புள்ளிவிபரவியல்

விவரணப் புள்ளிவிபரவியலும்
நிகழ்தகவும்

77	65	83	55	58	60	33	85	52	69
63	48	74	77	67	71	78	35	50	35
85	54	59	88	45	80	43	55	91	57
73	39	68	67	75	41	66	98	48	89
65	94	65	54	88	93	42	67	66	73

பாலசிங்கம் பத்மநாபன்

STATISTICS

DESCRIPTIVE STATISTICS

&

PROBABILITY

B. PATHMANAPAN B. A., Dip-in Maths
Asst. Lecturer
Dept. of Economics, Political Science,
Commerce & Statistics
University of Sri Lanka
Peradeniya Campus

First Edition: February 1977
Printers: Saiva Prakasa Press, Jaffna

Price: 10/=

அணிந்துரை

திரு. பா. பத்மநாபன் எழுதிய புள்ளிவிபரவியல் பற்றிய நூலுக்கு அணிந்துரை எழுதுவதில் நான் பெருமிதமடைகின்றேன். திரு. பத்மநாபன் இலங்கைப் பல்கலைக்கழகப் பேராதனை வளாகத்தின் முன்னைநாள் மாணவரும் இன்று பொருளியற் துறையில் என் சகபாடியுமாவர். இந்நாட்டில் உயர் கல்விக்கு பேராதனை வளாகத்தின் பங்களிப்பாக திரு. பத்மநாபனின் நூல் விளங்குகிறது.

புள்ளிவிபரவியல் பற்றிய பாடநூல் எழுதுவது சுலபமல்ல. பல கட்டுப்பாடுகள் பற்றிய உள்ளுணர்வும் பாடத்தின்பால் தீவிர ஈடுபாடும் இதற்கு அத்தியாவசியம். இத்துறைக்கு திரு. பத்மநாபனின் பங்களிப்பு அவருடைய ஆர்வத்தினதும் தெளிந்த சிந்தனையினதும் விளைவாகும். அவர் பொருளாதாரம், கணிதம் ஆகியவற்றில் பட்டதாரியாவர். அதுவே புள்ளிவிபரவியல், பொருளியலளவை ஆகிய விசேட துறைகள் பற்றிய விளக்கம் அளிக்க அவரை தகைமையுடையதாக்கியது.

புள்ளிவிபரவியல் பற்றிய நூல் இந்நாட்டில் இல்லாத நீண்ட காலக் குறையை திரு. பத்மநாபனின் நூல் தீர்த்துவைக்கிறது. இது வாசிக்க இலகுவானதாகவும், பொருள் ஆழம் மிக்கதாயும், பரந்துபட்டதாகவும் எழுதப்பட்டுள்ளது. இப் பெருமுயற்சியை நான் பாராட்டுவதுடன் இதுபோன்ற பல நூல்கள் அவருடைய சீரான சிந்தனையில் உருவாகும் என்றும் நம்புகிறேன்.

இலங்கைப் பல்கலைக் கழகம்
பேராதனை வளாகம்
பேராதனை

எஸ். இராசரத்தினம்
தலைவர்
பொருளியல்/புள்ளிவிபரவியற்றுறை

என்னுரை

இன்றைய சமுதாயம் நவீன தொழினுட்பவியலிற் திளைக்கிறது; துரித முன்னேற்றமடைந்து வருகிறது. புள்ளிவிபரவியல் இல்லையென்றால் நவீன தொழினுட்பவியலும் இல்லை. ஏன்? இயற்கை, பௌதிக, சமூக, விஞ்ஞான ஒழுங்குகள் யாவற்றிலும் புள்ளிவிபரவியல் வியாபித்து நிற்கிறது. இவ்வறிவு இன்றைய உலகில் அத்தியாவசியமானது.

புள்ளிவிபரவியல் கணிதத்தின் ஒருபகுதியாக பாடசாலைகளில் போதிக்சப்படுகிறது. ஆயினும் இது ஒரு தனித்துறையேயாகும். பாடசாலை மாணவருக்கு மாத்திரமன்றி, ஆசிரியர்கள், தொழில் நுட்பக்கல்லூரி மாணவர்கள், பல்கலைக்கழக மாணவர்கள், வெளிவாரிப் பட்டப்படிப்பு பயிலும் மாணவர் ஆகியோருக்கும் ஆசிரியரின் உதவியின்றி தாமாகவே பயில விரும்புவோருக்கும் தமிழ் மொழி மூலம் ஒரு நூலின் அவசியம் பற்றிய உணர்வு இந்நூலின் தோற்றத்துக்குக் காரணம்.

இந்நூலிற் கையாளப்பட்டுள்ள கலைச்சொற்கள் அரசகரும மொழித் திணைக்களத்தாரால் அங்கீகரிக்கப்பட்டவை. குழப்பங்களைத் தவிர்க்கவும் எல்லோரும் கையாளும் சொற்களின் ஒருமைப்பாடு கருதியும் இச்சொற்கள் பொருத்தமானவையாகக் கருதப்பட்டன.

புதிய துறையில் இக்கன்னி வெளியீட்டின்போது என்மனத்தில் நிழலாடும் சிலரை நினைத்துப்பார்ப்பது பொருத்தமாயிருக்கும்.

என் உடலையும் உள்ளத்தையும் வளர்த்தெடுத்து, என் கல்வி முன்னேற்றத்திற்கு அத்திவாரத் தளமமைத்துக் கொடுத்து, என் முயற்சிகள் யாவற்றின் பலாபலன்களையும் விளைவுகளையும் கண்ணுங் கருத்துமாய் அவதானித்து உளம் மகிழும் அன்னை இச்சந்தர்ப்பத்தில் என் அஞ்சலிக்கு உரியவர்.

என்னைச் சான்றோனாக்க தியாகம்பல புரிந்தது மட்டுமல்லாமல், கொடுத்தால் குறையாத கல்விச் செல்வத்தை பிறரோடு

பங்குபோட என்னை ஊக்கிய தந்தைக்கும் தலை வணங்குகின் றேன்.

தாய் மொழி மூலம் கல்வி என்ற நிலை இந்நாட்டில் உருவான பின் அதைச் செயல்படுத்த உழைத்த கல்விமான்களுள் முன்னணி வரிசையில் இலங்கைப் பல்கலைக்கழக யாழ்ப்பாண வளாக முன்னைநாள் விஞ்ஞான பீடத் தலைவர், கணிதப் பேராசிரியர், அமரர் பே. கனகசபாபதி அவர்களைச் சிறப்பாகக் குறிப்பிடலாம். தமிழ் இளை ஞர் சமுதாயத்துக்கு அவர் ஒரு சற்குரு- வழிகாட்டி. பல்கலைக் கழக மாணவருக்கு ஒரு தந்தைபோல வாழ்ந்தவர். அவர் அன்பே உருவானவர், பண்பே வடிவானவர், சாந்தமும் எளிமையுமே தோற்றமானவர், பொறுப்புணர்ச்சி மிக்கார், வீண்பொழுது போக் கார், கடமையே கண்ணுயினுர், சேவையையே யோகமாகக் கொண்ட வர், உல்லாசத்தை நோக்கார், ஆடம்பரத்தினையும் அறியார். மாணவர் நலனையே கருத்திற் கொண்டு பல உயர்ந்த இலட்சி யங்களுடன், நாள் பூராவும் அயராத தன்னலமற்ற சேவை புரிந்த பெரியார் அவர். பல்கலைக்கழகப் பணியாற்றிய பேராசி ரியர் பாடசாலைக் கல்வியிலும் சேவை செய்யத் தவறவில்லை; ''தமிழ் இளைஞன்'', ''ஊற்று'' ஆகிய அறிவியல் ஏடுகளில் சிக்கலான கணிதப் பகுதிகளை எளிமையாக வடித்துத் தந்தவர்.

தம்மிடம் உதவி நாடிச் சென்றவருக்கு இல்லையென்று சொல்லி யறியாத பேராசிரியர் இந்நூலாக்கத்திற்கும் உறுதுணையாயிருந் தவர். அன்புரிமையோடு ''நீங்கள் உதவவேண்டும்'' என்று கேட்டதற்கமைய இந் நூலிலுள்ள ஒவ்வொரு வரியும் அவர் மேற்பார்வையில் உருவானவை. அவர்கூறிய அனுபவமுதிர்ச்சி மிக்க ஆலோசனைகள் இந்நூலுக்குத் தனிச் சிறப்பையளித்துள்ளன.

பெரியவருக்கே முதற் பிரதியைக் கையளிக்க இருந்தேன். ஆனல்...... இப்படைப்பையே அவருக்குமாக அர்ப்பணிக்க வேண் டியதாகிவிட்டது. அவர் மறைவு மாணவர் மத்தியில் ஒரு வெற்றி டத்தை ஏற்படுத்தியுள்ளது. அவர் காட்டிய அன்பு, கொண்ட புகழ், ஆற்றிய சேவைகள் என்றென்றும் மாணவர் மத்தியில் நீங்கா நினைவாய் நிலைத்து நிற்கும். அவருக்கு இனி நன்றி கூறுவது அர்த்தமற்றது. அவருடைய இலட்சியப் பாதையில் அடியெடுத்து வைப்பது தான் நாம் அவருக்குச் செலுத்தக் கூடிய கைம்மாறு.

அவர் வணங்கிய தெய்வம் அவரை அழைத்துக் கொண்டது. அவர் நித்தியானந்தப் பேறு பெற்றுக் கொண்டார்.

இந்நூலிற்கு அணிந்துரை தந்து கௌரவித்த இலங்கைப் பல்கலைக்கழக பேராதனை வளாக பொருளியல், புள்ளிவிபரவியற்றுறைத் தலைவர் எஸ். இராசரத்தினம், என்மொழி நடையைச் செம்மைப்படுத்திய பேராசிரியர் கலாநிதி ஆ. வேலுப்பிள்ளை, ஆலோசனைகள் வழங்கிய விரிவுரையாளர்கள் செ. வே. காசிநாதன், சி. ஸ்ரீசரன் ஆகியோர், கையெழுத்துப் பிரதியாக்கம் செய்து தந்த பழைய மாணவர்கள், பலவித ஒத்தாசைகள் புரிந்த நண்பர்கள்-குறிப்பாக திரு. உருத்திரானந்தன்- எல்லோருக்குமே நான் கடமைப் பட்டவன்; நன்றியுடையேன்.

கூலிக்கு வேலையென்றில்லாமல் அழகுற அச்சிடுவதில் அக்கறை காட்டிய சைவப்பிரகாச அச்சியந்திரசாலையினருக்கும் என் நன்றி யுரியதாகும்.

இது முழுமையானதல்ல. குறைபாடுகள் அற்றதுமல்ல. நல்லதைக் கண்டால் தட்டிக் கொடுங்கள். குற்றங்கண்டால் கூசாமல் கூறுங்கள். மறுபதிப்புகளிலோ, வேறு வெளியீடுகளிலோ அவற்றைக் களைய அறிஞர்களின் ஆலோசனை அவசியமன்றோ!

எல்லாவற்றிற்கும் மேலாக என்னை ஆளாக்கியவர் என் சகோதரி. ஆரம்பக் கல்வியிலிருந்து உயர் கல்விவரை ஊக்கப் படுத்தியவர் அவர். அவரே எனக்கு எல்லாம்- அளவற்ற அன்பினால் தாய், தந்தை, சகோதரர்களைப் பிணைத்தவர். இது வெளியாவதைக்கண்டு பூரிப்பும் புளகாங்கிதமும் அடைய வேண்டிய அவர் இன்று இல்லை. அவருக்கு இந்நூலைக் காணிக்கையாக்குவதில் பேருவகை யடைகிறேன்.

''பத்மகிரி''
தலையாழி
கொக்குவில் — 22-2-77

மா. பத்மநாபன்

25/-

என்னை இத்துறையில் கற்க வழிகாட்டிய
என் அக்காள், பேராசிரியர்
ஆகிய இருவருக்கும்

பொருளடக்கம்

*குறியீடுகள்

$\overline{X}$ — X கீறு (X Bar)

$\sum$ — கூட்டுத்தொகை

$\cup$ — ஒன்றிப்பு

$\cap$ — இடைவெட்டு

$\supset, \subset$ — உள்ளடக்கம்

ϕ — (f) பை

Δ — சிக்மா (Sigma)

$X < Y$ — X சிறிது Y

$X > Y$ — X பெரிது Y

$X \leq Y$ — X சிறிது அல்லது சமன் Y

$X \geq Y$ — X பெரிது அல்லது சமன் Y

* இந்நூலில் எடுத்தாளப்பட்ட குறியீடுகளுக்கான விளக்கம்.

1 புள்ளிவிபரவியல்: அறிமுகம்

STATISTICS: INTRODUCTION

அன்றாட வாழ்க்கையில் ஏற்படும் நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் எண்ணிக்கையுடனும் அளவீடுகளுடனும் பிணைக்கப்பட்டிருப்பதால் ஆராய்ச்சியாளர்களும் நிர்வாகிகளும் பெருந்திரளான விபரங்களின் மத்தியிலிருந்து கொண்டேயே தமது ஆராய்ச்சிகளையும் நிர்வாகத்தினையும் மேற்கொள்வதைக் காணமுடிகின்றது. இவ்விபரங்கள் பற்றிய முடிபுகள் புள்ளியியல் முறைகளைக் கடைப்பிடித்தே பெறப்படுகின்றன. எனவே, மனிதனது செயல்களையும் இயற்கை நியதிகளையும் தொகுப்புகளாக வகைப்படுத்தியும், காரணகாரிய தொடர்புபடுத்தியும், தர்க்கரீதியில் ஆராய்வதே புள்ளியியல் முறைகளின் அடிப்படைக் குறிக்கோளாகும். அதாவது, பெருந்திரளான விபரங்களின் செறிந்த பொழிப்பாகவே புள்ளிவிபரங்கள் பயன்படக் காண்கின்றோம். விபரங்கள் என்னும்போது அவை ஏதோ ஒரு பண்பினைக் குறிக்கும் வெவ்வேறு பெறுமானங்களாகும். புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாண்டு அவ்விபரங்களைப் பற்றிய பொதுவான சில முடிபுகளை எவ்வாறு காண்பது என்பதனை நோக்குமுன் மேற்குறிப்பிட்ட விபரங்கள் எவ்வாறு சேகரிக்கப்படுகின்றன என்பதையும் நோக்குதல் வேண்டும். விபரங்களைச் சேகரிக்குமுன், சாத்தியமான விபரங்களுள் எமக்கு அவசியமான விப

ரங்கள் எவையென நிர்ணயிப்பது, எவ்வாறு என்பதனையும் புரிந்து கொள்ளல் வேண்டும்.

புள்ளிவிபரவியல் ஆராயும் எந்த விடயத்தையும், ஒரு முழுத் தொகுதியெனக் கொண்டால் அம்முழுத் தொகுதியிற் பல்வேறு உறுப்புகள் இருத்தல் இயல்பு. தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் பெருந்திரளான பொருள்களாகவோ, நிகழ்ச்சிகளாகவோ இருக்கலாம். உதாரணமாக,

(i) பல்கலைக்கழகமொன்றிலே பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) தாயக்காயொன்றைத் தொடர்ந்து எறியும்போது பெறப்படும் விளைவுகள்.

மேலே குறிப்பிட்ட முதலாம் உதாரணத்தில் முழுத் தொகுதியானது முடிவுள்ளதாகவும், இரண்டாம் உதாரணத்தில் முழுத் தொகுதி முடிவற்றதாகவும் காணப்படுகின்றது. மேலும் ஒரு முழுத் தொகுதி உண்மையான உறுப்புகளாலானதாயோ அன்றி கற்பனையாலுருவாக்கப்பட்டதாயோ இருக்கலாம். நடைமுறையில் நிகழ்ச்சிகளை உண்மையாகவே நிகழும்படி செய்து அவற்றைக் கற்பனையால் உருவாக்கக்கூடிய முழுத்தொகுதியின் பகுதிகளாகக் கொண்டு புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகள் நடைபெறுகின்றன.

புள்ளிவிபரவியலில் வரும் முழுத்தொகுதிகளிலடங்கிய தரவுகள் பெரும்பாலும் ஏராளமாயும், சிக்கலானவையாயும், வகுப்பாக்கப்படாதவையாயும் காணப்படுவதால் அத்தரவுகள் அனைத்தையும் சேகரித்தல் இயலாத காரியமாகும். அண்மைக் காலத்தில், தரவுகளைச் சிறந்த முறையிலே திரட்டுவதுபற்றிய கல்வியில் அதிக முன்னேற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன. அந்நாட்களில் பொது நிறுவனங்களாலும், தனியார் நிறுவனங்களாலும் கையாளப்பட்ட முறைகளை இன்று நாம் திட்டமில்லாத முறைகள் என்று கூறுகின்றோம். எவ்விபரங்கள் தனியார், பொதுத் துறைகளிலிருந்து எளிதாகக் கிடைத்தனவோ அவை யாவும் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டன. அவற்றிலே காணப்படும் பிழைகளைப்பற்றியோ, அன்றிக் குறித்த நோக்கத்திற்கு அவை தகுந்தனவா என்பதுபற்றியோ சிந்திக்காமலே திரட்டப்பட்டன. ஆனால், இப்பொழுது புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிகள் பெறப்பட்ட தரவுகளுடன் மட்டும் நின்றுவிடாமல் நன்கு திட்டமிட்டுக் குறிக்கோள்களுக்கு ஏற்றவகையிற் திரட்டப்பட்ட விபரங்களையும் பயன்படுத்துகின்றன.

இன்று ஆட்சியாளர்களாலும் சமூக, பொருளியல் அறிஞர்களாலும் கையாளப்படும் பலவிதப் புள்ளிவிபரங்கள் பெரும்

பாலும் எழுமாற்று முறையினுற் றிரட்டப்பட்டவையாயிருக்கும். எழுமாற்று முறையின் பயன்பாட்டைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்: முழுத்தொகை மதிப்பீட்டு முறையில் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றை யும் பரிசீலனைக்கெடுத்து அவற்றுக்குள்ள பண்புகளனைத்தையும் ஆராய்வர். மக்கட்கணிப்பு இதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும். இம்முறைக்கு மாருக மாதிரியெடுப்பு முறையில் ஒரு முழுத் தொகுதியின் தன்மைகளை அறிய அத்தொகுதியிலிருந்து உறுப்பு கள் சிலவற்றை எழுமாருக எடுத்து முழுத் தொகுதியின் பண்பு களை அறிய முயல்வர். இங்கு எழுமாருய் எடுக்கப்படும் கூறு மாதிரி (Sample) எனப்படும். இவ்வாறு மாதிரிக் கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுத்து முழுத்தொகுதியின் பண்புகளை அறியமுயலும் முறை எழுமாற்று மாதிரியெடுப்பு முறை எனப்படும்.

நடைமுறையில் ஒரு முழுத் தொகுதியின் குணதிசயங்களைப் பற்றி அறிவதற்கு அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பரிசீலனைசெய்து முடிவுக்கு வருவது இயலாத காரியம். ஏனெனில், இம்முறை அதிக பணச் செலவையும், காலதாமதத்தையும் ஏற்படுத்தும். அம்முழுத்தொகுதி பற்றிய தகவல்களை அத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் மாதிரி, தெரிவிக்கும் என்று நாம் அனுபவத்தாலும் பகுத்தறிவாலும் அறிவோம். எனவே, நேரத்தை மிச்சப்படுத்து வதற்கும் பணச் செலவைக் குறைப்பதற்கும் நிர்வாகக் கஷ்டத் தைத் தவிர்ப்பதற்கும் நாம் அத்தொகுதியின் ஒரு வகை மாதி ரியை ஆராயலாம். இது ஒரு பானை சோற்றிற்கு ஒரு சோறு பத மாவதுபோல. இக்காரணங்களை ஒட்டியே ஆராய்ச்சியாளர் மக் கட்கணிப்புத் தவிர்ந்த மற்றைய கணிப்புகளில் மாதிரி முறை யையே கையாண்டு முழுத்தொகுதி பற்றிய முடிபுகளை நிர்ணயிக் கின்றூர்கள்.

ஒரு தொகுதியின் முழுக்கணிப்பு விபரம் எல்லா ஆராய்ச்சி களுக்கும் வேண்டியதில்லை. மாருக, நன்கு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பண்புக்கூறின் மூலம் முழுத்தொகுதியைப்பற்றிக் குறைந்த செல வில் புள்ளியியல் முறைகளைக் கடைப்பிடித்து அறிய முடியும். தவி ரவும் பல சமயங்களிலும் அநேக இடைக்காலங்களிலும் தகவல் களை மாதிரியெடுப்பு முறையினுல் அறிய முடிகின்றது. மேலும், அவ்வக்காலத்திற்குரிய புதிய செய்திகளையும் கணிப்பிற் சேர்த்துக் கொள்ள முடிகின்றது. முழுத்தொகுதியின் மாதிரியை ஆராய்வ தாற் பெறப்படும் அம்முழுத்தொகுதி பற்றிய முடிபுகளிலே எப் பொழுதும் ஓரளவு தவறுதல்களை நாம் எதிர்பார்க்க வேண்டும். எனினும், முழுக்கணக்கெடுப்பில் செய்திகள் சரியாக அமையாமை

யாலும், அவை முடிவற்றதாயிருப்பதாலும் ஏற்படக்கூடிய பிழைகளைவிட மாதிரியெடுப்புகளினால் ஏற்படும் பிழைகள் பொறுக்கக் கூடியனவாகும். இப்பிழைகளைக் கூடுமானவரையிற் குறைக்கவும் முடியும். பொதுவாக இவை "மாதிரியெடுப்பு வழுக்கள்" எனப்படும். எனவே, தகுந்த வகைப்படுத்திய மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுத்தல் அவசியம் என்பது தெளிவாகின்றது.

மக்கள் விசாரணையிலிருந்து நாட்டிலுள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை, தொழிலற்றவர்களின் எண்ணிக்கை முதலியவற்றையும் வருமானம் பற்றிய ஆய்விலிருந்து நுகர்வோன் சேமிப்பு, செலவு என்பவற்றையும் அறிய முடிகின்றது. அதேபோல, வரவு செலவுத் திட்டம் பற்றிய ஆராய்ச்சிகள் நுகர்வோன் விலைச் சுட்டெண்ணுக்கு வேண்டிய தரவுகளைத் தருகின்றன. மேலும் நிறுவனத்தினது மொத்த உற்பத்திச் செலவு, இலாபங்கள் போன்றன இன்று மாதிரியெடுப்பு முறைகளாலேயே மதிப்பிடப்படுகின்றன. நுகர்வோனின் நோக்கம் எவ்வாறுள்ளது, எவ்வகையில் மாறுபடுகின்றது என்பதனை மதிப்பிடுவதற்கு ஆராய்ச்சிக் கூட்டங்கள், சந்தை பற்றிய மதிப்பீடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனவே, அன்றாட வாழ்க்கையில் ஏற்படும் பல பிரச்சினைகளுக்குச் சீரான முறையிற் தீர்வுகாண இவை போன்ற மாதிரித் தீர்வுகள் பெரிதும் உதவுகின்றன. அத்துடன் அவை பொதுவாக எல்லாச் சமூகவியல் முன்னேற்றங்களுக்கும் உகந்தனவாகக் காணப்படுகின்றன.

மேலும் சேகரிக்கப்படும் விபரங்கள் யாவும் எழுமாற்று மாதிரியெடுப்பு முறைகளினால் எடுக்கப்பட்டவையாகவிருத்தல் அவசியம். முடிவுகளை நிகழ்தகவுடன் இணைத்துக் கூறவேண்டுமாதலால், எழுமாற்று முறையிலே திரட்டப்பட்ட புள்ளி விபரங்களே வேண்டப்படுகின்றன. கூடிய அளவு நம்பதகவான புள்ளி விபரங்களைச் சேகரித்து அவற்றைப் புள்ளியியல் முறைகளிற் பயன்படுத்துவதே புள்ளியியலாளரின் கடமையாகும்.

1.1: புள்ளிவிபரவியலின் முக்கியத்துவம்
(IMPORTANCE OF STATISTICS)

ஆரம்பத்திலிருந்து பொருளியலைக் கற்கும் ஒரு மாணவன் பொருளாதார மாறிகளிடையே தொடர்புகள் காணப்படுகின்றன என்பதை முதலில் அறிகின்றான். சந்தையிலுள்ள நுகர்வுப் பண்டமொன்றிற்கான கேள்வியானது அதனது விலையின் ஒரு தொழிற்பாடாகும். அதாவது, $D = f(P)$. அதேபோல, உற்பத்திப் பொருட்களுக்கான செலவானது உற்பத்தி செய்யப்படும் தொகையினதும், நுகர்வுச் செலவானது வருமானத்தினதும் தொழிற்பாடுகளாகும். ஆனால், பொருளுள்ள தொடர்பை விளக்குவதற்கு ஒவ்வொரு தொடர்பும் பல்வேறு மாறிகள் குறித்துக் கூறப்படல்

வேண்டும் எனவே, பொருளொன்றிற்கான கேள்வியானது விலை, நுகர்வோன் வருமானம், மற்றைய பொருட்களின் விலைகள், உற்பத்தி வீதத்திலுள்ள மாறல்கள் போன்றவற்றினது தொழிற்பாடாயமையும்; நுகர்வானது வருமானத்தினதும் திரவச் சொத்துக்களினதும் முன்னைய நுகர்வு மட்டங்களினதும் தொழிற்பாடாகும்.

பொருளியற் கொள்கையானது பொருளியல் முறைமையை முழுமையாகவோ அன்றிப் பகுதிகளாகவோ விபரிக்கும் தொழிற்பாடுகளைக் கொண்ட வெவ்வேறு தொகுதிகளைப் பற்றிய ஆய்வாகும். மேற்படி தொடர்புகள் பொருளியலளவை (*Econometrics*) பற்றிய ஆய்வில் புள்ளியியல்ரீதியாகவே மதிப்பிடப்படுகின்றன.

முழுத்தொகுதியின் மாதிரியிலுள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் சில குணதிசயங்களை ஒரே சமயத்திற் பெற்றிருப்பதைக் காணமுடிகின்றது. புள்ளியியல் மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை அவற்றிற்கிடையேயுள்ள இணைபைக்கொண்டு (*Correlation*) கூறமுடிகின்றது. உதாரணமாக, குறிப்பிட்ட ஒரு மாதத்திற் பெய்யும் மழையின் அளவிற்கும் ஓர் ஏக்கருக்கான நெல்லின் விளைச்சலுக்குமிடையே தொடர்பு காணப்படுகிறது. அத்துடன் மாறிகள் நெருங்கிய தொடர்புடையன எனக் காணப்பட்டால், ஒன்றின் பெறுமானம் தரப்படின், மற்றையதன் பெறுமானத்தைப் பிற்செலவு ஆய்வு (*Regression Analysis*) முறையைப் பாவித்துக் காணமுடிகின்றது. உதாரணமாக, விளம்பரத்திற்கும் விற்பனைக்குமிடையே தொடர்பு காணப்படின் ஒரு குறிப்பிட்ட விளம்பரச் செலவிற்கான விற்பனையின் எதிர்பார்த்த பெறுமானத்தைக் காணமுடிகின்றது. பொருளியலிலே பொருளியற் கொள்கை, பொருளாதார வாழ்வு (சிக்கன வாழ்வு) முதலியனவற்றிற்குத் தேவையான பொருளியல் மாறிகளினது பெறுமானங்களை மதிப்பிட மேற்படி ஆய்வு உதவுகின்றது. பிற்செலவு ஆய்வானது புள்ளியியற் கொள்கையிலே பரவலாக உபயோகிக்கப்படுவது மட்டுமல்லாமல் அநேகமாக எல்லா விஞ்ஞான ஒழுங்குகளிலும் உபயோகிக்கப்படுகின்றது.

கால வேறுபாட்டால் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறி பல பெறுமானங்களைப் பெறுகின்றமையைக் காணமுடிகின்றது. சமூக, பொருளாதார விடயங்களிலும் தொழிற்றுறை நிர்வாகத்திலும் ஏற்படும் முக்கியமான பல சிக்கல்களிலும் காலம் இடம் பெறுகின்றது. பிறப்பு இறப்பு வீதங்கள், தேசிய வருமானம், உற்பத்

திப் பொருட்களின் கொள்வனவு, விற்பனை, ஆதாயம் முதலிய வற்றிலே கால மாறுபாட்டினலும் மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன. இப்பேர்ப்பட்ட மாற்றங்கள் புள்ளிவிபரவியலிற் காலத் தொடர் பற்றிய ஆய்வு மூலமே (*Time Series Analysis*) விளக்கப்படுகின்றன.

மேலும் இன்று புள்ளியியல் முறைகளிலே சுட்டெண்கள் மிகவும் பரந்தளவில் உபயோகிக்கப்படுகின்றன. விலையிலுள்ள ஏற்ற இறக்கங்களை ஆராய்வதற்கே முக்கியமாகச் சுட்டெண்கள் பாவிக்கப்படுகின்றபோதிலும் அதன் உபயோகம் எல்லாப் புலங்களிலும் பிரயோகிக்கப்படுகின்றமையைக் காணமுடிகின்றது. அத்துடன் வெவ்வேறு கால இடைவேளைகளிலுள்ள விவசாய உற்பத்தி, கனரக உற்பத்தி, ஏற்றுமதி இறக்குமதி, ஊதியங்கள் முதலியவற்றை ஒப்பிடவும் முடிகின்றது.

இவற்றிலிருந்து, புள்ளிவிபரவியலே குறிப்பிடத்தக்க அளவு பொருளியலிலும் வணிகவியலிலும் உபயோகிக்கப்படுகின்றமையைக் காணமுடிகின்றது. புள்ளியியல் ஆய்வானது பொருளாதார, வர்த்தகத் துறைகளில் மாத்திரம் மட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ளதொன்றல்ல. மாறுக, அதன் அனுமானம் அநேகமாக எல்லா இயற்கை, பௌதீக, சமூக விஞ்ஞானங்களிலும் விரிவுபடுத்தப்பட்டிருக்கின்றமையைக் காணமுடிகின்றது.

புள்ளிவிபரவியலைப் பல்வேறு வரைவிலக்கணங்களால் வரையறுக்க முடிகின்ற போதிலும் இங்கு நாம் அதனைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்:

> ''புள்ளிவிபரவியல் என்பது தரவுகளைத் திரட்டி ஒழுங்குபடுத்தித் தொகுத்து, பின்னர் ஒப்புக்கொள்ளக்கூடிய முடிபுகளைப் பெற்று, அம்முடிபுகளிலிருந்து பொருத்தமான தீர்மானங்களை மேற்கொள்ள உதவும் விஞ்ஞான முறையாகும்''

புள்ளிவிபரவியல் பற்றிய ஆய்வானது, முக்கியமாகத் தரவுகளையே அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது. தரவுகளெனும் போது அவை நாட்டின் தேசிய வருமானம், மக்கள் தொகை, பொருட்களுக்கான கேள்வி, நிரம்பல் போன்றவைகளாகவிருக்கலாம். அதாவது, அவை குறிப்பிட்ட பண்பினைக் குறிக்கும் வெவ்வேறு பெறுமானங்களாகும். சேகரிக்கப்பட்ட இத்தரவுகளை அப்படியே வைத்திருத்தல் அர்த்தமற்றதாகும். இவற்றிலிருந்து குறிப்பிட்ட பண்புகள் பற்றிய முடிபுகள் எடுக்கப்படல் வேண்டும்.

இங்கு தரப்பட்ட தொகுதியினை மட்டும் விபரித்துப் பகுக்கும் புள்ளிவிபரவியற் பகுதி, ''விவரணப் புள்ளிவிபரவியல்'' அல்லது ''உய்த்தறி புள்ளிவிபரவியல்'' எனப்படும். இப்பகுதி, தரவுகள் எவ்வாறு வகைப்படுத்தப்பட்டு அட்டவணைப்படுத்தப்படுகின்றன என்பதையும், பின்னர் அவை மீடிறன் பரம்பல்களாக உணர்த்தப்பட்டு அவற்றிலிருந்து தரப்பட்ட தரவுகள் பற்றிய முடிபுகள் எவ்வாறு பெறப்படுகின்றன என்பதனையும் மட்டுமே அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது.

மாறாக, தரப்பட்ட தரவுகள் குடியொன்றின் வகை மாதிரியாயின் குடிபற்றிய முக்கிய முடிபுகளை அம்மாதிரியை ஆராய்வதால், அனுமானிக்க முடியும். மேற்கூறப்பட்ட அனுமானம் என்ன நிபந்தனைகளின் கீழ் ஒப்புக்கொள்ளக்கூடியது என்று ஆராயப்படும் புள்ளிவிபரவியற் பகுதி, ''புள்ளியியல் அனுமானம்'' *(Statistical Inference)* அல்லது ''தொகுத்தறி புள்ளிவிபரவியல்'' *(Inductive Statistics)* எனப்படும். மாதிரித் தரவுகளிலிருந்து குடிப் பரமானங்களை மதிப்பிடுவதற்கு, எமக்கு மாதிரித் தரவுகளின் பரம்பல்கள் வேண்டப்படுகின்றன. மாதிரியெடுப்புப் பரம்பல் பற்றிய ஆய்விலிருந்து மாதிரித் தரவுகள் பற்றிய செய்திகளைப் பெறமுடிகின்றது. மாதிரித் தரவுகளிலிருந்து எவ்வாறு ஒத்த குடிப் பரமானங்கள் மதிப்பிடப்படுகின்றன என்பது புள்ளியியல் அனுமானத்திலே ஒரு முக்கிய பிரச்சினையாகும்.

பலவேளைகளில் மாதிரி பற்றிய செய்திகளிலிருந்து குடி பற்றிய தீர்மானங்கள் எடுக்கவேண்டிய நிலை ஏற்படுகின்றது. இவ்வகையான தீர்மானங்கள் புள்ளியியற் தீர்மானங்கள் எனப்படும். இங்கு தீர்மானங்கள் எடுக்கப்படுவதற்கு ஆராயப்படும் குடி பற்றிய சில எடுகோள்களை எடுத்துக் கொள்வது பயனுள்ளதாகும். இவ்வெடுகோள்கள் உண்மையானவையாகவோ அன்றி உண்மையற்றவையாகவோ இருக்கலாம். அவை புள்ளியியற் கருதுகோள்கள் எனப்படும். பொதுவாக, அவை குடிப் பரமானங்களின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களாகவே காணப்படும். மேலும் பல வேளைகளில் ஒரு புள்ளியியற் கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கென்றே அமைக்கப்படுகின்றது. உதாரணமாக, ஒரு செய்முறை வேறொரு செய்முறையினும் சிறந்ததா எனத் தீர்மானிப்பதற்கு, அச் செய்முறைகளிடையே வித்தியாசம் யாதும் இல்லை என்னும் கருதுகோள் அமைக்கப்படுகின்றது. இப்பேர்ப்பட்ட கருதுகோள்கள் புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாண்டு சோதிக்கப்பட்டு, பரமானங்கள் பற்றிய தீர்மானங்கள் எடுக்கப்படுகின்றன.

*

2 விவரணப் புள்ளிவிபரவியல்

DESCRIPTIVE STATISTICS

புள்ளிவிபரவியல் பற்றிய ஆய்வானது முக்கியமாகத் தரவு களையே அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது என முன்னர் குறிப் பிட்டிருந்தோம். தரவுகளெனும்போது அவை நாட்டின் தேசிய வருமானம், மக்கள் தொகை, மக்களின் தலாவருமானம், வேலை யற்றோர் தொகை, பல்கலைக்கழக மாணவர்களது எண்ணிக்கை போன்றவையாக இருக்கலாம். இவையாவும் கடந்தகால நிகழ் கால நிகழ்ச்சிகளுக்குரியவையேயாகும். தரவுகள் அல்லது புள்ளி விபரங்கள் எவ்வாறு சேகரிக்கப்பட வேண்டுமெனச் சென்ற அத்தி யாயத்திற் குறிப்பிட்டிருந்தோம். எமக்கு வேண்டிய முழுத் தரவு களையும் சேகரிப்பது இயலாத, செயல்முறைக்கொவ்வாத ஒன்று கும். இதனால், வேண்டிய விபரங்கள் பற்றிய ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதித் தரவுகளே சேகரிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு பெறப்படும் மாதிரித் தரவுகளிலிருந்து முழுத்தொகுதி பற்றிய முடிபுகள் எவ் வாறு அனுமானிக்கப்படுகின்றன என்பதை நாம் பின்னுள்ள சில அத்தியாயங்களில் அவதானிப்போம். இதற்கு மாறாகப் பெரிய தொகுதிகளைப்பற்றிய அனுமானங்களையோ முடிபுகளையோ எடுப் பதை விட்டுத் தரப்பட்ட தொகுதியினை விபரித்துப் பகுக்கும் புள் ளிவிபரவியற் பகுதி, ''விவரணப் புள்ளிவிவரவியல்'' அல்லது ''உய்த்

தறி புள்ளிவிபரவியல்'' (Deductive Statistics) எனப்படும். எனவே தொகுத்தறி புள்ளிவிபரவியலுக்கும், உய்த்தறி புள்ளிவிபரவியலுக்கும் உள்ள வேறுபாட்டை இங்கு மாணவர் புரிந்து கொள்ளல் வேண்டும். இங்கு கிடைக்கப்படும் தரவுகள் மட்டுமே பகுக்கப்பட்டு அவற்றிலிருந்து தரவுகள் பற்றிய முடிவுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. உய்த்தறி புள்ளிவிபரவியலிலே தரவுகளை வகைப்படுத்தல், அறிமுகப்படுத்தல், பொழிப்பாக்கிக்கூறல் என்பன அடங்கும்.

சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து அவை பற்றிய சிறப்பியல்புகளை அறியவேண்டிய அவசியம் காணப்படுகின்றதெனினும் நாம் அவற்றை உடனடியாக அறியமுடியாது. புள்ளிவிபரவியலாளனுேற் குறிப்பிட்ட தேவைகளுக்காகச் சேகரிக்கப்படும் தரவுகள் பொதுவாகப் பெரியனவாகவே காணப்படும். இவ்வாறுன எண்ணுருவில் ஒருமுகப்படுத்தப்படாத தரவுகளின் கூட்டம் பச்சைத் தரவுகள் (Raw Data) அல்லது கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகள் எனப்படும். கிடைக்கப்பெற்ற தரவுகளினது பொருளுண்மையைக் கிடைக்கப்பெற்றவாறே வைத்து நோக்குதல் இலகுவானதல்ல. சேகரிக்கப்படும் தரவுகளை எளிய வடிவினதாக்கி இலகுவான உருவில் விபரிப்பதே புள்ளிவிபரவியலாளனின் கடமையாகும். இவ்வாறு தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளை அறிமுகப்படுத்துதல் இலகுவானதாகக் காணப்படும். எனவே, சேகரிக்கப்படும் தரவுகளை அல்லது தகவல்களை வகைப்படுத்தி அட்டவணைப்படுத்துவதன் மூலம் மேற்கூறிய நோக்கங்களை அடைய முடியும்.

2.1: தரவுகளின் வகுப்பாக்கலும் அட்டவணைப்படுத்தலும் (CLASSIFICATION AND TABULATION OF DATA)

அட்டவணைப்படுத்தலின் முதற்படியாக வகுப்பாக்கல் அமைகின்றது. முறைமையான வகுப்பாக்கமல்லாத தரவுகளை அட்டவணைப்படுத்துதல் கடினமானதாகும். எனவே, வகுப்பாக்கம் முறைமையான அட்டவணைப்படுத்தலுக்கு உதவுகின்றது. சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரங்களை ஆராய்ந்தறிதற்காகவே அவை வகுப்பாக்கப்படுகின்றன. தரவுகளுக்கிடையே காணப்படும் ஒருமைப்பாடுகளுக்கேற்ப அவை தொகுதிகளாகவோ அன்றி வகுப்புகளாகவோ ஒழுங்குபடுத்தப்படுகின்றன. அதாவது, பொதுவான சிறப்பியல்புகளைக் கொண்ட அலகுகள் ஒன்றுசேர்க்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஒரு தொகுதித் தரவுகளை வகுப்பாக்குவதால் பல தொகுதிகள் அல்லது வகுப்புகள் பெறப்படுகின்றன. தரவுகள் வகுப்புகளாக வகுப்பாக்கப்படுவதால் அது ஆய்விற்கு உறுதுணையாக அமைவதோடு, நோக்குபவர்களுக்கு எளிதாகப் புரியக்கூடியதாகவும் அமையும்.

நாட்டின் வேலையின்மை நிலைமையை ஆராயும் நோக்கத்திற்கான புள்ளிவிபரங்களை வேலையுள்ளோர், வேலையற்றோர்; மேலும் அவர்களுள் கிராமவாசிகள், நகரவாசிகள்; ஆண்கள், பெண்கள் என்ற வகைகளாகப் பிரித்து அமைத்துக் காட்டுவதாலேதான் அதனை எம்மாற் தெளிவாகப் புரிந்துகொள்ள முடியும். அதே போல, நாட்டு மக்களை அவர்களின் தொழில்களுக்கேற்ப (விவசாயம், வர்த்தகம்,...) வகைப்படுத்த முடியும். மேலும் பட்டப்படிப்புப் பயிலும் மாணவர்களை எவ்வெவ் பல்கலைக்கழகங்களைச் சேர்ந்தவர்களெனவோ, ஒவ்வொரு பல்கலைக்கழகத்திலுள்ள மாணவர்களை வெவ்வேறு பீடங்களைச் சார்ந்த மாணவர்களெனவோ, அன்றி வெவ்வேறு விடுதி மண்டபங்களில் வதியும் மாணவர்களெனவோ, அன்றித் தமிழ், சிங்கள, ஆங்கில மொழிமூலம் கல்வி பயிலும் மாணவர்களெனவோ வகுப்பாக்க முடியும். இவ்வாறான வகுப்பாக்கங்களினாலே குறிப்பிட்ட வகுப்புகளைச் சார்ந்த மாணவர்களது எண்ணிக்கை அறியப்படுவதுடன், வெவ்வேறு வகுப்புகளை ஒப்பிடவும் முடியும். தபாற் கந்தோரொன்றில் தபால்கள் புவியியல்ரீதியாகப் பாகுபடுத்தப்படுகின்றன. அதேபோல, புள்ளிவிபரவியலாளன் ஒரேவகையான சிறப்பியல்புகளைக் கொண்ட அலகுகளை ஒவ்வொரு வகுப்பாக அமைக்கின்றான்.

தரவுகள், மாறிகளினது பண்புகளினடிப்படையில் வகுப்பாக்கப்படின் அவ்வகையான வகுப்பாக்கம் பண்புவகுப்பாக்கம் எனவும் அவை பெறுமானங்களினடிப்படையில் வகுப்பாக்கப்படின் அது பெறுமானவகுப்பாக்கம் எனவும் அழைக்கப்படும். உதாரணமாக, மக்களை அவர்களது பால், மொழி போன்றவற்றின் அடிப்படையில் வகுப்பாக்குவது பண்புவகுப்பாக்கமாகும்; மக்களை அவர்களது வருமானம், உயரம், நிறை முதலியவற்றின் அடிப்படையில் வகுப்பாக்குவது பெறுமானவகுப்பாக்கமாகும்.

இவ்வாறு வகுப்பாக்கப்படும் கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளிலிருந்து தேவையற்றவை புறக்கணிக்கப்படுவதால், அவை சுருக்கமாகவும், தெளிவாகவும் அமைந்திருக்கும். இதனால், தரவுகளினிடையிலான ஒற்றுமையையும் ஒற்றுமையின்மையையும் வெளிக்காட்ட முடிகின்றது. வகுப்பாக்கலுக்குத் திட்டவட்டமான கணிதரீதியான விளக்கங்கள் கொடுக்க முடியாது. குறிப்பிட்ட விதியினடிப்படையில் வகுப்பாக்கங்கள் நடைபெறுவதில்லை. அன்றிப் பொதுஅறிவினாலும் அனுபவத்தினாலும் மட்டுமே தரவுகள் வகுப்பாக்கப்படுகின்றன. மேலும், வகுப்பாக்கங்கள் நிச்சயமற்ற தன்மையைக் கொண்டனவாக இருத்தல் கூடாது. இவை நிலையானவையாயும், நிலைமைகள் மாற்றமடையும்போது வளைதகவுடையவையாயும் இருத்தல் அவசியமாகும்.

புள்ளியியல் ஆய்விற்குப் பயன்படும் வண்ணமும், எளிதாக அவற்றைப் புரிந்து கொள்ளும் வண்ணமும் புள்ளிவிபரங்களை அமைத்தல், தரவுகளை அறிமுகப்படுத்தல் எனப்படும்.

2.1.1: அட்டவணைப்படுத்தல் (TABULATION)

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரங்களது சிறப்பியல்புகளைத் தெளிவாகவும் சுருக்கமாகவும் வெளிப்படுத்துவதே, அட்டவணை அமைத்தலின் முக்கிய நோக்கமாகும். வகுப்பாக்கப்பட்ட தரவுகளை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்காக அவற்றை அட்டவணைகளில் அமைக்கின்றோம். அட்டவணைகளும், வகுப்பாக்கங்களைப்போல, தரவுகளின் சிறப்பியல்புகள், பண்புகளுக்கேற்றவாறு அமைக்கப்படுகின்றனவே தவிர அவற்றிற்கெனக் குறிப்பிட்ட விதிகளோ அன்றி கணிதரீதியான விளக்கங்களோ கிடையாது. பொதுவாக, நாம் அனுபவத்தையும், பகுத்தறிவையும் கொண்டே அட்டவணைகளை அமைக்கின்றோம். அதிகூடிய தகவல்களைத் தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும் வெளிக்காட்டும் ஓர் அட்டவணையே சிறந்த புள்ளிவிபர அட்டவணை எனப்படும்.

பின்வரும் அட்டவணைகளை நோக்குவோம்:

1961 ஆம் ஆண்டிலிருந்து *1970* ஆம் ஆண்டு வரையுள்ள நெல்லின் உற்பத்தியைக் கீழுள்ள அட்டவணை காட்டுகின்றது:

ஆண்டு	உற்பத்தி 10 இலட்சம் புசலில்
1961	41·4
1962	45·0
1963	48·9
1964	50·5
1965	36·4
1966	45·8
1967	54·9
1968	64·4
1969	65·9
1970	77·4

1964 ஆம் ஆண்டிலிருந்து *1970* ஆம் ஆண்டு வரையுள்ள ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் இலங்கைப் பல்கலைக்கழகத்திற்குப் புகுந்த மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் கீழுள்ள அட்டவணை காட்டுகின்றது:

ஆண்டு	மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை
1964	7,182
1965	10,723
1966	11,067
1967	10,316
1968	10,316
1969	8,029
1970	8,883

இரண்டாம் அட்டவணையிலே தரப்பட்ட தரவுகள் மேலும் தெளிவாகக் கீழுள்ள அட்டவணையிற் காட்டப்படுகின்றது. இங்கு வெவ்வேறு பீடங்களின்படி, வெவ்வேறு ஆண்டுகளிற் புகுந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

இலங்கைப் பல்கலைக்கழகம் (பேராதனையும், கொழும்பும்)

பீட ஒழுங்குப்படி அனுமதித்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

பீடம்	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
எல்லாப் பீடங்களும்	7,182	10,723	11,067	10,316	10,316	8,029	8,883
கீழைத்தேயக் கல்வியும் கலையும்	4,194	7,369	7,765	7,012	6,919	2,822	2,843
விஞ்ஞானம்	960	1,347	1,295	907	907	2,936	2,884
மருத்துவம்	1,708	1,640	1,528	1,601	1,601	1,417	1,454
பொறியியல்	320	307	419	616	616	551	551
விவசாயமும் மிருக வைத்தியமும்	—	—	—	180	180	217	217
சட்டம்	—	—	—	—	93	86	934

அட்டவணை ஒன்று அமைக்கப்படும்போது அதன் தலையங்கமும் சுருக்கமாகக் கொடுக்கப்படல் வேண்டும். இது அட்டவணையிலுள்ள விபரங்களைப் பற்றிச் சுருக்கமாக விளக்கம் அளிப்பதாக அமையவேண்டும். அத்துடன் தரப்பட்ட தரவுகள் என்ன நோக்கத்திற்காக, எவ்விதத்தில், எப்போது சேகரிக்கப்பட்டன என்பதும் கொடுக்கப்படல் வேண்டும். இல்லாவிடின் புள்ளிவிபரங்களை மட்டும் சேகரித்து வைத்திருத்தல் அர்த்தமற்றதாகிப் போய்விடும். மேலும் வெவ்வேறு பந்தித் தரவுகள் வேறுபடுத்தியும் காட்டப்படல் வேண்டும். முக்கியமாக அட்டவணைகளிற் பயன்படுத்தப்படும் அலகுகள் தேவையான இடத்திற் தெளிவாகக் காட்டப்படல் வேண்டும். உதாரணமாக, முதலாம் அட்டவணையில் நெல்லின் உற்பத்தி 10 இலட்சம் புசல்களிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது, அட்டவணையிலுள்ள ஒவ்வோர் அலகும் 10 இலட்சம் புசல்களைக் குறிக்கும்.

