க.பொ.த உயர் தரம்

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப்பகுதி)

ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

G.C.E. ADVANCED LEVEL

COMBINED MATHEMATICS

(Pure Mathematics Component -
Co-ordinate Geometry)

கா. கணேசலிங்கம், B.Sc. Dip-in-Ed.

க. பொ. த
உயர்தர வகுப்புக்கான

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப் பகுதி)
ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

K. Ganeshalingam. B. Sc. Dip in Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4 B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06.
Phone : 592707

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title	:	INNAINTHA KANITHAM (PURE MATHEMATICS - COMPONENT - CO-ORDINATE GEOMETRY)
Language	:	Tamil
Author	:	Karthigesu Ganeshalingam B. Sc.Dip – in – Ed. Puttalai, Puloly.
Publications	:	Sai Educational Publication 36/4 B, Pamankada Road, Colombo –06.
Date of Issue	:	June 2002
No of pages	:	279 + iv
Copyright	:	Sai Educational Publication.
Type Setting	:	SDS COMPUTER SERVICES, Col - 06. Tel : 553265.
Printing		**Printed at : G.M. Offset Press, Ch - 5. Ph : 5519 0944**

நூலின் விபரம்

தலைப்பு	:	க. பொ. த உயர்தரம் இணைந்த கணிதம் (தூயகணிதப் பகுதி - ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்)
மொழி	:	தமிழ்
ஆசிரியர்	:	கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம். புற்றளை, புலோலி.
வெளியீடு	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம். 36/4 B, பாமன்கட வீதி கொழும்பு - 06
பிரசுரத்திகதி	:	ஜுன் 2002
பக்கங்கள்	:	279 + iv
பதிப்புரிமை	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்.
[illegible]	:	எஸ்.டி.எஸ் கம்பியூட்டர் சேர்விசஸ், கொழும்பு -06. Tel : 553265

[illegible] ஜீ.எம். ஆப்செட் பிரஸ், சென்னை – 5. போன் : 5591 0944

என்னுரை

புதிய பாடத்திட்ட **இணைந்த கணிதம்** - தூய கணிதப் பகுதியில் இறுதிப்பகுதியாக **ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்** எனும் இந்நூல் வெளியிடப்படுகிறது. பாடத்திட்டத்தில் அடக்கப்பட்டுள்ள ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதப் பகுதிகள் யாவற்றையும் இந்நூல் அடக்கி யுள்ளது.

இந்நூலில் ஒவ்வொரு அலகிலும் செய்து காட்டல்கள் அதிகளவில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றைத் தொடர்ந்து பயிற்சிக் கணக்குகள் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றை மாணவர் தாமாகவே செய்வதற்கு செய்து காட்டல்கள் வழிவகுத்துக் கொடுக்கும்.

கடந்தகால வினாப்பத்திரங்களில் வந்த ஆள்கூற்றுக் கேத்திரக் கணக்குகள் யாவும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

நிறைவுகள் ஏற்று குறைவுகள் சுட்டி ஆக்கமும், ஊக்கமும் தருவார்களென மாணவர்களையும், ஆசிரியர் களையும் கேட்டு இந் நூலை புத்தக உருவில் கொணர்ந்த சாயி கல்வி வெளியீட்டகத் தினருக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

நன்றி

ஜுன் *2002* ஆசிரியர்

பொருளடக்கம்

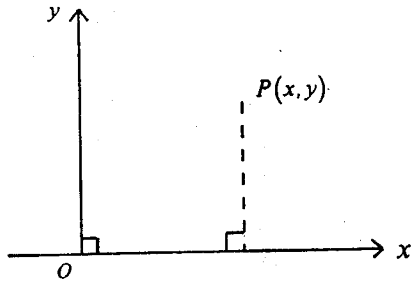
****

1. இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலான தூரம், நேர்கோடு ஒன்றினை தரப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறு, முக்கோணியின் பரப்பளவு

ஆள்கூறுகள் *(Coordinates)*

Ox, Oy என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்கள். தளம் xOy, தெக்காட்டின் தளம் எனப்படும். அத்தளத்திலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் அச்சுக்கள் Ox, Oy குறித்து வரையறுக்கலாம். Ox, Oy குறித்து P யின் நிலை $P(x, y)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

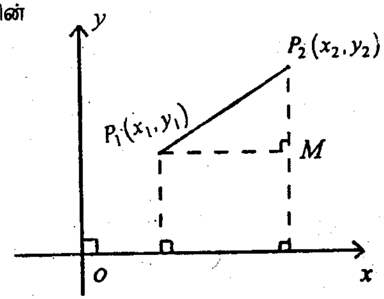
உதாரணமாக $P \equiv (3, -5)$ எனின், P யின் x ஆள் கூறு *(abscissa)* 3 உம், y ஆள்கூறு *(ordinate)* - 5 உம் ஆகும்.



இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலான தூரம்
(The distance between two points)

தளம் xOy இல் $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$. என்க

P_1, P_2 இற்கிடையேயான தூரத்தைப் பைதகரசின் தேற்றத்தை உபயோகித்துப் பெறலாம்.

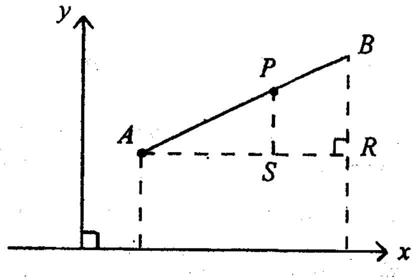


$$P_1P_2^2 = P_1M^2 + MP_2^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

நேர்கோடொன்றினை தரப்பட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள் கூறு

(i) உட்புறமாக $m:n$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P என்க. $(m,n>0)$
நேர்கோடு AB என்க.



$A \equiv (x_1, y_1) \quad B \equiv (x_2, y_2)$

$AP : PB = m : n$ என்க.

$P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ என்க.

$\Delta APS, \ \Delta ABR$ இயல்பொத்தவை.

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PS}{BR} = \frac{AS}{AR} \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\bar{y} - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$(m+n)\left(\bar{x} - x_1\right) = m\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\bar{x} = \frac{n x_1 + m x_2}{m+n}$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{\bar{y} - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$m\left(y_2 - y_1\right) = (m+n)\left(\bar{y} - y_1\right)$$

$$\bar{y} = \frac{n y_1 + m y_2}{m+n}$$

ஆகவே $P \equiv \left(\dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$ ஆகும்.

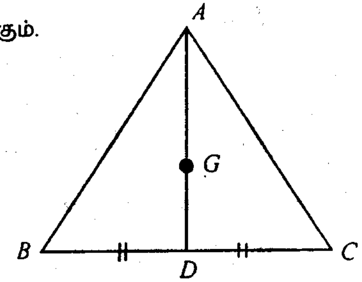
உய்த்தறிதல் - 1

P ஆனது AB யின் நடுப்புள்ளி எனின் $m = n = 1$

எனவே $P \equiv \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

உய்த்தறிதல் - 2

முக்கோணி ABC யில் $A \equiv (x_1 + y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ $C \equiv (x_3, y_3)$ எனின் மையப் போலி $G = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ஆகும்.



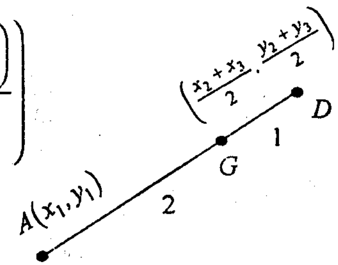
$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$, $C \equiv (x_3, y_3)$.
BC யின் நடுப்புள்ளி D என்க.

மையப்போலி G, AD இல் $AG = GD = 2:1$
ஆகுமாறு அமைந்திருக்கும்

$$D \equiv \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

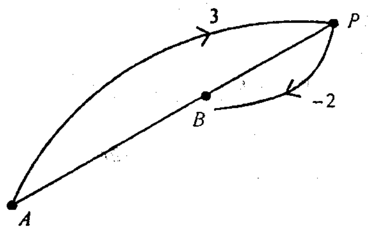
$$G \equiv \left(\frac{1 \times x_1 + 2\,\dfrac{(x_2 + x_3)}{2}}{1+2}, \frac{1 \times y_1 + 2\left(\dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)}{1+2}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \text{ ஆகும்.}$$

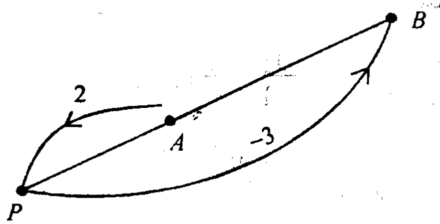


(ii) வெளிப்புறமாக $m:n$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P யின் ஆள்கூறு.

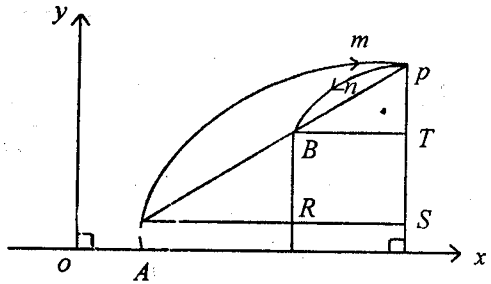
AB ஐ **வெளிப்புறமாக 3:2** எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P எனின், $AP : PB = 3 : -2$ (அல்லது $-3:2$) என எழுதப்படும். இங்கு P எனும் புள்ளி நீட்டப்பட்ட AB யில் அமைந்திருக்கும்.



AB ஐ **வெளிப்புறமாக 2 : 3 எனும் விகிதத்தில்** பிரிக்கும் புள்ளி P எனின் $AP : PB = 2 : -3$ (அல்லது $-2 : 3$ என எழுதப்படும். இங்கு P எனும் புள்ளி நீட்டப்பட்ட BA யில் அமைந்திருக்கும்.



AB **வெளிப்புறமாக** $m:n$ **எனும் விகிதத்தில்** பிரிக்கும் புள்ளி P என்க.



$AP : PB = m:n \,(m>o;\ n<o)$ $\quad P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ ஆகும்

இங்கு $mn < o$ (அதாவது $m > o$ எனின் $n < o$ அல்லது $m < o$ எனின் $n > o$ ஆகும்).

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AS}{BT} = \frac{PS}{PT}$$

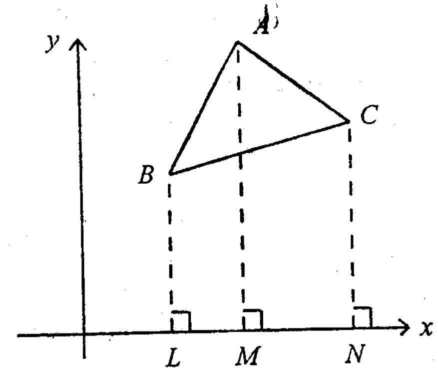
$$\frac{m}{-n} = \frac{\bar{x} - x_1}{\bar{x} - x_2} = \frac{\bar{y} - y_1}{\bar{y} - y_2}$$

$$\bar{x} = \frac{n x_1 + m x_2}{n+m}, \quad \bar{y} = \frac{n y_1 + m y_2}{n+m}$$

$$P \equiv \left(\frac{n x_1 + m x_2}{n+m}, \frac{n y_1 + m y_2}{n+m} \right)$$ ஆகும்.

முக்கோணி ஒன்றின் பரப்பளவு *(The area of a triangle)*

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ $C \equiv (x_3, y_3)$ ஆகுமாறு உள்ள முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு.



முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு.

= சரிவகம் $ABLM$ + சரிவகம் $AMNC$ − சரிவகம் $BLNC$.

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3\right]$$ ஆகும்.

$$= \frac{1}{2}\left[x_1 (y_2 - y_3) - y_1 (x_2 - x_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ எனவும் எழுதலாம்.

முக்கோணியின் பரப்பளவு நேர் என்பதால் இத்துணி கோவையின் மட்டுப் பெறுமானம் பரப்பளவைத் தரும்.

உதாரணம் 1

(i) (1, -3), (-4, 5) எனும் புள்ளிகளுக்கிடையேயான தூரத்தைக் காண்க.

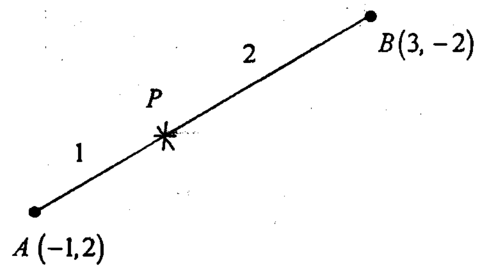
(ii) $A \equiv (-1, 2)$, $B \equiv (3, -2)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை

(i) உட்புறமாக 1 : 2
(ii) உட்புறமாக 2 : 1
(iii) வெளிப்புறமாக 1 : 2
(iv) வெளிப்புறமாக 2 : 1 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும். புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

(i) $P \equiv (1,-3), \quad Q \equiv (-4,5)$

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2 + (5+3)^2}$$
$$= \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$$

(ii)

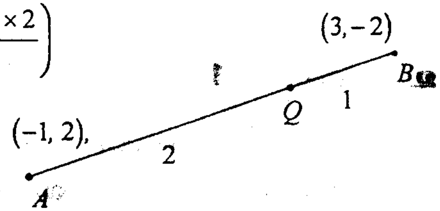


(i) AB ஐ உட்புறமாக 1 : 2 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P என்க.

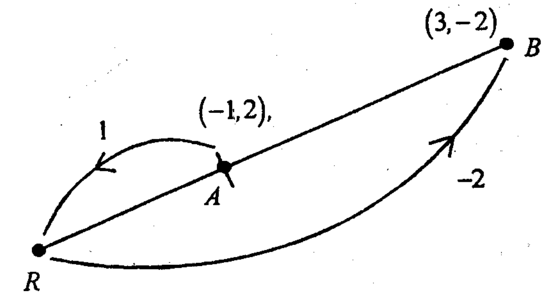
$$P \equiv \left(\frac{1\times 3+2\times(-1)}{1+2}, \quad \frac{1\times(-2)+2\times 2}{1+2}\right)$$
$$\equiv \left(\frac{3-2}{3}, \quad \frac{-2+4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

(ii) AB ஐ உட்புறமாக 2 : 1 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி Q என்க.

$$Q \equiv \left(\frac{2\times 3+1\times(-1)}{2+1}, \quad \frac{2\times(-2)+1\times 2}{2+1}\right)$$
$$\equiv \left(\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$



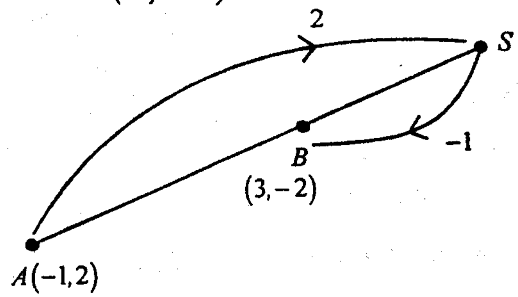
(iii) AB ஐ வெளிப்புறமாக 1 : 2 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி R என்க.



$$R \equiv \left(\frac{1\times 3+(-2)\times(-1)}{1+(-2)}, \quad \frac{1\times(-2)+(-2)\times 2}{1+(-2)}\right)$$
$$\equiv (-5, 6)$$

(iv) AB ஐ வெளிப்புறமாக 2 : 1 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி S என்க.

$$S \equiv \left(\frac{2\times 3+(-1)\times(-1)}{2+(-1)}, \quad \frac{2\times(-2)+(-1)\times 2}{2+(-1)}\right)$$
$$\equiv (7, -6)$$

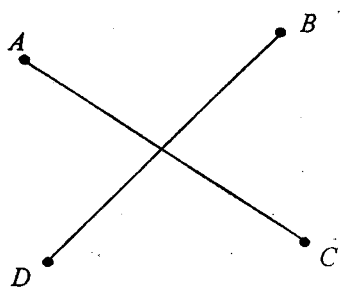


உதாரணம் 2

(i) (3, - 5), (2, 5), (0, 6), (1, - 4) என்பன இணைகரம் ஒன்றின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

(ii) $A \equiv (-1, 2)$, $B \equiv (3,4)$ $C \equiv (2,-4)$ எனின், ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி எனக்காட்டுக. ABC யின் பரப்பளவைக் காண்க.

(i) $A \equiv (3,-5)$, $B \equiv (2,5)$
$C \equiv (0,6)$, $D \equiv (1,-4)$



AC யின் நடுப்புள்ளி M என்க.

$$M \equiv \left(\frac{3+0}{2}, \frac{-5+6}{2}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

BD யின் நடுப்புள்ளி N என்க.

$$N \equiv \left(\frac{2+1}{2}, \frac{5-4}{2}\right) \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$M \equiv N$$

மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு கூறாக்குகின்றன.
எனவே $ABCD$ இணைகரம்.

(ii) $A \equiv (-1,2)$, $B \equiv (3,4)$ $C \equiv (2,-4)$

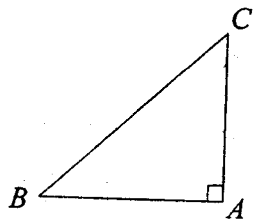
$$AB^2 = (-1-3)^2 + (2-4)^2 = 16+4 = 20$$
$$BC^2 = (3-2)^2 + (4+4)^2 = 1+64 = 65$$
$$AC^2 = (2+1)^2 + (-4-2)^2 = 9+36 = 45$$
$$20+45 = 65$$
$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

ஆகவே ABC என்பது A செங்கோணமாகவுள்ள முக்கோணி.

ΔABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times AC \times AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{20} \times \sqrt{45} = 15$ ச. அலகுகள்

அல்லது

ΔABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$



$$= \frac{1}{2}\left[-1(4+4) - 2(3-2) + 1(-12-8)\right] = \left|\frac{1}{2} \quad [-8-2-20]\right|$$

$$= |-15| = 15 \text{ ச. அலகுகள்.}$$

பயிற்சி - 1

1. பின்வரும் புள்ளிகளுக்கிடையேயான தூரத்தைக் காண்க.
   (i) $(3,4)$, $(2,7)$ (ii) $(-2,-3)$, $(3,-1)$
   (iii) $(-3,1)$, $(2,-3)$ (iv) (a,o), (o,b)
   (v) (a,b) $(-a,-b)$ (vi) $(a+b,o)$, $(o, a-b)$

2. $A \equiv (1,3)$, $B \equiv (2,5)$, $C \equiv (5,8)$, $D \equiv (4,6)$ என்பன இணைகரம் ஒன்றின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

3. $A \equiv (1,4)$, $B \equiv (2,7)$, $C \equiv (-5,6)$ என்பன செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகள் எனக்காட்டி, முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. $A \equiv (-2,4)$, $B \equiv (6,12)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை
   (i) $3:1$ (ii) $1:3$
   (iii) $3:-1$ (iv) $1:-3$
   எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

5. $(2,4)$, $(3,-1)$, $(7,3)$ என்பன இரு சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளாகும். எனக் காட்டுக.

6. $(0,0)$, $(4,3)$, $(1,2)$ என்பவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணியின் பரப்பளவு யாது?

7. $(1,3)$, $(4,5)$, $(6,8)$, $(3,6)$ என்பன சாய்சதுரம் ஒன்றின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக. சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க?

8. $(3,-1)$ $(5,2)$ என்பவற்றை இணைக்கும் கோட்டினை $3:4$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறு யாது?

9. $A \equiv (2,3)$, $B \equiv (7,10)$ ஆகும். நீட்டப்பட்ட AB இல் $AP:BP = 7:4$ ஆகுமாறு புள்ளி P ஐக் காண்க.

10. $A \equiv (3,1)$, $B \equiv (9,-11)$ என்பவற்றை இணைக்கும் கோட்டினை முக்கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க?

11. $(1,4)$, $(2,7)$, $(3,10)$ என்பவற்றை உச்சிகளாகவுடைய முக்கோணியின் மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. முக்கோணியின் பரப்பளவு யாது?

12. $(0,12)$, $(4,2)$, $(14,6)$ என்பன சதுரமொன்றின் மூன்று உச்சிகளாகும் எனக் காட்டி நான்காம் உச்சியின் ஆள்கூறைக் காண்க. சதுரத்தின் பரப்பளவு யாது?

2. நேர்கோடுகள்

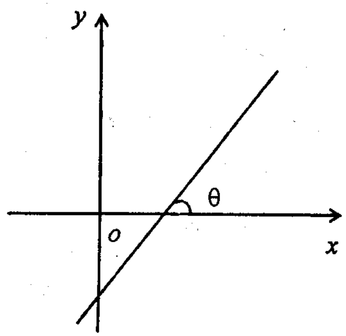
2. நேர்கோட்டின் சமன்பாடு:

நேர்கோடொன்றின் படித்திறன் *(The gradient of a line)*

நேர்கோடு ஒன்றின் படித்திறனானது, அந்நேர்கோடு Ox அச்சின் நேர்த்திசையுடன் அமைக்கும் கோணத்தின் தான் என வரையறுக்கப்படும். Ox அச்சின் நேர்த்திசையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனின், படித்திறன் m ஆனது, $m = \tan\theta$ என்பதால் தரப்படும்.

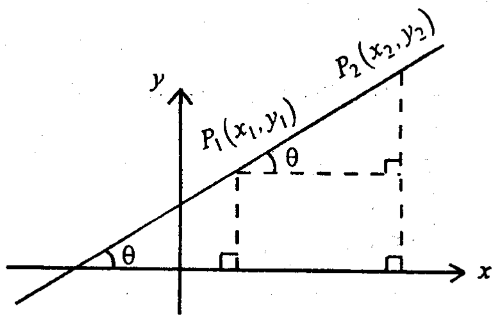
θ கூர்ங்கோணமாயின் $\tan\theta = m > o$

θ விரிகோணமாயின் $\tan\theta = m < o$ ஆகும்.



(x_1, y_1), (x_2, y_2) எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் படித்திறன் m எனின்,

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

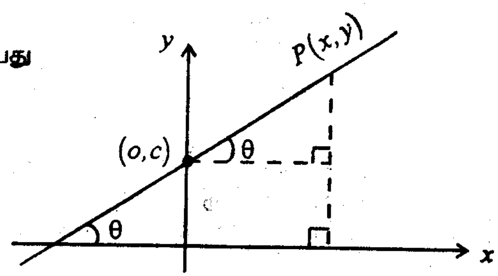


1. படித்திறன் m ஐ உடையதும் y அச்சில் c எனும் வெட்டுத்துண்டினை அமைப்பதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

நேர்கோட்டில் $P(x,y)$ என்பது மாறும் புள்ளி ஆகும்.

$$m = \tan\theta = \frac{y-c}{x}$$

$$m = \frac{y-c}{x}$$

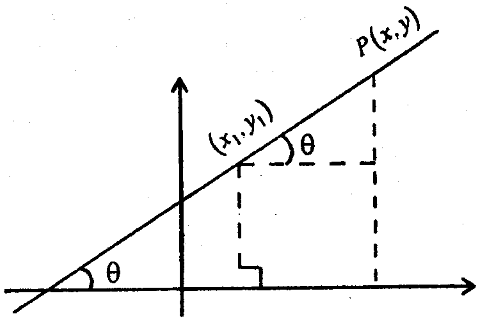


நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$ ஆகும்.

$$\boxed{y = mx + c.}$$

இங்கு m படித்திறன், c வெட்டுத்துண்டு ஆகும்.

2. படித்திறன் m ஐ உடையதும் (x_1, y_1) எனும் புள்ளியினூடாக செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.



நேர்கோட்டில் $P(x, y)$ என்பது மாறும் புள்ளி ஆகும்.

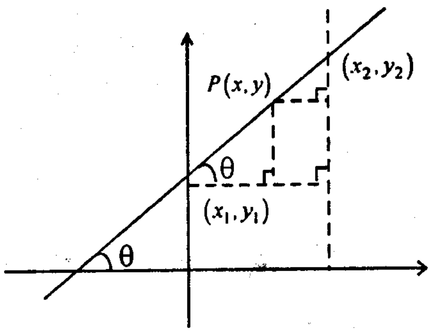
$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ஆகும்.

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

3. (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனுமிரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.



நேர்கோட்டின் படித்திறன் m எனின்,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

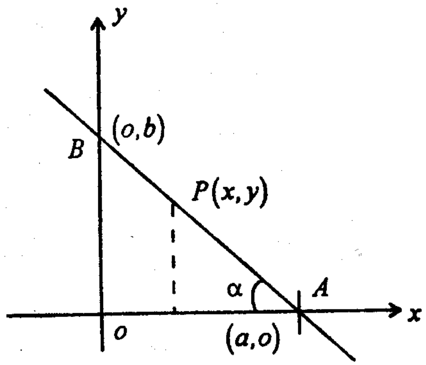
நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$ ஆகும்.

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

4. x, y அச்சுக்களில் முறையே a, b எனும் வெட்டுத்துண்டுகளை ஆக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

$$\tan\alpha = \frac{y}{a - x} = \frac{b}{a}$$



$$ay = ab - bx$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

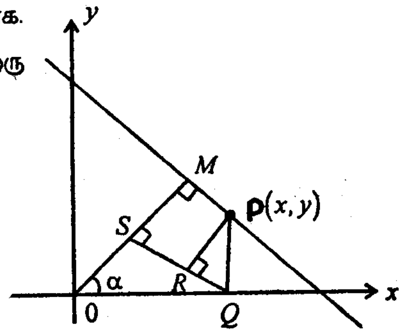
எனவே, நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$ ஆகும்.

5. நேர்கோடொன்றின் நியமவடிவம்

உற்பத்தியிலிருந்து நேர்கோட்டிற்கான செங்குத்துத் தூரம் ρ எனவும் இச் செங்குத்து Ox இன் நேர்த்திசையுடன் அமைக்கும் கோணம் α எனவும் கொள்க.

நேர்கோட்டில் $P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.



தரப்பட்டுள்ள படத்திலிருந்து

$$\begin{aligned} OM &= OS + SM \\ &= OS + PR \\ &= OQ\cos\alpha + PQ\sin\alpha \\ \rho &= x\cos\alpha + y\sin\alpha. \end{aligned}$$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho}$ ஆகும்.

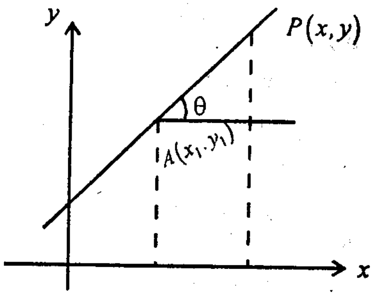
6. **பரமான வடிவம்** ***(Parametric form)***

$A \equiv (x_1, y_1)$ எனும் நிலையான புள்ளியினூடு செல்வதும் x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் கோணம் θ ஐ அமைப்பதுமான நேர்கோடொன்றின் சமன்பாடு

நேர்கோட்டில் $P(x, y)$ என்பது ஒரு மாறும் புள்ளி.

$AP = r$ ஆக இருக்க

$x - x_1 = r\cos\theta$
$y - y_1 = r\sin\theta$



$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

ஆகும். இங்கு $|r| = AP$ ஆகும்.

இங்கு $r > o$, $r < o$ இருவகைகளும் கருதப்படவேண்டும். $r > o$ ஆக, A யின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள புள்ளிகளும், $r < o$ ஆக, A யின் மறுபக்கத்திலுள்ள புள்ளிகளும் பெறப்படும்.

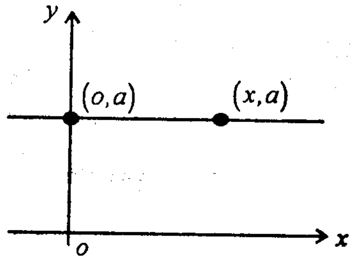
எனவே நேர்கோட்டிலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் r எனும் ஒரு மாறியினால் குறிக் கலாம். (தரப்பட்ட நேர்கோட்டிற்கு θ ஒரு மாறிலியாகும்)

எனவே பரமான வடிவம்

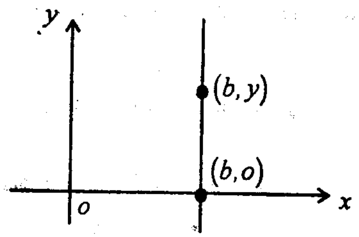
$$\boxed{\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r}$$ ஆகும்.

7. அச்சுக்களிற்கு சமாந்தரமான நேர்கோடுகள்

(i) x அச்சிற்கு சமாந்தரமான நேர் கோட்டின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் y ஆள்கூறு மாறிலியாகும். எனவே சமன்பாடு $y = a$ ஆகும்.
x அச்சின் சமன்பாடு $y = o$ ஆகும்.



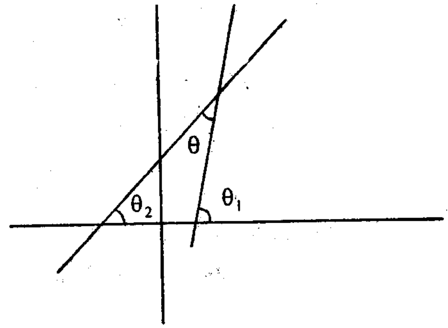
(ii) y அச்சிற்கு சமாந்தரமான நேர் கோட்டின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் x ஆள்கூறு மாறிலியாகும்.
எனவே சமன்பாடு $x = b$ ஆகும்.
y அச்சின் சமன்பாடு $x = o$ ஆகும்.



இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையிலான கோணம்

$y = m_1 x + c_1$, $y = m_2 x + c_2$ எனும் நேர்கோடுகளுக்கிடையிலான கூர்ங்கோணம் θ என்க.

$\tan\theta_1 = m_1$, $\tan\theta_2 = m_2$ என்க.



$\theta = \theta_1 - \theta_2$

$\tan(\theta) = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$ ஆகும்.

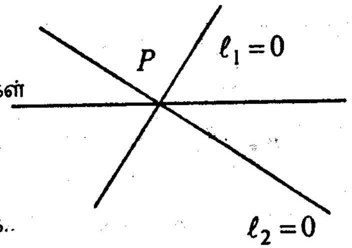
சூர்ங்கோணம் θ எனின், $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ ஆகும்.

(a) இரு நேர்கோடுகளும் சமாந்தரமெனின் $\theta_1 = \theta_2$
எனவே $\theta = 0$; $\tan\theta = 0$
$m_1 = m_2$ ஆகும்.

(b) இரு நேர்கோடுகளும் செங்குத்தெனின் $\theta = 90^o$
ஆகவே $1 + m_1 m_2 = 0$
$m_1 m_2 = -1$ ஆகும்.

தரப்பட்ட இரு நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடுகள்

$\ell_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$.
$\ell_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. எனும் நேர்கோடுகள்
$p(x_o, y_o)$ இல் இடை வெட்டுகின்றதென்க.



$\ell_1 + k\,\ell_2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டைக் கருதுக.

இது (x,y) இல் 1ம் படியிலுள்ளது. எனவே இச்சமன்பாடு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்

$P(x_o, y_o)$ $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 0$ என்பவற்றிலிருப்பதால் $a_1x_o + b_1y_o + c_1 = 0$; $a_2x_o + b_2y_o + c_2 = 0$ ஆகும்.

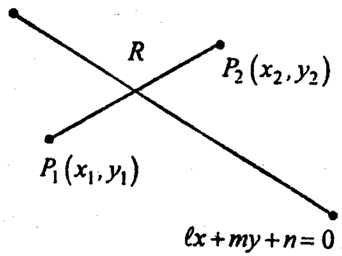
ஆகவே k இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும்

$(a_1x_o + b_1y_o + c_1) + k\,(a_2x_o + b_2y_o + c_2) = 0$.

$(a_1x + b_1y + c_1) + k\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$. என்பது k இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்பன வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

நேர்கோடு ஒன்றும், இரு புள்ளிகளும் தரப்படின், அவை நேர்கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலா அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களிலா உள்ளன என்பதைக் காணல்

நேர்கோடு $\ell x + my + n = 0$;



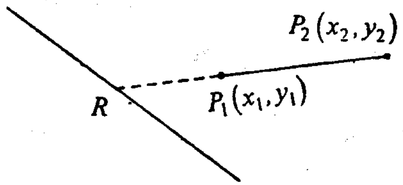
புள்ளிகள் $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$ என்க.

நேர்கோடு P_1, P_2, $\ell x + my + n = 0$ எனும் நேர்கோட்டைச் சந்திக்கும் புள்ளி R என்க.

$P_1R : RP_2 = k : 1$ என்க.

P_1, P_2 ஆகியன கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருப்பின் $k > 0$.

$P_1\,P_2$ ஆகியன கோட்டின் ஒரேபக்கத்திலிருப்பின் $k < 0$. ஆகும்.



$$R \equiv \left(\frac{k\,x_2 + x_1}{k+1},\ \frac{k\,y_2 + y_1}{k+1} \right)$$

R, $\ell x + my + n = 0$ இலிருப்பதால்.

$$\ell\left(\frac{k\,x_2 + x_1}{k+1}\right) + m\left(\frac{k\,y_2 + y_1}{k+1}\right) + n$$

$$\ell\,(k\,x_2 + x_1) + m\,(k\,y_2 + y_1) + n\,(k+1) = 0$$

$$k\,(\ell\,x_2 + m\,y_2 + n) + (\ell\,x_1 + my_1 + n) = 0$$

$$k = -\frac{(\ell\,x_1 + m\,y_1 + n)}{\ell\,x_2 + m\,y_2 + n}$$

P_1, P_2 என்பன கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருப்பின், $k > 0$.

ஆகவே $(\ell x_1 + my_1 + n)\ (\ell x_2 + my_2 + n) < 0$ ஆகும்.

P_1, P_2 என்பன கோட்டின் ஒரே பக்கங்களில் இருப்பின் $k < 0$.

ஆகவே $(\ell x_1 + my_1 + n)\ (\ell x_2 + my_2 + n) > 0$ ஆகும்.

$(\ell x_1 + my_1 + n)$ $(\ell x_2 + my_2 + n) > 0$ அல்லது < 0 என்பதற்கேற்ப (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனும் புள்ளிகள் $\ell x_1 + my_1 + n = 0$ என்னும் கோட்டின் ஒரேபக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களிலிருக்கும்.

மூன்று நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பதற்கான நிபந்தனை

சமாந்தரமற்ற மூன்று நேர்கோடுகள்,

$u_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $u_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $u_3 \equiv a_3 + b_3y + c_3 = 0$

பூச்சிய மல்லாத எண்ணிகள் λ_1, λ_2, λ_3 என்பன $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ என இருப்பின், u_1, u_2, u_3 ஆகிய மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

u_1, u_2 என்பன $P\,(x_o, y_o)$ இல் சந்திக்கும் என்க.

(x_o, y_o), u_1 இலிருப்பதால், $a_1x_o + b_1y_o + c_1 = 0$

(x_o, y_o), u_2 இலிருப்பதால் $a_2x_o + b_2y_o + c_2 = 0$ ஆகும்.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0)$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_3}(a_1x + b_1y + c_1) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(a_2x + b_2y + c_2)$$

$$a_3x_o + b_3y_o + c_3 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_3}(a_1x_o + b_1y_o + c_1)\frac{-\lambda_2}{\lambda_3}(a_2x_o + b_2y_o) + c_2$$

$$= \frac{-\lambda_1}{\lambda_3} \times 0 + \frac{-\lambda_2}{\lambda_3} \times 0 = 0$$ ஆகும்.

ஆகவே (x_o, y_o) எனும் புள்ளி $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ இலிருக்கும்.

எனவே, u_1, u_2, u_3 ஆகிய மூன்று நேர்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

அல்லது

அக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$u_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$u_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$u_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3 = 0$$ என்க.

இவற்றுள் ஏதாவது இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியினூடாக, மூன்றாவது நேர்கோடு செல்ல வேண்டும்.

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$ சந்திக்கும் புள்ளி P என்க.

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{b_2c_3 - b_3c_2} = \frac{-y}{a_2c_3 - a_3c_2} = \frac{1}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

$$x = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, \quad y = \frac{-(a_2c_3 - a_3c_2)}{a_2b_3 - a_3b_2}$$

மூன்று நேர்கோடுகளும் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்க $a_1x + b_1y + c = 0$, P யினூடு செல்ல வேண்டும்.

$$a_1\left(\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}\right) - b_1\left(\frac{a_2c_3 - a_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}\right) + c_1 = 0$$

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$ ஆதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 1

(a) படித்திறன் $-\frac{1}{2}$ ஆகவும், $(1, -2)$ எனும் புள்ளியினூடு செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) $(-2, 3)$, $(4, -6)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

(c) $(2, -3)$, $(2, 6)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக

(d) $(3, -5)$, $(-2, -5)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

(a) $m = -\frac{1}{2}; (1, -2)$

சமன்பாடு: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$2(y + 2) = -(x - 1)$$
$$2y + x + 3 = 0$$

(b) $(-2, 3), (4, -6)$

சமன்பாடு $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 3}{-6 - 3} = \frac{x + 2}{4 + 2}$$

$$\frac{y - 3}{-9} = \frac{x + 2}{6}$$

$$6(y - 3) = -9(x + 2)$$

$$2(y - 3) = -3(x + 2)$$

$$2y + 3x = 0$$

(c) $(2, -3), (2, 6)$

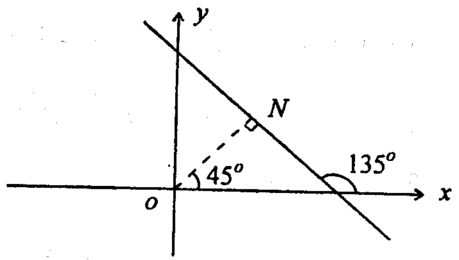
இங்கு x ஆள்கூறு மாறிலி. எனவே நேர்கோடு y அச்சிற்கு சமாந்தரம் ஆகும். நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x = 2$ ஆகும்.

(d) $(3, -5), (-2, -5)$

இங்கு y ஆள்கூறு மாறிலி; எனவே நேர்கோடு x அச்சிற்கு சமாந்தரம் ஆகும். நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = -5$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

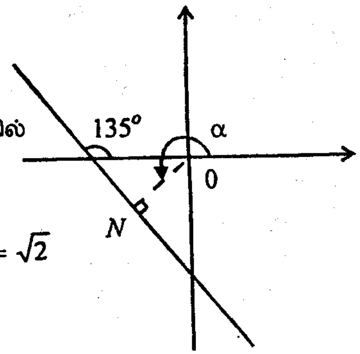
x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் 135^o கோணத்தை அமைப்பதும் உற்பத்தியிலிருந்து $\sqrt{2}$ அலகு செங்குத்துத் தூரத்தையுடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



$x \cos\alpha + y \sin\alpha = \rho$ என்பதில் $\alpha = 45^o$, $\rho = \sqrt{2}$

$$x \cos 45^o + y \sin 45^o = \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{x + y = 2}}$$



$ON = \sqrt{2}$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho$ என்பதில்

$$\alpha = (180^\circ + 45^\circ),\ \rho = \sqrt{2}$$

$$x\cos(180^\circ + 45^\circ) + y\sin(180^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2}$$

$$-x\cos 45 - y\sin 45 = \sqrt{2};$$

$$\underline{\underline{x + y + 2 = 0}}$$

உதாரணம் 3

பின்வரும் நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றையும் $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho\ (\rho > 0)$ எனும் வடிவில் எழுதி உற்பத்தியிலிருந்து அக்கோடுகளின் செங்குத்துத்தூரங்களைக் காண்க

(i) $3x + 4y - 10 = 0$ (ii) $x - y + 4 = 0$

(iii) $2x + 3y + 15 = 0$ (iv) $3x - y - 10 = 0$

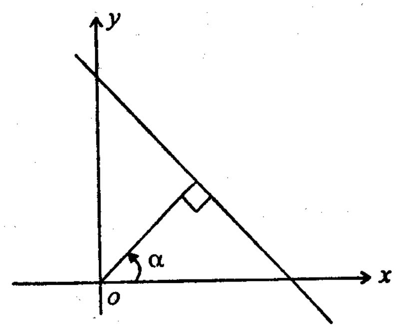
(i) $3x + 4y = 10$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

சமன்பாட்டை 5 ஆல் பிரிக்க.

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{10}{5}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 2$$



[இங்கு $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\rho = 2\cdot$ ஆகவே $0 < \alpha < \pi/2$
உற்பத்தியிலிருந்து கோட்டின் தூரம் 2 அலகுகள் ஆகும்]

(ii) $x - y + 4 = 0$

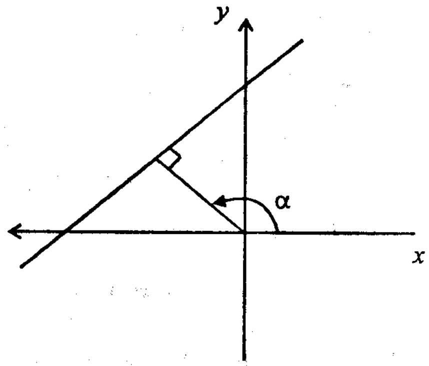
$-x + y = 4$

$\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

சமன்பாட்டை $\sqrt{2}$ ஆல் பிரிக்க

$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 2\sqrt{2}$



[இங்கு $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\rho = 2\sqrt{2}$ ஆகும். $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$]

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

உற்பத்தியிலிருந்து கோட்டின் தூரம் $= 2\sqrt{2}$ அலகுகள் ஆகும்.

(iii) $2x + 3y + 15 = 0$

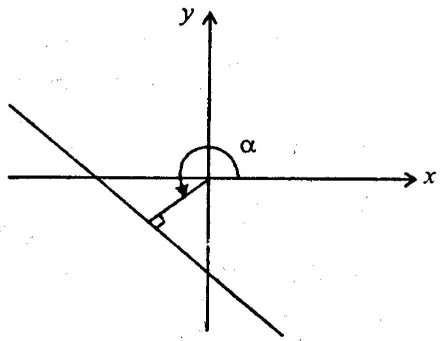
$-2x - 3y = 15$

$\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

சமன்பாட்டை $\sqrt{13}$ ஆல் பிரிக்க

$\frac{-2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{15}{\sqrt{13}}$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{15}{\sqrt{13}}$



[இங்கு $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}}$, $\rho = \frac{15}{\sqrt{13}}$ ஆகும்.

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$]

உற்பத்தியிலிருந்து கோட்டின் தூரம் $\frac{15}{\sqrt{13}}$ அலகுகள் ஆகும்.

(iv) $3x - y - 10 = 0$

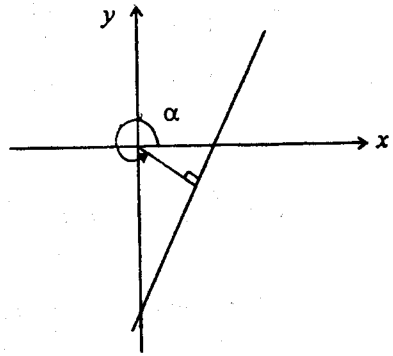
$3x - y = 10$

$\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

சமன்பாட்டை $\sqrt{10}$ ஆல் பிரிக்க

$\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y = \frac{10}{\sqrt{10}}$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{10}$



[இங்கு $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{10}}$, $p = \sqrt{10}$ ஆகும்.

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.]

உற்பத்தியிலிருந்து செங்குத்தூரம் $\sqrt{10}$ அலகுகள் ஆகும்.

உதாரணம் 4

(a) $3x-4y+2=0$; $5x+2y-7=0$ ஆகிய நேர்கோடுகளுக்கிடையிலான கூர்ங் கோணத்தைக் காண்க.

(b) $(1,-2)$ எனும் புள்ளியினூடாக $2x+3y-7=0$ என்னும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) $3x-4y+2=0$; $m_1 = \frac{3}{4}$

$5x+2y-7=0$; $m_2 = -\frac{5}{2}$

இடைப்பட்ட கோணம் α எனின்,

$$\tan\alpha = \left| \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{-5}{2}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(\frac{-5}{2}\right)} \right|$$

$$= \left|\frac{\frac{13}{4}}{\frac{-7}{8}}\right| = \left|\frac{13}{4}\times\left(\frac{-8}{7}\right)\right| = \left|\frac{-26}{7}\right| = \frac{26}{7}$$

$tan\,\alpha = \frac{26}{7}$; $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{26}{7}\right)$ ஆகும்.

[விரிகோணம் $= \pi - tan^{-1}\left(\frac{26}{7}\right)$ ஆகும்.]

(b) $2x+3y-7=0$; $m = \frac{-2}{3}$

சமாந்தரக் கோடுகளாதலால் படித்திறன்கள் சமமாகும்.

$m = \frac{-2}{3}$, $(1,-2)$

$y+2 = \frac{-2}{3}(x-1)$

$3y+6 = -2x+2$

$2x+3y+4=0$

அல்லது

$2x+3y-7=0$ இற்கு சமாந்தரமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $2x+3y+c=0$ ஆகும்.

இந்நேர்கோடு $(1,-2)$ இனூடு செல்வதால் $2+3\times(-2)+c=0$; $c=4$

$\therefore$ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $2x+3y+4=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

(a) $3x+y=7$, $4x+2y=11$ ஆகிய நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும் $(1,2)$ எனும் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) $4x-y-2=0$, $5x+3y+1=0$ எனும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $x+y+2=0$ இற்கு செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) $3x+y-7=0$, $4x+2y-11=0$ என்பன வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு:

$(3x+y-7)+k(4x+2y-11)=0$ ஆகும்.

இந்நேர்கோடு $(1,2)$ இனூடு செல்வதால்,

$(3+2-7)+k(4+4-11)=0$

$-2-3k=0$; $k=-\frac{2}{3}$

ஆகவே சமன்பாடு $(3x+y-7)-\frac{2}{3}(4x+2y-11)=0$

$3(3x+y-7)-2(4x+2y-11)=0.$

$x-y+1=0.$

(b) $4x-y-2=0$; $5x+3y+1=0$ எனும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$(4x-y-2)+\lambda(5x+3y+1)=0$

$(4+5\lambda)x+(3\lambda-1)y+(\lambda-2)=0$

இக்கோட்டின் படித்திறன் $= \frac{4+5\lambda}{1-3\lambda}$

இந்நேர்கோடு $x+y+2=0$ இற்கு (படித்திறன் $=-1$) செங்குத்தாகையால்,

$\frac{4+5\lambda}{1-3\lambda}=1$

$4+5\lambda = 1-3\lambda$

$8\lambda=-3$; $\lambda=-\frac{3}{8}$

$\therefore$ சமன்பாடு $(4x-y-2)-\frac{3}{8}(5x+3y+1)=0$

$$8(4x-y-2)-3(5x+3y+1)=0$$
$$32x-8y-16-15x-9y-3=0$$
$$17x-17y-19=0$$

உதாரணம் 6

(a) **(i)** $(1,4),\ (2,-2)$ எனும் புள்ளிகள் $3x+y=5$ எனும் நேர்கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலா அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களிலா உள்ளது எனக் காண்க.

(ii) $(1,-1),\ (7,2)$ எனும் புள்ளிகள் $x+y+6=0$ எனும் நேர்கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலா அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களிலா உள்ளது எனக் காண்க.

(b) $y>3,\ x>2,\ x+y<6$ என்பதால் தரப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

(c) $A(2,5),\ B(3,6),\ C(4,8)$ என்பனவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணி ABC யில் கோணம் A ஐக் காண்க.

(a) **(i)** $3x+y-5=0$

$(1,4)$ ஐ $3x+y-5$ இல் பிரதியிட, $3\times1+4-5=2$

$(2,-2)$ ஐ $3x+y-5$ இல் பிரதியிட, $3\times2+1\times(-2)-5=-1$

$(2)\times(-1)<0$ எனவே

$(1,4),\ (2,-2)$ என்பன $3x+y=5$ எனும் கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருக்கும்.

(ii) $(1,-1),\ (7,2)\ ;\quad x+y+6=0.$

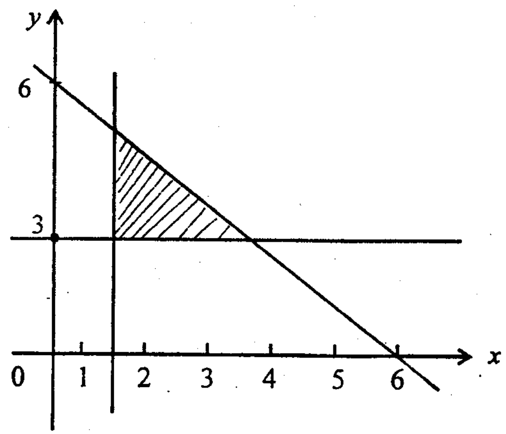
$(1,-1)$ ஐ $x+y+6$ இல் பிரதியிட, $1-1+6=6$

$(7,2)$ ஐ $x+y+6$ இல் பிரதியிட, $7+2+6=15$

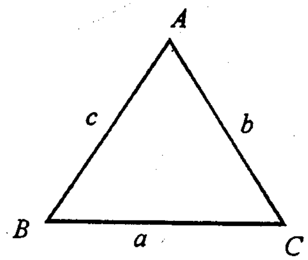
$6\times15>0.$

ஆகவே $(1,-1),\ (7,2)$ என்பன $x+y+6=0$ இன் ஒரேபக்கத்திலிருக்கும்

(b) $y=3,\quad x=2,\quad x+y=6$ என்னும் நேர்வரைகளை வரைக.



(c) $A\equiv(2,5),\ \ B\equiv(3,6),\ \ C\equiv(4,8)$



$$AB^2=(3-2)^2+(6-5)^2=2=c^2$$
$$BC^2=(4-3)^2+(8-6)^2=5=a^2$$
$$AC^2=(4-2)^2+(8-5)^2=13=b^2$$
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{13+2-5}{2\sqrt{2\times13}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$$
$$A=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

உதாரணம் 7

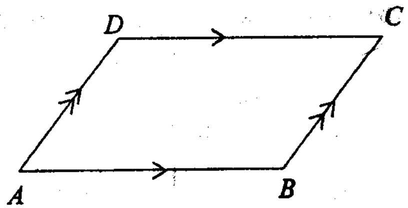
இணைகரம் ஒன்றின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $2x-y+7=0,\ 2x-y-5=0,\ 3x+2y-5=0,\ 3x+2y+4=0$ ஆகும். மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க?

$AB: 2x-y-5=0,\qquad AD: 3x+2y-5=0$

$DC: 2x-y+7=0,\qquad BC: 3x+2y+4=0.$

$$\left.\begin{array}{l} AB: 2x - y - 5 = 0 \\ AD: 3x + 2y - 5 = 0 \end{array}\right\} A \equiv \left(\frac{15}{7}, \frac{-5}{7}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} DC: 2x - y + 7 = 0 \\ BC: 3x + 2y + 4 = 0 \end{array}\right\} C \equiv \left(-\frac{18}{7}, \frac{13}{7}\right)$$



AC யின் சமன்பாடு $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y + \frac{5}{7}}{\frac{13}{7} + \frac{5}{7}} = \frac{x - \frac{15}{7}}{\frac{-18}{7} - \frac{15}{7}}$$

$$\frac{7y + 5}{18} = \frac{7x - 15}{-33}$$

$$-11(7y + 5) = 6(7x - 15)$$

$$-77y - 55 = 42x - 90$$

$$42x + 77y - 35 = 0$$

$$6x + 11y - 5 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} AB: 2x - y - 5 = 0 \\ BC: 3x + 2y + 4 = 0 \end{array}\right\} B \equiv \left(\frac{6}{7}, \frac{-23}{7}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} AD: 3x + 2y - 5 = 0 \\ DC: 2x - y + 7 = 0 \end{array}\right\} D \equiv \left(-\frac{9}{7}, \frac{31}{7}\right)$$

BD யின் சமன்பாடு $\dfrac{y + y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y + \frac{23}{7}}{\frac{31}{7} + \frac{23}{7}} = \frac{x - \frac{6}{7}}{\frac{-9}{7} - \frac{6}{7}}$$

$$\frac{7y + 23}{54} = \frac{7x - 6}{\frac{-9}{7} - \frac{6}{7}}$$

$$-5(7y + 23) = 18(7x - 6)$$

$$-35y - 115 = 126x - 108$$

$$126x + 35y + 7 = 0$$

$$\underline{\underline{18x + 5y + 1 = 0}}$$

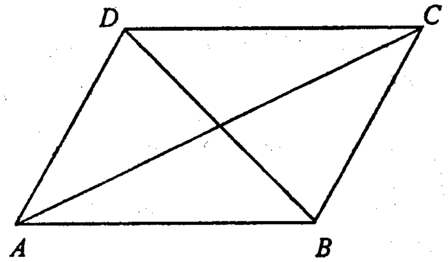
மாற்றுமுறை :

$AB: 2x - y - 5 = 0$

$AD: 3x + 2y - 5 = 0$

$BC: 3x + 2y + 4 = 0$

$DC: 2x - y + 7 = 0$



மூலைவிட்டம் AC, A யினூடு செல்வதால்

$$AC: (2x - y - 5) + \lambda(3x + 2y - 5) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$C \equiv (x_1, y_1)$ என்க.

C, DC யிலிருப்பதால், $2x_1 - y_1 + 7 = 0$ .... (1)

C, BC யிலிருப்பதால், $3x_1 + 2y_1 + 4 = 0$ .... (2)

AC, $C \equiv (x_1, y_1)$ இனூடு செல்வதால்,

(A) யிலிருந்து $(2x_1 - y_1 - 5) + \lambda(3x_1 + 2y_1 - 5) = 0$

(1) இலிருந்து, $2x_1 - y_1 = -7$

(2) இலிருந்து,. $3x_1 + 2y_1 = -4$

$$(-7 - 5) + \lambda(-4 - 5) = 0$$

$$-9\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda = -\frac{4}{3}$$

$\lambda = -\frac{4}{3}$ என, (A) இல் பிரதியிட

AC யின் சமன்பாடு

$$3(2x - y - 5) - 4(3x + 2y - 5) = 0$$

$$\underline{\underline{6x + 11y - 5 = 0}}$$

மூலைவிட்டம் BD, B யினூடு செல்வதால்,

$BD : (2x - y - 5) + \mu(3x + 2y + 4) = 0$ .... (B)

$D \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

$D(x_2, y_2)$ DC யிலிருப்பதால் $2x_2 - y_2 + 7 = 0$ .... (3)

$D(x_2, y_2)$ AD யிலிருப்பதால் $3x_2 + 2y_2 - 5 = 0$ .... (4)

$D(x_2, y_2)$ BD யிலிருப்பதால் $(2x_2 - y_2 - 5) + \mu(3x_2 + 2y_2 + 4) = 0$

(3) இலிருந்து $2x_2 - y_2 = -7$

(4) இலிருந்து $3x_2 + 2y_2 = 5$

$$(-7 - 5) + \mu(5 + 4) = 0$$

$$\mu = \frac{4}{3}$$

ஆகவே BD யின் சமன்பாடு $3(2x - y - 5) + 4(3x + 2y + 4) = 0$

$$\underline{\underline{18x + 5y + 1 = 0}}$$

உதாரணம் 8

$2x + 3y = 4$, $3x - y + 2 = 0$ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகவும் $x + y = 0$, $4x + y - 3 = 0$ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$2x + 3y - 4 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ என்பன வெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும நேர்கோடு

$$(2x + 3y - 4) + \lambda(3x - y + 2) = 0$$

$(2 + 3\lambda)x + (3 - \lambda)y + (2\lambda - 4) = 0$ .... (1)

$x + y = 0$, $4x + y - 3 = 0$ என்பன வெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் நேர்கோடு.

$$(x + y) + \mu(4x + y - 3) = 0$$

$(1 + 4\mu)x + (1 + \mu)y - 3\mu = 0$ .... (2)

இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிக்குமெனின்,

$\frac{2 + 3\lambda}{1 + 4\mu} = \frac{3 - \lambda}{1 + \mu} = \frac{2\lambda - 4}{-3\mu} = k$ .... (1)

$$\frac{2 + 3\lambda}{1 + 4\mu} = \frac{3 - \lambda}{1 + \mu} \Rightarrow \frac{2 + 3\lambda}{1 + 4\mu} = \frac{3 - \lambda}{1 + \mu} = \frac{(3 + \lambda) - (2 + 3\lambda)}{(1 + \mu) - (1 + 4\mu)}$$

$$\frac{2 + 3\lambda}{1 + 4\mu} = \frac{3 + \lambda}{1 + \mu} = \frac{1 + 4\lambda}{-3\mu} = k$$

(1), (2) இலிருந்து $\frac{2\lambda - 4}{-3\mu} = \frac{1 + 4\lambda}{-3\mu}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$$

ஆகவே கோட்டின் சமன்பாடு

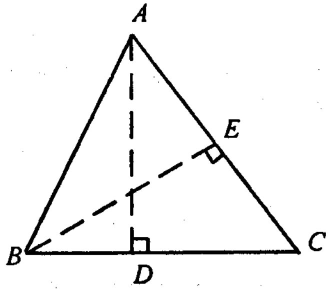
$$6(2x + 3y - 4) + 5(3x - y + 2) = 0$$

$$27x + 3y - 14 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 9

முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

$A \equiv (x_1, y_1),\quad B \equiv (x_2, y_2) \quad C \equiv (x_3, y_3)$ என்க.



BC யின் படித்திறன் $= \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

CA யின் படித்திறன் $= \dfrac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$

AB யின் படித்திறன் $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

AD யின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\dfrac{(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2}(x - x_1)$

$$u_1 \equiv (y - y_1)(y_3 - y_2) + (x - x_1)(x_3 - x_2) = 0 \quad \text{........(1)}$$

BE யின் சமன்பாடு $y - y_2 = -\dfrac{(x_1 - x_3)}{(y_1 - y_3)}(x - x_2) = 0$

$$u_2 \equiv (y - y_2)(y_1 - y_3) + (x - x_2)(x_1 - x_3) = 0 \quad \text{........(2)}$$

CF யின் சமன்பாடு $y - y_3 = -\dfrac{(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}(x - x_3)$

$$u_3 \equiv (y - y_3)(y_2 - y_1) + (x - x_3)(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{............(3)}$$

$(1) + (2) + (3);\ u_1 + u_2 + u_3 = 0$

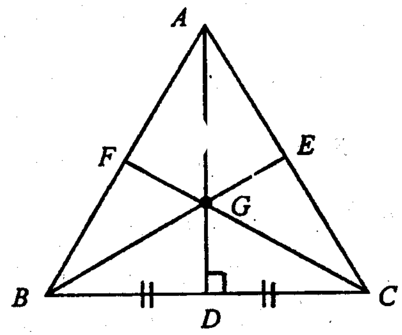
அதாவது $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ ஆகுமாறு $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ எனும் பூச்சியமற்ற எண்ணிகள் உண்டு.

எனவே u_1, u_2, u_3 ஆகிய மூன்று நேர்கோடுகளும் (AB, BE, CF) ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

உதாரணம் 10

ABC என்னும் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் $AB = AC$ ஆகும். $A \equiv (0,8)$ B, C என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் இடையங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே, $x + 3y = 14,\quad 3x - y = 2$ ஆகும். முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.



$A \equiv (0,8)$

$$\left.\begin{aligned} BE &: x + 3y = 14 \\ CF &: 3x - y = 2 \end{aligned}\right\}$$

$G \equiv (2\ 4)$

AD யின் படித்திறன். $\dfrac{4 - 8}{2 - 0} = -2$

$AB = AC$ ஆதலால் AD, BC யிற்கு செங்குத்து ஆகும்.

BC யின் படித்திறன் $= \dfrac{1}{2}$

$AG : GD = 2:1 \qquad D \equiv (x_0,\ y_0)$ எனின்,

$$\frac{1 \times 0 + 2 \times x_0}{3} = 2 \qquad \frac{1 \times 8 + 2 \times y_0}{3} = 4$$

$$x_0 = 3,\quad y_0 = 2; \qquad D \equiv (3,\ 2)$$

BC யின் சமன்பாடு : $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3)$

$$2y - x - 1 = 0 \qquad \text{..........................(1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} BC : 2y - x - 1 = 0 \\ BE : x + 3y = 14 \end{array}\right\} B \equiv (5, 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} BC : 2y - x - 1 = 0 \\ CF : 3x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} C \equiv (1, 1)$$

$A \equiv (0, 8), \quad B \equiv (5, 3)$

$$AB : \frac{y-3}{8-3} = \frac{x-5}{0-5} \Rightarrow y - 3 = -1(x - 5)$$

$$y + x - 8 = 0$$

$A(0, 8), \quad C(1, 1)$

$$AC : \frac{y-8}{1-8} = \frac{x-0}{1} \qquad y + 7x - 8 = 0$$

உதாரணம் 11

முக்கோணி ABC இல், AB, AC என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x - y - 1 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ ஆகும். $(-2, -2)$ என்பது BC யின் நடுப் புள்ளியாகும் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

i. AC யின் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறு
ii. BC யின் சமன்பாடு
iii. ΔABC யின் பரப்பளவு
iv. ΔABC யின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் ஆள்கூறு.

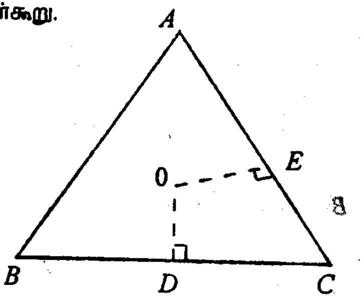
$AB : 2x - y - 1 = 0$

$AC : x - 2y + 1 = 0$

இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க,

$A \equiv (1, 1)$

$B \equiv (x_1, y_1) \quad C \equiv (x_2, y_2)$ எனின்,



$$D \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \equiv (-2, -2)$$

(x_1, y_1) AB யிலிருப்பதால் $2x_1 - y_1 - 1 = 0$ .... (1)

(x_2, y_2) AC யிலிருப்பதால் $x_2 - 2y_2 + 1 = 0$ .... (2)

(1) இலிருந்து $y_1 = = -1 + 2x_1$

(2) இலிருந்து $y_2 = \frac{1 + x_2}{2}$

$x_1 + x_2 = -4$ .... (3)

$y_1 + y_2 = -4 \Rightarrow (-1 + 2x_1) + \left(\frac{1 + x_2}{2}\right) = -4$

$4x_1 + x_2 = -7$ .... (4)

(3), (4) இலிருந்து $x_1 = -1, \; x_2 = 3$; ஆகவே $B \equiv (-1, -3), \; C \equiv (-3, -1)$

(i) AC யின் நடுப்புள்ளி E எனின், $E \equiv (-1, 0)$

(ii) BC யின் சமன்பாடு $y + 3 = \frac{-1 + 3}{-3 + 1}(x + 1)$; $\quad x + y + 4 = 0$

(iii) ΔABC யின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(-3 + 1) - (-1 + 3) + (1 - 9)\right]$$

$= 6$ ச. அலகு

(iv) D யினூடு BC யிற்கு செங்குத்தானகோடு $y + 2 = 1(x + 2) \Rightarrow y - x = 0$

E யினூடு AC யிற்கு செங்குத்தானகோடு

$y - 0 = -2(x + 1) \Rightarrow y + 2x + 2 = 0$

$\therefore$ சுற்றுவட்டமையம் $O \equiv \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

பயிற்சி 2 (a)

1. $4y + 3x = 7$ எனும் கோட்டிற்கு செங்குத்தாக $(1, 2)$ எனும் புள்ளியினூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

2. $(3, -2)$ எனும் புள்ளிக் கூடாகச் செல்வதும் $3x + 4y = 7$ எனும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

3. $(3, 1)$ எனும் புள்ளியை $(2, 4), (7, 10)$ என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. $(2, 4), (-4, 1), (2, -3)$ எனும் புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

5. $(3, 4), (2, 3)$ எனும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்பதுடன் அதற்கு சமாந்தரமாக $(5, 2)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

6. ABC ஒரு முக்கோணம் $A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (5, -1)$ $C \equiv (-4, 2)$ ஆகும். A இற்கூடாக BC இற்கு சமாந்தரமாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. $(3, 4), (-3, 2), (2, 4)$ ஆகிய உச்சிகளையுடைய முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. உச்சியிலிருந்து அடிக்கு வரையும் செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு அவைகள் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதை வாய்ப்பு பார்க்க.

8. $(2, 3), (-1, 2)$ ஆகிய புள்ளிகள் $2x - 3y + 7 = 0$ எனும் கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருக்கின்றன எனக்காட்டுக.

9. $2x + 3y = 5$ எனும் கோடு $(3, -5), (2, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை $7 : 1$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

10. $(3, 2)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று $4x - 5y = 6$ எனும் கோட்டுடன் 45^o கோணங்களை அமைக்கும் இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

11. $2x + 3y = 4$, $3x - y + 2 = 0$ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகவும், $x + y = 0$, $4x + y - 3 = 0$ ஆகிய கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. படித்திறன் 2 ஆகவும் $2x + 3y = 5$, $3x - y = 2$ ஆகிய கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

13. $x + 2y = 4$, $3x + y = 7$ எனும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியையும், உற்பத்தியையும் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு யாது?

14. பின்வரும் புள்ளிகள் தரப்பட்ட நேர்கோட்டின் ஒரேபக்கத்திலா அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களிலா இருக்கின்றனவெனக் காண்க.
    (a) $(1, -4)$ உம் $(1, 2)$ உம், $3x - y - 2 = 0$
    (b) $(3, 1)$ உம் $(4, -1)$ உம் $y = 2x - 4$

15. (a) $3y - 4x = 2$, $7y = x + 1$ எனும் நேர்கோடுகளுக்கிடையேயான கூர்ங்கோணத்தைக் காண்க.
    (b) $x + 2y = 6$, $y - 3x = 1$ எனும் நேர்கோடுகளுக்கிடையேயான கூர்ங்கோணத்தின் தான் [illegible]க் காண்க.

