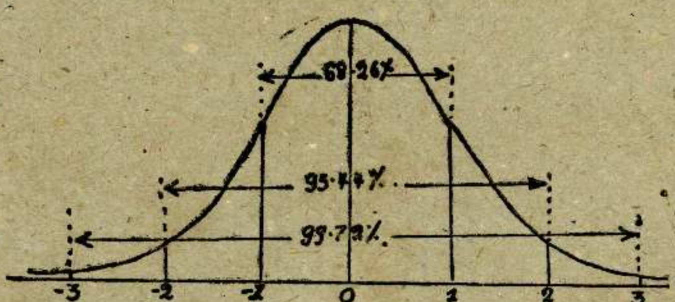
மாணவர்

புள்ளிவிபரவியற்

கைநூல்

வரைவிலக்கணங்களும்
புள்ளிவிபர அட்டவணைகளும்



பாலசிங்கம் பத்மநாதன்

மாணவர்

புள்ளிவிபரவியற்

கைநூல்

பா. பத்மநாபன் B. A., Dip. in Maths.

உதவி விரிவுரையாளர்,

இலங்கைப் பல்கலைக்கழகம்,

பேராதனை வளாகம்.

வரைவிலக்கணங்களும்

புள்ளிவிபர அட்டவணைகளும்

STATISTICS

Definitions &
Statistical tables.

B. PATHMANAPAN B. A., Dip. in Maths.

Asst. Lecturer,
Dept. of Economics, Political Science,
Commerce & Statistics
University of Sri Lanka,
Peradeniya Campus

First Edition: September 1977
Printers : Bastian Press, Jaffna.
Art : S. Shanmuganathan
Price : 5-50

பொருளடக்கம்

*குறியீடுகள் சில

$\bar{X}$	–	X சலாகை (X Bar)
Σ	–	கூட்டுத்தொகை — சிக்மா
$\cup$	–	ஒன்றிப்பு
$\cap$	–	இடைவெட்டு
$\supset, \subset$	–	உள்ளடக்கம்
ϕ	–	பைய் (Phi)
α	–	அல்பா (Alpha)
β	–	பீற்ரு (Beta)
γ	–	காமா (Gamma)
θ	–	தீற்ரு (Theta)
λ	–	லம்டா (Lambda)
μ	–	மியூ (Mu)
π	–	பை (Pi)
σ	–	சிக்மா (Sigma)
ρ	–	ரோ (Rho)
ν	–	நியூ (Nu)
χ	–	கைய் (Chi)
$\sim$	–	பரம்பப்பட்டுள்ளது
$X<Y$	–	X சிறிது Y
$X>Y$	–	X பெரிது Y
$X\leqslant Y$	–	X சிறிது அல்லது சமன் Y
$X\geqslant Y$	–	X பெரிது அல்லது சமன் Y

*இந்நூலில் எடுத்தாளப்பட்ட குறியீடுகளுக்கான விளக்கம்

வரைவிலக்கணங்கள் (DEFINITIONS)

1: புள்ளிவிபரவியல் (Statistics)

புள்ளிவிபரவியல் என்பது தரவுகளைத் திரட்டி ஒழுங்கு படுத்தித் தொகுத்து, பின்னர் ஒப்புக்கொள்ளக்கூடிய முடிபுகளைப் பெற்று அம் முடிபுகளிலிருந்து பொருத்தமான தீர்மானங்களை மேற்கொள்ள உதவும் விஞ்ஞான முறையாகும்.

2: விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் (Descriptive Statistics)

தரப்பட்ட தொகுதித் தரவுகளைமட்டும் விபரித்துப் பகுக்கும் புள்ளிவிபரவியற் பகுதி விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் அல்லது உய்த்தறி புள்ளிவிபரவியல் எனப்படும். அதாவது இப்பகுதியானது தரவுகள் எவ்வாறு வகைப்படுத்தப்பட்டு அட்டவணைப்படுத்தப்படுகின்றன என்பதையும், பின்னர் அவை மீடிறன் பரம்பல்களாக உணர்த்தப்பட்டு அவற்றிலிருந்து தரப்பட்ட தரவுகள் பற்றிய முடிபுகள் எவ்வாறு பெறப்பகின்றன என்பதனையும் மட்டுமே அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது.

2.1: மாறி (Variable)

ஒரு கூட்டத்திலிருக்கும் ஓர் உறுப்பின் தன்மை ஏனைய உறுப்புக்களின் தன்மையினின்றும் கணியத்திலோ பண்பிலோ எவ்வாறு வேறுபடுகின்றதென்பதைக் காட்டும் சிறப்புக்கூறு மாறி எனப்படும்.

பொதுவாக ஒரு மாறியானது பின்கை மாறியாகவோ அன்றித் தொடர் மாறியாகவோ காணப்படலாம்.

மாறியொன்று குறிப்பிட்ட தனியாக்கிய பெறுமானங்களை மட்டுமே எடுப்பின் அது **பின்னக மாறி**யெனவும், குறிப்பிட்ட ஆயிடையிலுள்ள எப்பெறுமானங்களையும் எடுப்பின் அது **தொடர் மாறி**யெனவும் அழைக்கப்படும்.

2.2: மீடிறன் பரம்பல் (Frequency Distribution)

ஒரு தொகுதித் தரவுகள் வகுப்புகளாக வகுப்பாக்கப்பட்டு, ஒவ்வொரு வகுப்பிற்குமுரிய மீடிறன்கள் அவதானிக்கப்படுகின்றதென்க. இவ்வாறு வகுப்பாக்கப்பட்ட வகுப்புகளை அவற்றுக்கொத்த மீடிறன்களுடன் கொண்ட ஓர் அட்டவணை, மீடிறன் பரம்பல் அட்டவணை அல்லது மீடிறன் பரம்பல் எனப்படும்.

2.3: இடங்காணல் அளவைகள் (Measures of Location)

(அ) கூட்டலிடை (Arithmetic Mean)

மாறியொன்றின் கூட்டலிடையானது, மாறியேற்கும் மதிப்புகளெல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் பிரிக்க வருவதேயாகும்.

X என்னுமொரு மாறியானது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்னும் n பெறுமானங்களை எடுப்பின்,

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

$$= \frac{\sum x}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

X என்னும் மாறியானத்து $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்னும் பெறுமானங்களை முறையே $f_1, f_2, \ldots\ \ldots, f_n$ என்னும் ஒத்த மீடிறன்களுடன் எடுப்பின்,

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

இங்கு $N = \sum f$

உத்தேசித்த இடையாக a பயன்படுத்தப்படின்,

$$\bar{X} = a + \frac{\sum fd}{N} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

இங்கு $d = x - a$

அத்துடன் வகுப்பாயிடையளவுகள் c என்னும் எண்ணிறுற் பிரி படக் கூடியனவாயின்,

$$\bar{X} = a + c\,\frac{\sum fx}{N} \qquad \text{............... (4)}$$

இங்கு $u = \dfrac{x - a}{c}$

(ஆ) பெருக்கலிடை (Geometric Mean)

X என்னுமொரு மாறியானது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்னும் n பெறு மானங்களை எடுப்பின்,

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n} \qquad \text{............... (5)}$$

X என்னும் மாறியானது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ என்னும் பெறுமானங் களை முறையே $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_n$ என்னும் ஒத்த மீடிறன்களுடன் எடுப்பின்,

$$G = \left(x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots\ldots \times x_n^{f_n}\right)^{\frac{1}{N}} \text{...............(6)}$$

(இ) இடையம் (Median)

மீடிறன் பரம்பலொன்றை இரு சம பங்காகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானம் அப்பரம்பலின் இடையம் எனப் படும்.

$$\text{இடையம்} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)h}{f} \qquad \text{............... (7)}$$

(ஈ) காலணைகள் (Quartiles)

மீடிறன் பரம்பலொன்றை நான்கு சம பங்காகப் பிரிக் கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் அப்பரம்பலின் காலணை கள் (Q_i) எனப்படும்.

$$Q_i = l + \frac{\left(\frac{iN}{4} - m\right)h}{f} \qquad \text{.............. (8)}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3$$

(உ) தசவீதத்திகள் (Deciles)

மீடிறன் பரம்பலொன்றை பத்து சமபங்குகளாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் அப்பரம்பலின் தசவீதத்திகள் (D_i) எனப்படும்.

$$D_i = l + \frac{\left(\frac{iN}{10} - m\right)h}{f} \qquad \text{.............. (9)}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ 9$$

(ஊ) சதமணைகள் (Percentiles)

மீடிறன் பரம்பலொன்றை நூறு சமபங்குகளாகப் பிரிக்கும் மாறியின் பெறுமானங்கள் அப்பரம்பலின் சதமணைகள் (P_i) எனப்படும்.

$$P_i = l + \frac{\left(\frac{iN}{100} - m\right)h}{f} \qquad \text{.............. (10)}$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 99$$

m — குறிப்பிட்ட வகுப்பிற்கு மேலுள்ள வகுப்பு வரையுள்ள திரட்டு மீடிறன்

l — குறிப்பிட்ட வகுப்பின் கீழெல்லை

f — குறிப்பிட்ட வகுப்பு மீடிறன்

h — குறிப்பிட்ட வகுப்பின் வகுப்பாயிடையளவு

(எ) ஆகாரம் (Mode)

மீடிறன் பரம்பலொன்றில் உயர்வு மீடிறனுக்கொத்த மாறியின் பெறுமானம் அப்பரம்பலின் ஆகாரம் எனப்படும்.

$$\text{ஆகாரம்} = l + \left(\frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \right) h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

f_m — உயர்வு மீடிறன்

f_1 — ஆகார வகுப்பிற்கு முன்னுள்ள வகுப்பு மீடிறன்

f_2 — ஆகார வகுப்பிற்கு பின்னுள்ள வகுப்பு மீடிறன்

எந்த ஒரு மீடிறன் பரம்பலுக்கும்,

(இடை — ஆகாரம்) = 3 (இடை — இடையம்)

சமச்சீர்ப் பரம்பல்களுக்கு

இடை = இடையம் = ஆகாரம்

2.4: பிரிகை அளவைகள் (Measures of Dispersion)

(அ) வீச்சு (Range)

தரப்பட்ட பச்சை எண் தரவுகளை பந்தி உருவில் ஒழுங்குபடுத்தின், அவ்வொழுங்கிலிருக்கும் மிகப்பெரிய எண்ணிற்கும் மிகச் சிறிய எண்ணிற்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் தரவின் வீச்சு எனப்படும்.

(ஆ) இடை விலகல் (Mean deviation)

$$\text{இடை விலகல்} = \frac{\sum |x - \bar{X}|}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (12)$$

(இ) நியமவிலகல் (Standard deviation)

மாறியொன்று ஏற்கும் மதிப்புகளினது இடையிலிருந்தான விலகல்களின் வர்க்கங்களுடைய கூட்டுத்தொகையின் சராசரி குறிப்பிட்ட மாறியின் நியமவிலகல் (σ) எனப் படும்.

மாறி X ஆனது $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற n நோக்கங்களை எடுப்பின்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

நேரடிக் கணித்தல்களுக்கு,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

மாறி X ஆனது $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ என்ற பெறுமானங்களை முறையே $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ என்னும் ஒத்த மீடிறன்களுடன் எடுப்பின்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

இங்கு $N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f$

மாறி X இனது அளவின் தொடக்க நிலையை வலப்பக்கம் கிடைவீச்சு a (உத்தேசித்த இடை) ஆகவுள்ள புள்ளிக்கு மாற்றப்படின் $(D = X - a)$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

இங்கு $d = x - a$

அத்துடன் அளவிடையும் $1/c$ மடங்காக மாற்றப்படின்

$$\sigma = c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

இங்கு $u = \dfrac{x - a}{c}$

(ஈ) மாறற்றிறன் (Variance)

விலகல்களின் வர்க்கங்களுடைய கூட்டுத்தொகையின் சராசரி மாறற்றிறன் (σ^2) எனப்படும்.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{X})^2}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

(உ) தொடர்புப் பிரிகை (Relative dispersion)

$$\text{தொடர்புப் பிரிகை} = \frac{\text{தனியான விலகல்}}{\text{சராசரி}}$$

$$= \frac{x - \bar{X}}{\bar{X}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

(ஊ) மாறற் குணகம் (Coefficient of Variation)

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

2.5: ஓராய அளவைகள் (Measures of Skewness)

$$\text{ஓராயம்} = \frac{\text{இடை} - \text{ஆகாரம்}}{\text{நியமவிலகல்}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

3: நிகழ்தகவு (Probability)

அன்றாட வாழ்க்கையில் இயற்கையாக நிகழக்கூடிய பல எதிர் கால நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகள் அல்லது அவைபற்றி மனத்திலே தோன்றும் எண்ணங்கள், கருத்துக்கள் போன்றவற்றைப் போதுமான அளவு திட்டவட்டமாக வரையறுத்துக் கூறுதல் பகுத்தறிவிற்கு அப் பாற்பட்டதொன்றாகும். எனினும் பல நிலைமைகளில் எதிர்கால நிகழ்ச்சிகளின் விளைவுகள் அவை நேருவதற்கு முன்னமே வேண்டப் படுகின்றன. இவ்வாறு திட்டவட்டமாக வரையறுத்துக் கூறமுடியாத சந்தர்ப்பங்களிலேதான் நிகழ்தகவு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பொதுவாக, நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதை ஓரளவிற்கு அளவிட்டு எண்ணளவில் கூறுவதே நிகழ்தகவு ஆகும்.

