பாடசாலைகட்குரிய புதிய

கேத்திர கணிதம்

ஆக்கியோன்

கிளமென்ட் வி. தியுரல், எம். ஏ.

தமிழாக்கம்

இ. இரத்தினம்

1958

அரசமொழித் திணைக்கள வெளியீடு ஒன்றாகிய இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்தில் பதிப்பிக்கப்பட்டது

பாடசாலைகட்குரிய புதிய

கேத்திர கணிதம்

ஆக்கியோன்

கிளமென் வி. தியுரல், எம். ஏ.

தமிழாக்கம்

இ. இரத்தினம்

1958

அரசமொழித் திணைக்கள வெளியீட்டுக் கிளையால
இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்தில் பதிப்பிக்கப்பட்டது

சி. பெல் மக்கள் வரையறைக் கம்பனியாரின் இசைவுபெற்று
மொழிபெயர்க்கப்பட்டது

தமிழாக்கவுரிமை இலங்கை அரசினர்க்கே

முதற்பதிப்பு 1958

2 —J. N. B 61929-5,008 (12/56)

முகவுரை

ஆக்கியோனின் ஆரம்ப கேத்திரகணிதம் வெளியாகிப் பதினைந்து ஆண்டுகள் கழிந்தன. முழுமையும் புதிதான இந்நூலை எழுதுவதில் ஆரம்பகேத்திர கணிதம் வெளியானபின் பெற்றுள்ள அனுபவமும் கிடைத்த தெரிப் புரைகளும் இப் பொருளினை ஆய்ந்து எழுதுவதற்கு நல்லதொரு செவ்வியை அளித்தன. இன்னும் கேத்திர கணிதத்தைப் போதிக்கும் முறை பற்றிய கணித சங்கத்தின் இரண்டாம் அறிக்கையும் நன்கு பயன்படுத் தப்பட்டது. இதைப் பின்னர் அறிக.

இந்நூலானது முதற் பருவத்திலிருந்து பாடசாலைத் தகவு, அதுபோன்ற தெரிவுகள் ஆகிய வகுப்புக்கள் வரை வேண்டிய கேத்திரகணிதப் பாடமுறை யினை உடையது. வகுப்புப் போதனைகளுக்கும் மாணவரின் தனிப் பயிற்சிக்கும் உதவக் கூடிய ஒரு நூலை ஆக்குதலே ஆசிரியரின் நோக்கமாகும். பிற் காணும் படிப்படியான நிலைகளைக் கொண்ட ஒவ்வொரு கேத்திரகணித உண்மைத் தொகுப்புக்களையும் ஆய்ந்து நன்முறையில் விரித்துரைப்பதே இங்கு கைக்கொண்ட முறையாகும்.

(1) உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

இவை பல வரிப் படங்களால் எடுத்து விளக்கப்பட்டுள்ளன. இம்முறை, கரும்பலகையின் வேலையை எளிதாக்குவதின் பொருட்டேயாம்.

வாய்முறைப் பயிற்சி தேவையான உண்மை அறிவினை மாணவர்க்கு நன்கு அளிக்கும். பின்னர், தேற்றங்களின் முறைமையான நிறுவல் களுக்கு வேண்டிய நியாயங்களை இது அறிமுகப்படுத்துகின்றது ; படுத்தி, அறிகணக்குக்களைத் தீர்ப்பதற்குரிய வழிவகைகளில் பயிற்சி அளிக்கின்றது. தேவையானபொழுது தரவைகள் எண் கொண்ட கேள்விகளைக் கொண் டிருக்கும்.

(2) எண்கொண்ட உதாரணப் பயிற்சிகள்

உரையாடித் தெளிவதினால் உய்த்தறிந்து உண்மைகளைப் பயன்படுத்தும் பயிற்சியை இது அளித்து இவ்வுண்மைகளை நன்கு உணர வைக்கின்றது.

(3) ஒத்த தேற்றங்களின் முறைமையான நிறுவல்கள்

ஆரம்ப வேலை இந்நிறுவல்களை விரைவிற் பயில உதவுகின்றது. தேர்வின் பொருட்டு தேற்றங்களை எழுதும் பயிற்சி இன்றியமையாதது. ஆயினும், இப் பயிற்சியை ஒவ்வொரு தொகுதியிலும் உள்ள முக்கிய தேற்றத்தை எழுதுவதோடு நிறுத்துதல் நன்று. மற்றைத் தேற்றங்களை எளிய அறி கணக்குக்கள் எனக் கொள்ளல் வேண்டும்.

(4) அறிகணக்குப் பயிற்சி

ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும் உள்ள ஆரம்ப உதாரணங்கள் அத்தொகுதியின் பண்புகளை நேராகப் பயன்படுத்தும் இயல்புடையனவாயும் எளியனவாயும் உள்ளன. கடினமான உதாரணங்களுக்குச் சில உதவி அளிக்கப்பட்டுள்ளன. ஆனால், வழிக்குரிய குறிப்புக்களும் பயனுள்ள அமைப்புக்களுக்குரிய தெரிப்புரைகளும் வாசகத்தில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

நூலின் வாசகத்தில் உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள் மிகுந்து தோன்றுவது என்னை எனின், தேற்றங்களின் முறைமையான நிறுவல்களைக் கற்பதை இது எளிதாக்குவதாலும், மாணவரை அடிப்படையான உண்மைகளை உளங்கொள்ளச் செய்தும் பன்முறை வேண்டப்படும் பலவகை அமைப்புக்களை அவர்க்குக் காட்டியும் அவரைப் பிரயோகிக்க வேண்டிய நியாயவகைகளுடன் பயிலச் செய்தும் அறிகணக்குக்களைச் செய்யும் ஆற்றலை வளம்படுத்துவதற்கு இவை நன் முறையாகும் என்னும் ஆக்கியோனின் கடைப்பிடியினாலும் என்க. இவ்வுதாரணங்கள் "வாய்முறை" யானவை எனக் கொடுக்கப்பட்டிருப்பினும் மாணவரைக் கொண்டு ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் விடைகளை எழுதுவித்தல் நன்று.

ஒவ்வொரு பயிற்சியிலும் உள்ள உதாரணங்களை மூன்று தலைப்பில் வகுத்துள்ளோம் :

(அ) **பொதுப் பாட முறை** : வெறும் எண்கள்—

இவ்வுதாரணங்கள் இன்றியமையா வகைகளை அடக்கியவை ; நன்கு தரப்படுத்தப்பட்டவை. அவற்றுள் பெரும்பாலானவற்றை எல்லா மாணாக்கரும் செய்தல் வேண்டும்.

(ஆ) **மிகுதிப் பயிற்சி** : பவ்வடைப்புக் குறிகளால் அடைக்கப்பட்டவை.— வேண்டுமெனில் இவை கூடிய பயிற்சியைத் தரும்; (அ) இல் உள்ளனவற்றை ஒத்தவை. எடுத்துக் கொண்ட புலத்தை மீறியவை அல்ல.

(இ) **உயர்பாட முறை** : புள்ளிகொண்ட எண்கள்—

இவை வகுப்பில் மேலாக நிற்கும் மாணவர்க்கு.

தாம் எண்ணியவாங்கு கணக்குக்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு விரும்பும் ஆசிரியரின் வாய்ப்பிற்காக இப் பகுதிகள் வேறுவேறு பிரிவுகளாக அச்சிடப்படவில்லை. ஆயினும் உதாரணங்கள் கடுமையின் முறை நோக்கி ஒழுங்கு படுத்தப்பட்டிருக்கின்றன.

நூலின் மற்றை இயல்புகள் வருமாறு :—

(i) பயிற்சிகளில் பரந்த முறையில் வரிப்படங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இது மாணவரிடினைக் குறைத்து வாய்முறைப் பயிற்சிக்குப் பின்னும் வாய்ப்பை அளிக்கின்றது.

(ii) கேத்திரகணித உண்மைகளை, விளக்கத்திற் குதவுமெனின், திரிகோண கணித வடிவிற் கூறல்: உதாரணம்: பரப்புக்கள், பைதகரசின் தேற்றத்தின் விரிவு ஆகியவை.

(iii) பாடமுறை முழுவதிலும் திண்மக் கேத்திரகணிதப் பிரயோகம்.

(iv) வழக்கத்திலும் கூடியமுறையில் ஒழுக்கினைப் பற்றிய நிறைவாய ஆய்வு.

கோணங்களுக்குச் சிறிய எழுத்தாலான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தவேண்டுமென்று கேத்திரகணிதம் போதிக்கும் முறை பற்றிய இரண்டாம் அதிக்கையில் புகன்றதற்கிணங்க நாம் செய்துள்ளோம். மயக்கந் தரக்கூடிய இடங்களைத் தவிர்ந்த மற்றை இடங்களிலேயே அவ்வாறு செய்துள்ளோம்.* அவ்வதிக்கையில் கூறப்பட்ட பல அரிய தெரிப்புரைகளையும் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

பருவம் அ இல் உள்ள வேலை கருவிகளைப் பயன்படுத்தும் பயிற்சியை அளித்து சமாந்தரங்கள், சருவசமன், தன்மை, வடிவொப்புமை ஆகியவை பற்றிய அடிப்படை உண்மைகளை எடுத்தாள்கின்றது.

பாடசாலைத் தகவுக்குரிய முழுக் கேத்திரகணித பாடமுறைக்குரிய பொருள்கள் வரை விரிந்த நீண்ட ஆரம்ப பாடமுறை ஒன்று **தரலும் தேக்கியும்** ஆக்கிய "எளிய கேத்திரகணிதம்" என்பதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நூலின் பருவம் "அ" இன் இடத்தில் அதனை உபயோகிக்கலாம்.

"**ஒரு புதிய கேத்திரகணிதம்**" என்பதின் பொருள் வேறு ஒழுங்கில் "கேத்திர கணிதத்தில் பயிற்சிகளும் தேற்றங்களும்" என்ற தலைப்பில் வெளியாயுள்ளது. ஆக்கியோனின் "சுருக்கக் கேத்திரகணிதம்" என்ற நூலில் கைக்கொண்டதை ஒத்த ஒழுங்குகளை விரும்பும் ஆசிரியர்க்காக இது ஆக்கப்பெற்றது. பதில் நூலின் பருவம் அ இலுள்ள கேத்திரகணிதம் **ஒரு புதிய கேத்திரகணிதத்**திலுள்ளதுடன் ஒருமைப்பாடுடையதாகும்; ஆனால் அதன்பின் பயிற்சிகள், அமைப்புக்கள், தேற்றங்கள் பெரும்பாலும் நூலின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் உள்ளன.

"குறிப்புக்களும் தீர்வுகளும்" என்ற நூல் அவ்விரண்டுடனும் கிடைக்கப் பெறும்.

திரு. கே. ஆர். இமசன் உதவிய அறிவுரைக்கு ஆக்கியோன் பெரிதும் கடப்பாடுடையன். தம் அநுபவத்தால் உளங்கொண்டு தெரிப்புரைகளும் ஆய்வுரைகளும் அளித்து அவற்றால் பல தேவைகளையும் நோக்குக்களையும் ஆக்கியோன் புலங்கொளவைத்த ஆசிரியர்க்கும் உளங்கனிந்த நன்றி.

ஏப்பிரில், 1939. சி. வி. தி.

* தமிழாக்கத்தில் அடிக்கிறிட்ட எழுத்துக்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள.

பொருளடக்கம்

குறிப்பு.—இந்நூல் பகுதி பகுதியாக முழுமையும் வெளியிடப்படுகின்றது. தலைப்பக்கத்திற்கெதிரே பொருள் விவரம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. முழுநூலின் பொருளடக்கம் வருமாறு :—

பருவம் ஆ. கேத்திரகணிதம்

பகுதி 1

பகுதி 2

பிரிவு 1. பரப்புக்கள்

பிரிவு 2. வட்டம்

பகுதி 3

வடிவொப்புமை

பின் இணைப்பு

குறியீடுகளும் சுருக்கங்களும்

∴ ஆகவே

∵ ஏனெனில்

= என்பதற்குச்சமன்

≐ என்பதற்கு ஒத்தது

≡ என்பதற்குச் சர்வசமன்

≏ என்பதற்கு அண்ணளவாகச் சமன்

∼ என்பவற்றிடை வித்தியாசம்

> என்பதிலுஞ் சிறிது

< என்பதிலும் பெரிது

∥ என்பதற்குச் சமாந்தரம்

∠ கோணம்

செங் ∠ செங்கோணம்

△ முக்கோணம்

அடு. அடுத்த

ஒ. வி. ஒன்றுவிட்ட

சது. சதுரம்

மடக்கை

கூட்டுக

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279	4	7	11	14	18	21	24	28	31
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462	3	5	8	10	13	15	18	20	23
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591	2	4	6	8	10	12	14	15	17
											2	3	5	6	8	9	11	13	14
											1	2	4	5	6	7	9	10	11
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771	1	2	2	3	4	5	6	6	7
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839	1	1	2	3	3	4	5	5	6
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898	1	1	2	2	3	3	4	5	5
8	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949	1	1	2	2	3	3	4	4	5
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996	1	1	1	2	2	3	3	4	4

வர்க்கமூலம் 1-10

கூட்டுக

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	105	110	114	118	122	126	130	134	138	0	1	1	2	2	3	3	3	4
2	141	145	148	152	155	158	161	164	167	170	0	1	1	1	2	2	2	3	3
3	173	176	179	182	184	187	190	192	195	197	0	1	1	1	1	2	2	2	2
4	200	202	205	207	210	212	214	217	219	221	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5	224	226	228	230	232	235	237	239	241	243	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6	245	247	249	251	253	255	257	259	261	263	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7	265	266	268	270	272	274	276	277	279	281	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8	283	285	286	288	290	292	293	295	297	298	0	0	1	1	1	1	1	1	2
9	300	302	303	305	307	308	310	311	313	315	0	0	0	1	1	1	1	1	1

வர்க்கமூலம் 10-100

கூட்டுக

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	316	332	346	361	374	387	400	412	424	436	1	3	4	5	7	8	9	10	12
2	447	458	469	480	490	500	510	520	529	539	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	548	557	566	574	583	592	600	608	616	624	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4	632	640	648	656	663	671	678	686	693	700	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5	707	714	721	728	735	742	748	755	762	768	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6	775	781	787	794	800	806	812	819	825	831	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7	837	843	849	854	860	866	872	877	883	889	1	1	2	2	3	3	4	5	5
8	894	900	906	911	917	922	927	933	938	943	1	1	2	2	3	3	4	4	5
9	949	954	959	964	970	975	980	985	990	995	1	1	2	2	3	3	4	4	5

இயல்பான சன்கள் கூட்டுக

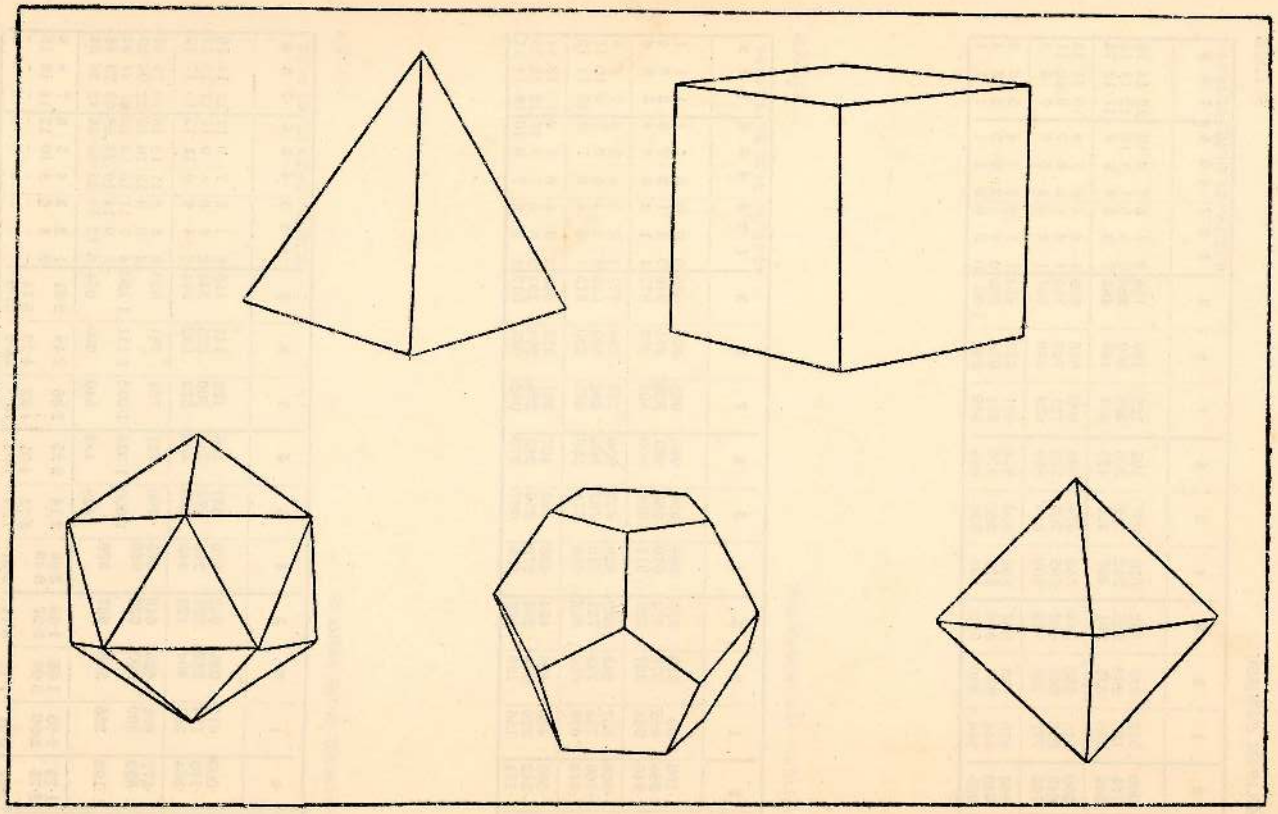
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6′12′18′ ·1	·2	·3	24′30′36′ ·4	·5	·6	42′48′54′ ·7	·8	·9
0	·000	017	035	052	070	087	105	122	139	156	2	3	5	7	9	10	12	14	16
1	·174	191	208	225	242	259	276	292	309	326	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2	·342	358	375	391	407	423	438	454	469	485	2	3	5	6	8	9	11	13	14
3	·500	515	530	545	559	574	588	602	616	629	1	3	4	6	7	9	10	11	13
4	·643	656	669	682	695	707	719	731	743	755	1	2	4	5	6	7	9	10	11
5	·766	777	788	799	809	819	829	839	848	857	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	·866	875	883	891	899	906	914	921	927	934	1	1	2	3	4	4	5	6	6
7	·940	946	951	956	961	966	970	974	978	982	0	1	1	2	2	3	3	3	4
8	·985	988	990	993	995	996	998	999	999	1·00	0	0	0	0	1	1	1	1	1

இயல்பான கோசைன்கள் கழிக்க

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6′12′18′ ·1	·2	·3	24′30′36′ ·4	·5	·6	42′48′54 ·7	·8	·9
0	·100	1·00	·999	·999	·998	·996	·995	·993	·990	·988	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	·985	982	978	974	970	966	961	956	951	946	0	1	1	2	2	3	3	3	4
2	·940	934	927	921	914	906	899	891	883	875	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3	·866	857	848	839	829	819	809	799	788	777	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	·766	755	743	731	719	707	695	682	669	656	1	2	4	5	6	7	9	10	11
5	·643	629	616	602	588	574	559	545	530	515	1	3	4	6	7	9	10	11	13
6	·500	485	469	454	438	423	407	391	375	358	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7	·342	326	309	292	276	259	242	225	208	191	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8	·174	156	139	122	105	087	070	052	035	017	2	3	5	7	9	10	12	14	16

இயல்பான தாஞ்சன்கள் கூட்டுக

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6′12′18′ ·1	·2	·3	24′30′36′ ·4	·5	·6	42′4′54 ·7	·8	·9
0	·000	017	035	052	070	087	105	123	141	158	2	4	5	7	9	11	12	14	16
1	·176	194	213	231	249	268	287	306	325	344	2	4	6	8	9	11	13	15	17
2	·364	384	404	424	445	466	488	510	532	554	2	4	6	9	11	13	15	17	19
3	·577	601	625	649	675	700	727	754	781	810	3	5	8	11	13	16	18	21	24
4	·839	869	900	933	966						3	6	9	13	16	19	22	06	29
						1·000	1·036	1·072	1·111	1·150	4	7	11	15	19	23	27	34	34
5	1·192	235	280	327	376						5	9	14	19	23	28	33	28	42
						428	483	540	600	664	6	12	18	24	30	36	42	38	54
6	1·73	1·80	1·88	1·96	2·05	2·14	2·25	2·36	2·48	2·61	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	2·75	2·90	3·08	3·27	3·49						2	4	6	8	10	12	14	16	18
						3·73	4·01	4·33	4·70	5·14	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8	5·67	6·31	7·12	8·14	9·51	11·4	14·3	19·1	28·6	57·3		–	–	–	–	–	–	–	–



ஏழுங்கான ஐந்து திண்மங்கள்

நான்முகத்திண்மம் சதுரத்திண்மம்

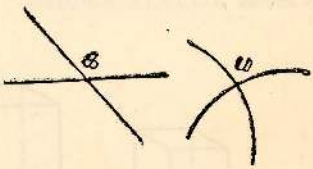
இருபதுமுகத்திண்மம் பன்னிருமுகத்திண்மம் எண்முகத்திண்மம்

பருவம் அ

அடிப்படை எண்ணங்களும் எடுகோள்களும்

கோடுகளும் புள்ளிகளும்

கோடுகளானவை நேராகவேனும் வளைவாகவேனும் இருக்கும். உதாரணமாக "ட" என்னும் எழுத்து, இரண்டு நேர் கோடுகளால் ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது. "ல" என்னும் எழுத்து வளைகோடாகவிருக்கிறது. "ம" என்னும் எழுத்து ஒரு பகுதி நேர்கோடாகவும் ஒரு பகுதி வளைகோடாகவும் இருக்கிறது. நீரொரு காகிதத் துண்டை மடித்து ஒரு நேர்கோட்டை அமைக்கலாம். அம்மடிப்பு நேர்கோடாகும். ஒரு **வரைகோலை** உபயோகித்து நேர்கோடுகளைக் கீறலாம்.



உருவம் 1

முதலாம் உருவத்தைப் பார்க்க. இரண்டு நேர் கோடுகளேனும், இரண்டு வளைகோடுகளேனும் ஒன்றையொன்று **ஒரு புள்ளியில் வெட்டும்.** அப் புள்ளி **வெட்டுப்புள்ளி** யெனப்படும்.

ஒரு புள்ளியைக் குறிக்குமுறை

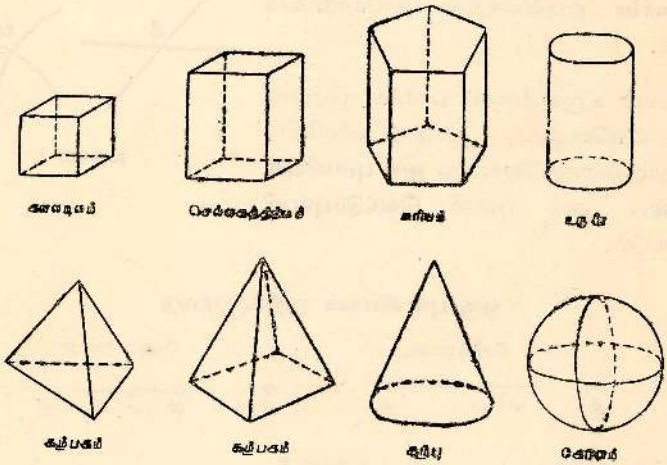
உருவம் 2

ஒரு புள்ளியை ஒரு துளியினாற் குறித்தலாகாது. இரண்டு கோடுகளின் வெட்டு நிலையைக் கொண்டே ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கலாம்.

மபத என்ற கோட்டில் **ம, ப, த** என்ற புள்ளிகளின் நிலைகள் சிறு குறுக்குக் கோடுகளாற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. ஒரு புள்ளியை ஒரு குத்தினாற் குறிப்பதானால், அக்குத்து மிக்க சிறியதாக இருத்தல் வேண்டும்; கண்ணுக்குத் தெரிந்துந் தெரியாததுமாக இருத்தல் வேண்டும். ஒரு முற்றுப் புள்ளியினுஞ் சிறியதாக இருத்தல் வேண்டும். குத்துக்கூடாக இரண்டு வெட்டுக்கோடுகள் கீறும்போது, அக்குத்து மறைந்து போகும்.

திண்மமும் மேற்பரப்பும்

இடத்தை அடக்கும் ஒரு பொருள் **கேத்திரகணித சம்பந்தமான திண்மம்** எனப்படும். உதாரணமாக, ஒரு பெட்டி, ஒரு காகிதத்துண்டு, ஒரு தெனிசு வலை, ஒரு துண்டு கடற்பஞ்சு இவையெல்லாங் கேத்திரகணித சம்பந்தமான திண்மங்கள் என்று கூறலாம். திண்மங்களுட் பல ஒழுங்கற்ற வடிவமுள்ளவை. அமைப்பில் எளிதான சில திண்மங்களின் பெயர்களை அறிதல்வேண்டும். மாதிரியுருக்கள் வைத்திருத்தல் மிகவுஞ் சாதகமாக இருக்கும். வரைகோல், கவராயம், மூலை மட்டம், இவைகளின் உபயோகத்தை அறிந்தவுடனே அவைகளிற் சிலவற்றை மெல்லிய காகித மட்டையாலேனும், தடிப்பான காகிதத்தாலேனும் அமைத்தல் வேண்டும். 99 ஆம் பக்கத்திலுள்ள 23 ஆம் பயிற்சியைப் பார்க்க. இப்புத்தகத்தின் முதற் பக்கத்திலே ஐந்து ஒழுங்கான திண்மங்களின் ஒளிப்படங்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன.



உருவம் 3

ஒரு திண்மம் ஒரு மேற்பரப்பினாலேனும், மேற்பரப்பின் இரண்டு, அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட பகுதிகளினாலேனும் எல்லைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும். சாயைக்குத் தடிப்பு இல்லாததுபோல, மேற் பரப்புக்குந் தடிப்பில்லை. திண்மங் கொண்டுள்ள வெளியை அதற்குப் புறம்பாகவுள்ள வெளியிலிருந்து பிரிப்பது எது அதுவே மேற்பரப்பாகும். அது தளப்பரப்பாகவேனும், வளை பரப்பாகவேனும் இருக்கலாம். உதாரணமாக, ஒரு பந்தின் மேற்பரப்பு வளைவாக இருக்கிறது; ஒரு மேசையின் மேற்பரப்புத் தளமாகவிருக்கிறது—அதாவது தச்சனின் இயல்புக்கேற்றவளவிலே தளமாகவிருக்கின்றது. ஒரு சாடியின் மேற்பரப்பில் ஒரு பகுதி தளமாகவும் ஒருபகுதி வளைவாகவும் இருக்கும்.

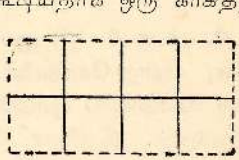
ஒரு மேற்பரப்பினது தளநிலையை ஒரு நேர்கோலைக்கொண்டு (ஒரு தச்சன்) சோதிக்கலாம். அந்தக் கோலின் விளிம்பை மேற்பரப்பில் வைக்கும் போது அந்த மேற்பரப்பானது விளிம்பினுடைய எல்லாப் புள்ளிகளையும் கோலின் எல்லா நிலையிலுந் தொடாவிட்டால் தளமாகாது.

சுருக்கமாக, ஒரு தளமேற்பரப்பை ஒரு **தளம்** என்று சொல்லலாம். திண்மத்தை எல்லைப்படுத்தும் மேற்பரப்புப் பகுதிகள் திண்மத்தின் **முகங்கள்** எனப்படும். திண்மத்தின் முகங்கள் சந்திக்குங்கோடு திண்மத்தின் **விளிம்பு** எனப்படும். திண்மத்தின் மூன்று, அல்லது கூடிய தொகையான விளிம்புகள் சந்திக்கும் புள்ளி **மூலை** என்றும் **உச்சி** யென்றுஞ் சொல்லப் படும்.

பயிற்சி 1

1. பின்வரும் எழுத்துக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை நேர் கோடுகள் உண்டு. (i) ப, (ii) ட, (iii) ட ?

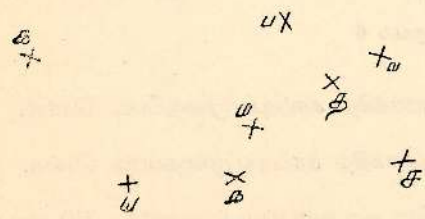
2. உரு 4 இல் காட்டியபடி மடிப்புக்கள் வரக்கூடியதாக ஒரு காகிதத் துண்டை எடுத்து மடிக்க. இரண்டு மடிப்புக்கள் வெட்டுமிடங்களில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளெத்தனை ? இன்னும் ஒரு முறை மடிப்பதால் இரு மடிப்புக்களாலும் அமையக்கூடிய மிகக் கூடிய தொகையான புள்ளிகள் வேறு எத்தனை உண்டு ?



உருவம் 4

3. உரு 5 இல் உள்ள புள்ளிகளுள் மூன்றேனுங் கூடிய தொகையேனும் ஒரு நேர் கோட்டில் அமைவதாக எத்தனை கூட்டங்கள் உண்டு என்பதை ஒரு நேர்கோலைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

4. உரு 5 இல் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளவாறு உமது தாளிலும் ஏறக்குறைய அமையக்கூடியதாகப் புள்ளிகள் குறிக்க. (i) க, ந உடனும் ப, உடனும்; (ii) ம, ச உடனும் த, ந உடனும்; (iii) க, ப உடனும் ப, ந உடனும்; (iv) ந, த உடனும் வ, ச உடனும் முறையே ஒரே நேர் கோட்டிலமையக் கூடியதாய் ஒரு நேர்கோலை உபயோகித்து ஒவ்வொரு புள்ளி குறிக்க.



உருவம் 5

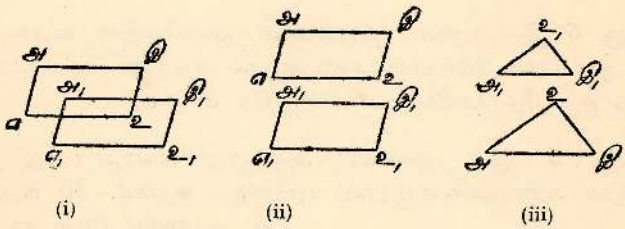
[5] ஒரு வெளியிலே 4 குடிசைகள் அங்குமிங்குமாக இருக்கின்றன. உமது நாளிலே அவைகளை 4 புள்ளிகளாற் குறிக்க. ஒவ்வொரு சோடிக் குடிசையையும் ஒவ்வொரு நேர் வழியாலே தொடுக்க எத்தனை வழிகள் வேண்டும் ? வழிகளை நேர் கோடுகளாற் குறிக்க. 5 குடிசைகள் இருந்தால் எத்தனை வழிகள் வேண்டும் ? (யாதாயினும் ஒரு குடிசைக்கு எத்தனை வழிகள் உண்டு ?)

6. பின்வருவனவற்றைப் போன்ற வடிவமுள்ள திண்மங்களின் பெயர்கள் என்ன ? (i) ஒரு செங்கல், (ii) ஒரு தோடம்பழம், (iii) ஒரு தோட்டவுருளை (iv) ஒரு கோமாளியின்றொப்பி, (v) இந்தத்தாள், (vi) ஒரு சதம் (vii) ஓராப்பு, (viii) ஒரு புனல்.

7. ஒரு செங்கல்லின் (i) முகங்கள் எத்தனை ? (ii) விளிம்புகளெத்தனை ? (iii) மூலைகளெத்தனை ?

[8] அடித்தளம் ஐந்து பக்கமுள்ள ஓரரியத்தின் (i) முகங்களெத்தனை ? (ii) விளிம்புகள் எத்தனை ? (iii) மூலைகள் எத்தனை ? உரு 3 ஐப் பார்க்க.

9. உரு 6 (i) ஐப் போன்ற ஓர் உரு வரைக. அ$அ_1$, இ$இ_1$, உ$உ_1$, எ$எ_1$ என்ற கோடுகளை வரைக. ஈற்றுருவம் எத்திண்மத்தைக் குறிக்கும் ? சில கோடுகளைப் புள்ளிக் கோடுகளாக அமைத்தால் வடிவஞ் செம்மையாக இருக்கும். இதனைச் செய்க.



உருவம் 6

10. உரு 6 (ii) இற்கு 9 ஆம் கணக்கிற் காட்டிய முறைப்படி செய்க.

[11] உரு 6 (iii) இற்கு 9 ஆம் கணக்கிற் காட்டிய முறைப்படி செய்க.

12. (i) முக்கோணவரியம் ஒன்றின் ஒரு வரைப்படம் வரைக. (ii) அடித்தளம் முக்கோணமான கூம்பகம் ஒன்றின் வரைப்படமொன்று வரைக.

[13] பின்வரும் திண்மங்களின் முகங்களின்றொகை, மூலைகளின்றொகை விளிம்புகளின்றொகை, என்னுமிவற்றைக் காட்டும் ஓரட்டவணை அமைக்க :— ஒரு செவ்வகத் திண்மம், ஒரு முக்கோணவரியம், ஒரு முக்கோணக் கூம்பகம், அடித்தளம் ஆறுபக்கமுள்ள ஓரரியம், தலைவெட்டப்பட்ட ஒரு நாற்பக்கக்கூம்பகம், அடித்தளம் ந பக்கமுள்ள ஓரரியம்.

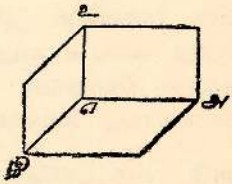
திண்மத்தின் பெயர்	முகங்களின்-றொகை (மு)	மூலைகளின்-றொகை (மூ)	விளிம்புகளின்-றொகை (வி)	மு + மூ — வி, என்பதின் பெறுமானம்

இந்த அட்டவணையிலிருந்து குறிப்பாய் என்ன அறியலாம் ?

14. அறையிலே ஒரு தளத்திலே அமையாதனவாயும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பனவாயும் உள்ள மூன்று கோடுகள் காட்டுக.

15. ஓரறையிலே ஒன்றையொன்று (i) ஒரு நேர்கோட்டில், (i) ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் மூன்று தளங்கள் காட்டுக.

16. உரு 7 இலே **அ,இ,உ** என்பவற்றிற் கூடாகச் செல்லுந்தளத்திலும் (i) **எ**, உமக்குக் கிட்ட இருப்பதாகநீர் கருதினால் உரு எதனைக் குறிக்கும்? (ii) தூரத்திலிருப்பதாகக் கருதினால் அந்த உரு எதனைக் குறிக்கும்?



உருவம் 7

பின்வரும் 17—19 வரையுள்ள இலக்கக் கணக்குக்கள் செய்வதற்குமுன் எண்முகத் திண்மம், பன்னிருமுகத் திண்மம், இருபது முகத்திண்மம் என்னும் இவைகளின் மாதிரியுருவங்களைக் காட்டிக் கலந்துரையாடல் வேண்டும். அன்றேற் புகைப் படத்தைக் குறிப்பிடலாம். ஆனாற் கணக்குக்கள் செய்யும்போது மாதிரியுருக்கள் முன்னால் இருத்தல் கூடாது.

17. ஒரு திண்மத்திற்கு ஒவ்வொன்றும் ஒரு முக்கோணமாகிய எட்டு முகங்கள் உண்டு. அதன் ஒவ்வொரு மூலையினும் நாலு முகங்கள் சந்திக்கும். இவ்வரலாறுகளைக் கொண்டு விளிம்புகளின் தொகையையும் மூலைகளின் தொகையையுங் கணிக்க.

18.* ஒரு திண்மத்திற்கு ஒவ்வொன்றும் ஓரைங்கோணமாகிய 12 முகங்கள் உண்டு. அதன் ஒவ்வொரு மூலையிலும் மூன்று முகங்கள் சந்திக்கும். இவ்வரலாறுகளைக்கொண்டு விளிம்புகளின்றொகை, மூலைகளின்றொகை என்னுமிவற்றைக் கணிக்க.

19.* ஒரு திண்மத்திற்கு ஒவ்வொன்றும் ஒருமுக்கோணமாகிய 20 முகங்கள் உண்டு. அதன் ஒவ்வொரு மூலையிலும் ஐந்து முகங்கள் சந்திக்கும். இவ்வரலாறுகளைக்கொண்டு விளிம்புகளின்றொகை, மூலைகளின்றொகை என்னுமிவற்றைக் கணிக்க.

20.* ஐந்தாங் கணக்கில், ந குடிசைகள் இருந்தால் எத்தனை வழிகள் வேண்டும்? (யாதுமொரு குடிசைக்கு எத்தனை வழிகள் செல்லும்?)

வரைகோலின் உபயோகம்

அ, **இ** என்ற இரு புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு வரைகோலை உபயோகித்து ஒரு நேர்கோடு கீறலாம். அது **அ ஐயும் இ ஐயும் தொடுத்தல்** எனப்படும். **அ** இலிருந்து **இ** இற்கு பென்சிலினது நுனிபோனால் அது **அஇ** போக்காகப் போகிறது என்று சொல்லப்படும்.

இரு புள்ளிகளை இணைக்கும்போது எப்போதுங் கோடு இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப் பக்கத்துக்கு மேசைக்குக் குறுக்கே செல்லக்கூடியதாகக் கீறப்படல் வேண்டும். மேசையில் மேலிருந்து கீழாகவாவது, கீழிருந்து மேலாகவாவது செல்லக்கூடியதாக வரைதலாகாது.

அஇ என்னுங்கோட்டை **இ** இற்கு அப்பாலே **அஇ** போக்காகத் தொடர்ந்து கீறும்முறை **அஇ** இனை **நீட்டுவது** எனப்படும். அதுபோல **இஅ** வினை நீட்டுக என்பது **இஅ** என்னுங் கோட்டை **அ** இற்கு அப்பாலே **இஅ** போக்காகத் தொடர்க என்பதைக் குறிக்கும்.

இரண்டு அளவுகள் வரைகோலிற் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒன்று அங்குலங்களையும் தசமவங்குலங்களையும் மற்றையது சதம மீற்றர்களையும், ஒரு சதம மீற்றரின் தசமங்களையும், அதாவது மில்லிமீற்றர்களையுங் காட்டும்.

நீளத்தின் அளவுகள் எப்போதுந் தசமத்திற் காட்டப்படல்வேண்டும். பின்னங்களிற் காட்டலாகாது. ஏனெனில் அளவுகள் அண்ணளவானவையே என்க.

உதாரணம். உரு 8 இல் உள்ள **அஇ** என்னுங் கோட்டை அங்குலத்தில் அளக்க. (i) **அஇ** என்பது மேசைக்குக் குறுக்கே செல்லக்கூடியதாகக் காகிதத்தை வைக்க. கீழிருந்து மேலோ மேலிருந்து கீழோ செல்வதாயிருத்தலாகாது.

(ii) **அ** என்பது **அஇ** என்னுங் கோட்டின் இடப்பக்க முனையில் இருப்பதாகக் கொண்டு, **அஇ** வழி வரைகோலை வைக்க. வைக்கும்போது **அ** இற்கெதிராகத் தலைமையளவு கோடொன்று இருக்கத் தக்கதாகச் செய்க.

(iii) **அஇ** இற்குக் கூடியவரை அண்மையில் வரைகோலை வைக்க. அதன் விளிம்பு தடிப்பாக இருந்தால் அளவுகோட்டடையாளங்கள் **அஇ** இற்குக் கிட்ட இருக்கக்கூடியதாக அதனை விளிம்பிலே நிறுத்துக. இப்போது **அஇ** இனது நீளம் 2·6 அங்குலத்திற்கும் 2·7 அங்குலத்திற்கும் இடையில் இருப்பதைக் காணலாம். ஓரங்குலத்தின் நூற்றிலொன்றுகள் இன்னும் எத்தனை அங்கு உண்டென்பதைக் கட்குறிப்பினாலே நிதானித்து **அஇ** என்பது 2·6 * அங்குலம் என்று மதிப்பிட்டுக் கொள்க.

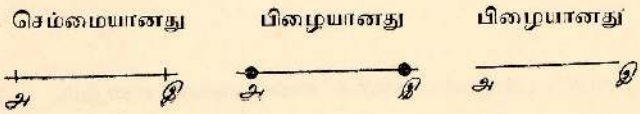
உருவம் 8

இன்னுமொரு முறையாக அளத்தல் பின்வருமாறு :— பிரி கருவியை எடுத்து விரித்து ஒரு நுனி **அ** இல் இருக்கத்தக்கதாகவும், மற்றையது **இ** இல் இருக்கத்தக்கதாகவும் நுனிகளை வைக்க. பின்பு பிரிகருவியை எடுத்து அளவுக்கோட்டடையாளங்களில் வைத்து விடையைக் காண்க. ஆனால் பூச்சிய அளவுக்கோடு இப்படி அளக்கும்போது ஒவ்வொரு முறையும் உபயோகிக்கப்பட்டால் சிதைந்து போகுமென்பதை மறத்தல் கூடாது.

குறிப்பு : 2 அங்குலமென்பது 2 அங். அல்லது 2″ என்று எழுதப்படும்.

3 அடி என்பது 3′ என்றும் எழுதப்படும்.

4 யார் என்பது $4^{\times}$ என்றும் எழுதப்படும்.



உருவம் 9

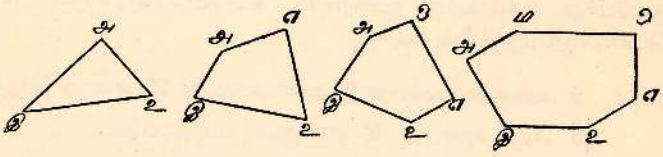
குறித்த நீளமுள்ள ஒரு கோட்டைக் கீறும்போது கூடிய நீளமுள்ள கோடொன்றை முதலிலே கீறுக. ஒரு முனைக்குக் கிட்ட **அ** என்னும் ஒரு புள்ளியைச் சிறிய குறுக்குக் கோடுகீறிக் குறிக்க. வரைகோலை உபயோகித்து **அஇ** என்பது வேண்டிய நீளமுள்ளதாயிருக்கக் கூடியதாக

இ இல் மிகச் சிறிய குத்து ஒன்று இடுக. பின்பு **இ** இற்கூடாகச் சிறிய குறுக்குக் கோடு ஒன்று கீறுக. குறுக்குக் கோடு கீறியவுடன் குத்தானது மறைந்துபோகக் கூடிய அவ்வளவு சிறிதாக இருத்தல் வேண்டும்.

பிரிகருவியை உபயோகித்துக் குறிக்கப்பட்ட நீளமுள்ள கோடுகள் குறிக்கப்படும்போது காகிதத்தில் வருந் தூளைகள் மிகச் சிறியவைகளாகுமாறு பார்த்துக்கொள்ளல் வேண்டும். முன்போற் சிறிய குறுக்குக் கோடுகள் கீறப்படல்வேண்டும்.

தளவுருவங்கள்

ஒரு தளத்தின் ஒருபகுதி அத்தளத்திற் கீறப்பட்ட நேர் கோடுகளாலேனும் வளைகோடுகளாலேனும் வரையறுக்கப்பட்டால் இந்தப் பகுதி **தளவுரு** எனப்படும். இந்தப் பகுதி நேர்கோடுகளால் வரையறுக்கப்பட்டால் அது தள **நேர்கோட்டுருவம்** என்று அழைக்கப்படும். ஆனால், வழக்கமாகத் தளம் என்னுஞ் சொல்லின்றியும் அழைக்கப்படும். நேர்கோட்டுருவங்கள் பக்கங்களின்றொகையைக் கொண்டு பெயர் இடப்படும்.



முக்கோணம் 3 பக்கம் | நாற்கோணம் 4 பக்கம் | ஐங்கோணம் 5 பக்கம் | அறுகோணம் 6 பக்கம்

உருவம் 10

ஒருரு எட்டுப் பக்கமுள்ளதாயின் எண்கோணம் என்றும், பத்துப் பக்கமுள்ளதாயின் தசகோணம் என்றுஞ் சொல்லப்படும்.

நேர்கோட்டுரு எதுவும் **பல்கோணம்** எனப்படும். உதாரணமாக ஆறு கோணத்தை 6 பக்கப் பல்கோணம் எனலாம்.

△ **அஇஉ** என்னும் குறியீடு முக்கோணம் **அஇஉ** என்பதைக் குறிக்கும் நாற்கோணம் என்பதை நாற்கோ. என்று சுருக்கி வழங்கலாம்.

ஒரு பல்கோணத்தின் அடுத்துவரும் இரண்டு பக்கங்கள் வெட்டும் புள்ளி **உச்சி** எனப்படும். அடுத்து வாரா இரண்டு உச்சிகளை இணைக்கும் கோடு **மூலைவிட்டம்** எனப்படும். உதாரணமாக உரு 10 இல் **அ, உ ஐ** இணைத்தால் **அஉ** எனுங்கோடு, நாற்கோணம் **அஇஉஎ** இன் அல்லது ஐங்கோணம் **அஇஉஎஒ** இன் அல்லது அறுகோணம் **அஇஉஎஒம** இன் ஒரு மூலை விட்டமாகும்.

பல்கோணங்களுக்கு அவற்றின் உச்சிகளை ஒழுங்காக வலஞ்சுழியாக வேனும் இடஞ்சுழியாகவேனும் கொண்டு பெயரிடலாம். உரு 10 இல் உள்ள நாற்கோணம் **அஇஉஎ** என்றேனும் **அஎஉஇ** என்றேனும் பெயரிடப் படலாம். ஆனால், **அஇஎஉ** என்றுவது **அஉஇஎ** என்றுவது பெயரிடப்படல் கூடாது.

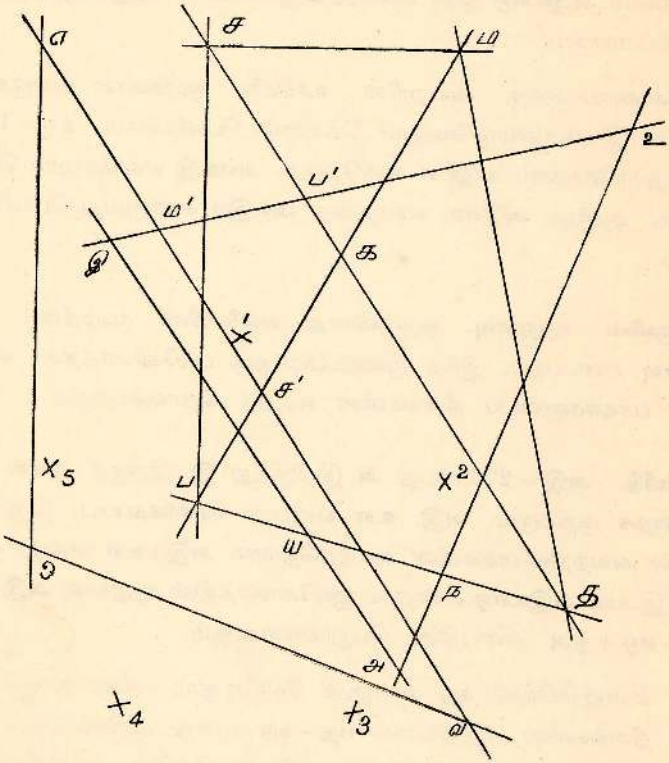
ஒருருவின் சுற்றளவு. ஒருருவினது எல்லையின் முழுநீளம் அதன் **சுற்றளவு** எனப்படும். இந்த முறைப்படி ஒரு பல்கோணத்தின் சுற்றளவு அதன் பக்கங்களுடைய நீளங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

குறியீடு. **அஇ** = 2″ என்பது **அ** இலிருந்து **இ** இற்குத் தூரம் 2 அங். என்பதைக் குறிக்கும். **அஇ, உஎ** என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுக ளானால் அவற்றினீளங்களின் கூட்டுத்தொகை **அஇ+உஎ** என்று குறிக்கப் படும். இப்படி **அஇஉஎஒ** என்னும் ஐங்கோணத்தின் சுற்றளவு **அஇ+இஉ+ உஎ + எஒ + ஒஅ** என்பதின் பெறுமானமாகும்.

பத என்னுங்கோடு **கந** என்னுங் கோட்டினும் நீண்டதாகவிருந்தால் அந்த நீளங்களின் வித்தியாசம் **பத – கந** என்று குறிக்கப்படும். இந்தக் கோடுகளிலே எது நீண்டது என்று தெரியாதாயின் அவற்றின் வித்தி யாசம் **பத ~ கந** என்று குறிக்கப்படும்.

பயிற்சி 2

குறிப்பு.—கேள்விகள் 1—9 வரையுள்ளன உரு 11 ஐக் குறிப்பன. கேள்விகள் 1, 2 என்பவற்றின் அளவைகளை அங்குலங்களிலுஞ் சதம மீற்றர்களிலுங் குறிக்க. பின்னர் உபயோகிப்பதற்கு அவைகளைவைத்துக் கொள்க.



உருவம் 11

1. அஇ, இஉ, உஅ என்பவைகளை அளக்க. △ அஇஉ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

2. எஒ, ஒவ, வஎ என்பவைகளை அளக்க. △ எஒவ இன் சுற்றளவைக் காண்க.

[3] சம, மத, தப, பச என்பவைகளை அங்குலங்களில் அளக்க. நாற்கோ. சமதப இன் சுற்றளவைக் காண்க.

[4] சக, கத, மக, கப என்பவற்றை சதம மீற்றரில் அளக்க. நாற்கோ. சமதப வின் மூலைவிட்டங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

பின்வரும் புள்ளிச் சோடிகளுக்கிடையில் உள்ள தூரங்களை அளக்க :—

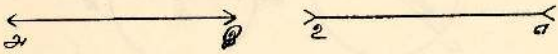
5. **அ,ப** சதம மீற்றரில் ; **ச,உ** சதம மீற்றரில் ; **ம,அ** அங்குலத்தில்.

[6] **ஒ, இ** சதம மீற்றரில் ; **க,உ** சதம மீற்றரில் ; **எ,த** அங்குலத்தில்.

7. **பந, யத, பத, யந** என்பவைகளின் நீளங்களைச் சதம மீற்றரில் அளக்க. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைச் சதம மீற்றரில் காண்க ; (i) **பந+யத** ; (ii) **பத+யந**.

[8] **எஒ+ஒவ – எவ** என்பதின் பெறுமானத்தைச் சதம மீற்றரிற் காண்க.

9. **சப** என்னுங்கோடோ **ஒவ** என்னுங்கோடோ நீளமானதென்று நீர் கருதுகிறீர் ? உம்முடைய விடையை எழுதிக்கொண்டு அளந்து ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.



உருவம் 12

10. **அஇ** என்னுங்கோடோ **உஎ** என்னுங்கோடோ (உரு 12 இல்) நீளமானது என்று நீர் கருதுகிறீர். விடையை எழுதிக்கொண்டு அளந்து ஒப்பிடுக.

11. 10 சதம மீற்றர் நீளமான நேர்கோடொன்று கீறுக. அதனுடைய நீளத்தை அங்குலத்தில் அளக்க. அதிலிருந்து 1 சதம மீ. எத்தனை அங்குலமென்று கண்டு குறிப்பிடுக.

12. 5 அங்குல நீளமுள்ள நேர் கோடொன்று கீறி அதனுடைய நீளத்தைச் சதம மீ. இல் அளக்க. அதிலிருந்து 1 அங்குலம் எத்தனை சதம மீ. என்று கண்டு குறிப்பிடுக.

[13] **அஒ = ஒஇ = 1·3″**, **உஒ = ஒஎ = 2·1″** ஆக இருக்கக் கூடியதாக **அஒஇ, உஒஎ** என்னும் நேர்கோடுகளை ஒன்றையொன்று வெட்டக்கூடியதாக வரைக. **அஉ** ஐயும் **அஎ** ஐயும் **இஉ** ஐயும் **இஎ** ஐயும் இணைக்க. இந்த நாலு சோடிகளையும் அளக்க. இந்த அளவைகளிலிருந்து நீர் அவதானிக்கக் கூடியதென்ன ?

14. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை மூலைவிட்டங்கள் உண்டு. (i) ஒரு நாற்கோணம், (ii) ஓரைங்கோணம், (iii) ஓரறுகோணம்.

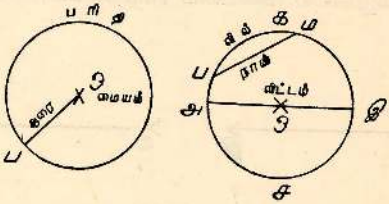
15. ஓரறுகோணத்தில் ஒரு மூலைக்கூடாகச் செல்லும் மூலைவிட்டங்களை வரைந்தால் எத்தனை முக்கோணங்கள் அமையும் ?

*16. 14 ஆம், 15 ஆம் வினாக்களிற் செய்த முறைப்படி (i) ஒரு தசகோணம் (ii) ஒரு ந பக்கப் பல்கோணம் என்பவைகளுக்குச் செய்க.

கவராயத்தின் உபயோகம்

தன் புள்ளிகள் யாவும் வட்டத்தின் **மையம்** எனப்படுமொரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் அமைந்த ஒரு வளைகோட்டினாலெல்லைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு தளவுருவமே ஒரு **வட்டம் ஆகும்.**

கவராயத்தையெடுத்து ஒரு வட்டங்கீறுக. ஒரு காலிலுள்ள உருக்குக் கூர் பொருந்தும் ஓ என்னும் புள்ளி வட்டத்தின் **மையம்** ஆகும். மற்றைக் காலிலுள்ள பெஞ்சிலின் நுனி வட்டத்தின் **பரிதி** எனப்படும் வளைகோட்டைக் கீறும்.



உருவம் 13

ஓ என்னும் மையத்தை அதனைச் சுற்றியுள்ள பரிதியிலுள்ள யாதாயினுமொரு **ப** என்னும் புள்ளிக்கிணைக்குங்கோடு வட்டத்தின் **ஆரை**யெனப்படும். **ஓப** என்னும் ஓராரையினது நீளம் கவராயக் கால்களினுனிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரமாகும். ஆகையாற் கவராயப் பென்சிற் புள்ளி கீறும் வளைகோட்டிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் மையத்திலிருந்து ஒரேதூரத்திலிருக்கும். சுற்றிலுள்ள எவையேனுமிரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் **பம** என்னும் நேர்கோடு **நாண்** எனப்படும். ஓ என்னும் மையத்துக்கூடாகச் செல்லும் யாதாயினுமொரு **அஓஇ** என்னும் நாண் **விட்டம்** எனப்படும்.

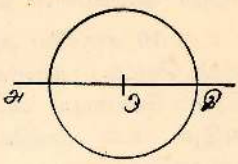
ஆரை, விட்டம், பரிதி என்னுஞ் சொற்களானவை முறையே ஆரை, விட்டம், பரிதி என்பவற்றினீளங்களையுங் குறிக்கும். வளைகோடே வட்டம் என்றும் அழைக்கப்படும்.

பரிதியின் யாதாயினும் ஒரு பகுதி **வில்**லெனப்படும். **அஇ** என்னும் விட்டத்தால் வெட்டப்படும் **அசஇ** என்னும் பரிதியின் பகுதி **அரை வட்டவில்**லெனப்படும். சுருக்கமாக **அரைவட்டம்** எனவுஞ்சொல்லப்படும். உரு 13 இல் **பகம** என்னும் வில் அரை வட்டத்திலுஞ் சிறியதானமையின் **சிறு வில்** எனப்படும். **பசம** என்னும் வில் **பெருவில்** எனப்படும். ஏனெனில், அது அரை வட்டத்திலும் பெரியது என்க.

இரண்டு வட்டங்களுக்கு மையம் ஒன்றானால் அவை **ஒரு மையவட்டங்கள்** எனப்படும். (உரு 17. பக்கம் 14 பார்க்க.)

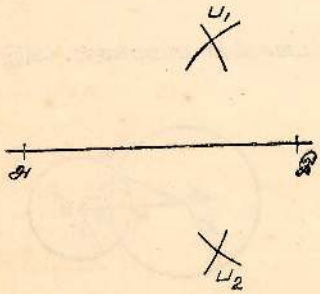
கொடுத்த யாதாயினுமொரு புள்ளியை மையமாகவுங் கொடுத்த யாதாயினுமொரு நீளத்தை ஆரையாகவுங் கொண்டு கவராயத்தை உபயோகித்தொரு வட்டம் வரையலாம். கொடுக்கப்பட்டவொரு நேர் கோட்டிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட நீளமொன்றை வெட்டுவதற்குங் கவராயத்தையுபயோகிக்கலாம்.

அஇ விட்டமாகவுள்ளவொரு வட்டங்கீறுவதற்கு அஇ இன் மையப்புள்ளி ஓ ஐக் காண்க. அஇ ஐ அளந்து அதைக் காணலாம். ஆனால், மையப் புள்ளியினது தானத்தைக் காண்பதற்கு இன்னொரு முறையைப் பிறகு நீர் படிப்பீர். இவ்வாறு மையப்புள்ளி ஓ ஐக் கண்டு, ஓ ஐ மையமாகவும் ஓஅ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தைக் கீறுக.

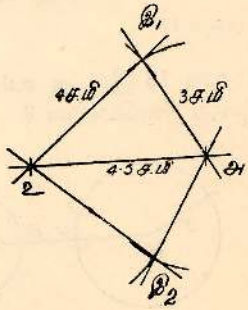


உருவம் 14

வெட்டு வில்களின் உபயோகம். அ உம் இ உங் கொடுக்கப்பட்டபுள்ளிகள். அவைகளின் இடைவெளி 1·3″ என்று கொள்ளுவோம். அ இலிருந்தும் இ இலிருந்துங் கொடுக்கப்பட்ட தூரங்களிலே அமைந்த ப என்னும் ஒரு புள்ளியினது நிலையைக் காணல்வேண்டும். அ இலிருந்து இந்தப் புள்ளி ப ஓரங்குல தூரத்திலும், இ இலிருந்து 0·65″ தூரத்திலுமிருக்கிறதென்று கொள்வோம். அப்படியானால் அ இனை மையமாகக் கொண்ட ஓரங்குல ஆரையுள்ளவொரு வட்டத்திலே எங்கோ ப இருத்தல் வேண்டும். இன்னும் இந்தப் புள்ளி ப ஆனது இயை மையமாகக் கொண்ட 0·65 அங்குல ஆரையுள்ளவொரு வட்டத்திலேயிருக்க வேண்டும். ஆகையால் ப இந்த இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளிலொன்றாக இருத்தல் வேண்டும். ப இனது நிலையைக் காண்பதற்கு ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் முழுமையாகக் கீறவேண்டியதில்லை. ஆனால், அவைகளின் வெட்டுப் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கு வேண்டியவளவே கீறிக் கொள்ளலாம். ப இனது நிலை இரண்டு வகையாக அமையலாம். இந்த இடங்கள் உரு 15 இல் $ப_1$ $ப_2$ என்று குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.



உருவம் 15



உருவம் 16

உதாரணம். **அஇ** = 3 சதம மீற்றரும், **இஉ** = 4 சதம மீற்றரும், **உஅ** = 4·5 சதம மீற்றருங் கொண்ட முக்கோணம் **அஇஉ** ஐக் கீறுக.

பக்கங்களுள்ளே நீளமான **உஅ** இனை முதலிலே கீறுவது நல்லது.

இப்பொழுது **இ** ஆனது **உ** இனை மையமாகக் கொண்ட 4 சதம மீற்றர் ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்திலும் **அ** இனை மையமாகக் கொண்ட 3 சதம மீற்றர் ஆரையுள்ள வொரு வட்டத்திலும் இருக்கின்றது.

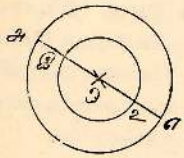
உரு 16 சுருக்கிய அளவுத் திட்டத்திற் கீறப்பட்டது. இது, இ_1, இ_2 என்னும் வெட்டுப் புள்ளிகள் இரண்டையும் பெறுவதற்கொவ்வொரு வட்டத்திலும் வேண்டிய அளவையே காட்டுகின்றது. இப்பொழுது முக்கோணம் $\text{அ}\text{இ}_1\text{உ}$ உம் முக்கோணம் $\text{அ}\text{இ}_2\text{உ}$ உங் கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக் கமைந்திருக்கின்றன.

வாய்ப்பயிற்சி. உரு 16 இல் (i) $\triangle$ அ இ_1 உ இன் சுற்றளவென்ன? (ii) நாற்கோணம் $\text{அ}\text{இ}_1\text{உ}\text{இ}_2$ இன் சுற்றளவென்ன ?

பயிற்சி 3

1. 4 சதம மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. விட்டத்தினது நீளமென்ன ? வட்டத்தின் பரிதியிற் **ப** என்னும் யாதாயினுமொரு புள்ளியைக் குறிக்க. **பக** = **பச** = 6 சதம மீ. ஆக இருக்கக்கூடியதாகக் **க,ச** வென்னும் புள்ளிகளை வட்டத்தின் பரிதியில் அமைக்க. நாண் **கச** இனை அளக்க.

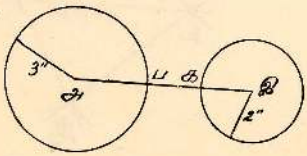
2. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் 5″. அதன் ஆரையெவ்வளவு நீளம் ?



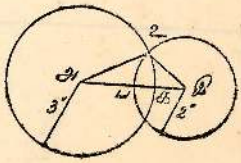
உருவம் 17

3. உரு 17 ஆனது 4 சதம மீ. ஆரையும் 7 சதம மீ. ஆரையுங் கொண்ட இரண்டு ஒரு மைய வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது. **அஇஉஎ** மையம் **ஓ** இற்கூடாகச் செல்கின்றது. **அஇ**, **இஉ**, **உஎ**, இவைகளுடைய நீளங்களென்ன?

4. உரு 18 இல் **அ** உம் **இ** உம் வட்டங்களின் மையங்கள். **அஇ** = 9″. **பக** இனது நீளமென்ன ?



உருவம் 18



உருவம் 19

[5] உரு 19 இல் **அ** உம் **இ** உம் வட்டங்களின் மையங்கள். **பக** = 0·5″. **அஇ** இனது நீளத்தைக் காண்க. முக்கோணம் **அஇஉ** இன் சுற்றளவையுங் காண்க.

6. உரு 19 இல் △ **அஇஉ** இன் சுற்றளவு 9″. **பக** இனது நீளத்தைக் காண்க.

7. உரு 11 இல் (பக்கம் 10) **க** விலிருந்து **ப** உள்ள தூரத்திலும் கூடிய தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளெவையெனக் கவராயத்தை உபயோகித்துக் காண்க.

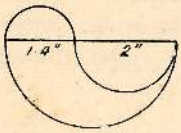
[8] ஒரு மணிக்கூட்டின் கம்பிகள் **ஓஅ** உம் **ஓஇ** உம் முறையே 3 சதம மீ., 4 சதம மீ. நீளமுள்ளன. **அ** உம் **இ** உம் அசையும் வளைகோடுகளைக் காட்டும் ஒருரு வரைக. **அ** உக்கும் **இ** இற்கும் இடையே ஒருநாளில் உண்டாகுந் தூரங்களில் (i) பெரியதென்ன? (ii) சிறியதென்ன?

9. 2·5″ நீளமுள்ள **அஇ** என்னுங் கோடொன்று கீறுக. **அ** ஐயும் **இ** ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டு முறையே 2″, 1·7″ ஆரைகள் கொண்ட இரண்டு வட்டங்கள் வரைக. அவைகளின் வெட்டுப் புள்ளிகளைப் **ப**, **க** என்று குறிப்பிடுக. **பஅ**, **பஇ**, **கஅ**, **கஇ** என்பவைகளை இணைக்க. △ **பஅஇ**, △ **கஅஇ** ஆகியவற்றின் பக்கங்களினளங்களை அளக்க.

10. 5 சதம மீ. இடைத்தூரமுள்ள இரு மையங்களிருக்குமாறு 3 சதம மீ., 4 சதம மீ. ஆரைகள் உள்ள இரண்டு வட்டங்கள் வரைக. அவைகளின் **பொது நாணைக்கீறி** (பொது நாணென்பது வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு) அதனுடைய நீளத்தை அளக்க.

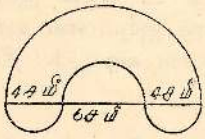
20—22 வரையுள்ள உருக்களில் ஒவ்வொரு வில்லும் ஓரரைவட்டமாகும். அவ்வுருக்களைக் கீறுக.

11.



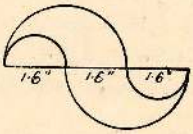
உருவம் 20

12.



உருவம் 21

[13]



உருவம் 22

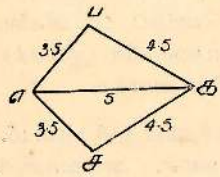
[14] **அஇ** = 1″ ஆகவும், **இஉ** = $1\frac{1}{2}$″ ஆகவும் இருக்க **அஇஉ** என்னும் ஒரு நேர் கோடு கீறுக. (i) **இ** இற்கூடாகச் செல்வனவும் **அ** ஐயும், **உ** ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டனவுமாகிய இரண்டு வட்டங்கள் கீறுக. (ii) **உ** உக்கு ஊடாகச் செல்வனவும் **அ** ஐயும் **இ** ஐயும் மையங்களாகக் கொண்டனவுமாகிய இரண்டு வட்டங்கள் கீறுக.

15. 7 சதம மீ. நீளமுள்ள **அஇ** என்னும் ஒரு கோடு கீறுக. **உஅ** = 5 சதம மீ. ஆகவும் **உஇ** = 6 சதம மீ. ஆகவும் அமைய **உ** என்னுமொரு புள்ளியிடுக. **உ** அவ்வண்ணம் அமையக் கூடியதாக ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நிலைகளுண்டோ ?

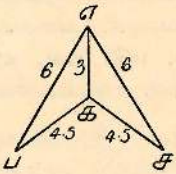
16. 2″ நீளமுள்ள **அஇ** என்னும் ஒரு கோடு கீறுக. **உஅ**=**உஇ**=2·5″ ஆக அமைய △ **அஇஉ** வரைக. **அஇஉ** என்பது இருசமபக்க முக்கோணம் எனப்படும். எனெனில் அதன் பக்கங்களில் இரண்டு சமநீளமானவை என்க.

23—25 வரை உள்ள உருக்களை வரைக. அலகுகள் சதம மீ. ஆக இருத்தல் வேண்டும். ஒவ்வோர் உருவிலும் **பச** இனை அளக்க. (ஒவ்வொன்றிலும் **எக** இனை முதலிலே கீறுவது நல்லது.)

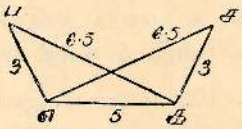
17. 18. [19]



உருவம் 23



உருவம் 24



உருவம் 25

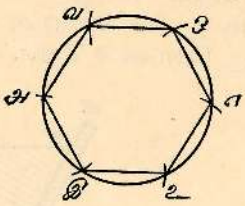
20. 11 ஆம் உருவிலுள்ள △ **அஇஉ** இன் பக்கநீளங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைக. **அஇ**, **அஉ** விட்டங்களாகவமையும் வட்டங்கள் கீறுக. வட்டங்கள் **இஉ** இல் மீளவும் வெட்டிக்கொள்கின்றனவா?

[21] 11 ஆம் உருவிலுள்ள △ **எஓவ** இன் பக்கநீளங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைக. **எஓ** ஐயும் **எவ** ஐயும் விட்டங்களாகக்கொண்ட வட்டங்கள் கீறுக. இவ்வட்டங்கள் **வஓ** இனை நீட்டிய கோட்டிலே மீளவும் வெட்டிக்கொள்கின்றனவா ?

22. நீளம் 2″ கொண்ட **அஇ** என்னுங் கோட்டைக்கீறுக. **அஇஉ** என்னுஞ் **சமபக்க** முக்கோணம் ஒன்றை வரைக. **சமபக்க** முக்கோணமென்பது 3 பக்கங்களினீளமுஞ் சமமாகவமைந்த முக்கோணமாகும்.

[23] **க** என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுக்க. ஆரை 5 சதம மீ. உள்ளதும் **க** இற்கூடாகச் செல்வதுமானவொரு வட்டத்தை வரைக. ஒவ்வொன்றும் 8 சதம மீ. நீளமுள்ள **கவ**, **கம** என்னுமிரண்டு நாண்கள் வரைக. **கஅ** என்னும் விட்டத்தை வரைக. **அவ**, **அம** என்பவைகளை அளக்க.

24. 3 சதம மீ. நீளமுள்ள **அஇ** என்னும் ஒரு கோட்டைக் கீறி **உஅ = உஇ = 4** சதம மீ. ஆகுமாறு **உ** என்னும் புள்ளியை அமைக்க; பின்பு, **அ** உக்கும் **இ** உக்கும் ஊடாகச் செல்லும் 4 சதம மீ. ஆரை உள்ளவொரு வட்டத்தை வரைக. △ **அஇஉ** இன் சுற்றளவென்ன?

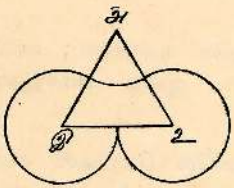


உருவம் 26

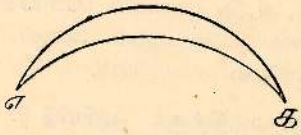
[25] 2·5 அங்குல நீளமுள்ள **பக** என்ற கோட்டைக் கீறி **ப** உக்கும் **க** உக்கும் ஊடாகச் செல்லுகிற 2″ ஆரையுள்ள வட்டமொன்று வரைக.

26. 4 சதம மீ. ஆரையுள்ளவொரு வட்டத்தை வரைக. அதன் பரிதியில் **அ** என்னும் யாதாயினுமொரு புள்ளியை எடுக்க. **அ** ஐ மையமாகவும் 4 சதம மீ. ஆரையாகவுங் கொண்டு, முன்னே வட்டத்தை **இ** இலும் **வ** இலும் வெட்டக்கூடிய ஒரு வட்டங்கீறுக. **இ** ஐ மையமாகக் கொண்டு 4 சதம மீ. ஆரையாகக் கொண்டு **உ** என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க. உரு 26 ஐப் பார்க்க. **உ** ஐ மையமாகக் கொண்டு 4 சதம மீ. ஆரையாகக் கொண்டு **எ** ஐக் குறிக்க. **எ** ஐ மையமாகக் கொண்டு 4 சதம மீ. ஆரையாகக் கொண்டு **ஓ** ஐக் குறிக்க. இது வட்டத்தைச் சுற்றி ஆரையை நடத்துதலெனப்படும். **அஇஉஎஓவ** என்னும் அறு கோணத்தைக் கீறுக. **ஓவ** ஐ அளக்க.

*27. உரு 27 இல் **அஇஉ** ஒரு சம பக்க முக்கோணம். **அ,இ,உ** என்பன 2 சதம மீ. ஆரையுள்ள வில்லுகளின் மையங்கள். உருவைக் கீறுக.



உருவம் 27



உருவம் 28

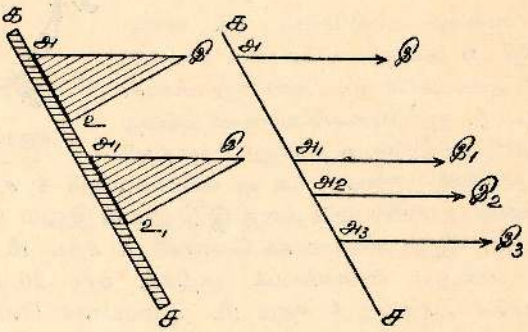
*28. உரு 28 இல் **எக = 1·5″**. வில்லுகளின் ஆரைகள் 1·5″, 1″; பிறையை வரைக.

*29. உரு 11 இலுள்ள **சமதப** என்னும் நாற்கோணத்தின் பருமனுள்ள ஒரு நாற்கோணம் வரைக. முதலாவது △ **சதப** ஐ வரைக. பின்பு △ **சமத** ஐ வரைக. **பம** ஐ அளந்து கீறியதுடன் ஒப்பிடுக.

*30. 2″ ஆரையுள்ள ஒரு வட்டங் கீறுக. பரிதியில் **அ** என்னும் ஒரு புள்ளியை எடுக்க. **அஉஓ** சமபக்க முக்கோணமாயிருக்கத்தக்கதாக **உ,ஓ** என்னும் புள்ளிகளை இந்த வட்டத்திலமைக்க. (கேள்வி 26 இன் முறைப்படி உரு 26 ஆனது அமைக்கப்பட்டால் △ **அஉஓ** சமபக்கமாகும்.)

மூலைமட்டத்தின் உபயோகம்

அஇஉ என்னும் மூலைமட்டத்திலுள்ள குறும்பக்கத்திலொன்றான **அஉ** ஐ **கச** என்னும் நேர்கோலில் தொடும்படி வைத்து **அஇ** வழியே ஒரு கோட்டைக் கீறுக.

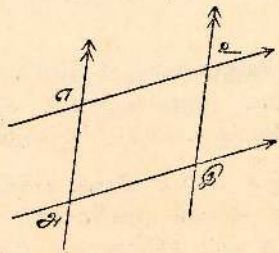


உருவம் 29

பின்பு **கச** வழியே **அ$_1$இ$_1$உ$_1$** என்னும் நிலைக்கு மூலைமட்டத்தை நகர்த்துக. **அ$_1$இ$_1$** இன் வழியே ஒரு கோட்டைக் கீறுக. இப்படிக் **கச** வழியே வேறு நிலைகளுக்கும் மூலைமட்டத்தை நகர்த்தி **அ$_2$ இ$_2$**, **அ$_3$ இ$_3$** போன்ற வேறு கோடுகளையும் ஆக்குக.

அஇ, **அ$_1$இ$_1$** முதலிய கோடுகள் ஒரே தளத்தில் உள்ளன; அவற்றை எவ்வளவு நீட்டினாலும் அவை சந்திக்கமாட்டா. இவை **சமாந்தரமான நேர்கோடுகள்** எனப்படும்.

சமாந்தரத்திற்குக் குறியீடு ||. வரிப்படங்களிலே கோடுகள் சமாந்தரமாகக் கொடுக்கப்பட்டவை என்பதைக் குறிப்பதற்கு அம்புத்தலைகள் உபயோகிக்கப்படும். உரு 29 ஐப் பார்க்க.

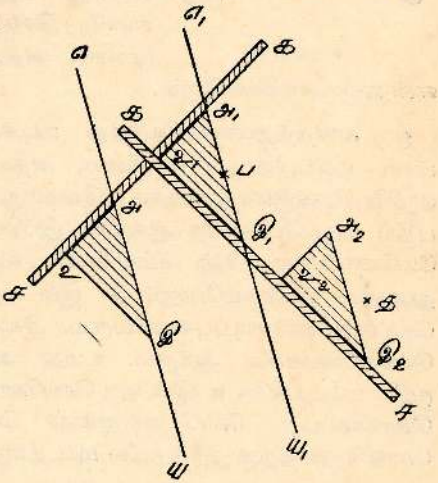


உருவம் 30

இணைகரம். எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரமானவொரு நாற்கோணமானது **இணைகரம்** எனப்படும். உரு 30 இல் **அஇ** ‖ **எஉ** ஆகவும், **அஎ** ‖ **இஉ** ஆகவும் இருந்தால் **அஇஉஎ** ஓரிணைகரமாகும்.

கொடுத்த எய என்னும் ஒரு நேர்கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாக கொடுத்த ப என்னும் புள்ளிக்கூடாக நேர்கோடு ஒன்று வரைதல்.

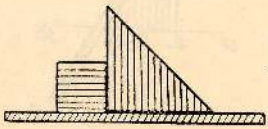
எய மேசைக்குக் குறுக்காகச் செல்லக்கூடியதாகத் தாளைச் சுற்றித்திருப்புக. மூலைமட்டத்தின் பக்கங்களுள்ளே நீளமான **அஇ** ஐ **எய** வழியே வைக்க. மூலைமட்டத்தின் குறும்பக்கங்களிலொன்றாகிய **அஉ** இற்கு எதிரே **கச** என்னும் நேர்கோலை வைக்க. கோலை இறுக்கமாகப் பிடித்துக் கொள்க. **அ$_1$இ$_1$** என்பது **ப** உக்குக் கிட்ட இருக்கத்தக்கதாகக் கோலின் வழியே மூலைமட்டத்தை **அ$_1$இ$_1$உ$_1$** என்ற நிலைக்கு நகர்த்துக. பின்பு, மூலை மட்டத்தை இறுக்கமாகப் பிடித்துக்கொண்டு **ப** உக்கு ஊடாக **அ$_1$இ$_1$** இன் வழியே கோட்டைக் கீறுக. இதை நீட்டினால் **எக** இற்குச் சமாந்தரமான **எ$_1$பய$_1$** என்னும் வேண்டிய கோடு வரும்.



உருவம் 31

சிறியமூலைமட்டங்களைக் கொண்டு ஓரசைவிலே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியை அணைய முடியாமலிருக்கும். உரு 31 இலே **த** இற் கூடாக **எய** உக்குச் சமாந்தரமாகவொரு கோடு கீறுவதானால் **அ$_1$இ$_1$உ$_1$** என்ற நிலைக்கு மூலைமட்டத்தை நகர்த்துக. **இ$_1$உ$_1$** இன் வழியே கோலை வைக்க. பின்பு **அ$_2$இ$_2$** என்பது **த** உக்குக் கிட்ட இருக்கத்தக்கதாக **அ$_2$இ$_2$உ$_2$** என்னும் நிலைக்கு மூலைமட்டத்தை நகர்த்துக. பின்பு **த** இற்கூடாக **அ$_2$இ$_2$** இன் வழியே கோட்டைக் கீறுக.

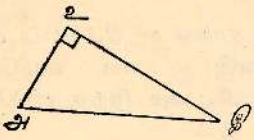
பயிற்சி 4 இல் எண்கள் 1—3 வரையுள்ளன இப்பொழுது செய்யப்பட வேண்டியவை.



உருவம் 32

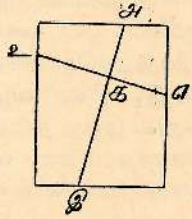
செங்கோணங்கள். இந்தத்தாளின் வெளிப்பக்க மூலைகள் செங்கோண மூலைகளாகும். செங்கோணமூலைகள் ஒன்றோடொன்று பொருந்தும். செங்கோண மூலைகளிரண்டை நேர்கோட்டின் வழியே பக்கத்தொடு பக்கமாக வைக்கலாம். உரு 32 ஐப் பார்க்க.

உரு 33 இல் உ என்னும் மூலையிலுள்ள அடையாளம், உ ஆனது செங்கோண மூலையெனத் தரப்பட்டிருக்கிறதென்பதைக் குறிக்கும். அப்பொழுது **உஇ, உஅ** உக்குச் **செங்கோணமாயுள்ளது** என்றோ **செங்குத்தாயுள்ளது** என்றோ நாம் சொல்கிறோம். இன்னும், **உஅ** என்பது **உஇ** இற்குச் **செங்கோணமாயுள்ளது** என்றோ **செங்குத்தாயுள்ளது** என்றோ சொல்வது முண்டு. அத்துடன் **அஉஇ** ஐ ஒரு **செங்கோணம்** என்றுஞ் சொல்கின்றோம்.



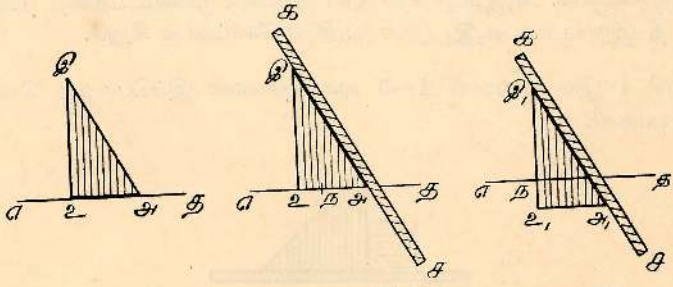
உருவம் 33

ஒரு காகிதத்துண்டையெடுத்து மடிக்க. மடிப்பை **அஇ** எனப் பெயரிடுக. பின்பு மடிப்பின் ஒரு பகுதியை, அதன் எஞ்சிய பகுதி வழியேயிருக்குமாறு மடிக்க. இவ்வாறு **உஎ** என்னும் புதிய மடிப்பொன்றை ஆக்குக. இப்பொழுது ஒன்றன் மேலொன்றாக நாலு சமமூலைகள் வரும். காகிதத் துண்டை விரிக்கும்போது, **க** இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுமிரண்டு மடிப்புக்கள் வரும். இவை **க** இலே நாலு செங்கோணங்களை ஆக்கும். உமது **அஇஉ** என்னும் மூலை மட்டத்திலே **உ** இல் ஒரு செங்கோணமூலை உண்டு. கொடுக்கப்பட்ட கோடொன்றுக்குச் செங்குத்தாயொரு கோடு கீறுவதற்கு இந்த மூலை மட்டத்தை உபயோகிக்கலாம்.



உருவம் 34

எத என்னும் ஒரு கோடு கீறுக. உரு 35 (i) இல் உள்ளவாறு மூலை மட்டத்தை வைக்க. இப்பொழுது **இஉ** வழியே ஒரு கோடு கீறினால் அது **எத** இற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும். ஆனாலிந்தக் கோட்டை **எத** வரையுங் கீறுவது கடினம்.

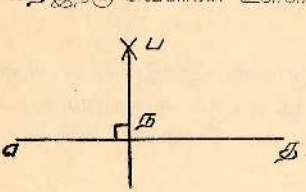


(i) (ii) (iii)

உருவம் 35

எத இலுள்ள ந என்னுமொரு புள்ளியிலிருந்து எத உக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு கீறுதல்.

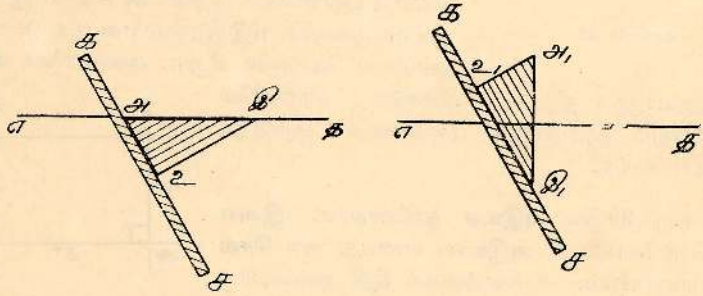
உரு 35 (ii) இல் உள்ளவாறு மூலைமட்டத்தை ஒழுங்குசெய்க. **கச** என்னுமொரு நேர்கோலை **அஇ** வழியே வைக்க. பின்பு உரு 35 (iii) இலுள்ள **அ₁இ₁உ₁** என்னும் நிலைக்கு வரக்கூடியதாக, **இ₁உ₁** இன் வழியே கீறப்படும் ஒரு கோடு **ந** உக் கூடாகச் செல்லும் வண்ணம் மூலைமட்டத்தை நகர்த்துக. இதனைக் **கச உக்குச் செங்குத்தொன்றை ந இலே நிறுவுதலென்பர்.**



உருவம் 36

எத இற்கு வெளியே உள்ள **ப** என்னுமொரு புள்ளியிலிருந்து, **எத** உக்குச் செங்குத்தொன்று கீறுவதற்கு மேற்கூறிய முறைக்கு ஒத்தவொன்றைக் கையாளலாம். இம்முறை, **ப** இலிருந்து **எத** உக்குச் **செங்குத்துக் கீறுதல்** (அல்லது **வீழ்த்தல்**) எனப்படும். செங்குத்தானது **எத** ஐ **ந** இல் வெட்டினால் **ந** என்னும் புள்ளி **எத** உக்குப் **ப** இலிருந்து வருஞ் **செங்குத்தினடி**யெனப்படும். செங்குத்தினடியை வரைவதற்கு நேர்கோட்டை நீட்ட வேண்டி நேரும். உரு 37 இல் **த** இலிருந்து **இஉ** உக்கு வருஞ் செங்குத்தின் அடி, **உஇ** ஐ நீட்டிய கோட்டில் இருக்கும்.

வேறு முறை – பின்வரும் முறை கற்பதற்கு எளிதானதன்று. எனினும் விரைவினுபயோகிக்கக்கூடியதுந் திருத்தமானதுமாகும்.



உருவம் 37

முதலாவதாக, கொடுக்கப்பட்ட **எத** என்னுங்கோட்டின் வழியே மூலைமட்டத்தின் பக்கங்களுள் **நீளமானதை** வைக்க. **கச** என்னும் நேர்கோலை மற்றைப் பக்கங்களிலொன்றின்வழியே வைக்க. பின்பு, மூன்றும் பக்கம் கோலிலே பொருந்தும்படி மூலைமட்டத்தைத் திருப்புக. இப்பொழுது மூலைமட்டத்தின் பக்கங்களுள்ளே நீளமானது **எத** உக்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும்.

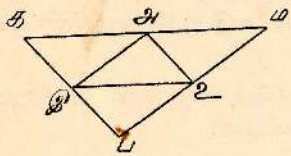
பயிற்சி 4†

(இந்தப் பயிற்சியில் சமாந்தரங்களும் செங்குத்துக்களும் மூலைமட்டத்தை உபயோகித்துக் கீறப்படல்வேண்டும்.)

1. **அஇ** என்னும் ஒரு கோடு கீறுக. அதனொரு பக்கத்தில் **ப, க** என்னும் புள்ளிகளைக் குறிக்க. மற்றைப் பக்கத்திலே **த, ச** என்னும் புள்ளிகளைக் குறிக்க. இப்புள்ளிகள் யாவும் **அஇ** இலிருந்து வெவ்வேறு தூரத்திலிருத்தல்வேண்டும். **ப, க, த, ச** ஆகியவற்றிற்கூடாக **அஇ** உக்குச் சமாந்தரமான கோடுகள் கீறுக.

2. **ஓக, ஓச** என்னுஞ் சம நீளமில்லா இரண்டு நேர்கோடுகள் கீறுக. **கஓசத** என்னும் இணைகரத்தை முடிக்க. (**க** உக்கும் **ச** உக்கும் ஊடாக முறையே **ஓச** உக்கும் **ஓக** உக்குஞ் சமாந்தரமான கோடுகள் கீறி அவைகள் **த** இற் சந்திக்கும்படி நீட்டுக.)

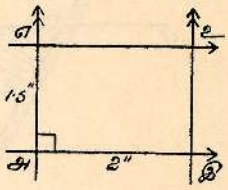
3. **அஇஉ** என்னுமொரு முக்கோணங் கீறுக. இஃதிருசமபக்கமுள்ள முக்கோணமாயிருத்தலாகாது. உரு 38 இற்போல **அ, இ, உ** ஆகியவற்றுக்கூடாக **இஉ, உஅ, அஇ** ஆகியவற்றுக்குச் சமாந்தரமான கோடுகள் கீறுக. அவ்வாறு வரைந்து வருமிணைகரங்களுக்குப் பெயரிடுக.



உருவம் 38

[4] ஒரு வட்டங்கீறுக. அந்த வட்டத்தில் **அஇ** என்னும் ஒரு விட்டங் கீறுக. பரிதியில் **ப** என்னுமொரு புள்ளியைக் குறிக்க. **அ** உக்கும் **இ** இற்குமூடாக முறையே **பஇ** இற்கும் **பஅ** உக்கும் சமாந்தரமான கோடுகள் கீறுக. அவைகளைக் **க** இற் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. மீண்டும் பரிதியிலே **ப** என்னும் இன்னொரு புள்ளியைக் குறித்து, இப்படிச் செய்க.

5. உரு 39 இல் **அஇஉஎ** ஓரிணைகரம். **இஅஎ** ஒரு செங்கோணம். **அஇஉஎ** என்பது ஒரு **செவ்வகம்** எனப்படும். உருவத்தைக் கீறி ஒவ்வொரு மூலை விட்டத்தையுமளக்க.



உருவம் 39

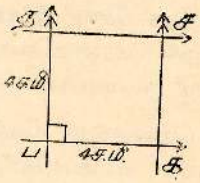
[6] **அஇ** = 4 சதம மீ., **அஎ** = 5 சதம மீ. ஆக உள்ள **அஇஉஎ** என்னுமொரு செவ்வகத்தை அமைக்க. ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தையும் அளக்க.

---

† கருவிகளை உபயோகிக்கும் பயிற்சி திண்மங்களின் பரப்பை யளமப்பதினாலும் எற்படும். (பகு. 23 ஐப் பார்க்க.) அடுத்துவரும் ஆரம்பப் பாடங்களைக் கற்கும்போது இடையிடையே இத்தகைய பயிற்சிகளைச் செய்தல் நன்று.

7. உரு 40 இல் **பகசத** ஓரிணைகரம், **கபத** ஒரு செங்கோணம். **பக = பத. பகசத** ஒரு **சதுரம்** எனப்படும். உருவத்தைக் கீறி, மூலைமட்டத்தையுபயோகித்து, **பச** உக்கு **கத** செங்குத்தோவென்று பார்க்க.

[8] **பக** 2″ உள்ள **பகசத** என்னுஞ் சதுரத்தை அமைக்க. மூலைவிட்டங்களைக் கீறுக. இவைகள் செங்கோணமாக ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றனவா ?



உருவம் 40

9. **ஓ** ஐ மையமாகக் கொண்ட 3·5 சதம மீ. ஆரையுள்ளவொரு வட்டங்கீறுக. **அஓஇ, கஓச** என்னுஞ் செங்குத்தான இரண்டு விட்டங்கள் கீறுக. **அக, கஇ, இச, சஅ** என்பவைகளை இணைக்க. **அக** என்பது **கஇ** உக்குச் சமனாகவுஞ் செங்குத்தாகவுமிருக்கின்றதோவென்று பார்க்க. நாற்கோணம் **அகஇச** இன் பெயர் என்ன ?

10. உரு 11 இல் உள்ள △ **அஇஉ** ஐ உச்சிகளுக்கூடாகக் குத்திப் பிரதியொன்று செய்க. **அ** இலிருந்து **இஉ** வுக்குச் செங்குத்தான கோட்டைக் கீறுக. **இ** இலிருந்து **உஅ** உக்கும் **உ** இலிருந்து **அஇ** உக்குஞ் செங்குத்துக்கள் கீறுக. இந்தச் செங்குத்துக்களைப்பற்றி அவதானிக்கக் கூடியதென்ன ?

ஒரு முக்கோணத்தினொருச்சியிலிருந்து எதிர்ப்பக்கத்துக்குக் கீறப்படுஞ் செங்குத்து முக்கோணத்தின் ஒரு **குத்துயரம்** எனப்படும். ஒரு முக்கோணத்திற்கு **மூன்று குத்துயரங்கள்** உண்டு.

[11] உரு 11 இல் உள்ள △ **எஓவ** உக்கும் 10 ஆம் கணக்கிற் சொன்னபடி செய்க.

12. 6 சதம மீ. நீளமுள்ள **அஇ** என்னுங் கோட்டைக் கீறுக. **அ** உக்கூடாக **அப, அக, அச** என்னும் வேறு மூன்று கோடுகள் கீறுக. **இ** இலிருந்து **பஅ, கஅ, சஅ** என்னுங் கோடுகளுக்கு, (வேண்டுமானால் நீட்டி,) செங்குத்துக்கள் கீறுக. செங்குத்துக்களினடிகளுக்கு **க, ந, ய** என்று பெயரிடுக. இனி **அஇ** விட்டமாயுள்ள வட்டத்தைக் கீறுக. இதைப்பற்றி அவதானிக்கக்கூடியதென்ன ?

நிலைக்குத்துக்கோடுகளுந் தளங்களும் கிடைக்கோடுகளுந் தளங்களும்

ஒரு பொருளைக் கயிற்றிலே கட்டித் தூங்கவிட்டால் கயிறுக்குங் கோடானது அதிகதூரம் நீட்டப்படும்போது பூமியின் மையத்திற்கூடாகச் செல்லும். இந்தக் கோடு **நிலைக்குத்துக்கோடு** எனப்படும். நிலைக்குத்துக் கோடொன்றைக் கொண்டவொரு தளம் **நிலைக்குத்துத்தளம்** எனப்படும். உதாரணமாக ஓரறையின் சுவரின் மேற்பரப்பு **நிலைக்குத்துத்தளம்** எனப்படும்.

செங்கலடுக்கி வேலைசெய்வோன் ஒரு சுவரைக் கட்டும்பொழுது, குண்டு நூலை உபயோகிக்கிறான். இக்கயிற்றினந்தத்திற் சிறிய ஈயக்குண்டொன்றிருக்கும். அக்குண்டுநூலை உபயோகித்துச் சுவரின் மேற்பரப்பானது தளமோவென அவன் சோதிக்கிறான்.

நிலைக்குத்துக் கோடொன்றிற்குச் செங்குத்தான நேர்கோடு **கிடைக்கோடு** எனப்படும். ஒரு தளத்திற் கிறக்கூடிய கோடுகளெல்லாங் கிடைக்கோடு களானால், அத்தளம் **கிடைத்தளம்** எனப்படும். உதாரணமாகக் குளத்திலுள்ள அசைவற்ற நீரின் மேற்பரப்பு கிடைத்தளமாகும். மேற்பரப்பொன்று கிடைத்தளத்தினொரு பகுதியாகவிருந்தால் அது மட்டமானதெனப்படும். இவ்வறையினது தளம் கிடைத்தளமோவென நீர்மட்டமென்னுங் கருவியையுபயோகித்துச் சோதிக்கலாம். நீர்மட்டத்திலே அற்ககோல் உள்ள கண்ணாடிக் குழாயுள்ளிருக்குங் குமிழியினது நிலையைக்கொண்டு அறையினது தளங் கிடைத்தளத்துக் கிணையுமாற்றைக் காட்டலாம்.

ஒரு கோடு அல்லது தளம் கிடையாகவேனும் நிலைக்குத்தாகவேனுமில்லாது விட்டால் **சரிவானது** எனப்படும்.

செங்குத்து, நிலைக்குத்து என்னுஞ் சொற்களைப்பற்றி மலைவுறலாகாது. ஒன்றையொன்று வெட்டுமிரண்டு கோடுகள் செங்கோணமூலையொன்றை யமைத்தாலவை செங்குத்தாயிருக்கும். ஒரு கோடு பூமியின் மையத்தைச் சுட்டினாலது நிலைக்குத்துக் கோடாகும்.

பயிற்சி 5 (வாய்முறை)

1. (i) நிலைக்குத்தாகக் கீழே, (ii) நிலைக்குத்தாக மேலே, (iii) கிடையாக முன்னே, (iv) கிடையாக வலது பக்கத்துக்குச் சுட்டிக் காட்டுக.

2. அறையிலே சில நிலைக்குத்துக் கோடுகளுஞ் சில நிலைக்குத்துத் தளங்களுங் குறிப்பிடுக.

3. அறையிலே சில கிடைக்கோடுகளுஞ் சில கிடைத்தளங்களுங் குறிப்பிடுக.

4. ஒரு பெட்டியை ஒருமுகங் கிடைத்தளமாய் இருக்கக்கூடியதாகப் பிடிக்க. அதன் எத்தனை முகங்கள் (i) கிடைத்தளங்கள் (ii) நிலைக்குத்துத் தளங்கள் ? அதன் விளிம்புகளில் எத்தனை (i) கிடைக்கோடுகள் (ii) நிலைக்குத்துக் கோடுகள் ?

[5] ஒரு பெட்டியை அதன் ஒரு விளிம்பு நிலைக்குத்தாயிருக்கக்கூடியதாகப் பிடிக்க. அதன் விளிம்புகளில் எல்லாமாக எத்தனை (i) நிலைக்குத்துக் கோடுகள் (ii) கிடைக்கோடுகள் ? அதன் முகங்களில் எல்லாமாக எத்தனை (i) நிலைக்குத்துத் தளங்கள் (ii) கிடைத்தளங்கள் ?

[6] ஒரு பெட்டியை அதன் ஒரு முகம் நிலைக்குத்துத்தளமாக இருக்கக் கூடியதாகப் பிடிக்க. அதன் முகங்களில் எத்தனை நிலைக்குத்துத்தளங்கள்? அதன் விளிம்புகளில் எத்தனை கிடைக்கோடுகள் ?

7. ஒரு பெட்டியை அதன் விளிம்புகளில் ஒன்று கிடையாயிருக்கக்கூடியதாகப் பிடிக்க. அதன் விளிம்புகளில் எத்தனை கிடைக்கோடுகளாய் இருத்தல் வேண்டும் ? விளிம்புகளில் ஏதாவது நிலைக்குத்துக் கோடாய் இருத்தல் வேண்டுமா ? அதன் முகங்களில் எவையேனும் (i) கிடைத்தளமாய் இருக்க வேண்டுமா ? (ii) நிலைக்குத்துத் தளமாயிருத்தல் வேண்டுமா ?

8. அறையிலே ஒன்றையொன்று வெட்டும் நிலைக்குத்துத்தளங்கள் இரண்டு காட்டுக. அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோட்டைப் பற்றி நீர் என்ன சொல்லக்கூடும் ?

9. கிடைத்தளமொன்றை வெட்டும் நிலைக்குத்துத் தளமொன்று காட்டுக. அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோட்டைப் பற்றி நீர் என்ன சொல்லக்கூடும் ?

10. உமது புத்தகத்தின் மட்டையை மேற்பரப்பு சரிவுத்தளமாய் இருக்கக் கூடியதாகப் பிடிக்க. அதிலே (i) நிலைக்குத்துக்கோடொன்று கீறக் கூடுமா ? (ii) கிடைக்கோடொன்று கீறக்கூடுமா ?

[11] உம்மால் (i) சரிவுத்தளம் ஒன்றிலே இரண்டு கிடைக்கோடுகள் கீற முடியுமா ? (ii) நிலைக்குத்துத்தளத்திலே இரண்டு சரிவுக் கோடுகள் கீற முடியுமா ?

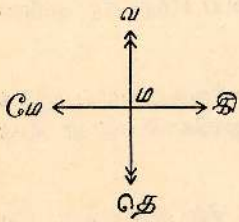
12. இரண்டு கால்களும் செங்கோணமாக இருக்க உம்முடைய கவராயத்தை ஒழுங்கு செய்க. (i) ஒரு காலை நிலைக்குத்தாயிருக்கப் பிடிக்க. மற்றைக் கால் கிடையாக இருக்க வேண்டுமா ? (ii) ஒருகால் கிடையாக இருக்கும்படி பிடிக்க. மற்றைக் கால் நிலைக்குத்தாய் இருக்க வேண்டுமா ? (iii) ஒரு கால் சரிவாகப்பிடிக்க. மற்றைக்கால் (அ) கிடையாய் இருக்கக் கூடுமா ? (ஆ) நிலைக்குத்தாய் இருக்கக்கூடுமா ?

[13] உம்முடைய பென்சிலைச் சரிவுகோடொன்றைக் குறிக்கும்படி பிடிக்க. (i) இந்தக் கோடு இருக்கும் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றுண்டா ? (ii) இந்தக்கோடு இருக்குங் கிடைத்தளமொன்றுண்டா ?

14. உம்மால் இரண்டு சரிவுத்தளங்களை (உதாரணமாக, இப்புத்தகத்தின் இரண்டு பக்கங்களை) (i) கிடைக்கோடொன்றில் ஒன்றையொன்று வெட்டக்கூடியதாய் ஒழுங்கு செய்யக்கூடுமா ? (ii) நிலைக்குத்துக் கோடொன்றில் ஒன்றையொன்று வெட்டக்கூடியதாய் ஒழுங்குசெய்யக்கூடுமா ?

[15] கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி ஒன்றிற்கூடாக (i) ஓரறைச் சுவரிலே எத்தனை கிடைக்கோடுகள் கீறக்கூடும் ? (ii) ஓரறையின் நிலத்திலே எத்தனை கிடைக்கோடுகள் கீறக்கூடும் ?

திசைகாட்டியின் திசைகள். நண்பகல் 12 மணிக்குச் சூரியன் பிரகாசிக்கையில் நிலைக்குத்துக் கம்ப மொன்றின் சாயை சமதரையில் விழும்போது (இங்கிலந்தில்) வடக்கைக் காட்டுங் கிடைக்கோடாயிருக்கும். உரு 41 கிடைத்தளம் ஒன்றின் மேல் கீறப்பட்ட **வமதெ, கிமமே,** என்னும் இரண்டு செங்குத்து வரைகளைக் குறிப்பிடும். **மவ** வடக்கைச் சுட்டினால், **மகி, மதெ, மமே** முறையே கிழக்கு, தெற்கு, மேற்கு இவைகளைச் சுட்டும். வடக்கு (வ), கிழக்கு (கி), தெற்கு (தெ), மேற்கு (மே), என்னுந் திசைகள் **கிடை** நேர்கோடுகளின்றிசைகளாகும்.



உருவம் 41

வடக்கைப் பார்த்துக்கொண்டு தொடங்கி திரும்பவும் வடக்கைப் பார்க்கக்கூடியதாக ஒருமுறைசுற்றுக. மொத்தத் திருப்பம் ஒரு **சுற்றல்** எனப்படும். இது 4 செங்கோணங்களுக்குச் சமன் : அரைச் சுற்றலிலே வருந் திருப்பம் 2 செங்கோணமாகும். கால் சுற்றலிலே உள்ளது 1 செங்கோணமாகும்.

மஅ என்னும் எதாவது ஒரு திசையைச் சுட்டிக் காட்டுக. பின்னர் **மஇ** வழி பார்க்கக்கூடியதாகத் திரும்புக. திருப்பத்தின் அளவு **அமஇ** என்ற கோணத்தின் பருமனாகும். இது ∠ **அமஇ** என்று எழுதப்படும். இதை ஒரு சுற்றலின் பின்னமாகவோ பெரும்பாலும் ஒரு செங்கோணத்தின் பின்னமாகவோ அளக்கலாம். இங்கே

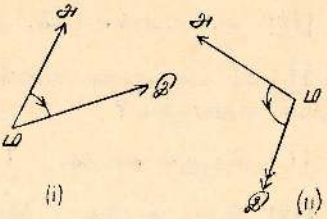
ஒரு செங்கோணம் = ஒரு சுற்றலின் காற்பங்கு.

செங்கோணத்துக்குக் குறுக்கம் செங். ∠.

உரு 42 (i) இல் **மஅ** இல் இருந்து **மஇ** இற்குத் திரும்புந் திசை சிறுவட்டவில்லில் அம்புக்குறியினாற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இத்திசை மணிக் கூட்டுக் கம்பிகளானவை திரும்புந் திசையாகும். ஆகையால் இது **வலஞ்சுழிச்சுழற்சி** யெனப்படும்.

உரு 42 (ii) இல் **மஅ** இலிருந்து **மஇ** இற்குத் திரும்புந் திசை முன் பின்னாக மாறியிருக்கிறது. ஆகையால் இது **இடஞ்சுழியா**யிருக்கிறது.

வடக்கே நோக்க, பின்னர் அரைச் செங்கோணம் வலஞ்சுழியாகத் திரும்புக.



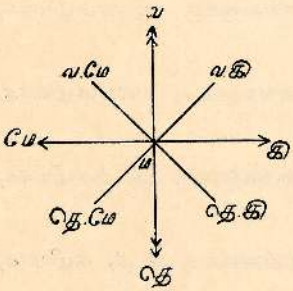
உருவம் 42

இப்பொழுது நீர் சுட்டுந் திசை வடக்கிற்கும் கிழக்கிற்கும் இடைநடுவிலுள்ள திசையாகும். ஆகையால் இது வட கிழக்கு (வ.கி.) எனப்படும். இது போல வடமேற்கு (வ.மே.) தென்கிழக்கு (தெ.கி.) தென்மேற்கு (தெ.மே.) என்னுந் திசைகளையும் வகுத்துக்கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 6

(கோணங்களின் பருமனைச் செங்கோணங்களில் அல்லது செங்கோணத்தின் பின்னங்களிற் கொடுக்க.)

1—10 வரையுள்ள எண்களில் கூறியவாறு செய்யும்பொழுது வருங் கோணங்களின் பருமன்கள் என்ன ?



உருவம் 43

1. தெ.ஐக் காட்டுக. வலஞ் சுழியாகத் திரும்பி மே. ஐக் காட்டுக.

[2] மே.ஐக் காட்டுக. வலஞ்சுழியாகத் திரும்பிக் கி.ஐக் காட்டுக.

3. கி.ஐக் காட்டுக. இடஞ் சுழியாகத் திரும்பித் தெ.ஐக் காட்டுக.

[4] வ. ஐக் காட்டுக. இடஞ் சுழியாகத் திரும்பிக் கி.ஐக் காட்டுக.

5. தெ. ஐக் காட்டுக. வலஞ் சுழியாகத் திரும்புக. வ.மே. ஐக் காட்டுக.

[6] மே. ஐக் காட்டுக. இடஞ் சுழியாகத் திரும்பி வ.கி. ஐக் காட்டுக.

7. தெ.கி. ஐக் காட்டுக. வலஞ் சுழியாகத் திரும்புக. வ.மே. ஐக் காட்டுக.

[8] தெ.மே. ஐக் காட்டுக. இடஞ் சுழியாகத் திரும்பி வ.மே. ஐக் காட்டுக.

9. வ.கி. ஐக் காட்டுக. வலஞ்சுழியாகத் திரும்பித் தெ. ஐக் காட்டுக.

[10] வ.மே. ஐக் காட்டுக. இடஞ் சுழியாகத் திரும்பி மே. ஐக் காட்டுக.

11—22 வரையுள்ள எண்களிற் கூறியவாறு திரும்பியபின் கடைசித் திசை எதுவாகும் ?

11. தெ.ஐக் காட்டுக. 1 செங்கோணம் வலஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

[12] கி.ஐக் காட்டுக. இரண்டு செங்கோணங்களுக்கு வலஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

13. மே.ஐக் காட்டுக. 3 செங்கோணங்களுக்கு இடஞ் சுழியாகத் திரும்புக.

[14] வ.ஐக் காட்டுக. 5 செங்கோணங்களுக்கு இடஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

[15] தெ.ஐக் காட்டுக. $\frac{1}{2}$ செங்கோணத்துக்கு வலஞ் சுழியாகத் திரும்புக.

16. மே.ஐக் காட்டுக. $2\frac{1}{2}$ செங்கோணங்களுக்கு இடஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

[17] கி. ஐக் காட்டுக. $3\frac{1}{2}$ செங்கோணங்களுக்கு இடஞ் சுழியாகத் திரும்புக.

18. வ. ஐக் காட்டுக. $4\frac{1}{2}$ செங்கோணங்களுக்கு வலஞ் சுழியாகத் திரும்புக.

19. வ.கி. ஐக் காட்டுக. 3 செங்கோணங்களுக்கு வலஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

[20] தெ.கி. ஐக் காட்டுக. $2\frac{1}{2}$ செங்கோணங்களுக்கு வலஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

21. வ.மே. ஐக் காட்டுக. $1\frac{1}{2}$ செங்கோணங்களுக்கு இடஞ்சுழியாகத் திரும்புக.

[22] தெ.மே. ஐக் காட்டுக. $3\frac{1}{2}$ செங்கோணங்களுக்கு இடஞ் சுழியாகத் திரும்புக.

23. பின்குறித்த நேரங்களிலே நிமிடக்கம்பி என்ன கோணவளவிலே திரும்புகிறது ?

(i) 1 மணி ; (ii) 30 நிமி. ; (iii) 5 நிமி. ; (iv) $2\frac{3}{4}$ மணி.

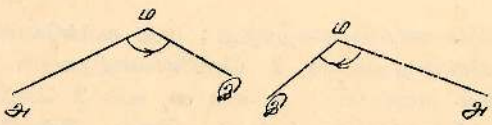
[24] மணிக்கூட்டின் மணிக்கம்பி பின்குறித்த நேரங்களில் என்ன கோணவளவிலே திரும்புகிறது? (i) 6 மணி; (ii) 4 மணி; (iii) 20 நிமி; (iv) 45 நிமி.

25. **இ** ஆனது **அ** இலிருந்து நேரே தெற்கே 1 மைல் தூரத்திலும், **உ** ஆனது **இ** இலிருந்து தெ.மே. 1 மைல் தூரத்திலும் **எ** ஆனது **உ** விலிருந்து நேர் கிழக்கே 2 மைல் தூரத்திலும் அமைய **அ, இ, உ, எ** என்னும் 4 இடங்களைக் குறிக்கும் ஒழுங்கான உரு ஒன்று கீறுக. ஒருவன் **அ** இலிருந்து **இ** உக்குப் போய் **இ** இலிருந்து **உ** உக்குப் போய் **உ** இலிருந்து **எ** இற்குப் போகிறான். நீர் கீறிய உருவில் **இ** இலும், **உ** இலும் என்ன கோணவளவிலே திரும்புகிறான் என்பதை உரு 42 இற்போல அம்புக்குறிகளையும் வட்ட விற்களையும் உபயோகித்துக் குறிக்க. கோணங்களின் பருமன் என்ன?

26. ஒருவன் ஒரு வீதி வழியாக நேர் கிழக்கே நடக்கிறான்; பின்பு வடமேற்காகச் செல்லும் வீதி வழியே சென்று, சற்று நேரத்துக்குப் பின் கிழக்கே செல்லும் இன்னொரு வீதி மார்க்கமாக நடக்கிறான். அவன் நடந்த பாதையை வரைந்து அவன் திரும்பிய இடங்களில் வருங் கோணங்களைக்குறிக்க. அவைகளின் பருமன் என்ன?

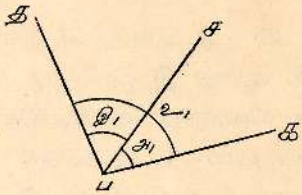
கோணக்குறியீடு

ம என்னும் புள்ளியிலிருந்து வேறு வேறு திசைகளில் **மஅ, மஇ** என்று இரண்டு கோடுகள் கீறப்படுகின்றன. நாம், முதல் **மஅ** வைப் பார்த்துப் பின்பு திரும்பி **மஇ** ஐப் பார்த்தால், திருப்பமானது வலஞ் சுழியோ இடஞ்சுழியோ என்பதைப் பொறுத்ததாய் இருக்கும். இவைகளிற் கிறியது ∠ **அமஇ** என்றோ ∠ **இமஅ** என்றோ குறிக்கப்படும்.



உருவம் 44

மஅ, மஇ கோணத்தின் **சிறைகள்** எனப்படும்; **ம** கோணத்தின் **உச்சி** எனப்படும். இங்கே குறித்ததுபோல, கோணம் 3 எழுத்துக்களாற் குறிக்கப் பட்டால், நடு எழுத்து கோணத்தின் உச்சியாகும்; புறவெழுத்துக்கள் கோணத்தின் சிறைகளிலுள்ள புள்ளிகள் எவையாயுமிருக்கும்.

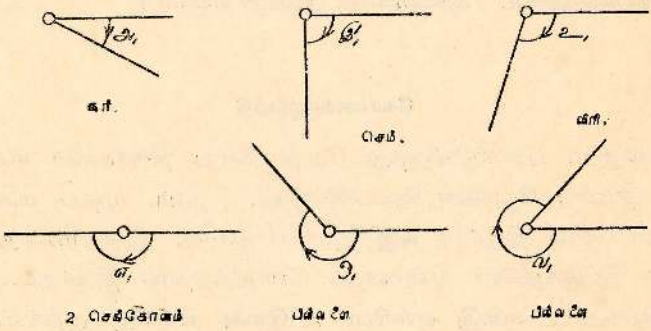


உருவம் 45

ஆனாற் பெரும்பாலும் ஒரு கோணத்தைக் குறிப்பிடுவதற்கு, ஒரு சிறிய எழுத்தை, அல்லது கீழே கீறிட்ட எழுத்தை உபயோகிப்பது எளிதாக இருக்கும். உதாரணமாக, உரு 45 இல் அ, ∠ **கபச** ஐயும், இ, ∠ **சபத** வையும் உ, ∠ **கபத** ஐயுங் குறிக்கும்.

அவதானிக்க. அ, போன்ற சிறப்பெழுத்துக்களை உபயோகிக்கையில் அவை எந்தக் கோணங்களைக் குறிப்பிடுகின்றன என்று தெளிவில்லையாயின், **பெரிய உருவம் வரைந்து கோணங்களைத் தெளிவான வட்டவிற்களாற் குறிப்பிடுக.**

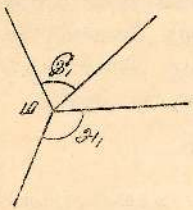
கூர்ங்கோணம், விரிகோணம், பின்வளை கோணம். உம்முடைய பிரிகருவியையோ வரையத்தையோ எடுத்துக் கால்களைப் படிப்படியாகத் திறக்க. ஒரு காலை அசையாமல் வைத்துக் கொண்டு மற்றையதைச் சுழற்றுக. உரு 46 சுழற்றும்போது அடுத்தடுத்து வரும் நிலைகளைக் குறிக்கின்றது.



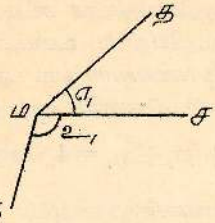
உருவம் 46

அ, ஒரு செங்கோணத்திற்குறைந்தது; இது **கூர்ங்கோணம்** எனப்படும். உ, ஒரு செங்கோணத்துக்கும் 2 செங்கோணத்துக்கும் இடைப்பட்டது; இது **விரிகோணம்** எனப்படும்; ஒ, உம் வ, உம் 2 செங்கோணத்திற்கும் 4 செங்கோணத்திற்கும் இடைப்பட்டன. இவை **பின்வளை கோணங்கள்** எனப்படும்.

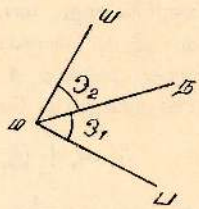
ஒரு புள்ளியில் அமைந்த கோணங்கள். உரு 47 இல் கோணங்கள் அ, உம் இ, உம் ஒரே உச்சி ம இல் அமைந்துள்ளன. அவை **ம என்னும் புள்ளியில் அமைந்த கோணங்கள்** எனப்படும்.



உருவம் 47



உருவம் 48



உருவம் 49

உரு 48 இல் கோணங்கள் உ, உம் எ, உம் ஒரே உச்சி ம இல் அமைந்தன; அவை **மச** என்னுஞ் சிறையைப் பொதுவாகக் கொண்டு அதன் எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ளன. அவை **அடுத்துள கோணங்கள்** எனப்படும்.

உரு 49 இல் அடுத்துளகோணங்கள் $ஒ_1$ உம் $ஒ_2$ உம் சமனாய் இருந்தால், **மந ∠ பமய வை இரு சமக்கூறிடுகின்றது** எனப்படும். அல்லது **∠ பமய** இன் **இருசமவெட்டி** யெனப்படும்.

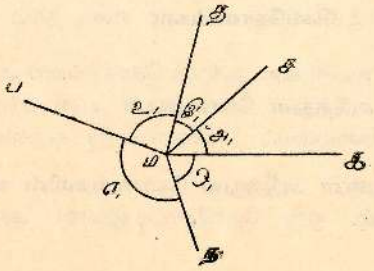
கூட்டலுங் கழித்தலும். உமது பிரிகருவியையோ கவராயத்தையோ எடுத்துப் படிப்படியாய் அதன் கால்களை விரிக்க. உரு 50 இலுள்ள **மக** வழி ஒருகாலை வைக்க. **மச, மத** மற்றைக் காலின் அடுத்த படிப்படியான நிலைகளெனக் கொள்க. அப்பொழுது **மக** இலிருந்து **மச** இற்குள்ள சுழற்சியும் அதைத் தொடர்ந்து **மக** இலிருந்து **மத** இற்குள்ள சுழற்சியுஞ் சேர்ந்து **மப** இலிருந்து **மத** இற்குள்ள ஒரு சுழற்சிக்குச்சமனாகும். இப்பொழுது முழுச் சுழற்சியும் இரு செங்கோணங்களிலுங் குறைவானதெனக் கொண்டு;

$$\angle \text{கமச} + \angle \text{சமத} = \angle \text{கமத},$$

அல்லது $$அ_1 + இ_1 = \angle \text{கமத},$$ என நாம் எழுதலாம்.

இவ்வாறே, $$\angle \text{கமத} - \angle \text{கமச} = \angle \text{சமத}$$

எனவும் நாம் சொல்லலாம்.



உருவம் 50

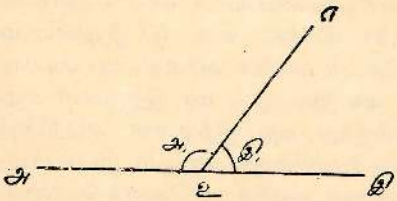
உரு 50 ஐப் பார்க்க. புள்ளி **ம** இலிருந்து பல கோடுகள் **மக, மச, மத** ஆகியவற்றைக் கீறுக. **மக** வழி சுட்டிக் காட்டுக. பின்னர் இடஞ்சுழியாகத் திரும்பி **மச** வழி சுட்டிக் காட்டுக. இப்படியாக இடஞ்சுழியாகச் சென்று முறையே **மத, மப, மந** ஆகியவற்றைச் சுட்டிக் காட்டிக்கொண்டு மீண்டும் **மக** இற்கு வருக. திரும்பியதால் உண்டாக்கப் பெற்ற கோணம் ஒரு சுற்றல் அல்லது 4 செங்கோணங்களாகும். ஆனால் இங்கு திரும்பியதால் உண்டாக்கப்பட்ட கோணங்கள் முறையே அ$_1$, இ$_1$, உ$_1$, எ$_1$, ஒ$_1$ ஆகும்.

∴ அ$_1$ + இ$_1$ + உ$_1$ + எ$_1$ + ஒ$_1$ = 4 செங்கோணம்.

ம இல் எத்தனை கோணங்களிருந்தாலும் இக்கூற்று உண்மையாகும். இவ்வுண்மையை நாம்,

ஒரு புள்ளியிலமைந்து ஒன்றற்கொன்று அடுத்துளவாயுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணங்கட்குச் சமன், எனக் கூறலாம்.

ஒரு நேர்கோட்டின் மேலுள்ள அடுத்துள கோணங்கள்.



உருவம் 51

உரு 51 இல் ஒருநேர்கோடு **எஉ** பிறிதொருகோடு **அஉஇ** இனை **உ** இல் சந்திக்கிறது. **உஅ** வழி சுட்டிக் காட்டுக. பின்னர் ∠**அஉஎ** வழி திரும்பி, **உஎ** வழி சுட்டிக் காட்டுக. **உஇ** வழி சுட்டிக் காட்டும் வரை திரும்புக.

அஉஇ ஒரு நேர்கோடானபடியால் திரும்புதலின் முழு அளவு அரைச் சுற்றல் அல்லது 2 செங்கோணங்கட்குச் சமனாகும்.

எனவே, உரு 51 இலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு

அ$_1$ + இ$_1$ = 2 **செங்கோணங்கள்** என நாம் எழுதலாம்.

நேர்கோடு **அஉஇ** உடன் **எஉ** ஆக்குங் கோணங்கள் அ$_1$, இ$_1$, **ஆனவை ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ள அடுத்துள கோணங்கள்** எனப்படும். இப்பொழுது நாம் மேலே பெற்ற உண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:—

ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள அடுத்துள கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை இரு செங்கோணங்களாகும். ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள அடுத்துளகோணங்களைச் சுருக்கமாக,

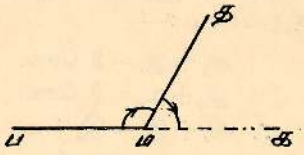
நேர்கோட்டு அடு. ∠ எனலாம்.

மிகைநிரப்பு கோணங்கள்

இரு கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்கட்குச் சமனாயின் அவை **மிகைநிரப்பு** கோணங்களெனப்படும்.

உதாரணமாக, 3/4 செங் ∠ உம் $1\frac{1}{4}$ செங் ∠ உம் மிகைநிரப்புகோணங்களாகும். **அஇஉ** ஒரு நேர்கோடாயிருக்கும் அடுத்துள கோணங்கள் 2 செங் ∠ ஆதலின்— அ, உம் இ, உம் மிகைநிரப்பு கோணங்களாகும்.

உரு 51 இனும்—நேர்கோட்டு



உருவம் 52

உரு 52 ஐப்பார்க்க. அடுத்துளகோணங்கள் **பமத, தமக** ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்களாயின் **மப** இலிருந்து **மத** இற்குத் திரும்புதலும் **மத** இலிருந்து **மக** இற்குத் திரும்புதலும் சேர்ந்து அரைச் சுற்றாகும். எனவே **பமக** ஒருநேர்கோடாகும்.

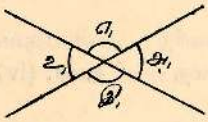
இவ்வுண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

ஈரடுத்துள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணமாயின் அக்கோணங்களின் புறச்சிறைகள் ஒரு நேர்கோட்டிலிருக்கும்.

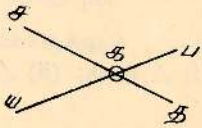
இதற்குக் குறுக்கம் : அடு. ∠ மிகைநிரப்புகின்றன.

குத்தெதிர்க் கோணங்கள்

இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும்பொழுது ஒவ்வொரு சோடி எதிர்க்கோணங்களுங் **குத்தெதிர்க்கோணங்கள்** எனப்படும். உரு 53 இலுள்ள அ, உம் உ, உம் குத்தெதிர்க்கோணங்களாம். அப்படியே இ, உம் எ, உம் எதிர்க்கோணங்களாம். ஒருசுச்சியிலமைந்து நேரெதிராயிருந்தமையின் இவை குத்தெதிர்க்கோணங்கள் எனப்பட்டன.



உருவம் 53



உருவம் 54

இரு கோல்கள் **பய, தச** என்பவை **க** புள்ளியில் ஒன்றிற்கொன்று குறுக்காகக் இடக்கின்றன. அவற்றை **க** இல் ஒரு கத்தரிக்கோல்போற் பிணைத்துவிடின் **கப** இனை **கத** உடன் பொருந்துமாறு திருப்பினால் **கய** என்பது **கச** உடன் பொருந்தும்படி திருப்பப்படும் ; எனவே ∠ **பகத**, ∠ **யகச** ஆகியவற்றால் குறிக்கப்பட்ட திருப்பங்கள் சமனாகும்.

ஆகவே, உரு 53 இல் உள்ள குறியீடுகளின்படி

$$\text{அ}_1 = \text{உ}_1 \quad , \quad \text{இ}_1 = \text{எ}_1 .$$

இந்தப் பயனைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

இருநேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டின் குத்தெதிர்க்கோணங்கள் சமனாகும்.

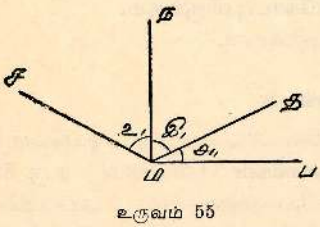
குறிப்புக்கு வேண்டிய குறுக்கம் : கு.எ. ∠.

உரு 53 இலுள்ள குறியீடுகளைக் யொண்டு இதை நாம் பின்வருமாறு நிறுவலாம் :—

அ, + இ, = 2 செங். ∠, நேர்கோட்டு அடு. ∠.
இ, + உ, = 2 செங். ∠, நேர்கோட்டு அடு. ∠.
∴ அ, + இ, = இ, + உ, ∠.
∴ அ, = உ, ∠.

இதைப்போன்று இ, = எ, என நிறுவலாம்.

பயிற்சி 7



உருவம் 55

1—6 வரையுள்ள எண்கள் உரு 55 ஐக் குறிக்கும்.

1. அ, = $\frac{1}{4}$ செங் ∠ உம் இ, = $\frac{3}{4}$ செங் ∠ உம் ஆயின் ∠ **பமந** ஐக் காண்க.

2. ∠ **தமச** = $1\frac{1}{4}$ செங் ∠ உம் ∠ **தமந** = $\frac{3}{4}$ செங் ∠ உமாயின் உ$_1$ ஐக் காண்க.

[3] ∠ **பமத** = $\frac{1}{3}$ செங் ∠ உம் ∠ **பமந** = 1 செங் ∠ உம் ∠ **பமச** = $1\frac{1}{2}$ செங் ∠ உமாயின் இ, ஐயும் உ, ஐயுங் காண்க.

4. கீறிட்ட எழுத்துக்களின் உறுப்புக்களிற் பின்வருவனவற்றைக் கூறுக. (i) ∠ **பமந**; (ii) ∠ **பமச**, (iii) ∠ **பமந** + ∠ **தமச**, (iv) ∠ **பமச** − ∠ **பமந**.

5. இயன்றவளவில் எளிதாக, கீறிடாத எழுத்துக்களாற் பின்வருவனவற்றைக் கூறுக. (i) அ, + இ,, (ii) இ, + உ,, (iii) அ, + இ, + உ,.

[6] பின்வருங் கூற்றுக்களைக் கீறிட்ட எழுத்துக்களிற் கூறுக.

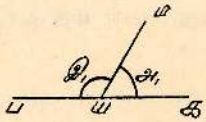
(i) **மந** ∠ **தமச** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது.
(ii) ∠ **பமந** = ∠ **தமச**.
(iii) **மந** இற்கு **மப** செங்குத்து.

7—11 வரையுள்ள எண்கள் உரு 56 ஐக் குறிக்கும். அவ்வுருவில் **பயக** ஒரு நேர் கோடாகும்.

7. அ, $= \frac{1}{2}$ செங் ∠ ஆயின் இ, ஐக் காண்க.

[8] இ, $= 1\frac{1}{4}$ செங் ∠ ஆயின் அ, ஐக் காண்க.

9. அ, இனும் இ, இரு மடங்காயின் அ, ஐக் காண்க.



உருவம் 56

10. ∠ **பயம** ஐ **யந** இரு சமக்கூறிட அ, $= \frac{1}{2}$ செங் ∠ ஆயின், ∠ **நயப** ஐக் காண்க.

[11] **யத,** ∠ **கயம** ஐ இரு சமக்கூறிட ∠ **மயத** $= \frac{2}{5}$ செங் ∠ ஆயின் ∠ **பயத** வைக் காண்க.

12—14 வரையுள்ள எண்கள் உரு 57 ஐக் குறிக்கும்.

12. ப, $= 1\frac{1}{4}$ செங் ∠ ஆயின் க, ஐக் காண்க.

[13] க, $= 2\frac{1}{2}$ ∠ செங் ஆயின் ப, ஐக் காண்க.

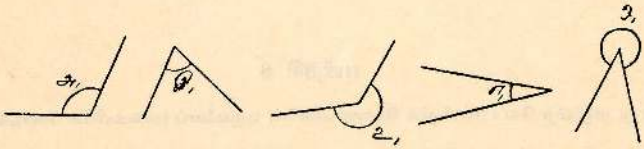
[14] க, என்பது ப, இனும் இருமடங்காயின் ப, ஐக் காண்க.

உருவம் 57

15. உரு 53 இல் இ, $= 1\frac{2}{3}$ செங் ∠ ஆயின் அ,, உ,, எ, ஆகியவற்றைக் காண்க.

16. உரு 53 இல் உ, இனும் இ, மும்மடங்காயின் அ, ஐயும் எ, ஐயுங் காண்க.

17. உரு 58 இற் காட்டப்பட்ட கோணங்கள் அ,, இ,, உ,, எ,, ஒ, ஆகியவற்றை அளவால் ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்துக. ஒவ்வொன்றும் கூரியதோ, விரிந்ததோ, பின்வளைந்ததோ எனவுங் கூறுக.



உருவம் 58

[18] மேற்கிற்கும் தென்கிழக்கிற்கும் இடையுள்ள பின்வளை கோணமென்ன ?

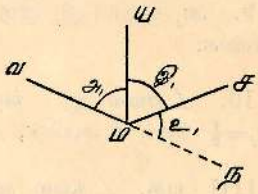
[19] உரு 55 இல் அ, $= \frac{1}{3}$ செங் ∠ உம் இ, $= \frac{2}{3}$ செங் ∠ உம். உ, $= \frac{1}{2}$ செங் ∠ உமாயின் (i) **மச** உடன் **மப** ஆக்கும் பின்வளைகோணத்தையும், (ii) **மந** உடன் **மத** ஆக்கும் பின்வளை கோணத்தையுங் காண்க. உமது உருவினை வரைக.

20. பின்வருமாறு தரவுகளிருப்பின் உரு 59 இலுள்ள **வமந** ஒரு நேர்கோடாவெனக் காண்க.

(i) அ, = இ, $= \frac{3}{4}$ செங் ∠, உ, $= \frac{1}{2}$ செங் ∠;

(ii) அ, = உ, $= \frac{1}{4}$ செங் ∠, இ, $= 1\frac{1}{4}$ செங் ∠;

(iii) அ, = இ, = உ, $= \frac{2}{3}$ செங் ∠.



உருவம் 59

பாகைமானியின் உபயோகம்

இடக்கரான பின்னங்களைத் தவிர்ப்பதற்கு தசமக் குறியீடுகளை உபயோகித்தல் எவிதெனினும் செய்முறை வேலைகளிலே கோணங்களை அளக்கும்பொழுது சிறிய அலகுகளை உபயோகித்தல் வசதியானதாகும்; தசமக் குறியீடுகள் சோனியிலே உபயோகிக்கப்படுகின்றன. ஒரு சுற்றல் 360 சமமான கோணங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வொவ்வொரு கோணமும் ஒரு பாகை எனப்படும். எனவே,

1 செங்கோணம் = 90 பாகைகள் (90°).

இன்னும், 1 பாகை = 60 கலை (60′).

1 கலை = 60 விகலை (60″).

ஒரு கோணத்தின் பருமன் ஒரு பாகைமானியைக்கொண்டு பாகையளவில் அளக்கப்படுகின்றது. உமது பாகைமானியில் அளவுகோடுகள் இரண்டு எண்களால் அடையாளமிடப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். அவற்றில் ஒன்று 90° இற்குக் கூடியதாயும் மற்றையது 90° இற்குக் குறைந்ததாயும் இருக்கும். கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சிக்கு இதில் எதைப் பயன்படுத்தல் வேண்டுமென்பது உமது புத்தியைப் பொறுத்தது.

பயிற்சி 8

[வேறு வழியிற் கேட்டாலன்றிக் கோணங்களின் பருமனைப் பாகையிலே கொடுக்க.]

1. பாகையில் எடுத்துச் சொல்லுக: 2 செங்கோணம்; $\frac{1}{2}$ செங்கோணம்; $\frac{2}{3}$ செங்கோணம்; $1\frac{2}{5}$ செங்கோணம்.

[2] பாகையில் எடுத்துச் சொல்லுக: 4 செங்கோணம்; $\frac{1}{4}$ செங்கோணம்: $1\frac{1}{3}$ செங்கோணம்; $2\frac{3}{5}$ செங்கோணம்.

3. செங்கோணத்தில் எடுத்துச் சொல்லுக : 270° ; 30° ; 135° ; 54° ; 300°

[4] செங்கோணத்தில் எடுத்துச் சொல்லுக : $22\frac{1}{2}$° ; 60° ; 150° ; 210° ; 315°.

5. பின்வரும் நேரங்களில் ஒரு மணிக்கூட்டின் மணிக்கம்பி எவ்வளவு கோணங்களிலே திரும்பும் : 1 மணிநேரம் ; 10 நிமிடம் ; 45 நிமிடம்; $2\frac{1}{2}$ மணி நேரம்.

[6] 15 நிமிடம், 5 நிமிடம், 20 நிமிடம், 50 நிமிடம் ஆகிய நேர அளவுகளில் ஒரு மணிக்கூட்டின் நிமிடக்கம்பி எவ்வளவு கோணந்திரும்பும்.

7. உமது கவராயத்தை 160° கோணவளவில் விரிக்க. கால்களுக்கிடையில் உள்ள பின்வளைகோணம் என்ன ?

[8] ஒரு நிமிடத்திற்கு 20 முறை சுற்றும். அச்சில்லில் உள்ள கம்பொன்று 1 செக்கனில் எவ்வளவு கோணந்திரும்பும் ?

உரு 11 இல் வரும் பிற்கானும் (எண்கள் 9–16) கோணங்களை அளக்க.

9. ∠ **மச'வ**, ∠ **மம'ஏ**.

10. ∠ **உநத**, ∠ **உநப**.

[11] ∠ **தசப**, ∠ **தசம**.

12. △ **அஇஉ** இன் கோணங்கள்.

13. △ **ஏஓவ** இன் கோணங்கள்.

[12, 13 ஆகியவற்றின் பயனைப் பின்வருந் தேவைக்காகக் குறித்துக் கொள்க.]

[14] நாற்கோணம் **சமதப** இன் கோணங்கள்.

15. பின்வளைகோணம் **கச'ம'**.

[16] பின்வளைகோணம் **இப'த**.

வெவ்வேறு திசையை நோக்கும் வண்ணம் பின்வருங்கோணங்களை வரைக.

17. 55°, 125°, 200°.

18. 100°, 72°, 330°.

[19] 38°, 142°, 250°.

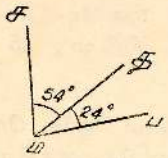
20. 85°, 167°, 300°.

21. பின்வருங் கோணங்களை அடுத்தடுத்து அமையும்வண்ணம் ஒரு புள்ளியில் வரைக : 70°, 130° ; 20° ; 90°. அப்புள்ளியில் எஞ்சியுள்ள கோணத்தின் அளவு என்ன ?

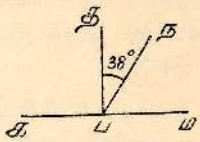
22. 70 பாகையளவிற்கு உமது கவராயத்தை விரிக்க. கால்களை ஒரு நேர்கோட்டிலமைக்க இன்னும் எவ்வளவு கோணத்திற்கு ஒரு காலை விரித்தல் வேண்டும் ?

23. உமது பாகைமானியைப் பார்க்காமற் பின்வரும் பாகைகளுக்கு எதிராக என்ன பாகைகள் இருக்குமெனக் கூறுக: (i) 30°, (ii) 130°.

24. உரு 60 இல் **மந**, ∠**பமச** ஐ இரு சமக்கூறிடக் கீறப்பட்டுள்ளது. ∠**தமந**ஐக் காண்க.



உருவம் 60



உருவம் 61

25. உரு 61 இல் **பத** ஆனது நேர்கோடு **கபம** இற்குச் செங்குத்து. ∠**கபந** – ∠**நபம** ஐக் காண்க.

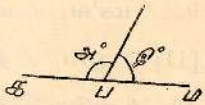
எண்கள் 26—29 வரை உரு 62 ஐக் குறிக்கும். அதில் **கபம** ஒரு நேர்கோடு.

26. இ = 72 ஆனால் அ ஐக் காண்க.

[27] அ = 134 ஆனால் இ ஐக் காண்க.

[28] அ = 2 இ ஆனால் இ ஐக் காண்க.

29. அ — இ = 42 ஆனால் அ ஐக் காண்க.



உருவம் 62

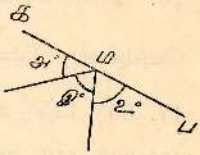
எண்கள் 30—33 வரை உரு 63 ஐக் குறிக்கும். அதில் **கமப** ஒரு நேர் கோடாகும்.

30. அ = 25; உ = 62; இ ஐக் காண்க.

[31] இ = உ = 57; அ ஐக் காண்க.

32. இ = உ = 2அ; அ ஐக் காண்க.

[33] அ + உ = இ; இ ஐக் காண்க.



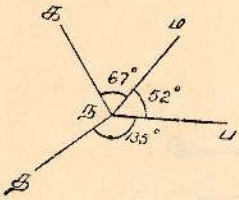
உருவம் 63

34. உரு 63 இல் **கமப** என்பது ஒரு நேர்கோடுஎனக் கொடுக்கப்படவில்லை. பின்வரும் நிலைகளில் நீர் என்ன முடிவைக் கொள்வீர்? (i) அ = 40; இ = உ = 70; (ii) அ = 30; இ = 85; உ = 75.

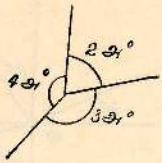
[35] பின்வரும் நிலைகளில், 34 ஆங் கணக்கிற் கூறியபடி செய்க. (i) அ = 35; இ = 75; உ = 80; (ii) அ + இ = 3 உ = 135°

36. உரு 64 இல் (i) ∠**கந்த** ஐக் காண்க; (ii) ∠**மநப**, ∠**கநத** ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகளுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

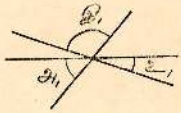
37. உரு 65 இல் அ ஐக் காண்க.



உருவம் 64



உருவம் 65



உருவம் 66

38. உரு 66 ஒன்றையொன்று வெட்டும் 3 நேர் கோடுகளைக் குறிக்கும். (i) இ, = 70° ஆயும், உ, = 35° ஆயுமிருந்தால் அ, ஐக் காண்க. (ii) உ, = 2க° ஆயும், அ, = 3க° ஆயும் இ, = 4ந°, ஆயுமிருந்தால் க ஐக் காண்க.

*39. பின்வரும் அளவுகளைக்கொண்ட செம்மையல்லாத (ஆறுற்றெளி வான) ஒருருவம் வரைக. ∠ **கயம** = 43° ஆயும் ∠ **மயப** = 67° ஆயும் ∠ **பயத** = 70° ஆயும் ∠ **தயந** = 59° ஆயும் ∠ **நயவ** = 51° ஆயுமிருக்க முறையே 6 கோடுகள் **யக, யம, யப, யத, யந, யவ** ஆகியவற்றை வரைக. (i) **யத** உடன் **யக,** ஒரு கோட்டிலுள்ளதோ எனக்காண்க. (ii) **யந** உடன் **யம,** ஒரு கோட்டிலுள்ளதோ எனக் காண்க. (iii) **யவ** உடன் **யப** ஒரு கோட்டிலுள்ளதோ எனக் காண்க.

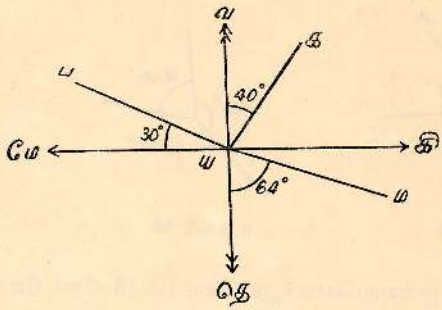
*40. இரு நேர்கோடுகள் **கயம, பயத** என்பவை **ய** வில் வெட்டிக்கொள் கின்றன. **யந** ஆனது ∠ **மயத** ஐ இரு சமக்கூறிடக் கீறப்பட்டுள்ளது. **நய** ஆனது **வ** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **யக, யவ** என்பனவற்றிற்கு இடை யில், ∠ **கயச** என்பது ∠ **ச்யவ** இலும் இருமடங்காக இருக்குமாறு, **யச** கீறப்பட்டுள்ளது. ∠ **மயப** = 96° ஆனால் ∠ **தயச** ஐக் காண்க.

திசைகாட்டியின் திசைகோள்கள்

ஒரு கிடைத்தளத்திலே திசைகள் பின்வருமாறு குறிக்கப்படும் :—

உரு 67 இலே **ய** இலிருந்து **க** இனது திசையானது வடக்கே பார்த்துக் கொண்டு கிழக்கே 40° அளவிலே திரும்புதலாற் பெறப்படும். எனவே இது வ 40° கி. எனக் கூறப்படும். இதை வடக்கிலிருந்து 40° கிழக்கே

என்றும் கூறலாம். இதைப்போலவே **ய** இலிருந்து **ம** வினது திசை தெ. 64° கி. எனப்படும்.



உருவம் 67

திசைகளினளவை எப்பொழுதும் வடக்கிலிருந்தோ தெற்கிலிருந்தோ அளத்தல் வேண்டும். கிழக்கிலிருந்தும் மேற்கிலிருந்தும் அளத்தலாகாது. உதாரணமாக உரு 67 இலே **ய** இலிருந்து **ப** உள்ள திசையை மே. வ. (மேற்கு வடக்கு) 30° எனக் கூறல் ஆகாது. இதை, ∠ **வயப** = 90° – 30° = 60° ஆயிருத்தலால், வ. 60° மே. எனக் கூறல்வேண்டும்.

ஒரு திசையானது வலஞ்சுழியாக வடக்குக் கோடு, **யவ** உடன் என்ன கோணத்தை ஆக்குமோ அக்கோணத்தைக் கொண்டு அத்திசையை எடுத்துச் சொல்லுதல் படைமுறை மரபு. இவ்வழி கூறுந் திசையே **உண்மைத்திசை** எனப்படும். உதாரணமாக உரு 67 இல், ∠ **வயம** = 180° – 64° = 116°; எனவே **ய** இலிருந்து **ம** இனது உண்மைத்திசை 116°. **ய** இலிருந்து **ப** இனது உண்மைத்திசை பின்வளை கோணம் **வயப** ஆகும், அதாவது 270° + 30° = 300° என்பது.

பயிற்சி 9

(கோணங்களின் பருமனைப் பாகையிலே கொடுக்க.)

பின்வருவனவற்றின் இறுதித்திசையைச் சுருக்கமாகக் குறிக்க. ஒவ்வொன்றிலுந் திரும்புதல் வலஞ்சுழியானது எனக் கொள்க.

1. வ. சுட்டுக. 70° திரும்புக.
[2] தெ. சுட்டுக. 42° திரும்புக.
3. கி. சுட்டுக. 110° திரும்புக.
[4] மே. சுட்டுக. 130° திரும்புக.
5. கி. சுட்டுக. 212° திரும்புக.
[6] வ. சுட்டுக. 150° திரும்புக.
7. மே. சுட்டுக. 165° திரும்புக.
[8] கி. சுட்டுக. 300° திரும்புக.
9. தெ. கி. சுட்டுக. 50° திரும்புக.
[10] வ. கி. சுட்டுக. 72° திரும்புக.

11. 2, 4, 5 ஆகிய எண்கள் கொண்ட கணக்குக்களில் வரும் இறுதி நிலையின் உண்மைத் திசையைக் கூறுக.

ய இலிருந்து பின்வரும் நிலைகளில் **க, ம** ஆகியவை இருக்குமேல் மதிவான (செம்மையானவல்ல) உருவங்கள் கீறிக் ∠ **கயம** வைக் காண்க.

12. வ. 10° கி; வ. 15° மே. [13] வ. 40° கி; தெ. 20° கி.

14. வ. 50° கி; தெ. 10° மே. [15] வ. 20° கி; தெ. 80° மே.

16. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்கமாகக் கூறுக: (i) வடக்கிலிருந்து கிழக்கே 150°. (ii) தெற்கிலிருந்து மேற்கே 170°.

*17. **நாற்றிசைகள்.** வடக்கிற்கும் வடகிழக்கிற்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தை இரு சமக்கூறிடுந் திசை வட, வடகிழக்கு எனப்படும். இது வ.வ.கி. என்று எழுதப்படும். இதைப்போன்றே கிழக்கிற்கும் வடகிழக்கிற்கும் இடையுள்ள கோணத்தை இருசமக்கூறிடுந் திசை கிழக்கு, வட கிழக்கு எனப்படும். இது கி. வ. கி. என எழுதப்படும். இப்படியே மற்றை இடைத்திசைகளும் எழுதப்படும். பெரிய வட்டம் ஒன்று கீறி அதன் மையத்திலிருந்து இப்பதினாறு திசையையுங் குறிக்கும் 16 புள்ளிகளையும் அவ்வட்டத்தின் பரிதியிற் குறிக்க.

பின்வருந் திசைகட்கிடையேயுள்ள கோணங்களைக் காண்க.

*18. (i) வ. உம் வ.வ.கி. உம்; (ii) தெ.மே.உம் கி.வ.கி. உம்;
(iii) மே.தெ.மே. உம் மே.வ.மே. உம்.

*19. (i) கி. உம் தெ.தெ.கி. உம்; (ii) வ.கி. உம் கி.தெ.கி. உம்;
(iii) வ.மே. உம் கி.வ.கி. உம்.

*20. வ., வ.வ.கி. ஆகியவற்றிற்கிடையுள்ள திசையை இரு சமக்கூறிடுந் திசை வ. இலிருந்து கி. எனப்படும். வ. கி., வ.வ.கி. ஆகியவற்றிற்கிடையுள்ள திசையை இரு சமக்கூறிடுந் திசை வ. கி. இலிருந்து வ. எனப்படும். இப்படியே வ. கி. இலிருந்து கி. என்பது வ. கி. இற்கும் கி. வ. கி. இற்கும் நடுவுள்ள திசையையே குறிக்கும். கி. இலிருந்து வ. என்பது கி. இற்கும் கி. வ. கி. இற்கும் நடுவுள்ள திசையையே குறிக்கும். இவ்வாறே பிறவும். 17 ஆங்கணக்கிற்குக் கீறிய வட்டத்துடன் ஒருமையமுடைய பிறிதொரு பெரிய வட்டம் வரைக. அதில் இப்பொழுது கூறிய 16 திசைகளையுங் குறிக்க. இவ்விரண்டு உருக்களுந் திசை காட்டியின் 32 திசைகளையுங் காட்டும்.

பின்வருந் திசைகளுக்கிடையில் உள்ள கோணங்களைக் காண்க.

*21. (i) வ. உம் வ இலிருந்து கி. உம்;
(ii) தெ. உம் தெ.கி. இலிருந்து கி. உம்;
(iii) மே.வ.மே. உம் வ.மே.இலிருந்து வ. உம்.

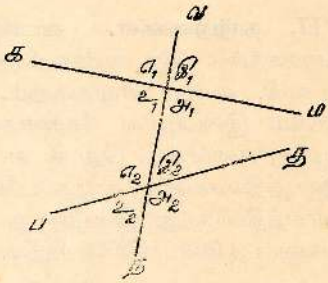
*22. (i) கி. உம் தெ.கி. இலிருந்து தெ. உம்;
(ii) மே. இலிருந்து தெ. உம் தெ. இலிருந்து மே.உம்;
(iii) வ.கி. இலிருந்து கி. உம் தெ.கி. இலிருந்து தெ.உம்.

ஒத்த கோணங்களும் ஒன்றுவிட்ட கோணங்களும் அகக் கோணங்களும்

உரு 68 இல் உள்ள **வந** போன்ற ஒரு நேர்கோடு இரண்டு அல்லது மேற்பட்ட நேர்கோடுகளை வெட்டுமாயின் அது **குறுக்குக்கோடு** எனப்படும்.

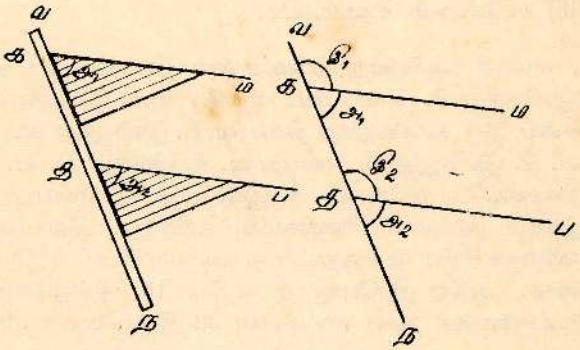
இக்குறுக்குக் கோடு தான் வெட்டுங்கோடுகளுடன் உருவாக்குங் கோணங்களிற் சிலசோடிகள் சிறப்புப் பெயர்கள் உடையன.

உரு 68 இல் $அ_1$ உம் $அ_2$ உம் **ஒத்த கோணங்கள்** எனப்படும். இவ்வாறே $இ_1$, $இ_2$; $உ_1$, $உ_2$; $எ_1$, $எ_2$ ஆகிய சோடிகளும் எண்க. குறுக்குக்கோட்டின் எதிர் மூலைகளிலமைந்த எதிர்ப்பக்கங்களிலுள்ள அகக் கோணங்கள் **ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்** எனப்படும்.



உருவம் 68

உதாரணமாக $உ_1$ உம் $இ_2$ உம் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் ஆகும். $அ_1$, $எ_2$ ஆகியவையும் அவ்வாறே. $அ_1$ உம் $இ_2$ உம் **குறுக்குக் கோட்டின் ஒரு பக்கத்தமைந்த அகக் கோணங்கள்** ஆகும். $உ_1$, $எ_2$ ஆகியவையும் அவ்வாறே. அவற்றை **உறவுக் கோணங்கள்** என்று அழைப்பதும் உண்டு.



உருவம் 69

சமாந்தர நேர்கோடுகள்

ஒரு வரைகோல்வழியாக ஒரு மூலைமட்டத்தை நகர்த்தி மூலைமட்டத்தின் மற்றை இரண்டில் ஒரு பக்கத்திற் கோடுகளைக் கீறினால், நாம் ஒத்த கோணங்களைச் சமமாக்குதற்குக் குறுக்குக் கோட்டினை வெட்டுங் கோடுகளைக் கீறுவோர் ஆகின்றோம். ஏனெனில், (உரு 69 ஐப் பார்க்க) கோணங்கள்

$அ_1$, $அ_2$ ஒவ்வொன்றும் மூலைமட்டத்தின் ஒரே கோணத்திற்குச் சமம் ஆகையால் என்க. அன்றியும், $அ_1 = அ_2$ ஆனால், $இ_1 = இ_2$ என்பது பெறப்படும். ஏனெனில்,

$அ_1 + இ_1 = 2$ செங் $\angle = அ_2 + இ_2$ ஒரு நேர்கோட்டு அடுத்துள கோணங்கள் என்க.

எனவே, இவ்வாறாக மூலைமட்டத்தாற் கீறப்பட்ட கோடுகள் **கம, தப** ஆகியவை சமாந்தரம் எனக் கொள்ளின் சமாந்தரக் கோடுகட்கு நாம் பின்வருஞ் சோதனைகளைப் பெறுவோம் :—

ஒரு தளத்திலுள்ள இரு நேர்கோடுகளை மூன்றாவது ஒரு நேர்கோடு வெட்ட ஒரு சோடி ஒத்தகோணங்கள் சமமாயின் முதலிரண்டு கோடுகளுஞ் சமாந்தரமாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியூடாக ஒரேயொரு நேர்கோடு வரையலாம் என நாம் கொள்ளின், மறுதலைக் கூற்று உண்மையாகும்.

ஒரு நேர்கோடு இரு சமாந்தரக் கோடுகளை வெட்டின் ஒத்த கோணங்கள் சமனாகும்.

குறிப்பிற்கு வேண்டிய குறுக்கம். உரு 76 இல் உள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு,

$இ_1 = உ_1$ ஒத்த கோணங்கள், **நய ∥ பத.**

ந.க. ஏன் $இ_1 = உ_1$ என்ற காரணத்தைத் திருத்தமாகக் கூறும் வழியை நன்கு அவதானித்தல் வேண்டும். $இ_1 = உ_1$ ஒத்த கோணங்கள் என்றாற் போதாது; **நய ∥ பத** என்பதைச் சேர்ப்பது இன்றியமையாதது.

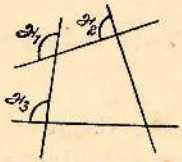
உதாரணமாக, உரு 77 இல் $இ_1$ உம் எ, உம் ஒத்த கோணங்கள். ஆனால் **யச** இற்கு **நவ** சமாந்தரம் அல்லாததினால், அவை சமமல்ல.

பயிற்சி 10

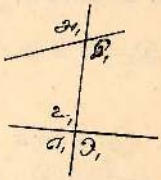
(வரிப் படங்களிலுள்ள அம்புகளிட்ட கோடுகள் சமாந்தரமானவை.)

1. உரு 70 ஐப்போல் ஒருருக் கீறுக. $அ_1$ உம் $அ_2$ உம், $அ_1$ உம் $அ_3$ உம் ஒத்தகோணங்கள். இப்படியே மற்றைச் சோடி ஒத்த கோணங்களை $இ_1$, $இ_2$; $இ_1$, $இ_3$ என்ற முறையிற் குறிக்க.

2. உரு 70 ஐப் போல் ஒருரு வரைக. அதில், $உ_1 உ_2$; $எ_1 எ_2$ என்ற முறையில் எல்லாச் சோடி ஒன்றுவிட்ட கோணங்களையுங் குறிக்க.



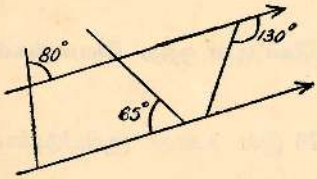
உருவம் 70



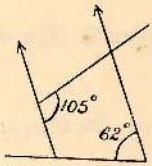
உருவம் 71

[3] உரு 71 இலுள்ள பின்வருஞ் சோடிக் கோணங்களின் பெயர்களைக் கூறுக. (i) அ, இ, ; (ii) அ, உ, ; (iii) உ, ஒ, ; (iv) இ, ஒ, ; (v) இ, உ, ; (vi) எ, ஒ, .

4. உரு 72 ஐப் போலத் துப்புரவான ஒருரு வரைக. வரைந்து, மற்றைக் கோணங்களின் அளவுகளைக் குறிக்க.



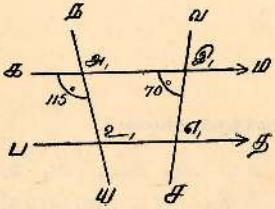
உருவம் 72



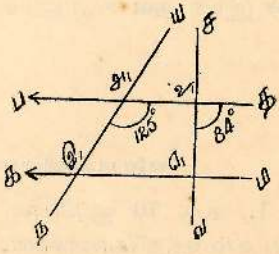
உருவம் 73

[5] உரு 73 ஐப் போன்றவொரு துப்புரவான உருக் கீறுக. அதில் மற்றைக் கோணங்களின் அளவுகளைக் குறிக்க.

6. உரு 74 இல் அ, , இ, , உ, , எ, ஆகியவற்றின் பருமனைக் காண்க. காரணங்கள் காட்டுக.



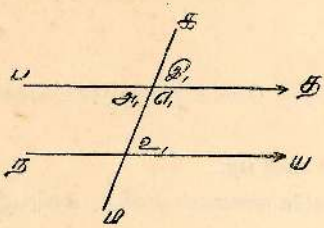
உருவம் 74



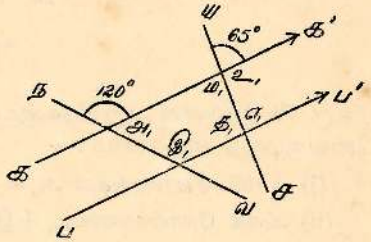
உருவம் 75

[7] உரு 75 இல் அ$_1$, இ$_1$, உ$_1$, எ$_1$ ஆகியவற்றின் பருமனைக் காண்க. காரணங்கள் காட்டுக.

8. உரு 76 இல் அ$_1$ = உ$_1$ என நிறுவுக. காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.



உருவம் 76



உருவம் 77

9. உரு 77 இல் பின்வருவனவற்றின் பெறுமதிகளைக் காண்க. (i) அ$_1$ + இ$_1$; (ii) உ$_1$ + எ$_1$; (iii) ம$_1$ + த$_1$. காரணங்களைச் செவ்விய முறையிற்றருக.

10. உரு 76 இல் உ$_1$ + எ$_1$ = 2 செங்கோணம் என நிறுவுக. காரணங்கள் கூறுக.

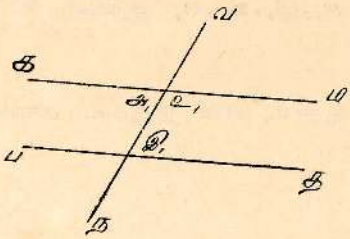
ஒரு தளத்திலுள்ள இரு நேர்கோடுகளை ஒரு குறுக்குக் கோடானது ஒரு சோடி ஒத்த கோணங்கள் சமமாகுமாறு வெட்டினால், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமனாகும். அன்றியும் குறுக்குக் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தமைந்த ஒவ்வொரு சோடி அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையும் இரு செங்கோணத்துக்குச் சமனாகும். இவற்றைப் பயிற்சி 10 இலுள்ள உதாரணங்கள் எடுத்துக் காட்டுகின்றன. எனவே,

ஒரு தளத்திலுள்ள இரு நேர்கோடுகளை மூன்றாவது ஒரு நேர்கோடு வெட்ட

(i) ஒருசோடி ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாக விருந்தால், அல்லது

(ii) வெட்டுங் கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை இரு செங்கோணத்திற்குச் சமமாயிருந்தால்

முதல் இரண்டு நேர்கோடுகளுஞ் சமாந்தரமாகும்.



உருவம் 78

உரு 78 இலுள்ள குறியீடுகளுடன் குறிப்பிற்கு வேண்டிய குறுக்கங்களைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :—

(i) ஒ. வி. கோணங்கள் அ, = இ, எனின் **கம || பத.**

(ii) அகக் கோணங்கள் உ, + இ, = 2 செங்கோணங்கள் எனின் **கம || பத.**

இதன் மறுதலைக் கூற்றும் உண்மையாகும் :

ஒரு நேர்கோடு இரு சமாந்தரக் கோடுகளை வெட்டின்

(i) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமமாகும்,

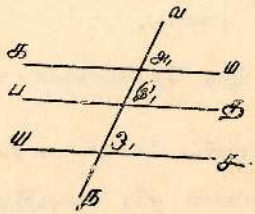
(ii) வெட்டுக்கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணத்திற்குச் சமமாகும்.

உரு 78 இலுள்ள குறியீடுகளுடன் குறிப்பிற்கு வேண்டிய குறுக்கங்களைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :—

(i) அ, = இ, ஒ. வி. கோணங்கள், **கம || பத.**

(ii) இ, + உ, = 2 செங்கோணம், **கம || பத.**

உரு 79 இல், **கம, பத** என்பவை ஒவ்வொன்றும் **யச** இற்குச் சமாந்தரம் எனில் **பத** இற்கு **கம** சமாந்தரம் என நிறுவலாம்.



உருவம் 79

உரு 79 இலுள்ள குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினால்,

அ, = ஓ, ஒத்த கோணங்கள், கம ∥ யச

இ, = ஓ, ஒத்த கோணங்கள், பத ∥ யச.

∴ அ, = இ,

ஆனால், இவை ஒத்த கோணங்கள், ∴ கம ∥ பத.

இம்முடிபைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:—

ஒரு தளத்திலுள்ள இரு நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் அதே தளத்திலுள்ள மூன்றாவதொரு நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமெனின் முன்னைய இரு நேர்கோடுகளும் ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமாகும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

உரு 80 இலுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு இ, ஐக் காண்க.

கருவி : பவ ஐ மக இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறுக.

தெளிவான காரணங்காட்டிப் பின்வருவனவற்றை முடிவாக்குக :

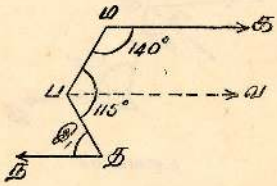
நத இற்கு **பவ** சமாந்தரம். ஏனெனில், ..

∠ **மபவ** + ... = 180°....,

∴ ∠ **மபவ** = ...,

∴ ∠ **தபவ** = ...,

∴ இ, = ... என்க.



உருவம் 80

குறிப்பு. உரு 80 இல் நேர்கோடு **பவ**, முதலுருவின் பகுதியல்லாததினாலும் நிறுவுகைக்காக ஒரு கருவியாகச் சேர்த்துக் கொள்ளப்பட்டமையாலும் குத்திடப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 11

(அம்புகளிட்ட கோடுகள் சமாந்தரமானவை.)

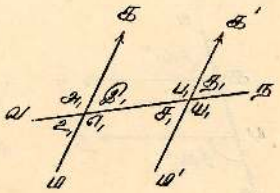
1—6 வரையுள்ள எண்கள் உரு 81 ஐக் குறிக்கின்றன. காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

1. இ, = 70° எனின் ச, ஐக் காண்க.
2. ய, = 105° எனின் அ, ஐக் காண்க.
3. உ, = 65° எனின் ப, ஐக் காண்க.

[4] த, = 80° எனின் எ, ஐக் காண்க.

5. அ, = 2த, எனின் த, ஐக்காண்க.

[6] எ, − ச, = 72° எனின் ச, ஐக் காண்க.



உருவம் 81

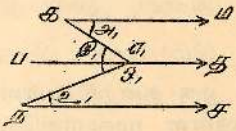
7—10 வரை உள்ள எண்கள் உரு 82 ஐக் குறிக்கின்றன. காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

7. எ$_1$ = 150°, ஒ$_1$ = 160° எனின் உ$_1$ ஐயும் அ$_1$ ஐயும் காண்க.

[8] அ$_1$ = 35°, உ$_1$ = 25° எனின் இ$_1$ ஐக் காண்க.

9. இ$_1$ = 50°, எ$_1$ = 145° எனின் அ$_1$ ஐயும் உ$_1$ ஐயுங் காண்க.

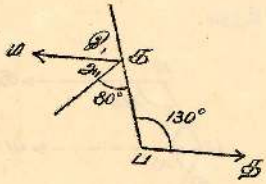
10. எ$_1$ = 4அ$_1$, ஒ$_1$ = 5உ$_1$ எனின் அ$_1$, உ$_1$, இ$_1$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



உருவம் 82

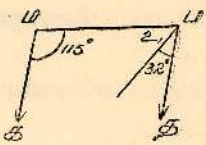
11—19 வரை எண்ணிடப்பட்ட கணக்குக்களில் அடையாளமிடப்பட்ட அறியாத கோணங்களைக் காண்க. (கோணங்களை அகரவரிசையில் எடுக்க.)

11.



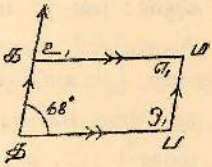
உருவம் 83

12.



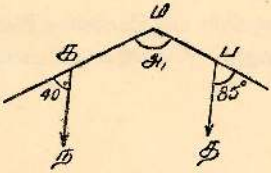
உருவம் 84

13,



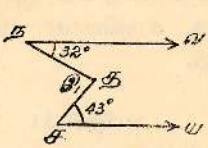
உருவம் 85

14.



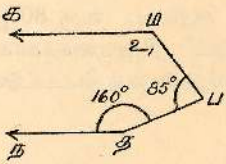
உருவம் 86

[15]



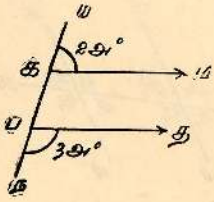
உருவம் 87

[16]



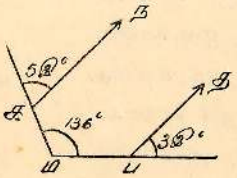
உருவம் 88

17.



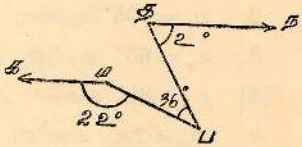
உருவம் 89

[18]



உருவம் 90

*19.

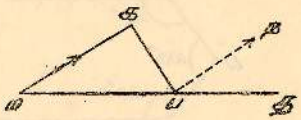


உருவம் 91

20—23 வரை உள்ள எண்கள் உரு 92 ஐக் குறிக்கின்றன. காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

20. $\angle$ க $= 55°$ ஆயும் $\angle$ ம $= 50°$ ஆயுமிருந்தால் (i) $\angle$ கபத (ii) $\angle$ கபம ஆகியவற்றைக் காண்க.

[21] $\angle$ க $= 65°$ ஆயும் $\angle$ கபத $= 100°$ ஆயுமிருந்தால் (i) $\angle$ நபத (ii) $\angle$ ம ஆகியவற்றைக் காண்க.

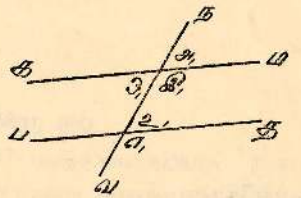


உருவம் 92

22. $\angle$ கபந $= 48°$ ஆயும் $\angle$ நபத $= 44°$ ஆயுமிருந்தால் $\triangle$கமப இன் ஒவ்வொரு கோணத்தையுங் காண்க. $\triangle$ கமப இன் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை என்ன?

23. $\angle$ க $=$ அ° ஆயும், $\angle$ ம $=$ இ° ஆயுமிருந்தால் அ, இ, என்பவற்றில் $\angle$ கபத வைக் காண்க. $\angle$ ப $=$ உ° ஆயின் அ, இ, உ என்பனபற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?

24—27 வரை உள்ள எண்கள் உரு 93 ஐக் குறிக்கின்றன. பின்வருந்தரவுகளால் பத இற்கு கம சமாந்தரமாவெனக் கூறுக. கம என்பது பத இற்குச் சமாந்தரமல்லாவிடின், அவை நீட்டப்பெறின், நவ இற்கு வலதுபக்கத்திலோ இடது பக்கத்திலோ அவை சந்திக்குமெனக் கூறுக.



உருவம் 93

24. அ, $= 70°$, உ, $= 60°$.

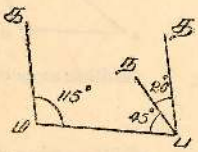
[25] இ, $= 125°$, உ, $= 55°$.

26. அ, $= 65°$, எ, $= 115°$.

[27] ஓ, $= 60°$, உ, $= 65°$.

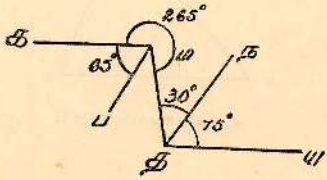
உருக்கள் 94, 95 ஆகியவற்றில் சமாந்தரக் கோடுகள் இருப்பின் அவற்றைக் காரணங் காட்டிக் கூறுக.

28.



உருவம் 94

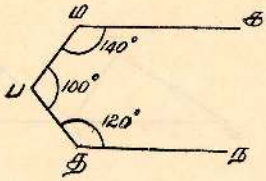
29.



உருவம் 95

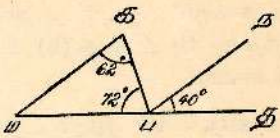
உருவங்கள் 96, 97 ஆகியவற்றில் சமாந்தரக் கோடுகள் இருந்தால் அவற்றைக் காரணங்காட்டிக் கூறுக.

[30]



உருவம் 96

[31]

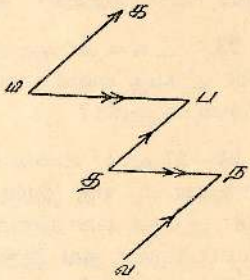


உருவம் 97

32. உரு 98 இல்

∠ கமப = ∠ வநத என நிறுவுக.

காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

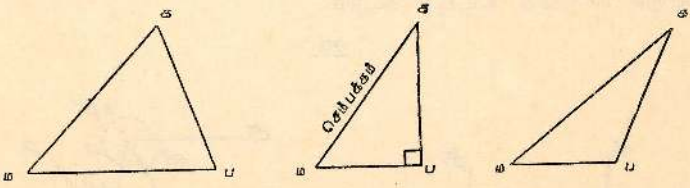


உருவம் 98

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள்

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் யாவும் கூராயிருந்தால் அது **கூர்ங்கோணமானது** எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுளொன்று செங்கோணமாயின் அது **செங்கோணமானது** எனப்படும். செங்கோணத்திற்கெதிராயமைந்த பக்கம் **செம்பக்கம்** எனப்படும்.



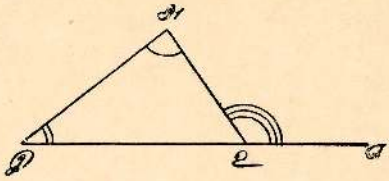
கூர்ங்கோணமானது செங்கோணமானது விரிகோணமானது

உருவம் 99

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களுளொன்று விரிகோணமாயின் அம் முக்கோணம் **விரிகோணமானது** எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் புறக்கோணம்

உரு 100 ஐப் பார்க்க. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமான **இஉ** ஆனது **எ** என்பதற்கு நீட்டப்பட்டால் கோணம் **அஉஎ** △**அஇஉ** இன் **புறக்கோணம்** எனப்படும் ; ∠**அ**, ∠**இ** என்பன **அகத்தெதிர்க்கோணங்கள்** எனப் படும்.



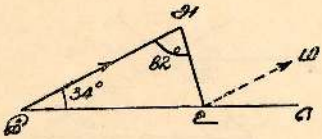
உருவம் 100

உரையாடலுக்குரிய உதாரணங்கள்

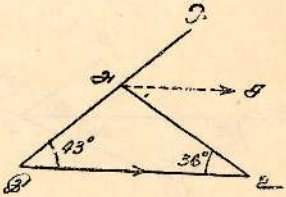
1. உரு 101 இல் ∠**அஉஎ**, △**அஇஉ** இன் ஒரு புறக்கோணம். **இஅ** உக்குச் சமாந்தரமாக **உம** ஐக் கீறிப் பின்வருவனவற்றை (காரணங்கள் கூறி) முடிவாக்குக :

∠**அஉம** = ... ; ∠**மஉஎ** = ... ;

∠**அஉஎ** = ...



உருவம் 101



உருவம் 102

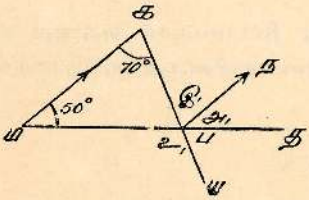
(2) உரு 102 இல் புறக்கோணம் **உஅஓ** இனை அளவிடுக. உமது முடிபிற்குத் தகுந்த காரணங்கள் கூறுக.

பயிற்சி 12

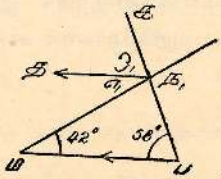
(வரிப்படங்களிலுள்ள அம்புக்கோடுகள் சமாந்தரம்.)

உருக்கள் 103, 104 ஆகியவற்றிலே அடையாளமிடப்பட்ட, தெரியாத கோணங்களைக் காண்க. உமது முடிபிற்குக் காரணங் காட்டுக.

1. [2]



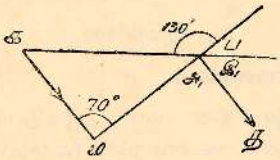
உருவம் 103



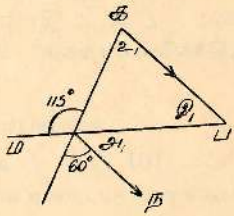
உருவம் 104

105—108 வரையுள்ள உருக்களில் அடையாளமிடப்பட்ட தெரியாத கோணங்களின் அளவுகளைக் காண்க. உமது முடிபிற்குக் காரணங்கள் காட்டுக.

3. [4]

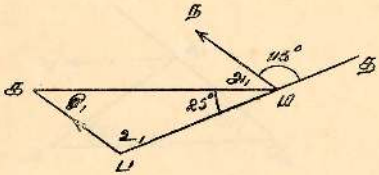


உருவம் 105

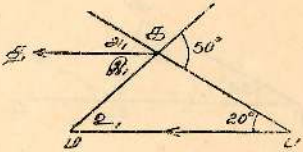


உருவம் 106

5. [6]



உருவம் 107

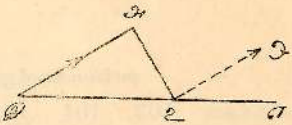


உருவம் 108

7. உரு 109 இல் இஉ ஆனது எ இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. தகுந்த காரணங் காட்டிப் பின்வருவனவற்றை முடிவு செய்க.

∠ அஉஓ = ...

∠ ஓஉஎ = ...



உருவம் 109

எண் 7 இல் நிறுவப்பட்ட உண்மையைப் பின் வருமாறு கூறலாம் :—

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கமானது நீட்டப்பட்டால் அதனால் உண்டாக்கப்பட்ட புறக்கோணம் அகத்தெதிர்க்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்.

புறக்கோணத்தை புற ∠ என்று குறிக்கலாம்.

இவ்வுண்மையை எஞ்சிய கணக்குக்களுக்குப் பயன்படுத்துக.

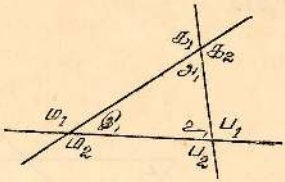
உரு 110 ஐக் குறிக்கும், 8-11 வரையுள்ள மன்பாடுகளை முடிவுசெய்க.

8. அ$_1$ + இ$_1$ = ... = ...

[9] இ$_1$ + உ$_1$ = ... = ...

10. ம$_2$ = ... = ...

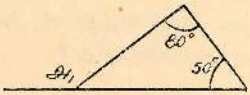
[11] க$_2$ = ... = ...



உருவம் 110

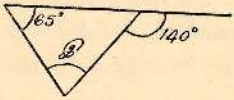
111—121 வரையுள்ள உருக்களில் அடையாளமிடப்பட்ட தெரியாத கோணங்களை அளவிடுக.

12.



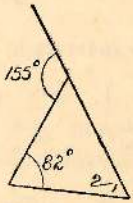
உருவம் 111

13.



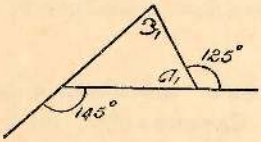
உருவம் 112

[14]



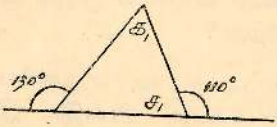
உருவம் 113

15.



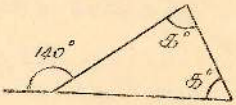
உருவம் 114

[16]



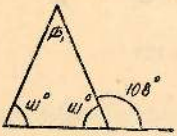
உருவம் 115

[17]



உருவம் 116

18.

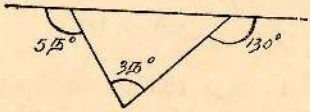


உருவம் 117

19.

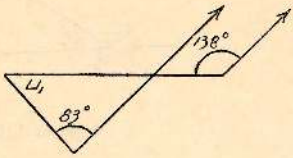
உருவம் 118

[20]



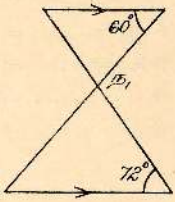
உருவம் 119

21.



உருவம் 120

22.



உருவம் 121

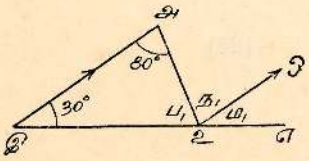
ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்.

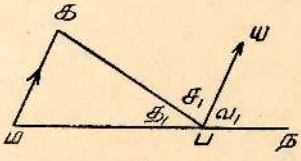
1. ஒரு தாளில் முக்கோணமொன்றை வெட்டுக. அதன் கோணங்களுள் இரு கோணங்களைக் கிழித்தெடுத்து மற்றைக் கோணத்துடன் ஒரு புள்ளியிலிணையுமாறு பொருத்துக. இது எதனைக் குறிக்கின்றது?

2. **அஇஉ** என்னுமொரு பெரிய முக்கோணம் வரைக. உமது பென்சிலை **இஉ** வழி வைக்க; அதை **உ** இற் பிடித்துக்கொண்டு **அஉ** வழி கிடக்குமாறு அதை ∠**உ** வழி திருப்புக. பின்னர் அதை **அ** இற் பிடித்துக்கொண்டு **அஇ** வழி கிடக்குமாறு ∠**அ** வழி திருப்புக. இறுதியாக அதை **இ** இற் பிடித்துக்கொண்டு **உஇ** வழி கிடக்குமாறு ∠**இ** வழி திருப்புக. பென்சிலானது திரும்பிய முழுக் கோணத்தின் பருமனென்ன? இதெதனைக் குறிக்கின்றது?

3. உரு 122 இல் ப,, ந,, ம, எனுங்கோணங்களை அளவிடுக. உமது முடிபிற்குக் காரணங் காட்டுக. △**அஇஉ** இன் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையென்ன?



உருவம் 122



உருவம் 123

4. உரு 123 இல் வேறெந்தக்கோணம் வ, இற்குச் சமனாயிருக்கின்றது? வேறெந்தக் கோணம் ச, இற்குச் சமனாயிருக்கின்றது? வ, + ச, + த, என்பதைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர்? அது என்னத்தை நிறுவுகின்றது?

1—3 வரையுள்ள உதாரணங்களால் விளக்கப்பட்டதும் நாலாவதால் நிறுவப்பட்டதுமான உண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்கட்குச் சமனாகும்.

கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையை ∠ இன் கூ.தொ. எனக் குறிக்கலாம்.

எனவே, ஒரு முக்கோணஞ் செங்கோணமானதாயின் மற்றையவை கூர்ங்கோணமாயும், அவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு செங்கோணத்திற்குச் சமனாயுமிருக்கும்.

இரு கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை **ஒரு செங்கோணம்** ஆயின் அவை **நிரப்புகோணங்கள்** எனப்படும். எனவே, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திலுள்ள கூர்ங்கோணங்களிரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புகோணங்களெனப்படும்.

5. உரு 11 இலுள்ள △**அஇஉ** இன் கோணங்களை அளக்க. அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. உமது விடையிலுள்ள வழு என்ன ?

பயிற்சி 13

1. உரு 11 இலுள்ள △ **எஓவ** இன் கோணங்களை அளக்க. அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. உமது விடையிலுள்ள வழு என்ன ?

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்கள் பின்வருமாறு உளவேல் மூன்றுங் கோணத்தைக் கணிக்க.

2. 50°, 60°. 3. 110°, 45°. [4] 90°, 37°. [5] 8°, 12°.

[6] △**அஇஉ** இல் ∠**அ** = ∠**இ** = 72°. ∠**உ** ஐக் காண்க.

7. △**அஇஉ** இல் ∠**இ** = ∠**உ**, ∠**அ** = 110°. ∠**இ** யைக் காண்க.

[8]. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் 54°. மற்றைக் கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் பின்வருமாறுளவேல், கணக்குக்கள் 9—11 வரையிலுள்ள "ம" இன் பெறுமதியைக் காண்க.

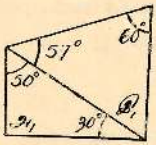
9. ம°, ம°, **ம°.** 10. ம°, 2ம°, 2ம°. 11. 3ம°, 4ம°, 5ம°.

12. ஒரு முக்கோணத்தை அதன் கோணங்கள் பின்வருமாறுளவாக வரைதல் கூடுமா ?

(i) 45°, 65°, 80°; (ii) 43°, 64°, 73°; (iii) 95°, 95°, ம° .

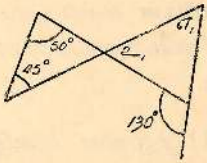
124—129 வரையுள்ள உருக்களில் அடையாளமிடப்பட்ட தெரியாத கோணங்களைக் கணிக்க ; உமது முடிபிற்குக் காரணங்காட்ட வேண்டிய தில்லை ; ஆனால் உம் செய்முறைகளைக் காட்டுக.

[13]



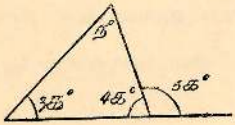
உருவம் 124

[14]



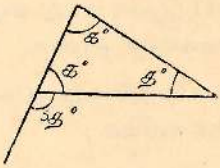
உருவம் 125

[15]



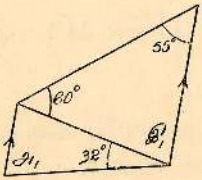
உருவம் 126

[16]



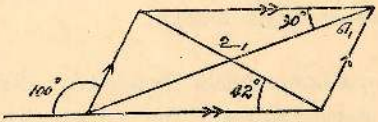
உருவம் 127

[17]



உருவம் 128

[18]



உருவம் 129

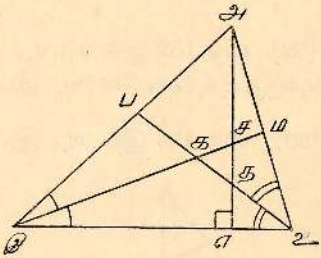
19–22 வரையுள்ள கணக்குக்கள் உரு 130 ஐக் குறிக்கின்றன. இவ்வுருவில் இம, உப ஆகியவை ∠அஇஉ, ∠அஉஇ என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகளாகும். அஎ என்பது இஉ இற்குச் செங்குத்தாகும். ஒவ்வொரு கேள்விக்கும் ஒருருவரைக. உம் விடைகட்குக் காரணங் காட்ட வேண்டியதில்லை. செய்முறைகளை மட்டுங் காட்டுக.

19. ∠அஇஉ = 30°, ∠அஉஇ = 70°. (i) ∠இகஉ ஐயும், (ii) ∠அபஉ ஐயுங் காண்க.

[20] ∠அஇஉ = 20°, ∠இஅஉ = 110°, ∠எஅஉ ஐக் காண்க.

21. ∠அஇஉ = 36°, ∠அஉஇ = 64°, (i) ∠சகத ஐயும் (ii) ∠கசத ஐயும் காண்க.

[22] ∠அஉஇ = 74°, ∠இஅஉ = 80°, (i) ∠இமஅ ஐயும் (ii) ∠கதச ஐயுங் காண்க.



உருவம் 130

[23] △அஇஉ இல் ∠இ = 38°, ∠உ = 54°; அஎ ஆனது அ இலிருந்து இஉ இற்குச் செங்குத்து; அஓ என்பது ∠இஅஉ ஐ இரு சமக்கூறிடுகின்றது. ∠ஓஅஎ இனைக் காண்க.

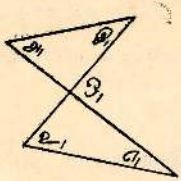
24. △அஇஉ இல் ∠அ = 74°, ∠இ = 28°; இஉ என்பது ம இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது; ∠அஇஉ ஐயும் ∠அஉம ஐயும் இருசமக்கூறிடுங் கோடுகள் க இற் சந்திக்கின்றன. ∠இகஉ ஐக் காண்க.

[25] △அஇஉ இல் ∠இ = 110°, ∠உ = 50°; அஎ என்பது அ இலிருந்து நீட்டப்பட்ட உஇ இற்குச் செங்குத்து; ∠எஅஇ = ∠இஅஉ என நிறுவுக.

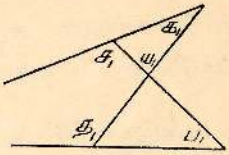
26. △அஇஉ இல் ∠இ = ∠உ; இஉ என்பது எ இற்கு நீட்டப்பட்டது. ∠அஉஎ = க° ஆனால், ∠அ ஐ க இற்காண்க.

*27. △அஇஉ இல் ∠இஅஉ இன் இரு சமவெட்டியானது இஉ இனை எ இல் வெட்டுகின்றது. ∠இ = க°, ∠உ = ந° எனின், ∠அஎஉ இனை க, ந, ஆகியவற்றிற் காண்க.

28. உரு 131 இல் இ,, உ,, எ, ஆகியவற்றில் அ, ஐக் காண்க. [உமக்குதவுதற்காகவே உருவில் ஒ, இடப்பட்டிருக்கின்றது.]



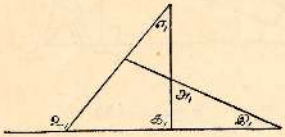
உருவம் 131



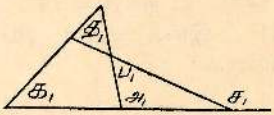
உருவம் 132

[29] உரு 132 இல் க,, ச,, ப, என்பவற்றில் த, ஐக் காண்க. [உருவில் உமக்குதவுதற்காகவே ய, இடப்பட்டிருக்கின்றது].

*30. உரு 133 இல் அ,, இ,, உ, என்பவற்றில் எ, ஐக் காண்க.



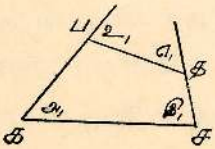
உருவம் 133



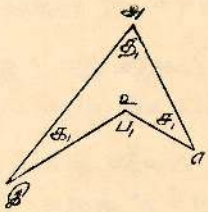
உருவம் 134

*31. உரு 134 இல் க,, ச,, த, என்பவற்றில் ப, ஐக் காண்க.

*32. உரு 135 இல் அ,, இ,, உ, என்பவற்றில் எ, ஐக் காண்க. [**கப** ஐயும் **சத** வையும் **ய** இல் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.]



உருவம் 135

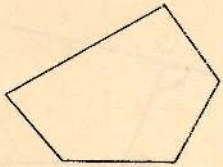


உருவம் 136

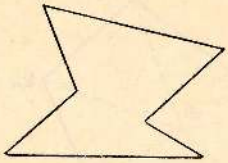
*33. உரு 136 இல் க,, ச,, த, என்பனவற்றில் ப, ஐக் காண்க. [**அ** ஐயும் **உ** ஐயும் தொடுத்து நீட்டுக.]

ஒரு பல்கோணத்தின் கோணங்கள்

ஒரு பல்கோணத்தின் ஒவ்வோரகக் கோணமும் இரு செங்கோணத்திற்குக் குறைவாயிருந்தால் அது **குவிந்தது** எனப்படும். அதனகக்கோணங்களுள் ஒன்றேனு பலவோ பின்வளைவாயின் அது **உள்ளுறு பல்கோணம்** எனப்படும்.



குவிந்த பல்கோணம் உருவம் 137



உள்ளுறு பல்கோணம்

ஒரு பல்கோணத்தின் பக்கங்கள் யாவும் சமனாயின் அது **சமபக்கமானது** எனப்படும்; கோணங்கள் சமனாயின் **சமகோணமானது** எனப்படும். அதன் பக்கங்களின்றொகை கோணங்களின்றொகைக்குச் சமமாயிருக்கும்.

ஒரு பல்கோணஞ் சமபக்கச் சமகோண பல்கோணமாயின் அது **ஒழுங்கானது** எனப்படும். ஒரு முக்கோணஞ் சமபக்கமானதாயின் அது சமகோணமானதாயேயிருக்கும். இது மற்றைப் பல்கோணங்கட்கமைந்த உண்மையன்று. ஒரு பல்கோணம் ஒழுங்கானதாயின் அதன் உச்சிகட்கூடாக ஒரு வட்டம் வரையலாம்.

குவிந்த பல்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

உரு 138 **அஇஉஎஒ** என்னும் யாதாயினுமொரு ஐந்துபக்கமுடைய பல்கோணத்தைக் குறிக்கின்றது.

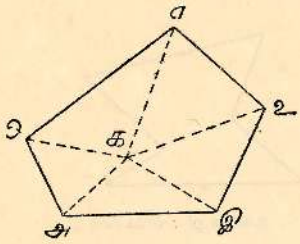
அஇஉஎஒ இனுள் யாதாயினும் **க** எனுமொரு புள்ளியை எடுத்து 5 முக்கோணங்களமையக்கூடியதாய் பல்கோணத்தினுள்வோருச்சியொடுந் தொடுக்க.

அந்த 5 முக்கோணங்களின் கோணங்கள் யாவற்றினதுங் கூட்டுத்தொகை 5×2 செங்கோணங்களாகும். இது 10 செங்கோணங்களாகும்.

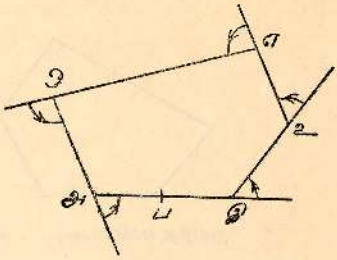
ஆனால், இக்கூட்டுத்தொகை, (i) ∠ **அகஇ**, ∠ **இகஉ**, ∠ **உகஎ**, ... (இவை **க** இனுள்ள கோணங்கள்) ஆகியவையும், (ii) ∠ **அஇஉ**, ∠ **இஉஎ**, ∠ **உஎஒ**, ... (இவை பல்கோணத்தின் கோணங்கள்) ஆகியவையுஞ் சேர்ந்ததாகும்.

க இலுள்ள எல்லாக் கோணங்களினதுங் கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணமாகும்.

∴ 5 பக்கமுடைய பல்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை (10–4) அதாவது 6 செங்கோணமாகும்.



உருவம் 138



உருவம் 139

மாணாக்கர் இப்பொழுது, 6, 7, 100, ந பக்கங்களுடைய குவிந்த பல்கோணங்கட்கு, மேற்கூறிய நியாயவழியைக் கொண்டு கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணுதல் வேண்டும்.

இவ்வழியில் நிறுவப்படும் உண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

ந பக்கமுடைய குவிந்த பல்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை (2ந – 4) செங்கோணங்களாகும்.

ஒரு குவிந்த கோணத்தின் புறக்கோணங்கள்

உரு 139 அஇ, இஉ, உஎ, எஒ, ஒஅ என்னும் 5 பக்கங்களையுடைய ஒரு குவிந்த பல்கோணம் **அஇஉஎஒ** என்பதைக் குறிக்கின்றது. இப்பக்கங்கள் முறையாக நீட்டப்பட்டு ஒவ்வோருச்சியிலும் ஒவ்வொரு புறக்கோணத்தையுண்டாக்குகின்றன.

நிலத்தில் இதைப் போன்ற பெரிய உருவம் ஒன்றை அமைத்து, **அஇ** இலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ப** இலிருந்து **இ** உக்கு **பஇ** வழிச்செல்க. பின்னர்த் திரும்பி **உ** விற்கு **இஉ** வழிச்செல்க. இப்படியே **ப** இற்கு மீண்டும் வரும்வரை செல்க.

நீர் திரும்பிய தனித்தனி கோணங்கள் யாவை. நீர் திரும்பிய முழுக் கோணமென்ன ? இது எதைக் குறிக்கின்றது ?

அஇஉஎஒ இன் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம் :—

ஒவ்வொரு மூலையிலுமுள்ள வெளிக்கோணத்தினதும் புறக்கோணத்தினதுங் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணமாகும்.

∴ எல்லாப் புறக்கோணங்களினதும் அகக்கோணங்களினதுங் கூட்டுத் தொகை (5 × 2) செங்கோணங்களாகும்.

ஆனால், எல்லா அகக்கோணங்களினதுங் கூட்டுத்தொகை 6 செங்கோணங்களாகும்.

∴ எல்லாப் புறக்கோணங்களினதுங் கூட்டுத்தொகை (10–6) செங்கோணங்களாகும் ; இது 4 செங்கோணங்களாகும்.

மாணக்கர் இப்பொழுது 6, 7, 100, ந பக்கங்கள் கொண்ட குவிந்த பல்கோணங்கட்கு மேற்கூறிய நியாயவழியைக் கொண்டு கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காணுதல் வேண்டும்.

இவ்வழியாலே நிறுவப்படும் உண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

குவிந்த பல்கோணமொன்றின் பக்கங்களை ஒழுங்காக நீட்டினால் அவ்வழியமைவுற்ற புறக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை நாலு செங்கோணங்கட்குச் சமனாகும்.

பயிற்சி 14

1. ஒரு நாற்கோணத்தின் கோணங்களுடைய கூட்டுத்தொகையென்ன ?

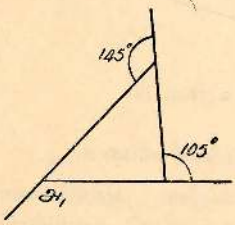
[2] அஇஉஎ ஒரு நாற்கோணம். அதன் ∠ இ = 112°, ∠ உ = 75°, ∠ எ = 51°. ∠ அ ஐக் காண்க.

3. அஇஉஎ என்னும் ஒரு நாற்கோணத்தில் ∠ அ = ∠ இ = ∠ உ , ∠ எ = 120°. ∠ அ ஐக் காண்க.

[4] அஇஉஎஒ ஓர் ஐங்கோணம். ∠ அ = ∠ இ = ∠ உ = ∠ எ = 115° எனின், ∠ ஒ ஐக் காண்க.

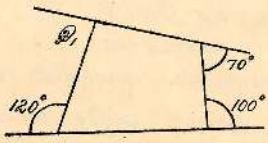
140—142 வரையுள்ள உருக்களில் அடையாளமிடப்பட்ட தெரியாத கோணங்களைக் காண்க.

5.



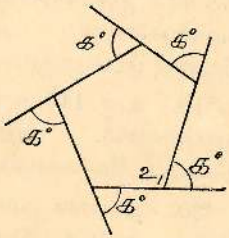
உருவம் 140

[6]



உருவம் 141

7.



உருவம் 142

8. 10 பக்கங்கள் கொண்ட ஒரொழுங்கான குவிந்த பல்கோணத்தின் ஓரகக் கோணத்தினது பருமனைக் காண்க.

[9] 20 பக்கங்கள் கொண்ட ஒரொழுங்கான குவிந்த பல்கோணத்தின் ஓரகக் கோணத்தினது பருமனைக் காண்க.

10. ஒரு குவிந்த பல்கோணத்தின் ஒவ்வொரு புறக்கோணமும் 40°. அதற்கு எத்தனை பக்கங்கள் ?

11. ஒரு குவிந்த பல்கோணத்தின் ஒவ்வோரகக் கோணமும் 150°. அதற்கு எத்தனை பக்கங்கள் ?

[12] ஒவ்வொரு புறக்கோணமும் பின்வரும் அளவிலைமையக்கூடியதாய் ஒழுங்கான குவிந்த பல்கோணங்கள் வரைதல் இயலுமா? (i) 20°, (ii) 16°, (iii) 15°. முடியுமானால் ஒவ்வொரு பல்கோணத்திற்கும் பக்கங்களெத்தனை?

13. ஒவ்வோரகக் கோணமும் பின்வரும் அளவிலைமையக்கூடியதாய் ஒழுங்கான குவிந்த பல்கோணங்கள் வரைதல் இயலுமா? (i) 144°, (ii) 140°, (iii) 130°. இயலுமாயின், ஒவ்வொரு பல்கோணத்திற்கும் எத்தனை பக்கங்கள் ?

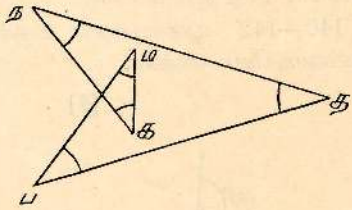
14. ஓரைங்கோணத்தின் கோணங்கள் 2ம°, 3ம°, 3ம°, 3ம°, 4ம°, ஆகும். ம வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15. ஓரைங்கோணத்தின் கோணங்கள் ம, 2ம, ம + 30, ம—10, ம + 40 பாகையாகும். ம இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. **அஇஉஎஒ** ஒரொழுங்கான ஐங்கோணம்; **அஇ** உம் **எஉ** உம் **ந** இல் சந்திக்கும்படி நீட்டப்பட்டுள்ளன. ∠ **அநஎ** ஐக் காண்க.

*17. ஒருநாற்கோணத்தின் கோணங்கள் முறையாக **வ** °, 3**வ**°, 5 **வ**°, 7 **வ**° ஆகும். அதனிரு பக்கங்கள் சமாந்தரமானவையென்பதை நிறுவுக.

*18. எண்பக்கப் பல்கோணமொன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை ஐங்கோணமொன்றின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையில் இரண்டு மடங்காகும் என்பதை நிறுவுக.



உருவம் 143

*19. உரு 143 ஒரு குறுக்கு வெட்டு ஐங்கோணம். அதில் அடையாளமிடப்பட்ட கோணங்கள் சமனாகும். அவற்றின் பருமனைக் காண்க.

*20. ந பக்கமுள்ள குவிந்த பல்கோணமொன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை, புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையினும் இருமடங்கு. ந இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ஒரு முக்கோணத்தின் உருவையும் பருமனையும் நிலைப்படுத்துதற்கு வேண்டிய தரவு

உரு 11 இலுள்ள △ **அஇஉ** இனது திருத்தமானவொரு பிரதியொன்றை யெடுக்குமாறு உம்மை யாராயினுங் கேட்டால் அப்படிச் செய்வதற்கு நீர் என்ன அளவுகளை எடுத்தல்வேண்டும்? அங்கு 3 பக்கங்களும் 3 கோணங்களும் உள. ஆறளவுகள் எடுக்க வேண்டியது அவசியமா? இல்லையேல் அவற்றுள் எவ்வெவ்வளவுகள் போதுமானவை?

பயிற்சி 14 (வாய்முறை)

1. உரு 11 இல் **அஇ, அஉ** (ச. மீ. இல்) ∠ **இஅஉ** ஆகியவற்றை அளக்க. △**அஇஉ** இன் பிரதியொன்றைச் செய்வதற்கு இவ்வளவுகள் போதுமானவையா? போதுமெனின், அதை வரைந்து உமது பிரதியில் **இஉ** இனை அளக்க.

வகுப்பிலுள்ள பிள்ளைகளால் எடுக்கப்பட்ட அளவீடுகளுள் மற்றையவற்றிலும் அதிக வித்தியாசமாயுள்ளவற்றை நீக்கிவிட்டு ஏனையவற்றின் சராசரியை எடுத்து மூலத்தினது நீளத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்த்தல்வேண்டும்.

[2] உரு 11 இலுள்ள △**எஓவ** இன் **ஓஎ, ஓவ** (ச. மீ. இல்) ∠**ஓ** ஆகியவற்றையளந்து பிரதியொன்று செய்க. உமது பிரதியில் **எவ** இனை அளக்க.

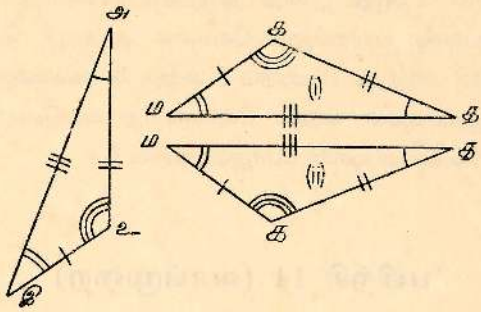
கணக்கு 1 இல் கூறியவாறு உம் அளவுகளை ஒப்பிடல் வேண்டும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களும் அவற்றால் அமைக்கப்பட்ட கோணமும்—சுருக்கமாக இதை **அமைகோணம்** எனலாம்—அறியப்பெற்றால் அம்முக்கோணத்தின் உருவும் பருமனும் நிலைப்படுத்தப்பட்டனவென நாம் கொள்ளலாம்.

எனவே, இரு முக்கோணங்கள், அவை தம் **இருவேறுபக்கங்கள், அமைகோணம்** ஆகியவற்றின் அளவுகள் பொருந்துவனவாக வரையப்பெறின் மற்றை **ஒத்த** அளவுகளிலும் பொருந்துதல் வேண்டும். இத்தகைய

முக்கோணங்கள் எவ்வகையிலுஞ் சமன், அல்லது **சர்வசமன்** எனப்படும்.

" என்பதற்குச் சர்வசமன் " என்பதை = இக்குறியாற் குறிக்கலாம்.



உருவம் 144

ஒத்த உச்சிகளும் ஒத்த பக்கங்களும். **அஇஉ**, **தமக** ஆகிய முக்கோணங்கள் சர்வசமன் எனுங்கூற்று, **அ**, **த** இலும் **இ**, **ம** இலும் **உ**, **க** இலும் இருக்குமாறு △ **அஇஉ** இனை △ **தமக** மேல் வைக்கலாம் என்பதைக் கருதும். அக்கூற்றைக் கீழ்க்காணுமாறு எழுதுவதால், இவ்வெண்மையைச் செவ்விதாகச் சுட்டிக் காட்டலாம் :

முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{தமக}}$ சர்வசமன்.

அ, **த** இனை ஒத்த உச்சிகளென்கின்றோம். அப்படியே **இ** உம் **ம** உம், **உ** உம் **க** உமாகும். **இஉ** உம் **மக** உம், **உஅ** உம் **கத** உம், **அஇ** உம் **தம** உம் ஒத்த பக்கங்கள் என்கின்றோம்.

எழுத்துக்களை ஒழுங்கான முறையில் வைத்து முக்கோணங்களைக் குறிப்போமானால், $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{தமக}}$ என்ற ஒழுங்கு ஒரு முக்கோணத்தின் எப்பக்கம் எக்கோணம் மற்றையதின் எப்பக்கம் எக்கோணத்திற்குச் சமன் என்பதை உடனே காட்டுவதால், சமபக்கச் சோடிகளையோ சமகோணச் சோடிகளையோ தெரிவதற்கு நாம் உருக்களைப் பார்க்க வேண்டியதில்லை.

ஒத்த பக்கங்கள் சமகோணங்கட்கு எதிராணவையாயிருக்கும்.

குறிப்பு. ஒரு முக்கோணத்தை ஒரொத்த முக்கோணத்துடன் பொருத்துவதற்கு முன்பாக அதைத் திருப்பவேண்டி நேரிடும். △ **அஇஉ** ஐத் திருப்பாமல் உரு 144 (i) இலுள்ள △ **தமக** ஓடு அல்லது உரு 144 (ii) இலுள்ள △ **தமக** ஓடு பொருத்த முடியுமா?

3. உரு 11 இல் சத இனை (ச. மீ. இல்) அளக்க. ∠சதப ஐயும் ∠தசப ஐயும் அளக்க. இவ்வளவுகள் △பதச இன் பிரதியொன்று செய்யப்போதுமானவையா ? போதுமாயின் பிரதியைக்கீறி அதிலுள்ள சப இனை அளக்க.

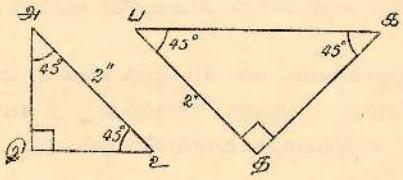
அளவீடுகளை முதலாங்கணக்கிற் கூறியவாறு ஒப்பிடுக.

4. உரு 11இல் சத இனை (ச. மீ. இல்) அளக்க. ∠தசம ஐயும் ∠சமத ஐயும் அளக்க. இப்பொழுது ∠சதம இனை அளவாமல் அதைப் பற்றி யாதாயினுஞ் சொல்லல முடியுமா ? ஓரளவும் எடுக்காமல் △சமத இன் பிரதியொன்று செய்து உமது பிரதியிலுள்ள மத இனை அளக்க.

அளவுகளை முதலாங் கணக்கிற் கூறியவாறு ஒப்பிடுக.

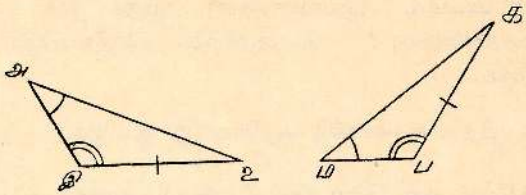
எனவே, ஒரு முக்கோணத்தினுடைய இரு கோணங்களினளவுகளும் **அவற்றோடியைந்த குறித்தவொரு நிலையிலுள்ள** ஒரு பக்கத்தினது நீள முங் கொடுக்கப்பட்டால் அம்முக்கோணத்தின் உருவையும் பருமனையும் நிலைப்படுத்தலாம் என நாம் முடிவுசெய்யலாம்.

எனவே, இரு முக்கோணங்கள் **இரு சோடிக்கோணங்களிலும் ஒத்த நிலையிலமைந்த ஒரு சோடிப் பக்கங்களிலும்** அளவாற் பொருந்த வரையப் பட்டால் அவை மற்றை **ஒத்த** அளவுகளிலும் பொருந்தும் ; அதாவது **சருவசமன்** ஆகும்.



உருவம் 145

5. உரு 145 இலுள்ள தரவுகளுடன் முக்கோணங்கள் அஇஉ, பதக ஆகியவற்றை வரைக. ∠அ = ∠ப, ∠உ = ∠க, அ உ = பத ; ஆனால் இம்முக்கோணங்கள் சருவசமனல்ல. அஉ உம் பத உம் ஒத்த பக்கங் கள் அல்லவென்பதை அவற்றின் எதிர்க் கோணங்களின் அளவுகளைக் கொண்டு விளக்குக.



உருவம் 146

6. உரு 146 இல் ஒத்த அடையாளங்கள், குறித்த கோணங்கள் பக்கங்கள் ஆனவை சமன் என்பதைக் காட்டுகின்றன. அவ்விரு முக்கோணங்களுஞ் சருவசமனானவையா ?

ஆயின், வேண்டிய அடையாளங்களிட்டு அவ்வுண்மையை நன்முறையிற் கூறுக.

[7] **அஇஉ, கசத** எனும் இரு முக்கோணங்களைக் கீறி அவற்றில் ∠**இ**=∠**ச**, ∠**அ** =∠**த**, **அஇ** = **கச** ஆகவமைய அடையாளமிடுக. அவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமனா ? காரணங்காட்டுக.

8. உரு 11 இல் **மப, பத, தம** ஆகியவற்றை அங்குலத்தில் அளக்க. △**பமத** இன் பிரதியொன்றைச் செய்வதற்கு இவ்வளவுகள் போதுமானவையா? ஆயின் பிரதியைச் செய்து அதில் ∠**மபத** இனை அளக்க.

முதலாங் கணக்கிற் கூறியவாறு அளவுகளை ஒப்பிடுக.

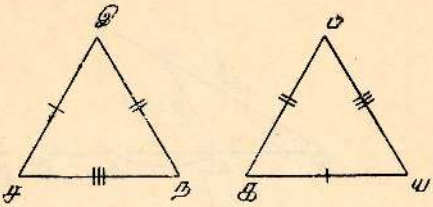
[9] உரு 11 இலுள்ள **பம, மச, சப** ஆகியவற்றை அளந்து △**பசம** இன் பிரதியொன்று செய்க. உமது பிரதியில் ∠ **சமப** இனை அளக்க. முதலாங் கணக்கிற் கூறியவாறு அளவுகளை ஒப்பிடுக.

எனவே, இரு முக்கோணங்கள் அவை தம் **முப்பக்கங்களும்** பொருந்துமாறு வரையப்படுமேல் அவை மற்றை **ஒத்த** அளவுகளிலும் பொருந்தினவாயிருக்கும் ; அதாவது அவை சர்வசமன் ஆகும்.

[10] உரு 147 இல் ஒத்த அடையாளங்கள் முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் சமன் என்பதைக் குறிக்கின்றன. அம்முக்கோணங்கள் சர்வசமனா? ஆயின், அவ்வுண்மையை செவ்விய முறையிற் கூறுக.

சஇ = 5 ச.மீ., **இந** = 6 ச.மீ., **நச** = 7 ச.மீ. ஆக அமையவும், **சநகய** ஒரு நேர் கோடாயமையவும் இரு முக்கோணங்கள் வரைக. ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் பெரிய கோணமாயுள்ளதை அளக்க.

11. 38°, 62°, 80° அளவுகள் கொண்ட கோணங்களைக் கொண்டு ஒரு முக்கோணம் வரையக் கூடியதாயிருப்பது எதனால் ?



உருவம் 147

மேற்கூறிய அளவுடன் பக்கங்களுள் நீளமானவை முறையே 4 ச.மீ. உம் 8 ச. மீ. உம் ஆயிருக்க இரு முக்கோணங்கள் வரைக. மற்றைப் பக்கங்களை அளக்க. ஒவ்வொரு சோடி ஒத்த பக்கங்களையும்பற்றி நீர் அவதானிக்கக் கூடியதென்ன ?

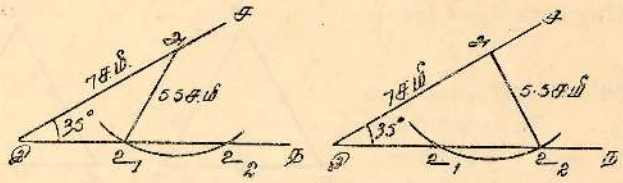
38°, 62°, 90° அளவுகள் கொண்ட கோணங்களைக் கொண்டு உம்மால் ஒரு முக்கோணம் வரைய முடியுமா ?

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களை அறிந்தால் மூன்றாவது கோணத்தைக் கணித்து அறியலாம். ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 38°, 62°, 80° ஆயிருக்கின்றன என்னுங் கூற்று அதன் கோணங்களுள் இரண்டு, 38° ஆயும் 62° ஆயுமிருக்கின்றன என்பதற்குச் சமமாகும். எனவே, இக்கூற்று சாரா உண்மைகள் இரண்டையே தன்னுள் கொண்டுள்ளது. மூன்று சாரா உண்மைகளை அறிந்தாலன்றி ஒரு முக்கோணத்தைப் பிரதிசெய்தல் இயலாது.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களுங் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் உருவம் நிலைப்படுத்தப்பட்டதாகும். ஆனால் அதன் பருமன்—ஒரு பக்கத்தளவு கொடுக்கப்பட்டாலன்றி—அறியப்படாததாகவேயிருக்கும்.

12. உரு 11 இலுள்ள △ **அஇஉ** ஐப் போன்ற உருவுள்ள (ஆனால், எப்பருமனையேனுமுடையவொரு) முக்கோணத்தை வரைய நீர் என்னென்ன அளவுகள் எடுத்தல் வேண்டும் ? **இஉ** உடன் ஒத்த பக்கம் முறையே (i) 4 ச. மீ. ஆயும் (ii) 6 ச. மீ. ஆயுமிருக்கக் கூடிய இரு முக்கோணம் வரைக. ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் **அஇ** உடன் ஒத்த பக்கத்தை அளக்க.

13. அஇ = 7 ச.மீ., அஉ = 5·5 ச.மீ., ∠இ = 35° ஆகவமைந்த ஒரு முக்கோணம் வரைக. ∠அஉஇ இனை அளக்க.



உருவம் 148

உரு 148 ஐப் பார்க்க. முதலாவதாக ∠சஇந இனை 35° உக்குச் சமனாகக் கீறுக. இச இனின்றும் இஅ இனை 7 ச. மீ. அளவினதாய் இருக்க வெட்டுக. பின்னர் அஉ 5·5 ச. மீ. அளவிலிருக்க உ இனை இந இற் குறிக்க ; இதைக் கவராயத்தின் துணைகொண்டு செய்க.

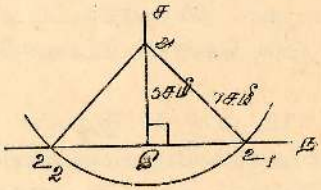
உ இற்கு $உ_1$ $உ_2$ என்னும் இரண்டு நிலைகள் இருக்கக் கூடும். எனவே, பருமனும் உருவும் வேறுபட்ட $அஇஉ_1$, $அஇஉ_2$ என்னும் இரு முக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்ட தரவிற்கு இயைந்தனவாய் உள்ளன.

எனவே, இங்கு, ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுடைய நீளங்களும் அமையாத கோணமொன்றின் அளவுமான மூன்று சாரா அளவுகள் அம்முக்கோணத்தின் உருவத்தையும் பருமனையும் நிலைப்படுத்தவில்லை.

14. அஇ = 5 ச.மீ., அஉ = 7 ச.மீ., ∠இ = 90°. இவ்வளவுகளில் △ அஇஉ ஒன்று வரைக. ∠அஉஇ இனை அளக்க. உரு 149 ஐப் பார்க்க. 13 ஆம் கணக்கிற் கூறியவாறு செய்க.

உ அமையக் கூடியதாய் $உ_1$, $உ_2$ எனுமிரு நிலைகள் உள. ஆனால் அஇ மடிப்பாக வருமாறு நாம் நாளை மடித்தோமானால் △ $அஇஉ_1$ ஆனது △$அஇஉ_2$ உடன் ஒன்றுபடும். எனவே, இங்கு தரவிற்கு இயைந்த வேறு வேறு பருமனுள்ள இரு முக்கோணங்கள் இல.

எனவே, ஒரு முக்கோணத்தினுடைய **இரு பக்கங்கள், ஓரமையாத கோணம்** ஆகியவற்றின் அளவுகளைக்கொண்டு ஒரு முக்கோணத்தின் உருவையும் பருமனையும் **ஒரே தன்மையவாய்** என்றும் நிலைப்படுத்தல் இயலாதென்பதை நாம் முடிவு செய்து கொள்ளலாம்.



உருவம் 149

ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட அமையாத கோணம் ஒரு **செங்கோணம்** ஆயின், செம்பக்கம், பிறிதொரு பக்கம் ஆகியவற்றின் அளவுகள் முக்கோணத்தின் உருவம் பருமனை நிலைப்படுத்தப் போதியனவாகும்.

எனவே, இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் தம் செம்பக்கங்கள், இன்னுமொரு சோடிப் பக்கங்கள் ஆகியவற்றின் அளவுகளில் பொருந்துமாறு வரையப்பட்டால் அவை மற்றை ஒத்த அளவுகளில் பொருந்தும்; அதாவது, அவை சர்வசமனாகும்.

15. அஇ = 7 ச.மீ., அஉ = 8 ச.மீ., ∠இ=35°; இவ்வளவுகள் கொண்ட △அஇஉ ஒன்று வரைக.

∠அஉஇ இனை அளக்க. மேற்கூறிய அளவுகளுடன் வேறு பல பருமன்கள் கொண்ட முக்கோணங்கள் வரைதல் இயலுமா ?

குறிப்பு. இருபக்கங்கள், ஓரமையாத கோணம் ஆகியவற்றின் அளவுகள் அவ்வமையாக் கோணம் அவ்விருபக்கங்களுள் நீளமானதிற்கு எதிராயிருந்தாலன்றி ஒரு முக்கோணத்தின் உருவை ஒரே தன்மையதாய் நிலைப்படுத்தமாட்டா என்பதை மேற்கூறிய உதாரணம் விளக்குகின்றது.

16. அஇ = 12 ச.மீ. ஆயும், அஉ = 9 ச.மீ. ஆயும், ∠ இ = 40° ஆயுமுள்ள ஒரு விரிகோண முக்கோணம் வரைக. இஉ இனை அளக்க.

இந்தப் பயிற்சியின் முடிவுகள் பின்வருமாறு :—

ஒரு முக்கோணத்தின் உருவும் பருமனும்

(i) இரு பக்கங்களும் அமைகோணமும்;

(ii) இரு கோணங்களும் ஒரு பக்கமும், (கோணங்களுடன் பக்கம் என்ன முறையிலமைந்துள்ளது என்பது குறிக்கப்படின்);

(iii) மூன்று பக்கங்கள்;

(iv) முக்கோணஞ் செங்கோணமாயிருக்கும் சிறப்புவகையில், செம்பக்கமும் பிறிதொரு பக்கமும்

ஆகியவற்றாலே நிலைப்படுத்தப்படும்.

இரு பக்கங்களையும் ஓரமையாத கோணத்தையுங்கொண்டு ஒரு முக்கோணம் வரைவதென்றால் ஓர் ஈரடிவகை தோன்றவுங் கூடும். உரு 148 ஐப் பார்க்க. கொடுக்கப்பட்ட இரு பக்கங்களுட் சிறியதற்கு எதிராகக் கொடுக்கப்பட்ட அமையாத கோணம் இருந்தால், கொடுக்கப்பட்ட அளவுகட்குப் பொருந்தக் கூடியதாய் இரு முக்கோணங்கள் வரையலாம்.

மேற்கூறிய விளைவுகள் சருவசமனுக்கு வேண்டிய பின்வருஞ் சோதனைகளைத் தருகின்றன :—

(1) இரு முக்கோணங்களுள் ஒன்றின் எவையேனும் இரு பக்கங்களும் அவற்றாலமையுங்கோணமும் மற்றையதின் எவையேனும் இரு பக்கங்கட்கும் அவற்றாலமையுங்கோணத்திற்கும் சமனாயின் அவை சருவசமனாகும்.

குறிப்புக்கு வேண்டிய குறுக்கம் : பகோப, அல்லது 2 பக். அமை∠.

(2) இரு முக்கோணங்களுள் ஒன்றின் எவையேனும் இரு கோணங்கள் மற்றையதின் எவையேனும் இரு கோணங்கட்குச் சமனுயும், யாதாயினும் ஒரு பக்கம் மற்றையதின் ஒத்த பக்கத்திற்குச் சமனுயுமிருந்தால் அவை சருவசமனுகும்.

குறிப்புக்கு வேண்டிய குறுக்கம்: கோபகோ; கோகோப, அல்லது 2∠கள், ஒத்த பக்.

(3) இரு முக்கோணங்களுள் ஒன்றின் மூன்று பக்கங்கள் மற்றையதின் மூன்று பக்கங்கட்குஞ் சமனுயின் அவை சருவசமனுகும்.

குறிப்புக்கு வேண்டிய குறுக்கம் : பபப அல்லது 3 பக்.

(4) இரு செங்கோண முக்கோணங்களின் செம்பக்கங்கள் சமனுயும் ஒன்றின் பிறிதொரு பக்கம் மற்றையதின் பிறிதொரு பக்கத்திற்குச் சமனுயுமிருந்தால் அம்முக்கோணங்கள் சருவசமனுகும்.

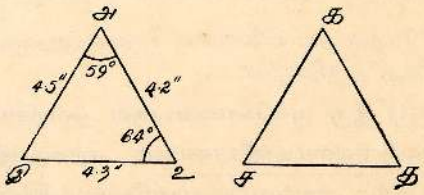
குறிப்புக்குவேண்டிய குறுக்கம் : செ. செ. ப. அல்லது செ ∠ செம்பக்.பக்.

பயிற்சி 16

உரு 150 இலுள்ள இரு முக்கோணங்கள் சருவசமன். பின்வரும் 1 ஆம் 2 ஆம் இலக்கங்களிற் கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கியைய இதை, முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\cdots\cdots}$ என்ற வடிவத்திற்கூறி உமது உருவிலே △ கசத இன் அளவுகளைக் குறிக்க.

1. (i) ∠ச = 64°, ∠த = 59°;
   (ii) ∠க = 57°, ∠ச = 59°;
   (iii) கச = 4·3″, சத = 4·2″.

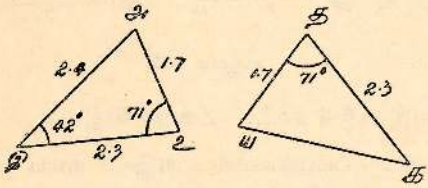
2. (i) ∠த = 59°, ∠ச = 57°;
   (ii) ∠க = 59°, கத = 4·2″;
   (iii) சத = 4·5″, கத = 4·3″.



உருவம் 150

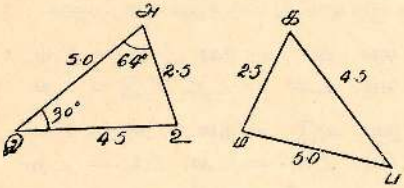
எண் 151–155 வரையிலுள்ள முக்கோணங்கள் சருவசமனு? ஆயின், நீர் உபயோகித்த சோதனை யாதெனக் கூறி △கள் அஇஉ ..... சருவசமன் என்ற வடிவத்தில் உமது உண்மையை எடுத்துச் சொல்லுக. எஞ்சிய அளவுகளை உமது உருவத்திற் குறிக்க. நீளத்தின் அலகு 1 ச.மீ.

3.



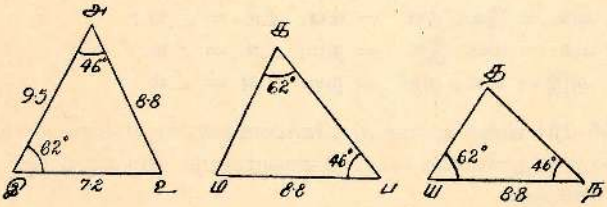
உருவம் 151

4.



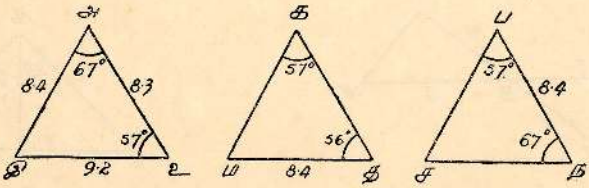
உருவம் 152

5.



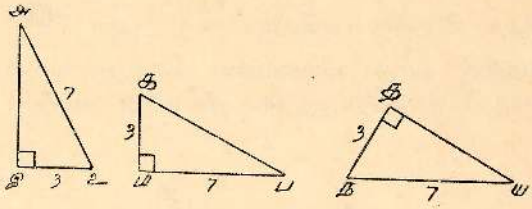
உருவம் 153

6.



உருவம் 154

7.



உருவம் 155

உரு 155 இல் அஇ = 6·3 ச.மீ., ∠உ = $64\frac{1}{2}°$.

8–11 வரை உள்ள பயிற்சிகளில், அஇஉ, நமய எனும் இரு முக்கோணங்களினுடைய தரவுகளை ஒருருவில் ஒத்த அடையாளங்களாற் காட்டுக. (உரு 144ஐ ஒப்பிடுக.) முக்கோணங்கள் சருவசமனாயிருக்கவேண்டுமா? சருவசமனெனின் நீர் உபயோகித்த சோதனை எஃதெனக்கூறி உண்மையைத் திருத்தமான முறையில் எடுத்துச் சொல்லுக.

8. (i) அஇ = மய, அஉ = நய, ∠அ = ∠ய;
(ii) அஇ = நம, ∠அ = ∠ந, ∠இ = ∠ய.

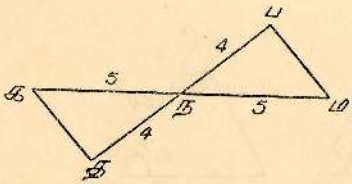
9. (i) அஉ = நய, அஇ = நம, ∠உ = ∠ய;
(ii) அஇ = மய, ∠அ = ∠ய, ∠உ = ∠ந.

10. (i) இஉ = யந, அஉ = மந, இஉ = மய;
(ii) ∠அ = ∠ந, ∠இ = ∠ம, ∠உ = ∠ய.