16. ABC என்ற ஓர் இரு சமப்க்க முக்கோணியில் $AB = AC$ ஆகும். $A \equiv (3, 3)$ ஆகும். BC யின் சமன்பாடு $2x + y = 4$ உம் BC யின் நீளம் $4\sqrt{5}$ அலகுகளும் ஆகும். AB, AC என்பவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. ABC எனும் முக்கோணியின் செங்குத்துமையம் ஆள்கூற்று அச்சுக்களின் உற்பத்தியாகும். $A \equiv (t, 2t)$ ஆகவும், $B \equiv (3t, -4t)$ ஆகவும் இருப்பின் C யின் ஆள்கூறுகளை t யில் காண்க. $ABCD$ ஓர் இணைகரமாக இருக்கும் வண்ணம் D எனும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை t இல் காண்க.

18. ஓர் இணைகரத்தின் இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $2x - y = 3$; $x - 2y = 3$ ஆகும். மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி

(4, 2) ஆகும். இரண்டு மூலைவிட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் கண்டு அவ்வுருவம் ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவி அதன் பரப்பளவையும் காண்க.

19. ABC எனும் முக்கோணியின் உச்சிகள் முறையே $(2t, 3t)$. $(0, 0)$, $(3t, t)$ ஆகும். இங்கு $t > 0$. BC, BA இன் சமன்பாடுகளையும், முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவையும் t இனது உறுப்புக்களில் காண்க.

x அச்சின் நேர்த் திசையுடன் 135^o கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு நேர்கோடு BC, BA என்பவற்றை முறையே X, Y என்பவற்றில் $\Delta BXY : \Delta ABC$ (பரப்பு) $= 1:5$ ஆகுமாறு வெட்டினால் அந் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $x + y = 2t$ என நிறுவுக.

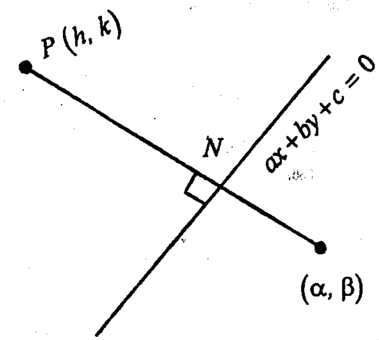
20. ABC என்னும் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணியில் $AB = AC$. $A \equiv (0, 8)$ ஆகும். B, C என்பவற்றுக் கூடாகச் செல்லும் இடையங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x + 3y = 14$; $3x - y = 2$ ஆகும். முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

21. $x + 2y - 2 = 0$ எனும் நேர்கோட்டுடன் $45°$ ஐ ஆக்கிக் கொண்டு $(1, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்கோடுகளினது சமன்பாடுகளைக் காண்க. இவ்விரு நேர்கோடுகளும் தரப்பட்ட நேர்கோட்டை வெட்டும் துண்டின் நீளத்தைக் காண்க.

22. $ax + by + c = 0$ எனும் நேர்கோட்டுடன் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணியொன்றை உருவாக்கும் வண்ணம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நேர்கோடுகள் உற்பத்தியினூடாக வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் சமன்பாடுகள் $(a - b)x + (a + b)y = 0$;

$(a + b)x - (a - b)y = 0$ ஆகுமென நிறுவுக.

(h,k) எனும் புள்ளியிலிருந்து $ax+by+c=o$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் $\left|\dfrac{ah+bk+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ ஆகும்.



PN, $ax+by+c=0$ இற்கு செங்குத்தாகும். $P(h,k)$· PN இல் ஏதாவதொரு புள்ளி (α, β) என்க.

PN இன் படித்திறன் $= \dfrac{\beta-k}{\alpha-h} = \dfrac{b}{a}$

$$= \frac{\alpha-h}{a} = \frac{\beta-k}{b} = t \text{ என்க.}$$

$t = t_o$ ஆக, (α,β) என்பது N ஐக் குறிக்கும் எனின்,

$$\alpha = h + a t_o, \qquad \beta = k + b t_o.$$

$(h+at_o,\ k+bt_o)$, $ax+by+c=0$ இலிருப்பதால்

$$a(h+at_o) + b(k+bt_o) + c = 0$$

$$(a^2+b^2)\, t_o = -(ah+bk+c)$$

$$t_o = \frac{-(ah+bk+c)}{a^2+b^2} \quad \text{.........................} \ (1)$$

செங்குத்துத் தூரம் $PN = \sqrt{(h+at_o-h)^2 + (k+bt_o-k)^2}$

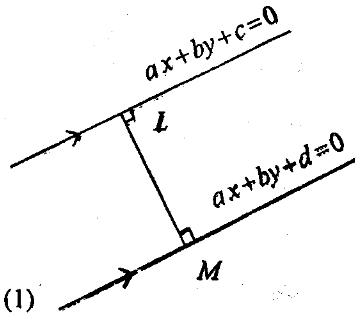
$$= \sqrt{t_o^2\,(a^2+b^2)}$$

$$= |t_o| \sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \left|\frac{-(ah+bk+c)}{a^2+b^2}\right| \times \sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

இரு சமாந்தர கோடுகளுக்கிடையேயான செங்குத்துத்தூரம்

$ax+by+c=o$, $ax+by+d=o$ என்பன இரு சமாந்தரகோடுகள்.



$L \equiv (h,k)$ $ax+by+c=o$ இன் மீது ஒரு புள்ளி. L இலிருந்து $ax+by+d=o$ இன் மீதான செங்குத்தின் அடி M என்க.

$$LM = \frac{|ah+bk+d|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{..........................} (1)$$

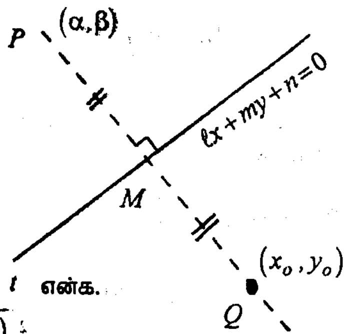
(h,k), $ax+by+c=o$ இலிருப்பதால் $ah+bk+c=o$

(1) இல் $ah+bk=-c$ எனப்பிரதியிட

$$LM = \frac{|d-c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ஆகும்.}$$

$\ell x+my+n=o$ எனும் கோட்டின் மீது புள்ளி (α,β) இன் ஆடிவிம்பம்

$\ell x+my+n=o$ இன் மீது $P(\alpha,\beta)$ இன் ஆடி விம்பம் $Q(x_o,y_o)$ விம்பம் என்க.



PQ இன் படித்திறன் $= \dfrac{y_o-\beta}{x_o-\alpha} = \dfrac{m}{\ell}$

$$\frac{x_o-\alpha}{\ell} = \frac{y_o-\beta}{m} = t \text{ என்க.}$$

$x_o = \alpha+\ell t$, $y_o = \beta+mt$.

$(x_o,y_o) = (\alpha+\ell t,\ \beta+mt)$.

$PM = MQ$; எனவே $M \equiv \left(\dfrac{x_o+\alpha}{2}, \dfrac{y_o+\beta}{2}\right)$ ஆகும்.

$$\equiv \left(\alpha+\frac{\ell t}{2},\ \beta+\frac{mt}{2}\right)$$

M, $\ell x+my+n=o$ இலிருப்பதால்

$$\ell\left(\alpha+\frac{\ell t}{2}\right)+m\left(\beta+\frac{mt}{2}\right)+n=o$$

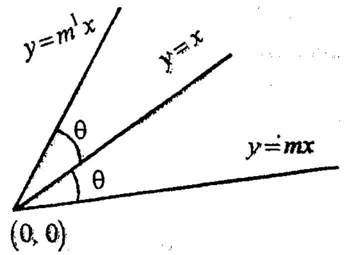
$$t = \frac{-2(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, விம்பத்தின் ஆள்கூறுகள் $(\alpha+\ell t,\ \beta+mt)$ ஆகும்.

இங்கு $t = \dfrac{-2(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}$ ஆகும்.

$y=x$ எனும் கோட்டின் மீது $y=mx$ எனும் கோட்டின் ஆடிவிம்பம்

$y=x$ இன் மீது $y=mx$ இன் விம்பம் $y=m^1x$ என்க.



$$\tan\theta = \left|\frac{m-1}{1+m}\right| = \left|\frac{m^1-1}{1+m^1}\right|$$

$$\frac{m-1}{1+m} = \frac{m^1-1}{1+m^1} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{m-1}{1+m} = -\left(\frac{m^1-1}{1+m^1}\right)$$

$mm^1+m-m^1-1 = mm^1-m+m^1-1 \qquad mm^1+m-m^1-1 = -mm^1+m-m^1+$

அல்லது

$2m = 2m^1 \qquad\qquad 2mm^1 = 2$

$m^1 = m \qquad\qquad m^1 = \dfrac{1}{m}$

ஆகவே $y=x$ இன்மீது $y=mx$ இன் தெறிப்பு $y = \dfrac{1}{m}x$ ஆகும்.

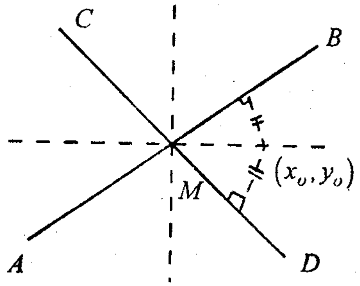
இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயான கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

தரப்பட்ட கோடுகளின் சமன்பாடுகள்.

$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2=0$ என்க.

$AB : a_1x+b_1y+c_1=0$

$CD : a_2x+b_2y+c_2=0$



இரு கோடுகளும் M இல் இடைவெட்டுகின்றன.

பொதுவாக கூர்ங்கோணம், விரிகோணம் என்பன பெறப்படும் அவ்விரு கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகளில் ஏதாவதொன்றின் மீதுள்ளபுள்ளி (x_o, y_o) என்க.

(x_o, y_o) இலிருந்து AB, CD இரண்டிற்கும் வரைந்த செங்குத்துக்களின் நீளங்கள் சமம்.

$$\left|\frac{(a_1x_o+b_1y_o+c_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right| = \left|\frac{(a_2x_o+b_2y_o+c_2)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\right|$$

$$\frac{(a_1x_o+b_1y_o+c_1)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{(a_2x_o+b_2y_o+c_2)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

(x_o, y_o) ஆனது மாறும்போது அதன் ஒழுக்கு

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

எனும் இரு குறிகளையும் தனித்தனியாக எடுக்க இரு சமன்பாடுகள் பெறப்படும். இவற்றுள் ஒன்று கூர்ங்கோணத்தின் இரு கூறாக்கியாகும். மற்றையது விரிகோணத்தின் இருகூறாக்கியாகும்.

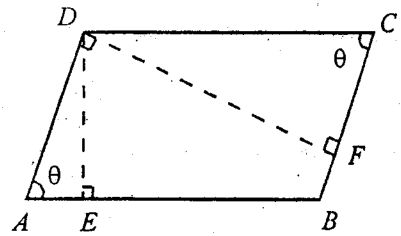
இணைகரம் ஒன்றின் பரப்பளவு

$ax+by+c=0 \qquad ax+by+d=0$

$a^1x+b^1y+c^1=0 \qquad a^1x+b^1y+d^1=0$

எனும் கோடுகளால் ஆக்கப்படும் இணைகரத்தின் பரப்பளவு $\left|\frac{(c-d)\left(c^1-d^1\right)}{ab^1-a^1b}\right|$ ஆகும்.

DE, DF என்பன முறையே AB, BC என்பவற்றிக்கு வரைந்த செங்குத்துக்கள் ஆகும். $ABCD$ யின் பரப்பளவு,



$= AB \cdot DE$

$= CD \cdot DE$

$= \frac{DF}{\sin\theta} \cdot DE$ ஆகும். ....(1)

AB யின் படித்திறன் $(ax+by+c=0$ என்க$)$ $m=-\frac{a}{b}$

AD யின் படித்திறன் $\left(a^1x+b^1y+c^1=0\right.$ என்க$\left.\right)$ $m^1=-\frac{a^1}{b^1}$

AB, AD என்பவற்றிற்கிடையேயான கோணம் θ எனின்,

$$\tan\theta = \left|\frac{m-m^1}{1+mm^1}\right| \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{ஆகவே} \quad \tan\theta = \left|\frac{-\frac{a}{b}+\frac{a^1}{b^1}}{1+\frac{aa^1}{bb^1}}\right| = \left|\frac{a^1b-ab^1}{aa^1+bb^1}\right|$$

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta$ என்பதால்,

$$=1+\left(\frac{aa^1+bb^1}{a^1b-ab^1}\right)^2 = \frac{\left(a^1b-ab^1\right)^2+\left(aa^1+bb^1\right)^2}{\left(a^1b-ab^1\right)^2}$$

$$= \frac{a^{1^2} b^2 + a^2 b^{1^2} + a^2 a^{1^2} + b^2 b^{1^2}}{\left(a^1 b - a b^1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^{1^2}+b^{1^2}\right)}{\left(a^1 b - a b^1\right)^2} \qquad \text{.........................} (2)$$

(1) இலிருந்து $ABCD$ யின் பரப்பளவு

$= DE \cdot DF \cdot cosec\theta \cdot$

(2) இலிருந்து ($O<\theta<\pi$ என்பதால், $cosec\theta>0$)

$$cosec\theta = \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^{1^2}+b^{1^2}\right)}}{\left|a^1 b - a b^1\right|}$$

மேலும் $DE = \dfrac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $DF = \dfrac{\left|c^1-d^1\right|}{\sqrt{a^{1^2}+b^{1^2}}}$ ஆகும்.

எனவே இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு

$$= DE \cdot DF \; cosec\theta$$

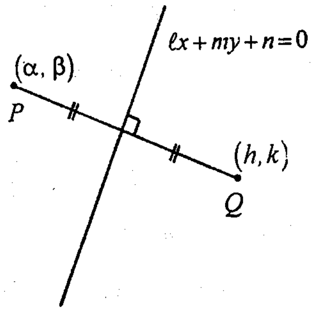
$$= \frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \frac{\left|c^1-d^1\right|}{\sqrt{a^{1^2}+b^{1^2}}} \times \frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^{1^2}+b^{1^2}\right)}}{\left|a^1 b - a b^1\right|}$$

$$= \frac{\left|(c-d)\left(c^1-d^1\right)\right|}{\left|a^1 b - a b^1\right|} \text{ ஆகும்.}$$

$\ell x+my+n=0$ என்ற கோட்டின் மீது புள்ளி (α, β) இன் ஆடிவிம்பத்தின் ஆள் கூற்றைக் கண்டு, இதிலிருந்து $\ell x+my+n=0$ என்ற கோட்டின் மீது $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டின் விம்பத்தைக் காணல்

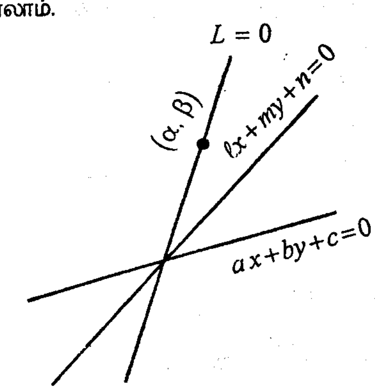
$\ell x+my+n=0$ என்ற கோட்டின் மீது $P(\alpha, \beta)$ இன் விம்பம் $Q \equiv (h, k)$ எனின், $h = \alpha + \ell t, \quad k = \beta + mt$ ஆகும்.

இங்கு $t = \dfrac{-2(\ell\alpha + m\beta + n)}{\ell^2+m^2}$



இம் முடிவு ஏற்கனவே நிறுவப்பட்டுள்ளது.

இம் முடிவைப் பயன்படுத்தி $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் மீது $ax+by+c=0$ இன் விம்பத்தைக் காணலாம்.



$\ell x+my+n=0$ இன் மீது $ax+by+c=0$ இன் விம்பம் ஒரு நேர்கோடாகும்.

$(L=0)$ இந்நேர்கோட்டில் (α, β) என்பது ஒரு மாறும் புள்ளி என்க.

$\ell x+my+n=0$ இன் மீது (α,β) இன் ஆடிவிம்பம் P^1 என்க.

$$P^1 \equiv \left(\alpha - \frac{2\ell(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}, \; \beta - \frac{2m(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

P ஆனது $L=0$ இலிருப்பதால் P^1 ஆனது $ax+by+c=0$ இலிருக்கும்.

P^1 ஆனது $ax+by+c=0$ இலிருப்பதால்,

$$a\left[\alpha - \frac{2\ell\,(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}\right]+b\left[\beta - \frac{2m\,(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}\right]+c=0$$

$$\left(\ell^2+m^2\right)\,(a\alpha+b\beta+c)-2\,(a\ell+bm)\,(\ell x+my+n)=0$$

எனவே (α, β) இன் ஒழுக்கு

$$\left(\ell^2+m^2\right)\,(ax+by+c)\;-2\,(a\ell+bm)\,(\ell x+my+n)=0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\ell x+my+n=0$ இன் மீது

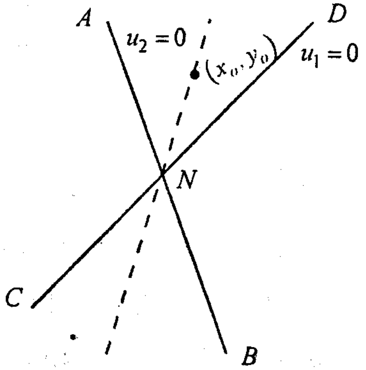
$ax+by+c=0$ இன் விம்பத்தின் சமன்பாடு

$$\left(\ell^2+m^2\right)\,(ax+by+c)-2\,(a\ell+bm)\,(\ell x+my+n)=0 \text{ ஆகும்.}$$

இரு கோடுகளுக்கிடையேயான கோணங்களில் உற்பத்தியைக் கொண்டிருக்கும் கோணத்தின் இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு

$u_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0,\;\; u_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ என்பன தரப்பட்ட இருகோடுகளின் சமன்பாடுகள் $c_1,\, c_2<0$ என்க.

இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் முன்பே கண்டுள்ளோம்.



இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}} \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}} \;\;\cdots\cdots\;(1)$$

என்பதை எடுக்க.

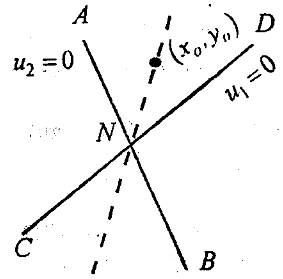
மேலே தரப்பட்ட இருகூறாக்கி படத்தில் கோணம் AND அல்லது BNC இனுடையது ஆகும். இவ்விரு கூறாக்கியில் $(x_o,\, y_o)$ யாதாயினும் ஒரு புள்ளி என்க.

(a) உற்பத்தி, கோணம் AND யினுள் இருக்கும் என்க.

$(x_o,\, y_o)$ உம் $(0,\,0)$ உம் $u_1=0,$ இன் ஒரேபக்கத்தில் இருப்பதால்,

$(a_1x_o+b_1y_o+c_1)\,c_1>0$ .... (2)

$c_1<0$ என்பதால் $a_1x_o+b_1y_o+c_1<0$ ஆகும்.



(1) இலிருந்து $a_2x+b_2y+c_2=\dfrac{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}\,(a_1x+b_1y+c_1)$ ஆகும்.

$a_1x_o+b_1y_o+c_1<0;$ மேலும் $\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}},\;\; \sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}$ என்பன நேர் ஆகையால்.

$$a_2x_o+b_2y_o+c_2=\frac{\sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}}}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}}}\,(a_1x_o+b_1y_o+c_1)<0$$

அதாவது $a_2x_o+b_2y_o+c_2<0$

$c_2<0$ என்பதால், $(a_2x_o+b_2y_o+c_2)\,c_2>0.$ ஆகும். .... (3)

எனவே $(x_o\,, y_o)$ உம் $(0,0)$ உம் $u_2=0$ இன் ஒரேபக்கத்தில் இருக்கும்.

எனவே உற்பத்தி, கோணம் $\angle AND$ யினுள் அமைந்திருக்கலாம்.

(b) உற்பத்தி $(0,0)$ கோணம் ANC யினுள் அமைந்துள்ளதென்க.

இப்பொழுது (x_o, y_o) உம், $(0,0)$

உம், $u_1=0$ இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் உள்ளன.

$\therefore\;(a_1x_o+b_1y_o+c_1)\,c_1<0$ ஆகும்.

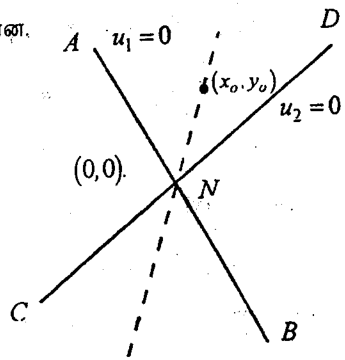
$c_1<0$ என்பதால், $a_1x_o+b_1y_o+c_1>0$ ஆகும்.

(1) இலிருந்து $a_2x_o+b_2y_o+c_2>0$ ஆகும்.

$c_2>0$ என்பதால்

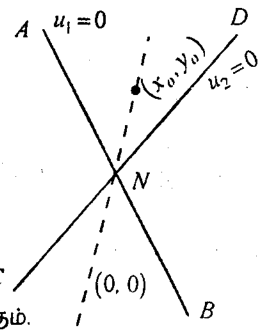
$(a_2x_o+b_2y_o+c_2)\,c_2<0$ ஆகும்.

அதாவது (x_o, y_o) உம், $(0,0)$ உம்



$a_2x+b_2y+c_2=0$ இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் இருக்கும் இது பொருந்தாது. எனவே உற்பத்தி, கோணம் ANC யினுள் **இருக்க முடியாது.**

(c) உற்பத்தி கோணம் BNC யினுள் அமைந்துள்ளதென்க.



(x_o, y_o) உம், $(0,0)$ உம்

$a_1x+b_1y+c_1=0$ இன்

எதிர்ப்பக்கங்களின் அமைந்துள்ளதால்,

$(a_1x_o+b_1y_o+c_1)\ c_1<0$

$c_1<0$ ஆதலால், $a_1x_o+b_1y_o+c_1>0$

(1) இலிருந்து $a_2x_o+b_2y_o+c_2>0$

$c_2<0$ என்பதால் $(a_2x_o+b_2y_o+c_2)\ c_2<0$ ஆகும்.

ஆகவே (x_o, y_o) என்பன $a_2x+b_2y+c_2=0$ இன் எதிர்ப்பக்கங்களிலிருக்கும், எனவே உற்பத்தி, கோணம் BNC யினுள் இருக்கலாம்.

(d) **(b)** இல் காட்டியவாறே உற்பத்தி, கோணம் BND யினுள் அமைய முடியாதெனக் காட்டலாம்.

$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கு இடையேயான கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ ஆகும்.

$c_1, c_2<0$ அல்லது $c_1, c_2>0$ ஆக இருப்பின் உற்பத்தியைக் கொண்ட கோணத்தின் இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ ஆகும்.

உதாரணம்

$4x+3y-1=0$, $12x+5y+9=0$ ஆகிய நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணங்களில் உற்பத்தியைக் கொண்டுள்ள கோணத்தின் இரு கூறாக்கியைக் காணல்.

இரு நேர்கோடுகளிலும் உள்ள மாறிலி உறுப்புக்கள் இரண்டும் நேராக அல்லது இரண்டும் மறையாக இருக்குமாறு சமன்பாடுகளை எழுதுக.

அதாவது $-4x-3y+1=0,\ 12x+5y+9=0$ அல்லது

$4x+3y-1=0,\ -12x-5y-9=0$ என எழுதுக.

$$\frac{-4x-3y+1}{5} = \frac{12x+5y+9}{13}$$
$$13(-4x-3y+1) = 5(12x+5y+9)$$
$$-52x-39y+13 = 60x+25y+45$$
$$112x+64y+32=0$$
$$7x+4y+2=0.$$

அல்லது

$$\frac{4x+3y-1}{5} = \frac{-12x-5y-9}{13}$$
$$13(4x+3y-1) = 5(-12x-5y-9)$$
$$52x+39y-13 = -60x-25y-45$$
$$112x+64y+32=0$$
$$7x+4y+2=0.$$ ஆகும்.

உற்பத்தியைக் கொண்டிருக்கும் கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $7x+4y+2=0$ ஆகும்.

$$\frac{-4x-3y+1}{5} = -\frac{12x+5y+9}{13}$$ அல்லது $$\frac{4x+3y-1}{5} = -\frac{-12x-5y-9}{13}$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதால் மற்றைய கோணத்தின் இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு $4x-7y+29=0$ ஆகும்.

$7x+4y+2=0$ இன் படித்திறன் $=\frac{-7}{4}$

$4x+3y-1=0$ இன் படித்திறன் $=-\frac{4}{3}$

இரு கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனின்,

$$\tan\theta = \left| -\frac{\frac{7}{4}+\frac{4}{3}}{1+\frac{7}{4}\times\frac{4}{3}} \right| = \left| \frac{\frac{-5}{12}}{\frac{40}{12}} \right| = \frac{1}{8} < 1$$

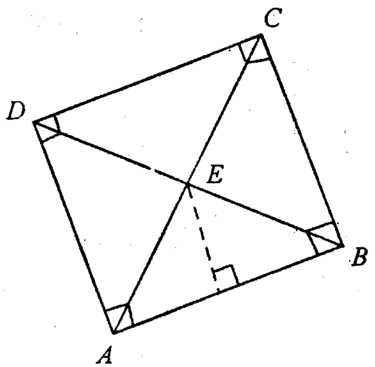
எனவே உற்பத்தி கூர்ங்கோணத்தினுள் இருக்கும் என்பதைக் காணலாம். ஏனெனில் கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கி $7x+4y+2=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 12

ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் சமன்பாடு $x-2y=0$ ஆகும். அதன் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ எனும் புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. அச்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் அதன் பரப்பையும் காண்க.

சதுரம் $ABCD$ இல் $AB : x-2y=0$

$$E\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$



E யிலிருந்து AB யின் செங்குத்துத்தூரம்

$$\frac{\left|\frac{5}{2} - 2\times\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

CD யின் சமன்பாடு: $x-2y+k=0$ என்க.

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ இலிருந்து செங்குத்துத்தூரம்

$$\frac{\left|\frac{5}{2} - 2\times\frac{5}{2}+k\right|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\left|\frac{5}{2} - 5+k\right| = \frac{5}{2}$$

$$k-\frac{5}{2} = \pm\, 5/2 \;;\; k=0, \text{ அல்லது } k=5$$

ஆகவே CD யின் சமன்பாடு $x-2y+5=0$

AD என்பது, AB யிற்கு செங்குத்து ஆதலால்,
AD யின் சமன்பாடு $2x+y+c=0$ என்க.

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ இலிருந்து AD யின் செங்குத்துத்தூரம் $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ஆகும்.

$$\frac{\left|2\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+c\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|15+2c| = 5$$

$$15+2c = \pm 5$$

$c=-5$ அல்லது -10

$\therefore$ சதுரத்தின் ஏனைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x-2y+5=0$$
$$2x+y-5=0$$
$$2x+y-10=0 \text{ ஆகும்.}$$

சதுரத்தின் இரு சமாந்தர பக்கங்களுக்கு இடைத்தூரம்

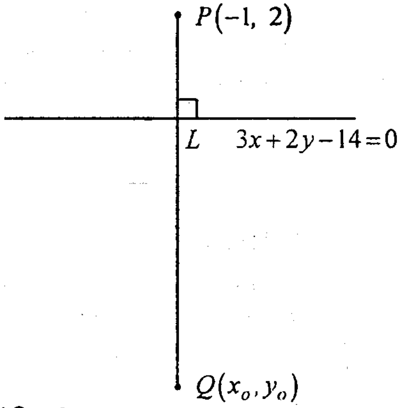
$$\frac{|-5+10|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ ஆகும்.}$$

சதுரத்தின் பரப்பளவு $= \sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$ ச. அலகுகள்

உதாரணம் 13

$P\equiv(-1, 2)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $\ell \equiv 3x+2y-14=0$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தின் அடி L ஆகும். $LQ=2PL$ ஆகுமாறு PL, Q விற்கு நீட்டப்படுகின்றது. Q இன் ஆள்கூறைக் காண்க. R, S எனும் இரு புள்ளிகள் ℓ இன் மீது, முக்கோணிகள் PLR, PLS என்பவற்றின் பரப்புக்கள் 13 சதுர அலகுகள் ஆகுமாறு எடுக்கப்படுகின்றன. R, S என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$Q \equiv (x_o, y_o)$ என்க.



PQ இன் படித்திறன் $= \dfrac{2}{3}$

$$\frac{y_o-2}{x_o+1} = \frac{2}{3}$$

$$2x_o - 3y_o = -8 \quad \text{..........................} (1)$$

$PL : LQ = 1:2$ என்பதால்

$L \equiv \left(\dfrac{x_o-2}{3}, \dfrac{y_o+4}{3}\right)$ ஆகும். L, நேர்கோடு

$3x+2y=14$ இலிருப்பதால் $3\left(\dfrac{x_o-2}{3}\right)+2\left(\dfrac{y_o+4}{3}\right) = 14$

$$3x_o + 2y_o = 40 \quad \text{..........................} (2)$$

(1), (2) இலிருந்து $\left.\begin{aligned} 2x_o - 3y_o &= -8 \\ 3x_o + 2y_o &= 14 \end{aligned}\right\}$ $x_o = 8, \quad y_o = 8$

$Q \equiv (8,8)$; $L \equiv (2,4)$ ஆகும்.

$R \equiv (x_1, y_1)$ என்க.

ΔPLR இன் பரப்பு $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 13.$

$$\left|-2x_1 + 3y_1 - 8\right| = 26$$
$$\left|2x_1 - 3y_1 + 8\right| = 26$$
$$2x_1 - 3y_1 + 8 = \pm 26$$

$2x_1 - 3y_1 = 18$ அல்லது $2x_1 - 3y_1 = -34$

(x_1, y_1) $3x+2y=14$ இலிருப்பதால்,

$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2y_1 &= 14 \\ 2x_1 - 3y_1 &= 18 \end{aligned}\right\}$; $(x_1, y_1) \Rightarrow (6,-2) \equiv R$

$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2y_1 &= 14 \\ 2x_1 + -3y_1 &= -34 \end{aligned}\right\}$ $\Rightarrow (x_1, y_1) \equiv (-2,10) \equiv S$

உதாரணம் 14

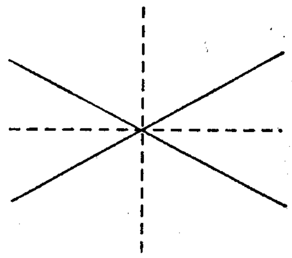
(a) $5x+12y-8=0$, $3x-4y=2$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையேயான கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க. கூர்ங்கோணத்தின் இரு கூறாக்கி யாது?

(b) இரு நேர்கோடுகளின் படித்திறன்கள் முறையே m, m^1 ஆகும். அக்கோடுகளுக்கிடையேயான கோணம் 45^o எனின், $m^1 = \dfrac{m-1}{m+1}$ அல்லது எனக் காட்டுக.

சதுரம் ஒன்றின் இரு எதிர்உச்சிகள் $(-1,2)$, $(5,6)$ எனின், மற்றைய இரு உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

$5x+12y-8=0$, $3x-4y-2=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையேயான கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்.

(a) $$\frac{5x+12y-8}{\sqrt{5^2+12^2}} = \pm\frac{3x-4y-2}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$\frac{5x+12y-8}{13} = \pm\frac{3x-4y-2}{5}$$



$\dfrac{5x+12y-8}{13} = \dfrac{3x-4y-2}{5}$; $\dfrac{5x+12y-8}{13} = \dfrac{-(3x-4y-2)}{5}$

$25x+60y-40 = 39x-52y-26$; $\quad$ $25x+60y-40 = -39x+52y+26$

$14x-112y+14=0$ $\quad$ $64x+8y-66=0$

$x-8y+1=0$ $\quad$ $32x+4y-33=0$

இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் $x-8y+1=0$

$$32x+4y-33=0 \text{ ஆகும்.}$$

$x-8y+1=0$ இற்கும் தரப்பட்ட கோடு $3x-4y-2=0$ இற்குமிடையே கூர்ங்கோணம் α எனின்,

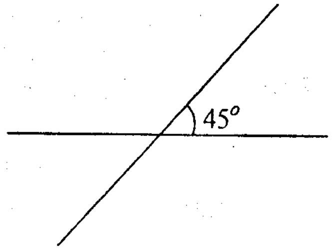
$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}}\right| = \left|\frac{\frac{-5}{8}}{1+\frac{3}{32}}\right| = \left|\frac{\frac{-5}{8}}{\frac{35}{32}}\right|$$

$$= \left|\frac{-5}{8}\times\frac{32}{35}\right| = \frac{4}{7} < 1$$

எனவே கூர்ங்கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $x-8y+1=0$ ஆகும்.

(b) $\tan 45^o = \left|\frac{m-m^1}{1+mm^1}\right|$

$$\left|\frac{m-m^1}{1+mm^1}\right| = 1$$



$\frac{m-m^1}{1+mm^1} = 1$ **அல்லது** $\frac{m-m^1}{1+mm^1} = -1$

$m-m^1 = 1+mm^1$

$m-1 = m^1+mm^1$

$m-1 = m^1(1+m)$

$m^1 = \frac{m-1}{m+1}$

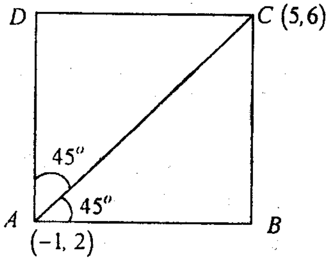
$m-m^1 = -1-1mm^1$

$m+1 = m^1(1-m)$

$m^1 = \frac{1+m}{1-m}$ ஆகும்.

$A \equiv (-1, 2)$, $C \equiv (5,6)$

AC யின் படித்திறன் $= \frac{6-2}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



$m = \frac{2}{3}$ எனின், முதற்பகுதியிலிருந்து $m^1 = \frac{m-1}{m+1} = \frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}+1} = -\frac{1}{5}$

அல்லது $m^1 = \frac{1+m}{1-m} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 5$

AB யின் படித்திறன் $-\frac{1}{5}$ எனின்,

AB யின் சமன்பாடு, $y-2 = -\frac{1}{5}(x+1)$

$$5y+x = 9 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

BC யின் சமன்பாடு, $y-6 = 5(x-5)$

$$y-5x = -19 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) இலிருந்து $B \equiv (4,1)$

DC யின் சமன்பாடு $5y+x=c_1$; இது $(5,6)$ இனூடு செல்வதால்,

$$c_1 = 35$$

$$5y+x = 35 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

AD யின் சமன்பாடு $y-5x = c_2$. இது $(-1,2)$ இனூடு செல்வதால்,

$$c_2 = 7$$

$$y-5x = 7 \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

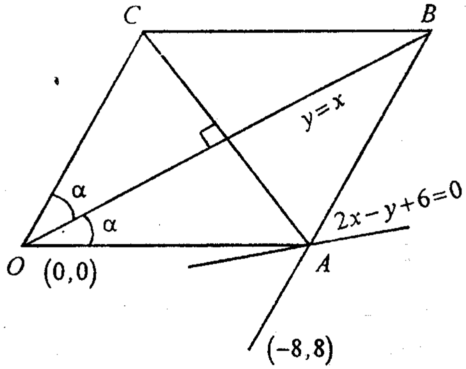
(3), (4) இலிருந்து $D \equiv (0, 7)$

ஆகவே $B \equiv (4, 1)$, $D \equiv (0, 7)$ ஆகும்.

உதாரணம் 15

$y=x$ என்னும் கோட்டின் மீது, $y=mx$ எனும் கோட்டின் தெறிப்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$OABC$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம். இங்கு O என்பது உற்பத்தியாகும். மூலைவிட்டம் OB இன் சமன்பாடு $x-y=0$ ஆகும். A என்பது கோடு $2x-y+6=0$ இற் கிடக்கிறது. AB ஆனது புள்ளி $(-8,8)$ இனூடாகச் செல்கிறது. அச்சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



A, $2x-y+6=0$ இல் இருப்பதால்,

$A\equiv(t,\,2t+6)$ என எழுதலாம்.

$(-8,\,8)$ AB இல் ஒரு புள்ளி ஆகும்.

எனவே AB யின் ப.தி $=\dfrac{(2t+6)-8}{t-(-8)}$

$$=\frac{2t-2}{t+8} \quad \text{.........................(1)}$$

OA யின் படித்திறன் $=\dfrac{2t+6}{t}$; OA யின் சமன்பாடு $y=\dfrac{2t+6}{t}x$.

OC என்பது $y=x$ இன் மேல் OA யின் தெறிப்பு என்பதால்,

OC யின் சமன்பாடு $y=\dfrac{t}{2t+6}x$ ....(2)

OC, AB என்பவற்றின் படித்திறன்கள் சமமாகும்.

$$\frac{2t-2}{t+8}=\frac{t}{2t+6}$$

$$(2t+6)\,(2t-2)=t\,(t+8)$$

$$3t^2-12=0$$

$t=\pm 2$ ஆகும்.

$t=2$ எனின், OA யின் சமன்பாடு $y=5x$

OC யின் சமன்பாடு $y=\dfrac{1}{5}x \Rightarrow 5y-x=0$

$\left.\begin{array}{l} t=-2 \text{ எனின், } OA \text{ யின் சமன்பாடு } y=-x \\ OC \text{ யின் சமன்பாடு } y=-x \end{array}\right\}$ பொருந்தாது.

OC யின் சமன்பாடு $5y-x$ எனின், AB யின் சமன்பாடு $5y-x+c=0$

AB, $(-8,\,8)$ இனூடு செல்வதால் $(5\times 8)+8+c=0$; $c=-48$

AB : $5x-x-48=0$.

OB : $y=x$

இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க. $B\equiv(12,\,12)$

BC யின் சமன்பாடு $y-5x+k=0$; $(12,\,12)$ இனூடு செல்வதால்,

$$12-60+k=0\ ;\ k=48.$$

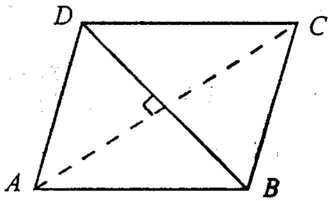
$\therefore$ சமன்பாடுகள் $y-5x=0$; $y-5x+48=0$;

$5y-x=0$ $5y-x-48=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 16

$\ell x+my+n=o$ எனும் கோட்டின் மேல் புள்ளி (α,β) இன் ஆடி விம்பத்தின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

$ABCD$ எனும் சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் BD யின் சமன்பாடு $x+2y+1=0$ ஆகும். உச்சிகள் A, C என்பன முறையே $x-y=0$, $3x+y+8=0$ எனும் கோடுகளின் மீது கிடக்கின்றன. பக்கம் AB ஆனது $7x+4y=0$ எனும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமாயின், சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



(α,β) இன் விம்பம் (x_o,y_o) எனின்,

$x_o=\alpha+\ell t$, $y_o=\beta+mt$

இங்கு $t=\dfrac{-2\,(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}$ ஆகும்.

A, $x-y=0$ இல் இருப்பதால் $A\equiv(\alpha,\alpha)$ என்க. BD யின் மீது A யின் விம்பம் C

$BD: x+2y+1=0$; $\ell=1$, $m=2$, $n=1$, $t=\dfrac{-2(\alpha+2\alpha+1)}{5}=\dfrac{-2(3\alpha+1)}{5}$

$C\equiv(x_o,y_o)$ எனின்,

$$x_o = \alpha+\ell t = \alpha-\frac{2(3\alpha+1)}{5}=\frac{-\alpha-2}{5}$$

$$y_o = \alpha+mt = \alpha-4\,\frac{3\alpha+1}{5}=\frac{-7\alpha-4}{5}$$

(x_o, y_o); $3x+y+8=0$ இல் இருப்பதால்,

$$3\left(\frac{-\alpha-2}{5}\right)+\frac{-7\alpha-4}{5}+8=0$$

$\alpha=3$, $A\equiv(3,3)$, $c\equiv(-1,-5)$ ஆகும்.

AB யின் சமன்பாடு $7x+4y+c_1=0$; இது $(3,3)$ இனூடு செல்வதால்,

$$21+12+c_1=0;\qquad c_1=-33.$$

CD யின் சமன்பாடு $7x+4y+c_2=0$; இது $(-1,-5)$ இனூடு செல்வதால்

$$-7-20+c_2=0;\qquad c_2=27$$

AB யின் சமன்பாடு $7x+4y-33=0$; CD யின் சமன்பாடு $7x+4y+27=0$ ஆகும்.

DC; BD என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் $7x+4y+27=0$

$x+2y+1=0$ என்பவற்றைத் தீர்க்க.

$$D\equiv(-5,2)$$

$A\equiv(3,3)$, $D(-5,2)$ என்பதால், AD யின் சமன்பாடு

$$\frac{y-2}{3-2}=\frac{x+5}{3+5};\qquad 8y-x-21=0.$$

BC யின் சமன்பாடு $8y-x-c_3=0$; இது $c\equiv(-1,-5)$ இனூடு செல்வதால்

$$-40+1+c_3=0;\qquad c_3=39$$

ஆகவே BC யின் சமன்பாடு $8y-x+39=0$.

சமன்பாடுகள்

$$7x+4y-33=0 \qquad 8y-x-21=0$$
$$7x+4y+27=0 \qquad 8y-x+39=0 \text{ ஆகும்.}$$

[மாற்றுமுறை: $A(\alpha,\alpha)$, $C\equiv(x_o,-8-3x_o)$ என்க.

AC யின் படித்திறன் $=\dfrac{-8-3x_o-\alpha}{x_o-\alpha}=2$ [BD யின் படித்திறன் $=-\dfrac{1}{2}$]

$$5x_o-\alpha=-8 \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

AC யின் நடுப்புள்ளி $M\equiv\left(\dfrac{x_o+\alpha}{2},\ \dfrac{-8-3x_o+\alpha}{2}\right)$

M, BD யிலிருப்பதால் $\dfrac{x_o+\alpha}{2}+2\left(\dfrac{-8-3x_o+\alpha}{2}\right)+1=0$

$$-5x_o+3\alpha=14 \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) இலிருந்து, $\alpha=3$, $x_o=-1$

$A\equiv(3,3)$, $c\equiv(-1,-5)$]

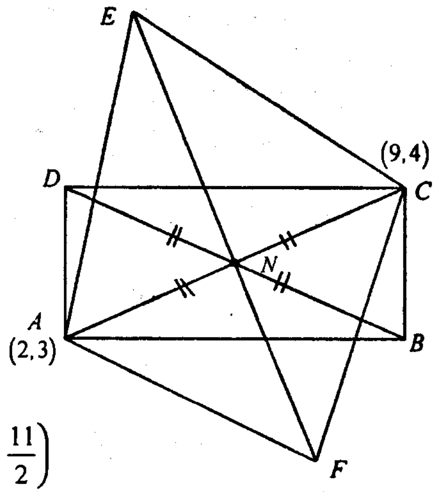
உதாரணம் 17

செவ்வகம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் $A\equiv(2,3)$; $C\equiv(9,4)$ ஆகும். மூலைவிட்டம் BD, $x+y=0$ என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயின் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$AECF$ என்பது செவ்வகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவைப் போல ஐந்து மடங்கு பரப்பளவுடைய ஒரு சாய்சதுரமாயின், மூலைவிட்டம் EF இன் நீளம் $15\sqrt{2}$ அலகு என நிறுவுக. AC இற்குச் சமாந்தரமாக E, F இற்கூடாகச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$A \equiv (2, 3), \quad C \equiv (9, 4)$

ஆகவே $N \equiv \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$



$AC = \sqrt{(9-2)^2 + (4-3)^2}$

$\quad = 5\sqrt{2}.$

$AN = NC = BN = ND = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

BD யின் படித்திறன் $= 1.$

BD யின் சமன்பாடு $\quad y - \frac{7}{2} = 1\left(x - \frac{11}{2}\right)$

$$y - x + 2 = 0$$

$B \equiv (t, t-2)$ என எழுதலாம்.

$$BN^2 = \left(t - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(t - 2 - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$\frac{50}{4} = 2\left(t - \frac{11}{2}\right)^2$$

$$\left(t - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$t - \frac{11}{2} = \pm \frac{5}{2}; \quad t = 8$ அல்லது $t = 3$

$\therefore \; B \equiv (8, 6), \quad D \equiv (3, 1)$ ஆகும்.

AB யின் சமன்பாடு : $\quad y - 3 = \frac{6-3}{8-2}(x-2)$

$\qquad 2y - x - 4 = 0$ ....(1)

CD யின் சமன்பாடு : $\quad 2y - x + c = 0; \; (9, 4)$ ஐப் பிரதியிட $c = 1$

$\qquad 2y - x + 1 = 0$ ....(2)

AD யின் சமன்பாடு : $\quad y - 3 = -2(x-2)$

$\qquad y + 2x - 7 = 0$ ....(3)

BC யின் சமன்பாடு : $\quad y - 4 = -2(x-9)$

$\qquad y + 2x - 22 = 0$ ....(4)

செவ்வகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= AB \times AD = 3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 15$ சதுர அலகு.

சாய்சதுரம் $AECF$ இன் பரப்பளவு $= 75$ ச. அலகு

$$\frac{1}{2} \times AC \times EF = 75.$$

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times EF = 75; \qquad EF = 15\sqrt{2} \text{ அலகு}$$

AC யின் சமன்பாடு. $\quad y - 3 = \frac{1}{7}(x-2)$

$$7y - x - 19 = 0.$$

AC இற்கு சமாந்தரமான கோடுகள், $7y - x + k = 0$ என எழுதலாம்.

$FM = EM = \frac{15}{\sqrt{2}}, \quad EM \perp AC, \; FM \perp AC$ என்பதால்

$$\frac{|k+19|}{5\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} \qquad |k+19| = 75$$

$$k + 19 = \pm 75$$

$$k = 56, \; -94$$

ஆகவே, E, F என்பவற்றிக்கூடாக A, C யிற்கு சமாந்தரமான நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $7y - x + 56 = 0, \; 7y - x - 94 = 0$ ஆகும்.

உதாரணம் 18

பின்வரும் கோடுகளினால் ஆக்கப்படும் இணைகரத்தினுடைய மூலை விட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

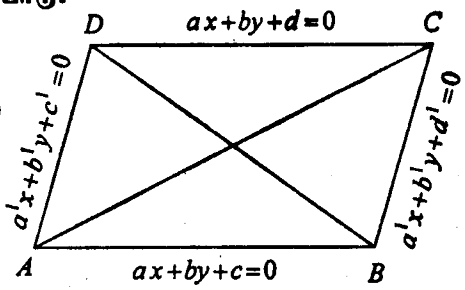
$$ax + by + c = 0 \quad ; \quad ax + by + d = 0$$

$$a^1x + b^1y + c^1 = 0 \quad ; \quad a^1x + b^1y + d^1 = 0$$

(i) $(a^2+b^2)\,(c^1-d^1)^2 = (a^{1^2}+b^{1^2})\,(c-d)^2$ எனின், மேற்படி இணைகரம் சாய்சதுரமாகுமெனவும்

(ii) இணைகரத்தின் பரப்பளவு $\left|\dfrac{(c-d)\,(c^1-d^1)}{ab^1-a^1b}\right|$ ஆகுமெனவும் காட்டுக.

மூலைவிட்டம் AC யின் சமன்பாடு:



இது A யினூடு செல்வதால்,

$(ax+by+c)+\lambda\,(a^1x+b^1y+c^1)=0$

என எழுதலாம்.

$C\equiv(\alpha,\beta)$ என்க. AC, (α,β) இனூடு செல்வதால்,

$$(a\alpha+b\beta+c)+\lambda\,(a^1\alpha+b^1\beta+c^1)=0 \quad \text{..........................} (1)$$

மேலும் $C\equiv(\alpha,\beta)$ ஆனது $ax+by+d=0$, $a^1\alpha+b^1y+d^1=0$ இலிருப்பதால்

$a\alpha+b\beta+d=0$ .... (2) $a^1\alpha+b^1\beta+d^1=0$ .... (3)

(2), (3) என்பவற்றைப் பாவிக்க, சமன்பாடு (1)

$$(c-d)+\lambda\,(c^1-d^1)=0$$
$$\lambda=\frac{-(c-d)}{c^1-d^1}$$

$\therefore$ AC யின் சமன்பாடு : $(c^1-d^1)\,(ax+by+c)-(c-d)\,(a^1x+b^1y+c^1)=0$

$$\left[a(c^1-d^1)-a^1(c-d)\right]x+\left[b(c^1-d^1)-b^1(c-d)\right]y+\left[c(c^1-d^1)-c^1(c-d)\right]=0$$

.... (A)

மூலைவிட்டம் BD யின் சமன்பாடு:

$$(ax+by+c)+\mu\,(a^1x+b^1y+d^1)=0$$

$D\equiv(h,k)$ என்க. BD யானது D யினூடு செல்வதால்

$(ah+bk+c)+\mu\,(a^1h+b^1k+d^1)=0$ .... (4)

$D\equiv(h,k)$ ஆனது $ax+by+d=0$, $a^1x+b^1y+c^1=0$ இலிருப்பதால்

$ah+bk+d=0$ .... (5) $a^1h+b^1k+c^1=0$ .... (6)

(5), (6) என்பவற்றைப் பாவிக்க சமன்பாடு (4)

$$(c-d)+\mu\,(d^1-c^1)=0$$
$$\mu=\frac{c-d}{c^1-d^1}$$

BD யின் சமன்பாடு : $(c^1-d^1)\,(ax+by+c)+(c-d)\,(a^1x+b^1y+d^1)=0$ (ii)

$$\left[a(c^1-d^1)+a^1(c-d)\,x+\left[b(c^1-d^1)+b^1(c-d)\right]y+\left[c(c^1-d^1)+d^1(c-d)\right]\right]=0$$

.... (B)

(i) $m_1=AC$ யின் படித்திறன் $= -\dfrac{a(c^1-d^1)-a^1(c-d)}{b(c^1-d^1)-b^1(c-d)}$

$m_2=BD$ யின் படித்திறன் $= -\dfrac{a(c^1-d^1)+a^1(c-d)}{b(c^1-d^1)+b^1(c-d)}$

$$m_1\times m_2=\frac{\left[a(c^1-d^1)-a^1(c-d)\right]\left[a(c^1-d^1)+a^1(c-d)\right]}{\left[b(c^1-d^1)-b^1(c-d)\right]\left[b(c^1-d^1)+b^1(c-d)\right]}$$

$$=\frac{a^2(c^1-d^1)-a^{1^2}(c-d)^2}{b^2(c^1+d^1)^2-b^{1^2}(c-d)^2}$$ .... (C)

$(a^2+b^2)\,(c^1-d^1)^2=(a^{1^2}+b^{1^2})\,(c-d)^2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே $a^2\left(c^1-d^1\right)^2+b^2\left(c^1-d^1\right)^2 = a^{1^2}(c-d)^2+b^2(c-d)^2$

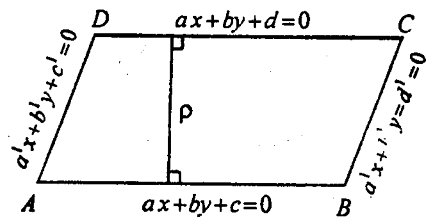
$$a^2\left(c^1-d^1\right)^2-a^{1^2}(c-d)^2 = -\left[b^2\left(c^1-d^1\right)^2-b^2(c-d)^2\right]$$

$$\frac{a^2\left(c^1-d^1\right)^2-a^{1^2}(c-d)^2}{b^2\left(c^1-d^1\right)^2-b^2(c-d)^2} = -1 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $m_1 \times m_2 = -1$, AC, BD யிற்கு செங்குத்து

ஆகவே $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் ஆகும்.

(ii) $\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a^1x+b^1y+c^1=0 \end{array}\right\} A$



$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ b^1 & c^1 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a & c \\ a^1 & c^1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ a^1 & b^1 \end{vmatrix}}$$

$$A \equiv \left(\frac{bc^1-b^1c}{ab^1-a^1b},\ \frac{ca^1-c^1a}{ab^1-a^1b}\right)$$

இதே போல, $B \equiv \left(\frac{bd^1-b^1c}{ab^1-a^1b},\ \frac{ca^1-d^1a}{ab^1-a^1b}\right)$

$$AB^2 = \frac{b^2\left(c^1-d^1\right)^2+a^2\left(c^1-d^1\right)^2}{\left(ab^1-a^1b\right)^2} = \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(c^1-d^1\right)^2}{\left(ab^1-a^1b\right)^2}$$

$$AB = \sqrt{a^2+b^2}\ \left|\frac{c^1-d^1}{ab^1-a^1b}\right|$$

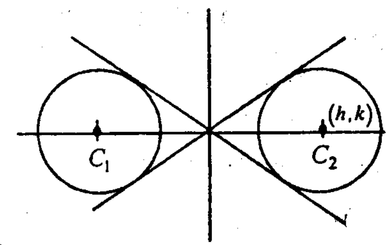
AB, CD என்பவற்றிற் கிடைத்தூரம் $\rho = \frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பு $= AB \times \rho = \left|\frac{(c-d)\left(c^1-d^1\right)}{ab^1-a^1b}\right|$ ஆகும்.

உதாரணம் 19

(h,k) எனும் புள்ளியிருந்து $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தின் நீளம் $\left|\frac{ah+bk+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ என நிறுவுக.

$4x+3y-1=0$, $12x+5y+9=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள விரிகோணத் திற்குள்ளே, இக்கோடுகளைத் தொடும் 4 அலகு ஆரையுடைய இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. வட்டத்தின் மற்றைய இரு பொதுத் தொடலிகளின் சமன் பாடுகளையும் காண்க.



$$\frac{4x+3y-1=0}{5} = \pm\frac{12x+5y+9}{13}$$

$$13(4x+3y-1) = \pm 5(12x+5y+9)$$

$$52x+39y-13 = \pm(60x+25y+45)$$

$$8x-14y+58=0\ ;\quad 112x+64y+32=0$$

இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்:

$4x-7y+29=0$ .... (1)

$7x+4y+2=0$ .... (2)

$4x+3y-1=0$ எனும் தரப்பட்ட கோட்டையும், இரு கூறாக்கிகளில் ஒன்று $4x-7y+29=0$ ஐயும் ஆராய்க. இவ்விரு கோடுகளுக்குமிடையேயான கோணம் θ எனின்,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| \quad \left(m_1 = -\tfrac{4}{3},\ m_2 = \tfrac{4}{7}\right)$$

$$= \left|\frac{-\frac{4}{3} - \frac{4}{7}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{4}{7}}\right| = \left|\frac{40}{5}\right| = 8 > 1.$$

ஆகவே $4x-7y+29=0$ விரிகோணத்தின் இருகூறாக்கியாகும்.

வட்டத்தின் மையம் (h,k) என்க. மையம் (h,k) ஆனது

$4x-7y+29=0$ இலிருப்பதால்

$4h-7k+29=0$ ....(3)

மையம் (h,k) இலிருந்த $4x+3y-1=0$ இன் செங்குத்துத்தூரம், வட்டத்தின் ஆரை 4 அலகுக்கு சமம் என்பதலால்

$$\left|\frac{4h+3k-1}{5}\right| = 4$$

$4h+3k-1 = \pm 20$

$4h+3k-21=0$ ....(4) ; $4h+3k+19=0$ ....(5)

(3), (4) ஐத் தீர்க்க,

$4h-7k+29=0$

$4h+3k-21=0$

$k=5$

$h=\frac{3}{2}$

மையம் $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

(3), (5) ஐத் தீர்க்க.

$4h-7k+29=0$

$4h+3k+19=0$

$k=1$

$h=-\frac{11}{2}$

மையம் $\left(-\frac{11}{2}, 1\right)$

வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்.

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = 4^2$$

$(2x-3)^2 + 4(y-5)^2 = 64$

$4x^2 + 4y^2 - 12x - 40y + 45 = 0$ ....(6)

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

$(2x+11)^2 + 4(y-1)^2 = 16 \times 4$

$4x^2 + 4y^2 + 44x - 8y + 61 = 0$ ....(7)

வட்டங்களின் மற்றைய இரு பொது நாண்களும் $4x-7y+29=0$ இற்கு சமாந்தரமாகும். பொது நாணின் சமன்பாடு $4x-7y+c=0$ என்க.

$$\frac{|c-29|}{\sqrt{4^2+7^2}} = 4$$

$|c-29| = 4\sqrt{65}$

$c = 29 \pm 4\sqrt{65}$

மற்றைய இரு பொது நாண்களினதும் சமன்பாடுகள்

$4x-7y+29+4\sqrt{65}$

$4x-7y+29-4\sqrt{65}$ ஆகும்.

2 (b)

1. உற்பத்தியிலிருந்து $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தின் நீளம் $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என நிறுவுக.

A, B என்பன $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right)$, $(0, 2)$ என்னும் புள்ளிகளாகும். உற்பத்தியை உள்ளடக்குகின்றதும், ABஐ ஒரு பக்கமாகக் கொண்டதுமான சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இச் சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் எனக் காட்டுக.

2. ABC எனும் முக்கோணி A யில் செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ளது. A, B என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(t, 2t)$, $(2t, t)$ ஆகும். முக்கோணியின் செம்பக்கம் $3x-y=4$ இற்கு சமாந்தரமாகும். C யின் ஆள்கூறுகளை t யில் காண்க. கோணம் A யின் உள்ளிரு கூறாக்கியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

3. ABC என்னும் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியில் $AB=AC$ · AB என்னும் பக்கம் $x+7y=0$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகும். BC யின் இரு கூறாக்கிச் செங்குத்து $6x-8y=21$ ஆகும். $C\equiv(1,-5)$ ஆகும். A யின் ஆள்கூறுகளையும் முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவையும் காண்க.

4. ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணி அதன் அடியை $x-2y+1=0$ எனும் கோட்டிலும், அதன் உச்சியை $(-1, 2)$ எனும் புள்ளியிலும் கொண்டுள்ளது. சமகோணங்களுள் ஒன்று $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ என்பதனால் கொடுக்கப்படுமாயின் பக்கங்களுக்கான சமன்பாடுகளையும், அதன் பரப்பையும் காண்க.

5. சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின், ஒருபக்கம் $x+y=4$ எனும் கோட்டின் வழியே கிடக்கின்றது. உச்சி ஒன்றின் ஆள்கூறு $(1, 1)$ எனின், மற்றைய உச்சிகளின் கள் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. $y=x$, $y+2x=-3$, $2y-4x=3$ என்பவற்றாலான முக்கோணியின் உள்மையத்தைக் காண்க.

7. புள்ளி (x_o, y_o) இலிருந்து $ax+by+c=0$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம் $\dfrac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

(i) இரு சமாந்தர நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் $x-$ அச்சின் நேர்த் திசையுடன் α கோணத்தை அமைக்கின்றன. ஒரு கோடு (h, k) ஊடாகவும், மற்றைய கோடு (m, n) ஊடாகவும் செல்கின்றன. இந்தக் கோடுகளுக்கிடையிலான தூரம் $|(h-m)\sin\alpha - (k-n)\cos\alpha|$ எனக் காட்டுக.

(ii) 13 சதுர அலகுகளைப் பரப்பளவாகக் கொண்ட ஒருசதுரத்தின் மையம் $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ ஆகும். இதன் இரண்டு பக்கங்கள் $12x+5y=0$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகும். இச்சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

8. செவ்வகத் தெக்காட்டின் அச்சுக்கள் குறித்து முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் $(1,3)$, $(5, 3)$, $(4, 6)$ ஆகும். முக்கோணியின் மையப்போலி G, சுற்று வட்ட மையம் S, நிமிர்மையம் H என்பவற்றைத் துணிக. S, G, H என்பன ஒரு நேர் கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டி $SG:GH = 1:2$ என வாய்ப்புப் பார்க்க.

9. உற்பத்தி O, முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியாகும். BO, CO என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $4x-y=0$; $2x+y=0$ ஆகும். $A\equiv(t, t)$ எனின் B, C என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளை t இல் காண்க.

கோடு AB யில் C இன் ஆடி விம்பம் D எனின், BD யின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $11x+7y=0$ எனக் காட்டுக.

10. (a) $y-7x=0,\ x+y=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கிடையேயான கூர்ங் கோணத்தின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) $A(2, 0),\ B(4, 0),\ C(6, 0),\ D(8, 0)$ ஆகும். முதலாம் கால் வட்டத்தில் P, Q எனும் புள்ளிகள்

$$\tan A\hat{P}B = \tan C\hat{P}D = \tan A\hat{Q}B = \tan C\hat{Q}D = \frac{1}{2}$$

ஆகுமாறு உள்ளன. P, Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

11. சதுரம் $OABC$ யின் உச்சிகள் O, A, B என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(0,0),\ (1, 0),\ (1, 1)$ ஆகும். P என்பது BC யிலுள்ள ஒருமாறும் புள்ளி. OP யும் AB யும் நீட்டப்பட Q வில் சந்திக்கின்றன. B இற் கூடாக CQ விற்கு சமாந்தரமாக வரையப்பட்ட நேர்வரை OP ஐ R இல் சந்திக்கிறது. $CP = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ எனின், R ஆனது மூலைவிட்டம் AC யில் இருக்கும் எனக் காட்டுக. P மாறும்போது R இன் ஒழுக்கு யாது?

12. (a) $y(m+1) = x(m-1)+4$ என்னும் நேர்கோடு எப்போதும் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் எனக் காட்டி, அந்நிலையான புள்ளியின் ஆள் கூறுயாது?

(b) O உற்பத்தியாக இருக்க, இரு சமபக்க முக்கோணியின் சமமான பக்கங்கள் OA, OB ஆகும். OA, OB முதலாம் கால் வட்டத்தில் கிடக்கின்றன. OA, OB யின் படித்திறன்கள் முறையே $\dfrac{7}{17}, 1$ ஆகும். O விலிருந்து AB யிற்கான செங்குத்தின் நீளம் $\sqrt{13}$ எனின், AB யின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. P, Q என்னுமிரு புள்ளிகள் $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ என்னும் நேர்கோடு PQ வின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்தாகுமாறு உள்ளன. P யின் ஆள்கூறுகள் (O, k) எனின் Q வின் ஆள்கூறு யாது? P யானது y அச்சு வழியே அசையும் போது Q வின் ஒழுக்கைக் காண்க.

முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் B, C என்பன முறையே $3y=4x,\ y=0$ என்னும் நேர்கோடுகளில் அமைந்துள்ளன. பக்கம் BC, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றது. O உற்பத்தியாக இருக்க $AOBC$ ஒரு சாய்சதுரம் எனின், BC யின் சமன்பாட்டைக் காண்க. A யின் ஆள்கூறுகள் $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ எனக் காட்டுக.

15. $P(h, k)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $y = x,\ 2y = x$ என்பவற்றிக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கள் $PA,\ PB$ ஆகும்.

AB யின் நடுப்புள்ளி M இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

P ஆனது $5x+4y+10=0$ என்னும் நேர்கோடு வழியே அசையும் எனின், M இன் ஒழுக்கு $x-7y=5$ எனக் காட்டுக.

16. இணைகரம் ஒன்றின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $3x+4y=7\rho$, $3x+4y=7q$, $4x+3y=7\gamma$, $4x+3y=7s$. ஆகும்.

இணைகரத்தின் பரப்பளவு $7\,|(\rho-q)(\gamma-s)|$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி - 2

1. ABC ஒரு முக்கோணி. AB, AC என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x-y-1=0;\ x-2y+1=0$ ஆகும். $(-2,-2)$ என்பது BC யின் நடுப்புள்ளியாகும். பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   i. AC யின் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்
   ii. பக்கம் BC யின் சமன்பாடு
   iii. ΔABC யின் பரப்பளவு
   iv. ΔABC யின் சுற்றுமைய ஆள்கூறுகள்.

2. $y-y_o=m^1(x-x_o)$ என்னும் நேர்கோடானது $y-y_o=m(x-x_o)\quad (m\neq\pm1)$ எனும் நேர்கோட்டுடன் 45^o கோணத்தை அமைக்கின்றதெனின் $m^1=\dfrac{1+m}{1-m}$ அல்லது $m^1=\dfrac{-(1-m)}{1+m}$ என நிறுவுக.

   சதுரம் ஒன்றின் ஒரு உச்சியானது $(-1,1)$ எனும் புள்ளியாகும். இச் சதுரத்தின் மையம் $(1;5)$ என்னும் புள்ளியாகும். இச் சதுரத்தின் ஏனைய முன்று உச்சி களையும் காண்க.

3. நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் உச்சிகள் $A(0,-4),\quad B(7,3),\ C\left(5,\frac{3}{2}\right)$ ஆகும்.

   $11y-10x=0$ எனும் கோட்டுக்கு BD சமாந்தரமாகவும் $4y+3x=0$ எனும் கோட்டுக்கு AD செங்குத்தாகவும் இருப்பின் D யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. கோடுகள் BC உம் AD உம் நீட்டப்பட்டால் அவை சந்திக்கும் புள்ளி P யின் ஆள்கூறையும் காண்க. இதிலிருந்து,

   (a) AB, CD க்கு சமாந்தரம் எனவும்,
   (b) ΔABP ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் காட்டுக.
   ΔPCD யின் பரப்பு : ΔPAB யின் பரப்பு $=1:4$ என உய்த்தறிக.

4. புள்ளி (x_o,y_o) இலிருந்து கோடு $ax+by+c=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் $\dfrac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

   (i) இரு சமாந்தரக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் α கோணத்தை அமைக்கின்றன. ஒரு கோடு (h,k) ஊடாகவும், மற்றைய கோடு (m,n) ஊடாகவும் செல்கின்றன. இக்கோடுகளுக்கிடையேயான செங்குத்துத்தூரம் $|(h-m)\ sin\alpha-(k-n)\ cos\alpha|$ என நிறுவுக.

