

நிலையியல் பகுதி 1

பிரயோக கணிதம்
க. பொ. த. (உ. த.)

படிமுறைப் பயிற்சி நூல்
SI அலகுகள்



ஐ. துறையர்ப்பார்.

நிலையியல் பகுதி 1

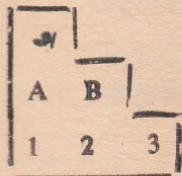
படிமுறைப் பயிற்சி நூல்

பிரயோக கணிதம் (க. பொ. த; உ. த.)

1990 ஆம் ஆண்டிற்கும் அதற்குப் பிற்பட்ட
பரிட்சைகளிற்கு மான பாடத் திட்டத்திற்காலமானது.

சி. துரைய்ப்பா

யா / பரி. யோவான் கல்லூரி;
 முன்னாள் கணிதத் துணை விரிவுரையாளர்,
 பேராதனைப் பல்கலைக்கழகம்;
 முன்னாள் துணை ஆசிரியர் (இலண்டன் உ. த. பிரிவு)
 யாழிப்பானச் கல்லூரி.



“என்னும் எழுத்தும் கண்ணென்ற தகும்.”

விலை ரூபா

பொருளாடக்கம்

நிலையியல் பகுதி 1

(அ) முகவரை	(iii)
1. ஒரு புள்ளியிற் தாக்கும் ஒரேதள விசைகள்	1
2. ஒரேதள விசைகள்	6
3. ஒரேதள விசைகளின் கீழ் விறைப்பான உடலோன்றின் சமநிலை	16
4. மூட்டிய கோல்கள்	25
5. மீட்டல் உதாரணங்கள்	30
(ஆ) பெறுமானங்கள், கோவைகள், முடிபுகள்	36

நிலையியல் பகுதி 2

(அ) முகவரை

1. ஒரேதள விசைகள் - பகுப்பு முறை
2. உராய்வு
3. வரைபு அமைப்புக்கள்
4. திணிவு மையம்
5. மீட்டல் உதாரணங்கள்

(ஆ) பெறுமானங்கள், கோவைகள், முடிபுகள்.

முகவுரை

இலங்கைப் பரிட்சைத் தினைக்களம் நடாத்தும் க. பொ. த. (க. த.) பரிட்சைப் பாடவிதானத்திற்கேற்ப ஒவ்வொரு பாடத் திற்கும் தனியான பாட நூல்கள் இல்லை. ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் ஒவ்வொரு நூலை நாடவேண்டியுள்ளது. அப்போதுங்கூட தமது பரிட்சைக்கு எந்த அளவில் குறிப்பிட்டவொரு பகுதி தேவை யென்பதுவும் மரணவர்களுக்குத் தெரியாது. ஆயினும் கணிதப் பாடங்களைப் பொறுத்தளவில் பொருத்தமான, வேண்டியதும் போதியதுமான வினாக்களையடைய பயிற்சி நூல்கள் இருந்தாலே ஒரளவு திருப்திப்படலாம். தமது ஆசிரியரிடம் பயின்ற பகுதி களுக்கான வினாக்களிற்கு விடையளிக்க முற்படுவதன் மூலம் வேண்டிய அறிவையும் பயிற்சியையும் பெறமுடியும். அந்த வகையிலேயே “ நிலையியல் பகுதி 1 ” என்ற இப் படி முறைப் பயிற்சி நூலை ஆக்கியுள்ளேன். “ காலியும் அதன் பிரயோகங்களும் ” என்ற பயிற்சி நூலிற்கு அடுத்த துணை நூல் இதுவாகும். தமிழ் மொழிமூல மாணவர்க்கும் ஆசிரியர்கட்கும் இந்நால் பயனுடையதாயிருக்குமென்பது எனது உறுதியான நம்பிக்கையாகும்.

மிகுந்த ஆர்வத்துடன் செயற்பட்டு சிறந்த முறையில் இந்நால் அச்சிட்டுத் தந்த “ மேக்கூர் ” அச்சுக்கத்தாரிற்கும் அவர்தம் ஊழியர்கட்கும் எனது நன்றி உரித்தான்.

யாழ்ப்பாணம்.
பங்குணி 1989.

சி. து.

1. ஒரு புள்ளியிற் தாக்கும் ஓரேதள விசைகள்

இரு விசைகளின் விளையுள்

1. பண்பு ரீதியாகவும், அளவு ரீதியாகவும் “விசை” என்பதைன் வரையறுக்கு.

“விசையொன்றின் விளைவானது அதன் தாக்கக்கோட்டின் நிலையிற் தங்கியுள்ளது” என்பதற்கு இரண்டு அவதானங்களைத் தருக.

2. விசை இணைகரத் தத்துவத்தைக் கூறுக.

இரு புள்ளி O விலே, தமிழ்மீத் தீர்க்கோணம் அமைக்கும் இருகோடுகள் வழியே P, Q அலகு பருமன்களுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின்பருமன் R அலகுகளாயின் $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$ எனக் காட்டுக. விளையுளின் தாக்கக்கோடு P இன் தாக்கக் கோட்டுடன் அமைக்கும் கோணம் α ஆனது $\tan \alpha = Q \sin \theta / (P + Q \cos \theta)$ இனால்த் தரப்படுகின்ற விசையும் காட்டுக.

