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதுக.

தொகையிடற்றகவு நிபந்தனை (பிரிவுகள் 118, 119) திருத்தியாக்கப்பட்டு $P$, $Q$ என்பன $(x_0,y_0,z_0)$ என்னும் புள்ளியின் அயலில் நிறையுருச் சார்புகளாயின் இப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு பரப்பைக் குறிக்கும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தீர்வு ஒன்று (ஒன்று மட்டுமே) உண்டு என்பது நிறுவப்படலாம். மேயரின் முறையால் இப்பரப்பினதும் $(x_0,y_0,z_0)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக $z$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமாய் வரையப்படும் ஒரு மாறு தளத்தினதும் இடைவெட்டு வளையியைக் கண்டு இப்பரப்பைத் துணியலாம். $x_0,y_0$ என்பவற்றிற்கு நிறையுரு நிபந்தனையோடு இசைவாகும் மிக எளிய பெறுமானங்கள் எடுக்கப்படும்; உதாரணமாக (0, 0) அல்லது

(0, 1) அல்லது (1, 1). $z_0$ என்பது இறுதி முடிபில் எதேச்சை மாறிலி யாக நிகழும். பின்வரும் உதாரணங்களைப் படித்தலால் செயன்முறையை பாக நன்றாக விளங்கிக் கொள்ளலாம். (இவ்வுதாரணங்கள் கண்கணிப்பாகத் தீர்க்கப்படலாமென்பது உண்மையே ; ஆனால் கடினமானவை தேரப்பட்டிருக்குமாயின் மேயரின் முறையைப் பலமுறையும் கொள்ளும் சிக்கலான தொகையீடுகளின் விவரங்களால் இம்முறையின் கோட்பாடு மறைக்கப் பட்டுள்ளதாகலாம்.)

உ-ம் (i).
$$dz = 2x\,dx + 4y\,dy \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

தொகையிடற்றகவு நிபந்தனையாகிய

$$2x(0-0) + 4y(0-0) - 1(0-0) = 0$$

என்பது திருத்தியாக்கப்படும். $2x$, $4y$ என்னுஞ் சார்புகள் $(0, 0, z_0)$ என்பதன் அயலில் நிறையுருவானவையாதலால் $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ என எடுக்கலாம். இப்புள்ளிக்கூடாக $z-$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமான தளம்

$$y = mx,\ dy = mdx \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்பவற்றலே தரப்படும்.

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$dz = (2 + 4m^2)x\,dx\,;$$

ஆகவே $x = 0$ ஆகுமிடத்து $z = z_0$ ஆகுமென்னும் நிபந்தனையால் தொகையீட்டு மாறிலியைத் துணிந்தால்

$$z - z_0 = (1 + 2m^2)x^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(3) என்னும் சமன்பாடு (2) என்னுந் தளத்தினதும் வேண்டிய பரப்பினதும் இடைவெட்டு வளையிற் கூடாக ($y$ அச்சுக்குச் சமாந்தரமான பிறப்பாக்கிகளைக் கொண்டு) செல்லும் உருளையைக் குறிக்கும்.

$m$ என்பதை (2), (3) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து நீக்க

$$z - z_0 = x^2 + 2y^2$$

என்பதைப் பரப்பின் சமன்பாடாகப் பெறுவோம்.

$z_0$ என்பது ஓர் எதேச்சை மாறிலியாக எடுக்கப்படுமாயின் இதுவே (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

உ-ம் (ii)
$$dz = \frac{3z\,dx}{x} - \frac{2z\,dy}{y} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

தொகையிடற்றகவு நிபந்தனையாகிய

$$\frac{3z}{x}\left(-\frac{2}{y} - 0\right) - \frac{2x}{y}\left(0 - \frac{3}{x}\right) - 1\,(0-0) = 0$$

என்பது திருத்தியாக்கப்படும்.

$x_0=0,\ y_0=0$ என எடுத்தல் முடியாது ; ஏனெனின் $3z/x,\ 2z/y$ என்பன முடிவில்லாதனவாகும். எனினும் $x_0=1,\ y_0=1$ என எடுத்தல் போதியதாகும்.

$$y=1+m\ (x-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

என இடுக. (4) என்னும் சமன்பாடு ஆவது

$$dz=\frac{3zdx}{x}-\frac{2zmdx}{1+m\ (x-1)};$$

இது தருவது

$$\text{மட }z-\text{மட }z_0=3\text{மட }x-2\text{மட }\{1+m\ (x-1)\};$$

ஆகவே $z\{1+m\ (x-1)\}^2=z_0x^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

(5), (6) என்பவற்றிலிருந்து $m$ ஐ நீக்க

$$zy^2=z_0x^3$$

என்னுந் தீர்வைப் பெறுவோம்.

இக்குடும்பத்தின் எல்லாப் பரப்புக்களும் $(0,\ 0,\ z_0)$ என்னும் புள்ளிக் கூடாகச் செல்லுமென்பது நோக்கப்படும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) மேலுள்ள உதாரணம் (ii) இல் $(0,\ 0,\ z_0)$ என்பதை நிலையான புள்ளியாக எடுத்து (5) என்னும் சமன்பாட்டுக்கு ஒத்த உருவினை அப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமாறு ஆக்க முயல்வோமாயின் எமது எத்தனம் பயன்படாதெனக் காட்டுக.

(2) $y^2dz=ydx+(y^3-x).\ dy$ என்பதைத் தீர்க்க. [$(0,\ 1,\ z_0)$ என்பதை நிலையான புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுக்க, திருத்தமான முடிபு

$$y\ (z-z_0)=y\ (y-1)+x$$

$(0,\ 0,\ z_0)$ என்பதன் தேர்வு $z-z_0=y$ என்னும் திருத்தமில்லா முடிபுக்கு வழி காட்டும்.]

(3) $(1+xy)\ dz=(1+yz)\ dx+x\ (z-x)\ dy$ என்பதைத் தீர்க்க.

[முடிபு $z=x+z_0\ (1+xy)$]

**171. இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.** பின்வரும் தர்க்கம் (பிரிவுகள் 171–177) அத்தியாயங்கள் ix, x ஆகியவற்றை மிகை நிரப்புவதாகும். $x$ குறித்து வகையிடல் பிற்குறியாற் குறிக்கப்படும். உற்பத்தியில் நிறையுருவானவையாகி (அதாவது உற்பத்தியில் மையம் கொண்ட போதிய அளவு சிறிய வட்டத்தின் அகத்தில் ஒருங்கும் வலுத் தொடராக விரிக்கத்தக்கனவாகி) உற்பத்தியில் மறையாதன என்னும் கூடுதலான உடைமையுங் கொண்ட $x$ இன் சார்புகளைக் குறித்தற்கு $h\ (x),\ k\ (x),\ j\ (x),\ H\ (x),\ K(x)$ என்பவற்றை, அல்லது சில சமயங்களில் $h,\ k,\ j,\ H,\ K$ என்பவற்றை, வழங்குவோம். அவற்றின் நிகர் மாற்றுக்களும் $h_1(x)/h\ (x)$ என்பது போன்ற அவற்றின் மடக்கைப் பெறுதிகளும் நிறையுருவானவையாகும். [புரோமிச்சின் "முடிவில் தொடர்", இரண்டாம் பதிப்பு, பிரிவுகள் 54, 84.] தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் எனக் கூறுமிடத்து இப்

புள்ளிகள் தனியாக்கியவை, அதாவது யாதுமொரு புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு போதிய அளவு சிறிய ஆரையுள்ள வட்டம் மற்றைப் புள்ளிகள் எல்லாவற்றையும் வெளியகற்றும்.

**172. ஒழுங்கான தொகையீடுகள்** புரோபீனியசின் வடிவத் தீர்வுகள் ஒழுங்கான தொகையீடுகள் எனப்படுவது பிரிவு 94 இற் கூறப்பட்டுள்ளது. இது யாது பொருள் கொள்ளும் என்பதைப் பற்றி இப்போது மிக விவரமாய்ச் சிந்திப்போம். அத்தியாயம் ix இல் உள்ள உதாரணங்களின் விடைகளினது வடிவங்களைப் பரிசோதிப்போம். தீர்த்தற் செய்கையில் நாலு வகைகளைப் பிரித்துக் காட்டியபோதிலும் $au+bv$ என்னும் முற்றிய மூலியின் பிரதானமாய் வேறுவேறாகும் இரு வடிவங்களே உண்டு. ஒரு தொகையீடு, $u$ என்க, என்றும் $x^\alpha h(x)$ என்னும் வடிவம் கொண்டுள்ளது. இரண்டாம் தொகையீடாகிய $v$ என்பது, பிரிவுகள் 95, 99 ஆகியவற்றில் உள்ளதுபோல், சில உதாரணங்களில் இதுபோன்ற வடிவம், $x^\beta k(x)$ என்க, கொண்டுள்ளது; மற்றையவைகளில், பிரிவுகள் 97, 98 ஆகியவற்றில் உள்ளதுபோல், அது

$$x^\alpha \{h(x) \text{ மட } x + x^s k(x)\}$$

என்னும் வடிவம் கொண்டுள்ளது; இங்கு $s$ என்பது நேராகவோ மறையாகவோ உள்ள முழுவெண். (உதாரணமாக, பிரிவு 97, பயிற்சி 1 இல் 1, பிரிவு 98 பயிற்சி 1 இல்–4.)

[$m$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாடுகள் பற்றியும் புரோபீனியசின் முறையில் (போசைதின் “**வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கை,** பாகம் iv, பக்கங்கள் 78–93, அல்லது இன்சின் “**சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்,** பக்கங்கள் 396–402) அதிமுறை எடுத்துக்காட்டில் இரண்டும் வகைகளையே பிரித்துக் காட்டல் இசைவாகும்; இவற்றுள் இரண்டாவது ii, iii, iv என்னும் வகைகளை அடக்கும். இவ்விரண்டாம் வகையை எடுத்தாள்வதற்குத் தன் குணகங்கள் $c$ இன் சார்புகளாகவுள்ள தொடர் $f(c+1)\,f(c+2)\ldots\ldots\ldots f(c+r)$ என்பதாற் பெருக்கப்படும்; இங்கு $f(c)=0$ என்பது சுட்டிசார் சமன்பாடாக, $r$ ஆனது முழுவெண்களால் வித்தியாசப்படும் ஒரு தொடைக்கு உரிய எவையேனும் இரு மூலங்களின் மிகப் பெரிய வித்தியாசம் ஆகும் (வகை iii பற்றிய முறையோடு ஒப்பிடுக). யாதுமொன்றுக்கும் அதனைப் பின் தொடருவதற்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் ஒரு நேர் முழுவெண் அல்லது பூச்சியமாகுமாறு ஒழுங்குபடுத்தப்படும் மூலங்கள் இத்தொடரினும் $c$ குறித்துள்ள பின்னடும் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களிலும் முறையே பிரதியிடப்படும். எனினும் பயிற்சிகளைத் தீர்க்குமிடத்து இந்த முறை பெருந்தொகையான அலுவலிய வேலைக்கு வழிகாட்டும்; ஆகவே அத்தியாயம் ix இல் அது பற்றி, விசேடமாக எமது வகை iv பற்றி, பெருந்திரிவு செய்துள்ளோம்.]

$s$ ஆனது பூச்சியப் பெறுமானத்தையும் எடுத்தற்கு இடங்கொடுக்கலாமென்னும் சிறு திரிவு செய்து கொண்டு இவ்வடிவங்களை **உற்பத்தியில்** சீரானதாயமைந்த (இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின்) தொகையீடுகளின் வரைவிலக்கணங்களாக எடுப்போம். இது உண்மையில் எவ்வித வேற்றுமையையும் ஆக்காது; ஏனெனில் $s$ பூச்சியமாயின், $v=x^\alpha\{h(x) \text{ மட } x+k(x)\}$ என்னுந் தொகையீட்டை

$$v-\frac{k(0)\,u}{h(0)}=x^\alpha\left\{h(x) \text{ மட } x+k(x)-\frac{k(0)}{h(0)}h(x)\right\}$$

என்னும் தொகையீடுகளின் ஏகபரிமாணச் சேர்க்கையால் இடமாற்றம் செய்யலாம் ; இது $k(x)$ ஆனது $x$ என்பது காரணியாகவுள்ள ஒரு நிறையுரு சார்பால் இடமாற்றம் செய்யப்படுதலில் தவிர முன்போன்ற வடிவமாகும். இதே மாதிரி $x^{\beta}k(x)$ என்னும் $v$ இன் முதல் வடிவத்தில் $\alpha$, $\beta$ என்பன சமமில்லாதனவென என்றும் உத்தேசிக்கலாம் ; ஏனெனின் அவ்வாறு இன்றேல் $v$ யை $x^{\alpha+1}$ ஐக் காரணியாகக் கொண்ட $v-\dfrac{k(0)}{h(0)}u$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்யப்படலாம்.

$m$ ஆம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்கு உற்பத்தியில் சீரானதாகும் ஒரு தொகையீடு

$$x^{\alpha}\{h(x)\,(\text{மட}\ x)^{r}+x^{s}k(x)\,(\text{மட}\ x)^{r-1}+\ldots\ldots+x^{n}j(x)\}$$

என்னும் வடிவம் கொள்ளுமென வரையறுக்கப்படும் ; இங்கு $s,\ldots.n$ என்பன பூச்சியம் அல்லது (நேராகவோ மறையாகவோவுள்ள) எவையேனும் முழுவெண்களாக $r$ ஆனது $0, 1, 2, \ldots, m-1$ என்பவற்றுள் எப்பெறுமானமும் கொள்ளலாம். ஆயின் முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒழுங்கான தொகையீடுகள் மட $x$ என்பதைக் கொண்டிருக்க முடியாது. இரண்டாம் வரிசைக்கு மடக்கை ஏகபரிமாண முறையில் நிகழலாம் அல்லது நிகழாமலேயிருக்கலாம். இது அத்தியாயம் **x** இலிருந்தும் பின்வருமாறு உய்த்தறியப்படலாம். பிரிவு 107 இல் தொகையீடுகள் இரண்டும் மடக்கைகள் கொள்ளாதிருந்தன. பிரிவு 110 இல் $a$ கள் $\mathbf{c}$ இன் சார்புகளாக $x^{c}\sum\limits_{0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள தொடரை $c$ யைக் குறித்துப் பகுதியாய் வகையிட்டுக் கொண்டு அதன் பின் $\mathbf{c}$ என்பதை $\beta$ ஆல் இடமாற்றம் செய்தலால் ஓர் இரண்டாம் தொகையீட்டைப் பெற்றுள்ளோம். (பிரிவு 110 இல் தரப்படாத) இம்முடிபு

$$x^{\beta}\left\{\left(\sum_{0}^{\infty}a_{n}(\beta)\ x^{n}\right)\text{மட}\ x+\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{\partial a_{n}(\beta)}{\partial\beta}x^{n}\right)\right\}$$

ஆகும் ; இது

$$x^{\alpha}\{h(x)\ \text{மட}\ x+x^{s}k(x)\}$$

என்னும் வடிவமாகும்.

$a_{n}(\beta)$ இன் முதல் $\lambda$ குணகங்கள் பூச்சியமாகி $\dfrac{\partial\,a_{n}(\beta)}{\partial\beta}$ இன் முதல் $\mu$ குணகங்களும் பூச்சியமாகுமாயின், $\alpha=\beta+\lambda$, $s=\mu-\lambda$.

மட $x$ இன் இணைகாரணி தானுமே ஒரு தொகையீடாகுமென்பது கவனிக்கப்படும், இது வேறு விதமாகவும் நிறுவப்படலாம். $P(x)$, $Q(x)$ என்பன உற்பத்தியின் அயலில் ஒருசீராக (அதாவது, ஒன்றிப் பெறுமானமுள்ளனவாக)

$$y_{2}+y_{1}P(x)+y\,Q(x)=0.\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை எடுக்க.

இச்சமன்பாட்டின் இடக்கைப் பக்கத்தில் $y$ இற்கு $x^{\alpha}\{h(x)$ மட $x+x^{s}k(x)\}$ ($=u$ மட $x+w$, என்க) என்பதைப் பிரதியிடுவோமாயின் தொகையீட்டின் வரைவிலக்கணத்தால் முடிபு சர்வசமனாகப் பூச்சியமாதல் வேண்டும். இம்முடிபில் மட $x$ ஆனது $u_2+u_1\,P+uQ$ என்னும் இணைகாரணியோடு நிகழும். இதுவும் மட $x$ என்பது தவிர முடிபிலுள்ள மற்றையெல்லா உறுப்புக்களும் $x^{\alpha}$ இனதும் ஓர் ஒரு சீர்ச் சார்பினதும் பெருக்கமாகும்; இதற்குக் காரணம் $P$, $Q$ என்பன ஒருசீராகக் கொள்ளப்படுவதும் $u$, $w$ என்பனவும் $u_1$, $u_2$, $w_1$, $w_2$ என்பனவும் இவ்வினைப் பெருக்கங்களாவதுமேயாம். சர்வசமன்பாட்டை மட $x$ இன் இணைகாரணியால் வகுத்தல் முடியுமாயின் மட $x$ என்னும் ஒருசீரல்லாச் சார்பு ஈர் ஒருசீர்ச் சார்புகளின் ஈவு ஆகும், அதாவது தானுமே ஒருசீர்ச் சார்பு ஆகும், என்னும் அனர்த்தமான முடிபைப் பெறுவோம். ஆகவே வகுத்தல் முறைமையின்றியதாகும்; இதற்குக் காரணமாகக் கூடியது இணை காரணி பூச்சியமாதலே; அதாவது $u$ வும் ஒரு தொகையீடு ஆகும்.

(உற்பத்தியின் அயலிற் குணகங்கள் ஒருசீராகும்) $m$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாட்டினது ஓர் ஒழுங்கான தொகையீட்டில் நிகழும் மட $x$ இனது மிகவுயர்ந்த வலுவின் இணைகாரணிக்கும் இதுபோன்ற தேற்றம் உண்மையாகும். ஆயின் ஒழுங்கான தொகையீடுகள் நிகழும். ஆயின் ஒழுங்கான தொகையீடுகள் நிகழும் ஒவ்வொரு வகையிலும் அவற்றுள் ஒன்றுதல் மடக்கைகள் கொள்ளாது $x^{\alpha}h(x)$ என்னும் வடிவம் கொள்ளல் வேண்டும்.

## 173. ஃபூசின் தேற்றம்.

**தனது குணகங்கள் உற்பத்தியின் அயலிற் சீராகும் இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடு உற்பத்தியில் ஒழுங்காகும் தொகையீடுகள் கொள்ளுதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாவது இச்சமன்பாடு, p, q என்பன உற்பத்தியில் நிறையுருவாக,**

$$x^2y_2+xy_1p\,(x)+yp\,(x)=0$$

என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படத் தகுமென்பதே.

புரோபீனியசின் முறை பற்றிய தர்க்கம் (பிரிவுகள் 106–110) இந்நிபந்தனை போதியதாகுமென்பதை நிறுவும். இப்போ அது வேண்டியது என்பதை நிறுவுதல் வேண்டும். பிரிவு 172 இலிருந்து, ஒரு தொகையீடாதல் $x^{\alpha}h\,(x)$ என்னும் வடிவமாகும். இதனை $u\,(x)$ என்பதாற் குறிக்க. $y=u\int z\,dx$ என இட்டுக்கொண்டு பிரிவு 172 இன் (1) என்னும் சமன்பாட்டிற் பிரதியிடுக. $u$ ஆனது ஒரு தொகையீடு ஆதலாலும் தொகையிடற் குறி கொள்ளும் உறுப்புக்களுக்கு $u_2+u_1\,P+uQ$ ஆனது ஒரு காரணி ஆதலாலும் இவ்வுறுப்புக்கள் மறைந்து

$$2u_1z+uz_1+Puz=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்பது பெறப்படும்.

இனி $y$ என்னுந் தொகையீடு

$$x^{\beta}k\,(x),\;\; x^{\alpha}\{h\,(x)\text{ மட }x+x^{s}\,k\,(x)\}$$

என்னும் இரு வடிவங்களுள் ஒன்றைக் கொள்ளலாம். ஆகவே

$$\frac{y}{u\,(x)}=x^{\beta-\alpha}\frac{k\,(x)}{h\,(x)},\text{ அல்லது மட }x+x^{s}\frac{k\,(x)}{h\,(x)}$$

$$=x^{\beta-\alpha}\,H\,(x),\;\;\text{அல்லது மட }x+x^{s}\,H\,(x),\text{ என்க ;}$$

ஆகவே $$z=\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right)=x^{\beta-\alpha-1}\,\{(\beta-\alpha)\,H+xH_1\},$$

அல்லது $$x^{-1}+x^{s-1}\,(sH+xH_1).$$

$K\,(0)\neq 0$ ஆகுமாறு $K\,(x)$ ஆனது நிறையுருவானதாக, $z$ என்பது இரு வகைகளிலும் $x^{\gamma}\,K\,(x)$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். **[முதல் வகையில் $\gamma=\beta-\alpha-1$. இரண்டாம் வகையில் s என்னும் முழுவெண் நேர் அல்லது மறையாதற்கேற்ப $\gamma=-1$ அல்லது $s-1$ ஆரும்.]**

ஆகவே (2) என்னுஞ் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$P=-\frac{z_1}{z}-\frac{2u_1}{u}=-\frac{\gamma}{x}-\frac{K_1}{K}-\frac{2\alpha}{x}-\frac{2h_1}{h}=\frac{p\,(x)}{x},\;\;\text{என்க ;}$$

இங்கு $p$ ஆனது உற்பத்தியில் நிறையுருவாகும்.

அன்றியும் $x^{\alpha}h\,(x)$ ஆனது (1) என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒரு தொகையீடாதலால்.

$$x^{\alpha}h_2+2\alpha x^{\alpha-1}\,h_1+\alpha\,(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}h+(x^{\alpha}h_1+\alpha x^{\alpha-1}h)\;P+x^{\alpha}hQ=0\;;$$

இது தருவது

$$Q=\frac{1}{x^2}\left\{-\frac{x^2h_2}{h}-\frac{2\alpha xh_1}{h}-\alpha\,(\alpha-\,)-\left(\frac{xh_1}{h}+\alpha x\right)P\right\}=\frac{q\,(x)}{x^2},\;\text{என்க ;}$$

இங்கு $q$ ஆனது உற்பத்தியில் நிறையுருவாகும்.

(1) என்னுஞ் சமன்பாட்டை $x^2$ ஆல் பெருக்கிக்கொண்டு $xP$, $x^2Q$ என்பவற்றை முறையே $p$, $q$ என்பவற்றுல் இடமாற்றம் செய்யுமிடத்து தேற்றத்தால் தரப்படும் வடிவத்தைப் பெறுவோம்.

**தீர்த்தற்கான பயிற்சி.**

$y=Ax^{\frac{1}{2}}+Bx^{\frac{1}{2}}$ மட $x$ என்பதிலிருந்து எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்கலால்.

$$8x^2\;(4-\text{மட }x)\;y_2+2x\;(8-\text{மட }x)\;y_1-y\text{ மட }x=0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெறுக; ஆகவே இது தனது தொகையீடுகள் எல்லாம் உற்பத்தியில் ஒழுங்கான போதிலும் ஃபூசின் தேற்றத்திலே தரப்படும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படத்தகாத இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடாகும்.

உற்பத்தியின் அயலில் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் குணகங்கள் ஒருசீர் ஆதல் வேண்டுமென்னுங் கட்டுப்பாட்டின் முக்கியத்தை இப்பயிற்சி காட்டும். உண்மையில் இது ஒரு கூடுமையான கட்டுப்பாடு. ஏனெனின்

$$y = Ax^{\beta} j\,(x) + Bx^{\alpha}\{h\,(x)\ \text{மட}\ x + x^{\delta} k\,(x)\}$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள முற்றிய மூலிகள் எல்லாவற்றையும், $x^{\beta} j\,(x)$ ஆனது $x^{\alpha} h\,(x)$ என்பதன் ஓர் எண்மடங்காகவேயிருக்கும் விசேட வகையைத் தவிர்த்து, இது புறநீங்கலாக்கும்.

## 174. சாதாரண புள்ளிகளும் தனிச் சிறப்புப் புள்ளிகளும்.

$p$, $q$ என்பன ($h$, $k$, $j$, $H$, $K$ ஆகியவற்றைப் போலல்லாது உற்பத்தியில் மறையலாம். குறிப்பிட்ட வகையாக $p$ யை $x$ ஆலும் $q$ வை $x^2$ ஆலும் வகுக்க முடியுமாயின் (1) என்னும் தொடக்க வடிவத்திலுள்ள சமன்பாட்டுக்கு $P$, $Q$ என்பன உற்பத்தியில் நிறையுருவானவையாகும். இவ்வகையில் உற்பத்தி ஒரு சாதாரண புள்ளியெனப்படும் ; புரோபீனியசின் முறையைப் பிரயோகிக்குமிடத்து 0., 1 என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்டு ஒரு தேராக் குணகத்திற்கும் (பிரிவு 99 இல் உள்ளதுபோல்) இறுதியில் இரண்டும் வலுத்தொடராகும் ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராத இரு தொகையீடுகளுக்கும் வழிகாட்டும் ஒரு சுட்டிசார் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம். மடக்கைகளோ நேர் முழுவெண் (அல்லது பூச்சியம்) ஆகாத சுட்டிகளோ நிகழல் முடியாது. ஆனல் பிரிவு 98 உ-ம் 2 இல் உள்ளது போல் உற்பத்தி சாதாரணப் புள்ளியாகாது சுட்டிசார் சமன்பாடு 0, 1 என்னும் மூலங்களைக் கொள்ளலாம்.

சாதாரணமாகாத புள்ளிகள் **தனிச் சிறப்புப் புள்ளிகள்** எனப்படும். (தனது அயலில் சமன்பாட்டுக் குணகங்கள் ஒருசீராகும்.) தனிச் சிறப்புப் புள்ளியில் எல்லாத் தொகையீடுகளும் ஒழுங்கானவையாயின் அது ஒரு சீரான தனிச்சிறப்புப் புள்ளியெனப்படும்.

இவ்வரைவிலக்கணங்கள் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின், அதாவது (1) என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படுமிடத்து அதன் குணகங்களின், தனிச் சிறப்புப் புள்ளிகளையே குறிக்கும். சாதாரண புள்ளிகள் பற்றிய தர்க்கம் காட்டுவது தொகையீடுகளின் தனிச் சிறப்புக்கள் சமன்பாட்டின் தனிச் சிறப்புக்களாகுமென்பதே ; ஆனல் மறுதலை என்றும் உண்மையாகாது. உதாரணமாக, $y = Ax^m + Bx^n$ என்பதிலிருந்து $A$, $B$ என்னும் எதேச்சை மாறிலிகளை நீக்க,

$$x^2 y_2 - (m + n - 1)\,xy_1 + mny = 0.$$

$m$, $n$ என்பன சமமில்லா நேர் முழுவெண்களாகவோ ஒன்று பூச்சியமாகி மற்றையது 1 அல்லாத நேர் முழுவெண்ணுகவோ இருப்பின் உற்பத்தியானது சமன்பாட்டுக்கு ஒரு தனிச்சிறப்பாகும் ; ஆனல் தொகையீடுகளுக்கு அவ்வாருகாது இங்குள்ளதுபோல் சமன்பாட்டுக்குத் தனிச்சிறப்பாகும் ஒரு புள்ளியில் ஒவ்வொரு தொகையீடும் நிறையுருவாகுமிடத்து இத்தனிச்சிறப்பு தோற்றா

**வானது** எனப்படும். மற்ற வகைகள் எல்லாவற்றிலும் தனிச்சிறப்பு **மெய்யானது** எனப்படும். ஒரு தோற்றரவான தனிச்சிறப்பில் சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் சமமில்லா நேர்முழுவெண்களாகவோ பூச்சியமும் 1 இனும் பெரிய முழுவெண்ணாகவுமோ இருக்க வேண்டும். சிறிய மூலம் (பிரிவு 99 இல் உள்ளதுபோல்) ஒரு தோராக் குணகத்திற்கு வழிகாட்ட வேண்டுமென்பதும் வேண்டியதாகும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $p(x)$, $q(x)$ என்பன உற்பத்தியில் நிறையுருவானவையாக, உற்பத்தி

$$x^2y_2+xy_1p(x)+yq(x)=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டினது தோற்றரவான தனிச்சிறப்பு ஆதற்கு ஒரு வேண்டிய (ஆனால் போதியதல்லா) நிபந்தனையானது $p(0)=$ ஒரு மறை முழுவெண் என்பதையும் உற்பத்தி ஒரு சாதாரணப் புள்ளியாதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகள் $p(0)=q(0)=q_1(0)=0$ என்பதையுங் காட்டுக.

(2) உற்பத்தி

$$x(1+x^2)y_2-y_1-x^3y=0$$

என்பதன் தோற்றரவுத் தனிச்சிறப்பெனக் காட்டி

$$y=A(1+\tfrac{1}{8}x^4-\tfrac{1}{16}x^6+\tfrac{1}{24}x^8-\dots)+B(x^2-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{6}x^6-\tfrac{7}{64}x^8\dots)$$

என்னு முற்றிய மூலியைப் பெறுக.

(3) உற்பத்தி $x^2y_2+(x^2-2)y=0$ என்பதன் ஒரு மெய்த்தனிச் சிறப்பு என்பதையும் எந்தத் தொகையீடும் மடக்கை கொள்ளாது என்பதையும் காட்டுக.

[சுட்டிசார் சமன்பாட்டு மூலங்கள் $-1$, 2 என்பன. சிறிய மூலம் $a_3$ ஆனது தோராதது எனத் தரும் (பிரிவு 99 பார்க்க). பெறப்படு முடிவில் தொடர்கள் கூட்டப்படலாம் ; அவை இறுதியில் தருவது

$$y=Ax^{-1}\,(\text{கோசை } x+x\text{ சைன் } x)+Bx^{-1}\,(\text{சைன் } x-x\text{ கோசை } x)$$

## 175. பூசின் வகைச் சமன்பாடுகள்

உற்பத்தியல்லா மற்றைப் புள்ளிகளைப் பற்றிக் கருதுவதற்குச் சிந்திக்கப்படும் புள்ளி $x=a$ என்னும் முடிவுள்ள புள்ளி அல்லது $x=\infty$ என்னும் முடிவிலிப் புள்ளியாதற்கேற்ப $X=x-a$ அல்லது $X=x^{-1}$ என இட்டுக்கொண்டு ஒரு மாறிமாற்றம் ஆக்குவோம். (1) என்னும் சமன்பாட்டில் $P$, $Q$ என்னும் சார்புகள் $a$, $b$, $c$, ....... என்னும் எல்லைப்பட்ட தொகைப் புள்ளிகளைத் தவிர்த்து ஒவ்வொரு முடிவுள்ள புள்ளியிலும் நிறையுருவானவையாயின் இவையே இயல்தகு முடிவுள்ள தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் என்பது பெறப்படும். ஆயின் மாறி மாற்றம் ஆக்காது $P$, $Q$ என்பன எங்கு நிறையுருவாகத் தவறுமெனப் பார்த்துச் கண்கணிப்பு முறையில் இப்புள்ளிகளைக் காணலாம் ; உதாரணமாக,

$$P=\frac{x+2}{x(x-3)},\ Q=\frac{x^3+10}{x^2(x-3)\,(x-4)^3}$$

ஆயின், $x=0$, 3, 4 ஆகியவற்றால் தரப்படும் புள்ளிகளே இயல்தகு முடிவுள்ள தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள். அன்றியும் $x=a$ என்னுந் தனிச்

சிறப்புப்புள்ளி ஒழுங்கானதாவென்பதைச் சோதித்தற்கு $(x-a)P$, $(x-a)^2Q$ என்பன இரண்டும் $x=a$ இல் நிறையுருவானவையா என்பதையே நாம் கவனித்தல் வேண்டும். இவ்வுதாரணத்தில் 0, 3 என்பன ஒழுங்கான தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் ; ஆனால் $(x-4)^2Q$ ஆனது தன் பகுதியில் $(x-4)$ என்னுங் காரணியைக் கொள்ளுதலால் அது $x=4$ என்பதில் நிறையுருவாகாமையால் 4 என்பது ஒழுங்கற்றதாகும்.

$x=\infty$ என்னு முடிவிலிப்புள்ளி மாறி மாற்றத்தால் மிக நன்றாக எடுத்தாளப்படலாம்.

(தனது குணகங்கள் எங்குஞ் சீராகும்) ஒரு சமன்பாட்டின் தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் எல்லாம் ஒழுங்காயின், இச்சமன்பாடு ஃபூசின் வகையிலுள்ளதெனப்படும்.

### தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

(1) $x(1-x)\,y_2+\{c-(a+b+1)x\}y_1-aby=0$

என்னும் அதிபர பெருக்கற் சமன்பாட்டுக்குத் தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் ஒழுங்கானவையாகும் 0, 1, $\infty$ என்பனவே எனக் காட்டுக.

(2) $(1-x^2)\,y_2-2xy_1+n(n+1)\,y=0$ என்னும் லசாந்திரின் சமன்பாட்டுக்குத் தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் ஒழுங்கானவையாகும். 1, $-1$, $\infty$ என்பனவே எனக் காட்டுக.

(3) $x^2y_2+xy_1+(x^2-n^2)\,y=0$ என்னும் பெசலின் சமன்பாட்டுக்குத் தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகள் 0, $\infty$ என்பனவே எனவும் அவற்றுள் முதலாவது ஒழுங்கானதாக இரண்டாவது அவ்வாறுகாது எனவும் காட்டுக.