   (ii) 13 சதுர அலகுகளைப்பரப்பளவாகக் கொண்ட ஒரு சதுரத்தின் மையம் $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ ஆகும். இதன் இரண்டு பக்கங்கள் $12x+5y=0$ என்னும் கோட்டுக்கு சமாந்தரம் ஆகும். இச்சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களினதும் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

5. (x_o,y_o) எனும் புள்ளியினூடாகச் செல்வதும் m எனும் படித்திறனை யுடையதுமான நேர்கோட்டின் மீதுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(x_o+t,\ y_o+mt)$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு t ஒரு பரமானமாகும்.

   A, C என்பன முறையே $(5,-1), (-2,0)$ எனும் புள்ளிகளாயின், AC யின் செங்குத்து இரு கூறாக்கிமீதுள்ள P என்னும் யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை மேலே காட்டப்பட்டவாறு t எனும் ஒரு பரமானத்தில் எடுத்துரைக்க. PA யினதும் PC யினதும் படித்திறன்களை t இல் காண்க.

   இதிலிருந்து $A, B, C, D,$ என்பன சதுரம் ஒன்றின் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட உச்சிகளாக அமையும் வண்ணம் B, D என்னும் இரு புள்ளிகளின் ஆள்கூறு களையும் காண்க.

   A, B^1, C, D^1 என்பன பரப்பளவு 50 சதுர அலகுகளாக இருக்கும் வண்ணம் அமைந்தவொரு சாய்சதுரத்தின் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட உச்சிகள் எனின் B^1 இனதும் D^1 இனதும் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$ எனும் நேர்கோடுகளுக்கிடையிலான கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள் இரண்டினதும் சமன்பாடுகள்

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$ எனக் காட்டுக.

(3, 13), (0, 10) (6,- 8) என்னும் புள்ளிகள் முறையே முக்கோணி ABC யின், A, B, C எனும் உச்சிகளாகும்.

(i) கோணம் BAC யின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் இரண்டையும் காண்க

(ii) இவற்றுள் எது A யிலுள்ள அகக் கோணத்தை இருகூறாக்குகிறது எனத் துணிக.

(iii) AB, AC என்பவற்றின் நீளததைத் துணிக.

(iv) $BP:PC = AB:AC$ ஆகுமாறு BC மீதுள்ள புள்ளி P யின் ஆள்கூற்றைக் காண்க.

(v) கோணம் BAC யின் உள்ளிரு கூறாக்கியின் மீது P அமைந்துள்ளது எனக் காட்டுக.

7. $ax+by+c=0$ என்னும் நேர்கோட்டில் (x_o, y_o) ஒரு புள்ளி எனின், இக் கோட்டிலுள்ள யாதாயினுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை $(x_o+bt,\ y_o-at)$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம் என நிறுவுக; இங்கு t ஒரு பரமானம் ஆகும்.

$3x+4y-24=0$ எனும் நேர்கோட்டில், P எனும் புள்ளி, உற்பத்தியிலிருந்து தனது தூரத்தின் பருமன் P உம் $A(3, 1)$, $B(-1, 3)$ ஆகிய புள்ளிகளும் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பள்வினது பருமனுக்கு சமனாக உள்ளவாறு அமைந்துள்ளது. P யிற்கு இரு நிலைகள் உண்டு எனவும் இதில் ஒரு நிலை P_o எனக் கொண்டால், கோணம் P_oAB ஒரு செங்கோணம் எனவும் நிறுவுக.

P_oABQ ஒரு செவ்வகமாக அமையும் எனின், நான்காவது உச்சியான Q வின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

8. $P_o(x_o, y_o)$ இலிருந்து $ax+by+c=0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி N ஆகும். N இன் ஆள்கூறுகள் $(x_o+at,\ y_o+bt)$ ஆகும் நிறுவுக.

இங்கு $t = -\dfrac{ax_o+by_o+c}{a^2+b^2}$; ஆகும்.

T என்பது ஒருபரமானமாகவும், $\ell^2+m^2=1$ ஆகவும் இருக்க, ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது $\dfrac{x-x_1}{\ell} = \dfrac{y-y_1}{m} = T$ என்னும் பரமான வடிவில் எடுத்துரைக் கப்பட்டால், $|T|$ என்பது $P_1(x_1, y_1)$ எனும் நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து $P(x_1+\ell T,\ y_1+mT)$ என்னும் புள்ளியின் தூரமாகும் எனக் காட்டுக.

$A \equiv (2, 1)$ என்பது சாய்சதுரமொன்றின் ஒரு உச்சியாகும். அதன் மூலை விட்டங்களில் $4\sqrt{5}$ நீளமுடைய ஒன்று $x-2y+5=0$ என்ற நேர்கோட்டின் மீது கிடக்கின்றது. சாய்சதுரத்தின் ஏனைய உச்சிகளைக் காண்க.

9. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் முறையே $A(-16, 0)$ $B(9, 0)$ $C(0, 12)$ ஆகும். இம் முக்கோணியின் கோணம் A இன் உள்ளிரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு $x-3y+16=0$ எனக் காட்டுக.

கோணம் B யின் உள்ளிரு கூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாகவோ இம்முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களையும் தொடும் (உள் வட்டத்தின்) வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. செவ்வகம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் $A \equiv (2,3)$, $C \equiv (9,4)$ ஆகும். மூலைவிட்டம் BD, $x+y=0$ என்னும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தாயின் செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$AECF$ என்பது செவ்வகம் $ABCD$ இன் பரப்பைப் போல் ஐந்து மடங்கு பரப்புடைய ஒரு சாய்சதுரம் எனின், மூலைவிட்டம் EF இன் நீளம் $15\sqrt{2}$ அலகு என நிறுவுக. AC யிற்கு சமாந்தரமாக E, F இனூடு செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

11. $P(h, k)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் $\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ஆகுமென நிறுவுக.

S எனும் ஒரு வளையியானது $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ என்னும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகிறது. இங்கு θ என்பது ஒரு பரமானம் ஆகும். $0 \le \theta < 2\pi$. ℓ என்பது $7x+y+12\sqrt{2}=0$ என்னும் நேர்கோடாகும். S மீதுள்ளதும் ℓ இற்கு மிகவும் கிட்ட உள்ளதுமான P_0 இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. P_0 இலிருந்து ℓ இற்கான தூரத்தையுங் காண்க.

12. $\ell x+my+n=0$ என்ற கோட்டின் மீது புள்ளி (α, β) இன் ஆடி விம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$ABCD$ எனும் சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் BD யின் சமன்பாடு $x+2y+1=0$ ஆகும். உச்சிகள் A, C என்பன முறையே $x-y=0$, $3x+y+8=0$ எனும் கோட்டில் கிடக்கும் போது பக்கம் AB ஆனது $7x+4y=0$ என்னும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமாயின் சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

13. (h_2, k_2) என்ற புள்ளி $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டில் (h_1, k_1) என்னும் புள்ளியின் தெறிப்பெனின்

$a(h_1+h_2)+b(k_1+k_2) = -2c$

$b(h_1-h_2)-a(k_1-k_2)=0$ எனக் காட்டுக.

$ABCD$ என்பது ஒரு சாய்சதுரமாகும். மூலைவிட்டம் AC யானது $7y-24x+41=0$ என்ற கோட்டின் வழியே உள்ளது. A, B இன் ஆள்கூறுகள் முறையே $(2, 1)$, $(6, 4)$ ஆகும் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) BD யின் சமன்பாடுகள்
(ii) C, D யின் ஆள்கூறுகள்
(iii) சாய்சதுரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு

14. $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய இருகோடுகள் இடை வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் யாதுமொரு கோட்டின் சமன்பாடு $\lambda_1(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2)=0$ என்ற வடிவில் எழுதலாமெனக் காட்டுக.

$a_1x+b_1y+1=0$; $a_2x+b_2y+1=0$ ஆகிய கோடுகளினாலும் இக் கோடு களுக்கு. சமாந்தரமாக உற்பத்தியினூடாக வரையப்பட்ட கோடுகளினாலும் ஓர் இணைகரம் ஆக்கப்படுகிறது. இவ் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு $a_1^2+b_1^2 = a_2^2+b_2^2$ எனில் மேற்படி இணைகரம் ஓர் சாய்சதுரம் காட்டுக.

15. A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே, $(-2, 8)$, $(9, -3)$, $(12, 6)$, $(0, 15)$ ஆகும். C யிலிருந்து AB யிற்கு வரையும் செங்குத்தின் அடி N எனின், N இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$\angle APD = \angle BPC$. ஆகுமாறு A இற்கும் B இற்குமிடையில் P என்பது ஒரு புள்ளியாகும். P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ΔPCD யின் பரப்பளவு 54 சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

16. $P(h,k)$ என்னும் புள்ளியினூடாக $\ell \equiv ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் மீதுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறு $(h+at,\ k+bt)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

P யிருந்து $\ell=0$ என்ற கோட்டுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிக்குரிய T இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இச் செங்குத்தின் நீளம் $\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாலோ $ax+by+c=0$; $a^1x+b^1y+c^1=0$. என்னும் கோடுகளுக்கிடையேயானதும் உற்பத்தியைக் கொண்டிருப்பதுமான

கோணத்தினுடைய இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இங்கு $c<0;\ c^{1}<0;\ ab^{1}-a^{1}b\neq 0$ ஆகும்.

17. $c(a\alpha+b\beta+c)$ நேர் அல்லது மறை என்பதற்கேற்ப, உற்பத்தியும் (α,β) எனும் புள்ளியும் $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

முக்கோணி ABC யின் பக்கம் AB யின் சமன்பாடு $x-2y+5=0$ ஆகும். கோணம் BAC யின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $x-y=0$ ஆகும். பக்கம் AC யின் சமன்பாட்டைக் காண்க. உற்பத்தி, முக்கோணி ABC யின் உள்மையமாகவும் பக்கம் BC என்பது $11x-2y=0$ எனும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமாக வுமிருந்தால் இப்பக்கத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. (ax_1+by_1+c) (ax_2+by_2+c) என்பது நேர் அல்லத மறை என்பதற்கேற்ப (x_1,y_1), (x_2,y_2) எனும் புள்ளிகள் $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கங்களில் கிடக்குமென நிறுவுக.

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-y=0$, $2x+y+\rho=0$ என்பனவாகும். இங்கு ρ என்பது ஒருமை. கோணம் BCA யின் இரு கூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்விரு கூறாக்கி AB ஐ D இல் சந்திக்கிறது. கோணம் BDC யின் இரு கூறாக்கி $(1,4)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்றால் $\rho=4$ என நிறுவுக.

19. (ax_1+by_1+c) (ax_2+by_2+c) நேர் அல்லது மறை என்பதற்கேற்ப (x_1,y_1), (x_2,y_2) எனும் புள்ளிகள் $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டின் ஒரே பக்கத்தில், அல்லது எதிர்ப்பக்கத்தில் கிடக்கும் என நிறுவுக.

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x+y+4=0$, $7x+y-8=0$, $x+7y-8=0$ ஆகும். கோணம் BAC யின் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்விரு கூறாக்கி BC ஐ D யில் சந்திப்பின் முக்கோணி ABC யின் மையப்போலி, முக்கோணி ABD யிற்குள் கிடக்குமென நிறுவுக.

20. $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் மேல் புள்ளி (α,β) இன் ஆடி விம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் A, B, C என்பன முறையே $y=x$, $y=2x$, $y=3x$. என்னும் கோடுகளின் மீது கிடக்கின்றன.

பக்கம் AB யின் இரு கூறாக்கிச் செங்குத்தின் சமன்பாடு $6x+8y-3=0$ ஆகும். பக்கம் BC, கோடு $11x-4y=0$ இற்குச் சமாந்தரமெனின் முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

21. $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் மேல் புள்ளி (α,β) இன் ஆடி விம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC என்பவற்றின் இரு கூறாக்கிச் செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x-y=0$, $x-3y=0$ என்பனவாகும். A என்பது $x-y=0$ இல் கிடக்க, பக்கம் BC, $(-2,11)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகச் சென்றால், முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

22. $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் மேல் புள்ளி (α,β) இன் ஆடி விம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்வரைகள் $x-y=0$ என்னும் கோட்டுடன் சம கோணங்களை உண்டாக்கிக் கொண்டு கோடு $x=2$ ஐ A, B இல் வெட்டுகின்றன.

$2x-y+1=0$ என்னும் கோட்டின் மேல் AB யின் நடுப்புள்ளியின் விம்பம் அச்சில் கிடப்பின் இரு கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க

23. $ABCD$ என்னும் இணைகரம் உச்சிகள் A, C என்பன $x+y=0$ என்னும் கோட்டிலும், உச்சிகள் B, D என்பன முறையே $x-y=0$, $5x-y+9=0$ என்னும்

கோடுகளில் இருக்கும் வண்ணம் அமைந்ததாகும். AB, BC என்னும் பக்கங்கள் முறையே $x-2y=0$, $x-3y=0$ என்னும் கோடுகளுக்கு சமாந்தரமாயின் இணைகரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

24. $x+y=0$ என்னும் கோட்டின் மேல், $4x+3y=0$. என்னும் கோட்டின் ஆடிவிம்பத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

I என்பது முக்கோணி ABC இன் உள்மையம். AB, BC, CI என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $5x+12y+3=0$, $4x+3y+2=0$, $x+y+1=0$ என்பவையாகும். A, I என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

25. (ℓx_1+my_1+n) (ℓx_2+my_2+n) என்பது நேர் அல்லது மறை என்பதற்கேற்ப, (x_1, y_1), (x_1, y_2) என்னும் புள்ளிகள் $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோடடின் ஒரேபக்கத்தில் அல்லது எதிர்ப்பக்கத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

$x+y+2=0$, $x-7y-6=0$ என்னும் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கூர்ங்கோண இரு கூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $(3,1)$ எனும் புள்ளி, இக்கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள விரிகோணத்திற்குள்ளே இருக்கும் எனக்காட்டுக.

26. $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் $m_1 : m_2$ என்னும் விகித்தில் பிரிக்கும் புள்ளி களின் ஆள்கூறுகள் முறையே

$$\left(\frac{m_1 x_2+m_2 x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1 y_2+m_2 y_1}{m_1+m_2}\right), \quad \left(\frac{m_1 x_2-m_2 x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1 y_2-m_2 y_1}{m_1-m_2}\right)$$

என நிறுவுக.

$A(-2, 6)$, $B(1,-6)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் $2:1$ என்னும் விகிதத்தில் X, Y என்னும் புள்ளிகளால் பிரிக்கப்படுகிறது. P என்பது $\angle XPY$ ஒரு செங்கோணம் ஆகுமாறும் முக்கோணி PAB யின் பரப்பளவு 24 அலகுகள் ஆகுமாறுமுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். P யின் நான்கு நிலைகளான P_1, P_2, P_3, P_4 என்பவற்றில் இரண்டு (P_1, P_2 என்க.)

நிறையெண் ஆள்கூறுகளை உடையதாகும் என நிறுவுக. $\angle AP_1B$, $\angle AP_2B$ என்பவற்றின் இரு சம கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. **(1982)**

27. $ax+by+c=0$ எனும் கோட்டில் (x_o, y_o) எனும் புள்ளியின் விம்பம் $(x_o+at,\ y_o+bt)$ என நிறுவுக. இங்கு $t=\dfrac{-2(a x_o+by_o+c)}{a^2+b^2}$

$\ell_2 \equiv 3x-4y+5=0$ என்னும் கோட்டில் $\ell_1 \equiv 2x-y+5=0$ என்னும் கோட்டின் விம்பம் ℓ ஐக் காண்க

25 சதுர அலகு பரப்பளவுடைய சாய்சதுரமொன்று அதன் அடுத்துள்ள இரு பக்கங்கள ℓ_1 இலும் ℓ இலும் கிடக்குமாறு வரையப்படுகிறது. நான்கு இயல்தகு சாய்சதுரங்கள் உள்ளன என நிறுவுக.

ℓ_2 ஐ மூலைவிட்டமாகவுடைய சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. **(1983)**

28. (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டுக்குச் செல்லும் செங்குத்தின் அடியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$OAPB$ என்னும் செவ்வகத்தின் உச்சி O உற்பத்தி ஆகும். இதில் $A \equiv (\lambda a, \lambda b)$, $B(\mu b, -\mu a)$ ஆகும். இங்கு $a^2+b^2=1$ ஆகும்.

c ஒருமையாக இருக்க $\lambda^3+\mu^3=c(\lambda^2+\mu^2)$ என அமையும் வண்ணம் A உம் B உம் மாறினால் P இலிருந்து AB க்குச் செல்லும் செங்குத்தின் அடியின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடென நிறுவுக. **(1984)**

29. $ax+by+c=0$ என்பது ℓ எனும் கோட்டின் சமன்பாடாகும். $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ஆகியவை ℓ இன் மீது கிடவாத வெவ்வேறு புள்ளி களாகும். P_1P_2 ஐ ℓ வகுக்கும் விகிதத்தைக் காண்க. ℓ எனும் கோட்டின்

எதிர்ப்பக்கங்களில் P_1 உம் P_2 உம் இருப்பதற்கான நிபந்தனையை உய்த்தறிக.

புள்ளிகள் $A(-1,-1)$ உம் $C(7,15)$ உம் $ABCD$ எனும் இணைகரத்தின் எதிர் மூலைகளாகும். இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் ஒன்றின் நீளம் $2\sqrt{17}$ ஆகும். இது x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் $tan^{-1}(4)$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கிறது. உச்சிகள் B, D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இணைகரத்தின் கோணங்கள் ABC, ADC இன் உள்ளிரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(1985)

30. $A\equiv(-8,10)$, $B\equiv(1,2)$, $C\equiv(1,11)$ என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து $A^1B^1C^1$ என்னும் முக்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களான B^1C^1, C^1A^1, A^1B^1 என்பவற்றிற்கு வரைந்த செங்குத்துக்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. B^1C^1, C^1A^1, A^1B^1 என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $3x-y-5=0$, $x-2y=0$; $x+\lambda y-15=0$ ஆகும். இங்கு λ என்பது ஒருமையாகும். λ ஐக் காண்க.

A^1, B^1, C^1 என்பவற்றிலிருந்து BC, CA, AB என்பவற்றிக்கு வரைந்த செங்குத்துக்களும் ஒரேயொரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என்பதை வாய்ப்புக் பார்க்க.

(1986)

31. $ax+by+c=0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்கு புள்ளி (h,k) இலிருந்தான செங்குத்துத் தூரம் $\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$A(2,5)$, $B(11,2)$, $C(8,7)$ எனும் உச்சிகளைக் கொண்ட ABC எனும் முக்கோணியின் பக்கங்கள் AB, AC என்பவற்றிலிருந்து முறையே $\dfrac{4}{\sqrt{10}}, \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ தூரங்களிலுள்ள நான்கு புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) இந்நான்கு புள்ளிகளில் எது முக்கோணியின் உட்பிரதேசத்தில் அமைந்துள்ளது எனக் காண்க.

(ii) இந்நான்கு புள்ளிகளாலும் அமைக்கப்படும் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(1987)

32. நேர்கோடு $ax+by+c=0$ ஆனது $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டினை $\dfrac{-(ax_1+by_1+c)}{(ax_2+by_2+c)}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஆகியன முறையே $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$ என்னும் நேர்கோடுகள் வழியே இருக்கின்றன. இங்கு $u_r=a_rx+b_ry+c_r$, $r=1,2,3$ ஆகும். k என்பது ஒரு மாறிலியாக இருக்க $u_3-ku_2=0$ ஆனது A யினூடாகச் செல்கின்றதெனவும் BC யை $\dfrac{k(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_3b_1-a_1b_3)}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதெனவும் காட்டுக.

$(a_2a_3+b_2b_3)$ $(a_1b_2-a_2b_1)$ $(a_3b_1-a_1b_3)$ ஆனது நேராக அல்லது மறையாக இருப்பதற்கு ஏற்ப முக்கோணியின் கோணம் A விரிகோணமாக அல்லது கூர்ங் கோணமாக இருக்கும் என்று காட்டுக.

(1988)

33. நேர்கோடு $ax+by+c=0$ ஆனது சமாந்தரமல்லாத இரு நேர்கோடுகள் $u_i=0$ $(i=1,2)$ ஐ முறையே A, B ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுகிறது. இங்கு $u_i=a_ix+b_iy+c_i=0$ ஆகும். $AZ=kZB$ ஆகுமாறு Z என்னும் புள்ளி AB மீதுள்ளது. $u_i=0, u_2=0$ ஆகியன இடைவெட்டும் புள்ளியுடன் Z ஐத் தொடுக்கும் நேர்கோடு $u_1+k\dfrac{(a_1b-ab_1)}{(a_2b-ab_2)}u_2=0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஆகியன முறையே கோடுகள் $x-4y+6=0$, $2x-y-6=0$, $x-y+3=0$ ஆகியவற்றின் வழியே உள்ளன. $2BX=XC$ ஆகுமாறு BC மீது புள்ளி X உம் $2AY=3YC$ ஆக இருக்

கத்தக்கதாக் AC மீது புள்ளி Y உம் உள்ளன. AX, BY ஆகிய இடைவெட்டும் புள்ளியுடன் C ஐத் தொடுக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(1989)

34. $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$, $x=0$ எனும் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட மூன்று கோடுகளால் உருவாகும் முக்கோணியின் பரப்பு $\dfrac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $y=2x+3$, $y=-2x+7$, $y=6x+2$ எனும் கோடுகளால் உருவாகும் முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(1990)

35. கோடு $ax+by+c=0$ இன் மீது புள்ளி (x_1, y_1) இன் விம்பத்தைக் காண்க.

சாய்சதுரம் ஒன்றின் கோணங்களில் ஒன்று 2α ஆகும். இக் கோணத்தை இருகூறிடும் மூலைவிட்டம் கோடு $ax+by+c=0$ இன் மீது கிடக்கிறது. உற்பத்தி $(0, 0)$ ஆனது உச்சிகளில் ஒன்றெனின், மற்றைய உச்சிகள் மூன்றினதும் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

(1990 - விசேட)

36. கோடு $ax+by+c=0$ இன்மீது புள்ளி (x_1, y_1) இன் விம்பத்தைக் காண்க.

$ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம். இங்கு $B\equiv(1, 0)$. AB, AC ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $y-x+1=0$; $y-3x=0$ ஆகும். AD, BC, CD என்பவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அத்தோடு சாய்சதுரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவைக் காண்க.

(1991)

37. ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் $x+y-8=0$, $x-y+2=0$, $4x-3y+10=0$ ஆகும்.

λ, μ என்பவற்றின் எல்லா மெய்யெண் பெறுமானங்களுக்கும்

$$\lambda(x+y-8)(4x-3y+10)+\mu(x-y+2)(4x-3y+10)$$
$$=(x+y-8)(x-y+2)$$

என்னும் சமன்பாடானது இம் முக்கோணியின் உச்சிகளினூடாகச் செல்லும் ஒருவளையியை வகை குறிக்கும் எனக் காட்டுக.

இவ்வளையியை வட்டமாக அமையச் செய்யும் λ, μ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, இதிலிருந்து இம்முக்கோணியினது சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரையையும் காண்க.

$x+y-8=0$, $x-y+2=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியையும் சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தையும், இணைக்கும் கோட்டுக்கும் $4x-3y+10=0$ என்னும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கூர்ங்கோணம் θ ஆக இருக்கும்போது, $\sin\theta$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்தோ, வேறுவிதமாகவோ தரப்பட்ட முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

(1991 - விசேட)

38. P என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்ற இரு நேர்கோடுகள் ℓ_1, ℓ_2 ஆகியன முறையே $ax+by+c=0$, $a^1x+b^1y+c^1=0$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் வகை குறிக்கப்படுகின்றன.

$(ax+by+c)+\lambda\left(a^1x+b^1y+c^1\right)=0$. என்னும் சமன்பாட்டிற்கான விளக்கத்தைத் தருக. λ ஒரு பரமானம் ஆகும்.

உற்பத்தி O விற் கூடாகவும் ℓ_1, ℓ_2 இற்கு சமாந்தரமாகவும் வரையப்படும் நேர்கோடுகள் ℓ_2, ℓ_1 என்பவற்றை முறையே Q, R ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன. இணைகரம் $OQPR$ இன் மூலைவிட்டங்கள் OP, QR ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. $(c, c^1\neq 0)$ இதிலிருந்து

(i) $OQPR$ ஒரு சாய்சதுரமாக இருப்பதற்கு

(ii) $OQPR$ ஒரு சதுரமாக இருப்பதற்கு

மாறிலிகள் a, b, c, a^1, b^1c^1 ஆகியன திருப்தியாக்கும் நிபந்தனைகளைத் துணிக.

(1992)

39. $\ell x+my+n=0$ என்னும் நேர்கோட்டின் மீது $P(\alpha, \beta)$ என்னும் புள்ளியின் விம்பத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ஒரு முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் A, B, C ஆகியன முறையே $y=x$, $y=2x$, $y=3x$ ஆகிய நேர்கோடுகளின் மீது கிடக்கின்றன. AB யின் செங்குத்து இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு $3y+x-18=0$ ஆகும். கோடு BC ஆனது நேர்கோடு $y+x=0$ இற்கு சமாந்தரமாகும். முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(1993)

40. $y=ax+b$ என்னும் நேர்கோடானது $y=mx$, $y=m^1x$ ஆகிய நேர்கோடுகளை முறையே A, B என்பவற்றில் வெட்டுகிறது. இங்கு a உம் $b=(\neq 0)$ உம் மாறிலிகள். புள்ளி C ஆனது $OACB$ ஓர் இணைகரம் ஆகுமாறுள்ளது. இங்கு O உற்பத்தியாகும்.

(i) C யின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

(ii) $OACB$ ஒரு சாய்சதுரம் எனில் $(a^2-1)\ (m+m^1)+2a\left(1-mm^1\right)=0$ எனக் காட்டுக.

(iii) $OACB$ ஒரு சதுரம் எனில் அதன் பரப்பளவு $\dfrac{2b^2}{1+a^2}$ எனக் காட்டுக.

(1994)

41. $\ell_1 : ax+by+c=0$; $\ell_2 : a^1x+b^1y+c^1=0$ ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் எந்த ஒரு நேர்கோட்டினதும் சமன்பாடு $(ax+by+c)+\lambda\left(a^1x+b^1y+c^1\right)=0$ என் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு λ என்பது ஒரு மெய்மாறிலியாகும். $\ell_3 : \ell x+my+n=0$ என்னும் மாறுங் கோடானது ℓ_1, ℓ_2 என்னும் கோடுகளை முறையே A, B என்பவற்றில் வெட்டுகிறது. c, c^1 இரண்டும் ஒரேநேரம் பூச்சியமற்றவை. O என்பது ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி. OA ஆனது OB இற்கு செங்குத்தெனின்,

$\left(aa^1+bb^1\right)n^2-\left(ac^1+ca^1\right)\ell n-\left(b^1c+c^1b\right)mn+\left(\ell^2+m^2\right)cc^1=0$ எனக் காட்டுக.

P என்பது O விலிருந்து $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடியாகும். மேற்போந்த நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்பட்டிருப்பின் கோடு ℓ_3 மாறும் போது P யின் ஒழுக்கு ஒருவட்டமாகும் எனக் காட்டுக. ℓ_1, ℓ_2 என்பன செங்குத்தாயின் மேற்போந்த ஒழுங்கிற்கு யாது நிகழும்?

(1995)

42. $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டில் புள்ளி $P(\alpha, \beta)$ இன் ஆடிவிம்பத்தைக் காண்க. இதிலிருந்து $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டில் $\ell x+my+n=0$ என்னும் கோட்டின் ஆடிவிம்பத்தைக் காண்க.

சாய்சதுரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்களில் ஒன்று கோடு $2x+y-1=0$ ஆகவும், சாய்சதுரத்தின் உச்சிகளுள் ஒன்று $(2,-3)$ ஆகவும் இருக்க பக்கங்களுள் ஒன்று $y-x-4=0$ என்னும் கோட்டின் வழியே கிடக்கிறது. எஞ்சிய மூன்று பக்கங்களினதும் மற்ற மூலைவிட்டத்தினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(1996)

43. புள்ளி (α, β) இலிருந்து நேர்கோடு $ax+by+c=0$ இன் மீது வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடியினூடாகச் செல்வதும் செங்குத்துக்கும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள கோணங்களை இரு சம கூறிடுவதுமான நேர் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

$ABCD$ என்பது ஆள்கூறுகள் $(-1,-3)$ ஐக் கொண்ட உச்சி A ஐயும் $3y+x-10=0$ எனும் கோட்டின் வழியே கிடக்கும் BC ஐயும் கொண்ட சதுரமாகும். மூலைவிட்டம் BD இன் இயல்தகு நிலைகள் இரண்டு உள்ளன எனக்காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அத்துடன் BD இன் இயல்தகு நிலைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் C, D ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(1997 பழைய)

44. (x_0, y_0) இனூடாகச் செல்வதும் சாய்வு m உடையதுமான கோட்டின் மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியினதும் ஆள்கூறுகள் $(x_0+t, \; y_0+mt)$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு t ஒரு பரமானம்.

$A(1,0)$, $C(4,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மீது P என்னும் ஒரு புள்ளியானது $1:\lambda^2$ ஆகுமாறு உள்ளது. இங்கு $\lambda > 0$. P யிற்கூடாக AC யிற்கு செங்குத்தான கோட்டின் மீதுள்ள ஒருபுள்ளி B யின் ஆள்கூறுகளை மேலே உள்ள வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க t யின் சார்பிலே AB, BC இன் சாய்வுகள் யாவை?

AB ஆனது BC இற்கு செங்குத்தாயிருப்பின்

(i) B இற்கு இயல்தகு நிலைகள் இரண்டு உள்ளதெனவும் t இன் நேரொத்த பெறுமானங்கள் $\pm \dfrac{4\lambda}{1+\lambda^2}$ எனவும்,

(ii) முக்கோணி PBC இன் பரப்பளவு $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25\lambda^3}{\left(1+\lambda^2\right)^2}$ எனவும் காட்டுக.

(1997 - புதிய)

45. கோடு $ax+by+c=0$, கோடு $a^1x+b^1y+c^1=0$ ஆகியவற்றின் வெட்டுப் புள்ளியினூடு செல்லும் கோடு ஒன்றின் சமன்பாட்டை $\lambda(ax+by+c) + \mu(a^1x+b^1y+c^1) = 0$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, μ என்பன மெய் மாறிலிகள்.

கோடு $x+2y-5=0$ ஆனது, கோடு $\ell \equiv 4x+y-13=0$ ஐயும் கோடு $\ell^1 \equiv x-4y+13=0$ ஐயும் முறையே A, C என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகிறது. O என்பது உற்பத்தியாகவும் B என்பது ℓ இனதும் ℓ^1 இனதும் வெட்டுப் புள்ளியாகவும் இருப்பின் நாற்பக்கல் $OABC$ யினது உச்சிகள் ஒரு நிலைத்தபுள்ளி D யிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி D யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அத்தோடு நாற்பக்கல் $OABC$ யின் பரப்பளவைத் துணிக.

(1998 - பழைய)

46. புள்ளி (a, b) யினூடாகச் செல்வதும் x அச்சுடன் ஒரு கோணம் θ விலே சாய்ந்திருப்பதுமான நேர்கோட்டினைப் பரமான முறையாக $x = a+t\cos\theta$, $\; y = b+t\sin\theta$ வினால் வகை குறிக்கலாமெனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி OAB யின் உச்சி O ஆனது உற்பத்தியிலும் உச்சி A யானது முதற் காற்பகுதியிலும் கிடக்கும் அதேவேளை $OB = 2OA$ ஆகும். அதோடு OA, OB என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-2y=0$, $\; 2x+y=0$ ஆகும்.

AB ஆனது புள்ளி $(5, 1)$ இனூடு செல்லுமாயின் A, B இற்கு இரு அமைவுகள் இருக்குமெனக்காட்டி இவ்வமைவுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் A, B ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அத்தோடு OAB எனும் இரு இயல்தகு முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளின் விகிதத்தையும் காண்க.

(1998 - புதிய)

47. H என்பது, AC யிற்கு BH செங்குத்தாக இருக்குமாறும் AB யிற்கு CH செங்குத்தாக இருக்குமாறும் முக்கோணி ABC யின் தளத்தில் உள்ள புள்ளியாக இருக்கட்டும். முக்கோணி ABC யின் தளத்தில் உள்ள செங்கோணத் தெக்காட்டின் அச்சுக்களின் ஒரு தொடை பற்றி $A \equiv (\alpha, \beta)$ ஆகும். இங்கு $|\alpha| \neq 1$, $\beta \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$ ஆகும்.

BH, CH, ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே

$(\alpha-1)x + \beta y + (\alpha-1) = 0.$

$(\alpha+1)x + \beta y - (\alpha+1) = 0$ ஆகும்.

B, C ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளைத் துணிந்து, AH உம், BC உம் செங்குத்தானவை என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

முக்கோணி ABC யின் ஒவ்வோர் உச்சியினூடாகவும் எதிர்ப்பக்கத்துக்கு சமாந்தரமாக ஒவ்வொரு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது. இம்மூன்று கோடுகளும்

முக்கோணி $A^1B^1C^1$ ஐ அமைக்கின்றன. புள்ளி H ஆனது $A^1B^1C^1$ ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(1999)

48. x, y அச்சுக்களின் மீது முறையே a, b என்னும் வெட்டுத்துண்டுகளை ஆக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}=1$ இனால் தரப்படும் நிலைத்த நேர்கோடு ℓ ஆனது x, y அச்சுக்களை முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. கோடு ℓ இற்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோடு ℓ^1 ஆனது x, y அச்சுக்களை முறையே P, Q எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. AQ, BP ஆகிய நேர்கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியானது. புள்ளி (h, k) இன்றி வட்டம் $x^2+y^2-hx-ky=0$ மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(2000)

49. நேர்கோடு $y=mx+c$ ஆனது இரு சமாந்தரமற்ற நேர்கோடுகள். $u_1 \equiv y-m_1x-c_1=0$; $y_2 \equiv y-m_2x-c_2=0$ என்பவற்றை முறையே A, B என்பவற்றில் வெட்டுகிறது. AB யின் மீது புள்ளி R, $AR=kRB$ ஆகுமாறு உள்ளது. புள்ளி R ஐயும், $u_1=0$, $u_2=0$ என்பன வெட்டும் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு $u_1+\frac{k\,(m-m_1)}{(m-m_2)}\,u_2=0$ எனக் காட்டுக.

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பன முறையே $3x+2y-6=0$, $2x+y-2=0$, $x+y-3=0$ என்னும் கோடுகள் வழியே கிடக்கின்றன. புள்ளி R, AB இலும், புள்ளி Q, AC யிலும் $2AR=RB$, $3AQ=2QC$ ஆகுமாறு உள்ளன.

(i) A யினுடைய ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(ii) BQ, CR என்பவற்றின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(iii) BQ, CR என்பன D யில் சந்திக்கும்; AD, BC என்பன சந்திக்கும் புள்ளி P எனவும் தரப்படின் $AP:PB$ என்ற விகிதத்தைக் காண்க.

(2001)

50. $u_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$, $u_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ என்பன தரப்பட்டுள்ள இரு சமாந்தரமல்லாத நேர்கோடுகள். λ வின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்துக்கும் நேர்கோடு $u_1+\lambda u_2=0$ ஆனது ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC யின் எதிர்ப் பக்கங்களுக்கு B, C ஆகியவற்றினூடாக வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-4y+5=0$, $2x-y+3=0$ ஆகும். A யின் ஆள்கூறுகள் $(k, -k)$ என எடுக்கப்படுமெனின், AB, AC ஆகிய கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் B, C ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளையும் k யின் சார்பில் காண்க.

k மாறும்போது முக்கோணி ABC யின் மையப்போலியானது கோடு $x+5y-4=0$ மீது கிடக்கின்றதென நிறுவுக.

(2002)

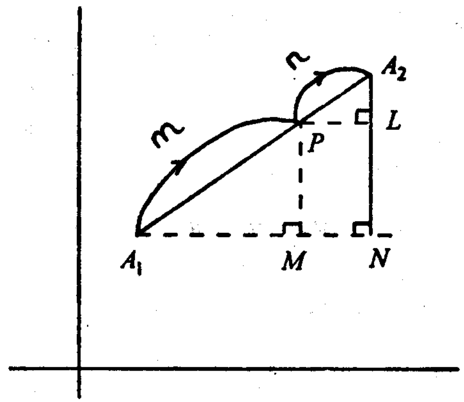
$\boxed{1982}$

$A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ ஆகும்.

$A_1P : PA_2 = m:n \quad (m, n>0)$

ΔA_1PM, ΔA_2PL ///

$P(x_o, y_o)$ என்க.



$$\frac{A_1P}{PA_2} = \frac{A_1M}{PL} = \frac{PM}{A_2L}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{x_o - x_1}{x_2 - x_o} = \frac{y_o - y_1}{y_2 - y_o}$$

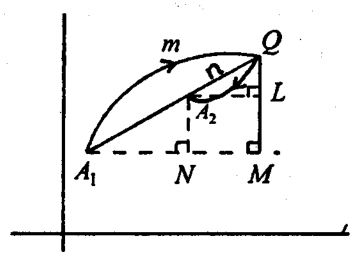
$x_o = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $y_o = \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}$; ஆகவே $P \equiv \left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

Q வெளிப்புறமாகப்பிரிக்கிறது. $Q \equiv (x_o, y_o)$ என்க. $[m, n>0]$

ΔA_1QM, ΔA_2QL ///

$$\frac{A_1Q}{A_2Q} = \frac{A_1M}{A_2L} = \frac{QM}{QL} \quad [m, n>0]$$

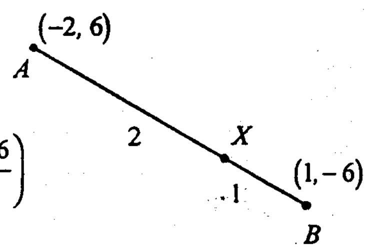
$$\frac{m}{n} = \frac{x_o - x_1}{x_o - x_2} = \frac{y_o - y_1}{y_o - y_2}$$



$x_o = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}$, $y_o = \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}$; ஆகவே $Q \equiv \left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$

$A \equiv (-2, 6)$, $B(1, -6)$

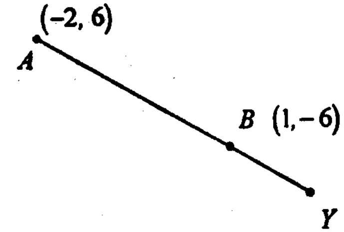
$AX : XB = 2:1$ (உட்புறமாக)



$$X \equiv \left(\frac{2\times 1 + 1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times(-6) + 1\times 6}{2+1}\right)$$

$\equiv (0, -2)$

$AY : YB = 2:1$ (வெளிப்புறமாக)

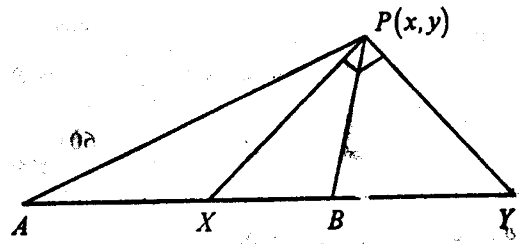


$$Y \equiv \left(\frac{2\times 1 - 1\times(-2)}{2-1}, \frac{2\times(-6) - 1\times 6}{2-1}\right)$$

$\equiv (4, -18)$

$\angle XPY = 90^o$ ஆகும்.

$P \equiv (x, y)$ என்க.



PX இன்படித்திறன் $= \dfrac{y+2}{x}$

PY இன்படித்திறன் $= \dfrac{y+18}{x-4}$

PX இன் படித்திறன் $\times$ PY இன் படித்திறன்

$$\frac{y+2}{x} \times \frac{y+18}{x-4} = -1$$

$$x(x-4) + (y+2)(y+18) = 0$$

ΔPAB இன்பரப்பு $= 24$ ச. அலகுகள்

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 24.$$

$$\frac{1}{2}\left|x(6+6) - y(-2-1) + (12-6)\right| = 24$$

$$|12x + 3y + 6| = 48$$

$$12x + 3y + 6 = \pm 48$$

$12x + 3y = -54$ அல்லது $12x + 3y = 42$

$4x + y = -18$ அல்லது $4x + y = 14$

$4x + y = -18$ .... (2)

$4x + y = 14$ .... (3)

சமன்பாடுகள் (1), (2), ஐத் தீர்க்க

$4x+y=-18, \quad x(x-4)+(y+2)(y+18)=0;$

$y=-18-4x$ ஆகும்.

$$x(x-4)-4x(-16-4x)=0$$
$$x[x-4+64+16x]=0$$
$$x(17x+60)=0$$

$x=0$ அல்லது $x=\dfrac{-60}{17}$

$x=0$ எனின், $y=-18$, $\quad x=-\dfrac{60}{17}$ எனின் $y=\dfrac{-66}{17}$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஐத் தீர்க்க,

$x(x-4)+(y+2)(y+18)=0$ .... (1)

$4x+y=14$ .... (2)

(3) இலிருந்து $y=14-4x$

$$x(x-4)+(16-4x)(32-4x)=0$$
$$x(x-4)+16(x-4)(x-8)=0$$
$$(x-4)[x+16(x-8)]=0$$

$x=4$ அல்லது $x=\dfrac{128}{17}$

$x=4$ எனின், $y=-2$, $\quad x=\dfrac{128}{17}$ எனின், $y=\dfrac{-274}{17}$

எனவே $P_1 \equiv (4,-2)$, $\quad P_2 \equiv (0,-18)$

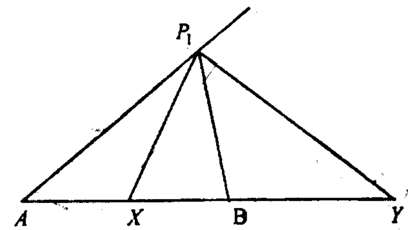
$P_3 \equiv \left(\dfrac{128}{17}, \dfrac{-274}{17}\right)$, $\quad P_4 \equiv \left(\dfrac{-60}{17}, \dfrac{-66}{17}\right)$ ஆகும்.

$P_1 \equiv (4,-2)$, $\quad A \equiv (-2,6)$, $\quad B \equiv (1,-6)$, $\quad X \equiv (0,-2)$, $\quad Y \equiv (4,-18)$

நீளம் $P_1A=\sqrt{6^2+8^2}=10;$ $\quad$ நீளம் $P_1B=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$P_1A : P_1B = 2:1$

$AX:XB=2:1, \quad AY:BY=2:1$



எனவே $\angle AP_1B$ இன் உள்ளிரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு P_1X உம்

வெளியிரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு P_1Y உம் ஆகும்.

P_1X இன் சமன்பாடு : $y=-2$ $\quad [P_1 \equiv (4,-2), \quad X \equiv (0,-2)]$

P_1Y இன் சமன்பாடு : $x=4$ $\quad [P_1 \equiv (4,-2), \quad Y \equiv (4,-18)]$

$P_2 \equiv (0,-18), \quad A \equiv (-2,6), \quad B \equiv (1,-6)$

நீளம் $P_2A=\sqrt{2^2+(-24)^2}=2\sqrt{145}$

நீளம் $P_2B=\sqrt{1^2+12^2}=\sqrt{145}$

$P_2A : P_2B = 2:1$

$P_2A : P_2B = AX:XB; \quad P_2A : P_2B = AY:BY$

கோணம் AP_2B இன் உள்ளிரு கூறாக்கி P_2X உம்

வெளியிரு கூறாக்கி P_2Y உம் ஆகும்.

P_2X இன் சமன்பாடு : $x=0$ $\quad [P_2 \equiv (0,-18), \quad X \equiv (0,-2)]$

P_2Y இன் சமன்பாடு : $y=-18$ $\quad [P_2 \equiv (0,-18) \quad Y \equiv (4,-18)]$

1983

$ax+by+c=0$ இன்மேல் (x_o, y_o) இன் விம்பம் $(x_o+at, \ y_o+bt)$ ஆகும்.

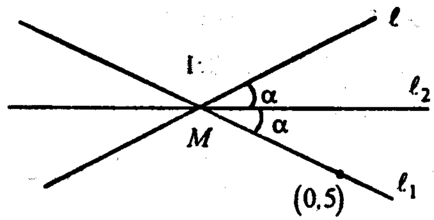
இங்கு $t=\dfrac{-2(ax_o+by_o+c)}{a^2+b^2}$ ஆகும்.

$\ell_2 : 3x-4y+5=0; \quad \ell_1=2x-y+5=0$

$\ell_2=0, \quad \ell_1=0$ இரண்டும் இடைவெட்டும் புள்ளி M என்க.

$$\left.\begin{array}{l}3x-4y+5=0\\ 2x-\ y+5=0\end{array}\right\}$$

$M=(-3,-1)$



$2x-y+5=0$ இன்மேல் யாதுமொருபுள்ளியைக் கருதுக.

$x=0$ எனின், $y=5$. புள்ளி $(0,5)$, ℓ_1 இன் மீது உள்ளது.

ℓ_2 இன்மேல் $(0,5)$ இன் விம்பம் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க

$$t=\frac{-2\left[3\times 0-4\times 5+5\right]}{3^2+4^2}=\frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}&=0+3t, & \bar{y}&=5-4t\\ &=0+3\times\frac{6}{5} & &=5-4\times\frac{6}{5} & \left(\frac{18}{5},\frac{1}{5}\right)\\ &=\frac{18}{5} & &=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

எனவே $\ell_2=0$ இன்மேல் $\ell_1=0$ இன்விம்பம் $\ell=0$ இன் சமன்பாடு

$$M\equiv(-3-1),\quad \left(18/5,\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{y+1}{\frac{1}{5}+1}=\frac{x+3}{\frac{18}{5}+3};\quad \frac{y+1}{6}=\frac{x+3}{33}$$

$2x-11y-5=0$ ஆகும்.

அல்லது.

[$\ell=0$ எனும் கோட்டின் படித்திறன் m என்க.

$\ell_2=0$ இன் படித்திறன் $=\frac{3}{4}$

$\ell_1=0$ இன் படித்திறன் $=2$

$$\left|\frac{m-\frac{3}{4}}{1+m.\frac{3}{4}}\right|=\left|\frac{2-\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}}\right|$$

$$\left|\frac{4m-3}{4+3m}\right|=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

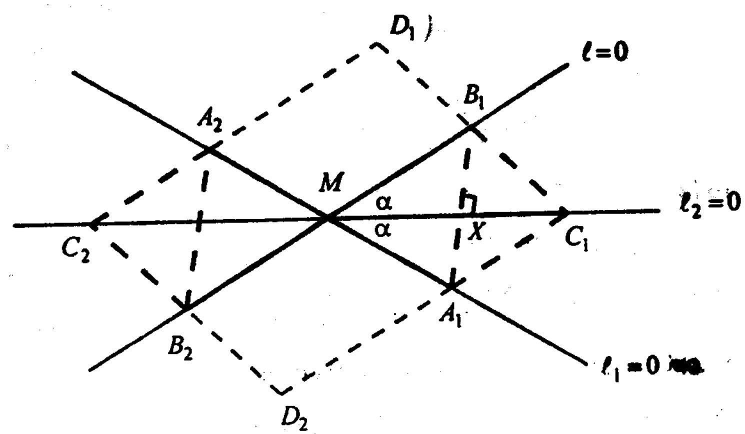
$$\frac{4m-3}{4+3m}=\pm\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}8m-6&=4+3m & \text{அல்லது}\quad 8m-6&=-4-3m\\ 5m&=10 & 11m&=2\\ m&=2 & m&=\frac{2}{11}\end{aligned}$$

$m=2$, $\ell_1=0$ ஐக் குறிக்கும்; எனவே ℓ இன் படித்திறன் $\frac{2}{11}$ ஆகும்.

$\ell=0$ இன் சமன்பாடு $y+1=\frac{2}{11}(x+3)$

$2x-11y-5=0$ ஆகும்.]



$\ell_2 : 3x-4y+5=0$
$\ell_1 : 2x-\ y+5=0$
$\ell : 2x-11y-5=0$

25 ச. அலகுபரப்பளவும் $\ell_1=0,\ \ell=0$ என்பவற்றின் மீது அடுத்துள்ள பக்கங்களைக் கொண்டதுமான சாய்சதுரங்களில் ஒன்று $MA_1C_1B_1$ என்க. மூலை விட்டங்கள் $MC_1,\ A_1B_1$ என்பன X இல் ஒன்றை யொன்று செங்குத்தாக இருகூறிடும்.

$\ell_2=0$ இன் படித்திறன் $=\frac{3}{4}$, $\ell_1=0$ இன் படித்திறன் $=2$

$$tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4}-2}{1+\frac{3}{4}\times 2}\right| = \frac{1}{2} = \frac{B_1X}{MX}$$

$MA_1C_1B_1$ என்ற சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவு $=25$ ச. அலகு

$$\frac{1}{2}\ MC_1\cdot B_1A_1 = 25$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2M\cancel{X}\cdot 2B_1\cancel{X}=25$$
$$2B_1\cancel{X}\cdot 2B_1\cancel{X}=25$$

ஆகவே $B_1X=\frac{5}{2};\ MX=5,\ MC_1=10$ அலகுகள்.

$\ell_2=0;\ 3x-4y+5=0.\quad C_1\equiv\left(x_o,\ \frac{3x_o+5}{4}\right)$

$0=1$

$MC_1=10;\quad (x_o+3)^2+\left(\frac{3x_o+5}{4}+1\right)^2=10^2$

$$16\,(x_o+3)^2+(3x_o+9)^2=16\cdot 10^2$$
$$25(x_o+3)^2=16\times 100.$$
$$(x_o+3)=\pm 8$$

$x_o=5$ அல்லது $x_o=-11$ $\quad c_1\equiv(5,5)$ எனின்,
$y_o=5$ $\quad y_o=-7$ $\quad c_2\equiv(-11,-7)$ ஆகும்.

சாய்சதுரம் $MA_1C_1B_1$ இல்

இப்பொழுது : C_1B_1 இன் சமன்பாடு : ($\ell_1=0$ இற்கு சமாந்தரம்; $(5,5)$ இனூடு செல்லும்)

$2x-y+k_1=0 \Rightarrow 2\times5-5+k_1=0 \Rightarrow k_1=-5$

C_1B_1 இன் சமன்பாடு $2x-y-5=0$.

C_1A_1 இன் சமன்பாடு ($\ell=0$ இற்கு சமாந்தரம் $(5,5)$ இனூடு செல்லும்)

$2x-11y+k_2=0 \Rightarrow 2\times5-11\times5+k_2=0 \Rightarrow k_2=45$

C_1A_1 இன் சமன்பாடு : $2x-11y+45=0$.

சாய்சதுரம் $MA_2C_2B_2$ இல்

A_2C_2 இன் சமன்பாடு [$\ell=0$ இற்கு சமாந்தரம், $(-11,-7)$ இனூடு செல்லும்]

$2x-11y+k_3=0 \Rightarrow -22+77+k_3=0;\ k_3=-55$

A_2C_2 இன் சமன்பாடு $2x-11y-55=0$.

B_2C_2 இன்சமன்பாடு [$\ell_1=0$ இற்கு சமாந்தரம் $(-11,-7)$ இனூடு செல்லும்]

$2x-y+k_4=0 \Rightarrow -22+7+k_4=0 \Rightarrow k_4=15$

B_2C_2 இன் சமன்பாடு $2x-y+15=0$ ஆகும்.

ℓ_2 ஐ மூலை விட்டங்களாகக் கொண்ட இரு சாய்சதுரங்களின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்

<u>$MA_1C_1B_1$</u>

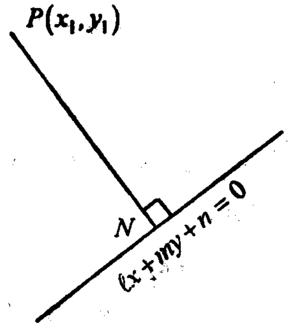
$MA_1 \quad \ell_1 : 2x-y+5=0 \qquad MB_1 : \ell : 2x-11y-5=0$
$B_1C_1 \quad 2x-y-5=0 \qquad A_1C_1 : 2x-11y+45=0$

<u>$MA_2C_2B_2$</u>

$MA_2 \quad \ell_1 : 2x-y+5=0 \qquad MB_2 : \ell : 2x-11y-5=0$
$B_2C_2 \quad 2x-y+15=0 \qquad A_2C_2 : 2x-11y-55=0$

மற்றைய இரு சாய்சதுரங்களும் $MA_2D_1B_1,\ \ MA_1D_2B_2$. ஆகும்.

1984 $N \equiv (\alpha, \beta)$ என்க.



PN இன் படித்திறன் $= \dfrac{y_1-\beta}{x_1-\alpha} = \dfrac{m}{\ell}$

$\dfrac{x_1-\alpha}{\ell} = \dfrac{y_1-\beta}{m} = t$ என்க.

$\alpha = x_1-\ell t, \quad \beta = y_1-mt$

(α, β), $\ell x+my+n=0$ இல் இருப்பதால்

$$\ell(x_1-\ell t)+m(y_1-mt)+n=0$$

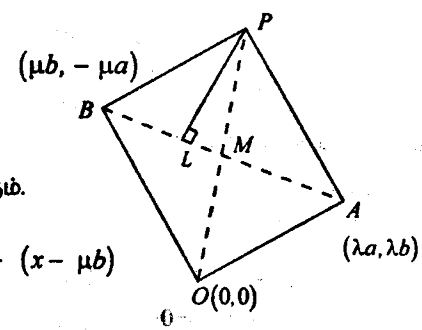
$$t = \frac{\ell x_1+my_1+n}{\ell^2+m^2}$$

$$\alpha = x_1 - \frac{\ell(\ell x_1+my_1+n)}{\ell^2+m^2}, \qquad \beta = y_1 - \frac{m(\ell x_1+my_1+n)}{\ell^2+m^2}$$

$$\alpha = \frac{m^2x_1-\ell my_1-\ell n}{\ell^2+m^2} \qquad \beta = \frac{\ell^2y_1-\ell mx_1-mn}{\ell^2+m^2}$$ ஆகும்.

$A \equiv (\lambda a, \lambda b)$, $B \equiv (\mu b, -\mu a)$

$$M \equiv \left(\frac{\lambda a+\mu b}{2}, \frac{\lambda b-\mu a}{2}\right).$$



எனவே $P \equiv (\lambda a+\mu b, \lambda b-\mu a)$ ஆகும்.

AB இன் சமன்பாடு $y+\mu a = \dfrac{\lambda b+\mu a}{\lambda a-\mu b}(x-\mu b)$

$$(\lambda a-\mu b)y+\mu a(\lambda a-\mu b) = (\lambda b+\mu a)x-\mu b(\lambda a-\mu b)$$

$$(\lambda b+\mu a)x+(\mu b-\lambda a)y-\lambda\mu\left(a^2+b^2\right)=0$$

$$(\lambda b+\mu a)x+(\mu b-\lambda a)y-\lambda\mu=0$$

$[\ell = \lambda b+\mu a, \ m = \mu b-\lambda a, \ n = -\lambda\mu]$ $\quad P \equiv (\lambda a+\mu b, \lambda b-\mu a)$

P யிலிருந்து AB யிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடி $L = (\alpha, \beta)$ என்க.

இங்கு $t = \dfrac{(\lambda b+\mu a)(\lambda a+\mu b)+(\mu b-\lambda a)(\lambda b-\mu a)-\lambda\mu}{(\lambda b+\mu a)^2+(\mu b-\lambda a)^2}$

$$= \frac{\left(\lambda^2+\mu^2\right)ab+\lambda\mu\left(a^2+b^2\right)+\lambda\mu\left(a^2+b^2\right)-\left(\lambda^2+\mu^2\right)ab-\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$\alpha = (\lambda a+\mu b) - (\lambda b+\mu a)\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$= \frac{\lambda^3 a-\mu^3 b}{\lambda^2+\mu^2} \quad \text{.............................(1)}$$

$$\beta = (\lambda b+\mu b) - (\mu b+\lambda a)\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$= \frac{\lambda^3 b-\mu^3 a}{\lambda^2+\mu^2} \quad \text{.............................(2)}$$

$$(a\alpha+b\beta) = \frac{\lambda^3\left(a^2+b^2\right)}{\lambda^2+\mu^2} \equiv \frac{\lambda^3}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$(b\alpha-a\beta) = \frac{\mu^3\left(a^2+b^2\right)}{\lambda^2+\mu^2} = \frac{\mu^3}{\lambda^3+\mu^2}$$

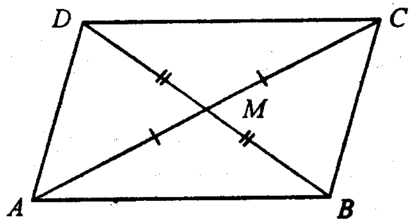
$$(a\alpha+b\beta)+(b\alpha-a\beta) = \frac{\lambda^3+\mu^3}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$(a+b)\alpha-(a-b)\beta = \frac{\lambda^3+\mu^3}{\lambda^2+\mu^2}$$

(α, β) இன் ஒழுக்கு

$(a+b)x-(a-b)y=c$ ஆகும். இங்கு $c = \dfrac{\lambda^3+\mu^3}{\lambda^2+\mu^2}$. இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

1985 $ABCD$ இணைகரம்



$A \equiv (-1, -1)$, $C \equiv (7, 15)$

ஆகவே $M \equiv (3, 7)$

நீளம் $AC = \sqrt{16^2+8^2} = 8\sqrt{5}$

BD யின் நீளம் $= 2\sqrt{17}$; $BM = MD = \sqrt{17}$ · BD யானது x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் $tan^{-1}(4)$ எனும் கோணத்தை அமைப்பதால், BD யின் சமன்பாடு $y = 4x+c$ என எடுக்கலாம். BD, யானது $M(3, 7)$ இனூடு செல்வதால் $7 = 12+c$, $c = -5$ $\therefore$ BD யின் சமன்பாடு $y = 4x-5$ ஆகும்.

$B \equiv (x_o, 4x_o - 5)$ என்க. $BM = \sqrt{17}$

$$(x_o-3)^2 + (4x_o-12)^2 = 17$$
$$17(x_o-3)^2 = 17$$
$$(x_o-3)^2 = 1$$
$$x_o - 3 = \pm 1$$

$x_o = 4$ அல்லது $x_o = 2$

$y = 11$ $\quad y_o = 3$

$B \equiv (4, 11)$ எனின், $D \equiv (2, 3)$ ஆகும்.

பக்கம் AB யின் சமன்பாடு : $\dfrac{y+1}{11+1} = \dfrac{x+1}{4+1}$

$12x - 5y + 7 = 0$ ....(1)

பக்கம் BC யின் சமன்பாடு : $\dfrac{y-11}{15-11} = \dfrac{x-4}{7-4}$

$3(y-11) = 4(x-4)$

$4x - 3y + 17 = 0$ ....(2)

பக்கம் DC யின் சமன்பாடு: $12x - 5y + k_1 = 0$ என்க.

இது $(2, 3)$ இனூடு செல்வதால், $24 - 15 + k_1 = 0$; $K_1 = -9$

$12x - 5y - 9 = 0$ ....(3)

பக்கம் AD யின் சமன்பாடு : $4x - 3y + k_2 = 0$ என்க.

இது $(2, 3)$ இனூடு செல்வதால், $8 - 9 + k_2 = 0$, $k_2 = 1$

$4x - 3y + 1 = 0$ ....(4)

$(1), (2)$ இலிருந்து கோணம் ABC இன் இருசூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{12x-5y+7}{\sqrt{144+25}} = \pm \frac{4x-3y+17}{\sqrt{16+9}}$$
$$5(12x-5y+7) = \pm 13(4x-3y+17)$$

$8x + 14y - 186 = 0$; $\quad 112x - 64y + 256 = 0$

$4x + 7y - 93 = 0$; $\quad 7x - 4y + 16 = 0$

$4x + 7y - 93$ இல் $A(-1, -1)$, $C(7, 15)$ ஐப் பிரதியிட

$(-4-7-93)$ $\quad (60+105-93) < 0$

ஆகவே A உம் C உம் $4x + 7y - 93 = 0$ இற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் இருக்கும். எனவே, கோணம் ABC இன் உள்ளிரு சூறாக்கியின் சமன்பாடு

$\underline{\underline{4x + 7y - 93 = 0}}$ ஆகும்.

கோணம் ADC யின் இருசூறாக்கியின் சமன்பாடுகள் $(3), (4)$ இலிருந்து,

$$\frac{12x-5y-9}{\sqrt{144+25}} = \pm \frac{4x-3y+1}{\sqrt{16+9}}$$
$$5(12x-5y-9) = \pm 13(4x-3y+1)$$

$8x + 14y - 58 = 0$; $\quad 112x - 64y - 32 = 0$

$4x + 7y - 29 = 0$ $\quad 7x - 4y - 2 = 0$

$4x + 7y - 29$ இல் $A(-1, -1)$, $C(7, 15)$ ஐப் பிரதியிட

$(-4-7-29)$ $\quad (28+105-29) < 0$

எனவே A யும், C யும், $4x+7y-29=0$ இற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் இருக்கும்.
ஆகவே கோணம் ADC யின் இருசூறாக்கியின் சமன்பாடு

$4x+7y-29=0$ ஆகும்.

1986

$A \equiv (-8, 10)$, $B^1C^1 : 3x-y-5=0$

A யிலிருந்து B^1C^1 இற்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு $x+3y+c_1=0$.

இது $A(-8, 10)$ இனூடு செல்வதால் $c_1 = -22$

$$x+3y-22=0 \quad \text{.............................} (1)$$

$B \equiv (1, 2)$ இலிருந்து $C^1A^1 : x-2y=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு $2x+y+c_2=0$; $(1, 2)$ இனூடு செல்வதால் $c_2=-4$

$$2x+y-4=0 \quad \text{.............................} (2)$$

இரண்டு செங்குத்துக்களும் சந்திக்கும் புள்ளி H எனின்,

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-22=0 \\ 2x+y-4=0 \end{array}\right\} \quad H \equiv (-2, 8)$$

$C \equiv (1, 11)$ இலிருந்து $A^1B^1 : x+\lambda y-15=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் சமன்பாடு $: \lambda x-y+c_3=0$; $(1, 11)$ இனூடு செல்வதால் $c_3 = 11-\lambda$

$A^1B^1 : -\lambda x - y + (11-\lambda)=0$ ஆகும். இந்நேர்கோடு $(-2, 8)$ இனூடு செல்வதால் $-2\lambda-8+(11-\lambda)=0$

ஆகவே $\lambda = 1$

$A \equiv (-8, 10)$, $B \equiv (1, 2)$, $C \equiv (1, 11)$.

BC யின் சமன்பாடு $x=1$ .... (3)

CA யின் சமன்பாடு $y-11 = \dfrac{11-10}{1+8}(x-1)$ .... (4)

$$9y-x-98=0$$

AB யின் சமன்பாடு : $y-2 = \dfrac{10-2}{-8-1}(x-1)$

$$8x+9y-26=0 \quad \text{.............................} (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} B^1C^1 : 3x-y-5=0 \\ C^1A^1 : x-2y=0 \end{array}\right\} \quad C^1 \equiv (2, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} C^1A^1 : x-2y=0 \\ A^1B^1 : x+y-15=0 \end{array}\right\} \quad A^1 \equiv (10, 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} A^1B^1 : x+y-15=0 \\ B^1C^1 : 3x-y-5=0 \end{array}\right\} \quad B^1 \equiv (5, 10)$$

$A^1(10, 5)$ இலிருந்து $BC : x=1$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் சமன்பாடு $y=5$ .... (6)

$B^1(5, 10)$ இலிருந்து $CA : 9y-x-98=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் சமன்பாடு: $9x+y+k_1=0 \Rightarrow 45+10+k_1=0$; $k_1=-55$

$$9x+y-55=0 \quad \text{.............................} (7)$$

$C^1(2, 1)$ இலிருந்து $AB : 8x+9y-26=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் சமன்பாடு : $9x-8y+k_2=0$; $18-8+k_2=0$, $k_2=-10$

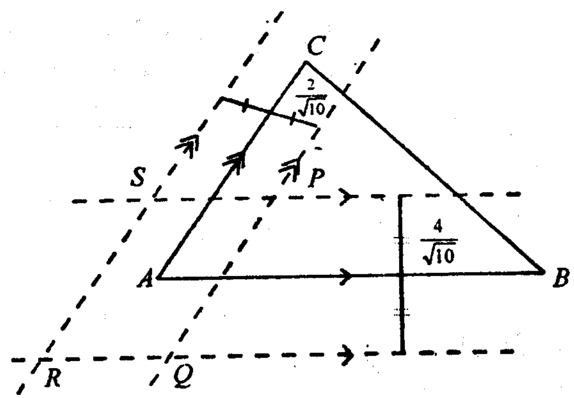
$$9x-8y-10=0 \quad \text{.............................} (7)$$

(6), (7) இலிருந்து $y=5$, $x=\dfrac{50}{9}$ ஆகும்..

இது சமன்பாடு (7) ஐத் திருப்தி செய்யும்.