3. அ) ஒரு புள்ளியில் $3N$, $5N$ விசைகள் 60° கோணத்திற் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், விளையுளின் தாக்கக்கோடு $5N$ விசையின் தாக்கக் கோட்டுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

ஆ) $14N$, $16N$ விசைகள் 60° அமைக்கும் கோடுகள் வழியே ஒரு புள்ளியிற் செயற்படுன் அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

இ) ஒரு புள்ளியில் $9N$, $12N$ விசைகள் செங்கோணத்திற் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும்காண்க.

4. அ) ஒரு புள்ளியிற் செயற்படும் $6N$, $8N$ விசைகளின் விளையுளின் பருமன் $2\sqrt{37}N$ ஆகும். அவ்விசைகளிடையில் கோணத்தைக் காண்க.

ஆ) ஒன்றிற்கொன்று 60° யிற் செயற்படும் இரு விசைகளில் ஒன்று $4N$ பருமனுடையது. இவற்றின் விளையுள் இவ்விசையுடன் $\tan^{-1}(\sqrt{3}/5)$ கோணம் அமைப்பின் மற்றைய விசையின் பருமனைக் காண்க.

5. அ) 6N, PN பருமன்களுடைய இரு விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுள் $6\sqrt{2}$ விசைக்குச் செங்குத்தாக வள்ளது. 6N, PN விசைகளிடைக் கோணம் 120° ஆகும். P ஐயும் விளையுள் பருமனையும் காணக,

ஆ) ஒரு புள்ளியிலே $10N, 4N$ விசைகள் வேறான தாக்கக் கோடுகள் வழியே செயற்படுகின்றன. இவற்றிடைப்பட்ட கோணம் $\cos^{-1} (4/5)$ எனின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காணக.

6. அ) சம பருமன்கள் P உடைய இரு ஒரேதள விசைகளின் விளையுளின் பருமன் $P\sqrt{2}$ ஆகும். விளையுளிற்கும் அவ்விசைகளிலொன்றுக்குமிடைப்பட்ட கோணம் யாது?

ஆ) சம பருமன்கள் P உடைய இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் $P, P/2$ ஆயிருத்தற்கு அவற்றிடைப்பட்ட கோணங்களைக் காணக.

7. விசையினைகரத் தத்துவத்தைக் காட்டுக்.

P பருமனுடைய விசையொன்று அதன் தாக்கக்கோட்டுடன் $45^\circ, 15^\circ$ அமைக்கும் திசைகளிலுள்ள இரு விசைகளாகத் துணிக்கப் படும்போது பின்னைய விசையின் (துணித்த பகுதியின்) பருமன் $P\sqrt{6}/3$ எனக் காட்டுக்.

8. θ° கோணத்திற் செயற்படும் P, Q பருமன்களுடைய இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் $(2m+1)\sqrt{(P^2+Q^2)}$ ஆகும் இல் விசைகள் $(90-\theta)^\circ$ கோணத்திற் செயற்படும்போது விளையுளின் பருமன் $(2m-1)\sqrt{(P^2+Q^2)}$ ஆகும். $\tan \theta^\circ$ ஐக் காணக.

9. சமபருமன்களுடைய இருவிசைகள் 2α கோணத்திற் செயற்படும் போது விளையுளின் பருமன் $2R$ ஆகும். இதே சம விசைகள் 2β கோணத்திற் செயற்படும்போது விளையுளின் பருமன் R ஆகும். எனின் $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ எனக் காட்டுக்.

10. துணிக்கையொன்றின் மீது P, Q பருமன்களுடைய விசைகள் α கோணத்திற் செயற்படுகின்றன. P, Q இன் தாக்கக்கோடுகள் தம் மூன் மாற்றப்படும்போது விளையுளின் தாக்கக்கோடு β கோணத்திற்கு திரும்பினால் $\tan \left\{ \frac{\beta}{2} \right\} = \left\{ \frac{P-Q}{P+Q} \right\} \tan \left\{ \frac{\alpha}{2} \right\}$ எனக் காட்டுக்.

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகளின் விளையுள்

11. (அ) ABCD ஒரு சதுரமாகும். AB, AC, AD வழியே, இதே எழுத்தொழுங்கின் போக்குகளில், முறையே 2, $4\sqrt{2}$, 4 N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(ஆ) ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். AB = 4 m, BC = 3 m, AB, AC, AD, திசை போக்கில், செவ்வகத்தின் இப் பக்கங்கள் வழியே முறையே 8, 10, 6 N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், AB யுடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

12. (அ) ஓர் அழுத்தமான கிடைமேசையில் துணிக்கையொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் கிழக்கு, வ. 30° கி., வடக்கு, வ. 60° மே., ஆகிய திசை போக்குகளில் முறையே 10, 4, $12\sqrt{3}$ $8\sqrt{3}$ N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ் விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும், திசையையும் காண்க,

(ஆ) ABCDEF என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். 1, $2\sqrt{3}$, 4, $\sqrt{3}$, 2 N விசைகள் முறையே AB, AC, AD, AE, AF வழியே, எழுத்துக்களின் பரிசை குறிப்பிடும் போக்கில், A இற் செயற் படுகின்றன. இவற்றின் விளையளைக் காண்க.