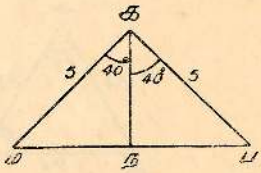
[11] (i) அஉ = இஉ, நய = மய, ∠உ = ∠ய;
(ii) அஉ = மய, இஉ = நம, ∠உ = ∠ம.
(iii) அஇ = அஉ, நம = நய, ∠அ = ∠ம.

எண் 156–161 வரை உள்ள முக்கோணங்கள் சருவசமன் என்பதற்குரிய காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறி உண்மையைத் திருத்தமான முறையில் எடுத்துச் சொல்லுக.

12. [13]

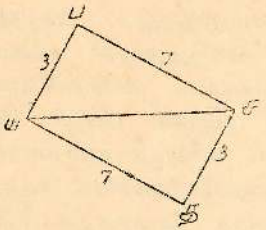


உருவம் 156

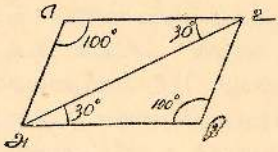


உருவம் 157

14. [15]

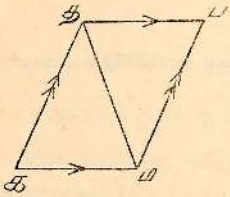


உருவம் 158

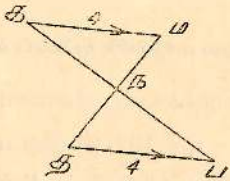


உருவம் 159

16. [17]



உருவம் 160



உருவம் 161

*18. அஇ என்பது அஉ உக்குச் சமனாக அஇஉ எனும் ஒரு முக்கோணம் வரைக. ∠ இஅஉ இனை இருசமக்கூறாக்கி இஉ இனை ந இல் வெட்டும் நேர் கோட்டைக் கீறுக. (i) ∠ இ = ∠ உ என்பதையும் (ii) ∠ அநஇ = ஒரு செங் கோணம் என்பதையும் நிறுவுக.

19. அக = கஇ ஆகவும், உக = கஎ ஆகவுங்கூடியதாய்க் க இல் ஒன்றை யொன்று வெட்டும் அகஇ, உகஎ என்னும் இரு கோடுகள் வரைக. அ உடன் உ ஐயும், உ உடன் இ ஐயும், இ உடன் எ ஐயும், எ உடன் அ ஐயும் இணைக்க. (i) அஉ = இஎ என்பதை நிறுவுக. (ii) ∠ அஉக இற்கு எக்கோணஞ் சமனாகும்? இவ்வுண்மையிலிருந்து பெறக்கூடியதென்ன? (iii) ∠ இஉக இற்கு எக்கோணஞ் சமனாகும்? காரணங் கூறுக. இவ்வுண்மையிலிருந்து பெறக் கூடியதென்ன?

20. ஒரு நேர்கோடு அஇ ஐக் கீறி அதை ந இல் இரு சமக்கூறி டுக. ந இற்கூடாக அஇ உக்குச் செங்குத்தான கோடு கீறி, அச்செங் குத்தில் இரு புள்ளிகள் ப, க எடுக்க. (i) பஅ = பஇ என்பதையும் (ii) ∠ பஅக = ∠ பஇக என்பதையும் நிறுவுக.

வரைகோலுங் கவராயமுங்கொண்டு செய்யும் அமைப்புக்கள்

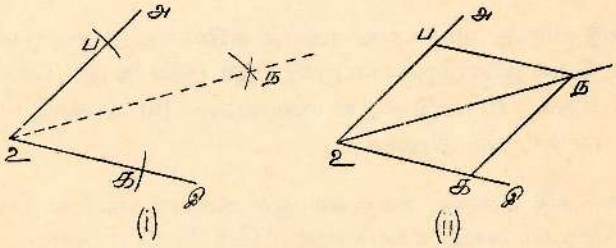
நேர்கோடுகளையுங் கோணங்களையும் இரு சமக்கூறிடுதலும், கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகட்குச் சமாந்தரக்கோடுகள் செங்குத்துக்கள் வரைதலும் பாகைமானியோ மூலைமட்டமோ அளவு கோடிட்ட வரைகோலோ இல்லாமல் செய்யக் கூடியனவாம். அதற்குரிய வழிகள் பயிற்சி 17 எண்கள் 1–6 என்பனவற்றிற் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. யாவரும் அவற்றைச் செய்தல் வேண்டும். ஆனாற் பொதுவாக, செய்முறை வேலைகளிலே வேறு விதமாகக் கூறப்பட்டாலன்றி சமாந்தரக் கோடுகளுஞ் செங்குத்துக்களுங் கீறுவதற்கு மூலைமட்டம் உபயோகித்தல் வேண்டும்.

பயிற்சி 17

[இந்தப் பயிற்சியில் மூலைமட்டங்களும் பாகைமானிகளும் உபயோகித்தலாகாது.]

1. கொடுக்கப்பட்ட கோணம் **அஉஇ** இனை இரு சமக்கூறிடுக.

உரு 162 (i) இல் **ப,க** ஆனவை **உ** இனை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலுள ; **ப,க** ஆகியவற்றை மையங்களாகவுடைய இரு சமவட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

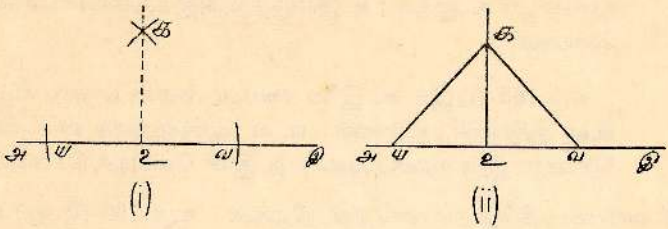


உருவம் 162

(ii) உரு 162 (ii) இலுள்ள முக்கோணங்களைக் கொண்டு அமைப்பு திருத்தமானதென நிறுவுக.

2. (i) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு **அஇ** இற் கொடுத்த ஒரு புள்ளி **உ** ஆகும். **உ** இலே **அஇ** உக்குள்ள செங்குத்தை வரைக.

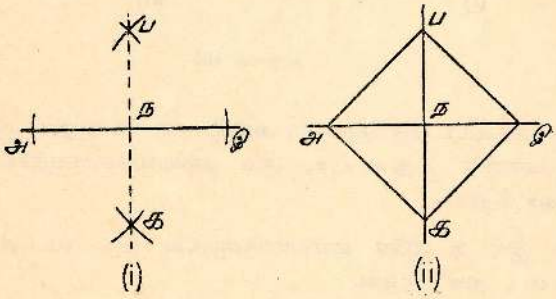
உரு 163 (i) இல் **உ** இனை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் **ய, வ** உள்ளன; **ப, வ** ஆகியவற்றை மையங்களாகவுடைய இரு சம வட்டங்கள் **க** இலே வெட்டிக் கொள்கின்றன.



உருவம் 163

(ii) உரு 163 (ii) இலுள்ள முக்கோணங்களைக் கொண்டு அமைப்பு திருத்தமானதென்பதை நிறுவுக.

3. (i) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு அஇ இனை இரு சமக்கூறிடுஞ் செங்குத்தை—அதாவது அஇ என்பதை செங் கோணத்தில் இரு சமக்கூறிடுங் கோட்டை—அமைக்க.



உருவம் 164

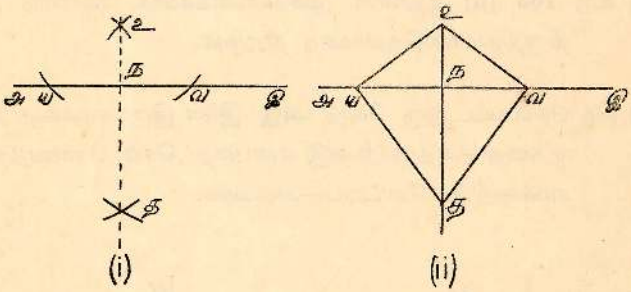
உரு 164 (i) இல் அ, இ ஆகியவற்றை மையங்களாகவுடைய இரு சமவட்டங்கள் ப, க ஆகியவற்றில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

(ii) அமைப்பு திருத்தமானதென நிறுவுக. உரு 164 (ii) ஐப் பார்க்க. △ அபக, △ இபக ஆனவை சருவசமமென முதலில் நிறுவுக. இது ∠ அபக = ∠ இபக என்பதைக் காட்டும். பின்ன △ அபந, △ இபந ஆனவை சருவசமன் என நிறுவுக.

4. (i) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **அஇ** உக்கு வெளியே கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி **உ** ஆகும் ; **உ** இலிருந்து **அஇ** உக்குள்ள செங்குத்தை அமைக்க.

உரு 165 (i) இல் **உ** இனை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் **ய,வ** ஆகியவை உள்ளன. **ப, வ** ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்ட இரு சமவட்டங்கள் **த** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

(ii) அமைப்பு திருத்தமானதென நிறுவுக. உரு 165 (i) ஐப் பார்க்க. முதலாவதாக △கள் **உயத, உவத** ஆகியவை சருவசமன் என நிறுவுக. பின்னர் △கள் **உயந, உவந** சருவசமன் என நிறுவுக.



உருவம் 165

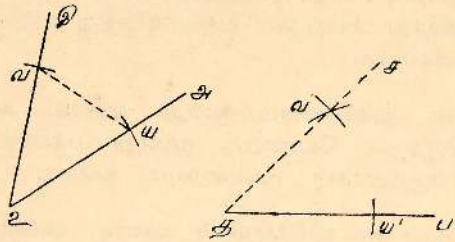
5. (i) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணம் **அஉஇ**, ஒரு கோடு **தப** ஆகியவற்றைக் கொண்டு ∠**த** = ∠**உ** ஆக அமையக்கூடியதாய் ஒரு கோடு **தச** கீறுக.

உரு 166 இல் **உ** இனை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் **ய, வ** ஆகியவை உள ; **தய′ = உய.**

த இனை மையமாகக் கொண்ட **உவ** அளவு ஆரையுள்ள வட்டம், **ப′** ஐ மையமாகக் கொண்ட **பவ** அளவு ஆரையுள்ள வட்டத்தை **வ′** இல் வெட்டும்.

(ii) இந்த அமைப்பினால் △ **தய′வ′**, △ **உயவ** ஆனவை சர்வசமன் என்பதைக் காட்டி ∠**த** = ∠**உ** என்பதை நிறுவுக.

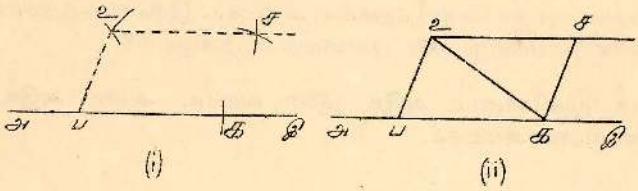
6. (i) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **அஇ** உக்கு வெளியே கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி **உ** ஆகும். **உ** இற்கூடாக **அஇ** உக்குச் சமாந்தரமான கோட்டினைக் கீறுக.



உருவம் 166

உரு 167 இல் **ப, க** ஆனவை **அஇ** யில் எவையேனும் புள்ளிகளாகும். **க** இனை மையமாகக் கொண்ட **பஉ** அளவு ஆரையுள்ள வட்டம் **உ** இனை மையமாகக் கொண்ட **பக** அளவு ஆரையுள்ள வட்டத்தை **ச** இல் வெட்டும்.

(ii) அமைப்பு திருத்தமானதென நிறுவுக. உரு 167 (ii) இல்



உருவம் 167

சருவசமனான முக்கோணங்களைக்கொண்டு ∠ **பகஉ** = ∠ **சஉக** என்பதை நிறுவுக. பின்னர் பெறுவதென்ன ?

பின்வரும் அமைப்புக்களுக்கு மூலைமட்டத்தையோ பாகைமானியையோ உபயோகித்தலாகாது. எல்லா **அமைப்புக்கோடுகளையும் காட்டுக.** ஆனால் வழியைக் கூறவும் அது திருத்தமானதென நிறுவவும் வேண்டாம்.

7. சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று வரைக. பயிற்சி 16, எண் 18 அதன் கோணங்கள் யாவுஞ் சமன் எனக் காட்டுகின்றது. எனவே 30° அளவுள்ள ஒரு கோணம் அமைக்க.

8. 5 ச.மீ., 6 ச. மீ., 7 ச.மீ. ஆகிய அளவுள்ள பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைந்து அதன் கோணங்களுடைய இருசம வெட்டிகளை அமைக்க.

9. 5 ச.மீ., 6 ச.மீ., 7 ச.மீ. ஆகிய அளவுள்ள பக்கங்கள் கொண்டஒரு முக்கோணம் வரைந்து அவற்றின் உச்சியிலிருந்து எதிர்ப் பக்கங்களுக்குச் செங்குத்துக்கள் அமைக்க.

10. கூர்ங்கோண முக்கோணம் ஒன்று வரைக. அதன் பக்கங்கள் சமனற்றவையாயிருத்தல் வேண்டும். மூன்று பக்கங்களினுடைய இரு சமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் மூன்றையும் வரைக.

[11] (i) யாதாயினும் ஒரு விரிகோணம் வரைக. அதை நான்கு சம கோணங்களாக்கும் கோடுகளை வரைக.

(ii) $22\frac{1}{2}°$ அளவுள்ள ஒரு கோணம் வரைக.

[12] ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் பரிதியில் **அஇ** என்பது **அஉ** இனும் பெரியதாயிருக்க மூன்று புள்ளிகள் **அ, இ, உ** ஆகியவற்றை எடுக்க. ∠ **இஅஉ** இன் இரு சமவெட்டியையும் **இஉ** இன் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்தையும் அமைக்க. அவை நீட்டப்படின் பரிதியிற் சந்திக்கின்றனவா?

[13] விரிகோண முக்கோணம் ஒன்று வரைக. ஒவ்வோருச்சியினுமிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்குச் செங்குத்துக்கள் அமைக்க. இச்செங்குத்துக்கள், நீட்டப்படின் ஒன்றையொன்று ஒரே புள்ளியிற் சந்திக்குமா ?

14. ஒரு முக்கோணம் **அஇஉ** இனை வரைக. அதை **அஇஉஎ** எனு மோரிணைகரமாய் அமைக்க.

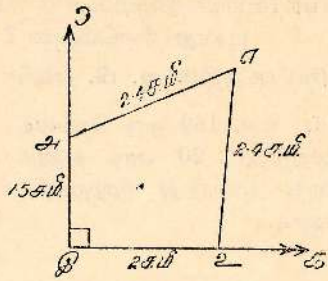
மாதிரிப்படமும் தேசப்படமும்

நீர் ஒரு சித்திரத்தை ஒருருப் பெருக்காடிமூலம் நோக்கினால் அச்சித்திரம் அதே உருவினதாய், ஆனால் பெருமளவினதாய், உமக்குக் காட்சி யளிக்கும். அதேபோல் ஒரியக்கப்படக்காட்சித் திரையிலே விழச்செய்த படமும் நிழற் படப்படலத்திலுள்ள படத்தினது உருவினைக் கொண்டிருக்கும். ஆனால் பருமனிற் பெரியதாயிருக்கும்.

ஒரு சிற்பி ஒரு கட்டடத்தின் மாதிரிப்படத்தைக் கீறும்போதும் ஒரு நிலவளவையாளர் ஒரு படத்தை வரையும்போதும் ஒருருவினவாய்ப் பல் வேறு பருமனுடையனவாய வரைப்படங்களை ஆக்கலாம் என்பதை அவர்கள் கற்பனைசெய்து கொள்கிறார்கள். ஒரு படத்தில் உள்ள கோடுகளால் ஆக்கப் பட்ட உருவம் அப்படம் குறிக்கின்ற தெருக்கள், இருப்புப்பாதைகள் முதலி யனவற்றால் ஆய உருவத்தைப்போன்றதாயிருக்கும். ஆனால் அதனுடைய அளவுகள் யாவும் ஒரு மாறுதவிகிதத்திற் குறைக்கப்பட்டிருக்கும். இந்த மாறுவிகிதம் படத்தின் **அளவுத்திட்டம்** எனப்படும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 168 ஒரு தோட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள **அஇ, இஉ, உஎ, எஅ** எனும் நாலு நேர்த்தெருக்களைக் குறிக்கும். 1 ச.மீ. 200 யாரைக்குறிக்கும் ஓரளவுத் திட்டத்தில் இம்மாதிரிப்படம் கீறப்பட்டுள்ளது. **அ** என்பது **இ** உக்கு வடக்கேயுள்ளது. **உ** என்பது **இ** உக்குக் கிழக்கேயுள்ளது.



உருவம் 168

(i) **அஇ, இஉ, உஎ** ஆகியவற்றினீளத்தை யாரிலே தருக.

(ii) மாதிரிப்படத்தை வரைக. **அஉ** இனை அளந்து **உ** இலிருந்து **அ** இனது தூரத்தைக் காண்க.

(iii) உமது உருவிலுள்ள ∠ **இஅஎ** இனை அளக்க. **அ** இலிருந்து **எ** என்ன திசையில் உள்ளது ?

2. மாதிரிப்படம் ஒன்று 500 யாருக்கு 1 அங். என்ற அளவுத் திட்டத்திற் கீறப்படின் 500 யாருக்கு 1 அங். என்ற விகிதம் இம்மாதிரிப் படத்தின் **வகைக்குறிப்பின்னம்** (அல்லது **வ.பி.**) எனப்படும். அதன் பெறுமதியென்ன ?

ஓரளவுத்திட்டத்திற்கேற்ப ஒரு மாதிரிப் படத்தை வரையும் பொழுது எல்லவே ஒரு மாதிரிப்படங் கொடுக்கப்படாவிட்டால் தரப்பட்ட அளவுகள் யாவுங்கொண்ட ஒரு வரைப்படத்தைப் பரும்படியாகக் கீறிப் பார்த்தல் வேண்டும். பின்னர் உகந்ததான **ஓரளவுத்திட்டத்தைத் தெரிந்தெடுத்து அது யாதெனக் கூறல்வேண்டும்.**

பயிற்சி 18

(மூலை மட்டத்தை உபயோகிக்க வேலை எளிதாகுமெனின் உபயோகிக்க.)

1. ஓரங்குலத்திற்கு 5 மைல் என்ற அளவுத் திட்டத்தில் ஒரு தேசப் படம் வரையப்பட்டது.

(i) படத்தில் 2·4″ நீளமுள்ள ஒரு கோடு எவ்வளவு தூரத்தைக் குறிக்கும் ?

(ii) 8 மைல் அளவு நீளமுள்ள ஒரு தெருவைக் குறிக்கின்ற படத்தி லுள்ள கோடொன்றினது நீளமென்ன ?

(iii) படத்தின் **வ.பி.** என்ன ?

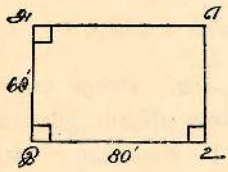
[2] ஓரங்குலத்திற்குப் பத்தடி என ஒரு மாதிரிப்படம் வரையப்பட்டது.

(i) மாதிரிப்படத்தில் 7·2″ நீளமுள்ள ஒருகோடு எவ்வளவு தூரத்தைக் குறிக்கும் ?

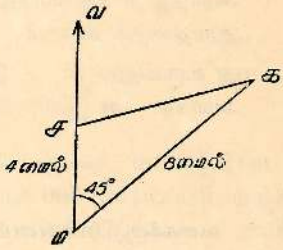
(ii) 15 யார் நீளமுள்ள ஒரு வேலியைக்குறிக்கின்ற, படத்திலுள்ள கோட்டினது நீளமென்ன ?

(iii) படத்தின் **வ. பி.** என்ன ?

3. உரு 169 ஒரு செவ்வக முற்றம் **அஇஉஎ** ஐக் குறிக்கும். ஓரங்குலத்திற்கு 20 அடி எனும் அளவுத் திட்டத்தில் அதன் மாதிரிப்படம் ஒன்று வரைந்து முற்றத்தின் மூலைவிட்டம் **அஉ** இனது நீளத்தைக் காண்க.



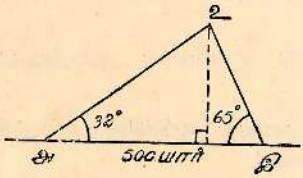
உருவம் 169



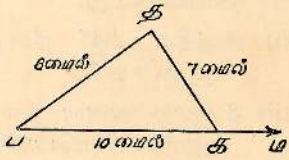
உருவம் 170

4. உரு 170 மூன்று கோபுர முடிகள் **ச, ம, க** ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றது. **ச** என்பது **ம** இற்கு நேர் வடக்கேயுள்ளது. 1 ச. மீ. உக்கு 1 மைல் என்ற அளவுத்திட்டத்திற் படம் வரைந்து (i) **ச** இலிருந்து **க** இனது தூரத்தையும் (ii) **ச** இலிருந்து **க** இனது திசையையுங் காண்க.

5. உரு 171 ஐப் பார்க்க. ஒரு நேர் தெருவில் 500 யார் தூரத்திலுள்ள புள்ளிகள் **அ, இ** என்பன. ஒரு குடிசை **உ** உள்ள இடத்தினைப் படத்திலுள்ள கோணங்களை அளந்து அறியலாம். படத்தினுதவியால் (i) **அ** இலிருந்து **உ** உள்ள தூரத்தையும் (ii) தெருவிலிருந்து குடிசைக்குள்ள மிகக்குறுகிய தூரத்தையும் காண்க.



உருவம் 171



உருவம் 172

6. உரு 172 மூன்று கோபுரமுடிகள் ப, க, த ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றது. க என்பது ப உக்கு நேர் கிழக்கேயுள்ளது. (i) ப இலிருந்து த உள்ள திசை, (ii) க இலிருந்து த உள்ள திசை, (iii) நேர் தெரு பக இலிருந்து த இனது மிகக் குறுகிய தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. அ, இ, உ என்பன மூன்று நகரங்கள் ; அ என்பது இ இலிருந்து நேர்வடக்கே 15 மைல் தூரத்திலும், உ இலிருந்து நேர் மேற்கே 25 மைலளவு தூரத்திலும் உள்ளது. இ இலிருந்து உ உள்ள திசையையுந் தூரத்தையுங் காண்க.

[8] இ, ப, க என்பவை மூன்று கோபுர முடிகள். ப என்பது இ இலிருந்து நேர் தெற்கே நாலு மைல் தூரத்திலுள்ளது. க என்பது இ இலிருந்து நேர் தென்மேற்கே 5 மைலில் உள்ளது. ப இலிருந்து க உள்ள திசையையுந் தூரத்தையுங் காண்க.

9. மூன்று நேர் தெருக்கள் ஒரு முக்கோணம் யமந இனை ஆக்குகின்றன. யம = 600 யார், மந = 450 யார், நய = 350 யார். தெரு யம இலிருந்து ந இற்குள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

[10] நேரும் மட்டமுமான ஒரு தெருவில் 350 யார் தூரத்திலுள்ளவை அ, இ எனும் புள்ளிகள். உ என்பது அ இலிருந்து 200 யார் தூரத்திதிலும் இ இலிருந்து 250 யார் தூரத்திலுமுள்ள ஒரு கொடித் தம்பமாகும். தெரு அஇ இலிருந்து உ உள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.

11. இ ஆனது அ இலிருந்து நேர் வடக்கே 250 யார் தூரத்திலுள்ளது. ஒரு மரம் த என்பது அ இலிருந்து வ. 42° கி. ஆயும் இ இலிருந்து தெ. 58° கி. ஆயும் உள்ளது. அ இலிருந்து த உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

[12] ப, க, த என்பன மூன்று கோபுர முடிகள் ; க என்பது ப இலிருந்து வடக்கே $3\frac{1}{2}$ மைலளவு தூரத்திலுள்ளது. த என்பது ப இலிருந்து வ. 35° கி. ஆயும் $7\frac{1}{2}$ மைலளவு தூரத்திலும் உள்ளது. க இலிருந்து த உள்ள திசையையுந் தூரத்தையுங் காண்க.

13. அ இலிருந்து இ உக்கு ஒரு நேர்ப்பாதை செல்கின்றது. அதன் நீளம் 100 யார். அது பின்னர் 70° திரும்பி இ இலிருந்து 80 யாரளவு தூரத்திலுள்ள உ இற்குச் செல்கின்றது. அ இலிருந்து உ இற்கு ஒருநேர்ப்பாதை அமைத்தால் மற்றைப் பாதையினின்றும் எவ்வளவு தூரத்தை நாம் குறைக்கலாம்?

[14] ந என்பது ய இலிருந்து வடக்கே 500 யார் தூரம். வ என்பது ந இலிருந்து தெ. 70° மே. ஆயும் ய இலிருந்து வ. 35° மே. ஆயுமுள்ளது. ய இலிருந்து வ உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

15. 8000 யார் வீச்சுள்ள ஒரு துவக்கு நேரான ஓரிருப்புப் பாதையிலிருந்து 6000 யார் தொலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இருப்புப் பாதையிலே எவ்வளவு நீளம் துவக்கின் வீச்சுக்குள் அகப்படும்?

16. ச எனும் நகரம் உ எனும் நகரத்திலிருந்து 12 மைல் தூரத்திலும் தெ. 22° மே. இலும் உள்ளது. த எனும் நகரம் உ இலிருந்து 10 மைல் தூரத்திலும் தெ. 58° மே. இலும் உள்ளது. த எனும் நகரம் ச எனும் நகரத்திலிருந்து எத்திசையில் எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது ?

*17. நகரம் அ நகரம் இ இலிருந்து 12 மைல் தொலையிலும் நகரம் உ இலிருந்து 15 மைல் தொலையிலும் உள்ளது. நகரம் உ, இ இலிருந்து நேர் மேற்கே 20 மைல் தொலையிலுள்ளது. நகரம் அ நகரங்கள் இ, உ ஆகியவற்றைத் தொடுக்கும் தெருவிற்கு வடக்கேயுள்ளது. நகரம் உ இலிருந்து நகரம் அ உள்ள திசையைக் காண்க.

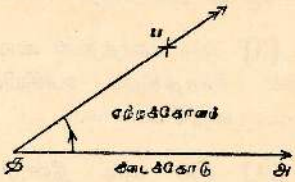
*18. ஒரு மனிதன் 1 மணி நேரத்திற்கு 4 மைல் வீதம் வடக்கு நோக்கிப் படகோட்டுகின்றான். நீரோட்டம் அவனை ஒரு மணிநேரத்திற்கு 5 மைல் வீதம் வடகிழக்கே கொண்டுசெல்கின்றது. அரை மணிநேரஞ் சென்ற பின் அவன் தொடங்கிய இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருப்பான்?

*19. வானூர்தி ஒன்று வடக்கு நோக்கி மணிக்கு 120 மைல் பறக்கின்றது; காற்று அதைத் தென்மேற்கே மணிக்கு 30 மைல் வீதங் கொண்டு செல்கின்றது. 20 நிமிடங்கள் சென்றபின் அதனுடைய ஆரம்ப விடத்திலிருந்து அது எத்திசையிலிருக்கும் ? எவ்வளவு தொலைவில் இருக்கும் ?

*20. நகரம் அ நகரம் இ இலிருந்து 55 மைல் தொலைவில் நேர் வடக்காயுள்ளது. நகரம் உ நகரம் இ இலிருந்து 42 மைல் தூரத்திலும் அ இலிருந்து 64 மைல் தூரத்திலும் நகரங்கள் அ, இ ஆகியவற்றை இணைக்குந் தெருவிற்கு மேற்காயும் உள்ளது. கம்பியில் நிலையம் ஒன்று நகரம் உ இலிருந்து வடகிழக்கே 33 மைல் தூரத்திலே நிறுவப்பட்டுள்ளது. நகரம் இ இலிருந்து அந்நிலையம் உள்ள திசையையுந் தூரத்தையுங் காண்க.

உயரமுந் தூரமும்

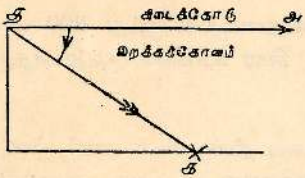
கிடைமட்டமாகவிருக்கும் ஒரு தொலை காட்டி "த" மூலம் ஒரு கொடித தம்பத்தை நோக்குவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது நீர் அதைக் கொடித்தம்பத்தின் உச்சியை நோக்கும் வண்ணம் ஒரு நிலைக்குத்துத்தள வழியாக உயர்த்து வீராஞல், தொலைகாட்டியை உயர்த்திய கோணம் கொடித்தம்பவுச்சியினது, **த** இலிருந்துள்ள ஏற்றக்கோணம் எனப்படும்.



உருவம் 173

உரு 173 இல் **தஅ** கிடைமட்டமாயும் **அதப** ஒரு நிலைக்குத்துத்தளமாயும் இருந்தால் ∠ **அதப** என்பது **த** இலிருந்து நோக்குமிடத்து **ப** இனது **ஏற்றக்கோணம்** எனப்படும்.

நீர் ஒரு குன்றின்மேலே நின்று கடலைக்கும் கிடைமட்டமாயுள்ள ஒரு தொலை காட்டி "த" மூலம் கடலைப் பார்க்கின்றீர் எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது நீர் தொலை காட்டியை ஒரு நிலைக்குத்துத்தள வழியாகச் சரித்துக் கடலிலுள்ள ஒரு படகை நோக்குவீராஞல் தொலைகாட்டியைத் திருப்பிய கோணம் படகினது, **த** இலிருந்துள்ள, இறக்கக்கோணம் எனப்படும்.



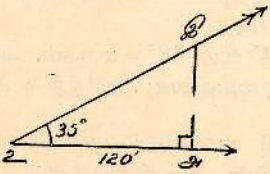
உருவம் 174

உரு 174 இல் **தஅ** கிடைமட்டமாயும் **அதக** நிலைக்குத்துத் தளமாயும் இருந்தால் ∠ **அதக, த** இலிருந்து நோக்கும்பொழுது **க** இன் **இறக்கக் கோணம்** எனப்படும்.

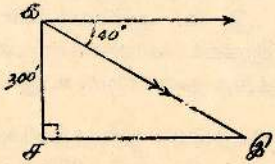
பயிற்சி 19

(மூலைமட்டங்களைப் பயன்படுத்தினல் வேலையை எளிதாக்குமெனின், பயன்படுத்துக.)

1. உரு 175 ஐப் பார்க்க. **அஇ** நிலத்திலுள்ள புள்ளி **உ** இலிருந்து 120 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு சிகரம். **உ** இலிருந்து சிகரத்தின் புள்ளியினது, ஏற்றக்கோணம் 35°. சிகரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



உருவம் 175



உருவம் 176

2. உரு 176 ஐப் பார்க்க. குன்று ௨க இன் உயரம் 300 அடி படகு இ இனது இறக்கக்கோணம் 40°. குன்றின் க இலிருந்து அடி ச இலிருந்து படகினது தூரத்தைக் காண்க.

[3] ஒரு சிகரத்தின் அடியிலிருந்து 150 அடி தூரத்திலிருக்கும் ஓரிடத்தில் சிகரத்தின் உச்சியினது ஏற்றக்கோணம் 28°. சிகரத்துச்சியின் உயரத்தைக் காண்க.

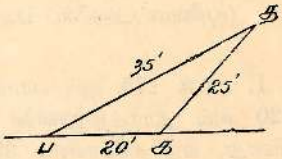
[4] 400 அடி நீளமுள்ள நூலொன்றின் முனையில் கொடி ஒன்று பறக்கின்றது. நூல் கிடைத்தளத்தோடு 65° கோணத்தை உண்டாக்குகின்றது. நிலத்திலிருந்து கொடியின் உயரம் என்ன ?

5. நிலைக்குத்தான 12 அடி உயரமுள்ள தடியொன்றினது நிழலானது தரையிலே 20 அடியாயிருக்கும்பொழுது சூரியனின் ஏற்றக் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

6. சிகரம் ஒன்றின் உயரம் 140 அடி. அதனடியிலிருந்து 200 அடி தூரத்திலே நிலத்தில் ஒரு பொருள் உண்டு. சிகர உச்சியிலிருந்து அதனுடைய, இறக்கக்கோணத்தைக் காண்க.

[7] நிலைக்குத்தான சுவர் ஒன்றில் 15 அடி நீளமுள்ள ஏணி ஒன்று சாய்ந்திருக்கின்றது. ஏணியின் அடி சுவரிலிருந்து 8 அடி தூரத்தில் உள்ளது. (i) ஏணி கிடைத்தளத்துடன் அமைக்குங் கோணத்தைக் காண்க. (ii) நிலத்திலிருந்து ஏணியின் உச்சி எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளதென்பதையுங் காண்க.

8. உரு 177 ஓரிணைக்காலியைக் குறிக்கும். அதன் கால்கள் தப, தக வாகும். கால்களின் முனைகள் ப, க ஆனவை சமதரையிலே தங்கியுள்ளன. நிலத்திலிருந்து க எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது.



உருவம் 177

9. ஒரு குன்றின் உச்சி அ, கடல் மட்டத்திலிருந்து 250 அடி உயரத்தில் உள்ளது. இரு படகுகள் இ, உ ஆகியவற்றின் அ இலிருந்துள்ள இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 64° உம் 48° உமாகும். அஇஉ ஒரு நிலைக்குத்துத் தளமாகும். உ இலிருந்து இ எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது ?

10. நிலத்தில் ஓரிடத்திலிருந்து 150 யார் தூரத்திலுள்ள சிகரத்தின் ஏற்றக் கோணம் 28°; அச்சிகரத்தின் அடியிலிருந்தும் 100 யார் தூரத்திலிருக்கும் ஓரிடத்தில் அதன் ஏற்றக்கோணம் என்ன ?

[11] ஒரு முனையில் 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு நூலானது கட்டப்பட்டு நூலின் அடியில் ஒரு கல் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கல்லசைந்துகொண்டிருக்கின்ற பொழுது அதன் ஊசலெல்லைகள் நிலைக்குத்திலிருந்து 25° இரு பக்கங்கட்குஞ் செல்கின்றது. கல்லின் மிக எட்டிய எல்லைநிலைகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

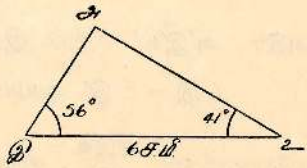
[12]. **அஇ** ஒரு சிகரம். **இ** அதன் உச்சி. நிலத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ப** இல் **இ** இன் ஏற்றக்கோணம் 30°. நிலத்திலுள்ள **க** எனும் ஒரு புள்ளி சிகரத்தின் அடி **அ** இற்கு **ப** இலும் 100 அடி கிட்ட உள்ளது. **க** இல் **இ** இன் ஏற்றக்கோணம் 50°. சிகரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

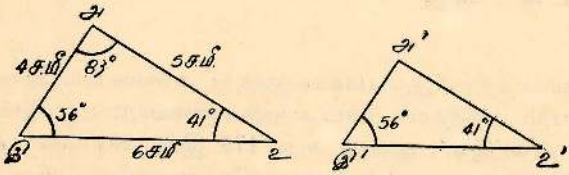
உத்திக் கணக்குக்களைச் செய்வதற்கு நாம் அளவுத்திட்டத்தின்படி படங்களை வரைந்து பார்க்கின்றோம். ஒரு முக்கோணத்தின் உருவை மாற்றாமல்—அதாவது அதன் கோணங்களை மாற்றாமல்—அதன் பக்கங்களை நீட்டவுங் குறைக்கவும் முடியும் என்ற கற்பனையே அச்செய்கைக்கு ஆதாரமாயுள்ளது. இத்தகைய இரு முக்கோணங்கள் **வடிவொத்த** முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

உரு 178 இல் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளான 2 கோணங்களும் 1 பக்கமும் △**அஇஉ** இன் உருவையும் பருமனையும் நிலைப்படுத்துகின்றன.

உரு 178 இலுள்ள முக்கோணத்தைத் திருத்தமாகக் கீறி **அஇ**, **அஉ** ஆகியவற்றை அளந்து ∠ **அ** ஐக் கணிக்க. உரு 179 இலுள்ள பயன்களை நீர் பெறல் வேண்டும்.



உருவம் 178



உருவம் 179

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. $\angle$இ′ = $\angle$இ = 56° ஆகவும், $\angle$உ′ = $\angle$உ = 41° ஆகவும்; ஆனால் இ′உ′ = 4·5 ச.மீ. ஆகவும் அமைய △ அ′இ′உ′ ஐ வரைக. அ′இ′, அ′உ′ ஆகியவற்றை அளந்து பின்வருவனவற்றை முடிவு செய்க:—

$$\frac{\text{இ}'\text{உ}'}{\text{இஉ}} = \frac{4{\cdot}5}{6} = \frac{0{\cdot}75}{1};\quad \frac{\text{உ}'\text{அ}'}{\text{உஅ}} = \frac{\ldots}{5} = \frac{\ldots}{1};\quad \frac{\text{அ}'\text{இ}'}{\text{அஇ}} = \frac{\ldots}{4} = \frac{\ldots}{1}.$$

இரண்டாம் மூன்றும் விகிதங்கட்கு மாணவர் கண்ட பயன்களுள் வழு வானவை எனத் தெரிந்தவற்றை விலக்கி மற்றையவற்றின் சராசரிகளைக் காண்க. அவற்றை முதலாம் விகிதத்துடன் ஒப்பிடுக. இதனால் அறியக் கூடியது யாது ?

△ அ′இ′உ′ இல் $\angle$இ′ = 56°, $\angle$உ′ = 41° எனத்தரப்படின் உரு 179 இலுள்ள பயன்களைக் கொண்டு பின்வருவனவற்றை முடிவு செய்க:—

2. இ′உ′ = 9 ச.மீ. ஆனால், உ′அ′ = ..., அ′இ′ = ..., $\angle$அ′ = ...
3. அ′உ′ = 8 ச.மீ. ஆனால், இ′உ′ = ..., அ′இ′ = ..., $\angle$அ′ = ...
4. அ′இ′ = 10 ச.மீ. ஆனால், அ′உ′ = ..., இ′உ′ = ..., $\angle$அ′ = ...
5. இ′உ′ = 6 வ ச.மீ. ஆனால், அ′உ′ = ..., அ′இ′ = ..., $\angle$அ′ = ...

இப்பொழுது நாம் அறியக் கிடப்பது என்ன? அதை நாம் பின்வருமாறு கூறலாம்:—

அஇஉ, அ′இ′உ′ எனும் இரு முக்கோணங்களில்

$\angle$இ = $\angle$இ′ ஆயும் $\angle$உ = $\angle$உ′ ஆயும் இருந்தால்,

முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{அ இ உ}\\ \text{அ}'\text{இ}'\text{உ}'\end{matrix}$ சருவசமன், அதாவது

$$\frac{\text{இஉ}}{\text{இ}'\text{உ}'} = \frac{\text{உஅ}}{\text{உ}'\text{அ}'} = \frac{\text{அஇ}}{\text{அ}'\text{இ}'}$$ ஆயும், $\angle$அ = $\angle$அ′ ஆயும் இருக்கும் என்பதாகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களுடைய அளவையும் அமைகோணத்தின் அளவையும் அறிந்தால் நாம் அதன் உருவையும் பருமனையும் நிலைப்படுத்தலாம். △ அ′இ′உ′, ஆனது உரு 179 இல், அளவுகள் காட்டப்பட்ட △ அஇஉ ஐப் போன்றயாதாயினும் ஒரு முக்கோணமாயின் $\angle$அ = $\angle$அ′ = 83° ஆகும். அ′இ′ என்ன நீளத்தையுங் கொண்டிருக்கலாம். ஆனால்

முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாகும். எனவே, **அ'இ'** இன் அளவைத் தெரிந்தெடுத்தபின் **அ'உ'** இன் நீளத்தை, $\frac{\text{அ'உ'}}{\text{அ உ}} = \frac{\text{அ'இ'}}{\text{அ இ}}$ ஆயிருக்கக்கூடியதாக எடுத்தல் வேண்டும். அப்பொழுது △**அ'இ'உ'** வரைவதற்குப் போதிய தரவுகள் நம்மிடம் இருக்கும்.

உதாரணமாக, **அ'இ'** ஐ 3 ச.மீ. ஆகக் கொண்டால் **அ'இ'** = $\frac{3}{4}$ **அஇ** ஆகும். எனவே, **அ'உ'** = $\frac{3}{4}$ **அஉ** ஆகும். அதாவது, **அ'உ'** = $\frac{3}{4} \times 5$ ச.மீ. = 3·75 ச.மீ. ஆகும்.

6. ∠**அ'**உம் ∠**அ** உம் 83° ஆயும், **அ'இ'** உம் $\frac{4}{5}$ **அஇ** உம் 3·2 ச.மீ. ஆயும், **அ'உ'** உம் $\frac{4}{5}$ **அஉ** உம் 4 ச.மீ. ஆயுமிருக்க △**அ'இ'உ'** இனை வரைக. ∠**இ'**. ∠**உ'**, **இ'உ'** ஆகியவற்றை அளக்க. $\frac{\text{இ'உ'}}{\text{இஉ}}$ எனும் விகிதத்தைக் கணிக்க.

முதலாங்கணக்கிற் கூறியவாறு பயன்களை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தல் வேண்டும்.

மேற்கூறியவற்றிற் பெற்ற உண்மையை நாம் பின்வருமாறு கூறலாம்:—

இரு முக்கோணங்கள் **அஇஉ**, **அ'இ'உ'** என்பவற்றில்

∠**அ** = ∠**அ'** ஆயும், $\frac{\text{அஇ}}{\text{அ'இ'}} = \frac{\text{அஉ}}{\text{அ'உ'}}$ ஆயுமிருந்தால்,

முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அ இ உ}}{\text{அ'இ'உ'}}$ வடிவொத்தவையாம்;

அதாவது, $\frac{\text{இஉ}}{\text{இ'உ'}}$, $\frac{\text{உஅ}}{\text{உ'அ'}}$, $\frac{\text{அஇ}}{\text{அ'இ'}}$ ஆகியவை சமனாயும், ∠**இ** = ∠**இ'** ஆயும், ∠**உ** = ∠**உ'** ஆயும் இருக்கும் என்பதாகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களையும் நாம் அறிந்தால் அதை நாம் நிலைப்படுத்தலாம். **அ'இ'உ'** உரு 179 இல் அளவுகள் காட்டப்பட்ட △**அஇஉ** ஐப் போன்ற யாதாயினும் ஒரு முக்கோணமாயின் **இ'உ'** எந்த நீளத்தையேனும் உடையதாயிருக்கலாம்; ஆனால் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை, எனவே **இ'உ'** இனது நீளத்தைத் தெரிந்தெடுத்தபின் **உ'அ'**, **அ'இ'** என்பவற்றை

$$\frac{\text{உ'அ'}}{\text{உஅ}} = \frac{\text{இ'உ'}}{\text{இஉ}} = \frac{\text{அ'இ'}}{\text{அஇ}}$$

என வரக்கூடியதாக அமைத்தல் வேண்டும். அப்பொழுது △**அ'இ'உ'** ஐக் கீறுவதற்குப் போதிய தரவுகள் நம்மிடம் இருக்கும்.

7. உரு 179 இலுள்ள △ அஇஉ இனுடைய தரவுகளுடன், இ'உ' = $\frac{3}{4}$ இஉ = 4·5 ச.மீ. ஆயும், உ'அ' = $\frac{3}{4}$ உஅ = 3·75 ச.மீ. ஆயும், அ'இ' = $\frac{3}{4}$ அஇ = 3 ச.மீ. ஆயுமிருக்கக்கூடியதாக △ அ'இ'உ' ஐ வரைக. ∠ அ', ∠ இ', ∠ உ' ஆகியவற்றை அளக்க. இவற்றிலிருந்து நீர் கவனிக்கக்கூடியது என்ன ?

மேற்கூறியவற்றாற் பெற்ற உண்மையை நாம் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

இரு முக்கோணங்கள் அஇஉ, அ'இ'உ' என்பவற்றில்

$$\frac{\text{இ உ}}{\text{இ'உ'}} = \frac{\text{உ அ}}{\text{உ'அ'}} = \frac{\text{அ இ}}{\text{அ'இ'}}$$ ஆயிருந்தால்,

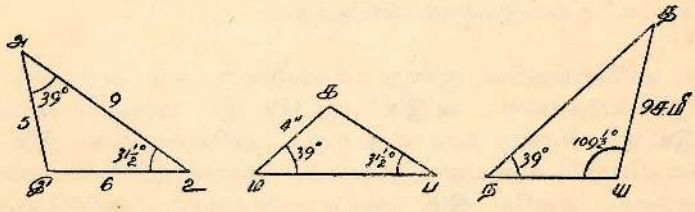
முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அ இ உ}}{\text{அ'இ'உ'}}$ வடிவொத்தவையாகும்.

அதாவது ∠அ = ∠ அ' ஆயும், ∠ இ = ∠ இ' ஆயும், ∠ உ = ∠ உ' ஆயும் இருக்குமென்பதாம்.

இப்படியாக, இரு முக்கோணங்களின் சருவசமனுந்தன்மைக்குரிய மூன்று பொதுச் சோதனைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒத்தனவாய் இரு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்குரிய சோதனைகள் இருக்கும்.

பயிற்சி 20

1. உரு 180 இலுள்ள முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையா ? ஆயின், காரணங்கூறி, உண்மையை முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\ldots\ldots}$ வடிவொத்தவை என்ற முறையில் எடுத்துச் சொல்லுக. மற்றைப் பக்கங்களின் அளவுகளையுங் காண்க.

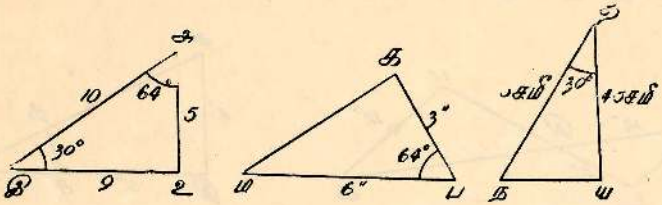


உருவம் 180

2. வதச ஒரு முக்கோணம். அதை உரு 180 இலுள்ள அளவுகளோடு ஒப்பிடும்போது முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{வதச}}$ வடிவொத்தவை.

(i) வச = 12 ச.மீ. ஆயின், தவ, தச, ∠ த ஆகியவற்றைக் காண்க.
(ii) தவ = 8 அங். ஆயின், தச, வச, ∠ச ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. உரு 181 இலுள்ள முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையா ? ஆயின், காரணங்கூறி உண்மையை முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{.....}}$ வடிவொத்தவை என்ற முறையில் எடுத்துச் சொல்லுக. அளவு குறிக்கப்படாத கோணங்கள், பக்கங்கள் ஆகியவற்றின் பருமனையுங் காண்க. (ந த = 8 ச.மீ.)

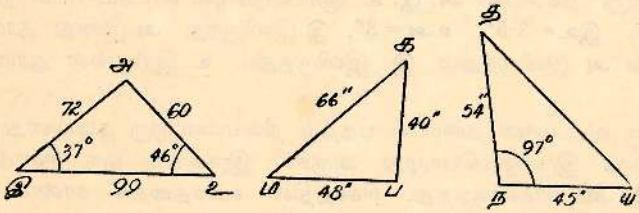


உருவம் 181

[4] **எசவ** ஒரு முக்கோணம். அதை உரு 181 இலுள்ள அளவுகளோடு ஒப்பிடும்போது முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{எசவ}}$ வடிவொத்தவை.

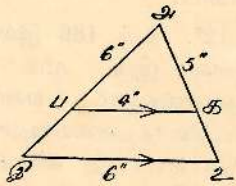
(i) **எவ**=7 ச.மீ. ஆயின், **எச, சவ,** ∠**எ** ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) **சவ**=12″ ஆயின், **எச, எவ,** ∠**ச** ஆகியவற்றைக் காண்க.



உருவம் 182

5. உரு 182 இலுள்ள முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையா ? ஆயின் காரணங் கூறி உண்மையைச் செம்மையானமுறையில் எடுத்துச் சொல்லுக. மற்றைக் கோணங்கள், பக்கங்களின் பருமனையுங் காண்க.



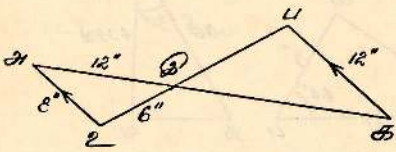
உருவம் 183

6. உரு 183 இல் **பக, இஉ** இற்குச் சமாந்தரமானது. முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அபக}}{\text{அஇஉ}}$ என் வடிவொத்தவையாய் இருக்கின்றன என்பதற்குக் காரணங் காட்டுக. பக்கங்கள் **அஇ, கஉ** என்பவற்றினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

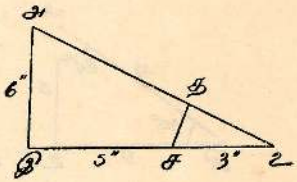
[7] உரு 184 இல் **அஉ** என்பது **பக** இற்குச் சமாந்தரமானது. **அஇக, பஇஉ** ஆகியவை நேர்கோடுகள்.

(i) முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\ldots\ldots}$ வடிவொத்தவை. ஏனெனில்..... என்ற வாக்கியத்தை முடிக்க.

(ii) **பஇ, இக** ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.



உருவம் 184



உருவம் 185

8. உரு 185 இல், **அஉ**=10″ ; ∠ **சதஉ** = ∠ **இ**.

(i) முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அஇஉ}}{\ldots\ldots}$ வடிவொத்தவை, ஏனெனில் ....என்ற வாக்கியத்தை முடிவு செய்க.

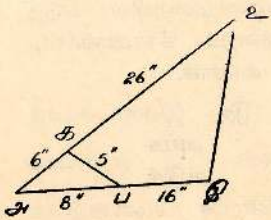
(ii) **தச, தஅ** ஆகியவற்றுடைய நீளங்களைக் காண்க.

[9] மூன்று நகரங்கள் **அ, இ, உ** ஆகியவற்றைக் காட்டும் படம் ஒன்றில் **அஇ**=4·5″, **இஉ**= 3·5″, **உஅ**= 3″. **இ** இலிருந்து **அ** இனது தூரம் 27 மைலானால் **அ** இலிருந்தும் **இ** இலிருந்தும் **உ** இற்குள்ள தூரங்களைக் காண்க.

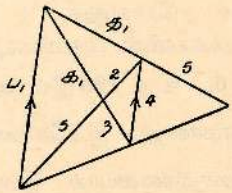
10. ஒரு வட்டமான தரையில் பத்தடி நீளமான ஒரு தடியினது நிழல் $3\frac{1}{2}$ அடியாக இருக்கும்பொழுது அருகில் இருக்கும் ஒரு சிகரத்தினது நிழல் 42 அடியாகவிருந்தது. சிகரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

11. பெட்டியொன்றினது நிழற்படத்திலே அதனுடைய உயரம் 3·2″ அகலம் 6″; பெட்டி $7\frac{1}{2}$ அடி அகலமானால் அதனுடைய உயரத்தைக் காண்க.

12*. உரு 186 இல் உள்ள இரு முக்கோணங்களும் என் வடிவொத்தவையாயுள்ளன என்பதை விளக்குக. இவ்வுண்மையைச் செவ்விய முறையில் எடுத்துச் சொல்க. **இஉ** இனது நீளத்தைக் காண்க.



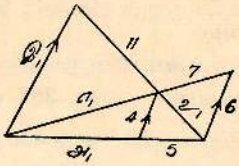
உருவம் 186



உருவம் 187

13*. உரு 187 இலுள்ள அம்புகளிடப்பட்ட கோடுகள் சமாந்தரமானவை. ப,,க,,த, ஆகிய வற்றின் அளவுகளைக் காண்க.

14*. உரு 188 இல் அம்புகளிடப்பட்ட கோடு கள் சமாந்தரமானவை. அ,, இ,, உ,, எ, ஆகிய வற்றின் அளவுகளைக் காண்க.

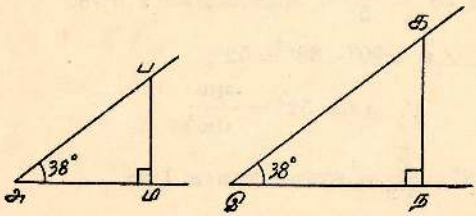


உருவம் 188

திரிகோணகணித விகிதங்கள்

இப்பகுதியைக் கல்லாது விடுதல் பின்வருங் கேத்திரகணிதப் பாடத் தொடர்ச்சியைக் கற்றற்கு இடராயிராது. ஆனால், பாடத்தில் வருஞ் சில தேற்றங்களைத் திரிகோணகணிதத்துடன் தொடர்புபடுத்திக் கற்றால் அவை எளியவாயிருக்கும்.

ஒரு கோணத்தின் தாஞ்சன். ஒவ்வொன்றும் 38° ஆய இரு கோணங் கள் **அ, இ** ஆகியவற்றை வரைக. அவை ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு சிறையிலுள்ள புள்ளிகளான **ப, க** ஆகியவற்றிலிருந்து மற்றைச் சிறைக்குச் செங்குத்துக்களைக் கீறுக.



உருவம் 189

அப்பொழுது ∠ அ = ∠ இ ஆயும், ∠ ம = ∠ ந ஆயுமிருக்கும்.

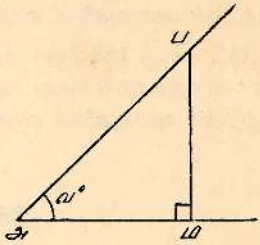
∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அபம}}{\text{இகந}}$ வடிவொத்தவை.

∴ $\frac{\text{ப ம}}{\text{அம}}$ எனும் விகிதம் $\frac{\text{க ந}}{\text{இந}}$ எனும் விகிதத்திற்குச் சமன்.

இப்படியாக $\frac{\text{ப ம}}{\text{அம}}$ எனும் விகிதத்தின் பெறுமதி **அ** இலிருந்து **ப** இருக்குந் தூரத்திலே தங்கியிருக்கவில்லை; ஆனால் ∠அ இன் பருமனிலேயே தங்கியுள்ளது.

$\frac{\text{ப ம}}{\text{அம}}$ எனும் விகிதம், **கோணம் பஅம இனது தாஞ்சன்** எனப்படும். இது தான் **பஅம** என்றும் அல்லது, ∠ **பஅம** = 38° ஆகையால், தான் 38° என்றும் எழுதப்படும்.

மேற்கூறிய உண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம். உரு 190 ஐப் பார்க்க. வ° கோணத்தினது ஒரு சிறையிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ப** விலிருந்து ஒரு செங்குத்து **பம** இனை மற்றைச் சிறைக்குக் கீறினால்,



உருவம் 190

$$\text{தான் வ}^\circ = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம் (பம)}}{\text{அடுத்தபக்கம் (அம)}}.$$

ஒருகோணததினது தாஞ்சனின் அண்ணிய பெறுமதியை அளந்துங் கணித்தும் அறியலாம்.

உரு 189 ஐ **அம** = 5 ச.மீ. ஆகக் கீறினால், **பம** அண்ணளவாக 3·9 ச.மீ. என நாம் அளந்து அறியலாம்.

எனவே, தான் $38^\circ = \frac{3\cdot9}{5}$ = அண்ணளவாக 0·78.

உரு 189 இல், ∠ப = 90° − 38° = 52°;

$$\therefore \text{ தான் } 52^\circ = \frac{\text{அம}}{\text{பம}};$$

எனவே, தான் $52^\circ = \frac{5}{3\cdot9}$ = அண்ணளவாக 1·28.

கோணங்களுடைய தாஞ்சன்களின் பெறுமதிகள் யாவுங் கணிக்கப்பெற்று அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. தேவையானபோது அவற்றைப் பார்த்துக்கொள்ளலாம். xv ஆம் பக்கம் பார்க்க.

உதாரணம் 1. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 200 அடி தூரத்திலே நிலத்தில் ஒரு புள்ளி உள்ளது. அப்புள்ளியில் அமைந்த கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணம் 32°. கோபுரத்தின் உயரம் என்ன ?

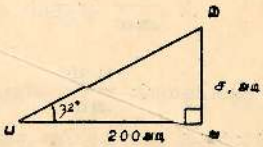
உரு 191 இல், **அஇ** கோபுரத்தைக் குறிக்கும்.

அஇ = ச, அடி ஆனால்,

$\frac{\text{ச}}{200}$ = தான் 32° = 0·625,

∴ ச = 0·625 × 200 = 125;

கோபுரத்தின் உயரம் 125 அடி.



உருவம் 191

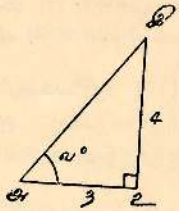
உதாரணம் 2. △அஇஉ இல், உஅ = 3″, உஇ = 4″, ∠உ = 90°. ∠அ ஐக் காண்க.

∠அ = வ° ஆனால்,

$$\text{தான் வ}^\circ = \frac{\text{உஇ}}{\text{உஅ}} = \frac{3}{4} = 1{\cdot}333.$$

எனவே அட்டவணையிலிருந்து,

வ° = அண்ணவளவாக 53·1° ஆகும்.



உருவம் 192

பயிற்சி 21

(எண் 1–8 வரை உள்ளவற்றிற்கு சதுரக்கோட்டுத்தாளைப் பயன் படுத்துதனன்று.)

வரைதலாலும் அளத்தலாலும் பின்வருவனவற்றின் அண்ணளவான பெறுமதிகளைக் காண்க.

1. தான் 25°. 2. தான் 72°. [3] தான் 40°. [4] தான் 60°.

வரைதலாலும் அளத்தலாலும் எண் 5—8 வரை உள்ள பெறுமதி களையுடைய தாஞ்சன்களின் கோணங்களைக் காண்க.

5. 0·7. 6. 1·6. [7] 0·6. [8] 1·8.

எண்கள் 9–16 வரை உ இற் செங்கோணமான ஒரு முக்கோணம் அஇஉ ஐக் குறிக்கும்.

9. ∠அ = 40° ஆயும் அஉ = 4 ச. மீ. ஆயுமிருந்தால் இஉ ஐக் காண்க.

[10] ∠இ = 55° ஆயும் இஉ = 3″ ஆயுமிருந்தால் அஉ ஐக் காண்க.

11. ∠அ = 52° ஆயும் இஉ = 10. ச மீ. ஆயுமிருந்தால் அஉ ஐக் காண்க.

[12] ∠இ = 65° ஆயும் அஉ = 4″ ஆயுமிருந்தால் இஉ ஐக் காண்க.

13. இஉ = 4″ ஆயும் அஉ = 10″ ஆயுமிருந்தால் ∠அ ஐக் காண்க.

[14] இஉ = 5 ச.மீ. ஆயும் அஉ = 3ச.மீ. ஆயுமிருந்தால் ∠அ ஐக் காண்க.

15. இஉ = 6 ச.மீ. ஆயும் அஉ = 8 ச.மீ. ஆயுமிருந்தால் ∠இ ஐக் காண்க.

[16] இஉ = 5″ ஆயும் அஉ = 13″ ஆயுமிருந்தால் ∠இ ஐக் காண்க.

17. ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 100 அடி தூரத்திலே நிலத்தில் ஒரு புள்ளி உள்ளது. அவ்விடத்திலமைந்த கோபுரத்தின் ஏற்றக்கோணம் 52°. கோபுரத்தின் உயரம் என்ன ?

18. 180 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலமைந்த ஒரு மைற்கல்லின் இறக்கக்கோணம் 27°. கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து மைற்கல் எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

[19] நிலைக்குத்தான ஒரு சுவரிற் சாய்ந்த ஓரேணி சுவரோடு 21° கோணத்தை ஆக்குகின்றது. எணியின் அடி சுவரிலிருந்து 5 அடி தூரத்தில் உள்ளது. எணி எவ்வளவு உயரத்தில் தொடுகின்றது?

20. ஒருவன் ம இலிருந்து தொடங்கி கிழக்கே 320 யார் நடந்து செல்கின்றான். பின் வடக்கே 140 யார் செல்கின்றான். இப்போது ம இலிருந்து எத்திசையில் அவன் உள்ளான்?

[21] ஒருவன் ம இலிருந்து தொடங்கி நேர் தெற்கே $\frac{1}{2}$ மைல் செல்கின்றான். அதன் பின்னர் அவ்விடத்திலிருந்து $\frac{3}{4}$ மைல் நேர் கிழக்கே செல்கின்றான். ம இலிருந்து எத்திசையில் அவன் இப்பொழுது உள்ளான்?

22. செவ்வகத்தாள் ஒன்று 9″ நீளமும் 7″ அகலமும் உள்ளது. தாளின் மூலைவிட்டமொன்று தாளினது நீளமான பக்கத்தோடு என்ன கோணத்தில் அமையும்?

[23] மட்டமான நிலத்திலே 5 அடி நீளமுள்ள தடியினது நிழல் 3 அடி 9 அங். ஆயின் ஞாயிற்றின் ஏற்றக்கோணம் என்ன?

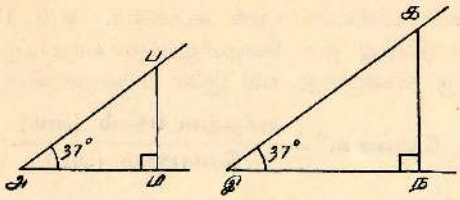
24. ஒரு மூலைமட்டத்தின் செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ள பக்கங்களினுடைய நீளம் 5·3″ உம் 3″ உமாகும். மூலைமட்டத்தின் கோணங்களைக் காண்க.

*25. ஒரு மனிதன் ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 85 அடி தூரத்திலே நிற்கிறான். அவ்விடத்திலே நின்று பார்க்கும்பொழுது கோபுரத்தின் மேல் ஒரு கொடித்தம்பத்தைக் காண்கின்றான். அவ்விடத்திலே அக்கொடித்தம்பத்தின் உச்சியும் அடியும் அமைத்த ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 56°உம் 54°உமாகும். கொடித்தம்பத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

*26. 160 அடி உயரத்தில் உள்ள ஒரு குன்றின் மேலே நின்று பார்க்கும் ஒருவன் தன்னுடன் ஓரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள இரு படகுகளைக் காண்கிறான். இவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் 32°உம் 49° உமாகும். படகுகட்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

*27. ஞாயிற்றின் ஏற்றக்கோணம் 59° ஆகவிருக்கும்பொழுது ஒரு தந்திக் கம்பத்தினது நிழல் 13 அடி நீளமாயிருக்கும். ஞாயிற்றின் ஏற்றக்கோணம் 35° ஆகவிருக்கும்பொழுது நிழலினது நீளத்தைக் காண்க.

ஒரு கோணத்தினுடைய சைனுங் கோசைனும். ஒவ்வொன்றும் 37° கொண்ட இரு கோணங்கள் **அ, இ** என்பவற்றைக் கீறி ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு சிறையிலுள்ள புள்ளிகள் **ப, க** என்பவற்றிலிருந்து மற்றைப் பக்கங்கட்குச் செங்குத்துக்கள் **பம, கந** என்பவற்றைக் கீறுக.



உருவம் 193

அப்பொழுது ∠**அ** = ∠**இ** ஆயும், ∠**ம** = ∠**ந** ஆயுமிருக்கும்,

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{அபம}}{\text{இகந}}$ வடிவொத்தவை ;

∴ $\frac{\text{பம}}{\text{அப}}$ எனும் விகிதம் $\frac{\text{கந}}{\text{இக}}$ எனும் விகிதத்திற்குச் சமன்.

இப்படியாக $\frac{\text{பம}}{\text{அப}}$ எனும் விகிதம் **அ** இலிருந்து **ப** உள்ள தூரத்திலே தங்கியிருக்கவில்லை ; ஆனால் ∠**அ** இனது பருமனிலேயே தங்கியுள்ளது. $\frac{\text{பம}}{\text{அப}}$ எனும் விகிதம் **கோணம் பஅம** வின் **சைன்** எனப்படும். இது **சைன் பஅம**, அல்லது ∠ **பஅம** = 37° ஆகையால், சைன் 37° என்று எழுதப்படும்.

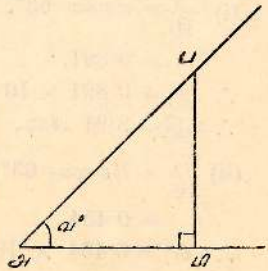
மேற்கூறிய உண்மையைப் பின்வருமாறு கூறலாம். உரு 194 ஐப் பார்க்க. வ° கோணத்தினது ஒரு சிறையிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ப** விலிருந்து ஒரு செங்குத்து **பம** இனை மற்றைச் சிறைக்குக் கீறினால்,

$$\text{சைன் வ}^\circ = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம் (பம)}}{\text{செம்பக்கம் (அப)}}.$$

இதைப்போலவே, உரு 193 இலுள்ள முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆதலின்,

$\frac{\text{அம}}{\text{அப}}$ எனும் விகிதம் $\frac{\text{இந}}{\text{இக}}$ எனும் விகிதத்திற்குச் சமன்.

இப்படியாக, இந்த விகிதத்தின் பெறுமதியும் **அப** இனது நீளத்திலே தங்கியிராது; ∠ **அ** இன் பருமனிலேயே தங்கியுள்ளது.



உருவம் 194

$\frac{\text{அம}}{\text{அப}}$ எனும் விகிதம் **கோணம் பஅம வின் கோசைன்** எனப்படும். இது **கோசை அபம** என்றும், அல்லது $\angle$ **பஅம**$=37°$ ஆகையால், கோசை $37°$ என்றும் எழுதப்படும்.

இவ்வுண்மையைப் பின்வருமாறுங் கூறலாம். உரு 194 ஐப் பார்க்க. ஒரு வ° கோணத்தினது ஒரு சிறையிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ப** இலிருந்து ஒரு செங்குத்து **பம** இனை மற்றைச் சிறைக்குக் கீறினால்,

$$\textbf{கோசை வ}° = \frac{\textbf{அடுத்துள பக்கம் (அம)}}{\textbf{செம்பக்கம் (அப)}}.$$

ஒரு கோணத்தின் சைன், கோசைன் ஆகியவற்றின் அண்ணிய பெறுமதிகளை அளந்துங் கணித்தும் அறியலாம்.

உரு 193 ஐ, **அப** $= 5$ ச.மீ. ஆகவிருக்கக் கீறினால், அண்ணளவாக, **பம** $= 3$ ச.மீ. ஆகவும், **அம** $= 4$ ச.மீ. ஆகவும் இருப்பதை நாம் அளந்து அறியலாம்.

எனவே, சைன் $37° = \frac{3 \cdot 0}{5}$ அண்ணளவாக $0 \cdot 60$ ஆகவும்,

கோசை $37° = \frac{4 \cdot 0}{5}$ அண்ணளவாக $0 \cdot 80$ ஆகவும் இருக்கும்.

XV ஆம் பக்கத்தில் சைன், கோசைன் ஆகியவற்றின் பெறுமதிகளைக் காட்டும் ஓரட்டவணை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம். 10 அடி. நீளமுள்ள ஓரேணி சுவரொன்றுடன் சாய்வதால் கிடைத்தளத்துடன் $63°$ கோணம் ஏற்படுகிறது.

(i) சுவரில் எவ்வளவு உயரத்திற்கு ஏணி சென்றுள்ளது?

(ii) சுவரிலிருந்து எவ்வளவு அடி தூரத்தில் ஏணியின் அடி உள்ளது?

உரு 195 இல் **அஇ** ஏணியைக் குறிக்கும். **உஇ** சுவரைக் குறிக்கும். **உஇ** $=$ ச, அடி.; **அஉ** $=$ எ, அடி. ஆகுக.

(i) $\frac{\text{ச}_1}{10} =$ சைன் $63°$.

$= 0 \cdot 891,$

$\therefore$ ச$_1 = 0 \cdot 891 \times 10 = 8 \cdot 91$;

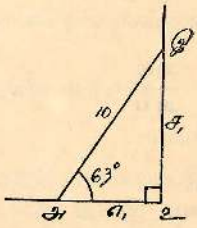
$\therefore$ **உஇ** $= 8 \cdot 91$ அடி.

(ii) $\frac{\text{எ}_1}{10} =$ கோசை $63°$

$= 0 \cdot 454,$

$\therefore$ எ$_1 = 0 \cdot 454 \times 10 = 4 \cdot 54$;

$\therefore$ **அஉ** $= 4 \cdot 54$ அடி.



உருவம் 195

பயிற்சி 22

(எண் 1–7 வரை உள்ளவற்றிற்குச் சதுரக்கோட்டுத்தாளைப் பயன்படுத்துதனன்று.)

வரைதலாலும் அளத்தலாலும் பின்வருவனவற்றின் அண்ணளவான பெறுமதிகளைக் காண்க.

1. சைன் 67°. 2. கோசை 67°. [3] சைன் 32°. [4] கோசை 32°.

வரைதலாலும் அளத்தலாலும் எண் 5–7 வரை உள்ளவற்றிற் காணப்படும் வ,° யின் பெறுமதியைக் காண்க.

5. சைன் வ° = 0·5. 6. கோசை வ° = 0·9. [7] சைன் வ° = $\frac{2}{3}$.

எண் 8–14, உ இல் செங்கோணமான ஒரு முக்கோணம் அஇஉ ஐக் குறிக்கும்.

8. ∠அ = 57° ஆயும் அஇ = 5 ச. மீ. ஆயுமிருந்தால் இஉ ஐயும் அஉ ஐயுங் காண்க.

[9] ∠இ = 35° ஆயும் அஇ = 3 அங். ஆயுமிருந்தால் இஉ ஐயும் அஉ ஐயுங் காண்க.

[10] ∠அ = 71° ஆயும் அஇ = 10 ச. மீ. ஆயுமிருந்தால் இஉ, அஉ ஆகியவற்றைக் காண்க.

11. அஇ = 10 ச.மீ. ஆயும் இஉ = 9·2 ச.மீ. ஆயுமிருந்தால் ∠ அ ஐக் காண்க.

12. அஇ = 4 அங். ஆயும் அஉ = 2·4 அங். ஆயுமிருந்தால் ∠ அ ஐக் காண்க.

[13.] அஇ = 5 அங். ஆயும் அஉ = 3·2 அங். ஆயுமிருந்தால் ∠ இ ஐக் காண்க.

[14.] அஇ = 8 ச. மீ. ஆயும் இஉ = 7·3 ச. மீ. ஆயுமிருந்தால் ∠ இ ஐக் காண்க.

15. 20 அடி எணியொன்று சுவரொன்றுடன் சாய்ந்து நிலத்துடன் 72° கோணம் ஒன்றை ஆக்குகின்றது. சுவரில் எவ்வளவு உயரத்தில் எணி முட்டுகின்றது ? சுவரிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் எணியின் அடி உள்ளது ?

16. 25 அடி நீளமுள்ள எணியொன்று நிலைக்குத்தான சுவரொன்றிற் சாய்ந்துள்ளது. எணியின் அடி சுவரிலிருந்து 7 அடி தூரத்தில் உள்ளது. கிடைத்தளத்துடன் எணி அமைக்குங் கோணத்தின் அளவென்ன ?

17. ம இலிருந்து ஒரு மனிதன் புறப்பட்டு வ. 42° கி. வழியாக 300 யார் செல்கின்றான். ம இலிருந்து கிழக்கே அவன் எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளான் ? ம இலிருந்து வடக்கே எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளான் ?

[18] **ம** இலிருந்து ஒரு மனிதன் புறப்பட்டு தெ. 53° மே. வழியாக 5 மைல் செல்கின்றான். **ம** இலிருந்து மேற்கே அவன் எவ்வளவு தூரத்தில உள்ளான்? **ம** இலிருந்து தெற்கே எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளான்?

[19] **ப** என்பது **க** இலிருந்து $3\frac{1}{2}$ மைல் கிழக்கே உள்ளது. **த** என்பது **ப** இலிருந்து நேர் வடக்காயும் **க** இலிருந்து $4\frac{1}{2}$ மைலளவு தூரத்திலு முள்ளது. **க** இலிருந்து **த** உள்ள திசை யாது?

20. ஒரு கொடியினது நூல் 750 அடி நீளம். அது கிடைத்தளத்துடன் 62° கோணத்தை உண்டாக்குகின்றது. நிலத்திலிருந்து கொடி எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது?

21. ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் 6 ச. மீ. செவ்வகத்தின் ஒரு பக்கத்துடன் அது 32° கோணம் ஒன்றை அமைக்கின்றது. செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் அளவுகளைக் காண்க.

[22] மலையொன்று கிடைத்தளத்துடன் 18° அளவிற் சரிவாகவுள்ளது. அம் மலையில் 100 யார் ஒரு மனிதன் ஏறியபின் அவன் எவ்வளவு உயரத்திற்கு ஏறியுள்ளான்?

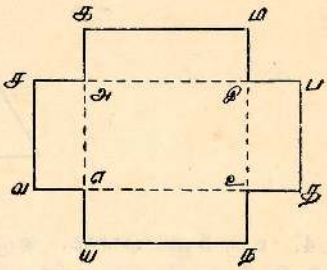
*23. 45 அங். உயரமுள்ள படமொன்று அதன் கீழ்முனையானது சுவரில் சாய்ந்திருக்கும்பொழுது சுவரொடு 7° கோணம் ஒன்றை ஆக்குகின்றது. படத்தின் உச்சி சுவரிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

*24. 3 அடி நீளமுள்ள ஊசல் ஒன்று நிலைக்குத்திலிருந்து ஒவ்வொரு பக்கத்திற்கும் 20° அளவு ஆடுகின்றது. ஊசலின் கீழ்முனை எவ்வளவு உயரத்திற்கு எழும்புகின்றது?

(இன்னும் வேறு பயிற்சி தேவையெனில், பயிற்சி 19 இலுள்ள எண் 8 ஐத் தவிர்ந்த மற்றைக் கணக்குக்களைத் திரிகோணகணிதமுறைப்படி செய்யலாம்.)

திண்மங்களின் மேற்புரப்புக்களை அமைத்தல்

ஒரு நெருப்புப் பெட்டியிலுள்ள நெருப்புக் குச்சுக்களைக் கொள்ளும் ஒரு திறந்த பெட்டி 2·3 அங். நீளமும் 1·5 அங். அகலமும் 0·7 அங். உயரமும் உடையது. பெட்டியின் விளிம்புகளை வெட்டிப் பக்கங்களை அடித்தளத்துடன் ஒரு மட்டமாக மடித்தால் உரு 196 இல் காட்டிய உருவுடைய ஓர் உருவத்தைப் பெறலாம்.



உருவம் 196

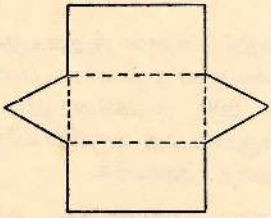
இதைத் திறந்த பெட்டியின் ஒரு வலை வேலைப்பாடு எனக் கூறலாம். திறந்த பெட்டியின் அளவுகள் மேற்கூறியவாறு இருந்தால் உரு 196 இல் உள்ள உருவின் எல்லைகளுடைய அளவுகள் என்ன ?

வலைவேலைப்பாட்டில் உள்ள எவ்வெக்கோடுகள் சமனாயிருக்கும் ?

ஒருறுதியான தாளிலோ ஒரு மெல்லிய தாட்பலகையிலோ அந்த வலை வேலையை வரைக. குத்திட்ட கோடுகள் வழியே அதை மடித்து அதைத் திறந்த பெட்டியாக அமையுமாறு செய்க. பசை பூசிய தாளைக் கொண்டு விளிம்புகளை இணைக்க.

பயிற்சி 23

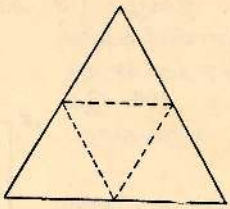
1. 5 ச. மீ. நீளமும் 3 ச.மீ. அகலமும் 2 ச.மீ. உயரமும் உள்ள ஒரு மூடிய பெட்டியின் வலைவேலைப்பாட்டைக் காட்டுக. உருவை நன்முறையிற் கீறிப் பெட்டியை அமைக்க.


உருவம் 197

2. உரு 197 முக்கோணவரியம் ஒன்றின் வலைவேலைப்பாட்டைக் குறிக்கின்றது. அரியம் 5 ச.மீ. உயரமும் அடியின் ஒவ்வொரு பக்கமும் 3 ச.மீ. உம் ஆனால் உமது உருவில் வலைவேலைப்பாட்டின் அளவுகளைக் காட்டுக. அரியத்தை அமைக்க.

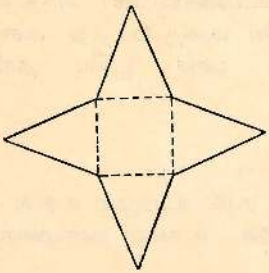
3. 1 ஆம் பக்கத்திற்கெதிராகவுள்ள நிழற் படங்களைப் பார்க்க. உரு 198 ஒழுங்கான நான்முகத் திண்மம் ஒன்றின் வலைவேலைப்பாட்டைக் குறிக்கும்.

திண்மத்தின் ஒவ்வொரு விளிம்பும் 2 அங். ஆயின் உமது உருவில் வலை வேலைப்பாட்டின் அளவுகளைக் காட்டுக. திண்மத்தை அமைக்க.

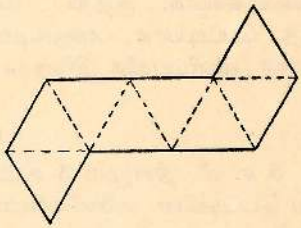


உருவம் 198

4. உரு 3 ஐப் பார்க்க. உரு 199 சதுரவடியிலுள்ள கூம்பகமொன்றின் வலைவேலைப்பாட்டைக் குறிக்கும். அடியின் ஒவ்வொரு விளிம்பும் 3 ச.மீ. ஆயும் சரிந்த விளிம்புகள் ஒவ்வொன்றும் 4 ச.மீ ஆயுமிருந்தால் உமது உருவில் வலைவேலைப்பாட்டின் அளவுகளைக் காட்டுக. கூம்பகத்தை அமைக்க.



உருவம் 199



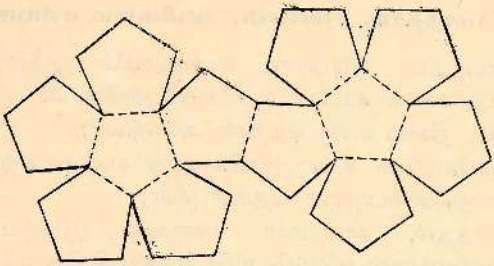
உருவம் 200

5. I ஆம் பக்கத்திற்கு எதிரில் உள்ள நிழற்படத்தைப் பார்க்க. ஒவ்வொரு முகமும் சமபக்க முக்கோணமான ஒழுங்கான எண்முகத்திண்மம் ஒன்றின் வலைவேலைப்பாட்டை உரு 200 குறிக்கின்றது. திண்மத்தின் ஒவ்வொரு விளிம்பும் 4 ச.மீ. நீளமானால் உமது உருவில் வலைவேலைப்பாட்டின் அளவுகளைக் காட்டுக. திண்மத்தை அமைக்க.

6. 2 ஆம் பக்கத்திலுள்ள உரு 3 ஐப் பார்க்க. அடி ஒழுங்கான ஐங்கோணமாயுள்ளதும் நீளம் 4 ச.மீ. உள்ளதுமான அரியமொன்றின் வலைவேலைப்பாட்டை ஒருறுதியான தாளிலோ ஒரு மெல்லிய தாட்பலகையிலோ வரைக. உரு 11 இல் 1, 2, 3, 4, 5 என அடையாளமிடப்பட்ட புள்ளிகள் வழியே குத்தி ஐங்கோணத்தை வரைக. திண்மத்தை அமைக்க.

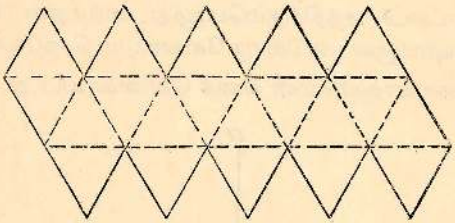
7. 1 ஆம் பக்கத்திற்கெதிராகவுள்ள நிழற்படத்தைப் பார்க்க. உரு 201 ஒழுங்கான பன்னிருமுகத் திண்மத்தைக் குறிக்கும். வலைவேலைப்பாட்டின் ஒவ்வொரு பகுதியும் ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணமாகும். ஒரு மைய

ஐங்கோணங்கீறவேண்டுமெனில் உரு 11 இலுள்ள 1, 2, 3, 4, 5 என்று அடையாளமிடப்பட்டுள்ள புள்ளிகளுக்கூடாகக் குத்திக் கீறுக. பின்னர் இவ்வைங்கோணத்தின் விளிம்புகளைச் சுற்றிச் சமமான ஐங்கோணங்கள் அமைக்க. திண்மத்தை அமைக்க.



உருவம் 201

8. 1 ஆம் பக்கத்திற்கு எதிராயுள்ள நிழற் படத்தைப் பார்க்க. உரு 202 ஒழுங்கான ஓரிருபதுமுகத்திண்மத்தின் வலைவேலைப்பாட்டைக் குறிக்கின்றது. வலையின் ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும். திண்மத்தை அமைக்க.



உருவம் 202

9. உரு 3 ஐப் பார்க்க. ஒரு வட்ட உருளை ஒரு மெல்லிய தாளால் செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் இரு முனைகளும் மூடப்பட்டுள்ளன. அதன் உயரம் 6 ச. மீ. அதன்சுற்று—அதாவது அடியின் பரிதி 11 ச.மீ. அதை அமைக்கக்கூடிய வலை வேலைப்பாட்டைக் கீறுக. உருளையின் வட்ட முனைகளின் விட்டவளவுகளைக் காண்பதற்கு, வட்டத்தின் பரிதி அண்ணளவாக விட்டத்திலும் 22/7 மடங்கானது என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்துக. உருளையை அமைக்க.

10. ஓர் உரமான தாளில்—தாட்பலகை உபயோகித்தலாகாது—6 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு அரைவட்டங்கீறி அதை வெட்டுக. அதைச் சுருட்டி உரு 3 இலுள்ள வட்டக்கூம்பினது வட்டமேற்பரப்பைப் பெறக்கூடியதாய்ச் செய்க. 3 ச. மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வெட்டுக. இது வட்டக் கூம்பின் அடித்தளமாயிருக்கும். இப்பொழுது திண்மத்தை அமைக்க.

பருவம் ஆ

பகுதி 1

சமாந்தரம், சர்வசமன், சமமின்மை என்பன

பின்வருவனவற்றின் அடிப்படை உண்மைகளை முதலாம் பருவத்தில் ஆராய்ந்தும் உதாரணங் காட்டியும் விளக்கியுள்ளோம்.

(i) கோணம், நீளம் என்பவற்றின் அளவுகள்;

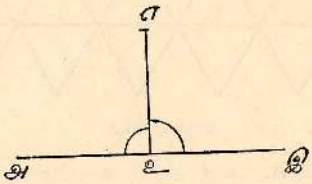
(ii) குறுக்குக்கோடுகள் சமாந்தரக்கோடுகள் என்பனவற்றால் அமையுங் கோணங்களிடையுள்ள தொடர்புகள்;

(iii) வடிவொத்தல், சர்வசமன் என்பனவற்றிற்குரிய சோதனைகள். இவ்வுண்மைகள் ஒரெடுகோட்டொகுதியாகி தொடக்கக் கேத்திரகணிதத்திற்குரிய பாடமுறைமைக்கு அடிப்படையாய் அமைந்துள்ளன. எனவே அங்கு கூறிய கூற்றுக்களை மீண்டும் இங்கே தருதல் இசைவுடைத்தாம்.

ஒரு புள்ளியிலமைந்த கோணங்கள்

வரைவிலக்கணம். உஎ எனும் ஒரு நேர் கோடு **அஉஇ** எனும் பிறிதொரு நேர்கோட்டைச் சந்திக்கும்பொழுது அடுத்துள கோணங்கள் சமமாயிருக்கச் செய்யுமானால் ஒவ்வொரு கோணமும் செங்கோணம் எனப்படும்.

செங்கோணங்கள் யாவுஞ் சமன் எனக் கொள்ளப்பட்டது.



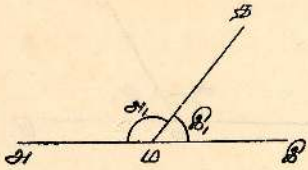
உருவம் 203

உஎ, அஉஇ இற்குச் **செங்கோணமாயுள்ளது,** அல்லது **செங்குத்தாயுள்ளது** என்றும் **உ,** ஆனது **எ** இலிருந்து **அஇ** உக்குள்ள **செங்குத்தின் அடி** என்றுஞ் சொல்லப்படும். ஒரு கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளிக்குச் செங்குத்துக் கீறுதல் என்று ஒருபொழுதுஞ் சொல்லலாகாது.

மஇ, மஉ எனும் இரு நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் **மஅ** செங்குத்தாயின், தளம் **மஇஉ** விலமைந்து **ம** இற்கூடாகச் செல்லும் ஒவ்வொரு நேர்கோட்டிற்கும் **மஅ** செங்குத்தாயிருக்கும் **எ**ன்பது நிறுவக் கூடியதாகும். அப்பொழுது தளம் **மஇஉ** இற்கு **மஅ** செங்குத்தாகும்.

தேற்றம் 1

ஒரு நேர்கோடு பிறிதொரு நேர்கோட்டின்மேல் நிற்பதனால் அமையும் அடுத்துளகோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்கட்குச் சமனாகும்.

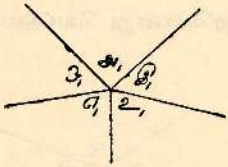


உருவம் 204

அமஇ ஒரு நேர்கோடானால், உரு 204 இலுள்ள குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தும்பொழுது அ + இ = 2 செங்கோணம்.

கிளைத்தேற்றம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து பல நேர் கோடுகள் கிறப்படின், அவ்வாறமைந்த தொடர்ந்து அடுத்துவருங் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை நாலு செங்கோணங்கட்குச் சமனாகும்.

உரு 205 இலுள்ள குறியீடுகளைப் பயன் படுத்தினால், அ, + இ, + உ, + எ, + ஒ, = 4 செங்கோணம்.



உருவம் 205

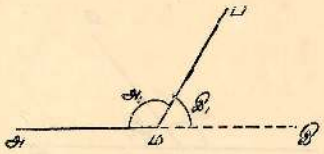
முதலாம் இரண்டாந் தேற்றங்களின் முறைமையான நிறுவல்கள் பின்னிணைப்பிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வரைவிலக்கணம். இரு கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்கட்குச் சமனாயின் அவற்றை **மிகைநிரப்புகோணங்கள்** என்றும், அவற்றுள் யாதாயினும் ஒன்றை மற்றையதின் மிகைநிரப்பி என்றுங் கூறலாம்.

அஉஇ ஒரு நேர்கோடாயுள்ள உரு 204 இல் அ, உம் இ, உம் மிகைநிரப்பு கோணங்களாகும்.

தேற்றம் 2

அடுத்துள இரு கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணங்கட்குச் சமனாயின், கோணங்களின் புறச் சிறைகள் ஒரு நேர்கோட்டிலமையும்.



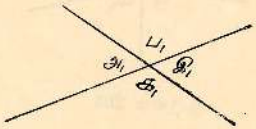
உருவம் 206

உரு 206 இலுள்ள குறியீடுகளை உபயோகிக்கும்பொழுது அ, + இ, = 2 செங்கோணமாயின் **அமஇ** ஒரு நேர்கோடாகும்.

வரைவிலக்கணம்.—மூன்று, அல்லது மூன்றிற்கு மேலான புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் இருக்குமானால் அவை **நேர்கோட்டிலுள்ளவை** எனப்படும். உரு 206 இல் அ, + இ, = 2 செங்கோணமாயின் **அ,ம,இ** என்பவை நேர்கோட்டிலுள்ளவையாகும்.

தேற்றம் 3

இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுமாகிற் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும்.



உருவம் 207

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும் உரு 207 இலுள்ள குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினால்,

அ, = இ, . ப, = க, .

முறையான நிறுவல் 33 ஆம் பக்கத்திற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உரையாடித் தெளிதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 205, பின்வரும் அளவுகளில் இருக்குமானால், எப்படி அது அமைக்கப்படவேண்டுமென்பதைக் காட்டும் உரு வரைக.

(i) ஒ, + அ, + இ, = 2 செங்கோணம்.

(ii) இ, + உ, + எ, = 2 செங்கோணம்.

(iii) அ, + இ, + உ, = 2 செங்கோணம்.

உரு 217 இலுள்ளவாறு, எண்டரவுநீக்கி, **அஉ, அஒ, அஇ, அஎ** எனும் நாலு கோடுகள் கீறி எண் 2–4 வரை உள்ள கணக்குக்களிற் பயன்படுத்துக.

2. ∠**ஒஅஇ** = ∠**எஅஉ** ஆயின் **இஅஉ, ஒஅஎ** என்பன நேர்கோடா ?

3. ∠**ஒஅஇ** = ∠**எஅஉ** ஆயும் ∠**உஅஒ** = ∠**இஅஎ** ஆயுமிருந்தால் **இஅஉ, ஒஅஎ** என்பன நேர்கோடாயிருக்க வேண்டுமா ?

4. **இஅஉ** ஒரு நேர் கோடாயும் ∠**ஒஅஇ** = ∠**எஅஉ** ஆயுமிருந்தால் **ஒஅஎ** ஒரு நேர்கோடா ?

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 24

1. 20°, 150°, 92° ஆகியவற்றின் மிகைநிரப்பிகளைக் கூறுக.

2. 2வ°, 3வ° என்பன மிகைநிரப்புக் கோணங்களாயின் **வ** ஐக் காண்க.

[3] 4**ய**° + 30° ; **ய**° + 40° என்பன மிகைநிரப்புக் கோணங்களாயின் **ய** ஐக் காண்க.

4. கோணம் ந° அதன் மிகைநிரப்பியினும் நான்மடங்காயின் ந° ஐக் காண்க.

5. (i) ஒரு விரிகோணம் (ii) ஒரு பின்வளைகோணம் (iii) ஒரு சுற்றலில் மேற்பட்டகோணம் என்பவற்றைத் திரும்ப, 17° அளவுகளில் நீர் எவ்வளவு குறைந்த எண்ணிக்கைகள் திரும்பல்வேண்டும் ?

[6] ஒரு மணிக்கூட்டின் நிமிடக்கம்பி (i) ஓரைமணி நேரத்தில் (ii) ஒரு நிமிடத்தில் எவ்வளவு கோணந் திரும்பும் ?

[7] ஒரு மணிக்கூட்டின் மணிக்கம்பி (i) 9 மணிநேரத்தில் (ii) 20 நிமிடங்களில் எவ்வளவு கோணந் திரும்பும் ?

*8. பின் குறிப்பிட்ட நேரங்களில் மணிக்கம்பிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க. (i) 7 மணி ; (ii) 7 மணி 20 நிமிடம்.

9. ஒரு சில்லிற் சமமான இடைவெளி கொண்டுள்ள 6 கம்புகள் உள. அடுத்த இரு கம்புகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் என்ன ?

[10] ஒரு சில்லு 1 நிமிடத்தில் 40 சுற்றல் செய்கின்றது. 1 செக்கனில் 1 சிற்கம்பு எவ்வளவு கோணந் திரும்புகின்றது ?

உரு 43 ஐப் பார்க்க. ஒரு திசைகாட்டியின்றிசைகளான வடக்கு, கிழக்கு, மேற்கு, தெற்கு என்பவற்றைக் குறிக்க ஒருருவம் வரைக. அதைக்கொண்டு பின்வருஞ் சோடித் திசைகட்கிடையில் உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

11. வ. கி. உம் கி. உம்.

12. கி. உம் மே. தெ. மே. உம்.

13. தெ. மே. உம் வ. வ. மே. உம்.

[14] தெ. கி. உம் மே. உம்.

[15] தெ. உம் வ. வ. கி. உம்.

[16] கி. தெ. கி. உம் மே. தெ. மே. உம்.

17. 10° வ. கி. உம் 30° தெ. கி. உம்.

[18] 72° வ. கி. உம் 65° வ. மே. உம்.

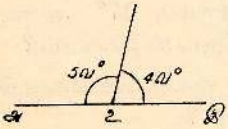
19. 20° தெ. மே. உம் 80° வ கி. உம்.

[20] 70° வ. மே. உம் 10° தெ. கி. உம்.

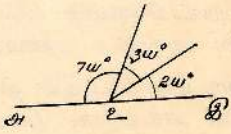
21. 80° வ. கி. இற்கும் 50° வ. மே. இற்கும் உள்ள பின்வளை கோணத்தைக் காண்க.

*22. இரு சிற்கள் **அ**, **இ** என்பவை, **இ** ஒரு சுற்றல் செய்யும்பொழுது, **அ** 6 சுற்றல் செய்யுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன. **அ**, $\frac{3}{4}$ சுற்றல் செய்யும் பொழுது **இ** எவ்வளவு கோணம் திரும்பும் ?

[23] உரு 208 இல் **அஉஇ** ஒரு நேர்கோடு. வ° ஐக் காண்க.



உருவம் 208

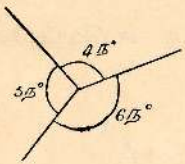


உருவம் 209

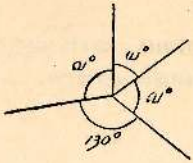
24. உரு 209 இல் **அஉஇ** ஒரு நேர் கோடு. ய ஐக் காண்க.

[25] உரு 210 இலுள்ள ந ஐக் காண்க.

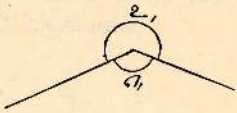
26. உரு 211 இல் **ய** = 40 ஆனால் வ ஐக் காண்க.



உருவம் 210



உருவம் 211



உருவம் 212

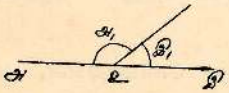
[27] உரு 211 இல் வ = 90 ஆனால் ய ஐக் காண்க.

28. உரு 212 இல் உ, என்பது எ, இலும் இருமடங்காயின் எ, ஐக் காண்க. (எ, என்பது வ° எனக்கொண்டு கணிக்க.)

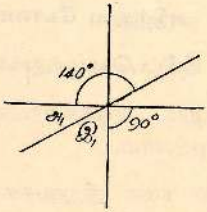
[29] உரு 212 இல் உ, என்பது எ, இலும் 1 செங்கோணங் கூடியதா யிருந்தால் எ, ஐக் காண்க.

30. உரு 213 இல் அஉஇ ஒரு நேர்கோடு. அ, என்பது இ, இலும் மும் மடங்காயின் அ, ஐக் காண்க. (இ, ஐ வ° எனக் கொண்டு கணிக்க.)

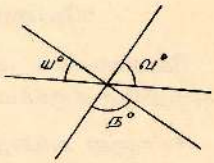
[31] உரு 213 இல் அஉஇ ஒருநேர்கோடு. அ, என்பது இ, இலும் $\frac{1}{3}$ செங் கோணத்தாற் கூடியதாயின் அ, ஐக் காண்க.



உருவம் 213



உருவம் 214



உருவம் 215

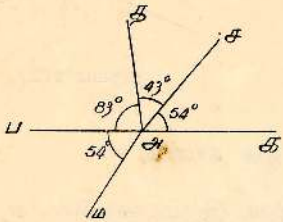
32. உரு 214 ஒன்றையொன்று ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும் 3 நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும். அ,, இ, ஆகியவற்றைக் காண்க.

[33] உரு 215, ஒன்றையொன்று ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் 3 நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும். வ, ய, ந என்பவற்றை இணைக்குஞ் சமன் பாடு ஒன்றைக் காண்க.

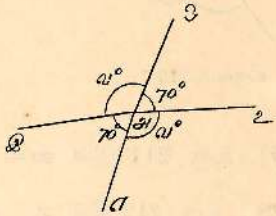
[34] உரு 216 திருத்தமாகக் கீறப்படாதது. அதில்,

(i) ∠ **கஅம** வைக் காண்க.

(ii) கோணங்கள் **தஅச, தஅப** என்பவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் அமைக்குங் கோணத்தைக் காண்க.



உருவம் 216



உருவம் 217

35. உரு 216 இல் (இது திருத்தமாகக் கீறப்படாதது), ஒரே கோட்டிலமைந்த மூன்று புள்ளிகளைக் காண்க. இதற்கு ஒன்றிற் கூடிய விடைகள் உளவா ? உமது விடைக்குக் காரணங் காட்டுக.

36. உரு 217 இல் (இது திருத்தமாகக் கீறப்படாதது),

(i) வ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(ii) ஒரு கோட்டிலமையும் 3 புள்ளிகள் காண்க. இதற்கு ஒன்றிற்கு மேலாய விடைகள் உளவா ? காரணங் காட்டுக.

அடுத்துள கோணம்

கோணங்கட்கு கீறிட்டவெழுத்துக்களை உபயோகித்தல்

கோணங்களைக் குறிப்பதற்கு அடிக்கீற்றினை உபயோகித்து நிறுவற் கூற்றினைச் சுருக்கமாக எழுதலாம்.

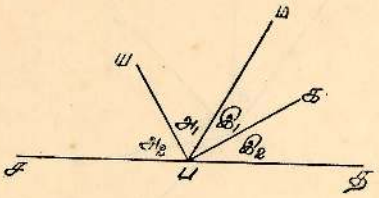
*சமனான அல்லது சமன் என நிறுவக்கூடிய இரு கோணங்களை, அச் சமத்தைச் சுட்டுங் குறியீடொன்றினால் குறிப்பது இசைவாயிருக்கும். உதாரணமாக $அ_1$ உம் $அ_2$ உம், $அ_1$ உம் அ, உம் என்பன போன்றவை இசைவாயுள்ளன.

கோணங்கட்கு அடிக்கீறிட்ட எழுத்துக்களை உபயோகிக்கும் பொழுது யாண்டும் பெரிய வரிப்படம் வரைதல் வேண்டும். அவ்வாறு செய்யத் தவறினால் குறியீடுகள் தெளிவாயிரா.

*மயக்கம் நீக்குதற்பொருட்டு அடிக்கீறிட்ட எழுத்துக்களுடன் பாகைக்குறியீடோ எண் குறியீடோவதின் இக் றோ நீக்கி அவை எழுதப்படும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

ஒரு நேர்கோடு மப பிறிதொரு நேர்கோடு சபத இனை ப இற் சந்திக்க பய உம் பக உம் ∠சபம, ∠தபம ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டி களாயின் ∠யபக ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.



உருவம் 218

கோணங்கள் **யபம, யபச** சமன் எனக் கொடுத்திருக்கிறபடியால் நாம் அவற்றை $அ_1$, $அ_2$ எனச் சுட்டுகின்றோம். இவ்விதமே கோணங்கள் **கபம** உம் **கபத** உங் காட்டப்பட்டுள்ளன.

(i) நிறுவவேண்டிய உண்மையை அடிக்கீறிடப்பட்ட எழுத்துக்கொண்டு எடுத்துச் சொல்லுக.

(ii) **∠மபச, ∠மபத** என்பவற்றைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர்? நீர் கூறுவதற்குக் காரணங் காட்டுக. இவ்வுண்மையை அடிக்கீறிட்ட எழுத்துக்கள் கொண்டு எடுத்துச் சொல்லுக.

(iii) $அ_2 = அ_1$ என்றும் $இ_2 = இ_1$ என்றும் குறிப்பதால் நீர் பெறுவது என்ன? நிறுவலை முடிவு செய்க. ஒரு கணக்கை நிறுவுதற்கு எப்பொழுதும் தேவையான காரணங்கள் யாவையுங் கூறவேண்டும். இந்தக் கணக்கினது நிறுவலைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$(அ_1 + அ_2) + (இ_1 + இ_2) = 2$ செங்கோணம். (நேர் கோட்டு அடு. கோணங்கள்.)

ஆனால் $அ_1 = அ_2$ என்றும் $இ_1 = இ_2$ என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore\ 2அ_1 + 2இ_1 = 2$ செங்கோணம்,

$\therefore\ அ_1 + இ_1 = 1$ செங் ∠,

$\therefore$ **∠யபக** $= 1$ செங் ∠.

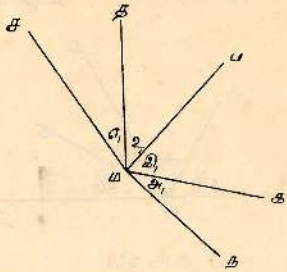
பயிற்சி 25

எண் 1 – 12 வரை உரு 219 ஐக் குறிக்கும்.

1. அடிக்கீறிட்ட எழுத்துக்களைக் கொண்டு,

(i) **∠நமப**, (ii) **∠கமத + ∠பமச** ஆகியவற்றை எடுத்துச்சொல்லுக.

[2] அடிக் கீறிட்ட எழுத்துக்களைக் கொண்டு
(i) ∠கமச, (ii) ∠நமத − ∠நமப ஆகியவற்றை எடுத்துச் சொல்லுக.



உருவம் 219

3. அடிக்கீறில்லா எழுத்துக்களின் உதவியாற் பின்வருவனவற்றை இயன்ற அளவிற் சுருக்கமாகக் கூறுக.

(i) $உ_1 + எ_1$, (ii) $அ_1 + இ_1 + உ_1$.

4. பின்வருங் கூற்றுக்களை அடிக்கீறுள்ள எழுத்துக்களைக்கொண்டு எடுத்துச் சொல்லுக.

(i) **மத** என்பது ∠**பமச** இனை இருசமக்கூறிடுகின்றது.

(ii) **சமந** ஒரு நேர்கோடு.

[5] பின்வருங் கூற்றுக்களை அடிக்கீறிட்ட எழுத்துக்களைக்கொண்டு எடுத்துச்சொல்லுக.

(i) ∠**கமத** = ∠**பமச**.

(ii) **மத, மக** இற்குச் செங்குத்து.

6. ∠**நமக** = ∠**பமத** ஆனால், ∠**நமப** = ∠**கமத** என்பதை நிறுவுக.

[7] ∠**கமத** = ∠**பமச** ஆனால், ∠**கமப** = ∠**தமச** என்பதை நிறுவுக.

[8] ∠**நமப** + ∠**கமத** = ∠**நமத** + ∠**கமப** என்பதை நிறுவுக.

9. **மப** ஆனது **மந** இற்குச் செங்குத்தாயும் **மத** ஆனது **மக** இற்குச் செங்குத்தாயுமிருந்தால்,

(i) ∠**நமக** = ∠**பமத** என்பதையும்

(ii) ∠**நமத** + ∠**கமப** = 2 செங் ∠ என்பதையும் நிறுவுக.

10. **மத**, ∠**பமச** ஐ இரு சமக்கூறிட்டால்
∠**கமத** − ∠**சமத** = ∠**கமப** என்பதை நிறுவுக.

*11. மப, ∠கமச ஐ இரு சமக்கூறிட்டால்,
∠பமத $= \frac{1}{2}$ (∠கமத − ∠சமத) என்பதை நிறுவுக.

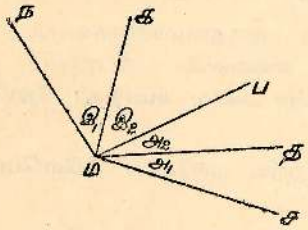
*12. ∠நமச $= 2$ ∠கமத ஆக மப, நமச ஐ இரு சமக் கூறிட்டால், ∠நமக $=$ ∠பமத இற்குச் சமன் என நிறுவுக.

எண் 13–15 வரை உரு 220 ஐக் குறிக்கும். அதில் மத, மக என்பவை ∠பமச, ∠பமந என்பவற்றின் இரு சமவெட்டிகளாகும்.

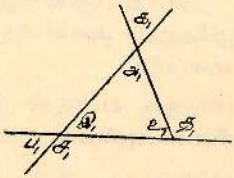
13. ∠தமக $= \frac{1}{2}$ ∠சமந என்பதை நிறுவுக.

[14] ∠தமப + ∠தமந $= 2$ ∠தமக என்பதை நிறுவுக.

15. ∠சமக + ∠நமத $= 3$ ∠தமக என்பதை நிறுவுக.



உருவம் 220



உருவம் 221

எண் 16–18 வரை உரு 221 ஐக் குறிக்கும். அது ஒன்றையொன்று வெட்டும் மூன்று நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

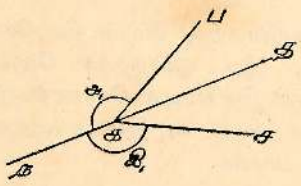
(உமது காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக)

16. ப$_1$ $=$ க, ஆயின் அ$_1$ $=$ இ, என்பதை நிறுவுக.

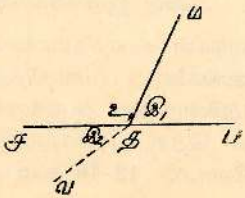
[17] இ$_1$ $=$ உ, ஆயின் ச$_1$ $=$ த, என்பதை நிறுவுக.

18. அ$_1$ $=$ உ, ஆயின் க$_1$ + த$_1$ $= 2$ செங் ∠ என்பதை நிறுவுக.

19. உரு 222 இல் நகத ஒரு நேர்கோடு. கத ∠சகப ஐ இரு சமக்கூறிடுகின்றது. இ$_1$ $=$ அ$_1$ என்பதை நிறுவுக.



உருவம் 222



உருவம் 223

20. உரு 223 இல் (இது திருத்தமாகக் கீறப்பட்டதன்று), **சதப** ஒரு நேர் கோடு. அதில் $இ_1 = இ_2$. **மதவ** ஒரு நேர்கோடென நிறுவுக.

*21. உரு 222 இல் **தகந** ஒரு நேர்கோடெனக் கொடுக்கப்படவில்லை. ஆனால் $இ_1 = அ$, எனவும் ∠**தகப** = ∠**தகச** எனவுங் கொடுக்கப்பட்டுளது. **தகந** ஒரு நேர்கோடென நிறுவுக.

*22. உரு 223 இல் **சதப** ஒரு நேர்கோடெனக் கொடுக்கப்படவில்லை. ஆனால் ∠**பதம** = ∠**சதவ** என்றும் ∠**சதம** = ∠**பதவ** என்றுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **சதப, மதவ** என்பவை நேர்கோடுகள் என நிறுவுக.

சமாந்தரங்களும் குறுக்குக் கோடுகளும்

வரைவிலக்கணம்.—இரு நேர்கோடுகள் ஒருதளமாயிருக்க—அதாவது ஒரு தளத்திலிருப்ப—இருவழியாலும் எவ்வளவு நீட்டினும் ஒரு பொழுதேனும் அவை சந்தியாதிருக்குமாயின் அவை **சமாந்தர நேர்கோடுகள்** எனப்படும்.

பின்வருஞ் சமாந்தர நேர்கோடுகள் பற்றிய எடுகோள் **பிளேபெயரின் வெளிப்படையுண்மை** எனப்படும்.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லாத யாதாயினும் ஒரு நேர்கோட்டிற்கு அப்புள்ளிக்கூடாக ஒரு நேர்கோடே சமாந்தரமாக வரையலாம்.

வரைவிலக்கணம்.—ஒரு நேர்கோடு இரு, அல்லது மேற்பட்ட நேர்கோடுகளை வெட்டின் அது ஒரு குறுக்குக்கோடெனக் கூறப்படும். ஒரு குறுக்குக்கோடு, அதைவெட்டுங் கோடுகளுடன் அமைக்குங் கோணங்கட்கு இடப்படும் பெயர்களான ஒன்றுவிட்ட, ஒத்த, அக, என்ற சொற்களின் பொருள்கள் 42 ஆம் பக்கத்திற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உரு 224 இல்

அ, உம் இ, உம் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் எனப்படும்.

உ, உம் இ, உம் ஒத்தகோணங்கள் எனப்படும்.

எ, உம் இ, உம் குறுக்குக்கோட்டின் ஒரு பக்கத்துள்ள அகக் கோணங்கள் என்றும், அல்லது சுருக்கமாக **அகக்கோணங்கள்** என்றும் அழைக்கப்படும். அவை இனக்கோணங்கள் என்றும் அழைக்கப்படும்.

கோடுகள் சமாந்தரமானவையோ என அறிவதற்கு மேற்கூறிய சோடிக் கோணங்களைப் பயன்படுத்துதல் பற்றியும், இரு சமாந்தரக் கோடுகளை வெட்டுகின்ற ஒரு குறுக்குக்கோடு அமைக்கும் இச்சோடிக் கோணங்களிடையுள்ள தொடர்புகளைப்பற்றியும் விளக்கமாக பகுதி **அ** இல் எடுத்துரைத்துள்ளோம். 42–46 வரையுள்ள பக்கங்கள் பார்க்க.

இம்முடிபுகளைப் பின்வருந் தேற்றங்களால் எடுத்துச் சொல்லலாம்.

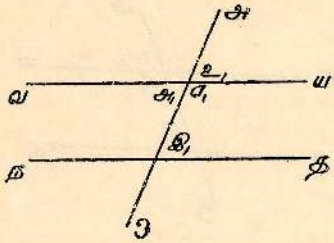
தேற்றம் 5

இரு நேர்கோடுகளை வெட்டுகின்ற ஒரு குறுக்குக் கோடானது

(i) ஒருசோடி ஒன்றுவிட்டகோணங்களைச் சமனாக்கின்,

அல்லது (ii) ஒரு சோடி ஒத்தகோணங்களைச் சமனாக்கின்,

அல்லது (iii) தன்னுடைய ஒரு பக்கத்திலுள்ள ஒருசோடி அகக்கோணங்களை மிகைநிரப்புகின்றனவாக்கின், அவ்விரு நேர்கோடுகளுஞ் சமாந்தரமாகும்.



உருவம் 224

உரு 224 இலுள்ள குறியீடுகளைக் கொள்ளின்

(i) அ, = இ, எனின்,

அல்லது (ii) உ, = இ, எனின்,

அல்லது (iii) இ, + எ, = 2 செங் ∠ எனின்,

வய ∥ நத.

தேற்றம் 5 (i) இன் முறைமையான நிறுவல் பின்னிணைப்பு 638 ஆம் பக்கத்திற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றங்கள் 5 (ii), 5 (iii) ஆகியவற்றை தேற்றம் 5 (i) இலிருந்து உய்த்தறியலாம்.

(1) உ, = இ, எனின், அ, = இ,.

அ, = உ, **குத்தெதிர்க்கோணங்கள்,**

ஆனால் உ, = இ, **கொடுக்கப்பட்டது;**

∴ அ, = இ,.

(2) இ, + எ, = 2 செங்கோணம் எனின், அ, = இ,.

அ, + எ, = 2 செங் ∠ **நேர்கோட்டு அடு. கோணங்கள்,**

ஆனால் இ, + எ, = 2 செங் ∠ **கொடுக்கப்பட்டது.**

∴ அ, + எ, = இ, + எ,,

∴ அ, = இ,.

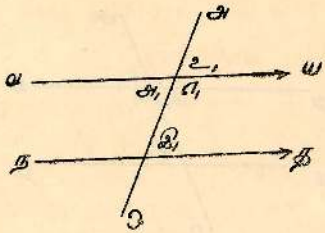
தேற்றம் 6

ஒரு குறுக்குக்கோடு இரண்டு நேர்கோடுகளை வெட்டின்,

(i) **ஒன்று விட்ட கோணங்கள் சமனாகும்,**

(ii) **ஒத்த கோணங்கள் சமனாகும்,**

(iii) **குறுக்குக்கோட்டின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள அகக்கோணங்கள் மிகை நிரப்புகோணங்களாகும்.**



உருவம் 225

வய || நத ஆயுள்ள உரு 225 இலுள்ள குறியீடுகளைக்கொள்ளின்,

(i) அ, = இ, ;

(ii) உ, = இ, ;

(iii) இ, + எ, = 2 செங் ∠.

இதன் முறைமையான நிறுவல் பின்னிணைப்பில் 640 ஆம் பக்கத்திற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு.—தேற்றத்திற்குரிய வரிப்படங்களில் உள்ள அடையாளங்கள் தரவுகள் அமைப்புக்கள் ஆகியவற்றால் அறிந்தவையையே குறிக்கும். நிறுவுகையில் அறியப்படுவனவற்றை அவை குறியா.

தேற்றம் 7

ஒரு நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான ஒரே தளத்து நேர்கோடுகள் ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமாகும்.

இது பிளேபெயரின் வெளிப்படையுண்மையிலிருந்து அறியக்கிடக்கின்றது. ஏனெனில், ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நேர்கோடுகள் இரண்டும் மூன்றாவதொரு நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகா என்க.

நேர்கோடுகள் யாவும் ஒரு தளமானவை அனருயினும் தேற்றம் 7 உண்மையேயாகும். உதாரணமாக, செவ்வகத்திண்மத்தின் சமாந்தர விளிம்புகளிடத்தில் இது உண்மையாகும். இதுபற்றிய கூற்று பின வருமாறு :

இரு நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் இரண்டாவது ஒரு நேர் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமானல், அம்மூன்று கோடுகளும் ஒரு தளத்து இல்லாவிடினும் அவை ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாகும்.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

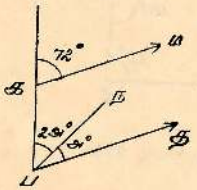
பயிற்சி 26

(அம்புக் கோடுகள் சமாந்தரமானவை)

ஒவ்வொரு உதாரணத்திற்கும் உரிய காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

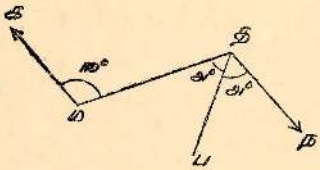
226–228 வரையுள்ள உருக்களில் உள்ள அ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

1.



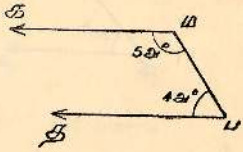
உருவம் 226

2.



உருவம் 227

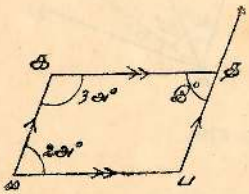
[3]



உருவம் 228

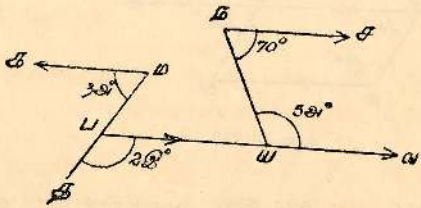
உரு 229 இலும் 230 இலுமுள்ள அ, இ என்பவற்றின் பெறுமதியைக் காண்க.

4.



உருவம் 229

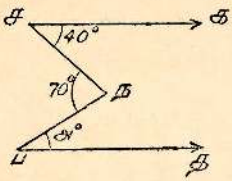
*5.



உருவம் 230

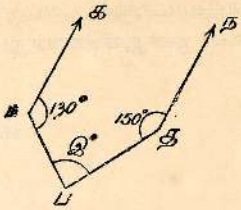
231–234 வரை எண்கொண்ட உருவங்களில் அடையாளமிடப்பட்டதெரியாத கோணங்களைக் காண்க. ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் உமது உருவத்தைக் கீறி இன்னும் ஒரு சமாந்தரக் கோடு கீறுக.

6.



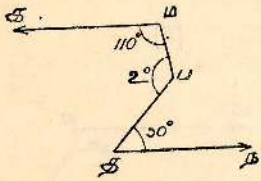
உருவம் 231

[7]



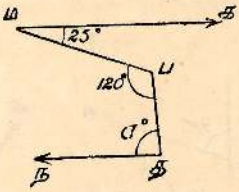
உருவம் 232

8.



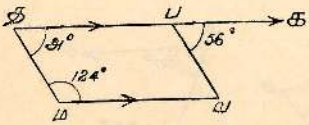
உருவம் 233

[9]

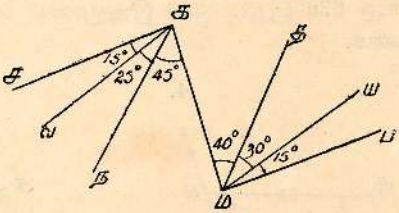


உருவம் 234

10. உரு 235 இல் **பவ** இற்குத் **தம** சமாந்தரமென நிறுவுக.



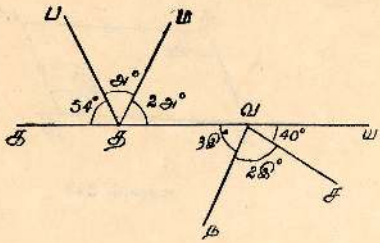
உருவம் 235



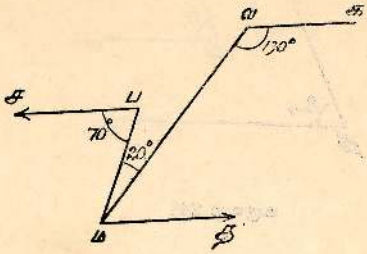
உருவம் 236

[11] உரு 236 இல் சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிகளைக் காண்க

*12. உரு 237 இல் **கதவய** ஒரு நேர்கோடு. **தம** ‖ **வந** என நிறுவுக.



உருவம் 237



உருவம் 238

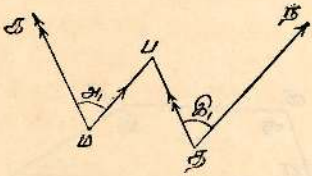
*13. உரு 238 இல் **சப** ஆனது **வக** உக்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக.

பயிற்சி 27

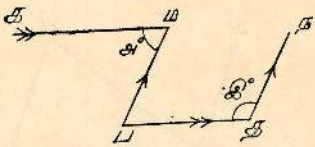
(அம்புக்கோடுகள் சமாந்தரமானவை)

பின்வரும் உதாரணங்களில் உருவத்தைக் கீறித் தேவையான கருவியை வரைக. உம் காரணங்களைத் தெளிவாகக் கூறுக.

1. உரு 239 இல் அ, = இ, என்று நிறுவுக. (கருவி வரைதலாகாது.)



உருவம் 239

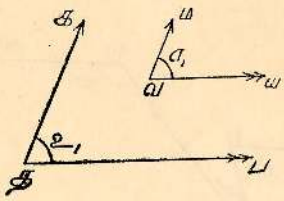


உருவம் 240

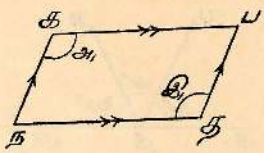
2. உரு 240 இல் அ, + இ, = 2 செங் ∠ என நிறுவுக. (கருவி வரைதலாகாது.)

[3] உரு 241 இல் உ, = எ, என நிறுவுக.

(**தப** ஏவ **ச** விலே சந்திக்கும் வண்ணம் **மவ** வை நீட்டுக.)



உருவம் 241



உருவம் 242

4. உரு 242 இல் அ, = இ, என நிறுவுக.

(தப ஐ ம இற்கு நீட்டுக.)

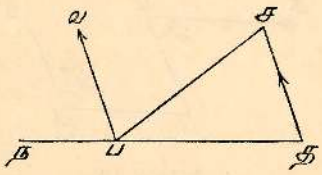
5. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **சபத** ஐக் கீறி **பத** ஐ **ந** இற்கு நீட்டுக. ∠**சதந** = ∠**ச** + ∠**ப** என நிறுவுக. (**தவ** ஐ **பச** இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறுக.)

[6] ∠**ப** = ∠**த** ஆயிருக்க ஒரு முக்கோணம் **சபத** வரைக. **பச** ஐ **வ** இற்கு நீட்டுக. **பத** இற்குச் சமாந்தரமாக **சம** ஐ கீறுக. **சம** ∠**தசவ** ஐ இரு சமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

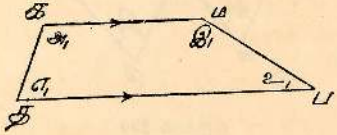
(கருவி வரைதலாகாது.)

7. உரு 243 இல் **தபந** ஒரு நேர்கோடு. ∠**சபந** ஐ **வப** இரு சமக் கூறிடுகின்றது ; ∠**ச** = ∠**த** என நிறுவுக.

(கருவி வரைதலாகாது.)



உருவம் 243



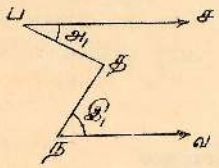
உருவம் 244

8. உரு 244 இல், அ, − உ, = இ, − எ, என நிறுவுக.

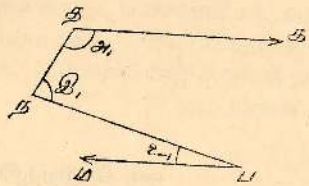
(கருவி வரைதலாகாது.)

[9] உரு 245 இல் ∠**பதந** = அ, + இ, என நிறுவுக.

(**தக** ஐ **வந** இற்குச் சமாந்தரமாகக் கூறுக.)



உருவம் 245



உருவம் 246

*10. உரு 246 இல்

அ$_1$ + இ$_1$ − உ$_1$ = 2 செங்கோணம் என நிறுவுக.

*11. உரு 245 இல் **பந** இணைக்கப்பட **பத**, **நத** என்பவை ∠**சபந**, ∠**வநப** என்பவற்றின் இரு சமவெட்டிகளானால் 9 ஆம் கணக்கிலே நிறுவிய உண்மையைப் பயன்படுத்தி ∠**பதந** ஒரு செங்கோணம் எனக் காட்டுக.

*12. எண்ணளவுகளைத் தவிர்த்து உரு 238 ஐப்போல் ஒருரு வரைக. **சப** என்பது **வக** இற்குச் சமாந்தரமானால்

∠**சபம** + ∠**மவக** − ∠**பமவ** = 2 செங்கோணம் என நிறுவுக.

முறைமையான நிறுவல்

தேற்றங்கள் எனப்படும் பல அடிப்படையான கேத்திர கணிதவுண்மைகள், பகுதி **அ** இல், விளக்கமாக ஆராயப்பட்டுச் செய்முறையில் எடுத்துக் காட்டப்பட்டன. இவ்வுண்மைகளிற் சிலவற்றிற்கு உரிய நிறுவல்கள் பின்னிணைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றைப் பற்றிப் பின்னர் நாம் குறிப்பிடுவாம். ஆனால், இப்பொழுது, பின்வருவனவற்றைப் பற்றிக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடிப்படை உண்மைகளை மாணவர் ஒப்புக்கொள்ளல் வேண்டும்.

(i) ஒரு புள்ளியிலுள்ள கோணங்கள்,

(ii) சமாந்தரக்கோடுகளுடன் குறுக்குக்கோடு ஒன்று அமைக்குங் கோணங்கள்,

(iii) கோடுகள் சமாந்தரமானவையோ என அறிதற்குரிய சோதனைகள்,

(iv) முக்கோணங்கள் சர்வசமன் என்பதை அறிதற்குரிய சோதனைகள்.

இவ்வெடுகோள்களைப் பயன்படுத்தி மற்றை முக்கிய தேற்றங்களின் ஒழுங்கான நிறுவல்களைக்கொடுத்தல் இயலும்.

நிறுவப்படவேண்டிய ஒருண்மைபற்றிய பொதுக் கூற்றானது தேற்றத்தின் பொதுவிவரணம் எனப்படும். ஒரு குறிப்பிட்ட வரிப்படத்தின் எழுத்துறுப்புக்களால் இவ்வுண்மை கூறப்படும்போது அது குறிப்பிட்ட விவரணம் எனப்படும்.

ஒரு தேற்றத்தினது நிறுவலை எழுதல்

நிறுவப்படவேண்டியது ஒரு பொது விவரண உருவிற் கூறப்பட்டிருப்பின் உமது செய்கையைப் பின்வருமுறையிலே தருக :

உமது உருவின் எழுத்துக்களைக்கொண்டு,

(1) தரவைக் கூறுக.

(2) நிறுவப்படவேண்டியதைக் கூறுக.

(3) கருவி யாதாயினுந் தேவையாயின் அதை வரையும் முறையைக் கூறுக.

(4) நிறுவலைக் கூறுக ; இது பொருத்தமான சுருக்கக் குறிப்புக்களாலாய, தேவையான காரணங்கள் யாவும் உடையதாய் இருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்புக்காகத் தேற்றத்தின் எண்ணை ஒருபொழுதும் எடுத்தாளல் ஆகாது.

உதாரணமாக, தேற்றம் 8 இன் பொது விவரணம் 122 ஆம் பக்கத்தினது தலைப்பில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது. வரிப்படத்தைத் தொடர்ந்து வருந் துணிவுமுறை வரிப்படத்தின் எழுத்துறுப்புக்களிற் சொல்லப்பட்டுள்ளது. அது பின்வரும் படிகளையுடையது :

(1) தரவு. (2) மேற்கோள். (3) கருவி. (4) நிறுவல்.

உருவிலே தரப்பட்டதற்கும் நிறுவலின் பொருட்டு உருவிலே சேர்க்கப்பட்டதற்கும் உள்ள வேற்றுமையைத் தெளிந்து அறிதல் அவசியம். இப்படியே தேற்றம் 8 இலே **பத** ஆனது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது எனல் உண்மை. தரவின் ஒரு பகுதியாதலால் நிறுவவேண்டியது எதுவெனக் கூறுவதற்கு அது உதவுவதாலும் அது குறிப்பிட்ட விவரணத்திற் சேர்க்கப்படல் வேண்டும். அது " கருவியின் " பகுதியன்று— அதாவது நிறுவுதலில் உதவுதற்கு அமைத்த உருவின் சேர்க்கையன்று என்பதாகும்—

குறிப்பிட்ட விவரணம் கொடுக்கப்பட்டால், உருவிலே உபயோகிக்கப்படும் எழுத்துக்கள் விவரணத்திற் கொடுக்கப்பட்டவையாயிருத்தல் வேண்டும். ஆனால், இங்கு, தரவையும் மேற்கோளையும் பற்றிய கூற்றுக்களை மீண்டுங் கூறுதல் தேவையற்றதாகும். ஏனெனில் இது அச்சடித்த வினாவைப் பிரதிசெய்வதை ஒக்கும் என்க.

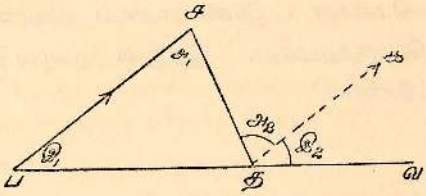
தேர்வுத் தேவைகள். தேற்றம் 8 இல் விவரணம் இருவேறு கூற்றுக்களைக் கொண்டுள்ளது. இரண்டாங் கூற்றினது நிறுவல் முதலாவது கூற்றினது நிறுவலிலே தங்கியுள்ளது. ஒரு தேர்வில், ஒரு மாணவன் இரண்டாங் கூற்றையே நிறுவவேண்டுமெனக் கேட்கப்பட்டால், முதலாங் கூற்றின் நிறுவலும் அத்துடன் சேர்க்கப்பட்டாலன்றி வழக்கமாக, அவ்விடைக்கு முழுப்புள்ளிகள் அளிக்கப்படா.

ஒரு பகுதிக்கு மேலான பகுதிகளை உடைய விவரணங்கள் யாவிற்கும் இக் கூற்றும் பொருந்துமாறு, இந்நூல் முழுவதிலுந் தேற்றங்கள் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

தேற்றம் 8

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால், அங்கு உருவாய புறக் கோணமானது அகத்தெதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமன்.

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 2 செங் கோணங்கட்குச் சமன்.



உருவம் 247

தரவு. ஒரு முக்கோணம் சபத இல் பத என்பது வ இற்கு நீட்டப் பட்டுள்ளது.

மேற்கோள். (i) $\angle$ சதவ $=$ $\angle$ ச $+$ $\angle$ ப;

(ii) $\angle$ ச $+$ $\angle$ ப $+$ $\angle$ சதப $= 2$ செங்கோணம்.

கருவி. த இற்கூடாக தக ஐ பச இற்கு ‖ ஆகக் கீறுக.

நிறுவல். (i) உருவிலுள்ள குறியீடுகளை உபயோகித்தால்

$அ_2 = அ_1$ ஒ.வி. கோணங்கள், தக ‖ பச,

$இ_2 = இ_1$ ஒத்த கோணங்கள், தக ‖ பச,

$\therefore$ கூட்டலால், $அ_2 + இ_2 = அ_1 + இ_1$.

$\therefore$ $\angle$ சதவ $=$ $\angle$ ச $+$ $\angle$ ப.

(ii) $\angle$ சதப ஐ இரு பகுதியொடுங் கூட்டுக.

$\therefore$ $\angle$ சதவ $+$ $\angle$ சதப $=$ $\angle$ ச $+$ $\angle$ ப $+$ $\angle$ சதப.

ஆனால் $\angle$ சதவ $+$ $\angle$ சதப $= 2$ செங்கோணம் நேர்கோட்டு அடுகோணங்கள்.

$\therefore$ $\angle$ ச $+$ $\angle$ ப $+$ $\angle$ சதப $= 2$ செங் $\angle$.

இளைத்தேற்றம் 1. இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் இரு கோணங்கள் மற்றையதின் ஒத்த இரு கோணங்கட்குச் சமனாயின் மூன்றாங் கோணங்களுஞ் சமனாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 2. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில், (i) செங்கோணமே பெருங்கோணம், (ii) மற்றை இரு கோணங்கள் கூர்ங்கோணங்களாயும் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு செங்கோணமாயும் இருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 3. ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் குறைந்தது இரு கோணங்களாயிலும் கூர்ங்கோணமாயிருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 4. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டிற்குப் புறம்பாகக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து அக் கோட்டிற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட செங்குத்துக் கீறுதல் இயலாது.

குறிப்பு.—கிளைத்தேற்றங்கள் உரையாடற் பயிற்சிக்கு ஏற்ற உதாரணங்களாகும். பயிற்சி 29, எண்கள் 4–8 வரை முதலாங் கிளைத்தேற்றத்தின் பயனை எடுத்துக் காட்டுகின்றன.

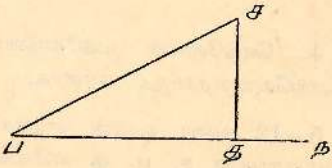
கிளைத்தேற்றம் 4, 200 ஆம் பக்கத்திற் பயன்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது.

உரையாடித் தெளிதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. சபத ஒரு முக்கோணம். அதில் ∠ச + ∠ப = ∠த. ∠த ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

முதன் முறை. பத ஐ ந இற்கு நீட்டுக. ∠சதந என்பது ∠சதப இற்கு எப்படிச் சமனாகும் என்பதைக் காட்டி நிறுவலை முடிவு செய்க.

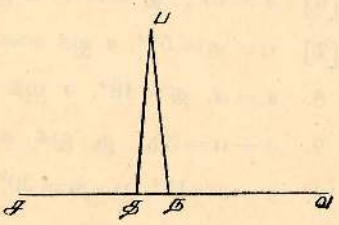
இரண்டாம் முறை. ∠ச + ∠ப + ∠த என்பதைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர்?



உருவம் 248

2. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு சவ விற்குப் புறம்பாகவுள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி ப விலிருந்து, சவ விற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட செங்குத்துக்கீறல் இயலாது.

இயலுமாயின், பத, பந எனும் இரு வேறு கோடுகள் சவ இற்குச் செங்குத்தாகக் கீறமுடியுமெனக் கொள்ளுக. பதந, பநத என்னும் இரண்டும் செங்கோணங்களாய் இருத்தல் இயலாது என்பதை விளக்குக.



உருவம் 249

ந.க.—முக்கோணம் ஒன்றின் புறக்கோணப் பண்பைத் தவிர்த்துக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைப் பண்பை மாணவர்கள் பயிற்சிகளிற் பயன் படுத்துதலை ஆரம்பத்தில் இருந்தே தடுத்துவிடுதல் வேண்டும். வேலையைச் சுருக்கும் இடங்களில் புறக்கோணப்பண்பைப் பயன் படுத்தும் மாணவர்க்கு அதிக சிறப்பளித்தல் நல்லது.

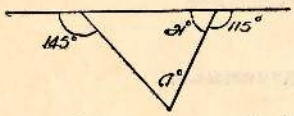
எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 28

(கோணங்களின் கூட்டுத்தொகைப் பண்பை விடுத்துப் புறக்கோணப் பண்பைப் பயன்படுத்தல் வேலையை எளிதாக்குமென்ற இடங்களில் அப்படியே செய்க.)

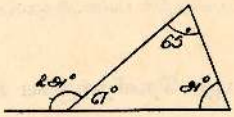
250–252 வரை எண்கொண்ட உருக்களில் உள்ள அ வின் பெறுமதியையும் எ இன் பெறுமதியையும் காண்க.

1.



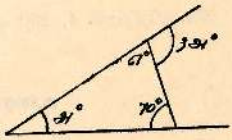
உருவம் 250

[2]



உருவம் 251

3.



உருவம் 252

4. செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றில் ஒரு கோணம் 43°. மற்றைக் கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

5 – 12 வரை உள்ள எண்கள் **சபத** என்னும் ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் **ச, ப, த** என்பவற்றைக் குறிக்கும்.

5. **ச** = 40°, **ப** = 105°. **த** ஐக் காண்க.
   ச = 90°, **ப** = க°, **த** ஐக் காண்க.

[6] **ச** = 15°, **த** = 18°, **ப** ஐக் காண்க.

[7] **ப** = **த** = 52°, **ச** ஐக் காண்க.

8. **ச** = **ப**, **த** = 48°, **ச** ஐக் காண்க.

9. **ச** + **ப** = 3**த**, **த** ஐக் காண்க.

*10. **ச** – **ப** = 15°, **ப** – **த** = 30°, **ச** ஐக் காண்க.

*11. $\frac{1}{2}$**ச** + $\frac{1}{2}$**ப** ஐ **த** இற் கூறுக.

*12. சுருக்குக. $\frac{1}{2}$(**ப** + **த** – **ச**).

13. பின்வரும் முறையிற் கோணங்கள் அமைய முக்கோணங்கள் கீறலாமா ?

(i) 45°, 65°, 80° ; (ii) 43°, 64°, 73° ; (iii) 100°, 110°, க°.

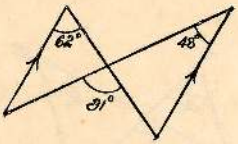
[14] ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 2க°, 3க°, 4க°. க ஐக் காண்க.

15. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் ந°, 2ந°, – 20°, 3ந° – 40°. ந ஐக் காண்க.

16. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு புறக்கோணங்கள் 120° உம் 130° உமாகும். மூன்றாவது புறச் சமனிலிக் கோணத்தைக் காண்க.

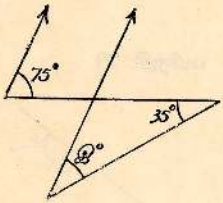
253–257 வரையுள்ள உருவங்களில் அடையாளமிடப்பட்ட தெரியாத கோணங்களைக் காண்க. அம்புகளிட்ட கோடுகள் சமாந்தரமாகும்.

17.



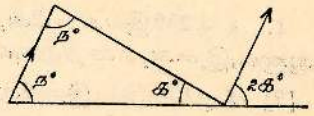
உருவம் 253

[18]



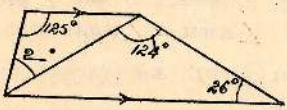
உருவம் 254

19.



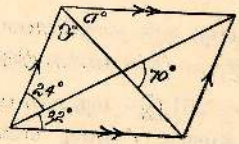
உருவம் 255

[20]



உருவம் 256

21.



உருவம் 257

22. முக்கோணம் **சபத** இல் **சந**, ∠**பசத** ஐ இரு சமக்கூறிடுகின்றது. **சவ**, **பத** இற்குச் செங்குத்து. ∠ **ச** = 60° ஆயும் ∠ **ப** = 70° ஆயும் இருந்தால் ∠**வசந** ஐக் காண்க.

[23] △**சபத** இல் ∠ **ப** = 110°, ∠ **த** = 50° ; **சந** ஆனது **ச** இலிருந்து நீட்டிய **தப** இற்குச் செங்குத்தானது. ∠ **நசத** = 2∠ **நசப** என்பதை நிறுவுக.

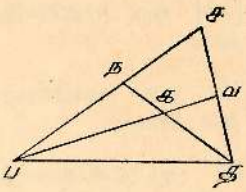
24. △**சபத** இல் ∠ **ப** = 90°, ∠ **ச** = 2 ∠ **த**. ∠ **ச** வின் இருசமவெட்டி **பத** ஐ **ந** இல் சந்திக்கிறது. ∠ **சநத** = 4 ∠ **த** என நிறுவுக.

எண்கள் 25–29 உரு 258 ஐக் குறிக்கும். அவ்வுருவில் **பவ**, **தந** என்பவை, ∠**சபத**, ∠**சதப** என்பவற்றின் இரு சமவெட்டிகளாகும்.

[25] ∠ச = 80°, ∠சபத = 30°, ∠பகத ஐக் காண்க.

26. ∠சபத = 44°, ∠பகத = 125°, ∠பவத ஐக் காண்க.

*27. ∠ச = 74°; ∠சதப = 66°, ச இலிருந்து, பத இற்கு உள்ள செங்குத்து சத, ஆனது பவ, தந ஆகியவற்றை ம, ய என்பனவற்றில் வெட்டுகின்றது. △கமய இன் கோணங்களைக் காண்க.



உருவம் 258

*28. ∠பநத = 95°, ∠பவத = 82°. ∠ச ஐக் காண்க.

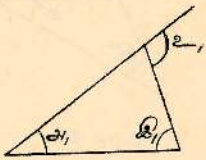
*29. ∠பகத = 132°. ∠ச ஐக் காண்க.

பயிற்சி 29

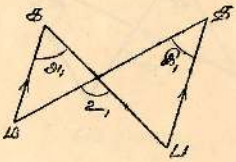
1. உரு 259 இல், $உ_1 = 2அ_1$, ஆனால், $இ_1 = அ_1$ என நிறுவுக.

[2] உரு 259 இல், $இ_1 = 2அ_1$, ஆனால், $அ_1 = \frac{1}{3}உ_1$ என நிறுவுக.

3. உரு 260 இல் மக || பத. $உ_1 = அ_1 + இ_1$ என நிறுவுக.



உருவம் 259



உருவம் 260

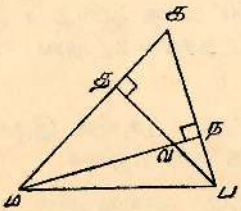
4. கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதன் மூலைவிட்டம் கப ∠தகம ஐயும் ∠தபம ஐயும் இரு சமக்கூறிடுகின்றது. ∠கமப = ∠கதப என நிறுவுக.

[5] உரு 261 இல் மந உம் பத உம் கப இற்கும் கம இற்குஞ் செங்குத்துக்கள். ∠தமந = ∠தபந என நிறுவுக.

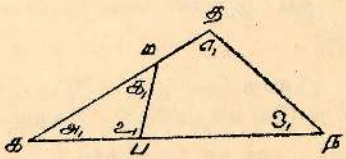
6. உரு 261 இல் மந உம் பத உம் கப இற்குங் கம இற்குஞ் செங்குத்துக்கள்.

(i) ∠தவம = ∠மகப என நிறுவுக.

(ii) ∠மவப, ∠மகப என்பன மிகைநிரப்புகின்றவை என நிறுவுக.



உருவம் 261



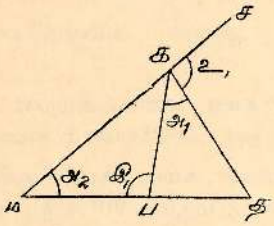
உருவம் 262

7. உரு 262 இல் க, = ஒ, ஆனால், உ, = எ, என நிறுவுக.

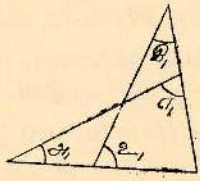
[8] உரு 262 இல் ஒ, என்பதை, க, உ, எ, என்பனவற்றில் காண்க.

9. உரு 263 இல் $அ_1 = அ_2$ ஆனால், உ, = இ, என நிறுவுக.

[10] உரு 263 இல் $அ_1 = அ_2$ ஆனால், ∠ **கபத** = ∠ **மகத** என நிறுவுக. (∠ **மகப** விற்கு ஒரு அடிக்கீறிட்ட எழுத்திடுக.)



உருவம் 263

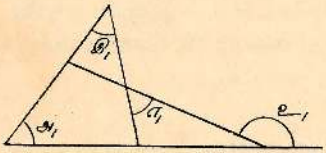


உருவம் 264

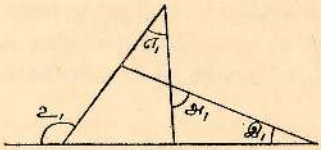
[11] உரு 264 இல் அ, = இ, ஆனால், உ, = எ, என நிறுவுக.

12. உரு 264 இல் எ, என்பதை, அ, இ, உ, என்பவற்றிற் கூறுக.

13. உரு 265 இல் எ, என்பதை, அ, இ, உ, என்பவற்றிற் காண்க.



உருவம் 265

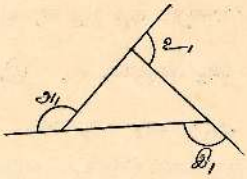


உருவம் 266

[14] உரு 266 இல் எ, ஐ அ, இ, உ, என்பவற்றிற் காண்க.

15. **க** விற் செங்கோணமான ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐக் கீறுக. **க** இலிருந்து **மப** இற்குச் செங்குத்து **கத** ஐக் கீறுக. உமது உருவில் எந்தக் கோணம் ∠ **தகப** இற்குச் சமன்? காரணங் கூறுக.

16. உரு 267 இல் $அ_1 + இ_1 + உ_1 = 4$ செங்கோணம் என நிறுவுக.



உருவம் 267

[17] உரு 267 இல் $அ_1 + இ_1 = 3உ_1$ ஆனால், அம்முக்கோணம் ஒரு செங்கோணமுக்கோணமென நிறுவுக.

18. **கமபத** ஓரிணைகரம்; ∠**மகத**, ∠**கமப** என்பனவற்றின் இரு சம வெட்டிகள் **ந** இல் சந்திக்கின்றன. **கநம** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

*19. முக்கோணம் **கமப** இல் கோணங்கள் **கமப, கபம** ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் **த** இற் சந்தித்தால் ∠**மதப** $= 90° + \frac{1}{2}$ ∠**மகப** என நிறுவுக.

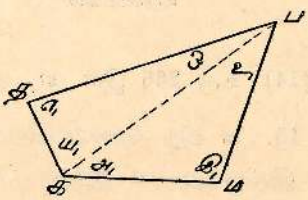
*20. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** ஆனது **த** இற்கு நீட்டப்பட்டது; ∠**மகப** இன் இருசமவெட்டி **மப** ஐ **ந** இல் வெட்டுகின்றது. ∠**கமத** + ∠**கபத** $= 2$ ∠**கநத** என நிறுவுக.

*21. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** ஆனது **த** இற்கு நீட்டப்பட்டது; கோணங்கள் **கமப, கபத** என்பனவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் **ந** இற் சந்திக்கின்றன. ∠**மநப** $= \frac{1}{2}$ ∠**மகப** என நிறுவுக.

*22. **கமபத** ஒரு நான்முகத் திண்மம். (அதாவது முக்கோண அடியிலுள்ள ஒரு கூம்பகம்) மூலைகள் **க, ம, ப** ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள தளக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணம். ஆனால், மூலை **த** இலுள்ள தளக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையும் 2 செங்கோணம் என நிறுவுக. **கமபத** இன் வலைவேலைப்பாட்டை வரைக.

ஒரு பல்கோணத்தினுடைய கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை

ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** இன் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையை நாம் காண வேண்டில் **கமப, கபத** ஆகிய இரு முக்கோணங்களும் அமைய **கப** எனும் மூலை விட்டத்தைக் கீறுதல் எளிதான வழியாகும்.



உருவம் 268

உரு 268 இலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

△ **கமப** இலிருந்து, **அ,+இ,+உ,+2 செங்கோணம்,** △ **இன் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை,**

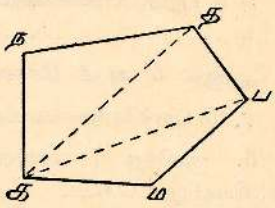
△ **கபத** இலிருந்து, **ய,+ஒ,+எ,=2 செங்கோணம்,**

△ **இன் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை,**

ஆனால், **கமபத** இன் கோணங்கள் **ய, + அ,, இ,, உ, + ஒ,, எ,** என்பனவாம்.

∴ கூட்டலால் நாற்கோணம் **கமபத** இன் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 4 செங்கோணமாகும்.

இவ்வாறே, ஐங்கோணம் **கமபதந** இன் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண வேண்டில், **கமப, கபத, கதந** ஆகிய மூன்று முக்கோணங்கள் அமையக் **கப, கத** ஆகிய இரு மூலை விட்டங்களைக் கீறுதல் எளிதான வழியாகும். இதிலிருந்து ஐங்கோணம் ஒன்றின் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 6 செங்கோணம் என்பது பெறப்படும். ஆனால், பல்கோணம் பல பக்கங்களையுடையதெனின் வேறு வழியைப் பயன்படுத்தனன்று.

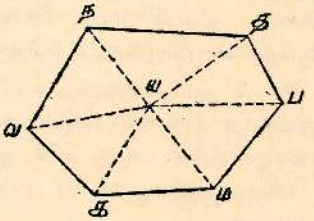


உருவம் 269

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. அறுகோணம் **கமபதநவ** இன் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

அறுகோணத்துள்ளே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ய** ஐ எடுக்க. அதை ஒவ்வோருச்சியோடும் இணைக்க. பின்வருவனவற்றைப் பிரதிசெய்து முடிவாக்குக.



உருவம் 270

6 முக்கோணங்கள் **யகம, யமப, யபத, யதந, யநவ, யவக** ஆகியவற்றின் எல்லாக் கோணங்களினதுங் கூட்டுத்தொகை .....

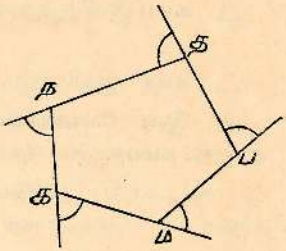
ஆனால் **ய** இலுள்ள 6 கோணங்களினதுங் கூட்டுத் தொகை.....

∴ **கமபதநவ** இன் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை .....

2. 7 பக்கங்கொண்ட பல்கோணம் ஒன்றிற்கு முதலாங் கணக்கிற் கூறியவாறு செய்க.

3. (அ) 10 பக்கமுள்ள பல்கோணம், (ஆ) 100 பக்கமுள்ள பல்கோணம், (இ) **ந** பக்கமுள்ள பல்கோணம், ஆகியவற்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

4. ஒரு குவிந்த ஐங்கோணம் **கமபதந** இன் பக்கங்கள் ஒழுங்காக நீட்டப்பட்டால் (உரு 271 இற் காட்டியவாறு) அங்கமையும் வெளிக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. பின்வருவனவற்றைப் பிரதி செய்து முடிவாக்குக. ஒவ்வோருச்சியிலுமுள்ள அகக்கோணம் + புறக்கோணம் 2 செங்கோணம்.



உருவம் 271

∴ 5 அகக்கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை

+ 5 புறக்கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை

= . . . . . ;

ஆனால் 5 அகக் கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை = ... ;

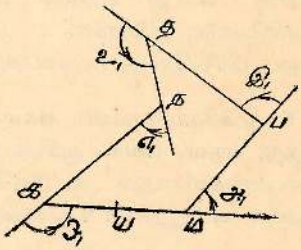
∴ 5 புறக்கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை = ...

5. குவிந்த 7 பக்கமுள்ள பல்கோணம் ஒன்றிற்கு நாலாங் கனக்கிற் கூறியவாறு செய்க.

6. குவிந்த 100 பக்கமுள்ள பல்கோணம் ஒன்றின் 100 புறக்கோணங்களினதுங் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. **ந** பக்கமுள்ள ஒரு பல்கோணத்திற்கும் அவ்வாறே காண்க.

7. நிலத்தில் ஒரு பெரிய குவிந்த ஐங்கோணம் **கமபதந** ஐக் கீறுக. **கம** இல் உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ய** இலிருந்து தொடங்கி **யம** வழியாக **ம** இற்குச் செல்க. பின்னர்த் திரும்பி **மப** வழி நடந்து **ப** இற்குச் செல்க. இப்படியாக நடந்து மீண்டும் **ய** இற்கு வரும் வரை செல்க. நீர் திரும்பிய கோணங்கள் ஒவ்வொன்றின் அளவுகளையுந் தருக. அவற்றின் முழுக்கூட்டுத்தொகை என்ன?

8. 7 ஆம் எண்ணிற் கூறிய நியாயங்களைக் குவியாத ஓரைங்கோணம் **கமபதந** இற்குப் பயன்படுத்துக. உரு 272 ஐப் பார்க்க.



உருவம் 272

பின்வருவனவற்றைப் பிரதிசெய்து முடிவாக்குக.

திரும்பிய கோணங்கள், இடஞ்சுழியாக அ,, இ,, உ,, ஒ, என்பனவும் வலஞ்சுழியாக எ, உம் ஆகும்.

ஆனால், திரும்பிய முழுக்கோணம். . . . . .

∴ அ, + இ, + ... = ...

ஒரு பல்கோணத்தின் பக்கங்களை ஒழுங்காக நீட்டுவதால் அமையும் புறக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை, அப்பல்கோணம் **குவிந்ததெனின், 4** செங்கோணமாகும். இல்லையேல் ஆகாது என்பதை இவ்வுதாரணங்கள் எடுத்துக்காட்டுகின்றன.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 30

1. ஒரு நாற்கோணத்தின் மூன்று கோணங்கள் 80°, 100°, 110° ஆகும். மற்றைக் கோணத்தைக் காண்க.

[2] ஒரு நாற்கோணத்தின் மூன்று கோணங்கள் 112°, 75°, 51°. மற்றைக் கோணத்தைக் காண்க.

[3] **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠ **க** = ∠ **ம** = ∠ **ப** ; ∠ **த** = 120° ; ∠ **க** வைக் காண்க.

4. ஒரு நாற்கோணத்தின் கோணங்கள் முறையே 2க°, 3க°, 7க°, 8க° ஆகும். க இன் பெறுமதியைக் கண்டு எதிரான இரு பக்கங்கள் சமாந்தரமென நிறுவுக.

5. ஐங்கோணம் ஒன்றின் கோணங்கள் க°, 2க°, 2க°, 2க°, 3க° ஆகும். க இன் பெறுமதியைக் காண்க.

[6] ஐங்கோணம் ஒன்றின் கோணங்கள் க, 2க, க + 30, க − 10, க + 40 பாகைகளாகும். க இன் பெறுமதி என்ன ?

7. **கமபதந** ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணம். **கம, தப** என்பன நீட்டப்பட்டு **ய** விலே சந்திக்கின்றன. ∠ **மயப** ஐக் காண்க.

8. பின்வரும் பக்கங்கள் கொண்ட பல்கோணங்களினுடைய அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. (i) 30 பக்கங்கள், (ii) 40 பக்கங்கள்.

[9] எண்கோணம் ஒன்றினுடைய அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை ஐங்கோணம் ஒன்றின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையிலும் இரு மடங்கென்பதை நிறுவுக.

10. பின்வருவனவற்றின் புறக்கோணம் ஒன்றின் அளவைக் காண்க. (i) ஒரொழுங்கான எண்கோணம், (ii) ஒரொழுங்கான தசகோணம்.

[11] பின்வரும் பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணங்களினுடைய ஒரு புறக்கோணத்தின் அளவைக் காண்க. (i) 15 பக்கங்கள், (ii) ந பக்கங்கள்.

12. ஒரு பல்கோணத்தின் (i) ஒவ்வொரு புறக்கோணமும் 40° எனின் அதன் பக்கங்களைக் காண்க. (ii) அதன் ஒவ்வோரகக் கோணமும் 144° எனின் அதன் பக்கங்களைக் காண்க.

[13] (i) ஒரு பல்கோணத்தின் ஒவ்வொரு புறக்கோணமும் 15° எனின் அதன் பக்கங்களைக் காண்க.

(ii) அதன் ஒவ்வோரகக் கோணமும் 160° எனின் அதன் பக்கங்களைக் காண்க.

14. ஒரு பல்கோணத்தின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 30 செங்கோணம் எனின் அதன் பக்கங்களைக் காண்க.

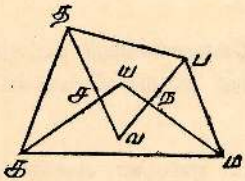
[15] ஓரறுகோணத்தின் ஐந்து கோணங்கள் சமமானவை. அவை ஒவ்வொன்றும் மற்றைக் கோணத்தினும் 72° ஆற் பெரியவை. சிறிய கோணத்தின் அளவைக் காண்க.

16. உரு 273 இலுள்ள உள்ளுறு பல்கோணம் **கயமபத** இன் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

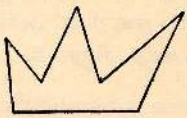
[17] எண்கோணம் ஒன்றின் ஏழு கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் 150° எனின், மற்றைக் கோணத்தைக் கண்டு அதில் இரண்டு சோடிச் சமாந்தரப் பக்கங்கள் உள்ளனவென நிறுவுக.

18. உரு 273 இல், **யக, யம, வப, வத** என்பன நாற்கோணம் **கமபத** இன் கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள்.

$\angle$ **தகம** $= 80°$, $\angle$ **கமப** $= 70°$, $\angle$ **மபத** $= 150°$ எனின், நாற்கோணம் **யசவந** வின் எதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்பு கோணங்கள் என நிறுவுக.



உருவம் 273



உருவம் 274

[19] ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் ஒழுங்காக நீட்டப்பட்டன. ஒவ்வோருச்சியிலுமுள்ள, புறக்கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள் **நசவய** எனும் நாற்கோணம் அமையுமாறு கீறப்பட்டுள்ளன. $\angle$ **தகம** $= 64°$, $\angle$ **கமப** $= 80°$, $\angle$ **மபத** $= 142°$; **நசவய** இன் கோணங்களைக் காண்க. அவற்றைப் பற்றி நீர் என்ன அறிகிறீர்.

20. உரு 274 இலுள்ள உள்ளுறு பல் கோணத்தினுடைய அகக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

21. ஒரு பல்கோணத்தின் கோணங்களினது கூட்டுத் தொகை எண் கோணத்தினது கூட்டுத் தொகையினும் மும்மடங்கானது. அப்பல்கோணத்தின் பக்கங்களைக் காண்க.

*22. ஒரு நாற்கோணத்தின் கோணங்களை முறையே எடுத்துக்கொண்டால் அவை 1 : 3 : 5 : 7. என்ற விகிதங்களில் உள்ளன. அதன் இருபக்கங்கள் சமாந்தரமென நிறுவுக.

*23. ஓரைங்கோணத்தின் கோணங்களை முறையே எடுத்துக்கொண்டால் அவை , 4 : 8 : 6 : 4 : 5 என்ற விகிதங்களில் உள்ளன. அதன் இருகோடி பக்கங்கள் சமாந்தரமானவை என நிறுவுக.

*24. **கமபதந** ஓரைங்கோணம். அதில் **கந, மப** இற்குச் சமாந்தரம் ; $\angle$ **ப** $-$ $\angle$ **க** $= 40°$, $\angle$ **த** $-$ $\angle$ **ம** $= 30°$; (i) $\angle$ **ப** $+$ $\angle$ **த** ஐக் காண்க. (ii) $\angle$ **ந** ஐக் காண்க.

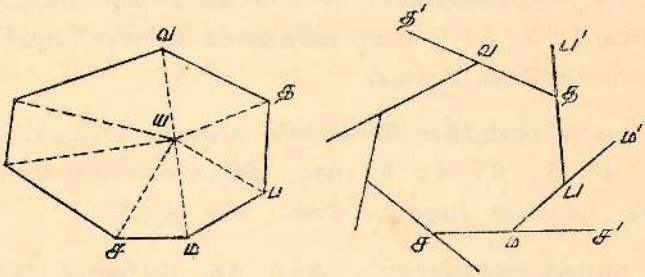
*25. ஒழுங்கான பல்கோணம் ஒன்றின் ஒவ்வோரகக் கோணமும், ஒழுங்காகப் பக்கங்களை நீட்டுவதாற் பெற்ற ஒவ்வொரு புறக்கோணத்திலும் ப மடங்கு பெரிதாயின் அப் பல் கோணம் 2 (ப $+$ 1) பக்கங்கள் உடையது என நிறுவுக.

*26. திண்மம் ஒன்று **ம** தளமுகங்களால் அடைக்கப்பட்டு **த** விளிம்புகளையுடையது. எல்லாமுகங்களினுடைய எல்லாக் கோணங்களினதுங் கூட்டுத் தொகை 4 (**ம** $-$ **த**) செங்கோணம் என நிறுவுக.

தேற்றம் 9

(1) ந பக்கங்களையுடைய ஒரு குவிந்த பல்கோணத்தின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை (2ந – 4) செங்கோணமாகும்.

(2) ஒரு குவிந்த பல்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையாக நீட்டப்பட்டால் அவவாறமைந்த புறக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணங்கட்குச் சமமாகும்.



உருவம் 275

தரவு. சமபதவ....ஒரு குவிந்த பல்கோணம். அது சம, மப, பத, தவ ....ஆகிய ந பக்கங்களையுடையது. அப்பக்கங்கள் ச', ம', ப', த'.... என்பவற்றிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன.

மேற்கோள். (i) அகக் கோணங்கள் சமப, மபத....ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை (2ந – 4) செங்கோணம்.

(ii) புறக்கோணங்கள் ச'மப, ம'பத .... ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணம்.

கருவி. பல்கோணத்தின் உள்ளே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ய ஐ எடுத்து அதை ஒவ்வோருச்சிக்கும் இணைக்க.

நிறுவல். (1) பல்கோணம் ந பக்கங்களையுடைத்து. எனவே அது கருவியால் ந முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினதுங் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணமாகும்,

∴ ந முக்கோணங்களின் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 2ந செங்கோணமாகும்,

∴ பல்கோணத்தின் கோணங்களினது கூட்டுத்தொகை + ய இலுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை = 2 ந செங்கோணம்.

ஆனால் ய விலுள்ள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை=4 செங்கோணம்,

∴ பல்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை + 4 செங்கோணம் = 2 ந செங்கோணம்.

∴ பல்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை = (2ந − 4) செங்கோணம்.

(2) ஒவ்வோருச்சியிலும்,

அக ∠ + புற ∠ = 2 செங்கோணம் (நேர்கோட்டு அடுத்துளகோணங்கள்)
அங்கு ந உச்சிகள் உள்ளன.

எனவே, எல்லா அகக்கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகையை க ஆலும்,

எல்லாப் புறக்கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகையை இ ஆலும் நாம் குறிப்பிட்டால்

க + இ = 2ந செங்கோணங்கள் ;

ஆனால் க + 4 செங்கோணம் = 2ந செங்கோணம் நிறுவப்பட்டது,

∴ க + இ = க + 4 செங்கோணம்

∴ இ = 4 செங்கோணம்.

குறிப்பிற்குரிய சுருக்கம் :

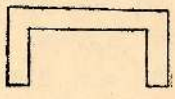
(1) பல்கோணத்தின் ∠. கூ. தொ.

(2) பல்கோணத்தின் புற ∠ கூ. தொ.

ந.க.—ஒரு தேற்றத்தினது நிறுவலிலுள்ள ஒரு முறையானது முன்னுள்ள ஒரு தேற்றத்திலே தங்கியுள்ளது எனின், அக்காரணத்தைச் சொல்லால் அல்லது குறியீட்டால் தரல் வேண்டும்.

தேற்றம் 9 இலே காட்டியவாறு, நிறுவலின் முந்திய ஒரு பாகத்தையே குறிக்குமெனில், ஒரு காரணமாக " நிறுவப்பட்டது " எனக் கூறலாம்.

தேற்றம் 9 (1) உள்ளுறுபல்கோணத்திற்கும் உண்மையானது. ஆனால், நிறுவலைச்சிறிது மாற்றஞ்செய்தல் அவசியம். ஏனெனில், உதாரணமாக, உரு 276 இல் எண்பக்க உள்ளுறுபல்கோணத்தின் உள்ளே, தன்னுடன் ஒவ்வோருச்சியையும் இணைத்தாற் பல்கோணத்தை 8-முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும், ஒருபுள்ளி ய ஐக் காண்பது அரிது என்க.



உருவம் 276

வாய்முறைக் கணக்கு

(1) உரு 276 இலுள்ள பல்கோணத்தின் ஒவ்வொரு மூலையுஞ் செங்கோணமாயின், அதன் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையென்ன ?

(2) உரு 276 இலுள்ள பல்கோணத்தின் மூலைகள் செங்கோணமல்லாவிடின் அதன் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையை எவ்வாறு காண்பீர் ?

தேற்றம் 9 (2), பல்கோணங் குவிந்ததாயிருந்தாலே உண்மையாகும்.

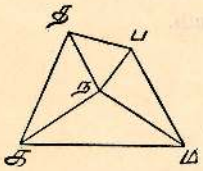
பயிற்சி 31

1. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் $\angle$ **க** $=$ $\angle$ **ப** ; $\angle$ **ம** $=$ $\angle$ **த**. (i) $\angle$ **க** $+$ $\angle$ **ம** $= 2$ செங்கோணம் என நிறுவுக. (ii) **கமபத** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

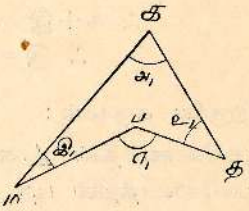
[2] **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் $\angle$ **க** $+$ $\angle$ **ப** $= 2$ செங்கோணம். **கம** ஐ **ந** இற்கு நீட்டினால், $\angle$ **பமந** $=$ $\angle$ **த** என நிறுவுக.

3. உரு 277 இல் **நக, நம, நப, நத** ஆகியவை நாற்கோணம் **கமபத** இன் கோணங்களின் இருசமவெட்டிகளாகும். $\angle$ **கநம** $+$ $\angle$ **பநத** $= 2$ செங்கோணம் என நிறுவுக.

[4] உரு 277 இல் **நக, நம** என்பவை $\angle$ **தகம**, $\angle$ **பமக** என்பனவற்றின் இரு சமவெட்டிகளாயின் $\angle$ **கதப** $+$ $\angle$ **மபத** $= 2$ $\angle$ **கநம** என நிறுவுக.



உருவம் 277



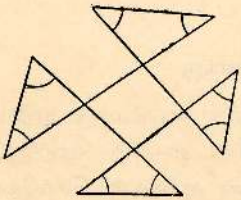
உருவம் 278

5. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் $\angle$ **க**, $\angle$ **ப** என்பன செங்கோணங்கள். $\angle$ **ம**, $\angle$ **த** என்பனவற்றின் இருசமவெட்டிகள் சமாந்தரம் என நிறுவுக.

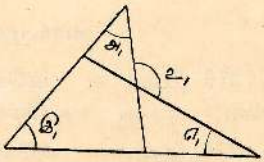
6. உரு 278 இல் எ, $=$ அ, $+$ இ, $+$ உ, என நிறுவுக.

[7] உரு 278 இல் எ, $= 2$ அ, ஆயும் அ, $= 2$ இ, ஆயுமிருந்தால் இ, $=$ உ, என நிறுவுக.

8. உரு 278 இல் $\angle$ **கமப**, $\angle$ **கதப** ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் **ய** இற் சந்தித்தால், அ, $+$ எ, $= 2\angle$ **மயத** என நிறுவுக.



உருவம் 279



உருவம் 280

9. உரு 279 இல் அடையாளமிடப்பட்ட கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

*10. உரு 280 இல் உ$_{,}$, இ$_{,}$ என்பன மிகை நிரப்புகோணங்களாயின், உ$_{,}$ = 90° + ½(எ$_{,}$ + அ$_{,}$) என நிறுவுக.

*11. ஒரு குவிந்த அறுகோணத்தின் பக்கங்களானவை நீட்டப்பட்டு அதன் புறக்கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள், பிறிதொரு குவிந்த அறுகோணம் **கமபதநவ** ஐ அமைக்குமாறு கிறப்பட்டன.

∠**க** + ∠**ப** + ∠**ந** = 4 செங்கோணம் என நிறுவுக.

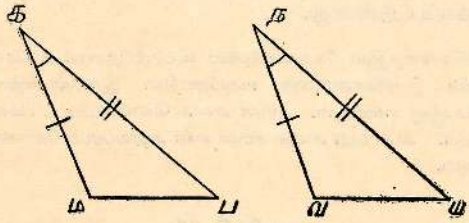
சர்வசமன்

சர்வசமனுக்குரிய சோதனைகள்

பருவம் அ வில், இரு முக்கோணங்களின் சர்வசமனுக்குரிய 3 பொதுச் சோதனைகளும் ஒரு சிறப்பான சோதனையும் ஆராயப்பட்டன. அவற்றுள் முதலாவது இங்கே மீண்டுங் கொடுக்கப்படுகிறது. இது 9 ஆந் தேற்றத்தின் பின்னர்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தெனினும் 4 ஆவது என எண்ணிடப் பட்டுள்ளது. எடுகோள்களின் எண்ணிக்கையை ஒருகால் குறைக்க வேண்டு மெனின், இந்தச் சர்வசமனுக்குரிய சோதனை, தேற்றம் 5 இல் கொடுக்கப் பட்ட சமாந்தரக் கோடுகட்குரிய சோதனையை நிறுவுதற்குப் பயன் படுத்தப் படுகின்றதாதலின் 5 இன் முன்னர் வைக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 4

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் இரு பக்கங்கள் மற்றையதின் இரு பக்கங்கட்கு ஒன்றுக்கொன்று சமனுயும், சமனுயுள்ள அப்பக்கங்களின் அமைகோணங்கள் சமனுயும் இருந்தால் அம்முக்கோணங்கள் சர்வ சமனுகும்.



உருவம் 281

முக்கோணங்கள் **கமப, நவய** என்பவற்றில்,

கம = நவ, கப = நய, ∠க = ∠ந, எனின்,

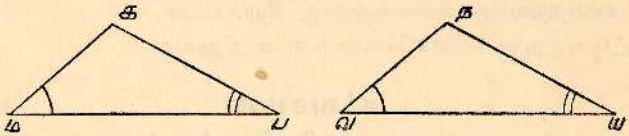
முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமப}\\ \text{நவய}\end{matrix}$ சர்வசமனுகும்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : பகோப அல்லது 2 பக்கங்கள், அமை∠.

தேற்றம் 4 இன் முறைமையான நிறுவல் பக்கம் 636 இலுள்ள பின்னிணைப்பிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 10

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் இருகோணங்கள் மற்றையதின் இரு கோணங்கட்கு ஒன்றுக்கொன்று சமனுயும், ஒன்றின் ஒருபக்கம் மற்றையதின் ஒத்த பக்கத்திற்குச் சமனுயும் இருந்தால் அம்முக்கோணங்கள் சர்வசமனுகும்.



உருவம் 282

முக்கோணங்கள் **கமப, நவய** என்பவற்றில்,

$\angle$ ம = $\angle$ வ ஆயும் $\angle$ ப = $\angle$ ய ஆயுமிருந்து அவற்றுடன் (i) **மப = வய** ஆயுமிருந்தால் அல்லது (ii) **கம = நவ** ஆயுமிருந்தால் அல்லது (iii) **கப = நய** ஆயுமிருந்தால்,

முக்கோணங்கள் **கமப** / **நவய** சர்வசமனுகும்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம். கோபகோ, கோகோப அல்லது 2 கோணங்கள் ஒத்தபக்கம்.

தேற்றம் 10 இன் முறைமையான நிறுவல் பக்கம் 642 இலுள்ள பின்னிணைப்பில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு.—ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணமாகையால், ஒரு முக்கோணத்தின் இருகோணங்கள் மற்றையதின் இருகோணங்கட்குச் சமனெனின் மூன்றுவது கோணங்களுஞ் சமனுகும். சமன் எனக் கொடுக்கப்பட்ட பக்கங்கள் ஒத்த பக்கங்களாயிருத்தல் வேண்டும். அதாவது அவை சமன் என அறியப்பட்ட கோணங்கட்கு எதிரானவையாயிருத்தல் வேண்டும்.

பயிற்சி 32

[1–8 வரையுள்ளன உரையாடித் தெளிவதற்கேற்ற பயிற்சிகள்.]

1–7 வரை உள்ள எண்களிற் காணப்படும் தரவுகள் **கமப, நவ** எனும் இரு முக்கோணங்களைக் குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு கணக்கிலும் உம் உருக்களில் ஏற்ற அடையாளம் இட்டுத் தரவுகளைக் காட்டுக. தரவுகளானவை முக்கோணங்கள் சர்வசமனுயிருக்க வேண்டுமென்பதைக் காட்டுகின்றனவா ? அப்படியெனில் நீர் பயன்படுத்திய சோதனையைக் கூறி முடிவைச் செவ்விய முறையிலே கூறுக.

1. கம = நவ, கப = தவ, ∠ க = ∠ வ.

2. பக = வத, பம = வந, ∠ ம = ∠ ந.

3. கப = நவ, ∠ க = ∠ ந, ∠ ப = ∠ வ.

4. கப = தவ, ∠ ம = ∠ த, ∠ ப = ∠ வ.

5. மப = தவ, ∠ ம = ∠ வ, ∠ க = ∠ ந.

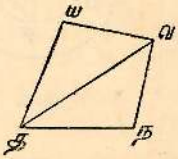
6. ∠ க = ∠ த, ∠ ம = ∠ ந, ∠ ப = ∠ வ.

7. கம = கப, தந = தவ, ∠ க = ∠ த.

8. முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{தநவ}}$ சர்வசமன் எனின் ∠ ப இற்கு எக்கோணஞ் சமன் ? வத இற்குச்சமனான பக்கம் எது ?

9. உரு 283 இல் தவ ∠ நதய ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது. தய = தந ; வய = வந என நிறுவுக.

10. உரு 284 இல் கவ, தய என்பவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. (i) கத = வய என நிறுவுக, (ii) யவ இற்கு கத சமாந்தரம் என நிறுவுக.

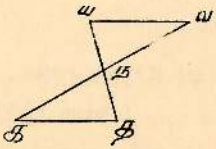


உருவம் 283

11. உரு 284 இல் யவ ஆனது கத, இற்குச் சமாந்தரமாக, ந ஆனது கவ இன் நடுப்புள்ளி ஆயின் யந = நத என நிறுவுக.

[12] உரு 284 இல் கத ஆனது யவ இற்குச் சமனுஞ் சமாந்தரமாயுமிருந்தால் (i) ந என்பது கவ இனது நடுப்புள்ளி எனவும் (ii) கய = வத எனவும், (iii) தவ இற்கு கய சமாந்தரம் எனவும் நிறுவுக.

[13] கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதில் கம = பத; ∠ ம = ∠ ப ; கப = மத என நிறுவுக.



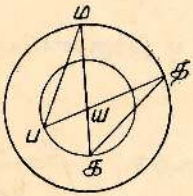
உருவம் 284

14. மகப எனுங்கோணத்தை இரு சமக்கூறிட கய எனும் ஒரு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது. யந, யத என்பவை. ய இலிருந்து கம, கப என்பவற்றுக்குச் செங்குத்துக்களாகும். யந = யத என நிறுவுக.

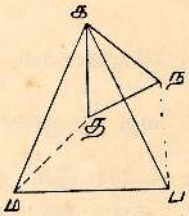
[15] **கயந** எனும் நேர்கோடு **மயப** எனும் நேர்கோட்டைச் செங்கோணமாக இருசமக் கூறிட்டால், **கம = கப** என நிறுவுக.

16. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதிலே **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரம், **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரம். **கம = தப** எனவும் **கத = மப** எனவும் நிறுவுக. [**கப** ஐ இணைக்க.]

[17] உரு 285 இலுள்ள வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் **ய** மையமாகும். **கயம, பயத** என்பன நேர்கோடுகள். **கத = பம** என நிறுவுக.



உருவம் 285



உருவம் 286

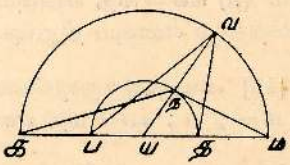
18. உரு 286 இல் **கம = கப ; கத = கந ; ∠ மகப = ∠ தகந.** இவ்வுருவில் எவ்விரண்டு முக்கோணங்கள் சர்வசமனாகும் ? காரணங்கள் கூறுக.

[19] △**கமப** இன் அடி **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த ; மந, பய** என்பவை **ம, ப** என்பனவற்றிலிருந்து தேவையெனினீட்டப்பட்ட **கத** இற்குக் கீறிய செங்குத்துக்களாகும். **மந = பய** என நிறுவுக.

20. உரு 287 இல் **கவம, பநத** என்னும் அரைவட்டங்களின் மையம் **ய** ஆகும். **யநவ, கபயதம** என்பவை நேர்கோடுகள்.

(i) உருவிலுள்ள எந்த முக்கோணம் △**கயந** இற்குச் சர்வசமன் ?

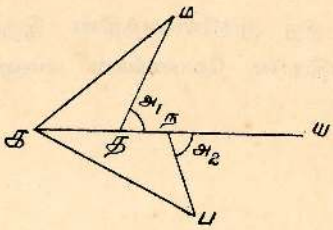
(ii) வேறு இரண்டு சர்வசமனான முக்கோணங்கள் கூறுக. ∠**யநம** இற்கு எக்கோணஞ்சமன் ? காரணங்காட்டுக.



உருவம் 287

(iii) ∠ **கநம** + ∠ **பவத** = 2 செங்கோணம் என நிறுவுக.

21. உரு 288 இல் **கம = கப**; **கதநய** ஒரு நேர்கோடு. ∠ **மகப** = $அ_1$ = $அ_2$ எனின் **கத = பந** என நிறுவுக.



உருவம் 288

*22. முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கங்கள் **கம, கப** ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிச்செங்குத்துக்களானவ **ய** இற் சந்திக்கின்றன. **யம = யப** என நிறுவுக. [**யக** ஐ இணைத்து. **யம = யக** என நிறுவுக.]

*23. முக்கோணம் **கமப** இன் ∠ **ம**, ∠ **ப** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் **த** இற் சந்திக்கின்றன. **தவ, தய** என்பன **த** இலிருந்து **கம, கப** என்பவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள். **தவ = தய** என நிறுவுக. [**த** இலிருந்து **மப** இற்குச் செங்குத்து **தந** ஐக் கீறுக.]

*24. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் **கயம**; **யந, யவ** என்பவை செங்குத்தான ஈராரைகள். **நப, வச** என்பவை **ந, வ** ஆகிய வற்றிலிருந்து **கம** இற்குச் செங்குத்துக்கள். **நப = யச** என நிறுவுக.

ந, வ என்பவை **கம** இற்கு ஒரு பக்கத்திலமைய ஒருருவும், எதிர்ப்பக்கங் களிலமையப் பிறிதோருருவமாக ஈருருக்கள் வரைக. ஒவ்வோருருவி லும் மேற்கூறிய உண்மையை நிறுவுக.

இருசமபக்க முக்கோணங்கள்

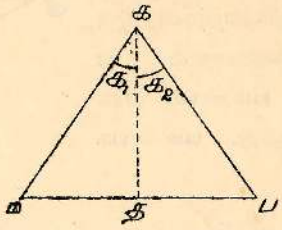
ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்கள் சமமாயின் அது **இருசமபக்க முக்கோணம்** எனப்படும்; சமபக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி **உச்சி** எனவும் சமபக்கங்கள் அமைத்த கோணம் **உச்சிக்கோணம்** எனவும், மூன்றும் பக்கம் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் **அடி** எனவும்படும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களுஞ் சமன் எனின் அது **சமபக்க முக்கோணம்** எனப்படும்.

ஒரு முக்கோணம் சமனற்ற மூன்று பக்கங்களை உடையது. எனின் அது **சமனில்பக்க** முக்கோணம் எனப்படும்.

தேற்றம் 11

ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்கங்கள் சமன் எனின் அப்பக்கங்கட்கு எதிரான கோணங்கள் சமனாகும்.



உருவம் 289

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; அதில் **கம = கப.**

மேற்கோள். $\angle$ **ம = $\angle$ ப.**

கருவி. **கத** $\angle$ **மகப** இன் இரு சமவெட்டியாகுக. அது **மப** ஐ **த** இற் சந்திப்பதாகுக.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கமத, கபத** என்பனவற்றில்,

கம = கப தரவு,

கத = கத

$க_1 = க_2$ கருவி,

$\therefore$ முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமத}\\ \text{கபத}\end{matrix}$ சர்வசமனாகும் பகோப.

$\therefore$ $\angle$ **ம = $\angle$ ப.**

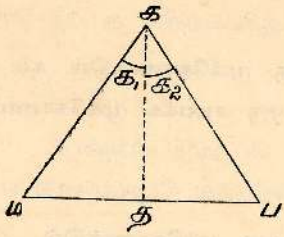
குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம். அடிக்கோணங்கள், இருசமபக்க $\triangle$.

தேற்றம் 11 பின்வருமாறுங் கூறப்படும்:

ஓரிருசமபக்க முக்கோணத்தின் அடியிலுள்ள கோணங்கள் சமனாகும்.

தேற்றம் 12

ஒரு முக்கோணத்தின் இருகோணங்கள் சமன் எனின் அக்கோணங்கட்கு எதிரான பக்கங்கள் சமனாகும்.



உருவம் 290

தரவு. **கமப** ஒரு முக்கோணம்; அதில் $\angle$ ம = $\angle$ ப.

மேற்கோள். **கம = கப.**

கருவி. **கத** $\angle$ **மகப** இன் இருசமவெட்டி ஆகுக. அது **மப** ஐ **த** இற் சந்திப்பதாகுக.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கமத, கபத** என்பனவற்றில்

$\angle$ ம = $\angle$ப — **தரவு,**

$க_1 = க_2$ — **கருவி,**

கத = கத.

∴ முக்கோணங்கள் **கமத / கபத** சர்வசமனாகும் கோகோப.

∴ **கம = கப.**

குறுப்பிற்குரிய குறுக்கம் : சமகோணங்கட்கு எதிர்ப்பக்கங்கள்.

முக்கிய குறிப்பு.—11 ஆந் தேற்றமானது சர்வசமனுக்குரிய சோதனை **பபப** (தேற்றம் 13 பக்கம் 153) என்பதையும் சோதனை செசெப (தேற்றம் 14, 155) என்பதையும் நிறுவப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. எனவே இச்சோதனைகளைத் தேற்றம் 11 ஐ நிறுவுதற்குப் பயன் படுத்தல் ஆகாது. ஆகையால் தேற்றம் 11 ஐ நிறுவுதற்குப் பயன்படுத்திய கருவியை நன்கு கவனித்துக்கொளல் வேண்டும். ஏனெனில், **கத** ஐக் கீறும் வேறு வழிகள் நிறுவலைப் பயனற்றதாக்கிவிடும் என்க. மேலல்லாது இருத்தற் பொருட்டுத் தேற்றம் 11 இன் பயன் படுத்திய கருவியைத் தேற்றம் 12 இற்கும் பயன் படுத்தலாம். பின்வரும், 11 ஆம் 12 ஆந் தேற்றங்களிலிருந்து பெற்ற உய்த்தறிவுகள் உரையாடித் தெளிவதற்கேற்ற உதாரணங்களாகும். ஏனெனில் அவை கணக்குப் பயிற்சிகளாகப் பயன்படக்கூடியன என்க.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. **கமப** ஒரு சமபக்க முக்கோணம். $\angle$ **க** $=$ $\angle$ **ம** $=$ $\angle$ **ப** $= 60°$ என நிறுவுக.

(i) ஏன் $\angle$ **க** $=$ $\angle$ **ம** எனவும் $\angle$ **க** $=$ $\angle$ **ப** எனவும் விளக்குக.

(ii) $\angle$ **க**, $\angle$ **ம**, $\angle$ **ப** ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகை என்ன ?

2. கமப எனும் ஒரு முக்கோணத்தில் கம = கப ஆயும் $\angle$ க = 60° ஆயுமிருந்தால் $\triangle$ கமப ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

(i) $\angle$ **ம** $+$ $\angle$ **ப** இன் பெறுமதி என்ன ?

(ii) **கம = கப** என்பதிலிருந்து பெறப்படுவது என்ன ?

3. கமப என்னும் ஒரு முக்கோணத்தில் $\angle$ ப = 90° ; $\angle$ ம = 60°. மப = $\frac{1}{2}$ மக என நிறுவுக.

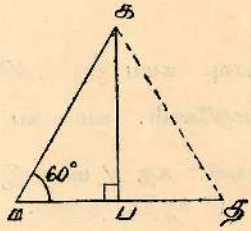
மப ஐ **த** இற்கு **மப = பத** ஆகவிருக்க நீட்டுக. **கத** ஐ இணைக்க.

(i) $\angle$ **கபத** ஏன் ஒரு செங்கோணமாயுள்ளது என்பதை விளக்குக.

(ii) $\triangle$ **கபம** $\equiv$ $\triangle$ **கபத** என நிறுவுக.

(iii) $\angle$ **த** இனது பருமன் என்ன ?

(iv) $\triangle$ **கமத** ஏன் சமபக்கமானது என விளக்குக.



உருவம் 231

குறிப்பு. $\triangle$ **கபம** ஐ "**ஓர் அரைச்சமபக்க முக்கோணம்**" எனக் கருதுவதால் இந்த முடிவை நன்குணர்ந்து நினைவில் வைத்துக் கொள்ளலாம்.

அது, **கோசை 60° = $\frac{1}{2}$** என்னுங் கூற்றிற்குச் சமனானது.

ஏனெனில், கோசை **மபக** $= \frac{\text{மப}}{\text{மக}}$ என்க.

$\angle$ **கமப** $= 30°$ ஆதலின் சைன் $30° = \frac{\text{மப}}{\text{மக}} = \frac{1}{2}$.

மறுதலைத் தேற்றங்கள். 11 ஆந் தேற்றத்திலுள்ள தரவையும் மேற்கோளையும் இடம் மாற்றினால் 12 ஆந் தேற்றத்தின் விவரணம் பெறப்படும் ; இக்காரணத்தால் 12 ஆந் தேற்றம் 11 ஆந் தேற்றத்தின் மறுதலை எனப்படும். அதேபோன்று 11 ஆந் தேற்றம் 12 ஆந் தேற்றத்தின் மறுதலையாம்.

ஒரு தேற்றம் உண்மையானதென்பதால் அத்தேற்றத்தின் மறுதலையும் உண்மையாகும் என்பது கருத்தாகாது ; ஆனாற் பலமுறைகளில் அது உண்மையாயிருத்தல் கூடும். உதாரணமாக,

"இருகோணங்கள் செங்கோணங்கள் எனின் அவை இரண்டுஞ் சமனும்" என்னுங் கூற்று **உண்மையானது.**

ஆனால் அதன் மறுதலைக் கூற்று,

"இரு கோணங்கள் சமன் எனின் அவை செங்கோணங்களாம்"

என்பது **உண்மையன்று.**

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 33

[அம்புக் கோடுகள் சமாந்தரம்]

1. இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் உச்சிக்கோணம் 110°. அடிக் கோணங்களைக் காண்க.

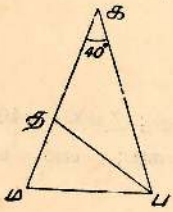
[2] இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் ஓரடிக்கோணம் 62°. உச்சிக் கோணத்தைக் காண்க.

3. இருசமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் கோணம் க°; மற்றைக் கோணங்களை **க** இற் காண்க. [இரண்டு தொடையான விடைகள்.)

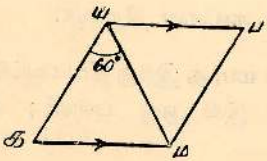
4. இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் அடிக்கோணம் ஒன்று உச்சிக் கோணத்திலும் இரு மடங்காயின் முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் காண்க.

[5] இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் உச்சிக்கோணம் ஓரடிக்கோணத்தினும் மூன்றுமடங்காயின் முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் காண்க.

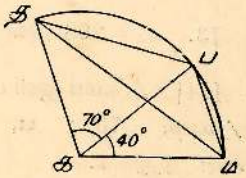
6. உரு 292 இல் **கம = கப, பத = பம ; ∠ கபத** ஐக் காண்க.



உருவம் 292



உருவம் 293

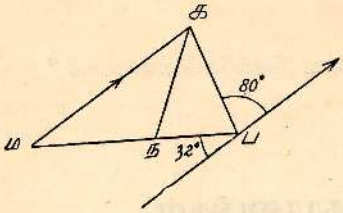


உருவம் 294

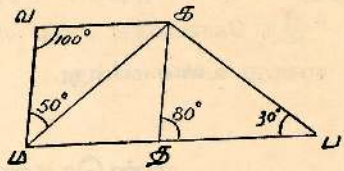
7. உரு 293 இல் **யக = யம = யப, ∠ யபம** ஐக் காண்க.

8. உரு 294 இல் வட்டவில் **மபத** இன் மையம் **க.** **△ மபத** இன் கோணங்களைக் காண்க.

[9] உரு 295 இல் கந = கப, ∠நகம ஐக் காண்க.



உருவம் 295

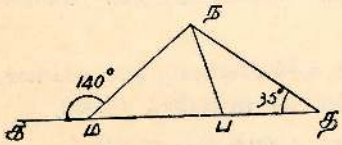


உருவம் 296

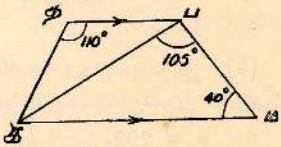
10. உரு 296 இல் கம = கப ; மதப ஒரு நேர்கோடு. மத || வக எனவும் மவ || தக எனவும் நிறுவுக.

[11] △கமப இல் ∠க இன் இருசமவெட்டி, மப ஐ த இல் வெட்டு கின்றது. கத = தம ஆக ∠ப = 66° எனின் ∠ம ஐக் காண்க.

12.. உரு 297 இல் கமபத ஒரு நேர்கோடு, மந = மப ; பந = பத என நிறுவுக.



உருவம் 297



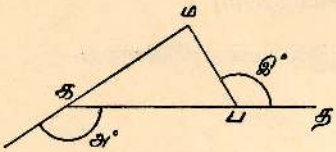
உருவம் 298

13. உரு 298 இல் தக = தப என நிறுவுக.

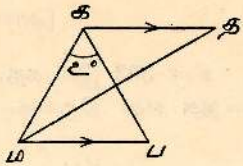
[14] △கமப இன் பக்கம் மப, த இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது ; ∠மகப = 40°, ∠கபத = 75° ; ய, கம இல் ஒரு புள்ளி ; கய = கப ; யம = யப என நிறுவுக.

15. △கமப இல் கம = கப ; நீட்டப்பட்ட கப இல் த ஒரு புள்ளி ; மத = மக ; ∠பமத = 36° எனின் மப = மத என நிறுவுக.

16 – 20 வரை உள்ள எண்களில் கீறிட்டவெழுத்துக்களின் துணை கொண்டு விடைகளைக் காண்க.



உருவம் 299



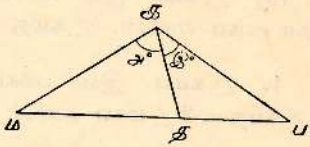
உருவம் 300

16. உரு 299 இல் **கம = கப** எனின் அ ஐ இ இற் காண்க.

17. உரு 300 இல் **கம = கப, மத** ஆனது ∠**கமப** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது. ∠**கதம** ஐ உ இற் காண்க.

*18. உரு 301 இல் **கம = கப = மத.** இ இனை அ விற் காண்க.

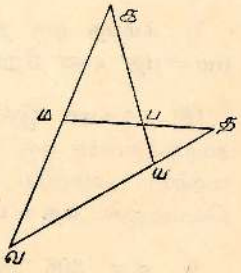
*19. ∠**கமப** இல், **கம = கப ; ய, வ** எனும் இரு புள்ளிகள் **கய = யவ** ஆகுமாறு முறையே **கம, கப** இல் உள்ளன. ∠**கமப** = அ° எனின், ∠**மயவ** வை அ இற்காண்க.



உருவம் 301

*20. **கமபதந** ஒரொழுங்கான ஐங்கோணம். ∠**மகப** இன் இருசமவெட்டி **கந** இற்குச் செங்குத்து என நிறுவுக.

*21. △**கமப** இல் ∠**ம** = 40°, ∠**ப** = 120°. ∠**ம** இன் இருசமவெட்டி **கப** ஐ **ய** இலும், **ப** இலிருந்து **கம** இற்குள்ள செங்குத்தை **வ** இலும் வெட்டுகிறது. **யவ = யப** என நிறுவுக.



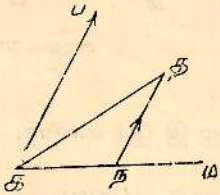
*22. உரு 302 இல் △**கமப** இன் பக்கங்கள் அதிற் காட்டியவாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. **கம = கப, மவ = மத, கய = யவ** எனின், ∠**மபக** ஐக் கண்டு **தப = தய** என நிறுவுக.

உருவம் 302

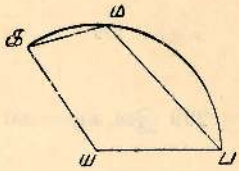
பயிற்சி 34

[அம்புக் கோடுகள் சமாந்தரம்]

1. உரு 303 இல் **கத**, ∠**மகப** ஐ இரு சமக்கூறிடுகின்றது. **கந** = **நத** என நிறுவுக.



உருவம் 303



உருவம் 304

2. உரு 304 இல் வட்டவில் **கமப** இன் மையம் **ய** ஆகும். ∠**யகம** + ∠**யபம** = ∠**கமப** என நிறுவுக. [**யம** ஐ இணைக்க.]

[3] △**கமப** இன் பக்கம் **மப** ஆனது **த** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **கம** = **கப** எனின், ∠**கமத** + ∠**கபத** = 2 செங்கோணம் என நிறுவுக.

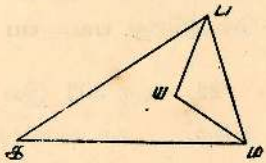
4. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** என்பது **த** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**கபத** = 2 ∠**மகப** எனின் **பக** = **பம** என நிறுவுக.

[5] △**கமப** இல் **கம** = **கப**. ∠**ம** இன் இருசமவெட்டி **கப** ஐ **ய** இற் சந்தித்தால் ∠**கயம** = 3 ∠**யமப** என நிறுவுக.

6. உரு 305 இல் **யம**, **யப** என்பவை கோணங்கள் **கமப**, **கபம** என்பவற்றின் இரு சமவெட்டிகள். **கம** = **கப** எனின் **யம** = **யப** என நிறுவுக.

7. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **கம** = **கத** ; ∠**கமப** = ∠**கதப**. **பம** = **பத** என நிறுவுக. (**மத** ஐ இணைக்க.)

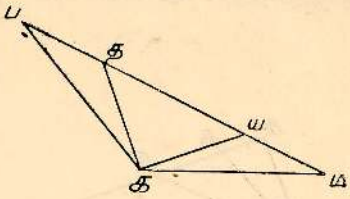
[8] △**கமப** இல் **கம** = **கப**. **மப** இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோடு **கம**, **கப** ஆகிய வற்றை முறையே **த**, **ய** எனும் புள்ளிகளில் வெட்டினால் **மத** = **பய** என நிறுவுக.



உருவம் 305

9. உரு 306 இல் **கம** = **கப**, **மய** = **தப**, **மயதப** ஒரு நேர்கோடு. ∠**கயத** = ∠**கதய** என நிறுவுக. [இரு முக்கோணங்கள் சர்வசமன் என நிறுவுக.]

[10] கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠ம உம் ∠ப உம் சமனான கூர்ங்கோணங்களாகும். கம = பத எனின் ∠க = ∠த என நிறுவுக. (மக ஐயும் பத ஐயும் ய இற் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.)



உருவம் 306

[11] △கமப இல் கம = கப. யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ய இற்கு கப நீட்டப்பட்டு மய இணைக்கப்பட்டால், ∠கமய + ∠கயம = 2 ∠கபம என நிறுவுக.

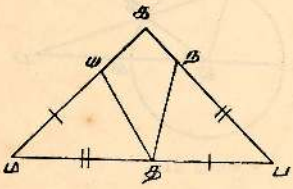
12. உரு 305 ஐப் பார்க்க. யம, யப என்பன △கமப இன் ∠கமப, ∠கபம என்பனவற்றின் இருசமவெட்டிகள். கம = கப ஆக மப ஆனது த இற்கு நீட்டப்படின், ∠கபத = ∠மயப என நிறுவுக.

[13] △கமப இன் பக்கம் மப இனது நடுப்புள்ளி த ஆகும். கத = மத எனின் ∠மகப செங்கோணம் என நிறுவுக.

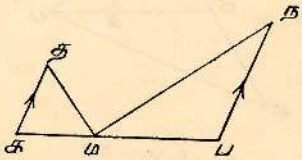
[14] △கமப இல் கம = கப. மக ஆனது ந இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. கய ∠பகந ஐ இரு சமக் கூறிடக் கீறப்பட்டுள்ளது. மப இற்குக் கய சமாந்தரமென நிறுவுக.

[15] △கமப இல் கம = கப. பந என்பது ப இலிருந்து கம இற்குச் செங்குத்தெனின் ∠நபம = ½ ∠க என நிறுவுக.

16. உரு 307 இல் △கமப இன் பக்கங்களில் உள்ள புள்ளிகள் த, ந, ய என்பவை மய = தப ஆகவும் நப = தம ஆகவும் அமைந்துள்ளன. கம = கப எனின், (i) தந = தய எனவும், (ii) ∠யதந = ∠ம எனவும் நிறுவுக.



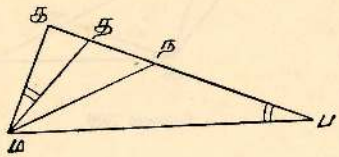
உருவம் 307



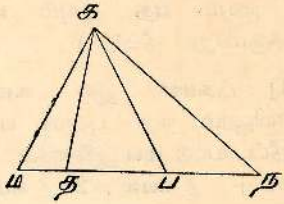
உருவம் 308

17. உரு 308 இல் கத = கம, பம = பந, கமப ஒரு நேர்கோடு. ∠தமந ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

18. உரு 309 இல் ∠கமத = ∠ப. மந ∠தமப ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது. கந = கம என நிறுவுக.



உருவம் 309

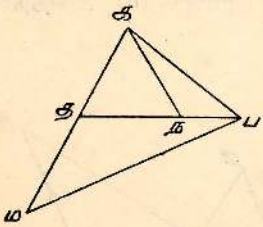


உருவம் 310

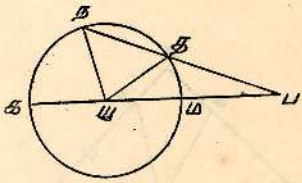
19. உரு 310 இல் ∠தகந = ∠ம ; ∠பகம = ∠ந. கத = கப என நிறுவுக.

[20] △கமப இல் கம = கப. மப யாதாயினும் ஒரு புள்ளி த இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. கத இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு முக்கோணமானது அதன் இருகோணங்கள் ∠பகத, ∠மகத ஆகியவற்றிற்கு முறையே சமமாகக் கீறப்படின் அம்முக்கோணத்தின் மூன்றுங்கோணம் 2∠பதக இற்குச் சமன் என நிறுவுக.

21. உரு 311 இல் (இது திருத்தமாகக் கீறப்படவில்லை) கத = கந ; நேர்கோடு பநத ஆனது ∠கபம ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது. அவ்வுருவில் ∠கமப இற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைக் காண்க.



உருவம் 311



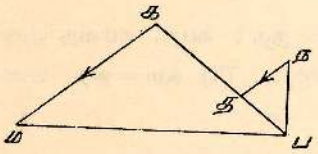
உருவம் 312

[22] உரு 312 இல் ய வட்டத்தின் மையமாகும். பமயக உம் பதந உம் நேர்கோடுகள். பத வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமனாயின், ∠கயந = 3∠ மயத என நிறுவுக.

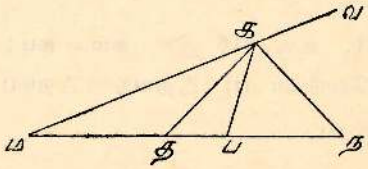
23. **கமப** ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணம் ; **கமத** உம் **கபந** உம் △ **கமப** இன் புறத்துள்ள சமபக்க முக்கோணங்கள். △ **தகப** ≡ △ **மகந** என நிறுவுக. **பத** ஆனது **மந** ஐ **ச** இல் வெட்டினால், ∠ **மசப** = 120° என நிறுவுக.

[24] சமபக்க முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கம் **மப** இல் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ந** ஆகும். **மநத** ஆனது △ **கமப** இன் புறத்துள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும். (i) **கந** = **தப** எனவும், (ii) ∠ **மகந** = ∠ **தபந** எனவும், (iii) ∠ **நகப** = ∠ **நதப** எனவும் நிறுவுக.

25. உரு 313 இல் **கம** = **கப**, **தந** = **தப**. ∠ **மபந** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.



உருவம் 313



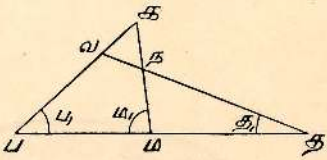
உருவம் 314

[26] உரு 314 ஐப் பார்க்க. △ **கமப** இன் பக்கம் **மக** ஆனது **வ** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ **பகம**, ∠ **பகவ** என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகளான **கத**, **கந** என்பன **மப**, நீட்டப்பட்ட **மப** என்பனவற்றை **த**, **ந** ஆகியவற்றில் வெட்டுகின்றன. **கத** = **கந** எனின்,

(i) ∠ **கதந** = 45° எனவும், (ii) ∠ **கபம** − ∠ **கமப** = 90° எனவும் நிறுவுக.

*27. △ **கமப** இல் ∠ **க** ஒரு செங்கோணம், **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து **கத** ஆகும். **பம** இலுள்ள **ந** எனும் புள்ளி **பந** = **பக** ஆக அமைந்துள்ளது. ∠ **மகத** ஐ **கந** இரு சமக் கூறிடுகிறது என நிறுவுக.

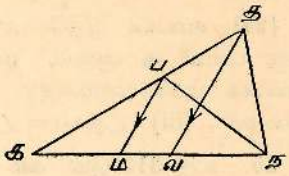
*28. உரு 315 இல் **தமப**, **தநவ** நேர்கோடுகள். **கவ** = **கந** எனின் $த_1 = \frac{1}{2}(ம_1 - ப_1)$ என நிறுவுக.



உருவம் 315

*29. △ **கமப** இல் ∠ **ம** = ∠ **ப** = 40° ; ∠ **கமப** இன் இருசமவெட்டி **கப** ஐ **த** இற் சந்திக்கின்றது. **மப** இலுள்ள **ந** என்னும் புள்ளி **மந** = **மத** ஆக அமைந்துள்ளது. **பந** = **கத** என நிறுவுக. [**மப** இல் **வ** எனும் புள்ளியை **மவ** = **மக** ஆக அமைய எடுக்க ; **தவ** ஐ இணைக்க.]

*30. △கமப இன் பக்கம் மப ஆனது த இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠கமத, ∠கபத ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் ந இற் சந்திக்கின்றன. மப இற்குச் சமாந்தரமாக ந இற் கூடாகச் செல்லுங் கோடு, தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட, மக ஐயும் பக ஐயும் முறையே வ, ய என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டினால், வய என்பது மவ, பய ஆகியவற்றின் வித்தியாசத்திற்குச் சமன் என நிறுவுக. [நவ = வம என நிறுவுக; எக்கோடு பய இற்குச் சமனாகும் ?]



உருவம் 316

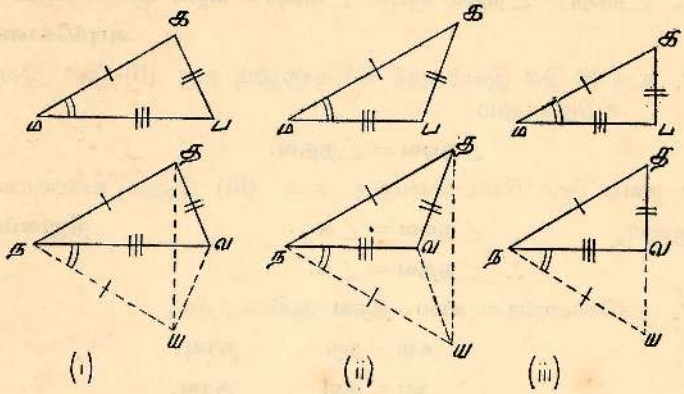
*31. உரு 316 இல் கம = மப; பந = நத; கபத, கமவந என்பன நேர்கோடுகள் (i) △தவந ≡ △நமப எனவும், (ii) கம = வந எனவும் நிறுவுக.

*32. கத எனுங்கோடு மப ஐ த இற் சந்தித்து △கமப ஐ இரண்டு இருசமபக்க முக்கோணம் ஆகப் பிரிக்கின்றது. △கமப இல் ஒரு கோணம் செங்கோணம் அல்லது ஒரு கோணம் மற்றை ஒன்றினும் இருமடங்கு அல்லது ஒரு கோணம் மற்றை ஒன்றினும் மும்மடங்கு என நிறுவுக.

*33. உரு 312 இல் வட்டத்திலுள்ள வ எனும் ஒரு புள்ளியானது △வதந இனுள் மையம் ய அமையக்கூடியதாக உள்ளது. (i) ∠தயந = 2 ∠தவந எனவும்; (ii) ∠தயந = 2 ∠தகந எனவும் நிறுவுக. [வய ஐ இணைத்து நீட்டுக.]

† தேற்றம் 13

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் மூன்று பக்கங்களும் மற்றையதின் மூன்று பக்கங்கட்கும், ஒன்றுக்கொன்று சமனாயின் அம்முக்கோணங்கள் சர்வசமனாகும்.



உருவம் 317

தரவு. △கமப, △தநவ ; அவற்றில்

கம = தந, மப = நவ, பக = வத.

மேற்கோள். △கமப உம் △தநவ உம் சர்வசமன் ஆகும்.

கருவி. நவ இற்கு த உள்ள திசைக்கு எதிர்த்திசையில் நய ஐ, ∠யநவ = ∠ம ஆகவும் நய = மக ஆகவும் அமைய வரைக. யவ, யத ஆகியவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் யநவ, கமப என்பனவற்றில்,

யந = கம	கருவி,
நவ = மப	தரவு,
∠யநவ = ∠ம	கருவி,

∴ முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{யநவ}\\ \text{கமப}\end{matrix}$ சர்வசமன் பகோப.

∴ வய = பக,

∠நயவ = ∠க.

ஆனால் பக = வத தரவு,

∴ வய = வத.

இன்னும் நய = மக கருவி,

மக = நத. தரவு,

∴ நய = நத.

∴ நயத உம் வயத உம் இருசமபக்க முக்கோணங்களாகும்.

∴ ∠ நயத = ∠ நதய ஆயும் ∠ வயத = வதய ஆயுமிருக்கும் அடிக்கோணங்கள்,

∴ உரு (i) இல் இவற்றைக் கூட்டினாலும் உரு (ii) இல் இவற்றைக் கழித்தாலும்

∠ நயவ = ∠ நதவ.

இது தவய நேர் கோடாயமைந்த உரு (iii) இலும் உண்மையாகும்.

ஆனால் ∠ நயவ = ∠ க நிறுவப்பட்டது.

∴ ∠ நதவ = ∠ க.

∴ முக்கோணங்கள் கமப, தநவ ஆகியவற்றில்,

கம = தந தரவு,

கப = தவ தரவு,

∠ க = ∠ நதவ நிறுவப்பட்டது,

∴ முக்கோணங்கள் கமப / தநவ சர்வசமன் பகோப.

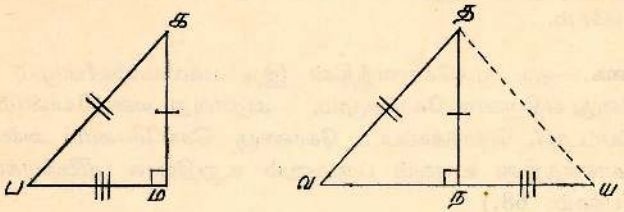
குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : பபப அல்லது 3 பக்கங்கள்.

குறிப்பு.—நவ, மப என்பவற்றை மற்றைச் சோடிச் சமபக்கங்களிலும் சிறியன அல்லவாய் எடுத்து (2) ஆம் (3) ஆம் வகைகளைத் தவிர்த்திருக்கலாம் என முதன் முதற்றோன்றும். ஆனால் இது வகை (1) இற்கே வழிவிடும் என நிறுவுதல் எளிதன்று. அன்றியும் அது கடினமாயும் மூன்று வகைகட்கும் உரிய நிறுவலிலும் நீடியதாயும் இருக்கும்.

13 ஆம், 14 ஆம் தேற்றங்களினுடைய நிறுவல்கள் மாணவர்க்கு உரையாடித் தெளிவதற்கேற்ற உதாரணங்களாய்ப் பயன்படும். ஆகையால், அவை உள்ளுறைப் பாடங்களுடன் சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன. மாணவர்கள் இந்நிறுவல்களை ஒருமுறை வாசித்தபின் திரும்ப எழுதல் வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

தேற்றம் 14

இரு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் இரண்டு பக்கங்கள் மற்றையதின் இரண்டு பக்கங்கட்கு ஒன்றுக்கொன்று சமமாயும், ஒரு சோடி சமபக்கங்கட்கு எதிரான கோணங்கள் செங்கோணங்களாயும் இருந்தால் அம் முக்கோணங்கள் சர்வ சமனுகும்.



உருவம் 318

தரவு. முக்கோணங்கள் **கமப, தநவ** ; அவற்றில்

கப = தவ, கம = தந, ∠ ம = ∠ ந = 1 செங் ∠.

மேற்கோள். முக்கோணங்கள் **கமப, தநவ** சர்வசமனுகும்.

கருவி. **வந** ஐ **ய** இற்கு, **நய = மப** ஆயிருக்க நீட்டுக. **தய** ஐ இணைக்க.

நிறுவல். **∠ தநவ = 1** செங் ∠ ஆதலாலும் **வநய** ஒரு நேர்கோடாதலாலும் **∠ தநய = 1** செங் ∠.

∴ முக்கோணங்கள் **கமப, தநய** என்பவற்றில்,

கம = தந	**தரவு,**
மப = நய	**கருவி,**
∠ ம = ∠ தநய	**செங்கோணங்கள்,**

∴ முக்கோணங்கள் **கமப / தநய** சர்வசமன் பகோப.

∴ **∠ ப = ∠ ய, கப = தய** ;

ஆனால் **கப = தவ**	**தரவு, ∴ தவ = தய.**
∴ ∠ வ = ∠ ய	**இருசமபக்க △, அடிக்கோணங்கள்;**
ஆனால் **∠ ப = ∠ ய**	**நிறுவப்பட்டது,**
∴ ∠ ப = ∠ வ.	

∴ முக்கோணங்கள் **கமப, தநவ** என்பவற்றில்,

கம = தந **தரவு,**

∠ ம = ∠ தநவ **செங்கோணங்கள், தரவு,**

∠ ப = ∠ வ **நிறுவப்பட்டது,**

∴ முக்கோணங்கள் **கமப / தநவ** சர்வசமனாகும் கோகோப.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : செசெபப அல்லது செங் ∠, செ. ப., பக்கம்.

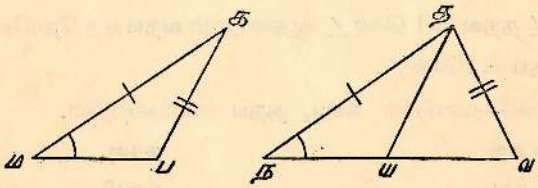
ஈரடிவகை.—ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களினளவும் அவற்றுளொன்றினது எதிருள்ள கோணமும், – அதாவது அமைகோணம் அன்றுகொடுக்கப்பட்டால், கொடுக்கப்பட்ட கோணஞ் செங்கோணம் அல்லதாயின் அம்முக்கோணத்தின் உருவும் பருமனும் உறுதியாக நிலையாக்கப்பட்டனவல்ல. (பக்கம் 68.)

கமப, தநவ எனும் இருமுக்கோணங்கள்,

கம = தந, கப = தவ, ∠ ம = ந ஆக உள்ளன.

ஆயின் ∠ ப = ∠ வ ஆகவிருந்து முக்கோணங்கள் சர்வசமனாயிருத்தல் வேண்டும்.

அல்லது ∠ ப உம் ∠ வ உம் மிகைநிரப்பு கோணங்களாயிருத்தல் வேண்டும்.



உருவம் 319

மப = நவ எனின்

முக்கோணங்கள் **கமப / தநவ** சர்வசமன் பகோப.

∴ **∠ ப = ∠ வ.**

பம ஆனது **நவ** இற்குச் சமனில்லையாயின் அவற்றுள் ஒன்று பெரிதாயிருத்தல் வேண்டும்; **நவ** ஐப் பெரிதெனக் கொண்டு **மப** இற்குச் சமனாக **நய** எனும் ஒரு பகுதியை வரையறுக்க.

அப்பொழுது முக்கோணங்கள் கமப தநய சர்வசமனுகும் பகோப.

∴ ∠ப = தயந ; கப = தய.

ஆனுல் கப = தவ தரவு, ∴ தய = தவ.

∴ ∠தயவ = ∠வ இருசமபக்க △, அடிக்கோணங்கள்,

ஆனுல் ∠தயந + ∠தயவ = 2 செங்கோணங்கள் நேர்கோட்டு அடு கோணங்கள்;

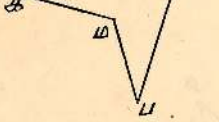
∴ ∠ப + ∠வ = 2 செங்கோணம்.

பயிற்சி 35

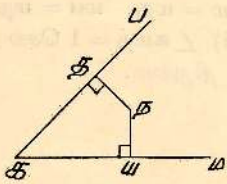
1. ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் சமனுன நாண்களாகும் கம, பத என்பன. ∠கயம = ∠பயத என நிறுவுக.

[2] நாற்கோணம் கமபத இன் எல்லாப் பக்கங்களுஞ் சமன் ; கப ∠மகத ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

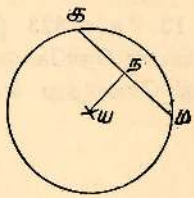
3. உரு 320 இல் மக = மப, தக = தப; ∠மகத = ∠மபத என நிறுவுக.



உருவம் 320



உருவம் 321



உருவம் 322

4. உரு 321 இல் ந இலிருந்து கம, கப ஆகியவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள் சமனுகும். ∠மகப ஐ கந இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

5. உரு 322 இல் வட்டத்தின் மையம் ய இலிருந்து நாண் கம விற்கு யந செங்குத்தாகும். கந = நம என நிறுவுக.

[6] உரு 322 இல் ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது நாண் கம இனுடைய நடுப்புள்ளி ந. கம இற்கு யந செங்குத்து என நிறுவுக.

7. கமபத எனும் நாற்கோணம் கம = பத ஆகவும் கத = மப ஆகவும் உள்ளது. மப இற்குக் கத சமாந்தரமென நிறுவுக. [கப ஐ இணைக்க.]

[8] இரண்டு வட்டங்கள் **க, ம** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **ய** ஒன்றின் மையம்; மற்றையதின் மையம் ∠**கயம** இன் இருசமவெட்டியிலுள்ளது என நிறுவுக.

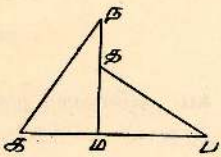
9. ஒரு △ **கமப** இன் பக்கம் **மப**. அதனுடைய நடுப்புள்ளி **ந**; **நத, நய** என்பன **ந** இலிருந்து **கம, கப** என்பவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள். **நத = நய** எனின் **கம = கப** என நிறுவுக.

[10] **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **கத = மப, கப = மத**. **கப** ஆனது **மத** ஐ **ந** இல் வெட்டுமானால் (i) **நப = நத** எனவும், (ii) **கம || தப** எனவும் நிறுவுக.

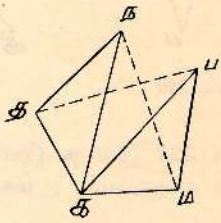
11. **கம, தப** என்பன ஒரு தளத்திலில்லாச் சம கோடுகள். **கப = மத** எனின் ∠ **மகப = ∠ மதப** என நிறுவுக. △**கமப** ஆனது **மப** வழிசுழற்றப்பெற்றால் **க** என்பது **த** ஊடாகச் செல்ல வேண்டுமா?

12. △**கமப** இல் **கம = கப**; ∠**க = 1** செங்கோணம்; **யகவ** என்பது **க** இற்கூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு நேர்கோடு. **மத, பந** என்பவை **ம, ப** என்பவற்றிலிருந்து **யகவ** இற்குரிய செங்குத்துக்கள். **கத = பந** என நிறுவுக.

13. உரு 323 இல் **கம = மத, மப = மந, கந = பத; கமப, மதந** என்பன நேர்கோடுகள். (i) ∠**கமந = 1** செங் ∠ எனவும், (ii) **கந** விற்கு **பத** செங்குத்து எனவும் நிறுவுக.



உருவம் 323

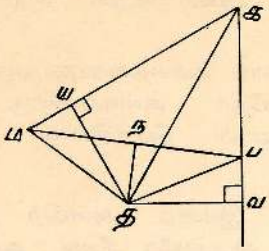


உருவம் 324

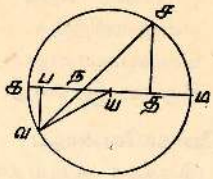
*14. உரு 324 இல் **கம = கத, கப = கந, மப = தந; மந = பத** என நிறுவுக.

*15. உரு 325 இல் ∠**மகப** இன் இருசமவெட்டி, **மப** ஐச் செங்குத்தாய் இருசமக் கூறிடுங் கோட்டை **த** இற் சந்திக்கின்றது. **தய, தவ** என்பன **த** இலிருந்து **கம, கப** இற்குச் செங்குத்துக்கள்.

இவ்வுருவில் மூன்று சோடி சர்வசமனான முக்கோணங்களைக் கண்டு அவை சர்வசமன் என நிறுவுக. **கய** $= \frac{1}{2}$ (**கம** + **கப**) எனவும் நிறுவுக.



உருவம் 325



உருவம் 326

*16. உரு 326 இல் **ய** ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்தின் விட்டம் **கம** ஆகும். நாண் **வச** ஆனது **கம** உடன் 45° ஆக்குகின்றது. **வப**, **சத** என்பன **வ**, **ச** என்பவற்றிலிருந்து **கம** இற்குச் செங்குத்துக்கள். **பந** = **யத** என நிறுவுக. [△**வபய** ≡ △**யதச** என நிறுவுக.]

*17. ஒருமுக்கோணம் **கமப** இன் பக்கம் **கம** இலுள்ளது **த** எனும் புள்ளி. **மப** இல் முக்கோணம் சுழற்றப்பட்டது. **க′**, **த′** என்பன **க**, **த** என்பவற்றின் புதிய நிலைகள். ∠**த′கப** = ∠**தக′ப** என நிறுவுக.

*18. **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தில் **ப**, **த** என்பன இரு புள்ளிகள். **பத**, **கம** உள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தாக **ப** இலே **பந** நிறுவப்பட்டது. ∠**கநத** = ∠**மநத** என நிறுவுக.

முறைமையான அமைப்புக்கள். அறிமுறை அமைப்புக்களை ஆக்குதற்கு நேர்கோலுங் கவராயமுமே பயன்படுத்தப்படல் வேண்டும்.

(i) நேர்கோல் (அளவுகோடில்லா வரைகோல்)

(அ) கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளை ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவும்,

(ஆ) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டை நீட்டவும்;

(ii) கவராயம்

(அ) கொடுக்கப்பட்ட மையமும் ஆரையும் பொருந்திய ஒரு வட்டத்தை வரையவும்,

(ஆ) ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிற்குச் சமமான அளவை வெட்டவும், பயன்படும்.

ஓரமைப்பை ஆக்கும்பொழுது உரு செம்மையாக வரையப்படல் வேண்டும்; அமைப்புக்கோடுகள் தெளிவாகக் காட்டப்படல் வேண்டும்; **ஒன்றேனும் அழிக்கப்பட்டிருத்தல் ஆகாது.**

அமைப்பில் **உயர்நியமச் செம்மை** பெறுவதற்குப் பின்வரும் முறைகளைக் கையாளல் வேண்டும் ;

(i) உறுதியான ஒரு பென்சிலைப் பயன்படுத்துக. அது கூரியதாயிருத்தல் வேண்டும்.

தாளிற் கீறிய ஒரு நேர்கோடு அகலத்தையுடையது. அகலம் எவ்வளவிற்குக் குறைகின்றதோ அவ்வளவிற்கு வரைவு செம்மையானது. மென்மையான பென்சிலால் நல்லகோடு கீறுதல் இயலாது.

(ii) இணைக்கவேண்டிய புள்ளிகள் இயன்ற அளவிற் தூரத்தில் இருக்கக் கூடியதாகக் கீறும் வட்டங்களை நீண்ட ஆரைகளுடையனவாய் வரைக.

தொலைவிலிருக்கும் இரு புள்ளிகளை இணைத்துப் பெறும் நேர்கோடு குறுகிய தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளை இணைத்துப் பெறும் நேர்கோட்டிலும் வழுவற்றதாய் இருக்கும். ஒரு கோலை ஒரு முனைக்குக் கிட்ட உள்ள ஈரிடங்களில் நீர் பிடிக்கையில் கோலின் மற்றை முனையில் பிறிதொருவர் அதைச் செங்குத்தாகத் தள்ளும்பொழுது என்ன நடக்கும் என்பதிலிருந்து நீர் இவ்வுண்மையை அறிவீர்.

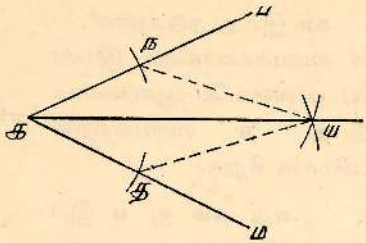
(iii) தாம் வெட்டிக் கொள்ளும்பொழுது சிறு கோணங்களையேயாக்கும் நேர்கோடுகள், வட்டங்களைத் தவிர்த்தல் நல்லது.

நேர்கோடுகளை 1 ச.மீ. அகலமுள்ள துண்டுகளாகக் கொண்டால் ஒரு நுணுக்குக் காட்டியால் பார்க்கும் பொழுது ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி எப்படித் தோற்றம் அளிக்கும் என்பதை நினைத்துப் பாருங்கள். அத்துண்டுகளால் அமைக்கப்பட்ட கோணஞ் சிறியதாயிருப்பின் இரு துண்டுகட்கும் பொதுவான பரப்புப் பெரிதாயிருக்கும்.

(iv) கவராயத்தைக் கவனமாய்ப் பேணல் வேண்டும். அதைச் சாதாரணமாய் எழுதுவதற்கும் நேர்கோடுகள் வரைவதற்கும் பயன்படுத்தினால் அது பழுதாய்விடும்.

அமைப்பு 1

கொடுத்த ஒரு கோணத்தை இரு சமக்கூறிடல்.



உருவம் 327

தரவு. ஒருகோணம் **மகப.**

அமைக்கவேண்டியது. ∠ **மகப** ஐ இருசமக்கூறிடுங்கோடு.

அமைப்பு. **க** ஐ மையமாகவும் எவ்வளவையேனும் ஆரையாகவுங் கொண்டு **கம, கப** ஆகியவற்றை **த, ந** களில் வெட்டும் ஒரு வட்டத்தின் வில்லைக் கீறுக.

த, ந என்பவற்றை மையங்களாகவும் இரண்டிற்கும் போதிய ஓரளவையே ஆரைகளாகவுங்கொண்டு **ய** இல் வெட்டும் வட்ட விற்களைக் கீறுக.

கய ஐ இணைக்க.

கய ஏ வேண்டிய இருசமவெட்டியாம்.

நிறுவல். **தய, நய** ஆகியவற்றை இணைக்க.

முக்கோணங்கள் **தகய, நகய** ஆகியவற்றில்

கத = கந ஒருவட்டத்தாரைகள்,

தய = நய சமவட்டத்தாரைகள்,

கய = கய.

∴ முக்கோணங்கள் **தகய** / **நகய** சர்வசமன் பபப.

∴ ∠ **தகய = ∠ நகய.**

∴ **கய** ∠ **மகப** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது.

அமைப்பு 2

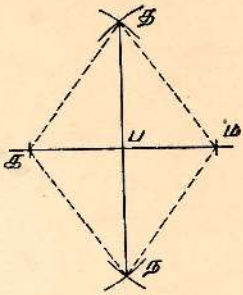
கொடுக்கப்பட்ட முடிவுள்ள ஒரு நேர்கோட்டை இருசமக் கூறிடுதல்.

தரவு. ஒரு முடிவுள்ள கோடு **கம.**

அஃ மக்கவேண்டியது. **கம** இனது நடுப்புள்ளி.

அமைப்பு. **க,ம** களை மையங்களாகவும் இரண்டிற்கும் போதிய ஓரளவையே ஆரைகளாகவுங் கொண்டு **த, ந** என்பவற்றில் வெட்டும் வட்டவிற்கள் கீறுக.