மேலும் அட்டவணை ஒரு மீடிறன் பரம்பலாக இருப்பின், அங்கு வகுப்பாக்கம் செய்யப்படும் மாறியைப் பற்றிய விளக்கம் தெளிவாகக் கொடுக்கப்படல் வேண்டும். இது பற்றிப் பின்னர் விரிவாக ஆராய்வோம்.

ஆனால், அட்டவணைப்படுத்தப்படவேண்டிய உறுப்புகள் பெரிய எண்களாகவும், பெரிய தொகுதிகளாகவும் காணப்படின் அவற்றைக் கையால் அட்டவணைப்படுத்துவதானால் காலம் விரயமாவதோடு செம்மை குன்றியனவாகவும் காணப்படும். ஆதலால், தற்பொழுது புள்ளிவிபரங்களை அட்டவணைப்படுத்துவதற்கும் அவை பற்றிய புள்ளிவிபர மதிப்பீடுகளைச் செய்வதற்கும் எந்திர சாதனங்கள் உபயோகிக்கப்படுகின்றன. இவை போன்றவை, எண்கணித செய்கைகள், மதிப்பீடுகள் போன்றவற்றை மிக அதிகமான வேகத்திற் செய்து முடிக்கின்றன.

பயன்படுத்தப்படும் எந்திர சாதனங்களிலே தொடர்ந்து திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டு வருகின்ற போதிலும், தற்பொழுது அநேக சமூக, பொருளாதார ஆராய்ச்சிகளிலே கணனி (Computer) மிக முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றது. குறிப்பாக, புள்ளிவிபரக் கணிப்பீடுகளை நொடிப்பொழுதில் செய்து முடிக்கக் கணனிகள் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. சுருக்கமாகக் கூறுவதானால், கணனியை மனிதனால் உருவாக்கப்பட்ட வங்கி எனலாம். ஏனெனில், இதனுள் பெரிய தொகுதி தரவுகளைச் சேகரித்து (Store) வைத்திருக்கவும், தேவைப்படும்போது அவற்றை உபயோகிக்கவும் முடிகின்றது. மேலும் இவை எண்கணித செய்கைகளைத் தர்க்கரீதியான செய்கைகளுடன் அதிவேகத்திற் செய்து முடிக்கின்றன. கணனிகள், நாம்

கொடுக்கும் தரவுகளை ஒவ்வொன்றாகவும், செம்மையாகவும் பதிவு செய்து, கூறப்பட்ட நெறிமுறைகளை ஒழுங்காகச் செய்து முடிக்கின்றன. இங்கு, அட்டவணைப்படுத்தப்படும் தரவுகள், விசேஷமாக அமைக்கப்பட்ட அட்டைத்தாள்களிலே (*Cards*) துவாரமிடும் கருவிகளை (*Punching Machines*) உபயோகித்துப் பதியப்படுகின்றன. பின்னர் அவ்வட்டைகள் எந்திரத்தினுள் குறிப்பிட்ட ஒழுங்கிற் செலுத்தப்படுகின்றன. எந்திரமானது செலுத்தப்பட்ட அட்டைகளைப் பாகுபாடு செய்வதுடன் வேண்டிய தரவுகளைப் பதிவு செய்து, முடிபுகளையும் பதிவு செய்கின்றது. அத்துடன் அது நாம் விடும் பிழைகளையும் சுட்டிக் காட்டுகின்றது,

பொதுவாகக் கணனியானது சுயமாக எதையும் சிந்திக்காது திட்டமிடலாளரால் (*Programmer*) திட்டமிட்டுக் கொடுக்கப்படும் நெறிமுறைகளை அப்படியே பின்பற்றி ஒவ்வொரு நெறி முறைக்கும் அடிபணிகின்றமையால், எந்த ஒரு திட்டமிடலாளனும், கணனியை ஒரு முட்டாள் (*fool*) எனவும் ஆனால் ஒரு நம்பிக்கையான தொழிலாளி எனவும் கருதுதல் வேண்டும். இதுபற்றி விரிவாக மாணவர்கள் கணனி பற்றிய புத்தகங்களில் அறிந்து கொள்ளலாம்.

2.1.2: மாறி அல்லது மாறலி (VARIABLE OR VARIATE)

அநேகமாக, எல்லாச் சமூக, பொருளாதாரத் துறைகளிலும் புள்ளிவிபரங்கள் அடங்கியிருப்பதைக் காணமுடிகின்றது. இவை குறிப்பிட்ட துறைகளிற் காணப்படும் குறிப்பிட்ட பண்புகளுக்குரியவையாகும். அதாவது, பண்புகளுடைய இயல்புகள் அல்லது குணதிசயங்கள், புள்ளிவிபரங்கள் வாயிலாக வெளிக்காட்டப்படுகின்றன. புள்ளிவிபரவியலிலே இப்பண்புகளொவ்வொன்றையும் நாம் ஒவ்வொரு மாறிகளாகக் கொள்ளலாம். எனவே, ஒரு கூட்டத்திலிருக்கும் ஓர் உறுப்பின் தன்மை ஏனைய உறுப்புகளின் தன்மையினின்றும் கணியத்திலோ, பண்பிலோ எவ்வாறு வேறுபடுகின்றதென்பதைக் காட்டும் சிறப்புக் கூறு, மாறி எனப்படும். உதாரணமாக, பல்கலைக்கழகமொன்றிலுள்ள மாணவர்களது உயரங்கள் அல்லது நிறைகள் அல்லது அவர்கள் பரீட்சையிற் பெறும் புள்ளிகள் என்பவை மாணவர்களைப் பொறுத்தமட்டில் மாறிகளாகும். பொருளாதாரத்திற் பொருளொன்றிற்கான கேள்வியை நோக்கின் அது வெவ்வேறு காலங்களில் மாற்றமடைவதைக் காணக்கூடியதாகவிருக்கின்றது. எனவே இதுவும் ஒரு மாறியாகும்.

பொதுவாக ஒரு மாறியானது பின்னக மாறியாகவோ அன்றித் தொடர் மாறியாகவோ காணப்படலாம். மாறியொன்று குறிப்பிட்ட தனியாக்கிய பெறுமானங்களை மட்டுமே எடுப்பின் அது

பின்னக மாறியென்வும், குறிப்பிட்ட ஆயிடையிலுள்ள எப்பெறுமானங்களையும் எடுப்பின் அது தொடர் மாறியெனவும் அழைக்கப்படும். உதாரணமாக, குடும்பம் ஒன்றிலுள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கையை எடுத்துக்கொண்டால் அது 0, 1, 2, ... என்ற பெறுமானங்களாக இருக்க முடியுமே தவிர அது 1.5, 2.5, ... போன்ற முழுவெண்ணல்லாதவையாக இருக்க முடியாது. எனவே, இது ஒரு பின்னக மாறிக்கு உதாரணமாகும். அதேபோலத் தனிப்பட்டவர்களது உயரங்களை எடுத்துக்கொண்டால் அவை குறிப்பிட்ட ஆயிடையிலுள்ள எப்பெறுமானங்களையும் எடுக்கமுடியும். அவை குறித்த தனியான பெறுமானங்களாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. அவற்றைக் குறிக்கும் மாறி தொடர் மாறி எனப்படும். உதாரணமாக, உயரங்கள் 5 அடியாகவோ 5.2 அடியாகவோ இருக்கலாம்.

2.2: வரைபுகளும் வரிப்படங்களும்
(GRAPHS AND DIAGRAMS)

இதுவரை நாம், சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் எவ்வாறு வகுப்பாக்கப்பட்டு அட்டவணைகளிலமைக்கப்படுகின்றன என்பதனை அவதானித்தோம். ஆனால், புள்ளிவிபரங்களின் பொருளைத் தெளிவாகத் தெரிவிப்பதற்கு அட்டவணைகள் போதியனவல்ல. மாறாகத் தரவுகளிடையே காணப்படும் பொதுவான போக்கு, அவற்றினுடைய அளவைகள் மாறுபடும் அடிப்படை, தரவுகளிடையேயுள்ள சார்ச்சி, இடைச்சார்ச்சி முதலியவை தெளிவாகக் காட்டப்படல் வேண்டும். இதுவே புள்ளிவிபரவியலின் அடிப்படை நோக்கமுமாகும்,

புள்ளிவிபரங்களை வரைபுகள் மூலமாகவோ அன்றி வரிப்படங்கள் மூலமாகவோ உணர்த்துவதன் மூலம் இந்த நோக்கத்தினை அடைய முடியும். சமூக, பொருளாதார சஞ்சிகைகளிலும், விளம்பரங்களிலும் பெரிய எண்களைக் கொண்ட தரவுகளைக் குறிப்பதற்குப் பதிலாகப் படங்கள் மூலமாக விளக்கங்கள் கொடுக்கப்படுவதைக் காண்கின்றோம். விவசாய உற்பத்தியின் வளர்ச்சி, தொழிற்றுறை வளர்ச்சி முதலியவையும் வரைபுகள் மூலமாகவே காட்டப்படுகின்றன. புள்ளிவிபரங்களை, வரைபுகள் மூலமாகவோ வரிப்படங்கள் மூலமாகவோ உணர்த்துவதால் அவை புள்ளியியல் ஆய்விற்கு உறுதுணையாக அமைகின்றன. கிடைக்கப்பெற்ற புள்ளிவிபரங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளை மேலும் ஆராய்வதற்கு வரிப்படங்கள் வழிசெய்கின்றன. இவை, புள்ளிவிபரங்களில் வரும் சிக்கலான நிலைமைகளின் வகைகளையும் தோற்றங்களையும் அறிவதற்கு உதவுகின்றன. வரைபுகள் எண்களிலடங்கிய முழு உட்கருத்

துகளையும் ஒரே சமயத்திற் பிரதிபலிக்கச் செய்கின்றன. அட்டவணை அமைப்பதற்கு அனுபவம் எவ்வளவு அவசியமோ, அதேபோல வரைபுகள், வரிப்படங்கள் அமைப்பதற்கும் அனுபவம் அவசியமாகும். வரைபுகளை அமைக்கும்போது பின்வரும் முக்கிய விடயங்களைக் கவனத்திற் கொள்ளல் வேண்டும். வரைபுகள் தெளிவாகவும் எளிதாகவும் வரையப்படல் வேண்டும்; புள்ளிவிபரங்களது பொதுவான போக்கையும் அவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பினையும் தெளிவாகக் காட்டல் வேண்டும்.

2.2.1: காலத்தொடர் வரைபு (THE GRAPH OF A TIME SERIES)

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் வகுப்பாக்கப்பட்டு அட்டவணைப்படுத்தப்படும்போது அவை எப்போது பெறப்பட்டன எனக் குறிப்பிடப்படவேண்டுமென முன்னர் வலியுறுத்தியுள்ளோம். அதாவது, தரவுகள் எந்தச் சமயங்களிலெடுக்கப்பட்டன என்பது ஆராய்ச்சியிற் சேர்த்துக்கொள்ளப்படவேண்டும். காலவேறுபாட்டால் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறி பல மதிப்புகளைப் பெறக்கூடும். ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அல்லது காலப்பகுதியில் மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை வரிசையாக அமைத்துப் பெறப்படும் தொடரையே காலத்தொடர் என்போம். சமூக, பொருளாதார இயல்களிலும் தொழிற்றுறை நிர்வாகத்திலும் ஏற்படும் முக்கியமான பல சிக்கல்களிற் காலம் இடம்பெறுகின்றது. பிறப்பு இறப்பு வீதங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்கள், தேசிய வருமானத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்கள், விலைவாசிகளிலேற்படும் தளம்பல்கள், உற்பத்திப் பெருக்கத்தினால் ஏற்படும் மாற்றங்கள், விற்பனையிலும் ஆதாயத்திலும் ஏற்படும் மாற்றங்கள் போன்ற யாவற்றிலும் காலத்தொடர் பற்றிய ஆய்வே முக்கிய பங்கெடுக்கின்றது. எனினும் இவ் ஆய்வினைத் தொடர்ந்து வரும் அத்தியாயத்தில் விரிவாக ஆராய்வோம்.

காலத்தொடரின் போக்கைப் பொதுவான போக்கு, சக்கரமான போக்கு, பருவகால மாறலுக்குரிய போக்கு, ஒழுங்கற்ற தளம்பலுக்குரிய போக்கு என நான்கு பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். குறிப்பிட்ட கால இடைவேளைகளில் ஒரு நாட்டின் கைத்தொழில்களின் வளர்ச்சியை ஆராயும்போது அவை படிப்படியாக முன்னேறியிருப்பதன் பொதுவான போக்கை அறியமுடிகின்றது. இவ்வளர்ச்சி பல்வேறு வகையான காரணிகளால் ஏற்பட்டிருக்கக் கூடிய போதிலும் பொதுவாக, சனத்தொகை அதிகரிப்பினாலும், அறிவியல் ஆராய்ச்சிகளிலே புதிய கண்டுபிடிப்புகள் அறிமுகப்

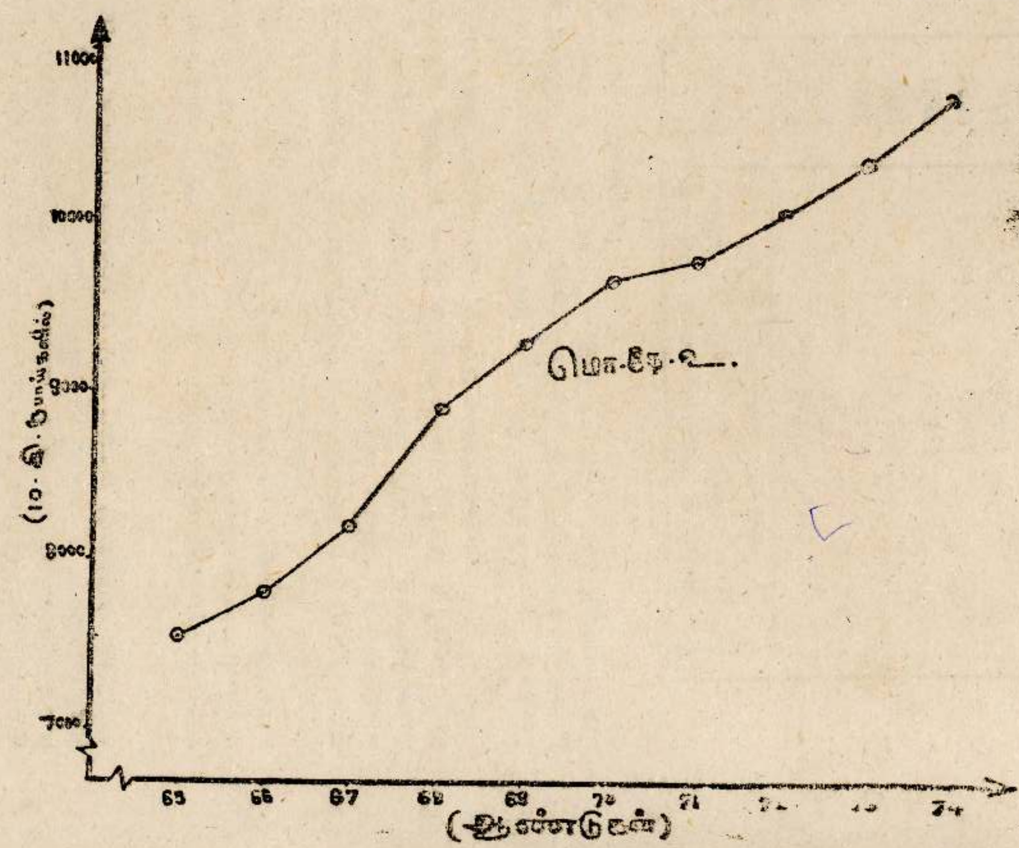
படுத்தப்படுவதாலும் ஏற்படுகின்றது. ஆனுல், மக்களின் தேவை, விருப்பம் ஆகியவற்ருல் சில சமயங்களில் ஒரு சில தொழில்கள் வளர்ச்சியுறுவதையும், மற்றும் சில தொழில்கள் தேய்ந்து போவதையும் உடனடியாக உணரமுடியாவிட்டாலும் காலப்போக்கில் அறியக்கூடியதாக இருக்கின்றது. நாகரீக வளர்ச்சியினுலும், வருமான மாற்றத்தினுலும், மக்களின் விருப்பங்கள் மாற்றமடையலாம். குறுங்காலங்களிலும், நீண்ட காலங்களிலும் விலைவாசிகளிலேற்படும் தளம்பல்களைக்கூடப் பொதுவான போக்கின் வாயிலாக வெளிக்காட்ட முடியும்.

காலத்தொடரை வரைபாக அமைக்கும்போது, புள்ளிவிபரங்கள் குறிக்கும் செய்திகள் கால அடிப்படையில் எங்ஙனம் மாறுபடுகின்றன, அவற்றின் பொதுவான போக்கு எவ்வாறு அமைகின்றது, அவற்றின் பொதுவான போக்கிலிருந்து தனி மதிப்புகள் எந்த அளவிற்குத் தளம்பலுறுகின்றன என்பன கவனத்திற்கொள்ளப்படவேண்டும். தனியான மாற்றங்களை மட்டும் வலியுறுத்தல் போதுமானுல், வரைபுத்தாளின் கிடை அச்சிற் காலத்தினையும் நிலைக்குத்து அச்சிலே மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளையும் பதிந்து, குறிக்கப்படும் புள்ளிகளினூடாக வரைபு வரையப்படும்.

1959ஆம் ஆண்டு காரணி உற்பத்தி விலைகளின்படி இலங்கையின், 1965ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1974ஆம் ஆண்டுவரையிலான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியை (10 இலட்சம் ரூபாவில்) கீழுள்ள அட்டவணை காட்டுகின்றது:

ஆண்டு	1959ஆம் ஆண்டு காரணி உற்பத்தி விலைகளின்படி மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி (10 இலட்சம் ரூபாவில்)
1959	5,893
1965	7,551
1966	7,818
1967	8,210
1968	8,901
1969	9,301
1970	9,686
1971	9,725
1972	10,030
1973	10,383
1974	10,731

இலங்கையின் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி
நிலையான (1959) காரணிச் செலவு விலைகளின்படி பத்து இலட்சம் ரூபாவில்



தற்காலிக மதிப்புகளின்படி நிலையான (1959) விலைகளில், 1974இன் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி 3.4 வீதம் உயர்ந்து விளங்குகின்றது. இது 1973இன் 3.5 சதவீத மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி உயர்ச்சியைவிட எல்லையளவால் குறைந்ததாகும். 1973ஆம் ஆண்டின் 3530 இலட்ச உயர்ச்சியுடன் ஒப்பிடுகையில், உண்மையான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியானது 1974இல் உண்மையான அடிப்படையில் 3480 இலட்சத்தால் உயர்ந்து காணப்பட்டது. இவ்வாறு மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியை வரைபாக அமைத்ததினுல், தேசிய உற்பத்தியின் வெவ்வேறு காலங்களிலுள்ள மாற்றங்களை ஒப்பிட முடிகின்றது. வரைபிலிருந்து மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியானது அதிகரித்துச் செல்வதைக் காணமுடிகின்றது.

எனினும் இலங்கையின் சனத்தொகையும் அதிகரித்துச் செல்வதால் இத்தேசிய உற்பத்தி அதிகரிப்பு எவ்வித பயனையும் அளிக்கமாட்டாது. 1974இல் இலங்கையின் குடிசனத்தொகை 134 இலட்சம் என மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இது 1973ஆம் ஆண்டைவிட 1.6 சதவீத உயர்வைக் கொண்டுள்ளதாகும்.

2.2.2: சித்திரவரையம் (PICTOGRAM)

பெரும்பாலான அட்டவணைகளை, குறிப்பாக, பண்பினடிப்படையிலானவற்றை உருவப்படங்கள் மூலம் இலகுவாக விளக்க முடிகின்றது. கீழுள்ள உருவப்படமானது 1974ஆம் ஆண்டின் இலங்கையின் மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தியிற் பல்வேறு துறைகளின் பங்குகளைக் காட்டுகின்றது.

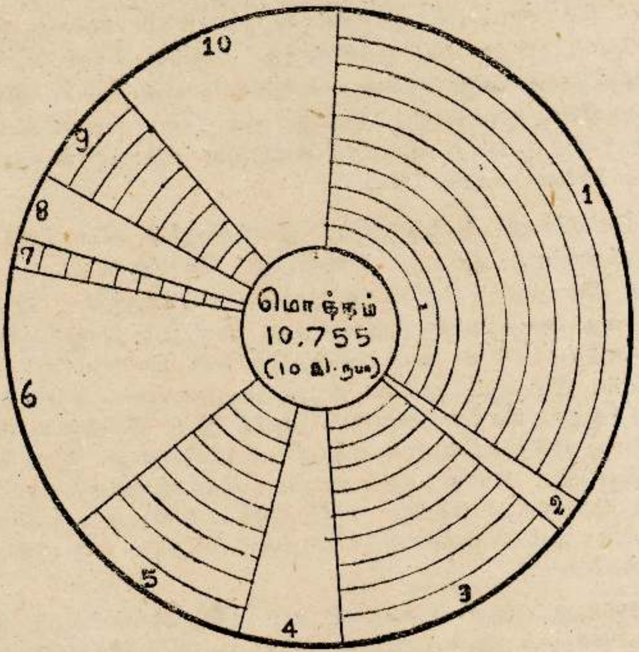
நிலையான (1959) காரணிச் செலவு விலைகளின் அடிப்படையில் 1974ஆம் ஆண்டுக்கான மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தியிலே துறைவகைப்படியான அமைப்பினைக் கீழ்வரும் அட்டவணையானது காட்டுகின்றது:

இலங்கையின் மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தி — 1974

	துறைகள்	தொகை 10 இலட்சம் ரூபா	சதவீதம்
1.	கமத்தொழில், வனவியல், வேட்டையாடல், மீன் பிடித்தல்	3558	33·1
2.	சுரங்கத்தொழில், கற்றோண்டல்	191	1·8
3.	தயாரிப்புத் தொழிலுற்பத்தி	1359	12·6
4.	நிர்மாணம்	553	5·1
5.	போக்குவரத்து, சேகரிப்பு	1054	9.8
6.	மொத்தச் சில்லறை வியாபாரம்	1450	13.5
7.	வங்கித் தொழில், காப்புறுதி ஆதனப் பொருள்	165	1·5
8.	குடியுரிமை	344	3·2
9.	பொதுநிர்வாகமும், பாதுகாப்பும்	609	5·7
10.	சேவைகள், பணிகள்	1472	13·7
	மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தி	10755	100·0

மேலுள்ள துறைகளுடன் இலங்கையின் வெளிநாட்டின் தேறிய காரணி வருமானத்தினையும் சேர்த்துக் கொண்டால், இலங்கையின் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி பெறப்படும். பொதுவாக இத் துறையினாலான வருவாய் எப்பொழுதும் எதிர்க்கணியமாகவே காணப்படுகின்றது. உதாரணமாக, 1974 ஆம் ஆண்டிற்கான வெளிநாட்டுத் தேறிய காரணி வருமானம் —24.9 ஆகும். இது மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியில் 0·2 சதவீத வீழ்ச்சியினை ஏற்படுத்துகின்றது. மேலும் சேவைகள் என்ற துறையில் மின்சாரம், நீர், சுகாதாரப் பணிகள் என்பனவும் அடங்குகின்றன.

1974 ஆம் ஆண்டில் இலங்கையின் மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தியிற் பல்வேறு துறைகளின் பங்கினைக் காட்டும் பரிதிவரிப்படம்:



இலங்கையின் மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்திக்குக் குறிப்பிட்ட துறைகள் ஒவ்வொன்றும் உதவும் பங்கு மேலுள்ள படத்திற் காட்டப்படுகின்றது. இதனால் ஒவ்வொரு துறையினதும் பங்கினை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கமுடிகின்றது. எவ்வெத்துறைகள் கணிசமான பங்குகள் வகிக்கின்றன என்பதும் அறியமுடிகின்றது. உதாரணமாக, இலங்கையின் மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தியினை ஆராய்கையில் 1974 ஆம் ஆண்டின் பொருளாதார வளர்ச்சியிலே முதன்மையான பங்கு வகித்தன கமத்தொழிலும், பணிகளும், குறைந்த அளவில் நிர்மாணத் துறைகளுமேயாகும்.

மேலும், வெவ்வேறு ஆண்டுகளுக்குரிய ஒரே உருவப்படங்களை அமைப்பதால், வெவ்வேறு துறைகளின் வளர்ச்சிகளை ஒப்பிடவும், வளர்ச்சி வீதத்தினை அளவிடவும் முடிகின்றது. இதிலிருந்து குறிப்பிட்ட காலங்களின்போது பொருளாதார அமைப்பிற் குறிப்பிடத்தக்க அளவு மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றனவா என்பதை அவதானிக்கவும் முடியும்.

2.2.3: சலாகை வரிப்படம் (BAR DIAGRAM)

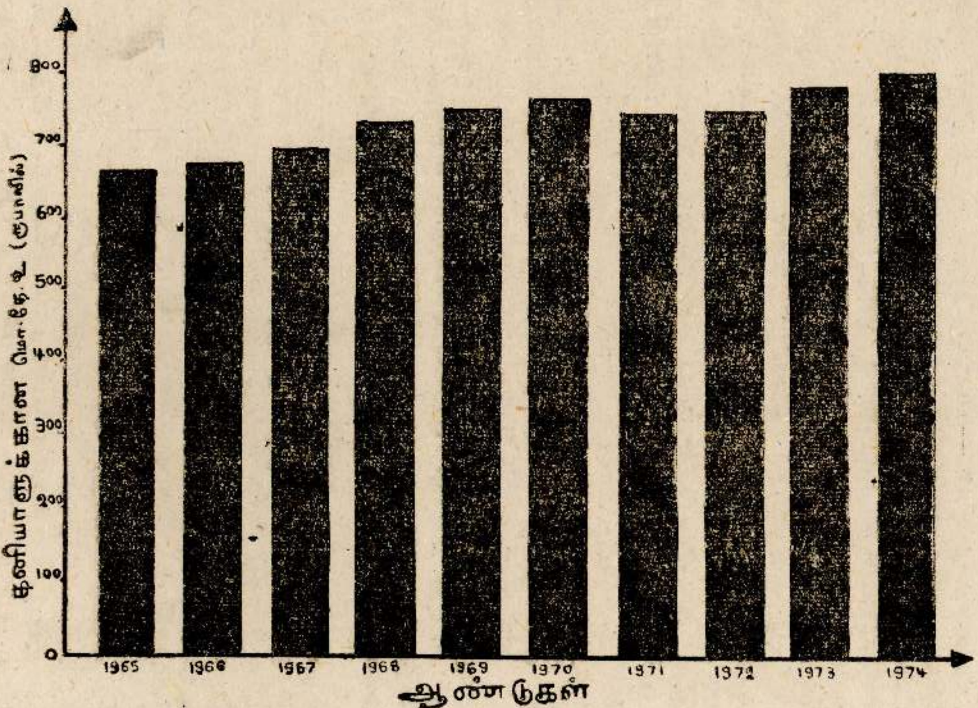
கிடை அல்லது நிலைக்குத்து அச்சுகள் மீது சமமான அகலங்களைக் கொண்ட (வித்தியாசமான உயரங்கள் அல்லது நீளங்கள்) ஒன்றோடொன்று பொருந்தியிராத செவ்வகங்களிலே தரவுகள் குறிக்கப்படின் அது சலாகை வரிப்படம் எனப்படும். இங்கு செவ்வகங்களின் உயரங்கள் அல்லது நீளங்கள், புள்ளிவிபரங்களின் மதிப்பிற்கேற்றவாறு அமைதல் அவசியம். உதாரணம் மூலம் இதன் அமைப்பினைக் காண்போம்.

வெவ்வேறு ஆண்டுகளில், இலங்கையின் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியினைக் குறிக்கும் வரிசையினை நோக்கும் போது, பொதுவாக மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி அதிகரித்துச் செல்கின்றது என்பதை அவதானிக்க முடிகின்றது. எனினும், வாழ்க்கைச் செலவுகள் அதிகமாகக் காணப்படுகின்றதே என மாணவர்கள் சிந்திக்க முடியும். இதற்கும் முக்கிய காரணம் இலங்கையின் சனத்தொகை அதிகரித்துச் செல்வதேயாகும். 1974 இல் இலங்கையின் சனத்தொகை 134 இலட்சமாக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இது 1973 ஆம் ஆண்டைவிட 1·6 சதவீத உயர்வைக் கொண்டுள்ளதாகும். எனவே நாம் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியை நோக்குவதற்குப் பதிலாக தனியாளுக்கான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியை அவதானிப்போம்.

1959 ஆம் ஆண்டு காரணி உற்பத்தி விலைகளின்படி இலங்கையின் 1965 ஆம் ஆண்டிலிருந்து 1974 ஆம் ஆண்டுவரையிலான தனியாளுக்கான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியை ரூபாவில் கீழ்வரும் அட்டவணை காட்டுகின்றது:

ஆண்டு	1959 ஆம் ஆண்டு காரணி உற்பத்தி விலைகளின்படி தனியாளுக்கான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி (ரூபாவில்)
1959	612
1965	676
1966	683
1967	702
1968	742
1969	759
1970	774
1971	766
1972	770
1973	784
1974	801

மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி தனியாளுக்கு (ரூபாவில்)



தனியாளுக்கான உண்மைத் தேசிய உற்பத்தி 1973 இல் ரூபா 784/- ஆகவிருந்தது 1974 இல் ரூபா 801/- ஆக உயர்ந்துள்ளது.

2.3: மீடிறன் பரம்பல்கள் (FREQUENCY DISTRIBUTIONS)

எண்ணுருவில் ஒருமுகப்படுத்தப்படாத தரவுகளைப் பந்தி உருவில் அமைத்து அவற்றைச் செவ்வனே வகுப்பாக்கி, அட்டவணைப் படுத்துவதன்மூலம் தரவினைச் சுருக்கமாகவும் தெளிவாகவும் காட்டமுடிகின்றதென முன்னர் அறிந்தோம். தரவுகள் பல தொகுதிகளாகவோ அன்றி வகுப்புகளாகவோ வகுப்பாக்கப்படுகின்றன; பின்னர் ஒவ்வொரு வகுப்பிற்குமுரிய தரவுகளின் எண்ணிக்கை அவதானிக்கப்பட்டு அட்டவணையிற் பதியப்படுகின்றன. இவ்விதம் பதிவதால் நாம் தரவுகளை ஒப்பீடுசெய்ய முடிகின்றது. அதாவது, எந்த வகுப்புகளினிடையே தரவுகள் கூடுதலாகக் காணப்படுகின்றன அல்லது குறைவாகக் காணப்படுகின்றன போன்றவற்றை அவதானிக்கமுடியும். ஒவ்வொரு வகுப்பிற்குமுரிய தரவுகளின் எண்ணிக்கை அவ்வகுப்பிற்கொத்த மீடிறன் அல்லது வகுப்பு மீடிறன் எனப்படும். வகுப்பொன்றின் மேல் கீழ் எல்லைகளுக்கிடைப்பட்ட பகுதி குறிப்பிட்ட வகுப்பினது வகுப்பாயிடை (**Class interval**) எனப்படும்.

ஒரு தொகுதித் தரவுகள் வகுப்புகளாக வகுக்கப்பட்டு, ஒவ்வொரு வகுப்பிற்குமுரிய மீடிறன்கள் அவதானிக்கப்படுகின்றதென்க. இவ்வாறு வகுக்கப்பட்ட வகுப்புகளை அவற்றிற்கொத்த மீடிறன்களுடன் கொண்ட ஓர் அட்டவணை மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை அல்லது மீடிறன் பரம்பல் எனப்படும். அதாவது, இது மாறி ஏற்கும் மதிப்புகள் அதன் வீச்சினுள் எவ்வாறு பரந்துள்ளன அல்லது பரம்பப்பட்டுள்ளன என்பதைக் காட்டுகின்றது.

மேலும் தரவுகளை மீடிறன் பரம்பல்களாக உணர்த்தும்போது, பரம்பல்களுக்குரிய சில புள்ளிவிபர மதிப்புகள் கணிக்கப்படவேண்டும். பொதுவாகப் புள்ளிவிபரவியலிற் குறிப்பிட்ட மாறியினது பரம்பலை விபரிக்கும்பொழுது மாறியானது இன்ன பெறுமானத்தை இடையாகவும் அல்லது சராசரியாகவும், இன்ன பெறுமானத்தை நியமவிலகலாகவும் கொண்டுள்ளது எனக் கூறுவது வழக்கம். உதாரணமாக, ஒரு கிராமத்திலுள்ள மக்களது தலாவருமானங்களை அவதானிக்கும்போது, சராசரியாக, குறிப்பிட்ட கிராம மக்கள் குறிப்பிட்ட தொகை வருமானத்தைக் கொண்டுள்ளார்கள் என்னும் முடிபு சுருக்கமாக எடுக்கப்படுகின்றது. அத்துடன் வெவ்வேறு பரம்பல்களையும் இவை போன்ற மதிப்புகளை அவதானிப்பதால் ஒப்பிடமுடியும். இவைபற்றி, பின்னர் விரிவாக ஆராய்வோம்.

சில நிலைமைகளிற் பண்புகள் சில, குறிப்பிட்ட மதிப்புகளைப் பல தடவைகள் எடுக்கின்றமையையும் காணமுடிகின்றது. இவை

போன்ற சந்தர்ப்பங்களில் மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையில் மாறி களின் வகுப்புகளுக்குப் பதிலாக மாறியினது தனியான மதிப்பு களே காணப்படும். இவை கூட்டமாக்கப்படாத மீடிறன் பரம்பல் எனப்படும்.

உதாரணம் 2.1

குறிப்பிட்ட கிராமமொன்றிலுள்ள தொழிலாளர்களிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட 25 பேரது தினசரி வருமானம் (ரூபா வில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளது:

16, 15, 22, 13, 14 20, 19, 24, 20, 23, 17, 22, 19, 18, 21, 18, 20, 17, 16, 15, 20, 19, 17, 18, 23

இங்கு தொழிலாளர்களின் ஆகக் குறைந்த வருமானம் ரூபா 13/-உம் ஆகக் கூடிய வருமானம் ரூபா 24/-உம் ஆகும். அத்துடன் சில தொழிலாளர்கள் ஒரே வருமானத்தைப் பெறுவதை யும் காண்கின்றோம். தொழிலாளர்களது தினசரி வருமானத்தை X என்ற மாறி குறிப்பின், X ஆனது இங்கு 13 இலிருந்து 24 வரை யுள்ள பெறுமானங்களைக் குறிப்பிட்ட மீடிறன்களுடன் எடுக்கின் றது. இதனை ஓர் அட்டவணையிற் குறிப்போம்.

வருமானம் (ரூபாவில்) X	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை f
13	1
14	1
15	2
16	2
17	3
18	3
19	3
20	3
21	2
22	2
23	2
24	1
மொத்தம்	25

மேற்காட்டப்பட்ட அட்டவணையானது கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளுக்கான மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை எனப்படும்.

மீடிறன் பரம்பல்கள் பற்றி விரிவாக ஆராயமுன்பாகப் பின் வரும் உதாரணத்தை எடுத்து நோக்குவோம்.

உதாரணம் 2.2

பல்கலைக்கழக வகுப்பொன்றிலுள்ள 50 மாணவர்கள் புள்ளி விபரவியற் பரீட்சையிற் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு:

77	65	83	55	58	60	33	85	52	69
63	48	74	77	67	71	78	35	50	35
85	54	59	88	45	80	43	55	91	57
73	39	68	67	75	41	65	98	48	89
65	94	65	54	88	93	42	67	66	73

மேலே தரப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் ஓர் எண்ணுருவில் ஒரு முகப்படுத்தப்படாத தரவுகளாகும். மேற்குறிப்பிட்ட வகுப்பிற்குப் புள்ளிவிபரவியல் விரிவுரைகள் உம்மால் எடுக்கப்பட்டதெனக் கொண்டு, பொருளியல் விரிவுரையாளர், மாணவர்கள் புள்ளி விபரவியற் பரீட்சையிற் பெற்ற பெறுபேறுகளைப்பற்றி விசாரிக்கும்போது, குறிப்பிட்ட ஒவ்வொரு மாணவனும் பெற்ற புள்ளியினை நீர் கூறமுடியாது. எனவே, என்ன பதிலளிக்கப்படவேண்டுமெனக் கீழே அவதானிப்போம்.

மேலே தரப்பட்ட பச்சை எண் தரவுகளை ஏறு நிரையாகவோ அன்றி இறங்கு நிரையாகவோ ஒழுங்குபடுத்திப் பெறப்படும் ஒழுங்கு பந்தி (*Array*) எனப்படும். இவ்வொழுங்கிலிருக்கும் மிகப் பெரிய எண்ணிற்கும் மிகச் சிறிய எண்ணிற்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் தரவின் வீச்சு எனப்படும். மேலே தரப்பட்ட புள்ளிவிபரவியற் பரீட்சைப் பெறுபேறுகளில், மாணவர்கள் பெற்ற ஆகக் கூடிய புள்ளி 98 ஆகவும், ஆகக் குறைந்த புள்ளி 33 ஆகவும் இருப்பதாலே தரவின் வீச்சு (98 — 33 =) 65 ஆகும். எனவே தரப்பட்ட தரவினைப் பந்தி உருவினில் அமைப்போம்.

33	35	35	39	41	42	43	45	48	48
50	52	54	54	55	55	57	58	59	60
63	65	65	65	66	66	67	67	67	68
69	71	73	73	74	75	77	77	78	80
83	85	85	88	88	89	91	93	94	98

பரீட்சையில் மாணவர் 0—100 வரையுள்ள புள்ளிகளைப் பெறக் கூடியதாக இருப்பினும் தரப்பட்ட மாணவர்கள் புள்ளிவிபரவியற் பரீட்சையிற் பெற்ற ஆகக் குறைந்த புள்ளி 33 ஆகும். எனவே, நாம் இங்கு 30 இற்குக் குறைந்த புள்ளிகளைக் கவனத்திற்கு எடுத்துக்கொள்ளாமல் விடுவோம். இதனால் தேவைப்படும் வகுப்புகள்

மட்டுமே கவனத்திற் கொள்ளப்படும். தேவையற்ற வகுப்புகள் அட்டவணையிற் சேர்த்துக் கொள்ளப்படமாட்டா. தரப்பட்ட தர வின் வீச்சு 65 ஆகையால் இவ்வீச்சினை வேண்டிய வகுப்புகளாகப் பிரிக்கலாமெனினும், அவற்றின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருப் பின் அட்டவணைப்படுத்தலின் நோக்கத்தினை அடையமுடியாது. அதாவது, தரவுகளைச் சுருக்கித் தெளிவாக விபரிப்பதே அட்டவ ணைப்படுத்தலின் நோக்கமாகும். இதனால், அவை பற்றிய முடிபு களை எடுப்பது சிக்கலாகக் காணப்படும். எனவே, நாம் தரப்பட்ட தரவினை, 10 என்னும் சம அளவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட ஏழு வகுப்புகளாக வகுப்போம். பின்னர் ஒவ்வொரு வகுப்பையும் சார்ந்த தரவுகளின் எண்ணிக்கை அவதானிக்கப் பட்டு, அவை ஒரு குறிப்புத்தாளிலே கீழே காட்டப்பட்டவாறு பதியப்படும். (பொதுவாக அட்டவணைகளில் 7 — 15 வரையுள்ள வகுப்புகளே காணப்படும்.)

குறிப்புத்தாள் (*Tally Sheet*)

புள்ளி (வகுப்பு)	வரவுக் குறிகள்	மீடிறன்
30 — 39	||||	4
40 — 49	~~||||~~ |	6
50 — 59	~~||||~~ ||||	9
60 — 69	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
70 — 79	~~||||~~ |||	8
80 — 89	~~||||~~ ||	7
90 — 99	||||	4
மொத்தம்		50

இங்கு தரவுகள் ஒவ்வொன்றாக எடுக்கப்பட்டு அது எவ்வகுப் பைச் சேர்ந்தது என்பதற்கு அறிகுறியாக, அவ்வகுப்பிற்கெதிராக ஒரு வரவுக்குறி அமைக்கப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு 5 ஆவது வரவுக் குறியும் அதற்குமுன் தொடர்ந்து வந்த நாலு குறிகளுக்கும் குறுக்கே வரையப்படும். இவ்வாறு அட்டவணை அமைப்பதால் ஒவ் வொரு வகுப்பிற்குரிய எண்களை எளிதாகக் கணக்கிட்டு வகுப்பு மீடிறன்களைக் கணிக்கமுடிகின்றது.

மேற்காட்டப்பட்ட அட்டவணை அமைப்பதன் நோக்கம், மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய விரிவான விளக்கம் கொடுப்பதற்கேயாகும். இங்கு மாணவர்களின் தொகை குறை வாகக் காணப்படுவதால் அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் பெற்ற புள்ளி களை எடுப்பது இலகுவானதாகக் காணப்படுகின்றபோதிலும், அவர் களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது உதாரணமாக, 1974 ஆம்

ஆண்டு உயர்தரப் பொருளியற் பரீட்சையில் மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளை நோக்குவோமானால், அங்கு ஒவ்வொரு மாணவனும் பெற்ற புள்ளியை எடுத்துநோக்குதல் கடினமானதாகும். எனவே, நாம் ஒரு தொகுதி மீடிறன்களை, அவற்றுக்கொத்த வகுப்புகளுடன் கொண்ட ஒரு மீடிறன் அட்டவணையை அமைப்பதன் மூலம் தரவை மேலும் தெளிவுபடுத்தலாம். மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளை ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X குறிக்கின்றதெனக. X இன் பரம்பல் பற்றிய புள்ளிவிபரவியற் பண்புகளைப் பின்னர் ஆராய்வோம்.

சம அளவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு கூட்டமாக்கப் பட்ட தரவிற்கான மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை

புள்ளி (வகுப்பு எல்லைகள்) X	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை வகுப்பு மீடிறன் f
30 — 39 ($30 \leq X \leq 39$)	4
40 — 49 ($40 \leq X \leq 49$)	6
50 — 59 ,,	9
60 — 69 ,,	12
70 — 79 ,,	8
80 — 89 ,,	7
90 — 99 ($90 \leq X \leq 99$)	4
மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை	50

இவ்வட்டவணையின் முதல் நிரலிற் புள்ளிகளைச் சம வகுப்புகளாகப் பிரித்து எழுதியுள்ளோம். ஒவ்வொரு வகுப்பினதும் வீச்சு 10. ஒவ்வொரு வகுப்பையும் சார்ந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாம் நிரலில் இடம் பெற்றுள்ளது. இது வகுப்பு மீடிறன் எனப்படும். உதாரணமாக, 40 இற்கும் 49 இற்குமிடையே புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 6. மேலும் இரண்டாம் நிரலின் கூட்டுத்தொகை மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகக் காணப்படும்.

மீடிறன் பரம்பலை அட்டவணையில் அமைப்பதால், மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய விபரம் தெளிவாக விளக்கப்படுகின்ற போதிலும் தனிப்பட்ட பெறுபேறுகள் (புள்ளி விபரங்கள்) பற்றிய தகவல்கள் இல்லாமற்போகின்றன. இங்கு தனிப்பட்ட புள்ளிகளின் மேல் அக்கறை காட்டப்படமாட்டாது. உதாரணமாக (50 — 59) என்ற வகுப்பைப் பொறுத்தவரையில் 50, 55, 59 என்ற புள்ளிகளெல்லாம் ஒரே மாதிரியான பங்கையே (நிறையையே) கொண்டுள்ளன.

வகுப்பொன்றினது மிகக்கூடிய பெறுமானம் வகுப்பின் மேல் எல்லையெனவும், மிகக் குறைந்த பெறுமானம் வகுப்பின் கீழ் எல்லையெனவும் வரையறுக்கப்படும். உதாரணமாக (30—39), (40—49) என்ற வகுப்புகளை நோக்கின், 30, 40 என்பவை குறிப்பிட்ட வகுப்புகளின் கீழெல்லைகள் எனவும் 39, 49 என்பவை வகுப்புகளின் மேலெல்லைகள் எனவும் அழைக்கப்படும். வகுப்பொன்றின் மேல், கீழ் எல்லைகளுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிட்ட வகுப்பினது வகுப்பாயிடையின் அளவு அல்லது பருமன் (*Size of the Class interval*) எனப்படும். மேலும் இவ்வகுப்பாயிடைகள் சம அளவுள்ளவையாகக் காணப்படவேண்டிய அவசியமில்லை. அவை தரவுகளின் தன்மைகளுக்கேற்ப வித்தியாசமானவையாகக் காணப்படலாம். அத்துடன் வகுப்பாயிடைகள் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவினதாக இருக்கவேண்டியதில்லை; அவை வசதிக்கேற்றவாறு மாறுபடலாம். உதாரணமாகப் பரம்பலொன்றின் வகுப்புகள் (30—34), (35—39), (40—49), (50—62), ... என்றும் அமையலாம்.

2.3.1: வகுப்பு எல்லைகளுக்கான இடங்காணல் (LOCATION OF CLASS LIMITS)

மீடிறன் பரம்பலொன்றின் புள்ளிவிபர மதிப்புகள் சிலவற்றை அறிவதற்குக் குறிப்பிட்ட மாறி எடுக்கும் பெறுமானங்கள் தேவைப்படுகின்றன. இங்கு நாம் மாறியினது வகுப்பிலுள்ள ஒரு பெறுமானத்தையே மாறியின் பெறுமானமாகக் கொள்கின்றோம். அதாவது, வகுப்பினது எப்பெறுமானத்தை மாறியின் பெறுமானமாகக் கொள்வது என்ற பிரச்சினை எழுகின்றது. பொதுவாக, வகுப்பொன்றின் நடுப்புள்ளியே குறிப்பிட்ட வகுப்பிற்குரிய மாறியினது பெறுமானமாகக் கருதப்படும். வகுப்பின் நடுப்புள்ளியானது அதன் மேல், கீழ் எல்லைகளின் சராசரியினூற் பெறப்படும். எனவே வகுப்பின் மேல், கீழ் எல்லைகளது முக்கியத்துவம் இங்கு புரிகின்றது. அதாவது, இவற்றிற்கான இடங்காணல் முக்கியமானதாகும்.

பொதுவாகப் பண்புகளைக் குறிக்கும் மாறிகள் பின்னக மாறிகளாகவும், தொடர் மாறிகளாகவும் காணப்படலாம் என முன்னர் கூறினோம். இவ்விரு மாறிகளைக் கொண்ட மீடிறன் அட்டவணைகளிலுள்ள வகுப்புகளின் எல்லைகளை வரையறுப்பதில் வேறுபாடுகள் காணப்படுகின்றன. மேற் கொடுக்கப்பட்ட உதாரணத்தில் மாணவர்கள் பெறும் புள்ளிகள் முடிவுள்ள பெறுமானங்களாக

இருப்பதால் அது ஒரு பின்னக மாறியாகும். எனவே, இங்கு வகுப்பு எல்லைகளை வரையறுக்கும்போது, முறிப்புகள் காணப்படலாம். அதாவது, (30 — 39), (40 — 49) என இரு வகுப்பை எழுதும்போது இங்கு மாறியானது முதலாம் வகுப்பில் 30 தொடக்கம் 39 வரையுள்ள பெறுமானங்களையும், இரண்டாம் வகுப்பில் தொடர்ந்து 40 இலிருந்து 49 வரையுள்ள பெறுமானங்களையும் பெறும்.