(4) ரைமானியின் $P$ – சமன்பாடாகிய

$$y=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

அதாவது $$y_2+\Sigma\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a}\right)y_1+\left\{\Sigma\frac{\alpha\alpha'(a-b)\,(a-c)}{x-a}\right\}\frac{y}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}=0,$$

என்பது, $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ ஆயின், $a$, $b$, $c$ என்பவற்றை ஒழுங்கான தனிச்சிறப்புப் புள்ளிகளாகவும் $\infty$ என்பதையும் உள்ளடக்கும் மற்றைப் புள்ளிகளைச் சாதாரண புள்ளிகளாகவும் கொண்டது என்பதைக் காட்டுக.

$\alpha$, $\alpha'$ என்பன $a$ என்னும் புள்ளிக்கு ஒத்த சுட்டிசார் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்பதை மாறி மாற்றத்தாற் காட்டுக.

(5) 1, 2, 4 என்னும் பயிற்சிகளின் சமன்பாடுகள் ஃபூசின் வகையாக, பயிற்சி 3 இன் சமன்பாடு அவ்வாறுகாது என்பதைக் காட்டுக.

(6) பின்வரும் சமன்பாடு ஃபூசின் வகையாகுமெனக் காட்டுக :

$$y_2+\frac{P}{\psi}y_1+\frac{Q}{\psi^2}\,y=0\,;$$

இங்கு ψ ஆனது தம்முள் எவையேனும் இரண்டு சமமில்லா $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$,........ என்னும் எத்தொகை, $n$ என்க, ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக, $P$, $Q$ என்பன முறையே $(n-1)$ இலும் $(2n-2)$ இலும் பெரிய படிகளில் $x$ இன் பல்லுறுப்பிகளாகும்.

## 176. சிறப்பியல்புச் சுட்டி

$\lambda$, $\mu$ என்பன நேர் முழுவெண்கள் அல்லது பூச்சியமாக, $p$, $q$ என்பன $x=0$ ஆகுமிடத்து பூச்சியமாகா $x$ இன் நிறையுருச் சார்புகளாயின்

$$y_2 + x^{-\lambda} p(x) y_1 + x^{-\mu} q(x)\, y = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டை எடுக்க.

இச்சமன்பாட்டை புரோபீனியசின் முறையாலே தீர்த்தற்கு எத்தனிப்போமாயின் $y$ யை ($x^c$ என்பதோடு தொடங்கும்) $x$ இன் வலுத் தொடராக இடமாற்றஞ் செய்து வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் இடக்கைப் பக்கத்தாலே தரப்படு முடிவில் $x$ இன் மிகத் தாழ்ந்த வலுவின் குணகத்தைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தலால் சுட்டிசார் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம். முதலாம் இரண்டாம் மூன்றும் உறுப்புக்களிலுள்ள $x$ இன் மிகத் தாழ்ந்த வலுக்கள் முறையே $c-2$, $c-\lambda-1$, $c-\mu$ என்பனவாகும். இங்கு மூன்று வகைகள் எழும் :

(i) இவ்வெண்களுள் முதலாவது மற்றை யாதுமொன்றிலும் பெரிதாகயின் சுட்டிசார் சமன்பாடு இரண்டாம் படியாகும் ;

(ii) இவ்வெண்களுள் இரண்டாவது முதலாவதிலும் சிறிதாகி மூன்றுவதிலும் பெரிதாகாதாயின் சுட்டிசார் சமன்பாடு முதற் படியாகும் (பிரிவு 100, பயிற்சிகள் 2, 4 ஆகியவற்றைப் பார்க்க) ;

(iii) இவ்வெண்களுள் மூன்றுவது மிகச் சிறியதாயின் சுட்டிசார் சமன்பாடு பூச்சியப்படியாகும் (பிரிவு 100 இல் உள்ள உதாரணம் பார்க்க).

வகை (i) இல் $\lambda \leqslant 1$, $\mu \leqslant 2$ ஆதலால் ஃபூசின் தேற்றத்தால் ஈர் ஒழுங்கான தொகையீடுகள் இருத்தல் வேண்டும்.

வகை (ii) இல் ஓர் ஒழுங்கான தொகையீடு இருக்கலாம். எனினும் பல முறையும் நிகழ்வதுபோல் (பிரிவு 100, பயிற்சி 4 பார்க்க) பெறப்படும் ஒன்றித்தொடர் $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் விரியுமாயின் ஒழுங்கான தொகையீடு இல்லை.

வகை (iii) இல் தொடர் யாதுமில்லாமையால் ஒழுங்கான தொகையீடு கிடையாது.

**“சிறப்பியல்புச் சுட்டி”** என்பது எழும் வகையைக் குறிக்கும் (பூச்சியத்தோடு தொடங்கும்) எண்ணுக வரையறுக்கப்படும், அதாவது வகை (i) இற்கு 0, வகை (ii) இற்கு 1, வகை (iii) இற்கு 2. இவ்வரைவிலக்கணத்தையும் சுட்டிசார் சமன்பாட்டின் இயல்தகு உயர்வுப்படி பற்றிய தர்க்கத்தையும் எவ்வரிசைச் சமன்பாடுகளுக்கும் விரித்தல் எளிதாகும் ; அதாவது m என்னும் வரிசையும் r என்னும் சிறப்பியல்புச் சுட்டியுமுள்ள ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு (m − r) இற்கு மேற்பட்ட ஒழுங்கான தொகையீடுகள் இருத்தல் முடியாது என்னும் முடிபு பெறப்படும்.

## 177. செவ்வன் தொகையீடுகளும் உபசெவ்வன் தொகையீடுகளும்.

பிரிவு 100 இல் புரோபீனியசின் முறையினால் $e^{\frac{1}{x}}$ என்னுங் காரணி கொண்ட தொகையீட்டைக் காணமுடியாது என்பதைக் கண்டுள்ளோம். இது $e^z u$ என்னும் வடிவத்திலுள்ளதென வரையறுக்கப்படும் செவ்வன் தொகையீட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையாகும் ; இங்கு $z$ என்பது $\frac{1}{x}$ இல் ஒரு பல்லுறுப்பி (மிக எளிய வகையில் $\frac{1}{x}$ இன் எண்மடங்கு) ஆக, $u$ ஆனது ஓர் ஒழுங்கான தொகையீட்டில் நிகழ்வதுபோன்ற $x$ இன் சார்பாகும். உப செவ்வன் தொகையீடுகள் செவ்வன் தொகையீடுகளிலிருந்து வித்தியாசப்படுவது, $x$ இற்குப் பதிலாக அதன் வர்க்க மூலம் (அல்லது கனமூலம் அல்லது இரண்டிலும் உயர்ந்த வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் வகையில் இதனிலும் உயர்ந்த மூலம்) இருத்தலாலேயே.

செவ்வன் தொகையீடுகள் அல்லது உபசெவ்வன் தொகையீடுகள் பெறப்படுமுறை பின்வரும் உதாரணங்களாற் காட்டப்படும்.

உ-ம்(i). (1) $y_2 - 2x^{-1}y_1 + x^{-4}(-4+2x^2)y = 0$ .................. (1)

இங்கு சுட்டிசார் சமன்பாட்டுக்கு யாது மூலம் இல்லை ; யாதும் ஒழுங்கான தொகையீடு இல்லை (அதாவது, சிறப்பியல்புச் சுட்டி 2 ஆகும்). இது $y$ இன் குணகத்திலுள்ள $-4x^{-4}$ என்னும் உறுப்பாலாயது.

$$y = e^z u \text{ எனப் பிரதியிட,}$$

$$y_1 = e^z(u_1 + z_1 u), \ y_2 = e^z\{u_2 + 2z_1u_1 + (z_1{}^2 + z_2)u\}.$$

(1) என்னும் சமன்பாடு, $e^z$ ஆல் வகுத்தபின்,

$$u_2 + (-2x^{-1} + 2z_1)u_1 + (-4x^{-4} + 2x^{-2} - 2x^{-1}z_1 + z_1{}^2 + z_2)u = 0 \ \ldots .(2)$$

என்பதற்கு உரு மாற்றப்படும்.

$-4x^{-4}$ என்னும் உறுப்பை விலக்குதற்கு, $a = \pm 2$ ஆக, $z_1$ என்பதை $ax^{-2}$ என எடுக்க. (2) என்னும் சமன்பாடு தருவது

$$u_2 + (-2x^{-1} + 2ax^{-2})u_1 + (2x^{-2} - 4ax^{-3})u = 0 \ ;$$

இதற்குச் சிறப்பியல்புச் சுட்டி 1 ஆதலால் ஓர் ஒழுங்கான தொகையீடு இருக்கலாம். இதனைக் காண்பதற்கு புரோபீனியசின் முறையைப் பிரயோகிக்க $a$ இன் பெறுமானங்கள் இரண்டிற்கும் $u = x^2$ என்னும் எளிய முடிவைப் பெறுவோம். அடுக்குக்குறிக் காரணியாற் பெருக்க இறுதியில் $x^2e^{-2/x}$, $x^2e^{2/x}$ என்னும் இரு செவ்வன் தொகையீடுகளைப் பெறுவோம்.

உ-ம் (ii) $y_2 + 4x^{-2}y_1 + x^{-6}(-4 + 6x^2 - 4x^3)y = 0.$

இங்கு ஒழுங்கான தொகையீடு யாதுமில்லை. உ-ம். (i) இல் உள்ளது போல் செய்ய $u_2 + (4x^{-2} + 2z_1)u_1 + (-4x^{-6} + 6x^{-4} - 4x^{-3} + 4x^{-2}z_1 + z_1{}^2 + z_2)u = 0$. $-4x^{-6}$ என்னும் உறுப்பை விலக்குதற்கு, $b = \pm 2$ ஆக, $z_1$ ஆனது $bx^{-3}$ என்னும் உறுப்பைக் கொள்ளுமென எடுக்க. $4b + 2ab = 0$, அதாவது

$a = -2$, ஆகுமாறு $a$ ஆனது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு $z_1 = ax^{-2} + bx^{-3}$ ஆயின் $u$ இன் குணகம் $x^{-5}$ இல் யாதும் உறுப்புக் கொள்ளாது.

$z_1 = -2x^{-2} + 2x^{-3}$ என்னுந் தேர்வு $u = x$ என்னும் ஓர் ஒழுங்கான தொகையீடு உள்ள

$$u_2 + 4x^{-3}u_1 - 4x^{-4}u = 0$$

என்பதற்கு வழி காட்டும்.

$z_1 = -2x^{-2} - 2x^{-3}$ என்னும் மற்றைத் தேர்வு

$$u_2 - 4x^{-3}u_1 + 8x^{-4}u = 0$$

என்பதற்கு வழி காட்டும். இதற்கு ஒழுங்கான தொகையீடு யாதுமில்லை. ஏனெனின்

$$x^2\left(1 + \tfrac{1}{4}x^2 + \frac{1.3}{4^2}x^4 + \frac{1.3.5}{4^3}x^6 + \ldots\ldots\right)$$

எனப் பெறப்படும் ஒரே தீர்வு விரியும். ஆகவே தொடக்கச் சமன்பாட்டுக்கு

$$x/(2x^{-1} - x^{-2})$$

என்னும் ஒரு செவ்வன் தொகையீடு உண்டு.

உ-ம் (iii) $y_2 + x^{-2}(-1 + 3x)y_1 + x^{-2}y = 0.$

இங்கு சிறப்பியல்புச் சுட்டி 1 ஆகும். சுட்டிசார் சமன்பாடு முதற்படியிலுள்ளது, ஆனால் (பிரிவு 100, பயிற்சி 4 இல் காட்டியது போல்) பெறப்படும் தொடர் விரியும். முன்போலச் செய்ய

$$u_2 + (-x^{-2} + 3x^{-1} + 2z_1)u_1 + \{x^{-2} + (-x^{-2} + 3x^{-1})z_1 + z_1^2 + z_2\}u = 0.$$

தொடக்கச் சமன்பாட்டில் கலக்கம் தரும் உறுப்பு $y_1$ இன் குணகத்திலுள்ள $-x^{-2}$ ஆதலாலும் $y$ இன் குணகம் தொகையீடுகள் ஒழுங்காகுமிடத்து நிகழ்வது போன்றதாலும் $z_1 = \frac{1}{2}x^{-2}$ என எடுத்து $u$ இன் குணகத்தைச் சுருக்குதல் விரும்பத்தக்கதாகுமென நினைக்கப்படலாம். ஆனால் இது $u$ வின் குணகத்துள் $x^{-4}$ என்னும் உறுப்பைச் செலுத்தி ஒழுங்கான தொகையீடு யாதுமில்லாத ஒரு சமன்பாட்டைத் தரும்.

ஒத்த தொடர் ஒருங்கலாமென்னும் நம்பிக்கையோடு சிறப்பியல்புச் சுட்டி 1 ஆகும் வேறொரு சமன்பாட்டைப் பெற முயல்வோம். $z_1 = ax^{-2}$ என இடுக. $a^2 - a = 0$, அதாவது $a = 0$ அல்லது 1, ஆயின் $u$ இன் குணகம் $x^{-4}$ கொண்ட உறுப்புக்களைக் கொள்ளாது. $a = 0$ என்பது தொடக்கச் சமன்பாட்டைத் தரும்; ஆனால் $a = 1$ என்பது, $y = x^{-1}e^{-1/x}$ என்னும் செவ்வன் தொகையீட்டைத் தரும் $u = x^{-1}$ என்னும் சீரான தொகையீட்டைக் கொண்டது.

$$u_2 + (3x^{-1} + x^{-2})u_1 + (x^{-2} + x^{-3})u = 0$$

என்பதைத் தரும்.

உ-ம் (iv) $y_2 + \frac{1}{2}x^{-1}y_1 - x^{-3}y = 0.$

இச்சமன்பாட்டுக்கு ஒழுங்கான தொகையீடுகள் இல்லை. முன்போலச் செய்ய

$$u_2+(\tfrac{1}{2}x^{-1}+2z_1)u_1+(-x^{-3}+\tfrac{1}{2}x^{-1}z_1+z_1{}^2+z_2)u=0.$$

$-x^{-3}$ என்னும் உறுப்பை விலக்குதற்கு, $k=\pm 1$ ஆக,

$z_1=kz^{-3/2}$ என எடுக்க,

$$u_2+(\tfrac{1}{2}x^{-1}+2kx^{-3/2})u_1-kx^{-5/2}u=0.$$

$u=x^c\sum\limits_0^{\infty}a_nx^{\frac{1}{2}n}$ என்பது தொகையீடு ஆதற்கு

$a_0(2kc-k)=0$, ஆகவே $c=\frac{1}{2}$,

$a_1\{2k(c+\frac{1}{2})-k\}+a_0\{c(c-1)+\frac{1}{2}c\}=0$ ஆகவே, $a_1=0$

இதே மாதிரி 1 இலும் பெரிய $n$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $a_n=0$ ஆதலால் $u=x^{\frac{1}{2}}$.

தொடக்கச் சமன்பாட்டுக்கு

$$x^{\frac{1}{2}}e^{-2x^{-\frac{1}{2}}},\quad x^{\frac{1}{2}}e^{2x-\frac{1}{2}}$$

என்னும் ஈர் உப செவ்வன் தொகையீடுகளுண்டு.

## தீர்த்தற்கான பயிற்சிகள்

பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குச் செவ்வன் தொகையீடுகள் அல்லது உபசெவ்வன் தொகையீடுகள் காண்க (1—5) :

(1) $y_2+2x^{-1}y_1-x^{-4}y=0$. [விடை. $e^{1/x}$, $e^{-1/x}$.]

(2) $y_2+x^{-1}y_1+x^{-4}(1-\frac{1}{4}x^2)y=0$.

[விடை $x^{\frac{1}{2}}e^{i/x}$, $x^{\frac{1}{2}}e^{-i/x}$, அல்லது $x^{\frac{1}{2}}$ கோசை$(^{1/x})$, $x^{\frac{1}{2}}$ சைன்$(^{1/x})$]

(3) $y_2+x^{-2}(-2+x)y_1+x^{-4}(1+x-x^2+x^4)y=0$.

[விடை $ue^{-1/x}$, $ve^{-1/x}$, இங்கு $u$, $v$, என்பன பிரிவு 98 இல் உள்ளவைபோல ]

(4) $y^2-\frac{1}{2}x^{-1}y^1-4x^{-3}y=0$. [விடை $x(1+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}})e^{-4x^{-\frac{1}{2}}}$, $x(1-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}})e^{4x^{-\frac{1}{2}}}$.]

(5) $y^2-x^{-6}(1+5x^2)y=0$.

[விடை. $x^{-1}(1+\frac{1}{2}x^3)e^{\frac{1}{2}x^{-2}}$ ; $z=-\frac{1}{2}x^{-2}$ என்பது ஒரு விரிதொடர் தரும்.]

(6) பெசலின் பூச்சிய வரிசை சமன்பாட்டை $x=1/X$ என்னும் பிரதியீட்டால் உருமாற்றிக் டுகாண் உருமாற்றிய சமன்பாட்டின் செவ்வன் தொரகையீடுகளைக் காண்டற்கு எத்தனிக்கபெறப்படும் தொடர்கள் விரியுமெனக் காட்டுக. தொடக்க மாறியை மீண்டுமெடுத்து

$$e^{-ix}x^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{1^2}{8ix}+\frac{1^2.3^2}{2!(8ix)^2}-\frac{1^2.3^2.5^2}{3!(8ix)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

என்னுந் தொடரையும் $i$ இனது குறிமாற்றிய இது போன்ற தொடரையும் பெறுக.

[இத்தொடர்கள் விரியுமாயினும் மிகப் பயன்படும். அவை அணுகுகோட்டுக்குரியனவெனப்படும். போதிய அளவு பெரிதாகத் தந்த $x$ இன் யாதுமொரு பெறுமானத்திற்கும் வழு நியாயமாகச் சிறிதாக்கப்படக்கூடிய ஓர் அண்ணளவாக்கத்தை அவை தருவன. விற்றேக்கர், வாற்சன் மண்போரின் “ தற்காலிக பகுப்பு ” 4 ஆம் பதிவு, பிரிவுகள் 8.1—8.32, 17.5 பார்க்க.]

(7) விற்றேக்கரின் சங்கம அதிபர பெருக்கச் சமன்பாடாகிய

$$y_2+\left(-\tfrac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\tfrac{1}{4}-m^2}{x^2}\right)y=0$$

என்பதிலிருந்து (பயிற்சி 6 இன் செய்கையால்)

$$e^{-\frac{1}{2}x}x^k\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\{m^2-(k-\frac{1}{2})^2\}\{m^2-(k-\frac{3}{2})^2\}\cdots\cdots\{m^2-(k-r+\frac{1}{2})^2\}}{r!\,x^r}\right]$$

என்னுந் தொடரைப் பெறுக.

[பொதுவாக இத்தொடர் $W_{k,m}(x)$ என்பதாற் குறிக்கப்படும் சார்பின் அணுகுகோட்டு விரியாகும்; ஆனால் $(k-\frac{1}{2}\pm m)$ ஆனது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின் தொடர் முடிவுற்று முடிவுள்ள உறுப்புக்களில் ஒரு தொகையீட்டைத் தரும். $W_{-k,m}(-x)$ என்னும் வேறொரு தொடர் $W_{k,m}(x)$ இலிருந்து, $k$, $x$ ஆகியவற்றின் குறிகளை மாற்றிப் பெறப்படும்.]

## 178. அதிர்கின்ற இழைகளின் சமன்பாடு

இது, $a$ என்பது மாறிலியாக,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

என்பதாகும்.

$$X=x-at,\ T=x+at \text{ என இடுக.}$$

ஆயின்

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial T},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial T}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 V}{\partial X\partial T}+\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}.$$

இதேமாதிரி

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(-\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial T}\right).$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2 V}{\partial X\partial T}+\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right).$$

(1) என்னும் சமன்பாட்டிற் பிரதியிட

$$4\frac{\partial^2 V}{\partial X\partial T}=0\ ;$$

இது தருவன

$$\frac{\partial V}{\partial T}=(\phi).\ T,$$

$$V=f(X)+\int\phi(T)dT=f(X)+F(T)\ ;$$

அதாவது

$$V=f(x-at)+F(x+at)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

இங்கு $f$, $F$ என்பன எதேச்சைச் சார்புகள். $x$ ஆனது $a$ ஆலும் $t$ ஆனது 1 ஆலும் அதிகரிக்கப்படுமாயின் $f\ (x-at)$ என்பது மாறாதிருக்கும். ஆகவே அது $x$ – அச்சினது நேர்த்திசை வழியே $a$ என்னுங் கதியோடு இயங்கும் ஓர் அலையைக் குறிக்கும். இதே மாதிரி $F\ (x+at)$ என்பது அதே கோடு வழியே அதே கதியோடு எதிர்த் திசையிலியங்கும் ஓர் அலையைக் குறிக்கும்.

(1) என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்த்தற்கு வேறொரு முறை பிரிவு 145 இலே தரப்படும் முடிபை $x$, $y$, $z$ என்பவற்றை முறையே $t$, $x$, $V$ என்பவற்றால் இடமாற்றம் செய்து கொண்டு பிரயோகித்தலேயாம்.

சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)V=0,$$

அல்லது

$$(D^2-a^2D'^2)V=0$$

என எழுத $-a$, $a$ என்னும் மூலங்களுள்ள $m^2-a^2=0$ என்னுந் துணைச் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம் ; இது $V=f(x-at)+F(x+at)$ என்பதற்கு வழிகாட்டும்.

### 179. அலைச் சமன்பாட்டின் குறிப்பிட்ட தீர்வுகள்.

இச்சமன்பாடு, $a$ என்பது மாறிலியாக,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

என்பதே. இது (1) என்னும் ஒரு பரிமாணச் சமன்பாட்டின் முப்பரிமாண ஒப்புப் பொருள். $x$, $t$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக $x, y, z, t$ என்பவற்றோடு (2) போன்ற தீர்வு ஒன்றைக் காண முயல்வோம். $l$, $m$, $n$ என்பன மாறிலிகளாக

$$V=f(lx+my+nz-at)+F(lx+mynz+at)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என இட்டுப் பார்க்க. $l^2+m^2+n^2=1$ ஆயின் (3) என்னுஞ் சமன்பாடு திருத்தியாக்கப்படும். இவ்வகையில் $l$, $m$, $n$ என்பன ஒரு குறித்த கோட்டினது உண்மைத் திசைக் கோசைன்களாகும். $x$, $y$, $z$, $t$ என்பன முறையே $la$, $ma$, $na$, 1 என்பவற்றால் அதிகரிக்கப்படுமிடத்து முதற் சார்பு மாறாதிருத்தலால் அது தனக்குச் சமாந்தரமாய் $a$ என்னுங் கதியோடு இயங்கும் (தன் செவ்வன் $l$, $m$, $n$ என்னுந் திசைக் கோசைன்கள் கொள்ளும்) ஒரு தள அலையைக் குறிக்கும். இரண்டாம் சார்பு அதே கதியோடு எதிர்த் திசையில் இயங்கும் ஒரு சமாந்தர அலையைக் குறிக்கும். ஆகவே சமன்பாடு (4), தள அலைச் செலுத்துகையைக் குறிக்கும். இது அலைச் சமன்பாட்டினது ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு.

கோள அலைகளுக்கு ஒரு தீர்வைப் பெறுதற்கு (3) என்னும் சமன்பாட்டைக் கோள முனைவாள் கூறுகளுக்கு உருமாற்றுக. இவ்வேலை பிரதானமாக லப்பிலாசின் சமன்பாட்டினது ஓர் உருமாற்றமாகும் ; அப்பொழுது

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,\text{சைன்}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{சைன்}\,\theta\,\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\,\text{சைன்}^2\,\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

[எட்வேட் சின் '**வகையீட்டு நுண்கணிதம்**' பிரிவு 532 பார்க்க ; அல்லது கவுசின் தேற்றத்தை **வழங்கும்** ஓர் எளிய முறை பற்றி 'பருப்பு **நிலையியல்**' நூல் எதனையும் பார்க்க.]

உற்பத்தியிலிருந்துள்ள திசைகள் எல்லாவற்றையும் பற்றிச் சமச்சீராகும் (அதாவது $\theta$, $\phi$ என்பவற்றைச் சாராத) தீர்வு குறித்து இச்சமன்பாடு

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

என்பதற்கு ஒடுங்கும்.

$U=rV$ என்னும் உருமாற்றத்தால்

$$\frac{\partial U}{\partial r}=V+r\frac{\partial V}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=2\frac{\partial V}{\partial r}+r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

எனப் பெறுதலால் (6) என்னும் சமன்பாடு $r$ ஆல் பெருக்கப்பட்டபின்

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$ ஆகும் ; இது தருவது

$$U=f(r-at)+F(r+at),$$

அதாவது $$V=\frac{1}{r}\left\{f(r-at)+F(r+at)\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

இது $a$ என்னும் ஒரே கதி கொள்ளும் இரு கோள அலைகளைக் குறிக்கும் ; ஒன்று உற்பத்தியிலிருந்து வெளியேற மற்றையது அதனை அணுகும். $\frac{1}{r}$ என்னும் காரணி காட்டுவது உற்பத்தியிலிருந்து தூரம் கூடுதலுற குழப்பச் செறிவு குறைதலுறும் என்பதே.

### 180. புவசோனின் (அல்லது இலியூவிலின்) பொதுத் தீர்வு.

இது $P$ என்னுமொரு புள்ளியில் $t$ என்னும் யாது நேரத்திலும் $V$ யை, யாதுமொரு வெளிப் புள்ளியில் $t=0$ ஆகுமிடத்து $V$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை முறையே தரும் $g$, $G$ என்னும் சார்புகளுக்கு $P$

என்னும் மையமும் $at$ என்னு மாறும் ஆரையுங் கொண்ட கோளத்தின் மீது பெறப்படும் இடைப் பெறுமானங்கள் பற்றி, தரும்.

$P$ யை உற்பத்தியாகக் கொண்டு கோள முனைவாள் கூறுகளை எடுக்க.

இனி, $r$ ஆரையுள்ள கோளத்தின் மீது $f\ (r,\ \theta,\ \phi,\ t)$ என்னும் சார்பின் இடைப் பெறுமானமாகிய $\bar{f}$ ஆனது

$$\bar{f}=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f r^2 \text{ சைன் } \theta\, d\,\theta\, d\,\phi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f \text{ சைன் } \theta\, d\,\theta\, d\,\phi$$

என்பதாலே தரப்படும்.

$r$ என்னும் ஆரையுள்ள கோளமதின் மீது (5) என்னும் அலைச் சமன்பாட்டினது ஒவ்வோர் உறுப்பின் இடைப்பெறுமானத்தையும் எடுக்க. இரண்டாம் உறுப்பு தருவது

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{சைன் } \theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)d\theta d\phi=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\left[\text{சைன் } \theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_0^{\pi}d\phi,$$

மூன்றாவது தருவது

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2 \text{ சைன் } \theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}d\theta d\phi=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{\text{சைன் } \theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]_0^{2\pi}d\theta.$$

இவை இரண்டும் பூச்சியமாகும்; ஏனெனின் சைன் $\theta$ ஆனது ஈர் எல்லைகளிலும் மறைந்து $\dfrac{\partial V}{\partial\phi}$ இற்கு $\phi=2\pi$ ஆனது (உண்மையில் அதே நிலையாகிய) $\phi=0$ என்பதைப் போல் அதே பெறுமானத்தைத் தரும். முதலாம் நாலாம் உறுப்புக்கள் மறையா. இவை தருவது

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{V}}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial t^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8);$$

ஆகவே
$$r\bar{V}=f(r-at)+F(r+at)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$
$$=f(-at)+F(at)+r\{f'(-at)+F'(at)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}r^2\{f''(-at)+F''(at)\}+\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10).$$

$\bar{V}$ ஆனது $(r=0)$ உற்பத்தியில் $t$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் முடிவுள்ளதாதற்கு

$$f(-at)+F(at)=0\ ;$$

இது தருவது

$$f'(-at)=\frac{df(-at)}{d(-at)}=-\frac{d\{-F(at)\}}{d\,(at)}=F'(at),$$

ஆகவே $r=0$ என இட்டுப் பெறப்படும் முடிவைக் குறித்தற்கு பிற்குறி 0 வழங்கப்படுமாயின் சமன்பாடு (10) இலிருந்து பெறப்படுவது

$$\bar{V}_0=f'(-at)+F'(at)=2F'(at)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11).$$

சமன்பாடு (9) இலிருந்து

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{V}) = f'(r-at) + F'(r+at),$$

$$r\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} = -af'(r-at) + aF'(r+at);$$

ஆகவே $r$, $t$ என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும்

$$2F'(r+at) = \frac{\partial}{\partial r}(r\overline{V}) + \frac{r}{a}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}.$$

$t=0$ என இட்டுக் கொண்டு தொடக்க நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்த

$$2F'(r) = \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{g}) + \frac{\mathbf{r}}{a}\overline{G};$$

ஆகவே, $r$ இற்கு $at$ என்னும் விசேட பெறுமானம் கொடுத்து (11) என்னும் சமன்பாட்டைப் பிரயோகிக்குமிடத்து

$$\overline{V}_0 = \frac{\partial}{\partial(at)}(at\bar{g}) + t\overline{G}.$$

ஆனால் $\overline{V}_0$ என்னும் பூச்சிய ஆரைக் கோளத்தின்மீது உள்ள $V$ இன் சராசரிப் பெறுமானம் $V_0$ என்பதே.

ஆயின்
$$V_0 = \frac{\partial}{\partial t}(t\bar{g}) + t\overline{G}.$$

இத்தீர்வு வடிவத்திலிருந்து பெறப்படுவது $t$ என்னும் யாது நேரத்திலும் $P$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் $V$ இன் பெறுமானம், மையம் $P$ யும் ஆரை $at$ யுமுள்ள கோளத்தின் பரப்புப் புள்ளிகளிலுள்ள தொடக்கக் குழப்பத்தையே சாரும் என்பதே. ஒரு வெடித்தலாலாகும் தொடக்கக் குழப்பம் வழக்கமாக $S$ என்னும் அடைத்த பரப்பால் வரைப்புற்ற பிரதேசத்திற்கு மட்டுப்படுத்தப்படும். $P$ யானது இப்பரப்புக்குப் புறத்தேயுள்ளதாகி $d$ ஆனது $P$ யிலிருந்து $S$ இற்கு மிகக் குறுகிய தூரமாயின் $d/a$ என்னும் நேரம் செல்லும் வரையில் எந்த விளைவும் உண்டாக்கப்படாது ; ஏனெனின் அதற்குமுன் அவாவப்படுங் கோளம் தொடக்கக் குழப்பமில்லாப் பிரதேசங்களுக்கூடாகச் செல்லும். $t$ என்னும் யாது நேரத்திலும் அலைமுகம் (குழப்பத்தாற் சற்றே அடையப்படும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு) ஆனது $S$ இலிருந்து வெளிமுகச் செவ்வன்கள் எல்லாவற்றையும் $at$ என்னுந் தூரத்திற்கூடாக நீட்டுதலாற் பெறப்படும் பரப்பாகும்.

அலைச் சமன்பாட்டின் வேறு பொதுத் தீர்வுகள் கேச்சோவு, விற்றேக்கர், பேற்மன் என்போரால் தரப்பட்டுள்ளன ; கேச்சோவின் வடிவம் ஒளியியலில் முக்கியமாகும்.

[சீன்சு, " மின்னியலும் காந்தவியலும் " ( 5 ஆம் பதிப்பு), பிரிவுகள் 580 645, விற்றேக்கரும் வாற்சனும், " தற்காலிகப் பகுப்பு " (4 ஆம் பதிப்பு), பிரிவு 18.6, பக்கம் 402 ஆகியவற்றைப் பார்க்க.]

### தீர்த்தற்கான பயிற்சி

$f$ என்பது தொகையீட்டுக் குறிக்குள் வகையிடல் முறைமையாகும் சார்பாக,

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x \text{ சைன் } u \text{ கோசை } v + y \text{ சைன் } u \text{ சைன் } v + z \text{ கோசை } u + at,\ u,\ v)\, du\, dv,$$

என்பது அலைச் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு என்பதைச் சரி பார்க்க. [இதுவே விற்றேக்கரின் தீர்வு. ]

## 181. கணித பௌதிகவியலின் வேறு வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

இவை உட்படுத்துவன

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

என்னும் லப்பிலாசின் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\gamma\rho$$

என்னும் புவசோனின் சமன்பாடு,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial t}$$

என்னும் வெப்பக் கடத்தற் சமன்பாடு,

$$LK\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + KR\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

என்னுந் தந்திமுறைச் சமன்பாடு, ஒரு குறிப்பிட்ட வகையில் தீர்வு இப்பிரிவின் முடிவிலுள்ள உதாரணத்திற் காட்டப்பட்டுள்ள

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m(w - V)\psi}{h^2} = 0$$

என்னும் சுரோடிங்கரின் (அலைப்பொறியியல்) சமன்பாடு என்பன. இச்சமன்பாடுகள் இரு நோக்கு முறைகளில் தர்க்கிக்கப்படலாம். தூய கணித நூல்கள் பொதுத் தீர்வுகள் பற்றி ஓரிடத் தர்க்கம் தரும் ; ஆனால் பௌதிக வறிஞர் தர்க்கத்தின் பெரு நீளம் பற்றியும் இப்பொதுத் தீர்வுகளைப் பிரயோகிப்பதிலுள்ள கடினம் பற்றியும் முணுமுணுப்பார். ஆனால் பௌதிக கருத்துடையனவும் தர்க்கத்தால் மட்டுமே அடையப்படாதனவுமாகிய (வழக்கமாகப் பொதுவானவாகாது குறிப்பிடப்பட்டனவாகும்) தீர்வுகளைப் பெறுவதற்குப் பௌதிக நூல்கள் தர்க்கம் உள்ளுணக்கம் ஆகியவற்றின் சேர்மானமொன்றை வழங்கும்.