பழைய வரைவிலக்கணம்:

சமமாக நிகழக்கூடிய n நிகழ்ச்சிகளுள் நிகழ்ச்சி A ஆனது s முறை நேர்ந்தால் Aயின் நிகழ்தகவு,

$$P(A) = \frac{s}{n}$$

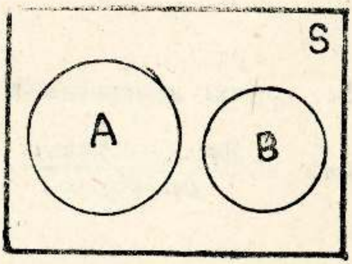
3.1: மாதிரி வெளி (Sample Space)

பரிசோதனை ஒன்றின் எல்லா இயல்தகு விளைவுகளின் தொடை அப்பரிசோதனையுடன் சேர்க்கப்படும் மாதிரிவெளி (S) எனப்படும்.

மாதிரி வெளியின் தொடைப்பிரிவு ஒன்று ஒரு நிகழ்ச்சி என்றும், மூலகம் ஒன்றை மாத்திரம் கொண்டுள்ள நிகழ்ச்சி ஆரம்ப நிகழ்ச்சி என்றும் அழைக்கப்படும்.

3.2: தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events)

S இலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஏதாவது ஒன்று நிகழும்போது மற்றைய நிகழ்ச்சி நிகழாவண்ணம் தடைப்படுமானால் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.



அதாவது, $A \cap B = \phi$ எனின் A, B தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

3.3: சாரா நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சிகளுள் ஒரு நிகழ்ச்சி நேர்வது மற்றைய நிகழ்ச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் நேர்வதை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காமல் இருக்குமானால் அந்நிகழ்ச்சிகளெல்லாம் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

கவனிக்க:

எனவே ஏதாவது இரு நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகவும், ஒன்றையொன்று சாராதவையாகவும் இருக்கமுடியாது.

3.4: நிகழ்தகவிற்கான நவீன வரைவிலக்கணம்

S என்பது ஒரு பரிசோதனை ε உடன் சேர்ந்த மாதிரி வெளி என்க. S இலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A இற்கும் பின்வரும் வெளிப்படை உண்மைகளைத் திருப்தி செய்யுமாறு ஓர் எண் $P(A)$ வழங்கப்படுமானால் அவ்வெண், A இன் நிகழ்தகவு எனப்படும்.

வெளிப்படை உண்மைகள்:

(i) S இலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A இற்கும் $O \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$

(ii) $\mathrm{P}(S) = 1$

(iii) A, B என்பன S இலுள்ள தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$P(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

(iv) $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots$ என்பன S இலுள்ள தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் தொடரிகளெனின்,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots) = \mathrm{P}(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots$$

3.5: நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுபற்றிய தேற்றங்கள்

(i) $\mathrm{P}(\phi) = 0$

(ii) $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

(iii) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(v) $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

(vi) **நிகழ்தகவிற்கான கூட்டல் விதி**

A, B என்பன தம்முள் புறநீக்கும் இரு நிகழ்ச்சிகளெனின்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

அதேபோல A, B, C என்பன சோடியாய் தம்முள் புறநீக்குவனவெனின்

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

(vii) $A \subseteq B$ எனின் $P(A) \leq P(B)$

viii) $P(A \cap B) \leq P(A)$; $P(A \cup B) \geq P(A)$

$P(A \cap B) \leq P(B)$; $P(A \cup B) \geq P(B)$

(ix) **நிபந்தனை நிகழ்தகவு**

மாதிரிவெளி S இலுள்ள A, B என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளுள் நிகழ்ச்சி A நேர்ந்துவிட்டதெனத் தரப்பட $P(A) > 0$ ஆயிருக்க, B யினது நிபந்தனை நிகழ்தகவு,

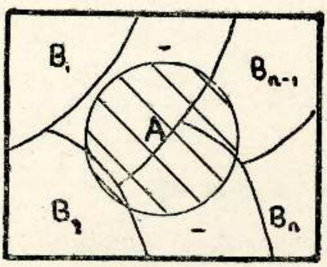
$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ ஆகும்.

(x) $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$

(xi) **கூட்டு நிகழ்தகவுத் தேற்றம்** *(Theorem on Total Probability)*

$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ என்பன மாதிரிவெளி S இன் ஒரு பிரிவினையைக் குறிப்பதாயும், A என்பது S இலுள்ள யாதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சியும் எனின்,

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots\ldots + P(A \mid B_n)P(B_n)$$



(xii) **பெயிசுவின் தேற்றம்** *(Baye's Theorem)*

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

இங்கு $B_i \cap B = \phi$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$

(xiii) S இலுள்ள A, B என்னுமிரு நிகழ்ச்சிகளுள் நிகழ்ச்சி B யானது நேர்ந்துவிட்டதெனத் தரப்பட A இன் நிபந்தனை நிகழ்தகவானது, A இன் நிகழ்தகவிற்குச் சமனுயின் [$P(A \mid B) = P(A)$ எனின்] A யானது Bஐப் புள்ளியியலாகச் சாராதது எனப் படும்.

(xiv) **நிகழ்தகவிற்கான பெருக்கல் விதி**

A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகளெனின்

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(xv) A, B, C என்பன சோடியாய்ச் சாரா நிகழ்ச்சிகளெனின்,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(C \cap A) = P(C)P(A)$$

(xvi) A, B, C என்பன தம்முள்ச் சாரா நிகழ்ச்சிகளெனின் மேலுள்ள (xv) 3 நிபந்தனைகளுடன் பின்வரும் நிபந்தனையும் தனித் தனியே திருப்தி செய்யப்படல் வேண்டும்.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

4: எழுமாற்று மாறி (Random Variable)

பரிசோதனை ஒன்றின் முக்கியமான பகுதிகளை அளவிட்டுக் கூறுவதற்காகவே எழுமாற்று மாறி அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றது.

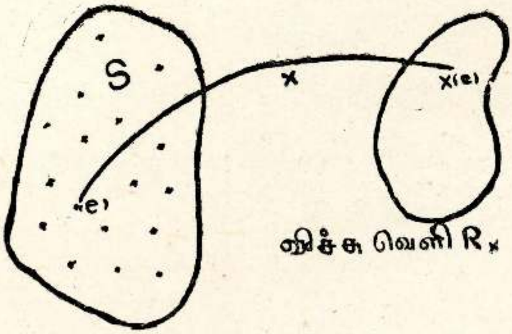
ஒரு நிகழ்ச்சியினைக் குறிக்கும் மாறியினது திட்பமான பெறுமானத்தை அந்நிகழ்ச்சி நேருவதற்கு முன்பாக எதிர்வு கூறமுடியாவிடின் அம்மாறியை எழுமாற்று மாறி எனலாம்.

4.1: ஒரு பரிமாண எழுமாற்று மாறிகள் (One Dimensional Random Variables)

ε என்பது மாதிரிவெளி S உடன் சேர்க்கப்பட்ட யாதுமொரு பரிசோதனை என்க. ஒரு சார்பு X ஆனது, மாதிரிவெளி S இலுள்ள

ஒவ்வொரு மூலகம் e இற்கும் $X(e)$ என்னும் மெய்யெண்ணை வரையறுக்குமாயின் அவ்வெண் ஓர் **எழுமாற்று மாறி** எனப்படும்.

அதாவது, எழுமாற்று மாறியானது மாதிரிவெளி S மீது வரையறுக்கப்படும் ஒரு மெய்ப் பெறுமானச் சார்பு ஆகும்.



4.2: பின்னக எழுமாற்று மாறி (Discrete Random Variable)

X என்பது மாதிரிவெளி S இலுள்ள ஓர் எழுமாற்று மாறி என்க. X பெறக்கூடிய பெறுமானங்களின் எண்ணிக்கை (X இன் வீச்சு) முடிவான (*Finite*) தாயோ எண்ணத்தகுவன (*Denumerable*) வாயோ இருப்பின் X ஆனது பின்னக எழுமாற்று மாறி எனப்படும். அதாவது X ஆனது $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots$ என்னும் பெறுமானங்களைப் பெறக்கூடியது.

நிகழ்தகவுச் சார்பு (Probability Function)

X என்பது மாதிரிவெளி S இலே வரையறுக்கப்படும் ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி என்க. X இனது நிலைத்த பெறுமானம் x_i ஒவ்வொன்றிற்கும் ஓர் எண் $p(x_i) = P(X = x_i)$ சேர்க்கப்படுகின்றது.

எனின் $p(x_i); i = 1, 2 \ldots\ldots$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருத்தி செய்யும்:

(i) $p(x_i) \geq 0$ எல்லா i இற்கும்

(ii) $\sum_{i=1} p(x_i) = 1$

மேலே வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு p ஆனது எழுமாற்று X இனது நிகழ்தகவுச் சார்பு எனப்படும்.

4.3: தொடர்ச்சியுள்ள எழுமாற்று மாறி (Continuous Random Variable)

ஓர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது குறிப்பிட்ட ஆயிடையிலுள்ள எல்லாப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கின்றதென்க. X எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்களெல்லாம் மாறிகளாகவும் (மாறிலி அல்லாதவை) X இனது i ஆவது பெறுமானத்தைப்பற்றி ஒன்றும் எதிர்வு கூறமுடியாதவாறு இருப்பின் X ஆனது தொடர்சியுள்ள எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability Density Function)

X என்பது மாதிரிவெளி S இலே வரையறுக்கப்படும் ஒரு தொடர்ச்சியுள்ள எழுமாற்று மாறி என்க. பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தி செய்யுமாறு ஒரு சார்பு f பெறப்படின் அச்சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனப்படும்

(i) $f(x) \geq 0$ எல்லா x இற்கும்

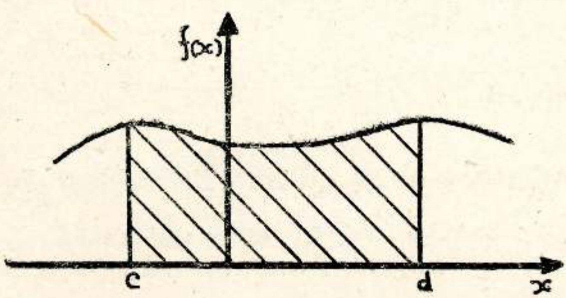
(ii) $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(iii) $-\infty < a < x < b < \infty$ ஆகுமாறு ஏதாவது a, b இற்கு

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

கவனிக்க:

(i) $P(c < X < d)$ என்னும் நிகழ்தகவானது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f இனைக்கொண்ட வளையியினாலும் $x = c, x = d$ என்னும் கோடுகளினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக்குறிக்கும்.

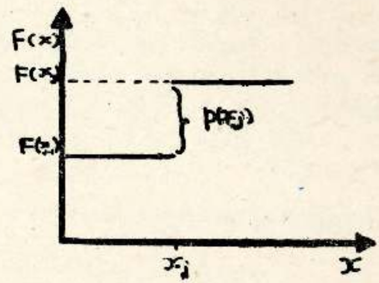


(*ii*) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

(*iii*) X ஆனது ஒரு தொடர்ச்சியுள்ள எழுமாற்று மாறியெனின் $F(x)$ ஆனது முதலாம் படிக்கு வகையிடத்தக்கது. அதாவது,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \quad \text{(வகையீடு உளதாயிருக்கும்போது)}$$

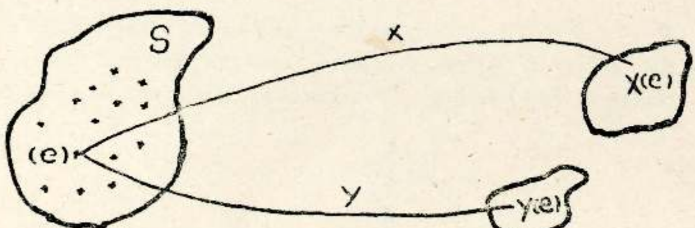
(*iv*) X என்பது $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ...... என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கக்கூடிய ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி எனின்



$$P(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1})$$

4.4: இரு பரிமாண எழுமாற்று மாறிகள் (Two Dimensional Random Variables)

e என்பது மாதிரிவெளி S உடன் சேர்க்கப்பட்ட யாதுமொரு பரிசோதனை என்க. $X = X(e)$, $Y = Y(e)$ என்னுமிரு சார்புகள் ஒவ்வொன்றும் S இலுள்ள ஒவ்வொரு விளைவு e இற்கும் ஒரு மெய் யெண்ணை வழங்குமாயின் (X, Y) என்பது இரு பரிமாண எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.



கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பு (Joint Probability Function)

(X, Y) என்பது S இலே வரையறுக்கப்படும் ஒரு பின்னக இரு பரிமாண எழுமாற்று மாறி என்க. (X, Y) இன் ஒவ்வொரு இயல்

தகு விளைவு (x_i, y_i) இற்கும் பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தி செய்யுமாறு ஓர் எண் $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ ஐச் சேர்த்துக் கொள்க.

$$(i) \quad p(x_i, y_j) \geq 0 \quad \text{எல்லா } (x, y) \text{ இற்கும்}$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

எனின், எல்லா (x_i, y_j) இற்கும் மேலே வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு p ஆனது (X, Y) இனது கூட்டு நிகழ்தகவுச் சார்பு எனப்படும்.

கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Joint Probability Density Function)

இரு பரிமாண வெளியிலுள்ள ஒரு தொடர்ச்சியுள்ள எழுமாற்று மாறி (X, Y) ஆனது குறிப்பிட்ட ஒரு தொகுதி R இலுள்ள எல்லாப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கின்றதென்க. எனின் (X, Y) இனது கூட்டு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தி செய்யும்.

$$(i) \quad f(x, y) \geq 0 \quad \text{எல்லா } (x, y) \in R \text{ இற்கும்}$$

$$(ii) \quad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

4.5: ஓர நிகழ்தகவுப் பரம்பல் (Marginal Probability Disribution)

(i) பின்னக வகையில்:

எழுமாற்று மாறி X இனது ஓர நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $p(x_i)$ ஆனது

$$p(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) \quad \text{எனவும்}$$

எழுமாற்று மாறி Y இனது ஓர நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $q(y_i)$ ஆனது,

$q(y_j) = \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

(ii) தொடர்ச்சியுள்ள வகையில்:

எழுமாற்று மாறி X இனது ஓர நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $g(x)$ ஆனது

$$g(x) = \int_{\infty}^{\infty} f(x, y)dy$$ எனவும்

எழுமாற்று மாறி Y இனது ஓர நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $h(y)$ ஆனது

$$h(y) = \int_{\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

4.6: நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரம்பல் (Conditional Probability Distribution)

(i) பின்னக வகையில்:

எழுமாற்று மாறி X இனது நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $Y = y_j$ எனத்தரப்பட $p(x_i \mid y_j) = \mathrm{P}(X = x_i \mid Y = y_j)$ இனுல் குறிக்கப்பட்டு,

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}$$; இங்கு $q(y_j) > 0$, எனவும்

(ii) தொடர்ச்சியுள்ள வகையில்:

$g(x), h(y)$ என்பன முறையே X, Y இனது ஓர நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்புகளெனின் எழுமாற்று மாறி X இனது நிபந்தனை நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $Y = y$ எனத்தரப்பட,

$$g(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்

இதேபோல y இற்கும் வரையறுக்கப்படலாம்.

4.7: சாரா எழுமாற்று மாறிகள் (Independent Random Variables)

எழுமாற்று மாறி X இனுடைய விளைவு, எழுமாற்று மாறி Y இனுடைய விளைவை எவ்விதத்திலும் பாதிக்காதெனின் X, Y என்பன சாரா எழுமாற்று மாறிகள் எனப்படும்.

(i) பின்னக வகையில்:

எல்லா i, j இற்கும் $p(x_i, y_j) = p(x_i)\, q(y_j)$ ஆயிருந்தால் மட்டுமே X, Y என்பன சாரா எழுமாற்று மாறிகள் எனப்படும்.

(ii) தொடர்ச்சியுள்ள வகையில்:

எல்லா x, y இற்கும் $f(x, y) = g(x)\, h(y)$ ஆயிருந்தால் மட்டுமே X, Y என்பன சாரா எழுமாற்று மாறிகள் எனப்படும்.

4.8: எழுமாற்று மாறியின் எதிர்பார்த்த பெறுமானம் (The Expected Value of a Random Variable)

எழுமாற்று மாறியொன்றின் எதிர்வு அல்லது எதிர்பார்த்த பெறுமானமானது நிகழ்தகவுகளின் சார்பில் வரையறுக்கப்படும் நிறையளிக்கப்பட்ட கூட்டலிடை என இலகுவாகக் கூறலாம்.

(i) பின்னக வகையில்:

எழுமாற்று மாறி X ஆனது பெறுமானங்கள் x_i; $i = 1, 2, \ldots$ என்பவற்றை ஒத்த நிகழ்தகவுகள் $p(x_i) = P(X = x_i)$ $i = 1, 2, \ldots$ உடன் எடுக்கின்றதென்க. எனின் $E(X)$ என்பதனால் குறிக்கப்படும் X இனது எதிர்பார்த்த பெறுமானம், $E(X) = \sum\limits_{i=1} x_i\, p(x_i)$ என்பதால் வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு $\sum\limits_{i} p(x_i) = 1$ ஆயும், $\sum\limits_{i} x_i\, p(x_i)$ என்பது அற ஒருங்கும் தொடராயும் இருத்தல் அவசியம்.

(ii) தொடர்ச்சியுள்ள வகையில்:

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f இனையுடைய எழுமாற்று மாறி X இனது எதிர்பார்த்த பெறுமானம்

3

$$E(X) = \int_{\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$ என வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு $\int_{\infty}^{\infty} |x| \, f(x) \, dx$ முடிவாயிருப்பின் மட்டுமே

E (X) உளதாயிருக்கும்.

எதிர்பார்த்த பெறுமானத்தினது உடைமைகள்

(i) $E(c) = c$, இங்கு c ஓர் ஒருமை.

(ii) X என்பது ஓர் எழுமாற்று மாறியும், a, b, c ஒருமைகளுமெனின்,

$$E(cX) = cE(X)$$
$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(iii) X, Y என்பன யாதாயினும் ஈர் எழுமாற்று மாறிகளென்க எனின் $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

(iv) $X_1, \ldots, X_n$ என்னும் எழுமாற்று மாறிகளை எடுத்துக் கொள்க. எனின், $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + (X_n)$ இதிலிருந்து,

$E(a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + \ldots + a_n F(X_n)$

இங்கு $a_1, \ldots, a_n$ ஒருமைகள்.

(v) (X, Y) என்பது ஓர் இரு பரிமாண எழுமாற்று மாறியும், X, Y என்பன ஒன்றை ஒன்று சாராதவையுமெனின், $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

4.9: எழுமாற்று மாறியின் மாறற்றிறன்

(The Variance of a Random Variable)

மாறிகள் குறிப்பிட்ட பெறுமானத்தைச் சராசரியாகக் கொண்டிருக்கின்றன என்பதுடன், மாறி எடுக்கும் பெறுமானங்கள் சராசரிப் பெறுமானத்திலிருந்து எவ்வாறு பரந்திருக்கின்றன அல்லது விலகியிருக்கின்றன என்பதும் அறியப்படல் வேண்டும்; இப்பேர்ப்பட்ட நிலைமைகளுக்கு ஒரு மதிப்பினைக் கீழே வரையறுப்போம்;

யாதுமொரு எழுமாற்று மாறி X இனது மாறற்றிறன் (*variance*) ஆனது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ இனற் குறிப்பிடப்பட்டு,

$V(X) = E\left[X - E(X)\right]^2$ என வரையறுக்கப்படும்.

$V(X)$ இன் வர்க்க மூலத்தினது நேர்ப் பெறுமானம் X இனது நியமவிலகல் எனப்படும். இது வழமையாக σ(*Sigma*) இனால் குறிப்பிடப்படும்.

பின்வரும் முடிபிலிருந்து $V(X)$ இனை இலகுவாகக் கணிக்க முடியும்.

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

மாறற்றிறனது உடைமைகள்

(*i*) $V(c) = o$

$V(X + c) = V(X)$; இங்கு c ஓர் ஒருமை

(*ii*) X ஓர் எழுமாற்றுமாறியும், a, b, c ஒருமைகளுமெனின்

$V(cX) \quad = c^2 V(X)$

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

(*iii*) (X, Y) என்பது யாதுமோர் இரு பரிமாண எழுமாற்று மாறியும் X, Y என்பன ஒன்றையொன்று சாராதவையுமெனின்,

$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

(*iv*) $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ என்பன n ஒன்றையொன்று சாராத எழுமாற்று மாறிகளெனக. எனின்

$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$

4.10: இணைமாறற்றிறன் (Covariance)

X, Y என்பன மாதிரிவெளி S மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஈர் எழுமாற்று மாறிகள் என்க. $E(X) = \bar{X}$, $E(Y) = \bar{Y}$ எனின் X, Y இனது இணைமாறற்றிறன் cov (X, Y) இனால் குறிக்கப்பட்டு,

$cov(X, Y) = E\left[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\right]$ என வரையறுக்கப்படும். X, Y பின்னக எழுமாற்று மாறிகளெனின்

$$cov(X, Y) = \sum_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y})\, p(x_i, y_j)$$

X, Y தொடர்ச்சியுள்ள எழுமாற்று மாறிகளெனின்

$$cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y})\, f(x, y)\, dx\, dy$$

இணைமாறற்றிறனது உடைமைகள்

(i) இணைமாறற்றிறன் பரிவர்த்தனைத் தன்மையுடையது அதாவது $cov\ (X, Y) = cov\ (Y, X)$

(ii) எழுமாற்று மாறியொன்றிற்கும் ஒரு மாறிலிக்குமிடையிலான இணைமாறற்றிறன்பூச்சியம். $cov(X, c) = 0; c$ — மாறிலி

(iii) ஈர் எழுமாற்று மாறிகளின் இணைமாறற்றிறன் மாறிகளுடன் சில மாறிலிகளைச் சேர்த்துக் கொள்வதனுல் மாற்றமடையாது. அதாவது,
$cov\ (X + a, Y + b) = cov(X, Y); a, b$ ஒருமைகள்

(vi) ஆனுல் எழுமாற்று மாறிகளை ஒருமையினுல் பெருக்கின்
$cov\ (a X, b Y) = a\, b\ cov\ (X, Y)$

(v) இணைமாறற்றிறனுக்கான கூட்டல்விதி
$cov\ (X + Y, Z) = cov\ (X, Z) + cov\ (Y, Z)$

(vi) $cov(X, X) = V(X)$

5. நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

(Probability Distributions)

மாறியொன்று ஏற்கும் பெறுமானங்களை அவற்றிற் கொத்த நிகழ்தகவுகளுடன் கொண்ட ஓர் அட்டவணை அல்லது தொடை அம்மாறியினது நிகழ்தகவுப் பரம்பல் எனப்படும். பல வேளைகளில் மாறிகள் தனிப் பெறுமானங்களை எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைவிட அவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களே அதி முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாகக் காணப்படுகின்றன.

பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

பேனுாயி முயல்புகள் (Bernoulli's Trials)

மீண்டும் மீண்டும் நடைபெறும் சாரா முயல்புகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் இரு விளைவுகள் மாத்திரமே உளவாகவும் இவ்விளைவுகள் மாரு நிகழ்தகவுகளைக் கொண்டனவாகவுமிருப்பின் அம்முயல்புகள் பேனுாயி முயல்புகள் எனப்படும்.

5·1: ஈருறுப்புப் பரம்பல் (Binomial Distribution)

n சாரா பேனுாயி முயல்புகளின்போது பெறப்படும் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையை X என்னுமொரு பின்னக எழுமாற்று மாறி குறிக்கின்றதென்க.