தொடர் மாறிகளைக் குறிக்கும் மீடிறன் வகுப்புகளை அமைக்கும்போது, மாறி எல்லாப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கவேண்டிய நிலைமை காணப்படினும் அங்கும் முறிப்புகள் காணப்படுகின்றன. உதாரணமாக, (30 — 39.99), (40 — 49.99) என இரு வகுப்புகளை எழுதும்போது இங்கு முதலாம் வகுப்பில் மாறி 30 இலிருந்து 39.99 வரையுள்ள எல்லாப் பெறுமானங்களையும் பெறும்; இரண்டாம் வகுப்பில் மாறி 40 இலிருந்தே பெறுமானங்களைப் பெறும். எனவே, 39.99 இற்கும் 40 இற்கும் இடைப்பட்ட பெறுமானங்கள் அட்டவணையில் வரையறுக்கப்படாமற் போகின்றன. எனினும், வேறுவிதமாக வரையறுப்பது கடினமாகையால் இவ்வாறே எழுதுவோம். சில வேளைகளில் அது (30 — 40), (40 — 50),... எனவும் எழுதப்படலாம். இங்கு பின்னக வகையைப் போலல்லாது மாறியானது முதலாம் வகுப்பில் 30 இலிருந்து 40 வரையுள்ள (ஆனால் 40 என்ற பெறுமானத்தையல்ல) பெறுமானங்களையும் இரண்டாம் வகுப்பில் 40 இலிருந்து 50 வரையுள்ள பெறுமானங்களையும் (ஆனால் 50 என்ற பெறுமானத்தையல்ல) கொள்ளும். இவ்வாறு எழுதப்படும்போது, நாம் அட்டவணையை முறிவற்றதாகவே கொள்ளல் வேண்டும்.

மேலும், பின்னக வகையில் (30 — 39) என்ற வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் $\frac{30 + 39}{2} = 34.5$ எனவும் தொடர்ச்சியுள்ள வகையில் (30 — 40) என்ற வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் $\frac{30 + 40}{2} = 35$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

எனவே, குறிப்பிட்ட மாறிபற்றிய ஒரு தொகுதி தரவுகள் தரப்படின் அதற்கான கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையை அமைப்பதற்கு முன்பாக மாணவர்கள் அம்மாறி எவ்வகையைச் சார்ந்த மாறியென அவதானித்தல் வேண்டும். பின்வரும் உதாரணத்தை நோக்குவோம்:

உதாரணம் 2.3

கம்பனி ஒன்றில் வேலைசெய்யும் 50 வேலையாட்களின் வாராந்த ஊதியமானது கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கான ஒரு மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையை அமைக்க.

105	52	115	54	100	159	60	99	61	95
80	65	81	70	85	70	72	90	75	63
65	80	69	85	70	105	90	75	75	75
160	110	52	175	55	100	79	60	95	76
65	76	78	78	79	76	120	130	140	145

மேலே தரப்பட்ட தரவின் வீச்சு (175 — 50 =) 125 ஆகும். மேலும் தரவானது வேலையாட்களின் வாராந்த ஊதியத்தைக் குறிப்பதால், இங்கு வார ஊதியத்தைக் குறிக்கும் மாறி X ஒரு தொடர் மாறியாகும். இங்கு நாம் தரப்பட்ட தரவுகளைச் சம அளவில்லாத வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட வகுப்புகளாக வகுத்து அதனை ஓர் அட்டவணையில் அமைப்போம்.

சம அளவில்லாத வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு கூட்டமாக்கப் பட்ட தரவிற்கான மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை

வாராந்த ஊதியம் X (வகுப்பு எல்லைகள்)	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை f
50 — 60 ($50 \leq X < 60$)	4
60 — 70 ($60 \leq X < 70$)	8
70 — 80 ,,	15
80 — 100 ,,	10
100 — 120 ,,	6
120 — 150 ,,	4
150 — 180 ($150 \leq X < 180$)	3
வேலையாட்களின் மொத்த எண்ணிக்கை	50

2.3.2: தொடர்பு மீடிறன் பரம்பல் (RELATIVE FREQUENCY DISTRIBUTION)

ஒரு வகுப்பின் தொடர்பு மீடிறனானது, அவ்வகுப்பு மீடிறனை, வகுப்புகளெல்லாவற்றினதும் மொத்த மீடிறனாற் பிரிக்க வருவதாகும். வழமையாக இவை சதவீதத்திலேயே உணர்த்தப்படுகின்றன. உதாரணமாக, மேலுள்ள மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையில் (80 — 100) என்ற வகுப்பினது தொடர்பு மீடிறன் $= \frac{10}{50} = 20\%$ ஆகும். அத்துடன் தொடர்பு மீடிறன் எல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகை 1 அல்லது 100% ஆகக் காணப்படும்.

தரவுகளின் வெவ்வேறு வகுப்புகளை, ஒத்த தொடர்பு மீடிறனுடன் கொண்ட ஓர் அட்டவணை தொடர்பு மீடிறன் அட்டவணை அல்லது தொடர்பு மீடிறன் பரம்பல் எனப்படும்.

உதாரணம் 2.4

உதாரணம் 2.2இலே கொடுக்கப்பட்ட தரவிற்கான தொடர்பு மீடிறன் பரம்பலை அமைக்குக.

புள்ளி (வகுப்பு எல்லைகள்)	வகுப்பு மீடிறன்	வகுப்புத் தொடர்பு மீடிறன் %
30 — 39	4	8
40 — 49	6	12
50 — 59	9	18
60 — 69	12	24
70 — 79	8	16
80 — 89	7	14
90 — 99	4	8
மொத்தம்	50	100

உதாரணம் 2.5

நாணயம் ஒன்று 5 முறை சுண்டப்படும்போது 3 தலைகள் பெறப்படின், பெறப்படும் விளைவுகளைக் கொண்ட தொடர்பு மீடிறன் அட்டவணை பின்வருமாறு:

விளைவு	மீடிறன்	தொடர்பு மீடிறன்
தலை	3	$3/5 = 0 \cdot 6$
பூ	2	$2/5 = 0 \cdot 4$
மொத்தம்	5	$1 \cdot 0$

குறிப்பு:

குறிப்பிட்ட ஒரு பரிசோதனை n தரம் நடைபெறுகின்றதென்க. அப்பரிசோதனையின் போது யாதுமொரு விளைவு m முறை நேர்ந்தால், குறிப்பிட்ட விளைவினது தொடர்பு மீடிறன் $\frac{m}{n}$ ஆகும்.

முயல்வுகளின் எண்ணிக்கை (n) அதிகரிக்கும்போது இப் பெறுமானம் $\frac{m}{n}$ ஆனது ஒரு நிலையான பெறுமானத்தை அணுகுவதைக் காணமுடிகின்றது. அதாவது, n ஆனது அதிகரிக்க, தொடர்பு மீடிறன் ஒரு புள்ளிவிபர ஒழுங்கினைக் காட்டுகின்றது. இது, அவ் விளைவிற்குரிய நிகழ்தகவு எனப்படும். இது பற்றிப் பின்னர் விரிவாக ஆராய்வோம்.

2.3.3: திரட்டு மீடிறன் பரம்பல் (CUMULATIVE FREQUENCY DISTRIBUTION)

உதாரணம் 2.2 இலே கொடுக்கப்பட்ட 50 மாணவர்கள் புள்ளி விபரவியற் பரீட்சையிற் பெற்ற புள்ளிகளை மீண்டும் அவதானிப் போம். மேற்படி பரீட்சையில் எத்தனை மாணவர்கள் 70இலும் கூடிய புள்ளிகளைப் பெற்றூர்கள்? எத்தனை மாணவர்கள் 40இலும் குறைந்த புள்ளிகளைப் பெற்றனர்? இவை போன்ற வினுக்களிலெல் லாம் புள்ளிகளைக் குறிக்கும் மாறியினது குறிப்பிட்ட பெறுமானத் திலும் குறைந்த அல்லது கூடிய மீடிறன்களே வேண்டப்படுகின்றன.

தரப்பட்ட ஒரு வகுப்பின் மேலெல்லையிலும் குறைந்த எல்லாப் பெறுமானங்களினதும் மீடிறன்களின் கூட்டுத்தொகை, அவ்வகுப்பு உட்பட அவ்வகுப்பு வரையுள்ள திரட்டு மீடிறன் எனப்படும். திரட்டு மீடிறன் அட்டவணையை அமைக்க முன்பாக, வகுப்பினது எந்த எல்லை, பிரிக்கும் பிரமாணமாக (Criteria) பயன்படுத்தப்படுகின்றது என்பது தீர்மானிக்கப்படல் வேண்டும்.

உதாரணமாக, உதாரணம் 2.4 இலே கொடுக்கப்பட்ட அட்ட வணையில் (50 — 59) என்ற வகுப்பின் மேலெல்லை உட்பட அவ் வகுப்பு வரையுள்ள மீடிறன்களின் எண்ணிக்கை $(4+6+9=)19$ ஆகும். அதாவது, 19 மாணவர்கள் 59 புள்ளியிலும் குறைந்த புள் ளிகளையோ அல்லது 59 புள்ளிக்குச் சமமான புள்ளிகளையோ பெற் றுள்ளனர்.

உதாரணம் 2.6

உதாரணம் 2.6 இலே கொடுக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலுக் கான திரட்டு மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை:

வகுப்பு	வகுப்பு மீடிறன்	திரட்டு மீடிறன்: மேலெல்லைக்குச் சமமான அல்லது குறைவான	திரட்டு மீடிறன்: மேலெல்லையிலும் பெரிதான
30 — 39	4	4	46
40 — 49	6	10	40
50 — 59	9	19	31
60 — 69	12	31	19
70 — 79	8	39	11
80 — 89	7	46	4
90 — 99	4	50	0

3ஆம் நிரலில் வகுப்புகளின் மேலெல்லைக்குச் சமமான அல்லது குறைவான புள்ளிகளைக் கொண்ட மாணவர்களின் திரட்டு எண்

ணிக்கைகளும், 4ம் நிரலில் வகுப்புகளின் மேலெல்லையிலும் பெரிதான புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களின் திரட்டு எண்ணிக்கைகளும் காணப்படுகின்றன, மொத்த மீடிறனின் சதவீதமாக உணர்த்தப் படும் திரட்டு மீடிறனானது திரட்டு மீடிறன் சதவீதம் எனப்படும். திரட்டு மீடிறனுக்குப் பதிலாக, திரட்டு மீடிறன் சதவீதத்தைப் பயன்படுத்துவோமானால் திரட்டு மீடிறன் சதவீத அட்டவணை பெறப்படும்.

2.4: மீடிறன் பரம்பல்களின் வரைபு வகைக்குறிப்பு
(GRAPHICAL REPRESENTATION OF THE FREQUENCY DISTRIBUTIONS)

மேற்காட்டிய மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணைகள், கொடுக்கப் பட்ட புள்ளிவிபரங்களைச் சுருக்கமாக வெளியிடுவதற்கும், அவை பற்றிய புள்ளிவிபர ஆய்வுகளுக்குத் தேவையான அடிப்படையை உருவாக்குவதற்கும் பயன்படுகின்றன. மேலும் அவற்றை அட்டவணைகளாக அமைப்பதுமல்லாமல், அவற்றை வரைபுகளாகவும் அமைக்கலாம். இதனால், மீடிறன் பரம்பலின் சிறப்புப் பண்புகள் தெளிவாக வெளிக்காட்டப்படும்.

எந்தவொரு மீடிறன் பரம்பலையும் பின்வரும் வரைபுகள் மூலம் குறிக்கலாம்:

1. இழைவரையம்
2. மீடிறன் பல்கோணியும், மீடிறன் வளையியும்
3. திரட்டு மீடிறன் வளையி

2.4.1: இழைவரையம் (HISTOGRAM)

பல செவ்வகங்களை ஒன்றுக்கொன்று அருகிற் கொண்டுள்ள ஒரு செவ்வகக் கூட்டம் ஓர் இழைவரையம் எனப்படும். இச்செவ் வகங்கள் பின்வரும் சிறப்பியல்புகளைக் கொண்டிருக்கும்:

(*i*) அச்செவ்வகங்களின் அடிகள் X அச்சிலும், அடிகளின் மையங்கள் ஒத்த வகுப்புகளின் நடுப் பெறுமானத்திலும் ஓர் அடியின் நீளம் ஒத்த வகுப்பாயிடையின் அளவிற் குச் சமனாயுமிருக்கும்.

(*ii*) செவ்வகங்களின் பரப்பு ஒத்த வகுப்பு மீடிறனுக்கு நேர் விகிதசமனாய்க் காணப்படும். எனவே, இழைவரையத்தி லுள் அடங்கியிருக்கும் பரப்பு, பரம்பலின் மொத்த மீடி

றனுக்குச் சமனுகவோ அன்றி நேர்விகித சமனுகவோ இருக்கும்.

(அ) வகுப்பாயிடைகளெல்லாம் ஓரே அளவினதாகவிருப்பின் செவ்வகங்களின் உயரங்கள் ஒத்த வகுப்பு மீடிறனுக்குச் சமனுனதாக இருக்கும். எனவே, மீடிறனை எண்ணளவிற் செவ்வகத்தின் உயரத்துக்குச் சமனுக எடுப்பது வழக்கம்.

வகுப்பாயிடைகளின் அளவுகள் ஓரலாகக் காணப்பட்டு, உயரங்கள் $f_1, \ldots, f_N$ ஆக இருப்பின், இழைவரையத்தின் பரப்பு $1.f_1 + \ldots + 1.f_N = f_1 + f_2 + \ldots + f_N = N$ (மொத்த மீடிறன்) ஆகும்.

(ஆ) வகுப்பாயிடைகளின் அளவுகள் சமனில்லாதிருப்பின் செவ்வகங்களின் உயரங்கள் ஒத்த வகுப்பு மீடிறனதும் அதன் வகுப்பாயிடையின் அளவினதும் விகிதத்துக்கு (*Ratio*) நேர்விகிதசமனுய்க் காணப்படும். ஏனெனில்,

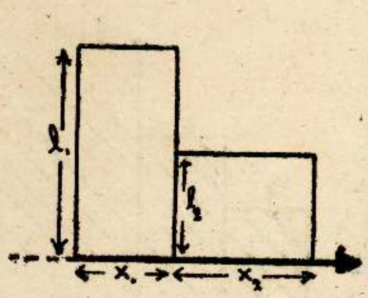
X_1, X_2 என்பவற்றை வகுப்பாயிடையளவுகளாகவும் f_1, f_2 என்பவற்றை வகுப்பு மீடிறன்களாகவும் கொண்ட இரு வகுப்புகளை நோக்குவோம். இவ்வகுப்புகளை இழைவரையமாக வரையும்போது, இவற்றைக் குறிக்கும் செவ்வகங்களின் உயரங்கள் l_1, l_2 என்க. வரைவிலக்கணத்தால் முதலாம் வகுப்புக்குரிய செவ்வகத்தின் பரப்பு $l_1 X_1 \propto f_1$, இரண்டாம் வகுப்புக்குரிய செவ்வகத்தின் பரப்பு $l_2 X_2 \propto f_2$. எனவே,

$$\frac{l_1 X_1}{l_2 X_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

அதாவது,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{(f_1 / X_1)}{(f_2 / X_2)}$$

$$\therefore \quad l_1 \propto (f_1 / X_1)$$
$$l_2 \propto (f_2 / X_2)$$



பொதுவாக i ஆவது வகுப்பிற்கு,
$l_i \propto (f_i / X_i)$.

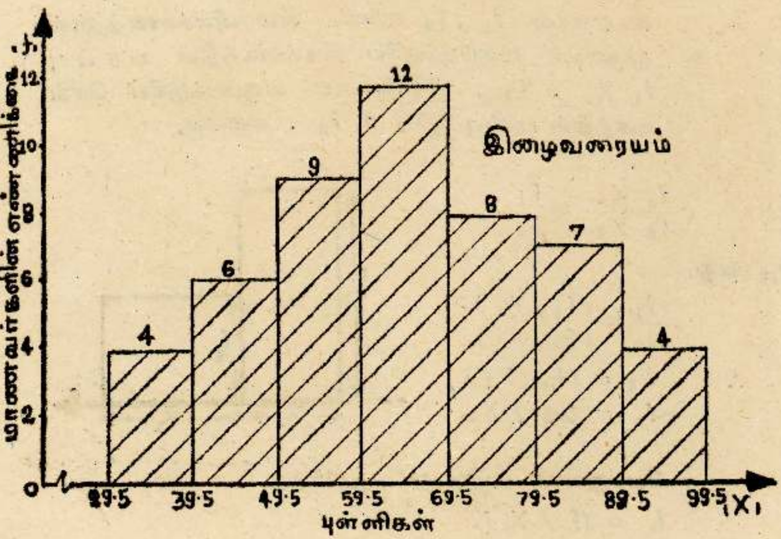
(அ) சம அளவுள்ள வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளையுடைய மீடிறன் பரம்பலின் இழைவரையம்

உதாரணம் 2. 7

உதாரணம் 2. 2 இற்கான இழைவரையத்தை வரைக.

மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை

புள்ளி X (வகுப்பு எல்லைகள்)	வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம்	வகுப்பு மீடிறன் f
30 — 39	34·5	4
40 — 49	44·5	6
50 — 59	54·5	9
60 — 69	64.5	12
70 — 79	74·5	8
80 — 89	84·5	7
90 — 99	94·5	4

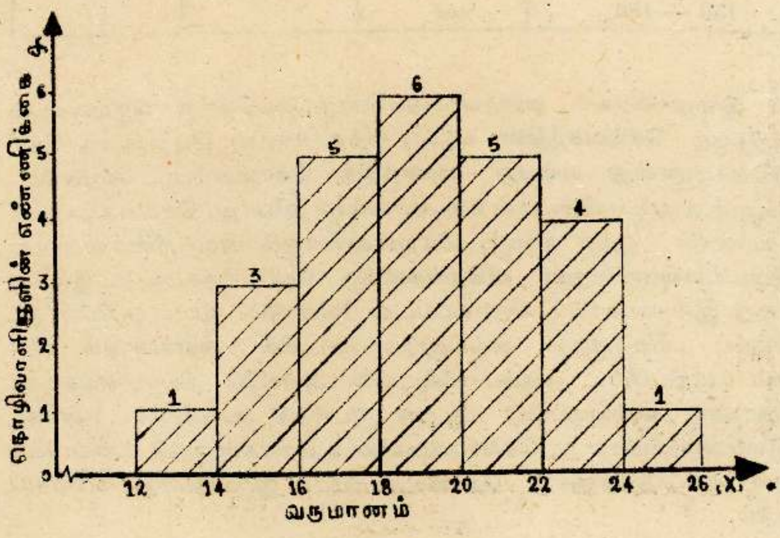


உதாரணம் 2.8

உதாரணம் 2.1 இனை ஓர் இழைவரையத்தில் அமைக்குக.

கொடுக்கப்பட்ட குடும்பங்களது வாராந்த வருமானத்தைக் குறிக்கின்ற தொடர் மாறியை, ரூபா 2/- வகுப்பாயிடையளவுகளைக் கொண்டுள்ள ஒரு மீடிறன் அட்டவணையில் அமைப்போம்.

வருமானம் X (ரூபா) (வகுப்பு எல்லைகள்)	வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம்	வகுப்பு மீடிறன் f
12 — 14 ($12 \leq X < 14$)	13	1
14 — 16 ($14 \leq X < 16$)	15	3
16 — 18 ,,	17	5
18 — 20 ,,	19	6
20 — 22 ,,	21	5
22 — 24 ,,	23	4
24 — 26 ($24 \leq X < 26$)	25	1



(ஆ) சம அளவில்லாத வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளையுடைய மீடிறன் பரம்பலின் இழைவரையம்

உதாரணம் 2.9

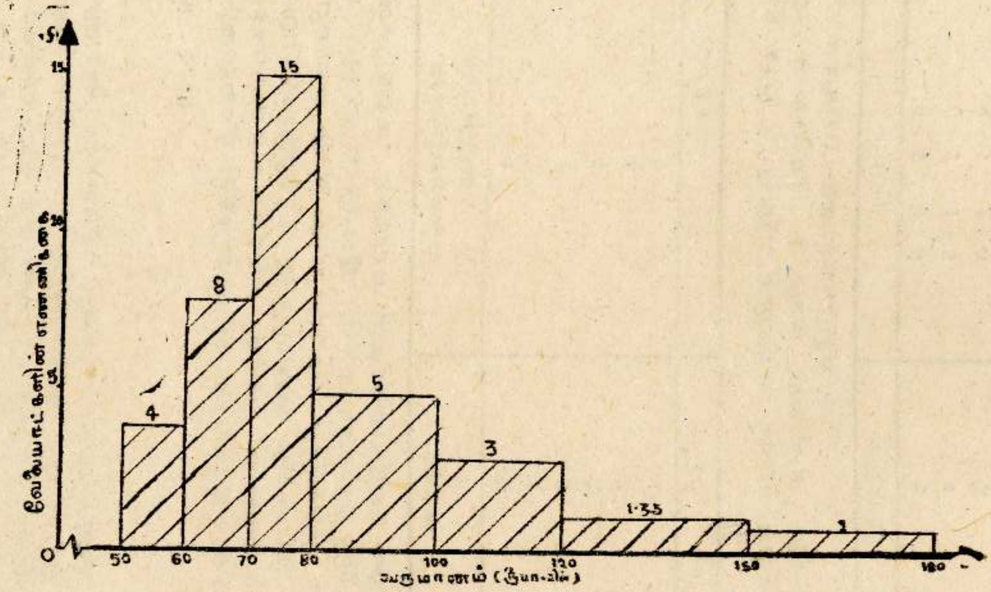
உதாரணம் 2.3 இனை எடுத்துக்கொள்க. இங்கு தரவுகள் சம அளவில்லாத வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டு கூட்டமாக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கான இழைவரையம் எவ்வாறு வரையப்படுகின்றதென அவதானிப்போம்.

மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை

ஊதியம் (ரூபாவில்) (வகுப்பு எல்லைகள்)	வகுப்பின் நடுப்பெறுமானம்	வகுப்பு மீடிறன்	மீடிறன் அடர்த்தி
50 — 60	55	4	4
60 — 70	65	8	8
70 — 80	75	15	15
80 — 100	90	10	5
100 — 120	110	6	3
120 — 150	135	4	1·33
150 — 180	165	3	1

இழைவரையம் வரையப்படும்போது ஒவ்வொரு வகுப்பையும் குறிக்கும் செவ்வகத்தின் பரப்பு ஒத்த வகுப்பு மீடிறனுக்கு நேர் விகிதசமமானது என்பது கவனத்திற் கொள்ளப்பட வேண்டும். மேலும் வகுப்பாயிடைகள் சம அளவில்லாதபோது, செவ்வகங்களின் உயரங்கள், ஒத்த வகுப்பு மீடிறன்களினதும் அவற்றின் வகுப்பாயிடையளவுகளினதும் விகிதங்களிற்கு நேர்விகிதசமமாக இருக்குமாறு இழைவரையம் வரையப்படல் வேண்டும். ஆனால் குறிப்பிட்ட வகுப்பு மீடிறனதும் அவ்வகுப்பாயிடையின் அளவினதும் விகிதம் (குறிப்பிட்ட வகுப்பாயிடையின் அளவினை நியம அலகாகக் கொண்டு) அவ்வகுப்பின் மீடிறன் அடர்த்தி எனப்படும். எனவே, இழைவரையமானது, செவ்வகங்களின் உயரங்கள் ஒத்த வகுப்புமீடிறன் அடர்த்திகளுக்கு நேர்விகிதசமமாக இருக்குமாறு வரையப்படும்.

உதாரணம் 2.9 இலே கொடுக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலுக்கான இழைவரையம்



(இ) கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளையுடைய மீடிறன் பரம்பலின் இழையவரையம்

இழையவரையமானது, கூட்டமாக்கப்பட்ட பரம்பல்களுக்கு மட்டுமே வரையமுடியுமெனினும் கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளுக்கும் இழையவரையத்தை வரையலாம். மாறி கொள்ளும் பெறுமானங்களைக் குறிப்பிட்ட ஆயிடைகளுள் அமைப்பதன் மூலம் இதனை அமைக்க முடிகின்றது. பின்வரும் உதாரணத்தை நோக்குவோம்.

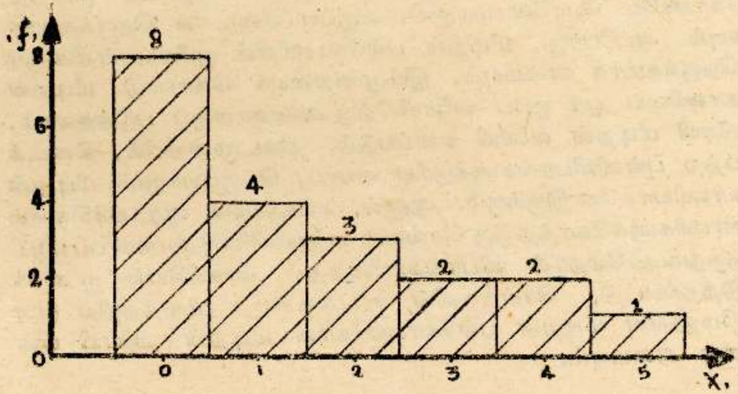
உதாரணம் 2.10

புள்ளிவிபரவியற் புத்தகமொன்றின் யாதாயினும் ஒரு பக்கத்தில் ஆகக்கூடியதாய் 5 எழுத்துப் பிழைகள் மட்டுமே காணமுடியும். அப்புத்தகத்திலிருந்து 20 பக்கங்கள் எழுமாறாய் எடுக்கப்பட்டுப் பிழைகள் அவதானிக்கப்பட்டன. பிழைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும் மாறியினது மீடிறன் பரம்பல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளதெனின், அதற்கான இழையவரையத்தை வரைக.

அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை X	மீடிறன் f
0	8
1	4
2	3
3	2
4	2
5	1
மொத்தம்	20

இங்கு மாறி X எடுக்கும் குறிப்பிட்ட பெறுமானங்கள், நடுப்புள்ளியில் அமையுமாறு 1 அலகு அளவுள்ள ஆயிடையைக் கொண்ட வகுப்புகள் அமைக்கப்படுகின்றன.

வகுப்பு	மீடிறன்
$-0\cdot5 - 0\cdot5$	8
$0\cdot5 - 1\cdot5$	4
$1\cdot5 - 2\cdot5$	3
$2\cdot5 - 3\cdot5$	2
$3\cdot5 - 4\cdot5$	2
$4\cdot5 - 5\cdot5$	1
மொத்தம்	20

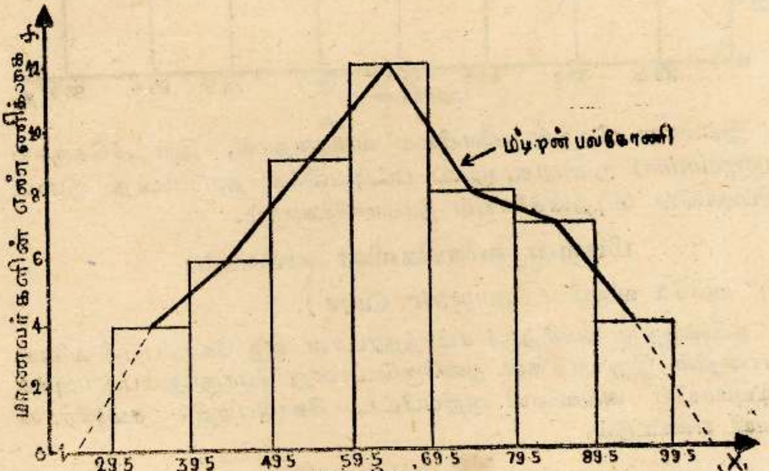


2.4.2: மீடிறன் பல்கோணியும் மீடிறன் வளையியும்
(FREQUENCY POLYGON AND FREQUENCY CURVE)

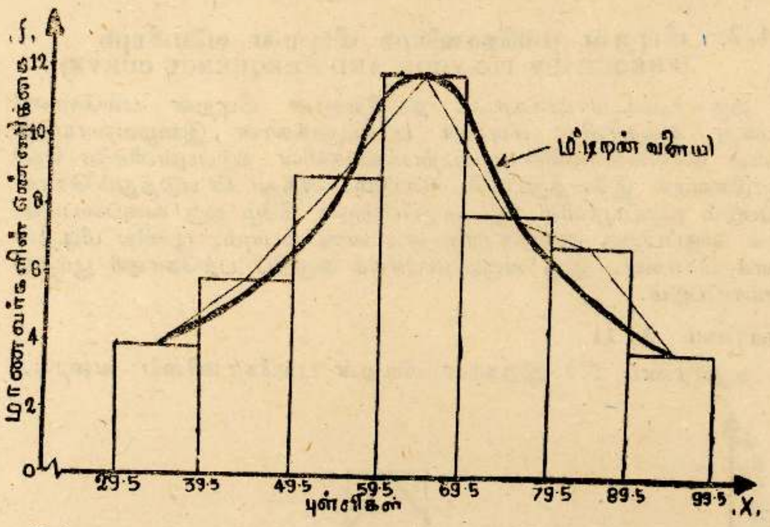
ஒரு கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவிற்கான மீடிறன் பல்கோணியானது, அத்தரவின் மீடிறன் பரம்பலுக்கான இழைவரையத்திலுள்ள செவ்வகங்களினது மேற்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை நேர் கோடுகளால் இணைத்துப் பெறப்படும். அத்துடன் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் வகுப்புகளில் கீழ் வகுப்பிற்கும் கீழே ஒரு வகுப்பையும், மேல் வகுப்பிற்கு அடுத்ததாக ஒரு வகுப்பையும், பூச்சிய மீடிறன்களைக் கொண்ட இரு வகுப்புகளாகக் கருதிப் பல்கோணி பூர்த்தி செய்யப்படும்.

உதாரணம் 2 . 11

உதாரணம் 2.2 இற்கான மீடிறன் பல்கோணியை வரைக.



வகுப்பாயிடைகளின் அளவுகளைச் சிறிது சிறிதாகக் குறைத்துக் கொண்டே போவோமானால், வகுப்பாயிடைகள் நெருக்கமாக அமையும். அப்போது, மீடிறன் பல்கோணியின் முனைப்புள்ளிகளும் மிக நெருக்கமாக அமையும். இம்முறையைக் கொண்டு மீடிறன் பல்கோணியை ஓர் ஒப்ப வளையியிற்கு அண்ணளவுப் படுத்தலாம். இவ்வளையி மீடிறன் வளையி எனப்படும். நடைமுறையில், கிடைக்கப்பெற்ற புள்ளிவிபரங்களுக்குரிய வரைபு பெரும்பாலும் மீடிறன் பல்கோணியாகவே இருக்கும். ஆனால், கணக்கியல் ஆராய்ச்சிகளில் பல்கோணிகளுக்கொத்த ஒரு செவ்வன் வளையியினை (*Normal curve*)ப் பொருத்துவதாலேதான் விபரங்களனைத்தும் கணக்கியல் முறைக்குட்படுத்தப்பட்டு, செய்திகளின் உட்கருத்தை உய்த்தறிய முடியும். மேலுள்ள மீடிறன் பல்கோணிக்கான மீடிறன் வளையி பின்வருமாறு அமையும்.



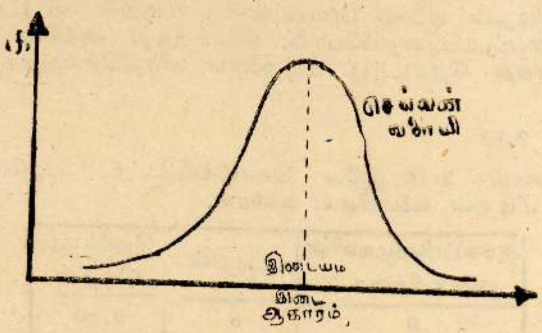
இவ்வாறு மீடிறன் வளையியை வரைவதால், இடைச்செருகல் (*Interpolation*) மூலமாக, மூலப் பட்டியலிலே தரப்படாத இடைமதிப்புகளின் மீடிறன்களையும் தீர்மானிக்கலாம்.

மீடிறன் வளையிகளின் வகைகள்:

(அ) சமச்சீர் வளையி (*Symmetric Curve*)

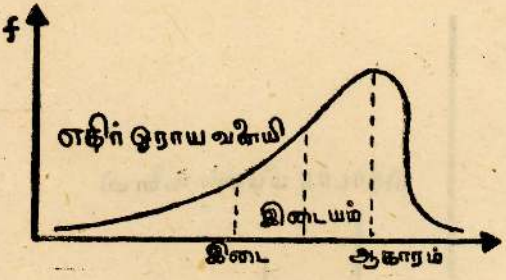
நிலைக்குத்து அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோடுபற்றி வளையியொன்றின் இரு பாதிகள் ஒன்றோடொன்று பொருந்தும்படி மடிக்க முடியுமாயின் அவ்வளையி குறிப்பிட்ட கோடுபற்றிச் சமச்சீரான வளையி எனப்படும்.

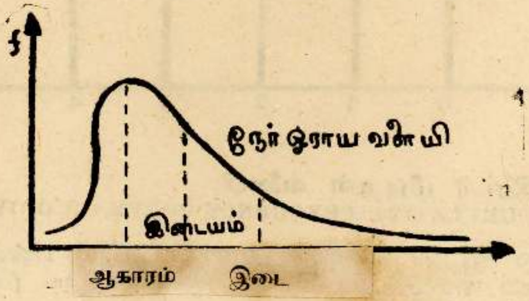
செவ்வன் வளையி இதற்கொரு முக்கியமான எடுத்துக்காட்டாகும்.



(ஆ) ஓராய வளையி *(Skew Curve)*

ஒரு வளையி சமச்சீரற்றதாகவிருப்பின் அது ஓராய வளையி எனப்படும். ஓர் ஓராய வளையி இடப்பக்கம் ஓராயமாகக் காணப்படின் அது எதிர் ஓராய வளையி எனவும், வலப்பக்கம் ஓராயமான தாகக் காணப்படின் அது நேர் ஓராய வளையி எனவும் அழைக்கப்படும்.





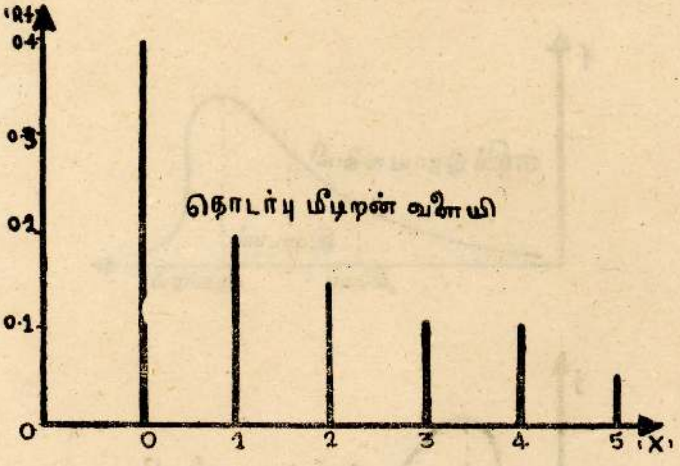
தொடர்பு மீடிறன் வளையி (*Relative Frequency Curve*)

தொடர்பு மீடிறன் அட்டவணைக்குரிய இழைவரையம், பல் கோணி, மீடிறன் வளையி போன்றவை, மீடிறன் அட்டவணை ஒன் றிற்கு வரையப்பட்டதைப்போல், நிலைக்குத்து அச்சில் மீடிறனுக் குப் பதிலாகத் தொடர்பு மீடிறனைப் பிரதிசெய்வதாற் பெறப் படும்.

உதாரணம் 2.12

உதாரணம் 2.10 இலே கொடுக்கப்பட்ட பரம்பலுக்கான தொடர்பு மீடிறன் வளையியை வரைக.

அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை X	மீடிறன்	தொடர்பு மீடிறன்
0	8	0.40
1	4	0.20
2	3	0.15
3	2	0.10
4	2	0.10
5	1	0.05
மொத்தம்	20	1.00



2.4.3: திரட்டு மீடிறன் வளையி (CUMULATIVE FREQUENCY CURVE OR OGIVE)

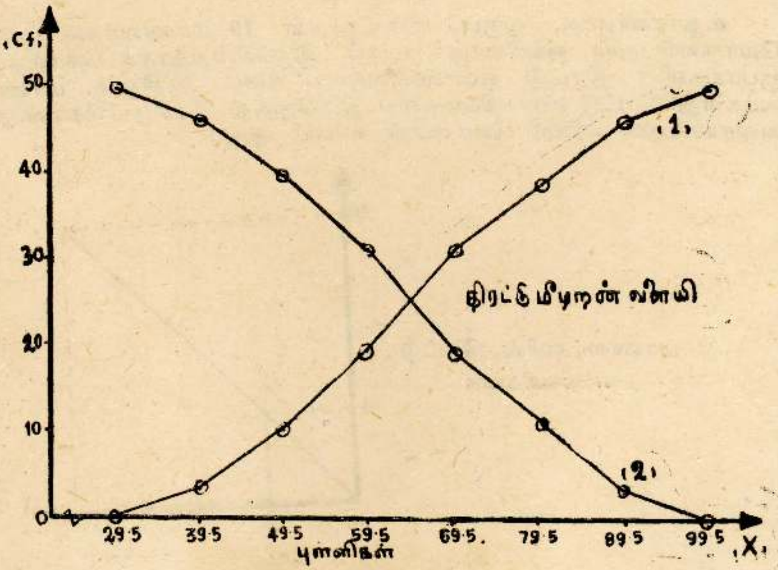
திரட்டு மீடிறன் பரம்பல் அமைக்கப்பட்ட பின்னர் வகுப்பு களின் மேல் எல்லையை அல்லது கீழ் எல்லையை (அட்டவணை

அமைக்கப்படும்போது எடுத்துக்கொண்டதை) X ஆள்கூறாகவும், அவ்வெல்லைகளுக்கு ஒத்த திரட்டு மீடிறன்களை Y ஆள்கூறாகவும் கொண்டு பதியப்படும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வளையி திரட்டு மீடிறன் வளையி எனப்படும்.

உதாரணம் 2.13

உதாரணம் 2.6 இலே கொடுக்கப்பட்ட திரட்டு மீடிறன் பரம்பலுக்கான வளையியினை வரைக.

வகுப்பு	வகுப்பு மீடிறன்	திரட்டு மீடிறன்	
		மேலெல்லைக்குச் சமமான அல்லது குறைவான	மேலெல்லையிலும் பெரிதான
30 — 39	4	4	46
40 — 49	6	10	40
50 — 59	9	19	31
60 — 69	12	31	19
70 — 79	8	39	11
80 — 89	7	46	4
90 — 99	4	50	0



வளையி (1) ஆனது வகுப்புகளின் மேலெல்லைக்குச் சமமான அல்லது குறைவான புள்ளிகளுக்குரிய மீடிறன்களைக்கொண்டு வரையப்பட்ட திரட்டு மீடிறன் வளையியையும், வளையி (2) ஆனது வகுப்புகளின் மேலெல்லையிலும் பெரிதான புள்ளிகளுக்குரிய மீடிறன்களைக்கொண்டு வரையப்பட்ட திரட்டு மீடிறன் வளையியையும் குறிக்கின்றது.

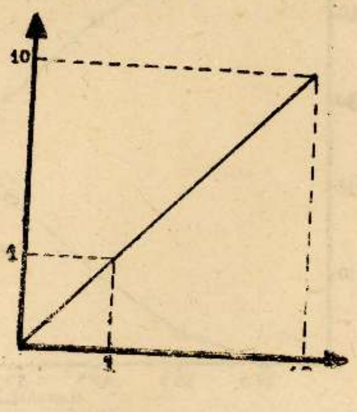
Y அச்சில் திரட்டு மீடிறனுக்குப் பதிலாக, திரட்டு மீடிறன் சதவீதத்தை உபயோகிப்பின் திரட்டு மீடிறன் சதவீத வளையி பெறப்படும். இங்கு தரவுகள் சீரான நியமத்திற்குச் செப்பமாக்கப்படுவதால் வெவ்வேறு மீடிறன் பரம்பல்களை ஒப்பிடவும் இது உதவியாயிருக்கும்.

லொறன்ஸ் வளையி (*Lorenz Curve*)

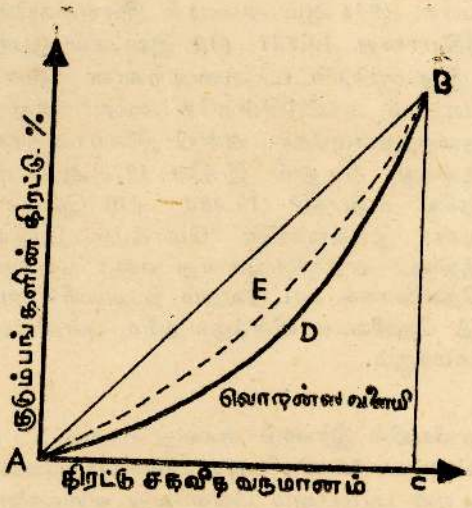
திரட்டு மீடிறன் வளையியொன்றின் எடுத்துக்காட்டாக லொறன்ஸ் வளையியை ஆராய்வோம். மாறியொன்று ஏற்கும் மதிப்புகளின் திரட்டு சதவீதங்களை கிடை அச்சிலும், அவற்றிற்கு ஒத்த மீடிறன்களின் திரட்டு சதவீதங்களை நிலைக்குத்து அச்சிலும் கொண்டு வரையப்படும் வளையி லொறன்ஸ் வளையி எனப்படும். அதாவது, அங்கு இரு அச்சுகளிலும் திரட்டு எண்ணிக்கையே எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றது. லொறன்ஸ் வளையியைப் பயன்படுத்தித் திரட்டு மீடிறன் பரம்பல்களை வெவ்வேறு சமயங்களில் ஒப்பிடவும், மக்களிடையே வருமானம் எவ்வாறு பகிர்ந்து காணப்படுகின்றது என்பதனை அறியவும், வெவ்வேறு மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும் முடிகின்றது.

உதாரணமாக, வகுப்பொன்றிலுள்ள 10 மாணவர்கள் ஒவ்வொருவரிடமும் ஒவ்வொரு ரூபாய் இருக்கின்றதாகக் கொள்க. ரூபாய்களின் திரட்டு எண்ணிக்கையை கிடை அச்சிலும், மாணவர்களது திரட்டு எண்ணிக்கையை நிலைக்குத்து அச்சிலும்கொண்டு வரையப்படும் வளையி லொறன்ஸ் வளையி ஆகும்.

மாணவர்களின் திரட்டு எண்ணிக்கை



ரூபாய்களின் திரட்டு எண்ணிக்கை



மேலுள்ள படத்திலே திரட்டு சதவீத வருமானம் கிடை அச்சிலும் குடும்பங்களின் திரட்டு சதவீதம் நிலைக்குத்து அச்சிலும் பதியப்பட்டுள்ளன. வளையி *AB* ஆனது, வருமானம் எல்லோரிடையும் சமமாகப் பங்கிடப்பட்டுள்ளதையும், வளையி *ACB* ஆனது, வருமானம் முற்றுகச் சமமாகப் பங்கிடப்படாமலிருப்பதையும் காட்டுகின்றது. வழமையாக லொறன்ஸ் வளையி *ADB* போலக் காணப்படும். மக்களின் வருமானத்தின்மேல் வரிவிதிக்கப்படின் லொறன்ஸ் வளையி *AEB* ஆகக் காணப்படும்.

2.5: மீடிறன் பரம்பல்களின் ஒப்பீடு
(COMPARISON OF FREQUENCY DISTRIBUTIONS)

புள்ளிவிபரங்களிடையே காணப்படும் பொதுவான போக்குகளையும், சார்புத்தன்மைகளையும் வெளிக்காட்ட வரைபுகளும் வரிப்படங்களும் உதவுகின்றபோதிலும், பொதுவான போக்கையும், சார்புத்தன்மையையும் வரையறுத்து அளந்துகூற இவற்றினுல் முடியாது. அவற்றைத் திட்பமாக அளந்து கூறுவதற்குக் கணிப்பு முறையையே கையாளல் வேண்டும். இதன்மூலம் அட்டவணைகளிலடங்கிய முக்கிய கருத்துகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க முடிகின்றது. ஒன்றி எண்ணிலிருந்து நாம் எவ்வித பொதுவான முடிபையும் பெறமுடியாது. அதனை வேறு எண்களுடன் ஒப்பிடும் போதுதான் அது உயிர்பெறுகின்றது.

உதாரணமாக, 1974 ஆம் ஆண்டில் இலங்கையின் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியானது 10,731 (10 இலட்சம் ரூபாவில்) எனக் கூறும்போது, இது குறிப்பிட்ட ஆண்டிற்கான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தியை மட்டும் காட்டுகின்றதே தவிர, அது அதிகரித்துள்ளதோ, குறைந்துள்ளதோ, அன்றி நிலையானதாக உள்ளதோ என்று கூறமுடியாது. மேலும் இதனை 1973 ஆம் ஆண்டிற்கான மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி 10,383 (10 இலட்சம் ரூபாவில்) உடன் ஒப்பிடின், இலங்கையின் மொத்தத் தேசிய உற்பத்தி 3480 இலட்சத்தினுல் அதிகரித்துள்ளது எனக் கூறலாம். ஒப்பீட்டு முறைகளைத் தெளிவாகக் காட்டுவதும் தரவுகளினிடையே உள்ள தொடர்புகளைத் தெளிவாக விளக்குவதுமே புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நோக்கமாகும்.

புள்ளிவிபரவியலில் இரண்டு அல்லது மேற்பட்ட மீடிறன் பரம்பல்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டிய அவசியம் காணப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு மீடிறன் பரம்பலும் வெவ்வேறு வகைகளைச் சார்ந்தனவாகவும், ஒவ்வொன்றும் தனிவிதிகளுக்குக் கட்டுப்படுவனவாகவும் இருப்பின் இப்பரம்பல்களை எல்லாம் ஆராய்வதும் விபரிப்பதும் கடினமானதாகும். ஆனுல் பல்வேறு துறைகளில் சேகரிக்கப்பட்ட விபரங்களை மீடிறன் பரம்பல்களாகத் தொகுக்கும்போது அவற்றிற்கிடையே சில பொதுப் பண்புகள் காணப்படுகின்றன. அத்துடன் அவை சில பொது விதிகட்குக் கட்டுப்படுவதையும் காண முடிகின்றது. எனவே ஒரு துறையிற் பெற்ற அனுபவம், மற்றைய துறைகளுக்கும் வழிகாட்ட உதவுகின்றது. இவ்வாறு வெவ்வேறு துறைகளிடையே ஒருமைப்பாடு காணப்படுகின்றமையால், அறிவியல் ஆராய்ச்சிகளிற் பல்வேறு துறைகளிலிருந்து கொள்ளப்படும் விபரங்களையெல்லாம் ஒரு பொதுமையான முறையினுல் ஒழுங்குபடுத்தவும், ஆராயவும், ஒப்புநோக்கவும் முடிகின்றது. மீடிறன் பரம்பல்களை விபரிப்பதற்கு ஒரு பொதுமையான முறையை மேற்கொள்ள, செவ்வன் வளையியின் அமைப்பும் அதன் பண்புகளுமே முக்கிய சான்ருகும். இதுபற்றி, பரம்பல்கள் பற்றிய அத்தியாயத்தில் விரிவாக ஆராய்வோம்.

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் வகுப்பாக்கப்பட்டு, அட்டவணைப்படுத்தப்படுவதன்மூலம் அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றன. அட்டவணையை நோக்குவதன்மூலம் தரவுகள் பற்றிய தகவல்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல் இலகுவானதொன்றல்ல. அட்டவணையிலுள்ள எண்களின் அடிப்படையிலிருந்து எவ்வித முடிவையும் எடுக்க முடியாது. அத்துடன் வெவ்வேறு பரம்பல்களை ஒப்பிடுவதற்கு அவற்றிற்குரிய மீடிறன் அட்டவணைகள் பொருத்தமானவையல்ல.