தந ஐ இணைக்க. அது **கம** ஐ **ப** இல் வெட்டுவதாகுக. அப்பொழுது **ப** ஆனது **கம** இனது நடுப்புள்ளியாம்.



உருவம் 328

நிறுவல். **தக, தம, நக, நம** ஆகியவற்றை இணைக்க.

முக்கோணங்கள் **தகந, தமந** ஆகியவற்றில்

கத = மத — **சமவட்டத்தாரைகள்,**

கந = மந — **சமவட்டத்தாரைகள்,**

தந = தந.

∴ முக்கோணங்கள் **தகந** / **தமந** சர்வசமன் — பபப.

∴ ∠**கதந** = ∠**மதந.**

∴ முக்கோணங்கள் **தகப, தமப** ஆகியவற்றில்,

கத = மத — **சமவட்டத்தாரைகள்,**

தப = தப

∠**கதப** = ∠**மதப** — **நிறுவப்பட்டது,**

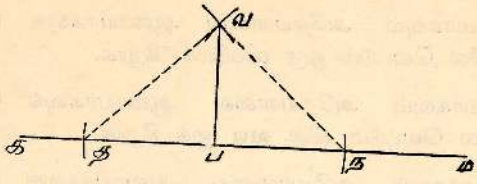
∴ முக்கோணங்கள் **தகப** / **தமப** சர்வசமன் — பகோப.

∴ **கப = மப.**

குறிப்பு.—கோணங்கள் **கபத, மபத** என்பவை சமனாயும் ஒரு நேர் கோட்டு அடுத்துள கோணங்களாயும் இருப்பதால் அவை ஒவ்வொன்றுஞ் செங்கோணமாம். எனவே **தந** என்பது **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

அமைப்பு 3

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து அக்கோட்டிற்குச் செங்கோணமாய் ஒரு நேர்கோடு வரைதல்.



உருவம் 329

தரவு. **கம** எனுங்கோட்டில் ஒரு புள்ளி **ப.**

அமைக்கவேண்டியது. **ப** இலிருந்து **கம** இற்குள்ள செங்குத்து.

அமைப்பு. **ப** ஐ மையமாகவும் எவ்வளவையேனும் ஆரையாகவுங் கொண்டு **கம** ஐ **த, ந** க்களில் வெட்டும் ஒரு வட்டவில் கீறுக. **த, ந** க்களை மையங்களாகவும் இரண்டிற்கும் போதிய ஒரளவையே ஆரைகளாகவும் கொண்டு **ப** இல் வெட்டும் வட்டவிற்கள் கீறுக. **பவ** ஐ இணைக்க.

பவ ஏ **கம** இற்குச் செங்குத்தான கோடாகும்.

நிறுவல். **தவ, நவ** ஆகியவற்றை இணைக்க. முக்கோணங்கள் **தபவ, நபவ** ஆகியவற்றில்,

பத = பந ஒருவட்டத்தாரைகள்,

தவ = நவ சமவட்டத்தாரைகள்,

பவ = பவ.

∴ முக்கோணங்கள் **தபவ** / **நபவ** சர்வசமன் பபப.

∴ ∠ **தபவ** = ∠ **நபவ.**

ஆனால் இவை ஒருகோட்டு அடுத்துளகோணங்களாம்.

∴ ∠ **தபவ** ஒரு செங்கோணம்.

குறிப்பு.—இவ்வமைப்பு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணத்தை இருசமக் கூறிடுஞ் சிறப்புவகையாகும். உரு 329 இல் **பவ** நேர்கோணம் **கபம** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது.

மூன்றும் அமைப்பிற்குரிய **வேறு இரு வழிகள்** உருக்கள் 330, 331 ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ்வமைப்புகளைக் கீறி அவை திருத்தமானவை என நிறுவுதல் மாணவர்க்குப் பயன்தரும் பயிற்சியாகும்.

கம வில் ஒரு புள்ளி ப கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ப ஊடாக கம இற்குச் செங்குத்து கீறல்.

(1) **ப** ஐ மையமாகவும் யாதாயினும் ஓரளவை ஆரையாகவுங்கொண்டு வில் **தநவ** என்பதை, **பம** ஐ **த** இலே வெட்டக் கீறுக.

த ஐ வட்டமாகவும் அதேயளவை ஆரையாகவுங் கொண்டு வில் **தநவ** ஐ **ந** இலே வெட்டும் ஒரு வில்லைக் கீறுக.

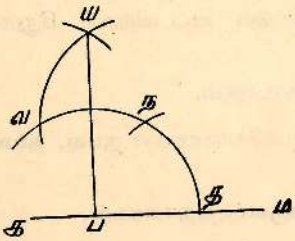
ந ஐ வட்டமாகவும் அதேயளவை ஆரையாகவுங் கொண்டு வில் **தநவ** ஐ **வ** இலே வெட்டும் வில் **வய** ஐக் கீறுக.

வ ஐ வட்டமாகவும் அதேயளவை ஆரையாகவுங் கொண்டு வில் **வய** ஐ **ய** இலே வெட்டும் வில்லொன்று கீறுக.

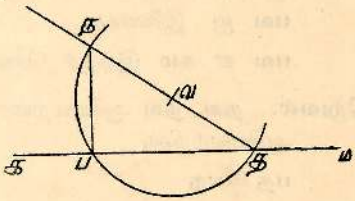
பய ஐ இணைக்க.

இப்பொழுது **பய, கம** இற்குச் செங்குத்தாகும்.

[நிறுவுதற்பொருட்டு முக்கோணங்கள் **தபந, பநவ, யநவ** என்பன சமபக்க முக்கோணங்கள் என்பதைக் கவனிக்க.]



உருவம் 330



உருவம் 331

(2) **கம** இற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி **வ** ஐ எடுக்க; **வ** ஐ மையமாகவும் **வப** ஐ ஆரையாகவுங் கொண்டு ஒரு வட்டங் கீறுக. அது **கம** ஐ மீண்டும் **த** இலே வெட்டுவதாகுக.

தவ ஐ இணைத்து அது வட்டத்தை **ந** இலே சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

பந ஐ இணைக்க.

இப்பொழுது **பந** ஆனது **கம** இற்குச் செங்குத்தாம்.

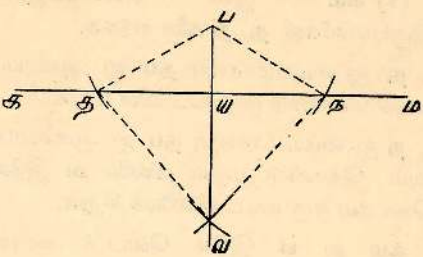
[நிறுவுதற் பொருட்டு முக்கோணங்கள் **வதப, வநப** என்பன இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் என்பதைக் கவனிக்க.]

அமைப்பு 4

எல்லைக்குட்படாத நீளத்தையுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர் கோட்டிற்கு அதன் வெளிப்புறத்தே உள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு செங்குத்து வரைதல்.

தரவு. ஒரு கோடு **கம** உம் அதற்குப் புறம்பேயுள்ள ஒரு புள்ளி **ப** உம்.

அமைக்க வேண்டியது. **கம** இற்குப் **ப** இலிருந்து செங்குத்தானகோடு.



உருவம் 332

அமைப்பு. **ப** ஐ மையமாகவும் போதிய ஓரளவு ஆரையாகவும் கொண்டு **கம** ஐ **த, ந** ஆகியவற்றிலே வெட்டும் ஒரு வில்லை வரைக. **த, ந** ஆகியவற்றை வட்ட மையங்களாகவும் போதிய ஒரே அளவை ஆரைகளாகவுங் கொண்டு **வ** இலே வெட்டும் வட்டவிற்களைக் கீறுக.

பவ ஐ இணைக்க. அது **கம** ஐ **ய** இலே வெட்டுவதாகுக.

இப்பொழுது **பய** ஏ **ப** இலிருந்து **கம** இற்குரிய செங்குத்தாகும்.

நிறுவல். **பத, பந, வத, வந** ஆகியவற்றை இணைக்க.

முக்கோணங்கள் **பதவ, பநவ** ஆகியவற்றில்

பத = பந — **ஒருவட்டத்தாரைகள்,**

தவ = நவ — **சமவட்டத்தாரைகள்,**

பவ = பவ.

∴ முக்கோணங்கள் **பதவ** / **பநவ** சர்வசமனும் பபப.

∴ ∠ **தபவ** = ∠ **நபவ.**

∴ முக்கோணங்கள் **பதய, பநய** என்பவற்றில்,

பத = பந — **ஒருவட்டத்தாரைகள்,**

பய = பய

∠ **தபய** = ∠ **நபய** — **நிறுவப்பட்டது,**

∴ முக்கோணங்கள் **பதய** / **பநய** சர்வசமன் பகோப.

∴ ∠ **பயத** = ∠ **பயந.**

ஆனால் இவை நேர்கோட்டு அடுத்துள கோணங்கள்,

∴ அவை ஒவ்வொன்றும் செங்கோணம்.

நாலாம் அமைப்பிற்குரிய **வேறிருவழிகள்** உருக்கள் 333, 334 ஆகியவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ்வமைப்புக்களைக் கீறி அவை திருத்தமானவை என நிறுவுதல் மாணவர்க்குப் பயன்றரும் பயிற்சியாகும்.

கம எனுங் கோடும் அதற்குப் புறம்பே ப எனும் ஒரு புள்ளியுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ப இலிருந்து கம இற்குச் செங்குத்தான கோடு கீறல்.

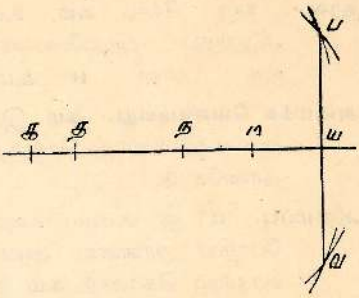
(1) **கம** இல் எவையேனும் இருபுள்ளிகள் **த, ந** களை எடுக்க.

த ஐ மையமாகவும் **தப** ஐ ஆரையாகவுங் கொண்டு ஒரு வட்டவில் கீறுக.

ந ஐ மையமாகவும் **நப** ஐ ஆரையாகவும் கொண்டு முதல் வில்லை **வ** இலே வெட்டும் ஒரு வட்ட வில்லைக் கீறுக.

கம ஐ **ய** இலே வெட்டக் கூடியதாகப் **பவ** ஐ இணைக்க.

இப்பொழுது **பய** ஏ **ப** இலிருந்து **கம** இற்குரிய செங்குத்தாகும்.



உருவம் 333

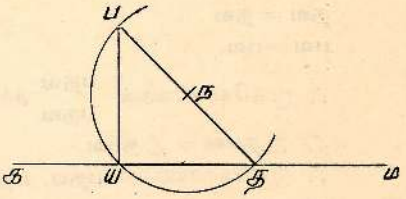
[△**நதப** ≡ △**நதவ** என நிறுவிப் பின்னர் △**யதப** ≡ △**யதவ** என நிறுவி இம் முடிபை நிறுவுக.]

குறிப்பு.—புள்ளிகள் **த, ந** ஆகியவற்றை இயன்ற அளவில் தூரத்தில் உள்ளனவாக எடுக்க. அப்பொழுது **வ** ஐ செம்மையாக நிலைநிறுத்தல் எளிதாகும்.

(2) **கம** இலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **த** ஐ எடுக்க.

பத ஐ இணைத்துப் **பத** இனது நடுப்புள்ளி **ந** ஐ அமைக்க.

ந ஐ மையமாகவும் **நப** ஐ ஆரையாகவும் கொண்டு **கம** ஐ **ய** இலே வெட்டும் ஒரு வட்ட வில்லை வரைக.



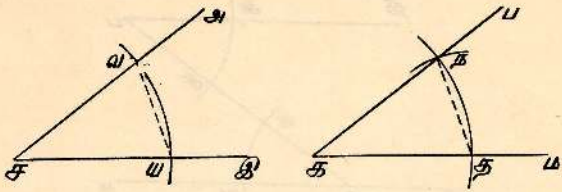
உருவம் 334

பய ஐ இணைக்க. இப்பொழுது **பய** ஏ **ப** இலிருந்து **கம** இற்குரிய செங்குத்தாகும்.

எவ்வாறு ஒரு கோணத்தைப் பிரதி செய்யலாம் என அடுத்த அமைப்பு விளக்குகின்றது. கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தை தன் ஒரு கோணமாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை அமைத்துப் பின்னர் முதல் முக்கோணத்தின் பக்கங்கட்குச் சமனாகப் பக்கங்கள் உடைய பிறிதொரு முக்கோணத்தை அமைப்பதிலேயே இவ்வழி தங்கியுள்ளது.

அமைப்பு 5

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணத்திற்கு சமனான கோணத்தை அக்கோட்டுடனுக்கும் ஒரு நேர்கோடு வரைதல்.



உருவம் 335

தரவு. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு **கம** இல் ஒருபுள்ளி **க** உம் ஒரு கோணம் **இசஅ** உம்.

அமைக்கவேண்டியது. ∠**பகம** = ∠**அசஇ** ஆக்கும் ஒருகோடு **கப.**

அமைப்பு. **ச** ஐ மையமாகவும் யாதாயினும் அளவை ஆரையாகவுங் கொண்டு **சஇ, சஅ** ஆகியவற்றை **ய, வ** ஆகியவற்றில் வெட்டும் ஒரு வட்டவில் வரைக.

க ஐ மையமாகவும் அதேயளவை ஆரையாகவுங்கொண்டு **கம** ஐ **த** இலே வெட்டும் வட்டவில் **தந** வைக் கீறுக.

த ஐ மையமாகவும் **யவ** இற்குச் சமமான அளவை ஆரையாகவுங் கொண்டு வட்டவில் **தந** ஐ **ந** இலே வெட்டும் ஒரு வட்டவில் கீறுக. **கந** ஐ இணைத்துப் **ப** இற்கு நீட்டுக. இப்பொழுது **கப** ஏதேவையாய கோடாம்.

நிறுவல். **யவ, தந** ஆகியவற்றை இணைக்க. முக்கோணங்கள் **யசவ, தகந** என்பவற்றில் :

சய = கத சமவட்டத்தாரைகள்,
சவ = கந சமவட்டத்தாரைகள்,
யவ = தந அமைப்பு ;

∴ முக்கோணங்கள் **யசவ / தகந** சர்வசமன் பபப.

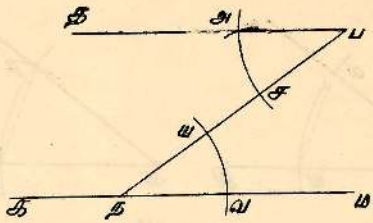
∴ ∠**இசஅ** = ∠ **மகப.**

ஐந்தாம் அமைப்பின் மிகச் சிறந்த பயன் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியொன்றிற்கு ஊடாக ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நேர் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோடு வரைவதில் உள்ளது. 36 ஆம் பயிற்சி 14 ஆம் எண்ணைப் பார்க்க.

செய்முறை வேலையிற் சமாந்தரங்கள் எப்பொழுதும் மூலைமட்டங்களைப் பயன்படுத்தியே வரையப்படுகின்றன. ஆனால் முறைமையான அமைப்பு வேண்டுமெனில் மூலைமட்டங்களைப் பயன்படுத்தல் ஆகாது.

அமைப்பு 6

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளிக்கூடாக, அதற்கூடாகச் செல்லாதகொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு நேர்கோடு வரைதல்.



உருவம் 336

தரவு. கொடுக்கப்பட்ட கோடு **கம** விற்குப் புறம்பான ஒரு புள்ளி **ப.**

அமைக்கப்படவேண்டியது. **ப** இற்கூடாகக் **கம** இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு.

அமைப்பு. **கம** இல் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ந** ஐ எடுக்க, **நப** ஐ இணைக்க. **நப** இலுள்ள புள்ளி **ப** இலிருந்து **பத** எனும் ஒரு கோட்டை ∠ **நபத** என்பது ∠ **பநம** இற்குச் சமனையும் ஒன்று விட்டதாயும் அமையக் கூடியதாய் வரைக.

இப்பொழுது **பத** ஏ வேண்டிய கோடாகும்.

நிறுவல். குறுக்குவெட்டி **நப** என்பது **கம, தப** என்னுங் கோடுகளை, அடுத்துள கோணங்களான **பநம, நபத** என்பவை சமமாக அமைய வெட்டுதலால் **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரமாகும்.

பயிற்சி 36

[இவ்வமைப்புகட்கு கவராயத்தையும் வரைகோலையுமே பயன்படுத்துக.]

1. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அம்முக்கோணத்தை வரைக.

2. இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றின் சிறிய பக்கங்களுள் ஒன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அம் முக்கோணத்தை வரைக.

3. **க, ம** எனும் இருபுள்ளிகள் எடுக்க. நீட்டப்பட்ட **கம** இல் **ப** எனும் ஒரு புள்ளியை, **மப = 3கம** ஆகுமாறு அமைக்க.

பின்வருங் கோணங்களை அமைக்க:-

4. 30°. 5. 45°. 6. 105°.

[7] $22\frac{1}{2}$°.

[8] 75°.

[9] ஒரு செங்கோணத்தை அமைத்து அதை மூன்று சமமான கோணங்களாக்கும் இரு கோடுகளை அமைக்க.

10. **க, த** என்னும் இருபுள்ளிகள் எடுக்க. **கமப** எனுஞ் சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றை, **கத** ஏ **க** இலிருந்து **மப** இற்குரிய செங்குத்தாக, அமைக்க.

11. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ வரைந்து அதன் ஒவ்வொரு கோணத்தின் இருசமவெட்டியையும் அமைக்க. அவ்விரு சமவெட்டிகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றனவா ?

[12] ஒரு விரிகோணம் வரைக. அதைச் சமமான நாலு கோணங்களாகப் பிரிக்க.

13. **க, ம** எனும் இருபுள்ளிகள் எடுக்க. **ப, த** என்பவற்றை, ∠**கமப** உம் ∠**மபத** உம் ஒன்று விட்ட கோணங்களாயுஞ் செங்கோணங்களாயும் இருக்கவும், **கம = மப = பத** ஆகவுமிருக்கக் கூடியதாயும் அமைக்க. **கத** உம் **மப** உம் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகின்றனவா ?

14. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ வரைக. **த** ஐ **பத = மக** ஆகவும் **கத = மப** ஆகவும் இருக்கக் கூடியதாக அமைக்க. இவ்வமைப்பு எவ்வாறு **க** இற்கூடாக **மப** இற்குச் சமாந்தரம் அமைப்பதற்கொக்கும் என விளக்குக ?

15. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தை வரைந்து ஒவ்வொரு பக்கத்தினதும் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தை அமைக்க. அவை ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றனவா ?

[16] **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. அதில் விட்டமல்லா ஒரு நாண் **கம** வரைக. **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தை அமைக்க. அது **ய** ஊடாகச் செல்கின்றதா ?

17. ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் பரிதியில் மூன்று புள்ளிகள் **க, ம, ப** என்பனவற்றை எடுக்க. ∠**மகப** இன் இருசமவெட்டியையும் **மப** இன் இருசம வெட்டிச் செங்குத்தையும் அமைக்க. அவை நீட்டப்பட்டாற் பரிதியிற் சந்திக்கின்றனவா ?

18. யாதாயினும் கூர்ங்கோண முக்கோணம் ஒன்றை வரைக. ஒவ்வோர் உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்துக்கள் அமைக்க.

[19] ∠ப விரிகோணமாயிருக்க ஒரு முக்கோணம் கமப வரைக. க இலிருந்து நீட்டப்பட்ட மப இற்கும் ம இலிருந்து நீட்டப்பட்ட கப இற்கும் ப இலிருந்து நீட்டப்பட்ட கம இற்குஞ் செங்குத்துக்கள் அமைக்க. இக் கோடுகள் நீட்டப்பட்டால் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றனவா ?

20. மூன்று புள்ளிகள் க, ம, ப என்பவற்றை ∠கமப விரிகோணமாயிருக்க எடுக்க. கம, மப என்பவற்றை இணைக்க. கம ஐ நீட்டாமல், ப இற்கூடாக கம இற்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு அமைக்க.

21. ஒரு முக்கோணம் கமப ஐ வரைக. முக்கோணத்துள் ஒரு புள்ளி த ஐ எடுக்க. மப இல் ஒரு புள்ளி ந ஐ, ∠தநப = ∠ம ஆகவிருக்க அமைக்க.

[22] ஒரு முக்கோணம் கமப ஐயும் ஒரு நேர்கோடு தந ஐயும் வரைக. ஒரு கோடு தய ஐ ∠நதய = ∠மகப ஆகவிருக்க அமைக்க.

*23. ஒரு முக்கோணம் கமப ஐ கம என்பது கப இலும் பெரிதாயிருக்க வரைக. கம, கப ஆகியவற்றை ய, வ என்பவற்றிற்கு நீட்டுக. ∠கமப, ∠கபம ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகளை அமைக்க. அவை த இலே சந்திப்பனவாகுக. ∠யமப, ∠வபம ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகளை அமைக்க. அவை ந இலே சந்திப்பனவாகுக. ∠ மகப இன் இரு சமவெட்டி த, ந ஆகியவற்றிற் கூடாகச் செல்கின்றதா?

*24. ஒரு முக்கோணம் கமப ஐ கம என்பது கப இலும் பெரிதாயிருக்க வரைக. மப இல் ஒரு புள்ளி த ஐ, த இலிருந்து கம, கப ஆகியவற்றுக்குரிய செங்குத்துக்கள் சமமாயிருக்க அமைக்க. நீர் செய்யும் வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

*25. ஒரு முக்கோணம் கமப ஐ, கம ஆனது கப இலும் பெரியதாயமைய வரைக. கோணம் மகப இல் ஒரு கோடு கத ஐ, ம, ப ஆகியவற்றிலிருந்து கத இற்குரிய செங்குத்துக்கள் சமமாயிருக்க அமைக்க. உமது முறையைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

*26. ஒரு முக்கோணம் கமப ஐயும் ஒரு நேர்கோடு யவ ஐயும் வரைக. யவ இல் த எனும் ஒரு புள்ளியை கத ஆனது யவ உடன் ∠ம இற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தை ஆக்க அமைக்க.

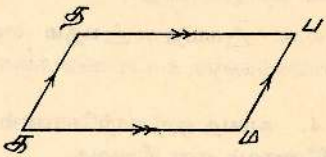
*27. ஒரு கூர்ங் கோணம், கபம ஐயும், ஒரு நேர்கோடு தந ஐயும் வரைக. பக, பம ஆகியவற்றில் புள்ளிகள் ய, வ என்பவற்றை, ∠பயவ ஒரு செங்கோணமாயும், யவ = தந ஆயும் இருக்க அமைக்க. உமது முறையைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

*28. ஒரு கோடு **கம** ஐக் கீறி அதன் ஒரே பக்கத்தில் **ப, த** ஆகிய இரு புள்ளிகளை எடுக்க. **கம** இல் ஒரு புள்ளி **ந** ஐ, ∠**கநப** = ∠**மநத** ஆக விருக்க அமைக்க. [**த′** எனும் ஒரு புள்ளியை, **கம** ஆனது **தத′** இன் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்தாயிருக்க அமைக்க; **பத′** ஐ இணைக்க.]

இணைகரங்கள்

வரைவிலக்கணம். இருசோடிப் பக்கங்களுஞ் சமாந்தரமாகவுடைய ஒரு நாற்கோணம் **இணைகரம்** எனப்படும். உரு 337 ஐப் பார்க்க.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறையில், 15 ஆம் 16 ஆந் தேற்றங்களிலுள்ள இணைகரத்தின் பண்புகளையும் 17–20 வரையுள்ள தேற்றங்களிலுள்ள நாற்கோணங்கள் இணைகரங்களாதற்குரிய சோதனைகளையும் வாய்முறைக் கணக்குக்களாக எடுத்துக்கொள்வது நல்லது.



உருவம் 337

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

இணைகரத்தின் பண்புகள்.

[1] **கமபத ஓர் இணைகரம்.**

(i) **கம** = **தப**, **கத** = **மப** என நிறுவுக.

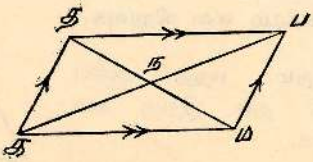
(ii) ∠**க** = ∠**ப**, ∠**ம** = ∠**த** என நிறுவுக.

நீர் ஒருருவை வரைக. அதிலே தகுதியான அடையாளங்களால் தரவைக் குறிக்க. மத ஐ இணைக்க.

முழுக் காரணங்களையுங் காட்டி ஏன் △**கமத** ≡ △**பதம** என விளக்குக.

குறிப்பு.—உம்முடைய நிறுவல் ஓரிணைகரத்தின் பரப்பு அதன் மூலைவிட்டத்தால் இருசமக் கூறிடப்பட்டிருக்கிறது என்பதையுங் காட்டுகின்றது.

2. **ஓரிணைகரம் கமபத வின் மூலைவிட்டங்கள் ந இல் வெட்டினால், கந = நப** எனவும் **மந = நத** எனவும் நிறுவுக.



உருவம் 338

ஏன் △**கநம** ≡ △**பநத** என முழுக் காரணங்களுங் காட்டி விளக்குக.

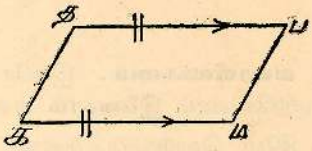
இணைகரத்திற்குரிய சோதனைகள்.

3. கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதில் கம = தப ; தப இற்குச் சமாந்தரம் கம. கமபத ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

நீர் ஒருருவை வரைந்து அதிலே தகுதியான அடையாளங்களால் தரவைக் குறிக்க. மத ஐ இணைக்க.

மப இற்குக் **கத** சமாந்தரமென நிறுவல் ஏன் போதுமானது ?

ஏன் △**கமத** ≡ △**பதம** என முழுக் காரணங்களுங் காட்டி விளக்குக.



உருவம் 339

4. கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠க = ∠ப ; ∠ம = ∠த. கமபத ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

நீர் ஒருருவை வரைந்து அதிலே தகுதியான அடையாளங்களால் தரவைக் குறிக்க. கருவிகள் தேவையில்லை.

யாதாயினும் ஒரு நாற்கோணத்தினுடைய கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை என்ன ?

தரவுகளைப் பயன்படுத்தி **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரமெனவும் **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரமெனவும் நிறுவுக.

5. கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதில் கம = தப ; கத = மப. கமபத ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

நீர் ஒருருவை வரைந்து அதிலே தகுதியான அடையாளங்களால் தரவைக் குறிக்க. மத ஐ இணைக்க.

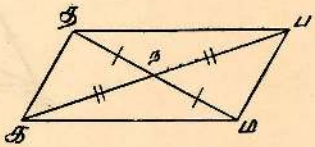
ஏன் △**கமத** ≡ △**பதம** என முழுக்காரணங்கள் காட்டி விளக்குக.

நிறுவுதலை முடிவாக்குக. (**தப** இற்கு **கம** சமாந்தரம் எனவும் **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரம் எனவும் நிறுவுக.)

6. கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று ந இலே இருசமக்கூறிடுகின்றன. அதாவது கந = நப, மந = நத என்பதாகும். கமபத ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

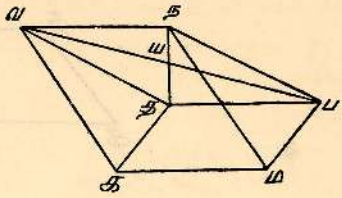
முக்கோணங்கள் **கநம, பநத** ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரமென நிறுவுக.

மப இற்கு **கத** சமாந்தரம் என எவ்வாறு நீர் நிறுவுவீர் ?



உருவம் 340

7. (புதிது காண்டற்கு உதாரணம்.) உரு 341 இல் **கமபத, கமநவ** இணைகரங்கள். மேற்கூறிய உதாரணங்களைப் பயன்படுத்தி உம்மால் இயன்றளவு புதிய பண்புகளைக் கண்டறிக. காரணங் காட்டுக.



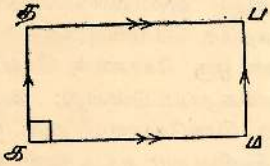
உருவம் 341

கமபத, கமநவ என்பன வெவ்வேறான தளத்திலமைந்த இணைகரங்களெனக்கொண்டு மேற்கூறிய வினாவிற்கு விடை தருக.

[ஒருகோட்டிற்குச் சமாந்தரமான இருகோடுகள், இவை மூன்றும் ஒரே தளத்திலில்லாவிடினும் தாமே ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமானவை எனக்கொள்க.]

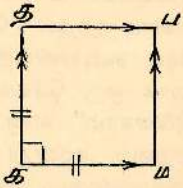
செவ்வகமுஞ், சதுரமுஞ், சாய்சதுரமும்.

தன் ஒரு கோணஞ் செங்கோணமாயுள்ள இணைகரஞ் செவ்வகம் எனப்படும்.



செவ்வகம்

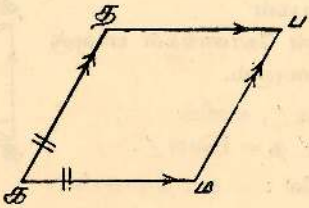
உருவம் 342



சதுரம்

உருவம் 343

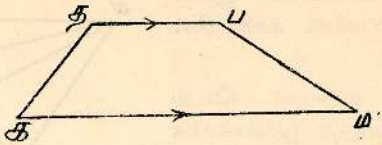
செவ்வகம் ஒன்றின் **அடுத்துள இரு** பக்கங்கள் சமமாயின் அது சதுரம் எனப்படும். **கமபத** எனுஞ் சதுரம் **கம** மேல் உள்ள **சதுரம்** என்றுஞ் சொல்லப்படும்.



சாய்சதுரம்

உருவம் 344

இணைகரம் ஒன்றின் **அடுத்துள இருபக்கங்கள்** சமமாயின் அது **சாய் சதுரம்** எனப்படும்



சரிவகம்

உருவம் 345

ஒரேயொரு சோடி பக்கங்கள் சமாந்தரமாயுடைய ஒரு நாற்கோணம் **சரிவகம்** எனப்படும். மற்றை இருபக்கங்கள் சமமாயின் அது இருசமபக்கச் சரிவகம் எனப்படும். இவ்வாறாக உரு 345 இல் **கம || தப** ஆயும் **கத = மப** ஆயும் **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரமற்றதாயும் இருந்தால் **கமபத** ஓரிருசமபக்கச் சரிவகம் எனப்படும்.

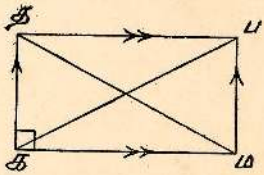
இந்த வரைவிலக்கணங்களைக் கவனமாய்க் குறித்துக்கொள்ளல் வேண்டும். ஒரு வரைவிலக்கணம் மயக்கம் அறுக்கும் அளவிற்கு வேண்டிய யாவையுங் கொண்டிருத்தல் வேண்டும். ஆனால் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து உய்த்துணரக் கூடியனவற்றைத் தன்னகத்தே கொண்டிருத்தல் ஆகாது. உதாரணமாக ஒரு செவ்வகமானது "தன் **ஒரு** கோணஞ் செங்கோணமாயுள்ள இணைகரம்" என வரைவிலக்கணங்கூறப்பட்டுள்ளது; அப்பொழுது அதன் மற்றை மூன்று கோணங்களுஞ் செங்கோணம் என **நிறுவுதல்** கூடும்; இவ்வுண்மை, வரைவிலக்கணத்தினின்றும் உய்த்துணரக்கூடியதாயுள்ளது. எனவே, அதை வரைவிலக்கணத்துடன் சேர்த்தல் தவறாகும்.

மாணவர் பின்வருஞ் சிறப்பானபேறுகளைப் பெறுவதற்கு **171, 173, 174** ஆகிய பக்கங்களிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைவிலக்கணங்களையும் இணைகரத்தின் பண்புகளையும் பயன்படுத்தல் வேண்டும். இப்பேறுகளை, அவற்றினிறுவல் கொடுக்கப்படவேண்டுமென்று தெளிவாகக் கேட்டுக்கொள்ளப்பட்டாலன்றிக் கணக்குவேலைகளின் பொருட்டு எடுகோள்களாகக் கொள்ளலாம்.

I. **செவ்வகத்தின் பண்புகள்**

(i) **ஒரு செவ்வகத்தின் கோணங்கள் யாவுஞ் செங்கோணங்களாகும்.**

$\angle$ **க** = ஒரு செங் $\angle$, எனின்
$\angle$ **ம** = $\angle$ **ப** = $\angle$ **த** = 1செங் $\angle$.



உருவம் 346

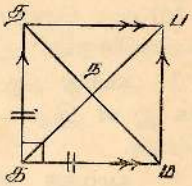
(**கருவிதேவை இல்லை** : சமாந்தரங்களைப் பயன்படுத்துக.)

(ii) **ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமனாகும்.**

[$\triangle$ **தகம** $\equiv$ $\triangle$ **பமக** என நிறுவுக.]

(iii) ஓரிணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமமெனின் அவ்விணைகரம் ஒரு செவ்வகமாம்.

[△ தகம = △ பமக என நிறுவுக ;
∠ க + ∠ ம என் 2 செங்கோணங்கட்குச் சமன் ?]



உருவம் 347

II. ஒரு சதுரத்தின் பண்புகள்

(i) ஒரு சதுரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் சமனாகும்.

கம = கத, எனின்
கம = மப = பத ஆகும்.

[கருவி தேவையில்லை ; இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமன்.]

(ii) ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமன் ; அவை ஒன்றையொன்று செங்கோணமாக வெட்டிக்கொள்கின்றன.

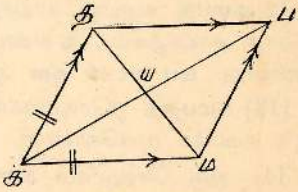
(iii) ஒரு சதுரத்தின் பக்கத்துடன் அதன் மூலைவிட்டம் அமைக்குங் கோணம் 45° ஆகும்.

(iv) ஓரிணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமாந்தரமாயும் ஒன்றையொன்று செங்கோணமாய் வெட்டுபவையாயும் இருந்தால் அவ்விணைகரம் ஒரு சதுரமாம்.

III. ஒரு சாய்சதுரத்தின் பண்புகள்

(i) ஒரு சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் யாவுஞ் சமனாம்.

கம=கத எனின் கம=மப=பத ஆகும்.



உருவம் 348

(ii) ஒரு சாய்சதுரத்தின் கோணங்கள் மூலைவிட்டங்களால் இருசமக் கூறிடப்படுகின்றன.

(iii) ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்கோணமாய் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

(iv) ஓரிணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று செங்கோணமாய் வெட்டிக்கொண்டால் அவ்விணைகரம் ஒரு சாய்சதுரமாம்.

எண் கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 37

1. கமபத ஒரு செவ்வகம். ∠ மகப = 32°. ∠ தமப ஐக் காண்க.

[2] கமபத ஒரு செவ்வகம். ∠ கபத = 67°. ∠ கதம ஐக் காண்க.

3. கமபத ஒரு சாய்சதுரம். ∠ கமப = 56° எனின் ∠ கபத ஐக் காண்க.

[4] கமபத ஒரு சாய்சதுரம். ∠ மகப=35° எனின் ∠ கதப ஐக் காண்க.

5. ஒரு செவ்வகம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ∠**கநம** = 110° எனின் ∠**கபம** ஐயும் ∠**கபத** ஐயுங் காண்க.

[6] ஒரு செவ்வகம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ∠**கமத** = 74° எனின் ∠**தநப** ஐக் காண்க.

7. **கமபத** ஒரு சதுரம்; ஒரு நேர்கோடு **பநவ, மத** ஐ **ந** இலும் **மக** ஐ **வ** இலும் வெட்டுகின்றது. ∠**பநத** = 80° எனின் ∠**பவக** ஐக் காண்க.

8. **கமபதந** ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணம். **கமவப** அதனுள்ளிருக்கும் ஒரு சதுரம். ∠**பமவ** ஐயும் ∠**தமய** ஐயுங் காண்க.

[9] **கமப** ஒரு சமபக்க முக்கோணம், **மபவய** உம் **மபதந** உம் **மப** மேலமைந்த இரு சதுரங்கள்; ∠**கவம** ஐயும் ∠**கதம** ஐயுங் காண்க.

10. ஒரு சதுரம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **கம** இலிருந்து **கந** இற்குச் சமமான ஒரு பகுதி **கவ** வெட்டப்படுகின்றது. ∠**கநவ** = 3 ∠**மநவ** என நிறுவுக.

[11] சதுரம் **கமபத** இன் பக்கம் **கத** என்பது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**நதம** இன் இருசமவெட்டி நீட்டப்பட்ட **கப** ஐ **வ** இற் சந்திக்கின்றது. ∠**கவத** ஐக் கண்டு **பத** = **பவ** என நிறுவுக.

12. **கமபத** எனுஞ் சாய்சதுரத்தில் ∠**ம** = 108°; **பகநவ** எனும் பிறிதொரு சாய்சதுரம், **ந** என்பது நீட்டப்பட்ட **கம** இல் உள்ளதாக, அமைந்துள்ளது. **மப** உடன் **கவ** ஆக்குங் கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

[13] **கமபதந** ஓரொழுங்கான ஐங்கோணம்; **கமவ** அதனுள்ளிருக்கும் ஒரு சமபக்க முக்கோணம். △**வநம** இன் கோணங்களைக் காண்க.

14. ஒரு செவ்வகம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **நகவ** என்பது **ம** உம் **வ** உம் **கப** இன் ஒரு பக்கத்திலமையக் கூடியதாய் உள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம். ∠**கபத** = 25° எனின் △**கவம** இன் கோணங்களைக் காண்க.

*15. **கமபத** ஒரு சதுரம்; **கமந** அதனுள்ளிருக்கும் ஒரு சமபக்க முக்கோணம். ∠**தநப** வைக் காண்க.

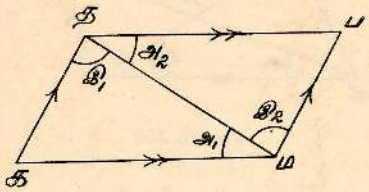
*16. **கமபதந** ஓரொழுங்கான ஐங்கோணம். **நதபவ** அதனுள்ளிருக்கும் ஓரிணைகரம். ∠**நவக** ஐக் கண்டு **கவப** ஒரு நேர்கோடென நிறுவுக.

*17. செவ்வகம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **கந** ஆனது **கம** இலும் பெரிது. **க** ஐ மையமாகவும் **கந** ஐ ஆரையாகவுமுடைய வட்டம் நீட்டப்பட்ட **கம** ஐ **வ** இல் வெட்டுகின்றது. ∠**கநம** = 4 ∠**மநவ** எனின் ∠**மகப** ஐக் காண்க.

*18. **கமபத** ஒரு சதுரம்; **ந** என்பது நீட்டப்பட்ட **பக** இலே, **தகநவ** என்னும் இணைகரஞ் சாய்சதுரமாய் அமையக் கூடியதாகவுள்ள, ஒரு புள்ளி. **வப** என்பது **நத** ஐ **ய** இலே வெட்டினால் △**தயவ** இன் கோணங்களைக் கண்டு **யந** = **யப** என நிறுவுக.

தேற்றம் 15

(1) ஓரிணைகரத்தின் எதிரான பக்கங்களுங் கோணங்களுஞ் சமனாகும்.
(2) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் இணைகரத்தின் பரப்பை இருசமக்கூறிடுகின்றது.



உருவம் 349

தரவு. ஓரிணைகரம் **கமபத** உம் ஒரு மூலைவிட்டம் **மத** உம்.

மற்கோள் (1)**கம = தப, கத = மப ;**

∠க = ப, ∠ம = ∠த.

(2) **△கமத** இன் பரப்பு = **△பமத** இன் பரப்பு.

நிறுவல். (1) உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு குறித்தால் முக்கோணங்கள் **கமத, பதம** என்பவற்றில்,

$அ_1 = அ_2$ ஒ. வி. கோணங்கள், **கம || தப,**

$இ_1 = இ_2$ ஒ. வி. கோணங்கள், **கத || மப,**

மத = தம.

∴ முக்கோணங்கள் **கமத / பதம** சர்வசமன் கோபகோ.

∴ **கத = பம, கம = பத ;**

∠க = ∠ப.

(2) **△கமத ≡ △பதம** ஆனதால், முக்கோணங்கள் பரப்பிற் சமனாகும்.

இவ்வாறாக **கப** ஐ இணைத்து வருமாறு நிறுவலாம்:

△கமப ≡ △பதக

∴ **∠ம = ∠த** ஆகின்றது ;

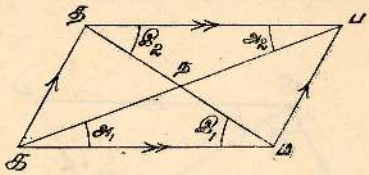
கப ஆனது இணைகரத்தின் பரப்பை இருசமக்கூறிடுகின்றது.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் (1) இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கங்கள்.

(2) இணைகரத்து எதிர்க்கோணங்கள்.

தேற்றம் 16

ஓரிணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றன.



உருவம் 350

தரவு. ஓரிணைகரம் **கமபத** ; அதன் மூலைவிட்டங்கள் **கப, மத** என்பன **ந** வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

மேற்கோள். கந = நப;
மந = நத.

நிறுவல். உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால், முக்கோணங்கள் **கநம, பநத** என்பவற்றில்,

$அ_1 = அ_2$ ஒ. வி. கோணங்கள், கம || தப,
$இ_1 = இ_2$ ஒ. வி. கோணங்கள், கம || தப,
கம = பத இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கங்கள்.

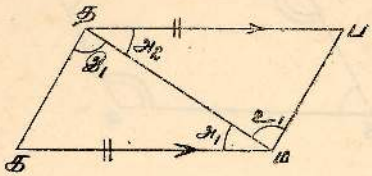
∴ முக்கோணங்கள் கநம / பநத சர்வசமன் கோபகோ.

∴ மந = தந,
கந = பந.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : இணைகரத்து மூலைவிட்டங்கள்.

தேற்றம் 17

ஒரு நாற்கோணத்தின் ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருந்தால், மற்றைச் சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமனுயுஞ் சமாந்தரமாயும் இருக்கும்.



உருவம் 351

தரவு. ஒரு நாற்கோணம் கமபத ; அதில் கம = தப ; கம || தப.

மேற்கோள். கத = மப ; கத || மப.

கருவி. மத ஐ இணைக்க.

நிறுவல். உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால், முக்கோணங்கள் கமத, பதம என்பவற்றில்,

கம = பத — தரவு,

மத = தம,

$அ_1 = அ_2$ — ஒ. வி. கோணங்கள், கம || தப.

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{கமத}{பதம}$ ஏர்வசமன் பகோப.

∴ கத = பம ;

இன்னும் $இ_1 = உ_1$;

ஆனால் இவை ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்.

∴ மப இற்கு கத சமாந்தரம்.

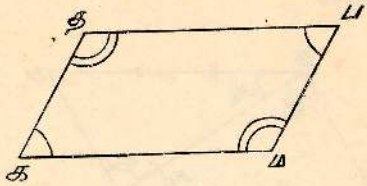
குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : 2 பக்கங்கள் சமனுஞ் சமாந்தரமும்.

இத்தேற்றத்தைப் பின்வருமாறுங் கூறலாம்.

சமமுஞ் சமாந்தரமுமாயுள்ள ஒரு சோடி பக்கங்களையுடைய ஒரு நாற்கோணம் ஓரிணைகரமாம்.

தேற்றம் 18

ஒரு நாற்கோணத்தின் எதிர்க்கோணங்கள் சமமெனின் அந்நாற்கோணம் ஓரிணைகரமாம்.



உருவம் 352

தரவு. ஒருநாற்கோணம் **கமபத** ; அதில் ∠**க** = ∠**ப**; ∠**ம** = ∠**த**

மேற்கோள். **கமபத** ஓரிணைகரம்.

நிறுவல். ஒரு நாற்கோணத்தின் கோணங்களினது கூட்டுத்தொகை 4 செங்கோணங்கள் ;

∴ ∠**க** + ∠**ம** + ∠**ப** + ∠**த** = 4 செங்கோணம்.

ஆனால் ∠**க** = ∠**ப** ; ∠**ம** = ∠**த** தரவு,

∴ 2∠**க** + 2∠**ம** = 4 செங்கோணம்,

∴ ∠**க** + ∠**ம** = 2 செங்கோணம்,

ஆனால் இவை குறுக்குவெட்டி **கம** இன் ஒரு பக்கத்துள்ள அகக் கோணங்களாம்.

∴ **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரம்.

இவ்வாறே ∠**க** + ∠**த** = 2 செங்கோணம் என நிறுவலாம் ;

ஆனால் இவை குறுக்குவெட்டி **கத** இன் ஒருபக்கத்துள்ள கோணங்களாம் ;

∴ **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரம்.

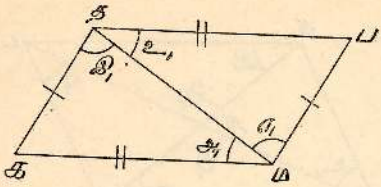
∴ **கமபத** இன் இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்களுஞ் சமாந்தரம்;

∴ **கமபத** ஓரிணைகரம்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்.

தேற்றம் 19

ஒரு நாற்கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாயின் அந்நாற்கோணம் ஓரிணைகரமாம்.



உருவம் 353

தரவு. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** ; அதில் **கம = தப** ;
கத = மப.

மேற்கோள். **கமபத** ஓரிணைகரம்.

கருவி. **மத** ஐ இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **மகத, தபம** என்பவற்றில்,

கம = பத தரவு,

கத = பம தரவு,

மத = தம.

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{மகத}}{\text{தபம}}$ சர்வசமன் பபப.

∴ உருவத்திலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால்,

$அ_1 = உ_1$,

ஆனால் இவை ஒ. வி. கோணங்கள்.

∴ **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரம் ;

அத்துடன் $இ_1 = எ_1$,

ஆனால் இவை ஒ. வி. கோணங்கள்,

∴ **மப** விற்கு **கத** சமாந்தரம்.

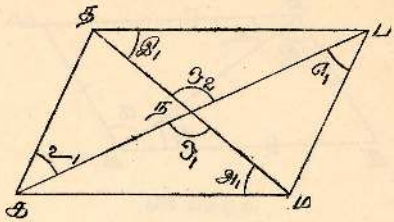
∴ **கமபத** இன் இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்களுஞ் சமாந்தரம்.

∴ **கமபத** ஓரிணைகரம்.

குறிப்புக்குரிய குறுக்கம் : எதிர்க்கோணங்கள் சமம்.

தேற்றம் 20

ஒரு நாற்கோணத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடின் அந்நாற்கோணம் ஓரிணைகரமாம்.



உருவம் 354

தரவு. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத**; அதின் மூலைவிட்டங்கள் **கப, மத** என்பவை ஒன்றையொன்று **ந** இலே, **கந = நப** ஆயும், **மந = நத** ஆயும் அமைய, வெட்டிக்கொள்கின்றன.

மேற்கோள். **கமபத** ஓரிணைகரம்.

நிறுவல். உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால், முக்கோணங்கள் **கநம, பநத** என்பவற்றில்,

கந = பந	**தரவு,**
மந = தந	**தரவு,**
$ஓ_1 = ஓ_2$	**குத்தெதிர்க்கோணங்கள்.**

எனவே முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கநம}}{\text{பநத}}$ சர்வசமன் பகோப.

$\therefore$ $அ_1 = இ_1$;

ஆனால் இவை ஒ. வி. கோணங்கள்,

$\therefore$ **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரமாகும்.

இவ்வாறே முக்கோணங்கள் **கநத, பநம** ஆகியவற்றிலிருந்து, ஒ. வி. கோணங்கள் $உ_1$, $எ_1$ என்பவை சமமென நிறுவலாம்.

$\therefore$ **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரம்.

$\therefore$ **கமபத** இன் இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்களுஞ் சமாந்தரம் ;

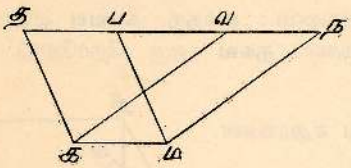
$\therefore$ **கமபத** ஓரிணைகரம்.

குறிப்புக்குரிய குறுக்கம்: மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன.

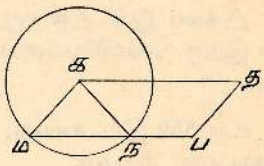
பயிற்சி 38

1. இணைகரம் **கமபத** இல், (i) **கப** ஆனது ∠**மகத** ஐ இருசமக் கூறிட்டால், (ii) **கப = மத** ஆனால், (iii) **மத** இற்கு **கப** செங்குத்தாயின் அதைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் என்பதை நிறுவுதலின்றிக் கூறுக.

2. உரு 355 இல் **கமபத, கமநவ** என்பவை **தபவந** ஒரு நேர் கோடாய் அமையக் கூடியதாக உள்ள இணைகரங்களாம். **பகோகோ** என்ற சோதனையைப் பயன்படுத்தி. △**கதவ** = △**மபந** என நிறுவுக.



உருவம் 355



உருவம் 356

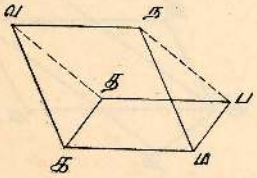
3. உரு 356 இல் **கமபத** ஓரிணைகரம். **க** வட்டத்தின் மையமாகும். ∠**நகத** = ∠**பதக** என நிறுவுக. [கருவி வேண்டியதில்லை.]

4. இணைகரம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக்கொள்கின்றன ; **ந** ஊடேசெல்லும் ஒருகோடு **கம, பத** ஆகியவற்றை **வ, ய** களில் வெட்டுகின்றது. **நவ = நய** என நிறுவுக.

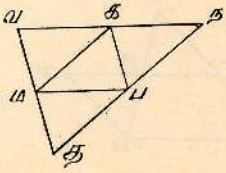
[5] **கமபத** ஓரிணைகரம். **ந** என்பது பக்கம் **மப** இனது நடுப்புள்ளி. **தந, கம** என்பவை நீட்டப்பட்டால் **வ** இற் சந்திக்கின்றன. **கம = மவ** என நிறுவுக.

[6] **கமபத** ஓரிணைகரம். **ம, த** களிலிருந்து **கப** இற்குரிய செங்குத்துக்கள் சமமென நிறுவுக.

7. உரு 357 இல் **கமபத, கமநவ** என்பன இணைகரங்கள். **பதவந** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.



உருவம் 357



உருவம் 358

8. உரு 358 இல் **க, ம, ப** ஆகியவற்றிற்கூடாக **மப, பக, கம** ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரங்களை முறையாகக் கீறினால் △**தநவ** உண்டாகின்றது. **க, ம, ப** கள் △**தநவ** இன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

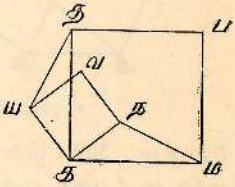
[9] **க, ம** களை மையங்களாகவுடைய இரு சமவட்டங்கள் **ப, த** களில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. **கபமத** ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

10. **கமபத** ஒரு சாய்சதுரம். ∠**தகப** இன் இருசமவெட்டி **பத** ஐ **ந** இல் வெட்டினால் ∠**தநக** = 3 ∠**தகந** என நிறுவுக.

[11] **கமபத** ஓரிணைகரம். ∠**க**, ∠**ம** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் **பத** இற் சந்திக்கின்றன. **கம** = 2 **மப** என நிறுவுக.

12. △**கமப** இல் ∠**க** ஒரு செங்கோணம்; **கமதந, கபவய** என்பவை △**கமப** இற்கு வெளியேயுள்ள சதுரங்கள். **தகவ** ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

13. உரு 359 இல் **கமபத, கநவய** சதுரங்கள். **மந** = **தய** என நிறுவுக.

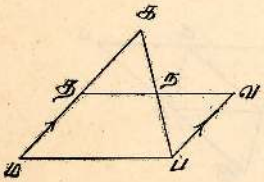


உருவம் 359

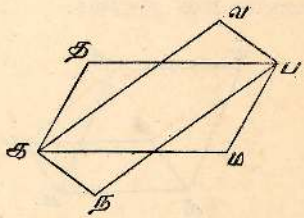
[14] **கமபத** ஓரிணைகரம்; **கமநவ, மபயச** என்பவை இணைகரத்திற்கு வெளியேயுள்ள சதுரங்கள். (i) ∠**நமச** = ∠**மபத** எனவும், (ii) **சந** = **மத** எனவும் நிறுவுக.

[15] இணைகரம் **கமபத** இன் பக்கம் **கம** ஆனது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**பமந** இன் இருசமவெட்டி நீட்டப்பட்ட **தக** ஐயும் நீட்டப்பட்ட **தப** ஐயும் **ய, வ** களிற் சந்திக்கின்றது. **தவ** = **தய** = **மக** + **மப** என நிறுவுக.

16. உரு 360 இல் **த, ந** கள் **கம, கப** களின் நடுப்புள்ளிகள். **தநவ** ஒருநேர்கோடு. (i) **பவ** = **கத** எனவும், (ii) **பவதம** ஓரிணைகரம் எனவும், (iii) **தந** = $\frac{1}{2}$ **மப** எனவும் நிறுவுக.



உருவம் 360

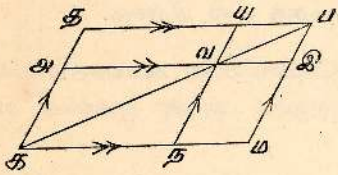


உருவம் 361

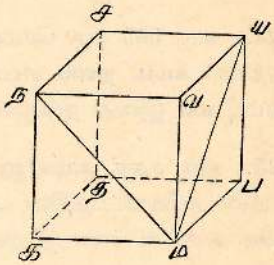
17. உரு 361 இல் **கமபத** உம் **கநபவ** உம் இணைகரங்கள் (i) **கப, மத, நவ** என்பவை ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக; (ii) **தவ** இற்கு **நம** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[18] **கமபத** ஒரு சாய்சதுரம்; **நகமவ** ஆனது **நக = கம = மவ** ஆக அமைந்துள்ள ஒரு நேர்கோடு. **நத** உம் **வப** உம் நீட்டப்பட்டாற் செங் கோணமாய் வெட்டிக்கொள்கின்றன என நிறுவுக.

19. உரு 362 இல் **கமபத** ஓரிணைகரம்; **வ** என்பது மூலைவிட்டம் **கப** இல் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **அவயத**, **நவஇம** ஆகியவற்றின் பரப்புக்கள் சமன் என நிறுவுக. [ஓரிணைகரத்தின் பரப்பளவு, மூலைவிட்டத் தால் இருசமக் கூறிடப்படுகின்றது.]



உருவம் 362



உருவம் 363

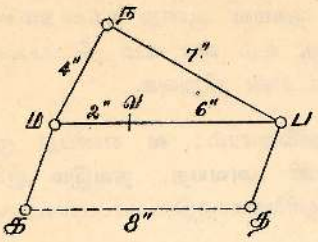
20. உரு 363 ஒரு சதுரத்திண்மத்தைக் குறிக்குமெனின் ∠**நமய** = 60° என நிறுவுக.

21. உரு 363 ஒரு செவ்வகத்திண்மத்தைக் குறித்தால் ∠**நமய** = ∠**தயம** என நிறுவுக.

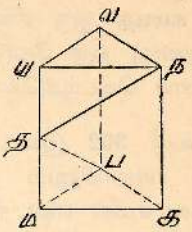
*22. **கமபத** ஒரு செவ்வகம். **ந** என்பது பக்கம் **கம** இனது நடுப் புள்ளி. **நவ** என்பது **கமபத** இனது தளத்திற்குச் செங்குத்தாகக் கீறப்பட்டுள்ளது. **வ** ஆனது **க, ம, ப, த** களுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. காரணங்கூறிச் சமாந்தரமுக்கோணங்கள் யாவை எனக் காட்டுக.

*23. உரு 364 ஆனது **கம, மப, பத, மந, பந** ஆகிய 5 கோல்களானவை சந்திக்குமிடத்தில் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு சட்டப்படலைக் குறிக்கின்றது. **கம, தப** என்னுங்கோல்கள் ஆனவை சட்டப்படல் ஒரு தளத்தில் இருக்கக் கூடியதாக முளைகள் **க, த** களில் சுழலக்கூடும். **வ** என்பது கோல் **மப** இல் உள்ள ஓரடையாளம். **வ** ஆனது **கத** இல் கையம் உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதிவழி செல்கின்றது என நிறுவுக. **ந** சென்ற வழியைக் காண்க.

[**ய** எனும் ஒரு புள்ளியை, **கய** = 4″ ஆகவும், **தய** = 7″ ஆகவும் இருக்கக் கூடியதாக எடுக்க. **மக** = **பத** = 3″.]



உருவம் 364



உருவம் 365

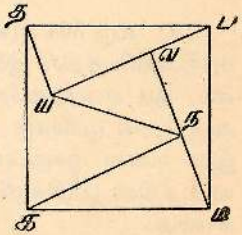
*24. உரு 365 ஒரு செம்மையான அரியத்தைக் குறிக்கின்றது. அதன் இறுதிகள் **கமப, நயவ** என்பவை சமபக்க முக்கோணங்கள். **த** என்பது விளிம்பு **மய** இனது நடுப்புள்ளி. **தப = தந** என நிறுவுக.

*25. ஒரு சதுர அடியினுள்ள ஒரு செம்மையான கூம்பகத்தின் உயரம் அடியின் மூலைவிட்டத்தின் அரையளவாகும். அதன் முகங்கள் சமபக்க முக்கோணங்கள் என நிறுவுக.

*26. **கமபத** ஓரிணைகரம். அதனது தளத்திலில்லாத ஒரு புள்ளி **ந** ஆகும்; **வ** என்பது **நம** இனது நடுப்புள்ளியாகும். **கவ** ஆனது **ய** இற்கு, **கவ = வய** ஆகவமையுமாறு நீட்டப்பட்டது. **யத** ஆனது **நப** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

*27. **கமபத** ஒரு சதுரம். **ந** என்பது **கப** இலே, **கந = கம** ஆக வமைந்த ஒரு புள்ளி; **கப** இற்குச் செங்குத்தாய் **ந** இற்கு ஊடாகச் செல்லுங்கோடு **மப, தப** ஆகியவற்றை **வ, ய** களில் வெட்டுகின்றது. **∠வகய = 45°** என நிறுவுக.

*28. **△கமப** இல் **∠ப** ஒரு செங்கோணம்; **கமதந △கமப** இற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு சதுரம். **தவ** என்பது **த** இலிருந்து **கப** இற்குள்ள செங்குத்து. **தவ = பக + பம** என நிறுவுக.



உருவம் 366

*29. உரு 366 இல் **கமபத** ஒரு சதுரம். **∠கநம** ஒரு செங்கோணம். **பவய** உம் **தய** உம் முறையே **கந, மநவ** ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளன. (i) **நவ = கந − நம** எனவும், (ii) **∠கநய = 45°** எனவும் நிறுவுக.

*30. **கயம, பயத, நயவ** என்ற ஒரு தளத்தில்லாக்கோடுகள் **ய** இற் சந்திக்கின்றன. **ய** யாவற்றிற்கும் நடுப்புள்ளி. இணைகரங்கள் **கநபஅ, மவதஇ** என்பன முடிவாக்கப்பட்டன. (i) **அஇ** என்பது **ய** இற்கூடாகச் செல்கின்றது என நிறுவுக. (ii) **அவ = நஇ** எனவும் நிறுவுக.

*31. **மதந** ஒரு நான்முகத்திண்மத்தின் அடி. **இ** அதன் உச்சி. அதன் ஒவ்வொரு விளிம்புக்கூடாகவும் அதன் எதிர் விளிம்பிறகுச் சமாந்தரமாக ஒரு தளங் கீறப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறாக உரு 363 இல் உள்ள இணைகரத்திண்மம் உருவாகின்றது. ஒரு நான்முகத்திண்மத்தின் எதிர் விளிம்புகளுடைய நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகள் சந்திக்கின்றனவென்றும் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றனவென்றும் இவ்வமைப்பைக்கொண்டு நிறுவுக. இணைகரத்திண்மத்தின் விளிம்புகள் யாவுஞ் சமமாயின நான்முகத்திண்மத்தின் எதிர் விளிம்புகளைப்பற்றி நீர் என்ன சொல்லக்கூடும்?

முக்கோணம், நாற்கோணம் ஆகியவற்றின் அமைப்பு.—பருவம் அ வில் எளிய போதிய தரவுகளினின்றும் முக்கோணங்கள் நாற்கோணங்கள் ஆகியவற்றை அமைப்பதைப்பற்றிய உதாரணங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பயிற்சி 39 இனது நோக்கம் இவ்வேலையை மீண்டும் பயில்வதற்கேற்ற வழிவகைகளைத் தருவதேயாம். இம்மீட்டற்பயிற்சி வேண்டியதில்லையெனின் இப்பயிற்சியைச் செய்யாது விட்டுவிடலாம்.

மீட்டற் பயிற்சி

பயிற்சி 39

[எப்பொழுதும் உருவை வரையமுன் தேவையான உருவின்றெளிவான, வரைப்படம் ஒன்றைக் கீறி அதிலே தரவுகளைக் குறிக்க.]

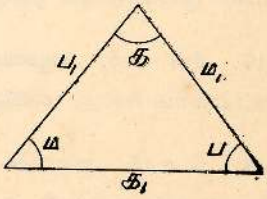
1–9 வரை கொடுக்கப்பட்ட கணக்குகளிலுள்ள அளவுகளைக்கொண்டு, இயலுமெனின், நீர் விரும்பும் நீள அலகுகளை உபயோகித்து △**கமப** ஐ அமைக்க. வெவ்வேறிரு தீர்வுகள் உளவெனின் அவ்விரண்டையும் அமைக்க. தீர்வு இல்லையெனின் அவ்வாறு கூறுக. [அடிக்கீறிட்ட எழுத்துக்கள் இங்கு பக்கங்களைக் குறிக்கும்.]

1. (i) $க_1 = 3$, $ம_1 = 4$, $ப_1 = 5$; **க** ஐ அளக்க.
   (ii) $க_1 = 3$, $ம_1 = 4$, $ப_1 = 8$; **க** ஐ அளக்க.

[2] $க_1 = 5$, **ம** $= 30°$, **ப** $= 45°$; ம, ஐ அளக்க.

3. $க_1 = 4$, **க** $= 48°$, **ம** $= 33°$; ம, ஐ அளக்க.

[4] (i) $க_1 = 7$, **க** $= 110°$, **ம** $= 40°$; ம, ஐ அளக்க.
   (ii) $க_1 = 5$, **ம** $= 125°$, **ப** $= 70°$; ம, ஐ அளக்க.



உருவம் 367

[5] ம, = 7·3, ப, = 5·4, க = 125°; க, ஐ அளக்க.

6. (i) ம, = 5, ப, = 7, ப = 72°; க, ஐ அளக்க.

(ii) ம, = 6, ப, = 4, ப = 40°; க, ஐ அளக்க.

(iii) ம, = 8, ப, = 6, ப = 65°; க, ஐ அளக்க.

[7] க, = ம, = 6·9, க = 50°; ப, ஐ அளக்க.

8. க, = 11·2, ம, = 7·4, க = 90°; ப, ஐ அளக்க.

9. க, : ம, : ப, = 4 : 2 : 3; க ஐ அளக்க.

10-15 வரை உள்ள கணக்குக்களிலுள்ள அளவுகளைக்கொண்டு உமக்கு விரும்பிய நீள அலகுகளால் நாற்கோணம் கமபத ஐ அமைக்க.

[10] கம = 4, மப = 4·5, பத = 3, ∠ ம = 80°, ∠ ப = 110°; கத ஐ அளக்க.

11. கம = 5, கப = 6, கத = 4, மத = 7, பத = 3; மப ஐ அளக்க.

[12] கம = 5, மப = 6, பத = 3, தக = 4·5, ∠ த = 100°; ∠ ம ஐ அளக்க.

13. ∠ ம = 70°, ∠ ப = 95°, ∠ த = 105°, கம = 5, கத = 4; மப ஐ அளக்க.

[14] கம = 5, ∠ பகம = 35°, ∠ கமத = 47°, ∠ கபம = 65°, ∠ கதம = 54°; பத ஐ அளக்க.

15. கம = மப = 3, கத = தப = 5, ∠ ம = 120°; ∠ த ஐ அளக்க.

[16] 6 ச.மீ. அடியையும் 70° உச்சிக்கோணத்தையுமுடைய இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று அமைக்க. அதன் பக்கங்களை அளக்க.

17. 4·6 ச.மீ. அடியையும் 5 ச.மீ. உயரத்தையுமுடைய இருசமபக்க முக்கோணம் ஒன்று அமைக்க. அதன் உச்சிக்கோணத்தை அளக்க.

18. 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒருவட்டம் வரைக. க, ம, ப கள் பரிதியிற்கிடக்கவும் கம = 8 ச.மீ. ஆயிருக்கவும் கப 7 ச.மீ. ஆயிருக்கவும் கூடியதாய் ஒரு முக்கோணம் கமப வரைக. ∠ மகப ஐ அளக்க. [இரு விடைகள்.]

முக்கோணங்கள் இணைகரங்கள் ஆகியவற்றின் அமைப்பு. போதிய தரவுகளிலிருந்து செவ்வகம், இணைகரம் ஆகியவற்றை அமைப்பதற்கு பக்கங்கள் 174 – 182 வரை ஆராய்ந்த பண்புகளை நன்கு அறிந்திருத்தல் வேண்டும். இவற்றைப் பின்வருமாறு சுருக்கிக் கூறலாம் :—

(1) ஒவ்வோரிணைகரத்திலும்,

(அ) எதிர்க்கோணங்கள் சமன் ;

(இ) எதிர்ப்பக்கங்கள் சமன் ;

(உ) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகின்றன ;

(எ) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் பரப்பை இருசமக்கூறிடுகின்றது.

(2) ஒரு நாற்கோணம் பின்வரும் பண்புக்களில் யாதாயினும் ஒன்றைக் கொண்டிருப்பின் அது ஓரிணைகரமாகும்.

(அ) இரு சோடி எதிர்க்கோணங்களுஞ் சமன் ;

(இ) இரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்களுஞ் சமன் ;

(உ) ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமனுஞ் சமாந்தரமும் ;

(எ) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்தல்.

(3) ஒவ்வொருசெவ்வகத்திலும்,

(அ) எல்லாக் கோணங்களுஞ் செங்கோணங்கள் ;

(இ) மூலைவிட்டங்கள் சமன்.

(4) ஒவ்வொரு சதுரத்திலும்,

(அ) மூலைவிட்டங்கள் சமன் ;

(இ) மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணமாய் வெட்டிக்கொள்கின்றன ;

(உ) ஒவ்வொரு பக்கத்துடனும் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமுமாக்குங் கோணம் 45°.

(5) ஒவ்வொரு சாய்சதுரத்திலும்,

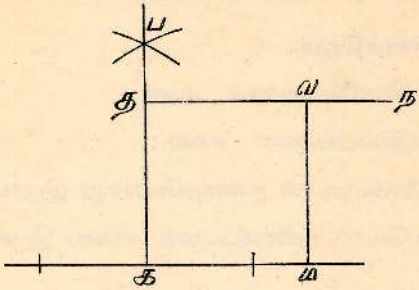
(அ) எல்லாப் பக்கங்களுஞ் சமன் ;

(இ) மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணமாய் வெட்டிக்கொள்கின்றன ;

(உ) கோணங்கள் மூலைவிட்டங்களால் இருசமக்கூறிடப்படுகின்றன.

அமைப்பு 7

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டின்மேல் ஒரு சதுரம் வரைதல்.



உருவம் 368

தரவு. ஒரு நேர்கோடு **கம.**

அமைக்கவேண்டியது. **கம** ஐ ஒருபக்கமாகவுடைய ஒரு சதுரம்.

அமைப்பு. **க** இலிருந்து **கம** இற்குச் செங்குத்தான ஒருகோடு **கப** ஐ வரைக. **கப** இலிருந்து **கம** இற்குச் சமமாகக் **கத** ஐ வெட்டுக. **த** இற்கூடாக, **தந** ஐ **கம** இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறுக. **ம** இற்கூடாக **கத** இற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு நேர்கோட்டை, **தந** ஐ **வ** இல் வெட்டக்கூடியதாகக் கீறுக. இப்பொழுது **கமவத** ஏ வேண்டிய சதுரமாகும்.

நிறுவல். அமைப்பால் **கமவத** ஓரிணைகரம்.

$\angle$ **மகத** $= 1$ செங் $\angle$ ஆதலின் **கமவத** ஒரு செவ்வகம்.

கம $=$ **கத** ஆதலின், செவ்வகம் **கமவத** ஒரு சதுரம்.

எண்கொண்ட தரவுகளிலிருந்து ஒருருவை அமைக்கும்பொழுது,

(1) வேண்டிய உருவின்றெளிவான வரைப்படம் ஒன்றை வரைக;

(2) உமது வரைப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்க ;

(3) தரவுகளால் அல்லது தரவுகளினின்றும் உய்த்தறியக்கூடிய வற்றால் அமைக்கப்படக்கூடிய உருவில் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தை வரைக அல்லது காண்க. 1—3 வரை உள்ள உதாரணங்களைப் பார்க்க.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. கமபத என்னும் இணைகரம் ஒன்றை,

கம = 6 ச.மீ., கப = 10 ச.மீ., மத = 8 ச.மீ. ஆக இருக்க அமைக்க.

கத ஐ அளக்க.

கமபத இனது தெளிவான வரைப்படம் ஒன்றை வரைக. தரவை அதிற் காட்டுக. மூலைவிட்டங்கள் ந இலே வெட்டுவன ஆகுக.

(i) உமது வரைப்படத்தில் கந, மந ஆகியவற்றினீளங்களைக் காட்டுக.

(ii) உருவின் எப்பகுதியை இப்போது அமைக்கலாம் ?

(iii) அமைப்பை முடிவாக்கிக் கத ஐ அளக்க.

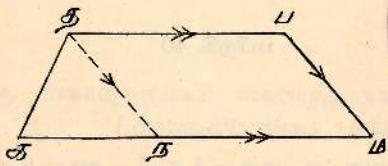
2. கமபத என்னுஞ் சரிவகம் ஒன்றை

தப இற்கு கம சமாந்தரமாகவும்

கம = 8·5 ச.மீ., மப = 3·5 ச.மீ., பத = 4·5 ச.மீ.,

தக = 3 ச.மீ. ஆகவும் இருக்குமாறு அமைக்க.

மத ஐ அளக்க.



உருவம் 369

கமபத இனது தெளிவான வரைப்படம் ஒன்றை வரைக. அவ்வரைப் படத்தில் தந ஐ பம இற்குச் சமாந்தரமாய்க் கம ஐ ந இல் சந்திக்குமாறு வரைக.

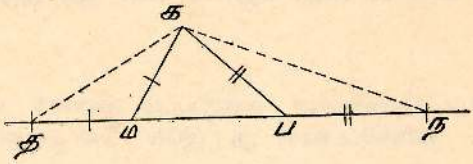
(i) உமது வரைப்படத்தில் தந, கந ஆகியவற்றின் அளவுகளைக் குறிக்க.

(ii) உருவத்தின் எப்பகுதியை இப்பொழுது அமைக்கலாம் ?

(iii) அமைப்பை முடிவாக்கி மத ஐ அளக்க.

3. **கமப** என்னும் ஒரு முக்கோணத்தை,

$\angle$ ம $= 60°$, $\angle$ ப $= 40°$, சுற்றளவு $= 9$ ச.மீ. ஆக இருக்க அமைக்க. **மப** ஐ அளக்க.



உருவம் 370

$\triangle$ **கமப** இனது தெளிவான வரைப்படம் ஒன்றை வரைக. அதில் $\angle$ ம, $\angle$ ப ஆகியவற்றின் பருமனைக் குறித்து, அடையாளத்தாற் காட்டியவாறு உரு 370 ஐ முடிவாக்குக.

உமது வரைப்படத்தில் **பம** ஐ, **மத** = **மக** ஆகவிருக்க **த** இற்கு நீட்டுக. **மப** ஐ, **பக** = **பந** ஆகவிருக்க **ந** இற்கு நீட்டுக. **கத, கந** களை இணைக்க.

(i) உமது வரைப்படத்தில் **தந** இனது நீளத்தையும் $\angle$ **த**, $\angle$ **ந** ஆகிய வற்றின் அளவுகளையுங் குறிப்பிடுக.

(ii) உருவின் எப்பகுதியை இப்பொழுது அமைத்தல் கூடும்?

(iii) **கத** இன் இருசமவெட்டிச்செங்குத்தில் **ம** இருக்கின்றது. அது ஏன்?

(iv) அமைப்பை முடிவாக்கி **மப** ஐ அளக்க.

பயிற்சி 40

[இப்பயிற்சிகளில் சமாந்தரங்கள் செங்குத்துக்கள் ஆகியவற்றை வரைவதற்கு மூலைமட்டங்களைப் பயன்படுத்தலாம்.]

1. செவ்வகம் **கமபத** ஐ, **கம** $= 4$ ச.மீ., **கப** $= 6$ ச.மீ. ஆக அமைய வரைக. **கத** ஐ அளக்க.

[2] இணைகரம் **கமபத** ஐ, **கம** $= 4$ ச.மீ., **கத** $= 5$ ச.மீ., **கப** $= 6$ ச.மீ. ஆக அமைய வரைக. $\angle$ **மகத** ஐ அளக்க.

3. சாய்சதுரம் **கமபத** ஐ, **மத** $= 7$ ச.மீ., $\angle$ ம $= 40°$ ஆக அமைய வரைக. **கப** ஐ அளக்க.

[4] சதுரம் **கமபத** ஐ, **கப** $= 5$ ச.மீ. ஆக அமைய வரைக. **கம** ஐ அளக்க.

5. செவ்வகம் **கமபத** ஐ, மூலைவிட்டங்கள் $54°$ கோணத்தில் வெட்டவும் **மத** $= 8$ ச.மீ. ஆகவும் அமையக் கூடியதாய் வரைக. பக்கங்களை அளக்க.

[6] சாய்சதுரம் **கமபத** ஐ, **கம** = 5 ச.மீ., **கப** = 6 ச.மீ. ஆக அமைய வரைக. ∠**மகத** ஐ அளக்க.

7. ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ, **கம** = 7 ச.மீ., **கப** = 10 ச.மீ., **மத** = 8 ச.மீ. ஆக அமைய வரைக. **மப** ஐ அளக்க.

[8] ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ, **கப** = 4 அங்., **மத** = 5 அங். ஆகவும் மூலை விட்டங்கள் 50° கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்பவை ஆகவும் அமைய வரைக.பெரிய பக்கத்தை அளக்க.

9. சாய்சதுரம் **கமபத** ஐ, **கப** = 6 ச.மீ., **மத** = 9 ச.மீ. ஆக விருக்க அமைக்க. **கம** ஐ அளக்க.

[10] △**கமப** ஐ, ∠**க** = 70°, ∠**ப** = 35°, **க** இலிருந்து **மப** இற்குச் செங்குத்து 2 அங். ஆக விருக்கக் கூடியதாய் அமைக்க. **மப** ஐ அளக்க.

11. △**கமப** ஐ, ∠**ப** = 68°, **கம** = 6 ச.மீ., **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து 4 ச.மீ. ஆகவிருக்கக்கூடியதாய் அமைக்க. **மப** ஐ அளக்க.

எண் 12–16 வரையுள்ள பயிற்சிகளில் நீர் விரும்பிய நீள அலகுகளைக் கொண்டு △**கமப** ஐ அமைக்க.

[12] **க**, + **ம**, = 11, **ம**, + **ப**, = 16, **ப**, + **க**, = 13 ; ∠**க** வை அளக்க.

[13] **க** − **ம** = 25°, **ப** = 55°, **ப**, = 7 ; **க**, ஐ அளக்க.

14. **ம**, = **ப**,, **க**, = 4, **ம** − **க** = 24°; **ம**, ஐ அளக்க.

[15] **க** + **ம** = 118°, **ம** + **ப** = 96°, **க**, = 7 ; **ப**, ஐ அளக்க.

16. **க** : **ம** : **ப** = 1 : 2 : 3, **க**, = 3 ; **ப**, ஐ அளக்க.

17. சமபக்கறுக்கோணம் **கமப** இன் பக்கம் **மப** இலே **த** ஒரு புள்ளியாகும். **மத** = 3 ச.மீ., ∠**தகப** = 40°. △**கமப** ஐ அமைத்து **மப** ஐ அளக்க.

18. 5 ச.மீ. இடைவெளியுள்ள இரு சமாந்தரக் கோடுகள் **கம**, **பத** ஆகியவற்றை வரைக. **கம**, **பத** ஆகியவற்றிற்கிடையே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ய** ஐ எடுக்க. ஒரு நேர் கோடு **நயவ** ஐ **கம**, **பத** வற்றை **ந**, **வ** களில் வெட்டி **நவ** = 6 ச.மீ. ஆகவிருக்க அமையும் வண்ணம் வரைக.

எண் 19 – 24 வரையுள்ள கணக்குக்களில் ஒரு சரிவகம் **கமபத** ஐ **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரமாக அமையும் வண்ணம் அமைக்க.

19. **கம** = 8 ச.மீ., **மப** = 4 ச.மீ., **பத** = 3 ச.மீ., **தக** = 3·5 ச.மீ.; ∠**க** ஐ அளக்க.

[20] **கம** = 5 ச.மீ., **மப** = 6 ச.மீ., **பத** = 2 ச.மீ., **தக** = 4 ச.மீ. ; ∠**க** ஐ அளக்க.

21. **கம** = 8 ச.மீ., **பத** = 5 ச.மீ., ∠**க** = 72°, ∠**ம** = 40° ; **மப** ஐ அளக்க.

[22] **கம** = 4 ச.மீ., **பத** = 7 ச.மீ., ∠**க** = 130°, ∠**ம** = 70° ; **கத** ஐ அளக்க.

23. **கம** = 6·5 ச.மீ., **பத** = 3 ச.மீ., **கப** = 7 ச.மீ., **மத** = 5 ச.மீ. உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக. [உமது வரைப்படத்தில் இணைகரம் **பதமவ** ஐ முடிவாக்குக.]

[24] **கம** = 4·5 ச.மீ., **பத** = 2·5 ச.மீ., **கப** = 4 ச.மீ., **மத** = 5 ச.மீ. உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக.

25. ஓரிணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கட்கிடையேயுள்ள செங்குத்தான தூரம் 3 ச.மீ. உம் 4 ச.மீ. உமாகும். ஒரு கோணம் 70°. இணைகரத்தை அமைத்து அதன் பக்கத்துள்ளே நீளமானதை அளக்க.

*26. ஓரிணைகரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள செங்குத்தான தூரம் 4 ச.மீ. அதன் மூலைவிட்டங்கள் 5 ச.மீ. உம் 8 ச.மீ. உமாகும். இணைகரத்தை அமைக்க. உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக.

எண் 27–33 வரையுள்ள கணக்குக்களில் உமது நீள அலகுகளைக் கொண்டு முக்கோணம் **கமப** ஐ வரைக.

*27. ∠**க** = 65°, ∠**ம** = 70°, $க_1 + ம_1 + ப_1 = 12$; $க_1$ ஐ அளக்க.

*28. ∠**க** = 90°, $க_1 = 10$, $ம_1 + ப_1 = 13$; $ம_1$ ஐ அளக்க. [உமது வரைப்படத்தில் **பக** ஐ **நத** இற்கு, **கந** = **கம** ஆகுமாறு நீட்டுக. **மந** ஐ இணைக்க. ∠**பநம** ஐப்பற்றி என்ன கூறுவீர்.]

*29. ∠**ம** = 80°, $ம_1 = 10$, $க_1 + ப_1 = 13$; $ப_1$ ஐ அளக்க.

*30. ∠**க** = 70°, $ப_1 = 7$, $க_1 + ம_1 = 11$; $க_1$ ஐ அளக்க. [**கப** ஐ **நத** இற்கு **பந** = **பம** ஆக அமைய நீட்டுக. **மந** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தில் **ப** உள்ளது; ஏன் ?]

*31. ∠**ம** = 35°; $க_1 = 8$, $ம_1 + ப_1 = 10$; $ம_1$ ஐ அளக்க.

*32. ∠**ம** = 25°, $க_1 = 9$, $ப_1 - ம_1 = 4$; $ப_1$ ஐ அளக்க. [**கம** இலிருந்து **கப** இற்குச் சமமாகக் **கந** ஐ வெட்டுக; **பந** ஐ இணைக்க.]

*33. $\angle$ **க** $= 70°$, $\text{க}_1 = 9$, $\text{ம}_1 - \text{ப}_1 = 2$; **ம**, **ஐ** அளக்க. [**கப** இலிருந்து **கம** இற்குச் சமமாகக் **கந** ஐ வெட்டுக; **மந** ஐ இணைக்க. $\angle$ **பநம** ஐக் கணிக்க.]

*34. 5 ச.மீ. உயரமும் 18 ச.மீ. சுற்றளவும் உள்ள இரு சமபக்க முக்கோணம் ஒன்று அமைக்க. அதன் அடியை அளக்க.

*35. முக்கோணம் **கமப** ஐ **மப** $= 1{\cdot}7$ அங., **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து $1{\cdot}2$ அங., **ம** ஐ **கப** இதை நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் கோட்டினது நீளம் $0{\cdot}9$ அங். ஆகவிருக்க அமைக்க. உமது வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

*36. ஒரு குவிந்த நாற்கோணம் **கமபத** ஐ, **கப** $= 8$ ச.மீ., **பத** $= 6$ ச.மீ., $\angle$ **மபத** $= 65°$, **த** ஆனது **கம** இலிருந்து $3{\cdot}5$ ச.மீ. தூரம், மூலை விட்டங்கள் செங்கோணமாக வெட்டுவனவாக அமையுமாறு அமைக்க. உம் வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

சமனிலிகள்

சமனிலிகள் பற்றிய அடிப்படைத் தேற்றம் பின்வருமாறு:

ஒரு முக்கோணத்தின் புறக்கோணம் அகத்தெதிர்க்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றினும் பெரியது.

இத்தேற்றத்தை 8 இன் கீழைத்தேற்றம் எனக் கருதலாம். (ப. 122) ஆனால் இதைச் சமாந்தரங்களினது துணையின்றி நிறுவலாம். பக்கம் 637 இலுள்ள பின்னிணைப்பைப் பார்க்க.

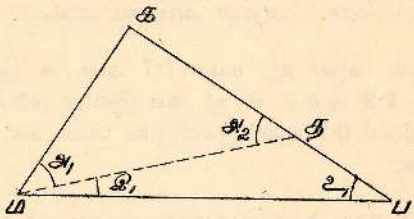
இந்நிறுவல் சர்வசமனான முக்கோணங்கள் பற்றி அறிவு கொளுத்தும் ஒரு கலைக்கினை அளிக்கின்றது.

குறியீடு $>$ என்பது "என்பதிலுஞ்சிறிது" என்பதைக் குறிக்கும். குறியீடு $<$ என்பது, "என்பதிலும் பெரிது" என்பதைக் குறிக்கும்.

இவ்வாறே, 5 அங். $>$ 4 அங., $70° < 90°$.

தேற்றம் 21

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் சமமற்றவையாயின் பெரிய பக்கத்திற்கெதிரே பெரியகோணமிருக்கும்.



உருவம் 371

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப**; அதில் **கப > கம.**

மேற்கோள். ∠**கமப** > ∠**கபம.**

கருவியும் நிறுவலும். **கப > கம** ஆனமையால் **கப** இலே, **த** எனும் ஒரு புள்ளி, **கத=கம** ஆகுமாறமைந்துள்ளது. **மத** வை இணைக்க. உருவிலுள்ள அடையாளங்களைக்கொண்டு குறித்தால்,

கம = கத ஆனமையால்	**கருவி.**
$அ_1 = அ_2$	**அடிக்கோணங்கள், இருசமபக்க முக்கோணம்.**
ஆனால் $அ_2 = இ_1 + உ_1$,	**முக்கோணத்துப் புறக்கோணம்,**

$\therefore$ $அ_2 > உ_1$,

$\therefore$ $அ_1 > உ_1$.

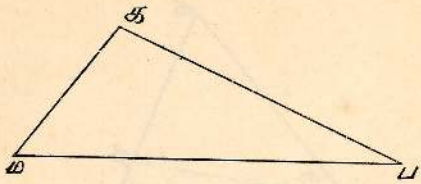
ஆனால் ∠**கமப** > $அ_1$. ஏனெனில், **த** ஆனது **க** இற்கும் **ப** இற்கும் இடையேயுள்ளதால் என்க.

$\therefore$ ∠**கமப** > $உ_1$ அதாவது ∠**கபம.**

கருவியும் அமைப்பும் என்ற கூட்டுத்தலைப்பைக் கவனிக்க. இங்கே கருவி அமைக்கற்பாலதென்பதை நிறுவ, தரவைப் பயன்படுத்தவேண்டுமென்பதற்காகவே இது இவ்வாறாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 22 (களைமுறை நிறுவல்)

ஒரு முக்கோணத்தின் இருகோணங்கள் சமமற்றவையாயின் பெரிய கோணத்திற்கெதிரே பெரியபக்கம் இருக்கும்.



உருவம் 372

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப**; அதில் $\angle$ **ம** > $\angle$ **ப**.

மேற்கோள். **கப** > **கம**.

நிறுவல். **கப** < **கம**, அல்லது

கப = **கம**, அல்லது

கப > **கம**.

கப < **கம** எனின், பெரியபக்கம் **கம** இற்கு எதிரான கோணம் சிறிய பக்கம் **கப** இற்கெதிரான கோணத்திலும் பெரிதாகும்.

∴ $\angle$ **ப** > $\angle$ **ம**, இது தரவிற்கு, எதிரிடையானது.

∴ **கம** இனும் **கப** சிறியதன்று.

கப = **கம** இற்குச் சமன் எனின், $\angle$ **ப** = $\angle$ **ம** அடிக்கோணங்கள், இருசமபக்கமுக்கோணங்கள்,

இது தரவிற்கு முரணானது;

∴ **கம** இற்கு **கப** சமனன்று.

∴ **கப** ஆனது **கம** இனுஞ் சிறியதுமன்று, அதற்குச் சமனுமன்று;

∴ **கப** > **கம**.

கிளைத்தேற்றம்: ஒரு விரிகோணமுக்கோணத்தில் பக்கங்களுள் பெரியது விரிகோணத்திற்கு எதிராகவுள்ளது; செங்கோணமுக்கோணத்தில் செம் பக்கம் பக்கங்களுட் பெரிதாகும்.

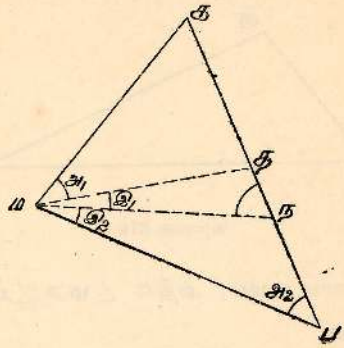
இவ்வகை நிறுவல் களைமுறை நிறுவல் எனப்படும்.

இது இயலும் எல்லா எடுகோள்களையும் எடுத்து அவற்றுள் ஒன்றைத் தவிர்ந்த மற்றைய பொய்யென நிறுவுதலில் அமைந்துள்ளது. எனவே எஞ்சிய எடுகோள் உண்மையென்பது புலப்படும்.

பிறிதொரு நேரான நிறுவல் பின்வருகின்றது.

தேற்றம் 22 (நேரான நிறுவல்)

ஒரு முக்கோணத்தின் இருகோணங்கள் சமமற்றவையாயின் பெரிய கோணத்திற்கெதிரே பெரியபக்கம் இருக்கும்.



உருவம் 373

தரவு. ஒருமுக்கோணம் **கமப**; அதில் $\angle$ **ம** > $\angle$ **ப**.

மேற்கோள். கப > கம.

கருவியும் நிறுவலும். $\angle$ **ம** > $\angle$ **ப** ஆதலின், **கப** இலே **த** எனும் ஒரு புள்ளி, $\angle$ **கமத** = $\angle$ **ப** ஆகுமாறு **க** இற்கும் **ப** இற்கும் இடையிலமைந்துள்ளது.

$\angle$ **தமப** இன் இருசமவெட்டி **தப** ஐ **ந** இலே வெட்டுவதாகுக.

உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு குறித்தால்,

$\angle$ **கமந** = $அ_1 + இ_1$,

$\angle$ **கநம** = $அ_2 + இ_2$ **முக்கோணத்துப்புறக்கோணம்.**

ஆனால், $அ_1 = அ_2$, $இ_1 = இ_2$ **கருவி,**

$\therefore$ $\angle$ **கமந** = $\angle$ **கநம** ;

ஆனால் இவை $\triangle$**கநம** இன் கோணங்கள்,

$\therefore$ **கந = கம.**

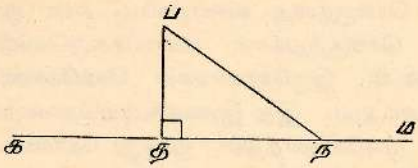
ஆனால், **ந** ஆனது **ப** இற்கும் **த** இற்கும் இடையிலுள்ளது ; ஆகையால், **ப** இற்கும் **க** இற்கும் இடையிலுள்ளது ;

$\therefore$ **கப > கந,**

$\therefore$ **கப > கம.**

தேற்றம் 23

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டிற்கு அதற்கு வெளியேயுள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையக்கூடிய எல்லா நேர்கோடுகளுள்ளும் செங்குத்தே சிறியது.



உருவம் 374

தரவு. ஒரு நேர்கோடு **கம**; அதற்கு வெளியேயுள்ள ஒருபுள்ளி **ப**. **ப** இலிருந்து **கம** இற்குள்ள செங்குத்து **பத**. **கம** இலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ந**.

மேற்கோள். **பத** < **பந**.

நிறுவல். △**பதந** இல்,

∠**த** = 1 செங் ∠ — தரவு,

∴ ∠**ந** + ∠**ப** = 1 செங் ∠ — முக்கோணத்துக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை = 2 செங்கோணங்கள்.

∴ ∠**ந** < 1 செங் ∠,

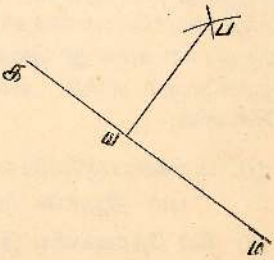
∴ ∠**ந** < ∠**த**.

∴ △**பதந** இல், ∠**ந** இற்கெதிரான பக்கம் ∠**த** இற்கெதிரான பக்கத்திலுஞ் சிறியது.

∴ **பத** < **பந**.

கிளைத்தேற்றம். மறுதலையாக, **பய** ஆனது **ப** இலிருந்து **கம** இலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளிக்குள்ள நேர்கோடுகளுட் சிறியதாயின், **பய** ஆனது **கம** இற்குச் செங்குத்தாம்.

ஏனெனில், **பய** ஆனது **கம** இற்குச் செங்குத்தல்லாவிடின் அது **ப** இலிருந்து **கம** இற்குள்ள செங்குத்தினும் பெரிதாகும் என்க.



உருவம் 375

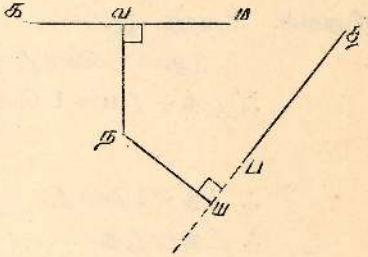
ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியுள்ள தூரம்

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு **கம** இற்கு வெளியேயுள்ள கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி **ப** இலிருந்து **கம** இற்கு (தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கம** இற்கு) செங்குத்தாக ஒரேயொரு நேர்கோடே கீறலாம்.

எவ்வாறு ஒரு செங்குத்தை வரையலாம் என ஓமைப்புக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இரு செங்குத்துக்கள் வரையக்கூடுமெனின் அவை பிறிதொரு நேர்கோட்டுடன், இருகோணங்கள் செங்கோணங்களாயுள்ள ஒரு முக்கோணமாக அமையும். இது இயலக்கூடியதொன்றன்று. ஏனெனில் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களினதும் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணமாகும் என்க. (பக்கம் 122 ஐ பார்க்க.)

வரைவிலக்கணம். யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ந** இலிருந்து ஒரு நேர்கோடு **கம** இற்குள்ள செங்குத்து **நவ** இன் நீளமானது **கம** இலிருந்து **ந** உள்ள தூரம் எனப்படும். **கம** இலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து **ந** இற்குள்ள மிகக்குறுகிய தூரம் அதுவேயாம்.

ஒரு புள்ளி **ந** இலிருந்து **கம, பத** எனும் இருகோடுகளுக்குள்ள செங்குத்துக்கள் **நவ, நய** என்பவை சமமாயின் அப்புள்ளி அக்கோடுகளிலிருந்து சம தூரத்திலுள்ளது எனப்படும்.



உருவம் 17

குறிப்பு. உரு 376 இல் **ந** இலிருந்து **பத** இற்குள்ள செங்குத்து நீட்டப்பட்ட **தப** இலே சந்திக்கின்றது.

இருபுள்ளிகட்கிடையேயுள்ள தூரம்.

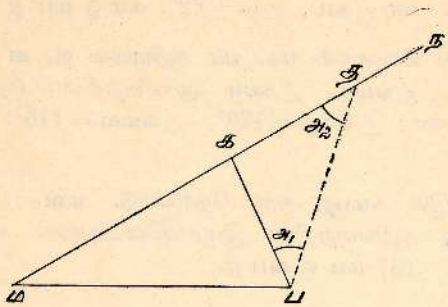
இருபுள்ளிகள் **க, ம** என்பனவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் நேர்கோடு **கம** இனது நீளமேயாம். அதை **க** இலிருந்து **ம** இற்குள்ள மிகக்குறுகிய தூரம் எனக்கொள்ளல் சாலும். ஏனெனில் இதுவும் இதற்குமுன் கொண்ட (மறைவான அல்லது வெளிப்படையான) எடுகோள்களைப்போல் தெளிவான தொன்றாகும் என்க. எனினும் இங்கு ஒரு நிறுவலைத் தந்துள்ளோம்; ஏனெனில்,

(i) அறிகணக்குவேலைகளிலும் மற்றை அமைப்புக்களிலும் இவ்வமைப்பும் நிறுவல் முறையும் பயனுடையனவாகும் என்பதாலும்,

(ii) சில தேர்வுகளில் இது இன்றும் ஒரு தேற்றத்தைப்போல் கொள்ளப்படுவதாலும் என்க.

தேற்றம் 24

ஒரு முக்கோணத்தின் எவ்விருபக்கமேனும் சேர்ந்தால் மூன்றும் பக்கத்தினும் பெரியனவாம்.



உருவம் 377

தரவு. ஒருமுக்கோணம் **கமப.**

மேற்கோள். **மக + கப > மப.**

கருவி. **மக** ஐ **ந** இற்கு நீட்டி, **கத** ஐ **கப** இற்குச் சமமாகச் **கந** இல் வெட்டுக. **பத** ஐ இணைக்க.

நிறுவல். உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு குறித்தால்,

கப = கத ஆதலின் **கருவி,**

$அ_1 = அ_2$ **அடிக்கோணங்கள், இருசமபக்க முக்கோணம்,**

ஆனால் **∠ மபத > $அ_1$;**

∴ ∠ மபத > $அ_2$;

∴ △ மபத இல் **∠ மபத** இற்கெதிரான பக்கம் $அ_2$ இற்கெதிரான பக்கத்திலும் பெரியதாகும்.

∴ மத > மப.

ஆனால் **மத = மக + கத**

= மக + கப கருவி,

∴ மக + கப > மப.

கிளைத்தேற்றம். ஒருமுக்கோணத்தின் எவ்விருபக்கங்களினதும் வித்தியாசம் மூன்றும் பக்கத்திலுஞ் சிறியதாயிருக்கும்.

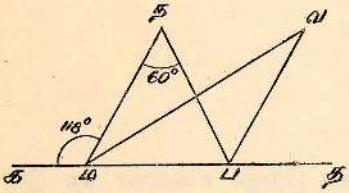
எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 41

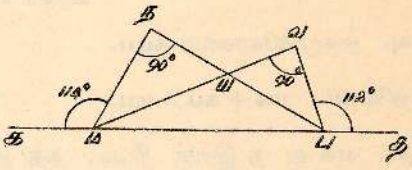
1. △கமப இல் கம = கப , ∠ம = 62°. கம ஓ மப ஓ பெரியது?

[2] △கமப இன் பக்கங்கள் பக, பம ஆகியவை ந, வ என்பவற்றிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன. ∠கமப, ∠கபம ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் ய இற் சந்திக்கின்றன ; ∠மகந = 126°, ∠கமவ = 118°. யம ஓ யப ஓ பெரியது ?

3. உரு 378 இல் கமபத ஒரு நேர்கோடு. மவ, பவ என்பவை ∠நமத, ∠நபத ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள். எது பெரியது? (i) நம ஓ நப ஓ, (ii) மப ஓ வப ஓ.



உருவம் 378



உருவம் 379

4. உரு 379 இல் கமபத ஒரு நேர்கோடு. எது பெரியது ? (i) யம ஓ யப ஓ, (ii) நம ஓ நய ஓ.

[5] △கமப இல் ∠ க = 60°, ∠ ம = 58° ; கம, கப என்பன ந, வ என்பவற்றிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன. யம, யப என்பவை, ∠ நமப, ∠ வபம என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகள். எது பெரியது ? (i) கம ஓ கப ஓ. (ii) யம ஓ யப ஓ.

[6] △கமப இல் ∠ ம = 30°, ∠ ப = 56° ; ∠ மகப இன் இருசமவெட்டியானது மப ஐ ய இல் வெட்டுகின்றது. மிகக்குறுகியதை முதலாகக் கொண்டு பின்வருவனவற்றை ஒழுங்குபடுத்துக. கய, மய, பய.

[7] △கமப இன் பக்கம் மப இலே ம, ப என்பவற்றிற்கிடையே ய ஒரு புள்ளி. யக = யப. ∠ ப = 58°, ∠ யகம = 33°. யம என்பதோ யப என்பதோ பெரியது ?

8. சமபக்கமுக்கோணம் கமப இன் பக்கம் மப இலே ம, ப களிற் கிடையே ய ஒரு புள்ளி. மிகக் குறுகிய பக்கத்தை முதலாகக்கொண்டு △கமய இன் பக்கங்களை ஒழுங்குபடுத்துக.

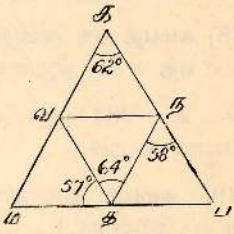
9. பின்வரும் பக்கங்களையுடைய முக்கோணங்களை வரைதல் கூடுமா ? (i) 2·5 ச.மீ., 3·5 ச.மீ., 6·5 ச.மீ.; (ii) 2 அங்., 3 அங்., 4 அங்.; 1 அங்., 2 அங்., 3 அங்.

[10] இருபக்கங்களினுடைய நீளம் 4 அடியாயும் 7 அடியாயும் மூன்றும் பக்கத்தின் நீளம் முழு அடியாயும் அமைய எத்தனை சமமில்லா முக்கோணங்களைக் கீறலாம் ?

11. **கமபத** ஒரு குவிந்த நாற்கோணம். அதில் **கம** = 7ச.மீ., **மப** = 2ச.மீ., **பத** = 3 ச.மீ., **தக** = 4 ச.மீ.

(i) **கப** இனது நீளம் எவ்வெல்லைகளுள் இருத்தல் வேண்டும் ?

(ii) ∠ **தபம** > ∠ **தமப** எனவும் ∠ **கதம** > ∠ **தகம** எனவும் நிறுவுக.



உருவம் 380

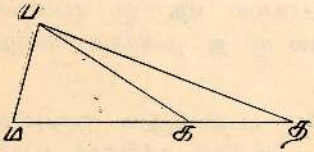
12. **கமபத** ஒரு சரிவகம். அதில் **கம**, **தப** களை சமாந்தரப் பக்கங்கள் ; **கப** ஆனது **மத** ஐ **ந** இல் வெட்டுகின்றது. ∠ **பகம** = 41° ஆயும் ∠ **கநம** = 100° ஆயுமிருந்தால் **கப** ஓ **மத** ஓ பெரிதெனக் காண்க.

*13. உரு 380 இல் **மப** இற்கு **வந** சமாந்தரம். (i) **கவ** > **தவ** > **நப** எனவும் (ii) **மத** > **தந** எனவும் நிறுவுக.

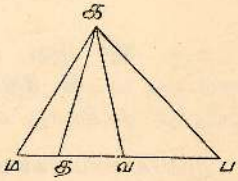
*14. △ **கமப** இல் ∠ **ம** = 90°, ∠ **ப** = 29°; **கம** < $\frac{1}{2}$ **கப** என நிறுவுக.

பயிற்சி 42

[1] உரு 381 இல் **கம** = **கப**, **மகத** ஒரு நேர்கோடு. **தம** > **தப** என நிறுவுக.



உருவம் 381



உருவம் 382

2. உரு 382 இல் **கம** = **கவ**, **மதவப** ஒரு நேர்கோடு. **கத** < **கவ** < **கப** என நிறுவுக.

[3] △கமப இல் மப > பக > கம. ∠க > 60° > ∠ப என நிறுவுக.

4. △கமப இல் ∠ம = 90°, ∠ப = 45°. மப > ½கப என நிறுவுக.

5. △கமப இல் ∠மகப இன் இருசமவெட்டி மப ஐ த இல் வெட்டுகின்றது. மக > மத என நிறுவுக.

[6] △கமப இல் கம > கப, ∠மகப இன் இருசமவெட்டி மப ஐ த இல் வெட்டுகின்றது. ∠மதக ஒரு விரிகோணம் என நிறுவுக.

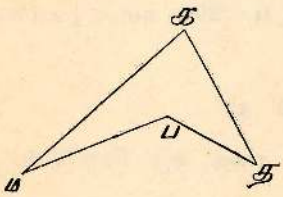
7. △கமப இல் கம > கப. ∠கமப, ∠கபம ஆகியவற்றின் இருசம வெட்டிகள் த இற் சந்தித்தால் தம > தப என நிறுவுக.

[8] கமபத ஒரு குவிந்த நாற்கோணம். அதில் ∠ம = ∠த, கம > கத. பம < பத என நிறுவுக. (மத ஐ இணைக்க.)

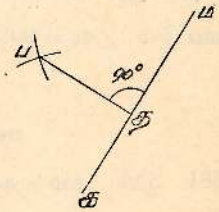
9. உரு 383 இல் கம>கத, ∠ம = ∠த. பம ஓ பத ஓ பெரிது? காரணங் கூறுக.

10. கமபத ஒரு நாற்கோணம். கம + மப + பத > கத என நிறுவுக. (கப ஐ இணைக்க.)

[11] ஒரு முக்கோணத்தின் எந்த ஒரு பக்கமும் சுற்றளவின் அரைப் பகுதியிற் குறைவாயிருக்கும் என நிறுவுக.



உருவம் 383



உருவம் 384

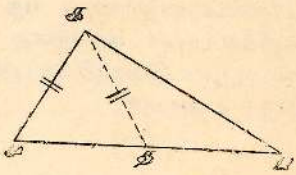
12. உரு 384 இல் ப ஐ மையமாகவும் பத ஐ ஆரையாகவுங் கொண்டு ஒரு வட்டங் கீறினால் அது கம ஐ த தவிர்ந்த வேறு ஒரு புள்ளியிலுஞ் சந்தியாது என நிறுவுக.

13. முக்கோணம் கமப இன் உள்ளே யாதாயினும் ஒருபுள்ளி ய. ∠மயப > ∠மகப என நிறுவுக. (கப ஐ த இல் சந்திக்கக் கூடியதாக மய ஐ நீட்டுக.)

[14] △கமப இன் படக்கம் மப இல் த ஒரு புள்ளி. கத < ½(மப + பக + கம) என நிறுவுக.

15. கமபத எறுங் குவிந்த நாற்கோணத்தின் உள்ளேயுள்ள யாதாயினும் ஒருபுள்ளி ந. நக + நம + நப + நத ஆனது கப + மத இனுங் குறைந்ததன்று என நிறுவுக. நக + நம + நப + நத = கப + மத ஆயின் ந இனது நிலை எவ்வாறிருக்கும் ?

16. குவிந்த நாற்கோணம் கமபத இல் கம பக்கங்களுட். பெரியது, பத சிறியது. ∠ த > ∠ ம என நிறுவுக. [மத ஐ இணைக்க.]



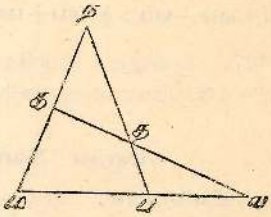
உருவம் 385

17. உரு 385 இல் ∠ ம கூர்ங்கோணம். ∠ ம = 2 ∠ ப. கப < 2 கம என நிறுவுக.

[18] △ கமப இன் பக்கங்கள் கம, கப என்பவை த, ந என்பவற்றிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன ; ∠ தமப, ∠ நபம என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகள் ய இற் சந்திக்கின்றன. கம > கப ஆனால் யம ஓ யப ஓ பெரிதெனக் காண்க. காரணங் கூறுக.

19. உரு 386 இல் நம = நப; நத > நக என நிறுவுக.

20. முக்கோணம் கமப இன் உள்ளே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ய. மக + கப > மய + யப என நிறுவுக. [மய என்பதை, கப ஐ த இலே சந்திக்குமாறு நீட்டுக.]



உருவம் 386

[21] கம உம் தப உஞ் சமாந்தரமாயுள்ள ஒரு சரிவகம் கமபத. மத ஐ கப ஆனது ந இல் வெட்டுகின்றது. கப > மத எனின் கந > நம என நிறுவுக. [நீட்டப்பட்ட கம ஐ வ இலே சந்திக்குமாறு தம இற்குச் சமாந்தரமாக பவ ஐ வரைக.]

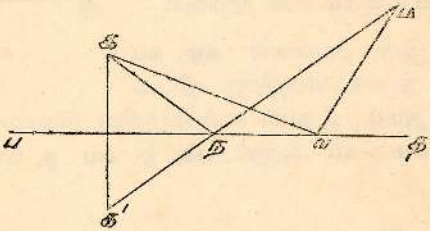
22. △ கமப இன் பக்கம் மப இனது நடுப்புள்ளி த. கம > கப எனின், ∠ மகத < ∠ தகப என நிறுவுக. [கத ஐ வ இற்கு, கத = தவ ஆக இருக்குமாறு நீட்டுக. மவ ஐ இணைக்க.]

[23] △ கமப இன் பக்கம் மப இனது நடுப்புள்ளி த. கத < ½(கம + கப) என நிறுவுக.

*24. △ கமப இல் கம > கப. ∠ மகப இன் இருசமவெட்டி மப ஐ த இலே வெட்டினால், மத > தப என நிறுவுக. [கப ஐ வ இற்கு கவ = கம ஆக இருக்குமாறு நீட்டுக. தவ ஐ இணைக்க.]

*25. உரு 387 இல் **க′** என்பது நேர்கோடு **பத** இல் உள்ள **க** இனது விம்பமாகும்; அதாவது, **பத** ஆனது **கக′** ஐ செங்கோணமாக இருசமக் கூறிடுகின்றது. **க′ நம** ஒரு நேர்கோடு. (i) ∠ **கநப** = ∠ **மநத** என நிறுவுக. (ii) **கவ** + **வம** > **கந** + **நம** என நிறுவுக. (**க′வ** ஐ இணைக்க.)

இது **ஒளிவழித்தேற்றம்** எனப்படும். **க** எனும் முதலிலிருந்து புறப்படும் ஒரொளிக்கற்றையானது **பத** எனும் ஆடியில் **ம** இற்குச் செல்லுமாறு தெறிக்கப்படின் அக்கற்றை **கநம** எனும் மிகக் குறுகிய வழியையே பின்பற்றும். இவ்வழியிற் படுகோணம் ∠ **கநப** தெறிப்புக்கோணம், ∠ **மநத** இற்குச் சமனாகும்.



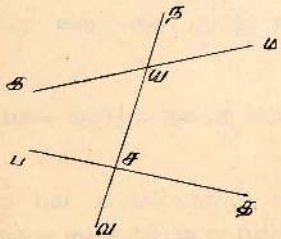
உருவம் 387

*26. முக்கோணம் **கமப** இன் உள்ளே ஒரு புள்ளி **ய**. **யக** + **யம** + **யப** > $\frac{1}{2}$ (**மப** + **பக** + **கம**) என நிறுவுக. (கருவி வேண்டியதில்லை.)

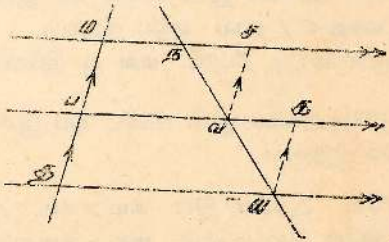
*27. குவிந்த நாற்கோணம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்களினீளங்களினது கூட்டுத்தொகை அரைச்சுற்றளவிலுங் கூடியதென நிறுவுக.

சமனான வெட்டுத்துண்டுகள் பற்றிய தேற்றங்கள்

வரைவிலக்கணம். ஒரு குறுக்குவெட்டி **நவ** இருநேர்கோடுகள் **கம**, **பத** என்பவற்றை **ய**, **ச** களிலே வெட்டினால் (உரு 388 ஐப் பார்க்க) **யச** என்பது **கப**, **பத** என்பவற்றால் **நவ** இலே ஆக்கப்பட்ட **வெட்டுத்துண்டாகும்.**



உருவம் 388



உருவம் 389

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

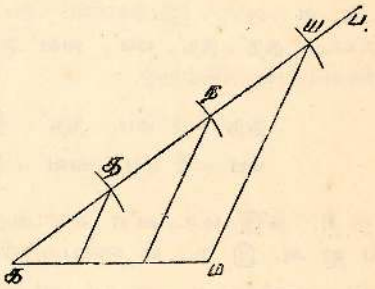
1. உரு 389 இல் **மப = பத**. அம்புகள் அவை சமாந்தரமென்பதைக் காட்டுகின்றன. **நவ = வய** என நிறுவுக.

(i) **வச = யக** என்பதற்குரிய காரணங்களைக் காட்டுக.

(ii) நிறுவுதற்கு முக்கோணங்கள் **வசந, யகவ** என்பவற்றைப் பயன்படுத்துக.

2. (i) **ந** ஐ புள்ளி **ம** ஆக்குவதால் உரு 389 இல் என்ன உருவைப் பெறலாம்? அதை வரைக.

(ii) பின்வரும் வாக்கியத்தை முடிவாக்குக. △**மதய** இன் பக்கம் **மத** இனது நடுப்புள்ளிக் கூடாக **தய** இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்ட நேர் கோடு. . . . . .



உருவம் 390

3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **கம** ஐ அளவாமல் 3 சமபகுதிகளாகப் பிரிப்பது எவ்வாறு என விளக்குக. அவ்வாறு செய்வதற்கு ஏற்ற வழி வகைகளை உரு 390 காட்டுகின்றதா? காரணங் கூறுக.

4. உரு 391 இல் **சத = தம, கந = நப**.

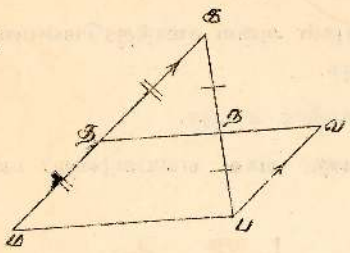
(i) **தந, மப** இற்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக.

(ii) **தந = $\frac{1}{2}$ மப** என நிறுவுக.

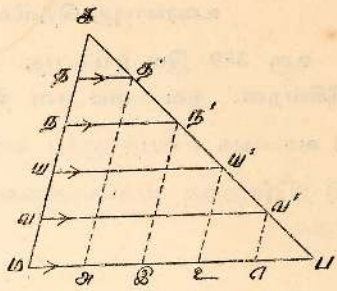
பவ ஐ **மக** இற்குச் சமாந்தரமாய், நீட்டப்பட்ட **தந** ஐ **வ** இலே சந்திக்குமாறு வரைக.

(i) ஏன் △**பநவ ≡ △கநத** என விளக்குக.

(ii) **பவ = மத** என நிறுவுக. **பவ** என்பது **மத** இற்குச் சமமுஞ் சமாந்தரமும் என்பதில் இருந்து என்ன அறியக்கிடக்கின்றது?



உருவம் 391



உருவம் 392

5. உரு 392 இல் △கமப இன் பக்கம் கம ஆனது கப ஐ த, ந, ய, வ ஆகிய இடங்களில் வெட்டுமாறு மப இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்ட தத', நந', யய', வவ' ஆகிய கோடுகளால், 5 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

$$\text{தத}' = \tfrac{1}{5}\ \text{மப},\quad \text{நந}' = \tfrac{2}{5}\ \text{மப},$$
$$\text{யய}' = \tfrac{3}{5}\ \text{மப},\quad \text{வவ}' = \tfrac{4}{5}\ \text{மப}$$ என நிறுவுக.

த'அ, ந'இ, ய'உ, வ'எ என்பவற்றைக் கம இற்குச் சமாந்தரமாகவும், மப ஐ அ, இ, உ, எ என்பவற்றில் வெட்டக் கூடியதாகவும் வரைக.

(i) புள்ளிகள் த', ந', ய', வ' என்பவற்றைப் பற்றி நீர் என்ன சொல்லக்கூடும் ?

(ii) புள்ளிகள் அ, இ, உ, எ என்பவற்றைப் பற்றி நீர் என்ன சொல்லக் கூடும் ?

6. உரு 392 இல் கவ $= \frac{7}{10}$ கம ஆயின் வவ' இனது நீளத்தைப் பற்றி நீர் என்ன சொல்லக்கூடும் ?

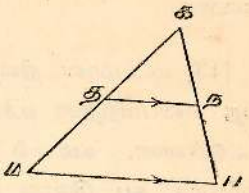
எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 43

1. உரு 393 இல் கத = தம = 2 அங்., மப = 3 அங்., கப = 3·6 அங். ஆயின் கந, தந ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

[2] △கமப இன் பக்கங்கள் மப, பக, கம ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் ந, வ, ய என்பனவாகும். மப = 5 அங்., பக = 6 அங்., கம = 7 அங். ஆயின் நவ, வய, யந ஆகியவற்றுடைய நீளங்களைக் காண்க.

3. உரு 393 இல் **கத** = 2 அங்., **தம** = 3 அங்., **மப** = 4 அங்., **கப** = 4·5 அங். ஆயின் **கந, தந** ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க. [உரு 392 ஐப் பார்க்க.]



உருவம் 393

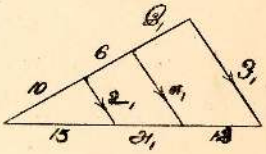
[4] உரு 393 இல் **கத** = $\frac{3}{7}$ **கம** ஆயின் **கந, தந** என்பவற்றைப்பற்றி நீர் என்ன சொல்ல முடியும்? காரணங் கூறுக.

5. உரு 394 இல் $அ_1$, $இ_1$ களின் பெறுமதிகளைக் காண்க.

[6] உரு 394 இல் $எ_1$ = 12 ஆயின் $உ_1$ ஐக் காண்க.

7. உரு 394 இல் $எ_1$ = 12 ஆயின் $ஒ_1$ ஐக் காண்க.

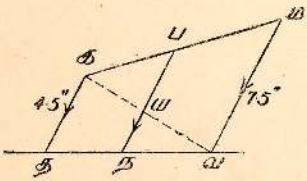
[8] உரு 393 இல் **நவ** ஆனது **கம** இற்குச் சமாந்தரமாக **மப ஐ வ** இற் சந்திக்குமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. **மத** = 10 ச.மீ., **கந** = 12 ச.மீ., **மவ** = 15 ச.மீ., **வப** = 20 ச.மீ. ஆயின் **நப, கத** ஆகியவற்றைக் காண்க.



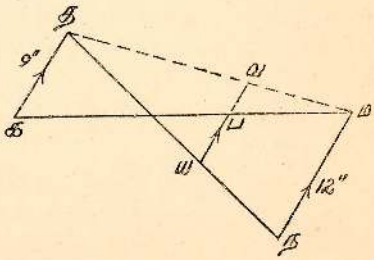
உருவம் 394

9. உரு 395 இல் **கப** = **பம** = 4″ ஆயின் **பந** ஐக் காண்க. [**பய** ஐயும் **பந** ஐயுங் காண்க.]

10. உரு 395 இல் **கப** = 3″, **பம** = 6″ ஆயின் **பந** இனது நீளத்தைக் காண்க.



உருவம் 395



உருவம் 396

11. உரு 396 இல் **கப** = **பம** = 10″; **பய** ஐக் காண்க. [**பவ** ஐயும் **வய** ஐயுங் காண்க.]

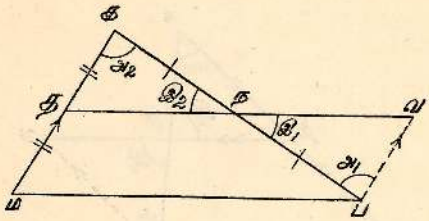
12 உரு 396 இல் **கப** = 8″, **பம** = 4″ ஆயின் **பய** இனது நீளத்தைக் காண்க.

[13] மட்டமான நிலத்திலே நிற்கும் நிலைக்குத்தான கம்பங்கள் **கம, பத** என்பவற்றின் உச்சிகளான **க, ப** கள் ஒரு தடியாலே தொடுக்கப் பட்டுள்ளன. **கம** = 5 அடி. ஆயும் **பத** = 12 அடி ஆயுமிருந்தால் நிலத்தி லிருந்து **கப** இனது நடுப்புள்ளியிருக்கும் உயரத்தைக் காண்க.

14. இடையான செவ்வக முற்றம் ஒன்றின் மூலைகளில் 12, 10, 6, 7 அடி நீளங்கள் உள்ள நிலைக்குத்தான கம்பங்கள் முறையாக நிறுவப்பட்டுள் ளன. உச்சிகள் நேரான கம்பிகளால் மூலைவிட்டவழியாக இணைக்கப் பட்டுள்ளன. கம்பிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளுமா ? இல்லை யேல், அவ்வாறு வெட்டிக்கொள்வதற்கு மிகக் குறைந்த உயரமுள்ள கம்பத்தின் உயரத்தில் என்ன மாற்றத்தைச் செய்தல் வேண்டும் ?

தேற்றம் 25

ஒரு முக்கோணத்தின் இருபக்கங்களுடைய நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு மூன்றும் பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாயும், அதனின் அரைப்பங்காயும் இருக்கும்.



உருவம் 397

தரவு. △கமப இன் பக்கங்கள் **கம, கப** ஆகியவற்றுடைய நடுப்புள்ளிகள் **த, ந** கள்.

மேற்கோள். (i) **தந ∥ மப,**
(ii) **தந = ½ மப.**

கருவி. **ப** இற்கூடாகவும் **மக** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் நீட்டப்பட்ட **தந** ஐ **வ** இலே சந்திக்குமாறும் **பவ** ஐக் கீறுக.

நிறுவல். உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால் முக்கோணங்கள் **பநவ, கநத** ஆகியவற்றில்,

$அ_1 = அ_2$ — ஒ. வி. கோணங்கள், **பவ ∥ மக,**
$இ_1 = இ_2$ — குத்தெதிர்க்கோணங்கள்,
பந = கந — தரவு,

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{பநவ}}{\text{கநத}}$ சர்வசமன் — கோபகோ,

∴ **பவ = கத, வந = தந,**

ஆனால் **கத = மத,** தரவு ∴ **பவ = மத.** இன்னும்,

பவ ஆனது **மத** இற்குச் சமாந்தரமாகவுங் கீறப்பட்டுள்ளது.

∴ கோடுகள் **பவ, தம** என்பவை சமமுஞ் சமாந்தரமுமானவை.

∴ **மபவத** ஓரிணைகரமாகும்.

∴ **தவ ∥ மப,** அதாவது **தந ∥ மப** ஆகும்.

(ii) **மப = தவ** — இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கங்கள்,

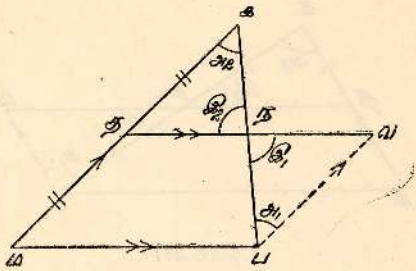
ஆனால் **தந = நவ** நிறுவப்பட்டது, ∴ **தந = ½தவ,**

∴ **தந = ½ மப.**

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : நடுப்புள்ளித் தேற்றம்.

தேற்றம் 26

ஒரு முக்கோணத்து ஒரு பக்கத்தினது நடுப்புள்ளிக்கூடாகப் பிறிதொரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்ட நேர்கோடு மூன்றும் பக்கத்தை இருசமக்கூறிடும்.



உருவம் 398

தரவு. △கமப இன் பக்கம் **கம** இனது நடுப்புள்ளி **த** உம் **த** இற் கூடாக **மப** இற்குச் சமாந்தரமாய **கப** ஐ **ந** இல் வெட்டுகின்ற ஒரு கோடும்.

மேற்கோள். **கந = நப.**

கருவி. **ப** இற் கூடாக, **மக** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் நீட்டப்பட்ட **தந** ஐ **வ** இற் சந்திக்கக்கூடியதாகவும் **பவ** ஐ வரைக.

நிறுவல். **தவ ‖ மப** ஆனமையாலும் **தரவு,**

பவ ‖ மத ஆனமையாலும் **கருவி,**

மபவத ஓரிணைகரமாம்.

∴ பவ = மத **இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கங்கள்,**

ஆனால் **மத = தக** **தரவு,** **∴ பவ = தக.**

முக்கோணங்கள் **பவந, கதந** என்பவற்றில், உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால்,

$அ_1 = அ_2$ **ஒ.வி. கோணங்கள், பவ ‖ மக,**

$இ_1 = இ_2$ **குத்தெதிர்க்கோணங்கள்,**

பவ = கத **நிறுவப்பட்டது,**

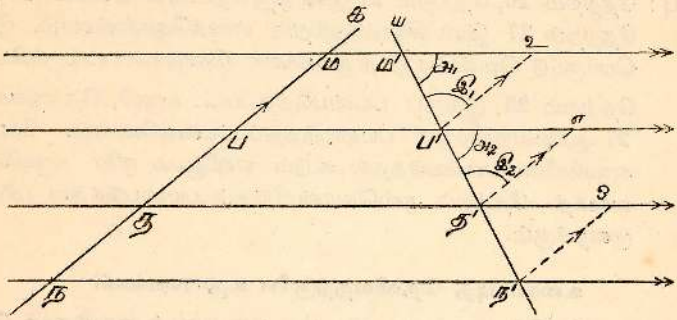
∴ முக்கோணங்கள் **பவந / கதந** சர்வசமன் **கோகோப,**

∴ கந = பந.

குறிப்புக்குரிய குறுக்கம் : வெட்டுத்துண்டுத் தேற்றம்.

தேற்றம் 27

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு குறுக்குவெட்டியில் மூன்று அல்லது அதற்குமேற்பட்ட சமாந்தரமான நேர்கோடுகள் சமமான வெட்டுத் துண்டுகளை ஆக்குமெனின் அவை மற்றை எந்த ஒரு குறுக்குவெட்டியிலும் சமமான வெட்டுத் துண்டுகளை ஆக்கும்.



உருவம் 399

தரவு. ஒரு குறுக்குவெட்டியை மப = பத = தந= . . . . ஆக்குமாறு ம,ப,த, ந, ... களில் வெட்டி மற்றை ஒரு குறுக்குவெட்டியை ம',ப',த, ந', . . . என்பவற்றில் வெட்டும் சமாந்தரக்கோடுகள் மம', பப', தத', நந', . . . என்பன வ.

மேற்கோள். ம'ப' = ப'த' = த'ந'. . . . . .

கருவி. ப', த', ந', ... என்பவற்றிற்கு ஊடாகவும் மபதந இற்குச் சமாந்தரமாகவும், தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட மம', பப', தத', ... என்பவற்றை உ, எ, ஒ,. . . . என்பவற்றில் சந்திக்குமாறும் கோடுகள் வரைக.

நிறுவல். மஉ ∥ பப' ஆனமையாலும் தரவு,
ப'உ ∥ பம ஆனமையாலும் கருவி,
பப'உம ஓரிணைகரமாம்.
∴ ப'உ = பம இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள்.

இஃதப்போன்றே த'எ = தப என நிறுவலாம்,

ஆனால் மப = பத தரவு, ∴ ப'உ = த'எ.

∴ முக்கோணங்கள் ப'உம', த'எப' என்பவற்றில், உருவில் உள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால்,

$அ_1 = அ_2$ ஒத்த கோணங்கள், ம'உ ∥ ப'எ,
$இ_1 = இ_2$ ஒத்த கோணங்கள், ப'உ ∥ த'எ,
ப'உ = த'எ நிறுவப்பட்டது.

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{ப'உம'}}{\text{த'எப'}}$ சர்வசமன் கோகோப,

∴ ம'ப' = ப'த'.

எனவே ப'த' = த'ந' என நிறுவுதல் கூடும்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : வெட்டுத்துண்டுத் தேற்றம்.

குறிப்பு : தேற்றம் 26, தேற்றம் 27 இன் ஒரு சிறப்பான வகையாம். அதைத் தேற்றம் 27 இன் நிலைத்தேற்றம் எனக்கொள்ளலாம். தேர்வின் பொருட்டு வெவ்வேறு நிறுவல்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

தேற்றம் 25 இற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட கருவி, தேற்றங்கள் 26, 27 ஆகியவற்றிற்குப் பயன்படுத்தப்பட்டவையேயாம். வேறு பிற கருவிகளைப் பயன்படுத்தல் கூடும் எனினும் ஒரே கருவியை இவ் வகைத் தேற்றம் ஒவ்வொன்றிற்கும் பயன்படுத்தல் பலவினைக் குறைக்கும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

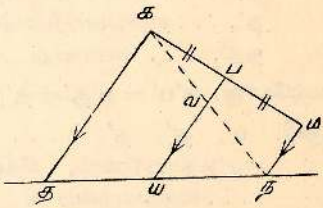
1. உரு 400 இல் கப = பம. கத, பய, மந எனுஞ் சமாந்தரக் கோடுகள் பிறிதொரு குறுக்குவெட்டியை த, ய, ந களிற் சந்திக்கின்றன. பய = $\frac{1}{2}$ (கத + மந) என நிறுவுக.

கந ஐ இணைக்க. அது **பய** ஐ **வ** இல் வெட்டுவதாகுக.

(i) ஏன் **கவ = வந** என விளக்குக.

(ii) **பவ** இனது நீளத்தைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?

(iii) **ய** எனும் புள்ளியைப் பற்றியும் **வய** இனது நீளத்தையும் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?



உருவம் 400

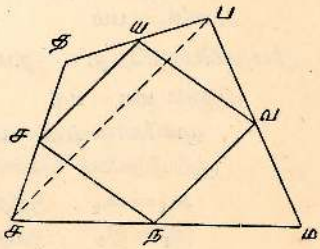
2. உரு 401 இல் யாதாயினும் ஒரு நாற்கோணம் கமபத இன் பக்கங் களினுடை நடுப் புள்ளிகள் ந, வ, ய, ச. நவயச ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

கப ஐ இணைக்க.

(i) **நவ** ஏன் **கப** இற்குச் சமாந்தரம் என விளக்குக.

(ii) **நவ** இனது நீளத்தைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?

(iii) **சய** ஐப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர்?



உருவம் 401

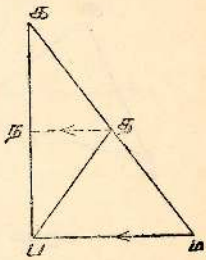
3. இரண்டாம் எண்ணில் உள்ள கூற்று குவியாத ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** விற்கும் பொருந்துமோ எனக் காண்க ; 204 ஆம் பக்கத்திலுள்ள உரு 383 ஐப் பார்க்க. **கமப, கதப** என்பன வெவ்வேறு தளத்திலுளவா யிருக்கும் ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** இற்கும் அது பொருந்துமா ?

4. உரு 402 இல் செங்கோண △ கமப வின் செம்பக்கத்தினுடைய நடுப்புள்ளி த. பத = ½ கம என நிறுவுக.

தந ஐ **மப** இற்குச் சமாந்தரமாய் **கப** ஐ **ந** இலே சந்திக்குமாறு கீறுக.

(i) **கந** இனது நீளத்தைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?

(ii) ஏன் △ **தநப** = △ **தநக** என விளக்குக. பின்னர் நிறுவலை முடிவு செய்க.

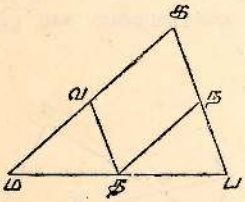


உருவம் 402

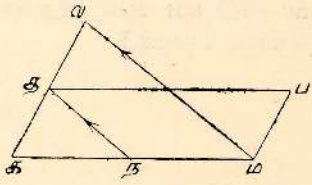
5 செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றின் செம்பக்கத்தை விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தைப் பற்றி நீர் என்ன கூறமுடியும் ?

பயிற்சி 44

1. உரு 403 இல் **மப, பக, கம** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **த, ந, வ** என்பன ; **தநகவ** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.



உருவம் 403



உருவம் 404

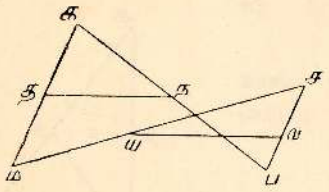
2. உரு 404 இல் **கமபத** ஓரிணைகரம். **கம** இனது நடுப்புள்ளி **ந. தவ = மப** என நிறுவுக.

3. **ந, வ** என்பவை முறையே, இணைகரம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் **கம, தப** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள். **நத, மவ** என்பவை **கப** ஐ முறையே **ய, ச** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றன. (i) **நமவத** ஏன் ஓரிணைகரமாயுள்ளது என விளக்குக. (ii) **கய = யச = சப** என நிறுவுக.

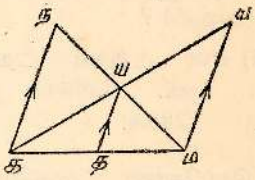
[4] 209 ஆம் பக்கத்திலுள்ள உரு 393 இல் **கத = 2 தம** எனின் **கந = 2நப** என நிறுவுக. [**கத** இனது நடுப்புள்ளிக்கூடாகப் பிறிதொரு சமாந்தரக் கோட்டைக் கீறுக.]

5. உரு 405 இல் **த, ந, ய, வ** என்பவை **கம, கப, சம, சப** என்பவற்றுடைய நடுப்புள்ளிகளாம். **தந = யவ** என நிறுவுக.

6. உரு 406 இல் **கத = தம. கந = மவ** என நிறுவுக.



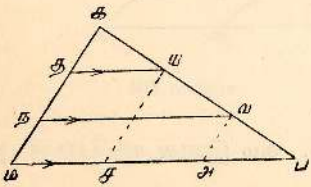
உருவம் 405



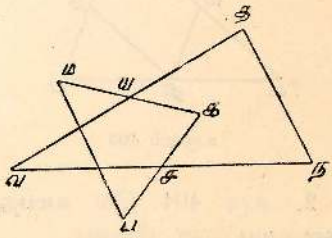
உருவம் 406

[7] நாலு சமாந்தரக்கோடுகள் ஒரு குறுக்கு வெட்டியை **க, ம, ப, த** களிலும் பிறிதொன்றை **ந, வ, ய, ச** களிலும் வெட்டுகின்றன. **கம = பத** எனின் **நவ = யச** என நிறுவுக. [**வ, ச** களூடாக **வஅ, சஇ** என்பவற்றை **தக** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் (தேவையெனில் நீட்டப்பெற்ற) **கந, பய** என்பவற்றை **அ, இ** களிற் சந்திக்குமாறும் வரைக.]

8. உரு 407 இல் **கத = தந = நம** ; (i) **தய = 1/3 மப** என நிறுவுக. (ii) **நவ = 2/3 மப** என நிறுவுக. [**யச, வஅ** என்பவற்றை **கம** இற்குச் சமாந்தரமாக வரைக.]



உருவம் 407



உருவம் 408

9. உரு 408 இல் **ய** என்பது **கம, வத** என்பவற்றினது நடுப்புள்ளியாகும். **ச** என்பது **கப, வந** என்பவற்றினது நடுப்புள்ளியாகும். **தந = மப** என நிறுவுக.

[10] △**கமப** இனது பக்கம் **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த**. **ந** என்பது **கத** இனது நடுப்புள்ளி. நீட்டப்பட்ட **மந** ஆனது **கப** ஐ **வ** இலே சந்திக்கின்றது. **கப** = 3 **கவ** என நிறுவுக. [**தய** ஐ **மவ** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் **கப** ஐ **ய** இலே சந்திக்குமாறும் வரைக.]

[11] △**கமப** இல் ∠**ம** = 1 செங்கோணம்; **மபய** ஒரு சமபக்க முக்கோணம். **ய** இலிருந்து **கம** இற்குச் சமாந்தரமான கோடு **கப** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றதென நிறுவுக. [இதில் இருவகைகள் உள.]

12. பக்கம் 209 இல் உரு 396 இல் **கப** = **பம** எனின் **கத**, **மந** என்பவை எவ்வளவு நீளம் எனினும், **பய** = ½ (**மந** ~ **கத**) என நிறுவுக.

13. **கம** கொடுக்கப்பட்ட ஓர் நேர் கோடு. **ய** அதற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளி. **த** என்பது **கம** இலே ஒரு மாறும் புள்ளியாகும். **யத** இனது நடுப்புள்ளி நிலைத்த ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளது என நிறுவுக.

14. **க**, **ம** கள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். **ம** ஐ மையமாகவுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்திலே மாறுகின்ற ஒரு புள்ளியாகும் **ப**. **கப** இனது நடுப்புள்ளி **கம** இனது நடுப்புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட நிலைத்த ஒரு வட்டத்திலே உள்ளது என நிறுவுக.

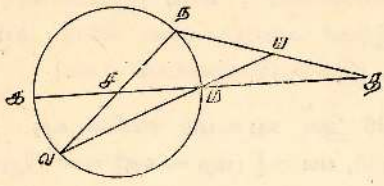
15. ஒரு நாற்கோணத்தின் மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணமாய் வெட்டிக் கொள்ளின் அதனுடைய நாலு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளும் ஒரு செவ்வகத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

[16] ஒரு நாற்கோணத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமம் எனின் அதனுடைய நாலு பக்கங்களினடுப்புள்ளிகளும் ஒரு சாய்சதுரத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

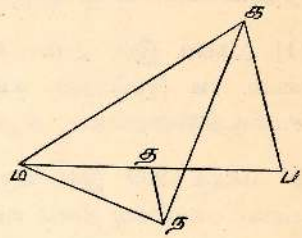
17. **கமபத** ஒரு செவ்வகம்; **வ** அதனுடைய தளத்தில் இல்லாத யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **அ**, **இ**, **உ**, **எ** என்பன **வக**, **வம**, **வப**, **வத** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகளாகும். **அ**, **இ**, **உ**, **எ** என்பன ஒரு தளத்திலுள என்றும் ஒரு செவ்வகத்தின் உச்சிகள் என்றும் நிறுவுக.

18. △**கமப** இன் பக்கங்கள் **கம**, **மப** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **வ**, **ய** என்பவையாகும்; **கத**, **மந** என்னும் **க**, **ம** களிலிருந்து **மப**, **கப** இற்குரிய செங்குத்துக்கள் **ச** இலே வெட்டிக்கொள்கின்றன; **அ** என்பது **கச** இனது நடுப்புள்ளியாகும். ∠**அவய** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

19. உரு 409 இல் **ச** வட்டத்தின் மையமாகும். **கசமத** என்பது **கம = மத** ஆக அமைந்த ஒரு நேர் கோடாகும். **நய = யத** என நிறுவுக. [**கந** ஐ இணைக்க.]



உருவம் 409



உருவம் 410

20. உரு 410 இல் **மந** என்பது **ம** இலிருந்து ∠ **மகப** இன் இருசம வெட்டிக்குரிய செங்குத்தாகும்; **த** என்பது **மப** இனது நடுப் புள்ளியாகும்; **தந** = $\frac{1}{2}$ (**கம − கப**) என நிறுவுக. [**மந, கப** என்பவற்றை **வ** இலே வெட்டுமாறு நீட்டுக.]

[21] △**கமப** இன் பக்கம் **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த**; **பக** என்பது **ந** விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **மவ** என்பது **ம** இலிருந்து ∠ **மகந** இனது இரு சமவெட்டிக்குரிய செங்குத்தாகும். **தவ** = $\frac{1}{2}$ (**கம + கப**) என நிறுவுக.

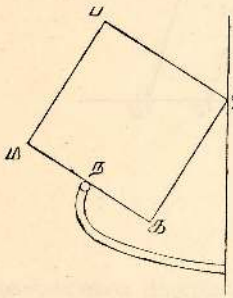
22. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த**; **மந, பவ** என்பவை **ம, ப** களிலிருந்து **க** ஊடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு நேர் கோட்டிற்குரிய செங்குத்துக்களாம். **தந = தவ** என நிறுவுக. முதலாவதாக **க** ஊடாகச் செல்லுங்கோடு கோணம் **மகப** இற்கு வெளியேயுள்ள வகையை எடுத்துக்கொள்க. அடுத்து ∠ **மகப** இற்குள்ளேயுள்ள வகையைக் கொள்க. [**த** இலிருந்து **நகவ** இற்குள்ள செங்குத்து **தச** ஐ வரைக.]

[23] △**கமப** இன் பக்கங்கள் **கப, கம** என்பவற்றுடைய நடுப்புள்ளிகள் **ந, வ** களாகும்; **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து **கத**. ∠ **வதந** = ∠ **மகப** என நிறுவுக. [பக்கம் 215 இலுள்ள உதாரணம் 4 ஐப் பார்க்க.]

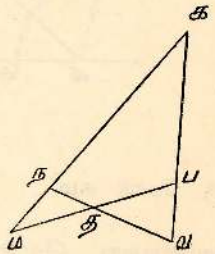
24. **கமபத** ஓரிணைகரம். **நவ** அதற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு நேர் கோடு. **கஅ, மஇ, பஉ, தஎ** என்பன **க, ம, ப, த** களிலிருந்து **நவ** இற்குள்ள செங்குத்துக்கள். **கஅ + பஉ = மஇ + தஎ** என நிறுவுக. [**மத** ஐ **கப** ஆனது **ய** இலே வெட்டுவதாகுக.] **யச** ஐ **நவ** இற்குச் செங்குத்தாக வரைக. பக்கம் 214 இலுள்ள உதாரணம் 1 ஐப் பார்க்க.

*25. △ **கமப** இன் கோணங்கள் **ம, ப** இனுடைய இருசமவெட்டிகள் **மந, பவ** ஆகும் ; **கய, கச** என்பவை **க** இலிருந்து **மந, பவ** என்பவற்றிற் குரிய செங்குத்துக்களாகும். **சய** என்பது **மப** இற்குச் சமாந்தரம் என நிறுவுக. [**மப** ஐ **அ, இ** களில் வெட்டும்படியாக **கய, கச** என்பவற்றை நீட்டுக.]

*26. **கமபத** எனும் ஒரு சதுரப் பெட்டி ஒரு புகைவண்டிப் பெட்டியி லுள்ள தட்டில் சுவருக்கு எதிராக ஒரு மூலை பொருந்தத் தங்கியுள்ளது. உரு 411 ஐப் பார்க்க. தொடும் புள்ளி **ந** சுவரிலிருந்து 11 அங்.; **ந** வானது **கம** இனது நடுப்புள்ளி ; **க** சுவரினின்றும் 5 அங். சுவரினின் றும் **ம, ப** கள் எவ்வளவு தூரத்தில் உள.



உருவம் 411



உருவம் 412

*27. உரு 412 இல் **மப** இன் நடுப்புள்ளி **த**. **கந = கவ** ஆக அமைந் துள்ளது **நதவ** எனும் நேர்கோடு. **கந = ½ (கம + கப)** என நிறுவுக.

[**குறிப்பு** : **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த** ; எனவே **மப** ஐ ஒரு பக்கமாகக் கொண்டு, நடுப்புள்ளித் தேற்றத்தைப் பயன் படுத்தக் கூடிய ஒரு முக்கோணத்தைக் காண்க.]

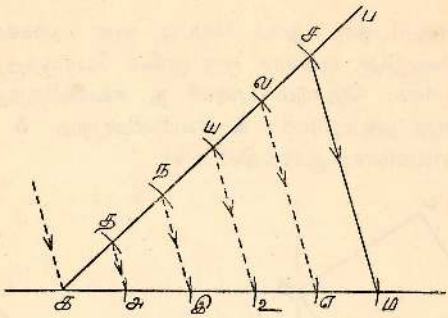
*28. சதுரம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **கப, மத** என்பவை **ந** இலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. ∠ **மகப** இன் இருசமவெட்டியானது **மந** ஐ **வ** இலும் **மப** ஐ **ய** இலும் வெட்டுகின்றது. **பய = 2நவ** என நிறுவுக. [**நச** ஐ **பம** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் **கவ** ஐ **ச** இலே வெட்டு மாறும் வரைக.]

*29. ஒரு நான்முகத்திண்மம் **கமபத** இல் **க, ம, ப** எனும் மூலைகளில் உள்ள தளக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 2 செங்கோணங்களாகும். அதன் எதிர் விளிம்புகள் சமம் என நிறுவுக. [நான்முகத்திண்மத்தின் வரைப்படத்தைக் கீறுக.]

*30. நான்முகத்திண்மம் ஒன்றின் எதிர் விளிம்புகளுடைய நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்தித்து ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றன என நிறுவுக.

அமைப்பு 8

கொடுத்த ஒரு நேர்கோட்டைக் கொடுத்த எண்ணளவு சமபகுதிகளாய்ப் பிரித்தல்.



உருவம் 413

பு. ஒரு கோடு **கம.**

அமைக்கவேண்டியது. கொடுக்கப்பட்ட யாதாயினும் எண்ணளவு (5 எனக் கொள்க) சமபகுதிகளாக **கம** ஐப் பிரித்தல்.

அமைப்பு. **க** இலிருந்து **கம** உடன் யாதாயினும் இசைவான ஒரு கோணம் அமைக்குங் கோடு **கப** ஐ வரைக. **கப** இலிருந்து **கத, தந, நய, ...** ஆகிய சமநீளங்களை (எத்தனை சமபகுதிகள் வேண்டுமோ அத்தனை சம நீளங்களை) வெட்டுக. இங்கு வேண்டியது 5. **கத, தந, நய, யவ, வச** என்பன அச்சமநீளங்களாகுக. **சம** ஐ இணைக்க. **த, ந, ய, வ** களூடாக **சம** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் **கம** ஐ **அ, இ, உ, எ** களிற் சந்திக்குமாறுங் கோடுகள் வரைக.

இப்பொழுது **கஅ, அஇ, இஉ, உஎ, எம** என்பனவே வேண்டிய சமபகுதிகளாகும்.

நிறுவல். **தஅ, நஇ, யஉ, வஎ, சம** எனுஞ் சமாந்தரக் கோடுகள் என்பவை **க** இனூடாகச் செல்லும் ஒரு சமாந்தரக் கோட்டுடன் சேர்ந்து **கப** இலே சமமான வெட்டுத்துண்டுகளை ஆக்குவதால், அவை **கம** இலுஞ் சமமான வெட்டுத்துண்டுகளை ஆக்குகின்றன.
∴ **கஅ = அஇ = இஉ = உஎ = எம.**

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

சாதாரணமான அளவுத்திட்டம்

அளவுத் திட்டத்தின் கருத்தை 78 ஆம் பக்கத்தில் விளக்கியுள்ளோம்.

1. 4 அடி அளக்கக் கூடிய நீளமுள்ளதாயும், அடி, அங்குலங்களைக் காட்டக்கூடியதாயும் உள்ள $\frac{1}{10}$ ஆகிய அளவுத்திட்டம் ஒன்றை வரைக.

1 அடியானது $\frac{1}{10}$ அடியாற் குறிக்கப்படுகிறது.

∴ 4 அடி 0·4 அடியாற் குறிக்கப்படுகிறது. 0·4 அடி = 4·8 அங்.

கம எனுங்கோடு ஒன்றை 4·8 அங். நீளமுள்ளதாய்க் கீறி அதை ஓரமைப்புக்கொண்டு 4 சமப் பகுதிகள் உள்ளதாய்ப் பிரிக்க. அப்பொழுது அவை ஒவ்வொன்றும் ஓரடியைக் குறிக்கும். இவற்றுள் முதற்பகுதியாகிய **கப** ஐ ஓரமைப்பைக் கொண்டு 12 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்க. இப்பொழுது இவை ஒவ்வொன்றும் ஓரங்குலத்தைக் குறிக்கும்.

2. 1000 யார் அளக்கக் கூடிய நீளமுள்ளதாயும் 10 யார் அளவு காட்டக்கூடியதாயுமுள்ள 1 டைலுக்கு 8 அங். ஆயமைந்த ஒரு அளவுத் திட்டம் வரைக.

முதன்முறை. 1760 யார் 8 அங். ஆல் குறிக்கப்படுகின்றது.

∴ 1000 யார் $\frac{8 \times 1000}{1760}$ அங்., ≏ 4·55 அங். அளவால் குறிக்கப்படும்.

கம எனுங்கோடொன்றை 4·55 அங். நீளமாய்க் கீறுக. ஓரமைப்பைக் கொண்டு அதைப் பத்துச் சமபகுதிகளாகப் பிரிக்க. அவை ஒவ்வொன்றும் 100 யாரைக் குறிக்கும். அவற்றுள் முதற் பகுதி **கப** ஐ 10 சமபகுதிகளாக ஓரமைப்பைக் கொண்டு பிரிக்க. அவை ஒவ்வொன்றும் 10 யாரைக் குறிக்கும்.

இரண்டாம் முறை. **கத** எனுங் கோடொன்றை 8 அங். நீளத்திற் கீறுக ; இது 1760 யாரைக் குறிக்கும்.

1000 : 1760 = 25 : 44.

ஓரமைப்புக்கொண்டு **கத** இலே

கப : **சத** = 25 : 44 ஆக இருக்கக் கூடியதாக ஒரு புள்ளி **ப** ஐக் காண்க.

இப்பொழுது **கப**, 1000 யாரைக் குறிக்கும். முன்னர்க் கூறியவாறு செய்க.

3. 6 அடி அளக்கக் கூடியதாயும் அடி, அங்குலங்களைக் காட்டக்கூடியதாயுமுள்ள $\frac{1}{16}$ ஆகவமைந்த ஓரளவுத் திட்டம் வரைக.

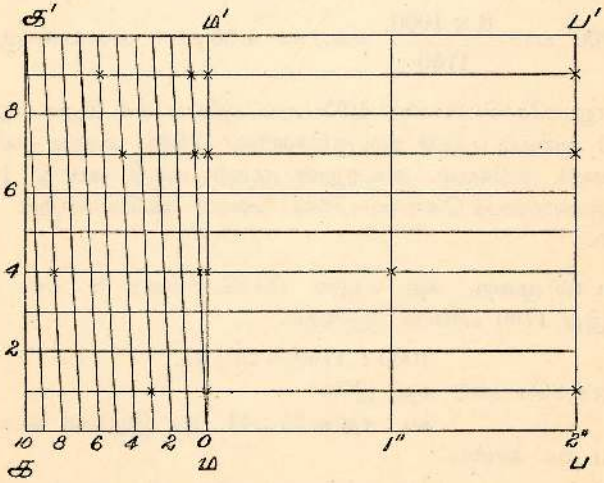
4. 4 அடி அளக்கக் கூடிய நீளமுள்ளதாயும் அடி அங்குலங்களைக் காட்டக் கூடியதாயும் 1 அடிக்கு $1\frac{1}{2}$ அங். ஆகவமைந்ததுமான ஓரளவுத் திட்டம் வரைக.

5. 3 மி.மீ. அளக்கக்கூடிய நீளமுள்ளதாயும் 100 மீ. அளவு வரை காட்டக்கூடியதாயும் 1 : 20,000 ஆகவமைந்ததுமான ஓரளவுத்திட்டம் வரைக.

6. 1,000 யார் அளக்கக்கூடிய நீளமுள்ளதாயும் 10 யார் அளவு வரை காட்டக்கூடியதாயும் 1 மைலுக்கு 1 அடி ஆகவமைந்ததுமான ஓரளவுத் திட்டம் வரைக.

7. 2 பேலோன் அளக்கக்கூடிய நீளமுள்ளதாயும் அரைச்சங்கிலி அளவு வரை காட்டக்கூடியதாயும் 1 : 2500 ஆகவமைந்ததுமான ஓரளவுத்திட்டம் வரைக.

8. **மூலைவிட்டவளவுகோல் :** அங்குலத்தின் பத்திலொரு பங்கு அளவு கோடிட்ட ஒரு வரைகோலைக்கொண்டு ஒரு நீளத்தை ஒரு தசமதானத்திற்கு அளவிடல் முடியும். அத்துடன் 2 தசமதானத்திற்கும் மதிப்பிடுதல் முடியும். மூலைவிட்டவளவுகோல் கொண்டு இன்னும் மிக்க செம்மையாக அளத்தல் கூடும். உரு 414 ஐப் பார்க்க.



உருவம் 414

கமப 3 அங். நீளமான ஒரு கோட்டைக்குறிக்கும். 1 அங்குலத்தைக் குறிக்கும் பகுதி **கம** பத்திலொரு அங்குலங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

க'ம' ஆனது **கம** இற்குச் சமமும் சமாந்தரமுமாக உள்ளது ; அது பத்தி லொரு அங்குலங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கக'** பத்துச்சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. காட்டப்பட்டவாறு சமாந்தரக்கோடுகள் கீறப்பட்டுள்ளன.

(i) **கப** இற்குச் சமாந்தரமான கோடுகளில் உள்ள புள்ளிகளுக்கிடையில் உள்ள நீளங்களைக் காண்க.

(ii) 0·32 அங., 1·56 அங., 2·78 அங். ஆகிய நீளங்களைப் பெற மூலை விட்டவளவு கோலை எவ்வாறு பயன்படுத்துவீர் ?

9. எட்டிலொரு அங்குலத்தையும் அறுபத்துநாலிலொரு அங்குலத்தை யும் காட்டுவதற்கு ஒரு மூலைவிட்டவளவு கோல் அமைக்க.

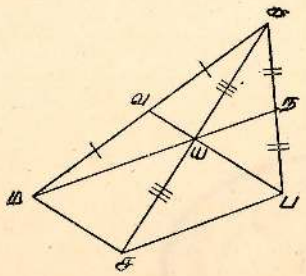
10. 4 மைல் அளவிற்கு மைல்கள், பேலோன்கள், சங்கிலிகள் காட்டக் கூடியதாய் 1 மைலுக்கு 1 அங்குலமாயமைந்த ஒரு மூலைவிட்டவளவு கோல் அமைக்க.

வரைவிலக்கணங்கள். (1) ஒரே புள்ளியூடாக மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேர்கோடுகள் செல்லின் அவை **சந்திக்கின்றன** என்று சொல்லப் படும்.

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் யாதாயினும் ஒருச்சியை அதன் எதிர்ப் பக்கத்தினது நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் நேர்கோடு முக்கோணத்தின் **மையக்கோடு** எனப்படும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

எண்கள் 1–7 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 415 ஐக் குறிக்கும். அதில் **ந, வ, ய** கள் **கப, கம, கச** என்பவற்றுடைய நடுப்புள்ளிகளாம். இவ்வுருவைப் பிரதி செய்க.



உருவம் 415

1. **நய** ஐப் பற்றி நீர் அறிந்த இரண்டு உண்மைகள் யாவை?

2. **மயபச** என் ஓரிணைகரமாயுள்ளது என விளக்குக.

3. **கயச** வானது **மப** ஐ **த** இலே வெட்டுவதாகக் கொள்க. இதை உம் உருவிலே காட்டி என் **மத = தப** என விளக்குக.

இது யாதாயினும் ஒரு **முக்கோணத்தின் மூன்று மையக்கோடுகளும் சந்திக்கின்றன** என்பதை நிறுவுகின்றது. மையக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி **மையக்கோட்டுச் சந்தி** எனப்படும்.

4. **தய** $= \frac{1}{2}$ **யக** எனவும் **தய** $= \frac{1}{3}$ **தக** எனவும் நிறுவுக.

5. **நய, வய** களைப்பற்றிய ஒத்த உண்மைகள் யாவை.

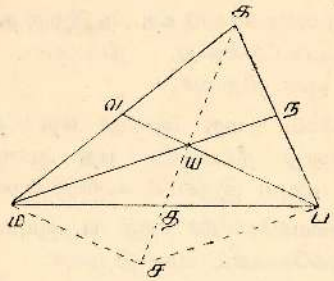
6. **△கமப** இன் மையக்கோடுகள் **கத, மந, பவ** ஆகியவற்றினுடைய நீளங்கள் 3 ச.மீ., 4·5 ச.மீ., 6 ச.மீ. ஆனால் **△யசப** இன் பக்கங்களுடைய நீளங்களைக் கண்டு **△கமப** ஐ அமைக்க.

7. உரு 415 ஐ, **மந** = 7·5 ச. மீ., **பவ** = 6 ச. மீ., **மப** = 7 ச. மீ. ஆகக் கொண்டு அமைக்க.

தேற்றம் 28

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று மையக்கோடுகளுஞ் சந்திக்கும்.

(2) மையக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிநிலையானது, ஒவ்வொரு மையக்கோட்டையும் உச்சிநோக்கி அளக்கும் போது அதன்வழியின் மூன்றிலொன்றாக இருக்கும்.



உருவம் 416.

தரவு. Δ கமப இன் பக்கங்கள் கப, கம இனுடைய நடுப்புள்ளிகள் ந, வ. மந, பவ என்பவை ய இலே வெட்டிக்கொள்கின்றன.

மேற்கோள். நீட்டப்பட்ட கய ஆனது மப ஐ த இலே வெட்டினால்

(1) மத = தப.

(2) தய = $\frac{1}{3}$ தக, நய = $\frac{1}{3}$ நம, வய = $\frac{1}{3}$ வப.

கருவி. கயத ஐ, கய = யச ஆகவிருக்க ச இற்கு நீட்டுக. மச, பச என்பவற்றை இணைக்க.

திறுவல். (1) கவ = வம, கய = யச, எனவே மச இற்குச் சமாந்தரம் வய நடுப்புள்ளித்தேற்றம்.

கந = நப, கய = யச, எனவே பச இற்குச் சமாந்தரம் நய நடுப்புள்ளித்தேற்றம்.

வயப || மச, நயம || பச எனவே யபசம ஓரிணைகரமாகும்.

∴ மூலைவிட்டங்கள் யச, மப ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றன.

∴ மத = தப.

(2) அதே காரணத்தினால், யத = தச,

∴ யச = 2 யத.

ஆனால் கய = யச கருவி, ∴ கய = 2யத.

ஒவ்வொன்றிற்கும் யத ஐக்கூட்டுக. ∴ கத = 3யத, ∴ தய = $\frac{1}{3}$ தக.

இவ்வாறே நய = $\frac{1}{3}$ நம எனவும் வய = $\frac{1}{3}$ வப எனவும் நிறுவலாம்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம். மையக்கோட்டுச் சந்தித்தேற்றம்.

பயிற்சி 45

1. முக்கோணம் **கமப** இன் மையக்கோடுகள் **கத, மந, பவ** என்பவை **ய** இலே சந்தித்தால், △ **தநவ** இன் மையக்கோட்டுச் சந்தி **ய** என நிறுவுக.

2. **கமபத** ஓரிணைகரம் ; **கம** இனது நடுப்புள்ளி **ந** ; **பந** ஆனது **மத** ஐ **வ** இலே வெட்டுகின்றது ; **மப** ஐ நீட்டப்பட்ட **கவ** இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. [**கப** ஐ இணைக்க.]

3. △ **கமப** இன் ஒரு மையக்கோடு **கத** ; **ந** இற்கு **தக** ஆனது, **கந** = 2 **தக** ஆகவிருக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட **மக** ஆனது **பந** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

[4] **கமபத** ஓரிணைகரம். **மத** ஆனது **மத** = **தந** ஆகவிருக்குமாறு **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட **பத** ஆனது **கந** ஐயும் நீட்டப்பட்ட **கத** ஆனது **பந** ஐயும் இருசமக் கூறிடுகின்றன என நிறுவுக.

5. △ **கமப** இன் மையக்கோட்டுச் சந்தி **ய** ஆயும் **கய** = **மப** ஆயுமிருந்தால் ∠ **மயப** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

6–12 வரையுள்ள எண்கொண்ட கணக்குக்களில், **கத, மந, பவ** என்பவை △ **கமப** இன் மையக்கோடுகளாகும்.

6. △ **கமப** இல் **கம** = 5 ச.மீ., **கப** = 4 ச.மீ., **கத** = 3·5 ச.மீ. அதை அமைக்க. **மப** ஐ அளக்க. [ஓரிணைகரம் **பகமய** ஐ உம்மால் வரைய முடியுமா?]

[7] △ **கமப** இல் **மந** = 6 ச.மீ., **பவ** = 5·4 ச.மீ., **மப** = 5 ச.மீ. ; △ **கமப** ஐ அமைக்க. **கத** ஐ அளக்க.

8. △ **கமப** இல் **கத** = 6 ச.மீ., **மந** = 7·5 ச.மீ., **பவ** = 9 ச.மீ.; △ **கமப** ஐ அமைத்து **மப** ஐ அளக்க.

9. 2 **மந** + 2 **பவ** > 3 **மப** என நிறுவுக.

[10] 2 **கத** + 3**மப** > 4**மந** என நிறுவுக. [△ **மதய** ஐக் கருத்திற் கொள்க.]

11. 4 (**கத** + **மந** + **பவ**) > 3 (**மப** + **பக** + **கம**) என நிறுவுக.

[12] **மந** + **பவ** > **கத** என நிறுவுக. [உரு 416 ஐப் பார்க்க.]

*13. **கமபத** ஒரு நான்முகத்திண்மம் ; **மபத, கபத** ஆகிய முகங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்திகள் **ந, வ** ஆகும். நேர்கோடுகள் **கந, மவ** ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என்று நிறுவுக. அவற்றின் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி **ய** எனின், (i) **நவ** ஆனது **கம** இற்குச் சமாந்தரம் எனவும் $\frac{1}{3}$ **கம** இற்குச் சமன் எனவும் நிறுவுக. (ii) **நய** = $\frac{1}{4}$ **நக** என நிறுவுக. [**பத** இனது நடுப்புள்ளிக்கு **க, ம** களை இணைக்க.]

*14. **கமபத** ஒரு நான்முகத்திண்மம் ; **ந, வ, ய, ச** என்பவை முறையே **க, ம, ப, த** கட்கு எதிரான முகங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்திகளாகும். **கந, மவ, பய, தச** என்பவை சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

ஒழுக்கு

ஒரு கடிகாரத்தின் செக்கன் கம்பியினுடைய நுனியைக் கவனித்தோமானால் ஒவ்வொரு நிமிட நேரத்திற்குள்ளும் அது வெவ்வேறிடங்களில் உறைவதை நாம் காணலாம். இவ்வெவ்வேறிடங்களை நாம் இணைப்போமெனில் செக்கன் கம்பி ஒவ்வொரு நிமிடமும் வரையும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதியை நாம் பெறுவோம். இந்நுனியினுடைய இயலும் நிலைகளின்றிரள் அதன் ஒழுக்கு எனப்படும். மாணுக்கர் இரிக்கற்று எண்ணிக்கை சம்பந்தமாக " திரள் " என்ற சொல்லைப்பற்றி அறிந்திருப்பார்கள். இங்கு நாம், இதைக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விதிக்கியைய அசையும் ஒரு சிறு பொருளின் வெவ்வேறு நிலைகளையும் இணைப்பதால் வரும் வளைகோட்டைக் குறிக்க உபயோகிக்கின்றோம்.

யாதாயினும் ஒரு விதிக்கியைய அசையும் ஒருசிறு பொருளின் ஒழுக்கு குறித்த ஒரு வளைகோடாம் எனக் கூறும்பொழுது ஈரிணையெண்ணாங்கள் அக்கூற்றில் இணைந்துள்ளன :

(1) அவ்வளைகோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியினதும் நிலை கொடுக்கப்பட்ட விதிக்கியைந்துள்ளது.

(2) கொடுக்கப்பட்ட விதிக்கியையும் பொருளின் ஒவ்வொரு நிலையும் அவ்வளைகோட்டிலுள்ளது.

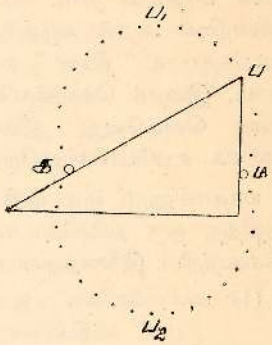
எடுத்துக்கொண்ட ஒரு பிரச்சினையின் இயல்பு, பலகாலும், ஒருபொருளை அம்முழுவளைகோட்டையும் வரைய விடாது தடுத்தலுங் கூடும். இவ்வகையில் அவ்வளைகோட்டின் எப்பகுதி ஒழுக்காகும் எனக் கூறல் வேண்டும்.

உதாரணமாக 110° அளவிலேயே ஒரு கதவைத் திறக்கலாம் எனக் கொள்வோம். அதற்குமேல் அதைத் திறத்தல் இயலாது. அதன் கைப்பிடியிலுள்ள ஒரு சிறு அடையாளத்தின் ஒழுக்கு யாது ? அவ்வொழுக்கு ஒரு வட்டமில் **கம** ஆகும் ; இது, அவ்வட்டத்தின் மையம் **ய** வெனின் $\angle$ **சயம** $= 110°$ ஆகுமாறு உள்ளதாயிருக்கும். இது ஒரு முடிவான வட்டமன்று.

எடுத்துக்கொண்ட ஒரு பிரச்சினையில் உள்ள ஒழுக்கினைக் காண முயலும்போது பொருள் அசையும் வழியை கற்பனையிற் காண்பது இயலும். உதாரணமாக மேலே எடுத்துக்கொண்ட செக்கன் கம்பியில் இது இயலும். ஆனால், பொருளின் இயலும் நிலைகள் பலவற்றை ஒருருவில் அடையாளமிட்டு ஒழுக்கானது நேர்கோடுகளாலோ வளைகோடுகளாலோ ஆனது என்பதை ஊகித்தல் எப்பொழுதும் நன்று. எந்த வகையிலும் ஊகம் திருத்தமானது என நிறுவுதல் அவசியம் ; ஆனால் பேற்றினை நிறுவுதலிலும் ஒழுக்கு எத்தகையது என்று அறிதல் எப்பொழுதுங் கடினமாயிருக்கும். எனவே மாணவர் அறிமுறை நிறுவலைக் கையாள்வதன் முன்னர் ஒழுக்கு எத்தகையது என வாய்முறையில் ஊகித்தறியும் பயிற்சியில் ஈடுபடல் வேண்டும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தளத்தில் கொடுக்கப்பட்ட இருபுள்ளிகள் **க, ம** என்பன. **ப** என்னும் புள்ளி அத்தளத்தில் $\angle$ **கபம** $= 60°$ ஆகவிருக்க அமைந்துள்ளது. பரிசோதனை முறையால் **ப** இன் இயலும் நிலைகளின்றிரளைக் காண்க.



உருவம் 417

தாளிற்குச் செங்குத்தாக **க, ம** களில் இரு குண்டூசிகளைக் குத்துக. பின்னர் உமது மூலைவிட்டத்தின் 60° கோணக்கரங்கள் **க, ம** களுக்கூடாகச் செல்லும் வண்ணம் மூலைவிட்டத்தை நகர்த்துக. கோணத்துச்சியின் இயலும் நிலைகளுட் பலவற்றைத் தாளிலே குண்டூசியாற் குத்திக் குறிக்க. இப்பொழுது ஒழுக்கானது, **கப$_1$ம, கப$_2$ம** ஆகிய இருவேறு வட்டங்களின் விற்களாலாயது என்பதையும் ஒருவட்டத்து முழுப் பரிதியாலாயதன்று என்பதையும் நாம் காண்கிறோம்.

குறிப்பு: .....இவ்வொழுக்கினது முறைமையான நிறுவல் பக்கம் 387 இலுள்ள தேற்றம் 52 இலே தங்கியுள்ளது. இப்பொழுது இதைப் பரிசோதனை முறைப் பேறெனக் கொள்ளல்வேண்டும்.

இவ்வுதாரணத்தில் **ப** ஒரேதளத்திலுள்ளது எனுந் தடையை நீக்கினால், அதன் இயலும் நிலைகளின் திரள், **கம** எனுங்கோட்டை அச்சாகக்கொண்டு விலை **கப$_1$ம** வை 4 செங்கோணங்கட்கூடாகச் சுழற்றுவதால் உண்டாகும் மேற்பரப்பாகும்.

வரைவிலக்கணம் : கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விதியினாலே துணியப்பட்ட நிலைகளையுடைய புள்ளிகளின்றிரள், அவ்விதிக்கமைந்த புள்ளிகளின் **ஒழுக்கு** எனப்படும்.

ஒரு புள்ளி **ப** இற்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விதிக்கமைந்ததாய் அளவற்ற இயலும் நிலைகள் இருப்பின், **ப** இனது யாதாயினும் ஓரியலும் நிலையை நாம் **மாறுகின்ற புள்ளி** என்கிறோம். இம்மாறுகின்ற புள்ளி **ப** ஆனது கொடுக்கப்பட்ட விதிக்கமைய அசைந்து அதன் விளைவான ஒழுக்கை வரைகின்றது. இவ்வகைச் சொல்லாடல் நன்கு திருத்தமானதன்று ; ஏனெனில் ஒரு புள்ளி ஒரு தளத்திலோ வெளியிலோ ஒரு நிலையைக் குறிக்குமன்றி அசையாது என்க. "**மாறுகின்ற புள்ளி**" எனுஞ் சொற்றொடரானது அசைவதற்குச் சுதந்திரமான ஒரு பென்சிலினது நுனி போன்ற ஒரு சிறு பொருளைக் குறிக்கும் என்று கருதுவதால் மேற்கூறிய சொல்லாடல் அமைவுபெறும்.

பயிற்சி 46 (வாய்முறை)

1–14 வரையுள்ள உணக்குக்களில் வரையப்பட்ட ஒழுக்குக்கள் யாவை ?

1. களியாடு வட்டம் ஒன்றின் மேடையிலுள்ள ஒரு மேடை.

2. உமது கையிலிருந்து கீழே விடப்பட்ட ஒரு சிறு கட்டி ஈயம்.

3. ஒரு மணிக்கூண்டின் ஊசலினது நுனி.

4. மேல் வீட்டிலிருந்து கீழ் வீட்டிற்கு நீர் ஒரு தேத்தட்டிலிருந்து கொண்டு வழுக்கும் பொழுது உமது தலை.

[5] ஒரூசலில் உமது நாசிநுனி.

[6] (i) நேரிரு 'டுப்பாதையில் ஓடும் ஓரெந்திரத்தின் சில்லினது மையம். (ii) வட்டவிருப்புப் பாதையில் ஓடும் ஓரெந்திரத்தின் சில்லினது மையம்.

[7] கீழ்மேலாக ஆடும் ஓரிராட்டினத்திலுள்ள ஓரடையாளம்.

[8] ஒரு குரங்கைக் கம்பமொன்றுடன் கட்டியிருக்கும் ஒரு சங்கிலியானது முழுமையாய் நீட்டப்பட்டிருக்கும் பொழுது அதன் முனை.

9. நிலத்தளத்திலுள்ள குழியறைக்கதவு முழுமையும் திறக்கப்பட்ட பொழுது அதிலுள்ள ஓரடையாளம்.

10. அசையும் படிக்கட்டிலே நிற்கும் ஒரு மனிதன் அப்படிக் கட்டில் ஏறியது தொடங்கி இறங்கும்வரை அசையாது நிற்பானானால், அவன் மூக்கு நுனி.

11. ஒரு மேசையின் மேல் ஒரு பெட்டியின் அடி நகர்த்தப்படுமானால், அப்பெட்டியின் மேற் பாகத்தின் மையம்.

[12] ஒரு கோளவடிவான பாத்திரத்துள் உருளும் ஒரு பளிக்குருண்டையின் மையம்.

13. கூரையிலிருந்து தொங்கும் ஒரு மின் விளக்கு அசைந்தாடும் பொழுது அதன் நிழற்றியில் மிக உயர்ந்த இடத்திலிருக்கும் புள்ளி.

14. உமது மூலைமட்டத்தை, செம்பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றும் போது அதன் செங்கோணமூலை.

15. நிலையான புள்ளி க இற்கு நேர் வடக்கே உள்ளது மாறுகின்ற புள்ளி ம. ம இனது ஒழுக்கை நன்கு விளக்கிக் கூறுக.

16. ஒரு மாறுகின்ற புள்ளி **ம** கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி **க** இலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தூரத்தில் உள்ளது. (i) **க** இற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தில் **ம** இருந்தால் **ம** இன் ஒழுக்கென்ன? (ii) இத்தடையில்லாதிருந்தால் **ம** இன் ஒழுக்கென்ன?

17. ஒரு மாறுகின்ற புள்ளி **ப** கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **கம** இலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தூரத்தில் உள்ளது. (i) **கம** இற் கூடாகச்செல்லும் ஒரு தளத்தில் **ப** இருந்தால் **ப** இன் ஒழுக்கு என்ன? (ii) இத்தடையில்லாதிருந்தால் அதன் ஒழுக்கு என்ன?

[18] **ப** ஐ மையமாகவும் கொடுக்கப்பட்ட ஆரையை உடையதுமான ஒரு மாறும் வட்டம் நிலையான ஒரு புள்ளி **க** இற்கூடாகச் செல்கின்றது. (i) **க** இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தில் **ப** கிடக்குமானால் அதன் ஒழுக்கு யாது? (ii) இத்தடையில்லாதிருந்தால் அதன் ஒழுக்கு என்ன?

[19] பம்பி ஒன்று இணைக்கப்பட்ட ஒரு நீர்வண்டி மலர்ப்படுக்கைகள் சூழ்ந்த ஒரு செவ்வகப் புற்றரையின் எப்பாகத்திற்கும் இட்டுச் செல்லப்படக் கூடியதாயிருக்கின்றது. நீர் விடக்கூடிய பகுதியின் எல்லை யாது?

[20] **கமப** ஒரு கம்பித்துண்டு. **கம, மப** ஆகிய பகுதிகளினுடைய நீளங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவை செங்கோணமாக அமைந்துள்ளன. முனை **க** நிலையாக உள்ளது. **ப** இனது ஒழுக்கு யாது?

21. ஒரு பென்னி நாணயம் ஒரு மேசைமேலே தட்டையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதைப்போல் மேசைமேல் தட்டையாக வைக்கப்பட்டுள்ள பிறிதொரு பென்னி முன்னையதைச் சுற்றிவரச் சுழற்றப்பட்டால், அசையும் பென்னியின் மையத்தினது ஒழுக்கு என்ன?

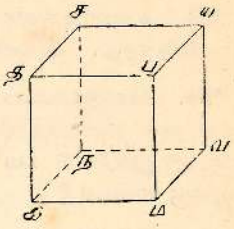
22. ஒரு வட்டத்தட்டு அதன் விளிம்பினுள்ள ஒரு புள்ளியில் சுழலவைக்கப்பட்டுள்ளது. (i) அத்தட்டு அதன் தளத்திலேயே சுழலக்கூடுமானால் அத்தட்டின் விளிம்பில் அடையாளமிடப்பட்ட வேறு ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு என்ன? (ii) அத்தடையில்லாவிடின் அப்புள்ளியின் ஒழுக்கு என்ன?

23. 4 கோல்கள் சேர்ந்து **கமபத** எனும் ஓரிணைகரமாகின்றன. **கம** நிலையானது. ஆனால் **கத** உம் **மப** உம் முறையே **க, ம** ஆகியவற்றைச் சுற்றிச் சுழலல்கூடும். கோல் **பத** இல் ஓரடையாளமிடப்பட்ட புள்ளி **வ** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க. [**வய** என்பதை **தந** இற்குச் சமாந்தரமாய், **கம** ஐ **ய** இற் சந்திக்குமாறு வரைக.]

[24] **க, ம** கள் நிலையான புள்ளிகள். **க** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தில் மாறும் நிலையுள்ள புள்ளி **த**. **கமதப** ஓரிணைகரம். **ப** இனது ஒழுக்கினைக் காண்க. [**மக** ஐ **ந** இற்கு, **மக=கந** ஆகும் வண்ணம் நீட்டுக; **நப** ஐ இணைக்க.]

25. **கமப** ஒரு கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ; **மகதந, பமநய** என்பவை மாறும் இணைகரங்கள். **க** ஐ மையமாகவுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தில் **த** உள்ளதானால் **ப** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க.

26. உரு 418 ஐப் பார்க்க. ஒரு முப்படிப் பெட்டியின் அடி **கமவந** நிலத்திலே தங்கியுள்ளது. பெட்டியானது வழுவாமல் பக்கம் **மவயப** நிலத்திலே தங்கும் வண்ணம் உருட்டப்பட்டது. அவ்வாறே மீண்டும் மீண்டும் பக்கங்கள் **பயசத, தசநக** நிலத்திலே தங்கும் வண்ணம் பெட்டி உருட்டப்பட்டது. **க** இனது ஒழுக்கினை வரைக.



உருவம் 418

[27] **கமப** என்னும் ஒரு சமபக்கமுக்கோணம் **கம** வானது ஒரு கிடையான மேசையோடு பொருந்தியதால் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருக்கின்றது. அது **ம** இலே **மப** மேசையோடு பொருந்தும் வண்ணம் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுழற்றப்படுகின்றது. பின்னர் **ப** இலே **பக** மேசையோடு பொருந்தும் வண்ணம் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே சுழற்றப்படுகிறது. **க** இன் ஒழுக்கினை வரைக.

[28] மட்டமான தரையில் நேர்கோட்டில் ஒரு கார் போய்க்கொண்டிருக்கின்றது. அது மட்டமான மேற்பருதியுடைய ஒரு உயரிடத்திற்கு வருகிறது. அது அதன் மேற்போய் மீண்டும் மற்றைப் பக்கத்திலுள்ள பழைய மட்டத்திலுள்ள நிலத்திற்கு வருகின்றது. அக்காரின் ஒரு சில்லினுடைய மையத்தினது ஒழுக்கினைக் காண்க.

29. ஒரு நேரான மெல்லிய கோல் 3 அடி நீளம் ; **ப** ஆனது அக்கோலினது மிக அண்மிய புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் 2 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாகும். (i) கோலினூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்திற் **ப** கிடக்குமெனின் **ப** இன் முழுமையான ஒழுக்கு என்ன ? (ii) இத்தடையில்லாவிடின் அதன் ஒழுக்கென்ன ?

*30. **கம** ஆனது **ம** இலே ஒரு பாரங்கட்டப்பட்ட நீண்ட நூல் ; நிலையான நிலைக்குத்தான வட்ட வளையம் ஒன்றிலே முனை **க** நகர்வதற்குக் கட்டின்றியுள்ளது. **கம** நிலைக்குத்தாக உள்ளது. **ம** இனது ஒழுக்கு என்ன ?

*31. **க, ம** என்பவை **கம** = 5 ச.மீ. ஆகவுள்ள இருபுள்ளிகள். **ப** என்பது, **பக** < 4 ச.மீ. ஆகவும் **பம** < 3 ச.மீ. ஆகவும் அமைந்த ஒரு மாறும் புள்ளி. (i) **கம** இற்கூடாகச் செல்லும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தளத்தில் **ப** கிடந்தால் அதன் முழுமையான ஒழுக்கு என்ன ? (ii) இத்தடையின்றி அதன் ஒழுக்கு என்ன ?

*32. தன் வெட்டுமுகம் ஒழுங்கான ஈறுகோணமாயுள்ள ஓரியத்தைச் சுற்றி ஒரு நீண்ட கயிறு சுற்றப்பட்டுள்ளது. கயிற்றை அரியத்தின் அச்சிற்குச் செங்குத்தாயும் இறுக்கமாயும் பிடித்துக்கொண்டு சுழற்றும் பொழுது கயிற்றின் கட்டில்லாத முனையின் ஒழுக்கை வரைக.

*33. உள்ளீடில்லா வட்டக் கூம்பொன்றின் உட்பரப்பில் கோளம் ஒன்று உருள்கின்றது. அதன் மையத்தின் ஒழுக்கென்ன ?

*34. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி **க** இற்கூடாகச் செல்வதும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தளத்தோடு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணத்தை ஆக்குவதுமான ஒரு மாறுங்கோடு **கம** இலே ஒரு மாறும்புள்ளி **ப** கிடக்கின்றது. **ப** இன் ஒழுக்கு என்ன ?

*35. **கமபத** ஒரு மாறுத சாய்சதுரம்; **கமபத** இனது தளத்திலே, **ந** ஆனது $\angle$**கநம** = $\angle$**கநத** ஆகவமைந்த ஒரு மாறும்புள்ளியாகும். மூலை விட்டங்களும் நீட்டப்பட்ட மூலை விட்டங்களும் **ந** இன் ஒழுக்கின் பகுதியாகின்றனவோ எனக் காண்க. **ந** இன் ஒழுக்கினைச் சேர்ந்த ஒரு வட்டவிற் பகுதியும் உண்டு; பரிசோதனைமுறை வழிகளைக் கைக்கொண்டு இவ்வில்லை உமது உருவிலே வரைக.

*36. **கமபத** ஒரு சதுரம்; **ந** என்பது, சதுரத்தினுள்ளே, மாறும் ஒரு புள்ளி. **கம, கத** ஆகியவற்றிலிருந்து அது இருக்குந் தூரங்களின் கூட்டுத்தொகை சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமன். பரிசோதனைமுறை வழிகளால் **ந** இனது ஒழுக்கினைக் காண்க. உமது பேறு திருத்தமானது என நிறுவுக. [சதுரக்கோட்டுத்தாள் உபயோகிக்க.]

*37. 10 அடி நீளமுள்ள ஏணி ஒன்று ஒரு முனை நிலைக்குத்தான சுவரிலும் மற்றையது கிடையான நிலத்திலுமாகத் தங்கியுள்ளது. ஏணி கீழ்நோக்கி வழுக்கிச் சுவரிற்குச் செங்குத்தாய தளத்தில் நிற்குமானால் அதனுடைய நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

*38. வட்டக்கூம்பு ஒன்று ஒரு தளத்தில் உருள்கின்றது. கூம்பின் அடியின் மையத்தினது ஒழுக்கு என்ன ?

*39. ஒப்பப்பட்ட இரு சமமில்லாக் கோளங்களாலாய ஒரு திண்மம் ஒரு தளத்தில் உருள்கின்றது. அக்கோளங்களினுடைய மையங்களின் ஒழுக்குக்கள் என்ன ?

ஒழுக்குக்கள் பற்றிய உத்திக்கணக்குக்களைத் தீர்ப்பதில் மூன்று படிகள் பொதுவாக உள :

(1) ஒழுக்கினைக் கண்டறிதல் வேண்டும். சில வேளைகளில் இதைப் பரிசோதனை முறையாற் செய்யலாம். ஆனால் இது செய்யவியலாததொன்றாயிருந்தால் அக்கணக்கினை நியமமான ஒழுக்குத் தேற்றங்கட்கு ஒடுக்குதல் வேண்டும்.

(2) குறிக்கப்பட்ட ஒழுக்கிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் கொடுக்கப்பட்ட விதிக்கமைந்துளது என நிறுவுதல் வேண்டும்.

(3) கொடுக்கப்பட்ட விதிக்கமைந்த நிலையுடைய புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் குறிக்கப்பட்ட ஒழுக்கிலுள்ளது என நிறுவுதல் வேண்டும்.

வட்டம், அதுபோன்ற உருவங்கள் ஆகியவற்றின் கோணங்களுடைய பண்புகள், பரப்புக்கள் முதலியவற்றைப் பற்றிப் பின்னர் ஆராயப்படுந் தேற்றங்களிலிருந்து பயனுள்ள நியமமான ஒழுக்குத் தேற்றங்களை நாம் உய்த்தறியலாம்.

இப்பொழுது நாம் பல சிறப்பான அறிமுறை செய்முறைக்கேற்ற பிரயோகங்களுடைய இரண்டு ஒழுக்குத் தேற்றங்களை ஆராய்வோம்.

(i) கொடுத்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு கொடுத்த புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் இருசம வெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : இருசமவெட்டிச் செங்குத்து ஒழுக்கு.

(ii) கொடுக்கப்பட்ட ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நேர்கோடுகளினின்றுஞ் சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகட்கிடையேயுள்ள கோணங்களை இரு சமக்கூறிடுஞ் சோடிக் கோடுகளாகும்.

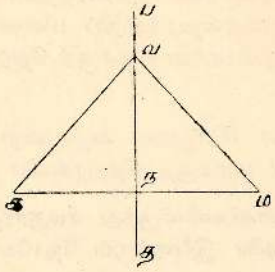
குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : கோணவிருசமவெட்டி ஒழுக்கு.

ஒவ்வொரு தேற்றத்தினது விவரணமும் ஒழுக்கைச் சிறப்பாகக் குறிப்பிடுகின்றது ; ஒவ்வொரு தேற்றத்தினதும் முழுமையான நிறுவல் மேற்கூறிய இரண்டாம் மூன்றும் படிகட்கு ஒத்தவையாய் ஒன்றிற்கொன்று மறுதலையாய் உள்ள இருவேறு கூற்றுக்களை நிறுவுதலை உடைத்தாயுள்ளது.

இவ்வீரொழுக்குத் தேற்றங்களுள் முதலாவது, பக்கங்கள் 234, 235 ஆகியவற்றிலுள்ள தேற்றங்கள் 29(1), 29(2) ஆகியவற்றால் உறுதியாக்கப்பட்டுள்ளது. இவை முறையே படி (2) படி (3) ஆகியவற்றைப் பற்றிக் கூறுகின்றன. இரண்டாவது ஒழுக்குத் தேற்றம், தேற்றங்கள் 32 (1), 32 (2) ஆகியவற்றால் (பக்கங்கள் 243, 244) உறுதியாக்கப்பட்டுள்ளது.

தேற்றம் 29 (1)

கொடுத்த இருபுள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்திலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி கொடுத்த அப்புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கும்.



உருவம் 419

தரவு. இருபுள்ளிகள் **க, ம ; கம** இன் இருசமவெட்டி **பத** இல் ஒரு புள்ளி **வ.**

மேற்கோள். வக = வம.

கருவி. பத ஆனது **கம** ஐ **ந** இல் வெட்டுவதாகுக.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கநவ, மநவ** ஆகியவற்றில்,

கந = மந **தரவு,**

வந = வந,

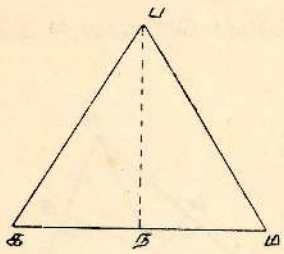
∠ கநவ = ∠ மநவ **செங்கோணங்கள், தரவு.**

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கநவ}}{\text{மநவ}}$ சர்வசமன் பகோப.

∴ **வக = வம.**

தேற்றம் 29 (2)

கொடுத்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி அப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தி லுள்ளது.



உருவம் 420

தரவு. இருபுள்ளிகள் **க, ம ; பக = பம** ஆகவமைந்த ஒரு புள்ளி **ப.**

மேற்கோள். **ப** ஆனது **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்திலுள்ளது.

கருவி. **ந** ஆனது **கம** இனது நடுப்புள்ளியாகுக.
பந ஐ இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கநப, மநப** ஆகியவற்றில்,

கந = மந — **கருவி,**

பக = பம — **தரவு,**

பந = பந.

∴ முக்கோணங்கள் **கநப / மநப** சர்வசமன் **பபப.**

∴ ∠ **கநப = மநப.**

ஆனால் இவை ஒரு நேர்கோட்டு அயற்கோணங்களாகும் ; எனவே ஒவ்வொன்றுஞ் செங்கோணமாம்.

∴ **பந** ஆனது **கம** இற்குச் செங்குத்தாயிருப்பதுடன் அதை இருசமக்கூறுமிடுகின்றது.

∴ **ப** ஆனது **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்திலுள்ளது.

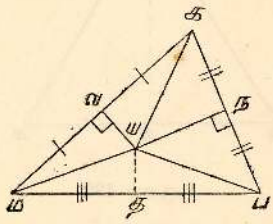
குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : இருசமவெட்டிச் செங்குத்து ஒழுக்கு.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. ஒரு முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கங்கள் **கம, கப** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் **ய** இலே சந்திக்கின்றன.

(1) **யக = யம = யப** என நிறுவுக ;

(2) **மப** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **ய** இற் கூடாகச் செல்கின்றது என நிறுவுக.



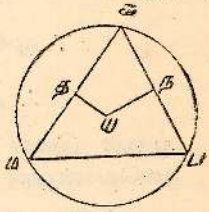
உருவம் 421

(i) என் **△யவக ≡ △யவம** என விளக்குக. அதன்பின் (1) இன் நிறுவலை முடிவாக்குக.

(ii) **த** ஆனது **மப** இனது நடுப்புள்ளியெனின், என் **△யதம ≡ △யதப** என விளக்குக ; அதன்பின் (2) இன் நிறுவலை முடிவாக்குக.

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் சந்திக்கின்றன எனுந் தேற்றத்திற்கு இந் நியாயம் ஒரு நிறுவலை அளிக்கின்றது. இப் பொழுது உறுதியாக்கப்பட்ட ஒழுக்குத்தேற்றத்தைக் கொண்டு இந்நிறுவலைச் சுருக்கல் கூடும். தேற்றம் 30 ஐப் பார்க்க.

யக = யம = யப ஆனதால் **ய** ஐ மையமாகவும் **யக** ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் **க, ம, ப** களூடாகச் செல்கின்றது. அது **△கமப** இன் **சுற்று வட்டம்** என்று அழைக்கப்படும் ; **ய சுற்றுமையம்** என்று அழைக்கப்படும் ; இவ்வட்டத்தின் ஆரை **சுற்றாரையென்று** அழைக்கப்படும்.

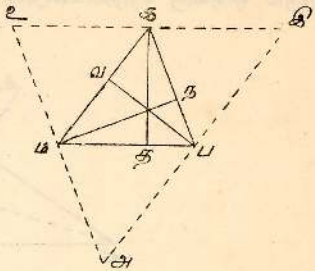


உருவம் 422

2. **க,ம,ப என்பவை ஒருநேர்கோட்டிலில்லா எவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் எனின், அவற்றிற் கூடாகச் செல்லக் கூடியதாய் ஒரே யொரு வட்டம் வரையலாம்.**

வேண்டிய கருவி அமைத்து இக்கூற்று திருத்தமானது என நிறுவுக.

3. **கத, மந, பவ என்பவை பாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் கமப இன் குத்துயரங்களாயின், அதாவது அவை உச்சிகளினின்றும் எதிர்ப்பக்கங்கட்குள்ள செங்குத்துக்களாயின், கத, மந, பவ என்பவை சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.**



உருவம் 423

க, ம, ப களுக்கூடாக முக்கோணம் **அஇஉ** என்பதை அமைக்கக்கூடியதாய் முறையே **மப, பக, கம** ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரக் கோடுகள் வரைக.

(i) என் **மப = கஉ** என விளக்குக. பின் **கஇ = கஉ** என நிறுவுக.

(ii) **கத** என் **இஉ** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து ஆகின்றது என விளக்குக.

(iii) **மந, பவ** ஆகியவற்றைப்பற்றி நீர் என்ன சொல்லக்கூடும்?

நிறுவலை முடிவாக்குக.

குத்துயரங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும்புள்ளி **செங்குத்துமையம்** எனப்படும்.

உரு 423 இல் குத்துயரங்களின் அடிகளைத் தன்னுச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் **தநவ** முக்கோணம் **கமப** வின் **பாதமுக்கோணம்** எனப்படும்.

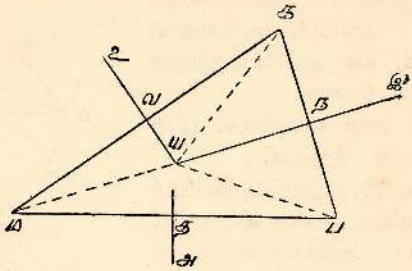
நீர் ஒரு விரிகோணமுக்கோணத்தைக் கிறினால் அதன் செங்குத்துமையம் முக்கோணத்திற்கு வெளியே இருப்பதைக் காண்பீர்.

குறிப்பு: △ **கமப** இன் சுற்றுமையம் **கமப** களூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையமாகும்; ஆனால் செங்குத்துமையம் என்பது △ **கமப** உடன் இணைந்த பாதாயினும் ஒரு சிறந்த வட்டத்தின் மையமன்று. மையம் எனுஞ் சொல் ஒருங்கு சந்திக்கின்ற மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் பொதுப்புள்ளியைக் குறிக்கவே பலகாலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. அது போன்றே ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் பொதுப்புள்ளி (பக்கம் 225 பார்க்க) மையக் கோட்டுச் சந்தி என்றழைக்கப்படுகின்றது.

குறியீடு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கங்களில் ஒத்த புள்ளிகள் எடுக்கப்படுமேல், உதாரணமாக நடுப்புள்ளிகள், குத்துயரங்களின் அடிகள் ஆகியவை, அவை அடுத்துவருகின்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படல் வேண்டும். இதன்பொருட்டு புள்ளிகள் உறுப்புக்களைக் குறிக்க எடுத்தாளப்படும் எழுத்துக்களை **க, ம, ப, த, ந, வ, ச, ய, அ, இ, உ, எ, ஒ** என்று முறைப்படுத்திக்கொள்ளல் நலம். அப்பொழுது மேற்கூறியவற்றை, **த, ந, வ** அல்லது **அ, இ, உ** என்று குறிக்கலாம். உருக்கள் 421, 423 ஆகியவற்றைக் காண்க. **க** இற்கு எதிரே **த** உம், **ம** இற்கு எதிரே **ந** உம் **ப** இற்கு எதிரே **வ** உம் வருதலைக் காண்க. இங்ஙனமே **அ, இ, உ** ஆகியவையும். மாணவர் இம்முறையை ஞாபகத்தில் வைத்துக் கொள்ளல் நலம். இவ்வழியைப் பின்பற்றினால் ஒரு நிறுவுகையை எழுதுதலும் விளங்கலும் எளியவாயிருக்கும்.

தேற்றம் 30

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்களும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.



உருவம் 424

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** உம் **மப, பக, கம** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் **அத, இந, உவ** என்பனவும்.

மேற்கோள். **அத, இந, உவ** ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

கருவி. **இந, உவ** என்பன **ய** இற் சந்திப்பனவாகுக. **யக, யம, யப** என்பவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். **ய** ஆனது **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்திலுள்ளதால் **யக = யம.**

ய ஆனது **கப** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்திலுள்ளதால் **யக = யப.**

∴ **யம = யப.**

∴ **ய** ஆனது புள்ளிகள் **ம, ப** களிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளது.

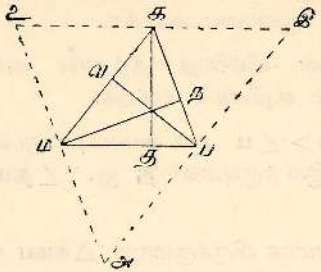
∴ **ய** ஆனது **மப** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **அத** இல் உள்ளது.

∴ **அத, இந, உவ** என்பன **ய** இலே சந்திக்கின்றன.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : சுற்றுமையத் தேற்றம்.

தேற்றம் 31

ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரங்கள் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.



உருவம் 425

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** உம் **க, ம, ப** களிலிருந்து **மப, பக, கம** ஆகியவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **கத. மந, பவ** என்பனவும்.

மேற்கோள். **கத, மந, பவ** என்பன ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

கருவி. **க, ம, ப** களுக்கூடாக முக்கோணம் **அஇஉ** அமையும் வண்ணம் முறையே **மப, பக, கம** ஆகியவற்றிற்கு சமாந்தரக் கோடுகள் வரைக.

நிறுவல். **மப** ஆனது **உக** இற்குச் சமாந்தரம் **கருவி,**

பக ஆனது **மஉ** இற்குச் சமாந்தரம் **கருவி,**

∴ **மபகஉ** ஓரிணைகரமாகும்.

∴ **மப = உக.** **எதிர்ப்பக்கங்கள் இணைகரம்.**

இவ்வாறே, **மபஇக** ஓரிணைகரமாதலால்,

மப = கஇ.

∴ **உக = கஇ.**

கத ஆனது **மப** இற்குச் செங்குத்தானதாலும் **தரவு,**

மப ஆனது **உஇ** இற்குச் சமாந்தரம் ஆனதாலும் **கருவி,**

கத ஆனது **உஇ** இற்குச் செங்குத்தாகும்.

∴ **கத** ஆனது **உஇ** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

இவ்வாறே, **மந, பவ** என்பவை **உஅ, அஇ** என்பவற்றின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்களாகும். ஆனால் △ **அஇஉ** இன் பக்கங்களினுடைய இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

∴ **கத, மந, பவ** என்பவை ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம். செங்குத்துமையத் தேற்றம்.

பயிற்சி 47

1. **கமப** எனும் முக்கோணம் ஒன்றை **மப** = 7 ச.மீ., **பக** = 6 ச.மீ., **கம** = 5 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. **க, ம, ப** களூடாகச் செல்லும் வட்டத்தைக்கீறி அதன் ஆரையை அளக்க.

[2] ஒரு வட்டத்தின் வில்லைத் தந்தால் அதிலிருந்து வட்டத்தின் மையத்தை அமைக்கும் வழியைக் காட்டுக.

3 △**கமப** ஐ, ∠**ம** > ∠**ப** ஆக அமையுமாறு வரைக. மிக்க எளிமையான வழியில் **கப** இல் ஒருபுள்ளி **த** ஐ, ∠**தமப** = ∠**ப** ஆகவிருக்குமாறு அமைக்க.

[4] ∠**க** விரிகோணமாக விருக்குமாறு △**கமப** ஒன்று வரைக. நீட்டப்பட்ட **மக** இல் ஒரு புள்ளி **த** ஐ, **தம** − **தப** = **கம** ஆகவிருக்குமாறு அமைக்க.

5. **கமபத** எனும் ஒரு நாற்கோணத்தை **தப** இற்குக் **கம** சமாந்தரமில்லாதவாறு வரைக. ஒரு புள்ளி **ந** ஐ **நக** = **நம** ஆகவும் **நப** = **நத** ஆகவுமிருக்குமாறு அமைக்க.

[6] **கமப** எனும் ஒரு முக்கோணங்கீறி **த** எனும் புள்ளி ஒன்றை **தக** = **தப** ஆகவும் **மப** இற்குக் **கத** செங்குத்தாகவிருக்குமாறும் அமைக்க.

7. **கமப** எனும் ஒரு முக்கோணத்தை, **கம** = 2 அங்., **மப** = 3 அங்., ∠**ம** = 60° ஆகவிருக்குமாறு வரைக. நீட்டப்பட்ட **பம** இல் **த** எனும் ஒரு புள்ளியை, **தப** − **தக** = $1\frac{1}{2}$ அங். ஆகவிருக்குமாறு, காண்க. **தப** ஐ அளக்க. [இரு புள்ளிகளை அவற்றிலிருந்து **த** சட தூரத்திலிருக்குமாறு காண்க.]

8. **க, ம** எனும் இரு புள்ளிகளும் ஒரு கோடு **பத** உம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. தன் மையத்தை **பத** வில் கொண்டு **க, ம** களுக்கூடாகச் செல்லும் வண்ணம் ஒரு வட்டம் வரைக. இது என்றும் இயலுமா?

[9] ஒரு வட்டமும் அதனுள் இருபுள்ளிகள் **க, ம** உங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தின் பரிதியில் மையத்தை உடையதாயும் **க, ம** களூடாகச் செல்லக் கூடியதாயும் ஒரு வட்டம் அமைக்க. ஒன்றினும் மேலாய தீர்வுகள் உண்டா?

10. △**கமப** இல் **கம** = **கப**. **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **மப** ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட **மப** ஐ **ய** இல் வெட்டினால், ∠**கயம** = ∠**மகப** என நிறுவுக.

[11] **க, ம** களை மையங்களாகவுடைய, இரு வட்டங்கள் **ந, வ** களில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **நவ** ஐ **கம** செங்கோணமாய் இருசமக் கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

12. **கமப** எனும் முக்கோணம் **ப** இலே செங்கோணமாயுள்ளது. **கப** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து, **கம** ஐ **வ** இலே வெட்டுகின்றது. **வக = வம = வப** என நிறுவுக. செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றின் சுற்றுமையம் எங்கே இருக்கும்.

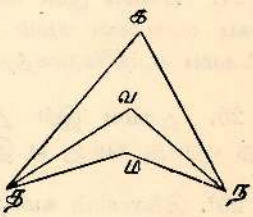
[13] **க, ம** கள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ; **கபமத** ஒருமாறுஞ் சாய் சதுரம். **ப** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க.

14. **க, ம** கள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ; **கந** ஒரு மாறுங்கோடு ; **கந** இல் **ம** இன் விம்பம் **த**, அதாவது **கந** ஆனது **மத** இன் இருசம வெட்டிச் செங்குத்தாகும். **த** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க.

15. **க, ம, ப, த** கள் ஒரு வட்டத்தின் பரிதியிலே நான்கு புள்ளிகள். **கம, கப, கத, மப, மத, பத** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக் கள் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

[16] சரிவகம் **கமபத** இன் சமாந்தரப்பக்கங்கள் **கம, தப** களுள்ளே நீண்டது **கம**. **ந** ஆனது **கம** இலே **தந = தக** ஆகவும் **பந = பம** ஆகவும் அமைந்த புள்ளியெனின் **கம = 2பத** என நிறுவுக.

17. உரு 426 இல் **வத, வந** என்பவை சமகோணங்களான **கதம, கநம** ஆகியவற்றின் இருசம வெட்டிகளாகும். **வத = வந** எனின், **க, வ, ம** கள் ஒரு நேர் கோட்டிலுள என நிறுவுக. [**தந** ஐ இணைக்க.]

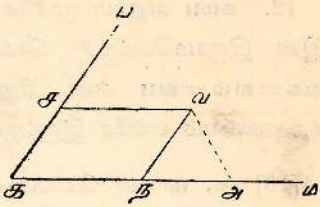


உருவம் 426

[18] △ **கமப** இன் கோணம் **மகப** விரிவானது; **கம, கப** ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள், **மப** ஐ **வ, ச** களில் வெட்டுகின்றன. ∠ **வகச** = 2 ∠ **மகப** − 180° என நிறுவுக.

19* நாற்கோணம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ய** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **க, ய, ம; ம, ய, ப; ப, ய, த; த, ய, க** ஆகிய வற்றிற் கூடாக வட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன. அவ்வட்டங்களின் மையங் கள் ஓரிணைகரத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

20*. உரு 427 இல் **கம, கப** என்பவை கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர் கோடுகள்; **கநவச** என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சுற்றளவு கொண்ட ஒரு மாறும் இணைகரம். **வ** இன் ஒழுக்கு ஒரு நேர் கோட்டின் பகுதியென நிறுவுக. **ந, ச,** என்பவை நீட்டப்பட்ட **மக** நீட்டப்பட்ட **பக** ஆகியவற்றிலே கிடக்குமெனின் முழுமையான ஒழுக்கு என்ன? [**அ** ஐ **கம** இலே, **நஅ = நவ** ஆக எடுத்து **அவ** ஒரு நிலையான திசையிலுள்ளது என நிறுவுக.]



427

[பின்வரும் பயிற்சிகள் செங்குத்துமையப் பண்பிலே தங்கியுள்ளன.]

[21] ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துமையம் எங்கேயுள்ளது?

22. **த** என்பது △**கமப** இன் செங்குத்துமையம் எனின், **க** என்பது △**தமப** இன் செங்குத்துமையம் என நிறுவுக.

[23] △**கமப** இன் பக்கங்களினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **த, ந, வ** களாகும்; △**தநவ** இன் செங்குத்து மையம் △**கமப** இன் சுற்றுமையம் ஆகும் என நிறுவுக.

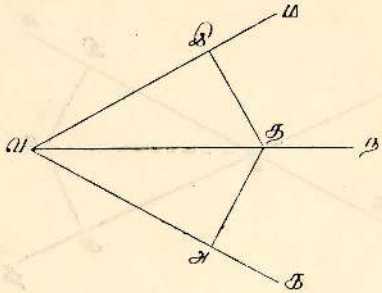
24. △**கமப** இன் செங்குத்துமையம் **ந** எனின், கோணங்கள் **மநப, மகப** என்பவை சமம் அல்லது மிகை நிரப்புகின்றவை என நிறுவுக. [△**கமப** கூர்ங்கோணத்ததாய் அல்லது விரிகோணத்ததாய் இருக்கலாம்.]

25. △**கமப** இல் ∠**க** = 45°; △**கமப** இன் செங்குத்துமையம் **ந**; **பந** ஆனது **கம** ஐ **ய** இல் வெட்டுகின்றது; **மய = யந** என நிறுவுக.

26*. இணைகரம் **கமபத** உள் **வ** எனும் புள்ளி ∠**வமப** உம் ∠**வதப** வுஞ் செங்கோணமாக அமையுமாறுள்ளது; **மத** இற்குக் **கவ** செங்குத்து என நிறுவுக.

தேற்றம் 32 (1)

கொடுத்த ஒரு கோணத்தின் இருசமவெட்டியிலுள்ள ஒரு புள்ளி அக்கோணத்தின் இரு சிறைகளினின்றுஞ் சமதூரத்தில் உள்ளது.



உருவம் 428

தரவு. ஒரு கோணம் **கவம** ;

∠**கவம** இன் இருசமவெட்டி **வந** இல் ஒரு புள்ளி **த** ;

த இலிருந்து **வக, வம** ஆகியவற்றுக்குள்ள செங்குத்துக்கள் **தஅ, தஇ** என்பவை.

மேற்கோள். **தஅ = தஇ.**

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **தஅவ, தஇவ** ஆகியவற்றில்,

∠**தவஅ** = ∠**தவஇ** தரவு,

∠**தஅவ** = ∠**தஇவ** செங்கோணங்கள், தரவு,

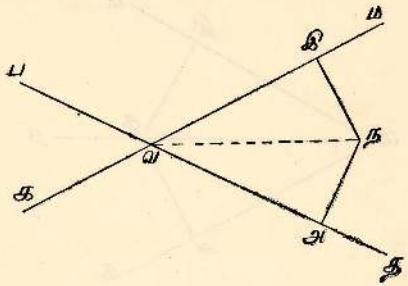
தவ = தவ.

∴ முக்கோணங்கள் **தஅவ / தஇவ** சர்வசமன் கோகோப.

∴ **தஅ = தஇ.**

தேற்றம் 32 (2)

ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நேர்கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்தி லுள்ள ஒரு புள்ளி, கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளிடையுள்ள கோணங்களை இருசமக் கூறிடுங் கோடுகளுள் ஒன்றிலேயுள்ளது.



உருவம் 429

தரவு. இரு நேர்கோடுகள் **கவம, பவத**; தன்னிலிருந்து **கம, பத** களுக்கு உள்ள செங்குத்துக்கள் **நஇ, நஅ** என்பன சமமாக வுள்ள ஒரு புள்ளி **ந**.

மேற்கோள். **கவம, பவத** எனுங் கோடுகளிடையுள்ள கோணங்களுள் ஒன்றின் இருசம வெட்டியிலே **ந** உள்ளது.

கருவி. **வந** ஐ இணைக்க.

நிறுவல். **ந** என்பது ∠**மவத** இற்குள்ளிருப்பதாகக் கொள்க. முக் கோணங்கள் **நஇவ, நஅவ** என்பவற்றில்,

∠ நஇவ = ∠ நஅவ — செங்கோணங்கள், தரவு,
நஇ = நஅ — தரவு,
நவ = நவ.

∴ முக்கோணங்கள் **நஇவ / நஅவ** சர்வசமன் — செங். செம். ப.

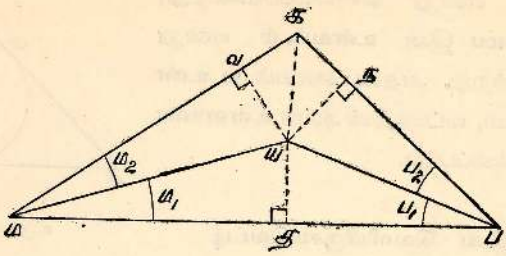
∴ ∠ நவஇ = ∠ நவஅ.

∴ ∠ மவத இன் இருசமவெட்டியிலே **ந** உள்ளது.

இவ்வாறே **மவப, பவக, கவத** ஆகிய கோணங்களில் யாதாயினு மொன்றுள் **ந** உள்ளதாயின் அது அக்கோணத்தின் இரு சமவெட்டியிலே உள்ளது என நிறுவல் கூடும்.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம்: ∠ இருசமவெட்டி ஒழுக்கு.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்



உருவம் 430

1. △கமப இல் ∠ம, ∠ப, என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகளும், ய இலே சந்திக்கின்றன ; யத, யந, யவ என்பவையே ய இலிருந்து மப, பக, கம என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள்.

(i) யத = யந = யவ என நிறுவுக.

(ii) ∠மகப வை யக இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

(i) ஏன் △யதம ≡ △யவம என விளக்குக ; பின்னர் (i) இனது நிறுவலை முடிவாக்குக.

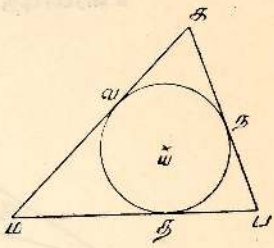
(ii) யக ஐ இணைத்து ஏன் △யவக ≡ △யநக என விளக்குக ; பின்னர் (ii) இனது நிறுவலை முடிவாக்குக.

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களுடைய இருசம வெட்டிகளும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன எனுந் தேற்றத்திற்கு இந்நியாயம் ஒரு நிறுவலை அளிக்கின்றது. இப்பொழுது உறுதியாக்கப்பட்ட ஒழுக்குத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இந் நிறுவலைச் சுருக்கலாம் ; 33 ஆந் தேற்றத்தைப் பார்க்க.

யத = யந = யவ ஆனமையால், ய ஐ மையமாகவும் யத ஐ ஆரையாகவுங் கொண்ட வட்டம் த, ந, வ களூடாகச் செல்கின்றது.

ஒரு நேர்கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளிக்குள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் செங்குத்தான தூரம் ஆனமையால், ய ஐ மையமாயும் யத ஐ ஆரையாயும் உடைய வட்டம், மப ஐ த தவிர்ந்த வேறு புள்ளிகளிலே சந்தியாது. அவ்வாறே அது பக, கம ஆகியவற்றை ந, வ களிலன்றிச் சந்தியாது.

இவ்வட்டம் **மப, பக, கம** ஆகியவற்றைத் **தொடுகின்றது** என்று சொல்லப்படுகின்றது; அதனால் △**கமப** இன் **உள்வட்டம்** என்று சொல்லப்படுகின்றது. அதன் மையம் **ய உண் மையம்** என்றும், வட்டத்தின் ஆரை **உள்ளாரை** என்றும் சொல்லப்படும்.

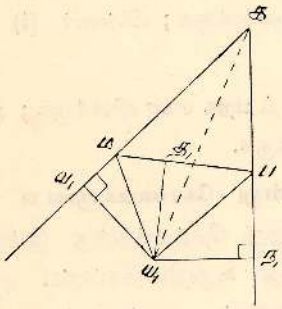


உருவம் 431

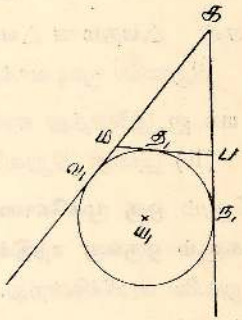
ஒரு கோணத்தின் வெளியிருசமவெட்டி

ஒரு கோணம் **கமப** இன் ஒரு சிறை **கம** ஆனது **ச** இற்கு நீட்டப்பட்டால் கோணம் **சமப** இன் இருசம வெட்டியானது கோணம் **கமப** இன் வெளியிருசமவெட்டி எனப்படும்.

2. △**கமப** இன் கோணங்கள் **ம, ப** என்பவற்றின் வெளியிருசம வெட்டிகள், $\mathbf{ய}_1$ இல் சந்திக்கின்றன,



உருவம் 432



உருவம் 433

$\mathbf{ய}_1$ இலிருந்து **மப**, நீட்டப்பட்ட **கப**, நீட்டப்பட்ட **கம** ஆகியவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள் $\mathbf{ய}_1\mathbf{த}_1$, $\mathbf{ய}_1\mathbf{ந}_1$, $\mathbf{ய}_1\mathbf{வ}_1$ என்பவை ஆயின்,

(i) $\mathbf{ய}_1\mathbf{த}_1 = \mathbf{ய}_1\mathbf{ந}_1 = \mathbf{ய}_1\mathbf{வ}_1$ என நிறுவுக.

(ii) ∠**மகப** ஐ $\mathbf{ய}_1\mathbf{க}$ இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

(iii) $\mathbf{ய}_1$ மையமாயும் $\mathbf{ய}_1\mathbf{த}_1$ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் **மப**, நீட்டப்பட்ட **கம**, நீட்டப்பட்ட **கப** ஆகியவற்றைத் தொடுகிறது என நிறுவுக.

(i) ஏன் $\triangle$ **ய$_1$த$_1$ம** $\equiv$ $\triangle$ **ய$_1$வ$_1$ம** என விளக்குக ;
பின்னர் (i) இனது நிறுவலை முடிவாக்குக.

(ii) **ய$_1$க** ஐ இணைத்து, ஏன் $\triangle$ **ய$_1$வ$_1$க** $\equiv$ $\triangle$ **ய$_1$ந$_1$க** என விளக்குக ;
பின்னர் (ii) இனது நிறுவலை முடிவாக்குக.

(iii) **ய$_1$** மையமாகவும் **ய$_1$த$_1$** ஆரையாகவும் உடைய வட்டமானது **மப** ஐ **த$_1$** தவிர்ந்த வேறிடங்களிற் சந்திக்கவில்லை என விளக்குக. பின்னர் நிறுவலை முடிவாக்குக.

உரு 433 ஐப் பார்க்க. **மப**, நீட்டப்பட்ட **கம**, நீட்டப்பட்ட **கப** ஆகியவற்றைத் தொடும் வட்டம், $\triangle$**கமப வினது வெளிவட்டம்** எனப்படும்; அவ்வட்டத்தின் மையம் **ய$_1$ வெளிமையம்** எனப்படும்.

எந்த ஒரு முக்கோணத்திற்கும் வெளிவட்டங்கள் மூன்று உள. உரு 433 இலுள்ள வட்டமானது **மப** இற்கு வரைந்த வெளிவட்டம் எனப்படும். இவ்வாறே **கம, கப** களுக்கும் முறையே இரு வெளிவட்டங்கள் வரைதல் கூடும்.

குறிப்பு:—இரண்டாம் உதாரணத்தினது நிறுவல், ஒரு முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரு கோணங்களின் வெளியிரு சமவெட்டிகளும் மூன்றாவது கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டியும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன என்பதைக் காட்டுகின்றது.

ஒழுக்குகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்

ஒரு புள்ளியினது நிலை இருவேறு நிபந்தனைகளாற் கொடுக்கப்பட்டதெனின் அவைக்கியைந்த ஈரொழுக்குக்களையும் அமைத்து அந்நிலையை நிலைக்க வைத்தல் இயலும்; இன்னும் இந்நேர் கோடுகள் வளை கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளைக் கொண்டு பல்வேறு இயலும் நிலைகளை நிலைக்க வைத்தலும் இயலும்.

உதாரணமாக, நாம் இப்பொழுது முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கங்களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் இயலும் நிலைகளை அமைத்துள்ளோம் :

(i) **மக, மப,** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு, $\angle$**கமப** இன் வெளியிருசமவெட்டி உள்ளிருசமவெட்டிகளிலே தங்கியுள்ளது ;

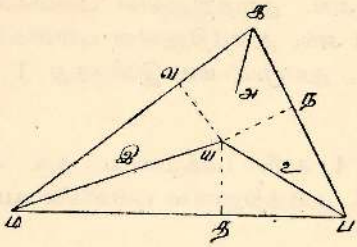
(ii) **பக, பம** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு, $\angle$**கபம** இன் வெளியிருசமவெட்டி, உள்ளிருசமவெட்டிகளிலே தங்கியுள்ளது.

இவ்விரு சோடி. நேர்கோடுகளாலான ஈரொழுக்குக்களும் △ **கமப** இன் உண்மையம், மூன்று வெளிமையம் ஆகிய நாலு புள்ளிகளிலும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் △**கமப** இன் பக்கங்களாயமைந்த கோடுகளினின்றுஞ் சமதூரத்திலிருக்கும்.

ஒழுக்குக்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதன் பயன் தேற்றம் 30 இனது நிறுவலால் எடுத்துக் காட்டப்பட்டது. இது மீண்டுந் தேற்றம் 33 இனது நிறுவலால் எடுத்துக்காட்டப்பட்டுள்ளது. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு கோணங்களின் வெளியிரு சமவெட்டிகளும் மூன்றுங் கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டியும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன என்பதை நிறுவுதற்கு மாணுக்கர் இதே வழியைக் கையாளல் வேண்டும்.

தேற்றம் 33

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் உள்ளிரு சமவெட்டிகளும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.



உருவம் 434

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** உம் ∠**க**, ∠**ம**, ∠**ப** ஆகியவற்றின் உள்ளிரு சமவெட்டிகள் **கஅ**, **மஇ**, **பஉ** என்பவையும்.

மேற்கோள். **கஅ**, **மஇ**, **பஉ** என்பவை ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

கருவி. **மஇ** உம் **பஉ** உம் **ய** இலே சந்திப்பனவாகுக. **ய** இலிருந்து, **மப**, **பக**, **கம** ஆகியவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள் **யத**, **யந**, **யவ** ஆகியவற்றை வரைக.

நிறுவல். ∠**கமப** இன் இருசம வெட்டியில் **ய** உள்ளதால், நேர்கோடுகள் **மப**, **மக** ஆகியவற்றிலிருந்து **ய** சமதூரத்திலுள்ளது.

∴ **யத = யவ.**

∠**கபம** இன் இரு சமவெட்டியில் **ய** உள்ளதால், நேர்கோடுகள் **பம**, **பக** ஆகியவற்றிலிருந்து **ய** சமதூரத்திலுள்ளது.

∴ **யத = யந.**

∴ **யந = யவ.**

∴ **ய** ஆனது **கப**, **கம** ஆகிய நேர்கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்திலும் கோணம் **மகப** உள்ளும் உள்ளது.

∴ **ய** ஆனது ∠**மகப** இன் உள்ளிருசமவெட்டி **கஅ** இல் உள்ளது.

∴ **கஅ**, **மஇ**, **பஉ** என்பவை **ய** இலே சந்திக்கின்றன.

குறிப்பிற்குரிய குறுக்கம் : உண்மையத் தேற்றம்.

பயிற்சி 48

(வேண்டிய அமைப்புக்களிற்குரிய இயலும் வினாக்கள் யாவையுந் தருக.)

1. **கமப** என்பது 3 அங். பக்கம் உடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம் (i) **க** இனின்றும் 2 அங். தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு யாது ? (ii) **மப** இனின்றும் 1 அங். தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கு யாது ? **க** இலிருந்து 2 அங். தூரமும் **மப** இலிருந்து 1 அங். தூரமுமுள்ள ஒரு புள்ளி அமைக்க.

[2] **கமப** என்பது 4 ச.மீ. பக்கமுடைய ஒரு சமபக்கமுக்கோணம். **மப** இலிருந்து 2 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளை **கப** இலும் நீட்டப்பட்ட **கப** இலுங் காண்க.

3. **கமப** என்பது 4 ச.மீ. பக்கமுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம். **கம** இலிருந்து 2 ச.மீ. தொலைவிலுள்ளதும் **கப** இலிருந்து 3 ச.மீ. தொலைவிலுள்ளதுமான ஒரு புள்ளி **வ** ஐ அமைக்க.

[4] **கமப** என்பது 4 ச.மீ. பக்கமுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம். **கப** விலிருந்து 2 ச.மீ. தொலைவிலுள்ளதும், **மக**, **மப** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளதுமான ஒரு புள்ளி **ந** ஐ அமைக்க.

5. △ **கமப** ஐ, **கம** = 4 ச.மீ. ஆகவும் **மப** = 5 ச.மீ. ஆகவும் **பக** = 4·5 ச.மீ. ஆகவும் அமைய வரைக. **பக**, **பம** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரமாயுள்ளதாயும் **ம** இலிருந்து 3 ச.மீ. தூரத்திலிலுள்ளதாயும் அமைய ஒரு புள்ளி **ந** அமைக்க.

6. 60° இல் வெட்டிக்கொள்ளும் இரு நேர்கோடுகள் **கயம**, **பயத** என்பவற்றை வரைக. கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளுள் ஒன்றிலிருந்து எப்பொழுதும் 2 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி **ந** இன் ஒழுக்கினை வரைக. **ந** எப்பொழுதேனும் இவ்விரண்டு கோடுகளினின்றும் 2 ச.மீ. தூரத்திற் குறையாமலிருக்க வேண்டுமெனின் இவ்வொழுக்கின் எப்பகுதி நீக்கப்படல் வேண்டும் ? இப்பகுதியை அழித்துவிடுக.

[7] **கமபத** என்பது **கம** = 5 ச.மீ., **மப** = 4 ச.மீ. ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வகம். **கமபத** இற்குள்ளோ வெளியிலோ அச்செவ்வகத்தின் யாதாயினும் ஒரு பக்கத்திலிருந்து 1 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கினை வரைக. **கமபத** இன் எந்தப் பக்கத்திலிருந்தேனும் அவை எப்பொழுதாகுதல் 1 ச.மீ. தூரத்திற் குறையாமலிருக்க வேண்டுமெனில் அவ்வொழுக்கின் எப்பகுதியை நீக்கல் வேண்டும் ? அதை அழித்துவிடுக.

8. **கமப** என்பது **கம** = 4 ச.மீ., **மப** = 5 ச.மீ., **பக** = 6 ச.மீ. ஆகவுள்ள ஒரு முக்கோணம். **கமப** இற்குள்ளோ வெளியிலோ எப்பொழுதும் முக்கோணத்தின் யாதாயினும் ஒரு பக்கத்திலிருந்து 1 ச.மீ. தூரத்தில் உள்ளனவாயும் எவற்றிலிருந்தும் 1 ச.மீ. தூரத்திற்குக் குறையாதனவாயும் உள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கைக் காண்க. [எண்கள் 6, 7 ஆகியவற்றிற் குறித்த கீறியழிக்கும் முறையைக் கையாள்க.]

[9] **க, ம** என்பவை **கம** = 5 ச.மீ. ஆகவுள்ள இருபுள்ளிகளாகும். **க, ம** களுள் யாதாயினும் ஒன்றிலிருந்து எப்பொழுதும் 4 ச.மீ. தூரத்தில் உள்ளனவாயும் மற்றையதிலிருந்து 4 ச.மீ. தூரத்திற்குறையாதனவாயுமுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கைக் காண்க.

10. 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து **கமபத** என்னும் ஒரு நேர்கோட்டை, அவ்வட்டத்தை **ம, ப** களில் வெட்டி **மப** = 4 ச.மீ. ஆகும் வண்ணம் வரைக. **கத** எனுங் கோட்டிற் கிடப்பனவாயும் எப்பொழுதும் அவ்வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள அண்ணிய புள்ளியிலிருந்து 1 ச.மீ. இலுங் கூடிய தூரத்தில் உள்ளனவாயும் இருக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

11. **கமப** என்பது 1 அங். பக்கமுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம். **கமப** இனது தளத்திலே, **க, ம, ப** எனும் புள்ளிகளுள் யாதாயினும் ஒன்றிலிருந்து எப்பொழுதும் 1 அங். தூரத்தில் உள்ளனவாயும் மற்றையவையிலிருந்து 1 அங். இற்குக் குறையாமலிருப்பனவாயும் உள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கினை வரைக.