சமநிலை (நாப்பம்)

13. ஒரு புள்ளி O விலே P $\sqrt{3}$, P $\sqrt{3}$, 3 P நியூற்றன் விசைகள் முறையே, ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் AB, BC, CA, திசை போக்குகளிற் செயற்படுகின்றன. AB = BC = 1m, CA = $\sqrt{3}$ m ஆகும் மேற்படி மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

14. ஒரு புள்ளியிற் செயற்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன.

(அ) அவை ஒன்றுடென்று 120° கோணங்களை அடைப்பின் அவற்றின் பருமன்கள் சமமெனக் காட்டுக.

(ஆ) அவற்றிடைப்பட்ட கோணங்கள் 60° , 150° , 150° ஆயின் அவற்றின் பருமன்களிடைப்பட்ட விகிதம் யாது?

15. சதுரம் PQRS இல் \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , \overrightarrow{PS} , வழியே முறையே 4, $6\sqrt{2}$, $18N$ விசைகள் செயற்படுகின்றன. P இனாடு எம் மேலதிக விசையைப் புகுத்தினால் தொகுதி சமநிலை அடையும்?

16. ABCD ஒரு சதுரமாகும் CD இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{EA} , \overrightarrow{CA} , வழியே முறையே 4, 5, P, Q நியூ. விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவை சமநிலையிலிருப்பின் P, Q இன் பெறுமானங்களைக் காணக்.

17. விசை முக்கோணித் தேற்றத்தைக் கூறுக.

அ) இரு விசைகள் சமநிலையிலிருத்தற்கு வேண்டியதும் போதி யதுமான நியந்தனை யாது?

ஆ) விசையினைகரத் தத்துவத்தைக் கூறுக.

அ), ஆ) இலுள்ள உண்மைகளை ஆதாரமாகக் கொண்டு விசை முக்கோணித் தேற்றத்தை நிறுவுக.

18. முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி G ஆகும். பருமன் திசை போக்கு தாக்கக்கோடு என்பவற்றில் \overrightarrow{GA} , \overrightarrow{GB} , \overrightarrow{GC} இனால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருக்குமென, விசையினைகரத் தத்துவத்தை உபயோகித்து நிறுவுக.

19. கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்துள்ள அழுத்தமான பரப்பொன்றில் O . 5kg திணிவுடைய மரக்குற்றியொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது இதனைச் சமநிலையிற் பேணுவதற்கு

அ) தளத்திற்குச் சமாந்தரமான திசையில்,

ஆ) கிடைத் திசையில் பிரயோகிக்கவேண்டிய விசையைக் காணக். இவற்றில் எவ்விசை பருமனிற் சிறியது?

20. இலாமியின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

2kg திணிவுடைய படிக்கல்லொன்று ஒரு நிலைத்த புள்ளி O விலிருந்து 2.5 m நீளமுடைய ஒரு நீளா இழையினால்த் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. படிக்கல்லானது ஒரு கிடைவிசை F N இனால் ஒரு புறம் இழுக்கப்பட்டு O இனாடான நிலைக்குத்திலிருந்து 2m தூரத்தில் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. F ஜியம் இழையிற் காணப்படும் இழுவையையும் காணக். புவியீர்ப்பு ஆர்ய கிசல் ஓயே² எனக் கொள்க.

21. 10 m நீளமான இலேசான நீளா இழையொன்றின் முனைகள் 6m இடைத்துரத்தில், ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிக்கட்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. 0.2 kg திணிவுடைய அழுத்தமான வளையமொன்று இவ்விழையிற் கோர்க்கப்பட்டவாறு தொங்கிக்கொண்டு சமநிலை அள்ளது. இந்திலையில் இழையிற் காணப்படும் இழைவிசையைக் காண்க.

22. A, B என்பன 5 m இடைத்துரத்தில் ஒரே கிடைமட்டத்தி அள்ள இரு புள்ளிகளாகும். 4m, 3m நீளங்களுடைய இரு இலேசான இழைகளின் முனைகளிலொவ்வொன்று A, B இறகு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் மறு முனைகள் 2 kg திணிவுடைய துணிக்கையொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை தொங்கிக்கொண்டு சமநிலையிலுள்ளபோது இழைகளிற் காணப்படும் இழைவைகளைக் காண்க.

23. கிடையுடன் 300 இற் சாய்ந்துள்ள ஓர் ஒப்பமான தளத்தின் மீது 7 kg திணிவுடைய பொருள் வைக்கப்பட்டு ஒரு பிரயோக விசையினால் அது சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. இவ் விசையின் பருமனின் மீதான மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

24. ஓர் இலேசான இழையின் முனைகள் இரண்டும் நிறை W உடைய துணிக்கை A இறகு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத் தடத்தில் B, C என்களாகும். B, C இல் இணைக்கப்பட்ட வேறு இரு இலேசான இழைகளினால் BC கிடையாகவும், A அதற்குக் கிழேயுமிருக்க, துணிக்கை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அப்போது A B C ஒரு சமடிய முக்கோணியாயும் மற்றும் இழைகள் B C உடன் சமகோணம் 135° ஜ் அமைத்தவாறும் உள்ளன. B C இலுள்ள இழைவ ($3 - \sqrt{3}$) W / 6 எனக் காட்டுக.