X இனது நிகழ்தகவுச் சார்பு.

$$p(x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}; \; x = o, 1, \dots, n; \; q = 1 - p$$

என்பதாலே தரப்படின் X ஆனது n, p பரமானங்களைக் கொண்டு ஈருறுப்பாகப் பரம்பப்பட்டிருக்கும்;

$X \sim B(n, p)$ எனின்,

(i) $E(X) = np$

(ii) $V(X) = npq$

(iii) $p(x+1) = \dfrac{(n-x)}{(x+1)} \; \dfrac{p}{q} \; p(x)$

5·2: புவசோன் பரம்பல் (Poisson Distribution)

X என்னுமொரு பின்னக எழுமாற்று மாறி $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கின்றதாகக் கொள்க; X இனது நிகழ்தகவுச் சார்பு,

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}; \; x = o, 1, \dots, n, \dots$$

இங்கு $\lambda = np, \; e = 2{\cdot}7183$

என்பதாலே தரப்படின் X ஆனது λ பரமானத்தை உடைய புவசோன் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

$X \sim P(\lambda)$ எனின்,

(i) $E(X) = \lambda$

(ii) $V(X) = \lambda$

(iii) $P(x+1) = \dfrac{\lambda}{(x+1)} \; p(x)$

தொடர்ச்சி நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

5 3: செவ்வன் பரம்பல் (Normal Distribution)

ஓர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ வரையிலுள்ள எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கின்றதென்க;

X இனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

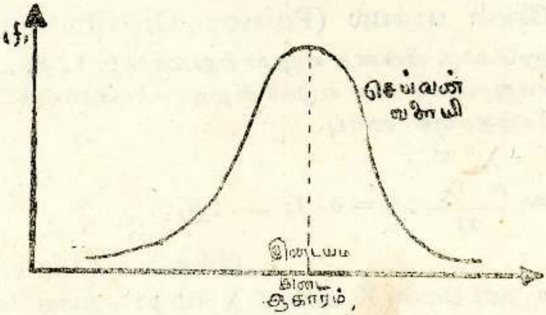
என்பதாலே தரப்படின் X ஆனது μ, σ^2 பரமானங்களைக் கொண்டு செவ்வனகப் பரம்பப்பட்டிருக்கும்.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனின்,

(i) $E(X) = \mu$

(ii) $V(X) = \sigma^2$

பொதுவாக செவ்வன் வளையியின் அமைப்பு சமச் சீரானதாகவே காணப்படும். அதாவது, வளையியானது நிலைக்குத் அச்சிற்குச் சமாந்தரமான கோடு பற்றி மடிக்கப்படின் அதன் இரு பாதிகளும் ஒன்றின்மேல் ஒன்று மேற்படிவதைக் காண முடியும். அத்துடன் வளையி உள்ளடக்கும் பரப்பு மொத்த நிகழ்தகவு 1 இற்குச் சமனாகும்.



(அ) நியமச் செவ்வன் பரம்பல்
(Standard Normal Distribution)

Z என்னும் ஓர் எழுமாற்று மாறியினது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

என்பதாலே தரப்படின், Z ஆனது பூச்சியத்தினை இடையாகவும், ஒன்றினை நியம விலகலாகவும் கொண்டு நியமச் செவ்வனாகப் பரம்பப்பட்டுள்ளது எனப்படும்.

அதாவது $Z \sim N(0, 1)$

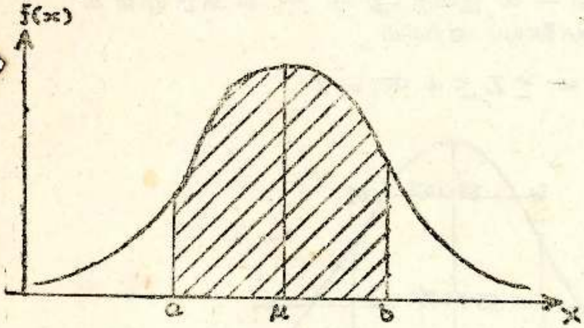
இங்கு Z ஆனது நியம செவ்வன் மாறி (Standard Normal Variable) எனப்படும்.

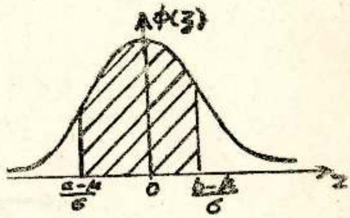
எந்த ஒரு மாறியையும், அதிலிருந்து அதன் இடையினைக் கழித்து வருவதை நியமவிலகலால் பிரிப்பதன் மூலம் ஒரு நியம செவ்வன் மாறியாக மாற்றலாம்.

அதாவது $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

எனவே $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனின்,

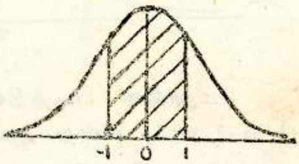
$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$



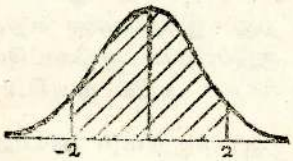


உதாரணமாக,

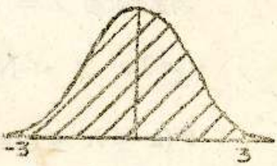
$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0{\cdot}6826 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0{\cdot}9544 \end{aligned}$$



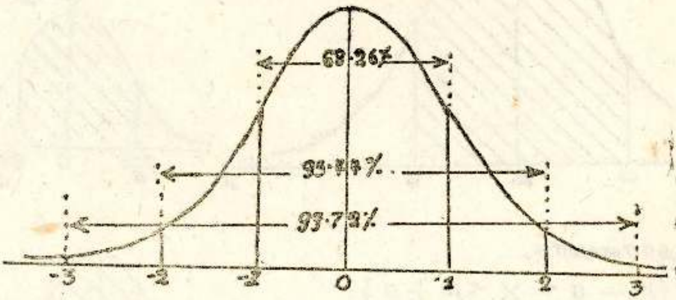
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$



$$= P(-3 \leq Z \leq 3)$$
$$= 2P(0 \leq Z \leq 3)$$
$$= 0{\cdot}9972$$

மேலும் Z ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ வரையுள்ள எல்லாப் பெறுமானங்களையும் ஏற்கும்.

அத்துடன் $P(-\infty \leq Z \leq +\infty) = 1$



மேலுள்ள படத்திலிருந்து 68·26 வீதயான தரவுகள் [z=−1, z=1] என்ற ஆயிடையினுள்ளும், 95·44 வீதமான தரவுகள் [−2, 2] என்ற ஆயிடையினுள்ளும், 99·72 வீதமானவை [−3, 3] என்ற ஆயிடையினுள்ளும் இருப்பதைக் காணமுடிகின்றது. இதேபோல எத்தனைவிதமான தரவுகள் மாறி Z இன் குறிப்பிட்ட ஆயிடையொன்றினுள் காணப்படுகின்றன என்பதனையும் அறிய முடிகின்றது.

(ஆ) ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்குச் செவ்வன் அண்ணளவாக்கம்

எழுமாற்று மாறி X ஆனது n, p பரமானங்களைக் கொண்டு ஈருறுப்பாகப் பரம்பப்பட்டுள்ளதென்க.

எனின், $Z = \dfrac{X - np \pm \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}$ ஆனது

n இனது பெரிய பெறுமானத்திற்கு அண்ணளவாக நியமச் செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

புள்ளியியல் அனுமானம் (Statistical Inference)

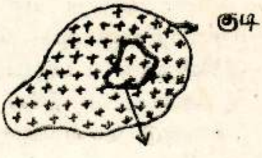
குடியொன்றின் வகை மாதிரியை ஆராய்ந்து அதிலிருந்து குடி பற்றிய முக்கியமான முடிபுகளை அனுமானிக்கக்கூடிய அனுமானம் என்ன நிபந்தனைகளின்கீழ் ஒப்புக்கொள்ளக்கூடியது என்று ஆராயப் படும் புள்ளிவிபரவியற் பகுதி 'தொகுத்தறி புள்ளிவிபரவியல்' அல்லது 'புள்ளியியல் அனுமானம்' எனப்படும்.

6. மாதிரியெடுப்புப் பரம்பல்கள் (Sampling Distributions)

நடைமுறையில் ஒரு முழுத் தொகுதியின் குணதிசயங்களைப் பற்றி அறிவதற்கு அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் பரிசீலனை செய்து முடிவுக்கு வருவது இயலாத காரியம். மாறாக, தரப்பட்ட தரவுகள் முழுத் தொகுதியொன்றின் (குடி) வகை மாதிரியாயின் குடி பற்றிய முக்கிய முடிபுகளை அம் மாதிரியை ஆராய்வதால் அனுமானிக்க முடியும். மாதிரித் தரவுகளிலிருந்து ஒத்த குடிப்பரமானங்களை மதிப்பிடவோ அன்றி ஒத்த குடி பற்றிய தீர்மானங்களை எடுக்க வேண்டிய தேவையோ காணப்படுகின்றது. இதற்கு, மாதிரித் தரவுகளின் பரம்பல்கள் வேண்டப்படுகின்றன. மாதிரியெடுப்புப் பரம்பல்கள் பற்றிய ஆய்விலிருந்து மாதிரித் தரவுகள் பற்றிய செய்திகளைப் பெறமுடிகின்றது.

குடி (Population)

சோதனையின் கீழுள்ள எல்லா மூலகங்களையும் கொண்டுள்ள தொடை அல்லது தொகுதி குடி எனப்படும். இதிலுள்ள மூலகங்கள் சிலவற்றின் சேர்க்கை மாதிரி (sample) எனப்படும்.



பரமானம் (Parameter)

குடிப் பரம்பலொன்றின் சிறப்பியல்புகளை விபரிக்கும் அளவைகள் அப்பரம்பலின் பரமானங்கள் எனப்படும். உதாரணமாக, குடியிடை (μ), குடி மாறற்றிறன் (σ^2), குடிவிகிதசமம் (π),... போன்றவை.

எழுமாற்று மாதிரி (Random Sample)

எழுமாற்று மாறி X என்பது குறிப்பிட்ட ஒரு நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளதென்க. $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ என்னும் n எழுமாற்று

மாறிகளின் பரம்பல்கள் X இனது பரம்பலுக்கு ஒத்தாயின், (X_1, X_2,……,X_n) என்பது எழுமாற்று மாறி X இலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஓர் எழுமாற்று மாதிரி எனப்படும்.

புள்ளிவிபரம் (Statistic)

மாதிரிப் பரம்பலொன்றின் சிறப்பியல்புகளை விபரிக்கும் அளவை ஒவ்வொன்றும் அப்பரம்பலின் புள்ளிவிபரம் எனப்படும்.

உதாரணமாக, மாதிரியிடை ($\overline{X}$), மாதிரி மாறற்றிறன் (S^2), மாதிரி விகிதசமம் (p),……… போன்றவை.

புள்ளிவிபரமானது மாதிரித் தரவுகளிலிருந்து கணிக்கப்படுவதால் அதுவும் ஓர் எழுமாற்று மாறியாகும்.

நியம வழு (Standard Error)

புள்ளிவிபரம் ஒன்றின் நியம விலகலானது அதன் நியம வழு எனப்படும்.

6.1: மாதிரியிடை $\overline{X}$ இனது பரம்பல்

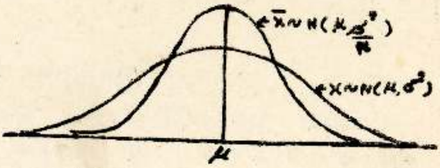
தேற்றம் 6.1

எழுமாற்று மாறி X ஆனது μ இனை இடையாகவும் σ^2 ஐ மாறற்றிறனாகவும் கொண்டு செவ்வனாகப் பரம்பப்பட்டுள்ளதென்க. இதிலிருந்து n பருமன் கொண்ட மாதிரி எடுக்கப்படின், மாதிரியிடை $\overline{X}$ ஆனது μ இனை இடையாகவும், σ^2/n இனை மாறற்றிறனாகவும் கொண்டு செவ்வனாகப் பரம்பப்பட்டிருக்கும்.

அதாவது,

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனின்

$\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,



குறிப்பு :

மாதிரி எடுக்கப்படும் குடி முடிவானதாயின் (finite population) மாதிரியிடையினது மாறற்றிறனில் திருத்தம் செய்யப்படல் வேண்டும்.