ஆகவே A^1, B^1, C^1 இலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரைந்த செங்குத்துக்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

1987



AB யிலிருந்து $\frac{4}{\sqrt{10}}$ தூரத்திலும், AC யிலிருந்து $\frac{2}{\sqrt{10}}$ தூரத்திலும் உள்ள புள்ளி (h, k) என்க. $A \equiv (2, 5)$, $B \equiv (11, 2)$, $C \equiv (8, 7)$

AC யின் சமன்பாடு; $y-5 = \frac{7-5}{8-2}(x-2) \Rightarrow 3y-x-13=0.$

AB யின் சமன்பாடு; $y-5 = \frac{2-5}{11-2}(x-2) \Rightarrow 3y+x-17=0.$

$\frac{|3k-h-13|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$; $\qquad \frac{|3k+h-17|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$

$|3k-h-13| = 12 \qquad |3k+h-17| = 4$

$3k-h-13 = \pm 2 \qquad 3k+h-17 = \pm 4$

$3k-h-15=0$ .... (1) $\qquad 3k+h-13=0$ .... (3)

$3k-h-11=0$ .... (2) $\qquad 3k+h-21=0$ .... (4)

(1), (3), $\left.\begin{aligned}3k-h-15=0\\3k+h-13=0\end{aligned}\right\}$ $\left(-1, \frac{14}{3}\right)$

நான்கு புள்ளிகள் P, Q, R, S என்க.

(1), (4) $\left.\begin{aligned}3k-h-15=0\\3k+h-21=0\end{aligned}\right\}$ $(3, 6)$

(2), (3) $\left.\begin{aligned}3k-h-11=0\\3k+h-13=0\end{aligned}\right\}$ $(1, 4)$

(2), (4) $\left.\begin{aligned}3k-h-11=0\\3k+h-21=0\end{aligned}\right\}$ $\left(5, \frac{16}{3}\right)$

முக்கோணி ABC யினுள் அமைந்த புள்ளி P எனின், P, C என்பன AB யின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்க வேண்டும்.

$AB:\ 3y+x-17=0 \qquad C \equiv (8, 7)$

$(3, 6)$, $(8, 7)$ ஐ நேர்கோட்டில் பிரதியிட

$(3\times7+8-17)\ (3\times6+3-17) > 0.$

எனவே $(3, 6)$ உம் C உம் AB இன் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கும்.

$\left(5, \frac{16}{3}\right)$, $(8, 7)$ ஐ நேர்கோட்டில் பிரதியிட $(3\times7+8-17)\left(3\times\frac{16}{3}+5-17\right) > 0.$

$\left(5, \frac{16}{3}\right)$, உம், C உம் AB இன் ஒரேபக்கத்திலிருக்கும். இப்பொழுது $(3, 6)$, ஆகியவற்றுள் AC யின் B இருக்கும் அதேபக்கத்தில் உள்ள புள்ளியைக் காணவேண்டும்.

AC யின் சமன்பாடு : $\quad 3y-x-13=0$

$B \equiv (11, 2)$ ஐயும் $(3, 6)$ ஐயும் எடுக்க.

$(3\times2-11-13)\ (3\times6-3-13) < 0$

எனவே முக்கோணி ABC யினுள் அமைந்துள்ள புள்ளி $\left(5, \frac{16}{3}\right)$ ஆகும்.

எனவே மற்றையது புள்ளி $S \equiv (3, 6)$ ஆகும்.

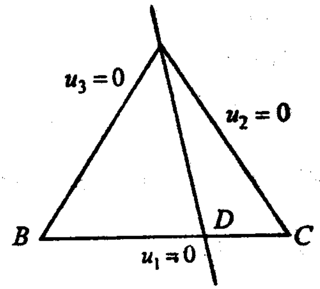
இணைகரத்தின் பரப்பளவு : $P\left(5, \frac{16}{3}\right)$, $S(3, 6)$

PS, QR இற் கிடைப்பட்ட தூரம் $= \frac{4}{\sqrt{10}}$

பரப்பளவு $= PS \times \frac{4}{\sqrt{10}}$ ஆகும். $PS = \sqrt{2^2 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{40}}{3}$

$PS \times \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{40}}{3} \times \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{16}{3}$ சதுர அலகுகள்.

1988



$BC : u_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1 = 0$
$CA : u_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2 = 0$
$AB : u_3 \equiv a_3x+b_3y+c_3 = 0$

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$, $C \equiv (x_3, y_3)$ என்க.

$u_3 - ku_2 = 0$. என்பது x, y இல் முதலாம் படியிலுள்ள சமன்பாடு. எனவே இது நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$A(x_1, y_1)$; $u_2 = 0$ இலிருப்பதால் $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$

$A(x_1, y_1)$; $u_3 = 0$ இலிருப்பதால் $a_3x_1 + b_3y_1 + c_3 = 0$

எனவே k இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$(a_3x_1+b_3y_1+c_3) - k(a_2x_1+b_2y_1+c_2) = 0$ ஆகும்.

$u_3 - ku_2 = 0$ என்பது A யினூடு செல்லும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$u_3 - ku_2 = 0 \Rightarrow (a_3 - ka_2)x + (b_3 - kb_2)y + (c_3 - kc_2) = 0.$

$$\left.\begin{aligned} BC &: a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ AB &: a_3x+b_3y+c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad B \equiv (x_2, y_2)$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{a_1b_3 - a_3b_1}, \quad y = \frac{a_3c_1 - a_1c_3}{a_1b_3 - a_3b_1}$$

$$B \equiv (x_2, y_2) \equiv \left(\frac{b_1c_3 - b_3c_1}{a_1b_3 - a_3b_1}, \frac{a_3c_1 - a_1c_3}{a_1b_3 - a_3b_1}\right)$$

இதேபோல் $C \equiv (x_3, y_3) \equiv \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$ ஆகும்.

[$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை

$ax+by+c=0$ எனும் கோடு பிரிக்கும் விகிதம் $= -\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ ஆகும்]

முதற் பகுதியிலிருந்து,

$B \equiv (x_2, y_2)$, $C \equiv (x_3, y_3)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை (BC யை)

$u_3 - ku_2 \equiv (a_3 - ka_2)x + (b_3 + kb_2)y + (c_3 - kc_2) = 0$ பிரிக்கும் விகிதம்.

$$\frac{BD}{DC} = -\frac{(a_3 - ka_2)x_2 + (b_3 - kb_2)y_2 + (c_3 - kc_2)}{(a_3 - ka_2)x_3 + (b_3 - kb_2)y_3 + (c_3 - kc_2)}$$

$B \equiv (x_2, y_2)$, $u_3 = 0$ இலிருப்பதால் $a_3x_2 + b_3y_2 + c_3 = 0$

$C \equiv (x_3, y_3)$ $u_2 = 0$ இலிருப்பதால் $a_2x_3 + b_2y_3 + c_2 = 0$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = -\frac{k(a_2x_2 + b_2y_2 + c_2)}{(a_3x_3 + b_3y_3 + c_3)}$$ ஆகும்.

$$a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = \frac{a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_3c_1 - a_1c_3) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1)}{a_1b_3 - a_3b_1}$$
$$= \frac{a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 - a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2}{a_1b_3 - a_3b_1}$$

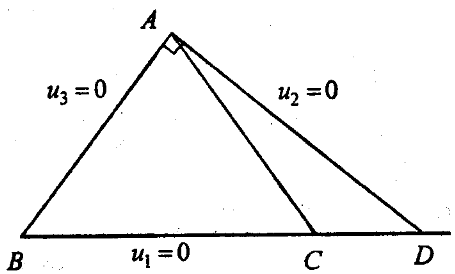
$$a_3x_3+b_3y_3+c_3 = \frac{a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_2c_1-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$= \frac{-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1+a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\frac{a_2x_2+b_2y_2+c_2}{a_3x_3+b_3y_3+c_3} = \frac{-k(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1b_3-a_3b_1} = \frac{k(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_3b_1-a_1b_3)}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{k(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_3b_1-a_1b_3)}$$ ஆகும்.

A யினூடாக BA யிற்கு செங்குத்தான நேர்கோடு AD என்க.



D யானது BC யிற் கிடையிலிருப்பின் A விரிகோணமாகும்.

D யானது நீட்டிய BC யிலிருப்பின் A கூர்ங்கோணமாகும்.

இப்பொழுது AD யின் சமன்பாட்டினை

$u_3-ku_2=0$ என எழுதலாம்.

$u_3-ku_2 \equiv (a_3x+b_3y+c_3)-k(a_2x+b_2y+c_2)=0$

AD யின் படித்திறன் $= -\dfrac{(a_3-ka_2)}{(b_3-kb_2)}$

AB யின் படித்திறன் $= -\dfrac{a_3}{b_3}$

$$-\left(\frac{a_3-ka_2}{b_3-kb_2}\right)\times\left(-\frac{a_3}{b_3}\right) = -1$$

$$k(a_2a_3+b_2b_3) = a_3^2+b_3^2$$

$$k = \frac{a_3^2+b_3^2}{a_2a_3+b_2b_3}$$

இப்பொழுது $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{k(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_3b_1-a_1b_3)}$

$$= \frac{(a_3^2+b_3^2)\,(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_2a_3+b_2b_3)\,(a_3b_1-a_1b_3)}$$

$a_3^2+b_3^2>0$. ஆகும்.

$(a_2a_3+b_2b_3)\,(a_3b_1-a_1b_3)\,(a_1b_2-a_2b_1)>0$ எனின், $\dfrac{BD}{DC}>0$. ஆகவே D ஆனது B, C யிற்கிடையில் இருக்கும். எனவே A விரிகோணம் ஆகும்.

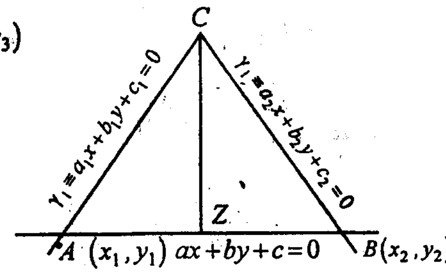
$(a_2a_3+b_2b_3)\,(a_3b_1-a_1b_3)(a_1b_2-a_2b_1)<0$ எனின், $\dfrac{BD}{DC}<0$.
எனவே D, நீட்டப்பட்ட BC யிலிருக்கும். ஆகவே A கூர்ங்கோணம் ஆகும்.
$(a_2a_3+b_2b_3)\,(a_3b_1-a_1b_3)\,(a_1b_2-a_2b_1)$ ஆனது நேர் அல்லது மறை என்பதற் கேற்ப A விரிகோணமாக அல்லது கூர்ங்கோணமாக இருக்கும்.

1989

$A\equiv(x_1\,y_1)$, $B\equiv(x_2\,y_2)$, $C\equiv(x_3,y_3)$

என்க. $\dfrac{AZ}{ZB}=\dfrac{K}{1}$ ஆகும்.

$$Z \equiv \left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)$$



புள்ளி C யினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடு $\gamma_1+\lambda\gamma_2=0$ என எழுதலாம்
$(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda\,(a_2x+b_2y+c_2)=0$ ஆகும்.

இந் நேர்கோடு $Z \equiv \left(\dfrac{x_1+kx_2}{1+k}, \dfrac{y_1+ky_2}{1+k}\right)$ இனூடு செல்வதால்,

$$a_1\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}\right)+b_1\left(\frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)+c_1$$

$$+\lambda\left[a_2\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}\right)+b_2\left(\frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)+c_2\right]=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$A(x_1,y_1)$ $a_1x+b_1y+c_1=0$ இலிருப்பதால் $a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$

$B(x_2,y_2)$ $a_2x+b_2y+c_2=0$ இலிருப்பதால் $a_2x_2+b_2y_2+c_2=0$

சமன்பாடு (1), $k(a_1x_2+b_1y_2+c_1)+\lambda(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$. ஆகும்.

$$k\left[(a_1x_2+b_1y_2+c_1)\right]+\lambda\left[(a_2x_1+b_2y_1+c_2)\right]=0$$

$$k\left[(a_1x_2+b_1y_2+c_1)-(a_1x_1+b_1y_1+c_1)\right]$$
$$+\lambda\left[(a_2x_1+b_2y_1+c_2)-(a_2x_2+b_2y_2+c_2)\right]=0$$

($a_1x_1+b_1y+c_1=0=a_2x_2+b_2y_2+c_2$ என்பதால்)

$$k\left[a_1(x_2-x_1)+b_1(y_2-y_1)\right]+\lambda\left[a_2(x_1-x_2)+b_2(y_1-y_2)\right]=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ஆனால் $A\equiv(x_1\ y_1)$, $B\equiv(x_2\ y_2)$ என்பன $ax+by+c=0$ இலிருப்பதால்,

$$\left.\begin{array}{l} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$$

$$\frac{x_1-x_2}{b}=\frac{y_1-y_2}{-a}=t \text{ என்க.}$$

சமன்பாடு (2),

$$k\left[a_1(-bt)+b_1(+at)\right]+\lambda\left[a_2(bt)+b_2(-at)\right]=0$$

$$k\left[ab_1-a_1b\right]+\lambda\left[a_2b-ab_2\right]=0$$

$$\lambda=\frac{k(a_1b\ \ ab_1)}{a_2b-ab_2}$$

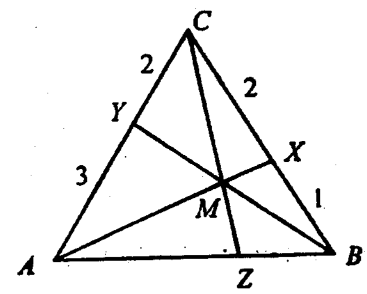
CZ இன் சமன்பாடு $v_1+\lambda v_2=0$

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{k(a_1b-ab_1)}{(a_2b-ab_2)}(a_2x+b_2y+c_2)=0 \text{ ஆகும்.}$$

$BC:\ x-4y+6=0$

$CA:\ 2x-y-6=0$

$AB:\ x-y+3=0$



$\frac{CX}{XB}=\frac{2}{1}$ ஆதலால், **AX இன் சமன்பாடு**

$$\begin{bmatrix} a=1, & b=-4 \\ a_1=2, & b_1=-1 \\ a_2=1, & b_2=-1 \end{bmatrix}$$

$$(2x-y-6)+2\left[\frac{(-8)-(-1)}{(-4)-(-1)}\right](x-y+3)=0$$

$$(2x-y-6)+\frac{2\times(-7)}{(-3)}(x-y+3)=0$$

$$3(2x-y-6)+14(x-y+3)=0$$

$$20x-17y+24=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$AY=\frac{3}{2}CY$ ஆகும்.

BY இன் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} a=2, & b=-1 \\ a_1=2, & b_1=-1 \\ a_2=1, & b_2=-1 \end{bmatrix}$$

$$(x-y+3)+\frac{3}{2}\left[\frac{(-1)-(-2)}{(-1)-(-8)}\right](x-4y+6)=0$$

$$(x-y+3)+\frac{3}{2}\times\frac{1}{7}(x-4y+6)=0$$

$$17x-26y+60=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

இரு நேர்கோடுகளும் (AX, BY) சந்திக்கும் புள்ளி M இனூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $(20x-17y+24)+\mu\,(17x-26y+60)=0$ ஆகும்.

இந்நேர்கோடு $C \equiv \left(\frac{30}{7}, \frac{18}{7}\right)$ இனூடு செல்வதால்,

$$\left(20\times\frac{30}{7}-17\times\frac{18}{7}+24\right)+\mu\left(17\times\frac{30}{7}-26\times\frac{18}{7}+60\right)=0$$

$$462+462\mu = 0$$

$$\mu = -1$$

நேர்கோடு $(20x-17y+24)-(17x-26y+60)=0$

$$3x+9y-36=0$$

$$\underline{\underline{x+3y-12=0}}$$ ஆகும்.

$\boxed{\text{அல்லது}}$

சேவாவின் தேற்றப்படி,

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

ஆகவே $\frac{AZ}{ZB}=\frac{3}{1}$

$$\begin{bmatrix} a=1,\ b=-1 \\ a_1=2,\ b_1=-1 \\ a_2=1,\ b_2=-4 \end{bmatrix}$$

CZ இன் சமன்பாடு

$$(2x-y-6)+3\left[\frac{2\times(-1)-1\times(-1)}{1\times(-1)-1\times(-4)}\right](x-4y+6)=0$$

$$(2x-y-6)+3\times\left[\frac{-1}{3}\right](x-4y+6)=0$$

$$(2x-y-6)-(x-4y+6)=0$$

$$\underline{\underline{x+3y-12=0}}$$ ஆகும்.

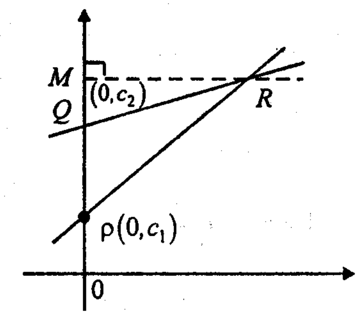
1990

$y=m_1x+c_1,\quad y=m_2x+c_2,\quad x=0$

$P\equiv(0,c_1),\quad Q\equiv(0,c_2)$

$$\left.\begin{array}{l} y=m_1x+c_1 \\ y=m_2x+c_2 \end{array}\right\}$$ இரண்டையும் தீர்க்க

$$x=\frac{c_1-c_2}{m_2-m_1}$$ ஆகும்.



முக்கோணி PQR இன்பரப்பு $=\frac{1}{2}\times$ அடி $\times$ செங்குத்துயரம்

$$=\frac{1}{2}\times PQ\times RM$$

$$=\frac{1}{2}\times|c_1-c_1|\times\left|\frac{c_1-c_2}{m_2-m_1}\right|$$

$$=\frac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$$ ஆகும்.

$y=2x+3,\quad y=-2x+7,\quad y=6x+2$

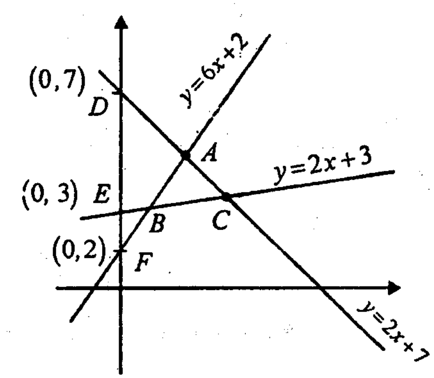
$\Delta\, ABC$ யின் பரப்பைக் கணிக்கவேண்டும்.

$\Delta ABC = \Delta DCE + \Delta EBF - \Delta DAF$

$$\Delta DCE = \frac{(7-3)^2}{2\left[|-2-2|\right]} = \frac{16}{8}$$

$$\Delta EBF = \frac{(3-2)^2}{2\left[|2-6|\right]} = \frac{1}{8}$$

$$\Delta DAF = \frac{(7-2)^2}{2\left[|-2-6|\right]} = \frac{25}{16}$$



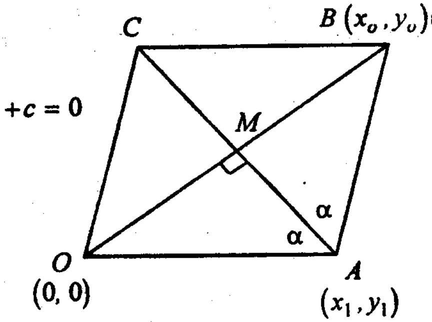
$\therefore \Delta ABC$ யின் பரப்பு $= \frac{16}{8} + \frac{1}{8} - \frac{25}{16}$

$= \frac{34-25}{16} = \frac{9}{16}$ ச. அலகு

1990 விசேட

$ax+by+c=0$ இன்மீது புள்ளி (x_1, y_1) இன்விம்பம் $(x_1+at,\ y_1+bt)$ ஆகும்,

இங்கு $t = \frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$



$O \equiv (0,0)$. AC யின் சமன்பாடு $ax+by+c=0$

$\angle OAB = 2\alpha$ ஆகும்.

$ax+by+c=0$ இன்மேல் $(0, 0)$ இன் விம்பம் $B(x_o, y_o)$ ஆகும்.

$x_o = 0+at, \quad y_o = o+bt$ இங்கு $t = \frac{-2c}{a^2+b^2}$

$\therefore B \equiv \left(\frac{-2ac}{a^2+b^2},\ \frac{-2bc}{a^2+b^2}\right)$ ....(1)

$M \equiv \left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right)$

$OM = \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}}$ ஆகும்.

$AM = OM \cot\alpha \quad \left[\alpha < \pi/2\ ;\ \cot\alpha > 0\right]$

$A \equiv (x_1, y_1)$ என்க. $M \equiv (m_o, n_o)$ என்க.

$\frac{y_1-n_o}{x_1-m_o} = \frac{-a}{b}$

$\frac{x_1-m_o}{-b} = \frac{y_1-n_o}{a} = t_o$ என்க.

$(x_1-m_o)^2 + (y_1-n_o)^2 = (a^2+b^2)t_o^2$

$AM^2 = (a^2+b^2)\ t_o^2$

$OM^2\cot^2\alpha = (a^2+b^2)t_o^2$

$\frac{c^2}{(a^2+b^2)}\cot^2\alpha = (a^2+b^2)t_o^2$

$t_o = \pm\frac{c}{(a^2+b^2)}\cot\alpha$

$x_1 = m_o - bto, \quad y_1 = no + at_o$

$t_o = \frac{c\cot\alpha}{a^2+b^2}$ எனின்,

$x_1 = \frac{-ac}{a^2+b^2} - \frac{bc\cdot\cot\alpha}{a^2+b^2}, \quad y_1 = \frac{-bc}{a^2+b^2} + \frac{ac\cot\alpha}{a^2+b^2}$

$A \equiv \left(\frac{-c(a+b\cot\alpha)}{a^2+b^2},\ \frac{-c(b-a\cot\alpha)}{a^2+b^2}\right)$ ....(2)

$t_o = \frac{-c\cot\alpha}{a^2+b^2}$ எனின்,

$C \equiv \left(\frac{-c(a-b\cot\alpha)}{a^2+b^2},\ \frac{-c(b+a\cot\alpha)}{a^2+b^2}\right)$ ....(3)

1991

$ax+by+c=0$ இன் மீது புள்ளி. (x_1, y_1) இன் விம்பம் $(x_1+at,\ y_1+bt)$ ஆகும்.

இங்கு $t=\dfrac{-2\,(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$ ஆகும்.

$AB: y-x+1=0 \qquad B\,(1,0)$

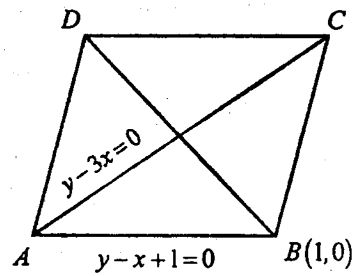
$AC: y-3x=0$

$B\equiv(1,0)$, $y-3x=0$ இன் மீது B இன் தெறிப்பு D ஆகும்.

$a=-3,\ \ b=1,$

$$t=\frac{-2\left[(-3\times 1)+1\times 0\right]}{9+1}=\frac{3}{5}$$

$$D\equiv\left(1-3\times\frac{3}{5},\ \ 0+1\times\frac{3}{5}\right)\equiv\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)$$



DC யின் சமன்பாடு $y-x+k_1=0$ என்க.

இது $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ இனூடு செல்வதால் $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+k_1=0; \qquad k_1=-\frac{7}{5}$

$$DC: y-x-\frac{7}{5}=0 \Rightarrow 5y-5x-7=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} DC: 5y-5x-7=0 \\ AC:\ \ y=3x \end{array}\right\} \quad C\equiv\left(\frac{7}{10},\frac{21}{10}\right)$$

BC யின் சமன்பாடு

$$y-0=\frac{\frac{21}{10}-0}{\frac{7}{10}-1}\,(x-1)$$

$$y=-7\,(x-1)\ ; \quad y+7x-7=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

DA யின் சமன்பாடு $y+7x+k_2=0$ என்க. இது $\left(\frac{-4}{5},\frac{3}{5}\right)$ இனூடு

செல்வதால், $\frac{3}{5}-\frac{28}{5}+k_2=0, \qquad k_2=5$

$$y+7x+5=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

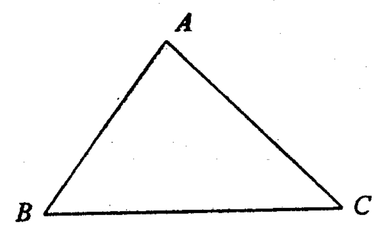
நீளம் $BC=\sqrt{\left(1-\frac{7}{10}\right)^2+\left(\frac{21}{10}\right)^2}=\frac{3}{10}\times\sqrt{50}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$BC,\ AD$ யிற் கிடையேயான செங்குத்துத்தூரம்

$$=\frac{|5+7|}{\sqrt{50}}=\frac{12}{5\sqrt{2}}$$

பரப்பளவு $=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{12}{5\sqrt{2}}=\frac{18}{5}$ ச. அலகுகள்.

1991 விசேட



$AB: x+y-8=0$

$AC: x-y+2=0$

$BC: 4x-3y+10=0$ ஆகும்.

$$\lambda(x+y-8)\,(4x-3y+10)+\ \ (x-y+2)\,(4x-3y+10)$$
$$-(x+y-8)\,(x-y+2)=0$$ எனும் தந்த சமன்பாட்டை ஆராய்க.

$A\equiv(x_1,y_1), \quad B\equiv(x_2,y_2), \quad C\equiv(x_3,y_3)$ என்க.

$A,\ AB,\ AC$ என்பவற்றிலிருப்பதால் $x_1+y_1-8=0, \quad x_1-y_1+2=0$

எனவே λ, μ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$$\lambda\,(x_1+y_1-8)\,(4x_1-3y_1+10)+\mu\,(x_1-y_1+2)\,(4x_1-3y_1+10)$$
$$-(x_1+y_1-8)\,(x_1-y_1+2)=\lambda\times 0+\mu\times 0-0=0$$ ஆகும்.

எனவே தரப்பட்ட வளையி A யினூடு செல்லும். இவ்வாறே B,C என்பவற்றினூடும் செல்லும் எனக் காட்டலாம்.

$\lambda\,(x+y-8)\,(4x-3y+10)+\mu\,(x-y+2)\,(4x-3y+10)$

$-(x+y-8)\;(x-y+2)=0$ ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்க வேண்டும் எனின்

(i) x^2 இன் குணகம் $= y^2$ இன் குணகம் $(\neq 0)$

(ii) xy உறுப்பு இல்லாதிருத்தல் வேண்டும்.

(i) இலிருந்து $4\lambda+4\mu-1=-3\lambda+3\mu+1$

$7\lambda+\mu=2$ .... (1)

(ii) இலிருந்து $\lambda-7\mu=0$ .... (2)

(1), (2) இலிருந்து $\lambda=\dfrac{7}{25},\;\mu=\dfrac{1}{25}$

எனவே A, B, C என்பவற்றினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$7(x+y-8)\,(4x-3y+10)+(x-y+2)\,(4x-3y+10)$$
$$-25\,(x+y-8)\;(x-y+2)=0$$
$$7x^2+7y^2+14x-28y-140=0$$
$$x^2+y^2+2x-4y-20=0\;;\;(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$$

மையம் $(-1, 2)$ ஆரை 5 அலகுகளாகும்.

AB யின் படித்திறன் $\times$ AC யின் படித்திறன் $=-1$

ஆகவே கோணம் $BAC=90^o$

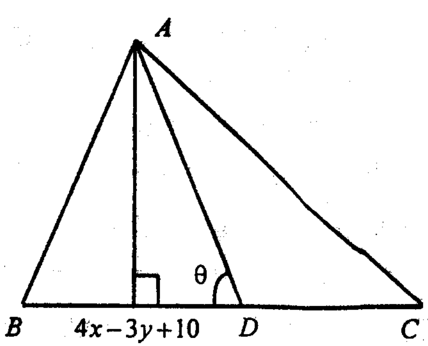
எனவே BC விட்டம். D சுற்றுவட்டமையம்

$BD=DC=DA=5$ அலகு

நீளம் $BC=10$ அலகு

$A\equiv(3, 5)$ AD யின் படித்திறன் $=\dfrac{3}{4}$

$D\equiv(-1,2)$ BC யின் படித்திறன் $=\dfrac{4}{3}$



$$tan\theta=\left|\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}\right|=\left|\frac{\frac{7}{12}}{2}\right|=\frac{7}{24}$$

ஆகவே $sin\theta=\dfrac{7}{25}$

முக்கோணி ABC யின் பரப்பு $=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD\,sin\theta$

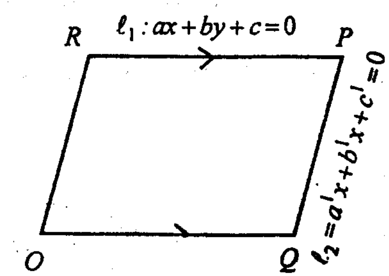
$=\dfrac{1}{2}\times 10\times 5\times\dfrac{7}{25}$

$=7$ சதுர அலகுகள்

1992

OQ இன் சமன்பாடு : $ax+by=0$

OR இன் சமன்பாடு : $a^1x+b^1y=0$ ஆகும்.



P யினூடு செல்லும் எந்த ஒரு கோட்டையும்

$(ax+by+c)+\lambda\left(a^1x+b^1y+c^1\right)=0$

என எழுதலாம்.

இது உற்பத்தி $O\equiv(0, 0)$ இனூடு செல்லவேண்டுமெனில்.

$$c+\lambda c^1=0\Rightarrow\lambda=\frac{-c}{c^1}$$

OP யின் சமன்பாடு $c^1(ax+by)-c\left(a^1x+b^1y\right)=0$ .... (1)

QR இன் சமன்பாடு

Q வினூடு செல்லும் எந்தவொரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடும்

$(ax+by)+k\left(a^1x+b^1y+c^1\right)=0$ என எழுதப்படலாம்.

இந்நேர்கோடு $R \equiv (x_o, y_o)$ இனூடு செல்வதால்

$$(ax_o+by_o)+k\left(a^1x_o+b^1y_o+c^1\right)=0 \text{ ஆகும். } \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

மேலும் (x_o, y_o) $ax+by+c=0$, $a^1x+b^1y=0$ என்பவற்றிலிருப்பதால்,

$$ax_o+by_o+c=0; \quad a^1x_o+b^1y_o=0$$

எனவே (2) இல் $-c+kc^1=0$

$$k=\frac{c}{c^1}$$

$\therefore QR$ இன் சமன்பாடு

$$c^1(ax+by)+c\left(a^1x+b^1y+c^1\right)=0 \text{ ஆகும். } \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1), (3) என்பன மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

(i) $OQPR$ ஒரு சாய்சதுரம் எனில்,

OP இன் படித்திறன் $\times$ QR இன்படித்திறன் $=-1$

$$\frac{a^1c-ac^1}{bc^1-b^1c} \times \left\{\frac{-\left(ac^1+a^1c\right)}{bc^1+b^1c}\right\}=-1$$

$$\left(a^1c\right)^2-\left(ac^1\right)^2-\left(bc^1\right)^2+\left(b^1c\right)^2=0$$

$$c^{1^2}\left(a^2+b^2\right)=c^2\left(a^{1^2}+b^{1^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(ii) $OQRP$ ஒரு சதுரம் எனின்,

மேலேயுள்ள நிபந்தனை (4) உடன்

OQ இன் படித்திறன் $\times$ OR இன் படித்திறன் $=-1$

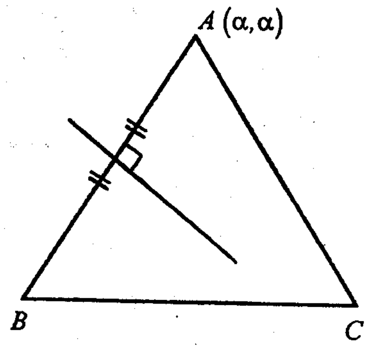
$$\left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{-a^1}{b^1}\right)=-1$$

$$aa^1+bb^1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

1993

$\ell x+my+n=0$ இன் மீது (α, β) இன் ஆடி விம்பம் $(\alpha+\ell t,\ \beta+mt)$ ஆகும்;

இங்கு $t=\dfrac{-2(\ell\alpha+m\beta+n)}{\ell^2+m^2}$ ஆகும்.



புள்ளி A, கோடு $y=x$ மீது கிடப்பதால் A யின் ஆள்கூறுகளை $A \equiv (\alpha, \alpha)$ என எழுதலாம். $x+3y-18=0$ இன் மீது A இன் விம்பம் B ஆகும்.

$\ell=1, \quad m=3, \quad n=-18, \quad A \equiv (\alpha, \alpha)$.

$$t=\frac{-2(\alpha+3\alpha-18)}{1^2+3^2}=\frac{36-8\alpha}{10}$$

ஆகவே $$B \equiv \left(\alpha+\frac{36-8\alpha}{10},\ \alpha+\frac{3(36-8\alpha)}{10}\right) \equiv \left(\frac{36+2\alpha}{10},\ \frac{108-11\alpha}{10}\right)$$

B, $y=2x$ இலிருப்பதால், $2\left(\dfrac{36+2\alpha}{10}\right)=\dfrac{108-14\alpha}{10} \Rightarrow \alpha=2,$

ஆகவே $A \equiv (2, 2), \quad B \equiv (4, 8)$

BC, $y+x$ இற்கு சமாந்தரம். எனவே BC யின் சமன்பாடு $y+x+k=0$ ஆகும்.

இது $B(4, 8)$ இனூடு செல்வதால் $4+8+k=0$, $k=-12$

$\therefore BC$ யின் சமன்பாடு $y+x-12=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

C, $y=3x$ இலிருப்பதால் $y=3x$, $y+x-12=0$ ஐத் தீர்க்க.

$$C \equiv (3, 9)$$

AC யின் சமன்பாடு $y-2=\dfrac{9-2}{3-2}(x-2)$; $\quad y-7x+12=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

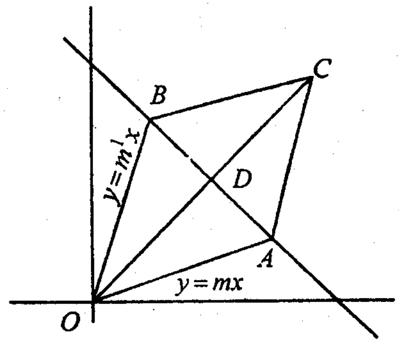
AB யின் சமன்பாடு $y-2=\dfrac{8-2}{4-2}(x-2) \quad y-3x+4=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

1994

$\left.\begin{array}{l} y=ax+b \\ y=mx \end{array}\right\}$ இருசமன்பாடுகளையும் தீர்க்க.

$$mx = ax+b$$

$$A \equiv \left(\frac{b}{m-a}, \frac{mb}{m-a}\right)$$



$\left.\begin{array}{l} y=ax+b \\ y=m^1x \end{array}\right\}$ இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க.

$$m^1x = ax+b$$

$$B \equiv \left(\frac{b}{m^1-a}, \frac{m^1b}{m^1-a}\right)$$

AB யின் நடுப்புள்ளி $D \equiv \left(\dfrac{\dfrac{b}{m-a}+\dfrac{b}{m^1-a}}{2}, \dfrac{\dfrac{mb}{m-a}+\dfrac{m^1b}{m^1-a}}{2}\right)$

(i) $$C \equiv \left(\frac{b}{m-a}+\frac{b}{m^1-a}, \frac{mb}{m-a}+\frac{m^1b}{m^1-a}\right) \quad \text{..................(1)}$$

(ii) $OACB$ ஒரு சாய்சதுரம் எனின்

OC யின் படித்திறன் $\dfrac{\dfrac{mb}{m-a}+\dfrac{m^1b}{m^1-a}}{\dfrac{b}{m-a}+\dfrac{b}{m^1-a}}$, AB யின் படித்திறன் $=a$

$$\frac{\dfrac{mb}{m-a}+\dfrac{m^1b}{m^1-a}}{\dfrac{b}{m-a}+\dfrac{b}{m^1-a}} \times a = -1$$ [OC, AB யிற்கு செங்குத்து]

$$\left(\frac{mb}{m-a}+\frac{m^1b}{m^1-a}\right) a + \frac{b}{m-a} + \frac{b}{m^1-a} = 0$$

$$\left[mb\left(m^1-a\right)+m^1b\left(m-a\right)\right] a + \left(m^1-a\right)b + \left(m-a\right)b = 0$$

$$\left[m\left(m^1-a\right)+m^1\left(m-a\right)\right] a + \left(m^1-a\right) + \left(m-a\right) = 0$$

$$mm^1a - a^2m + mm^1a - m^1a^2 + m + m^1 - 2a = 0$$

$$-a^2\left(m+m^1\right) + \left(m+m^1\right) - 2a + 2mm^1a = 0$$

$$\left(a^2-1\right)\left(m+m^1\right) + 2a\left(1-mm^1\right) = 0 \quad \text{..........(2)}$$

(ii) $OACB$ சதுரம் எனின், (a) $OC \perp AB$
(b) $OA \perp OB$

OA யின் படித்திறன் $\times$ OB யின் படித்திறன் $=-1$

$$mm^1 = -1.$$

சதுரத்தின் பரப்பளவு $OA \cdot OB$

$mm^1 = -1$ என சமன்பாடு (2), $\left(a^2-1\right)\left(m+m^1\right)+2a\left(1-mm^1\right)=0$ இல்பிரதியிட

$$\left(a^2-1\right)\left(m+m^1\right) + 4a = 0$$

$$\left(m+m^1\right) = \frac{4a}{1-a^2}$$

பரப்பளவு $OA \cdot OB$ என்பதில்

$$OA^2 \cdot OB^2 = \frac{\left(1+m^2\right)\left(1+m^{1^2}\right)b^4}{\left(m-a\right)^2\left(m^1-a\right)^2}$$

$$= \frac{\left[1+m^2m^{1^2}+m^2+m^{1^2}\right]}{\left[\left(m-a\right)\left(m^1-a\right)\right]^2} b^4$$

$$= \frac{\left(m+m^1\right)^2+4}{\left[a^2-a\left(m+m^1\right)-1\right]^2} \times b^4$$

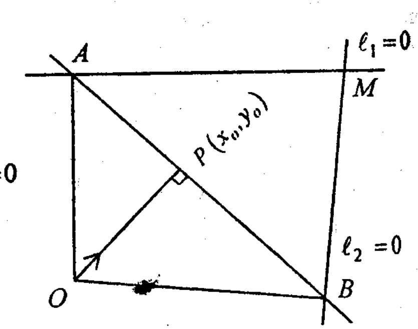
$m+m^1 = \frac{4a}{(1-a^2)}$ என இட, $= \dfrac{\dfrac{16a^2}{(1-a^2)^2}+4}{\left[a^2 - \dfrac{4a^2}{(1-a^2)} - 1\right]^2} \times b^4$

$$= \frac{4a^2+(1-a^2)^2}{\left[a^2(1-a^2)-4a^2-(1-a^2)\right]} \times 4b^4$$

$$= \frac{(1+a^2)^2}{\left[-(1+a^2)^2\right]^2} \times 4b^4$$

$OA\cdot OB = \frac{2b^2}{(1+a^2)}$ ஆகும்.

1995



AM இன். சமன்பாடு $\ell_1 \equiv ax+by+c=0$

BM இன் சமன்பாடு $\ell_2 \equiv a^1x+b^1y+c^1=0$

AB இன் சமன்பாடு $\ell_3 \equiv \ell x+my+n=0$

AO இன் சமன்பாடு $\ell_1+\lambda\ell_3=0$.

$(ax+by+c)+\lambda(\ell x+my+n)=0$, இது $O\equiv(0,0)$ ஊடாகச்

செல்வதால், $c+\lambda n=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{c}{n}$

AO இன் சமன்பாடு $n(ax+by+c)-c(\ell x+my+n)=0$

$(an-\ell c)x+(bn-cm)y=0$ ....(1)

BO இன் சமன்பாடு $\ell_2+\mu\ell_3=0$

$(a^1x+b^1y+c^1)+\mu(\ell x+my+n)=0$. இது $O\equiv(0,0)$ இனூடு

செல்வதால், $c^1+\mu n=o \Rightarrow \mu=-\frac{c^1}{n}$

BO இன் சமன்பாடு $(a^1n-\ell c^1)x+(b^1n-c^1m)y=0$ ....(2)

OA ஆனது OB இற்கு செங்குத்தாகையால்

OA இன் படித்திறன் $\times$ OB இன் படித்திறன் $=-1$

$$\frac{an-\ell c}{cm-bn}\times\frac{a^1n-\ell c^1}{c^1m-b^1n}=-1$$

$(aa^1+bb^1)n^2-(ac^1+ca^1)\ell n-(b^1c+c^1b)m+(\ell^2+m^2)cc^1=0$ .... (3)

$P(x_o,y_o)$ என்க. OP யின் படித்திறன் $=\frac{y_o}{x_o}=\frac{m}{\ell}$

$\frac{x_o}{\ell}=\frac{y_o}{m}=t$ என்க. $x_o=\ell t,\ y_o=mt$

(x_o,y_o), $\ell x+my+n=0$ இலிருப்பதால் $\ell x_o+my_o+n=0$ $\ell^2t+m^2t+n=0$

ஆகவே $t=\frac{-n}{\ell^2+m^2}$ $P\equiv(x_o,y_o)\equiv\left(\frac{-\ell n}{\ell^2+m^2},\frac{-mn}{\ell^2+m^2}\right)$

$(aa^1+bb^1)n^2-(ac^1+ca^1)\ell n-(b^1c+c^1b)mn+(\ell^2+m^2)cc^1=0$ என்பதில்

ℓ^2+m^2 ஆல் பிரிக்க,

$$(aa^1+bb^1)\left(\frac{n^2}{\ell^2+m^2}\right)-(ac^1+ca^1)\left(\frac{\ell n}{\ell^2+m^2}\right)-(b^1c+c^1b)\frac{mn}{\ell^2+m^2}+cc^1=$$

$x_o=\frac{-\ell n}{\ell^2+m^2}$, $y_o=\frac{-mn}{\ell^2+m^2}$ $x_o{}^2+y_o{}^2=\frac{n^2}{\ell^2+m^2}$ என்பதால்,

$$\left(aa^1+bb^1\right)\left(x_o^2+y_o^2\right)+\left(ac^1+ca^1\right)x_o+\left(b^1c+c^1b\right)y_o+cc^1=0 \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ P இன் ஒழுக்கு $\left(aa^1+bb^1\right)\left(x^2+y^2\right)+\left(ac^1+ca^1\right)x+\left(b^1c+c^1b\right)y+cc^1=0$

இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

ℓ_1, ℓ_2 செங்குத்தெனின், $\left(\frac{-a}{b}\right)\left(\frac{-a^1}{b^1}\right)=-1 \Rightarrow aa^1+bb^1=0$

எனவே P இன் ஒழுக்கு $\left(ac^1+ca^1\right)x+\left(b^1c+bc^1\right)y+cc^1=0$

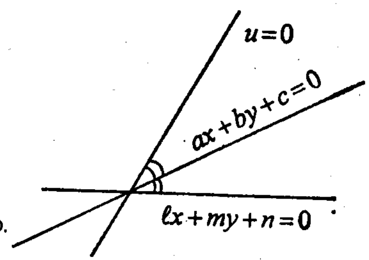
எனும் நேர்கோடாகும்.

1996

$ax+by+c=0$ இன் மேல் $P(\alpha,\beta)$ இன் ஆடிவிம்பம் $(\alpha+at,\ \beta+bt)$ ஆகும்.

இங்கு $t=\frac{-2(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}$ ஆகும்.

விம்பத்தின் ஆள் கூறு $\left(\alpha-\frac{2a(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2},\ \beta-\frac{2b(a\alpha+b\beta+c)}{a^2+b^2}\right)$



$ax+by+c=0$ இன் மீது $\ell x+my+n=0$ இன்விம்பம் $u=0$ என்க.

$u=0$ மீது (x_o, y_o) யாதுமொரு புள்ளி எனின் $ax+by+c=0$ இன்மீது (x_o, y_o) இன் விம்பம் $\ell x+my+n=0$ இன்மீது கிடக்கும்.

அதாவது $\ell\left[x_o-\frac{2a(ax_o+by_o+c)}{a^2+b^2}\right]+m\left[y_o-\frac{2b(ax_o+by_o+c)}{a^2+b^2}\right]+n=0$

$$\ell x_o+my_o+n-\frac{2(a\ell+bm)}{a^2+b^2}(ax_o+by_o+c)=0.$$

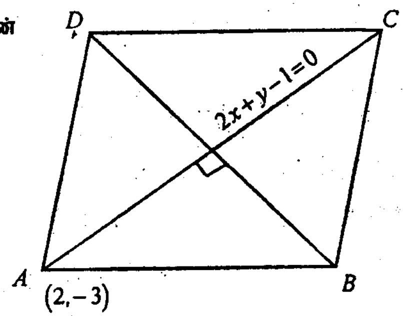
$\therefore$ (x_o, y_o) இன் ஒழுக்கு, $u=0$ ஆனது,

$$\ell x+my+n-\frac{2(a\ell+bm)}{a^2+b^2}(ax+by+c)=0$$

ஆகவே $ax+by+c=0$ இன்மீது $\ell x+my+n=0$ இன் ஆடிவிம்பம்

$$\ell x+my+n-\frac{2(a\ell+bm)}{a^2+b^2}(ax+by+c)=0 \text{ ஆகும்.}$$

$(2,-3)$, $2x+y-1=0$ ஐத் திருப்தி செய்வதால், $(2,-3)$, $2x+y-1=0$ இன் வழியே கிடக்கும் ஒரு உச்சி ஆகும்.



BC யின் சமன்பாடு

$y-x-4=0$ என்க.

முதற் பகுதியிலிருந்து,

CD யின் சமன்பாடு

$$(y-x-4)-\frac{2[2\times(-1)+1\times1]}{2^2+1^2}(2x+y-1)=0$$

$$(y-x-4)+\frac{2}{5}(2x+y-1)=0$$

$$7y-x-22=0 \quad \text{..............................(1)}$$

AB யின் சமன்பாடு $7y-x+c=0$; இது $(2,-3)$ இனூடு செல்வதால் $c=23$; $7y-x+23=0$ ....(2)

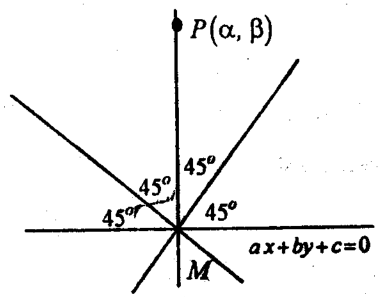
AD யின் சமன்பாடு $y-x+k=0$; இது $(2,-3)$ இனூடு செல்வதால் $k=5$, $y-x+5=0$ ....(3)

BD யின் சமன்பாடு $(7y-x+23)+\lambda(y-x-4)=0$

AC யின் படித்திறன் $=-2$; BD யின் படித்திறன் $=\frac{1}{2}=\frac{1+\lambda}{7+\lambda}$

$\therefore\ \lambda=5$, BD யின் சமன்பாடு $12y-6x+3=0$; $\quad 4y-2x+1=0$ ....(4)

1997 Old



$ax+by+c=0$ இற்கு செங்குத்தான

நேர்கோட்டின் படித்திறன் $=\frac{b}{a}$

PM **இன் சமன்பாடு** : $y-\beta=\frac{b}{a}(x-\alpha)$

$$bx+ay+(a\beta-b\alpha)=0.$$

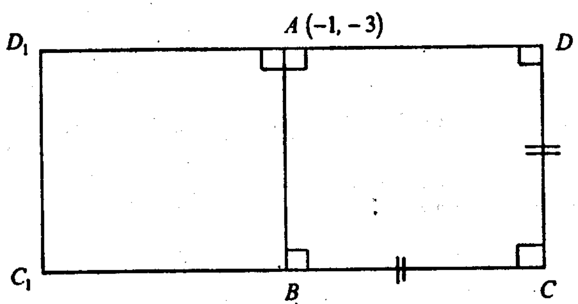
$ax+by+c=0$, $bx-ay+(a\beta-b\alpha)=0$ ஆகிய இரு நேர்கோடுகளுக்கு மிடைப்பட்ட கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{bx-ay+(a\beta-b\alpha)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$ax+by+c=\pm\ (bx-ay+a\beta-b\alpha)$$

$(a-b)\,x+(b+a)\,y+(c-a\beta+b\alpha)=0$ ....(1)

$(a+b)x+(b-a)\,y+(c+a\beta-b\alpha)=0$ ....(2)



BC யின் சமன்பாடு : $3y+x-10=0 \qquad A(-1,-3)$

AB யின் சமன்பாடு : $y+3=3(x+1) \Rightarrow y-3x=0$

BC, AB இற்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{3y+x-10}{\sqrt{10}}=\pm\frac{y-3x}{\sqrt{10}}$$

$$3y+x-10=\pm(y-3x)$$

$2y+4x-10=0$; $\quad y+2x-5=0$ ....(1)

$4y-2x-10=0 \quad 2y-x-5=0$ ....(2)

BD இன் இரு இயல்தகு நிலைகள் $\left.\begin{array}{l} BD_1:\ y+2x-5=0 \\ BD_2:\ 2y-x-5=0 \end{array}\right\}$ ஆகும்.

AD_1 இன் சமன்பாடு $3y+x+k_1=0$; இது $(-1,-3)$ இனூடு செல்வதால்

$k_1=10 \qquad 3y+x+10=0.$

$\left.\begin{array}{l} BD_1:\ y+2x-5=0 \\ AD_1:\ 3y+x+10=0 \end{array}\right\}$ $D_1\equiv(5,-5)$ ஆகும். ....(3)

BD_1, AC_1 இற்குச் செங்குத்து. ஆகவே AC_1 இன் படித்திறன் $=\frac{1}{2}$

AC_1 இன் சமன்பாடு $y+3=\frac{1}{2}(x+1)$

$$2y-x+3=0$$

$\left.\begin{array}{l} AC_1:\ 2y-x+5=0 \\ BC_1:\ 3y+x-10=0 \end{array}\right\}$ $C_1\equiv(7,1)$ ஆகும். ....(4)

$\left.\begin{array}{l} BD_2:\ 2y-x-5=0 \\ AD_2:\ 3y+x+10=0 \end{array}\right\}$ $D_2\equiv(-7,-1)$ ....(5)

BD_2, AC_2 இற்குச் செங்குத்து ; ஆகவே AC_2 இன் படித்திறன் $= -2$

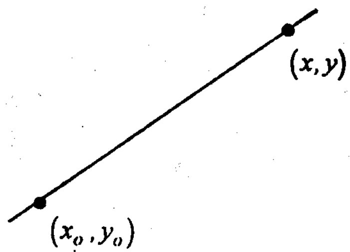
AC_2 இன் சமன்பாடு $\quad y+3=-2(x+1)$

$$y+2x+5=0$$

$$\left.\begin{array}{l} AC_2 : y+2x+5=0 \\ BC_2 : 3y+x-10=0 \end{array}\right\} \quad C_2 \equiv (-5, 5) \quad \text{.......................(6)}$$

1997 New

கோட்டில் (x, y) ஒரு மாறும் புள்ளி என்க.



$$\frac{y-y_o}{x-x_o}=m$$

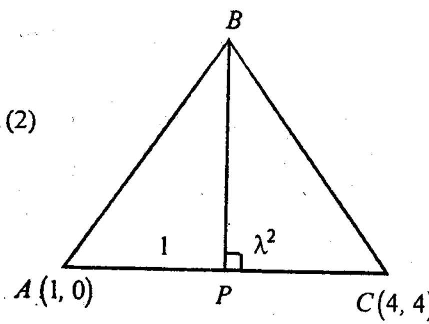
$$\frac{y-y_o}{m}=\frac{x-x_o}{1}=t$$

$x=x_o+t$, $\; y=y_o+mt$ ஆகும்.

$$(x,y)\equiv(x_o+t,\; y_o+mt) \quad \text{.....................(1)}$$

$$P\equiv\left(\frac{1\times4+\lambda^2\times1}{1+\lambda^2},\; \frac{1\times4+\lambda^2\times0}{1+\lambda^2}\right)$$

$$P\equiv\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2},\; \frac{4}{1+\lambda^2}\right) \quad \text{.........................(2)}$$



AB யின் படித்திறன் $=\dfrac{4-0}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

PB யின் படித்திறன் $=-\dfrac{3}{4}$

(1), (2) இலிருந்து, $B\equiv\left(\dfrac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t,\; \dfrac{4}{1+\lambda^2}-\dfrac{3t}{4}\right)$

AB இன் சாய்வு $=\dfrac{\dfrac{4}{1+\lambda^2}-\dfrac{3t}{4}}{\dfrac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t-1}$ ....(3)

BC இன் சாய்வு $=\dfrac{\dfrac{4}{1+\lambda^2}-\dfrac{3t}{4}-4}{\dfrac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t-4}$ ....(4)

கோணம் $ABC=90^o$ எனின், AB இன் சாய்வு $\times$ BC இன் சாய்வு $=-1$

$$\left(\frac{4}{1+\lambda^2}-\frac{3t}{4}\right)\left(\frac{4}{1+\lambda^2}-\frac{3t}{4}-4\right)+\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t-1\right)\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t-4\right)=0$$

$$\left(\frac{4}{1+\lambda^2}-\frac{3t}{4}\right)^2-4\left(\frac{4}{1+\lambda^2}-\frac{3t}{4}\right)+\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t\right)^2-5\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}+t\right)+4=0$$

$$\left(t^2+\frac{9t^2}{16}\right)+\left[\frac{-6}{1+\lambda^2}+3+2\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)-5\right]t+\frac{16}{(1+\lambda^2)^2}-\frac{16}{(1+\lambda^2)}+\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2$$
$$-5\left(\frac{4+\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)+4=0$$

$$\frac{25t^2}{16}+\left[\frac{-6-2-2\lambda^2+8+2\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]t$$
$$+\frac{16-16(1+\lambda^2)+(4+\lambda^2)^2-5(4+\lambda^2)(1+\lambda^2)+4(1+\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}=0$$

$$\frac{25t^2}{16}+\frac{-25\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}=0.$$

$t^2=\dfrac{16\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}$; ஆகவே $t=\dfrac{\pm4\lambda}{(1+\lambda^2)}$ ஆகும்.

ΔPBC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\ PB \cdot PC$

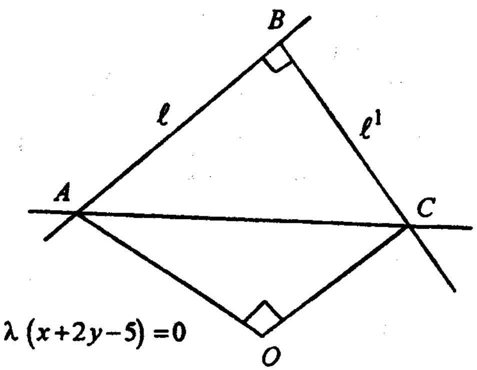
$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{t^2 + \left(\frac{3t}{4}\right)^2} \times \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \times \sqrt{3^2+4^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}\,|t| \times \frac{5\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{4\lambda}{1+\lambda^2} \times \frac{5\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

$$= \frac{25\lambda^3}{2\left(1+\lambda^2\right)^2}$$

1998 Old



$AB : \ell \equiv 4x+y-13=0$

$BC : \ell^1 \equiv x-4y+13=0$

$AC : \quad x+2y-5=0$

OA யின் சமன்பாடு $(4x+y-13) + \lambda\,(x+2y-5) = 0$

இது $O(0,0)$ இனூடு செல்வதால் $-13-5\lambda = 0$

$$\lambda = -\frac{13}{5}$$

ஆகவே OA யின் சமன்பாடு : $5\,(4x+y-13) - 13\,(x+2y-5) = 0$

$7x-21y=0; \quad x-3y=0$ ....(1)

OC யின் சமன்பாடு $(x-4y+13) + \mu\,(x+2y-5) = 0$

இது $O(0,0)$ இனூடு செல்வதால் $13-5\mu=0; \quad \mu = \frac{13}{5}$

ஆகவே OC யின் சமன்பாடு $5\,(x-4y+13) + 13\,(x+2y-5) = 0$

$18x+6y=0; \quad 3x+y=0$ ....(2)

AB யின் $\times$ BC யின் படித்திறன் $= -4 \times \frac{1}{4} = -1$

ஆகவே $\angle ABC = 90^o$

OA யின் படித்திறன் $\times$ OC யின் படித்திறன் $= \frac{1}{3} \times (-3) = -1$

ஆகவே $\angle AOC = 90^o$

எனவே, $\angle ABC + \angle AOC = 180^o \Rightarrow OCBA$ ஒருவட்ட நாற்பக்கல். AC - விட்டம் ஆகும். எனவே வட்டத்தின்மையம் AC யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும்.

$DA = DB = DC = DO$ ஆகும்.

OA இன் சமன்பாடு $x-3y=0$
AC இன் சமன்பாடு $x+2y-5=0$ $\Big\}$ $A \equiv (3,1)$

OC இன் சமன்பாடு $y+3x=0$
AC இன் சமன்பாடு $x+2y-5=0$ $\Big\}$ $C \equiv (-1,3)$

D, AC யின் நடுப்புள்ளி. ஆகவே $D \equiv (1,1)$ ஆகும். ....(3)

ΔOAC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times OA \times OC$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 5$ சதுர அலகு

ΔABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times AB \times BC$

AB ஆனது, A யிலிருந்து BC யின் செங்குத்துத்துயரம் =

$(3,1)$ இலிருந்து $x-4y+13=0$ இன் தூரம் $= \frac{|3-4+13|}{\sqrt{17}} = \frac{12}{\sqrt{17}}$

BC ஆனது C யிலிருந்து AB யின் செங்குத்துத்துயரம்

$(-1,3)$ இலிருந்து $4x+y-13=0$ இன் தூரம் $= \frac{|-4+3-13|}{\sqrt{17}} = \frac{14}{17}$

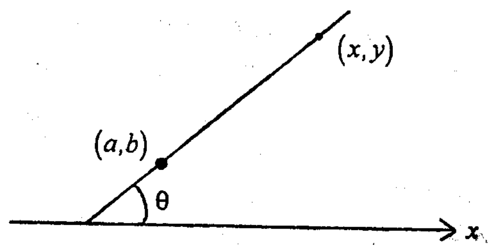
ஆகவே ΔABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \times AB \times BC$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{12}{\sqrt{17}} \times \frac{14}{\sqrt{17}} = \frac{84}{17}$$ சதுர அலகு

நாற்பக்கல் $OACB$ யின் பரப்பு $= 5 + \frac{84}{17} = \frac{85+84}{17} = \frac{169}{17}$ சதுர அலகு.

1998 New

நேர்கோட்டில் $P(x,y)$ ஐ எடுக்க.

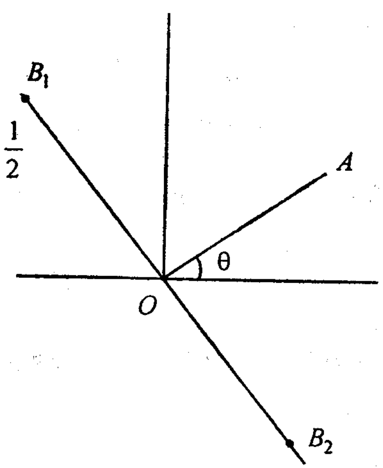


படித்திறன் $= \tan\theta = \frac{y-b}{x-a}$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y-b}{x-a}$$

$$\frac{x-a}{\cos\theta} = \frac{y-b}{\sin\theta} = t$$

$$x = a + t\cos\theta, \quad y = b + t\sin\theta$$



OA யின் சமன்பாடு, $x - 2y = 0$; $\tan\theta = \frac{1}{2}$

OB யின் சமன்பாடு, $2x + y = 0$

OA, OB என்பன செங்குத்தானவை

$A \equiv (x, y)$ எனின்,

$x = 0 + t\cos\theta$, $y = 0 + t\sin\theta$.

$x = \frac{2t}{\sqrt{5}}$, $y = \frac{t}{\sqrt{5}}$; $A \equiv \left(\frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{t}{\sqrt{5}}\right)$

[A முதலாம் கால் வட்டத்தில் இருப்பதால் $t > 0$]

$$B \equiv \left(t^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), \; t^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$

$$\equiv \left(-t^1 \sin\theta, \; t^1 \cos\theta\right) \equiv \left(\frac{-t^1}{\sqrt{5}}, \frac{2t^1}{\sqrt{5}}\right)$$

$OB = 2OA$ என்பதால், $t^1 = 2t$ அல்லது $t^1 = -2t$ ஆகும்.

$t^1 = 2t$ எனின், B என்பது B_1 என்க, $B_1 \equiv \left(\frac{-2t}{\sqrt{5}}, \frac{4t}{\sqrt{5}}\right)$ ஆகும்.

$t^1 = -2t$ எனின், B என்பது B_2 என்க. $B_2 \equiv \left(\frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{-4t}{\sqrt{5}}\right)$

இப்பொழுது AB_1 இன் சமன்பாடு $A \equiv \left(\frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{t}{\sqrt{5}}\right)$, $B_1 \equiv \left(\frac{-2t}{\sqrt{5}}, \frac{4t}{\sqrt{5}}\right)$

$$y - \frac{t}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

$$4\left(y - \frac{t}{\sqrt{5}}\right) = -3\left(x - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

இந் நேர்கோடு $(5, 1)$ இனூடு செல்வதால்,

$$4\left(1 - \frac{t}{\sqrt{5}}\right) = -3\left(5 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{19\sqrt{5}}{10}$$

ஆகவே $A_1 \equiv \left(\frac{38}{10}, \frac{19}{10}\right)$, $B_1 = \left(\frac{-38}{10}, \frac{76}{10}\right)$ ஆகும்.

$A \equiv \left[\frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{t}{\sqrt{5}}\right]$, $B_2 \equiv \left(\frac{2t}{\sqrt{5}}, \frac{-4t}{\sqrt{5}}\right)$ ஐக் கருதுக

AB_2 இன் சமன்பாடு $x = \frac{2t}{\sqrt{5}}$

இக்கோடு $(5, 1)$ இனூடு செல்வதால் $\frac{2t}{\sqrt{5}} = 5$; $t = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

$A_2 \equiv \left(5, \frac{5}{2}\right)$ $B_2 \equiv (5, -10)$ ஆகும்.

$$\Delta OA_1B_1 \text{ இன் பரப்பு } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{38}{10} & \frac{19}{10} & 1 \\ \frac{-38}{10} & \frac{76}{10} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{38 \times 76}{100} + \frac{38 \times 19}{100}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{19 \times 19\,(8+2)}{100}$$

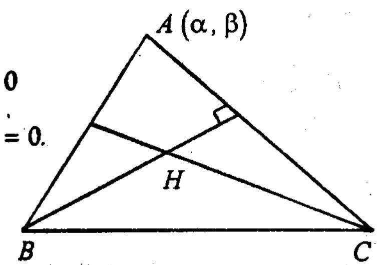
$$= \frac{19 \times 19}{20} \text{ சதுர அலகு.}$$

$$\Delta OA_2\ B_2 \text{ இன் பரப்பு } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & \frac{5}{2} & 1 \\ 5 & -10 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-50 - \frac{25}{2}\right|$$

$$= \frac{125}{4}$$

$$\frac{\Delta OA_1B_1}{\Delta OA_2B_2} = \frac{19 \times 19}{20} \times \frac{4}{125} = \frac{19 \times 19}{25 \times 25} = \left(\frac{19}{25}\right)^2$$

1999



BH இன் சமன்பாடு : $(\alpha-1)\,x+\beta y+\alpha-1=0$

CH இன் சமன்பாடு : $(\alpha+1)\,x+\beta y-(\alpha+1)=0.$

AC யின் படித்திறன் $= \dfrac{\beta}{\alpha-1}$

AC யின் சமன்பாடு

$$y-\beta = \frac{\beta}{\alpha-1}\,(x-\alpha)$$

$$(\alpha-1)\,y - \beta x = (\alpha-1)\,\beta - \alpha\beta$$

$$(\alpha-1)\,y - \beta x = -\beta \quad \text{........(1)}$$

AB யின் படித்திறன் $= \dfrac{\beta}{\alpha+1}$

AB யின் சமன்பாடு

$$y-\beta = \frac{\beta}{\alpha+1}\,(x-\alpha)$$

$$(\alpha+1)\,y - \beta x = \beta \quad \text{........(2)}$$

B யின் ஆள்கூறுகள்

$$\left.\begin{aligned} BH &: (\alpha-1)x+\beta y = -(\alpha-1) \\ AB &: -\beta x + (\alpha+1)y = \beta \end{aligned}\right\}$$

$$\left[\beta^2+(\alpha+1)(\alpha-1)\right]\,y = -\beta\,(\alpha-1)+\beta(\alpha-1)$$

$$\left[\beta^2+\alpha^2-1\right]\;y=0 \;\Rightarrow\; y=0;\;\left[\beta^2+\alpha^2-1 \neq 0\right]$$

$y=0$ எனின், $(\alpha-1)\;x = -(\alpha-1) \qquad [\alpha-1 \neq 0]$

$$x=-1$$

ஆகவே $B \equiv (-1, 0)$ ....(3)

$$\left.\begin{aligned} CH &: (\alpha+1)\,x+\beta y = (\alpha+1) \\ AC &: -\beta x+(\alpha-1)\,y = -\beta \end{aligned}\right\}$$ இரண்டையும் தீர்க்க, $c \equiv (1, 0)$ ....(4)

$$\left.\begin{aligned} BH &: (\alpha-1)\,x+\beta y = -(\alpha-1) \\ CH &: (\alpha+1)\,x+\beta y = (\alpha+1) \end{aligned}\right\}$$ இரண்டையும் தீர்க்க, $H \equiv \left(\alpha, \dfrac{1-\alpha^2}{\beta}\right)$.........(5)

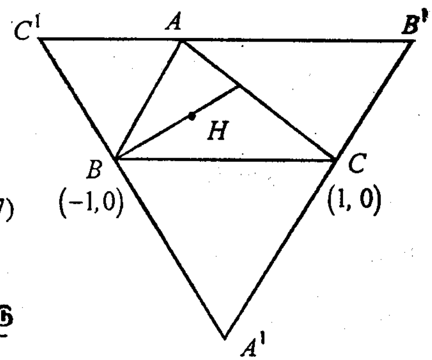
AH இன் சமன்பாடு $x=\alpha$; BC யின் சமன்பாடு $y=0$ ஆகும்.
எனவே AH, BC இரண்டும் செங்குத்தானவை.