25. மூன்று இலேசான இழைகளின் ஒவ்வொரு முனைகள் புள்ளி P இல் முடிச்சிடப்பட்டுள்ளன. இழைகளில் இரண்டு திலையான அழுத்ததாங்குகின்றன மற்றும் தாங்குகின்றன மற்றும் தில் W kgwt தொங்கவிடப்பட்டபோது புள்ளி P ஒரிடத்தில் சமநிலையடைகின்றது. இந்திலையில் கப்பிமீது செல்லும் இழைகள் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் 30° , 45° கோணங்களை அமைக்கின்றன. தற்போது W kgwt உடன் 10 kgwt மேலும் இணைக்கப்படுகின்றது புள்ளி P முன்னைய இடத்திலேயே சமநிலையிலிருப்பதற்கு மற்றும் இழைகளின் முனைகளில் மேலும் எவ்வளவு நிறைகளை இணைக்கவேண்டும்?



2. ஒரேதள விசைகள்

சமாந்தர விசைகளின் விளையுள்

1. A, B என்பன 7m இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். 4 N, 10 N நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள் முறையே A, B இலுடையெற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமணையும் அதன் தாக்கக் கோடு AB ஜ் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

2. ஓன்றிற்கொன்று 2m தூரத்தில் L, M ஆகிய புள்ளிகளுள்ளன. இவற்றிலுடையை 10N, 5N பருமன்களுடைய நிகராத சமாந்தர விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளைத் தீர்மானிக்குக்.

3. புள்ளிகள் A, B இலே முறையே செயற்படும் P, Q பருமன்களுடைய சமாந்தர விசைகள் முரண் போக்குடையன. இவற்றின் தாக்கக்கோடுகள் வேறுனவு; $P > Q$ ஆகும். இவ்விசைகளின் பருமன்கள் X இலும் அதிகரிக்கப்படும்போது விளையுளின் தாக்கக்கோடு $XAB / (P - Q)$ தூரத்திலும் இடம்பெயருமெனக் காட்டுக்.

சமாந்தரமற்ற விசைகளின் விளையுள்

4. ABCD ஒரு சதுரமாகும் $AB = CB = DC = AD = AC$ வழியே முறையே 4, 1, 5, 3, $3\sqrt{2}$ N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு A D ஜ் வெட்டும் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. ABCD ஒரு சதுரமாகும் $AB = 1.6 \text{ m}$ $AB = BC = DC = DA = BD$ வழியே முறையே 12, 10, 4, 6, $6\sqrt{2}$ N விசைகள் செயற்படுகின்றன இவற்றின் விளையுளையும் அதன் தாக்கக்கோடு நீட்டப்பட்ட AB ஜ் B இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இடைவெட்டும் என்பதையும் காண்க.

6. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். AB = 8m, BC = 6m, ஆகும். AB, CB, DC, DA, DB, வழியே முறையே 5, 3, 3, 6, 5 N விசைகள் செயற்படுகின்றன இவற்றின் விளையுளைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஜ் வெட்டும் புள்ளி P இன் நிலையையும் காண்க.

7. ஒரு முக்கோணி ABC ஆனது ஒழுங்கானதும் 2m நீளமான பக்கங்களையடையதுமாகும். AB, BC, CA வழியே இவ் எழுத்துக்களின் வரிசைப் போக்கில், முறையே 4, 6, 6 N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு BC ஜ் C இலிருந்து எவ்வளவு நூரத்தில் இடைவெட்டும்?

8. ABCD என்பது ஒரு தள அடர்மீதுள்ள செவ்வக உருவமாகும். AB = 4m, BC = 3m ஆகும். 8, 3, 2, 2, 5, 10 N விசைகள் முறையே AB, CB, CD, DA, AC, BD வழியே, எழுத்தொழுங்குப் போக்கில், செயற்படுகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமன், திசை, தாக்கக்கோட்டின் நிலை ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். AB = 2m, BC = 8m ஆகும். AB, BC, CD, DA வழியே முறையே 5, 1, 2, -3N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளையும் அதன் தாக்கக்கோடு AB ஜ் சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

10 ABCDEF ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். AB = 2m AC AE, BA, CD, DE, EF வழியே முறையே $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 6, 2, 1, 1N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், அது AD உடன் அமைக்கும் கோணத்தையும், விளையுளின் தாக்கக்கோடு AD ஜ் வெட்டும் புள்ளி M ஜையும் காண்க.

11. ஒரு சமபுய முக்கோணி ABC இன் ஒரு பக்க நீளம் 2a மீற். ஆகும். AB, BC, CA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F ஆகும். $4\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, 3, 2, 6 N விசைகள் முறையே AB, BC, AC, AE, BF, CD வழியே செயற்படுகின்றன. விளையுளின் பருமனையும் அது AB உடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB, BC என்பவற்றை B இலிருந்து எவ்வளவு நூரங்களில் இடைவெட்டுகின்றது.