எனவே, சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளை மேலும் இலகுவாக்க வேண்டியதேவை காணப்படுகின்றது. தரப்பட்ட தரவுகளிலிருந்து விகிதங்கள், வீதாசாரங்கள், சராசரிகள் போன்ற பெறுதிகளைக் கணிப்பதன்மூலம் தரவுகளைத் திட்பமாக விபரிக்கமுடிகின்றது. விகிதங்கள், வீதாசாரங்கள் போன்றவை புள்ளியியற் பெறுதிகள் *(Statistical Derivatives)* எனப்படும். இவையாவும் அட்டவணையிலுள்ள தரவுகளிலிருந்தே கணிக்கப்படுகின்றன. இவை இரண்டு அல்லது மேற்பட்ட தரவுகளை இணைப்பதன்மூலம் பெறப்படுகின்றன. மேலும் இவை கணிப்பதால் மட்டும் பெறப்படுகின்றனவே தவிர, ஆரம்பத் தரவுகளைப்போல் நேரடியாகப் பெறப்படுவதில்லை.

புள்ளியியற் பெறுதிகள் எளியவையாயும், சிக்கலானவையாயும் காணப்படுகின்றன. விகிதம், வீதாசாரம் முதலியன எளிய பெறுதிகளெனவும், சராசரி, பிரிகை அளவைகள் முதலியன சிக்கலான பெறுதிகளெனவும் அழைக்கப்படும். புள்ளியியற் பெறுதிகள் பல்வேறு தேவைகளைப் பூர்த்திசெய்வதுடன், புள்ளியியல் ஆய்விற்கு மிகவும் உபயோகமானவையாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட பரம்பலொன்றைப் பிறவற்றிலிருந்து எவ்வாறு வேறுபடுத்தி விபரிப்பது என்பதனைத் தொடர்ந்து அவதானிப்போம். பொதுவாக, தரப்பட்ட பரம்பல்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் கீழே கொடுக்கப்படும் அளவைகளைக் கணிப்பதன் மூலம் அப்பரம்பல்களை ஒப்பீடு செய்ய முடிகின்றது.

1. இடங்காணல் அளவை
2. பிரிகை அளவை
3. ஓராய அளவை
4. குடில அளவை

2.5.1: இடங்காணல் அளவைகள் (MEASURES OF LOCATION)

குறிப்பிட்ட பண்புகளைக் குறிக்கும் மாறியின் மதிப்புகள் யாவும் தனிப்பட்ட அளவுத்திட்டத்தினடிப்படையிற், பரம்பலாக அமைந்துள்ளன என முன்னர் குறிப்பிட்டோம். இத்தகைய மீடிறன் பரம்பலொன்றை முற்றாக விபரிக்கக்கூடிய, பரம்பல் பற்றிய போதிய சிறப்பியல்புகளைக் காணமுடியுமெனில், நாம் அவற்றை உபயோகிப்பதன் மூலம் பரம்பலை விபரிக்க முடிகின்றது. உதாரணமாக, மாறி எடுக்கும் மதிப்புகளெல்லாவற்றிற்கும் பொதுவான ஒரு தனி மதிப்பைத் தேர்வதால் பரம்பல் முழுவதையும் ஓரளவில் விபரிக்க முடிகின்றது. மாறியெடுக்கும் மதிப்புகளெல்லாவற்றிற்

குமுரிய மீடிறன்களின் எண்ணிக்கை சமனின்மையால் எம்மதிப்புக் கூடிய மீடிறன்களைக் கொண்டுள்ளதோ அதனைத் தேர்வதே ஏற்றதாகத் தோன்றுகின்றது.

ஒரு தொகுதி தரவுகளைச் சுருக்கமாகவும், ஒன்றியெண்ணினும் எடுத்துக் காட்டும் அளவை சராசரி எனப்படும். உதாரணமாக, பல்கலைக்கழகத்திலுள்ள மாணவர்களது உயரங்கள் யாவும் சராசரியாக 5' 6'' ஆகக் காணப்படுகின்றதெனக் கூறுவதால், நாம் எல்லா மாணவர்களது உயரங்களையும் ஒன்றியெண்ணினுற் குறிப்பிடுகின்றோம். சராசரிகள், இடங்காணல் அளவைகளில் ஒன்றாகும். சராசரியானது, ஒரு மாறியேற்கும் மதிப்புகளை மொத்தத்தில் எடுத்துரைக்கும் அளவையாகவும் உள்ளது. எனினும் சராசரி அளவை, தொகுதியிலுள்ள ஏதாவது ஒரு தரவுக்குச் சமமாகக் காணப்பட வேண்டிய அவசியமில்லை. ஆதலால், சராசரியைப் பரம்பலொன்றின் மையநிலைப்போக்கினை அல்லது மையநாட்டத்தினைத் (*Central tendency*) தெரிவிக்கும் அளவையாகக் கருதலாம். பரம்பலொன்றின் கூட்டலிடை, ஆகாரம், இடையம் முதலியனவும் மையநிலைப்போக்கினைத் தெரிவிக்கும் அளவைகளாகும். இவற்றைத் தனித்தனியாக அவதானிப்போம்.

மேலும் காலணைகள், தசவீதத்திகள், சதமணைகள் போன்றனவும் ஒரு பரம்பலின் மையநிலைப்போக்கினைத் தெரிவிக்காவிடினும், அவை அப்பரம்பலின் இடங்காணல் அளவைகளாகும்.

முதலில் அளவுமாறியையும், பண்புமாறியையும் வரையறுப்போம். எண்கணியத்திலுல் விபரிக்கக்கூடிய மாறிகளெல்லாம் அளவுமாறிகள் (உதாரணமாக நிறை, உயரம், வருமானம் முதலியன) எனவும், எண்கணியமல்லாத குணதிசயமொன்றினுல் விபரிக்கப்படும் மாறிகளெல்லாம் பண்புமாறிகள் (உதாரணமாகப் பழுதடைந்த, பழுதடையாத பொருட்கள், நாணயத்தின் தலை அல்லது பூ போன்றவை) எனவும் வரையறுக்கப்படும். பரம்பலொன்றின் சிறப்பியல்புகளை விபரிக்கும் ஒரு மாறி அப்பரம்பலின் பரமானம் எனப்படும். உதாரணமாக, இடை, இடையம், ஆகாரம் முதலியவை ஒரு பரம்பலின் பரமானங்களாகும்.

பல்வேறுவகையான இடங்காணல் அளவைகள்:

(*i*) கூட்டலிடை

(*ii*) பெருக்கலிடை

(*iii*) இசையிடை

(*iv*) இடையமும் காலணையும்

(*v*) ஆகாரம்

(i) கூட்டலிடை (*Arithmetic Mean*)

சராசரியும் கூட்டலிடையும் ஒன்றையே கருதும். மீடிறன் பரம்பலொன்று யாதாயினுமொரு மையப்பெறுமானமொன்றினுற் குறிக்கப்படுமாயின், இரு பரம்பல்களை ஒப்பிடுவதற்குப் பதிலாக அவை ஒவ்வொன்றினதும் மையப் பெறுமானங்களை ஒப்பிடலாம்.

வரைவிலக்கணம்

X என்னுமொரு மாறியினது $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்னும் பெறுமானங்களை எடுத்துக் கொள்க. X இனது மீடிறன் பரம்பலின் கூட்டலிடையானது, $\overline{X}$ இனுற் குறிக்கப்பட்டு,

$\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ என வரையறுக்கப்படும்.

அதாவது,

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

மாறியொன்றின் கூட்டலிடையானது, மாறியேற்கும் மதிப்புகளெல்லாவற்றினதுங் கூட்டுத்தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் பிரிக்க வருவதேயாகும்.

குறிப்பு:

கூட்டலிடையானது சில சமயங்களில் இடை எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணம் 2.14

X என்னும் மாறியானது 5, 10, 15, 20, 25 என்னும் 5 பெறுமானங்களை எடுக்கின்றதெனின் இப்பெறுமானங்களினது கூட்டலிடை,

$\overline{X} = \dfrac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = 15$ ஆகும்.

கூட்டலிடையானது மாறியேற்கும் ஒவ்வொரு மதிப்புகளிலும் தங்கியுள்ளது. உதாரணமாக, 5 மாணவர்கள் புள்ளிவிபரவியற் பரீட்சையொன்றில் 60, 60, 60, 60, 90 என்ற புள்ளிகளைப் பெறுகின்ருர்களெனில், அவர்கள் பரீட்சையிற் பெற்ற சராசரிப் புள்ளி,

$\dfrac{60 + 60 + 60 + 60 + 90}{5} = 66$

எனவே, இங்கு மாணவர்கள் சராசரியாக 66 புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளார்களெனக் கூறும்போது, நாம், 5 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளும் 66 என்ற புள்ளியைச் சுற்றிப் பரந்துள்ளன எனக் கருதுகின்றோம். அதாவது, 90 என்ற புள்ளியானது சராசரிப்புள்ளியை 6 புள்ளிகளால் உயர்த்தியிருப்பதைக் காணமுடிகின்றதே தவிர உண்மையில் மேற்கணித்த சராசரியானது தரப்பட்ட பரம்பலை முற்றாகப் பிரதிநிதித்துவம் வகிக்கின்றதல்ல. எனவே மீடிறன் பரம்பலொன்றைப் போதுமான அளவு பிரதிநிதித்துவம் வகிக்க, இடையிலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு மதிப்பு தேவைப்படுகின்றது. இவை போன்ற நிலைமைகளில் இடையம் பொருத்தமானதாகக் காணப்படும்.

(அ) கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளைக் கொண்ட மீடிறன் பரம்பல்களின் கூட்டலிடை

X என்னும் மாறியானது $x_1, \ldots, x_n$ என்னும் n பெறுமானங்களை முறையே $f_1, f_2, \ldots, f_n$ என்னும் ஒத்த மீடிறன்களுடன் எடுக்கின்றதென்க. எனின் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற பெறுமானக் கூட்டத்தினது கூட்டலிடை $\overline{X}$ ஆனது,

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$ இனுலே தரப்படும்.

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$$ இங்கு, $N \left(= \sum_{i=1}^{n} f_i \right)$ மொத்த மீடிறன்களைக் குறிக்கின்றது

சில வேளைகளில் $\overline{X}$ ஆனது $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$ எனவும் வசதிக்காக கீழ்வரிபுகளை நீக்கி எழுதப்படும்.

உதாரணம் 2.15

உதாரணம் 2.1 இலே கொடுக்கப்பட்ட தரவில், தொழிலாளிகளின் அன்றாட வருமானத்தைக் குறிக்கும் மாறியினது கூட்டலிடையைக் காண்க.

வரைவிலக்கணத்தால், $\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{13 \times 1 + 14 \times 1 + \ldots\ldots + 24 \times 1}{1 + 1 + \ldots\ldots + 1}$

$$= \frac{467}{25} = 18 \cdot 68$$

அதாவது, தரப்பட்ட 25 தொழிலாளிகளும் சராசரியாக 18·68 ரூபாவினை அன்றாட வருமானமாகப் பெறுகின்றனர்.

குறிப்பு:

மேலே கணிக்கப்பட்ட கூட்டலிடையானது சில வேளைகளில் நிறையேற்றப்பட்ட கூட்டலிடையெனவும் கூறப்படும்.

உதாரணம் 2.16

கம்பனி ஒன்றிலே தொழில் புரிகின்ற 50 வேலையாட்களது வராந்த வருமானம் கீழ்க்காட்டப்பட்டுள்ள மீடிறன் பரம்பலிலே தரப்படுகின்றதெனின், தொழிலாளிகளினது வாராந்த வருமானம் யாது?

வாராந்த வருமானம் X	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை f	fx
55	4	220
65	8	520
75	15	1125
90	10	900
110	6	660
135	4	540
165	3	495
	$\Sigma f = 50$	$\Sigma fx = 4460$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{4460}{50} = 89 \cdot 2$$

எனவே வேலையாட்கள் 89·2 ரூபாவினை, சராசரி வாராந்த வருமானமாகப் பெறுகின்றார்கள்.

இலகுவான முறையிற் கூட்டலிடையினைக் கணித்தல்; உற்பத்தி மாற்றம் அல்லது அளவின் தொடக்கநிலை மாற்றம்

பூச்சியத்தினை ஆரம்பப் புள்ளியாகக் கொண்ட X, Y என்ற இரு கிடை, நிலைக்குத்து அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்க. அளவின் தொடக்க நிலையை கிடைவீச்சு a ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு மாற்றின் பரம்பலின் கூட்டலிடையானதும் a அலகுகளினால் மாற்றமடையும்.

தொடக்கநிலை பூச்சியமாகவுள்ளபோது $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$. அளவின் தொடக்கநிலை a என்ற புள்ளிக்கு படத்திற் காட்டியவாறு மாற்றப்படின், மாறியெடுக்கும் ஒவ்வொரு பெறுமானமும் a இனாற் குறைக்கப்பட வேண்டும். அதாவது,

$$\overline{X} - a = \frac{\sum f(x-a)}{N}$$

$$\overline{X} = a + \frac{\sum f(x-a)}{N}$$

$x - a = d$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\overline{X} = a + \frac{\sum fd}{N}$$

D, Y' என்பவற்றைப் புதிய கிடை, நிலைக்குத்து அச்சுகளாகவும், பூச்சியத்தினைத் தொடக்கநிலையாகவும் கொண்டால்,

$$\overline{X} = a + \overline{D}$$

இங்கு a என்பது நோக்கிய இடை அல்லது தற்காலிக இடை எனப்படும். நோக்கிய இடைக்குப் பதிலாக, தரப்பட்ட பரம்பலின் இடை உபயோகிக்கப்படின், அதாவது, அளவின் தொடக்கநிலை இடையளவு கிடைவீச்சுள்ள புள்ளிக்கு மாற்றப்படின் $\overline{D}$ பூச்சியமாகும். இம்முடிபு வெளிப்படையானதாகும். மேலும் நோக்கிய இடையானது கணித்தலை இலகுபடுத்தும் நோக்கத்துடன் வசதிக்கேற்றவாறு தெரியப்படுகின்றதே தவிர அதற்கெனக் குறிப்பிட்ட விதிகளோ அன்றிக் கணிதரீதியான விளக்கங்களோ கிடையாது.

உதாரணம் 2.17

மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 2.16 இல், 90 இனை நோக்கிய இடையாகக்கொண்டு பரம்பலின் கூட்டலிடையைக் காண்க.

வாராந்த வருமானம் X	வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை f	$D = X - 90$	fd
55	4	-35	-140
65	8	-25	-200
75	15	-15	-225
90	10	0	0
110	6	20	120
135	4	45	180
165	3	75	225
	$\Sigma f = 50$		$\Sigma fd = -40$

$$\text{இங்கு, } \overline{X} = a + \frac{\sum fd}{N} = 90 + \frac{-40}{50}$$

$= 89.2$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

(ஆ) கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக்கொண்ட மீடிறன் பரம்பல்களின் கூட்டலிடை

முன்னர் குறிப்பிட்ட பண்புகளினடிப்படையில், மாறியொன்று பெறும் மதிப்புகள் வெவ்வேறு வகுப்புகளாக வகுப்பாக்கப்படுவதையும் ஒவ்வொரு வகுப்பிற்குமுரிய தரவுகளின் எண்ணிக்கை அவதானிக்கப்பட்டு அட்டவணைப்படுத்தப்படுவதையும் அவதானித்தோம். இங்கு, தரவுகள் கூட்டமாக்கப்பட்டவை எனப்படும். இவ்வாறு கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக்கொண்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் இடையினை அல்லது பரம்பலிற் குறிப்பிட்ட மாறியின் கூட்டலிடையினை எவ்வாறு காண்பது என்பதைக் கீழே விளக்குவோம்.

தரவுகள் வகுப்புகளாகத் தரப்படின் வகுப்புகளின் நடுப் பெறுமானங்களையே வகுப்புகளைக் குறிக்கும் மாறியினது மதிப்புகளெனக் கொள்வது வழக்கம். எனவே, வகுப்பின் நடுப் பெறுமானங்களை மாறி எடுக்கும் பெறுமானங்களாகக்கொண்டு, முன்னர் உபயோகித்த சமன்பாடுகளை உபயோகிப்பதன்மூலம் குறிப்பிட்ட பரம்பலின் இடையினைக் காணலாம்.

உதாரணம் 2.18

உதாரணம் 2.2 இலே கொடுக்கப்பட்ட கூட்டமாக்கப்பட்ட வகுப்புகளைக்கொண்ட தரவுகளுக்கான கூட்டலிடையைக் காண்க.

வகுப்பு	வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் X	வகுப்பு மீடிறன் f	fx
30 — 39	24·5	4	138.0
40 — 49	44·5	6	267.0
50 — 59	54·5	9	490.5
60 — 69	64 5	12	774.0
70 — 79	74.5	8	596.0
80 — 89	84.5	7	591.5
90 — 99	94 5	4	378.0
		$\Sigma f = 50$	$\Sigma fx = 3235.0$

இங்கு, $\overline{X} = \dfrac{\sum fx}{N} = \dfrac{3235.0}{50}$

$= 64.7$

அதாவது, குறிப்பிட்ட பரீட்சையில் மாணவர்கள் சராசரியாக 64.7 புள்ளிகளைப் பெற்றனர்.

எனவே, முன்னர் கூறிய பொருளியல் விரிவுரையாளர் வினாவிற்குப் புள்ளிவிபரவியல் விரிவுரையாளர், மாணவர்கள் பரீட்சையிற் சராசரியாக 64.7 புள்ளிகளைப் பெற்றுள்ளனர் எனச் சுருக்கமாகப் பதிலளிக்கலாம். அதாவது, வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள், 64.7 என்ற புள்ளியைப் பரந்துள்ளனவெனப் பொருளியல் விரிவுரையாளர் கொள்ளல் வேண்டும். மேலும் ஒரு மாணவனாவது 64.7 என்ற புள்ளியைப் பெற்றிருக்கவேண்டிய அவசியமில்லையென்பதைக் கவனிக்க.

உதாரணம் 2.19

மேலே எடுத்துக்கொண்ட உதாரணம் 2.18 இல் நோக்கிய இடையொன்றைக் கருதிக்கொண்டு பரம்பலின் இடையைக் காண்க.

இங்கு நாம் 64·5 இனை நோக்கிய இடையாகக் கொள்வோம்.

வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் X	$X-64\cdot5 = D$	f	fd
34 · 5	— 30 · 0	4	— 120 · 0
44 · 5	— 20 · 0	6	— 120 · 0
54 · 5	— 10 · 0	9	— 90 · 0
64 · 5	0 · 0	12	0 · 0
74 · 5	10 · 0	8	80 · 0
84 · 5	20 · 0	7	140 · 0
94 · 5	30 · 0	4	120 · 0
மொத்தம்		50	10 · 0

இங்கு, $\overline{X} = a + \frac{\sum fd}{N}$

$$= 64\cdot5 + \frac{10}{50}$$

$$= 64\cdot7$$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

இலகுவான முறையிற் கூட்டலிடையினைக் கணித்தல்; உற்பத்தி மாற்றமும் அளவிடை மாற்றமும்

முன்னர், அளவின் தொடக்க நிலையைக் கிடைவீச்சு a ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு மாற்றுகையிற் கூட்டலிடை எவ்வாறு பாதிக்கப்படுகின்றதென்பதை அவதானித்தோம்.

அங்கு, $\overline{X} = a + \frac{\sum fd}{N}$

இப்பொழுது மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணையிலுள்ள மதிப்புகள் h அகலத்தைக் கொண்ட சமமான வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்டிருப்பின் முன்னைய அளவிடையின் $1/h$ மடங்கைப் புதிய அளவிடையாகக் கொள்வோம்.

இங்கு புதிய மாறி U ஆனது, $U = \frac{X-a}{h}$ இனால் வரையறுக்கப்படுகின்றது. அதாவது,

$$u = \frac{x-a}{h} \Rightarrow x = a + hu$$

இரு பக்கங்களையும் f இனூற் பெருக்கிக் கூட்டுத்தொகை எடுக்க நாம் பெறுவது,

$$\sum fx = \sum fa + \sum fhu$$

மேலும், இரு பக்கங்களையும் $\sum f$ இனூற் பிரிக்க நாம் பெறுவது,

$$\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fa}{\sum f} + \frac{\sum fhu}{\sum f}$$

எனவே, $\overline{X} = a + h\frac{\sum fu}{\sum f}$

ஆனல் $\overline{U} = \frac{\sum fu}{\sum f}$

$\therefore \quad \overline{X} = a + h\overline{U}$

உதாரணம் 2.20

மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 2·19 இல் மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள், 10 என்னும் சம அளவான வகுப்பாயிடைகளை உடையனவாகக் காணப்படுவதால் நாம் தரப்பட்டுள்ள அளவிடையின் 1/10 மடங்கைப் புதிய அளவிடையாகக் கொள்வோம்.

அதாவது, $U = \frac{X-a}{10} = \frac{D}{10}$

எனவே அட்டவணையானது பின்வருமாறு அமையும்:

வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் X	$D=X$-64·5	$U = \frac{D}{10}$	f	fu
34·5	—30	—3	4	—12
44·5	—20	—2	6	—12
54·5	—10	—1	9	— 9
64·5	0	0	12	0
74·5	10	1	8	8
84·5	20	2	7	14
94·5	30	3	4	12
மொத்தம்			50	1

இங்கு, $\overline{X} = 64{\cdot}5 + h\overline{U}$

$$= 64{\cdot}5 + 10 \frac{1}{50}$$

$= 64{\cdot}7$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

எனவே, நோக்கிய இடை ஒன்றைக் கருதிக்கொள்வதுடன், அளவிடையினையும் மாற்றுவதனுற் கணித்தல் மேலும் இலகுவாக்கப்படுத்தப்படுகின்றமையைக் காணக்கூடியதாக இருக்கிறது.

குறிப்பு:

வகுப்புகள், சமஅளவான வகுப்பாயிடையை உடையனவாகக் காணப்படாதபோதும் அவற்றின் வகுப்பாயிடை அளவுகள் குறிப்பிட்ட எண்ணினுற் பிரிபடக்கூடியனவாயின், நாம் அளவிடை மாற்றத்தை மேற்கொள்ள முடியும்.

குறிப்பிட்ட பரம்பலின் வகுப்பாயிடைகள் c என்னும் எண்ணினுற் பிரிபடக்கூடியதாய் உள்ளன என்க.

எனின், U என்னும் மாறியை $U = \frac{X-a}{c}$ இனுல் வரையறுக்க.

அதாவது, $u = \frac{x-a}{c} \Rightarrow x = a+cu$

இதிலிருந்து, $\overline{X} = a + c\overline{U}$ எனக் காட்டலாம்.

உதாரணம் 2.21

உதாரணம் 2·3 இலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரம்பலை எடுத்துக்கொள்க. இங்கு வகுப்பாயிடை அளவுகள் (10, 10, 10, 20, 20, 30, 30) சமமில்லாதபோதும் அவை 10 என்னும் குறிப்பிட்ட எண்ணினுற் பிரிபடக்கூடியனவாகக் காணப்படுகின்றன. எனவே இங்கு நாம் தரப்பட்ட அளவிடையின் 1/10 மடங்கைப் புதிய அளவிடையாகக் கொண்டு பரம்பலின் கூட்டலிடையைக் கணிக்கலாம்.

ஊதியம் (வகுப்பு எல்லைகள்)	வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் X	வகுப்பு மீடிறன் f	$D = X-90$	$U = \frac{D}{10}$	fu
50—60	55	4	—35	—3·5	—14·0
60—70	65	8	—25	—2·5	—20·0
70—80	75	15	—15	—1·5	—22·5
80—100	90	10	0	0·0	0 0
100—120	110	6	20	2·0	12·0
120—150	135	4	45	4·5	18·0
150—180	165	3	75	7·5	22·5
மொத்தம்		50			—4

$$\bar{X} = a + c\bar{U}$$

$$= 90 + 10 \frac{-4}{50}$$

$$= 89.2$$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

மீடிறன் பரம்பலொன்றின் கூட்டலிடையை இலகுவான முறையிற் கணக்கிடும்பொழுது படிப்படியாகக் கையாளவேண்டிய வழிமுறைகள்:

(I) கொடுக்கப்பட்ட பரம்பல், கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளையோ அன்றி கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளையோ கொண்டது என்பதை அவதானித்து, அது கூட்டமாக்கப்பட்டிருப்பின் வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் கணிக்கப்படுவதுடன் அதுவே மதிப்பு எண்ணாக உபயோகிக்கப்படும்.

(II) கூடிய மீடிறனைக்கொண்ட மதிப்பெண்ணை நோக்கிய இடை a ஆகக் கொள்ளல் விரும்பத்தக்கது.

(III) வகுப்பாயிடை அளவுகள் சமமான எண்களாக இருப்பின் அதனை h எனவும், சமமில்லாத, ஆனால் யாதாயினுமொரு எண்ணினாற் பிரிபடக்கூடியனவாகக் காணப்படின் அவ்வெண்ணை c எனவும் கொள்க.

(IV) மாறி X இன் மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் $U = \frac{X - a}{h}$ அல்லது $U = \frac{X - a}{c}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி U என்னும் மாறியின் பெறுமானங்களாக மாற்றுக.

(V) U இன் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றையும் அவற்றிற்கொத்த மீடிறன்களால் பெருக்கவருவனவற்றின் கூட்டுத்தொகை $\sum fu$ இனைக் கணிக்குக.

(VI) கடைசியாகப் பரம்பலின் கூட்டலிடை $\bar{X}$ ஆனது $\bar{X} = a + c \frac{\sum fu}{\sum f}$ என்னும் சூத்திரத்தினாற் பெறப்படும்.

(வகுப்பிடை அளவுகள் சமனானதாக இருப்பின் c இற்குப் பதிலாக h ஐ உபயோகிக்க)

இணைக்கப்பட்ட தொகுதியினது கூட்டலிடை
(*Arithmetic Mean of the Combined Group*)

X_1 என்னும் மாறியானது $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{1n_1}$ என்னும் n_1 பெறுமானங்களையும், X_2 என்னும் மாறியானது x_{21} $x_{22}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{2n_2}$ என்னும் n_2 பெறுமானங்களையும் எடுக்கின்றன எனின்,

X_1 இன் கூட்டலிடை $\bar{X}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}}{n_1}$ இனாலும்,

X_2 இன் கூட்டலிடை $\bar{X}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_2}$ இனாலும் தரப்படும்.

மேற்குறிப்பிட்ட மாறிகள் குறிக்கின்ற இரு பண்புகளையும் இணைப்பதால் பெறப்படும் தொகுதி, $x_{11}, \ldots\ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots\ldots, x_{2n_2}$ என்னும் $(n_1 + n_2)$ பெறுமானங்களைக் கொண்டிருக்கும். இதன் கூட்டலிடை

$$\bar{X} = \frac{X_{11} + \ldots\ldots + X_{1n_1} + X_{21} + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_{2n_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}}{n_1 + n_2}$$

ஆனால், $\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} = n_1 \bar{X}_1$; $\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} = n_2 \bar{X}_2$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \text{ ஆகும்.}$$

பொதுவாக $(\bar{X}_r, n_r)$; $r = 1, 2, \ldots, k$ என்பன முறையே வெவ்வேறு பண்புகளைக் குறிக்கும் X_r என்ற மாறிகளது கூட்டலிடைகளினையும், அவை பெறும் பெறுமானங்களின் எண்ணிக்கை

களையும் குறிப்பின், இப்பண்புகள் எல்லாவற்றையும் இணைப்ப தாற் பெறப்படும் தொகுதியினது கூட்டலிடை $\overline{X}$ ஆனது

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2 + \dots + n_k\overline{X}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$ என்பதனுலே தரப்படும்.

அதாவது, $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{k} n_r\overline{X}_r$; இங்கு $N = n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k$

அதாவது, ஒரு முழுத்தொகுதியிலிருந்து இரண்டு அல்லது இரண் டிற்கு மேற்பட்ட மாதிரி தேர்விலடங்கிய உறுப்புகளின் மதிப்பு கள் கொடுக்கப்படின், அம்மாதிரிகளை இணைப்பதாற் பெறப்படும் தொகுதியினது சராசரி, அம்மாதிரிகளின் சராசரிகளால் நிர்ண யிக்கப்படுகின்றன என்பதைக் கவனிக்க. மேலும், முழுத்தொகுதி யொன்றிலிருந்து வெவ்வேறு மாதிரிகளைத் தேரும்போது மேலு ள்ள நிபந்தனையைத் திருப்தி செய்யக்கூடியதாக அவற்றைத் தேர் வது விரும்பத்தக்கதாகும். புள்ளிவிபரவியலில் முழுத்தொகுதி பற்றிய முடிபுகளை அத்தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாதிரிகளே தெரிவிக்கின்றன என முன்னர்க் குறிப்பிட்டோம். குறிப்பாக, முழுத்தொகுதியின் சராசரியினது அல்லது இடையினது ஒரு மதிப்பாக மாதிரிச் சராசரியை அல்லது மாதிரியிடையைப் பயன்படுத்துவது வழமை. எனவே, மாதிரியிடையானது குடியிடை யினது ஒரு கோடலற்ற மதிப்பு எனப்படும்

நிறையளிக்கப்பட்ட கூட்டலிடை (*Weighted Average*)

இதுவரை மேற்கொண்ட கணிப்புகளில் நாம் மாறிகளது சார்பு முக்கியத்துவத்தினைக் கவனத்திற் கொள்ளவில்லை. மாறுக எல்லாவற்றுக்கும் ஒரே அளவில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்பட் டது. பொருளாதார சிக்கல்கள் பலவற்றில் காரணிகளின் சார்பு முக்கியத்துவம் இன்றியமையாததாகக் காணப்படுகின்றது. எளிய முறையிற் சுட்டெண்களைக் கணக்கிடும்போது ஒவ்வொரு பண்டத் திற்கும் ஒரே அளவில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படுகின்றது. ஆனல் அவையெல்லாம் ஒரே அளவான முக்கியத்துவம் பெற்றவையல்ல. அவ்வப்பொழுது காலவேறுபாடுகளாலும் புதிய கண்டுபிடிப்புக ளாலும் நுகர்வோரின் வருமான, சுவை மாற்றங்களாலும் பொருட் களின் முக்கியத்துவம் மாற்றமடையக்கூடியது. ஆதலால், ஒவ் வொரு பொருளும் எந்த அளவு வலியுறுத்தப்படவேண்டுமென் பதை, அவ்வப்பொருள் எத்தனை தடவைகள் கொள்வனவு செய்

யப்பட்டன் என்பது வாயிலாகக் குறிப்பிடுவது வழமை. இவ் எண்ணிக்கைகளைத்தான் நிறைகள் (*Weights*) என்கிறோம். எனவே, சுட்டெண்களைக் கணக்கிடும்போது நிறையேற்றும் முறை முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. இவ்வாறு ஒவ்வொரு பண்டமும் எத்தனை தடவைகள் இடம்பெற்றுள்ளன எனக்கண்டு அவற்றை நிறைகளாகப் பாவித்துக் காணும் சராசரிச் சுட்டெண், நிறையேற்றிய சுட்டெண் எனப்படும்.

குறிப்பிட்ட X என்னுமொரு மாறி $x_1, \ldots, x_n$ என்னும் பெறுமானங்களை முறையே $w_1, \ldots\ldots, w_n$, என்ற ஒத்த நிறைகளோடு எடுக்கின்றதென்க. எனின், X இனது நிறையளிக்கப்பட்ட கூட்டலிடை $\overline{X}$ ஆனது,

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$= \frac{\sum wx}{\sum w}$$ என்பதனாலே தரப்படும்.

(ii) பெருக்கலிடை (*Geometric Mean*)

சராசரியானது எவ்வாறு சில மதிப்புகளின் பிரதிநிதியாக அமைகின்றதோ அதேபோலப் பெருக்கலிடையும் சில குறிப்பிட்ட தரவுகளைப் பிரதிநிதித்துவம் வகிக்கின்றமையைக் காணமுடிகின்றது. சமூக, பொருளாதார விடயங்களிலும், தொழிற்றுறை நிர்வாகத்திலும் ஏற்படும் முக்கியமான பல சிக்கல்களிற் காலம் இடம்பெறுகின்றது. அச்சிக்கல்கள் பற்றிய, உதாரணங்களாகப் பிறப்பு இறப்பு வீதங்களில் ஏற்படும் மாற்றங்களாலே தேசிய வருமான மாற்றத்திலேற்படும் மாற்றங்கள், உற்பத்திப் பெருக்கத்திலேற்படும் மாற்றங்கள், சனத்தொகை அதிகரிப்புகள் முதலியவற்றைக் கொள்ளலாம். இவற்றுட் சில, பெருக்கலாக வளர்ச்சியுறுவதைக் காணமுடிகின்றது. இவ்வாறு பெருக்கலாக வளர்ச்சியுறும் தோற்றப்பாடுகளின் போக்கினை விபரிக்கப் பெருக்கலிடை உபயோகிக்கப்படுகின்றது. ஒரு மாறியின் மொத்த வளர்ச்சிக்குப் பதிலாக அதன் விகிதவளர்ச்சிக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கவேண்டிய நிலைமைகளிலும் பெருக்கலிடையை உபயோகிப்பதே சிறந்ததாகும்.

X என்னும் மாறியானது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்னும் n பெறுமானங்களை எடுக்கின்றதெனில், இவ்வெண்களின் பெருக்கலிடை G ஆனது,

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n}$$

அதாவது, n பெறுமானங்களைப் பெருக்க வரும் தொகையின் n ஆவது மூலமே பெருக்கலிடை எனப்படும். தரவுகள் பூரணமாகத் தரப்பட்டிருந்தால் பெருக்கலிடையைக் கணிப்பது சுலபமானதாகும்.

ஆனால் பெருக்குவதும், வர்க்கம் காண்பதும் கையாற் செய்வதானுல் நேரம் விரயமாவதோடு தவறுகளும் ஏற்படலாம். இச் சந்தர்ப்பத்தில் மடக்கையை உபயோகிப்பதன்மூலம் கணித்தல்களை இலகுவாகச் செய்துமுடிக்கலாம்.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times x_n}$$

$$\text{மட } G = \text{மட} \left[(x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \text{ மட } (x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{மட } (x_i)$$

அதாவது, பெருக்கலிடையின் மடக்கை மூலத்தரவுகளின் மடக்கைகளின் சராசரிக்குச் சமனாகும்.

உதாரணம் 2.22

8, 9, 12, 16, 18 என்ற 5 எண்களின் பெருக்கலிடை

$$G = \sqrt[5]{8 \times 9 \times 12 \times 16 \times 18}$$

$$= \sqrt[5]{2^{10} \times 3^5}$$

$$= 12$$

குறிப்பு:

a, b என்னுமிரு நேரெண்களை எடுத்துக்கொள்க. இவற்றின் கூட்டலிடை $\frac{a+b}{2}$, இவற்றின் பெருக்கலிடை $\sqrt{ab}$

ஆனால், $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

எனவே, நேரெண்களது கூட்டலிடையானது எப்பொழுதும் அவற்றின் பெருக்கலிடையிலும் பெரிதாகவோ அன்றிச் சமமாகவோ இருக்கும்.

பொதுவாக, X என்னும் மாறியானது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்னும் பெறுமானங்களை முறையே ஒத்த மீடிறன்கள் $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ என்பவற்றுடன் எடுக்கின்றதென்க.
எனின் பரம்பலின் பெருக்கலிடை,

$$G = \left(x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots\ldots \times x_n^{f_n} \right)^{\frac{1}{N}}$$ என்பதனாலே தரப்படும்

இங்கு $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

$$\therefore \text{மட } G = \frac{1}{N} \text{ மட} \left(x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots\ldots \times x_n^{f_n} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ மட } (x_i)$$

மேலும், k மாதிரிகளில் அடங்கிய மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ எனவும், அவற்றின் பெருக்கலிடைகள் $G_1, G_2, \ldots, G_k$ எனவும் தரப்படின், இங்கு k மாதிரிகளையும் இணைப்பதாற் பெறப்படும் முழுத்தொகுதியின் பெருக்கலிடை G ஆனது,

$$G = \left(G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots\ldots \times G_k^{n_k} \right)^{\frac{1}{N}}$$ என்பதனாலே தரப்படும்

$$\therefore G^N = G_1^{n_1} \times G_2^{n_2} \times \ldots\ldots \times G_k^{n_k}$$

$$\Longrightarrow N \text{மட} G = n_1 \text{ மட} G_1 + \ldots\ldots\ldots + n_k \text{ மட} G_k$$

$$\Longrightarrow \text{மட } G = \frac{\sum_{r=1}^{k} n_r \text{ மட} G_r}{N} ; \text{ இங்கு } N = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k$$

(iii) இசையிடை (Harmonic Mean)

இசையிடையானது குறிப்பிட்ட சில துறைகளில் மட்டுமே பயன்படக்கூடிய ஒரு சராசரியாகும். காலவீதங்களையும் அதற்கொத்த மற்றைய வீதங்களையும் சராசரி செய்வதற்கு இசையிடையே ஏற்றதாகும். விலைத்தளம்பல்களை அறியவும் இது ஏதுவாகக் காணப்படுகின்றது.

X என்னும் மாறியானது $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்னும் n பெறுமானங்களை எடுப்பின் X இனது இசையிடை H ஆனது,

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$ என்னும் தொடர்பினாலே

தரப்படும். பொதுவாக, X என்னும் மாறியானது $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்னும் n பெறுமானங்களை $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_n$ என்னும் ஒத்த மீடிறன்களுடன் எடுக்கின்றதெனின், X இனது இசையிடை H ஆனது,

$$H=\frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{f_1}{x_1}+\frac{f_2}{x_2}+\cdots+\frac{f_n}{x_n}\right)};$$ இங்கு $N=f_1+f_2+\ldots\ldots+f_n$

$$=\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_i}}$$ என்பதனாலே தரப்படும்.

(iv) இடையமும் காலணைகளும் (Median and Quartiles)

மீடிறன் பரம்பலொன்று ஓராயமானதாகவும், எல்லைப்பெறுமானங்களைக் கொண்டதாகவும் காணப்படுகின்ற அனேகமான நிலைமைகளில் இடையமே மிகப்பொருத்தமான இடங்காணல் அளவை என முன்னர் குறிப்பிட்டோம். அது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

குறிப்பிட்ட ஒரு மாறியேற்கும் பெறுமானங்கள் யாவும் பருமன்கள் பற்றி ஏறுநிரையாகவோ அன்றி இறங்கு நிரையாகவோ பந்தி உருவிலே ஒழுங்குபடுத்துகின்றன எனக்கொள்க. இவ்வொழுங்கிலுள்ள நடுப் பெறுமானம் அல்லது இரு நடுப் பெறுமானங்களின் சராசரி, தரப்பட்ட பெறுமானங்களின் இடையம் என வரையறுக்

கப்படும். அதாவது, மீடிறன் பரம்பலொன்றை இரு சமபங்காகப் பிரிக்கும் பெறுமானம் அப்பரம்பலின் இடையம் எனப்படும்.

மேலும் இடையமானது மீடிறன் வளையியொன்றின் பரப்பளவை இரு சம பங்காகப் பிரிக்கும். எந்தவொரு மீடிறன் பரம்பலுக்கும் இடையம் வரையறுக்கப்படுவதோடு, மாறி தொடர்ச்சியுள்ளதாயின் இடையம் ஒருதனியானதும், மாறி பின்னகமானதாயின் சில சமயங்களில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பெறுமானங்கள், குறிப்பிட்ட பரம்பலின் இடையமாகவும் காணப்படும்.

தரப்பட்ட ஒரு மாறியேற்கும் பெறுமானங்களின் எண்ணிக்கை N ஆக, இவையாவும் பத்தியுருவிலமைக்கப்படுகின்றன எனின், தரப்பட்ட பெறுமானங்களது இடையம் $\frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பிஞலே தரப்படும். இங்கு மாறியேற்கும் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றையானதாகவோ, அன்றி இரட்டையானதாகவோ காணப்படலாம். மாறி இரட்டை எண்ணிக்கை $(2k)$ மதிப்புகளை ஏற்கின்றதெனில் இடையம் $\frac{2k+1}{2}$ ஆவது உறுப்பிஞலும், மாறி ஒற்றை எண்ணிக்கை $(2k+1)$ மதிப்புகளை ஏற்கின்றதெனில் இடையம் $\frac{2k+2}{2}$, அதாவது $k+1$ ஆவது உறுப்பிஞலும் தரப்படும். உதாரணமாக, மாறி 4 பெறுமானங்களை எடுப்பின் இடையம் 2 ஆம் 3 ஆம் உறுப்புகளின் சராசரிப்பெறுமானமும், மாறி 5 பெறுமானங்களை எடுப்பின் இடையம் 3ஆவது உறுப்பின் பெறுமானமுமாகும்.

உதாரணம் 2.23

ஒரு வகுப்பிலுள்ள 6 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் வருமாறு: 43, 81, 57, 23, 78, 63. இடையத்தைக் காண்க.

மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளை ஏறுவரிசையில் அமைப்போமாஞல் 23, 43, 57, 63, 78, 81.

இங்கு இடையம் 3ஆம் 4ஆம் உறுப்புகளின் சராசரியாகும்.

அதாவது, இடையம் $=\frac{57+63}{2}=60$

உதாரணம் 2.24

15, 32, 24, 51, 43 என்ற 5 நேர்முழு எண்களின் இடையத்தைக் காண்க.

தரப்பட்ட எண்களின் பந்தி உருவானது 15, 24, 32, 43, 51; இங்கு 3 ஆவது உறுப்பே இடையமாகும்.
எனவே இடையம் 32 ஆகும்.

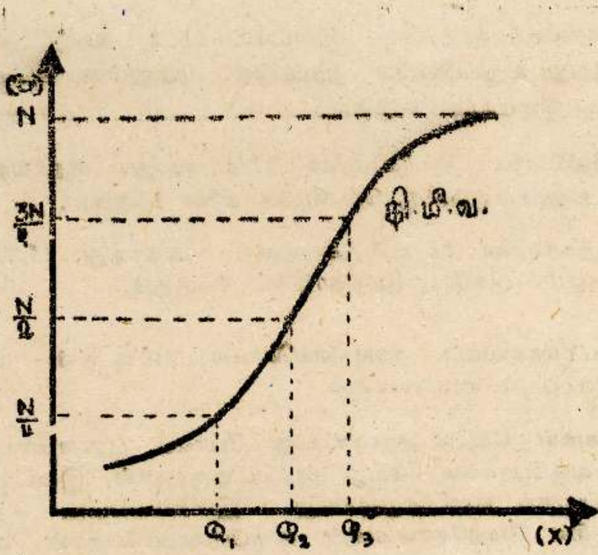
காலனைகள் (*Quartiles*)

மொத்த மீடிறனை நான்கு சம பங்குகளாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் காலனைகள் எனப்படும். தரப்பட்ட மாறி ஏற்கும் பெறுமானங்கள் ஏறு வரிசையிலோ அன்றி இறங்கு வரிசையிலோ ஒழுங்குபடுத்தப்படுகின்றதென்க. இவ்வரிசையின் காற்பங்கு தூரத்திலே வரும் மாறியின் பெறுமானம் முதலாம் காலனை அல்லது கீழ்க்காலனை எனவும், வரிசையின் சமபங்கு தூரத்திலே வரும் மாறியின் பெறுமானம் இரண்டாம் காலனை எனவும், வரிசையின் முக்காற்பங்கு தூரத்திலே வரும் பெறுமானம் மூன்றாம் காலனை அல்லது மேற்காலனை எனவும் அழைக்கப்படும். இவை முறையே Q_1, Q_2, Q_3 என வழமையாகக் குறிக்கப்படும்.

இரண்டாம் காலனை இடையத்துடன் பொருந்தும். இடையமும் காலனைகளும் மாறியின் பெறுமானங்களே ஆதலால் மாறி என்ன அலகுகளிற் காணப்படுகின்றதோ அதே அலகுகளிலே தான் இடையமும் காலனைகளும் விபரிக்கப்படவேண்டும்.

(அ) மீடிறன் பரம்பலொன்றின் இடையமும் காலனைகளும்

இதுவரை எண் தொகுதிகளினது இடையம், காலனைகள் எவ்வாறு பெறப்படுகின்றன என்பதனையே அவதானித்தோம். மீடிறன் பரம்பலொன்றின் இடையம், காலனைகள் என்பனவற்றைக் காண மேற்குறிப்பிட்ட முறையைக் கையாள முடியாது. மீடிறன் வளையி உள்ளடக்கும் மொத்தப் பரப்பு மொத்த மீடிறனுக்குச் சமனுகுமென முன்னர் குறிப்பிட்டோம். எனவே நிலைக்குத்தச்சிற்கு சமாந்தரமான எந்தக்கோடு அப்பரப்பினை இரு சம பங்காகப் பிரிக்கின்றதோ, அக்கோடு கிடை அச்சில் வெட்டும் மதிப்பையே இடையமாகக் கொள்ளல் வேண்டும். எனவே பரம்பலொன்றின் மொத்த மீடிறன் N எனின், $N/2$ ஐத் திரட்டு மீடிறனுகக் கொண்ட மாறியின் மதிப்பே இடையமாகும். இதே போல $N/4$, $3N/4$ என்பவற்றைத் திரட்டு மீடிறனுகக் கொண்ட மாறியின் மதிப்புகள் முறையே கீழ்க்காலனை, மேற்காலனை எனப்படும். இதனைக் கீழ்வரும் படத்திற் காட்டலாம்.



உதாரணம் 2.25

கீழே தரப்பட்டுள்ள மீடிறன் பரம்பலின் இடையம், காலணைகள் என்பவற்றைக் காண்க.

மாறி X	0	1	2	3	4	5	6
மீடிறன் f	2	4	5	3	2	1	4

முதலிலே, தரப்பட்ட பரம்பலுக்கொத்த திரட்டு மீடிறன் பரம்பல் அமைக்கப்படவேண்டும்.

X	0	1	2	3	4	5	6
திரட்டு மீடிறன்	2	6	11	14	16	17	21

வரைவிலக்கணத்தால், இடையம் 21 / 2 ஆவது, அதாவது, 10.5 ஆவது உறுப்பினுலே தரப்படும். மேலுள்ள அட்டவணையி லிருந்து இடையம் 2 ஆகும்.

அதேபோல, கீழ்க்காலணை 21/4 ஆவது, அதாவது, 5·25 ஆவது உறுப்பாகும். ஆகவே கீழ்க்காலணை 1 ஆகும்.

மேற்காலணை 21 × 3 / 4 ஆவது, அதாவது, 15.75 ஆவது உறுப்பாகும். ஆகவே, மேற்காலணை 4 ஆகும்.

(ஆ) கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக்கொண்ட மீடிறன் பரம்பலின் இடையமும் காலணைகளும்

தரவுகள் மேலே தரப்பட்டது போலப் பூரணமாகத் தரப் படாது வகுப்பாக்கம் செய்து தரப்பட்டிருந்தால், இடையத்தினைச் செம்மையாகக் கணிக்கமுடியாது. இப்போர்ப்பட்ட சந்தர்ப்பங் களில், சில மேற்கோள்களின் அடிப்படையிலேதான் அவற்றை மதிப்பிடமுடியும். இடையம் எந்த வகுப்பினுள் அமைகின்றது என்று மதிப்பிட்டு அறியலாமெனினும் அது குறிப்பிட்ட வகுப்பில் எவ்விடத்திலமைகின்றது எனத் தீர்மானிப்பது கடினமாகும். ஆகையால், குறிப்பிட்ட வகுப்பில் மதிப்புகள் எவ்வாறு பரந்திருக் கின்றன என்ற அடிப்படையிலேதான் கணிப்பீடுகள் செய்யப்படு கின்றன. வழமையாக, குறிப்பிட்ட வகுப்பினுள் உறுப்புகள் யாவும் சமமாகப் பரவியுள்ளன என்னும் மேற்கோளின் அடிப் படையிலேயே கணிப்புகள் செய்யப்படுகின்றன.