[12] **கமபத** என்பது 6 ச.மீ. பக்கம் உடைய ஒரு சதுரம். **கம, கத** எனும் பக்கங்களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளனவாயும் எந்தப்பக்கத்திலிருந்தும் 2 ச.மீ. இற்குக் குறையாத தூரத்தில் உள்ளனவுமாய புள்ளிகளின் ஒழுக்கினை வரைக.

13. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வரைக. **கம, கப** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளனவாயும் **மப,** நீட்டப்பட்ட **மப** ஆகியவற்றில் உள்ளனவுமாய புள்ளிகள் அமைக்க.

[14] யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வரைக. **ம, ப** களிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளதாயும் **கம, கப** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளதுமாய ஒரு புள்ளி **ந** ஐ அமைக்க. Δ**கமப** இன் சுற்றுவட்டத்தையும் அமைக்க. **ந** என்பது அவ்வட்டத்தின் பரிதியில் உள்ளதா ?

15. **கமப** எனும் முக்கோணம் ஒன்றை **மப** = 5 ச.மீ., **பக** = 4 ச.மீ., **கம** = 6 ச.மீ. ஆகவிருக்குமாறு வரைக. இம்முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களிலிருந்தும் சமதூரத்திலமைந்த நான்கு புள்ளிகளையும் அமைக்க. உள்வட்டத்தையும் அமைத்து உமது தாளில் இடம் உள்ள அளவு வெளிவட்டங்களையும் அமைக்க.

[16] **கமபத** எனும் ஓரிணைகரம் வரைக. **கம, மப, பத** ஆகிய மூன்று பக்கங்களிலிருந்துஞ் சமதூரத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளையும் அமைத்து இம்மூன்று பக்கங்களையுந் தொடும் இரண்டு வட்டங்களையும் அமைக்க.

17. **கமபத** எனும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இலே வெட்டிக் கொள்கின்றன. **கம, கத** ஆகியவற்றிலிருந்து **ந** சமதூரத்தில் உளதாயின் **கமபத** ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

18. **கமப** எனும் முக்கோணம் ஒன்றை, **மப** = 5 ச.மீ., **கக′** எனும் மையக்கோடு = 4 ச.மீ., **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து **கத** = 3 ச.மீ. ஆக அமையுமாறு அமைக்க. உம்வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

19. சதுரக்கோடிட்ட தாள் ஒன்றிலே, ஒவ்வோரச்சிலும் ஓரங்குலம் அலகாக, பின்வரும் விதிகட்கமைந்த ஆள் கூறுகள் (க, ந) உடைய புள்ளிகளின் ஒழுக்கினை வரைக :—

(1) $ந = 2க$; (2) $ந = \frac{1}{2}க + 1$;

(3) $ந = 3 - க$; (4) $4ந + 5க = 16$;

(5) $ந = \frac{1}{5}க^2$; (6) $5ந = 2க^2 - 7க + 7$.

20 – 23 வரை உள்ள கணக்குக்களைச் சதுரக் கோட்டுத்தாளிலே செய்தல் வேண்டும்.

20. ஒரு சதுரக்கோட்டுத் தாளிலே, மிக்க தாழ்மையான தலைக்கோடு **மந** இலிருந்து 2 அங். தூரத்தில் உள்ளதாயும் தாளிலே மேனோக்கிய மையத்தலைக்கோடு **மச** இலுள்ளதுமாய ஒரு புள்ளி **ச** வை எடுக்க. ஒரு மாறும் புள்ளி **ப** ஆனது **ச** இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளதோ அவ்வளவு தூரம் கோடு **மந** இலிருந்துள்ளது. **சம** இன் இருபக்கங்களினும் **ப** இன் இயலும் நிலைகள் பல அமைத்து **ப** இன் ஒழுக்கினைக் குறிக்க ஒரு பரும்படியான வளைகோடு அமைக்க. இவ்வளைகோடு ஒரு **பரவளைவு** எனப்படும். **ம** ஐ உற்பத்தியாகவும் **மந** ஐ **க**-அச்சாகவும், ஒவ்வோரச்சிலும் உள்ள அலகினை ஓரங்குலமாகவுங் கொண்டு அதே உருவில் $\frac{1}{4}க^2 + 1$ என்பதின் வரைப்படத்தை வரைக.

21. ஒரு சதுரக்கோட்டுத் தாளிலே, மிக்க தாழ்மையான தலைக்கோடு **மந** இலிருந்து 2 அங். தூரத்திலுள்ளதாயும் தாளிலே மேனோக்கிய மையத்தலைக்கோடு **மச** இலுள்ளதுமாய ஒரு புள்ளி **ச** ஐ எடுக்க. ஒரு மாறும் புள்ளி **ப** ஆனது **மந** இலிருந்துள்ள தூரத்திலும் $\frac{3}{5}$ டகுதி தூரம் **ச** இலிருந்துள்ளது. **சம** இன் இருபக்கங்களிலும் **ப** இன் இயலும் நிலைகள் பல அமைத்து **ப** இன் ஒழுக்கினைக் குறிக்க. ஒரு பரும்படியான வளைகோடு அமைக்க. இது ஒரு **நீள்வளையம்** எனப்படும். இவ்வளைகோடு மேலுங் கீழும் எவ்வளவு செல்லும் ?

[22] எண் 21 இற்குரிய உருவில் நீட்டப்பட்ட **மச** இலே **ச′** எனும் ஒரு புள்ளியை **ச′ம**=4·25 அங். ஆகவமையுமாறு குறிக்க. ஒரு மாறும்புள்ளி **ப** ஆனது **பச+பச′**=3·75 அங். ஆகவமையுமாறுள்ளது. **ப** இனது ஒழுக்கினைக் குறிக்கும் வளைகோட்டை வரைந்து எண் 21 இலுள்ள ஒழுக்கோடு ஒப்பிடுக. [தாளில், **ச, ச′** ஆகியவற்றிற் குண்டூசிகளை நட்டு 6 அங். நீளமுள்ள ஒரு துண்டு நூலைக்கொண்டு இவ்வொழுக்கினை நீர் எளிதாக வரையலாம்.]

23. ஒரு சதுரக்கோட்டுத்தாளிலே, மிக்க உயர்வான தலைக்கோட்டிலிருந்து 1 அங். கீழேயுள்ளதாயும் யாதாயினும் ஒரு மையத்தலைக்கோடு **சம** இலுள்ளதுமாய ஒரு புள்ளி **ச** ஐ எடுக்க. மிக்க உயர்வான தலைக்கோட்டிலிருந்து $2\frac{1}{2}$ அங். கீழேயுள்ள கோட்டை **மந** என அழைக்க. ஒரு மாறும் புள்ளி **ப** ஆனது **மந** இலிருந்துள்ள தூரத்திலும் இருமடங்கு தூரம் **ச** இலிருந்துள்ளது. **சம** இன் இருபக்கங்களிலும் **ப** இன் இயலும் புள்ளிகள் பல அமைத்து **ப** இனது ஒழுக்கினைப் பரும்படியாக வரைக. அவ்வளைவில் இரு வேறுவேறான பகுதிகள் உள. அவை **மந** இன் இரு பக்கங்களிலும் ஒவ்வொன்றாய் உள. அவ்வளைகோடு **அதிபரவளைவு** எனப்படும்.

[24] ஒன்றிலிருந்து ஒன்று 6 ச.மீ. தூரத்திலுள்ளனவான இரு புள்ளிகள் **க, ம** என்பவற்றை எடுக்க. ஒரு மாறும்புள்ளி **ந** ஆனது **நக**=2 **நம** ஆக அமையுமாறு உள்ளது. **ந** இன் ஒழுக்கினைக் குறிக்கும் வளைகோட்டை வரைக. நீட்டப்பட்ட **கம** இலே **ப** எனும் ஒரு புள்ளியை, **மப**=2 ச.மீ. ஆக விருக்குமாறு எடுக்க; **ப** ஐ மையமாகக் கொண்டு 4 ச.மீ. ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தை இவ்வுருவுடன் சேர்க்க.

25—27 வரை உள்ள கணக்குக்கட்கு வரையுந்தாள் உபயோகித்தல் வேண்டும்.

25. செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும் இரு கோடுகள் **யக, யம** என்பவற்றை வரைக. **த, ந** என்பன **யக, யம** என்பவற்றிலே, **தந**=8 ச.மீ. ஆகவிருக்குமாறமைந்த புள்ளிகளாம்; **ச, வ** என்பன **தந** இலே, **ச** ஆனது **தந** இனது நடுப்புள்ளியாயும் **தவ**=3 ச.மீ. ஆகவுமமைந்த புள்ளிகளாம். **தவசந** எனும் ஒரு கோட்டை, வரையுந்தாளிலே **தவ**=3 ச.மீ., **தச**=4 ச.மீ., **தந**=8 ச.மீ. ஆக அமையுமாறு வரைக. தாளிலே துளைத்து **ச, வ** களின் பல இயலும் நிலைகளைக் காண்க. பின்னர் (i) **ச** இன் ஒழுக்கினை வரைக. (ii) **வ** இன் ஒழுக்கினை வரைக.

[26] உமது தாளிலே ஒன்றிலிருந்தொன்று 5 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள் **க,ம** என்பவற்றை வரைக. வரையுந்தாளில் 50° இல் வெட்டிக்கொள்ளும் இரு கோடுகள் வரைக. **ப** எனும் புள்ளி ஒன்று **∠கபம = 50°** ஆக அமைத்து செல்லும் ஒழுக்கினை தாளில் ஊடுருவக்குத்துவதால் கண்டறிக.

*27. **கம** விட்டமாயும், 4 ச.மீ. ஆயுமமைந்த ஒரு வட்டம் வரைக. **க** இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு மாறுங்கோடு, வட்டத்தை மீண்டும் **ப** இல் வெட்டுகின்றது; இது **த** இற்கு, **பத = 4** ச.மீ. ஆகும் வண்ணம் நீட்டப்பட்டுள்ளது. **பக** உம் **த'** இற்கு, **பத' = 4** ச.மீ. ஆகும் வண்ணம் நீட்டப்பட்டுள்ளது. வரையுந்தாளில் நேர்கோடு **வத'பதய** எனும் ஒன்றை **த'ப = பத = 4** ச.மீ. ஆகவமையுமாறு வரைக. பின்னர் தாளிலே துளையிட்டு **த, த'** ஆகியவற்றின் பல இயலும் நிலைகளைக் கண்டு ஒழுக்கினை வரைக. இவ்வளைகோடு **இருதயவுரு** எனப்படும்.

*28 செங்குத்தான இருகோடுகள் **கம, கப** என்பவற்றை வரைக. **த** என்பது **கப** இலிருந்து உள்ள தூரத்திலும் 2 ச.மீ. தூரம் **கம** இற்குக் கிட்ட உள்ளது. **த** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க. [**நவ** எனும் ஒரு கோட்டை **கம** இற்குச் சமாந்தரமாயமையவும் **த** என்பது **கப, நவ** ஆகியவற்றிற்குச் சமதூரத்திலிருக்கவும் வரைக.]

*29. **கமப** என்பது 6 ச.மீ. பக்கங் கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம். **கப** இலும் **மப** இற்கு 2 ச.மீ. அண்மையிலுள்ள ஒரு புள்ளி **த** ஐ **கம** இலே அமைக்க. ஒரு நிலையிலுங் கூடிய நிலைகள் உளவா?

*30. **கமப** என்னும் முக்கோணத்தில் **கம > கப. மப** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **∠மகப** இன் இருசமவெட்டியை **த** இலே சந்திக்கின்றது; **தந, தய** என்பன **த** இலிருந்து **கம** இற்கும் நீட்டப்பட்ட **கப** இற்குமுரிய செங்குத்துக்கள். **மந = பய** என நிறுவுக. [**தம, தப** என்பவற்றை இணைக்க.]

*31. **கமபத** கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம். **கத, மப** என்பவற்றிற்குச் சமதூரத்திலும் **கம, பத** என்பவற்றிற்குச் சமதூரத்திலும் இருக்கும் ஒரு புள்ளி **வ** ஐ அமைக்க. **வ** இன் மிகக் கூடிய இயலும் நிலைகள் எத்தனை. **கமபத** என்பது ஓரிணைகரமாயின் **வ** இனுடைய நிலைகள் எத்தனை? **∠க + ∠ப** இரு செங்கோணங்கட்குச் சமமாயின் **வ** இனுடைய இயலும் நிலைகள் இரண்டில் மிகா என நிறுவுக.

*32. மாறுங்கோடு ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட இருகோடுகள் **கம, பத** என்பவற்றை **ந, வ** களில் வெட்டுகின்றது. ∠**மநவ**, ∠**தவந** ஆகிய வற்றின் இருசமவெட்டிகள் **ய** விலே சந்தித்தால் **ய** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க.

*33. **கம, பத** என்பன நீட்டப்படும்பொழுது தாளிற்கு வெளியிலே சந்திக்கும் இரு கோடுகளாம். தாளிலே காணப்படும் **கம, பத** ஆகிய வற்றிற்கிடையிலே உள்ள கோணத்தை இருசமக்கூறிடுங் கோட்டின் பகுதியை அமைக்க. [எண் 32 உடன் ஒப்பிடுக.]

*34. உரு 433 இல் பக்கம் 246 இல் **பம** ஐ **ச** இற்கும் **மப** ஐ **அ** இற்கும், **சம = மக** ஆகவும் **அப = பக** ஆகவுமமையுமாறு நீட்டினால் $\mathbf{ய_1க = ய_1ச = ய_1அ}$ என நிறுவுக.

35. ஒரு முக்கோணம் **கமப** இன் உண்மையம் **ய**, வெளிமையங்கள் $\mathbf{ய_1, ய_2, ய_3}$. இந்நான்கு மையப்புள்ளிகளுள் எவையேனும் இரண்டை இணைக்குங்கோடு மற்றையவற்றை இணைக்குங்கோட்டிற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

மீட்டற் பயிற்சிகள் 1—34

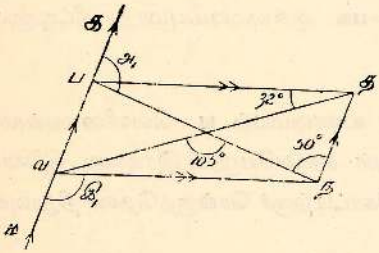
மீட்டற் பயிற்சிகள் 1—8 (தேற்றங்கள் 1-9)

(சமாந்தரங்கள், முக்கோணங்கள், பல்கோணங்கள் ஆகியவற்றுடைய கோணங்களின் பண்புகள்)

1

1. எக்கோணம் (i) தன் மிகை நிரப்பியின் $\frac{1}{5}$ ஆகவுள்ளது ?
(ii) தன்னுடைய நிரப்பியின் $\frac{1}{5}$ ஆகவுள்ளது ?

2. **கமபத** எனும் நேர்கோடு **கம** $= \frac{1}{3}$**கப** $= \frac{1}{5}$**கத** ஆகவிருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. **பத** $= 2$ அங். எனின் **கம, கத** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகட்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் கணிக்க.



உருவம் 435

3. உரு 435 இல் அம்புகளிடப்பட்ட கோடுகள் சமாந்தரம். கோணங்கள் அ, இ, என்பவற்றைக் கணிக்க. உப துவிடைக்குக் காரணங் காட்டுக.

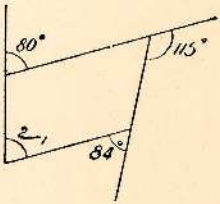
4. △**கமப** இல் ∠**க** $= 74°$, ∠**ம** $= 52°$; **கம** ஆனது **த** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **மப** ஆனது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**தமப**, ∠**நபக** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகட்கிடையேயுள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் கணிக்க.

2

1. (i) வ. 37° கி. இற்கும் தெ. 54° மே. இற்கும் இடையேயுள்ள விரிகோணத்தைக் காண்க.

(ii) வ.மே. இற்கும் மே. இற்கும் இடையேயுள்ள பின்வளை கோணத்தைக் காண்க.

2. **கம** எனும் 3 அங். கோடு ஒன்று **ந, வ** எனும் புள்ளிகட்கு **கந** $= 4$**மந** ஆகவும் **கவ** $= 3$ **மவ** ஆகவும் அமையுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **நவ** இனது நீளத்தைக் காண்க.



உருவம் 436

3. உரு 436 இலுள்ள கோணம் உ, ஐக் கணிக்க.

4. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** இலே **த** எனும் ஒரு புள்ளி ∠**பகத** $=$ ∠**கமப** ஆகவிருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. ∠**கதப** $=$ ∠**மகப** என நிறுவுக.

3

1. **கபம** உம் **தபந** உம் இருநேர்கோடுகள்.

(i) ∠**கபந** = 4 ∠**மபந** எனின் ∠**மபந** ஐக் கணிக்க.

(ii) ∠**கபந** ஆனது ∠**மபந** இலும் 90° கூடியதெனின் ∠**மபத** ஐக் கணிக்க.

2. **கமப** ஒரு நேர்கோடு; **த** ஆனது **மப** இனது நடுப்புள்ளி. **கம** + **கப** = 2 **கத** என நிறுவுக.

3. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** இற்குக் **க** இலிருந்துள்ள செங்குத்து **கத**. **கத** = 4 ச.மீ., ∠**ம** = 55°, ∠**ப** = 65° எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதெனின் △**கமப** ஐக் கீறி **மப** ஐ அளக்க.

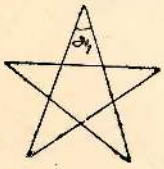
4. △**கமப** இனுள்ளே **ந** எனும் ஒரு புள்ளி, ∠**நகம** = ∠**நபக** ஆக அமைந்துள்ளது. ∠**கநப** + ∠**மகப** இரு செங்கோணங்கட்குச் சமன் என நிறுவுக.

4

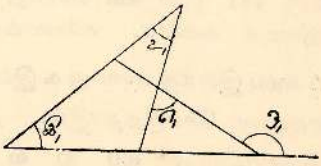
1. **க** ஆனது **ம** இற்கு நேர் கிழக்கே உள்ளது; **த** என்பது **க** இற்கு வ. 17° மே. ஆயும் **ம** இற்கு வ. 29° கி. ஆயும் உள்ளது. ∠**கதம** ஐக் கணிக்க.

2. △**கமப** இன் கோணம் **க** இன் இருசமவெட்டி ஆனது **மப** ஐ **ந** இலே சந்திக்கின்றது. **கந** = 5 ச.மீ., ∠**ம** = 28°, ∠**ப** = 68° எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதெனின் △**கமப** ஐ வரைந்து **மப** ஐ அளக்க.

3. உரு 437 ஓர் "ஐங்கர" த்தைக் குறிக்கின்றது. அதாவது அதன் உள்ளுரு ஓரொழுங்கான ஐங்கோணமாம். கோணம் அ, ஐக் காண்க.



உருவம் 437



உருவம் 438

4. உரு 438 இல் ஒ, இனை இ,, உ,, எ,, ஆகியவற்றிற் காண்க.

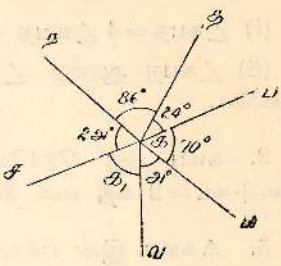
5

1. உரு 439 இல் – இது திருத்தமாகக் கீறப்படவில்லை,

(i) நேர்கோட்டிலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் காண்க.

(ii) ச, க, ப என்பவை நேர்கோட்டிலுள்ளவை எனின் கோணம் க, ஐக் காண்க.

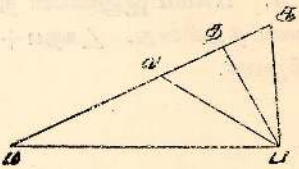
(iii) இ, = 2அ° + 5° எனின் எப்புள்ளிகள் நேர்கோட்டிலுள்ளன ?



உருவம் 439

2. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதன் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரம். **கப** ஆனது ∠**மகத** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது. ∠**மகத** = 2ந° ஆகவும், ∠**கமப** = 3ந° ஆகவுமிருந்தால் ∠**கபம** ஐக் கணிக்க.

3. ஒரு பல்கோணத்தினுடைய கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 12 செங்கோணங்களாகும். பல்கோணத்தின் பக்கங்கள் எத்தனை?



உருவம் 440

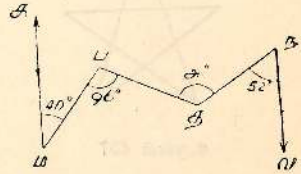
4. உரு 440 இல் ∠**கபத** = ∠**கமப**. **பவ** ஆனது ∠**மபத** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது. ∠**கவப** = ∠**கபவ** என நிறுவுக.

6

1. 24 அடி ஆழமுள்ள ஒரு கிணற்றிலிருந்து ஒரு வாளியை மேலே கொண்டுவர கைப்பிடியை 4 தரம் முழுமையாகச் சுற்ற வேண்டியுள்ளது. வாளியை 10 அடி உயர்த்துவதற்குக் கைப்பிடியை எவ்வளவு கோணத்திற்குச் சுழற்றல் வேண்டும் ?

2. உரு 441 இல் **கம** என்பது **நவ** இற்குச் சமாந்தரம். அ° இன் பெறுமதியைக் கணிக்க. காரணங்கள் தருக.

3. △ **கமப** இல் **கத** என்பது **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்தாகும். ∠**மகப** இன் இருசமவெட்டி **மப** ஐ **வ** இலே வெட்டுகின்றது. ∠**ம** = 2ந°, ∠**ப** = 2ய°, எனின் (i) ∠**மகவ**, ∠**வகத** என்பவற்றை ந, ய, என்பவற்றிற் காண்க.

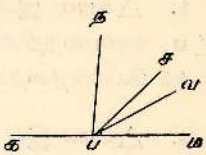


உருவம் 441

4. நாற்கோணம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் **கத, மப** என்பன முறையே **வ, ச** என்பவற்றிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன. ∠**தபச** = ∠**க** எனின் ∠**வதப** = ∠**ம** என நிறுவுக.

7*

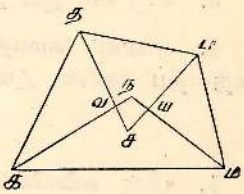
1. உரு 442 இல் **கபம** ஒரு நேர் கோடு. ∠**கபந** = 2 ∠**நபச**, ∠**மபவ** = 2 ∠**வபச** எனின் ∠**நபவ** இன் பருமனைக் காண்க.



உருவம் 442

2. △**கமப** இல் ∠**க** ஆனது ∠**ம** இனும் பெரிது. ∠**கபம** ஐ இருசமக்கூறிடுங் கோட்டிற்கு **க** இலிருந்துள்ள செங்குத்து **கந** எனின் ∠**மகந** = $\frac{1}{2}$ (∠**மகப** − ∠**கமப**) என நிறுவுக.

3. ஓரங்கோணத்தின் கோணங்கள் முறையே **க** + 10, 2**க** − 10, 2**க**, 2**க** + 10, **க** + 50 பாகைகள். **க** இன் பெறுமதியைக் கண்டு ஐங்கோணத்தின் இருசோடிப பக்கங்கள் சமாந்தரமென நிறுவுக.

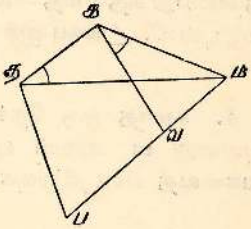


உருவம் 443

4. உரு 443 இல் **நக, நம, சப, சத** என்பன நாற்கோணத்தினுடைய கோணங்களின் இருசமவெட்டிகள். ∠**வநய** உம் ∠**வசய** உம் மிகை நிரப்பிகள் என நிறுவுக.

8*

1. வ. 2**க**° மே. என்னுந்திசை தெ. 3**க**° மே. ஏயாம் எனின் **க** இன் பெறுமதியைக் கண்டு உண்மைத் திசையைக் காண்க. (இது நேர் வடக்குடனே திசை கொள்ளுங் கோணத்தை வலஞ்சுழியாக அளந்து வருவதே யாம்.)



உருவம் 444

2. △**கமப** இல் ∠**மகப** இன் இருசமவெட்டி **மப** ஐ **த** இலே சந்திக்கின்றது. ∠**கமப** இன் இருசமவெட்டி **கப** ஐ **ந** இலே சந்திக்கின்றது. ∠**கதப** = 79°, ∠**மநப** = 83° எனின் ∠**கமப**, ∠**கபம** ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. **ந** பக்கங்கொண்ட ஒரொழுங்கான பல்கோணத்தின் கோணம் ஒவ்வொன்றும் **ய**, பக்கங்கொண்ட ஒரொழுங்கான பல்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோணத்தினும் $\frac{3}{4}$ ஆகும். **ய** ஐ **ந** இற் கூறுக; பொருந்தக் கூடிய **ந, ய** களின் பெறுமதிகளைக் காண்க.

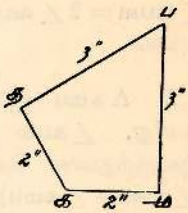
4. உரு 444 இல் கோணங்கள் **தகம, தபம** என்பவை மிகை நிரப்பிகள்; ∠**வகம** = ∠**கதம**. ∠**கவம** = ∠**மதப** என நிறுவுக.

மீட்டற் பயிற்சி 9—16 (தேற்றங்கள் 1—14)

[முக்கோணங்கள், பல்கோணங்கள், என்பவற்றினுடைய கோணங்களின் பண்புகளும் சர்வசமனும் இருசமபக்க முக்கோணங்களும்.]

9

1. △**கமப** இல் ∠**க**=44°, ∠**ம**=112°. ∠**ம**, ∠**ப** என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகட்கிடையேயுள்ள கூர்ங் கோணத்தைக் கணிக்க.



2. △**கமப** இல் **கம**=**கப**, ∠**க**=20°. **கப** இலே **த** என்பது, ∠**தமப**=60° ஆகவமைந்த ஒரு புள்ளி. **கத**=**தம** என நிறுவுக.

3. உரு 445 இல் ∠**கமப**=∠**கதப** என நிறுவுக.

உருவம் 445

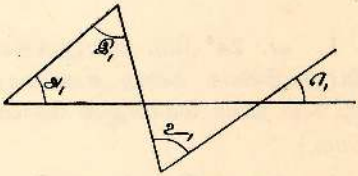
4. சரிவகம் **கமபத** இன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கம, தப** என்பன. **கத**=**தப** எனின் ∠**மகத** ஐ **கப** இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

10

1. பின் வளைகோணம் **கயம** கூர்ங்கோணம் **கயம** இலும் நான்கு மடங்கு பெரியதெனின் கூர்ங்கோணம் **கயம** ஐக் காண்க.

2. உரு 446 இல் எ, ஐ $அ_1$, $இ_1$, $உ_1$ களிற் காண்க.

3. △**கமப** இல் **கம**=**கப** ; **கப** இலே **த** என்பது **கத**=**மத**=**மப** ஆகவமைந்த ஒரு புள்ளி. ∠**மகப** ஐக் கணிக்க.



உருவம் 446

4. **கமபத** ஒரு நேர் கோடு. அதில் **கம**=**பத** ; கோட்டிற்கு வெளியேயுள்ளது **வ** எனும் புள்ளி. இது **வம**=**வப** ஆகவமையுமாறுள்ளது. **வக**=**வத** என நிறுவுக.

11

1. △**கமப** இல் ∠**ம**=35°, ∠**ப**=75° ; **ம, ப** களிலிருந்து முறையே **கப, கம** களிற்குரிய செங்குத்துக்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ∠**மநப** ஐக் காண்க.

2. **கமப** ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ; **மப** என்பது **த** இற்கு **மப**=**பத** ஆகும் வண்ணம் நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**மகத** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

3. △**கமப** இனது ∠**க** இன் இருசமவெட்டியானது **மப** ஐ **த** இல் வெட்டுகின்றது. **ப** இற் கூடாகவும் **தக** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் ஒரு கோடு, நீட்டப்பட்ட **மக** ஐ **ந** இல் சந்திக்கக் கீறப்படுகின்றது. **கந = கப** என நிறுவுக.

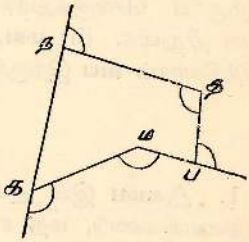
4. இருவட்டங்கள் **ய** ஐ மையமாக உடையன. உள்வட்டத்தை **க, ம** களிலும் வெளிவட்டத்தை **ப, த** களிலும் வெட்டும் ஒரு நேர்கோடு **பகமத** ஐக் கீறினால் **மப=கத** என நிறுவுக.

12

1. ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு சோடிக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை 100°; மற்றை ஒரு சோடிக் கோணங்களின் வித்தியாசம் 60°. அம் முக்கோணம் இருசமடக்கமானது என நிறுவுக.

2. உரு 447 இல் அடையாளமிடப்பட்ட கோணங்கள் யாவுஞ் சமன் எனின் அவை ஒவ்வொன்றின் பருமனையுங் காண்க. இவ்வுருவில் சோடிச் சமாந்தரக் கோடுகள் உளவா? காரணங் காட்டுக.

3. △**கமப** இல் **கம = கப**; **மப** ஆனது **த** இற்கு **பத = கம** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**கமத = 2∠கதம** என நிறுவுக.



உருவம் 447

4. நாற்கோணம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ச** இலே வெட்டிக் கொள்கின்றன. **கம=மப=பத**, ∠**கமப=**∠**மபத** எனின் (i) **சம=சப** எனவும், (ii) ∠**கசத** = ∠**கமப** எனவும் நிறுவுக.

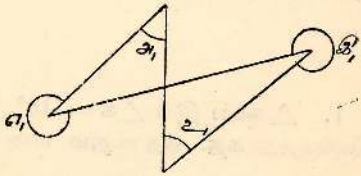
13

1. நேர்கோடு **கமபத** இற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி **ய**. **யக = கம, யம = மப, யப = பத**; ∠**மயப = ந°**; ∠**யகத**, ∠**யதக** என்பவற்றை **ந** இற் கணிக்க.

2. உரு 448 இல் எ, ஐ $அ_1$, $இ_1$, $உ_1$ களிற் காண்க.

3. △ **கமப** இல் **கம = கப**; **கம** என்பது **த** இற்கு **மத = மப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**கபத = 3**∠**கதப** என நிறுவுக.

4. **கபம** ஒரு நேர் கோடு; **கம** இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் உள்ளன **கமந, கபய** என்னுஞ் சமபக்க முக்கோணங்கள். **பந = மய** என நிறுவுக.



உருவம் 448

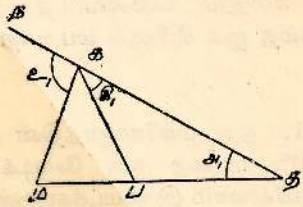
14

1. △கமப இல் கம = கப ; மப ஆனது த இற்கு மத = மக ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ மகப = 2 ∠ பகத எனின் ∠கமப ஐக் காண்க.

2. 15 பக்கங்கொண்ட டல்கோணம் ஒன்றின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

3. உரு 449 இல் கம = கப ; நகத ஒரு நேர்கோடு. $உ_1 - இ_1 = 2அ_1$ என நிறுவுக.

4. △கமப இல் கம = கப ; ∠ உ ஒரு செங்கோணம். பம இலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி த ; மவ, பய என்பன ம, ப களிலிருந்து (தேவையெனின்) நீட்டப்பட்ட சத இற்குரிய செங்குத்துக்கள். (i) மவ = கய என நிறுவுக. (ii) மவ, பய என்பவற்றின் வித்தியாசம் வய இற்குச் சமன் என நிறுவுக.



உருவம் 449

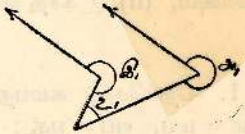
15*

1. △கமப இல் ∠க = ந°, ∠ம = 3ந°, ∠ப = 5ந°. ந இன் பெறுமதியைக் கண்டு, மத எனும் ஒரு நேர்கோட்டை, கப ஐ த இலே வெட்டி △கதம ஐயும் △தபம ஐயும் இருசமபக்க முக்கோணமாக்குமாறு வரையலாம் என நிறுவுக.

2. △கமப இன் கோணங்கள் ம, ப என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகள் ய இலே சந்திக்கின்றன. ∠ மயப = 135° எனின், ∠க ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

3. உரு 450 இல் அம்பிடப்பட்ட கோடுகள் சமாந்தரம். $அ_1 - இ_1 = உ_1$ என நிறுவுக.

4. ஒருசமபக்க முக்கோணம் கமப உள் உள்ளது ய எனும் ஒரு புள்ளி. யகத எனும் சமபக்க முக்கோணம் கம இன் எதிர்ப்பக்கங்களில் ய, த கள் அமையுமாறு உள்ளது. மத = யப என நிறுவுக.

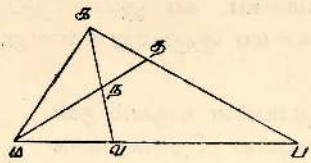


உருவம் 450

16*

1. △கமப இல் ∠க = 115°, ∠ப = 20° ; க இலிருந்து மப இற்குள்ள செங்குத்து கத. கத = தம என நிறுவுக.

2. கமபதந ஒரொழுங்கான ஐங்கோணம் ; கப ஆனது மந ஐ வ இல் வெட்டுகின்றது. ∠ நவப ஐக் காண்க.



உருவம் 451

3. உரு 451 இல் ∠ **கமத** = ∠ **ப** ; **கநவ** என்பது ∠ **க** இன் இருசமவெட்டி. **மந** = **மவ** என நிறுவுக.

4. △ **கமப** இல் ∠ **ம** = 90°, ∠ **ப** = 30°. **கப** = 2 **கம** என நிறுவுக.

மீட்டற் பயிற்சி 17–24 (தேற்றங்கள் 1–20)

(பல் கோணத்தின் கோணங்கள், சர்வசமன், இருசமபக்க முக்கோணங்கள், இணைகரங்கள் முதலியன.)

17

1. △ **கமப** இல் ∠ **க** = 2 ∠ **ம**, ∠ **ப** — ∠ **ம** = 36°. △ **கமப** இருசமபக்க மானது என நிறுவுக.

2. **கமபதந** எனும் ஐங்கோணம், **கம** ஐயும் **தப** ஐயும் நீட்டினால் செங்கோணத்தில் அவை வெட்டிக் கொள்ளுமாறுள்ளது. ∠ **க** = ∠ **த** = 2 ∠ **ந** எனின் ∠ **ந** ஐக் காண்க.

3. △ **கமப** இல் **கம**=**கப**, **கம** இலுஞ் சிறியது **மப**. நீட்டப்பட்ட **மப** இலே **த** எனும் புள்ளி, **மத** = **மக** ஆகுமாறு உள்ளது. ∠ **கபத** = 2 ∠ **கதம** என நிறுவுக.

4. இணைகரம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ச** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **ச** இற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோடு **கத** ஐயும் **மப** ஐயும் **ந**, **வ** களில் வெட்டுகின்றது. **தநமவ** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

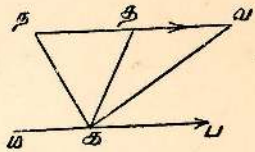
18

1. ஒரு நாற்கோணத்தின் கோணங்கள் முறையே ந, ந+20, ந+30, ந+50 பாகைகளாகும். ந இன் பெறுமதியைக் கண்டு நாற்கோணம் ஒரு சரிவகம் என நிறுவுக.

2. ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ **கப**=3·4 அங்., **மத**=4·2 அங்., **மப**=2அங். ஆகவமையுமாறு வரைக. **கம** ஐ அளக்க.

3. △**கமப** இல் **கம**=**கப**. **கப** இலோ நீட்டப்பட்ட **பக** இலோ **த** எனும் ஒரு புள்ளி **தம**=**மப** ஆகுமாறு உள்ளது. ∠**தமப**=∠**மகப** என நிறுவுக.

[∠**க** 60° இற்கூடியதாயுள்ள உருவம் ஒன்றும் 60° இற் குறைவாயுள்ள தொன்றுமாக ஈருருவங்கள் வரைக.]



உருவம் 452

4. உரு 452 இல் **மகப**, **நதவ** என்பன சமாந்தரக் கோடுகள். **கந**, **கவ** என்பன ∠**மகத**, ∠**பகத** என்பவற்றின் இருசம வெட்டிகள் எனின் **நத**=**தவ** என நிறுவுக.

19

1. **கமப**, **கநய** என்பன ஒன்றிலிருந்தொன்று வெளியேயுள்ள இரு சமபக்க முக்கோணங்களாகும். ∠**பகந** = 35° எனின் **மப**, **யந** என்பன நீட்டப்படும்பொழுது வெட்டிக்கொள்ளுங் கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

2. △**கமப** இல் ∠**ப** = 3∠**ம**. **கம** இலே **கத** எனும் ஒரு பகுதி **கப** விற்குச் சமமாக வெட்டப்பட்டுள்ளது. **பத** = **தம** என நிறுவுக.

3. **கமபத** ஒரு சதுரம். **கநம** என்பது சதுரத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம். ∠**கபந** = $\frac{1}{2}$∠**கமந** என நிறுவுக.

4. **கமபத** ஓரிணைகரம். **மவ**, **தய** என்பன **கப** ஐ **வ**, **ய** களில் வெட்டும் இரு சமாந்தரக் கோடுகள். **மய** = **வத** என நிறுவுக.

20

1. பின்வரும் பண்புகணிறைந்த ஒரு நாற் கோணத்தின் பெயரை (நிறுவலின்றி)க் கூறுக.

(i) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றன.

(ii) மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்கோணமாய் இருசமக் கூறிடுகின்றன.

(iii) மூலைவிட்டங்கள் சமமாயும் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடுகின்றனவாயும் இருக்கின்றன.

(iv) நாலு பக்கங்களுஞ் சமன்.

(v) நாலு கோணங்களுஞ் சமன்.

2. ஒழுங்கான 20 பக்கமுடைய ஒரு பல்கோணத்தின் அடுத்துவருகின்ற பக்கங்கள் **கம**, **மப**, **பத**, **தந** என்பன. **கம**, **நத** என்பன நீட்டப்படும் பொழுது வெட்டுங் கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

3. **கமபத** ஓரிணைகரம். ∠**மபத** இன் இருசமவெட்டியானது **கத** ஐ அதனுடைய நடுப்புள்ளி **ச** இலே வெட்டினால் ∠**கமப** ஐ **சம** இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

4. சதுரம் **கமபத** இன் பக்கம் **கம** இலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ**. **க** இலிருந்து **தவ** இற்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு **மப** ஐ **ய** இல் வெட்டுகின்றது. **தவ** = **கய** என நிறுவுக.

21

1. **கமபதநவசய** என்பது ஒரொழுங்கான எண்கோணம். **சத** ஆனது **மவ** ஐ வெட்டும்பொழுது ஆக்குங் கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

2 சரிவகம் **கமபத** இல் **கம** உம் **தப** உஞ் சமாந்தரப் பக்கங்கள்; **கம** = 7·5 ச.மீ., **மப** = 3 ச.மீ., **பத** = 3·5 ச.மீ., **தக** = 3·8 ச.மீ. சரிவகத்தை வரைந்து ∠**மகத** ஐ அளக்க.

3. △**கமப** இல் **கம** = **கப**. **வ** என்பது **மப** இலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **ந**, **ய** எனும் **கம**, **கப** களில் உள்ள புள்ளிகள் **கநவய** என்பது ஓரிணைகரமாகுமாறுள்ளன. **வந** + **வய** = **கம** என நிறுவுக.

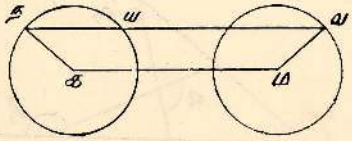
4. **கமபத** ஒரு சதுரம். ∠**மபக** இன் இருசமவெட்டி **கம** ஐ **வ** இலே வெட்டுகின்றது; **வ** இலிருந்து **கப** இற்குள்ள செங்குத்து **வய**. **வம**, **வய**, **கய** என்பன சமம் என நிறுவுக.

22

1. △**கமப** இல் ∠**க** = 55°, ∠**ப** = 35°; **கப** இலே **ச** எனும் புள்ளி **சம** = **சக** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **சம** = $\frac{1}{2}$ **கப** என நிறுவுக.

2. செவ்வகம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. **கப** = 5 ச.மீ. ∠**கநம** = 110° எனின் செவ்வகத்தைக் கீறி **கம** ஐ அளக்க.

3. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். ∠**கமப**, ∠**கதப** என்பவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் சமாந்தரம் எனின் ∠**க** = ∠**ப** என நிறுவுக.



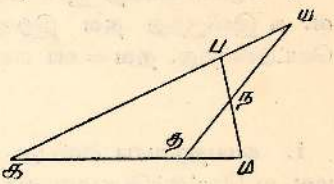
உருவம் 453

4. உரு 453 இல் **க**, **ம** கள் இரு சமமான வட்டங்களின் மையங்கள். ∠**நகம** = ∠**வமக** எனின் (i) ∠**கநவ** = ∠**மவந** எனவும் (ii) **வய** = **கம** எனவும் நிறுவுக.

23*

1. △கமப இல் ∠க = 2 ∠ம; மப இலே ஒரு புள்ளி வ உம் கப இலே ஒரு புள்ளி ய உம் கம = கவ = வய = யப ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. ∠ப ஐக் காண்க.

2. உரு 454 இல் கம = கப, மத = மந, தக = தய. ∠ம = 3 ∠க என நிறுவுக.



உருவம் 454

3. நாற்கோணம் கமபத இல் ∠ம, ∠த என்பவற்றின் இருசமவெட்டிகள் கமபத இற்குள்ளே ச எனும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. மச என்பது ந இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠க, ∠ப என்பவற்றிற்குள்ள வித்தியாசம் 2 ∠நசத இற்குச் சமன் என நிறுவுக.

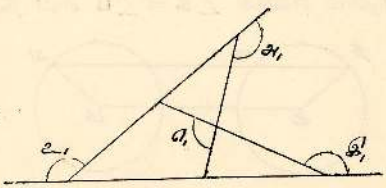
கமபத இற்கு வெளியே ச இருந்தால் மேற்கூறியதை ஒத்த ஒரு விடை பெறலாமென உம்மால் நிறுவக்கூடுமா ?

4. கமபத ஒரு சதுரம் ; அதன் மூலைவிட்டங்கள் ச இல் வெட்டுகின்றன. தச இலே த, ச களுக்கிடையே உள்ள ஒரு புள்ளி வ. ம இலிருந்து கவ இற்குள்ள செங்குத்து கச ஐ ய இலே வெட்டுகின்றது. △கமவ ≡ △மபய என நிறுவுக.

24*

1. ஒரு △கமப ஐ ∠க = 44°, ∠ம = 56°, முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 4அங். ஆகவிருக்குமாறு அமைக்க. கம ஐ அளக்க.

2. ∠மகப இன் இருசமவெட்டியிலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி த ; தவ, தய என்பன கம, கப இற்குச் சமாந்தரமாக, கப, கம என்பனவற்றை முறையே வ, ய களிற் சந்திக்குமாறு கீறப்பட்டுள்ளன. தவ = தய என நிறுவுக.



உருவம் 455

3. உரு 455 இல் கோணங்கள் அ,, இ,, உ,, எ, என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகை 6 செங்கோணங்கள் என நிறுவுக.

4. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **கம** இற்கு எப்பக்கத்தில் **பத** உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் **கமநச** என்னுஞ் சதுரம் உள்ளது ; **மப** இற்கு எப்பக்கத்தில் **கத** உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் **மபவய** என்னுஞ் சதுரம் உள்ளது. (i) ∠ **யமந** = ∠ **மகத** எனவும் (ii) **யந** = **மத** எனவும் நிறுவுக.

மீட்டற் பயிற்சி 25—34 (தேற்றங்கள் 1—33)

[சமனிலி, வெட்டுந்துண்டு, ஒழுக்கு ஆகியவையும் அடங்கும்.]

25

1. △**கமப** இல் **கம** = **கப** ; **கம** ஆனது **த** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ **கபத** − ∠ **கதப** = 2 ∠ **மபத** என நிறுவுக.

2. ஒரு முக்கோணம் **கமப**, ∠ **க** > ∠ **ம** ஆகவிருக்குமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **மப** இலே **வ** எனும் ஒரு புள்ளியை, **கவ** + **வப** = **மப** ஆகவிருக்குமாறு மிக்க எளிதான முறையில் அமைக்க. உமது வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

3. △**தநவ** இல் **தந** = **தவ** ; நீட்டப்பட்ட **நவ** இலே **ச** ஒரு புள்ளி ; ∠ **ந** = 73°, ∠ **வதச** = 38°. எது பெரிது, (i) **வச** ஓ **வத** ஓ, (ii) **சந** ஓ **சத** ஓ? காரணங் காட்டுக.

4. △**கமப** இன் பக்கங்கள் **கம**, **கப** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **ந**, **ய**. **மய** இணைக்கப்பட்டு **ச** இற்கு **மய** = **யச** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **பந** இணைக்கப்பட்டு **வ** இற்கு **பந** = **நவ** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. (i) **கவ** = **கச** எனவும் (ii) **வகச** ஒரு நேர்கோடு எனவும் நிறுவுக.

26

1. **நவசய** ஓரிணைகரம். அதில் **வச** இனும் **நவ** சிறியது. ∠ **ந** இன் இருசமவெட்டி **நக** என்பது **வச** ஐ **க** இல் வெட்டுகின்றது. ∠ **வ** இன் இருசமவெட்டி **வம** ஆனது **நய** ஐ **ம** இல் வெட்டுகின்றது. **நவகம** ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

2. **கமபத** எனும் ஒரு நாற்கோணம் வரைக. **வ** எனும் ஒரு புள்ளியை **கம**, **கத** எனும் நேர்கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளதாயும் **வக** = **வப** ஆகுமாறும் அமைக்க. **வ** இற்கு ஒன்றினும் மேலாய நிலைகள் உளவா ? உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக.

3. **கமபத** ஓரிணைகரம். ∠ **மகப** > ∠ **தகப** எனின் **மப** > **பத** என நிறுவுக.

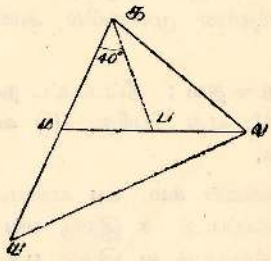
4. △**கமப** இன் பக்கம் **கம** இலே **வ** எனும் ஒரு புள்ளி, **கவ** = $\frac{1}{4}$ **கம** ஆகுமாறுள்ளது ; **வய** என்பது **மப** இற்குச் சமாந்தரமாகக் **கப** ஐ **ய** இற் சந்திக்குமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் கீறி **வய** = $\frac{1}{2}$ **மப** என நிறுவுக.

27

1. △**கமப** இல் **கம** = **கப** ; **மக** என்பது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**கபம** இன் இருசமவெட்டியானது **கம** ஐ **த** இற் சந்தித்தால் ∠**பதந** = $\frac{3}{4}$ ∠**பகந** என நிறுவுக.

2. △**கமப** இல் **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த**. **கம** = 5 ச.மீ., **கப** = 6 ச.மீ., **கத** = 4 ச.மீ. ஆக அமையுமாறு △**கமப** ஐ வரைக. **மப** ஐ அளக்க. [உமது வரைப்படத்தில் **கத** ஐ **ச** இற்கு **கத** = **தச** ஆகுமாறு நீட்டுக. **பச** ஐ இணைக்க.]

3. உரு 456 இல் **கம** = **கப** = **பவ** ; **மய** = **மவ**. **யக** ஓ **யவ** ஓ பெரிது? காரணங் காட்டுக.



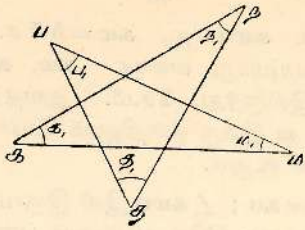
உருவம் 456

4. சாய்சதுரம் **கமபத** இன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கம**, **தப** என்பன ; **வ**, **ய** என்பன **கத**, **மப** என்பவற்றுடைய நடுப்புள்ளிகள். (i) **கம** இற்கு **வய** சமாந்தரம் எனவும் (ii) **வய** = $\frac{1}{2}$ (**கம** + **தப**) எனவும் நிறுவுக. [**மத** இனது நடுப்புள்ளி **ச** இற்கு **வ**, **ய** களை இணைக்க.]

28

1. △**கமப** இல் **கம** = **கப** ; நீட்டப்பட்ட **மப** இலே **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ; **வ** இலிருந்து நீட்டப்பட்ட **கப**, **கம** என்பவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள் **வந**, **வய** என்பன. ∠**மவந** = ∠**மவய** என நிறுவுக.

2. △**கமப** ஐ, **கம** = 2 அங்., **கப** = 4 அங்., ∠**க** = 60° ஆக அமையுமாறு வரைக. இரு புள்ளிகள் **வ**, **ய** களை, **மவ** = **மய** = 1·5 அங்., **வக** = **வப**, **யக** = **யப** ஆக அமையுமாறு வரைக. உமது வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.



உருவம் 457

3. உரு 457 இல் கோணங்கள் க,, ம,, ப,, த,, ந, ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை இரு செங்கோணம் என நிறுவுக. [**பந** ஐ இணைக்க.]

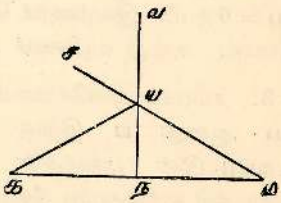
4. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **கம = கத**; ∠ **தமப** ஒரு செங்கோணம். **க** இற் கூடாகச் செல்வதும் **மப** இற்குச் சமாந்தரமானது மான கோடானது **பத** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

29

1. **கமபத** ஒரு சதுரம்; **கம, மப** என்பன முறையே **வ, ய** கட்கு **மவ = பய** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. **வத** உம் **கய** உம் சமமெனவும், செங்கோணமாய் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனவும் நிறுவுக.

2. உரு 458 இல் **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **வயந**. ∠ **கயவ** ஐ **மயச** இருசமக் கூறிடுகின்றதெனின், ∠ **யகம** ஐக் கண்டு **யந = ½ யக** என நிறுவுக.

3. சரிவகம் **கமபத** இன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கத, மப** என்பன. **க** இலிருந்து ∠ **கமப** இன் இருசமவெட்டிக்குரிய செங்குத்து **கவ** என்பதாகும். **கவ** என்பது ∠ **மகத** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. **வ** இலிருந்து **மப** இற்குரிய செங்குத்து **வந** எனின் **வ** ஐ மையமாகவும் **வந** ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டத்தைப்பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?



உருவம் 458

4. குவிந்த நாற்கோணம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் **கம, பத** என்பவை சமம்; ஆனாற் சமாந்தரமல்ல. **கத, கப, மத, மப** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **ந, வ, ச, ய** என்பன. **நவசய** ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

30

1. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ, **கம** = 5·5 ச.மீ., **மப** = 4·5 ச.மீ., **பக** = 4 ச.மீ. ஆகவமையுமாறு வரைக. **கம, கப** ஆகியவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலும் **மப** இலிருந்து 2 ச.மீ. தூரத்திலுமமையுமாறு ஒரு புள்ளி **வ** ஐ அமைக்க. **வ** இற்கு ஒன்றினும் மேலாய நிலைகள் உளவா? உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக.

2. △ **கமப** இல் **கம** = **கப** ; ∠ **கமப** இன் இருசமவெட்டி **கப** ஐ **த** இலே சந்திக்கின்றது. நீட்டப்பட்ட **கப** இலே **வ** எனும் புள்ளி, ∠ **கமவ** = ∠ **கதம** ஆகவமையுமாறு உள்ளது. (i) ∠ **கமத** = ∠ **கவம** எனவும், (ii) **பம** = **பவ** எனவும் நிறுவுக.

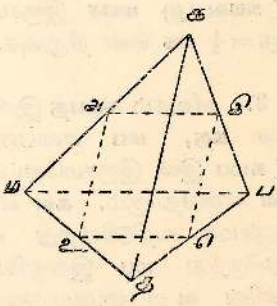
3. சமபக்க முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கம் **மப** ஆனது **த** இற்கு, **மப** = **பத** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட **மக** இலே **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. (i) ∠ **மகத** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக. (ii) **வத** + **தப** > **வம** என நிறுவுக.

4. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **பத** விற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ளன இரு புள்ளிகள் **க, ம** என்பன. **பத** இலே **வ** எனும் ஒரு புள்ளியை, ∠ **கவப** = ∠ **மவப** ஆகுமாறு அமைக்க. உமது வழியைக் கூறி அது திருத்தமானது என நிறுவுக. (206 ஆம் பக்கம் எண் 25 ஐப் பார்க்க.)

31

1. △ **கமப** இல் **கம** = **கப**. **கம** இலுள்ள ஒரு புள்ளி **வ** இலிருந்து **மப** இற்கு ஒரு செங்குத்து கீறப்பட்டுளது. நீட்டப்பட்ட **பக** ஐ அது **ய** இற் சந்திக்கின்றது. **கவ** = **கய** என நிறுவுக.

2. △ **கமப** இல் **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து **கத** ; **மப** இனது நடுப் புள்ளி **ந**. **கத** = 3 ச.மீ., **கந** = 4 ச.மீ., **மப** = 6 ச.மீ. இவற்றைக் கொண்டு △ **கமப** ஐ வரைக. உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக.



உருவம் 459

3. சமபக்க முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கம் **மப** ஆனது **ய** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. △ **கமப** இன் பக்கங்களை மிகச் சிறியதிலே தொடங்கி வரிசையாக நீளமுறையிலே ஒழுங்கு படுத்துக. காரணங்காட்டுக.

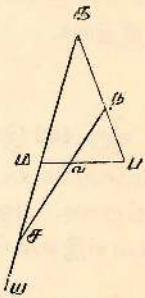
4. உரு 459 ஒரு நான்முகத்திண்மத்தைக் குறிக்கின்றது ; நான்முகத் திண்மம் என்பது முக்கோண அடியிலமைந்த ஒரு கூம்பகமாகும். **கம, கப, தம, தப** ஆகிய விளிம்புகளினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **அ, இ, உ, எ** என்பனவாகும். **அஇஎஉ** ஒரிணைகரம் என நிறுவுக.

32

1. உரு 460 இல் **கம = கப**, **பந = பவ**. ∠ **யசந = 3 ∠ சநப** என நிறுவுக.

2. △ **கமப** இல் **மப** இனது நடுப்புள்ளி **த**. **கத = 3** ச.மீ., ∠ **மகத = 30°**, ∠ **தகப = 50°**. △ **கமப** ஐ வரைக. உமது வழியைச் சுருக்கிக் கூறுக.

3. **கமபத** ஓரிணைகரம் ; **கமந, மபவ, பஉச, தகய** என்பன **கமபத** இற்கு வெளியே உள்ள சமபக்க முக்கோணங்கள். **நவசய** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக. [ஒரு நாற்கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமெனின் அது ஓரிணைகரம் எனுந் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.]



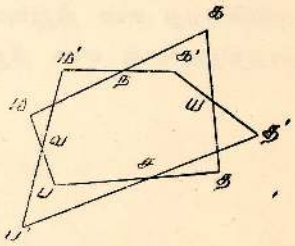
உருவம் 460

4. உரு 460 இல் **கம = கப**, **நவ = வச** எனின் **பந = மச** என நிறுவுக. [**நஅ** ஐ **மச** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் **மப** ஐ **அ** இற் சந்திக்குமாறுங் கீறுக.]

33*

1. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் சிறுவில்லில் மூன்று புள்ளிகள் **க, ம, ப** என்பன. (சிறு வில்லென்பது அரைவட்டத்திலுஞ் சிறிய வில்லாகும்.) ∠ **யகம**, ∠ **யபம** என்பவற்றினுடைய வித்தியாசம் அல்லது கூட்டுத்தொகைக்கு ∠ **கமப** சமனாகும் என நிறுவுக. [இருவகைகள் (i) வில் **கமப** இற்கு, (ii) வில் **கபம** இற்கு.]

2. உரு 461 இல் நாற்கோணம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் **கம, மப, பத** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **ந, வ, ச** என்பன. அவை நாற்கோணம் **க'ம'ப'த'** என்பதனுடைய பக்கங்கள் **க'ம', ம'ப', ப'த'** என்பவற்றினுடைய நடுப் புள்ளிகளுமாகும். **ய** என்பது **கத, க'த'** என்னும் இரண்டினதும் நடுப்புள்ளியாகும் என நிறுவுக.



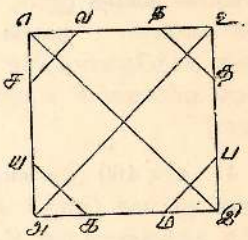
உருவம் 461

3. செவ்வகம் **கயவச** இன் பக்கங்கள் **கய, கச** என்பன **கம, கப** என்னும் இரு நிலையான பக்கங்களில் உள்ளன. **வ** என்பது, **வய − வச = 1** அங். ஆகுமாறு அமைந்த ஒரு மாறும் புள்ளி. **வ** இன் ஒழுக்கினைக் காண்க. [**வ** சமதூரத்திலிருக்குமாறமைந்த இரு நிலையான கோடுகளைக் காண்க.] **ய, ச** என்பன நீட்டப்பட்ட **மக, பக** ஆகியவற்றில் உளவேல், ஒழுக்கு எவ்வாறு வேறுபடும்?

4. இணைகரம் **கமபத** இன் பக்கம் **கம** இனது நடுப்புள்ளி **வ. மத** ஆனது **பவ** ஐ **ய** இலும் **பக** ஐ **ச** இலும் வெட்டுகின்றது. **மய** = 2**யச** என நிறுவுக.

34*

1. உரு 462 இல் **கமபதநவசய** என்பது சதுரம் **அஇஉஎ** என்பதிலிருந்து வெட்டியெடுக்கப்பட்ட ஒரொழுங்கான எண்கோணம் ஆகும். **இத** = **இஓ** என நிறுவுக. [**ஓ** ஐ எண்கோணத்தின் மையம், **அஉ** உம் **எஇ** உம் வெட்டும் புள்ளி எனக்கொள்க.]



உருவம் 462

2. △**கமப** இல் **கம** = **கப**, ∠**ம** = 70°. முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 10 ச.மீ. முக்கோணத்தை வரைந்து **கம** ஐ அளக்க. [உமது பரும் படியான வரைவுருவில், நேர்கோடு **வமபய** ஐ **வம** = **மக** = **பக** = **பய** ஆகவமையுமாறு வரைக. **கவ, கய** ஆகியவற்றை இணைக்க.]

3. △**கமப** இல் **த** என்பது **மப** இனது நடுப்புள்ளி ; **ந** என்பது **கப** இலே **கந** = $\frac{1}{3}$ **கப** ஆக அமைந்த ஒரு புள்ளி; **மந** ஐ **கத** ஆனது **ச** இல் வெட்டுகின்றது. **சந** = $\frac{1}{4}$ **மந** என நிறுவுக. [**ந** இற்கூடாக **நவ** ஐ **கத** இற்குச் சமாந்தரமாய் **மப** ஐ **வ** இலே வெட்டக்கூடியதாகக் கீறுக.]

4. △**மகப** இல் ∠**க** ஒரு செங்கோணம் ; △**கமப** இற்கு வெளியே உள்ள சதுரம் **மவசப** இன் மையம் **ய. கய** ஆனது ∠**மகப** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. [**கம, கப** எனுங்கோடுகளிலிருந்து **ய** சம தூரத்திலுள்ளது என நிறுவுக.]

பகுதி II

(பிரிவு 1)

பரப்பு

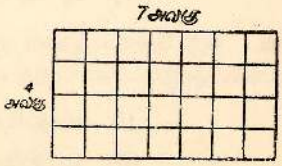
பரப்பையளத்தல். எவ்வாறு ஒரு நேர்கோட்டினது நீளம் 1 அங்., 1 யார், 1 ச.மீ. போன்ற நியமமான நீளத்தோடு ஒப்பிட்டு அளவிடப் படுகின்றதோ அவ்வாறே ஒரு தளவுருவின் பரப்பும் – அதாவது உருவினால் அடைக்கப்பட்ட தளமேற்பரப்பும் – யாதாயினும் ஒரு நியமமான உருவின் பரப்போடு ஒப்பிடுவதாலேயே அளவிடப்படும். யாதாயினும் ஒரு பல் கோணத்தை நியமமாகக் கொள்ளலாம். ஆனால் நியமமாகக் கொள்வதற்கு எளிதானது ஒரு **சதுரமே**யாகும்.

சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் ஓரங்குலமாயின் சதுரத்தின் பரப்பு ஒரு சதுர அங்குலம் என்கிறோம். இதை 1 சது. அங். என்று எழுதலாம். சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் ஒரு சதமமீற்றர் ஆயின் சதுரத்தின் பரப்பு 1 சது. ச. மீ. ஆகும்.

வரைவிலக்கணம். பரப்பின் ஓரலகு ஆனது ஓரலகு நீளமுள்ள பக்கங் கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பாகும்.

பல சதுரங்களாகப் பிரிக்கப்பட்ட ஒரு கரும்பலகையிலுள்ள ஒரு சதுரத்தைப் பரப்பினலகாகக்கொண்டு (அச்சதுரத்தின் பக்கம் திட்டமான ஓர் அளவிலோ சதமமீற்றர் அளவிலோ இருக்கவேண்டியதில்லை), அக் கரும்பலகையில் பல்லுருவங்கள் கீறப்படின் அவ்வுருவங்கள் அடக்கியுள்ள சதுரங்களை எண்ணி அவற்றின் பரப்புக்களை அப்பரப்பலகுகளிற் கூறலாம். அரைச் சதுரத்தினும் பெரிதாயுள்ளதை ஒன்றாக எண்ணியுஞ் சிறிதா யுள்ளதை எண்ணாது விட்டும் நல்லண்ணளவான முடிபைப் பெறலாம். இவ்வாறாகப் பலவகைப்பட்ட உருவங்களின் பரப்புக்களையும் ஒப்பிடலாம்.

ஒரு செவ்வகத்தின் அடுத்துள பக்கங்கள் 7 அலகுகளும் 4 அலகுகளும் உடையனவாயின் அச்செவ்வகத்தை, பக்கங் கட்குச் சமாந்தரமான கோடுகளால் 7 × 4 பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். அப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு பரப்பலகான சதுர மாகும். அச்செவ்வகம் 28 பரப்பலகுச் சதுரங்கள் உள்ளதானமையால் அதன் பரப்பு 28 பரப்பலகுகள் உடையது என்கிறோம்.



உருவம் 463

$2\frac{1}{2}$ அங். நீளமும் $1\frac{1}{3}$ அங். அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இச்செவ்வகத்தை 1 அங். பக்கத்தையுடைய முழுச் சதுரங்களாகப் பிரித்தல் இயலாது. ஆனால், $\frac{1}{6}$ அங்குலத்தை நீளவலகாகக் கொள்ளின்,

செவ்வகத்தினீளம் $= 15$ அலகுகள்,

செவ்வகத்தினகலம் $= 8$ அலகுகள்.

$\therefore$ செவ்வகத்தின் பரப்பு $= 15 \times 8$ பரப்பலகுகள்.

ஆனால் இங்கு 1 அங். பக்கங்கொண்ட சதுரம் 6 அலகு நீளமும் 6 அலகு அகலமும் உள்ளது; எனவே அது 6×6 பரப்பலகுகளைக்கொண்டதாகும்.

அதாவது 1 சது. அங். $= 6 \times 6$ பரப்பலகுகள்.

$$\therefore \text{ செவ்வகத்தின் பரப்பு} = \frac{15 \times 8}{6 \times 6} \text{ சது. அங்.}$$

$$= \left(\frac{15}{6} \times \frac{8}{6}\right) \text{ சது. அங்.}$$

$$= (2\tfrac{1}{2} \times 1\tfrac{1}{3}) \text{ சது. அங்.}$$

எனவே, செவ்வகத்தின் நீளங்கள் முழு எண்களாலோ பின்னங்களாலோ அளக்கப்பட்டாலும் அதன் பரப்பு அதன் பக்கவளவுகளின் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படுவதாகும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. பின்வருஞ் செவ்வகங்களின் பக்கங்களை முழு எண்களாக அளக்கும் ஒரு நீளவலகைக் காண்க. இவ்வலகிலே நீளங்களைக் கூறுக. பரப்பலகைக் கூறுக; பின்னர் ஒவ்வொரு செவ்வகத்தின் பரப்பையுஞ் சது. அங்குலத்திற் காண்க.

(i) $2\frac{1}{2}$ அங். நீளம், $1\frac{3}{4}$ அங். அகலம் ;

(ii) $4 \cdot 2$ அங். நீளம், $1 \cdot 5$ அங். அகலம் ;

(iii) $1\frac{3}{5}$ அங். நீளம், $2\frac{1}{4}$ அங். அகலம் ;

(iv) $1\frac{5}{6}$ அங். நீளம், $1\frac{1}{8}$ அங். அகலம்.

2. ஒரு தோட்டத்தின் மாதிரிப்படத்தின் அளவுத் திட்டம் ஒரு மைலுக்கு 4 அங். ஆகும். பின்வரும் மாதிரிப்படங்கள் எவ்வளவு பரப்பைக் குறிக்கும்?

(i) மாதிரிப்படத்தில் 1 அங். பக்கமுடைய ஒரு சதுரம்,

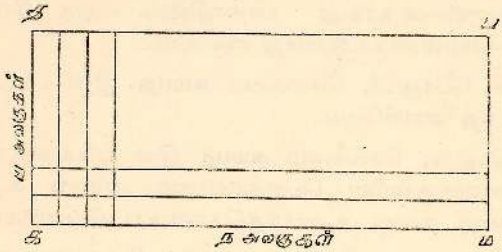
(ii) மாதிரிப்படத்தில் $0 \cdot 8$ அங். பக்கமுடைய சதுரம்,

(iii) $3 \cdot 2$ சது. அங். பரப்பையுடைய ஒரு செவ்வகம்.

படத்தில் எவ்வளவு பரப்பு $\frac{1}{2}$ சது. மைலைக் குறிக்கும் ?

தேற்றம் 34

ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு அடுத்துள இரு பக்கங்களுடைய அளவுகளினதும் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படும்.



உருவம் 464

தரவு. ஒரு செவ்வகம் **கமபத** ; அதில் **கம** என்பது ந அலகு நீளம், **கத** என்பது ய அலகு நீளம். ந, ய என்பவை முழு எண்களாய் அமையுமாறு அலகு எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேற்கோள். **கமபத** இன் பரப்பு நய பரப்பலகுகளாகும்.

கருவி. **கம** ஐ சமமான ந பகுதிகளாகப் பிரிக்க. பிரிக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்தும் **கத** இற்குச் சமாந்தரமாகவுந் **தப** ஐத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒவ்வொரு கோடு வரைக. **கத** ஐச் சமமான ய பகுதிகளாகப் பிரிக்க. பிரிக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்தும் **கம** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் **மப** ஐத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒவ்வொரு கோடு வரைக.

நிறுவல். **கத** இற்குச் சமாந்தரமான கோடுகள் செவ்வகம் **கமபத** ஐ, அடுத்துள பக்கங்கள் 1 அலகும் ய அலகுகளுங் கொண்ட சமமான ந செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கின்றன.

கம இற்குச் சமாந்தரமான கோடுகள் இச் செவ்வகங்கள் ஒவ்வொன்றையுஞ் சமமான ய சதுரங்களாகப் பிரிக்கின்றன.

இவற்றின் பக்கநீளம் 1 அலகாகும்.

∴ **கமபத** என்பது ஒவ்வொன்றும் பரப்பலகளவுள்ள நய சதுரங்களை உடைத்து.

∴ **கமபத** இன் பரப்பு நய பரப்பலகுகளாகும்.

குறிப்பு ; **கம, கத** களின்நீளங்களை முழு வெண்கள் அல்லது பின்னங்களால் அளக்கமுடியாவிட்டால் இந்நிறுவல் தவறாகும். இவ்வகையில் அவை **அளவிடற்கரியன** எனப்படும்.

குறியீடு. செவ்வகம் **கமபத** யாதாயினும் ஓர் ஐயத்தை உண்டாக்கா திருந்தால், எப்பொழுதும் செவ். **கப** என்றோ செவ். **மத** என்றோ அழைக்கப்படும்.

செவ்வகம் **கமபத** என்பது **கம, கத** ஆகியவற்றால் அல்லது **கம, மப** ஆகியவற்றால்—அதாவது யாதாயினும் ஒரு சோடி அடுத்துள பக்கங்களால்—கொள்ளப்பட்டுள்ளது எனப்படும்.

சுருக்கத்தின் பொருட்டு, செவ்வகம் **கமபத** இன் பரப்பு = **கம**×**கத** அல்லது **கம . கத** என்கிறோம்.

ஆனால் இக்கூற்று, செவ்வகம் **கமபத** இன் பரப்பலகுகள், **கம, கத** என்பவற்றின்னளவலகுகளின் பெருக்கமாகும் எனுங் கூற்றின் குறுக்கமாகும் என்பதை நன்கு உணர்ந்துகொள்ளல் வேண்டும்.

கமபத ஒரு சதுரம் எனின் அதைக் **கம** மேலுள்ள சதுரம் என்றும் இன்னுஞ் சுருக்கமாகக் **கம மேற் சது.** என்றும் பலமுறையுங் கூறுகின்றோம்.

சுருக்கத்தின் பொருட்டு,

கம மேற் சது. இன் பரப்பு=**கம**^{2} என்கிறோம்.

ஆனால் இக்கூற்று, சதுரம் **கமபத** இன் பரப்பு **கம** இன் நீளவலகுத் தொகையின் வர்க்கமாகும் எனுங் கூற்றின் குறுக்கமாகு மென்பதை நன்கு உணர்ந்து கொள்ளல்வேண்டும்.

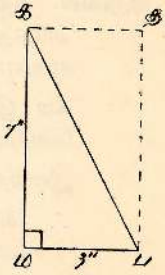
இருவுருவங்கள் பரப்பிற் சமமெனின் அவை **ஒத்தவையாகும்.**

"என்பதற்கு ஒத்தது" என்பதற்குக் குறியீடு = ஆகும். △**கமப** = △**தநய** என்பது முக்கோணங்கள் **கமப, தநய** என்பவை பரப்பிற் சமமாகும் என்பதேயாம்; அது அவை சர்வசமன் என்பதைக் குறிக்காது.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. செங்கோண முக்கோணம் **கமப** இன் பரப்பைக் காண்க.

அதில், **கம** = 7 அங்., **மப** = 3 அங்., ∠**கமப** = 90° எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



உருவம் 465

இணைகரம் **கமபத** ஐ முடிவாக்குக.

(i) **கமபத** என் ஒரு செவ்வகம் என விளக்குக.

(ii) செவ். **தகமப** இன் பரப்பு என்ன ?

(iii) △**கமப** இன் பரப்பென்ன? காரணங்கள் கூறுக.

2. ∠**நதய** ஒரு செங்கோணமாயின் △**தநய** இன் பரப்பைக் குறிக்குங் கூற்று யாது ?

பயிற்சி 49

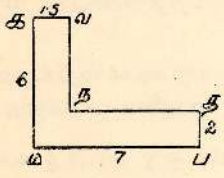
[ஒவ்வொரு வரிப்படத்திலும் நீளவலகு 1 அங். ஆகும்.]

1. 2·3 அங். நீளம், 1·4 அங். அகலம் உள்ள செவ்வகம் ஒன்றை ஒரு சதுரக் கோடிட்ட தாளிற் கீறுக. அதன் பரப்பைக் கணித்து அதனை செவ்வகத்துளடங்கிய சதுரங்களை எண்ணி வாய்ப்புப் பார்க்க.

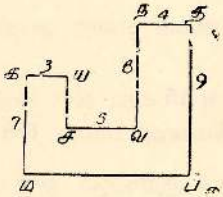
2. 1 சது. யார் = 9 சது. அடி என எடுத்துக் காட்டுவதற்கு ஒருருவம் வரைக.

466–468 வரை உள்ள எண்கொண்ட உருவங்களின் பரப்புக்களைக் காண்க. அவற்றில் எல்லாக் கோணங்களும் செங்கோணமானவை. உரு 468 இல் மேற்கோடு 6 அங்.

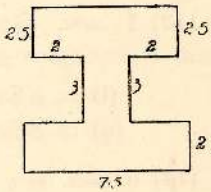
3. [4] 5.



உருவம் 466



உருவம் 467

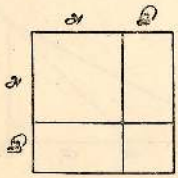


உருவம் 468

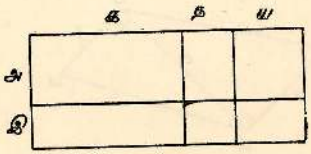
6. செவ்வகம் ஒன்றின் பரப்பு 4 அங். பக்கமுள்ள ஒரு சதுரத்தின் பரப்பிற்குச் சமனாகும். அதனுடைய நீளம் 10 அங். எனின் அதன் அகலத்தைக் காண்க.

[7] 4 அடி நீளம், 3 அங். அகலம் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பிற்குச் சமமான பரப்புடைய ஒரு சதுரத்தின் பக்கத்தைக் காண்க.

8. உரு 469 ஐப் பிரதி செய்து ஒவ்வொரு செவ்வக அறையிலும் அதன் பரப்பினைக் குறிக்க. (அ + இ)^2 = ...என்பதனை முடிவாக்குக.



உருவம் 469



உருவம் 470

[9] உரு 470 ஐப் பிரதி செய்து ஒவ்வொரு செவ்வக அறையிலும் அதன் பரப்பினைக் குறிக்க. (அ + இ) (க + ந + ய) = ... என்பதனை முடிவாக்குக.

10. $(2\text{க})^2 = 4\text{க}^2$ என்பதை நிறுவுதற்கு உரு 469 ஐப் போன்ற ஓருரு வரைக. **கம** எனும் ஒரு நேர் கோடு **ப** இல் இருசமக் கூறிடப் பட்டால் அப்பொழுது **கப**^{2} = ... **கம**^{2} என்னுங் கூற்றினை முடிவாக்குக.

[11] $(3\text{ந})^2 = 9\text{ந}^2$ என்பதை நிறுவ ஓருருவம் வரைக. அதனுடன் ஒத்த கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

12. 1 அங். இற்கு 4 மைல் என்ற அளவுத்திட்டத்திற்கியைந்த ஒரு படம் கீறப்பட்டுள்ளது.

(i) படத்தில் உள்ள $\frac{1}{2}$ சது. அங். எவ்வளவு பரப்பைக் குறிக்கும்?
(ii) படத்தில் எவ்வளவு பரப்பு 4 சது. மைலைக் குறிக்கும்?

[13] 1 அங். இற்கு $\frac{1}{5}$ மைல் என்ற அளவுத் திட்டத்திற்கியைந்த ஒரு படங் கீறப்பட்டுள்ளது.

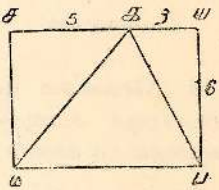
(i) படத்தில் உள்ள 15 சது. அங். எவ்வளவு பரப்பைக் குறிக்கும்?
(ii) படத்தில் எவ்வளவு பரப்பு 0·8 சது. மைலைக் குறிக்கும்?

[14] 6 அங். ஒரு மைலைக் குறிக்கும் ஒரு படத்தில், ஒரு வயல் $\frac{1}{2}$ அங். நீளமுள்ள ஒரு சதுரமாகும். $\frac{1}{10}$ ஏக்கருக்கு அண்ணிய அளவில் அவ்வயலின் பரப்பினைக் காண்க.

உரு 466 இன் வரைப்படம் ஒன்றை வரைந்து வேண்டிய புள்ளிகளை இணைத்துப் பின்வரும் முக்கோணங்களின் பரப்புக்களைக் காண்க:—

15. (i) △**கமப** ; (ii) △**கநவ**.

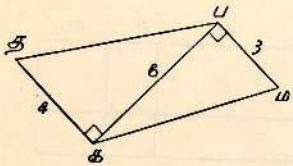
[16] (i) △**மபத** ; (ii) △**தநவ**.



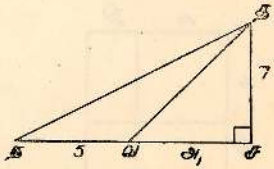
உருவம் 471

17. உரு 471 இல் **மபயச** ஒரு செவ்வகம். △**கமப** இன் பரப்பைக் காண்க.

18. உரு 472 இல் நாற்கோணங் **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.



உருவம் 472

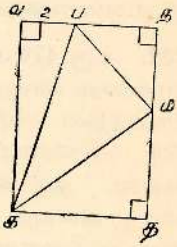


உருவம் 473

19. உரு 473 இல் **நவச** ஒரு நேர்கோடு. △**தநவ** இன் பரப்பைக் காண்க.

20. உரு 474 இல் **வப=2, தம=4, கத=5, கவ=7.**

(i) △**மபந** ; (ii) நாற்கோணம் **கதமப** ;
(iii) △**கமப** ஆகியவற்றின் பரப்பைக் காண்க.



உருவம் 474

[21] **க** இலிருந்து கிழக்கே 100 யாரும் வடக்கே 30 யாருமாக உள்ளது **ம** ; **க** இலிருந்து 40 யார் கிழக்கும் 90 யார் வடக்குமாக உள்ளது **ப**. △ **கமப** இன் பரப்பைக் காண்க. [உரு 474 ஐப் போன்ற ஒருரு வரைக.]

எண்கள் 22–26 வரை உள்ளனவற்றிற்கு சதுரக் கோட்டுத் தாள் உபயோகிக்க.

22. பின்வரும் புள்ளிகளில் உச்சிகளையுடைய முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க. (2,1) ; (2,5) ; (4,7).

23. (3,2) ; (5,4) ; (4,8) ஆகிய புள்ளிகட்கு 22 ஆங் கணக்கிற் கூறிய வாறு செய்க.

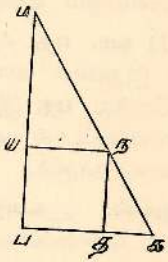
[24] (1,1) ; (5,2); (6,5) ஆகிய புள்ளிகட்கு 22 ஆங் கணக்கிற் கூறிய வாறு செய்க.

25. (0,0) ; (3,2) ; (1,5) ; (0,7) ஆகிய புள்ளிகளில் உச்சிகள் கொண்ட நாற்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

[26] (1,3) ; (3,2) ; (5,5) ; (2,7) ஆகிய புள்ளிகட்கு 25 ஆங் கணக்கிற் கூறியவாறு செய்க.

27. △**கமப** இல் ∠**க** = 90°, **கம** = 6 ச.மீ. △**கமப** இன் பரப்பு 15 சது. ச.மீ. எனின் **கப** இன் நீளத்தைக் காண்க.

[28] கூர்ங்கோண முக்கோணங் **கமப** இன் பக்கம் **மப** இற்குக் **க** இலிருந்து உள்ள செங்குத்தாகும் **கத. மத**=6 அங்., **தப**=2 அங்., △**கமப** இன் பரப்பு 12சது. அங். ஆயின் **கத** இனது நீளத்தைக் காண்க.



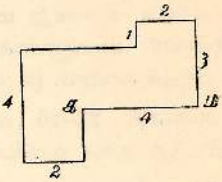
உருவம் 475

29. உரு 475 இல் **பதநய** ஒரு சதுரம் ; **கநம** ஒரு நேர்கோடு; **பக** = 6 ச. மீ., **பம**=10 ச.மீ., **பத**=அ ச.மீ. எனின் △**பகந**, △**பமந** ஆகியவற்றின் பரப்புக்களை அ இற் கூறுக. △**கமப** இன் பரப்பு என்ன ? அ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

*30. **கமபத** ஒரு சதுரம் ; அதன் பக்கம் 4 அங். ; **கம** என்பது **வ** இற்கும் **கத** என்பது **ய** இற்கும் **கவ** = 12 அங். ஆகவும் **கய** = 6 அங். ஆகவுமமையுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. △**கபவ**, △**கபய**, △**கவய** ஆகியவற்றின் பரப்பைக் கண்டு **வபய** ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

*31. உரு 475 இல் **பதநய** ஒரு செவ்வகமாயும் **கநம** ஒரு நேர் கோடாயும் இருந்து, **பத** = அ அங்., **பய** = இ அங்., **பக** = உ அங்., **பம** = எ அங். ஆகவுமிருந்தால் அ, இ, உ, எ ஆகியவற்றை இணைக்கும் ஒரு சமன்பாட்டைக் காண்க.

*32. உரு 476 அளவுத் திட்டத்திற்கு அமைய வரையப்படாதது; அதன் கோணங்கள் யாவுஞ் செங்கோணங்கள்; அது 5 ஏக்கர் பரப்பை உடைய ஒரு தோட்டத்தின் மாதிரிப்படத்தைக் குறிக்கின்றது. அதிற் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள் அங்குலத்தில் உள்ளன. ஒரு மைலுக்கு எத்தனை அங்குலம் என்ற அளவுத் திட்டத்தில் இம்மாதிரிப்படம் வரையப்பட்டுள்ளது? **கம** இற்குச் செங்குத்தாய் **கம** ஐ **ய** இலே வெட்டும் ஒரு கோடு தோட்டத்தின் பரப்பை இருசமக் கூறிடுமாறு வரையப்பட்டுள்ளது. மாதிரிப் படத்தில் **கய** இன் நீளத்தைக் காண்க.



உருவம் 476

*33. சதுரக்கோடிட்ட தாளொன்றிலே 2 அங். ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அதிலுள்ள சதுரங்களை எண்ணி அதன் பரப்பை அண்ணளவிற் காண்க. வட்டத்தின் பரப்பிற்கும் ஆரையிலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பிற்கும் உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

*34 பின்வரும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட ஐங்கோணம் ஒன்றின் பரப்பைக் காண்க :—

(0,0) ; (4,0) ; (9,3); (9,5) ; (3,7).

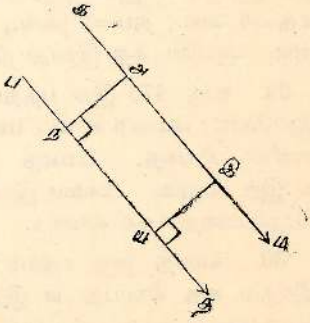
இரு சமாந்தரமான நேர்கோடுகட்கு இடையேயுள்ள தூரம்

பின்வரும் உண்மைகள் நிறுவுதற்கு எளியன :—

(1) **கம, பத** என்பன சமாந்தரம் எனின் **கம** இலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **அ** இலிருந்து **பத** இற்குச் செங்குத்தான **அந** வரையப்பட்டால் **அந** ஆனது **கம** இற்குஞ் செங்குத்தாகும்.

நிறுவல். ∠**கஅந** = ∠**அநத**,
ஒ. வி. கோணங்கள், **கம** ∥ **பத**.
ஆனால் ∠**அநத** = 1 செங்கோணம் **தரவு**,
∴ ∠**கஅந** ஒரு செங்கோணம்.

(2) **கம, பத** கள் சமாந்தரமாயும் **அந, இய** என்பவை **கம** இலுள்ள புள்ளிகள் **அ, இ** களிலிருந்து **பத** இற்குள்ள செங்குத்துக்களாயும் இருந்தால், **அந** = **இய**.



உருவம் 477

நிறுவல். ∠ அநத = ∠ இயத ஆனதால், செங். ∠, அமைப்பு.

இய இற்குச் சமாந்தரம் அந.

அத்துடன் நய இற்குச் சமாந்தரம் அஇ தரவு.

∴ அஇயந ஓரிணைகரம்.

∴ அந = இய இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கங்கள்.

இவ்வுண்மைகளைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

கம, பத எனும் இரு கோடுகள் சமாந்தரமாயின் யாதாயினும் ஒரு கோட்டிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி அ இலிருந்து மற்றைக் கோட்டிற்குரிய செங்குத்தினது நீளம் அ இன் எந்த நிலைக்கும் ஒன்றாகவே இருக்கும்.

இச் செங்குத்தின் நீளஞ் சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையேயுள்ள தூரம் எனப்படும்.

இக் கூற்றுப் பலகாலும்,

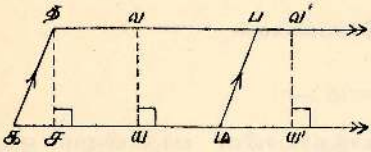
சமாந்தரக் கோடுகள் எவ்விடத்தும் ஒரே இடைவெளி தூரத்தை உடையன,

எனவுஞ் சொல்லப்படும்.

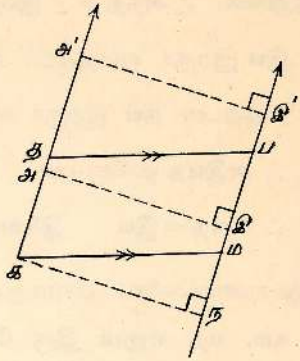
ஆனால் இதற்கு ஒரு நிறுவல் வேண்டுமென்பதை உணர்ந்து கொள்ளல் வேண்டும்.

குத்துயரம் அல்லது உயரம். ஓரிணைகரத்தின் யாதாயினும் ஒரு பக்கம் அதன் **அடியாகக்** கொள்ளப்பட்டால் அப்பக்கத்திற்குஞ் சமாந்தரப் பக்கத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் அவ்விணைகரத்தின் ஒரு **குத்துயரம்** அல்லது **உயரம்** எனப்படும்.

இவ்வாறே, உரு 478 இல் இணைகரம் **கமபத** இன் அடியாகக் **கம** கொள்ளப்பட்டால் சமமான செங்குத்துக்கள் **தச, வய, வ'ய'** ஆகியவற்றுள் யாதாயினும் ஒன்றினது நீளமே குத்துயரமாகும். உரு 479 இல் அதே இணைகரம் **கமபத** இன் அடியாக **மப** கொள்ளப்படின் சமமான செங்குத்துக்கள் **கந, அஇ, அ'இ'** ஆகியவற்றுள் யாதாயினும் ஒன்றினது நீளமே குத்துயரமாகும்.

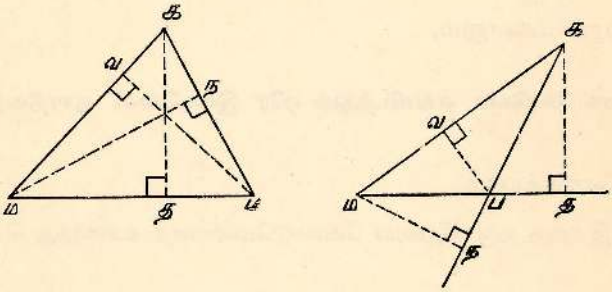


உருவம் 478



உருவம் 479

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, ஓரிணை ஊரம் இரு வேறுவேறான அடிகளையும் — அவையாவன வேறு வேறு அளவுள்ள அடிகளையும்— இருவேறு குத்துயரங்களையும் உடையதாகும்.



உருவம் 480

ஒரு **முக்கோணத்தின்** யாதாயினும் ஒரு பக்கத்தை அதன் அடியாகக் கொள்ளின் அதன் எதிருச்சியிலிருந்து அப்பக்கத்திற்குரிய (தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட பக்கத்திற்குரிய) செங்குத்து அம்முக்கோணத்தின் **குத்துயரம்** அல்லது **உயரம்** எனப்படும். இவ்வாறே, உரு 480 இல் **மப, பக, கம** ஆகியவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள் **கத, மந, பவ** என்பன முறையே **மப, பக, கம** ஆகிய அடிகட்கு, △**கமப** இன் ஒத்த குத்துயரங்களாகும்.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, ஒரு முக்கோணம் மூன்று வேறு வேறான அடிகளையும் — அவையாவன வேறுவேறு நீளமுள்ள அடிகளையும் — மூன்று வேறுவேறான குத்துயரங்களையும் உடையதாகும்.

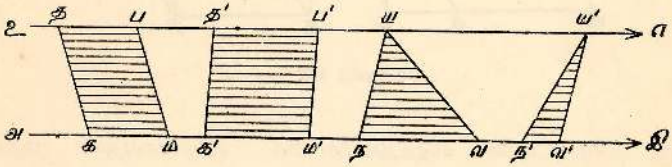
சமமான குத்துயரங்கள்

அஇ, உஎ என்பன சமாந்தரமான இரு கோடுகளாய் அமைய,

(i) **அஇ** வழி அடிகள் அமையவும் **உஎ** வழி எதிர்ப்பக்கங்கள் அமையவும் இணைகரங்கள் வரையப்பெறினும்,

(ii) **அஇ** வழி அடிகள் அமையவும் எதிர் உச்சிகள் **உஎ** இற் பொருந்தவும் முக்கோணங்கள் வரையப்பெறினும்,

அவ்விணைகரங்களும் முக்கோணங்களும் **அஇ, உஎ** எனும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்களுக்கு இடையே உள்ளன எனப்படும்.



உருவம் 481

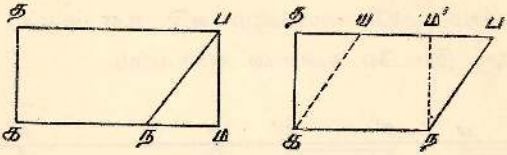
உரு 481 இல் **கம, க'ம'** என்பவற்றை இணைகரங்கள் **கமபத, க'ம'ப'த'** ஆகியவற்றின் அடிகளாகவும் **நவ, ந'வ'** ஆகியவற்றை முக்கோணங்கள் **நவய, ந'வ'ய'** ஆகியவற்றின் அடிகளாகவுங் கொண்டால் குத்துயரங்கள் யாவுஞ் சமமாகும்; ஏனெனில் அவை ஒவ்வொன்றுஞ் சமாந்தரக் கோடுகள் **அஇ, உஎ** ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரத்திற்குச் சமமாகும் என்க. எனவே,

ஒரே சமாந்தரங்களுக்கிடையில் உள்ள இணைகரங்களும் முக்கோணங்களுஞ் சமமான குத்துயரங்களை உடையனவாம்.

இதற்கு மறுதலையாகக் கூறின், சமமான குத்துயரமுடைய இணைகரங்களும் முக்கோணங்களுங் கொடுக்கப்பட நாம் **அஇ, உஎ** ஆகிய இரு சமாந்தரக் கோடுகளைக் குத்துயரங்கட்குச் சமமான இடைவெளித் தூரத்தில் வரைந்தால் சமாந்தரங்கள் **அஇ, உஎ** என்பவற்றிற்கிடையே, கொடுக்கப்பட்ட இணைகரங்கள், முக்கோணங்கள் ஆகியவற்றிற்குச் சர்வசமனான இணைகரங்களையும் முக்கோணங்களையும் நாம் வரையலாம் என்க.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

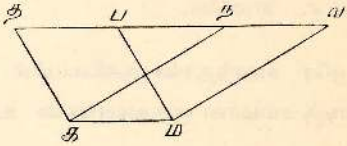
1. ஒரு செவ்வகத்தாள் **கமபத** இலிருந்து ஒரு செங்கோண முக்கோணம் **மநப** ஐ வெட்டுக. உரு 482 ஐப் பார்க்க. △**மநப** ஐ இரு செங்கோண அளவிலே திருப்பி முதலாவதாக உரு **கநபத** ஓடு **ம'ப** வழி **மந** சேர்ந்து **நம'ப** இனது நிலையிலே நிற்கப் பொருத்துக ; பின்னர் **தய** வழி **மந** சேர்ந்த **கதய** இனது நிலையிலே நிற்கப் பொருத்துக. இது எவ்வுண்மையை எடுத்துக் காட்டுகின்றது ?



உருவம் 482

2. ஒரு தாள்கட்டினை எடுத்துக்கொள்க. முதலாவதாக முற்பக்கம் ஒரு செவ்வகமாகத் தோன்றும் வகையில் அதைப் பிடிக்க. பின்னர் தாட்களை ஒரு பக்கமாக நகர்த்தி முற்பக்கம் ஓரிணைகரமாகத் தோன்றும் வண்ணம் பிடிக்க. அக்கட்டின் உயரம் மாற்றப் பட்டதா ? இது எதைக் காட்டுகின்றது ?

3. **உரு 483 கம எனும் ஓரடியில் உள்ளனவாயும் கம, தபநவ எனும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்கட்குள் அமைந்தனவாயும் உள்ள ஈரிணைகரங்கள் கமபத, கமவந என்பவற்றைக் குறிக்கின்றது. கமபத இன் பரப்பு=கமவந இன் பரப்பு என நிறுவுக.**



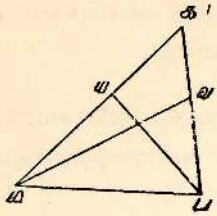
உருவம் 483

(i) **பகோகோ** என்ற சோதனையைக் கொண்டு △**தகந** ≡ △**பமவ** என நிறுவுக.

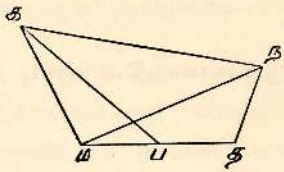
(ii) முழு உரு **தகமவ** இலிருந்து △**தகந** ஐ எடுத்தால் என்ன எஞ்சும்? **தகமவ** இலிருந்து △**பமவ** ஐ எடுத்தால் என்ன எஞ்சும்?

(iii) உமது உரு ஒன்றை வரைக. அதில் இணைகரம் **கமபத** உள்ள சமாந்தரங்கட்டிடையே அதே அடி **கம** மேலமைய ஒரு செவ்வகம் வரைக. ஓரிணைகரத்தின் பரப்பை அறிவதற்கு இது எவ்வாறு உதவுகின்றது ?

4. உரு 484 இல் △ மயப = △ மவப. முழு உருவிலிருந்தும் ஒவ்வொரு முக்கோணத்தையும் தனித்தனியே எடுப்பதால் என்ன நிகழும் ?



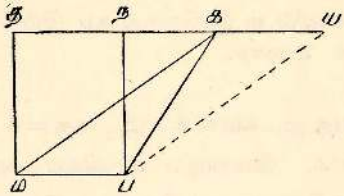
உருவம் 484



உருவம் 485

5. உரு 485 இல் △ கமப = △ மதந நாற்கோணங் கபதந இன் பரப்பைப்பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்.

6. உரு 486, ஒரே அடி மப மேலமைந்து ஒரே சோடிச் சமாந்தரக் கோடுகளான மப, தநக ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஒரு முக்கோணம் கமப, ஒரு செவ்வகம் நதமப ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றது. △ கமப வின் பரப்பு = $\frac{1}{2}$ செவ்வகம் நதமப இன் பரப்பு என நிறுவுக.



உருவம் 486

இணைகரம் **கமப்ய** ஐ முடிவாக்குக.

(i) △ **கமப** இன் பரப்பைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ? காரணங் காட்டுக.

(ii) உதாரணம் 3 ஐப் பயன்படுத்தி நிறுவலை முடிவாக்குக.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பைக் கணிக்க இது எவ்வாறு உதவும் ?

(iv) உரு 486 இல் **மப**=3 அங்., **மத**=5 அங். எனின் இணைகரம் **மபயக** இன் பரப்பையும் முக்கோணம் **கமப** இன் பரப்பையுங் காண்க.

ஓரிணைகரத்தின் பரப்பு ஒரே அடியில் உள்ளதும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்கட்கிடையே உள்ளதுமான ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பிற்குச் சமம் என்பதையும் அச்செவ்வகத்தை அமைப்பதிலிருந்து அப்பரப்பைக் கணிக்க முடியும் என்பதையும் உதாரணம் 3 காட்டுகின்றது.

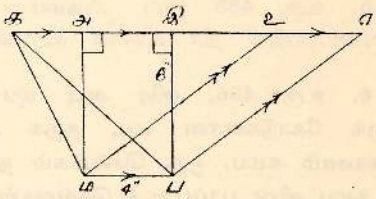
ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு ஒரே அடிமேலமைந்து ஒரே சமாந்தரங்கட்கிடையே உள்ள ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பில் அரைப்பகுதியாகும் என்பதை உதாரணம் 6 காட்டுகின்றது.

7. உரு 487 இல் **கஅஇஉஎ** என்பது **மப** இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோடு.

(i) இணைகரம் **மபஎஉ** இன் பரப்பைக் காண்க.

(ii) △ **கமப** இன் பரப்பைக் காண்க.

(iii) **பஎ**=8″ எனில் **ப** இலிருந்து **மஉ** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளத்தைக்காண்க.



உருவம் 487

(iv) **கப**=7·5″ எனில் **ம** இலிருந்து **கப** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

8. ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ, **கம**=8 ச.மீ., **கத**=6 ச.மீ., ∠ **மகத**=65° ஆகவமையுமாறு வரைக. வேண்டிய கருவிகள் அமைத்தும் வேண்டியவாறு அளந்தும் **கமபத** இன் பரப்பை இரு வேறு வேறான வழிகளிற் காண்க.

9. பக்கங்கள் 5 ச.மீ., 6 ச.மீ., 8 ச.மீ. ஆகவமைந்த ஒரு முக்கோணம் வரைக. வேண்டிய கருவிகள் அமைத்தும் வேண்டியவாறு அளந்தும் முக்கோணத்தின் பரப்பை 3 வேறு வேறான வழிகளிற் காண்க.

இணைகரத்தின் பரப்பு

கமபத ஓரிணைகரமாயும் அதில் **கம**=அ அலகுகளாயும் சமாந்தரக் கோடுகள் **கம**, **பத** ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் இ அலகுகளாயும் இருந்தால்,

இணைகரம் கமபத இன் பரப்பு = அஇ பரப்பலகுகள்.

இவ்வினைவைத் திரிகோணகணித முறையிற் பின்வருமாறு கூறலாம் :

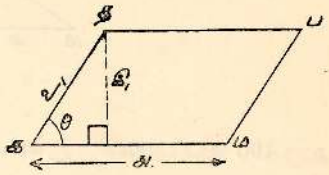
கத = உ அலகுகளாயும்,

∠ **தகம** = θ ஆயுமிருந்தால்,

$\frac{\text{இ}}{\text{உ}}$ = சைன் θ,

அல்லது

இ = உ சைன் θ.



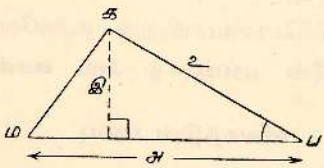
உருவம் 488

∴ **இணைகரம் கமபத இன் பரப்பு** = அஉ சைன் θ **பரப்பலகுகள்.**

முக்கோணத்தின் பரப்பு

கமப ஒரு முக்கோணமாயும் அதில் **மப** = அ அலகுகளாயும் **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளம் இ அலகுகளாயுமிருந்தால்,

முக்கோணம் கமப இன் பரப்பு = $\frac{1}{2}$ அ இ **பரப்பலகுகள்.**



உருவம் 489

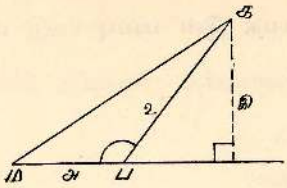
இவ்வினைவைத் திரிகோணகணித முறையிற் பின்வருமாறு கூறலாம் :

கப = உ அலகுகளாயும், ∠**கபம** கூர்ங்கோணமாயும்,

ப ஆற் குறிக்கப்படுவதாயும் இருந்தால்,

$\frac{\text{இ}}{\text{உ}}$ = சைன் **ப** அல்லது இ = உ சைன் **ப**.

∴ **முக்கோணம் கமப வின் பரப்பு** = $\frac{1}{2}$ அஉ **சைன் ப பரப்பலகுகள்.**



உருவம் 490

உரு 490 ஐப் பார்க்க ; ∠ **கமப** விரிகோணமாயிருந்தால் அதே நிறுவுகை, பரப்பானது,

$\frac{1}{2}$ அஉ சைன் (180° − ப) பரப்பலகுகள் என்பதைக் காட்டும்.

பக்கங்கள் 91, 95 ஆகியவற்றிற் கூர்ங்கோணங்களின் சைன், கோசைன், தாஞ்சன் என்பவற்றிற்கே வரைவிலக்கணங் கூறப்பட்டுள்ளது. ஒரு விரிகோணத்தின் சைனை அதன் மிகைநிரப்பியின் சைன் என வரைவிலக்கணங் கூறுதல் ஏற்புடைத்தாகும்.

உதாரணமாக, சைன் 150° = சைன் 30°,
சைன் 110° = சைன் 70°, என இவை போல்வன வரைவிலக்கணத்தாற் பெறப்படும்.

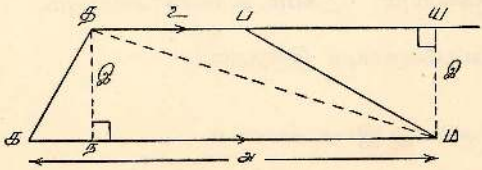
எனவே வரைவிலக்கணத்திற்கியைய
∠**கபம** விரிகோணமெனின்,
சைன் ப = சைன் (180° − ப).
ஆதலால், ∠**கபம** விரிகோணமாயினுங் கூர்ங்கோணமாயினும்

முக்கோணம் கமப வின் பரப்பு = $\frac{1}{2}$ அஉ சைன் ப பரப்பலகுகள்.

சரிவகத்தின் பரப்பு

கமபத ஒரு **சரிவகம்**. அதில் **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரம். **கம** = அ அலகுகளாயும் **தப** = உ அலகுகளாயுஞ் சமாந்தரக் கோடுகளான **கம, தப** க்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் இ அலகுகளாயுமிருந்தால்,

சரிவகம் கமபத வின் பரப்பு = $\frac{1}{2}$ இ (அ + உ) பரப்பலகுகள்.



உருவம் 491

மத வை இணைத்து, △**தகம**, △**மதப** ஆகியவற்றின் குத்துயரங்களான **தந, மய** ஆகியவற்றை வரைக.

△**தகம** வின் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ **தந . கம** $= \frac{1}{2}$ இ அ பரப்பலகுகள்,

△**மதப** வின் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ **மய . தப** $= \frac{1}{2}$ இ உ பரப்பலகுகள்,

∴ சரிவகம் **கமபத** வின் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ இ அ $+ \frac{1}{2}$ இ உ பரப்பலகுகள்,

$= \frac{1}{2}$ இ (அ + உ) பரப்பலகுகள்.

இப்பயனைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பு சமாந்தரக்கோடுகளினிளத்தின் கூட்டுத்தொகையின் அரைப்பகுதிக்கும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்திற்கும் உள்ள பெருக்கத்தினால் அளந்தறியப்படும்.

அல்லது இன்னுஞ் சுருக்கமாகக் கூறின்,

பரப்பு = உயரம் × சராசரி அகலம் எனக் கூறலாம்.

நாற்கோணத்தின் பரப்பு

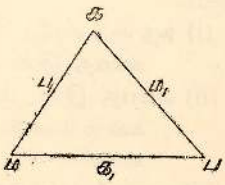
யாதாயினும் ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** வின் பரப்பை, **மத** வை இணைத்து முக்கோணங்கள் **கமத, பமத** ஆகியவற்றின் பரப்பைக் காண்பதால் அறியலாம். ஆனால், நாற்கோணத்தின் பரப்பிற்குச் சமமான பரப்பையுடைய ஒரு முக்கோணத்தை அமைத்தல் அதினினுஞ் சிறந்த முறையாகும். இம்முறை 307 ஆம் பக்கத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், $க_1, ம_1, ப_1$ அலகுகளாயும் அ–அதாவது அரைச் சுற்றளவு– $= \frac{1}{2}$ $(க_1 + ம_1 + ப_1)$ ஆயுமிருந்தால், முக்கோணத்தின் பரப்பு

$\sqrt{\{அ(அ-க_1)\ (அ-ம_1)\ (அ-ப_1)\}}$ பரப்பலகுகளாகும் என நிறுவலாம்.

15 அங்., 14 அங்., 13 அங். நீளமுள்ள பக்கங்களையுடைய ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பைக் கண்டு ஒவ்வொரு குத்துயரத்தின் நீளத்தையுங் கணிக்க.



உருவம் 492

உமது உருவைக் கீறி அதிலே தரவுகளைக் குறிக்க. பின்வருவன வற்றைப் பிரதி செய்து முடிவாக்குக :—

$க_1 = 15$	$அ - க_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	அ-க, அ-ம, அ-ப ஆகிய
$ம_1 = 14$	$அ - ம_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	வற்றின் கூட்டுத் தொகை
$ப_1 = 13$	$அ - ப_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$	என் அ இற்குச் சமன்?
		இது நற்பயனுள்ள ஒரு
$க_1 + ம_1 + ப_1 = \ldots$ கூட்ட $\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$		சோதனையாகும்.
$\therefore$ $அ = \ldots$		

$\therefore$ △**கமப** இன் பரப்பு $= \sqrt{(\ldots)}$ சது. அங். $= \ldots$ சது. அங்.

க இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து இ அங். எனின்

△**கமப** வின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times 15 \times$ இ சது. அங்.

எனவே இ ஐக் காண்க.

இவ்வாறே மற்றை இரு குத்துயரங்களையும் காண்க.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 50

[ஒவ்வொரு வரிப்படத்திலும் நீளவலகு 1 அங். ஆகும்.]

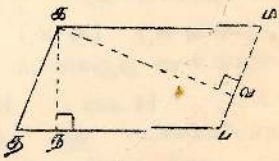
1. இணைகரம் **கமபத** ஐ, **கம** $= 5$ ச.மீ., **கத** $= 4$ ச.மீ., ∠ **மகத** $= 65°$ ஆகவமையுமாறு வரைக. ஒன்று **கம** ஐ அடியாகவும் பிறிதொன்று **கத** ஐ அடியாகவுங் கொண்ட இரு வேறு செவ்வகங்களை இணைகரத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாகுமாறு அமைக்க. இரு செவ்வகங்களின் உயரங்களையுங் கண்டு **கமபத** இன் பரப்பை **இரு வழிகளிற்** காண்க. ஓரிணைகரத்தின் பரப்பை அறிவதற்குரிய திரிகோண கணித வாய்பாட்டை அறிவீராயின் **கமபத** இன் பரப்பை மூன்றாவதொரு வழியிலுங் காண்க.

2. உரு 493 இல் இணைகரம் **கமபத** இன் குத்துயரங்கள் **கந**, **கவ** ஆகும்.

(i) **கந** $= 4$ ச.மீ., **பத** $= 5$ ச.மீ. எனின் **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

(ii) **கமபத** இன் பரப்பு $= 24$ சது. அங., **கம** $= 6$ அங். எனின் **கந** ஐக் காண்க.

(iii) **கம** $= 5$ அங., **கவ** $= 4$ அங., **கத** $= 6$ அங். எனின் **கந** ஐக் காண்க.



உருவம் 493

3. உரு 494 இல் **கத, மந, பவ** என்பன △ **கமப** இன் குத்துயரங்கள்

(i) **கத** = 7 அங்., **மப** = 5 அங். எனின் △ **கமப** வின் பரப்பைக் காண்க.

(ii) △ **கமப** இன் பரப்பு = 40 சது.ச.மீ., **கப** = 8 ச.மீ. எனின் **மந** ஐக் காண்க.

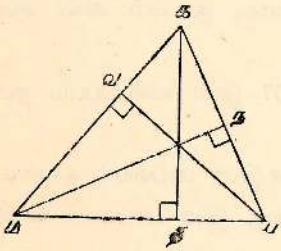
(iii) **மந** = 5 அங்., **கம** = 6 அங்., **பவ** = 4 அங். எனின் **கப** ஐக் காண்க.

[4] **கமபதந** ஒரு நேர் கோடு. அதிற் **கம** = 6 ச.மீ., **மப** = 2 ச.மீ., **பத** = 4 ச.மீ., **தந** = 2 ச.மீ. **கந** இலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்தில் உள்ளது **வ** எனும் ஒரு புள்ளி.

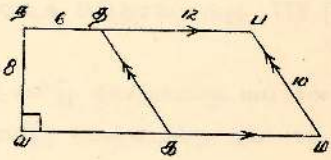
(i) △ **வகம**, △ **வமத**, △ **வதந** ஆகியவற்றின் பரப்புக்களைக் காண்க.

(ii) △ **வபத** என்பது △ **வகந** இன் எவ்வளவு பகுதியாகும் ?

(iii) எம்முக்கோணம் △ **வமந** இன் பரப்பிற்குச் சமமாக விருக்கும் ?



உருவம் 494



உருவம் 495

5. உரு 495 இல் (i) **கமபத** இன பரப்பைக் காண்க.

(ii) **ம** இலிருந்து **கத** இற்குள்ள செங்குத்தினீளத்தைக் காண்க.

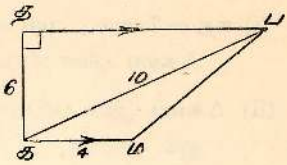
[6] உரு 495 ஐ வரைந்து, **கந, வத, வப** ஆகியவற்றை இணைக்க. (i) △ **கநத** இன் பரப்பைக் காண்க. (ii) △ **வதப** இன் பரப்பைக் காண்க. (iii) **ந** இலிருந்து **கத** இற்குள்ள செங்குத்தினீளத்தைக் காண்க.

7. உரு 496 இல் (i) △ **கமப** இன் பரப்பைக் காண்க. (ii) **ம** இலிருந்து **பக** இற்குள்ள செங்குத்தினீளத்தைக் காண்க.

8. உரு 497 இல்,

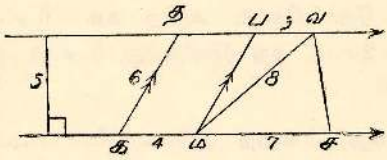
(i) **கமபத**, △ **வமச**, △ **மபவ** ஆகிய வற்றின் பரப்புக்களைக் காண்க.

(ii) **ம** இலிருந்து **கத** இற்கு, **ச** இலிருந்து **மவ** இற்கு, **ப** இலிருந்து **வம** இற்கு உள்ள செங்குத்துக்களினீளங்களைக் காண்க.



உருவம் 496

(iii) **கசவத** இன் பரப்பைக் காண்க.



உருவம் 497

9. சரிவகம் **கமபத** இன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கம**, **தப** ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரம் 4 அங். **கம** = 8 அங்., **தப** = 5 அங். ஆனால் **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

[10] 277 ஆம் பக்கத்தில் உள்ள உரு 467 இன் வரைப்படம் ஒன்று வரைக.

(i) **மச**, **பவ** ஆகியவற்றை இணைத்து **மபவச** இன் பரப்பைக் காண்க.

(ii) **பச**, **யத** ஆகியவற்றை இணைத்து **பசயத** இன் பரப்பைக் காண்க.

11. **கமநய** என்பது 18 சது ச.மீ. பரப்புள்ள இணைகரம் ; **கம** = 6ச.மீ., **கய** = 4 ச.மீ. நீட்டப்பட்ட **யந** இலே **ப** எனும்புள்ளி, **மப** = 5 ச.மீ. ஆக வமையுமாறு உள்ளது. (i) △ **கமப** இன் பரப்பைக் காண்க ; (ii) **ம** இலிருந்து **கய** இற்குள்ள செங்குத்தினீளத்தைக் காண்க. (iii) **க** இலிருந்து **பம** இற்குள்ள செங்குத்தினீளத்தைக் காண்க. [தேவையானால் **பம** நீட்டப் படலாம்.]

12. **கமபத** 24 சது. ச.மீ. பரப்புள்ள, ஒரிணைகரமாகும் ; **கம** = 6 ச.மீ., **கத** = 5 ச.மீ. ஒத்த குத்துயரங்களைக் கணிக்க. இணைகரத்தை வரைந்து அதன் கூர்ங்கோணங்களுள் ஒன்றை அளக்க. இணைகரத்தின் பரப்பிற் குரிய திரிகோணகணித வாய்பாடு உமக்குத் தெரியுமானால் அதன் பரப்பைக் கணிப்பினாலும் அறிக.

[13] **வயஅஇ** 18 சது. ச.மீ. பரப்புடைய ஓரிணைகரம்; **வய** = 5 ச.மீ., **யஅ** = 4 ச.மீ. அவற்றோடொத்த குத்துயரங்களைக் கணித்தறிக.

[14] **கமபத** ஓரிணைகரம். அதில் **கம** = 3 அங்., **மப** = 12 அங். **ம** இலிருந்து **கத** இற்குள்ள செங்குத்து 2·5 அங். **க** இலிருந்து **பத** இற்குள்ள செங்குத்தினீளத்தைக் காண்க.

[15] Δ **கம்ப** இன் இரு குத்துயரங்கள் **மந, பவ** என்பன. **கம** = 6 அங்., **கப** = 5 அங்., **பவ** = 4 அங். எனின் **மந** இன் நீளத்தைக் காண்க.

16. Δ **கமப** இன் அடி **மப** இலே **வ** எனும் புள்ளி **மவ** = 3 அங். ஆகவும் **வப** = 2 அங். ஆகவுமமையுமாறு உள்ளது. Δ **கவப** இன் பரப்பு 5 சது. அங். எனின் Δ **கவம** இன் பரப்பைக் காண்க.

[17] ஒரு முக்கோணமும் ஒரு செவ்வகமும் ஓரடியை உடையன. செவ்வகத்தின் உயரம் 6 அங். முக்கோணத்தின் பரப்பு செவ்வகத்தினுடையதின் $\frac{1}{3}$ ஆகவிருந்தால் முக்கோணத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

18. மூலை விட்டங்கள் 5 அங். உம் 6 அங். உம் ஆகவுள்ள ஒரு சாய்சதுரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

[19] ஒரு சாய்சதுரத்தின் பரப்பு 25 சது. ச.மீ., ஒரு மூலை விட்டம் மற்றையதினும் இருமடங்கானது. ஒவ்வொரு மூலை விட்டத்தின் நீளத்தையுங் காண்க.

20. **கமபத** ஒரு சரிவகம். அதில் **கம, தப** சமாந்தரங்கள். **கம** = 7 அங்., **தப** = 3 அங்., **கமபத** இன் பரப்பு 18 சது. அங். எனின் Δ **மபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

21. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் 13 அங்., 20 அங்., 21 அங். 289 ஆம் பக்கத்திலுள்ள வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அதன் பரப்பைக் கணிக்க. பின்னர் மிகக் குறுகிய குத்துயரத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

[22] 21 ஆங் கணக்கிற் குறிப்பிட்டவாறு, 10 அங்., 17 அங்., 21 அங். நீளப் பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்திற்குச் செய்க.

*23. Δ **கமப** இல் **கம** = 8 ச.மீ., **கப** = 9 ச.மீ. **த** ஆனது **மப** இனது நடுப்புள்ளி. Δ **கமப** இனது பரப்பு 36 சது. ச.மீ. எனின் **த** இலிருந்து **கம, கப** களுக்குள்ள செங்குத்துக்களின் நீளங்களைக் காண்க.

*24. ஓரிணைகரத்தின் குத்துயரங்கள் 2 அங்., 3 அங். ஆகும். இணைகரத்தின் சுற்றளவு 20 அங். இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

*25. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரங்கள் மூன்றும் 6ந, 4ந, 3ந, அங். ஆகும். அதன் சுற்றளவு 18 அங். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

*26. த, ந என்பன முறையே, முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கங்கள் **கப, கம** என்பவற்றில் உள்ள புள்ளிகள். அதில் **கத** $= \frac{1}{3}$ **கப, கந** $= \frac{2}{3}$ **கம.** Δ **கமப** இன் பரப்பு 18 சது. ச.மீ. எனின் (i) Δ **மபந,** (ii) Δ **பதந,** (iii) Δ **கதந** ஆகியவற்றின் பரப்பைக் காண்க.

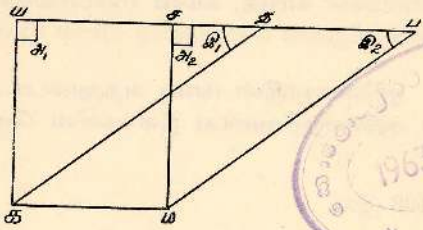
*27. வ, ச, ய என்பன முறையே முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கங்கள் **மப, பக, கம** ஆகியவற்றில் உள்ள புள்ளிகள். அதில் **மவ** $= 6$ அங்., **வப** $= 8$ அங்., **பச** $= 6$ அங்., **சக** $= 9$ அங்., **கய** $= 10$ அங்., **யம** $= 3$ அங். Δ **கமப** இன் பரப்பு 84 சது. அங். என நிறுவி (i) Δ **கவப,** (ii) Δ **கவப,** (iii) Δ **யவம,** (iv) Δ **யசக,** (v) Δ **வசய** ஆகியவற்றின் பரப்புக்களைக் காண்க.

*28. **சைன்வாய்பாடு.** யாதாயினும் ஒரு Δ **கமப** இல் **மப** $=$ க, அலகுகள், **பக** $=$ ம, அலகுகள், **கம** $=$ ப, அலகுகள் எனின்

$$\frac{\text{க,}}{\text{சைன் க}} = \frac{\text{ம,}}{\text{சைன் ம}} = \frac{\text{ப,}}{\text{சைன் ப}}$$ என நிறுவுக. (பக்கம் 287 ஐப் பார்க்க.)

தேற்றம் 35

ஓரிணைகரத்தின் பரப்பானது அவ்விணைகரமுள்ள அடியிலும் சமாந்தரக் கோடுகளிற் கிடையிலுமுள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 498

தரவு. ஒரே அடி **கம** இலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் **கம, யசதப** ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ள இணைகரம் **கமபத** உஞ் செவ்வகம் **கமசய** உம்.

மேற்கோள். **கமபத** இன் பரப்பு = **கமசய** இன் பரப்பு.

நிறுவல். **△கயத, △மசப** ஆகியவற்றிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால்,

$அ_1 = அ_2$	**ஒத்தகோணங்கள், கய‖மச.**
$இ_1 = இ_2$	**ஒத்தகோணங்கள், கத‖மப.**
கய = மச	**இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கங்கள்.**

∴ முக்கோணங்கள் **கயத / மசப** சர்வசமன் கோகோப.

∴ **△கயத** இன் பரப்பு = **△மசப** இன் பரப்பு.

முழு உரு **கமபய** இலிருந்து முறையே ஒவ்வொரு முக்கோணத்தையுங் கழித்தால் மீதிகளான **கமபத, கமசய** என்பவை பரப்பிற் சமமாகும்.

குறிப்பு : எல்லா வகைகளிலும் உள்ள உருக்களுக்கும்—அவையாவன **த** ஆனது **ய, ச** ஆகியவற்றிற்கிடையே இருக்கிற நிலை, அல்லது நீட்டப்பட்ட **யச** இலுள்ள நிலை, **கமசய** என்பது யாதாயினும் ஓரிணைகரமாயிருக்கிற நிலை, ஆகியவை கொண்ட உருக்களுக்கும்—ஏற்ற நிறுவலைப் பெறுவதற்கு,

(i) முக்கோணங்கள் சர்வசமன் என நிறுவ கோகோப என்ற சோதனையைப் பயன் படுத்தலும்,

(ii) இம்முக்கோணங்களின் பரப்புக்களை முழு உருவிலிருந்தும் ஒவ்வொன்றாகக் கழித்தலும் வேண்டற்பாலன.

கிளைத்தேற்றம் 1. ஒரே அடியிலும் ஒரே சோடிச்சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையிலும் உள்ள இணைகரங்கள் பரப்பிற்சமமானவை.

ஒரே அடி **கம** இனும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் **கம, யசதப** என்பவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ள எவையேனும் ஈரிணைகரங்கள் **கமபத, கமசய** என்பவைக்கு, 35 ஆந் தேற்றத்திலுள்ள நிறுவல் சொல்லொடு சொல் பொருத்தமாயிருக்கும்.

கிளைத்தேற்றம் 2. ஓரிணைகரத்தின் பரப்பு அதனுடைய அடி அதற்கொத்த குத்துயரம் ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களின் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படும்.

உரு 498 இல்,

செவ்வகம் **கமசய** இன் பரப்பு = **கம. மச,**

∴ இணைகரம் **கமபத** இன் பரப்பு = **கம.மச.**

ஆனால் சமாந்தரக் கோடுகள் **கம, யசதப** ஆகியவற்றிற்கு இடையிலுள்ள தூரம் **மச** ஆகையால் அது இணைகரம் **கமபத** இனுடைய, அடி **கம** இற்கு ஒத்த தூரமாகும்.

∴ இணைகரம் **கமபத** இன் பரப்பு, அதனுடைய அடி **கம,** அதற்கொத்த குத்துயரம் ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களின் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் 3. சமமான அடிகளிலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையிலும் உள்ள இணைகரங்கள் பரப்பிற் சமனாகும்.

ஒரே சோடிச் சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையில் இணைகரங்கள் உள்ளனவாதலால் அவற்றின் குத்துயரங்கள் சமமாகும்; ஒத்த அடிகளுஞ் சமமெனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

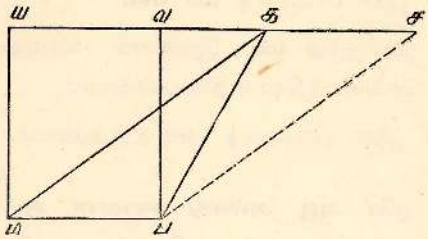
எனவே அவற்றின் பரப்புக்கள் சமம்.

குறிப்பு: ஒரு தேர்வில் இக்கிளைத் தேற்றங்கள் யாதாயினும் ஒன்றை நிறுவல் வேண்டின் முதலாவது தேற்றத்தினது நிறுவலை எழுதித் தேவையான விடத்தில் இங்குகாட்டியுள்ள குறிப்புக்களையுஞ் சேர்த்துக் கொள்ளலாம்.

முக்கிய குறிப்பு. பயிற்சிக் கணக்குக்களைச் செய்வதிற் கிளைத்தேற்றம் 2 இனும்—இன்னும் தேற்றம் 35 இனும்—கிளைத்தேற்றம் 1 பயன்றரக் கூடிய தொன்றாகும்.

தேற்றம் 36

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பானது அஃதுள்ள அடியிலும் சமாந்தரக் கோடுகட்கு இடையிலும் உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பில் அரைப் பகுதிக்குச் சமனாகும்.



உருவம் 499

தரவு. ஒரே அடி **மப** மேலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் **மப, யவக** ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ள ஒரு முக்கோணம் **கமப** உம் ஒரு செவ்வகம் **வயமப** உம்.

மேற்கோள். **கமப** இன் பரப்பு=**வயமப** இன் $\frac{1}{2}$ பரப்பு.

கருவி. **ப** ஊடாகப் **பச** ஐ, **யக** ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட **யக** ஐ **ச** இலே சந்திக்குமாறு **மக** இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறுக.

நிறுவல். **மக** இற்குச் சமாந்தரம் **பச** — கருவி,

கச இற்குச் சமாந்தரம் **மப** — தரவு,

∴ **கமபச** ஓரிணைகரம்.

∴ **சகமப, வயமப** என்பன ஒரே அடி **மப** மேலும், ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் **மப, யவகச** ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ள இணைகரங்களாகும்.

∴ பரப்பு **சகமப**=பரப்பு **வயமப**.

மூலைவிட்டம் **கப** ஆனது இணைகரம் **சகமப** இன் பரப்பை இரு சமக்கூறிடுவதால்,

பரப்பு **கமப**=$\frac{1}{2}$ பரப்பு **சகமப**,

∴ பரப்பு **கமப**=$\frac{1}{2}$ பரப்பு **வயமப**.

கிளைத்தேற்றம் 1. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் அடி, குத்துயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கத்தின் அரைப் பகுதியால் அளவிடப்படும்.

ஈரு 499 இல்,

செவ்வகம் **வயமப** இன் பரப்பு=**மப . பவ,**

∴ △ **கமப** இன் பரப்பு= $\frac{1}{2}$ **மப . பவ.**

ஆனால் **க** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து **பவ** இற்குச் சமன், ஒரு செவ்வகத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள்,

∴ △ **கமப** இன் பரப்பு= $\frac{1}{2}$ அடி × குத்துயரம்.

கிளைத்தேற்றம் 2. ஒரே அடி அல்லது சமமான அடிகள் மேலுள்ளன வாய்ச் சமமான குத்துயரங்கள் கொண்ட முக்கோணங்கள் பரப்பிற் சமமாகும்.

இது கிளைத்தேற்றம் 1 இலிருந்து பெறப்படும்.

கிளைத்தேற்றம் 3. ஒரே பரப்பளவினவாய முக்கோணங்கள் ஒரே அடியை அல்லது சம அடியை உடையனவாகின் அவற்றின் குத்துயரங்கள் சமமாகும்.

இது கிளைத்தேற்றம் 1 இலிருந்து பெறப்படும்.

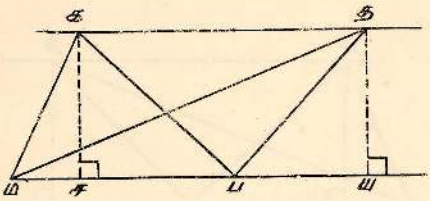
ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பானது ஒரே அடியிலும் ஒரே கோடிச்சமாந்தரக் கோடுகட்கு இடையிலும் உள்ள இணைகரத்தின் பரப்பில் அரைப்பகுதியாகும் என்பதைத் தேற்றம் 36 இனது நிறுவலை மாற்றங்களில்லாமலே பயன் படுத்தி நிறுவலாம்.

இதற்குப் பிறிதொரு நிறுவல் பக்கம் 301 இற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

முக்கிய குறிப்பு : பயிற்சிக் கணக்குக்களைச் செய்வதிற் கிளைத்தேற்றம் 1 இலும் – இன்னுந் தேற்றம் 36 இலும் – கிளைத்தேற்றம் 2 பயன்றரக் கூடிய தொன்றாகும்.

தேற்றம் 37

ஒரே அடியிலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையிலும் உள்ள முக்கோணங்கள் பரப்பிற் சமமாகும்.



உருவம் 500

தரவு. ஒரே அடி **மப** இலும் ஒரே சோடிச்சமாந்தரக்கோடுகள் **மப, கத** ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ள இரு முக்கோணங்கள் **கமப, தமப** என்பன.

மேற்கோள். **கமப** இன் பரப்பு = **தமப** இன் பரப்பு.

கருவி. **க, த** களிலிருந்து **கச, தய** என்னுஞ் செங்குத்துக்களை **மப** இற்கு—தேவையானால் நீட்டப்பட்ட **மப** இற்கு – வரைக.

நிறுவல். **கமப** இன் பரப்பு $=\frac{1}{2}$ **மப . கச.** $\frac{1}{2}$ **அடி × குத்துயரம்.**

தமப இன் பரப்பு $=\frac{1}{2}$ **மப . தய** $\frac{1}{2}$ **அடி × குத்துயரம்.**

மப இற்கு **கச, தய** செங்குத்தாகையால்,

தய இற்குக் **கச** சமாந்தரம்,

அத்துடன் **கத** இற்குச் **சய** சமாந்தரம் **தரவு,**

∴ **கசயத** ஓரிணைகரமாகும்.

∴ **கச = தய** **இணைகரத்து எதிர்ப்பக்கம்.**

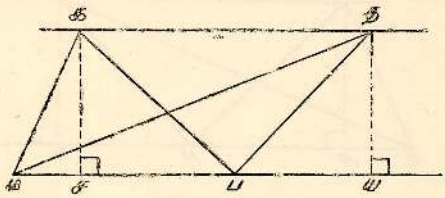
∴ **கமப** இன் பரப்பு = **தமப** இன் பரப்பு.

இளைத்தேற்றம். **சமமான அடிகளிலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையிலும் உள்ள முக்கோணங்கள் பரப்பிற் சமமாகும்.**

நிறுவல் மேற்காட்டியவாறாகும்.

தேற்றம் 38

ஒரே அடியிலும் அதற்கு ஒரே பக்கத்திலும் உள்ள சம பரப்பினை யுடைய முக்கோணங்கள் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையில் இருக்கும்.



உருவம் 501.

தரவு. ஒரே அடி **மப** இலும் அதற்கு ஒரே பக்கத்திலும் உள்ள **கமப, தமப்** எனும் இரு முக்கோணங்கள் ; $\triangle$ **கமப** $=$ $\triangle$ **தமப்.**

மேற்கோள். **மப** இற்குச் சமாந்தரம் **கத.**

கருவி. **க,த** களிலிருந்து **கச, தய** என்னுஞ் செங்குத்துக்களை **மப** இற்குத் தேவையானால் நீட்டப்பட்ட **மப** இற்கு வரைக.

நிறுவல். **கமப** இன் பரப்பு $=\frac{1}{2}$ **மப . கச** $\frac{1}{2}$ **அடி** $\times$ **குத்துயரம்.**

தமப இன் பரப்பு $=\frac{1}{2}$ **மப . தய** $\frac{1}{2}$ **அடி** $\times$ **குத்துயரம்.**

ஆனால் **கமப** இன் பரப்பு $=$ **தமப** இன் பரப்பு **தரவு,**

$\therefore$ **கச** $=$ **தய.**

மப இற்கு **கச, தய** செங்குத்தாகையால், **தய** இற்குக் **கச** சமாந்தரம்.

$\therefore$ **கச, தய** கள் சமமுஞ் சமாந்தரமுமாகும்.

$\therefore$ **கசயத** ஒரிணைகரமாகும்.

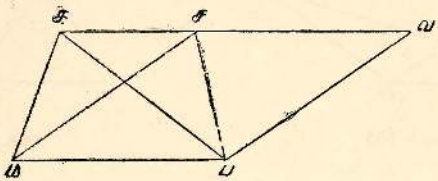
$\therefore$ **மப** இற்கோ **சய** இற்கோ **கத** சமாந்தரமாகும்.

கிளைத்தேற்றம். ஒரே நேர்கோட்டிற் சமமான அடிகளிலும் அதன் ஒரே பக்கத்திலும் உள்ள சமபரப்பினையுடைய முக்கோணங்கள் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகட்கு இடையில் இருக்கும்.

நிறுவல் மேற்காட்டியவாறாகும்.

தேற்றம் 39

ஒரு முக்கோணமும் ஓரிணைகரமும் ஒரே அடியிலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகளுக்கு இடையிலும் இருப்பின் அம் முக்கோணத்தின் பரப்பு அவ்விணைகரத்தின் பரப்பில் அரைப்பகுதிக்குச் சமமாகும்.



உருவம் 502

தரவு. ஒரே அடி **மப** இலும் ஒரே சோடிச்சமாந்தரக் கோடுகளான **மப, கசவ** என்பவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ள ஒரு முக்கோணம் **கமப** உம் ஓரிணைகரம் **வசமப** உம்.

மேற்கோள். **கமப** இன் பரப்பு = **வசமப** இன் $\frac{1}{2}$ பரப்பு.

கருவி. **பச** ஐ இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கமப, சமப** என்பன ஒரே அடி **மப** இலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் **மப, கச** ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள.

∴ **கமப** இன் பரப்பு = **சமப** இன் பரப்பு.

இணைகரம் **வசமப** இன் பரப்பை மூலைவிட்டம் **பச** இருசமக் கூறிடுகின்றதால், **சமப** இன் பரப்பு = **வசமப்** இன் $\frac{1}{2}$ பரப்பு.

∴ **கமப** இன் பரப்பு = **வசமப** இன் $\frac{1}{2}$ பரப்பு.

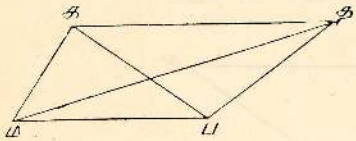
குறிப்பு : வேண்டில், தேற்றம் 37 இன் கருவியையும் வழியையும் பின்பற்றி இத்தேற்றத்தை நிறுவலாம். இத்தேற்றத்திற்கு தேற்றம் 36 இனது நிறுவல் சொல்லுக்குச் சொல் பொருந்தும்.

பரப்புத் தேற்றங்களும் அறிகணக்குப் பயிற்சியும். இணைகரங்களின் பரப்புக்களிலிருந்தே முக்கோணங்களுடைய பரப்புக்களின் பண்புகள் உய்த்தறியப் பெற்றன வெனினும், கணக்குப் பயிற்சிகளிலே, இணைகரங்களின் பரப்புக்கள் பற்றிய தேற்றங்களிலும் முக்கோணங்களின் பரப்புக்கள் பற்றிய தேற்றங்கள் மிக்க பயன்தரக் கூடியனவாம். அடுத்து வரும் அறிகணக்குப் பயிற்சிகளிற் பெரும்பாலானவற்றைப் பின் வருந் தேற்றங்களுள் ஒன்றையோ பலவற்றையோ கொண்டு நிறுவலாம். இவை முந்திய பக்கங்களிலே நிறுவப்பட்டனவாம்.

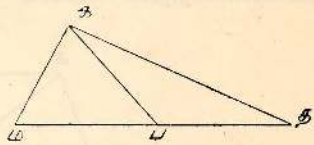
மாணவர் இவற்றை நன்கறிந்திருத்தல் வேண்டும் :—

1. உரு 503 இல் மப இற்குக் கத சமாந்தரம் எனின் △ கமப = △ தமப.

2. உரு 503 இல் △ கமப = △ தமப எனின் மப இற்குக் கத சமாந்தரம்.

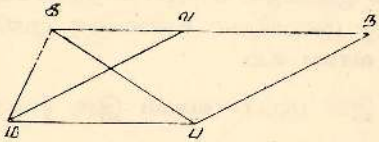


உருவம் 503



உருவம் 504

3. உரு 504 இல் மபத ஒரு நேர்கோடும் மப = பத உம் எனின் △ கமப = △ கதப.



உருவம் 505

4. உரு 505 இல் மபநவ ஓரிணைகரமாயிருந்து க என்பது நவ இலோ நீட்டப்பட்ட நவ இலோ இருந்தால் △ கமப = $\frac{1}{2}$ இணைகரம் நவமப.

பயிற்சி 51

[அம்பிட்ட கோடுகள் சமாந்தரம்]

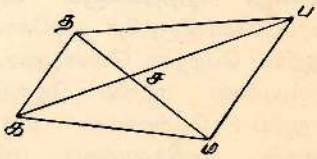
1 – 5 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 506 ஐக் குறிக்கின்றன.

1. மப இற்கு கத சமாந்தரமெனில் △ கமப இற்குச் சமானமான ஒரு முக்கோணத்தைக் கூறுக. காரணங் காட்டுக.

2. மப இற்குக் கத சமாந்தரமெனில் △ கசம = △ தசப என நிறுவுக.

3. △ சதக = △ சபம எனின் கம இற்குத் தப சமாந்தரம் என நிறுவுக.

4 தச = சம எனின், ஏன் △ தசப = △ மசப என விளக்கி △ தகப = △ மகப என நிறுவுக.



உருவம் 506

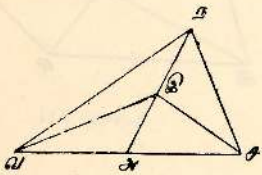
[5] △ தகச = △ தபச எனின் △ மகச = △ மபச என நிறுவுக.

6. உரு 507 இல் வஅ = அச, நஇ = இஅ எனின் △ இநவ = △ இஅச என நிறுவுக.

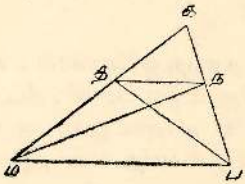
[7] உரு 507 இல் வஅ = அச எனின் △ நவஇ = △ நசஇ என நிறுவுக.

[8] முக்கோணம் கமப இன் பக்கம் மப இல் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ச. △ கமச = $\frac{2}{3}$ △ கமப எனின் மச ஐப்பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?

9. △ கமப இல் கம = 2 கப எனின் குத்துயரங்கள் மவ, பச களைப் பற்றி நீர் என்ன சொல்லல் கூடும்?



உருவம் 507



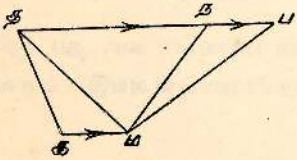
உருவம் 508

10. உரு 508 இல் மப இற்கு தந சமாந்தரம் எனின் △ கதப = △ கநம என நிறுவுக.

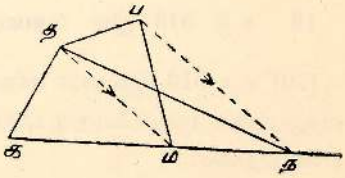
11. உரு 508 இல் கத = தம, கந = நப எனின் △ மதந, △ பதந என்பவற்றைப் பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்? மப இற்குத் தந சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[12] உரு 508 இல் மத = 2தக, பந = 2நக எனின் △ மதந, △ பதந என்பவற்றைப் பற்றி உம்மால் என்ன சொல்லக்கூடும். மப இற்குத் தந சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[13] உரு 509 இல் கம = நப எனின் △ தகம = △ மநப என நிறுவுக.



உருவம் 509



உருவம் 510

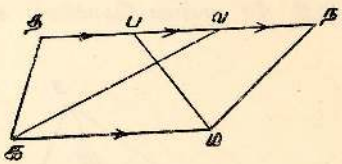
14. உரு 510 இல் மந ஒரு நேர்கோடு எனின் நாற்கோணம் கமபத = △ கநத என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணத்திற்குப் பரப்பிற் சமமான ஒரு முக்கோணத்தை வரைய இவ்விளைவைப் பயன்படுத்துக.

15. உரு 511 இல் **தப = வந** எனின் சரிவகங்கள் **கமபத, கமநவ** என்பன சமம் என நிறுவுக. ஒரு சரிவகத்தின் பரப்பிற்குரிய வாய்பாட்டின் உதவியின்றி இவைதச் செய்க.

[16.] **கமபத** ஓரிணைகரம்; **வ** என்பது **கம** இலே **க, ம** களுக்கு இடையிலுள்ள ஒரு புள்ளி.

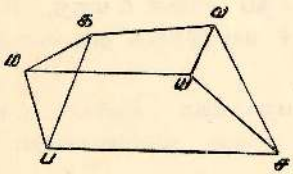
△ கவத + △ மவப = △ தவப என நிறுவுக.



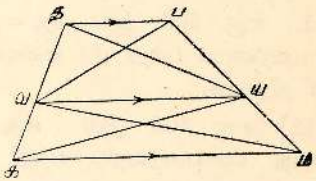
உருவம் 511

17. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **கத** இல் **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி; நீட்டப்பட்ட **கம** விலே **ப** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **△ பவம = △ பயத** என நிறுவுக.

18. உரு 512 இல் **△ கமப = △ வயச**; நாற்கோணம் **கமயவ** + நாற்கோணம் **மபசய** = நாற்கோணம் **கபசவ** என நிறுவுக.



உருவம் 512



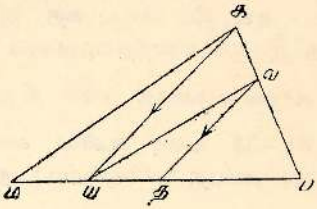
உருவம் 513

19. உரு 513 இல் **△ வமப = △ யகத** என நிறுவுக.

[20] உரு 513 இலுள்ள சரிவகம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் **கம, தப** ஆகியவற்றிலுள்ள எவையேனும் புள்ளிகள் **அ, இ**. நாற்கோணம் **வஅயஇ = △ மவப** என நிறுவுக.

[21] **கமபத** ஓரிணைகரம்; **மப** இலே **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி; **த** இலிருந்து **கவ** இற்குச் செங்குத்து **தய**. **கமபத** இன் பரப்பு = **தய . கவ** என நிறுவுக.

[22] **கமபத** ஓரிணைகரம்; **க** இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோடு நீட்டப்பட்ட **பம** ஐ **வ** இலும் நீட்டப்பட்ட **பத** ஐ **ய** இலும் வெட்டுகின்றது. △ **மகவ** = △ **தகய** எனின் **கவ** = **கய** என நிறுவுக. [**கப** ஐ இணைக்க.]



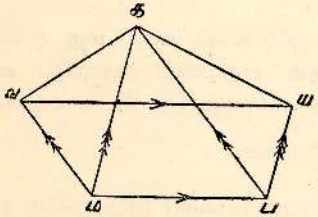
உருவம் 514

[23] **மச, பய** என்பவை △ **கமப** இன் மையக் கோடுகள்; அவை **ந** இலே வெட்டிக் கொள்கின்றன. நாற்கோணம் **கசநய** = △ **மநப** என நிறுவுக.

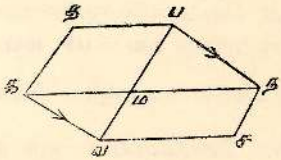
24. உரு 514 இல் **த** ஆனது **மப** இனது நடுப்புள்ளி. **வய** ஆனது △ **கமப** இனது பரப்பை இரு சமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. **கத** ஐ இணைக்க.]

25. இணைகரம் **கமபத** இன் பக்கங்கள் **பம, பத** என்பவற்றில் உள்ள புள்ளிகள் **வ, ய. வய** என்பது **மத** இற்குச் சமாந்தரமாக அமைந்துள்ளது. △ **கமவ** = △ **கதய** என நிறுவுக. [**வத, மய** களை இணைக்க.]

[26] உரு 515 இல் △ **கவம** = △ **கயப** என நிறுவுக. [**பவ, மய** களை இணைக்க.]



உருவம் 515



உருவம் 516

27. உரு 516 இல் **கமந, பமவ** என்பன நேர்கோடுகள்; **கமபத, நமவச** என்பன இணைகரங்கள். **கமபத** = **நமவச** என நிறுவுக. [**கப, நவ** களை இணைக்க.]

28. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **க** இற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோடு **தப** ஐ **ந** இலும் நீட்டப்பட்ட **மப** ஐ **ய** இலும் வெட்டுகின்றது. △ **மபந** = △ **தநய** என நிறுவுக. [△ **தநய** = △ **கநப** என நிறுவுக.]

*29. சரிவகம் **கமபத** இன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கம, தப** கள்; **கப** என்பது **மத** ஐ **ச** இல் வெட்டுகின்றது. **ச** இற்கூடாகச் செல்வதும் **மக** இற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்வதுமான கோடு, **கத** ஐ **வ** இலே வெட்டினால் △ **வமப** = 2 △ **சகத** என நிறுவுக.

*30. இணைகரம் **கமபத** இன் பக்கம் **பத** இலே ஒரு புள்ளி **ய**. **பத** ஆனது **ச** இற்கு, **தச = பய** ஆகுமாறமைய நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட **மய** நீட்டப்பட்ட **கத** ஐ **வ** இலே வெட்டி, **ச** இற் கூடாகவும் **கத** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் செல்லுங் கோட்டை **ந** இலே வெட்டுகின்றது.

கசநவ = கமபத என நிறுவுக.

31 – 33 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 517 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **கமபத** ஓரிணைகரம்; **நவ, சய** கள் **கத, கம** இற்குச் சமாந்தரம்.

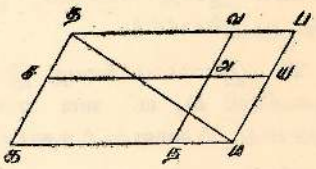
*31. **△ யநக + △ யநவ = △ யநத** என நிறுவுக.

*32. **△ கநச + △ கயவ = △ கமத** என நிறுவுக.

*33. **கநஅச – அயபவ = 2 △ மஅத** என நிறுவுக.

*34. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **தப** என்பது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது; **கந** ஆனது **மத** ஐ **ய** இல் வெட்டுகின்றது.

△ தயவ – △ கயம = △ மபவ என நிறுவுக.



உருவம் 517

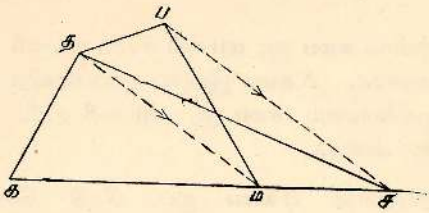
*35. நாற்கோணம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **கப, மத** ஆகியவை **ச** இல் வெட்டிக்கொள்கின்றன. **பக, தம** என்பவை முறையே **வ, ய** என்பவற்றிற்கு **கவ = பச, மய = தச**, ஆக அமையுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன.

நாற்கோணம் **கமபத = △ சவய** என நிறுவுக.

*36. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சமபக்கமுக்கோணம் **கமப** இனுள்ளே உள்ள ஒரு மாறும்புள்ளி **வ**; **வஅ, வஇ, வஉ** என்பவை **வ** இலிருந்து **மப, பக, கம** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்களாகும். **வஅ + வஇ + வஉ** என்பது மாறிலி என நிறுவுக.

அமைப்பு 9

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணத்திற்குச் சமமான பரப்புடைய ஒரு முக்கோணம் அமைத்தல்.



உருவம் 518

தரவு. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத.**

அமைக்க வேண்டியது. **கமபத** இற்குச் சமமான பரப்புடைய ஒரு முக்கோணம்.

அமைப்பு. **மத** ஐ இணைக்க.

ப இற்கூடாக **பச** ஐ **தம** இற்குச் சமாந்தரமாகவும் நீட்டப்பட்ட **கம** ஐ **ச** இலே சந்திக்குமாறும் வரைக.

தச ஐ இணைக்க.

இப்பொழுது Δ **கசத** = நாற்கோணம் **கமபத.**

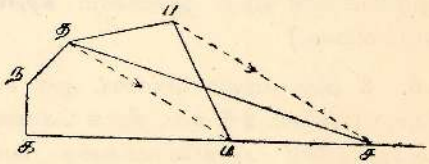
நிறுவல். முக்கோணங்கள் **தமச, தமப** ஒரே அடி **தம** மேலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் **தம, பச** ஆகியவற்றிற்கிடையும் உள்ளன.

∴ Δ **தமச** = Δ **தமப.**

இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் Δ **தமக** ஐக் கூட்டுக.

∴ Δ **கசத** = நாற்கோணம் **கமபத.**

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு ஐங்கோணம் **கமபதந** இற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்க வேண்டில் அமைப்பு 9 இல் காட்டிய வண்ணமே செய்தல் வேண்டும்.



உரு 519

உரு 519 ஐப் பார்க்க; இது பரப்பளவில் **கமபதந** இற்குச் சமமான **கசதந** எனும் உருவைத் தருகின்றது. இவ்வழியைப் பின்பற்றி பரப்பளவில் **கசதந** இற்குச் சமமான ஒரு முக்கோணத்தை நாம் அமைக்கலாம்.

இவ்வழியை எவ்வளவு பக்கம் உடைய பல்கோணத்திற்கும் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கப் பயன்படுத்தலாம். இவ்வழியின் ஒவ்வொரு படியும் ஒவ்வொரு பக்கங்குறைவாயமைந்த பரப்பளவிற் சமமான ஒரு பல்கோணத்தை அளிக்கும்.

பயிற்சி 52

[இயன்ற இடங்களில் எல்லாங் கணிப்பின்றி இப்பயிற்சியில் உள்ள அமைப்புக்களைச் செய்க.]

1. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ, **மப** = 6 ச.மீ., **பக** = 5 ச.மீ., **கம** = 7ச.மீ. ஆகவமையுமாறு வரைக. △**கமப** இற்குப் பரப்பளவிற் சமமானதாயுள்ள ஒரு விரிகோண முக்கோணம் **சமப** ஐ, **சம** = 8 ச.மீ. ஆகவமையுமாறு வரைக. ∠**சமப** ஐ அளக்க.

[2] எண் ஒன்றிலுள்ள △**கமப** ஐப் பிரதி செய்க. ஒத்த ஒரு முக்கோணம் **வமப** ஐ **வம** = **வப** ஆகவமையுமாறு வரைக. **வம** ஐ அளக்க.

3. எண் ஒன்றிலுள்ள △**கமப** ஐப் பிரதிசெய்க. ஒத்த ஒரு முக்கோணம் **கயச** ஐ, **கய** = 5·5 ச.மீ. ஆகவும் ∠**கயச** = 70° ஆகவும் அமைய வரைக. **யச** ஐ அளக்க. [முதலாவதாக ஒத்த △**கமய** ஐ **கய** = 5·5 ச.மீ. ஆகவமையுமாறு வரைக.]

[4] ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ, **கம** = 6·5 ச.மீ. ஆகவும் **கத** = 5 ச.மீ. ஆகவும் ∠**மகத** = 62° ஆகவும் அமைய வரைக. ஒத்த இணைகரம் ஒன்றைப் பக்கங்கள் 6·5 ச.மீ. ஆகவும் 6 ச.மீ. ஆகவும் அமையுமாறு வரைந்து அதன் கூர்ங்கோணங்களுள் ஒன்றை அளக்க.

5. ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ **கம**=4 ச.மீ., **கத**=6 ச.மீ., ∠**மகத**=70° ஆக அமையுமாறு வரைக. ஒத்த இணைகரம் ஒன்றைப் பக்கங்கள் 5 ச.மீ., 5·8 ச.மீ. ஆக இருக்குமாறு அமைத்துக் கூர்ங்கோணம் ஒன்றை அளக்க. [முதலாவதாக ஒத்த இணைகரம் **கதசய** ஐ **கய** = 5 ச.மீ. ஆக இருக்குமாறு வரைக.]

6. 3 அங். பக்கம் கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக. ஒவ்வொரு பக்கமும் 2·5 அங். நீளங் கொண்ட ஒரொத்த சாய்சதுரம் அமைக்க. சாய்சதுரத்தின் கூர்ங்கோணத்தை அளக்க.

[7] ஒருமுங்கான அறுகோணம் **கமப்தநவ** ஐ, **கம** = 4 ச.மீ. ஆக இருக்குமாறு வரைக. ஒரொத்த செவ்வகம் **கநசய** ஐ அமைக்க. **நச** ஐ அளந்து அறுகோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

8. 5 ச.மீ., 6 ச.மீ., 8 ச.மீ. அளவு பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் வரைக. ஒத்த கூர்ங்கோண முக்கோணம் ஒன்றை அதன் இரு பக்கங்கள் 5·6 ச.மீ., 6·5 ச.மீ. ஆக இருக்குமாறு அமைக்க.

மூன்றும் பக்கத்தை அளக்க.

[9] 8 சது. அங். பரப்புக் கொண்ட ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ **கப** = 5அங்., **மத** = 4 அங். ஆக இருக்குமாறு அமைக்க. **கம** ஐயும் **மப** ஐயும் அளக்க.

10. 4·5 சது. ச.மீ. பரப்புக் கொண்ட ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ, வட்டம் **கமப** இன் ஆரை 5 ச.மீ. ஆகவும் **மப** = 3 ச.மீ. ஆகவும் இருக்குமாறு அமைக்க. உமது வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

11. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** இல் **கம** = 3 ச.மீ., **மப** = 5 ச.மீ., **பத** = 6 ச.மீ., **தக** = 4 ச.மீ., **மத** = 5 ச.மீ. அதை வரைக. நீட்டப்பட்ட **கம** இலே ஒரு புள்ளி **ச** ஐ, △**தகச** = நாற்கோணம் **கமபத** ஆக இருக்குமாறு அமைக்க. **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

[12] ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** இல் **கம** = 6 ச.மீ., **மப** = 5 ச.மீ., **பத** = 4 ச.மீ., ∠**கமப** = 110°, ∠**மபத** = 95°. அதை வரைக. ஒத்த முக்கோணம் **கமவ** ஒன்றை, நீட்டப்பட்ட **மப** இல் **வ** இருக்குமாறு அமைக்க. **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

13. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ வரைக. நீட்டப்பட்ட **மப** இல் ஒரு புள்ளி **த** ஐ எடுக்க. **கம** இல் ஒரு புள்ளி **ய** ஐ, △**மயத** = △**மகப** ஆக இருக்குமாறு அமைக்க. உமது வழியைக் கூறி அது திருத்தமானது என நிறுவுக.

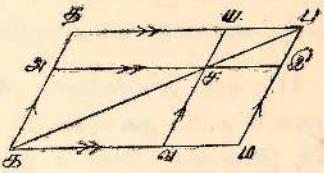
[14] யாதாயினும் ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ வரைக. நீட்டப்பட்ட **கம** இல் ஒரு புள்ளி **ந** ஐ எடுக்க. **கத** இலே ஒரு புள்ளி **வ** ஐ, இணைகரம் **வகநய, கமபத** இற்கு ஒத்ததாய் இருக்குமாறு அமைக்க. உமது வழியைக் கூறி அது திருத்தமானது என நிறுவுக. [△**நகவ** = △**கமத**.]

*15 யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** ஐ வரைந்து அதனுள் ஒரு புள்ளி **த** ஐ எடுக்க; **தம, தப** களை இணைக்க. **கப** இலே ஒரு புள்ளி **வ** ஐ, △**கவம** உள்ளுறு நாற்கோணம் **கமதப** இற்குப் பரப்பளவிற் சமனாய் இருக்குமாறு அமைக்க. உமது வழியைக் கூறி அது திருத்தமானது என நிறுவுக.

16. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** ஐ, அதில் △**கமப**, △**கதப** இலும் பெரிதாக இருக்குமாறு வரைக. **கமபத** இன் பரப்பை இருசமக் கூறிடும் ஒரு கோட்டை **க** இற்கூடாக அமைக்க. [நீட்டப்பட்ட **மப** இலே, **ச** ஐ, △**கமச** = நாற்கோணம் **கமபத** ஆக இருக்குமாறு காண்க.]

[17] ஓரிணைகரம் **கமபத** வரைக. **மப, பத** களில் புள்ளிகள் **வ, ய** களை, **கவ, கய** கள் **கமபத** ஐ சமபரப்புடைய மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்குமாறு அமைக்க. உமது வழியைக் கூறி அது திருத்தமானது என நிறுவுக.

18. (i) உரு 520 இல் **கப** இல் **ச** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. ஒரு மூலை விட்டம் ஓரிணைகரத்தின் பரப்பை இருசமக்கூறிடுகின்றது எனும் உண்மையைப் பயன்படுத்தி **அசபத = வசஇம** என நிறுவுக.



உருவம் 520

(ii) ஓரிணைகரம் **கமபத** ஐ, அதில் **கம** = 6 ச.மீ., **கத** = 4 ச.மீ., ∠**தகம** = 70° ஆக இருக்குமாறு வரைக. ஒத்த இணைகரம் ஒன்றை அதன் ஒரு பக்கம் 5 ச. மீ. ஆகவும் ஒரு கோணம் 70° ஆகவும் இருக்குமாறு அமைக்க. மற்றைப் பக்கத்தை அளக்க.

[19] பக்கம் 3 அங். அளவுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக. ஒரு பக்கம் 2·5 அங். நீளமுள்ள ஒரொத்த செவ்வகம் வரைக. மற்றைப் பக்கத்தை அளக்க. [எண் 18 (i) இல் குறித்த உண்மையைப் பயன்படுத்துக.]

20. பக்கங்கள் 2·1 அங்., 2·9 அங்.; ஒரு கோணம் 72° ஆக இருக்குமாறு ஓரிணைகரம் வரைக. ஒரு பக்கம் 2 அங். நீளமுள்ள ஒரொத்த செவ்வகம் வரைக. மற்றைப் பக்கத்தை அளக்க.

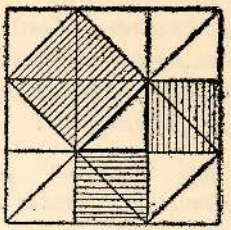
[21] 6 ச.மீ., 3 ச.மீ. நீளப் பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்திற்குப் பரப்பிற் சமமாயும் ஒவ்வொரு பக்கமும் 5 ச.மீ. அளவுள்ளதுமாய ஒரு சாய்சதுரம் அமைக்க. அதன் கூர்ங்கோணத்தை அளக்க.

*22. ஒரு முக்கோணம் **கமப** இல் **மப**=6 ச.மீ., **பக**=5 ச.மீ., **கம**=7 ச.மீ. அதை வரைக. **கப** இலே ஒரு புள்ளி **வ** ஐ **கவ** =2 ச.மீ, ஆக இருக்குமாறு எடுக்க. **மப** இல் ஒரு புள்ளி **ய** ஐ, **வய** △**கமப** வின் பரப்பை இருசமக் கூறிடுமாறு அமைக்க. **பய** ஐ அளக்க. [பயிற்சி 51, எண் 24 ஐப் பார்க்க.]

பைதகரசின்றேற்றம்

உரு 521, ஒவ்வொன்றும் இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோண வடிவுள்ள சமமான ஓடுகளால் பதிப்பிக்கப்பெற்ற தரையைக் குறிக்கின்றது.

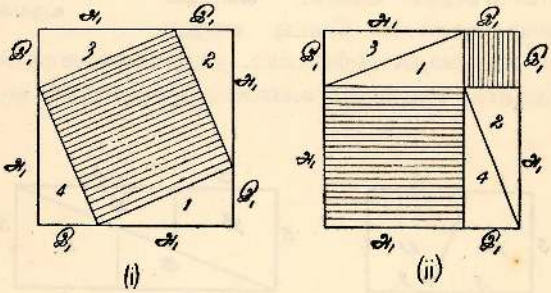
இங்குள்ள செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றின் செம்பக்கத்திலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பிற்கும் மற்றை இரு பக்கங்களிலுமுள்ள சதுரங்களின் பரப்பின் கூட்டுத் தொகைக்கு முள்ள தொடர்பை நீர் காண முடிகிறதா ?



உருவம் 521

செங்கோண முக்கோணம் இருசமபக்க மல்லாததாயின் இத்தொடர்பைப் பின்வருமாறு ஆயலாம் :—

செவ்வகத் தாள் ஒன்றை மடித்துப் பின்னும், நான்கு அடுக்குக்கள் வருமாறு மடிக்க. பின்னர் நான்கு ஒரே வடிவான செங்கோணமுக்கோணங்கள் வெட்டி எடுக்க.



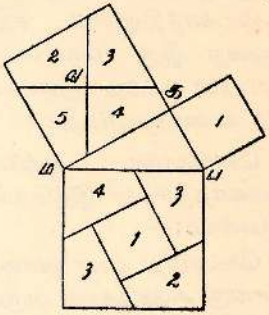
உருவம் 522

செம்பக்கம் உ, அங். எனவும் மற்றை இரு பக்கங்கள் அ, அங்., இ, அங். எனவுங் கொள்க. பக்கம் (அ,+இ,) அங். அளவுகொண்ட சமமான இரு சதுரங்கள் வரைக. (அல்லது வெட்டி எடுக்க.) பின்னர் முக்கோணங்களை ஒவ்வொரு சதுரத்தின் மீதும் முதலாவதாக உரு 522 (i) இலும் இரண்டாவதாக உரு 522 (ii) இலுங் காட்டியவாறு ஒழுங்கு படுத்துக. உரு 522 (i) இல் மூடப்படாத நிழற்றிய பரப்பு ஆனது, 1 எனக் குறிக்கப்பட்ட முக்கோணத்தினுடைய செம்பக்கத்தி லுள்ள சதுரமாகும் ; உரு 522 (ii) இல் மூடப்படாத நிழற்றிய பரப்பு ஆனது, 1 எனக் குறிக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் மற்றை இரு பக்கங்களிலு முள்ள சதுரங்களால் ஆயதாகும். இப் பரிசோதனை எதைக் குறிப்பா யுணர்த்துகின்றது ?

தெரிக்கப்பட்ட உண்மைக்கு வேண்டிய நிறுவலைப் பெறுவதற்கு உரு 522 ஐப் பயன் படுத்தல் வேண்டுமெனின் நிழற்றிய உருக்கள் சதுர மானவை எனக் காட்டுதல் வேண்டும் ; இது கடினமன்று.

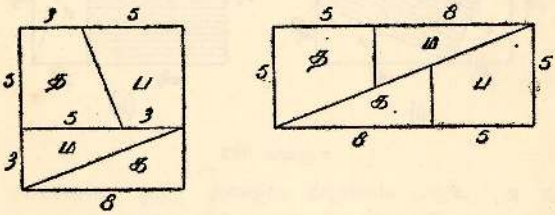
பெரிகலின் பிரிப்பு

ஒரு சதுரத்தைப் பிரித்து, எவ்வாறு ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்கோணத்தைக் கொண்ட பக்கங்களின் சதுரங்களால் செம்பக்கத்தின் சதுரத்தை அடைத்துக் காட்டலாம் என்பதை உரு 523 எடுத்துக் காட்டுகின்றது; இது ஒரு வெட்டொட்டும் நொடிபோன்றதே !



உருவம் 523

ஒரு மெல்லிய தாட்பலகையில் அல்லது கடினமான தாளில் **க** இற் செங்கோணமான முக்கோணம் **கமப** ஒன்றை வரைக: மூன்று சதுரங்களையும் அதன் பக்கங்களில் அமைக்க. **கம** மேலுள்ள சதுரத்தின் மையம் **வ** ஐ அமைத்து, **வ** ஊடாக **மப** இற்குச் சமாந்தரமுஞ் செங்குத்துமான கோடுகள் வரைக. **கம, கப** கள் மேலுள்ள சதுரங்களை வெட்டி எடுத்து **கம** மேலுள்ள சதுரத்தைக் குறிக்கப்பட்ட நாலு பாகங்களாக வெட்டுக. **மப** மேலுள்ள சதுரத்தை மறைக்கும் வண்ணம் இத்துண்டுகளை ஒழுங்கு செய்க.



உருவம் 524

நிறுவல் இன்றியமையாதது என்பதை நாம் உணர்தல் வேண்டும். தோற்றத்திலே நம்பிக்கை வைத்தால் தவறுகள் செய்ய நேரிடும். உதாரணமாக, சதுரக்கோட்டுத் தாள் ஒன்றில், $\frac{1}{5}$ அங். ஐ அலகாகக் கொண்டு, 8 அலகு நீளங்கொண்ட ஒரு சதுரத்தையும் 13 அலகு நீளமும் 5 அலகு உயரமுங் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தையும் வரைக. சதுரத்தை உருவிற் காட்டியவாறு 4 பகுதிகளாக வெட்டி செவ்வகத்திற் குறிப்பிட்ட நிலைகளிற் பொருத்துக. அவை செவ்வகத்தை மறைக்கின்றனவா ? மறைக்கின்றன வெனின், இது, சதுரத்தின் பரப்பு செவ்வகத்தின் பரப்பிற்குச் சமன் என்பதை அன்றோ காட்டுகின்றது. இது உண்மையா ?

கி.மு. ஆறும் நூற்றாண்டில் பைதகரசு வாழ்ந்தார். அவருடைய தேற்றத்தின் சிறப்பு வகைகளை எகித்தியர் அதற்குப் பல்லாண்டுகட்கு முன்னரே —கி.மு. 1000 வரையில்—அறிந்திருந்தார்கள். அவர்களின் அளவையோர் 3, 4, 5 அலகளவிற் பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் எனும் உண்மையைப் பயன் படுத்தினார்கள் என்பதிலிருந்து இது தெரியக் கிடக்கின்றது. பல்லாண்டுகளாக எகித்தில் வாழ்ந்தவரும் பைதகரசை எகித்திற்குச் செல்லுமாறு ஊக்கியவருமான தேலிசிடமிருந்தே பைதகரசு இவ்வுண்மையைக் கற்றிருக்கலாம். பைதகரசினது நிறுவல் வழி இப்பொழுது அறியப்படாத தொன்றாயிருக்கின்றது. 329 ஆம் பக்கத்திலுள்ள நிறுவல், 300 ஆண்டுகட்குப் பின் வாழ்ந்தவரும் "யூகலிதின் அடிப்படைகள்" எனும் எக்காலத்தும் உயர்ந்த பாட புத்தகத்தின் ஆசிரியருமான யூகலிதினால் அளிக்கப்பட்ட ஒன்றாகும்.

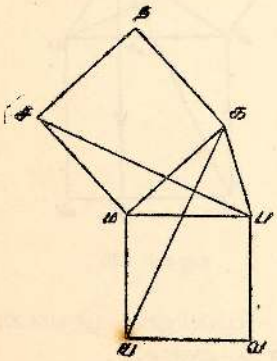
உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 525 இல் **கமசந, மபவய** என்பன சதுரங்கள்.

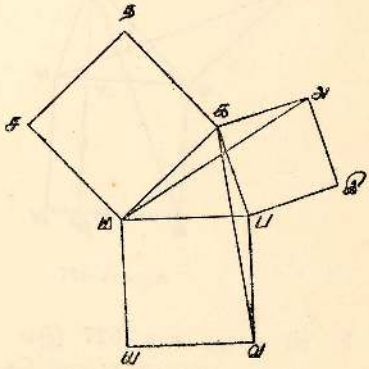
   (i) ∠ **சமப** = ∠ **கமய** என நிறுவுக; (ii) △ **சமப** ≡ △ **கமய** என நிறுவுக.

முக்கோணம் **சமப** ஆனது **ம** இடத்திலே வலஞ்சுழியாக ஒரு செங்கோண அளவிற் சுழற்றப் பெற்றால் அதன் புதிய நிலை என்ன?

பச, கய களுடைய திசைகளைப்பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?



உருவம் 525



உருவம் 526

2. உரு 526 இல் **கமசந, கபஇஅ, மபவய** என்பவை சதுரங்கள். அவ்வுருவின் வரைப்படம் ஒன்று வரைக. உமது வரைப்படத்தில் இரு

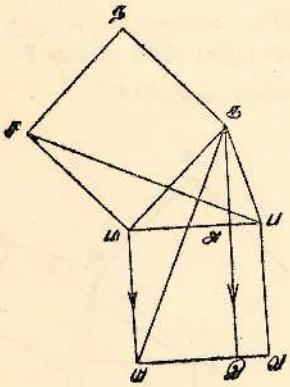
புள்ளிகளை இணைத்து △ **கபவ** இற்குச் சர்வசமனான ஒரு முக்கோணத்தைப் பெறுக. அவ்வாறே △ **கமஅ** இற்குச் சர்வசமனான ஒரு முக்கோணத்தைப் பெறுக. காரணங் காட்டுக.

உருக்கள் 527, 528 ஆகியவற்றில் **கமசந, மபவய** என்பன சதுரங்கள். உரு 527 இல் ∠ **மகப** கூர்ங்கோணம் உரு 528 இல் ∠ **மகப** செங்கோணம். இவ்வீர் உருவங்களின் வரைப்படங்களையும் வரைந்து அவற்றை 3–5 வரை உள்ள கணக்குக்கட்குப் பயன்படுத்துக.

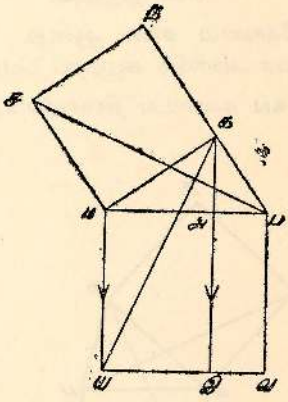
3. உரு 528 இல் ஒரு நேர் கோட்டிலமைந்தனவாயும் உரு 527 இல் அவ்வாறில்லாதனவாயுமுள்ள 3 புள்ளிகள் கூறுக. காரணங்காட்டுக.

4. (i) உரு 527, 528 ஆகியவற்றின் வரைப்படங்களிலுள்ள புள்ளிகளை இணைப்பதால் அடி **மய** மேலுள்ளனவாயும் செவ்வகம் **மயஇஅ** இன் அரைப்பகுதிக்குச் சமமானவையாயுமுள்ள மூன்று முக்கோணங்களைப் பெறுக.

(ii) இவ்வாறே அடி **சம** மேலுள்ளனவாயுஞ் சதுரம் **சமகந** இன் அரைப்பகுதிக்குச் சமமானவையுமான முக்கோணங்களைப் பெறுக. ஈர் உருவங்கட்கும் அவை ஒரே தன்மையனவா ?



உருவம் 527



உருவம் 528

5. (i) உமது உரு 527 இல் △ **சமப** இன் பரப்பிலும் இருமடங்கு பரப்புடைய ஒரு செவ்வகம் **சமஉள** ஐ வரைக.

(ii) △ **கமய** ≡ △ **சமப** என்பதைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வோர் உருவினதும் வரைப்படத்தில் பரப்பளவில் **மயஇஅ** இற்குச் சமமான ஒரு செவ்வகத்தைக் காண்க. ஈருருவங்களிலுமுள்ளன ஒரே செவ்வகமா ?

(iii) அவ்வாறே உரு 527 இலும் உரு 528 இலும் உள்ள **பவஇஅ** அளவு பரப்புள்ள செவ்வகங்கள் அமைக்க.

(iv) உரு 527, உரு 528 ஆகியவற்றிலுள்ள சதுரம் **மபவய** இன் பரப்பைப் பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?.

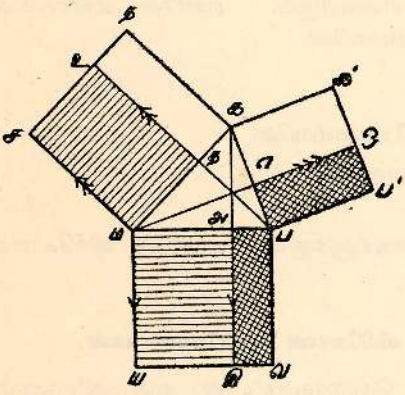
இவ்வுதாரணங்களில் பெற்ற பேறுகளைப் பின்வருமாறு சுருக்கிக் கூறலாம் :—

உரு 529 ஐப் பார்க்க. Δ **கமப** இல், ∠ **மகப** கூர்ங்கோணமாயின், **மப** இலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு **கம, கப** களிலுள்ள சதுரங்களின் பரப்புக்களினது கூட்டுத்தொகையிலும் செவ்வகங்கள் **கதஉந, களஓக′** ஆகியவற்றின் பரப்புக்களால் குறைந்ததாகும்.

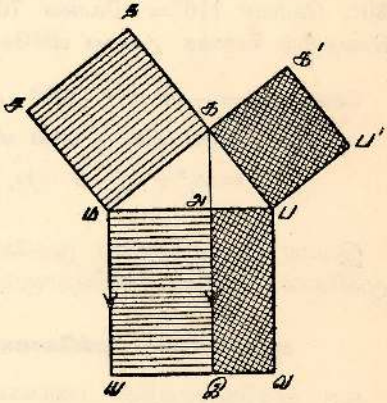
ஏன் செவ்வகம் **கதஉந** = செவ்வகம் **களஓக′** என விளக்குக. செவ்வகங்கள் **கதஉந, களஓக′** ஒவ்வொன்றினதும் பரப்பு **கம.கப** கோசை **மகப** என நிறுவுக.

எனவே Δ **கமப** இற்குரிய வழக்கமான குறியீடுகளைக் கொண்டு எழுதும்போது, ∠ **மகப** கூர்ங்கோணமாயின்,

$$க,^2 = ம,^2 + ப,^2 - 2\ ம,ப,\ கோசை\ க.$$



உருவம் 529



உருவம் 530

உரு 530 ஐப் பார்க்க. Δ **கமப** இல் ∠ **மகப** செங்கோணமாயின் **மப** விலுள்ள சதுரத்தை முறையே **கம, கப** களிலுள்ள சதுரங்களின் பரப்புக்களுக்குச் சமானமான பரப்புடைய செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கலாம். இது **பைதகரசின்றேற்றத்திற்கு** ஒரு நிறுவலை அளிக்கின்றது.

செங்கோண முக்கோணமொன்றில் செம்பக்கத்திலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு மற்றைப் பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் பரப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனாகும்.

*இவ்வாறே, ∠ **மகப** விரிகோணமாய் அமைய உரு 529 இலுள்ளவாறு ஒருரு வரைவீபேல் **மப** இலுள்ள சதுரத்தை, ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு **கம** இலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பிலும் பெரிதாயமையவும் மற்றைச் செவ்வகத்தின் பரப்பு **கப** இலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பிலும் பெரிதாயமையவுங் கூடியவான இரு செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கலாம். எனவே Δ **கமப** இல், ∠ **மகப விரிகோணமாயின் மப** இலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு, **கம,கப** களிலுள்ள சதுரங்களின் பரப்புக்களினுடைய கூட்டுத் தொகையிலும், தம் பரப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் **கம . கப** கோசை (180° − ∠ **மகப**) ஆகவுடைய இரு செவ்வகங்களினுடைய பரப்புக்களால் கூடியதாகும்.

எனவே Δ **கமப** விற்குரிய வழக்கமான குறியீடுகளைக் கொண்டு குறிக்கும்போது, ∠ **மகப** விரிகோணமாயின்

$$க_{,}^{2} = ம_{,}^{2} + ப_{,}^{2} + 2ம_{,}ப_{,} \text{ கோசை } (180° - க).$$

95 ஆம் பக்கத்திற் கூர்ங்கோணம் ஒன்றின் கோசைனின் வரைவிலக்கணமே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விரிகோணம் ஒன்றின் கோசைனை **சய அதன் மிகை நிரப்பியின் கோசைன்** என வரையறுத்தல் இயைபுடைத்து. உதாரணமாக, வரைவிலக்கணத்திற்கிணங்க நோக்கும் பொழுது கோசை 150° = − கோசை 30°, கோசை 110° = − கோசை 70° எனவாகும். எனவே வரைவிலக்கிணத்திற் கிணங்க ∠ **மகப** விரிகோணமாயின்

கோசை **க** = — கோசை (180° − **க**).

எனவே Δ **கமப** வில் ∠ **மகப** விரிகோணமாயின்

$$க_{,}^{2} = ம_{,}^{2} + ப_{,}^{2} - 2 \text{ ம}_{,}\text{ப}_{,} \text{ கோசை } \textbf{க}.$$

இவ்வாறு கூர்ங்கோண முக்கோணங்களுக்குரிய வாய்பாடு விரிகோண முக்கோணங்களுக்கும் உரியதாகும்.

கூர்ங்கோண, செங்கோண, விரிகோண முக்கோணங்கள்.

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அம்முக்கோணம் கூர்ங்கோணமானதோ அல்லதோ என அறிதல் எளிதாகும்.

∠ **மகப** கூர்ங்கோணமாயின், **மப**^{2} < **மக**^{2} + **கப**^{2}.

∠ **மகப** செங்கோணமாயின், **மப**^{2} = **மக**^{2} + **கப**^{2}.

∠ **மகப** விரிகோணமாயின், **மப**^{2} > **மக**^{2} + **கப**^{2}.

இச்சோதனைகள் எல்லா இயல்புகட்கும் பொருந்தியவை ஆதலின் இவற்றின் மறுதலைக் கூற்றுக்களும் உண்மைகளாம்.

* இப்பந்தியை முதன்முறை வாசிக்கும்போது விட்டுவிடலாம்.

வாய்முறைப் பயிற்சி. ஒரு முக்கோணம், அதன் பக்கங்கள் பின்வரும் அளவுகளை உடையனவாயின் விரிகோணமுக்கோணமா ?

(i) 8 ச.மீ., 9 ச.மீ., 12 ச.மீ. ?

(ii) 7 ச.மீ., 12 ச.மீ., 14 ச.மீ. ?

பைதகரசின்றேற்றத்துடன் சார்புடைய பரப்புக்கள். இத்தேற்றம் அடிப்படையில் பரப்புக்களின் இயல்பைக் குறிக்கின்றது. எனினும் அதன் பயன், நீளங்களைக்கணித்தல், திரிகோணகணிதம் ஆகியவற்றில் அதனைப் பிரயோகித்தலிலே சிறப்பாகத் தங்கியுள்ளது. தேற்றத்தை மாணவர் நன்கு அறிந்துள்ளனரோ எனத் துணிதற்கு முதலாவதாக உண்மையான பரப்புக்களோடியைந்த பிரயோகங்களைப் பற்றிக் கலந்துரையாடல் வேண்டும் ; தேற்றத்தின் கணிதப் பண்பு கவனியாது விடப்படும் என்பதைப் பற்றிக் கவலை வேண்டியதில்லை. இந்நோக்கத்தை நிறைவேற்றவும் இத்தேற்றத்தின் சிறப்பை உறுத்தவும் பின்வரும் பயிற்சிகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தேற்றத்தை பக்கம் 315 உரு 530 இலுள்ள குறியீட்டுடன் **மக²=மஅ . மப** என்ற வடிவில் எடுத்துரைக்கலாம்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள். எண்கள் 1-3 வரை உள்ளனவற்றிற்கு உரு 530 இன் வரைப்படம் ஒன்று வரைக. நிழற்றல் வேண்டியதில்லை.

1. ∠ **மகப**=90°, **கம**=4 அங்., **மப**=5 அங். எனின் உமது வரைப்படத்தில் முறையாக சது. **கச**, செவ்வகம் **மஇ**, செவ்வகம் **பஇ**, சது.**கப′** என்பவற்றைக் காட்டுக. **மஅ**, **பஅ**, **கப** என்பவற்றுடைய நீளங்களைக் காண்க.

2. ∠ **மகப**=90°, **கப**=6 அங்., **மப**=10 அங். எனின் உமது வரைப்படத்தில் முறையாக சது. **கப′**, செவ்வகம் **பஇ**, செவ்வகம் **மஇ**, சது. **கச** என்பவற்றைக் காட்டுக. **பஅ**, **அம**, **கம** என்பவற்றுடைய நீளங்களைக் காண்க.

3. ∠ **மகப**=90°, **கம**=12 அங்., **கப**=5 அங். எனின் உமது வரைப்படத்தில் முறையாக சது. **கச**, சது. **கப′**, செவ்வகம் **மஇ**, செவ்வகம் **பஇ** என்பவற்றைக் காட்டுக. **மப** இனது நீளம் என்ன ?

4. உரு 530 இல் ∠ **மகப** = 90°, **கப** = 2 அங்., **மப** = 3 அங். எனின் சதுரம் **கமசந** இன் பரப்பைக் காண்க. **கம** இனது நீளத்தை $\frac{1}{100}$ அங். அளவிலே திருத்தமாகக் காண்க.

5. 10 சது. அங். பரப்புள்ள ஒரு சதுரம் அமைக்க. பின்னர் அண்ணளவில், $\sqrt{10}$ இன் பெறுமதியை அளந்தறிக.

6. 7 சது. அங். பரப்புள்ள ஒரு சதுரம் அமைக்க. பின்னர் அண்ணளவில், $\sqrt{7}$ இன் பெறுமதியை அளந்தறிக.

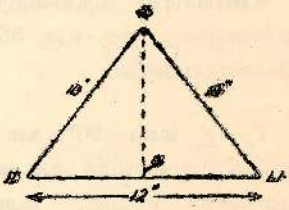
7. உரு 530 இல் $\angle$ மகப $= 90°$, $\angle$ கஅப $= 90°$, கஅ $= 4$ அங்., அப $= 3$ அங். எனின் செவ்வகம் அவ இன் பரப்பையும் பவ, மஅ, மக ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களையும் காண்க.

8. உரு 530 இல் $\angle$ மகப $= 90°$, $\angle$ கபம $= 60°$ எனின் சது. கமசந சது. கபப'க' இலும் மூன்று மடங்கானது என நிறுவுக. [பக்கம் 144 ஐப் பார்க்க. $\triangle$ மகப ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தில் அரைப்பகுதி என்பதைக் கவனிக்க.]

சைன் 60°, தான் 60° என்பவற்றின் பெறுமானம் என்ன ?

எண்கொண்ட பிரயோகங்கள்

உதாரணம். கமப ஒரு முக்கோணம். அதில் கம=கப=10° அங்., மப=12 அங். $\triangle$ கமப இன் பரப்பைக் கணிக்க. ந ஆனது மப இனது நடுப் புள்ளியாயின் கந ஆனது மப இற்குச் செங்குத்தாகும் ; மந=6 அங். ஆகும்.



உருவம் 531

கந என்பது உ, அங். ஆகுக. $\angle$ கநம ஒரு செங்கோணம் ஆகையால்,

$$உ^2, + 6^2 = 10^2 ;$$

$$\therefore உ^2, = 100 - 36 = 64 ;$$

$$\therefore உ, = 8.$$

$\therefore$ $\triangle$ கமப இன் உயரம் கந ஆனது 8 அங். ஆகும்.

$\therefore$ $\triangle$ கமப இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times 12 \times 8$ சது. அங்.

$= 48$ சது. அங்.

குறிப்பு— வர்க்கமூல அட்டவணைக்குப் பக்கம் XIV ஐப் பார்க்க.

எண்கொண்ட பயிற்சிகள்

பயிற்சி 53

[3 எண்ணளவில் திருத்தமாக, அண்ணளவான விடைகள் தருக. வேறு விதமாகக் கூறப்பட்டாலன்றி ஒவ்வொரு வரிப்படத்திலும் நீளவலகு 1 அங்குலமாகும்.]

1–9 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 532 ஐக் குறிக்கும்.

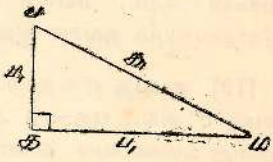
1. ம, = 8, ப, = 15, க, ஐக் காண்க.

[2] ம, = 5, ப, = 12, க, ஐக் காண்க.

3. ம, = 2, ப, = 3, க, ஐக் காண்க.

4. க, = 25, ம, = 15, ப, ஐக் காண்க.

[5] க, = 6, ப, = 5, ம, ஐக் காண்க.



உருவம் 532

6. ∠ப = 45°, க, = 4, ம, ஐக் காண்க.

7. ∠ப = 60°, க, = 6, ம, ஐயும் ப, ஐயுங் காண்க.

[8] ∠ப = 60°, ம, = 4, க, ஐயும் ப, ஐயுங் காண்க.

*9. **கம − கப = 1** அங்., **மப − கம = 2** அங்., **கம** ஐக் காண்க.

10. ஓர் 20 அடி ஏணி சுவரிற் சாய்ந்துள்ளது. நிலத்திலுள்ள முனை சுவரிலிருந்து 12 அடி தூரத்தில் உள்ளது. சுவரில் எவ்வளவு உயரத்தில் ஏணி தொடுகின்றது ?

[11] ஒரேணியின் நிலத்திலிருக்கும் முனை சுவரிலிருந்து 8 அடி தூரத்திலிருக்கும்போதே அதன் மற்றை முனை 18 அடி உயரமுள்ள சுவரின் உச்சியைத் தொடுகின்றது. ஏணியினது நீளத்தைக் காண்க.

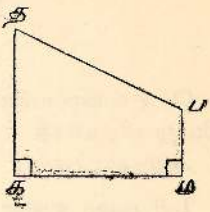
12. ஒரு மனிதன் நேர் வடக்கே 15 மைல் சென்று பின்னர் நேர் கிழக்கே 5 மைல் சென்றுள்ளான். தொடங்கிய இடத்திலிருந்து அவன் எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளான்.

[13] ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் 5 அங்., 7 அங். ஆகும்; ஒரு மூலை விட்டத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

14. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் 6 ச.மீ., 10 ச.மீ. ஆகும். அதன் பக்கத்து நீளத்தைக் காண்க.

[15] வானூர்தி ஒன்று மணிக்கு 150 மைல் வீதம் வடமேற்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. அது மணிக்கு 60 மைல் வீதம் வீசும் வளியால் வட கிழக்கே கொண்டு செல்லப்படுகின்றது. ஒரு மணிநேரங்கழிந்தபின் தொடங்கிய இடத்திலிருந்து அது இருக்குந் தூரத்தைக் காண்க.

16. உரு 533 இல் **கத** = 10 ச.மீ., **கம** = 8 ச.மீ., **மப**=4 ச.மீ. எனின் **பத** இனது நீளத்தைக் காண்க.



உருவம் 533

[17] உரு 533 இல் **கத** = 8 அங்., **மப** = 3·5 அங்., **பத** = 7·5 அங். எனின் **கம** இனது நீளத்தைக் காண்க.

18. **நவசய** ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠ **நவச** உம் ∠ **நசய** உஞ் செங்கோணங்கள். **நவ** = 12 ச.மீ., **வச**=9 ச.மீ., **சய**=8 ச.மீ. எனின் **நய** இனது நீளத்தையும் **நவசய** இன் பரப்பையுங் காண்க.

[19] **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠ **ம** = ∠ **த**=90°. **கம**=6 அங்., **மப** = 8 அங்., **பத** = 5 அங். எனின் **கத** இனது நீளத்தையும் **கமபத** இனது பரப்பையுங் காண்க.

20. கூர்ங்கோண முக்கோணம் **கமப** இனதோர் உயரம் **கத**. **கம**=20 அங்., **மத** = 16 அங்., **தப** = 5 அங். எனின் **கப** இனது நீளத்தைக் காண்க.

[21] △ **கமப** இல் ∠ **ம** = 90°, **கம**=8 ச.மீ., **கப** = 17 ச.மீ.; **மப** இலே **த** என்பது **மத** = 5 ச.மீ. ஆக இருக்குமாறமைந்த புள்ளி. △ **கதப** இனது பரப்பைக் காண்க.

22. △ **கமப** இல் ∠ **ப** = 90°, **கப** = 3 அங்., **கம** = 8 அங். மையக்கோடு **கய** இனது நீளத்தைக் காண்க.

23. △ **கமப** இல் **கம** = **கப** = 13 அங்., **மப** = 10 அங். △ **கமப** இன் பரப்பையும் **ப** இலிருந்து **கம** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளத்தையுங் காண்க.

[24] **கம** = **கப** = 10 அங்., **மப** = 12 அங். ஆகக் கொண்டு 23 ஆங் கணக்கைச் செய்க.

[25] **ய** ஐ மையமாகவும் 6 ச.மீ. ஐ ஆரையாகவுமுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் **வச**; **வச**=8 ச.மீ. **ய** இலிருந்து **வச** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

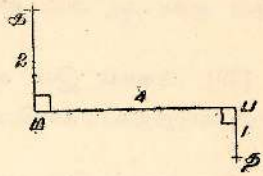
26. 9000 யார் தூரம் பயன்படும் வீச்சுள்ள துவக்கு ஒன்று நேரான இருப்புப் பாதை ஒன்றிலிருந்து 5000 யார் தூரத்தில் உள்ளது. இருப்புப் பாதையில் எவ்வளவு நீளம் துவக்கின் வீச்சிற்குள் உள்ளது?

[27] 13 சது. அங். பரப்புள்ள ஒரு சதுரத்தை அமைத்து அதன் பக்கத்தை அளக்க.

28. 11 சது. அங். பரப்புள்ள ஒரு சதுரத்தை அமைத்து அதன் பக்கத்தை அளக்க.

29. உரு 534 இல் **க** இலிருந்து **த** உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

30. சதுரக் கோட்டுத் தாளிலே (1,2), (3,5) ஆகிய ஆள் கூறுகளால் அமைந்த புள்ளிகளை அமைக்க. அவற்றிடை உள்ள தூரத்தைக் கணிக்க.



உருவம் 534

[31] (5,11), (6,10), (7,7) ஆகிய ஆள்கூறுகளால் அமைந்த புள்ளிகள் (2,7), ஆகிய ஆள்கூறுகளால் அமைந்த புள்ளியை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் உள்ளன என நிறுவுக. அதன் ஆரையைக் காண்க.

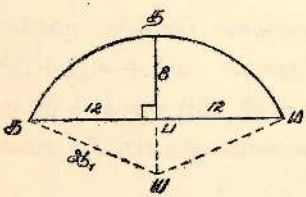
32. 37 ச.மீ., 35 ச.மீ., 12 ச.மீ. நீளவளவுகள் கொண்ட பக்கங்களையுடைய முக்கோணம் செங்கோணமுக்கோணம் என நிறுவுக. அதன் பரப்பைக் காண்க.

33. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **கம** = 9 அங்., **மப** = 12 அங்., **கத** = 25 அங்., **பத** = 20 அங்., ∠**கமப** = 90°; **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

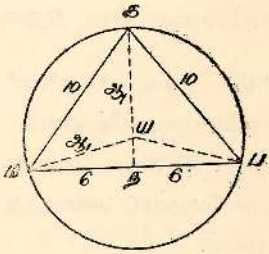
34. பக்கங்கள் 5 ச.மீ., 6 ச.மீ., 8 ச.மீ. அளவுகள் கொண்ட முக்கோணம் கூர்ங்கோணமானதா விரிகோணமானதா எனக் காண்க.

[35] பக்கங்கள் 7 ச.மீ., 10 ச.மீ., 12 ச.மீ. அளவுகள் கொண்ட முக்கோணத்திற்கு 34 இற்கூறியவாறு செய்க.

36. (0, 0), (7, 17), (12, 5) ஆகிய ஆள் கூறுகளைக் கொண்ட புள்ளிகள் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றின் உச்சிகள் என நிறுவுக.



உருவம் 535



உருவம் 536

37. உரு 535 இல் வட்டவில் **கதம** இன் மையம் **ய**. வட்டத்தின் ஆரை ஆ, அங். ஐக் காண்க. [**பப** = (ஆ,-8) அங். என்பதைக் கவனிக்க.]

38. உரு 536 இல் **கம = கப = 10** அங்., **மப = 12 அங்.** வட்டம் **கமப** இன் ஆரை ஆ, அங். ஐக் காண்க.

[39] **△கமப** இல் **கம = கப = 10** அங்., **மப = 16** அங். **க, ம, ப** என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

40. **△கமப** இல் **கம = 4** அங்., **மப = 5** அங்., **∠ம = 45°**; **கப** ஐக் காண்க.

41. **△கமப** இல் **கம = 8** அங்., **மப = 3** அங்., **∠ம = 60°**, **கப** ஐக் காண்க.

*42 **△கமப** இன் ஒருயரம் **கத.** **கம = 5** ச.மீ., **மப = 9** ச.மீ., **பக = 7** ச.மீ. எனின் **∠மகப** விரிகோணம் என நிறுவி **மத, கத** என்பவற்றுடைய நீளங்களைக் காண்க. [**மத = அ** ச.மீ., **கத = இ** ச.மீ. எனக் கொள்க. பைதகரசை இருமுறை பயன்படுத்துக.]

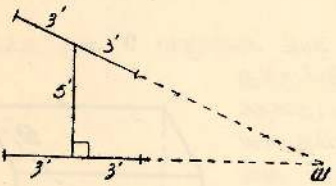
*43. **கத, மப** என்பன இரு நிலைக்குத்தான கோல்கள், **த, ப** கள் மட்டமான நிலமீதுள்ள முனைகள்; **கப = 12** அடி, **கம = 10** அடி, **மப = 3** அடி; **கத** இனது நீளத்தைக் காண்க.

*44. **△கமப** இன் ஒருயரம் **கத.** அதில் **∠ம, ∠ப** கூர்ங்கோணங்கள். **மத = அ²** ச.மீ., **தப = இ²** ச.மீ., **கத = அஇ** ச.மீ. எனின் **கம², கப²** என்பவற்றிற்கு அ, இ களில் கோவை கண்டு **∠மகப** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

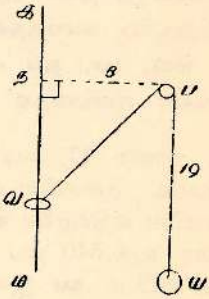
*45. 2 கந, $க^2 - ந^2$, $க^2 + ந^2$ அங். அளவுகள் கொண்ட முக்கோணம் செங்கோணமுக்கோணம் என நிறுவுக. $அ^2 + அஇ + இ^2 = உ^2$ எனின், (i) க = உ, ந = அ, (ii) க = உ, ந = இ, (iii) க = அ + இ, ந = உ, எனக் கொண்டு அமைத்த மூன்று முக்கோணங்களும் பரப்பிற் சமன் என நிறுவுக.

$அ = 2\ மப + ப^2$, $இ = ம^2 - ப^2$, $உ = ம^2 + மப + ப^2$ எனின் $அ^2 + அஇ + இ^2 = உ^2$ என நிறுவுக. ம = 2, ப = 1 எனக் கொள்வதால் என்ன பேற்றைப் பெறலாம்?

*46. உரு 537 ஆனது முன் சில்லுகள் பூட்டப்பெற்ற ஒரு வண்டியின் அச்சு, சில்லுகள் ஆகியவற்றின் கிடையான வெட்டுமுகத்தைக் குறிக்கின்றது. உட்புறப் பிற்சில்லு 9 அடி ஆரையுடைய ஒரு வழியே செல்கின்றது. வெளிப்புற முற்சில்லு வரைந்த பாதையின் ஆரையைக் காண்க.



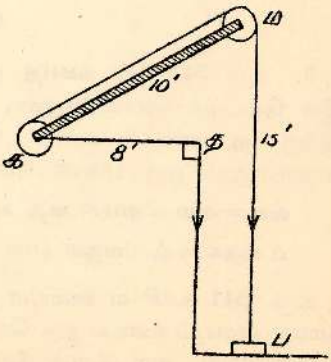
உருவம் 537



உருவம் 538

47. உரு 538 ஐப் பார்க்க. **கம** நிலைத்த நிலைக்குத்தான ஒரு கம்பி. **ப** ஒரு நிலைத்த சிறிய முளை. இது **கம** இலிருந்து 8 அங். தூரத்தில் உள்ளது. **கம** இல் வழுக்கக்கூடிய ஒரு சிறு வளையம் **வ** உடன் இணைக் கப்பட்டு பளிக்குருளை **ய** ஐத் தாங்கி நிற்கும் 3 அடி நீளமுள்ள ஒரு நூல் **வபய** ஆகும். ஆரம்பத்தில் **ப** ஆனது **ப** இலிருந்து 19 அங். கீழே யிருந்தது. **ய** 7 அங். கீழே இறக்கப்பட்டால் **வ** எவ்வளவு உயரும் ?

*48. உரு 539 ஐப் பார்க்க. **ப** எனும் பாரமான பொருள் ஒன்று **கத** எனும் மேடைக்கு **ம** எனும் கப்பி வழியாக, **க** எனும் உருளையிற் சுற்றப்பட்டு **மக** வழி யாகச் செல்லும் சங்கிலி ஒன்றினால் உயர்த் தப்படுகின்றது. முதலாவது **ப** என்பது **க** விலே சங்கிலியைச் சுற்றுவதாலும் பின் னர் **க** வைச் சுற்றி நிலைக்குத்துத் தள மாகச் சுழற்றுவதாலும் உயர்த்தப்படு கின்றது. **ப** வானது மேடை **கத** வின் மூலை **த** வை தாண்ட உருளையைச் சுற்றி எவ்வளவு குறைந்த அளவினதான சங்கிலியைச் சுற்ற வேண்டும்.



உருவம் 539

திண்மக் கேத்திரகணிதம்

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

செவ்வகத் திண்மம்

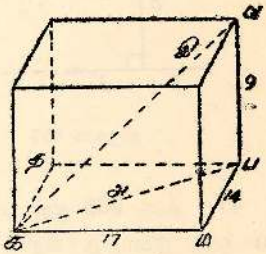
செவ்வகத் திண்மத்திற்குரிய நியமமான குறியீடு. செவ்வகத் திண்மத்திற்குரிய **கமபதநவசய** எனுங் குறியீடு **கமபத, நவசய** என்பன **கந, மவ, பச, தய** எனும் விளிம்புகளால் இணைக்கப்பெற்ற சமாந்தர முகங்கள் என்பதைக் குறிக்கின்றன.

1. ஓரறை 17 அடி நீளமும் 14 அடி அகலமும் 9 அடி உயரமும் உடையது. தரையின் ஒரு மூலை **க** இலிருந்து கூரையின் எதிர்மூலை **வ** இற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க. உரு 540 ஐப் பார்க்க. தரையிலுள்ள மூலை விட்டம் **கப** இனது நீளத்தை அ அடி எனக் கொள்க. அறையின்மூலை விட்டம் **கவ** இனது நீளத்தை இ அடி எனக் கொள்க.

(i) △**கமப** இலிருந்து அ² ஐக் காண்க.

(ii) △**கபவ** இலிருந்து இ² ஐக் காண்க.

அ இன் பெறுமானத்தைக் காண்பது அநாவசியம்.



உருவம் 540

2. விளிம்புகள் 7 ச.மீ., 5 ச.மீ., 3 ச.மீ. அளவுகள் கொண்ட செவ்வகத் திண்மத்தின் ஒரு மூலைவிட்டத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

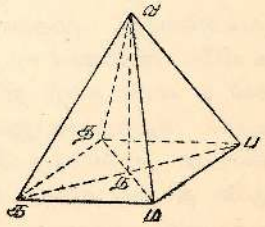
செங்கூம்பகம்

3. உரு 541 இல் **கமபத** ஒரு செவ்வகம். அதன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. தளம் **கமபத** இற்கு **ந** ஊடாக உள்ள செங்குத்தில் **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி எனின்,

வக = வம = வப = வத என நிறுவுக.

△ **வநக = △ வநம** என நிறுவுக.

உரு 541 உச்சி **வ** வையும் அடி செவ்வகம் **கமபத** வையும் உடைய ஒரு செங் கூம்பகத்தைக் குறிக்கின்றது. **வந** வினது நீளம் கூம்பகத்தின் உயரம் எனப்படுகின்றது.



உருவம் 541

4. செவ்வகவடி **கமபத** மேலுள்ள செங்கூம்பகத்தைக் குறிக்கும் உரு 541 இல் **கம** = 10 அங்., **மப** = 6 அங்., **கக** = 12 அங். எனின் **வந** வினது உயரத்தைக் காண்க.

உரு 541 இன் வரைப்படம் ஒன்று வரைக. அதில் **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ய** வைக் குறிக்க.

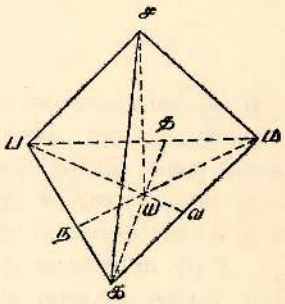
(i) செங்கோண முக்கோணம் **வயக** இலிருந்து **வய**^{2} ஐக் காண்க.

(ii) செங்கோண முக்கோணம் **வநய** இலிருந்து **வந** ஐக் காண்க.

5. உரு 542 இல் **கமப** ஒரு சமபக்க முக்கோணம். அதன் மையக் கோடுகள் **ய** இலே ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன. தளம் **கமப** இற்கு **ய** ஊடாக உள்ள செங்குத்தில் **ச** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி எனின், **சக** = **சம** = **சப** என நிறுவுக.

(i) என் **யக** = **யம** என விளக்குக.

(ii) என் Δ **சயக** ≡ Δ **சயம** என விளக்குக.



உருவம் 542

உரு 542, உச்சி **ச** ஐயும் அடி **சமபக்க முக்கோணம் கமப** ஐயும் உடைய ஒரு செங்கூம்பகத்தைக் குறிக்கின்றது. **சய** இனது நீளம் கூம்பகத்தின் உயரம் எனப்படுகின்றது.

ய என்பது Δ**கமப** இன மையக் கோட்டுச் சந்தி ஆதலால் **கய** = $\frac{2}{3}$ **கத**. (பக்கம் 225 பார்க்க) இவ்வுண்மையைப் பயன் படுத்தி **கம** இனது நீளங் கொடுக்கப்பட்டால் **கய** இனது நீளத்தை அறியலாம்.

6. சமபக்க முக்கோணம் **கமப** ஐ அடியாகக் கொண்ட செங்கூம்பகத்தைக் குறிக்கும் உரு 542 இல் **மப** = 6 ச.மீ., **சக** = 8 ச.மீ.; **சய** வினது நீளத்தைக் காண்க.

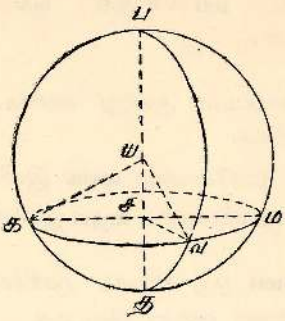
(i) செங்கோண முக்கோணம் **கதம** இலிருந்து **கத**^{2} ஐக் காண்க.

(ii) **கய** = $\frac{2}{3}$ **கத**, ∴ **கய**^{2} = ... = ...
என்பதை முடிவாக்குக.

(iii) செங்கோண முக்கோணம் **சயக** இலிருந்து **சய** ஐக் காண்க.

(i), (ii) ஆகியவற்றிற்குப் பதிலாக Δ**கயவ** என்பது "ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் அரைப்பகுதி" எனும் உண்மையைப் பயன்படுத்தி **கய** ஐக் காண்க. (பக்கம் 144 பார்க்க.)

கோளம்



உருவம் 543

ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு கோளத்தை உரு 543 குறிக்கின்றது. யாதாயினும் ஒரு தளத்தால் அமைக்கப்பட்ட வெட்டுமுகம் **கவம** ஆகும். தளம் **கவம** இற்குச் செங்குத்தான கோளத்தின் விட்டம் **பயத** ஆகும். அது அத்தளத்தை **ச** இல் வெட்டுகின்றது. வெட்டுமுகம் **கவம** ஆனது **ச** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் என நிறுவுக.

(i) **வ** என்பது தளம் **கவம** இல் யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாயின் என் $\triangle$ **யசக** $\equiv$ $\triangle$ **யசவ** என விளக்குக.

(ii) நிறுவலை முடிவாக்குக.

8. உரு 543 இல் கோளத்தின் விட்டம் 20 ச.மீ. ஆயும் தளம் **கவம** கோளத்தின் மையத்திலிருந்து 6 ச.மீ. தூரமாயும் இருந்தால் வட்டக் குறுக்குவெட்டு **கவம** இன் ஆரையைக் காண்க. செங்கோண முக்கோணம் **யசக** ஐப் பயன்படுத்துக.

எண்கொண்ட பயிற்சிகள்

பயிற்சி 54

[3 எண்ணளவிற்குத் திருத்தமாக அண்ணளவாய விடைகள் தருக.]

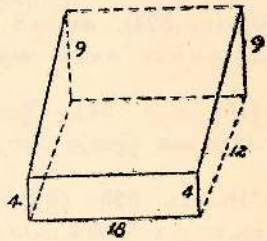
1. ஓரறை 20 அடி. நீளமும் 16 அடி அகலமும் 8 அடி உயரமும் உடையது. தரையின் ஒரு மூலையையும் மேல் மூடகலின்† எதிர் மூலையையும் இணைக்குங் கோட்டினது நீளத்தைக் காண்க.

[2] 5 அங். விளிம்புடைய சதுரத்திண்மத்தின் மூலைவிட்டத்தைக் காண்க.

†Ceiling.

3. 6 அடி. × 5 அடி. × 4 அடி ஆன உள்ளளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வகப் பெட்டியுள் வைக்கக்கூடிய மிக்க நீளமான நேரிய தடியினது நீளம் என்ன ?

[4] ஒரு சதுரத்திண்மத்தின் விளிம்பு 6 அங். அடுத்துள இரு விளிம்புகளின் மையங்களுக் கிடையே யுள்ள தூரத்தைக் காண்க.



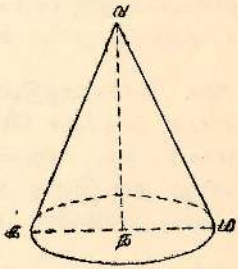
5. **கம** நேர் கிழக்கே செல்கின்றது; **மப** நேர் வடக்கே செல்கின்றது. **பத** நிலைக்குத்தா யுள்ளது. **கம** = 12 அடி, **மப** = 6 அடி, **பத** = 12 அடி எனின் **க** இலிருந்து **த** விற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

6. உரு 544 சாய்வான மூடியுள்ள மூடின பெட்டியைக் குறிக்கும்; அடியானது 18 அங். × 12 அங். அளவுகள் கொண்ட ஒரு கிடையான செவ்வகமாகும். பக்கமுகங்கள் நிலைக்குத்தானவை. மூடியின் பரப்பைக் காண்க.

உருவம் 544

[7] 10 அடி உயரமுள்ள ஓரறையின் செவ்வகத்தரை **கமபத**. **க** இற்கு மேலுள்ள மேல் மூடகலின் மூலை **ந**. **கம** = 24 அடி, **மப** = 20 அடி எனின் △**நமப** இன் பரப்பைக் காண்க.

8. உரு 545 ஒருவட்டக் கூம்பைக் குறிக்கின்றது. அதன் உச்சி **வ**. **வந** கூம்பின் அச்சு—அதாவது உச்சியை அடியின் மையத்திற்கு இணைக்கும் கோடு-ஆகும். அடியின் விட்டம் 10 ச.மீ., கூம்பின் உயரம் **வந** 12 ச.மீ. எனின் கூம்பின் சரிவுயரம் **வக** ஐக் காண்க.



9. ஒரு வட்டக் கூம்பின் சரிவுயரம் 10 அங்., அடியின் விட்டம் 8 அங். எனின் கூம்பின் உயரம் என்ன ?

[10] ஒரு வட்டக் கூம்பின் சரிவுயரம் 6 அங்., உயரம் 4 அங். எனின் அடியின் விட்டம் என்ன ?

உருவம் 545

11. 4 அங். உயரமுள்ள செங்கூம்பின் அடி, 6 அங். மூலை விட்டமுள்ள ஒரு சதுரமாகும். சரிவுயரத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

12. **வ** எனும் உச்சியுடைய ஒரு செங்கூம்பகத்தின் அடி **கமபத** 6 ச.மீ. பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் ஆகும். **வ** இலிருந்து **கம** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளம் 5 ச.மீ.; கூம்பகத்தின் உயரத்தையும் ஒரு சரிவுயரத் தினது நீளத்தையும் காண்க.

[13] 8 அங். உயரமுள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தின் அடி 12 அங். பக்கமுள்ள ஒரு சதுரமாகும். ஒரு பக்கமுகத்தின் பரப்பையும் ஒரு சாயம் விளிம்பினது நீளத்தையுங் காண்க.

14. செவ்வகவடியிலுள்ள ஒரு செங்கூம்பகத்தைக் குறிக்கும் உரு 541 இல் (ப. 324), **கம** = 8 ச.மீ., **மப** = 6 ச.மீ., **வக** = 13 ச.மீ. எனின் கூம்பகத்தின் உயரம் **வந** ஐக் காண்க.

[15] உரு 541 இல் **கம** = 6 அங்., **மப** = 4 அங்., **வந** = 5 அங். எனின் **வக** இனது நீளத்தைக் காண்க.

*16. ப. 325 இலுள்ள சமபக்க முக்கோணம் **கமப** ஐ அடியாக வுடைய ஒரு செங்கூம்பகத்தைக் குறிக்கும் உரு 542 இல், **கம** = 9 ச.மீ., **சக** = 6 ச.மீ. எனின் கூம்பகத்தின் உயரம் **சய** ஐக் காண்க.

*17. உரு 542 இல் **கம** = 12 அங்., **சய** = 4 அங். எனின் **சக** இனது நீளத்தைக் காண்க.

18. உள்விட்டம் 20 அங். கொண்ட அரைக் கோளக் கிண்ணம் ஒன்றில் சிறிது தண்ணீர் உளது. தண்ணீரின் மிகக் கூடிய ஆழம் 4 அங். எனின் தண்ணீரின் மேற்பரப்பாலமைந்த வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

19. 6 அங். விட்டமுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற் பரப்பில் 2 அங். ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் கீறப்பட்டுள்ளது. கோளத்தின் மையத்திலிருந்து வட்டத்தினது நளம் உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

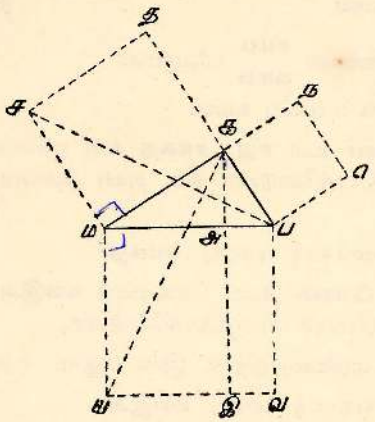
*20. செவ்வகத்திண்மம் ஒன்றின் அடி **கமபத. கந, மவ, பச, தய** என்பன அடிக்குச் செங்கோணமாயமைந்த விளிம்புகள். **கம** = 8 அங்., **மப** = 6 அங்., **கந** = 5 அங்; **அ** என்பது **மப** இனது நடுப்புள்ளி; **இ** என்பது **நவ** இனது நடுப்புள்ளி; (i) **அந**, (ii) **அஇ**, (iii) **தஇ** என்பவற்றுடைய தூரங்களைக் காண்க.

*21. **கமபத** ஒரு செவ்வகம்; **கம** = 6 அங்., **மப** = 8 அங்.; இருபகுதிகளும் செங்கோணத்தில் அமையுமாறு அது **மத** வழி மடிக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொழுது **ப** இலிருந்து **க** உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

*22. 8 அங். விட்டமுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேற் பரப்பில் உள்ள மூன்று புள்ளிகள் **க, ம, ப** என்பன 6 அங். பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும். கோளத்தின் மையத்திலிருந்து முக்கோணத்தினது தளத்தினுடைய தூரத்தைக் காண்க.

தேற்றம் 40 (பைதகரசின்றேற்றம்)

எச்செங்கோண முக்கோணத்திலும் செம்பகத்திலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு செங்கோணத்தைக் கொண்ட பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களுடைய பரப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனாகும்.



உருவம் 546

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; அதில் $\angle$ **மகப** $= 1$ செங்கோணம்.

மேற்கோள். **மப** விலுள்ள **சது.** $=$ **மக** விலுள்ள **சது.** $+$ **கப** விலுள்ள **சது.**

கருவி. முக்கோணம் **கமப** இற்கு வெளியே சதுரங்கள் **மபஎய, கமசத, கபஎந** என்பவற்றை வரைக.

க இற் கூடாக **மய** இற்கும் – அதனால் **பவ** இற்கும் – சமாந்தரமாக கோடு **கஅஇ** ஐ, **மப** ஐ **அ** இலும் **யவ** ஐ **இ** இலுஞ் சந்திக்கு மாறு கீறுக.

கய, பச களை இணைக்க.

நிறுவல். $\angle$ **மகப** $= 1$ செங்கோணம் **தரவு,**

$\angle$ **மகத** $= 1$ செங்கோணம் **சதுரத்தின்** $\angle$

$\therefore$ $\angle$ **மகப** $+ \angle$ **மகத** $= 2$ செங்கோணம்.

$\therefore$ **தக** உம் **கப** உம் ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன.

$\angle$ **சமக** $= \angle$ **பமய** **சதுரத்தின் கோணங்கள் செங்கோணங்கள்.**

ஒவ்வொரு கோணத்திற்கும் ∠கமப ஐக் கூட்டுக.

∴ ∠சமப = ∠கமய.

முக்கோணங்கள் சமப, கமய என்பவற்றில்,

சம = கம — சதுரத்தின் பக்கங்கள்,

பம = யம — சதுரத்தின் பக்கங்கள்,

∠சமப = ∠கமய — நிறுவப்பட்டது.

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{சமப}}{\text{கமய}}$ சர்வசமன் பகோப.

∴ பரப்பு சமப = பரப்பு கமய.

ஆனால் △சமப உம் சது. சமகத உம் ஒரேயடி சம இலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள் சம, தகப ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ளன.

∴ பரப்பு சமப = $\frac{1}{2}$ பரப்பு சமகத.

அவ்வாறே, △மயக உம் செவ்வகம் மயஇஅ உம் ஒரேயடி மய இலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரக்கோடுகள்,

மய, கஅஇ ஆகியவற்றிற்கு இடையிலும் உள்ளன.

∴ பரப்பு மயக = $\frac{1}{2}$ பரப்பு மயஇஅ.

∴ பரப்பு சமகத = பரப்பு மயஇஅ,

அதாவது, மக இலுள்ள சது. = செவ்வகம் மயஇஅ.

இவ்வாறே கவ, மள ஆகியவற்றை இணைத்து

கப இலுள்ள சது. = செவ்வகம் பவஇஅ

என நிறுவல் கூடும்.

∴ மக இலுள்ள சது. + கப இலுள்ள சது. =

செவ்வகம் மயஇஅ + செவ்வகம் பவஇஅ = மப இலுள்ள சதுரம்.

கிளைத்தேற்றம். முக்கோணம் கமப ஆனது க இற் செங்கோணமாக கஅ ஒருயரம் ஆயின் மக^2 = மஅ . மப, பக^2 = பஅ . பம.

கம இலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு = செவ்வகம் மயஇஅ

= மஅ . மய.

ஆனால் மய = மப — சதுரத்தின் பக்கங்கள்,

∴ மக^2 = மஅ . மப.

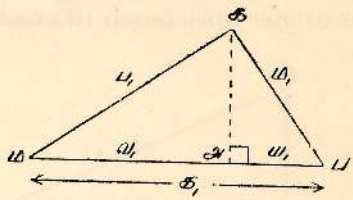
இவ்வாறே கப இலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு = செவ்வகம் பவஇஅ இன் பரப்பு.

∴ பக^2 = பஅ . பவ = பஅ . பம.

பைதகரசின்றேற்றத்தினது திரிகோணகணித நிறுவல்

கமப ஐ, **க** இற் செங்கோணமான முக்கோணமாகவும் **கஅ** ஐ அதன் ஒருயரமாகவும் கொள்க.

உரு 547 இன் குறியீடுகளைக் கொண்டு குறிக்குங்கால்,



உருவம் 547

△ **மகப** இலிருந்து, கோசை **ம** $= \frac{ப,}{க,}$;

△ **கஅம** இலிருந்து, கோசை **ம** $= \frac{வ,}{ப,}$;

$\therefore \frac{ப,}{க,} = \frac{வ,}{ப,}$. $\therefore$ $ப,^2 = க,வ,$.

இவ்வாறே $ம,^2 = க,ய,$, $\therefore$ $ம,^2 + ப,^2 = க,வ, + க,ய,$
$= க,(வ, + ய,) = க,^2$.

குறிப்பு. பக்கம் 329, 330 ஆகியவற்றிலுள்ள நிறுவல் **மக**^{2} = **மஅ . மப** — அதாவது $ப,^2 = வ,க,$, — எனக் காட்டுவதிலே தங்கியிருந்தது. இக் கோவைகள் குறிக்குஞ் சதுரஞ் செவ்வகம் ஆகியவற்றின் பரப்புக்கள் சமன் என நிறுவுவதால் இது முடிவாக்கப்பெற்றது. சமகோண முக்கோணங்கள் ஒரே உருவுடையன எனும் உண்மையிலே திரிகோணகணித நிறுவல் தங்கியுள்ளது.

பைதகரசின்றேற்றத்தினது திரிகோணகணிதச்சமன்

உரு 547 இன் குறியீடுகளைக் கொண்டால்,

$ம, = க,$ சைன் **ம**, $ப, = க,$ கோசை **ம**

$\therefore$ $க,^2$ (சைன் **ம**)$^2 + க,^2$ (கோசை **ம**)$^2 = க,^2$,

$\therefore$ (சைன் **ம**)$^2 +$ (கோசை **ம**)$^2 = 1$.

இது, **சைன்**^{2} **ம + கோசை**^{2}**ம = 1** என்ற உருவில் எழுதப்படும்.

இவ்வாய்பாட்டின் உதவி கொண்டு ஒரு கூர்ங்கோணத்தின் சைன் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் கோசைனைக் கணித்தறியலாம். அவ்வாறே எதிர் நோக்கியும் அறியலாம்.

உதாரணமாக, கோசை $60° = \frac{1}{2}$, பக்கம் 144 ஐப் பார்க்க,

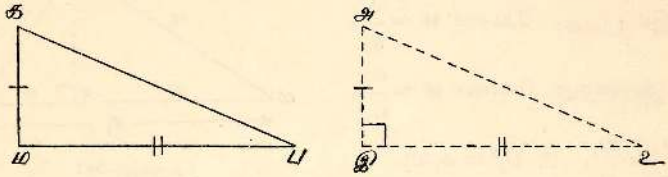
$\therefore$ சைன்^{2} $60° = 1 -$ கோசை^{2} $60° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

ஆனால் சைன் $60°$ நேரானது, $\therefore$ சைன் $60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

பைதகரசின்றேற்றத்தின் மறுதலை. தேற்றம் 41 இன் கருவியை நினைவில் வைத்திருப்பதின் இடர், அதை அமைத்ததின காரணத்தை அறிவதால் குறைந்துவிடும். செங்கோணமானது என நிறுவப்பட வேண்டிய △**கமப** இற்கு நாம் பைதகரசின்றேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல் ஆகாது. எனவே நாம் இயன்ற அளவில் △**கமப** ஐ ஒத்த ஒரு முக்கோணம் △**அஇஉ** ஐ அமைத்து △**அஇஉ** இற்கு பைதகரசின்றேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவலை ஆரம்பிக்கலாம்.

தேற்றம் 41

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள சதுரத்தின் பரப்பு மற்றைப் பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களுடைய பரப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானால் அம்மற்றைப் பக்கங்கள் கொண்ட கோணஞ் செங்கோணமாகும்.



உருவம் 548

தரவு. ஒரு முக்கோணம் கமப ; அதில்
கப இலுள்ள சது. = கம இலுள்ள சது. + மப இலுள்ள சது.

மேற்கோள். ∠ ம = 1 செங்கோணம்.

கருவி. ஒரு முக்கோணம் அஇஉ ஐ அதில்
அஇ = கம,
∠ இ = 1 செங்கோணம்,
இஉ = மப,
ஆக அமையுமாறு வரைக.

நிறுவல். ∠ இ = 1 செங் ∠ ஆனதால்,

அஉ² = அஇ² + இஉ² — பைதகரசு.
ஆனால் அஇ = கம, இஉ = மப — கருவி.
∴ அஉ² = கம² + மப²,
ஆனால் கப² = கம² + மப² — தரவு,
∴ அஉ² = கப²,
∴ அஉ = கப.
∴ △ கமப, △ அஇஉ என்பவற்றில்
கம = அஇ — கருவி,
மப = இஉ — கருவி,
கப = அஉ — நிறுவப்பட்டது.
∴ முக்கோணங்கள் கமப / அஇஉ சர்வசமன் — பபப.
∴ ∠ ம = ∠ இ.
ஆனால் ∠ இ = 1 செங் ∠ — கருவி.
∴ ∠ ம = 1 செங் ∠.

பயிற்சி 55

1. **கமபத** ஒரு சதுரம். **கப²** = 2 **கம²** என நிறுவுக.

2. சமபக்க முக்கோணம் **கமப** இன் ஒருயரம் **கத**. 4 **கத²**=3 **மப²** என நிறுவுக. [**மப**=2 அ அலகுகள் ஆகுக.]

[3] **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **கம** = **மப** = 2 **பத**, ∠ **கமத** = ∠ **மபத** = 1 செங்∠. **கத**=3 **பத** என நிறுவுக.

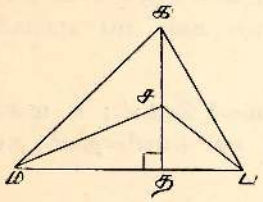
4. **கவயம** எனும் நேர்கோடு, **கவ** = $\frac{1}{4}$**கம**, **மய** = $\frac{1}{3}$**மக** ஆக அமைந்துள்ளது. **கவ, வய, யம** என்பவற்றிற்கு முறையே சமமான பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணஞ் செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவுக. ஒரு மெல்லிய நூல் கொடுக்கப்பட்டால் ஒரு செங்கோணத்தை எவ்வாறு அமைக்கலாம் எனக் காட்டுக.

5. Δ **கமப** இன் ஒருயரம் **கத**. ∠ **ப** = 45° எனின் **கம²** = **மத²** + **தப** என நிறுவுக.

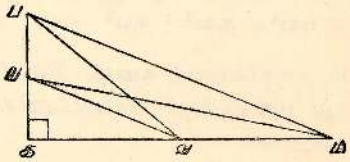
[6] Δ **கமப** இன் ஒருயரம் **கத**. **கம²** + **பத²** = **கப²** + **மத²** என நிறுவுக.

7. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠ **ம** = ∠ **த** = 1 செங்∠. **கம²** − **கத²** = **பத²** − **பம²** என நிறுவுக.

8. உரு 549 இல் **கசத** என்பது **மதப** இற்குச் செங்குத்து. **சம²** − **சப²** = **கம²** − **கப²** என நிறுவுக.



உருவம் 549



உருவம் 550

9. உரு 550 இல் **கவம** என்பது **கயப** இற்குச் செங்குத்து. **மய²** + **பவ²** = **மப²** + **வய²** என நிறுவுக.

[10] உரு 550 இல் ∠ **க** = 1 செங்∠. **வ, ய** கள் **கம, கப** களினுடைய நடுப்புள்ளிகள் ஆயின் **மய²** + **பவ²** = 5 **வய²** என நிறுவுக.

[11] நாற்கோணம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணமாக வெட்டிக் கொள்கின்றன. **கம²** + **பத²** = **கத³** + **மப²** என நிறுவுக.

[12] **கமபத** ஒரு சாய்சதுரம். **கப^2 + மத^2 = 4 கம^2** என நிறுவுக.

13. இரண்டு சதுரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் எவ்வாறு பிறிதொரு சதுரத்தை, கொடுக்கப்பட்ட சதுரங்களின் பரப்பளவின்

(i) கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகவும் (ii) வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகவும் அமைக்கலாம் எனக்காட்டுக.

14. ஒரு செவ்வகம் **கமபத** இன் உள்ளுள்ள ஒரு புள்ளி **வ. வக^2 + வப^2 = வம^2 + வத^2** என நிறுவுக. [**வ** இலிருந்து **கமபத** இன் பக்கங்கட்குச் செங்குத்துக்கள் அமைக்க.] **கமபத** இற்கு வெளியே **வ** இருக்குமேல் அதே விடை உண்மையாகுமா ?