12. ABCD என்ற சாய்சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் 4m நீளமுடையது $\angle BAD = 60^\circ$ DC, DA, AC வழியே முறையே $5\sqrt{3}$, $10\sqrt{3}$, P நியூ. விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு B இனாடு செல்லுமாயின் P ஜையும் விளையுளின் பருமனையும் காண்க விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB உடன் அமைக்கும் கோணம் யாது?

13. முக்கோணி ABC இல் $AB = AC = 5\text{m}$, $BC = 6\text{m}$, BC இன் நடுப்புள்ளி D ஆகும். BA, BC, DA, AC வழியே முறையே 5, 3, 20 P நியு விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB இற்குச் சமாந்தரமாயின் P யைக் காண்க. பின் விளையுள்ளும், அது BC யை வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

14. சதுரம் ABCD இன் ஒரு பக்க நீளம் 4ம் ஆகும் E என்பது $AE = 3\text{m}$ ஆகுமாறு AB மீதுள்ள புள்ளியாகும் $10, 2\sqrt{2}, 2, X$ நியு விசைகள் முறையே DE, DB, CD, BC வழியே, எழுத்துக்களின் ஒழுங்குப் போக்கில், செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு புள்ளி A ஜக் கொண்டதாயின் X ஜக் காண்க விளையுளின் பருமன் $2\sqrt{13}\text{ N}$ எனவும் காட்டுக.

15. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். $AB = 8\text{m}$, $BC = 4\text{m}$ ஆகும் 1, 2, 9, P N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA வழியே தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு CA இற்குச் சமாந்தரமாயின் P ஜக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு CD ஜ E இற்சந்திப்பின் CE இன் நீளம் யாது?

16. ABC ஒரு சமபுய முக்கோணியாகும். AB இன் நடுப்புள்ளி D ஆகும். AC, BC, BA, DC வழியே, இதே எழுத்தொழுங்குப் போக்கில், முறையே, 12, 4, 4, P நியு விசைகள் தாக்குகின்றன ($P > O$) விலையின் விளையுள் DC இற்குச் சமாந்தரமானதெனக் காட்டுக. விளையுளின் பருமன் $18\sqrt{3}\text{ N}$ எனின் P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. $AB = 2\text{m}$ ஆயின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு A இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் AB ஜ இடைவெட்டும்?

17. ABCD ஓர் இணைகரமாகும். $\angle BAD = 60^\circ$ $\angle ABD = 90^\circ$ ஆகும். AB, BD, AD, DC வழியே முறையே $2\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3}, \sqrt{3}$ விசைகள் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனைக் காண்க. N விசைகள் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனைக் காண்க. BC வழியே $4\sqrt{3}/3$ நியு விசையை மேலதிகமாக செயற்படுத்தும் போது இவ் ஐந்து விசைகளினதும் விளையுளானது A இனாடான தாக்கக்கோட்டை உடையதெனக் காட்டுக.

18. OABC என்பது 2a மீற் பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். இதன் மூலைவிட்டங்கள் M இற் சந்திக்கின்றன. 5, P, 1, 2P, $3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$ நியு விசைகள் முறையே OA, AB, BC, OC, OB, CA வழியே செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு M இனாடு உடன் விளையுள் அமைக்கும் கொண்டதையும் காண்க. Q நியு O A உடன் விளையுள் அமைக்கும் கொண்டதையும் காண்க. Q நியு பருமனுடைய மேலதிக விசையொன்று CA வழியே பிரயோகிக்கப்படும் போது புதிய விளையுள் OB வழியே அமையின் Q ஜக் காண்க.

சமவலுத் தொகுதிகள்

19. ABCD என்பது 6m பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். 3, 4, 2, 1 N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA வழியே தாக்குகின்றன. இவ் விசைத் தொகுதியானது B, C என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் இரு சமர்ந்தர விசைகளிற்குச் சமவலுவானதாயின் அவற்றைக் காண்க.
20. ABCD என்பது 3m பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். 3, 4, 2, 1 N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA வழியே செயற்படுகின்றன. இவ் விசைத் தொகுதியானது இச் சதுரத்தின் உச்சி A ஊடான ஒரு விசைக்கும் அதனுடன் கூடிய ஓர் இணைக்கும் சமவலுவானதாயின் அவற்றைக் காண்க.
21. ABC ஒரு சமபுய முக்கோணியாகும். D, E என்பன முறையே BC, CA இன் நடுப்புள்ளிகளாகும். 4, 6, 4 N விசைகள் முறையே AB, BC, CA வழியே செயற்படுகின்றன. இவற்றிற்குச் சமவலுவான தாக AD வழியேயும், E இலூடாகவும் செயற்படும் இரு விசைகளைக் காண்க.
22. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். $AB = 5\text{m}$, $BC = 12\text{m}$ ஆகும். 4, 3, 12, 13 N விசைகள் முறையே AD, CD, BC, DB வழியே செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுள் நீட்டப்பட்ட ABயை E இற் சந்திக்கின்றது. BE இன் நீளம் யாது? விளையுளின் பருமன் யாது? இவ் விசைத் தொகுதியை ED, AE வழியே செயற்படும் இரு விசைகளினாற் பிரதியிடுக.
23. சதுரம் ABCD இன் ஒருபக்க நீளம் 12m ஆகும். AB, BC, AD, DC வழியே முறையே 8, 6, 6, 4 N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. விளையுள் AB ஜ் M இற் சந்திப்பின் AM ஜக் காண்க. இவ்விசைத் தொகுதியை MC, MB, வழியே செயற்படும் இருவிசைகளாக ஒடுக்குக.