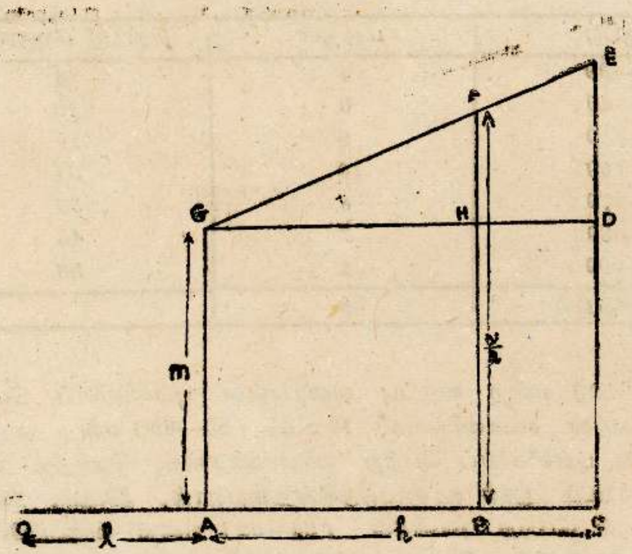
கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்ட மீடிறன் பரம்ப லொன்றின் இடையத்தினைக் காண்பதற்கு நாம் ஏகபரிமாண இடைச்செருகலை (*Linear Interpolation*) உபயோகிக்கின்ருேம். உதாரணமாக, உதாரணம் 2·6 இலே தரப்பட்ட மீடிறன் பரம் பலை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு தரவுகள் யாவும் கூட்டமாக் கப்பட்டுத் தரப்படுகின்றனவே அன்றி அவற்றின் உண்மையான மதிப்புகள் தரப்படவில்லை. இங்கு 50 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளி கள் மட்டுமே வகுப்பாக்கப்பட்டிருப்பதால், புள்ளிகளைக் குறிக்கும் மாறியினது இடையப் பெறுமானம் 25·5 ஆவது மாணவன் பெற்ற புள்ளியாகும். அதாவது, 25 ஆம் 26 ஆம் மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளியின் சராசரியாகும். எனவே முதலில் நாம் 25 ஆம், 26 ஆம் மாணவர் பெறும் புள்ளிகள் எவ்வகுப்பினிலடங்குகின்றன என அவதானிக்க வேண்டும். அதற்கு நாம் பரம்பலின் திரட்டு மீடிறன் பரம்பலை அமைப்போம்.

வகுப்பு	மீடிறன்	திரட்டு மீடிறன்
30—39	4	4
40—49	6	10
50—59	9	19
60—69	12	31
70—79	8	39
80—89	7	46
90—99	4	50
மொத்தம்	50	

(50—59) என்ற வகுப்பு வரையுள்ள புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 19 உம், (60—69) என்ற வகுப்பு வரையுள்ள புள்ளிகளைப் பெற்ற மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 31உம் ஆகக் காணப்படுகின்றமையால், 25ஆம், 26ஆம் மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் (60—69) என்ற வகுப்பிலேயே இருத்தல் வேண்டும். மேலும், (50—59) என்ற வகுப்பு வரை 19 மாணவர்கள் காணப்படுகின்றமையால் 25.5 ஆவது மாணவன் (60—69) என்ற வகுப்பிற்குரிய 6.5 ஆவது மாணவனாகும். இவ்வகுப்பில் மொத்தம் 12 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் அடங்குகின்றமையால், இவை சீராகப் பரம்பப்பட்டுள்ளன எனக் கொண்டு, 6.5 ஆவது மாணவன் பெற்ற புள்ளி (60—69) என்ற வகுப்பின் 6.5/12 ஆவது இடத்திலுள்ள புள்ளியாகும். குறிப்பிட்ட வகுப்பின் வீச்சு 10 ஆகையால், 6.5/12 ஆவது இடத்திலுள்ள புள்ளி $60 + 10 \times 6.5/12 = 60 + 5.4 = 65.4$ ஆகும். எனவே, 65.4 என்ற புள்ளியே தரப்பட்ட பரம்பலின் இடையமாகும்.

இனி நாம் கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக்கொண்ட பரம்பலின் இடையத்தைக் காணுவதற்கான பொதுவடிவத்தைப் பெறுவோம்.

தரப்பட்ட பரம்பலின் திரட்டு மீடிறன் அட்டவணை அமைக்கப்படுகின்றதென்க. பின்னர், $N/2$ மீடிறனுக்குரிய மதிப்பு எவ்வகுப்பிலமைகின்றது என அவதானிக்கப்படுகின்றது. இவ்வகுப்பினையே இடைய வகுப்பாகக் கொள்ளல் வேண்டும். இடைய வகுப்பிற்கு மேலுள்ள வகுப்பு வரையுள்ள மொத்தத் திரட்டு மீடிறனின் எண்ணிக்கை m அவதானிக்கப்படுகின்றது. இடைய வகுப்பின் கீழெல்லையை l எனவும், வகுப்பு மீடிறனை f எனவும், அதன் வகுப்பாயிடை அளவை h எனவும் கொண்டு பின்வரும் படத்தினை நோக்குக:



GFE என்பது (*AC*) என்ற வகுப்பிற்குரிய திரட்டு மீடிறன் வளையியைக் குறிக்கின்றது. இவ்வகுப்பினுள்ளேயே *N*/2 திரட்டு மீடிறனைக்கொண்ட மதிப்பு அடங்குகின்றது.

FGH, *EGD* என்ற முக்கோணங்களை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{GH}{GD} = \frac{HF}{DE}$$

அதாவது, $$\frac{GH}{h} = \frac{\frac{N}{2} - m}{f}$$

$$\therefore \; GH = \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)h}{f}$$

ஆனால் இடையப் பெறுமானம்,

$$OB = OA + AB = OA + GH$$

$$\therefore \; OB = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)h}{f}$$

எனவே எந்த ஒரு பரம்பலுக்கும் இடையமானது,

$$\text{இடையம்} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)h}{f}$$ என்னும் சமன்பாட்டினுலே தரப்படும்.

இதேபோல, கூட்டமாக்கப்பட்ட ஒரு மீடிறன் பரம்பலின் காலணைகள் பின்வரும் சூத்திரங்களினுலே தரப்படும்:

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)h}{f}$$

$$Q_2 = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)h}{f}$$

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)h}{f}$$

பொது வடிவத்திலே,

$$Q_i = l + \frac{\left(\frac{iN}{4} - m\right)h}{f} ; \; i = 1, 2, 3$$

உதாரணம் 2.26

உதாரணம் 2.6 இலே கொடுக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் காலணைகளைக் காண்க.

இங்கு மொத்த மீடிறன்களின் எண்ணிக்கை 50. எனவே முதலாம் காலணை 12.5 ஆவது உறுப்பின் பெறுமானம் ஆகும். எனவே, Q_1 ஆனது (50 — 59) என்ற வகுப்பினுள்ளேயே கிடக்கின்றது;

இங்கு $l = 50$, $h = 10$, $m = 10$, $N = 50$, $f = 9$

$$\therefore \quad Q_1 = 50 + \frac{\left(\frac{50}{4} - 10\right)10}{9}$$

$$= 50 + \frac{2.5 \times 10}{9}$$

$$= 52.78$$

இரண்டாம் காலணையானது 25 ஆவது உறுப்பின் பெறுமான மாகும். எனவே, Q_2 ஆனது (60 — 69) என்ற வகுப்பினுள் ளேயே கிடக்கின்றது;

இங்கு $l = 60$, $h = 10$, $m = 19$, $f = 12$

$$\therefore \quad Q_2 = 60 + \frac{\left(\frac{50}{2} - 19\right)10}{12}$$

$$= 65$$

மூன்றும் காலணையானது 37.5 ஆவது உறுப்பின் பெறுமானம் ஆகும். எனவே, Q_3 ஆனது (70 — 79) என்ற வகுப்பினுள்ளேயே கிடக்கின்றது;

இங்கு $l = 70$, $h = 10$, $m = 31$, $f = 8$

$$\therefore \quad Q_3 = 70 + \frac{\left(\frac{3 \times 50}{4} - 31\right)10}{8}$$

$$= 70 + \frac{65}{8}$$

$$= 78.1$$

தசவீதத்திகளும் சதமணைகளும் (*Deciles and Percentiles*)

தரப்பட்ட பரம்பலொன்றின் மொத்த மீடிறனை 10 சம பங்கு களாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் தசவீதத்திகளென வும், மொத்த மீடிறனை 100 சம பங்குகளாகப் பிரிக்கும் மாறி யின் பெறுமானங்கள் சதமணைகளெனவும் அழைக்கப்படும்.

எனவே, எந்தவொரு மீடிறன் பரம்பலுக்கும் $D_1, \ldots\ldots\ldots, D_9$ என்னும் 9 சதவீதத்திகளும், $P_1, \ldots\ldots\ldots, P_{99}$ என்னும் 99 சத மணைகளும் உண்டு.

உதாரணமாக, நான்காவது தசவீதத்தி காணப்படவேண்டு மாயின் $4N/10$ ஆவது அலகுள்ள வகுப்பு முதலிற் காணப்பட வேண்டும். பின்னர் நான்காம் தசவீதத்தி D_4 ஆனது,

$$D_4 = l + \frac{\left(\frac{4N}{10} - m\right)h}{f}$$ என்ற சமன்பாட்டை

உபயோகிப்பதன் மூலம் மதிப்பிடப்படும் அல்லது இடைச்செருகப் படும்.

அதேபோல, 75 ஆவது சதமனை காணப்படவேண்டுமாயின் $75N/100$ ஆவது அலகுள்ள வகுப்பு காணப்பட்டு,

$$P_{75} = l + \frac{\left(\frac{75N}{100} - m\right)h}{f}$$ என்ற சமன்பாட்டின்

மூலம் மதிப்பிடப்படும். பொதுவாக,

தசவிதத்திகள்,

$$D_i = l + \frac{\left(\frac{iN}{10} - m\right)h}{f}$$

$i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 9$ என்பதனாலும்,

சதமனைகள்,

$$P_i = l + \frac{\left(\frac{iN}{100} - m\right)h}{f}$$

$i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 99$ என்பதனாலும் தரப்படும்.

(இங்கு l, f, h, N, m என்பன முன்னர் வரையறுக்கப்பட்டவையே)

உதாரணம் 2.27

மேலே தரப்பட்ட 2.26 உதாரணத்திலே 4 ஆம் தசவீதத்தி யினையும், 75 ஆம் சதமனையையும் மதிப்பிடுக.

நான்காம் தசவீதத்தி என்பது $4 \times 50 / 10$ ஆவது அலகாகும். அதாவது, 20 ஆவது அலகாகும். இவ்வுறுப்பு (60 — 69) வகுப்பி னுள்ளேயே காணப்படுகின்றது.

ஆகவே, $D_4 = 60 + \left(\frac{20 - 19}{12}\right)10$

$$= 60.83$$

75 ஆம் சதமனை ஆனது $75 \times 50 / 100$ ஆவது அலகாகும் அதாவது, 37.5 ஆவது அலகாகும். இவ்வுறுப்பு (70 — 79) என்ற வகுப்பினுள் காணப்படுகின்றமையால்,

$$P_{75} = 70 + \left(\frac{37.5 - 31}{8}\right)10$$

$$= 78.4$$

அதாவது, வகுப்பிலுள்ள 75 வீதமான மாணவர்கள் 78.4 புள்ளியிலும் குறைந்த புள்ளிகளையும், 25 வீதமான மாணவர்கள் 78.4 புள்ளியிலும் அதிகமான புள்ளிகளையும் பெற்றுள்ளனர்.

(v) ஆகாரம் (*Mode*)

தரப்பட்ட எண்தொகுதியினது இடங்காணல் அளவைகளாகச் சராசரி, இடையம், காலனைகள் ஆகியவை பயன்படுத்தப்படுவது போல், ஆகாரமும் எண்தொகுதியொன்றின் அல்லது மீடிறன் பரம்பல் ஒன்றின் இடங்காணல் அளவையாகப் பயன்படுத்தப்படும். சில சமயங்களிலே தரப்பட்ட தொகுதியொன்றில், குறிப்பிட்ட எண்ணொன்று கூடிய தடவைகள் இருப்பதைக் காணமுடிகின்றது. இங்கு நாம் குறிப்பிட்ட எண்தொகுதியைக் குறிக்கும் மாறியானது, பொதுவாக மேற்கூறப்பட்ட பெறுமானத்தையே பெறுகின்றது என்று கூறுவது வழக்கம்.

எனவே மாறியொன்று ஏற்கும் பெறுமானங்களில் எப்பெறுமானம் கூடிய தடவைகள் காணப்படுகின்றதோ அது தரப்பட்ட தொகுதியின் ஆகாரம் அல்லது ஆகாரப் பெறுமானம் எனப்படும்.

உதாரணமாக, ஒரு வகுப்பிலுள்ள 10 மாணவர்கள் பரீட்சையொன்றிற் பெற்ற புள்ளிகள் வருமாறு:

25, 31, 31, 42, 42, 42, 54, 63, 71, 80.

இங்கு 42 என்ற புள்ளியே கூடிய தடவைகள் காணப்படுவதால், இதுவே தரப்பட்ட தொகுதிப்புள்ளிகளின் ஆகாரம் ஆகும்.

இதேபோல, மாறியானது மீடிறன் பரம்பலொன்றைக் கொண்டிருப்பின், மீடிறனின் உயர்வுப் பெறுமானத்திற்கொத்த மாறியின் பெறுமானம் ஆகாரம் அல்லது ஆகாரப் பெறுமானம் எனப்படும். உதாரணமாக,

மாறி X	30	35	40	45	50
மீடிறன் f	2	8	12	10	8

இங்கு, 40 பரம்பலின் ஆகாரம் ஆகும்.

கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக்கொண்ட மீடிறன் பரம்பலின் ஆகாரம்

தரவுகள் மேலே தரப்பட்டதுபோல் பூரணமாகத் தரப்படாது வகுப்பாக்கம் செய்து தரப்பட்டிருந்தால், ஆகாரத்தினைச் செம்மையாகக் கணிக்க முடியாது. முதலில் உயர்வு மீடிறனையுடைய வகுப்பானது, அதாவது, ஆகார வகுப்பு அடையாளம் காணப்படுகின்றது. இங்கு நாம் பரம்பலின் ஆகாரத்தினை வகுப்பின் நடுப்புள்ளியாகக் கொள்வதைவிட இடைச்செருகல் மூலம் மிகவும் திருத்தமாக ஆகாரப் பெறுமானத்தைக் காணமுடியும். ஏனெனில் பரம்பலானது ஓராயமாகக் காணப்படின், அதாவது, மீடிறன்கள் ஒரு பக்கம் செறிந்து சீரற்றுக் காணப்படின் நடுப்புள்ளியை ஆகாரமாகக் கொள்ளமுடியாது. பொதுவாக, ஆகாரப் பெறுமானத்தின் மீது ஆகார வகுப்புத் தவிர்ந்த மற்றைய வகுப்பு மீடிறன்கள், குறிப்பாக, மேலும் கீழுமுள்ள வகுப்பு மீடிறன்கள் செல்வாக்குச் செலுத்துகின்றன எனக்கொள்ளல் வேண்டும். இதன் அடிப்படையில் ஆகாரம் M ஆனது,

$$M = l + \left(\frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2}\right)h$$

என்னும் சமன்பாட்டினாலே தரப்படும்.

இங்கு, l — ஆகார வகுப்பின் கீழெல்லை,

h — ஆகார வகுப்பாயிடை அளவு,

f_m — உயர்வு மீடிறன்,

f_1 — ஆகார வகுப்பிற்கு முன்னுள்ள வகுப்பு மீடிறன்,

f_2 — ஆகார வகுப்பிற்குப் பின்னுள்ள வகுப்பு மீடிறன்

குறிப்பு:

(i) எல்லா மீடிறன் பரம்பல்களுக்கும் இடை, இடையம் ஆகியவை வரையறுக்கப்படுவதுபோல், ஆகாரம் இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. உதாரணமாக, பரம்பலானது சீராகப் பரம்பப்பட்டிருப்பின் அதற்கு ஆகாரப் பெறுமானம் காண முடியாது. அப்படிக் காணப்படினும் அது ஒருதனியானதாக இருக்கவேண்டியதில்லை.

(ii) சராசரியிலிருந்து மிகுந்த அளவில் விலகல்களையுடைய மதிப்புகளால் ஆகாரப் பெறுமானம் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

உதாரணம் 2.28

உதாரணம் 2.2 இலே தரப்பட்ட பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க.

இங்கு (60 — 69) என்ற வகுப்பே ஆகார வகுப்பாதலால்,

$l = 60,\ h = 10,\ f_m = 12,\ f_1 = 9,\ f_2 = 8$

எனவே, $M = 60 + \left(\dfrac{12 - 9}{2 \times 12 - 9 - 8}\right)10 = 60 + \dfrac{3}{7}10$

$= 64.3$

மேலே குறிப்பிட்டவற்றில், மதிப்புகளின் செறிவு ஒரே புள்ளியில் உள்ளதெனக்கொண்டே ஆகாரத்தினைக் கணித்தோம். ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட புள்ளியில் மதிப்புகள் செறிந்திருக்கும்போது ஆகாரத்தினைக் கணிப்பது மேலும் சிக்கலானதாகும். இரு புள்ளியில் மதிப்புகள் செறிந்து காணப்படின் பரம்பல் ஈராகாரப் பரம்பல் (*Bimodal Distribution*) எனப்படும். இதனை வரைபாக அமைக்கையில் இரு முகடுகளைக்கொண்ட பரம்பல் பெறப்படும். மதிப்புகள் ஒரு படித்தானவையாக இருக்கும்போது இத்தகைய பரம்பல்கள் பெறப்படின் மதிப்புகளின் பற்றுக்குறையும், வகுப்பாக்கல் முறைகளுமே இதற்குக் காரணமாகும். திட்டவட்டமான ஆகார வகுப்பு பெறப்படும் வரையில் வகுப்பு எல்லைகள் நகர்த்தப்பட்டும் வகுப்பாயிடை அளவுகள் பெரிதாக்கப்பட்டும், தனி ஆகாரப் பெறுமானம் கிடைக்கும் வரை மாற்றங்கள் செய்யப்படும். சிலவேளைகளில் இவ்வாறு மாற்றங்கள் செய்யப்பட்டபோதிலும் பல்வேறு காரணங்களால் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட ஆகாரங்களைக் காணலாம்.

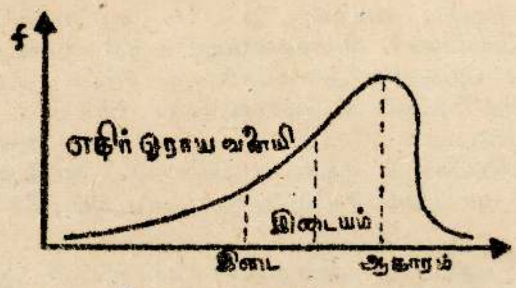
இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு

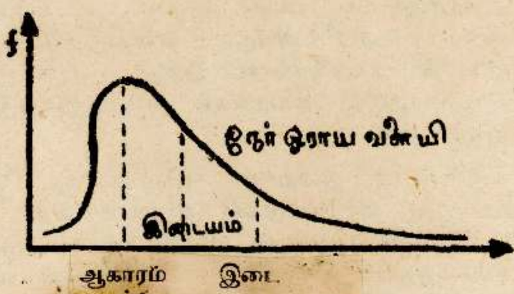
யாதாயினுமொரு மீடிறன் பரம்பலுக்கு நாம் இடை, இடையம், ஆகாரம் முதலிய வெவ்வேறு சிறப்புப் பண்புகளைக்கொண்ட இடங்காணல் அளவைகளைக் கணிக்க முடிகின்றது. இம்மதிப்புகளிடையே உள்ள தொடர்பு அறியப்படின் ஏதாவது ஒரு அளவையின் மதிப்பை மற்றைய அளவைகளிலிருந்து பெறமுடியும். ஓராயமான மீடிறன் பரம்பல்களுக்குக் குறிப்பிட்ட மூன்று அளவைகளும் வெவ்வேறானவையாகக் காணப்படுகின்றபோதிலும் இவற்றுக்கிடையே ஒரு மாறாத தொடர்பு உண்டு.

இடைக்கும் இடையத்திற்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம், இடைக்கும் ஆகாரத்திற்குமிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் மூன்றிலொரு பங்காகும். அதாவது,

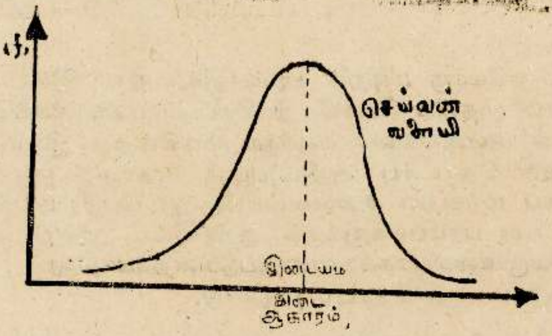
(இடை — ஆகாரம்) = 3 (இடை — இடையம்)

மூன்று அளவைகளையும் மீடிறன் வளையியிற் குறிப்போமாகில்,





எப்பொழுதும் இடையம், ஆகாரத்திற்கும் இடையிற்குமிடையே காணப்படும்.



மேலும் சமச்சீர்ப் பரம்பல்களுக்கு இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பன ஒரே பெறுமானமாகவே காணப்படும். அதாவது, இவை மூன்றும் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தும்.

2. 5. 2: பிரிகை அளவைகள் (MEASURES OF DISPERSION)

இதுவரை வெவ்வேறு மீடிறன் பரம்பல்களை ஒப்பிடவேண்டிதன் அவசியத்தினையும், அவற்றை ஒப்பிட உபயோகிக்கப்படும் வெவ்வேறு இடங்காணல் அளவைகளையும் பற்றி ஆராய்ந்தோம். ஆனல் மீடிறன் பரம்பலின் தன்மைகளையும் சிறப்பியல்புகளையும் சராசரி ஒன்றினுல் மட்டும் விபரிக்கமுடியாது பரம்பலின் முக்கிய தன்மைகளை வரையளவு செய்த இடங்காணல் அளவைகள் தவிர்ந்த பிறமதிப்புகளும் தேவைப்படுகின்றன. அப்போதுதான் வெவ்வேறு மீடிறன் பரம்பல்களை நுணுக்கமாக ஒப்பு நோக்கமுடியும்.

தரப்பட்ட மதிப்புகள் அவற்றின் சராசரியிலிருந்து எந்த அளவிற்குப் பரந்துள்ளன அல்லது விலகியுள்ளன என்பதும் முக்கியமானதாகும். உதாரணமாக, பல்கலைக்கழக மாணவர்களுடைய உயரங்கள் சராசரியாக 5 அடி 6 அங்குலம் எனக்கூறும்போது நாம் எல்லா மாணவர்களின் உயரங்களையும் ஒன்றி எண்ணினுல் மட்டுமே குறிக்கின்ரேமே தவிர, உயரங்கள் எவ்வாறு பரந்துள்ளன என்பதனைக் குறிக்கவில்லை.

சமூக, பொருளாதார துறைகள் சம்பந்தமாகச் சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகளிடையே மாறுபாடுகள் காணப்படுவது வழமை. அதாவது, ஒவ்வொரு மதிப்புகளும் வித்தியாசமானவையாகவே காணப்படும். சில சந்தர்ப்பங்களில் மதிப்புகள் பெரிய வீச்சினுள்ளும், சில மதிப்புகள் சிறிய வீச்சினுள்ளும் செறிந்து காணப்படும். நாட்டு மக்களது வருமானத்தினை நோக்கினுல், மக்கள் சராசரியாகக் குறிப்பிட்ட வருமானமொன்றைப் பெறுகின்ருர்களெனக் கூறிவிடமுடியாது. மக்களின் வருமானங்களிடையே

குறிப்பிடத்தக்க அளவு ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் காண்கின்றோம். எனவே வருமானம் எவ்வாறு பரந்து காணப்படுகின்றது, சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு விலகிக் காணப்படுகின்றது எனத் தெரிவிக்கப்படல் வேண்டும். மேலும், பொருளாதார மாறுபாடுகளுக்கேற்ப விலைகளில் ஏற்றவிறக்கங்களைக் காண்கின்றோம். எனவே, விலைகள் எவ்வாறு பரந்துள்ளன எனத் தெரிவிக்கப்படவேண்டுமே தவிர, அதனை ஒன்றி எண்ணினுற் குறிப்பிட முடியாது. வருமானங்கள், விலைகள் போன்றவற்றினிடையே தொடர்புகள் காணப்படுகின்றமையால், இவற்றைக் குறிக்கும் மாறிகளிடையே காணப்படும் மாறுபாடுகளை ஒப்புநோக்க வேண்டியது அவசியமாகக் காணப்படுகின்றது.

மேலே அவதானித்தவற்றிலிருந்து பல நிலைமைகளில் சமூக, பொருளியல், வணிகம், நிர்வாகம் முதலிய துறைகளிற் காணப்படும் மாறிகளின் மதிப்புகளிடையே நாம் மாறுபாடுகளைக் காண்கின்றோம். எனவே, நாம் புள்ளியியலாய்வினை, மாறுபாடுகளை ஆராயும் ஒரு சாதனமாகக் கொள்ளலாம். இப்பேர்ப்பட்ட மாறுபாடுகளினூலேயே வெவ்வேறு வகையான மீடிறன் பரம்பல்களை அவதானிக்க முடிகின்றது. வெவ்வேறு மாறுபாட்டின் அளவைகளையும், அவைபற்றிய ஆய்வுகளையும் கையாளுவதன் மூலம் பல புள்ளிவிபர முடிபுகளை அனுமானிக்க முடிகின்றது. காலவேறுபாட்டினுல் மாறிகள் பல்வேறு மதிப்புகளைப் பெறுகின்றனவென முன்னர் குறிப்பிட்டிருந்தோம். உதாரணமாக, நாட்டின் தேசிய வருமானம், பொருட்களின் விலைகள், மொத்த உற்பத்தி, வேலையற்றோர் தொகை முதலியவை காலவேறுபாட்டினுல் மாறுபடக் கூடியனவும், பொருளாதார முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவும் ஆகும். எனவே, இவை பற்றிய விபரங்களை ஆராயும்போது மாறுபாட்டின் சில புதிய அம்சங்களை நாம் மேற்கொள்ளல் வேண்டும். மேலும் தொழிற்சாலை ஒன்றில் உற்பத்தியாகும் பொருட்களின் தரங்களை உற்றுநோக்கின், அங்கு நுட்பமான கட்டுப்பாடுகள் உபயோகிக்கப்பட்டிருப்பினும்கூட உற்பத்திப் பொருட்களிடையே சிறிய மாறுபாடுகளையேனும் காணமுடிகின்றது. இவை போன்ற மாறுபாடுகளை ஆராய்வதற்காகத் தற்பொழுது அநேகமான தொழிற்றுறை நிர்வாகங்களிலே தரக்கட்டுப்பாடு (*Quality Control*) என்ற புதிய புள்ளியியல் ஆய்வுமுறை கையாளப்பட்டுவருகின்றது. இதன் மூலம் பொருட்களின் தரத்திற் காணப்படுகின்ற மாறுபாடுகளில் எவை சந்தர்ப்ப வசத்தினுல் ஏற்பட்டன, எவை (கட்டுப்படுத்தக்கூடிய) சில சிக்கல்களால் ஏற்பட்டன என வேறுபடுத்திக் காணமுடிகின்றது.

எனவே, சேகரிக்கப்பட்ட மாதிரித்தரவுகளின் இடங்காணல் அளவை ஒன்றையும், குறிப்பாகச் சராசரியையும், அவை பரம்பி யிருக்கும் அளவின் ஒரு மதிப்பையும் பெறமுடியுமெனின் தரவுகளை ஒப்புநோக்கவும், அவற்றைப் பரம்பலாக அமைத்து ஆராய்ச்சிக் குட்படுத்தவும் முடிகின்றது. இவைபோன்ற மதிப்புகளைப் பெறு வதன் மூலம் தரவின் முழுத்தொகுதி பற்றிய அனுமானங்களை எடுக்கவோ, அன்றி முழுத்தொகுதியின் பரமானங்களைக் கொண்ட கருதுகோள்களைச் சோதனையிட்டுப் புள்ளியியல் முடிபுகளை எடுக் கவோ முடிகின்றது. தரவுகளிடையே காணப்படும் மாறுபாட்டி னளவு குறைவாகக் காணப்படும்போதுதான் இடங்காணல் அளவைகள் பொருளுடையனவாக இருக்கும். எனவே பரம்ப லொன்றின் பிரிகையளவையின் முக்கியத்துவத்தினை இங்கு உணர முடிகின்றது. வெவ்வேறு வகையான இடங்காணல் அளவைகளை நோக்கியதுபோல், வெவ்வேறு வகையான பிரிகை அளவைகளையும் நோக்குவோம்.

புள்ளிவிபரவியலில் மாறி ஒன்று பரந்திருக்கும் அளவினையே பிரிகை குறிக்கின்றது. பிரிகையினைப் பின்வரும் மதிப்புகளைப் பாவித்து அளக்கமுடிகின்றது.

(i) வீச்சு

(ii) சராசரி விலகல்

(iii) நியமவிலகல்

(i) வீச்சு (Range)

இது பரம்பலொன்றின் பிரிகையினை அளக்கும் இலகுவான அளவையாகும். தரப்பட்ட பரம்பலொன்றின் மிகக் குறைந்த, மிகக் கூடிய பெறுமானங்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் வீச்சு ஆகும். உதாரணமாக, முன்னர் தரப்பட்ட 2.2 உதாரணத்தில் மாணவர்கள் பெற்ற ஆகக் குறைந்த புள்ளி 33 உம், ஆகக்கூடிய புள்ளி 98 உம் ஆகையால் பரம்பலின் வீச்சு (98 — 33 =) 65 ஆகும்.

இது தரப்பட்ட பரம்பலின் எல்லைப் பெறுமானங்களிடையே யுள்ள வித்தியாசத்தினை மட்டும் குறிக்கின்றதே அன்றி மற்றைய தரவுகளைப் பற்றிய எச்செய்தியினையும் காட்டுவதில்லை. ஆகை யால் இந்த அளவையிலிருந்து பரம்பல் பற்றிய எந்தவித தரவல் களையும் பெறமுடியாது.

(ii) சராசரி விலகல் (Average Deviation)

சராசரி விலகலானது பரம்பலிலுள்ள எல்லாத் தரவுகளையும் உள்ளடக்கும் வேறொரு பிரிகையளவையாகும். இது பரம்பலின் நடுப் பெறுமானங்களாகிய இடை, இடையம், …… முதலியவற்றி லிருந்து மாறிகளின் விலகல்களுடைய சராசரியைக் குறிக்கின்றது.

(அ) இடை விலகல் (*Mean Deviation*)

பரம்பலின் நடுப் பெறுமானமாக இடை பாவிக்கப்படின், இடை பற்றிய இடை விலகல் பெறப்படும். பொதுவாக, மாறி X இனது, x_i ; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்ற n நோக்கல்களை எடுத்துக் கொள்க.

$$X \text{ இன் இடை விலகல் } = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{X}|}{n}$$

என வரையறுக்கப் படும். இங்கு $\bar{X}$ என்பது n நோக்கல்களினதும் இடையாகும். அத்துடன் நோக்கல்களினது இடையிலிருந்தான விலகல்களின் நேர்ப் பெறுமானங்களே எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றன.

குறிப்பு:

குறிகொண்ட விலகல்களின் (*Signed Deviations*) கூட்டுத் தொகை எப்பொழுதும் பூச்சியமாகும்.

உதாரணம் 2.29

ஒரு வகுப்பில் 60, 65, 70, 80, 85, 90 என்னும் நிறை உள்ள ஆறு மாணவர்கள் இருக்கின்றார்களென்க.

$$\text{எனின் இடை } = \frac{60 + 65 + 70 + 80 + 85 + 90}{6}$$

$$= 75$$

இவ்விடையிலிருந்து தனிப்பட்ட நிறைகளினது விலகல்கள் முறையே (60 — 75), ………, (90 — 75)

அதாவது, — 15, — 10, — 5, 5, 10, 15 ஆகும்.

எனவே வரைவிலக்கணத்தால் இடை விலகல்,

$$= \frac{15 + 10 + 5 + 5 + 10 + 15}{6}$$

$$= 10 \text{ ஆகும்.}$$

விலகல்களின் குறிகளை அவதானிப்பின்

$$\text{இடை விலகல்} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 75)}{6}$$

$$= \frac{-15 - 10 - 5 + 5 + 10 + 15}{6}$$

$$= 0$$

(ஆ) இடைய விலகல் (*Median Deviation*)

பரம்பலின் நடுப் பெறுமானமாக இடையம் பாவிக்கப்படின், இடையம் பற்றிய இடைய விலகல் பெறப்படும்.

பொதுவாக மாறி X இனது x_i ; $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ என்ற n நோக்கல்களை எடுத்துக்கொள்க.

$$\text{எனின், } X \text{ இன் இடைய விலகல்} = \frac{\sum_{i=1}^{n} | x_i - M_e |}{n}$$

குறிப்பு:

எப்பொழுதும் இடைய விலகல் $\leq$ இடை விலகல்

சராசரி விலகல்கள் சிறிய அளவிலேயே புள்ளிவிபரவியலில் உபயோகிக்கப்படுகின்றமையால் நாம் இங்கு கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளுக்கான சூத்திரங்களை அவதானிக்காது, அடுத்து முக்கிய மான வேருெரு பிரிகையளவையினை விரிவாக வரையறுப்போம்.

(iii) நியமவிலகல் (*Standard Deviation*)

இதுவும் இடைபற்றிய சராசரி விலகலைப் போன்றதே. இதற் குப் பல கணிதக் குணுதிசயங்கள் காணப்படுவதால் மற்றைய விலகல்களிலும் முக்கியம் வாய்ந்ததாகும்.

மாறியொன்று ஏற்கும் மதிப்புகளினது இடையிலிருந்தான விலகல்களின் வர்க்கங்களுடைய கூட்டுத்தொகையின் சராசரியினது வர்க்கமூலமே குறிப்பிட்ட மாறியின் நியமவிலகல் எனப்படும்.

அதாவது, மாறி X ஆனது, $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ என்ற n நோக்கல்களை எடுப்பின், X இனது நியம விலகல் δ இனற் குறிக்கப்பட்டு,

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2}{n}}$$ என வரையறுக்கப்படும்.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{X})^2}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

இங்கு $\overline{X}$ தரப்பட்ட எல்லா நோக்கல்களினதும் சராசரியாகும்.

குறிப்பு:

இங்கு விலகல்களின் வர்க்கங்களே எடுத்துக்கொள்ளப்படுவதால் அவற்றின் குறிகள் பற்றி அக்கறை காட்டப்படவேண்டியதில்லை.

மேலும், தரவுகள் விபரிக்கப்படும் அலகினுலேயே, நியமவிலகலும் விபரிக்கப்படும். உதாரணமாக, ஒரு மாறியானது ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் நிறையினை இருத்தலிற் குறிப்பின் மாறியின் நியமவிலகலும் இருத்தலினுலேயே விபரிக்கப்படும்.

நியமவிலகலைக் கணிப்பதற்கான சூத்திரம் சற்றுச் சிக்கலாகக் காணப்படுவதால், அதனை வேறொரு மதிப்பின் வாயிலாக உணர்த்துவோம். இங்கு மாறற்றிறன் என்னும் மதிப்பு ஒன்று அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றது. இதுவும் பிரிகையளவையினைக் குறிக்கும் ஒரு மதிப்பாகும்.

மாறற்றிறன் (Variance)

விலகல்களின் வர்க்கங்களுடைய கூட்டுத்தொகையின் சராசரி மாறற்றிறன் எனப்படும். இது வழமையாக δ^2 இனற் குறிக்கப்படும். அதாவது,

$$Var(X) = V(X) = \delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$$

$$= \frac{\sum(x - \overline{X})^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

உதாரணம் 2.30

மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 2.29 இலே மாணவர்களின் நிறைகளைக் குறிக்கும் மாறி X இன் நியமவிலகலைக் காண்க.

X	$(x - \overline{X})$	$(x - \overline{X})^2$
60	$60 - 75 = -15$	225
65	$65 - 75 = -10$	100
70	$70 - 75 = -5$	25
80	$80 - 75 = 5$	25
85	$85 - 75 = 10$	100
90	$90 - 75 = 15$	225
$\Sigma x = 450$		$\Sigma(x - \overline{X})^2 = 700$

X இன் விலகல்களின் வர்க்கங்களினது கூட்டுத்தொகை $= 700$

$\therefore$ X இன் மாறற்றிறன், $\delta^2 = \frac{700}{6} = 116.6$

X இன் நியமவிலகல், $\delta = \sqrt{116.6} = 10.7$

அநேகமான பிரயோகப் புள்ளிவிபரவியல்களில் நியமவிலகலே பயன்படுத்தப்படுகின்றது. நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் பற்றிய அத்தியாயத்தில் அவை பற்றிய விரிவான விளக்கத்தினை மாணவர்கள் அறிந்து கொள்ளலாம். தொடர்ந்து, நாம் நியமவிலகலைக் கணிப்பதிலுள்ள சிக்கல்களை இலகுபடுத்தும் வழிமுறைகளை அவதானிப்போம்.

(அ) கூட்டமாக்கப்படாத தரவிற்கான நியமவிலகல்

வரைவிலக்கணத்தால், $\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$

முதலில், $\sum(x-\bar{X})^2 = \sum(x^2 - 2x\bar{X} + \bar{X}^2)$

$$= \sum x^2 - 2\bar{X}\sum x + \sum \bar{X}^2$$

$$= \sum x^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2$$

$$= \sum x^2 - n\bar{X}^2$$

$$\therefore \triangle^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{X}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum x^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$= \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

எனவே, X இன் நியமவிலகல்,

$$\triangle = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} \quad \text{..............} (3)$$

எனவே தரப்பட்ட தரவுகளைக் குறிக்கும் மாறியினது நியம விலகலை, தரவுகளின் கூட்டுத்தொகையையும், தரவுகளின் வர்க் கங்களின் கூட்டுத்தொகையையும் காண்பதன்மூலம் இலகுவாகக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம் 2.31

மேலே தரப்பட்ட (2.30) உதாரணத்தையே மீண்டும் நோக் குவோம்.

X	x^2
60	3600
65	4225
70	4900
80	6400
85	7225
90	8100
$\Sigma x = 450$	$\Sigma x^2 = 34450$

$$\sigma = \sqrt{\frac{34450}{6} - \left(\frac{450}{6}\right)^2}$$

$= 10.7$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

(ஆ) கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளைக்கொண்ட மீடிறன் பரம்பலுக்கான நியமவிலகல்

மாறி X ஆனது x_i ; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்ற பெறுமானங்களை முறையே $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ என்னும் ஒத்த மீடிறன்களுடன் எடுக்கின்றதென்க.

X இன் நியமவிலகல் σ ஆனது,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{X})^2}{N}}$$ என்பதனாலே தரப்படும்.

இங்கு N — தரப்பட்ட மீடிறன்களின் மொத்த எண்ணிக்கை,

$\overline{X}$ — தரப்பட்ட பரம்பலின் இடை.

கீழ்வரிபுகளை நீக்கி எழுதினால்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f (x - \overline{X})^2}{N}}$$

மேலும் இலகுவான வடிவத்திலே,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

உதாரணம் 2.32

உதாரணம் 2.16 இலே கொடுக்கப்பட்ட பரம்பலின் நியம விலகலைக் காண்க.

வாராந்த வருமானம் X	f	fx	fx^2
55	4	220	12100
65	8	520	33800
75	15	1125	84375
90	10	900	81000
110	6	660	72600
135	4	540	72900
165	3	495	81675
	$\Sigma f = 50$	$\Sigma fx = 4460$	$\Sigma fx^2 = 438450$

$$\therefore \Delta = \sqrt{\frac{438450}{50} - \left(\frac{4460}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8769.0 - 7956.64}$$

$$= \sqrt{812.36}$$

$$= 28.5$$

இலகுவான முறையிற் நியமவிலகலினைக் கணித்தல்; உற்பத்தி மாற்றம்

இடங்காணல் அளவையில், அளவின் தொடக்கநிலையை வேறொரு புள்ளிக்கு மாற்றுவதனால் இடையின் பெறுமானத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தினை அவதானித்தோம். அதேபோல, அளவின் தொடக்க நிலையை மாற்றும்போது அது மாறற்றிறனின் பெறுமானத்தில் எவ்வித பாதிப்பினை ஏற்படுத்துகின்றதென்பதையும் அவதானிப்போம்.

உற்பத்தியானது வலப்பக்கம் கிடைவீச்சு a ஆகவுள்ள புள்ளிக்கு நகர்த்தப்படுகின்றதென்க. புதிய அச்சுக்கள் பற்றி D என்னும் மாறியை, $D = X - a$ என வரையறுப்போம். எனவே,

$$V(D) = V(X-A)$$

$$= \frac{\left[\sum (x-a) - (\bar{X}-a)\right]^2}{n}$$

$$= \frac{\left[\sum x^2 - 2ax + a^2 - 2(x-a)(\bar{X}-a) + (\bar{X}-a)^2\right]}{n}$$

$$= \frac{\sum(x^2 - 2x\bar{X} + \bar{X}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum(x - \bar{X})^2}{n}$$

$$= V(X)$$

அதாவது, $V(X-a) = V(X)$

இதேபோல, உற்பத்தி இடப்பக்கம் கிடைவீச்சு a ஆக வுள்ள புள்ளிக்கு நகர்த்தப்படினும் $V(X+a) = V(X)$ எனக் காட்டலாம்.

எனவே, உற்பத்தி மாற்றம் மாறற்றிறனின் பெறுமானத் தினை எவ்விதத்திலும் பாதிக்கமாட்டாது.

மீடிறன் பரம்பலொன்றைக் குறிக்கும் மாறி X இனது அளவின் தொடக்க நிலையை வலப்பக்கம் கிடைவீச்சு a ஆகவுள்ள புள்ளிக்கு மாற்றும்போது பெறப்படும் புதிய மாறியை D என்க. அதாவது, இங்கு $d = x - a$

எனின், X இன் நியமவிலகல்

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

உதாரணம் 2.33

மேலேதந்த (2.32) உதாரணத்தில், சமன்பாடு (5) இனை உபயோகித்து நியமவிலகலைக் காண்க.

வாராந்த வருமானம் X	f	$D = X - 90$	fd	fd^2
55	4	−35	−140	4900
65	8	−25	−200	5000
75	15	−15	−225	3375
90	10	0	0	0
110	6	20	120	2400
135	4	45	180	8100
165	3	75	225	16875
மொத்தம்	50		−40	40650

$$\therefore \Delta = \sqrt{\frac{40850}{50} - \left(\frac{-40}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{813 - 0.64}$$

$$= \sqrt{812.36}$$

$=$ 28.5 (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

எனின், குறிப்பிட்ட 50 தொழிலாளிகளின் வருமானங்கள் ரூ. 39.2 சராசரியினையும், ரூ. 28.5 நியமவிலகலையும் கொண்டு பரம்பப்பட்டுள்ளன.

மேலுள்ள உதாரணத்திலிருந்து, நோக்கிய இடையொன்றைக் கருதிக்கொண்டு உற்பத்தியை மாற்றுவதால் நியமவிலகலுக்கான கணித்தல் ஓரளவில் இலகுபடுத்தப்படுகின்றது.

(இ) கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக்கொண்ட மீடிறன் பரம்பலுக்கான நியமவிலகல்

இதுவரை, நாம் கூட்டமாக்கப்படாத தரவுகளினதும், மீடிறன் பரம்பல்களினதும் நியமவிலகலை எவ்வாறு கணிப்பது என்பதனை அவதானித்தோம். மாறாக, தரவுகள் தனியான பெறுமானங்களாகக் காணப்படாது வகுப்புகளாகக் காணப்படும்போது எவ்வாறு அத்தகைய பரம்பலொன்றினது நியமவிலகலின் பெறுமானத்தைக் கணிப்பது என்பதனை அவதானிப்போம். முன்னர் போல் இங்கும் வகுப்புகளின் நடுப் பெறுமானமே மாறியேற்கின்ற பெறுமானமாகக் கொள்ளப்படும். i ஆவது வகுப்பின் நடுப்பெறுமானம் m_i எனின் பரம்பலின் நியமவிலகல்,

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (m_i - \overline{X})^2}{N}}$$

இலகுவான வடிவில்

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum fm^2}{N} - \left(\frac{\sum fm}{N}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

உதாரணம் 2.34

உதாரணம் 2.2 இலே தரப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக் கொள்வோம். இங்கு தரவுகள் வகுப்பாக்கப்பட்டுக் காணப்படுகின்றன. மாணவர் பெற்ற புள்ளியைக் குறிக்கும் மாறியினது நியமவிலகலைக் காண்க.

வகுப்பு	வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் m	மீடிறன் f	fm	fm^2
30 — 39	34.5	4	138.0	4761.0
40 — 49	44.5	6	267.0	11881.5
50 — 59	54 5	9	490.5	26732.25
60 — 69	64.5	12	774.0	49923.0
70 — 79	74.5	8	596.0	44402.0
80 — 89	84.5	7	591.5	49981.75
90 — 99	94.5	4	378.0	35721.0
மொத்தம்		50	3235.0	223402.5

$$\therefore \Delta = \sqrt{\frac{223402.5}{50} - \left(\frac{3235}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4468.05 - 4186.09}$$

$$= \sqrt{281.96}$$

$$= 16 \cdot 79$$

எனவே, மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்திலிருந்து தரப்பட்ட பரம்பலின் நியமவிலகலினை சமன்பாடு (6) இனை உபயோகித்துக் கணிப்பது கடினமாகத் தோன்றுகின்றது. இங்கு, நாம், பரம்பலைக் குறிக்கும் மாறியின் உற்பத்தியை மாற்றுவதன்மூலம் கணித்தலை இலகுபடுத்தலாம்.

உற்பத்தியானது வலதுபக்கம் கிடைவிச்சு a ஆகவுள்ள புள்ளிக்கு மாற்றப்படுகின்றதென்க. அத்துடன் $d = m - a$ எனில் முன்னர்க் காட்டியது போல,

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

உதாரணம் 2.35

மேலுள்ள (2.34) உதாரணத்தில், சமன்பாடு (7) இனை உபயோகித்து நியமவிலகலைக் காண்க.

வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் m	$D = m - 64.5$	f	fd	d^2	fd^2
34.5	−30	4	−120	900	3600
44.5	−20	6	−120	400	2400
54.5	−10	9	−90	100	900
64.5	0	12	0	0	0
74.5	10	8	80	100	800
84.5	20	7	140	400	2800
94.5	30	4	120	900	3600
மொத்தம்		50	10		14100

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{14100}{50} - \left(\frac{10}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{282 - 0.04}$$

$$= \sqrt{281.96}$$

$= 16.79$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

இலகுவான முறையிற் நியமவிலகலைக் கணித்தல்; உற்பத்தி மாற்றமும் அளவிடை மாற்றமும்

மீடிறன் பரம்பலொன்றைக் கொண்டுள்ள மாறியொன்றின் உற்பத்தியை மாற்றுவதனால் மாறற்றிறனின் பெறுமானத்திலேற்படும் பாதிப்பினை அவதானித்தோம். கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றின் வகுப்புகள் சம அளவான வகுப்பாயிடைகளை அல்லது குறிப்பிட்ட எண்ணினாற் பிரிபடக்கூடிய ஆயிடைகளைக் கொண்டிருக்கும்போது, நாம் தரப்பட்ட பரம்பலைக் குறிக்கும் மாறியின் உற்பத்தியை மாற்றுவதோடு அதன் அளவிடையினையும் மாற்ற முடிகின்றது. இரண்டினையும் மாற்றியபின்னர் மாறற்றிறனின் பெறுமானம் எவ்வாறு மாற்றமடைகின்றதெனக் கீழே அவதானிப்போம்.

மாறியின் பரம்பலானது c என்னும் சமமான வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட வகுப்புகளை அல்லது c இனால் பிரிபடக்கூடிய வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட வகுப்புகளைக் கொண்டுள்ளதென்க. மாறியின் உற்பத்தியை வலதுபக்கம் கிடைவீச்சு a ஆகவுள்ள புள்ளிக்கு இடமாற்றிய பின்னர், முன்னைய அளவிடையின் c இல் ஒரு மடங்கு $(1/c)$ புதிய அளவிடையாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

அதாவது, $D = X - a$

அளவிடை மாற்றப்பட்டபின்னர் புதிய மாறி U எனின்,

$$U = \frac{D}{c}$$

அதாவது, $X = a + cU$

எனவே, கூட்டமாக்கப்பட்ட தரவுகளைக் கொண்ட மீடிறன் பரம்பலொன்றைக் குறிக்கும் மாறியின் உற்பத்தியை வலதுபக்கம் கிடைவீச்சு a ஆகவுள்ள புள்ளிக்குமாகவும், அதனது அளவிடை $1/c$ மடங்காகவும் மாற்றப்படுகின்றதென்க.