இம்முடிபுகள் உண்மையில் திருத்தமானவை என்பது பற்றி வழக்கமாகச் சந்தேகம் இல்லை ; ஆனால் யாதும் திடமின்மை, **எத்துணைச்** சிறிதெனினும், தூயகணிதவறிஞருக்கு வெறுப்பையளிக்கும். தூயகணிதத்தில் உள்ளுணக்கத்தின் நம்பற்றகவின்மையைப் பற்றி அவருக்குள்ள அறிவு பௌதிகவியலில் அதனாலாய பெறுமதியானதும் பொதுவாக நம்பத் தக்கதுமான பயனை மெச்சுவதிலிருந்துந் தடுக்கும்.

இரு நோக்குமுறைகளுள் யாதுமொன்றிற்கு இங்கு தரமுடியாத மிகப் பரந்த முறையில் எடுத்தாளப்பட வேண்டும்.

[*கணிதப் பௌதிகவியலினது மிக ஆரம்பமான சமன்பாடுகள் இந்நூலிற் பல்வேறு இடங்களிற் சிந்திக்கப்பட்டுள்ளன.*]

[*யெவ்விரிஸ்* **“கணிதப் பௌதிகவியலிற் செய்கை முறைகள்,** *வெப்ஸ்ரர்* **” கணிதப் பௌதிகவியலில் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்”,** *பேற்மன்* **“கணிதப் பௌதிகவியலில் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்,** *பிளைட்டன்* **“பகுதி வகையீட்டு சமன்பாட்டு மூலகங்கள்”** ஆகிய *வற்றைப் பார்க்க.*]

## தீர்த்தற்கான பயிற்சி

$h/2\pi$ இதற்குப் பதிலாக $K$ எழுதப்பட்டு $V$ ஆனது $-e^2/r$ என்னும் விசேட வடிவம் கொடுக்கப்பட்ட சுரோடிங்கரின் சமன்பாட்டில் தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளிலிருந்து கோளமுனைவாள் கூறுகளுக்கு மாற்றிக்கொண்டு $\psi$ யை $r^{-1}U(r)S(\theta, \phi)$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்து

$$\left\{\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2m}{K^2}\left(w+\frac{e^2}{r}\right)U\right\}S+\frac{U}{r^2}\left\{\frac{1}{\text{சைன்}\ \theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{சைன்}\ \theta\ \frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{சைன்}^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}\right\}=0$$

என்பதைப் பெறுக. $r^lS$ஐ லப்பிலாசின் சமன்பாட்டினது தீர்வாக (ஆகவே $r^{l+1}S$ என்பது $m$ இற்குப் பதிலாகப் பூச்சியம் எழுதப்பட்டுள்ள ஈற்றுச் சமன்பாட்டின் தீர்வாக) எடுத்துக் கொண்டு

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\left\{\frac{2}{K^2}m\left(w+\frac{e^2}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}U=0$$

என்பதைப் பெறுக.

இறுதியில்

$$R=\frac{2r}{K}\sqrt{(-mw)}\ ,\ k=\frac{e^2}{K}\sqrt{\left(\frac{-m}{2w}\right)}$$

என்னும் பிரதியீடுகளால் $y$, $x$, $m$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $U$, $R$, $(l+\frac{1}{2})$ என்பன எழுதப்பட்டுள்ள உவிற்றேக்கரின் சங்கம அதிபரபெருக்கற் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்குக (பிரிவு 177 என்பதைப் பின் தொடரும் பயிற்சி 7 பார்க்க.)

[இவ்வேலையின் பௌதிக பொருள் பற்றி பிக்ஸ் **“அலைப் பொறியியல்”** பார்க்க.]

## 182. எண்ணண்ணளவாக்கம். அடம்சின் முறை

அத்தியாயம் **VIII** இன் பாடத்தை மீண்டுந் தொடங்கி எடின்பரோ கணிதப் பரிசோதனைச்சாலையிற் சோதிக்கப்பட்டவற்றுள் மிக நன்றுனதெனப் பேராசிரியர் விற்றேக்கர் கருதும் ஒரு முறையை இப்போது தருவோம். அது தெயிலரின் தேற்றத்தினதும் கீழே தரப்படும் முடிவுள்ள வித்தியாச நுண்கணிதத்திற்குரிய ஒரு குறித்த சூத்திரத்தினதும் சேர்க்கையாகுமெனக் குறுக்கமாக விவரிக்கப்படலாம். தொடரை விரைவாக ஒருங்கச் செய்தற்குப் போதிய அளவு சிறிதாகும் $x$ இன் ஏற்றங்களுக்குத் தெயிலரின் தொடர் உபயோகிக்கப்படும். இவ்வாறு $y$ இன் கொஞ்சப் (பொதுவாக நாலு) பெறுமானங்களைப் பெற்ற பின்னர் வித்தியாசச் சூத்திரத்திலிருந்து கூடுதலாகப் பெறுமானங்களைப் பெறுவதற்குப் போதிய தரவு உண்டு ; ஆயின் $x$ இனது பெரிய ஏற்றங்களுக்கு தெயிலரின் தொடர் உபயோகிக்கப்படுதலை விலக்கிவிடலாம். பின்னர் இறுதி முடிபில் வழு கீழே விளக்கப்படு முறையால் மதிப்பிடப்படலாம்.

உ–ம். $x\dfrac{dy}{dx}+y-2x=0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு $x=2$, $y=2.5$ என்னும் தொடக்கப் பெறுமானங்களோடு தரப்பட $x=2\cdot05$, $2\cdot10$, $2\cdot15$, $2\cdot20$, $2\cdot25$, $2\cdot30$, $2\cdot35$, $2\cdot40$, $2\cdot45$, $2\cdot50$ என்பவற்றிற்கு ஒத்த $y$ இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு முடிபுகளின் வழுவரிசையை மதிப்பிடுக.

$x$ இன் ஏற்றத்தை $h$ ஆலும், $x_0+nh$ என்பதை $x_n$ ஆலும் $x_n$ இற்கு ஒத்த $y$ இன் பெறுமானத்தை $y_n$ ஆலும் குறிப்போம்.

$x$ குறித்து $y$ இன் பின்னடும் வகையீட்டுக் குணகங்கள் $y'$, $y''$, $y'''$, .... என்பனவற்றாற் குறிக்கப்பட்டு அவற்றின் தொடக்கப் பெறுமானங்கள் பிற்குறி $_0$ ஆற் குறிக்கப்படும்.

$$y=y_0+(x-2)y_0'+\frac{(x-2)^2}{2!}y_0''+\frac{(x-2)^3}{3!}y_0'''+\dots$$

என்னும் தெயிலரின் தேற்றத்தில் குணகங்களைத் துணிதற்குத் தொடக்க வகையீட்டுச் சமன்பாட்டிலும் அதனைப் பின்னடுத்து வகையிட்டுப் பெறப்படும் முடிபுகளிலும் $x=2$, $y=2.5$ என இடுக.

$$xy'+y-2x=0, \quad y_0'=\tfrac{3}{4},$$
$$xy''+2y'-2=0, \quad y_0''=1-y_0'=\tfrac{1}{4},$$

பிறவும் இவ்வாறே; இறுதியில் இவை தருவது

$$y=2\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}(x-2)+\tfrac{1}{8}(x-2)^2-\tfrac{1}{16}(x-2)^3$$
$$+\tfrac{1}{32}(x-2)^4-\tfrac{1}{64}(x-2)^5+\dots(1)$$

இத்தொடரில் $x=2\cdot05$, $2\cdot10$, $2\cdot15$, $2\cdot20$ எனப் பின்னடுத்து இடுவோமாயின். அங்கு எழுதப்பட்டுள்ள ஈற்றுறுப்பினது மிகப் பெரிய எண் பெறுமானம்

$$\tfrac{1}{64}(0.2)^5=0\cdot000005$$

ஆதலால் $y$ இன் ஒத்த பெறுமானங்கள் ஐந்து தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகும்.

ஆயின்,

$$y_1=2\cdot53780,\ y_2=2\cdot57619,\ y_3=2\cdot61512,\ y_4=2\cdot65455.$$

இப்போது,

$$y_{n+1}-y_n=q_n+\tfrac{1}{2}\Delta q_{n-1}+\tfrac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2}+\tfrac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}+\tfrac{251}{720}\Delta^4 q_{n-4}+\quad\dots(2)$$

என்னும் வித்தியாசச் சூத்திரம் வழங்குவோம் ; இங்கு $q_n$ ஆனது $x=x_n$, $y=y_n$ ஆகுமிடத்து $h\dfrac{dy}{dx}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் குறித்தலால் எமது உதாரணத்தில்

$q_n=0.05\ (2-y_n/x_n)$ ஆகி

$\Delta q_n$ ஆனது $q_{n+1}-q_n$ என்பதையும்,

$\Delta^2 q_n$ ஆனது $\Delta q_{n+1}-\Delta q_n$ என்பதையும்,

பிறவும் இவ்வாறே, குறிக்கும்.

[ இச்சூத்திரம் இடைச்செருகற் சூத்திரமாகிய

$$q_n(x_n+rh)=q_n+r\Delta q_{n-1}+\frac{r(r+1)}{2!}\Delta^2 q_{n-2}+\frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\Delta^3 q_{n-3}+\dots$$

என்பதை $r$ குறித்து 0, 1 என்னும் எல்லைகளுக்கிடையே தொகையிட்டுப் பெறப்படும். விற்றேக்கர், ரொபின்சன் ஆகியோரின் "நோக்கல் நுண்கணிதம்" பக்கம் 365 பார்க்க.]

(2) என்னும் சமன்பாட்டில் $n=4$ என இட,

$$y_5=y_4+q_4+\tfrac{1}{2}\Delta q_3+\tfrac{5}{12}\Delta^2 q_2+\tfrac{3}{8}\Delta^3 q_1+\tfrac{251}{720}\Delta^4 q_0+\dots\dots(3).$$

இனி $q_0=0.05\ (2-y_0/x_0)=0.03750.$

இதே மாதிரி

$$q_1=0.03810,\ q_2=0.03866,\ q_3=0.03918,\ q_4=0.03967.$$

ஆகவே $\Delta q_0=q_1-q_0=0.00060$, பிறவும் இவ்வாறே. இவ்வித்தியாசங்களைக் கணித்தற்குப் பின்வரும் அட்டவணை வடிவத்தில் எண்களை எழுதுதல் இசைவாகும்.

| $q$ | $\Delta q$ | $\Delta^2 q$ | $\Delta^3 q$ | $\Delta^4 q$ |
|---|---|---|---|---|
| $q_0=0.03750$ | | | | |
| | 0.00060 | | | |
| $q_1=0.03810$ | | – 0.00004 | | |
| | 0.00056 | | 0.00000 | |
| $q_2=0.03866$ | | – 0.00004 | | |
| | 0.00052 | | | 0.00001 |
| $q_3=0.03918$ | | | 0.00001 | |
| | 0.00049 | – 0.00003 | | |
| $q_4=0.03967$ | | | | |

இவ்வட்டவணையிற் காட்டப்படும் பல்வேறு வரிசை வித்தியாசங்களின் எண் பெறுமானத்தைப் பரிசோதிப்போம். $\Delta q$ இலிருந்து $\Delta^2 q$ இற்குச் செல்லுகையில் ஓர் உறுதியான குறைதல் காண்கிறோம். ஆனால் $\Delta^3 q$ இல் வேறு சிறு குறைதலே ஏற்பட $\Delta^4 q$ இல் யாதுமில்லை. இது தெரிவிப்பது $\Delta^3 q$, $\Delta^4 q$ என்பன செம்மையில்லாதனவென்பதே. ஆகவே அவற்றைக் கவனியாது (3) என்னும் சமன்பாட்டை அண்ணளவான வடிவத்தில் பிரயோகிப்போம்.

$$\begin{aligned}y_5&=y_4+q_4+\tfrac{1}{2}\Delta q_3+\tfrac{5}{12}\Delta^2 q_2\\&=2.65455+0.03967+0.00025-0.00001\\&=2.69446.\end{aligned}$$

தொடரினது நாலு உறுப்புக்களையே எடுப்பதாலாகும் வழு எடுக்கப்பட்டுள்ள ஈற்று உறுப்பினுந் தெளிவாகச் சிறிதாதலால் அது ஐந்து தசம தானங்களுக்குப் புறக்கணிக்கலாமென எதிர்பார்க்கப்படும். ஆனால், முதலாம் இரண்டாம் உறுப்புக்கள் அவற்றின் முறையான ஐந்து இலக்க அண்ணளவாக்கங்களிலிருந்து 0.000005 இலும் கூடுதலாக வித்தியாசப்பட முடியாதபோதிலும் இவ்வழுக்கள் சில வகையில் $\Delta q$ இல் இரட்டிக்கப்பட்டு $\Delta^2 q$ இல் மீண்டும் இரட்டிக்கப்படலாம். பயன்படுத்திய ஒவ்வோர் உறுப்

பிலும் $y_5$ இன் கணிப்பில் மிகப் பெரிய இயல்தகு வழு ஏற்பட்டு இவ் வழுக்கள் எல்லாம் ஒரே குறியோடு நிகழுமாயினும் $y_5$ இல் விளையும் வழு 0.000025 இலும் சிறிதாகும்.

இனி, $q_5 = 0.05\ (2 - y_5/x_5) = 0.04012$ எனக் கணிப்போம். இது ஐந்து தசம தானங்களுக்குச் செம்மையாகுமென நம்பலாம்; ஏனெனின், $y_5$ இல் உள்ள 0.000025 என்னும் வழு 0.05/2.25 என்னும் சிற்றெண்ணாற் பெருக்கப்படுதலால் எமது அண்ணளவாக்க வரிசைக்குப் புறக்கணிக்கத் தகும். $q_5$ இன் பெறுமானத்தை எமது அட்டவணைக்குச் சேர்த்துக் கொண்டு உடனடியாகப் பெறுவன பின்வருமாறு :—

$$\Delta q_4 = 0.00045, \quad \Delta^2 q_3 = -0.00004,$$

$$y_6 = y_5 + q_5 + \tfrac{1}{2}\Delta q_4 + \tfrac{5}{12}\Delta^2 q_3$$

$$= 2.69446 + 0.04012 + 0.00022 - 0.00002 = 2.73478.$$

$\Delta q_3$, $\Delta q_4$ என்பன இரண்டுக்கும் ஈற்றிலக்கம் ஒற்றையாதலால் அரைப் பங்காக்குமிடத்து இரு சமமாக நன்றுருகும் ஐந்து இலக்க அண்ணளவாக்கங் களுக்கிடையே தெரிவு செய்தல் வேண்டும். வழு திரளைத் தடுத்தற்கு ஒன்று விட்டொன்றுக பெரிதையும் சிறிதையும் எடுப்போம்.

இவ்வழியில் முன்னேறிப் பின்வரும் அட்டவணையிலே தரப்பட்டுள்ள முடிபுகளைப் பெறுவோம் :

| $y$ | $q$ | $\Delta q$ | $\Delta^2 q$ |
|---|---|---|---|
| $y_0 = 2.50000$ | $q_0 = 0.03750$ | | |
| | | 0.00060 | |
| $y_1 = 2.53780$ | $q_1 = 0.03810$ | | − 0.00004 |
| | | 0.00056 | |
| $y_2 = 2.57619$ | $q_2 = 0.03866$ | | − 0.00004 |
| | | 0.00052 | |
| $y_3 = 2.61512$ | $q_3 = 0.03918$ | | − 0.00003 |
| | | 0.00049 | |
| $y_4 = 2.65455$ | $q_4 = 0.03967$ | | − 0.00004 |
| | | 0.00045 | |
| $y_5 = 2.69446$ | $q_5 = 0.04012$ | | − 0.00002 |
| | | 0.00043 | |
| $y_6 = 2.73478$ | $q_6 = 0.04055$ | | − 0.00003 |
| | | 0.00040 | |
| $y_7 = 2.77554$ | $q_7 = 0.04095$ | | − 0.00003 |
| | | 0.00037 | |
| $y_8 = 2.81668$ | $q_8 = 0.04132$ | | − 0.00002 |
| | | 0.00035 | |
| $y_9 = 2.85817$ | $q_9 = 0.04167$ | | |
| $y_{10} = 2.90001$ | | | |

$y$ – கள் ஈற்றிலக்கத்தில் சிறு வழு கொள்ளுமென்று எதிர்பார்க்கலாம். உண்மையில் தேர்ந்துள்ள வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு $y = x + 1/x$ என்னும் செப்பமான தீர்வு உண்டு. இதனிலிருந்து கணிக்குமிடத்து $y_5$ இல் 0.00002 என்னும் வழுவும் $y_7$, $y_8$, $y_9$, $y_{10}$ ஆகியவற்றில் 0.00001 என்பதும் மற்றையவையில் பூச்சியமும் காண்போம்.

உயர் செம்மை பெறுதற்கு $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ என்பவற்றைக் கூடுதலான தசம தானங்களுக்கு, எட்டுக்கு என்க, கணிக்கலாம். மாணுக்கன் இதனைச் செய்தல் வேண்டும். $\Delta q, \Delta^2 q, \Delta^3 q, \Delta^4 q$, என்பனவெல்லாம் நம்பத்தகுமெனத் தோற்றுதலால் அவை வித்தியாசச் சூத்திரத்தில் உபயோகிக்கத் தகுமென்பதும் காணப்படும். இறுதி முடிபுகளாவன :—

$y_0 = 2.500,000,00$ ;
$y_1 = 2.537,804,88$,
$y_2 = 2.576,190,48$ ;
$y_3 = 2.615,116,28$ ;
$y_4 = 2.654,545,45$ ;
$y_5 = 2.694,444,42$ (ஈற்றிலக்க வழு $-2$) ;
$y_6 = 2.734,782,58$ (ஈற்றிலக்க வழு $-3$) ;
$y_7 = 2.775,531,88$ (ஈற்றிலக்க வழு $-3$) ;
$y_8 = 2.816,666,61$ (ஈற்றிலக்க வழு $-6$) ;
$y_9 = 2,858,163,23$ (ஈற்றிலக்க வழு $-4$) ;
$y_{10} = 2.899,999,93$ (ஈற்றிலக்க வழு $-7$) .

$y_{10}$ இன் கணிப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள $\frac{251}{720}\Delta^4 q_5$ என்னும் ஈற்று உறுப்பு $-0.000,000,09$ என்னும் பெறுமானத்தை உடையது. இதன் பருமன் இங்கு வழுக்கள் (ஐந்து இலக்க வேலையிலுள்ளவற்றிலும் வேருக) உயர் வித்தியாசங்களைப் புறக்கணித்தலாலாயன எனக் காட்டுகின்றது. இதற்கு மாற்று மருந்தாக, $y_5$ என்பதைத் தெயிலரின் தேற்றத்திலிருந்து செம்மையாய்க் கணித்துக் கொண்டு $\Delta^5 q$ என்பதைப் பயன்படுத்தலாம் அல்லது (மிக வழக்கிலுள்ளவாறு) வேண்டிய அண்ணளவாக்க வரிசைக்கு $\Delta^5 q$ ஆனது புறக்கணிக்கத்தகுமென்பதை நிச்சயப்படுத்தற்கு ஆயிடையைப் போதிய அளவு குறைக்கலாம்.

## 183. பிரிவுகள் 90–93 ஆகியவற்றின் முறை பற்றி நீமிசின் விரி.

நீமிசு என்பவர் பிரிவு 92 இல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $m$, $M$ என்னும் எண்களுக்குத் தக்க பெறுமானங்களைத் துணிதற்கு ஒரு முறைமையான முறையைத் தந்துள்ளார் ; அது பின்வருமாறு :

வகை (i) $\dfrac{df}{dx} > 0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ ஆயின்

$$m = f(a,b),\ M = f\{a+h,\ b+hf(a+h,\ b+h)\}\ ;$$

வகை (ii) $\dfrac{df}{dx}>0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}<0$ ஆயின்

$$m=f\,(a, b),\ M=f\,\{a+h,\ b+hf\,(a, b)\}\ :$$

வகை (iii) $\dfrac{df}{dx}<0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}>0,$ ஆயின் $M=f\,(a, b)\ ;$

$$m=f\{a+h, b+hf(a+h, b-h)\}$$

வகை (iv) $\dfrac{df}{dx}<0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}<0,$ ஆயின் $M=f\,(a,\ b),$

$$m=f\{a+h, b+hf\,(a, b)\}$$

இப்பெறுமானங்கள் பிரிவு 92 இன் (7,) (8), (9), (10) என்னும் சமனிலிகளைத் திருத்திப்படுத்தும். இங்கு $r$, $R$ என்பவற்றை

$r=\frac{1}{2}h\,\{\,f(a.\,b)+f(a+h,\quad b+mh)\},\ \ R=\frac{1}{2}h\{f(a,b)+f(a+h,\quad b+Mh\}$ என்னுந் தொடர்புகளால் வரையறுப்போமாயின் $q$ ஆனது $r$ ஆலும் $Q$ ஆனது $R$ ஆலும் இடமாற்றம் செய்யப்படுமிடத்தும் இச்சமனிலிகள் உண்மையாகுமென்பதை நீமிசு காட்டியுள்ளார்.

$\Sigma'$ என்பது $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}>0,$ ஆயின் $\frac{1}{3}\,(p+2Q)$ ஐயும்

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}<0$ ஆயின் $\frac{1}{3}\,(P+2q)$ ஐயும்

குறிக்க.

$\Sigma''$ என்பது $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}>0$ ஆயின் $\frac{1}{3}\,(2p+R)$ ஐயும்

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}<0$ ஆயின் $\frac{1}{3}\,(2P+r)$ ஐயும்

குறிக்க.

நீமிசு நிறுவுவது $\Sigma'$, $\Sigma''$ என்னும் அண்ணளவாக்கங்களிலுள்ள வழுக்கள் $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{df}{dx}\dfrac{d^2f}{dx^2}<0$ ஆயின், முறையே நாலாம் வரிசையிலோ மூன்ரும் வரிசையிலோ இருக்க $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{df}{dx}\dfrac{d^2f}{dx^2}>0$ ஆயின், அவை மூன்ரும் வரிசையில் அல்லது நாலாம் வரிசையில் இருக்குமென்பதே. இம்முடிபு $m$, $M$ என்பன மேலே விளக்கியதுபோலத் தேரப்படுவதிற் சார்ந்துள்ளது. பிரிவு 93 இன் உதாரணத்திலுள்ள வழு இம்முடிபிலிருந்து எதிர்பார்க்கப்படுவதிலும் மிகச் சிறிதாயுள்ளது ; ஆனால் இது நீமிசு காட்டிய முறையிற் பெறப்படாத $m$, $M$ ஆகியவற்றின் தேர்வு பற்றிய அதிட்டத்தாலாயது. பொதுவாக அடம்சின் முறையோ குற்றாவின் முறையோ இதனிலுஞ் சிறந்தவையாகக் கருதப்படும்.

# பின்னிணைப்பு A

**$Mdx+Ndy=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு செப்பமாதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனை.**

(*a*) சமன்பாடு செப்பமாயின்,

$Mdx+Ndy=$ ஒரு பூரண வகையீடு $=df$, என்க.

ஆயின்,
$$M=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad N=\frac{\partial f}{\partial y};$$

ஆகவே
$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y};$$

ஆயின் **நிபந்தனை** வேண்டியதாகும்.

(*b*) மறுதலையாக, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ ஆயின், $F=\int Mdx$ என இடுக; இங்கு $y$ மாறிலி எனக் கொண்டு தொகையிடல் செய்யப்படும்.

ஆயின்,
$$\frac{\partial F}{\partial x}=M, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

ஆகவே $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(N-\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)=0$ ஆதலால், $N-\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ஆனது $x$ ஐப் பொறுத்த வரையில் மாறிலியாகும் ;

அதாவது $\phi(y)$ என்னும் $y$ இன் ஒரு சார்பாகும்.

ஆயின்
$$N=\frac{\partial F}{\partial y}+\phi(y).$$

இனி,
$$f=F+\int\phi(y)\,dy \text{ என இடுக.}$$

ஆயின்
$$N=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

அன்றியும் $F$ இன் வரைவிலக்கணத்தால், $M=\dfrac{\partial F}{\partial x}$ ; $F$, $f$ என்பன $y$ இன் சார்பாலேயே வித்தியாசப்படுதலால் $M=\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

ஆயின் $Mdx+Ndy=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy=df$ (ஒரு பூரண வகையீடு).

ஆகவே சமன்பாடு செப்பமாகும். அதாவது நிபந்தனை **போதியதாகும்.**

[$f$ என்பதும் அதன் முதலாம் இரண்டாம் பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களும் தொடர்ச்சியானவையாயின் $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ என்னும் எமது எடுகோள் நியாயமானதாகும். இலாமின் “**நுண்ணெண் நுண்கணிதம்**” 2 ஆம் பதிப்பு, பிரிவு 210, அல்லது 3 ஆம் பதிப்பு, பிரிவு 193 பார்க்க.]

## பின்னிணைப்பு B

**நாற்பரிமாணமாகக் கருதப்படும்**

$$\mathbf{P}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{Q}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{R}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

**என்னும் சமன்பாட்டுக்கு விசேட தொகையீடுகளில்லை.**

(பிரிவு 127 பார்க்க)

$u\,(x, y, z) = a, \quad v\,(x, y, z) = b$ என்பன

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளினது எவையேனும் இரு சாராத் தொகையீடுகளாகுக.

ஆயின், எளிதில்

$$P\,\frac{\partial u}{\partial x} + Q\,\frac{\partial u}{\partial y} + R\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$P\,\frac{\partial v}{\partial x} + Q\,\frac{\partial v}{\partial y} + R\,\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

என்பவற்றை நிறுவுவோம்.

(1) என்பதன் இடக்கைப்பக்கம் $a$ யைக் கொள்ளாமையால் அது $u=a$ என்னுந் தொடர்பின் பயனாக மட்டும் மறைய முடியாது. ஆகவே அது சர்வசமனாக மறைதல் வேண்டும். இதேமாதிரி (2) என்னுஞ் சமன்பாடும் சர்வசமனாகத் திருத்தியாக்கப்படும்.

இனி,

$$P\,\frac{\partial w}{\partial x} + Q\,\frac{\partial w}{\partial y} + R\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ஆகுமாறு $f = w\,(x, \ y, \ z)$ என்பது தொடக்கப் பகுதி வகையீட்டின் **யாதுமொரு** தொகையீடாகுக. இதனில் $f$ வராமையால் இது வேறொரு சர்வசமனான சமன்பாடு.

(1), (2), (3) என்பவற்றிலிருந்து $P, Q, R$ என்பவற்றை நீக்க,

$$\frac{\partial\,(u, v, w)}{\partial\,(x, y, z)} = 0$$

என்பதைச் சர்வசமனாகப் பெறுவோம். ஆகவே $w$ ஆனது $u, v$ என்பவற்றின் ஒரு சார்பாகும். $w = \phi\,(u, v)$ என்க.

அதாவது $f = w$ என்பது **பொதுத் தொகையீட்டின்** பாகமாகும் ; ஆகவே $f = w$ என்ப்து யாதுமொரு தொகையீடாதலால் **விசேட தொகையீடுகள்** இல்லை.

[மாணாக்கன் மேலுள்ள வேலையில் ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாடு **சர்வசமனாகத்** திருத்தியாக்கப்படுவதன் முக்கியத்தைக் கவனிப்பான். லகிராஞ்சியின் எக பரிமாணச் சமன்பாட்டுத் தொகையீடுகள் பற்றி ஹில் என்பவரின் புதிய வகுப்பாக்கம் ஒரு சமன்பாட்டைச் சர்வசமனாகத் திருத்தியாக்கும் தொகையீடுகளுக்கும் அவ்வுடைமையின்றிய தொகையீடுகளுக்குமிடையே தெளிவான வேறுபாட்டைக் காட்டும்.]

# பின்னிணைப்பு C

**ஒன்றி முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் யக்கோபியின் முறையால் $dz$ இற்குப் பெறப்படும் கோவை (பிரிவு 140) எப்பொழுதும் தொகையிடத்தகும்.**

$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3$ ஆனது தொகையிடத் தகுமென்பதை நிறுவுதற்கு

$$L=M=N=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

என்பதை நிறுவ வேண்டுவதோடு போதியதுமாகும் ;

$$\text{இங்கு} \quad L=\frac{\partial p_2}{\partial x_3}-\frac{\partial p_3}{\partial x_2}, \quad M=\frac{\partial p_3}{\partial x_1}-\frac{\partial p_1}{\partial x_3}, \quad N=\frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}.$$

(A) என்பதன் உண்மையை எடுக்காது பிரிவு 140 இலுள்ள (8), (9), (10) என்னும் சமன்பாடுகளைக் கூட்டி, $(F,F_1)=0$ என்னும் தொடர்பை உபயோகிக்க,

$$L\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_3)}+M\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_3,p_1)}+N\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}=0 \ldots\ldots\ldots (B).$$

இதே மாதிரி

$$L\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(p_2,p_3)}+M\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(p_3,p_1)}+N\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(p_1,p_2)}=0 \ldots\ldots\ldots (C).$$

$$L\frac{\partial(F_2,F)}{\partial(p_2,p_3)}+M\frac{\partial(F_2,F)}{\partial(p_3,p_1)}+N\frac{\partial(F_2,F)}{\partial(p_1,p_2)}=0 \ldots\ldots\ldots (D).$$

(B), (C), (D) என்னும் சமன்பாடுகளிலிருந்து $L=M=N=0$ அல்லது $\Delta=0$ ; இங்கு $\Delta$ என்பது (B), (C), (D) என்பவற்றிலுள்ள $L$, $M$, $N$ ஆகியவற்றின் குணகங்களைத் தனது கூறுகளாகக் கொண்ட துணிகோவையாகும்.

ஆனால் இக்குணகங்கள் தாமே

$$J=\frac{\partial(F_2,F,F_1)}{\partial(p_1,p_2,p_3)}$$

என்னுந் துணிகோவையினது உறுப்புக்களின் இணைகாரணிகளாவதோடு, துணி கோவைக் கொள்கையால் $\Delta=J^2$ ஆகும்.

இனி $J$ மறைய* முடியாது ; எனெனில் இது $F=F_1-a_1=F_2-a_2=0$ என்பனவற்றிலிருந்து $p$ களை $x$ இன் சார்புகளாகக் காணலாமென்னும் பிரிவு 140 இன் கருதுகோளை எதிர்க்கும் இரு சார்புத் தொடரின் உண்மையைக் கொண்டது.

ஆயின் $\Delta\neq0$ ; ஆகவே, $L=M=N=0$.

---

*இப் பின்னிணைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகள் எல்லாம் சர்வசமனாகத் திருத்தியாக்கப்பட்டுள்ளன

# பின்னிணைப்பு D

**கூடுதலாகப் படித்தற்குக் குறிப்புக்கள்.**

இங்கு வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய முற்றிய பட்டி தருதற்கு எத்தனிக்கவில்லை. மூன்று பிரிவாக வகுக்கப்பட்ட மிகப் பிரபலிக்கமான மிகச் சிறு தொகை வேலைகளின் பெயர்களை மட்டுமே தருவோம்.

**I. முக்கியமாகப் பகுப்புக் கவர்ச்சியானவை (அத்தியாயம் $X$ இன் தொடராலாகும்).**

(*a*) போசைத் : **வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கை.** (கேம்பிறிட்ஜ் சர்வகலாசாலை அச்சு.)

ஆறு பாகங்களிலுள்ள இம் முக்கியமான வேலை ஆங்கிலத்தில் இப் பாடம் பற்றி மிக முற்றிய நூலாகும். ஒரு பாகத்திலுள்ள அவருடைய ஆரம்ப வேலை (மக்மில்லன்) வேறானது.

(*b*) கோசாற்று : கணித பகுப்பு, பாகங்கள் II, III (ஆங்கில மொழி பெயர்ப்பு “ சின் ” ஆல் வெளிப்படுத்தப்பட்டுள்ளது).

இது ஏறக்குறைய முற்றாக உண்மைத் தேற்றங்களைப் பற்றிச் சிந்திக்கும்.

**II. பகுதியாய்ப் பகுப்புக்குரியனவும் கேத்திர கணிதக் கவர்ச்சியுடையனவும்.**

(*a*) கோசாற்று : முதல் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.

(*b*) கோசாற்று : இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள். (2 பாகங்கள்—கேமனும் மக்களும்.)

(c) பேச் : இலையின் உருமாற்றக் கூட்ட நோக்கு நிலையிலிருந்து சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (மக்மில்லன்.)

இது மூலகங்களை உயர்வாகத் தொடக்கமான மாதிரியிற் பரிகரிக்கும்.

**III. பௌதிக கவர்ச்சியான (அத்தியாயங்கள் III, IV என்பவற்றிற்குத் தொடராலான).**

(*a*) பேற்மன் : வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (உலோங்மன்சு).

இது புதிய வெளியாக்கல்கள் பற்றிப் பல குறிப்புக்கள் கொள்ளும்.

**1920 இற்குப் பின் வெளியாக்கப்பட்டவை.**

**I.** (*c*) இன்சு : சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (உலோங்மன்சு).

**I.** (*d*) இலெவியும் பகொற்றும் : வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளில் **எண்** படிப்பு, பாகம் I (உவாற்சு).