இங்கு $\overline{X} \sim N\left[\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\right]$

மைய எல்லைத் தேற்றம் (The Central Limit Theorem)

$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ என்னும் தொடரியிலுள்ள சாரா எழுமாற்று மாறிகளை எடுத்துக் கொள்க, இங்கு,

$$E(X_i) = \mu_i, \quad V(X_i) = \sigma_i^2; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots$$

$X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n$ எனின், பொதுவான சில நிபந்தனைகளின் கீழும், n இனது போதியளவு பெரிய பெறுமானத்திற்கும்,

$Z = \dfrac{X - \Sigma\mu_i}{\sqrt{\Sigma\sigma_i^2}}$ ஆனது அண்ணளவாக நியமச் செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

வேறொரு வடிவம்

எல்லா i இற்கும் $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ எனின்,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

தேற்றம் 6·2 ($n < 30$ கொண்ட சிறிய மாதிரிகளுக்கு)

எழுமாற்று மாதிரி $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ ஆனது இடை μ உம், தெரியாத மாறற்றிறன் σ^2 உம் கொண்ட ஒரு செவ்வன் குடியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றதென்க. $\bar{X}$, S^2 என்பன முறையே மாதிரியிடையையும், மாதிரி மாறற்றிறனையும் குறிப்பின், t ஆனது $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ என வரையறுக்கப்பட்டு $(n-1)$ சுயாதீனப் படிகளைக்கொண்ட 't' பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

இங்கு $S^2 = \Sigma(x - \bar{X})^2 / (n-1)$

6 3: இரு மாதியிடைகளின் வித்தியாசம் $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ இனது பரம்பல்

தேற்றம் 6·3:

$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ என்பன முறையே $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ என்னும் செவ்வன் குடிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n_1, n_2 என்னும் பருமன்கள் கொண்ட இரு சாரா எழுமாற்று மாதிரிகளின் இடைகள் என்க. எனின்,

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left[(\mu_1 - \mu_2), \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)\right]$$

தேற்றம் 6·4 (σ_1^2, σ_2^2 என்பன தெரியாக்கணியங்கள் ஆனால் சமமானவை)

μ_1, μ_2 இனை இடைகளாகவும், σ_1^2, σ_2^2 இனை மாறற்றிறன்களாகவும் கொண்ட இரு செவ்வன் குடிகளிலிருந்து முறையே n_1, n_2 பருமன்கள் கொண்ட இரு சாரா எழுமாற்று மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன என்க. அவற்றின் மாதிரியிடைகள் முறையே $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ உம், மாதிரி மாறற்றிறன்கள் முறையே S_1^2, S_2^2 உம் எனின்,

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

இங்கு சுயாதீனப் படிகள் $(n_1 + n_2 - 2)$

தேற்றம் 6·5 (σ_1^2, σ_2^2 என்பன சமமல்லாத தெரியாக்கணியங்கள்)

இங்கு $$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \simeq t_v$$

சுயாதீனப்படிகளின் எண்ணிக்கை $$v = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_2)^2}{n_1 + 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 + 1}} - 2$$

6·3: மாதிரி மாறற்றிறன் S^2 இனது பரம்பல்

தேற்றம் 6·6

எழுமாற்று மாதிரி $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ஆனது, இடை μ உம், மாறற்றிறன் σ^2 உம் கொண்ட ஒரு செவ்வன் குடியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றதென்க. $\bar{X}$, S^2 என்பன முறையே மாதிரியிடை, மாதிரி மாறற்றிறன் எனின்,

$$\frac{(n-1) S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

இங்கு சுயாதீனப் படிகள் $(n - 1)$

6·4: மாதிரி விகிதசமம் p இனது பரம்பல்

தேற்றம் 6·7

π விகித வெற்றிகளையுடைய (ஒரு வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு π) ஓர் ஈருறுப்புக் குடியிலிருந்து *(Binomial Population)* n பருமன்

கொண்ட எழுமாற்று மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றதென்க. n இனது பெரிய பெறுமானத்திற்கு மாதிரி விகிதசமம் $p\ (=x/n)$ ஆனது அண்ணளவாகப் பின்வரும் செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

$$p \simeq N\left[\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right]$$

6·5: இரு மாதிரி விகிதசமங்களின் வித்தியாசம் $p_1 - p_2$ இனது பரம்பல்

தேற்றம் 6·8

π_1, π_2 விகித வெற்றிகளையுடைய இரு ஈறுப்புக் குடிகளிலிருந்து முறையே n_1, n_2 பருமன்களைக் கொண்ட இரு சாரா எழுமாற்று மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றதென்க. அவற்றின் மாதிரி விகிதசமங்கள் முறையே p_1, p_2 எனின், n_1, n_2 இனது போதியளவு பெரிய பெறுமானங்களுக்கு,

$$p_1 - p_2 \simeq N\left[(\pi_1 - \pi_2), \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}\right]$$

குறிப்பு: மாதிரிப் பருமன் 100 இனை விடப் பெரிதாக இருப்பின் குடி விகிதசமத்தின் மதிப்பாளுக மாதிரி விகிதசமம் பயன் படுத்தப்படலாம்.

7. பரமானங்களின் மதிப்பீடு (Estimation of Parameters)

எல்லா வேளைகளிலும் குடி பற்றிய தகவல்கள் அல்லது முடிபுகள் எமக்குக் கிடைப்பதில்லை. இச்சந்தர்ப்பங்களிளெல்லாம் மாதிரித் தரவுகளிலிருந்தே ஒத்த குடிப்பரமானங்கள் மதிப்பிடப்படுகின்றன. அதாவது, புள்ளிவிபரங்களே ஒத்த குடிப்பரமானங்களின் மதிப்பான்களாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இத்தகைய அனுமானம் முற்ருய் உறுதியாயிருக்கமுடியாது என்பதால், முடிபுகள் நிகழ்தகவுகளுடன் இணைத்தே கூறப்படுகின்றன.

புள்ளி மதிப்பு (Point Estimate)

குடிப் பரமானம் ஒன்றின் மதிப்பினை ஒன்றி எண்ணிற் குறிப்பிடுவோமாகில் அது அப் பரமானத்தின் ஒரு புள்ளி மதிப்பு எனப்படும்.

கோடலற்ற மதிப்பு (Unbiased Estimate)

குடிப் பரமானம் ஒன்றின் மதிப்பினது எதிர்வு, ஒத்த அப் பரமானத்திற்குச் சமனுயின் அம் மதிப்பு குறிப்பிட்ட பரமானத்தின் ஒரு கோடலற்ற மதிப்பு எனப்படும்.

அதாவது, $E(\hat{\theta}) = \theta$ எனின், $\hat{\theta}$ ஆனது பரமானம் θ இன் ஒரு கோடலற்ற மதிப்பு ஆகும்.

உதாரணமாக, $E(\overline{X}) = \mu$ ஆகையால் மாதிரியிடை குடியிடையினது ஒரு கோடலற்ற மதிப்பான் ஆகும்.

திறமையான மதிப்பு (Efficient Estimate)

குடிப்பரமானமொன்றின் பல கோடலற்ற மதிப்புக்கள் தரப்படின், அவற்றுள் குறைந்த மாறற்றிறனைக் கொண்ட மதிப்பு, மற்றையவற்றுடன் ஒப்பிடுமிடத்து திறமையான மதிப்பு எனப்படும்.

ஆயிடை மதிப்பு (Interval Estimate)

குடிப் பரமானம் ஒன்று, இரு வேறு பெறுமானங்களுக்கிடையே கிடக்கின்றதாகக் கொள்வோமாகில் அப்பரமானத்தின் மதிப்பு ஓர் ஆயிடை மதிப்பு எனப்படும்.

7·1: நம்பிக்கை ஆயிடைகள் (Confidence Intervals)

$\theta_L(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$, $\theta_H(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ என்னுமிரு புள்ளிவிபரங்கள் $P(\theta_L < \theta < \theta_H) = 1 - \alpha$ ஆகுமாறு காணப்படின், எழுமாற்று ஆயிடை (θ_L, θ_H) ஆனது பரமானம் θ இனது $100(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை ஆயிடை எனப்படும். இங்கு α ஓர் ஒருமை.

மேலும், (θ_L, θ_H) ஆனது பரமானம் θ இன் ஓர் **ஆயிடை மதிப்பான்** (Interval Estimator) எனவும்,

நம்பிக்கை ஆயிடையின் முடிவுப் புள்ளிகள் θ_L, θ_H என்பன θ இனது $100(1-\alpha)\%$ **நம்பிக்கை எல்லைகள்** (*Confidence Limits*) எனவும்,

$(1-\alpha)$ ஆனது **நம்பிக்கைக் குணகம்** (*Confidence Coefficient*) எனவும் அழைக்கப்படும்.

7.2: சில முக்கிய குடிப் பரமானங்களுக்கான $100(1-\alpha)\%$ நம்பிக்கை ஆயிடைகள்

(அ) செவ்வன் குடியொன்றின் இடை μ இற்கான நம்பிக்கை ஆயிடை

(i) σ^2 தெரியப்படின்

$$\left[\bar{X} \pm Z\alpha/2 \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

அதாவது. $P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

இங்கு எழுமாற்று ஆயிடை $\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

ஆனது μ இனைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $(1-\alpha)$ ஆகும். அதாவது $100(1-\alpha)\%$ ஆயிடைகள் μ இனைக் கொண்டிருக்கும்.

(ii) σ^2 தெரியப்படாவிடின்,

$$\left[\bar{X} \pm t_{(n-1), \alpha/2} \ \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

(ஆ) இரு செவ்வன் குடியிடைகளின் வித்தியாசம் $\mu_1 - \mu_2$ இற்கான நம்பிக்கை ஆயிடை

(i) σ_1^2, σ_2^2 தெரியப்படின்,

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

(ii) σ_1^2, σ_2^2 தெரியாக் கணியங்கள் ஆனால் சமனானவை,

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{(n_1+n_2-2), \alpha/2} \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

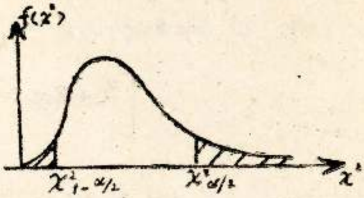
(iii) σ_1^2, σ_2^2 சமமல்லாத தெரியாக் கணியங்கள்,

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{v, \alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

இங்கு v தேற்றம் 6·5 வரையறுக்கப்பட்டதே.

(இ) செவ்வன் குடியொன்றின் மாறற்றிறன் σ^2 இற்கான நம்பிக்கை ஆயிடை

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right]$$



(ஈ) ஈருறுப்புக் குடியொன்றின் விகிதசமம் π இற்கான நம்பிக்கை ஆயிடை (இங்கு $n \geqslant 100$)

$$\left[p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

(உ) இரு ஈருறுப்புக் குடிகளின் விகிதசமங்களது வித்தியாசம் $\pi_1 - \pi_2$ இற்கான நம்பிக்கை ஆயிடை, (இங்கு n_1, $n_2 \geqslant 100$)

$$\left[(p_1 - p_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right]$$

8: கருதுகோள்களைச் சோதனையிடுதல்
(Testing of Hypotheses)

பல வேளைகளில் மாதிரி பற்றிய செய்திகளிலிருந்து குடி பற்றிய தீர்மானங்கள் எடுக்கவேண்டிய நிலை ஏற்படுகின்றது. இவ்வகையான தீர்மானங்கள் புள்ளியியற் தீர்மானங்கள் எனப்படும். இங்கு தீர்மானங்கள் எடுக்கப்படுவதற்கு ஆராயப்படும் குடி பற்றிய சில எடுகோள்களை எடுத்துக் கொள்வது பயனுள்ளதாகும். இவ்வெடுகோள்கள் உண்மையானவையாகவோ அன்றி உண்மையற்றவையாகவோ இருக்கலாம். அவை புள்ளியியற் கருதுகோள்கள் எனப்படும். பொதுவாக, அவை குடிப் பரமானங்களின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் பற்றியவையாகவே காணப்படும். மேலும், பல வேளைகளில் ஒரு புள்ளியியற் கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கென்றே அமைக்கப்படுகின்றது. இப்பேர்ப்பட்ட கருதுகோள்கள் மாதிரித் தரவுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாளுவதன் மூலம் சோதிக்கப்பட்டு, பரமானங்கள் பற்றிய தீர்மானங்கள் எடுக்கப்படுகின்றன.

சூனியக் கருதுகோள் H_0 (Null Hypothesis)

சோதனையொன்றின் போது நிரூபிக்கப்படவேண்டிய கருதுகோள் சூனியக் கருதுகோள் ஆகும்.

மாற்றுக் கருதுகோள் H_1 (Alternative Hypothesis)

சூனியக் கருதுகோளிலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு கருதுகோள் மாற்றுக் கருதுகோள் ஆகும்.

வகை I, வகை II வழுக்கள் (Type I, Type II Errors)

கருதுகோள் சோதனைகளின் போது பெறப்படும் முடிபுகள் யாவும் மாதிரித் தரவுகளையே அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளமையால் அங்கு எடுக்கப்படும் தீர்மானங்களிற் சில பிழையானவை யாயும் காணப்படலாம். மேலும், தீர்மானங்கள் இரு வழிகளில் பிழையானவையாகக் காணப்படலாம்.