24. நேர்வரை ற வழியே பருமன் F உடைய விசையான்று செயற் படுகின்றது. இவ்விசையானது ற இற்குச் சமாந்தரமான பிறிதொரு கோட்டின் வழியே செயற்படும் இதே பருமன், போக்குடைய விசைக் கும் அதனுடன் கூடிய ஓர் இணைக்கும் சமவலுவானது எனக் காட்டுக.

ABCD என்பது 6ம் பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். AB, BC, DC, AD, வழியே முறையே 5, 9, 2, 1 N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இத் தொகுதியானது A இலூடான ஒரு விசைக்கும் அதனுடன் கூடிய ஓர் இணைக்கும் சமவலுவானதாயின் அவ் இணையின் திருப்புத்திறன் யாது?

இணையாக ஒடுங்குதல், சமநிலையடைதல்

25. ABCD என்பது 8ம் பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். 3, 9, 21, 15, N விசைகள் முறையே BA, CB, CD, DA வழியே செயற்படுகின்றன. B இல் எவ்விசையை மேலதிகமாகப் பிரயோகித்தால் தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்கும்? இவ் இணையின் திருப்புத்திறன் யாது?

26. ABCDEF ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். இதன் ஒரு பக்க நீளம் 1m ஆகும். 2, 4, 6, 8, 10, 12 N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DE, EF, FA வழியே செயற்படுகின்றன. அறுகோணியின் மையத்தில் பிறிதொரு விசையைச் செயற்றுத்தும்போது இவ் ஏழு விசைகளும் ஓர் இணையாக ஒடுங்குகின்றன. மையத்தில் செயற்படுத்தப்படும் விசையையும் இணையின் திருப்புத்தையும் காண்க

27. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். AB = 6ம், BC = 4ம், AB இன் நடுப்புள்ளி E ஆகும். 3, 6, 12, 10 N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA வழியே செயற்படுகின்றன. இவற்றுடன் X, Y, Z நியு விசைகளை முறையே DC, CE, ED வழியே பிரயோகிக்கும்போது இவ் ஏழு விசைகளும் சமநிலையடைகின்றன. X, Y, Z ஐக் காண்க.

28. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB இன் நடுப்புள்ளிகளாகும். DA, EB, CF, BC AC, AB வழியே முறையே $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, X, Y, Z நியூ. விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ் ஆறுவிசைகளும் சமநிலையில் இருப்பின் X, Y, Z ஐயும் பின்னைய மூன்று விசைகளின் (X, Y, Z இன்) விளையுளின் பருமனையும் காண்க.

29. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும். AB=6m, BC=4m உம் E என்பது AB இன் நடுப்புள்ளியுமாகும். BC, CD, AC வழியே முறையே 4, 15 $2\sqrt{13}$ N விசைகள் செயற்படுகின்றன. AB, DE வழியே முறையே P, Q நியூ பருமன்களுடைய விசைகளைப் புகுத்தும்போது தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமாயின் P, Q என்பவற்றைக் காண்க.

30. ABCD என்பது 4m பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். 6, 2, 2, 6 N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, AD வழியே தாக்குகின்றன.

(அ) இவ்விசைத்தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஜ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

(ஆ) D இல் எம் மேலதிக விசையைப் புகுத்தும் போது பெறப்படும் தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவாகும்.

31. இரு விசைகளால் உருவாகும் இணையோன்றைக் கருத்திற் கொண்டு இணையோன்றின் திருப்புத்திறனை எப்புள்ளி பற்றியும் சமனைது எனக் காட்டுக.

ABCD என்பது 2m நீளமான பக்கங்களையுடைய ஒரு சதுரமாகும். AB, CB, CD, AD வழியே முறையே 3, 5, 3, 5 N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ்விசைத்தொகுதியைச் சமநிலையிற் பேணுதற்கு பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய இணையைக் காண்க.

32. ABCDEF என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். AC=4m AB, BC, CD, DE, EF, FA வழியே முறையே 2, 3, 4, 2, 3, 4, N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ்விசைத்தொகுதி 36Nm திருப்புமுடைய ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

33. ABCDEF ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். இதன் ஒரு பக்கநீளம் $\sqrt{3}m$ ஆகும். 1, 2, 3, 2, 5, 6 N விசைகள் முறையே AB, BC, DC, ED, EF, AF வழியே செயற்படுகின்றன. இவ்விசைத்தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. இதன் திருப்புத்திறன் யாது?