**I.** (*e*) பூல் : ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (ஒக்சுபோட்).

**I.** (*f*) கொடிங்ரனும் இலெவின்சனும் : சாதாரண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கை (மக்கிறோ—ஹில்).

**III.** (*b*) மக்கிலக்லன் : சாதாரண ஏகபரிமாணமல்லா வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (ஒக்சுபோட்).

**III.** (c) இசுரோக்கர் : ஏகபரிமாணமல்லா அதிர்வுகள்.

## முழுப் புத்தகத்திலும் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^3+3x^2y}{x^3+3xy^2}$ [லண்டன்]

(2) $\frac{dy}{dx}+2xy=2x(1+x^2)$ (லண்டன்]

(3) $\text{தான்}\ y\ \frac{dy}{dx}+\text{தான்}\ x=\text{கோசை}\ y\ \text{கோசை}^3 x$ [லண்டன்]

(4) $y=2x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ [லண்டன்]

(5) $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=x^2y^2$ [லண்டன்]

(6) $(D^2+4)\,y=\text{சைன்}\ 2x$ [லண்டன்]

(7) $(D^3-D^2+3D+5)y=x^2+e^x\ \text{கோசை}\ 2x$ [லண்டன்]

(8) $(x^3 D^3+x^2 D^2)\ y=1+x+x^2$ [லண்டன்]

(9) $\text{கோசை}\,x\,\text{சைன்}\ x\ \frac{dy}{dx}=y+\text{கோசை}\ x$ [லண்டன்]

(10) $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x+y+2\ \text{கோசை}\ t\\ \frac{dy}{dt}&=3x-y\end{aligned}\right\}$ [லண்டன்]

(11) $y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+1$ [லண்டன்]

(12) $y\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2.$ [லண்டன்]

(13) $(D^4+8D^2+16)\,y=x\ \text{கோசை}\ 2x.$ [லண்டன்]

(14) $\int x^2dy+\int xy\,dx=x^3$ [லண்டன்]

(15) $(y^2+yz-z)\ dx+(x^2+xz-z)\,dy+(x+y-xy)\,dz=0$ [லண்டன்]

(16) $(2x^3-y^3-z^3)\,yzdx+(2y^3-z^3-x^3)\,zxdy+(2z^3-x^3-y^3)\ xydz=0.$ [லண்டன்]

(17) $xp-yq+(x^2-y^2)=0$ [லண்டன்]

(18) $(x+2y-z)\ p+(3y-z)q=x+y$ [லண்டன்]

(19) $xp+yq+\frac{2(xz-yz+xy)}{4y-x+z}=0$ [லண்டன்]

(20) $p(x+p)+q(y+q)=z$ [லண்டன்]

(21) $r+s=p$ [லண்டன்]

(22) $z-\frac{1}{2}px-qy=p^2/x^2$ [லண்டன்]

(23) $r-x=t-y$ [லண்டன்]

(24) $z=px+qy-3xy$ [லண்டன்]

(25) $z(rt-s^2)+pqs=0$ [லண்டன்]

(26) $x^2r+2xys+y^2t=xy$ (லண்டன்]

(27) $rq(q+1)-s(2pq+p+q+1)+tp(p+1)=0$ [லண்டன்]

(28) $y^3=xy^2p+x^4p^2$ [கணி. திறைப்]

(29) $5y\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(30) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{n}{x}\frac{dy}{dx}+x^{2n}y=0$ [கணி. திறைப்]

(31) $(zp+x)^2+(zq+y)^2=1$ [கணி. திறைப்]

(32) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{3x}$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வானது, $x=0$ ஆகுமிடத்தும் $x=$ மட$_e2$ ஆகுமிடத்தும் மறையுமாறு காண்க.
[கணி. திறைப்]

(33) $\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+(\kappa^2+\lambda^2)x=A$ கோசை $pt$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$p$ இன் வேறு வேறான பெறுமானங்களுக்கு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டின் வீச்சம் $p^2=\lambda^2-\kappa^2$ ஆகுமிடத்து மிகப் பெரிதாகி $(A/2\kappa\lambda)$ கோசை $(pt-\alpha)$ ஆகுமெனக் காட்டுக ; இங்கு தான் $\alpha=p/\kappa$. [லண்டன்]

(34) $z=$ சைன் $x$ என இட்டு

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\text{ தான் }x+y\text{ கோசை}^2x=0$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(35) (i) $r^2=x^2+y^2+z^2$ ஆக, $\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=0$ என்பதன் ஒரு தீர்வு $F(r+z)$ என்னும் வடிவமாகுமெனக் கொண்டு சார்பு $F$ ஐப் பெறுக ; $z$ குறித்துத் தொகையிட்டு $V=z$ மட $(r+z)-r$ என்னும் தீர்வை உய்த்தறிக.

(ii) $\xi=x/\sqrt{t}$ ஆக, $\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2V}{\partial x^2}$ என்பதன் ஒரு தீர்வு வடிவம் $\phi(\xi)$ ஆகுமெனக் கொண்டு சார்பு $\phi$ ஐப் பெறுக ; $x$ குறித்து வகையிட்டு, ஓர் இரண்டாம் தீர்வைப் பெறுக. [லண்டன்]

(36) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ என்னும் நிபந்தனையைத் திருத்தியாக்கி உற்பத்தியில் மையமும் அலகு ஆரையுமுள்ள கோளப் பரப்புப் புள்ளிகளில் பெறுமானம் $Az^4$ கொள்ளும் $V$ என்னும் $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றின் விகிதமுறு முழுவெண்சார்பைப் பெறுக. [கணி. திறைப்]

(37) $\nabla^2 u=0$ என்னும் லப்பிலாசின் சமன்பாட்டினது ஒரு தீர்வு

$$u=(A \text{ கோசை } n\theta+B \text{ சைன் } n\theta)e^{-\lambda z}J_n(\lambda r)$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு $r$, $\theta$, $z$ என்பன உருளை ஆள்கூறுகளும் $A$, $B$, $n$, $\lambda$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளுமாகும். [லண்டன்]

(38) $r$, $\theta$ என்பன முனைவாள் கூறுகளும் $a_n$, $b_n$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளுமாயின், $J_n(r)$ $(a_n \text{ கோசை } n\,\theta+b_n \text{ சைன் } n\,\theta)$ ஆனது

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+V=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு எனக் காட்டுக. [லண்டன்]

(39) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ என்னும் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வுகளை எவ்வாறு தொடர்முறையிற் காணலாமெனக் காட்டி $x=0$ ஆகுமிடத்து

$$u=a\frac{\partial u}{\partial x}=C \text{ அகோசை } t$$

ஆகும் வகைபற்றி முற்றுய்த் தீர்க்க. [லண்டன்]

(40) $4\frac{d^2y}{dx^2}+9xy=0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இன் எறுவலுக்களில் இருசாராத் தீர்வுகளைப் பெறுக ; சமன்பாட்டில் மாறிகளை உருமாற்றுதலால், அல்லது வேறுமாதிரி, முற்றிய தீர்வு

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}})+Bx^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}})$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாமென்பதை நிறுவுக ; இங்கு $A$, $B$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகள்.

(41) $P$, $Q$, $R$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக,

$$\frac{dy}{dx}P+Qy+Ry^2=0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் முற்றியதீர்வு, $y$, என்னும் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு தெரிந்தவிடத்து,

$y=y_1+1/z$ என்னும் பிரதியீட்டாற் பெறப்படலாமெனக் காட்டுக.

$y_1$, $y_2$ என்னும் இரு குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் தெரியப்படுமாயின், முற்றிய தீர்வு

$$\text{மட}\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)=\int R\,(y_2-y_1)\;dx+\text{மாறிலி}$$ எனக் காட்டுக.

தமது பெருக்கம் ஒன்று ஆகும் இரு குறிப்பிட்ட தீர்வுகளைக் கொண்ட

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+x+1-(x^2+1)\,y+(x-1)\,y^2=0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் முற்றிய தீர்வைப் பெறுக.

(42) $(1-x^2)\,\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\,\{b+(a-1)x\}\,\dfrac{dy}{dr}+2ay=0$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு $(1+x)^p\,(1-x)^q$ என்னும் வடிவத்தில் ஒரு தீர்வு உண்டு என்பதைக் காட்டுக ; இங்கு $p$, $q$ என்பன தேர்ந்த மாறிலிகள். இச்சமன்பாட்டை முற்றாய்த் தீர்க்க ; $2a$ என்பது $n$ என்னும் நேர் முழுவெண்ணாயின் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $x$ இல் $n$ ஆம் படிப்பல்லுறுப்பியாகுமென்பதை உய்த்தறிக, அல்லது வேறுமாதிரி நிறுவுக.

(43) $1-x^2$ என்பது,

$$x\,(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x^2)\,(1+3x^2)\frac{dy}{dx}+4x(1+x^2)y=0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்ட தீர்வு என்பதைச் சரிபார்த்து அதனை முற்றாய்த் தீர்க்க.

தந்த சமன்பாட்டின் வலக்கைப் பக்கத்தில் பூச்சியத்திற்குப் பதிலாக $(1-x^2)^3$ என்பது எழுதப்படலாற் பெறப்படும் சமன்பாட்டைப் பரமாணங்களின் மாறல் முறையால், அல்லது வேறுமாதிரி, தீர்க்க.

(44) $P$, $Q$ என்பன $x$ இன் தந்த சார்புகளாக,

$\dfrac{du}{dx}+u^2+Q-\frac{1}{2}\,\dfrac{dP}{dx}-\frac{1}{4}\,P^2=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் யாதுமொரு தீர்வு தெரியப்படுமாயின்

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+P\,\dfrac{dx}{dy}+Q\,y=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் முற்றிய தீர்வு காணப்படலாமெனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு, அல்லது வேறு வழியாக,

$$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2}-4x\,\frac{dy}{dx}+(x^4-3)\,y=0$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

**(45)** $v = we^{ix}$ என இடுதலால் $n$ ஆனது முழுவெண்ணாகவுள்ள $x\frac{d^2v}{dx^2} - 2n\frac{dv}{dx} + xv = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் முற்றிய தீர்வு.

$(A \text{ கோசை } x + B \text{ சைன் } x) f(x) + (A \text{ சைன் } x - B \text{ கோசை } x)\, \phi(x)$ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாமென்பதை நிறுவுக; இங்கு $f(x)$, $\phi(x)$ என்பன உகந்த பல்லுறுப்பிகள். [லண்டன்]

**(46)** மேற்கீறுகள் $x$ குறித்து வகையிடலைக் குறிக்குமிடத்து, $u$, $v$ என்பன $f(x)y''' - f'(x)y'' + \phi(x)y' + \chi(x)y = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு சாராத் தீர்வுகளாயின்,

$$w \equiv u\int\frac{vf(x)\,dx}{(uv' - u'v)^2} - v\int\frac{uf(x)\,dx}{(uv' - u'v)^2}$$

ஆகுமிடத்து, முற்றியதீர்வு $Au + Bv + Cw$ ஆகுமென நிறுவுக; இங்கு $A$, $B$, $C$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகள்.

$x^n$ என்னும் வடிவத்தில் தீர்வுகளுள்ள

$$x^2(x^2+5)\,y''' - x(7x^2+25)\,y'' + (22x^2+40)\,y' - 30xy = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. [லண்டன்]

**(47)** $(x^2 - a^2)\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும் இரு சாராவலுத்தொடர்களைப் பெற்றுக்கொண்டு அவற்றின் ஒருங்கற் பிரதேசத்தைத் துணிக.

**(48)** $$a_n = \left\{\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\right\}^2 \text{ ஆக,}$$

$x(1-x)\frac{dy^2}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}y = 0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு

$$\sum_0^\infty a_n x^n, \quad \sum_0^\infty a_n\left(\frac{1}{4}\text{மட } x + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}\right)x^n,$$

என்னுமிரு தொகையீடுகள் உண்டு என்பதை நிறுவுக. [லண்டன்]

**(49)** தன் மூலியானது

$$y = a\left(\text{சைன் } x + \frac{\text{கோசை } x}{x}\right) + B\left(\text{கோசை } x - \frac{\text{சைன் } x}{x}\right)$$

ஆகும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை ஆக்குக; இங்கு $A$, $B$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகள். [லண்டன்]

**(50)** $P\,dx + Q\,dy = 0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு $x$ இன் சார்பாகவேயுள்ள தொகையீட்டுக் காரணி இருத்தற்கு நிபந்தனையைப் பெற்றுக்கொண்டு

$$(3xy - 2ay^2)\,dx + (x^2 - 2axy)\,dy = 0$$

என்பதைத் தொகையிடுதற்கு அம்முடிபைப் பிரயோகிக்க. [லண்டன்]

(51)
$$y - x\frac{dy}{dx} + \frac{2ax^2}{x^2 - y^2}\frac{dy}{dx} = 0$$
$$x^2 - y^2 + 2(xy + bx^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

என்னும் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலி உண்டு என்பதைக் காட்டி அதனைக் காண்க.

(52) $P\frac{d^2u}{dx^2} + Q\frac{du}{dx} + Ru = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் யாதுமொரு தீர்வு
$$\frac{d^2}{dx^2}(Pu) - \frac{d}{dx}(Qu) + Ru = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகுமென்பதையும் மறுதலையாக பின்னதான சமன்பாட்டின் யாதுமொரு தீர்வு முன்னதன் தொகையீட்டுக் காரணியாகுமென்பதையும் நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு,
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{P}{Q}\right) + \frac{R}{Q} = 0$$

எனத் தரப்படுமிடத்து, இச்சமன்பாடுகளுள் முதலாவதை முற்றாய்த் தொகையிடுக. [லண்டன்]

(53) $P$, $Q$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக,
$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

என்னும் சமன்பாடு $A$, $\alpha$ என்பவற்றை எதேச்சை மாறிலிகளாகக் கொண்ட $y = A$ சைன் $(nx + \alpha)$ என்னுந் தீர்வை எடுக்குமாயின் $P$, $Q$ ஆகியவற்றைத் தொடுக்கும் தொடர்பைக் காண்க. [லண்டன்]

(54) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{2y}{(1 - x)^2}$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு
$$y = \frac{a + bx}{1 - x}e^{kx}$$

என்னும் வடிவத்தில் இரு தொகையீடுகள் உண்டு எனத் தரப்பட்ட அதனைத் தீர்க்க. [லண்டன்]

(55) தன் தீர்வுகள் $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ என்பதன் தீர்வுகளின் வர்க்கங்களாகும் ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடு
$$\left(\frac{d}{dx} + 2P\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + 2Qy\right) + 2Q\frac{dy}{dx} = 0$$

என எழுதப்படலாம் என்பதைக் காட்டுக. [லண்டன்]

**(56)** $$3x^2(y+z)\,dx+(z^2-x^3)\,dy+(y^2-x^3)\,dz=0$$

என்னுமொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாடு தொகையிடற்றகவு நிபந்தனையைத் திருத்தியாக்குமெனக்காட்டி அதனைத் தொகையிடுக. [லண்டன்]

**(57)** $\dfrac{d}{dx}$ என்னும் செயலி $D$ ஆல் குறிக்கப்பட $X$ ஆனது $x$ இன் சார்பும் $\phi(D)$ ஆனது $D$ இன் விகிதமுறு முழுவெண் சார்புமாயின்

$$\phi(D)x\,X=x\,\phi(D)X+\phi^1(D)X$$

என்பதைக் காட்டுக.

இம்முடிபை $1/\phi(D)$ ஆனது $D$ இன் விகிதமுறு முழுவெண் சார்பாகும் வகைக்கு விரிக்க.

$$\frac{d^3y}{dx^3}+8y=3x^2+xe^{-2x}\,\text{கோசை}\,x$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. (லண்டன்)

**(58)** $3\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}-8\,y=0$ என்பதற்கு $x$ இல் பல்லுறுப்பியாகும் ஒரு தொகையீடு உண்டெனக் காட்டுக. பொதுத் தீர்வை உய்த்தறிக. (லண்டன்)

**(59)** $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்னும் சமன்பாட்டில் $P$, $Q$, $R$ என்பன $x$, $y$, $z$ என்பவற்றில் ஒரேபடியிலுள்ள ஏகவினச் சார்புகளாயின்., ஒருமாறி மற்றையிரண்டிலுமிருந்து வேறுக்கப்படலாமெனவும் இச்சமன்பாடு, தொகையிடத்தகுமாயின், இதனால் செப்பமாக்கப்படுமெனவும் காட்டுக.

$$\begin{aligned}z^3(x^2dx+y^2dy)+z\{xyz^2+z^4-(x^2+y^2)^2\}\,(dx+dy)&\\+(x+y)\{z^4-z^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2\}dz=0&\end{aligned}$$

என்பதைத் தொகையிட்டு அதன் தொகையீட்டை அட்சரகணித வடிவத்திற் பெறுக.

**(60)** $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு, தொகையிடத்தகுமாயின், $\lambda du+\mu dv=0$ என்னும் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கப்படலாமெனக் காட்டுக ; இங்கு $\lambda/\mu$ என்பது $u$, $v$ என்பவற்றின் சார்பாகவே ஆக, $u=$ மாறிலி, $v=$ மாறிலி என்பன

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Q}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial y}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial R}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial z}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}$$

என்பவற்றின் இருசாராத் தீர்வுகளாகும்.

அது துணைகொண்டு அல்லது வேறுமாதிரி,

$$(yz+z^2)\,dx-xz\,dy+xy\,dz=0$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் தொகையிடுக.

(61) $\{2\sqrt{(z^2-2xy)}-2x-1\}zp+\{1+2y-2\sqrt{(z^2-2xy)}\}zq=x-y$ என்பதன் பொதுத்தீர்வாகிய

$$x+y+\sqrt{(z^2-2xy)}=f(x+y+z^2)$$

என்பதில் $z^2=2xy$ ஆனது உட்படுத்தப்படாதபோதிலும் அது சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகுமென்பதை நிறுவுக.

(62) (i) $\dfrac{dy}{dx}=a_0(x)+a_1(x)\,y+a_2(x)y^2$

என்னும் இறிக்காற்றியின் சமன்பாட்டை அவ்வாறு இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுக்கு ஒடுக்கலாமெனக் காட்டுக; அது துணை-கொண்டு, அல்லது வேறுமாதிரி, எவையேனும் நாலு தொகையீடுகளின் குறுக்கு விகிதம் மாறிலியாகுமெனக் காட்டுக.

(ii) $\frac{1}{2}+x$ தான் $x$, $\frac{1}{2}-x$ கோதா $x$ என்பன

$$x\frac{dy}{dx}=x^2-\tfrac{1}{4}+y^2$$

என்பதன் தொகையீடுகள் என்பதை வாய்ப்புப்பார்த்து முற்றிய மூலியை உய்த்தறிக. (லண்டன்)

(63) $\dfrac{dx}{dt}=-\omega y,\ \dfrac{dy}{dt}=\omega x$

என்பவற்றைச் சாதாரண வழியில் தீர்த்துக்கொண்டு முடிபிலிருந்து $t$ என்பதை நீக்கலால் $(x, y)$ என்னும் புள்ளி ஒருவட்டத்திற் கிடக்குமென்பதை நிறுவுக.

அன்றியும் முதற் சமன்பாட்டின் $x$ மடங்கை இரண்டாம் சமன்பாட்டின் $y$ மடங்குக்குக் கூட்டுதலால் இதனை நிறுவுக.

(இச்சமன்பாடுகள் $\omega$ என்னுங் கோணவேகத்தோடு ஒரு வட்டத்தை வரையும் ஒரு புள்ளியினது அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாகத் துணித்த வேகங்களைத்தரும்.]

(64) $y^2(a-x)=x^3$ என்னும் வளையிகளின் நிமிர்கோணக் கடவைகளைக் காண்க.

அவை $r^2=b^2$ $(3+$கோசை $2\theta)$ என்னும் தொகுதிக்கு ஒடுங்குமென்பதை நிறுவுக. (செபீல்ட்)

(65) $l$, $m$, $n$ என்பன மாறிலிகளாக,

$$\frac{dx}{dt}=ny-mz,$$

$$\frac{dy}{dt}=lz-nx,$$

$$\frac{dz}{dt} = mx - ly$$

ஆயின், $lx + my + nz,\ x^2 + y^2 + z^2,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ என்பனவெல்லாம் மாறிலியாகுமென்பதை நிறுவுக. இம் முடிபுகளை விளக்கிக் காட்டுக.

**(66)** $A$ என்னும் உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளவளையியினது $P$ என்னும் யாதுமொரு புள்ளியில் $PN$ என்பது நிலைக்கூறும் $NT$ என்பது உபதொடலியுமாயின் $PNT$ என்னு முக்கோணியின் பரப்பளவு $APN$ என்னுந் துண்டத்தின் பரப்பளவினது $m$ மடங்காகும்; அதன் சமன்பாடு $y^{2m-1} = a^{2m-2}\ x$ எனக் காட்டுக.

$x$ – அச்சு பற்றிய $APN$ என்னுந் துண்டத்தின் சுற்றலால் வரையப்படும் கனவளவு $PNT$ என்னு முக்கோணியின் சுற்றலாற் பிறப்பிக்கப்படும் கூம்புக் கனவளவுக்கு ஒருமைவிகிதம் கொள்ளுமெனக் காட்டுக.

**(67)** $(x^2 + y^2)\ \ (xp - y)^2 = 1 + p^2$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை $x = r$ கோசை $\theta$, $y = r$ சைன் $\theta$ என்னும் பிரதியீடுகளால், அல்லது வேறுமாதிரி, தீர்க்க.

அன்றியும் தனிச்சிறப்புத் தீர்வு கண்டு முடிபுகளை கேத்திரகணித முறையில் விளக்கிக்காட்டுக.

**(68)** $y^2 - x^2$ என்பதைப் புதிய சார்மாறியாக எடுத்தலால்

$$(x^2 + y - 2xpy)^2 = 4a^2y^2\ \ (1 - p^2)$$

என்னும் சமன்பாடு கிளெரோவின் வடிவத்திற்கு ஒடுக்கப்படலாமெனக் காட்டுக : அதனைத் தீர்த்துக் கொண்டு தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இரு செங்கோண அதிபரவளைவுகளைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

அன்றியும் இத்தீர்வு, தந்த சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

**(69)** தமது வளைவாரையானது ஒரு நிலையான நேர்கோட்டால் செவ்வணில் வெட்டப்படும் நீளத்திற்குச் சமனாகும் வளையிகள் வட்டங்களாகவோ சங்கிலியங்களாகவோ இருத்தல் வேண்டுமென்பதை நிறுவுக.

**(70)** $y = x - 2ap + ap^2$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, தனிச்சிறப்புத் தீர்வு காண்க ; ஒரு வரிப்படம் தருக.

**(71)** ஒரு தளவளையியானது தனது $\rho$ என்னும் வளைவாரை வளையியிற்கும் $x$ – அச்சுக்குமிடையேயுள்ள $\nu$ என்னும் செவ்வன் வெட்டுத்துண்டோடு $\rho\nu = c^2$ என்னுந் தொடர்பால் தொடுக்கப்படுமாறு உள்ளது. வளையியின் குழிவு $x$ – அச்சுக்கு அப்பாலே திருப்பப்பட்டுள்ளதாயின்

$$y^2 = c^2 \text{ சைன்}^2 \phi + b$$

எனக் காட்டுக, இங்கு $\phi$ ஆனது $Ox$ பற்றிய தொடலிச் சாய்வு. $b = 0$ ஆகும் வகையில் $x$ இன் பெறுமானத்தை $\phi$ இனது சார்பாகப் பெறுக ; வளையியின் உருவைப் பருமட்டியாக வரைக.

**(72)** ஒரு வளையிக் குடும்பத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடு $r, r', \theta, \theta'$ என்னும் இருமை முனைவாள்கூறுகளில் தரப்படுமாயின் நிமிர்கோணக் கடவைகளின் வகையீட்டுச் சமன்பாடு $dr$, $dr'$ $r\,d\theta$, $r'\,d\theta'$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $r\,d\theta$, $r'\,d\theta'$, $-dr$, $-dr'$ என்பன எழுதலாற் காணப்படுமெனக் காட்டுக.

$c$ ஆனது மாறும் பரமானமாக,

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r'} = c$$

என்னும் வளையிகளின் நிமிர்கோண கடவைகள் காண்க.

**(73)** ஒரு வளையியின் $P$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள செவ்வன் ஒரு நிலையான நேர்கோட்டை $G$ என்னும் புள்ளியிற் சந்திக்க $PG$ இனது நடுப் புள்ளியின் ஒழுக்கு, அந்நிலையான நேர்கோட்டோடு கோதா$^{-1}$ 3 என்னுங் கோணத்திற் சாயும் ஒரு நேர்கோடாகும். $P$ இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு என்பதைக் காட்டுக.

**(74)** $2\,(p-1)\,y = p^2 x$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ; $p$ – பிரித்துக் காட்டி, சமன்பாட்டின் தீர்வாகிப் பொதுத் தீர்வாலே தரப்படும் வளையிக்குடும்பத்தின் சூழியாகுமெனக் காட்டுக.

**(75)** $y = 4ax$ என்னும் பரவளையியினது கூம்பிகளின் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பெற்று அதனைத் தொகையிடுக. தனிச்சிறப்பின் இயற்கை என்ன?

**(76)** ஒரு பரப்பின் செவ்வன்கள் எல்லாம் ஒரு நிலையான நேர்கோட்டைச் சந்திக்குமாயின் அப்பரப்பு ஒரு சுற்றற் பரப்பாதல் வேண்டும் என்பதை நிறுவுக.

**(77)** $px + qy = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ என்னும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தொகையிடுக.

துணைத்தொகையீடுகள், பொதுத் தொகையீடு ஆகியவற்றின் கேத்திர கணித விளக்கம் தருக.

**(78)** $$Z\,(x + 2y)\,\frac{\partial z}{\partial x} - z\,(y + 2x)\,\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தொகையிடுக.

$P = 0$ என்பதற்குச் சமாந்தரமான யாதுமொரு தளத்தாலாய வெட்டு **(i)** ஒரு வட்டம் **(ii)** ஒரு செங்கோண அதிபரவளைவு, ஆகுமாறுள்ள குறிப்பிட்ட தீர்வுகள் காண்க.

**(79)** $\alpha$ $\beta$ என்பன பரமானங்களாக,

$$x^2+y^2+6z^2=\alpha,\quad 2x^2+5y^2+z^2+4xy=\beta$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையிக் கும்பம் குறிக்கப்படும்.

இவ்வளையிக் குடும்பம் ஒருபரப்புக் குடும்பத்தால் நிமிர்கோண முறையில் வெட்டப்படுமென்பதை நிறுவி இக்குடும்பத்தின் சமன்பாடு காண்க.

**(80)** $$b(bcy+axz)p+a(acx+byz)q=ab(z^2-c^2)$$

என்பதைத் தீர்த்து அதன் தீர்வு இரு தந்த கோடுகளைச் சந்திக்கும் கோடுகளாற் பிறப்பிக்கப்படும் யாதும் பரப்பைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

**(81)** (i) $L$, $R$, $E$ என்பன மாறிலிகளாக,

$$L\frac{DI}{dt}+RI=E$$

என்பதைத் தீர்க்க.

[இது $E$ என்னும் மாறு வோல்ற்றளவு காரணமாக $R$ என்னும் தடையும் $L$ என்னும் தற்றூண்டுகைக் குணகமும் கொண்ட கம்பியில் உள்ள $I$ என்னும் மின்னோட்டம் பற்றிய சமன்பாடு.]

(ii) $t=0$ ஆகுமிடத்து $I=I_0$ ஆயின் எதேச்சை மாறிலியின் பெறுமானம் துணிக.

(iii) $t$ பெரிதாயின், $I$ இன் அண்ணளவு பெறுமானம் யாது?

[உறுதி ஓட்டங்கள் பற்றி ஓமின் விதி.]

**(82)** $L\dfrac{DI}{dt}+RI=E$ கோசை $pt$ என்பதைத் தீர்க்க.

[இக்குறியீடுகள், $E$ கோசை $pt$ என்னும் வோல்ற்றளவு மின்னியலிலுள்ள அதேபொருள் கொள்ளும். நிரப்புசார்பு சீக்கிரமாகப் புறக்கணிக்கத்தக்கதாகும், அதாவது ஓட்டத்தின் சுயாதீன அலைவுகள் தணிக்கப்படும்.]

**(83)** $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{Q}{C}=E$ கோசை $pt$ என்பதன் குறிப்பிட்ட தொகையீடு காண்க.

[இது தருவது ஓர் இலைடன் சாடியின் பூச்சுக்களைத் தொடுக்கும் சுற்றில் $E$ கோசை $pt$ என்னும் ஆவர்த்தன மின்னியக்கவிசை தாக்குமிடத்து ஒரு பூச்சிலுள்ள $Q$ என்னும் ஏற்றமே. குறிப்பிட்ட தொகையீடு சுயாதீன அலைவுகளைத் தணித்தபின் ஏற்றம் தரும்.]

(84) ஆனது

$$\frac{2+3m}{7}=\frac{16+3m}{2+3m}$$

என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகி $x$ ஆனது

$$7\frac{dx}{dt}-(2+3m)x=0$$

என்பதாலே தரப்படுமாயின்,

மாறிலியாதற்குப் பதிலாக ஆவர்த்தனமாகுமென்பது தவிர, ஈற்றுக் கேள்வி

$$2\frac{dx}{dt}-+3\frac{dy}{dt}-16x-3y=0, \quad 7\frac{dx}{dt}-2x-3y=0$$

என்னும் சமன்பாடுகள் $y=mx$ என்னும் பரீட்சைத் தீர்வால் திருத்தியாக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் இரு தீர்வுத்தொடைகள்

$$y=4x=4Ae^{2t}$$

$$y=-3x=-3Be^{-t} \text{ ஆகி,}$$

பொதுத் தீர்வு

$$x=Ae^{2t}+Be^{-t},$$

$$y=4Ae^{2-t}-3Be^{-t}$$

ஆகுமென்பதை நிறுவுக.

(85)
$$7\frac{d^2x}{dt^2}+23x-8y=0,$$

$$3\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{d^2y}{dt^2}-13x+10y=0$$

என்பவற்றைத் தீர்த்தற்கு ஈற்றுப் பயிற்சியின் முறையை வழங்குக.

[இவ்வகைச் சமன்பாடுகள் இரு சுயாதீனப் படிகளுள்ள தொகுதிகளினது சிற்றலைவுப் பிரச்சினைகளில் நிகழும். $y=2x$ (அல்லது $y=-5x$) என்பதாலே தரப்படும் இயக்கம் தலைமை அல்லது செவ்வன் அதிர்வுவகை எனப்படும். அது தெளிவாக தொகுதியின் பகுதிகளெல்லாம் இசைமுறையில் ஒரே ஆவர்த்தனத்தோடும் ஒரே அவத்தையோடும் இயங்குமாறுள்ளது. $x, y$ என்பவற்றிற்குப் பதிலாக $y-2x$, $y+5x$ என்பன புது மாறிகளாக எடுக்கப்படுமாயின் அவை தலைமை அல்லது செவ்வன் ஆள்கூறுகளெனப்படும்.]

(86) $L, M, N, R, S$ என்பன $LN > M^2$ ஆகுமாறு நேர் எண்களாயின்

$$L\frac{dx}{dt} + M\frac{dy}{dt} + Rx = 0$$

$$M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + Sy = 0$$

என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படும் $x$, $y$ என்பன, $t$ ஆனது அதிகரிக்க வரையறையின்றிக் குறையுமென்பதை நிறுவுக.

[$x = Ae^{at} + Be^{bt}$, $y = Ee^{at} + Fe^{bt}$ எனக் காட்டுக ; இங்கு $a$, $b$ என்பன மெய்யும் மறையும் ஆகும். இச்சமன்பாடுகள் தம்முள் தாக்கும் இரு மின்சுற்றுக்களினது சுயாதீன அலைவுகளைத் தரும். $L$, $N$ என்பன தற்றூண்டுக் குணகங்கள். $M$ ஆனது தம்முள் தூண்டுகை. $R$, $S$ என்பன தடைகள்.]

(87)
$$L\frac{dx}{dt} + M\frac{dy}{dt} + Rx + \int\frac{xdt}{c} = E \text{ சைன் } pt$$

$$M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + Sy = 0$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள், முதற் சமன்பாட்டில் $\int\frac{x}{c}dt$ என்னும் உறுப்பை விலக்கி $L$ இற்குப் பதிலாக $L - \frac{1}{cp^2}$ என எழுதுதலால், மாறாவென்பதை (தீர்வுகளை முற்றாகச் செய்யாது) காட்டுக.

[குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள் $A$ சைன் $(pt - \alpha)$ என்னும் வடிவம் கொள்ளுமென்னும் உண்மையிலிருந்து இது உடனடியாகப் பெறப்படும்.

தம்முள் தாக்கும் இரு சுற்றுக்களில் $c$ என்னும் கொள்ளளவு உள்ள ஒடுக்கியைக் கொள்ளும் முதன்மை ஆனது ஓர் ஆடல் மின்னியக்கவிசையாலே தாக்கப்படுமிடத்து இச்சமன்பாடுகள் ஓட்டங்களைத் தரும். தற்றூண்டுகையை அதிகரித்தலால் ஒடுக்கியின் விளைவு ஈடுசெய்யப்படலாமென்பதை இப்பயிற்சி காட்டும்.]

(88)
$$L\frac{dx}{dt} + M\frac{dy}{dt} + \frac{1}{c}\int x\,dt = f(t)$$

$$M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} = 0$$

ஆகி $LN - M^2$ என்பது மிகச் சிறிய நேர்க் கணியமாயின் $x$ பற்றிய சார்பு மிக விரைவான அலைவைக் குறிக்குமெனக் காட்டுக.

[அடைத்த துணைகொண்ட ஒரு துண்டற் சுருளின் முதன்மைச் சுற்றிலுள்ள ஒடுக்கி பற்றிய ரேலியின் அலைமறக்கக் கொள்கையில் இச்சமன்பாடுகள் நிகழும். முதன்மை ஓட்டம் இழிவாகுமிடத்து துணை ஓட்டம் உயர்வாகுமென்பதை இரண்டாம் சமன்பாடு காட்டுதலைக் கவனிக்க. இரேயின் ‘காந்தவியலும் மின்னியலும்’ பிரிவுகள் 489, 490 பார்க்க.]