தீர்மானம்	உண்மை நிலை	
	H_0 உண்மை	H_1 உண்மை
H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப் படுகின்றது.	சரியான தீர்மானம்	வகை II வழு (β)
H_0 மறுக்கப் படுகின்றது.	வகை I வழு (α)	சரியான தீர்மானம் ($1-\beta=\gamma$)

α = P [வகை I வழு] = P (H_0 மறுக்கப்படுவதற்கான / H_0 உண்மை)

β = P [வகை II வழு] = P (H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படுவதற்கான / H_1 உண்மை)

பொருளுண்மை மட்டம் (α) (Level of Significance)

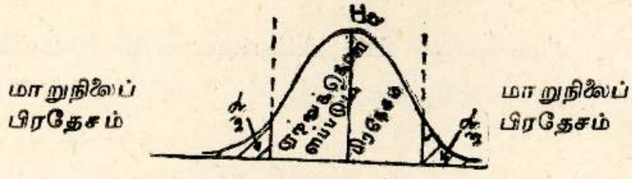
கருதுகோளொன்றினைச் சோதிக்கும்போது வகை I வழுவினை எதிர்நோக்குவதற்கான நிகழ்தகவின் ஆகக்கூடிய பெறுமானம் அச் சோதனையின் பொருளுண்மை மட்டம் எனப்படும்.

சோதிக்கும் புள்ளிவிபரம் (Test Statistic)

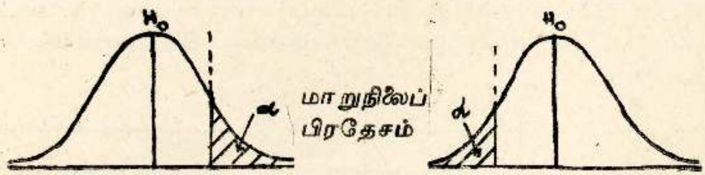
கருதுகோள் சோதனைகளின்போது தீர்மானங்களை மேற்கொள்ள உதவும் ஒரு புள்ளிவிபரம் சோதிக்கும் புள்ளிவிபரம் எனப்படும்.

மாறுநிலைப் பிரதேசம் (Critical Region)

(i) இரு பக்கச் சோதனை



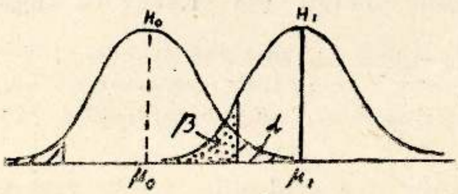
(ii) ஒரு பக்கச் சோதனை



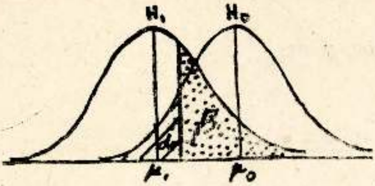
குறிப்பு: சோதனைகளின்போது ஒரு பக்கச் சோதனையா அல்லது இரு பக்கச் சோதனையா பயன்படுத்தப்படவேண்டும் என்பது அச்சோதனைக்குரிய மாற்றுக் கருதுகோளில் தங்கியுள்ளது.

8·1: α% பொருளுண்மை மட்டத்தில், கீழுள்ள கருதுகோள்களைச் சோதிக்கும் போதுள்ள α, β வழுக்கள்

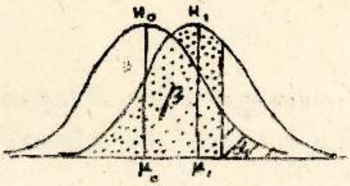
(i) $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \; (\mu_1) \end{array}\right\}$ இரு பக்கச் சோதனை



(ii) $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \; (<\mu_0) \end{array}\right\}$ ஒரு பக்கச் சோதனை (α இடப் பக்கத்தில்)



(iii) $H_0 : \mu = \mu_0$ } ஒருபக்கச் சோதனை (α வலப்
$H_1 : \mu = \mu_1 \; (>\mu_0)$ } பக்கத்தில்)



குறிப்பு:

இங்கு α அதிகரிக்க β குறைவதையும், β அதிகரிக்க α குறைவதையும் அவதானிக்க முடிகின்றது. இதனால் சோதனைகளின் போது α (பொருளுண்மை மட்டம்) நிலையானதாகக் கொள்ளப் பட்டு β ஆனது இயலுமான வரை குறைக்கப்படுகின்றது. வழமையாக α ஆனது 5% அல்லது 1%.

இயக்கும் சிறப்பியல்பு வளையி (Operating Characteristic Curve)

வெவ்வேறு மாற்றுக் கருதுகோள்களிற்கு (μ) β இன் பெறுமானம் மாற்றமடைவதால் இது μ இல் ஒரு சார்பாகும். $\beta(\mu)$ இனைக் குறிக்கும் வளையியானது குறிப்பிட்ட சோதனைக்குரிய இயக்கும் சிறப்பியல்பு வளையி எனப்படும். (குறிப்பிட்ட α, n இற்கு)

வலுச் சார்பு (Power Function)

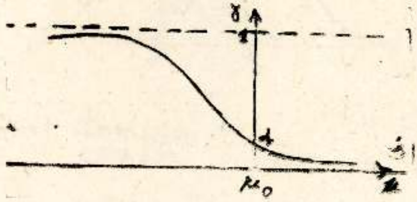
சார்பு $\gamma(\mu) = 1 - \beta(\mu)$ ஆனது குறிப்பிட்ட சோதனையொன்றின் வலுச் சார்பு ஆகும்.

இது H_0 பொய்யாக இருக்கும்போது அது மறுக்கப்படுவதற்கான (அதாவது, சரியான தீர்மானம் ஒன்றை மேறகொள்வதற்கான) நிகழ்தகவைக் குறிக்கின்றது.

கவனிக்க:

$$\gamma\,(\mu_0) = 1 - \beta\,(\mu_0) = \alpha$$

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu = \mu_1 (< \mu_0)$



8·2: சில நியமப் பொருளுண்மைச் சோதனைகளின் சுருக்கம் இடைகளுக்கான சோதனைகள்

1) தெரிந்த மாறற்றிறன் σ^2 இனைக் கொண்ட செவ்வன் குடியொன்றின் இடையினைச் சோதிப்பதற்கான மாறுநிலைப் பிரதேசம்

H_0	H_1	மாறுநிலைப் பிரதேசம்
$\mu = \mu_0$ அல்லது $\mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_1 (> \mu_0)$ அல்லது $\mu > \mu_0$	$\{ Z : Z \geqslant Z_\alpha \}$
$\mu = \mu_0$ அல்லது $\mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_1 (< \mu_0)$ அல்லது $\mu < \mu_0$	$\{ Z : Z \leqslant -Z_\alpha \}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\{ Z : Z \geqslant Z_{\alpha/2}$ அல்லது $Z \leqslant -Z_{\alpha/2} \}$

இங்கு H_0 கருதுகோளின் கீழ் சோதிக்கும் புள்ளிவிபரமாக $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ பயன்படுத்தப்படும்.

(2) தெரியாத மாறற்றிறன் σ^2 இனைக் கொண்ட செவ்வன் குடியொன்றின் இடையினைச் சோதிப்பதற்கான மாறுநிலைப் பிரதேசம்

H_0	H_1	மாறுநிலைப் பிரதேசம்
$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_1 \ (> \mu_0)$	$\left\{ t : t \geqslant t_{(n-1),\ \alpha} \right\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu = \mu_1 \ (< \mu_0)$	$\left\{ t : t \leqslant -t_{(n-1),\ \alpha} \right\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left\{ t : t \geqslant t_{(n-1),\ \alpha/2}$ அல்லது $t \leqslant -t_{(n-1),\ \alpha/2} \right\}$

சோதிக்கும் புள்ளி விபரம் $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

இங்கு $S^2 = \dfrac{\Sigma (x - \bar{X})^2}{n-1} = \dfrac{1}{n-1} \left\{ \Sigma x^2 - \dfrac{(\Sigma x)^2}{n} \right\}$

(3) தெரிந்த மாறற்றிறன்கள் σ^2_1, σ^2_2 இனைக் கொண்ட இரு செவ்வன் குடிகளின் இடைகளினது வித்தியாசத்தைச் சோதிப்பதற்கான மாறுநிலைப் பிரதேசம்

H_0	H_1	மாறுநிலைப் பிரதேசம்
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\left\{ Z : Z \geqslant Z_{\alpha} \right\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\left\{ Z : Z \leqslant -Z_{\alpha} \right\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\left\{ Z : Z \geqslant Z_{\alpha/2}$ அல்லது $Z \leqslant -Z_{\alpha/2} \right\}$

H_0 கருதுகோளின் கீழ் சோதிக்கும் புள்ளி விபரம்,

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(4) σ_1^2, σ_2^2 தெரியாக் கணியங்கள் ஆனால் $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_0	H_1	மாறுநிலைப் பிரதேசம்
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\left\{ t : t \geq t_{v, \alpha} \right\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\left\{ t : t \leq -t_{v, \alpha} \right\}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\left\{ t : t \geq t_{v, \alpha/2}$ அல்லது $t \leq -t_{v, \alpha/2} \right\}$

H_0 கருதுகோளின் கீழ் சோதிக்கும் புள்ளி விபரம்,

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

சுயாதீனப்படி $v = n_1 + n_2 - 2$

(5) σ_1^2, σ_1^2 தெரியாத கணியங்களும், $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(இங்கு மாறுநிலைப் பிரதேசம் மேலே வரையறுக்கப்பட்டவையே)

சோதிக்கும் புள்ளி விபரம் $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_1}}}$

v — தேற்றம் 6·5 இல் வரையறுக்கப்பட்டதே

மாறற்றிறன்களுக்கான சோதனைகள்:

(6) தெரியாத இடை μ இனைக் கொண்ட செவ்வன் குடியொன்றின் மாறற்றிறனைச் சோதிப்பதற்கான மாறுநிலைப் பிரதேசம்

H_0	H_1	மாறுநிலைப் பிரதேசம்
$\sigma^2=\sigma_0{}^2$	$\sigma^2=\sigma_1{}^2(>\sigma_0{}^2)$	$\left\{\chi^2 : \chi^2 \geqslant \chi^2_{(n-1),\alpha}\right\}$
$\sigma^2=\sigma_0{}^2$	$\sigma^2=\sigma_1{}^2(<\sigma_0{}^2)$	$\left\{\chi^2 : \chi^2 \leqslant \chi^2_{(n-1),\,1-\alpha}\right\}$
$\sigma^2=\sigma_0{}^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0{}^2$	$\left\{\chi^2 : \chi^2 \geqslant \chi^2_{(n-1),\alpha/2}\right.$ அல்லது $\left.\chi^2 \leqslant \chi^2_{(n-1),(1-\alpha/2)}\right\}$

H_0 கருதுகோளின் கீழ் சோதிக்கும் புள்ளி விபரம்

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0{}^2}$$

விகிதசமன்களுக்கான சோதனை:

(7) $H_0 : \ \pi_1 = \pi_2 \ (=\pi)$
$H_1 : \ \pi_1 \neq \pi_2$

$\alpha\%$ பொருளுண்மை மட்டத்தில் சோதிக்கும் புள்ளிவிபரமாக,

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n_1} + \dfrac{\pi(1-\pi)}{n_2}}}$$ பயன்படுத்தப்படும்.

இங்கு $\hat{\pi} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$

மாறுநிலைப் பிரதேசம் $\left\{Z : Z \geqslant Z_{\alpha/2} \text{ அல்லது } Z \leqslant -Z_{\alpha/2}\right\}$

8·3: புள்ளியியற் கருதுகோளொன்றினைச் சோதனையிடும் போது கையாளவேண்டிய வழிமுறைகள்

(1) H_0, H_1 இனது பொருத்தமான வடிவத்தினைக் கூறுக;

(2) வேண்டிய பொருளுண்மை மட்டம் α இனைத் தெரிக.

(3) உபயோகிக்கப்படும் சோதிக்கும் புள்ளிவிபரத்தைத் தெரிக. (இங்கு குடிபற்றிய சில பொருத்தமான எடுகோள்கள் மேற்கொள்ளப்படும்.)

(4) 3 இல் தெரியப்பட்ட சோதிக்கும் புள்ளிவிபரத்தின் சார்பில் மாறுநிலைப் பிரதேசத்தை வரையறுக்க.

(5) தரப்பட்ட தரவுகளை உபயோகித்து சோதிக்கும் புள்ளிவிபரத்தின் பெறுமானத்தினைக் கணிக்க.

(6) 5 இல் கணித்த பெறுமானம் 4 இல் வரையறுக்கப்பட்ட மாறுநிலைப் பிரதேசத்தினுள் அடங்குகின்றதா என்பதை அவதானித்து அதிலிருந்து பொருத்தமான முடிபுகளை எடுக்க. இம்முடிபுகள் செயன்முறை அர்த்தமுள்ளனவாய் இருத்தல் வேண்டும்.

கணித்த பெறுமானம் மாறுநிலைப் பிரதேசத்தினுள் அடங்குமாயின் H_0 மறுக்கப்படும். அல்லாவிடில் அது ஏற்றுக் கொள்ளப்படும்.