$B^1C^1 /\!/ BC$

எனவே B^1C^1 யின் சமன்பாடு $y=\beta$ .... (6)

$A^1C^1 \parallel AC$.

<u>A^1C^1 யின் சமன்பாடு</u>



$$y - 0 = \frac{\beta}{\alpha - 1}\,(x+1)$$

$$(\alpha - 1)\,y - \beta x = \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$A^1B^1 \parallel AB$; <u>A^1B^1 இன் சமன்பாடு</u>

$$y - 0 = \frac{\beta}{\alpha + 1}\,(x-1)$$

$$(\alpha + 1)\,y - \beta x = -\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

சமன்பாடுகள் (6), (7) ஐத் தீர்க்க, $C^1 \equiv (\alpha - 2,\ \beta)$

சமன்பாடுகள் (6), (8) ஐத் தீர்க்க, $B^1 \equiv (\alpha + 2,\ \beta)$

சமன்பாடுகள் (7), (8) ஐத் தீர்க்க, $A^1 \equiv (-\alpha, -\beta)$

$$A^1H^2 = (2\alpha)^2 + \left(\frac{1-\alpha^2}{\beta} + \beta\right)^2$$

$$= 4\alpha^2 + \left(\frac{1-\alpha^2+\beta^2}{\beta}\right)^2$$

$$B^1H^2 = 4 + \left(\frac{1-\alpha^2}{\beta} - \beta\right)^2$$

$$= 4 + \left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\beta}\right)^2$$

$$C^1H^2 = 4 + \left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\beta}\right)^2$$

$$B^1H^2 = C^1H^2\ ;\ B^1H = C^1H.$$

$$A^1H^2 - B^1H^2 = \left[4\alpha^2 + \left(\frac{1-\alpha^2+\beta^2}{\beta}\right)^2\right] - \left[4 + \left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\beta}\right)^2\right]$$

$$= 4\left(\alpha^2 - 1\right) + \frac{1}{\beta^2}\left[\left(1-\alpha^2+\beta^2\right) - \left(1-\alpha^2-\beta^2\right)\right]$$

$$\left[\left(1-\alpha^2+\beta^2\right) + \left(1-\alpha^2-\beta^2\right)\right]$$

$$= 4\left(\alpha^2 - 1\right) + \frac{1}{\beta^2}\left[2\beta^2 \times 2\left(1-\alpha^2\right)^2\right] = 4\left(\alpha^2-1\right) - 4\left(\alpha^2-1\right) = 0$$

$4^1H^2 = B^1H^2 \Rightarrow A^1H = B^1; H$ ஆகவே $A^1H = B^1H = C^1H$

2000

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்க.

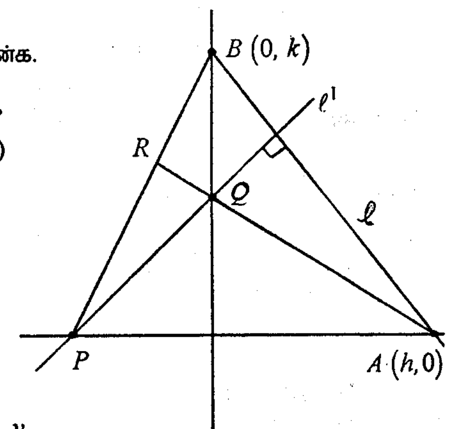
இந் நேர்கோட்டில் $(a, 0)$ இருப்பதால்,

$$0 = am + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$(0, b)$ இருப்பதால் $b = c$

(1), (2) இலிருந்து $c = b$

$$m = \frac{-b}{a}$$



எனவே நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{-b}{a}x + b \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ ஆகும்.

$\ell : AB$ யின் சமன்பாடு $\dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k} = 1. \Rightarrow A \equiv (h, 0),\quad B \equiv (0, k)$

ℓ^1 இன் சமன்பாடு $\dfrac{x}{h^1} + \dfrac{y^1}{k^1} = 1 \Rightarrow P \equiv \left(h^1, 0\right)\ Q \equiv \left(0, k^1\right)$

ℓ, ℓ^1 ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதால், $m_1 m_2 = -1$

$$\left(-\frac{k}{h}\right)\left(\frac{-k^1}{h^1}\right) = -1$$

$$\frac{k^1}{h^1} = \frac{-h}{k}$$

$$\frac{k^1}{h} = \frac{-h^1}{k} = t.$$ (என்க)

$k^1 = ht, \quad h^1 = -kt$

இப்பொழுது $A \equiv (h, 0)$, $Q \equiv (0, ht)$

AQ இன் சமன்பாடு $\frac{x}{h} + \frac{y}{ht} = 1 \Rightarrow y + tx = ht$ .... (1)

$B \equiv (0, k)$, $P \equiv (-kt, 0)$

BP யின் சமன்பாடு $\frac{x}{-kt} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow yt - x = kt$ .... (2)

AQ, BP என்பன சந்திக்கும் புள்ளி $R \equiv (x_o, y_o)$ என்க.

(1) $\Rightarrow \quad y + tx = ht \quad \Rightarrow \quad y_o = (h - x_o)t$

(2) $\Rightarrow \quad yt - x = kt \quad \Rightarrow \quad x_o = (y_o - k)t$

(3), (4) இலிருந்து

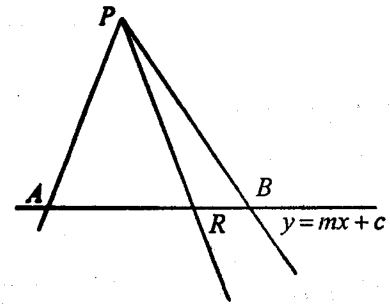
$$t = \frac{y_o}{h - x_o} = \frac{x_o}{y_o - k} \quad (x_o \neq h, \; y_o \neq k)$$

$$\frac{y_o}{h - x_o} = \frac{x_o}{y_o - k} \Rightarrow y_o(y_o - k) = x_o(h - x_o)$$

(x_o, y_o) இன் ஒழுக்கு $y(y-k) = x(h-k)$ $\quad [x \neq h, \; y \neq k]$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - hx - ky = 0}}$$

2001



$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

$AR : RB = k : 1$ என்பதால்,

$$R \equiv \left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$$

PR இன் சமன்பாடு

$(y - m_1x - c_1) + \lambda(y - m_2x - c_2) = 0$ என எழுதலாம் .... (1)

PR எனும் நேர்கோடானது $R \equiv \left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\right)$ இனூடு

செல்வதால் (1) இல் பிரதியிட,

$$\left[\frac{y_1 + ky_2}{1+k} - m_1\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}\right) - c_1\right] + \lambda\left[\frac{y_1 + ky_2}{1+k} - m_2\left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}\right) - c_2\right] = 0.$$

$$[(ky_2 + y_1) - m_1(kx_2 + x_1) - c_1(1+k)]$$
$$+ \lambda[(ky_2 + y_1) - m_2(kx_2 + x_1) - c_2(k+1)] = 0.$$

$$[(y_1 - m_1x_1 - c_1) + k(y_2 - m_1x_2 - c_1)]$$
$$+ \lambda[(y_1 - m_2x_1 - c_2) + k(y_2 - m_2x_2 - c_2)] = 0. \quad \text{.......................... (2)}$$

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ என்பன $y = mx + c$ யில் இருப்பதால்,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = mx_1 + c \\ y_2 = mx_2 + c \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m \quad \text{.......................... (3)}$$

$A \equiv (x_1, y_1)$, $y = m_1x + c_1$ இலிருப்பதால் $y_1 - m_1x_1 - c_1 = 0$ .... (4)

$B \equiv (x_2, y_2)$ $y = m_2x + c_2$ இலிருப்பதால் $y_2 - m_2x_2 - c_2 = 0.$ .... (5)

(4), (5) என்பவற்றைப் பிரயோகிக்க, சமன்பாடு (2),

$k(y_2 - m_1x_2 - c_1) + \lambda(y_1 - m_2x_1 - c_2) = 0$ எனப் பெறப்படும்.

(4), (5) என்பவற்றிலிருந்து $c_1 = y_1 - mx_1$, $c_2 = y_2 - mx_2$ எனப்பிரதியிட

$$k\ [y_2 - m_1x_2 - (y_1 - mx_1)] + \lambda\ [y_1 - m_2x_1 - (y_2 - mx_2)] = 0.$$
$$k\ [y_2 - y_1 - m_1(x_2 - x_1)] + \lambda\ [(y_1 - y_2) - m_2\ (x_1 - x_2)] = 0.$$
$$k\ [-(y_1 - y_2) + m_1\ (x_1 - x_2)] + \lambda\ [(y_1 - y_2) - m_2\ (x_1 - x_2)] = 0.$$
$$k\left[\frac{-(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} + m_1\right] + \lambda\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - m_2\right] = 0.$$
$$k\ [m_1 - m] + \lambda\ [m - m_2] = 0$$

ஆகவே $\lambda = \dfrac{k(m - m_1)}{(m - m_2)}$

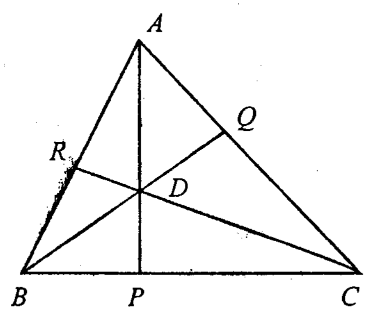
எனவே PR இன் சமன்பாடு

$$(y - m_1x - c_1) + k\,\frac{(m - m_1)}{m - m_2}\,(y - m_2x - c_2) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$u_1 + k\left(\frac{m - m_1}{m - m_2}\right)u_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

AB யின் சமன்பாடு : $3x + 2y - 6 = 0.$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \quad \text{........ (1)}$$



BC யின் சமன்பாடு : $2x + y - 2 = 0.$

$$y = -2x + 2 \quad \text{......... (2)}$$

CA யின் சமன்பாடு : $x + y - 3 = 0.$

$$y = -x + 3 \quad \text{.......... (3)}$$

(i) சமன்பாடு AB, AC ஐத் தீர்க்க. $A \equiv (0, 3)$

(ii) $AR : RB = 1 : 2 = \frac{1}{2} : 1.$ $\left(k = \frac{1}{2}\right)$

CR இன் சமன்பாடு $(y + x - 3) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\frac{-3}{2} + 1}{\frac{-3}{2} + 2}\right)(2x + y - 2) = 0.$

$$(y + x - 3) - \frac{1}{2}\ (2x + y - 2) = 0.$$
$$y - 4 = 0.$$

$AQ : QC = 2 : 3 = \frac{2}{3} : 1$ $\left(k = \frac{2}{3}\right)$

BQ இன் சமன்பாடு : $\left(y + \dfrac{3}{2}x - 3\right) + \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{-1 + \frac{3}{2}}{-1 + 2}\right](y + 2x - 2) = 0$

$$\left(y + \frac{3}{2}x - 3\right) + \frac{1}{3}\ (y + 2x - 2) = 0$$
$$\frac{2y + 3y - 6}{2} + \frac{y + 2x - 2}{3} = 0.$$
$$8y + 13x - 22 = 0.$$

$A \equiv (0, 3)$, $B \equiv (-2, 6)$, $C \equiv (-1, 4)$

AP யின் சமன்பாடு

இது D யினூடாச் செல்வதால்,

$$(8y + 13x - 22) + \lambda\ (y - 4) = 0$$

இந்நேர்கோடு. $A\ (0, 3)$ இனூடு செல்வதால்,

$$2 - \lambda = 0; \quad \lambda = 2. \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ AP யின் சமன்பாடு : $(8y + 13x - 22) + 2\ (y - 4) = 0$

$$10y + 13x - 30 = 0.$$

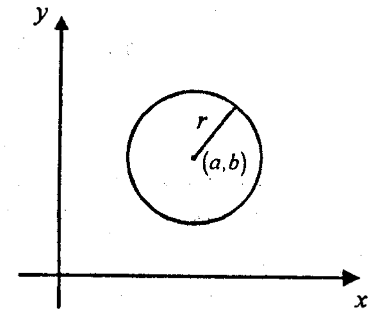
AP, BC யின் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. $P \equiv \left(\frac{-10}{7}, \frac{34}{7}\right)$

$AP^2 = \frac{269}{49}$, $PB^2 = \frac{80}{49}$

$\frac{AP^2}{PB^2} = \frac{269}{80}$ $\quad$ $AP : PB = \sqrt{269} : \sqrt{80}$

3. வட்டம்

1. வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு



(i) மையம் (a,b) ஆகவும் ஆரை $r\ (>0)$ ஆகவுமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. ஆகும்.

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$

பொதுவாக வட்டத்தின் சமன்பாடு

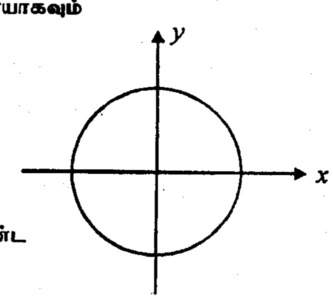
$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆகும். .... (1)

$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$

$[x-(-g)]^2 + [y-(-f)]^2 = \left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$

இங்கு வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$; ஆரை $= \sqrt{g^2+f^2-c}$ ஆகும்.

(ii) உற்பத்தியை மையமாகவும், $r\ (>0)$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.



$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = r^2$ .... (2)

(ii) x அச்சைத் தொடுவதும், r ஆரையும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு :

மையம் (a, b), ஆரை r என்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

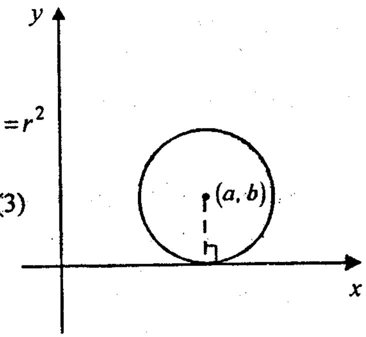
மையத்திலிருந்து (x அச்சக்கு) $y=0$ இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் நீளம் r ஆகும்.

$|b| = r \Rightarrow b = \pm r$

எனவே இரு சமன்பாடுகள் பெறப்படும்.

$(x-a)^2+(y-r)^2=r^2;\ (x-a)^2+(y+r)^2=r^2$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2ax-2ry+a^2=0 \\ x^2+y^2-2ay+2ry+a^2=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$



(iv) y அச்சைத் தொடுவதும், r ஆரையும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

மையம் (a, b) ஆரை r என்க.

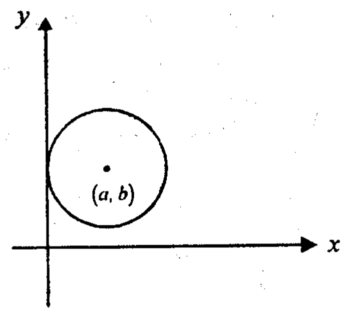
வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ஆகும்.

மையத்திலிருந்து y அச்சுக்கு $(x=0)$ வரையும் செங்குத்தின் நீளம் r அகும்.

$|a|=r$

$a=\pm r.$



எனவே இரு சமன்பாடுகள் பெறப்படும்.

$(x-r)^2+(y-b)^2=r^2;\ \ (x+r)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2rx-2by+b^2=0 \\ x^2+y^2+2rx-2by+b^2=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(v) x, y இரண்டு அச்சுக்களையும் தொடுவதும், r ஆரையும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

மையம் (a, b), ஆரை r என்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. ஆகும்.

மையத்திலிருந்து x, y ஆகிய இரண்டு அச்சுக்களுக்கும் வரைந்த செங்குத்துக் களின் நீளம் r ஆக இருத்தல் வேண்டும். (a,b) இலிருந்து $y=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் r ஆகும்.

எனவே $|b|=r \Rightarrow b=\pm r$

(a, b) இலிருந்து $x=0$ இற்கு வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் r ஆகும்.

$|a|=r \Rightarrow a=\pm r$

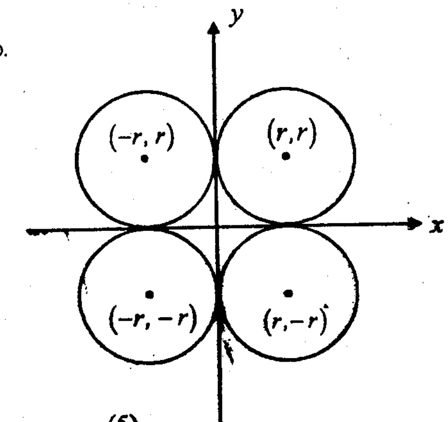
நான்கு சமன்பாடுகள் பெறப்படும்.

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2rx-2ry+r^2=0 \\ x^2+y^2-2rx+2ry+r^2=0 \\ x^2+y^2+2rx-2ry+r^2=0 \\ x^2+y^2+2rx+2ry+r^2=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(vi) உற்பத்தியினூடு செல்லும் வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு.

வட்டத்தின் சமன்பாடு

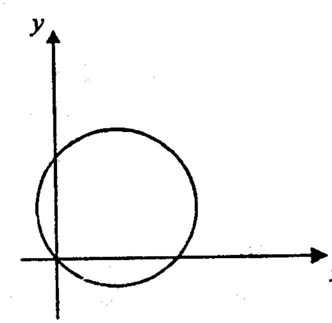
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

வட்டம் $(0,0)$ இனூடு செல்வதால்,

$x=0,\ y=0$ எனப்பிரதியிட, $c=0$ ஆகும்.

எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ஆகும்.............. (6)



(vii) x அச்சை உற்பத்தியில் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

வட்டத்தின் மையம் y அச்சில் இருத்தல் வேண்டும்.

மையம் $(0, b)$ ஆரை a என்க.

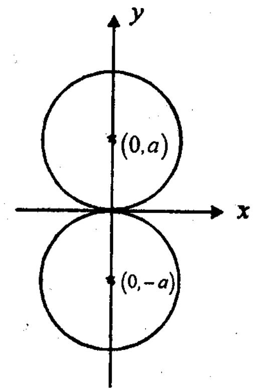
மையம் $(0,b)$ இலிருந்து $y=0$ இற்கு .
வரைந்த செங்குத்தின் நீளம் a ஆகும்.

$|b|=a \quad \Rightarrow b=\pm a$

இரு சமன்பாடுகள் பெறப்படும்.

$(x-0)^2+(y-a)^2=a^2$; $(x-0)^2+(y+a)^2=a^2$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2ay=0 \\ x^2+y^2+2ay=0 \end{array}\right\} \quad ....(7)$$



(viii) **y அச்சை உற்பத்தியில் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு**

வட்டத்தின் மையம் x அச்சிலிருத்தல் வேண்டும்.

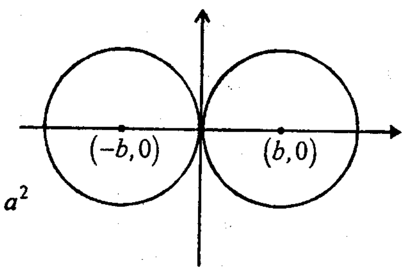
மையம் $(b,0)$; ஆரை a என்க.

மையம் $(b,0)$ இலிருந்து $x=0$ இற்கு வரைந்த
செங்குத்தின் நீளம் $=a$ ஆகும்.

$|b|=a \Rightarrow b=\pm a$

$(x-b)^2+(y-0)^2=a^2$ என்பதில்,

$(x-a)^2+y^2=a^2$; $(x+a^2)+y^2=a^2$



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2ax=0 \\ x^2+y^2-2ax=0 \end{array}\right\} \quad ....(8)$$

x,y இல் இரண்டாம் படியில் உள்ள சமன்பாடொன்று வட்டத்தைக் குறிக்க வேண்டுமாயின்,

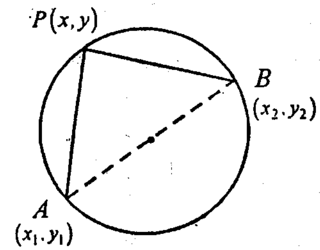
(i) x^2 இன் குணகம் $=y^2$ இன் குணகம் $(\neq 0)$ ஆகவும்.

(ii) xy உறுப்பு இல்லாமலும் இருத்தல் வேண்டும்.

2. **(x_1,y_1), (x_2,y_2) என்பவற்றை விட்டம் ஒன்றின் முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட வட்டம் ஒன்றின் சமன்பாடு.**

வட்டத்தில் $\rho(x,y)$ மாறும் புள்ளி என்க.

PA யின் படித்திறன் $\times PB$ யின் படித்திறன் $=-1$



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$$

$(y-y_1)(y-y_2)+(x-x_1)(x-x_2)=0.$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$(x-x_1)(x-x_2)(y-y_1)(y-y_2)=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

(a) $4x^2+4y^2+36x-18y-9=0$ என்னும் வட்டத்தின் மையம், ஆரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) $(-3,4)$, $(-2,0)$, $(1,5)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) $4x^2+4y^2+36x-18y-9=0$

$$x^2+y^2+9x-\frac{9}{2}y-\frac{9}{4}=0$$

மையம் $=\left(\frac{-9}{2},\frac{9}{4}\right)$ ஆரை $=\sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2+\frac{9}{4}}$

$$=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{81}{16}+\frac{9}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{441}{16}} \qquad =\frac{21}{4} \text{ அலகு}$$

(b) வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

$(-3,4)$ இனூடு செல்வதால், $9+16-6g+8f+c=0$ ....(1)

$(-2, 0)$ இனூடு செல்வதால், $4+0-4g+0+c=0$ .... (2)

$(1, 5)$ இனூடு செல்வதால், $1+25+2g+10f+c=0$ .... (3)

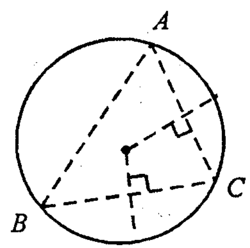
$$\left.\begin{array}{l}(3)-(1) \Rightarrow 8g+2f=-1 \\ (3)-(2) \Rightarrow 6g+10f=-22\end{array}\right\} g=\frac{1}{2},\ f=\frac{-5}{2}$$

(2) இலிருந்து $c=-2$

ஆகவே வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+x-5y-2=0$ ஆகும்.

அல்லது

$A \equiv (-3, 4)$, $B \equiv (-2, 0)$, $C \equiv (1, 5)$ என்க.



BC யின் படித்திறன் $= \frac{5-0}{1+2} = \frac{5}{3}$

BC யின் நடுப்புள்ளி $D = \left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ BC யின் செங்குத்து இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு.

$$y-\frac{5}{2} = -\frac{3}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$10y-25 = -6x-3$$

$10y+6x-22=0$ .... (1)

AC யின் படித்திறன் $= \frac{5-4}{1+3} = \frac{1}{4}$

AC யின் நடுப்புள்ளி $= \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

AC யின் செங்குத்து இரு கூறாக்கியின் சமன்பாடு

$$y-\frac{9}{2} = -4(x+1)$$

$2y+8x-1=0$ .... (2)

$$\left.\begin{array}{l}10y+6x-22=0 \\ 2y+8x-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

மையம் $\equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; ஆரை $= \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{4}}$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{34}{4}$

$x^2+y^2+x-5y-2=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

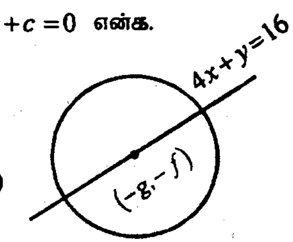
(a) $(4, 1)$, $(6, 5)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் $4x+y=16$ எனும் கோட்டில் மையத்தைக் கொண்டதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ என்னும் இரண்டாம்படிச் சமன்பாடு (a, b), (c, d), (a, d) என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றதென நிறுவுக.

$A(2, -1)$, $B(2, 4)$, $C(3, 4)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டத்தால் x அச்சில் வெட்டப்படும் நாணின் நீளம் யாது?

(a) வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

மையம் $(-g, -f)$ ஆகும்.



$(-g, -f)$ $4x+y=16$ இலிருப்பதால்,

$-4g-f=16$ .... (1)

$(4, 1)$ வட்டத்தில் இருப்பதால், $16+1+8g+2f+c=0$ .... (2)

$(6, 5)$ வட்டத்தில் இருப்பதால், $36+25+12g+10f+c=0$ .... (3

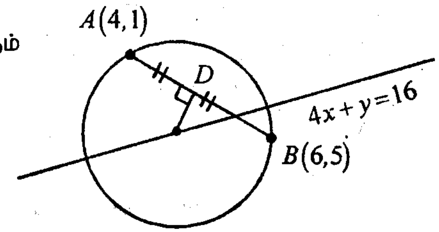
(3) − (2), $4g-8f=-44$ ....(4)

(1), (4) ஐத் தீர்க்க, $f=-4$, $g=-3$; மேலும் $c=15$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-6x-8y+15=0$

அல்லது

$4x+y=16$ம் AB யினது செங்குத்து இருகூறாக்கியும் சந்திக்கும் புள்ளி வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.



AB யின் படித்திறன் $=\frac{5-1}{6-4}=2$

AB நடுப்புள்ளி $D\equiv(5,3)$

செங்குத்து இருகூறாக்கியின் சமன்பாடு : $\frac{y-3}{x-5}=-\frac{1}{2}$, $2y+x-11=0$

$$\left.\begin{array}{l} 2y+x-11=0 \ \ldots\ldots\ (1) \\ y+4x-16=0 \ \ldots\ldots\ (2) \end{array}\right\} \text{ மையம் } (3,4)$$

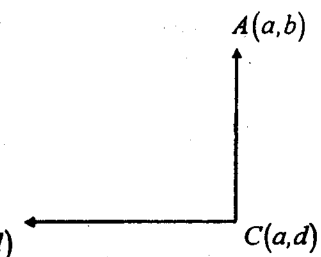
ஆரை $=\sqrt{(4-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-3)^2+(y-4)^2=10$

$$x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

(b) $A\equiv(a,b)$, $B\equiv(c,d)$, $C\equiv(a,d)$

$A\equiv(a,b)$, $C\equiv(a,d)$



AC யின் சமன்பாடு $x=a$ ஆகும்.
இது y அச்சிற்கு சமாந்தரம் ஆகும்.

$B\equiv(c,d)$, $C\equiv(a,d)$; BC யின் சமன்பாடு $y=d$ ஆகும்.
இது x அச்சிற்கு சமாந்தரம் ஆகும்.

ஆகவே $\angle ACB=90^o$

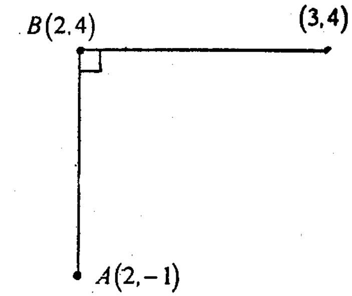
எனவே A, B, C யினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் விட்டம் AB ஆகும்.

வட்டத்தின் பரிதியில் P ஒரு புள்ளி எனின்

PA யின் படித்திறன் $\times$ PB யின் படித்திறன் $=-1$

$$\frac{(y-b)}{(x-a)}\times\frac{(y-d)}{(x-c)}=-1$$

$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.



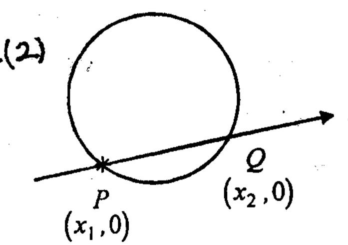
முதற் பகுதியிலிருந்து A, B, C யினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$(x-2)(x-3)+(y+1)(y-4)=0$

$x^2+y^2-5x-3y+2=0$ ....(1)

வட்டம் x அச்சை P, Q எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்ற தென்க.

x அச்சின் சமன்பாடு $y=0$ ....(2)



(1), (2) ஐத் தீர்க்க $x^2-5x+2=0$

மூலங்கள் x_1, x_2 எனின்,

$x_1+x_2=5$, $x_1x_2=2$

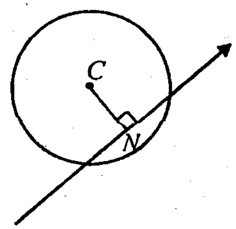
$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

$=5^2-4\times2=17$

நாணின் நீளம் $=|x_1-x_2|=\sqrt{17}$ அலகுகள்.

$\ell x+my+n=0$ என்னும் நேர்கோடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் வட்டத்தை (i) வெட்டுவதற்கு (ii) தொடுவதற்குரிய நிபந்தனைகள்.

(i) மையம் $(-g, -f)$ இலிருந்து $\ell x + my + n = 0$ இற்குரிய செங்குத்துத்தூரம், ஆரை $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ யிலும் குறைவான தெனின் நேர்கோடானது வட்டத்தை வெட்டும்.



$$\frac{|-\ell g - mf + n|}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} < \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$ எனின், வெட்டும்.

அதாவது $(-\ell g - mf + n)^2 < (\ell^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$ எனின் வெட்டும்.

(ii) நேர்கோடு வட்டத்தைத் தொடும் எனின்,

$$\frac{|-\ell g - mf + n|}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$(-\ell g - mf + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$$ ஆகும்.

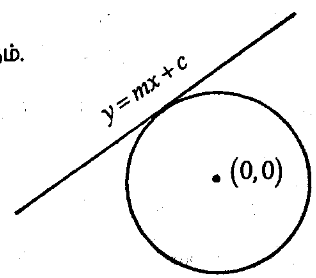
(iii) நேர்கோடு வட்டத்தை சந்திக்காது எனின்,

$$\frac{|-\ell g - mf + n|}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} > \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

அதாவது $(\ell g + mf - n)^2 > (\ell^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$ ஆகும்.

$y = mx + c$ எனும் நேர்கோடு $x^2 + y^2 = r^2$ எனும் வட்டத்தைக் தொடும் எனின்,

மையம் $(0, 0)$ இலிருந்து $y = mx + c$ இற்கான செங்குத்தூரம், ஆரைக்கு சமனாகும்.



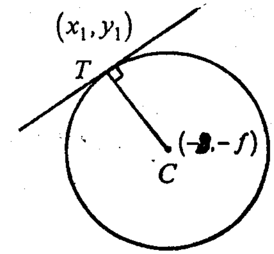
$$\left| \frac{c}{1+m^2} \right| = r$$

ஆகவே, $c = \pm r\sqrt{1+m^2}$ ஆகும்.

4. தொடலியின் சமன்பாடு

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இற்கு வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஐக் குறித்து வகையிட



$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(y+f) = -(x+g)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+g)}{(y+f)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\frac{(g+x_1)}{(f+y_1)}$$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\dfrac{(g+x_1)}{(f+y_1)}(x - x_1)$

$$(x-x_1)(x_1+g) + (y-y_1)(y_1+f) = 0$$

$$xx_1 + yy_1 + gx - gx_1 + fy - fy_1 - x_1^2 - y_1^2 = 0 \quad \text{.........................(1)}$$

(x_1, y_1) ; $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இலிருப்பதால்,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$ ஆகும்.

(1) இல் $-(x_1^2 + y_1^2) = 2gx_1 + 2fy_1 + c$ எனப்பிரதியிட,

தொடலியின் சமன்பாடு

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$ ஆகும்.

படித்திறனை வேறு முறையிலும் காணலாம்.

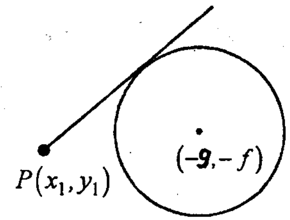
CT யின் படித்திறன் $= \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$

$\therefore$ தொடலியின் படித்திறன் $= -\dfrac{(x_1+g)}{(y_1+f)}$

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடலியின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும்

வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி (x_1, y_1)



தொடலியின் படித்திறன் m எனின்,

தொடலியின் சமன்பாடு $y-y_1 = m(x-x_1)$ ஆகும்.

$$y-mx+(mx_1-y_1)=0$$

$(-g,-f)$ இலிருந்து தொடலியின் செங்குத்துத்தூரம் ஆரைக்கு சமமாகும்.

$$\frac{|-f+my+mx_1-y_1|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{g^2+f^2-c}\cdot$$

$$(-f+mg+mx_1-y_1)^2 = (1+m^2)\,(g^2+f^2-c)$$

இது m இலான ஓர் இருபடிச்சமன்பாடு. எனவே பொதுவாக m இற்கு இரு பெறுமானங்கள் உண்டு.

உதாரணம் 3

(a) $x^2+y^2=2$ என்னும் வட்டத்தை $y=2x+1$ எனும் கோடு வெட்டுகின்றது தெனக் காட்டி, வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும், வெட்டும் நாணின் நீளத்தையும் காண்க.

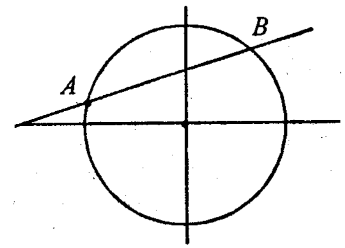
(b) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ என்ற நேர்கோடும், $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டமும் வெட்டுவதால் பெறப்படும் நாணின் நீளம் யாது?

(a) $x^2+y^2=2; \quad y=2x+1$

மையம் $(0,0)$, ஆரை $\sqrt{2}$

$(0,0)$ இலிருந்து $2x-y+1=0$

இன் செங்குத்துத்தூரம் $= \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{2}.$



எனவே நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும்.

$x^2+y^2=2,\ y=2x+1$ என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$x^2+(2x+1)^2=2$$

$$5x^2+4x-1=0;$$

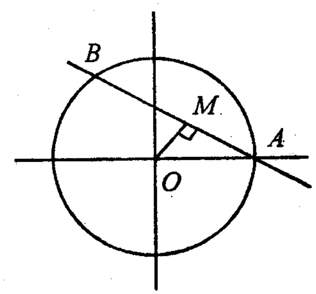
$(5x-1)(x+1)=0;$ $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{7}{5}\end{array}\right\}$ அல்லது $\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1\end{array}\right\}$ என்பன வெட்டும் புள்ளிகளாகும்

நாணின் நீளம் $= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = \sqrt{\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

(b) நாண் AB யின் நீளம் $= 2AM \ (OM \perp AB)$

$A \equiv (a, 0)$

AB யின் சமன்பாடு $= \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$



$$bx+ay-ab=0$$

$$OM = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = a^2 - \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)} = \frac{a^4}{a^2+b^2}$$

நாண் $AB = 2AM = \dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

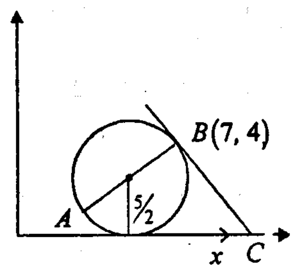
$A \equiv (3, 1)$, $B \equiv (7, 4)$ ஆக இருக்க, AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டத்திற்கு $B\,(7, 4)$ இலுள்ள தொடலி x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் மற்றைய தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$A \equiv (3, 1)$, $B \equiv (7, 4)$ AB ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-3)(x-7) + (y-1)(y-4) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 5y + 25 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

மையம் $\left(5, \frac{5}{2}\right)$ ஆரை $= \frac{5}{2}$



B யிலுள்ள தொடலி : $x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f\,(y + y_1) + c = 0.$

$$7x + 4y - 5\,(x+7) - \frac{5}{2}(y+4) + 25 = 0$$

$$4x + 3y - 40 = 0$$

x அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் $y = 0;$ $C \equiv (10, 0)$. C யிலிருந்து வரையும் தொடலி $y = mx + c$ என்க. இது $(10, 0)$ ஊடாகச் செல்வதால் $c = -10m$. ஆகவே $y - mx + 10m = 0$. $\left(5, \frac{5}{2}\right)$ இலிருந்து $y - mx + 10m = 0$ இற்கான செங்குத்துத் தூரம் ஆரைக்கு சமம்.

$$\frac{\left|\frac{5}{2} - 5m + 10m\right|}{\sqrt{1+m^2}} = \left|\frac{5m + \frac{5}{2}}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\frac{25}{4}\left(1+m^2\right) = \frac{25}{4}(2m+1)^2$$

$$3m^2 + 4m = 0 \;\Rightarrow\; m = 0 \quad \text{அல்லது} \quad m = -\frac{4}{3}$$

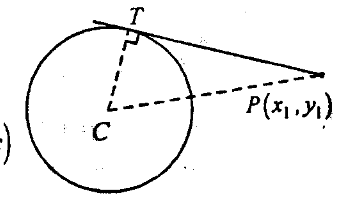
$m = 0$ எனின், தொடலியின் சமன்பாடு $y = 0$ (x அச்சு)

$m = -\frac{4}{3}$ எனின், B யிலுள்ள தொடலி $4x + 3y - 40 = 0$ எனப் பெறப்படும்.

5. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **என்ற வட்டத்திற்கு, அதற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி (x_1, y_1) இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலியின் நீளம்**

வட்டத்தின் மையம் $\equiv (-g, -f)$ ஆரை $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$P \equiv (x_1, y_1)$. PT தொடலியாகும்.

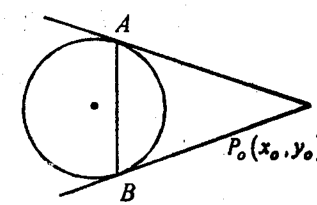


$$\begin{aligned} PT^2 &= PC^2 - CT^2 \\ &= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - \left(g^2 + f^2 - c\right) \\ &= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c. \end{aligned}$$

ஆகவே நீளம் $PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.}$

6. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **என்ற வட்டத்திற்கு, அதற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி (x_o, y_o) இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடு.**

தொடு புள்ளிகள் $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ என்க.



வட்டத்திற்கு $A\,(x_1, y_1)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$$x x_1 + y y_1 + g(x + x_1) + f\,(y + y_1) + c = 0 \;..\; (1)$$

$B\,(x_2, y_2)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$$x x_2 + y y_2 + g\,(x + x_2) + f\,(y + y_2) + c = 0 \;\ldots\; (2)$$

A யிலுள்ள தொடலி (1), $P(x_o, y_o)$ இனூடு செல்வதால்

$$x_o x_1 + y_o y_1 + g(x_o + x_1) + f\,(y_o + y_1) + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

B யிலுள்ள தொடலி (2), $P(x_o, y_o)$ இனூடு செல்வதால்

$$x_o x_2 + y_o y_2 + g(x_o + x_2) + f(y_o + y_2) + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$xx_o + yy_o + g(x + x_o) + f(y + y_o) + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இது x, y இல் முதலாம் படியிலான சமன்பாடு. எனவே இது நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

(3) இலிருந்து இது A யினூடாகவும் (4) இலிருந்து இது B யினூடாகவும் செல்லும் என்பதைக் காணலாம்.

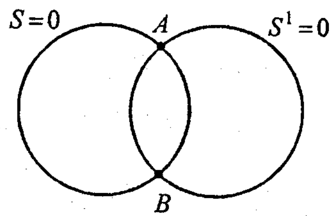
$\therefore$ தொடு நாண் AB யின் சமன்பாடு

$xx_o + yy_o + g(x + x_o) + f(y + y_o) + c = 0$ ஆகும்.

7. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; $S^1 \equiv x^2 + y^2 + 2g^1 x + 2f^1 y + c^1 = 0$

இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டின், பொது நாணின் சமன்பாடு.

வெட்டும் புள்ளிகள் $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ என்க.



$A(x_1, y_1)$ என்னும் புள்ளி

$S = 0$, $S^1 = 0$ இலிருப்பதால்.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

$x_1^2 + y_1^2 + 2g^1 x_1 + 2f^1 y_1 + c^1 = 0 \ldots\ldots\ldots (B)$

A − B , $(2g - 2g^1)x_1 + (2f - 2f^1)y_1 + (c - c^1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

இதேபோல $B \equiv (x_2, y_2)$, $S = 0$; $S^1 = 0$ இலிருப்பதால்

$(2g - 2g^1)x_2 + (2f - 2f^1)y_2 + (c - c^1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$S - S^1 = 0$ ஐக் கருதுக.

$(2g - 2g^1)x + (2f - 2f^1)y + (c - c^1) = 0$

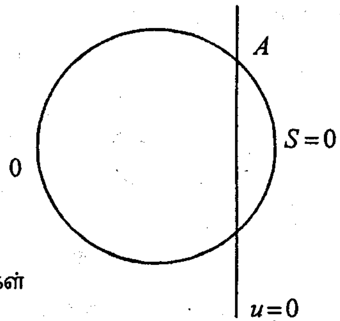
இது x, y இல் முதலாம் படியிலுள்ளது. (1), (2) இலிருந்து இந்நேர்கோடு A, B என்பவற்றினூடு செல்லும்.

எனவே $S = 0$, $S^1 = 0$ இரண்டு வட்டங்களும் வெட்டும் போது பொது நாணின் சமன்பாடு $S - S^1 = 0$ ஆகும்.

8. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **என்ற வட்டமும்** $u \equiv \ell x + my + n = 0$ **என்ற நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டங்கள்.**

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$U = \ell x + my + n = 0.$



$s + \lambda u = 0$ ஐக் கருதுக.

$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) + \lambda(\ell x + my + n) = 0$

இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

வட்டம், நேர்கோடு இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

A, B என்பன $S = 0$, $u = 0$ ஆகிய இரண்டிலும் இருப்பதால்,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$; $\ell x_1 + my_1 + u = 0$

$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$; $\ell x_2 + my_2 + u = 0$

ஆகவே λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

$(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) + \lambda(\ell x_1 + my_1 + u) = 0$

$(x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c) + \lambda(\ell x_2 + my_2 + u) = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $S + \lambda u = 0$; வட்டம் $S = 0$ உம், நேர்கோடு $u = 0$ உம் வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

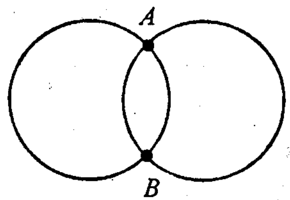
9. $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; $S^1 \equiv x^2 + y^2 + 2g^1 x + 2f^1 y + c^1 = 0.$

ஆகிய இரு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாடு.

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$S^1 \equiv x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0$ ஆகிய

இரு வட்டங்களும் $A \equiv (x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ இல் வெட்டுகின்றன என்க.



$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0; \\ x_1^2 + y_1^2 + 2g^1x_1 + 2f^1y_1 + c = 0 \end{array}\right\} \quad A,\ S=0,\ S^1=0 \text{ இலிருப்பதால்}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + 2g^1x_2 + 2f^1y_2 + c_2 = 0 \end{array}\right\} \quad B,\ S=0,\ S^1=0 \text{ இலிருப்பதால்}$$

$S + \lambda S^1 = 0$ ஐக் கருதுக.

$$\left(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c\right) + \lambda\left(x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1\right) = 0.\ (\lambda \neq -1)$$

இது x, y இல் 2 ஆம் படியிலுள்ளது

x^2 இன் குணகம் $=$ y^2 இன் குணகம் $(\lambda \neq -1)$

xy உறுப்பு இல்லை,

எனவே $S + \lambda S^1 = 0$ வட்டத்தைக் குறிக்கும். λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $(\lambda \neq -1)$

$$\left(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c\right) + \lambda\left(x_1^2 + y_1^2 + 2g^1x_1 + 2f^1y_1 + c^1\right) = 0$$

$$\left(x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c\right) + \lambda\left(x_2^2 + y_2^2 + 2g^1x_2 + 2f^1y_2 + c^1\right) = 0.$$

ஆகவே $S + \lambda S^1 = 0$, $S = 0$, $S^1 = 0$ ஆகிய இரு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

உதாரணம் 5

(a) $x^2 + y^2 = 25$ எனும் வட்டமும், $2x + y - 10 = 0$ என்னும் நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடாகவும், உற்பத்தியூடாகவும், செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

(b) $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 = 0$, $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$. ஆகிய இரு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகவும் $(1, 2)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

(c) $\ell x + my = 1$ எனும் கோடு $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ எனும் வட்டத்தை A, B என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB - ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$\left(x^2 + y^2 - 25\right) + \lambda\left(2x + y - 10\right) = 0 \text{ என எழுதலாம்.}$$

இவ்வட்டம் $(0, 0)$ இனூடு செல்வதால்,

$$-25 - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$$

$\therefore$ தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$2\left(x^2 + y^2 - 25\right) - 5\left(2x + y - 10\right) = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y = 0. \text{ ஆகும்.}$$

(b) வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\left(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7\right) + \lambda\left(x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1\right) = 0$$

இது $(1, 2)$ இனூடு செல்வதால்,

$$(1 + 4 + 2 + 6 - 7) + \lambda\,(1 + 4 + 3 - 4 - 1) = 0$$

$$6 + 3\lambda = 0,\ \lambda = -2$$

$\lambda = -2$, எனப்பிரதியிட, $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 5 = 0$.

(c) வட்டம், நேர்கோடு இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டம்.

$$\left(x^2 + y^2 + 2x - 3\right) + k\left(\ell x + my - 1\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 + (2 + k\ell)\,x + kmy - (3 + k) = 0$$

மையம் $\equiv \left(-\dfrac{(2+k\ell)}{2}, \dfrac{-km}{2}\right)$, $\ell x+my-1=0$ இலிருப்பதால்,

$$\ell\left(\frac{-2-k\ell}{2}\right)-m\cdot\frac{km}{2}-1=0$$
$$\ell(-2-k\ell)-km^2-2=0$$
$$k=\frac{-2(\ell+1)}{\ell^2+m^2}$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$(\ell^2+m^2)(x^2+y^2+2x-3)-2(\ell+1)(\ell x+my-1)=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 6

(a) $(1,-2)$ இல் மையத்தைக் கொண்டுள்ளதும், $x+y+5=0$ எனும் கோட்டைத் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) x அச்சை $(3,0)$ இல் தொடுவதும் $(1,2)$ இனூடாகச் செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(c) y அச்சை $(0,4)$ இல் தொடுவதும், x அச்சில் 6 அலகு நீள வெட்டுத்துண்டை ஆக்குவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) ஆரை a என்க $(a>0)$.

$(1,-2)$ ஐ மையமாகவும், ஆரை a ஆகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-1)^2+(y+2)^2=a^2$. இவ்வட்டம் $x+y+5=0$ இற்குத் தொடலியாதலால்,

$(1,-2)$ இலிருந்து செங்குத்துத்தூரம்.

$$=\left|\frac{+1-2+5}{\sqrt{2}}\right|=a \Rightarrow a=2\sqrt{2}. \qquad (a>0)$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-1)^2+(y+2)^2=8$

$$x^2+y^2-2x+4y-3=0$$

(b) வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

$(1,2)$ இனூடு செல்வதால் $1+4+2g+4f+c=0$ .... (1)

$(3,0)$ இனூடு செல்வதால் $9+0+6g+0+c=0$ .... (2)

x அச்சத்தைத் தொடுவதால் $(-g,-f)$ இலிருந்து $y=0$ இன் செங்குத்தூரம் ஆரைக்கு சமமாகும்.

$$|f|=\sqrt{g^2+f^2-c}$$
$$f^2=g^2+f^2-c \Rightarrow c=g^2 \quad \text{..........................(3)}$$

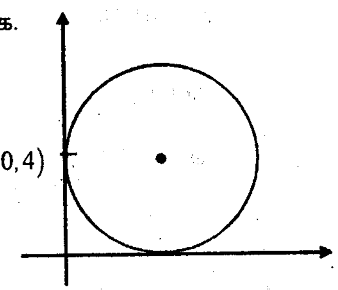
$(3),(2)$ இலிருந்து $g^2+6g+9=0$, $(g+3)^2=0$; $g=-3$

ஆகவே $c=9$, $f=-2$

ஆகவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-6x-4y+9=0$

(c) வட்டத்தின் சமன்பாடு :

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.



$(0,4)$ இனூடு செல்வதால்,

$16+8f+c=0$ ....(1)

$(-g,-f)$ இலிருந்து $x=0$ இன் செங்குத்துத் தூரம், ஆரைக்குச் சமம்.

$$|g|=\sqrt{g^2+f^2-c}$$
$$\Rightarrow c=f^2 \quad \text{..........................(2)}$$

$y=0$ ஆக, $x^2+2gx+c=0$

இதன் மூலங்கள் x_1, x_2 எனின், $x_1+x_2=-2g$, $x_1x_2=c$

$$(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2.$$
$$6^2 = 4g^2 - 4c \quad \text{.........................(3)}$$

$(1), (2)$ இலிருந்து $(f+4)^2 = 0 \Rightarrow f = -4.$

$f = -4$ எனின், $c = 16$

(3) இலிருந்து $4g^2 - 64 = 36$

$4g^2 = 100, \quad g = \pm 5$

எனவே இரு வட்டங்கள் பெறப்படும். சமன்பாடுகள்

$x^2+y^2+10x-8y+36=0; \quad x^2+y^2-10x-8y+36=0$

உதாரணம் 7

(a) புள்ளியொன்றிலிருந்து $x^2+y^2=6$. எனும் வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடலியின் நீளம், அதே புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+3x+3y=0$ இற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளத்தின் இருமடங்காகுமாறு இருப்பின், அப்புள்ளியின் ஒழுக்கு யாது?

(b) $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$; $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ ஆகிய இரு வட்டங்களும் வெட்டும் எனின், பொது நாணின் நீளம் யாது?

(a) புள்ளி (x_o, y_o) என்க.

முதலாவது வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடலியின் நீளம் $= \sqrt{x_o^2+y_o^2-6}$

இரண்டாவதற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளம் $= \sqrt{x_o^2+y_o^2+3x_o+3y_o}$

$$x_o^2+y_o^2-6 = 4\left(x_o^2+y_o^2+3x_o+3y_o\right)$$
$$3x_o^2+3y_o^2+12x_o+12y_o+6=0$$
$$x_o^2+y_o^2+4x_o+4y_o+3=0$$

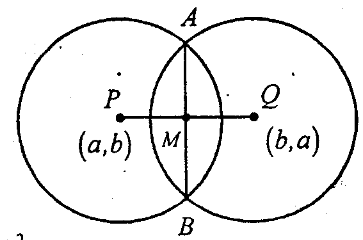
(x_o, y_o) இன் ஒழுக்கு $x^2+y^2+4x+4y+3=0$

(b) முதலாவது வட்டத்தின் மையம் (a, b); ஆரை c.

இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் (b, a); ஆரை c.

இரண்டு வட்டங்களினதும் ஆரைகள் சமம்.

எனவே $PM = MQ$



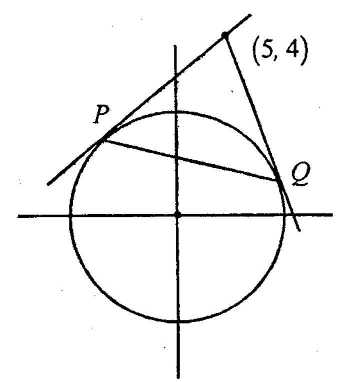
$$PQ = \sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2}$$
$$PM = \frac{1}{2} \times \sqrt{2(a-b)^2}$$
$$AM^2 = AP^2 - PM^2 = c^2 - \frac{1}{2}(a-b)^2$$
$$4AM^2 = 4c^2 - 2(a-b)^2$$
$$AB = 2AM = \sqrt{4c^2-2(a-b)^2}$$

உதாரணம் 8

$x^2+y^2=9$ எனும் வட்டத்திற்கு வட்டத்திலுள்ள P, Q என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் $(5, 4)$ இல் இடைவெட்டுமெனின் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. மேலும் PQ x அச்சை வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$ எனக் காட்டுக.

தொடலியின் சமன்பாடு

$$y-4 = m(x-5)$$
$$y-mx+(5m-4)=0.$$



$(0, 0)$ இலிருந்து தொடலிக்கான செங்குத்துத் தூரம் $=$ ஆரை

$$\frac{|5m-4|}{\sqrt{1+m^2}} = 3$$
$$(5m-4)^2 = 9\left(1+m^2\right)$$

$$25m^2 - 40m + 16 = 9 + 9m^2$$
$$16m^2 - 40m + 7 = 0.$$
$$m = \frac{40 \pm \sqrt{1600-448}}{32}$$
$$= \frac{40 \pm \sqrt{1152}}{32} = \frac{40 \pm 24\sqrt{2}}{32} = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{4}$$

தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் : $y-4 = \dfrac{5+3\sqrt{2}}{4}(x-5)$

$$y-4 = \frac{5-3\sqrt{2}}{4}(x-5)$$

தொடுகை நாண் PQ வின் சமன்பாடு :

$$x x_1 + y y_1 - 9 = 0$$
$$5x + 4y - 9 = 0$$

x அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் $y = 0;\ x = 9/5$

வெட்டும் புள்ளி $\left(\dfrac{9}{5}, 0\right)$

3 (a)

1. $a > 0$ எனத் தரப்பட்டிருக்க,
$4x^2 + 4y^2 + 12ax - 6ay - a^2 = 0$ எனும் வட்டத்தின் மையம், ஆரை என்பவற்றைக் காண்க.

2. $(0, 0),\ (2, 0),\ (0, 4)$ என்பவற்றினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $(2, 1),\ (3, 2),\ (1, 2)$ என்னும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. y அச்சில் மையத்தைத் கொண்டதும் $(5, 2),\ (7, -4)$ ஆகிய புள்ளிகளினூடு செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
வட்டத்தின் ஆரை யாது?

5. $(5, 4)$ என்னும் புள்ளியினூடு செல்வதும், y அச்சை $(0, 2)$ என்னும் புள்ளியில் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

6. உற்பத்தியினூடு செல்வதும் $4x - 3y = 5$ என்னும் நேர்கோட்டை $(2, 1)$ எனும் புள்ளியில் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

7. $x^2 + y^2 - 4x + 5y \times 4 = 0$ எனும் வட்டம் x அச்சைத் தொடும் என நிறுவி y அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

8. $A \equiv (6, 4),\ B \equiv (2, 1)$ என்பவற்றை விட்டமொன்றின் முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டு அவ்வட்டம் x அச்சைத் தொடும் எனக் காட்டுக.

9. $k(x^2 + y) + (y - 2x)(y + 2x + 3) = 0$ என்னும் சமன்பாடு வட்டத்தைக் குறிப்பதற்கான k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

10. $x^2+y^2-2x-2y=7$ என்னும் வட்டத்துக்கு $3x+4y=7$ எனும் கோட்டுக்கு சமாந்தரமாக அமையும் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

11. $(1,-2)$ இல் மையத்தைக் கொண்டதும் $x+y+5=0$ எனும் கோட்டைத் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. (α,β) ஐ மையமாகவும், உற்பத்தியினூடு செல்வதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. வட்டத்திற்கு உற்பத்தியில் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $x=0,\ y=0,\ x=c$ ஆகிய மூன்று நேர்கோடுகளையும் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $(0,0),\ (2,1)$ ஊடாகச் செல்வதும், $x=y$ என்னும் நேர்கோட்டை உற்பத்தியில் தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

15. வட்டம் ஒன்றின் மையம் $3x+4y=7$ எனும் கோட்டில் அமைந்துள்ளது. $x+y=3,\ x-y=3$ என்பன அவ்வட்டத்தின் தொடலிகள் எனின், வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. $x^2+y^2=16$ எனும் வட்டத்தை $x+2y=1$ எனும் நேர்கோடு $A,\ B$ இல் வெட்டுகிறது. AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

17. $x^2+y^2-2ax-2by=0$ எனும் வட்டத்தின் நாணொன்றின் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறு (p,q) எனின், நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. $x^2+y^2-2x=0$ என்னும் வட்டத்தின் மாறும் நாண் ஒன்றிக்கு, உற்பத்தியிலிருந்து வரைந்த செங்குத்தின் அடி N. N இன் ஒழுக்கின் சமன்பாடு யாது?

19. $A(p,q),\ B\equiv(r,s)$ என்பவற்றை விட்டமொன்றின் முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்டவட்டம் y அச்சைத் தொடும் எனின், $(q-s)^2=4rp$ என நிறுவுக.

20. $x-1=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடுவதும், $(3,0),\ (9,0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வதுமான இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

21. y அச்சை $(0,5)$ எனும் புள்ளியிலும், $3x-4y=4$ எனும் நேர்கோட்டையும் தொடும் முதலாம் கால் வட்டத்திலுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டம் இந் நேர்கோட்டைத் தொடும் புள்ளியையுங் காண்க.

22. $(6,2)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகச் சென்று x அச்சைத் தொடுவதும் $x-2y=0$ என்ற நேர்கோட்டில் மையங்களை உடையதுமான இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இவ்விரு வட்டங்களின் பொது நாணின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

23. முதலாம் கால் வட்டத்திலுள்ள 5 அலகு ஆரையுடைய ஒருவட்டத்தின் மையம் $(2t,t)$ ஆகும். அவ் வட்டம் $3x-4y+1=0$ என்னும் நேர்கோட்டில் 8 அலகு நீளமுள்ள ஒரு வெட்டுத்துண்டை வெட்டினால் t இன் பெறுமானம் யாது?

இந்நேர்கோட்டுக்குச் சமாந்தரமான வட்டத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.

24. இரு அச்சுக்களையும் தொட்டுக் கொண்டு $(2,1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகவுஞ் செல்லும், இரண்டு வட்டங்களினது சமன்பாடுகளைக் காண்க. அவ்வட்டங்களின் பொது நாண், அவற்றின் மையமிணை கோட்டினை எவ்விகிதத்தில் பிரிக்கும் என்பதையுங் காண்க.

25. a இனது எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $a(x-1)+y=4\sqrt{1+a^2}+3$ என்னும் நேர்கோடு $x^2+y^2-2x-6y=6$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக $(a,2)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து இவ் வட்டத்துக்கு வரையும் இரண்டு தொடலிகளினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

26. x அச்சுக்கு மேலே மையத்தையுடைய $\sqrt{10}$ ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்கின்றது. அவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வேறொரு வட்டம் இவ்வட்டத்தை AB ஐ பொது நாணாகவுடையதாக வெட்டி முதல் வட்டத்தின் மையத்துக் கூடாகவுஞ் செல்லுமெனின், அதன்மையத்தையும், ஆரையையும் காண்க.

27. $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தை $x\cos\alpha+y\sin\alpha=\rho$ எனும் நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடலிகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

28. $3x+4y=13$ என்னும் நேர்கோடு $x^2+y^2-2x-3=0$ என்னும் வட்டத்துக்கு தொடலியாகும் எனக் காட்டுக. இந்நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள இரு தொடலிகளினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

29. $x-5=0$ என்னும் நேர்கோடு, λ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2+y^2-(6+\lambda)x-6y+(5\lambda-11)=0$ என்னும் வட்டத்தை ஒரே புள்ளிகளில் வெட்டுகிறதெனக் காட்டுக.
இப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

30. $(a, b), (c, d), (a, d)$ ஆகிய புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ எனக் காட்டுக.

$(2, -1)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வட்டம் x அச்சில் ஆக்கும் நாணின் நீளம் யாது?

31. இரு வட்டங்களின் மையங்கள் $A\equiv(1, 3)$, $B\equiv(6, 8)$ ஆகும். இவ்விரு வட்டங்களும் $C(2, 6)$, D ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன. ஒவ்வொரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், நேர்கோடு CD யின் சமன்பாட்டையும் காண்க. P யிலிருந்து ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் வரைந்த தொடலிகளின் நீளங்கள் சமம் எனின், P ஆனது CD யின் மீது இருக்கும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

32. முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே, $x+y-4=0$, $x-y-4=0$, $2x+y-5=0$. ஆகும். ρ, q இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $\rho(x+y-4)(2x+y-5)+q(x-y-4)(2x+y-5)$ $=(x-y-4)(x+y-4)$ என்னும் சமன்பாடு முக்கோணியின் உச்சியினூடு செல்லும் வளையி ஒன்றைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக.
இவ்வளையி வட்டமாக அமைவதற்குரிய ρ, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து வட்டத்தின் மையம், ஆரை என்பவற்றைக் காண்க.

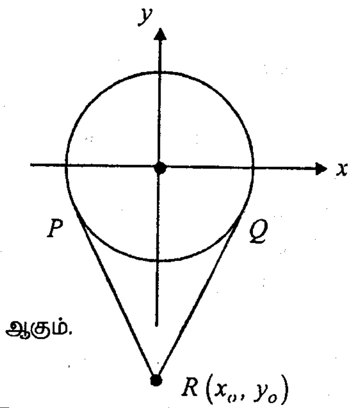
33. $x=0$, $y=0$, $\ell x+my=1$ என்னும் பக்கங்களாலான முக்கோணியின் சுற்று வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
$\ell^2+m^2=4\ell^2m^2$ ஆகுமாறு ℓ, m என்பன மாறுகின்றதெனின் வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கு யாது?

34. $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரை என்பவற்றைக் காண்க. உற்பத்தியிலிருந்து தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $5x+12y=35$ இவ் வட்டத்தின் ஒரு தொடலியாகும் என நிறுவுக. இந்நேர்கோட்டின் மீது தரப்பட்ட வட்டத்தின் விம்பத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறையும். வட்டத்தின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

35. இரு வட்டங்கள் c_1, c_2 என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x^2+y^2-4x-8y-5=0$, $x^2+y^2-6x-10y+9=0$ ஆகும். வட்டம் c_1, x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
வட்டம் c_2, x அச்சைத் தொடும் என நிறுவுக.
P யிலும் Q யிலும் வட்டம் c_1 இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் x அச்சுடன் அமைக்கும் கூர்ங்கோணத்தின் தான்சனைக் காண்க. $\lambda\neq-1$ ஆகுமாறுள்ள λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்
$\lambda(x^2+y^2-4x-8y-5)+(x^2+y^2-6x-10y+9)=0$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் வட்டம் c_3 ஆனது, P, Q இனூடு செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக. x அச்சானது வட்டம் c_3 இற்கு தொடலியாக அமையுமாறு λ இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் இரண்டைக் காண்க.

உதாரணம் 10

$x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தின் இரு செங்குத்தான தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமாகும் என நிறுவுக.



வட்டத்திற்கு P, Q என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகள் $R(x_o, y_o)$ இல் சந்திக்கிறதென்க.

தொடலியின் படித்திறன் m என்க.

தொடலியின் சமன்பாடு $y-y_o=m(x-x_o)$

$y=mx+(mx_o-y_o)$ ஆகும்.

$(0, 0)$ இலிருந்து இத்தொடலிக்கான செங்குத்து = ஆரை

$$\frac{|mx_o-y_o|}{\sqrt{1+m_2}} = a^2$$

$$(mx_o-y_o)^2 = a^2\left(1+m^2\right)$$

$\left(x_o^2-a^2\right)m^2-2x_oy_om+y_o^2-a^2=0$ இது m இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு.

இதன் மூலங்கள் m_1, m_2 எனின்,

$m_1m_2=\dfrac{y_o^2-a^2}{x_o^2-a^2}$; தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதால்,

$m_1m_2=-1$ ஆகும்.

$$\frac{y_o^2-a^2}{x_o^2-a^2} = -1 \Rightarrow x_o^2+y_o^2 = 2a^2.$$

ஆகவே சந்திக்கும் புள்ளியின் ஒழுக்கு $x^2+y^2=2a^2$. ஆகும்.

உதாரணம் 11

$x^2+y^2-20x-14y+113=0$; $4x^2+4y^2+16x-16y-49=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களும் ஒன்றுக்கொன்று வெளியே இருக்கின்றதெனக் காட்டி, ஒரு வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து மற்றைய வட்டத்திலுள்ள புள்ளிக்கான மிகக் குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

$x^2+y^2-20x-14y+113=0.$ மையம் $C_1 \equiv (10, 7)$,

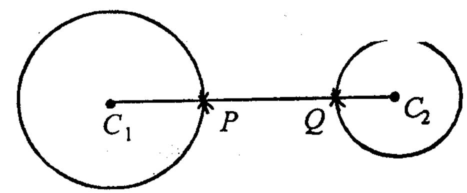
ஆரை $r_1=\sqrt{100+49-113}=6.$

$4x^2+4y^2+16x-16y-49=0$; $x^2+y^2+4x-4y-\frac{49}{4}=0$

மையம் $C_2 \equiv (-2, 2)$, ஆரை $r_2=\sqrt{4+4+\frac{49}{4}} = \frac{9}{2}$

$$C_1C_2 = \sqrt{(10+2)^2+(7-2)^2} = 13.$$

$$r_1+r_2 = 6+\frac{9}{2} = 10\frac{1}{2}$$



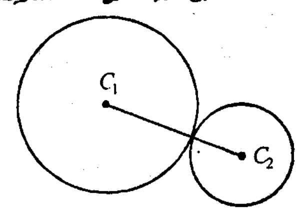
$C_1C_2 > r_1+r_2$ எனவே

இரு வட்டங்களும் ஒன்றுக்கு வெளியே அமைந்திருக்கும்.

மிகக் குறைந்த தூரம் $= PQ = 13-10\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ அலகுகள்.

10. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுதல்

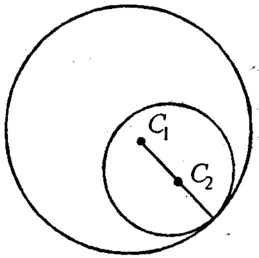
(a) இருவட்டங்கள் வெளிப்புறமாக ஒன்றையொன்று தொடுதல்.



இங்கு மையங்களுக்கு இடையிலுள்ளதூரம் ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும். வட்டத்தின் மையங்கள் C_1, C_2 எனவும், ஆரைகள் r_1, r_2 எனவும், இருப்பின்,

$C_1C_2 = r_1+r_2$ ஆகும்.

(b) இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக ஒன்றையொன்று தொடுதல்



இங்கு மையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் ஆரைகளின் வித்தியாசத்திற்கு சமமாகும்.
வட்டத்தின் மையங்கள் C_1, C_2 எனவும்,
ஆரைகள் r_1, r_2 எனவும்
இருப்பின் $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$ ஆகும்.