[15] சமபக்க முக்கோணம் **கமப** இன் அடி **மப** இலே புள்ளி **வ, மவ = $\frac{1}{3}$ மப** ஆக அமையுமாறு இருக்கும் ஒரு புள்ளியாகும்.

9 கவ^2 = 7 கம^2 என நிறுவுக. [உயரம் **கத** ஐ வரைக ; **மப = 6 அ** அலகுகள் எனக் கொள்க.]

[16] **△கமப, △வபச** என்பவற்றில், **∠ம = ∠ய = 1** செங் ∠. **வய = கம + மப, யச = கம − மப** எனின் **வச** என்பது **கப** இனுள்ள சதுரத்தின் மூலை விட்டத்திற்குச் சமன் என நிறுவுக.

17. **△ கமப** இல் **∠ ம** = ஒரு செங் ∠ ; **மப** இனது நடுப்புள்ளி **அ** ; **அ** இலிருந்து **கப** இற்குள்ள செங்குத்து **அந. கந^2 − நப^2 = கம^2** என நிறுவுக. [**கஅ** ஐ இணைக்க.]

18. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **∠ ம = ∠ த = 1** செங் ∠ ; **க,ப** க்களிலிருந்து **மத** இற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **கவ, பய** என்பன. **மவ^2 + மய^2 = தவ^2 + தய^2** என நிறுவுக.

[19]. நாற்கோணம் **கமபத** இல் **∠கபம = ∠கதம = 1** செங் ∠ ; **க, ம** களிலிருந்து **பத** இற்குச் செங்குத்துக்கள் **கவ, மய; பவ^2 + பய^2 = தவ^2 + தய^2** என நிறுவுக.

20. பக்கம் 329, உரு 546 இல் **∠ மகப = 1** செங் ∠, **கம = 2 கப** எனின் **மஅ = 4 அப** என நிறுவுக. [செவ்வகம் **மஇ**, செவ்வகம் **பஇ** என்பவற்றின் பரப்புக்களைப்பற்றி என்ன அறிவீர்.]

[21] ப. 329, உரு 546 இல் **∠ மகப = 1** செங் ∠, **மஅ = 2$\frac{1}{4}$ அப** எனின் **கம = 1$\frac{1}{2}$ கப** என நிறுவுக.

22. **△கமப** இல் **கம = கப = 2 மப. மஎ** ஒருயரமாயின் **பஎ = $\frac{1}{4}$ பம** என நிறுவுக. [ப. 315, உரு 529 இல் செவ்வகம் **எப′** ஐப்பற்றி என்ன அறிவீர்.]

23. பக்கம் 331, உரு 547 இல் ∠ மகப = 1 செங் ∠, கஅ ஆனது மப இற்குச் செங்குத்து. கஅ² = மஅ . அப என நிறுவுக. [கஅ ஐ உ அலகுகளாகக் கொள்க. உருவிலுள்ள கீறிட்ட எழுத்துக்களைப் பயன் படுத்தி பைதகரசை மூன்று செங்கோண முக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றிற் கும் பயன்படுத்துக.] இவ்விடையைத் திரிகோண கணித முறையாலே நிறுவுவீரா ?

24. Δ கமப இன் அடி மப யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. கம = கப எனின் கவ² − கம² = வம . வப என நிறுவுக. [உயரம் கத ஐ எனக; மப = 2 அ அலகுகள், பவ = இ அலகுகள் எனக் கொள்க.]

*25. கமப ஒரு நேர்கோடு ; கமஅஇ, மபவய என்பன கப இன் ஒரே பக்கத்திலுள்ள சதுரங்கள். வஅ² + பஇ² = 3 (கம² + மப²) என நிறுவுக.

*26. Δ கமப உள்ளே ய யாதாயினும் ஒரு புள்ளி; யவ, யந, யச என்பன ய இலிருந்து முறையே மப, பக, கம என்பவற்றிற்குரிய செங்குத் துக்கள். மவ² + பந² + கச² = வப² + நக² + சம² என நிறுவுக.

*27. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் கமப இன் பக்கங்களிலுள்ள சதுரங் களைக் குறிக்கும். உரு 529 இல், ப. 315, Δ கமப இற்கு உள்ளே த′ யாதா யினும் ஒரு புள்ளியாயின் த′ய² + த′ப′² + த′ந² = த′வ² + த′க′² + த′ச² என நிறுவுக.

*28. கம எனுங் கோடு ஒன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இயலுமாயின் கம இலே வ எனும் புள்ளி ஒன்றை, கவ, வம மேலுள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாயமைய அமைக்க. இது எப்பொழுது இயலாததொன்றாகும் ? [எண் 5 இற் குறித்த உண்மையைப் பயன் படுத்துக.]

*29. கம எனுங் கோடு ஒன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கம இலே வ எனும் புள்ளி ஒன்றை, கவ² = 2வம² ஆகவிருக்குமாறு அமைக்க. [Δ கயம ஐ, ∠ யகம = 45°, ∠ யமக = 22½° ஆகவிருக்குமாறு வரைந்து மய இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தினை வரைக.]

*30. மப ஐ விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் க யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாயின் ∠ மகப ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக. இவ்வுண்மை யையும் பக்கம் 315 இலுள்ள உரு 530 ஐயும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகத்திற்குப் பரப்பிற் சமமான ஒரு சதுரம் வரையப் பயன்படுத்துக.

மீட்டல் வினாத்தாள்கள் 33 – 42 (தேற்றம் 1 – 39)

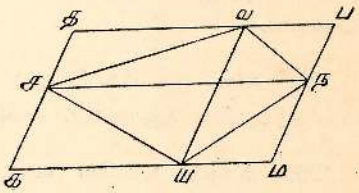
[இணைகரங்கள், முக்கோணங்கள் ஆகியவற்றின் பரப்புக்களும் அடங்கும்.]

35

1. △**கமப** இல் **கம** = **கப** ; **கப** இலே **த** எனும் புள்ளி **மத** = **மப** ஆகவிருக்குமாறு உள்ளது. ∠**பமத** = அ° எனின் ∠**தமக** ஐ அ இற் காண்க.

2. **கமப** ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ; **வ**, **ய** க்கள் முறையே **மப**, **பக** என்பவற்றில், **மவ** = **பய** ஆக இருக்குமாறு அமைந்த புள்ளிகள் ; **மய** ஐ **கவ** என்பது **ச** இல் வெட்டுகின்றது.

(i) **கவ** = **மய**; (ii) ∠**மசக** = 120° என நிறுவுக.



உருவம் 551

3. **கமபத** எனும் இணைகரம் ஒன்றை, ∠**ம** = 60°, **மப** = 3 அங்., **கமபத** இன் பரப்பு 6·9 சது. அங். ஆக இருக்குமாறு அமைக்க. உமது வழியை விளக்கிக் கூறி **கம** ஐ அளக்க.

4. 551 இல் **கமபத** ஓரிணைகரம். **நச**, **யவ** என்பன **கம**, **கத** இற்குச் சமாந்தரங்கள். **கமபத** = 2 பரப்பு **நயசவ** என நிறுவுக.

36

1. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் க°, க° + ந°, க° + 2ந° ஆகும். ஒரு புறக்கோணம் 3 க° – ந° ஆகும். முக்கோணத்தின் கோணங்களைக் காண்க. [முச்சோடி விடைகள்.]

2. **கமபதந** ஓரைங்கோணம். அதில் **கம** = **கந**, **மப** = **நத**, ∠**கமப** = ∠**கநத**. ∠**மபத** = ∠**நதப** என நிறுவுக. [**கப**, **கத** களை இணைக்க.]

3. (2,0), (0,5), (3,7) ஆகிய ஆள் கூறுகள் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும் ; ஒவ்வோரச்சிலும் அலகு 1 அங். ஆகும். முக்கோணத்தின் பரப்பைக் கணிக்க.

4. நாற்கோணம் **கமபத** இன் மூலை விட்டங்கள் **ச** இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. △**கசத** = △**மசப** எனின், △**கசம** இன் கோணங்கள் △**பசத** இன் கோணங்கட்குச் சமன் என நிறுவுக.

37

1. △கமப இன் அடி மப ஆனது த இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது ; தக இணைக்கப்பட்டு ந இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. கம = நப = பத எனின் ∠ மகந = 3 ∠ மதக என நிறுவுக.

2. இணைகரம் கமபத இன் பக்கம் பத இனது நடுப்புள்ளி ச ; நீட்டப்பட்ட கச, மச கள் கத நீட்டப்பட்ட மப ஆகியவற்றை முறையே அ, இ களிற் சந்திக்கின்றன. (i) கச = சஅ ; (ii) கம இற்கு அஇ சமாந்தரம் என நிறுவுக.

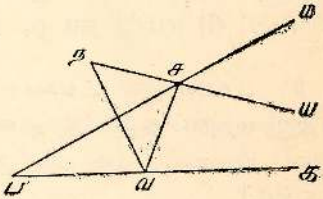
3. இணைகரம் கமபத ஐ கம = 3·6 அங்., மப = 2·4 அங்., ∠ ம = 42° ஆக இருக்குமாறு வரைக. △ வகம ஐப் பரப்பில் கமபத இற்குச் சமமாகவும் அதன் ∠ வமக = 65° ஆக அமையுமாறும் வரைக. வம ஐ அளக்க.

4. இணைகரம் கமபத இன் பக்கம் மப யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ச இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. △ கமச = நாற்கோணம் கபசத என நிறுவுக.

38

1. உரு 552 இல் ∠ நவப = ∠ சவக, ∠ வசப = ∠ யசம ; பவக, பசம, நசய நேர்கோடுகள். ∠ வநச = 2 ∠ கபம என நிறுவுக.

2. ஒரு சமபக்க முக்கோணம் கமப இனுள்ளே உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ச. மசத, பசந என்பன மச, பச எனும் அடிகள்மேல் க எப்பக்கத்திலுள்ளதோ அப்பக்கத்திலுள்ள சமபக்க முக்கோணங்கள். (i) △ கதம ≡ △ பசம; (ii) கத = சந; (iii) கதசந ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.



உருவம் 552

3. △ கமப ஐ, கம = 5 ச.மீ., மப = 3 ச.மீ., ∠ ம = 52° ஆக அமையுமாறு வரைக. ஒரு புள்ளி வ இனது ஒரு நிலையை, வக = வம ஆகவும் △ வமப இன் பரப்பு 4·5 சது. ச.மீ. உக்குச் சமமாகவும் இருக்க அமைக்க. உமது வழியைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

4. நாற்கோணம் கமபத இன் மூலைவிட்டங்கள் ச இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன. △ கசம = △ மசப = △ பசத எனின் கமபத ஓரிணைகாம் என நிறுவுக.

39

1. முக்கோணம் **கமப** இன் பக்கம் **கம** இலே **வ** எனும் ஒரு புள்ளி, **கவ = வப = பம** ஆகவிருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. ∠**கபம** ஐ **பவ** இரு சமக்கூறிடின் ∠**மகப** ஐக் கணிக்க.

2. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** இல் முக்கோணத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு சதுரம் **மதநப**. **ம,ப** களுக்கூடாக **கத, கந** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லுங் கோடுகள் **வ** இற் சந்திக்கின்றன. (i) **வக = மப**; (ii) **மப** இற்கு **வக** செங்குத்து என நிறுவுக.

3. △**கமப** இன் பக்கம் **மப** இனது நடுப்புள்ளி **ச**; **ச** இலிருந்து முறையே **கம, கப** இற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **சவ, சய** ஆகும். **கம = 8** அங்., **கப = 12** அங்., **சவ = 6** அங். எனின் **சய** இனது நீளத்தைக் கணிக்க

4. **கமபத** ஒரிணைகரம்; நீட்டப்பட்ட **கம** இலே **ய** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. △**கயத** − △**மயப** = △**தயப** என நிறுவுக. [**மத** ஐ இணைக்க.]

40

1. △**கமப** இல் **கம = கப**, ∠**ம** = 51°. நீட்டப்பட்ட **கப** இலே **ந** எனும் புள்ளி, ∠**கநம** = 25° ஆகவிருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. எது நீளமானது (i) **மப** ஓ **நப** ஓ, (ii) **மந** ஓ **கந** ஓ?

2. △**கமப** இல் ∠**மகப** = 90°; △**கமப** இற்கு வெளியே உள்ள ஒரு சதுரம் **மதநப**. **த** இலிருந்து **கப** இற்குள்ள செங்குத்து **தஅ**. **தஅ = கம + கப** என நிறுவுக. [**ம** இலிருந்து **தஅ** இற்குள்ள செங்குத்து **மஇ** ஐ வரைக.]

3. குவிந்த ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** ஐ, **கம** = 2 அங்., **மப** = 2·5 அங்., **பத = தக** = 1·7 அங்., ∠**ம** = 70° ஆகவிருக்குமாறு வரைக. நீட்டப்பட்ட **மப** இலே ஒரு புள்ளி **அ** ஐ, △**கமஅ** = நாற்கோணம் **கமபத** ஆகவிருக்குமாறு அமைக்க. **கமபத** இன் பரப்பைக் காண்க.

4. △**கமப** இன் பக்கங்கள் **மப, பக, கம** என்பவற்றிலே முறையே **வ, ய, ச** எனும் புள்ளிகள், **கம** இற்கு **வய** சமாந்தரமாகவும் **மப** இற்கு **யச** சமாந்தரமாகவும் இருக்குமாறு அமைந்துள்ளன. △**கமவ** = △**கபச** என நிறுவுக.

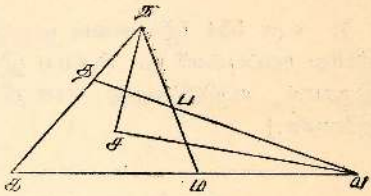
41*

1. △கமப இன் பக்கங்கள் கம, கப கள் த, ந கட்கு நீட்டப் பட்டுள்ளன ; கச, கய என்பன ∠மபந, ∠பமத என்பவற்றின் இரு சம வெட்டிகட்குச் சமாந்தரமாய் மப ஐ ச, ய என்பவற்றிற் சந்திக்கும் நேர்கோடுகளாகும். (i) கப = பச ; (ii) கம + கப − மப = சய என நிறுவுக.

2. உரு 553 இல் சந, சவ என்பன ∠கநம, ∠கவத என்பவற்றின் இருசம வெட்டிகள். கோணங்கள் தகம, தபம மிகைநிரப்புகின்றவையாயின்,

(i) ∠பநவ + ∠பவந = ∠நகவ என நிறுவுக ;

(ii) ∠நசவ ஒரு செங் ∠ என நிறுவுக.



உருவம் 553

3. முக்கோணம் கமப இன் உயரங்கள் கத, மந, பவ ஆகும் ; கம = 39 அ அங்., மப = 44 அ அங்., பக = 17 அ அங்., கத = 30 அங். மந, பவ ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களைக் கணிக்க.

289 ஆம் பக்கத்திலுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பிற்குரிய வாய்பாட்டை அ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுவதிற் பயன்படுத்துக.

4. இணைகரம் கமபத இன் பக்கம் கத யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது ; மவ ஆனது பத ஐ ய இலே வெட்டுகின்றது. △யவப = △யதக என நிறுவுக.

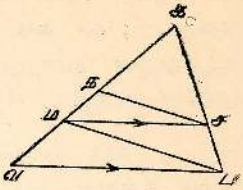
42*

1. கமபத ஒரு சதுரம். கமச அதற்கு வெளியே உள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ; சத ஆனது கப ஐ வ இல் வெட்டுகின்றது. ∠கதச இன் பருமனைக் கண்டு (i) ∠மவப = ∠தவப = 60° ; (ii) △வசம ≡ △வபம என நிறுவுக.

2. கமப ஒரு முக்கோணம் ; க இலிருந்து ∠கமப இன் இரு சம வெட்டிக்குள்ள செங்குத்து கவ ; வய என்பது மப இற்குச் சமாந்தரமாய் கம ஐ ய இலே வெட்டுமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. கய = யம = யவ என நிறுவுக.

[மப ஐ ச இலே சந்திக்குமாறு கவ ஐ நீட்டுக.]

3. சரிவகம் **கமபத** இன சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கத, மப**; மூலை விட்டங்கள் **கப, மத** என்பன **ச** இலே வெட்டிக் கொள்கின்றன. முக்கோணங்கள் **கசம, மசப** என்பவற்றின் பரப்புக்கள் முறையே 3 சது. அங்., 2 சது. அங். ஆயின் முக்கோணங்கள் **பசத, கசத** என்பவற்றின் பரப்புக்களைக் கணிக்க. காரணங்கள் காட்டுக.



உருவம் 554

4. உரு 554 இல் **கமவ** ஒரு நேர் கோடு. **கவ** இனது நடுப்புள்ளி **ந**. △**கமப** இன் பரப்பை **சந** இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. (**வச** ஐ இணைக்க.]

மீட்டல் வினத்தாள்கள் 43–50 (தேற்றம் 1–41)

(பைதகரசின் தேற்றமும் அடங்கும்)

43

1. **கமப** ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணம்; **மகசந, பகஅஇ** என்பன △**கமப** இற்கு வெளியே உள்ள சதுரங்கள். **மச, பஅ** என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது **வ** இலே சந்தித்தால், (i) **மப** இற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் **க, வ** கள் உள்ளன, (ii) ∠ **மவப** + ∠ **மகப** = 90° என நிறுவுக.

2. (i) **கமஅஇ** ஒரு செவ்வகம்; அதில் **கம** = 13 அங்., **கஇ** = 6 அங். **அஇ** இலே **ப** எனும் புள்ளி **அப** = 8·5 அங். ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது.

(i) △**கமப** இன் பரப்பு, (ii) **கப** இனது நீளம், (iii) **ம** இலிருந்து **கப** இற்குள்ள செங்குத்தினது நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) △ **கமப** இல் ∠ **க** = 90°, ∠ **ம** = 30°, **மப** = 6 அங்.; △**கமப** இன் பரப்பைக் கணிக்க.

3. **கம** இன் எதிர்ப்பக்கங்களிலே சமபரப்பினவாய் அமைந்துள்ளன. முக்கோணங்கள் **கமவ, கமய. கம** (தேவையெனின் நீட்டப்பட்ட **கம**) ஆனது **வய** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

4. கூர்ங்கோணமுக்கோணம் **கமப** இன் ஒருயரம் **கத**. **மத** = 2 **தப** எனின் **கம**^{2} = **கப**^{2} + 3 **பத**^{2} என நிறுவுக.

44

1. △**கமப** இல் ∠ **க** = 120°, **மப** இலே **வ, ய** எனும் புள்ளிகள், **மவ** = **மக**, **பய** = **பக** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. ∠ **வகய** = 30° என நிறுவுக.

2. கவயச ஒரு செவ்வகம். அதில் கவ = 4 அங்., கச = 11 அங். யச, யவ களிலே ம, ப எனும் புள்ளிகள், சம = 3அங்., யப = 8 அங். ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. (i) Δ கமப இன் பரப்பு; (ii) மக, மப களுடைய நடுப்புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டினது நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. கமபத ஓரிணைகரம்; மத இலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ. Δ வகம = Δ வமப என நிறுவுக. (மத வை கப ஆனது ச இலே வெட்டுவதாகக் கொள்க.)

4. கமப ஒரு சமபக்க முக்கோணம்; மப ஆனது த இலே இருசமக் கூறிடப்பட்டு ந இற்கு, பந = தப ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. $கந^2 = 7 நப^2$ என நிறுவுக. (மப ஐ 2 அ அலகுகளாய்க் கொள்க.)

45

1. (i) Δ கமப இல் கம = 5 அங்., மப = 6 அங்., ∠ கமப = 45°. Δ கமப இன் பரப்பையும் கப இனது நீளத்தையுங் கணிக்க.

(ii) கமபத ஒரு நாற்கோணம்; அதில் ∠ க = ∠ ம = 90°, கம = 6 அங்., மப = 10 அங்., கத = 18 அங். ∠ கதப ஐ மத இருசமக் கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

2. Δ கமப இல் கம > கப; ப இலிருந்து ∠ மகப ஐ இருசமக் கூறிடும் கோட்டிற்குள்ள செங்குத்து பந. த என்பது மப இனது நடுப்புள்ளி. (i) தந ஆனது மக இற்குச் சமாந்தரம் என நிறுவுக. (ii) தந = ½(கம − கப) என நிறுவுக. [கம ஐ ச இலே சந்திக்குமாறு பந ஐ நீட்டுக.]

3. நாற்கோணம் கமபத இனது மூலைவிட்டம் மத இனது நடுப்புள்ளி ச. Δ கமப, Δ கதப ஆகியவற்றின் பரப்பின் வித்தியாசம் Δ கசப இன் பரப்பினும் இரு மடங்கு என நிறுவுக. [கப ஆனது மத ஐ ந இல் வெட்டுவதாகக் கொள்க.]

4. Δ கமப இல் ∠ கபம ஒரு செங்கோணம். மப இனது நடுப்புள்ளி த எனின் $கம^2 = கத^2 + 3 மத^2$ என நிறுவுக.

46

1. Δ கமப இல் கம = கப; மப இலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ. வம, வப என்பவற்றின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் கம, கப களை முறையே அ, இ களிற் சந்தித்தால் கஅவஇ ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

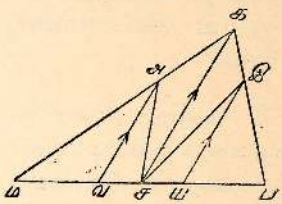
2. **கமபத** 36 சது. ச.மீ. பரப்புடைய ஒரு சரிவகம். அதில் **தப** இற்கு **கம** சமாந்தரம், **கத = மப**. **கம** = 12 ச.மீ., **பத** = 6 ச.மீ. எனின் **மப** இனது நீளத்தைக் காண்க.

3. உரு 555 இல் **வய** = $\frac{1}{3}$ **மப**. நாற்கோணம் **கஅசஇ** = $\frac{1}{3}$ △**கமப** என நிறுவுக.

4. பக்கம் 315 இல் செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களைக் குறிக்கும் உரு 530 இல்

(i) **பந = மக′** என நிறுவுக.

(ii) **பச² − மப′² = கம² − கப²** என நிறுவுக.



உருவம் 555

இவ்விடைகள் பக்கம் 315 இலுள்ள உரு 529 இற்கும் உண்மையானவை என நிறுவுக.

47

1. △**கமப** இனது ஒருயரம் **கத**; **த** ஆனது **ம**, **ப** களுக்கிடையே உள்ளது. **கம** = 10 ச.மீ., **கப** = 7·5 ச.மீ., **கத** = 6 ச.மீ. எனின் **மப** இனது நீளத்தைக் கண்டு ∠**மகப** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

2. **க**, **ம** கள் நிலையான புள்ளிகள்; **வ** என்பது ∠**கவம** ஒரு விரிகோணமாகுமாறு அமைந்த ஒரு மாறும் புள்ளி; **வக**, **வம** களின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் **கம** ஐ **ப**, **ச** களில் வெட்டுகின்றன. △**வயச** இன் சுற்றளவு மாறிலியாயிருக்கும் என நிறுவுக.

3. **கமபத** ஒரு சாய்சதுரம்; **மப**, **பத** களில் முறையே **வ**, **ய** கள், **மவ = பய** ஆகுமாறு அமைந்த புள்ளிகள்; **கவ**, **மய** ஐ **ச** இலே வெட்டுகின்றது.

△**கசம** = நாற்கோணம் **சவபய** என நிறுவுக.

4. உச்சி **வ** ஐ உடைய ஒரு செங்கூம்பகத்தின் அடி 4 அங். பக்கச் சதுரம் **கமபத** ஆகும்; மற்றை நாலு முகங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும்; ∠**கவப** ஒரு செங்கோணம் என நிறுவிக் கூம்பகத்தின் உயரத்தைக் கணிக்க.

48

1. ஒரு சமபக்கமுக்கோணம் **கமப** கொடுக்கப்பட்டால் **கம** இலே ஒரு புள்ளி **வ** ஐ, **வக** என்பது **வ** இலிருந்து **மப** இற்குள்ள செங்குத்து **வந** இற்குச் சமானமாகுமாறு அமைக்க. காரணங்கள் காட்டுக.

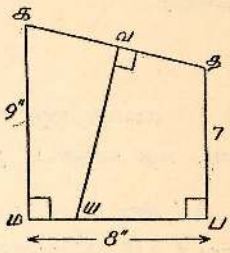
2. $\triangle$ கமப இல் கம = 8 ச.மீ., கப = 9 ச.மீ. மப இலே த எனும் புள்ளி மத = $\frac{1}{3}$ மப ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது.

$\triangle$ கமப இனது பரப்பு 24 சது. ச.மீ. எனின் கம, கப களிலிருந்து த உள்ள தூரங்களைக் காண்க.

3. உரு 556 இல் கத இனது நீளத்தைக் காண்க. கத இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து கத, மப களை வ, ய களில் வெட்டினால்

(i) மய இனது நீளம்,

(ii) வய இனது நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.



உருவம் 556

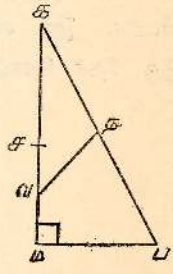
[தந, வச களை மக, மப களுக்குச் செங்குத்தாய்க் கீறுக.]

4. $\triangle$ கமப இன் ஒருயரம் கத ; நீட்டப்பட்ட கத இலே வ, ய கள் தவ = கம, தய = கப ஆகுமாறு அமைந்த புள்ளிகள். மய = பவ என நிறுவுக.

49*

1. (i) ($அ^2 - இ^2$), 2 அஇ, ($அ^2 + இ^2$) அங்குல அளவுகளில் பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க. காரணங்கள் காட்டுக.

(ii) கமபத ஓரிணைகரம் ; அதில் கம = 4 அங்., மப = 5 அங்., $\angle$ கமப = 60°. கமபத இன் பரப்பு, பத இலிருந்து க உள்ள தூரம், மத இனது நீளம் ஆகியவற்றைக் கணிக்க.



உருவம் 557

2. உரு 557 இல் $\angle$ கமப = 90°, கச = மப ; ந, வ கள் கப, சம களினுடைய நடுப்புள்ளிகள். $\angle$ கவந = 45° என நிறுவுக. [பய ஐ, நவ இற்குச் சமாந்தரமாய் நீட்டப்பட்ட கம ஐ ய இலே வெட்டுமாறு கீறுக.]

3. கமபத ஒரு நாற்கோணம் ; அதில் $\angle$ கமப = $\angle$ கதப = 90°. கமபத இன் பக்கங்களுடைய நீளங்கட்கிடையே ஒருருவைக் காண்க.

கவ, கய களை பத, பம களுக்கு சமாந்தரமாய் பம, பத களை முறையே வ, ய களில் வெட்டுமாறு கீறில் யக . கம = வக . கத என நிறுவுக.

[பரப்பு வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்துக.]

4. ஒரு செவ்வகத் திண்மத்தின் அடி **கமபத** ; **கந, மவ, பச, தய** என்பன அடிக்குச் செங்குத்தான விளிம்புகள் ; **கம** = 4 அங்., **கந** = 3 அங். **நவ** இனது நடுப்புள்ளி **அ** ஆக, **கஅ** = **கத** எனின் **கச** இனது நீளத்தைக் காண்க.

50*

1. **கமபத** ஒரு சாய்சதுரம். அதில் ∠ **மகத** = 120°, **கம** = 10 ச.மீ. **கப, மத** களுடைய நீளங்களைக் கணிக்க.

2. கிடையான தளத்திலே 3 ச.மீ. பக்கமுடைய ஒரு சதுரம் **கமபத**. **கவ** 4 ச.மீ. நீளமுள்ள நிலைக்குத்தான கோடாகும். Δ **வமப** இன் பரப்பையும் **வப** இனது நீளத்தையுங் காண்க.

3. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **மக** இற்குச் சமாந்தரமான யாதாயினும் ஒரு கோடு **மப, கப, கத** களை முறையே **அ, இ, உ** களில் வெட்டுகின்றது. Δ **கஅஇ** = Δ **தஇஉ** என நிறுவுக. [**பஉ** ஐ இணைக்க.]

4. **கசம, பசத** என்பன ∠ **மசத** = 50° ஆகுமாறமைந்த இரு நிலையான கோடுகள் ; **வ** என்னும் மாறும் புள்ளி **பசத** இலிருந்துள்ள தூரத்திலும் **கசம** இலிருந்துள்ள தூரம் 1 ச.மீ. அளவிற் கூடியதாகுமாறு அமைந்துள்ளது. ஒருரு வரைந்து அதில் **வ** இனது திட்டமான ஒழுக்கினைக் காட்டுக. [**வ** என்பது தம்மிலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கக் கூடியதான இரு நேர் கோடுகள் காண்க.]

பகுதி II

(பிரிவு 2)

வட்டம்

வட்டத்தின் சமச்சிருள்ள பண்புகள்

12 ஆம் பக்கத்தில் வட்டத்தின் முக்கிய வரைவிலக்கணங்கள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. வட்டத்தின் அநேக பண்புகள் உதாரணமாகக் காட்டப்பட்டோ ஆராயப்பட்டோ உள்ளன; சிறப்பாக, ஒழுக்கினைப்பற்றிய இடத்து இவை ஆராயப்பட்டுள்ளன.

234 ஆம் 235 ஆம் பக்கங்களைப் பார்க்க. இரு நிலைத்த புள்ளிகளி லிருந்து சமதூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்கு அவ்விரு நிலைத்த புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து என நிறுவப்பட்டுள்ளது.

இப்பண்புகள் இரு வெவ்வேருன தேற்றங்களை அடக்கியுள்ளன:

(1) **பக = பம** எனில் **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தில் **ப** உள்ளது.

(2) **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தில் **ய** கிடக்கில் **யக = யம.**

ய ஐ வட்டமாக உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் **க, ம** இரு புள்ளிகள் எனின் **யக = யம ஆரைகள்,**

∴ **கம** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தில் **ய** உள்ளது.

சொல்லாற் கூறில்,

ஒரு வட்டத்தின் மையம் அவ்வட்டத்தின் யாதுமொரு நாணின் இருசம வெட்டிச் செங்குத்தில் உள்ளது எனலாம்.

இக்கூற்று 42 ஆம் 43 ஆம் தேற்றங்களில் கூறிய உண்மைகளுக்குப் பொருளளவில் ஒத்ததாம்; எனினுந் தேர்வுக்குரிய தேவைகளின்பொருட்டு **351 ஆம் 352 ஆம் பக்கங்களில்** இத்தேற்றங்களுக்குரிய சார்பற்ற நிறு வல்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

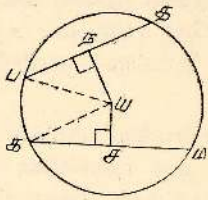
ஒழுக்குத்தேற்றத்தில் நிறுவப்பட்ட ஈருண்மைகளையுங்கொண்டு, ஒரு கோட்டில் அமையாத கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளுடே ஒரேயொரு வட்டத்தையே வரையலாம் என்பதை நிறுவலாம்; **355 ஆம்** பக்கம் பார்க்க. ஒரு வட்டத்தின் நிலையும் பருமனும், அதன் பரிதியில் உள்ள மூன்று புள்ளிகள் **க, ம, ப** ஆகியவை கொடுக்கப்படின், உறுதியாக நிலையாக்கப்பட்டனவாம்; எனவே ஈரடி இல்லாது, வட்டம் **கமப** என நாம் ஒரு வட்டத்தை எடுத்தாளலாம். ஏனெனில் **க, ம, ப** என்பவற்றுக்கூடாக ஒரு வட்டமே செல்லும் என்க.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. 558 ஆம் உருவில் கம = 8 ச.மீ., வட்டத்தின் ஆரை 5 ச.மீ. எனின் கம இலிருந்து மையம் ய உள்ள தூரம் யச ஐக் காண்க.

(i) கச இனது நீளம் என்ன ? காரணங்கள் காட்டுக.

(ii) யச இனது நீளத்தைக் காணப் பைதகரசைப் பயன்படுத்துக.



உருவம் 558

2. உரு 558 இல் பத இலிருந்து மையம் ய இனுடைய தூரம் யந 6 அங். ஆரை 7·5 அங். எனின் பத இனது நீளத்தைக் காண்க.

3. ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் சமமற்றவையெனின் அவற்றுட் பெரியது மையத்திற்கு அண்மியது என நிறுவுக.

உரு 558 இல் கம > பத ; ய மையத்திலிருந்து கம, பத என்டவற்றுக் குள்ள செங்குத்துக்கள் யச, யந எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதெனின் யச < யந என நிறுவுக.

(i) ஏன் கச > பந என விளக்குக.

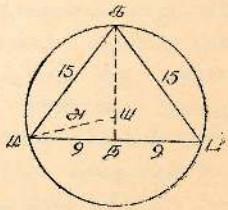
(ii) ஏன் $கச^2 + சய^2 = பந^2 + நய^2$ என விளக்குக.

4. △கமப இல் கம = கப = 15 ச.மீ., மப = 18 ச.மீ. அதன் சுற்றுரை, "அ" ச.மீ. ஐக் காண்க.

(i) எதற்காகச் சுற்று மையம் ய ஆனது க ஐ மப இனது நடுப்புள்ளி ந உடன் இணைக்கும் கோட்டில் உள்ளதென விளக்குக.

(ii) கந இனது நீளத்தைக் காண்க ; பின் யந இனது நீளத்தை "அ" இற் கூறுக.

(iii) △யநம ஐ "அ" ஐக் காண்பதற்குப் பயன் படுத்துக.



உருவம் 559

எண்கொண்ட பயிற்சிகள்

பயிற்சி 56

(3 எண்களுக்குத் திருத்தமாக, அண்ணளவான விடைகள் தருக.)

1. 10 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நாண் ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் இருந்து 12 ச.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. அதன் ஆரையைக் காண்க.

2. 6 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினது நாண் 8 ச.மீ. நீளமாகும். மையத்திலிருந்து அந்த நாணுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

[3] 7 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினது நாண் அதன் மையத்திலிருந்து 4 ச.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. நாணினது நீளத்தைக் காண்க.

4. கொடுக்கப்பட்ட, 7·5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினது மாறும் நாண் **வய** ஆகும். **வய** = 9 ச.மீ. எனின் **வய** இனது நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

5. வட்டம் **கவமய** இனது விட்டம் **கம** இல் **ந** ஒரு புள்ளியாகும்; **ந** இற்கூடாக **கம** இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நாண் **வநய** ஆகும். **கந** = 8 ச.மீ., **நம** = 2 ச.மீ. எனின் **வய** இனது நீளத்தைக் காண்க.

[6]. 5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தில் 6 ச.மீ., 4 ச.மீ. நீள அளவுகள் கொண்ட இரு சமாந்தர நாண்கள் உள்ளன. அந்நாண்களுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க. (இரு விடைகள்.)

[7]. ஒருமைய இருவட்டங்களின் ஆரைகள் 7 அங்., 4 அங். ஆகும்; **வயநச** என்னும் ஒரு கோடு ஒரு வட்டத்தை **வ, ச** களிலும் மற்றையதை **ய,ந** களிலும் வெட்டுகின்றது. **யந** = 6 அங். எனின் **வச** இனது நீளத்தைக் காண்க.

8. ஒரு வட்டத்தினது நாண் 10 ச.மீ. நீளமாயும் மையத்திலிருந்து 4 ச.மீ. தூரத்திலுள்ளதாயும் இருக்கின்றது. மையத்திலிருந்து 3 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு நாணினது நீளத்தைக் காண்க.

9. **ய ஐ** மையமாக உடைய 7 அங். ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினது இரு நாண்கள் **கம, பத** ஆகும். அவை **வ** இல் செங்கோணத்திற் சந்திக்கின்றன. **கம** 6 அங்., **பத** 10 அங். எனின் **யவ** இனது நீளத்தைக் காண்க.

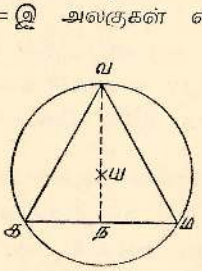
[10] ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு சம வட்டங்களினது பொது நாணினது நீளம் 10 ச.மீ., இரு மையங்களினதும் இடைத்தூரம் 6 ச.மீ.; ஒவ்வொரு வட்டத்தினதும் ஆரையைக் காண்க.

*11. மையத்திலிருந்து அ அங்., 7 அ அங். ஆகிய தூரங்களிலுள்ள ஒரு வட்டத்தினது இரு நாண்கள் **கம, பத** என்பன. **கம = 2 பத** எனின் **தப** இனது நீளத்தை அ இல் காண்க.

12. 12 அங். உள் விட்டங்கொண்ட ஒரு அரைக்கோளக் கிண்ணத்தினுள் ஒரு பகுதியளவிற்குத் தண்ணீர் உள்ளது. தண்ணீரின் மேற்பரப்பு கோளத்தின் மையத்திலிருந்து 4 அங். கீழேயுள்ளதானால் வட்ட வடிவான நீரின் மேற்பரப்பினது விட்டத்தைக் காண்க.

13. உரு 560, **வ** ஐ உச்சியாக உடைய வட்டக் கூம்பினுடைய வெட்டு முகத்தையும் (இதை அதனுடைய அச்சு **வந** ஊடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தினால்) கூம்பைச் சுற்றி வரைந்த 5 அங். ஆரையுள்ள கோளத்தின் வெட்டு முகத்தையுங் குறிக்கின்றது; கூம்பினுடைய அடியாரை 3 அங். எனின் கூம்பினது உயரம் **வந** ஐக் காண்க.

14. உரு 560 இல் **வக = வம** = 10 ச.மீ., வட்டம் **வகம** இனது விட்டம் 12 ச.மீ. எனின் **வந, கம** களுடைய நீளங்களைக் காண்க. (**ய** மையமாகுக; **யந** = அ அலகுகள், **கந** = இ அலகுகள் எனக்கொள்க.)

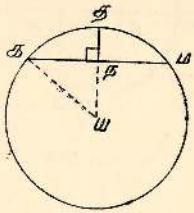


உருவம் 560

[15] உரு 560 இல் **வக = வம** = 13 அங்., **கம** = 10 அங். எனின் வட்டம் **வகம** இனது ஆரையைக் காண்க. (**ய** மையமாகுக; செங்கோண முக்கோணம் **யநக** ஐப் பயன்படுத்துக; ஆரை = அ அங். எனக் கொள்க.)

[16.] உரு 560 இல் **வகம** என்பது 6 ச. மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரு சம பக்க முக்கோணமாகுக. வட்டம் **வகம** இனது ஆரையைக் காண்க. (**ய** மையம் எனின் **Δ கயந** "அரைச்சமபக்கமுக்கோணமாகும்" என்பதைக் கவனிக்க.)

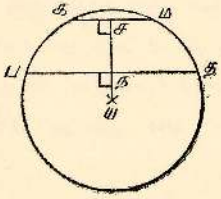
17. **ய** ஐ மையமாக உடைய ஒரு வட்டத்தினது நாண் **கம** இனது இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **நத, கம** ஐ **ந** விலும் வட்டத்தை **த** இலும் வெட்டுகின்றது; உரு 561 ஐப் பார்க்க. **கம** = 6 அங்., **நத** = 1 அங். எனின் வட்டத்தினது ஆரையைக் காண்க.



உருவம் 561

*18. உரு 561 இல் **கந** = **நம** = உ அங்., **நத** = எ அங். எனின் வட்டம் **கதம** வினது விட்டம் $\frac{உ^2 + எ^2}{எ}$ அங். என நிறுவுக.

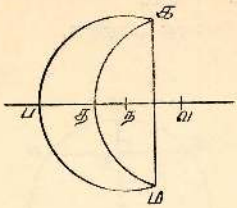
*19. உரு 562 இல் **கம, பத** என்பன 3 அங். இடைவெளி கொண்டமைந்த ஒரு வட்டத்துச் சமாந்தர நாண்கள். **கம** = 4 அங்., **பத** = 10 அங். எனின் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க. (மையம் **ய** ஐ எடுக்க; **யக, யப** களை இணைக்க; **யந** = அ அங். எனக்கொள்க. **யப** = இ அங். எனக் கொள்க.)



உருவம் 562

*20. உரு 563 ஐப் பார்க்க; **ந, வ** களை மையங்களாகக் கொண்ட சம ஆரையுள்ள **கபம, கதம** ஆகிய இரு வட்டவிற்களைக்கொண்ட ஒரு பிறை உண்டாக்கப்படுகின்றது; **கம** இன் இருசம வெட்டிச் செங்குத்து பிறையை

ப, த களில் வெட்டுகின்றது ; **பத** = 5 ச.மீ., **கம** = 12 ச.மீ. **நவ** = **பத** என நிறுவுக ; விற்களின் ஆரைகளைக்காண்க.



உருவம் 563

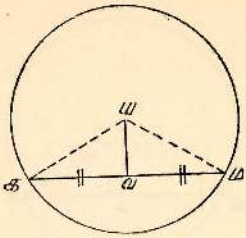
*21. 6 அங்., 8 அங். ஆரைகள் கொண்ட இரு கோளங்கள் தம்முடைய மையங்களுக்கிடை 10 அங். இடைவெளி கொண்டமைந்துள்ளன. கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுமிடத்தில் உள்ள வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க. கோளங்களின் மையங்களிலிருந்து இவ்வட்டத்தினது தளம் உள்ள தூரங்களைக் காண்க.

*22. 13 அங்குல விட்டமுள்ள ஓரரைக் கோளக் கிண்ணத்தினுள் 3 அங். × 4 அங்குல மெல்லிய செவ்வகத் தகடொன்று கிடைத்தளமாய்க் கிடக்கின்றது. கிண்ணத்தின் மிகப்பதிந்த புள்ளியிலிருந்து தகட்டின் மையம் உள்ள உயரத்தைக் காண்க.

23. 3 அங்குல விட்டமுடைய கிடைத்தளமான ஒரு வட்டத்தின் மையம் **ய** ; **யக** $2\frac{1}{2}$ அங். நீளமுள்ள கிடையான ஒரு கோடு. **வ** என்னும் புள்ளி **க** இற்கு நிலைக்குத்தாக மேல் 2 அங்குல உயரத்தில் உள்ளது. வட்டம், புள்ளி **வ** என்பவற்றுக்கூடாகச் செல்லும் மேற்பரப்பைக்கொண்ட கோளத்தினது மையம் **ப** எனின், **பய** இனது நீளத்தையும் கோளத்தினது ஆரையையுங் காண்க.

தேற்றம் 42

ஒரு வட்டத்தின் மையத்தை அதன் விட்டமல்லாத ஒரு நாணினது நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் நேர்கோடு அந்நாணிற்குச் செங்குத்தாகும்.



உருவம் 564

தரவு. **ய.** மையமான ஒரு வட்டம். **வ ஐ** நடுப்புள்ளியாகவுடைய ஒரு நாண் ; இதில் **வ** உம் **ய** உம் வெவ்வேறு புள்ளிகள்.

மேற்கோள். ∠ **யவக** ஒரு செங்கோணம்.

கருவி. **யக, யம** களை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **யவக, யவம** என்பவற்றில்,

யக = யம ஆரைகள்,

கவ = மவ தரவு,

யவ = யவ,

∴ △ கள் **யவக / யவம** சர்வசமன் பபப.

∴ ∠ **யவக = ∠ யவம.**

ஆனால் இவை ஒரு நேர்கோட்டு அடுத்துள கோணங்களாகும்.

∴ ∠ **யவக** ஒரு செங்கோணமாகும்.

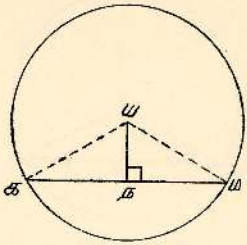
கிளைத்தேற்றம். **ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாணினுடைய இருசம வெட்டிச் செங்குத்து அவ்வட்டத்தின் மையத்திற்கூடாகச் செல்கின்றது.**

அந்நாண் ஒரு விட்டமன்றெனின், வட்டத்தின் மையத்தை அந்நாணின் நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் கோடு அந்நாணின இருசமவெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

அந்நாண் ஒரு விட்டமெனின், அதனது நடுப்புள்ளி அவ்வட்டத்தின் மையமாகும்.

தேற்றம் 43

ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணுக்குச் செங்குத்தாய் வரையப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு அந்நாணை இருசமக்கூறிடும்.



உருவம் 565

தரவு. ய மையமான ஒரு வட்டம். ய இலிருந்து ஒரு நாண் கம உக்குள்ளா செங்குத்து **யந.**

மேற்கோள். கந = நம.

கருவி. யக, யம களை இணைக்க.

நிறுவல். Δ கள் **யநக, யநம** என்பவற்றில்,

யக = யம ஆரைகள்,

யந = யந

∠ யநக = ∠ யநம செங்கோணங்கள், தரவு.

∴ Δ கள் **யநக / யநம** **சர்வசமன்** செங். செம். ப.

∴ **கந = மந.**

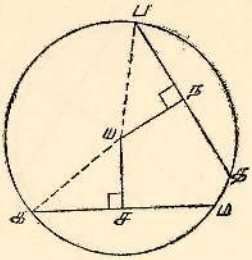
கிளைத்தேற்றம். ஒரு வட்டத்தின் சமாந்தர நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளி னுடைய ஒழுக்கு அவ்வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

நாண்கள் சமாந்தரமானமையால் நாண்களுள் ஒன்றுக்குச் செங்குத்தான விட்டம் மற்றவை ஒவ்வொன்றிற்கும் செங்குத்தாகும்; எனவே அவற்றை அது இருசமக்கூறிடுகின்றது.

மறுதலையாக, இவ்விட்டத்திலுள்ள எப்புள்ளியும் அவ்விட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக அப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நாணினது நடுப்புள்ளியாகும்.

தேற்றம் 44

ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் சமமெனின் அவை மையத்திலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளன.



உருவம் 566

தரவு. ய மையமான ஒரு வட்டம்; சமமான இரு நாண்கள் **கம, பத.**

மேற்கோள். ய இலிருந்து **கம, பத** களுக்குள்ள செங்குத்துக்கள் **யச யந** என்பன சமமாகும்.

கருவி. **யக, யப** களை இணைக்க.

நிறுவல். ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணுக்குள்ள செங்குத்து அந்நாணை இருசமக்கூறிடுகின்றதாதலின்,

கச $= \frac{1}{2}$ **கம, பந** $= \frac{1}{2}$ **பத** ;

ஆனால் **கம = பத** தரவு,

∴ **கச = பந.**

△ கள் **யசக, யநப** என்பவற்றில்,

யக = யப ஆரைகள்,

கச = பந நிறுவப்பட்டது.

∠ **யசக** = ∠ **யநப** செங்கோணங்கள், தரவு,

∴ △ கள் **யசக / யநப** சர்வசமனாகும் செங். செம். ப.

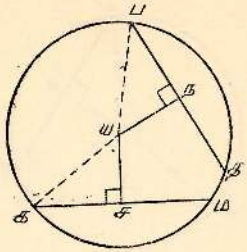
∴ **யச = யந.**

கிளைத்தேற்றம். சமனான வட்டங்களில் சமமான நாண்கள் மையங்களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளன.

நிறுவல் மேற்காட்டியதைப் போன்றது.

தேற்றம் 45

ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன வெனின் அவற்றினுடைய நீளங்கள் சமமாகும்.



உருவம் 567

தரவு. ய மையமான ஒரு வட்டம்: ய இலிருந்து தமக்குச் செங்குத்துக்களான **யச, யந** கள் சமமாகவுள்ள, **கம, பத** என்னும் இரு நாண்கள்.

மேற்கோள். **கம = பத.**

கருவி. **யக, யப** களை இணைக்க.

நிறுவல். △ கள் **யசக, யநப** என்பவற்றில்,

யச = யந	தரவு,
யக = யப	ஆரைகள்,
∠ **யசக = ∠ யநப**	செங்கோணங்கள், தரவு,
∴ △ கள் **யசக / யநப** சர்வசமனாகும்	செங்.செம்.ப.
∴ **கச = பந.**	

ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு உள்ள செங்குத்து அந்நாணை இருசமக்கூறிடுகின்றமையால்,

கச = ½ கம , பந = ½ பத,

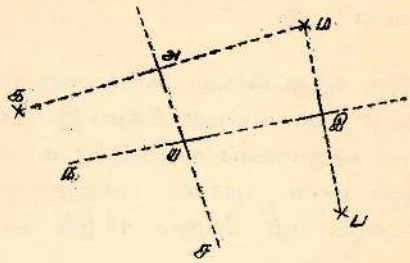
∴ **கம = பத.**

இளத்தேற்றம். சமமான வட்டங்களில் மையங்களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள நாண்கள் சமமாகும்.

நிறுவல் மேற்கூறியதைப் போன்றது.

தேற்றம் 46

ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத கொடுக்கப்பட்ட 3 புள்ளிகளுடே ஒரேயொரு வட்டமே செல்லும்.



உருவம் 568

தரவு. ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகள் **க, ம, ப.**

மேற்கோள். **க, ம, ப** களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாக ஒரேயொரு வட்டமே வரையலாம்.

கருவி. **கம, மப** களை இணைக்க.
கம, மப களின் இருசமவெட்டிச்செங்குத்துக்களான **அச, இந** களை வரைக.

நிறுவல். **கம, மப** என்பன ஒரு நேர்கோட்டில் இல்லாமையினால், **அச, இந** என்னும் செங்குத்துக்கள் சமாந்தரமல்ல; ஆதலின் இவை **ய** என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. **அச** என்பது **கம** உக்கு இருசமவெட்டிச் செங்குத்தாதலின் அது **க, ம** களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்காகும். இவ்வாறே **இந** என்பது **ம, ப** என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்காகும்.

∴ **அச, இந** என்பவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி **ய** என்பது **க, ம, ப** களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளது. ஆனால் **க, ம, ப** களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள எந்தப்புள்ளியும் **அச** இலும் **இந** இலும் கிடக்கவேண்டியது.

∴ **ய** என்னும் ஒரு புள்ளியே **க, ம, ப** களிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளது.

∴ **ய** ஐ மையமாகவும் **யக** ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் **க, ம, ப** களுக்கூடாகச் செல்கின்றது; அஃதன்றி **க, ம, ப** களுக்கூடாகச் செல்லும் வேறொரு வட்டமும் கிடையாது.

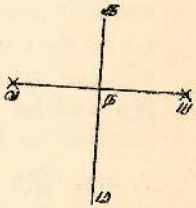
கிளைத்தேற்றம். வெவ்வேருன இரு வட்டங்கள் இரு புள்ளிகளுக்கு மேலான இடங்களில் ஒன்றையொன்று வெட்டா.

இருவெவ்வேருன வட்டங்கள் **க, ம, ப** என்னும் மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளுமெனின் **க, ம, ப** களுடாக ஒன்றுக்கு மேலான வட்டங்கள் செல்லல் கூடும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம். கமப என்னும் ஒரு முக்கோணம் கொடுக்கப்படின் வட்டம் **கமப** என்பது **Δகமப** இன் **சுற்றுவட்டம்** எனப் படும்; அதன் மையம் **சுற்றுமையம்** எனப்படும்; அதன் ஆரை **சுற்றுரை** எனப்படும்; 236 ஆம் பக்கம் பார்க்க. சுற்றுமையத்தையும் சுற்று வட்டத்தையும் அமைக்கும் வழி தேற்றம் 46 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒரு வட்டத்தின் வில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் மையத்தை அமைப்பதற்கு வில்லில் எவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் **க, ம, ப** களை எடுத்து **Δகமப** இன் சுற்றுமையத்தை அமைத்தாற் போதுமானது. ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளுடாக ஒரேயொரு வட்டமே வரையலாம் என்க.

ஓரச்சு பற்றிய சமச்சீர். ஒருருவத்தை ஒரு நேர்கோடு, **கம** வழியாக மடித்து ஒரு பகுதியை எஞ்சிய மற்றைப் பகுதியுடன் பொருந்தச் செய்யக் கூடுமெனின் அவ்வுரு **கம** வழி சமச்சீரானது எனப்படும்; **கம** என்னும் அந்நேர்கோடு அவ்வுருவின் **சமச்சீரச்சு** எனப்படும். இதிலிருந்து அவ்வுரு வின் ஓரரைப் பகுதியிலுள்ள ஒரு கோட்டினது நீளமோ ஒரு கோணத் தின் பருமனோ மற்றைப் பகுதியின் ஒத்த கோட்டுக்கோ ஒத்த பருமனுக்கோ சமனுகும் என்பது பெறப்படும்.

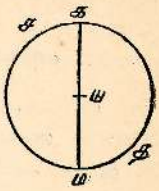


உருவம் 569

உரு 569 இல் அவ்வுரு **கம** வழி மடிக்கப்பட்ட பொழுது **ய** உடன் **வ** பொருந்துமெனினும், **கம** ஐ **வய** என்பது **ந** இடத்து வெட்டுமெனினும், ∠ **வநக** ∠ **யநக** வுடன் பொருந்தும்; எனவே ஒவ்வொன்றும் செங் கோணமாகும்; அத்துடன் **வந = யந** உமாகும்.

எனவே ஒரு சமச்சீரச்சான **கம** உக்கு **வ, ய** என்பன ஒத்த புள்ளிக ளெனின் **வய** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **கம** ஆகும். மறுதலை யாக **மய** இன் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **கம** ஆகின் **கம** என்னும் சமச்சீரச்சிற்கு **வ, ய** என்பன ஒத்த புள்ளிகளாகும்; இப்பொழுது நாம் **ய** ஐ, **கம** இல் **வ** இன் **விம்பம்** என்கிறோம்; **வ** ஐ, **கம** இல் **ய** இன் விம்பம் என்கிறோம்.

உரு 570 இல் வட்டம் **கசமத** இன் விட்டம் **கம** ஆகும் ; **ய** மையமாகும். இப்போது இவ்வுருவை நாம் **கம** வழி மடித்தோமாகில் அரைவட்டம் **கசம** இல் உள்ள எல்லாப்புள்ளிகளும் தம் புதிய நிலையிலும் **ய** இலிருந்து ஆரைக்குச் சமமான தூரத்திலேயே இருக்கும் ; எனவே அரைவட்டம் **கதம** இல் உள்ள புள்ளிகளுடன் பொருந்தும். **எனவே ஒரு வட்டம் எந்த விட்டவழியேனும் சமச்சீரானதாகும்.**



உருவம் 570

சர்வசமனான முக்கோணங்களால் நிறுவப்படக் கூடிய வட்டங்களின் அநேக பண்புகள் இவ்வுண்மையைக் கொண்டும் நிறுவப்படல்கூடும் :

உதாரணமாக தேற்றங்கள் 42, 43, ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களின் பொதுநாணானது மையங்களைத்தொடுக்கும் நேர்கோட்டினால் செங்கோணமாக இருசமக்கூறிடப்படுகின்றது என்ற உண்மை முதலியன.

பயிற்சி 57

1. ஒருமைய இரு வட்டங்களை **வயநச** என்னும் ஒரு நேர்கோடு **வ, ச** களிலும் **ய, ந** களிலும் வெட்டுகின்றது. **வய = நச** என நிறுவுக. (வட்டங்களின் மையத்திலிருந்து **வச** இற்குள்ள செங்குத்தை வரைக ; வேறு கருவி வேண்டியதில்லை.)

[2] **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் சமமான இரு நாண்கள் **கம, பத** என்பன ; ∠ **கயம = ∠ பயத** என நிறுவுக.

3. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினதுநாண் **கம** இனது நடுப் புள்ளி **ந** ; யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ** இற்கு **நய** நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ **கவம** ஐ **வந** இருசமக்கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

[4] **வமநச** என்னும் வட்டத்தின் மையம் **ய**. **வம = நச** எனின் **வந = மச** என நிறுவுக. (**ய** வை **வ, ம, ந, ச** என்பவற்றுடன் இணைக்க.)

5. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தினுள் ஒரு புள்ளி **த** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ; ஒரு நாண் **கதம** ஐ **கத = தம** ஆகுமாறு எவ்வாறு அமைக்கலாம்.

6. மையங்கள் **க, ம** களை உடைய இரு வட்டங்கள் **அ, இ** களில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **கம** ஆனது **அஇ** ஐ செங்கோணமாக இருசமக்கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

[7] இரு வட்டங்கள் **அ, இ** களில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன. **வயநச** என்னும் **அஇ** இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு, ஒரு வட்டத்தை **வ, ச** களிலும் மற்றை வட்டத்தை **ய, ந** களிலும் வெட்டுகின்றது. **வய = நச** என நிறுவுக. (எண் 6 ஐப் பயன்படுத்துக.)

8. மையங்கள் **க, ம** களையுடைய இருவட்டங்கள் **ப, த** களில் வெட்டுகின்றன ; **வபய** என்னும் **கம** இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு வட்டங்களை **வ, ய** களில் வெட்டுகின்றது. **வய = 2கம** என நிறுவுக.

[9] **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் நாண்கள் **கவம, பவத** என்பன. ∠**கவப** ஐ **யவ** இருசமக்கூறிடுகின்றதெனின் **கம = பத** என நிறுவுக. (**கம, பத** களுக்குச் செங்குத்தாக **யச, யந** என்பவற்றைக் கீறுக.)

10. ஒரு வட்டத்தின் சமமான இரு நாண்கள் **கம, பத** என்பன ; **வ, ந** என்பன அவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள். **கம, பத** என்பவற்றுடன் **வந** சமமான கோணங்களை அமைக்கின்றதென நிறுவுக.

[11.] கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடைய மாறுகின்ற நாண் **வய** ஆகும். **வய** இனது நடுப்புள்ளியினுடைய ஒழுக்கினைக் காண்க.

12. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது நாண் **கம** என்பது **வ** இற்கு **மவ = 2கம** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **யவ² = யக² + 6கம²** என நிறுவுக. (**கம** இற்குச் செங்குத்தாக **யந** ஐ வரைக. **யந** ஐ இ அலகுகளாகக்கொள்க ; **கந** ஐ உ அலகுகளாகக்கொள்க.)

[13] ஒரு வட்டத்தில் **க, ம, ப** கள் ∠**மகப** ஒரு செங்கோணமாகுமாறு அமைந்த மூன்று புள்ளிகளாகும். **மப** இனது நடுப்புள்ளி வட்டத்தினது மையமென நிறுவுக. (**கம, கப** ஆகியவற்றினது இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்களை வரைக.)

14. ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று **த** இல் இருசமக்கூறிடுகின்றன. **த** அவ்வட்டத்தினது மையமென நிறுவுக. (இயலுமானால் **த** ஐ மையத்துக்கு இணைக்க.)

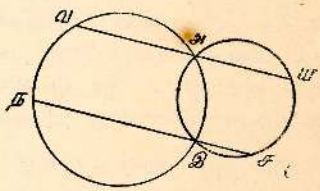
[15] **கமபத** கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம். எவ்வாறு, ஒன்று **க, ம** களுக்கூடாகச் செல்வதாயும் மற்றையது **ப, த** களுக்கூடாகச் செல்வதாயுமுள்ள ஈர் ஒருமைய வட்டங்களை அமைக்கலாம் என்பதைக் காட்டுக.

(i) ஒன்றுக்கு மேலான விடை உண்மையானால், (ii) இரண்டுக்கு மேலான வெவ்வேறு வட்டங்கள் கீற முடியாதெனில், (iii) ஒரு விடையுமே இல்லையானால் **கமபத** ஐப்பற்றி என்ன கூறுவீர் ?

16. நாற்கோணம் **கமபத** இன் மூலைவிட்டங்கள் **ய** இல் சந்திக்கின்றன. **க, ய, ம ; ம, ய, ப ; ப, ய, த ; த, ய, க** ஆகியவற்றிற் கூடாக வட்டங்கள் கீறப்பட்டுள்ளன. அவற்றினுடைய நான்கு மையங்களும் ஒரிணைகரத்தின் உச்சிகளென நிறுவுக.

17. உரு 571 இல் **வஅய, நஇச** சமாந்தரமெனில் **வய = நச** என நிறுவுக. (மையங்களிலிருந்து **வய, நச** களுக்குச் செங்குத்துக்கள் கீறுக.)

[18] உரு 571 இல் உள்ள வட்டங்களில் **க, ம** மையங்களெனின் **வய** ஆனது 2 **கம** விலும் பெரிதன்று என நிறுவுக.

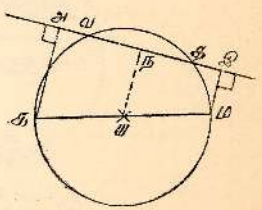


உருவம் 571

19. கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகள் **கம, கப** களிலிருந்து (தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கம, கப** களிலிருந்து) மாறும் வட்டமொன்று சமமான வெட்டுத் துண்டுகளை வெட்டுகின்றது. அவ்வட்டத்தின் மையத்தினது ஒழுக்கினைக் காண்க.

[20] **கமப** ஒரு கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம். **ம, ப** களுக்கூடாகச் செல்லக் கூடியதாயும் **கம, கப** களிலிருந்து – தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கம, கப** களிலிருந்து – சமமான வெட்டுத்துண்டுகளை வெட்டக்கூடியதாயு முள்ள ஒரு வட்டத்தை எப்படி அமைப்பதெனக்காட்டுக.

21. உரு 572 இல் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளான **க, ம** களிலிருந்து ஒரு நாண் **வத** விற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **கஅ, மஇ** என்பனவாகும். **அவ = தஇ** என நிறுவுக.

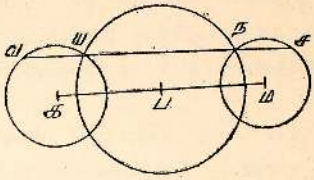


உருவம் 572

கம இற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் **வ, த** என்பன இருக்குமேல் அவ் விடை உண்மையாயிருக்குமா? (வெட்டுத்துண்டுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.)

[22] **க, ம** களை மையமாகவுடைய இரு வட்டங்கள் **அ, இ** களில் வெட்டுகின்றன. **கம** இற்கு நடுப்புள்ளி **ச. அ** இற்கூடாக **சஅ** விற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள கோடு வட்டங்களை மீண்டும் **வ, ய** களில் வெட்டுமானால் **அவ = அய** என நிறுவுக. (**வய** இற்கு **க, ம** களிலிருந்து செங்குத்துக்களைக் கீற வெட்டுத்துண்டுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.)

23. உரு 573 இல் மூன்று சமமற்ற வட்டங்களின் மையங்கள் **க, ப, ம** ஆகும். **கப = பம** எனின் **வய = நச** என நிறுவுக. (**வச, கம** இற்குச் சமாந்தரமன்று.)



உருவம் 573

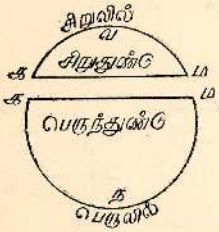
*24. நிலையான ஒரு வட்டத்து மாறும் இரு நாண்கள் **வகய, நகச** என்பன ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் செங்கோணமாக வெட்டிக்கொள்கின்றன. **வய² + நச²** மாறிலி என நிறுவுக.

25. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது நாண்கள் **கம, பத** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **அ, இ** கள். **அ, இ** களிலிருந்து **பத, கம** என்பவற்றிற்கு முறையே அமைந்த செங்குத்துக்கள் **அந, இச** என்டனவாகும். **இச** ஐ **அந** ஆனது **வ** இல் வெட்டினால் **யவ** உம் **அஇ** உம் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகின்றன என நிறுவுக.

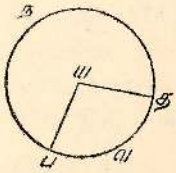
26. ஒரு வட்டத்தினது விட்டம் **கம** இல் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ**; **யவச** என்பது ∠**கவய** = 45° ஆகுமாறுள்ள ஒரு நாண். **கம² = 2வய² + 2வச²** என நிறுவுக.

ஒரு வட்டத்தினுடைய கோணத்தின் பண்புகள்

வரைவிலக்கணம். (1).—ஒரு வட்டத்தினது பரிதியில் யாதாயினும் ஒரு பாகம் வட்டத்தின் வில்லெனப்படும். அது அரைப்பரிதியிற் குறைந்தது எனின் **சிறு**வில் எனவும் கூடியதெனின் **பெரு**வில் எனவும் சொல்லப்படும்.



உருவம் 574



உருவம் 575

(2) ஒரு வட்டத்தினது நாணினாலும் அது வெட்டிய விற்கள் இரண்டில் ஒன்றினாலும் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட தளவுரு அவ்வட்டத்தினது **துண்டு** எனப்படும்; அரைவட்டத்திலும் அது சிறிதெனின் **சிறு**துண்டு எனவும் பெரியதெனின் **பெருந்**துண்டெனவுஞ் சொல்லப்படும். உரு 574 இல் நாண் **கம** இனாலும் சிறுவில் **கவம** இனாலும் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட உரு சிறுதுண்டாகும்; நாண் **கம** இனாலும் பெருவில் **கநம** இனாலும் எல்லைப் படுத்தப்பட்ட உரு பெருந்துண்டாகும்.

(3) ஒரு வட்டத்தின் ஈராரைகளாலும் அவை வெட்டிய விற்கள் இரண்டில் ஒன்றினாலும் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட உரு ஒரு வட்டத்தின் **ஆரைச்சிறை** யெனப்படும்.

உரு 575 இல் ஆரைகள் **யப, யத** என்பவற்றாலும் வில் **பவத** என்பதனாலும் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட உரு ஓராரைச் சிறையாகும்; அவ்வாறே, ஆரைகள் **யப, யத** என்பவற்றாலும் வில் **பநத** இனாலும் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட உருவும் ஆகும்.

(4) பல புள்ளிகளினூடாகச் செல்லக்கூடியதாக ஒரு வட்டம் வரையக் கூடுமெனின் அப்புள்ளிகள் ஒரு பரிதியிலுள்ளன எனப்படும்.

ஒரு நாற்கோணத்தின் நான்கு உச்சிகளும் ஒரு பரிதியிலுள்ளனவெனின் அந்நாற்கோணம் ஓர் **ஒருவட்டநாற்கோணம்** எனப்படும்

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 576 இல் **ய** வட்டத்தின் மையமாகும். **வயந** ஒரு நேர்கோடாகும்.

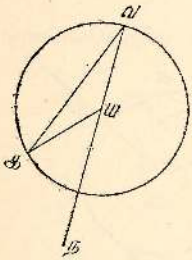
(i) உருவில் இரு சமமான கோணங்கள் சொல்லுக.

(ii) ∠**கவந** = 24° எனின் ∠**கயந** ஐக் காண்க.

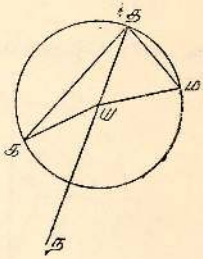
(iii) ∠**கயந** = 52° எனின் ∠**கவந** ஐக் காண்க.

(iv) ∠**கவந** = அ° எனின் ∠**கயந** ஐக் காண்க.

ஒவ்வொரு விடைக்குங் காரணங்கள் காட்டுக.



உருவம் 576



உருவம் 577

2. உரு 577 இல் வட்டத்தினது மையம் **ய**. **தயந** ஒரு நேர்கோடு.

(i) உருவில் இருசோடி சமமான கோணங்கள் சொல்லுக.

∠**கதந** = 20°, ∠**மதந** = 50° எனின் ∠**கயந** ஐயும் ∠**மயந** ஐயும் காண்க. ∠**கதம** ஐயும் ∠ **கயம** ஐயுங் காண்க.

(iii) ∠**கதந** = அ°, ∠**மதந** = இ° எனின் ∠**கதம** ஐயும் ∠**கயம** ஐயும் அ, இ களில் காண்க.

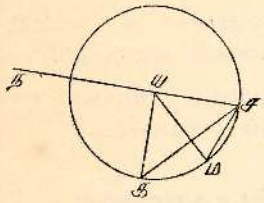
(iv) **கயம** ஒரு நேர்கோடு எனின் ∠**கதம** ஐப் பற்றி என்ன கூறுவீர்?

3. உரு 578 இல் வட்டத்தினது மையம் **ய. சயந** ஒரு நேர்கோடு.

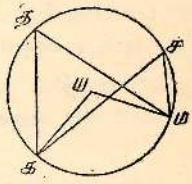
(i) உருவில் இருசோடி சமமான கோணங்கள் சொல்லுக.

(ii) ∠**கசந** = 30°, ∠ **மசந** = 70° எனின் ∠ **கயந** ஐயும் ∠ **மயந** ஐயுங் காண்க. ∠**கசம** ஐயும் ∠ **கயம** ஐயுங் காண்க.

(iii) ∠ **கசந** = அ°, ∠ **மசந** = இ° எனின் ∠ **கசம** ஐயும் ∠ **கயம** ஐயும், அ, இ களிற் காண்க.



உருவம் 578

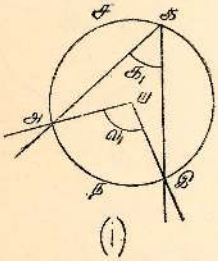


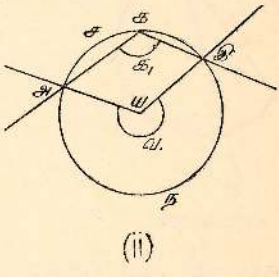
உருவம் 579

4. உரு 579 இல் வட்டம் **கதசம** இன் மையம் **ய**. 2 (iii), 3 (iii) ஆகியவற்றில் நிறுவப்பட்ட உண்மைகளைப் பயன்படுத்தி ∠ **கயம**, ∠ **கதம**, ∠**கசம** என்னுங் கோணங்களினுடைய பருமன்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பினைப்பற்றிக் கூறுக.

இவ்வுண்மையை ஒரு பொதுக் கூற்றில் எடுத்துச் சொல்க.

ஒரு வட்டத்திலுள்ள மையக்கோணமும் பரிதிக்கோணமும்





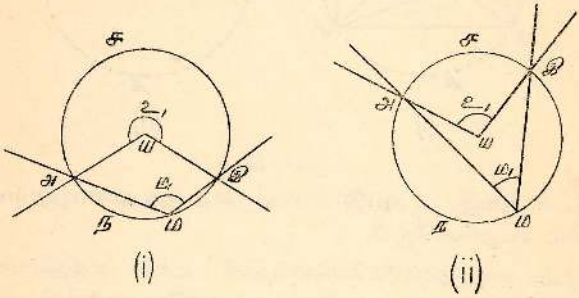
உருவம் 580

உரு 580 (i), (ii) இல் ∠ வ, வட்டத்தின் மையம் **ய** இல் உச்சியைக் கொண்ட ஒரு கோணமாகும். **இது வில் அநஇ இலே நிற்கும் மையக் கோணம்** எனப்படும்; தன் உச்சி **க** ஐ வட்டத்தினது பரிதியில் ஒரு புள்ளியாகக் கொண்ட ∠ **க**, ஆனது **வில் அநஇ இலே நிற்கும் பரிதிக் கோணமெனப்படும்.**

இவ்வாறே உரு 580 இல் ∠ வ, ∠ க, என்பன ஒரே வில்லிலே நிற்கும் மையக்கோணமும் பரிதிக்கோணமுமாம்.

கோணங்கள் நிற்கும் வில் அநஇ ஐ மற்றை வில் அசஇ இனின்றும் பிரித்துக்காட்டுவதற்காக மூன்று எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்திப் பெயரிடுதல் வேண்டும்.

உரு 581 (i), (ii) ஆகியவற்றைப் பார்க்க ; வில் அசஇ இலே நிற்கும் மையக்கோணம் உ, ஆகும் ; வில் அசஇ இலே நிற்கும் பரிதிக்கோணம் ம, ஆகும்.



உருவம் 581

இவ்வுண்மையை நாம் வில் அசஇ மையத்தில் ∠ உ, ஐ எதிரமைக்கின்றது என்றும் பரிதியிலுள்ள புள்ளியில் ∠ ம, ஐ எதிரமைக்கின்றது என்றும் சொல்கின்றோம்.

ஒரு கோணம் எவ்வில்லின் மேல் நிற்கின்றது என்பதை ஒரு நோக்கிற் பார்த்தறிவதற்குப் பழகுதல் அவசியமானது :

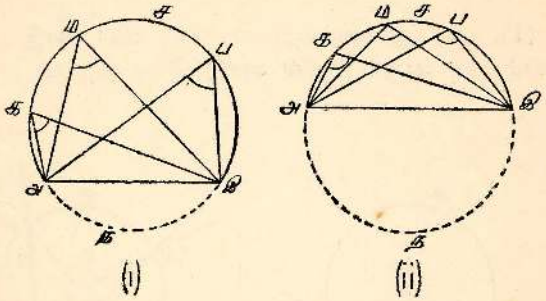
கோணத்தின் இரு சிறைகள் பரிதியில் வெட்டும் இரு புள்ளிகளையும் பார்க்க.

உரு 581 இல் ∠ உ, இன் சிறைகள் பரிதியை அ, இ களில் வெட்டுகின்றன ; ∠ உ, இற்கு உட்புறமாகக் கிடப்பது வில் அசஇ அன்றி அநஇ அன்று. எனவே, நாங்கள் ∠ உ, ஆனது வில் அசஇ இலே நிற்பதாகச் சொல்கின்றோம்.

இவ்வாறே உரு 581 இல் உள்ள ∠ ம, இனுடைய சிறைகள் பரிதியை அ, இ களில் வெட்டுகின்றன ; ∠ ம, இற்கு உட்புறமாகக் கிடப்பது வில் அசஇ. எனவே நாங்கள் ∠ ம, ஆனது வில் அசஇ இலே நிற்கின்றதெனச் சொல்கின்றோம்.

ஒருதுண்டுக்கோணங்கள்

உரு 582 (i), (ii) **அசஇந** என்னும் ஒரு வட்டத்தைக் காட்டுகின்றன. **அசஇ** என்பது நாண் **அஇ** ஆலும் வில் **அசஇ** ஆலும் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு வட்டத்தினது துண்டாகும். வில் **அசஇ** இல் எவையேனும் புள்ளிகள் **க, ம, ப** ஆகும்.



உருவம் 582

∠ **அகஇ**, ∠ **அமஇ**, ∠ **அபஇ** என்பவற்றை **ஒரு துண்டிலுள்ள** கோணங்களென நாம் கூறுகின்றோம்.

யாதாயினும் ஒரு துண்டுக்கோணத்தின் உச்சி அத்துண்டை எல்லைப்படுத்தும் வில்லிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும் ; அக்கோணத்தின் சிறைகள் அத்துண்டை எல்லைப்படுத்தும் நாணினுடைய முனைகளுக்கூடாகச் செல்கின்றன.

துண்டு **அசஇ** இலுள்ள எந்தக் கோணமும் வில் **அநஇ** இன் மேலன்றி, துண்டை எல்லைப்படுத்தும் வில் **அசஇ** யின் மேலே நிற்கவில்லையென்பதை அவதானிக்கவும்.

வாய்முறைப் பயிற்சிக்குரிய உதாரணங்கள்

ஒரு கரும்பலகையில் ஒரு பெரும் வட்டத்தை வரைந்து அதன் பரிதியில் **க, ம, ப, த, ந, வ, ச, ய** ஆகிய எட்டுப் புள்ளிகளை ஒழுங்கற்ற இடைவெளிதூரங்கள் கொண்டிருக்குமாறு அமைக்க.

ஒவ்வொரு சோடி புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோட்டினால் இணைத்துப் பின்வருங் கேள்விகளை ஆராய்க :

(i) கோணங்கள் **மபந, யகம** எவ்வில்லில் நிற்கின்றன ?

(ii) விற்கள் **மபத, நசக** ஆகியவற்றின் மேலுள்ள கோணங்கள் யாவை?

(iii) ∠ **நகப**, ∠ **யமத** ஆகியவை நிற்கின்ற வில்லின்மேல் என்னென்ன கோணங்கள் உள்ளன ?

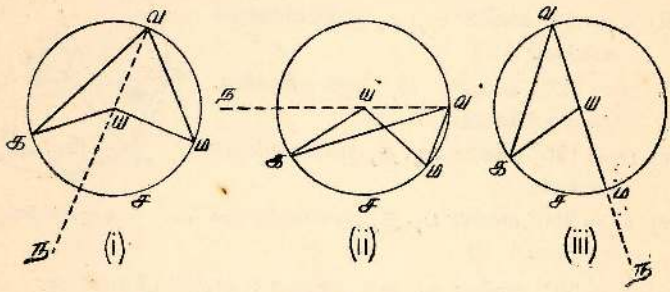
(iv) நாண்கள் **நப, யத** ஆகியவற்றின் மேல் எக்கோணங்கள் உள்ளன ?

(v) நாண் **கந** இன் மேலே நின்று ஒரே வில்லிலே நிற்கா இரு கோணங்கள் சொல்லுக.

(vi) துண்டு **கமத, யநம** ஆகியவற்றிலுள்ள கோணங்கள் யாவை ?

தேற்றம் 47

ஒரு வட்டத்தின் வில்லானது மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம், பரிதியின் எஞ்சிய பாகத்திலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் அமைக்கும் கோணத்திலும் இருமடங்காகும்.



உருவம் 583

தரவு. ய மையமான ஒரு வட்டம். அதன் சிறுவில் **கசம**; பரிதியின் எஞ்சிய பாகத்தில் ஒரு புள்ளி **வ**.

மேற்கோள். $\angle$ கயம $= 2$ $\angle$ கவம.

கருவி. வய ஐ இணைத்து ந இற்கு நீட்டுக.

நிறுவல். யக $=$ யவ — ஆரைகள்,

$\therefore$ $\angle$ யகவ $=$ $\angle$ யவக — இருசமபக்க $\triangle$, அடிக்கோணங்கள்.

ஆனால் $\angle$ நயக, $\triangle$ கயவ இன் ஒரு புறக்கோணமாகும்.

$\therefore$ $\angle$ நயக $=$ $\angle$ யகவ $+$ $\angle$ யவக,

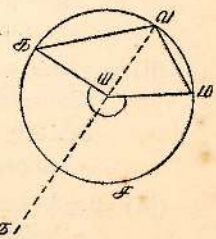
$\therefore$ $\angle$ நயக $= 2$ $\angle$ யவக.

இவ்வாறே, $\angle$ நயம $= 2$ $\angle$ யவம.

$\therefore$ உரு 583 (i) இற் கூட்டவும், உரு 583 (ii) இற் கழிக்கவும் $\angle$ கயம $= 2$ $\angle$ கவம.

உரு 583 (iii) இல் நீட்டிய வய, ம இற்கூடாகச் செல்கின்றவிடத்து, $\angle$ மயக $=$ $\angle$ நயக $= 2$ $\angle$ யவக

நிறுவப்பட்டது.

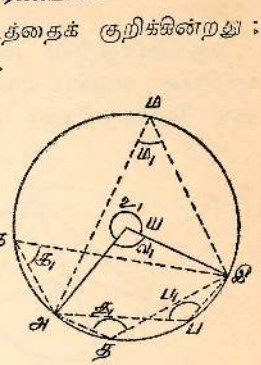


உருவம் 584

உரு 584 இல் வில் **கசம** ஒரு பெருவில்லாகும்; வில் **கசம** இலே நின்று மையத்தில் அமைந்த **கயம** பின்வளைகோணமாகும். இவ்வகையிலும் வில் **கசம** ஓர் அரைவட்டமாய் இருக்கும் வகையிலும் நிறுவலானது உரு 583 (i) இல் உள்ளதைப் போன்றதேயாகும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

உரு 585 ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது ; கீறிட்ட எழுத்துக்கள் கோணங்களைக் குறிக்கின்றன.



உருவம் 585

(i) $வ_1 = 110°$ எனின் $க_1$, $ம_1$ ஆகிய வற்றைக் காண்க.

(ii) $ம_1 = 62°$ எனின் $வ_1$, $க_1$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) $க_1 = 52°$ எனின் $ம_1$ ஐக் காண்க. காரணங்காட்டுக.

(iv) $ப_1 = 125°$ எனின் $உ_1$, $த_1$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(v) $உ_1 = 260°$ எனின் $ப_1$, $த_1$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(vi) $க_1 = 50°$ எனின் $வ_1$ ஐக் காண்க ; அதன் பின்னர் $உ_1$, $ப_1$ ஆகிய வற்றைக் காண்க. $க_1 + ப_1$ எவ்வளவு ?

(vii) $வ_1 = 108°$ எனின் $ம_1$, $த_1$ ஆகியவற்றைக் காண்க. காரணங் காட்டுக ; $ம_1 + த_1$ எவ்வளவு ?

(viii) $க_1 = 48°$ எனின் $த_1$ ஐக் காண்க.

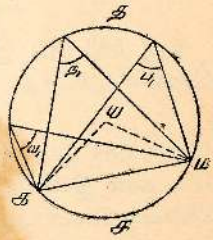
(ix) $ப_1 = 138°$ எனின் $ம_1$ ஐக் காண்க.

(x) $ம_1 = 90°$ எனின் $வ_1$ எவ்வளவாய் இருக்கும் ? இவ்விடையைப் பெறுவதற்கு இவ்வுருவை எவ்வாறு கீற வேண்டும்.

(xi) ∠**கஅம** இலும் இருமடங்கான ஒரு கோணத்தை அமைப்பதற்கு உருவில் எப்புள்ளிகளை இணைக்க வேண்டும்.

(xii) உருவிலே ∠**தயப** இலும் அரைப்பங்களவுள்ள கோணங்கள் சொல்லுக.

2. உரு 586 இல் ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது பெருந் துண்டு கதம இலுள்ள கோணங்கள் $வ_1$, $ந_1$, $ப_1$ என்பனவாகும். $வ_1 = ந_1 = ப_1$ என நிறுவுக.



உருவம் 586

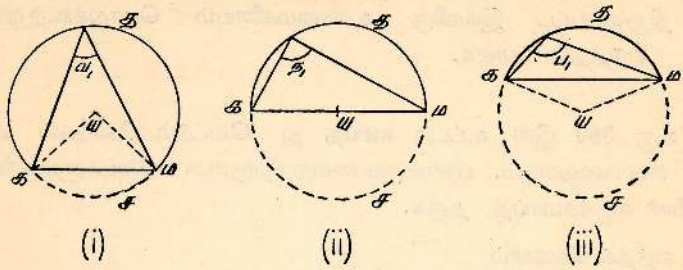
(i) $வ_1$ ஐப்பற்றி உமக்கு என்ன தெரியும் ? காரணங் காட்டி நிறுவலை முடிவாக்குக.

(ii) ஒரு வட்டத்துச் சிறுதுண்டு **கதம** இலே மூன்று கோணங்கள் $வ_1$, $ந_1$, $ப_1$ ஆகியவற்றைக் காட்டும் ஒருருவை வரைந்து அவை என் சமமென விளக்குக.

(iii) நிறுவப்பட்ட உண்மையை ஒரு பொதுக்கூற்று உருவில் எடுத்துக் கூறுக.

(vi) $வ_1 = 40°$ எனின் △**கயம** இன் கோணங்களைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட 5 ச. மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு கம இல் 40° கோணம் கொள்ளக்கூடியதான ஒரு வட்டத்தினது துண்டை அமைக்க.



உருவம் 587

3. உரு 587 (i) இல் கதம ஒரு வட்டத்தினது பெருந்துண்டாகும்; உரு 587 (ii) இல் கதம அரைவட்டமாகும்; உரு 587 (iii) இல் கதம ஒரு வட்டத்தினது சிறுதுண்டாகும்.

(i) ∠வ, கூர்ங்கோணமென நிறுவுக.

(ii) ∠ந, செங்கோணமென நிறுவுக.

(iii) ∠ப, விரிகோணமென நிறுவுக.

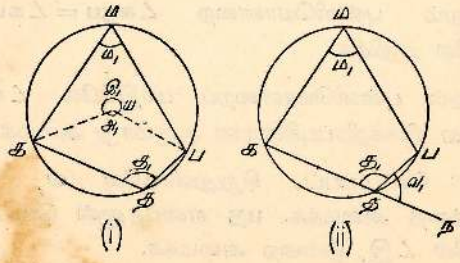
இவ்வுண்மைகளைப் பொதுக் கூற்றுக்களில் எடுத்துச்சொல்க.

4. (i) உரு 588 (i) இல் ∠கள் ம, த, என்பன ஒருவட்ட நாற்கோணம் கமபத வின் எதிர்க்கோணங்களாகும்.

ம, + த, = 2 செங்கோணங்களென நிறுவுக.

(ii) உரு 588 (ii) இல் வ, கத ஐ நீட்டியதாலமைந்த ஒருவட்ட நாற்கோணத்துப் புறக்கோணமாகும்.

வ, = ம, என நிறுவுக.



உருவம் 588

(i) உரு 588 (i) இல் ம, த, என்பவற்றைப்பற்றி என்ன அறிவீர்?

(ii) உரு 588 (ii) இல் **வ, த,** என்பவற்றைப் பற்றி என்ன அறிவீர் ?

(iii) நிறுவப்பட்ட இவ்விரு உண்மைகளையும் பொதுக்கூற்றுக்களில் எடுத்துச் சொல்க.

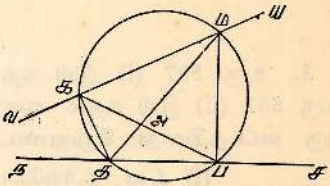
5. உரு 589 இல் வட்டம் **கமபத** ஐ வெட்டும் கோடுகள் **வகமய, நதபச** என்பனவாகும். பின்வருவனவற்றிற்குள்ள விடைகளுக்குரிய காரணங்களைச் சுருக்கமாய்த் தருக.

(i) எந்தக் கோணம்

(1) ∠**தகப** (2) ∠**மதப** இற்குச் சமமாயுள்ளது ?

(ii) எக்கோணம்

(1) ∠**யமப** (2) ∠**மகத** இற்குச் சமம் ?



உருவம் 589

(iii) **மத** ஒரு விட்டம் எனின் என்ன பெறப்படும் ?

(iv) ∠**கமத** = ∠**பமத** எனின் சமமான பிறிதொரு சோடிக் கோணங்கள் சொல்லுக.

(v) **அப** = **அத** எனின் சமமான நான்கு கோணங்கள் சொல்லுக.

6. பெரியதொரு வட்டம் வரைந்து அதன் பரிதியில் ஒழுங்காக **க, ம, ப, த** என்னும் நான்கு புள்ளிகளைக் குறிக்க. பின்வருவனவற்றிற்கு உமது உருவைப் பயன்படுத்துக :—

(i) **ந** என்னும் புள்ளியொன்றை ∠**கநப** = ∠**கமப** ஆகுமாறு பரிதியிலே குறிக்க.

(ii) **வ** என்னும் புள்ளியொன்றைப் பரிதியிலே ∠**கவம,** ∠**கபம** என்பவை மிகைநிரப்புகின்றன ஆகுமாறு அமைக்க.

(iii) **மப** ஆல் வெட்டப்பட்ட சிறுதுண்டிலே **வ,** என்னும் ஒரு கோணத்தை அமைக்க. **பத** என்பதனால் வெட்டப்பட்ட பெருந் துண்டிலே ∠**இ,** ஒன்றை அமைக்க.

(iv) ∠**மபத** இற்குச் சமமான, நாற்கோணம் **கமபத** இன் இரு புறக்கோணங்களை **உ,** எ, என்னும் எழுத்துக்களாற் குறிக்க.

7. பின்வரும் பயிற்சி ஒவ்வொன்றிற்கும் உரு 589 இன் வரைப்பட மொன்று வரைக. வரைந்து அதில் விடைகளைக் காட்டுக.

(i) ∠வகத = 100°, ∠தகப = 30° எனின் எல்லாக் கோணங்களையும் காண்க.

(ii) ∠கதம = 60°, ∠தமப = 25° எனின் எல்லாக் கோணங்களையும் காண்க.

(iii) ∠நதம = 140°, ∠யமத = 130° எனின் எல்லாக் கோணங்களையும் காண்க.

(iv) ∠நதக = 72°, ∠கமத = 30°, ∠கபம = 40° எனின் எஞ்சிய கோணங்களைக் காண்க.

(v) ∠வகத = 115°, ∠கதம = 50°, ∠மஅப = 85° எனின் எஞ்சிய கோணங்களைக் காண்க.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 58

1. ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு நாண்கள் கம, பத என்பன வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளியிற் செங்கோணமாக வெட்டிக்கொள்கின்றன. ∠மகப = 35° எனின் ∠கமத ஐக் காண்க.

2. வட்டம் கமபத இன் ஒரு விட்டம் கம. ∠கதப = 127° எனின் ∠மகப ஐக் காண்க.

[3] வட்டம் கமபத இன் ஒருவிட்டம் கப. ∠மதப = 25° எனின் ∠கபம ஐக் காண்க.

4. கமபத ஒரொருவட்ட நாற்கோணம். ∠கதப = 70°, ∠கபத = 50° எனின் ∠பமத ஐக் காண்க.

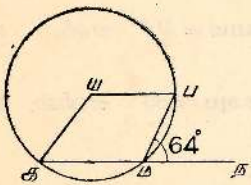
[5] ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் கம, பத என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது ந இற் சந்திக்கின்றன. ∠நகத = 31°, ∠கநப = 42° எனின் ∠நமப ஐக் காண்க.

6. ஒரொருவட்ட நாற்கோணம் கமபத இனுடைய மூலைவிட்டங்கள் ந இலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. ∠மகப = 42°, ∠மநப = 114°, ∠கதம = 33° எனின் ∠மபத ஐக் காண்க.

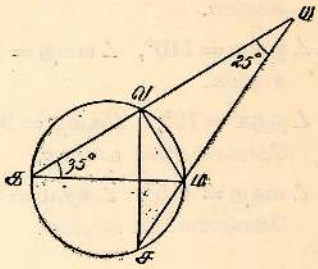
[7] கமபத ஒரொருவட்டநாற்கோணம்; நகமவ ஒரு நேர்கோடு. ∠நகத = 82°, ∠வமப = 74°, ∠மதப = 50° எனின் கப, மத என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.

[8] ய மையமான ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரைந்த முக்கோணம் கமப ஆகும். ∠கயப = 130°, ∠மயப = 150° ஆக Δகமப இனுள்ளே ய கிடக்கின்றதெனின் ∠கபம ஐக் காண்க.

9. உரு 590 இல் ய வட்டத்தினது மையமாகும். கமந ஒரு நேர்கோடு. ∠கயப ஐக் காண்க.



உருவம் 590



உருவம் 591

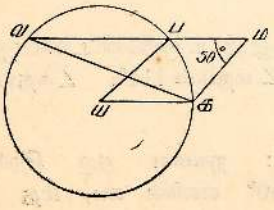
10. உரு 591 இல் வட்டம் கவமச இல் ஒரு விட்டம் கம ; கவய உம் சமய உம் நேர்கோடுகள். ∠மவச ஐக் காண்க.

[11] வ, ந, ச என்னும் புள்ளிகள் ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் உள்ளன ; ∠வயந = 54°, ∠யநச = 36° ; யந இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் வ, ச கள் உள்ளன. ∠நவச, ∠வநச என்பவற்றைக் காண்க.

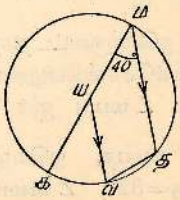
[12] ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது சிறுவில் கம இலே வ ஒரு புள்ளியாகும். ∠கவம = அ°, ∠கயம = இ° எனின் அ ஐ இ இற் காண்க.

13. கமபத ஒரு குவிந்த நாற்கோணம். அதில் கம = கப = கத. ∠மகத = 140° எனின் ∠மபத ஐக் காண்க.

14. உரு 592 இல் ய வட்டத்தினது மையம்; யகமப ஓரிணை கரம் ; மபவ ஒரு நேர்கோடு. ∠யகவ ஐக் காண்க.



உருவம் 592



உருவம் 593

15. உரு 593 இல் ஒரு வட்டத்தின் ஒருவிட்டம் கம ; ய மையம். ∠ யவத ஐக் காண்க.

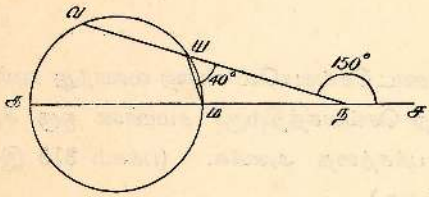
[16] வட்டம் கமப இன் மையம் ய, ∠ கமப = 30°. யக இற்கு மப சமாந்தரமெனின் யப இற்கு கம செங்குத்தென நிறுவுக.

17. ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் கம, தப என்பன நீட்டப்பட்டு ந இற் சந்திக்கின்றன. ∠ கயம = 100°, ∠ நமப = 72°, ∠ நபம = 84° எனின் ∠ பயத ஐக் காண்க.

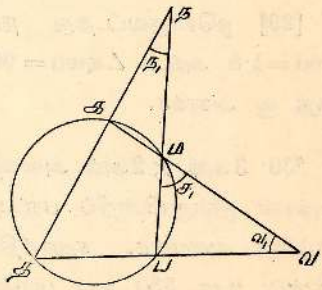
[18] Δ கமப இனது அடி மப இலே த ஒரு புள்ளியாகும். வட்டங்கள் கதம, கதப என்பவற்றினுடைய மையங்கள் ச, ந என்பன. ∠ கசத = 70°, ∠ கநத = 80° எனின் ∠ மகப ஐக் காண்க. (இரு விடைகள்.)

19. இருவட்டங்கள் கவநம, கயசம என்பன க, ம களில் ஒன்றை யொன்று வெட்டுகின்றன; வகய, நமச என்பன நேர்கோடுகள். ∠ யவந = 80°, ∠ வநச = 70° எனின் ∠ வயச ஐயும் ∠ யசந ஐயுங் காண்க. (கம ஐ இணைக்க.)

20. உரு 594 இல் கம ஒரு விட்டம் ; கமநச உம் வயந உம் நேர் கோடுகள். வய = யம என நிறுவுக.



உருவம் 594



உருவம் 595

*21. உரு 595 இல் ந, = 32°, வ, = 40° எனின் ச, ஐக் காண்க.

*22. உரு 595 இல் ந, + வ, = 180° − 2ச, என நிறுவுக.

*23. ஒரு வட்டம் கயசம இனுடைய ஒருநாண் யச உம் ஒரு விட்டம் கம உம் நீட்டப்பட்டபொழுது வ இற் சந்திக்கின்றன. ∠ யவக = 28°, ∠ யகச = 42° எனின் ∠ யசக ஐக் காண்க.

*24. உரு 595 இல் மத ஐ கப, அ இல் வெட்டும்பொழுது ந, = 40°, வ, = 20°, ∠ மஅப = 100° எனின் ∠ மகப = 2 ∠ மபக என நிறுவுக.

*25. **கமபதந** ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஓரைங்கோணம். ∠ **மதப** = 20°, ∠ **பகத** = 28°, ∠ **கமத** = 70°, **பத** = **தந** எனின் ஐங்கோணத்தினுடைய கோணங்களைக் காண்க.

---

26. 5 ச.மீ. ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் **கவம** இனுடைய விட்டம் **கம.** **கவ** = 6 ச.மீ. எனின் **வம** இனது நீளத்தைக் காண்க.

[27] 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் பரிதியில் **க** என்னும் புள்ளியைக் குறிக்க; வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக ஒரு செவ்வகம் **கமபத** ஐ, **கம** = 6 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைக்க; **மப** இனது நீளத்தை அளக்க, கணிக்க.

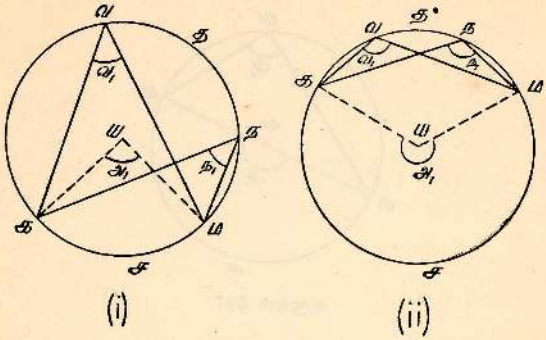
28. ஒரு Δ **கமப** ஐ **கம** = 10 ச.மீ., **கப** = 4 ச.மீ., ∠ **மகப** = 90° ஆகுமாறு அமைக்க. Δ **கவம** ஐ பரப்பளவில் Δ **கமப** இற்குச் சமமாகவும் ∠ **கவம** = 90° ஆகவும் அமையுமாறு வரைக. **வக, வம** என்பவற்றை அளக்க.

[29] ஒரொருவட்டத்து நாற்கோணம் **கமபத** ஐ **கம** = 2·4 அங். **மப** = 1·8 அங்., ∠ **கமப** = 90°, **கத** = **தப** ஆக இருக்குமாறு அமைக்க **கத** ஐ அளக்க.

*30· 3 அங். × 2 அங். அளவுகொண்ட செவ்வகமொன்றை வரைந்து கணிப்புக்கள் ஒன்றுமின்றிப் பரப்பளவிற் செவ்வகத்திற்குச் சமமான ஒரு சதுரத்தை அமைக்க. சதுரத்தின் பக்கத்தை அளக்க. (பக்கம் 315 இல் உள்ள உரு 530 ஐப் பயன்படுத்துக.)

தேற்றம் 48

ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒரேதுண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமமாகும்.



உருவம் 596

தரவு. ஒரு வட்டம் **கதமச** இனது துண்டு **கதம** ; அத்துண்டிலுள்ள எவையேனும் இருகோணங்கள் **கவம, கநம** என்பன.

மேற்கோள். ∠ **கவம** = ∠ **கநம**.

கருவி. **ய** ஐ வட்டத்தின் மையமாகக் கொள்க.
யக, யம களை இணைக்க.

நிறுவல். உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு எழுதும்பொழுது,

மையக்கோணம் = ஒரே வில்லில் நிற்கும் பரிதிக்கோணத்தின் இருமடங்காதலின்,

∠ அ$_1$ = 2 ∠ வ$_1$, **வில் கசம,**

∠ அ$_1$ = 2 ∠ ந$_1$, **வில் கசம,**

∴ ∠ வ$_1$ = ∠ ந$_1$.

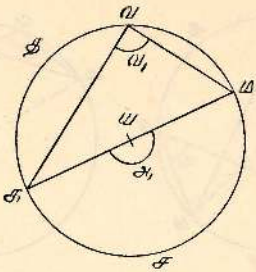
கிளைத்தேற்றம். **ஒரு வட்டத்தின் ஒரு பெருந்துண்டிலுள்ள கோணம் கூர்ங்கோணமாகும் ; ஒரு வட்டத்தின் ஒரு சிறுதுண்டிலுள்ள கோணம் விரிகோணமாகும்.**

கசம ஒரு சிறுவில்லெனின் ∠ அ, இருசெங்கோணத்திலுஞ் சிறியது; **கசம** பெருவில்லெனின் அது இருசெங்கோணத்திலும் பெரியது.

குறிப்பிற்காக : ஒரே வில் **கசம**
அல்லது ஒரேதுண்டு **கதம.**

தேற்றம் 49

ஓரரைவட்டத்திலுள்ள கோணஞ் செங்கோணமாகும்.



உருவம் 597

தரவு. ஒரு வட்டம் **கதமச** இனது அரை வட்டம் **கதம** ;
அரைவட்டத்திலுள்ள யாதாயினுமொரு கோணம் **கவம.**

மேற்கோள். ∠ **கவம** = ஒரு செங்கோணம்.

நிறுவல். **கதம** ஓரரை வட்டமானதால் வட்டத்தினது மையம் **ய** ஆனது **கம** இலே கிடக்கின்றது.

உருவிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு எழுதும்பொழுது,

மையக்கோணம் = பரிதிக்கோணத்தின் இருமடங்காதலின், (ஒரேவில் லிலே நிற்பன),

∠ அ, = 2 ∠ வ, **வில் கசம,**

ஆனால் **கயம** ஒரு நேர்கோடாதலின்

∠ அ, = 2 செங்கோணங்கள்.

∴ ∠ வ, = ஒரு செங்கோணம்.

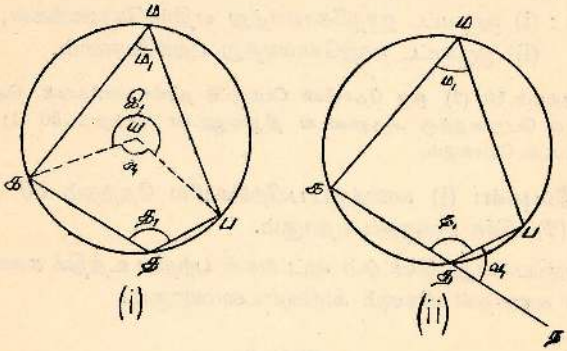
குறிப்பிற்காக : அரைவட்டத்து ∠.

இவ்வுண்மை "ஏழு அறிஞர்களுள்" ஒருவரான தேலிசு என்பவரால் வெளியாக்கப்பட்டிருத்தல் கூடும். கிரேக்க நாட்டில் அவர் கேத்திரகணிதப் படிப்பினை ஆரம்பித்து வைத்தார். எகித்து நாட்டிலே அவர் இருக்கும் பொழுது அமேசிசு என்னும் அரசனுக்கு பிரமிதுகளின் நிழல்களை அளந்து, நிலைக்குத்தான ஒரு கோலின் நிழலினுடைய நீளங்களுடன் ஒப்பிடுவதால் எவ்வாறு அவற்றின் உயரங்களை அறியலாம் என்பதைக் காட்டினார்.

தேற்றம் 50

(1) ஒருவட்ட நாற்கோணம் ஒன்றின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்பு கின்றனவாகும்.

(2) ஒருவட்ட நாற்கோணம் ஒன்றின் ஒருபக்கத்தை நீட்டுவதாலமையும் புறக்கோணம் அதன் அகத்தெதிர்க்கோணத்திற்குச் சமனாகும்.



உருவம் 598

தரவு. ஒரு வட்டத்தின் உள்ளுவருமாக அமைக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** ; அதன் ஒருபக்கம் **கத, ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

மேற்கோள். (i) ∠**கமப** + ∠ **கதப** = 2 செங்கோணங்கள் ;
(ii) ∠ **பதந** = ∠ **கமப**.

கருவி. **ய** ஐ வட்டத்தின் மையமாகக் கொள்க.
யக, யப களை இணைக்க.

நிறுவல். (1) உரு 598 (i) இல் உள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு எழுதினால், மையக்கோணம் = பரிதிக்கோணத்திலும் இருமடங்காதலின், (ஒரே வில்லிலே நிற்பன),

∠ அ, = 2 ∠ ம, **வில் கதப,**

∠ இ, = 2 ∠ த, **வில் கமப,**

∴ ∠ அ, + ∠ இ, = 2 ∠ ம, + 2 ∠ த,.

ஆனால் ∠ அ, + ∠ இ, = 4 செங்கோணங்கள் **ஒரு புள்ளிக் கோணங்கள்,**

∴ 2 ∠ ம, + 2 ∠ த, = 4 செங்கோணங்கள்,

∴ ∠ ம, + ∠ த, = 2 செங்கோணங்கள்.

(2) உரு 598 (ii) இல் உள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு எழுதினால், $\angle$ வ$_1$ + $\angle$ த$_1$ = 2 செங்கோணங்கள் **நேர்கோட்டு அடுத்துள்ள கோணங்கள்.**

ஆனால் $\angle$ ம$_1$ + $\angle$ த$_1$ = 2 செங்கோணங்கள் **நிறுவப்பட்டது.**

$\therefore$ $\angle$ வ$_1$ + $\angle$ த$_1$ = $\angle$ ம$_1$ + $\angle$ த$_1$,

$\therefore$ $\angle$ வ$_1$ = $\angle$ ம$_1$.

குறிப்பிற்காக : (i) ஒருவட்ட நாற்கோணத்து எதிர்க்கோணங்கள்,
(ii) ஒருவட்ட நாற்கோணத்து புறக்கோணம்.

குறிப்பு.—தேற்றம் 50 (2) ஒரு தோவின் பொருட்டு தனிக்கணக்காகக் கொடுக்கப்படின் முழுப்புள்ளிகளும் பெறுவதற்கு அதனுடைய நிறுவலுடன் தேற்றம் 50 (1) இனது நிறுவலுஞ் சேர்க்கப்படல் வேண்டும்.

முக்கிய குறிப்புகள்: (i) கணக்குப் பயிற்சிகளில் தேற்றம் 50 (1) இலும் தேற்றம் 50 (2) மிக்க பயனுடையதாகும்.

(ii) ஒன்றையொன்று வெட்டும் வட்டங்கள் பற்றிய உத்திக் கணக்குக்களிற் பொதுநாணை வரைதல் மிகவும் அறிவுடைமையாகும்.

பயிற்சி 59

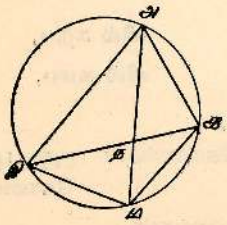
1–4 வரையுள்ள கணக்குக்கள் உரு 599 ஐக் குறிக்கின்றன. இவ்வுருவில் **கஇ, மஅ** ஐ **ந** இலே வெட்டுகின்றது.

1. **அஇ** இற்கு **கம** சமாந்தரமெனின் $\angle$ **கநஅ** = 2 $\angle$ **கமஅ** என நிறுவுக.

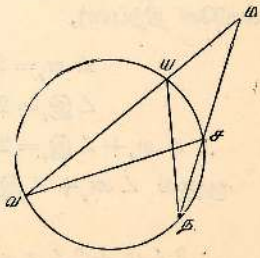
[2] **அஇ** இற்கு **கம** சமாந்தரமெனின் **நஅ** = **நஇ** என நிறுவுக.

3. **இந** = **இம** எனின் **அந** = **அக** என நிறுவுக.

[4] **அக** உம் **இம** உம் **த** இலே சந்திக்கும்படி நீட்டப்பட்டு **அஇ** இற்கு **கம** சமாந்தரமென்றால் **தஅ** = **தஇ** என நிறுவுக.



உருவம் 599



உருவம் 600

5–7 வரையுள்ள கணக்குக்கள் உரு 600 ஐக் குறிக்கின்றன. இவ்வுருவில் **வயம, நசம** நேர்கோடுகளாகும்.

5. **∠ வசம = ∠ நயம்** என நிறுவுக.

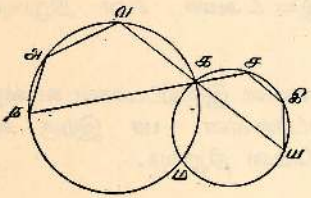
[6] **மய = மச** எனின் **மவ = மந** என நிறுவுக.

7. **வச = சம்** எனின் **∠ வயந = 2 ∠ யநச** என நிறுவுக.

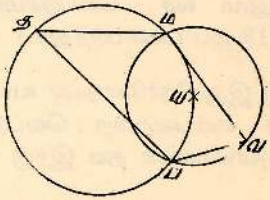
[8] **கமபத** என்பது ஒரொருவட்ட நாற்கோணம். கோணங்கள் **மகத, மபத** ஆகியவற்றை **கப** இருசமக்கூறிடுமெனில் **∠ கமப** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.

9. உரு 601 இல் **வகய, நகச** நேர்கோடுகளாகும். **∠ வஅந = ∠ யஇச** என நிறுவுக.

[10] உரு 601 இல் **வகய, நகச** நேர்கோடுகள். **ம ஐ வ, ய, ந, ச** ஆகியவற்றிற்கு இணைத்து **∠ வமய = ∠ நம்ச** என நிறுவுக.



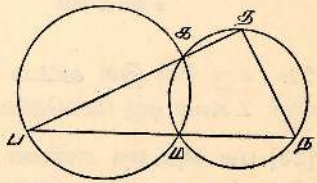
உருவம் 601



உருவம் 602

11. உரு 602 இல் வட்டம் **மவப** இனது மையம் **ய**, வட்டம் **மதப** இலே உள்ளது. **∠ மவப, ∠ மதப** ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தொடர்பினைக் காண்க. (**யம, யப** களை இணைக்க.)

12. உரு 603 இல் **பகத, பமந** நேர்கோடுகளாகும். வட்டம் **கமப** இனது ஒருவிட்டம் **பக** எனின் **∠ கதந** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.



உருவம் 603

[13] இருவட்டங்கள் **க, ம** களில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. **கவ, கய** கள் வட்டங்களினுடைய விட்டங்களாகும். **வமய** ஒரு நேர்கோடென நிறுவுக.

14, **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது நாண் **கவ** ஆகும். **கய** ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம், **கவ** ஐ **ந** இலே வெட்டுமானால் **கந = நவ** என நிறுவுக.

15. வட்டம் **கதபம** இனுடைய விட்டம் **கம**. நாண் **தப** ஆனது **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**கமத** + ∠**மபந** = 90° என நிறுவுக.

[16] வட்டம் **கவயசம** இனுடைய விட்டம் **கம**. ∠**கவய** + ∠**யசம** = 270° என நிறுவுக. (**கச** ஐ இணைக்க.)

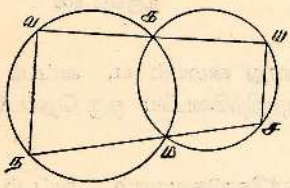
17. ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாகவமைந்த அறுகோணம் **கமபதநவ**. ∠**வகம** + ∠**மபத** + ∠**தநவ** = 4 செங்கோணங்களென நிறுவுக.

[18] **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வமைந்த முக்கோணம் **கமப** ; **மப** இனது நடுப்புள்ளி **ந**. ∠**மயந**, ∠**மகப** என்பவை சமன் அல்லது மிகைநிரப்புகின்றன என நிறுவுக.

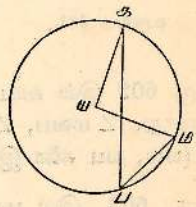
19. உரு 604 இல் **வகய**, **நமச** நேர்கோடுகள். **வந**, **யச** இற்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக.

20. உரு 604 இல் வட்டம் **வகம** ஐ **அ** இனும் வட்டம் **யகம** ஐ **இ** இனும் **வச** வெட்டுமெனின் ∠**வகஇ** = ∠**அமச** என நிறுவுக. (எண் 19 ஐப் பயன்படுத்துக.)

[21] இரு நேர்கோடுகள் **கமபத**, **நவசய** என்பன இருவட்டங்கள் **கமவந**, **பதயச** என்பவற்றை வெட்டுமாறு கீறப்பட்டுள்ளன. **பச** இற்கு **கந** சமாந்தரமெனின் **தய** இற்கு **மவ** சமாந்தரமென நிறுவுக.



உருவம் 604



உருவம் 605

22. உரு 605 இல் வட்டம் **கமப** இன் மையம் **ய**. ∠**கபம** = ∠**யகம** எனின் ∠**கயம** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.

[23] **யவ**, **யத**, **யந** என்பன மூன்று சமமான கோடுகள். ∠**வயத** = 60° எனின் ∠**வநத** = 30° அல்லது 150° என நிறுவுக.

[24] ஒருவட்டநாற்கோணம் **கமபத** இனது பக்கம் **மக**, **ந** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**பகந** ஐ **கத** இருசமக்கூறிடுமெனில் **தம** = **தப** என நிறுவுக.

25. **கமபத** ஓரிணைகரம். **க, ம, ப** களுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் **பத** ஐ, தேவையெனின் நீட்டப்பட்ட **பத** ஐ, **ந** இலே வெட்டுகின்றது. **கந = கத** என நிறுவுக.

[26] **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு நாண்கள் **கம, பத** என்பன வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளியிற் செங்கோணமாக வெட்டிக்கொள்கின்றன. **∠கயத + ∠மயப** இரு செங்கோணங்களுக்குச் சமம் என நிறுவுக.

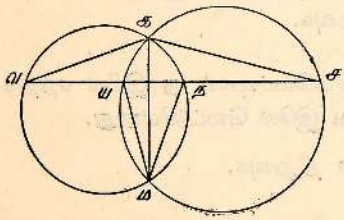
27. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் **கம, பத** என்பன வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளி **ந** விலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. **∠கநப** கூர்ங்கோணமெனின் **∠கயப + ∠மயத = 2∠கநப** என நிறுவுக.

[28] பக்கம் 376 இல் உள்ள உரு 600 இல் **த** மையமானால் **∠வதந − ∠யதச = 2∠வமந** ஆகுமென நிறுவுக.

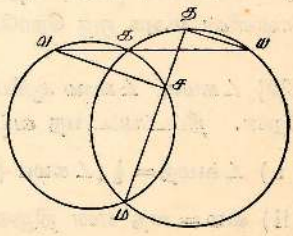
29. **கமபவ** என்பது ஒரொருவட்ட நாற்கோணமாகும். தன்னுடைய பக்கங்களை **வக, வம, வப** ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகவுடைய ஒரு முக்கோணம் **கமப** இற்குச் சமகோணமானது என நிறுவுக. (**சத** ஐ, **வப** இற்குச் சமாந்தரமாகவும், **வக, வம** என்பவற்றை **ச, த** களிலே வெட்டுமாறும் வரைக.)

[30] **கமபத** ஒரு செவ்வகம். **க** இற்கூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு வட்டம் **கம, கப, கத** ஆகியவற்றை **அ, இ, உ** களில் வெட்டுகின்றது. **△அஇஉ, △பமக** இற்குச் சமகோணமானது என நிறுவுக.

31. உரு 606 இல் **வயநச** ஒரு நேர்கோடு. **மக** ஆனது **∠வகச** ஐ இரு சமக்கூடுகின்றதெனில் **மய = மந** என நிறுவுக.



உருவம் 606



உருவம் 607

32. உரு 607 இல் **வகய** உம் **மசத** உம் நேர்கோடுகள். **தய** இற்கு **வச** சமாந்தரமென நிறுவுக. (**கம** ஐ இணைக்க.)

33. Δ கமப இலுள்ள பக்கம் கம இலே த யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. புள்ளிகள் ந, வ என்பன முறையே கப, மப களில், ∠ நதக = 60° = ∠ வதம ஆகுமாறு எடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். த, ந, வ களுக்கூடாக ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டு அது மீண்டும் கம ஐ ய இல் வெட்டுகின்றது. Δ நவய சமபக்கமுக்கோணமென நிறுவுக.

[34] வட்டம் கமப இன் சிறுவில் கப இலே வ யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. கப ஐ ய இலே மவ வெட்டுகின்றது. Δ கமப சமபக்க முக்கோணமெனின் ∠ வகம = ∠ கயம என நிறுவுக.

35. வட்டம் கமப இன் சிறுவில் கப இலே வ யாதாயினுமொரு புள்ளி. நீட்டப்பட்ட கவ நீட்டப்பட்ட மப ஐ ய இலே சந்திக்கின்றது. கம = கப எனின் ∠ கயம = ∠ கமவ என நிறுவுக.

[36] Δ கமப இன் கோணங்கள் கமப, கபம ஆகியவற்றினுடைய இரு சமவெட்டிகள் முறையே கப, கம ஆகியவற்றை அ, இ களிற் சந்திக்கின்றன. சந்தித்து உ இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. கஅஉஇ ஓரொருவட்ட நாற்கோணமெனின் ∠ மகப = 60° என நிறுவுக.

37. Δ கமப இனுள்ளே த யாதாயினுமொரு புள்ளி. மத, பத என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது கப, கம ஆகியவற்றை முறையே ந, வ களிற் சந்திக்கின்றன. கநதவ உம் மவநப உம் ஒருவட்ட நாற் கோணங்களானால் மந உம் பவ உம் Δ கமப இன் உயரங்கள் என நிறுவுக.

38. உரு 600 இல் வந, யச என்பன க இலே சந்திக்குமாறு நீட்டப் பட்டு வட்டங்கள் மயச, கநச என்பன மீண்டும் அ இலே வெட்டிக் கொள்ளின் மஅக ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

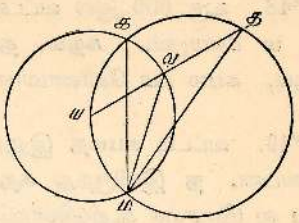
[39] ∠ கமப, ∠ கபம ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் ந இலே சந்திக் கின்றன. நீட்டப்பட்ட பந வட்டம் கமப ஐ வ இலே வெட்டுகின்றது.

(i) ∠ வமந = $\frac{1}{2}$ (∠ கமப + ∠ கபம) என நிறுவுக.

(ii) வம = வந என நிறுவுக.

40. உரு 608 இல் வட்டம் கவம இனது மையம் ய, வட்டம் கதம இலே கிடக்கின்றது; யவத ஒரு நேர்கோடு. ∠ கமத ஐ மவ இருசமக்கூறிடு கின்றதென நிறுவுக.

[41] **கம** இன் ஒரு பக்கத்திலே **கபம, கதம** என்னும் இரு விற்கள் ஆனவை வட்டம் **கதம** இனது மையம், வில் **கபம** இலே இருக்குமாறு உள்ளன; **கபத** என்னும் ஒரு நேர்கோடு விற்களை, **ப, த** களில் வெட்டினால் **பம = பத** என நிறுவுக.



உருவம் 608

42. △**கமப** இலே **கம = கப. ப** ஐ மையமாகவும் **பம** ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம், **கம, கப** களை **த, ந** களிலே வெட்டினால் **தந** என்பது ∠**கமப** ஐ இருசமக்கூறிடுங்கோட்டுக்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக.

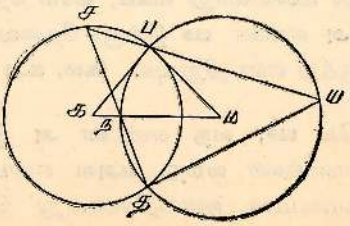
43. வட்டம் **கமப** இனது மையம் **ய. கம** இனது நடுப்புள்ளி **ந. நய** – தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **நய – கப** ஐ **வ** இலே வெட்டுகின்றது. ∠**கவந** = ∠**யபம** என நிறுவுக. (வட்டத்தை **ச** இலே வெட்டுமாறு **பய** ஐ நீட்டுக; **சம** ஐ இணைக்க.)

[44] உரு 600 இலேயுள்ள வட்டத்தினது மையம் **அ** ஆக, **யந** ஐ **வச, இ** யிலே வெட்டின் ∠**வஇந** + ∠**வமந** = ∠**வஅந** என நிறுவுக.

45. **ய** ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலே செங்குத்தாயமைந்த நாண்கள் **கம, பத** என்பன. ∠**தகம** = ∠**யகப** என நிறுவுக.

*46. △**கமப** இனுடைய கோணங்கள் **கமப, கபம** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் **ந** இலே சந்திக்கின்றன. வட்டம் **மநப, கம, கப** ஆகியவற்றை மீண்டும் **வ, ய** களில் வெட்டுகின்றது. **கம = கய** எனவும் **கப = கவ** எனவும் நிறுவுக.

*47. △**கமப** இனுடைய கோணங்கள் **கமப, கபம** ஆகியவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் **ந** இலே ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. வெட்டி **கப, கம** ஆகியவற்றை முறையே **இ, உ** களில் வெட்டுகின்றன; வட்டங்கள் **மநஉ, பநஇ** மீண்டும் **அ** இலே சந்திக்கின்றன. ∠**இஅஉ** + ∠**மநப** இருசெங்கோணங்களுக்குச் சமமென நிறுவுக.



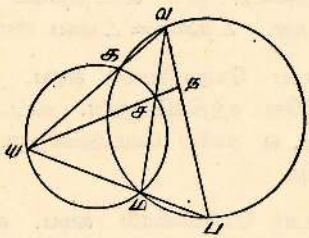
உருவம் 609

*48. உரு 609 இல் வட்டங்கள் **தபச, தநபய** ஆகியவற்றின் மையங்கள் **க, ம** களாகும். **கநம, தநச, சபய** நேர்கோடுகள். முக்கோணங்கள் **சதய, கபம** சம கோணமானவையென நிறுவுக.

*49. வட்டம் **கபமத** இனுடைய செங்குத்தான நாண்கள் **கநம, பநத** என்பன. **ந** இலிருந்து **கத** இற்குள்ள செங்குத்து நீட்டப்பட்டபொழுது **மப** ஐ இருசமக் கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

*50. கொடுக்கப்பட்ட இருவட்டங்கள் **கமவ, கமய** என்பன **க, ம** களில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. **க** இற்கூடாகச் செல்லும் மாறுங்கோடு வட்டங்களை, உரு 610 இல் உள்ளவாறு **வ, ய** களிற் சந்திக்கின்றது. ∠**வமய** மாறுப்பருமனனது என நிறுவுக.

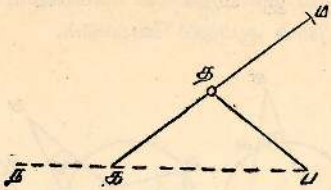
*51. உரு 610 இல் வட்டங்கள் **கமவ, கமய** கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **வகய, க** இற்கூடாகச் செல்லுகின்ற மாறும் ஒரு நேர்கோடு. **வசம, யமப** என்பன நேர்கோடுகள்; **யச, வப** ஐ **ந** இலே சந்திக்கின்றது. ∠**வநய** மாறுப் பருமனுடையது என நிறுவுக.



உருவம் 610

*52. இருவட்டங்கள் **வகம, யகசம** என்பன **க, ம** களில் வெட்டுகின்றன. ஒரு 610 இல் உள்ளவாறு **வகய, வசம** நேர்கோடுகள். வட்டம் **வகம** இனது மையம் **அ** எனின் **யச** இற்கு – தேவையெனின் நீட்டப்பட்ட **யச** இற்கு – **அவ** செங்குத்து என நிறுவுக. (**கம, கஅ** களை இணைக்க.)

*53. உரு 600 இலே **யச, வந** என்பன **அ** இலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. கோணங்கள் **வமந, யஅவ** என்பவற்றினுடைய இரு சமவெட்டிகள் செங்கோணமாக ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என நிறுவுக.



உருவம் 611

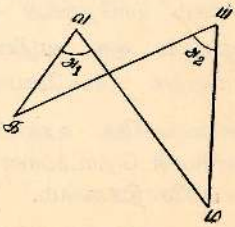
*54. உரு 611 ஐப் பார்க்க. **பத** என்னுங் கோல் ஒரு மாறாத புள்ளி **ப** இலே பிணைக்கப்பட்டு கோல் **கதம** இனேடு **த** இலே தளர்வாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. **கத = தம = தப** ஆக **க** என்பது நேர்கோடு **பந** வழியே செல்ல **த** என்பது **கப** இற்கூடாக உள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒருதளம் வழியே இயங்குகின்றதெனின் **ம** உம் ஒரு நேர்கோடு வழியே செல்லும் என நிறுவுக.

ஒரு பரிதியிலுள்ள புள்ளிகட்குரிய சோதனைகள்

எவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டிலோ ஒரு வட்டத்திலோ கிடக்கும். பொதுவாகக் கூறுமிடத்து ஒரு தளத்தில் எவையேனும் நாலு புள்ளிகளை எடுத்தால், அவை யாவற்றிற்கும் ஊடாகச் செல்லக் கூடியதாக ஒரு நேர்கோட்டையோ ஒரு வட்டத்தையோ வரைதல் இயலாது. நாலு புள்ளிகள் ஒருபரிதியிலுள்ளனவோ என அறிவதற்குரிய சோதனைகளை, தேற்றங்கள் 48,50 ஆகியவற்றின் மறுதலைகள் உண்மையானவை என நிறுவுதலால், நாம் பெறலாம்.

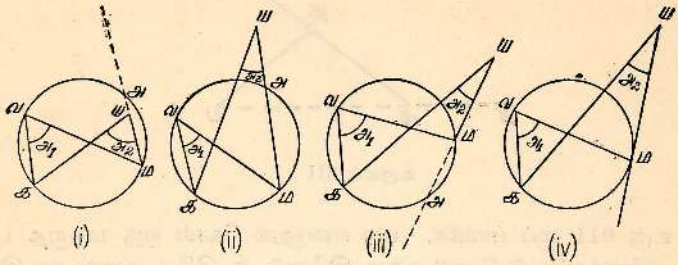
(1) உரு 612 இல் $அ_1 = அ_2$ எனின் புள்ளிகள், க, வ, ய, ம என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளனவாம்.

உரு 612 இல் **க, வ, ம** ஆகியவற்றிற்கூடாக ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டால் அது **ய** இற்கூடாகச் செல்லாவிடின், அது **மய** ஐ, நீட்டப்பட்ட **மய** இலே, அல்லது **ம, ய** என்பனவற்றிற்கிடையிலேயுள்ள ஓரிடத்திலே, அல்லது நீட்டப்பட்ட **யம** இலே, உள்ள ஒரு புள்ளி **அ** இலே வெட்டும்; அல்லது **மய** ஐ, **ம** தவிர்ந்த வேறெந்தப் புள்ளியிலும் அது சந்தியாது. உரு 613 (i), (ii), (iii), (iv) ஐப் பார்க்க. $அ_1 = அ_2$ எனின், இந்நாலு வகைகளில் ஒன்றேனும் இயலக் கூடியதொன்றன்று; எனவே **க, வ, ம** களுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் **ய** இற்கூடாகவுஞ் செல்ல



உருவம் 612

வேண்டும். ஆனால், நாம் இவ்வழியிலே செல்வோமாயின் இந்நால் வகைகள் ஒவ்வொன்றறியும் நாம் ஆய்தல் வேண்டும்.



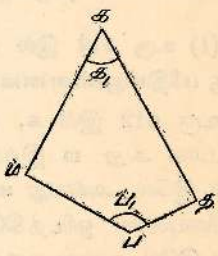
உருவம் 613

தேற்றம் 52 இலே பயன்படுத்தப்பட்ட நிறுவலினது நியாயத்தினுடைய நோக்கம் யாதெனின் இருவகைகளையே ஆய்தல் வேண்டிய ஒரு வழியைப் பயன்படுத்தல் கூடும் என்பதைக் காட்டலேயாகும் என்க.

(2) உரு 614 இல் ∠க, + ∠ப, = 2 செங் ∠ எனின் புள்ளிகள் க, ம, ப, த கள் ஒருபரிதியிலுள்ளனவாம்.

உரு 614 இல் **ம, ப, த** ஆகியவற்றிற்கூடாக ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டால் அது **க** இற் கூடாகச் செல்லாவிடின், அது **தக** ஐ, நீட்டப்பட்ட **தக** இலே, அல்லது **த, க** என்பவற்றிற்கிடையிலுள்ள ஓரிடத்திலே, அல்லது நீட்டப்பட்ட **கத** இலே, உள்ள ஒரு புள்ளி **அ** இலே வெட்டும்; அல்லது **தக** ஐ, **த** தவிர்ந்த வேறெந்தப் புள்ளியிலும் சந்தியாது.

இவ்வகைகளைக் காட்ட 4 உருக்கள் வரைக. ∠க, + ∠ப, = 2 செங் ∠ எனின் இந்நாலு வகைகள் ஒவ்வொன்றும் இயலாதனவாம்; எனவே, **ம, ப, த** களுங் கூடாகச் செல்லும் வட்டம் **க** இற்கூடாகவுஞ் செல்ல வேண்டும். இவ்வழியே நாம் செல்வோமாயின் இந்நால் வகைகள் ஒவ்வொன்றையும் நாம் ஆய்தல் வேண்டும். தேற்றம் 53 இலே பயன்படுத்தப்பட்ட நிறுவலினது நியாயத்தினுடைய நோக்கம் யாதெனின் இரு வகைகளையே ஆய்தல் வேண்டிய ஒரு வழியைப் பயன்படுத்தல் கூடும் என்பதைக் காட்டலேயாகும் என்க.

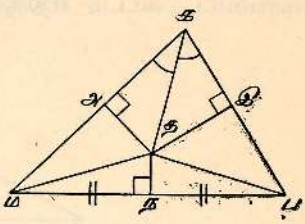


உருவம் 614

ஓரமைப்பிலே உண்டாகக்கூடிய பல்வேறு வடிவங்களைப்பற்றிய இவ்வுரையோடு தொடர்பான ஒரு பயிற்சியாகப் பின்வரும் **போலியை** வாசகர்கள் பரிசோதிக்கலாம்.

கமப யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது; **கம = கப** என நிறுவுக.

உரு 615 இல் ∠மகப இன் இருசமவெட்டி, மப இன் இருசம வெட்டிச் செங்குத்தைத் த இலே வெட்டுகின்றது. கம, கப களுக்கு தஅ, தஇ என்பன செங்குத்துக்கள்; தம, தப கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.



உருவம் 615

(i) முக்கோணங்கள் கதஅ, கதஇ என்ப வற்றிலிருந்து கஅ = கஇ, தஅ = தஇ என நிறுவுக.

(ii) முக்கோணங்கள் மநத, பநத என்ப வற்றிலிருந்து தம = தப என நிறுவுக.

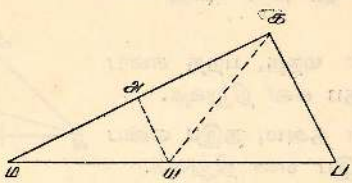
(iii) முக்கோணங்கள் தஅம, தஇப என்ப வற்றிலிருந்து அம = இப என நிறுவுக.

∴ கம = கஅ + அம = கஇ + இப = கப.

இந்நிறுவலில் உள்ள பிழை யாது?

தேற்றம் 51

ஒருசெங்கோண முக்கோணத்தின் செம்பக்கத்தை விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட வட்டம் எதிருச்சிக்கூடாகச் செல்கின்றது.



உருவம் 616

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப.** அதில் ∠ மகப = 1 செங் ∠.

மேற்கோள். **மப** ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் ஆனது **க** இற்கூடாகச் செல்கின்றது.

கருவி. **மப** ஐ **ய** இல் இருசமக் கூறிடுக.
மக ஐ **அ** இல் இருசமக் கூறிடுக.

நிறுவல். **மய = யப,**

மஅ = அக ஆதலின்,

பக இற்கு **யஅ** சமாந்தரம் நடுப்புள்ளித்தேற்றம்,

ஆனால் ∠ பகம = 1 செங் ∠ தரவு,

∴ ∠ யஅம = 1 செங் ∠ ஒத்தகோணங்கள், **யஅ ∥ பக,**

∴ **யஅ, மக** இனது இருசமவெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

∴ **யம = யக.**

ஆனால் **யம = யப** கருவி,

∴ **யக = யம = யப,**

∴ **மப** ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் **க** இற்கூடாகச் செல்கின்றது.

கிளைத்தேற்றம். **ஒரு செங்கோணமுக்கோணத்தின் மூலைவிட்டத்தினது நடுப் புள்ளியை எதிருச்சிக்கு இணைக்குங்கோடு செம்பக்கத்தின் அரைப் பகுதிக்குச் சமனாகும்.**

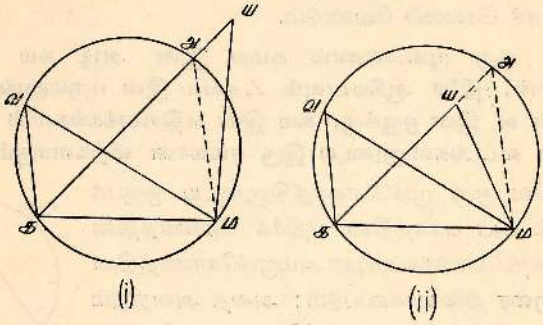
யக = யம = யப ஆதலின்,

யக = ½மப.

குறிப்பு. இத்தேற்றம், தேற்றம் 49 ஐப் பயன்படுத்துகின்ற தேற்றம் 52 இன் ஒரு சிறப்பு வகையாகும்.

தேற்றம் 52

இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு நேர்கோடு அதனின் ஒரே பக்கத்தி லுள்ள வேறிரு புள்ளிகளில் சமமான கோணங்களை அமைக்குமானால் அந்நாலு புள்ளிகளும் ஒருவட்டத்தில் இருக்கும்.



உருவம் 617

தரவு. நேர்கோடு **கம** இன் ஒரேபக்கத்தில் இரு புள்ளிகள் **வ, ய** என்பன, ∠ **கவம** = ∠ **கயம** ஆகுமாறு உள்ளன.

மேற்கோள். **க, வ, ய, ம** ஒருவட்டத்தில் உள்ளன.

கருவியும் நிறுவலும். முக்கோணங்கள் **வகம, யகம** என்பன **கம** இற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ளனவாதலால், கோணங்கள் **வகம, யகம** என்பன சமனற்றவையாயிருத்தல் வேண்டும், அல்லது கோணங்கள் **வமக, யமக** என்பன சமனற்றவையாயிருத்தல் வேண்டும். ஏனெனில் அவ்வாறில்லாதவிடத்து **வ** ஆனது **ய** உடன் ஒன்றாகும் என்க.

∠ **வகம** > ∠ **யகம** எனப் பாவித்துக்கொண்டால்,

அப்பொழுது **கய** கோணம் **வகம** உட் கிடக்கும்.

வ, க, ம என்பவற்றிற்கூடாக வட்டம் வரைக. இயலுமானால், அது **ய** இற்கூடாகச் செல்லவில்லையெனப் பாவித்துக்கொள்க.

கய, கோணம் **வகம** உட் கிடப்பதால் வட்டம் **கய** ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட **கய** ஐ ஒரு புள்ளியில் வெட்டும்; அப்புள்ளி **அ** ஆகுக.

மஅ ஐ இணைக்க.

அப்பொழுது ∠ **கவம** = ∠ **கஅம** ஒரேதுண்டிலுள்ள கோணங்கள்,

ஆனால் ∠ **கவம** = ∠ **கயம** தரவு,

∴ ∠ **கஅம** = ∠ **கயம.**

ஆனால் அவற்றில் ஒன்று Δ மயஅ இன் புறக்கோணம், மற்றையது அதன் அகத்தெதிர்க்கோணமாகும் ;

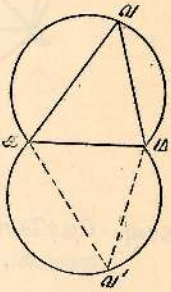
எனவே அவை சமனாகா.

ஆதலின் முதற் பாவனை தவறானது.

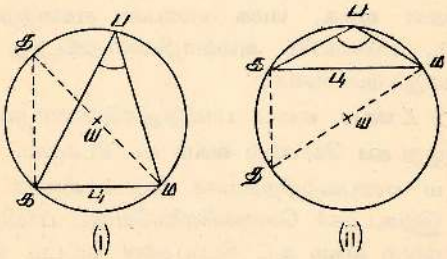
∴ வ, க, ம ஆகியவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் ய இற்கூடாகச் செல்லல் வேண்டும்.

கிளைத்தேற்றம். ஒரு முக்கோணம் கமவ இன் அடி கம இனுடைய பருமன், நிலை ஆகியனவும் ∠கவம இன் பருமனுங் கொடுக்கப்படின் வ இன் ஒழுக்கு, கம இன் எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ள சமமான வட்டங்களினுடைய இரு சமமான விற்களாகும்.

எனவே ஒரு முக்கோணத்தினுடைய ஒருபக்கமும் அப் பக்கத்தின் எதிர்க் கோணத்தின் அளவுங் கொடுக்கப்படின் அம்முக்கோணத்தின் **சுற்றுரை** நிலையாக்கப்படும்; அதை அளந்தும் அறியலாம், அல்லது திரிகோண கணிதத்தாலும் அறியலாம். ய ஐ Δ கமப இன் சுற்றுமையமாகவும் ந ஐ அதன் சுற்றுரையாகவுங் கொள்க. சுற்று வட்டத்தின் விட்டம் மயத ஐ வரைக. கத ஐ இணைக்க. உரு 619 (i) இல் ஏன் ப, = மத சைன் ப என விளக்குக. $ந = \frac{ப,}{2 \text{ சைன் } ப}$ என்பதை உய்த்தறிக.



உருவம் 618

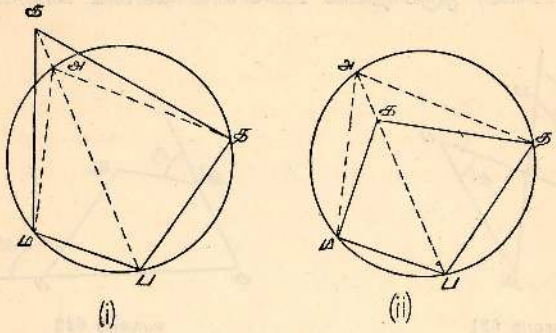


உருவம் 619

உரு 619 (ii) இல் ஏன் ப, = மத சைன் (180° − ப) என விளக்குக. பக்கம் 287 ஐப் பார்க்க. $ந = \frac{ப,}{2 \text{ சைன் } ப}$ என்பதை உய்த்தறிக. ந இற்கு இத்தகைய இரு வாய்பாடுகள் தருக. 294 ஆம் பக்கத்திலுள்ள எண் 28 உடன் ஒப்பிடுக.

தேற்றம் 53

ஒருநாற்கோணத்தின் ஒருசோடி எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புகின்றன வெனின் அதனுடைய உச்சிகள் ஒருபரிதியில் உள்ளனவாம்.



உருவம் 620

தரவு. கமபத ஒரு நாற்கோணம்; அதில் ∠கமப + ∠கதப = 2 செங் கோணங்கள்.

மேற்கோள். க, ம, ப, த ஒரு வட்டத்திற் கிடக்கின்றன.

கருவியும் நிறுவலும். ம, ப, த களுக்கூடாக வட்டத்தை வரைந்து, இயலுமெனில், க இற்கூடாக அது செல்லவில்லையெனப் பாவித்துக்கொள்க. பக, ∠மபத இனுட்கிடப்பதால் வட்டம் மபத, பக ஐ அல்லது நீட்டப்பட்ட பக ஐ ஒரு புள்ளியில் (அ எனக்கொள்க) வெட்டவேண்டும்.

அம, அத களை இணைக்க.

∠அமப + ∠அதப = 2 செங் கோணங்கள் — ஒரு வட்டநாற்கோணத்து எதிர்க்கோணங்கள்,

∠கமப + ∠கதப = 2 செங் கோணங்கள் — தரவு,

∴ ∠அமப + ∠அதப = ∠கமப + ∠கதப.

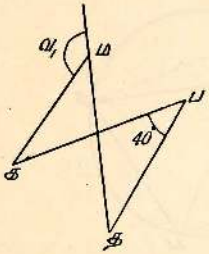
ஆனால் இச்சமன்பாட்டின் ஒரு பக்கம் மற்றைப் பக்கத்தின் பகுதியாய் உள்ளது. எனவே இரு பக்கங்களும் சமமாகா. எனவே முதற் பாவனை தவறானது.

∴ ம, ப, த களுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் அ இற்கூடாகச் செல்லல் வேண்டும்.

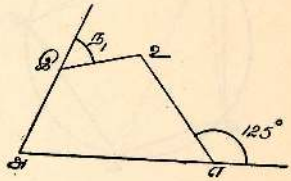
எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 60

1. உரு 621 இல் (i) வ, = 130°, (ii) வ, = 140° எனின் க, ம, ப, த என்னும் புள்ளிகள் ஒருபரிதியில் உள்ளனவாவெனக் காண்க.



உருவம் 621



உருவம் 622

2. உரு 622 இல் (i) ந, = 55°, (ii) ந, = 45° எனின் அ, இ, உ, எ என்னும் புள்ளிகள் ஒரு பரிதியில் உள்ளனவாவெனக் காண்க.

3. வயநச என்னும் ஒருநாற்கோணத்தையும் அதன் மூலைவிட்டங்கள் வந, யச களையுங் கீறுக. ∠ வயந = 70°, ∠ வநய = 35°, ∠ யசந = 75° எனின் வ, ய, ந, ச கள் ஒருபரிதியில் உள்ளனவென்பதை நிறுவி ∠ வசய ஐக் காண்க.

[4] கமபத என்னும் நாற்கோணத்தினுடைய மூலைவிட்டங்கள் கப, மத என்பன ச இலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. ∠ மகப = 50°, ∠ பகத = 45°, ∠ கபத = 55°, ∠ மசப = 105° எனின் க, ம, ப, த என்பன ஒருபரிதியில் உள்ளனவென நிறுவி ∠ பமத ஐக் காண்க.

[5] கமபத ஒருநாற்கோணம். அதில் ∠ கமத = 30°, ∠ கதம = 40°, ∠ மபத = 70°; ∠ கபம ஐக் காண்க.

6. ஒருநாற்கோணம் கமபத ஐயும் அதனுடைய மூலைவிட்டங்கள் கப, மத களையும் வரைக. ∠ தகப = 65°, ∠ பகம = 50°, ∠ பமத = 65° எனின் அவ்வுருவிலே கணித்தறியக்கூடிய மற்றைக் கோணங்களின் பருமன்களைக் கூறுக.

7. கமபத ஒருநாற்கோணம். அதில் கம = கத, தம = தப; ∠ தமக = அ°, ∠ தமப = 2 அ° எனின் க, ம, ப, த கள் ஒருபரிதியினுள்ளனவென நிறுவுக.

[8] Δ கமப இன் உயரங்கள் மந, பவ என்பன. ∠ கநவ = 65° எனின் ∠ மபவ ஐக் காண்க.

9. Δ கமப இன் பக்கங்கள் மப, பக, கம ஆகியவற்றில் உள்ள புள்ளிகள் வ, ய, ந என்பன $\angle$ நவம $= 30°$, $\angle$ யவப $= 20°$, $\angle$ வநய $= 10°$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $\angle$ கமப $= 55°$, $\angle$ கபம $= 75°$ எனின் வயகந உம் மநயப உம் ஒருவட்ட நாற்கோணங்களென நிறுவுக.

10. Δ கமப இன் உயரங்கள் கத, மந என்பன. $\angle$ கதந $= 30°$, $\angle$ மநத $= 20°$ எனின் Δ கமப இன் கோணங்களைக் காண்க.

[11] Δ கமப இல் கம $=$ கப, $\angle$ மகப $= 36°$. $\angle$ கமப ஐ இருசமக்கூறிடுங் கோடானது ப இற்குள்ளாக மக இற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லுங் கோட்டை த இலே சந்தித்தால் க, ம, ப, த என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

12. க, ம என்பன கம $= 4$ ச.மீ. ஆகுமாறு அமைந்த நிலையான புள்ளிகள். வ என்பது $\angle$ கவம $= 70°$ ஆகுமாறு அமைந்த ஒரு மாறும் புள்ளி. வ இனது முழு ஒழுக்கினை அமைக்க. [பக்கம் 366 எண் 2 (iv) ஐப் பார்க்க.]

13. Δ கமப இல் மப $= 2$ அங்., $\angle$ மகப $= 30°$. வட்டம் கமப இன் ஆரையைக் காண்க.

14. Δ கமப ஐ, $\angle$ கபம $= 50°$, கம $= 5$ ச.மீ., கம இல்லிருந்து ப இனது தூரம் 4 ச. மீ. எனக் கொடுக்கப்படின், அமைக்க.

பயிற்சி 61

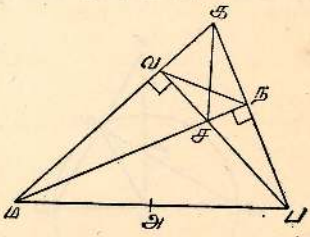
1 – 5 வரை உள்ள எண்கள் உரு 623 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் மந, பவ என்பன Δ கமப இன் உயரங்கள். அவை ச இல் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

1. (i) ம, வ, ந, ப ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.
(ii) $\angle$ கநவ $=$ $\angle$ கமப என நிறுவுக.

[2] (i) க, ந, ச, வ ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக. (ii) $\angle$ கசந $=$ $\angle$ கபம என நிறுவுக.

3. $\angle$ சகந $=$ $\angle$ நமப என நிறுவி, நீட்டப்பட்ட கச ஆனது, மப ஐச் செங்கோணத்தில் வெட்டுகின்றதென உய்த்தறிக.

4. மப இனது நடுப்புள்ளி அ எனின் அந $=$ அவ என நிறுவுக.



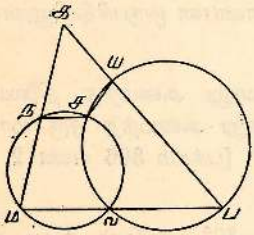
உருவம் 623

5. மப இனது நடுப்புள்ளி அ எனின் $\angle$ வஅந $= 180° - 2\angle$ மகப என நிறுவுக.

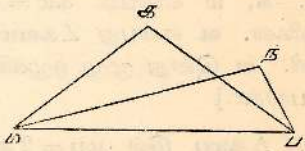
6. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **க, த** என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் யாதாமினும் ஒருவட்டம் **கம, தப** களை **வ, ய** களில் வெட்டுகின்றது. **ம, ப, ய, வ** ஒரு பரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

7. **கமபத** ஓரிணைகரம். அதில் $\angle$**கமப** $= 60°$. வட்டம் **கமத** இன் மையம் வட்டம் **பமத** இல் உள்ளதென நிறுவுக.

8. உரு 624 இல் **வ, ய, ந** என்பன **மப, பக, கம** என்பவற்றிலுள்ள புள்ளிகள். **கயசந** ஒருவட்டநாற்கோணமென நிறுவுக. (**சவ** ஐ இணைக்க.)



உருவம் 624



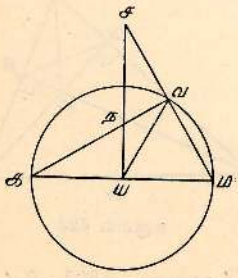
உருவம் 625

9. உரு 625 இல் **கம** $=$ **கப**, $\angle$**கமந** $= \angle$**கபந**. $\angle$**கநப** $= 90° + \frac{1}{2}\angle$**மகப** என நிறுவுக.

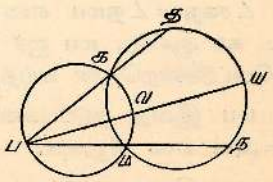
[10] உரு 628 இல் வட்டத்தினது ஒருவிட்டம் **கப** ஆக **கத** $=$ **தய** எனின் (i) **பக** $=$ **பய** என நிறுவுக; (ii) **தம** $=$ **தய** என நிறுவுக.

[11] $\triangle$**கமப** இல் **கம** $=$ **கப**, **மப** $>$ **கம**; நீட்டப்பட்ட **பக** இலே **வ** என்றொரு புள்ளியும் **மப** இலே **ய** என்றொரு புள்ளியும், $\angle$ **மயவ** $= 2\angle$ **யவப** ஆகுமாறமைந்துள்ளன. **க, வ, ம, ய** ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

12. உரு 626 இல் **ய** என்பது வட்டத்தினது மையம்; **யநச, கயம** இற்குச் செங்குத்து. (i) **க, ய, ச, வ** ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக. (ii) $\angle$**யவக** $= \angle$**யசம** என நிறுவுக.



உருவம் 626



உருவம் 627

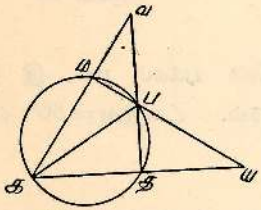
13. உரு 627 இல் பகத, பவய, பமந என்பன நேர்கோடுகள். பய ஐ அ இலே தந வெட்டினால் க, வ, அ, த என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளன வென நிறுவுக. (கவ, கம களை இணைக்க.)

[14] △கமப இல் கம > கப ; கம இல் வ என்னும் புள்ளி கவ = கப ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. ∠மகப இனுடைய இருசமவெட்டியானது ம்ப ஐ ய இலும், வட்டம் கமப ஐ ந இலும் வெட்டுகின்றது. ம, வ, ய, ந ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

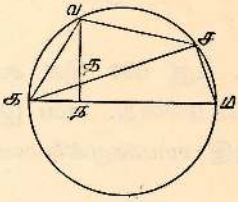
[15] ஒரு வட்டத்தில் எவையேனும் புள்ளிகள் க, ம, ப என்பன. ∠மகப இன் உள்ளிருசமவெட்டியும் வெளியிருசமவெட்டியுமான இரு சமவெட்டி வட்டத்தை மீண்டும் ச, த களில் வெட்டுகின்றது. சத வட்டத்தினது ஒரு விட்டமென நிறுவுக.

[16] யாதாயினுமொரு நாற்கோணத்துக் கோணங்களின் வெளியிருசமவெட்டிகளால் அமைந்த நாற்கோணம் ஒருவட்டநாற்கோணமென நிறுவுக.

17. உரு 628 இல் வமக, வபத, யதக, யபம என்பன நேர்கோடுகளாகும். ∠கவத = ∠மயக எனின் கப ஒரு விட்டமென நிறுவுக.



உருவம் 628



உருவம் 629

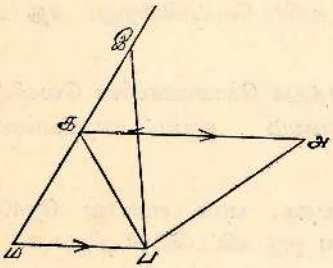
18. உரு 629 இல் கம வட்டத்தினது ஒரு விட்டமாகும். ∠கவந = ∠கசவ எனின் (i) ∠வநம = 90° என நிறுவுக. (ii) சதநம ஒரொருவட்ட நாற்கோணமென நிறுவுக. (வம வை இணைக்க.)

[19] ஒரு △கமப இன் அடி கம உம் ∠கபம உம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ∠கபம கூர்ங்கோணமெனின், ∠கமப = 90° ஆகவிருக்கும்பொழுது கப பெரியதாயிருக்குமென நிறுவுக.

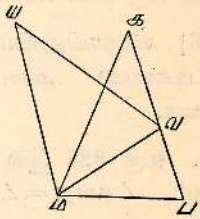
[20] வட்டம் கதசந உள்ளே வட்டம் மபயவ கிடக்கின்றது. அகமபத உம் அநவயச உம் வட்டங்களை வெட்டும் இரு நேர்கோடுகளாகும். க, ம, வ, ந ஒருபரிதியிலுள்ளனவெனின் ப, த, ச, ய என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

21. **வய, வந** என்பன **அ ஐ** மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் எவையேனும் இரு நாண்களாகும். **வய** விற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள விட்டம் ஆனது **வந ஐ ச** விலே வெட்டினால் **ய, அ, ச, ந** என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

[22] **கமபத** ஓரொருவட்ட நாற்கோணம். **கவ, தய** என்பன **க, த** க்களிலிருந்து முறையே **பத, கம** விற்குள்ள செங்குத்துக்களாகும். **பம** விற்கு **வய** சமாந்தரமென நிறுவுக.



உருவம் 630



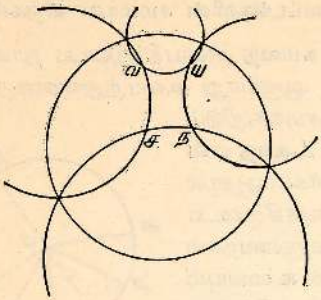
உருவம் 631

23. உரு 630 இல் சமபக்க △**கமப** வின் பக்கம் **மக, இ** இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **மப** இற்கு **கஅ** சமாந்தரம். ∠**பஇஅ** = 60° எனின் △**பஅஇ** சமபக்கமுக்கோணமென நிறுவுக.

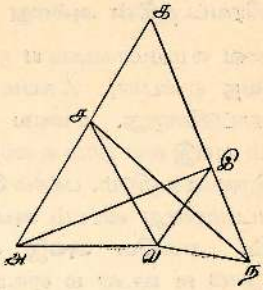
24. உரு 631 இல் **கம** = **கப, யம** = **யவ,** ∠**மகப** = ∠**மயவ. மப** இற்கு **யக** சமாந்தரமென நிறுவுக.

25. இருவட்டங்கள் **கவநம, கசயம** என்பன **க, ம** க்களில் வெட்டிக் கொள்கின்றன ; **வகய, நகச** என்பன நேர்கோடுகள். **நவ, யச** என்பன **அ** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. **அ, வ, ம, ய** ஒரு பரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

*26. ஒருவட்டத்தினுடைய செங்குத்தான விட்டங்கள் **கஅம, பஅத** என்பன. இருநாண்கள் **பவ, பய** என்பன **கம ஐ ச, ந** களில் வெட்டுகின்றன. **ச, ந, ய, வ** ஒரு பரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக. (**பக, பம, கய, வய** களை இணைக்க.)



உருவம் 632



உருவம் 633

*27. உரு 632 இற் காட்டியவாறு 5 வட்டவிற்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் வண்ணம் வரையப்படின் **வ, ய, ந, ச** களுக்கூடாக ஆருவதொரு வட்டம் வரைதல் இயலுமென நிறுவுக.

*28. உரு 633 இல் Δ **வஅஇ** $\equiv$ Δ **வசந** ; கோடுகள் **அச, நஇ** நீட்டப்பட்டபொழுது **க** இலே சந்திக்கின்றன. வட்டம் **அவஇ, க** இற் கூடாகச் செல்கின்றதென நிறுவுக.

*29. வட்டங்கள் **கமவ, கமய** என்பவற்றினுடைய மையங்கள் **அ, இ** என்பன. **வகய** ஒரு நேர்கோடு ; **வஅ, யஇ** என்பன **ந** இலே சந்திக்கு மாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. **அ, இ, ம, ந** என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக. (**கஅ, கஇ, மஅ, மஇ** களை இணைக்க.)

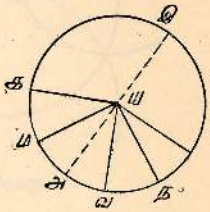
*30. உரு 624 இல் **ச** என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு Δ **கமப** இனுள்ளே கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியாயின், Δ **வயந** இனுடைய கோணங்கள் மாறுப் பருப னுடையனவென நிறுவுக.

*31. **கமபத** ஓரிணைகரம் ; **கமபத** இற்குள்ளே **அ** என்னும் புள்ளி $\angle$ **கஅம** + $\angle$ **பஅத** = 2 செங்கோணங்கள் ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. $\angle$ **அமப** = $\angle$ **அதப** என நிறுவுக. (**கய, மய** || **தஅ, பஅ** ஆகுமாறு வரைக ; **அய** வை இணைக்க.)

*32. **யஅ, யஇ** என்பன கொடுக்கப்பட்ட செங்குத்தான கோடுகளாகும் **கமவ** என்பது, **கம** = 5 அங்., **மவ** = 3 அங்., **வக** = 4 அங். ஆகுமாறு அமைந்துள்ள ஒரு முக்கோணம். தளம் **அயஇ** இலே அந்த முக்கோணம் ஆனது, **க** என்பது **யஅ** வழி நழுவவும் **ம** என்பது **யஇ** வழி நழுவவும், **கம** இன் எதிர்ப்பக்கங்களிலே **ய, வ** க்கள் இருக்கவும் நகர்ந்தால் **வ** இனது ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோட்டின் பகுதியென நிறுவுக. (**யவ** வை இணைக்க.)

ஒரேவட்டத்தின் அல்லது சமமான வட்டங்களின் சமமான விற்கள்

ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் **கமவந** என்பதினுடைய நாண்கள் **கம, வந** என்பன, **∠கயம = ∠வயந** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளதை உரு 634 காட்டுகின்றது. **∠மயவ** வை இருசமக்கூறிடும் விட்டம் **அயஇ** யை நாம் வரையின் அது **∠கயந** வையும் இருசமக்கூறிடும். பக்கம் 357 ஐப் பார்க்க; ஆனால் இவ்வட்டமானது விட்டம் **அயஇ** வழி சமச்சீருடையதாகும். எனவே **அயஇ** வழி இவ்வுருவை நாம் மடித்தால் **வ** வுடன் **ம** வையும் **ந** வுடன் **க** வையும் பொருந்துமாறு செய்யலாம்; எனவே சிறுவில் **கம** சிறுவில் **நவ** வுடன் பொருந்தும். இதனால்



உருவம் 634

வட்டம் கமவந வினது மையம் ய ஆக, ∠கயம = ∠வயந எனின்

சிறுவில் கம = சிறுவில் வந ஆகும்.

ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது வில் **கம** கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க. வில் **கம** வைப் பிரதிசெய்வதற்கு என்ன அளவுகள் எடுத்துக்கொள்ளல் வேண்டும்?

ஒரு வட்டத்தினது ஆரையை அளந்தால் அவ்வட்டத்தினது பரிதியைப் பிரதி செய்தல் இயலும்.

மையத்திலே சமமான கோணங்களை அமைக்கும் ஒரு வட்டத்தின் விற்கள் சமமான நீளமுடையனவாதலின், **∠கயம** வினது பருமன் அறியப்படின் வில் **கம** வினது நீளம் நிலையாக்கப்படும். எனவே, **∠கயம** அளக்கப்படின் வில்லைப் பிரதி செய்தல் இயலும்.

இதிலிருந்து நாம் பெறக்கூடியதென்னவெனில்,

(i) ஆரையின் அளவு, (ii) வட்டத்தின் மையத்திலே அமைத்த கோணம்,

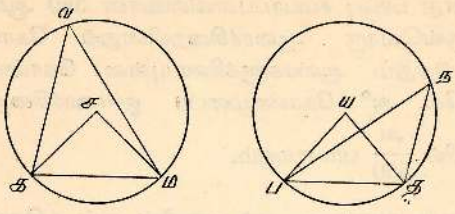
ஆகியவற்றில் ஒத்திருக்கும் இருவட்ட விற்களை நாம் வரைந்தால் உருவிலும் பருமனிலும் அவை முழுமையும் ஒத்திருக்குமென்பதாம்; இதை, அவை சர்வசமனாகும், என்றும் நாம் சொல்லலாம்.

உரு 635 ஐப் பார்க்க.

இருசமவட்டங்கள் கமவ, பதந ஆகியவற்றினுடைய மையங்கள் ச, ய க்களாக, ∠கசம = ∠பயத எனின் சிறுவில் கம = சிறுவில் பத ஆகும்.

மறுதலையாக,

இருசமவட்டங்கள் கமவ, பதந ஆகியவற்றினுடைய மையங்கள் ச, ய க்களாக வில் கம = வில் பத எனின் ∠கசம = ∠பயத வாகும்.



உருவம் 635

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 635, மையங்கள் ச,ய க்களைக் கொண்ட இரு சமமான வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது.

(i) வில் கம = வில் பத எனின் ∠கவம = ∠பநத என நிறுவுக.

(ii) ∠கவம = ∠பநத எனின் சிறுவில் கம = சிறுவில் பத என நிறுவுக.

2. உரு 635, ச,ய க்களை மையங்களாகக் கொண்ட இரு சமமான வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது.

(i) வில் கம = வில் பத எனின் நாண் கம = நாண் பத என நிறுவுக.

(ii) நாண் கம = நாண் பத எனின் சிறுவில் கம = சிறுவில் பத என நிறுவுக.

3. இரு வட்டங்களினுடைய இருவிற்கள் சமநீளமுடையனவாயின் விற்கள் சர்வசமனானவையா ?

வில்லினது நீளத்தைக் கணித்தல்

ஒரு வட்டத்தினது பரிதி 360 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கப்படின் ஒவ்வொரு வில்லும் மையத்திலே 1° அளவான கோணத்தை அமைக்கும். எனவே மையத்திலே அ° கோணத்தை அமைக்கும் வில்லினது நீளம் பரிதியின் $\frac{\text{அ}}{360}$ பாகமாகும்.

ஒரு வட்டத்தினது ஆரை ஆ அங். எனின் பரிதியினது நீளம் 2π ஆ அங்குலமாகும். இதில் $\pi \simeq 3{\cdot}1416$.

எனவே மையத்திலே அ° கோணத்தை அமைக்கும் ஆ அங். ஆரை கொண்ட ஒரு வட்டத்தினுடைய வில்லினது நீளம் $\frac{\text{அ}}{360} \times 2\pi$ ஆ அங்குலமாகும்.

ஆரைச்சிறையின் பரப்பைக் கணித்தல்

ஒரு வட்டத்தினது பரப்பு சமபரப்பளவினவான 360 ஆரைச்சிறைகளாகப் பிரிக்கப்படின் ஒவ்வொரு ஆரைச்சிறையினதுங் கோணம்—அதாவது அதை எல்லைப்படுத்தும் ஆரைகளுக்கிடையுள்ள கோணம்—ஒரு பாகை யாகும். எனவே அ° கோணமுடைய ஓராரைச்சிறையினது பரப்பு, வட்டத்தின் பரப்பில் $\frac{\text{அ}}{360}$ பாகமாகும்.

ஒரு வட்டத்தினது ஆரை ஆ அங். எனின் வட்டத்தினது பரப்பு π ஆ^2 சது. அங். ஆகும்; இதில் $\pi \simeq 3{\cdot}1416$.

எனவே ஆ அங். ஆரையுள்ள ஒருவட்டத்தினது அ° கோணம் அள வுள்ள ஓராரைச்சிறையின் பரப்பு $\frac{\text{அ}}{360} \times \pi$ ஆ^2 சது. அங்குலமாகும்.

∴ ஆரைச்சிறையினது பரப்பு = $\frac{1}{2}$ ஆரை × வில்லினது நீளம்.

ஒரு வட்டக்கூம்பினது வளைந்த மேற்பரப்பினுடைய பரப்பு

கூம்பினது சாய்ந்த உயரத்தை உ அங்குலமாகக் கொள்க; கூம்பின் அடியினது ஆரையை ஆ அங்குலமாகக் கொள்க.

கூம்பினது ஒரு சாய்ந்த விளிம்பை வெட்டி அதனின் வளைந்த மேற் பரப்பைத் தட்டையாக விரித்தால், நாம் உ அங். ஆரையும் 2π ஆ அங்குல நீள வில்லுங் கொண்ட ஒரு வட்டத்தினது ஆரைச்சிறையைப் பெறுவோம்.

ஆனால் இவ்வாரைச்சிறையின் பரப்பு $\frac{1}{2}$உ × 2πஆ சது. அங்.,

∴ கூம்பினது வளைந்த மேற்பரப்பின் பரப்பு = π ஆஉ சது. அங்.

இங்கு ஆய்ந்த விளைவுகள் யாவும் பின்வருந் தேற்றங்களில் எடுத்துச் சொல்லப்பட்டிருக்கின்றன. இத்தேற்றங்களினுடைய நிறுவல்களை அனுபந் தத்திற் காண்க. (பக்கம் 644—646 வரை பார்க்க.)

தேற்றம் 54

(i) சமமான வட்டங்களிலே (அல்லது ஒரேவட்டத்திலே) மையங்களில் (அல்லது மையத்தில்) உள்ள சமமான கோணங்கள் சமமான விற்களில் நிற்கின்றன.

(ii) சமமான வட்டங்களிலே (அல்லது ஒரேவட்டத்திலே) பரிதிகளில் (அல்லது பரிதியில்) உள்ள சமமான கோணங்கள் சமமான விற்களில் நிற்கின்றன.

தேற்றம் 55

(i) சமமான வட்டங்களிலே (அல்லது ஒரேவட்டத்திலே) சமமான விற்களானவை மையங்களில் (அல்லது மையத்தில்) சமமான கோணங்களை அமைக்கின்றன.

(ii) சமமான வட்டங்களிலே (அல்லது ஒரேவட்டத்திலே) சமமான விற்களானவை பரிதிகளில் (அல்லது பரிதியில்) சமமானகோணங்களை அமைக்கின்றன.

எண்கொண்ட உதராணங்கள்

பயிற்சி 62 (வாய் முறை)

எண்கள் 1–8 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 636 ஐக் குறிக்கின்றன. இதில் வில் **கம** $= \frac{1}{10}$ பரிதி, வில் **கப** $= \frac{1}{6}$ பரிதி, வில் **கவத** $= \frac{5}{12}$ பரிதி. பின்வரும் கோணங்களைக் காண்க.

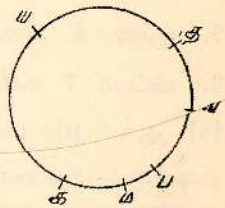
1. ∠ **கயம.** 2. ∠ **மயப.**

3. ∠ **கவத.** 4. ∠ **பவத.**

பின்வருவனவற்றைப் பரிதியின் பின்னங்களிற் கூறுக.

5. சிறுவில் **மப.** 6. பெருவில் **பயத.**

7. சிறுவில் **மப** இற்கு சிறுவில் **கம** என்ன விகிதத்தில் உள்ளது?



உருவம் 636

8. சிறுவில் **கப** $= 2$ வில் **பத** எனின் ∠ **யகத** ஐக் காண்க.

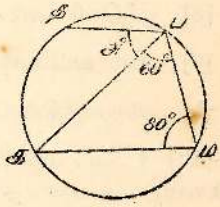
எண்கள் 9–16 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 637 ஐக் குறிக்கின்றன.

9. சிறுவில் **மப** பரிதியின் என்ன பின்னமாகும்?

10. வில் **கதப** $= 2$ சிறுவில் **மப** என நிறுவுக.

11. சிறுவில் **மப** விற்கு சிறுவில் **கம** என்ன விகிதத்தில் உள்ளது?

12. வில் **கத** $= 2$ வில் **தப** எனின் அ ஐக் காண்க.



உருவம் 637

13. வில் **பத** $= \frac{1}{2}$ வில் **பம** எனின் அ ஐக் காண்க.

14. வில் **கம** + வில் **பத** = வில் **கத** + வில் **மப** எனின் அ ஐக் காண்க.

15. வட்டத்தினது ஆரை 5 ச. மீ. எனின் சிறுவிற்கள் **கம, மப** ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களை 3 எண்ணளவிலே திருத்தமாகக் காண்க.

16. வில் **கதப** வினது நீளம் 8 ச.மீ. எனின் வட்டத்தினது ஆரையை 2 எண்ணளவிலே திருத்தமாகக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கோள்க.)

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 63

(இப் பயிற்சியில் வேறு விதமாகக் கூறப்பட்டாலன்றி $\pi = 3{\cdot}142$ எனக் கொண்டு π யினது பெறு மானத்திலே தங்கியுள்ள விடைகளை 3 எண்ணளவிற் கொடுக்க.)

1. 5 அங். விட்டங்கொண்ட ஒருருளையை ஒரு நூலால் 5 தரஞ்சுற்றி π யினது பெறுமானத்தைப் பரிசோதனை முறையாற் காணலாம். நூலைக் கழற்றியபொழுது அது 78·65 அங். நீளமுடையதாயிருந்தது. இது π யிற்கு என்ன பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது ?

எண்கள் 2 – 4 வரை உள்ள கணக்குக்களிலுள்ள வட்டங்களின் பரிதிகளினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

2. ஆரை 4 அங்.

3. விட்டம் 7 ச.மீ.

[4] ஆரை 100 யார்.

எண்கள் 5—8 வரை உள்ள கணக்குக்களில் உள்ள வட்டங்களின் ஆரைகளை 2 எண்ணளவிற் காண்க. $\pi = \frac{22}{7}$ எனக்கொள்க.

5. பரிதி 11 அங்.

[6] பரிதி 8·8 ச.மீ.

7. பரிதி 440 யார்.

[8] பரிதி 6 அடி.

[9] அரைவட்டவடிவமான ஒரு பாகைமானியின் விட்டம் 3·5 அங். $\frac{1}{10}$ அங்குலத்திற்குத் திருத்தமாக அதனுடைய சுற்றளவைக் காண்க.

[10] 4 ச.மீ. ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தினது வில், மையத்திலே 50° கோணத்தை அமைத்தால் அதனுடைய நீளத்தைக் காண்க.

11. 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம் கமப ஆகும். பெருவில் கமப வினது நீளத்தைக் காண்க.

[12] 5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினது வில்லினுடைய நீளம் 4 ச.மீ. மையத்திலே இவ்வில் அமைக்குங்கோணத்தை அண்ணளவான பாகையிலே காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.)

13. 6 ச.மீ. நீளமுடைய ஒரு வட்டவில் மையத்திலே 80° ஐ அமைக்கின்றதெனின் வட்டத்தினது ஆரையை 2 எண்ணளவில், திருத்தமாகக் காண்க. ($\pi = 22/7$ எனக் கொள்க.)

14. ஒரு சதுரக்கோட்டுத்தாளிலே 2 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. சதுரங்களையெண்ணி ஒரு பையன் அந்த வட்டத்தின் பரப்பை 12·57 சது.அங். என மதிப்பிடுகின்றான். இது π யிற்கு என்ன பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது ?

எண்கள் 15—17 வரை உள்ள கணக்குக்களிலுள்ள வட்டங்களின் பரப்புக்களைக் காண்க.

15. ஆரை 10 அங்.

[16] விட்டம் 8 ச.மீ.

[17] ஆரை 7 அடி.

எண்கள் 18, 19 ஆகியவற்றிலுள்ள வட்டங்களின் ஆரைகளை 2 எண்ணளவிலே திருத்தமாகக் காண்க. ($\pi = 22/7$ எனக் கொள்க.)

18. பரப்பு 616 சது. அங்.

[19] பரப்பு 38·5 சது. ச.மீ.

[20] 3 அங்., 4 அங். ஆகிய ஆரைகள் கொண்ட 2 ஒருமையத்து வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள வளையத்தின் பரப்பினைக்காண்க.

21. 2·5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் ஆரைச்சிறையினது கோணம் 108°. ஆரைச்சிறையின் பரப்பைக் காண்க.

22. 4 அங். ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினுள்ளே ஒரு சதுரம் **கமபத** உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டுள்ளது. **கம** இனால் வெட்டப்பட்ட சிற்றுரைச் சிறையின் பரப்பைக் காண்க.

23. 4 அங். ஆரையுடைய ஒருவட்டம் **கசம** இனது நாண் **கம**; ∠**கசம** = 30° எனின் துண்டு **கசம** இனது பரப்பினைக் காண்க.

---

24. வட்டம் **கமநபவத** இனுள்ளே சதுரம் **கமபத** உம் ஒரு சமபக்க △**கநவ** உம் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டுள்ளன. △**நபத** இன் கோணங்களைக் காண்க.

[25] **கமபதந** ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான ஐங்கோணம். △**கமத** இன் கோணங்களைக் காண்க.

[26] ஒரேவட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான அறுகோணத்தின் ஒரு பக்கம் **கம** ஆகும்; அவ்வாறு வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான எண்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் **கப** ஆகும். △**கமப** வினுடைய கோணங்களைக் காண்க. (இருசோடி விடைகள்.)

27. ஒரு மணிக்கூண்டின் முகத்திலுள்ள புள்ளிகள் **II, VI, IX** ஆகிய வற்றை இணைப்பதால் அமைந்த முக்கோணத்தினுடைய கோணங்களைக் காண்க.

28. வட்டம் **கமபத** இலே **க, ம** என்னும் புள்ளிகளானவை சிறுவில் **கம**, பெருவில் **கம** இலும் அரையளவாக இருக்குமாறு அமைந்துள்ளன ; ∠**தகம**=74°; வில் **மப** = வில் **பத**; ∠**கமத** ஐயும் ∠**மதப** ஐயுங் காண்க.

[29] **க, ம, ப** என்னும் மூன்று புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்திலே, ∠**கமப**=38°, ∠**கபம**=68° ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. **வ, ப** என்பன முறையே சிறுவிற்கள் **கப, கம** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகளாம். ∠**மபவ**, ∠**பவய** ஆகியவற்றைக் காண்க.

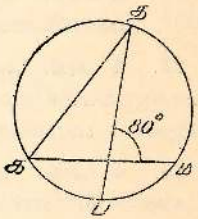
30. ஒரு வட்டம் **கமவபயத** இனுள்ளே **கமபத** என்னும் ஒரு சதுரமும் **கவய** என்னும் ஒரு சமபக்கமுக்கோணமும் உள்ளுருவமாக வரையப்பட் டுள்ளன. வில் **மவ** = $\frac{1}{2}$ வில் **வப** என நிறுவுக.

[31] ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட முக்கோணம் **கமப**. நீட்டப்பட்ட **மப** இலே **த** ஒரு புள்ளி. ∠**மகப** = 120°, ∠**பகத** = 15°, ∠**கதம** = 30° எனின் வில் **கப** இற்கு வில் **கம** என்ன விகிதத்தில் உள்ளது?

32. ஒரு மணிக்கூண்டின் முகத்திலே புள்ளிகள் **IV, VII** ஆகியவற்றை இணைக்குங்கோடு புள்ளிகள் **V, XII** ஆகியவற்றை இணைக்குங்கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது என நிறுவுக.

33. உரு 638 இல் வில் **கப** இலும் வில் **மத** நான்குமடங்காயின் ∠**கதப** ஐக் காண்க.

34. உரு 638 இல் உள்ள தரவுகளைக்கொண்டு வில் **கத** + வில் **மப** பரிதிக்கு எவ்வளவு பின்னத்தில் உள்ளதெனக் காண்க. (**கப** ஐ இணைக்க.)



உருவம் 638

*35. 5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதில் 4 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நாண் **கம** ஐ இடுக. வேண்டியவாறு அளந்து **கம** இனால் வெட்டப்பட்ட பெருந்துண்டினது பரப்பைக் காண்க.

*36. ஒரு கம்பித்துண்டானது 6 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலே 150° யை அமைக்கும் ஒரு வில்லினைப் போன்றுள்ளது. அது ஒரு முழுவட்டமாகுமாறு வளைக்கப்பட்டது. அவ்வட்டத்தினது ஆரையைக் காண்க.

*37. ஒரு யார் நீளமுள்ள ஒரு கம்பித்துண்டு ஓரரைவட்டத்து வில்லும் அதனுடைய விட்டமும்போல் அமைய வளைக்கப்பட்டது. ஆரையைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க.)

*38. 3 அங்., 4 அங். ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்களினுடைய பரப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமான பரப்பினைக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தினது ஆரையைக் காண்க.

*39. ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு நாற் கோணம் **கமபத**, $\angle$ **கதம** $= 25°$, $\angle$ **தமப** $= 65°$ எனின்

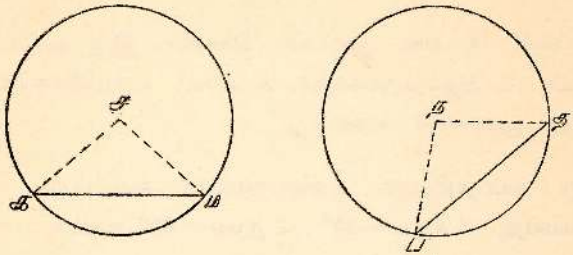
வில் **கம** + வில் **பத** = வில் **மப** + வில் **கத** என நிறுவுக.

*40. ஒரு சமபக்க Δ **கமப** உம் **வயநச** என்னும் ஒரு சதுரமும் ஒரு வட்டம் **கவயமநபச** இனுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டுள்ளன. **வய** விற்குக் **கம** சமாந்தரமெனில் **க, வ, ய, ம, ந, ப, ச** என்பன ஒரொழுங் கான 24 பக்கங்கொண்ட பல்கோணத்தின் சில உச்சிகளாகும் என நிறுவுக.

*41. **கமபத** என்பது ஒரு வட்டத்துள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம். **மத** ஐ **கப** வானது **ச** இலே வெட்டுகின்றது. **தக** உம் **பம** உம் நீட்டப்பட்டபோது **ந** இலே சந்திக்கின்றன. **கம** உம் **தப** உம் நீட்டப்பட்டபொழுது **வ** இலே சந்திக்கின்றன. $\angle$ **கநம** $= 55°$, $\angle$ **மவப** $= 35°$, $\angle$ **தசப** $= 85°$ எனின் வில் **மப**, வில் **கம** இலும் இருமடங்கானதென நிறுவுக.

தேற்றம் 56

சமமான வட்டங்களில் (அல்லது ஒரேவட்டத்தில்) சமமான நாண்கள் சமமான விற்களை வெட்டும்.



உருவம் 639

தரவு. ந, ச களை மையங்களாகவுடைய இரு சமமான வட்டங்கள்; இவ் வட்டங்களினுடைய சமமான நாண்கள் **கம, பத** என்பன.

மேற்கோள். சிறுவில் **கம** = சிறுவில் **பத**,
பெருவில் **கம** = பெருவில் **பத**.

கருவி. **சக, சம, நப, நத** ஆகியவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **சகம, நபத** ஆகியவற்றில்,

சக = **நப**	சமவட்டங்களின் ஆரைகள், தரவு,
சம = **நத**	சமவட்டங்களின் ஆரைகள், தரவு,
கம = **பத**	தரவு,

எனவே $\triangle \begin{matrix} \text{சகம} \\ \text{நபத} \end{matrix}$ சர்வசமனாகும் பபப.

∴ ∠**கசம** = ∠**பநத**.

ஆனால் சமமான வட்டங்களில், மையத்திலுள்ள சமமான கோணங்கள் சமமான விற்களில் நிற்கின்றன,

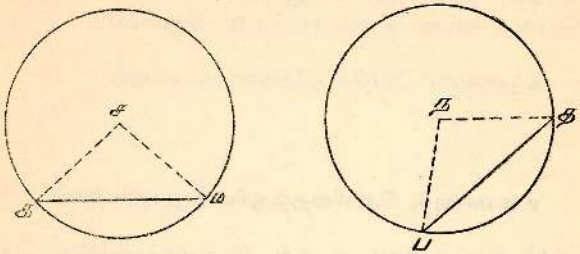
∴ சிறுவில் **கம** = சிறுவில் **பத**.

இருவட்டங்களின் பரிதியுஞ் சமம்,

∴ பெருவில் **கம** = பெருவில் **பத**.

தேற்றம் 57

சமமான வட்டங்களில் (அல்லது ஒரேவட்டத்தில்) சமவிற்களினுடைய நாண்கள் சமமாகும்.



உருவம் 640

தரவு. ச, ந களை மையமாகவுடைய இருசமமான வட்டங்கள், இவ்வட்டங்களினுடைய சமமான விற்கள் **கம, பத** என்பன.

மேற்கோள். நாண் **கம** = நாண் **பத**.

கருவி. **சக, சம, நப, நத** களை இணைக்க.

நிறுவல். சமமான வட்டங்களில், சமமான விற்களின் மேலே நிற்கும் மையத்திலமைந்த கோணங்கள் சமமாகும்.

∴ ∠**கசம** = ∠**பநத**,

∴ முக்கோணங்கள் **சகம, நபத** என்பவற்றில்,

சக = நப சமவட்டத்தின் ஆரைகள், தரவு,

சம = நத சமவட்டங்களின் ஆரைகள், தரவு,

∠**கசம** = ∠**பநத** நிறுவப்பட்டது,

∴ முக்கோணங்கள் **சகம / நபத** சர்வசமனாகும் பகோப.

∴ **கம = பத**.

54 – 57 வரையுள்ள தேற்றங்கள், விற்கள், நாண்கள், கோணங்கள் ஆகியவற்றினுடைய சமன்களுக்குரிய பயனுள்ள சோதனைகளை அளிக்கின்றன.

ஒரு வட்டத்தினுடைய இருவிற்கள், பரிதியில் (அல்லது மையத்தில்) சமமான கோணங்களை அமைக்கின்றனவெனக் காட்டி அவை சமமென நிறுவலாம்.

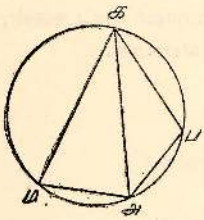
ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் பரிதியில் சமமான அல்லது மிகை நிரப்புகின்ற கோணங்களை அமைக்கின்றனவெனக் காட்டி அவை சமமென நிறுவலாம்.

ஒரு வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள இருகோணங்கள், சமமான விற்களில் நிற்கின்றனவெனக் காட்டி அவை சமமென நிறுவலாம்.

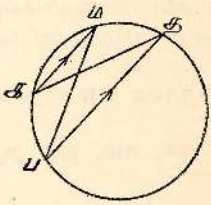
சமமான வட்டங்களுக்கும் இச்சோதனைகள் பயன்படும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 641 இல் ∠ **மகப** ஐ **கஅ** இருசமக்கூறிடுகின்றதெனின் நீர் என்ன உய்த்தறிவீர்?



உருவம் 641



உருவம் 642

2. உரு 642 இல் **கம, பத** என்பன வட்டத்திலே சமாந்தரமான நாண்கள்.

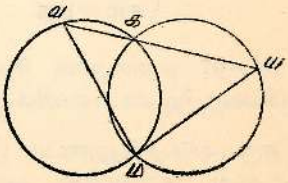
(i) வில் **கப** = வில் **மத** என நிறுவுக.

(ii) நாண் **கத** = நாண் **மப** என நிறுவுக.

(i) எக்கோணங்கள் சமமென நீர் நிறுவல் வேண்டும்?

(ii) எவ்விற்கள் சமமென நீர் நிறுவல் வேண்டும்?

3. உரு 643 இல் வட்டங்கள் சமம்; **வகய** ஒரு நேர்கோடு. **மவ = மய** என நிறுவுக. **கம** வை இணைக்க. சமமான வட்டங்களில் சமமான நாண்களிலே நிற்குங் கோணங்கள் சமமானவை அல்லது ..... என்ற கூற்றினை முடிவாக்குக.



உருவம் 643

பயிற்சி 64

1. வட்டம் **கமபத** வினுடைய சமமான நாண்கள் **கம, பத** என்பன. (i) **கப = மத** என நிறுவுக. (ii) **கத** இற்கு **மப** சமாந்தரமென நிறுவுக.

[2] **கமபத** ஓரொருவட்டத்து நாற்கோணம். **கம = பத** எனின் ∠**கமப** = ∠**மபத** என நிறுவுக. (இக்கோணங்கள் எவ்விற்களிலே நிற்கின்றன ?)

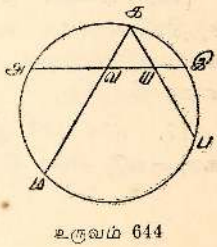
3. **கமபதநவ** ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஓரறு கோணம். ∠**கமப** = ∠**தநவ** எனின் **பத** விற்கு **கவ** சமாந்தரமென நிறுவுக. (**கத** வை இணைக்க. எவ்விற்கள் சமமானவை ?)

4. **ச** வை மையமாகவுடைய வட்டம் **பதநவகம** வில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒழுங்கான 5 பக்கங்களுக்கு மேலான பக்கங்களையுடைய ஒரு பல்கோணத்தின் அடுத்து வருகின்ற உச்சிகள் **க, ம, ப, த, ந** என்பன. ∠**பவந** = ∠**கசம** என நிறுவுக.

[5] ஒரு வட்டம் **கமபத** வினுடைய நாண்கள் **கம, தப** என்பன நீட்டப்பட்டபொழுது **ந** விலே சந்திக்கின்றன. **கம = பத** எனின் **நக = நத** என நிறுவுக.

6. **கமபத** என்பது ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு செவ்வகம் ; **தவ** என்பது **தப** விற்குச் சமமான நாண். (i) வில் **தவ** = வில் **கம** என நிறுவுக; (ii) **வம** = **கத** என நிறுவுக.

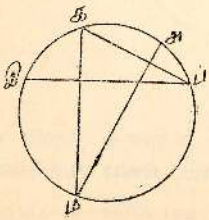
7. உரு 644 இல் விற்கள் **கம, கப** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **அ, இ** என்பன. **கவ = கய** என நிறுவுக. (**கஅ, கஇ** களை இணைக்க.)



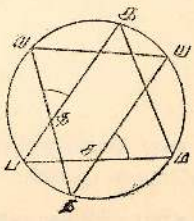
உருவம் 644

[8] ஒரு வட்டம் **கமய** வினது மையம் **அ** விற்கூடாக ஒரு வட்டம் **கஅமவ** செல்கின்றது. ∠**கவம** வை **அவ** இருசமக்கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

[9] **ய** வை மையமாகவுடைய வட்டம் **வநசத** வினுடைய சமாந்தரநாண்கள் **வத, நச** என்பன. **தந** வை **வச, க** விலே வெட்டினால் ∠**வகந** = ∠**வயந** என நிறுவுக.



உருவம் 645



உருவம் 646

10. உரு 645 இல் நாண்கள் **மஅ, பஇ** என்பன முறையே **கப, கம** என்பவற்றிற்குச் செங்குத்துக்கள். வில் **கஅ** = வில் **கஇ** என நிறுவுக.

[11] உரு 646 இல் ∠ **வதக** = ∠ **யசம** எனின் **வய** = **கம** என நிறுவுக. (**மப** விற்கு **வய** சமாந்தரமன்று.)

12. ஒரு வட்டத்தினுடைய வில் **கவயம.** ∠ **வகய,** ∠ **வமய** ஆகிய வற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் **ந** விலே சந்தித்தால் **ந** ஒரு வட்டத் திலே கிடக்கின்றதென நிறுவுக.

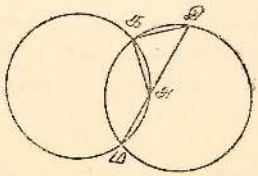
13. ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக அமைக்கப்பட்ட நாற்கோணம் **கமபத. பத, வ** விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ **கமப** வினது இருசமவெட்டி வட்டத்தை **ந** விலே வெட்டுகின்றது. ∠ **கதவ** வை **தந** இருசமக்கூறிடு கின்றதென நிறுவுக.

14. ஒரு வட்டத்தினுள் ஓரறுகோணம் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டுள் ளது. இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரமெனின் மூன்றாவது சோடி யுஞ் சமாந்தரமென நிறுவுக. (பக்கங்களால் வெட்டப்பட்ட சிறுவிற்களி னுடைய நீளங்களை **க, ம, ப, த, ந, வ** எனக்கொள்க. பக்கம் 406 இல் உள்ள உதாரணம் 2 ஐப் பயன்படுத்துக.)

15. ஒருவட்டத்து நாற்கோணம் **கமபத** வினுடைய பக்கம் **கத** என்பது **ந** விற்கு, **தந** = **கம** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ **மகத** வை **கப** இருசமக்கூறிடுமெனின் **பந**=**பக** என நிறுவுக.

[16] ∠ **கமப,** ∠ **கபம** ஆகியவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் **ந** விலே சந்திக்கின்றன வட்டம் **மநப** என்பது தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கம, கப** ஆகியவற்றை **வ, ய** களில் வெட்டுகின்றது. **வந** = **நப, யந** = **நம** என நிறுவுக.

17. உரு 647 இல் வட்டங்கள் சமமானவை ; **மஅஇ** ஒரு நேர்கோடு. **கஅ** = **கஇ** என நிறுவுக.



உருவம் 647

18. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது நாண் **மப** விலே **வ** யாதாயினுமொரு புள்ளி. வட்டங்கள் **யவம, யவப** சமமென நிறுவுக.

[19] Δ **கமப** வில் **கம** = **கப** ; நீட்டப்பட்ட **மப** விலே **த** யாதாயினுமொரு புள்ளி, வட்டங்கள் **கதம, கதப** சமமென நிறுவுக.

20. **கமபத** ஒரொரு வட்டத்துநாற்கோணம். ∠**கமப**=2∠**மகப** ஆக **தப** விற்கு **கம** சமாந்தரமெனின **கத**=**தப**=**பம** என நிறுவுக.

[21] ஒருமாறும் Δ**வயந** ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப் பட்டுள்ளது. ∠**பவந** கொடுக்கப்பட்ட ஒருபருமனையுடையதெனில் Δ**வயந** வைப் பற்றி நீர் வேறென்ன கூறுவீர்?

[22] வட்டம் **கபதம** வின் ஒரு கால்வட்டம் **பத**; **கம** ஒரு விட்டம். **மப** வை **கத** என்பது **வ** விலே வெட்டினால் **கப**=**பவ** என நிறுவுக.

*23. **கமபத** ஒரொருவட்டத்து நாற்கோணம். நீட்டப்பட்டபொழுது **மப** வும் **கத** வும் **ந** விலே சந்திக்கின்றன. வட்டம் **கபந** என்பது, தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கம, பத** க்களை **வ, ய** க்களில் வெட்டினால் **நவ**=**நய** என நிறுவுக.

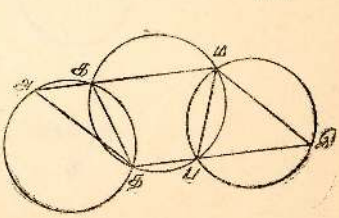
*24. ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் **கம, மப** என்பன; **கம**>**மப**. சிறுவில் **கம** நாண் **கம** வழி மடிக்கப்பட்டு **கப** வை **த** விலே வெட்டுகின்றது. **மத**=**மப** என நிறுவுக.

*25. **கமப** என்பது ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப் பட்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம். சிறுவிற்கள் **கம, கப** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **ச, த** என்பன. **சத** என்பது **கம, கப** க்களால் முச்சமக கூறிடப்பட்டுள்ளதென நிறுவுக. (**கச, கத, பச, மத** என்பவற்றை இணைக்க.)

*26. **கமபத** என்டது ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப் பட்ட ஒரு நாற்கோணம். **அ, இ, உ, எ** என்பன முறையே சிறுவிற்கள் **கம, மப, பத, தக** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகளாகும். **அஉ** என்பது **இஎ** இற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக. (**அஇ, இஉ** என்பவற்றை இணைக்க.)

*27. **ய** வை மையமாகவுடைய **மவகபத** என்னும் வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம் **கமப**. **மப** விற்குச் செங்குத்தான விட்டம் **வத**. ∠**கபம**−∠**கமப**=∠**கயவ** என நிறுவுக.

*28. ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு சம பக்க Δ**கமப**. சிறுவிற்கள் **கம, மப** களிலே **த, ந** என்னும் புள்ளிகள் **கத**=**மந** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. **கத**+**தம**=**கந** என நிறுவுக. (**தச** என்பதை **மந** விற்குச் சமாந்தரமாகவும் **கந** வைச் **ச** விலே சந்திக்குமாறும் வரைக.)



உருவம் 648

*29. உரு 648 இல் 3 வட்டங்களும் சமம்; **கத**=**மப**; **அகம** வும் **தபஇ** யும் நேர் கோடுகள். **அமஇத** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

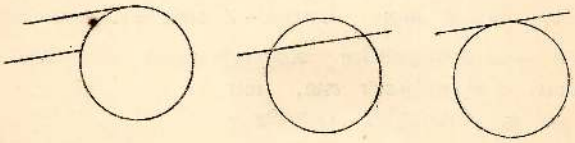
*30. நிலையான இருவட்டங்கள் **க, ம** க்களில் வெட்டுகின்றன; **வ** என்பது ஒரு வட்டத்திலே மாறும் ஒரு புள்ளி. **வக, வம** என்பன நீட்டப்பட்டபொழுது மற்றை வட்டத்தை **ய, ந** க்களில் வெட்டுகின்றன. **யந** என்பது மாறாத நீளமுடையதென நிறுவுக.

சீக்கனுந் தொடுகோடும்

வரைவிலக்கணங்கள். ஒரு நேர்கோடு ஒரு வட்டத்தை வேறு வேறான இரு புள்ளிகளில் வெட்டினால் அது ஒரு **சீக்கன்** எனப்படும்.

ஒரு நேர்கோடானது இரு வழியிலும் எவ்வளவு தூரம் நீட்டப்பட்டாலும் ஒரு வட்டத்துடன் ஒரேயொரு புள்ளியைப் பொதுவாகக் கொண்டிருந்தால் அந்நேர் கோடு வட்டத்தினது **தொடுகோடு** எனப்படும்; அப்பொதுப்புள்ளி **தொடுபுள்ளி** எனப்படும்.

"தொடுதல்", "சந்தித்தல்" என்ற சொற்களை நன்கு விளங்கிக் கொள்ளல் வேண்டும். ஒரு வட்டத்தை ஓரிடத்திற் சந்திக்கும் ஒரு கோடு நீட்டப்பட்டால் வேறான இரண்டாவது ஒரு புள்ளியில் அது வட்டத்தைச் சந்தித்தல் கூடும்; சந்திக்கின் அக்கோடு ஒரு சீக்கனாகும். சிலவேளைகளில் இரு வழிகளிலும் அது எவ்வளவு தூரமேனும் நீட்டப்பட்டாலும் அது வட்டத்துடன் ஒரேயொரு புள்ளியையே பொதுவாகக் கொண்டிருக்கும். அவ்வாறாயின் அக்கோடு ஒரு தொடுகோடாகும்.



சந்தித்தல் (i) — சந்தித்தலும் வெட்டுதலும் (ii) — சந்தித்தலும் தொடுதலும் (iii)

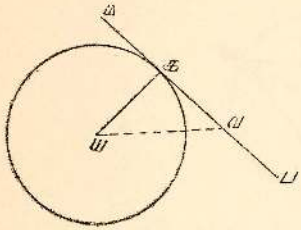
உருவம் 649

தொடுகோடுகளைப்பற்றிய பண்புகள் 647,649 ஆம் பக்கங்களில் எல்லைகளை பயன்படுத்தி ஆயப்பட்டுள்ளன.

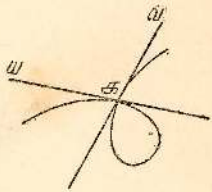
உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1 ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலே க யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ; க இற் கூடாக யக இற்குச் செங்கோணமாக மகப வரையப் பட்டுள்ளது; மகப வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடு என நிறுவுக.

கோடு **மகப** விலே **வ** என்பது **க** தவிர்ந்த யாதாயினும் ஒரு புள்ளி யெனின் **யவ > யக** என நிறுவி நிறுவலை முடிவாக்குக.



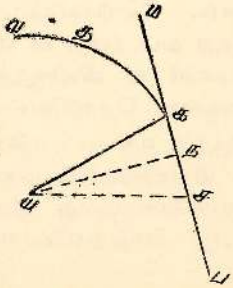
உருவம் 650



உருவம் 651

ஒரு வட்டத்திற்கு அதிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியில் ஒரு தொடுகோடே யுளதென நாம் எடுத்துக்கொண்டால் உதாரணம் 1 இன் மறுதலை உண்மையென்பது அதிலிருந்து பெறப்படும். உரு 651 ஐப் பார்க்க ; இவ்வெடுகோளைப் பொய்யாக்கக் கூடிய வளைவுகளை வரைதல் எளிது. எனவே இவ்வெடுகோள் ஒரு வட்டத்தைப் பற்றிய அளவில் உண்மை யானது என நிறுவல் நன்றாகும்.

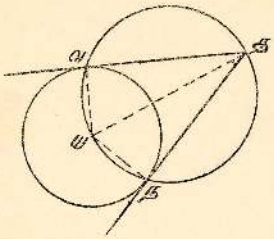
2 ய ஐ மையமாகவுடைய வட்டவில் கதவ ஐ ஒரு நேர்கோடு மகப, க இலே தொட்டால், யக ஆனது மகப இற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.



உருவம் 652

இயலுமானால், மகப விற்கு யக செங்குத்தன்று, யந என்பதே ய விலிருந்து மப விற்குள்ள செங்குத்தெனப் பாவித்துக்கொள்க. கந ஐ ச விற்கு, கந = நச ஆகுமாறு நீட்டுக. யச ஐ இணைத்து யச = யக என நிறுவுக. இது என் தரவிற்கு எதிரிடையானது என விளக்குக.

3 ய ஐ மையமாகவுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி த. த இலிருந்து வட்டத்திற்குரிய தொடுகோடு களை வரைக.



உருவம் 653

தய வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை வ, ந க்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க. தவ, தந க்களே வேண்டிய தொடு கோடுகளாம்.

(i) என் ∠ யவத ஒரு செங்கோணமென விளக்குக.

(ii) தவ உம் தந வுந் தொடுகோடுகள் என நிறுவுக.

4. ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திற்கு த இலிருந்துள்ள தொடுகோடுகள் தவ, தந எனின் (i) தவ = தந என நிறுவுக; (ii) ∠ வதந, ∠ வயந என்பவற்றை யத இருசமக்கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

ஏன் △ யவத ≡ △ யநத என விளக்குக.

தொடுகோட்டினது நீளம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்திற்கு வெளி யுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தை வ விலே தொடுமாறு ஒரு கோடு தவ கீறப்படின், தொடுபுள்ளி வ விலிருந்து புள்ளி த உள்ள தூரம் த விலிருந்து வட்டத்திறகுள்ள தொடுகோட்டினது நீளம் எனப்படும்.

ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குரிய தொடுகோடுகள் சமம் என்பதை உதாரணம் 4 நிறுவுகின்றது. எனவே, ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குரிய தொடுகோட்டினது நீளத்தைப்பற்றிப் பேசுமிடத்து இரு தொடுகோடுகளில் எது எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது என்பது முக்கிய மானதன்று.

5. உரு 653 இல் வட்டத்தின் ஆரை 3 ச.மீ. ஆக மையம் ய விலிருந்து த விற்குள்ள தூரம் 5 ச.மீ. எனின் த விலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோட்டினது நீளத்தைக் கணிக்க.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 65

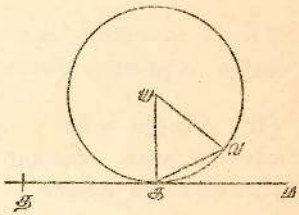
எண்கள் 1–4 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 654 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **ய** வை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு **தகம்** என்பது **க** விலே அமைந்த தொடுகோடாகும்.

1. ∠ **வகம்** = 25° எனின் ∠ **யகவ**, ∠ **கயவ** ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ∠ **கயவ** = 70° எனின் ∠ **வகம்** வைக் காண்க.

3. **யக** = 6 ச.மீ., ஆக **யத** = 10 ச.மீ. எனின் **தக** வைக் காண்க.

[4] **தக** = 12 ச.மீ., ஆக **யக** = 5 ச.மீ. எனின் **யத** வைக் காண்க.



உருவம் 654

எண்கள் 5 – 7 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 653 ஐக் குறிக்கின்றன. அதிலே **தவ**, **தந** என்பன **த** இலிருந்து, **ய** ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்திற்குரிய தொடுகோடுகள் ஆகும்.

5. ∠ **வதந** = 70° எனின் ∠ **வயந** ஐக் காண்க.

[6] ∠ **தயவ** = 56° எனின் ∠ **வதந** ஐக் காண்க.

7. ∠ **வதந** = 36° எனின் ∠ **தவந** ஐக் காண்க.

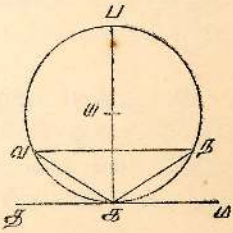
8. **கமப** என்பது ஒரு வட்டத்தினுடைய சிறுவில்; **க**, **ப** களிலுள்ள தொடுகோடுகள் **த** இற் சந்திக்கின்றன. ∠ **கதப** = 54° எனின் ∠ **கமப** ஐக் காண்க.

எண்கள் 9 – 11 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 655 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **கப** வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும்; **தகம்** ஒரு தொடு கோடாகும்.

9. ∠ **நகம்** = 38° எனின் ∠ **நகப**, ∠ **நபக** ஆகியவற்றைக் காண்க.

[10] ∠ **கவந** = 42° எனின் ∠ **நகம்** ஐக் காண்க.

11. ∠ **நகத** = 155° எனின் சிறுதுண்டு **கந** இலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.



உருவம் 655

12. வெளியேயுள்ள புள்ளி **த** இலிருந்து 4·5 அங். ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோட்டினது நீளம் 6 அங்குலமாகும். பரிதியிலுள்ள மிக அண்ணிய புள்ளியிலிருந்து **த** விற்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

13. ஒருமைய இருவட்டங்களினுடைய ஆரைகள் 5 ச.மீ., 3 ச.மீ. ஆகும். சிறுவட்டத்தைத் தொடும் பெருவட்டத்தினுடைய ஒரு நாணினது நீளத்தைக் காண்க.

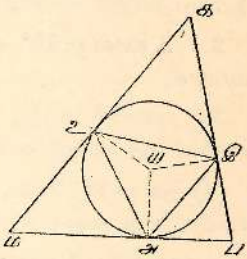
எண்கள் 14–17 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 656 ஐக் குறிக்கின்றன; அதில் ய ஐ மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் Δ கமப இன் பக்கங்களை அ, இ, உ களிலே தொடுகின்றது.

14. ∠ ம = 50° ஆக ∠ ப = 70° எனின் Δ அஇஉ வினுடைய கோணங்களைக் காண்க.

[15] ∠ அஇஉ = 64° ஆக ∠ அஉஇ = 48° எனின் ∠ அயஉ வையும் Δ கமப வினுடைய கோணங்களையுங் காண்க.

16. கம = 8 ச.மீ., மப = 7 ச.மீ., பக = 5 ச.மீ. எனின் மஅ வைக் காண்க.

[மஅ = மஉ = ந ச.மீ. எனக் கொள்க; அப்பொழுது பஇ = பஅ = (7 − ந) ச.மீ. அதோடு கஇ = கஉ.]



உருவம் 656

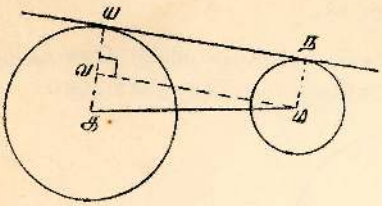
[17] கம = 4 அங., மப = 4·5 அங., பக = 3·5 அங். எனின் 16 ஆம் கணக்கை மீண்டுஞ் செய்க.

18. Δ கமப வில் ∠ ம = 50°, ∠ ப = 70°; மப, நீட்டப்பட்ட கப, நீட்டப்பட்ட கம ஆகியவற்றை ஒரு வட்டமானது வ, ய, ந ஆகியவற்றில் முறையே தொடுகின்றது. ∠ யவந வைக் காண்க.

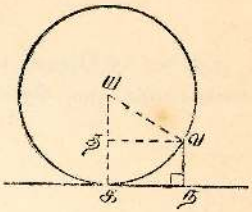
[19] ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்ட ஒரு நாற்கோணத்தினுடைய 3 கோணங்கள் முறையே 70°, 84°, 96° ஆகும். தொடுபுள்ளிகளைத் தன்னுடைய உச்சிகளாகக் கொண்ட நாற்கோணத்தினுடைய கோணங்களைக் காண்க.

20. Δ கமப இல் மப = 3 ச. மீ., பக = 6 ச. மீ., கம = 7ச.மீ. வட்டமொன்று நீட்டப்பட்ட கம வை ந விலும் நீட்டப்பட்ட கப வை ய விலும் மப வை வ விலுந் தொடக்கூடியதாக வரையப்பட்டுள்ளது. கந, பவ ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

21. மப = 3 அங., பக = 5 அங., கம = 4 அங். எனின் 20 ஆவது கணக்கை மீண்டுஞ் செய்க.



உருவம் 657



உருவம் 658

22. உரு 657 இல் 8 ச. மீ., 3 ச.மீ. ஆகிய அளவுகளை ஆரைகளாகக் கொண்டு முறையே **க,ம** ஆகியவற்றை மையங்களாகவுள்ள வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் **யந** தொடுகின்றது; இது அளவிறகியைய வரையப்படவில்லை. **கம** = 13 ச.மீ. எனின் **யந** வைக் காண்க.

*23. உரு 658 இல் **கந** வட்டத்திற்குரிய ஒரு தொடுகோடு; **கநவ** ஒரு செங்கோணம். **கந** = 15 ச.மீ., ஆக **வந** = 9 ச.மீ. எனின் வட்டத்தினது ஆரையைக் காண்க. (ஆரை **யக** விற்குச் செங்குத்தாக **வத** வைக் கீறுக; **யக** = ஆ ச.மீ. எனக் கொள்க.)

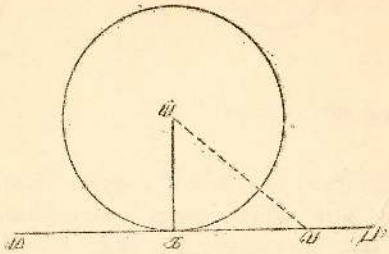
*24. △**கமப** வில் **கம** = 2 அங்., **மப** = 3 அங்., ∠**கமப** = 90°. **கம** வை **க** விலே தொட்டுப் **ப** விற்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தினுடைய ஆரையைக் காண்க. (நீட்டப்பட்ட ஆரை **கய** விற்குச் செங்குத்தாக **பத** வைக் கீறுக. **யப** வை இணைக்க.)

*25. △**கமப** வின் ஒருபரம் **கத**. **கம** = 3 அங்., **கப** = 4 அங்., **கத** = 2·4 அங். ஆக **த** என்பது **ம** விற்கும் **ப** விற்குமிடையே கிடக்கின்றதெனின் **ம** வை மையமாகவும் **மக** வை ஆரையாகவுமுடைய வட்டத்தைக் **கப** தொடுகின்றதென நிறுவுக.

*26. புறக்கணிக்கத்தக்க தடிப்புடையதும் 25 அங்குல விட்டமுடையதும் ஓரரைக் கோளவடிவினதுமான கிண்ணம் கிடையான மேசையொன்றின் மேற்றங்கியுள்ளது. விளிம்பிலிருந்து $3\frac{1}{2}$ அங். கீழே நீரின் மேற்பரப்பு வருமளவு அக்கிண்ணத்தில் நீர் ஊற்றப்பட்டது. இக்கிண்ணம் மெதுவாக ஆட்டப்பட்டுத் தண்ணீர் வழிந்தோடக்கூடுந்தறுவாயில் விளிம்பினுடைய மிக உயர்ந்த புள்ளி மேசையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்திலிருக்கும்?

தேற்றம் 58

ஒரு வட்டத்தினுடைய ஓராரைக்கு அதன் முனைப்புள்ளியிற் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு அவ்வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடாகும்.



உருவம் 659

தரவு. ய வை மையமாகவும் **யக** வை ஆரையாகவுமுடைய ஒரு வட்டம்; **யக** விற்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோடு **மகப.**

மேற்கோள். **மகப** ஒரு தொடுகோடாகும்.

கருவி. **மப** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ** வை எடுக்க.
யவ வை இணைக்க.

நிறுவல். $\angle$ **யகவ** = ஒரு செங்கோணம் **தரவு,**

$\therefore$ Δ **யகவ** வின் மற்றை ஒவ்வொரு கோணமும் ஒரு செங்கோணத்தினுஞ் சிறியது.

$\therefore$ $\angle$ **யவக** $<$ $\angle$ **யகவ,**

$\therefore$ **யக** $<$ **யவ** **பெரிய கோணத்திற்கு எதிரான பெரியபக்கம்.**

ஆனால் **யக** ஓராரை,

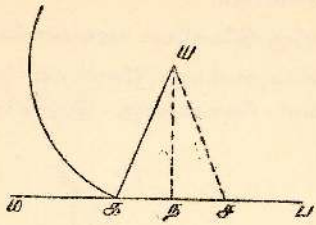
$\therefore$ **யவ** ஓராரையிலும் பெரியது,

$\therefore$ **வ** வட்டத்தின் வெளியே கிடக்கின்றது.
இவ்வாறே **மப** விலே **க** தவிர்ந்த ஒவ்வொரு புள்ளியும் வட்டத்திற்கு வெளியே கிடக்கின்றது.

$\therefore$ **மப** வட்டத்தைக் **க** விலே தொடுகின்றது.

தேற்றம் 59

ஒரு வட்டத்தினது தொடுகோடு தொடுபுள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.



உருவம் 660

தரவு. ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் புள்ளி க விலே ஒரு தொடுகோடு மகப.

நிறுவல். ∠ யகப = ஒரு செங்கோணம்.

கருவியும் நிறுவலும். இயலுமெனின் மப விற்கு யக செங்குத்தன்று எனக் கொண்டு ய விலிருந்து மப விற்குச் செங்குத்து யந வை வரைக.

கந வை ச விற்கு கந = நச ஆகுமாறு நீட்டுக.

யச வை இணைக்க.

கருவியால் கச விற்கு யந இருசட வெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

∴ யக = யச ஒழுக்குத்தேற்றம்,

∴ ச வட்டத்திலே கிடக்கின்றது,

∴ மகப வட்டத்தை இருபுள்ளிகள் க, ச க்களில் வெட்டுகின்றது.

ஆனால் இது இயலாதது; ஏனெனில் மகப ஒரு தொடுகோடு என்க. எனவே முதற் பாவனை தவறுடையதாகும்.

∴ மப விற்கு யக செங்குத்தாகல் வேண்டும்.

கிளைத்தேற்றம் 1. ஒரு வட்டத்தினுடைய ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அவ் வட்டத்திற்கு ஒரேயொரு தொடுகோடே கீறலாம்.

கிளைத்தேற்றம் 2. ஒரு தொடுகோட்டிற்கு அதன் தொடுபுள்ளியிலமைந்த செங்குத்து வட்டத்தின் மையத்திற்கூடாகச் செல்கின்றது.

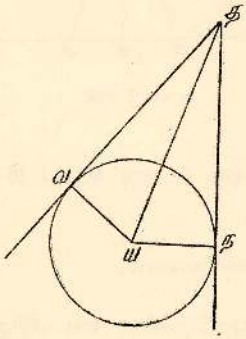
தேற்றம் 60

ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் கீறினால்,

(i) தொடுகோடுகள் சமமாகும் ;

(ii) மையத்திலே அத்தொடுகோடுகள் சமமான கோணங்களை அமைக்கும் ;

(iii) மையத்தை வெளிப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் கோடு தொடுகோடுகளுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தை இருசமக்கூறிடும்.



உருவம் 661

தரவு. ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் ;
வெளிப்புள்ளி த விலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் தவ, தந என்பன.

மேற்கோள். (i) தவ = தந,
(ii) ∠ தயவ = ∠ தயந,
(iii) ∠ யதவ = ∠ யதந.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் யவத, யநத ஆகியவற்றில்,
யவ = யந ஆரைகள்,
யத = யத,
∠ யவத = ∠ யநத செங்கோணங்கள், ஆரைக்குச்செங்குத்தான தொடுகோடு,

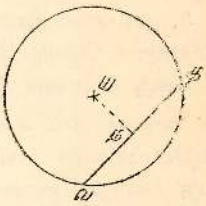
∴ முக்கோணங்கள் யவத, யநத சர்வசமனாகும் செங். செம். ப.

∴ தவ = தந.
∠ தயவ = ∠ தயந,
∠ யதவ = ∠ யதந.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. ய வை மையமாகவுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தின் மாறும் நாண் வத. அது மாறாத நீளமுடையதெனின் ஒரு நிலையான ஒரு மையவட்டத்தைத் தொடுகின்றதென நிறுவுக.

யந என்பது ய விலிருந்து வத விற்குள்ள செங்குத்தெனின் என் யந வினது நீளம் மாறிலி என விளக்குக.



உருவம் 662

2. உரு 663 இல் உரு கமபத என்பது ஒருவட்டத்தைச்சுற்றி வரையப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம்.

கம + பத = கத + மப என நிறுவுக.

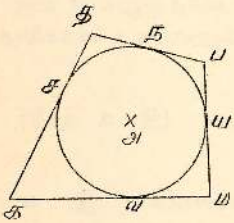
வ, ய, ந, ச க்களைத் தொடுபுள்ளிகளாகக் கொள்க. கவ வைப் பற்றி, மவ வைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?

3. உரு 663 இல் அ என்பது வட்டத்தின் மையமெனின்

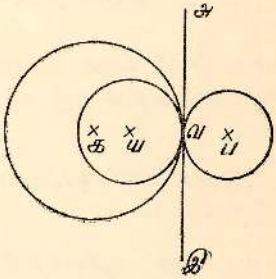
∠கஅம + ∠பஅத = 2 செங்கோணங்கள் என நிறுவுக.

∠அகம, ∠அமக ஆகியவற்றைப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?

∠க + ∠ம + ∠ப + ∠த என்பதைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?



உருவம் 663



உருவம் 664

4. உரு 664, க, ய, ப க்களை மையங்களாகக்கொண்ட மூன்று வட்டங்கள் அஇ என்னும் ஓர் நேர்கோட்டை வ விற் சந்திப்பதைக் குறிக்கின்றது. வ, க, ய, ப என்பன ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுக.

∠பவஅ வைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?

பயிற்சி 66

1. வட்டம் **கவம** வினது ஒரு விட்டம் **கம** ; **க** வை மையமாகவும் **கவ** வை ஆரையாகவும் உள்ள வட்டம் **வம** வைத் தொடுகின்றதென நிறுவுக.

[2] **கம** என்பது ஒரு வட்டத்தினது விட்டம். **க, ம** க்களிலுள்ள தொடு கோடுகள் சமாந்தரமென நிறுவுக.

3. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது ஒரு நாண் **கவ**. **க** விலுள்ள தொடு கோட்டிற்கு **வ** விலிருந்துள்ள செங்குத்து **வந** ஆகும். ∠ **யவந** வை **கவ** இருசமக் கூறிடுகின்றதென நிறுவுக.

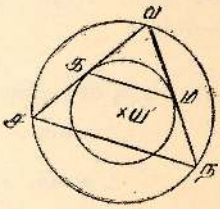
எண்கள் 4–7 வரை உள்ள கணக்குக்கள் உரு 665 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுடைய நாண்கள் **வச, வந** என்பன ஒருமையவட்டமொன்றை **க, ம** களிலே தொடுகின்றன.

4. **வக = கச** என நிறுவுக.

[5] **வச = வந** என நிறுவுக.

[6] **சந = 2 கம** என நிறுவுக.

7. **யவ** என்பது **கம** வின் இருசம வெட்டிச்செங் குத்தென நிறுவுக.



உருவம் 665

8. வட்டம் **கவம** வினது ஒரு விட்டம் **கம**. **வ** விலுள்ள தொடு கோட்டிற்கு **க, ம** க்களிலிருந்து செங்குத்துக்கள் **கஅ, மஇ** என்பனவாகும். **வஅ = வஇ** என நிறுவுக. (**வ** வை மையத்திற்கு இணைக்க.)

எண்கள் 9–12 வரை உள்ளவை 414 ஆம் பக்கத்திலுள்ள உரு 656 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் ஒரு வட்டம் △ **கமப** வினுடைய பக்கங்களைத் தொடுகின்றது.

9. ∠ **இஅஉ** ≡ 90° − ½ ∠ **மகப** என நிறுவுக. (**இ, உ** க்களை மையத்திற்கு இணைக்க.)

[10] **கப, கம** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **இ, உ** எனின் **மஅ = பஅ** என நிறுவுக.

11. **கஇ** = ½ (**கம + கப − மப**) என நிறுவுக.

*12. △ **கஅம**, △ **கஅப** ஆகியவற்றினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட வட்டங்கள் **கஅ** வை ஒரே புள்ளியிலே தொடுகின்றன என நிறுவுக.

13. **கமபதநவ** என்பது ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்ட ஓரறு கோணம். **கம + பத + நவ = மப + தந + வக** என நிறுவுக.

14. ஒரே மையம் **ய** வையுடைய 2 வட்டங்களிலே **வ, ந** என்பன புள்ளிகள். **வ, ந** க்களிலேயுள்ள தொடுகோடுகள் **த** விற் சந்திக்கின்றன;

(i) **ய, வ, ந, த** ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக;

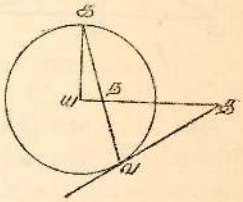
(ii) ∠ **யநவ** வும் ∠ **யதவ** வும் சமம் அல்லது மிகைநிரப்புகின்றன என நிறுவுக.

[15] ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் **கவ, கய** என்பன; ஒரு விட்டம் **கம**; **ம** விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **கவ** வையும் நீட்டப்பட்ட **கய** வையும் **அ, இ** க்களிற் சந்திக்கின்றது. **வ, ய, அ, இ** ஒரு பரிதியிலுள்ளன வென நிறுவுக.

[16] ஓரிணைகரம் ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றியமைந்தால் அது ஒரு சாய் சதுரம் எனவும் அதனுடைய மூலைவிட்டங்கள் வட்டத்தின் மையத்திலே ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன எனவும் நிறுவுக.

17. உரு 666 இல் **ய** வட்டத்தினது மையம், ∠ **கயத** ஒரு செங்கோணம், **தவ** ஒரு தொடுகோடு. **தவ = தந** என நிறுவுக. (**யவ** வை இணைக்க.)

18. வட்டம் **கமப** வின் மையம் **ய**. ∠ **கமப** = 30° ஆக, **க** விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **யப** வை **த** விலே வெட்டினால் **யப = பத** என நிறுவுக.



உருவம் 666

19. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் **கவம** வினது ஒரு விட்டம் **கம**. **க, வ** க்களிலே உள்ள தொடுகோடுகள் **த** விலே சந்திக்கின்றன. **தய** என்பது **வம** விற்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக. (**யத** வை **கவ** ஆனது **ந** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க; **யவ** வை இணைக்க.)

[20] **ய, க** என்பன நிலையான புள்ளிகள். **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு மாறும் வட்டத்திற்கு **க** விலிருந்துள்ள தொடுகோடு **கவ** ஆகும். **வ** வினது ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் என நிறுவுக.

[21] **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளான **வ, ந** க்களிலமைந்த தொடுகோடுகள் **த** விலே சந்திக்கின்றன. **த** விற் கூடாகச் செல்லும் **நத** விற்குள்ள செங்குத்தானது **யவ** வை – தேவை யெனில் நீட்டப்பட்ட **யவ** வை – **ச** விலே சந்திக்கின்றது. **சத = சய** என நிறுவுக. (**யந, யத** ஆகியவற்றை இணைக்க.)

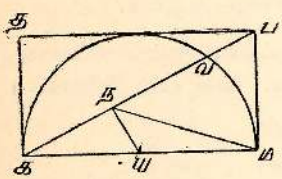
22. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திற்குரிய இரு சமாந்தரமான தொடுகோடுகள் மூன்றுவதொரு தொடுகோட்டினால் **வ, ந** க்களில் வெட்டப்படுகின்றது. ∠ **வயந** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.

[23] $\triangle$ கமப வில் $\angle$ கமப $= 90°$. அ வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம், நீட்டப்பட்ட கம, நீட்டப்பட்ட கப, மப ஆகியவற்றைத் தொடும்படி வரையப்பட்டுள்ளது. $\angle$ கஅப $= 45°$ என நிறுவுக.

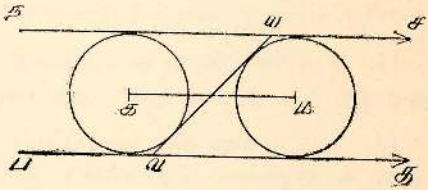
*24. ய வை மையமாகவுடைய வட்டத்தினது ஒரு நாண் வந. வ, ந க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் த விலே சந்திக்கின்றன ; தச என்பது தவ விற்குச் செங்குத்தாகவும் $\angle$ நதச கூர்ங்கோணமாகவும் அமையுமாறு வரையப்பட்டுள்ளது. $\angle$ நதச $>$ $\angle$ யவந எனின் $\angle$ வயந $> 120°$ என நிறுவுக.

*25. உரு 667 இல் கவம என்பது செவ்வகம் கமபத வை 3 பக்கங்களிலே தொடும் ய வை மையமாகவுடைய ஓரரைவட்டம் ; கநவப ஒரு நேர்கோடு, கந $=$ நவ ;

(i) ய, ம, ப, ந என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக ;
(ii) $\angle$ கநம $= 135°$ என நிறுவுக.



உருவம் 667



உருவம் 668

*26. உரு 668 இல் சமாந்தரக் கோடுகள் பவத, நயச என்பனவற்றைத் தொடுகின்ற இரு வட்டங்களின் மையங்கள் க, ம என்பனவாகும். வய ஒவ்வொரு வட்டத்தையுந் தொடுகின்றது ;

(i) கவமய ஒரு செவ்வகம் என நிறுவுக ;
(ii) வய $=$ கம என நிறுவுக.

* 27. உரு 663 இல் மப, கத என்பன நீட்டப்பட்டபொழுது அ விலும், கம, தப என்பன நீட்டப்பட்டபொழுது இ யிலுஞ் சந்தித்தால் அம $+$ மஇ $=$ அத $+$ தஇ என நிறுவுக.

* 28. ஒரு வட்டத்தினது சிறுவில் வயநச ஆகும். வ, ச க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் ம விலே சந்திக்கின்றன. ய, ந க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் த விலே சந்திக்கின்றன. நீட்டப்பட்ட நத வானது வம வை க விலே வெட்டுகின்றது ; நீட்டப்பட்ட யத வானது மச வை ப விலே வெட்டுகின்றது. கம $-$ பத $=$ மப $-$ கத என நிறுவுக.

*29. ஒரு வட்டம் கவம வினது ஒரு விட்டம் கம வானது ப விற்கு, கம $= 2$ மப ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டது. வ விலுள்ள தொடுகோட்டிற்கு ப விலிருந்துள்ள செங்குத்து பத வாகும். (i) மவ $=$ மத என நிறுவுக. (ii) $\angle$ வமத $= 2$ $\angle$ கமவ என நிறுவுக.

ஒன்றுவிட்டதுண்டு

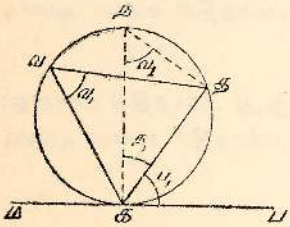
உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

எண்கள் 1 உம் 2 உம் உரு 669 ஐக் குறிக்கின்றன. இதில் **மகப** ஒரு தொடுகோடு ; **கத** யாதாயினும் ஒரு நாண்.

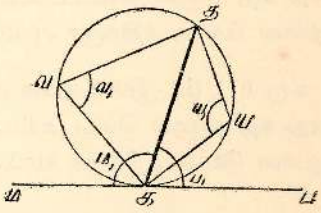
1. $\angle$ப, = 52° எனின் $\angle$**கவத** வைக் காண்க.