H_0 மறுக்கப்படும்போது H_1 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

9. இணைபு (Correlation)

இணைபு பற்றிய ஆய்வினை இரண்டு அல்லது மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை ஆராய உதவும் ஒரு புள்ளிவிபர ஆயுதம் எனலாம்.

தொடர்புடைய மாறிகள் எந்தளவிற்குத் தொடர்புபட்டிருக்கின்றன என்பதனை இணைபுக் குணகம் கொண்டு அளக்க முடிகின்றது.

9·1: இணைபுக் குணகம் (Coefficient of Correlation)

எழுமாற்று மாறிகள் X, Y என்பவற்றிற்கிடையிலான இணைபுக் குணகம்,

$$\rho_{X,Y} = \frac{X,\ Y \text{ இன் இணை மாறற்றிறன்}}{\sqrt{X \text{ இன் மாறற்றிறன்} \times Y \text{ இன் மாறற்றிறன்}}}$$

$$= \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

மாதிரி இணைபுக் குணகம்

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ என்பது ஓர் இருமை மாறலி செவ்வன் குடியொன்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n பருமன் கொண்ட மாதிரி என்க. எனின் X, Y இற்கிடையிலான மாதிரி இணைபுக் குணகம்,

$$r = \frac{\Sigma(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\overline{X})^2 (Y-\overline{Y})^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

நேரடிக் கணித்தல்களுக்கு,

$$r = \frac{n\Sigma XY-(\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n\Sigma X^2-(\Sigma X)^2][n\Sigma Y^2-(\Sigma Y)^2]}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ஆரம்பத் தரவுகளுக்குப் பதிலாக நோக்கிய இடைகளிலிருந்தான விலகல்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படின்,

$$r = \frac{n\Sigma d_X d_Y-(\Sigma d_X)(\Sigma d_Y)}{\sqrt{[n\Sigma d_X{}^2-(\Sigma d_X)^2][n\Sigma d_Y{}^2-(\Sigma d_Y)^2]}} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

இங்கு $d_X = x-a, d_Y = y-b$

ஆரம்பத் தரவுகளுக்குப் பதிலாக அவற்றின் இடைகளிலிருந்தான விலகல்கள் கவனத்திற் கொள்ளப்படின்,

அதாவது $X-\overline{X} = x, Y-\overline{Y} = y$ எனின்

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

இணைபுக் குணகத்தின் உடைமைகள்:

(i) இது அலகற்றது.

(ii) $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$

(iii) X, Y ஒன்றை ஒன்று சாராதவையெனின் $\rho = 0$
(இதன் மறுதலை உண்மையன்று)

(iv) இணைபுக் குணகம் உற்பத்தி, அலகு மாற்றங்களினால் மாற்றமடையாது.

அதாவது, $\rho_{ax+b,\, cy+b} = \rho_{x,y}$

5

9·2: வகுதி இணைபுக் குணகம் (Rank Correlation Coefficient)

பண்புசார் மாறிகளை எடுத்து நோக்கும் போது அப்பண்புகளுக்கான உண்மையான எண்கணித அளவுகளை அளக்கமுடியாது. இவை போன்ற மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள இணைபை விளக்குவதற்கு அவற்றினது தரப்பட்ட பெறுமானங்களை எடுத்து நோக்காது, அவற்றைப் பெறுமானங்களுக்கேற்ப ஒழுங்குபடுத்தி அவற்றின் வகுதிகளையே எடுத்துக் கொள்ளல் வேண்டும். வெவ்வேறு மாறிகளின் வகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பையே வகுதி இணைபு விளக்குகின்றது.

வகுதி இணைபுக் குணகம்

$$r' = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2-1)} \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

இங்கு $d_i - (x_i - y_i)$ வகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள வேறுபாடு
n — வகுதிகளின் எண்ணிக்கை.

10. பிற்செலவு (Regression)

பிற்செலவு பற்றிய ஆய்வினை ஒரு மாறியின் தெரிந்த பெறுமானத்தினைக் கொண்டு அதனுடன் தொடர்புடைய இன்னொரு மாறியின் பெறுமானத்தினை மதிப்பிட அல்லது எதிர்வு கூற உதவும் ஒரு புள்ளிவிபர ஆயுதம் எனலாம்.

10·1: பிற்செலவு மாதிரியுரு (Regression Model)

$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon$$

இங்கு பின்வரும் எடுகோள்கள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன:

(i) சாரா மாறி X ஆனது எவ்வித வழுவுமின்றி நோக்கப்படும்.

(ii) X இன் மீதான Y இனது பிற்செலவு (*Regression of* Y *on* X) ஏகபரிமாணமானது.

(iii) எச்சங்கள் (*Residuals*) ϵ_i ஆனவை தம்முள் சாராதவை.

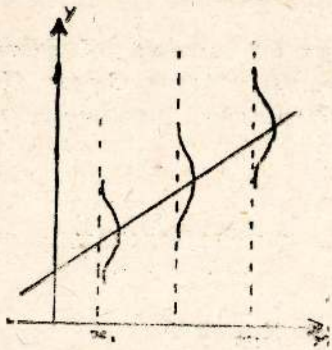
(iv) X இனது எப் பெறுமானத்திற்கும் எச்சங்கள் சமமான மாறற்றிறனைக் (σ^2) கொண்டிருக்கும்.

(v) எச்சங்கள் பூச்சிய இடையினைக் கொண்டு செவ்வனாகப் பரம்பப்பட்டிருக்கும்.

அதாவது, $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

எனவே X இன் மீதான Y இனது குடிப் பிற்செலவுச் சமன்பாடு

$$E(Y/x) = \alpha + \beta x$$



$E(Y/x) = \alpha + \beta x$

இங்கு பரமானங்கள் α, β குடிப் பிற்செலவுக் குணகங்களைக் குறிக்கும்.

10·2: α, β இனது இழிவு வர்க்க மதிப்பான்கள் (Least Square Estimates of α and β)

இங்கு வழுக்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை Σe_i^2 இழிவு படுத்தப்படுகின்றது.

செவ்வன் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y &= na + b\Sigma X \\ \Sigma XY &= a\Sigma X + b\Sigma X^2 \end{aligned}\right\}$$

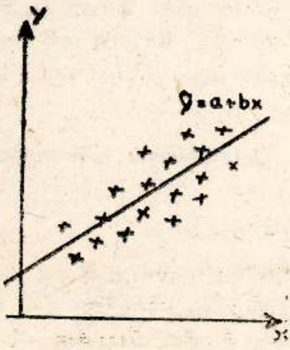
இங்கு $a - \alpha$ இன் மதிப்பான்
$b - \beta$ இன் மதிப்பான்.

$$\Rightarrow b = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

எனவே பொருத்தப்பட்ட பிற்செலவுச் சமன்பாடு

$\hat{Y} = a + bX$



குறிப்பு:

Y இனை சாரா மாறியாகவும், X இனைச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டால், Y இன் மீதான X இனது பிற்செலவுச் சமன்பாடு பெறப்படும். அதாவது,

$$\hat{X} = a' + b' Y$$

$$\text{இங்கு } b' = \frac{n \Sigma XY - \Sigma(X)(\Sigma Y)}{n \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}$$

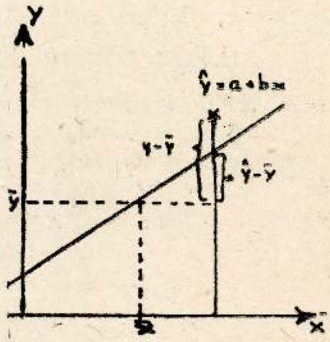
$$a' = \overline{X} - b'\overline{Y}$$

10·3: துணிபுக் குணகம் (Coefficient of Determination)

$$R^2 = \frac{\text{விளக்கப்பட்ட மாறல்}}{\text{மொத்த மாறல்}}$$

$$= \frac{\Sigma(\hat{Y} - \overline{Y})^2}{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}$$

$$= r^2$$



இது பிற்செலவுக் கோடு அமைத்ததினால் எத்தனை வீதமான வழுக்கள் நீக்கப்படுகின்றன என்பதைக் காட்டுகின்றது.

11. காலத்தொடர் (Time Series)

கால வேறுபாட்டால் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறி பல பெறுமானங்களைப் பெற முடிகின்றமையைக் காணமுடிகின்றது. ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட நேரத்திலும் அல்லது காலப்பகுதியிலும் மாறி ஏற்கும் மதிப்புகளை வரிசையாக அமைத்துப் பெறப்படும் தொடரையே காலத் தொடர் என்போம்.

காலத் தொடரின் போக்கினைப் பின்வருமாறு பிரித்து ஆராய்வது வழக்கம்:

(i) பொதுவான போக்கு (T)

(ii) சக்கரமான போக்கு (C)

(iii) பருவகால மாறலுக்குரிய போக்கு (S)

(iv) ஒழுங்கற்ற தளம்பலுக்குரிய போக்கு (I)

காலத் தொடர் பற்றிய ஆய்வு:

காலத்தொடரில் வரும் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் மேற்கூறப் பட்ட நான்கினதும் சேர்க்கையால் ஏற்பட்டது எனக் கூறலாம்.

கூட்டல் மாதிரியுரு:

$$O = T+C+S+I$$

(T, C, S, I, என்பன ஒன்றை ஒன்று சாராதவை)

பெருக்கல் மாதிரியுரு:

$$O = T \times C \times S \times I$$

(T, C, S, I என்பன ஒன்றையொன்று சார்ந்தவை)

12. சுட்டெண்கள் (Index Numbers)

தொடர்ச்சியுடைய மாறிகளைக் கொண்ட தொகுதியிலுள்ள வேறுபாடுகளை அளவிட்டுக் கூறுவதன் பொருட்டே சுட்டெண்கள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. உதாரணமாக, விலைவாசிகளின் ஏற்றத்தாழ்வுகளை அளவிட்டுக் கூற விலைச் சுட்டெண்கள் அமைக்கப்படுகின்றன.

சுட்டெண்களை அமைக்கும்போது சுட்டெண்ணது தேவை, அடிப் படை ஆண்டைத் தெரிதல், கணித்தலிலுள்ள விடயங்களின் எண் ணிக்கையைத் தெரிதல், விலை பற்றிய குறிப்புக்கள், சராசரியைத் தெரிதல், பொருத்தமான நிறைகளைத் தெரிதல், பொருத்தமான சமன் பாட்டைத் தெரிதல் என்பவை கவனத்திற் கொள்ளப்படல் வேண்டும்.

12·1: நிறையேற்றுத சுட்டெண்கள்

(i) எளிய திரட்டு முறையால்

$$PI_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100$$

P_1 — தற்போதைய ஆண்டில் விலை
P_0 — அடிப்படை ஆண்டில் விலை

(ii) எளிய சராசரித் தொடர்பு முறை

$$PI_{01} = \frac{\Sigma (P_1/P_0) 100}{N}$$

N — பண்டங்களின் எண்ணிக்கை

12·2: நிறையேற்றிய சுட்டெண்கள்

எளிய முறையில் சுட்டெண்களைக் கணக்கிடும் போது ஒவ் வொரு பண்டத்திற்கும் ஒரேயளவில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படு

கின்றது. மாறாக ஒவ்வொரு பொருளும் எத்தனை தடவைகள் இடம் பெற்றன எனக் கண்டு அவைகளை நிறைகளாகப் பாவித்துக் காணும் சராசரிச் சுட்டெண் நிறையேற்றிய சுட்டெண் எனப்படும்.