இங்கு, $X = a + cU$

$\Longrightarrow m = a + cu$

ஆனல்,
$$V(X) = \frac{\sum f(m - \overline{X})^2}{N}$$
$$= \frac{\sum f\left[a + cu - (a + c\overline{U})\right]^2}{N} \text{ ; இங்கு } \overline{U} = \frac{\sum fu}{N}$$
$$= \frac{\sum fc^2(u - \overline{U})^2}{N}$$
$$= c^2 \frac{\sum f(u - \overline{U})^2}{N}$$
$$= c^2 V(U)$$

எனவே,

$$\Delta^2 = c^2\left[\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2\right]$$

அத்துடன், X இன் நியமவிலகல் Δ ஆனது,

$$\Delta = c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} \quad \text{..............(8)}$$

என்பதனுலே தரப்படும்.

உதாரணம் 2.36

மேலே தரப்பட்ட (2.35) உதாரணத்தில், சமன்பாடு (8) இனை உபயோகித்து நியமவிலகலைக் காண்க.

இங்கு வகுப்பாயிடை அளவுகள் (10) சமமாகக் காணப்படுவதால்,

$$c = 10 \text{ உம், } \frac{D}{10} = U \text{ உம் எனக் கொள்வோம்.}$$

m	f	D	$U=\frac{D}{10}$	fu	u^2	fu^2
34.5	4	—30	—3	—12	9	36
44.5	6	—20	—2	—12	4	24
54.5	9	—10	—1	—9	1	9
64.5	12	0	0	0	0	0
74.5	8	10	1	8	1	8
84.5	7	20	2	14	4	28
94.5	4	30	3	12	9	36
மொத்தம்	50			+1		141

$$\therefore \Delta = 10\sqrt{\frac{141}{50} - \left(\frac{1}{50}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{2.82 - 0.0004}$$

$$= 10\sqrt{2.8196}$$

$= 16.79$ (முன்னர் பெற்ற விடையுடன் ஒப்பிடுக)

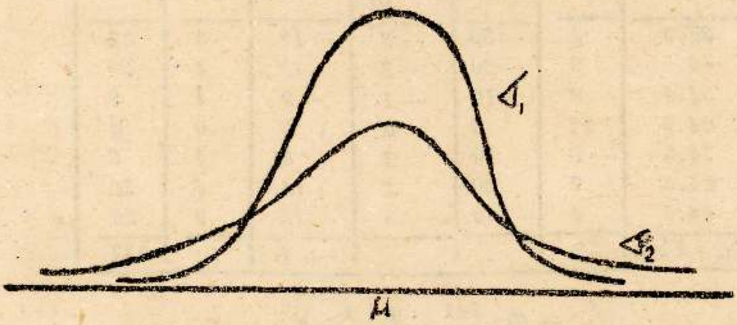
சமன்பாடு (7) இனை உபயோகித்துப் பரம்பலின் நியமவிலகலைக் கணிப்பதைவிட, சமன்பாடு (8) இனை உபயோகித்து நியமவிலகலைக் கணிப்பின், கணித்தல் மேலும் இலகுபடுத்தப்படுவதைக் காணமுடிகின்றது. எனவே, மாணவர்கள் எப்பொழுதும் பரம்பலொன்றின் மதிப்புகளைக் காணும்போது இலகுவான முறைகளையே கையாளவேண்டும். இதனால், நேரத்தை மிச்சப்படுத்துவதோடு கணித்தலும் இலகுவாக இருக்குமாதலால் தவறுகளையும் நீக்கமுடியும்.

இப்பொழுது, புள்ளிவிபரவியல் விரிவுரையாளனால், பொருளியல் விரிவுரையாளனின் வினவிற்குத் தீர்க்கமான விடையளிக்க முடிகின்றது. அதாவது, வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் சராசரியாக 65 என்ற புள்ளியைப் பெற்றிருப்பதுடன், அவை 16.79 நியமவிலகலையும் கொண்டுள்ளன. அதாவது, சராசரியிலிருந்து இருபுறமும் 17 புள்ளிகள் பரந்து காணப்படுகின்றன எனச்சுருக்கமான பதிலளிக்கமுடியும்.

குறிப்பு:

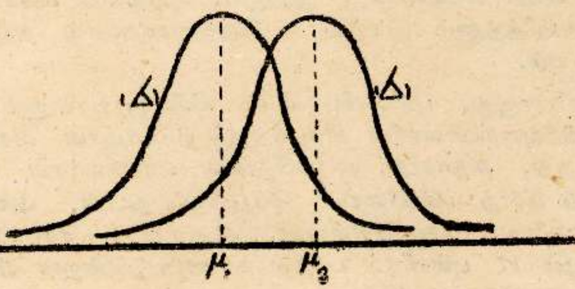
உதாரணமாக, இறுத்தல், அடி என்பன முறையே நிறையை யும், நீளத்தையும்அளக்கும் அலகுகள் என்பதைப்போல நியமவிலக லானது ஒரு பரம்பலின் பிரிகையை, அதாவது, பரந்திருக்கும் அளவை அளக்கும் அலகாகக் கொள்ளப்படுகின்றது.

ஒரே இடையினையும் வித்தியாசமான நியமவிலகலையும் கொண்ட இரு பரம்பல்கள் கீழேயுள்ள படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளன.



பரம்பல் A இன் நியமவிலகல் δ_1 ஆனது, பரம்பல் B இன் நியமவிலகல் δ_2 இனை விடச் சிறிதாகும். அதாவது, A பரந்திருக்கும் அளவு, B பரந்திருக்கும் அளவைவிடச் சிறிதாகும். ($\delta_1 < \delta_2$)

வித்தியாசமான இடையையும் சமமான நியமவிலகலையும் கொண்ட இரு பரம்பல்கள் கீழேயுள்ள படத்திற் காட்டப்பட்டுள்ளன.



உதாரணம் 2.37

கம்பனியொன்றில் தொழில்புரியும் 50 தொழிலாளிகளினது ஊதியங்களைக் கொண்ட மீடிறன் பரம்பலொன்று உதாரணம் 2.3 இலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. தொழிலாளிகள் பெறும் ஊதியங்களினது இடைவிலகலையும், நியம விலகலையும் காண்க.

வரைவிலக்கணத்தால், இடைவிலகல் $= \frac{\sum f|m-\bar{X}|}{N}$

இங்கு $\bar{X} = 89.2$

வகுப்பு	வகுப்பின் நடுப் பெறுமானம் m	f	$\|m-\bar{X}\|$	$f\|m-\bar{X}\|$
50— 60	55	4	34.2	136.8
60— 70	65	8	24.2	193.6
70— 80	75	15	14.2	198.0
80—100	90	10	0.8	8.0
100—120	110	6	22.8	136.8
120—150	135	4	45.8	184.0
150—180	165	3	75.8	227.1
மொத்தம்		50		1084.3

$\therefore$ இடை விலகல் $= \frac{1084.3}{50}$

$= 21.686$

$= 21.7 /=$

நியமவிலகலை சமன்பாடு (8) இனை உபயோகித்துக் காண்போம்.

வகுப்பின் நடும் பெறுமானம் m	f	$D=m-90$	$U=D/5$	u^2	fu	fu^2
55	4	—35	—7	49	—28	196
65	8	—25	—5	25	—40	200
75	15	—15	—3	9	—45	135
90	10	0	0	0	0	0
110	6	20	4	16	24	96
135	4	45	9	81	36	324
165	3	75	15	225	45	675
மொத்தம்	50				—8	1626

$$\therefore \triangle = 5\sqrt{\frac{1626}{50} - \left(\frac{-8}{50}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{32.52 - 0.0256}$$

$$= 5\sqrt{32.4944}$$

$$= 28.5$$

தொடர்புப் பிரிகை (*Relative Dispersion*)

இதுவரை நாம் தனிப்பட்ட பரம்பல்களிற் காணப்படும் மாறுபாடுகளையே அவதானித்தோம். ஆனால் இரண்டு வேறுபட்ட பரம்பல்களின் மாறுபாடுகளை ஒப்புநோக்கவேண்டுமானால் பல சிக்கல்கள் எழுகின்றன. மாறிகளின் அலகுகள் வேறுபட்டுக் காணப்படின் அவற்றை ஒப்பிடமுடியாது. அலகுகள் ஒன்றாகக் காணப்படினும் வேறு பல சிக்கல்கள் எழுகின்றன. குறிப்பிட்ட மாறியினது நியமவிலகல் மற்றைய மாறியினது நியமவிலகலை விடப்பெரிதாகக் காணப்படின், முதலாம் மாறி அதிகளவு மாறுபாடுடையதெனக் கூறிவிடமுடியாது. அதாவது, நியமவிலகலளவை மட்டும் கொண்டு உடனடியாக மேற்குறிப்பிட்டவை போன்ற முடிவுகளை எடுக்கமுடியாது. உதாரணமாக, இரு வேறு பரீட்சைகளிற் குறிப்பிட்ட ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளை நோக்குவோம். முதலாம் பரீட்சையில் மாணவர்கள் பெறக்கூடிய ஆகக்கூடிய புள்ளி 100 ஆக இருக்கும்போது, 6 நியமவிலகலையும் சராசரியாக 60 புள்ளியினையும், இரண்டாம் பரீட்சையில் அவர்கள் பெறக்கூடிய புள்ளி 1000 ஆக இருக்கும்போது, 8 நியமவிலகலையும் சராசரியாக 800 புள்ளியினையும் பெற்றனர். இதிலிருந்து, நாம் இரண்டாம் பரீட்சையில் மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் கூடிய பிரிகை உடையன எனக் கூறுவது தவறாகும். எனவே, பரம்பல்களை ஒப்பிடச் சார்பு விலகலே பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

$$\text{சார்பு விலகல்} = \frac{\text{தனியான விலகல்}}{\text{சராசரி}} = \frac{x - \bar{X}}{\bar{X}}$$

தனியான விலகலுக்குப் பதிலாக நியமவிலகல் பாவிக்கப்படின் சார்பு விலகலானது மாறற் குணகம் எனப்படும். அதாவது,

மாறற் குணகம் $V = \triangle / \bar{X}$ இது மாறியின் அலகுகளிலே தங்கியிருக்கமாட்டாது.

மாறற் குணகத்தினைப் பயன்படுத்தி வெவ்வேறு பரம்பல்களின் பிரிகைகளை ஒப்பிடமுடியும். பொதுவாக இது சதவீதத்திலேயே உணர்த்தப்படும்.

மேலே தந்த உதாரணங்களில்,

1ஆம் பரீட்சைக்கான மாறற் குணகம்

$$V_1 = \measuredangle_1 / \bar{X}_1 = 6/60 = 1/10$$

2ஆம் பரீட்சைக்கான மாறற் குணகம்

$$V_2 = \measuredangle_2 / \bar{X}_2 = 8/8000 = 1/100$$

2 ஆம் பரீட்சையின் சார்பு விலகலின் பத்திலொரு மடங்காகும்.

எனவே, தனியான மாறுபாடுகளின் அளவை அவற்றிற்குரிய சராசரிகளுடன் தொடர்புபடுத்தியபின்னரே (அதாவது, விலகல்கள் எவற்றிலிருந்து அளக்கப்படுகின்றனவோ அவற்றிலிருந்தே) அவை பொருளுடையனவாகக் காணப்படுகின்றன. சராசரியின் மதிப்பாலும் நியமவிலகலின் அளவாலும் மாறற்குணகம் பாதிக்கப்படுகின்றது. அநேகமான நிலைமைகளில் $\bar{X}$, $\measuredangle$ என்பன மாற்றமடையும்போதும், V ஆனது அண்ணளவாக மாருததாகக் காணப்படும். மேலும், V இனதும் $\bar{X}$ இனதும் பெறுமானங்கள் தரப்படின் $\measuredangle$ இன் பெறுமானம், $\measuredangle = V\bar{X}$ என்பதிலிருந்து மதிப்பிடப்படலாம். மாதிரியெடுப்பிலே, மதிப்பிட்ட மாறற்றினது நம்பகத்தகவை சோதிப்பதற்கும் மாறற் குணகம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. தரவுகள் ஓராயமானதாகக் காணப்படின் V இன் பெறுமானம் பெரிதாகின்றது. இங்கு பொருத்தமான நியமவிலகலைக் கணிப்பதற்குப் பெரிய எண்ணிக்கை கொண்ட தரவுகள் தேவைப்படுகின்றன.

2.5.3: ஓராய அளவைகள் (MEASURES OF SKEWNESS)

இதுவரை நாம் மீடிறன் பரம்பல்களின் இடங்காணல் அளவைகள் பற்றியும் பிரிகைஅளவைகளைப் பற்றியுமே அவதானித்தோம். அதாவது, மையநிலைப்போக்குகளையும் அவற்றிலிருந்து தரவுகளின் விலகல்களையும் அளவிடமுடிந்தது. ஆனால், தரப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் சமச்சீர்த்தன்மையை அறிந்துகொள்வதற்கு வேருேர் அளவை தேவைப்படுகின்றது. இந்த அளவையும் தெரியப்படின் நாம் யாதாயினுமொரு மீடிறன் பரம்பலின் சிறப்பை விரிவாக எடுத்துக்கூறமுடியும். மீடிறன் பரம்பலொன்று சமச்சீரானதாக இருக்கும்போதுதான் அதன் இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பன ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தியும், பரம்பல்கள் ஓராயமானதாகக் காணப்படும்போது மேற்குறிப்பிட்ட பெறுமானங்கள் வித்தியாசமானதாயும் காணப்படும். இரண்டாம் வகையில், இடைவிற்கும், ஆகாரத்திற்கும்இடையே அதிக அளவு வேறுபாடு காணப்படும். இவ்

வேறுபாட்டளவே ஓராயத்தினை அளக்கப் பயன்படுகின்றது. வெவ்வேறு பரம்பல்களின் ஓராயத் தன்மையை ஒப்புநோக்குவதற்காக இங்கும் தனியான வேறுபாட்டை விட்டு, தொடர்பு வேறுபாடே கருத்திற்கொள்ளப்படுகின்றது.

யாதுமொரு பரம்பலின் ஓராயமானது சமச்சீரில்லாத தன்மையின் அளவை அல்லது சமச்சீர்த்தன்மையிலிருக்கும் அதனது விலகலைக் குறிக்கின்றது.

$$\text{ஓராயம்} = \frac{\text{இடை} - \text{ஆகாரம்}}{\text{நியமவிலகல்}}$$

$$= \frac{\overline{X} - M}{\Delta}$$

இதனைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$\text{ஓராயம்} = \frac{3\ (\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியமவிலகல்}}$$

$$= \frac{3\,(\overline{X} - M_e)}{\Delta}$$

சமச்சீரான பரம்பலுக்கு இவ் அளவையின் மதிப்பு பூச்சியமாகும். ஏனெனில், இங்கு இடையும், ஆகாரமும் ஒரே பெறுமானமுடையனவாகும். பிற நிலைமைகளில் இப்பெறுமானம் நேரானதாகவோ எதிரானதாகவோ காணப்படலாம்.

2.5.4: குடில அளவைகள் (MEASURES OF KURTOSIS)

செவ்வன் வளையியை நியமமானதாக எடுத்துக்கொண்டு அதனின்றும் மீடிறன் வளையிகளின் உச்சப்படுத்தும் தன்மையை குடில அளவைகளைப் பயன்படுத்தி அறியமுடிகின்றது. அதாவது, குடில அளவை என்பது யாதுமொரு பரம்பலின் உச்சப்படுத்தும் நிலையைக் குறிப்பதாகும். இவ் அளவையும் சில சமயங்களில் ஆராய்ச்சிக்கு வேண்டப்படுகின்றது.

உதாரணமாக, வெவ்வேறு ஆண்டுகளில் விலையின் ஏற்றவிறக்கங்களைக் காட்டும் மீடிறன் வளையியொன்று வரையப்படின், அது செவ்வன் வளைகோட்டைவிடக் கூரியதாகக்காணப்படும். இங்கு குடில அளவானது மைய அளவைச் சுற்றிச் செறிவு அதிகமாகக் காணப்படுகின்றதைச் சுட்டிக்காட்டுவதனுல், இது மிகவும் பொருளுடையதாகும்.

2.6: பயிற்சிகள்

1. வகுப்பாக்கலின் உட்கருத்தை விளக்கி புள்ளிவிபரவியலில் அதனது தேவையினை ஆராய்க.

2. வகுப்பாக்கலென்றால் என்ன? அதனது நோக்கங்கள், சிறப்பியல்புகள் யாவை?

3. மீடிறன் பரம்பலொன்றின் வீச்சு, வகுப்பாயிடை, வகுப்பு என்பவற்றை நிர்ணயிக்கும்போது கருத்திற்கொள்ள வேண்டியவற்றைத் தருக.

அல்லது மீடிறன் பரம்பலொன்றை வரையறுக்குக. இதனை அமைக்கும் போது மேற்கொள்ளப்படும் அடிப்படை நோக்கங்கள் யாவை?

4. அளவுரீதியான வகுப்பாக்கத்தினையும், பண்புரீதியான வகுப்பாக்கத்தினையும் வேறுபடுத்துக.

5. பின்வருவனபற்றிச் சிறுகுறிப்பெழுதுக.

(அ) தனிப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள்.

(ஆ) பின்னக மாறி

(இ) தொடர்மாறி

(ஈ) எளியமீடிறன், திரட்டுமீடிறன், தொடர்பு மீடிறன்.

6. அட்டவணைப்படுத்தல் என்பதிலிருந்து யாது விளங்குகின்றீர்? புள்ளியியல் ஆய்வில் அதனது கணிப்பீட்டினைக் குறிப்பிடுக.

7. மையநிலைப் போக்கிலிருந்து யாது விளங்குகின்றீர்? வெவ்வேறு மையநிலைப்போக்குகளை விளக்குக.

8. கூட்டலிடையை வரையறுத்து அதனது அனுகூலம், பிரதிகூலங்களைத் தருக.

9. பின்வருவனபற்றிச் சிறுகுறிப்பெழுதுக.

(அ) கூட்டலிடை

(ஆ) பெருக்கலிடை

(இ) நிறையேற்றப்பட்ட கூட்டலிடை

10. யாதாயினும் ஒரு பரம்பலுக்கான இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றுக்கான வரைவிலக்கணங்களைத் தந்து அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பை விளக்குக.

11. பின்வரும் நோக்கல்களுக்கான ஆகாரம், இடையம், கூட்டலிடை, பெருக்கலிடை, என்பவற்றைக் காண்க..

3, 5, 10, 7, 5, 8, 2, 5, 1, 6, 6, 4, 5, 4.

12. கீழே தரப்பட்டுள்ள பரம்பலுக்கான இடையைக் காண்க.

X	f
100—	3
200 —	4
300 —	11
500 —	9
700 —	6
1000—	4
1500—2000	3
	40

மேற்படி பரம்பலுக்கான இடையம், என்பன முறையே 544 எனத்தரப்படின் மீடிறன் பரம்பலின் வடிவத்தைக் குறிப்பிடுக.

13. புள்ளிவிபரவியலில் 80 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன. இடை, இடையம், மேல், கீழ்க்காலணைகள், ஆகாரம், என்பனவற்றைக் காண்க.

புள்ளிகள்	f
0 — 9	8
10 — 19	9
20 — 29	15
30 — 39	30
40 — 49	18
50 — 59	5
	80

மேற்படி பரம்பலுக்கான இழைவரையத்தை வரைக.

14. பச்சைத்தரவு, பந்தி என்பவற்றை வேறுபடுத்தி விளக்குக.

15. குறிப்பிட்ட கிராமமொன்றிலிருந்து எழுமாறுகத் தெரியப்பட்ட 40 விவசாயிகளிடமிருந்து பெற்ற குறிப்பிட்ட நெல் வகைக்கொத்த விளைச்சல் (புசல், ஓர் ஏக்கருக்கு) பற்றிய தகவல்கள் :

16	35	45	55	58	36	24	54
67	69	55	54	53	35	27	55
51	53	58	56	57	33	26	20
44	45	47	49	50	32	26	49
43	44	41	42	37	33	24	56

(அ) தரப்பட்ட தரவுகளைப் பந்தியுருவில் அமைக்குக.

(ஆ) பந்தியை இரு சமபங்காகப் பிரிக்கும் பெறுமானம் என்ன ?

(இ) தரப்பட்ட புள்ளிகளை வகுப்பாயிடைகளாகப் பிரித்து, மீடிறன், திரட்டு மீடிறன், தொடர்பு மீடிறன், என்பவற்றிற்கான அட்டவணையை அமைக்குக.

(ஈ) இ பகுதியிலிருந்து தரப்பட்ட தரவுகளுக்கான இடையின் பெறுமானத்தினைக் காண்க.

16. 70 வேலையாட்களின் வாராந்த வருமானம் பின்வரும் கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

வருமானம்	f
50—	8
60—	10
70—	16
80—	15
100—	10
120—	8
150—180	3
	70

மேற்படி பரம்பலுக்கான இழைவரையத்தை வரைக.

17. தொழிற்சாலையொன்றில் வெவ்வேறு வாராந்த ஊதியம் பெறும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை கீழுள்ள அட்டவணையிலே தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கான திரட்டு மீடிறன் வளையியை வரைக.

ஊதியம் (ரூபா)	20	21	22	23	24	25	26	27	28
தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	8	10	11	16	20	25	15	9	6

18. ஒரு மாறி X இனது கூட்டமாக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

X	f
0 — 5	5
5 — 10	8
10 — 15	12
15 — 20	7
20 — 25	5
25 — 30	3

(அ) பரம்பலுக்கான திரட்டு மீடிறன் வளையியை வரைக.

(ஆ) பகுதி (அ) இனைப் பயன்படுத்தி, பரம்பலின் இடையத்தைக் காண்க.

(இ) மாறி X ஆனது 13 இலும் கூடிய பெறுமானங்களை எத்தனை தடவைகள் எடுக்கின்றன.

(ஈ) பரம்பலின் இடையினைக் காண்க.

19. தொழிற்சாலையொன்றில் உற்பத்தியான மின்குமிழ்களிலிருந்து, எழுமாறாகத் தெரியப்பட்ட 30 மின்குமிழ்களின் ஆயுட் காலங்கள் சோதிக்கப்பட்டு முடிபுகள் கீழ்வரும் அட்டவணையிற் காட்டப்பட்டுள்ளன.

ஆயுட்காலம்	மின்குமிழ்களின் எண்ணிக்கை
200 — 300	2
300 — 400	5
400 — 500	7
500 — 600	10
600 — 700	8
700 — 800	6
800 —	2

(அ) தரவினது திரட்டு மீடிறன் வளையியை வரைக.

(ஆ) மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தின் இடையத்தினைக் காண்க.

(இ) 350 மணித்தியாலத்தினதும் கூடிய ஆயுட்காலத்தினைக் கொண்ட மின்குமிழ்களின் எண்ணிக்கை யாது ?

20. வகுப்பொன்றிலுள்ள 100 மாணவர்கள் கணிதப் பரீட்சையிற் பெற்ற புள்ளிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

புள்ளிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0 — 9	5
10 — 19	10
20 — 29	25
30 — 39	30
40 — 49	20
50 — 59	10

(அ) மாணவர்கள் பெற்ற சராசரிப் புள்ளி யாது?

(ஆ) பரம்பலுக்கான திரட்டு மீடிறன் வளையியை வரைக.

(இ) சித்திப்புள்ளி 40 எனின் சித்தியடையும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

(ஈ) மாணவர்கள் 2/3 பங்கினர் சித்தியடையுமாறு சித்திப் புள்ளியை தீர்மானிக்க.

(உ) மேற் காலனையிலும் கூடிய மாணவர்கள் எல்லோரும் சித்தியடைய வேண்டுமெனின் சித்திப் புள்ளி யாது?

21. பிரிகை அளவை என்பதனை விளக்கி, தனியான பிரிகை, என்பவற்றை வேறுபடுத்துக.

22. புள்ளிவிபரவியல் பிரிகையின் முக்கியத்துவத்தினை ஆராய்க.

24. பின்வருவனவற்றிற்குச் சிறுகுறிப்பெழுதுக.
(அ) வீச்சு (ஆ) இடை விலகல் (இ) நியமவிலகல்

24. உதாரணங்கள் 13, 20 இல் கொடுக்கப்பட்ட பரம்பல்களுக்கான நியமவிலகல்களைக் காண்க.

25. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 100மாணவர்களினது உயரங்கள் பின்வரும் மீடிறன் அட்டவணையிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உயரம் (அங்.)	மீடிறன்
59.5 — 62.5	5
62.5 — 65.5	18
65.5 — 68.5	42
68.5 — 71.5	27
71.5 — 74.5	8

மாணவர்களின் உயரத்தினது சராசரி, இடை விலகல், நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

26. மாறற் குணகத்தை வரையறுத்து, உதாரணம் 13 இலே கொடுக்கப்பட்ட பரம்பலுக்கான மாறற் குணகத்தைக் காண்க.

27. ஓராயம் என்பதிலிருந்து யாது விளங்குகின்றீர்? பின்வரும் தரவிற்கான பியசனின் ஓராயக் குணகத்தைக் காண்க.

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20, 25, 20.

3 நிகழ்தகவு
PROBABILITY

புள்ளிவிபரவியல் பற்றிய ஆய்வானது, முக்கியமாகத் தரவுகளையே (உதாரணமாக, நாட்டின் வருமானம், மக்கள்தொகை விவசாய, கனரக உற்பத்திகள், மக்கள் வருமானம், வேலையற்றோர்தொகை,...... போன்றவற்றை) அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளமையைக் காணக்கூடியதாக இருக்கின்றது. இங்கு எமக்கு வேண்டிய முழுத்தரவுகளையும் சேகரிப்பது, இயலாததும் செயல்முறைக்கு ஒவ்வாததும் சிக்கனமற்றதொன்றாகவும் இருப்பதால் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதித் தரவுகளே சேகரிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு பெறப்படும் மாதிரித் தரவுகளைக் கொண்டு முழுத்தொகுதி பற்றிய முடிபுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. திரட்டப்படும் தரவுகள் சரியானவையாகவும், குடியினது வகைமாதிரியாயும் காணப்படல் அவசியமானதாகும். இத்தரவுகள் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டு வெவ்வேறு குணதிசயங்களின் அடிப்படையில் தொகுக்கப்பட்டுப் பின்னர், இவற்றிலிருந்து ஒப்புக்கொள்ளத்தக்க முடிபுகள் பெறப்படுகின்றன:

இம்முடிபுகளிலிருந்து குடிபற்றிய பொருத்தமான தீர்மானங்கள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

குடியொன்றின் வகைமாதிரியை ஆராய்ந்து அதிலிருந்து குடி பற்றிய முக்கியமான முடிபுகளை அனுமானிக்கக் கூடிய அனுமானம், என்ன நிபந்தனையின் கீழ் ஒப்புக்கொள்ளக் கூடியது என்று ஆராயப்படும் புள்ளிவிபரவியற்பகுதி, தொகுத்தறி புள்ளிவிபரவியல் அல்லது புள்ளியியல் அனுமானம் (*Statistical Inference*) எனப்படும். அத்தகைய அனுமானம் முற்முய் உறுதியாக இருக்க முடியாது என்பதால், முடிபுகளைக் கூறும்போது நிகழ்தகவுப் பரிபாஷையே பயன்படுத்தப்படும். மாதிரிக்கும் குடிக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பு நிகழ்தகவுக் கொள்கையையே ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ளமையால் புள்ளியியல் அனுமானத்தை ஆராய முன்பாக நிகழ்தகவுக் கொள்கையினை ஆராய்வோம்.

3.1: நிகழ்தகவுக் கொள்கை (PROBABILITY THEORY)

அன்ருட வாழ்க்கையில் இயற்கையாக நிகழக்கூடிய பல எதிர்கால நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகள் அல்லது அவை பற்றி மனத்திலே தோன்றும் எண்ணங்கள், கருத்துகள் போன்றவற்றைப் போதுமான அளவு திட்டவட்டமாக வரையறுத்துக் கூறுதல் பகுத்தறிவிற்கப்பாற்பட்டதொன்ருகும். எனினும், பல நிலைமைகளில் எதிர்கால நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகள் அவை நேருவதற்கு முன்னமே வேண்டப்படுகின்றன. இவ்வாறு திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியாத சந்தர்ப்பங்களிலேதான் நிகழ்தகவு பயன்படுத்தப்படுகின்றது. நிகழ்தகவு பயன்படுத்தப்படும்போது நிகழ்ச்சி நிகழ்வது சந்தேகத்திற்கு இடமானதா என்பதை அறிய முடிகின்றது. எனவே, எந்த ஒரு நிகழ்ச்சி நேர்தகவுக் காரணத்தையொட்டி நிகழக்கூடியதாகவும் மீண்டும் மீண்டும் ஏற்படக்கூடியதாகவும் உள்ளதோ, அவ்வித நிகழ்ச்சிகளுக்கே நிகழ்தகவு பயனளிக்கின்றது. பொதுவாக, நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதை ஓரளவிற்கு அளவிட்டு எண்ணளவில் கூறுவதே நிகழ்தகவு ஆகும். இவ்விதம் அளவிட்டுக் கூறுவது பொது அறிவிற்கு முரண்படாதிருத்தல் விரும்பத்தக்கதாகும்.

புள்ளியியல் ஒழுங்குகளை வாய்ப்புக் கோட்பாடு (*Chance Phenomena*) வெளிக்காட்டுகின்றது என்ற அவதானிக்கப்பட்ட உண்மையின் விளைவே, நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் பயன்பாடாகும். உதாரணமாக, ஒரு நாணயம் (*Coin*) சுண்டப்படும்போது 'பூவா, தலையா' (*H or T*) விழும் என்று எதிர்வு கூறமுடியாது.

அதேபோல, ஒரு தாயக்கட்டை எறியப்படும்போது எம்முகம் மேல் நோக்கியதாய் (அதாவது, 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற புள்ளிகளில்) அத்தாயக்காய் விழும் என்றும், உதைபந்தாட்டப் போட்டியில் ஒரு கோஷ்டி வெற்றி பெறுவதற்கான சந்தர்ப்பம், ஒரு மனிதன் மேலும் எத்தனை வருடங்கள் உயிர் வாழலாம் என்பதற்குரிய வாய்ப்பு, நாளை மழை பெய்வதற்கான சாத்தியம், ...போன்ற வற்றை எதிர்வு கூறமுடியாது. மேலே தந்த எல்லா வகைகளி லும் நாம் எதிர்கால நிகழ்ச்சிகளையே கவனத்திற் கொண்டோம். அத்துடன் அவ்விளைவுகள் நிச்சயமற்ற தன்மையையும் கொண்ட னவாகக் காணப்படுகின்றன. அவற்றிற்கான தீர்வினை எவ்வாறு கணிப்பது என்பதனைக் கீழே ஆராய்வோம். எனினும் சில வேளை களில் மேற்படி சந்தர்ப்பங்களிற் பின்வரும் பரும்படியான முடிபு கள் எடுக்கப்படுகின்றன. "அநேகமாக நாளை மழை பெய்யலாம்", "குறிப்பிட்ட ஒரு மனிதன் 100 வருடங்கள் வரை உயிர் வாழ் வதற்கு சிறிய வாய்ப்புண்டு", "போட்டியில் வெற்றி பெறுவதற்கு 50 : 50 சாத்தியங்கள் உண்டு" போன்ற சில எண்ணளவான முடி புகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

காப்புறுதி (Insurance) போன்ற பிரச்சனைகளிலேயே வாய்ப் புக் கோட்பாடு பற்றிய புள்ளியியல் ஒழுங்குகள் அதி செயன் முறை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகக் காணப்படுகின்றன. உதாரணமாக, தனிப்பட்ட ஒருவரின் ஆயுட்காலத்தை எதிர்வு கூறுதல் இயலாத காரியமாக இருக்கின்றபோதிலும் தனிப்பட்ட வர்களைக்கொண்ட பெரிய குடிகளின் ஆயுட்காலங்கள் பற்றித் திட்பமான கூற்றுகளை மேற்கொள்ள முடிகின்றது. கணிதரீதி யான நிகழ்தகவு பற்றிய ஆய்வில், என்ன நிபந்தனைகளின்கீழ் நிச்சயமற்ற நிகழ்ச்சிகள் பற்றிய திர்க்கமான, அர்த்தமுள்ள முடி புகள் எடுக்கப்படுகின்றன என்பதுபற்றி ஆராய்வோம்.

நிகழ்தகவிற்கான பழைய வரைவிலக்கணம்

வரைவிலக்கணம் 3.1

சமமாக நிகழக்கூடிய n நிகழ்ச்சிகளில், நிகழ்ச்சி A ஆனது s முறை நேர்ந்தால் A இன் நிகழ்தகவு,

$P(A) = p = s/n$ என வரையறுக்கப்படும்.

எனின் யாதுமொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு இரண்டு தெரியாக் கணியங்கள் காணப்படவேண்டும்.

(i) நடைபெறக்கூடிய மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை,

(ii) குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண் ணிக்கை.

உதாரணம் 3.1

தாயக்காயொன்று எறியப்படும்போது ஆறு இயல்தகு விளைவுகள் பெறப்படும். 1, 3, 5 என்னும் ஒற்றை எண்களை மூன்று வெவ்வேறு வழிகளிலே பெறலாம்.

எனவே, மேற்குறிப்பிட்ட பரிசோதனையின்போது ஒற்றை எண்ணிக்கை புள்ளிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$p = 3/6 = 1/2$ ஆகும்.

உதாரணம் 3.2

ஒரு நாணயம் மீண்டும் மீண்டும் 10 முறை சுண்டப்பட்ட போது 'தலை' நான்கு முறைகள் பெறப்பட்டதெனின், ஒரு 'தலை' பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(H) = 4/10$$

அதேபோல, $P(T) = 6/10$

குறிப்பு:

''ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டல்'', ''ஒரு தாயக்காயை எறிதல்'' முதலியவை பரிசோதனைகள் எனப்படும். இது வழமையாக $\mathcal{E}$ என்பதனாற் குறிக்கப்படும்.

இனி, நிகழ்தகவிற்கு மாதிரிவெளி மூலம் நவீன வரைவிலக்கணம் கூறுவோம். அதற்கு முன்பாக பின்வருவனவற்றை வரையறுப்போம்.

3.2: மாதிரிவெளி (SAMPLE SPACE)

வரைவிலக்கணம் 3.2

பரிசோதனையொன்றின் எல்லா இயல்தகு விளைவுகளின் தொடை அப்பரிசோதனையுடன் சேர்க்கப்படும் மாதிரிவெளி எனப்படும். இது வழமையாக S என்பதனாற் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 3.3

ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}_1$ ஆனது, ஒரு நாணயம் இரண்டுமுறை சுண்டப்பட்டுப்பின் அதன் தலை (H), பூ (T) தோன்றும் வரிசையை நோக்குதலைக் குறிப்பின், இங்கு 4 இயல்தகு விளைவுகள் பெறப்படும்.

அவையாவன, $(HH), (HT), (TH), (TT)$

எனவே மாதிரிவெளி $S = \{ (HH), (HT), (TH), (TT) \}$

உதாரணம் 3.4

ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}_2$ ஆனது, ஒரு தாயக்காய் எறிதலைக் குறிக்கின்றதென்க. அதன் மேல் நோக்கிய முகத்திலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை நோக்கின், 6 இயல்தகு விளைவுகள் பெறப்படும்.

அவையாவன: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகும்.

எனவே பரிசோதனை $\mathcal{E}_2$ இன் மாதிரிவெளி,

$$S = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$$

உதாரணம் 3.5

ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}_3$ ஆனது இரு தாயக்காய்களை எறிந்து ஒவ்வொன்றின் மேல்முகத்திலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையை நோக்குதலைக் குறிப்பின், அதன் மாதிரிவெளி,

$$S = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

இது 36 மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

இரண்டினதும் மேல்முகத்திற் பெறப்படும் எண்ணிக்கையின் கூட்டுத்தொகையை எடுப்போமாகில், மாதிரிவெளி S ஆனது,

$S = \left\{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \right\}$ என்னும் 11 மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

உதாரணம் 3.6

ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}_4$ ஆனது 5 செங்குண்டுகளையும் 3 வெண் குண்டுகளையும் கொண்டுள்ள ஒரு பெட்டியிலிருந்து, ஒரு குண்டு எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறத்தை நோக்குதலைக் குறிப்பின் அதன் மாதிரிவெளி S ஆனது 8 மூலகங்களைக் கொண்டிருக்

கும். R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 என்பன 5 செங்குண்டுகளையும் W_1, W_2, W_3 என்பன 3 வெண்குண்டுகளையும் குறிப்பின், இயல்தகு விளைவுகள் $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, W_1, W_2, W_3$ ஆகும்.

எனவே, $S = \left\{ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, W_1, W_2, W_3 \right\}$

குறிப்பு:

e என்பது எடுக்கப்படும் குண்டு செந்நிறம் என்னும் விளைவையும்

f என்பது எடுக்கப்படும் குண்டு வெண்நிறம் என்னும் விளைவையும் குறிப்பின்,

மாதிரிவெளி $S = \left\{ e, f \right\}$ என எழுதுவது தவருகும்.

உதாரணம் 3.7

ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}_5$ ஆனது 3 கருங்குண்டுகளையும், 2 வெண் குண்டுகளையும் கொண்ட பெட்டியொன்றிலிருந்து இரண்டு குண்டுகள் ஒவ்வொன்றும் எழுமாருக எடுக்கப்பட்டு அவற்றின் நிறங்கள் குறிக்கப்படுதலைக் குறிக்கின்றதென்க. இங்கு 5 குண்டுகளும் வெவ்வேருனவை எனக் கொள்ளப்படும்.

வகை (1)

குண்டுகள் பிரதிவைப்பில்லாமல் (*Without Replacement*) ஒவ்வொன்ருக எடுக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்க.

3 கருங்குண்டுகளை B_1, B_2, B_3 என்பதனுலும் 2 வெண்குண்டுகளை W_1, W_2 என்பதனுலும் குறிக்க.

எனின் மாதிரிவெளி,

$$S = \left\{ \begin{array}{llll} (W_1, W_2) & (W_1, B_1) & (W_1, B_2) & (W_1, B_3) \\ (W_2, W_1) & (W_2, B_1) & (W_2, B_2) & (W_2, B_3) \\ (B_1, W_1) & (B_1, W_2) & (B_1, B_2) & (B_1, B_3) \\ (B_2, W_1) & (B_2, W_2) & (B_2, B_1) & (B_2, B_3) \\ (B_3, W_1) & (B_3, W_2) & (B_3, B_1) & (B_3, B_2) \end{array} \right\}$$

இது 20 இயல்தகு விளைவுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

வகை (2)

குண்டுகள் பிரதிவைப்புடன் (*With Replacement*) ஒவ்வொன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன எனக்கொண்டால் மேலே தந்த **20** இயல்தகு விளைவுகளுடன் (B_1, B_1) (B_2, B_2) (B_3, B_3) (W_1, W_1) (W_2, W_2) என்னும் ஐந்து விளைவுகளுமாக, 25 இயல்தகு விளைவுகள் பெறப்படும்.

மாதிரிப்புள்ளி (*Sample Point*)

வரைவிலக்கணம் 3.3

மாதிரிவெளியிலுள்ள ஒரு மூலகம் மாதிரிப்புள்ளி அல்லது மாதிரி எனப்படும்.

நிகழ்ச்சி (*Event*)

வரைவிலக்கணம் 3.4

ஒரு மாதிரிவெளியின் தொடைப்பிரிவு ஒன்று ஒரு நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

உதாரணம் 3.3இலே, $\{(HH)\ (HT)\}$, $\{(HH)\ (TH)\ (TT)\}$ என்பன நிகழ்ச்சிகளாகும்.

ஆரம்ப நிகழ்ச்சி (*Elementary Event*)

வரைவிலக்கணம் 3.5

ஒரே மாதிரிவெளியின் மூலகம் ஒன்றை மாத்திரம் கொண்டுள்ள நிகழ்ச்சி ஆரம்ப நிகழ்ச்சி அல்லது ஒன்றி நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

உதாரணம் 3.3 இலே, $\{(HH)\}$, $\{(TT)\}$,......... போன்றவை ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாகும்.

குறிப்பு:

விளைவு, முடிவு, ஆரம்ப நிகழ்ச்சி, எளிய நிகழ்ச்சி, மாதிரிப்புள்ளி என்பவை ஒரே கருத்தை உடையன.

இயலா நிகழ்ச்சியும் திட நிகழ்ச்சியும்
(Impossible Event And Sure Event)

வரைவிலக்கணம் 3.6

S என்பது ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}$ இன் மாதிரிவெளி என்க. எனின், S, ϕ என்பன Sஇன் தொடைப்பிரிவுகளாதலால் அவை நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இங்கு ϕ என்பது இயலா நிகழ்ச்சி எனவும், S என்பது திட நிகழ்ச்சி எனவும் வரையறுக்கப்படும். அதாவது, பெறமுடியாத ஒரு நிகழ்ச்சி அல்லது விபரமில்லாத ஒரு நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

உதாரணமாக, ஒரு தாயக்காயை எறியும்போது '7' பெறப் படுவது இயலா நிகழ்ச்சியாகும்.

இங்கு 1, 2, 3, 4, 5, அல்லது 6 பெறப்படுவது திட நிகழ்ச்சியாகும்.

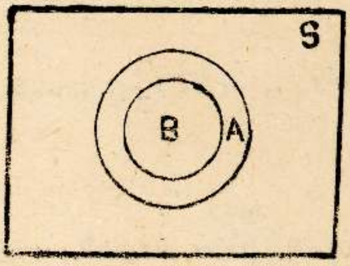
நிகழ்ச்சிகளின் சமம் *(Equality of Events)*

வரைவிலக்கணம் 3.7

A, B என்பன ஒரு மாதிரிவெளி Sஇலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிக ளென்க. A, B என்பவை ஒரே விளைவினைக் கொண்டிருந்தால் மட்டுமே அவை சமமான நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

நிகழ்ச்சிகளின் உள்ளடக்கம் *(Inclusion of Events)*

வரைவிலக்கணம் 3.8

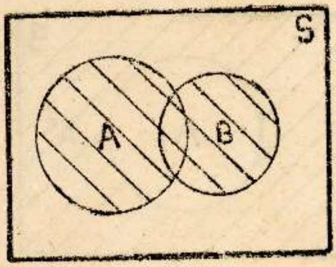


A, B என்பன ஒரு மாதிரிவெளி Sஇலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. நிகழ்ச்சி B யிலுள்ள ஒவ்வொரு விளைவும், நிகழ்ச்சி A யினைச் சார்ந்திருந்தால் மட்டுமே நிகழ்ச்சி A ஆனது நிகழ்ச்சி Bயினை உள்ளடக்கியது எனப்பட்டு, $A \supseteq B$ என்பதாலே குறிக்கப்படும்.

நிகழ்ச்சிகளின் ஒன்றிப்பு (*Union of Events*)

வரைவிலக்கணம் 3.9

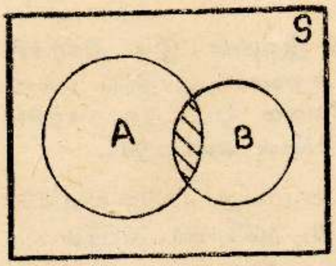
A, B என்பன ஒருமாதிரி வெளி S இலுள்ள எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளென்க. எனின் A இலுள்ள அல்லது B இலுள்ள அல்லது A, B ஆகியவை இரண்டிலுமுள்ள எல்லா மாதிரிப்புள்ளிகளையும் கொண்ட நிகழ்ச்சி, A, B என்னும் நிகழ்ச்சிகளின் ஒன்றிப்பு எனப்படும் இவ்வொன்றிப்பு $A \cup B$ என்பதாலேகுறிக்கப்படும்.



குறிப்பு: (i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cup S = S$ $A \cup \phi = A$

நிகழ்ச்சிகளின் இடைவெட்டு (*Intersection of Events*)

வரைவிலக்கணம் 3.10



A, B என்பன ஒருமாதிரி வெளி Sஇலுள்ள எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. எனில் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொதுவான எல்லா மாதிரிப் புள்ளிகளின் திரள் இவற்றின் இடைவெட்டு எனப்படும்.

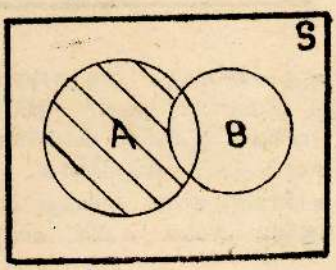
இவ்விடைவெட்டு $A \cap B$ என்பதாலே குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு: (i) $A \cap A = A$ (ii) $A \cap S = A$ (iii) $A \cap \phi = \phi$

நிகழ்ச்சிகளின் வித்தியாசம் (*Difference of Events*)

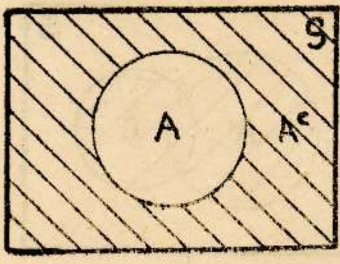
வரைவிலக்கணம் 3.11

A, B என்பன ஒருமாதிரிவெளி Sஇலுள்ள எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளென்க. எனின் வித்தியாசம் $A - B$ ஆனது, B இலே கிடவாதனவும் ஆனால் Aஇலே கிடக்கின்றனவுமான மாதிரிப்புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ள தொடை எனப்படும்.



நிரப்பு நிகழ்ச்சி (*Complementary Event*)

வரைவிலக்கணம் 3.12



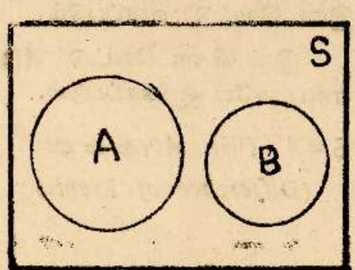
A என்பது ஒரு மாதிரி வெளி S இலுள்ள யாதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி என்க. எனின், A ஐச் சேராத S இலுள்ள எல்லா மாதிரிப்புள்ளிகளின் திரள் A இன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி அல்லது A இன் நிரப்பி எனப் படும். இந்நிரப்பி A^c அல்லது $\overline{A}$ என்பதாலே குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு: (i) $\overline{S} = \Phi$, (ii) $S \cap \overline{A} = S - A = \overline{A}$

மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகள் அல்லது தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (*Disjoint Events or Mutually Exclusive Events*)

வரைவிலக்கணம் 3.13

A, B என்பன ஒருமாதிரிவெளி S இலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. A இற்கும் B இற்கும் பொதுவான மாதிரிப் புள்ளிகள் யாதுமில்லை எனின் A, B ஆகியவை மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகள் அல்லது தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.



அதாவது, $A \cap B = \Phi$ எனின் A, B ஆகியவை தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். அதாவது, இரு நிகழ்ச்சிகளில் ஏதாவது ஒன்று நிகழும்போது மற்றைய நிகழ்ச்சி நிகழாவண்ணம் தடைப்படுமானல் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ விழலாம். ஆனல் ஒரே நேரத்தில் இரண்டும் விழமுடியாது. எனவே, இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். அதேபோல, ஒரு மனிதன் குறிப்பிட்ட காலம்வரை உயிர்வாழலாம் அல்லது அதற்கு முன்பாகவே இறந்து விடலாம். ஆனல் அவன் உயிர் வாழ்ந்துகொண்டு இறக்கவும் முடியாதா

கையால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் மூட்டற்றவை. மேலும் ஒரு தாயக்காயை எறியும்போது 6 முகங்களில் ஏதாவது ஒரு முகம் மேல் தோன்றியதாய் விழலாம். ஆனல் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட முகங்கள் ஒரே நேரத்தில் மேல் நோக்கி விழமுடியாததாகையால் இங்கு 6 மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகள் காணப்படுகின்றன.

நிகழ்ச்சிகளின் அட்சரகணித விதிகள்

விதிகள்	ஒன்றிப்பு	இடைவெட்டு
1. பரிவர்த்தனை விதி	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
2. சேர்த்தி விதி	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3. அதேவலு விதி	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
4. சர்வசமன்பாட்டு விதி	$A\cup\Phi=A, A\cup S=S$	$A\cap\Phi=\Phi, A\cap S=A$
5. தமோகன் விதி	$\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$	$\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$
6. நிரப்பி விதி	$A\cup\bar{A}=S, (\bar{\bar{A}})=A$	$A\cap\bar{A}=\Phi$
7. உள்ளடக்கிய விதி	$A\subseteq(A\cup B), B\subseteq(A\cup B)$	$(A\cap B)\subseteq A, (A\cap B)\subseteq B$
8. பரம்பல் விதி	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

இங்கு A, B, C என்பன ஒரு மாதிரிவெளி S இலுள்ள எவையேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளாகும்.