விட்டம் **கந** வை வரைக. காரணங் கூறி $\angle$ந, $\angle$வ$_1$, $\angle$வ, என்பவற்றினுடைய பருமன்களைத் தருக.

2. $\angle$ப, = $\angle$வ, **என நிறுவுக.**



உருவம் 669



உருவம் 670

விட்டம் **கந** வை வரைக. என் $\angle$ப, + $\angle$ந, உம் $\angle$வ$_1$ + $\angle$ந, உம் 1 செங் $\angle$ இற்குச் சமன் என விளக்குக. நிறுவலை முடிவாக்குக.

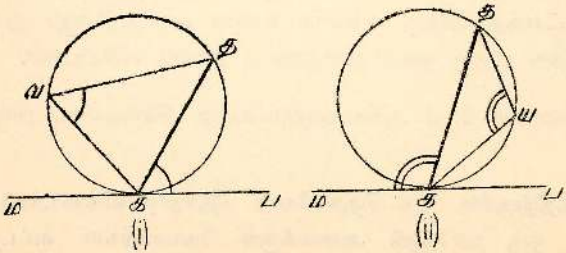
எண்கள் 3 உம் 4 உம் உரு 670 ஐக் குறிக்கின்றன. **அதில் மகப** ஒரு தொடுகோடு ; **கத** யாதாயினும் ஒரு நாண்.

3. $\angle$ப, = 52° எனின் $\angle$ம, $\angle$ய, ஆகியவற்றைக் காண்க.

எண் 2 இல் நிறுவப்பட்ட உண்மை $\angle$ப, = $\angle$வ, என்பதைப் பயன்படுத்துக.

4. $\angle$ம, = $\angle$ய, **என நிறுவுக.**

என் $\angle$ம, + $\angle$ப, $\angle$வ, + $\angle$ய, ஆகிய ஒவ்வொன்றும் 2 செங்கோணங்களுக்குச் சமன் என விளக்குக.



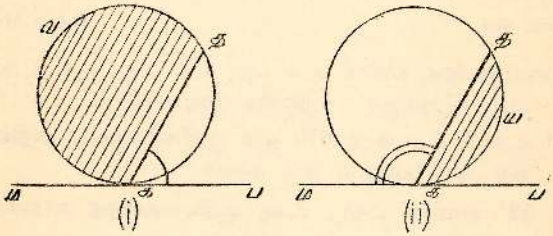
உருவம் 671

எண்கள் 2, 4 ஆகியவற்றில் நிறுவப்பட்ட உண்மைகளை உரு 671 காட்டுகின்றது.

ஒரு நேர்கோடு **மகப** ஒரு வட்டத்தைக் **க** விலே தொட, தொடுபுள்ளி **க** வினூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு நாண் **கத** வெனின், ∠**தகப**, ∠**தகம** என்பவையே, நாண் **கத** என்பது நேர்கோட்டுடன் **க** விலே அமைத்த இருகோணங்களாகும். **மகப** ஒரு நேர் கோடானதால் கோணங்கள் மிகைநிரப்புகின்றனவாம்.

உரு 671 (i) இல் ∠**தகப** நாண் **கத** விற்கு வலது பக்கத்தில் உள்ளது; அது **கத** வினால் வெட்டப்பட்ட **கத** விற்கு இடது பக்கத்தில் உள்ள துண்டிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமம்.

உரு 671 (ii) இல் ∠**தகம** நாண் **கத** விற்கு இடது பக்கத்தில் உள்ளது; அது **கத** வினால் வெட்டப்பட்ட, **கத** விற்கு வலது பக்கத்தில் உள்ள துண்டிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமம்.



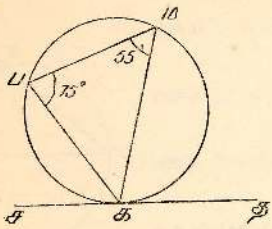
உருவம் 672

வட்டத்தினது நாண் **கத** விற்கு எதிர்ப்பக்கத்திலே, ∠**தகப** விற்கு எதிராக உள்ள வட்டத்தினது துண்டு **கவத** என்பது ∠**தகப** விற்கு ஒத்த **ஒன்றுவிட்ட துண்டு** எனப்படும். இவ்வாறே நாண் **கத** விற்கு எதிர்ப்பக்கத்திலே ∠**மகத** விற்கு எதிராக உள்ள வட்டத்தினது துண்டு **கயத** என்பது ∠**மகத** விற்கு ஒத்த ஒன்றுவிட்ட துண்டு எனப்படும்.

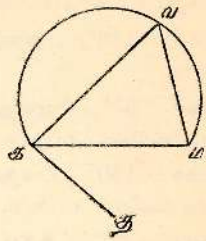
எனவே எண்கள் 2, 4 ஆகியவற்றிற்பெற்ற விளைவுகளைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

ஒரு வட்டத்திற்குரிய ஒரு தொடுகோடு தொடுபுள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு நாணோடு அமைக்குங் கோணங்கள் வட்டத்திலுள்ள ஒன்றுவிட்ட துண்டிலுள்ள கோணங்கட்குச் சமனாகும்.

5. ஒரு வட்டமும் அதில் ஒரு புள்ளி **க** உம் கொடுக்கப்பட்டால், **கமப** என்னும் ஒரு முக்கோணத்தை $\angle$ **ம** $= 55°$, $\angle$ **ப** $= 75°$ ஆகுமாறு உள்ளுருவமாக வரைக.



உருவம் 673



உருவம் 674

சகத என்னுந் தொடுகோட்டை வரைக. எவ்வாறு **கம, கப** க்கள் வரையப்படவேண்டும் என்பதை விளக்குக.

6. 2 அங். நீளமான ஒரு நேர்கோடு **கம** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ; ஒரு வட்டத்துண்டு **கவம** வை $\angle$ **கவம** $= 40°$ ஆகுமாறு அமைக்க ; ஆரையை அளக்க.

கத வை $\angle$ **மகத** $= 40°$ ஆகுமாறு வரைக.

(i) **கத** வை **க** விலே தொடும் வட்டத்தின் மையத்தை எவ்வாறு காணலாம் என்பதை விளக்குக.

(ii) **க, ம** க்களூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையத்தை எவ்வாறு காணலாம் என்பதை விளக்குக.

7. உரு 674 இல் $\angle$ **தகம** $= \angle$ **கவம** எனின் **கத** என்பது வட்டம் **கவம** வை **க** விலே தொடுகிறது என நிறுவுக.

இயலுமானால் **கத** ஒரு தொடுகோடன்று எனப் பாவித்துக்கொண்டு **கச** என்னுந் தொடுகோட்டை **கச, கத** க்கள் **கம** வின் ஒரு பக்கத்தில் அமையுமாறு வரைக. ஏன் இது இயலாதது என விளக்குக.

உதாரணம் 7 ஆனது உதாரணங்கள் 2, 4 ஆகியவற்றின் மறுதலையாகும் ; ஒரு கோடு ஒரு வட்டத்தைத் தொடுகின்றது என்று நிறுவ வேண்டிய கணக்குப் பயிற்சிகளில் இது மிக்க பயன் உடையதாகும்.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 67

1–5 வரை உள்ள எண்கள் உரு 675 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் வட்டம் **கமப** விற்கு **சகத** என்பது **க** விலுள்ள தொடுகோடு ; **பமத** ஒரு நேர்கோடு.

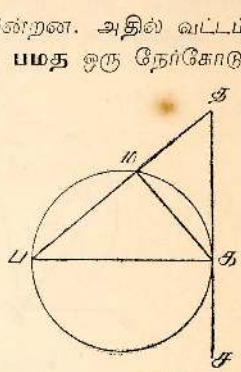
1. ∠ **பகத** = 124° எனின் ∠ **கமப** வைக் காண்க.

[2] ∠ **தகப** = 118°, ∠ **கதப** = 26° எனின் ∠ **மகத** வைக் காண்க.

3. ∠ **பகச** = 65°, ∠ **மகத** = 47° எனின் Δ **கமப** வின் கோணங்களைக் காண்க.

[4] ∠ **மகச** = 140°, ∠ **கதப** = 35° எனின் Δ **கமப** வின் கோணங்களைக் காண்க.

5. ∠ **கமப** = 80°, ∠ **கதப** = 40° எனின் **கப** = **கத** என நிறுவுக.

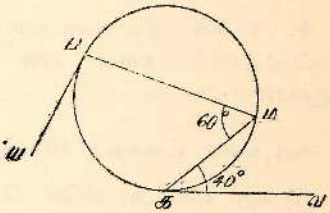


உருவம் 675

[6] Δ **கமப** வினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட வட்டமானது **மப**, **பக**, **கம** ஆகியவற்றை முறையே **அ**, **இ**, **உ** க்களிலே தொடுகின்றது. ∠ **ம** = 64°, ∠ **ப** = 52° எனின் ∠ **அஉஇ**, ∠ **அஇஉ** ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. உரு 676 இல் **கவ**, **பய** என்பன தொடுகோடுகள். ∠ **மபய** வைக் காண்க.

8. வட்டம் **கமப** விற்கு **க**, **ம** க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் **த** விற் சந்திக்கின்றன ; **தம** விற்கு **கப** சமாந்தரம். ∠ **கதம** = 54° எனின் Δ **கமப** வின் கோணங்களைக் காண்க.

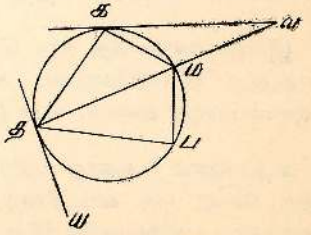


உருவம் 676

[9] வட்டம் **கமப** விற்கு **தமவ**, **தபய** தொடுகோடுகள். ∠ **வமக** = 146°, ∠ **யபக** = 128° எனின் ∠ **மகப**, ∠ **மதப** ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. வட்டம் **வயந** விற்கு **வ**, **ய** க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் **த** விற் சந்திக்கின்றன. ∠ **வதய** = 36° ஆக சிறுவில் **வந** வானது வில் **யந** விலும மூன்று மடங்காயின் ∠ **நவத** வைக் காண்க. (இரு விடைகள்.)

[11] உரு 677 இல் **கவ**, **தய** என்பன தொடுகோடுகள். ∠ **வகம** = 42°, ∠ **யதப** = 55°, ∠ **மதப** = 24° எனின் நாற்கோணம் **கமபத** வின் கோணங்களைக் காண்க.



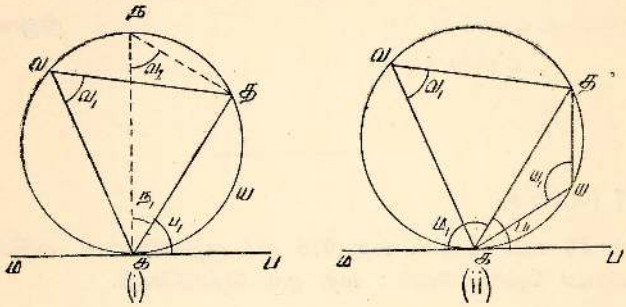
உருவம் 677

12. உரு 677 இல் **கவ**, **தய** தொடுகோடுகள்; **மத** ஒரு விட்டம். ∠ **மகவ** = **அ**°, ∠ **மவக** = **இ**° எனின் **அ**, **இ** என்பவற்றிற் கிடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

[பயிற்சி 67 இன் தொடர்ச்சி 428 ஆம் பக்கத்தில் உள்ளது.]

தேற்றம் 61

ஒரு வட்டத்தை ஒரு நேர்கோடு தொட ஆகும் தொடுபுள்ளியிலிருந்து ஒரு நாணைக் கீறினால், தொடுகோட்டுடன் அந்நாண் ஆக்குங்கோணங்கள் அவ் வட்டத்தின் ஒன்றுவிட்ட துண்டுகளிலுள்ள கோணங்கட்குச் சமனாகும்.



உருவம் 680

தரவு. ஒரு வட்டத்தைக் **க** விலே தொடும் நேர்கோடு **மகப.** துண்டுகள் **கவத, கயத** என்பவற்றை ஆக்கும் நாண் **கத.**

மேற்கோள். (1) ∠ **தகப** = ஒன்றுவிட்டதுண்டு **கவத** விலுள்ள ∠ **கவத.**

(2) ∠ **தகம** = ஒன்றுவிட்டதுண்டு **கயத** விலுள்ள ∠ **கயத.**

(1) **கருவி.** விட்டம் **கந** வை வரைக.

நத வை இணைக்க.

நிறுவல். உரு 680 (i) இலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால்,

கந ஒரு விட்டம், **கப** ஒரு தொடுகோடு ஆதலால்,

∠ ப$_1$ + ∠ ந$_1$ = 1 செங் ∠ ;

∠ **கதந** = 1 செங் ∠ — அரைவட்டத்து ∠,

∴ ∠ வ$_1$ + ∠ ந$_1$ = 1 செங் ∠ — △ இன் ∠ இன் கூட்டுத் தொகை,

∴ ∠ ப$_1$ + ∠ ந$_1$ = வ$_1$ + ∠ ந$_1$,

∴ ∠ ப$_1$ = வ$_1$.

ஆனால் ∠ வ$_1$ = ∠ வ$_1$ — ஒருதுண்டின் கோணங்கள்,

∴ ∠ ப$_1$ = ∠ வ$_1$.

(2) நிறுவல். உரு 680 (ii) இலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு குறித்தால்,

$\angle$ ம$_1$ + $\angle$ ப$_1$ = 2 செங்கோணங்கள் நேர்கோட்டு அடுத்துள்ளகோணங்கள்,

$\angle$ ய$_1$ + $\angle$ வ$_1$ = 2 செங்கோணங்கள் ஒருவட்ட நாற்கோணத்தின் எதிர்க்கோணங்கள்,

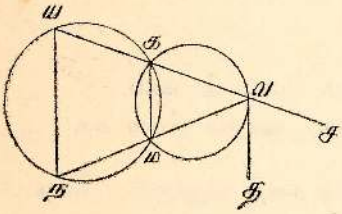
$\therefore$ $\angle$ ம$_1$ + $\angle$ ப$_1$ = $\angle$ ய$_1$ + $\angle$ வ$_1$. நிறுவப்பட்டது.

ஆனால் $\angle$ ப$_1$ = $\angle$ வ$_1$

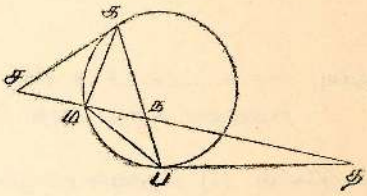
$\therefore$ $\angle$ ம$_1$ = $\angle$ ய$_1$.

பயிற்சி 67 (தொடர்)

எண்கள் 13 உம் 14 உம் உரு 678 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **யகவச, நமவ** என்பன நேர்கோடுகள் ; **வத** ஒரு தொடுகோடு.



உருவம் 678



உருவம் 679

13. $\angle$ **வயந** = 75° எனின் அவ்வுருவில் வேறென்ன கோணங்களை அறியலாம் ? அவற்றை அறிக.

[14] $\angle$ **தவச** = 72°, $\angle$ **தவந** = 65° எனின் $\angle$ **வயந**, $\angle$ **வநய** ஆகியவற்றைக் காண்க.

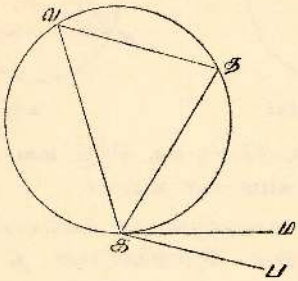
15. உரு 679 இல் **கச, பத** என்பன தொடுகோடுகள் ; **சமநத** ஒரு நேர்கோடு. $\angle$ **கசத** = 42°, $\angle$ **பநத** = 55°, $\angle$ **சமப** = 155° எனின் $\angle$ **மகப**, $\angle$ **பதச** ஆகியவற்றைக் காண்க.

16. Δ **கமப** வில் **கம** = **கப**, $\angle$ **ம** = 70°, **மப** என்பது **த** விற்கு $\angle$ **பகத** = 30° ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **கம** என்பது வட்டம் **கதப** வைத் தொடுகின்றதென நிறுவுக.

[17] நாற்கோணம் **கமபத** வில் $\angle$ **மபத** = 95°, $\angle$ **பதக** = 60° ; $\angle$ **மகப** = 55° ஆக $\angle$ **கபத** = 45° எனின் வட்டம் **கமப** வை **கத** தொடுகின்றது என நிறுவுக.

தேற்றம் 62

ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒரு நாணின் முனைப்புள்ளியிலிருந்து, ஒன்றுவிட்ட துண்டிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தை அந்நாணுடன் அமைக்கும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்தால் அந்நேர்கோடு அவ்வட்டத்தைத் தொடும்.



உருவம் 681

தரவு. ஒரு வட்டத்தினது நாண் **கத.** ∠ **தகப** = ஒன்றுவிட்டதுண்டு **கவத** விலுள்ள ∠ **கவத** ஆகுமாறுள்ள ஒரு நேர்கோடு **கப.**

மேற்கோள். **கப** வட்டத்தை **க** விலே தொடுகின்றது.

கருவியும் நிறுவலும். இயலுமாயின் **கப** வட்டத்தை **க** விலே தொட வில்லையெனப் பாவித்துக் கொள்க. தொடுகோடு **கம** வை, **கத** விற்கு **கப** எப்பக்கத்தில் உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் வரைக.

∠ **மகத** = ∠ **கவத** ஒன்றுவிட்டதுண்டிலுள்ளகோணம்,

ஆனால் ∠ **பகத** = ∠ **கவத** தரவு,

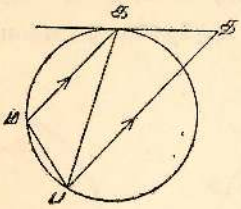
∴ ∠ **மகத** = ∠ **பகத.**

ஆனால் இது இயலாதது. ஏனெனில் **கப** வும் **கம** வும் **கத** விற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ளன. எனவே முதற்பாவனை தவறானது.

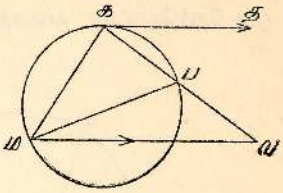
∴ **கப** வட்டத்தை **க** விலே தொடவேண்டும்.

பயிற்சி 68

1. உரு 682 இல் **கத** ஒரு தொடுகோடு ; **மக** விற்கு **பத** சமாந்தரம். ∠ **பதக** = ∠ **கபம** என நிறுவுக.



உருவம் 682



உருவம் 683

2. உரு 683 இல் தொடுகோடு **கத** விற்கு **மவ** சமாந்தரம் ; **கபவ** ஒரு நேர்கோடு. ∠ **கமவ** = ∠ **கபம** என நிறுவுக.

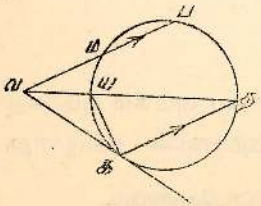
[3] ஒரு **வட்டத்தின்** உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம் **கமப.** **ம, ப** க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் **த** விலே சந்திக்கின்றன. ∠ **மகப** = 60° எனின் Δ **தமப** சமபக்கமானது என நிறுவுக.

4. ஒரு வட்டம் **கமப** வின் ஒரு நாண் **கப, த** விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது ; **தம** வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடு ; உரு 687 ஐப் பார்க்க. ∠ **தபம** = ∠ **கமத** என நிறுவுக.

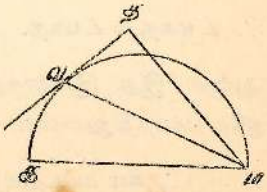
[5] வட்டங்கள் **கமவ, கமப** என்பவற்றிற்கு **க** விலுள்ள தொடுகோடுகள் **கப, கவ** ஆகும் ; உரு 686 ஐப் பார்க்க. ∠ **கமவ** = ∠ **கமப** என நிறுவுக.

[6] **கமப** ஒரு முக்கோணம் ; ∠ **மகப** வின் இருசமவெட்டி **மப** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. **க** விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் **மப** வை **த** விலே தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. இவ் வட்டம் **கம, கப** ஆகியவற்றை மீண்டும் **வ, ப** க்களில் வெட்டுகின்றதெனின் ∠ **வதம** = ∠ **யதப** என நிறுவுக.

7. உரு 684 இல் **கவ** ஒரு தொடுகோடு ; **கத** விற்கு **வமப** சமாந்தரம். **வயத** ஒரு நேர்கோடு எனின் ∠ **வகய** = ∠ **மவய** என நிறுவுக.



உருவம் 684

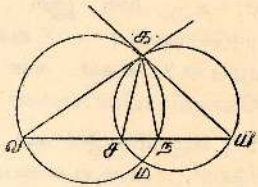


உருவம் 685

8. உரு 685 இல் அரைவட்டம் **கவம** விற்கு **வத** ஒரு தொடுகோடு. ∠**கமத** வை **மவ** இருசமக்கூறிடுகின்றதெனின் ∠**மதவ** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக. (**கவ** வை இணைக்க.)

9. உரு 686 இல் **கவ, கய** என்பன தொடுதோடுகள். **வசநய** ஒரு நேர்கோடு. **கந = கந** என நிறுவுக.

[10] உரு 686 இல் **கவ, கய** என்பன தொடுகோடுகள். வட்டம் **கமவ** வை **த** விலே தொடுமாறு **யம** நீட்டப்பட்டுள்ளது. **வத** என்பது **கய** விற்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக. (**கம** வை இணைக்க.)



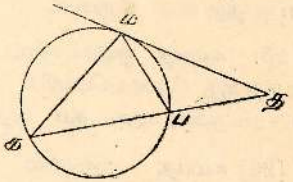
உருவம் 686

[11] Δ**கமப** வில் ∠**மகப** ஒரு செங்கோணம்; **மப** விலே **த** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. வட்டங்கள் **கமத, கபத** என்பவற்றிற்கு **த** வில் உள்ள தொடுகோடுகள் **தவ, தய** எனின் ∠**வதய** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.

12. ஒரு வட்டம் **கமப** விற்கு **ம** விலுள்ள தொடுகோடு வட்டம் **கமத** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது; வட்டம் **கமத** விற்கு **க** விலுள்ள தொடுகோடு வட்டம் **கமப** வை **ப** விலே சந்திக்கின்றது. **மப** விற்கு **கத** சமாந்தரம் என நிறுவுக. [**கம** வை இணைக்க.]

[13] வட்டம் **கமய** விற்கு **ம** விலுள்ள தொடுகோடு, ஒரு வட்டம் **கமவ** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. **வகய** ஒரு நேர்கோடு எனின் **தவ** விற்கு **மய** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

14. உரு 687 இல் **மத** ஒரு தொடுகோடு, **கபத** ஒரு நேர்கோடு ∠**கமப** வின் இருசமவெட்டியானது **கப** வை **வ** விலே வெட்டினால் **தவ = தம** என நிறுவுக.



உருவம் 687

[15] உரு 687 இல் **மத** ஒரு தொடுகோடு; **கபத** ஒரு நேர்கோடு. ∠**கமப = ∠த** எனின் **கம** ஒரு விட்டமென நிறுவுக.

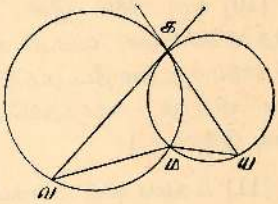
[16] ஒரு வட்டத்தின் சமமான நாண்கள் **கம, கப** என்பன; நீட்டப்பட்ட **பக** வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடு **மதந** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. ∠**நதக = 3** ∠**நமக** என நிறுவுக.

17. Δ**கமப** வில் **கம = கப**; **மப** வை **ம** விலே தொடக்கூடியதாகவும் **க** விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. அது மீண்டும் **கப** வை **த** விலே வெட்டினால் **மப = மத** என நிறுவுக.

18. ஒரு கோடு **கத** என்பது **ம, ப** க்களில் முச்சமக்கூறிடப்பட்டுள்ளது. **மவப** ஒரு சமபக்கமுக்கோணம். வட்டம் **வமத** வை **கவ** தொடுகின்றதென நிறுவுக.

[19] **கமபதந** ஓரொழுங்கான ஐங்கோணம். **பந** வை **மத** என்பது **ச** விலே வெட்டுகின்றது. வட்டம் **மசந** வை **மப** தொடுகின்றதென நிறுவுக.

20. உரு 688 இல் **கவ, கய** என்பன தொடுகோடுகள் ; ∠ **வகய** கூர்ங்கோணம். ∠ **வமய** = 2∠ **வகய** என நிறுவுக. ∠ **வகய** விரிகோணமாயின் என்ன நேரும் ?



உருவம் 688

[21] உரு 688 இல் **கவ, கய** என்பன தொடு கோடுகள். **வ,ம,ய** என்பன ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ளனவாயின் **கவ, கய** என்பன **கமவ, கமய** என்னும் வட்டங்களின் விட்டங்கள் என நிறுவுக.

[22] **கமப** என்பது ஒரு வட்டத்தின் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட முக்கோணம். **கப** விற்குச் சமாந்தரமான யாதாயினும் ஒரு கோடு **மப** வை **வ** விலும் தொடுகோடு **கய** வை **ய** விலும் வெட்டுகின்றது. **க, ம, வ, ய** ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.

23. நேர்கோடு **வய** என்பது வட்டங்கள் **கமவ, கமய** என்பவற்றை **வ, ய** க்களிலே தொடுகின்றது. **வக** என்பது **மய** வை **ச** விலே வெட்டுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **வம** வை **ந** விலே வெட்டுமாறு **யக** நீட்டப்பட்டுள்ளது. **க, ச, ம, ந** என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

[24] வட்டம் **கமப** வின் ஒரு விட்டம் **கம** ; நீட்டப்பட்ட **கம** விலுள்ள ஒரு புள்ளி **த** விலிருந்துள்ள தொடுகோடு **தப** ; **தந** என்பது **தக** விற்குச் செங்குத்தாகக் கீறப்பட்டு நீட்டப்பட்ட **கப** வை **ந** விலே சந்திக்கின்றது. **தப** = **தந** என நிறுவுக.

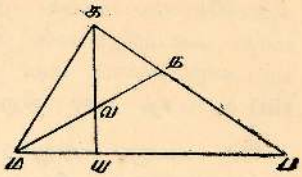
25. **கமபத** ஓரொருவட்ட நாற்கோணம். **பம** விற்குச் சமாந்தரமான கோடு **தந** தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கம** வை **ந** வில் வெட்டுகின்றது. வட்டம் **தகந** வை **தப** தொடுகின்றதென நிறுவுக.

[26] **கமபத** என்னும் ஓரொருவட்ட நாற்கோணம், **க** விலுள்ள வட்டத்திற்குரிய தொடு கோடு **மத** விற்குச் சமாந்தரமாகுமாறு அமைந்துள்ளது ; **மத** வை **கப** என்பது **ந** விலே வெட்டுகின்றது. (i) **மபத** வை **கப** இருசமக்கூறிடுகின்றதென நிறுவுக. (ii) வட்டம் **பமந** வை **கம** தொடுகின்றதென நிறுவுக.

27. வட்டம் **கமபத** வினது ஒரு சிறுவில் **கமப**. **க, ப** க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் **ந** விலே சந்திக்கின்றன. ∠ **கநப** = ∠ **கமப** − ∠ **கதப** என நிறுவுக.

[28] **கமப, கமத** என்பன இரு சமமான வட்டங்கள். **கம = மப** எனின் வட்டம் **கமத** வை **கப** தொடுகின்றதென நிறுவுக.

29. உரு 689 இல் ∠ **கமப** வை **மவந** இரு சமக்கூறிடுகின்றது. **கவய** என்னும் நேர்கோடு **கவ = கந** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. வட்டம் **கயப** வை **கம** தொடுகின்றதென நிறுவுக.



உருவம் 689

[30] **ய** வை மையமாகவுடைய **கசநம** என்னும் வட்டத்தினது ஒரு விட்டம் **கம**. நீட்டப்பட்டபொழுது **கச, மந** என்பன **வ** விலே சந்தித்தால் வட்டம் **வசந** விற்கு **யச, யந** என்பன தொடுகோடுகள் என நிறுவுக. [**யச** வை **த** விற்கு நீட்டுக.]

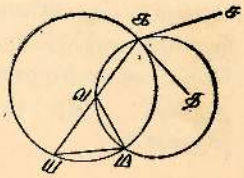
31. △ **கமப** வின் அடி **மப** விலே **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **கம** வை **ம** விலே தொடக்கூடியதாகவும் **வ** விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. வட்டம் **கமப** வை அது மீண்டும் **ய** விலே வெட்டினால் வட்டம் **பவய** வை **கப** தொடுகின்றதென நிறுவுக. [**கப** வை **த** விற்கு நீட்டுக. **யம, யப, யவ** ஆகியவற்றை இணைக்க.]

[32] ∠ **மகப** வின் இருசமவெட்டி **மப** வை **த** விலே வெட்டுகின்றது; **த** விற்கூடாக **கப** வை **க** விலே தொடுமாறு ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. அவ்வட்டத்தின் மையம் **த** விலிருந்து **கம** விற்குள்ள செங்குத்தில் உள்ளதென நிறுவுக. [வட்டமானது **கம** வை **ய** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க; **தய** வை இணைக்க.]

33. வட்டம் **கபம** வின் ஒரு விட்டம் **கம**. **க, ப** க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் **த** விலே சந்திக்க, **தப, கம** என்பன **ந** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பெறின் ∠ **மபந** = ½ ∠ **கதந** என நிறுவுக.

34. உரு 690 இல் வட்டங்கள் **கவம, கயம** என்பவற்றிற்கு **கச, கத** என்பன தொடுகோடுகள்; **கவய** ஒரு நேர்கோடு. ∠ **சகத** = ∠ **வமய** என நிறுவுக.

*35. ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் **கயம, பயத** என்பன **ய** விலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. **க, ப** க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் **அ** விலே சந்திக்கின்றன; **ம, த** க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் **இ** யிலே சந்திக்கின்றன. ∠ **கஅப** + ∠ **மஇத** = 2 ∠ **கயத** என நிறுவுக.



உருவம் 690

*36. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் **கவம** வினது விட்டம் **கம** வானது **த** விற்கு, **யம = மத** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது; **தவ** வட்டத்தின் ஒரு தொடுகோடு. **தவ = வக** என நிறுவுக. [**யவ** விற்கு சமாந்தரமாகவும் **தவ** வை **ந** விலே வெட்டுமாறும் **மந** வைக் கீறுக.]

*37. **மகப, மகத** என்னும் இரு வட்டங்கள் **ப, த** க்களிலுள்ள தொடுகோடுகளானவை நீட்டப்பட்ட **கம** விலுள்ள **ச** விலே சந்திக்குமாறு அமைந்துள்ளன. **பமத** ஒரு நேர்கோடாயின் (i) **சபகத** ஒரொரு வட்டநாற்கோணம் என நிறுவுக; (ii) **∠சகப = ∠சகத** என நிறுவுக; (iii) **சப = சத** என நிறுவுக.

*38. **கமபத** என்னும் ஒரு வட்டத்தின் சிறுவில் **கம = மப** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது; நீட்டப்பட்டபொழுது **கம** வும் **தப** வும் **வ** வில் சந்திக்கின்றன; தொடுகோடு **கச** வை **ச** வில் சந்திக்குமாறு **தம** நீட்டப்பட்டுள்ளது. **சவ = சக** என நிறுவுக. [**சகதவ** ஒரொருவட்டநாற்சோணம் என நிறுவுக.]

*39. 378 ஆம் பக்கத்திலுள்ள பயிற்சி 59 எண் 19 இல் உள்ள வினைக்கொண்டு (i) **ந** விற்கு மிக அணிதாக **வ** வை எடுத்துக்கொள்வதால் (ii) **க** விற்கு மிக அணிதாக **வ** வை எடுத்துக்கொள்வதால் (iii) **ம** விற்கு மிக அணிதாக **க** வை எடுத்துக் கொள்வதால், என்ன சிறப்பு வகைகளைப்பெறலாம்?

*40. **ப** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண் **யக. ய** விலுள்ள தொடுகோட்டில் **த** என்னும் புள்ளி, **யக = யத** ஆகுமாறும் **∠கயத** கூர்ங்கோணம் ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளது. **யப** வை **ம** விலே வெட்டுமாறு **தக** நீட்டப்பட்டுள்ளது. **∠யமக = ¼∠யபக** என நிறுவுக. **ய** விற்கு மிக அணிதாக **க** இருக்கும்பொழுது **ம** வினது நிலையைக் காண்க.

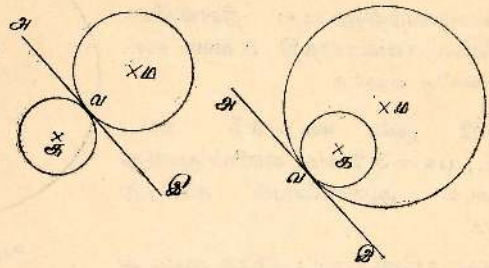
*41. **வயநச** என்னும் ஒரொருவட்ட நாற்கோணம், பக்கங்கள் **வய, யந, நச, சவ** என்பன ஒரு வட்டத்தை முறையே **க, ம, ப, த** க்களிலே தொடுமாறு அமைந்துள்ளது. (i) **மத** விற்கு **கப** செங்குத்து என நிறுவுக; (ii) **கம, மப, பத, தக** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தில் உள்ளனவென நிறுவுக.

*42. ஒரு வட்டத்தின் சமாந்தர நாண்கள் **வய, பத. த** வினுள்ள தொடுகோடு **வய** வை **ச** விலே வெட்டுகின்றது. **ச** விலிருந்துள்ள மற்றைத் தொடுகோட்டினது தொடுபுள்ளி **ம** வாகும். **வய** வை **மப** இருசமக் கூறிடுகின்றதென நிறுவுக. [**மப** வானது **வய** வை **ந** வில் வெட்ட **அ** மையமாகுமெனின் (i) **ச, ம, த, ந** ஒரு பரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக; (ii) **ச, ம, த, அ** என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளனவென நிறுவுக.]

வட்டங்களின் தொடுகை

இருவட்டங்கள் ஒரே கோட்டினை ஒரே புள்ளியிலே தொடுமாஞல் அவை அப்புள்ளியில் **ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன** எனப்படும். அவ்வட்டங்கள் கோட்டிற்கு எதிர்ப் பக்கங்களில் உள்ளனவாயின் அவை **வெளிப்**

புறமாகத் தொடுகின்றன எனப்படும்; அவை கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தில் உள்ளனவெனின் அவை உட்புறமாகத் தொடுகின்றன எனப்படும்.



வெளிப்புறத்தொடுகை உட்புறத்தொடுகை

உருவம் 691

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

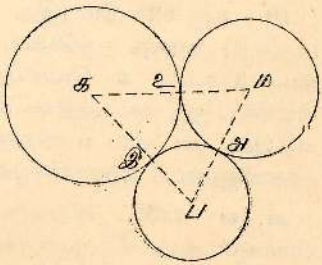
1. உரு 691 இல் வ விலே தொடும் இரு வட்டங்களின் மையங்கள் க, ம என்பன. க, ம, வ க்கள் ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுக.

∠கவஅ, ∠மவஅ என்பவற்றைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர்? காரணங்கள் காட்டி நிறுவலை முடிவாக்குக.

2. இருவட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்.

3. இருவட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் ஆரைகளின் வித்தியாசத்திற்குச் சமனாகும்.

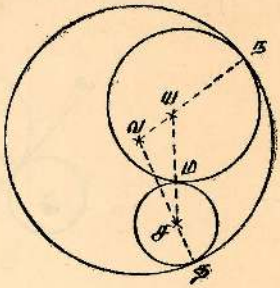
4. உரு 692, க, ம, ப க்கள் மையங்களாக, முறையே 4 ச. மீ., 3 ச. மீ., 2·5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்டு ஒன்றையொன்று தொடும் மூன்று வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது. Δ கமப வின் பக்கங்களைக் காண்க.



உருவம் 692

கருவிகளைப் பயன்படுத்தி Δ கமப வை வரைந்து வட்டங்களை வரைக.

5. உரு 693 முறையே 2 அங்., 1·2 அங்., 0·6 அங். ஆரைகள் கொண்டு **வ, ய, ச** க்களை மையங்களாகவுடைய ஒன்றையொன்றுதொடும் மூன்று வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது. தொடுகைகளில் எவை உட்புறமானவை ? **யச, சவ, வய** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க. கருவிகளைப் பயன்படுத்தி **Δ வயச** வை வரைந்து வட்டங்களை வரைக.



உருவம் 693

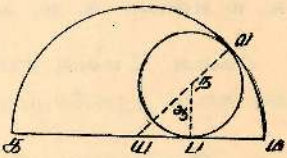
6. உரு 692 இல் **கம** = 3·5 அங்., **மப** = 2·7 அங்., **பக** = 3·2 அங். எனின் மூன்று வட்டங்களினுடைய ஆரைகளையுங் கணித்து உருவை வரைக.

க வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் ஆரை அ அங். எனக்கொள்க. மற்றை ஆரைகளை அ இற் கூறுக.

7. 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட நிலையான ஒரு வட்டத்தைத்தொடும் 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட மாறும் வட்டத்தினுடைய மையத்தின் முழு ஒழுக்குயாது ?

8. 4 ச.மீ. ஆரையுடைய ஒரு நிலையான வட்டத்தைத்தொடும் 7 ச.மீ. ஆரையுடைய மாறும் ஒரு வட்டத்தினுடைய மையத்தின் முழு ஒழுக்கு யாது ?

9. உரு 694 இல் **கம** விலே **ப** என்பது, **கப** = 7 ச.மீ., **பம** = 3 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி. **ந** வை மையமாகக் கொண்டு, **கம** வை **ப** விலே தொடுவதும், **ய** வை மையமாகவும் **கம** வை விட்டமாகவுமுடைய வட்டத்தைத் தொடுவதுமாகிய வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

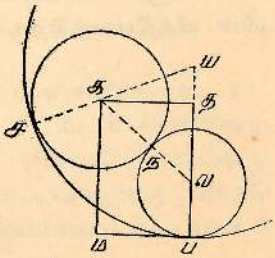


உருவம் 694

ஆரை ஆ ச.மீ. எனின் வன் **யந** = (5 − ஆ) ச.மீ. என விளக்குக ; செங்கோண முக்கோணம் **யபந** வைப் பயன்படுத்துக.

10. உரு 695 இல் (இது அளவிற்கு வரையப்படாதது) **கமபத** ஒருசெவ்வகம் ; **கம** = 4 ச.மீ., **மப** = 3 ச.மீ. **க** வென்பது, 2 ச.மீ. ஆரை கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மையம். இவ்வட்டத்தையும் **மப** வை **ப** விலுந்தொடும் இரு வட்டங்களினுடைய ஆரைகளையுங் காண்க.

வ, ய க்களை அவ்வட்டங்களின் மையங்களாகவும் ஆரைகளை முறையே அ ச.மீ., இ ச.மீ. ஆகவுங்கொள்க. **Δ கதவ** வின் பக்கங்களை அ விற் காண்க ; பின்னர் பைதகரசைப் பயன்படுத்தி அ வைக் காண்க. இவ்வாறே இ யைக் காண்க.



உருவம் 695

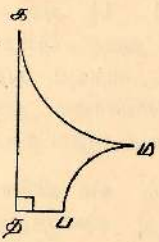
ஏண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 69

1. 5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் ஒருமைய இருவட்டங்களைத்தொட்டு அவற்றுட் சிறியதை உள்ளடக்கியுள்ளது. பெரிய வட்டத்தின் ஆரை 7 ச.மீ.; சிறியதின் ஆரையைக் காண்க.

[2] 4 ச.மீ., 7 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இருவட்டங்களினுடைய மையங்களின் இடைத் தூரம் 15 ச.மீ. அவ்விரு வட்டங்களையுந்தொட்டு சிறியதை உள்ளடக்கக்கூடிய மிகச்சிறிய வட்டத்தினது ஆரையைக் காண்க.

3. உரு 696 இல் **கம** என்பது **கத** வை **க** விலும் கால்வட்டம் **மப** வை **ம** விலுந் தொடும் ஒரு கால்வட்டமாகும். ∠**கதப** = 90°, **கத** = 12 அங்., **தப** = 3 அங். எனின் வட்டங்களின் ஆரைகளைக் காண்க.



உருவம் 696

4. **க, ம, ப** க்களை மையங்களாக உடைய மூன்று வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. **கம** = 4 அங்., **மப** = 6 அங்., **பக** = 7 அங். எனின் வட்டங்களின் ஆரைகளைக் காண்க.

[5] **வ, ய, ந** க்களை மையங்களாகவுடைய மூன்றுவட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. **யந** = 6 ச.மீ., **நவ** = 7 ச.மீ., **வய** = 8 ச.மீ. எனின் வட்டங்களின் ஆரைகளைக் காண்க.

6. **ம, ப** க்களை மையங்களாகவுடைய இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் மற்றையவற்றை உட்புறமாகத் தொடுகின்றது. **கம** = 4 அங்., **மப** = 7 அங்., **பக** = 5 அங். எனின் வட்டங்களின் ஆரைகளைக் காண்க.

7. உரு 697 ஆனது 6·7 ச.மீ., 2·2 ச.மீ., 3·1 ச.மீ. அளவுள்ள ஆரைகளைக்கொண்ட ஒன்றையொன்று தொடும் வட்டவிற்களால் ஆக்கப்பட்ட உருவாகும்; **அ, இ, உ** ஆகியவை வட்டங்களின் மையங்கள். △ **அஇஉ** வின் பக்கங்களுடைய நீளங்களைக் காண்க.


உருவம் 697

8. **க** வை மையமாகவுடைய 2·3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு நிலையான வட்டத்தைத் தொடுகின்ற 3·5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு மாறும் வட்டத்தினது மையத்தினுடைய முழு ஒழுக்கு என்ன என்பதை நிறுவலின்றிக் கூறுக.

9. 4 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** வைக் கீறுக. **க** வை மையமாகவுடைய 6 ச.மீ. ஆரைகொண்ட பிறிதொரு வட்டத்தைக் கீறுக. **ம** மையமாக 2 ச.மீ. ஆரையாக இன்னொரு வட்டம் கீறுக. 3 ச.மீ. ஆரை கொண்ட ஒரு வட்டத்தை, பெரிய வட்டத்தை உட்புறமாகத் தொடவும் சிறிய வட்டத்தை வெளிப்புறமாகத் தொடவுங் கூடியதாக வரைக.

[10.] தம்முடைய மையங்கள் 6 ச.மீ. தூரத்தில் அமைந்தனவாக ஒவ்வொன்றும் 2·5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. 7 ச.மீ. ஆரைகொண்ட பிறிதொரு வட்டத்தை, முந்திய ஒரு வட்டத்தை உட்புறமாகவும் மற்றையதை வெளிப்புறமாகவுந் தொடக்கூடியதாக வரைக.

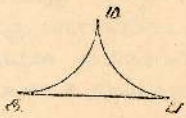
11. $1\frac{1}{2}$ அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் ஒரு விட்டத்தை வரைக. $\frac{1}{2}$ அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தை முதல் வட்டத்தையும் அந்த விட்டத்தையும் தொடக்கூடியதாக வரைக; $\frac{1}{2}$ அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தை முதல் வட்டத்தையும் நீட்டப்பட்ட விட்டத்தையுந் தொடக்கூடியதாக வரைக.

12. **கம** விலே **ப** என்னும் புள்ளி **கப** = 5 அங்., **பம** = 3 அங். ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **கம** வை **ப** விலே தொடுவதும் **கம** வை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டத்தைத் தொடுவதுமான வட்டத்தினது ஆரையைக் கணிக்க.

[13] **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ப**. **கம** வின் ஒரேபக்கத்தில் **கப**, **பம**, **கம** ஆகியவற்றை விட்டங்களாகவுடைய அரைவட்டங்கள் மூன்று வரையப்பட்டுள்ளன. **கம** = 12 ச.மீ. எனின் மூன்று அரைவட்டங்களையுந் தொடும் வட்டத்தின் ஆரையைக் கணிக்க.

14. 5 ச.மீ., 3 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்களினுடைய மையங்கள் **க**, **ம** என்பனவாகும்; **கம** = 12 ச.மீ.; **மக** விற்குச் செங்குத்தான ஓராரை **மப** ஆகும். பெரிய வட்டத்தைத் தொடுவதும் சிறிய வட்டத்தை **ப** விலே தொடுவதுமான ஒரு வட்டத்தின் ஆரையைக் கணிக்க. [இரு விடைகள்.]

15. உரு 698 இல் **கம**, **மப** என்பன **ம** விலே தொடும் இரு கால்வட்டங்களாகும். **கப** = 12 ச.மீ. வில் **கம**, வில் **மப**, **கப** ஆகியவற்றைத்தொடும் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.



உருவம் 698

[16] 7 அங். பக்கங்கொண்ட ஒரு சதுரம் **கமபத**; 3 அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தின் மையம் **ப** ஆகும்; இவ்வட்டத்தையும் **க** விலே **கம** வையுந் தொடும் ஒவ்வொரு வட்டத்தினது ஆரையையுங் காண்க.

*17. 10 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரொழுங்கான அறுகோணத்தின் உச்சிகளை மையங்களாகக்கொண்ட ஒவ்வொன்றும் 5 ச.மீ. ஆரையுடைய ஆறு வட்டங்கள் கீறப்பட்டுள்ளன. இவை யாவற்றையுந் தொட்டுத் தன்னுள் அடக்கியுள்ள வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

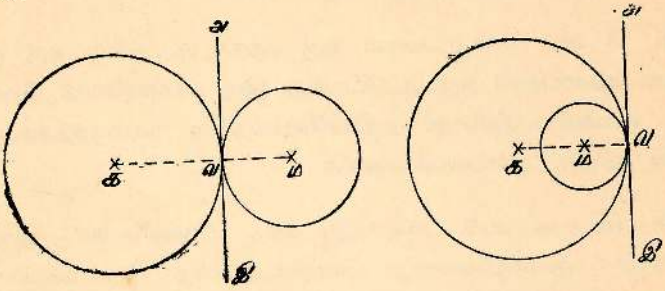
*18. 3 அடி பக்கம் உள்ள ஒரு சதுரச் சட்டத்தின் ஒரு மூலையிலே 1 அடி ஆரையுள்ள ஒரு தட்டொன்று இரு பக்கங்களையுந் தொடக்கூடியதாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. எதிர்க்கோணத்திற் பொருந்தக்கூடிய மிகப் பெரிய தட்டின் ஆரையைக் காண்க.

*19. **யக** = அ அங்., **யம** = இ அங்., ∠**கயம** = 90°. இரு மாறும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடக்கூடிய வகையில் வரையப்பட்டுள்ளன ; அவற்றில் ஒன்று **யக** வை **க** வில் தொடுகின்றது ; மற்றையது **யம** வை **ம** வில் தொடுகின்றது. அவற்றின் ஆரைகள் உ அங்., எ அங். எனின் (உ + அ) (எ + இ) என்பது மாறிலி என நிறுவுக. அ = 8, இ = 6, உ = 4 எனின் எ ஐக் கணிக்க.

முக்கிய குறிப்பு. உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ ஒன்றையொன்று தொடும் வட்டங்களைப் பற்றிய உத்திக்கணக்குகளைச் செய்வதில், தேற்றம் 63 ஐ நிறுவும் பொழுது செய்ததைப்போன்று, அவற்றின் தொடுபுள்ளியில் பொதுத்தொடுகோடு வரைவது பயனுடைத்தாகும். தேற்றம் 63 இன் பொருட்டு, மையங்களைத் தொடுபுள்ளியுடன் இணைப்பதும் பயனுடைத்தாகும்.

தேற்றம் 63

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டால் அவற்றின் மையங்களை இணைக்குங்கோடு (தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட கோடு) தொடுபுள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்.



உருவம் 699

தரவு. **க, ம** க்களை மையங்களாகவுடைய ஒன்றையொன்று **வ** விலே தொடும் இரு வட்டங்கள்.

மேற்கோள். **க, ம, வ** ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன.

கருவியும் நிறுவலும். வட்டங்கள் **வ** விலே ஒன்றையொன்று தொடுகின்றபடியால் அவை **வ** விலே ஒரு தொடுகோடு **அவஇ** யைக் கொண்டுள்ளன.

ஒரு வட்டத்தினது தொடுகோடு தொடுபுள்ளிக்கூடாகவுள்ள ஆரைக்குச் செங்குத்தாதலின்,

∠**கவஅ**, ∠**மவஅ** என்பன செங்கோணங்கள்.

∴ **க, ம** க்கள் **வ** விற்கூடாக **அவஇ** யிற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள கோட்டில் உள்ளன.

∴ **க, ம, வ** ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன.

இளைத்தேற்றம் 1. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடின் மையங்கட்கிடையிலுள்ள தூரம் ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

உரு 699 (i) இல் **கம = கவ + மவ.**

இளைத்தேற்றம் 2. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாகத்தொடின் மையங்கட்கிடையிலுள்ள தூரம் ஆரைகளின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும்.

உரு 699 (ii) இல் **கம = கவ − மவ.**

பயிற்சி 70

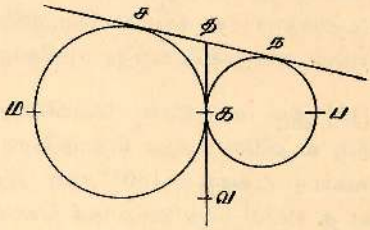
1–6 வரை உள்ள எண்கள் உரு 700 ஐக் குறிக்கின்றன ; அதில் வட்டங்கள் **க** விலே தொடுகின்றன ; கோடு **சந** வட்டங்களை **ச, ந** க்களிலே தொட்டு **க** இலுள்ள தொடுகோட்டை **த** விலே சந்திக்கின்றது.

1. **தச = தந** என நிறுவுக.

[2] **வ** என்பது **கத** விலே யுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியெனின் **வ** விலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோடுகள் சமமென நிறுவுக.

3. ∠**சகந** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.

[4] வட்டம் **கசம** வின் ஒரு விட்டம் **கம** எனின் வட்டம் **சகந** வை **கம** தொடுகின்றது என நிறுவுக.



உருவம் 700

5. வட்டம் **கநப** வை **ய** விலே வெட்டுமாறு **சக** நீட்டப்பட்டால், வட்டம் **கநப** வின் ஒரு விட்டம் **நய** என நிறுவுக.

6. **க** விற்குள்ளாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு கோடு **அகஇ**, வட்டங்களை **அ, இ** க்களில் வெட்டினால், **அ, இ** க்களிலுள்ள தொடு கோடுகள் சமாந்தரமென நிறுவுக.

7. **கமபத** ஓரிணைகரம். **கம, பத** க்களை விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று தொடின் **கம = மப** என நிறுவுக. [வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்க.]

8. **கமபத** ஓரிணைகரம். **மத** வை **கப** என்பது **ச** விலே வெட்டுகின்றது. வட்டங்கள் **கசம, பசத** என்பன ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிறுவுக. [வட்டம் **கசம** விற்குத் தொடுகோடு **சந** வைக் கீறுக.]

[9] **கமபத** ஒரு நேர்கோடு. **வ** என்னும் புள்ளி ∠**கவம** = ∠**பவத** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. வட்டங்கள் **வகத, வமப** என்பன ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிறுவுக.

10. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக **க** விலே தொடுகின்றன ; ஒன்றினுடைய நாண் **வய** மற்றையதை **ந** விலே தொடுகின்றது ; ∠**வகந** = ∠**யகந** என நிறுவுக. (**க** விலுள்ள தொடுகோட்டையும் கோடு **வய** வையும் **ச** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டுக.)

[11] இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக **க** விலே தொடுகின்றன; யாதாயினும் ஒரு கோடு **வயநச** ஒரு வட்டத்தை **வ, ச** க்களிலும் மற்றையதை, **ய, ந** க்களிலும் வெட்டுகின்றது. ∠ **வகய** = ∠ **நகச** என நிறுவுக.

12. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக **க** விலே தொடுகின்றன; உள் வட்டத்திலேயுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ** விலுள்ள தொடுகோடு புறவட்டத்தை **ய, ந** க்களில் வெட்டுகின்றது. **கய, கந** என்பன உள் வட்டத்தை **ச, த** க்களில் வெட்டுகின்றன. முக்கோணங்கள் **வயச, கவத** என்பன ஒன்றுக்கொன்று சமகோணமானவை என நிறுவுக.

[13] இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாக **க** விலே தொடுகின்றன; ஒன்றிற்கு **வ** விலே உள்ள தொடுகோடு மற்றையதை **யந** வில் வெட்டுகின்றது. ∠ **வகய** + ∠ **வகந** = 180° என நிறுவுக. (**க** விலுள்ள தொடுகோடு **வய** வை **த** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க.)

14. வெளிப்புறமாக **க** விலே தொடும் இரு வட்டங்கள் **கசவ, கதய** என்பவற்றிற்கு **க** வில் உள்ள தொடுகோட்டிலேயுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ந** ஆகும். **நவ, நய** என்பன வட்டங்களிற்கு **ந** விலிருந்துள்ள மற்றைத் தொடுகோடுகளாகும்; **வசதய** ஒரு நேர்கோடு. (i) **வ, த** க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் சமாந்தரமென நிறுவுக. (ii) ∠ **வகச** = ∠ **யகத** என நிறுவுக.

[15] இரு வட்டங்கள் **க** விலே வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் **கம**; **ம** விலிருந்து மற்றை வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு **மந**. ∠ **கநம** = 45° − $\frac{1}{2}$ ∠ **கமந** என நிறுவுக.

16. இரு சமமான வட்டங்கள் **க** விலே வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. ஒரு வட்டத்தின் ஒரு விட்டம் **கம**; **ம** விலிருந்து மற்றை வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு **மந**; இது முதல் வட்டத்தை **ய** விலே வெட்டுகின்றது. **மய** = $\frac{2}{3}$ **மந** என நிறுவுக. [**கய** வை இணைக்க; **ந** வை இரண்டாம் வட்டத்தின் மையத்திற்கு இணைக்க; வெட்டுத்துண்டுத்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.]

17. நிலையான ஒரு வட்டத்தின் மையம் **ப. வ, ந** க்களை மையங்களாகக்கொண்ட இரு மாறும் வட்டங்களானவை நிலையான வட்டத்தை உட்புறமாகவுந் தம்முட்டாம் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகவுந் தொடுகின்றன. △ **பவந** வினது சுற்றளவு மாறிலி என நிறுவுக.

[18] ஒவ்வாத பருமனுடைய 4 வட்ட நாணயங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்றையவற்றுள் இரண்டையே தொடக்கூடிய வகையில் ஒரு மேசைமேலே கிடக்கின்றன. 4 தொடும் புள்ளிகளும் ஒருபரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

*19. **க, ம** என்பவற்றை மையங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் **வ** விலே வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன; **ப** வை மையமாகவுடைய மூன்றுவதொரு வட்டம் இரண்டையும் உள்ளடக்கி முதலாவதை **ய** விலும் இரண்டாவதை **ந** விலுந் தொடுகின்றது. ∠**மகப** = 2∠**வநய** என நிறுவுக. (**ந** விலுள்ள தொடுகோட்டைக் கீறுக.)

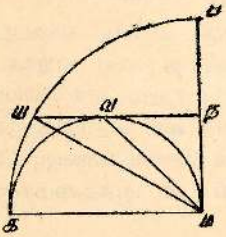
*20. **ம, ப** க்களை மையங்களாகவுடைய இரு வட்டங்கள் **க** விலே வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன; **வய** என்னுங் கோடு வட்டங்களை **வ, ய** க்களிலே தொடுகின்றது. **மப** வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் **வய** வைத் தொடுகின்றதென நிறுவுக.

21. **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ப**; **கம** வின் ஒரேபக்கத்திலே **கப, பம, கம** ஆகியவற்றை விட்டங்களாகவுடைய அரைவட்டங்கள் கீறப்பட்டுள்ளன. இம்மூன்று அரைவட்டங்களையுந் தொடும் வட்டத்தின் ஆரை $\frac{1}{3}$**பக** விற்குச் சமமென நிறுவுக.

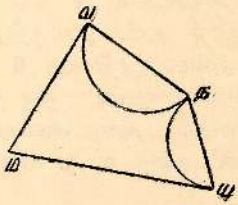
*22. **யக, யம** என்பன, ∠**கயம** = 60° ஆகுமாறமைந்த ஒரு வட்டத்தின் ஆரைகளாகும். ஒரு வட்டமானது **யக, யம** ஆகியவற்றையும் உட்புறமாக வில் **கம** வையுந் தொடுகின்றது. அதன் ஆரை $\frac{1}{3}$ **யக** விற்குச் சமமென நிறுவுக.

*23. △**கமப** வில் **கம** = அ அங்., **கப** = இ அங்., ∠**மகப** = 90°, அ > இ; **மப** வினது நடுப்புள்ளி **ய. கம, கப** க்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் கீறப்பட்டுள்ளன. **ய** வை மையமாகக்கொண்டு இவ்விரு வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையுந் தொடக்கூடியனவாக இரு வட்டங்கள் கீறலாம் என நிறுவுக; அ, இ க்களில் அவற்றின் ஆரைகளைக் காண்க.

*24. உரு 701 இல் **கவம** ஓரரை வட்டம்; **கயப, ம** வை மையமாகவுடைய ஒரு கால்வட்டம். **கம** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தொடுகோடு **வய**. ∠**வமய** = 15° என நிறுவுக.



உருவம் 701



உருவம் 702

*25. உரு 702 இல் **வந, யந** என்பன ஒன்றையொன்று **ந** விலே தொட்டு, சமமல்லாக் கோடுகள் **மவ, மய** ஆகியவற்றை **வ, ய** க்களிலே தொடும் இரு விற்களாகும். ∠**வநய** = 180° − $\frac{1}{2}$∠**வமய** என நிறுவுக.

அமைப்புக்கள்

தொடுகோடுகளை அமைக்கும் எளிய முறைகள் முந்திய பயிற்சிகளிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. முறைமையான கூற்றுக்களுக்கும் நிறுவல்களுக்கும் பக்கங்கள் 446–449 வரை உள்ளவற்றைப் பார்க்க.

வரைவிலக்கணம். இரண்டு வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரு தொடுகோடு தொட்டால் அது அவ்விரண்டு வட்டத்திற்குமுரிய **பொதுத்தொடுகோடு** எனப்படும்; வட்டங்கள் அதற்கு ஒரே பக்கத்திலிருப்பின் (உரு 705) அது **நேர்ப்பொது** அல்லது **புறப்பொதுத்** தொடுகோடு எனப்படும்; வட்டங்கள் அதற்கு எதிர்ப்பக்கங்களிலிருப்பின் (உரு 706) அது **குறுக்குப் பொது** அல்லது **அகப்பொதுத்** தொடுகோடு எனப்படும்.

பயிற்சி 71

1. **க** மையமாக 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து **க** விலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்திலேயுள்ள ஒரு புள்ளி **த** வை எடுக்க. **த** விலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகளை அமைத்து அவற்றினுடைய நீளங்களைக் கணிக்க.

2. 4 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** வை வரைக. **ம** விலிருந்து 3 ச.மீ. தூரத்திலுள்ளதாக ஒரு கோடு **கச** வை அமைக்க.

[3] 5 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** வை வரைக. **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தை, **ம** விலிருந்து அவ்வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகள் 3·5 ச.மீ. ஆகுமாறமைய வரைக.

4. **க** மையமாக 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக; **க** விலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோடு **மப** வை வரைக. **மப** விலே **த** என்னும் ஒரு புள்ளியை, அதிலிருந்து வட்டத்திற்குரிய தொடுகோடுகளிற்கிடையேயுள்ள கோணம் 80° ஆகுமாறு அமைக்க.

5. **க** மையமாக 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து **க** விலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **த** வை எடுக்க. **வய** என்பது அவ்வட்டத்தினது 6 ச.மீ. நீளமுள்ள மாறும் ஒரு நாணாகும். **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு நிலையான வட்டத்தை **வய** தொடுகின்றதென நிறுவி, அவ்வட்டத்தை அமைக்க. **த** விற்கூடாகக் கோடொன்றை, கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை **ச**, **ந** க்களில் வெட்டி **சந**=6 ச.மீ. ஆகவமைக்குமாறு வரைக.

[6] 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ம** வை எடுக்க. அவ்வட்டத்தின் 4 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நாண் **சத** வை, நீட்டினால் **ம** விற்கூடாகச் செல்லுமாறு அமைக்க.

7. 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 3 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ம** வை எடுக்க. அவ்வட்டத்தில் 6·5 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நாண் **சத** வை **ம** விற்கூடாகச் செல்லுமாறு அமைக்க.

[8] **க** மையமாக 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து **க** விலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோடு **மப** வை வரைக. **மப** விலே ஒரு புள்ளி **த** வை **த** விலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகள் 4·5 ச.மீ. ஆகுமாறமைக்க.

[9] 3 ச.மீ., 12 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாக ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. அவற்றின் புறப்பொதுத்தொடுகோட்டினது நீளத்தைக் காண்க. [448 ஆம் பக்கம் பார்க்க.]

10. 11 ச.மீ., 5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்களின் மையங்களுக்கிடையில் உள்ள தூரம் 20 ச.மீ. அவற்றின் அகப்புறப்பொதுத் தொடுகோடுகளினுடைய நீளங்களைக் காண்க. (பக்கம் 448, 449.)

11. 4 ச.மீ., 1·5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்டு மையங்களுக்கிடையே 6 ச.மீ. இடைவெளிகொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. புறப்பொதுத்தொடுகோடு ஒன்று வரைக. அதனுடைய நீளத்தை அளந்து கணிப்பினாலே தணிக்க.

12. 3 ச.மீ., 2 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்டு மையங்களுக்கிடையே 7·5 ச.மீ. இடைவெளியுள்ள இருவட்டங்கள் வரைக. அகப்பொதுத் தொடுகோடு ஒன்று வரைக. அதனுடைய நீளத்தை அளந்து கணிப்பினாலே தணிக்க.

[13] 10 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோடு **கம** வை வரைக. **சத** என்னும் ஒரு கோட்டை **க, ம** க்களிலிருந்து **சத** விற்குள்ள செங்குத்துக்கள் முறையே 3 ச.மீ., 4 ச. மீ. ஆகுமாறு அமைக்க. [இரு வகைகள்.]

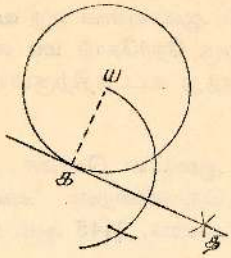
14. இரு வட்டங்களின் ஆரைகள் அ அங்., இ அங். ஆகவும் அவற்றின் மையங்களுக்கிடையில் உள்ள தூரம் உ அங். ஆகவுமிருக்க உ > அ + இ எனின் பொதுத்தொடுகோடுகளினுடைய நீளங்களை அ, இ, உ க்களிற் காண்க.

[15] வெளிப்புறமாகத் தொடும் இரு வட்டங்களினுடைய விட்டங்கள் அ அங்., இ அங்.; அவற்றின் புறப்பொதுத்தொடுகோட்டினது நீளம் உ அங். $உ^2 = அஇ$ என நிறுவுக.

16. இரு வட்டங்களின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 10 ச.மீ. அவற்றினுடைய அகப்புறபொதுத் தொடுகோடுகளினுடைய நீளங்கள் முறையே 8 ச.மீ., 6 ச.மீ. ஆகும். வட்டங்களினுடைய ஆரைகளைக் கணித்தறிக.

அமைப்பு 10

கொடுத்த ஒரு வட்டத்திற்கு அதன் பரிதியிலே கொடுத்த ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு அமைத்தல்.



உருவம் 703

தரவு. ய மையமான ஒரு வட்டம்; அதன் பரிதியில் ஒரு புள்ளி **க.**

அமைக்க வேண்டியது. வட்டத்திற்கு **க** விலே தொடுகோடு.

அமைப்பு. **கய** வை இணைக்க.

க விற்கூடாக **கய** விற்குச் செங்குத்தான கோடு **கத** வை அமைக்க. **கத** வே வேண்டிய தொடுகோடாகும்.

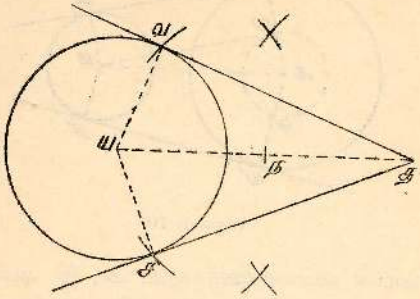
நிறுவல். தொடுகோடானது தொடுபுள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

ஆனால், **கய** ஓராரை, ∠**யகத** ஒரு செங்கோணம்,

∴ **கத** வே **க** விலுள்ள தொடுகோடாகும்.

அமைப்பு 11

கொடுத்த ஒரு வட்டத்திற்கு அதற்கு வெளியிலே கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொடுகோடுகள் அமைத்தல்.



உருவம் 704

தரவு. **ய** மையமான ஒரு வட்டம்; அதற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி **த**.

அமைக்க வேண்டியன. **த** விலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள்.

அமைப்பு. **யத** வை இணைத்து அதை **ந** விலே இரு சமக்கூறிடுக. **ந** வை மையமாகவும் **நத** வை ஆரையாகவுங்கொண்டு ஒரு வட்டத்தை வரைக. அது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை **வ, ச** க்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

தவ, தச க்களை இணைக்க.

தவ, தச க்களே வேண்டிய தொடுகோடுகளாகும்.

நிறுவல். **யவ, யச** க்களை இணைக்க; **தந = நய** ஆதலின், **ந** வை மையமாகவும் **நத** வை ஆரையாகவுங் கொண்ட வட்டம் **ய** விற்கூடாகச் செல்லும்; **தய** ஒரு விட்டம்.

$\therefore \angle$ **தவய** $= 90^\circ$ **அரைவட்டத்துக் $\angle$,**

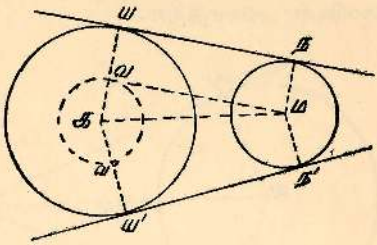
$\therefore$ **வத** என்பது **வ** விற்கூடாகச் செல்லும் ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore$ **வத** என்பது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்கு **வ** விலுள்ள தொடுகோடாகும்.

இவ்வாறே **சத** வுங் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு என நிறுவலாம்.

அமைப்பு 12

இரண்டு வட்டங்களுக்குரிய புறப்பொதுத் தொடுகோடுகளை அமைத்தல்.



உருவம் 705

தரவு. க, ம என்பன மையங்களாகவும், அ, இ ஆரைகளாகவும் உடைய இரு வட்டங்கள்; அ > இ எனப் பாவித்துக் கொள்க.

அமைக்க வேண்டியன. இரு வட்டத்திற்குமுரிய புறப்பொதுத் தொடுகோடுகள்.

அமைப்பு. க வை மையமாகவும் அ – இ யை ஆரையாகவுங் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. ம விலிருந்து இவ்வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் **மவ, மவ'** என்பவற்றை வரைக.

கவ, கவ' ஆகியவற்றை இணைத்து அவற்றை, அ வை ஆரையாகக் கொண்ட வட்டத்தை **ய, ய'** களில் வெட்டுமாறு நீட்டுக.

ம விற்கூடாக **மந, மந'** என்பவற்றை **கய, கய'** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகவும் ம வை மையமாகவுடைய வட்டத்தை **ந, ந'** களிலே சந்திக்குமாறும் வரைக.

யந, ய'ந' என்பவையே வேண்டிய தொடுகோடுகளாம்.

நிறுவல். அமைப்பினால், **கவ** = அ – இ, **கய** = அ,

∴ **வய** = **கய** – **கவ** = இ = **மந**,

∴ **வய** வும் **மந** வுஞ் சமமுஞ் சமாந்தரமுமாகும்,

∴ **வயநம** ஓரிணைகரமாகும்.

ஆனால், அமைப்பினால் **வம** என்பது **வ** விலேயுள்ள தொடுகோடாகும்,

∴ ∠ **கவம** ஒரு செங்கோணமாகும்,

∴ **வயநம** ஒரு செவ்வகமாகும்,

∴ ∠ **கயந** வும் ∠ **மநய** வுஞ் செங்கோணங்களாகும்,

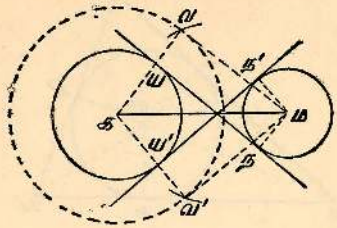
∴ **யந** என்பது **ய, ந** க்களுக்கூடாகவுள்ள ஆரைகட்குச் செங்குத்தாகும்.

∴ **யந** என்பது ஒவ்வொரு வட்டத்திற்குந் தொடுகோடாகும்.

இவ்வாறே **ய'ந'** என்பதும் ஒரு பொதுத் தொடுகோடென நிறுவலாம்.

அமைப்பு 13

ஒன்றையொன்று வெட்டாத இரு வட்டங்களுக்குரிய அகப் பொதுத் தொடுகோடுகளை அமைத்தல்.



உருவம் 706

தரவு. **க, ம** க்களை மையமாகவும் அ, இ க்களை ஆரையாகவுங் கொண்ட இருவட்டங்கள்.

அமைக்க வேண்டியன. இவ்விரு வட்டங்கட்கு அகப்பொதுத்தொடுகோடுகள்.

அமைப்பு. **க** வை மையமாகவும் அ + இ யை ஆரையாகவுங்கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. **ம** விலிருந்து இவ்வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் **மவ, மவ'** ஆகியவற்றை வரைக.

கவ, கவ' ஆகியவற்றை அ வை ஆரையாகவுடைய வட்டத்தை **ய, ய'** களில் வெட்டுமாறு இணைக்க.

ம விற்கூடாக **மந, மந'** என்பவற்றை **யக, ய'க** ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகவும் **ம** வை மையமாகவுடைய வட்டத்தை **ந, ந'** ஆகியவற்றிலே சந்திக்குமாறும் வரைக.

யந, ய'ந' என்பவையே வேண்டிய தொடுகோடுகளாகும்.

நிறுவல். அமைப்பினால், **கவ** = அ + இ, **கய** = அ,

∴ **வய** = **கவ** − **கய** = இ = **மந**,

∴ **யவ** வும் **நம** வுஞ் சமமுஞ் சமாந்தரமுமாகும்,

∴ **வயநம** ஓரிணைகரமாகும்.

∴ ஆனால் அமைப்பினால் **வம** என்பது **வ** விலுள்ள தொடுகோடாகும்,

∴ ∠ **கவம** ஒரு செங்கோணமாகும்,

∴ **வயநம** ஒரு செவ்வகமாகும்,

∴ ∠ **கயந** வும் ∠ **மநய** வுஞ் செங்கோணங்களாகும்,

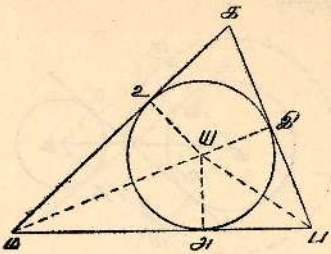
∴ **யந** என்பது **ய, ந** க்களுக்கூடாகச் செல்லும் ஆரைகட்குச் செங்குத்தாகும்.

∴ **யந** என்பது ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் ஒரு தொடுகோடாகும்.

இவ்வாறே **ய' ந'** என்பதும் ஒரு பொதுத் தொடுகோடென நிறுவலாம்.

அமைப்பு 14

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டத்தை அமைத்தல்.



உருவம் 707

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப.**

அமைக்க வேண்டியது. முக்கோணம் **கமப** வின் உள்வட்டம்.

அமைப்பு. கோணங்கள் **கமப, கபம** ஆகியவற்றை இரு சமக்கூறிட்டு **ய** விலே ஒன்றையொன்று வெட்டுங்கோடுகள் **மய, பய** க்களை வரைக. **மப** விற்குச் செங்குத்தாக **யஅ** வை வரைக.
ய வை மையமாகவும் **யஅ** வை ஆரையாகவுங்கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. இதுவே வேண்டிய வட்டமாகும்.

நிறுவல். **கப, கம** க்களுக்குச் செங்குத்துக்களாக **யஇ, யஉ** க்களை வரைக. ∠**கமப** வை இரு சமக்கூறிடுங் கோட்டில் **ய** இடப்பதால், **மக, மப** க்களிலிருந்து **ய** சம தூரத்தில் உள்ளது.

∴ **யஉ = யஅ.**

அவ்வாறே, **யஇ = யஅ.**

∴ **ய** வை மையமாகவும் **யஅ** வை ஆரையாகவும் உடைய வட்டம் **அ, இ, உ** களுக்கூடாகச் செல்கின்றது.

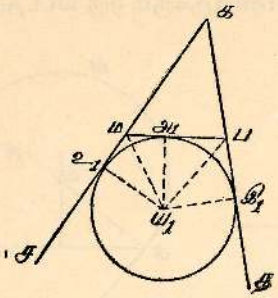
இன்னும் ∠**யஅப,** ∠**யஇக,** ∠**யஉக** என்பன செங்கோணங்களாகும்.

∴ **மப, பக, கம** என்பன இவ்வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளாகும்.

குறிப்பு : 245 ஆம் பக்கத்தில் ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டத்தின் வரைவிலக்கணங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ; அமைப்பு 14 இனது நிறுவல் 249 ஆம் பக்கத்திலுள்ள தேற்றம் 33 ஐத் திருப்பிக் கூறியதை ஒக்கும். ஒரு முக்கோணத்தின் வெளிவட்டங்களின் வரைவிலக்கணத்திற்கு 246 ஆம் பக்கம் பார்க்க.

அமைப்பு 15

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு வெளிவட்டத்தை அமைத்தல்.



உருவம் 708

தரவு. ஒரு முக்கோணம் கமப.

அமைக்க வேண்டியது. நீட்டப்பட்ட கம, நீட்டப்பட்ட கப, மப ஆகிய வற்றைத் தொடும் வட்டம்.

அமைப்பு. கம, கப க்களை ச, த க்களுக்கு நீட்டுக.

கோணங்கள் சமப, தபம ஆகியவற்றை இரு சமக்கூறிட்டு $ய_1$ இலே ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடுகள் $மய_1$, $பய_1$ ஆகியவற்றை அமைக்க. மப விற்குச் செங்குத்தாக $ய_1அ_1$ ஐ வரைக.

$ய_1$ ஐ மையமாகவும் $ய_1$ $அ_1$ ஐ ஆரையாகவுங் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

இதுவே வேண்டிய வட்டமாகும்.

நிறுவல். கபத, கமச ஆகியவற்றிற்குச் செங்குத்தாக $ய_1இ_1$, $ய_1உ_1$ ஆகியவற்றை வரைக.

∠சமப வின் இரு சமவெட்டியில் $ய_1$ இருப்பதால் மச, மப க்களி லிருந்து $ய_1$ சமதூரத்திலுள்ளது.

$\therefore ய_1உ_1 = ய_1அ_1$, இவ்வாறே $ய_1இ_1 = ய_1அ_1$.

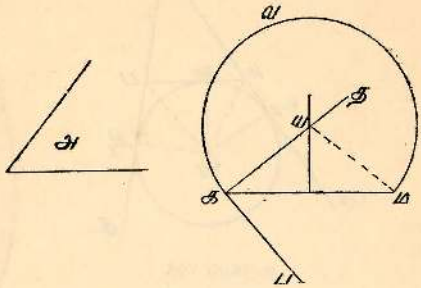
$\therefore ய_1$ ஐ மையமாகவும் $ய_1அ_1$ ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டம், $அ_1$, $இ_1$, $உ_1$ ஆகியவற்றிற்கூடாகச் செல்கின்றது.

இன்னும் $\angle ய_1அ_1ப$, $\angle ய_1இ_1ப$, $\angle ய_1உ_1ம$ என்பன செங்கோணங் களாகும்,

∴ மப, கபத, கமச என்பன இவ்வட்டதிற்குத் தொடுகோடுகளாம்.

அமைப்பு 16

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டில், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணத்திற்குச் சமமான கோணத்தைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வட்டத்துண்டினை அமைத்தல்.



உருவம் 709

தரவு. ஒரு நேர்கோடு **கம** வும் ஒரு கோணம் **அ** வும்.

அமைக்க வேண்டியது. **கம** மேல் ∠**அ** விற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைக் கொண்ட ஒரு வட்டத்துண்டு.

அமைப்பு. **க** விலே ∠**அ** விற்குச் சமமான ஒரு கோணம் **மகப** ஐ அமைக்க. **கப** விற்குச் செங்குத்தாக **கத** வை வரைக. **கம** வின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்தை **த** வரைக. அது **கத** வை **ய** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க. **ய** வை மையமாகவும் **யக** வை ஆரையாகவுங்கொண்டு ஒரு வட்டத்தைவரைக. **கம** விற்கு **ப** உள்ள பக்கத்திற்கு எதிர்ப் பக்கத்திலே உள்ள துண்டே வேண்டிய துண்டாம்.

நிறுவல். **யம** வை இணைக்க.

கம வின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்திலே **ய** இருப்பதால் **யக** = **யம**.

∴ வட்டம் **ம** விற்கூடாகச் செல்கிறது.

க விற்கூடாகவுள்ள ஆரைக்கு **கப** செங்குத்தாதலின் **கப** ஒரு தொடு கோடாகும்.

∴ ∠**அ** = ∠**பகம** = ஒன்றுவிட்டதுண்டு **கவம** விலுள்ள கோணம்.

∴ துண்டு **கவம** வே வேண்டிய துண்டாம்.

பாகைமானியைப் பயன்படுத்தினால் அமைப்பு 16 ஐ எளிதிற் செய்ய லாம். உதாரணமாக, உரு 709 இலுள்ள தரவுகளுடன் ∠ அ = 38° எனக் கொள்க.

அப்பொழுது, ∠ யகம = 90° − 38° = 52°.

இன்னும் யக = ∠ யம,

∴ ∠ யமக = ∠ யகம = 52°.

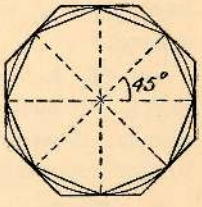
எனவே கம வை அடியாகவும் ஒவ்வோரடிக்கோணத்தையும் 52° உக்குச் சமமாகவுங்கொண்டு ஓரிருசமபக்க முக்கோணம் யகம வை வரைவதால் வேண்டிய துண்டின் மையம் ய வை நாம் காணலாம்.

உள்ளுருவமாகவும் வெளியுருவமாகவும் வரையப்பட்ட ஒழுங்கான பல்கோணங்கள்

ந பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணம் ஒன்று ஒரு வட்டத்தின் உள்ளுருவமாகவோ வெளியுருவமாகவோ வரையப்படின் ஒவ்வொரு பக்கமும் வட்டத்தின் மையத்தில் $\frac{360}{ந}$ பாகையளவான கோணத்தை அமைக்கும்.

ந = 3, 4, 6, 8 என்ற பெறுமானங்களுக்கு கோணங்கள் முறையே 120°, 90°, 60°, 45° ஆகும்; முன்னரே இவ்வளவுகள் கொண்ட கோணங்களைப் பாகைமானி இல்லாமல் அமைக்கலாம் என்பது எடுத்துக் காட்டப்பட்டது.

உரு 710, ஒரு வட்டத்துள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஓரொழுங்கான பல்கோணத்தையும் வெளியுருவமாக வரையப்பட்ட பிறிதொன்றையுங் குறிக்கின்றது.



உருவம் 710

மாணக்கர் 3, 4, 6 பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான உருவங்களை வட்டத்தைச் சுற்றி உள்ளுருவங்களாகவும் வெளியுருவங்களாகவும் வரைதல் வேண்டும்; பாகைமானியைக் கொண்டு 5 பக்கங்கள், 7 பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணங்களை அமைத்தல் வேண்டும்.

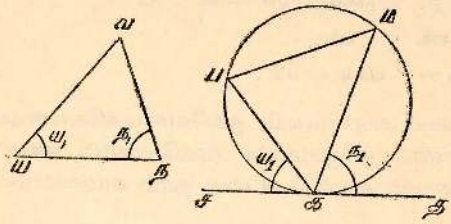
ஒழுங்கான ஓரறுகோணத்தை ஒரு வட்டத்தின் உள்ளுருவமாக வரைதற்குச் சுலபமான வழி யாதெனின் ஒவ்வொரு பக்கமும் ஆரைக்குச்சமன் என்னும் உண்மையைப் பயன்படுத்தலேயாம்.

ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி வெளியுருவமாக ஓரொழுங்கான அறுகோணத்தை வரைவதற்கு உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட அறுகோணத்தின் மூலைகளிலே தொடுகோடுகள் வரைக.

ஓரொழுங்கான அறுகோணத்தின் ஒன்றுவிட்ட உச்சிகள் ஒரு சமபக்கமுக் கோணத்தின் உச்சிகளாகும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்துள் கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் வயந விற்குச் சமகோணமான ஒரு முக்கோணத்தை உள்ளுருவமாக வரைக.



உருவம் 711

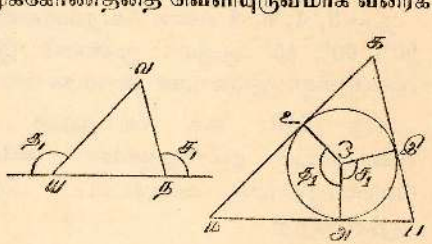
கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்திலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **க** விலே தொடு கோடு **சகத** வை வரைக.

கப, கம க்களை, $ய_1 = ய$, $ந_1 = ந$, ஆகுமாறு வரைந்து **Δ கமப, Δ வயந** விற்குச் சமகோணமானது எனக்காட்டுக.

2. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தைச்சுற்றி கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் வயந விற்குச் சமகோணமான ஒரு முக்கோணத்தை வெளியுருவமாக வரைக.

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் மையத்தை **ஓ** வாகக் கொள்க; ஆரைகள் **ஓஅ, ஓஇ, ஓஉ** என்பவற்றை, $த_1 = த$, $ச_1 = ச$, ஆகுமாறு வரைக.

அ, இ, உ களிலே தொடுகோடுகளை, **Δ கமப** உண்டாகுமாறு வரைக; **Δ கமப, Δ வயந** விற்குச் சமகோணமானது என நிறுவுக.

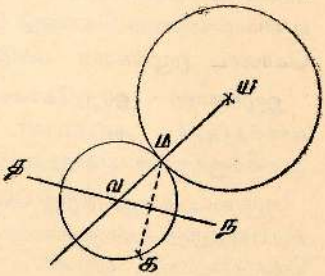


உருவம் 712

3. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி க விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் ய வை மையமாகவுடைய ஒரு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி ம விலே தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக.

கம வின் இருசமவெட்டிச்செங்குத்து **தந** வை வரைக; அது, தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட, **யம** வை **வ** விலே வெட்டுவதாகக்கொள்க.

வ வை மையமாகவும் **வம** வை ஆரையாகவுங்கொண்டு ஒரு வட்டத்தை வரைக. அதுவே வேண்டிய வட்டம் என நிறுவுக.



உருவம் 713

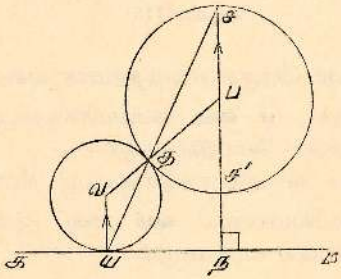
4. ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை, **கம** = 6 ச.மீ., ∠**கபம** = 50°, மையக்கோடு **பஅ** = 5·5 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக.

கம வை வரைக. அதை **அ** வில் இருசமக்கூறிடுக.

கம விலே 50° கோணம் ஒன்றைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வட்டத்துண்டு **கவம** வை வரைக.

அ மையமாக 5·5 ச.மீ. ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தை வரைக. இது வில் **கவம** வை **ப** விலே [இரு நிலைகளில்] வெட்டுகின்றது.

5. கொடுக்கப்பட்ட ஒருகோடு கம ஐயும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி த இல் ப வை மையமாகவுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தையும் தொடும் ஒரு வட்டம் வரைக. [இரு விடைகள்.]



உருவம் 714

கம விற்குச் செங்குத்தாக **பந** வை வரைக. அது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை **ச'**, **ச** களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

(i) நீட்டப்பட்ட **சத** வானது **கம** வை **ய** வில் வெட்டுகிறது. **நபச** விற்குச் சமாந்தரமாக **யவ** வை வரைக. அது நீட்டப்பட்ட **பத** வை **வ** விலே சந்திக்கிறதாகக் கொள்க.

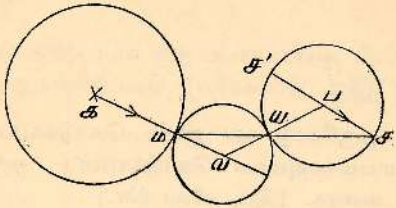
அப்பொழுது **வ** வை மையமாகவும் **வத** வை ஆரையாகவுமுடைய வட்டமே வேண்டிய வட்டமாகும். ஏன் **வய**=**வத** என விளக்கி நிறுவலை முடிவாக்குக.

(ii) (1) இலுள்ள **ச** விற்குப் பதிலாக **ச'** ஐப் பயன்படுத்தி **கம** வையும் **த** விலே கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தையும் (உட்புறமாகத்) தொடும் இரண்டாவதொரு வட்டத்தையும் பெறுக.

6. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி ய விலே கொடுக்கப்பட்ட ஒருகோடு கம வையும் ப வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தையுந் தொடும் ஒரு வட்டத்தை வரைக. [இரு விடைகள்.]

உரு 714 இற் குறிக்கப்பட்ட அமைப்பைப் பயன்படுத்துக. வழியைக் கூறி அது திருத்தமானதென நிறுவுக.

7. கொடுத்த ஒரு புள்ளி ம இல் க வை மையமாகவுடைய கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தையும் ப வை மையமாகவுடைய ஒரு கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் வட்டத்தையும் தொடும் ஒரு வட்டத்தை வரைக. (இரு விடைகள்.)



உருவம் 715

விட்டம் **ச'பச** வை **கம** விற்குச் சமாந்தரமாக வரைக.

(i) **மச** வை இணைக்க ; **ப** வை மையமாகவுடைய வட்டத்தை அது மீண்டும் **ய** விலே வெட்டுவதாகுக.

கம, பய க்களை **வ** விற் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

வ வை மையமாகவும் **வம** வை ஆரையாகவும் உடைய வட்டமே வேண்டிய வட்டமாகும்.

ஏன் **வம = வய** என விளக்கி நிறுவலை முடிவாக்குக.

(ii) (i) இலுள்ள **ச** விற்குப் பதிலாக **ச'** ஐப் பயன்படுத்தி, **ப** வை மையமாகவுடைய வட்டத்தையும் **ம** விலே, **க** வை மையமாகவுடைய வட்டத்தையும் தொடும் ஓரிரண்டாவது வட்டம் வரைக.

பயிற்சி 72

1. **∠மகப** வை 35° ஆக வரைந்து **கம** வை 4 ச. மீ. ஆக்குக. **கப** வை **க** விலே தொடக்கூடியதாகவும் **ம** விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

[2] ஒருகோடு **கம** வை வரைந்து அதிலிருந்து 3 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ப** வை எடுக்க. ஒவ்வொன்றும் 4 ச.மீ. ஆரைகொண்ட இருவட்டங்களை **ப** விற் கூடாகச் செல்லக்கூடியனவாகவும் **கம** வைத் தொடக்கூடியனவாகவும் வரைக.

[3] 4 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைந்து அதிற் சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றை உள்ளுருவமாக வரைக. அதன் பக்கத்தை அளக்க.

4. 2 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதன் சுற்றுருவமாக ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை வரைக. அதன் பக்கத்தை அளக்க.

[5] ∠ **மகப** வை 65° ஆக வரைக. **கம, கப** ஆகியவற்றைத்தொடக் கூடியதாக 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தை வரைக.

6. 4 ச.மீ. தூரத்திலுள்ளனவாக இரு புள்ளிகள் **க, ம** க்களை எடுக்க. **க,ம** க்களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் அவற்றிலுள்ள தொடுகோடுகள் 100° கோணத்தை அமைக்கக்கூடியதாகவும் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

7. 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 4 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **க** வை எடுக்க. அவ்வட்டத்தைத் தொட்டு **க** விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாக 2 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

8. ஒருகோடு **கம** விலிருந்து 4 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ப** வை எடுத்து **ப** மையமாக 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டத்தையும் **கம** வையுந் தொடக்கூடியதாக 2 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

[9] அ ச.மீ. ஆரையுள்ள கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தின் மையம் **ப**, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **கம** விலிருந்து இ ச.மீ. தூரத்திலுள்ளது. இவ்வட்டத்தையும் **கம** வையும் தொடக்கூடியதாக உ ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தைக்கீறல் எவ்வித நிபந்தனைகளில் இயலாததாகும்.

10. 6 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள இரண்டு புள்ளிகள் **க, ம** க்களை எடுக்க. **க, ம** க்கள் மையங்களாக முறையே 3 ச.மீ., 2 ச.மீ. ஆரைகொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. இவ்விரு வட்டங்களையும் வெளிப்புறமாகவோ உட்புறமாகவோ தொடக்கூடியதாக 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. இயலுமான விடைகள் யாவற்றையுந் தருக.

[11] △ **கமப** வை **கம** = **கப** = 7 ச.மீ., **மப** = 5 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. **க** மையமாக 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டத்தைத் தொடக்கூடியதாகவும் **ம, ப** க்களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் அமைக்க.

12. 4·5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் **கம** வையுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. **கம** வையோ நீட்டப்பட்ட **கம** வையோ தொட்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை (i) உட்புறமாகவோ (ii) வெளிப்புறமாகவோ தொடக்கூடிய 1·5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

[13] 5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. 1·5 ச.மீ., 2·5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்டு ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொட்டு, கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை உட்புறமாகத் தொடும் இரு வட்டங்கள் வரைக.

14. ∠**கமப** வை **மப** = 4 ச.மீ., **பக** = 3 ச.மீ., **கம** = 2 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. Δ**கமப** வின் பக்கங்களைத் தொடும் 4 வட்டங்களையும் வரைந்து அவற்றின் ஆரைகளைக் காண்க.

[15] ∠**கமப** வை **கம** = 4 ச.மீ., **மப** = 6 ச.மீ., ∠**ம** = 90° ஆகுமாறு வரைக. **மப** விற்கு வெளிவட்டமாகவுள்ள வட்டத்தை வரைந்து அதன் ஆரையை அளக்க.

16. முறையே 4, 5, 7, 6 ச.மீ. அளவுள்ள பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு நாற்கோணம் வரைக. அவற்றுள் 3 பக்கங்களைத் தொடக்கூடியதாக ஒருள்ளுருவ வட்டம் வரைக. அது 4 ஆவது பக்கத்தைத் தொடுகிறதா ?

17. ∠**கயம** வை 40° ஆக வரைந்து **யக** வை 4 ச.மீ. ஆக அமைக்க. **யம** வையும் **க** விலே **யக** வையுந் தொடும் ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

[18] Δ**கமப** வை **மப** = 7 ச.மீ., **பக** = 6 ச.மீ., **கம**=5 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைக்க. **கம, கப** இரண்டையுந்தொட்டு தன்னுடைய மையத்தை **மப** விலே கொள்ளுமாறு ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

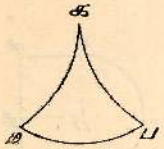
19. 6 ச.மீ. தூரங்கொண்ட இரு சமாந்தரக்கோடுகள் **கம, பத** ஆகியவற்றை வரைந்து **கம** விலிருந்து 2 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ந** வை அவற்றிற்கு இடையே எடுக்க. **கம, பத** ஆகிய இரண்டையுந் தொட்டு **ந** விற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரைக.

[20] இரு சமாந்தரக்கோடுகள் **கம, பத** என்பவற்றை வரைந்து **கம** வை வெட்டும் யாதாயினும் ஒரு வட்டம் வரைக. **கம, பத** ஆகியவற்றைத் தொட்டு கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தையுந்தொடும் ஒரு வட்டம் வரைக.

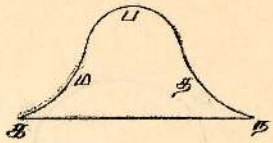
[21] இரு புள்ளிகள் **க, ம** க்களும் ஒரு கோடு **பதந** விலே ஒரு புள்ளி **த** வுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எவ்வாறு ஒன்று **க, ம** க்களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் மற்றையது **பந** வை **த** விலே தொடக்கூடிய தாகவும் இரண்டு ஒருமைய வட்டங்களை வரையலாம் என்பதைக் காட்டுக. இது எப்போது இயலாது ?

22–29 வரை உள்ள எண்களிலுள்ள உருவங்களை அமைக்க. ஒன்றை யொன்று சந்திக்கும் விற்கள் சந்திக்குமிடங்களில் வேறுவிதமாகக் கூறப் பட்டாலன்றி ஒன்றையொன்று தொடுகோட்டு இயல்புடையன எனக் கொள்க. **அமைப்புக்கோடுகள் ஒன்றையும் அழித்தலாகாது.**

22. ஒவ்வொன்றும் 3 ச.மீ. ஆரைகொண்டு முழுப்பரிதியின் 1/6 பாக மாக அமைந்துள்ள 3 விற்களை உரு 716 காட்டுகின்றது. இவ்விற்கள் ம விலோ ப விலோ தொடுகோட்டியல்புடையனவல்ல.



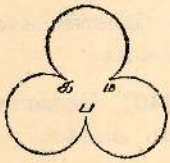
உருவம் 716



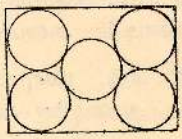
உருவம் 717

[23] சமமான 4 கால்வட்டங்கள் கம, மப, பத, தந ஆகியவற்றை உரு 717 காட்டுகின்றது. கந=6 ச.மீ.

[24] ஒவ்வொன்றும் 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட 3 விற்களை உரு 718 காட்டுகின்றது.



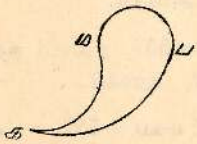
உருவம் 718



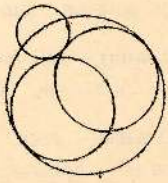
உருவம் 719

25. 6 ச.மீ. × 8 ச.மீ. அளவான ஒரு செவ்வகத்தை உரு 719 காட்டுகின்றது ; அங்குள்ள வெளிவட்டங்கள் நான்கும் சமம்.

26. உரு 720 இல் விற்கள் கம, மப, பக ஆகியவற்றினுடைய ஆரைகள் 3·5 ச.மீ., 2·5 ச.மீ., 7 ச.மீ.



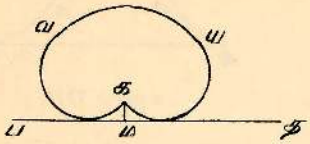
உருவம் 720



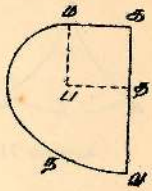
உருவம் 721

[27] உரு 721 இல் வட்டங்களின் ஆரைகள் 1 ச.மீ., 2 ச.மீ., 2 ச.மீ., 3 ச.மீ. மிகச்சிறிய வட்டத்தின் மையம் மிகப் பெரிய வட்டத்திலுள்ளது.

28. உரு 722 இல் விற்கள் **கவ, கய** என்பன 4 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்டவை ; **க** விலே தொடுகோட்டியல்புடையனவல்ல. **வய** என்பது 8 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வில் ; **கம** என்பது **பத** இற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது ; **கம** 3 ச.மீ. நீளமுள்ளது.



உருவம் 722



உருவம் 723

[29] உரு 723 இல் **கமபத** என்பது 2 ச.மீ. பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம். **மந, நவ** என்பன **ப, க** என்பவற்றை முறையே மையங்களாகக் கொண்ட விற்களாகும்.

[30] 5 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோட்டிலே 70° கோணங்கொள்ளும் ஒரு வட்டத்துண்டினை அமைக்க. அதன் ஆரையை அளக்க.

31. 2 அங். நீளமுள்ள ஒரு கோட்டிலே 140° கோணங்கொள்ளும் ஒரு வட்டத்துண்டினை அமைக்க. அதன் ஆரையை அளக்க.

32. 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளே 40°, 65°, 75° அளவுள்ள கோணங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை உள்ளுருவமாக அமைக்க. அதன் பக்கங்களுள்ளே நீளமானதை அளக்க.

33. 2 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தைச்சுற்றி 50°, 55°, 75° அளவுள்ள கோணங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தைச் சுற்றுருவமாக வரைக. அதன் பக்கங்களுள்ளே நீளமானதை அளக்க.

[34] △ **கமப** வை **மப** = 6 ச.மீ., ∠ **மகப** = 90°, உயரம் **கத**=2 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. **கம, கப** ஆகியவற்றை அளக்க.

35. △ **கமப** வை **மப** = 5 ச.மீ., ∠ **மகப** = 55°, உயரம் **கத** = 4 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைக்க. **கம, கப** ஆகியவற்றை அளக்க.

36. △ **கமப** வை **மப** = 6 ச.மீ., ∠ **மகப** = 52°, மையக்கோடு **கஅ** = 5 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைக்க.

37. △ **கமப** வை **கம** = 1·8 அங்., **மப** = 2·6 அங்., ∠ **கமப** = 130° ஆகுமாறு வரைக. ∠ **கமப** வினுள்ளே ஒரு புள்ளி **வ** வை., ∠ **மவப** = 50° ஆகவும் △ **வகம** வின் பரப்பு 2·7 சது. அங். ஆகவும் அமையுமாறு காண்க.

38. நாற்கோணம் **கமபத** வை **கத** = 5 ச.மீ., **மப** = 4·6 ச.மீ., ∠**கமத** = ∠**கபத** = 55°, ∠**பமத** = 43° ஆகுமாறு அமைக்க. **பத** வை அளக்க.

[39] ஐங்கோணம் **கமபதந** வின் உச்சிகள் ஒரு பரிதியிலுள்ளன; **கம** = 2 அங்., **மப** = 3 அங்., ∠**சதம** = 30°, Δ**கமப** வின் பரப்பு = Δ**கமந** வின் பரப்பு, ∠**பமந** வை **மத** இருசமக்கூறிடுகின்றது. ஐங்கோணத்தை அமைக்க.

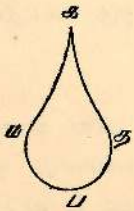
40. 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்திலே ஒரு புள்ளி **க**; **க** விலுள்ள தொடுகோட்டிலே **வ** என்னும் ஒரு புள்ளி, **கவ** = 8 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தையும் **வ** விலே **கவ** வையுந் தொடக்கூடியதாக ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

41. ∠**கமப** வை 55° ஆகுமாறு வரைந்து **மப** வை 7 ச.மீ. ஆக்குக; **ப** மையமாக 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைந்து அது **பம** வை **அ** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க. **பம** வைத் தொடக்கூடிய தாகவும் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை வெளிப்புறமாக **அ** விலே தொடக் கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

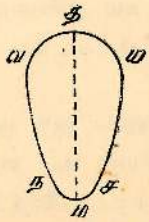
42–45 வரை உள்ள எண்களிலுள்ள உருவங்களை அமைக்க. ஒன்றை யொன்று சந்திக்கும் விற்கள் சந்திக்குமிடங்களிலே தொடுகோட்டியல் புடையன.

அமைப்புக்கோடுகள் ஒன்றையும் அழித்தல் கூடாது.

42. உரு 724 இல் **கம, கத** என்பன 6 ச.மீ. ஆரைகொண்ட விற்களா கும்; **க** விலிருந்து **ப** உள்ள தூரம் 6 ச.மீ.; கோடு **கப** ஒருசமச்சீரச் சாகும்.

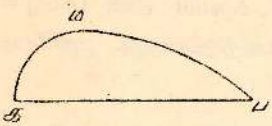


உருவம் 724

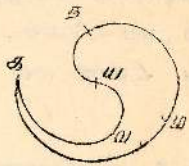


உருவம் 725

43. உரு 725 இல் **தம** ஒரு சமச்சீரச்சாகும்; **வதய** என்பது 2 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஓரரைவட்டமாகும். **நமச** என்பது 1 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வில்லாகும்; **தம** = 7 ச.மீ.



உருவம் 726



உருவம் 727

[44] உரு 726 இல் **கம** என்பது **கப** விலே மையம் கொண்ட 2·5 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு கால்வட்டமாகும்; **கப** = 7ச.மீ.

45. உரு 727 இல் **ய** மையமாக 3 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஓரரைவட்டம் **கம** ஆகும். **யவ, யந** என்பன ஒவ்வொன்றும் 1 ச.மீ. ஆரைகொண்ட விற்களாகும்.

[46] **கமப** ஒரு சமபக்கமுக்கோணம்; **கம** = 4 ச. மீ.; ஒவ்வொன்றும் 2·5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட இரு வட்டங்களின் மையங்கள் **க, ம** என்பன. **பக** என்பது முதலாவது வட்டத்தை **த** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. இரண்டாவது வட்டத்தை வெளிப்புறமாகவும் **த** விலே முதலாவது வட்டத்தை உட்புறமாகவுந் தொடும் ஒரு வட்டம் வரைக.

47. **ய** மையமாக ஈராரைகள் **யக, யம** ஆகியவற்றைக் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. ஆரைச்சிறை **கயம** வினுள்ளே உள்ளுருவமாக அதாவது **பக, யம** வில் **கம** ஆகியவற்றைத் தொடும் ஒரு வட்டத்தை எவ்வாறு வரையலாம் எனக் காட்டுக.

*48. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை வரைக. அளவுகள் ஒன்றும் எடுக்காமல் **க, ம, ப** க்கள் மையங்களாக ஒவ்வொன்றும் மற்றை இரண்டு வட்டங்களைத் தொடச் கூடிய மூன்று வட்டங்கள் வரைக. இயலும் 4 விடைகளையுந் தருக.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

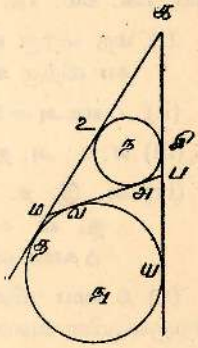
ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டமும் வெளிவட்டங்களும்.

1-4 வரை உள்ள உதாரணங்கள் உரு 728 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **ந** என்பது Δ **கமப** வின் உண்மையமாகும். **$ந_1$** ஒரு வெளிமையமாகும். (450, 451 ஆம் பக்கங்களைப் பார்க்க.)

மப = $க_,$, **பக** = $ம_,$, **கம** = $ப_,$,

$ச_, = \frac{1}{2}(க_, + ம_, + ப_,)$,

முக்கோணம் **கமப** வின் பரப்பு = Δ.



உருவம் 728

1. **க இ** = $ச_, - க_,$ என நிறுவுக. **மஅ, பஅ** என்பவற்றிற்கு ஒத்த கோவைகளைத் தருக.

2. **கத** = $ச_,$ என நிறுவுக. **மவ, வப** என்பவற்றை $க_,$, $ம_,$, $ப_,$, $ச_,$ என்பவற்றிற் காண்க.

3. உள்வட்டத்து ஆரை ஆ என்பது $\frac{\Delta}{ச_,}$ என்பதற்குச் சமன் என நிறுவுக.

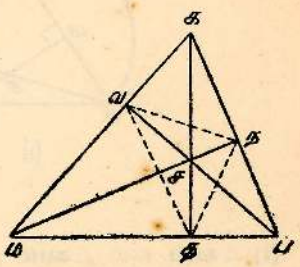
[Δ **நமப** + Δ **நபக** + Δ **நகம** = Δ **கமப** ;

Δ **நமப** = $\frac{1}{2}$ ஆ . $க_,$ என்றவாறு.]

4. $ந_1$ ஐ மையமாகவுடைய வெளிமையத்தின் ஆரை $அ_1$ என்பது $\frac{\Delta}{ச_, - க_,}$ என்பதற்குச் சமன் என நிறுவுக ;

[Δ $ந_1$ **கம** + Δ $ந_1$ **கப** − Δ $ந_1$ **மப** = Δ **கமப**.]

ஒரு முக்கோணத்தின் செங்குத்துமையம். 5-10 வரை உள்ள எண்கள் உரு 729 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் Δ **கமப** வின் செங்குத்துமையம் **ச** வாகும். (237 ஆம் பக்கம் பார்க்க.)



உருவம் 729

5. Δ **சமப** வின் செங்குத்துமையம் எங்குளது ?

6. (i) **கச** வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தைப்பற்றி என்ன கூறுவீர் ?

(ii) **மப** வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தைப்பற்றி என்ன கூறுவீர் ?

7. ∠ மசப = 180° – ∠ மகப என நிறுவுக.

8. Δ கநவ, Δ கமப விற்குச் சமகோணமானது என நிறுவுக.

9. ∠ சதந = ∠ சதவ = 90° – ∠ மகப என நிறுவுக.

10. (ஒன்பது புள்ளி வட்டம்) Δ கமப வின் உயரங்கள் கத, மந, பவ ஆக, ச செங்குத்துமையமாக, அ, இ, உ, எ, ஒ, ய என்பன முறையே மப, பக, கம, சக, சம, சப என்பனவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகளாயின்,

(i) மந விற்கு எஉ சமாந்தரம் எனவும்
கப விற்கு உஅ சமாந்தரம் எனவும் நிறுவுக;

(ii) ∠ எஉஅ = 90°, ∠ எஇஅ = 90° என நிறுவுக;

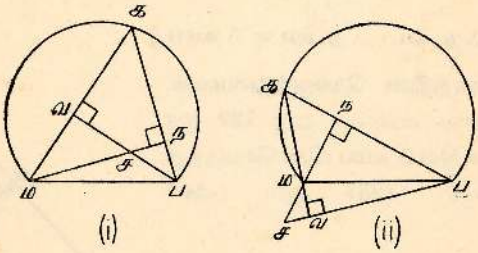
(iii) எ, உ, அ, த, இ என்பன ஒரு வட்டத்திலுள்ளன என நிறுவுக;

(iv) அ, இ, உ என்பவற்றிற் கூடாகச் செல்லும் வட்டம் எ, ஒ, ய, த, ந, வ என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்கின்றது என நிறுவுக; (இது Δ கமப வின் ஒன்பது புள்ளிவட்டம் எனப்படும்.)

(v) Δ கமப வினது ஒன்பது புள்ளிவட்டத்தின் ஆரை Δ கமப வின் சுற்றுரையின் அரைப்பாகமாகும் என நிறுவுக. [இ உ = $\frac{1}{2}$ மப என்றவாறு.]

ஒழுக்கு

11. Δ கமப வின் அடி மப வினுடைய நிலையும் பருமனுங் கொடுக்கப்பட்டு ∠ மகப வின் பருமன் கொடுக்கப்பட்டால் Δ கமப வின் செங்குத்துமையம் ச வினது ஒழுக்கைக் காண்க.



உருவம் 730

(i) ∠ கமப மும் ∠ கபம வுங் கூர்ங்கோணமாயுள்ள உரு 730 (i) இல் ∠ மசப = 180° – ∠ மகப எனவும் ∠ கமப விரிகோணமாயுள்ள உரு 730 (ii) இல் ∠ மசப = ∠ மகப எனவும் நிறுவுக.

(ii) ∠ கமப ஒரு செங்கோணமாயிருக்கும்பொழுது ச வினது நிலை யாது ?

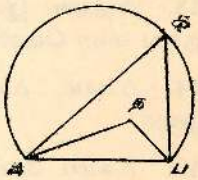
(iii) ∠ **கமப**, ∠ **சபம** என்பன கூர்ங்கோணங்களாயிருக்கும்பொழுது **ச** வினால் வரையப்பட்ட வழியைப்பற்றி என்ன கூறுவீர் ? அவற்றில் ஒன்று விரிகோணமாயின் என்ன கூறுவீர் ? இவ்வழிகள் ஒரே வட்டத்தின் பகுதிகளா ?

(iv) **ம** விற்கு மிக அண்ணிதாக **க** இருக்கும்பொழுது **ச** வினது நிலை என்ன ?

(v) **ச** வினது முழு ஒழுக்கு யாது ?

(vi) **மப** = 3 ச. மீ. ஆக ∠ **மகப** = 30° எனின் **ச** வினது ஒழுக்கை வரைக.

12. ஒரு Δ **கமப** வின் அடி **மப** வினுடைய நிலையும் பருமனுங் கொடுக்கப்பட்டு ∠ **மகப** வின் பருமனுங் கொடுக்கப்பட்டால் Δ **கமப** வின் உண்மையம் **ந** இன் ஒழுக்கைக் காண்க.



உருவம் 731

(i) **க** வினது முழு ஒழுக்கு யாது ?

(ii) ∠ **மநப** = 90° + $\frac{1}{2}$ ∠ **மகப** என நிறுவுக.

(iii) **ம** விற்கு **க** மிக அண்ணிதெனின், **ந** வினது நிலை என்ன ?

(iv) **ந** வினது முழு ஒழுக்கு யாது ?

பயிற்சி 73

1–9 வரை உள்ள எண்கள் Δ **கமப** வின் உள்வட்டத்தையும் ஒரு வெவட்டத்தையும் குறிக்கும் உரு 728 ஐக் குறிக்கின்றன.

1. (i) **இய** = **உத** என நிறுவுக. (ii) **மவ** = **அப** என நிறுவுக.

[2] **கம** > **கப** எனின் **வஅ** = **கம** − **கப** என நிறுவுக.

3. **ம, ந, ப, $ந_1$** ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

[4] ∠ **கநப** = 90° + $\frac{1}{2}$ ∠ **கமப** என நிறுவுக.

5. ∠ **மநப** = 100° எனின் ∠ **மகப** வைக் காண்க.

[6] **கஉ** + **மஅ** + **பஇ** = $\frac{1}{2}$ (**மப** + **பக** + **கம**) என நிறுவுக.

[7] **கம** − **கப** = **மஅ** − **அப** என நிறுவுக.

8. Δ **கமப** வின் ஒருயரம் **கத** வாக **கம** > **கப** எனின் ∠ **நகத** = $\frac{1}{2}$ (∠ **கபம** − ∠ **கமப**) என நிறுவுக.

9. Δ **கமப** வின் ஒருயரம் **கத** வாக **எ** சுற்றுமையமெனின் ∠ **எகத** வை **கந** இரு சமக்கூறிடுகின்ற என நிறுவுக.

[10] ஒரு வட்டத்தினது நாண் **கம** ; **க, ம** களிலே உள்ள தொடுகோடுகள் **த** விலே சந்திக்கின்றன. Δ **தகம** வின் உண்மையம் வட்டத்திலுள்ளது என நிறுவுக.

11–14 வரை உள்ள எண்கள் Δ **கமப** வையும் அதனுடைய செங்குத்து மையம் **ச** வையுங் குறிக்கின்ற ஒரு 729 ஐக் குறிக்கின்றன.

11. முக்கோணங்கள் **மதவ, நதப** சமகோணங்களானவையென நிறுவுக.

[12] Δ **கமப** இன் சுற்றுமையம் **ய** எனின் $\angle$ **சமக** $=$ $\angle$ **யமப** என நிறுவுக.

13. Δ **தநவ** இன் உண்மையம் **ச** என நிறுவுக. எப்புள்ளிகள் Δ **தநவ** வின் வெளிமையங்களாகும் ?

14. Δ **கசம,** Δ **கசப** ஆகியவற்றினுடைய சுற்றுவட்டங்கள் சமமென நிறுவுக.

15. Δ **கமப** வின் உண்மையம் **ய** வாக $\mathbf{ய_1}$, $\mathbf{ய_2}$, $\mathbf{ய_3}$ என்பன வெளிமையங்களெனின் Δ $\mathbf{ययययय_3}$ என்பதன் செங்குத்துமையம் $\mathbf{ய_1}$ என நிறுவுக.

16. Δ **கமப** வின் வெளிமையங்கள் $\mathbf{ய_1}$, $\mathbf{ய_2}$, $\mathbf{ய_3}$ எனின் Δ $\mathbf{ययययय_3}$ இன் ஒன்பது புள்ளிவட்டம் யாது ? இதிலிருந்து என்ன பெறப்படும் ?

17. Δ **கமப** இல் $\angle$ **மகப** $= 90°$. Δ **கமப** வின் உள்வட்டத்தின் விட்டம் **கம** $+$ **கப** $-$ **மப** என்பதற்குச் சமமென நிறுவுக.

[18] Δ **சமப** வின் உள்வட்டமானது **மப** வை **அ** விலே தொடின் Δ **கமஅ,** Δ **கபஅ** என்பனவற்றின் உள்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிறுவுக.

19. ஒரு வட்டத்தைச்சுற்றி அமைந்த நாற்கோணம் **கமபத** ; Δ **கமப,** Δ **கதப** ஆகியவற்றின் உள்வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என நிறுவுக.

20. ஒரு 728 இல் $\mathbf{நந_1}$, **கமப** வின் சுற்றுவட்டத்தை **ஓ** விலே வெட்டினால் **ந,** $\mathbf{ந_1}$, **ம, ப** என்பன **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலுள்ளனவென நிறுவுக.

21. ஒரு 729 இல் நீட்டப்பட்ட **கத** Δ **கமப** இன் சுற்றுவட்டத்தை **ய** விலே வெட்டின் **சத** $=$ **தய** என நிறுவுக.

[22] ஒரு 729 இல் நீட்டப்பட்ட **மச** Δ **கமப** வின் சுற்றுவட்டத்தை **ஓ** விலே வெட்டினால் **கச** $=$ **கஓ** என நிறுவுக.

[23] உரு 728 இல் Δ **மநப** இன் சுற்றுவட்டம் **கம** வை **ச** விலே வெட்டினால் **கச = கப** என நிறுவுக.

*24. உரு 729 இல் Δ **கமப** வின் உண்மையம் **ய** எனின் **நவ** இற்கு **யக** செங்குத்து என நிறுவுக.

*25. உரு 728 இல் **க** விலிருந்து **மந, பந** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **கன, கஒ** எனின் **மப** விற்கு **எஒ** சமாந்தரமென நிறுவுக.

*26. Δ **கமப** வின் சுற்றுமையம் **ய**; செங்குத்து மையம் **ச**; சுற்று வட்டத்து ஒரு விட்டம் **கத**.

(i) **மசபத** ஓரிணைகரம் என நிறுவுக;

(ii) **பச** என்பது **கம** விலிருந்து **ய** விற்குள்ள தூரத்திலும் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

ஒழுக்குக்கள்

27. **ய** வை மையமாகக்கொண்ட ஒரு நிலையான வட்டத்திலே ஒரு நிலையான புள்ளி **க**. **கவ** என்பது அவ்வட்டத்தின் ஒரு மாறும் நாண். **கவ** வினது நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு **யக** வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் என நிறுவுக.

[28] கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தின் ஒரு மாறும் நாண் **வய** ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது. **வய** வினது நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

29. **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள்; **ம** வை மையமாகவுடைய ஒரு மாறும் வட்டத்திற்கு **க** விலிருந்துள்ள தொடுகோடு **கவ** ஆகும். **வ** வினது ஒழுக்கினைக் காண்க.

30. **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள்; **கமவய** என்பது மாறும் ஓரிணைகரம். ∠ **யகம**, ∠ **வமக** என்பனவற்றின் இருமசவெட்டிகள் **ந** விலே சந்திக்கின்றன. **ந** வின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

[31] கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடைய ஒரு கோடு **வய** வின் முனைப்புள்ளிகள், கொடுக்கப்பட்ட இரு செங்குத்துக்கோடுகள் **ஓக, ஓம** என்பவை வழியே செல்கின்றன. **வய** வினது நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டமாகும் என நிறுவுக.

32. **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள். கொடுக்கப்பட்ட வட்டம் **கமவ** இலே மாறும் ஒரு புள்ளி **வ** ஆகும். **கவ** என்பது **ய** விற்கு, **வய = வம** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **ய** வின் முழு ஒழுக்கினைக் காண்க.

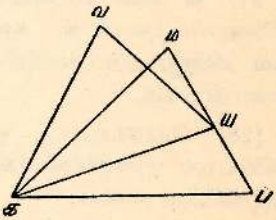
[33] Δ **கமப** வின் அடி **மப** வின் பருமனும் நிலையுங் கொடுக்கப்பட்டு ∠ **மகப** வின் பருமன் கொடுக்கப்படின் **மப** விற்கு வெளியாக வரைந்துள்ள வெளி வட்டத்தின் மையம் $\mathbf{ய}_1$ இன் முழு ஒழுக்கினைக் காண்க.

34. எண் 33 இல் உள்ள தரவுகளைக்கொண்டு **கப** விற்கு வெளியே வரைந்துள்ள வெளிவட்டத்தின் மையம் $\mathbf{ய}_2$ இன் முழு ஒழுக்கினைக் காண்க. (∠ $\mathbf{மய}_2\mathbf{ப} = \frac{1}{2}$ ∠ **மகப**.)

35. கொடுக்கப்பட்ட இரு வட்டங்கள் **க, ம** க்களிலே வெட்டுகின்றன. **வ** என்பது அவ்வட்டங்கள் ஒன்றிலேயுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி; தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **வக, வம** என்பன மற்றை வட்டத்தை மீண்டும் **ய, ந** க்களில் வெட்டுகின்றன. தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கந, மய** என்பன **ச** விலே சந்திக்கின்றன எனின் **ச** வின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

[36] கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்திலே **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள். அவ்வட்டத்திலே கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடைய மாறும் ஒரு நாண் **வய** ஆகும். தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **கவ, மய** என்பன **ந** விலே சந்திக்கின்றன. **ந** வின் முழு ஒழுக்கினைக்காண்க.

*37. உரு 732 இல் **கமப** கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். ∠ **வகய** = ∠ **மகப** ஆக ∠ **வயக** = ∠ **மபக** எனின் **வ** வின் ஒழுக்கினைக் காண்க. (**வம** வை இணைக்க.)



உருவம் 732

*38. நிலையான கோடுகள் **கம, கப** என்பவற்றிலே **வ, ய** என்பன மாறும் புள்ளிகள். (**கம, கப** என்பன **மக, பக** என்ற கருத்தில் நீட்டப்பட்டவையல்ல); **வ, ய** என்பவற்றில் முறையே **கம, கப** க்களுக்குள்ள செங்குத்துக்கள் **ந** விலே சந்திக்கின்றன. **வய** என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நீளத்தையுடையதெனின் **ந** வினது ஒழுக்கு **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் பகுதியாகும் என நிறுவுக. இவ் வட்டத்தின் எப்பகுதி ஒழுக்கினுக்குரியது எனக் கூறுக.

*39. **சமப** என்பது **கம** = **கப** ஆகுமாறுள்ள, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். **வ** என்பது ∠ **கவம** = ∠ **கவப** ஆகுமாறுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி. **வ** வினது ஒழுக்கானது ஒரு முழு நேர்கோடு, இரண்டாவதொரு நேர்கோட்டின் பகுதி, வட்டம் **கமப** வின் ஒருபகுதி ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ளதென நிறுவுக. திட்டமான ஒழுக்கினைக் கூறுக.

*40. **வய** என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தின் கொடுக்கப்பட்ட நீளமுள்ள ஒரு மாறும் நாணாகும்; **க** என்பது வட்டத்திலே ஒரு நிலையான புள்ளியாகும். Δ **கவய** வின் செங்குத்துமையத்தின் ஒழுக்கு **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டமாகும் என நிறுவுக.

பலவினவமைப்புக்கள் (மீட்டல்)

பயிற்சி 74

1. ஒரு நாணயத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு வட்டத்தைக் கீறி மையத்தை அமைக்க.

[2] 3 ச.மீ. நீளமும் ஒரு கோடு **கம** வை வரைக. **க, ம** க்களுக் கூடாகச் செல்லக்கூடிய 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் அமைக்க.

3. 4 ச.மீ., 5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்களை அவற்றின் பொது நாண் 6 ச.மீ. அளவினதாயிருக்கக்கூடியதாக அமைக்க. அவற்றின் மையங்களுக்கிடையில் உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

4. $\triangle$ **கமப** வை **கம = கப** = 5 ச.மீ., $\angle$ **மகப** = 36° ஆகுமாறு அமைக்க. **கப** விலே ஒரு புள்ளி **த** வை **மத = மப** ஆகுமாறு அமைக்க. வட்டம் **கமத** வை அமைத்து அதன் ஆரையை அளக்க. அது **மப** வைத் தொடுகிறதா ?

5. ஒரு கோடு **பத** வும் இரு புள்ளிகள் **க, ம** க்களுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **க, ம** க்களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவுந் தன் மையத்தை **பத** விலே கொள்ளக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் அமைக்க.

[6] இரு கோடுகள் **கயம, பயத** என்பவற்றை $\angle$ **கயப** = 80°, **கய** = 3 ச.மீ., **யம** = 4 ச.மீ., **பய** = 5 ச.மீ., **யத** = 2·4 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. **க, ம, ப** க்களுக்கூடாகச் செல்லும் வண்ணம் ஒரு வட்டம் அமைக்க. அது **த** விற் கூடாகச் செல்கின்றதா ?

7. ஒரு வட்டமும் அதனுள் இரு புள்ளிகள் **க, ம** க்களுங் கொடுக்கப்பட்டால் அவ்வட்டத்திலே தன் மையத்தை உடையதாய் **க, ம** க்களுக் கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் வரைக.

8. 4 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 6 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி எடுக்க. இப்புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரைந்து அவற்றை அளக்க.

[9] 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து 75° கோணங்கொள்ளும் இரு தொடுகோடுகள் வரைக.

10. 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. தன்னொரு கோணம் 110° குச் சமமாயமைய அவ்வட்டத்தைச் சுற்றியமையும் ஓரிணைகரம் அமைக்க.

11. 1·5 அங். ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து 2·5 அங்குல நீளமுள்ள ஒரு நாண் அமைக்க. மையத்திலிருந்து 1 அங். தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **க** வை எடுக்க. **க** விற்கூடாகச் செல்லும் 2·5 அங். நீளமுள்ள ஒரு நாண் அமைக்க.

12. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்திலே **க, ம, ப** என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். **ப** விலே உள்ள தொடுகோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகவும் **கம** விற்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ள ஒரு நாணை வரைக.

[13] 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து மையத்திலிருந்து 5 ச.மீ. தூரத்தில் ஒரு புள்ளி எடுக்க. நீட்டப்பட்டபொழுது இப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லக் கூடியதாக 4 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நாண் வரைக.

14. 5 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** வரைந்து **கம** வை விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டம் வரைக. நீட்டப்பட்ட **கம** விலே புள்ளியொன்றை அதிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடு 3 ச.மீ. நீளமுள்ளதாகுமாறமைக்க.

[15] **ய** மையமாக 4 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. **ய** விலிருந்து 6 ச.மீ. தூரத்தில் ஒரு புள்ளி **க** எடுக்க. **கய** விற்குச் செங்குத்தாக **கம** வைக் கீறுக. **கம** விலே ஒரு புள்ளி **வ** வை, **வ** விலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடு 5·5 ச.மீ. ஆகுமாறமைக்க. **கவ** வை அளக்க.

[16] ஒரு நேர்கோடும் ஒரு வட்டமுங் கொடுக்கப்படின் அக்கோட்டிலே ஒரு புள்ளியை அதிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகள் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணத்திற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைக் கொள்ளுமாறு அமைக்க. இது எப்பொழுது இயலாது ?

17. சமாந்தரமான இரு கோடுகள் **கம, பத** என்பனவும் இக்கோடுகளின் இடையே இல்லாத இரு புள்ளிகள் **ந, வ** க்களுங் கொடுக்கப்பெறின் **கம, பத** க்களை **ச, ய** க்களில் வெட்டி **நச = நய** ஆக்கும் ஒரு கோடு **வசய** வை அமைக்க.

18. 3 ச.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. தன்னுடைய பக்கங்களுள் ஒன்று 7 ச.மீ. நீளமுள்ளதாயமைய இவ்வட்டத்தைச் சுற்றியமையும் ஓரிணைகரம் அமைக்க.

19. தம் மையங்கள் 6·5 ச.மீ. தூரங்கொண்டிருக்குமாறு 2 ச.மீ., 3 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. அவற்றினுடைய நான்கு பொதுத் தொடுகோடுகளையும் வரைக.

[20] வெளிப்புறமாக ஒன்றையொன்று தொடும் 2·5 ச.மீ., 3·5 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. அவற்றின் புறப்பொதுத் தொடுகோடுகளை வரைக.

[21] தம் மையங்கள் 6 ச.மீ. தூரங்கொண்டிருக்குமாறு 2 ச.மீ., 3 ச.மீ. ஆரைகள் கொண்ட இரு வட்டங்கள் வரைக. நீட்டப்பட்டபொழுது சிறிய வட்டத்தைத் தொடும் 4 ச.மீ. நீளமுள்ள பெரியவட்டத்து நாண் ஒன்றை வரைக.

22. யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தையும் அதிலே இரு புள்ளிகள் **க, ம** க்களையும் வட்டத்திற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி **ப** வையும் வரைக. வட்டத்திலே ஒரு புள்ளி **வ** வை, ∠**கவம** வை **வப** இரு சமக்கூறிடு மாறமைக்க.

23. கொடுக்கப்பட்ட இருகோடுகள் **மப, தந** என்பவற்றிற்கிடையே ஒரு புள்ளி **க** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **மப, தந** என்பவற்றிலே முறையே புள்ளிகள் **வ, ய** என்பவற்றை △**கவய** சமபக்கமாயிருக்குமாறு அமைக்க. [வட்டம் **கவய, மப** வை மீண்டும் **ச** விலே வெட்டினால் **மப** வுடன் **சக, சய** என்பன ஆக்குங் கோணங்களைப்பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?]

*24. **க, ம** க்களிலே ஒன்றையொன்று வெட்டும், இரு சமமற்ற வட்டங்கள் வரைக. இயலும் பொழுது **க** விற்கூடாக ஒரு கோட்டை, வட்டங்களை **வ, ய** க்களிலே வெட்டி **வய** என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நீளத்தை உடையதாயமைக்கும் வண்ணம் வரைக.

*25. 3 ச. மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. பரிதியிலே புள்ளிகள் **க, ம, ப** க்களை **மப** = 5 ச.மீ., **மக** + **கப** = 8·1 ச. மீ. ஆகுமாறு அமைக்க. **மக, கப** ஆகியவற்றை அளக்க. (**மக** என்பது **வ** விற்கு, **கவ** = **கப** ஆகுமாறு நீட்டப்பெறின் ∠**மவப** = $\frac{1}{2}$ ∠**மகப**.)

26. ஒரு முக்கோணம் **கமப** இன் சுற்றளவு, அதன் ∠**மகப**, அதன் உயரம் **கத** என்பன கொடுக்கப்பெறின் அம்முக்கோணம் **கமப** வை அமைக்க. (பக்கம் 463 இலுள்ள எண் 2 ஐப் பார்க்க.)

27. உமது தாளுக்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் இரு கோடுகள் வரைக. அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் இருசம வெட்டினை வரைக.

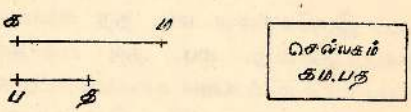
28. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணத்தின் சுற்றுருவமாக ஒரு சதுரத்தை வரைக.

*29. யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தை வரைந்து அதில் இரு புள்ளிகள் **க, ம** எனபவற்றை எடுக்க. வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி **வ** வை, நாண் **வக** நாண் **வம** விற்கு இருமடங்காகுமாறு அமைக்க.

செவ்வகங்களின் பரப்புக்கள்

செவ்வகங்களின் பரப்புக்கள் பற்றிய பல தேற்றங்களை அட்சரகணித, திரிகோணகணித முறைகளைப் பயன்படுத்தி மிக்க எளிதாக நிறுவலாம். மறுதலையாகச் சில அட்சரகணித முற்றொருமைகளைச் செவ்வகங்களின் பரப்புக்களுடனே தொடர்புபடுத்திக் கேத்திரகணித முறையால் விளக்கிக்காட்டலாம்.

வரைவிலக்கணங்கள். கம, பத என்பன கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்கோடுகளின் **கம, பத** என்பவற்றிற்கு முறையே சமமான ஈரடுத்துள்ள பக்கங்களை உடைய யாதாயினும் ஒரு செவ்வகமானது **கம, பத க்களாற் கொள்ளப்பட்ட செவ்வகம்** எனப்படும்.



உருவம் 733

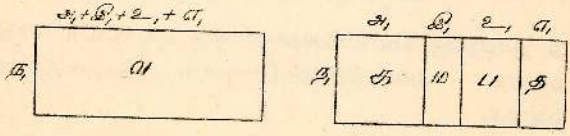
கம வாலும் **பத** வாலும் கொள்ளப்பட்ட ஒரு **செவ்வகம் கம, பத** அல்லது **கம . பத** எனப்படும்; ஏனெனில் செவ்வகத்தின் பரப்பு ஈரடுத்துள்ள பக்கங்களினுடைய அளவுகளின் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படுவதால் என்க.

பரப்பளவிற் சமமாயின்—அதாவது **கம . பத = வய . நச** ஆயின்—**கம** வாலும் **பத** வாலுங் கொள்ளப்பட்ட செவ்வகமானது **வய,** வாலும் **நச** வாலுங் கொள்ளப்பட்ட செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும்.

அட்சரகணித முற்றொருமைகளின் கேத்திரகணித எடுத்துக்காட்டுக்கள். உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்.

1. $ந,(அ, + இ, + உ, + எ,) = ந,அ, + ந,இ, + ந,உ, + ந,எ$

என்னும் முற்றொருமையை விளக்கிக் காட்டுக.

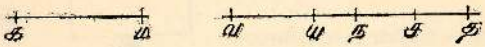


உருவம் 734

உரு 734 இற் காட்டப்பட்ட செவ்வகங்களை வரைக.
செவ்வகம் **வ** வின் பரப்பு என்ன ?
செவ்வகங்கள் **க, ம, ப, த** என்பவற்றினுடைய பரப்புக்கள் என்ன ?

இதோடொத்த கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:—

ஒன்று பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டதும் மற்றையது பிரிக்கப்படாததுமான இரு நேர்கோடுகள் கொடுக்கப்படின் அவ்விருநேர்கோடுகளாலுங் கொள்ளப்பட்ட செவ்வகம் பிரிக்கப்படாத கோட்டினாலும் பிரிக்கப்பட்ட கோட்டின் ஒவ்வொரு பகுதியாலுங் கொள்ளப்பட்ட செவ்வகங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.



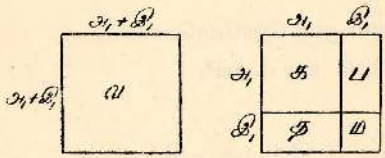
உருவம் 735

உரு 735 இல் **கம** வும் **வயநசத** வும் நேர்கோடுகளெனின் **கம . வத = கம . வய + கம . யந + கம . நச + கம . சத.**

2. $(\text{அ}_1 + \text{இ}_1)^2 = \text{அ}_1^2 + 2\text{அ}_1\text{இ}_1 + \text{இ}_1^2$

என்னும் முற்றொருமையை விளக்கிக்காட்டுக.

உரு 736 இலுள்ள சதுரங்களை வரைந்து அவற்றுள் ஒன்றை அங்கு காட்டியவாறு செவ்வகப் பகுதிகளாகப் பிரிக்க.



உருவம் 736

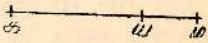
வ வினது பரப்பு என்ன ?

க, ம, ப, த ஆகியவற்றின் பரப்பு என்ன ?

இதோடொத்த கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:—

ஒரு நேர்கோடு எவையேனும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படின் அம்முழுக் கோட்டிலுள்ள சதுரமானது அவ்விரு பகுதிகளிலும் உள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகையுடன் அவ்விரு பகுதிகளுங் கொண்ட செவ்வகத்தின் இருமடங்கு சேர்ந்ததற்குச் சமமாகும்.

உரு 737 இல் **கயம** ஒரு நேர்கோடெனின்,



கம² = கய² + யம² + 2கய . யம.

உருவம் 737

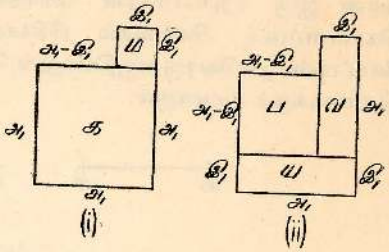
3. $(அ_1 - இ_1)^2 = அ_1^2 - 2அ_1இ_1 + இ_1^2$,

என்ற முற்றொருமையை விளக்கிக்காட்டுக.

உரு 738 (i) இற் காட்டியுள்ள சதுரங்கள் **க, ம** ஆகியவற்றை வரைக.

ஏன் உரு 738 (i), (ii) ஆகியவற்றி லுள்ள பரப்புக்கள் சமம் என விளக்குக.

ப, வ, ய ஆகியவற்றின் பரப்புக்கள் என்ன ?



உருவம் 738

எனவே,

$$அ_1^2 + இ_1^2 = (அ_1 - இ_1)^2 + 2அ_1இ_1.$$

இதோடொத்த கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :-

ஒரு நேர்கோடு எவையேனும் இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படின் அம் முழுக் கோட்டிலும் அப்பகுதிகளில் யாதாயினும் ஒன்றிலும் உள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகையானது அம்முழுக்கோடும் அப்பகுதியுங் கொண்ட செவ்வகத்தின் இருமடங்குடன் மற்றைப் பகுதியிலுள்ள சதுர முஞ் சேர்ந்ததற்குச் சமமாகும்.

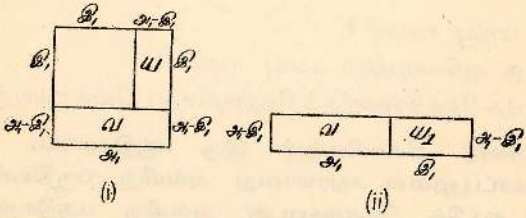
உரு 737 இல் **கயம** ஒரு நேர்கோடெனின்,

கம^2 + யம^2 = 2கம . யம + கய^2.

உருவம் 737

4. $அ_1^2 - இ_1^2 = (அ_1 + இ_1)\ (அ_1 - இ_1)$,

என்ற முற்றொருமையை விளக்கிக் காட்டுக.



உருவம் 739

உரு 739 (i) இல் காட்டிய அ, அலகுகள் பக்கங்கொண்ட சதுரத்தை வரைந்து அதை இ, அலகுகள் பக்கங்கொண்ட சதுரமாகவும் செவ்வகங்கள் **வ, ய** க்கள் ஆகவும் பிரிக்க.

உரு 739 (ii) இலுள்ள செவ்வகம் $ய_1$ உரு 739 (i) இலுள்ள செவ்வகம் ய விற்குச் சர்வசமன்.

உரு 739 (i) இல் **வ + ய** என்பது $(அ,^2 - இ,^2)$ பரப்பலகுகளைக் கொண்டுள்ளது.

உரு 739 (ii) இலுள்ள **வ + $ய_1$** என்பதின் பரப்பு என்ன? இதோடொத்த கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

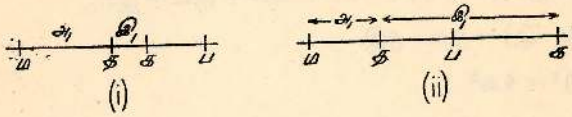
இரு நேர்கோடுகளிலுள்ள சதுரங்களின் வித்தியாசமானது அக்கோடுகளின் கூட்டுத்தொகையும் வித்தியாசமுங் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும்.

கம, **பத** என்பன இரு நேர்கோடுகளாக அதில் **கம** பெரிதெனின்,

$$கம^2 - பத^2 = (கம + பத)\ (கம - பத).$$

கேத்திரகணிதத்தில் அட்சரகணிதத்தின் பிரயோகம்

உதாரணம் 1. ஒரு நேர்கோடு **மப** வானது **த** விலே இருசமக்கூறிடப்பட **மப** விலோ நீட்டப்பட்ட **மப** விலோ **க** யாதயினும் ஒரு புள்ளியாயின், அப்பொழுது, $கம^2 + கப^2 = 2கத^2 + 2தம^2$.



உருவம் 740

$மத = அ,$ அங்., $தக = இ,$ அங். ஆகுக.

$\therefore தப = மத = அ,$ அங்.

இன்னும் $மக = அ, + இ,$ அங்.

உரு 740 (i) இல் $கப = தப - தக = (அ, - இ,)$ அங்.

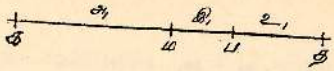
உரு 740 (ii) இல் $கப = தக - தப = (இ, - அ,)$ அங்.

எனவே ஒவ்வொரு வகையிலும்,

$$கம^2 + கப^2 = (அ,^2 + இ,^2 + 2அ,இ,) + (அ,^2 + இ,^2 - 2அ,இ,) \text{ சது. அங்.}$$
$$= (2அ,^2 + 2இ,^2) \text{ சது. அங்.}$$
$$= 2தம^2 + 2கத^2.$$

குறிப்பு. உதாரணம் 1 ஆனது தேற்றம் 66 இன் ஒரு சிறப்புவகையாகும்.

உதாரணம் 2. க, ம, ப, த என்பன ஒரு நேர்கோட்டில் ஒழுங்கையுள்ள 4 புள்ளிகளெனின், கப . மத = கம . பத + கத . மப என நிறுவுக.



உருவம் 741

கம = அ, அங்., மப = இ, அங்., பத = உ, அங். ஆகுக.

அப்பொழுது கப . மத = (அ, + இ,) (இ, + உ,) சது. அங்.

= அ,இ, + அ,உ, + இ², + இ,உ, சது. அங்.

இன்னும் கம . பத + கத . மப = அ,உ, + (அ, + இ, + உ,) இ, சது. அங்.

= அ,உ, + அ,இ, + இ², + இ,உ, சது. அங்.

∴ கப.மத = கம.பத + கத.மப.

பயிற்சி 75

பின்வரும் முற்றொருமைகளை ஒருருவால் விளக்கிக் காட்டுக.

1. (அ + இ) (உ + எ) = அஉ + அஎ + இஉ + இஎ.

[2] ஒ(அ − இ) = ஒஅ − ஒஇ.

3. $(2அ)^2 = 4அ^2$.

[4] $(அ + இ + உ)^2 = அ^2 + இ^2 + உ^2 + 2இஉ + 2உஅ + 2அஇ$.

5. ஒரு நேர்கோடு கம வானது ய வில் இருசமக்கூறிடப்பட்டுள்ளது. கய வில் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ. வய = ½ (வம − கவ) என நிறுவுக.

[6] ஒரு நேர்கோடு கம வானது ய விலே இரு சமக்கூறிடப்பட்டு வ விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. யவ = ½(கவ + மவ) என நிறுவுக.

[7] கமபத ஒரு நேர்கோடு; அ, இ என்பன சம, பத என்பவற்றி னுடைய நடுப் புள்ளிகள். கத + மப = 2 அஇ என நிறுவுக.

8. கத என்பது ம, ப என்னும் இடங்களில் முச்சமக்கூறிடப்பட்டுள்ளது. $கத^2 = கம^2 + 2\ மத^2$ என நிறுவுக.

9. கம என்பது ய வில் இருசமக்கூறிடப்பட்டு வ விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. கய . கவ = யம . மவ + $2கய^2$ என நிறுவுக.

10. கம என்பது ப வில் இருசமக்கூறிடப்பட்டு ய விற்கு நீட்டப்பட்டுள் வது. $கய^2 = 4கப . பய + மய^2$ என நிறுவுக.

11. **கமபத** ஒரு நேர்கோடு. **கம = பத** எனின் **கத^2 + மப^2 = 2 கம^2 + 2மத^2** என நிறுவுக.

12. **கம** விலே **அ** என்னும் புள்ளி **கம . மஅ = கஅ^2** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **கம^2 + மஅ^2 = 3 கஅ^2** என நிறுவுக.

13. **கம** விலே **ப** என்னும் புள்ளி **கம . மப = கப^2** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **கப . மப = கப^2 − மப^2** என நிறுவுக.

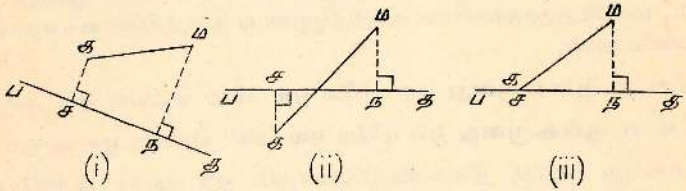
14. **கம** விலே **ந** என்னும் புள்ளி **கம. மந = கந^2** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **கந** வினது நடுப்புள்ளி **ய ; யம^2 = 5யக^2** என நிறுவுக.

[15] **கம** என்பது **ய** விலே இருசமக்கூறிடப்பட்டு **வ** விற்கு, **யம . யவ = மவ^2** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **வக^2 = 5வம^2** என நிறுவுக.

16. **கம** என்பது **வ** விற்கு, **வக^2 = 4 வம^2 + கம^2** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **2வக = 5வம** என நிறுவுக.

எறியம்

வரைவிலக்கணம். கம, பத என்பன எவையேனும் இரு நேர்கோடுகளாக **கச, மந** என்பன **க, ம** க்களிலிருந்து தேவையெனில் நீட்டப்பெற்ற **பத** விற்குச் செங்குத்துக்களாகின் அப்பொழுது **சந** என்பது **பத** விலே **கம** வின் **எறியம்** எனப்படும்.



உருவம் 742

உரு 742 (iii) இற் காட்டப்பட்ட சிறப்புவகையில் **க** வானது **ச** வுடன் பொருந்துகின்றது. அதனால் **பத** விலே **கம** வின் எறியம் **சந** வாகும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. பக்கம் 315 இலுள்ள செங்கோண முக்கோணம் **கமப** வின் பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களைக் குறிக்கும். உரு 530 இல் எக்கோடுகள் பின் வரும் எறியங்களைக் குறிக்கின்றன ?

(i) **யவ** விலே **மக** வின் எறியம்,
(ii) **மப** விலே **கப** வின் எறியம்,
(iii) **மப** விலே **க** வை **ய** வுடன் இணைக்குங் கோட்டின் எறியம்.

2. பக்கம் 315 இலுள்ள கூர்ங்கோணமுக்கோணம் **கமப** வின் பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களைக் குறிக்கும் உரு 529 இல் எக்கோடுகள் பின்வரும் எறியங்களைக் குறிக்கும்?

(i) **கம** விலே **மப** வின் எறியம்.

(ii) **ப'க'** இலே **கம** வின் எறியம்.

(iii) **நச** விலே **கப** வின் எறியம்.

3. பக்கம் 315 இலுள்ள உருவம் 529 இல் எக்கோடுகள் பின்வரும் எறியங்களைக் குறிக்கின்றன?

(i) **உப** விலே **கப** வின் எறியம்.

(ii) **கப** விலே **ம** வை **க'** உடன் இணைக்குங் கோட்டின் எறியம்.

(iii) **பத** விலே **ப** வை **ந** உடன் இணைக்குங் கோட்டின் எறியம்.

ஆள்கூறுகள்

எறியங்களின் டயனிற்கு ஒரு சிறந்த உதாரணம் யாதெனில் ஒரு தளத்திலே ஆள்கூறுகளைக்கொண்டு ஒரு புள்ளியினது நிலையைக் குறித்தலாகும்.

ஓந, ஓய என்பன ஒன்றுடன் ஒன்று $+90°$ கோணம் ஆக்குந் திசைகொண்ட மாட்டேற்றச்சுக்களாக அவற்றினுடைய தளத்திலே **வ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாயின்,

வ வின் **ந ஆள்கூறுனது ஓந** விலே **ஓவ** வின் எறியம் **ஓம** ஆகும்,

வ வின் **ய ஆள்கூறுனது ஓய விலே ஓவ** வின் எறியம் **ஓச** ஆகும்.

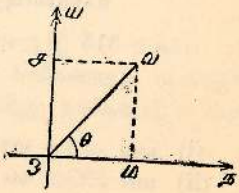
ஓவ என்பது ஓரலகு நீளமுடையதெனவும் **ஓந** வுடன் கூர்ங்கோணம் θ வை ஆக்குவதாகவும் பாவித்துக்கொள்க.

அப்பொழுது 95 ஆம் பக்கத்திலுள்ள ஒரு கூர்ங்கோணத்தின் சைன், கோசைன் ஆகியவற்றின் வரைவிலக்கணங்களைக்கொண்டு,

ஓம $=$ கோசை θ, **ஓச** $=$ சைன் θ.

$\therefore$ **வ** வே அந்தப் புள்ளியாகும். (கோசை θ, சைன் θ.)

அடுத்து **ஓவ** ஓரலகு நீளமுடையதாகவும் அது **ஓந** வுடன் யாதாயினும் பருமனுடைய ஒரு கோணம் θ ஐ அமைப்பதாகவும் பாவித்துக்கொண்டால் நாம் பின்வரும் வரைவிலக்கணங்களைக் கூறலாம்:



உருவம் 743

வ வின் ந ஆள்கூறு கோசை θ ஆகும்.

வ வின் ய ஆள்கூறு சைன் θ ஆகும்.

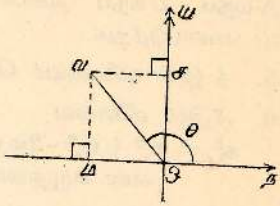
உரு 744 இல் θ விரிகோணமாகும்; எனவே இங்கு வ வின் ந ஆள் கூறு எதிராகும்; ய ஆள்கூறு நேராகும்.

எனவே, $\angle$ மஓவ $= 180° - \theta$,

கோசை $\theta = -$ கோசை $(180° - \theta)$,

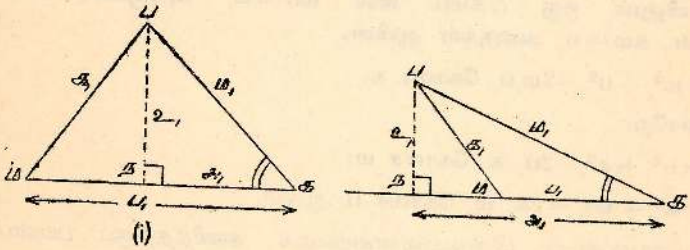
சைன் $\theta =$ சைன் $(180° - \theta)$.

பக்கங்கள் 287, 316 ஆகியவற்றில் உள்ள கூற்றுக்களுடன் இவ்விளைவுகள் ஒத்திருக்கின்றன. பின்வளைகோணங்களின் சைன், கோசைன்களை இவ்வாறே ஆயலாம்; ஆனால் இங்கு அவை வேண்டியவல்ல.



உருவம் 744

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்



உருவம் 745

1. உரு 745 இல் $\angle$ மகப கூர்ங்கோணமாகும். அதிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு

$$\text{க}_{,}^{2} = \text{ம}_{,}^{2} + \text{ப}_{,}^{2} - 2\,\text{ப}_{,}\,\text{அ}_{,} \text{ என நிறுவுக.}$$

உரு 745 (i) இல் மந $=$ ப$_{,}$ $-$ அ$_{,}$; உரு 745 (ii) இல் மந $=$ அ$_{,}$ $-$ ப$_{,}$ ஒவ்வொரு வகையிலும் $\triangle$ மநப, $\triangle$ கநப ஆகியவற்றிற்கு ஞபதகரசைப் பிரயோகிக்க.

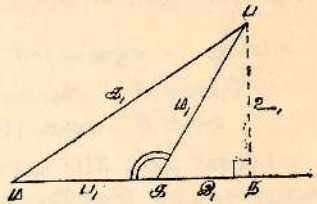
2. எண் 1 இன் விளைவைச் சொற்களில் எடுத்துக் கூற உரு 745 இல் கம விலே கப வின் எறியம் கந என்னும் உண்மையைப் பயன்படுத்துக.

3. எண் 1 இன் விளைவை

$$\text{க}_{,}^{2} = \text{ம}_{,}^{2} + \text{ப}_{,}^{2} - 2\text{ம}_{,}\,\text{ப}_{,}\,\text{கோசை க என எழுதலாம்}$$

என நிறுவுக.

4. உரு 746 இல் ∠மகப ஒரு விரிகோணம். அதிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு $க_1^2 = ம_1^2 + ப_1^2 + 2ப_1இ_1$ என நிறுவுக.



உருவம் 746

△மநப, △கநப ஆகியவற்றிற்கு பைதகரசைப் பயன்படுத்துக.

5. 4 இன் விளைவைச் சொற்களிற் கூறுக.

6. 4 இன் விளைவை

$க^2_1 = ம_1^2 + ப_1^2 - 2ம_1ப_1$ கோசை க

என எழுதலாம் என நிறுவுக.

∠பகந $= 180° -$ க ஆனமையால்

$இ_1 = ம_1$ கோசை $(180° = க) = -ம_1$ கோசை க.

கோசைன் வாய்பாடு. 3, 6 ஆகிய உதாரணங்களிலே நிறுவிய விளைவுகளைப் பின்வரும் ஒரு சூற்றாக இணைக்கலாம் :

யாதாயினும் ஒரு △கமப வில் மப = க, அலகுகள், பக = ம, அலகுகள், கம = ப, அலகுகள் ஆயின்,

$க^2_1 = ம^2_1 + ப^2_1 - 2ம_1ப_1$ கோசை க.

இவ்வாறே,

$ம^2_1 = ப^2_1 + க^2_1 - 2ப_1 க_1$ கோசை ம,

$ப^2_1 = க^2_1 + ம^2_1 = 2க_1 ம_1$ கோசை ப ஆகும்.

இவ்வாய்பாட்டைப் பின்வருவனவற்றைக் கணித்தற்குப் பயன்படுத்தலாம் :

(i) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களினுடைய நீளங்களும் அமைகோணத்தின் பருமனுங் கொடுக்கப்படின் 3 ஆவது பக்கத்தினுடைய நீளம்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களினுடைய நீளங்களுங் கொடுக்கப்படின் அதனுடைய யாதாயினும் ஒரு கோணம்.

7–10 வரை உள்ள எண்களுக்குக் கோசையின் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

7. (i) $ம_1 = 2$, $ப_1 = 3$, $க = 50°$; க, ஐக் காண்க.

(ii) $ம_1 = 2$, $ப_1 = 3$, $க = 130°$; க, ஐக் காண்க.

8. (i) $க_1 = 5$, $ம_1 = 7$, $ப = 35°$; ப, ஐக் காண்க.

(ii) $க_1 = 5$, $ம_1 = 7$, $ப = 145°$; ப, ஐக் காண்க.

9. $க_1 = 6$, $ம_1 = 5$, $ப_1 = 4$; க வையும் ப வையுங் காண்க.

10. $க_{,} = 7$, $ம_{,} = 5$, $ப_{,} = 4$; க வையுங் ப வையுங் காண்க.

11. ஒரு முக்கோணம் கமப வின் பக்கம் மப வினது நடுப்புள்ளி த எனின் $கம^2 + கப^2 = 2கத^2 + 2மத^2$ என நிறுவுக.

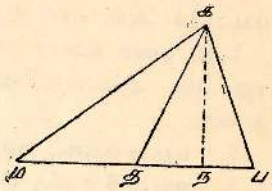
மப விற்குச் செங்குத்தாக கந வைக் கீறுக.

பின்வருவனவற்றை முடிவாக்குக :—

∠ கதம விரிகோணமாயுள்ள Δ கதம விலிருந்து $கம^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$,

∠ கதம கூர்ங்கோணமாயுள்ள Δ கதப விலிருந்து $கப^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$,

$\therefore$ $கம^2 + கப^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$



உருவம் 747

12. Δ கதம, Δ கதப ஆகியவற்றிற்குக் கோசையின் வாய்பாட்டினைப் பிரயோகித்து எண் 11 இல் உள்ள கூற்றை நிறுவுக.

∠ கதப $= \theta$ எனக் கொள்க;

$\therefore$ ∠ கதம $= 180° - \theta$.

எடுத்துக்காட்டு உதாரணம். Δ கமப வில் மப $= 11$ அங்., பக $= 9$ அங்., கம $= 6$ அங். எனின் ∠ மகப கூர்ங்கோணமோ விரிகோணமோ எனக் காண்க.

$மப^2 = 11^2$ சது. அங். $= 121$ சது. அங்.

$கம^2 + கப^2 = (36 + 81)$ சது. அங். $= 117$ சது. அங்.

$\therefore$ $மப^2 > கம^2 + கப^2$,

$\therefore$ ∠ மகப விரிகோணமாகும்.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 76

(அண்ணளவாக, 3 எண்ணளவுக்கு விடைகள் கொடுக்க.)

1–4 வரை உள்ள எண்களிற் கொடுக்கப்பட்ட நீளங்கொண்ட பக்கங்களையுடைய முக்கோணங்கள் விரிகோண முக்கோணங்களோ கூர்ங்கோண முக்கோணங்களோ எனக் காண்க.

1. 4 அங்., 5 அங்., 7 அங்.

2. 8 ச.மீ., 9 ச.மீ., 12 ச.மீ.

[3] 7 அங்., 8 அங்., 11 அங்.

[4] 15 ச.மீ., 16 ச.மீ., 22 ச.மீ.

5. கமப ஒரு கூர்ங்கோணமுக்கோணம். அதில் கம = 12 அங்., கப = 15 அங்., மப வினது நீளம் ஒரு முழு எண் அங்குலங்களாகும். மப வினது மிகக்கூடிய நீளத்தையும், மிகக் குறைந்த நீளத்தையுங் காண்க.

[6] Δ கமப வில் கம = 9 அங்., கப = 11 அங்., ∠ மகப > 90° ; மப > 14 அங். என நிறுவுக.

7-10 வரை உள்ள எண்களில் பந என்பது Δ கமப வினது ஒருயரம். கந, பந ஆகியவற்றினுடைய நீளங்களையும் Δ கமப வின் பரப்பையுங் காண்க.

7. மப = 8 அங்., பக = 9 அங்., கம = 10 அங்.

8. மப = 6 ச.மீ., பக = 3 ச.மீ., கம = 4 ச.மீ.

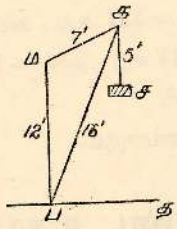
[9] மப = 7 அங்., பக = 13 அங்., கம = 10 அங்.

[10] மப = 11 ச.மீ., பக = 9 ச.மீ., கம = 10 ச.மீ.

[11] கம = 6 ச.மீ., மப = 5 ச.மீ., பக = 7 ச.மீ. எனின் பம விலேயுள்ள கம வின் எறியத்தினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

12. கம = 13 அங்., மப = 24 அங்., பக = 19 அங். எனின் க விலிருந்து மப விற்குள்ள செங்குத்தினுடைய அடியானது மப வை முச்சமக்கூறிடும் ஒரு புள்ளியாகும் என நிறுவுக.

[13] கமபத ஒரிணைகரம் ; கம = 5 அங்., கத = 3 அங்., கம விலே கப வின் எறியம் 6 அங். ; கப வைக்காண்க.



உருவம் 748

14. உரு 748 ஒரு சுமை ச வைத் தாங்கிநிற்கும் கொக்கி ஒன்றைக் குறிக்கின்றது. மப நிலைக்குத்தானது. ப விற்கூடாகவுள்ள கிடைத்தளத்தினின்றும் ச உள்ள உயரத்தைக் காண்க.

15. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 9 ச.மீ., 7 ச.மீ., 14 ச.மீ. ஆகும் ; மையக்கோடுகளுள் மிகச் சிறியதினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

16. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 8 அங்., 9 அங்., 11 அங். ஆகும். மையக் கோடுகளுள் மிகச்சிறியவை இரண்டினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

[17] 6 ச.மீ., 8 ச.மீ., 9 ச.மீ. பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தினுடைய மையக் கோடுகளினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

18. $\triangle$ கமப வின் ஒரு மையக்கோடு கத. கம = 6 அங்., கப = 8 அங்., கத = 5 அங். எனின் மப வினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

[19] $\triangle$ கமப வில் கம = 4 ச.மீ., மப = 5 ச.மீ., பக = 8 ச.மீ.; மப என்பது த விற்கு, மப = பத ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. கத வினது நீளத்தைக் காண்க.

20. ஓரிணைகரத்தின் பக்கங்கள் 5 ச.மீ., 7 ச.மீ. ஆகும்; ஒரு மூலை விட்டம் 8 ச.மீ. ஆகும்; மற்றை மூலைவிட்டத்தினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

21. $\triangle$ கமப வில் மப = 24 ச.மீ., பக = 13 ச.மீ., கம = 17 ச.மீ.; மப என்பது இ, உ க்களில் முச்சமக்கூறிடப்பட்டுள்ளது. கஇ, கஉ ஆகிய வற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

22. $\triangle$ கமப வில் கப = 8 ச.மீ., மப = 6 ச.மீ., $\angle$ கபம = 120°; கம வினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

23. $\triangle$ கமப வில் கம = 8 ச.மீ., கப = 7 ச.மீ., மப = 3 ச.மீ.; $\angle$ கமப = 60° என நிறுவுக.

[24] $\triangle$ கமப வில் கம = 14 அங்., மப = 10 அங்., பக = 6 அங்.; $\angle$ கபம = 120° என நிறுவுக.

25. கமப வில் மப = (2அ + 4இ) அங்.,
பக = (4அ + இ) அங்.,
கம = (2அ + 3இ) அங்.,
மையக்கோடு கத வினுடைய நீளத்தை அ, இ க்களிற் காண்க.

*26. $\triangle$ கமப வின் ஒரு மையக்கோடு கத; த விலிருந்து கம விற்குள்ள செங்குத்து தந. கம = 12 அங்., கப = 8 அங்., கத = 6 அங். எனின் கந வினது நீளத்தைக் காண்க.

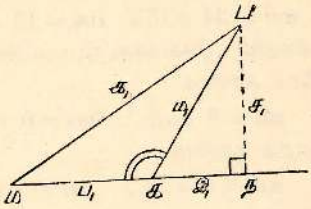
*27. $\triangle$ கமப வில் கம = கப = 3 ச.மீ., மப = 2 ச.மீ.; நீட்டப்பட்ட மப விலே த வானது கத = $6\sqrt{2}$ ச.மீ. ஆகுமாறு எடுக்கப்பட்டுள்ளது. $\angle$ மகத ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

*28. $\triangle$ கமப வில் கம^2 − கப^2 = 66 சது. அங்., மப = 6 அங். ஆகும். மப விலே கப வின் எறியத்தினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

வரலாற்றுக் குறிப்பு. பக்கங்களின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தின் மையக்கோடுகளினுடைய நீளங்களைக் கணித்தறிவதற்கு உதவியாயுள்ள தேற்றம் 66 ஆனது, பேகாவிலிருந்த அப்பலோனியசு (கி.மு. 247—205) என்பாருடைய பெயருடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவரைப் பண்டைநாள் மக்கள் "பெருங்கேத்திரகணிதர்" என அறிவர். பெரும்பாலும் நீள்வளையம், அதிபரவளைவு, பரவளைவு (பக்கம் 252 ஐப் பார்க்க) ஆகியவற்றினுடைய பண்புகளைப் பற்றிக் கூறிய இவருடைய நூல்களும் யூக்கிளிதருடைய நூல்களும் 19 ஆம் நூற்றாண்டுவரை கேத்திரகணிதத்திற் தலைசிறந்தனவாயிருந்தன.

தேற்றம் 64

ஒரு விரிகோணத்து முக்கோணத்தில் விரிகோணத்திற்கு எதிரான பக்கத்திலுள்ள சதுரம் அக்கோணத்தைக்கொண்டுள்ள பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகை சக அப்பக்கங்களுள் ஒன்றும் அதன்மேலுள்ள மற்றையதின் எறியமும் கொண்டுள்ள செவ்வகத்தின் இரு மடங்கு என்பதற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 749

தரவு. ∠ மகப விரிகோணமாயுள்ள ஒரு △ கமப. நீட்டப்பட்ட மக விற்குப் ப விலிருந்துள்ள செங்குத்து பந.

மேற்கோள். மப² = மக² + பக² + 2மக . கந.

நிறுவல். (விடையில் வரும் நீளங்களையும் உயரங்களையுங் கீறிட்ட எழுத்துக்களாற் குறிப்பிடுக.)

மப = க, அலகுகள்,

பக = ம, அலகுகள்,

கம = ப, அலகுகள்,

கந = இ, அலகுகள்,

பந = ச, அலகுகள் எனக்கொள்க.

∠ மநப ஒரு செங்கோணமாதலின்,

$க,^2 = (ப, + இ,)^2 + ச,^2$ பைதகரசு,

$\therefore க,^2 = ப,^2 + 2ப, இ, + இ,^2 + ச,^2.$

∠ கநப ஒரு செங்கோணமாதலின்,

$ம,^2 = இ,^2 + ச,^2$ பைதகரசு,

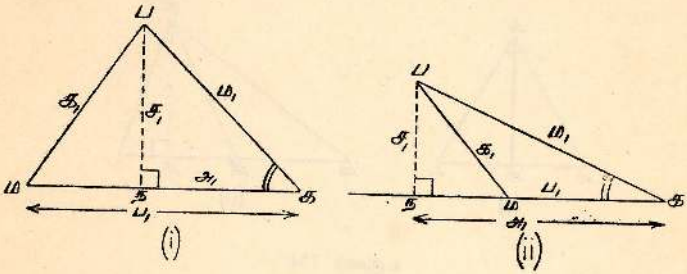
$\therefore க,^2 = ப,^2 + 2ப, இ, + ம,^2,$

இது, மப² = மக² + 2 மக . கந + பக² ஆகும்.

குறிப்பு. சில மாணவர் இவ்விளைவை ஞாபகத்திலிருத்த இடருறுகின்றனர். பக்கம் மப விற்கு எதிராயுள்ள உச்சி க வானது வலது பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு நீளத்தினதும் ஒரு முனையாகுமெனக் கொள்ளல் பயன்படும் ஒரு நினைவுக் குறிப்பாகும்.

தேற்றம் 65

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கூர்ங்கோணத்திற்கு எதிராயுள்ள பக்கத்திலுள்ள சதுரம் அதைக்கொண்டுள்ள பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகை சய அப்பக்கங்களுள் ஒன்றும் அதன் மேலுள்ள மற்றையதின் எறியமுங்கொண்டுள்ள செவ்வகத்தின் இருமடங்கு என்பதற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 750

தரவு. ∠ மகப கூர்ங்கோணமாயுள்ள ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; **கம** விற்கு அல்லது நீட்டபட்ட **கம** விற்கு **ப** விலிருந்து செங்குத்து **பந.**

மேற்கோள். **மப² = மக² + பக² − 2மக . கந.**

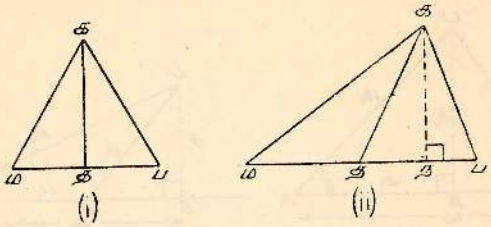
நிறுவல். (விடையில்வரும் நீளங்களையும் உயரத்தையும் கீறிட்ட எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுக.)

மப = க, அலகுகள்,
பக = ம, அலகுகள்,
கம = ப, அலகுகள்,
கந = அ, அலகுகள்,
பந = ச, அலகுகள்,
உரு 750 (i) இல் **மந** = ப, − அ, அலகுகள் ;
உரு 750 (ii) இல் **மந** = அ, − ப, அலகுகள்.
∠ **பநம** ஒரு செங்கோணமாதலின்,
உரு 750 (i) இல் $க,^2 = (ப, - அ,)^2 + ச,^2$ பைதகரசு,
உரு 750 (ii) இல் $க,^2 = (அ, - ப,)^2 + ச,^2$ பைதகரசு,
∴ ஒவ்வொரு வகையிலும் $க,^2 = ப,^2 - 2ப, . அ, + அ,^2 + ச,^2$.
∠ **பநக** ஒரு செங்கோணமாதலின்,
$ம,^2 = அ,^2 + ச,^2$ பைதகரசு,
∴ $க,^2 = ப,^2 - 2ப, . அ, + ம,^2$,
அது, **மப² = மக² − 2 மக . கந + பக²** ஆகும்.

குறிப்பு. 64 ஆவது தேற்றத்திற்கொண்டவாறே இங்கும் பக்கம் **மப** விற்கு எதிராயுள்ள உச்சி **க** யானது வலது பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு நீளங்களினதும் ஒரு மூலையாகுமெனக் கொள்ளல் பயன்படும் ஒரு நினைவுக் குறிப்பாகும்.

தேற்றம் 66 (அப்பலோனியசின்றேற்றம்)

யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தில் இரண்டு பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை மூன்றுவது பக்கத்தின் அரைப் பகுதியிலுள்ள சதுரத்தின் இருமடங்குடன் மூன்றுவது பக்கத்தை இருசமக்கூறிடும் மையக் கோட்டிலுள்ள சதுரத்தின் இருமடங்கு சேர்ந்ததற்குச் சமனாகும்.



உருவம் 751

தரவு. ஒரு Δ கமப. அதில் மப வினது நடுப்புள்ளி த.

மேற்கோள். $கம^2 + கப^2 = 2\,கத^2 + 2\,மத^2$.

நிறுவல். (i) கோணங்கள் கதம, கதப என்பன இரண்டும் செங்கோணங்கள் அல்லது,

(ii) ஒன்று விரிகோணம், மற்றையது கூர்ங்கோணம்.

(i) $\angle$ கதம வும் $\angle$ கதப வும் செங்கோணங்களாயின்

$கம^2 = கத^2 + மத^2$, $கப^2 = கத^2 + தப^2$ **பைதகரசு.**

ஆனால் $மத = தப$ **தரவு,**

$\therefore$ $மத^2 = தப^2$.

$\therefore$ கூட்டுவதால் $கம^2 + கப^2 = 2\,கத^2 + 2\,மத^2$.

(ii) $\angle$ கதம வை விரிகோணம் எனப் பாவித்துக்கொள்க. அப்பொழுது, $\angle$ கதப ஒரு கூர்ங்கோணமாகும்.

க விலிருந்து மப விற்குள்ள செங்குத்து கந எனக் கொள்க.

Δ கமத விலிருந்து, $\angle$ கதம விரிகோணமாதலின்,

$கம^2 = கத^2 + மத^2 + 2\,மத \cdot தந$.

Δ கதப இல் $\angle$ கதப கூர்ங்கோணமாதலின்,

$கப^2 = கத^2 + தப^2 - 2\,தப \cdot தந$.

தரவு,

ஆனால் $மத = தப$

$\therefore$ $மத^2 = தப^2$,

$மத \cdot தந = தப \cdot தந$.

$\therefore$ கூட்டுதலால் $கம^2 + கப^2 = 2\,கத^2 + 2\,மத^2$.

$\angle$ கதம கூர்ங்கோணமெனின் $\angle$ கதப விரிகோணமாகும்; அப்பொழுது நிறுவலானது முந்தியதைப்போன்றதாகவிருக்கும்; ஆனால் ம வும் ப வும் நிலைமாறியிருக்கும்.

பயிற்சி 77

1. கூர்ங்கோணமுக்கோணம் **கமப** வின் உயரங்கள் **மந, பவ** என்பன. **மந, பவ** என்பவற்றோடு இணையா, **மப²** விற்குரிய இரு கோவைகள் எழுதுக. **கவ.கம = கந.கப** என நிறுவுக.

[2] கூர்ங்கோணமுக்கோணம் **கமப** வின் உயரங்கள் **மந, பவ** என்பன **ச** வில் வெட்டினால் **மச.சந = பச.சவ** என நிறுவுக. (**மப²** இற்கு இரண்டு கோவைகளை எழுதுவதற்கு **Δ மசப** வைப் பயன்படுத்துக.)

3. **கமப** என்பது ஒரு சமபக்கமுக்கோணம்; **மப** என்பது **த** விற்கு **மப = பத** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **கத² = 3கம²** என நிறுவுக. (அப்பலோனியசைப் பயன்படுத்துக.)

[4] **Δ கமப** வில் **கம = கப**; **கம** என்பது **த** விற்கு **கம = மத** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **பத² = கம² + 2மப²** என நிறுவுக.

5. **கமபத** ஓரிணைகரம். **கப² + மத² = 2கம² + 2மப²** என நிறுவுக. (**மத** வை **கப, ச** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க.)

6. **கமபத** ஒரு செவ்வகம்; அத்தளத்திலோ வேறு தளத்திலோ உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ**. **வக² + வப² = வம² + வத²** என நிறுவுக. **மத** வை **கப** வானது **ச** வில் வெட்டுவதாகக் கொள்க; **வச** வை இணைக்க.)

7. **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள்; **வ** என்பது **வக² + வம²** மாறிலி ஆகுமாறு அமைந்தவொரு மாறும் புள்ளி. **வ** வினது ஒழுக்கினைக் காண்க. (**கம** வினது நடுப்புள்ளியை **வ** வுடன் இணைக்க.)

8. **Δ கமப** வினுடைய மையக் கோடுகள் **கஅ, மஇ** என்பன. **கஅ² − மஇ² = ¾ (கப² − மப²)** என நிறுவுக.

9. **Δ கமப** வில் **கம = கப**; **பத** ஒருயரம். **மப² = 2கம.மத** என நிறுவுக.

[10] **Δ கமப** வில் **∠ க = 90°**; **கப** என்பது **த** விற்கு **பத = மப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **மத² = 2மப.கத** என நிறுவுக.

[11] **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள். **வ** என்பது **வக² + வம²** மாறிலி ஆகுமாறமைந்துள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி. **வக = வம** ஆக விருக்கும்பொழுது **Δ வகம** வின் பரப்பு மிகப் பெரியது என நிறுவுக.

12. (i) **Δ கமப** வின் ஒரு மையக்கோடு **கத** வாக பக்கங்கள் **மப, பக, கம** என்பவற்றினுடைய நீளங்கள் முறையே **அ, இ, உ** ஆயின் **கத²** இனை **அ, இ, உ** க்களிற் காண்க.

(ii) **Δ கமப** வின் மையக்கோடுகள் **கத, மந, பவ** ஆயின்

$$4\,(\text{கத}^2 + \text{மந}^2 + \text{பவ}^2) = 3\,(\text{மப}^2 + \text{பக}^2 + \text{கம}^2)$$ என நிறுவுக.

13. $\triangle$ கமப வின் அடி மப வானது அ, இ க்களில் முச்சமக் கூறிடப் பட்டுள்ளது. $\text{க}\text{அ}^2 + \text{க}\text{இ}^2 + 4\ \text{அ}\text{இ}^2 = \text{கம}^2 + \text{கப}^2$ என நிறுவுக.

14. $\triangle$ கமப வில் $\text{ப} = 90^\circ$; கம என்பது வ, ய க்களில் முச்சமக் கூறிடப்பட்டுள்ளது. $\text{வப}^2 + \text{பய}^2 + \text{யவ}^2 = \frac{2}{3}\text{கம}^2$ என நிறுவுக.

15 ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் மப; க என்பது வட்டத்திற்குள்ளே ஆரை யந வினுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. $2\text{கந}^2 = \text{கம}^2 + \text{கப}^2 - 2\text{கம}.\text{மப}$ என நிறுவுக.

[16] $\triangle$ கமப வில் கம = கப. கம வினுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி த வினிருந்து மப விற்குச் சமாந்தரமான கோடு தந என்பது கப வை ந விலே வெட்டுமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. $\text{மந}^2 = \text{பந}^2 + \text{மப}.\text{தந}$ என நிறுவுக. (மப விற்கு தச, நய என்பவற்றைச் செங்குத்தாகக் கீறுக.)

*17. கூர்ங்கோணமுக்கோணம் கமப வின் உயரங்கள் மந, பவ என்பன. $\text{மக}.\text{மவ} + \text{பக}.\text{பந} = \text{மப}^2$ என நிறுவுக.

*18. கமப ஒரு முக்கோணம்; கமவய, கபஅஇ என்பன $\triangle$ கமப விற்கு வெளியேயுள்ள சதுரங்கள். $\text{மப}^2 + \text{யஇ}^2 = \text{கவ}^2 + \text{கஅ}^2$ என நிறுவுக.

*19. கமபத ஒரு நாற்கோணம். கப, மத க்களினுடைய நடுப்புள்ளிகள் அ, இ என்பன. $\text{கம}^2 + \text{மப}^2 + \text{பத}^2 + \text{தக}^2 = \text{கப}^2 + \text{மத}^2 + 4\text{அஇ}^2$ என நிறுவுக.

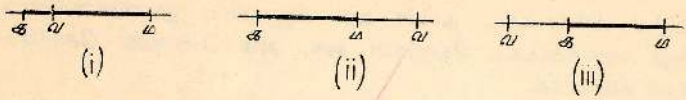
*20. கமபத என்பது ஒரு நான்முகத்திண்மம்; $\angle \text{மகப} = \angle \text{பகத} = \angle \text{தகம} = 90^\circ$. மபத ஒரு கூர்ங்கோணமுக்கோணம் என நிறுவுக.

*21. $\triangle$ கமப வின் பக்கம் மப விலே த என்னும் புள்ளி $\text{மத} = 2\text{தப}$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. $\text{கம}^2 + 2\text{கப}^2 = 6\text{பத}^2 + 3\text{கத}^2$ என நிறுவுக.

ஒரு நேர்கோட்டினுடைய துண்டுகள்

உரு 752 (i) ஐப் பார்க்க; கம என்பது யாதாயினும் ஒரு நேர் கோடாக புள்ளிகள் க, ம என்பவற்றிற்கிடையே வ என்பது கம வினுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாயின் கம என்பது உட்புறமாக வ விலே பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனப்படும்.

வ என்பது நீட்டப்பட்ட **கம** விலே **ம** விற்கப்பாலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாயின், உரு 752 (ii), அல்லது,



உருவம் 752

நீட்டப்பட்ட **மக** விலே **க** விற்கப்பாலுள்ளதாயின், உரு 752 (iii), **கம** என்பது வெளிப்புறமாக **வ** விலே பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனப்படும்.

வ என்பது **கம** விலோ நீட்டப்பட்ட **கம** விலோ நீட்டப்பட்ட **மக** விலோ கிடக்கும் ஒவ்வொரு வகையிலும், **வக, வம** என்பன நேர்கோடு **கம** வினுடைய துண்டுகள் எனப்படும்; **வக, வம** என்பவற்றிற்குச் சமமான அடுத்துள்ள பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு செவ்வகமானது **வ** விலே பிரிக்கப்பட்ட நேர்கோட்டினுடைய துண்டுகள் **வக, வம** என்பவற்றாற் கொள்ளப்பட்டுள்ளதெனப்படும்.

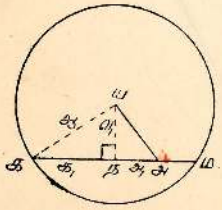
குறிப்பு. **வ** விலே பிரிக்கப்பட்ட கோடு **கம** வினுடைய ஒவ்வொரு துண்டும் **வ** விலிருந்து அளக்கப்படும்.

ஒரு வட்டத்தின் ஒன்றையொன்று வெட்டும் நாண்கள்

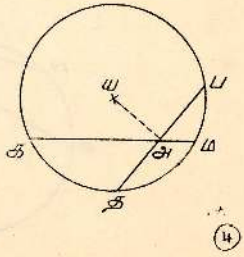
உரையாடித்தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. ய மையமாக ஆ ஆரைகொண்ட வட்டத்தினுள்ளே உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி அ விற்கூடாக, கோடொன்று வட்டத்தை க, ம க்களில் வெட்டும்படி கீறப்பட்டுள்ளது. அக . அம = ஆ² − யஅ² என நிறுவுக.

உரு 753 இலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு **அக, அம** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் **க₁, அ₁** என்பவற்றில் எடுத்துச் சொல்க. **△ யநக, △ யநஅ** என்பவற்றிற்குப் பைதகாசைப் பயன்படுத்துக.



உருவம் 753



உருவம் 754

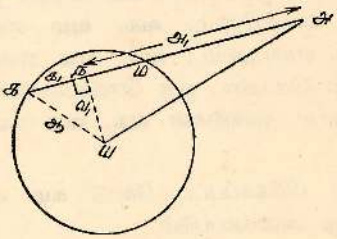
2. ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு நாண்கள் கம, பத என்பன வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளி அ வில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன.

அக . அம = அப . அத என நிறுவுக. இவ்வுண்மையைச் சொற்களில் எடுத்துக்கூறுக.

அ விலே பிரிக்கப்பட்ட நாண் கம வினுடைய துண்டுகளானவை அ விலிருந்து அளக்கப்பட்ட கோடுகள் அக, அம என்னுங் கோடுகளாகும் என்பதைக் கவனிக்க.

3. ய மையமாக ஆ ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி அ விலிருந்து ஒரு கோடு வட்டத்தை க, ம க்களில் வெட்டும்படியாகக் கீறப்பட்டுள்ளது.

அக . அம = யஅ^2 − ஆ^2 என நிறுவுக.

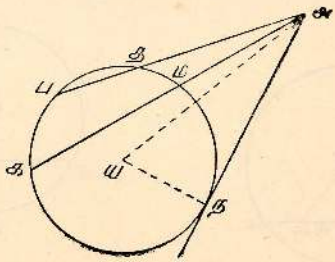


உருவம் 755

(1) இற்குக் கொடுத்துள்ள வழியைப் பயன்படுத்துக.

4. ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு நாண்கள் கம, பத என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது வட்டத்திற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி அ வில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன.

அ விலிருந்து வட்டத்திற்குரிய தொடுகோடு அந ஆகும்.
அக . அம = அப . அத = அந^2 என நிறுவுக.
இவ்விளைவுகளைச் சொல்லில் எடுத்துக்கூறுக.



உருவம் 756

அ விலே பிரிக்கப்பட்ட நாண் கம வினுடைய துண்டுகளானவை அ விலிருந்து அளக்கப்பட்ட கோடுகள் அக, அம என்னுங்கோடுகளாகும் என்பதைக் கவனிக்க.

5. எண் 2 இனுடைய மறுதலையைக் கூறி அது உண்மையென நிறுவுக.

6. எண் 4 இனுடைய மறுதலையைக் கூறி அது உண்மையென நிறுவுக.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 78

1-5 வரை உள்ள எண்கள் உரு 754 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **கஅம, பஅத** என்பன **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்களாகும்.

1. **கஅ** = 6 அங்., **அம** = 2 அங்., **பஅ** = 3 அங். எனின் **அத** வைக் காண்க.

2. **கம** = 11 ச.மீ., **மஅ** = 3 ச.மீ., **அப** = 4 ச.மீ. எனின் **பத** வைக் காண்க.

[3] **கஅ** = 12 ச.மீ., **கம** = 15 ச.மீ., **பஅ** = **அத** எனின் **பத** வைக் காண்க.

4. **யக** = 6 அங்., **கஅ** = 5 அங்., **யஅ** = 4 அங். எனின் **மஅ** வைக் காண்க.

[5] **யக**=7 அங்., **யஅ**=5 அங்., எனின் **கஅ . அம** என்பதைக் காண்க.

6-9 வரை உள்ள எண்கள் உரு 756 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுடைய நாண்கள் **கம, பத** என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி **அ** விலே சந்திக்கின்றன ; **அந** என்பது ஒரு தொடுகோடு.

6. **பத** = 2 அங்., **தஅ** = 6 அங்., **மஅ** = 3 அங். எனின் **கம** வைக் காண்க.

7. **கம** = 9 ச.மீ., **மஅ** = 3 ச.மீ. எனின் **நஅ** வைக் காண்க.

[8] **நஅ** = 5 அங்., **தஅ** = $2\frac{1}{2}$ அங். எனின் **பத** வைக் காண்க.

9. **யக** = 5 ச.மீ., **யஅ** = 9 ச.மீ. எனின் **அக . அம** என்பதைக் காண்க.

10. ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **வ** விலிருந்து ஒரு விட்டம் **கம** விற்கு **வந** என்பது செங்குத்தாகக் கிறப்பட்டுள்ளது ; **கந** = 4 அங்., **நம** = 16 அங். **வந** வைக் காண்க.

[11] △**கமப** வில் ∠ **மகப** = 90°, **கம** = 4 ச.மீ., **கப** = 3 ச.மீ., **கத** ஓருயரம் ; **மத** வைக் காண்க.

12. △**கமப** வில் **கம** = 9 ச.மீ., **கப** = 12 ச.மீ. **கப** வினது நடுப்புள்ளி **வ. ம, வ, ப** என்பவற்றிற்கூடாக உள்ள வட்டம் **கம** வை **ந** வில் வெட்டினால் **மந** வைக் காண்க.

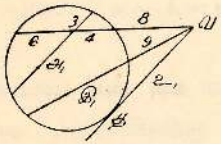
13. **கயம, பயத** என்னும் இரு நேர்கோடுகள் **கம** = 20 ச.மீ., **பத** = 19 ச.மீ., **கய** = 6 ச.மீ., **பய** = 7 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளன. **கபமத** என்பது வட்டமானது என நிறுவுக.

[14] **யகம, யபத** என்னும் இரு நேர்கோடுகள் **யக** = 3 ச.மீ., **கம** = 12 ச.மீ., **யப** = 5 ச.மீ., **பத** = 4 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளன. **கமதப** என்பது வட்டமானது என நிறுவுக.

15. △**கமப** வில் **கம** = 4 ச.மீ., **மப** = 8 ச.மீ ; **மப** விலே **த** என்னும் புள்ளி **தப** = 6 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது; **கம** என்பது வட்டம் **கதப** வைத் தொடுகின்றது என நிறுவுக.

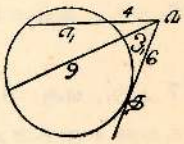
16-19 வரை உள்ள எண்களில்—757—760 வரை உள்ள உருவங்களில் **வத** என்பது **த** விலுள்ள தொடுகோட்டினைக் குறிக்கின்றது. நீளவலகு 1 ச.மீ. ஆகும். தெரியா நீளங்களைக் காண்க.

16.



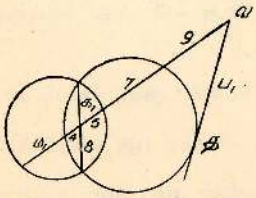
உருவம் 757

[17]



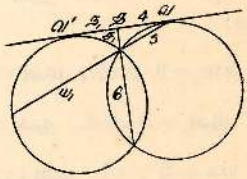
உருவம் 758

[18]



உருவம் 759

19.



உருவம் 760

20. ஓரிணைகரம் **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்கள் **கப, மத** எனபன 8 ச.மீ., 10 ச.மீ. நீளமுள்ளன. வட்டம் **மபத** ஆனது **பக** வை **வ** விலே வெட்டுகின்றது. **கவ** வைக் காண்க.

21. ஒரு பாலத்தின் மேலுள்ள தெருவழி **கபம** வானது **க, ம** என்ப வற்றிலுள்ள ஒரே மட்டமான தாங்கிகளின் மேலே தங்கியுள்ள ஒரு வட்ட வில்லாகும். தெருவழியின் மிக உயர்ந்த புள்ளி **ப** ஆனது **கம** விலிருந்து 4 அடி உயரத்திலுள்ளது ; **கம** 8 யார் நீளம் உள்ளது. வில்லின் ஆரை யைக் காண்க.

22. **கமப** என்பது ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். **கம** = **கப** = 10 ச.மீ., **மப** = 16 ச.மீ.; **மப** விற்கு **கத** செங்குத்தாகக் கீறப்பட்டு வட்டத்தை **ந** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப் பட்டுள்ளது. **தந** வை யுங் கண்டு வட்டத்தின் ஆரையையுங் காண்க.

[23] மட்டமான நீரின் மேற்பரப்பிலுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு நேர்கோடு 2 மைலளவு நீளமும் நடுப்புள்ளியிலே தண்ணீரின் மேற் பரப்பிலிருந்து 8 அங். கீழாகவும் உள்ளது. பூமியின் ஆரையை மைல் அளவிற் காண்க.

24. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் இரு செங்குத்தான நாண்கள் **கஅம, பஅத** என்பன ; **கஅ** = 3 அங்., **பஅ** = 5 அங்., **அத** = 6 அங். **யஅ** வையும் வட்டத்தின் ஆரையையுங் காண்க.

[25] ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து சிறுபாரமான பொருள் ஒன்று $6\frac{1}{2}$ அடி நீளமுள்ள நூலிலே தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. நூல் உறுதியாக விருக்க அப்பொருளானது ஒரு பக்கத்திற்கு 6 அங். உயருமாறு இழுக்கப் பட்டது. அது அசைந்துள்ள கிடையான தூரம் எவ்வளவு ?

26. △**கமப** வில் **கம** = 9 அங்., **கப** = 15 அங்., ∠**க** = 90°. **ப** விலே **கப** வைத் தொட்டு **ம** விற்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் விட்டத்தைக் காண்க.

[27] △**கமப** வில் **கம**=6 ச.மீ., **கப**=4 ச.மீ., ∠**க**=90°. **ம** விலே **கம** வைத் தொட்டு **ப** விற்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

*28 (i) பூமியினுடைய சராசரி ஆரை ஆ மைல்களாக சராசரி மட்டத்தி லிருந்து உ மைல்கள் உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் மேல் ஒரு மனிதன் நின்றால் அவன் காணக்கூடிய தூரம் $\sqrt{(2ஆஉ)}$ மைல்கள் எனக் காட்டுக.

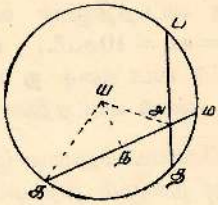
(ii) பூமியினுடைய ஆரையை 3960 மைல்கள் எனக்கொண்டு கடல் மட்டத்திலிருந்து அ அடி உயரத்தில், மட்டமான நிலத்துக்குக் குறுக்காகக் காணக்கூடிய தூரம் ஏறக்குறைய $\sqrt{(\frac{3}{2}அ)}$ மைல்கள் எனக் காட்டுக.

(iii) (அ) 6 அடி உயரத்திற்கு அடிவானத்தின் அண்ணளவான தூரம் எவ்வளவு என்பதைக் காண்க.

(ஆ) 600 அடி உயரத்திற்கு அடிவானத்தின் அண்ணளவான தூரம் எவ்வளவு என்பதைக் காண்க.

தேற்றம் 67

ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் அவ்வட்டத்தினுள்ளேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டின் அவற்றுள் ஒன்றினுடைய துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகம் மற்றையதினுடைய துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 761

தரவு. ஒரு வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளி **அ** வில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நாண்கள் **கம, பத** என்பன.

மேற்கோள். **அக . அம = அப . அத.**

கருவி. மையம் **ய** விலிருந்து **கம** விற்குச் செங்குத்து **யந** வை வரைக; **யக, யஅ** என்பவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். **கந = நம** மையத்திலிருந்துள்ள செங்குத்து நாணை இருசமக் கூறிடும்,

$\therefore$ **அக . அம = (கந + நஅ) (நம − நஅ)**

= (கந + நஅ) (கந − நஅ)

= கந² − நஅ².

ஆனால் **கந² = யக² − யந²,**

நஅ² = யஅ² − யந² பைதகரசு.

$\therefore$ **கந² − நஅ² = யக² − யஅ²,**

$\therefore$ **அக . அம = யக² − யஅ².**

இவ்வாறே,

அப . அத = யப² − யஅ² என நிறுவலாம்.

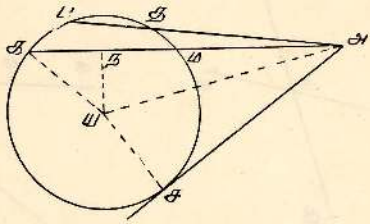
ஆனால், **யக = யப** ஆரைகள்,

$\therefore$ **அக . அம = அப . அத.**

கிளைத்தேற்றம். **அ** என்பது **ய** மையமாக **ஆ** ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளேயுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியெனின் **அ** விற் கூடாகக் கூறப்பட்டுள்ள யாதும் ஒரு நாணினுடைய துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகம் **ஆ² − யஅ²** என்பதற்குச் சமமாகும்.

தேற்றம் 68

ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் நீட்டப்பட்டபொழுது, வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டினால், அவற்றுள் ஒன்றினுடைய துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகம் மற்றையதினுடைய துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும்; ஒவ்வொரு செவ்வகமும், வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோட்டிலுள்ள சதுரத்திற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 762

தரவு. ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி **அ** விலே ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு நாண்கள், **கம, பத** என்பன; தொடு கோடு **அச.**

மேற்கோள். **அக . அம = அப . அத = அச².**

கருவி. மையம் **ய** விலிருந்து **கம** விற்குச் செங்குத்து **யந** வை வரைக. **யக, யஅ, யச** ஆகியவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். **கந = நம** மையத்திலிருந்துள்ள செங்குத்து நாணை இரு சமக்கூறிடுகின்றது.

$\therefore$ **அக . அம = (அந + நக) (அந − நம).**

= (அந + நக) (அந − நக) = அந² − நக².

ஆனால் **அந² = அய² − யந²,**

நக² = கய² − யந² பைதகரசு,

$\therefore$ **அந² − நக² = அய² − கய²,**

$\therefore$ **அக . அம = அய² − கய².**

ஆனால் தொடுகோடு **அச** ஆரை **யச** விற்குச் செங்குத்து,

$\therefore$ **அச² = அய² − சய²** பைதகரசு,

= அய² − கய² **யச = யக,** ஆரைகள்,

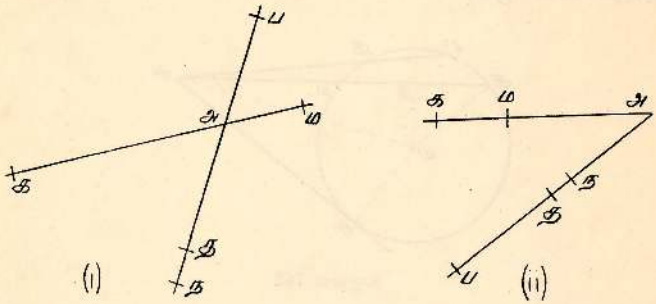
= அக . அம.

இவ்வாறே, **அச² = அப . அத** என நிறுவலாம்.

கிளைத்தேற்றம். **அ** என்பது **ய** மையமாக **ஆ** ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியெனின் **அ** விற்கூடாகக் கீறப்பட்டுள்ள யாதாயினும் ஒரு நாணினுடைய துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகம் **யஅ² − ஆ²** என்பதற்குச் சமமாகும்.

தேற்றம் 69

இருநேர்கோடுகள் கம, பத என்பன இரண்டும் உட்புறமாகவோ இரண்டும் வெளிப்புறமாகவோ ஒரேபுள்ளி அ விலே, அக.அம = அப.அத ஆகுமாறு பிரிக்கப்பட்டால் க, ம, ப, த என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளன.



உருவம் 763

கருவியும் நிறுவலும். வட்டம் **கமப** வை வரைக. **பத** வை தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **பத** வை, அது **ந** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க.

கம வை **அ** உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றதெனில், உரு 763 (i), **அ** வானது வட்டம் **கமப** வினுள் கிடக்கின்றது.

∴ **அ** என்பது நாண் **பந** வை உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது. **கம** வை **அ** வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கின்றதெனில், உரு 763 (ii), **அ** என்பது வட்டம் **கமப** விற்கு வெளியே கிடக்கின்றது,

∴ **அ** என்பது நாண் **பந** வை வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கின்றது,

∴ ஒவ்வொரு வகையிலும் **ந** வும் **த** வும் **அ** விற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ளன.

இன்னும் **அக . அம = அப . அந** **க,ப,ம,ந ஒருபரிதியிலுள்ளன,**

அக . அம = அப . அத தரவு,

∴ **அப . அந = அப . அத,**

∴ **அந = அத.**

ஆனால் **ந** வும் **த** வும் **அ** விற்கு ஒரேபக்கத்திலுள்ளன,

∴ **ந** வும் **த** வும் ஒரேபுள்ளியாகும்.

∴ வட்டம் **கமப** ஆனது **த** விற்கூடாகச் செல்கின்றது.

கிளைத்தேற்றம். நேர்கோடு கம என்பது வெளிப்புறமாக அ விலே பிரிக்கப் பட ப என்பது, க வில் இல்லாததாய், அக . அம = அ^2 ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி எனின் வட்டம் கமப வானது அப வை ப விலே தொடும்.

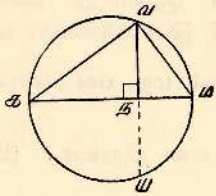
இதனுடைய நிறுவல் உரு 763 (ii) இல் உள்ளதைப் போன்றதாகும்.

இந்நிலையில் வேறு இரு முக்கியமான விளைவுகள் உள்ளன என்பதைக் குறிப்பிடுதல் வாய்ப்பானதாகும். அவை தேற்றம் 78 இற்குக் கிளைத் தேற்றங்களாகப் பின்னர் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

கம என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டமாக, பரிதியிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ விலிருந்து கம விற்குள்ள செங்குத்து வந எனின்,

(i) **வந^2 = கந . நம ;**

(ii) **கவ^2 = கந . கம, மவ^2 = மந . மக.**



உருவம் 764

(1) வட்டத்தை மீண்டும் **ய** விலே தொடுமாறு **வந** வை நீட்டுக. விட்டம் **கம** விற்கு **வய** செங்குத்தாதலின்

வந = நய ;

∴ கந . நம = வந . நய = வந . வந = வந^2.

(2) ∠ **வநம** ஒரு செங்கோணமாதலின், **வம** வை விட்டமாகவுள்ள வட்டம் **ந** விற் கூடாகச் செல்கின்றது.

∠ **கவம** என்பது ஒரு செங்கோணமாதலின், **கவ** என்பது **வம** வை விட்டமாகவுடைய வட்டத்திற்கு **வ** விலே உள்ள தொடுகோடு ஆகும்.

∴ கவ^2 = கந . கம.

இவ்வாறே **மவ^2 = மந . மக.** என நிறுவலாம்.

குறிப்பு.—இரண்டாம் விளைவானது பைதகரசின்றேற்றத்தினுடைய நிறுவலிலிருந்தும் உருவிலிருந்தும் உடனே பெறப்படுகின்றது ; பக்கம் 330 ஐப் பார்க்க ; மாணுக்கர்கள் **கவம, கநவ, மநவ** ஆகிய மூன்று முக்கோணங்கட்கும் பைதகரசைப் பயன்படுத்தி விளைவு (1) ஐ நிறுவல் பயனுடைய பயிற்சியாகும். (**கந = அ, நம = இ, வந = உ, வக = எ, வம = ஒ** எனக்கொள்க.)

இவ்விரு விளைவுகளையும் திரிகோணகணிதத்தைப் பயன்படுத்தி எளிதிலே நிறுவலாம்.

பயிற்சி 79

1. இரு வட்டங்கள் **க, ம** க்களில் வெட்டிக்கொள்கின்றன ; நீட்டப்பட்ட **கம** விலே **வ** என்பது யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **வ** விலிருந்து இரண்டு வட்டங்களுக்குமுள்ள தொடுகோடுகள் சமமென நிறுவுக.

[2] ஒன்றை யொன்று வெட்டும் இரண்டு வட்டங்களின் பொது நாணானது நீட்டப்பட்டபொழுது பொதுத் தொடுகோடுகளை இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

3. வட்டம் **கவம** விற்கு **வ** விலே உள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **கம** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. **தக = 2தவ** எனின் **கம = 3 மத** என நிறுவுக.

[4] **அ** வை மையமாகவுடைய வட்டம் **கமப** வினுடைய நாண்கள் **கம, கப** என்பவற்றினுள்ள புள்ளிகள் முறையே **வ, ய** என்பனவாகும். அவை **கவ . வம = கய . யப** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. **அவ = அய** என நிறுவுக. (தேற்றம் 67 இன் கிளையைப் பயன்படுத்துக.)

5. △**கமப** வின் உயரங்கள் **மந, பவ** என்பன **ச** வில் ஒன்றையொன்று வெட்டினால்,

(i) **மச . சந = பச . சவ** என நிறுவுக., (ii) **கவ . கம = கந . கப** என நிறுவுக.

[6] வட்டம் **கவம** வின் ஒரு விட்டம் **கம** ; **கம** விற்குச் செங்குத்தான ஒரு கோடு **கம, கவ** ஆகியவற்றை முறையே **ச, த** க்களில் வெட்டுகின்றது. **கச . கம = கத . கவ** என நிறுவுக.

7. △**கமப** வினுள்ளே **த** ஒரு புள்ளி. நீட்டப்பட்ட **மத, பத** என்பன **கப, கம** ஆகியவற்றை **ய, ந** க்களில் வெட்டுகின்றன. **மத . தய = பத . தந** எனின் **கந . கம = கய . கப** என நிறுவுக.

[8] △**கமப** வின் உயரங்கள் **மந, பவ** என்பன. **கப, கம** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் முறையே, **அ, இ** ஆகும். **கஅ . கந = கஇ . கவ** என நிறுவுக. இவ்வுண்மையிலிருந்து என்ன பெறப்படும் ?

9. ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு நாண்கள் **கம, கப** என்பன. **க** வினுள்ள தொடு கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான யாதாயினும் ஒரு கோடானது **கம, கப** ஆகியவற்றை முறையே **த, ந** ஆகியவற்றில் வெட்டுகின்றது. **கம . கத = கப . கந** என நிறுவுக.

[10] வட்டம் **கவயம** வினுடைய ஒரு விட்டம் **கம**. **ம** வினுள்ள தொடு கோடு நீட்டப்பட்ட **கவ, கய** ஆகியவற்றை முறையே **அ, இ** க்களிற் சந்திக்கின்றது. **கவ . கஅ = கய . கஇ = கம²** என நிறுவுக.

11. **கம, கப** என்பன ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு சமமான நாண்கள்; **கவ** என்பது **ய** விலே **மப** வை வெட்டுகின்ற வட்டத்தினுடைய பிறிதொரு நாணாகும். **கவ . கய = கம²** என நிறுவுக.

[12] **அகம, அபத** என்னும் இரு கோடுகள் ஒரு வட்டத்தை **க, ம, ப, த** க்களில் வெட்டுகின்றன. **அ** விற்கூடாகவும் **மப** விற்குச் சமாந்தரமாகவும் நீட்டப்பட்ட **தக** லவ **இ** யிலே சந்திக்குமாறு ஒரு கோடு கீறப்பட்டுள்ளது. **இஅ² = இக . இத** என நிறுவுக.

13. △**கமப** வில் **கம = கப**, ∠**க = 36°**, ∠**கமப** வினுடைய இருசம வெட்டி **கப** வை **வ** விலே சந்தித்தால் **கப . பவ = மப² = கவ²** என நிறுவுக.

[14] △**கமப** வில் ∠**மகப = 90°**, **கம = 2கப . கத** ஒருயரம் எனின் **மத = 4 தப** என நிறுவுக.

15. இரண்டு வட்டங்கள் கொடுக்கப்பெற்றுள்ளன. மூன்றுவதொரு வட்டமானது அதில் ஒன்றை, **க, ம** க்களிலும் மற்றையதை **ப, த** க்களிலும் வெட்டுமாறு வரையப்பட்டுள்ளது. **கம** வும் **பத** வும் நீட்டப்பட்டபொழுது **அ** விலே சந்திக்கின்றன. **அ** விலிருந்து மூன்று வட்டங்களுக்குமுள்ள தொடுகோடுகள் சமமென நிறுவுக.

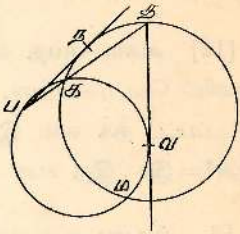
16. **கமஇஅ, கமஉ** என்பன இரு வட்டங்கள்; **கம** வும் **அஇ** யும் நீட்டப்பட்டபொழுது **த** விலே சந்திக்கின்றன. **த** விலிருந்து வட்டம் **கமஉ** விற்குள்ள தொடுகோடு **தஉ** வாகும். வட்டம் **அஇஉ** என்பது **தஉ** வைத் தொடுகின்றது என நிறுவுக.

[17] **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது ஒரு நாண் **வய. வ, ய** க்களிலுள்ள தொடு கோடுகள் **அ** விலே சந்திக்கின்றன. **வய** வை **ஓஅ** வானது **ந** விலே வெட்டுகின்றது. **ஓந. ஓஅ = ஓவ²** என நிறுவுக.

[18] இரண்டு வட்டங்கள் **க, ம** க்களில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன. **அ** என்பது ஒரு புள்ளி. அதிலிருந்து வட்டங்களுக்குள்ள தொடுகோடுகள் சமம். நீட்டப்பட்ட **கம** இலோ நீட்டப்பட்ட **மக** இலோ **அ** கிடக்கும் என நிறுவுக.

19. உரு 765 இல் **பந** என்பது **மகநத** என்னும் வட்டத்தைத் தொடுகின்றது. **தவ** என்பது வட்டம் **பகம** வைத் தொடுகின்றது. **பகத** ஒருநேர் கோடு எனின் **பந^2 + தவ^2 = பத^2** என நிறுவுக.

20. மூன்று வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்றை இரண்டையும் வெட்டுமாறு கீறப்பட்டுள்ளன. மூன்று பொது நாண்களும் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக. (**கம, பத, நவ** என்பன பொது நாண்களாக **பத** வை **கம** வானது **அ** விலே வெட்டின், இயலுமானால், **நஅ** என்பது நீட்டப்பட்ட பொழுது வட்டங்களை வெவ்வேறான புள்ளிகள் **ச, ய** க்களில் வெட்டுகின்றதெனப் பாவித்துக் கொள்க.)



உருவம் 765

21. **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் **கமசய** விற்கு **தம, தய** என்பன தொடு கோடுகள். **மய** வை **தஓ** வானது **ந** வில் வெட்டுகின்றது. **கநச** ஒரு நேர்கோடு எனின் வட்டம் **தகச** வானது **ஓ** விற்கூடாகச் செல்கின்றது என நிறுவுக. (**ஓ, ம, த, ய** என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.)

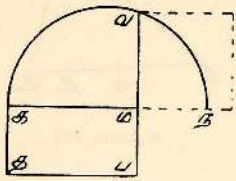
[22] இரண்டு வட்டங்கள் **க, ம** க்களில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. நீட்டப்பட்ட **கம** விலே **அ** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ; **அ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம் ஒரு வட்டத்தை **வ, ய** க்களிலும் மற்றையதை **ப, ந** க்களிலும் வெட்டுகின்றது. தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட **அவ, அந** என்பன வட்டங்கள் **வயக, பநக** என்பவற்றை **ச, த** க்களில் வெட்டுகின்றன. **வச = தந** என நிறுவுக.

23. வட்டங்கள் **கயச, கவத** என்பவற்றினுடைய விட்டங்கள் **கச, கத** ஆகும். **வகச, யகத** என்பன நேர் கோடுகள் எனின் **வக . கச = யக . கத** என நிறுவுக.

(502 ஆம் பக்கத்தில் இப்பயிற்சியின் எஞ்சிய பகுதி உள்ளது.)

அமைப்பு 17

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமான ஒரு சதுரம் அமைத்தல்.



உருவம் 766

தரவு. ஒரு செவ்வகம் **கமபத.**

அமைக்கப்பட வேண்டியது. பரப்பளவில் **கமபத** விற்குச் சமமான ஒரு சதுரம்.

அமைப்பு. **கம** வை **ந** விற்கு **மந = மப** ஆகுமாறு நீட்டுக.

கந வின் மேல் அதை விட்டமாகக் கொண்டுள்ள ஓரரைவட்டம் வரைக.

அரைவட்டத்தை **வ** விலே சந்திக்குமாறு **பம** வை நீட்டுக.

மவ வின்மேல் ஒரு சதுரம் வரைக.

இதுவே வேண்டிய சதுரமாகும்.

நிறுவல். **கந** என்பது வட்டம் **கவந** வின் ஒரு விட்டமாதலாலும் **வம** என்பது **வ** விலிருந்து **கந** விற்குள்ள செங்குத்தாதலாலும்,

$\text{மவ}^2 = \text{கம.மந}$.

ஆனால், $\text{மந} = \text{மப}$ **அமைப்பு,**

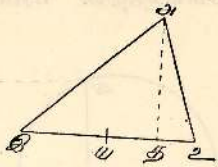
$\therefore \text{மவ}^2 = \text{கம.மப}$

$= \text{கமபத}$ வின் பரப்பு.

குறிப்பு. அமைப்பு 17 இனது நிறுவல் பக்கம் 497 இலே நிறுவப்பட்ட பண்பிலே தங்கியுள்ளது.

இவ்வழியானது கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள இடை விகிதசமன் அமைப்பதற்குப் பயன்படுத்தும் வழியைப் போன்றதாகும். பக்கம் 599 இலுள்ள முதலாவது முறையை பார்க்க.

யாதாயினும் ஒரு பல்கோணத்திற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு சதுரத்தை அமைப்பதற்கு 17 ஆம் அமைப்பைப் பயன்படுத்தலாம்.



உருவம் 767

அமைப்பு. பக்கம் 307 இலுள்ள அமைப்பு 9 இன் வழியைக்கொண்டு பல்கோணத்தை ஒரொத்தமுக்கோணம் **அஇஉ** என்பதற்கு ஒடுக்குக. உயரம் **அத** வைக் கீறி **இஉ** வை **ய** விலே இருசமக்கூறிடுக.

அமைப்பு 17 ஐப் பயன்படுத்தி **இய** வும் **அத** வுங் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு சதுரத்தை அமைக்க. இதுவே வேண்டிய சதுரமாகும்.

நிறுவல். பல்கோணத்தின் பரப்பு $=\Delta$ **அஇஉ** வின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}$ **இஉ . அத**

$=$ **இய . அத**

$=$ சதுரம்.

பயிற்சி 79 (தொடர்ச்சி)

*24. Δ **கமப** வானது **கம** மேல் வரைந்துள்ள சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்திற்கு **கப** சமமாகுமாறு அமைந்துள்ளது; **கப** வினது நடுப்புள்ளி **த**. $\angle$ **கமத** $=\angle$ **கபம** என நிறுவுக.

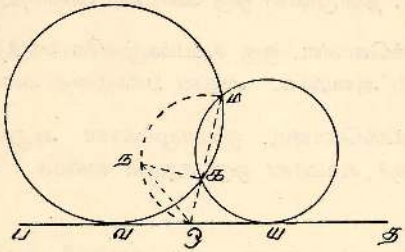
25. Δ **கமப** வில் $\angle$ **மகப** $= 90°$; **மப** விலே **ந** என்னும் புள்ளி **கந** $=$ **கம** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **மந . மப** $= 2$**கம**^{2} என நிறுவுக. (**மப** விற்குச் செங்குத்தாக **கந** வைக் கீறுக.)

*26. Δ **கமப** வின் பக்கங்கள் **மப, பக, கம** என்பவற்றில், புள்ளிகள் **வ, ய, ந** என்பன **மவ . வப** $=$ **பய . பக** $=$ **கந . நம** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. வட்டங்கள் **கமப, வயந** என்பன ஒருமையமானவையென நிறுவுக.

*27. வட்டம் **கவயம** வின் ஒரு விட்டம் **கம**; **கவ** $= \frac{1}{3}$ **கம**; **வம** வினது நடுப்புள்ளி **ந**; **கநய** ஒரு நேர்கோடு. **நய** $= \frac{2}{3}$ **கந** என நிறுவுக. (Δ **கவம** விற்கு அப்பலோனியனைப் பயன்படுத்துக.)

அமைப்பு 18

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் இப்புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமல்லாத ஒரு கொடுக்கப்பட்ட கோட்டைத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் அமைத்தல். (இரண்டு தீர்வுகள்.)



உருவம் 768

தரவு. இரண்டு புள்ளிகள் **க, ம** க்களும் **கம** விற்குச் சமாந்தரமல்லாத ஒரு கோடு **பத** வும்.

அமைக்க வேண்டியது. **க, ம** க்களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் **பத** வைத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம்.

அமைப்பு. **மக** வை இணைத்து **பத** வை **ஓ** விலே தொடக்கூடியதாக நீட்டுக.

ஓம வை விட்டமாகக்கொண்ட ஓரரை வட்டம் வரைக. **க** விற்கூடாகவும் **ஓம** விற்குச் செங்குத்தாகவும் அரைவட்டத்தை **ந** விலே சந்திக்குமாறு **கந** வை வரைக.

ஓந வை இணைக்க. **ஓ** மையமாக **ஓந** ஆரையாக **பத** வை **வ, ய** க்களில் வெட்டுமாறு ஒரு வட்டம் வரைக.

க, ம, வ என்பனவற்றிற்கும் **க, ம, ய** என்பனவற்றிற்கும் ஊடாக வட்டங்களை வரைக.

இவையே வேண்டிய வட்டங்களாகும்.

நிறுவல். வட்டம் **ஓநம** வின் ஒரு விட்டம் **ஓம** ஆதலாலும் **நக** என்பது **ந** விலிருந்து **ஓம** விற்குச் செங்குத்தாதலாலும்,

$$\text{ஓக} \cdot \text{ஓம} = \text{ஓந}^2$$
$$= \text{ஓவ}^2 \qquad \text{அமைப்பு,}$$

∴ **ஓவ** என்பது வட்டம் **கமவ** விற்கு **வ** விலுள்ள தொடுகோடாகும். இவ்வாறே **ஓய** என்பது வட்டம் **கமய** விற்கு **ய** விலுள்ள தொடுகோடு என நிறுவலாம்.

குறிப்பு. **பத** விற்கு **கம** சமாந்தரம் எனின் இவ்வழி பிழைபடும். இச்சிறப்புயகை ஓர் எளிதான பயிற்சியாகும். அப்பொழுது **க, ம** க்களுக்கூடாக **பத** வைத் தொடும் ஒரேயொரு வட்டமே வரையலாம்.

பயிற்சி 80

1. 5 ச.மீ. × 8 ச.மீ. அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வகம் வரைந்து பரப்பளவில் அதற்குச் சமமான ஒரு சதுரம் அமைக்க. அதன் பக்கத்தை அளக்க.

[2] $\sqrt{(31)}$ ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோட்டை அமைத்து அதை அளக்க.

3. 3 அங். பக்கங்கொண்ட ஒரு சமபக்கமுக்கோணத்திற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு சதுரம் அமைக்க. அதன் பக்கத்தை அளக்க.

[4] 5 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரொழுங்கான அறுகோணம் வரைந்து பரப்பளவில் அதற்குச் சமமான ஒரு சதுரம் வரைக. அதன் பக்கத்தினை அளக்க.

5. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** வை **கம** = 3 ச.மீ., **மப** = 4 ச.மீ., **பத** = **தக** = 6·5 ச.மீ., ∠ **கமப** = 90° ஆகுமாறு அமைக்க. பரப்பளவில் அதற்குச் சமமான ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் பக்கத்தினை அளக்க.

6. ஒருங்கமைசமன்பாடுகளான க + ந = 11, கந = 24 என்பவற்றைத் தீர்த்தற்கு அமைப்பு 17 ஐப் பயன்படுத்துக.

[7] க (9 − க) = 12 என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு அமைப்பு 17 ஐப் பயன்படுத்துக.

8. **க, ம** க்கள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ; **பத** என்பது **கம** விற்குச் சமாந்தரமாகக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு. **க, ம** க்களுக்கூடாகச் செல்லக் கூடியதாகவும் **பத** வைத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டத்தை எவ்வாறு அமைக்கலாம் எனக் காட்டுக.

[9] ஒருகோடு **கம** வைக் கீறுக. **கம** விலே ஒரு புள்ளி **வ** வை **கவ**^{2} = $\frac{2}{3}$ **கம**^{2} ஆகுமாறு அமைக்க.

10. **கமபத** என்னும் ஒரு செவ்வகங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இயலும் பொழுது **கம** விலே **வ** என்ற ஒரு புள்ளியை **கவ.வம** = **மப**^{2} ஆகுமாறு அமைக்க. இது எப்பொழுது இயலாதது ?

11. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் **க, ம** க்களுக்கூடாகச் செல்லக்கூடிய தாகவுங் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தைத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக. (**க, ம** க்களுக்கூடாக யாதாயினும் ஒரு வட்டம் வரைக. அது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தை **வ, ய** க்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க. **கம** வும் **வய** வும் **ஓ** விலே சந்திப்பதாகக் கொள்க. **ஓ** விலிருந்து கொடுக் கப்பட்ட வட்டத்தைத்தொடும் வண்ணம் **ஓச, ஓத** ஆகியவற்றை வரைந்து **ஓச**^{2} = **ஓக . ஓம** என நிறுவுக.)

12. ஒரு நேர்கோட்டிலே 4 புள்ளிகள் **க, ம, ப, த** என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இயலும்பொழுது அக்கோட்டினிலே ஒரு புள்ளி **வ** வை **வக . வத = வம . வப** ஆகுமாறு அமைக்க.

*13. **கமபத** என்னும் ஒரு செவ்வகங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்ட **கம** விலே ஒரு புள்ளி **வ** வை **வக . வம = மப²** ஆகுமாறு அமைக்க. (**கம** வை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம் **கயம** விற்கு ஒரு தொடுகோடு **யச** வை **யச = மப** ஆகுமாறு வரைக. **கம** விலே **வ** என்பதை, தொடுகோடு **வஅ** என்பது **யச** விற்குச் சமமாகுமாறு காண்க. அல்லது **கம** வை **ந** விலே இருசமக்கூறிட்டு **வக . வம = வந² – கந²** என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்துக.)

*14. கொடுக்கப்பட்ட 2 புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தை வெட்டி பொதுநாணைக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நீளமுடையதாக்கும் ஒரு வட்டத்தை எப்படி வரையலாமென்பதைக் காட்டுக.

*15. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி **க** விற்கூடாகச் சென்று கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகள் **மப, மத** ஆகியவற்றைத் தொடும் ஒரு வட்டம் வரைக. (∠**பமத** வினது இருசமவெட்டி **மந** வை வரைந்து **மந** விலே **க** வினது விம்பம் **க′** ஐ எடுக்க.)

உரையாடித் தெளிவதற்காகக் கேத்திரகணித உண்மைகளை மீட்டல்

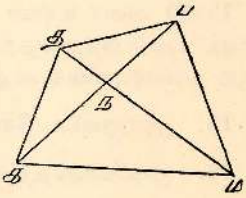
பயிற்சி 81

1–10 வரை உள்ள எண்கள் உரு 769 ஐக் குறிக்கின்றன. இவ்வுரு ஒரு நாற்கோணத்தையும் அதன் மூலைவிட்டங்களையும் குறிக்கின்றது.

1. (i) ஓரிணைகரத்தின் வரைவிலக்கணம் என்ன ?

   (ii) **கமபத** ஓரிணைகரமாயின் நீளங்கள், பரப்புக்கள் ஆகியவைபற்றி என்ன உண்மைகளை அறிவீர் ?

   (iii) **கமபத** ஓரிணைகரம் என்பதைப் பரிசோதிப்பதற்கு உம்மால் இயன்ற அளவு சோதனைகள் கூறுக.



உருவம் 769

2. எல்லா இணைகரங்களுக்கும் மெய்யாகா உண்மைகளுள் யாவை, (i) ஒரு செவ்வகத்திற்கு, (ii) ஒரு சாய்சதுரத்திற்கு உண்மைகளாம்.

3. **மப** இற்கு **கத** சமாந்தரமெனின் பரப்பளவில் எம்முக்கோணங்கள் சமமாகும் ?

4. **மந = நத** எனின் எம்முக்கோணங்கள் பரப்பளவிற் சமமாகும் ?

5. **க, ம, ப, த** களுக்கூடாக ஒரு வட்டம் வரையலாம் எனின் எக்கோணங்கள் சமமாகும் ?

6. **மத** வை விட்டமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியே **க** உளதாக **ப** அதில் உள்ளதெனின் கோணங்களின் பருமன்களைப் பற்றி என்ன கூறுவீர் ?

7. வட்டம் **தநப** வை **தக** தொட்டால் எக்கோணங்கள் சமமாகும் ?

8. **கந = நப** எனின் **தக² + தப²** என்பதைப்பற்றி என்ன அறிவீர் ?

9. **மப** விலும் **கம** பெரிது எனின் என்ன பெறப்படும் ?

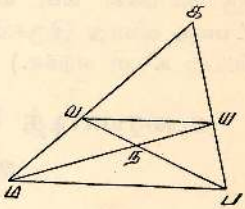
10. **மக = மப, தக = தப** எனின் என்ன பெறப்படும் ?

11 – 14 வரை உள்ள எண்கள் உரு 770 ஐக் குறிக்கின்றன.

11. **கவ = வம, கய = யப** எனின் நீளங்கள், பரப்புக்கள் ஆகியவை பற்றி நீர் அறிந்த உண்மைகளைக் கூறுக.

12. **கவ = வம, கய = யப** ஆக நீட்டப்பட்ட **கந** வானது **மப** வை **அ** விலே வெட்டினால் நீளங்களைப் பற்றி என்ன உண்மைகளை அறிவீர் ?

13. முக்கோணங்கள் **கவப, கயம** ஆகிய வற்றினுடைய பரப்புக்கள் சமமெனின் இவ் வுருவைப் பற்றி என்ன கூறுவீர் ?



உருவம் 770

14. **கவ = 2 வம** ஆக **மப** விற்கு **வய** சமாந்தரமெனின், நீளங்கள், பரப்புக்கள் ஆகியவை பற்றி என்ன அறிவீர் ?

15–30 வரை உள்ள எண்களில் காணப்படுஞ் சொற்றொடர்களின் கருத்தைப் புலப்படுத்துவதற்கு உருவங்கள் வரைந்து அவற்றுடன் நீர் இணைக்கும் உண்மைகளைக் கூறுக.

15. ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்.

16. முக்கோணத்தின் புறக்கோணம்.

17. ஈரடி வகை.

18. நடுப்புள்ளித்தேற்றம்.

19. வெட்டுத்துண்டுத்தேற்றம்.

20. முக்கோணத்தின் உயரம்.

21. ஒருநேர்கோட்டிலிருந்து ஒரு புள்ளியினது தூரம்.

22. ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்களுக்கிடையே உள்ளனவாயும் ஓரடியில் உள்ளனவாயும் உள்ள முக்கோணங்களும் இணைகரங்களும்.

23. ஒரு நாற்கோணத்தை ஒரொத்த முக்கோணத்திற் கொடுக்கல்.

24. ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலுள்ள கோணம்.

25. ஒரே துண்டிலுள்ள கோணங்கள்.

26. ஓர் ஒருவட்ட நாற்கோணம்.

27. ஒன்றுவிட்டதுண்டுத்தேற்றம்.

28. (i) யாதாயினும் ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுமையம்,
(ii) உண்மையம்,
(iii) செங்குத்துமையம்,
(iv) மையக்கோட்டுச்சந்தி.

29. பைதகரசின்றேற்றத்தின் விரிவு.

30. ஒரு வட்டத்தினுடைய நாண்களின் துண்டுகள்.

31. நீளங்கள், கோணங்கள், பரப்புக்கள் ஆகியவற்றோடு இணைந்த நீர் அறிந்த நியமமான ஒழுக்குக்களின் பட்டியல் ஒன்றை ஆக்குக. அவற்றை உருவங்களால் விளக்கிக்காட்டுக.

உரையாடித் தெளிவதற்காக அறிகணக்குக்களை மீட்டல்

பயிற்சி 82

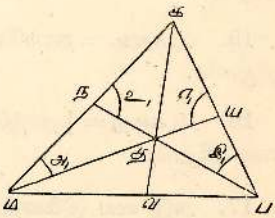
1–12 வரை உள்ள எண்கள் உரு 771 ஐக் குறிக்கின்றன. இது ஒரு முக்கோணத்தையும் அதனுடைய உச்சிகளுக்கூடாகவுள்ள ஒன்றையொன்று சந்திக்குங் கோடுகளையும் குறிக்கின்றது.

1. எ, = உ, எனின் அ, = இ, என நிறுவுக.

2. எ, + உ, = 2 செங்கோணங்கள் எனின் எக்கோணங்கள் சமமாகும்?

3. ∠ வதப = ∠ தமப எனின் ∠ தவப விற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தைக் காண்க.

4. ∠ மதப – ∠ மகப என்பதை இருகோணங்களின் கூட்டுத்தொகையாக எடுத்துச் சொல்க.



உருவம் 771

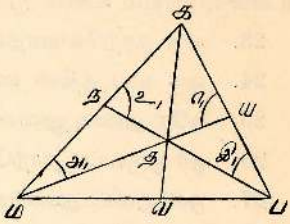
5. தம = தப, தந = தய எனின் கம = கப என நிறுவுக.