(89)
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a(x-X) + k \text{ கோசை } pt,$$
$$M\frac{d^2X}{dt^2} = -AX + a(x-X)$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் குறிப்பிட்ட தொகையீடுகள்

$$x = \frac{Bk}{a^2-bB} \text{ கோசை } pt,$$
$$X = \frac{-ak}{a^2-bB} \text{ கோசை } pt$$

என எழுதப்படலாமென்பதை நிறுவுக ; இங்கு $b = mp^2 - a, B = Mp^2 - (a+A)$.

அது துணைகொண்டு $x$, $X$ என்பன $p$ இனது இரு விசேட பெறுமானங்களுக்கு முடிவில்லாதனவாகுமென்பதைக் காட்டுக.

[இச்சமன்பாடுகள் " மீள்தன்மை இரட்டை ஊசல் " அலைவுகளைத் தரும். $m$, $M$ என்னுந் திணிவுகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் இயங்குமாறு ஒழுங்குபடுத்தப்படும். ஒரு வில்லானது $M$ என்பதை இக்கோட்டின் ஒரு நிலையான புள்ளிக்குத் தொடுக்க; வேறொரு வில்லானது, $m$ என்பதை $M$ இற்குத் தொடுக்கும். ஓர் ஆவர்த்தன விசை $m$ இல் தாக்கும் ; தீர்வு காட்டுவது இரு திணிவுகளும் $p$ யினது இரு விசேட பெறுமானங்களுக்குத் தமது வீச்சம் மிகப் பெரியனவாகும் வலிந்த அதிர்வுகளை நிறைவேற்றும் என்பதே. மீண்டும் இதுவே " மருவிசை " என்னுந் தோற்றப்பாடு. இவ்வகையில் மருவிசை தரும் $p$ இன் பெறுமானங்கள் ஒரு திணிவு மட்டுமே இருக்குமிடத்து உள்ள பெறுமானங்களல்ல என்பதைக் கவனித்தல் முக்கியமாகும். இது ஒரு சுழல் சக்கரத் தண்டின் " சுழலல் " பற்றிய தர்க்கத்திற் பிரயோகிக்கப் படலாம். சோடோலா என்பவரின் " கொதி நீராவிச் சுழல் சக்கரம் " பார்க்க.]

(90)
$$M = m, a = b \text{ ஆகவுள்ள}$$
$$28\, a^2p^4 - 84\, agp^2 + 27\, g^2 = 0$$
$$(\tfrac{1}{3}m + M)4a\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2Mb\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g(m+2M)\theta,$$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வானது,

$$\frac{4b}{3}\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2a\frac{d^2\phi}{dt^2} = -g\phi$$

$p_1^2, p_2^2$ என்பன $p^2$ இல் உள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $\theta$ $\phi$ என்பன ஒவ்வொன்றும் $2\pi/p_1$, $2\pi/p_2$ என்னும் ஈர் எளிய இசை அலைவுகளால் ஆக்கப்படுமெனக் கூறி உணர்த்தப்படலாம் என்பதைக் காட்டுக.

[$m$ என்னுந் திணிவும் $2a$ என்னும் நீளமுமுள்ள கோல் ஒன்று ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தூக்கப்பட அதன் அடியிலிருந்து $M$ என்னுந் திணிவும் $2b$ என்னும் நீளமுமுள்ள வேறொரு கோல் தூக்கப்பட்டு இரு கோல்களும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓர் இரட்டை ஊசலாக ஊசலாடுமிடத்து நிலைக்குத்தோடு அவற்றின் சாய்வுகளை இச்சமன்பாடுகள் தரும். குறிக்கப்படும் ஈர் அலைவுகளும் தலைமை (அல்லது செவ்வன்) அலைவுகள் எனப்படும். பல சிற்றலைவுப் பிரசினங்களில் இவை போன்ற சமன்பாடுகள் வரும். இவை பற்றிய ஒரு விவரமான தர்க்கம் றவுதின் " உயர் விறைப்பு இயக்கவியல் " என்னும் நூலில் $p$ இல் உள்ள சமன்பாடு சம மூலங்கள் கொள்ளும் வகையை விசேடமாகக் குறித்துத் தரப்படும்.]

(91)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\kappa\frac{dy}{dt}+c^2x=0,$$

$$\frac{d^2t}{d^2y}+-\kappa\frac{dx}{dt}+c^2y=0.$$

[இச் சமன்பாடுகள் நிலைக்குத்திலிருந்து மிகத் தூரமாக ஊசலாடாத சுழிப் பூசற் குண்டினது இயக்கத்தைத் தரும். விடை

$$x=A \text{ கோசை } (pt-\propto)+B \text{ கோசை } (qt-\beta),$$

$$y=A \text{ சைன் } (pt-\propto)-B\text{சைன் } (qt-\beta);$$

$$2p=\sqrt{}(4e^2+\kappa^2,\ 2q=\sqrt{}(4c^2+k^2)-k.$$

தொடக்க நிபந்தனை $B=0$ ஆகுமாறு இருப்பின் ஒரு வட்டத்தில் $p$ என்னும் கோண வேகமுள்ள இயக்கத்தைப் பெறுவோம்; $A=0$ ஆயின் ஒரு வட்டத்தில் $q$ என்னும் எதிர்ப் போக்குக் கோண வேகமுள்ள இயக்கம் பெறுவோம்.

இவை போன்ற சமன்பாடுகள் (காந்தப் புலத்தால் திருசியக்கோடு மும்மைப்படுதலாகிய சேமான் (zeeman) விளைவு விளக்கத்தில் சுற்றும் அயன்களின் பாதைக்கு உண்மையாகும். **ஜீசேயின் " காந்தவியலும் மின்னியலும், "**, பிரிவுகள் 565–569 பார்க்க.]

(92)
$$\frac{dx}{dt}+ax=0,\ \frac{dz}{dt}=by,\ x+y+z=c$$

என்பன தரப்பட $z$ பற்றி ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாடு பெறுக; இங்கு $a$, $b$, $c$ என்பன மாறிலிகள். அது துணைகொண்டு $t=0$ ஆகுமிடத்து $z=\frac{dz}{dt}=0$ ஆயின்

$$z=c+\frac{c}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})$$

என்பதை நிறுவுக.

[பௌதிக இரசாயனவியலில் $A$ என்னும் பதார்த்தம் $B$ என்னும் மத்திய பதார்த்தத்தை ஆக்கி இது பின்னர் $C$ என்னும் மூன்றாம் பதார்த்தமாக மாறுமிடத்து இச்சமன்பாடுகள் வரும். $t$ என்னும் எந்த நேரத்திலும் $x$, $y$, $z$ என்பன முறையே $A$, $B$, $C$ என்பவற்றின் செறிவுகளாகும்.]

(93) ஒரு சுயாதீனப் படியுள்ள எளிய இயக்கவியற்றொகுதி ஒன்றால் தனக்கு இணைக்கப்படும் வேறு யாதுமோர் இயக்கவியற்றொகுதியில் ஆய விளைவு

$$x+2\mu x+n^2x=x$$

என்னும் சமன்பாட்டாற் குறிக்கப்படும். அருட்டும் அலைத்தொகுதி $X=A$ கோசை $pt$ ஆகுமாறு உறுதியாக்கப்படுமாயின் மருவிசையைப் பெறுதற்கு $p$ யின் பெறுமானம் கண்டு $\mu$ ஆனது ஒரு குறித்த பெறுமானத்தை அதிகரிக்குமாயின் மருவிசை இருக்க முடியாது என நிறுவுக. இருவகைகளையும் எடுத்துக் காட்டும் வளையிகளை வரைக.

(94) $k^2 < n^2$ ஆகுமிடத்து

$\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2x = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

சிற்றலைவுகளை ஆக்கும் ஓர் ஊசலின் வகையில் ஒரு முழு அலைவு நேரம் 2 செக்கனாகி, வளியாலாய கோண அமர்முடுகல் $\cdot 04 \times$ (ஊசற் கோண வேகம்) என எடுக்கப்படுமாயின், $1^0$ ஆகும் வீச்சம் 10 முழு அலைவுகளில் ஏறக்குறைய $40'$ இற்கு ஒடுக்கப்படும் எனக் காட்டுக.

[மட$_{10}e = .4343$]

(95) ஒரு தொகுதியினது இயக்கம் $x$ என்னும் ஒன்றி ஆள்கூற்றைச் சாரும்; யாதுமொரு கணத்தில் அதன் சக்தி $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ex^2$ என்னுஞ் சூத்திரத்தால் உணர்த்தப்படும்; அதன் சக்தியினது உராய்வுத் தணிப்பின் நேர–வீதம் $\frac{1}{2}k\dot{x}^2$. அதன் சுயாதீன அலைவின் ஆவர்த்தனம் $(T_0)$ ஆனது

$$2\pi\left(\frac{e}{m} - \frac{1}{16}\frac{k^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ஆகுமென்பதை நிறுவுக.

$A$ கோசை $pt$ என்னும் வகையின் குழப்பு விசையால் தாங்கப்படும் வலிந்த அலைவு $p^2 = e/m - k^2/8m^2$ ஆகுமிடத்து மிகப் பெரிதாகுமென்பதையும் இப்பெரிய $w$ அலைவின் வீச்சம் $Am\tau_0/\pi\kappa$ ஆகி, அதன் அவத்தை விசையினது அவத்தையைக் குறித்து தான் $^{1-}(4mp/k)$ என்பதால் பின்னிழுகுமென்பதையும் நிறுவுக.

(96) $T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ என்னும் பிரதியீடு

$$\frac{d^2s}{dt^2} + P\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Q$$

என்பதை

$$\frac{dT}{ds} + 2PT = Q$$

என்னும் ஏகபரிமாண வடிவத்திற்கு ஒடுக்குமெனக் காட்டுக.

$t = o$ ஆகுமிடத்து $\frac{ds}{dt} = 0$; $S = 2a$ என்னும் நிபந்தனைகளோடு

$$(S+a)\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (s-a)g$$

என்பதிலிருந்து, $\frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}$ என்பவற்றைப் பெறுக.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{3}(s-2a),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{3}$$

[இது பின்வரும் இயக்கவியற் பிரசினத்தின் தீர்வைத் தரும்: "ஒரு கிடைத்தளத்திற் சுருட்டப்பட்டுள்ள ஒரு சீர்ச் சங்கிலியினது ஒரு முனை தளத்தின் மேல் $a$ என்னும் உயரத்திலுள்ள ஓர் இலேசான ஒப்பக் கப்பி மேற் செல்லும்; தொடக்கத்தில் நீளம் $2a$ மற்றைப்

பக்கத்திற் சுயாதீனமாகத் தூங்கும். இயக்கம் ஒருசீராய் ஆர்முடுகல் கொள்ளுமென்பதை நிறுவுக ". லோனியின் " **ஒரு துணிக்கையினதும் விறைப்பு உடல்களினதும் இயக்கவியல்** பக்கம் 131 பார்க்க.]

(97) $r=a$ ஆகுமிடத்து $-\dfrac{\partial\phi}{\partial r}=V$ கோசை $\theta$ என்பதும் $r=\infty$ ஆகுமிடத்து $\dfrac{\partial\phi}{\partial r}=0$ என்பதும் தரப்பட

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\text{சைன் }\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{சைன் }\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வை

$$\phi=f(r)\text{ கோசை }\theta$$

என்னும் வடிவத்திற் காண்க.

[ஆரை $a$ கொண்ட கோளமொன்று முடிவிலியில் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு திரவத்திற்கூடாக ஒரு நேர்கோட்டில் $V$ என்னும் வேகத்தோடு இயங்குமிடத்து $\phi$ ஆனது வேக அழுத்தமாகும். ராம்சேயின் ' **நீர்ப் பொறியியல்** ' பாகம் II, பக்கம் 152 பார்க்க.]

(98) $x=0$ ஆகுமிடத்து மறைந்து $x=b$ ஆகுமிடத்து $A$ கோசை $(pt+\alpha)$ விற்கு ஒடுங்கும்

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

என்பதன் ஒரு தீர்வைக் காண்க.

[இது தருவது தன் இருமுனைகளிலும் நிலையாக்கப்பட்டுத் தன் தந்த புள்ளியொன்று $A$ கோசை $(pt+\alpha)$ என்னும் ஆவர்த்தன இடப் பெயர்ச்சியோடு இயங்கும் ஈர்க்கப்பட்ட இழையினது ஒரு பாகத்தின் வடிவமே. சிந்திக்கப்படும் பாகம் தந்த புள்ளிக்கும் ஒருமுனைக்குமிடையே உள்ளது; ராம்சேயின் ' **நீர்ப் பொறியியல்** ' பாகம் II, பக்கம் 312 பார்க்க.]

(99) $$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

என்பதன் தீர்வை $r\phi=f(ct-r)+F(ct+r)$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

[வளியில் ஓர் ஒலிக்கோள முதலின் வேக-அழுத்தம் $\phi$ ஆகும். ராம்சே, பக்கம் 345 பார்க்க.]

(100) $y=-h$ ஆகுமிடத்து $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0$ ஆகி

$y=0$ ஆகுமிடத்து $\phi$ ஆனது கோசை $(mx-nt)$ யைப் போல்மாறும் வண்ணம்

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

இன் ஒரு தீர்வைப் பெறுக.

[$\phi$ ஆனது, நிலைக்குத்துப் பக்கங்களும் $h$ என்னும் ஆழமு முள்ள கால்வாயிலுள்ள அலைகளின் வேக—அழுத்தமாகும். ராம்சே பக்கம் 265 பார்க்க.]

(101)
$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + p^2x = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + p^2y = 0$$

என்னும் ஒருங்கமை வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளினது தீர்வை

$$x = a,\ y = 0,\ \frac{dx}{dt} = 0,\ \frac{dy}{dt} = 0$$

என்னும் தொடக்க நிபந்தனைகளோடு

$$z = \frac{a}{2q}\{(q+n)e^{i(q-n)t} + (q-n)e^{i-(q+n)t}\}$$

என்னும் வடிவத்திற் பெறுக; இங்கு $z = x + iy$, $q = \sqrt{(p^2+n^2)}$. இத்தீர்வு $a$, $an/q$ என்னும் ஆரைகள் கொண்ட ஈர் ஒருமைய வட்டங்களுக்கிடையே கொள்ளப்படும் உட்சக்கரப்போலி ஒன்றைக் குறிக்குமென்பதைக் காட்டுக.

(இப்பயிற்சி புவியின் சுழற்சியை மெய்ப்பிக்கும் ஃபோக்கலின் ஊசற் பரிசோதனை பற்றிய அறிமுறை தரும்.)

(102)
$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

என்னும் அயின்சுதைனின் கோளவியக்கச் சமன்பாட்டின் அண்ணளவுத் தீர்வு ஒன்றைப் பின்வருமாறு பெறுக:

(*a*) 3 $mu^2$ என்னும் சிற்றுறுப்பைப் புறக்கணித்து

$$u = \frac{m}{h^2}\{1 + e \text{ கோசை } (\phi - \omega)\}$$

என்பதை நியூற்றனின் இயக்கவியலிலுள்ளது போற் பெறுக.

(*b*) $u$ இன் இப்பெறுமானத்தை $3mu^2$ என்னும் சிற்றுறுப்பிற் பிரதியிட்டு

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} + \frac{6m^3}{h^4}e \text{ கோசை } (\phi - \omega)$$
$$+ \frac{3m^3e^2}{2h^4}\{1 + \text{கோசை } 2(\phi - \omega)\}$$

என்பதைப் பெறுக.

(*c*) இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் வலக்கைப் பக்கத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் எல்லாவற்றையும், $m/h^2$, $\frac{6m^3}{h^4}e$ கோசை $(\phi - \omega)$ என்பவற்றைத் தவிர்த்து புறக்கணிக்க. கோசை $(\phi - \omega)$ கொள்ளும் உறுப்பு வைத்துக் கொள்ளல் வேண்டும்; அது நிரப்பு சார்பின் அதே ஆவர்த்தனம் உடைய

தாணமையால் தொடர்ந்து அதிகரிக்கும் குறிப்பிட்ட தொகையீடு ஒன்று ஆக்கும் (அத்தியாயம் III இன் பலவினப் பயிற்சி 36 இலுள்ள மருவிசைப் பிரசினத்தைப் பார்க்க.)

அது துணை கொண்டு

$$u = \frac{m}{h^2}\left\{1 + e \text{ கோசை } (\phi - \omega) + \frac{3m^2}{h^2} e\phi \text{ சைன் } (\phi - \omega)\right\}$$

$$= \frac{m}{h^2}\left\{1 + e \text{ கோசை } (\phi - \omega - \epsilon)\right\} \text{ அண்ணளவாக,}$$

எனப் பெறுக ; இங்கு $\epsilon = \frac{3m^2}{h^2}\phi$ ஆகி $\epsilon^2$ என்பது புறக்கணிக்கப்படும்.

[இம்முடிபானது, கோள் ஒரு முறை சுற்றுமாறு இயங்குமிடத்து ($\phi - \omega - \varepsilon = 0$ என்பதால் தரப்படும்). எல்லண்மையானது $\frac{\varepsilon}{\phi} = \frac{3m^2}{h^2}$ என்பதால் தரப்படும். சுற்றற் பின்னத்திற்கூடாக முன்னேறும் என்பதை நிரூபிக்கின்றது. மாறிலிகளுக்கு எண் பெறுமானங்கள் கொடுக்கப்படுமிடத்து அயின்சுதையின் கொள்கை புதனினது எல்லண்மையின் இயக்கம் பற்றிய நோக்கிய முடிபுகள், கணித்த முடிபுகள் ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள யாவரும் அறிந்த இசைவின்மையை நீக்கும்.]

**(103)** $L(x, y, x', y')$ என்பது $x, y, x', y'$ என்னும் மாறிகளின் ஒரு சார்பு. $X$, $Y$ என்பன

$$X = \frac{\partial L}{\partial x'}, \; y = \frac{\partial L}{\partial y'}$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படும். இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து $x'$, $y'$ என்பவற்றை $X$, $Y$, $x$, $y$ ஆகியவற்றின் சார்புகளாகத் தீர்க்க முடியுமாயின் $H(X, Y, x, y)$ என்பது

$$Xx' + Yy' - L$$

என்பதை முற்றாக $X$, $Y$, $x$, $y$ ஆகியவற்றின் சார்பாக உணர்த்துதலாற் பெறப்படும் சார்பாகுமிடத்து :

$$\frac{\partial H}{\partial X} = x' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்பவற்றை நிறுவுக.

அன்றியும்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

என்னும் சமன்பாடு :

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

என்பதற்கு உருமாற்றப்படும் என்பதை நிறுவுக.

[இதுவே இயக்கவியலில் ஹமிற்றனின் உருமாற்றம். (3) என்னும் சமன்பாடானது பொதுமைப்படுத்திய ஆள்கூறுகளில் ஒரு சிறப்பு வகையான லகிராஞ்சிய இயக்கச் சமன்பாடு. ஹமிற்றன் இதனை (1), (4) என்னும் சமன்பாட்டுச் சோடியால் இடமாற்றம் செய்கிறார், றவுதின் **'ஆரம்ப விறைப்பு இயக்கவியல்'**, அத்தியாயம் VIII ஐப் பார்க்க. இவ்வுருமாற்றம் அத்தியாயம் XII இன் முடிவிலுள்ள பலவினப் பயிற்சி 21 உடன் ஒப்பிடப்படல் வேண்டும் ; அங்கு இருமைக்கோட்பாட்டால் ஒன்றிலிருந்து ஒன்று பெறப்படும் இரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைப் பெற்றுள்ளோம்.]

**(104)** $$\frac{\partial z}{\partial t} + H(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t) = 0$$

என்னும் **ஹமிற்றனின் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு** யக்கோபியின் முறை (பிரிவு 140) பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து, ஹமிற்றனின் இயக்கச் சமன்பாடுகளாகிய

$$\frac{dx_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_r} \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots, n)$$

என்பவற்றிற்கு வழிகாட்டுமெனக் காட்டுக.

[விற்றேக்கரின் **'பகுப்பு இயக்கவியல்'**, 2 ஆம் பதிப்பு, பிரிவு 142 பார்க்க.]

**(105)** (i) $u\ (x, y, z) = a,\ v\ (x,\ y,\ z) = b$ என்பன

$$\frac{dx}{p(x,y,z)} = \frac{dy}{q(x,y,z)} = \frac{dz}{r(x,y,z)}$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் எவையேனும் இரு தொகையீடுகளாயின்

$$\frac{1}{p}\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} = \frac{1}{q}\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)} = \frac{1}{r}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = m(x,y,z),$$ என்க,

ஆகுமென்பதை நிறுவுக.

[$m$ ஆனது தொகுதியின் பெருக்கியெனப்படும்.]

(ii) $m$ ஆனது $\frac{\partial}{dx}(mp) + \frac{\partial}{\partial y}(mq) + \frac{\partial}{\partial z}(mr) = 0$

என்னும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

(iii) $n\ (x,\ y,\ z)$ என்பது தொகுதியின் வேறு யாதுமொரு பெருக்கியாயின்

$$p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{n}\right) + q\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m}{n}\right) + r\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{n}\right) = 0$$

என்பதைக் காட்டுக ; அது துணைகொண்டு சார்வசமனாக.

$$\frac{\partial(m/n,u,v)}{\partial(x,y,z)} = 0$$

ஆகுமெனவும் இக்காரணத்தால் $m/n$ ஆனது $u, v$ என்பவற்றின் சார்பாகி $m/n = c$ என்பது தொடக்க வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியினது ஒரு தொகையீடாகுமெனவும் காட்டுக.

(iv) $u\ (x,\ y,\ z) = a$ என்பதிலிருந்து $z = f\ (x,\ y,\ a)$ ஆகுமாறு $z$ இற்குத் தீர்க்க முடியுமாயின் $z$ இன் இப்பெறுமானத்தை $v, p, q, r, m$ என்பவற்றிற் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் $x,\ y,\ a$ ஆகியவற்றின் சார்புகளை $V,\ P,\ Q,\ R,\ M$ என்னும் பேரெழுத்துக்கள் குறிக்குமிடத்து $V\ (x,\ y,\ a) = b$ என்பது $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ என்பதன் ஒரு தொகையீடாகுமென்று நிறுவுக.

அன்றியும், $dV = M(Qdx — Pdy) \Big/ \frac{\partial u}{\partial z}$ ஆகுமாறு $MP = -\ \frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial z}$, $MQ = \frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial z}$ ஆகுமெனவும் நிறுவுக (இங்கு $\frac{\partial u}{\partial z}$ ஆனது $x,\ y,\ a$ என்பன பற்றி உணர்த்தப்படும்).

$u = a$ என்னும் யாதுமொரு தொகையீடும் $m$ என்னும் யாதுமொரு பெருக்கியும் தெரியப்படுமாயின் $M\ (Qdx\ -\ Pdy) \Big/ \frac{\partial u}{\partial z}$ என்பது ஒரு நிறை வகையீடாகி $a$ ஆனது $u\ (x,\ y,\ z)$ என்பதால் இடமாற்றம் செய்யப்படுமிடத்து தொகுதியின் ஒரு தொகையீட்டுக்கு வழிகாட்டுமென்பதே, இது தெரிவிப்பதாகும்.

இத்தேற்றத்தின் நிறுவல் பற்றி விற்றேக்கரின் 'பகுப்பு இயக்கவியல்' 2 ஆம் பதிப்பு, பிரிவு 119 பார்க்க. பொதுத் தேற்றமொன்று :

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{dx_r}{p_n} = \frac{dx}{p}.$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் $(n - 1)$ தொகையீடுகளும் யாதுமொரு பெருக்கியும் தெரியப்படுமாயின் வேறொரு தொகையீடு துணியப்படலாம் என்பதே. இது பொதுவாக **யக்கோபியின் ஈற்றுப் பெருக்கித் தேற்றம்** எனக் குறிக்கப்படும்.

இத்தேற்றம் சற்றே முக்கியமாகும் இயக்கவியலில் (விற்றேக்கர், அத்தியாயம் **X** பார்க்க) ஈற்றுப் பெருக்கி ஒன்று ஆகும்.

(v) $$\frac{dx}{xz - 2y} = \frac{dy}{2x - yz} = \frac{dz}{y^2 - x^2}$$

என்பவற்றிற்கு ஒன்று ஒரு பெருக்கியெனவும் $x^2 + y^2 + z^2 = a$ [$u(x,\ y,\ z) = a$ என்க,] என்பது ஒரு தொகையீடு எனவும் காட்டுக.

இவ்வகையில்

$$M\ (Qdx - Pdy)\ \Big/\ \frac{\partial u}{\partial z} = d\left\{ -\tfrac{1}{2}xy - \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)} \right\}$$

எனக் காட்டி அது துணைகொண்டு $xy + 2z = b$ என்னும் இரண்டாம் தொகையீட்டைப் பெறுக.

**(106)** $a$, $b$, என்பன மாறிலிகளாக

$$y = \int_a^b e^{xt} f(t)\, dt \text{ ஆயின்}$$

$$x\phi\left(\frac{d}{dx}\right)y + \Psi\left(\frac{d}{dx}\right)y = e^{bx}\phi(b)\,f(b) - e^{ax}\phi(a)\,f(a)$$

$$-\int_a^b e^{xt}\{\phi(t)f'(t) + \phi'(t)f(t) - \psi(t)f(t)\}\,dt$$

எனக் காட்டுக.

பின்னர் அது துணைகொண்டு,

$$\phi(t)\,f(t) = e\left(\int \frac{\psi(t)}{\phi(t)}dt\right)$$

$$e^{bx}\phi(b)\,f(b) = 0 = e^{ax}\phi(a)\,\mathrm{f}(a)$$

ஆயின், $y$ ஆனது

$$x\,\phi\left(\frac{d}{dx}\right)y + \psi\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென நிறுவுக.

இம்முறையைப் பிரயோகித்து

$$x\frac{d^2y}{dx^9} + \frac{dy}{dx} - xy = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக, $x > 0$ ஆகுமிடத்து வலிதாகும்.

$$y = A\int_{-\infty}^{-1} e^{xt}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)}} + B\int_{-1}^{1} e^{xt}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)}}$$

என்பதைப் பெறுக.

$x < 0$ ஆகும் வகைக்கு ஒத்த தீர்வை, முதற்றொகையீட்டில் எல்லைகளை $-\infty$, $-1$ என்பனவற்றிற்குப் பதிலாக $1$, $\infty$ என்பனவாக எடுத்தலாற் பெறலாகும்.

[பயிற்சிகள் 106–108 என்பன, வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை வரையறுத்த தொகையீட்டு வடிவத்திற் பெறும் மிக முக்கிய முறைகள் சிலவற்றைத் தரும்.]

(107) $$v = v_0 + \frac{2V}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{(\kappa t)}} e^{-z^2} dz$$

என்பது $t=0$ ஆகுமிடத்து $x$ இன் நேர்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $v_0+V$ என்பதற்கும் $x$ இன் மறைப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $v_0-V$ என்பதற்கும் ஒடுங்கி,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

என்பதன் ஒரு தீர்வாகும் என வாய்ப்புப் பார்க்க.

[எல்லாத் திசைகளிலும் முடிவிலிக்கு விரியும் ஒரு திண்மத்தின் வெப்பநிலை தொடக்கத்தில் ஒரு குறித்த தளம் $x=0$ இன் இரு பக்கங்களிலும் $v_0+V$, $v_0-V$ என்னும் வேறு வேறான மாறாப் பெறுமானங்கள் கொள்ளுமென்னும் எடுகோளின்படி, தளத்திலிருந்து $x$ என்னுந் தூரத்தில் $t$ என்னும் நேரத்தில் வெப்பநிலை $v$ ஆகும்.

கெல்வின் என்பவர் $v$ பற்றிய இக்கோவையைப் புவியின் வயதை மதிப்பிடுதற்கு உபயோகித்தார் (தொம்சன், ரெயிற் ஆகியோரின் "இயற்கை மெய்யியல்", பின்னிணைப்பு $D$ பார்க்க). பாறைகளினது கிளர்மின் பிரிந்தழிதலால் வெப்பம் தொடர்ந்து பிறப்பிக்கப்படும் என்னும் வெளியீடு இப்பிரசினைத்திற் புதிய சிக்கலை உண்டாக்கும்.]

(108) (a) $F\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) V = 0$ என்னும் மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாணப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு, $l$, $m$, $n$ என்பன $F(l, m, n) = 0$ ஆகுமாறு எவையேனும் மாறிலிகள் அல்லது $s$, $t$ என்பவற்றின் சார்புகள் ஆயின்,

$$V = \iint e^{lx + my + nz} f(s, t)\, ds dt$$

என்பது (எல்லைகள் $x$, $y$, $z$ ஆகியவற்றைச் சாராத எவையேனும் எதேச்சைக் கணியங்களாக) ஒரு தீர்வு ஆகுமெனபதைக் காட்டுக.

$x$, $y$, $x$, ...... என்னும் $n$ சாரா மாறிகளும் $s$, $t$, ...... என்னும் $(n-1)$ பரமானங்களும் உள்ள வகைக்கு இத்தேற்றத்தை விரிக்க.

$$V = \iint e^{s(x \text{ கோசை } t + y \text{ சைன் } t + sz)} f(st)\ ds\, dt$$

என்பதை $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial z}$ என்பதன் ஒரு தீர்வாகப் பெறுக.

(b) $F\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) V = 0$ என்பது மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஓர் ஏகவினமான ஏகபரிமாணப் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடாயின், ஒரு தீர்வு $V = \int f(lx + my + nz, t)\, dt$ ஆகுமெனக் காட்டுக ; இங்கு எல்லைகள் $x$, $y$, $z$ என்பவற்றைச் சாராத எவையேனும் எதேச்சைக் கணியங்களாக, $l$, $m$, $n$ என்பன $F(l, m, n) = 0$ ஆகுமாறு எவையேனும் மாறிலிகள் அல்லது $t$ இன் சார்புகளாகும்.

இத்தேற்றத்தை $n$ சாரா மாறிகளும் $(n-2)$ பரமாணங்களும் உள்ள வகைக்கு விரிக்க. [*H. Todd*, "கணித தூதன்" (1914) பார்க்க.]

$$V=\int_0^{2\pi} f\,(x \text{ கோசை } t+y \text{ சைன் } t+iz,\, t)\, dt$$

என்பதை $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$ என்பதன் ஒரு தீர்வாகப் பெறுக.

[லப்பிலாசின் சமன்பாட்டுக்கு விற்றேக்கரின் தீர்வு.]

**(109)** $\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{x}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டில்

$$y=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x_2}+\ldots\ldots$$

என்னும் பரீட்சைத் தீர்வைப் பிரதியிடுதலால்

$$y=\frac{0\,!}{x}\;\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\frac{3!}{x^4}+\ldots\ldots\ldots$$

என்னுந் தொடரைப் பெறுக.

இத்தொடர் $x$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் விரியுமென்பதை நிறுவுக.

$$y=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}dx$$

என்னும் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைப் பெற்றுப் பகுதிகளாக மறிதந்து தொகையிடலால்

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}dx=\frac{0!}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n!}{x^{n+1}}+e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{(n+1)!e^x}{x^{n+2}}dx$$

என்பதைக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு, $x$ ஆனது மறையாயின் குறிப்பிட்ட தொகையீட்டுக்குப் பதிலாக தொடரினது $n+1$ உறுப்புக்களை எடுத்தலாற் பெறப்படும் வழு $(n+1)$ ஆம் உறுப்பின் எண் பெறுமானத்திலும் சிறிது என நிறுவுக.

[அத்தகைத் தொடர் அணுகு கோட்டுத் தொடர் எனப்படும். புரோமிச்சின் "முடிவில் தொடர்" பிரிவுகள் 130–139, அல்லது இரண்டாம் பதிப்பு, பிரிவுகள் 106–118 பார்க்க.]

**110.** $f_n(x)$ என்னும் சார்புத் தொடரி

$$f_0\,(x)=a+b\,(x,\;c),\quad (a,\; b,\; c \text{ என்பன மாறிலிகள்}),$$

$$f_n(x)=\int^{x}(t-x)\,F(t)\,f_{n-1}\,(t)\,dt$$

என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படுமாயின்

$$\frac{d^2}{dx^2} f_n(x) = -F(x)\, f_{n-1}(x)$$

ஆகுமெனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு, முடிவில் தொடர்கள் பற்றிச் சில **செய்கைகள்** முறைமையாயின்,

$$y=\sum_{0}^{\infty} f_n(x) \text{ ஆனது}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y\,F(x)=0 \text{ என்பதன் ஒரு தீர்வெனக் காட்டுக.}$$

[**விற்றேக்கர், வாற்சன்** ஆகியோரின் தற்காலிக பகுப்பு, பக்கம் 189 பார்க்க. அங்கு இந்த முறையால் இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைக் குறித்த உண்மைத் தேற்றத்தின் நிறுவல் தரப்படும்.]

(111) $D$ ஆனது $\frac{d}{dt}$ என்பதைக் குறிக்க

$$f(D)\,x+F(D)\,y=0$$

$$Q(D)\,x+\psi(D)\,y=0$$

என்னும் மாறாக் குணகங்கள் கொண்ட ஈர் ஏகபரிமாண ஒருங்கமை வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளினது தீர்வு, $V$ ஆனது

$\{f(D)\psi(D)-F(D)\phi(D)\}V=0$ என்பதன் முற்றிய மூலியாக,

$$x=F(D)V,$$

$$y=-f(D)V,$$

என எழுதப்படலாமென நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு $f$, $F$, $\phi$, $\psi$ என்பவற்றின் $D$ பற்றிய படிகள் முறையே $p$, $q$, $r$, $s$ என்பனவாயின் தீர்வில் வரும் எதேச்சை மாறிலிகளின் தொகை பொதுவாக $p+s$, $q+r$ என்னும் எண்களுட் பெரியதாகுமெனவும் ஆனால் $p+s=q+r$ ஆகுமாயின் எதேச்சை மாறிலிகளின் தொகை சிறிதாகலாம் எனவும்,

$$(D+1)\,x+Dy=0,$$

$$(D+3)\,x+(D+2)\,y=0$$

என்னும் சமன்பாடுகளிலுள்ளது போல் பூச்சியமுமாகலாமெனவும் காட்டுக.