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $\quad S^1 \equiv x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன என்க.

மையம் $C_1 \equiv (-g, -f)$ $\qquad$ ஆரை $= \sqrt{g^2+f^2-C}$

மையம் $C_2 \equiv (-g^1, -f^1)$ $\qquad$ ஆரை $= \sqrt{g^{1^2}+f^{1^2}-C^1}$.

$$C_1C_2^{\,2} = (g-g^1)^2 + (f-f^1)^2$$
$$= g^2+f^2+g^{1^2}+f^{1^2}-2gg^1-2ff^1.$$

(a) வெளிப்புறமாகத் தொடும் எனின்,

$$C_1C_2^{\,2} = (r_1+r_2)^2 = \left(\sqrt{g^2+f^2-c} + \sqrt{g^{1^2}+f^{1^2}-c^1}\right)^2$$
$$g^2+f^2+g^{1^2}+f^{1^2}-2gg^1-2ff^1 = (g^2+f^2-c)+(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1)$$
$$+2\sqrt{(g^2+f^2-c)(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1)}$$
$$c+c^1-2gg^1-2ff^1 = -2\sqrt{(g^2+f^2-c)(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1)}$$

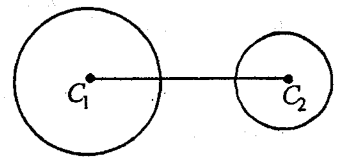
$$(c+c^1-2gg^1-2ff^1)^2 = 4(g^2+f^2-c)(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1)$$ ஆகும். ...... (1)

(b) உட்புறமாகத் தொடும் எனின்,

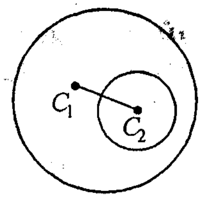
$$C_1C_2^{\,2} = (r_1-r_2)^2$$
$$g^2+f^2+g^{1^2}+f^{1^2}-2gg^1-2ff^1 = \left(\sqrt{g^2+f^2-c} - \sqrt{g^{1^2}+f^{1^2}-c^1}\right)^2$$
$$g^2+f^2+g^{1^2}+f^{1^2}-2gg^1-2ff^1 = g^2+f^2-c+g^{1^2}+f^{1^2}-c^1$$
$$-2\sqrt{(g^2+f^2-c)(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1)}$$
$$c+c^1-2gg^1-2ff^1 = -2\sqrt{(g^2+f^2-c)(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1)}$$
$$(c+c^1-2gg^1-2ff^1)^2 = 4(g^2+f^2-c)(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1) \text{ .... (2)}$$

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாதிருத்தல்.
இங்கு இருவகைகள் உண்டு.

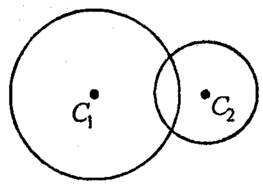
(i) ஒவ்வொருவட்டமும், மற்றைய வட்டத்திற்கு முற்றாக வெளியே இருத்தல்.
இங்கு $C_1C_2 > r_1+r_2$ ஆகும்.



(ii) இரண்டாவது வகையில் ஒருவட்டம் மற்றைய வட்டத்தினுள் பூரணமாக இருக்கும்.
இங்கு $C_1C_2 > |r_1-r_2|$ ஆகும்.



இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல்.



இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் எனின்,
$|r_1-r_2| < C_1C_2 < r_1+r_2$ ஆகும்.

11. பொதுத் தொடலிகள்

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0;\quad S^1 \equiv x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$

ஆகிய இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடும் எனின் $S-S^1=0$ என்பது தொடுபுள்ளியிலுள்ள பொதுத் தொடலியின் சமன்பாடாகும்.

தொடுபுள்ளி (x_o, y_o) என்க.

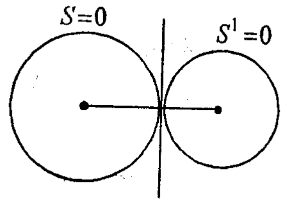
(x_o, y_o), $S=0$ இலிருப்பதால் $x_o^2+y_o^2+2gx_o+2fy_o+c=0$ .... (1)

(x_o, y_o), $S^1=0$ இலிருப்பதால் $x_o^2+y_o^2+2g^1x_o+2f^1y_o+c^1=0$ .... (2)

$(1)-(2) \Rightarrow$

$$2\left(g-g^1\right)x+2\left(f-f^1\right)y+c-c^1=0$$

என்பது தொடுபுள்ளியிலுள்ள பொதுத் தொடலியாகும்.



இது x, y இல் முதலாம் படியிலுள்ள சமன்பாடு எனவே இது ஒரு நேர்கோடாகும்.

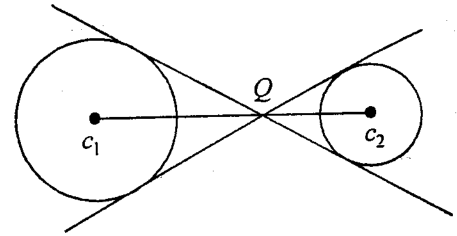
நேரடிப் பொதுத்தொடலிகளும், குறுக்குப் பொதுத்தொடலிகளும் (Direct common tangents and Indirect common tangents)

$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$, $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ ஆகிய இரு வட்டங்களின்

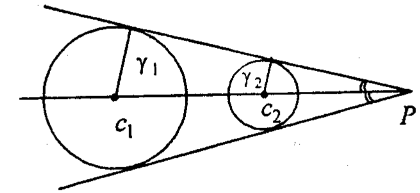
பொதுத் தொடலிகள் ஒன்றில் $\left(\dfrac{r_1a_2+r_2a_1}{r_1+r_2}, \dfrac{r_1b_2+r_2b_1}{r_1+\lambda_2}\right)$

அல்லது $\left(\dfrac{r_1a_2+r_2a_1}{r_1+r_2}, ...\right)$

$\left(\dfrac{r_1a_2-r_2a_1}{r_1-r_2}, \dfrac{r_1b_2-r_2b_1}{r_1-r_2}\right)$ என்பதை ஆள்கூறுகளாக உடைய புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.



குறுக்குப் பொதுத்தொடலிகள்



நேரடிப் பொதுத்தொடலிகள்

பொதுத் தொடலயின் சமன்பாடு $\ell x+my+n=0$ என்க.

$C_1 \equiv (a_1, b_1)$, $C_2(a_2, b_2)$ ஆரைகள் r_1, r_2 ஆகும்.

மையத்திலிருந்து தொடலிக்கான செங்குத்தூரம் $=$ ஆரை என்பதைப் பயன்படுத்த

$$\frac{|\ell a_1+mb_1+n|}{\sqrt{\ell^2+m^2}}=r_1,\quad \frac{|\ell a_2+mb_2+n|}{\sqrt{\ell^2+m^2}}$$

$$\frac{|\ell a_1+mb_1+n|}{r_1}=\frac{|\ell a_2+mb_2+n|}{r_2}$$

$$r_2\left(\ell a_1+mb_1+n\right)=\pm r_1\left(\ell a_2+mb_2+n\right)$$

$(-)$ குறியை எடுக்க, $\ell(r_2a_1+r_1a_2)+m(r_2b_1+r_1b_2)+n(r_2+r_1)=0$

$$\frac{\ell(r_2a_1+r_1a_2)}{r_2+r_1}+m\left(\frac{r_2b_1+r_1b_2}{r_2+r_1}\right)+n=0 \quad .... (1)$$

$(+)$ குறியை எடுக்க, $\ell\dfrac{(y_1a_1-y_1a_2)}{y_2-y_1}+m\dfrac{(y_2b_1-y_1b_2)}{y_2-y_1}+n=0$ .... (2)

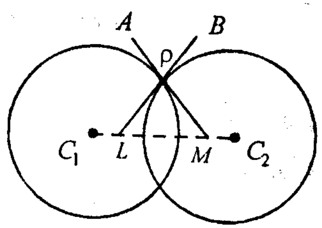
எனவே தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளி $\left(\dfrac{r_2a_1+r_1a_2}{r_2+r_1}, \dfrac{r_2b_1+r_1b_2}{r_2+r_1}\right)$ அல்லது

$\left(\dfrac{r_2a_1-r_1a_2}{r_2-r_1}, \dfrac{r_2b_1-r_1b_2}{r_2-r_1}\right)$ ஆகும்.

12. ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களுக்கிடையேயான கோணம்

(a) $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$

$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ என்பன P, Q இல் வெட்டுகின்றன என்க.



மையங்கள் முறையே C_1, C_2 ஆகும்.

P யில் C_1 ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கான தொடலி APM ஆகும்.

P யில் C_2 ஐ மையமாகவுடைய வட்டத்துக்கான தொடலி BPL ஆகும்.

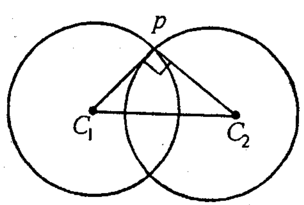
இருவட்டங்களும் வெட்டும் கோணமானது, $\angle LPM$. ஆகும்.

(b) நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டங்கள் (Orthogonal Circles)

$\angle LPM = 90^o$ எனின், இரு வட்டங்களும் செங்கோணங்களில் வெட்டுகின்றன எனப்படும்.

நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும்போது தொடலி APM, LP இற்கு செங்குத்து என்பதால், LP ஆரையாகும். எனவே $L \equiv C_1$ இவ்வாறே $M \equiv C_2$. ஆகும்.

$\angle C_1PC_2 = 90^o$ ஆகும்.



பைதகரசின் தேற்றப்படி

$C_1P^2 + C_2P^2 = C_1C_2^2$ ஆகும்.

$C_1 \equiv (-g_1, -f_1)$

$C_2 \equiv (-g_2, -f_2)$

ஆரை $r_1 = C_1P = \sqrt{g_1^2+f_1^2-c_1}$

ஆரை $r_2 = C_2P = \sqrt{g_2^2+f_2^2-c_2}$

$$\left(g_1^2+f_1^2-c_1\right)+\left(g_2^2+f_2^2-c_2\right) = (g_1-g_2)^2+(f_1-f_2)^2$$

$$g_1^2+f_1^2-c_1+g_2^2+f_2^2-c_2$$

$$= g_1^2-2g_1g_2+g_2^2+f_1^2-2f_1f_2+f_2^2$$

$$\Rightarrow 2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2$$

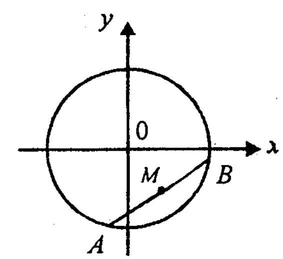
$S_1 \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$, எனவே இரு வட்டங்கள்

$S_2 \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ என்பன நிமிர் கோணங்களில் வெட்டினால்

$$2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2 \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 12

$x^2+y^2=a^2$ எனும் வட்டத்தின் நாணின் நடுப்புள்ளியின் ஆள்கூறு (x_o, y_o) எனின், நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



நாண் AB யின் நடுப்புள்ளி $M \equiv (x_o, y_o)$

OM இன் படித்திறன் $= \dfrac{y_o-0}{x_o-0} = \dfrac{y_o}{x_o}$

$\therefore$ AB யின்படித்திறன் $= -\dfrac{x_o}{y_o}$

AB யின் சமன்பாடு $y-y_o = -\dfrac{x_o}{y_o}(x-x_o)$

நாணின் சமன்பாடு $x x_o + y y_o = x_o^2 + y_o^2$ ஆகும்.

உதாரணம் 13

உற்பத்தியை மையமாகக் கொண்ட வட்டமொன்றின் நாண்கள் $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ எனும் வட்டத்திற்கு தொடலியாக அமையும் எனின், நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் ஒழுக்கைக் காண்க.

நாண் ஒன்றின் (AB) நடுப்புள்ளி $M \equiv (x_o, y_o)$ என்க. உதாரணம் 12 இலிருந்து நாண் AB யின் சமன்பாடு

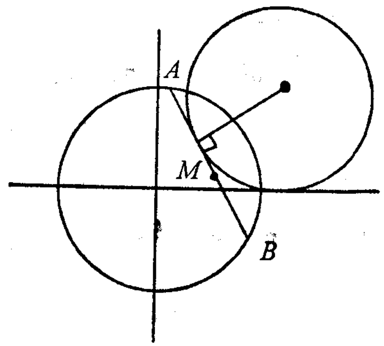
$$x x_o + y y_o - \left(x_o^2+y_o^2\right) = 0$$

(a, b) இலிருந்து AB யின்

செங்குத்துத்தூரம் = ஆரை

$$\frac{ax_o + by_o - \left(x_o^{\,2} + y_o^{\,2}\right)}{\sqrt{x_o^{\,2} + y_o^{\,2}}} = r$$

$$\left[ax_o + by_o - \left(x_o^{\,2} + y_o^{\,2}\right)\right]^2 = r^2\left(x_o^{\,2} + y^2\right)$$



$\therefore (x_o, y_o)$ இன் ஒழுக்கு

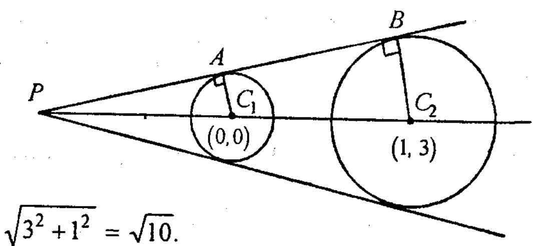
$$\left[ax + by - \left(x^2 + y^2\right)\right]^2 = r^2\left(x^2 + y^2\right)$$

உதாரணம் 14

$x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ எனும் வட்டங்களின் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

மையம் $(0, 0)$ ஆரை $= 1$

மையம் $(1, 3)$ ஆரை $= 2$



மையங்களுக்கு இடைத்தூரம் $= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}.$

$r_1 + r_2 = 3\ ;\ \ \sqrt{10} > \sqrt{3}$ என்பதால் அவை ஒன்றையொன்று வெட்டாது.

நேரடிப் பொதுத் தொடலிகள் P இல் சந்திக்கும் என்க.

$\Delta\, AC_1P,\ \ \Delta\, BC_2P$

$$\frac{AC_1}{BC_2} = \frac{PC_1}{PC_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{PC_1}{PC_2}$$

$C_2P : PC_1 = 2 : -1.$ ஆகும்.

$$P \equiv \left(\frac{2\times 0 + (-1)\times 1}{2 + (-1)},\ \ \frac{2\times 0 + (-1)\times 3}{2 + (-1)}\right) \equiv (-1, -3)$$

தொடலி PA யின் சமன்பாடு : $y + 3 = m(x+1)$

$$y - mx + (3 - m) = 0$$

$(0,0)$ இலிருந்து தொடலியின் செங்குத்துத்தூரம் $= 1$

$$\frac{|3-m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$$

$$(3-m)^2 = \left(1 + m^2\right)$$

$$9 - 6m + m^2 = 1 + m^2$$

$$6m = 8 \quad \Rightarrow\ m = \frac{4}{3}$$

தொடலியின் சமன்பாடு $y + 3 = \dfrac{4}{3}(x+1)$

$$3y - 4x + 5 = 0 \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

P யிலிருந்து இரு பொதுத் தொடலிகள் வரையப்படலாம். $P \equiv (-1, -3)$ பொதுத் தொடலியானது y அச்சுக்கு சமாந்தரம் எனின், m முடிவிலி ஆகும்.

$P \equiv (-1, -3)$ என்பதால் $x = -1$ எனும் கோட்டைக் கருதுக.

$(0,0)$ இலிருந்து $x = -1$ இற்கான செங்குத்துத்தூரம் $= 1 =$ ஆரை

$(1, 3)$ இலிருந்து $x = -1$ இற்கான செங்குத்துத்தூரம் $= 2 =$ ஆரை

$\therefore x = -1$ இரு வட்டங்களினதும் பொதுத் தொடலியாகும்.

$\therefore x = -1 \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

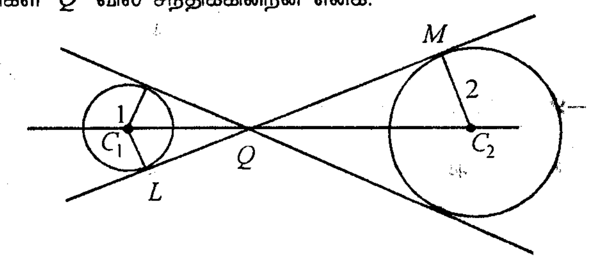
குறுக்குப் பொதுத் தொடலிகள் Q வில் சந்திக்கின்றன என்க.

$\Delta\, QC_1L_1 \quad QC_2M \ /\!/\!/$

$$\frac{QC_1}{QC_2} = \frac{C_1L}{C_2M} = \frac{1}{2}$$

$C_1Q : QC_2 = 1 : 2$

$C_1 \equiv (0, 0);\quad C_2 \equiv (1, 3)$



$$Q \equiv \left(\frac{1\times 1+2\times 0}{1+2}\ ,\ \frac{1\times 3+2\times 0}{1+2}\right) \equiv \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

Q இலிருந்து தொடலியின் சமன்பாடு

$$y-1 = m\left(x-\frac{1}{3}\right) \quad \text{.........................} (A)$$

$$3(y-1) = m(3x-1)$$

$$3mx-3y+(3-m) = 0$$

$(0, 0)$ இலிருந்து செங்குத்துத் தூரம் $=$ ஆரை

$$\frac{|3-m|}{3\sqrt{1+m_2}} = 1$$

$$(3-m)^2 = 9\left(1+m^2\right)$$

$$9-6m+m^2 = 9+9m^2$$

$$8m+6m = 0$$

$$m(4m+3) = 0 \Rightarrow m=0, \quad m = -3/4$$

(A) யிலிருந்து,

$m=0$ எனின், தொடலியின் சமன்பாடு $y-1=0$ .... (3)

$m=\frac{-3}{4}$ எனின், தொடலியின் சமன்பாடு $y-1 = -\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)$

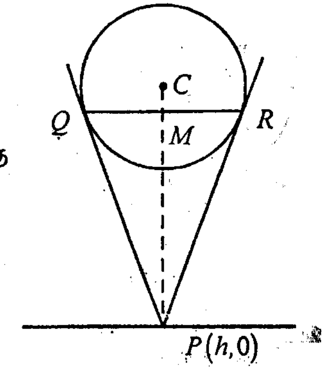
$$4(y-1) = -3x+1$$

$$4y+3x-5 = 0 \quad \text{.........................} (4)$$

உதாரணம் 15

P என்பது x அச்சில் ஒருமாறும் புள்ளியாகும். Q, R என்பன P யிலிருந்து $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையும் மாறும் தொடலிகள் ஆகும்.

QR இன் நடுப்புள்ளி $3\left(x^2+y^2\right)-6x+14y+18=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக.



மையம் $C \equiv (1, -3)$ ஆகும்.

(x_o, y_o) இலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடுகை நாணின் சமன்பாடு

$$xx_o+yy_o+g(x+x_o)+f(y+y_o)+c=0 \text{ ஆகும்.}$$

QR இன் சமன்பாடு

$xx_o+yy_o-g(x+x_o)+3(y+y_o)+6=0$ என்பதில் $x_o=h,\ y_o=0$ என இட

$$xh+0-(x+h)+3(y+0)+6=0$$

$$x(h-1)+3y+(6-h)=0 \quad \text{.........................} (1)$$

QR இன் நடுப்புள்ளி $M \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ என்க.

CM இன் படித்திறன் $= \dfrac{\bar{y}+3}{\bar{x}-1}$ ஆகும்.

CP யின் படித்திறன் $= \dfrac{3}{h-1}$ ஆகும்.

CM, CP என்பன ஒரே நேர்கோட்டிலிருப்பதால்

$$\frac{\bar{x}-1}{\bar{y}+3} = \frac{h-1}{3}$$

$$h-1 = \frac{3\bar{x}-3}{\bar{y}+3}\ ; \qquad h = \frac{3\bar{x}+\bar{y}}{\bar{y}+3} \quad \text{.........................} (2)$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ நேர்கோடு (1) இலிருப்பதால்

$$\bar{x}\ (h-1)+3\bar{y}+(6-h)=0$$

இங்கு h இற்கு (2) இலிருந்து பிரதியிட

$$\bar{x}\frac{(3\bar{x}-3)}{\bar{y}+3} + 3\bar{y} + \left[6 - \frac{3\bar{x}+\bar{y}}{\bar{y}+3}\right] = 0$$

$$\bar{x}(3\bar{x}-3) + 3\bar{y}\,(\bar{y}+3) + (5\bar{y}-3\bar{x}+18) = 0$$

$$3x^{-2}+3y^{-2} - 6\bar{x} + 14\bar{y} + 18 = 0$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ இன் ஒழுக்கு $3x^2+3y^2-6x+14y+18=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 16

A, B என்பன கோடு $x-y=0$ இலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். வட்டம் $S \equiv x^2+y^2-4x+8y+10=0$ இற்கு அப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து வரைந்த ஒரு தொடலியின் நீளம் 4 அலகு ஆயின் A, B என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

புள்ளிகள் A, B இனூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ A, B இனூடாகச் சென்று வட்டம் $S=0$ இன் பரிதியை இரு கூறாக்குகின்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+3y^2-4x+16y-18=0$ எனக் காட்டுக.

A, B என்பன $x-y=0$ இலிருப்பதால் $A \equiv (t, t)$ என்க.

தொடலியின் நீளம் $= \sqrt{t^2+t^2-4t+8t+10} = 4$

$$\sqrt{2t^2+4t+10} = 4$$

$$2t^2+4t+10 = 16$$

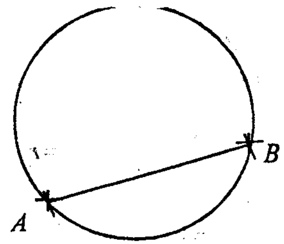
$$2t^2+4t-6=0$$

$$t^2+2t-3=0$$

$$(t+3)(t-1)=0$$

$$t=-3, 1$$

$A \equiv (-3, -3), \quad B \equiv (1, 1)$ என்க.



வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$$

$(-3, -3)$ $\quad 9+9-6g-6f+c=0$ .... (1)

$(1, 1)$ $\quad 1+1+2g+2f+c=0$ .... (2)

$(1)-(2) \Rightarrow 16-8g-8f=0.$

$$2-g-f=0$$

$f=2-g;$ $\quad (2)$ இலிருந்து $c=-2-2g-2(2-g)$

$$=-6$$

வட்டத்தின் பொதுச்சமன்பாடு.

$x^2+y^2+2gx+2(2-g)y-6=0$ .... (1)

இவ்வட்டம் $S \equiv x^2+y^2-4x+8y+10=0$ இன் பரிதியை இரு கூறிடுவதால், பொதுநாண் S இன் மையத்தினூடு செல்லும்.

பொது நாண் $\left(x^2+y^2+2gx+2(2-g)y-6\right)-\left(x^2+y^2-4x+8y+10\right)=0$

$$(2g+4)x+(-4-2g)\,y-16=0$$

பொது நாண், S இன் மையம் $(2, -4)$ இனூடு செல்வதால்,

$$(2g+4)\times 2 + (-4-2g)\times(-4)-16=0$$

$$4g+8+16+8g-16=0$$

$$12g+8=0, \quad g=-\frac{2}{3}$$

$g=-\frac{2}{3}$ என (1) இல் பிரதியிட,

$3x^2+3y^2-4x+16y-18=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 17

ஒருமைகள் p, q இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$(x-a)(x-a+p)+(y-b)(y-b+q) = r^2$ என்னும் வட்டம்

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு கூறிடுமென நிறுவுக.

$x-y=0$ என்னும் கோட்டை உற்பத்தியில் தொட்டுக் கொண்டும் $x^2+y^2+2y=3$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு கூறிட்டுக் கொண்டும் இருக்கும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S \equiv (x-a)(x-a+p)+(y-b)(y-b+q)-r^2=0$

$S \equiv (x-a)^2+p(x-a)+(y-b)^2+q(y-b)-r^2=0$

$S^1 \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$

இவ்விரு வட்டங்களினதும், பொதுநாணின் சமன்பாடு

$p(x-a)+q(y-b)=0$ ஆகும்.

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ இன் மையம் (a, b) ஆனது $p(x-a)+q(y-b)=0$ இல் இருப்பதால் $S\equiv 0$, $S^1\equiv 0$ ஐ இருகூறிடும்.

$x^2+y^2+2y=3$

$(x-0)^2+(y+1)^2=2^2$ என்ற வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$(x-0)(x-0+p)+(y+1)(y+1+q)=2^2$ என எழுதலாம்.

$x(x+p)+(y+1)(y+1+q)=4$ ஆகும். .... (1)

இவ்வட்டம் $(0, 0)$ இனூடு செல்வதால்,

$(1+q)=4 \Rightarrow q=3$ ஆகும்.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x(x+p)+(y+1)(y+4)=4$

$$x^2+y^2+px+5y=0$$

மையம் $\equiv \left(\frac{-p}{2}, \frac{5}{2}\right)=0$ ஆரை $=\sqrt{\frac{p^2+25}{4}}$

$x-y=0$ ஐத் தொடுவதால்,

$$\frac{\left|\frac{-p}{2}-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{p^2+25}{4}}$$

$$\left(\frac{p+5}{2\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt{\frac{p^2+25}{4}}$$

$$\frac{p^2+10p+25}{8}=\frac{p^2+25}{4}$$

$p^2-10p+25=0;\quad (p-5)^2=0,\quad p=5$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+5x+5y=0$.

3 (b)

1. $x^2+y^2+2x=0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலியின் நீளம், அதே புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2=4$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலியின் நீளத்தின் மூன்று மடங்கு எனின், அப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $4x^2+4y^2-x-18=0$ எனக் காட்டுக.

2. $x^2+y^2-4x+6y+8=0$, $x^2-y^2-10x-6y+14=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும் எனக்காட்டி, தொடுபுள்ளியின் ஆள்கூறு $(3,-1)$ எனக் காட்டுக.

3. $(3, 5)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து, $x^2+y^2=16$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளாலும், தொடுகை நாணினாலும் ஆக்கப்படும் முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$, $x^2+y^2+2bx+2ay+c=0$ என்பவற்றின் பொது நாணின் சமன்பாடு $x-y=0$ எனக் காட்டி, $(a+b)^2=2c$ எனின், அவை தொடும் எனக் காட்டுக.

5. $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்தின் நாண் $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ஆகும். இந்நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-a^2-2p\,(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)=0$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

6. $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று $x+2y=0$ எனும் கோட்டைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்திற்கு புள்ளி P யிலிருந்து இரு செங்குத்தான தொடலிகள் PQ, PR என்பன வரையப்படுகின்றன. PQR இனூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2a^2x_1x-2a^2y_1y-a^2\left(x_1^2+y_1^2-2a^2\right)=0$$

எனக் காட்டுக.

8. $x^2+y^2-22x+4y+100=0$; $x^2+y^2+22x-4y-100=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களினதும் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

9. $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2-6x=0$ இற்கான பொதுத் தொடலிகள் சமபக்க முக்கோணி ஒன்றை அமைக்கின்றதென நிறுவுக.

10. $x^2+y^2+2ax+c=0$; $x^2+y^2+2by+c=0$, ஆகிய இரு வட்டங்களும் தொடும் எனின், $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c}$ என நிறுவுக.

11. (a) $x^2+y^2=36$, $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ ஆகிய இருவட்டங்களும் உட்புறமாகத் தொடுகின்றன என நிறுவித் தொடுபுள்ளியின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

(b) $x^2+y^2-2x-2y=14$, $x^2+y^2-14x-18y+94=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களும் வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன என நிறுவி பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

12. $y^2-4ax=0$; $x^2-4ay=0$, $x+y-3a=0$ என்பவற்றால் தரப்படும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.
$y^2-4ax\le 0$, $x^2-4ay\le 0$, $x+y-3a\le 0$ என்பவற்றால் தரப்படும் பிரதேசம் R ஐ நிழற்றி R இன் பரப்பளவு $\dfrac{13a^2}{6}$ எனக் காட்டுக.

13. $y-x-6<0$, $2y+x-18<0$, $x-2y>0$ என்பவற்றால் $x-y$ தளத்தில் தரப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

14. $\left(y^2-8x\right)\left(x^2+y^2-9\right)<0$ என்பதால் $x-y$ தளத்தில் தரப்படும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

15. $y<x+1$, $y>(x-1)^2$, $xy<2$ எனும் சமனிலிகளைத் திருப்திப்படுத்தும் xy தளத்திலுள்ள பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

16. $x^2+y^2\le 1$, $y\ge x$, $y\le x+1$ என்பவற்றால் தரப்படும் பிர்தேசத்தை நிழற்றுக.

(a) y இன் உயர் பெறுமானம்.

(b) $x+y$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் என்பவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி - 3

1. இரு அச்சுக்களையும் தொடுவதும் $(2, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதுமான இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

அவ் வட்டங்களின் பொது நாண் அவ் வட்டங்களின் மையமிணை கோட்டை எவ்விகிதத்தில் பிரிக்கும் என்பதையுங் காண்க.

2. x அச்சைத் தொடுவதும் $(6, 2)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் $x-2y=0$ என்னும் கோட்டில் மையங்களையுடையதுமான இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அவ்விரு வட்டங்களும் வெட்டும் எனக்காட்டி பொது நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $(2, 0)$, $(0, 2)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வட்டங்களில் இரண்டின் பரிதியை $x^2+y^2-4x+6y-10=0$ என்னும் வட்டம் இரு கூறிடுமென நிறுவி, இவ்விரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டும் எனக் காட்டுக.

4. $(1, 0)$, $(0, 1)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச்சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவற்றில் இரு வட்டங்கள் $x^2+y^2-2x-8y-3=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமெனக் காட்டி, இவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டுமெனவுங் காட்டுக.

5. $(1, 0)$, $(-1, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவற்றில் இரு வட்டங்கள் $2x-y-3=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடுமென நிறுவி அவற்றின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.
இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டும் எனவும் நிறுவுக.

6. x அச்சை $(1, 0)$ என்னும் புள்ளியில் தொடும் எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவற்றுள் இரு வட்டங்கள் $x^2+y^2-4x+8y+11=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமெனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

7. λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
$x^2+y^2-9-2\lambda(x+y-3)=0$ என்னும் சமன்பாடு, P, Q என்ற இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக.

$3x+4y-6=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடும்படி P, Q விற்கூடாக இரு வட்டங்கள் வரையலாமெனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.

8. ஒருமைகள் g, f என்பவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
$x^2+y^2+2gx+2fy-a^2=0$ என்னும் வட்டம், $x^2+y^2-a^2=0$ எனும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடுமென நிறுவுக.

$x^2+y^2-4=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடுமாறும் $y+5=0$ எனும் கோட்டைத் தொடக்கூடியவாறும் $(1, 1)$ எனும் புள்ளிக்கூடாக இரு வட்டங்கள் வரையலாமெனக் காட்டி அவற்றின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.

9. t இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
$(1-t^2)(x-h)+2t(y-k)=r(1+t^2)$ என்னும் நேர்கோடு,
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ எனும் வட்டத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

$5(x^2+y^2)-6x+8y-35=0$ என்னும் வட்டத்தில் 4 அலகு நீளமுடைய இரு நாண்கள் $x^2+y^2-2x-4y-11=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும்படி வரையலாமெனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளையுங் காண்க.

10. $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-8x+7=0$, $x^2+y^2-6y+5=0$ என்னும் மூன்று வட்டங்களில் ஒவ்வொன்றும், மற்றைய இரண்டையும் தொடுமெனக் காட்டுக.

தொடு புள்ளிகளிலுள்ள மூன்று பொதுத் தொடலிகளினதும் சமன்பாடுகளைக் கண்டு, மூன்று தொடலிகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

தரப்பட்ட மூன்று வட்டங்களையும் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

11. $s=0$, $s^1=0$ என்பன இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளாயின் $s+\lambda s^1=0$ என்னும் சமன்பாட்டை விளக்குக. இங்கு λ ஓர் ஒருமை $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ என்னும் வட்டத்தால் பரிதிகள் இரு கூறிடப்படும் வண்ணம் $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாக வரையப்படும் வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரு வட்டத்திலிருக்குமெனக்காட்டி, இவ் வட்டத்தின் சமன்பாட்டையுங் காண்க.

12. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டம் $x^2+y^2=r^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமெனின், $4r^2(g^2+f^2) = (c^2+r^2)^2$ என நிறுவுக.

$x^2+y^2=4$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுகின்றதும் $x^2+y^2+8x-4y+12=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடுகின்றதுமான ஒரு மாறும் வட்டம் S ஆகும். S இன் மையம் $3x^2-4xy+24x-12y+36=0$ என்னும் கூம்பில் கிடக்குமென நிறுவுக.

13. $2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2$ எனின், $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$, $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டுமெனக் காட்டுக.

$x^2+y^2-x+3y-1=0$ என்னும் வட்டத்தை செங்குத்தாக வெட்டக் கூடியதாகவும் $x+2y+1=0$ என்னும் கோட்டைத் தொடக்கூடியதாகவும் உற்பத்திக்கூடாக இரு வட்டங்கள் வரையலாமெனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

14. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இற்கு (x_1, y_1) இலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

P என்பது x அச்சில் ஒரு மாறும் புள்ளியாகும். Q, R என்பன $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு P யிலிருந்து வரையும் தொடலிகளின் தொடுபுள்ளிகளாகும். QR இன் நடுப்புள்ளி, $3(x^2+y^2)-6x+14y+18=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்குமெனக் காட்டுக?

15. (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடலியினது நீளத்தைக் காண்க.

$(2, 3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து S இற்கு வரையும் தொடலியின் நீளம் S இன் ஆரையின் இரு மடங்குக்கு சமமாகும் வண்ணம் S என்பது $(1, 1)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு மாறும் வட்டமாகும். S இன்மையம் $4(x^2+y^2)-6x-4y-3=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

16. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) எனும் புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடலிகளின் நீளத்தைக் காண்க.

$(3, 4)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து S இற்கு வரையும் தொடலியின் நீளம், S இன் ஆரையின் இரு மடங்காகும் வண்ணம், S என்னும் மாறும் வட்டம் $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ என்னும் வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது. S இன் மையம் $x^2+y^2+4x+7y-10=0$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்குமென நிறுவுக.

17. புள்ளி (x_1, y_1) இலிருந்து வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இற்கு வரைந்த தொடலியின் நீளத்தைக் காண்க.

A, B என்பவை நேர்கோடு $x-y=0$ இலுள்ள இருபுள்ளிகளாகும். வட்டம் $S \equiv x^2+y^2-4x+8y+10=0$ இற்கு அப்புள்ளி ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து வரைந்த ஒரு தொடலியின் நீளம் 4 அலகு ஆயின் A, B என்பவற்றின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

புள்ளிகள் A, B என்பவற்றினூடாகச் செல்கின்ற எல்லா வட்டங்களினதும் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இதிலிருந்தோ வேறு வழியாலோ புள்ளிகள் A, B இனூடாகச் சென்று வட்டம் $S=0$ இன் பரிதியை இருகூறாக்குகின்ற வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2+3y^2-4x+16y-18=0$ எனக் காட்டுக.

18. ஒருமைகள் p, q இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
$(x-a)(x-a+p)+(y-b)(y-b+q)=r^2$ எனும் வட்டம்
$(x-a)^2+(y-b)=r^2$ எனும் வட்டத்தின் பரிதியை இரு சமகூறிடுமெனக் காட்டுக.

$x-y=0$ எனுங் கோட்டை உற்பத்தியில் தொட்டுக் கொண்டும் $x^2+y^2+2y-3=0$ என்னும் வட்டத்தின் பரிதியை இருகூறிடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. $P\equiv(x_1,y_1)$, $Q\equiv(x_2,y_2)$ ஆகும். PQ ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ எனக் காட்டுக.

உற்பத்தி 0 விலிருந்து $x^2+y^2-8x+10=0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடலிகள் வட்டத்தை A, B இல் தொடுமாயின்,

(a) வட்டம் OAB யின் சமன்பாடு

(b) நேர்கோடு AB யின் சமன்பாடு என்பவற்றைக் காண்க.

20. S_1 எனும் வட்டமும், S_2 என்ற வட்டமும் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. S_1 இன் மையம் $C_1(a_1, b_1)$, S_2 இன் மையம் $C_2(a_2, b_2)$ ஆகும். S_1 இன் ஆரை r_1, S_2 இன் ஆரை r_2 ஆகும்.

(i) தொடுபுள்ளியிலுள்ள தொடலி உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் எனின்,
$\left(a_1^2-a_2^2\right)+\left(b_1^2-b_2^2\right)=\left(r_1^2-r_2^2\right)$ எனக் காட்டுக.

(ii) உற்பத்தியிலிருந்து S_1, S_2 இற்கு வரையப்பட்ட மற்றைய தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தெனின்,
$\left|a_2b_1-a_1b_2\right| = \left|a_1a_2+b_1b_2\right|$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து C_1 நிலையாக இருக்க, S_1, S_2 மாறின் C_2 என்பது $\left(a_1^2-b_1^2\right)\left(x^2-y^2\right)+4a_1b_1xy=0$ என்னும் வளையியில் இருக்குமென நிறுவுக.

21. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$, $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ என்பன ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டின் $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ எனக் காட்டுக.

இவ்வட்டங்களின் மையங்கள் A, B ஆகவும், இவ்வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டும் புள்ளிகள் C, D ஆகவும் இருப்பின் A, B, C, D என்ற புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு,
$2\left(x^2+y^2\right)+2\left(g_1+g_2\right)x+2\left(f_1+f_2\right)y+c_1+c_2=0$ எனக் காட்டுக.

CD யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1+\lambda\left\{2(g_1-g_2)x+2(f_1+f_2)y+(c_1-c_2)\right\}=0$$

எனும் வடிவில் தரப்படலாம் எனக் காட்டுக.

இங்கு $\lambda=\dfrac{-r_1^2}{AB_2}$ ஆகும்.

22. $\ell x+my+n=0$ என்னும் நேர்கோடானது $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடுமாயின் $(a\ell+bm+n)^2=r^2\left(\ell^2+m^2\right)$ என நிறுவுக.

$3x+4y=0$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாக $S\equiv(x+1)^2+(y+2)^2-1=0$ எனும் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடலிகளினதும் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

இந்த இரு தொடலிகளையும் $S=0$ என்னும் வட்டத்தையும் தொடுகின்ற இரு **வட்டங்களினதும் சமன்**பாடுகளையும் காண்க.

23. $S \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$, $S^1 \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ **ஆகிய** வட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தை $S+\lambda S^1=0$ எனும் சமன்பாடு குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக. $\lambda\ (\lambda \neq -1)$ இங்கு ஒரு பரமானமாகும்.

புள்ளி $(15, -5)$ ஊடாகவும், வட்டங்கள் $x^2+y^2-10x=0$; $x^2+y^2-4x-8y-30=0$ ஆகியவற்றின் இடைவெட்டுப் புள்ளிகளுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(a) இம் மூன்று வட்டங்களில் இரண்டு நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டுகின்ற எனவும்.

(b) இம் மூன்று வட்டங்களினதும் பொதுநாண், இவற்றுள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் எனவும் காட்டுக.

24. யாதுமொரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது, $p \geq 0$ ஆகவும், $0 \leq \alpha < 2\pi$ ஆகவுமிருக்க $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ, வேறுவிதமாகவோ $\ell x+my+n=0$ எனும் கோடானது $S \equiv x^2+y^2-r^2=0$ எனும் வட்டத்துக்கு தொடலியாவதற்கு வேண்டிய, போதிய நிபந்தனையைக் காண்க.

t_1, t_2 என்பன y அச்சுக்கு சமாந்தரமாக $S=0$ எனும் வட்டத்துக்கு வரையப் பட்ட தொடலிகள் ஆகும். உற்பத்தி O விற் கூடாகச் செல்கின்றவையும் O விலே செங்கோணம் ஒன்றை அமைக்கின்றவையுமான OT_1, OT_2 எனும் இரு நேர்கோட்டுத் துண்டங்கள் t_1, t_2 எனும் தொடலிகளை முறையே T_1 இலும் T_2 இலும் சந்திக்கின்றன. $S=0$ என்னும் வட்டத்துக்கு T_1T_2 என்பது ஒரு தொடலியாகும் என நிறுவுக.

25. வேறு வேறான சமாந்தரமற்ற மூன்று நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்
$u_1 \equiv \ell_1x+m_1y+n_1=0$; $u_2 \equiv \ell_2x+m_2y+n_2=0$, $u_3 \equiv \ell_3x+m_3y+n_3=0$ ஆகும். $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0$ என அமைய $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ எனும் பூச்சியமற்ற ஒருமைகள் உண்டு எனின், இந்த மூன்று நேர்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$

$S^1 \equiv x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$ ஆகிய வட்டங்கள், நிமிர்கோண வட்டங்களாக அமைவதற்கு தேவையானதும், போதியதுமான நிபந்தனை ஒன்றைத் தருக.

$S^1=0$; $S^{11}=x^2+y^2+2g^{11}x+2f^{11}y+c^{11}=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களுக்கும், வட்டம் $S=0$ என்பது நிமிர் கோணத்திற்குரியதாக அமையின், வட்டம் $S=0$ இன் மையம் $S^1-S^{11}=0$ எனும் நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

இதிலிருந்து பின்வரும் வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றையும் நிமிர்கோணமாக இடைவெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S^{(1)} = x^2+y^2+5x-5y+9=0$

$S^{(2)} = x^2+y^2-2x+3y-7=0$

$S^{(3)} = x^2+y^2+7x-9y+29=0$

(1981)

$\left(f^2-x_1^2-2x_1g-c\right)m^2+2\left(g+x_1\right)\left(f+y_1\right)m+\left(g^2-y_1^2-2y_1f-c\right)=0$

எனின் $y-y_1-m\left(x-x_1\right)=0$ என்னும் நேர்கோடு $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் வட்டத்துக்கு ஒரு தொடலியாகும் என நிறுவுக.

$S^1 \equiv x^2+y^2+4x+6y-2=0$ எனும் வட்டத்தின் பரிதியை இருசம கூறிடும் வட்டமொன்றின் பொதுச் சமன்பாடு $S \equiv x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y+\nu=0$ எனும் வடிவில் எழுதப்படலாமென நிறுவுக. இங்கு λ, μ பரமானங்களுக்கும் $\nu=4\lambda+6\mu-28$ உம் ஆகும்.

$P(1, 3)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் $S = 0$ என்னும் வட்டத்துக்கான தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின் $S = 0$ எனும் வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கு $x^2 + y^2 + 10x + 18y + 46 = 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(1982)

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ எனின், எனின் மட்டுமே

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; $x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0$ எனும் வட்டங்கள் நிமிர்கோணங்களில் இடைவெட்டும் என நிறுவுக.

சோடிகளாக எடுக்கும் போது

$x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 21 = 0$ எனும் வட்டங்களின் மூன்று பொது நாண்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அவற்றின் இடைவெட்டுப் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்பதன் மூலம் அவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக. தரப்பட்ட மூன்று வட்டங்களையும் ஒவ்வொன்றாக நிமிர் கோணங்களில் வெட்டும் சமன்பாட்டைத் துணிந்து அதன் மையம் மேலேயுள்ள சந்திக்கும் புள்ளியுடன் பொருந்தும் எனவும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

(1983)

$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$; $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ ஆகிய இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடலிகள் $\left(\dfrac{a_1r_2 + a_2r_1}{r_2 + r_1}, \dfrac{b_1r_2 + b_2r_1}{r_2 + r_1}\right)$

உம் $\left(\dfrac{a_1r_2 - a_2r_1}{r_2 - r_1}, \dfrac{b_1r_2 - b_2r_1}{r_2 - r_1}\right)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒன்றின் அல்லது மற்றையதன் ஊடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.

$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 64 = 0$ ஆகிய வட்டங்களின் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(1984)

(ii) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 \leq 0.$

$x + y - 2a \leq 0.$ ஆகிய சமனிலிகளை ஒருங்கே

திருப்திப்படுத்தும் $x - y$ தளத்திலுள்ள D பிரதேசத்தைக் குறித்துக் காட்டுக. இதிலிருந்து, மேலேயுள்ள நிபந்தனைகளுக்கு அமைய $x^2 + y^2$ என்பதன் ஆகக்கூடிய பெறுமானத்தையும், ஆகக் குறைந்த பெறுமானத்தையும் காண்க.

(1985)

(i) முதற் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$ எனும் வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரையையும் காண்க.

x அச்சிலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து வட்டத்துக்கு வரைந்த தொடலிகள் இரண்டும் செங்குத்தாக அமைந்துள்ளன. அவ்வாறான புள்ளிகள் இரண்டு உள்ளதெனக் காட்டி, ஒவ்வொரு வகையிலும் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(1986)

(ii) $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 52 \leq 0.$

$3x - 4y + 8 \leq 0.$

என்பவற்றைத் திருப்தியாக்கும் $(x - y)$ தளத்திலுள்ள பிரதேசம் R ஐ நிழற்றிக் காட்டுக.

λ ஒரு பரமானமாக இருக்க $x + y = \lambda$ எனும் வடிவிலுள்ள கோட்டுக் குடும்பத்தைக் கருதி R இலுள்ள $x + y$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1987)

(iii) வட்டம் $15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$ மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும்

$5x^2 + 5y^2 - 24x + 32y + 75 = 0$

$5x^2 + 5y^2 - 48x + 64y + 300 = 0.$

ஆகிய வட்டங்களுக்கான தொடலிகளின் நீளங்கள் இரு வட்டங்களினதும் ஆரைகளின் விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

(1988)

$\ell x+my+n=0$ வழியே இருக்கும் வட்டம் $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இன் நாண் ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கக் கூடியதாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

இதிலிருந்து வட்டம் $S=0$ இன் ஒரு மாறும் நாண் PQ ஆனது உற்பத்தியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கும் எனின், உற்பத்தியிலிருந்து PQ விற்கான செங்குத்து அடியின் ஒழுக்கானது வட்டம் $x^2+y^2+gx+fy+\frac{c}{2}=0$ எனக் காட்டுக.

(1989)

$S \equiv x^2+y^2-2x-6y+1=0$

$S^1 \equiv 3x^2+3y^2-21x+2y+35=0.$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும் வெளிப்பக்கமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

S இலிருந்து அதிதூரத்தில் S^1 இல் உள்ள புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

P யிலிருந்து S இற்கான தொடலிகளுள் ஒன்றின் சமன்பாடு $x=4$ எனக் காட்டி மற்றையதன் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

(1990)

(ii) (a) $x^2+y^2-5=0.$ (b) $y^2-4x=0$ (c) $y+x-1=0$ என்னும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

$x-y$ தளத்திலுள்ள பிரதேசம் R இலுள்ள புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $x^2+y^2\le 5,\quad y^2\le 4x,\quad y+x\le 1.$ என்பவற்றைத் திருப்தி செய்கின்றன. பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

இதில் மூன்று வளையிகளும் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் புள்ளிகளையும் காட்டுக.

R இல் $|y-2x|$ இன் மிகக் கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1990)

$A(2a,0),\quad B(0,2b),\quad C(a+b,\ a+b)$ எனும் வெவ்வேறான புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டம் S ஆகும். இங்கு a, b ஆகியன நேர்எண்களாகும். S ஆனது $P(2a, 2b)$ இனூடு செல்கிறது எனக் காட்டுக.

வட்டத்திற்கு B யிலும், P யிலும் உள்ள தொடலிகள் Q வில் சந்திக்கும் எனின், $PQ=\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$ என நிறுவுக.

நேர்கோடு $ax+by+c=0\quad (c>0)$ ஐயும் வெளிப்புறமாக S ஐயும் தொடும் வட்டத்தின் மையத்தின் ஒழுக்கானது, குவியத்தை (a, b) இலும் $ax+by+c+a^2+b^2=0$ ஐ செலுத்தலியாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளைவு எனக்காட்டுக.

(1990 விசேட)

ii. $x^2+y^2-8=0,\quad y^2-7=0,\quad y^2-7x=0$ என்னும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து, வளையிகள் இடைவெட்டும் புள்ளிகளைக் காட்டுக.

$(x^2+y^2-8)(y^2-7x)(y^2-7)\le 0$ ஆக இருக்கும்.

$x-y$ தளத்தில் உள்ள பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

R இலே x^2+y^2-8 இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?

R இலே x^2+y^2-8 இன் அதிஉயர் பெறுமானம் பற்றி யாது கூறலாம்?

(1990 விசேட)

வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ மீதுள்ள Q_1, Q_2 என்னும் இரு புள்ளிகளிலான தொடலிகள் $P_o(x_o, y_o)$ இல் சந்திக்கின்றன. புள்ளி P_o இன் தொடுகை நாண் Q_1, Q_2 வின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+g(x+x_o)+f(y+y_o)+c=0$ எனக் காட்டுக.

$x^2+y^2+6y+5=0,\quad x^2+y^2+2x+8y+5=0$ எனும் வட்டங்கள் குறித்துப் புள்ளி $(1,-2)$ இன் தொடுகை நாண்கள் பொருந்தும் என நிறுவுக.

அத்தோடு அவ்வட்டங்கள் குறித்துத் தொடுகை நாண்கள் ஒரே நாணாக இருக்கும் வேறொரு புள்ளி இருக்கின்றதெனக் காட்டி அதன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(1991)

ii. பின்வரும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

(a) $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0.$ **(b)** $x^2 - 4y = 0$

(c) $y - x + 1 = 0$

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \le 0, \quad x^2 - 4y \ge 0 \quad y - x + 1 \ge 0.$

ஆகியவற்றை திருப்தியாக்கும் xy தளத்தில் உள்ள பிரதேசம் R ஐக் காட்டுக. R இல் $x^2 + y^2$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1991)

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்பன இருபுள்ளிகளெனின், P_1P_2 ஐ $\lambda : 1$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 164 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மீது P கிடக்குமெனின், λ திருப்தி செய்கின்ற சமன்பாடு ஒன்றை $A\lambda^2 + B\lambda + c = 0$ எனும் வடிவில் பெறுக.

(i) $P_1(6, 14)$ எனின், λ வின் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க. $P_1 P_2$ ஆனது வட்டத்தை ஒருபுள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டு வதற்கான நிபந்தனையைத் துணிந்து $S = 0$ எனும் வட்டத்துக்கு P_1 இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

(ii) $P_1(11, 11)$ எனின், $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ இன் மூலங்கள் பொருந்துவன வாக இருப்பதற்கு x_2, y_2 ஆகியவற்றாலே திருப்தி செய்யப்படவேண்டிய நிபந்தனையைப் பெறுக. இதிலிருந்து $S = 0$ இற்கு P_1 இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

(1991 விசேட)

(ii) ஒரேவரிப்படத்தில் (a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2 y^2 = x^2 - y^2$ எனும் வளையி களைப் பருமட்டாக வரைந்து $x^2 + y^2 - 1 \le 0.$ $y^2 < \frac{x^2}{1+x^2}$ ஆக இருக்கும் பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

தரப்பட்டுள்ள பிரதேசம் R இல் $(y - x)$ இன் மிகப்பெரிய, மிகச் சிறிய பெறுமானங்களைத் துணிக.

(1991 விசேட)

(i) வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ உம், நேர்கோடு $\ell \equiv px + qy + r = 0$ உம் ஒன்றையொன்று A, B ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுகின்றன.
$S + \lambda\ell = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கான விளக்கத்தைத் தருக.
இங்கு λ ஒரு பரமானம்.
$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 2y - 17 = 0;$ $\ell \equiv x - y + 2 = 0$ ஆக இருக்கும் போது AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S^1 இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டம் S^1 உம் வட்டம் $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ உம் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன எனக் காட்டுக.

(ii) வட்டம் S ஆனது $(2, 0)$ இற்கூடாகச் சென்று வட்டம் ஐ $S^1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ ஐ S^1 மீதுள்ள விட்டமுறை எதிரான புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. S ஆனது வட்டம் $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ ஐ செங்கோணத்தில் வெட்டும் எனின், S இன் சமன் பாட்டைக் காண்க.

(1992)

(ii) வளையி $y = x^2 - 1$ ஐப் பருமட்டாக வரைக. இதிலிருந்து வளையி $y = |x^2 - 1|$ ஐ வேறொரு வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைக.
$y = |x^2 - 1|$, $y = |x^2 - 7|$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும

படியாக வரைந்து $|x^2-7| > y > |x^2-1|$ ஆக இருக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

(1992)

(a) r என்னும் ஆரையையுடைய வட்டம் S ஆனது x அச்சு, y அச்சு ஆகிய இரண்டையும் தொடுகின்றது. S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.
அத்தகைய வட்டங்கள் எத்தனை வரையலாம் எனக் காண்க.

ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் இரண்டையும் தொடுவனவும் புள்ளி $(2, 1)$ இற்கூடாகச் செல்வனவுமான வட்டங்கள் இரண்டினதும் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(b) $x+y-25=0$ என்னும் கோட்டை S, S^1 ஆகிய இரு வட்டங்களும் தொடுமாறு வட்டம், $x^2+y^2=25$, கோடு $y-x+1=0$ ஆகியவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிகளுக்கூடாக S, S^1 வரையப்பட்டுள்ளன. S,S^1 ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. S, S^1 ஆகியவற்றுக்கான பொதுத்தொடலிகள் இடைவெட்டா எனக் காட்டுக.

(1993)

(b) $S_1 \equiv x^2+y^2-9=0$

$S_2 \equiv (x-5)^2+y^2-4=0$

$S_3 \equiv (x-5)^2+(y-12)^2-100=0$

ஆகிய மூன்று வட்டங்களும் ஒன்றை ஒன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன எனக் காட்டுக.
மேலே குறிப்பிட்ட வட்டங்களின் சிறி விற்களால் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு $\frac{1}{2}(60-52\pi+91\alpha)$ எனக்காட்டுக. இங்கு $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

(1993)

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை விட்டம் ஒன்றின் முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு
$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ எனக்காட்டுக.

உற்பத்தி O விற் கூடாக $S \equiv x^2+y^2-2ax+a^2-r^2=0$ என்னும் வட்டத்திற்கு மாறும் நாண் ஒன்று வரையப்பட்டுள்ளது. இங்கு a யும் r உம் நேரானவை.
(i) $r \geq a$ (ii) $r < a$ ஆகிய வகைகளை வேறுபடுத்திக் காட்டி, மேலே குறிப்பிட்ட நாணின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க.

$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ஆகும்போது மேற்போந்த ஒழுக்கைப் பற்றி யாது கூறமுடியும்?

(1994)

(b) $y^2-4ax \leq 0$, $x^2-4y \leq 0$, $x+y-3 \geq 0$. ஆக இருக்கும் xy தளத்தில் உள்ள பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.
R இலே $x+2y$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1994)

கோடு $ax+by=1$ என்பது $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்தை P_1, P_2 ஆகிய புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. O என்பது ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி OP_1, OP_2 ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $y=m_1x$, $y=m_2x$ என்பவற்றால் தரப்படுகின்றன எனக்காட்டுக. இங்கு m_1, m_2 என்பன.
$(1+2fb+cb^2)m^2+(2gbd+2fa+2abc)m+ca^2+2ag+1=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். இவ்வட்டம் உற்பத்தி O வினூடு சென்றால்,

(i) இவ்வட்டத்தின் மையம் C யிற்கு O வை இணைக்கும் கோடு
$$y = \frac{a(m_1+m_2)-b(1-m_1m_2)}{b(m_1+m_2)+a(1-m_1m_2)}x$$ எனக் காட்டுக

(ii) $(y-m_1x)(y-m_2x)$ என்பதன் பெறுமானத்தை f, g, a, b ஆகியவற்றின் சார்பில் கணிக்க. இதிலிருந்து OP_1, OP_2 ஆகிய கோடுகளில் ஏதாவதொன்றின் மீதுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ இன் ஆள்கூறுகள்.

$(1+2fb)y^2+(2gb+2fa)xy+(2ga+1)x^2=0$ எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக. **(1995)**

(i) ஒவ்வொன்றும் அலகு ஆரைகளையுடையனவும் P, Q ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான இரு வட்டங்கள் ஒன்றின் மையம் மற்றையதன் பரிதி மீது கிடக்குமாறு A, B ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன. கோணம் APB ஐத் துணிந்து, இரு வட்டங்களுக்கும் பொதுவான பிரதேசம் R இன் பரப்பளவைக் கணிக்க.

PQ வின் நடுப்புள்ளியை உற்பத்தி O ஆகவும், PQ வை x அச்சாகவும் AB ஐ y அச்சாகவும் எடுத்து R இலுள்ள $X(x, y)$ என்னுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை x, y திருப்தி செய்யும் சமனிலித் தொடையொன்றை எழுதுக.

(1995)

நேர்கோடு $ax+by=1$ என்பது $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்னும் வட்டத்தை A, B ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகிறது. A, B ஆனது ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தியிலே செங்கோணம் ஒன்றை எதிரமைப்பின்

$c\left(a^2+b^2\right)+2\left(ag+bf+1\right)=0$ எனக் காட்டுக.

$x^2+y^2-6x-4y-3=0$ என்னும் வட்டத்தின் PQ எனும் மாறும் நாணானது உற்பத்தியிலே செங்கோணம் ஒன்றை எதிரமைக்கின்றது. மேலே பெற்ற பேற்றைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக PQ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $2x^2+2y^2-6x-4y-3=0$ என்னும் வட்டம் எனக் காட்டுக.

(1996)

a, b என்பன மெய் மாறிலிகளாக இருக்க $x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$ ஆனது எப்போதும் y அச்சினைத் தொடும் காட்டுக.

S என்னும் ஒரு வட்டமானது (i) y அச்சைத் தொடுமாறும் (ii) t ஒரு மெய்ப் பரமானமாயிருக்க, உற்பத்தி O விலிருந்தான தொடுகை நாண் $y+tx=t$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொண்டிருக்குமாறும் உள்ளது. S இன் சமன்பாட்டையும் O விலிருந்து S இற்கான மற்றைய தொடலியின் சமன்பாட்டையும் பெறுக. அத்துடன் t மாறும் போது S இன் மையத்தின் ஒழுக்கைக் காண்க.

S ஆனது எப்பொழுதும் $x^2+y^2-\frac{1}{2}x=0$ என்னும் வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

(1997)

(ii) $x^2+y^2=9$, $x^2-4=0$, $x^2-8y=0$ ஆகிய வளையிகளின் பரும்படியான வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து வளையிகளின் இடைவெட்டுப் புள்ளிகளைக் காட்டுக.

$\left(x^2+y^2-9\right)\left(x^2-8y\right)\left(x^2-4\right)\le 0$ ஆகுமாறு தளத்திலுள்ள பிரதேசம் R ஐக் காட்டுக. R இலே x^2+y^2-9 இன் மிகச் சிறிய பெறுமானம் யாது?

(1997)

$S=0$ ஒரு வட்டமும், $u=0$ ஒரு நேர்கோடும் ஆகும். $S+\lambda u=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கான விளக்கத்தைத் தருக. Γ என்னும் ஒரு மாறும் வட்டமானது $x^2+y^2=4$ என்னும் வட்டமும், $x+y=1$ என்னும் கோடும் இடைவெட்டும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்கிறது. Γ ஆனது, $x^2+y^2-2x-1=0$ என்னும் வட்டத்தை P, Q வில் வெட்டுகிறது. கோடு PQ ஆனது நிலைத்தவொரு புள்ளியினூடாகச் செல்கிறதெனக் காட்டி, இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அத்தோடு PQ வின் நடுப்புள்ளியானது $2x^2+2y^2-5x+y+3=0$ என்பதனால் கொடுக்கப்படுகின்ற வளையி மீது கிடக்கின்றதெனவுங் காட்டுக.

(1997 புதிய)

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் நிமிர்கோண முறையாக இடை வெட்டுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

$S\equiv x^2+y^2+8x+2y-8=0$, $S^1\equiv x^2+y^2-16x-8y-64=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டுகின்றன என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

$S=0$, $S^1=0$ ஆகியவற்றின் மையங்களினூடாகவும், அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளினூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-4x-3y-36=0$ எனக் காட்டுக.

$S=0,\ S^1=0$ ஆகியவற்றின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $S+k\left(S-S^1\right)=0$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதலாமெனக் காட்டி, k யைக் காண்க.

(1998)

(b) $x^2+y^2=16,\ x^2+y=5,\ y^2=4$ என்னும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. xy தளத்தில் $|x|\le 3,\ |y|\le 4$ ஆகவும் $\left(x^2+y^2-16\right)\left(x^2+y^2-5\right)\left(y^2-4\right)\le 0.$ ஆகவும் உள்ள பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.
R இல் எவையேனும் இருபுள்ளிகளுக்கிடையே இருக்கத்தக்க உயர் தூரம் யாது?

(1998)

$A\equiv(1,2)$, $B\equiv(3,2)$ என்க. $P(x,y)$ என்பது கோணம் APB ஒரு மாறிலியாகுமாறுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி என்க.

(i) $\angle APB=90^o$ எனின், புள்ளி P ஆனது வட்டம் $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ மீது கிடக்கின்றதென நிறுவுக. P யின் ஒழுக்கு யாது? உமது விடையை மெய்ப்பிக்க?

(ii) $\angle APB=135^o$ எனில், P ஆனது ஒன்றில் வட்டம் $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ மீது அல்லது வட்டம் $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ மீது கிடக்குமென நிறுவுக. P யின் ஒழுக்கு யாது? இவ்விரு வட்டங்களும் செங்கோணங்களில் இடை வெட்டுகின்றனவெனக் காட்டுக.

(1998 புதிய)

$P(\cos\theta, \sin\theta)$ என்பது வட்டம் $x^2+y^2=1$ மீதுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாகும். Q என்பது P யினூடாக உள்ள விட்டத்தின் மற்றைய முனைப்புள்ளியாகும். A, B என்பன முறையே $(1,0)$, $(0,1)$ எனும் ஆள்கூறுகளையுடைய புள்ளிகளாகும். AP யும் BQ வும் U விலே இடைவெட்டுமெனின் U வின் ஆள்கூறுகள்.

$$(x-1)\cos\frac{\theta}{2}+y\sin\frac{\theta}{2}=0$$

$$(1+x-y)\cos\frac{\theta}{2}+(x+y-1)\sin\frac{\theta}{2}=0.$$

என்னும் சமன்பாடுகளைத் திருப்தியாக்குகின்றனவெனக் காட்டுக. புள்ளி U ஆனது ஒரு நிலைத்தவட்டம் S மீது கிடக்கின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து அதன் சமன்பாட்டைப் பெறுக.
அதோடு AQ வினதும் BP யினதும் வெட்டுப் புள்ளியும் S மீது கிடக்கிறது எனவும் காட்டுக.

(1999)

$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0;\quad x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$

ஆகிய இரு வட்டங்களும் செங்குத்தாக வெட்டினால் $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$ எனக் காட்டுக.

x அச்சில் மையத்தைக் கொண்டுள்ள வட்டம் S ஆனது, வட்டம் $S^1\equiv x^2+y^2-8x-6y+21=0$ ஐ செங்குத்தாக வெட்டுவதுடன் $S^{11}\equiv x^2+y^2+4x+6y+9=0$ ஐத் தொடுகிறது.

அவ்வாறான வட்டங்கள் S இரண்டு உள்ளனவெனவும் அவற்றுள் ஒன்று S^{11} ஐ வெளிப்புறமாகவும், மற்றயைது S^{11} ஐ உட்புறமாகவும் தொடுகிறதெனக் காட்டுக.
இவ்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(2000)

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் வட்டத்துக்கு, வெளியேயுள்ள (x_o, y_o) எனும் புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு $xx_o+yy_o+g(x+x_o)+f(y+y_o)+c=0$ எனக் காட்டுக.

$x^2+y^2+2x+6y+1=0,\quad 4x+3y-5=0$ என்பன முறையே தரப்பட்ட வட்டமொன்றினதும், நேர்கோடொன்றினதும் சமன்பாடுகள் ஆகும். நேர்கோடு, வட்டத்தை வெட்டாது எனக் காட்டுக.

மாறும் ஒரு நேர்கோடு, தரப்பட்ட வட்டத்தை P, Q எனும் இரு வேறுபுள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. P, Q இல் தரப்பட்ட வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள், தரப்பட்ட நேர்கோட்டில் சந்திக்கின்றன. இம்மாறும் நேர்கோடு நிலையான ஒரு புள்ளியினூடு செல்லும் எனக் காட்டி அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

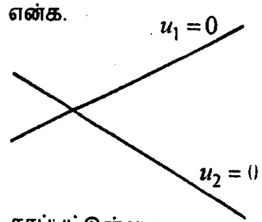
(2001)

1981

$u_1 \equiv \ell_1 x + m_1 y + n_1 = 0, \quad u_2 \equiv \ell_2 x + m_2 y + n_2 = 0,$

$u_3 \equiv \ell_3 x + m_3 y + n_3 = 0$ ஆகும். கோடுகள் சமாந்தரமல்ல என்பதால்

$u_1 = 0, \; u_2 = 0$ என்பன இடைவெட்டும் புள்ளி (x_o, y_o) என்க.



இப்பொழுது $\ell_1 x_o + m_1 y_o + n_1 = 0;$

$\ell_2 x_o + m_2 y_o + n_2 = 0;$ ஆகும்.