6. **மத = தய, பத = தந** ஆக இவ்வுருவை வரைதல் இயலுமா ?

7. **மவ = வப, மத = தய** ஆக இவ்வுருவை வரைதல் இயலுமா ?

8. **தந = நம, மத = தப** எனின் கோணங்கள் **நமப, நபம** ஆகியவற்றின் பருமன்களை ஒப்பிடுக.

9. **மத = தப = பவ** எனின் ∠ **மதவ, ∠ பதவ** என்பவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் காண்க.



உருவம் 771

10. (i) △ **மவக,** △ **மயக** என்பவை பரப்பளவிற் சமமானால்,

(ii) △ **வதப,** △ **நதக** என்பவை பரப்பளவிற் சமமானால்,

(iii) △ **மதப,** △ **மதக** என்பவை பரப்பளவிற் சமமானால்,

உருவம் எவ்வாறு வரையப்படல் வேண்டும் ?

11. ∠ **பமக,** ∠ **பகம** என்பவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் **மத, கத** எனின் ∠ **மதக,** ∠ **மபக** என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

12. **கந = கத** எனின் ∠ **மபந** ஐ ∠ **கமல,** ∠ **கவம** என்பவற்றால் எடுத்துச்சொல்க.

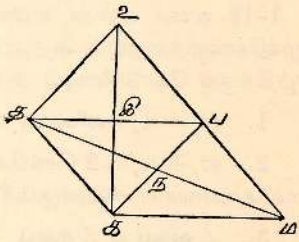
13–17 வரையுள்ள எண்கள் உரு 772 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **கமபத** ஓரிணைகரம். **பத** வினது நடுப்புள்ளி **இ**.

13. **மஉ = 2கத** என நிறுவுக.

14. **கப** விற்குத் **தஉ** சமாந்தரமென நிறுவுக.

15. △ **கமஉ** = நாற்கோணம் **கமபத** என நிறுவுக.

16. △ **கமத** = $\frac{1}{2}$ நாற்கோணம் **கபஉத** என நிறுவுக.



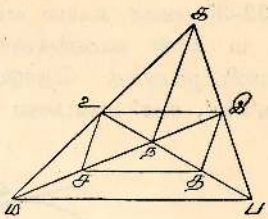
உருவம் 772

17. **நஇ** யை இணைத்து **நஇ** = $\frac{1}{2}$ **கத** என நிறுவுக.

18. உரு 772 இல் **கமபத** ஓரிணைகரமாக **பத** விலே **இ என்பது** யாதாயினும் ஒரு புள்ளி எனின் △ **தஇஉ** = △ **இமப** என நிறுவுக.

19. உரு 772 இல் **கமபத** ஒரிணைகரமாக, **பத** விலே **இ** என்னும் புள்ளி **கமஉத** ஒரொருவட்ட நாற்கோணமாகுமாறு உள்ளதெனின் **தஉ = கம** என நிறுவுக.

20. எண் 19 இல் உள்ள தரவுகளுடன் வட்டம் **தஇஉ** வை **தம** தொடுகின்றது என நிறுவுக.



உருவம் 773

21. உரு 773 இல் **கஇ = இப, கஉ = உம, மஇ** யானது **பஉ** வை **ந** விலே வெட்டுகின்றது; **நச = சம, நத = தப.** இவ்வுருவத்தைப் பற்றிய உண்மைகள் யாவையும் உம்மால் இயன்ற வரையிற் காண்க. காரணங்காட்டுக.

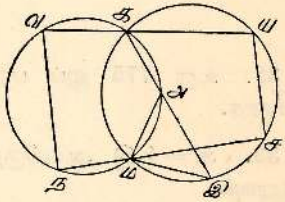
22–31 வரையுள்ள எண்கள் உரு 774 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **வகய, நமச, கஅஇ** என்பன நேர்கோடுகள்.

22. **யச** விற்கு **வந** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

23. (i) **ய** விற்கு மிக அணிதாக **ச** வை எடுத்துக்கொள்வதால்,

(ii) **ம** விற்கு மிக அணிதாக **ச** வை எடுத்துக்கொள்வதால்,

(iii) **ம** விற்கு மிக அணிதாக **க** வை எடுத்துக்கொள்வதால்,



உருவம் 774

எண் 22 இலிருந்து என்ன விளைவுகளைப் பெறலாம்?

24. **நஅ** விற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோட்டைப் பெறுவதற்கு உருவிலே எப்புள்ளிகளை இணைத்தல் வேண்டும்? காரணங் காட்டுக.

25. வட்டம் **கமவ** வின் ஒரு விட்டம் **கந** எனின் **கச** என்பது வட்டம் **கமய** வின் ஒரு விட்டம் என நிறுவுக.

26. **வயசந** என்பது ஒரொருவட்ட நாற்கோணம் எனின் **வய = நச** என நிறுவுக.

27. **கவ = மஅ** எனின் **அவ = கம** என நிறுவுக.

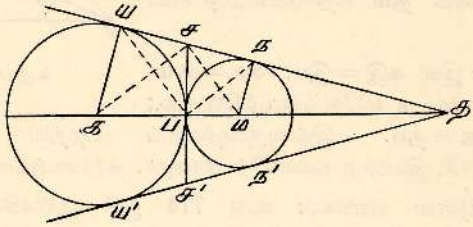
28. **∠ அமஇ = ∠ வமய** என நிறுவுக.

29. வட்டங்கள் சமமெனின் **மஅ = மஇ** என நிறுவுக.

30. **∠ அமஇ** என்பது **அ** இலிருந்து 2 வட்டங்களுக்கும் உள்ள தொடுகோடுகட்கிடையேயுள்ள கோணங்களுள் ஒன்றிற்குச் சமமென நிறுவுக.

31. **கந, கச** என்பன வட்டங்கள் **கமச, கமந** என்பவற்றிற்குத் தொடுகோடுகள் எனில் அவை வட்டங்கள் **கமந, கமச** என்பவற்றினுடைய விட்டங்கள் என நிறுவுக.

32–35 வரை உள்ள எண்கள் உரு 775 ஐக் குறிக்கின்றன. இவ்வுரு **க, ம** க்கள் மையங்களாக அ, இ அலகுகள் ஆரைகொண்டு **ப** வில் வெளிப்புறமாகத் தொடும் இரு வட்டங்களைக் குறிக்கின்றது. **தநசய, தந'ச'ய', சபச'** என்பவை பொதுத்தொடுகோடுகளாகும்.



உருவம் 775

32. உரு 775 ஐப் பற்றி உம்மால் இயன்ற அளவு உண்மைகளைக் காண்க.

33. அ = 4 இ ஆகவிருந்தாலன்றி **யந** விற்கு **கய** சமமாகாது என நிறுவுக.

34. அ = 4 இ ஆகவிருந்தாலன்றி **க** மையமாகவுள்ள வட்டத்தை நீட்டப்பட்ட **நம** தொடாது என நிறுவுக.

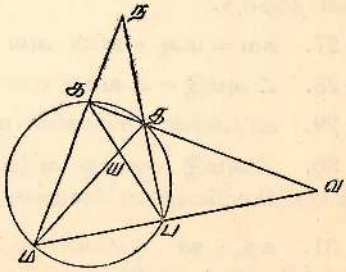
35. **நம** நீட்டப்பட்டபொழுது **ச'** ஊடாகச் செல்கின்றதெனின் △ **தசச'** சமபக்கமுக்கோணம் எனவும் அ = 3 இ எனவும் நிறுவுக.

36–50 வரை உள்ள எண்கள் உரு 776 ஐக் குறிக்கின்றன. இதில் **கமபத** ஓரொருவட்ட நாற்கோணம். அதன் எதிர்ப்பக்கங்கள் **ந, வ** என்பவற்றிற் சந்திக்கின்றன. அதன் மூலைவிட்டங்கள் **ய** விற் சந்திக்கின்றன.

36. **மத** என்பது **ம, த** என்பவற்றி லுள்ள கோணங்களை இருசமக்கூறிடு மெனின் ∠ **மகத** ஒரு செங்கோணமென நிறுவுக.

37. கோணங்கள் **நகவ, நபவ** என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு யாது ?

38. ∠ **மநப** = 24°, ∠ **கவம** = 42°, ∠ **மயப** = 72° எனின் ∠ **நகத, ∠ கபத, ∠ தமவ** என்பவற்றைக் காண்க.



உருவம் 776

39. **கத, தப, பம** என்பவை சமமெனின் இவ்வுருவை வரைவதில் என்ன மாற்றஞ்செய்தல் வேண்டும்? இவ்வகையில் $\angle$ **கபம** $= \theta$ எனின் $\angle$ **பகவ, $\angle$ கமப, $\angle$ கவம** என்பவற்றை θ இல் காண்க.

40. **மய** $>$ **யப** என நிறுவுக. **கய** வோ **தய** வோ பெரியது?

41. **ய** என்பது வட்டத்தின் மையமெனின் உருவை வரைவதில் என்ன மாற்றஞ் செய்தல் வேண்டும்?

42. **தக, தம, தப** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமான பக்கங்களையுடைய முக்கோணம், Δ **கமப** விற்கு சமகோணமானது என நிறுவுக.

43. $\angle$ **ந** $+ \angle$ **வ** $= 180^\circ - 2 \angle$ **கமப** என நிறுவுக.

44. **ந** வை Δ **நகப** வின் சுற்றுமையத்திற்கு இணைக்குங் கோடு **மத** விற்குச் செங்குத்து என நிறுவுக.

45. Δ **நகத, Δ வபத** ஆகியவற்றினுடைய சுற்றுவட்டங்கள் மீண்டும் **நவ** விலுள்ள ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன என நிறுவுக.

46. $\angle$ **மநப, $\angle$ கவம** என்பவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் செங்கோணமாயுள்ளன என நிறுவுக.

47. **க, ப** ஆகியவற்றிலுள்ள தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணமானது $\angle$ **கதப** $- \angle$ **கமப** என்பதற்குச் சமமென நிறுவுக.

*48. **மத** விற்குக் **கப** செங்குத்து எனின் **மப** என்பது வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து **கத** விற்குள்ள செங்குத்திலும் இருமடங்கானது என நிறுவுக.

*49. **மத** விற்கு **கப** செங்குத்து எனின் **ய** விலிருந்து **கத** விற்குள்ள செங்குத்து நீட்டப்பட்ட பொழுது **மப** வை இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

*50. **ந, வ** ஆகியவற்றிலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகளிலுள்ள சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை **நவ**^{2} இற்குச் சமமென நிறுவுக. (எண் 45 ஐப் பயன்படுத்துக.)

மீட்டல்வினாத்தாள்கள் 51–58 (தேற்றங்கள் 1–50)

(துண்டிலுள்ள கோணங்களும் அடங்கும்)

51

1. **கமபத** ஒரு சதுரம். ∠**கபத** வின் இருசமவெட்டி **மத ஐ ய** விலே வெட்டுகின்றது. **மய = பத** என நிறுவுக.

2. சரிவகம் **கமபத** வினுடைய சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கத, மப** ஆகும்; **கம = 6** அங்., **மப = 9** அங்., **பத = 5** அங்., **கத = 14** அங்.; **கமபத** வின் பரப்பைக் கணிக்க.

3. மையத்திலிருந்து 11 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு வட்டத்தினது நாண் 6 ச.மீ. நீளமானது. அதேவட்டத்தில் மையத்திலிருந்து 9 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒரு நாணினுடைய நீளத்தைக் கணிக்க.

4. ஒரு வட்டத்தின் மையம் **ய. பம** என்பது ஆரை **யக** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நாண். **கப** வை **யம** என்பது வட்டத்தினுள்ளே ஒருபுள்ளி **ந** இலே வெட்டுகின்றது. ∠**கநம = 3** ∠**கபம** என நிறுவுக.

52

1. △**கமப** வில் ∠**கமப = 54°**, ∠**மகப = 78°**; ∠**மபக** வின் இருசமவெட்டி **கம** வை **அ** விலே வெட்டினால் **பக = பஅ** என நிறுவுக.

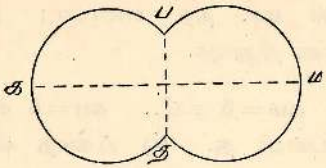
2. **கமப, வயந** என்னும் இரு நேர்கோடுகள் **கவ, மய, பந** என்னும் மூன்று சமாந்தரக் கோடுகளால் வெட்டப்படுகின்றன. △**கயப**, △**வமந** என்பன பரப்பளவிற் சமமென நிறுவுக.

3. **கமப** என்னும் நேர்கோடு **கம = 1** அங்., **மப = 4** அங். ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **வமய** என்பது **கப** வை விட்டமாகவுடைய வட்டத்திலே **கப** விற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நாண். **வய** வினுடைய நீளத்தைக் காண்க.

4. ஒரு வட்டத்தின் கால்வட்டம் **கம** ஆகும்; **கப** என்பது யாதாயினும் ஒரு நாண். **ம** விலிருந்து **கப** விற்குள்ள செங்குத்து **மந** எனின் **மந = நப** என நிறுவுக.

53

1. **கமபத** ஓரிணைகரம். **கம < மப.** ∠**கமப** ஐ இருசமக்கூறிடுங் கோடு **கத** வை **வ** விலே வெட்டினால் **மப = பத + தவ** என நிறுவுக.



உருவம் 777

2. உரு 777 இலுள்ள வட்டவிற்களின் ஆரைகள் சமமாகும். அவற்றின் மையங்கள் **கம** விலே உள்ளன. **கம = 10** ச.மீ., **பத = 4** ச.மீ. எனின் ஒவ்வொரு வில்லினதும் ஆரையைக் கணிக்க.

3. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** ஆகும்; ∠**கமத = 36°**, ∠**மதப = 43°**, ∠**பயத = 40°**; ∠**கயம** வைக் கணிக்க.

4. இருவட்டங்கள் **கமவச, கமயந** என்பன **க, ம** க்களில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. **வமய** ஒரு நேர்கோடாக **யந** விற்கு **வச** சமாந்தரமெனின் **சகந** ஒரு நேர்கோடென நிறுவுக.

54

1. **கமபத** ஓரிணைகரம். **கமசந, கதவய** என்பன **கபத** விற்கு வெளியேயுள்ள சதுரங்கள். **யந** என்பது **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்களுள் ஒன்றிற்குச் சமமென நிறுவுக.

2. 21 சது. ச.மீ. பரப்பளவு கொண்ட ஓரிணைகரத்தை, ஒரு பக்கம் 6 ச. மீ. ஆகவும் ஒருகோணம் 50° ஆகவும் அமையுமாறு வரைக. மற்றைப் பக்கத்தை அளக்க.

3. ஓரரைவட்டம் **கவயம** வின் விட்டம் **கம** வாகும். சமாந்தரக் கோடுகள் **வப, யத** என்பன **கப** வை, **க, ம** க்களுக்கிடையே **ப, த** என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. **கப = தம** எனின் ∠**பவய** ஒருசெங்கோணமென நிறுவுக. **ய** வை **ம** வுடன் பொருந்தச் செய்வதால் என்ன சிறப்புவகையைப் பெறலாம்?

4. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது ஒரு நாண் **கம** என்பது △**யகம** சமபக்கமாயிருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. ∠**யகம** வை இருசமக்கூறிடுங்கோடு வட்டத்தை மீண்டும் **ய** விலே வெட்டுகின்றது. **கம = மய** என நிறுவுக.

55

1. **கமபத** ஒரு சதுரம்; **க** விற்கூடாக சதுரத்துக்கு வெளியே யாதாயினும் ஒருகோடு கீறப்பட்டுள்ளது; **ம, த** க்களிலிருந்து இக்கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்துக்கள் **மச, தந** என்பன; (i) $\triangle$ **கமச** $\equiv$ $\triangle$ **தகந**; (ii) **மச** + **தந** = **சந** என நிறுவுக.

2. $\triangle$ **கமப** வில் **கம** = 6 ச.மீ., **கப** = 8 ச.மீ., $\angle$ **மகப** = 90°; **மப** வினுடைய நடுப்புள்ளி **த**. (i) $\triangle$ **கமத** வின் பரப்பு, (ii) **ம** விலிருந்து **கத** விற்குள்ள செங்குத்தினுடைய நீளம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

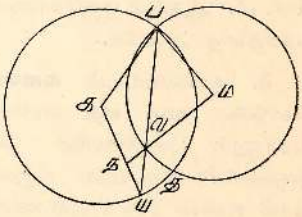
3. **கமபத** என்பது ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம்; **கப** ஒரு விட்டம். $\angle$ **மகப** = 43° எனின் $\angle$ **கதம** வைக் காண்க.

4. ஒரு வட்டத்தினுடைய ஒரு விட்டம் **கம**; **வய** யாதாயினும் ஒரு நாண். **க** விலிருந்து **வய** விற்குள்ள செங்குத்து யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ச** விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **வய** வினது இருசமவெட்டிச்செங்குத்தானது **மச** ஐ இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

56

1. **கவநத, கயசப** என்னும் நேர்கோடுகள் **கவ** = **வய** = **யந** = **நச** = **சத** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. $\angle$ **பசத** = 5 $\angle$ **கயவ** என நிறுவுக.

2. ஒரு வட்டத்தின்றுண்டு 6 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நாணினால் வெட்டப்பட்டுள்ளது. துண்டினுடைய உயரம் 2 ச. மீ. வட்டத்தின் ஆரையைக் கணிக்க.



உருவம் 778

3. உரு 778 இல் வட்டங்கள் **பதய, பவத** என்பனவற்றின் மையங்கள் **க, ம** க்களாகும். **பவய** ஒரு நேர்கோடு. **மவ** என்பது **கய** வை **ந** விலே வெட்டுகின்றது. $\angle$ **கநம** = $\angle$ **கபம** என நிறுவுக.

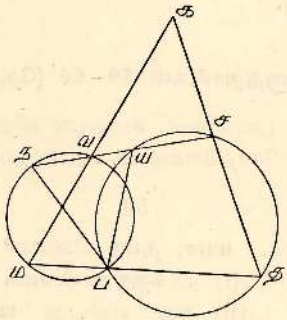
4. வட்டம் **கமப** வின் சமமான நாண்கள் **கம, கப** என்பன. **கவ, மய** என்பன சமாந்தர நாண்கள். $\angle$ **வமய**, $\angle$ **கமப** என்பன சமமானவை அல்லது மிகைநிரப்புகின்றவை என நிறுவுக.

57*

1. **கமப** என்பது ஒரு சமபக்கமுக்கோணம். **மப, பக, கம** என்பவற்றிலே **வ, ய, ந** என்பன **வயந** ஒரு சமபக்கமுக்கோணமாகுமாறு அமைந்துள்ள புள்ளிகள். (i) $\triangle$ **மவந** $\equiv$ $\triangle$ **பயவ**, (ii) **கய** + **கந** = **மப** என நிறுவுக.

2. **கமபத** என்னும் ஒரு நாற்கோணத்தை **கம**=6 ச.மீ., **மப**=5 ச.மீ., **பத**=4 ச.மீ., $\angle$**கமப**=110°, $\angle$ **மபத**=95° ஆகுமாறு வரைக. **கம** வை அடியாகக் கொண்டு **மப** விலே உச்சிகொள்ளக்கூடிய ஒரொத்த முக்கோணத்திற்கு அதை ஒடுக்குக. அதன் பரப்பினைக் காண்க.

3. ஓரரைவட்டம் **கயநம** வின் விட்டம் **கம** ; **நய** வும் **மக** வும் நீட்டப்பட்டபொழுது **வ** விலே சந்திக்கின்றன. $\angle$ **யமந**=36°, $\angle$ **கவய** = 20° எனின் $\angle$ **நயம** வைக் காண்க.



உருவம் 779

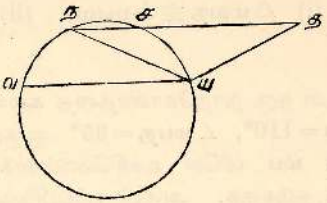
4. உரு 779 இல் **நவயச** என்பது வட்டங்கள் **பவநம, பயசத** என்பவற்றை வெட்டும் ஒரு நேர்கோடாகும். **மபத** என்பது ஒரு நேர்கோடு. **மவ, தச** என்பன **க** விலே சந்திக்கின்றன. **கம**=**கத** எனின் **பந**=**பய** என நிறுவுக.

58*

1. நாற்கோணம் **கமபத** வில் $\angle$ **தகம** = $\angle$**கமப** = 60°, $\angle$ **கதப** = 90°. **கம** + **மப** = 2**கத** என நிறுவுக.

2. **ந, வ** என்பன $\triangle$ **கமப** வின் பக்கங்கள் **கப, கம** ஆகியவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள். **மந** என்பது **பவ** ஐ **ய** இலே வெட்டினால் முக்கோணங்கள் **மயப, பகய, கமய** என்பன பரப்பிற் சமமென நிறுவுக.

3. ஒரு வட்டத்தினுடைய இரு சமாந்தர நாண்கள் **கம, பத** என்பன 1 அங். இடைவெளி கொண்டுள்ளன. **கம** = 4 அங்., **பத** = 6 அங். வட்டத்தினுடைய ஆரையை 1/10 அங்குலத்திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.



உருவம் 780

4. உரு 780 இல் **வய, நச** என்பன வட்டத்தினுடைய சமாந்தர நாண்கள். **நச** என்பது **த** விற்கு **யந**=**யத** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **சத**=**வய** என நிறுவுக.

மீட்டல் வினாத்தாள்கள் 59 – 66 (தேற்றம் 1–57)

(ஒரு பரிதியிலுள்ள புள்ளிகள், சமமான விற்கள் என்பவற்றிற்குரிய சோதனைகளும் அடங்கும்)

59

1. **கமபத** ஓரிணைகரம். **மபச, தபந** என்பன அதற்கு வெளியேயுள்ள சமபக்கமுக்கோணங்கள்.
   (i) △**கதந** ≡ △**சமக** என நிறுவுக.
   (ii) **கத** என்பது **ய** விற்கு நீட்டப்பட்டால் ∠**யதந** = ∠**நகய** – ∠**நகச** என நிறுவுக.
   (iii) ∠**நகச** = 60° என நிறுவுக.
   (iv) **நக** = **நச** என நிறுவுக.

2. **கமபத** என்பது 3 அங். × 4 அங். அளவுகொண்ட ஒரு செவ்வகம்; 1 அங். விட்டங்கொண்ட ஒரு நாணயம் ஒன்று செவ்வகம் உள்ள தளத்திலுள்ளது; நாணயம் செவ்வகத்தை வெளிப்புறமாக ஒருமுறை சுற்றிவரச் செய்யப்பட்டது. அதன்மையம் சென்ற தூரம் எவ்வளவு?

3. △**கமப** வைச் சுற்றிவரையப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் **ய** வாகும். △**கமப** வின் ஒருபரம் **கத**. ∠**மகத** வை **கய** இருசமக்கூறிடின் ∠**கபம** – ∠**கமப** = 1/3 ∠**மகப** என நிறுவுக.

4. **கமபத** என்பது **ம, ப** க்களிற் செங்கோணமாயுள்ள ஒரு நாற்கோணம். **கத** விற்குச் செங்குத்தாயுள்ள ஒரு கோடு **கத, மப** ஆகியவற்றை **வ, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. ∠**மவப** = ∠**கயத** என நிறுவுக.

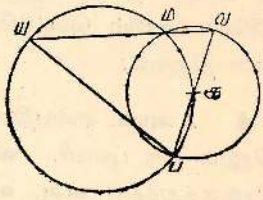
60

1. ஒரு சமபக்கமுக்கோணம் **கமப** வின் பக்கம் **மப** என்பது **த** விற்கு **பத=3மப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **கத²=13கம²** என நிறுவுக.

2. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். ∠**கமப**+∠**கதப**=180° எனின் **கப, மத, கம** என்பவற்றினுடைய இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

3. உரு 781 இல் வட்டம் **மபவ** வின் மையம் **க. வமய** ஒரு நேர்கோடு. **யவ=யப** என நிறுவுக.

வட்டம் **மபய** வின் மையத்தினுடைய நிலையைப்பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?



உருவம் 781

4. **கமபத** ஒரு செவ்வகம். **ப** விற்கூடாக **கப** விற்குச் செங்குத்தாயுள்ள ஒரு கோடு நீட்டப்பட்ட **கம, பத** க்களை **வ, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. புள்ளிகள் **வ, ம, த, ய** ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

61

1. △**கமப** வின் பக்கங்கள் **கம, கப, மப** வினுடைய நடுப்புள்ளிகள் **ச, ந, த** என்பனவாகும். **மப** விலே **வ, ய** என்பன **மவ**=$\frac{1}{4}$ **மப**=1/3 **மய** ஆகுமாறு அமைந்த புள்ளிகளாகும். (i) **கத** விற்கு **வச** சமாந்தரம் என நிறுவுக; (ii) **வச=யந** என நிறுவுக.

2. **கமபத** என்பது ∠**மகத**=127°, ∠**மபத**=53°, ∠**கமத**=31° ஆக வமைந்த ஒரு நாற்கோணம். ∠**கபம** வைக் கணிக்க.

3. வட்டம் **கமதப** வினுடைய சமமான நாண்கள் **கம, கப** ஆகும். **மத=மப. மக** வும் **தப** வும் நீட்டப்பட்டபோது **ச** விலே சந்திக்க, **மப** வை **கத** வானது **அ** விலே வெட்டினால் △**பகச**, △**அபத** ஒன்றுக்கொன்று சமகோணங்களானவை என நிறுவுக.

4. **க, ம, ப, வ, ய, ந** என்பன வட்டம் **கமவபயந** என்பதிலே ∠**கமப** வும் ∠**வயந** வும் செங்கோணங்களாகுமாறு உள்ள புள்ளிகளாம்; **கவ** என்பது **பந** விற்குச் சமமுஞ் சமாந்தரமுமானது என நிறுவுக.

62

1. **கமபத** ஒரு சதுரம். **வ** என்னும் புள்ளி **கம** விலே **கவ**=$\frac{1}{3}$ **கம** ஆகுமாறுள்ளது; **வப** விலே **ய** என்னும் புள்ளி **வய**=$\frac{1}{3}$ **வப** ஆகுமாறுள்ளது. **கவயத**=$\frac{1}{9}$ **கமபத** என நிறுவுக.

2. ஒரொருவட்ட நாற்கோணம் **கமபத** வினுடைய பக்கம் **கம** ஆனது **ந** விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠ **தமந**=140°, ∠ **கதப** = 100°, ∠ **கபம**=45°. ∠ **மகப** வையும் ∠ **பகத** வையுங் காண்க.

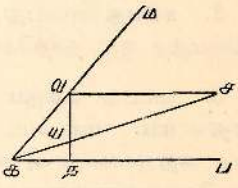
3. ஒரு வட்டத்தின் சமமான நாண்கள் **கம, கப** ஆகும். **மப** என்பது **த** விற்கு **பத**=**பக** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டது. **தக** என்பது வட்டத்தை **ந** விலே மீண்டும் வெட்டுகின்றது. ∠**கமப** வை **மந** இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

4 ∠ **அயஉ** என்பதின் இருசமவெட்டி **யஇ** ஆகும் ; **வ** என்பது யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **வ** விலிருந்து **யஅ, யஇ, யஉ** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **வஅ, வஇ, வஉ** என்பன. **அஇ** = **இஉ** என நிறுவுக. (**யவ** விலே அதை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தை வரைக.)

63

1 உரு 782 இல் **வந** என்பது **கப** விற்குச் செங்குத்து **கப** விற்கு **வச** சமாந்தரம் ; **யச** = 2**கவ**. ∠ **பகச** = $\frac{1}{3}$ ∠ **பகம** என நிறுவுக. (**யச** வினது நடுப்புள்ளி **த** எனின், **தவ** = **தய** = **தச**.)

2. நாற்கோணம் **கமபத** வில் **கம**=5 அங்., **மப** = 12 அங்., **பத**=7 அங்., ∠ **கமப** = ∠ **மபத** = 90°; **மப** விலே **வ** என்னும் புள்ளி ∠ **கவத**=90° ஆகுமாறுள்ளது எனின் **மவ** வினுடைய நீளத்தைக் கணிக்க. (இரு விடைகள்.)



உருவம் 782

3. **வகம, வமப, வபக** என்பன சமமில்லா மூன்றுவட்டங்கள். வட்டம் **வமப** வினுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **த** விலிருந்து **தம, தப** என்னுங் கோடுகளானவை வட்டங்கள் **வமக, வபக** என்பவற்றை மீண்டும் **அ, இ** என்பவற்றிலே சந்திக்குமாறு வரைந்து நீட்டப்பட்டுள்ளன. **அகஇ** ஒரு நேர் கோடு என நிறுவுக.

4. வட்டம் **கமபத** வின் சமமான நாண்கள் **கம, மப, பத** என்பன வாகும். **கத** என்பது **ந** விற்கு **தந**=**தப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

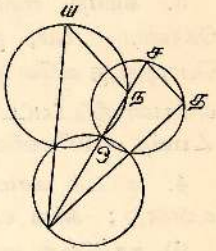
(i) **பந** = **பக** என நிறுவுக.

(ii) **மத** விற்கு **பந** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

64

1. △கமப வில் ∠கபம=90°, கப=2 பம ; பத ஒருயரம். பக்கம் 329 இலுள்ள பைதகரசின்றேற்றத்து உருவினைப் பயன்படுத்தி கத=4தம என நிறுவுக.

2. ப வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் இருநாண்கள் கம, தப என்பன ந விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. ∠பமந=75°, ∠பநம = 22°, ∠கபத = 144°. ∠கபம = ∠மகப என நிறுவுக.



உருவம் 783

3. உரு 783 இல் சத விற்கு யந சமாந்தரமென நிறுவுக.

4. ஒரு வட்டத்திலே 5 புள்ளிகள் க, ம, ப, த, ந என்பன நாண்கள் கம வும் கந வும் சமமாகுமாறு ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்டுள்ளன. கப வும் கத வும் மந வை அ, இ க்களிற் சந்தித்தால் ப, அ, இ, த என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக. (பந, பத களை இணைக்க.)

65*

1. கமபத என்பது கம=7 அங்., பத=11 அங்., ∠மகத = ∠கதப=90°, ∠மபத=60° ஆகுமாறுள்ள ஒரு நாற்கோணம். கப வைக் கணிக்க. (பத விற்கு ம விலிருந்துள்ள செங்குத்து மந எனின் மப = 2நப ஆகும் ; ஏன் ?)

2. வட்டங்கள் பதவ, பதய என்பவற்றினுடைய மையங்கள் க, ம க்களாகும் ; வயப ஒரு நேர்கோடாகும். ∠கவத = ∠மயத என நிறுவுக. (தந, தம, தப என்பவற்றை இணைக்க.)

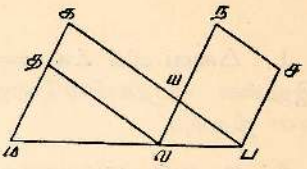
3. கமபத ஒரு வட்டம். வில் கமப = $\frac{1}{4}$ வில் கதப எனின் ∠கதப வைக் காண்க.

4. சதுரம் கமபத வின் பக்கம் பத என்பது ந விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. பத விலே வ என்பது யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. வ விலிருந்து வம விற்குச் செங்குத்தான கோடு ∠கதந வின் இருசமவெட்டியை ய விலே வெட்டுகின்றது. மவ = வய என நிறுவுக. (ம, வ, த, ய என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.)

66

1. உரு 784 இல் மக விற்கு வந என்பது சமமுஞ் சமாந்தரமுமாகும் ; வயகத வும் பயநச வும் இணைகரங்கள். அவற்றின் பரப்புக்கள் சமமென நிறுவுக. (கந, கவ, நப என்பவற்றை இணைக்க.)

2. **கநம** என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். அது ஒரு நாண் **வநய** விற்குச் செங்குத்தானது **கந = உ, வய = அ ; கம** வை **அ, உ** க்களிற் காண்க.



உருவம் 784

3. **கமபத** என்பது ஒரொருவட்ட நாற் கோணம். **கம, தப** என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது **ந** விலே சந்திக்கின்றன. **கத, மப** என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது **வ** விலே சந்திக்கின்றன. **∠ மநப = 20°, ∠ பவத = 40°** எனின் **∠ தகம** வைக் காண்க.

4. வட்டம் **கசமத** வின் மையம் **ப** வானது வட்டம் **கபமவ** விலே உள்ளது ; **கசவ** வும் **வமத** வும் நேர்கோடுகள்.

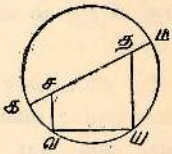
(i) **கச = மத** எனவும், (ii) **சத = கம** எனவும் நிறுவுக. (**பக, பச, பம, பத** என்பவற்றை இணைக்க.)

மீட்டல் வினத்தாள்கள் 67–74 (தேற்றம் 1–63)

(தொடுகோட்டின் பண்புகளும் அடங்கும்)

67

1. உரு 785 இல் **கம** ஒரு விட்டம் ; **∠ சவய = ∠ தயவ = 90°. கச = மத** என நிறுவுக. (மையத்திலிருந்து **வய** விற்குச் செங்குத்தைக் கீறுக.)



உருவம் 785

2. ஒரு வட்டம் **கமப** வின் ஒரு நாண் **கயம. க** விலுள்ள தொடுகோட்டிலே ஒரு புள்ளி **த ; ம** விலே உள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **தய** வை **வ** விலே சந்திக்கின்றது ; **∠ கதய = 35°, ∠ மயத = 115°. ∠ மவத** வைக் காண்க.

3. **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுடைய சிறுவில் **கவப ; கயஓப** என்பது பிறிதொரு வட்டவில்லாகும். **∠ கவப = ∠ வகய + ∠ வபய** என நிறுவுக.

4. ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண் **கம ; க** விலேயுள்ள தொடுகோடு **கத. ∠ மகத** வை இருசமக்கூறிடும் ஒருநாண் **கப. கப = பம** என நிறுவுக.

68

1. **கமபத** ஓரிணைகரம். **பத** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ. வம, பம, கத** என்பன **கம** விற்குச் சமாந்தரமான யாதாயினும் ஒரு கோட்டை **இ, உ, எ** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றன. நாற்கோணம் **தபஉஎ = 2 △ கவஇ** என நிறுவுக.

2. **கம, பத** என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்களாகும் ; **கவ, பய** என்பன **க, ப** என்பனவற்றிலிருந்து முறையே **பத, கம** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்களாகும். **மத** விற்கு **வய** சமாந்தரமென நிறுவுக. (**கப** வை இணைக்க.)

3. இருவட்டங்களினுடைய ஆரைகள் 2 ச.மீ., 5 ச.மீ. ஆகும். அவற்றின் மையங்களுக் கிடையிலுள்ள தூரம் 9 ச.மீ. ஆகும். அகப்பொது, புறப்பொதுத் தொடுகோடுகளினுடைய நீளங்களைக் கணிக்க.

4. **கம** என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் ; **கப** யாதாயினும் ஒருநாண் ; வில் **மப** வினது நடுப்புள்ளி **வ**. **கப** என்பது **வ** விலே உள்ள தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

69

1. $\triangle$ **கமப** வில் $\angle$ **கமப** $= 90°$, $\angle$ **மகப** $= 45°$. $\angle$ **கபம** வின் இருசமவெட்டி **கம** வை **வ** விலே சந்திக்கின்றது. **கவ**$^2 =$ 2**வம**^{2} என நிறுவுக. (**கப** விற்குச் செங்குத்தாக **வந** வை வரைக.)

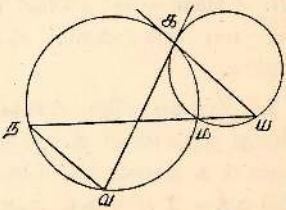
2. $\triangle$ **கமப** வின் பக்கங்கள் **மப, பக, கம** என்பவற்றை **அ, இ, உ** என்பவற்றிலே தொடக்கூடியதாக ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. $\angle$ **ம** $= 36°$, $\angle$ **ப** $= 66°$ எனின் $\angle$ **இஅஉ** வைக் கணிக்க.

3. வட்டம் **கமவப** என்பது வட்டம் **கமய** வின் மையம் **ப** விற்கூடாகச் செல்கின்றது. **கவய** ஒரு நேர்கோடு. (i) **வம** $=$ **வய** என நிறுவுக. (ii) நீட்டப்பட்ட **பவ** வானது **மய** வைச் செங்கோணமாக இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. (**கப, மப** என்பவற்றை இணைக்க.)

4. **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் **கஓம**. **ம** விலுள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட யாதாயினும் ஒருநாண் **கவ** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. $\angle$ **கதம** $=$ $\angle$ **ஓவம** என நிறுவுக.

70

1. **கமபத** ஓரிணைகரம்; **கம, பம** என்பன **அ, இ** க்களுக்கு நீட்டப்பட்டுள்ளன. $\angle$ **அமஇ** என்பதற்கிடையிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ**. $\triangle$ **வபத** $-$ $\triangle$ **வகம** $=$ $\triangle$ **கமப** என நிறுவுக.



உருவம் 786

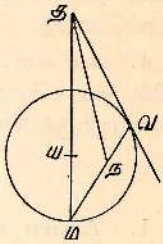
2. உரு 786 இல் வட்டங்கள் **கமய, கமவந** என்பவற்றினுடைய தொடுகோடுகள் **கவ, கய** என்பன. **யமந** ஒரு நேர்கோடு. **கப** விற்கு **நவ** சமாந்தரமென நிறுவுக.

3. ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு சதுரம் **கமபத** ; சிறுவில் **கம** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ**. $\angle$ **கவம** $= 3 \angle$ **மவப** என நிறுவுக.

4. வட்டம் **கதமப** வின் ஒரு விட்டம் **தந**. அது நாண் **மப** விற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது. **கம > கப** எனின் $\angle$ **தமக** $= \frac{1}{2}$ ($\angle$ **கபம** $-$ $\angle$ **கமப**) என நிறுவுக.

71

1. **கமப** ஒரு முக்கோணம். **கவயம, கஅஇப** என்பன $\triangle$ **கமப** விற்கு வெளியேயுள்ள சதுரங்கள். **மஅ** விற்கு **வப** செங்குத்து என நிறுவுக.



உருவம் 787

2. **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண் **வந**. **வ** விலேயுள்ள தொடுகோட்டிலேயுள்ள ஒரு புள்ளி **த**. **ஓத** வானது **வந** வை **ய** விலே வெட்டுகின்றது. **தவ = தய** எனின் $\angle$ **நஓத** $= 90^\circ$ என நிறுவுக.

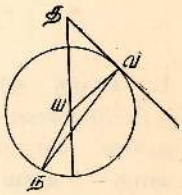
3. **ஓ** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு நாற்கோணம் **கமபத**. $\angle$ **மகத** வை **கப** இருசமக்கூறிடுகின்றதெனில் **மத** விற்கு **ஓப** செங்குத்தென நிறுவுக.

4. உரு 787 இல் **ய** வை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு ஒரு தொடு கோடு **தவ**. $\angle$ **யதவ** வை **தந** இருசமக்கூறிடுகின்றது. $\angle$ **தநவ** $= 45^\circ$ என நிறுவுக.

72

1. **கமபத** ஒரிணைகரம்; **கத** வினது நடுப்புள்ளி **வ**. **கம** என்பது **ய** விற்கு **கம = மய** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **கயபத** $= 2 \triangle$ **வயத** என நிறுவுக.

2. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலே **கம** என்பது $\angle$ **கயம** விரிகோணமாகுமாறு உள்ள ஒரு நாண்; **பக** விற்குச் சமாந்தரமாகவுள்ள ஒரு நாண் **மப**. $\angle$ **யகம** $= அ^\circ$ எனின் **ம** விலுள்ள தொடுகோட்டுடன் **மப** அமைக்கும் கூர்ங்கோணத்தை **அ** இற்காண்க.



உருவம் 788

3. $\triangle$ **கமப** வில் $\angle$ **மகப** $= 90^\circ$; **கம < கப**; **மப** வினது நடுப்புள்ளி **த**. ஒருவட்டம் **மப** வை **த** விலே தொட்டு **க** விற்கூடாகச் சென்று **கப** வை மீண்டும் **ந** விலே வெட்டுகின்றது. வில் **கத** $= 2$ வில் **தந** என நிறுவுக.

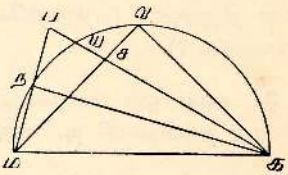
4. உரு 788 இல் **ய** வை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு ஒரு தொடு கோடு **தவ**. **வந** வும் **வத** வும் **தய** வோடு சமமானகோணத்திற் சாய்ந்துள்ளன; $\angle$ **நயத** $= 3 \angle$ **வயத** என நிறுவுக.

73*

1. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். **பத** விற்கு **கம** சமாந்தரம். **மவ, பவ** என்பன முறையே **கப, கத** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக **வ** விலே சந்திக்குமாறு கீறப்பட்டுள்ளன. △**வதப** = △**கமத** என நிறுவுக.

2. △**கமப** வில் **கம** = **கப** ; **மப** வினது நடுப்புள்ளி **த**. வட்டம் **கதப** விற்கு **த** விலே உள்ள தொடுகோடு **கம** விற்குச் செங்குத்து என நிறுவுக. (**த** வை **க** விற்கு இணைக்க.)

3. 2 அங்., 6 அங். ஆரைகள் கொண்ட இருவட்ட உருளைகள் அவற்றின் அச்சுக்கள் சமாந்தரமாக அமையுமாறு ஒரு நீள்சத்தியுடைய கயிற்றினால் இறுக்கிக் கட்டப்படுள்ளன. கயிற்றினுடைய நீட்டப்பட்ட நீளத்தைக் காண்க.



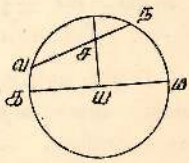
உருவம் 789

4. உரு 789 இல் அரைவட்டம் **கவயநம** வின் விட்டம் **கம**. **கசயப** என்பது **கம** = **கப**, **சய** = **யப** ஆகுமாறுள்ள ஒரு நேர்கோடு. ∠ **மகந** = ∠ **நகய** = ∠ **யகவ** என நிறுவுக. (**மய** வை இணைக்க.)

74*

1. **கமவ, கமய** என்பன **கம** விற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ள ஒத்த முக்கோணங்கள். **வந** என்பது **மய** விற்குச் சமாந்தரமாக **கம** வை **ந** விலே சந்திக்குமாறு வரையப்பட்டுள்ளது. **வம** விற்கு **யந** சமாந்தரமென நிறுவுக.

2. ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம் **கமப**. **மந, பவ** என்பன △**கமப** வின் உயரங்கள். **க** விலேயுள்ள தொடு கோட்டிற்கு **நவ** சமாந்தரமென நிறுவுக.



உருவம் 790

3. **யமப** என்னும் ஒரு நேர்கோடு **யம** = 9 அங்., **மப** = 8 அங். ஆகுமாறுள்ளது. **யம** விற்கு **யக** செங்குத்தாகக் கீறப்பட்டுள்ளது. **ப** வை மையமாகவும் **பம** வை ஆரையாகவுங்கொண்ட வட்டத்தையும் **ய, ம** என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையிலே **யம** வையுந் தொட்டு **யக** வையுந் தொடும் வட்டத்தின் ஆரையைக் கணிக்க.

4. உரு 790 இல் **ய** வட்டத்தினது மையம். **வச** = **கய**, ∠ **கயச** = 90°. வில் **மந** = 3 வில் **கவ** என நிறுவுக.

மீட்டல் வினாத்தாள்கள் 75–80 (தேற்றங்கள் 1–69)

(பைதகரசின் விரிவு, நாண்களின் துண்டுகள் ஆகியவையும் அடங்கும்)

75

1. ஒரு நாற்கோணத்தின் ஒவ்வொரு மூலைவிட்டமும் அதன் பரப்பை இருசமக்கூறிடும் எனின் நாற்கோணம் ஓரிணைகரம் என நிறுவுக.

2. ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம் **கமப**. **கப** விற்கு சமாந்தரமான ஒரு கோடு **மப** வை **வ** விலே வெட்டி தொடுகோடு **கத** வை **த** விலே வெட்டுகின்றது. $\angle$ **கவப** $=$ $\angle$ **மதக** என நிறுவுக. (எந்நாற்கோணத்தை வட்டமானது என நீர் நிறுவல் வேண்டும் ?)

3. **கமப** ஒரு சமபக்கமுக்கோணம் ; **மப** வினது நடுப்புள்ளி **த**, **பத** வினது நடுப்புள்ளி **ந**. **கந**$^2 = 13$ **நப**^{2} என நிறுவுக.

4. ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி **அ** விலிருந்து வட்டத்தை **க**, **ம** க்களில் வெட்டும் ஒரு கோடு **அகம** கீறப்பட்டுள்ளது. **அ** விலிருந்து வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு **அத**. **கம** $= 12$ அங்., **கஅ** $= 4$ அங். எனின் **அத** வினது நீளத்தைக் காண்க.

76

1. அ அல்லது இ என்பது பூச்சியமாயிருந்தாலன்றி (அ + இ)^2 என்பது அ^2 + இ^2 என்பதற்குச் சமமாகாது என்பதை விளக்கிக் காட்டுவதற்கு ஒருரு வரைக.

2. **வய**, **வந** என்பன ஒரு வட்டத்தினுடைய சமமான நாண்கள் ; **வய** வும் **ந** விலுள்ள தொடுகோடும் **த** விலே சந்திக்கின்றன. $\angle$ **வநய** $= 60^\circ \pm \frac{1}{3} \angle$ **வதந** என நிறுவுக. (**த** என்பது நீட்டப்பட்ட **யவ** விலோ நீட்டப்பட்ட **வய** விலோ இருக்கும்.)

3. ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம் **வயந**. **வய** $=$ **வந** $= 15$ ச.மீ., **யந** $= 18$ ச.மீ. எனின் வட்டத்தின் விட்டத்தைக் கணிக்க. வட்டத்தைச் செம்மையான அளவுத்திட்டத்திற்கு வரைந்து விட்டத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

4. **பக**, **பம** என்பன ஒரு வட்டத்தினுடைய நிலையான ஈராரைகள் ; வட்டத்தின் பரிதியிலே **வ** என்பது ஒரு மாறும் புள்ளி. **வய**, **வந** என்பன **வ** விலிருந்து **பக**, **பம** என்பவற்றிற்குச் செங்குத்துக்கள். **யந** என்பது மாறாத நீளமுடையது என நிறுவுக. (**பவ** மேல் அதை விட்டமாக வுடைய வட்டத்தை வரைக.)

77

1. (1, உ), (3,1), (5, உ), (3,5) என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளானால் உ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. △கமப என்பதை மப = 9 ச.மீ., பக = 8 ச.மீ., கம = 5 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைந்து மப விலே த என்னும் ஒரு புள்ளியை மத = 7 ச.மீ. ஆகுமாறு எடுக்க. நீட்டப்பட்ட மக விலே அ என்னும் ஒரு புள்ளியை △தமஅ = △பமக ஆகுமாறு அமைக்க. மஅ வை அளக்க.

3. ஒரு கூர்ங்கோணமுக்கோணம் கமப வின் உயரங்கள் கத, மந, பவ என்பன ச விலே சந்திக்கின்றன. (i) ∠வதச, ∠மகப வினது நிரப்பி என நிறுவுக. (ii) △கவந வின் சுற்றுமையம் ய எனின் த, வ, ய, ந என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

4. 9 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தினுடைய மையம் ய விலிருந்து 7 ச.மீ. தூரத்திலுள்ளது ஒரு புள்ளி அ; கஅம என்னும் வட்டத்தினுடைய நாண் கஅ = 2 அம ஆகுமாறுள்ளது. கம வினது நீளத்தைக் காண்க.

78

1 கமபத ஒரு நாற்கோணம். அதில் மப விற்குச் சமாந்தரம் கத. பத வினது நடுப்புள்ளி வ எனின் △கவம = $\frac{1}{2}$ நாற்கோணம் கமபத என நிறுவுக. (வ விற் கூடாகவும் மக விற்குச் சமாந்தரமாகவும் மப, கத ஆகியவற்றை அ, இ க்களில் வெட்டக்கூடியதாகவும் அவஇ யை வரைக.)

2. ஒரு வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள் வ, ய என்பவற்றிலுள்ள தொடுகோடுகள் த விலே சந்திக்கின்றன. தய விலும் நீட்டப்பட்ட தய விலும் முறையே ச, ந என்ற புள்ளிகள் △சவந வை வய இருசமக்கூறிடுமாறு எடுக்கப்பட்டுள்ளன. ∠சவத = ∠வநத என நிறுவுக.

3. △கமப வில் கம = கப = 9 ச.மீ., மப = 12 ச.மீ ; மப என்பது இ, உ க்களில் முச்சமக் கூறிடப்பட்டுள்ளது. கஇ யினது நீளத்தைக் கணிக்க.

4. கமப என்பது ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். ப விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட கம வை ந விலே சந்திக்கின்றது. மந = $\frac{2}{3}$ பந எனின் மந = $\frac{4}{5}$ கம என நிறுவுக.

79

1. க, ம, ப என்பவற்றினுடைய ஆள்கூறுகள் முறையே (3, 4), (2, 1), (5, 2). கமபத ஓரிணைகரம். மத வை கப என்பது ந விலே வெட்டுகின்றது. (i) ந வின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. (ii) த வின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

2. கூர்ங்கோணமுக்கோணம் **கமப** வின் உயரங்கள் **மந, பவ** என்பன ; **கம** வினது நடுப்புள்ளி **உ**. ∠**உநவ** = ∠**கமப** ~ ∠**மகப** என நிறுவுக. ∠**மகப** விரிகோணமாயிருந்தால் அதன் விளைவு என்ன ?

3. **தவ, தய** என்பன **த** என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடுகள். நாண் **வய** வினது நடுப்புள்ளி **க** ஆகும். **தய** வினது நடுப்புள்ளி **ச** ஆகும். **வச** என்பது வட்டத்தை **ந** விலே வெட்டினால் **ய, க, ந, ச** ஒருபரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

4. ஒரு நேர்கோடு **அஇ** யை வரைக. **அஇ** யின் ஒரே பக்கத்தில் இரு புள்ளிகள் **க, ம** என்பவற்றை **அஇ** யிலிருந்து அவற்றின் தூரங்கள் முறையே 1 அங்., 2 ½ அங். ஆகுமாறும் **கம** = 3 அங். ஆகுமாறும் அமைக்க. **க, ம** க்களுக்கூடாகச் சென்று **அஇ** யைத்தொடும் இருவட்டங்களுட் சிறியதை அமைக்க.

80

1. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் **தப** விற்கு **கம** சமாந்தரம். **கப**^{2} + **மத**^{2} = **கத**^{2} + **மப**^{2} + 2**கம** . **தப** என நிறுவுக. (**கம** விற்குச் செங்குத்தாக **தச, பந** என்பவற்றை வரைக.)

2. ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; △**கமப** வினுள் யாதாயினும் ஒருபுள்ளி **ந** ; **கந, மந, பந** நீட்டப்பட்டபொழுது வட்டத்தை மீண்டும் **அ, இ, உ** என்பவற்றிற் சந்திக்கின்றன. ∠**இஅஉ** = ∠**மநப** − ∠**மகப** என நிறுவுக.

3. △**கமப** வில் **மப** = 26 ச.மீ., **பக** = 17 ச.மீ., **கம** = 21 ச.மீ.; **மப** வினது நடுப்புள்ளி **த** ; **கத** வினது நடுப்புள்ளி **ந**. **கத, மந** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் கணிக்க.

4. △**கமப** வில் **பக** = 5 அங்., **பம** = 12 அங்., ∠**கபம** = 90° ; **ஒ** மையமாக 9 அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டமானது **க** என்பது **பம** விற்கு எப்பக்கத்தில் உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் அமையுமாறும் **பம** வை **ம** விலே தொடுமாறுங் கீறப்பட்டுள்ளது. அவ்வட்டம் **கம** வை மீண்டும் **த** விலே வெட்டினால் **கஒ, மத** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் கணிக்க.

பகுதி III

ஒத்த உருவங்கள்

விகிதம்

இருநேர்கோடுகளினுடைய நீளங்கள் 4 ச.மீ. உம் 6 ச.மீ. உம் எனின் முதலாவதினுடைய நீளம் இரண்டாவதினுடைய நீளத்தில் $\frac{4}{6}$ அல்லது $\frac{2}{3}$ எனப்படும். முதலாவது கோடு இரண்டாவது கோட்டினுடைய நீளத்திற்கு கொண்டுள்ள விகிதம் 2, 3 இற்கு என ஆகும். இது 2 : 3 என எழுதப்படும். இவ்விதம் $\frac{2}{3}$ என்னும் பின்னத்தாற் குறிக்கப்படும்.

விகிதங்களை இயலுமான அளவில் எளிதாகச் சொல்லல் வேண்டும்; எவ்வாறு $\frac{20}{25}$ என்னும் பின்னம் $\frac{4}{5}$ என்பதற்குச் சமமாகுமோ அவ்வாறே 20 : 25 என்னும் விகிதமும் 4 : 5 என்பதற்குச் சமமாகும். ஒரு விகிதத்திலுள்ள எண்களோ கணியங்களோ இரண்டும் ஒரே எண்ணினாற் பிரிக்கப்பட்டாலும் அல்லது பெருக்கப்பட்டாலும் அவ்விகிதம் மாற்றமுறாது.

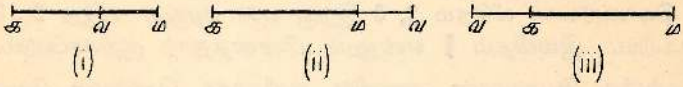
ஒரே இனமான இருகணியங்களினுடைய பருமன்களின் ஒப்பீடே விகிதமாகும். 10 ரூபா வுடன் 5 கொத்தையும் அல்லது 6 அங்குலத்துடன் 4 சதுர அங்குலத்தையும் ஒப்பிடுதல் கருத்தற்றதாகும்.

இரு கணியங்கள் ஒரு பொது அளவையுடையனவேல் அவற்றின் விகிதத்தை இருமுழுவெண்களின் விகிதமாகக் கூறலாம். உதாரணமாக இரு கோடுகளினுடைய நீளங்கள் 2·56 அங்., 1·12 அங். எனக்கொடுக்கப்பட்டுளதெனின், $\frac{2\cdot56}{1\cdot12}=\frac{256}{112}=\frac{16}{7}$ ஆதலால், அவற்றினுடைய நீளங்களின் விகிதம் 16 : 7 ஆகும். இங்கு பொது அளவை $\frac{1}{100}$ அங். என எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆனால் பொதுவளவில்லா நீளமுடைய சோடிக்கோடுகளை நாம் பலவிடங்களில் காண்கின்றோம். ஒரு சதுரத்தின் பக்கம் 1அங். எனின் மூலைவிட்டம் $\sqrt{2}$ அங். ஆகும், (பைதகாசு); இவ்விரு நீளங்கட்கும் பொது அளவு கிடையாது; அவை **பொதுவளவில்லாதன** எனப்படும். இவற்றின் விகிதத்தினின்றும் நாம் விரும்பிய அளவு மிகச் சிறிய அளவிலேயே வித்தியாசப்படும் ஒரு விகிதத்தை நாம் காணல் முடியுமெனினும் இத்தகைய நீளங்களின் விகிதத்தை இருமுழுவெண்களின் விகிதமாகக் கூறல் முடியாது. பொதுவளவில்லாக் கணியங்களின் விகிதம் பற்றிய தேற்றங்களின் முறைமையான நிறுவல்கள் மிக்ககடினமானவை. எனவே எல்லாப் பொதுவளவுள்ள விகிதங்கட்குமாக ஒரு தேற்றம் நிறுவப்பெற்றால் விகிதங்கள் பொதுவளவில்லாதனவாயினும் அது உண்மையானதென நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

19—J. N. B 61929 (12/56)

ஒரு கோட்டின் துண்டுகளின் விகிதம்

வ என்பது, **கம** விலோ நீட்டப்பெற்ற **கம** விலோ நீட்டப்பெற்ற **மக** விலோ உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி எனின் **வக** வும் **வம** வும் கோடு **கம** வின்றுண்டுகள் எனப்படும்; 489 ஆம் பக்கம் பார்க்க; கோடு **கம** என்பது **வ** விலே **கவ : வம** என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது எனப்படும்.



உருவம் 791

உரு 791 (i) ஐப் பார்க்க; **வ** என்பது **க** விற்கும் **ம** விற்கும் இடையில் இருந்தால் கோடு **கம** வென்பது **வ** விலே **கவ : வம** என்ற விகிதத்தில் **உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது** எனப்படும்.

உரு 791 (ii) (iii) ஐப் பார்க்க; **வ** என்பது நீட்டப்பட்ட **கம** விலோ நீட்டப்பட்ட **மக** விலோ இருக்கின்றதெனின், கோடு **கம** வென்பது **வ** விலே, **கவ : வம** என்ற விகிதத்தில் **வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது** என்கிறோம்.

எல்லா வகைகளிலும் முழுக்கோடு **கம** வானது **கம** வின்றுண்டுகளின் விகிதமான **கவ : வம** வில் தோன்றுததை நாம் நன்கு கவனித்தல் வேண்டும். உகந்தது எனக் கருதினால் திசைகொண்ட நீளங்கள், நேரான எதிரான விகிதங்கள் ஆகியவை பற்றிய உரையாடலால் இவ்வரைவிலக் கணத்தை வலியுறுத்தலாம்.

விகிதசமம்

அ, இ, உ, எ என்னும் நான்கு கணியங்கள் அ : இ = உ : எ என்றவாறிருந்தால் அப்பொழுது அ, இ, உ, எ என்பன **விகிதசமமானவை** எனப்படும்.

இவ்வாறே, அ, இ, உ, எ என்பன விகிதசமமானவையெனின் $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ ஆகும். அப்பொழுது எ என்பது அ, இ, உ விற்கு **நாலாம் விகிதசமன்** எனப்படும்.

அ, இ, உ என்னும் மூன்று கணியங்களானவை $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{இ}}{\text{உ}}$ என்ற வகையிலிருப்பின் அ,இ,உ என்பவை **தொடர்விகிதசமமானவை** எனப்படும். அன்றியும், அப்பொழுது உ என்பது அ, இ என்பவற்றிற்கு **மூன்றும் விகிதசமன்** எனப்படும்; இ என்பது அ விற்கும் உ இற்கும் இடையுள்ள **இடைவிகிதசமன்** எனவும்படும். இவ்வாறே இ என்பது அ விற்கும் உ இற்கும் இடையுள்ள இடைவிகித சமன் எனின்

$$\text{இ}^2 = \text{அஉ} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகையால் இ அலகுகள் பக்கமுடைய சதுரம் அ அலகுகள் உ அலகுகள் அளவுள்ள அடுத்துள பக்கங்கள் கொண்ட செவ்வகத்திற்கும் பரப்பிற் சமமெனின் இ என்பது அ விறகும் உ விற்கும் இடையுள்ள இடை விகிதசமன் எனப்படும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ எனின் $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{2\text{அ} - 3\text{உ}}{2\text{இ} - 3\text{எ}}$ என நிறுவுக.

   $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}} = \text{ஒ}$ எனின், அ = இஒ, உ = எஒ. அ விற்கும் உ விற்கும் பிரதியிடுக.

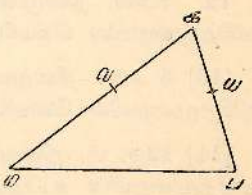
2. $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ எனின் $\frac{\text{அ} + \text{இ}}{\text{அ} - \text{இ}}$ என்பதை, உ,எ என்பவற்றில் எடுத்துச் சொல்க.

3. கோடு **கம** என்பது **வ** என்பதிலே உட்புறமாக, அ : இ என்ற விகிதத்தின்படி பிரிக்கப்பட்டுளது. (i) **வம : கம** என்பதையும் (ii) **கம : கவ** என்பதையும் அ, இ என்பவற்றில் எடுத்துச் சொல்க.

4. உரு 792 இல் $\frac{\textbf{கவ}}{\textbf{வம}} = \frac{\textbf{கய}}{\textbf{யப}}$ எனின்

   (i) $\frac{\textbf{கவ}}{\textbf{கம}} = \frac{\textbf{கய}}{\textbf{கப}}$ என நிறுவுக.

   (ii) $\frac{\textbf{கம}}{\textbf{வம}}$ என்பதற்குச் சமமான விகிதத்தைக் காண்க.



உருவம் 792

5. **கம** என்பது **ந** விலே 5 : 6 என்ற விகிதத்தின்படி உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது; **ய** விலே 5 : 3 என்ற விகிதத்தின்படி வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **ந** என்பது **க** விற்கோ **ம** விற்கோ அண்ணிதாய் உள்ளது? **ய** என்பது **க** விற்கோ **ம** விற்கோ அண்ணிதாய் உள்ளது?

6. பின்வருவன விகிதசமனில் உள்ளனவா ?

(i) $3\frac{1}{3}$, 5, 8, 12 ; (ii) 8 அங்.,6 பாகை, 12 பாகை, 9 அங்.

பயிற்சி 83

பின்வரும் விகிதங்களை இயலுமான அளவில் எளியமுறையிற் சொல்க.

1. 9 அங் : 2 அடி.

[2] 3 செங்கோணங்கள் : 120°.

3. 12 சது. அடி : 2 சது. யார்.

4 – 7 வரை எண்களில் ந வின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. 3 : ந = 4 : 10.

[5] (ந – 5) : (ந + 5) = 3 : 7.

6. 6 : ந = ந : 24.

[7] ந அடி : 5 யார் = 2 : 3.

8 – 10 வரை உள்ள கணக்குக்களில் உள்ள தொடர்புகளை ஒத்தவிகிதங்களில் எடுத்துக்கூறுக.

8. உஎ = நய.

[9] **நக . நம = நத²**.

10. செவ்வகம் **கமபத** = செவ்வகம் **வயநச**.

11. 8 அங். நீளமுள்ள **கம** என்னும் ஒரு கோடு **வ** என்பதில் 2 : 3 விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கவ** வைக் காண்க.

12. 8அங். நீளமுள்ள ஒருகோடு **கம** என்பது **ய** விலே 7 : 3 என்ற விகிதமுறையில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கய** வைக் காண்க.

[13] 6 அங். நீளமுள்ள ஒருகோடு **சம** என்பது **ந** விலே 2 : 7 என்ற விகிதமுறையில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கந** வைக் காண்க.

[14] 12 ச. மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** என்பது **வ** விலே 3 : 5 என்ற விகிதமுறையில் உட்புறமாகவும் **ய** விலே 4 : 9 என்ற விகிதமுறையில் வெளிப்புறமாகவும் **ந** விலே 8 : 3 என்ற விகிதமுறையில் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **வய, வந** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

[15] 8 அங். நீளமுள்ள ஒருகோடு **கம** என்பது 9 : 5 என்ற விகிதமுறையில் **ப** விலே உட்புறமாகவும் **த** விலே வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ய. யப . யத = யம²** என நிறுவுக.

16. 6 அங். நீளமுள்ள ஒருகோடு **கம** என்பது 4 : 1 என்ற விகித முறையில் **ப** விலே உட்புறமாகவும் **த** விலே வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கப் பட்டுள்ளது. **பத** வினது நடுப்புள்ளி **ய**. **கய : மய** என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

17. 6 அங். நீளமுள்ள ஒருகோடு **கம** என்பது **வ** விலே 2 : 1 என்ற விகிதமுறையில் உட்புறமாகவும் **ய** விலே 5 : 2 என்றவிகிதமுறையில் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **வய** என்பது **க, ம** என்பவற்றால் என்ன விகிதங்களிற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என்பதைக் காண்க.

18. **கம** என்னும் ஒருகோடு **வ** விலே உட்புறமாகவும் **ய** விலே வெளிப்புறமாகவும் **உ : எ** என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கம** = 2**இ** அங். எனின் **கவ, கய** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க. **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ஓ** எனின் **ஓவ . ஓய = ஓம²** என நிறுவுக.

[19] **கம** என்னும் ஒருகோடு **ஓ** விலே இருசமக்கூறிடப்பட்டு **வ** விலே **அ : இ** என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **ஓவ : கம** என்ற விகிதத்தை **அ**,**இ** க்களிற் காண்க. (**கம** = 2**எ** அங். ஆகுக.)

20. $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ எனின் (i) **இ : அ** ; (ii) **அ : உ** ; (iii) **இ : எ** என்பவற்றிற்குச் சமமான விகிதங்களைக் கூறுக.

21. $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ எனின் (i) (**அ** + **இ**) : **இ**, (ii) **அ** : (**அ** + **இ**) என்பவற்றிற்குச் சமமான விகிதங்களைக் கூறுக.

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ எனின் எண்கள் 22 – 24 வரை உள்ள தொடர்புகளை நிறுவுக.

22. $\frac{\text{இ}}{\text{அ} - \text{இ}} = \frac{\text{எ}}{\text{உ} - \text{எ}}$.

23. $\frac{\text{அ} + \text{உ}}{\text{இ} + \text{எ}} = \frac{\text{அ} - \text{உ}}{\text{இ} - \text{எ}}$.

[24] $\frac{\text{அ}^2}{\text{இ}^2} = \frac{\text{அ}^2 - \text{உ}^2}{\text{இ}^2 - \text{எ}^2}$

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}} = \frac{\text{ஒ}}{\text{வ}}$ எனின் 25–27 வரை உள்ள எண்களிற் காணப் படும் வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

25. $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{வ}}$.

[26] $\frac{\text{அ} + \text{உ}}{\text{இ} + \text{எ}} = \frac{\text{உ} - \text{ஒ}}{\ldots\ldots}$.

27. $\frac{\text{அ} - 3\text{உ}}{\text{இ} - 3\text{எ}} = \frac{2\text{அ} + 7\text{உ} - 5\text{ஒ}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$.

28. **கமபதந** என்பது **கம : மப : பத : தந** = 1 : 3 : 2 : 5 என ஆகு மாறுள்ள ஒரு நேர்கோடு. (i) **கம : கந**; (ii) **கப : பந**; (iii) **நம : கத** ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க. **மந** என்பது **த** என்பதால் உட்புறமாகவும் **க** என்ப தால் வெளிப்புறமாகவும் எவ்விகிதங்களிற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என்ப தைக் காண்க. **மந** என்பது 4 அங். எனின் **கப** வைக் காண்க.

29. **கமபதநவ** என்னும் ஒரு நேர்கோடு

கம : மப : பத : தந : நவ = அ : இ : உ : எ : ஒ

ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. (i) **கம : கவ**, (ii) **மந : பவ** ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க.

பவ என்பது **க** ஆல் வெளிப்புறமாகவும் **ந** ஆல் உட்புறமாகவும் எவ் விகிதங்களிற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என்பதைக் காண்க. **மத** = அ அங். எனின் **கந** வைக் காண்க.

[30] **கமப** என்பது ஒரு நேர்கோடு. **கப : கம** = இ : 1 எனின் **கம : மப** என்பதைக் காண்க.

[31] **கம** என்பது **ப** விலே உட்புறமாகவும் **த** விலே வெளிப்புறமாகவும் அ : இ என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. (i) விகிதம் **பத : கம** என் பதையும் (ii) **பத** வை **ம** என்ன விகிதத்திற் பிரிக்கின்றது என்பதையுங் காண்க.

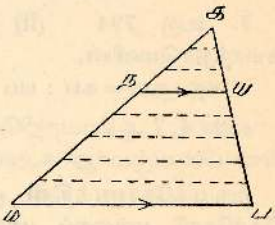
32. **கமபத, கநயவ** என்னும் இரு நேர் கோடுகள் **கம : மப : பத** = **கந : நய : யவ** ஆகுமாறுள்ளன. பின்வருவனவற்றில் உள்ள வெற்றிடங்களை நிரப்புக.

(i) $\frac{\text{கம}}{\text{கந}} = \frac{\text{கப}}{\ldots}$; (ii) $\frac{\text{மப}}{\text{கத}} = \frac{\ldots}{\text{கவ}}$; (iii) $\frac{\text{நவ}}{\text{கய}} = \frac{\ldots}{\text{கப}}$.

ஒத்த விகிதங்கள்

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 793 இல் **கம** என்பது **ந** விலே 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **நய** என்பது **மப** விற்குச் சமாந்தரமாக **கப** வை **ய** விலே சந்திக்குமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. **கப** என்பது **ய** விலே 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என நிறுவுக. **கந : கம, கய : கப** என்ற விகிதங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



உருவம் 793

கம என்பது சமமான 8 பகுதிகளாகப் பிரிக்கப் பெறின் **கந** என்பது அவற்றுள் 3 பகுதிகளையும் **நம** 5 பகுதிகளையுங் கொண்டிருக்கும்.

வெட்டுத்துண்டுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக.

2. △ **கமப** வின் பக்கம் **கம** வானது **வ** விலே உட்புறமாக 4 : 7 என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது ; **வச** என்பது **மப** விற்குச் சமாந்தரமாக **கப** வை **ச** விலே சந்திக்குமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. **கப** வும் **ச** விலே 4 : 7 என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என்பதை நிறுவுவதற்கு என்ன கருவியைப் பயன்படுத்துவீர் ?

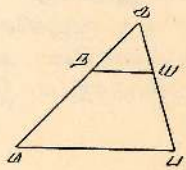
வம : கம, சப : கப என்ற விகிதங்களின் பெறுமானங்கள் என்ன ?

3. சதுரக்கோட்டுத்தாளிலே 1 அங்குலத்தை அலகாகக்கொண்டு புள்ளிகள் **க** (0, 0), **ம** (3, 0), **ப** (2, 3) ஆகியவற்றைக்குறித்து △ **கமப** வை வரைக. புள்ளி (0, 1·6) என்பதை (3, 1·6) என்பதற்கிணைக்க; அது **பக, பம** என்பவற்றை **ந, ய** க்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

கம விற்குச் சமாந்தரமான அச்சிட்டகோடுகள் **பந, நக** களை எவ்வளவு சமமான பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன ?

கீழ்க்காணும் விகிதங்களின் பெறுமானங்களென்ன ?

(i) $\frac{\text{பந}}{\text{நக}}, \frac{\text{பய}}{\text{யம}}$; (ii) $\frac{\text{பந}}{\text{பக}}, \frac{\text{பய}}{\text{பம}}$.



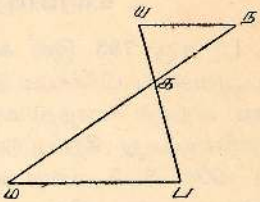
உருவம் 794 (i)

4. உரு 794 (i) இல் **மப** விற்கு **நய** சமாந்தரமெனின் $\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}$ என நிறுவுக.

$\frac{\text{கந}}{\text{நம}}$ என்பது எ உம் ஒ உம் முழு எண்களாகுமிடத்து $\frac{\text{எ}}{\text{ஒ}}$ என்ற உருவில் எடுத்துச்சொல்லப்படக்கூடும் எனப் பாவித்துக்கொள்க.

5. எண் 4 இல் உள்ள தரவுகளுடன் $\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{எ}}{\text{ஒ}}$ எனின் $\frac{\text{கந}}{\text{கம}}$, $\frac{\text{கய}}{\text{கப}}$ என்ப வற்றை எ, ஒ க்களில் எடுத்துக் கூறுக.

6. உரு 793 இல் உள்ள எந்நீள விகிதம் **யப : கப** என்பதற்குச் சமமாகும் ?



உருவம் 794 (ii)

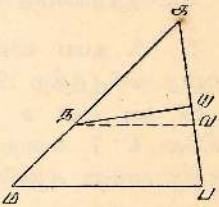
7. உரு 794 (ii) இல் மப விற்கு நய சமாந்தரமெனின்,

கந : நம = கய : யப என நிறுவுக.

எண் 4, 7 ஆகியவற்றிலே நிறுவப்பட்ட விளைவுகளைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :—

ஒருமுக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு மற்றைப் பக்கங்களை விகிதசமன்முறையிற் பிரிக்கும்.

8. உரு 795 இல் கந : நம = கய : யப எனின் மப விற்கு நய சமாந்தரம் என நிறுவுக.



உருவம் 795

மப விற்குச் சமாந்தரமாக ந விற்கூடாகச் செல்லுங் கோடு கப வை வ விலே வெட்டுவதாகுக.

ஏன் **கவ : கப = கய : கப** என விளக்குக. **வ** என்பது **ப** வைப் போன்ற புள்ளியாகும் என்பதை இது நிறுவுகின்றது.

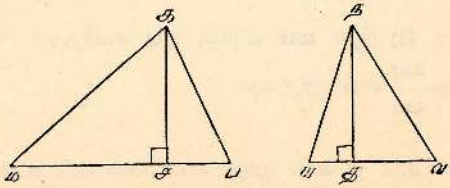
9. உரு 794 (ii) இல் கந : நம = கய : யப எனின் மப விற்கு நய சமாந்தரமென நிறுவுக.

எண் 8 இல் உள்ள கருவியையும் முறையையும் பயன்படுத்துக.

எண்கள் 8, 9 ஆகியவற்றிலே நிறுவப்பட்ட விளைவுகளைப் பின்வருமாறு எடுத்துக்கூறலாம் :—

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள், இரண்டும் வெளிப்புறமாகவோ இரண்டும் உட்புறமாகவோ ஒரேவிகிதத்திற் பிரிக்கப்படின் பிரிவுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகும்.

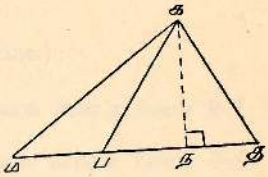
"ஒரு முழுக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் அடி, உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கத்தின் அரைப்பங்கினால் அளக்கப்படும்" என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் இவ்விளைவுகளைப் பெறலாம்.



உருவம் 796

10. உரு 796 இல் முக்கோணங்கள் கமப, நயவ ஆகியவற்றின் உயரங்கள் கச, நத என்பன சமமாகும்.

$\frac{\triangle \text{ கமப}}{\triangle \text{ நயவ}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$ என நிறுவுக.



உருவம் 797.

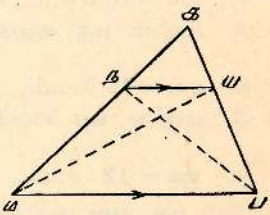
11. உரு 797 இல் மபத ஒரு நேர்கோடு.

(i) $\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{கபத}}$, (ii) $\frac{\triangle \text{ கமப}}{\triangle \text{கமத}}$

ஆகியவற்றை இரு நீளங்களின் விகிதமாக எடுத்துக் கூறுக.

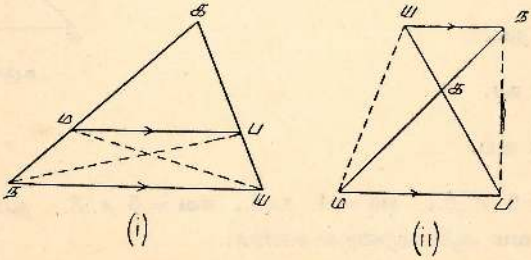
12. உரு 798 இல் $\frac{\triangle \text{கநய}}{\triangle \text{மநய}}$, (ii) $\frac{\triangle \text{ நகய}}{\triangle \text{ நபய}}$ ஆகியவற்றை இருநீளங்களின் விகிதமாக எடுத்துக் கூறுக.

மப விற்கு நய சமாந்தரமெனின் இவ்விகிதங்களைப் பற்றி என்ன கூறுவீர் ?



உருவம் 798.

13. உரு 799 (i) இல் எண் 12 இற் கூறியவாறு செய்க.



உருவம் 799.

14. உரு 799 (ii) இல் எண் 12 இற் கூறியவாறு செய்க.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 84

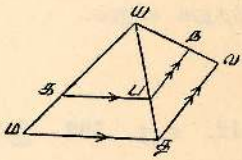
(அம்பிட்ட கோடுகள் சமாந்தரம்)

1–9 வரை உள்ள எண்கள் உரு 800 ஐக் குறிக்கின்றன.

1–6 வரை உள்ள எண்களிற் காணப்படும் விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றிற்குஞ் சமமான இரு விகிதங்கள் கூறுக.

1. $\frac{\text{யக}}{\text{கம}}$. [2.] $\frac{\text{யந}}{\text{யவ}}$. 3. $\frac{\text{பத}}{\text{யத}}$.

4. **யக : யப.** [5.] **பத : யவ.** 6. **கம : நவ.**



உருவம் 800

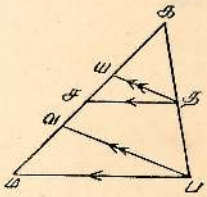
7. **யக** = 10·5 ச.மீ., **கம** = 4·5 ச.மீ., **பத** = 7 ச.மீ. எனின் **பத** வைக் காண்க.

8. **பம** = 19·5 ச.மீ., **யக** = 12 ச.மீ., **பத** = 6 ச.மீ. எனின் **யப** வைக் காண்க.

9. **யக** = 12 ச.மீ., **கம** = 9 ச.மீ., **யப** = 8 ச.மீ., **நவ** = 4·5 ச.மீ. எனின் **பத, யவ** ஆகியவற்றைக் காண்க.

10–13 வரை உள்ள எண்கள் உரு 801 ஐக் குறிக்கின்றன.

10–12 வரை உள்ள எண்களிற் காணப்படும் விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றிற்குஞ் சமமான இரண்டு விகிதங்கள் கூறுக.



உருவம் 801

10. **கத : தப.**

[11] **மக : கச.**

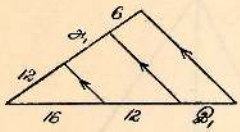
[12] **கவ : வய.**

13. **கய** = 6 ச.மீ., **யச** = 4 ச.மீ., **சவ** = 5 ச.மீ., **தப** = 18 ச.மீ. எனின் **கத, வம** ஆகியவற்றைக் காண்க.

[14] உரு 799 (ii) இல், பக்கம் 535, **கந** = 2 அங்., **மந** = 5 அங். **கப** = $2\frac{1}{2}$ அங். எனின் **பய** வைக் காண்க.

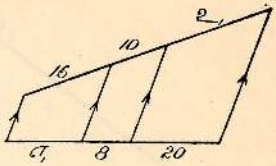
15–18 வரை உள்ள எண்களில் குறிக்கப்பட்ட அளவு கொடுக்கப்படாத நீளங்களைக் காண்க. அலகு 1 ச. மீ.

15.



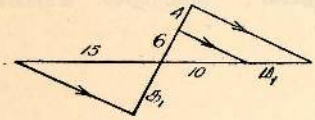
உருவம் 802

16.



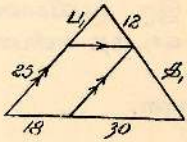
உருவம் 803

17.



உருவம் 804

18.



உருவம் 805

[19] **கபந, மதவ** என்பன **கம, பத, நவ** என்ற 3 சமாந்தரக் கோடுகளால் வெட்டப்பட்ட இருநேர்கோடுகளாகும். **கப** = 2 அங்., **பந** = 3 அங்., **மவ** = 4 அங். எனின் **மத** வைக் காண்க.

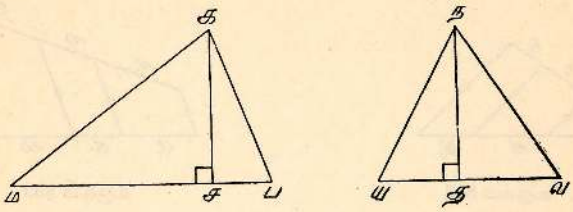
[20] △**கமப** வின் பக்கம் **கம** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ**. **வம** என்பது **ய** விலே 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **கப** விற்கு **வ, ய, ம** என்பவற்றிலிருந்து உள்ள செங்குத்துக்கள் **வச, யந, மத** என்பனவாகும். **கச** = 4 ச. மீ., **கத** = 7 ச.மீ. எனின் **கந** வைக் காண்க.

21. △**கமப** வின் பக்கம் **கம** என்பது **ந** விலே 3 : 4 என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **பக, பம** என்பவற்றிலே **வ, ய** என்ற புள்ளிகள், **நவ, நய** என்பன முறையே **பம, பக** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகுமாறுள்ளன. **நவ** = 1·5 அங்., **நய** = 1·6 அங். எனின் **கப, மப** ஆகியவற்றைக் காண்க.

(இப்பயிற்சி 539 ஆம் பக்கத்திலே தொடர்ந்துள்ளது.)

தேற்றம் 70

இருமுக்கோணங்கள் சம உயரமானவையெனின் அவற்றின் பரப்புக்களின் விகிதம் அவற்றின் அடிகளின் விகிதத்திற்குச் சமனாகும்.



உருவம் 806

தரவு. இரு முக்கோணங்கள் **கமப, நயவ**; அவற்றில் உயரங்கள் **கச, நத** என்பன சமம்.

மேற்கோள். $\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$.

நிறுவல். ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் அடி, உயரம் ஆகியவற்றின் அளவுகளுடைய பெருக்கத்தின் அரைப்பங்கினால் அளவிடப்படும்.

$$\therefore \triangle \text{ கமப} = \tfrac{1}{2} \text{ மப . கச},$$

$$\triangle \text{ நயவ} = \tfrac{1}{2} \text{ யவ . நத};$$

$$\therefore \frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\tfrac{1}{2} \text{ மப . கச}}{\tfrac{1}{2} \text{ யவ . நத}}.$$

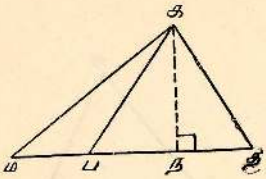
ஆனால் கச = நத தரவு,

$$\therefore \frac{\text{கமப}}{\text{நவய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}.$$

குறிப்பு. உயரம், அடிகள் ஆகியவை அளவிடக்கூடியனவெனிலே இந்நிறுவல் உண்மையாகும்.

கிளைத்தேற்றம். மபத ஒரு நேர்கோடாக க என்பது அக்கோட்டில் இல்லாத ஒரு புள்ளி எனின்,

$$\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{கபத}} = \frac{\text{மப}}{\text{பத}}, \qquad \frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{கமத}} = \frac{\text{மப}}{\text{மத}}.$$



உருவம் 807

க விலிருந்து மபத விற்குள்ள செங்குத்து கந என்பது முக்கோணங்கள் கமப, பகத, கமத ஆகியவை ஒவ்வொன்றினதும் ஒருயரமாகும்.

பயிற்சி 84 (தொடர்ச்சி)

22. △கமப வின் பக்கங்கள் மப, மக ஆகியவற்றிலேயுள்ள புள்ளிகள் வ, ந என்பனவாகும்; மவ = 20 ச.மீ., வப = 15 ச.மீ., மந = 16 ச.மீ., நக = 12 ச.மீ. பக விற்கு வந சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[23] ஒரு நாற்கோணம் கமபத இன் மூலைவிட்டங்கள் ந விலே வெட்டிக் கொள்கின்றன. கந = 2·4 அங்., நப = 1·6 அங்., மந = 1·5 அங்., நத = 1 அங். எனின் தப விற்கு கம சமாந்தரம் என நிறுவுக.

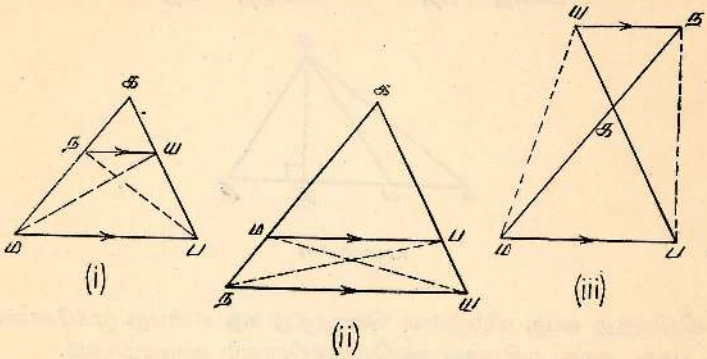
*24. ஒருநாற்கோணம் கமபத வவ ∠ம, ∠ப என்பன செங்கோணங்களாகவும், கம = 5 ச.மீ., மப = 12 ச.மீ., பத = 4 ச.மீ. ஆகவும் அமையுமாறு வரைக. மப விலே ஒரு புள்ளி ந வை, மந = 9 ச.மீ. ஆகுமாறு எடுக்க. கந, தந ஆகியவற்றை இணைக்க. கம, கந, தந, தப ஆகியவற்றை அ, இ, உ, எ ஆகியவற்றில் வெட்டி அஇ : இஉ : உஎ = 4 : 1 : 3 ஆகுமாறு அமைக்கும் ஒருகோடு வரைக.

*25. △கமப வின் பக்கம் கம வானது வ விலே 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. மப என்பது ந விலே 1 : 3 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. கப வை ய விலே வெட்டுமாறு வய என்பது மப விற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளது. வய வையும் கப வையும் த, ச க்களிலே வெட்டுமாறு மக விற்குச் சமாந்தரமாக நச கீறப்பட்டுள்ளது.

(i) நத : தச, (ii) வத : தய ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க.

தேற்றம் 71

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு நேர் கோடு வரையப்பெறின் அது மற்றைப் பக்கங்களை—தேவையெனில் நீட்டப் பட்ட பக்கங்களை—விகிதசமனிற் பிரிக்கும்.



உருவம் 808

தரவு. ஒருமுக்கோணம் **கமப** ; தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட, **கம, கப** ஆகியவற்றை **ந, ய** க்களில் வெட்டும் **மப** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு.

மேற்கோள். $\frac{\text{கந}}{\text{கம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}$.

கருவி. **மய, பந** ஆகியவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். **ய** விலிருந்து **கம** விற்குள்ள செங்குத்து முக்கோணங்கள் **கயந, மயந** ஆகியவை ஒவ்வொன்றினதும் ஒருயரமாகும்.

$$\therefore \frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\triangle\,\text{கநய}}{\triangle\,\text{மநய}}.$$

இவ்வாறே $\frac{\text{கய}}{\text{யப}} = \frac{\triangle\,\text{கயந}}{\triangle\,\text{பயந}}$.

ஆனால் $\triangle\,\text{மநய} = \triangle\,\text{பநய}$. **ஓரடி நய, ஒரே சமாந்தரம் நய, மப இடையுள்ளன.**

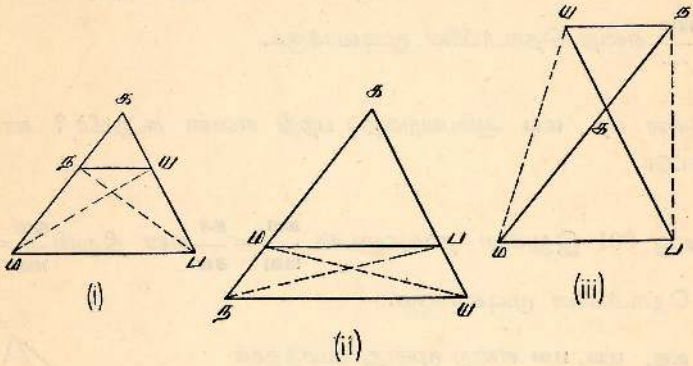
$$\therefore \frac{\triangle\text{கநய}}{\triangle\text{மநய}} = \frac{\triangle\text{கயந}}{\triangle\text{பயந}}; \quad \therefore \frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}.$$

கிளைத்தேற்றம். **மப** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு **நய** வானது **கம, கப** ஆகியவற்றை **ந, ய** க்களில் வெட்டினால்,

$$\frac{\text{கந}}{\text{கம}} = \frac{\text{கய}}{\text{கப}}, \quad \frac{\text{நம}}{\text{கம}} = \frac{\text{யப}}{\text{கப}} \text{ ஆகும்.}$$

தேற்றம் 72

ஒரு முக்கோணத்தினுடைய இரு பக்கங்கள், இரண்டும் உட்புறமாகவோ, இரண்டும் வெளிப்புறமாகவோ ஒரேவிகிதத்திற் பிரிக்கப்பெறின் பிரிவுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாகும்.



உருவம் 809

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; **கம, கப** ஆகிய இரண்டையும் உட்புறமாகவோ இரண்டையும் வெளிப்புறமாகவோ $\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}$ ஆகுமாறு பிரிக்கும் இரு புள்ளிகள் **ந, ய** என்பன.

மேற்கோள். **மப** விற்கு **நய** சமாந்தரம்.

கருவி. **மய, பந** ஆகியவற்றை இணைக்க.

நிறுவல். **ய** விலிருந்து **கம** விற்குள்ள செங்குத்தானது முக்கோணங்கள் **கநய, மநய** ஆகியவை ஒவ்வொன்றினதும் ஒருயரமாகும்.

$$\therefore \frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\triangle\text{கநய}}{\triangle\text{மநய}}.$$

இவ்வாறே $\frac{\text{கய}}{\text{யப}} = \frac{\triangle\text{கயந}}{\triangle\text{பயந}}$.

ஆனால் $\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}$ **தரவு.**

$$\therefore \frac{\triangle\text{கநய}}{\triangle\text{மநய}} = \frac{\triangle\text{கயந}}{\triangle\text{பயந}}.$$

$$\therefore \triangle\text{மநய} = \triangle\text{பநய}.$$

ஆனால் இம்முக்கோணங்கள் ஒரே அடி **நய** வின்மேல் உளவாய் அதன் ஒரே பக்கத்தில் உள,

$\therefore$ **மப** விற்கு **நய** சமாந்தரம்.

பயிற்சி 85

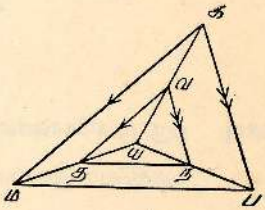
(அம்பிட்ட கோடுகள் சமாந்தரம்)

1. உரு 800 இலுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு $\frac{\text{யக}}{\text{யம}} = \frac{\text{யந}}{\text{யவ}}$ என நிறுவி $\frac{\text{யவ}}{\text{நவ}} = \frac{\text{யம}}{\text{—}}$ என்ற தொடர்பினை முடிவாக்குக.

கோடுகள் **கந, மவ** ஆகியவற்றைப் பற்றி என்ன கூறுவீர்? காரணங்கள் காட்டுக.

2. உரு 801 இலுள்ள தரவுகளுடன் $\frac{\text{கய}}{\text{யவ}} = \frac{\text{கச}}{\text{சம}}$ என நிறுவி $\frac{\text{கம}}{\text{மச}} = \frac{\text{—}}{\text{வய}}$ என்ற தொடர்பினை முடிவாக்குக.

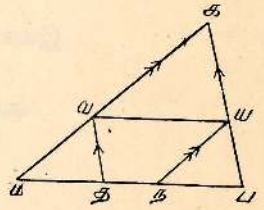
[3] **கந, மய, பவ** என்ற மூன்று சமாந்தரக் கோடுகள் **கமப, நயவ** என்ற இருகோடுகளை வெட்டுகின்றன. **கம : மப = நய : யவ** என நிறுவுக.



உருவம் 810

4. உரு 810 இலுள்ள தரவுகளுடன் **மப** விற்கு **தந** சமாந்தரம் என நிறுவுக. (எவ்விகிதங்களைச் சமம் என நீர் நிறுவுதல் வேண்டும்?)

[5] நாற்கோணம் **கமபத** வின் பக்கம் **கம** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ. வந, வய** என்பன **மப, மத** என்பவற்றை முறையே **ந, ய** என்பவற்றிலே வெட்டுமாறு **கப, கத** ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளன. **பத** விற்கு **நய** சமாந்தரம் என நிறுவுக. (எவ்விகிதங்கள் சமமென நீர் நிறுவுதல் வேண்டும்?)

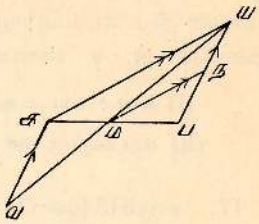


உருவம் 811

6. உரு 811 இல் **மத = நப. மப** விற்கு **வய** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[7] சரிவகம் **கமபத** வில் **கம, தப** என்பன சமாந்தரப் பக்கங்கள். **கத, மப** ஆகியவற்றிலே **ச, ந** என்னும் புள்ளிகள் **கச : சத = மந : நப** ஆகுமாறுள்ளன. **கம** விற்கு **சந** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

8. **கமப** ஒரு முக்கோணம். **கம, கப** ஆகியவற்றிலே **வ, ய** என்னும் புள்ளிகள் **கவ** $= \frac{1}{3}$ **கம, பய** $= \frac{1}{3}$ **பக** ஆகுமாறுள்ளன. **வய** விற்குச் சமாந்தரமாக **ப** விற் கூடாகச் செல்லும் கோடு **கம** வை இரு சமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

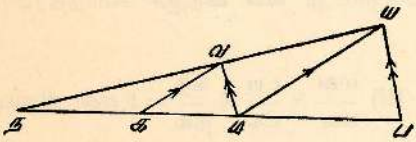


உருவம் 812

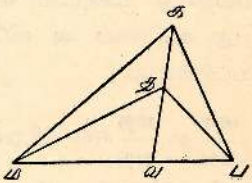
9. உரு 812 இல் **வமய** ஒரு நேர்கோடு **வம : மய = யந : நப** என நிறுவுக.

[10] உரு 812 இல் **வமய** ஒரு நேர்கோடு. **வய : யப = யம : பந** என நிறுவுக.

11. உரு 813 இல் **நகமப** வும் **நவய** வும் நேர்கோடுகள். **நக : நம = நம : நப** என நிறுவுக.



உருவம் 813



உருவம் 814

12. உரு 814 இல் நீட்டப்பட்ட **கத, மப** வை **வ** வில் வெட்டுகின்றது ; $\frac{\triangle \text{கமத}}{\triangle \text{கபத}} = \frac{\text{மவ}}{\text{வப}}$ என நிறுவுக.

[13] உரு 814 இல் நீட்டப்பட்ட **கத** வானது **மப** வை **வ** விலே வெட்டுகின்றது. $\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{தமப}} = \frac{\text{கவ}}{\text{தவ}}$ என நிறுவுக.

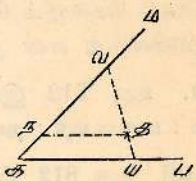
14. ஒரு மாறும் நேர்கோடு **நகயவ** என்பது நிலையான ஒரு புள்ளி **க** விற்கூடாகச்சென்று நிலையான கோடு **மப** வை **வ** விலே சந்திக்கின்றது. **கய** $= 1/3$ **கவ, நக** $=$ **யவ** எனின் (i) **ய** வின் ஒழுக்கினைக் காண்க; (ii) **ந** வின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

15. **கமப** ஒரு முக்கோணம். **கவ, மய, பந** என்னும் மூன்று சமாந்தரக்கோடுகள் – தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட – **மப, பக, கம** என்பவற்றை முறையே **வ, ய, ந** என்பவற்றிற் சந்திக்கின்றன. $\frac{\text{மவ}}{\text{வப}} \times \frac{\text{பய}}{\text{யக}} \times \frac{\text{கந}}{\text{நம}} =$ என நிறுவுக.

[16] △கமப வின் மையக்கோடு கத விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி வ. கத என்பது ய விற்கு வத = தய ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. மவ, பவ என்பன நீட்டப்பட்டபொழுது கப, கம ஆகியவற்றை முறையே ந, ச என்பவற்றிற் சந்திக்கின்றன.

(i) கவ : கய = கச : கம என நிறுவுக.

(ii) மப விற்கு நச சமாந்தரம் என நிறுவுக.



உருவம் 815

17. உரு 815 இல் கோடுகள் கம, கப என்பனவும் புள்ளி த வுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கோடு வதய வை வத = 3 தய ஆகுமாறு அமைக்க.

*18. கமப ஒரு முக்கோணம். ஒருநேர்கோடு, பக, கம நீட்டப்பட்ட மப ஆகியவற்றை முறையே வ, ய, ந என்பவற்றில் வெட்டுகின்றது. பஅ என்பது கம வை அ விலே சந்திக்குமாறு வய விற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளது.

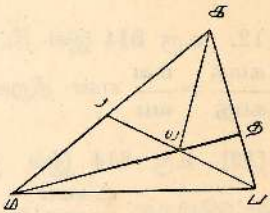
(i) $\frac{\text{மவ}}{\text{பவ}} = \frac{\text{மந}}{\text{அந}}$ என நிறுவுக. (ii) $\frac{\text{மவ}}{\text{பவ}} \times \frac{\text{பய}}{\text{யக}} \times \frac{\text{கந}}{\text{நம}} = 1$ என நிறுவுக.

இது மெனிலோசின் தேற்றம் எனப்படும்.

*19. உரு 816 இல் கச = சம, கத = 2 தப எனின்,

(i) △மயச = 3 △பயத எனவும்,

(ii) பய = யச எனவும் நிறுவுக.



உருவம் 816

*20. உரு 816 இல் சம = $\frac{1}{4}$ கம, தப = $\frac{1}{3}$ கப எனின்,

(i) மய = யத எனவும்,

(ii) பய = 2யச எனவும் நிறுவுக.

*21. உரு 816 இல் நீட்டப்பட்ட கய வானது மப வை ந விலே வெட்டினால்,

$$\frac{\text{மந}}{\text{நப}} \times \frac{\text{பத}}{\text{தக}} \times \frac{\text{கச}}{\text{சம}} = 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

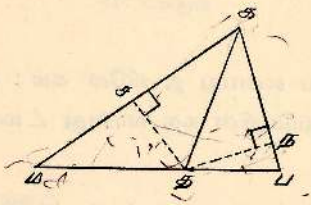
(எண் 12 இலுள்ள விளைவைப் பயன்படுத்துக.)

இது சேவாவின் தேற்றமெனப்படும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒருகோணத்தினுடைய இருசமவெட்டிகள்

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 817 இல் ∠மகப வின் உள்ளிருசமவெட்டியானது மப வை த விலே வெட்டினுல் $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{மக}}{\text{கப}}$ என நிறுவுக.



உருவம் 817

த விலிருந்து கம, கப விற்குள்ள செங்குத்துக்கள் தச, தந என்பவற்றை வரைக.

(i) ஏன் தச = தந என விளக்குக.

(ii) $\frac{\triangle \text{கமத}}{\triangle \text{கபத}}$ என்ற விகிதத்தை இருவேறு வழிகளில் எடுத்துக் கூறுக.

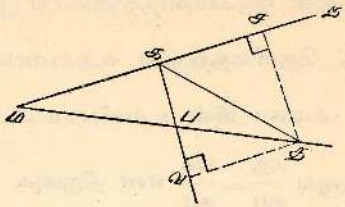
2. உரு 817 இல் மப என்பது த விலே கம : கப என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டால் கத வானது ∠மகப வின் உள்ளிருசம வெட்டி என நிறுவுக.

எண் 1 இலுள்ள கருவியைப் பயன்படுத்தி $\frac{\triangle \text{கமத}}{\triangle \text{கபத}}$ என்பதை இருவழி களில் எடுத்துக் கூறுக.

[3] உரு 818 இல் ∠ மகப வின் வெளியிருசமவெட்டி நீட்டப்பட்ட மப வை த வில் வெட்டினுல், $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{மக}}{\text{கப}}$ என நிறுவுக.

த விலிருந்து தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட கம, கப களிற்குச் செங்குத் துக்கள் தச, தவ என்பவற்றை வரைக.

விகிதம் $\frac{\triangle \text{கமத}}{\triangle \text{கபத}}$ என்பதை இருவேறு வழிகளில் எடுத்துக் கூறுக.



உருவம் 818

4. உரு 818 இல் மப என்பது த விலே கம : கப என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பெறின் கத வானது ∠ மகப வின் வெளியிருசம வெட்டி என நிறுவுக.

எண் 3 இலுள்ள கருவியைப் பயன்படுத்தி, $\frac{\triangle \text{கமத}}{\triangle \text{கபத}}$ என்பதை இருவழிகளில் எடுத்துக் கூறுக.

5. $\sqrt{8}$ அங். நீளமுள்ள ஒரு கோடு மப வை அமைக்க. மப வை 5 : 3 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கும் பின்வரும் அமைப்பைச் செய்க ; அது திருத்தமானது என நிறுவுக.

△ கமப வை கம = 2·5 அங்., கப = 1·5 அங். ஆகுமாறு வரைக. ∠ மகப வின் உள்ளிருசமவெட்டி, வெளியிருசமவெட்டி ஆகியவற்றை வரைக. அவை மப வை வ, ய க்களில் வெட்டுவனவாகுக. அப்போது வ, ய என்பனவே தேவையான பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 86

1. △கமப வில் மப = 6 அங்., பக = 3 அங்., கம = 5 அங். ∠மகப வின் உள்ளிருசமவெட்டியும் வெளியிருசமவெட்டியும் மப வையும் நீட்டப்பட்ட மப வையும் அ, இ க்களிற் சந்தித்தால் அப, அஇ என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.

[2] △கமப வில் மப = 5 ச.மீ., பக = 4 ச.மீ., கம = 6 ச.மீ. ∠மகப வின் உள்ளிரு சமவெட்டியும் வெளியிருசமவெட்டியும் மப வையும் நீட்டப்பட்ட மப வையும் வ, ய க்களிற் சந்தித்தால் மவ, மய என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக்கண்டு, $\frac{1}{\text{மவ}}+\frac{1}{\text{மய}}=\frac{2}{\text{மப}}$ என நிறுவுக.

3. △கமப வின் சுற்றளவு 45 அங். ∠மகப வின் உள்ளிரு சமவெட்டி மப வை வ வில் வெட்டுகின்றது. ∠கபம வின உள்ளிருசமவெட்டி கம வை ய வில் வெட்டுகின்றது. மவ = 9 அங்., பவ = 6 அங். எனின் கய வைக் காண்க.

[4] △கமப வில் கம = 4 அங்., மப = 3 அங்., ∠கமப = 90°. ∠கபம வின் இருசமவெட்டியானது கம வை ந விலே வெட்டினால் பந வைக் காண்க.

5. △கமப வில் கம = 12 ச.மீ., மப = 15 ச.மீ., பக = 8 ச.மீ.; மப விலே வ என்னும் புள்ளி மவ = 9 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளது. ∠மகப வை கவ இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக. ∠மகப வின் வெளியிருசமவெட்டி நீட்டப்பட்ட மப வை ய வில் வெட்ட மப வினது நடுப்புள்ளி த எனின் தவ. தய = தப² என நிறுவுக.

[6] ∠மகப வின் இருசமவெட்டி மப வை வ விலே வெட்ட மப, பக, கம என்பவற்றினுடைய நீளங்கள் அ, இ, உ அலகுகள் எனின் மவ வினது நீளத்தை அ, இ, உ க்களிற் காண்க.

7. ∠மகப வின் உள்ளிருசமவெட்டியும் வெளியிருசமவெட்டியும் மப வையும் நீட்டப்பட்ட மப வையும் வ, ய க்களிற் சந்திக்கின்றன. மவ = 5 அங்., வப = 3 அங். எனின் பய வைக் காண்க.

8. △கமப வில் கம = 6 ச.மீ., கப = 10 ச.மீ., ∠மகப வின் இருசமவெட்டி மப வை வ விலே வெட்டுகின்றது. △கமப வின் பரப்பு 24 ச.து. ச.மீ. எனின் △கமவ வின் பரப்பினைக் காண்க.

[9] கமபத என்னும் நேர்கோடு கம = 14 ச.மீ., மப = 6 ச.மீ., பத = 15 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளது; ந என்னும் புள்ளி நக = 21 ச.மீ., நப = 9 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளது. ∠மநத ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

[10] **க, ம** என்னும் நிலையான புள்ளிகள் **கம** = 2·1 அங். ஆகுமாறுள்ளன. **வ** என்னும் மாறும்புள்ளி **வக : வம** = 5 : 2 ஆகுமாறுள்ளது. **கம** என்பது **ப, த** க்களில் 5 : 2 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **வ** வினது ஒழுக்கானது **பத** வின் மேலே **பத** வை விட்டமாகவுள்ள ஒருவட்டமென நிறுவுக. இவ்வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

[11] **கமபத** என்பது ஒரு செவ்வகத்துண்டுத்தாள் ; **கம** = 4 அங்., **மப** = 3 அங். விளிம்பு **மப** என்பது **மத** வழி மடிக்கப்பட்டு அம்மடிப்பின் வழி மூலை வெட்டப்பட்டுள்ளது. மீதியின் பரப்பைக் காண்க.

12. △**கமப** வில் **கம** = 6 அங்., **கப** = 4 அங்., ∠**மகப** வின் இருசமவெட்டி மையக்கோடு **மந** வை **ய** விற் சந்திக்கின்றது. △**கமப** வின் பரப்பு 8 சது. அங். எனின் △**கயம** வின் பரப்பைக் காண்க.

[13] △**கமப** வின் உண்மையம் **ந** ஆக **மப** வை **கந** என்பது **வ** விலே வெட்ட **மப, பக, கம** என்பவற்றினுடைய நீளங்கள் **அ, இ, உ** அலகுகள் எனின் **கந : நவ** என்னும் விகிதத்தை **அ, இ, உ** க்களிற் காண்க.

*14. △**கமப** வின் ஒருமையக்கோடு **கத**. ∠**கமப** வின் இருசமவெட்டி **கத** வை **வ** விலே வெட்டுகின்றது. **மப** = 16 ச.மீ. **பக** = 11 ச.மீ., **கம** = 13 ச.மீ., எனின் **தவ** வைக் காண்க.

*15. **கவம, பவத** என்பன வட்டம் **கபமத** வின் ஒன்றையொன்று வெட்டும் நாண்கள் ; வில் **கம** வினுடைய நடுப்புள்ளி **ப**. **கவ** = 2·4 ச.மீ., **வம** = 1·6 ச.மீ. எனின் **தக : தம** என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

வட்டத்திலே **ந** என்னும் பிறிதொரு புள்ளியை **நக : நம** = **தக : தம** ஆகுமாறு எங்ஙனம் அமைக்கலாம் என்பதைக் காட்டுக.

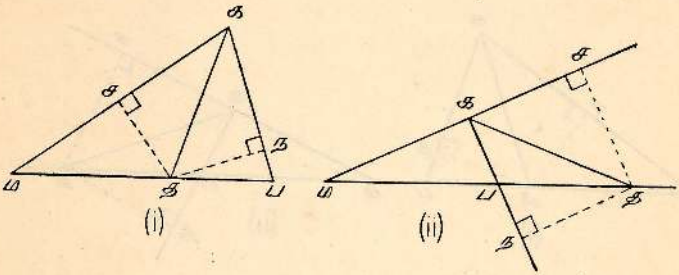
*16. 1·6 அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை **மப** = 2·5 அங்., **கம : கப** = 4 : 1 ஆகுமாறு உள்ளுருவமாக வரைக. (2 தீர்வுகள்.)

17. **கம** = 4 அங்., **கப** = 2 **மப**, ∠**கபம** = 120° எனக் கொடுக்கப்பட்டால் △**கமப** வை அமைக்க.

18. **கமபத** என்னும் ஒரு நாற்கோணம் **கம** = 6 ச.மீ., **மப** = 8 ச.மீ., **பத** = 12 ச.மீ., **தக** = 9 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளது. (i) ∠**கமப**, ∠**கதப** ஆகியவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள், (ii) ∠**மகத**, ∠**மபத** ஆகியவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளைப்பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர் ?

தேற்றம் 73 (முதலாவது நிறுவல்)

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக்கோணமானது அடியையோ நீட்டப்பட்ட அடியையோ வெட்டும் ஒரு நேர்கோட்டினால் உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இருசமக்கூறிடப்படின் அக்கோடு அவ்வடியை முக்கோணத்தின் மற்றைப் பக்கங்களின் விகிதத்தில் உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ பிரிக்கின்றது.



உருவம் 819

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; ∠**மகப** வை உட்புறமாகவும், உரு 819 (i), வெளிப்புறமாகவும், உரு 819 (ii), இருசமக்கூறிட்டு **மப** வையோ நீட்டப்பட்ட **மப** வையோ **த** விலே வெட்டுங் கோடு **கத.**

மேற்கோள். $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$.

கருவி. **த** விலிருந்து – தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட – **கம, கப** விற்குச் செங்குத்துக்கள் **தச, தந** என்பவற்றை வரைக.

நிறுவல். **த** என்பது **கம, கப** என்பவற்றால் ஆக்கப்பட்ட கோணங்களுள் ஒன்றினுடைய இரு சமவெட்டியிலே உள்ள ஒரு புள்ளியாதலால் **கம, கப** என்பவற்றிலிருந்து **த** சமதூரத்திலுள்ளது.

$\therefore$ **தச = தந** ஒழுக்குத்தேற்றம்,

ஆனால் **தச, தந** என்ப முக்கோணங்கள் **தகம, தகப** என்பவற்றின் உயரங்களாகும்,

$$\therefore \frac{\text{கம}}{\text{கப}} = \frac{\triangle \text{தகம}}{\triangle \text{தகப}}.$$

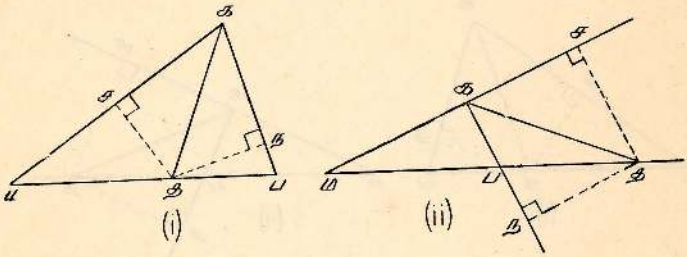
இன்னும் **க** விலிருந்து **மப** விற்குள்ள செங்குத்தும் முக்கோணங்கள் **கமத, கதப** ஆகியவை ஒவ்வொன்றினதும் ஒருயரமாகும்,

$$\therefore \frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\triangle \text{கமத}}{\triangle \text{கதப}}.$$

$$\therefore \frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}.$$

தேற்றம் 74 (முதலாவது நிறுவல்)

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக்கூடாகவுள்ள ஒரு நேர்கோடு அடியினை மற்றைப் பக்கங்களின் விகிதத்தில் உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ பிரித்தால் அது உச்சிக்கோணத்தை உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இருசமக்கூறிடுகின்றது.



உருவம் 820

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; **மப** விலோ, உரு 820 (i), நீட்டப்பட்ட **மப** விலோ, உரு 820 (ii), $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி **த**.

மேற்கோள். **மகப** வை **கத** என்பது உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இருசமக் கூறிடுகின்றது.

கருவி. **த** விலிருந்து – தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட – **கம, கப** என்பவற்றிற்குச் செங்குத்துக்கள் **தச, தந** என்பவற்றை வரைக.

நிறுவல். **க** விலிருந்து **மப** விற்குள்ள செங்குத்தானது முக்கோணங்கள் **கமத, சதப** ஆகியவை ஒவ்வொன்றினதும் ஒருயரமாகும்,

$$\therefore \frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\triangle\text{கமத}}{\triangle\text{கதப}}.$$

$$\therefore \frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\frac{1}{2}\text{கம.தச}}{\frac{1}{2}\text{கப.தந}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}} \cdot \frac{\text{தச}}{\text{தந}}.$$

ஆனால் $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$ தரவு,

$$\therefore \text{தச} = \text{தந}.$$

∴ **த** என்பது **கம, கப** என்னும் இரு நேர்கோடுகளிலிருந்துஞ் சம தூரத்திலுள்ளது.

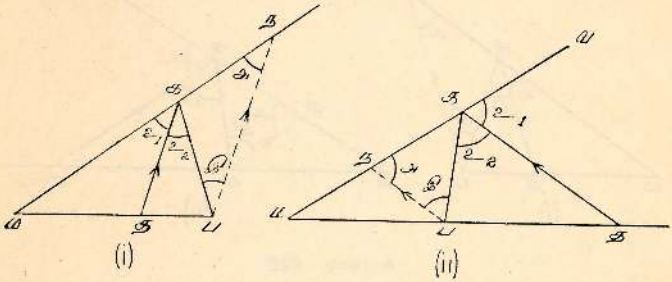
∴ **த** என்பது **மகப** வின் இருசமவெட்டிகளிலொன்றில் உள்ளது.

ஒழுக்குத் தேற்றம்.

∴ **கத** என்பது **மகப** வை உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ **இருசமக் கூறிடுகின்றது.**

தேற்றம் 73 (இரண்டாவது நிறுவல்)

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக் கோணமானது அடியையோ நீட்டப்பட்ட அடியையோ வெட்டும் ஒரு நேர் கோட்டினால் உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இரு சமக்கூறிடப்படின் அக்கோடு அவ்வடியை முக்கோணத்தின் மற்றைப் பக்கங்களின் விகிதத்தில் உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ பிரிக்கின்றது.



உருவம் 821

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; **மகப** வை உட்புறமாக, உரு 821 (i), அல்லது வெளிப்புறமாக, உரு 821 (ii), இரு சமக்கூறிட்டு **மப** வை அல்லது நீட்டப்பட்ட **மப** வைத் **த** விலே வெட்டுங் கோடு **கத**.

மேற்கோள். $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$.

கருவி. **தக** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டை, தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட, **மக** வை **ந** விலே வெட்டுமாறு **ப** விற்கூடாக வரைக.

நிறுவல். உருவங்களிலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு,

$\text{உ}_1 = \text{அ}$ ஒத்தகோணங்கள், தக ∥ பந,

$\text{உ}_2 = \text{இ}$ ஒன்றுவிட்டகோணங்கள், தக ∥ பந,

ஆனால் $\text{உ}_1 = \text{உ}_2$ தரவு,

$\text{அ} = \text{இ}$.

∴ △ கநப இருசமபக்கமானது, அதனால் **கந = கப**.

பந விற்கு **தக** சமாந்தரமாகையால்,

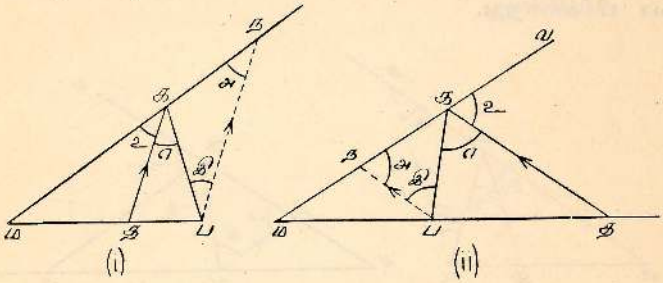
$\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{மக}}{\text{கந}}$,

∴ $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{மக}}{\text{கப}}$.

குறிப்பு. **கம = கப** எனின் ∠ **மகப** வின் வெளியிருசமவெட்டி **மப** விற்குச் சமாந்தரம்.

தேற்றம் 74 (இரண்டாவது நிறுவல்)

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிக்கூடாகவுள்ள ஒரு நேர்கோடு அடியினை மற்றைப் பக்கங்களின் விகிதத்தில் உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ பிரித்தால் அது உச்சிக் கோணத்தை உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இரு சமக்கூறிடுகின்றது.



உருவம் 822

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப** ; **மப** விலோ, உரு 822 (i), அல்லது நீட்டப்பட்ட **மப** விலோ, உரு 822 (ii),

$\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி **த**.

மேற்கோள். ∠**மகப** வை **கத** உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இரு சமக்கூறிடுகின்றது.

கருவி. **தக** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டை – தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட – **மக** வை **ந** விலே வெட்டுமாறு **ப** விற்கூடாக வரைக.

நிறுவல். உருவங்களில் உள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு குறித்தால்,

பந விற்கு **தக** சமாந்தரம் ஆதலால்,

$\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{மக}}{\text{கந}}$.

ஆனால் $\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$ **தரவு,**

∴ **கந** = **கப**,

∴ **அ** = **இ** **அடிக்கோணங்கள், இருசமபக்கமுக்கோணம்.**

ஆனால் **உ** = **அ** **ஒத்தகோணங்கள், தக** ∥ **பந,**

அத்துடன் **எ** = **இ** **ஒன்றுவிட்டகோணங்கள், தக** ∥ **பந,**

∴ **உ** = **எ**.

∴ ∠**மகப** வை **கத** வானது உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ இரு சமக்கூறிடுகின்றது.

பயிற்சி 87

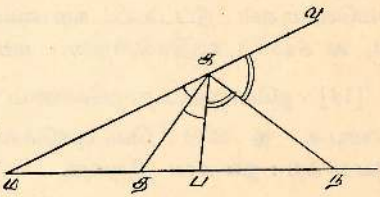
1–5 வரை உள்ள எண்கள் உரு 823 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **கத**, **கந** என்பன ∠**மகப** வின் இருசமவெட்டிகள்; அவை **மப** வை **த**, **ந** க்களில் வெட்டுகின்றன.

1. **மக** விற்குச் சமாந்தரமாக **த** விற்கூடாகச் செல்லுங்கோடு **பக** வை **ய** வில் வெட்டினால், $\frac{\text{மக}}{\text{கப}} = \frac{\text{கய}}{\text{பய}}$ என நிறுவுக.

2. **மத : தப = மந : பந** என நிறுவுக.

[3] **கம** விற்குச் சமாந்தரமாக **ப** விற்கூடாகச் செல்லுங்கோடு நீட்டப்பட்ட **கத** வை **ச** வில் வெட்டினால், $\frac{\text{கத}}{\text{தச}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$ என நிறுவுக.

4. **கம** விற்குச் சமாந்தரமாக **ந** விற்கூடாகச் செல்லுங்கோடு நீட்டப்பட்ட **கப** வை **அ** வில் வெட்டினால் **அக : அப = கம : கப** என நிறுவுக.



உருவம் 823

[5] **ம**, **ப** க்களை மையங்களாகக் கொண்ட வட்டங்கள் **த** விற்கூடாக வரையப்பெற்று **மக**, **பக** என்பனவற்றை **இ**, **ச** என்பவற்றில் வெட்டினால், **மப** விற்கு **இச** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

6. △**கமப** வின் ஒருமையக்கோடு **கந**. ∠**கநம**, ∠**கநப**, ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் **கம**, **கப** ஆகியவற்றை **ச**, **த** க்களிற் சந்திக்கின்றன. **மப** விற்குச் **சத** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[7] ஒரு நேர்கோடு **ஓவ**, **ஓய**, **ஓந**, **ஓச** என்னும் நான்கு கோடுகளை **வ**, **ய**, **ந**, **ச** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றது. ∠**வஓந** = 90° ஆக ∠**யஓச** வை **ஓந** இருசமக்கூறிடின் **வய : வச = யந : நச** என நிறுவுக.

8. △**கமப** வினுள்ளே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **ச**. ∠**மசப**, ∠**பசக**, ∠**கசம** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் **மப**, **பக**, **கம** ஆகியவற்றை முறையே **ந**, **ய**, **வ** என்பவற்றிலே வெட்டுகின்றன. $\frac{\text{மந}}{\text{நப}} \times \frac{\text{பய}}{\text{யக}} \times \frac{\text{கவ}}{\text{வம}} = 1$ என நிறுவுக.

[9] **கமபத** ஓரிணைகரம். ∠**மகத** வின் இருசமவெட்டி **மத** வை **ந** விலும் **பத** வை **ய** விலுஞ் சந்தித்தால் **கந : நய = தப : தக** என நிறுவுக.

10. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம்; அதில் **கம = கத**. ∠**பகம**, ∠**பகத** ஆகியவற்றின் இரு சமவெட்டிகள் **பம**, **பத** என்பவற்றை முறையே **ச**, **ய** என்பவற்றிற் சந்திக்கின்றன. **மத** விற்கு **சய** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

11. **க, ம** க்களை மையங்களாகவுடைய இரு வட்டங்கள் **ஓ** விற் சந்திக்கின்றன. **கம** விற்குச் சமாந்தரமான யாதாயினும் ஒரு கோடு வட்டங்களை முறையே **வ, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. **கவ** வும் **மய** வும் **த** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டால் **தஓ** என்பது ∠**கதம** வின் இரு சமவெட்டிகளுள் ஒன்று என நிறுவுக.

[12] **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். அதில் ∠**ம** = ∠**ப** ; ∠**மகத** வை **கப** இரு சமக்கூறிடுகின்றது. நீட்டப்பட்டபொழுது **மக** வும் **பத** வும் **ந** விலே சந்தித்தால் **கத : தப = கந : மந** என நிறுவுக.

13. Δ**கமப** வின் அடி **மப** வினது நடுப்புள்ளி **த.** **கத** வானது **ந** விற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. ∠**மதந**, ∠**பதந** ஆகியவற்றின் உள்ளிரு சமவெட்டிகள் நீட்டப்பட்ட **கம** வையும் நீட்டப்பட்ட **கப** வையும் முறையே **ய, வ** க்களிற் சந்திக்கின்றன. **மப** விற்கு **யவ** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

[14] ஓரொருவட்டநாற்கோணம் **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்கள் **கப, மத** என்பன **ந** வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. **கம = மப** எனின் **தக : தப = கந : நப** என நிறுவுக.

15. **கம** என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் **பத** விற்குச் செங்குத்தான ஒரு நாணாகும். **ந** என்பது **கம** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **பந, தந** என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது வட்டத்தை மீண்டும் முறையே **வ, ய** என்பவற்றிலே சந்திக்கின்றன. **வக : வம = யக : யம** என நிறுவுக.

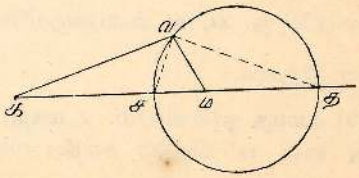
16. ஒரு வட்டத்தின் சமமான இரு நாண்கள் **கம, கப** என்பன; ∠**மகப** > 60°, **ப** விலே உள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **மக** வை **த** விலே சந்தித்தால் **பம : பக = தப : தக** என நிறுவுக.

[17] ∠**மகப** < 60° எனின் எண் 16 இல் உள்ள விளைவினை நிறுவுக. (இங்கு **ப** வில் உள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **கம** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது.)

18. **அப்பலோனியசின் வட்டம்.** **க, ம** என்பன நிலையான புள்ளிகள் ; **வ** என்பது **வக : வம** மாறிலி ஆகுமாறுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி.

(i) ∠**கவம** வின் உள்ளிரு சமவெட்டியும் வெளியிரு சமவெட்டியும் **கம** வை நிலையான புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என நிறுவுக.

(ii) **வ** வின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் என நிறுவுக.



உருவம் 824

வக : வம = 3 : 2 ஆக **கம = 6** ச.மீ. எனின் இவ்வட்டத்தின் விட்டத்தைக் கணிக்க.

[19] **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி **க** விலே உள்ள தொடுகோடானது ஓராரை **யம** வை **ந** விலே சந்திக்கின்றது. **க** விலிருந்து **யம** விற்குள்ள செங்குத்து **கத** ஆகும். **தம : மந = கத : கந** என நிறுவுக.

*20. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். ∠**தகம**, ∠**தபம** என்பவற்றினுடைய இருசமவெட்டிகள் **தம** விலே சந்தித்தால் ∠**கமப**, ∠**கதப** ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் **கப** விலே சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

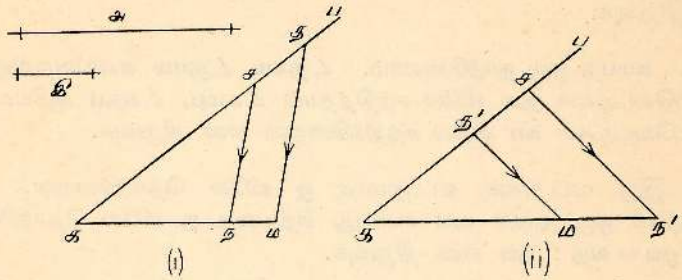
21. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக **ஓ** விலே தொடுகின்றன. பெரிய வட்டத்தின் ஒரு நாண் **வய** என்பது சிறியதை **ந** விலே தொடுகின்றது. **ஓவ : ஓய = வந : நய** என நிறுவுக.

22. **கமபத** ஓரிணைகரம். ∠**மகத** வின் இரு சமவெட்டி **மத** வை **ய** விலே சந்திக்கின்றது. ∠**கமப** வின் இரு சமவெட்டி **கப** வை **வ** விலே சந்திக்கின்றது. **கம** விற்கு **வய** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

*23. Δ**கமப** வில் ∠**மகப**=90°, **கத** ஒருயரம். ∠**கமப** வின் இருசமவெட்டி **கத, கப** என்பவற்றை **வ, ய** க்களிற் சந்தித்தால் **கவ · வத=பய : யக** என நிறுவுக.

அமைப்பு 19

கொடுத்த ஒரு முடிவுள்ள நேர்கோட்டை கொடுத்த ஒரு விகிதத்தில் (i) உட்புறமாகவோ (ii) வெளிப்புறமாகவோ பிரித்தல்.



உருவம் 825

தரவு. அ, இ அலகு நீளங்கொண்ட இரு கோடுகளும் முடிவுள்ள ஒரு கோடு **கம** வும்.

அமைக்க வேண்டியது. (i) **கம** விலே $\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி **ந.**

(ii) நீட்டப்பட்ட **கம** விலே $\frac{\text{கந}'}{\text{மந}'} = \frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி **ந'.**

(1) **அமைப்பு.** யாதாயினும் ஒருகோடு **கப** வை வரைந்து அதிலிருந்து **கச** வை அ அலகுகட்குச் சமனாகவும் **சத** வை இ அலகுகட்குச் சமனாகவும் வெட்டுக. **தம** வை இணைக்க.

சந வை **தம** விற்குச் சமாந்தரமாக **ச** விற்கூடாகவும் **கம** வை **ந** விலே வெட்டுமாறும் வரைக.

அப்பொழுது **கம** என்பது **ந** விலே அ : இ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

நிறுவல். **மத** விற்கு **நச** சமாந்தரம் ஆதலால்,

$$\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கச}}{\text{சத}} = \frac{\text{அ}}{\text{இ}}.$$

(2) **அமைப்பு.** யாதாயினும் ஒரு கோடு **கப** ஐ வரைந்து அதிலே **கச** ஐ அ அலகுகட்குச் சமமாக வெட்டுக. **கக** விலிருந்து **சத'** ஐ இ அலகுகட்குச்சமமாக வெட்டுக. **த'ம** வை இணைக்க.

ச விற்கூடாக **சந'** ஐ **த'ம** விற்குச் சமாந்தரமாகவும் நீட்டப்பட்ட **கம** வை **ந'** இலே சந்திக்கக்கூடியதாகவும் வரைக.

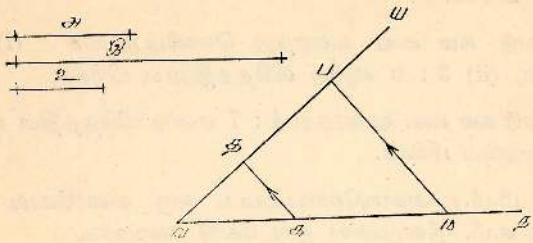
அப்பொழுது **கம** என்பது **ந'** இலே அ : இ என்ற விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

நிறுவல். **ந'ச** என்பது **மத'** என்பதற்குச் சமாந்தரமாதலின்,

$$\frac{\text{கந}'}{\text{மந}'} = \frac{\text{கச}}{\text{த'ச}} = \frac{\text{அ}}{\text{இ}}.$$

அமைப்பு 20

கொடுத்த மூன்று கோடுகட்கு நான்காம் விகிதசமனை அமைத்தல்.



உருவம் 826

தரவு. அ, இ, உ அலகு நீளங்கள் கொண்ட மூன்று கோடுகள்.

அமைக்க வேண்டியது. எ அலகு நீளங்கொண்டு $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ ஆகுமாறு அமைந்த ஒரு கோடு.

அமைப்பு. யாதாயினும் இருகோடுகள் **வந, வய** என்பவற்றை வரைக. **வந** விலிருந்து **வக, வம** என்பவற்றை **வக** = அ அலகுகள், **வம** = இ அலகுகள் ஆகுமாறு வெட்டுக.

வய விலிருந்து **வத** என்பதை **வத** = உ அலகுகள் ஆகுமாறு வெட்டுக.

கத வை இணைக்க.

மப வை **கத** விற்குச் சமாந்தரமாக **ம** விற்கூடாகச் செல்லுமாறும் **வய** வை **ப** விலே சந்திக்குமாறும் வரைக.

அப்பொழுது அ, இ, உ என்பவற்றினது நான்காம் விகிதசமன் **வப** ஆகும்.

நிறுவல். **கத** என்பது **மப** விற்குச் சமாந்தரமாதலால்,

$$\frac{\text{வக}}{\text{வம}} = \frac{\text{வத}}{\text{வப}},$$

$$\therefore \frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{வப}}.$$

குறிப்பு. அ, இ அலகுநீளங்கள்கொண்ட கொடுக்கப்பட்ட இருகோடுகளுக்கு மூன்றும் விகிதசமனை அமைத்தல் அ, இ, உ அலகுநீளங்கள்கொண்ட மூன்றுகோடுகளுக்கு நான்காம் விகிதசமன் அமைத்தலை ஒக்கும்.

எனவே அமைப்பு 20 இலுள்ள முறை வேண்டிய விளைவினைத் தரும்.

பயிற்சி 88

1. ஒரு கோடு **கம** வை வரைந்து 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் அதை உட்புறமாகப் பிரிக்க.

2. ஒருகோடு **கம** வை வரைந்து வெளிப்புறமாக (i) 5 : 3 என்ற விகிதத்திலும், (ii) 3 : 5 என்ற விகிதத்திலும் பிரிக்க.

[3] ஒருகோடு **கம** வை வரைந்து 4 : 7 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்க.

[4] ச.மீ., மீ.மீ., அளவுகோடிடப்பட்ட ஒரு வரைகோல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது; $1\frac{4}{7}$ ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு அமைக்க.

5. ஒருகோடு **கம** வை வரைந்து அதில் புள்ளிகள் **வ,ய** க்களை **கவ : வய : யம** = 2 : 6 : 3 என்ற விகிதத்தில் அமைக்க.

[6] ஒரு கோடு **கம** வை வரைந்து **கம** விலே **ந** என்ற ஒரு புள்ளியையும் நீட்டப்பட்ட **கம** விலே **ய** என்ற ஒரு புள்ளியையும் **கந : நம : மய** = 4 : 5 : 2 என்ற விகிதத்தில் அமைக்க.

7. 4, 5, 6 ச.மீ. அளவு நீளங்கள் கொண்ட கோடுகளுக்கு நான்காம் விகிதசமனை அமைத்து அளக்க.

8. 5, 6 ச.மீ. அளவு நீளங்கள் கொண்ட கோடுகளுக்கு மூன்றும் விகிதசமனை அமைத்து அளக்க.

9. $\frac{\text{அ}}{3} = \frac{7}{5}$ என்பதைத் தீர்த்தற்கு ஓரமைப்பைப் பயன்படுத்துக.

[10] $\frac{\text{அ}}{3} = \frac{\text{இ}}{4}$ ஆகவும் அ + இ = 11 ஆகவும் அமையுமாறு ஓரமைப்பைப் பயன்படுத்தி அ, இ என்பவற்றைக் காண்க.

பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை வரைப்பட முறையிற் காண்க.

11. $\frac{2 \cdot 3 \times 5 \cdot 9}{4 \cdot 7}$. 12. $\frac{3 \cdot 7^2}{5 \cdot 2}$. 13. $3 \cdot 8 \times 2 \cdot 7$.

14. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வையும் ஒரு கோடு **வய** வையும் வரைக. **வய** விற்குச் சமமான சுற்றளவுள்ளதாயும் **மப : பக : கம** என்ற விகிதங்களில் பக்கங்கள் உடையதாயுமுள்ள ஒரு முக்கோணம் அமைக்க.

15. ஒருகோணம் **மகப** வை வரைந்து அதன் இருசமவெட்டியிலே ஒரு புள்ளி **ஒ** வை எடுத்து ஒரு கோடு **வஒய** வை **கம, கப** என்பவற்றை **வ, ய** க்களில் வெட்டி **வஒ : ஒய** = 3 : 5 ஆகுமாறு வரைக.

16. 6 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம் **கமப** வை வரைந்து **மப** வில் ஒரு புள்ளி **ந** வை **மந** = 1·5 ச.மீ. ஆகுமாறு எடுக்க. Δ**கமப** விற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு செவ்வகத்தை அதன் ஒரு பக்கம் **கந** விற்குச் சமமாகுமாறு வரைக. ஓரடுத்துள பக்கத்தை அளக்க.

17. 3 அங். நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** வை வரைந்து அதிலே ஒரு புள்ளி **வ** வை **கவ**^{2} = 2**வம**^{2} ஆகுமாறு அமைக்க.

[18] 3 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு **கம** வை வரைந்து நீட்டப்பட்ட **கம** விலே ஒருபுள்ளி **ய** வை **கய**^{2} = 3**யம**^{2} ஆகுமாறு அமைக்க.

வடிவொப்புமை

வடிவொப்புமை என்பதன் கருத்தினை நாம் முன்னரே ஆராய்ந்துள்ளோம்; பக்கங்கள் 85–88 வரை பார்க்க. இரு முக்கோணங்களினுடைய சர்வசமனின் சோதனைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒத்த வடிவொப்புமையின் சோதனை ஒன்று உண்டு என்பது அங்கு காட்டப்பட்டுள்ளது. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கோணங்கள் ஆகியவற்றின் அளவுகளை எவ்வாறு இணைத்து எடுத்தால், பிறிதோரிடத்தில் எவ்வாறு அதே வடிவுடையதான ஆனால் யாதாயினும் ஒரு பருமனுடையதான ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கலாம்—அதாவது கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்திற்கு அளவுத்திட்டம் வரையலாம்—என்பதைச் சிந்தித்ததால் வடிவொப்புமைக்குரிய சோதனைகள் பெறப்பட்டன. இச்சோதனைகள் திருத்தமானவை என்பதற்குரிய நிறுவல்கள் தேற்றங்கள் 75, 76, 77 ஆகியவற்றிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வரைவிலக்கணங்கள். (1) இரு பல்கோணங்களில் ஒன்றினுடைய ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட கோணங்கள் முறையே மற்றையதின் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட கோணங்கட்குச் சமன் எனின் அப்பல்கோணங்கள் **ஒன்றுக்கொன்று சமகோணமானவை** எனப்படும்.

(2) இருபல்கோணங்கள் (i) அவை ஒன்றுக்கொன்று சமகோணமானவையாயவிடத்தும் (ii) முதலாவதின் யாதாயினும் ஒருபக்கம் மற்றையதின் ஒத்த பக்கத்திற்குக் கொண்டுள்ள விகிதம் ஒவ்வொரொத்த சோடிப் பக்கங்களினதும் விகிதத்திற்குச் சமம்—அதாவது ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமன்—ஆயவிடத்தும் அவை **ஒன்றோடொன்று வடிவொத்தவை** எனப்படும்.

ஒன்றுடனொன்று சமகோணமான பல்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாயிருக்க வேண்டியதில்லை என்பது கண்கூடு; ஒரு சதுரத்தையும் ஒரு

செவ்வகத்தையும் எடுத்துக் கொண்டால் இது புலப்படும். ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனான பல்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாயிருக்கவேண்டியதில்லை யென்பதும் கண்கூடு; உதாரணம், ஒரு சதுரமுஞ் சாய்சதுரமும்.

ஆனால் இரு முக்கோணங்களின் வடிவொப்புமைக்குரிய சோதனைகள்

(i) ஒன்றுக்கொன்று சமகோணமான முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்றும் (ii) விகிதசமமான ஒத்த பக்கங்களையுடைய முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்றும், காட்டுகின்றன.

குறியீடு. ஒத்த முக்கோணங்கள், பல்கோணங்கள் ஆகியவற்றைப் பெயரிடும் எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு ஈருருவங்கட்குமுள்ள ஒப்பினைக்காட்டுமாறு அமைதல் வேண்டும்.

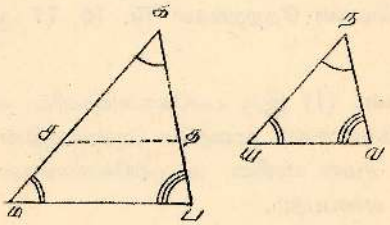
உதாரணமாக, $\triangle$ கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{நயவ}}$ வடிவொத்தவை என்னுங் கூற்று,

$\angle$ க $=$ $\angle$ ந, $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ என்பதையும்,

$\frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}}$ என்பதையும் கருதும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 827 இல் $\angle$ க $=$ $\angle$ ந, $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ எனின், $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}$ எனவும் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$ எனவும் நிறுவுக.



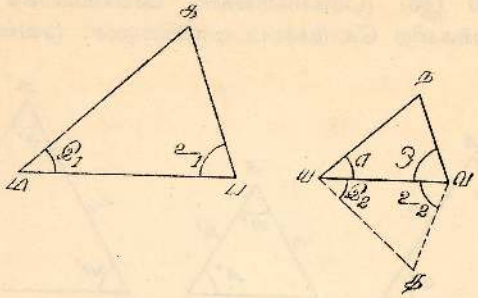
உருவம் 827

கம, கப என்பவற்றிலிருந்து கச வை நய விற்குச் சமனாகவும் கத வை நவ விற்குச் சமனாகவும் வெட்டுக. சத வை இணைக்க.

(i) ஏன் $\angle$ கசத $=$ $\angle$ நயவ என விளக்குக.

(ii) ஏன் சத $\parallel$ மப என விளக்குக. என்ன பெறப்படுகிறது ?

(iii) $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$ என்பதை நிறுவுவதற்கு என்ன கருவி வேண்டும் ?



உருவம் 828

2. உரு 828 இல் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}}$ எனின்

$\angle$ க $=$ $\angle$ ந, $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ என நிறுவுக.

உரு 828 இலுள்ள குறியீடுகளைக்கொண்டு இ$_2$ $=$ இ$_1$ ஆகவும் உ$_2$ $=$ உ$_1$ ஆகவும் அமையுமாறு ஒரு புள்ளி த வை எடுக்க.

(i) எண் 1 இல் நிறுவப்பட்ட விளைவுகளைப் பயன்படுத்தி $\frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$ விற்குச் சமமான இரு விகிதங்களை எழுதுக. தரவிலிருந்து என்ன பெறப்படுகின்றது ?

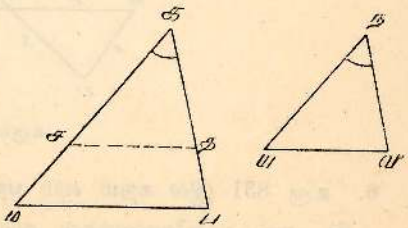
(ii) முக்கோணங்கள் $\frac{\text{நயவ}}{\text{தயவ}}$ சர்வசமனாகும் என நிறுவுக.

3. உரு 829 இல் $\angle$ க $=$ $\angle$ ந ஆக $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}$ எனின் முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{நயவ}}$ வடிவொத்தவை என நிறுவுக.

கம, கப என்பவற்றிலிருந்து கச வை நய விற்குச் சமனாகவும் கத வை நவ விற்குச் சமனாகவும் வெட்டுக. சத வை இணைக்க.

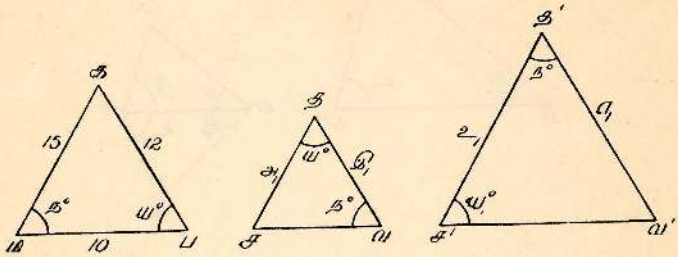
(i) ஏன் சத $\parallel$ மப என விளக்குக.

(ii) முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கசத}}{\text{நயவ}}$ சர்வசமனென நிறுவுக.



உருவம் 829

4. உரு 830 இல் முக்கோணங்கள் செம்மையாகக் கீறப்படவில்லை. தரவுகள் உருவங்களிற் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. (சவ=9, ச'வ'=18)



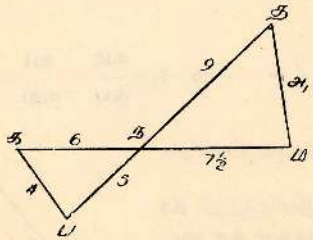
உருவம் 830

(i) முக்கோணங்கள் ஏன் வடிவொத்தவை என விளக்கி முக்கோணங்கள் **கமப** வடிவொத்தவை என்ற உருவில் எடுத்துக் கூறுக.

(ii) அ,, இ,, உ,, எ, என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) ஒரு முக்கோணம் **க'ம'ப'** என்பதை **ம'ப'** = 6 ச.மீ., **ப' க'** = 4·8 ச.மீ., **க'ம'** = 4 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. இம்முக்கோணம் **Δ கமப** விற்கு வடிவொத்ததா? காரணங்காட்டி உண்மையைச் செவ்விய முறையில் எடுத்துக் கூறுக.

5. 5·1 அங்., 6·8 அங்., 8·5 அங். அளவிற் பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணஞ் செங்கோணமுக்கோணமானது என்பதை நிறுவுதற்கு எளியமுறை யாது?



உருவம் 831

6. உரு 831 இல் **கநம** வும் **பநத** வும் நேர்கோடுகள்.

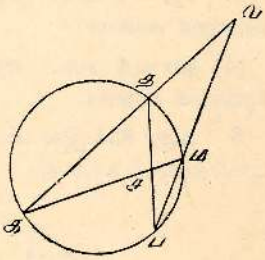
(i) ஏன் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையென விளக்கி உண்மையைச் செவ்வியமுறையில் எடுத்துக்கூறுக.

(ii) அ, இனது பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கதச}}{\text{யநம}}$ என்பன வடிவொத்தவை எனின் (i) $\frac{\text{கத}}{\text{கச}}$, (ii) $\frac{\text{மய}}{\text{மந}}$ என்பவை ஒவ்வொன்றிற்கும் சமமான ஒரு விகிதம் கூறுக. (iii) $\frac{\text{யம}}{\text{கச}}$ என்பதற்குச் சமமான இருவிகிதங்கள் கூறுக.

8. யாதாயினும் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை வரைந்து **கம, கப** என்பவற்றிலே முறையே **த, ந** என்ற புள்ளிகளை ∠**கதந** = ∠**ப** ஆகுமாறு இடுக. முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\ldots\ldots}$ வடிவொத்தவை என்ற வசனத்தை முடிவாக்குக.

கத : கந என்பதற்குச் சமமான ஒரு விகிதம் கூறுக. **தந : பம** என்பதற்குச் சமமான இரு விகிதங்கள் கூறுக.



உருவம் 832

9. உரு 832 இல் நாண்கள் **கம, பத** என்பன **ச** வில் வெட்டுகின்றன. நாண்கள் **கத, பம** என்பன **வ** விலே வெட்டுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. வடிவொத்த இருசோடி முக்கோணங்களைச் செவ்விய முறையிற் கூறுக. காரணங் காட்டுக.

$\frac{\text{சக}}{\text{சத}}$ என்பதற்குச் சமமான ஒரு விகிதம் கூறுக. $\frac{\text{வக}}{\text{வப}}$ என்பதற்குச் சமமான இரு விகிதங்கள் கூறுக.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 89

(அம்பிட்ட கோடுகள் சமாந்தரம்)

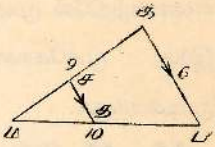
1–4 வரை உள்ள எண்கள் உரு 833 ஐக் குறிக்கின்றன. அளவுகள் அங்குலங்களில்.

1. **மச** = 3 அங். எனின் **மத, சத** என்ப வற்றைக் காண்க.

[2] **மத** = 4 அங். எனின் **மச, சத** என்ப வற்றைக் காண்க.

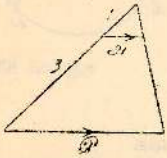
3. **சத** = 4 அங். எனின் **மச, மத** என்ப வற்றைக் காண்க.

[4] **தப** = 4 அங். எனின் **கச, சத** என்ப வற்றைக் காண்க.

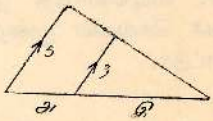


உருவம் 833

5. உரு 834 இல் அ : ஒ என்பதின் பெறு மானத்தைக் காண்க.



உருவம் 834

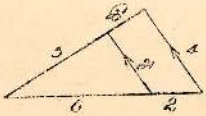


உருவம் 835

6. உரு 835 இல் இ : அ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

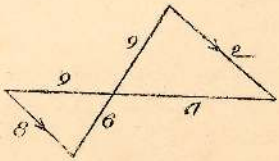
7–10 வரை உள்ள எண்களில் குறிக்கப்பட்ட நீளங்களைக் காண்க. அலகு 1 ச. மீ.

[7]



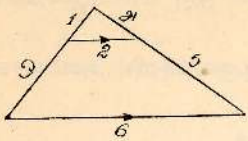
உருவம் 836

8.



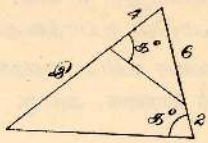
உருவம் 837

[9]



உருவம் 838

10.



உருவம் 839

11. 10 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோல் $3\frac{1}{2}$ அடி நீளமுள்ள ஒரு நிழலைத் தோற்றுவிக்கின்றது. அந்நேரத்தில் சிகரம் ஒன்று மட்டமான தரையிலே 42 அடி நீளமுள்ள ஒரு நிழலைத் தோற்றுவிக்கின்றது. சிகரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

[12] ஒருயரமான பெட்டியின் நிழலுருவத்திலே அதன் உயரம் 6 அங். அகலம் 3·2 அங். பெட்டியின் உயரம் $7\frac{1}{2}$ அடி எனின் அகலத்தைக் காண்க.

13. ஒரு வெளிச்சமானது நிலத்திலிருந்து 9 அடி உயரத்திலுள்ளது. 8 அங். நீளமுள்ள ஒரு வரைகோல் நிலத்தினின்றும் 4 அடி உயரத்திற் கிடை மட்டமாகப் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. அதனுடைய நிழலினது நீளத்தைக் காண்க.

[14] ஓரிருப்புப் பாதையின் சரிவு 60 இல் 1 என அடையாளமிடப் பட்டுள்ளது. அது $\frac{3}{4}$ மைலில் எவ்வளவு அடி உயரம் மேலெழும்பியுள்ளது ?

15. நாற்கோணம் **கமபத** வில் **தப** விற்கு **கம** சமாந்தரம் ; **கம** = 8 ச.மீ., **கத** = 3 ச.மீ., **தப** = 5 ச.மீ. நீட்டப்பட்ட **கத** வும் **மப** வும் **வ** விற் சந்தித்தால் **வத** வைக் காண்க.

[16] புள்ளிகள் (1,1), (4,2) என்பவற்றை இணைக்குங்கோடு புள்ளிகள் (0,0), (6,2) என்பவற்றை இணைக்குங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாயும் அதன் அரைப் பங்காயும் உளது என நிறுவுக.

[17] ஒன்றுடனொன்று சமகோணமான இரு முக்கோணங்களின் அடிகள் 4 அங்., 6 அங். நீளமுள்ளவையாயும் ஒத்தவையாயுமுள்ளன. முதலாவதனுயரம் 5 அங். எனின் இரண்டாவதின் பரப்பினைக் காண்க.

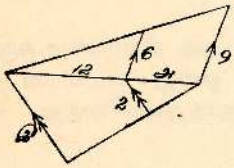
18. **மப** விற்குச் சமாந்தரமான ஒருகோடு **கம**, **கப** என்பவற்றை **ந**, **ய** க்களிற் சந்திக்கின்றது ; **மப** = 8 அங்., **நய** = 5 அங். கோடுகள் **மப** வும் **நய** வும் 2 அங். இடைவெளிகொண்டுள்ளன. Δ **கநய** வின் பரப்பினைக் காண்க.

19. ஒரு கூம்பினுடைய அடியின் விட்டம் 9 அங். உயரம் 15 அங். அடியிலிருந்து 3 அங். தூரத்தில் அதற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள ஒரு குறுக்கு வெட்டுமுகத்தின் விட்டத்தைக் காண்க.

[20] ஒரு கூம்பினுடைய அடியின் விட்டம் 8 அங். அடிக்குச் சமாந்தரமாய் அதினின்றும் 3 அங். தூரத்திலுள்ள ஒரு வெட்டுமுகத்தின் விட்டம் 6 அங். கூம்பின் உயரத்தைக் காண்க.

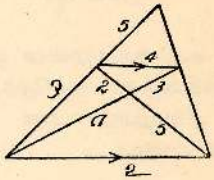
21–24 வரை உள்ள எண்கள்கொண்ட உருவங்களில் அடையாளமிடப்பட்ட நீளங்களைக் காண்க. அலகு 1 ச.மீ.

[21]



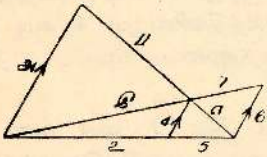
உருவம் 840

22.



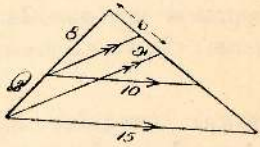
உருவம் 841

23.



உருவம் 842

[24]

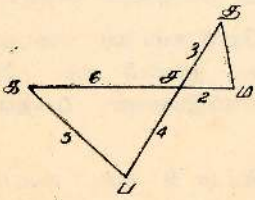


உருவம் 843

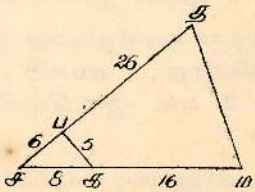
[25] △கமப வில் ம ஒரு செங்கோணம்; கப வில் வ யாதாயினும் ஒரு புள்ளி; வ விலிருந்து மப, மக விற்குச் செங்குத்துக்கள் வய, வந என்பன.

(i) கம = 7 அங்., வய = 1 அங்., வந = 2 அங். எனின் மப வைக் காண்க.

(ii) கம = 7 அங்., மப = 5 அங்., வந = அ அங்., வய = இ அங். எனின் அ, இ என்பவற்றை இணைக்கும் ஒரு சமன்பாட்டைக் காண்க.



(i)



(ii)

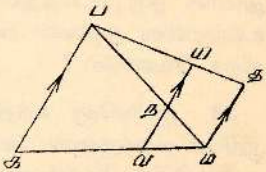
உருவம் 844

26. உரு 844 (i) இலும் உரு 844 (ii) இலும் என் இருவடிவொத்த முக்கோணங்கள் உள்ளன என விளக்குக. அவற்றை செவ்விய ஆறையிற் பெயரிடுக. ∠சபக விற்கு எக்கோணஞ் சமமானது ? க, ம, ப, த என்னும் நாலு புள்ளிகளையும்பற்றி என்ன கூறுவீர் ? மத வினது நீளமென்ன ? அலகு 1 அங்.

27. உரு 845 இல் கவ : வம = 2 : 1. கப = 2 மத எனின் வந = நய என நிறுவுக.

28. உரு 845 இல் கவ : வம = 2 : 1, கப = 8 ச.மீ., மத = 5 ச.மீ. எனின் வய வைக் காண்க.

[29] க, ம என்னும் புள்ளிகள் கோடு ஓந என்பதற்கு ஒரே பக்கத்தில் 1 அங்., 5 அங். தூரங்களிலுள்ளன ; ய, ச என்பன கம வை உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் 5 : 3 என்ற விகிதத்திற் பிரிக்கின்றன. ஓந விலிருந்து ய, ச என்பவற்றினுடைய தூரங்களைக் காண்க.



உருவம் 845

[30] மூன்று கோடுகள் கவம, கயப, கநத என்பன இரு சமாந்தரக் கோடுகள் வயந, மபத என்பவற்றால் வெட்டப்பட்டுள்ளன. சந = 3 அங்., நத = 2 அங்., மப = 4 அங். எனின் வய வைக் காண்க.

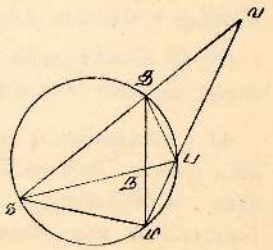
31–34 வரை உள்ள எண்கள் உரு 846 ஐக் குறிக்கின்றன. அதிலே நாண்கள் கப, மத என்பன ந வில் வெட்டிக்கொள்கின்றன ; நாண்கள் கத வும் மப வும் வ விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன.

31. கந = 3 அங்., நம = 2 அங்., கம = 4 அங்., தப = $1\frac{1}{2}$ அங். எனின் நப, நத என்பவற்றைக் காண்க.

[32] கந = 5 அங்., மந = 4 அங்., கப = 7 அங். எனின் மத வைக் காண்க.

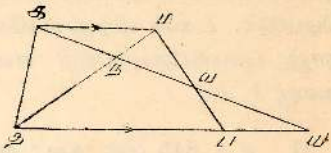
33. வக = 9 அங்., வம = 8 அங்., கம = 4 அங்., வப = 3 அங். எனின் வத, பத என்பவற்றைக் காண்க.

[34] வக = 9 அங்., வம = 8 அங்., கப = 6 அங்., வப = 4 அங். எனின் மத, வத என்பவற்றைக் காண்க.



உருவம் 846

35. உரு 847 இல் **கம** = 6 ச.மீ., **கப** = 20 ச.மீ., **கந** = 5 ச.மீ., **பத** = 9 ச.மீ. எனின் **பத**, **கவ** என்பவற்றைக் காண்க.



உருவம் 847

36. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம் ; அதில் ∠**கமப** = 90° = ∠**கபத**, **கப** = 5 அங்., **மப** = 3 அங்., **பத** = 10 அங். **மக**, **மப** என்பவற்றிலிருந்து **த** வின் தூரத்தைக்காண்க.

37. $2\frac{1}{4}$ அங். உயரமும் ஊசித்துளையிலிருந்து $2\frac{1}{2}$ அங். தூரத்திலுள்ள துமான ஒரு படலத்தில் ஒரு முழு நீளப்படமெடுக்கும் வண்ணம் 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவன் ஊசித் துளைப்படக்கருவி முன் எவ்வளவு தூரத்தில் நிற்க வேண்டும் ?

38. சூரியனோ சந்திரனோ சராசரி தூரத்தில் எப்பருமனிலே தோன்றுமோ அதைக்குறைய அப்பருமனிலே 1 அங். விட்டமுள்ள நாணயம் 3 யார் தூரத்திலே தோன்றும். சூரியனுடைய தூரத்தை 930 இலட்சம் மைல்களாகக் கொண்டு அதன் விட்டத்தைக் காண்க. சந்திரனின் விட்டத்தை 2160 மைல்களாகக் கொண்டு அதன் சராசரி தூரத்தைக் காண்க.

39. 5 அடி அகலம், 8 அடி நீளம், 3 அடி உயரமுள்ள ஒரு செவ்வக மேசை ஒரு மட்டமான நிலத்தின்மேலே, தொங்கும் விளக்கொன்றின் கீழே உள்ளது. பக்கங்களுட் சிறியதினுடைய நிலத்தின் மேலுள்ள நிழலினது நீளம் 8 அடி. பெரிய பக்கத்தினுடைய நிழலினது நீளத்தையும் மேசையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் விளக்கு உள்ளது என்பதையுங் காண்க.

40. (i) 5 அங். ஆரைகொண்ட கோளம் ஒன்று கூம்புருவப்பெய் குழல் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. குழலின் சாய்வுயரம் 15 அங். அதன் பெரிய விட்டம் 18 அங். குழலின் உச்சி கோளத்தின் மையத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது என்பதைக் காண்க.

(ii) இப்பெய்குழலில் இட்டபொழுது பெய்குழலின் விளிம்பினது தளத்தைத் தொடுங் கோளத்தின் ஆரையைக் காண்க.

41. பாக்குவெட்டி ஒன்றின் ஒரு கையினது நீளம் 6 அங். 1 அங். விட்டமுள்ள கொட்டையொன்று அதனுடைய கிட்டிய முனையானது வெட்டியின் உச்சியிலிருந்து 1 அங். தூரத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டால் வெட்டியின் கைமுனைகளுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

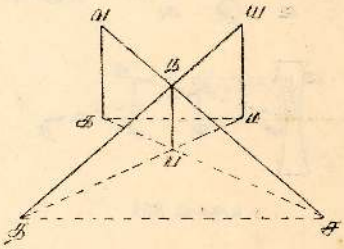
42. 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டம் வரைந்து அதனுள் ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை **மப : பக : கம** = 5 : 6 : 7 ஆகுமாறு உள்ளுருவமாக வரைக.

*43. △கமப வில் ∠ ம = 90°, கம = 5 அங்., மப = 2 அங். கப வினது இருசமவெட்டி ஆனது கம வை ய வில் வெட்டினால் கய வைக் காண்க.

*44. ஒரு செவ்வகத்துண்டுத்தாள் கமபத என்பது ம மேல் த விழுமாறு மடிக்கப்பட்டுள்ளது; மடிப்பானது கம வை ய வில் வெட்டுகின்றது. கம = 11 அங்., கத = 7 அங். எனின் கய வைக் காண்க.

*45. வய என்பது 5 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு வட்டத்தினது நாணாகும்; வ, ய க்களிலுள்ள தொடுகோடுகள் த விலே சந்திக்கின்றன. தய விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நாண் வந. வத = 8 ச.மீ. எனின் வந வைக் காண்க.

*46. க, ம, ப என்பன மட்டமான தரையிலே உள்ள 3 புள்ளிகள்; (உரு 848 ஐப் பார்க்க.) கம = 9 அடி; கவ, மய என்பன ஒவ்வொன்றும் 8 அடி உயரமுள்ள நிலைக்குத்தான கம்பங்கள். பந என்பது 5 அடி உயரமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்தான கம்பம். நேர்கோடுகள் வந, யந என்பன வ, ய என்பவற்றிலிருந்து ந விற்குச் சென்று நிலத்தை ச,த க்களிற் சந்திக்குமாறு செல்கின்றன. சத வினது நீளத்தைக் காண்க.

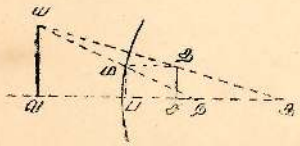


உருவம் 848

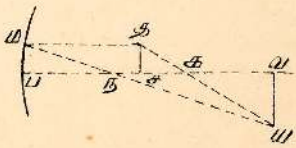
*47. 2 அங்., 3 அங்., 4 அங். அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்திண்மம் தன்னுடைய பக்கங்களுள் பெரியது மேசை மேலிருக்கும் வண்ணம் உள்ளது. தன்னுடைய அடி விட்டத்திற்குச் சமமான உயரங்கொண்ட ஒரு கோதான கூம்பு செவ்வகத்தை மறைத்து அதனுடைய மேல் நான்கு மூலைகளையும் தொட்டுக்கொண்டு மேசைமேலே தங்கியுள்ளது. கூம்பினுடைய உயரத்தைக் காண்க.

*48. உரு 849 ஒருபொருள் சத வையும் ஒரு குழிவான கண்ணாடியுள் தோன்றும் அதனுடைய விம்பம் வய வையும் குறிக்கின்றது. கண்ணாடியின் மையம் க; அதன் குவியம் ந. பச = அ, பவ = இ, பந = நக = உ, சத = எ, வய = ஒ.

(i) $\frac{1}{உ} = \frac{1}{அ} - \frac{1}{இ}$, (ii) $ஒ = \frac{இஎ}{அ}$ என்பவற்றை நிறுவுக.



உருவம் 849



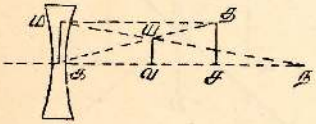
உருவம் 850

*49. உரு 850 உம் ஒரு பொருள் **சத** வையும் ஒருகுழிவான கண்ணாடியுள் அதனுடைய விம்பம் **வய** வையுங் குறிக்கின்றது. விம்பத்தைப் பற்றி என்ன அறிகின்றீர்? எண் 48 இலுள்ள தரவுகள், குறியீடுகள் ஆகியவற்றைக்கொண்டு,

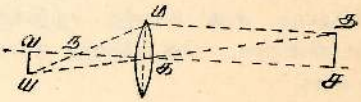
$$\frac{1}{\text{உ}} = \frac{1}{\text{அ}} + \frac{1}{\text{இ}}$$ என நிறுவுக.

*50. உரு 851 ஒரு பொருள் **சத** வையும் **க** வை மையமாகவும் **ந** வை குவியமாகவும் உள்ள ஒரு மெல்லிய குவிந்த கண்ணாடியுள் அதனுடைய விம்பம் **வய** வையும் குறிக்கின்றது. **கச** = அ, **கவ** = இ, **கந** = உ, **சத** = எ, **வய** = ஒ.

(i) $\frac{1}{\text{உ}} = \frac{1}{\text{இ}} - \frac{1}{\text{அ}}$ என நிறுவுக. (ii) $\text{ஒ} = \frac{\text{இஎ}}{\text{அ}}$ என நிறுவுக.



உருவம் 851



உருவம் 852

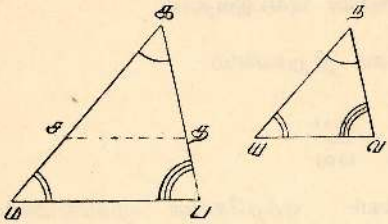
*51. உரு 852 ஒருபொருள் **சத** வையும் ஒருமெல்லிய குவிவான கண்ணாடியுள் உள்ள அதன் விம்பம் **வய** வையும் குறிக்கின்றது. எண் 50 இலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு,

$$\frac{1}{\text{உ}} = \frac{1}{\text{அ}} + \frac{1}{\text{இ}}$$ என நிறுவுக.

ஒ வை எ, அ, உ என்பவற்றிற் காண்க.

தேற்றம் 75

இரண்டு முக்கோணங்கள் சமகோணங்களானவையெனின் அவற்றினுடைய ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமனுனவையாம்.



உருவம் 853

தரவு. இருமுக்கோணங்கள் கமப, நயவ ; அவற்றில் ∠க = ∠ ந, ∠ம = ∠ ய, ∠ப = ∠ வ.

மேற்கோள். $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$.

கருவி. கம, கப என்பவற்றிலிருந்து கச, கத என்பவற்றை நய, நவ என்பவற்றிற்குச் சமமாக வெட்டுக. சத வை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் கசத, நயவ என்பவற்றில்,

கச = நய — கருவி,

கத = நவ — கருவி,

∠க = ∠ந — தரவு,

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கசத}}{\text{நயவ}}$ சருவசமனுகும் — பகோப.

∴ ∠கசத = ∠நயவ,

ஆனுல் ∠கமப = ∠நயவ — தரவு,

∴ ∠கசத = ∠கமப.

ஆனுல் இவை ஒத்தகோணங்களாகும் ;

∴ மப விற்கு சத சமாந்தரமாகும் ;

∴ கம, கப என்பவற்றை சத விகிதசமனிற் பிரிக்கின்றது,

∴ $\frac{\text{கம}}{\text{கச}} = \frac{\text{கப}}{\text{கத}}$.

ஆனால் கச = நய, கத = நவ கருவி,

$$\therefore \frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}.$$

இவ்வாறே மக, மப என்பவற்றில் யந, யவ என்பவற்றிற்குச் சமமாக நீளங்களை வெட்டுவதால்,

$$\frac{\text{மக}}{\text{யந}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$$ என நிறுவலாம்.

$$\therefore \frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}.$$

குறிப்பிற்காகிய சுருக்கம் : ஒத்தகோண முக்கோணங்கள்.

சில வேளைகளில் தேற்றம் 75,

ஒன்றுக்கொன்று ஒத்த கோணங்களுடைய முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்றும் எடுத்துச் சொல்லப்படும்.

பக்கம் 559 பார்க்க. ஒன்றுக்கொன்று சம கோணங்களுடைய நாற்கோணங்கள் வடிவொத்த வையாயிருத்தல் வேண்டியதில்லையென முன்னர் அறிவிக்கப்பட்டுள்ளது. பக்கம் 622 வினாத்தாள் 84, எண் 4 (ii), பக்கம் 624 வினாத்தாள் 86, எண் 4 (i) ஆகியவற்றைப் பார்க்க.

தடித்த எழுத்தில் அச்சிடப்பட்ட நிறுவற்பகுதிக்குக் கவனஞ்செலுத்தல் வேண்டும்.

$\frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{மக}}{\text{யந}}$ = என நிறுவுவதற்குப் பிறிதொரு கருவியும் வேண்டற்பாலது.

மப விற்கு சத சமாந்தரம் என்பது $\frac{\text{மப}}{\text{சத}}$ என்ற விகிதத்திற்கு ஒரு பெறுமானத்தைத் தரானு.

$\frac{\text{மப}}{\text{சத}} = \frac{\text{கம}}{\text{கச}}$ எனச்சொல்வது இத்தேற்றத்தில் நிறுவப்படவேண்டியதை எடுகோளாகக் கொண்டதையொக்கும்.

மூலைவிட்டவளவுகோல் தத்துவத்திற்கு தேற்றம் 75 ஐப் பிரயோகித்தலை எடுத்துக்காட்ட வேண்டும். அது மீட்டற்கு ஒரு நல்ல வாய்ப்பினை அளிக்கின்றது. பக்கம் 222 இலுள்ள வாய்முறை உதாரணங்களுக்கு ஒத்த சில உதாரணங்களைச் செய்தல் நலம்.

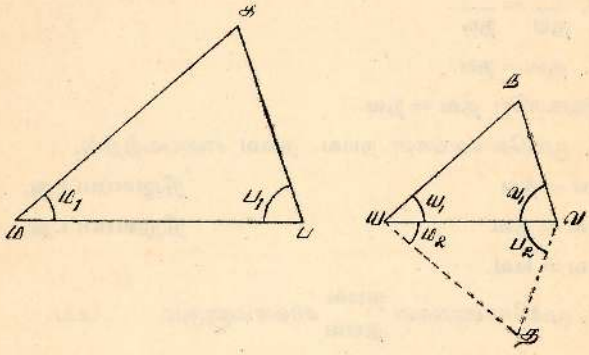
முக்கிய குறிப்பு. கணக்குச் செய்கையில் கமப, நயவ என்னும் இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களினுடைய சோடிப் பக்கங்களின் மூன்று ஒத்த விகிதங்களை எழுதும்பொழுது Δ கமப வின் ஒவ்வொரு பக்கத்திற்கும் Δ நயவ வின் ஒத்த பக்கத்திற்குள்ள விகிதத்தை எடுத்துக்கொள்ளல் நன்று.

உதாரணமாக $\frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}}$ என எழுதுவது,

$\frac{\text{கம}}{\text{மப}} = \frac{\text{நய}}{\text{யவ}}$ என்றும் $\frac{\text{மப}}{\text{பக}} = \frac{\text{யவ}}{\text{வந}}$ என்றும் எழுதுவதிலுஞ் சிறந்ததாகும்.

தேற்றம் 76 (முதலாவது நிறுவல்)

ஒருமுக்கோணத்தின் மூன்றுபக்கங்களும் இரண்டாவதொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கட்கும் விகிதசமமெனின் அம்முக்கோணங்கள் சமகோணமானவையாகும்.



உருவம் 854

தரவு. இருமுக்கோணங்கள் கமப, நயவ ; அவற்றில்

$$\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}}.$$

மேற்கோள். $\angle$ க $=$ $\angle$ ந, $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ.

கருவி. ந விற்கு எதிராக யவ வின் பக்கத்திலே யத, வத என்பவற்றை $\angle$ தயவ $=$ $\angle$ ம, $\angle$ தவய $=$ $\angle$ ப ஆகுமாறு வரைக.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் கமப, தயவ என்பவற்றிலுள்ள குறியீடுகளைக் கொண்டு குறித்தால்,

$\text{ம}_1 = \text{ம}_2$ கருவி,

$\text{ப}_1 = \text{ப}_2$ கருவி,

$\therefore$ $\angle$ க $=$ $\angle$ த முக்கோணங்களின் மூன்றாவது கோணங்கள்.

$\therefore$ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{தயவ}}$ வடிவொத்தவை சமகோண முக்கோணங்கள்.

$\therefore \frac{\text{கம}}{\text{தய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$.

ஆனால் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$ தரவு,

$\therefore \frac{\text{கம}}{\text{தய}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}}$.

$\therefore$ தய = நய.

இவ்வாறே தவ = நவ.

$\therefore$ முக்கோணங்கள் நயவ, தயவ என்பவற்றில்,

நய = தய நிறுவப்பட்டது,

நவ = தவ நிறுவப்பட்டது,

யவ = யவ.

$\therefore$ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{நயவ}}{\text{தயவ}}$ சர்வசமனாகும் பபப.

$\therefore$ $\text{ய}_{,} = \text{ம}_2$,

ஆனால் $\text{ம}_2 = \text{ம}_1$ கருவி,

$\therefore$ $\text{ய}_{,} = \text{ம}_1$,

இவ்வாறே, $\text{வ}_{,} = \text{ப}_1$. முக்கோணங்களின் மூன்றுங்கோணங்கள்.

எனவே ∠ ந = ∠ க ஆகும்

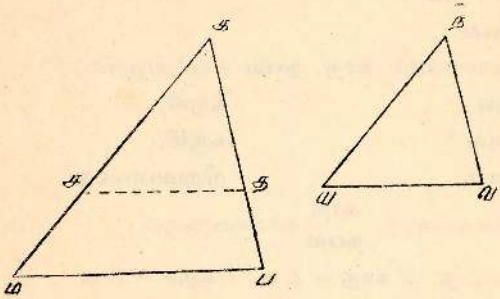
குறிப்பிற்குரிய சுருக்கம் : 3 பக்கங்கள் விகிதசமன்.

சிலவேளைகளில்,

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்றுபக்கங்களுக்கும் இரண்டாவதொரு முக்கோணத்தின் மூன்றுபக்கங்களும் விகிதசமன் எனின் அம்முக்கோணங்கள் படிவொத்தவையாகும் என்றும் தேற்றம் 76 சொல்லப்படும்.

தேற்றம் 76 (இரண்டாவது நிறுவல்)

ஒருமுக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களும் இரண்டாவதொரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கட்கும் விகிதசமன் எனின் அம்முக்கோணங்கள் சமகோணமானவையாகும்.



உருவம் 855

தரவு. இருமுக்கோணங்கள் **கமப, நயவ** என்பன ;

அவற்றில் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}}$.

மேற்கோள். $\angle$ க $=$ $\angle$ ந, $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ.

கருவி. கம, கப என்பவற்றிலிருந்து கச, கத என்பவற்றை நய, நவ என்பவற்றிற்குச் சமமாக வெட்டுக. சத வை இணைக்க.

நிறுவல். $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}$ தரவு,

ஆனால் நய $=$ கச, நவ $=$ கத கருவி,

$\therefore \frac{\text{கம}}{\text{கச}} = \frac{\text{கப}}{\text{கத}}$.

$\therefore$ கத என்பது கம, கப என்பவற்றை விகிதசமனிற் பிரிக்கின்றது.

$\therefore$ மப விற்குச் சத சமாந்தரம்.

$\therefore$ $\angle$ கமப $=$ $\angle$ கசத, $\angle$ கபம $=$ $\angle$ கதச ஒத்தகோணங்கள்,

$\therefore$ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{கசத}}$ சமகோணமானவை.

$\therefore \frac{\text{மப}}{\text{சத}} = \frac{\text{கம}}{\text{கச}}$ ஒத்தபக்கங்கள் விகிதசமன்.

ஆனால் கச = நய கருவி,

$\therefore \frac{\text{மப}}{\text{சத}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}}$;

ஆனால் $\frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}}$ தரவு,

∴ சத = யவ.

∴ முக்கோணங்கள் கசத, நயவ என்பவற்றில்,

கச = நய கருவி,

கத = நவ கருவி,

சத = யவ நிறுவப்பட்டது.

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கசத}}{\text{நயவ}}$ சர்வசமனாகும் பபப.

∴ ∠க = ∠ந, ∠கசத = ∠ய, ∠கதச = ∠வ,

ஆனால் ∠கசத = ∠ம, ∠கதச = ∠ப நிறுவப்பட்டது.

∴ ∠ம = ∠ய, ∠ப = ∠வ.

குறிப்பு.—தேற்றம் 76 இனுடைய இரண்டாவது நிறுவலின் நயன் தேற்றங்கள் 75, 77 ஆகியவற்றிற்குப் பயன்படுத்திய அதே கருவியில் அந்நிறுவல் தங்கியுள்ளதனாலாகும். நிறுவல் சிறிது கடினமானதே.

அறிகணக்குக்கள் பற்றிய குறிப்பு :

பல அறிகணக்குக்களில் அ, இ, உ, எ என்பன கொடுக்கப்பட்ட ஒருருவினுள்ள கோடுகளினுடைய நீளங்களாயிருக்கும்பொழுது $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ என நிறுவல்வேண்டிவரும்.

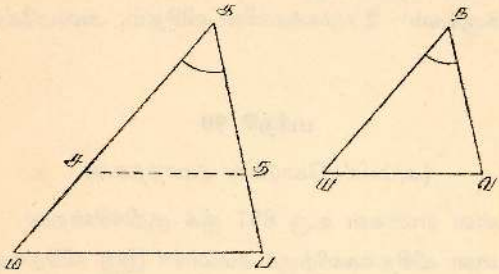
(i) $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ என நிறுவல் $\frac{\text{அ}}{\text{உ}} = \frac{\text{இ}}{\text{எ}}$ என நிறுவுவதற்குச் சமமாகும்.

(ii) ஒன்று அ, இ களைப் பக்கங்களாகக்கொள்ள மற்றையது உ, எ களைப் பக்கங்களாகக்கொள்ளும் இரு முக்கோணங்கள் உளவோ இன்றேல் ஒன்று அ, உ க்களைப் பக்கங்களாகக்கொள்ள மற்றையது இ, எ க்களைப் பக்கங்களாகக் கொள்ளும் இருமுக்கோணங்கள் உளவோ என்று பார்த்து இவை சமகோணமானவை என நிறுவ முயலல் வேண்டும்.

(iii) $\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ எனும் விகிதத்தின் இடத்திலோ $\frac{\text{அ}}{\text{உ}}$ எனும் விகிதத்தின் இடத்திலோ சமாந்தரங்களை அல்லது வடிவொத்த முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தி மிக்க வாய்ப்பான பிறிதொரு விகிதத்தை இடலாமோ என்பதை ஆராய்க.

தேற்றம் 77

இருமுக்கோணங்களில் ஒன்றின் ஒருகோணம் மற்றையதின் ஒருகோணத்திற்குச் சமமாகவும் இச்சமனான கோணங்களைப் பற்றிய பக்கங்கள் விகித சமமாகவும் இருந்தால் அம்முக்கோணங்கள் சமகோணமானவையாகும்.



உருவம் 856

தரவு. இருமுக்கோணங்கள் கமப, நயவ என்பன ; அவற்றில்

$\angle$ க = $\angle$ ந, $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}$.

மேற்கோள். $\angle$ ம = $\angle$ ய, $\angle$ ப = $\angle$ வ.

கருவி. கம, கப என்பவற்றிலிருந்து கச, கத என்பவற்றை நய, நவ என்பவற்றிற்குச் சமமாக வெட்டுக. சத வை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் கசத, நயவ என்பவற்றில்,

கச = நய கருவி,

கத = நவ கருவி,

$\angle$ க = $\angle$ ந தரவு;

$\therefore$ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கசத}}{\text{நயவ}}$ சர்வசமனாகும் பகோப.

$\therefore$ $\angle$ கசத = $\angle$ ய, $\angle$ கதச = $\angle$ வ.

இன்னும் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}$ தரவு,

நய = கச, நவ = கத கருவி,

$\therefore$ $\frac{\text{கம}}{\text{கச}} = \frac{\text{கப}}{\text{கத}}$,

∴ சத என்பது கம, கப க்களை விகிதசமனிற் பிரிக்கின்றது.

∴ சத என்பது மப விற்குச் சமாந்தரம்.

∴ ∠கசத = ∠ம, ∠கதச = ∠ப ஒத்தகோணங்கள்.

ஆனால் ∠கசத = ∠ய, ∠கதச = ∠வ நிறுவப்பட்டது;

∴ ∠ம = ∠ய, ∠ப = ∠வ.

குறிப்பிற்குரிய சுருக்கம் : 2 பக்கங்களின் விகிதம், அமைகோணம்.

பயிற்சி 90

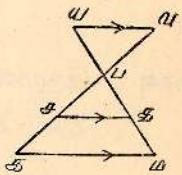
(அம்பிட்டகோடுகள் சமாந்தரம்)

1–4 வரை உள்ள எண்கள் உரு 857 ஐக் குறிக்கின்றன.

1–4 வரை உள்ள விகிதங்களிற்குச் சமமான இரு விகிதங்கள் கூறுக.

1. $\frac{\text{சத}}{\text{கம}}$. [2] $\frac{\text{கம}}{\text{வய}}$.

[3] பச : பத. 4. கம : மப.



உருவம் 857

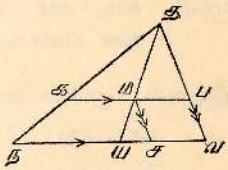
5–10 வரை உள்ள எண்கள் உரு 858 ஐக் குறிக்கின்றன.

5. $\frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{தக}}{\text{தந}}$ என நிறுவுக.

[6] $\frac{\text{நய}}{\text{யவ}} = \frac{\text{கம}}{\text{மப}}$ என நிறுவுக.

7. யச : கந = மப : கத என நிறுவுக.

[8] மச : தவ = நக : நத என நிறுவுக.



உருவம் 858

9. ப வை ய வுடன் இணைக்குங் கோடு தந விற்குச் சமாந்தரமெனின் மப : நய = யவ : நவ என நிறுவுக.

10. நம என்பது இணைக்கப்பட்டு நவ விற்குச் சமாந்தரமாய் த விற் கூடாகச் செல்லுங் கோட்டை ஒ விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டால் மச : நம = தவ : நஒ என நிறுவுக.

[11] உரு 801 இலுள்ள தரவுடன்,
யத : கச = வப : கம என நிறுவுக.

[12] உரு 812 இலுள்ள தரவுடன்,
பய : வக = பந : நய என நிறுவுக.

13. **மந, பவ** என்பன △**கமப** வின் உயரங்களெனின் **மந : பவ = கம : கப** என நிறுவுக.

14. **கமப** என்பது ஒருவட்டத்துள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். ∠**மகப** வின் இருசமவெட்டி **மப** வை **ய** வில் வெட்டி வட்டத்தை மீண்டும் **வ** வில் வெட்டுகின்றது. **கப : கவ = கய: கம** என நிறுவுக ; **மய : கம** என்பதற்குச் சமமான ஒருவிகிதங் கூறுக.

[15] வட்டம் **கமவ** வின் ஒருவிட்டம் **கம** ; **வத** என்பது **வ** விலிருந்து **க** விலுள்ள தொடுகோட்டிற்குள்ள செங்குத்தாகும். **வத : வக = கவ : கம** என நிறுவுக.

16. △**கமப** வில் ∠ **மகப** = 90° ; **கத** ஒருயரம். **தப : கப = கப : மப** என நிறுவுக ; **பத: தக** என்பதற்குச் சமமான இருவிகிதங்கள் கூறுக.

17. △**கமப** வின் மையக்கோடுகள் **மய, பவ** என்பன **ந** வில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. **நய** = $\frac{1}{3}$ **மய** என நிறுவுக. (**யவ** வை இணைக்க.)

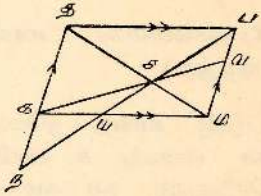
18–25 வரையுள்ள எண்கள் உரு 859 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **நகத, கசவ, பசயந** என்பன நேர்கோடுகள்.

18. பின்வரும் தொடர்புகளை முடிவாக்குக.

$$\frac{\text{சப}}{\text{சந}} = \frac{\text{மப}}{..} = \frac{\text{மய}}{..} = \frac{\text{சய}}{..}.$$

[19] பின்வரும் தொடர்புகளை முடிவாக்குக.

$$\frac{\text{மவ}}{\text{கத}} = \frac{\text{மச}}{..} = \frac{\text{மய}}{..}.$$



உருவம் 859

20. **பச : சந = பய : பந** என நிறுவுக.

[21] **கத : மய = தந : கம** என நிறுவுக.

22. **மவ = 2 வப** எனின் (i) $\frac{\text{சத}}{\text{சம}}$, (ii) $\frac{\text{தச}}{\text{தம}}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க

23. **தக = 3 கந** எனின் (i) $\frac{\text{மச}}{\text{சத}}$, (ii) $\frac{\text{மவ}}{\text{வப}}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

24. **கய = யம** எனின் **நச = 2சப** என நிறுவுக.

*25. △**பதந** : △**மதக** = △**மதக** : △**மபய** என நிறுவுக.

26. **கமபதந** என்பது ஒரொழுங்கான ஐங்கோணம். **கந, கய** என்பன **க** விலிருந்து **பத**, நீட்டப்பட்ட **பம** என்பவற்றிற்குரிய செங்குத்துக்கள். **கந : கய = கத : கம** என நிறுவுக.

27. ∠ **மகப** வின் இருசமவெட்டி **மப** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது.—தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட—**கத** விலே **ந** வெனும் புள்ளி **பந = பத** ஆகுமாறுள்ளது. முக்கோணங்கள் **கமத, கபந** என்பவை வடிவொத்தவை என நிறுவி **கம : கப = மத : தப** என வருவிக்க.

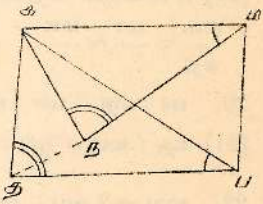
28. **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ச**; **கநம, சயம** என்பன **கம** வின் எதிர்ப்பக்கங்களிலுள்ள சமபக்க முக்கோணங்கள். **கம** வை **நய** வானது **வ** வில் வெட்டுகின்றது. **கவ = 2 வம** என நிறுவுக.

29. **மந, பவ** என்பன △**கமப** வின் உயரங்கள்; **நவ : மப = கவ : கப** என நிறுவுக.

30. ஒன்றையொன்று வெட்டா இரு வட்டங்களின் பொதுத்தொடுகோடுகள் மையங்களை இணைக்குங் கோட்டினை ஆரைகளின் விகிதத்தில் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரிக்கின்றன என நிறுவுக.

31. முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{நயவ}}$ வடிவொத்தவையாக **கச, நத** மையக் கோடுகளெனின் ∠ **மகச** = ∠ **யநத** என நிறுவுக. (தேற்றம் 77 ஐப் பயன் படுத்துக.)

[32] **கமபத** ஒரொருவட்ட நாற்கோணம். **கச** என்பது **க** விலிருந்து **மத** விற்குள்ள செங்குத்து. **கப : கம = பத : சம** எனின் **கப** ஒரு விட்டம் என நிறுவுக.



உருவம் 860

33. உரு 860 இல் ∠ **கமந** = ∠ **கபத**, ∠ **கநம** = ∠ **கதப**. △**கபம**, △**கதந** என்பவை வடிவொத்தவை என நிறுவுக. (தேற்றம் 77 ஐப் பயன் படுத்துக.)

[34] **ப** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஆரை **பம** வானது **த** என்பதற்கு **பம = மத** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **ச** என்பது **பம** வின் நடுப்புள்ளியாக **க** என்பது வட்டத்தில் யாதாயினும் ஒரு புள்ளியாயின் ∠ **பகச** = ∠ **பதக** என நிறுவுக.

35. **கமவய, கமநச** என்பன இருவட்டங்கள். **வகச, யகந** என்பன நேர்கோடுகளெனின் **மவ : மய = மச : மந** என நிறுவுக.

[36] **கமபத** ஒரு செவ்வகம். இருசெங்குத்தான நேர்கோடுகள் கீறப் பட்டுள்ளன. ஒன்று **கம, பத** க்களை **ந, வ** க்களில் வெட்டுகின்றது. மற்றையது **கத, மப** க்களை **அ, இ** க்களில் வெட்டுகின்றது. **நவ : அஇ = மப : கம** என நிறுவுக.

37. **வ** என்பது **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலே ஒரு மாறும்புள்ளி. **ஓ** என்பது வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள நிலையான ஒரு புள்ளி. **ஓவ** விலே **ய** என்பது **ஓய = $\frac{1}{3}$ ஓவ** ஆகுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி. **ய** வின் ஒழுக்கு ஒருவட்டம் என நிறுவுக. (**பச** வை **வக** விற்குச் சமாந்தரமாகவும் **ஓக** வை **ச** இலே வெட்டுமாறும் வரைக.)

*38. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம்; அதில் **கப** ∠**மகத** வை இரு சமக்கூறிடுகின்றது; ∠**கபத** = ∠**கமப**. **அ, இ** என்பன **மப, பத** என்ப வற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகளெனின் **க, அ, ப, இ** ஒரு பரிதியிலுள என நிறுவுக. (**கஅ, கஇ** களை இணைக்க.)

*39. **கமப** என்பது ஒருவட்டத்துள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம்; **ப** விலுள்ள தொடுகோடு **ம** விற்கூடாக **கப** விற்குச் சமாந்தரமாகவுள்ள கோட்டை **த** விலே வெட்டுகின்றது. **பத^2 : கம^2 = தம : பக** என நிறுவுக.

*40. **கமபத** ஒருநாற்கோணம்; அதில் **தப** விற்குக் **கம** சமாந்தரம். ∠**த** = ∠**ப** < 90°. **பத** விலே **வ** எனும் புள்ளி ∠**கவம** = ∠**ப** ஆக வமைந்துள்ளதெனின் **தவ : வப = வக^2 : வம^2** என நிறுவுக.

*41. **கம, தப** என்பன ஒரு சரிவகம் **கமபத** வின் சமாந்தரப் பக்கங்கள்; **கம** விற்குச் சமாந்தரமான யாதாயினும் ஒருகோடு **பக, பம** என்பவற்றை **ச, ந** க்களில் வெட்டுகின்றது; **தச, தந** என்பன **கம** வையும் நீட்டப்பட்ட **கம** வையும் **அ, இ** க்களில் வெட்டுகின்றன. **கம = அஇ** என நிறுவுக.

*42. △**கமப** வில் ∠**மகப** = 90°; **கமநய, கபவஅ** என்பன △**கமப** விற்கு வெளியுள்ள சதுரங்கள். **மவ, பந** என்பன **கப, கம** என்பவற்றை **த, ச** க்களில் வெட்டினால் **கச = கத** என நிறுவுக.

விகிதங்களும் பரப்புக்களும்

கம : நய என்பதற்கும் **கம . நய** என்பதற்கும் உள்ள கருத்துவேறு பாட்டைத் தெளிவாக்கல் அவசியம்.

கம : நய என்ற விகிதம் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}}$ என்ற **பின்னத்தாற்** பகரப்படும்; ஆனால் **கம . நய** என்பது **கம, நய** என்பவற்றிற்குச் சமமான அடுத்துள பக்கங்கள் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பைக் குறிக்கும்; இப்பரப்பு **கம, நய** ஆகியவற்றிலுள்ள நீள அலகுகளின் **பெருக்கத்தால்** அளக்கப்படும்.

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ எனின்,

அஎ = இஉ ஆகும்;

$\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{பத}}{\text{வச}}$ எனின்,

கம . வச = பத . நய ஆகும்.

இவ்வாறே **கம : நய = பத : வச** எனின் **கம** வாலும் **வச** வாலுங் கொண்டுள்ள செவ்வகம் **பத** வாலும் **நய** வாலுங் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குப் பரப்பிற் சமமாகும்.

மறுதலையாக செவ்வகங்கள் **கமபத, கவயந** என்பன பரப்பிற் சமமெனின் **கம . கத = கவ . கந**;

எனவே $\frac{\text{கம}}{\text{கவ}} = \frac{\text{கந}}{\text{கத}}$ என்பதும் $\frac{\text{கம}}{\text{கந}} = \frac{\text{கவ}}{\text{கத}}$ என்பதும் பெறப்படும்.

இவ்வட்சரகணித நியாயத்தின் கேத்திரகணித நிறுவல் ஒருபயனுடைப் பயிற்சியாகும்.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

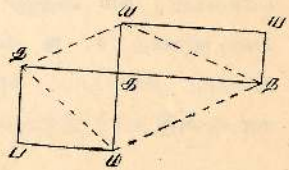
உரு 861 இல் செங்குத்தான கோடுகள் **மகவ, தகந** ஆனவை செவ்வகங்கள் **மகதப, வகநய** என்பவை பரப்பிற் சமமாயமையுமாறு உள்ளவை.

கம : கவ = கந : கத என நிறுவுக.

மந, தவ, மத, வந என்பவற்றை இணைக்க.

(i) **△ மதந = △ மவந** என நிறுவுக.

(ii) கோடுகள் **மந, தவ** என்பவற்றைப் பற்றி என்ன கூறுவீர்?



உருவம் 861

அறிகணக்கைப் பற்றிக் குறிப்பு. ஒருசெவ்வகப் பண்பைப் பற்றி நிறுவல் வேண்டின் அதை ஒத்த விகிதங்கள் பற்றிய ஒரு கூற்றாக மாற்றல் என்றும் நற்பயனுடைத்தாம்.

பயிற்சி 91

[1] (i) அ : இ = உ : எ ;

(ii) க : ம = ப : த என்பவற்றை ஒத்த பெருக்கங்களாகக் கூறுக.

2. (i) கம = பத ; (ii) $அ^2$ = இஉ என்பவற்றை ஒத்த விகிதங்களாகக் கூறுக.

ஒருமுக்கோணம் **கமப** வைக் கீறி அதில் **மப** விற்குச் சமாந்தரமாக **கம, கப** க்களை முறையே **ச, த** க்களில் வெட்டும் ஒருகோடு வரைந்து 3–6 வரையுள்ள கூற்றுக்களை நிறுவுக.

3. **கச . தப = கத . சம.**

[4] **கச . கப = கத . கம.**

5. **கச . மப = கம . சத.**

[6] **கப . சத = கத . மப.**

7. ஒருசதுரம் **நவயச** விற்குப் பரப்பிற் சமமான ஒரு செவ்வகம் **கமபத** வரைக. தரவை (i) சமமான இருபெருக்கத்தாற் குறிப்பிடுக; (ii) சமமான இருவிகிதங்களாற் குறிப்பிடுக. தகுந்த குறியீடுகளைப் பயன் படுத்துக.

8. செவ்வகங்கள் **கமபத, நவயச** என்பவற்றில் (i) **கம : நவ = நச : மப** ஆகவிருந்தால் அவற்றைப்பற்றி என்ன கூறுவீர்?

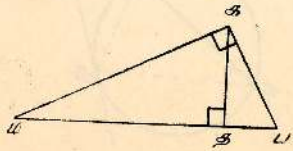
(ii) **தக : சந = கம : நவ** ஆகவிருந்தால் அவற்றைப் பற்றி என்ன கூறுவீர் ?

9. உரு 857 இலுள்ள தரவுகளுடன் (i) **பக.பய** (ii) **பச.வய** என்பவற் றிற்குச் சமமான பெருக்கங்கள் பெறுக.

[10] உரு 858 இலுள்ள தரவுகளைக் கொண்டு, **தம . நவ = கப . தய** என நிறுவுக.

11. **வ, ய** என்னும் புள்ளிகள் முறையே △**கமப** வின் பக்கங்கள் **கம, கப** என்பவற்றில் ∠**கவய** = ∠**கபம** ஆகுமாறுள்ளன. **கவ . கம = கய . கப** என நிறுவுக.

[12] △**கமப** வின் உயரங்கள் **மந, பவ** என்பன **ச** வில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. **மச . சந = பச . சவ** என நிறுவுக.



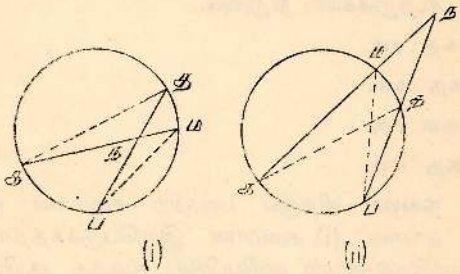
உருவம் 862

எண்கள் 13, 14 உரு 862 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் ∠ மகப = 1 செங் கோணம்; மப விற்கு கத செங்குத்து.

13. சமமான விகிதங்களைப் பயன்படுத்தி மக² = மத.மப என நிறுவுக. பக² ஐப் பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்?

14. கத² = மத.தப என நிறுவுக.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

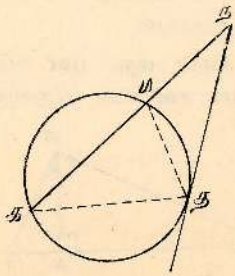


உருவம் 863

1. உரு 863 (தேவையெனில் நீட்டப்பட்டு) ஒன்றையொன்று ந விலே வெட்டும் ஒருவட்டத்தின் இருநாண்கள் கம, பத என்பவற்றைக் குறிக்கும்.

நக . நம = நப . நத என நிறுவுக.

கத, மப க்களை இணைக்க. எவ்விகிதங்கள் சமமென நீர் நிறுவல் வேண்டும்? ஏன் முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கநத}}{\text{பநம}}$ ஒவ்வோருருவிலும் வடிவொத்தவை என விளக்குக.



உருவம் 864

2. உரு 864 இல் ஒரு வட்டம் கமத வின் ஒருநாண் கம ஆனது நீட்டப்பட்டபொழுது த விலேயுள்ள வட்டத்திற்குரிய தொடுகோட்டை ந விலே சந்திக்கின்றது.

நக . நம = நத² என நிறுவுக.

தக, தம என்பவற்றை இணைக்க. எவ்விகிதங்கள் சமமென நீர் நிறுவல் வேண்டும்? ஏன் முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கநத}}{\text{தநம}}$ வடிவொத்தவை என விளக்குக.

3. உரு 863 (i) இல் கந = 4 ச.மீ., நம = 6 ச.மீ., பந = 3 ச.மீ. எனின் பத வைக் காண்க.

4. உரு 863 (ii) இல் கம = 6 ச.மீ., மந = 4 ச.மீ., தந = 5 ச.மீ. எனின் பத வைக் காண்க.

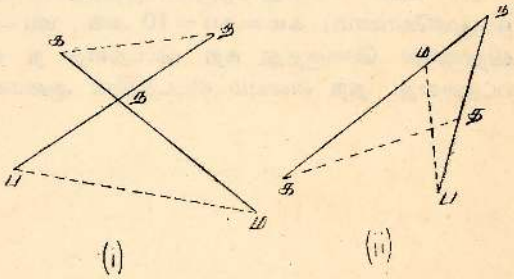
5. உரு 864 இல் நம = 4 ச.மீ., நத = 6 ச.மீ. எனின் கம வைக் காண்க.

6. உரு 865 ஒரேபுள்ளி ந விலே உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ பிரிக்கப்பட்ட இருநேர்கோடுகள் கம, பத என்பவற்றைக் குறிக்கும். நக . நம = நப . நத எனின் க, ம, ப, த என்பன ஒருபரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

கத, மப என்பவற்றை இணைக்க.

தரவினை இருசமமான விகிதங்களிற் கூறுக.

பின்னர், ஏன் முக் கோணங்கள் $\frac{\text{கநத}}{\text{பநம}}$ ஒவ்வோருருவிலும் வடிவொத்தவை என நிறுவுக.



உருவம் 865

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 92

[இன்னும் வேண்டிய உதாரணங்கட்கு பயிற்சி 78 ஐப் பார்க்க.]

1. பக்கம் 584, உரு 863 (i) இல் கம = 9 ச.மீ., கந = 4 ச.மீ., பந = 2·5 ச.மீ. எனின் பத வைக் காண்க.

2. பக்கம் 584, உரு 863 (ii) இல் கம = 7 ச.மீ., மந = 3 ச.மீ., தந = 4 ச.மீ., கத = 9 ச.மீ. எனின் பத, மப க்களைக் காண்க.

3–6 வரையுள்ள எண்கள் உரு 864 ஐக் குறிக்கின்றன.

[3] **கம** = 9 ச.மீ., **மந** = 3 ச.மீ. எனின் **நத** வைக் காண்க.

4. **மந** = 6 ச.மீ., **தந** = 12 ச.மீ. எனின் **கம** வைக் காண்க.

5. **கந** = 3 அங்., **கம** = 2 அங்., **கத** = 4 அங். எனின் **மத** வைக் காண்க.

*6. **கம** = 8 அங்., **கத** = 6 அங்., **மத** = 5 அங். எனின் **நத** வைக் காண்க.

7. வட்டத்திலுள்ள ஒருபுள்ளி **வ** விலிருந்து விட்டம் **கம** விற்குள்ள ஒரு செங்குத்து **வந**. **கந** = 5 ச.மீ., **நம** = 7·2 ச.மீ. எனின் **வந** வைக் காண்க.

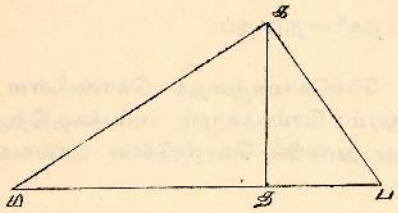
[8] △**கமப** வில், ∠ **மகப** = 1 செங்கோணம்; **கத** ஒருயரம். **கம** = 5 அங்., **கப** = 12 அங். எனின் **மத** வைக் காண்க.

9. △**கமப** வில் **கம** = 8 ச.மீ., **கப** = 12 ச.மீ. **ம,ப** க்களுக்கூடாகவுள்ள ஒரு வட்டம் **கம, கப** க்களை **வ, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. **மவ** = 5 ச.மீ. எனின் **பய** வைக் காண்க.

10. **கமப** என்பது ஒருவட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒருமுக்கோணம்; **கம** = **கப** = 10 அங்., **மப** = 12 அங்.; **க** விலிருந்து **மப** விற்குள்ள செங்குத்து **கத** வட்டத்தை **ந** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப் பட்டுள்ளது. **தந** வையும் வட்டத்தின் ஆரையையுங் காண்க.

தேற்றம் 78

ஒருசெங்கோணமுக்கோணத்தின் செங்கோணத்திலிருந்து செம்பக்கத்திற்கு ஒரு செங்குத்து வரையப்பட்டால் செங்குத்தின் இருபக்கங்களிலுமுள்ள முக்கோணங்கள் முழுச் செங்கோணத்திற்கும் ஒன்றுக்கொன்றும் வடிவொத்தவையாம்.



உருவம் 866

தரவு. **க** செங்கோணமாயுள்ள ஒரு முக்கோணம் **கமப**; **க** விலிருந்து **மப** விற்குள்ள செங்குத்து **கத**.

மேற்கோள். முக்கோணங்கள் **கமப, தமக, தகப** வடிவொத்தவை.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கமப, தமக** என்பவற்றில்,

$\angle$ **மகப** = $\angle$ **மதக** செங்கோணங்கள் தரவு,

$\angle$ **கமப** = $\angle$ **தமக** ஒரேகோணம்,

$\therefore$ மூன்றுங்கோணங்கள் **கபம, தகம** சமனாகும்.

$\therefore$ முக்கோணங்கள் **கமப** / **தமக** சமகோணமானவை.

இவ்வாறே முக்கோணங்கள் **கமப** / **தகப** சமகோணமானவை என நிறுவலாம்.

ஆனால் சமகோணமான முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையுமாகும்.

$\therefore$ முக்கோணங்கள் **கமப, தமக, தகப** வடிவொத்தவையாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 1. செம்பக்கத்திற்குள்ள செங்குத்திலுள்ள சதுரம் செம்பக்கத்தின்றுண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும். அதாவது

$$\text{கத}^2 = \text{மத.தப} \quad \text{என்பது.}$$

முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{தமக}\\ \text{தகப}\end{matrix}$ வடிவொத்தவை ஆதலின்,

$$\frac{\text{தக}}{\text{தம}} = \frac{\text{தப}}{\text{தக}},$$

$$\therefore \text{தக}^2 = \text{தம.தப.}$$

கிளைத்தேற்றம் 2. செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ள பக்கங்களுள் ஒன்றிலுள்ள சதுரம் செம்பக்கமும் அப்பக்கத்திற்கு அடுத்துள்ள செம்பக்கத்தினது துண்டுங் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும். அதாவது,

$\text{மக}^2 = \text{மத . மப}$ என்பதும் $\text{பக}^2 = \text{பத . பம}$ என்பதுமாகும்.

முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமப}\\ \text{தமக}\end{matrix}$ வடிவொத்தவையாதலின்,

$$\frac{\text{மக}}{\text{மத}} = \frac{\text{மப}}{\text{மக}},$$

$$\therefore \text{மக}^2 = \text{மத.மப.}$$

இவ்வாறே $\text{பக}^2 = \text{பத.பம.}$

இக்கிளைத் தேற்றங்களின் மற்றைவித நிறுவல் முறைகள் பக்கம் 497 இற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பைதகரசின்றேற்றத்தின் சாதாரண நிறுவலிலிருந்து கிளைத்தேற்றம் 2 ஐ உய்த்தறிவழி பக்கம் 330 இற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வடிவொத்த முக்கோணங்களால் கிளைத்தேற்றம் 2 ஐ நிறுவல் பைதகரசின் தேற்றத்தை மற்றொரு வழியில் நிறுவும் முறையைக் காட்டுகின்றது. இது பிரஞ்சுப் பாடநூல்களிற் பெருவழக்காயுள்ளது.

இக்கிளைத்தேற்றங்களிற் கூறப்பட்ட விளைவுகளைப் பின்வருமாறுங் கூறலாம் : பக்கம் 528 இலுள்ள வரைவிலக்கணத்தைப் பார்க்க.

கத என்பது △கமப வின் ஓருயரமாக ∠மகப ஒருசெங்கோணமாயின்,

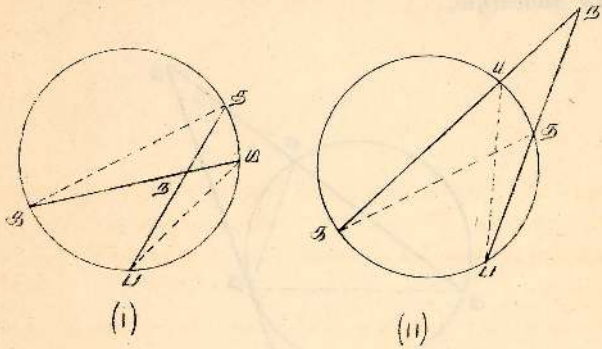
(i) கத என்பது மத, தப என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஓரிடைவிகித சமனாகும்;

(ii) மக என்பது மத,மப என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஓரிடைவிகித சமனாகும்;

(iii) பக என்பது பத, பம என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஓரிடைவிகித சமனாகும்.

தேற்றம் 79

ஒருவட்டத்தின் இருநாண்கள், தேவையெனில் நீண்டு, ஒன்றையொன்று வெட்டினால் ஒன்றின் துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகம் மற்றையதின் துண்டுகள் கொண்டுள்ள செவ்வகத்திற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 867

தரவு. ஒருவட்டத்தின் உள்ளே, உரு 867 (i), அல்லது வெளியே, உரு 867 (ii), உள்ள **ந** விலே ஒன்றையொன்று வெட்டும் அவ்வட்டத்தின் இருநாண்கள் **கம, பத** என்பவை.

மேற்கோள். **நக.நம = நப.நத.**

கருவி. **மப, கத** க்களை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கநத, பநம** என்பவற்றில்,

$\angle$**க** = $\angle$**ப** ஒரேதுண்டு,

$\angle$**கநத** = $\angle$**பநம** குத்தெதிர்க்கோணங்கள், உரு (i).

ஒரேகோணம், உரு (ii),

$\therefore$ மூன்றுங்கோணங்கள் **கதந, பமந** என்பவை சமம்.

$\therefore$ முக்கோணங்கள் **கநத / பநம** என்பவை சமகோணமானவை,

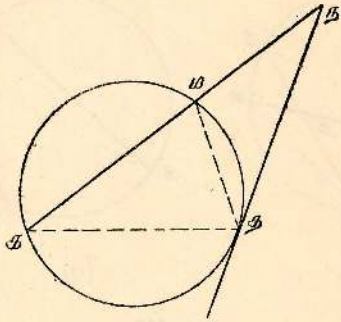
$\therefore \frac{\text{நக}}{\text{நப}} = \frac{\text{நத}}{\text{நம}}$ ஒத்தபக்கங்கள் விகிதசமன்.

$\therefore$ **நக.நம = நப.நத.**

சுருக்கத்திற்குரிய குறுக்கம் : ஒன்றையொன்று வெட்டும் நாண்கள்.

தேற்றம் 80

ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒருபுள்ளியிலிருந்து ஒருசீக்கனும் ஒரு தொடுகோடும் வரையப்பெறின் முழு சீக்கனும் வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள அதன் பகுதியுங்கொண்டுள்ள செவ்வகம் தொடுகோட்டிலுள்ள சதுரத்திற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 868

தரவு. ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒருபுள்ளி **ந** விலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு ஒருதொடுகோடு **நத** வும் அவ்வட்டத்தை **ம, க** களில் வெட்டும் ஒரு நேர்கோடு **நமக** வும்.

மேற்கோள். **நக . நம = நத²**.

கருவி. **தக, தம** களை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **கநத, தநம** என்பவற்றில்,

∠தகந = ∠மதந ஒன்றுவிட்டதுண்டு,

∠கநத = ∠தநம ஒரேகோணம்,

∴ மூன்றுங்கோணங்கள் **கதந, தமந** என்பவை சமம்,

∴ முக்கோணங்கள் **கநத / தநம** சமகோணமானவை.

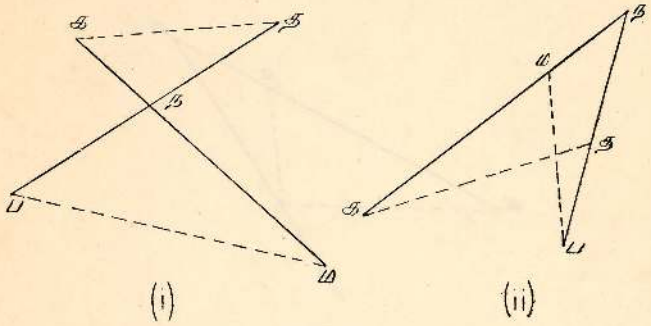
∴ $\frac{\text{நக}}{\text{நத}} = \frac{\text{நத}}{\text{நம}}$ ஒத்தபக்கங்கள் விகிதசமன்,

∴ **நக.நம = நத²**.

சுருக்கத்திற்குரிய குறுக்கம். தொடுகோட்டுப்பண்பு.

தேற்றம் 81

இருநேர்கோடுகள் கம, பத என்பன ஒரேபுள்ளி ந விலே இரண்டும் உட்புறமாகவோ இரண்டும் வெளிப்புறமாகவோ நக . நம = நப . நத ஆகுமாறு பிரிக்கப்பட்டால் க, ம, ப, த என்னும் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு பரிதியிலுள்ளனவாம்.



உருவம் 869

கருவி. கத, மப *க்களை இணைக்க.*

நிறுவல். *முக்கோணங்கள்* கநத, பநம *என்பவற்றில்,*

∠கநத = ∠பநம *குத்தெதிர்க்கோணங்கள் உரு (i),*
ஒரேகோணம் உரு (ii),

$\frac{\text{நக}}{\text{நத}} = \frac{\text{நப}}{\text{நம}}$ நக.நம = நப.நத *ஆதலின்,*

∴ *முக்கோணங்கள்* கநத / பநம *சமகோணமானவை இருபக்கங்களின் விகிதம், அமைகோணம்.*

∴ ∠தகந = ∠மபந,

அது ∠தகம = ∠தபம *ஆகும்,*

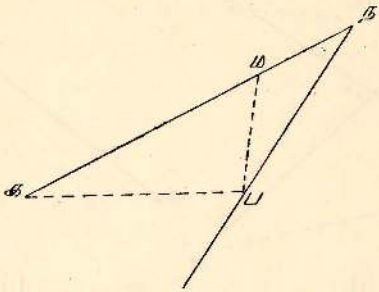
∴ தம *என்பது தனக்கு ஒரேபக்கத்தில்* க, ப *என்னும் புள்ளிகளில் சமகோணங்களை எதிரமைக்கின்றது.*

∴ த, ம, க, ப *ஒரு வட்டத்திலுள்ளன.*

குறிப்பு.—*தேற்றங்கள்* 81, 82 *ஆகியவற்றிலே தரவு, மேற்கோள் ஆகியவற்றைக்கூறி நிறுவலைத் தொடங்குதல் அவசியமன்று ; எனினும் அது பயன்படுத்த வேண்டிய எழுத்துக்களில் இங்கு எடுத்தோதப்பட்ட விவரணத்தைத் திருப்பிக் கூறியதை ஒக்கும் எனக.*

தேற்றம் 82

கம என்னும் ஒரு நேர்கோடு ந விலே வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட ப என்னும் புள்ளி கம விலே இல்லாமல் நக . நம = நப² ஆகுமாறுள்ள தெனின், வட்டம் கமப என்பது நப வை ப விலே தொடும்.



உருவம் 870

கருவி. பக, பம *க்களை இணைக்க.*

நிறுவல். *முக்கோணங்கள்* **கநப, பநம** *என்பவற்றில்,*

∠ கநப = ∠ பநம ஒரேகோணம் ;

இன்னும், $\frac{\text{நக}}{\text{நப}} = \frac{\text{நப}}{\text{நம}}$ நக . நம = நப² *ஆதலின்,*

∴ *முக்கோணங்கள்* $\frac{\text{கநப}}{\text{பநம}}$ *சமகோணமானவை* **இரு பக்கங்களின் விகிதம், அமைகோணம்**

∴ ∠ பகந = ∠ மபந,

∴ **பந** *என்பது வட்டம்* **கபம** *வை* **ப** *விலே தொடுகின்றது* **ஒன்று விட்டதுண்டு மறுதலை.**

குறிப்பு: 79–82 வரையுள்ள தேற்றங்கட்கு பிற நிறுவல்கள் 67–69 வரையுள்ளவற்றிலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. உரு 867 (ii) இலே ப வுடன் த பொருந்தி நதப ஒருதொடுகோடாகும் கடை நிலை வகையை எடுப்பதால் தேற்றம் 79 இலிருந்து 80 ஐ உய்த்தறியலாம். இவ்வாறே தேற்றம் 81 இலிருந்து 82 ஐ உய்த்தறியலாம்.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 93

1. **ய** வை மையமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தினுடைய இருசெங்குத்தான நாண்கள் **கநம, பநத** என்பன. **கந** = 6 ச.மீ., **பந** = 10 ச.மீ., **தந** = 12 ச.மீ. **யந, யக** என்பவற்றைக் காண்க.

2. ஒருநாற்கோணம் **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்கள் **ச** விலே வெட்டிக் கொள்கின்றன. **சக** = 4 ச.மீ., **சம** = 6 ச.மீ., **கப** = 16 ச.மீ., **மத** = 14 ச.மீ. எனின் **கமபத** வட்டமானது என நிறுவுக.

[3] **ச, த** என்பன முறையே △**கமப** வின் பக்கங்கள் **கம, கப** ஆகிய வற்றிலுள்ள புள்ளிகளாகும். **கச** = 4 ச.மீ., **சம** = 11 ச.மீ., **கத** = 5 ச.மீ., **தப** = 7ச.மீ. எனின் **சதபம** ஓர் ஒருவட்டநாற்கோணம் என நிறுவுக.

4. △**கமப** வில் **கம** = 18 ச.மீ., **மப** = 12 ச.மீ., **பக** = 13·5 ச.மீ. **கம** விலே **த** என்னும்புள்ளி **கத** = 10 ச.மீ. ஆகுமாறுள்ளது. **மப** என்பது வட்டம் **கதப** விற்கு ஒரு தொடுகோடு என நிறுவுக. **பத** வினது நீளத்தைக் காண்க.

[5] △**கமப** வில் ∠ **ம** = 90°, **கம** = 3 அங்., **மப** = 4 அங்.; **மப** வை **ப** விலே தொட்டு **க** விற்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் கீறப்பட்டுள்ளது. அது நீட்டப்பட்ட **மக** வை **வ** விலே வெட்டினால் **கவ** வையும் வட்டத்தின் ஆரையையுங் காண்க.

6. பக்கம் 584 இலேயுள்ள உரு 864 இல் **நக** = 2 **நத** எனின் **கம** = 3 **மந** என நிறுவுக.

7. பக்கம் 584 இலேயுள்ள உரு 864 இல் **நத** = $\frac{2}{3}$ **நக** எனின் **நம** : **மக** என்னும் விகிதத்தைக் காண்க.

*8. பக்கம் 584 இலேயுள்ள உரு 864 இல் **மத** = **அ** ச.மீ., **தக** = **இ** ச.மீ., **கம** = **உ** ச.மீ., **மந** = **எ** ச.மீ., **தந** = **ஒ** ச.மீ. எனின் **எ, ஒ** க்களை **அ, இ, உ** என்பவற்றிற் காண்க.

$$\frac{\text{நக}}{\text{நம}} = \frac{\text{இ}^2}{\text{அ}^2} \quad \text{என நிறுவுக.}$$

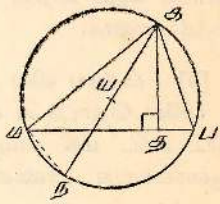
*9. 2 அங். நீளமுள்ள கோடு **தய** வினது நடுப்புள்ளி **ந**. **தவ** என்பது ∠ **வதந** = 45° ஆகுமாறு கீறப்பட்டுள்ளது. **ந, ய** என்பவற்றிற் கூடாகவும் **தவ** வை **க** விலே தொடுமாறும் ஒரு வட்டம் கீறப்பட்டுள்ளது. ∠ **தநக** = 90° என நிறுவுக. வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

*10. (கோளவளவை) ஒரு சமபக்கமுக்கோணத்தின் உச்சிகள் **க, ம, ப** என்பன ஒரு கோளத்திலுள்ளன. தளம் **கமப** விற்குச் செங்குத்தான கோளத்தின் விட்டம் **வயந** என்பது அத்தளத்தை **ய** விலே வெட்டுகின்றது. **வய = 1** அங்., **கம = 6** அங். எனின் கோளத்தின் விட்டத்தைக் காண்க.

*11 6 அங். விட்டமுள்ள ஒருகோளம் ஒரு மேசையின் 5 அங். விட்டமுள்ள ஒரு துவாரத்தில் தங்கியுள்ளது. 10 அங். பக்கம் உள்ளதும் நடுவிலே 2 அங். விட்டத் துவாரமுள்ளதுமான ஒரு மெலிந்த தகடு அதன் ஒருவிளிம்பு **கம** மேசைமேல் தங்க தளையின் பரிதி கோளத்தில் தங்குமாறுள்ளது. 5 அங். துவாரத்தின் மையத்திலிருந்து **கம** உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. உரு 871 இல் △ **கமப** வின் சுற்றுவட்டத்தினது ஒரு விட்டம் **கந** ஆகும். **கத** என்பது △**கமப** வின் ஒருயரம் எனின் **கம . கப = கத . கந** என நிறுவுக. **மந** வை இணைக்க.

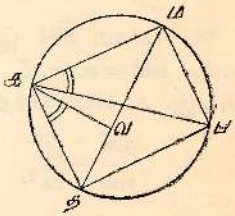


உருவம் 871

(i) எவ்விதங்களைச் சமமென நீர் நிறுவல் வேண்டும் ?

(ii) முக்கோணங்கள் **கமந, கதப** வடிவொத்தவை என நிறுவுக.

2. **தொலமியின்றேற்றம்.** **கமபத** என்பது ஓரொருவட்டநாற்கோணம் எனின், **மப . கத + கம . பத = கப . மத** என நிறுவுக.



உருவம் 872

மத விலே ஒருபுள்ளி **வ** வை ∠ **தகவ = ∠ மகப** ஆகுமாறு எடுக்க.

(i) **மப . கத = கப . தவ** என நிறுவுக.

(ii) **கம . பத = கப . மவ** என நிறுவுக.

3. உரு 872 இல் △**கமப** சமபக்கமுக்கோணம் எனின் தொலமியின் தேற்றத்திலிருந்து என்ன சிறப்பு விளைவினை உய்த்தறியலாம்.

பயிற்சி 94

(இன்னும் வேண்டிய உதாரணங்களுக்குப் பயிற்சி 79 ஐப் பார்க்க.)

1. ஓரொருவட்டநாற்கோணம் **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்கள் **ச** விலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. **கத . சப = மப . சத** என நிறுவுக.

[2] இருகோடுகள் **நகம, நபத** என்பன ஒருவட்டத்தை **க, ம, ப, த** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றன. **நக . மப = நப . கத** என நிறுவுக.

3. பக்கம் 596 இலேயுள்ள உரு 874 இல் **நம = மத** எனின் **நக . நம = தக²** என நிறுவுக.

4. △**கமப** வின் பக்கங்கள் **மக, பக** என்பன முறையே **த, ந** என்பவற்றிற்கு ∠**கநத** = ∠**கமப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. **கம . கத = கப . கந** என நிறுவுக.

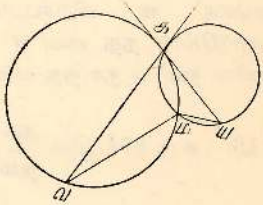
[5] △**கமப** வில் ∠**ம** = 90°; **கம** விலே **வ** யாதாயினும் ஒருபுள்ளி. **கவ** வை விட்டமாகவுடைய வட்டம் **கப** வை **ய** விலே வெட்டினால் **கவ . கம = கய . கப** என நிறுவுக.

6. △**கமப** வில் ∠**ப** = 90°; **கப** வை **ப** விலே தொட்டு **கம** வை **வ, ய** க்களிலே வெட்டுமாறு ஒரு வட்டங் கீறப்பட்டுள்ளது. △**கமப** வின் ஒருயரம் **பந** எனின் **கந : கவ = கய : கம** என நிறுவுக.

7. வட்டங்கள் **கமவய, கமநச** என்பவற்றினுடைய நாண்கள் **வய, நச** என்பன, தேவையெனில் நீட்டப்பட்டபொழுது, **கம** விலோ நீட்டப்பட்ட **கம** விலோ உள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. **வ, ய, ச, ந** ஒருபரிதியி லுள்ளன என நிறுவுக.

8. உரு 873 இல் வட்டங்கள் **கமய, கமவ** என்பவற்றிற்குத் தொடுகோடுகள் **கவ, கய** என்பனவாகும். **கம² = மவ . மய** என நிறுவுக.

[9] **கப** என்பது ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண். சிறுவில் **கப** வில் உள்ள ஒருபுள்ளி **வ** விலிருந்து **க, ப** என்பவற்றில் உள்ள தொடுகோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாக கோடுகள் **வத, வந** என்பன **கப** வை முறையே **த, ந** என்பவற்றிலே வெட்டுமாறு கீறப் பட்டுள்ளன.



உருவம் 873

(i) முக்கோணங்கள் **கவத, வபந** என்பவை வடிவொத்தவை என நிறுவுக.

(ii) **கத . பந = வத²** என நிறுவுக.

10. △கமப வில் **கம = கப** ; **கப** விலே ஒருபுள்ளி **த** என்பது **மத = மப** ஆகுமாறுள்ளது ; **மப² = கப . பத** என நிறுவுக.

[11] ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் **கம, பத** என்பன **ந** விலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. வில் **கம** வின் நடுப்புள்ளி **த** எனின் **பக . பம = பந . பத** என நிறுவுக.

12. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது ஒரு விட்டம் **கம. கவ, வச** என்பன சமமான நாண்கள். **கவ . வம = கச . யவ** என நிறுவுக.

13. **தக, தம** என்பன **த** விலிருந்து ஒரு வட்டத்திற்குரிய தொடு கோடுகள் ; **தவய** என்பது வட்டத்தை **வ, ய** என்பவற்றில் வெட்டும் ஒரு நேர்கோடு.

(i) **கவ : கய = தவ : தக** என நிறுவுக.

(ii) **கவ : கய = மவ : மய** என நிறுவுக.

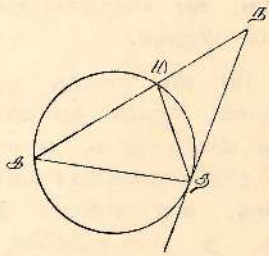
[14] ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** வினுள்ளே **ந** என்னும் ஒருபுள்ளி, **∠ நகத = ∠ மகப, ∠ நதக = ∠ மபக** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **நம . கப = கம . தப** என நிறுவுக.

15. **கமப** ஒருமுக்கோணம். **∠ மகப** வை இரு சமக்கூறிடுங்கோட்டிலே ஒருபுள்ளி **த** என்பது **கத² = கம.கப** ஆகுமாறுள்ளது. **மத** என்பது வட்டம் **கபத** வைத் தொடுகின்றது என நிறுவுக.

[16] ஒருகோடு **வய** என்பது **ந** விலே **வந² = வய.நய** ஆகுமாறு மிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **தயந** என்னும் முக்கோணம் **தய = தந = வந** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **வத = வய** என நிறுவுக.