[$f(D)$, $F(D)$ என்பன மாறிலியல்லாத பொதுக் காரணி கொள்ளுமிடத்து வருவதுபோல் $x$, $y$ என்பவற்றிற்கு ஒருங்கு சேர்ந்து பெறப்படும் வேறுவேறான எதேச்சை மாறிலிகளினது தொகை $V$ யிற்கு உள்ளதிலும் சிறிதாயின் இது மிகப் பொதுத் தீர்வாகாது என நிறுவப்படலாம்.]

**(112)** (*a*) $y=u(x), y=v(x)$ என்பன $P(x)y_1+Q(x)y=0$ என்னும் முதல் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் எவையேனும் இரு தீர்வுகளாயின் $(vu_1-uv_1)/u^2=0$ ஆகுமெனவும் இக்காரணத்தால், $a$ என்பது மாறிலியாக, $v=au$ ஆகுமெனவும் நிறுவுக.

(*b*) $y=u(x), y=v(x), y=w(x)$ என்பன

$$P(x)y_2+Q(x)y_1+R(x)y=0$$

என்னும் இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் எவையேனும் மூன்று தீர்வுகளாயின்,

$$P\frac{d}{dx}(wv_1-vw_1)+Q(wv_1-vw_1)=0,$$

$$P\frac{d}{dx}(uv_1-vu_1)+Q(uv_1-vu_1)=0$$

என்பவற்றை நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு $w=au+bv$ எனக் காட்டுக.

[படிப்படியாக இம்மாதிரி முன் சென்று இது போன்ற வடிவம் கொண்ட $n$ ஆம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராத தொகையீடுகள் $n$ இன் மேற்பட முடியாதெனக் காட்டலாம்.]

**(113)** $u, v, w$ என்பன $x$ இன் எவையேனும் மூன்று சார்புகளாகுக. $y\equiv au+bv+cw$ என்பது சர்வசமனாய் மறையுமாறு $a$, $b$, $c$ என்னும் மாறிலிகள் காணப்படலாமாயின்

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}=0$$

என்பதை நிறுவுக; மறுதலையாக ("ரொன்ஸ்கியன்" என்னும்) இத்துணிகோவை மறையுமாயின் இச்சார்புகள் ஏகபரிமாண முறையாய்ச் சாராதன என்பதையும் நிறுவுக.

இம்முடிபுகளை $n$ சார்புகளுள்ள வகைக்கு விரிக்க.

[துணிகோவையில் $u$, $u_1$, $u_2$ என்பவற்றை முறையே $y$, $y_1$, $y_2$ என்பவற்றால் இடமாற்றஞ் செய்தலால் ஆக்கப்படும் இரண்டாம் வரிசை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டை எடுத்துச் சிந்திக்க. அத்தகைச் சமன்பாட்டுக்கு ஏகபரிமாணமாய்ச் சாராத தொகையீடுகள் இரண்டின் மேல் இருத்தல் முடியாது.

"ரொன்ஸ்கியன்" என்பது ஆரம்பத்தில் துணிகோவையைப் பற்றி எழுதியோருள் ஒருவராகிய "கோனே ரொன்ஸ்கி" என்பவரைக் குறித்துப் பெயரிடப்பட்டது.]

**(114)** $z=e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)}$ என்பது

$$t\frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{1}{4}x^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2z+\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)z$$

என்னும் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென நிறுவுக.

அது துணைகொண்டு $J_n(x)$ ஆனது

$$e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)}=\sum_{-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

என்னும் விரியில் $t^n$ இனது குணகமாக வரையறுக்கப்படுமாயின், $y=J_n(x)$ என்பது

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

என்னும் பெசலின் $n$ ஆம் வரிசைச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமென நிறுவுக.

[முடிவில் தொடர் குறித்த செய்கைகளைப் பற்றிச் சிந்தனை வேண்டும்],

**(115)** $u_x$ ஆனது $x$ இன் ஒரு சார்பைக் குறிக்க, $E$ ஆனது $u_x$ என்பதை $u_{x+1}$ இற்கு மாற்றும் செயலியாயின், பின்வரும் முடிபுகளை நிறுவுக :

(i) $Ea^x=a\,.\,a^x$, அதாவது $(E-a)\,a^x=0$.

(ii) $E^2a^x=a^2\,.\,a^x$.

(iii) $E\,(xa^x)=a\,(xa^x)+a\,.\,a^x$, அதாவது $(E-a)\,(xa^x)=a\,.\,a^x$.

(iv) $(E-a)^2\,(xa^x)=0$.

(v) $(p_0E^2+p_1E+p_2)a^x=(p_0a^2+p_1a+p_2)a^x$, $p$ கள் மாறிலியாயின்.

(vi) $A, B$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளாக, $a, b$ என்பன $p_0m^2+p_1m+p_2=0$ என்னுந் துணைச் சமன்பாட்டினது மூலங்களாயின் $u_x=Aa^x+Bb^x$ என்பது

$$p_0u_{x+2}+p_1u_{x+1}+p_2u_x=0$$

என்னும் ஏகபரிமாண வித்தியாசச் சமன்பாட்டின் தீர்வு, அதாவது $(p_0E^2+p_1E+p_2)u_x=0$ (பிரிவு 25 பார்க்க). இந்த முறையால் $(2E^2+5E+2)u_x=0$ என்பதைத் தீர்க்க.

(vii) $u_x=(A+Bx)a^x$ என்பது $(E^2-2aE+a^2)u_x=0$ என்பதன் ஒரு தீர்வு.

இங்கு $m^2-2am+a^2=0$ என்னும் துணைச் சமன்பாட்டுக்குச் சம மூலங்களுண்டு. (பிரிவு 34 பார்க்க.)

(viii) $P, Q$ என்பன எதேச்சை மாறிலிகளாகுமிடத்து $p\pm iq$ என்பன $p_0m^2+p_1m+p_2=0$ என்னுந் துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகி $p+iq=r$ (கோசை $\theta+i$ சைன் $\theta$) ஆயின்,

$$(p_0E^2+p_1E+p_2)u_x=0$$

என்பதன் ஒரு தீர்வு

$$u_x=r^x\,(P\text{ கோசை }x\theta+\theta\text{ சைன் }x\theta).$$

(பிரிவு 26 பார்க்க). இந்த முறையால் $(E^2-2E+4)u_x=0$ என்பதைத் தீர்க்க.

(ix) மாறுக் குணகங்கள் கொண்ட ஏகபரிமாண வித்தியாசச் சமன்பாடாகிய $F(E)u_x \equiv (p_0E^n + p_1E^{n-1} + \ldots + p_{n-1}E + p_n)u_x = f(x)$ என்பதன் பொதுத் தீர்வு ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீட்டினதும் நிரப்பு சார்பினதும் கூட்டுத்தொகை; இங்கு பின்னையது, வலக்கைப் பக்கத்தில் வரும் $x$ இன் சார்புக்குப் பூச்சியத்தைப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் சமன்பாட்டின் தீர்வு (பிரிவு 29 பார்க்க).

(x) $F(a) \neq 0$ ஆயின், $a^x/F(a)$ என்பது

$$F(E)u_x = a^x$$

என்பதன் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடு (பிரிவு 35 பார்க்க).

இந்த முறையால் $(E^2 + 8E - 9)u_x = 2^x$ என்பதைத் தீர்க்க.

[வித்தியாசச் சமன்பாடுகளும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளும் பற்றி வேறு ஒப்புக்கள் பூலின் "**முடிவுள்ள வித்தியாசங்கள்**" அத்தியாயம் XI இல் காணப்படும்.]

**(116)** பிரிவு 53 இனது முறையை

$$y = xF(p) + f(p)$$

என்னும் லகிராஞ்சியின் சமன்பாட்டுக்குப் பிரயோகிக்குமிடத்து, பொதுவாக, ($F(p) = p$ ஆகும் கிளெரோவின் வடிவத்துக்கல்ல.

$$x = c\phi(p) + \psi(p),$$

$$y = cF(p)\phi(p) + F(p)\psi(p) + f(p)$$

என்னும் பரமான வடிவத்திலுள்ள முற்றிய மூலியே எனக் காட்டுக.

அது துணைகொண்டு $C_1$, $C_2$, $C_3$ என்பன $c$ இனது $c_1$, $c_2$, $c_3$ என்னும் பெறுமானங்களுக்கு ஒத்தனவாய் இம்மூலியில் அடங்கும் எவையேனும் மூன்று வளையிகளும் $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ என்பன முறையே $C_1$, $C_2$, $C_3$ என்பவற்றின் மீது தொடலிகள் சமாந்தரமாகுமாறுள்ள புள்ளிகளுமாயின்

$$(x_3 - x_1)/(x_3 - x_2) = (c_3 - c_1)/(c_3 - c_2) = (y_3 - y_1)/(y_3 - y_2)$$

எனக் காட்டுக; அதாவது $P_1$, $P_2$, $P_3$ என்பன ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளனவாகி இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் தம் வளையி வழியே, ஒத்த தொடலிகள் சமாந்தரமாகுமாறு, இயங்குமிடத்து $P_1P_3 : P_2P_3$ என்னும் விகிதம் மாறிலியாகும். [ஆயின் முற்றிய மூலியில் உட்கொள்ளப்படும் இரு வளையிகள் தரப்பட்டவிடத்து மற்றை வளையிகளின் எத்தொகையையும் கேத்திரகணித முறையாக அமைக்கலாம்.]

**117.** தனது யாதுமொரு புள்ளியில் தன் வளைவு ஆரையானது தனக்கும் ஒரு நிலையான நேர் கோட்டுக்குமிடையே வெட்டப்படும் தன் செவ்வன் நீளத்தின் இரு மடங்காகும் ஒரு தள வளையி, இந்நேர்கோட்டை அடியாகக் கொண்ட சக்கரப்போலியோ இந்நேர்கோடு செலுத்தலியாகக் கொண்ட பரவளைவோ ஆதல் வேண்டும் என நிறுவுக.

**118.** ஒரு வளையி $\rho = k$ தான் $\psi$ என்னும் உடைமை கொண்டது; இங்கு $\rho$ ஆனது வளைவு ஆரையும் $\psi$ ஆனது தொடலி $x$– அச்சோடு ஆக்கும் கோணமுமாக, $k$ நேராகும். இவ்வளையியிற்கு

$$x = k\ (1 - \text{கோசை}\ \theta),\ y = k\ \{\text{மட}\ (\text{சீக்}\ \theta + \text{தான்}\ \theta) - \text{சைன்}\ \theta\}$$

என்னும் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும் கிளை ஒன்று உண்டு எனக் காட்டுக; இங்கு $0 \leqq \theta < \frac{1}{2}\pi$ ஆக, உற்பத்தி $\theta = 0$ என்னும் புள்ளியில் எடுக்கப்படும். இப்புள்ளியிலிருந்து இக்கிளையின் வழியே அளக்கப்படும் வில் நீளம் $s$ ஆயின்

$$S = k\ \text{மட}\ \frac{k}{k-x}$$

எனக் காட்டுக.

**119.** $x=0,\ t=0$ ஆகுமிடத்து $\frac{\partial u}{\partial t} = K$ (ஒரு மாறிலி) ஆகுமாறும் $x=0$ ஆகுமிடத்து $t$ இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ஆகுமாறும்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வை $f(x)$ சைன் $mt$ என்னும் வடிவத்திற் பெறுக.

**120.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்குப் பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருத்தியாக்கும் ஒரு தீர்வைப் பெறுக:

(i) $y=0$ ஆகுமிடத்து $z =$ சைன் $x$

(ii) $x=0$ அல்லது $\pi$ ஆகுமிடத்து $z=0$

(iii) $y>0,\ \pi > x > 0$ ஆகும் $x, y$ தளப் பிரதேசத்தில் எங்கேனும், $z$ முடிவில்லாததாகாது.

**121.** $P, Q, R,$ என்பன $x$ இன் சார்புகளாக, பிற்குறிகள் $x$ குறித்து வகையிடல்களைக் குறிக்குமாயின் பகுதிகளாக இருமுறை தொகையிட,

$$\int z(Py_2 + Qy_1 + Ry)dx = z(Py_1 + Qy) - y(Pz)_1 + \int y\{(Pz)_2 - (Qz)_1 + Rz\}dx$$

எனக் காட்டுக.

$$Py_2 + Qy_1 + Ry = 0,\ (Pz)_2 - (Qz)_1 + Rz = 0$$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளுள் ஒன்றன் யாதுமொரு தொகையீடு மற்றையதன் தொகையீட்டுக் காரணியாகுமாறு உள்ளன என்பதை உய்த்தறிக்.

[அத்தகைச் சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று உடன்மூட்டு எனப்படும்.]

$D$ ஆனது $\frac{d}{dx}$ என்னும் செயலியைக் குறிக்குமாயின்

$\{D+p(x)\}\ \{D+q(x)\}y=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் உடன்மூட்டு $\{D-q(x)\}\ \{D-p(x)\}z=0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

இதனை $y_2+(x+x^2)y_1+(2x+x^3)y=0$ என்னும் சமன்பாட்டில் சரிபிழை பார்க்க. [இங்கு $p(x)=x,\ q(x)=x^2$.]

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ **என்பதன் பொதுத்தீர்வு.**

செயலியைக் காரணிப்படுத்திச் சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)y\right\}=0=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)y\right\}$$

என எழுதலாம்.

ஆகவே (பிரிவு 34 பார்க்க) தொடக்கச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial t}=0.$$

என்னும் இரு லகிராஞ்சி ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளுள் யாதுமொன்றினது எத்தொகையீட்டாலும் திருத்தியாக்கப்படும்.

இவற்றுள் முதலாவதற்குத் துணைச் சமன்பாடுகள் (பிரிவு 123)

$$\frac{dx}{1}=\frac{dt}{1/a}=\frac{dy}{0} \quad \text{என்பன.}$$

இரு சாராத் தொகையீடுகள்

$$y=b,\ x-at=c \quad \text{ஆகும்.}$$

பொதுத் தொகையீடு $y=f(x-at)$.

இதே மாதிரி இரண்டாம் லகிராஞ்சிச் சமன்பாடு, $y=F(x+at)$ ஐத் தரும். இவை இரண்டும் தொடக்க வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தொகையீடுகள். இது ஏகபரிமாணமாதலால் ஒரு மூன்றும் தொகையீடு ஈர் எதேச்சைச் சார்புகளைக் கொள்ளும்

$$y=f(x-at)+F(x+at)$$

என்பது ; இரண்டாம் வரிசைச் சமன்பாட்டுக்கு மிகப் பொதுவான, தீர்வை எதிர்பார்க்க முடியாது.

இபது போன்ற முறை பிரிவு 145 இன் சமன்பாட்டுக்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

**பரமான முறை** ($C.\ N.$ சிறிஙிவாச ஐயங்கார்)

$p=f(x, a)/\phi(z, a)$, $q=F(y, a)/\phi(z, a)$ எனப் பிரதியிட ஒரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடு ஒரு சர்வசமன்பாடு ஆகுமாயின் இக்கோவைகளை $dz=pdx+qdy$ என்பதோடு இணைத்து

$$\int \phi(z, a)dz=\int f(x, a)dx+\int F(y, a)dy+b$$

என்னும் முற்றிய தொகையீட்டைப் பெறுதற்கு உபயோகிக்கலாம். உதாரணமாக $z^2(p+q)=x^2+y^2$ என்னும் சமன்பாடு, $p=(x^2+a)/z^2$, $q=(y^2-a)/z^2$ ஆயின், ஒரு சர்வசமன்பாடாகி $z^3=x^3+y^3+3ax-3ay+b$ என்பதைத் தரும்.

இந்த முறை நியம வடிவங்கள் **I, III** (பிரிவுகள் 129, 131) ஆகியவற்றிலுள்ள சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றையும் நியமவடிவம் **II** இலுள்ள சமன்பாடுகள் சிலவற்றையும் எடுத்தாளும்.

# பயிற்சி வினாக்களுக்கு விடைகள்

## அத்தியாயம் I

### பிரிவு 5

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4y.$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-9y.$

(3) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$ (4) $y=x\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3.$

(5) ஒரு வட்டத்தின் தொடலி, தொடுகைப் புள்ளியை மையத்துடன் தொடுக்கும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாகும்.

(6) யாதுமொரு புள்ளியிலான தொடலி **அக்**கோடேயாகும்.

(7) வளைவு பூச்சியம்.

### பிரிவு 8

(1) $y=a+ax+a\dfrac{x^2}{2!}+a\dfrac{x^3}{3!}+a\dfrac{x^4}{4!}+\ldots=ae^x.$

(2) $y=a+bx-a\dfrac{x^2}{2!}-b\dfrac{x^3}{3!}+a\dfrac{x^4}{4!}+\ldots=a$ கோசை $x+b$ சைன் $x.$

### அத்தியாயம் I—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{dy}{dx}.$ (2) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-6\dfrac{d^2y}{dx^2}+11\dfrac{dy}{dx}-6y=0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0.$

(4) $y$ மட $\left[\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\right]=x\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$ (5) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0.$

(6) $\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=a^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2,$ அ-து $\rho^2=a^2.$

(7) $(x^2+y^3)\dfrac{d^2y}{dx^2}=2\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}.$

(8) $\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}\dfrac{d^3y}{dx^3}=3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2\dfrac{dy}{dx}.$ (11) $y=ax+bx^3.$

$yae^x=(12)+be^{-x}.$ (14) 60° உம் – 60° உம்.

(15) வகையிட்டு $x=1,\ y=2$ என இடுக. இதிலிருந்து $\dfrac{d^2y}{dx^2},$ எனவே $\rho$ கிடைக்கும்.

(17) (i) $x+1=0$ ; (ii) $y^2=x^2+6x+1.$

# அத்தியாயம் II

## பிரிவு 14

(1) $6x^2+5xy+y^2-9x-4y=c.$

(2) $\text{சைன் } x \text{ தான் } y+\text{சைன் }(x+y)=c.$

(3) $\text{சீக } x \text{ தான் } y-e^x=c.$

(4) $x-y+c=\text{மட }(x+y).$

(5) $x+ye^{x^3}=cy.$

(6) $y=cx.$

(7) $e^y\,(\text{சைன் } x+\text{கோசை } x)=c.$

(8) $x^4y+4cy+4=0.$

(9) $ye^x=cx.$

(10) $\text{சைன் } x \text{ கோசை } y=c.$

## பிரிவு 17

(1) $(x+y)^3=c\,(x-y).$

(2) $x^2+2y^2\,(c+\text{மட } y)=0.$

(3) $xy^2=c\,(x-y)^2.$

(4) $cx^2=y+\sqrt{}\,(x^2+y^2).$

(5) $(2x-y)^2=c\,(x+2y-5).$

(6) $(x+5y-4)^3\,(3x+2y+1)=c.$

(7) $x-y+c=\text{மட }(3x-4y+1).$

(8) $3x-3y+c=2 \text{ மட }(3x+6y-1).$

## பிரிவு 21

(1) $2y=(x+a)^5+2c\,(x+a)^3.$

(2) $xy=\text{சைன் } x+c \text{ கோசை } c.$

(3) $y \text{ மட } x=(\text{மட } x)^2+c.$

(4) $x^3=y^3\,(3 \text{ சைன் } x+c).$

(5) $y^2\,(x+ce^x)=1.$

(6) $x=y^3+cy.$ (7) $x=e^{-y}\,(c+\text{தான் } y).$

## பிரிவு 22

(1) பரவளைவு $y^2=4ax+c.$

(2) செவ்வக அதிபரவளைவு $xy=c^2.$

(3) பேனூயி பிறையுரு $r^2=a^2 \text{ சைன் } 2\,\theta.$

(4) சங்கிலியம் $y=k \text{ அகோசை } \dfrac{x-c}{k}.$

(5) $xy=c^2.$

(6) $y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}.$

(7) $y^p=cx^q.$

(8) $r^2=ce^{\theta^2}.$

(9) $\text{மட } r+\frac{1}{2}\,\theta^2+\frac{1}{3}\,\theta^3=c.$

(10) சமகோணச் சுருளிகள் $r=ce^{\pm\theta \text{ தான் } \alpha}.$

## அத்தியாயம் II—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $xy=y^3+c.$

(2) $cx^3=y+\sqrt{}(y^2-x^2).$

(3) $\text{சைன் } x \text{ சைன் } y+e^{\text{சைன் } x}=c.$

(4) $2x^2-2xy+3y+2cx^2y=0.$

(5) $cxy=y+\sqrt{}(y^2-x^2).$

(11) $x^3y^{-2}+2x^5y^{-3}=c.$

(12) $\text{தான்}^{-1}(xy)+\text{மட }(x/y)=c.$

(14) $(x^2-1+y^4)\,e^{x^2}=c.$

(15) (i) திகர்மாற்றுச் சுருளி $r\,(\theta-\alpha)=c.$

(ii) ஆக்கிமீடிஸ் சுருளி $r=c\,(\theta-\alpha).$

(16) பரவளைவு $3ky^2=2x.$

(18) $x=y\,(c-k \text{ மட } y).$

(19) (i) $x^2+(y-c)^2=1+c^2$, தந்த தொகுதியை நிமிர்கோணமாய் வெட்டும் ஒரு பொது வச்சு வட்டத் தொகுதி.

(ii) $r^2=ce^{-\theta^2}$ (iii) $n^2=r\{c+$ மட $($கோசீ $n\theta+$ கோதா $n\theta)\}$.

(20) $\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)=a^2-b^2$.

(21) மட $(2x^2\pm xy+y^2)+\frac{6}{\sqrt{7}}$ தான் $^{-1}\frac{x\pm 2y}{x\sqrt{7}}=c$.

## அத்தியாயம் III

### பிரிவு 28

(1) $y=Ae^{-x}+Be^{-3x}$.
(2) $y=A$ கோசை $2x+B$ சைன் $2x$.
(3) $y=Ae^{-3x}+Be^{-4x}$.
(4) $y=e^{2x}(A$ கோசை $x+B$ சைன் $x)$.
(5) $s=e^{-2t}(A$ கோசை $3t+B$ சைன் $3t)$.
(6) $s=A+Be^{-4t}$.
(7) $y=Ae^{x}+Be^{-x}+Ce^{-2x}$.
(8) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.
(9) $y=A$ கோசை $(2x-\alpha)+B$ கோசை $(3x-\beta)$.
(10) $y=A$ அகோசை $(2x-\alpha)+B$ அகோசை $(3x-\beta)$ அல்லது
$y=Ee^{2x}+Fe^{-2x}+Ge^{3x}+He^{-3x}$.
(11) $y=Ae^{-2x}+Be^{x}$ கோசை $(x\sqrt{3}-\alpha)$.
(12) $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}+Ee^{-x}$ கோசை $(x\sqrt{3}-\alpha)+Fe^{x}$ கோசை $(x\sqrt{3}-\beta)$.
(13) $\theta=\alpha$ கோசை $t\sqrt{(g/l)}$.
(14) $k^2<4mc$.
(16) $Q=Q_0e^{-Rt/2L}\left(\right.$ கோசை $nt+\frac{R}{2Ln}$ சைன் $\left.nt\right)$, இங்கு $n=\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}$.

### பிரிவு 29

(1) $y=e^{x}(1+A$ கோசை $x+B$ சைன் $x)$.
(2) $y=3+Ae^{x}+Be^{12x}$.
(3) $y=2$ சைன் $3x+A$ கோசை $2x+B$ சைன் $2x$.
(4) $a=2$ ; $b=1$.
(5) $a=6$ ; $b=-1$.
(6) $a=-4$ ; $p=2$.
(7) $a=1$ ; $b=2$ ; $p=1$.
(8) $a=2$.
(9) $4e^{3x}$.
(10) $3e^{7x}$.
(11) $-\frac{5}{2}$ சைன் $5x$.
(12) $\frac{25}{29}$ கோசை $5x-\frac{10}{29}$ சைன் $5x$.
(13) 2.

### பிரிவு 34

(1) $y=A+Bx+(E+Fx)e^{-x}$.
(2) $y=(A+Bx+Cx^2)$ கோசை $x+(E+Fx+Gx^2)$ சைன் $x$.
(3) $y=(A+Bx)e^{x}+E$ கோசை $x+F$ சைன் $x$.
(4) $y=A+Bx+Ce^{x}+(E+Fx)e^{-\frac{1}{2}x}$.

## பிரிவு 35

(1) $y=2e^{3x}+e^{-3x}(A\ \text{கோசை}\ 4x+B\ \text{சைன்}\ 4x)$.

(2) $y=e^{-px}(A\ \text{கோசை}\ qx+B\ \text{சைன்}\ qx)+e^{ax}/\{(a+p)^2+q^2\}$.

(3) $y=(A+9x)\,e^{3x}+Be^{-3x}$.

(4) $y=A+(B+\frac{1}{2}x)\,e^{x}+(C+\frac{1}{2}x)\,e^{-x}$.

(5) $y=(A+ax/2p)\ \text{அகோசை}\ px+B\ \text{அசைன்}\ px$.

(6) $y=A+(B+Cx-2x^2)e^{-2x}$.

## பிரிவு 36

(1) $y=2\ \text{சைன்}\ 2x-4\ \text{கோசை}\ 2x+Ae^{-x}$.

(2) $y=4\ \text{கோசை}\ 4x-2\ \text{சைன்}\ 4x+Ae^{2x}+Be^{3x}$.

(3) $y=2\ \text{கோசை}\ x+e^{-4x}\ (A\ \text{கோசை}\ 3x+B\ \text{சைன்}\ 3x)$.

(4) $y=\ \text{சைன்}\ 20x+e^{-x}\ (A\ \text{கோசை}\ 20x+B\ \text{சைன்}\ 20x)$.

## பிரிவு 37

(1) $y=x^3-3x^2+6x-6+Ae^{-x}$.          (2) $y=6x^2-6x+A+Be^{-2x}$.

(3) $y=6x+6+(A+Bx)e^{3x}$.

(4) $y=x^3+3x^2+Ex+F+(A+Bx)e^{3x}$.

(5) $y=24x^3+14x-5+Ae^{-x}+Be^{2x}$.

(6) $y=8x^3+7x^2-5x+Ae^{-x}+Be^{2x}+C$.

## பிரிவு 38

(1) $y=A\text{கோசை}\ x+(B+2x)\ \text{சைன்}\ x$.          (2) $y=Ae^{x}+(x+2)e^{2x}$.

(3) $y=Ae^{2x}+(B+Cx-20x^2-20x^3-15x^4-9x^5)e^{-x}$.

(4) $y=\{A\ \text{சைன்}\ x+(B-x)\ \text{கோசை}\ x\}e^{-x}$.

(5) $y=(A+Bx-x^3)\ \text{கோசை}\ x+(E+Fx+\ 3x^2)\ \text{சைன்}\ x$.

(6) $y=A+(B+3x)e^{x}+Ce^{-x}+x^2+E\ \text{கோசை}\ x+(F+2x)\ \text{சைன்}\ x$.

(7) $y=\{A\ \text{சைன்}\ 4x+(B-x+x^2)\ \text{கோசை}\ 4x\}e^{3x}$.

## பிரிவு 39

(1) $y=Ax+Bx^3+2x^2$

(2) $y=2+Ax^{-4}\ \text{கோசை}\ (3\ \text{மட}\ x)+Bx^{-4}\ \text{சைன்}\ (3\ \text{மட}\ x)$.

(3) $y=8\ \text{கோசை}\ (\text{மட}\ x)-\ \text{சைன்}\ (\text{மட}\ x)+Ax^{-2}+Bx\ \text{கோசை}\ (\sqrt{3}\ \text{மட}x-\alpha)$.

(4) $y=4+\text{மட}\ x+Ax+Bx\ \text{மட}\ x+Cx\ (\text{மட}\ x)^2+Dx\ (\text{மட}\ x)^3$.

(5) $y=(1+2x)^2\ [\{\text{மட}\ (1+2x)\}^2+A\,\text{மட}\ (1+2x)+B]$.

(6) $y=A\ \text{கோசை}\ \{\text{மட}\ (1+x)-\alpha\}+2\ \text{மட}\ (1+x)\ \text{சைன்}\ \text{மட}\ (1+x)$.

## பிரிவு 40

(1) $y = A$ கோசை $(x - \alpha)$ ; $z = -A$ சைன் $(x - \alpha)$.

(2) $y = Ae^{5x} + Be^{3x}$ ; $z = 6\ Ae^{5x} - 7Be^{3x}$.

(3) $y = Ae^{x} + B$ கோசை $(2x - \alpha)$ ; $z = 2Ae^{x} - B$ கோசை $(2x - \alpha)$

(4) $y = e^{x} + A + Be^{-2x}$ ; $z = e^{x} + A - Be^{-2x}$.

(5) $y = A$ கோசை $(x - \alpha) + 4B$ கோசை $(2x - \beta) +$ கோசை $7x$.
$z = A$ கோசை $(x - \alpha) + B$ கோசை $(2x - \beta) - 2$ கோசை $7x$.

(6) $y = -5Ae^{3x} - 4Be^{4x} + 2e^{-x} +$ கோசை $2x -$ சைன் $2x$.
$z = Ae^{3x} + Be^{4x} + 3e^{-x} + 4$ கோசை $2x + 5$ சைன் $2x$.

## அத்தியாயம் III—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $y = (A + Bx + Cx^2)e^{x} + 2e^{3x}$ (2) $y = (A + Bx + 6x^3)\, e^{3x/2}$.

(3) $y = Ae^{-3x} + Be^{-2x} + Ce^{-x} + E + 2e^{-2x}$ (சைன் $x - 2$ கோசை $x$).

(4) $y = Ae^{x} + B$ கோசை $(2x - \alpha) - 2e^{x}$ ($4$ சைன் $2x +$ கோசை $2x$).

(5) $y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x} + (E + x + 2x^2)e^{3x}$

(6) $y = A$ சைன் $(x - \alpha) + B$ அசைன் $(3x - \beta) - 2$ அசைன் $2x$

(7) $y = (A + Bx + 5x^2)$ அகோசை $x + (E + Fx)$ அசைன் $x$.

(8) $y = 3 + 4x + 2x^2 + (A + Bx + 4x^2)e^{2x} +$ கோசை $2x$.

(9) $y = (A + Bx + 3$ சைன் $2x - 4x$ கோசை $2x - 2x^2$ சைன் $2x)e^{2x}$.

(10) $y = A$ கோசை $(x - \alpha) + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}$ கோசை $2x - \frac{3}{4}x$ கோசை $x + \frac{1}{16}$ சைன் $3x$

(11) $y = A$ கோசை $(x - \alpha) + B$ கோசை $(3x - \beta) - 3x$ கோசை $x + x$ கோசை $3x$.

(12) $y = (A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{a-1}x^{a-1})e^{ax} + a^{x}/$ (மட $a - a)^{a}$.

(13) $y = A + B$ மட $x + 2$ (மட $x)^3$. (14) $y = A + Bx^{-1} + \frac{5}{8}x^2$.

(15) $y = Ax^3 + B$ கோசை ($\sqrt{2}$ மட $x - \alpha$).

(16) $y = A + B$ மட $(x + 1) + \{$மட $(x + 1)\}^2 + x^2 + 8x$.

(17) $x = Ae^{3t} + Be^{-3t} + E$ கோசை $t + F$ சைன் $t - e^{t}$ ;
$y = Ae^{3t} + 25Be^{-3t} + (3E - 4F)$ கோசை $t + (3F + 4E)$ சைன் $t - e^{t}$

(18) $x = Ae^{2t} + Be^{-t}$ கோசை $(\sqrt{3}t - \alpha)$ ;
$y = Ae^{2t} + Be^{-t}$ கோசை $(\sqrt{3}t - \alpha + 2\pi/3)$ ;
$z = Ae^{2t} + Be^{-t}$ கோசை $(\sqrt{3}t - \alpha + 4\pi/3)$

(19) $x = At + Bt^{-1}$ ; $y = Bt^{-1} - At$.

(20) $x = At$ கோசை (மட $t - \alpha) + Bt^{-1}$ கோசை (மட $t - \beta$).
$y = At$ சைன் (மட $t - \alpha) - Bt^{-1}$ சைன் (மட $t - \beta$).

(27) (i) $(x - 1)e^{2x}$ ; (ii) $\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)$ சைன் $x + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ கோசை $x$.

(31) $y = e^{2x} + Ae^{x}$.

(32) $y =$ (சைன் $ax)/(p^2 - a^2) + A$ கோசை $px + B$ சைன் $px$.

(33) $y=Ae^{ax}+Be^{bx}+e^{bx}\int xe^{(a-b)x}$ மட $x-1\,dx.$

(35) (iii) $y=A$ கோசை $(x-\alpha)-x$ கோசை $x+$ சைன் $x$ மட சைன் $x$.

(37 )(i) $k/(2phe)$ ; (ii) பூச்சியம்.

(38) $y=E$ கோசை $nx+F$ சைன் $nx+G$ அகோசை $nx+H$ அசைன்$nx$.

## அத்தியாயம் IV

### பிரிவு 42

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (இரு பரிமாணங்களில் லப்பிளாசின் சமன்பாடு).

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$. (4) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

(5) $b\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=2abz$

(6) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$ (ஏகவினைச் சார்புகள் பற்றிய ஓயிலர் தேற்றம்.)

### பிரிவு 43

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial z}{\partial t}$ (2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0$ (3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

(4) $z=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

(5) $4z=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$. (6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

### பிரிவு 45

(1) $y=Ae^{-p^2(x+t)}$ (2) $z=A$ சைன் $px$ சைன் $pay$ (3) $z=A$ கோசை $p\,(ax-y)$.