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0;$ $\quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$u_3 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} u_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} u_2$ ஆகும்.

$$\ell_3 x + m_3 y + n_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} 1 (\ell_1 x + m_1 y + n_1) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (\ell_2 x + m_2 y + n_2)$$

$$\ell_3 x_o + m_3 y_o + n_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} (\ell_1 x_o + m_1 y_o + n_1) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} (\ell_2 x_o + m_2 y_o + n_2)$$

$$= -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \times 0 - \frac{\lambda_3}{\lambda_3} \times 0 = 0.$$

எனவே $u_3 \equiv \ell_3 x + m_3 y + n = 0$ எனும் கோடு (x_o, y_o) எனும் புள்ளியினூடு செல்லும்.

$\therefore \; u_1 = 0, \; u_2 = 0, \; u_3 = 0$ ஆகிய மூன்றும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

$S = 0, \; S^1 = 0$ ஆகிய வட்டங்கள் இரண்டும் நிமிர் கோணங்களில் வெட்டுவதற்குத் தேவையானதும், போதுமானதுமான நிபந்தனை

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ ஆகும்.

$S = 0, \; S^1 = 0$ இரண்டும் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ ....(1)

$S = 0, S^{11} = 0$ இரண்டும் நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$2gg^{11} + 2ff^{11} = c + c^{11}$ ....(2)

$(1) - (2) \;\Rightarrow\; 2g\left(g^1 - g^{11}\right) + 2f\left(f^1 - f^{11}\right) = c^1 - c^{11}$ ....(3)

$S^1 - S^{11} = 0 \;\Rightarrow\; 2\left(g^1 - g^{11}\right)x + 2\left(f^1 - f^{11}\right)y + c^1 - c^{11} = 0$

$x = -g, \quad y = -f$ எனப்பிரதியிட

இ.கை.ப $= 2\left(g^1 - g^{11}\right)(-g) + 2\left(f^1 - f^{11}\right)(-f) + c^{11} - c^{11}$

$= -\left[2\left(g^1 - g^{11}\right)g + 2\left(f^1 - f^{11}\right)f - \left(c^{11} - c^{11}\right)\right]$

$= 0$ [(3) இலிருந்து]

ஆகவே, $S = 0$ இன் மையம் $S^1 - S^{11} = 0$ இலிருக்கும்.

$S^{(1)} \equiv x^2 + y^2 + 5x - 5y + 9 = 0 \qquad \left(g = +\dfrac{5}{2}, \; f = -5/2\right)$

$S^{(2)} \equiv x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$

$S^{(3)} \equiv x^2 + y^2 + 7x - 9y + 29 = 0$ மூன்று வட்டங்களையும் நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும் வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

$S = 0$ இன் மையம் $S^{(1)} - S^{(2)} = 0$ இலிருக்கும்.

$(-g, -f), \; 7x - 8y + 16 = 0$ இலிருக்கும்.

$-7g + 8f + 16 = 0$ ....(4)

$S = 0$ இன் மையம், $S^{(1)} - S^{(3)} = 0$ இலிருக்கும்.

$(-g, -f) \; -2x + 4y - 20 = 0$ இலிருக்கும்.

$2g - 4f - 20 = 0$ ....(5)

(4), (5) இலிருந்து, $g = -8, \; f = -9$

மேலும் $S = 0, \; S^{(1)} = 0$ நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுவதால்

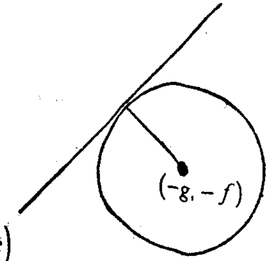
$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ என்பதில் $2 \times \dfrac{5}{2} \times (-8) + 2 \times (-5/2) \times (-9) = c + 9$

$c = -4$

$S \equiv x^2 + y^2 - 16x - 18y - 4 = 0$ ஆகும்.

1982

$(-g, -f)$ இலிருந்து $y - y_1 - m(x - x_1) = 0$
இற்கான செங்குத்துத் தூரம் = வட்டத்தின் ஆரை.



$$\frac{|-f - y_1 - m(-g - x_1)|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

$$[m(g+x_1) - (f+y_1)]^2 = (1+m^2)(g^2+f^2-c)$$

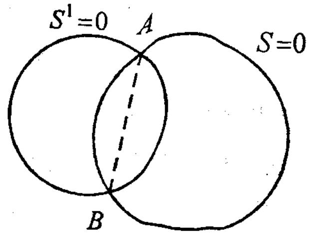
$$m^2(g^2+2gx_1+x_1^2) - 2m(g+x_1)(f+y_1) + (f+y_1)^2 = (1+m^2)(g^2+f^2-c)$$

$$(f^2 - x_1^2 - 2gx_1 - c)m^2 + 2(x_1+g)(y_1+f)m + (g^2 - y_1^2 - 2y_1 f - c) = 0$$ ஆகும். ....(1)

$S^1 \equiv x^2+y^2+4x+6y-2=0$ இன் பரிதியை இரு கூறிடும் வட்டம்
$S \equiv x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y+\nu = 0$ என்க.

பொது நாண் AB யின் சமன்பாடு $S - S^1 = 0$

$(2\lambda-4)x + (2\mu-6)y + (\nu+2) = 0$.



$S^1=0$ இன்மையம் $(-2,-3)$,
AB யிலிருப்பதால்,

$(2\lambda-4)(-2)+(2\mu-6)(-3)+\nu+2=0$

$\nu = 4\lambda+6\mu-28$ ஆகும்.

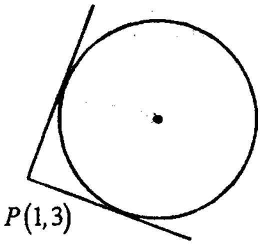
$S = 0$ இன் பொதுவடிவம்

$x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y+\nu=0$; இங்கு $\nu = 4\lambda+6\mu-28$ ஆகும்.

$P(1,3)$ இலிருந்து வரையப்படும் தொடலியின் படித்திறன் m என்க.

தொடலியின் சமன்பாடு

$(y-3) - m(x-1) = 0.$



(1) இல் $g=\lambda, f=\mu,$
$c = 4\lambda+6\mu-28;\ x_1=1,\ y_1=3$

எனப்பிரதியிட,

$$(\mu^2 - 1 - 2\lambda - 4\lambda - 6\mu + 28)m^2 + 2(1+\lambda)(3+\mu)m + (\lambda^2 - 9 - 6\mu - 4\lambda - 6\mu + 28) = 0.$$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் m_1, m_2 என்க.
தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகையால் $m_1m_2=-1$

$$m_1m_2 = \frac{\lambda^2-4\lambda-12\mu+19}{\mu^2-6\lambda-6\mu+27} = -1$$

$$\lambda^2+\mu^2-10\lambda-18\mu+46=0$$

$$(-\lambda)^2+(-\mu)^2+10(-\lambda)+18(-\mu)+46=0$$

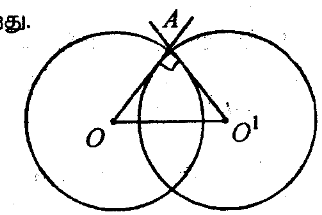
ஆக்கவே $(-\lambda,-\mu)$ இன் ஒழுக்கு

$$\underline{\underline{x^2+y^2+10x+18y+46=0}}$$

1983

$O\equiv(-g,-f)$, $O^1\equiv(-g^1,-f^1)$

A யில் இருவட்டங்களுக்கும் தொடலி வரையப்படுகிறது.
இரு வட்டங்களும் செங்கோணத்தில் வெட்டினால்,
அவற்றின் தொடலிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் 90^o
எனவே அத் தொடலிகள் $0, 0^1$ இனூடு செல்லும்.



$$OA^2+O^1A^2 = OO^{1^2}$$

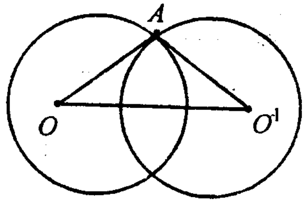
$$(g^2+f^2-c)+(g^{1^2}+f^{1^2}-c^1) = (g-g^1)^2+(f-f^1)^2$$

$\underline{\underline{2gg^1+2ff^1 = c+c^1}}$ ஆகும்.

மறுதலையாக $2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ என்க.

$$\left(g - g^1\right)^2 + \left(f - f^1\right)^2 = \left(g^2 + f^2 - c\right) + \left(g^{1^2} + f^{1^2} - c^1\right)$$

$$00^{1^2} = OA^2 + O^1A^2$$



$\Delta\, OAO^1$ இல் $\angle OAO^1 = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

OA ஆரை என்பதால் O^1A, $S=0$ இற்கு தொடலியாக அமைய வேண்டும்.

O^1A ஆரை என்பதால் OA, $S = 0$ இற்கு தொடலியாக அமைய வேண்டும்.

$\therefore\ S = 0,\ S^1 = 0$ நிமிர் கோணத்தில் இடைவெட்டுகின்றன.

$S^{(1)} : x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$

$S^{(2)} : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

$S^{(3)} : x^2 + y^2 + 6x - 4y - 21 = 0$

பொது நாண்கள்:

$S^{(1)} - S^{(2)} = 0 \Rightarrow 2x - 4y - 2 = 0;\quad x - 2y - 1 = 0$ ....(A)

$S^{(3)} - S^{(2)} = 0 \Rightarrow 8x - 2y - 22 = 0;\quad 4x - y - 11 = 0$ ....(B)

$S^{(3)} - S^{(1)} = 0 \Rightarrow 6x + 2y - 20 = 0;\quad 3x + y - 10 = 0$ ....(3)

$(A), (B)$ வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு $(3, 1)$
$(B), (C)$ வெட்டும்புள்ளியின் ஆள்கூறு $(3, 1)$
$(A), (C)$ வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு $(3, 1)$

எனவே மூன்று நேர்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

$S^{(1)} = 0,$	$g = 0,$	$f = -3,$	$c = -1$
$S^{(2)} = 0,$	$g = -1,$	$f = -1,$	$c = 1$
$S^{(3)} = 0\ ;$	$g = 3,$	$f = -2,$	$c = -21.$

மூன்று வட்டங்களையும் ஒவ்வொன்றாக நிமிர் கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு:

$$x^2 + y^2 + 2g^1x + 2f^1y + c^1 = 0 \text{ என்க.}$$

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$ என்பதில்

$O - 6f^1 = -1 + c^1$ ....(1)

$-2g^1 - 2f^1 = 1 + c^1$ ....(2)

$6g^1 - 4f^1 = -21 + c^1$ ....(3)

$(1) - (2) \Rightarrow 2g^1 - 4f^1 = -2$

$(3) - (1) \Rightarrow 6g^1 + 2f^1 = -20$

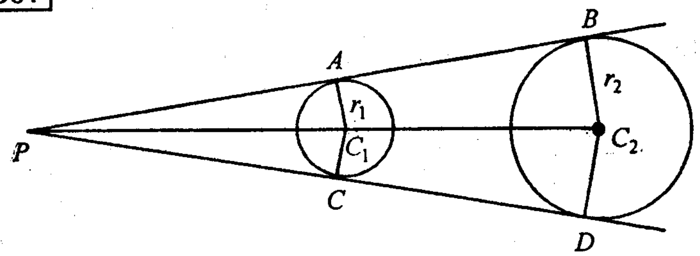
$g^1 = -3,\ f^1 = -1,\ c^1 = 7$

வட்டத்தின் சமன்பாடு:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$$

மையம் $(3\ ,\ 1)$ ஆகும்.

1984



$C_1 \equiv (a_1, b_1)$, ஆரை r_1 $\quad C_2 \equiv (a_2, b_2)$, ஆரை r_2 என்க.

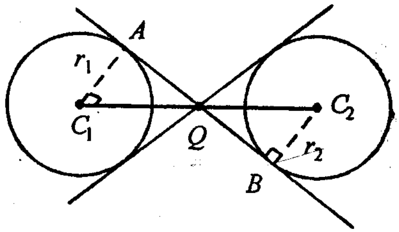
நேரடிப் பொதுத் தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளி P என்க.

$\Delta PAC_1,\ \Delta PBC_2\ ///$

$$\frac{PC_1}{PC_2} = \frac{C_1A}{C_2A} = \frac{r_1}{r_2}$$

இங்கு $C_1 \equiv (a_1, b_1), C_2\ (a_2, b_2)$ $\frac{C_1P}{PC_2} = \frac{-r_1}{r_2}$ [P, C_1C_2 இற்கு வெளிப்புறமாக]

$$\therefore\ P\left(\frac{r_2a_1 - r_1a_2}{r_2 - r_1}, \frac{r_2b_1 - r_1b_2}{r_2 - r_1}\right) \text{ ஆகும்.}$$



குறுக்குப் பொதுத் தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளி Q என்க.

$\Delta AC_1Q\ \Delta BC_2Q$ ///

$$\frac{AC_1}{BC_2} = \frac{C_1Q}{QC_2},\ \frac{C_1Q}{QC_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$C_1 \equiv (a_1, b_1),\quad C_2 \equiv (a_2, b_2)$ $\frac{C_1Q}{QC_2} = \frac{r_1}{r_2}$ ஆகும்.

$$Q \equiv \left(\frac{r_1a_2 + r_2a_1}{r_1 + r_2}, \frac{r_1b_2 + rb_1}{r_1 + r_2}\right) \text{ ஆகும்.}$$

$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ மையம் $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ ஆரை $= \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 - 12x - 16y + 64 = 0$

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 6^2$ மையம் $(6, 8)$; ஆரை 6 ஆகும்.

நேரடிப் பொதுத் தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளி P என்க.

$$P \equiv \left(\frac{6\times\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\times 6}{6 - \frac{3}{2}},\ \frac{6\times 2 - \frac{3}{2}\times 8}{6 - \frac{3}{2}}\right) \equiv (0, 0)$$

P யிலிருந்து தொடலியின் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$ என்க.

இக்கோடு $(0, 0)$ இனூடு செல்வதால் $c = 0$; தொடலி $ax + by = 0$.

$(6, 8)$ இலிருந்து $ax + by = 0$ இன் செங்குத்துத் தூரம் = ஆரை 6 அலகு.

$$\frac{|6a + 8b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 6 \Rightarrow 36\left(a^2 + b^2\right) = (6a + 8b)^2$$

$$28b^2 + 96ab = 0$$

$$b = 0 \text{ அல்லது } b = \frac{-24a}{7}$$

$\therefore$ தொடலிகளின் சமன்பாடு $x = 0$ அல்லது $7x - 24y$ .... (1)

குறுக்குப் பொதுத் தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளி Q என்க.

$$Q \equiv \left(\frac{6\times\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\times 6}{6 + \frac{3}{2}},\ \frac{6\times 2 + \frac{3}{2}\times 8}{6 + \frac{3}{2}}\right) \equiv \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

Q வினூடு செல்லும் தொடலி $\ell x + my + n = 0$ என்க.

$\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ இனூடு செல்வதால் $12\ell + 16m + 5n = 0$

எனவே தொடலியின் சமன்பாடு

$$\ell x + my - \left(\frac{12\ell + 16m}{5}\right) = 0$$

$$5\ell x + 5my - (12\ell + 16m) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$(6, 8)$ இலிருந்து தொடலியின் செங்குத்துத் தூரம் = ஆரை 6 அலகுகள்.

$$\frac{|30\ell + 40m - (12\ell + 16m)|}{5\sqrt{\ell^2 + m^2}} = 6$$

$$|18\ell + 24m| = 30\sqrt{\ell^2 + m^2}$$

$$|3\ell + 4m| = 5\sqrt{\ell^2 + m^2}$$

$$(3\ell + 4m)^2 = 25(\ell^2 + m^2)$$

$$16\ell^2 - 24\ell m + 9m^2 = 0$$

$$(4\ell - 3m)^2 = 0$$

$$\ell = \frac{3m}{4}$$

ஒரு தொடலி மட்டும் உண்டு.

தொடலியின் சமன்பாடு

$$\frac{15}{4}x + 5y - 25 = 0$$

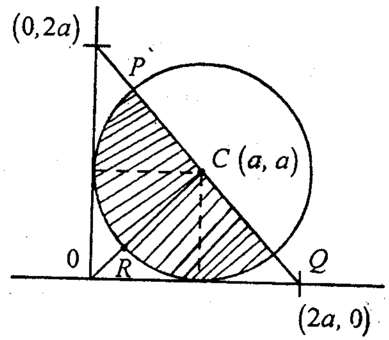
$3x + 4y - 20 = 0$ .... (2)

இங்கு இரு வட்டங்களும் தொடுவதால், குறுக்குப் பொதுத் தொடலி ஒன்று மட்டும் உள்ளது.

1985

(ii) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$



மையம் (a,a), ஆரை a

வட்டம் இரு அச்சுக்களையும் தொடும்.

$x + y - 2a = 0$ எனும் கோடு (a,a) இனூடு செல்லும்.

படித்திறன் $= -1$ ஆகும்.

எனவே $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay + a^2 \le 0$, $x + y - 2a \le 0$ என்பவற்றால்

குறிப்பிடப்படும் பிரதேசம் நேர்கோட்டுக்கு கீழேயும் வட்டத்திற்குள்ளும் உள்ள பரப்பாகும்.

இப் பிரதேசத்தினுள்

(i) $x^2 + y^2$ இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் OP^2 ஆகும்.

$OP^2 = OC^2 + CP^2$ $[OC, CP$ யிற்கு செங்குத்து$]$

$= 2a^2 + a^2$

$= 3a^2$

(ii) $x^2 + y^2$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானம் OR^2 ஆகும்.

$OR = (OC - CR)$ என்பதால்,

$OR = a\sqrt{2} - a$

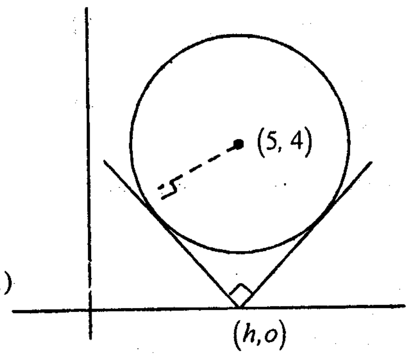
$OR^2 = a^2(\sqrt{2} - 1)^2$ ஆகும்.

1986

(i) $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$

$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{10})^2$

மையம் $(5, 4)$, ஆரை $\sqrt{10}$ ஆகும்.



x அச்சிலுள்ள புள்ளி $(h, 0)$ என்க.

தொடலியின் படித்திறன் m எனின்

தொடலியின் சமன்பாடு

$y - 0 = m(x - h)$ .... (1)

$y - mx + mh = 0$ ஆகும்.

$(5, 4)$ இலிருந்து தொடலியின் செங்குத்துத் தூரம் $= \sqrt{10}$ அலகுகள்.

$$\frac{|4 - 5m + mh|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{10}$$

$$10\left(1 + m^2\right) = (4 - 5m + mh)^2 \quad \text{.........................} (2)$$

$$m^2\left[10 - (5 - h)^2\right] + 8m(5 - h) - 6 = 0$$

இது m இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு, மூலங்கள் m_1, m_2 எனின், $m_1 m_2 = -1$ ஆகும்.

$$m_1 m_2 = \frac{-6}{10 - (5 - h)^2} = -1$$

$$6 = 10 - (5 - h)^2$$

$(5 - h)^2 = 4 \Rightarrow 5 - h = \pm 2 \Rightarrow h = 3$ அல்லது 7

$h = 3$ எனின் (2) இலிருந்து $10\left(1 + m^2\right) = (4 - 2m)^2$

$$10 + 10m^2 = 16 - 16m + 4m^2$$

$$3m^2 + 8m - 3 = 0; \ (3m - 1)(m + 3) = 0$$

$m = \frac{1}{3}$ அல்லது -3

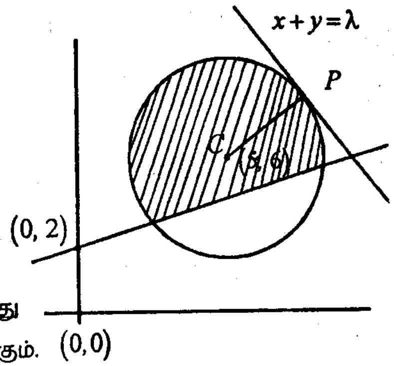
$h = 7$ எனின், (2) இலிருந்து $10\left(1 + m^2\right) = (4 + 2m)^2$

$\Rightarrow \ m = -\frac{1}{3}$ அல்லது 3

ஆகவே தொடலிகளின் சமன்பாடுகள் (1) இலிருந்து,

$\left.\begin{array}{l} 3y - x + 3 = 0 \\ y + 3x - 9 = 0 \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} 3y + x - 7 = 0 \\ y - 3x + 21 = 0 \end{array}\right\}$ ஆகும்.

1987



(ii) வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 52 = 0$$

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 3^2$$

மையம் $C(5, 6)$ ஆரை $= 3$ அலகு

$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 52 \leq 0$ என்பது வட்டத்திற்கு உள்ளேயான பிரதேசம் ஆகும்.

$3x - 4y + 8 = 0$ – நேர்கோடு

$(5, 6)$ இலிருந்து $3x - 4y + 8 = 0$ இன் செங்குத்துத் தூரம்

$$= \frac{|15 - 24 + 8|}{5} = \frac{1}{5} < 3$$

எனவே நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டும்.

$3x - 4y + 8 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 4y \geq 3x + 8$

$$y \geq \frac{1}{4}(3x + 8)$$

ஆகவே $3x - 4y + 8 \leq 0$ என்பது நேர்கோட்டுக்கு மேலே உள்ள பிரதேசம் ஆகும்.

$x + y = \lambda$, வட்டத்துக்குத் தொடலியாக அமைய

$(5, 6)$ இலிருந்து $x + y - \lambda = 0$ இன் செங்குத்துத் தூரம் $= 3$ ஆகும்.

$$\frac{|5 + 6 - \lambda|}{\sqrt{2}} = 3; \quad |11 - \lambda| = 3\sqrt{2}$$

$$|11 - \lambda| = \pm 3\sqrt{2}$$

$\therefore \ \lambda = 11 - 3\sqrt{2}, 11 + 3\sqrt{2}$ ஆகும்.

$\lambda = 11 + 3\sqrt{2}$ என்க.

CP யின் சமன்பாடு $y - 6 = 1(x - 5)$; $y - x = 1$ ஆகும்.

$y - x = 1, \quad x + y = 11 + 3\sqrt{2}$ என்பவற்றைத் தீர்க்க.

$$P \equiv \left(5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \quad (0, 0)$$ என்பவற்றை

$3x - 4y + 8 = 0$ இல் பிரதியிட $\left[3\left(5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - 4\left(6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + 8\right] \; [+8] < 0$

எனவே புள்ளி P பிரதேசம் R இலிருக்கும். எனவே $x + y$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $11 + 3\sqrt{2}$ ஆகும்.

1988

$$S \equiv 15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$$

$$S_1 \equiv 5x^2 + 5y^2 - 24x + 32y + 75 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{24}{5}x + \frac{32}{5}y + 15 = 0$$

மையம் $\left(\frac{12}{5}, \frac{-16}{5}\right)$

ஆரை $= 1$

$$\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{16}{5}\right)^2 = 1^2$$

$$S_2 \equiv 5x^2 + 5y^2 - 48x + 64y + 300 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{48}{5}x + \frac{64}{5}y + 60 = 0$$

$$\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{32}{5}\right)^2 = 2^2$$ மையம் $\left(\frac{24}{5}, \frac{-32}{5}\right)$ ஆரை $= 2$

$S = 0$ எனும் வட்டத்திலுள்ள (x_o, y_o) எனும் புள்ளியிலிருந்து $S_1 = 0$ இற்கான தொடலியின் நீளம் ℓ_1 என்க.

$$\ell_1 = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 - \frac{24}{5}x_o + \frac{32}{5}y_o + 15} \quad \text{.........................(1)}$$

$S_2 = 0$ இற்கான தொடலியின் நீளம் ℓ_2 என்க.

$$\ell_2 = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 - \frac{48}{5}x_o + \frac{64}{5}y_o + 60} \quad \text{.........................(2)}$$

(x_o, y_o) ஆனது $S \equiv 15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$ இலிருப்பதால்,

$$15x_o^2 + 15y_o^2 - 48x_o + 64y_o = 0 \quad \text{.........................(3)}$$

(3) இலிருந்து $x_o^2 + y_o^2 = \frac{48}{15}x_o - \frac{64}{15}y_o$ ஆகும்.

(1) இல் பிரதியிட $\ell_1 = \sqrt{\frac{48}{15}x_o - \frac{64}{15}y_o - \frac{24}{5}x_o + \frac{32}{5}y_o + 15}$

$$= \sqrt{\frac{-24x_o + 32y_o + 225}{15}}$$

(2) இல் பிரதியிட, $\ell_2 = \sqrt{\frac{48}{15}x_o - \frac{64}{15}y_o - \frac{48}{5}x_o + \frac{64}{5}y_o + 60}$

$$= \sqrt{\frac{-90x_o + 128y_o + 900}{15}}$$

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \sqrt{\frac{-24x_o + 32y_o + 225}{-96x_o + 128y_o + 900}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$ ஆகும்.

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{S_1 \text{ இன் ஆரை}}{S_2 \text{ இன் ஆரை}}$$

1989

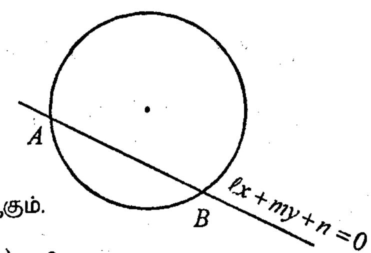
$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, \quad U \equiv \ell x + my + n = 0$

நாண் உற்பத்தியில் செங்கோணத்தை

எதிரமைக்கும் எனின் $\angle AOB = 90^\circ$

எனவே A, B யினூடு செல்லும் வட்டம்

உற்பத்தி O வினூடு செல்லும்.



A, B யினூடு செல்லும் வட்டம் $S + \lambda u = 0$ ஆகும்.

$$\left(x^2 + y^2 - 2gx + 2fy + c\right) + \lambda\left(\ell x + my + n\right) = 0$$

(0,0) இனூடு செல்வதால், $c + \lambda n = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-c}{n}$ ஆகும்.

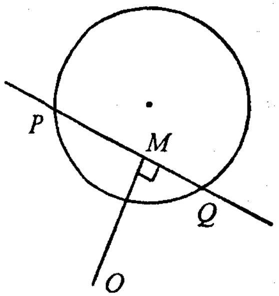
எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+\left(2g-\frac{\ell c}{n}\right)x+\left(2f-\frac{mc}{n}\right)y=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

மாறும் நாண் PQ வின் சமன்பாடு $\ell x+my+n=0$ என்க.

எனவே PQ ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் O வினூடு செல்லும். (1) இலிருந்து எனவே வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+\left(2g-\frac{\ell c}{n}\right)x+\left(2f-\frac{mc}{n}\right)y=0$$



வட்டத்தின் மையம் $\left(-g+\frac{\ell c}{2n}, -f+\frac{mc}{2n}\right)$

$\ell x+my+n=0$ இலிருப்பதால்,

$$\ell\left(-g+\frac{\ell c}{2n}\right)+m\left(-f+\frac{mc}{2n}\right)+n=0$$

$(\ell g+mf)\,2n=\left(\ell^2+m^2\right)c+2n^2$ ஆகும். ....(2)

$M\equiv(x_o, y_o)$ எனின்,

OM இன் படித்திறன் $=\dfrac{y_o}{x_o}$

$$\left(\frac{y_o}{x_o}\right)\left(\frac{-\ell}{m}\right)=-1 \;\Rightarrow\; \frac{x_o}{\ell}=\frac{y_o}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(x_o, y_o) $\ell x+my+u=0$ இலிருப்பதால் $\ell x_o+my_o=-n$ ....(4)

$$\frac{x_o}{\ell}=\frac{y_o}{m}=\frac{\ell x_o+my_o}{\ell^2+m^2}=\frac{-n}{\ell^2+m^2}=k$$

$$\frac{x_o}{\ell}=\frac{y_o}{m}=\frac{x_o^2+y_o^2}{\ell x_o+my_o}=\frac{x_o^2+y_o^2}{-n}=k$$

$$\frac{x_o}{\ell}=\frac{y_o}{m}=\frac{gx_o+fy_o}{\ell g+mf}=k$$

(2) இல் பிரதியிட.

$$(gx_o+fy_o)-\frac{2n}{k}=\frac{-nc}{k}+(-2n)\left(\frac{x_o^2+y_o^2}{k}\right)$$

$$2\left(gx_o+fy_o\right)=-c-2\left(x_o^2+y_o^2\right)$$

$$x_o^2+y_o^2+gx_o+fy_o+\frac{c}{2}=0$$

(x_o, y_o) இன் ஒழுக்கு $x^2+y^2+gx+fy+\dfrac{c}{2}=0$ ஆகும்.

$\boxed{1990}$

$$S\equiv x^2+y^2-2x-6y+1=0$$

$(x-1)^2+(y-3)^2=3^2$ மையம் (1,3) ஆரை 3

$$S^1\equiv 3x^2+3y^2-21x+2y+35=0$$

$$x^2+y^2-7x+\frac{2}{3}y+\frac{35}{3}=0$$

$\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$ மையம், $\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{1}{3}\right)$; ஆரை $\dfrac{5}{6}$

மையங்களுக்கிடைத் தூரம் $=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3+\frac{1}{3}\right)^2}$

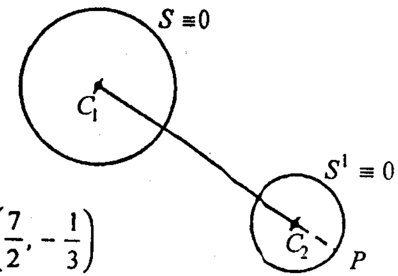
$$=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{100}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{625}{36}}=\frac{25}{6}$$

ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகை $=3+\dfrac{5}{6}=\dfrac{23}{6}$

மையங்களுக்கிடைத் தூரம் > ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை.
எனவே ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும் வெளியில் அமையும்.

S இலிருந்து அதி தூரத்தில் உள்ள புள்ளி P, மையங்கள் $C_1 C_2$ ஐ இணைக்கும் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியாகும்.



$C_1 C_2 = \dfrac{25}{6}$, $\quad C_2 P = \dfrac{5}{6}$

$C_1 C_2 : C_2 P = 5 : 1 \quad C_1 \equiv (1, 3),\ C_2 \equiv \left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{1}{3}\right)$

$P(x_o, y_o)$ எனின்,

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right) \equiv \left(\frac{5x_o + 1}{6}, \frac{5y_o + 3}{6}\right)$$

$P(x_o, y_o) \equiv (4, -1)$ ஆகும்.

P யிலிருந்து S இற்கான தொடலி $\ell x + my + n = 0$ என்க.

இது $(4, -1)$ இனூடு செல்வதால் $4\ell - m + n = 0;\quad n = m - 4\ell$

தொடலி : $\ell x + my + (m - 4\ell) = 0$ ஆகும். ....(1)

$(1, 3)$ இலிருந்து செ. தூரம் $= 3$; $\dfrac{|\ell + 3m + (m - 4\ell)|}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} = 3$

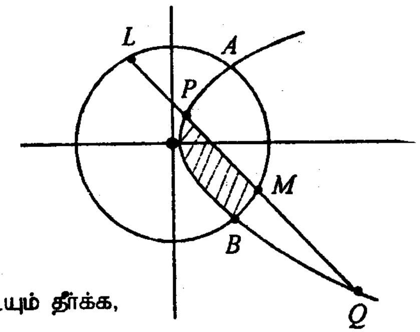
$$9(\ell^2 + m^2) = (-3\ell + 4m)^2$$

$$7m^2 - 24\ell m = 0 \Rightarrow m = 0, \qquad m = \frac{24\ell}{7}$$

$m = 0$ எனின், தொடலி $x - 4 = 0$ ஆகும்.

$m = \dfrac{-12\ell}{15}$ எனின், தொடலி $7x + 24y = 0$ ஆகும்.

1990



$x^2 + y^2 = 5$; வட்டமையம் $(0, 0)$

ஆரை $\sqrt{5}$

$y^2 = 4x$ பரவளைவு

$x + y = 1$ நேர்கோடு

(i) $x^2 + y^2 = 5,\ y^2 = 4x$ இரண்டையும் தீர்க்க,

$x^2 + 4x - 5 = 0 \qquad (x + 5)(x - 1) = 0;\ \ x = 1, 5$

$x = 1,\ y = \pm 2 \qquad A(1, 2),\ B(1, -2)$ ஆகும். ....**(1)**

(ii) $x^2 + y^2 = 5,\ \ x + y = 1$ இரண்டையும் தீர்க்க.

$x^2 + (1 - x)^2 = 5;\ \ 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = -1, 2 \qquad x = -1,\ \ y = 2$

$x = 2,\ \ y = -1$

$L \equiv (-1, 2),\quad M \equiv (2, -1)$ ....**(2)**

(iii) $y^2 = 4x,\ \ x + y = 1$ இரண்டையும் தீர்க்க,

$y^2 - 4(1 - y) = 0 \qquad y^2 + 4y - 4 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$y = -2 + 2\sqrt{2}$ எனின், $x = 3 - 2\sqrt{2}$

$y = -2 - 2\sqrt{2}$ எனின், $x = 3 + 2\sqrt{2}$

$P \equiv (3 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}) \qquad Q \equiv (3 + 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$........**(3)**

$y - 2x = \lambda$ என்னும் நேர்கோட்டைக் கருதுக. இது வட்டத்துக்கு தொடலியாகும் போது $\dfrac{|0-0-\lambda|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow \lambda \pm 5$

$|y - 2x|$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 5 ஆகும்.

மேலும் $x^2 + y^2 = 5$, $y - 2x = -5$ இரண்டையும் தீர்க்க.

$$x^2 + (-5 + 2x)^2 = 5$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

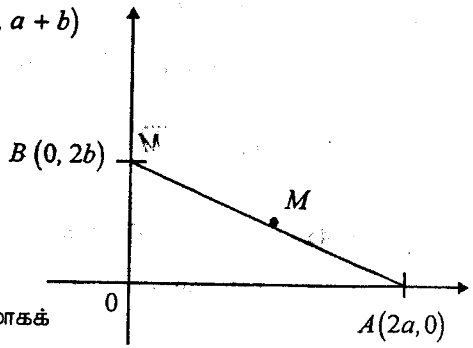
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$(x-2)^2 = 0$ $\therefore$ தொடுபுள்ளி $(2, -1)$ – இது R ஆகும்.

எனவே பிரதேசம் R இனுள் புள்ளி B இருக்கும்.

1990 விசேட

$A \equiv (2a, o)$, $B\,(o, 2b)$, $C\,(a+b, a+b)$



AC யின் படித்திறன் $\dfrac{a+b}{b-a} = m_1$

BC யின் படித்திறன் $\dfrac{a-b}{a+b} = m_2$

$m_1 m_2 = -1$ என்பதால்,

$\angle ACB = 90^\circ$. எனவே AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் C யினூடாகச் செல்லும்.

மேலும் $\angle AOB = 90^\circ$ என்பதால் இவ்வட்டம் O வினூடு செல்லும்.

வட்டத்தின் சமன்பாடு :

(ε) மையம் $M \equiv (a, b)$ ஆரை $\sqrt{a^2 + b^2}$

சமன்பாடு $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$$

$x = 2a,\ y = 2b$ என $x^2 + y^2 - 2ax - 2bx$ இல் பிரதியிட

$(2a)^2 + (2b)^2 - 2a \times 2a - 2b \times 2b = 0$ என்பதால் வட்டம்

$(2a, 2b)$ இனூடு செல்லும்.

வட்டம் $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$ இற்கு $B\,(O, 2b)$ இலுள்ள தொடலி

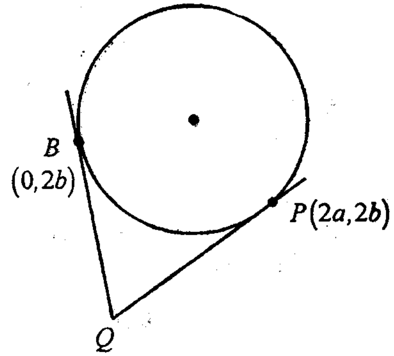
$$x \bullet 0 + 2by - a\,(x + o) - b\,(y + 2b) = 0$$

$$by - ax - 2b^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$P\,(2a, 2b)$ இல் தொடலி

$$x \cdot 2a + y \cdot 2b - a\,(x + 2a) - b\,(y + 2b) = 0$$

$$ax + by - 2a^2 - 2b^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



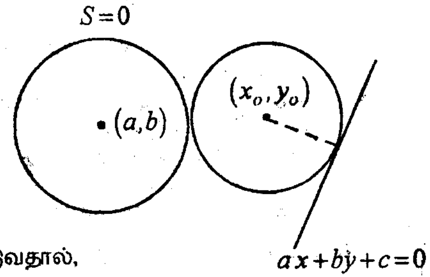
(1), (2) ஐத் தீர்க்க.

$Q \equiv \left(a, 2b + \dfrac{a^2}{b}\right)$ ஆகும்.

நீளம் $PQ = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a^2}{b}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{a^2\,(b^2 + a^2)}{b^2}}$$

$$= \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$$



$S = 0$ இன் மையம் (a, b)

$S = 0$ ஐ வெளிப்புறமாகத் தொடும்.

வட்டத்தின் மையம் (x_o, y_o) என்க.

இவ்வட்டம் $ax + by + c = 0$ ஐத் தொடுவதால்,

ஆரை $= \dfrac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

மையங்களுக்கிடைத் தூரம் = ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை.

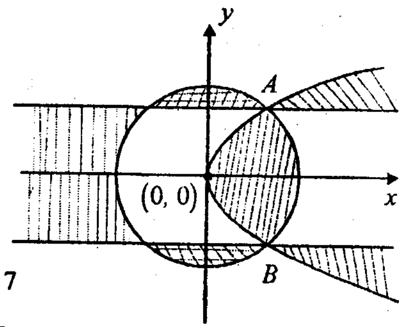
$$\sqrt{(x_o-a)^2 + (y_o-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sqrt{(x_o-a)^2 + (y_o-b)^2} = \frac{|ax_o+by_o+c|\ a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1990 விசேட

$x^2 + y^2 = 8$ வட்டம், $y^2 = 7x$ பரவளைவு

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 8 \\ y^2 = 7x \end{array}\right\}$ வெட்டும்புள்ளி A, B என்க.



$x^2 + 7x - 8 = 0$ $\quad A \equiv (1, \sqrt{7})$

$(x+8)(x-1) = 0$ $\quad B \equiv (1, -\sqrt{7})$

$x = -8, 1$

(i) $x^2 + y^2 - 8 \le 0$, $\quad y^2 \le 7x$, $\quad y^2 \le 7$

(ii) $x^2 + y^2 - 8 \le 0$ $\quad y^2 \ge 7x$, $\quad y^2 \ge 7$

(iii) $x^2 + y^2 - 8 \ge 0$ $\quad y^2 \le 7x$, $\quad y^2 \ge 7$

(iv) $x^2 + y^2 - 8 \ge 0$ $\quad y^2 \ge 7x$, $\quad y^2 \le 7$

$x^2 + y^2 - 8$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $= -8$

($x^2 + y^2$ இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானம் O ஆகும்.)

$x^2 + y^2 - 8$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் வரையறுக்கப்படவில்லை.

(பிரதேசம் R இல் புள்ளி (x, y) முடிவிலிவரை செல்லும்).

1991

$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ இற்கு $(1, -2)$ இலிருந்து வரையப்படும்.

தொடலிகளின் தொடுகை நாண்

$xx_o + yy_o + 3(y + y_o) + 5 = 0$ .... (A)

$x - 2y + 3(y - 2) + 5 = 0$

$x + y - 1 = 0$ .... (1)

$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$ இற்கு (1, -2) இலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகை நாண்.

$xx_o + yy_o + (x + x_o) + 4(y + y_o) + 5 = 0$ .... (B)

$x - 2y + (x + 1) + 4(y - 2) + 5 = 0$

$2x + 2y - 2 = 0;$ $\quad x + y - 1 = 0$ .... (2)

எனவே இரு தொடுகை நாண்களும் பொருந்தும்.

இரு தொடுகை நாண்களும் பொருந்தும் வேறொரு புள்ளி (x_o, y_o) என்க.

(A) யிலிருந்து தொடுகை நாண்

$xx_o + (y_o + 3)\,y + (5 + 3y_o) = 0$ .... (3)

(B) யிலிருந்து தொடுகை நாண்

$(1 + x_o)\,x + (4 + y_o)\,y + (x_o + 4y_o + 5) = 0$ .... (4)

(3), (4) என்பன ஒரே நேர்கோட்டைக் குறிப்பதால்

$$\frac{1 + x_o}{x_o} = \frac{4 + y_o}{3 + y_o} = \frac{x_o + 4y_o + 5}{5 + 3y_o}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_o} = \frac{1}{3 + y_o} = \frac{x_o + y_o}{5 + 3y_o}$$

$$\frac{1}{3 + y_o} + \frac{3 + 2y_o}{5 + 3y_o} \Rightarrow 2{y_o}^2 + 6y_o + 4 = 0$$

$${y_o}^2 + 3y_o + 2 = 0$$

$$(y_o + 2)(y_o + 1) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_o = -2 \\ x_o = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y_o = -1 \\ x_o = 2 \end{array}\right\}$$

$\therefore$ மற்றைய புள்ளி $(-2, -1)$ ஆகும்.

1991

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ நீள்வளையம், $x^2 - 4y = 0$ பரவளைவு, $y - x + 1 = 0$ நேர்கோடு

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x^2 = 4y \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0 \qquad y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ எனின், $\quad x^2 = -2 + 2\sqrt{5}$

$$x = \pm\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$$

$$A\left(\sqrt{2\sqrt{5} - 2}\,, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right), \qquad B \equiv \left(-\sqrt{2\sqrt{5} - 2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y - x + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{x^2}{4} + (x - 1)^2 = 1$$

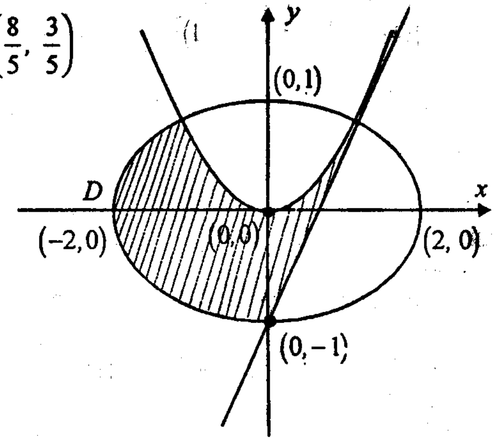
$$x^2 + 4(x - 1)^2 = 4$$

$$5x^2 - 8x = 0$$

$$x(5x - 8) = 0$$

$$x = 0, \; x = 8/5$$

$P(0, 1) \quad Q \equiv \left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$



$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4y \\ y - x + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x^2 = 4(x - 1)$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

$\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \le 0 \qquad x^2 + y^2$ இன் உயர்வுப்

$x^2 - 4y \ge 0 \qquad$ பெறுமானம் $= OD^2 = 4$

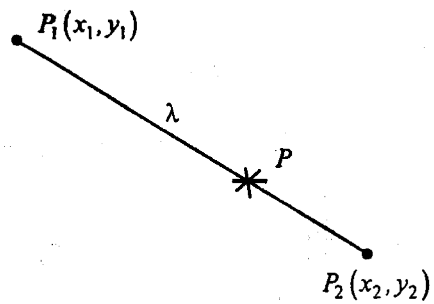
$y - x + 1 \ge 0$

1991 விசேட

$P_1 \equiv (x_1, y_1), \; P_2 \equiv (x_2, y_2)$

$$P_1P : PP_2 = \lambda : 1$$

$$P \equiv \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$$



$$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 164 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13^2$$

P வட்டத்தில் கிடக்கும் எனின்,

$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} - 1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} - 2\right)^2 = 13^2$$

$$(x_1 + \lambda x_2 - 1 - \lambda)^2 + (y_1 + \lambda y_2 - 2 - 2\lambda)^2 = 169(1 + \lambda)^2$$

$$\left[(x_1 - 1) + \lambda (x_2 - 1)\right]^2 + \left[(y_1 - 2) + \lambda (y_2 - 2)\right]^2 = 169 (1 + \lambda)^2$$

$$\left[(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2 - 169\right]\lambda^2 + 2\left[(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 2)(y_2 - 2) - 169\right]\lambda$$
$$+ (x_1 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2 - 169 = 0$$

இங்கு $A = (x_2 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2 - 169$

$B = 2\left[(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 2)(y_2 - 2) - 169\right]$

$C \equiv (x_1 - 1)^2 + (y - 2)^2 - 169$

(i) $P_1 \equiv (x_1, y_1) \equiv (6, 14)$ எனின்,

$$C = \left[(6 - 1)^2 + (14 - 2)^2 - 169\right] = 0$$

எனவே $A\lambda^2 + B\lambda = 0$

$P_1 \equiv (6, 14)$ எனின், P_1 தரப்பட்ட வட்டத்திலிருக்கும். $A\lambda^2 + B\lambda = 0$

$\lambda (A\lambda + B) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ அல்லது $\lambda = -\dfrac{B}{A}$

தொடலியாக அமைய $\lambda = 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$\lambda = -\dfrac{B}{A} = 0 \Rightarrow B = 0$

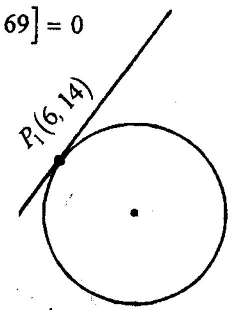
$B = O$ எனில் $2\left[(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 2)(y_2 - 2) - 169\right] = 0$

$x_1 = 6, y_1 = 14$

$2\left[5(x_2 - 1) + 12(y_2 - 2) - 169\right] = 0$

$5x_2 + 12y_2 - 198 = 0$

தொடலியின் சமன்பாடு $5x + 12y - 198 = 0$

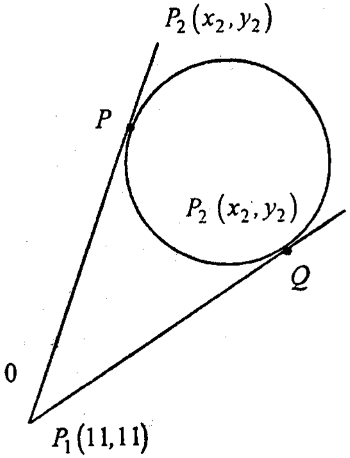


(ii) $P_1 (11, 11)$. $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ பொருந்தும் மூலங்களைக் கொண்டிருக்க $\Delta = B^2 - 4AC = 0$

$A = (x_2 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2 - 169$

$B = 2\left[10x_2 + 9y_2 - 197\right]$

$C = 12$



பொருந்தும் மூலங்கள் எனின் P_1PP_2 தொடலியாக அமையும்.

$P_2 \rightarrow P$ ஆக

(x_2, y_2) வட்டத்தில் அமையும்.

எனவே $(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 - 169 = 0$

ஆகவே $A = 0$

$B^2 = 4AC$ இல் $A = 0$ எனின், $B = 0$

$B = 0$ எனின், $10x_2 + 9y_2 - 197 = 0$

எனவே (x_2, y_2) என்னும் புள்ளி P ஆகவோ அல்லது Q ஆகவோ இருக்கும்.

எனவே தொடுகை நாண் PQ வின் சமன்பாடு $10x + 9y - 197 = 0$ ஆகும்.

1991 விசேட

$x^2 + y^2 = 1$ மையம் $(0, 0)$ ஆரை 1 அலகுள்ள வட்டம்

$x^2 y^2 = x^2 - y^2$

$y^2 (1 + x^2) = x^2$

$y^2 = \dfrac{x^2}{(1 + x^2)}$ $\qquad y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ இன் வளையியை வரைவதற்கு,

$x > 0$ எனின் $y > 0$, $x = 0$ எனின் $y = 0$, $x < 0$ எனின் $y < 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2} \times 1 - x \times \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times 2x}{\left(1+x^2\right)}$$

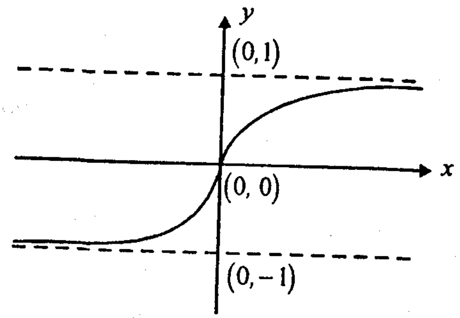
$$= \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$x = 0$ இல் $\frac{dy}{dx} = 1$ எல்லா x இற்கும் $\frac{dy}{dx} > 0$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x_2}+1}}$$

$x \to \alpha$ ஆக, $y \frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x_2}+1}} \to 1$

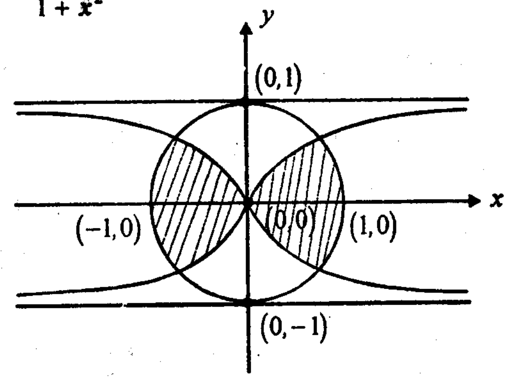
$x \to -\alpha$ ஆக, $y = \frac{x}{-x\sqrt{\frac{1}{x_2}+1}} \to -1$



$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$y = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ என்பது $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ என்ற வளையி x அச்சின் மீது தெறிப்படைவது போன்றதாகும்.

$x^2 + y^2 = 1,$ $\quad y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$



$y - x = \lambda$ ஐக் கருதுக. இது நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$y - x - \lambda = 0$ வட்டத்துக்கு தொடலியாகும் போது λ விற்கு உயர்வு, இழிவு பெறப்படும்.

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$y - x$ இன் உயர்வு $= \sqrt{2}$, $y - x$ இன் இழிவு $= -\sqrt{2}$ ஆகும்.

$\boxed{1992}$

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0;$ $\quad \ell = px + qy + r = 0$

$S + \lambda\ell = 0$

இங்கு x^2 இன் குணகம் $= y^2$ இன் குணகம் $(\neq 0) \cdot xy$ உறுப்பு இல்லை. எனவே இது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

$S = 0$, $\ell = 0$ என்பன A, B என்னும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ $\quad px_1 + qy_1 + r = 0$

$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$ $\quad px_2 + qy_2 + r = 0$

எனவே λ இன் எல்லாப் பெறுமானத்திற்கும்

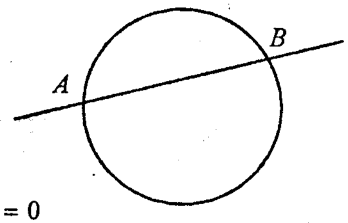
$$\left(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c\right)+\lambda\left(px_1+qy_1+r\right)=0+\lambda\times 0=0$$

$$\left(x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c\right)+\lambda\left(px_2+qy_2+r\right)=0+\lambda\times 0=0$$

எனவே $S+\lambda\ell=0$ ஆனது A, B யினூடு செல்லும் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$S\equiv x^2+y^2-6x+2y-17=0$

$\ell\equiv x-y+2=0$



இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டம்

$$\left(x^2+y^2-6x+2y-17\right)+\lambda\left(x-y+2\right)=0$$

வட்டத்தின் மையம் $\equiv\left(\frac{6-\lambda}{2},\frac{-2+\lambda}{2}\right)$ AB விட்டம்

மையம் $\left(\frac{6-\lambda}{2},\frac{-2+\lambda}{2}\right)$ என்பது $x-y+2=0$ இலிருப்பதால்

$$\frac{6-\lambda}{2}-\frac{-2-\lambda}{2}+2=0$$

$$6-\lambda+2-\lambda+4=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=6$$

$S^1\equiv x^2+y^2-4y-5=0$ ....(1)

$\equiv(x-0)^2+(y-2)^2=3^2$ மையம் $(0,2)$ ஆரை 3.

$S^{11}\equiv x^2+y^2-8x+2y+13=0$

$(x-4)^2+(y+1)^2=2^2$ மையம் $(4,-1)$ ஆரை 2

மையங்களுக்கிடைத் தூரம் $=\sqrt{(4-0)^2+(-1-2)^3}=5.$

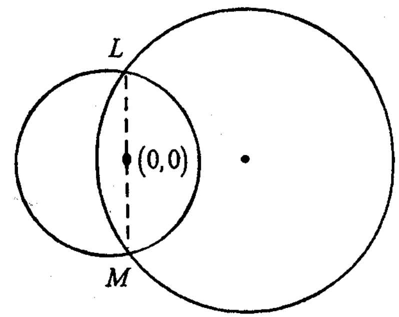
ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகை $3+2=5$

எனவே இருவட்டங்களும் வெளிப்புறமாகத் தொடும்.

(ii) $S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

$S^1\equiv x^2+y^2-1=0$

பொதுநாண் LM இன் சமன்பாடு



$S-S^1=0$

$2gx+2fy+(c+1)=0$

$LM,(0,0)$ இனூடு செல்வதால் $0+0+(c+1)=0$

ஆகவே $c=-1$ ....(1)

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$ $(2,0)$ இனூடு செல்வதால்

$4+0+4g+0+c=0,$ ஆகவே $g=-\frac{3}{4}$ ....(2)

$S=0;$ $x^2+y^2-4y-5=0$ ஐச் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால்,

$2gg^1+2ff^1=c+c^1$

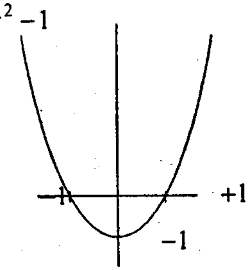
$2\times g\times 0+2f\times(-2)=-1-5$

$f=\frac{3}{2}$ ....(3)

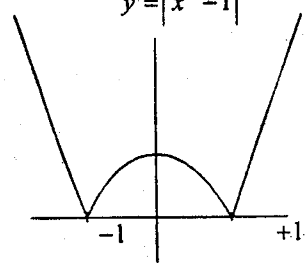
ஆகவே, $S\equiv x^2+y^2-\frac{3}{2}x+3y-1=0$ ஆகும்.

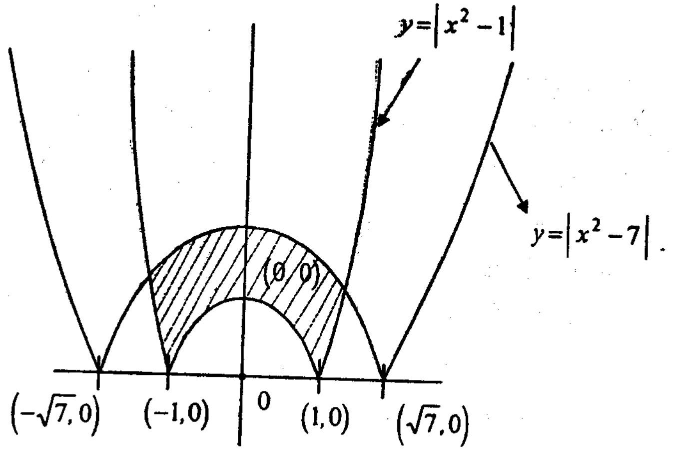
1992

(ii) $y=x^2-1$



$y=\left|x^2-1\right|$





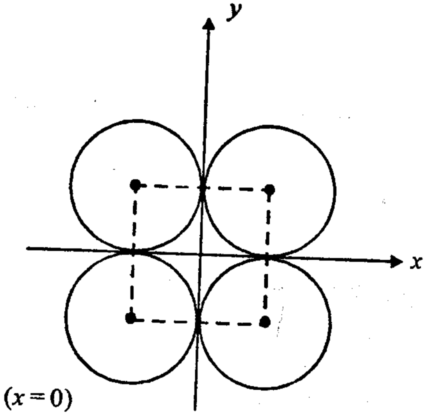
$$|x^2-1|<y<|x^2-7|$$

$y=|x^2-1|$ என்பது, $y=x^2-1$ என்ற வளையியின் x அச்சின் கீழ் உள்ள பகுதி x அச்சில் தெறிப்படைவது போல அமையும். இதேபோல் $y=|x^2-7|$ என்ற வளையியும் ஆகும்.

1993

(a) மையம் (a, b); ஆரை $r\,(>0)$ என்க.
வட்டத்தின் சமன்பாடு:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



இவ்வட்டம் x அச்சைத் தொடுவதால் $(y=0)$
மையம் (a, b) இலிருந்து $y=0$ இன் செ. தூரம் = ஆரை

$$|b|=r \Rightarrow b=\pm r$$

இவ்வட்டம் y அச்சைத் தொடுவதால் $(x=0)$
மையம் (a, b) இலிருந்து $x=0$ இன் செ. தூரம் = ஆரை

$$|a|=r \quad \Rightarrow \quad a=\pm r$$

எனவே நான்கு மையங்கள் பெறப்படும்.

$(r, r), (r, -r), (-r, r), (-r, -r)$
நான்கு வட்டங்கள் வரையலாம். அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$
$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$
$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$$
$$(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$$

அச்சுக்கள் இரண்டையும் தொடும் வட்டம்

$$(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2 \text{ ஆகும்}$$

இவ்வட்டம் $(2, 1)$ இனூடு செல்வதால்

$$(2\pm r)^2+(1\pm r)^2=r^2$$

4 சமன்பாடுகள் பெறப்படும்

$$r^2+6r+5=0 \quad \text{..........} (1)$$
$$r^2-6r+5=0 \quad \text{..........} (2)$$
$$r^2+2r+5=0 \quad \text{..........} (3)$$
$$r^2-2r+5=0 \quad \text{..........} (4)$$

சமன்பாடு (3), (4) இற்கு தீர்வு இல்லை.
சமன்பாடு (1), (2) இல் (1) ஆம் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $r=-5,\ r=-1$ பொருந்தாது. ஏனெனில் $r>0$.
சமன்பாடு (2) இலிருந்து $(r-5)(r-1)=0; \quad r=5, 1$ ஆகும்.
வட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1^2 \text{ ஆகும்.}$$

(b) $x^2+y^2=25,\ y-x+1=0$ என்பன வெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x^2+y^2-25)+2\lambda(y-x+1)=0$$

மையம் $(\lambda, -\lambda)$; ஆரை $\sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 25}$ ஆகும்.

மையம் $(\lambda, -\lambda)$ விலிருந்து $x + y - 25 = 0$ இன் செங்குத்துத் தூரம் வட்டத்தின் ஆரை $\sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 25}$ இற்கு சமமாகும்.

$$\frac{|\lambda - \lambda - 25|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 25}$$

$$25^2 = 2\left(2\lambda^2 - 2\lambda + 25\right)$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda - 575 = 0$$

$$(2\lambda - 25)\;(2\lambda + 23) = 0$$

$2\lambda = 25$ அல்லது $2\lambda = -23$

வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$$\left(x^2 + y^2 - 25\right) + 25\,(y - x + 1) = 0$$

$$\left(x^2 + y^2 - 25\right) - 23\,(y - x + 1) = 0$$

$$S \equiv x^2 + y^2 - 25x + 25y = 0$$

$$S^1 \equiv x^2 + y^2 + 23x - 23y - 48 = 0$$

S இன் மையம் $C \equiv \left(\frac{25}{2}, \frac{-25}{2}\right)$; ஆரை $r = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2}$

$$= \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

S^1 இன் மையம் $C^1 \equiv \left(\frac{-23}{2}, \frac{23}{2}\right)$; ஆரை $r^1 = \sqrt{\left(\frac{-23}{2}\right)^2 + \left(\frac{23}{2}\right)^2 + 48}$

$$= \sqrt{\frac{529 + 52a + 192}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1250}{4}} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

இரண்டு வட்டங்களினதும் ஆரைகள் சமமாகும்.

$$CC^1 = \sqrt{\left(\frac{25 + 23}{2}\right)^2 + \left(\frac{-25 - 23}{2}\right)^2}$$

$$= 24\sqrt{2}$$

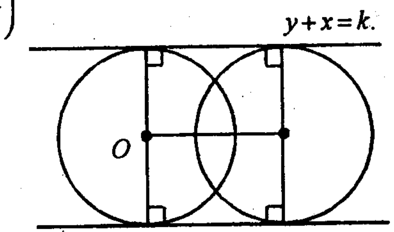
$$r + r^1 = 25\sqrt{2}$$

$$CC^1 < r + r^1$$

எனவே இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெட்டும். இருவட்டங்களினதும் ஆரைகள் சமம் என்பதால் இரு பொதுத் தொடலிகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டாது.

CC^1 இன் சமன்பாடு $y - \frac{23}{2} = -1\left(x + \frac{23}{2}\right)$

$$y + x = 0$$



பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடு $y + x = k$ என்னும் வடிவில் அமைந்திருக்கும்.

$\left(\frac{25}{2}; \frac{25}{2}\right)$ இலிருந்து $y + x = k$ இன் செங்குத்துத்தூரம் $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ ஆகும்.

$$\frac{\left|\frac{-25}{2} + \frac{25}{2} + k\right|}{\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

$$|k| = 5$$

$$k = \pm 25$$

பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகள்

$$y + x = \pm 25$$

$y + x + 25 = 0, \quad y + x - 25 = 0$ ஆகும்.

1993

$S \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$ .... C_1 மையம் $(0, 0)$ ஆரை 3

$S_2 \equiv (x-5)^2 + y^2 - 4 = 0$ .... C_2 மையம் $(5, 0)$ ஆரை 2

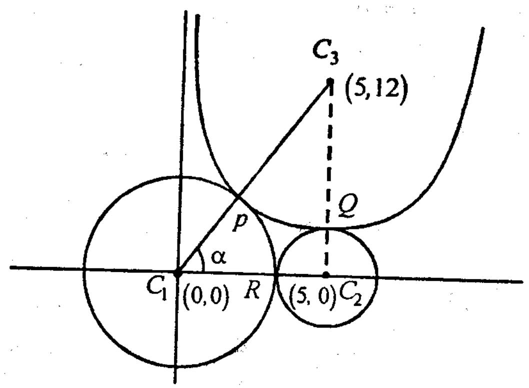
$S_3 \equiv (x-5)^2 + (y-12)^2 - 100 = 0$ .... C_3 மையம் $(5, 12)$ ஆரை 10.

$C_1 C_2 = 5, \quad r_1 + r_2 = 5$

$C_1 C_3 = 12, \quad r_2 + r_3 = 12$

$C_1 C_3 = 13, \quad r_1 + r_3 = 13$

எனவே மூன்றுவட்டங்களும் ஒன்றைபொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன.



$\Delta C_1C_2C_3$ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ ச. அலகுகள்

ஆரைச் சிறை C_1PR இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 3^2 \times \alpha$ [$\tan\alpha = \frac{12}{5}$, α ஆரையினில்]

ஆரைச்சிறை C_2RQ இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{2}$

ஆரைச்சிறை C_3QP இன்பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 10^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

ஆகவே சிறிய விற்களால் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு

$$= 30 - \left[\frac{1}{2} \times 3^2 \times \alpha + \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times 10^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$$

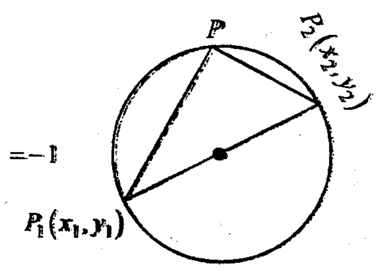
$$= 30 - \left[\frac{9\alpha}{2} + \pi + 25\pi - 50\alpha\right]$$

$$= 30 - \left[\frac{9}{2}\alpha + 26\pi - 50\alpha\right]$$

$$= 30 - \frac{1}{2}\left[52\pi - 91\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(60 - 52\pi + 91\alpha\right) \text{ ஆகும்.}$$

1994



P_1P_2 விட்டம். P பரிதியில் ஒருபுள்ளி

$P(x, y)$.

PP_1 இன்படித்திறன் $\times$ PP_2 இன்படித்திறன் $= -1$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

$(y-y_1)(y-y_2) + (x-x_1)(x-x_2) = 0$ ஆகும்.

$S \equiv x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = r^2$

$(x-a)^2 + (y-0)^2 = r^2$

இங்கு மையம் $(a, 0)$ ஆரை r ஆகும்.

<u>வகை</u> $r \geq a$

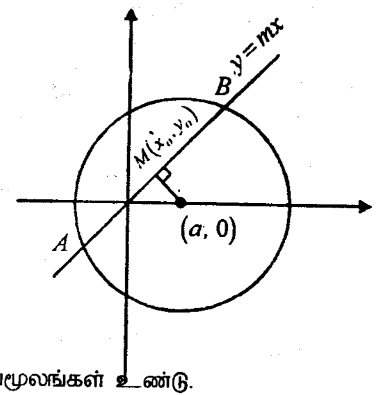
மையம் $(a, 0)$ ஆரை $r = a$ எனின், வட்டம் y அச்சைத் தொடும்.

மையம் $(a, 0)$ ஆரை $r > a$ எனின், வட்டம் y அச்சை வெட்டும்.

வட்டத்தின் மாறும் நாண் $y = mx$ என்க.

$$x^2+y^2-2ax+a^2 = r^2$$

$y = mx$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க.



$$x^2+m^2x^2-2ax+(a^2-r^2)$$

$$(1+m^2)\,x^2-2ax+(a^2-r^2)=0$$

$$\Delta = 4a^2-4\,(1+m^2)\,(a^2-r^2) > 0.$$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு இருவேறு மெய்மூலங்கள் உண்டு.