குறிப்புரை:

(1) தமோகன் விதியானது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிக்கப்படலாம்.

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்பன S இலுள்ள எவையேனும் n நிகழ்ச்சிகள் என்க. எனின்,

$$\overline{(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_n)}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\ldots\cup\bar{A}_n$$

அதேபோல,

$$\overline{(A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n)}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\ldots\cap\bar{A}_n$$

(2) பரம்பல் விதியும் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கு விரிக்கப்படலாம்.

$A, A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்பன S இலுள்ள எவையேனும் $n+1$ நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$A\cup(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_n)=(A\cup A_1)\cap(A\cup A_2)\cap\ldots\ldots\cap(A\cup A_n)$$

அதேபோல,

$$A\cap(A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n)=(A\cap A_1)\cup(A\cap A_2)\cup\ldots\ldots\cup(A\cap A_n)$$

(3) $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ என்பன மாதிரிவெளி S இலுள்ள நிகழ்ச்சிகளின் முடிவுள்ள சேகரிப்பு எனின்,

$(A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\ldots\cup A_n)$ உம் $(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\ldots\cap A_n)$ உம் அதே மாதிரிவெளியைச் சேர்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இங்கு, $(A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\ldots\cup A_n)$ என்பது, A_i ; $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ என்பவற்றிலுள்ள யாதாயினும் ஒரு நிகழ்ச்சி நேர்ந்தால் நேரும்.

ஆனல், $(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\ldots\cap A_n)$ என்பது, A_i ; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்பவற்றிலுள்ள எல்லா நிகழ்ச்சிகளும் நேர்ந்தால் மட்டுமே நேரும்.

முடிவுள்ள மாதிரிவெளிகளும் முடிவில் மாதிரிவெளிகளும்
(*Finite and Infinite Sample Spaces*)

வரைவிலக்கணம் 3.14

ஒரு மாதிரிவெளியானது முடிவுள்ள மாதிரிப் புள்ளிகளைக் கொண்டிருப்பின் அது முடிவுள்ள மாதிரிவெளி எனவும், அல்லாவிடில் அது முடிவில் மாதிரிவெளி எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

பின்னக மாதிரிவெளிகளும் தொடர் மாதிரிவெளிகளும்
(*Discrete and Continuous Sample Spaces*)

வரைவிலக்கணம் 3.15

ஒரு மாதிரிவெளியிலுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகள் எண்ணத்தகுவனவெனின் (*Countable*) அது பின்னக மாதிரிவெளி எனவும், அல்லாவிடில் அது தொடர் மாதிரிவெளி எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

குறிப்பு:

(*i*) மேற்றந்த உதாரணங்களில் நாம் எடுத்துக்கொண்டவையெல்லாம் முடிவுள்ள பின்னக (எண்ணத்தக்கவை) மாதிரிவெளிகளே ஆகும்.

(ii) 'ஒரு நேர் முழுவெண்ணை தேருதல்' தரும் மாதிரிவெளி முடிவற்ற பின்னக மாதிரிவெளியாகும்.

(iii) 'பஸ் தங்குமிடத்தில் பஸ்ஸிற்காக ஒருவன் காத்து நிற்பது' தரும் மாதிரிவெளி தொடர் மாதிரிவெளியாகும்.

குறிப்பு:

எந்தவொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவும் நேரானதாகவும், எல்லா நிகழ்தகவுகளினதும் கூட்டுத்தொகை எப்பொழுதும் ஒன்றாகவும் காணப்படும்.

3.3: சமமாய் நேரக்கூடிய ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் (EQUALLY LIKELY ELEMENTARY EVENTS)

ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நேரக்கூடிய சாத்தியக் கூறுகள் உண்டென்றால் அவ்வாரம்ப நிகழ்ச்சிகள் சமமாய் நேரக் கூடியன என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

எல்லா ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளும் சமமாய் நேரக்கூடியனவென்று எண்ணுவதற்குக் காரணங்கள் உண்டென்றால் அவ் ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரே நிகழ்தகவை வழங்குவோம். இவ்வாறான நிகழ்தகவு வழங்கல் இயற்கை நிகழ்தகவு வழங்கல் எனப்படும். எனவே, ஒரு மாதிரிவெளி n ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டிருந்தால், இயற்கை நிகழ்தகவு வழங்கலிலே ஒவ்வொரு ஆரம்ப நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $=1/n$ ஆகும்.

சமமாய் நேரக்கூடிய ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளுக்கு உதாரணங்கள்

1. ஒரு கோடலற்ற நாணயம் சுண்டப்படும்போது சமமாய் நேரக்கூடிய இரு ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் பெறப்படும். ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவு $1/2$ ஆகும்.

2. ஒரு கோடலற்ற தாயக்காய் எறியப்படும்போது சமமாய் நேரக்கூடிய ஆறு ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் பெறப்படும். ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவு $1/6$ ஆகும்.

3. இரு கோடலற்ற தாயக்காய்கள் எறியப்படும்போது சமமாய் நேரக்கூடிய 36 ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் $((1,1), \ldots\ldots, (6,6))$ பெறப்படும். ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவு $1/36$ ஆகும்.

இயற்கை நிகழ்தகவு வழங்கலிலே ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

வரைவிலக்கணம் 3.16

ஒரு பரிசோதனையின் ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் சமமாய் நேரக் கூடியன எனின் மாதிரிவெளி S இலுள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி E இன் நிகழ்தகவு ஆனது, E இலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக் கைக்கு S இலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கையின் விகித மாகும்.

அதாவது, $P(E) = \dfrac{E \text{ இலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{S \text{ இலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}$

$$= \frac{N(E)}{N(S)}$$

குறிப்பு:

ஒரு பரிசோதனையின் விளைவுகள் (ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்) சம மாய் நேரக் கூடியனவோ அல்லவோ என்று எதிர்வு கூறமுடிய வில்லை எனின், இவ்வகை ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தக வைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

ஒரு பரிசோதனை மீண்டும் மீண்டும் N தரம் ஆற்றப்படுகின் றதென்க. இங்கு குறித்த ஓர் ஆரம்ப நிகழ்ச்சி E, Ne தரம் நேருகின்றதெனில், நிகழ்ச்சி Eஇற்கான நிகழ்தகவு, $= Ne/N$ ஆகும்.

உதாரணம் 3.8

ஒரு கோடலற்ற தாயக்காய் எறியப்படுகின்றதெனில், இரட்டை எண்ணிக்கைப் புள்ளிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தரப்பட்ட பரிசோதனைக்குரிய மாதிரிவெளி,

$$S = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$$

E என்பது 'இரட்டை எண்ணிக்கைப் புள்ளிகள் பெறும்' நிகழ்ச்சி என்க. அதாவது, $E = \left\{ 2, 4, 6 \right\}$. ஆனால் S ஆனது சமமாய் நேரக்கூடிய 6 ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது.

$\therefore P(E) = \dfrac{N(E)}{N(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

உதாரணம் 3.9

கோடலற்ற ஒரு நாணயம் இருதரம் சுண்டப்படுகின்றதெனக். எனின் (i) ஒரு தலை மாத்திரம் (ii) ஒரு தலையாவது, பெறப்படும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகள் என்ன?

தரப்பட்ட பரிசோதனைக்குரிய மாதிரிவெளி,

$$S = \{(HH), (HT), (TH), (TT)\}$$

S ஆனது சமமாய் நேரக்கூடிய 4 ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது.

(i) E_1 என்பது ஒரு தலை மாத்திரம் பெறப்படும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கின்றதெனக. எனின்,

$$E_1 = \{(HT), (TH)\}$$

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{N(E_1)}{N(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(ii) E_2 என்பது ஒரு தலையாவது பெறப்படும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கின்றதெனக. எனின், $E_2 = \{(HH), (HT), (TH)\}$

$$\therefore \quad P(E_2) = \frac{N(E_2)}{N(S)} = \frac{3}{4}$$

குறிப்பு:

உதாரணம் 3.9இலே, பெறப்படும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை மாதிரிவெளி கொண்டிருப்பின், $S = \{0, 1, 2\}$. இங்கு S ஆனது சமமாய் நேரமுடியாத மூன்று ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, ஒரு தலை பெறப்படுவதற்குரிய நிகழ்தகவு 1/3 என எழுதுவது தவறாகும்.

உதாரணம் 3.10

கோடலற்ற இரு தாயக்காய்களைக் கொண்டு '7' எறிவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

E என்பது இரு தாயக்காய்களைக் கொண்டு 7 எறியப்படும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கின்றதெனக.

ஆனுல், மாதிரிவெளி $S = \{ (1,1),(1,2) \ldots\ldots (6,5),(6,6) \}$

இங்கு S ஆனது சமமாய் நேரக்கூடிய 36 ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது.

ஆனுல் நிகழ்ச்சி $E = \{ (1,6),(2,5),(3,4),(5,2),(6,1) \}$

$$\therefore \quad P(E) = \frac{N(E)}{N(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

வரைவிலக்கணம் 3.16 ஆனது, மாதிரிவெளியிலுள்ள ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் சமமாய் நேரக்கூடியன என்னும் எடுகோள் திருப்தி செய்யப்படின் மட்டுமே பொருத்தமானதாகும். பெரும்பாலான பரிசோதனைகளில், ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் சமமாய் நேரக்கூடியன வல்லாதவையாகக் காணப்படுகின்றன. எனவே, நிகழ்ச்சியொன்றிற்கான நிகழ்தகவினைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

நிகழ்தகவு (*Probability*)

வரைவிலக்கணம் 3.17

S என்பது ஒரு பரிசோதனை $\mathcal{E}$ உடன் சேர்ந்த மாதிரிவெளி என்க. S இலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A இற்கும் பின்வரும் வெளிப்படை உண்மைகளை திருப்தி செய்யுமாறு ஒரு எண் $P(A)$ வழங்கப்படுமாஞல், அவ்வெண் Aயின் நிகழ்தகவு எனப்படும்.

வெளிப்படை உண்மைகள்:

(1) S இலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A இற்கும் $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) A, B என்பன S இலுள்ள தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளெனின் $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(4) $A_1, A_2, \ldots\ldots$ என்பன S இலுள்ள தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் தொடரிகளெனின்,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots$$

குறிப்பு:

வெளிப்படை உண்மை (4)ஐப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பொதுவான முடிபை நாம் நிறுவலாம். அதாவது, ஏதாவது முடிவுள்ள n இற்கு, $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)$

3.4: நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு பற்றிய தேற்றங்கள்

தேற்றம் 3.1

Φ என்பது இயலா நிகழ்ச்சியாயின்,

$P(\Phi)=0$

நிறுவல்:

A என்பது Sஇலுள்ள யாதுமொரு நிகழ்ச்சியென்க. எனின் $A\cap\Phi=\Phi$ அதாவது A உம் Φ உம் மூட்டற்றவையாகும்.

அத்துடன், $A\cup\Phi=A$

இதிலிருந்து $P(A\cup\Phi)=P(A)$

ஆனல் வெ.உ. (3) ஆல், $P(A\cup\Phi)=P(A)+P(\Phi)$

$$\therefore \quad P(A)+P(\Phi)=P(A)$$

$$\Longrightarrow P(\Phi)=0$$

குறிப்பு:

இத்தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையன்று. அதாவது, $P(A)=0$ எனின், $A=\Phi$ என்னும் முடிபு பொதுவாக எடுக்கப் பட முடியாது. ஏனெனில், சில நிலைமைகளில் நேரக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் சிலவற்றிற்கும் நாம் பூச்சிய நிகழ்தகவை வழங்குகின்றோம்.

தேற்றம் 3.2

$\bar{A}$ என்பது Aயின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியெனில்,

$P(\bar{A})=1-P(A)$

நிறுவல்:

A, $\bar{A}$ என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். நிரப்பி விதியால் $A\cap\bar{A}=\Phi$. அதாவது, $A,\bar{A}$ என்பன மூட்டற்றவையாகும். அத்துடன், $A\cup\bar{A}=S$

$$\therefore P(A\cup\bar{A})=P(S)=1 \text{ (வெ.உ.(2)ஆல்)}$$

ஆனல் வெ.உ.(3)ஆல், $P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$

$$\therefore P(A)+P(\bar{A})=1$$

$$\Longrightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$$

குறிப்பு:

ஒரு நிகழ்ச்சி நேருவதற்கான நிகழ்தகவு p எனின் அந் நிகழ்ச்சி நேராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $1-p$ ஆகும்.

உதாரணம் 3.11

ஒரு பெட்டியிலே 6 செம்பந்துகள், 5 வெண்பந்துகள், 4 கரும் பந்துகள் உள்ளன. அப்பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாறுக எடுக்கப்படுகின்றதெனில் எடுக்கப்பட்ட பந்து செம்பந்தல்லாம லிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

எடுக்கப்பட்ட பந்து செம்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(R) = \frac{N(R)}{N(S)} = \frac{6}{6+5+4} = \frac{6}{15}$$

$$= \frac{2}{5}$$

எனின் எடுக்கப்பட்ட பந்து செம்பந்தல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 2/5$$

$$= 3/5$$

உதாரணம் 3.12

குறிப்பிட்ட ஒரு நகரத்தின் பொலீஸ் பிரிவு வெளியிட்ட தகவல்களிலிருந்து பின்வரும் புள்ளிவிபரங்கள் பெறப்பட்டன. சென்ற ஆண்டிலே காணாமற்போன மோட்டார் வாகனங்களில் 9 வீதமானவை 10 அல்லது கூடிய வருட முதிர்ச்சியையும், 11 வீதமானவை 5—9 வருட முதிர்ச்சியையும், 15 வீதமானவை 3—4 வருட முதிர்ச்சியையும், 20 வீதமானவை 2 வருட முதிர்ச்சியையும், 20 வீதமானவை ஒரு வருட முதிர்ச்சியையும், 25 வீதமானவை ஒன்றிலும் குறைந்த வருட முதிர்ச்சியையும் கொண்டுள்ளன. அதிகாரி ஒருவரிடம் வாகனமொன்று காணாமற்போய்விட்டது என அறிவிக்கும்போது அவர், அது ஒரு வருடத்திலும் குறைந்த முதிர்ச்சியுடையதாக இருக்கலாம் எனக் கூறுகின்றார். எனின், அவரின் கூற்று பிழையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

$E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_6$ என்பன முறையே காணாமற்போன வாகனங்கள் 10 அல்லது கூடிய வருட முதிர்ச்சியை, (5—9) வருட முதிர்ச்சியை, ..., ஒரு வருடத்திலும் குறைந்த முதிர்ச்சியைக் கொண்ட நிகழ்ச்சிகளைக் குறிக்கின்றன எனக.

முன்னைய வாகனத் திருட்டுகளை ஏற்படுத்திய சூழ்நிலைகள் தற்பொழுதும் மாறவில்லை என்ற எடுகோளின் அடிப்படையில் இங்கு தரப்பட்ட புள்ளிவிபரங்களை நாம் நிகழ்தகவுகளாகப் பயன் படுத்தலாம்.

அதாவது, $P(E_1) = 0.09$, $P(E_2) = 0.11, \ldots\ldots, P(E_6) = 0.25$ மேலுள்ள எடுகோளின்கீழ், அதிகாரியின் கூற்று சரியாக இருப்ப தற்குரிய நிகழ்தகவு,

$P(E_6) = 0.25$. ஏனெனில், E_6 நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்தால் மட்டுமே கூற்று சரியானதாகும்.

எனவே, நிகழ்ச்சி E_6 நிகழாவிட்டால், அதாவது, $\overline{E}_6$ நேர்ந் தால் கூற்று பிழையானதாகும்.

ஆகவே கூற்று பிழையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(\overline{E_6}) = 1 - P(E_6) = 1 - 0.25$$
$$= 0.75$$

தேற்றம் 3.3

A, B என்பன எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

நிறுவல்:

முதலில் $(A \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$ என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளையும் ஆராய் வோம். இவற்றின் இடைவெட்டை நோக்கின்,

$$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cap (\overline{B} \cap A) \quad ; \text{ பரிவர்த்தனை விதியால்,}$$
$$= A \cap (B \cap \overline{B}) \cap A \quad ; \text{ சேர்க்கை விதியால்,}$$
$$= A \cap (\phi \cap A)$$
$$= A \cap \phi$$
$$= \phi$$

எனவே $(A \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$ என்பவை மூட்டற்றவை. இவற்றின் ஒன்றிப்பை நோக்கின்,

$$(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}) = A\cap(B\cup \overline{B})$$; பரம்பல் விதியால்,

$$= A\cap S$$
$$= A$$

$$P[(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})] = P(A)$$

ஆனல் வெ. உ. (3) ஆல்,

$$P(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B})$$
$$\therefore \quad P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B})$$

அதுபோல், $P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$ என நாம் நிறுவலாம்.

தேற்றம் 3.4

A, B என்பன எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

நிறுவல்:

A, $(\overline{A}\cap B)$ என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளையும் ஆராய்வோம்.

$$A\cap(\overline{A}\cap B) = (A\cap \overline{A})\cap B$$
$$= \phi\cap B$$
$$= \phi$$

அத்துடன்,

$$A\cup(\overline{A}\cap B) = (A\cup \overline{A})\cap(A\cup B)$$
$$= S\cap(A\cup B)$$
$$= (A\cup B)$$

எனின், $P(A\cup(\overline{A}\cap B)) = P(A\cup B)$

ஆனல் வெ.உ (3) ஆல்,

$$P(A\cup(\overline{A}\cap B)) = P(A)+P(\overline{A}\cap B)$$
$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$; தேற்றம் 3.3 ஆல்

$$\therefore \quad P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

குறிப்பு:

$A\cap B = \phi$ எனின் இத் தேற்றம் 3.4, வெ.உ (3) இற்கு ஒடுங்கும். ஏனெனில், $P(A\cap B) = P(\phi) = 0$

ஆகவே, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$

தேற்றம் 3.5

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$$

நிறுவல்:

$(A\cup B\cup C)$ என்பதனை $(A\cup B)\cup C$ எனக் கொள்க.

எனின், $P(A\cup B\cup C) = P((A\cup B)\cup C)$

$$= P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C)$$

தேற்றம் 3.4 ஆல்

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P((A\cap C)\cup(B\cap C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P((A\cap C)\cap(B\cap C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$$

குறிப்பு:

மேலுள்ள தேற்றம் 3.5, மூன்றிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிக்கப்படலாம்.

$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_n$ என்பன எவையேனும் n நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cup A_j) - \sum_{i<j<k=3}^{n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) + \ldots\ldots (-1)^{n-1} P(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_n)$$

இம்முடிபைக் கணிதத் தொகுத்தறிமுறை மூலம் இலகுவாக நிரூபித்தல் முடியும்.

உதாரணம் 3.13

நுகர்வோன் ஒருவன் குறிப்பிட்ட A, B என்னும் பண்டங்களை முறையே 0.5, 0.2 என்ற நிகழ்தகவுகளுடன் கொள்வனவு செய்கின்றான். அத்துடன் சில வேளைகளில் A ஐயும் B ஐயும் ஒரே நேரத்தில் 0.1 என்ற நிகழ்தகவுடன் கொள்வனவு செய்வானெனின் அவன் A அல்லது B ஐக் கொள்வனவு செய்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இங்கு நுகர்வோன் பண்டம் *A* ஐயும் *B* ஐயும் கொள்வனவு செய்வதுடன் சில சமயங்களில் *A* ஐயும் *B* ஐயும் ஒரே நேரத்திற் கொள்வனவு செய்வதால், இவை மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகளல்ல.

எனவே $P(A$ அல்லது $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.5 + 0.2 - 0.1$$
$$= 0.6$$

உதாரணம் 3.14

60 பேர் கொண்ட குழுவொன்றிடம், 'டெயிலி நியூஸ்' (**The Daily News**) 'டெயிலி மிரர்' (**The Daily Mirror**) 'சன்' (**The Sun**) என்ற பத்திரிகைகள் வாசிக்கின்றவர்களா எனக் கேட்கப்பட்டது. பெற்ற விடைகளைப் பின்வரும் அட்டவணை தருகின்றது:

DN	DM	S	DN & DM	DN & S	DM & S	மூன்று பத்திரிகைகளும்
31	23	27	11	13	9	5

இக்குழுவிலிருந்து எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒருவரது பின்வரும் வாசிப்புக்குரிய நிகழ்தகவுகள் என்ன?

(i) 'டெயிலி நியூஸ்' அல்லது 'சன்'

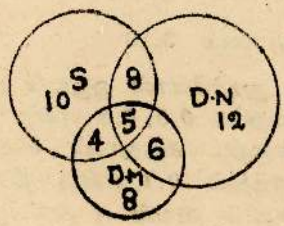
(ii) பத்திரிகைகளில் ஆகக் குறைந்தது ஒன்றுவது,

(iii) பத்திரிகைகளுள் ஏதாவது ஒன்றுமில்லை,

(iv) மூன்று பத்திரிகைகளுள் ஒன்று மட்டும்.

(i) தெரிவு செய்யப்பட்டவர் டெயிலி நியூஸ் அல்லது சன் வாசிப்பவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(DN \cup S) = P(DN) + P(S) - P(DN \cap S)$$
$$= 31/60 + 27/60 - 13/60$$
$$= 3/4$$



(ii) தெரிவு செய்யப்பட்டவர் ஆகக்குறைந்தது ஒரு பத்திரிகை யாவது வாசிப்பவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$\begin{aligned} P(DN\cup DM\cup S) &= P(DN)+P(DM)+P(S)-P(DN\cap DM)- \\ &\quad P(DN\cap S)-P(DM\cap S)+P(DN\cap DM\cap S) \\ &= (31+23+27-11-13-9+5)/60 \\ &= 53/60 \end{aligned}$$

(iii) தெரிவு செய்யப்பட்டவர் ஒரு பத்திரிகைகளும் வாசிப்பவராக இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$\begin{aligned} P(\overline{DN\cup DM\cup S}) &= 1-P(DN\cup DM\cup S) \\ &= 1-53/60 \\ &= 7/60 \end{aligned}$$

(iv) மேலுள்ள வென்னணின் படத்திலிருந்து தனித்தனியே DN, DM, S பத்திரிகைகளை மட்டும் வாசிப்போரது எண்ணிக்கைகள் முறையே 12, 8, 10 ஆகும்.

எனவே, கேட்கப்பட்ட நிகழ்தகவு $= \dfrac{12+8+10}{60}$

$= 1/2$

நிகழ்தகவிற்கான கூட்டல் விதி

தம்முள் புறநீக்கும் அல்லது ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மை பெற்ற நிகழ்ச்சிகள் எல்லாவற்றையும் ஆராயும்போது அந்நிகழ்ச்சிகளுக்குள் ஏதாவது ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு, நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும்.

A, B என்பன ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. எனின்,

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

அதுபோல A, B, C, என்பன சோடியாய் (*Pairwise*) தம்முள் புறநீக்குவனவெனின் (பொதுவான விளைவுகள் இல்லையெனின்),

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)$$

அதுபோல $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னும் நிகழ்ச்சிப் பிரிவில் எந்த இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொதுவான விளைவு இல்லையாயின்,

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

உதாரணம் 3.15

நன்ருகக் குலுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து (Packet of Cards) ஒரு சீட்டு எழுமாருய் எடுக்கப்படின், அது இராசா அல்லது இராணி ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

ஒரு சீட்டுக்கட்டிலுள்ள மொத்த சீட்டுக்களின் எண்ணிக்கை 52. அவற்றுள் 4 இராசாக்களும் 4 இராணிகளும் உண்டென்பதால், எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு இராசாவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 4/52 = 1/13$

அதுபோல, எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு இராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 4/52 = 1/13$

எனவே, எடுக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டு இராசா அல்லது இராணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1/13 + 1/13$

$$= 2/13$$

தேற்றம் 3.6

ஒரு நிகழ்ச்சி A ஆனது, ஒரு நிகழ்ச்சி B யின் நிகழ்ச்சிப் பிரிவாயின், அதாவது, $A \subseteq B$ எனில், $P(A) \leq P(B)$.

நிறுவல்:

தேற்றம் 3.3 ஆல், $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ ஆகும்.

ஆனல், $A \subseteq B$ என்பதால் $A \cap B = A$

$$\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)$$

எனவே, $P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

$$\Longrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A)$$

அத்துடன் வெ. உ. (1) ஆல், $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$

$$\Longrightarrow P(B) - P(A) \geq 0$$

$$\Longrightarrow P(B) \geq P(A)$$

இணைத்தேற்றம்:

(i) $P(A \cap B) \leq P(A)$, (ஏனெனில் $(A \cap B) \subseteq A$)

(ii) $P(A \cap B) \leq P(B)$, (ஏனெனில் $(A \cap B) \subseteq B$)

3.5: நிபந்தனை நிகழ்தகவு (CONDITIONAL PROBABILITY)

திரட்டொன்றிலிருந்து ஓர் அலகு எழுமாறாகப் பிரதிவைப்புடனும், பிரதி வைப்பில்லாமலும் எடுக்கப்படும்போது அவற்றிற்கிடையே காணப்படும் வித்தியாசங்களைக் கவனத்திற் கொள்வோம். உதாரணமாக, பெட்டியொன்றிலுள்ள 100 பொருட்களுள் 20 பழுதடைந்தவையாயும் மிகுதி பழுதடையாதவையாயும் காணப்படுகின்றன. எனின் அப்பெட்டியிலிருந்து இரு அலகுகள் (அ) பிரதிவைப்புடன் (ஆ) பிரதிவைப்பில்லாமல் எடுக்கப்படுகின்றதெனக. இங்கு நாம் பின்வரும் இரு நிகழ்ச்சிகளையும் வரையறுப்போம்:

$$A = \{\text{முதலாம் அலகு பழுதடைந்தது}\}$$

$$B = \{\text{இரண்டாம் அலகு பழுதடைந்தது}\}$$

பொருட்கள் பிரதிவைப்புடன் எடுக்கப்படும்போது,

$$P(A) = P(B) = 20/100 = 1/5$$

ஏனெனில் செய்கையின் ஒவ்வொரு நிலையிலும் பெட்டியிலுள்ள 100 பொருட்களில் 20 பழுதடைந்தவையாகக் காணப்படுகின்றன. எனினும் பொருட்கள் பிரதிவைப்பில்லாமல் எடுக்கப்படின் முடிபை உடனடியாகப் பெறமுடியாது. இங்கும் முதலாம் அலகு பழுதடைந்ததாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1/5. ஆனால் இவ்வகையில் $P(B)$ ஐக் காண்பதற்கு, இரண்டாம் அலகு எடுக்கப்பட முன்பு பெட்டியிலுள்ள பொருட்களின் நிலை எமக்குத் தெரிதல் வேண்டும். அதாவது நிகழ்ச்சி A நேர்ந்துவிட்டதோ அல்லவோ எனத் தெரிதல் வேண்டும்.

இவ் உதாரணம் ஆனது, பின்வரும் முக்கியமான எண்ணக்கரு வரையறுக்கப்படவேண்டியதன் முக்கியத்துவத்தினை எடுத்துக் காட்டுகின்றது.

வரைவிலக்கணம் 3.18

A, B என்பன ஒரு மாதிரிவெளி S இலுள்ள எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க.

நிகழ்ச்சி A நேர்ந்துவிட்டதெனத் தரப்பட்ட, $P(A) > 0$ ஆயிருக்க, $P(B|A)$ என்பதனாற் குறிக்கப்படும் B இனது நிபந்தனை நிகழ்தகவு,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ என வரையறுக்கப்படும்.

குறிப்பு

$P(A) = 0$ எனின், நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(B \mid A)$ வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

குறித்த A ஒன்றிற்கு $P(B \mid A)$ ஆனது நிகழ்தகவினது பின்வரும் உடைமைகளைத் திருப்தி செய்யும்:

(i) $0 \leq P(B \mid A) \leq 1$,

(ii) $P(S \mid A) = 1$,

(iii) $P((B_1 \cup B_2) \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A)$,
இங்கு $B_1 \cap B_2 = \phi$

(iv) $P((B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ldots) \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) + \ldots\ldots\ldots$,
இங்கு $B_i \cap B_j = \phi$; எல்லா $i \neq j$ இற்கும்.

குறிப்பு:

(i) $A = S$ எனின், $P(B \mid S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$

(ii) S இலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி B இற்கும் $P(B)$ (B இன் நிபந்தனையற்ற நிகழ்தகவு), $P(B \mid A)$ (நிகழ்ச்சி A நேர்ந்துவிட்டதெனத் தரப்பட்ட B யின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு), என்னுமிரு எண்களைச் சேர்த்துக்கொள்ள முடியும். பொதுவாக இவ்விரண்டும் நிகழ்ச்சி B இற்கு வெவ்வேறு இரு நிகழ்தகவுகளையே வழங்குகின்றன.

தேற்றம் 3.7

மாதிரிவெளி S இலுள்ள A, B என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும்,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) = P(B \mid A).P(A)$$

நிறுவல்:

வரைவிலக்கணம் 3.18 ஆல்,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B \mid A).P(A)$$

ஆனால், $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

எனவே, $P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) = P(B \mid A).P(A)$

உதாரணம் 3.16

மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்திலே இரு அலகுகள் எழுமாறுகப் பிரதிவைப்பில்லாமல் எடுக்கப்படின் எடுக்கப்பட்ட இரண்டும் பழுதடைந்ததாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

A, B என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$A = \{\text{முதலாம் அலகு பழுதடைந்தது}\}$$

$$B = \{\text{இரண்டாம் அலகு பழுதடைந்தது}\}$$

எனவே எமக்கு வேண்டியது $P(A \cap B)$ ஆகும்.

மேலுள்ள (3.7) தேற்றத்தால்,

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

ஆனால், $P(A) = 1/5$ எனின் $P(B \mid A) = 19/99$

எனவே, $P(A \cap B) = 19/99 \times 1/5 = 19/495$

குறிப்பு:

மேலுள்ள தேற்றம் 3.7, இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிக்கப்படலாம்.

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்பன S இலுள்ள எவையேனும் n நிகழ்ச்சிகள் எனின்,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1, A_2) \ldots\ldots P(A_n \mid A_1, \ldots\ldots, A_{n-1})$$

உதாரணம் 3.17

உதாரணம் 3.14 இலே, ஏற்கனவே டெயிலி நியூஸ் வாசிக்கின்ற ஒருவர் 'சன்'னும் வாசிப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

60 பேர்கொண்ட குழுவில் மொத்தம் 31 பேர் DN வாசிக்கின்றமையால், ஒருவர் DN வாசிப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $P(DN) = 31/60$. ஆனால் அதே குழுவில் 13 பேர் DN, S இரண்டையும் வாசிப்பதால்,

$$P(DN \& S) = 13/60$$

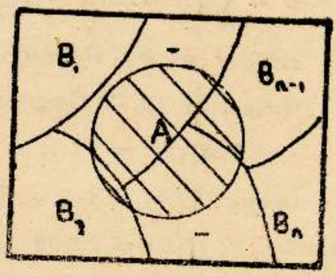
எனவே, டெயிலி நியூஸ் வாசிக்கும் ஒருவர் 'சன்'னும் வாசிப்பதற்குரிய நிபந்தனை நிகழ்தகவு,

$$P(S|DN) = \frac{P(DN \& S)}{P(DN)} = \frac{13/60}{31/60} = \frac{13}{31}$$

நாம் இதுவரை நிபந்தனை நிகழ்தகவு என்னும் எண்ணக்கருவினை, ஒழுங்கமைவாக நேர்கின்ற இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவைக் கணிப்பதற்கு மட்டுமே உபயோகித்தோம். மாறாக, இதே எண்ணக்கருவினை உபயோகித்து, தனி நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவையும் கணிக்கமுடிகின்றது.

வரைவிலக்கணம் 3.19

$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ என்னும் n நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக் கொள்க.



இவை எல்லாம் சோடியாய் தம்முள் புறநீக்குவனவாயும், இவற்றினது ஒன்றிப்பு மாதிரிவெளி S ஆயும் ஒவ்வொன்றிற்கான நிகழ்தகவு நேரானதாயுமிருப்பின்,
அதாவது,

(i) $B_i \cap B_j = \phi;\ i \neq j.$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

(iii) $P(B_i) > 0;$ எல்லா i இற்கும் எனின்,

$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ என்பன மாதிரிவெளி S இன் ஒரு பிரிவினையைக் (*Partition*) குறிக்கும். அதாவது, பரிசோதனை ஒன்று ஆற்றப்படின், ஒரு நிகழ்ச்சி B_i மட்டுமே நேரும்.

கூட்டு நிகழ்தகவுத் தேற்றம் (*Theorem on Total Probability*)

தேற்றம் 3.8

$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ என்பன மாதிரிவெளி S இன் ஒரு பிரிவினைக் குறிப்பதாயும், A என்பது S இலுள்ள யாதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனவும் கொள்க.

எனின், $P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \dots \dots$
$+ P(A \mid B_n)P(B_n)$

நிறுவல்:

வரைவிலக்கணத்தால்,

$A = S \cap A$ என எழுதலாம்.

ஆனால், $S = (B_1 \cup B_2 \cup \dots\dots \cup B_n)$

எனவே $A = (B_1 \cup B_2 \cup \dots\dots \cup B_n) \cap A$

$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots\dots \cup (A \cap B_n)$

$\therefore \quad P(A) = P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots\dots \cup (A \cap B_n)]$

இங்கு $(A \cap B_i)$ என்னும் நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் சோடியாய் மூட்டற்றவையாதலால்,

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots\dots + P(A \cap B_n)$$

ஆனால் $P(A \cap B_j) = P(A \mid B_j)P(B_j)$

$\therefore \quad P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \dots\dots$
$+ P(A \mid B_n)P(B_n)$

உதாரணம் 3.18

உதாரணம் 3.16 இல் வரையறுக்கப்பட்ட A, B என்னும் நிகழ்ச்சிகளை எடுத்துக்கொள்க. அங்கு நிகழ்ச்சி B இற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

P(B) பின்வருமாறு கணிக்கப்படலாம்.

$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})$

$= 19/99 . 1/5 + 20/99 . 4/5$

$= 1/5$

உதாரணம் 3.19

குறிப்பிட்ட ஒரு உற்பத்திப்பொருள் X, Y, Z என்னும் மூன்று தொழிற்சாலைகளினால் உற்பத்தியாக்கப்படுகின்றது. தொழிற்சாலை

X இனது உற்பத்தி Y யினதைவிட இரு மடங்காகவும், Y உம், Z உம் ஒரே அளவினையும் உற்பத்தி செய்கின்றன. (குறிப்பிட்ட ஓர் உற்பத்திக்கால இடைவேளையில்) அத்துடன் X, Y உற்பத்தி செய்யும் பொருட்களில் 2% பழுதடைந்தவையாயும், Z இனது உற்பத்திப் பொருட்களில் 4% பழுதடைந்தவையாயும் காணப்படுகின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்கள் யாவும் ஓரிடத்தில் குவிக்கப்பட்டு, அதிலிருந்து ஓர் அலகு எழுமாறாக எடுக்கப்படின் அது பழுதடைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இங்கு பின்வரும் A, B_1, B_2, B_3 என்னும் நிகழ்ச்சிகளை வரையறுப்போம்.

$$A = \{\text{பழுதடைந்த பொருள்}\}$$

$$B_1 = \{\text{பொருள் X யினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்டது}\}$$

$$B_2 = \{\text{பொருள் Y யினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்டது}\}$$

$$B_3 = \{\text{பொருள் Z யினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்டது}\}$$

இங்கு நாம் $P(A)$, அதாவது பொருள் பழுதடைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காணல் வேண்டும்.

ஆனால் இப்பழுது X அல்லது Y அல்லது Z யினால் ஏற்பட்டிருக்கலாம்.

எனவே மேலுள்ள (3.8) தேற்றத்தால்,

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3)$$

ஆனால், $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/4$, $P(B_3) = 1/4$

அத்துடன் $P(A \mid B_1) = P(A \mid B_2) = 0.02$, $P(A \mid B_3) = 0.04$

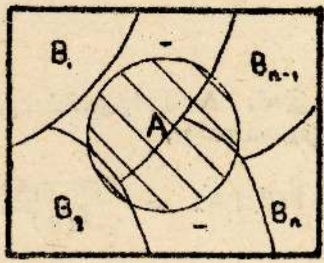
$$\therefore \quad P(A) = 0.02 \times \tfrac{1}{2} + 0.02 \times \tfrac{1}{4} + 0.04 \times \tfrac{1}{4}$$

$$= 0.025$$

3.6: பெயிசுவின் தேற்றம் (BAYE'S THEOREM)

தேற்றம் 3.9

$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ என்னும் n நிகழ்ச்சிகள் மாதிரி வெளி S இன் பிரிவினை அல்லது பிரிப்பாயிருக்க, நிகழ்ச்சிகள் B_i ; $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ ஆனவை மூட்டற்றவையாயும், அவற்றின் ஒன்றிப்பு மாதிரி வெளி S ஆயும் இருந்தால், அம்மாதிரிவெளியின் யாதுமோர் எதேச்சை நிகழ்ச்சி A இற்கு,



$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

நிறுவல்:

வரைவிலக்கணத்தால், $A = A \cap S$ என எழுதலாம்

ஆனால் $S = (B_1 \cup B_2 \ldots\ldots \cup B_n)$

$$\therefore \quad A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ldots \cup B_n)$$

$$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots\ldots \cup (A \cap B_n)$$

இங்கு $(A \cap B_i)$ என்னும் நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் மூட்டற்றவை. ஏனெனில் B_i மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

[எடுத்துக்காட்டாக

$$(A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) = A \cap (B_1 \cap B_2)$$

$$= A \cap \phi, \qquad \because B_1, B_2 \text{ மூட்டற்றவை}$$

$$= \phi$$

அதாவது, $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$ என்பவை மூட்டற்றவை

இவ்வாறே மற்றவையும்]

எனவே, $P(A) = P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots\ldots \cup (A \cap B_n)]$

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots\ldots + P(A \cap B_n),$$

வெ. உ. (4 ஆல்)

ஆனால், தேற்றம் 3·7 ஆல்,

$$P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i)P(B_i)$$

$$\therefore P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots\ldots + P(A \mid B_n).P(B_n) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

இனி, A நேர்ந்துவிட்டது எனத் தரப்பட B_i இன் நிபந்தனை நிகழ்தகவானது,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A \mid B_i).P(B_i)}{P(A)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

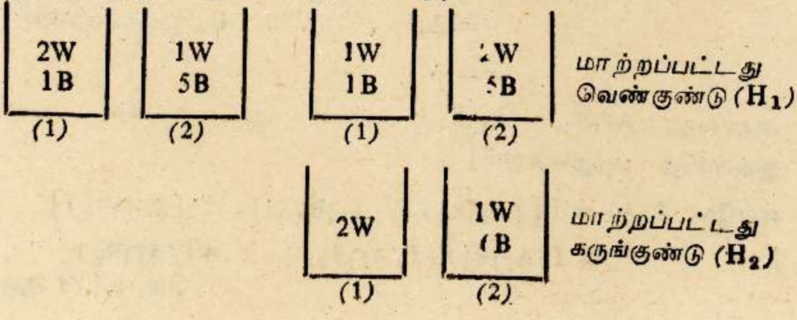
சமன்பாடு (2) இல் (1) ஐப் பிரதியிட

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i).P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i).P(B_i)}$$

உதாரணம் 3.20

'1' '2' என இலக்கமிடப்பட்ட பெட்டிகள் முறையே இரண்டு வெண்குண்டுகளையும் இரு கருங் குண்டுகளையும், ஒரு வெண் குண்டையும் ஐந்து கருங்குண்டுகளையும் கொண்டுள்ளன. பெட்டி (1) இலிருந்து பெட்டி (2) இற்கு ஒரு குண்டு எழுமாறாய் எடுக்கப்படுகின்றது. இக்குண்டு வெண்குண்டாக இருந்தால் மாற்றப்பட்ட குண்டு வெண்குண்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

குண்டு மாற்றப்படமுன் குண்டு மாற்றப்பட்டபின்



H_1 என்பது மாற்றப்பட்டகுண்டு வெண்குண்டாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியும், H_2 என்பது மாற்றப்பட்டகுண்டு கருங்குண்டாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியும் என்க. அத்துடன் A என்பது பெட்டி (1) இலிருந்து குண்டு மாற்றப்பட்ட பின்னர் பெட்டி (2) இலிருந்து எடுக்கப்படும் குண்டு வெண்குண்டாய் இருக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும் என்க. எனின்,

$P(H_1) = 2/3,\ P(H_2) = 1/3,\ P(A \mid H_1) = 2/7,\ P(A \mid H_2) = 1/7$

(i) எடுக்கப்பட்ட குண்டு வெண்குண்டெனின் மாற்றப்பட்ட குண்டு வெண்குண்டாய் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$P(H_1 \mid A)$ ஆனது, பெயிசுவின் தேற்றத்தால்,

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1)\, P(H_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(A \mid H_i)\, P(H_i)}$$

$$= \frac{P(A \mid H_1) . P(H_1)}{P(A \mid H_1) . P(H_1) + P(A \mid H_2) . P(H_2)}$$

$$= \frac{2/7 \times 2/3}{2/7 \times 2/3 + 1/7 \times 1/3}$$

$$= 4/5$$

(ii) இனி, மாற்றப்பட்ட குண்டு கருங்குண்டாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(A \mid H_2) . P(H_2)}{P(A \mid H_1) . P(H_1) + P(A \mid H_2)\, P(H_2)}$$

$$= \frac{1/7 \times 1/3}{2/7 \times 2/3 + 1/7 \times 1/3}$$

$$= 1/5$$

(இதனை மொத்த நிகழ்தகவு 1 இலிருந்து $P(H_1 \mid A)$ இனைக் கழிப்பதனாலும் பெறலாம்.)

(iii) எடுக்கப்பட்ட குண்டு கருங்குண்டாயின் மாற்றப்பட்ட குண்டு வெண்குண்டாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

A' என்பது பெட்டி (1) இலிருந்து பெட்டி (2) இற்குக் குண்டு மாற்றப்பட்ட பின்னர் பெட்டி (2) இலிருந்து எடுக்கப்படும் குண்டு கருங்குண்டாய் இருக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும் என்க.

எனின், $P(A'|H_1) = 5/7$, $P(A'|H_2) = 6/7$

இங்கு காணவேண்டிய நிகழ்தகவு,

$$P(H_1|A') = \frac{P(A'|H_1).P(H_1)}{P(A'|H_1).P(H_1)+P(A'|H_2).P(H_2)}$$

$$= \frac{5/7 \times 2/3}{5/7 \times 2/3 + 6/7 \times 1/3}$$

$$= 5/8$$

(iv) எடுக்கப்பட்ட குண்டு கருங்குண்டாயின் மாற்றப்பட்ட குண்டு வெண்குண்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= 1 - 5/8$$

$$= 3/8$$

உதாரணம் 3.21

ஒரு பல்தெரிவுப் பரீட்சையிலே (*Multiple Choice Test*) ஒரு மாணவன் வினுவிற்கான விடையை அறிந்திருக்க முடியும் அல்லது ஊகித்து அறிய முடியும். p என்பது அவன் விடை அறிந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு எனின், அவன் விடையை ஊகிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(1 - p)$. அத்துடன் பரீட்சையில் மாணவன் சரியாக விடையை அறிந்திருப்பின் அதற்கான நிகழ்தகவு $1/n$ எனவும் கொள்க (n என்பது ஒரு வினுவிலுள்ள வெவ்வேறு பல்தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை). தேர்வுநாடி வினுவிற்கான விடையைச் சரியாகக் கொடுப்பின், அவன் விடையை அறிந்திருப்பதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு,

$$\frac{np}{1 + (n-1)p} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

தேர்வுநாடி விடையை அறிந்திருக்கும் நிகழ்ச்சியை **K** என்பதனுலும், தேர்வுநாடி விடையை ஊகித்து அறியும் நிகழ்ச்சியை **G** என்பதனுலும் குறிக்க.

பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவன் வினுவிற்கு ஒன்றில் சரியான விடையை அல்லது பிழையான விடையை அறிந்தோ அல்லது ஊகித்தோ கொடுக்க முடியும். வினுவிற்கான விடையைச் சரியாகக் கொடுக்கும் நிகழ்ச்சி C என்க. எனின், அவன் விடையை அறிந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $P(K|C)$ ஆனது பெயிசுவின் தேற்றத்தால்,

$$P(K|C) = \frac{P(C|K).P(K)}{P(C|K).P(K) + P(C|G).P(G)}$$

ஆனால், $P(K) = p$, $P(G) = (1-p)$

அத்துடன் $P(C|K) = 1$, $P(C|G) = 1/n$

$$\therefore \quad P(K|C) = \frac{1 \times p}{1 \times p + (1-p)1/n}$$

$$= \frac{np}{1+(n-1)p}$$

உதாரணம் 3.22

உற்பத்தியாளனிடமிருந்து வியாபாரி ஒரு தொகுதி இயந்திர உதிரிப்பாகங்களைக் கொள்வனவு செய்கின்முன். இவை இயந்திரம் A இனுல் அல்லது B இனுல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டவையாக இருக்கலாம். ஆனுல் குறிப்பிட்ட தொகுதி உதிரிப்பாகங்கள் எந்த இயந்திரத்திஞல் செய்யப்பட்டவை என்பது அவனுக்குத் தெரிய மாட்டாது. முன்னைய அனுபவங்களிலிருந்து இயந்திரம் A இனுல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டவற்றில் 15% பழுதடைந்ததாகவும், இயந்திரம் B இனுல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டவற்றில் 25% பழுதடைந்ததாகவுமிருக்கக் காணப்படுகின்றது. மொத்த உற்பத்தியில் 60% இயந்திரம் A இனுலும், 40% இயந்திரம் B இனுலும், உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன என உற்பத்தியாளன் அறிவிக்கிறுன். வியாபாரி 3 உதிரிப்பாகங்களைக்கொண்ட மாதிரியொன்றை எடுக்கும் போது அங்கு ஒன்றும் பழுதடையாது காணப்படின், அவை இயந்திரம் A இனுல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

E_1, E_2 என்பன உதிரிப்பாகங்கள் முறையே A, B இயந்திரங்களினுல் உற்பத்தி செய்யப்படும் நிகழ்ச்சிகளையும், F என்பது எடுக்கப்பட்ட 3 பாகங்களில் ஒன்றும் பழுதடையாது காணப்படும் நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கின்றதெனக.

தரப்பட்டதிலிருந்து,

$$P(E_1) = 0.6, \quad P(E_2) = 0.4$$

எடுக்கப்பட்ட 3 பாகங்களும் A என்பதனுல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு, அவை பழுதடைந்து காணப்படாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $P(F|E_1) = (1-0.15)^3 = (0.85)^3$

அதேபோல, அவை இயந்திரம் B இனல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டு, பழுதடைந்து காணப்படாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(F|E_2) = (1-0.25)^3 = (0.75)^3$$

எனவே எடுக்கப்பட்ட மூன்றும் பழுதடையாது காணப்படின் அவை, A என்பதனல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு, $P(E_1|F)$ ஆனது, பெயிசுவின் தேற்றத்தால்,

$$P(E_1|F) = \frac{P(E_1)P(F|E_1)}{P(E_1)P(F|E_1) + P(E_2)P(F|E_2)}$$

$$= \frac{0.6(0.85)^3}{0.6(0.85)^3 + 0.4(0.75)^3}$$

$$= 0.686$$

குறிப்பு:

$P(E_1)$, $P(E_2)$ என்பவை பூர்வ நிகழ்தகவுகள் (*Prior Probabilities*) என்றும், $P(E_1|F)$ என்பது உத்தர நிகழ்தகவு (*Posterior Probability*) என்றும் அழைக்கப்படும்.