(4) $V=Ae^{-px+qy}$ சைன் $z\sqrt{(p^2+q^2)}$ இங்கு $p$ உம் $q$ உம் நேரானவை.

(5) $V=C$ கோசை $(pqx+p^2y+q^2z)$

(6) $V=Ae^{-rt}$ சைன் $(m\pi x/l)$ சைன் $(n\pi y/l)$, இங்கு $m$ உம் $n$ உம் யாதும் நிறைவெண்கள் அத்துடன் $rl^2=\pi^2\,(m^2+n^2)$

### பிரிவு 48

(1) $\dfrac{4}{\pi}$ (சைன் $x+\frac{1}{3}$ சைன் $3x+\frac{1}{5}$ சைன் $5x+\ldots\ldots\ldots$).

(2) 2 (சைன் $x-\frac{1}{2}$ சைன் $2x+\frac{1}{3}$ சைன் $3x-\ldots\ldots\ldots$).

(3) $\dfrac{2}{\pi}\Bigg[\left(\dfrac{\pi^3}{1}-\dfrac{6\pi}{1^3}\right)$ சைன் $x-\left(\dfrac{\pi^3}{2}-\dfrac{6\pi}{2^3}\right)$ சைன் $2x+\left(\dfrac{\pi^3}{3}-\dfrac{6\pi}{3^3}\right)$ சைன் $3x\ldots\Bigg]$

(4) $\frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{2^2-1} \text{ சைன் } 2x+\frac{4}{4^2-1} \text{ சைன் } 4x+\frac{6}{6^2-1} \text{ சைன் } 6x+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$

(5) $\frac{2}{\pi}[\frac{1}{2}(1+e^{\pi}) \text{ சைன் } x+\frac{2}{5}(1-e^{\pi}) \text{ சைன் } 2x+\frac{3}{10}(1+e^{\pi}) \text{ சைன் } 3x+\frac{4}{17}(1-e^{\pi})$

$\text{சைன் } 4x+\ldots\ldots\ldots\ldots]$.

(6) $\frac{32}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \text{ சைன் }\frac{n\pi}{2}\left(4 \text{ சைன் }\frac{n\pi}{4}-n\pi \text{ கோசை }\frac{n\pi}{4}\right) \text{ சைன் } nx$

(7) (*a*) (2), (3), (6) ; (*b*) (6).

## அத்தியாயம் IV பலவினப் பயிற்சிகள்

(2) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}$ (5) $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)$.

(7) $V=V_0e^{-gx}$ சைன் $(nt-gx)$, இங்கு $g=+\sqrt{(n/2K)}$.

(12) $V=\frac{8}{\pi}(e^{-Kt} \text{ சைன் } x+\frac{1}{27}e^{-9Kt} \text{ சைன் } 3x+\frac{1}{125}e^{-25Kt} \text{ சைன் } 5x+\ldots\ldots\ldots)$

(13) $x$ ஐ $\pi x/l$ ஆற் பிரதியிடுக, $t$ யை $\pi^2 t/l^2$ ஆற் பிரதியிடுக. $8/\pi$ என்ற காரணியை $8l^2/\pi^3$ ஆற் பிரதியிடுக.

(14) $V=\frac{\pi^2}{6}-(e^{-4Kt}(\text{கோசை } 2x+\frac{1}{4}e^{-16Kt} \text{ கோசை } 4x+\frac{1}{9}e^{-36Kt} \text{ கோசை } 6x+\ldots)$

(15) $V=\frac{400}{\pi}(e^{-Kt} \text{ சைன் } x+\frac{1}{3}e^{-9Kt} \text{ சைன் } 3x+\frac{1}{5}e^{-25Kt} \text{ சைன் } 5x+\ldots)$

[0 இற்கும் $\pi$ இற்குமிடையேயுள்ள எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $V=100$ ஆயினும், ஒரு தொடர்ச்சியின்மை ஆகிய $x=0$ இல் அல்லது $\pi$ இல் $V=0$ என்பதை அவதானிக்க.]

(16) (15) இன் தீர்வில் $V$ இற்குப் பதிலாக $100-V$ ஐ இடுக.

(18) $V=\frac{4V_0}{\pi}\{e^{-K\pi^2t/4l^2} \text{ கோசை } (\pi x/2l)-\frac{1}{3}e^{-9K\pi^2t/4l^2} \text{ கோசை } (3\pi x/2l)+\ldots\}$.

(19) $y=\frac{4m}{\pi}(\text{சைன் } x \text{ கோசை } vt-\frac{1}{9} \text{ சைன் } 3x \text{ கோசை } 3vt+\frac{1}{25} \text{ சைன் } 5x \text{ கோசை } 5vt-\ldots)$.

## அத்தியாயம் V

### பிரிவு 52

(1) $(y-2x-c)(y+3x-c)=0$ (2) $(2y-x^2-c)(2y+3x^2-c)=0$

(3) $49(y-c)^2=4x^7$ (4) $(2y-x^2-c)(2x-y^2-c)=0$

(5) $(2y-x^2-c)(y-ce^{x})(y+x-1-ce^{-x})=0$

(6) $(y-e^{x}-c)(y+e^{-x}-c)=0$

### பிரிவு 54

(முற்றிய மூலிகளை மட்டுமே தந்துள்ளோம். சில சந்தர்ப்பங்களில் ஒன்றித் தீர்வுகள் உண்டு என்பது பின்னர் தெரிய வரும்.)

(1) $x=4p+4p^3$ ; $y=2p^2+3p^4+c$.

(2) $x=\frac{1}{2}(p+p^{-1})$ ; $y=\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}$ மட $p+c$.

(3) $(p-1)^2 x=c-p+$ மட $p$ ; $(p-1)^2 y=p^2(c-2+$ மட $p)+p$

(4) $x=\frac{3}{2}p^2+3p+3$ மட $(p-1)+c$ ; $y=p^3+\frac{3}{2}p^2+3p+3$ மட $(p-1)+c$

(5) $x=2$தான்$^{-1}p-p^{-1}+c$ ; $y=$ மட $(p^3+p)$

(6) $x=p+ce^{-p}$ ; $y=\frac{1}{2}p^2+c\,(p+1)e^{-p}$

(7) $x=2p+cp\,(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ ; $y=p^2-1+c\,(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

(8) $x=$ சைன் $p+c$ ; $y=p$ சைன் $p+$ கோசை $p$

(9) $x=$ தான் $p+c$ ; $y=p$ தான் $p+$ மட கோசை $p$

(10) $x=$ மட $(p+1)-$ மட $(p-1)+$ மட $p+c$ ; $y=p-$ மட $(p^2-1)$

(11) $x=p/(1+p^2)+$ தான்$^{-1}p$ ; $y=c-1/(1+p^2)$. (12) $c=1$.

## அத்தியாயம் VI

### பிரிவு 58

(1) மு. மூ. $(y+c)^2=x^3$ ; $x=0$ ஒரு கூர் ஒழுக்கு

(2) மு. மூ. $(y+c)^2=x-2$ ; த. தீ. $x=2$.

(3) மு. மூ. $x^2+cy+c^2=0$ ; த. தீ. $y^2=4x^2$

(4) மு.மூ. $y=$ சைன் $(x+c)$ ; த. தீ. $y^2=1$

(5) மு. மூ. $(2x^3+3xy+c)^2-4\,(x^2+y)^3=0$ ; $x^2+y=0$ ஒரு கூர் ஒழுக்கு

(6) மு. மூ. $c^2-12cxy+8cy^3-12x^2y^2+16x^3=0$ : $y^2-x=0$ ஒரு கூர் ஒழுக்கு.

(7) மு. மூ. $c^2+6cxy-2cy^3-x\,(3y^2-x)^2=0$ ; $y^2+x=0$ ஒரு கூர் ஒழுக்கு.

### பிரிவு 65

(1) மு. மூ. $(y+c)^2=x(x-1)\,(x-2)$ ; ஒ. தீ. $x(x-1)\,(x-2)=0$ ; $x=1-1/\sqrt{3}$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு ; $x=1+1/\sqrt{3}$ கற்பனைத் தொடுகைப் புள்ளிகளின் பரிச ஒழுக்கு.

(2) மு. மூ. $(y+c)^2=x(x-1)^2$ ; த. தீ. $x=0$ ; $x=1/3$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு ; $x=1$ ஒரு கணு ஒழுக்கு.

(3) மு. மூ. $y^2-2cx+c^2=0$ ; த. தீ. $y^2=x^2$.

(4) மு. மூ. $x^2+c\,(x-3y)+c^2=0$ ; த. தீ. $(3y+x)\,(y-x)=0$

(5) மு. மூ. $y-cx^2-c^2=0$ ; த.தீ. $x^4+4y=0$ ; $x=0$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு.

(6) மு. மூ. $y=c\,(x-c)^2$ ; $y=0$ ஒரு த. தீ. அத்துடன் அது ஒரு குறிப்பிட்ட தொகையீடும் ஆகும். $27y-4x^3=0$ ஒரு த. தீ.

(7) வகை. சம. $p^2y^2$ கோசை$^2\,\alpha-2pxy$ சைன்$^2\,\alpha+y^2-x^2$ சைன்$^2\,\alpha=0$ ; த. தீ. $y^2$ கோசை$^2\,\alpha=x^2$ சைன்$^2\,\alpha$ ; $y=0$ ஒரு பரிசவொழுக்கு.

(8) வகை. சம. $(x^2-1)p^2-2xyp-x^2=0$ ; ஒ. தீ. $x^2+y^2=1$ ; $x=0$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு.

(9) வகை. சம. $(2x^2+1)p^2+(x^2+2xy+y^2+2)\ p+2y^2+1=0$ த. தீ. $x^2+6xy+y^2=4$ ; $x=y$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு.

(10) வகை. சம. $p^2(1-x^2)-(1-y^2)=0$ ஒ. தீ. $x=\pm1$ ; $y=\pm1$.

### பிரிவு 67

(1) மு. மூ. $y=cx+c^2$ ; த தீ. $x^2+4y=0$

(2) மு. மூ. $y=cx+c^3$ ; த. தீ. $27y^2+4x^3=0$

(3) மு. மூ. $y=cx+$ கோசை $c$ ; த. தீ. $(y-x$ சைன்$^{-1}\ x)^2=1-x^2$

(4) மு. மூ. $y=cx+\sqrt{(a^2c^2+b^2)}$ ; ஒ. தீ. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

(5) மு. மூ $y=cx-e^c$; த. தீ. $y=x$ (மட $x-1$).

(6) மு. மூ. $y=cx-$ சைன்$^{-1}\ c$ ; த தீ. $\pm y=\sqrt{(x^2-1)}-$ சைன்$^{-1}\sqrt{(1-1/x^2)}$.

(7) $\frac{1}{2}\ (y-px)^2=-pk^2$ ; $2xy=k^2$, அச்சுக்களை அணுகுகோடுகளாகவுடைய ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு.

(8) $(x-y)^2-2k\ (x+y)+k^2=0$, அச்சுக்களைத் தொடும் ஒரு பரவளைவு.

(9) நாற்கூருள்ள உட்சக்கரப்போலி $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}$

## அத்தியாயம் VI—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) த. தீ. இல்லை ; $x=0$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு.

(2) $Y=PX+P/\ P-1)$.

(5) $2y=\pm\ 3x$ சூழிகளைக் குறிக்கும், $y=0$ ஒரு சூழியும் கூர்—ஒழுக்குமாகும்.

(6) மு. மூ. $xy=yc+c^2$

(7) மு. மூ. $x=yc+xyc^2$ ; த. தீ. $y+4x^2=0$ $(y=1/Y:\ \ x=1/X$ என இடுக.).

(8) (i) $p+x=3t^3$ என இட, $2x=3\ (t^3-t^2)$ ; $40y=9\ (5t^6+2t^5-5t^4)+c$ என வரும்.
(ii) மு. மூ. $y^2+4c^2=1+2cx$ ; த தீ. $x^2-4y^2+4=0$ ; $y=0$ ஒரு பரிச ஒழுக்கு.

$r=a\ \{1+$ கோசை $(\theta-\alpha)\}$, ஒரு த. தீ. ஆகிய $r=2a$ என்ற வட்டத்துள் உள்வரைந்த சம இதயப் போலிகளின் ஒரு குடும்பம். $r=0$ என்ற புள்ளி ஒரு கூர் ஒழுக்கு. அத்துடன் ஒரு. த.தீ.

## அத்தியாயம் VII

### பிரிவு 70

(1) $y=$ மட சீக $x+ax+b$

(2) $x=a+y+b$ மட $(y-b)$

(3) $ay=$ கோசை $(ax+b)$

(4) $x=$ மட $\{$சீக $(ay+b)+$ தான் $(ay+b)\}+c$.

(5) $y=x^3+ax$ மட $x+bx+c$.

(6) $y=-e^x+ae^{2x}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\dots+hx+k$.

(7) $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$ என்ற வட்டம். வளைவுஆரை $k$ இற்குச் சமனென வகையீட்டுச் சமன்பாடு எடுத்துரைக்கிறது.

(9) $\sqrt{(1+y_1^2)}=ky_2$ ; சங்கிலியம் $y-b=k$ அகோசை $\{(x-a)/k\}$.

### பிரிவு 73

(1) $y=x\,(a\,\text{மட}\,x+b)$.

(2) $y=ax\,\text{கோசை}\,(2\,\text{மட}\,x)+bx\,\text{சைன்}\,(2\,\text{மட}\,x)$.

(3) $y=x(a\,\text{மட}\,x+b)^2$

(4) $y=x^2(a\,\text{மட}\,x+b)^2$.

### பிரிவு 74

(1) $y=\pm\,\text{அகோதா}\,\dfrac{x-c}{\sqrt{2}}$.

(2) $y=-\,\text{மட}\,(1-x)$.

(3) $y=\text{சைன்}^{-1}\,x$.

(4) $t=\dfrac{1}{a}\sqrt{\left(\dfrac{h}{2g}\right)}\left\{h\,\text{கோசை}^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{h}}+\sqrt{(xh-x^2)}\right\}$

(5) (i) கூம்புவளைவு $u=\mu/h^2+(1/c-\mu/h^2)\,\text{கோசை}\,\theta$ ;
(ii) $cu=\text{கோசை}\,\theta\sqrt{(1-\mu/h^2)}$ அல்லது $\text{அகோசை}\,\theta\sqrt{(\mu/h^2-1)}$, $\mu\lesseqgtr h^2$ ஆதற்கேற்ப.

### பிரிவு 75

(1) $y=a(x^2+1)+be^{-x}$.

(2) $y=a(x-1)+be^{-x}$.

(3) $y=a(x-1)+be^{-x}+x^2$

(4) $y=1+e^{-x^2/2}$.

(5) $y=e^{2x}$.

### பிரிவு 77

(2) $y=x^3+ax-b/x$.

(3) $y=(x^2+ax)e^x+bx$.

(4) $y=e^{2x}+(ax^3+b)e^x$.

(5) $y=ax^3+bx^{-3}$

(6) $y=ax^2+b\,\text{சைன்}\,x$.

### பிரிவு 80

(1) $y=(a-x)\,\text{கோசை}\,x+(b+\text{மட}\,\text{சைன்}\,x)\,\text{சைன்}\,x$.

(2) $y=\left\{a-\text{மட}\,\text{தான்}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right\}\text{கோசை}\,2x+b\,\text{சைன்}\,2x$.

(3) $y=\{a-e^{-x}+\text{மட}\,(1+e^{-x})\}e^x+\{b-\text{மட}\,(1+e^x)\}e^{-x}$.

(4) $y=ax+bx^{-1}+(1-x^{-1})e^x$.

(5) $y=ae^x+(b-x)e^{2x}+ce^{3x}$.

## அத்தியாயம் VII—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $y=ae^{x/b}-b$.

(2) $y=a+\text{மட}\,(x^2+b^2)$.

(3) $y=\dfrac{2x^{n+1}}{(n+1)!}+2a\dfrac{x^n}{n!}+a^2\dfrac{x^{n-2}}{(n-1)!}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+-\ldots\ldots+hx+k$.

(4) $y=-3^{2-n}\text{கோசை}\{3x-\tfrac{1}{2}\pi(n-2)\}+a\text{கோசை}x+b\text{சைன்}x+cx^{n-3}+\ldots+hx+k$.

(5) $y=ax+b\,\text{மட}\,x$.

(6) $y=ae^x+b(x^2-1)e^{2x}$.

(7) $y=a\,\text{கோசை}\,nx+b\,\text{சைன்}\,nx+\dfrac{x}{n}\,\text{சைன்}\,nx-\dfrac{1}{n^2}\,\text{கோசை}\,nx\,\text{மட}\,\text{கோ}\,nx$.

(8) $y(2x+3)=a\,\text{மட}\,x+b+e^x$.

(9) (i) $y=\pm\sqrt{(ax+b)}$ ; (ii) $y=\pm\sqrt{(a\,\text{மட}\,x+b)}$.

(10) $y=(a\ \text{கோசை}\ x+b\ \text{சைன்}\ x+\text{சைன்}\ 2x)e^{x^2}$.

(12) $y=x^2z$. (14) $I=-\frac{1}{4}$.

(17) (i) $y=ae^{x^2}+be^{-x^2}-\text{சைன்}\ x^2$. ($z=x^2$ என இடுக).

(ii) $y(1+x^2)=a\ (1-x^2)+bx$. ($x=\text{தான்}\ z$ என இடுக).

(18) $\frac{d^2y}{dz^2}-2y=2\ (1-z^2)$ ; $y=\text{சைன்}^2\ x+A\ \text{அகோசை}\ (\sqrt{2}\ \text{சைன்}\ x+\alpha)$.

(19) $y=a\ \text{கோசை}\ \{2\ (1+x)e^{-x}\}+b\ \text{சைன்}\ \{2\ (1+x)e^{-x}\}+(1+x)e^{-x}$.

## அத்தியாயம் VIII

### பிரிவு 83

(1) $y=2+x+x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{15}x^5$ ; செப்பமான தீர்வு $y=2+x+x^2$.

(2) $y=2x-2\ \text{மட}\ x-\frac{1}{3}\ (\text{மட}\ x)^3$ ; செப்பமான பெறுமானம் $y=x+\frac{1}{x}$.

(3) $y=2+x^2+x^3+\frac{3}{20}x^5+\frac{1}{10}x^6$ ;
$z=3x^2+\frac{3}{4}x^4+\frac{6}{5}x^5+\frac{3}{28}x^7+\frac{3}{40}x^8$.

(4) $y=5+x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{63}x^7+\frac{1}{72}x^9$ ;
$z=1+\frac{1}{3}x^3+x^5+\frac{2}{9}x^6+\frac{1}{8}x^8+\frac{11}{324}x^9+\frac{7}{264}x^{11}$.

(5) $y$ இன் பெறுமானம் பயி. 4 இல் உள்ளதே.

### பிரிவு 87

(1) 2·19 (2) 2·192 (3) (*a*) 4·12, (*b*) 4·118

(4) வழுக்கள் 0·0018 ; 0·00017 ; 0·000013 ;
மேல் எல்லைகள் 0·0172 ; 0·00286 ; 0·000420.

### பிரிவு 89

1·1678487 ; 1·16780250 ; 1·1678449.

## அத்தியாயம் IX

### பிரிவு 95

(1) $u=\left\{1-\frac{x}{2!}+\frac{x}{4!}-\cdots\right\}=\text{கோசை}\ \sqrt{x}$ ; $v=x^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\cdots\right\}=\text{சைன்}\ \sqrt{x}$.

(2) $u=\left\{1-3x+\frac{3x^2}{1.3}+\frac{3x^3}{3.5}+\frac{3x^4}{5.7}+\frac{3x^5}{7.9}+\cdots\right\}$ ; $v=x^{\frac{1}{3}}(1-x)$.

(3) $u=\left\{1+\frac{1}{3}x+\frac{1.4}{3.6}x^2+\frac{1.4.7}{3.6.9}x^3+\cdots\right\}=(1-x)^{-\frac{1}{3}}$.

$v=x^{\frac{2}{3}}\left\{1+\frac{8}{10}x+\frac{8.11}{10.13}x^2+\frac{8.11.14}{10.13.16}x^3+\cdots\right\}$.

(4) $$u=x^{n}\left\{1-\frac{1}{4(1+n)}x^{2}+\frac{1}{4.8\,(1+n)\,(2+n)}x^{4}-\frac{1}{4.8.12\,(1+n)\,(2+n)\,(3+n)}x^{6}+\ldots\right\}.$$

$u$ விலிருந்து $v$ யைப் பெற $n$ ஐ $-n$ ஆக்குக. $u$ வை $\dfrac{1}{2^{n}\Gamma(n+1)}$ என்ற மாறிலியாற் பெருக்க வருவது $n$ வரிசையுள்ள பெசல் சார்பு எனப்படும். எது $J_n\,(x)$ என்று குறிக்கப்படும்.

### பிரிவு 96

(1) உம் (4) உம். $x$ இன் பெறுமானங்கள் யாவும். (2) உம் (3) உம் $|x|<1$.

### பிரிவு 97

(1) $$u=\left\{1+x+\frac{2}{4}x^{2}+\frac{2.5}{4.9}x^{3}+\frac{2.5.10}{4.9.16}x^{4}+\ldots\right\};$$

$$v=u\ \text{மட}\ x+\{-2x-x^{2}-\tfrac{14}{27}x^{3}\ldots\}.$$

(2) $$u=\left\{1-\frac{1}{2^{2}}x^{2}+\frac{1}{2^{2}.4^{2}}x^{4}-\frac{1}{2^{2}.4^{2}.6^{2}}x^{6}+\ldots\right\};$$

$$v=u\ \text{மட}\ x+\left\{\frac{1}{2^{2}}x^{2}-\frac{1}{2^{2}.4^{2}}(1+\tfrac{1}{2})x^{4}+\frac{1}{2^{2}.4^{2}.6^{2}}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^{6}-\ldots\right\}.$$

$u$ என்பது பூச்சிய வரிசை உள்ள பெசல் சார்பு எனப்படும். அது $J_0\,(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

(3) $$u=\left\{1-2x+\frac{3}{2!}x^{2}-\frac{4}{3!}x^{3}+\ldots\right\};$$

$$v=u\ \text{மட}\ x+\left\{2(2-\tfrac{1}{2})x-\frac{3}{2!}(2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})x^{2}+\frac{4}{3!}(2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})x^{3}-\ldots\right\}.$$

(4) $$u=x^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1.3}{4^{2}}x^{2}+\frac{1.3.5.7}{4^{2}.8^{2}}x^{4}+\frac{1.3.5.7.9.11}{4^{2}.8^{2}.12^{2}}x^{6}+\ldots\right\};$$

$$v=u\ \text{மட}\ x+2x^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1.3}{4^{2}}(1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2})x^{2}+\frac{1.3.5.7}{4^{2}.8^{2}}(1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4})x^{4}+\ldots\right\}.$$

### பிரிவு 98

(1) $$u=x^{-2}\left\{-\frac{1}{2^{2}.4}x^{4}+\frac{1}{2^{3}.4.6}x^{6}-\frac{1}{2^{2}.4^{2}.6.8}x^{8}+\frac{1}{2^{3}.4^{2}.6^{2}.8.10}x^{10}-\ldots\right\};$$

$$v = u \text{ மட } x + x^{-2}\left\{1 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2.4^2}x^4 - \frac{11}{2^2.4^2.6^2}x^6\right.$$
$$\left. + \frac{31}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}x^8 \ldots\ldots\right\}$$

(2) $u = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = x(1-x)^{-2}$;

$v = u \text{ மட } x + 1 + x + x^2 + \ldots\ldots = u \text{ மட } x + (1-x)^{-1}$

(3) $u = \{1.\ 2x^2 + 2.3x^3 + 3.4x^4 + \ldots\ldots\ldots\}$;

$v - u = u \text{ மட } x + \{-1 + x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

(4) $u = \{2x + 2x^2 - x^3 - x^4 + \frac{5}{4}x^5 \ldots\ldots\}$;

$v = u \text{ மட } x + \{1 - x - 5x^2 - x^3 + \frac{11}{8}x^4 \ldots\ldots\}$.

### பிரிவு 99

(1) $y = a_0\left\{1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 \ldots\right\} + a_1x = a_0\left\{1 - \frac{1}{2}x \text{ மட } \frac{1+x}{1-x}\right\} + a_1x.$

$$(2)\quad y = a_0\left\{1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)(n+4)}{4!}x^4 - \ldots\right\}$$
$$+ a_1\left\{x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \ldots\right\}$$

[$\frac{1}{x}$ இன் வலுக்களிலான தீர்வுக்கு அத்தியாயம் **IX** இன் இறுதியிலுள்ள பலவினப் பயிற்சியின் 7 ஆம் கணக்கைப் பார்க்க.

$$(3)\quad y = a_0\left\{1 - \frac{1}{3\cdot4}x^4 + \frac{1}{3\cdot4\cdot7\cdot8}x^8 - \frac{1}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}x^{12} + \ldots\right\}$$
$$+ a_1\left\{x - \frac{1}{4\cdot5}x^5 + \frac{1}{4\cdot5\cdot8\cdot9}x^9 - \frac{1}{4.5.8.9.12.13}x^{13} + \ldots\right\}.$$

(4) $y = a_0\left\{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{96}x^4 \ldots\right\} + a_1\left\{x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^5 \ldots\right\}.$

### பிரிவு 100

(1) $z^4\frac{d^2y}{dz^2} + z^3\frac{dy}{dz} + (1 - n^2z^2)y = 0.$ (2) $y = ax^2(1+2x)$

(3) $y = x^2(1+2x)\left\{a + b\int x^{-2}(1+2x)^{-2}e^{\frac{1}{x}}\,dx\right\}.$

(5) $ze^{-z}$ உம் $[ze^{-z} \text{ மட } z + z^2\{1 - \frac{1}{2!}(1+\frac{1}{2})z + \frac{1}{3!}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})z^2 - \ldots\}$

உம், இங்கு $z = 1/x$.

## அத்தியாயம் IX— பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $u=x^{-\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{3}{3!}x+\frac{9}{6!}x^2+\frac{27}{9!}x^3+\ldots\right\};$

$v=\left\{\frac{1}{1!}+\frac{3}{4!}x+\frac{9}{7!}x^2+\frac{27}{10!}x^3+\ldots\right\};$

$w=x^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{1}{2!}+\frac{3}{5!}x+\frac{9}{8!}x^2+\frac{27}{11!}x^3+\ldots\right\}.$

(2) $u=\left\{1+\frac{1}{1^2}x+\frac{1}{1^2.2^2}x^2+\frac{1}{1^2.2^2.3^2}x^3+\ldots\right\};$

$$v=u \text{ மட } x+2\left\{-\frac{1}{1^2}x-\frac{1}{1^2.2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 -\frac{1}{1^2.2^2.3^2}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right)x^3-\ldots\right\};$$

$$w=u\,(\text{மட } x)^2+2\,(v-u \text{ மட } x) \text{ மட } x +\left\{6x+\left(\frac{6}{1^4.2^2}+\frac{8}{1^3.2^3}+\frac{6}{1^2.2^4}\right)x^2+\ldots\right\}.$$

## அத்தியாயம் XI

### பிரிவு 113

(1) $x/a=y/b=z$; உற்பத்தியூடான நேர்கோடுகள்.

(2) $lx+my+nz=a$; $x^2+y^2+z=b$; வட்டங்கள்.

(3) $y=az$; $x^2+y^2+z^2=bz$; வட்டங்கள்.

(4) $x^2-y^2=a$; $x^2-z^2=b$; செவ்வக அதிபரவளைவு உருளைக் குடும்பங்கள் இரண்டின் இடைவெட்டுக்கள்.

(5) $x-y=a\,(z-x)$; $(x-y)^2\,(x+y+z)=b$.

(6) $x^2+y^2+z^2=a$; $y^2-2yz-z^2=b$; ஒரு கோளக் குடும்பத்துடன் செவ்வக அதிபரவளைவுக் குடும்பமொன்றின் இடைவெட்டுக்கள்.

(7) $\sqrt{(m^2+n^2)}$.

(8) அதிபரவளைவுரு $y^2+z^2-2x^2=1$.

(9) $(x^2+y^2)\,(k \text{ தான்}^{-1}\, y/x)^2=z^2r^2$.

(10) $1/x=1/y+\frac{1}{2}=1/z+2$.

### பிரிவு 114

(1) $y-3x=a$; $5z+\text{தான்}\,(y-3x)=be^{5x}$.

(2) $y+x=a$; $\text{மட}\,\{z^2+(y+x)^2\}-2x=b$.

(3) $xy=a$; $(z^2+xy)^2-x^4=b$.

(4) $y=ax$; $\text{மட}\,(z-2x/y)-x=b$.

### பிரிவு 116

(1) $x^2+y^2+z^2=c^2$ ; உற்பத்தியை மையமாகவுடைய கோளங்கள்.

(2) $x^2+y^2+z^2=cx$ $x$ அச்சிலே மையங்களை உடையனவாய் உற்பத்திமூடு செல்லும் கோளங்கள்.

(3) $xyz=c^3$.

(4) $yz+zx+xy=c^2$ உற்பத்தியை மையமாகவுடைய இயல்பொத்த கூம்புருக்கள்.

(5) $x-cy=y$ மட $z$.

(6) $x^2+2yz+2z^2=c^2$ ; உற்பத்தியை மையமாகவுடைய இயல்பொத்த கூம்புருக்கள்.

### பிரிவு 117

(1) $y=cx$ மட $z$.

(2) $x^2y=cze^z$.

(3) $(x+y+z^2)\,e^{x^2}=c$.

(4) $y\,(x+z)=c(y+z)$.

(5) $(y+z)/x+\ (x+z)/y=c$.

(6) $ny-mz=c\ (nx-lz)$ பொதுக் கோடு $x/l=y/m=z/n$.

### பிரிவு 120

(3) $z=ce^{2x}$.

(4) $x^2z+4=0$.

### அத்தியாயம் XI—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $y=ax$ ; $z^2-xy=b$.

(2) $x^3y^3z=a$ ; $x^3+y^3=bx^2y^2$.

(3) $y+z=ae^x$ ; $y^2-z^2=b$.

(4) $y=$ சைன் $x+cz/(1+z^2)$.

(5) $x^2+xy^2+x^2z=t+c$.

(6) $f\,(y)=ky$ ; $x^k=cy^2$.

(8) $dx/x=dy/2y=dz/3z$.

(9) $y+z=3e^{x-3}$ ; $y^2-z^2=3$.

(10) (i) $x^2+y^2+z^2=c\,(x+y+z)$ ;

(ii) $x^2-xy+y^2=cz$.

(iii) $y^2-yz-xz=cz^2$.

(14) $xy=ce^z$ சைன் $w$.

## அத்தியாயம் XII

### பிரிவு 123

(1) $\phi\,(x/z,\ y/z)=0$.

(2) $\phi\,(lx+my+nz,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

(3) $\phi\,\{y/z,\ (x^2+y^2+z^2)/z\}=0$.

(4) $\phi\,(x^2-y^2,\ x^2-z^2)=0$.

(5) $\phi\,\{(x-y)^2\,(x+y+z),\ (x-y)/(z-x)\}=0$.

(6) $\phi\,\{x^2+y^2+z^2,\ y^2-2yz-z^2\}=0$.

(7) $\phi\,[y-3x,\ e^{-5x}\,\{5z+$ தான் $(y-3x)\}]=0$.

(8) $\phi\,\{y+x,$ மட $(z^2+y^2+2yx+x^2)-2x\}=0$.

(9) $y^2=4xz$.

(10) $a\,(x^2-y^2)+b\,(x^2-z^2)+c=0$.

(12) $\phi\,(x^2+y^2,\ z)=0$ ; $z$ அச்சுப் பற்றிய சுற்றுப் பரப்பு.

### பிரிவு 126

(1) $\phi(z + x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_3) = 0.$

(2) $\phi(z, x_1^2x_2^{-1}, x_1^3x_3^{-1}, x_1^4x_4^{-1}) = 0.$

(3) $\phi(z - x_1x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_2x_3) = 0.$

(4) $\phi(2z + x_1^2, x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2) = 0.$

(5) $\phi(4\sqrt{z} - x_3^2, 2x_3 - x_2^2, 2x_2 - x_1^2) = 0$ ; சிறப்புத் தொகையீடு $z = 0.$

(6) $\phi\{z - 3x_1, z - 3x_2, z + 6\sqrt{(z - x_1 - x_2 - x_3)}\} = 0.$

சிறப்புத் தொகையீடு $z = x_1 + x_2 + x_3.$

### பிரிவு 129

(1) $z = (2b^2 + 1)x + by + c.$ (2) $z = x$ கோசை $\alpha + y$ சைன் $\alpha + c.$

(3) $x = ax + y$ மட $a + c.$ (4) $z = a^2x + a^{-2}y + c.$

(5) $z = 2x$ சீக $\alpha + 2y$ தான் $\alpha + c.$ (6) $z = x(1 + a) + y(1 + 1/a) + c.$

### பிரிவு 130

(1) $az = (x + ay + b)^2.$ (2) $z = \pm$ அகோசை$\{(x + ay + b)/\sqrt{(1 + a^2)}\}$

(3) $z^2 - a^2 = (x + ay + b)^2$ அல்லது $z = b.$ (4) $z^2(1 + a^3) = 8(x + ay + b)^3.$

(5) $(z + a)e^{x + ay} = b.$ (6) $z = be^{ax + a^2y}.$

### பிரிவு 131

(1) $3z = \pm 2(x + a)^{\frac{3}{2}} + 3ay + 3b.$ (2) $2az = a^2x^2 + y^2 + 2ab.$

(3) $az = ax^2 + a^2x + e^{ay} + ab.$ (4) $(2z - ay^2 - 2b)^2 = 16ax.$

(5) $z = a(e^x + e^y) + b.$ (6) $az = a^2x + a$ சைன் $x +$ சைன் $y + ab.$

### பிரிவு 133

(1) $z = -2 -$ மட $xy$ (2) $3z = xy - x^2 - y^2.$ (3) $8z^3 = -27x^2y^2.$

(4) $zx = -y.$ (5) $z = 0.$ (6) $z^2 = 1.$ (7) $z = 0.$

### பிரிவு 136

(1) $4z = -y^2.$

(4) பொதுத் தொகையீட்டின் ஒரு சிறப்பு வகை. (0, −1, 0) என்ற புள்ளியூடே செல்லும் சிறப்பியல்புகளாற் பிறப்பிக்கப்பட்ட பரப்பினைக் குறிக்கும்.