(i) லாஸ்பயரின் விலைச் சுட்டெண் (Laspeyre's Price Index)

இங்கு அடிப்படை ஆண்டுப் பெறுமானங்கள் நிறைகளாகப் பாவிக்கப்படுகின்றன.

$$L_{PI_{01}} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

q_0—அடிப்படை ஆண்டுக் கொள்வனவுத்தொகை

(ii) பாஷேயின் விலைச்சுட்டெண் (Paasche's Price Index)

தற்போதைய ஆண்டு விலைகளில் பொருட்களைக் கொள்வனவு செய்யும் தொகைகளை நிறைகளாகப் பாவிக்கப்படுகின்றன.

$$P_{PI_{01}} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} \times 100$$

q_1 — தற்போதைய ஆண்டுக் கொள்வனவுத்தொகை

குறிப்பு:

மேற்படி இரு முறைகளையும் ஒப்பிடும்போது லாஸ்பயரின் முறையே சிறந்ததாகும். ஏனெனில் லாஸ்பயரின் முறையில் அடிப்படை ஆண்டின் அளவுகளே நிறைகளாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மாறாக பாஷேயின் முறையில் தற்போதைய ஆண்டின் அளவுகளே நிறைகளாகப் பாவிக்கப்படுகின்றன. நடைமுறையில் இவற்றை பெறுவது எளிதல்ல. எப்பொழுதும் $L_P > P_P$

(iii) தொகைச் சுட்டெண் அல்லது கனவளவுச் சுட்டெண்

தொகைச் சுட்டெண் ஆனது குறிப்பிட்ட காலப் பகுதியில் கொள்வனவு செய்யப்பட்ட தொகையிலுள்ள மாறுபாட்டை விளக்குகின்றது.

$$L_{QI_{01}} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100$$

$$P_{QI_{01}} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100$$

பின்னிணைப்பு

நியமச் செவ்வன் வளையியின் கீழுள்ள பரப்பு
(Areas Under The Standard Normal Curve)

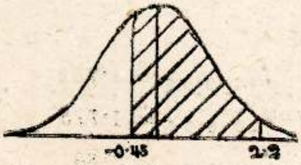
மறுபக்கத்திலுள்ள அட்டவணையானது நியமச் செவ்வன் வளையியின் கீழுள்ள பரப்பினைக் (நிகழ்தகவினைக்) காட்டுகின்றது. இவ்வட்டவணையானது மாறி Z ஆனது வெவ்வேறு பெறுமானங்களைப் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவுகளைக்காண உதவுகின்றது. இது நியமச் செவ்வன் வளையியின் நடுப்புள்ளிக்கும் அதன் நேர்ப்பக்கத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பினைக் (நிகழ்தகவினைக்) குறிக்கும்படியாக அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

நியமச் செவ்வன் வளையி சமச்சீரானதாகையால் வளையியின் நடுப்புள்ளிக்கும் எதிர்ப்பக்கத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு, நேர்ப்பக்கத்திலுள்ள அதே புள்ளிக்கிடைப்பட்ட பரப்பிற்குச் சமனாகும். இதனால் ஒரு பாதித்தரவுகள் மட்டுமே அட்டவணைப்படுத்தப்பட வேண்டிய தேவை காணப்படுகின்றது என்பதனைக் கவனிக்க.

மேலும் Z ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ வரையுள்ள எல்லாப் பெறுமானங்களைப் பெறுகின்றபோதிலும் அட்டவணையில் நிகழ்தகவுகள் Z இனது 0 இலிருந்து 4 வரையுள்ள பெறுமானங்களுக்கு மட்டுமே அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றன. ஏனெனில், Z ஆனது -3.9 க்கும் $+3.9$ க்குமிடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1 ஆகும். எனவே Z ஆனது -3.9 க்குக் குறைவான எப்பெறுமானத்திற்கும் $+3.9$ க்குக் கூடிய எப்பெறுமானத்திற்கும் இடையே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 1 ஆகும்.

உதாரணமாக,

$$P(-0{\cdot}45 \leqslant Z \leqslant 2{\cdot}2)$$
$$= P-0{\cdot}45 \leqslant Z \leqslant 0) + P(0 \leqslant Z \leqslant 2{\cdot}2)$$
$$= 0{\cdot}1736 + 0{\cdot}4861$$
$$= 0{\cdot}6597$$



கை வர்க்கப் பரம்பல் (The Chi-Square Distribution)

எழுமாற்று மாறிகள் Z_i; $i = 1, 2, \ldots\ldots, v$ ஆனவை நியம செவ்வனுகப் பரம்பப்பட்டுள்ளன என்க. எனின், இவற்றினது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கும் எழுமாற்று மாறியானது v சுயாதீனப் படிகளைக் கொண்ட ஒரு கை வர்க்கப் பரம்பலை அமைக்கும்.

அதாவது $Z_i \sim N(0,1)$; $i = 1, 2, \ldots\ldots v$ எனின்

$$(Z_i^2 + Z_2^2 + \ldots\ldots + Z_v^2) \sim \chi_v^2$$

குறிப்பு:

(i) $X \sim \chi_v^2$ எனின், $E(X) = v$, $V(X) = 2v$

(ii) χ^2 பரம்பல் எப்பொழுதும் நேரானதும், v முடிவிலியை அணுக அது செவ்வன் பரம்பலுக்கும் ஒடுங்கும்.

உதாரணமாக,

$$\chi^2_{8, 0\cdot05} = 15\cdot51$$
$$\chi^2_{8, 0\cdot95} = 2\cdot73$$
$$\chi^2_{15, 0\cdot05} = 25\cdot00$$

'துடனின்' t பரம்பல் ('Student's' t Distribution)

ஓர் எழுமாற்று மாறி Z ஆனது நியம செவ்வன் பரம்பலையும் வேறோர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது கை வர்க்கப் பரம்பலையும் கொண்டிருப்பின் இவற்றினைக் கொண்ட விகிதம் $Z/\sqrt{X/v}$ ஆனது v சுயாதீனப் படிகளைக் கொண்ட t பரம்பலை அமைக்கும்.

குறிப்பு:

t பரம்பல் சமச்சீரானதும் v முடிவிலியை அணுக அது செவ்வன் பரம்பலுக்கும் ஒடுங்கும்.

உதாரணமாக,

$$t_{12, 0\cdot05} = 1\cdot782$$
$$t_{20, 0\cdot05} = 1\cdot725$$
$$t_{12, 0\cdot01} = 2\cdot681$$

மடக்கை வாய்பாடு

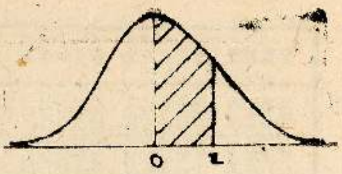
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள் 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9653	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

மடக்கை வாய்பாடு

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	வித்தியாசங்கள்								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0088	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

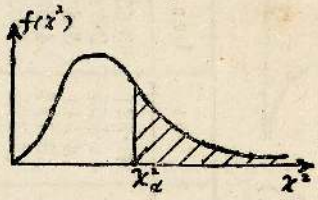
நியம செவ்வன் வளையியின் கீழுள்ள
o இலிருந்து z வரையுள்ள பரப்பு

Areas under the Standard
Normal Curve from o to z



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4454	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4338	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

வெவ்வேறு சுயாதீனப் படிகளில் குறிப்பிட்ட நிகழ்தகவுகளுக்குரிய χ^2 இன் பெறுமானங்கள்

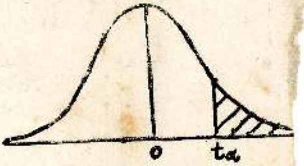


(Values of χ^2 Corresponding to given Probabilities)

α	·995	·990	·975	·950	·100	·050	·025	·010	·005
v=1	$0\cdot0^{4}395$	$0\cdot0^{3}157$	$0\ 0^{3}982$	0·00393	2·71	3·84	5·02	6·63	7·88
2	0·0100	0 0201	0·0506	0·103	4·61	5·99	7·38	9·21	10·60
3	0·0717	0·115	0·216	0·352	6·25	7·81	9·35	11·34	12·84
4	0·207	0·297	0·484	0·711	7·78	9.49	11·14	13·28	14·86
5	0·412	0·554	0·831	1·15	9·24	11·07	12 83	15·09	16·75
6	0·676	0·872	1·24	1·64	10·64	12·59	14·45	16·81	18·55
7	0·989	1·24	1·69	2·17	12·02	14·07	16·01	18·48	20·28
8	1·34	1·65	2·18	2·73	13·36	15·51	17·53	20·09	21·95
9	1·73	2·09	2·70	3·33	14·68	16·92	19·02	21·67	23·59
10	2·16	2·56	3·25	3·94	15·99	18·31	20·48	23·21	25·19
11	2·60	3 05	3·82	4·57	17·28	19·68	21 92	24·73	26·76
12	3·07	3·57	4·40	5 23	18 55	21·03	23·34	26·22	28·30
13	3·57	4·11	5·01	5·89	19 81	22·36	24·74	27·69	29·82
14	4·07	4·66	5 63	6·57	21·07	23·68	26·12	29·12	31·32
15	4·60	5·23	6·26	7·26	22·31	25·00	27·49	30·58	32·80
16	5·14	5 81	6·91	7 96	23·54	26·30	28·85	32·00	34·27
17	5 70	6·41	7·56	8·67	24·77	27·59	30·19	33·41	35 72
18	6·26	7·01	8·23	9·39	25·99	28·87	31·53	34·81	37·16
19	6·84	7 63	8·91	10·12	27·20	30·14	32·85	36·19	38·58
20	7·43	8·26	9 59	10·85	28·41	31·41	34·17	37·57	40·00
21	8·03	8·90	10·28	11·59	29·62	32·67	35·48	38·93	41·40
22	8·64	9·54	10·98	12·34	30·81	33·92	36·78	40 29	42·80
23	9·26	10·20	11·69	13·09	32·01	35·17	38·08	41 64	44·18
24	9·89	10·86	12·40	13·85	33 20	36·42	39·36	42·98	45·56
25	10·52	11·52	13·12	14·61	34·38	37·65	40·65	44 31	46·93
26	11·16	12·20	13·84	15·38	35·56	38·89	41·92	45·64	48·29
27	11·81	12·88	14·57	16·15	36·74	40·11	43·19	46 96	49·64
28	12·46	13·56	15·31	16·93	37·92	41·34	44·46	48·28	50·99
29	13·12	14·26	16·05	17·11	39·09	42·56	45·72	49·59	52·34
30	13·79	14·95	16·79	18·48	40·26	43·77	46·98	50·89	53·67
40	20·71	22·16	24·43	26·51	51·81	55·76	59·34	63·69	66·77
50	27·99	29·71	32 36	34·76	63·17	67·50	71·42	76·15	79·49
60	35·53	37·48	40·48	43·19	74·40	79·08	83·30	88·38	91·95
70	43·28	45·44	48·76	51·74	85·53	90·53	95·02	100·4	104·2
80	51·17	53·54	57·15	60·39	96·58	101·9	106·6	112·3	116·3
90	59·20	61·75	65·65	69·13	107·6	113·1	118·1	124·1	128·3
100	67·33	70·06	74·22	77·93	118·5	124·3	129·6	135·8	140·2

துடனின் 't' பரம்பல் அட்டவணை

வெவ்வேறு பொருளுண்மை மட்டங்களில் ஒவ்வொரு சுயாதீனப் படிக்குமுரிய t இன் மாறுநிலைப் பெறுமானம்.
(t இனது எதிர்ப் பெறுமானங்களுக்கு சமச் சீர்த் தன்மையைப் பயன்படுத்துக.)



சு.ப. d. f	$t_{.10}$	$t_{.05}$	$t_{.025}$	$t_{.01}$	$t_{.005}$
1	3·078	6·314	12·706	31·821	63·657
2	1·886	2·920	4·303	6·965	9·925
3	1·638	2·353	3·182	4·541	5·841
4	1·533	2·132	2·776	3·747	4·604
5	1·476	2·015	2·571	3·365	4·032
6	1·440	1·943	2·447	3·143	3·707
7	1·415	1·895	2·365	2·998	3·499
8	1·397	1·860	2·306	2·896	3·355
9	1·383	1·833	2·262	2·821	3·250
10	1·372	1·812	2·228	2·764	3·169
11	1·363	1·796	2·201	2·718	3·106
12	1·356	1·782	2·179	2·681	3·055
13	1·350	1·771	2·160	2·650	3·012
14	1·345	1·761	2·145	2·624	2·977
15	1·341	1·753	2·131	2·602	2·947
16	1·337	1·746	2·120	2·583	2·921
17	1·333	1·740	2·110	2·567	2·898
18	1·330	1·734	2·101	2·552	2·878
19	1·328	1·729	2·093	2·539	2·861
20	1·325	1·725	2·086	2·528	2·845
21	1·323	1·721	2·080	2·518	2·831
22	1·321	1·717	2·074	2·508	2·819
23	1·319	1·714	2·069	2·500	2·807
24	1·318	1·711	2·064	2·492	2·797
25	1·316	1·708	2·060	2·485	2·787
26	1·315	1·706	2·056	2·479	2·779
27	1·314	1·703	2·052	2·473	2·771
28	1·313	1·701	2·048	2·467	2·763
29	1·311	1·699	2·045	2·462	2·756
30	1·310	1·697	2·042	2·457	2·750
40	1·303	1·684	2·021	2·423	2·704
60	1·296	1·671	2·000	2·390	2·660
120	1·289	1·658	1·980	2·358	2·617
∞	1·282	1·645	1·960	2·326	2·576

ஆசிரியரின் மற்றைய வெளியீடுகள் !

புள்ளிவிபரவியல்

விவரணப் புள்ளிவிப்ரவியலும் நிகழ்தகவும்

(Descriptive Statistics & Probability)

விலை ரூபா 10/=

கிடைக்குமிடம்: பிரபல புத்தகசாலைகளில்

அச்சில் !

புள்ளிவிபரவியல்

(பாகம் II)

எழுமாற்று மாறியும் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களும்

(Random Variable & Probability Distributions)