17. உரு 874 இலே **கத** விற்குச் சமாந்தரமாக **ம** விற்கூடாகவுள்ள கோடானது தொடுகோடு **நத** வை **ச** விலே வெட்டுகின்றது எனின் **நம² = நச.நத** என நிறுவுக.

18. உரு 874 இல் $\frac{\text{நக}}{\text{நம}} = \frac{\text{தக}^2}{\text{தம}^2}$ என நிறுவுக.



உருவம் 874

19. **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தினது ஒரு விட்டம் **கம. க, ம** க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் பிறிது யாதாயினும் தொடு கோட்டை **ச, த** க்களிற் சந்திக்கின்றன. **கச.மத = கய²** என நிறுவுக.

20. Δ**கமப** வில் $\angle$ **க** $= 90°$; **மப** விலே **ந** என்னும் புள்ளி **கந = கம** ஆகுமாறுள்ளது. **மந.மப = 2கந²** என நிறுவுக. (**க** விலிருந்து **மப** விற்குள்ள செங்குத்து **கச** வை வரைக.)

*21. **கமபத** ஓரிணைகரம். **ப** விற்கூடாகவுள்ள யாதாயினும் ஒருகோடு **தம, கம** நீட்டப்பட்ட **தக** என்பவற்றை முறையே **ய, வ, ச** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றது. **யச.யவ = யப²** என நிறுவுக.

*22. ஒருவட்டம் **வதந** விலுள்ள ஒருபுள்ளி **ப** விலமைந்த ஒரு தொடு கோடானது ஒருநாண் **தந** விற்குச் சமாந்தரமாகவுள்ளது. அது வேறு இருநாண்கள் **வத, வந** என்பவற்றை அவை நீட்டப்பட்டபொழுது **க, ம** க்களில் வெட்டுகின்றது. **கப : பம = கத : மந** என நிறுவுக.

*23. ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் **கம, கப** என்பன **வ, ய** என்பவற்றிற்கு **கம = மவ** ஆகவும் **கப = பய** ஆகவும் அமையுமாறு நீட்டப் பட்டுள்ளன. **வய** என்பது வட்டத்தை **ந** விலே வெட்டினால் **கந² = வந : நய** என நிறுவுக. (**மப** என்பது **கந** வை **அ** விலே வெட்டுவதாகக் கொள்க.)

*24. ஒரு வட்டம் **கமப** விற்கு **க** விலுள்ள தொடுகோடு **ம** விற்கூடாக **கப** விற்குச் சமாந்தரமான கோட்டை **வ** விலே வெட்டுகின்றது ; **ப** விற் கூடாக **கம** விற்குச் சமாந்தரமான கோடானது **கவ** வை **ய** விலே வெட்டு கின்றது. **கவ : கய = கம² : கப²** என நிறுவுக.

*25. இருவட்டங்களுக்குரிய புறப்பொதுத் தொடுகோடொன்று அவற்றை **க, ப** க்களிலே தொடுகின்றது. **கப** விற்குச் சமாந்தரமான மாறுங்கோடு ஒன்று ஒரு வட்டத்தை **வ** விலும் மற்றையதை **ய** விலும் வெட்டுகின்றது. **கவ : பய** என்ற விகிதம் மாறிலி என நிறுவுக. (வட்டங்களின் விட்டங்கள் **கம, பத** என்பவற்றை **வய** என்பது **ச, ந** க்களில் வெட்டுவதாகக் கொள்க. **கவ²** ஐப் பற்றி நீர் என்ன அறிவீர் ?)

*26. ஒரு வட்டம் **கநம** வின் விட்டம் **கம** விலே ஒருபுள்ளி **ச** என்பது **கச = 4 சம** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. **ந** என்பது **கம** வினது நடுப்புள்ளி. **ச** விலிருந்து **கம** விற்குள்ள செங்குத்து வில் **கநம** வை **த** விலும் நீட்டப் பட்ட **கந** வை **வ** விலும் வெட்டினால் **வத = தச** என நிறுவுக.

*27. ஒரு வட்டம் **கவம** வினது ஒரு நாண் **கம**. **க, ம** க்களில் உள்ள தொடுகோடுகள் **த** விலே சந்திக்கின்றன. **வச, வந, வய** என்பன **தக, தம, கம** என்பவற்றிற்குச் செங்குத்துக்கள். **வச.வந = வய²** என நிறுவுக.

*28. ய வை மையமாகவுடைய வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான தசகோணத்தின் இருபக்கங்கள் கப, பம ஆகும். ச என்பது கப வினது நடுப்புள்ளி. யச என்பது கம வை த விலே வெட்டுகின்றது.

(i) ∠ மயத = 54°; ∠ கபத = 18° என நிறுவுக.

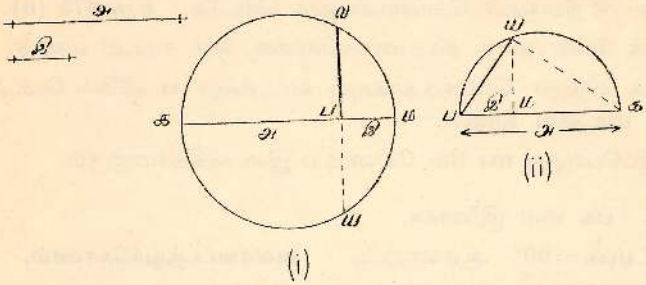
(ii) மத.மக = மய^2; கத.கம = கப^2 என நிறுவுக.

(iii) கப^2 + யம^2 = கம^2 என நிறுவுக.

எனவே ஆ ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான ஐங்கோணம், ஒரொழுங்கான தசகோணம் ஆகியவற்றின் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே அ, இ எனின் அ^2 = இ^2 + ஆ^2 ஆகும்.

அமைப்பு 21

கொடுத்த இரு கோடுகளுக்கு ஓரிடைவிகிதசமன் அமைத்தல்.



உருவம் 875

தரவு. அ, இ அலகு நீளங்கொண்ட இருகோடுகள்.

அமைக்க வேண்டியது. உ^2 = அஇ ஆகுமாறு அமைந்த உ அலகு நீளங் கொண்ட ஒருகோடு.

முறை 1

அமைப்பு. ஒரு நேர்கோட்டிலே ஒருபுள்ளி **ப** வை எடுத்து **ப** வின் இருபக்கங்களிலும் அக்கோட்டிலிருந்து **பக, பம** என்ற பகுதிகளை அ, இ அலகு நீளங்கள் கொண்டனவாக வெட்டுக ; உரு 875 (i).

கம மேல் அதை விட்டமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

கம விற்குச் செங்குத்தாகவும் வட்டத்தை **வ** விலே வெட்டுமாறும் **டவ** வை வரைக.

இப்பொழுது **பவ** வே வேண்டிய இடைவிகிதசமனாகும்.

நிறுவல். வட்டத்தை **ய** விலே சந்திக்குமாறு **வப** வை நீட்டுக. **வய** என்பது விட்டம் **கம** விற்குச் செங்குத்தான நாணாகும்.

∴ **வப = பய.**

ஆனால் **வப.பய = கப.பம** ஒன்றையொன்றுவெட்டும் நாண்கள்,

∴ **பவ^2 = கப.பம**

= அஇ.

முறை 2

அமைப்பு. ஒரு நேர்கோட்டிலே ஒருபுள்ளி **ப** வை எடுத்து **ப** வின் ஒரே பக்கத்தில் அக்கோட்டிலிருந்து **பக, பம** என்ற பகுதிகளை அ, இ அலகு நீளங்கள் கொண்டனவாக வெட்டுக. உரு 875 (ii).

பக மேல் அதை விட்டமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.

பக விற்குச் செங்குத்தாகவும் வட்டத்தை **ய** விலே வெட்டுமாறும் **மய** வை வரைக.

இப்பொழுது **பய** வே வேண்டிய இடைவிகிதசமனாகும்.

நிறுவல். **யக** வை இணைக்க.

$\angle$ **பயக** $= 90°$ ஆதலாலும், **அரைவட்டத்துக்கோணம்,**

ய விலிருந்து **பக** விற்கு **யம** செங்குத்தாதலாலும்,

பைதகரசின்றேற்றத்தின் நிறுவலிலிருந்து,

பய^2 = **பக.பம,**

= அஇ.

அல்லது பின்வருமாறும் நிறுவலாம் :—

$\angle$ **பயக** $= 90°$ **அரைவட்டத்துக்கோணம்.**

$\therefore$ **பய** என்பது **யக** மேல் அதைவிட்டமாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு.

ஆனால் $\angle$ **யமக** $= 90°$,

$\therefore$ **யக** மேல் அதை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டம் **ம** விற்கூடாகச் செல்கின்றது.

$\therefore$ **பய**^{2} = **பக.பம** **தொடுகோட்டுப்பண்பு**

= அஇ.

குறிப்பு.—செயன்முறை அமைப்புக்களில் முறை ஒன்றினும் முறை இரண்டு விரும்புவதற்குரியது.

பயிற்சி 95

1. 5 அங்., 8 அங். நீளங்கள்கொண்ட இரு கோடுகளுக்கிடையில் ஓரிடைவிகிதசமன் அமைக்க. அதை அளக்க.

2. $\sqrt{38}$ ச.மீ. அளவுகொண்ட ஒருகோட்டினை அமைத்து அதை அளக்க. (அஇ = 38 ஆகுமாறு அமைந்த தம்முள் நெருங்கியவாயுள்ள பெறுமானங்களை அ, இ என்பவற்றிற்குத் தேர்ந்தெடுக்க. உதாரணமாக 5 உம் 38 ÷ 5 என்பதும், 2 உம் 19 உம் அல்ல.)

[3] $\sqrt{31}$ என்பதற்கு வரைப்படம் மூலம் அண்ணிதான பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. 4 ச.மீ., 7 ச.மீ. பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு செவ்வகம் வரைந்து அதற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒருசதுரம் அமைக்க. அதன் பக்கத்தை அளக்க.

5. 2·6 அங்., 1·8 அங். பக்கங்கள்கொண்ட ஒரு செவ்வகம் வரைந்து அதற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு சதுரம் வரைக. அதன் பக்கத்தை அளக்க.

6. ஒரு சாய்தூரம் **கமபத** வில் **கம** = 5 ச.மீ., ∠ **க** = 65° அதன் பரப்பளவிற்குச் சமமான ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் பக்கத்தை அளக்க.

[7] 6 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரு சமபக்கமுக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கு, சமமான ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் பக்கத்தை அளக்க.

[8] சமன்பாடு $(அ - 3)^2 = 19$ என்பதை வரைப்படம் மூலம் தீர்க்க.

9. நாற்கோணம் **கமபத** வில் **கம**=**மப**=4 ச.மீ., **பத**=**பக**=6 ச.மீ., **கத** = 7 ச.மீ. அதன் பரப்பளவிற்குச் சமமான ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் பக்கத்தை அளக்க.

10. 4 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரொழுங்கான ஐங்கோணத்திற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் பக்கத்தை அளக்க.

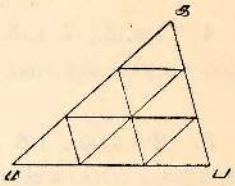
11. ஒரு நேர்கோடு **கமப** வை **கம** = 3 ச.மீ., **மப** = 5 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. **கம** விற்குச் செங்குத்தாய் **கத** வை வரைக. **கத** விலே ஒரு புள்ளி **வ** வை **கவ**^{2} = **கம.கப** ஆகுமாறு அமைக்க. **ம, ப** என்பவற்றிற் கூடாகச் சென்று **கத** வைத் தொடுமாறு ஒரு வட்டம் அமைக்க. அதன் ஆரையை அளக்க.

[12] ஒருகோணம் **கயம** வை 52° உக்குச் சமமாக வரைக. **யக** விலே இருபுள்ளிகள் **ச, த** என்பவற்றை **யச** = 1·5 அங்., **யத** = 2·5 அங். ஆகுமாறு எடுத்து, **ச, த** என்பவற்றிற்கூடாகச்சென்று **யம** வைத் தொடுமாறு ஒரு வட்டம் வரைக. அதன் ஆரையை அளக்க.

வடிவொத்த உருவங்களினுடைய பரப்பளவின் விகிதம்

உரையாடித் தெளிவதற்குரிய உதாரணங்கள்

1. (i) ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை **கம** = 9 ச.மீ., **மப** = 7·5 ச.மீ., **பக** = 6 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. 3 ச.மீ., 2·5 ச.மீ., 2 ச.மீ. ஆகிய அளவு பக்கங்கள் கொண்ட எத்தனை முக்கோணங்கள் அவ்வுருவிலிருந்து வெட்டலாம் ?

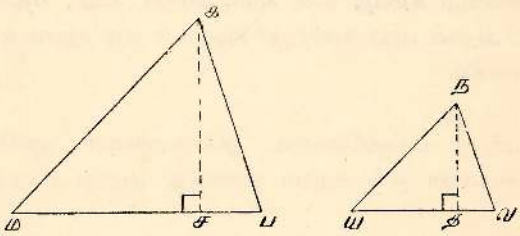


உருவம் 876

(ii) △**நயவ** என்பது **நய** = 15 ச.மீ., **யவ** = 12·5 ச.மீ., **வந** = 10 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. 3 ச.மீ., 2·5 ச.மீ., 2 ச.மீ. ஆகிய அளவு பக்கங்கள் கொண்ட எத்தனை முக்கோணங்கள் அவ்வுருவிலிருந்து வெட்டலாம் ?

(iii) முக்கோணங்கள் **கமப**, **நயவ** என்பவற்றின் (அ) ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் யாது ? (ஆ) பரப்புக்களின் விகிதம் யாது ?

2–4 வரையுள்ள எண்கள் உரு 877 ஐக் குறிக்கின்றன. அதில் **கச**, **நத** என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்கள் **கமப**, **நயவ** என்பவற்றின் உயரங்கள் ஆகும்.



உருவம் 877

2. **மப**=10 ச.மீ., **யவ**= 7 ச.மீ., **கச**=8 ச.மீ. எனின் **நத** வைக் காண்க. △**கமப** : △**நயவ** என்ற விகிதத்தையுங் காண்க.

3. **மப** : **யவ** = 5 : 4 எனின் △**கமப** : △**நயவ** என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

(i) **கம** : **நய** என்ற விகிதத்தின் பெறுமானம் யாது ?

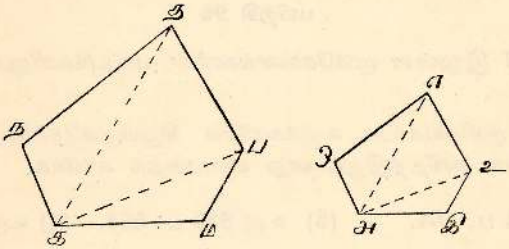
(ii) ஏன் முக்கோணங்கள் **கசம**, **நதய** வடிவொத்தவை என விளக்குக.

(iii) $\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{கச.மப}}{\frac{1}{2}\text{நத.யவ}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

என்ற தொடர்பை முடிவாக்குக.

4. முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{நயவ}}$ வடிவொத்தவை எனின் $\triangle$ கமப : $\triangle$ நயவ = மப^2 : யவ^2 என நிறுவி விளைவைச் சொற்களில் எடுத்துக் கூறுக.

எண் 3 இற்கு குறிப்பிட்ட முறையைப் பயன்படுத்துக.



உருவம் 878

5. பல்கோணங்கள் $\frac{\text{கமபதந}}{\text{அஇஉஎஓ}}$ வடிவொத்தவை எனின் பரப்பு கமபதந : பரப்பு அஇஉஎஓ = கம^2 : அஇ^2 என நிறுவுக.

$\angle$ க = $\angle$ அ, $\angle$ ம = $\angle$ இ, $\angle$ ப = $\angle$ உ, $\angle$ த = $\angle$ எ, $\angle$ ந = $\angle$ ஓ எனவும்.

கம : மப : பத : தந : நக = அஇ : இஉ : உஎ : எஓ : ஓஅ எனவுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கப, கத, அஉ, அஎ என்பவற்றை இணைக்க.

(i) முறையாக, முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{அஇஉ}}$, $\frac{\text{கபத}}{\text{அஉஎ}}$, $\frac{\text{கதந}}{\text{அஎஓ}}$ என்பன வடிவொத்தவை என நிறுவுக.

(ii) இச் சோடிமுக்கோணங்களினுடைய பரப்புக்களின் விகிதங்கள் ஒவ்வொரு வகையிலும் கம^2 : அஇ^2 என நிறுவுக.

எண் 5 இல் நிறுவப்பட்ட விளைவைப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

இருவடிவொத்த பல்கோணங்களினுடைய பரப்புக்களின் விகிதம் ஒத்த பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களின் விகிதத்திற்குச் சமனாகும்.

இதனால்,

வடிவொத்த திண்மங்களின் மேற்பரப்புக்களினுடைய பரப்புக்களின் விகிதம் ஒத்த நீளங்களின் வர்க்கத்தினுடைய விகிதத்திற்குச் சமனாகும் *என்பது பெறப்படும்.*

வடிவொத்த திண்மங்களினுடைய கனவளவுகளின் விகிதம் ஒத்த நீளங்களின் கனங்களுடைய விகிதத்திற்குச் சமனாகும்

என்பதையும் இதனால் நிறுவலாம்.

எண்கொண்ட உதாரணங்கள்

பயிற்சி 96

1. உரு 837 இலுள்ள முக்கோணங்களின் பரப்புக்களினுடைய விகிதத்தைக் காண்க.

2–4 வரை குறிக்கப்பட்ட உருக்களிலே சிறியமுக்கோணத்திற்கு நாற்கோணம் என்ன விகிதத்திலுள்ளது என்பதைக் காண்க.

2. உரு 834 ப. 564. (3) உரு 835 ப. 564. (4) உரு 839 ப. 565.

5. ப. 562, உரு 830 இலுள்ள 3 முக்கோணங்களும் விகித சமனாகவுள்ள மூன்று முழுவெண்கள் காண்க.

[6] ப. 564, உரு 833 இலே (i) **மச** = 3 அங். எனின் **சத** △ **கமப** ஐ எவ்விகிதத்திற் பிரிக்கும்? (ii) **சத** = 3 அங். எனின் எவ்விகிதத்திற் பிரிக்கும்?

7. ப. 566, உரு 844 (ii) இலுள்ள தரவுகளைக்கொண்டு (i) △**சகப** : △**சமத** (ii) △**சகப** : நாற்கோணம் **கமபத** என்பவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக.

[8] △**கமப** வின் பக்கங்கள் 10, 15, 20 ச.மீ. நீளங்கள் கொண்டுள; △**வயந** வின் பக்கங்கள் 6, 9, 12 ச. மீ. நீளமானவை. (i) அவற்றின் சுற்றளவுகளின் விகிதத்தையும் (ii) பரப்புக்களின் விகிதத்தையுங் காண்க.

9. வடிவொத்த இரு முக்கோணங்களின் பரப்புக்கள் 18 சது. அங., 32 சது. அங். ஆகும். முதன் முக்கோணத்தின் பெரிய பக்கம் 9 அங். இரண்டாவதின் பக்கங்களுள் பெரியதைக் காண்க.

[10] ஒரு முக்கோணம் **கமப** என்பது **மப** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு **சத** என்பதால் **கசத, சதபம** என்ற இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது; அவற்றின் பரப்பு முறையே 9 சது. ச.மீ. உம் 16 சது. ச.மீ. உம் ஆகும். **மப** = 7 ச.மீ. எனின் **சத** வைக் காண்க.

11. 6 அடி உயரமுள்ள தடுப்பு ஒன்றை மூடுவதற்கு 27 சது. அடித் துணி வேண்டியுள்ளது. திரை செவ்வகவடிவாயிருக்க வேண்டியதில்லை. 4 அடி உயரமுள்ள வடிவொத்த பிறிதொரு தடுப்பிற்கு எவ்வளவு துணி வேண்டும் ?

[12] ஒருமைலுக்கு 6 அங். அளவுத்திட்டங்கொண்ட ஒரு படத்திலே ஒரு நிலத்துண்டானது $2\frac{1}{4}$ சது.அங். பரப்புக்கொண்ட ஒரு நாற்கோணத்தாற் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துண்டு நிலத்தின் பரப்பை எக்கரிற் காண்க.

13. ஒரு விளக்கு நிலத்திலிருந்து 12 அடி உயரத்திலுள்ளது. 45 சது. அடி பரப்புள்ளதாய் நிலத்திலிருந்து 4 அடி உயரத்திலுள்ள ஒரு வட்ட வடிவுடைய மேசையின் மேற்பகுதியின் தரை வீழ்ந்த நிழற் பரப்பினைக் காண்க.

[14] 3 அடி உயரமுள்ள ஒரு வட்டவடிவமான மேசையினுடைய மேற்பகுதியின் பரப்பு 20 சது. அடி. ஒருவிளக்கினால் ஏற்பட்ட அதன் நிலத்திலுள்ள நிழற்பரப்பு 45 சது. அடி. நிலத்திலிருந்து விளக்கு உள்ள உயரத்தைக் காண்க.

15. 3 அடி ஆரையுள்ள ஒருகோளத்தைப் பொன்பூசுவதற்கு 3 பவுன் செலவானால் 4 அடி ஆரையுள்ள ஒருகோளத்தைப் பொன்பூசுவதற்கு எவ்வளவு செலவாகும் ?

[16] 4 அங். உயரமும் 3 அங். விட்டமுங்கொண்ட ஒருருளைவடிவமான ஆடிக்கிண்ணம் ஒன்றை 40 அங். உயரமும் 30 அங். விட்டமுங்கொண்ட ஒருருளைவடிவமான பீப்பாவிலிருந்து எத்தனை தரம் நிரப்பலாம் ?

17. இரு வெந்நீர் கிண்ணங்கள் வடிவொத்தவை. சிறியது 9 அங். உயரமானது. அது ஒரு குவாட்டு நீரைக் கொள்ளக்கூடியது. பெரியது 15 அங். உயரமுள்ளது. அது எவ்வளவு நீரைக்கொள்ளல் கூடும் ?

18. 3 அங். ஆரைகொண்ட ஒரு திண்ணிய உலோக கோளம் 8 இறுத்தல் நிறையுள்ளது. 1 அடி ஆரைகொண்ட அதே உலோகத்தாலாய ஒரு திண்மக் கோளத்தின் நிறையைக் காண்க.

[19] 5 அங். உயரமான ஒருருளைவடிவான தகரம் ஒன்று $\frac{1}{4}$ இறுத்தல் புகையிலையைக் கொள்ளும். வடிவொத்த 8 அங். உயரமுள்ள ஒருதகரம் எவ்வளவைக் கொள்ளும் ?

20. ஒரேபொருளாலாய ஒரேசீலையின் இருபடிமங்கள் உள ; இரண்டுந் திண்ணியவை. ஒன்று 3 அங். உயரமாய் 8 அவுன்சு நிறையுள்ளது. மற்றையது 4 இறுத்தல் நிறையுள்ளது. அதன் உயரத்தைக் காண்க.

21. ஒருவன் 20 அங். ஆழமுள்ள ஒரு கரிக்கூடையிலுள்ள நிலக் கரிக்கு 8 பென்சு கொடுக்கின்றான். ஒரேவடிவினதான $2\frac{1}{2}$ அடி ஆழ முள்ள ஒரு கூடையிலுள்ள கரிக்கு அவன் எவ்வளவு கொடுப்பான் ?

22. $1\frac{1}{2}$ அடி ஆரையுள்ள ஒரு கோளவடிவினதான பாத்திரத்தின் அரைப்பகுதியை ஒரு நீர்க்குழாய் 2 நிமிடங்களில் நிரப்பும். 4 அடி ஆரை ஒரு கோளப் பாத்திரத்தின் $\frac{1}{4}$ பகுதியை நிரப்ப அத்தகைய இரு நீர்க் குழாய்கள் எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும் ?

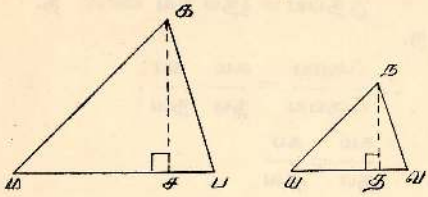
23. ஒரே நீளமுள்ள 2 உருளைகள் 3 அங., 4 அங். விட்டங்கள் கொண்டவை. அவை உருக்கப்பட்டு அதே நீளமுடைய ஒருருளையாக ஆக்கப் பட்டன. அதன் விட்டத்தைக் காண்க.

*24. **கமப** ஒருமுக்கோணம். அதில் **கம = கப = 2 மப. கப** விலே **த** என்னும் ஒருபுள்ளி **∠ தமப = ∠ மகப** ஆகுமாறுள்ளது. **மப** விற்குச் சமாந்தரமாய் **த** விற்கூடாகவுள்ள ஒரு கோடானது **கம** வை **ந** விலே வெட்டுகின்றது. **△ கமப : △ மபத : △ மநத : △ நதக** என்ற விகிதங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

25. பக்கம் 566 இல் உரு 841 ஐப் பிரித்து உண்டாய 5 சிறிய முக்கோணங்களின் பரப்புக்களினுடைய விகிதங்களைக் காண்க.

தேற்றம் 83

வடிவொத்த இரு முக்கோணங்களின் பரப்புக்களினுடைய விகிதம் ஒத்த பக்கங்களிலுள்ள சதுரங்களினுடைய பரப்புக்களின் விகிதத்துக்குச் சமனாகும்.



உருவம் 879

தரவு. இருவடிவொத்தமுக்கோணங்கள் கமப, நயவ.

மேற்கோள். $\frac{\triangle \text{ கமப}}{\triangle \text{ நயவ}} = \frac{\text{மப}^2}{\text{யவ}^2}$.

கருவி. உயரங்கள் கச, நத ஆகியவற்றை வரைக.

நிறுவல். கச, நத என்பன உயரங்கள் ஆதலின்

$\triangle \text{ கமப} = \frac{1}{2}\text{கச.மப}$,

இன்னும் $\triangle \text{ நயவ} = \frac{1}{2}\text{நத.யவ}$,

$\therefore \frac{\triangle \text{ கமப}}{\triangle \text{ நயவ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{கச.மப}}{\frac{1}{2}\text{நத.யவ}} = \frac{\text{கச}}{\text{நத}} \cdot \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$.

ஆனால் முக்கோணங்கள் கமச, நயத என்பவற்றில்

$\angle \text{ ம} = \angle \text{ய}$ தரவு,

$\angle \text{ கசம} = \angle \text{நதய}$ செங்கோணங்கள், கருவி,

$\therefore \angle \text{ மகச} = \angle \text{யநத}$ முக்கோணங்களின் மூன்றுங்கோணங்கள்,

$\therefore$ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமச}}{\text{நயத}}$ வடிவொத்தவை சமகோணமுக் கோணங்கள்,

$\therefore \frac{\text{கச}}{\text{நத}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}}$ ஒத்தபக்கங்கள் விகிதசமன்,

ஆனால் $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$ தரவு,

$\therefore \frac{\text{கச}}{\text{நத}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}$,

$\therefore \frac{\triangle \text{ கமப}}{\triangle \text{ நயவ}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}} \cdot \frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{மப}^2}{\text{யவ}^2}$.

தேற்றம் 83 இல் நிறுவப்பட்ட உண்மையினை ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பிற்குரிய திரிகோணகணித வாய்பாட்டிலிருந்தும் உய்த்தறியலாம். பக்கம் 287 பார்க்க.

$$\triangle \text{கமப} = \tfrac{1}{2}\text{கம.கப சைன் க},$$

$$\triangle \text{நயவ} = \tfrac{1}{2}\text{நய.நவ சைன் ந}.$$

ஆனால் $\angle$ க $=$ $\angle$ ந,

$$\therefore \frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}} \cdot \frac{\text{கப}}{\text{நவ}},$$

ஆனால் $\dfrac{\text{கம}}{\text{நய}} = \dfrac{\text{கப}}{\text{நவ}}$ தரவு,

$$\therefore \frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\text{கப}^2}{\text{நவ}^2},$$

இந்த நியாயம்,

இருமுக்கோணங்கள் கமப, நயவ என்பன $\angle$ க $=$ $\angle$ ந ஆகுமாறு உளவேல்,

$$\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}} \cdot \frac{\text{கப}}{\text{நவ}}$$

என்பதை எடுத்துக்காட்டும்.

இவ்விரேவையும் உயரங்கள் மஅ, யஇ என்பவற்றைக் கீறி தேற்றம் 83 இனது முறையாலே நிறுவலாம்.

பயிற்சி 97

1. ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள் கம, பத என்பன ந வில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\triangle$ கநத : $\triangle$ மநப $=$ கந^2: — என்ற தொடர்பை முடிவாக்குக.

[2] ஒரு வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒருபுள்ளி ந விலிருந்து இரு கோடுகள் நகம, நபத என்பன வட்டத்தை க, ம, ப, த என்பவற்றில் வெட்டுமாறு கீறப்பட்டுள்ளன. கீழ்க்காணுந் தொடர்புகளை முடிவாக்குக :

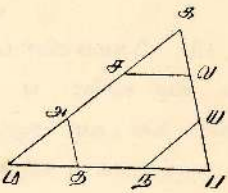
$$\frac{\triangle \text{மநத}}{\triangle \text{கநப}} = \frac{\text{நம}^2}{\ldots} = \frac{\text{நம . நத}}{\ldots}.$$

3. $\triangle$ கமப வின் பக்கம் கம விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு நீட்டப்பட்ட கம வையும் நீட்டப்பட்ட மப வையும் வ, ய களில் சந்திக்கின்றது. பின் வருந் தொடர்புகளை முடிவாக்குக.

$$\frac{\triangle \text{பகம}}{\triangle \text{பவய}} = \frac{\text{பக}^2}{\ldots} = \frac{\text{கம.மப}}{\ldots}.$$

4. கமபத ஒரு சதுரம் ; கவம, கயப என்பவை சமபக்கமுக்கோணங்கள். Δ கவம : Δ கயப என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

[5] கமப என்னும் ஒரு முக்கோணம் மப : பக : கம = 3 : 4 : 5 ஆகுமாறுள்ளது. மவப, பயக, கநம என்பவை சமபக்கமுக்கோணங்கள் எனின் Δ மவப + Δ பயக = Δ கநம என நிறுவுக.



உருவம் 880

6. Δ கமப வின் பக்கங்கள் உரு 880 இற் காட்டியவாறு முக்கூறிடப்பட்டுள்ளன. தநயவசஅ வின் பரப்பு 2/3 Δ கமப விற்குச்சமமென நிறுவுக.

[7] கமபத ஓரிணைகரம். பம, பத என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் வ, ய ஆகும். Δ கவய = 3/8 இணைகரம் கமபத என நிறுவுக.

8. முக்கோணங்கள் கமப, நயவ என்பவற்றில் ∠ க = ∠ ந எனின், Δ கமப : Δ நயவ = கம . கப : நய . நவ என நிறுவுக.

9. Δ கமப வின் பக்கங்கள் மப, பக, கம என்பவற்றிலே வ, ய, ந என்னும் புள்ளிகள் மவ : வப = பய : யக = கந : நம = 1 : 2 ஆகுமாறுள்ளன. Δ வயந = 1/3 Δ கமப என நிறுவுக.

[10] Δ கமப வில் ∠ க = 90°, கத ஒருயரம். கம² : கப² = மத : தப என நிறுவுக.

11. Δ கமப வில் ∠ க = 90°, கத ஒருயரம். த விலிருந்து கம விற்குள்ள செங்குத்து தந. மந : மக = மக² : மப² என நிறுவுக.

[12] இரண்டு வட்டங்கள் ய விலே வெட்டிக்கொள்கின்றன. நேர்கோடுகள் கயவ, மயச, பயத என்பன ஒருவட்டத்தை க, ம, ப என்னும் இடங்களில் வெட்டி மற்றை வட்டத்தை வ, ச, த என்பவற்றில் வெட்டுகின்றன. Δ கமப : Δ வசத = கம² : வச² என நிறுவுக.

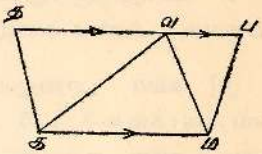
13. கமப என்பது ஒருவட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். ப விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட கம வை த விற் சந்திக்கின்றது.

(i) Δ பகத : Δ பமத = பக² : பம² என நிறுவுக.

(ii) பக² : பம² = கத : மத என நிறுவுக.

14. உரு 881 இல் **தவப** என்பது **கம** விற்குச் சமாந்தரம். $\angle$ **கதப** $=$ $\angle$ **மபத** $=$ $\angle$ **கவம**.

தவ : வப $=$ **வக**^{2} : **வம**^{2} என நிறுவுக.



உருவம் 881

15. $\triangle$ **கமப** வின் பக்கம் **கம** வினது நடுப்புள்ளி **வ**. **கம** விலே **ய** என்னும் ஒரு புள்ளி **கய**^{2} $=$ **கவ . கம** ஆகுமாறுள்ளது. **மப** விற்குச் சமாந்தரமாய் **ய** விற்கூடாகவுள்ள கோடு $\triangle$ **கமப** வின் பரப்பை இருசமக் கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

*16. $\triangle$ **கமப** வில் $\angle$ **க** $= 90^\circ$; **மபந, பகய, கமவ** என்பவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள். அவற்றில் **ந, ய, வ** என்பன ஒத்த புள்ளிகள். $\triangle$ **பகய** $+$ $\triangle$ **கமவ** $=$ $\triangle$ **மபந** என நிறுவுக.

*17. ஒரு வட்டம் **கவம** வினது விட்டம் **கம**. **க, ம** என்பவற்றிலிருந்து **வ** விலுள்ள தொடுகோட்டிற்குள்ள செங்குத்துக்கள் **கச, மத** என்பனவாகும். $\triangle$ **கவம** $= \frac{1}{2}$ நாற்கோணம் **கசதம** என நிறுவுக.

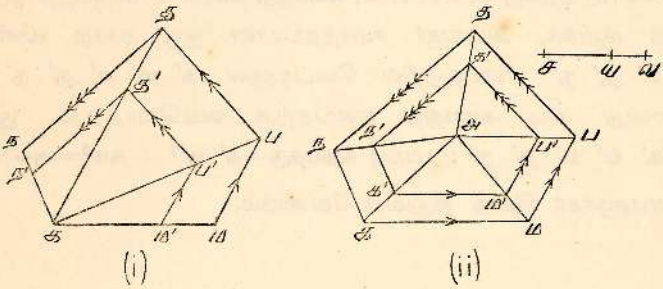
*18. ஒரு வட்டம் **கவம** வினது ஒருவிட்டம் **கம**. **ம** இலிருந்து **வ** விலுள்ள தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்து **மத**. **கம** விலே **ப** என்னும் ஒரு புள்ளி **கப** $=$ **கவ** ஆகுமாறுள்ளது. **மவ** விற்குச் சமாந்தரமாய் **ப** விற்கூடாகவுள்ள கோடானது **கவ** வை **ய** விலே வெட்டினால் $\triangle$ **மதவ** $=$ நாற்கோணம் **மபயவ** என நிறுவுக.

*19. $\triangle$ **கமப** வின் பக்கங்கள் **மப, பக, கம** என்பவற்றிலே **த, ந, வ** என்னும் புள்ளிகள் **தநகவ** ஓரிணைகரமாகுமாறுள்ளன. **மத : தப** $=$ **அ : இ** எனின் **தநகவ** வினது பரப்புக்கள் **கமப** வின் பரப்பிற்குள்ள விகிதம் 2**அஇ** : (**அ** $+$ **இ**)^2 என்பதற்குச் சமமென நிறுவுக.

பல்லின அமைப்புக்கள்

அமைப்பு 22

கொடுத்த ஒருபல்கோணம் கமபதந விற்கு வடிவொத்த ஒரு பல் கோணத்தை, ஒத்தபக்கங்கள், கொடுத்த சய : சவ என்ற விகிதத்தில் அமையுமாறு வரைதல்.



உருவம் 882

உரு 882 (i) இல் கம என்பது ம' இலே கம' : கம = நய : நவ ஆகுமாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

கோடுகள் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளன என்பதை அம்புகள் காட்டு கின்றன.

உரு 882 (ii) இல் அ என்பது யாதாயினும் ஒருபுள்ளி ; அக என்பது க' இலே அக' : அக = சய : சவ ஆகுமாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

கோடுகள் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளன என்பதை அம்புகள் காட்டு கின்றன.

உரு 882 (i) இல் கம' ப' த' ந' என்பதே வேண்டிய பல்கோணம்.

உரு 882 (ii) இல் க' ம' ப' த' ந' என்பதே வேண்டிய பல்கோணம்.

மாணக்கர் ஒவ்வொரு முறையிலும் அமைப்பினைச் செய்து அது திருத்த மானதென நிறுவல் வேண்டும்.

ஒரு கூம்பகத்தின் வடிவொத்த பகுப்புக்கள்

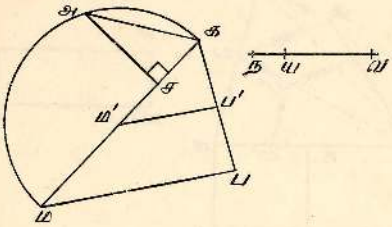
இருதளங்கள் ஒன்றையொன்று ஒருபொழுதும் சந்தியாவெனின் அவை சமாந்தரம் எனப்படும். சமாந்தரமான இரு தளங்கள் மூன்றுவது ஒரு தளத்தை வெட்டினால் வெட்டுக்கோடுகள் சமாந்தரம் என மாணாக்கர் நிறுவல் வேண்டும்.

உரு 882 (ii) ஆனது **அ** உச்சியாக, **கமபதந** அடியாக அமைந்த ஒரு கூம்பகத்தைக் குறிக்க, அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளம் விளிம்புகளை **க′ ம′ ப′ த′ ந′** என்பவற்றில் வெட்டினால் **க′ ம′ ப′ த′ ந′** என்ற பகுதியானது அடி **கமபதந** என்பதற்கு வடிவொத்தது. இன்னும் பரப்பு **க′ ம′ ப′ த′ ந′** : பரப்பு **கமபதந**$=$**க′ ம′**^{2} : **கம**^{2}$=$**அக′**^{2} : **அக**^{2}.

மாணாக்கர் இதை நிறுவல் வேண்டும்.

அமைப்பு 23

கொடுத்த ஒரு முக்கோணம் கமப விற்கு வடிவொத்ததாயும் △ கமப வின் கொடுத்த ஒருபின்னம் $\frac{\text{நய}}{\text{நவ}}$ என்பதற்குச் சமமானதாயும் ஒரு முக்கோணம் வரைதல்.



உருவம் 883

(i) கம வை ச விலே

கச : கம = நய : நவ ஆகுமாறு பிரிக்க.

(ii) சஅ வை கம விற்குச் செங்குத்தாக வரைக; கம மேல் அதை விட்டமாக உடைய வட்டத்தை அது அ விலே சந்திப்பதாகுக. கஅ வை இணைக்க.

(iii) கம விலே கம' என்பதை கச, கம என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள இடைவிகிதசமன் கஅ என்பதற்குச் சமமாக வெட்டுக. (பக்கம் 599 பார்க்க.)

(iv) மப விற்குச் சமாந்தரமாக ம' ப' என்பதை வரைக.

இப்பொழுது கம' ப' என்பதே வேண்டிய முக்கோணமாகும்.

நிறுவல்.

$$\frac{\triangle \text{கம}'\text{ப}'}{\triangle \text{கமப}} = \frac{\text{கம}'^2}{\text{கம}^2}$$

$$= \frac{\text{கச} \cdot \text{கம}}{\text{கம}^2}$$

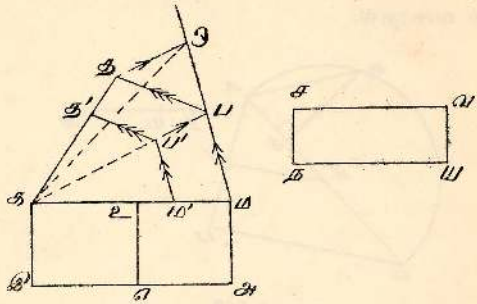
$$= \frac{\text{கச}}{\text{கம}}$$

$$= \frac{\text{நய}}{\text{நவ}}.$$

குறிப்பு. எந்தப் பல்கோணத்திற்கும் ஒத்தமுறையைக் கையாளலாம்.

அமைப்பு 24

கொடுத்த ஒருநாற்கோணம் கமபத விற்கு வடிவொத்ததாயும் கொடுத்த ஒருசெவ்வகம் நயவச விற்குப் பரப்பளவிற் சமமானதாயும் உள்ள ஒரு நாற்கோணம் அமைத்தல்.



உருவம் 884

(i) நாற்கோணம் **கமபத** விற்குப் பரப்பளவிற் சமமான ஒரு செவ்வகம் **கமஅஇ** என்பதை அமைக்க.

(ii) செவ்வகம் **நயவச** விற்குப் பரப்பளவிற் சமமாகச் செவ்வகம் **கஉஎஇ** என்பதை அமைக்க.

(iii) **கஉ, கம** என்பவற்றிற்கிடையுள்ள இடைவிகிதசமன் **கம'** என்பதை அமைக்க.

(iv) நாற்கோணம் **கமபத** என்பதற்கு வடிவொத்த நாற்கோணம் **கம' ப'த'** என்பதை அமைக்க.

இப்பொழுது **கம'ப'த'** என்பதே வேண்டிய நாற்கோணமாகும்.

கமபத வைச் சமமான முக்கோணம் **கமஒ** என்பதற்கு ஒடுக்குதலுடன் (i) ஐத் தொடங்குக. (ப. 307)

கஇ, நய, நச என்பவற்றிற்கு நான்காம் விகிதசமன் **கஉ** என்டதை அமைப்பதுடன் (ii) ஐத் தொடங்குக. (ப. 557)

நிறுவல்.

$$\frac{\text{நாற்கோணம் கம' ப' த'}}{\text{நாற்கோணம் கமபத}} = \frac{\text{கம'}^2}{\text{கம}^2} = \frac{\text{கஉ.கம}}{\text{கம}^2}$$

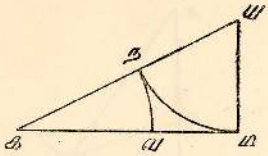
$$= \frac{\text{கஉ}}{\text{கம}} = \frac{\text{செவ்வகம் கஉஎஇ}}{\text{செவ்வகம் கமஅஇ}}$$

$$= \frac{\text{செவ்வகம் நயவச}}{\text{நாற்கோணம் கமபத}}.$$

∴ நாற்கோணம் **கம' ப' த'** = செவ்வகம் **நயவச.**

அமைப்பு 25

கொடுக்கப்பட்ட ஒருகோடு கம வை வ விலே, கம . வம = கவ² ஆகுமாறு பிரித்தல்.



உருவம் 885

(i) **மக** விற்குச் செங்குத்தாகவும் $\frac{1}{2}$ **கம** விற்குச் சமமாகவும் **மய** வை வரைக.

(ii) **யக** வை இணைத்து அதிலிருந்து **யந** வை **யம** விற்குச் சமமாக வெட்டுக.

(iii) **கம** விலிருந்து **கந** விற்குச் சமமாக **கவ** வை வெட்டுக.

இப்பொழுது **வ** வே வேண்டிய புள்ளியாம்.

நிறுவல் மாணுக்கருக்குப் பயன்தரும் பயிற்சியாகும்.

கம = 2அ அலகுகளாகவும் **கவ** = **கந** = இ அலகுகளாகவும் ஆகுக.

என் $(இ + அ)^2 = (2அ)^2 + அ^2$ என விளக்குக.

அதனுல் **கவ**^{2} = $இ^2 = 2அ(2அ - இ)$ = **கம.வம.**

கம என்னுங்கோடு **வ** விலே **இடைப்பகுப்பாகப்** பிரிக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கூறப்படும்.

ஒரு கோடு **கம** வை **வ** விலே

கம·வம = கவ²

ஆகுமாறு அமைத்தலானது இ யைக்கொண்ட சமன்பாடு

$$2அ(2அ - இ) = இ^2$$

என்பதைத் தீர்ப்பதை ஒக்கும்.

எனவே அமைப்பு 25,

$$இ^2 + 2அஇ = 4அ^2$$

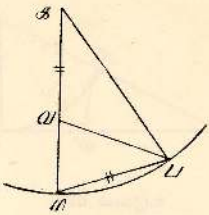
என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டுக்கு ஒரு கேத்திரகணிதத் தீர்வினைக் காட்டுகின்றது. மாணுக்கர் இச்சமன்பாட்டினை சதுரத்தை முடிப்பதால் தீர்த்துக்கொள்ளல் வேண்டும். இது

$$இ = அ(\sqrt{5} - 1)$$

என்பதைக் காட்டுகின்றது.

அமைப்பு 26

△கமப வில் கம வின் நீளமும் ∠ம = ∠ப = 2∠க என்பதுங் கொடுக்கப்பட்டால் △கமப வை அமைத்தல்.



உருவம் 886

(i) **க** வை மையமாகவும் **கம** வை ஆரையாகவுங்கொண்ட ஒருவட்டம் வரைக.

(ii) **கம** வை **வ** விலே **கம.வம = கவ²** ஆகுமாறு பிரிக்க.

(iii) ஒருநாண் **மப** வை வட்டத்திலே **மப = கவ** ஆகுமாறு இடுக. இப்பொழுது **கமப** வே வேண்டிய முக்கோணமாகும்.

நிறுவல் மாணுக்கருக்குப் பயன்படும் ஒரு பயிற்சியாகும்.

(அ) **பம** என்பது வட்டம் **பவக** வைத் தொடுகின்றது என நிறுவுக. (தேற்றம் 82, பக்கம் 592.)

(இ) முக்கோணங்கள் **மபவ, மகப** என்பன சமகோணங்களானவை என நிறுவுக.

(உ) **பவ=பம** எனவும் **பவ=கவ** எனவும் நிறுவி நிறுவலை முடிவாக்குக.

ஒழுங்கான ஐங்கோணமுந் தசகோணமும்

அமைப்பு 26 இல் △கமப இன் கோணங்கள் 36°, 72°, 72° ஆகும். எனவே **மப** என்பது **க** வை மையமாகவும் **கம** வை ஆரையாகவுங் கொண்ட வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான தசகோணத்தின் பக்கமாகும்.

வட்டத்தினுள் ஒரொழுங்கான தசகோணத்தை உள்ளுருவமாக அமைப்பதற்கு அமைப்பு 26 இனை நாம் பயன்படுத்தி ஒன்றுவிட்ட உச்சிகளை இணைப்பதால் நாம் ஒரொழுங்கான ஐங்கோணத்தைப் பெறுகின்றோம். எனினும் பிறிதொரு வழி விரைவிற் பயன்தரக்கூடியதாகும். பக்கம் 617 பார்க்க.

கம = 2அ அலகுகள் எனின் **கவ** = அ $(\sqrt{5}-1)$ அலகுகளாம். பக்கம் 615 பார்க்க. ஆனால் **மப** = **கவ** ; எனவே 2அ அலகுகள் ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான தச கோணத்தின் பக்கங்களினுடைய நீளம் அ$(\sqrt{5}-1)$ அலகுகளாகும்.

க விலிருந்து **மப** விற்கு ஒரு செங்குத்தினைக் கீறுவதால்

$$\text{சைன்}\ 18^\circ = \text{கோசை}\ 72^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

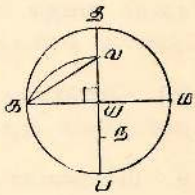
என்பதைக் காண்கின்றோம்.

ஒழுங்கான ஐங்கோணத்தின் அமைப்பு

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தினுள்ளே ஒரொழுங்கான ஐங்கோணத்தை விரைவாய் அமைப்பதற்கு முறைமையான வழி பின்வரும் பண்பிலே தங்கியுள்ளது :—

ஆ ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான ஐங்கோணத்தினுடையவும் ஒரொழுங்கான தசகோணத்தினுடையவும் பக்கங்களின் நீளங்கள் அ வும் இ யும் எனின் $\text{அ}^2 = \text{இ}^2 + \text{ஆ}^2$ ஆகும். இவ்வுண்மையை நிறுவுவதற்குரிய வழி பக்கம் 598 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. எண் 28 இனைப் பார்க்க.

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் இருசெங்குத்து விட்டங்கள் **கயம**, **பயத** என்பவற்றை வரைக. **யப** வை **ந** வில் இருசமக்கூறிடுக. **ந** வை மையமாகவும் **நக** வை ஆரையாகவும் கொண்டு **நத** வை **வ** விலே வெட்டுமாறு ஒரு வட்டம் வரைக.



அப்பொழுது **கவ** என்பது வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான ஐங்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமமாகும்.

(i) வட்டத்தினது ஆரை 2அ அலகுகள் எனின் **நக** = அ$\sqrt{5}$ அலகுகள் என நிறுவுக.

(ii) **பவ** என்பது வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரொழுங்கான தசகோணத்தின் பக்கத்திற்குச் சமமானது என நிறுவி (பக்கம் 616 பார்க்க), நிறுவலை முடிவாக்குக.

பயிற்சி 98

1. ஒருமுக்கோணம் **கமப** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **மப** விலே ஒரு புள்ளி **வ** வை அதிலிருந்து **கம**, **கப** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்களின் விகிதம் 2 : 3 என்பதற்குச் சமமாகுமாறு அமைக்க.

[2] **கமப** என்பது 5 ச. மீ. பக்கங்கொண்ட ஒருசமபக்கமுக்கோணம். △**கமப** வினுள்ளே ஒருபுள்ளி **வ** வை அதிலிருந்து **மப, பக, கம** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள் 1, 2, 3 என்பவற்றிற்கு விகிதசமனாகுமாறு அமைக்க. **கவ** வை அளக்க.

3. ஒரு சமபக்கமுக்கோணம் **கமப** வை, **க** வினை **மப** வின் முச்சமக்கூறிடும் ஒருபுள்ளிக்கு இணைக்கும் கோட்டின் நீளம் 2 அங். ஆகுமாறு அமைக்க. **மப** வை அளக்க.

[4] ஒரு சதுரம் **கமபத** வை, **க** வினை **மப** வினது நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்குங்கோட்டின் நீளம் 3 அங். ஆகுமாறு அமைக்க. **கம** வை அளக்க.

5. ஒரு பாகைமானியை உபயோகித்து **கமபதந** என்னும் ஒரொழுங்கான ஐங்கோணத்தை **பத** விலிருந்து **க** விற்குள்ள தூரம் 7 ச.மீ. ஆகுமாறு அமைக்க. **பத** வை அளக்க.

6. **கமபத** என்னும் ஒருநாற்கோணம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வடிவொத்த ஒரு நாற்கோணம் **நயவச** என்பதை **நய : கம = 3 : 5** ஆகுமாறு அமைக்க.

7. ஒரு முக்கோணம் **கமப** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சதுரம் **நயவச** வை **கம, கப** என்பவற்றிலே **வ, ய** கிடக்குமாறும் **வச** என்பது **மப** வழி கிடக்குமாறும் அமைக்க. (சதுரம் **மபஅஇ** என்பதை வரைந்து அமைப்பைத் தொடங்குக ; **கஅ, கஇ** என்பவற்றை இணைக்க.)

சதுரம் **வயநச** என்பது △**கமப** வினுள்ளே உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டுள்ளது எனப்படும்.

[8] கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தினுள்ளே ஒரு செவ்வகத்தை அதன் உயரம் அதன் அடியில் அரைப்பகுதியாகுமாறு அமைக்க.

9. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தினுள்ளே கொடுக்கப்பட்ட பிறிதொரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமாகப் பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை உள்ளுருவமாக வரைக.

[10] ஒரு வட்டத்தின் ஈராரைகள் **யக, யம** என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு சதுரம் **வதநச** என்பதை **யக** விலே **வ** கிடக்குமாறும் **யம** விலே **த** கிடக்குமாறும் **ந, ச** என்பன வில் **கம** விலே கிடக்குமாறும் அமைக்க.

11. **கமப** என்பது 5 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரு சமபக்கமுக்கோணமாகும். △**கமப** வின் வெளியே ஒரு கோட்டினை **க, ம, ப** என்பவற்றிலிருந்து அதற்குள்ள செங்குத்துக்கள் 2, 3, 4 என்பவற்றிற்கு விகிதசமனாக அமையுமாறு அமைக்க. **ப** விலிருந்துள்ள செங்குத்தை அளக்க.

12. ஒரு முக்கோணம் **கமப** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **மப** விற்குச் சமாந்தரமாய் **கம, கப** என்பவற்றை **வ, ய** என்பவற்றிலே வெட்டி. △**கவய** = $\frac{1}{3}$ △**கமப** ஆகவமைக்கும் ஒரு வட்டத்தை வரைக.

13. ஒரு சதுரம் **கமபத** கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. **கமபத** என்பதை மூன்றுசமமான பரப்புக்களுடைய பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் இருகோடுகளை **கப** விற்குச் சமாந்தரமாக அமைக்க.

14. இருசமபக்கமுக்கோணங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் பரப்பின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமான பரப்புடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணம் வரைக.

[15] **கமபத, வயநச** என்னும் இருசதுரங்களும் **அஇ** என்ற ஒரு கோடுங் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **உஎ** என்ற ஒருகோட்டை

பரப்பு **கமபத** : பரப்பு **வயநச** = **அஇ** : **உஎ**

ஆகுமாறு அமைக்க.

16. 5 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரு சதுரத்தின் பரப்பிற்குச் சமமாக ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அமைக்க. **மப** வை அளக்க.

[17] ஒரு முக்கோணம் **கமப** வை **மப : பக : கம** = 6 : 5 : 4 ஆகுமாறும் 4 ச.மீ. நீளமும் 3 ச.மீ. உயரமுங்கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமாகவும் அமைக்க. **மப** வை அளக்க.

18. ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** வை ∠**க** = 90°, **கம** = 4 ச.மீ., **மப** = 6 ச.மீ., **பத** = 5·5 ச.மீ., **தக** = 3 ச.மீ. ஆகுமாறு வரைக. **வயநச** என்னும் ஒரு நாற்கோணத்தை **கமபத** விற்கு வடிவொத்ததாகவும் 4 ச.மீ. நீளமும் 3·5 ச.மீ. உயரமுங்கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமாகவும் வரைக. **யந** வை அளக்க.

[19] ஒரு பாகைமானியை உபயோகித்து 6 ச.மீ. பக்கங்கொண்ட ஒரு சதுரத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமமாக ஓரொழுங்கான ஐங்கோணம் **கமபதந** வை அமைக்க. **கம** வை அளக்க.

*20. 18° கொண்ட ஒருகோணம் வரைக.

*21. கொடுக்கப்பட்ட இருபுள்ளிகள் **க, ம** என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லக் கூடியதாகவும் கொடுக்கப்பட்ட ஒருவட்டம் **ச** வைத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக. (**க, ம** என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்வதும் **ச** என்பதை **ய, த** என்பவற்றில் வெட்டுவதாகவும் உள்ள யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தினை வரைக. **கம, யத** என்பன **ந** விற் சந்திப்பதாகக் கொள்க ; **ந** விலிருந்து **ச** விற்குள்ள தொடுகோடுகள் **நஅ, நஇ** என்பவற்றை வரைக.)

*22. கொடுக்கப்பட்ட ஒருபுள்ளி **க** விற்கூடாகச் செல்லக்கூடியதாகவும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டம் **ச** வைத் தொடக்கூடியதாகவும் தன் மையத்தைக் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோடு **மப** விலே கொள்ளக்கூடியதாகவும் உள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. (**மப** விலே **க** வினது விம்பம் **க′** என்பதை எடுக்க.)

*23. ஒரு நேர்கோட்டிலே முறையாக நான்கு புள்ளிகள் **க, ம, ப, த** என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **மப** விலே ஒருபுள்ளி **வ** வை **வக . வம = வப . வத** ஆகுமாறு அமைக்க.

*24. கொடுக்கப்பட்ட இருகோடுகள் **கம, கப** என்பவற்றைத் தொடக்கூடியதாகவும் **ய** மையமாக ஆ ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தைத் தொடக்கூடியதாகவும் ஒரு வட்டம் அமைக்க. (**கம, கப** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாய் அவற்றிலிருந்து ஆ தூரத்திலே இருகோடுகள் வரைக. இக்கோடுகளைத் தொட்டுக் கொண்டு **ய** விற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் அமைக்க.)

*25. **யக, யம** என்பன **யக** = 6 ச.மீ., ∠ **கயம** = 40° ஆகுமாறுள்ள இரு கோடுகள். **யக** வை **க** விலே தொட்டு **யம** விலே 5 ச.மீ. நீளம் ஒன்றினை வெட்டும் ஒரு வட்டம் அமைக்க.

*26. 5 ச.மீ. ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தை வரைந்து மையத்திலிருந்து 3 ச.மீ. தூரத்திலுள்ள ஒருபுள்ளி **க** வை எடுக்க. **க** விற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் நாண் **வய** வினை **வக** = 2/3 **கய** ஆகுமாறு அமைக்க.

மீட்டல் வினாத்தாள்கள் 81—88 (தேற்றங்கள் 1–77)

(வடிவொத்த முக்கோணங்களும் அடங்கும்)

அம்பிட்ட கோடுகள் சமாந்தரம்

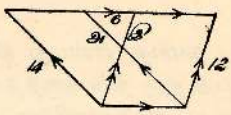
81

1. (i) ஒவ்வொன்றும் 170° க்கு மேற்பட்ட எத்தனை கோணங்களை 10 பக்கங்கள்கொண்ட குவிந்த ஒரு பல்கோணங்கொள்ளும் ?

   (ii) 10 பக்கங்கள்கொண்ட குவிந்த ஒரு பல்கோணத்திலே குறைந்தது எவ்வளவு விரிகோணங்கள் இருக்கும் ?

2. ஒரு வட்டம் **கமப** விற்கு **ப** வினுள்ள தொடுகோடும் அவ்வட்டத்தை வெட்டும் ஒரு வட்டம் **கமதந** வினது ஒருநாண் **தந** வும் நீட்டப்பட்ட பொழுது **ச** விலே சந்திக்கின்றன. **பகந** ஒரு நேர்கோடானால் **ச, ப, த** என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் வட்டம் **ம** விற்கூடாகவும் செல்கின்றது என நிறுவுக.

3. (i) 8 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒருகோடு **கம** ஆனது 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாவும் வெளிப்புறமாகவும் **வ, ய** க்களில் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. **வய : கம** என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

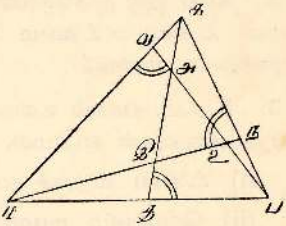


உருவம் 887

(ii) உரு 887 இலே அடையாளமிடப்படாத தெரியாத நீளங்களைக் காண்க. நீளஅலகு 1 ச.மீ. கீழடி 10.

4. உரு 888 இல்

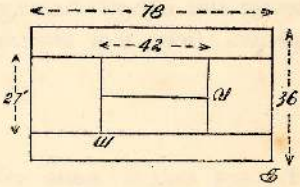
∠ **கதப** = ∠ **மநக** = ∠ **பவம** ஆக **கத, மந, பவ** என்பன உருவில் காட்டியவாறு **அ, இ, உ** க்களில் வெட்டிக் கொண்டால், **அஇ : மப = இஉ : பக** என நிறுவுக.



உருவம் 888

82

1. உரு 889 ஒரு தெனிசுக்கோட்டின் படமாகும். அளவுகள் அடிகளில் உள்ளன. **வ, ய** என்னும் இடங்களிலுள்ள மூலை அடையாளங்களே காணப்படுகின்றன. நாடா அளவுகள் இரண்டினையே கொண்டு **க** வினது திருத்தமான நிலையை அறிவதற்கு வேண்டிய குறைந்த அளவான கணிப்புக்களைத் தருக.

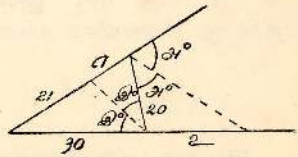


உருவம் 889

2. ஒரு வட்டத்தினுடைய மூன்று சமமான நாண்கள் **கம, மப, பத** என்பனவாகும். **த** விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **மப** வை **ச** விலே சந்தித்தால் ∠ **மகத** = 2/3 ∠ **சதக** என நிறுவுக.

3. (i) **கயதவ, மயபந** என்னும் ஒன்றையொன்றுவெட்டும் இருகோடுகள் ஆனவை **கம, பத, நவ** என்ற மூன்று சமாந்தரக் கோடுகளால் வெட்டப்பட்டுள்ளன. **கத** = 7 அங்., **தவ** = 3 அங., **பந** = 4 அங., **நவ** = 2 அங., **கம** = 3 அங். எனின் **மப, பத** என்பவற்றைக் காண்க.

(ii) உரு 890 இல் அடையாளமிடப்படாத தெரியாத நீளங்களைக் காண்க. நீள அலகு 1 ச.மீ. ஆகும்.



உருவம் 890

4. **கவம, கயம** என்பன இருவட்டங்கள். **வகய** ஒரு நேர்கோடானால் **மவ : மய** என்பது விட்டங்களின் விகிதத்திற்குச் சமமென நிறுவுக

83

1. **கமபத** என்பது கிடையான தளத்திலுள்ள ஒரு சதுரமாகும். **தச** என்பது ஒரு நிலைக்குத்தான கம்பம். **வ, ய** என்பன **மக, மப** என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள். **மத** வை **வய** வானது **ந** வில் வெட்டுகின்றது. **கம** = 8 அடி, **தச** = 7 அ.டி எனின் **சந** வினது நீளத்தைக் காண்க.

2. **கமப** ஒரு முக்கோணம். △**கமப** வினுள்ளே **வ** என்னும் மாறும் புள்ளி ∠**வமக** = ∠**வபம** ஆகுமாறு உள்ளது. **வ** வினது திட்டமான ஒழுக்கினைக் காண்க.

3. 5 ச.மீ. பக்கம் உள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணம் **கமப** வை வரைக. வேறு அளவுகள் எடாமல்,

(i) △**கமப** விற்குச் சமமான ஒரு செவ்வகம் **மபவய** வை அமைக்க.

(ii) செவ்வகம் **மபவய** விற்குச் சமமான ஒரு செவ்வகம் **யகஅஇ** என்பதை அமைக்க. உமது வழியைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

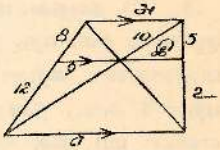
4. வட்டம் **கவம** வினது ஒருவிட்டம் **கம**. நாண் **கவ** விலே **ய** என்னும் ஒருபுள்ளியானது **ய** விலிருந்து **கம** விற்குள்ள செங்குத்து **யந** என்பது **யவ** விற்குச் சமமாகுமாறு உள்ளது. **கந : கவ = யந : நம** என நிறுவுக. (**மய, மவ** என்பவற்றை இணைக்க.)

84

1. ஒரு வட்டம் **கவம** வினது விட்டம் **கம** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **த**. வில் **கம** வினது நடுப்புள்ளி **வ**. **கத**^{2} + **மத**^{2} = 2 **வத**^{2} என நிறுவுக.

2. **கமபத** ஓரிணைகரம். **கப** விலே **வ** யாதாயினும் ஒருபுள்ளி. வட்டங்கள் **வகத**. **வமப** என்பன **ய** விலே மீண்டும் வெட்டினால் **மயத** ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.

3. (i) உரு 891 இலே அடையாளமிடப்படாத தெரியாத நீளங்களைக் காண்க. நீள அலகு 1 ச.மீ.



உருவம் 891

(ii) ஒரு தடுப்பிலுள்ள 3 அங். விட்டமுள்ள ஒருவட்டத் துவாரத்திற்கு 4 அடி முன்னர் ஒருவிளக்கு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அத்தடுப்பிற்குச் சமாந்தரமாக 5 அடி பின்னருள்ள சுவற்றில் விழுகின்ற ஒளிப்பகுதியின் விட்டத்தைக் காண்க.

4. (i) சரிவகம் **கமபத** வின் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கம, தப** ஆகும். **தம** வை **கப** வானது **ந** விலே வெட்டுகின்றது. **கம** விற்குச் சமாந்தரமாய் **ந** விற் கூடாக உள்ள கோடு **கத, மப** என்பவற்றை **வ, ய** க்களில் வெட்டு கின்றது. **வந = நய** என நிறுவுக.

(ii) **கமபத, வயநச** என்பன நாற்கோணங்கள். அவற்றில் ∠**க** = ∠ **வ**, **ம** = ∠ **ய**, ∠ **ப** = ∠ **ந** ; **கம** : **மப** = **வய** : **யந** ; **கமபத** என்பது **வயநச** விற்கு வடிவொத்ததென நிறுவுக.

85

1. △**கமப** வின் பக்கங்கள் **மப, பக, கம** என்பன **அ, இ, உ** என்ப வற்றிற்கு தம் நீளங்கள் அளவு நீட்டப்பட்டுள்ளன. △**அஇஉ** = 7 △**கமப** என நிறுவுக.

2. ஒருவட்டத்தின் ஒருபுள்ளி **ந** விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட ஒரு நாண் **வய** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. **ஓ** என்பது வட்டத்தினது மையம். **வய** வினது நடுப்புள்ளி **ச**. ∠**நஓத** = ∠**நசத** என நிறுவுக.

3. (i) **கமபதந** என்பது **கம** = 3 அங்., **மப** = 2 அங்., **பத** = $2\frac{1}{2}$ அங்., **தந** = $1\frac{1}{2}$ அங். ஆகுமாறு அமைந்த ஒரு நேர்கோடு.

1. **கத** வை **ம** பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.
2. **மத** வை **ந** வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.
3. **பந** வை **ம** வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

(ii) (2, 1), (5, 1), (4, 2) ஆகிய ஆள்கூறுகளை உச்சிகளாகக்கொண்ட முக்கோணம்

(1, 1), (7, 1), (5, 3) ஆகிய ஆள்கூறுகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்திற்கு வடிவொத்தது என நிறுவுக.

4. △**கமப** வினது பக்கம் **மப** விலே **வ, ய** என்னும் புள்ளிகள் **மவ** = **பய** ஆகுமாறுள்ளன. **வச** என்பது **மக** வை **ச** விலே வெட்டுமாறு **பக** விற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள்ளது. **யந** என்பது **பக** வை **ந** விலே வெட்டுமாறு **மக** விற்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளது. **சந** = **மய** என நிறுவுக.

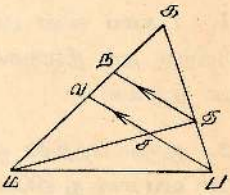
86

1. △**கமப** வில் **கம** = 5 ச.மீ., **கப** = 3 ச.மீ., ∠ **மகப** = 120°. **மப** வினது நீளத்தையும் ∠ **கமப** வின் பரப்பையுங் காண்க.

2. **கமபத** ஒரொருவட்ட நாற்கோணம். **மத** வை **கப** என்பது **ச** விலே வெட்டுகின்றது. **பத** என்பது வட்டம் **சகத** வைத் தொட்டால் **பம** என்பது வட்டம் **சகம** வைத் தொடுகின்றது என நிறுவி அவ்வுருவிலே சமமான இருகோடுகளைக் காண்க.

3. (i) உரு 892 இல் **கவ** = **வம**, **கத** = 2**தப**. விகிதங்கள் **கந** : **நம**, **மச** : **சத**, △**பசத** : △**கமப** என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) **வயந** என்னும் ஒரு முக்கோணத்தில் **யந** = 6 ச.மீ., **நவ** = 4 ச.மீ., **வய** = 5 ச.மீ. **யந** விலே **த** என்னும் ஒரு புள்ளி ∠ **தவந** = ∠ **வயந** ஆகுமாறுள்ளது எனின் விகிதம் **யத** : **தந** என்பதையும் **வத** வினது நீளத்தையும் காண்க.



உருவம் 892

4. (i) **கமபத**, **வயநச** என்பன குவிந்த நாற்கோணங்கள். அவற்றில் ∠ **க** = ∠ **வ**, **கம** : **மப** : **பத** : **தக** = **வய** : **யந** : **நச** : **சவ**. **கமபத** என்பது **வயநச** என்பதற்கு வடிவொத்தது என நிறுவுக.

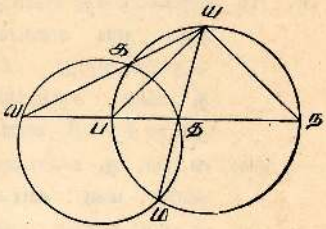
(ii) **கமபத** ஓரிணைகரம். **க** விற்கூடாகவுள்ள ஒரு கோடு **மத**, **மப** நீட்டப்பட்ட **தப** என்பவற்றை முறையே **அ**, **இ**, **உ** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றது. **கஅ** : **அஇ** = **கஉ** : **கஇ** என நிறுவுக.

87*

1. △**கமப** வில் **கம** = **கப**, ∠ **மகப** = 120°. **கம** வின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்து **மப** வை **அ** வில் வெட்டினால் **மப** = 3 **மஅ** என நிறுவுக.

2. உரு 893 இல் **வகய**, **யதம**, **வபதந** என்பன நேர்கோடுகள். **யப** = **யந** என நிறுவுக. (**கம**, **கந** என்பவற்றை இணைக்க.)

3. (i) நாற்கோணம் **கமபத** வின் மூலை விட்டங்கள் **கப, மத** என்பன **ச** விலேவெட்டிக்கொள்கின்றன. **கம** விற்குச் சமாந்தரமாய் **ச** விற்கூடாக உள்ள கோடானது **கத, மப** என்பவற்றை முறையே **வ, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. **கவ** = 10 ச.மீ., **வத** = 6 ச.மீ., **வச** = 9 ச.மீ., **சய** = 4 ச.மீ., **மய** = 9 ச.மீ. எனின் **கம, மப** என்பவற்றைக் காண்க.



உருவம் 893

(ii) 3 அடி 9 அங். நீளமுள்ள **கம** என்னும் ஒரு நேர்கோலானது நீரின் மேற்பரப்பிலிருந்து **க** என்பது 2 அடி 6 அங். கீழாகவும் **ம** என்பது 9 அங். கீழாகவும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. **ப** என்பது தடியிலுள்ள ஒரு புள்ளி. **கப** ஓரடியாய் உள்ள பொழுது **ப** என்பது தண்ணீர்மேற்பரப்பிலிருந்து எவ்வளவு ஆழத்தில் உள்ளது எனக் காண்க.

4. **கமபத** ஒரு நாற்கோணம். **மப** விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு **கவ** என்பது **மத** வை **வ** விலே சந்திக்கின்றது. **கத** விற்குச் சமாந்தரமான ஒருகோடு **மந** என்பது **கப** வை **ந** விலே சந்திக்கின்றது. **பத** விற்கு **நவ** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

88*

1. 6 அங்., 4 அங். ஆரைகள் கொண்ட இருகோளங்கள் தம் மையங்களை 5 அங். தூரத்தில் கொண்டுள்ளன. அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் வளைவினால் ஆயவட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க. இவ்வட்டத்தின் தளத்திலிருந்து அவற்றின் மையங்கள் உள்ள தூரங்களையுங் காண்க.

2. வட்டங்கள் **கவய, கசத** என்பன **க** விலே ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. **வகச** என்பது ஒரு நேர்கோடாக நாண்கள் **யவ, சத** என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது **க** விலுள்ள தொடுகோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி **ந** விலே சந்திக்கும் எனின் **ந, க, ய, த** என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.

3. (i) ஒருகோடு **சத** என்டது **கப** விற்குச் சமாந்தரமாக உள்ளது. அது **கம, மப** என்பவற்றை முறையே **ச, த** என்பவற்றில் தொடுகின்றது. ∠**கமப** வின் இருசமவெட்டியானது **சத** வை **ந** விற் சந்திக்கின்றது. **கச** = 6 ச.மீ., **சத** = 15 ச.மீ., **தப** = 4 ச.மீ. எனின் **சந** வைக் காண்க.

(ii) **வ, ய, ந** என்பன முறையே **மப, பக, கம** என்னும் பக்கங்களில், **மவ : வப** = 4 : 5, **பய : யக** = 3 : 1, **கந : நம** = 3 : 7 ஆகுமாறுள்ள புள்ளிகளாகும். △**வயந** : △**கமப** என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

4. **கமபத** ஒரு நேர்கோடு. **ய** என்டது அதற்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். **யத** விற்குச் சமாந்தரமாய் **ம** விற்கூடாகவுள்ள ஒருகோடு ஆனது **யக, நீட்டப்பட்ட யப** என்பவற்றை **வ, ந** க்களில் வெட்டுகின்றது. **வம** = **மந** எனின் **கம : மப** = **கத : பத** என நிறுவுக.

(மீட்டல் வினாத்தாள்கள் 89-96 தேற்றங்கள் 1-83)

(வட்டத்தின் ஒன்றையொன்று வெட்டும் நாண்களும் பரப்புக்களின் விகிதமும் அடங்கும்)

89

1. ஒரு வட்டம் **கவம** வினது ஒரு விட்டம் **கம**. **க** விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட **மவ** வை **ய** விலே சந்திக்கின்றது. **வ** விலுள்ள தொடுகோடு **கய** வை இருசமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.

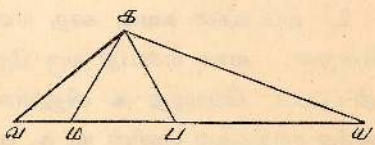
2. 6 அங். ஆரைகொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஓர் ஆரைச்சிறையைக் கொண்டும் 240° கொண்ட ஒரு கோணத்தைக்கொண்டும் வட்டக்கூம்பொன்று ஆக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் உயரத்தைக் காண்க.

3. **அகஇ** என்பது **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஒருவிட்டமாகும். **கஇ** யினது நடுப்புள்ளி **உ** ஆகும். **அஉ** வை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரையப்படின் வெளிவட்டத்திலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ** விலிருந்து இவ்வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோட்டினது நீளம் $\frac{1}{2}$ **வஅ** விற்குச் சமன் என நிறுவுக. (**வஅ** உள்வட்டத்தை **ய** வில் வெட்டுவதாகுக ; **யஉ, வஇ** என்பவற்றை இணைக்க.)

4. உரு 894 இல் **கமப** ஒரு சமபக்க முக்கோணம். ∠**வகய** = 120°. **வமபய** ஒரு நேர்கோடு.

(i) **வம . பய** = **மப**^{2} என நிறுவுக.

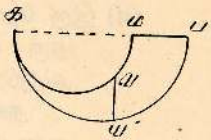
(ii) **வம : பய** = **கவ**^{2} : **கய**^{2} என நிறுவுக.



உருவம் 894

90

1. △கமப வில் மப = 24 அங்., பக = 13 அங்., கம = 17 அங். மப என்பது வ, ப க்களில் முச்சமக் கூறிடப்படின் கவ, கப என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக் காண்க.



உருவம் 895

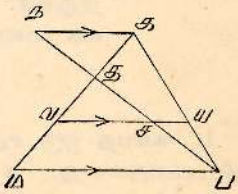
2. உரு 895 இல் வட்டங்கள் க விலே தொடுகின்றன. நீட்டப்பட்ட யவ வானது கம வைப் பெரிய வட்டத்தின் மையத்திலே செங்கோணமாக வெட்டுகின்றது. வய = 3 அங். மப = 5 அங். எனின் ஒவ்வொரு வட்டத்தினுடைய ஆரையையுங் காண்க.

3. உரு 896 இல்

(i) வய : மப = நச : நப என நிறுவுக.

(ii) கந.மவ = கம.யச என நிறுவுக.

கத = 10 ச.மீ., தவ = 5 ச.மீ., வம = 10 ச.மீ., கந = கப = 20 ச. மீ. எனின் ∠ வகய வை கச இரு சமக்கூறிடுகின்றது என நிறுவுக.



உருவம் 896

4. ஒரு நாண் கத என்பது ஒரு வட்டத்தினுடைய விட்டம் மப விற்குச் சமாந்தரமாக உள்ளது. ப விலுள்ள தொடுகோடு நீட்டப்பட்ட கத வை ந விற் சந்திக்கின்றது. மப.கந = மத² என நிறுவுக.

91

1. வயநசத ஒரு மாறும் ஐங்கோணம். பக்கங்கள் வய, யந, நச, சத என்பவற்றினுடைய நடுப்புள்ளிகள் நிலையாக்கப்பெறின் பக்கம் வத என்பது மாறுத நீளமுடையது எனவும் திசையிலே நிலையானது எனவும் நிறுவுக.

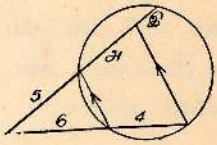
2. ஒரு சரிவகம் கமபத வின் சமாந்தரப்பக்கங்கள் கம, தப ஆகும். மத வை கப என்பது ச வில் வெட்டுகின்றது. △கசம, △கசத என்பவற்றினுடைய பரப்புக்கள் முறையே 3 சது. அங்., 4 சது. அங். எனின் △ தசப வினுடைய பரப்பைக் காண்க.

3. (i) உரு 897 இலுள்ள தரவுகளைக்கொண்டு அ, இ என்பவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) இரு நேர்கோடுகள் **நகம, நபத** என்பன ஒரு வட்டத்தை **க, ம, ப, த** என்பவற்றிற் சந்திக்கின்றன.

நக . நத : நம . நப = கத^2 : மப^2

என நிறுவுக.



உருவம் 897

4. ஒரு வட்டம் **கமபத** விலே யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **வ. வஅ, வஇ, வஉ, வள** என்பன **வ** விலிருந்து—தேவையெனில் நீட்டப்பட்ட—**கம, மப, பத, தக** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்களாம்.

(i) முக்கோணங்கள் **இவஉ, அவள** என்பன வடிவொத்தவை என நிறுவுக. (ii) **வஅ.வஉ = வஇ . வள** என நிறுவுக. (**வப, வக** என்பவற்றை இணைக்க.)

92

1. **கமபத** ஒரு சதுரம்; **கம** என்பது **வ** விற்கு **கவ = கப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. **க** விலிருந்து **வத** விற்குள்ள செங்குத்து **கந** ஆகும். **வந = 2 நத** என நிறுவுக.

2. ஒரு வட்டம் **கமவ** வினது மையம் **ப** ஒருவட்டம் **கயமப** வினுள்ளது. **வகய** ஒரு நேர்கோடாக நீட்டப்பட்ட **யப** ஆனது **வம** வை **ந** வில் வெட்டினால் **∠ வநய = 1** செங்கோணம் என நிறுவுக. (**பக, பம, பவ, யம** ஆகியவற்றை இணைக்க.)

(3) (i) **கமபத** ஒருசெவ்வகம். **கம = 8** அங்., **மப = 5** அங். **கமபத** வினுள்ளே **வ** என்பது ஒரு புள்ளி. அது **கத, கம** என்பவற்றிலிருந்து முறையே 2 அங்., 1 அங். தூரத்திலுள்ளது. **தவ** என்பது **கம** வை **ந** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. நீட்டப்பட்டபொழுது, **பந** என்பது **தக** வை **வ** விலே வெட்டுகின்றது. **நம, கவ** என்பவற்றினுடைய நீளங்களைக்காண்க.

(ii) **△கமப** வில் **கம = 4** அங்., **மப = 3** அங்., **பக = 2** அங். **கம** விலே **த** என்னும் ஒரு புள்ளி **கத = 1** அங். ஆகுமாறுள்ளது எனின், **∠ கபத = ∠ கமப** என நிறுவுக; **பத** இனது நீளத்தைக் காண்க.

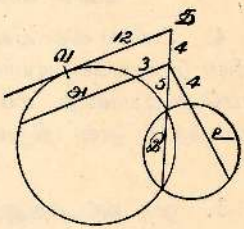
4. **△கமப** வில் **∠ மகப** வினுடைய இருசமவெட்டியானது **மப** வை **த** விலே வெட்டுகின்றது. **பம** என்பது **ச** விற்கு **மச = கப** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளது. வட்டம் **கதச** வை **வ** விலே வெட்டுமாறு **கம** நீட்டப்பட்டுள்ளது. **மவ = தப** என நிறுவுக.

93

1. **வச, வத** என்பன ஒரு புள்ளி **வ** விலிருந்து கோடுகள் **கம, கப** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்கள். $\angle$ **மகப** $= 30°$ எனின் **கவ** $= 2$ **சத** என நிறுவுக.

2. $\triangle$ **கமப** வில் $\angle$ **மகப** $= 1$ செங்கோணம்; **மப** வின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்தானது **பக,** நீட்டப்பட்ட **மக** என்பவற்றை **வ, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. வட்டம் **பவய** வை **மப** தொடுகின்றது என நிறுவுக.

3. உரு 898 இல் **தவ** ஒரு தொடுகோடு. **அ, இ, உ** என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



உருவம் 898

4. (i) ஒரு சரிவகம் **கமபத** வின் சமாந்தரப் பக்கங்கள் **கம, தப** ஆகும். **மத** வை **கப** என்பது **ந** வில் வெட்டுகின்றது; **தக, பம** என்பன **வ** விலே சந்திக்குமாறு நீட்டப்பட்டுள்ளன. **கம, தப** என்பவற்றை **நவ** முறையே **ச, ய** க்களில் வெட்டுகின்றது. **யந : நச = யவ : சவ** என நிறுவுக.

(ii) $\triangle$ **கமப** வில் **ஓ** உண்மையமாகும்; $ஓ_1$ ஆனது **மப** விற்கொத்த வெளிமையமாகும். **கஓ.கஓ**$_1$ = **கம.கப** என நிறுவுக.

94

1. **கமப** என்பது ஒரு வட்டத்தினுள் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட ஒரு முக்கோணம். சிறுவில் **மப** விலே **வ** என்பது யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. **வ** விலிருந்து **மப, பக, கம** என்பவற்றிற்குள்ள செங்குத்துக்களின் அடிகள் **அ, இ, உ** ஆகும். **வம, வப** என்பவற்றை இணைத்து,

(i) **வ, ம, அ, உ** என்பனவும் **வ, ப, அ, இ** என்பனவும் ஒருபரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக. (ii) $\angle$ **வஅஉ** = $\angle$ **வபக** என நிறுவுக.

(iii) **அ, இ, உ** என்பன நேர்கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுக.

அ, இ, உ என்பன இடக்கும் நேர்கோடு, $\triangle$ **கமப** வைப் பற்றியவரையில், **வ** வின் **பாதக்கோடு** (அல்லது **சிஞ்சன்கோடு**) எனப்படும்.

2. **ஓ** வை மையமாகவுடைய வட்டம் **கவம** வினது ஒரு விட்டம் **கம.** நாண் **மவ** நீட்டப்பட்டபொழுது **க** வினுள்ள தொடுகோட்டை **த** விலே வெட்டுகின்றது. **ஓத** வட்டத்தை **ய** விலே சந்திக்கின்றது. **கத** $= 4$ ச.மீ, **யத** $= 2$ ச.மீ. எனின் **ஓய, வத** என்பவற்றைக் காண்க.

3. (i) நாற்கோணம் **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்கள் **ச** விலே ஒன்றை யொன்று வெட்டிக்கொள்கின்றன. (அ) **கச . சப = மச . சத** எனின் ∠ **தகப** விற்கு உருவிலுள்ள எக்கோணஞ் சமமாகும்? காரணங்காட்டுக. (ஆ) **கச . சம = பச . சத** எனின் ∠ **தகப** விற்கு உருவிலுள்ள எக்கோணஞ் சமமாகும்? காரணங் காட்டுக.

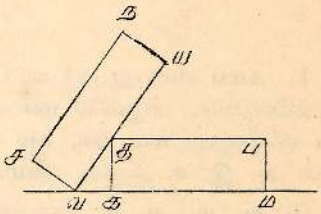
(ii) **கம** என்பது 8 ச.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கோடு. **கம** வினது நடுப்புள்ளி **ஓ**. 6 ச.மீ. ஆரையுள்ள **ஓ** வை மையமாகக் கொண்ட ஒருவட்டத்தில் மாறும் ஒருபுள்ளி **வ**. நீட்டப்பட்ட **வஓ** வட்டம் **வகம** வை **ய** விலே சந்தித்தால் **ய** வின் ஒழுக்கினைக் காண்க.

4. △**கமப** வில் ∠**க** = 90°, **கத** என்பது ∠**கமப** வின் ஒருயரம். ∠**கமப** வின் இருசமவெட்டியானது **கத** வை **ந** விலே சந்திக்க ∠**தகப** வின் இருசமவெட்டியானது **மப** வை **ய** விலே சந்தித்தால், **கப** விற்கு **நய** சமாந்தரம் என நிறுவுக.

95*

1. ஒரு வட்டத்தினுடைய இருநாண்கள் **வய, நச** என்பன **க** விலே ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. **த** என்னும் ஒருபுள்ளி ∠**தவய**, ∠**தநச** என்பன செங்கோணங்கள் ஆகுமாறு அமைந்துள்ளதாகும். **யச** விற்கு **கத** செங்குத்து என நிறுவுக.

2. (i) 9 அங். × 3 அங். அளவு கொண்ட ஒரு செங்கட்டி **கமபத** தரையிலுள்ளது. ஒத்த பிறிதொரு செங்கட்டி **வயநச** என்பது உரு 899 இல் காட்டியவாறு அதற்குப் பக்கத்தில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. **கவ** = 2 அங். எனின் **ய, ந, ச** என்பவை நிலத்திலிருந்துள்ள உயரங்களைக் காண்க.



உருவம் 899

(ii) ஒரு கோடு **சத** என்பது **மப** விற்குச் சமாந்தரமாயுள்ளது. அது **கம, கப** என்பவற்றை **ச, த** க்களில் வெட்டுகின்றது. **சத, மப** என்பவற்றிற்கிடையுள்ள தூரம் 5 ச.மீ. **கசத, சதபம** என்பவற்றின் பரப்புக்கள் முறையே 9 சது. ச.மீ., 40 சது. ச.மீ. எனின் **சத** வினது நீளத்தைக் காண்க.

3. **கமபத** ஓரொருவட்ட நாற்கோணம். **மக, பத** என்பன நீட்டப்பட்ட பொழுது, **அ** விலே சந்திக்கின்றன. **அ** விற்கூடாக **மப** விற்குச் சமாந்தரமான கோடு நீட்டப்பட்ட **கத** வை **ந** விலே சந்திக்கின்றது. **நஅ**^{2} = **நக . நத** என நிறுவுக.

4. △**கமப** வின் பக்கங்கள் **கப, கம** என்பவற்றிலே **வ, ய** என்னும் புள்ளிகள் ∠ **மவப** = ∠ **மயப** ஆகுமாறுள்ளன. **மவ** என்பது **பய** வை **த** விலே வெட்டுகின்றது. **அ, இ** என்பன **தஅகஇ** ஒரிணைகரமாகுமாறு **கப, கம** என்பவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாம்.

(i) **கஅ.அப** = **கஇ.இம** என நிறுவுக.

(ii) வட்டம் **கமப** வின் மையமானது **அ, இ** என்பவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளது என நிறுவுக.

96*

1. **கமபத** என்பது ∠ **கமத** = ∠ **தமப** = ∠ **கதப** = 45° ஆகுமாறமைந்த ஒரு நாற்கோணம். ∠ **கதம** = $\frac{1}{2}$∠ **கபம** என நிறுவுக. (∠ **கபம** வை இரு சமக்கூறிடவும் **மத** வை **ய** விலே வெட்டவும் **பய** வை வரைக. **கய** வை இணைக்க. **க, த, ப, ய** என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன என நிறுவுக.)

2. **கமபத** ஒரிணைகரம்; **க** விற்கூடாகவுள்ள ஒரு கோடு **மத, பத,** நீட்டப்பட்ட **மப** என்பனவற்றை முறையே **வ, ய, ந** என்பவற்றில் வெட்டுகின்றது. **வய** : **வந** = **வத**^{2} : **வம**^{2} என நிறுவுக.

3. (i) △**கமப** வில் **கம** = **கப**; ∠ **கமப** வின் இருசமவெட்டியானது **கப** வை **த** விலே சந்திக்கின்றது. வட்டம் **மகத** வானது **மப** வையோ நீட்டப்பட்ட **மப** வையோ **ச** வில் வெட்டினால் **கத** = **பச** என நிறுவுக.

(ii) **க, ம** க்களை மையங்களாகவுடைய இருவட்டங்கள் **ப, த** க்களில் வெட்டிக்கொள்கின்றன; **பத** வில் யாதாயினும் ஒருபுள்ளி **வ. க** வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் நாண் **சவந**; இது **வக** விற்குச் செங்குத்து. **ம** வை மையமாகவுடைய வட்டத்தின் நாண் **அவஇ**; இது **வம** விற்குச் செங்குத்து. **சந** = **அஇ** என நிறுவுக.

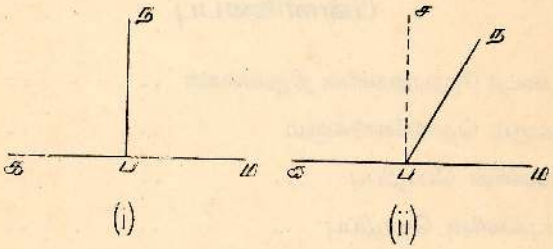
4. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நிலையான புள்ளி **க. கவ, கய** என்பன **கவ.கய** மாறிலியாகுமாறமைந்த மாறும் நாண்கள். **க** வை மையமாகவுடைய ஒரு நிலையான வட்டத்தை **வய** தொடுகின்றது என நிறுவுக.

பின்னிணைப்பு

(I) அடிப்படையான தேற்றங்களின் நிறுவல்கள்

தேற்றம் 1

ஒருநேர்கோட்டிலே பிறிதொரு நேர்கோடு நின்றால் அதனால் அமையப் பெற்ற அடுத்துள கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இருசெங்கோணங்களுக்குச் சமனாகும்.



உருவம் 900

தரவு. ஒரு நேர்கோடு **கபம** வைச் சந்திக்கும் ஒரு நேர்கோடு **பந.**

மேற்கோள். $\angle$ **கபந** + $\angle$ **மபந** = 2 செங்கோணங்கள்.

வகை 1. $\angle$ **கபந** = $\angle$ **மபந** எனின் ஒவ்வொன்றும் வரைவிலக்கணத்தால் ஒரு செங்கோணமாகும்.

∴ $\angle$ **கபந** + $\angle$ **மபந** = இருசெங்கோணங்கள்.

வகை 2. $\angle$ **கபந** என்பது $\angle$ **பநம** என்பதற்குச் சமமல்லாவிட்டால் $\angle$ **கபந** பெரிது எனப் பாவித்துக்கொள்க.

கருவி. **பச** வை **கபம** விற்குச் செங்குத்தாக வரைக.

நிறுவல். $\angle$ **கபந** + $\angle$ **மபந** = $\angle$ **கபச** + $\angle$ **சபந** + $\angle$ **நபம.**

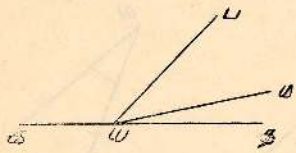
= $\angle$ **கபச** + $\angle$ **சபம**

= 2 செங்கோணங்கள் **கருவி.**

$\angle$ **நபம** பெரிதாயின், **க** வும் **ம** வும் இடம் மாறியிருக்குமேயன்றி நிறுவல் ஒன்றேயாம்.

தேற்றம் 2

அடுத்துள இருகோணங்களின் கூட்டுத்தொகை இருசெங்கோணங்களுக்குச் சமமாயின் கோணங்களின் இருபுறச்சிறைகளும் ஒருநேர்கோட்டில் உள்ளன வாம்.



உருவம் 901

தரவு. அடுத்துள இருகோணங்கள் **பயக, பயம** என்பன ; அவை ∠பயக + ∠பயம = இருசெங்கோணங்கள் ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன.

மேற்கோள். **கயம** ஒரு நேர்கோடு.

கருவி. **கய** வை **த** விற்கு நீட்டுக.

நிறுவல். ∠பயக + ∠பயத = இருசெங்கோணங்கள் நேர்கோட்டு அடுத்துள கோணங்கள்,

ஆனால் ∠பயக + ∠பயம = இருசெங்கோணங்கள் தரவு,

∴ ∠பயக + ∠பயத = ∠பயக + ∠பயம.

இவ்விரு சமன்களிலிருந்தும் பொதுவான ∠பயக வை எடுக்க.

∠பயத = ∠பயம.

ஆனால் ∠பயம, ∠பயத என்பன **யப** வின் ஒரேபக்கத்திலுள்ளன.

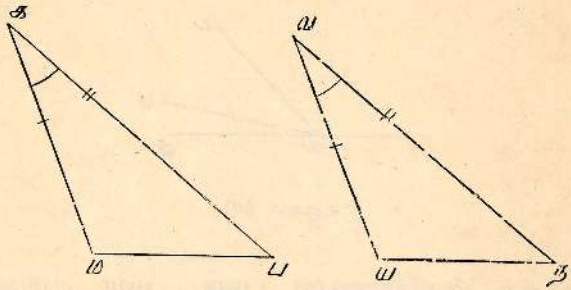
∴ **பத** என்பது **யம** என்னும் நேர்கோடேயாம்.

ஆனால் **பத** ஒரு நேர்கோடாகும் கருவி,

∴ **கயம** ஒருநேர்கோடாகும்.

தேற்றம் 4

இருமுக்கோணங்களின் ஒன்றின் இருபக்கங்கள் மற்றையதின் இரு பக்கங்களுடன் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக அச்சமமான பக்கங்கள்கொண்ட கோணங்கள் சமமாகின் அம்முக்கோணங்கள் சர்வசமனுகும்.



உருவம் 902

தரவு. இருமுக்கோணங்கள் **கமப, வயந** என்பன. அவற்றில் **கம = வய, கப = வந, ∠ மகப = ∠ யவந.**

மேற்கோள். முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமப}\\ \text{வயந}\end{matrix}$ சர்வசமன்.

நிறுவல். △ **வயந** விற்கு △ **கமப** வை, **வ** மேல் **க** விழவும் கோடு **வய** வழி கோடு **கம** விழவும் **ந** என்பது **வய** விற்கு எப்பக்கத்தில் உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் **ப** விழவும் பொருத்துக.

கம = வய ஆதலால், **தரவு,**

ய மேல் **ம** விழும்.

வய வழி **கம** விழுவதாலும்

∠ மகப = ∠ யவந ஆதலாலும், **தரவு,**

கப என்பது **வந** வழி விழும்.

கப = வந ஆதலால், **தரவு,**

ந மேல் **ப** விழும்.

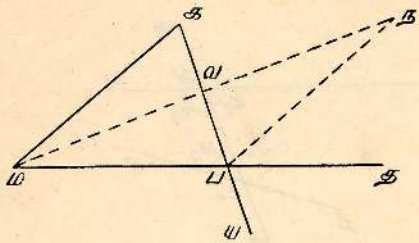
ய மேல் **ம** விழுவதாலும் **ந** மேல் **ப** விழுவதாலும் **யந** வோடு **மப** பொருந்தும்.

∴ △ **வயந** வோடு △ **கமப** பொருந்தும்.

∴ முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமப}\\ \text{வயந}\end{matrix}$ சர்வசமனுகும்.

சமனிலித் தேற்றம்

ஒருமுக்கோணத்தின் ஒருபக்கம் நீட்டப்பட்டால் புறக்கோணமானது அகத் தெதிர்க்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் பெரியதாகும்.



உருவம் 903

தரவு. ஒரு முக்கோணம் **கமப**, அதில் **மப** என்பது **த** விற்கு நீட்டப் பட்டுள்ளது.

மேற்கோள். ∠ **கபத** > ∠ **மகப**, ∠ **கபத** > ∠ **கமப**.

கருவி. **கப** வை **வ** வில் இருசமக்கூறிடுக. **மவ** வை இணைத்து அதை **ந** விற்கு **மவ** = **வந** ஆகுமாறு நீட்டுக. **பந** வை இணைக்க.

நிறுவல். முக்கோணங்கள் **பவந, கவம** என்பவற்றில்,

பவ = **கவ**	**கருவி,**
நவ = **மவ**	**கருவி,**
∠ **பவந** = ∠ **கவம**	**குத்தெதிர்க்கோணங்கள்.**

∴ முக்கோணங்கள் **பவந** / **கவம** சர்வசமன் பகோப.

∴ ∠ **வபந** = ∠ **மகவ.**

ஆனால் ∠ **கபத** அதன் பகுதியான ∠ **வபந** விலும் பெரிது.

∴ ∠ **கபத** > ∠ **மகவ** அல்லது ∠ **மகப.**

இவ்வாறே **மப** என்பது **ச** விலே இருசமக்கூறிடப்பட்டு **கச** என்பது **அ** விற்கு **கச** = **சஅ** ஆகுமாறு நீட்டப்பட்டால்,

∠ **மபய** > ∠ **கமப** என நிறுவலாம்.

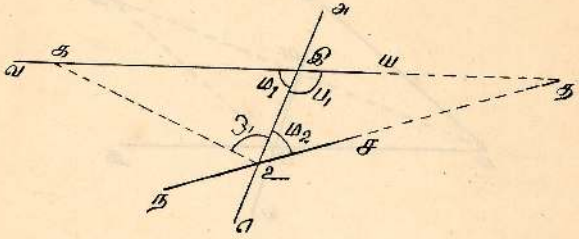
ஆனால் ∠ **கபத** = ∠ **மபய** **குத்தெதிர்க்கோணங்கள்**

∴ ∠ **கபத** > ∠ **கமப.**

குறிப்பு. தேற்றம் 5 இனை நிறுவுவதற்கு இத்தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்தலாம்.

தேற்றம் 5

இருநேர்கோடுகளை வெட்டும் ஒரு குறுக்குக்கோடானது ஒருசோடி ஒன்று விட்ட கோணங்களைச் சமமாக்கினால் அவ்விரு நேர்கோடுகளும் சமாந்தர மாகும்.



உருவம் 904

தரவு. இருநேர்கோடுகள் **வஇய, நஉச** என்பவற்றை வெட்டி ∠**வஇஉ**=ஒன்றுவிட்ட ∠**இஉச** ஆக்கும் ஒரு நேர்கோடு **அஇஉஎ.**

மேற்கோள். **நச** விற்கு **வய** சமாந்தரம்.

கருவியும் நிறுவலும். **வய** வும் **நச** வும் சமாந்தரமல்லாவிடின் **ய, ச** என்பவை வழியே நீட்டப்பட்டபொழுதோ, **வ, ந** என்பவை வழியே நீட்டப்பட்டபொழுதோ அவை சந்திக்கும். இயலுமெனின் **வய** வும் **நச** வும் **ய, ச** க்கள் வழி நீட்டப்பட்டபொழுது **த** விலே சந்திப்பதாகப் பாவித்துக் கொள்க. நீட்டப்பட்ட **தஇ** யிலே **க** என்னும் ஒரு புள்ளியை **இக=உத** ஆகுமாறு எடுக்க. **உக** வை இணைக்க.

முக்கோணங்கள் **கஇஉ, தஉஇ** என்பவற்றில்

கஇ = தஉ **கருவி,**

உஇ = இஉ

$ம_1 = ம_2$ **தரவு,**

∴ முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கஇஉ}}{\text{தஉஇ}}$ சர்வசமன் பகோப.

$\therefore ஓ_1 = ப_1.$

ஆனால் $ம_2 = ம_1$ **தரவு,**

$\therefore ஓ_1 + ம_2 = ப_1 + ம_1.$

ஆனால் $ப_1 + ம_1 = 2$ செங்கோணங்கள்

நேர்கோட்டு அடுத்துள கோணங்கள்.

$\therefore ஓ_1 + ம_2 = 2$ செங்கோணங்கள்.

ஆனால் இவை அடுத்துளகோணங்கள்.

∴ **கஉத** ஒரு நேர்கோடாகும்.

∴ நேர்கோடுகள் **கஇத, கஉத** ஒன்றாகின்றன.

இது தரவுக்கு மறுதலையாகும்.

∴ **வய, நச** என்பன **ய, ச** வழி நீட்டப்பெறின் அவை சந்தியா.

இவ்வாறே **யவ, சந** என்பன **வ, ந** வழி நீட்டப்பெறின் சந்திக்கா என நிறுவலாம்.

∴ **வய** என்பது **நச** விற்குச் சமாந்தரமாகும்.

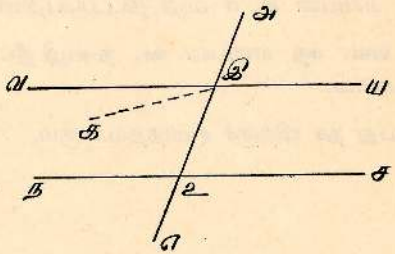
தேற்றம் 6

இரு சமாந்தரக்கோடுகளை ஒரு குறுக்குக்கோடு வெட்டினால்,

(i) ஒன்றுவிட்டகோணங்கள் சமமாகும் ;

(ii) ஒத்தகோணங்கள் சமமாகும் ;

(iii) குறுக்குக்கோட்டின் ஒருபக்கத்திலுள்ள அகக்கோணங்கள் மிகை நிரப்புகின்றனவாகும்.



உருவம் 905

தரவு. இருசமாந்தரக்கோடுகள் **வஇய, நஉச** என்பனவும் ஒரு குறுக்குக் கோடு **அஇஉஎ** உம்.

மேற்கோள். (i) $\angle$ **வஇஉ** $=$ $\angle$ **இஉச,**

(ii) $\angle$ **அஇய** $=$ $\angle$ **இஉச,**

(iii) $\angle$ **யஇஉ** $+$ $\angle$ **இஉச** $=$ இரு செங்கோணங்கள்.

கருவி. (i) $\angle$ **வஇஉ** என்பது $\angle$ **இஉச** விற்குச் சமாந்தரமல்லாவிடின், **இக** வை, $\angle$ **கஇஉ** என்பது ஒன்றுவிட்டகோணம் **இஉச** விற்குச் சமாந்தரமாகுமாறு வரைக.

நிறுவல். $\angle$ **கஇஉ** $=$ ஒன்றுவிட்டகோணம் **இஉச** **கருவி,**

$\therefore$ **கஇ** என்பது **உச** விற்குச் சமாந்தரம்.

ஆனால் **வஇ** என்பது **உச** விற்குச் சமாந்தரம் **தரவு,**

$\therefore$ **கஇ, வஇ** என்னும் ஒன்றையொன்று வெட்டுங்கோடுகள் இரண்டும் **உச** விற்குச் சமாந்தரம் ;

ஆனால் இது பிளேபெயரின் வெளிப்படை உண்மையால் இயலாத தொன்றாகும்.

∴ ∠ வஇஉ என்பது ∠ இஉச என்பதற்குச் சமாந்தரமல்லாமலிருக்க இயலாது.

∴ ∠ வஇஉ = ∠ இஉச.

(ii) ∠ அஇய = ∠ வஇஉ குத்தெதிர்க்கோணங்கள்,

= ∠ இஉச நிறுவப்பட்டது.

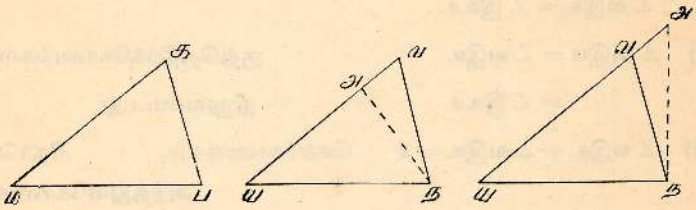
(iii) ∠ யஇஉ + ∠ வஇஉ = 2 செங்கோணங்கள், நேர்கோட்டு அடுத்துளகோணங்கள்,

ஆனால் ∠ வஇஉ = ∠ இஉச, நிறுவப்பட்டது.

∴ ∠ யஇஉ + ∠ இஉச = 2 செங்கோணங்கள்.

தேற்றம் 10

இருமுக்கோணங்களில் ஒன்றினுடைய இருகோணங்கள் மற்றையதின் இருகோணங்களுக்கு ஒன்றுக்கொன்று சமமாக ஒன்றினுடைய ஒருபக்கம் மற்றையதின் ஒத்த பக்கத்திற்குச் சமமாகின் அம் முக்கோணங்கள் சர்வ சமனாகும்.



உருவம் 906

தரவு. இருமுக்கோணங்கள் **கமப, வயந**; அவற்றில் **மப = யந**; கோடிக் கோணங்கள் **∠ க, ∠ வ**; **∠ ம, ∠ ய**; **∠ ப, ∠ ந** என்பவற்றுள் இருகோடிகள் சமமாகும்.

மேற்கோள். முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமப}\\ \text{வயந}\end{matrix}$ சர்வசமன்.

கருவியும் நிறுவலும். ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை இருசெங்கோணங்களுக்குச் சமமாதலின் மூன்றாவது கோடிக்கோணங்களும் சமமாகும். இயலுமெனின் **மக** விற்கு **யவ** சமமில்லையெனப் பாவித்துக்கொள்க. அப்பொழுது **யவ** விலோ நீட்டப்பட்ட **யவ** விலோ **அ** என்னும் ஒரு புள்ளி, **யஅ = மக** ஆகுமாறு இருக்கும்.

நஅ வை இணைக்க.

முக்கோணங்கள் **கமப, அயந** என்பவற்றில்,

மப = யந	**தரவு,**
மக = யஅ	**கருவி,**
∠ ம = ∠ ய	**தரவு,**

∴ முக்கோணங்கள் $\begin{matrix}\text{கமப}\\ \text{அயந}\end{matrix}$ சர்வசமன் பகோப.

∴ **∠ கபம = ∠ அநய**;

ஆனால் **∠ கபம = ∠ வநய** **தரவு அல்லது நிறுவப்பட்டது,**

∴ **∠ வநய = ∠ அநய**;

ஆனால் இது இயலாததொன்றாகும். ஏனெனில் இவற்றுள் ஒன்று மற்றையதின் பகுதியாகும் என்க.

∴ **யவ** என்பது **மக** விற்குச் சமமல்லாததாகாது.

∴ **யவ = மக.**

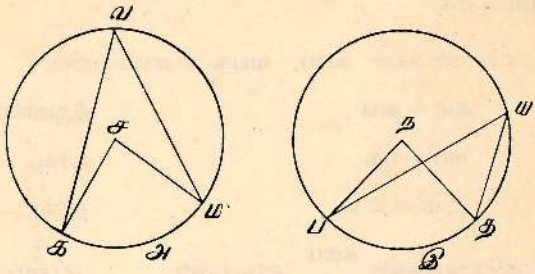
∴ முக்கோணங்கள் **கமப, வயந** என்பவற்றில்,

கம = வய	நிறுவப்பட்டது,
மப = பந	தரவு,
∠ ம = ∠ ய	தரவு,

∴ முக்கோணங்கள் **கமப / வயந** சர்வசமன் பகோப.

தேற்றம் 54

சமமான வட்டங்களில், மையங்களிலுள்ள சமமான கோணங்களும், பரிதியிலுள்ள சமமான கோணங்களும் சமமான விற்களில் நிற்கின்றன.



உருவம் 907

(i) **தரவு.** ச, ந என்பவற்றை மையங்களாகக்கொண்ட இருசமமான வட்டங்கள் **கஅமவ, பஇதய** என்பனவுஞ் சமமான கோணங்கள் **கசம, பநத** என்பவற்றை மையத்திலே எதிரமைக்கும் இருவிற்கள் **கஅம, பஇத** என்பனவும்.

மேற்கோள். வில் **கஅம** = வில் **பஇத.**

நிறுவல். வட்டம் **கஅம** என்பதை வட்டம் **பஇத** விற்கு, மையம் **ந** விலே மையம் **ச** விழுமாறும் **நப** வழி **சக** விழுமாறும் **நப** விற்கு **நத** எப்பக்கத்தில் உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் **சம** விழுமாறும் பொருத்துக. வட்டங்கள் சமமாதலால் **ப** மேலே **க** விழுகின்றது ; பரிதிகள் பொருந்துகின்றன.

∠ **கசம** = ∠ **பநத** ஆதலால் **தரவு,**

சம என்பது **நத** வழியும் **ம** என்பது **த** மேலும் விழுகின்றன.

∴ விற்கள் **கஅம, பஇத** டொருந்துகின்றன.

∴ வில் **கஅம** = வில் **பஇத.**

(ii) **தரவு.** ச, ந என்பவற்றை மையங்களாகக்கொண்ட இருசமமான வட்டங்கள் **கமவ, பதய** என்பனவும் பரிதிகளிலே சமமான கோணங்கள் **கவம, பயத** என்பவற்றை எதிரமைக்கும் இருவிற்கள் **கஅம, பஇத** என்பனவும்.

மேற்கோள். வில் கஅம = வில் பஇத.

நிறுவல். ∠ கசம = 2 ∠ கவம மையக்கோணம் = பரிதிக்கோணத்திலும் இருமடங்கு.

∠ பநத = 2 ∠ பயத மையக்கோணம் = பரிதிக்கோணத்திலும் இருமடங்கு,

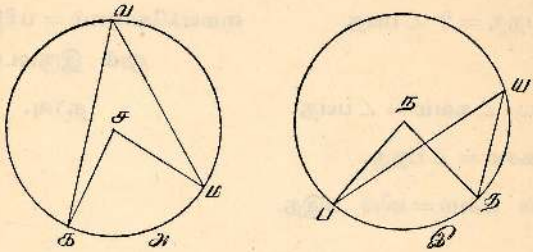
ஆனால் ∠ கவம = ∠ பயத தரவு,

∴ ∠ கசம = ∠ பநத.

∴ வில் கஅம = வில் பஇத.

தேற்றம் 55

சமமான வட்டங்களில், சமமான விற்களானவை மையங்களிற் சமமான கோணங்களையும் பரிதிகளிற் சமமான கோணங்களையும் எதிரமைக்கின்றன.



உருவம் 908

தரவு. ச, ந என்பவற்றை மையங்களாகக்கொண்ட இருசமமான வட்டங்கள் **கஅமவ, பஇதய** என்பனவும் இரு சமமான விற்கள் **கஅம, பஇத** என்பனவும்.

மேற்கோள். (1) ∠ **கசம** = ∠ **பநத**,

(2) ∠ **கவம** = ∠ **பயத**.

(i) **நிறுவல்.** வட்டம் **பஇத** என்பதற்கு வட்டம் **கஅம** என்பதை மையம் **ந** விலே மையம் **ச** விழுமாறும் **நப** வழி **சக** விழுமாறும் **நப** விற்கு **நத** எப்பக்கத்திலுள்ளதோ அப்பக்கத்தில் **சம** விழுமாறும் பொருத்துக. வட்டங்கள் சமமானமையால் **ப** மேல் **க** விழுந்து பரிதிகள் பொருந்துகின்றன.

வில் **கஅம** = வில் **பஇத** தரவு, ஆதலால்

த மேல் **ம** வும் **நத** மேல் **சம** வும் விழுகின்றன.

∴ ∠ **பநத** வுடன் ∠ **கசம** பொருந்துகின்றது,

∴ ∠ **கசம** = ∠ **பநத**.

(i) **நிறுவல்.** ∠ **கசம** = 2 ∠ **கவம** மையக்கோணம் = 2 பரிதிக்கோணம்,

∠ **பநத** = 2 ∠ **பயத** மையக்கோணம் = 2 பரிதிக்கோணம்,

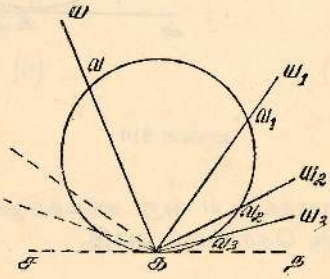
ஆனால் ∠ **கசம** = ∠ **பநத** நிறுவப்பட்டது,

∴ ∠ **கவம** = ∠ **பயத**.

(II) தொடுகோடு ஒரெல்லைநாணுகும் தன்மை

ஒரு வட்டத்திலே **க** என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியாகும். **க** விற் கூடாக உள்ள யாதாயினும் ஒரு கோடு **கய** வானது வட்டத்தை **வ** விலே வெட்டுகின்றது.

வில் **கவ** வை $\mathbf{வ_1}$ இலே இருசமக்கூறிடுக ; வில் $\mathbf{கவ_1}$ ஐ $\mathbf{வ_2}$ இலே இருசமக்கூறிடுக ; வில் $\mathbf{கவ_2}$ ஐ $\mathbf{வ_3}$ இலே இருசமக்கூறிடுக ; இவ்வாறே தொடர்ந்து செய்க. இவ்விருசமக்கூறிடும் செய்கையை நாம் எண்ணிய வாறு தொடர்ந்து செய்யலாம். செய்து $\mathbf{கவ_1ய_1}$, $\mathbf{கவ_2ய_2}$, $\mathbf{கவ_3ய_3}$ என்னும் வரிசையான கோடுகளைப்பெறலாம். இக்கோடுகள் வட்டத்திலிருந்து வரவரக்குறையும் நீளமுடைய விற்களை வெட்டுகின்றன.



உருவம் 909

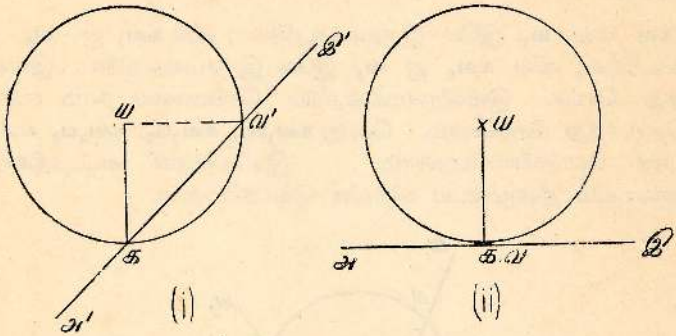
எவ்வளவுதான் நாம் இச்செய்கையை மீண்டும் மீண்டுஞ் செய்தாலும் பூச்சிய அளவுள்ள ஒரு வில்லை வெட்டும் ஒரு கோட்டினை நாம்பெறல் இயலாது. ஆனால் போதிய அளவு நாம் இதைத் திருப்பித்திருப்பிச் செய்வதால் நாம் விரும்பிய அளவு மிகக்குறுகிய ஒரு வில்லைவெட்டும் ஒரு கோட்டினை நாம் பெறலாம். பின்னர்ப் பெறுங்கோடுகள் இன்னுங் குறுகிய விற்களை வெட்டும்.

இவ்வரிசைக்கோடுகளை எல்லைப்படுத்தும் **கந** என்னும் நிலையே **க விலுள்ள தொடுகோடு** எனப்படும். இது பூச்சிய அளவு நீளமுள்ள ஒரு வில்லை வெட்டுகின்ற, **க** விற்கூடாகக் கீறப்பட்ட ஒரு கோடாகும்.

நாண் **கவ** வின் மற்றைப் பக்கத்தில் இருசமக்கூறிடும் செய்கை மீண்டும் மீண்டுஞ் செய்யப்படுமேல் இவ்வரிசைக் கோடுகளின் எல்லை நிலையான **கச** வைப் பெறுகின்றோம். இதுவும் நம் வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப **க** விலுள தொடுகோடாகும். ஒரு வட்டத்திற்கு யாதாயினும் ஒரு புள்ளி **க** விலே ஒரேயொரு தொடுகோடே உள்ளதென நிறுவுவதற்கு **கந** வும் **கச** வும் ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுதல் இன்றியமையாதது. இது இவை ஒவ்வொன்றும் **க** விற்கூடாகவுள்ள ஆரைக்குச் செங்கோணத்திலுள்ளன எனக் காட்டுவதாற் செய்யப்படும்.

தேற்றம் 59

ஒருவட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடானது தொடுபுள்ளிக்கூடாக வரையப் பட்ட ஆரைக்குச் செங்குத்தாகும்.



உருவம் 910

தரவு. ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி க விலே உள்ள ஒரு தொடுகோடு **அகஇ.**

மேற்கோள். ∠ **யகஇ** ஒரு செங்கோணம்.

கருவி. க விற்கூடாக யாதாயினும் ஒருகோடு **அ'கவ'இ'** என்பதை வட்டத்தை மீண்டும் **வ'** இலே வெட்டுமாறு கீறுக.
யவ' என்பதை இணைக்க.

நிறுவல் **யக = யவ'** ஆரைகள்,

∴ ∠ **யகவ' = ∠ யவ'க** இருசமபக்கமுக்கோணம்; அடிக் கோணங்கள்.

அ'கவ'இ' ஒரு நேர்கோடு ஆதலின், ∠ **யகஅ'**, ∠ **யவ'இ** என்பன ∠ **யகவ'**, ∠ **யவ'க** என்பவற்றின் மிகைநிரப்பிகளாகும்.

∴ ∠ **யகஅ' = ∠ ய வ'இ'.**

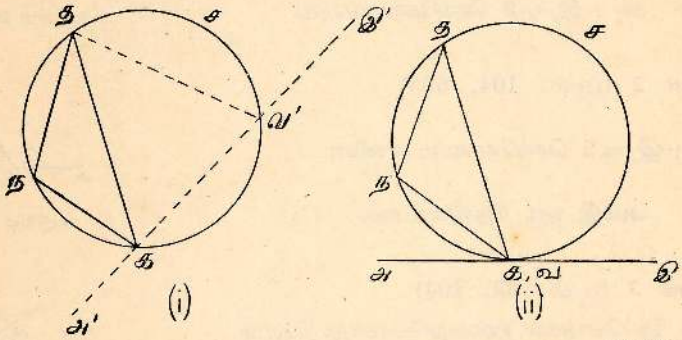
இப்பொழுது **க** விலுள்ள தொடுகோடு **அகஇ** என்பதே **க** வுடன் **வ'** பொருந்துமாறு வில் **கவ'** ஆனது எல்லையில்லாது குறைக்கப்பட்ட பொழுது கோடு **அ' கவ' இ'** அடைந்துள்ள எல்லை நிலையாகும்.

∴ ∠ **யகஅ = ∠ யகஇ.**

ஆனால் இவை ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள அடுத்துள கோணங்களாகும்.
∴ **யகஇ** = ஒருசெங்கோணம்.

தேற்றம் 61

ஒருநேர்கோடு ஒரு வட்டத்தைத் தொட தொடும்புள்ளியிலிருந்து ஒரு நாண் வரையப்பெறின் அத் தொடுகோட்டுடன் அந் நாண் அமைக்குங் கோணங்கள் வட்டத்திலுள்ள ஒன்றுவிட்ட துண்டுகளிலுள்ள கோணங்களுக்குச் சமமாகும்.



உருவம் 911

தரவு. ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **க** விலே ஒரு தொடுகோடு **அகஇ** என்பதும் இருதுண்டுகள் **கசத, கநத** என்பவற்றை ஆக்கும் ஒரு நாண் **கத** வும்.

மேற்கோள். (i) ∠ **தகஇ** = ஒன்றுவிட்டதுண்டு **கநத** விலுள்ள ∠ **கநத**,
(ii) ∠ **தகஅ** = ஒன்றுவிட்டதுண்டு **கசத** விலுள்ள ∠ **கசத**.

கருவி. **க** விற்கூடாக வில் **கசத** வை **வ'** இலே வெட்டும் யாதாயினும் ஒரு கோடு **அ' கவ' இ'** என்பதை வரைக.
தவ' என்பதை இணைக்க.

நிறுவல. ∠ **தவ' இ'** = ∠ **கநத** — ஒரு வட்டநாற்கோணத்து வெளிக் கோணம் = அகத்தெதிர்க்கோணம்.

இப்பொழுது **க** விலுள்ள தொடுகோடானது **க** வுடன் **வ'** பொருந்து மாறு வில் **கவ'** எல்லையில்லாது குறைக்கப்பட்டபொழுது கோடு **அ' கவ' இ'** அடைந்துள எல்லை நிலையாகும்.

ஆனால் ∠ **தவ' இ'** இனுடைய எல்லைநிலை ∠ **தகஇ** ஆகும்.

∴ **அ' கவ' இ'** என்பது **க** விலுள்ள தொடுகோடு **அகஇ** ஆகும் பொழுது ∠ **தகஇ** = ∠ **கநத**.

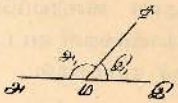
இவ்வாறே, ∠ **தகஅ** = ∠ **கசத** என நிறுவலாம்.

(III) தேற்றங்களின் பொழிப்பு

தேற்றம் 1 (ப-ள். 103, 634)

அமஇ ஒரு நேர்கோடெனில்

அ, + இ, = 2 செங்கோணமாம்.

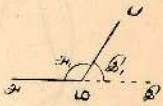


உருவம் 204

தேற்றம் 2 (ப-ள். 104, 635)

அ, + இ, = 2 செங்கோணம் எனின்

அமஇ ஒரு நேர்கோடாம்.



உருவம் 206

தேற்றம் 3 (ப-ள். 33, 104)

இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுமாகில் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமனாகும்.

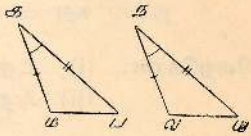
அ, = இ,, ப, = க,.

உருவம் 207

தேற்றம் 4 (ப. 636)

கம = நவ, கப = நய, ∠ க = ∠ ந எனின்

முக்கோணங்கள் **கமப** / **நவய** சர்வசமனாகும் பகோப.



உருவம் 281

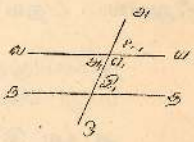
தேற்றம் 5 (ப-ள். 113, 638)

அ, = இ, ஆகவிருந்தால், ஒ. வி. கோணங்கள்,

அல்லது உ, = இ, ஆகவிருந்தால், ஒத்த கோணங்கள்,

அல்லது இ, + எ, = 2 செங்கோணமாகவிருந்தால், அகக்கோணங்கள்,

வய யும் **நத** வும் சமாந்தரம்.



உருவம் 224

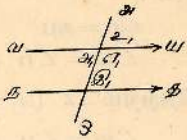
---

†*இப்பொழிப்பில் உள்ள உருக்கள் மூலவாசகத்தில் உள்ள உருக்களின் சிறிய படிகளாகும் பெரிய உருவங்கள் காணும் பக்கங்களின் எண்கள் ஒவ்வொரு வகையிலும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

தேற்றம் 6 (ப. 640)

வய வும் **நத** வும் சமாந்தரமெனின்,

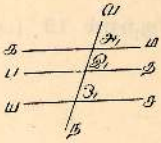
அ, = இ, ஒ. வி. கோணங்கள்,
உ, = இ, ஒத்த கோணங்கள்,
இ, + எ, = 2 செங்கோணம் அகக் கோணங்கள்.



உருவம் 225

தேற்றம் 7 (ப-ள். 46, 114)

கம, பத என்பவை ஒவ்வொன்றும் **யக** விற்குச் சமாந்தரமெனின் **பத** விற்குக் **கம** சமாந்தரமாகும்,



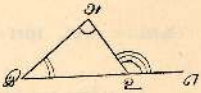
உருவம் 79

தேற்றம் 8 (ப. 122)

(i) முக்கோணம் **அஇஉ** வின் பக்கம் **இஉ** ஆனது **எ** யிற்கு நீட்டப்பட்டால்,

$\angle$ அஉஎ = $\angle$ அ + $\angle$ இ.

(ii) $\angle$ அ + $\angle$ இ + $\angle$ அஉஇ = 2 செங்கோணம்.

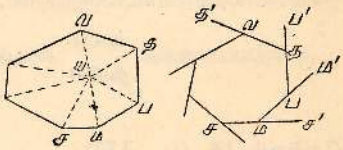


உருவம் 100

தேற்றம் 9 (ப. 134)

(i) **ந** பக்கங்களையுடைய ஒரு குவிந்த பல்கோணத்தின் அகக்கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை (2ந—4) செங்கோணங்களாகும்.

(ii) **ந** பக்கங்கள்கொண்ட ஒரு குவிந்த பல்கோணத்தின் பக்கங்களை முறையாக நீட்டிப் பெற்ற புறக்கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 4 செங்கோணங்களாகும்.



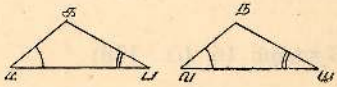
உருவம் 275

தேற்றம் 10 (ப. 642)

$\angle$ ம = $\angle$ வ ஆயும் $\angle$ ப = $\angle$ ய ஆயுமிருந்து அவற்றுடன்

மப = வய வாயுமிருந்தால் அல்லது,
கம = நவ வாயுமிருந்தால் அல்லது,
கப = நய வாயுமிருந்தால்

முக்கோணங்கள் **கமப** / **நவய** சர்வசமனாகும்.

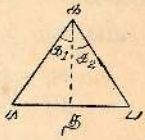


உருவம் 282

தேற்றம் 11 (ப. 142)

கம = கப எனின்

∠ ம = ∠ ப ஆகும்.



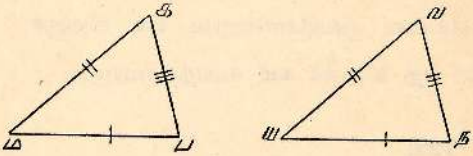
உருவம் 289

தேற்றம் 12 (ப. 143)

∠ ம = ∠ ப எனின்

கம = கப ஆகும்.

தேற்றம் 13 (ப. 153)



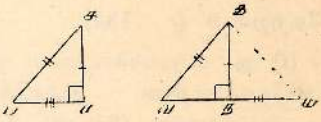
கம = வய, மப = யந, பக = நவ எனின்,

முக்கோணங்கள் **கமப** / **வயந** சர்வசமனாகும் பபப.

தேற்றம் 14 (ப. 155)

கப = தவ, கம = தந ஆகவும் **∠ ம, ∠ ந** செங்கோணங்களாயுமிருந்தால்,

முக்கோணங்கள் **கமப** / **தநவ** சர்வசமனாகும்.



உருவம் 318

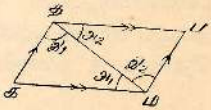
தேற்றம் 15 (ப. 177)

கமபத ஓரிணைகரமாயின்,

(i) **கம = தப, கத = மப** ;

ii) **∠ க = ∠ ப, ∠ கமப = ∠ கதப** ;

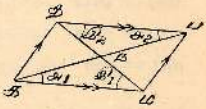
(iii) பரப்பு **கமபத** வை **மத** இருசமக் கூறிடு கின்றது.



உருவம் 349

தேற்றம் 16 (ப. 178)

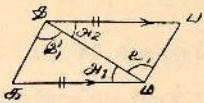
கமபத ஓரிணைகரமாயும் அதன் மூலைவிட்டங்கள் **ந** வில் வெட்டுவனவாயுமிருந்தால் **கந = நப, மந = நத.**



உருவம் 350

தேற்றம் 17 (ப. 179)

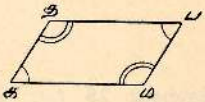
கமபத ஒரு நாற்கோணமாயும் அதில் **கம** என்பது **தப** விற்குச் சமமும் சமாந்தரமாயுமிருந்தால் **கமபத** ஓரிணைகரமாகும்.



உருவம் 351

தேற்றம் 18 (ப. 180)

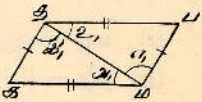
கமபத ஒரு நாற்கோணமாயும் அதில் ∠**க** = ∠**ப**, ∠**ம** = ∠**த** ஆயுமிருந்தால் **கமபத** ஓரிணைகரமாகும்.



உருவம் 352

தேற்றம் 19 (ப. 181)

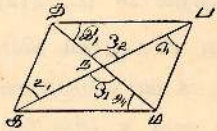
கமபத ஒரு நாற்கோணமாயும் அதில் **கம** = **தப**, **கத** = **மப** ஆயுமிருந்தால் **கமபத** ஓரிணைகரமாகும்.



உருவம் 353

தேற்றம் 20 (ப. 182)

ஒரு நாற்கோணம் **கமபத** வின் மூலைவிட்டங்கள் **ந** வில் வெட்டி **கந** = **நப** ஆகவும் **மந** = **நத** ஆகவும் இருந்தால் **கமபத** ஓரிணைகரமாகும்.

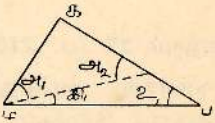


உருவம் 354

தேற்றம் 21 (ப. 196)

△**கமப** வில் **கப** > **கம** ஆயின்

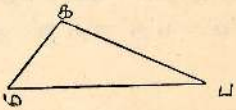
∠**கமப** > ∠**கபம**.



உருவம் 371

தேற்றம் 22 (ப-ள். 197, 198)

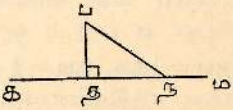
△**கமப** வில் ∠**ம** > ∠**ப** ஆயின் **கப** > **கம**.



உருவம் 372

தேற்றம் 23 (ப. 199)

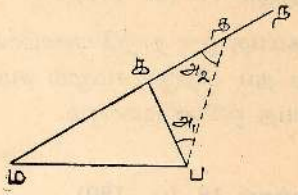
பத என்பது **ப** விலிருந்து நேர்கோடு **கதநம** விற்குள்ள செங்குத்தாயின் **பத** < **பந**.



உருவம் 374

தேற்றம் 24 (ப. 201)

கமப யாதாயினும் ஒரு முக்கோணமாயின் **மக + கப > மப.**



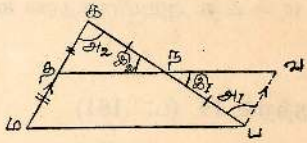
உருவம் 377

தேற்றம் 25 (ப. 211)

த, ந என்பன **கம, கப** க்களின் நடுப்புள்ளி களாயின்,

(i) **மப** விற்கு **தந** சமாந்தரம்.

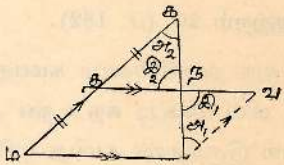
(ii) **தந = $\frac{1}{2}$ மப.**



உருவம் 397

தேற்றம் 26 (ப. 212)

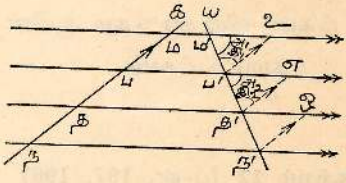
த என்பது **கம** வின் நடுப்புள்ளியாக **த** விற் கூடாக **மப** விற்குச் சமாந்தரமாய் உள்ள கோடு **கப** வை **ந** வில் வெட்டினால் **கந = நப.**



உருவம் 398

தேற்றம் 27 (ப. 213)

கமபதந, யம'ப'த'ந' எனும் இரு குறுக்குக் கோடுகள் **மம', பப', தத', நந'** எனும் சமாந்தரக்கோடுகளால் வெட்டுப்பட **மப = பத = தந** எனின் **ம'ப' = ப'த' = த'ந'** ஆகும்.

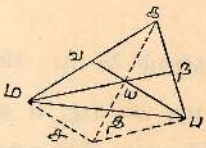


உருவம் 399

தேற்றம் 28 (ப. 225)

△**கமப** வின் மையக்கோடுகள் **கத, மந, பவ** என்பன **ய** எனும் ஒரு புள்ளியில்,

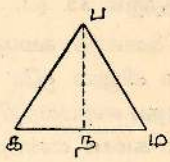
தய = $\frac{1}{3}$ தக, நய = $\frac{1}{3}$ நம, வய = $\frac{1}{3}$ வப ஆகுமாறு ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.



உருவம் 416

தேற்றம் 29 (ப-ள். 234, 235)

கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் **க, ம** என்பவற்றிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி **ப** வினது ஒழுக்கு **கம** வின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்தாகும்.

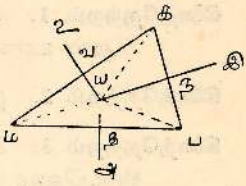


உருவம் 420

தேற்றம் 30 (ப. 238)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்துக்களும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

அவை ஒருங்கு சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் சுற்று மையமாகும்.

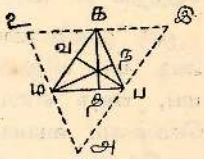


உருவம் 424

தேற்றம் 31 (ப. 239)

ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரங்கள் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

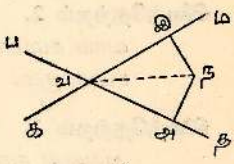
குத்துயரங்கள் ஒருங்கு சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் செங்குத்துமையம் எனப்படும்.



உருவம் 425

தேற்றம் 32 (ப-ள். 243, 244)

ஒன்றையொன்றுவெட்டும் கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்கோடுகளிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியினது ஒழுக்கானது கொடுக்கப்பட்ட அக்கோடுகளிடையுள்ள கோணங்களை இரு சமக் கூறிடுஞ் சோடிக் கோடுகளாகும்.

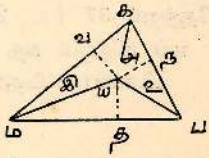


உருவம் 429

தேற்றம் 33 (ப. 249)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் உள்ளிருசமவெட்டிகளும் ஒருங்கு சந்திக்கின்றன.

அவை ஒருங்கு சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் **உண்மையம்** எனப்படும்.



உருவம் 434

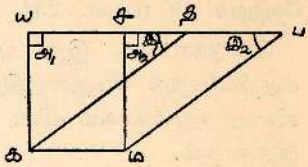
தேற்றம் 34 (ப. 275)

ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு அடுத்துள இருபக்கங்களுடைய அளவுகளின் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படும்.

23——J. N. B 61929 (12/56).

தேற்றம் 35 (ப. 295)

ஓரிணைகரம் **கமபத** வின் பரப்பு அதே அடி **கம** விலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்கள் **கம, யசதப** என்பவற்றிற்கிடையிலும் உள்ள செவ்வகம் **கமசய** என்பதன் பரப்பிற்குச் சமமாகும்.



உருவம் 498

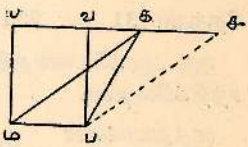
கிளைத்தேற்றம் 1. ஒரே அடியிலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்களுக்கிடையிலும் உள்ள இணைகரங்கள் பரப்பிற் சமமானவை.

கிளைத்தேற்றம் 2. இணைகரத்தின் பரப்பு = அடி × உயரம்.

கிளைத்தேற்றம் 3. சமமான அடிகளிலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்களுக்கிடையிலும் உள்ள இணைகரங்கள் பரப்பிற் சமமானவை.

தேற்றம் 36 (ப. 297)

ஒரு முக்கோணம் **கமப** வினது பரப்பு அதே அடி **மப** விலும் அதே சோடிச் சமாந்தரங்கள் **மப, யவக** என்பவற்றிற்குமிடையிலும் உள்ள செவ்வகம் **வயமப** என்பதன் பரப்பில் அரைப் பகுதிக்குச் சமனாகும்.



உருவம் 499

கிளைத்தேற்றம் 1. முக்கோணத்தின் பரப்பு = $\frac{1}{2}$ அடி × உயரம்.

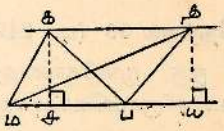
கிளைத்தேற்றம் 2. ஒரே அடி அல்லது சமமான அடிகள் மேல் உள்ளனவாய் சமமான குத்துயரங்கள் கொண்ட முக்கோணங்கள் பரப்பிற் சமமாகும்.

கிளைத்தேற்றம் 3. ஒரே பரப்பளவினவாய முக்கோணங்கள் ஒரே அடியை அல்லது சம அடியை உடையனவாயின் அவற்றின் குத்துயரங்கள் சமமாகும்.

தேற்றம் 37 (ப. 299)

மப விற்குக் **கத** சமாந்தரம் எனின்

△கமப = △தமப.



உருவம் 500

தேற்றம் 38 (ப. 300)

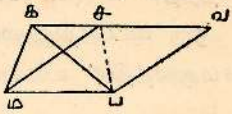
△கமப = △தமப ஆக **மப** விற்கு ஒரே பக்கத்தில் **க** வும் **த** வும் உள்ளன எனின்

மப விற்குக் **கத** சமாந்தரம்.

தேற்றம் 39 (ப. 301)

ஒரு முக்கோணம் **கமப** வும் ஓரிணைகரம் **வசமப** வும் ஒரே அடி **மப** விலும் ஒரே சோடிச் சமாந்தரங்களான **மப, கசவ** என்பவற்றிற்கிடையிலும் இருக்குமாயின்

$\triangle$**கமப** $= \frac{1}{2}$ இணைகரம் **வசமப.**

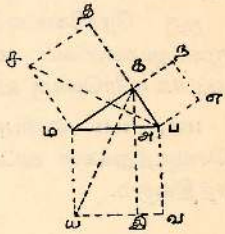


உருவம் 502

தேற்றம் 40 (ப. 329)

$\triangle$**மகப** ஒரு செங்கோணமாக, **கஅ** என்பது **க** விலிருந்து **மப** விற்குள்ள செங்குத்து எனின்

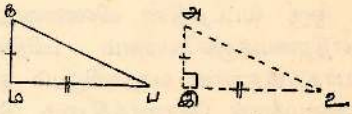
1. **மக**^{2} $=$ **மஅ.மப, பக**^{2} $=$ **பஅ.பம,**
2. **கம**^{2} $+$ **கப**^{2} $=$ **மப**^{2}.



உருவம் 546

தேற்றம் 41 (ப. 332)

$\triangle$**கமப** வில் **கம**^{2} $+$ **மப**^{2} $=$ **கப**^{2} எனின்
$\angle$**கமப** $= 1$ செங் $\angle$.

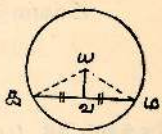


உருவம் 548

தேற்றம் 42 (ப. 351)

வ என்பது **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண் **கம** வினது நடுப்புள்ளி எனின்

$\angle$**யவக** $= 1$ செங்$\angle$.

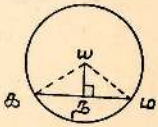


உருவம் 564

தேற்றம் 43 (ப. 352)

ஒரு வட்டத்தினுடைய மையம் **ய** விலிருந்து ஒரு நாண் **கம** விற்குள்ள செங்குத்து **யந** எனின்

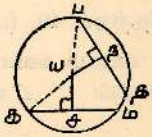
கந $=$ **நம.**



உருவம் 565

தேற்றம் 44 (ப. 353)

ஒரு வட்டத்தினுடைய நாண்கள் **கம** வும் **பத** வும் சமமாயின் அவை மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன.



உருவம் 566

தேற்றம் 45 (ப. 354)

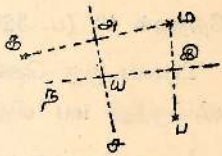
ஒரு வட்டத்தினுடைய நாண்கள் **கம** வும் **பத** வும் மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன எனின்

கவ = பத.

தேற்றம் 46 (ப. 355)

ஒரு நேர்கோட்டிலில்லாத கொடுக்கப்பட்ட மூன்றுபுள்ளிகள் **க, ம, ப** என்பவற்றிற் கூடாக ஒரேயொரு வட்டமே செல்லும்.

மக, மப என்பவற்றின் இருசமவெட்டிச் செங்குத்துக்கள் வட்டத்தின் மையம் **ய** விற் சந்திக்கும்.

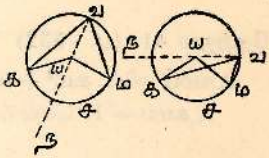


உருவம் 568

தேற்றம் 47 (ப. 365)

ஒரு வட்டத்தின் வில்லானது மையத்தில் எதிரமைக்குங்கோணம் பரிதியில் எஞ்சிய பாகத்திலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் அமைக்குங் கோணத்திலும் இருமடங்காகும். வட்டம் **கவம** வினது மையம் **ய** எனின்

∠ கயம = 2 ∠ கவம.

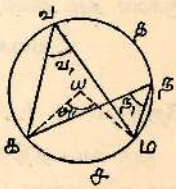


உருவம் 583 (i) (ii)

தேற்றம் 48 (ப. 373)

கவநம ஒரு வட்டம் எனின்

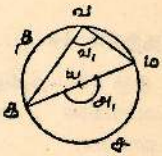
∠ கவம = ∠ கநம.



உருவம் 596 (i)

தேற்றம் 49 (ப. 374)

வட்டம் **கவம** வினது ஒரு விட்டம் **கம** எனின் **∠ கவம = 1** செங் ∠.



உருவம் 597

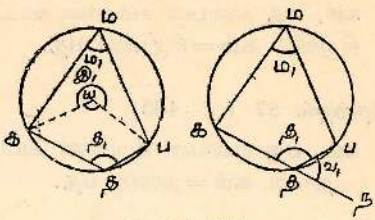
தேற்றம் 50 (ப. 375)

(i) **கமபத** ஒரு வட்டம் எனின்,

∠ **ம** + ∠ **த** = 2 செங்கோணங்கள்.

(ii) **கமபத** ஒரு வட்டமாக நாண் **கத** என்பது **ந** விற்கு நீட்டப் பெறின்,

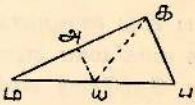
∠ **பதந** = ∠ **கமப**.



உருவம் 598

தேற்றம் 51 (ப. 386)

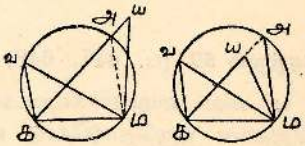
∠ **மகப** ஒரு செங்கோணம் எனின் **மப** வை விட்டமாக வுடைய வட்டம் **க** விற்கூடாகச் செல்கின்றது.



உருவம் 616

தேற்றம் 52 (ப. 387)

∠ **கவம** = ∠ **கயம** ஆக **கம** விற்கு ஒரே பக்கத்தில் **வ** ஐம் **ய** வும் இருக்குமெனில் **க, ம, வ, ப** ஒருபரிதியிலுள்ளன.

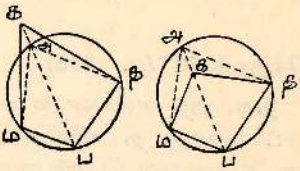


உருவம் 617

தேற்றம் 53 (ப. 389)

கமபத என்பது ∠ **கமப** + ∠ **கதப** + 2 செங்கோணங்கள் ஆக அமையுமாறுள்ள ஒரு நாற்கோணம் எனின்,

க, ம, ப, த என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன.



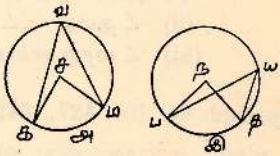
உருவம் 620

தேற்றம் 54 (ப. 644)

ச, ந என்பன சமமான இருவட்டங்கள் **கவமஅ, பயதஇ** என்பவற்றின் மையங்களாக ∠ **கசம** = ∠ **பநத** எனின்,

அல்லது ∠ **கவம** = ∠ **பயத** எனின்,

வில் **கஅம** = வில் **பஇத**.



உருவம் 907

தேற்றம் 55 (ப. 646)

ச, ந என்பன சமமான இருவட்டங்கள் **கவமஅ, பயதஇ** என்பனவற்றின் மையங்களாக வில் **கஅம** = வில் **பஇத** எனின்,

∠ **கசம** = ∠ **பநத** ;

சமமான விற்கள் **கஅம, பஇத** என்பனவற்றில் நிற்கும் பரிதியிலமைந்த கோணங்கள் சமமாகும்.

தேற்றம் 56 (ப. 404)

கம, பத என்பன சமமான வட்டங்களின் சமமான நாண்கள் எனின், சிறுவில் **கம** = சிறுவில் **பத.**

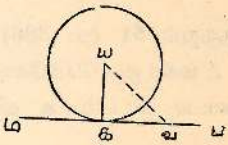
தேற்றம் 57 (ப. 405)

கம, பத என்பன சமமான வட்டங்களின் சமமான விற்கள் எனின் நாண் **கம** = நாண் **பத.**

தேற்றம் 58 (ப. 416)

ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஆரை **யக** வாக **மகப** என்பது **யக** விற்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோடு எனின்,

மகப என்பது வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாகும்.



உருவம் 659

தேற்றம் 59 (ப. 417, 648)

ய வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திற்கு **க** விலுள்ள ஒருதொடுகோடு **மகப** எனின்

∠ **யகம** = ஒருசெங் ∠.

உருவம் 660

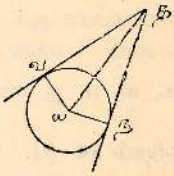
தேற்றம் 60 (ப. 418)

தவ, தந என்பன **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டத்திற்கு **த** விலிருந்துள்ள தொடுகோடுகளாக **வ, ந** என்பன தொடுபுள்ளிகள் எனின்,

(i) **தவ** = **தந** ;

(ii) ∠ **தயவ** = ∠ **தயந** ;

(iii) ∠ **வதந** வை **யத** இருசமக்கூறிடுகின்றது.



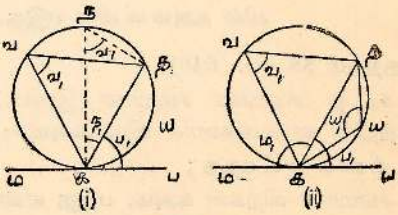
உருவம் 661

தேற்றம் 61 (ப. 427, 649)

மகப என்பது ஒரு வட்டத்திற்கு **க** விலுள்ள தொடுகோடாக **கத** என்பது யாதாயினும் ஒரு நாண் எனின்,

∠ **தகப** = ஒன்று விட்டதுண்டி லுள்ள ∠ **கவத.**

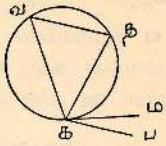
∠ **தகம** = ஒன்று விட்டதுண்டி லுள்ள ∠ **கயத.**



உருவம் 680

தேற்றம் 62 (ப. 429)

வ, ப என்பன **கத** விற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் ∠ **தகப** = ∠ **கவத** ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன எனின், **கப** என்பது வட்டம் **கவத** வை **க** விலே தொடுகின்றது.



உருவம் 681

தேற்றம் 63 (ப. 440)

க, ம என்பவற்றை மையங்களாக வுடைய இருவட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று **வ** விலே தொடின்,

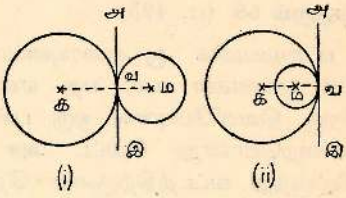
க, வ, ம என்பன ஒரு நேர்கோட்டி லுள்ளன.

இத்தொடுகை வெளிப்புறமாகவெனின்,

கம = ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை.

இத்தொடுகை உட்புறமாகவெனின்,

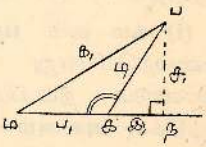
கம = ஆரைகளின் வித்தியாசம்.



உருவம் 699

தேற்றம் 64 (ப. 484)

பந என்பது △ **கமப** வின் ஒருயரமாக ∠ **மகப** விரிகோணமெனின் **மப²** = **மக²** + **பக²** + 2**மக.கந.**

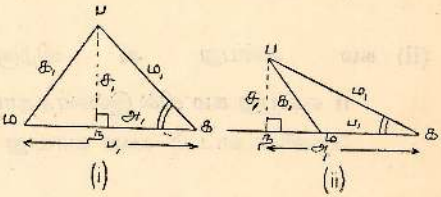


உருவம் 749

தேற்றம் 65 (ப. 485)

பந என்பது △ **கமப** வின் ஒருயரமாக △ **மகப** கூர்ங் கோணமெனின்,

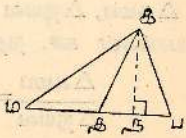
மப² = **மக²** + **பக²** − 2**மக.கந.**



உருவம் 750

தேற்றம் 66 (ப. 486)

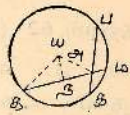
கத என்பது △ **கமப** வின் ஒருமையக் கோடு எனின் **கம²** + **கப²** = 2**கத²** + 2**மத²**.



உருவம் 751 (ii)

தேற்றம் 67 (ப. 494)

ய மையமாக ஆ ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள் **கம, பத** என்பன வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளி **அ** வில் ஒன்றையொன்று வெட்டினால்

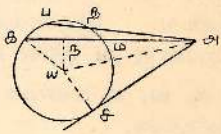


உருவம் 761

அக.அம = அப. அத = ஆ² − யஅ².

தேற்றம் 68 (ப. 495)

ய மையமாக ஆ ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள் **கம, பத** என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளி **அ** வில் ஒன்றையொன்று வெட்ட **அச** என்பது **அ** விலிருந்து வட்டத்திற்குள்ள தொடுகோடு எனின்,



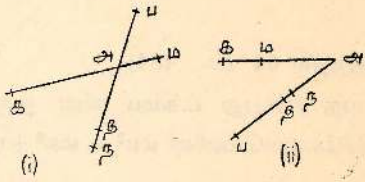
உருவம் 762

அக.அம = அப.அத = அச² = யஅ² − ஆ².

தேற்றம் 69 (ப. 496)

(i) **கம** வும் **பத** வும் **அ** வில் ஒன்றையொன்று வெட்ட, அல்லது இரண்டும் நீட்டப்படின் **அ** விற் சந்திக்க, **அக.அம = அப.அத** எனின்,

க, ம, ப, த என்பன ஒரு பரிதியிலுள்ளன.



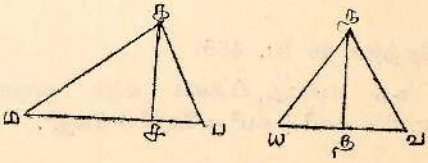
உருவம் 763

(ii) **கம** என்பது **அ** விற்கு நீட்டப்பட **ப** என்பது **கம** வில் இல்லாததாய் **அக . அம = அப²** ஆகுமாறுள்ளதெனின் வட்டம் **கபம** வானது **அப** வை **ப** வில் தொடுகின்றது.

தேற்றம் 70 (ப. 538)

△கமப, △நயவ என்பவற்றின் உயரங்கள் **கச, நத** சமமெனின்

$$\frac{\triangle \text{கமப}}{\triangle \text{நயவ}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}}.$$

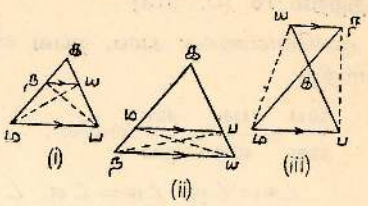


உருவம் 806

தேற்றம் 71 (ப. 540)

மப விற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடு **கம, கப** ஆகியவற்றை **ந, ய** க்களில் வெட்டினால்

$$\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}.$$



உருவம் 808

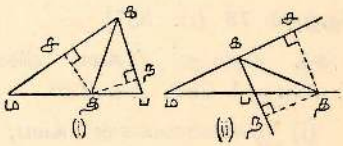
தேற்றம் 72 (ப. 541)

ந, ய என்பன **கம, கப** என்பவற்றிலோ நீட்டப்பட்ட **கம, கப** என்பவற்றிலோ $\frac{\text{கந}}{\text{நம}} = \frac{\text{கய}}{\text{யப}}$ ஆகுமாறு உள்ளன எனின் **மப** விற்கு **நய** சமாந்தரம்

தேற்றம் 73 (ப. 549)

∠ **மகப** வின் உள்ளிருசமவெட்டியோ வெளியிருசமவெட்டியோ **மப** வையோ நீட்டப்பட்ட **மப** வையோ **த** விற் சந்தித்தால்

$$\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}.$$



உருவம் 819

தேற்றம் 74 (ப. 550)

△ **கமப** வின் அடி **மப** என்பது **த** விலே உட்புறமாகவோ வெளிப்புறமாகவோ

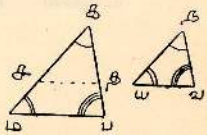
$$\frac{\text{மத}}{\text{தப}} = \frac{\text{கம}}{\text{கப}}$$ ஆகப் பிரிக்கப்படின்

கத என்பது ∠ **மகப** வின் உள்ளிருசமவெட்டியாகவோ வெளியிருசமவெட்டியாகவோ இருக்கும்.

தேற்றம் 75 (ப. 571)

முக்கோணங்கள் **கமப, நயவ** என்பவற்றில்
∠ **க** = ∠ **ந**, ∠ **ம** = ∠ **ய**, ∠ **ப** = ∠ **வ**

எனின், $\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}}.$



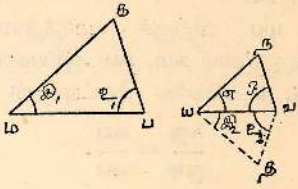
உருவம் 853

தேற்றம் 76 (ப. 573)

முக்கோணங்கள் **கமப, நயவ** என்ப வற்றில்

$$\frac{\text{மப}}{\text{யவ}} = \frac{\text{பக}}{\text{வந}} = \frac{\text{கம}}{\text{நய}} \text{ எனின்,}$$

$\angle$ க $=$ $\angle$ ந, $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ.



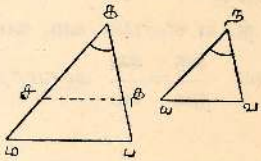
உருவம் 828

தேற்றம் 77 (ப. 577)

முக்கோணங்கள் **கமப, நயவ** என்பவற்றில்

$$\frac{\text{கம}}{\text{நய}} = \frac{\text{கப}}{\text{நவ}} \text{ ஆகவும் } \angle \text{ க} = \angle \text{ ந,}$$

ஆகவுமிருந்தால், $\angle$ ம $=$ $\angle$ ய, $\angle$ ப $=$ $\angle$ வ.



உருவம் 829

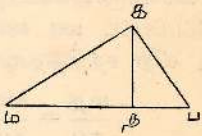
தேற்றம் 78 (ப. 587)

கத என்பது $\triangle$ **கமப** வின் ஒருயரமாக $\angle$ **மகப** $= 1$ செங் $\angle$ எனின்

(i) முக்கோணங்கள் **கமப, தமக, தகப** என்பவை வடிவொத்தவை ;

(ii) **கத**^{2} $=$ **மத.தப** ;

(iii) **மக**^{2} $=$ **மத.மப, பக**^{2} $=$ **பத.பம.**



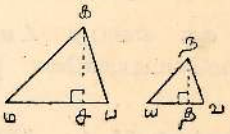
உருவம் 866

79—82 வரையுள்ள தேற்றங்களானவை 67–69 வரையுள்ள தேற்றங்களுக்கு ஒத்தவை. வடிவொத்த முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தி நிறுவுவதற்குப் பக்கங்கள் 589–592 வரை பார்க்க.

தேற்றம் 83 (ப. 607)

முக்கோணங்கள் $\frac{\text{கமப}}{\text{நயவ}}$ வடிவொத்தவை எனின்

$$\frac{\triangle \text{ கமப}}{\triangle \text{ நயவ}} = \frac{\text{மப}^2}{\text{யவ}^2}.$$



உருவம் 877

(IV) அமைப்புக்களின் பொழிப்பு

1. அடிப்படையான மூலாதார அமைப்புக்கள். பக்கங்கள் 161–168.

2. சதுரத்தின் அமைப்பு ; இணைகரம், சரிவகம் ஆகியவற்றை எண்ணுடை தரவுகளால் அமைத்தல். பக்கங்கள் 190, 191.

3. ஒரு கோட்டினைச் சமபகுதிகளாகப் பிரித்தல். பக்கம் 220.

4. ஒரு நாற்கோணத்தையும் ஒருபல்கோணத்தையும் ஒத்த ஒரு முக்கோணத்திற்கு ஒடுக்கல். பக்கம் 307.

5. மூன்றுபுள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு வட்டத்தை அமைத்தல். பக்கம் 355.

6. ஒரு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு அமைத்தல். பக்கம் 446.

7. பொதுத் தொடுகோடுகள் அமைத்தல். பக்கங்கள் 448, 449.

8. உள்வட்டம் வெளிவட்டங்கள் அமைத்தல். பக்கங்கள் 450, 451.

9. ஒரு வட்டத்தின் ஒரு துண்டை அமைத்தல். பக்கம் 452.

10. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வட்டத்தினுள் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்திற்குச் சமகோணமுடையதாய் ஒரு முக்கோணத்தை உள்ளுருவமாக அமைத்தல், ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி ஒரு முக்கோணத்தை வெளியுருவமாக அமைத்தல். பக்கம் 453.

11. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளுக்கூடாக, அல்லது கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் வட்டங்களைத்தொட, வட்டங்கள் அமைத்தல். பக்கங்கள் 454–455, 503.

12. ஒரு செவ்வகத்திற்கு அல்லது ஒரு பல்கோணத்திற்கு ஒத்த ஒரு சதுரம் அமைத்தல். பக்கங்கள் 501, 502.

13. ஒரு கோட்டை கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விகிதத்தில் பிரித்தல். பக்கம் 556.

14. மூன்றும் இடைவிகிதசமன், நான்காம் இடைவிகிதசமன் ஆகியவற்றை அமைத்தல் பக்கம் 557.

15. இடைவிகிதசமனை அமைத்தல். பக்கங்கள் 599, 600.

16. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பல்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததாய் (i) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விகிதத்தில் பக்கங்கள் அமைந்துள்ளதாய் (ii) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு விகிதத்தில் பரப்பு அமைந்துள்ளதாய் ஒருபல்கோணத்தை அமைத்தல். பக்கங்கள் 611, 612, 613.

17. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நாற்கோணத்திற்கு வடிவொத்ததாய் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகத்திற்கு ஒத்ததாய் ஒரு நாற்கோணத்தை அமைத்தல். பக்கம் 614.

18. ஒரு கோட்டினை இடைப்பகுப்பாகப் பிரித்தல். பக்கம் 615.

19. ஒழுங்கான ஐங்கோணம், ஒழுங்கான தசமகோணம் ஆகியவற்றை அமைத்தல். பக்கங்கள் 616, 617.

அட்டவணை

உள்ளடக்க அட்டவணையையும் தேற்றத்தின் அமைப்புக்களின் சுருக்கங்களையும் காண்க.

விடைகள்

விடைகள்

பருவம் அ

பக்கம் 3 பயிற்சி 1

1. 3, 5, 2. **2.** 3, 4. **3.** யநச ; யமதவ ; பதச ; கமச ; பமந .
5. 6 ; 10 ; [4]. **6.** செவ்வகத்திண்மம்; கோளம்; உருளை; கூம்பு; செவ்வகத்திண்மம்; உருளை; அரியம்; கூம்பும் உருளையும்.
7. 6 ; 12 ; 8. **8.** 7 ; 15 ; 10. **9.** செவ்வகத்திண்மம்.
10. செவ்வகத்திண்மம். **11.** அரியத்தின் அடித்துண்டு.
13. (i) 6, 8, 12 ; (ii) 5, 6, 9 ; (iii) 4, 4, 6 ; (iv) 8, 12, 18 ; (v) 6, 8, 12 ; (vi) ந + 2, 2ந, 3ந. **17.** 12 ; 6. **18.** 30 ; 20.
19. 30 ; 12. **20.** $\frac{1}{2}$ந(ந − 1).

பக்கம் 10 பயிற்சி 2

1. 2·69, 2·77, 3·02, அங். ; 6·82, 7·05, 7·68, ச. மீ.; 8·48 அங். ; 21·55 ச. மீ.
2. 2·60, 2·43, 4·12, அங். ; 6·60, 6·17, 10·49, ச. மீ. ; 9·15 அங். ; 23·26 ச. மீ.
3. 1·31, 2·92, 1·98, 2·35, அங். ; 8·56 அங்.
4. 3·25, 5·49, 3·10, 3·74, ச. மீ. ; 15·58 ச. மீ.
5. 3·45 ச. மீ., 5·68 ச. மீ., 3·21 அங்.
6. 4·16 ச. மீ., 4·12 ச. மீ., 3·98 அங்.
7. 3·34, 3·56, 5·02, 1·88, ச. மீ. ; 6·90, 6·90, ச. மீ. **8.** 2·28 ச. மீ.
9. சப, 2·35 அங். ; ஓவ, 2·43 அங். **10.** அஇ.
11. 3·94 அங். ; 0·394 அங். **12.** 12·7 ச. மீ., 2·54 ச. மீ.
14. 2, 5, 9. **15.** 4. **16.** 35, 8 ; $\frac{1}{2}$ந(ந − 3), ந − 2.

பக்கம் 14 பயிற்சி 3

1. 8 ச. மீ ; 7·94 ச. மீ. **2.** 2·5 அங். **3.** 3, 8, 3, ச. மீ.
4. 4 அங். **5.** 4·5 அங்., 9·5 அங். **6.** 1 அங்.
7. எ, ஒ, அ, வ, ந, த, உ. **8.** 7 ச. மீ., 1 ச. மீ.
9. 2·5, 2, 1·7, அங். **10.** 4·8 ச. மீ. **17.** 6·12 ச. மீ.
18. 8·71 ச. மீ. **19.** 6·65 ச. மீ. **23.** 6 ச. மீ. **24.** 11 ச. மீ.
26. 4 ச. மீ. **29.** 2·7 அங். அல்லது 6·85 ச. மீ.

24—J. N. B 61929 (12/56).

பக்கம் 22 பயிற்சி 4

5. 2·5 அங். **6.** 6·40 ச. மீ. **9.** 4·95 ச. மீ.

பக்கம் 27 பயிற்சி 6

(கோணவகை 1 செங்கோணம்)

1. 1. **2.** 2. **3.** 3. **4.** 3. **5.** $1\frac{1}{2}$.
6. $2\frac{1}{2}$. **7.** 2. **8.** 3. **9.** $1\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{1}{2}$.
11. மே. **12.** மே. **13.** வ. **14.** மே. **15.** தெ. மே.
16. வ. கி. **17.** தெ. கி. **18.** வ. கி. **19.** வ. மே. **20.** வ.
21. தெ. **22.** மே. **23.** 4, 2, $\frac{1}{3}$, 11. **24.** 2, $1\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$.
25. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$. **26.** $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$.

பக்கம் 34 பயிற்சி 7

(கோணவகை 1 செங்கோணம்)

1. 1. **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. **4.** அ + இ, அ + இ + உ, அ + 2இ + உ, உ.
5. ∠ பமந, ∠ தமச, ∠ பமச. **6.** இ = உ; அ = உ; அ + இ = 1 செங்∠.
7. $1\frac{1}{2}$. **8.** $\frac{3}{4}$. **9.** $\frac{2}{3}$. **10.** $\frac{3}{4}$. **11.** $1\frac{3}{5}$.
12. $2\frac{3}{4}$. **13.** $1\frac{1}{2}$. **14.** $1\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.
16. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$. **17.** எ, இ (கூர்), அ (விரி), உ, ஒ (பின்வளை).
18. $2\frac{1}{2}$. **19.** $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$. **20.** (i) ஓம், (ii) இல்லை, (iii) ஓம்.

பக்கம் 36 பயிற்சி 8

1. 180°, 45°, 60°, 126°. **2.** 360°, $22\frac{1}{2}$°, 120°, 234°.
3. 3, $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $3\frac{1}{3}$, செங். ∠. **4.** $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{2}$, செங். ∠.
5. 30°, 5°, $22\frac{1}{2}$°, 75°. **6.** 90°, 30°, 120°, 300°.
7. 200°. **8.** 120°. **9.** 117°, 63°. **10.** 83°, 97°.
11. $33\frac{3}{4}$°, $55\frac{3}{4}$°. **12.** அ $57\frac{2}{3}$°, இ $67\frac{1}{3}$°, உ 55°.
13. எ $33\frac{3}{4}$°, ஒ 110°, வ $36\frac{1}{4}$°. **14.** ச 90°, ம 102°, த 63°, ப 105°.
15. 297°. **16.** $249\frac{1}{3}$°. **21.** 50°. **22.** 110°.
23. 150°, 50°. **24.** 15°. **25.** 76°. **26.** 108.
27. 46. **28.** 60. **29.** 111. **30.** 93.
31. 66. **32.** 36. **33.** 90.
34. (i) நேர்; (ii) நேரிலி. **35.** (i) நேரிலி; (ii) நேர்.
36. 106°, 146°. **37.** 40. **38.** 75° ; 20°.
39. ஓம், இல்லை, ஓம். **40.** 124°.

பக்கம் 40 பயிற்சி 9

1. வ. 70° கி. 2. தெ. 42° மே. 3. தெ. 20° மே.
4. வ. 40° கி. 5. வ. 58° மே. 6. தெ. 30° கி.
7. வ. 75° கி. 8. வ. 30° கி. 9. தெ. 5° மே.
10. தெ. 63° கி. 11. 222° ; 40° ; 302°. 12. 25°.
13. 120°. 14. 140°. 15. 120°.
16. தெ. 30° கி. ; வ. 10° மே. 18. $22\frac{1}{2}°$; $157\frac{1}{2}°$; 45°.
19. $67\frac{1}{2}°$; $67\frac{1}{2}°$; $112\frac{1}{2}°$. 21. $11\frac{1}{4}°$; $56\frac{1}{4}°$; $33\frac{3}{4}°$.
22. $56\frac{1}{4}°$; $67\frac{1}{2}°$, 90°.

பக்கம் 43 பயிற்சி 10

6. 115°, 70°, 115°, 70°. 7. 125°, 125°, 84°, 84°.
9. 180° ; 180° ; 180°.

பக்கம் 47 பயிற்சி 11

1. 70°. 2. 105°. 3. 115°. 4. 100°.
5. 60°. 6. 54°. 7. 20°, 30°. 8. 60°.
9. 35°, 15°. 10. 36°, 30°, 66°. 11. 50°, 50°.
12. 33°. 13. 68°, 68°, 112°. 14. 125°.
15. 75°. 16. 115°. 17. 72°, 108°.
18. 85°, 51°. 19. 72°, 144°. 20. 105°, 75°.
21. 35°, 35°. 22. 48°, 44°, 88°; 180°.
23. அ° + இ° ; அ + இ + உ = 180. 24. வலம்.
25. சமாந்தரம். 26. சமாந்தரம். 27. இடம்.
28. மக, பத. 29. மப, நத. 30. மக, தந.

பக்கம் 51 பயிற்சி 12

1. 50°, 70°, 120°. 2. 42°, 58°, 100°. 3. 70°, 60°.
4. 55°, 55°, 60°. 5. 40°, 40°, 115°. 6. 20°, 30°, 30°.
8. $ப_1$, $ப_2$. 9. $க_1$, $க_2$. 10. அ + உ, $ம_1$.
11. இ + உ, $க_1$. 12. 130°. 13. 75°.
14. 73°. 15. 55°, 90°. 16. 60°, 70°.
17. 70°, 70°. 18. 36°, 72°, 72°. 19. 44°, 66°.
20. 75° 125° 21. 55°. 22. 132°.

பக்கம் 55 பயிற்சி 13

1. $33\frac{3}{4}°$, 110°, $36\frac{1}{4}°$. **2.** 70°. **3.** 25°.
4. 53°. **5.** 160°. **6.** 36°.
7. 35°. **8.** 36°. **9.** 60.
10. 36. **11.** 15. **12.** இல்லை, ஓம், இல்லை.
13. 100°, 63°. **14.** 85°, 45°. **15.** 60°, 80°, 40°, 100°.
16. 80°, 80°, 20°, 100°. **17.** 83°, 65°. **18.** 108°, 50°.
19. 130°, 65°. **20.** 40°. **21.** 50°, 72°.
22. 87°, 53°. **23.** 8°. **24.** 37°.
26. 2க° − 180°. **27.** $(90 + \frac{1}{2}$க $- \frac{1}{2}$ந$)$ பாகைகள்.
28. உ + எ − இ. **29.** ச + ப − க. **30.** உ − அ − இ.
31. ச − த − க. **32.** அ + இ − உ. **33.** க + ச + த.

பக்கம் 61 பயிற்சி 14

1. 4 செங் ∠. **2.** 122°. **3.** 80°.
4. 80°. **5.** 110°. **6.** 70°.
7. 72°; 108°. **8.** 144°. **9.** 162°.
10. 9. **11.** 12. **12.** (i) 18, (ii) இல்லை, (iii) 24.
13. (i) 10, (ii) 9, (iii) இல்லை. **14.** 36. **15.** 80.
16. 36°. **19.** 36°. **20.** 6.

பக்கம் 63 பயிற்சி 15

1. 6·82, 7·68, ச.மீ., $57\frac{2}{3}°$; 7·05 ச.மீ.
2. 6·60, 6·17, ச.மீ., 110°; 10·49 ச.மீ.
3. 8·74 ச.மீ., $33\frac{3}{4}°$, $41\frac{1}{2}°$; 5·95 ச.மீ.
4. 8·74 ச.மீ., $55\frac{3}{4}°$, 102°; 7·42 ச.மீ.
6. கோகோப; $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{மபக}}$. **7.** இல்லை.
8. 2·69, 1·98, 2·92, அங்.; $75\frac{3}{4}°$.
9. 2·69, 1·31, 2·35, அங்.; 61°. **10.** பபப. $\frac{\text{இசந}}{\text{கயப}}$; $78\frac{1}{2}°$.
11. 3·59, 2·50, ச.மீ.; 7·17, 5·00, ச.மீ.; இல்லை. **12.** 3·9, 5·8, ச.மீ.
13. 133°, 47°. **14.** $45\frac{1}{2}°$. **15.** 30°.
16. 4·55 ச.மீ.

பக்கம் 70 பயிற்சி 16

1. △ தகச; △ சகத; △ தகச. 2. △ தசக; △ கசத; △ சதக.
3. பகோப ; △ யகத. 4. பபப ; △ மபக. 5. கோகோப, △ பகம.
6. கோபகோ ; △ மதக. 7. செகோசெபப ; △ யதந.
8. (i) பகோப ; $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{யமந}}$; (ii) இல்லை. 9. (i) இல்லை ;
(ii) கோகோப ; $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{யமந}}$. 10. (i) பபப ; $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{யமந}}$; (ii) இல்லை.
11. (i) இல்லை; (ii) பகோப ; $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{யநம}}$; (iii) இல்லை.
12. பகோப ; $\frac{\text{கநத}}{\text{மநப}}$. 13. பகோப ; $\frac{\text{மகந}}{\text{பகந}}$. 14. பபப ; $\frac{\text{பயச}}{\text{தசய}}$.
15. கோகோப ; $\frac{\text{எஉஅ}}{\text{இஅஉ}}$. 16. கோபகோ ; $\frac{\text{கமத}}{\text{பதம}}$.
17. கோபகோ ; $\frac{\text{நதப}}{\text{நமக}}$.

பக்கம் 79 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. (i) 300, 400, 480 யார்; (ii) 500 யார்; (iii) $111\frac{3}{4}°$, வ. $68\frac{1}{4}°$ கி.
2. 1 : 18000.

பக்கம் 79 பயிற்சி 18

1. 12. நிமி.; 1·6 அங். ; $\frac{1}{316800}$. 2. 72 அடி; 4·5 அங். ; $\frac{1}{120}$.
3. 100 அடி. 4. 5·90 நிமி.; வ. $73\frac{1}{2}°$ கி. 5. 456 யார்; 242 யார்.
6. வ. 46° கி. ; வ. $37\frac{1}{2}°$ மே. ; 5·56 நிமி. 7. 29·2 நிமி. ; வ. 59°. கி.
8. 3·57 நிமி. ; வ. $82\frac{1}{2}°$ மே. 9. 261 யார். 10. 140 யார்.
11. 215 யார். 12. 5·05 நிமி. ; வ. $58\frac{1}{2}°$ கி. 13. 32 யார்.
14. 487 யார். 15. 10600 யார். 16. 7·06 நிமி. ; வ. $34\frac{1}{2}°$ மே.
17. வ. $53\frac{1}{4}°$. கி. 18. 4·16 நிமி. 19. 33·7 நிமி., வ. 12° மே.
20. 34·8 நிமி., வ. $31\frac{1}{2}°$. மே.

பக்கம் 83 பயிற்சி 19

1. 84·0 அடி. 2. 358 அடி. 3. 79·8 அடி. 4. 363 அடி.
5. 31°. 6. 35°. 7. $57\frac{3}{4}°$; 12·7 அடி.
8. 24·5 அடி. 9. 103 அடி. 10. $38\frac{1}{2}°$. 11. 4·23 அடி.
12. 112 அடி.

பக்கம் 86 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 3·00, 3·75, ச.மீ.; 3·75, 0·75; 3·00, 0·75. **2.** 7·5, 6, ச.மீ., 83°.
3. 9·6, 6·4, ச.மீ., 83°. **4.** 12·5, 15, ச.மீ., 83°.
5. 5க,4க, ச.மீ., 83°. **6.** 56°, 41°; 4·8 ச.மீ.; 0·8. **7.** 83°, 56°, 41°.

பக்கம் 88 பயிற்சி 20

1. △ மகப, 4·8, 7·2 அங்.; △ நயத, 13·5, 7·5, ச.மீ.
2. $6\frac{2}{3}$, 8, ச.மீ., $109\frac{1}{2}°$; 9·6, 14·4, அங்., $31\frac{1}{2}°$.
3. △ பமக, 5·4 அங்., ∠ ம = 30°, ∠ க = 86°; △ நதய, 2·5 ச.மீ., ∠ ந = 64°, ∠ ய = 86°.
4. 14, 12·6, ச.மீ., 64°; $13\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, அங்., 30°.
5. $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{பமக}}$, ∠ ப = 97°, ∠ ம = 37°, ∠ க = 46°; $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{நதய}}$, ∠ த = 37°, ∠ ய = 46°, $74\frac{1}{4}$ அங். **6.** 9, $2\frac{1}{2}$, அங்.
7. கஇப; 9, 18, அங். **8.** சதஉ, 1·8, 7·6, அங்.
9. 18, 21, நிமி. **10.** 120 அடி. **11.** 4 அடி.
12. $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{அகப}}$; 20 அங். **13.** 10, $7\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$.
14. 10, 12, $5\frac{1}{2}$, 14.

பக்கம் 93 பயிற்சி 21

1. 0·466. **2.** 3·078. **3.** 0·839. **4.** 1·732.
5. 35°. **6.** 58°. **7.** 31°. **8.** 61°.
9. 3·36 ச. மீ. **10.** 4·28 அங். **11.** 7·81 ச.மீ. **12.** 1·87 அங்.
13. 21° 48′. **14.** 59° 2′. **15.** 53° 8′. **16.** 68° 58′.
17. 128 அடி. **18.** 353 அடி. **19.** 13·0 அடி. **20.** வ. 66° 22′கி.
21. தெ. 56° 19′கி. **22.** 37° 52′. **23.** 53° 8′.
24. 60° 29′, 29° 31′. **25.** 9·03 அடி. **26.** 117 அடி.
27. 30·9 அடி.

பக்கம் 97 பயிற்சி 22

1. 0·920. **2.** 0·391. **3.** 0·530. **4.** 0·848.
5 30°. **6.** 25° 50′. **7.** 41° 49′.
8. 4·19, 2·72, ச.மீ. **9.** 2·46, 1·72, அங். **10.** 9·45, 3·26, ச.மீ
11. 66° 56′. **12.** 53° 8′. **13.** 39° 48′. **14.** 24° 9′.
15. 19·0, 6·18, அடி. **16.** 73° 44′. **17.** 201, 223, யார்.
18. 3·99, 3·01, நிமி. **19.** வ. 51° 4′கி. **20.** 662 அடி.
21. 3·18, 5·09, ச.மீ. **22.** 92·7 அடி. **23.** 5·49 அங்.
24. 2·17 அங்.

விடைகள்

பருவம் இ

பகுதி 1

பக்கம் 105 பயிற்சி 24

1. 160°, 30°, 88°. **2.** 36. **3.** 22.
4. 144°. **5.** 6, 11, 22. **6.** 180°, 6°. **7.** 270°, 10°.
8. 150°, 100°. **9.** 60°. **10.** 240°. **11.** 45°.
12. $157\frac{1}{2}$°. **13.** $112\frac{1}{2}$°. **14.** 135°. **15.** $157\frac{1}{2}$°.
16. 135°. **17.** 140°. **18.** 137°. **19.** 120°.
20. 120°. **21.** 210°. **22.** 45°. **23.** 20.
24. 15. **25.** 24. **26.** 95. **27.** 50.
28. 120°. **29.** 135°. **30.** 135°. **31.** 105°.
32. 40°, 50°. **33.** வ + ய + ந = 180. **34.** 126°, 63°.
35. கஅப, சஅம. **36.** 110 ; ஒஅஎ, உஅஎ.

பக்கம் 109 பயிற்சி 25

1. அ + இ, இ + 2உ + எ. **2.** இ + உ + எ, உ.
3. ∠ பமச, ∠ நமத.
4. உ = எ, அ + இ + உ + எ = 180°.
5. இ = எ, இ + உ = 90°.

பக்கம் 115 பயிற்சி 26

1. 24. **2.** 55. **3.** 20. **4.** 36, 72.
5. 22, 57. **6.** 30°. **7.** 80°. **8.** 120°.
9. 85°. **11.** கவ, மய ; கச, மப.

பக்கம் 124 பயிற்சி 28

1. 65, 80°. **2.** 65, 50°. **3.** 35, 75°. **4.** 47°.
5. 35° ; 90° − க°. **6.** 147°. **7.** 76°.
8. 66°. **9.** 45°. **10.** 80°. **11.** 90° − $\frac{1}{2}$த.
12. 90° − க. **13.** இல்லை, ஓம், இல்லை.
14. 20. **15.** 40. **16.** 110°. **17.** 110°. **18.** 40°.
19. க = 36, ந = 72. **20.** 25°. **21.** 38°, 86°.
22. 10°. **25.** 130°. **26.** 92°.
27. 53°, 70°, 57°. **28.** 58°. **29.** 84°.

பக்கம் 126 பயிற்சி 29

8. க + உ − எ. **12.** உ − அ + இ.

13. உ − அ − இ. **14.** உ − அ − இ. **15.** ∠ ம.

பக்கம் 129 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 8 செங்கோணம். **2.** 10 செங்கோணம்.

3. 16, 196, 2ந − 4, செங்கோணம்.

4. 4 செங்கோணம். **5.** 4 செங்கோணம்.

6. 4, 4, செங்கோணம். **7.** 4 செங்கோணம்.

8. அ + இ + உ − எ + ஒ = 4 செங்கோணம்.

பக்கம் 131 பயிற்சி 30

1. 70°. **2.** 122°. **3.** 80°. **4.** 18.

5. 54. **6.** 80. **7.** 36°.

8. 56, 76, செங்கோணம். **10.** 45°, 36°.

11. 24°, $\frac{4}{ந}$ செங்கோணம். **12.** 9, 10. **13.** 24, 18.

14. 17. **15.** 60°. **16.** 6 செங்கோணம்.

17. 30°. **19.** 72°, 111°, 108°, 69°.

20. 10 செங்கோணம். **21.** 20. **24.** 250°, 110°.

பக்கம் 138 பயிற்சி 32

1. $\frac{கமப}{வநத}$; பகோப. **2.** இல்லை.

3. $\frac{கமப}{நதவ}$; கோபகோ. **4.** இல்லை.

5. $\frac{கமப}{நவத}$; கோகோப. **6.** இல்லை. **7.** இல்லை.

8. ∠ வ, பக. **18.** △ மகத, △ பகந.

20. △ வயப △ யதவ, △ யநம ; ∠ யதவ.

பக்கம் 145 பயிற்சி 33

1. 35°. 2. 56°.
3. க, 180 – 2க அல்லது 90 – $\frac{1}{2}$க, 90 – $\frac{1}{2}$க, பாகைகள்.
4. 72°, 72°, 36°. 5. 36°, 36°, 108°. 6. 30°. 7. 60°.
8. 35°, 125°, 20°. 9. 36°. 11. 38°.
16. 360 – 2இ 17. (45 – $\frac{1}{4}$உ) பாகை. 18. 3அ – 180.
19. 4(90 – அ) பாகை. 22. 36°

பக்கம் 175 பயிற்சி 37

1. 58°. 2. 23°. 3. 62°. 4. 110°.
5. 55°, 35°. 6. 32°. 7. 125°. 8. 18°, 27°.
9. 30°, 30°. 11. $22\frac{1}{2}$°. 12. 54°. 13. 126°, 30°, 24 .
14. 35°, 115°, 30°. 15. 150°. 16. 72°.
17. $67\frac{1}{2}$°. 18. $22\frac{1}{2}$°, 135°, $22\frac{1}{2}$°.

பக்கம் 187 பயிற்சி 39

1. $36\frac{3}{4}$° ; முடியாது. 2. 2·59. 3. 2·93.
4. 4·79; முடியாது. 5. 11·3.
6. 6·68 ; 5.66, 3·53 ; முடியாது. 7. 8·87.
8. 8·41. 9. $104\frac{1}{2}$°. 10. 4·96. 11. 6·76.
12. $63\frac{1}{4}$°. 13. 5·18. 14. 3·82. 15. $62\frac{1}{2}$°.
16. 5·23 ச. மீ. 17. $49\frac{1}{2}$°. 18. $82\frac{1}{2}$°, $8\frac{3}{4}$°.

பக்கம் 191 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 6·78 ச. மீ. 2. 7·36 ச. மீ. 3. 3·55 ச. மீ.

பக்கம் 192 பயிற்சி 40

1. 4·47 ச.மீ. 2. $97\frac{1}{4}$°. 3. 2·55 ச. மீ. 4. 3·54 ச. மீ.
5. 7·13, 3·63, ச.மீ. 6. $106\frac{1}{4}$°. 7. 5·74 ச. மீ. 8. 4·08 அங்.
9. 5·41 ச. மீ. 10. 3·39 அங். 11. 6·09 ச. மீ. 12. $25\frac{1}{4}$°.
13. 8·25. 14. 5·34. 15. 6·21. 16. 6.
17. 8·64 ச. மீ. 19. $52\frac{1}{2}$°. 20. $117\frac{1}{4}$°. 21. 3·08 ச. மீ.
22. 8·24 ச. மீ. 25. 4·26 ச. மீ. 27. 4·26.
28. 9·28 அல்லது 3·72. 29. 10·08 அல்லது 2·92.
30. 7·67. 31. 4·78. 32. 7·82. 33. 8·71. 34. 6·22 ச.மீ.

பக்கம் 202 பயிற்சி 41

1. கம. 2. யம. 3. நப, வப. 4. யம, நம.

5. கம, யப. 6. பய, கய, மய. 7. யம.

8. மய, யக, கம. 9. இல்லை ; ஓம் ; இல்லை, உச்சிகள் ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ளன. 10. 7. 11. 7 ச. மீ., 5 ச. மீ. 12. மத.

பக்கம் 203 பயிற்சி 42

9. பம. 18. யப.

பக்கம் 208 பயிற்சி 43

1. 1·8, 1·5, அங். 2. 3·5, 2·5, 3, அங். 3. 1·8, 1·6, அங்.

4. கந $= \frac{3}{7}$ கப, தந $= \frac{3}{7}$ மப. 5. 9, 8. 6. $7\frac{1}{2}$.

7. 18. 8. 16, 7·5, ச.மீ. 9. 6 அங். 10. 5·5 அங்.

11. 1·5 அங். 12. 5 அங். 13. $8\frac{1}{2}$ அடி. 14. இல்லை ; உயரம் 5 அடி.

பக்கம் 215 பயிற்சி 44

26. 17 அங்., 12 அங்.

பக்கம் 221 வாய்முறை உதாரணங்கள்

8. (i) மிக நெருங்கியிருக்குஞ் சோடிகள் ·01, ·04, ·07, ·09, அங். ;
(ii) மிகத்தொலைவிலுள்ள சோடிகள் 2·31, 1·84, 2·47, 2·59, அங்.

பக்கம் 223 பயிற்சி 45

6. 5·74 ச. மீ. 7. 8·61 ச. மீ. 8. 10·3 ச. மீ.

பக்கம் 240 பயிற்சி 47

1. 3·57 ச. மீ. 7. 4·75 அங்.

பக்கம் 250 பயிற்சி 48

21. 5 அங்., $1\frac{1}{4}$ அங்., **மந** விலிருந்து.

25. (i) **ய** வை மையமாகவுடைய ஒரு வட்டம்;

(ii) ஒரு நீள்வளையம்.

31. 4; 1.

மீட்டல் வினாத்தாள்கள், 1-34

பக்கம் 256

தாள் 1. **1.** 30°, 15°. **2.** 2 அங். **3.** 130°, 93°. **4.** 53°.
தாள் 2. **1.** 163°, $3\frac{1}{2}$ செங் ∠. **2.** $\frac{1}{2}$ அங். **3.** 99°.

பக்கம் 257

தாள் 3. **1.** 36°, 135°. **3.** 4·67 ச. மீ.
தாள் 4. **1.** 46°. **2.** 10·73 ச. மீ. **3.** 36°. **4.** இ + உ + எ.
தாள் 5. **1.** **ந, க, ம**; 75°; **ச, க, ப.** **2.** 36°. **3.** 8.

பக்கம் 258

தாள் 6. **1.** $6\frac{2}{3}$ செங் ∠. **2.** 108. **3.** 90 − ந − ய, ந ~ ய, பாகை
தாள் 7. **1.** 60°. **3.** 60.

பக்கம் 259

தாள் 8. **1.** 36, 288°. **2.** 50°, 72°.

3. $ய = \frac{6ந}{8 - ந}$; ந = 4, 5, 6, 7; ய = 6, 10, 18, 42.

தாள் 9. **1.** 68°.

பக்கம் 260

தாள் 10. **1.** 72°. **2.** அ + இ − உ. **3.** 36°.
தாள் 11. **1.** 110°.
தாள் 12. **2.** 120°; **கந, பத; நத, மப.**

பக்கம் 261

தாள் 13. **1.** 180 − 4ந, $\frac{1}{2}$ந, பாகை. **2.** அ + இ − உ.
தாள் 14. **1.** 72°. **2.** 26 செங் ∠.
தாள் 15. **1.** 20.

பக்கம் 262

தாள் 16. **2.** 108°.

தாள் 17. **2.** 54°.

பக்கம் 263

தாள் 18. **1.** 65. **2.** 3·26 அங்.

தாள் 19. **1.** 85°.

தாள் 20. **2.** 54°.

பக்கம் 265

தாள் 21. **1.** $67\frac{1}{2}$°. **2.** $45\frac{1}{4}$°.

தாள் 22. **2.** 4·10 ச. மீ.

பக்கம் 266

தாள் 23. **1.** 18°.

தாள் 24. **1.** 1·57 அங்.

பக்கம் 267

தாள் 25. **3.** **வச ; சத.**

தாள் 27. **2.** 7·62 ச. மீ. **3.** **யவ.**

பக்கம் 269

தாள் 29. **2.** 30°.

பக்கம் 270

தாள் 31. **3.** **மக, கய, யம.**

பக்கம் 272

தாள் 34. **2.** 3·73 ச. மீ.

பகுதி II

(பிரிவு 1)

பக்கம் 274 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. $4\frac{3}{8}$ சது. அங். ; 6·3 சது. அங். ; 3·6 சது. அங். ; $2\frac{1}{16}$ சது. அங்.
2. $\frac{1}{16}$ சது. மைல் ; 0·04 சது. மைல் ; 0·2 சது. மைல் ; 8 சது. அங்.

பக்கம் 277 பயிற்சி 49

1. 3·22 சது. அங். **3.** 20 சது. அங். **4.** 72 சது. அங்.
5. 36 சது. அங். **6.** 1·6 அங். **7.** 1 அடி.
8. $அ^2 + 2அஇ + இ^2$. **9.** அக + அந + அய + இக + இந + இய.
12. 8 சது. மைல் ; $\frac{1}{4}$ சது. அங். **13.** 0·6 சது. மைல் ; 20 சது. அங்.
14. 4·4 எக்கர். **15.** 21, 3, சது. அங். **16.** 7, 11, சது. அங்.
17. 24 சது. அங். **18.** 21 சது. அங். **19.** $17\frac{1}{2}$ சது. அங்.
20. $4\frac{1}{2}$, $23\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{2}$, சது. அங். **21.** 3900 சது. யார்.
22. 4 அலகுகள். **23.** 5 அலகுகள். **24.** 5·5 அலகுகள்.
25. 10 அலகுகள். **26.** 11 அலகுகள். **27.** 5 ச. மீ.
28. 3 அங். **29.** 3அ , 5அ , 30, சது. ச. மீ. ; 3·75.
30. 24, 12, 36, சது. அங். **31.** எஅ + உஇ = உஎ.
32. 48 அங். இற்கு 1 மைல் ; $\frac{1}{2}$ அங்.
33. 12·57 சது. அங்.; 3·14:1. **34.** 39 அலகுகள்.

பக்கம் 284 வாய்முறை உதாரணங்கள்

6. (iv) 15, 7·5, சது. அங்.
7. 24 சது. அங்., 12 சது. அங்., 3 அங்., 3·2 அங்.
8. 43·5 சது. ச. மீ. **9.** 15·0 சது. ச. மீ.

பக்கம் 289 வாய்முறை உதாரணம்

84 சது. அங். ; 11·2, 12, $12\frac{12}{13}$, அங்.

பக்கம் 290 பயிற்சி 50

1. 3·63, 4·53, ச. மீ.; 18·1 சது. ச. மீ.
2. 20 சது. ச. மீ.; 4, 4·8, அங். **3.** 17·5 சது. அங்; 10 ச. மீ., 4·8 அங்.
4. 15, 15, 5, சது. ச. மீ; $\frac{2}{7}$; △ **வகப.**
5. 96 சது. அங்., 9·6 அங். **6.** 24, 48, சது. அங்., 4·8 அங்.
7. 12 சது. அங்., 2·4 அங்.
8. 20, 17·5, 7·5, சது. அங்.; $3\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{8}$, $1\frac{7}{8}$, அங்.; 45 சது. அங்.
9. 26 சது. அங். **10.** 25·5, 58·5, சது. அங்.
11. 9 சது. ச. மீ.; 4·5, 3·6 ச. மீ. **12.** 4, 4·8, ச. மீ.; 53°, 8′.
13. 3·6, 4·5, ச. மீ. **14.** 10 அங். **15.** 4·8 அங்.
16. 7·5 சது. அங். **17.** 4 அங். **18.** 15 சது. அங்.
19. 5, 10, ச. மீ. **20.** 5·4 சது. அங். **21.** 126 சது. அங்., 12 அங.
22. 84 சது. அங்., 8 அங். **23.** 4·5, 4, ச. மீ.
24. 6, 4, அங். **25.** 4, 6, 8, அங். **26.** 6, 8, 4, சது. ச. மீ.
27. 48, 19·2, $8\frac{4}{13}$, $38\frac{10}{13}$, $17\frac{47}{65}$, சது. அங்.

பக்கம் 308 பயிற்சி 52

1. $37\frac{3}{4}°$ அல்லது $142\frac{1}{4}°$. **2.** 5·74 ச. மீ.
3. 5·69 ச. மீ. **4.** $47\frac{1}{2}°$. **5.** 51°. **6.** $38\frac{1}{2}°$.
7. 6 ச. மீ.; 41·6 சது. ச. மீ. **8.** 5·68 ச. மீ.
9. 2·06, 4·03, அங். **11.** 18 சது. ச. மீ. **12.** 29·1 சது. ச. மீ.
18. 4·8 ச. மீ. **19.** 1·56 அங். **20.** 2·90 அங்.
21. 46°. **22.** 5 ச. மீ.

பக்கம் 317 வாய்முறை உதாரணங்கள்

(i) இல்லை; (ii) ஓம்.

பக்கம் 317 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 16,16, 9, 9, சது.அங்.; 3·2, 1·8, 3, அங்.
2. 36, 36, 64, 64, சது. அங்.; 3·6, 6·4, 8, அங்.
3. 144, 25, 144, 25, சது.அங்.; 13 அங்.
4. 5 சது. அங்.; 2·24 அங்.
5. 3·16. **6.** 2·65. **7.** 25 சது. அங்.; $8\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, அங்.
8. $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0·866$, $\sqrt{3} = 1·732$.

பக்கம் 319 பயிற்சி 53

1. 17. **2.** 13. **3.** 3·61. **4.** 20.
5. 3·32. **6.** 2·83. **7.** 3, 5·20. **8.** 8, 6·93.
9. 6·46 அங். **10.** 16 அடி. **11.** 19·7 அடி. **12.** 15·8 மைல்.
13. 8·60 அங். **14.** 5·83 ச. மீ. **15.** 162 மைல். **16.** 10 ச. மீ.
17. 6 அங். **18.** 17 ச. மீ. ; 114 சது. ச. மீ.
19. 8·66 அங்., 45·6 சது. அங்.
20. 13 அங். **21.** 40 சது. ச. மீ. **22.** 4·77 அங்.
23. 60 சது. அங்., $9\frac{3}{13}$ அங். **24.** 48 சது. அங்., 9·6 அங்.
25. 4·47 ச. மீ. **26.** 15,000 மார். **27.** 3·61 அங். **28.** 3·32 அங்.
29. 5 அங். **30.** 3·61 அலகுகள். **31.** 5 அலகுகள்.
32. 210 சது. ச. மீ. **33.** 204 சது. அங். **34.** விரிகோணமானது.
35. கூர்ங்கோணமானது. **37.** 13 அங். **38.** $6\frac{1}{4}$ அங்.
39. $8\frac{1}{3}$ அங். **40.** 3·57 அங். **41.** 7 அங்.
42. $3\frac{1}{6}$, 3·87, ச. மீ. **43.** 8 அடி. 10 அங்.
44. $\text{அ}^2(\text{அ}^2 + \text{இ}^2)$, $\text{இ}^2(\text{அ}^2 + \text{இ}^2)$, சது. ச. மீ.
45. பரப்பு = அஇஉ(அ + இ); 70, 24, 74; 42, 40, 58; 112, 15, 113; இவை ஒத்த செங்கோண முக்கோணங்களின் பக்கங்கள்.
46. 16 அடி. **47.** 9 அங். **48.** 9 அடி.

பக்கம் 324 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 485, 566 ; 23·8 அடி. **2.** 9·11 ச. மீ.
4. 119 சது. அங். ; 10·5 அங். 7·21 ச. மீ. **6.** 27 சது. ச. மீ. ; 12 சது. ச. மீ. ;
8. 8 ச. மீ.

பக்கம் 326 பயிற்சி 54

1. 26·8 அடி. **2.** 8·66 அங். **3.** 8 அடி 9 அங்.
4. 4·24 அங். **5.** 18 அடி. **6.** $1\frac{5}{8}$ சது. அடி.
7. 260 சது. அடி. **8.** 13 ச. மீ. **9.** 9·16 அங்.
10. 8·94 அங். **11.** 5 அங். **12.** 4 ச. மீ. ; 5·83 ச. மீ.
13. 60 சது. அங். ; 11·7 அங். **14.** 12 ச. மீ.
15. 6·16 அங். **16.** 3 ச. மீ. **17.** 8 அங்.
18. 8 அங். **19.** 2·24 அங்.
20. 9·90, 7·07, 8·77, அங். **21.** 7·34 அங்., **22.** 2 அங்.

பக்கம் 336 மீட்டல் வினாத்தாள்கள், 35—50

தாள் 35. **1.** $\frac{1}{2}$ (180 – 3அ) பாகைகள். **2.** 2·66 அங்.

தாள் 36. **1.** 48°, 60° 72° ; 45°, 60°, 75° ; 40°, 60°, 80°.
3. $9\frac{1}{2}$ சது. அங்.

பக்கம் 337

தாள் 37. **3.** 3·54 அங்.

பக்கம் 338

தாள் 39. **1.** 36°. **3.** 4 அங்.

தாள் 40. **1.** நப, மந. **3.** 3·77 சது. அங்.

தாள் 41. **3.** $77\frac{11}{17}$, $33\frac{11}{13}$, அங். ; 2.

பக்கம் 339

தாள் 42. **1.** 15°. **3.** 3, 4·5, சது. அங்.

தாள் 43. **2.** (i) 39 சது. அங்., 7·5 அங்., 10·4 அங். ;
(ii) 7·79 சது. அங்.

பக்கம் 340

தாள் 44. **2.** $17\frac{1}{2}$ சது. அங்., $2\frac{1}{2}$ அங்.

தாள் 45. **1.** (i) 10·6 சது. அங். ; 4·31 அங்.

தாள் 46. **2.** 5 ச. மீ.

பக்கம் 342

தாள் 47. **1.** 12·5 ச. மீ. **4.** 2·83 அங்.

தாள் 48. **2.** 2, $3\frac{5}{9}$, ச. மீ. 3. 8·25 அங். ; 2 அங்., 8·25 அங்.

பக்கம் 343

தாள் 49. **1.** (i) அஇ ($அ^2 - இ^2$) சது. அங். ;
(ii) 17·3 சது. அங்., 4·33, 7·81 அங்.
4. 6·16 அங்.

தாள் 50. **1.** 10, 17·3, ச. மீ. **2.** 7·5 சது. ச. மீ., 5·83 ச. மீ.

பகுதி II (பிரிவு 2)

பக்கம் 346 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 3 ச. மீ. **2.** 9 அங். **4.** $9\frac{3}{8}$ ச. மீ.

பக்கம் 347 பயிற்சி 56

1. 13 ச. மீ. **2.** 4·47 ச. மீ. **3.** 11·5 ச. மீ.
4. வட்டம், ஆரை 6 ச. மீ. **5.** 8 ச. மீ.
6. 8·58, 0·583, ச. மீ. **7.** 13·0 அங். **8.** 11·3 ச. மீ.
9. 8 அங். **10.** 5·83 ச. மீ. **11.** 8அ அங். **12.** 8·94 அங்.
13. 9 அங். **14.** $8\frac{1}{3}$ ச. மீ., 11·1 ச. மீ. **15.** $7\frac{1}{24}$ அங்.
16. 3·46 ச. மீ. **17.** 5 அங். **19.** 5·38 அங். **20.** 6·5 ச. மீ.
21. 4·8 அங். ; 3·6, 6·4, அங். **22.** $\frac{1}{2}$ அங். **23.** 2, $2\frac{1}{2}$, அங்.

பக்கம் 369 பயிற்சி 58

1. 55°. **2.** 37°. **3.** 65°. **4.** 60°. **5.** 107°.
6. 105°. **7.** 72°. **8.** 40°. **9.** 128°. **10.** 30°.
11. 54°, 99°. **12.** 180 – $\frac{1}{2}$இ. **13.** 110°. **14.** 25°. **15.** 70°.
17. 124°. **18.** 105° அல்லது 5°. **19.** 100°, 110°.
21. 54°. **23.** 38°. **25.** 76°, 98°, 132°, 124°, 110°.
26. 8 ச. மீ. **27.** 5·29 ச. மீ. **28.** 8·94, 4·47, ச. மீ.
29. 2·12 அங். **30.** 2·45 அங்.

பக்கம் 390 பயிற்சி 60

1. (i) இல்லை, (ii) ஆம். **2.** (i) ஆம், (ii) இல்லை. **3.** 35°.
4. 45°. **5.** 40°. **6.** ∠ மதப = 50°, ∠ தபம = 65°.
8. 25°. **10.** 60°, 70°, 50°. **13.** 2 அங்.

பக்கம் 399 பயிற்சி 62

1. 18°. **2.** 12°. **3.** 105°. **4.** 135°. **5.** $\frac{1}{15}$.
6. $\frac{3}{4}$. **7.** 3 : 2. **8.** 35°. **9.** $\frac{2}{9}$. **11.** 3 : 2.
12. $53\frac{1}{3}$. **13.** 60. **14.** 50. **15.** 10·5, 6·98, ச. மீ.
16. 2·9 ச. மீ.

பக்கம் 400 பயிற்சி 63

1. 3·146. **2.** 25·1 அங். **3.** 22·0 ச. மீ. **4.** 628 யார்.
5. 1·7 (5) அங். **6.** 1·4 ச. மீ. **7.** 70 யார். **8.** 0·95 அடி.
9. 9·0 அங். **10.** 3·49 ச. மீ. **11.** 16·8 ச. மீ. **12.** 46°.
13. 4·3 ச. மீ. **14.** 3·14. **15.** 314 சது. அங்.
16. 50·3 சது. ச. மீ. **17.** 154 சது. அடி. **18.** 14 அங்.
19. 3·5 ச. மீ. **20.** 22·0 சது. அங். **21.** 5·89 சது. ச.மீ.
22. 4·57 சது. அங். **23.** 48·8 சது. அங். **24.** 45°, 105°, 30°.
25. 72°, 72°, 36°. **26.** $7\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{2}°$, 150° அல்லது $127\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{2}°$, 30°.
27. 45°, 75°, 60°. **28.** 46°, 37°. **29.** 87°, 108°.
31. 3 : 1. **33.** 16°. **34.** $\frac{5}{9}$.
35. 77·4 சது. ச.மீ. **36.** 2·5 ச. மீ. **37.** 7 அங்.
38. 5 அங்.

பக்கம் 413 பயிற்சி 65

1. 65°, 50°. **2.** 35°. **3.** 8 ச. மீ. **4.** 13 ச. மீ.
5. 110°. **6.** 68°. **7.** 72°. **8.** 117°.
9. 52°, 38°. **10.** 42°. **11.** 155°. **12.** 3 அங்.
13. 8 ச. மீ. **14.** 60°, 65°, 55°.
15. 128° ; 44°, 52°, 84°. **16.** 5 ச. மீ. **17.** 2·5 அங்.
18. 120°. **19.** 77°, 90°, 103°, 90°. **20.** 8, 2, ச. மீ.
21. 6, 1, அங். **22.** 12 ச. மீ. **23.** 17 ச. மீ. **24.** $2\frac{1}{6}$ அங்.
26. 16 அங்.

பக்கம் 425 வாய்முறை உதாரணங்கள்

6. 1·56 அங்.

பக்கம் 426 பயிற்சி 67

1. 56°. **2.** 36°. **3.** 68°, 65°, 47°.
4. 65°, 75°, 40°. **6.** 58°, 64°. **7.** 100°.
8. 63°, 54°, 63°. **9.** 94°, 8°. **10.** 54° அல்லது 99°.
11. 79°, 114°, 101°, 66°. **12.** 2அ + இ = 90.
13. ∠ கமவ = ∠ தவச = 75°. **14.** 72°, 65°.
15. 53°, 28°.

பக்கம் 435 வாய்முறை உதாரணங்கள்

4. 5·5, 6·5, 7, ச. மீ. **5.** 1·8, 1·4, 0·8, அங்.
6. 2, 1·5 , 1·2, அங். **9.** 2·1 ச. மீ. **10.** 1·75, 5·25, ச. மீ.

பக்கம் 437 பயிற்சி 69

1. 3 ச. மீ. **2.** 6 ச. மீ. **3.** $7\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, அங்.
4. 2·5, 1·5, 4·5, அங். **5.** 4·5, 3·5 2·5, ச. மீ.
6. 8, 4, 3, அங். **7.** 5·3, 3·6, 4·5, ச. மீ. **12.** $1\frac{7}{8}$ அங்.
13. 2 ச. மீ. **14** 32, 8, ச. மீ. **15.** 1·5 ச. மீ.
16. 4·45, 11·125, அங். **17.** 15 ச. மீ.
18. $5-3\sqrt{2}, = 0{\cdot}76$, அடி. **19.** $2\frac{1}{6}$.

பக்கம் 444 பயிற்சி 71

1. 4 ச. மீ. **9.** 12 ச. மீ. **10.** 19·1, 12, ச. மீ.
11. 5.45 ச. மீ. **12.** 5·59 ச. மீ.
14. $\sqrt{\{உ^2-(அ+இ)^2\}}$, $\sqrt{\{உ^2-(அ-இ)^2\}}$, அங்.
16. 7, 1, ச. மீ.

பக்கம் 456 பயிற்சி 72

1. 3·49 ச. மீ. **3.** 6·93 ச. மீ. **4.** 6·93 ச. மீ. **6.** 3·11 ச. மீ.
9. $உ < \frac{1}{2}(இ-அ)$. **14.** 0·65, 5·81, 1·94, 1·16, ச. மீ.
15. 4·61 ச. மீ. **16.** ஓம். **17.** 1·46 ச. மீ. **18.** 2·67 ச. மீ.
30. 2·66 ச. மீ. **31.** 1·56 அங். **32.** 5·80 ச. மீ. **33.** 8·13 ச. மீ.
34. 5·60, 2·14, ச. மீ. **35.** 6·07, 4·02, ச. மீ.
38. 4·16 ச. மீ. **40.** 3·2 ச. மீ. **41.** 1·80 ச. மீ.

பக்கம் 465 பயிற்சி 73

5. 20°.

பக்கம் 469 பயிற்சி 74

3. 6·65 அல்லது 1·35, ச. மீ. **4.** 2·63 ச. மீ.; ஓம். **6.** ஓம்.
8. 4·47 ச. மீ. **15.** 3·20 ச. மீ. **25.** 5·87, 2·23, ச. மீ.

பக்கம் 480 வாய்முறை உதாரணங்கள்

7. 2·299 ; 4·551. **8.** 4·081 ; 11·46. **9.** 82° 49′; 41° 24′.
10. 101° 32′ ; 34° 3′.

பக்கம் 481 பயிற்சி 76

1. விரிகோணம். **2.** கூர்ங்கோணம். **3.** விரிகோணம்.
4. விரிகோணம். **5.** 19, 10, அங். **7.** 5·85, 6·84, அங். ; 34·2 சது. அங். **8.** 1·375, 2·67, ச. மீ. ; 5·33 சது. ச.மீ.
9. 11, 6·93, அங். ; 34·6 சது. அங்.
10. 3, 8·48 (5), ச.மீ. ; 42·4 சது. ச. மீ. **11.** 1·2 ச. மீ.
13. 6·63 அங். **14.** $9\frac{5}{8}$ அடி. **15.** 4 ச. மீ. **16.** 6·5, 8·5, அங்.
17. 5·45 (5), 6·52, 7·97, ச. மீ. **18.** 10 அங். **19.** 12·7 ச. மீ.
20. 9·16 (5) ச. மீ. **21.** 11, 9, ச. மீ. **22.** 12·2 ச. மீ.
25. (3அ + இ) அங். **26.** $4\frac{2}{3}$ அங். **28.** $2\frac{1}{2}$ அங்.

பக்கம் 491 பயிற்சி 78

1. 4 அங். **2.** 10 ச. மீ. **3.** 12 ச. மீ. **4.** 4 அங்.
5. 24 சது. அங். **6.** 13 அங். **7.** 6 ச. மீ. **8.** $7\frac{1}{2}$ அங்.
9. 56 சது. ச.மீ. **10.** 8 அங். **11.** 3·2 ச. மீ. **12.** 1 ச. மீ.
16. 8, 7, 12, ச. மீ. **17.** 5, 3, ச. மீ. **18.** 6, 5·6, 15, ச. மீ.
19. 2, 4, 7·8, ச. மீ. **20.** 2·25 ச. மீ. **21.** 20 அடி.
22. $10\frac{2}{3}$, $8\frac{1}{3}$, ச. மீ. **23.** 3960 மைல். **24.** 3·54, 6·52, அங்.
25. $2\frac{1}{2}$ அடி. **26.** 34 அங். **27.** 6·5 ச. மீ. **28.** 3, 30, மைல்.

பக்கம் 504 பயிற்சி 80

1. 6·32 ச. மீ. **2.** 5·57 ச. மீ. **3.** 1·97 அங். **4.** 8·06 ச. மீ.
5. 4·58 ச. மீ. **6.** 8, 3. **7.** 7·37, 1·63. **10.** கம < 2 மப.

பக்கம் 507 பயிற்சி 82

2. ∠ மநப = எ ; ∠ பயத = உ ; ∠ பதய = ∠ மதந = ∠ மகப.
3. ∠ மதப. **4.** அ + இ. **6.** முடியாது , மந ∥ பய.
7. முடியாது, வத ∥ பய. **8.** ∠ நமப = 3 ∠ நபம.
9. 3 ∠ பதவ − ∠ மதவ = 180°. **10.** வய ∥ மக ; வந ∥ பக ; பய = யக.
11. ∠ மதக − $\frac{1}{2}$ ∠ மபக = 90°. **12.** $\frac{1}{2}$ (∠ கவம − ∠ கமவ).
24. இச. **37.** மிகைநிரப்பிகள்.
38. 99°, 24°, 33°. **39.** கம ∥ தப ; $60° - \frac{1}{3}\theta$; $120° - \frac{2}{3}\theta$; $\frac{4}{3}\theta - 60°$.
40. கய. **41.** கமபத ஒரு செவ்வகம்.

பக்கம் 512 மீட்டல் வினாத்தாள்கள், 51—80

தாள் 51. **2.** 55·2 சது.அங். **3.** 14 ச.மீ.

தாள் 52. **3.** 4 அங்.

தாள் 53. **2.** 2·9 ச.மீ. **3.** 162°.

பக்கம் 513

தாள் 54. **2.** 4·57 ச.மீ.

தாள் 55. **2.** 12 சது. ச.மீ. ; 4·8 ச.மீ. **3.** 47°.

பக்கம் 514

தாள் 56. **2.** 3·25 ச.மீ.

தாள் 57. **2.** 29·1 சது. ச.மீ. **3.** 37°.

பக்கம் 515

தாள் 58. **3.** 3·6 அங்.

தாள் 59. **2.** 17·14 அங்.

பக்கம் 517

தாள் 61. **2.** 22°.

தாள் 62. **2.** 55°, 40°.

பக்கம் 518

தாள் 63. **2.** 5, 7, அங்.

பக்கம் 519

தாள் 65. **1.** 13 அங். **3.** 36°.

தாள் 66. **2.** $உ = \frac{அ^2}{4உ}$. **3.** 60°.

தாள் 67. **2.** 15°.

பக்கம் 520

தாள் 68. **3.** 5·66, 8·48 (5), ச.மீ.

தாள் 69. **2.** 51°.

பக்கம் 522

தாள் 72. **2.** (90 – 2அ) பாகைகள்.

பக்கம் 523

தாள் 73. **3.** 43·2 அங்.

தாள் 74. **3.** 5 அங்.

தாள் 75. **4.** 8 அங்.

பக்கம் 524

தாள் 76. **3.** 18·75 ச.மீ.

தாள் 77. **1.** 3. **2.** 6·43 ச.மீ. **4.** 12 ச.மீ.

தாள் 78. **3.** 7 ச.மீ.

பக்கம் 525

தாள் 79. **1.** (4, 3) ; (6, 5).

தாள் 80. **3.** 14, 16, ச.மீ. **4.** 12·65, 6·92, அங்.

பகுதி III

பக்கம் 530 பயிற்சி 83

1 3 : 8. **2.** 9 : 4. **3.** 2 : 3. **4.** $7\frac{1}{2}$.

5. $12\frac{1}{2}$. **6.** ± 12. **7.** 10. **8.** உ:ந = ய:எ.

9. நக : நத = நத : நம. **10.** கம : வய = யந : மப.

11. 3·2 அங். **12.** 14 அங். **13.** 2·4 அங்.

14. 14·1, 14·7, ச.மீ. **16.** 16 : 1. **17.** 2 : 5 வெளிப்புறமாக, 1 : 2 உட்புறமாக. **18.** $\frac{2இஉ}{உ+எ}$, $\frac{2இஉ}{உ\sim எ}$, அங்.

19. (அ∼இ) : 2(அ + இ). **20.** எ : உ, இ : எ; அ : உ.

21. (உ + எ) : எ ; உ : (உ + எ). **25.** அ + உ + ஒ. **26.** எ − வ.

27. 2இ + 7எ − 5வ. **28.** 1:11 ; 4:7 ; 5:3 ; 1:1, 1:11 ; 1·6 அங்.

29. அ:(அ + இ + உ + எ + ஒ) ; (இ + உ + எ) : (உ + எ + ஒ) ; (அ+இ) : (அ+இ+உ+எ+ஒ), (உ+எ) : ஒ ; $\frac{ய(அ+இ+உ+எ)}{இ+உ}$ அங்.

30. 1:(இ − 1). **31.** 2அஇ : ($அ^2 \sim இ^2$) ; (அ ∼ இ) : (அ + இ).

32. கய ; நய ; மத.

பக்கம் 533 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 3 : 8, 3 : 8. **2.** 7:11, 7:11. **3.** 14,16 ; $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{15}$.

5. $\frac{எ}{எ+ஒ}$, $\frac{எ}{எ+ஒ}$.

பக்கம் 536 பயிற்சி 84

7. 2·1 ச.மீ. **8.** 9·6 ச.மீ. **9.** 6,10·5, ச.மீ.

13. 12,10, ச.மீ. **14.** $4\frac{1}{6}$ அங். **15.** 9,8, ச.மீ.

16. 25,12·8, ச.மீ. **17.** $6\frac{2}{3}$, 9, ச.மீ. **18.** 20,15, ச.மீ.

19. 1·6 அங். **20.** 5·2 ச.மீ. **21.** 2·8,3·5, அங்.

25. 5 : 1 ; 2 : 1.

பக்கம் 547 பயிற்சி 86

1. $2\frac{1}{4}, 11\frac{1}{4}$, அங். **2.** 3,15, ச.மீ. **3.** 8 அங். **4.** 3·35 அங்.

6. $\frac{\text{அஉ}}{\text{இ}+\text{உ}}$ அலகுகள். **7.** 12 அங். **8.** 9 சது.ச.மீ. **10.** 1 அங்.

11. $9\frac{3}{4}$ சது. அங். **12.** 3 சது.அங். **13.** (இ + உ): அ. **14.** $3\frac{3}{7}$ ச.மீ.

15. 3 : 2.

பக்கம் 553 பயிற்சி 87

18. 14·4 ச.மீ.

பக்கம் 558 பயிற்சி 88

7. 7·5 ச.மீ. **8.** 7·2 ச.மீ. **9.** 4·2. **10.** $4\frac{5}{7}, 6\frac{2}{7}$.

11. 2·89. **12.** 2·63. **13.** 10·26. **16.** 2·88 ச.மீ.

பக்கம் 560 வாய்முறை உதாரணங்கள்

4. (i) முக்கோணங்கள் **கமப, சவத, வ′த′ச′**; (ii) 7·2,6,15,22·5 ;
(iii) முக்கோணங்கள் **கமப, ப′ம′க.′**

6. (i) முக்கோணங்கள் **கநப, தநம**; (ii) 6.

8. முக்கோணங்கள் **கமப, கநத.** **9.** முக்கோணங்கள் **வகம, வபத**;
முக்கோணங்கள் **சகத, சபம.**

பக்கம் 564 பயிற்சி 89

1. $3\frac{1}{3}$,2, அங். **2.** 3·6, 2·4, அங். **3.** 6, $6\frac{2}{3}$, அங்.

4. 3·6,3·6, அங். **5.** 1 : 4. **6.** 3 : 2. **7.** 3, $1\frac{2}{3}$, ச.மீ.

8. 12,13·5, ச.மீ. **9.** 2,2·5, ச.மீ. **10.** 8 ச.மீ. **11.** 120 அடி.

12. 4 அடி. **13.** 14·4 அங். **14.** 66 அடி. **15.** 5 ச.மீ.

17. 22·5 சது. அங். **18.** $8\frac{1}{3}$ சது. அங். **19.** 7·2 அங்.

20. 12 அங். **21.** 6,6, ச.மீ. **22.** 10,7·5,7·5, ச.மீ.

23. 10,12,5·5,14, ச.மீ. **24.** 4,2, ச.மீ. **25.** $2\frac{1}{3}$ அங்.; 7அ + 5இ = 35.

26. 2·5,20, அங். **28.** 6 ச.மீ. **29.** 3·5,11, அங்.

30. 2·4 அங். **31.** $\frac{3}{4}, 1\frac{1}{8}$, அங். **32.** $6\frac{1}{2}$ அங்.

33. $2\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}$, அங். **34.** $5\frac{1}{3}, 3\frac{5}{9}$, அங். **35.** 18,8, ச.மீ.

36. 6,11, அங். **37.** $6\frac{2}{3}$ அடி. **38.** $8{\cdot}6 \times 10^5$ மைல் ;
$2{\cdot}3 \times 10^5$ மைல். **39.** 12·8,5, அடி. **40.** $8\frac{1}{3}, 4\frac{1}{2}$, அங்.

41. 4 அங். **43.** 2·9 அங். **44.** $3\frac{3}{11}$ அங். **45.** $3\frac{1}{8}$ ச.மீ.

46. 15 அடி. **47.** 7 அங். **51.** $\frac{\text{உஎ}}{\text{அ}-\text{உ}}$.

பக்கம் 578 பயிற்சி 90

22. $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{5}$. **23.** $\frac{3}{4}$, 3.

பக்கம் 584 வாய்முறை உதாரணங்கள்

3. 11 ச.மீ. **4.** 3 ச.மீ. **5.** 5 ச.மீ.

பக்கம் 585 பயிற்சி 92.

1. 10·5 ச.மீ. **2.** 3·5, 6·75, ச.மீ. **3.** 6 ச.மீ.
4. 18 ச.மீ. **5.** 2.31 அங். **6.** $21\frac{9}{11}$ அங். **7.** 6 ச.மீ.
8. $1\frac{12}{13}$ அங். **9.** 10 ச.மீ. **10.** $4\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, அங்.

பக்கம் 593 பயிற்சி 93

1. 7·07, 13·04, ச.மீ. **4.** 9 ச.மீ. **5.** $2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{6}$, அங்.
7. 4 : 5. 8. $\frac{\text{அ}^2\text{உ}}{\text{இ}^2-\text{அ}^2}$, $\frac{\text{அஇஉ}}{\text{இ}^2-\text{அ}^2}$.
9. 0·707 அங். **10.** 13 அங். **11.** $5\frac{1}{2}$ அங்.

பக்கம் 600 பயிற்சி 95

1. 6·32 அங். **2.** 6·16 ச.மீ. **3.** 5·57. **4.** 5·29 ச.மீ.
5. 2·16 அங். (அல்லது –1·36). **6.** 4·76 ச.மீ. **7.** 3·95 ச.மீ. **8.** 7·36
9. 5·00 ச.மீ. **10.** 5·25 ச.மீ.
11. 5·5 ச.மீ. **12.** 1·03 அங்.

பக்கம் 602 வாய்முறை உதாரணங்கள்

1. 9 ; 25 ; 3 : 5, 9 : 25. **2.** 5·6 ச.மீ ; 100 : 49.
3. 25 : 16.

பக்கம் 604 பயிற்சி 96

1. 4 : 9. **2.** 15 : 1. **3.** 16 : 9. **4.** 3 : 1.
5. 100, 36, 225. **6.** 1 : 8 ; 1 : 3. **7.** 1:16; 1:15. **8.** 5 : 3 ; 25 : 9.
9. 12 அங். **10.** 4·2 ச.மீ. **11.** 12 சது.அடி. **12.** 40 ஏக்.
13. $101\frac{1}{4}$ சது.அடி. **14.** 9 அடி. **15.** $5\frac{1}{3}$ ப. **16.** 1000.
17. $4\frac{17}{27}$ கு. **18.** 512 இறு. **19.** 1·024 இறு. **20.** 6 அங்.
21. 2 சி. 3 பெ. **22.** $9\frac{13}{27}$ நிமி. **23.** 5 அங். **24.** 16:4:3:9.
25. 28 : 12 : 30 : 30 : 75.

பக்கம் 617 பயிற்சி 98

2. 3·63 ச.மீ. **3.** 2·27 அங். **4.** 2·68 அங். **5.** 4·55 ச.மீ.
11. 10 ச.மீ. **16.** 7·60 ச.மீ. **17.** 6·60 ச.மீ. **18.** 5·17 ச.மீ.
19. 4·57 ச.மீ.

பக்கம் 620 மீட்டல் வினாத்தாள்கள், 81—96

தாள் 81. **1.** 8, 7. **3.** 3 : 4 ; $5\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, ச.மீ.

பக்கம் 621

தாள் 82. **1.** **யக** = 60 அடி 2 அங். ; **வக** = 25 அடி $5\frac{1}{2}$ அங்.
3. $9\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, அங். ; 14, 40, ச.மீ.

பக்கம் 622

தாள் 83. **1.** 11 அடி.
தாள் 84. **3.** 15, 9, $7\frac{1}{2}$, $22\frac{1}{2}$, ச.மீ. ; $6\frac{3}{4}$ அங்.

பக்கம் 623

தாள் 85. **3.** 2 : 3, 4 : 1, 1 : 3.
தாள் 86. **1.** 7 ச.மீ., 6·49 (5) சது.ச.மீ.
3. (i) 1 : 2, 3 : 1, 1 : 12 ; (ii) 5 : 4, $3\frac{1}{3}$ ச.மீ.

பக்கம் 624

தாள் 87. **3.** 24, 10·8, ச.மீ ; 24·4 அங்.
தாள் 88. **1.** 3·97, 4·5, 0·5 அங். **3.** 9 ச.மீ. ; 71 : 360.

பக்கம் 626

தாள் 89. **2.** 4·47 அங்.
தாள் 90. **1.** 11, 9, அங். **2.** 9, $6\frac{1}{2}$, அங்.

பக்கம் 627

தாள் 91. **2.** $5\frac{1}{3}$ சது. அங்.
3. $3\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$.
தாள் 92. **3.** $5\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{11}$, அங். ; $1\frac{1}{2}$ அங்.

பக்கம் 629

தாள் 93. **3.** 17, 7, 11.
தாள் 94. **2.** 3, 2·22, ச.மீ. **3.** வட்டம், ஆரை $2\frac{2}{3}$ ச.மீ.

பக்கம் 630

தாள் 95. **2.** 7·49, 9·15, 1·66, அங். ; 4·8 ச.மீ.