3.7: புள்ளியியற் சாராமை (STATISTICAL INDEPENDENCE)

குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிகளுள் ஒரு நிகழ்ச்சி நேருவது மற்றைய நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும், நேர்வதை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காமலிருக்குமாயின் அந்நிகழ்ச்சிகள் எல்லாம் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். உதாரணமாக, ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுவதாகக் கொள்க. இங்கு இரண்டாவது சுண்டலின்போது பெறப்படும் விளைவை, முதலாம் சுண்டலின்போது பெற்ற விளைவு எவ்விதத்திலும் பாதிக்காது. எனவே இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் சாரா நிகழ்ச்சிகள். இதேபோல ஒரு தாயக்காயை எறியும்போது பெறப்படும் விளைவானது, ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை எழுமாறாக எடுக்கும்போது பெறப்படும் விளைவைப் பாதிக்கமாட்டாது. எனவே இவையும் சாரா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

A, B என்பன மாதிரிவெளி S இலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகளென்க. நிகழ்ச்சி B யானது நேர்ந்துவிட்டதெனத் தரப்பட்ட A யின் நிபந்தனை நிகழ்தகவானது, A யின் நிகழ்தகவிற்குச் சமனயின் A யானது B ஐப் புள்ளியியலாகச் சாராதது எனப்படும்.

அதாவது, A யினது நேர்கை B யினது நேர்கையைச் சாராதது எனின், A ஆனது B யைச் சாராதது எனப்படும்.

அதாவது, $P(A|B) = P(A)$

குறிப்பு:

$P(A|B) = P(A)$ ஆயின்,

$P(B|A) = P(B)$

அதாவது, A யானது B ஐச் சாராதது எனின், B யானது A ஐச் சாராததாகும். எனவே இங்கு A, B என்பவற்றைச் சாரா நிகழ்ச்சிகளெனக் கூறலாம்.

சாரா நிகழ்ச்சிகள் (*Independent Events*)

வரைவிலக்கணம் 3.20

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ எனின் A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

ஏனெனில்,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

ஆனால் $P(A|B) = P(A)$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

குறிப்பு:

மறுதலையாக, A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின், $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ஆகும்.

உதாரணம் 3.23

A, B என்பவர்கள் முறையே தனித்தனி 20 வருடங்கள் வரை மேலும் உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் 0.7, 0.5 எனின், இருவரும் 20 வருடங்கள் உயிர்வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

A என்பவர் உயிர்வாழ்வது, B என்பவர் உயிர்வாழ்வதை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காதாகையால் இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றில் ஒன்று சாராதவை.

ஆனால், $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.5$

எனவே, இருவரும் உயிர்வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$
$$= 0.7 \times 0.5$$
$$= 0.35$$

உதாரணம் 3.24

பெட்டி A ஆனது 4 வெண்பந்துகளையும், 2 கரும்பந்துகளையும், பெட்டி B ஆனது 3 வெண்பந்துகளையும், 5 கரும்பந்துகளையும் கொண்டுள்ளதென்க. ஒவ்வொரு பெட்டியிலுமிருந்து ஒரு பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்படின்,

(i) இரண்டும் வெண்பந்துகளாக,

(ii) இரண்டும் கரும்பந்துகளாக,

(iii) ஒன்று வெண்பந்தும் மற்றையது கரும்பந்துமாக, இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் என்ன?

W_1 என்பது பெட்டி A யிலிருந்து வெண்பந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியையும், W_2 என்பது பெட்டி B யிலிருந்து வெண்பந்து எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியையும் குறிக்கின்றதென்க.

$\therefore \; P(W_1) = 4/6, \quad P(W_2) = 3/8$

(i) பெட்டி A யிலிருந்து ஒரு பந்தை எடுப்பது பெட்டி B யிலிருந்து ஒரு பந்து எடுப்பதை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காததாகையால், எடுக்கப்படும் இரு பந்துகளும் வெண்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(W_1 \cap W_2) = P(W_1).P(W_2)$$
$$= 4/6 \times 3/8$$
$$= 1/4$$

(ii) எடுக்கப்பட்ட இரு பந்துகளும் கரும்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2) = P(\overline{W}_1).P(\overline{W}_2)$$
$$= 2/6 \times 5/8$$
$$= 5/24$$

(iii) ஒரு பந்து வெண்பந்தும், மற்றையது கரும்பந்தும் அதாவது ஒன்றில் முதலாம் பந்து வெண்பந்தாகவும், இரண்டாம்

பந்து கரும்பந்தாகவும் அல்லது முதலாம் பந்து கரும்பந்தா கவும், இரண்டாம்பந்து வெண்பந்தாகவும் காணப்படலாம்.

$$P[(W_1,\overline{W}_2)\cup(\overline{W}_1,W_2)] = P(W_1,\overline{W}_2) + P(\overline{W}_1,W_2)$$

(ஏனெனில் இவை தம்முள் புற நீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்)

$$= P(W_1)P(\overline{W}_2) + P(\overline{W}_1)P(W_2)$$

$$= 4/6 \times 5/8 + 2/6 \times 3/8$$

$$= 13/24$$

சோடியாய்ச் சாரா நிகழ்ச்சிகள் (*Pairwise Independent Events*)

வரைவிலக்கணம் 3.21

S இலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்பனவை, எல்லா $i, j = 1, 2, \ldots\ldots n$ $(i \neq j)$ இற்கும்,

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$ என்னும் நிபந்தனையைத் திருப்தி செய்யின் அவை சோடியாய்ச் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

குறிப்பு:

A_1, A_2, A_3 என்பன சோடியாய் சாரா நிகழ்ச்சிகளெனில்,

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$ என்னும் முடிபு கட்டாயம் உண்டாயிருக்க வேண்டியதில்லை.

தம்முள் சாரா நிகழ்ச்சிகள் (*Mutually Independent Events*)

வரைவிலக்கணம் 3.22

S இலுள்ள $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்னும் n நிகழ்ச்சிகள் பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்திசெய்தால் மட்டுமே அவை தம்முள் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

எல்லா $1 \leq i < j < k < l < \ldots\ldots \leq n$ இற்கும்

(i) $P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j)$

(ii) $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i).P(A_j).P(A_k)$

(iii) $P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) = P(A_i).P(A_j).P(A_k).P(A_l)$

(n−i) $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)\ldots\ldots P(A_n)$

இங்கு மொத்தம் $(2^n - n - 1)$ நிபந்தனைகள் காணப்படும்.

குறிப்பு:

S இலுள்ள A_1, A_2, A_3 என்னும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள், தம்முள் சாரா நிகழ்ச்சிகளாய் இருப்பதற்கு பின்வரும் நான்கு நிபந்தனைகளும் தனித்தனியே திருப்தி செய்யப்படல் வேண்டும்;

(i) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) . P(A_2)$

(ii) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) . P(A_3)$

(iii) $P(A_3 \cap A_1) = P(A_3) . P(A_1)$

(iv) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) . P(A_2) . P(A_3)$

அதாவது, இவற்றுள் ஏதாவது ஒன்று திருப்தி செய்யப்படாவிடினும் நிகழ்ச்சிகள் சாராதவையல்ல. அவை சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும்.

உதாரணம் 3.25

கந்தோர் ஒன்றைச் சேர்ந்த மூன்று உத்தியோகத்தர்கள் ஒவ்வொருவரும் தனித்தனியே கந்தோருக்கு வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·2 ஆகும். எனின், ஒரே நாளில் மூவரும் கந்தோருக்கு வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

மூவரும் வராமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 0{\cdot}2 \times 0{\cdot}2 \times 0{\cdot}2$
$= 0{\cdot}008$

தரு வரிப்படம் (*Tree Diagram*)

ஒரு முடிவுள்ள தொடரியிலுள்ள பரிசோதனைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் தரப்பட்ட நிகழ்தகவுகளுடன் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையைக் கொண்ட விளைவுகள் இருப்பின் அது உத்தேசச் செய்முறை எனப்படும். மேற்படி முறையின் கீழுள்ள ஏதாவதொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவைக் கீழ்க்காட்டும் வரிப்படம்மூலம் இலகுவாக விளக்கலாம். பரிசோதனையொன்றின் விளைவுகள் ஒன்றையொன்று சாராதவையெனின் விளைவுகளை தரு வரிப்படமொன்றை அமைப்பதன் மூலம் இலகுவாக விளக்கலாம்.

உதாரணம் 3.26

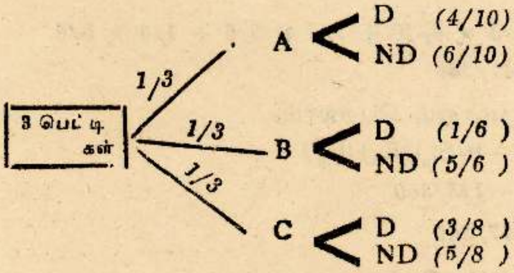
தரப்பட்ட A, B, C என்னும் மூன்று பெட்டிகளில், பெட்டி A யிலுள்ள 10 மின்குமிழ்களில் 4 பழுதடைந்தவையாயும், பெட்டி B யிலுள்ள 6 மின்குமிழ்களில் 1 பழுதடைந்ததாகவும், பெட்டி C யிலுள்ள 8 மின்குமிழ்களில் 3 பழுதடைந்தவையாயும் காணப்படுகின்றன. இவற்றுள் ஒரு பெட்டி எழுமாறாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனுள்ளிருந்து 1 மின்குமிழ் எடுக்கப்படுகின்றது. எடுக்கப்பட்ட மின்குமிழ் பழுதடைந்ததாயிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

என்ன? எடுக்கப்பட்ட மின்குமிழ் பழுதடைந்தாயிருப்பின் அது பெட்டி *A* யிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இங்கு தொடரியாக இரு பரிசோதனைகள் ஆற்றப்படுகின்றன.

(அ) மூன்று பெட்டிகளுக்குள் ஏதாவதொன்றைத் தேர்ந்தெடுத்தல்.

(ஆ) அதனுள்ளிருந்து எடுக்கப்படும் ஒரு மின்குமிழ் பழுதடைந்ததாயோ அல்து பழுதடையாததாயோ இருத்தல்.



D — பழுதடைந்ததையும்,

ND — பழுதடையாததையும்,

( ) — அவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளையும் குறிக்கின்றன.

பெட்டி A தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனுள்ளிருந்து பழுதடைந்த மின்குமிழ் எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை E_1 குறிக்கின்றது என்க.

எனின், $P(E_1) = 1/3 \times 4/10 = 2/15$

பெட்டி *B* தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனுள்ளிருந்து பழுதடைந்த மின்குமிழ் எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை E_2 குறிக்கின்றது என்க. எனின், $P(E_2) = 1/3 \times 1/6 = 1/18$

பெட்டி C தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனுள்ளிருந்து பழுதடைந்த மின்குமிழ் எடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை E_3 குறிக்கின்றது என்க.

எனின், $P(F_3) = 1/3 \times 3/8 = 1/8$

எனவே, $(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ என்பது எடுக்கப்பட்ட மின்குமிழ் பழுதடைந்ததாயிருக்கும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

எனவே, E_1, E_2, E_3 என்பன மூட்டற்ற பாதைகளைக் கொண்ட நிகழ்ச்சிகளாதலால்,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$
$$= 2/15 + 1/18 + 1/8$$
$$= 113/360$$

(i) இனி, எடுக்கப்பட்ட மின்குமிழ் பழுதடைந்ததாயிருப்பின் அது பெட்டி A யிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(A|(E_1 \cup E_2 \cup E_3)) = \frac{1/3 \times 4/10}{113/360} = \frac{48}{113}$$

(ii) எடுக்கப்பட்ட மின்குமிழ் பழுதடையாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= 1/3 \times 6/10 + 1/3 \times 5/6 + 1/3 \times 5/8$$
$$= 247/360$$

அல்லது, இதனைப் பின்வருமாறும் பெறலாம்.

$$= 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$
$$= 1 - 113/360$$
$$= 247/360$$

3.8: வரிசைமாற்றமும் சேர்மானமும்
(PERMUTATION & COMBINATION)

X,Y,Z என்னும் 3 எழுத்துக்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தடவையும் இரு எழுத்துக்கள் எடுக்கப்படுகின்றன எனின், மொத்தமாக எத்தனை தடவைகள் உள்ளன என்பதைக் கவனிப்போம்.

எடுக்கப்படும் சோடி எழுத்துக்களாவன, **XY,XZ,YZ,YX,ZX, ZY.** இங்கு **XY,YX** என்பன தனித்தனி தெரிவுகளாகக் கொள்ளப்படும், அதாவது, இட ஒழுங்கிற்கு முக்கியத்துவம் கொடுப்பின் 3 எழுத்துக்களிலிருந்து இரு எழுத்துக்களை ஆறு வழிகளில் எடுக்கலாம்.

இட ஒழுங்கிற்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்காவிடின் **XY, YX** என்பன ஒன்றுகவே கருதப்படும். எனவே இவ்வகையில் 3 எழுத்துக்களிலிருந்து இரு எழுத்துக்களை 3 வகைகளில் எடுக்கலாம். அவையான **XY, YZ, ZX.**

முதல்வகையில், அதாவது, இட ஒழுங்கிற்கு முக்கியத்துவம் கொடுத்துப் பெறப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை வரிசை மாற்றம் எனவும், இட ஒழுங்கிற்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்காமல் பெறப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சேர்மானம் எனவும் கொள்ளப்படும்.

எனின், n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை எடுக்கும் வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, np_r இனுற் குறிக்கப்பட்டு,

$np_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ எனவும்,

n பொருட்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் r பொருட்களை எடுக்கும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை, nc_r அல்லது $\binom{n}{r}$ இனுற் குறிக்கப்பட்டு,

$nc_r = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு $n!$ என்பது, காரணியம் n என அழைக்கப்படும்.

$n! = n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1$

குறிப்பு:

(i) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

(ii) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

(iii) $0! = 1$

உதாரணம் 3.27

8 பேர் கொண்ட குழு ஒன்றிடமிருந்து 3 பேர் கொண்ட உப குழு ஒன்றை எத்தனை வழிகளில் பெறலாம்.

இங்கு இட ஒழுங்கிற்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்க முடியாதாகையால், சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை $= \binom{8}{3} = \dfrac{8!}{5! \times 3!}$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 56$$

உதாரணம் 3.28

5 பொருளியலாளர்களையும், 7 புள்ளிவிபரவியலாளர்களையும், கொண்ட திட்ட அமைச்சிலிருந்து 3 பொருளியலாளரையும், 2 புள்ளிவிபரவியலாளரையும் கொண்ட ஒரு குழு எத்தனை வழிகளில் தேரப்படலாம்.

5 பொருளியலாளர்களிலிருந்து 3 பேரை $\binom{5}{3}$ வழிகளிலும்

7 புள்ளிவிபரவியலாளரிலிருந்து 2 பேரை $\binom{7}{2}$ வழிகளிலும் தேரலாம்.

எனின், 3 பொருளியலாளரையும், 2 புள்ளிவிபரவியலாளரையும் கொண்ட குழுக்கள் நேரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை,

$$= \binom{5}{3}\binom{7}{2}$$

$$= 10 \times 21$$

$$= 210$$

உதாரணம் 3.29

பேராதனைப் பல்கலைக்கழகப் பொருளியற் சிறப்புக் கலைப்பிரிவிற் பயிலும் 15 தமிழ் மாணவர்களுள், 10 பேர் மிகவும் திறமையுடையவர்களாகவும், 3 பேர் சாதாரண திறமையுடையவர்களாகவும், ஏனையோர் திறமையற்றவர்களாகவும் காணப்படுகின்றனர். மேற்படி மாணவர்களுளிருந்து ஒரு மாணவன் நேர்முகப் பரீட்சையொன்றிற்குத் தெரியப்படுகின்றானெனின்,

(i) அவன் மிகவும் திறமையுடையவனாக,

(ii) அவன் திறமையற்றவனாக இல்லாது,

(iii) ஒன்றில் அவன் மிகவும் திறமையுடையவனாக அல்லது திறமையற்றவனாக,

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

இரு மாணவர்கள் பிரதிவைப்பில்லாமல் எழுமாறாகத் தெரியப்படின்,

(iv) இருவரும் மிகவும் திறமையுடையவர்களாக,

(v) இருவரும் திறமையற்றவர்களாக,

(vi) ஆகக்குறைந்தது ஒருவர் மிகவும் திறமையுடையவராக,

(vii) ஆகக்கூடியது ஒருவர் மிகவும் திறமையுடையவராக,

(viii) ஒருவர் மட்டும் திறமையுடையவராக,

(ix) ஒருவரும் திறமையற்றவராக இல்லாது,

(x) ஒருவரும் திறமையுடையவராக இல்லாது,

காணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

முதலில், வகுப்பிலுள்ள ஒரு மாணவன் மிகத்திறமையுடையவனாக, சாதாரண திறமையுடையவனாக, திறமையற்றவனாகக் காணப்படும் நிகழ்ச்சிகளை முறையே A, B, C என்பவற்றால் குறிப்போம்.

எனின், $P(A) = 10/15$, $P(B) = 3/15$, $P(C) = 2/15$

(i) தெரியப்பட்ட மாணவன் மிகவும் திறமையுடையவனாக விருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(A) = 10/15$$

(ii) அவன் திறமையற்றவனாக இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C)$$

$$= 1 - 2/15 = 13/15$$

(iii) அவன் மிகவும் திறமையுடையவனாக அல்லது திறமையற்றவனாகவிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$$

(இங்கு A, C மூட்டற்றவை. ஏனெனில் ஒருவர் திறமைசாலியாக இருந்துகொண்டு திறமையற்றவனாகவும் இருக்க முடியாது.)

$$\therefore \; P(A \cup C) = 10/15 + 2/15 = 12/15$$

இனி, இரு மாணவர்கள் பிரதிவைப்பில்லாமல் தெரியப்படின் அவர்கள் பின்வரும் 6 வகைகளில் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

(AA), (AB), (AC), (BB), (BC), (CC)

(iv) வகுப்பில் மொத்தம் 15 பேர் காணப்படுகின்றனர். இவர்களுள் இரண்டு மாணவர்களை $\binom{15}{2}$ வழிகளில் தேரலாம். அத்துடன் வகுப்பிலுள்ள 10 மிகவும் திறமையுள்ள மாணவருள் இருவரை $\binom{10}{2}$ வழிகளில் தேரலாம்.

எனின், தெரியப்பட்ட இரு மாணவர்களும் மிகத்திறமையுடையவர்களாகக் காணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P[(A,A)] = \binom{10}{2} \Big/ \binom{15}{2} = 3/7$$

(v) 2 திறமையற்ற மாணவர்களிலிருந்து 2 மாணவர்களை, $\binom{2}{2}$ வழிகளில் தேரலாம். எனின், தெரியப்பட்ட இரு மாணவர்களும் திறமையற்றவர்களாகக் காணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$P[(C,C)] = \binom{2}{2} \Big/ \binom{15}{2} = 1/105$$

(vi) அதாவது, இங்கு இருவரும் மிகவும் திறமையுடையவர்களாக இருக்கலாம். அல்லது ஒருவர் மிகவும் திறமையுடையவராகவும் மற்றவர் எவ்வகையைச் சார்ந்தவராகவும் இருக்கலாம்.

$$P[(AA) \cup (AB) \cup (AC)] = \frac{\binom{10}{2} + \binom{10}{1}\binom{3}{1} + \binom{10}{1}\binom{2}{1}}{\binom{15}{2}}$$

$$= 19/21$$

(vii) இங்கு, ஒன்றில் ஒருவர் மிகவும் திறமையுடையவராகவும் மற்றவர் எவ்வகையைச் சார்ந்தவராகவோ அல்லது ஒருவரும் திறமையுடையவராக இல்லாதவராயும் இருக்கலாம்.

எனவே, $$P[(A \cap (B \cup C)) \cup (CC)] = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}$$

$$= 4/7$$

(viii) இங்கு ஒன்றில் ஒருவர் மிகவும் திறமையுடையவராகவும் மற்றவர் திறமையற்றவராகவும் அல்லது ஒருவர் சாதாரண திறமையுடையவராகவும் மற்றவர் திறமையற்றவராகவும் இருக்கலாம்.

எனவே, $$P[(AC) \cup (BC)] = \frac{\binom{10}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{15}{2}}$$

$$= \frac{\binom{13}{1}\binom{2}{1}}{\binom{15}{2}} = 26/105$$

(ix) இங்கு இருவரும் மிகவும் திறமையுடையவர்களாக அல்லது இருவரும் சாதாரண திறமையுடையவர்களாக அல்லது ஒருவர் மிகவும் திறமையுடையவராகவும் மற்றவர் சாதாரண திறமையுடையவராகவும் இருக்கலாம்.

$$\text{எனவே, } P[(AA)\cup(BB)\cup(AB)] = \frac{\binom{10}{2} + \binom{3}{2} + \binom{10}{1}\binom{3}{1}}{\binom{15}{2}}$$

$$= 26/35$$

(x) இங்கு, இருவரும் சாதாரண திறமையுடையவர்களாகவோ அல்லது இருவரும் திறமையற்றவர்களாகவோ அல்லது ஒருவர் சாதாரண திறமையுடையவராகவும் மற்றவர் திறமையற்றவராகவும் இருக்கலாம்.

$$\text{எனவே, } P[(BB)\cup(CC)\cup(BC)] = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{15}{2}}$$

$$= 2/21$$

உதாரணம் 3.30

பேராதனைப் பல்கலைக்கழகத்தின் குறிப்பிட்ட துறை ஒன்றிலே மேலதிகமான விரிவுரையாளர்கள் இருப்பதாகக் காணப்பட்டு, அவர்களில் சிலர் புதிதாக அமைக்கப்படும் பல்கலைக்கழகமொன்றிற்கு மாற்றப்பட வேண்டியுள்ளார்கள். மேற்படி துறையில் 8 சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களும், 3 துணை விரிவுரையாளர்களும், 9 பயிற்சியாளர்களும் கடமைபுரிகின்றார்கள் என்க. இவர்களில் மூன்று பேர் இடமாற்றப்படின் அவர்கள்,

(i) மூவரும் சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களாகவிருப்பதற்கான,

(ii) மூவரும் பயிற்சியாளராகவிருப்பதற்கான,

(iii) இரண்டு சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களும், ஒரு உதவி விரிவுரையாளருமாகவிருப்பதற்கான,

(iv) ஆகக்குறைந்தது ஒரு உதவி விரிவுரையாளராவது இடமாற்றப்படுவதற்கான,

(v) ஒவ்வொரு தரத்திலிருந்து ஒவ்வொருவர் இடமாற்றப்படுவதற்கான, நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) குறிப்பிட்ட துறையில் மொத்தம் 20 பேர் காணப்படுகின்ருர்கள் இவர்களிலிருந்து மூன்றுபேர் $\binom{20}{3}$ வழிகளில் தெரியப்படலாம். ஆனல் 8 சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களிலிருந்து மூன்றுபேர் $\binom{8}{3}$ வழிகளில் தெரியப்படலாம். எனவே தெரியப்பட்ட மூவரும் சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களாக

$$\text{விருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = 14/285$$

(ii) இங்கு 9 பயிற்சியாளர்களிலிருந்து மூன்றுபேரை $\binom{9}{3}$ வழிகளில் தெரியலாம். எனவே, தெரியப்பட்ட மூவரும் பயிற்சியாளராகவிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= \binom{9}{3}/\binom{20}{3} = 7/95$$

(iii) இங்கு, 8 சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களிலிருந்து இரண்டு பேரை $\binom{8}{2}$ வழிகளிலும், 3 உதவி விரிவுரையாளர்களிலிருந்து ஒருவர் $\binom{3}{1}$ வழிகளிலும் தெரியப்படலாம். எனவே, 2 சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களும், 1 உதவி விரிவுரையாளரும் கொண்ட மூவர் $\binom{8}{2}\binom{3}{1}$ வழிகளில் தெரியப்படலாம். எனவே மேற்படி நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு,

$$= \frac{\binom{8}{2}\ \binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = 14/95$$

(iv) உதவி விரிவுரையாளர் ஒருவரையும் கொண்டில்லாத மூவர், $\binom{17}{3}$ வழிகளில் தெரியப்படலாம். எனவே, உதவி விரிவுரையாளர் ஒருவரையும் கொண்டில்லாத மூவர் தெரியப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு, $= \binom{17}{3} \Big/ \binom{20}{3}$.

$$= 34/57$$

எனின், தெரியப்படும் மூவரில் ஆகக்குறைந்தது ஒரு உதவி விரிவுரையாளராவது காணப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= 1 - 34/57$$

$$= 23/57$$

(v) 8 சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்களிலிருந்து ஒருவரை $\binom{8}{1}$ வழிகளிலும், 3 உதவி விரிவுரையாளர்களிலிருந்து ஒருவரை $\binom{3}{1}$ வழிகளிலும், 9 பயிற்சியாளர்களிலிருந்து ஒருவரை $\binom{9}{1}$ வழிகளிலும் தெரியலாம். எனவே தெரியப்பட்ட மூவரில் எல்லாத் தரத்திலிருந்தும் ஒவ்வொருவர் காணப்படுவதற்கான

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}}$$

$$= 18/95$$

3. 9 : பயிற்சிகள்

1. மாதிரிவெளி S ஆனது 1 இலிருந்து 10 வரையுள்ள நேர்முழு எண்களைக் கொண்டது. $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{5, 6, 7\}$ என்பன S இலுள்ள எவையேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளெனின், பின்வரும் தொடைகளுக்குரிய மாதிரிப் புள்ளிகளைக் காண்க.

   (அ) $\bar{A} \cap B$ (ஆ) $\bar{A} \cup B$ (இ) $\overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}$ (ஈ) $\bar{A} \cap \overline{(\bar{B} \cap \bar{C})}$

   (உ) $\overline{\bar{A} \cap (B \cup C)}$

2. பின்வரும் தொடர்புகளில் எவை உண்மையானவை?

   (அ) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

   (ஆ) $(A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B)$

   (இ) $(\bar{A} \cup B) = (\bar{A} \cap B)$

   (ஈ) $\overline{(A \cup B)} \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

   (உ) $(A \cap B) \cap (\bar{B} \cap C) = \phi$

3. பின்வரும் தொடர்புகளை நிறுவுவதற்கு வெண்ணின் வரைபடத்தை உபயோகிக்குக.

   (அ) $A \subset B$ & $B \subset C$ எனின் $A \subset C$

   (ஆ) $A \subset B$ எனின் $A = (A \cap B)$

   (இ) $A \subset B$ எனின் $\bar{B} \subset \bar{A}$

   (ஈ) $A \subset B$ எனின் $(A \cup C) \subset (B \cup C)$

   (உ) $A \cap B = \phi$ உம் $C \subset A$ எனின் $B \cap C = \phi$

4. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று எதேச்சையான நிகழ்ச்சிகளெனின் பின்வருவனவற்றிற்கான கோவையைப் பெறுக.

   (ஆ) A மாத்திரம் நேரும்,

   (ஆ) ஏதாவது ஒரு நிகழ்ச்சி மட்டும் நேரும்,

   (இ) A, B என்பன நேரும் ஆனால் C நேராது,

   (ஈ) மூன்றில் ஒன்ருவது நேரும்,

(உ) மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் நேரும்.
(ஊ) ஒரே நேரத்தில் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் நேராது.

5. பின்வரும் பரிசோதனைகளுக்கான மாதிரிவெளிகளைத் தந்து அவை பின்னக மாதிரிவெளிகளா தொடர் மாதிரிவெளிகளா எனக் கூறுக.

(அ) தொழிற்சாலை ஒன்றில் உற்பத்தியாகின்ற உதிரிப்பாகங்களின் விட்டங்கள்,

(ஆ) ஓர் அரைடசின் பெட்டி ஒன்றிலுள்ள பழுதடைந்த முட்டைகளின் எண்ணிக்கை,

(இ) தனித்தனியே 100 கிருமிகளைக் கொண்ட இரு தொகுதிகளுக்கு ஒரு கிருமி நாசினியைப் பிரயோகிக்கும்போது அதனது தாக்கத்தினைப் பதிதல்,

(ஈ) இணைத்துக்கட்டப்பட்ட இரு கட்டங்களிலுள்ள குறைபாடுகளின் எண்ணிக்கை,

(உ) மோட்டார் வாகனமொன்றின் 4 ரயர்களிலும் ஒருமைல் ஓட்டத்திற்கான தேய்வின் வீதத்தை அளத்தல்,

(ஊ) நாளொன்றிற்கு, குழாயொன்றினூடாகப் பாயும் நீரின் அளவினை அளவிடுதல்.

6. தொழிற்சாலையொன்றில் உற்பத்தியாக்கப்படும் பொருட்கள் பழுதடைந்தனவாயோ பழுதடையாதனவாகவோ காணப்படலாம். உற்பத்திமுறையில் நான்கு பொருட்கள் மட்டுமே உற்பத்திசெய்யப்பட முடியுமெனினும், உற்பத்தி செய்யப்படும் பொருட்களில் அடுத்தடுத்து இரு பழுதுகள் காணப்படின் உற்பத்தியானது நிறுத்தப்படும். பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளியை விபரிக்க.

7. ஒன்று, இரண்டு என இலக்கமிடப்பட்ட இரு கோடலற்ற தாயக்காய்கள் எறியப்படுகின்றன எனின், இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளியைத் தந்து அதனைப் படத்தில் குறிப்பிடுக. அத்துடன்,

இங்கு நிகழ்ச்சி A என்பது, ஏதாவது ஒன்றில் அல்லது இரண்டிலும் 5 என்ற புள்ளியைப் பெறும் நிகழ்ச்சியினையும், B என்பது, கூட்டுத்தொகை 8 ஆகவுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகளையும் குறிக்கின்றனவெனின் பின்வருவனவற்றினைச் சார்ந்த மாதிரிப்புள்ளிகளைத் தருக.

(அ) A (ஆ) B (இ) $(A \cap B)$ (ஈ) $(A \cup B)$

8. (அ) இரு பரீட்சைகளுக்குத் தோற்றும் ஒரு பரீட்சார்த்தி ஒவ்வொன்றிலும் $0, 1, \ldots, 6$ என்ற புள்ளிகளை ஈட்டமுடியும், மேற்படி பரிசோதனைக்குப் பொருத்தமான மாதிரிவெளியைத் தந்து அதனைப் படத்தில் குறிப்பிடுக.

(ஆ) பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளைப் படத்தில் இஃதெனக் காட்டுக.

A – மொத்த ஈட்டுக்களின் எண்ணிக்கை ஆகக் குறைந்தது 7

B - இரண்டு ஈட்டுக்களிலும் இழிவானது ஆகக் கூடியது 2.

C - முதற் பரீட்சையில் பெற்ற ஈட்டு இரண்டாம் பரீட்சையிற் பெற்ற ஈட்டிலும் ஆகக்குறைந்தது ஒன்றிலும் பெரியது.

D - இரண்டு ஈட்டுக்களும் மூன்றைவிடப் பெரிதல்ல.

(இ) $\bar{B}$ இதற்குரிய மாதிரிப்புள்ளிகளைத் தந்து அதனைப் பொருத்தமான வசனங்களில் விளக்கிக் கூறுக.

(ஈ) A, B, C, D என்பனவற்றில் ஏதாவது இரு நிகழ்ச்சிகள் மூட்டற்றவையா?

(உ) $\overline{A \cup B}$ ஐக் காண்க.

9. A, B என்பன $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, ஆகுமாறுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகளெனின், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(ஆ) $P(A \cup B)$ (ஆ) $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$ (இ) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(ஈ) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ (உ) $P(A \cup \bar{B})$ (ஊ) $P(A \cap \bar{B})$

10. A, B என்பன $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ ஆகுமாறுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகளெனின்,
(அ) $P(A)$, (ஆ) $P(B)$, (இ) $P(\overline{A} \cap B)$ என்பவற்றைக் காண்க.

11. கோடலற்ற இரு நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. இப் பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளியையும் பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய மாதிரிப் புள்ளிகளையும் தந்து அவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(அ) ஒரு தலை மாத்திரம் பெறப்படுவதற்கான,
(ஆ) ஒரு பூ மாத்திரம் பெறப்படுவதற்கான,
(இ) இரு தலைகள் பெறப்படுவதற்கான,
(ஈ) இரு பூக்கள் பெறப்படுவதற்கான,
(உ) ஒரு தலையாவது பெறப்படுவதற்குரிய,
(ஊ) ஒரு பூவாவது பெறப்படுவதற்குரிய.

12. ஒரு பெட்டியினுள் 6 செம்பந்துகளும், 5 வெண்பந்துகளும், 4 கரும் பந்துகளும் காணப்படுகின்றன. பெட்டியினுள்ளிருந்து ஒரு பந்து எழுமாறாக எடுக்கப்படுகின்றது.

(அ) அப்பந்து செம்பந்தாக, வெண்பந்தாக, கரும் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(ஆ) அப்பந்து செம்பந்தல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(இ) எடுக்கப்பட்ட பந்து வெண்பந்து, கரும்பந்து, இரண்டும் அல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

13. ஒரு பல்கலைக்கழகத்தினுள் 3 ஆண்டு பட்டப்படிப்பிற்கு சேர்ந்த 500 மாணவர்கள் கணிதம், பொருளியல், புள்ளிவிபரவியல் ஆகிய பாடங்களில் ஒன்

றினை அல்லது கூடிய பாடங்களைப் பயில்கின்றார்கள். விபரங்கள் வருமாறு: கணிதம் 329 பேரும், பொருளியல் 186 பேரும், புள்ளிவிபரவியல் 295 பேரும், கணிதம்-பொருளியல் 82 பேரும், கணிதம்-புள்ளிவிபரவியல் 217 பேரும், பொருளியல்-புள்ளிவிபரவியல் 67 பேரும் எனின், எத்தனை மாணவர்கள் கீழ்க் குறிப்பிட்ட பாடங்களைப் பயில்கின்றார்கள்?

(அ) மூன்று பாடங்களையும்,

(ஆ) கணிதம் ஆனால் புள்ளிவிபரவியல் அல்ல,

(இ) பொருளியல் ஆனால் கணிதம் அல்ல,

(ஈ) புள்ளிவிபரவியல் ஆனால் பொருளியல் அல்ல,

(உ) கணிதம் அல்லது புள்ளிவிபரவியல் ஆனால் பொருளியல் அல்ல,

(ஊ) கணிதம் ஆனால் பொருளியலோ புள்ளிவிபரவியலோ அல்ல.

14. பல்கலைக்கழகம் புகும் ஒரு மாணவன் பட்டதாரியாக வெளியேறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 எனின், இறுதி வருடத்திலுள்ள ஐந்து மாணவர்களுள்,

(அ) ஒருவர் மட்டும் பட்டதாரியாக,

(ஆ) ஒருவரும் பட்டதாரியாக இல்லாமல்,

(இ) ஒருவராவது பட்டதாரியாக,

வெளியேறுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

15. சப்பாத்துத் தொழிற்சாலையொன்றில் A, B, C என்ற மூன்று வெவ்வேறு வகையான சப்பாத்துகள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. A வகையில் 5 %, B வகையில் 4 %, C வகையில் 1 % பழுதடைந்து காணப்படுகின்றதெனின் மேற்படி மூன்று வகைகளிலும் ஒரு சோடிச் சப்பாத்து பழுதடையாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

16. இயந்திரம் A யினுடைய உற்பத்தி தடைப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·1, இயந்திரம் B யினுடைய உற்பத்தி தடைப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0·2. இயந்

திரம் A உம் இயந்திரம் B உம் ஒன்றையொன்று சாராதவையெனின் ஒரே நேரத்தில் இரு இயந்திரங்களினதும் உற்பத்தி தடைப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? ஏதாவது ஒரு இயந்திரத்தின் உற்பத்தி தடைப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

17. A, B என்பன புள்ளியியலாகச் சாராதவையெனின்,

(அ) $\overline{A}$, $\overline{B}$ என்பவையும் புள்ளியியலாகச் சாராதவையெனக் காட்டுக.

(ஆ) $P[(A \cap B) \mid B]$ இனைக் காண்க.

18. திருமணமான ஓர் ஆண் பாராளுமன்றத் தேர்தலில் வாக்களிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0·4, திருமணமானஒரு பெண் வாக்களிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0 35அத்துடன் கணவன் வாக்களிப்பின் மனைவியும் வாக்களிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 எனின்,

(அ) தேர்தலில் கணவனும் மனைவியும் வாக்களிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ஆ) கணவனும் மனைவியும் வாக்களிப்பது புள்ளியியலாகச் சாராததா? ஏன்?

(இ) மனைவி வாக்களிக்கும்போது கணவனும் வாக்களிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

19. மருத்துவ விஞ்ஞானம் புற்றுநோயைக் கண்டுபிடிப்பதற்குச் சோதனையொன்றைக் கையாளுகின்றது. இச்சோதனை 95 % செம்மையையே தருவதாகக் கொள்க. அதாவது 100 புற்றுநோயாளிகளை எடுத்துக் கொண்டால் சோதனை மூலம் 95 பேரை அடையாளங் காணலாம்; 100 சுகதேகிகளை எடுத்துக் கொண்டால் சோதனை மூலம் 95 பேரை புற்றுநோயில்லாதவர்களெனவும், 5 பேர் புற்றுநோயாளிகளெனவும் அடையாளங் காணலாம். முழுச் சனத்தொகையில் 0·005 வீதமானோர்க்கு உண்மையில்

புற்றுநோயிருப்பின், தனிப்பட்ட ஒருவருக்கு, சோதனையானது புற்றுநோய் காணப்படுகின்றதெனக் காட்டினும் அவருக்கு புற்றுநோயில்லா திருப்பதற் கானநிகழ்தகவு என்ன?

20. A, B என்பன $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$ ஆகுமாறுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க: எனின் பின் வரும் முடிபுகள் உண்மையானவையோ பொய்யானவையோ எனக் கூறி அவற்றிற்கான காரணத்தைத் தருக.

(அ) A, B மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகள்

(ஆ) $P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$

(இ) A, B யினது நிகழ்ச்சிப்பிரிவு

(ஈ) $P(\bar{A} \mid \bar{B}) = \frac{3}{4}$

(உ) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

21. $P(A \mid B) > P(A)$ எனின், $P(B \mid A) > P(B)$ எனக் காட்டுக.

22. A, B என்பன பரிசோதனையொன்றுடன் சேர்க்கப் பட்ட இரு நிகழ்ச்சிகளென்க. $P(A \cup B) = 0{\cdot}7$ ஆயிருக்கும்போது $P(A) = 0{\cdot}4$, $P(B) = p$ எனின்,

(அ) A, B மூட்டற்ற நிகழ்ச்சிகளாயின் p இன் பெறுமானம் யாது?

(ஆ) A, B சாரா நிகழ்ச்சிகளாயின் p இன் பெறுமானம் யாது?

23. தொழிற்சாலையொன்றின் மொத்த உற்பத்தியில் 25 வீதமானவை யந்திரம் A யினாலும், 35 வீதமானவை யந்திரம் B யினாலும், 40 வீதமானவை யந்திரம் C யினாலும் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. இவற்றுள் முறையே 5, 4, 2 வீத பழுதுகள் காணப் படுகின்றன. ஓர் உற்பத்திப் பொருள் எழுமாறாக

எடுக்கப்பட்டு அது பழுதடைந்ததாகக் காணப்பட்டது எனின், அவ்வுற்பத்திப் பொருள் தனித்தனியே A, B, C என்பவற்ருல் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

24. பெட்டி A ஆனது 3 வெண்குண்டுகளையும், 5 கருங்குண்டுகளையும், பெட்டி B ஆனது 2 வெண்குண்டுகளையும் 1 கருங்குண்டையும், பெட்டி C ஆனது 2 வெண்குண்டுகளையும், 3 கருங்குண்டுகளையும் கொண்டுள்ளதென்க. ஒரு பெட்டி எழுமாருகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதனுளிருந்து ஒரு குண்டு எழுமாருக எடுக்கப்படுகின்றது. எடுக்கப்பட்ட குண்டு கருங்குண்டாயின் அது பெட்டி A யிலிருந்து எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவை (அ) தருவரிப்படமுறையாலும் (ஆ) பெயிசுவின் தேற்றத்தை உபயோகித்தும் காண்க.

25. குறிப்பிட்ட சமூகமக்களின் கல்விமட்டம், வருமானமட்டம் பற்றிய ஆய்வொன்றில் முழுச் சனத்தொகையில் 1/3 விகிதமானேர் உயர்ந்த வருமானம் உடையவர்களாகவும், 2/3 விகிதமானேர் குறைந்த வருமானம் உடையவர்களாகவும் காணப்படுகின்றனர். அத்துடன் உயர்ந்த வருமானமுடையவர்களில் 0.75 வீதம் கல்வியறிவுடையவர்களாகவும், குறைந்த வருமானமுடையவர்களில் 0.35 வீதம் கல்வியறிவுடையவர்களாகவும் காணப்படுகின்றனர். எனின், பெயிசுவின் தேற்றத்தை உபயோகித்து எழுமாருகத் தெரியப்படும் ஒருவர் கல்வியறிவுடையவராகவிருப்பின் அவர் உயர்ந்த வருமானமுடையவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

26. தரப்பட்ட பரீட்சையொன்றில் 8 விஞக்களுக்கான விடைகள் உண்மையானவையானகவோ, பொய்

யானவையாகவே இருக்கலாம். பரீட்சையில் சித்தி பெறுவதற்கு ஆகக்குறைந்தது 6 வினக்களுக்கான விடைகள் சரியானவையாகக் காணப்படல்வேண்டும்

(அ) பரீட்சார்த்தி ஒருவர் ஒவ்வொரு வினவிற்கான விடையையும் ஊகித்தளிப்பின் அவர் பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ஆ) பரீட்சார்த்தி முதலாம் வினவிற்கான விடையை மட்டும் அறிந்திருப்பதோடு ஏனைய ஏழு வினக்களையும் ஊகித்தே விடையளிப்பாராயின் அவன் பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(இ) பரீட்சார்த்திமுதலிரு வினக்களுக்கு விடையை அறிந்திருப்பின் அவன் பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

27. உற்பத்தியாளனெருவனுக்கு A, B என்பவர்களால் குறிப்பிட்ட மூலப்பொருளொன்று வழங்கப்படுகின்றது. முன்னைய அனுபவங்களிலிருந்து A யினல் நிரம்பல் செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 5% பழுதடைந்ததாகவும், B யினல் நிரம்பல் செய்யய்பட்டவற்றில் 9% பழுதடைந்ததாகவும் காணப்படுகின்றன. கொள்வனவு செய்யப்படும் பொருட்கள் யாவும் தொட்டியொன்றினுள் குவித்து வைக்கப்பட்டிருப்பின் அதிலிருந்து ஒரு பொருள் எழுமாருக எடுக்கப்பட்டபோது அது பழுதடைந்ததாகக் காணப்பட்டது. எனின் அது A யினல் நிரம்பல் செய்யப்பட்ட பொருளாகவிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

28. பொருளியற் பரீட்சைக்கு 10, பல தெரிவு வினாக்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. பரீட்சையில் சித்தியடைய ஏழு அல்லது கூடிய வினாக்களுக்குச் சரியாக விடையளிக்கப்பட வேண்டும். ஊகித்து விடை எழுதும் ஒரு மாணவன் பின்வரும் நிலைமைகளில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(அ) ஒவ்வொரு வினாவும் 8 வெவ்வேறு விடைகளைக் கொண்டிருப்பின்,

(ஆ) ஒவ்வொரு வினாவும் 4 வெவ்வேறு விடைகளைக் கொண்டிருப்பின்,

(இ) முதல் 5 வினாக்களும் 3 வெவ்வேறு விடைகளையும், மிகுதி 5 வினாக்களும் 4 வெவ்வேறு விடைகளையும் கொண்டிருப்பின்.

29, தரப்பட்ட ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து எழுமாறாக ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகின்றதெனின் பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(அ) Heart (ஆ) Ace அல்லது Heart
(இ) An Ace (ஈ) A Heart அல்லது A club.

30. A, B, C என்னும் 3 யந்திரங்கள் முறையே மொத்த உற்பத்தியில் 50%, 30%, 20% என்பவற்றை உற்பத்தி செய்கின்றன. அவற்றுள் முறையே 3%, 4%, 5% என்பன பழுதடைந்தவை. ஓர் உற்பத்திப் பொருள் எழுமாறாக எடுக்கப்படுகின்றதெனின் அது பழுதடைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட பொருள் பழுதடைந்து காணப்படின் அப்பொருள் யந்திரம் A என்பதனால் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

விடைகள்

அத்தியாயம்: 2

(11) 5, 5, 5·07, 4·43 (12) 665 (13) 32.7, 34·3, 41·7, 25·3, 34·5 (15) 45, 44·75 (18) 13, 20, 13·5 (19) 560, 36 (20) 32·5, 19, 22, 36·5
(24) 12, 13 (25) 97·45, 2·26, 2·92 (26) 0·37
(27) -0·03

அத்தியாயம்: 3

1. (அ) $\{5\}$ (ஆ) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   (இ) $\{2, 3, 4, 5\}$ (ஈ) $\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   (உ) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

2. (அ), (ஆ), (உ) என்பன உண்மை

4. (அ) $A \cap \overline{B \cup C}$ அல்லது $\bar{A} \cap B \cap C$

   (ஆ) $[A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap \bar{B} \cap C]$

   (இ) $(A \cup B) \cap \bar{C}$

   (ஈ) $A \cup B \cup C$

   (உ) $A \cap B \cap C$

   (ஊ) $\overline{A \cap B \cap C}$

5. (ஆ), (இ), (ஈ) என்பன பின்னக மாதிரிவெளிகள்

6. $\{DD, NDD, DNDD, DNDN, DNND, DNNN, NDND, NDNN, NNDD, NNDN, NNND, NNNN\}$

7. (அ) $\{(1,5)\ (2,5)\ (3,5)\ (4,5),\ (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,5)\}$

   (ஆ) $\{(2,6)\ (3,5)\ (4,4)\ (5,3)\ (6,2)\}$

   (இ) $\{(3,5)\ (5,3)\}$

(ஈ) $\{(1,5)\ (2,5)\ (2,6)\ (3,5)\ (4,4)\ (4,5)\ (5,1)$

$(5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,2)\ (6,5)\}$

8. (ஈ) A, D முட்டற்றவை

(உ) $\{(3,3)\}$

9. (அ) $\frac{5}{8}$ (ஆ) $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$ (இ) $\frac{5}{8}$ (ஈ) $\frac{3}{4}$

(உ) $\frac{3}{4}$ (ஊ) $\frac{1}{8}$

10. (அ) $\frac{1}{3}$ (ஆ) $\frac{11}{12}$ (இ) $\frac{5}{12}$

11. (அ) 0·5 (ஆ) 0·5 (இ) 0·25

(ஈ) 0·25 (உ) 0·75 (ஊ) 0·75

12. (அ) 0·4, 0·33, 0·27

(ஆ) 0·6 (இ) 0·67 (ஈ) 0·4

13. (அ) 56 (ஆ) 112 (இ) 104 (ஈ) 228

(உ) 314 (ஊ) 86

14. (அ) 0·6 (ஆ) 0·08 (இ) 0.92

15. 0·813

16. 0.02, 0.28

17. (ஆ)P(A)

18. (அ) 0·24 (ஆ) இல்லை (இ) 0.686

19. 0·087

20. (அ) (இ) என்பன பொய்

22. (அ) 0·3

23. 0·362, 0·406, 0·232

24. $\frac{75}{187}$

25. (அ) 0·51

26. (அ) $\frac{37}{256}$ (ஆ) $\frac{29}{128}$ (இ) $\frac{23}{64}$

27. 0·807

28. (அ) 0·02 (ஆ) 0·0035 (இ) 0·0087

30. 0·037, 0·405

ஆசிரியரின் அடுத்த வெளியீடு!

புள்ளிவிபரவியலில் தொடர்ந்து வரும் முக்கிய பகுதிகளை,

குறிப்பாக,

எழுமாற்று மாறிகள்

நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

போன்றவற்றை உள்ளடக்கிய

புள்ளிவிபரவியல்

(பாகம் II)

புள்ளிவிபரவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளைத் தாமாகவே பயிலும் சகல மாணவர்களுக்கும் உதவும் நோக்குடன், பலதரப்பட்ட உதாரணங்களையும், விளக்கப் படங்களையும், பயிற்சிகளையும் இந்நூல் தாங்கி வருகின்றது.

மேலும் பின்னிணைப்பில்:

பயிற்சிகளுக்கான விடைகளும்

மிக முக்கியமான புள்ளிவிபர அட்டவணைகளும்

புள்ளிவிபரவியலில் வரும் கலைச்சொற்களுக்கான ஆங்கிலச் சொற்களும்

இணைக்கப்பட்டுள்ளன.