மூலங்கள் x_1, x_2 என்க.

$$x_1+x_2 = \frac{2a}{1+m^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2-r^2}{1+m^2}$$

$M \equiv (x_o, y_o)$ எனின், $\quad x_o = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{a}{1+m^2}$

$y_o = mx_o$ என்பதால், $\quad y_o = \dfrac{ma}{1+m^2}$

ஆகவே $M \equiv \left(\dfrac{a}{1+m^2}, \dfrac{ma}{1+m^2}\right)$ ஆகும்.

$$= (x_o, y_o)$$

$$x_o = \frac{1}{1+m^2},$$

$$x_o = \frac{a}{1+m^2} = \frac{a}{1+\dfrac{y_o^2}{x_o^2}}$$

$$x_o = \frac{ax_o^2}{x_o^2+y_o^2}$$

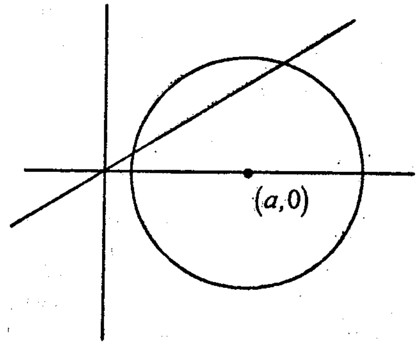
$$x_o^2+y_o^2-ax_o=0$$

$\therefore\ (x_o, y_o)$ இன் ஒழுக்கு $x^2+y^2-ax=0$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ மையமாகவும், $\dfrac{a}{2}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டமாகும்.

(b) $r < a$ என்க.



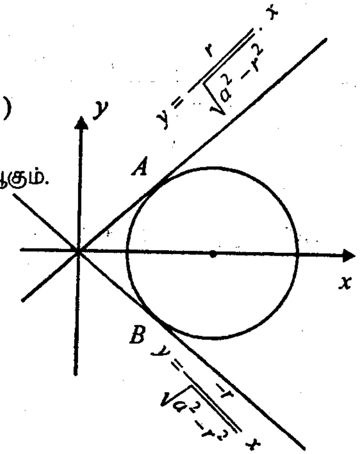
$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

மாறும் நாண் $y = mx$

$$(x-a)^2+(mx)^2 = r^2$$

$$(1+m^2)\,x^2-2ax+a^2-r^2 = 0 \quad \text{.............(1)}$$

x இன் மெய்பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$ ஆகும்.



$$4a^2-4(1+m^2)\,(a^2-r^2) \geq 0.$$

$$a^2-(1+m^2)\,(a^2-r^2) \geq 0$$

$$a^2-a^2+r^2-m^2\,(a^2-r^2) \geq 0$$

$$m^2\,(a^2-r^2) \leq r^2$$

$$m^2 \le \frac{r^2}{a^2-r^2} \qquad (r<a)$$

$$\frac{-r}{\sqrt{a^2-r^2}} \le m \le \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$$ ஆகும்.

மற்றைய m இன் பெறுமானங்களுக்கு $y=mx$, வட்டத்தை வெட்டாது.
எனவே தரப்பட்ட வீச்சில் m இருக்கும்போது நாணின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு (a) பகுதியில் தரப்பட்ட வட்டத்தின் வில் AB யாக அமையும்

(1) இலிருந்து $x_1+x_2 = \dfrac{2a}{1+m^2}$

$$x_1+x_2 = \frac{a^2-r^2}{1+m^2}$$

$x_1=x_2$ ஆக, $(x_1=x_2=x_o$ என்க)

$$2x_o = \frac{2a}{1+m^2}, \qquad x_o^2 = \frac{a^2-r^2}{1+m^2}$$

$$x_o = \frac{a}{1+m^2}, \qquad x_o^2 = \frac{a^2+r^2}{1+m^2}$$

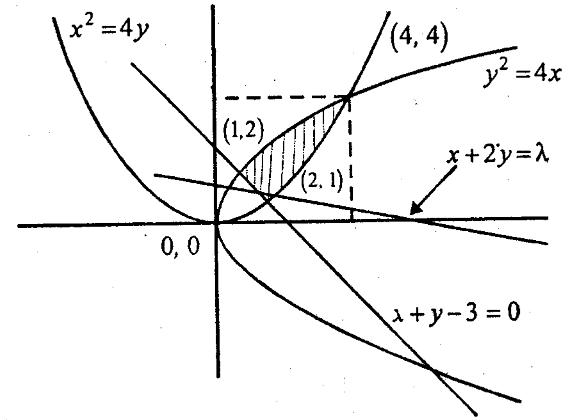
$$x_o = \frac{a^2-r^2}{a}$$

எனவே $A \equiv \left(\dfrac{a^2-r^2}{a}, \dfrac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right)$, $B \equiv \left(\dfrac{a^2-r^2}{a}, \dfrac{-r\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right)$

ஆகும்.

எனவே ஒழுக்கு $x^2+y^2-ax=0$ எனும் வட்டத்தின் வில் AB ஆகும்.

1994



(ii) $\left.\begin{array}{l} y^2-4x=0 \;.....(1) \\ x^2-4y=0 \;.....(2)\end{array}\right\}$

$y^2=4x$

$\frac{x^4}{16}=4x$

$x^4+64x=0$

$x(x^3-64)=0$

$x=0; \quad x=4$

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=4\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} y^2=4x \\ x+y-3=0\end{array}\right\}$

$y^2=4(3-y)$

$y^2+4y-12=0$

$(y+6)(y-2)=0$

$y=-6, \quad y=2$

ஆகவே $x=1, \; y=2$

$(1,2)$ இல் வெட்டும்.

$\left.\begin{array}{l} x^2=4y \\ x+y-3=0\end{array}\right\}$

$x^2=4(3-x)$

$x^2+4x-12=0$

$(x+6)(x-2)=0$

$x=-6, \; x=2$

$x=2, \; y=1$

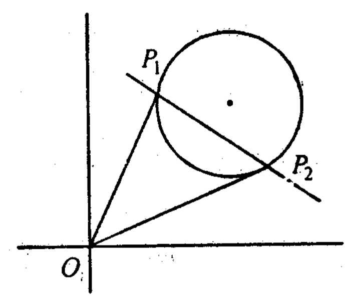
$(2, 1)$ இல் வெட்டும்.

$x+2y=\lambda$ எனும் நேர்கோட்டைக் கருதுக.

$x+2y=\lambda$ இங்கு λ இழிவாக இருக்க $x=2, \; y=1$

$$\therefore \; \underline{\underline{\lambda=4}}$$

1995



வட்டம்

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

நேர்கோடு $ax+by=1$ இரண்டும்

வெட்டும் புள்ளி $P(\alpha, \beta)$ என்க.

P, வட்டத்திலிருப்பதால்

$$\alpha^2+\beta^2+2g\alpha+2f\beta+c=0 \quad \text{..........................} (1)$$

P, நேர்கோட்டிலிருப்பதால்

$$a\alpha+b\beta=1 \quad \text{..........................} (2)$$

$(1), (2)$ இலிருந்து

$$\alpha^2+\beta^2+2g\alpha\,(a\alpha+b\beta)+2f\beta\,(a\alpha+b\beta)+c\,(a\alpha+b\beta)^2=0 \quad \text{............} (3)$$

என எழுதலாம்.

α^2 ஆல் (3) ஐப் பிரிக்க,

$$1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+2g\left(a+\frac{b\beta}{\alpha}\right)+2f\frac{\beta}{\alpha}\left(a+b\frac{\beta}{\alpha}\right)+c\left(a^2+\frac{2ab\beta}{\alpha}+\frac{b\beta^2}{\alpha^2}\right)=0$$

$$\left(1+2bf+cb^2\right)\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\left(2gb+2af+2abc\right)\frac{\beta}{\alpha}+\left(1+2ag+ca^2\right)=0 \quad \text{..........} (4)$$

$0\equiv(0,0),\quad P(\alpha,\beta)$ என்பதால்,

OP யின் படித்திறன் $\frac{\beta}{\alpha}$ உம் OP யின் சமன்பாடு $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ உம் ஆகும்.

படித்திறன் $m=\frac{\beta}{\alpha}$ என்பதால்,

சமன்பாடு (4) பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்.

$$\left(1+2bf+cb^2\right)m^2+\left(2gb+2af+2abc\right)m+\left(1+2ag+ca^2\right)=0$$

இது m இல் ஓர் இருபடிச்சமன்பர்டு இதன் மூலங்கள் m_1, m_2 எனின்,

$$m_1+m_2=\frac{-(2gb+2af+2abc)}{1+2bf+cb^2}\;;\; m_1,m_2=\frac{1+2ag+ca^2}{1+2bf+cb^2} \text{ ஆகும்.}$$

OP_1, OP_2 என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் $y=m_1x,\ y=m_2x$ ஆகும்.

இவ்வட்டம் உற்பத்தி $(0, 0)$ இனூடு செல்லும் எனின், $c=0$ ஆகும்.

(i) இப்பொழுது $m_1+m_2=\frac{-2(af+bg)}{1+2bf}$ .... (5)

$$m_1m_2=\frac{1+2ag}{1+2bf} \quad \text{..........................} (6)$$

மையம் $(-g,-f)$ ஐ O விற்கு இணைக்கும் சமன்பாடு, $y=\frac{f}{g}x$. ஆகும்.

$(4), (5)$ இலிருந்து $\frac{f}{g}$ ஐ a, b, m_1, m_2 இல் கணித்தல் வேண்டும்.

(6) இலிருந்து $1-m_1m_2=1-\frac{1+2ag}{1+2bf}=\frac{2bf-2ag}{1+2bf}$ .... (7)

$(5), (7)$ இலிருந்து

$$\frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}=\frac{-2\,(af+bg)}{2\,(bf-ag)}=\frac{bg+af}{ag-bf}$$

$\lambda=\frac{f}{g}$ என்க.

$$\frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}=\frac{b+a\lambda}{a-b\lambda} \quad \text{..........................} (A)$$

$$(A)\Rightarrow,\ \frac{a(m_1+m_2)-b(1-m_1m_2)}{1-m_1m_2}=\frac{a(b+a\lambda)-b(a-b\lambda)}{a-b\lambda}=\frac{(a^2+b^2)\lambda}{a-b\lambda} \quad \text{....} (8)$$

$$(A)\Rightarrow,\ \frac{b(m_1+m_2)+a(1-m_1m_2)}{1-m_1m_2}=\frac{b(b+a\lambda)+a(a-b\lambda)}{a-b\lambda}=\frac{a^2+b^2}{a-b\lambda} \quad \text{........} (9)$$

$(8), (9)$ இலிருந்து $\lambda=\frac{a(m_1+m_2)-b\,(1-m_1m_2)}{b(m_1+m_2)+a\,(1-m_1m_2)}$

OC யின் சமன்பாடு $y=\lambda x$ ஆகும்.

$$y=\frac{a(m_1+m_2)-b\,(1-m_1m_2)}{b(m_1+m_2)+a\,(1-m_1m_2)}\,x. \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $(y-m_1x)\,(y-m_2x)$

$$=y^2-(m_1+m_2)\,xy+m_1m_2\,x^2$$

$$=y^2+\frac{2\,(af+bg)}{1+2bf}\,xy+\frac{1+2ag}{1+2bf}\,x^2 \text{ ஆகும்.}$$

OP_1, OP_2 மீதுள்ள கோடுகளில் ஏதாவதொன்றின் மீதுள்ள புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x_o, y_o) எனின்,

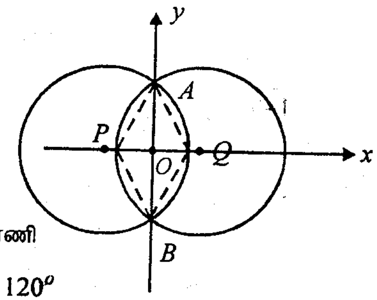
$$(y_o - m_1 x_o)\,(y_o - m_2 x_o) = 0$$

$$y_o^{\,2} + \frac{2\,(af+bg)}{1+2bf}\ x_o\,y_o + \frac{1+2ag}{1+2bf}\ x_o^{\,2} = 0. \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே (x_o, y_o) இன் ஒழுக்கு

$$(1+2bf)\,y^2 + 2(af+bg)\,xy + (1+2ag)\,x^2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

1995



$\Delta\, PAQ$ ஒரு சமபக்கமுக்கோணி

$$\left.\begin{aligned} PA &= 1 \text{ அலகு} \\ QA &= 1 \text{ அலகு} \\ PQ &= 1 \text{ அலகு} \end{aligned}\right\}$$

(8)

இவ்வாறே $\Delta\, PBQ$ ஒரு சமபக்க முக்கோணி

$$\angle APQ = 60^o, \quad \angle APB = 120^o$$

$O \equiv (0, 0)$ எனின், $P \equiv \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, ஆரை 1

$Q \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, ஆரை 1

P ஐ மையமாகக் கொண்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

Q ஐ மையமாகக் கொண்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

எனவே பொதுவான பிரதேசம் R இலுள்ள புள்ளிகள்

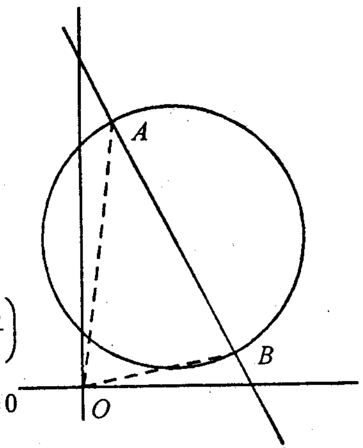
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 1, \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 1$ என்னும் இரு சமனிலிகளையும் திருப்தி செய்யும் (x, y) புள்ளிகளாகும்.

பரப்பளவு = ஆரைச்சிறை $PAQB$ + ஆரைச்சிறை $QAPB$ − சாய்துூரம் $APBQ$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{1}{3}\pi r^2 - PQ\cdot OA$$

$$= \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ச. அலகு.}$$

1996



கோணம் $AOB = 90^o$ என்பதால்,
AB விட்டமாகும் (A, O, B இனூடு செல்லும் வட்டத்திற்கு)
AB இனூடு செல்லும் வட்டம்

$$\left(x^2+y^2+2gx+2fy+c\right) + \lambda\,(ax+by-1) = 0.$$

வட்டத்தின் மையம் $\left(-g-\frac{a\lambda}{2}, -f-\frac{b\lambda}{2}\right)$

இவ்வட்டம் $O(0,0)$ இனூடு செல்வதால் $c - \lambda = 0$
$\lambda = c$

எனவே மையம் $\left(-g-\frac{ac}{2},\ -f-\frac{bc}{2}\right)$

மையம் விட்டம் AB, $ax+by-1=0$ இலிருப்பதால்,

$$a\left(-g-\frac{ac}{2}\right) + b\left(-f-\frac{bc}{2}\right) - 1 = 0$$

$$c\left(a^2+b^2\right) + (2ag+2bf+2) = 0$$

$$c\left(a^2+b^2\right) + 2\,(ag+bf+1) = 0.$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-6x-4y-3=0$$

$g=-3,\ f=-2,\ \ c=-3$ ஆகும் .... (1)

நாண் PQ வின் சமன்பாடு $ax+by=1$ என்க.

முதற்பகுதியிலிருந்து நாணின் நடுப்புள்ளி (x_o, y_o)

$$=\left(3+\frac{3a}{2},\ 2+\frac{3b}{2}\right) \text{ .... (2)}$$

மேலும்
$$-3\left(a^2+b^2\right)+2\left(ag+bf+1\right)=0$$
$$-3\left(a^2+b^2\right)+2\ \left(-3a-2b+1\right)=0$$

$$3\left(a^2+b^2\right)+2\ \left(3a+2b-1\right)=0 \text{ .... (3)}$$

$$x_o = 3+\frac{3a}{2} \Rightarrow\ a=\frac{2}{3}\left(x_o-3\right)$$
$$y_o = 2+\frac{3b}{2} \Rightarrow\ b=\frac{2}{3}\left(y_o-2\right)$$

(3) இல் பிரதியிட

$$3\left[\frac{4}{9}\left(x_o-3\right)^2+\frac{4}{9}\left(y_o-2\right)^2\right]+2\left[2\left(x_o-3\right)+\frac{4}{3}\left(y_o-2\right)-1\right]=0$$
$$2\left(x_o-3\right)^2+2\left(y_o-2\right)^2+6\left(x_o-3\right)+4\left(y_o-2\right)-3=0.$$

$\therefore\ (x_o, y_o)$ இன் ஒழுக்கு,

$$2\left(x-3\right)^2+2\left(y-2\right)^2+6\left(x-3\right)+4\left(y-2\right)-3=0$$
$$2x^2+2y^2-6x-4y-3=0.$$

1997

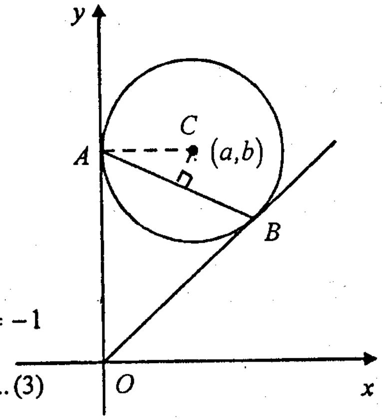
வட்டம் : $x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ மையம் (a, b), ஆரை $=|a|$

மையம் (a, b) இலிருந்து y அச்சிற்கான $(x=0)$ தூரம் $|a|$ ஆகும்.

எனவே வட்டம் y அச்சைத் தொடும்

$S\equiv x^2+y^2-2ax+2by+b^2=0$ என்க. .... (1)



உற்பத்தி O விலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுகை நாண் AB ஆகும்.

இங்கு A, y அச்சிலுள்ளது. $A\equiv(0, b)$

தொடுகை நாண் $y+tx=t$

$A\ (0, b)$ தொடுகை நாணில் இருப்பதால்,

$b+0=t\ \Rightarrow\ t=b$ .... (2)

OC என்பது AB யிற்கு செங்குத்து என்பதால்

OC யின் படித்திறன் $\times$ AB யின் படித்திறன் $=-1$

$\frac{b}{a}\times -b=-1,\quad a=b^2$ .... (3)

$$b=t,\ a=t^2$$

(1), (2), (3) இலிருந்து வட்டத்தின் சமன்பாடு

$\cancel{x^2+y^2-2t^2x+2ty+t^2=0}$ ஆகும்.

மற்றைய தொடலியின் சமன்பாடு $y-mx=0$ என்க.

மையம் $(a,b)\equiv\left(t^2, t\right)$ இலிருந்து தொடலிக்கான செங்குத்துத் தூரம் t^2 ஆகும்

$$\left|\frac{t-mt^2}{\sqrt{1+m^2}}\right|=t^2$$
$$\left(t-mt^2\right)^2=t^4\left(1+m^2\right)$$
$$t^2-2mt^3+m^2t^4=t^4+m^2t^4$$
$$t^2+2mt-1=0$$

ஆகவே $m=\frac{1-t^2}{2t}$

ஆகவே மற்றைய தொடலியின் சமன்பாடு $y = \frac{1-t^2}{2t} x$.

S இன்மையம் $(t^2, t) = (x_o, y_o)$ என்க.

$y_o^2 = t^2 = x_o$ என்பதால் (x_o, y_o) இன் ஒழுக்கு $y^2 = x$ ஆகும்.

$x^2 + y^2 - \frac{1}{2} x = 0$ இன் மையம் $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ஆரை $\frac{1}{4}$

மையங்களுக்கு இடைப்பட்டதூரம் $\sqrt{\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + (t-0)^2}$

$$= \sqrt{t^4 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{16}}$$

$$= t^2 + \frac{1}{4}$$

ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை $= t^2 + \frac{1}{4}$

எனவே இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடும்.

வட்டத்தின் சமன்பாட்டை வேறொரு முறையிலும் பெறலாம். முதற்பகுதியிலிருந்து y அச்சைத் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + b^2 = 0.$$

தொடுகை நாண்:

(x_1, y_1) இலிருந்து தொடுகை நாணின் சமன்பாடு

$$x x_1 + y y_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) + b^2 = 0$$

ஆகவே $(0,0)$ இலிருந்து தொடுகை நாணின் சமன்பாடு

$$0 + 0 - a(x+0) - b(y+0) + b^2 = 0$$

$$-ax - by + b^2 = 0 \quad \text{.........................(A)}$$

தரவின்படி தொடுகை நாண், $tx + y - t = 0$ ....(B)

(A), (B) இலிருந்து, $-\frac{a}{t} = \frac{-b}{1} = \frac{b^2}{-t} \Rightarrow t = b,\ a = b^2 = t^2$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 2t^2 x - 2ty + t^2 = 0$ ஆகும்.

1997

(ii) $x^2 + y^2 = 9$; வட்டம் ; மையம் $(0,0)$, ஆரை 3

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, y அச்சுக்கு சமாந்தரமான நேர்கோடுகள்

$x^2 - 8y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{8} x^2$, y அச்சை அச்சாகவும், உற்பத்தியைக் குவியமாகவும் கொண்ட பரவளைவு.

(a) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 = 4$ இடை வெட்டும் புள்ளிகள் $(2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$ $(-2, \sqrt{5})$, $(-2, -\sqrt{5})$ ஆகும்.

(b) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - 8y = 0$ இடை வெட்டும் புள்ளிகள்

$y^2 + 8y - 9 = 0 \quad (y+9)(y-1) = 0 \Rightarrow y = -9,\ y = 1.$

$y = \frac{x^2}{8} > 0$ என்பதால் $y = -9$ பொருந்தாது. எனவே $y = 1$

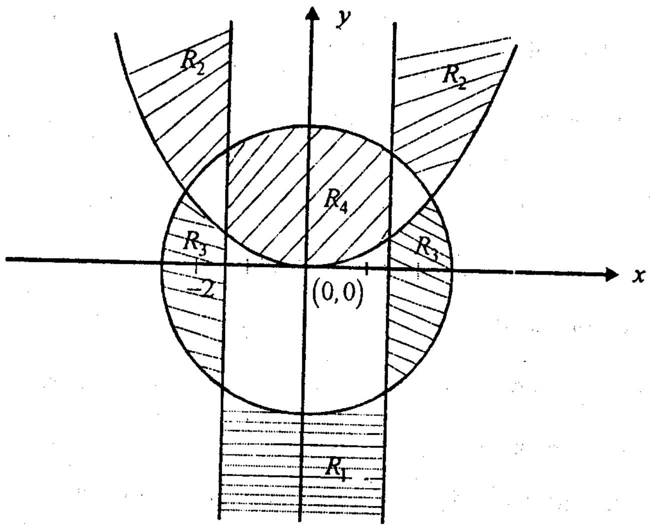
$\therefore$ இடைவெட்டும் புள்ளிகள் $(2\sqrt{2}, 1)$, $(-2\sqrt{2}, 1)$

(c) $x^2 - 8y = 0$; $x^2 = 4$ இடைவெட்டும் புள்ளிகள்

$y = \frac{1}{2}$. $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ ஆகும்.

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 - 8y)(x^2 - 4) \le 0$ எனின்,

≥ 0	≥ 0	≤ 0	.... பிரதேசம் R_1
≥ 0	≤ 0	≥ 0	.... பிரதேசம் R_2
≤ 0	≥ 0	≥ 0	.... பிரதேசம் R_3
≤ 0	≤ 0	≤ 0	.... பிரதேசம் R_4



1997 புதிய

$x^2+y^2-4=0;\ x+y-1=0$ என்னும் வட்டமும் நேர்கோடும் வெட்டும் புள்ளிகளினூடு செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\left(x^2+y^2-4\right)+\lambda\left(x+y-1\right)=0 \text{ ஆகும். .... (1)}$$

இவ்வட்டத்தினதும் $x^2+y^2-2x=0$ இனதும் பொது நாணின் சமன்பாடு

$$\left[x^2+y^2-4+\lambda\left(x+g-1\right)\right]-\left[x^2+y^2-2x-1\right]=0.$$

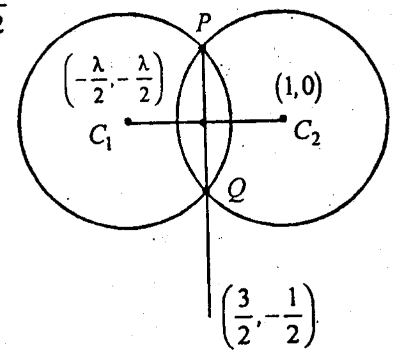
PQ வின் சமன்பாடு $(2x-3)+\lambda\ (x+y-1)=0$

இது λ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $2x-3=0,\quad x+y-1=0$ என்னும் நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\left.\begin{array}{l}2x-3=0\\ x+y-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

எனவே $PQ\ \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ இனூடாகச் செல்லும்

PQ இன் நடுப்புள்ளி $M\equiv\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ என்க.



$$C_1C_2 \text{ இன்படித்திறன் } = \frac{-\frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{2}-1}=\frac{\lambda}{\lambda+2}$$

$$MC_2 \text{ இன் படித்திறன் } = \frac{\bar{y}-0}{\bar{x}-1}=\frac{\lambda}{\lambda+2}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}-1}=\frac{\lambda}{\lambda+2}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}-1-\bar{y}}=\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{ஆகவே } \lambda=\frac{2\bar{y}}{\bar{x}-1-\bar{y}}$$

இப்பொழுது PQ இல் $M\equiv\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ இருப்பதால்,

$$\left(2\bar{x}-3\right)+\lambda\left(\bar{x}+\bar{y}-1\right)=0$$

$$\lambda=\frac{2\bar{y}}{\bar{x}-1-\bar{y}} \text{ எனப் பிரதியிட}$$

$$\left(2\bar{x}-3\right)+\frac{2\bar{y}}{\bar{x}-1-\bar{y}}\left(\bar{x}+\bar{y}-1\right)=0$$

$$2\bar{x}^2+2\bar{y}^2-5\bar{x}+\bar{y}+3=0$$

$$\left(2\bar{x}-3\right)\left(\bar{x}-\bar{y}-1\right)+2\bar{y}\left(\bar{x}+\bar{y}-1\right)=0$$

எனவே $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ இன் ஒழுக்கு

$$2x^2+2y^2-5x+y+3=0 \text{ ஆகும்.}$$

1998

$S \equiv x^2+y^2+8x+2y-8=0$

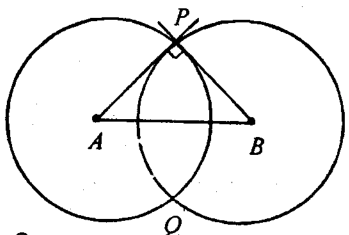
$S^1 \equiv x^2+y^2-16x-8y-64=0$

$g=4, \quad f=1, \quad c=-8;$

$g^1=-8, \quad f^1=-4, \quad c^1=-64$

$$2gg^1+2ff^1 = 2\times 4\times(-8)+2\times(+1)\times(-4)$$
$$= -64-8 = 72$$
$$c+c^1 = -8-64=-72$$
$$2gg^1+2ff^1 = c+c^1.$$

எனவே இரு வட்டங்களும் செங்கோணங்களில் வெட்டும்.



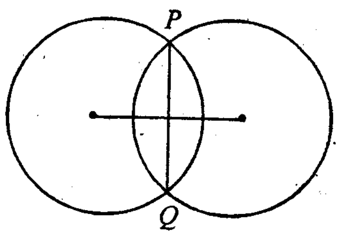
கோணம் APB, கோணம் AQB என்பன 90^o என்பதால் AB ஐ விட்டமாகச் கொண்ட சமன்பாடு P, Q என்பவற்றினூடாகச் செல்லும்.

$A \equiv (-4,-1), \quad B\equiv (8,4)$

AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(y+1)}{(x+4)}\times\frac{y-4}{x-8}=-1$$

$x^2+y^2-4x-3y-36=0$ ஆகும்.



$S \equiv x^2+y^2+8x+2y-8=0$

$S^1 \equiv x^2+y^2-16x-8y-64=0$

P, Q என்பவற்றினூடு செல்லும்,

வட்டத்தின் சமன்பாடு $S+k\left(S-S^1\right)=0$ என எழுதலாம்.

$$\left(x^2+y^2+8x+2y-8\right)+k\,(24x+10y+56)=0$$

வட்டத்தின் மையம் $(-4-12k, -1-5k)$

PQ விட்டம் ஆதலால், $(-4-12k, -1-5k)$ ஆனது,

$24x+10y+56=0$ இலிருக்கும்.

$$24(-4-12k)+10(-1-5k)+56=0$$
$$-48-144k-5-25k+28=0$$
$$169k=-25; \quad k=\frac{-25}{169}$$

1998

(b) $x^2+y^2=16-$ வட்டம் மையம் $(0,0)$ ஆரை 4

$x^2+y=5; \quad y=-x^2+5;$ பரவளைவு y அச்சு அச்சாகவும் $(0,5)$ ஐ உச்சியாகவும் கொண்டது

$y^2=4, \Rightarrow y=\pm 2$

(i) $x^2+y^2=16$ உம், $y^2=4$ உம் வெட்டுப்புள்ளிகள்

$\left(2\sqrt{3}, 2\right), \quad \left(-2\sqrt{3}, +2\right), \quad \left(-2\sqrt{3}, 2\right), \left(-2\sqrt{3}, -2\right)$ ஆகும்.

(ii) $x^2+y^2=16, \quad y=-x^2+5$ இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள்.

$y^2-y+5=16, \quad y^2-y-11=0.$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{1\pm 3\sqrt{5}}{2}$$

(iii) $x^2+y=5, \quad y=2 \quad \Rightarrow x^2=3, \; x=\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

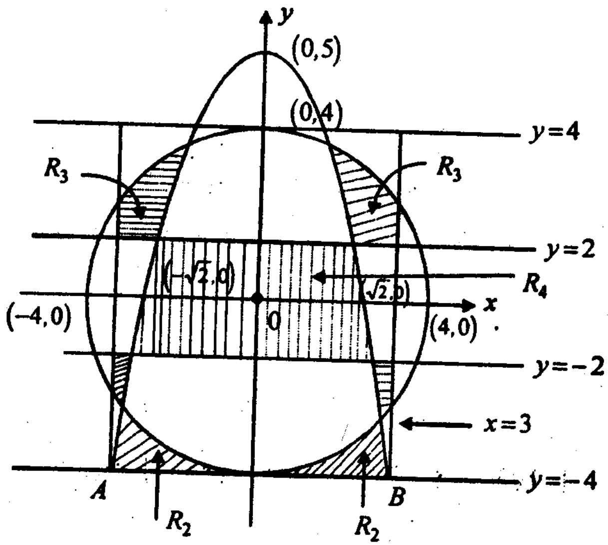
$\left(\sqrt{3}, 2\right), \; \left(-\sqrt{3}, 2\right)$

$x^2+y=5, \quad y=-2 \quad \Rightarrow x^2=7, \; x=\sqrt{7}, -\sqrt{7}$

$\left(\sqrt{7}, -2\right), \; \left(-\sqrt{7}, -2\right)$

$$(x^2+y^2-16)\ (x^2+y-5)\ (y^2-4)\ \le 0$$

≥ 0	≥ 0	≤ 0	.... பிரதேசம் R_1
≥ 0	≤ 0	≥ 0	.... பிரதேசம் R_2
≤ 0	≥ 0	≥ 0	.... பிரதேசம் R_3
≤ 0	≤ 0	≤ 0	.... பிரதேசம் R_4



[பிரதேசம் R_1 இல்லை என்பதைக் கவனிக்க]

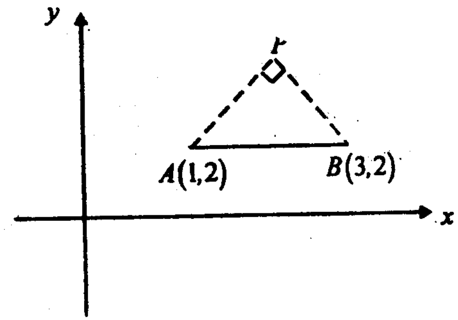
இங்கு $A \equiv (-3,-4)$, $B \equiv (3,-4)$

O உற்பத்தி எனின் $OA = OB = \sqrt{9+16} = 5$

AO அல்லது BO ஐ நீட்டும் போது வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி C அல்லது D எனின், $AC = BD = 5+4 = 9$ அலகுகள் ஆகும்.

எனவே இப்பிரதேசத்தில் உள்ள இருபுள்ளிகளுக்கிடையே இருக்கத்தக்க உயர் தூரம் $= 9$ அலகுகள்.

1998



$P(x_o, y_o)$ என்க.

AP யின் படித்திறன் $= \dfrac{y_o-2}{x_o-1}$

BP யின் படித்திறன் $= \dfrac{y_o-2}{x_o-3}$

AP, BP என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து ஆதலால்

$$\frac{y_o-2}{x_o-1} \times \frac{y_o-2}{x_o-3} = -1$$

$$x_o^2 + y_o^2 - 4x_o - 4y_o + 7 = 0$$

எனவே (x_o, y_o) ஆனது,

$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ இல் கிடக்கின்றது.

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ ஆகும்

எனவே P இன் ஒழுக்கு

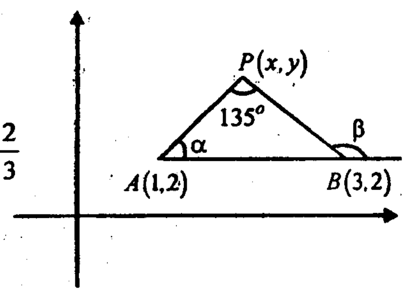
$(x-2)^2+(y-2)^2=1$ என்பதால் தரப்படும். ஒருவட்டத்தில் A, B என்ற இருபுள்ளிகளும் தவிர்க்கப்பட்டிருக்கும்.

மையம் $(2,2)$ ஆரை 1, AB விட்டம் புள்ளி P வட்டத்தில் A, B என்னும் இருபுள்ளிகளைத் தவிர்த்து எங்கு இருப்பினும் கோணம் $APB = 90^o$ ஆகும்.

(ii) $A \equiv (1,2)$, $B \equiv (3,2)$

எனவே AB, x அச்சிற்கு சமாந்தரம்

PB யின் படித்திறன் $= \tan\beta = \dfrac{y-2}{x-3}$



PA யின் படித்திறன் $= \tan\alpha = \dfrac{y-2}{x-1}$

$$\beta - \alpha = 135^o$$

$$\tan(\beta-\alpha) = \tan 135^o$$

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\ \tan\alpha} = -1$$

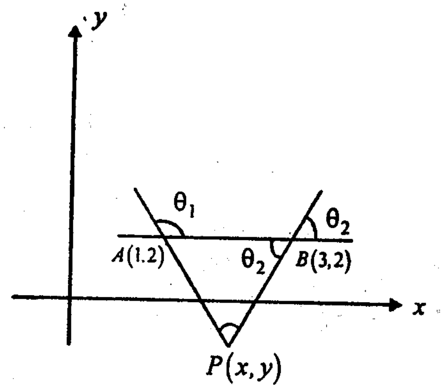
$$\frac{y-2}{x-3} - \frac{y-2}{x-1} = -\left[1 + \frac{(y-2)}{(x-3)} \cdot \frac{(y-2)}{(x-1)}\right] \quad (x \neq 1, 3)$$

$$(y-2)(x-1) - (y-2)(x-3) = -\left[(x-3)(x-1)+(y-2)(y-2)\right]$$

$$2(y-2) = -\left[x^2-4x+3+y^2-4y+4\right]$$

$$x^2+y^2-4x-2y+3=0 \quad \text{..........................(1)}$$

இங்கு $\theta_1-\theta_2 = 135^o$



$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan 135^\circ$$

$$\tan\theta_1 = \frac{y-2}{x-1}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{y-2}{x-3}$$

$$\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\ \tan\theta_2} = -1$$

$$\frac{y-2}{x-1} - \frac{y-2}{x-3} = -\left[1 = \frac{y-2}{x-1} \cdot \frac{y-2}{x-3}\right] \quad x \neq 1, 3$$

$$-2(y-2) = -\left[(x-1)(x-3) + (y-2)^2\right]$$

$$2(y-2) = (x-1)(x-3) + (y-2)^2$$

$$x^2+y^2-4x-6y+11=0 \quad \text{..........................(2)}$$

எனவே புள்ளி P ஆனது ஒன்றில் வட்டம் $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ இன் மீது அல்லது வட்டம் $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ இன் மீது கிடக்கும்.

P யின் ஒழுக்கு

P யானது AB யிற்கு மேலே இருப்பின் AB யிற்கு மேலேயுள்ள (A, B தவிர்த்து) $x^2+y^2-4x-2y+3=0$ எனும் வட்டத்தின் வில்லினாலும், P யானது AB யிற்கு கீழே இருப்பின், AB யிற்கு கீழே உள்ள (A, B தவிர்த்து) $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ என்னும் வட்டத்தின் வில்லினாலும் தரப்படும்.

$$x^2+y^2-4x-2y+3=0 \quad \text{..........................(1)}$$

$$x^2+y^2-4x-6y+11=0 \quad \text{..........................(2)}$$

$$g=-2,\ f=-1,\ c=3$$

$$g^1=-2,\ f=-3,\ c^1=11$$

$$2gg^1+2ff^1$$

$$2\times(-2)\times(-2) + 2\times(-1)\times(-3) = 14$$

$$c+c^1 = 14$$

$$2gg^1+2ff^1 = c+c^1$$

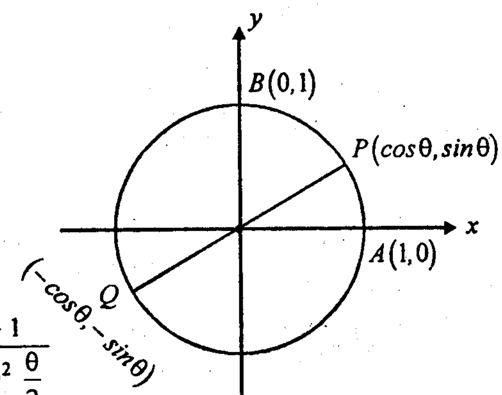
எனவே இரு வட்டங்களும் செங்கோணங்களில் வெட்டும்.

$\boxed{1999}$

$$P \equiv (\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$$Q \equiv (\cos(\pi+\theta),\ \sin(\pi+\theta))$$

$$\equiv (-\cos\theta,\ -\sin\theta)$$



AP யின் சமன்பாடு

$$\frac{y-0}{\sin\theta-0} = \frac{x-1}{\cos\theta-1}$$

$$\frac{y}{2\sin\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{x-1}{-2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$(x-1)\cos\frac{\theta}{2} + y\sin\frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{..........................(1)}$$

BQ வின் சமன்பாடு

$$\frac{y-1}{-\sin\theta - 1} = \frac{x-0}{-\cos\theta - 0}$$

$$\frac{y-1}{1+\sin\theta} = \frac{x}{\cos\theta}$$

$$\frac{y-1}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta/2\right)^2} = \frac{x}{\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{y-1}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}} = \frac{x}{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}$$

$$(y-1)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right) = x\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(1+x-y)\cos\frac{\theta}{2} + (x+y-1)\sin\frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{..........................(2)}$$

எனவே u, சமன்பாடுகள் (1), (2) ஐத் திருப்தி செய்யும்.

சமன்பாடு (1) $\Rightarrow \dfrac{x-1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{-y}{\cos\frac{\theta}{2}}$

சமன்பாடு (2) $\Rightarrow \dfrac{1+x-y}{\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{-(x+y-1)}{\cos\frac{\theta}{2}}$

ஆகவே $\dfrac{x-1}{y} = \dfrac{1+x-y}{x+y-1}$

$$(x-1)(x+y-1) - y(1+x-y) = 0$$

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$$

எனவே u வட்டத்தின் மீது இருக்கும். வட்டத்தின்மையம் (1, 1) ஆரை 1 ஆகும்.

AQ வின் சமன்பாடு $A \equiv (1, 0)$, $Q(-\cos\theta, -\sin\theta)$

AP யின் சமன்பாட்டில் θ விற்கு $(\pi+\theta)$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் AQ வின் சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

AQ வின் சமன்பாடு

$$(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$-(x-1)\sin\frac{\theta}{2} + y\cos\frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{..........................(3)}$$

BP யின் சமன்பாடு $B \equiv (0, 1)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$

BQ வின் சமன்பாட்டில் θ விற்கு $(\pi+\theta)$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறலாம்.

$$(1+x-y)\cos\left(\pi/2+\frac{\theta}{2}\right) + (x+y-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$-(1+x-y)\sin\frac{\theta}{2} + (x+y-1)\cos\frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{..........................(4)}$$

(3), (4) இலிருந்து,

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1+x-y}{x+y-1} \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

எனவே AQ, BP என்பவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியும் S மீது கிடக்கிறது.

$\boxed{2000}$

S இன் சமன்பாடு $(x-a)^2+y^2=r^2$ என்க. (இங்கு $r>0$)

$$S : x^2+y^2-2ax+a^2-r^2=0 \quad \text{..........................(1)}$$

$$S^1 : x^2+y^2-8x-6y+21=0 \quad \text{..........................(2)}$$

$$g=-a,\ f=0,\ c=a^2-r^2$$
$$g^1=-4,\ f^1=-3,\ c^1=21$$

இரு வட்டங்களும் செங்கோணங்களில் வெட்டுவதால்,

$$2gg^1+2ff^1=c+c^1$$
$$8a+0=a^2-r^2+21 \quad \text{.........................} (1)$$

$S\equiv(x-a)^2+y^2=r^2$ மையம் $(a,0)$ ஆரை r

$$S^{11}\equiv x^2+y^2+4x+6y+9=0$$
$$=(x+2)^2+(y+3)^2=2^2$$

மையம் $(-2,-3)$ ஆரை 2.

மையங்களுக்கிடைத்தூரம் = ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகை / வித்தியாசம்

$$\sqrt{(a+2)^2+3^2}=|r\pm2|$$
$$(a+2)^2+3^2=(r\pm2)^2 \quad \text{.........................} (2)$$

(1) இலிருந்து, $r^2=a^2-8a+21$ .... (3)

(2) இலிருந்து $r^2\pm4r+4=a^2-4a+13$ .... (4)

$$(4)-(3),\quad \pm4r+4=12a-8$$
$$\pm4r=12a-12$$
$$\pm r=3(a-1) \quad \text{.........................} (5)$$

(3), (5) என்பவற்றிலிருந்து,

$$9(a-1)^2=a^2-8a+21$$
$$9a^2-18a+9=a^2-8a+21$$
$$8a^2-10a-12=0$$
$$4a^2-5a-6=0$$
$$(4a+3)(a-2)=0$$

$a=2$ அல்லது $a=-\frac{3}{4}$

$a=2$, எனின் $r=3$ $(r>0)$ [(5) இலிருந்து]

(A) வட்டம் $(x-2)^2+y^2=3^2 \rightarrow$ மையம் $(2,0)$, ஆரை 3,

$a=-\frac{3}{4}$ எனின், $r=\frac{21}{4} \rightarrow$ மையம் $\left(-\frac{3}{4},0\right)$, ஆரை $\frac{21}{4}$

(B) வட்டம் $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{21}{4}\right)^2$

$$\left.\begin{aligned}(A),\quad &(x-2)^2+y^2=3^2\\ S^{11}&:(x+2)^2+(y+3)^2=2^2\end{aligned}\right\}$$

மையங்களுக்கிடைத் தூரம் $=\sqrt{[2-(-2)]^2+3^2}=5$

ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகை $=5$

எனவே வெளிப்புறமாகத் தொடும்.

$$\left.\begin{aligned}(B),\quad &\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{21}{4}\right)^2\\ S^{11}&:(x+2)^2+(y+3)^2=2^2\end{aligned}\right\}$$

மையங்களுக்கிடைத்தூரம் $=\sqrt{\left(-2+\frac{3}{4}\right)^2+3^2}=\sqrt{\frac{25}{16}+9}=\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{13}{4}$

ஆரைகளின் வித்தியாசம் $=\left|\frac{21}{4}-2\right|=\frac{13}{4}$

எனவே இருவட்டங்களும் உட்புறமாகத் தொடும்.

2001

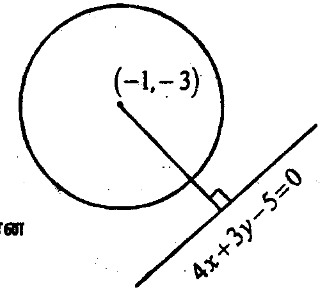
$x^2+y^2+2x+6y+1=0$

$(x+1)^2+(y+3)^2=3^2$

மையம் $(-1,-3)$, ஆரை 3

$(-1,-3)$ இலிருந்து $4x+3y-5=0$ இற்கான

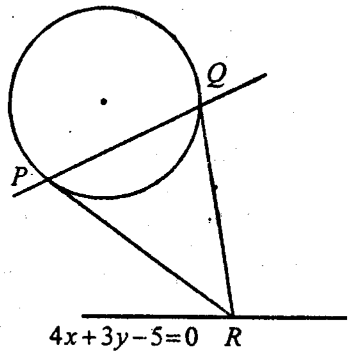
$$\frac{|-4-9-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{18}{5} > 3$$



எனவே தரப்பட்ட நேர்கோடு வட்டத்தை வெட்டாது.

மாறும் நேர்கோடு P, Q விலுள்ள தொடலிகள் சந்திக்கும் புள்ளி $P(x_o,y_o)$ என்க.

(x_o,y_o) இலிருந்து $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ இற்கான தொடலிகளின் தொடுகைநாண் PQ ஆகும்.



PQ வின் சமன்பாடு

$x x_o+y y_o+(x+x_o)+3(y+y_o)+1=0$ ... .(1)

(x_o,y_o); $4x+3y-5=0$ இலிருந்து

$4x_o+3y_o-5=0$ ....(2)

(2) இலிருந்து, $y_o=\frac{5-4x_o}{3}$ என (1) இல் பிரதியிட

$$x x_o+y\left(\frac{5-4x_o}{3}\right)+(x+x_o)+3\left(y+\frac{5-4x_o}{3}\right)+1=0.$$

$$3x x_o+y(5-4x_o)+3(x+x_o)+(9y+15-12x_o)+3=0$$

எனவே PQ வின் சமன்பாடு

$(3x+14y+18)+x_o(3x-4y-9)=0$ ஆகும்.

ஆகவே நேர்கோடு PQ, x_o இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$3x+14y+18=0;\ 3x-4y-9=0$

ஆகிய இரண்டு நேர்கோடுகளும் வெட்டும்புள்ளியினூடு செல்லும்.

புள்ளி $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ ஆகும் . $3x+14y+18=0$

$3x-4y-9=0$

$18y=-27$

$y=-\frac{3}{2}$

$x=1$

விடைகள்

2(a)

1. $4x - 3y + 2 = 0$ 2. $3x + 4y - 1 = 0$ 3. $y - 4x + 11 = 0$

4. $x = 2,\ x - 2y + 6 = 0,\ 2x + 3y + 5 = 0$

5. $7x + y - 17 = 0,\ 7x + y - 37 = 0$ 6. $x + 3y - 11 = 0$

7. $x - 3y + 9 = 0,\ 6x + 5y + 8 = 0,\ 8x - y - 20 = 0$

10. $9x - y = 25,\ x + 9y = 21$ 11. $27x + 13y - 14 = 0$

12. $y = 2x - 1$ 13. $x - 2y = 0$ 14. (a) எதிர்ப்பக்கம்,(b) ஒரேபக்கம்

15. $45°,\ 8$ 16. $4y + 3x - 21 = 0,\ x = 3$

17. $(-3t, -t),\ (7t, -t)$ 18. $x - y - 2 = 0,\ x + y - 6 = 0,$ 12 ச. அலகு

19. $x - 3y = 0,\ 2y - 3x = 0,\ \frac{7t^2}{2}$

20. $x + - 8 = 0,\ 7x + y - 8 = 0,\ x - 2y + 1 = 0$

21. $3y - x + 4 = 0,\ y + 3x - 2 = 0,\ \frac{6\sqrt{5}}{5}$

2(b)

1. $3y - 4x - 6 = 0,\ 3y - 4x + \frac{13}{2} = 0,\ 3x + 4y - 8 = 0,\ 3x + 4y + \frac{9}{2} = 0$

2. $(3t, 4t),\ y = 2t$ 3. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, 6 ச.அலகு

4. $4x - 3y + 10 = 0,\ y = 2,\ \frac{32}{5}$ ச.அலகு

5. $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 6. $\left(-\frac{9}{8}\right)$

8. $G \equiv \left(\frac{10}{3}, 4\right), H \equiv (4, 4)\ S \equiv (3, 4)$ 9. $B \equiv \left(-\frac{t}{2} - 2t\right), C \equiv \left(-\frac{t}{2}, 2t\right)$

பயிற்சி - 2

1. $(-1, 0),\ x + y + 4 = 0.$ 6 ச. அலகுகள் $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

2. $(5, 3), (3, 9), (-3, 7)$ 3. $D\left(\frac{3}{2}, -2\right),\ P(3, 0)$

4. $10x - 24y + 29 - 13\sqrt{13} = 0$ $10x - 24y + 29 + 13\sqrt{13} = 0$

$24x + 10y + 2 + 13\sqrt{13} = 0$ $24x + 10y + 2 - 13\sqrt{13} = 0$

5. $B \equiv (1, -4),\ D \equiv (2, 3),\ B^1 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{-15}{2}\right),\ D^1 \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right)$

6. $x + 3y - 42 = 0,\ 3x - y + 4 = 0,\ 3x - y + 4 = 0,\ 3\sqrt{2}, 15\sqrt{2}, (1, 7)$

7. $P_o(4, 3),\ Q(0, 5)$ 8. $B(5, 5),\ C(0, 5),\ D(-3, 1)$

9. $x + 2y - 9 = 0,\ x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$

12. $x - 8y + 21 = 0,\ x - 8y + 29 = 0,\ 7x + 4y + 27 = 0,\ 7x + 4y - 38 = 0$

13. $7x + 24y - 138 = 0, \left(\frac{106}{25}, \frac{217}{25}\right),\ D\left(\frac{6}{25}, \frac{142}{25}\right)$, 24 ச. அலகு

15. $(6, 0), (0, 6)$ 17. $2x - y - 5 = 0,\ 11x - 2y + 25 = 0$

18. $7x + y + p = 0$ 19. $x + 2y + 2 = 0$

20. $11x - 4y + 3 = 0,\ 4x - 3y - 2 = 0,\ 7x - y - 12 = 0$

21. $4x + 3y - 25 = 0,\ x + 2y - 15 = 0,\ 3x + y - 20 = 0$

22. $2x - y = 0,\ x - 2y = 0$

23. $x - 2y + 1 = o,\ 2x - 4y - 3 = 0,\ x - 3y + 2 = 0,\ 3x - 9y + 4 = 0$

24. $(-3, 1), \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

3(a)

1. $\left(\frac{-3a}{2}, \frac{3a}{4}\right)$, ஆரை $\frac{7a}{4}$ 2. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 4. $x^2 + y^2 + 6y - 41 = 0,\ 5\sqrt{2}$

5. $5x^2 + 5y^2 - 29x - 20y + 20 = 0$ 6. $x^2 + y^2 - 5y = 0$

7. $(0, -1), (0, -4)$ 9. $k = 5$ 10. $3x + 4y = 22, \quad 3x + 4y = -8$

11. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 12. $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0, \quad \alpha x + \beta y = 0$

13. $x^2 + y^2 - cx \pm cy + \frac{c^2}{4} = 0$ 14. $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$

15. $9\left(x^2 + y^2\right) 42x + 47 = 0, \quad 8\left(x^2 + y^2\right) - 48x + 8y + 73 = 0$

16. $5x^2 + 6y^2 - 2x - 4y - 78 = 0$

17. $x(a - p) + y(b - q) + p^2 + p^2 - ap - bq = 0$ 18. $\left(x^2 + y^2 - x\right)^2 = x^2 + y^2$

20. $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 27 = 0, \quad x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$

21. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0, \left(\frac{24}{5}, \frac{13}{5}\right)$

22. $x^2 + y^2 - 20x - 10y + 100 = 0, \quad x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0, \quad 2x + y - 14 = 0$

23. $t = 7, \quad 3x - 4y + 11 = 0, \quad 3x - 4y - 39 = 0$

24. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0, \; x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, \quad 7:1$

25. $3x + 4y - 35 = 0, \; 5x - 12y + 83 = 0$ 26. $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \; (0, 4), \; 5$

27. $\left(\frac{a^2 \cos\alpha}{p}, \frac{a^2 \sin\alpha}{p}\right)$ 28. $4x - 3y + 6 = 0, \; 4x - 3y - 14 = 0$

29. $(5, 8), (5, -2)$ 30. $\sqrt{17}$

31. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0, \quad x^2 + y^2 - 12x - 16y + 80 = 0, \quad x + y - 8 = 0$

32. $p = \frac{1}{5}, \; q = \frac{3}{5}, \; (2, 1), \; \sqrt{5}$ 33. $x^2 + y^2 = 1$

34. $(2, 1), 1, \; y = 0, \; 3y - 4x = 0, \left(\frac{36}{13}, \frac{35}{13}\right)$ 35. $(-1, 0), \; (5, 0), \; \pm\frac{4}{3}, 0, \frac{-8}{9}$

3(b)

3. $\frac{180\sqrt{2}}{17}$ 6. $x^2 + y^2 - 1 - (x + 2y - 1) = 0$

8. $7x - 4y - 250 = 0, \; 3x + 4y - 50 = 0, \; 7y + 24x - 125 = 0, \; 3y - 4x + 25 = 0$

16. $1, -\sqrt{2}$

பயிற்சி - 3

1. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
   $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
   $7:1$

2. $x^2 + y^2 - 20x - 10y + 100 = 0$
   $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$
   $2x + y - 14 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$
   $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$
   $x^2 + y^2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} = 0$

5. $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$
   $x^2 + y^2 + y - 1 = 0$

6. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$
   $x^2 + y^2 - 2x + \frac{8}{7}y + 1 = 0$

7. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
   $x^2 + y^2 - 126x - 126y + 369 = 0$

8. $x^2 + y^2 + 22x - 20y - 4 = 0$
   $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

9. $3x + 4y + 10 = 0$
   $3x - 4y - 15 = 0$

10. $x = 1, \; y = 1, \; 3y - 4x + 1 = 0$
    $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

11. $2\left(x^2 + y^2\right) - 4x + 2y - 1 = 0$

13. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0, \quad 5\left(x^2 + y^2\right) + 4x - 2y = 0$

15. $(1, 1), (-3, -3)$

கடந்த கால பரீட்சை வினாக்கள்

1. x, y அச்சுக்களின் மீது முறையே a, b என்னும் வெட்டுத்துண்டுகளை ஆக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$ இனால் தரப்படும் நிலைத்தகோடு ℓ ஆனது x, y அச்சுக்களை முறையே A, B எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. கோடு ℓ இற்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோடு ℓ' ஆனது x, y அச்சுக்களை முறையே P, Q எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. AQ, BP ஆகிய நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியானது, புள்ளி (h, k) இன்றி, வட்டம் $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$ மீது கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக. **(2000)**

2. $x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0;\ x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ ஆகியவற்றினால் தரப்படும் இரு வட்டங்கள் நிமிர்கோண முறையாக இடை வெட்டுமெனின் $2g_1 g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$ எனக் காட்டுக.

   x அச்சுமீது மையத்தைக் கொண்ட ஒரு வட்டம், S ஆனது $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் s' ஐ நிமிர்கோண முறையாக இடை வெட்டும் அதேவேளை $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் s'' ஐத் தொடுகிறது. ஒன்று வட்டம் s'' ஐ வெளியே தொடுகின்றதும், மற்றையது வட்டம் s'' ஐ உள்ளே தொடுகின்றதுமான அத்தகைய இரு வட்டங்கள் S இற்கு உண்டெனக் காட்டுக. இவ்விரு வட்டங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க. **(2000)**

3. நேர்கோடு $y = mx + c$ ஆனது $u_1 \equiv y - m_1 x - c_1 = 0$, $u_2 \equiv y - m_2 x - c_2 = 0$ என்ற சமாந்தரமல்லாத இருநேர்கோடுகளை முறையே A, B ஆகியவற்றில் இடை வெட்டுகிறது. R என்பது AB மீது $AR = kRB$ ஆகுமாறு உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். $u_1 = 0$ உம் $u_2 = 0$ உம் இடைவெட்டும் புள்ளியை R உடன் தொடுக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$u_1 + \dfrac{k(m-m_1)}{m-m_2} u_2 = 0$ எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி AB, BC, CA என்னும் பக்கங்கள் முறையே $3x+2y-6=0$, $2x+y-2=0$, $x+y-3=0$ என்னும் கோடுகள் வழியே இருக்கின்றன. R என்பது AB மீதும் Q என்பது AC மீதும் $2AR = RB$, $3AQ = 2QC$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளிகளாகும்.

(i) A யின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

(ii) BQ, CR ஆகிய கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(iii) BQ உம் CR உம் D யிலே சந்திப்பனவாகவும், P என்பது AD யும் BC யும் இடைவெட்டும் புள்ளியாகவும் இருப்பின் விகிதம் $AP : PB$ ஐக் காண்க.

(2001)

4. ஒரு புறப்புள்ளி (x_0, y_0) இலிருந்து வட்டம்

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இற்கு வரையப்பட்ட தொட்லிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு

$xx_0 + yy_0 + (x+x_0) + f(y+y_0) + c = 0$ எனக் காட்டுக.

தரப்பட்ட வட்டம் ஒன்றினதும், தரப்பட்ட நேர்கோடு ஒன்றினதும் சமன்பாடுகள் முறையே $x^2+y^2+2x+6y+1=0$, $4x+3y-5=0$ ஆகும். இக்கோடு வட்டத்தை வெட்டுவதில்லையெனக் காட்டுக.

மாறும் நேர்கோடு ஒன்று தரப்பட்ட வட்டத்தை P, Q என்னும் இரு வேறு வேறான புள்ளிகளில் வெட்டும் அதேவேளை, P, Q ஆகியவற்றில் வட்டத்துக்குள்ள தொடலிகள் தரப்பட்டுள்ள கோட்டின் மீது சந்திக்கின்றன. இம்மாறும் கோடு நிலைத்த புள்ளி ஒன்றினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டி, இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(2001)

5. $u_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1=0$, $u_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2=0$ என்பன தரப்பட்டுள்ள இரு சமாந்தரமல்லாத நேர்கோடுகள் ஆகும். λ யின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் $u_1 + \lambda u_2 = 0$ ஆனது ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடு செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

0 ஒரு முக்கோணி ABC யின் எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு B, C ஆகியவற்றினூடு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-4y+5=0$, $2x-y+3=0$ ஆகும். A யின் ஆள்கூறுகள் $(k, -k)$ என எடுக்கப்படுமெனின் AB, AC ஆகிய கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் B, C ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகளையும் k இன் உறுப்புக்களில் காண்க. k மாறும்போது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியானது கோடு $x+5y-4=0$ மீது கிடக்கின்றதென நிறுவுக.

(2002)

6. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$, $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ என்னும் வட்டங்கள் தொடுவதற்கான ஒரு நிபந்தனையைக் காண்க. அவை தொடுமெனின், தொடுகைப்புள்ளியானது,

$2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_1)y + c_1 - c_2 = 0$, $(f_1-f_2)x - (g_1-g_2)y + f_1g_2 - f_2g_1 = 0$ என்னும் கோடுகள் ஒவ்வொன்றின் மீதும் கிடக்கின்றதென நிறுவுக.

$x^2+y^2-2x+4y=0$, $x^2+y^2-10x+20=0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளியே தொடுகின்றனவெனக் காட்டி இரு வட்டங்களினதும் தொடுகைப்புள்ளி A யின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

P என்பது P யிலிருந்து முதலாம் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் நீளமானது P யிலிருந்து இரண்டாம் வட்டத்துக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் நீளத்தின் k (ஒரு மாறிலி) மடங்காக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். $k^2 \neq 1$ எனின் P யின் ஒழுக்கானது A யினூடாக உள்ள ஒரு வட்டம் என நிறுவி, அதன் சமன்பாட்டை k யின் உறுப்புக்களில் காண்க.

(2002)

7. ஓர் இணைகரத்தின் இருபக்கங்கள் $y = x-2$, $4y = x+4$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்படுகின்றன. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் உற்பத்தியில் இடை வெட்டுகின்றன. இணைகரத்தின்

(i) எஞ்சிய பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்.

(ii) மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றைப் பெறுக. அதோடு இணைகரத்தின் பரப்பளவையும் காண்க.

(2003)

8. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+2g^1x+2f^1y+c^1=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் நிமிர்கோண முறையாக இடை வெட்டுமெனின் $2gg^1+2ff^1=c+c^1$ எனக் காட்டுக. P, Q என்பன முறையே $(-a, 0)$, $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ என்பவற்றை ஆள் கூறுகளாகக் கொண்ட வட்டம் $S\equiv x^2+y^2-a^2=0$ மீது உள்ள புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். $PQ=QR$ ஆக இருக்குமாறு நாண் PQ ஆனது ஒரு புள்ளி R இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. R இன் ஆள் கூறுகளைக் கண்டு θ மாறும் போது ஒரு வட்டம் s' மீது R கிடக்கின்றதெனக் காட்டுக. s' இன் சமன்பாட்டினைப் பெறுக.

ஒரு மூன்றாம் வட்டம் s'' ஆனது y அச்சைத் தொடும் அதேவேளை s, s' ஆகிய இரு வட்டங்களையும் நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டுகிறது. அத்தகைய இருவட்டங்கள் s'' இருக்கின்றதெனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(2003)

9. u, v என்பன முறையே $A\equiv(5, 0)$, $B\equiv(-5, 0)$ என்னும் புள்ளிகளினூடாகச் செல்கின்ற இரு சமாந்தரக் கோடுகள் எனக் கொள்வோம். கோடு $4x+3y=25$ ஆனது u வை P யிலும் V ஐ Q விலும் சந்திக்கிறது. எனக் கொள்வோம்.

PQ வின் நீளம் 5 அலகுகளெனின் u, V ஆகிய சமாந்தரக் கோட்டுச் சோடிக்கு இரு இயல்தகவுகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக. மேலே துணியப்பட்ட நான்கு கோடுகளினதும் சமன்பாடுகளை எழுதுக.
இந்நான்கு கோடுகளாலும் ஆக்கப்படும் இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
அதோடு மேற்குறித்த இணைகரத்தின் பரப்பளவையும் காண்க.

(2004)

10. $S_1\equiv x^2+y^2-2=0$ எனவும் $S_2\equiv x^2+y^2+3x+3y-8=0$ எனவும் கொள்வோம். $S_1=0$ உம் $S_2=0$ உம் உள்ளே தொடுகின்றனவெனக் காட்டி, தொடுகைப்புள்ளி P யின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க. புள்ளி P யினூடு வரையப்படும் நேர்கோடு ஒன்று $S_1=0$, $S_2=0$ ஆகியவற்றை முறையே Q, R எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. QR இன் நடுப்புள்ளியானது வட்டம் $x^2+y^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-5=0$ மீது கிடக்கிறதெனக் காட்டுக.

(2004)

11. ஒரு முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் B யும் C யும் முறையே கோடு $4x-3y=0$ மீதும் x அச்சு மீதும் கிடக்கின்றன. பக்கம் BC ஆனது $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ இனூடாகச் செல்லும் அதேவேளை சரிவு m ஐக் கொண்டுள்ளது.

(i) B, C ஆகியவற்றின் ஆள் கூறுகளை m இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

(ii) $OB=\left|\frac{10(m-1)}{3(3m-4)}\right|$ எனவும் $OC=\left|\frac{2(m-1)}{3m}\right|$ எனவும் காட்டுக.

இங்கே O என்பது உற்பத்தியாகும்.

(iii) $ABOC$ ஒரு சாய்சதுரமெனின், m இன் இயல்தகு பெறுமானங்களையும் A யின் ஒத்த ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

(2005)

12. $x^2+y^2+2gx+2fy=0$, $x^2+y^2-4r^2=0$ ஆகியவற்றைச் சமன்பாடுகளாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெளியே தொடாதபோதிலும் $g^2+f^2=r^2$ ஆக இருப்பின் ஒன்றையொன்று உள்ளே தொடுமெனக் காட்டுக.
பிந்திய சந்தர்ப்பத்தில் தொடுகைப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
உற்பத்தியினூடாகவும் $o<a<1$ ஆகவுள்ள புள்ளி $(a, 0)$ இனூடாகவும் செல்கின்றனவும் $x^2+y^2-4=0$ ஐச் சமன்பாடாகவும் கொண்ட வட்டத்தைத் தொடுகின்றனவுமான இருவட்டங்கள் உள்ளனதெனக் காட்டுக.
தொடுகைப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
அதோடு இப்புள்ளிகளை ஒருவிட்டத்தின் முனைகளாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(2005)

சாயி கல்வி வெளியீடுகள்

க.பொ.த உயர்தரம்

புதிய பாடத்திட்டத்திற்குரியவை

(ஆண்டு 2000 உம் அதற்குப் பின்னரும்)

1. உயிரியல் பகுதி -1
2. உயிரியல் பகுதி - 2(A) தொழிற்படும் விலங்கு
3. உயிரியல் பகுதி - 2(B) தொழிற்படும் விலங்கு
4. உயிரியல் பகுதி - 3(A) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி I
5. உயிரியல் பகுதி - 3(B) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி II
6. உயிரியல் பகுதி - 4(A) உயிரின் தொடர்ச்சி
7. உயிரியல் பகுதி - 4(B) மனிதனும் சூழலும் + பிரயோக உயிரியல்
8. சேதன இரசாயனம் - பரீட்சை வழிகாட்டி
9. பிரயோக கணிதம் - நிலையியல்
10. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி I
11. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி II
12. பிரயோக கணிதம் - நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
13. இணைந்த கணிதம் - நுண்கணிதம்
14. இணைந்த கணிதம் - அட்சர கணிதம்
15. இணைந்த கணிதம் - திரிகோணகணிதம்
16. இணைந்த கணிதம் - ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06. SRILANKA.