### அத்தியாயம் XII—பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $z = ax + by - a^2b$ ; ஒன்றித் தொகையீடு $z^2 = x^2y^2$

(2) $zx = ax + by - a^2b$ ; ஒன்றித் தொகையீடு $z^2 = y.$

(3) $\phi\{xy, (z^2 + xy)^2 - x^4\} = 0.$

(4) $z = 3x^3 - 3ax^2 + a^2x + 2y^4 - 4ay^3 + 3a^2y^2 - a^3y + b.$

(5) $z = ax_1 + b$ மட $x_2 + (a^2 + 2b)x_3^{-1} + c.$

(6) $z = \phi\{(x_1 + x_2)/x_3, x_1^2 - x_3^2\}.$

(7) $3a\,(x+ay+b)=(1+a^3)$ மட $z$ அல்லது $z=b$. $z=b$ இனுள் $z=0$ அடங்கும். எனினும் அது ஒரு தனிச்சிறப்புத் தீர்வுமாகும்.

(8) $z\,(1+a^2+b^2)=(x_1+ax_2+bx_3+c)^2$.

(9) $\phi\,(z \div e^{4x}\ \ z \div e^{4x2},\ z \div e^{4x3})=0$. (10) $z=ax-(2+3a+\frac{1}{2}a^2)\,y+b$.

(11) $z^3=ax^2-(2+3a+\frac{1}{2}a^2)\,y^2+b$. (12) $z^2=(1+a^2)\,x^2+ay^2+b$.

(13) $z=a$ தான் $(x+ay+b)$, அல்லது $z=b$. $z=0$ ஒரு தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு, ஆனால் அது $z=b$ இனுள்ளும் அடங்கியுள்ளது.

(14) $z^2=ax^2+by^2-3a^3+b^3$. தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு $z^2=\pm 2x^3/9-y^4/4$.

(15) $z=x+y-1\pm 2\sqrt{\{(x-1)(y-1)\}}$. (16) $z^2-xy=c$.

(17) $\phi\,(z/x,\ z/y)=0$ ; உற்பத்தியை உச்சியாகவுடைய கூம்புகள் .

(18) $x^2+y^2+z^2=2x$ கோசை $\alpha+2y$ சைன் $\alpha+c$ ; தந்த வட்டத்தில் மையங்களையுடைய கோளங்கள். பொதுத் தொகையீடு பிற தீர்வுகளைத் தரும்.

(19) $xyz=c$. (இதுவே தனிச்சிறப்புத் தீர்வு. முற்றிய தொகையீடு தொடலித் தளங்களைத் தரும்.)

(20) $(z-px-qy)\quad(1-1/p-1/q)=0$ என்ற வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு இல்லை, முற்றிய தொகையீடு தளங்களைக் குறிக்கும். பொதுத் தொகையீட்டில் அடங்கிய ஒவ்வொரு தொகையீடும், ஒரு பரமாணத்தை மாத்திரம் கொண்ட சமன்பாட்டினையுடைய ஒரு தளத்தின் சூழியை, அஃதாவது ஒரு விரிதகு பரப்பைக் குறிக்கும்.

## அத்தியாயம் XIII

### பிரிவு 139

(1) $y^2\{(x-a)^2+y^2+2z\}=b$. (2) $z^2=2ax+a^2y^2+b$.

(3) $z=ax+be^y(y+a)^{-a}$. (4) $z^2=2(a^2+1)x^2+2ay+b$.

(5) $z=ax+3a^2y+b$. (6) $(z^2+a^2)^3=9(x+ay+b)^2$.

(7) $z=x^3+ax\pm\frac{2}{3}(y+a)^{\frac{3}{2}}+b$. (8) $z=ax+by+a^2+b^2$.

### பிரிவு 141

(1) $z=a_1x_1+a_2x_2+(1-a_1^3-a_2^2)x_3+a_3$.

(2) $z=a_1x_1+a_2x_2\pm$ சைன்$^{-1}(a_1a_2x_3)+a_3$.

(3) $z=a_1$ மட $x_1+a_2$ மட $x_2\pm x_3\sqrt{(a_1+a_2)}+a_3$.

(4) $2z=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2-2(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{2}}$ மட $x_4+a_4$.

(5) $2(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{2}}$ மட $z=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+1$.

(6) $4a_1z=4a_1^2$ மட $x_3+2a_1a_2(x_1-x_2)-(x_1+x_2)^2+4a_1a_3$.

(7) $(1+a_1a_2)$ மட $z=(a_1+a_2)\ (x_1+a_1x_2+a_2x_3+a_3)$.

(8) $$z=-(a_1+a_2)x_1+(2a_1-a_2)x_2+(-a_1+2a_2)x_3$$
$$-\tfrac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\pm\tfrac{2}{3}\{x_1+x_2+x_3-2a_1^2+2a_1a_2-2a_2^2\}^{\frac{3}{2}}+a_3.$$

### பிரிவு 142

(1) $z=\pm(x_1+x_2)^3+$ மட $x_3+a$. (2) பொதுத் தொகையீடு இல்லை.

(3) $z=x_1^2+x_2^2+x_3^2+a$, அல்லது $z=x_1^2+2x_2x_3+a$.

(4) $z=a(x_1+2x_2)+b$ மட $x_3+2ab$ மட $x_4+c$.

(5) $z=a(3x_1+x_2^3-x_3^3)+b$. (6) பொதுத் தொகையீடு இல்லை.

(7) $z=a(x_1-x_4)+b(x_2-x_3)+c$ அல்லது $z=a(x_1-2x_2)+b(2x_3-x_4)+c$.

(8) $z=\varphi(3x_1+x_2^3-x_3^3)$.

(9) $z=\varphi(x_1-x_4, x_2-x_3)$ அல்லது $z=\varphi(x_1-2x_2, 2x_3-x_4)$.

## அத்தியாயம் XIII

(1) $z^2=a_1$ மட $x_1-a_1a_2$ மட $x_2+a_2$ மட $x_3+a_3$.

(2) பொதுத் தொகையீடு இல்லை.

(3) $z=a_1$ மட $x_1+a_2x_2+(a_1+a_2)x_3\pm\surd\{a_1(a_1+2a_2)x_4^3\}+a_3$.

(4) $0=a_1$ மட $x_1+a_2x_2+(a_1+a_2)x_3\pm\surd\{a_1(a_1+2a_2)z^3\}+1$.

(5) 2 மட $z=c\pm(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. (6) $z^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+c$.

(7) $4z+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$. (10) $z=\varphi(x_1x_2, x_2+x_3+x_4, x_4x_5)$.

(ii) (iii) $32=x_1^3-3x_1x_2+c$.

## அத்தியாயம் XIV

### பிரிவு 144

(1) $z=x^3+xf(y)+F(y)$ (2) $z=$ மட $x$ மட $y+f(x)+F(y)$.

(3) $z=-\dfrac{1}{x^2}$ சைன் $xy+yf(x)+F(x)$. (4) $z=x^3y^3+f(y)$ மட $x+F(y)$.

(5) $z=$ சைன் $(x+y)+\dfrac{1}{y}f(x)+F(y)$. (6) $z=-xy+f(x)+e^{xy}F(x)$.

(7) $z=(x^2+y^2)^2-1$. (8) $z=y^2+2xy+2y+ax^2+bx+c$.

(9) $z=(x^2+y^2)^2$. (10) $z=x^3y^3+y(1-x^3)$.

### பிரிவு 145

(1) $z=F_1(y+x)+F_2(y+2x)+F_3(y+3x)$.

(2) $z=f(y-2x)+F(2y-x)$. (3) $z=f(y+x)+F(y-x)$.

(4) கூம்புவளைவுரு $4x^2-8xy+y^2+8x-4y+z+2=0$.

### பிரிவு 146

(1) $z=f(2y-3x)+xF(2y-3x)$.

(2) $z=f(5y+4x)+xF(5y+4x)$.

(3) $z=f(y+2x)+xF(y+2x)+\varphi(y)$.

(4) $z(2x+y)=3x$.

### பிரிவு 147

(1) $z=x^4+2x^3y+f(y+x)+xF(y+x)$.

(2) $z=6x^2y+3x^3+f(y+2x)+F(2y+x)$.

(3) $V=-2\pi x^2y^2$.

### பிரிவு 148

(1) $z=e^{x+2y}+f(y+x)+xF(y+x)$.

(2) $z=x^2(3x+y)+f(y+3x)+xF(y+3x)$.

(3) $z=-x^2$ கோசை $(2x+y)+f(y+2x)+xF(y+2x)+\varphi(y)$.

(4) $z=xe^{x-y}+f(y-x)+F(2y+3x)$.

(5) $V=(x+y)^3+f(y+ix)+F(y-ix)$.

(6) $z=2x^2$ மட $(x+2y)+f(2y+x)+xF(2y+x)$.

### பிரிவு 149

(1) $z=x$ சைன் $y+f(y-x)+xF(y-x)$.

(2) $z=x^4+2x^3y+f(y+5x)+F(y-3x)$.

(3) $z=$ சைன் $x-y$ கோசை $x+f(y-3x)+F(y+2x)$

(4) $z=$ சைன் $xy+f(y+2x)+F(y-x)$.

(5) $z=\frac{1}{2}$ தான் $x$ தான் $y+f(y+x)+F(y-x)$.

(6) $y=x$ மட $t+t$ மட $x+f(t+2x)+F(t-2x)$.

### பிரிவு 150

(1) $z=f(x)+F(y)+e^{2x}\varphi(y+2x)$.

(2) $z=e^{-x}\{f(y-x)+xF(y-x)\}$.

(3) $V=\sum Ae^{h(x+ht)}$.

(4) $z=f(y+x)+e^{-x}F(y-x)$.

(5) $x=\sum Ae^{h(x+hy)}+\sum Be^{k(x+2ky)}$.

(6) $V=\sum Ae^{n}$ $(x$ கோசை $\alpha+y$ சைன்$)$

(7) $z=e^{x}\{f(y+2x)+\sum Ae^{k(y+2kx)}\}$.

(8) $z=1+e^{-x}\{f(y+x)^2-1\}$.

### பிரிவு 151

(1) $z=\frac{1}{2}e^{2x-y}+e^{x}f(y+x)+e^{2x}F(y+x)$.

(2) $z=1+x-y-xy+e^{x}f(y)+e^{-y}F(x)$.

(3) $z=\frac{1}{82}\{$சைன் $(x-3y)+9$ கோசை $(x-3y)\}+\sum Ae^{k(y+kx)}$.

(4) $z=x+f(y)+e^{-x}F(y+x)$.

(5) $y=-e^{x}+$ கோ $\alpha+z$ தான் $\alpha+\sum Ae^{x}$

(6) $z=e^{3x}\{x^2$ தான் $(y+3x)+xf(y-3x)+F(y+3x)\}$.

### பிரிவு 152

(1) $y^2r-2ys+t=p+6y.$ (2) $pt-qs=q^3.$

(3) $r+3s+t+(rt-s^2)=1.$

(4) $pq(r-t)-(p^2-q^2)s+(py-qx)(rt-s^2)=0.$

(5) $2pr+qt-2pq(rt-s^2)=1.$ (6) $qr+(zq-p)s-zpt=0.$

### பிரிவு 154

(1) $z=f(y+\text{சைன்}\ x)+F(y-\text{சைன்}\ x).$ (2) $z=f(x+y)+F(xy).$

(3) $y-\psi(x+y+z)=\varphi(x)$, அல்லது $z=f(x)+F(x+y+z).$

(4) $z=f(x+\text{தான்}\ y)+F(x-\text{தான்}\ y).$

(5) $z=f(x^2+y^2)+F(y/x)+xy.$

(6) $y=f(x+y+z)+xF(x+y+z).$ (7) $3z=4x^2y-x^2y^4-6\ \text{மட}\ y-3.$

### பிரிவு 157

(1) $p+x-2y=f(q-2x+3y)\ ;\ \lambda=-\frac{1}{2}$

(2) $p-x=f(q-y)\ ;\ \lambda=\propto$ (3) $p-e^x=f(q-2y)\ ;\ \lambda=\propto.$

(4) $p-y=f(q+x)\ ;\ p+y=F(q-x)\ ;\ \lambda=\pm1.$

(5) $p-y=f(q-2x)\ ;\ p-2y=F(q-x)\ ;\ \lambda=-1$ அல்லது $-\frac{1}{2}.$

(6) $px-y=f(qy-x)\ ;\ \lambda=-x$ அல்லது $-y.$

(7) $zp-x=f(zq-y)\ ;\ \lambda=z/pq.$

### பிரிவு 158

(1) $z=ax+by-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2+c\ ;$

$z=\frac{1}{2}x^2(1+3m^2)+(2+3m)xy+nx+\phi(y+mx)$

$=2xy-\frac{1}{2}(x^2+3y^2)+nx+\psi(y+mx)$

(2) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+ax+by+c\ ;\quad z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+nx+\psi(y+mx).$

(3) $z=e^x+y^2+ax+by=c\ ;\quad z=e^x+y^2+nx+\psi(y+mx).$

(4) $x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\ ;\quad y=\frac{1}{2}\{\psi'(\beta)-\phi'(\alpha)\}\ ;\quad z=xy+\frac{1}{2}\{\phi(\alpha)-\psi(\beta)\}+\beta y.$

(5) $x=\beta-\alpha;\ y=\varphi'(\alpha)-\psi'(\beta)\ ;\quad z=xy-\phi(\alpha)+\psi(\beta)+\beta y.$

(6) $z+y/m+mx-n\ \text{மட}\ x=\phi(x^my)$ ; மற்ற முறை தவறி விடுகிறது.

(7) $z^2=x^2+y^2+2ax+2by+c\ ;\quad z^2=x^2+y^2+2nx+\psi(y+mx).$

(8) $2z=y^2-x^2.$

## அத்தியாயம் XIV பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $z=x^2y^2+xf(y)+F(y).$ (2) $z=e^{x+y}+f(x)+F(y)$

(3) $yz=y\ \text{மட}\ y-f(x)+yF(x).$

(4) $z=f(x+y)+xF(x+y)-\text{சைன்}\ (2x+3y).$

(5) $z=f(y+\text{மட}\ x)+xF(y+\text{மட}\ x)$.

(6) $z=x+y+f(xy)+F(x^2y)$.

(7) $z=\text{மட}(x+y).\ f(x^2-y^2)+F(x^2-y^2)$.

(8) $4z=6xy-3x^2-5y^2+4ax+4by+c$;

$4z=6xy-3x^2-5y^2+2nx+2\psi(y+mx)$.

(9) $3z=3c\pm2(x+a)^{\frac{3}{2}}\pm2(y+b)^{\frac{3}{2}}$.

(10) $mz+\text{சைன்}\ y+m^2\ \text{சைன்}\ x-mnx=m\phi(y+mx)$.

(11) $2x=\alpha-\beta$ ; $2y=\psi'(\beta)-\phi'(\alpha)$ ;

$2z=3x^2-6xy-7y^2+\phi(\alpha)-\psi(\beta)+2\beta y$.

(12) $z=x^3+y^3+(x+y+1)^2$

(13) $z=x^2-xy+y^2$.

(20) $px+qy=f(p^2+q^2)$ ; $py-qx=F(q/p)$.

## முழு நூலிலும் பலவினப் பயிற்சிகள்

(1) $(x^2-y^2)^2=cxy$.

(2) $y=x^2+ce^{-x^2}$.

(3) $2\ \text{சீக}\ x\ \text{சீக}\ y=x+\text{சைன்}\ x\ \text{கோசை}\ x+c$.

(4) $(xy+c^2=4(x^2+y)\ (y^2-cx)$.

(5) $1+xy=y(c+\text{சைன்}^{-1}x)\sqrt{(1-x^2)}$.

(6) $y=(A-\frac{1}{4}x)\ \text{கோசை}\ 2x+B\ \text{சைன்}\ 2x$.

(7) $y=\frac{x^2}{5}-\frac{6x}{25}+\frac{28}{125}+\frac{1}{16}\ xe^x\ (\text{சைன்}\ 2x-\text{கோசை}\ 2x)+Ae^{-x}+Be^x\ \text{கோசை}$
$(2x+\alpha)$.

(8) $y=A+Bx+Cx\ \text{மட}\ x+\text{மட}\ x+\frac{1}{2}x\ (\text{மட}\ x)^2+\frac{1}{2}x^2$.

(9) $y+\text{சீக}\ x=c\ \text{தான்}\ x$.

(10) $x=Ae^{2t}+Be^{-2t}-\frac{2}{5}\ (\text{கோசை}\ t-\text{சைன்}\ t)$ ; $y=Ae^{2t}-3\ Be^{-2t}-\frac{6}{5}\ \text{கோசை}\ t$.

(11) $x^{2/3}=(y-1)^{\frac{2}{3}}+c$ ; ஒ.தீ. $y=1$

(12) $y=a\ \text{கோசீக}\ (b-x)$.

(13) $y=\left(A+Bx+\frac{x^2}{64}\right)\text{சைன்}\ 2x+\left(E+Fx-\frac{x^3}{96}\right)\text{கோசை}\ 2x$.

(14) $2xy=3x^2+c$.

(15) $z+xy=c(x+y-xy)$.

(16) $x^3+y^3+z^3=cxyz$.

(17) $z=f(xy)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$.

(18) $(x-y)e^{(x-z)/(x-zy)}=f\{(x-3y)+z)/(x-y)^2\}$.

(19) $(z+x)^2=(z+2y)f(y/x)$.

(20) $z=ax+by+a^2+b^2$ ; ஒன்றித் தொகையீடு $4z+x^2+y^2=0$.

(21) $z=e^xf(x-y)+F(y)$.

(22) $z=ax^2+by+4a^2$ ; தனிச்சிறப்புத் தொகையீடு $16z+x^4=0$.

(23) $z=f(x+y)+F(x-y)+\frac{1}{6}(x^3+y^3)$.

(24) $z=xf(y)+yF(x)$.

(25) $cz=(x+a)\ (y+b)$.

(26) $z=\frac{1}{2}\ xy+f(y/x)+xF(y/x)$.

(27) $zf(z+x)+F(z+u)$

(28) $y(x+c)=c^2x$; தனிச்சிறப்பு தீர்வுகள் $y=0$ உம் $y+4x^2=0$ உம்.

(29) $ay^4=(x+b)^5$. (30) $y=A$ கோசை $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)+B$ சைன் $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)$.

(31) $x^2+y^2+z^2=2$ ($x$கோசை $\alpha+y$ சைன் $\alpha+c$). (32) $y=e^x-\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$.

(33) $x=e^{-\kappa t}$ ($a$ கோசை $\lambda t+b$ சைன் $\lambda t$) $+C$ கோசை $(pt-\alpha)$, இங்கு $C=A/\sqrt{\{(\kappa^2+\lambda^2-p^2)^2+4\kappa^2p^2\}}$, தான் $\alpha=2\kappa p/(\kappa^2+\lambda^2-p^2)$; அத்துடன் $a$ யும் $b$ யும் எதேச்சை மாறிலிகள்.

(34) $y=A$ கோசை (சைன் $x$) $+B$ சைன் (சைன் $x$).

(35) (i) $F=A \quad (r+z)+B$;

(ii) $\phi=A\displaystyle\int e^{-\xi^2/4a^2}\,d\xi+B$; $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{A}{\sqrt{t}}e^{-x^2/4a^2t}$.

(36) $V=A\left\{\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{7}(3z^2-r^2)+\dfrac{1}{35}(35z^4-30z^2r^2+3r^4)\right\}$ இங்கு $r^2=x^2+y^2+z^2$.

(39)
$$u=C\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^4}{4!a^4}+\frac{x^5}{5!a^5}+\ldots\right)\text{அகோசை } t+C\left(\frac{x^2}{2!a^2}+\frac{x^3}{3!a^3}+\frac{x^6}{6!a^6}\right.$$
$$\left.+\frac{x^7}{7!a^7}+\ldots\right)\text{அசைன் } ht.$$

(41) $y-x=c(xy-1)e^{-x}$.

(42) $y=(1+x)^{a-b}(1-x)^{a+b}\left\{A+B\displaystyle\int(1+x)^{-a+b-1}(1-x)^{-a-b-1}dx\right\}$ $2a$ ஒரு நிறை வெண் ஆயின், $z=(1+x)/(1-x)$ என இடுதலால், தொகையீட்டைக் கணிக்கலாம்.

(43) (i) $y=(1-x^2)(A+B$ மட $x)$; (ii) $y=(1-x^2)(x+A+B$ மட $x)$.

(44) $(1-x^2)y=(a+b\displaystyle\int e^{-x^2}(dx)e^{\frac{1}{2}x^2}$. [மட $y=\displaystyle\int(u-\tfrac{1}{2}P)\,dx$ என இடுக. $u$ விலான வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு $u=x$ ஒரு தீர்வாகும்.]

(45)
$$f(x)=1-\frac{(2n-2)}{(2n-1)}\frac{x^2}{2!}+\frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\frac{x^4}{4!}-\ldots\ldots;$$
$$\phi(x)=x-\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-2)}\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$$

(46) $y=Ax^5+Bx^3+E(x^2+1)$, $E$ யை $C/6$ ஆற் பிரதியிடு.

(47)
$$u=1+\frac{c}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{c\{c+2(b+1)\}}{4!}\left(\frac{x}{a}\right)^4$$
$$+\frac{c\{c+2(b+1)\}\{c+4(b+3)\}}{!}\left(\frac{x}{a}\right)^6+\ldots\ldots;$$
$$v=\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{\{c+b\}}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{\{c+b\}\{c+3(b+2)\}}{5!}\left(\frac{x}{a}\right)^5+\ldots\ldots;$$

இரண்டும் $|x|=|a|$ என்ற வட்டத்துள் ஒருங்கும்.

(49) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2}=(2-x^2)y.$

(50) $\dfrac{1}{Q}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right\}$ என்பது $x$ மட்டும் கொண்ட சார்பாகும்.

$$x^3y-ax^2y^2=c.$$

(51) $x^2+y^2+2bxy=2ax$

(52) $uve^{w}=a\int v^2e^{w}dx+b.$ இங்கு $V=Q/P$ ; $w=\int vdx.$

(53) $Pn$ கோதா $(nx+\propto)+Q=n^2$—.

(54) $y\,(1-x)=A\,(3-2x)e^{2x}+B(1-2x)e^{-2x}.$

(56) $x^3+yz=c(y+z).$

(57) $y=Ae^{-2x}+e^{x}\,(B$ கோசை $x\sqrt{3}+C$ சைன் $x\sqrt{3})$
$+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{24646}\;e^{-2x}\{157x\,(6$ கோசை $x+11$ சைன்$x)+3\,(783$ கோசை $x-56$ சைன் $x)\}.$

(58) $y=(3+4x^2)\{A+B\int(3+4x^3)^{-2}e^{-\frac{3}{8}x^2}dx\}.$

(59) $z^4(x+y)^4\,(x+y^2+z^2)=c(x^2+y^2-z^2).$ (60) $xz=c(y+z).$

(62) (i) $y=-\dfrac{1}{ua_2\,(x)}\;\dfrac{du}{dx}$ ; (ii) $y-\frac{1}{2}=\dfrac{x\,(c+\text{தான் } r)}{1-c\text{ தானா } x}$

[முறையை அறிய பயி. 41 பார்க்க.]

(65) ஒரு துணிக்கை $P$ யானது, ஆரைக்காவி $OP$ யிற்கு விகித சமமானதும், $OP$ யிற்குச் செங்குத்தானதும், ஒரு நிலைத்த கோடு $OK$ இற்குச் செங்குத்தானதுமான வேகத்துடன் இயங்குமாயின், அது $OK$ யை அச்சாகவுடைய ஒரு வட்டத்தை மாறுக் கதியுடன் வரையும்.

(67) $r^2$ சைன் $2\,(\theta+\alpha)=1$ ; தனிச்சிறப்புத் தீர்வு $r^4=1.$

(68) $y^2-x^2=cx+2a^2\pm a\sqrt{(4a^2-c^2)}$ ; ஒன்றித் தீர்வு $y^2-x^2=\pm 2ay.$

(70) $4a(y-c)=(x-c)^2$ ; தனிச் சிறப்புத் தீர்வு $y=x-a.$

(71) $x+a=c$ கோசை $\phi+c$ மட தான் $\frac{1}{2}\phi.$ (72) $a$ கோசை $\theta+b$ கோசை $\theta'=k.$

(74) $2cy=(x+c)^2$ ; தனிச் சிறப்புத் தீர்வு $y\,(y-2x)=0.$

(75) $x+py+ap^2=0$ ; $(y+ap)\sqrt{(p^2+1)}=c+a$ அசைன் $p,$

$$x\sqrt{(p^2+1)}+p\,(c+a\text{ அசைன் }^{-1}p)=0.$$

தனிச் சிறப்புத் தீர்வு இல்லை. $p-$ பிரித்துக் காட்டி $y^2=4ax$ கூம்பிகளின் கூர் ஒழுக்கைக் குறிக்கும்.

(77) $y=ax,\ z=b+\sqrt{(x^2+y^2)}$ ; $z=\sqrt{(x^2+y^2)}+f(y/x).$

உப தொகையீடுகள் $z$ அச்சினூடான ஒரு தளக் குடும்பத்தையும், $z$ அச்சை அச்சாக வுடைய செவ்வட்டக் கூம்புக் குடும்பம் ஒன்றையும் குறிக்கும் ; பொதுத் தொகையீடானது தளங்களும் கூம்புகளும் இடைவெட்டும் முடிவில் தொகைக் கோட்டுச் சோடிகளை ஒவ்வொன்றும் உடையதாகிய பரப்புக்களின் குடும்பமொன்றைக் குறிக்கும்.

(78) $x^2+y^2+z^2=f\{x^2+y^2+(x+y)^2\}$ ; $x^3+y^3+z^3=c^3$ ; $z^3=xy+c$

(79) $(2x-y)^7=c^5z\,(x+2y)$.

(80) $(ax-by)/(z+c)=f\{(ax+by)/(z-c)\}$.

(81) (i) $I=E/R+Ae^{-Rt/L}$ ; (ii) $A=I_0-E/R$ ; (iii) $I=E/R$.

(82) $I=a$ கோசை $(pt-\varepsilon)+Ae^{-Rt/L}$, இங்கு $a=E/\sqrt{(R^2+L^2p^2)}$,

தான் $\varepsilon=Lp/R$, இங்கு $A$ எதேச்சையானது.

(83) $Q=a$ சைன் $(pt-\varepsilon)$,

இங்கு தான் $\varepsilon=(CLp^3-1)\,pCR$ ; அத்துடன்,

$a=EC/\sqrt{\{(Cp^2-1)^2+p^2C^2R^2\}}$.

(85) $X=A$ கோசை $(t-\alpha)+B$ கோசை $(3t-\beta)$; $y=2A$ கோசை $(pt-\alpha)$.

$-5B$ 5கோசை $(3t-\beta)$.

(86) $a$யும் $b$யும் $\lambda^2\,(LN-M^2)+\lambda\,(RN+LS)+RS=0$ இன் மூலங்களாகும்.

(91) $x=A$ கோசை $(pt-\alpha)+B$ கோசை $(qt-\beta)$, $y=A$ சைன் $(pt-\alpha)$

$-B$ சைன் $(qt-\beta)$.

இங்கு $2p=\sqrt{(4c^2+K^2)}+K$, $2q=\sqrt{(4c^2+K^2)}-K$.

(92) $\dfrac{d^2z}{dt^2}+(a+b)\dfrac{dz}{dt}+abz=abc$.

(93) $P=\sqrt{(n^2-2\mu^2)}$ குறிப்பிட்ட தொகையீட்டின் வீச்சத்தை உயர்வாக்கும், $2\mu^2$ ஆனது $n^2$ இலும் குறைவாயிருந்தால்.

(94) $x=Ae^{-kt}$ கோசை $(pt-\epsilon)$, இங்கு $p=\sqrt{(n^2-k^2)}$.

(97) $\phi=\frac{1}{2}\,Va^3r^{-2}$ கோசை $\theta$. (98) $y$ சைன் $(pb/c)=A$ சைன் $(px/c)$ கோசை$(pt+\alpha)$.

(100) $\phi=C$ அகோசை $m\,(y+h)$ கோசை $(mx-nt)$.

(115) (vi) $u_x=A\,(-2)^x+B\,(-\frac{1}{2})^x$ ;

(viii) $u_x=2^x\left(P \text{ கோசை } \dfrac{\pi x}{3}+Q \text{ சைன் } \dfrac{\pi x}{3}\right)$;

(x) $u_x=A\,(-9)^x+B+\dfrac{2x}{11}$ ;

(119) $u=\dfrac{K}{m}$ கோசை $\dfrac{mx}{c}$ சைன் $mt$.

(120) $z=e^{-y}$ சைன் $x$.

**மாற்று விடை வடிவங்கள் பற்றிய குறிப்பு.**

பல பயிற்சிகளில், செய்கை முறையைச் சிறிது வேறாக்க, முற்றிய மூலி வித்தியாசமான வடிவத்திலே கிடைக்கக் கூடும். இவ்வாறு, பிரிவு 70, பயி. 3 இல், தரப்பட்ட விடை $ay=$ சைன் $(ax+b)$ எனவோ $ay=$ கோசை $(ax+b)$ ஆனால் மாணவனுக்கு அந்த விடை $ay=$ அசைன் $(ax+b)$ எனவோ வரலாம். முதல் வடிவத்தில் $b$ யை $b-\frac{1}{2}\pi$ ஆற் பிரதியிட இரண்டாம் வடிவம் எமக்குக் கிடைக்கும். இரண்டாம் வடிவத்தில் $a$ யையும் $b$ யையும் முறையே $ai$ யாலும் $bi$ யாலும் பிரதியிட்டு, $i$ யினாலே பிரிக்க, மூன்றாம் வடிவம் கிடைக்கும். $a$ யை $\frac{1}{a}$ ஆற் பிரதியிட வேறு வடிவங்கள் கிடைக்கும்.

பிரிவு 116, பயி. 4 இன் விடையில் $c^2$ இற்குப் பதிலாக, $-c^2$ ஐயோ, $c$ யையோ, $-c$ யையோ இடலாம். பொதுவாக, எதேச்சை மாறிலிக்கு மெய், கற்பனே, சிக்கல் ஆகிய சகல பெறுமானங்களும் இருக்கலாமெனக் கொள்ளல் வேண்டும். அம்மாறிலியை, புதிய எதேச்சை மாறிலி ஒன்றின் எச்சார்பினுலேனும் பிரதியிடலாம்.

தொகையீட்டுச் சோடிகள் தேவைப்படும்போது, மாற்றுச் சோடிகளும் பெரும்பாலும் பெறப்படுதல் இயல்பு. இவ்வாறு, பிரிவு 113 இன் பயி. 5, 6 என்பவற்றின் விடைகளுக்குப் பதிலாக, முறையே, $y-z=a\,(y-x)$, $(y-z)^2\,(x+y+z)=b$ எனவும் $x^2+2y^2-2yz=b$ எனவும் இடலாம். இந்தப் பயிற்சித் தொடையில் $u=a$, $v=b$ என்ற சோடிக்குப் பதிலாக, $f\;(u,v)=a$ எனவும், $F(u,v)=b$ எனவும் இடலாம். இங்கு $f$ உம் $F$ உம் $u$, $v$ என்பவற்றின் எவையேனுமிரு சாராச் சார்புகள்.

பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் பற்றிய பயிற்சிகள் பலவற்றுக்கு மாற்று விடைகள் காணலாம். உ–ம். பிரிவு 42 பயி. 3 இற்கு $\frac{\partial z}{\partial x}$ சைன் $\propto=\frac{\partial z}{y\partial}$ கோசை $\alpha$; பிரிவு 139, பயி. 2 இற்கு $z^2(a-y)^2=(x+b)^2$.

**எல்லைத் தீர்வுகள் பற்றிய குறிப்பு.**

முற்றிய மூலிகளைத் தவிர, சில வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளுக்கு எல்லைத் தீர்வுகள் (தனிச் சிறப்புத் தீர்வுகள் அல்ல) உண்டு. ஓர் எதேச்சை மாறிலியை முடிவிலியாக அனுமதிப்பதால் இவை கிடைக்கும். உதாரணமாக பிரிவு 14, பயி. 4 இற்கு முற்றிய மூலி $x-y+c=$ மட$(x+y)$. $c\to-\infty$ ஆகும்போது $x+y=0$ என்ற எல்லைத் தீர்வு கிடைக்கும். அவ்வாறே பிரிவு 70 இன் பயி. 2 இற்கு முற்றிய மூலி $x=a+y+b$ மட $(y-b)$. $a/b\to+\infty$ என எடுக்க $y=b$ என்ற எல்லைத் தீர்வு கிடைக்கும்.

அத்தகைய தீர்வுகள் பற்றியும், அவற்றின் கேத்திரகணித வகைக் குறிப்புப் பற்றியும் "வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் 'முற்றிய' மூலிகளின் முற்றின்மை" என்ற எனது கட்டுரையில் ஆராய்ந்துள்ளேன். (*Mathematical Gazette*, 1939, ப. 49). மொத்த வகையீட்டுச் சமன்பாடு $Pdx+Qdy+Rdz=0$ ஒன்றித் தீர்வுகள் பற்றிய சில புதிய பேறுகளும் அங்கு உண்டு.

# சுட்டி

b