34. ஒரே தெர்வரையில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகள் பற்றி ஒரு விசைத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்கள் தனித்தனி பூச்சியமாயின் அத்தொகுதி விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

ABCD என்பது ஒரு சதுரமாகும். $AB = 4\text{m}$ AB, BC, AD, DC, FE வழியே முறையே $9, 3, 21, 15, 24\sqrt{2}\text{N}$ விசைகள் செயற் படுகின்றன, இங்கு E, F என்பன முறையே AD, CD இன் நடுப்புள்ளிகளாகும். இவ் விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

35. விசைத் தொகுதி யொன்று ஓர் இணையாக ஒடுங்குதற்கு வேண்டி யதும் போதியதுமான சமவலுவான நிபந்தனைத் தொடைகள் மூன்றிணைக் கூறுக.

ABCD என்பது 2m பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். $a, b, c, d, r\sqrt{2}, q\sqrt{2}\text{ N}$ விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA, AC, BD வழியே செயற்படுகின்றன. $p+q=c-a$ உம் $p-q=d-b$ உம் ஆயின் இவ் விசைத் தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவான தெள்க் காட்டுக; இணையின் திருப்புத்திறனை a, b, c, d சார்பாகப் பெறுக.

36. ABCD ஒரு செவ்வகமாகும் $AB=DC=4\text{m}$, $AD=BD=3\text{m}$ ஆகும். AB, BC, CD, DA, BD, AC வழியே முறையே $3, 5, 4, 6, P, Q$ நியூ. விசைகள் செயற்படுகின்றன. AC, BD என்பன புள்ளிகள் இடைவெட்டுகின்றன. O பற்றி இவ்விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறனைக் காண்க. இதிலிருந்து இவ் விசைத் தொகுதி

- (i) சமநிலையில் இருக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக.
- (ii) ஓர் இணையாக ஒடுங்கினால் $Q=9P$ எனக் காட்டுக.
- (iii) B இனாடான ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவாயின் $Q=15$ எனக் காட்டுக.

37. ABCD என்னும் சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம் $2a$ மீற் ஆகும். AB, BC, CD, DA, AC, BD வழியே முறையே $1, 2, 3, 4, P, Q$ நியூ விசைகள் தாக்குகின்றன.

- (i) P, Q இன் எப்பெறுமானத்துக்கும் தொகுதி சம நிலையடைய மாட்டாது எனக் காட்டுக.
- (ii) $P=2\sqrt{2}$ உம் $Q=0$ உம் ஆயின் தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. இவ் இணையின் திருப்புத்திறன் யாது?
- (iii) $P=4\sqrt{2}, Q=\sqrt{2}$ எனின் தொகுதி ஒரு தனிவிசையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. இவ்விசையின் பருமணையும் தீசையையும் காண்க,

38. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இன் ஒரு பக்க நீளம் a உம் அதன் மையம் O உம் ஆகும். \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{EF} , \overrightarrow{FA} வழியே முறையே P, 2P, 3P, 4P, mP, nP பருமன்களுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன இவற்றின் விளையுள் EF இன் திசை போக்குடையதும் 3P பருமனுடையதுமான ஒரு தனி விசையாகும். EF இன் நடுப்புள்ளி M ஆகும்.

- (i) m, n இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
- (ii) தொகுதியின் O பற்றிய மொத்தத் திருப்பம் யாது?
- (iii) OM ஜ x அச்சாகவும் OA ஜ y அச்சாகவும் கொண்டு விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

EP, FA வழியே செயற்படும் (mP, nP) விசைகள் நீக்கப்பட்டு, O இலே Q பருமனுடைய விசையொன்றைச் செயற்படுத்தும்போது இவ் ஐந்து விசைகளும் ஓர் இணையாக ஒடுங்குகின்றது. Q ஜ yும் இணையின் திருப்பத்தையும் காண்க.

முக்கோணிகளில் விசைகள் (விசேட உதாரணங்கள்)

39. “ஒரு புள்ளி பற்றி விசையொன்றின் திருப்புத்திறன்” என்பதை வரையறைக்குக்

நேர்வரை 1 மீதுள்ள இருபுள்ளிகள் A, B ஆகும். விசையொன்று பருமன், திசைபோக்கு, தாக்கக் கோடு என்பவறில் \overrightarrow{AB} இனாலுக் குறிக்கப்படுகின்றது. பிறிதொருபுள்ளி O பற்றி இவ் விசையின் திருப்புத்திறனின் பருமனுடைய முக்கோணி OAB இன் பரப்பின் இருமடங்கிற்கு என்னளவிற் சமமாகும் எனக் காட்டுக.

முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் வழியே $\overrightarrow{\gamma AB}$, $\overrightarrow{\gamma BC}$, $\overrightarrow{\gamma CA}$ இனால் முற்றுக்குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. இங்கு γ ஒரு நேர் மாறிலியாகும். இவ்விசைத் தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குபெனக் காட்டுகே. இதன் திருப்புத்திறையும் முக்கோணியின் பூட்டின் கூடுமேற்யானம் கார்பாசத் தருக.

40. முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்ட மையம் O ஆகும். \vec{BC} , \vec{CA} \vec{AB} வழியே முறையே P, Q, R பருமன்களுடைய விசைகளும் \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} வழியே முறையே X, Y, Z பநுமன்களுடைய விசைகளும் செயற்படுகின்றன. இவ் ஆறு விசைகளும் சமனிலையில் இருப்பின்,

$$(i) P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0$$

$$(ii) \frac{P X}{a} + \frac{Q Y}{b} + \frac{R Z}{c} = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இங்கு $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ஆகும்.

41. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C இலூடு முறையே P, Q, R பருமன்களுடைய ஒரு போக்கான சமாந்தர விசைகள் (நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள்) செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுள்ளது முக்கோணியின்

(i) உள்வட்ட மையத்திலூடு சென்றால் $P : Q : R = a : b : c$ எனவும்

(ii) நிமிர்மையத்திலூடு சென்றால்

$$P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C \text{ எனவும்}$$

(iii) சுற்றுவட்ட மையத்திலூடு சென்றால் $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ எனவும் காட்டுக.

42. முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே ABCA போக்கில் முறையே P, Q, R பநுமன்களுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையளின் தாக்கக்கோடு,

(i) சுற்றுவட்ட மையத்திலூடு சென்றால்

$$P \cos A + Q \cos B + R \cos C = 0 \text{ எனவும்}$$

(ii) உள்வட்டமையத்திலூடு சென்றால் $P + Q + R = 0$ எனவும்

(iii) நிமிர்மையத்திலூடு சென்றால்

$$P \sec A + Q \sec B + R \sec C = 0 \text{ எனவும்}$$

(iv) மையப்போலியூடு செல்லின்

$$P \operatorname{cosec} A + Q \operatorname{cosec} B + R \operatorname{cosec} C = 0 \text{ எனவும் நிறுவுக.}$$

விசைகளிற்கான விகிதத் தேற்றம் ($\lambda \mu$ தேற்றம்)

43. இரு விசைகளிற்கான விகிதத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவக.

ABC ஒரு முக்கோணமாகும். BC இன் நடுப்புள்ளி D ஆகும்.

\rightarrow
CA ஜ CE : $CA = 1 : 3$ ஆகுமாறு பிரிக்கும் புள்ளி E ஆகும். $2BC$,
 \rightarrow \rightarrow
 CA , BA , என்பனவற்றினால் முற்றுக்குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளை
 \rightarrow
யுள் $6DE$ இனால் முற்றுக்குறிக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

\rightarrow \rightarrow \rightarrow
44. AB , BC , CA , என்பனவற்றினால் பருமன், திசை, போக்கு, தாக்கக்கோடு என்பன குறிக்கப்படும் மூன்று விசைகளும் ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

முக்கோணம் ABC இன் பக்கம் BC இன் நடுப்புள்ளி D ஆகும். AB , BC ஜ முறையே $AP : PB = 2 : 1$, $BQ : QD = 1 : 3$ ஆகுமாறு

பிரிக்கும் புள்ளிகள் P, Q ஆகும் AB , $2AC$, DA இனால்ப் பூரணமாகக் குறிக்கப்படும் விசைகளும், ABC சுற்றுப் போக்கில் இம் முக்கோணியின் பரப்பின் இருமடங்கிற்கு எண்ணளவிற் சமமான பருமனுடைய திருப்பழுடைய ஓர் இணையும் ஒரு தொகுதியை அமைக்கின்றன.

\rightarrow
இவை $6PQ$ இனால் குறிக்கப்படும் ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவானவை எனக் காட்டுக.

\rightarrow
45. ABCD ஓர் இணைகரமாகும். விசைத் தொகுதியொன்று λAB ,
 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow
 μBC , αCD , βDA , μDB , βAC என்பனவற்றினால் முற்றுக்குறிக்கப்படும் ஆறு விசைகளைக் கொண்டுள்ளது.

(i) $\lambda + \mu - \alpha + \beta = 0$ எனின் தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

(ii) $\lambda + \mu - \alpha + \beta \neq 0$ எனின் தொகுதி ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவானதெனக் காட்டுக. இத் தனி விசையின் தாக்கக்கோட்டின் நிலையையும் தீர்மானிக்குக.



3. ஒரேதள விசைகளின் கீழ் விறைப்பான உடலோன்றின் சமநிலை

சமாந்தர விசைகள்

1. ஒரு சீரான மரச்சட்டம் 12 m நீளமும் 10 kg திணிவுமடையது. இச் சட்டமானது ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு முளைக்கட்டைகள் மீது, ஒரு முளை ஒரு முளைக்கட்டை மீதும் மறு முளை மற்ற முளைக்கட்டையிலிருந்து 2 m தூரத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. முளைக்கட்டையிலெல் கோவில் ஏற்படும் மறுதாக்கங்களைக்காண்க.

2. 2 m நீளமும் 12 kg திணிவுமடைய ஒரு சீரான கோலானது அதன் ஒரு முளையிலிருந்து 0.5m தூரத்திலுள்ள புள்ளியானது ஒர் அழுத்தமான முளை மீது படிந்தவாறு வைக்கப்பட்டு மறுமுளையில் ஒரு நிலைக்குத்தான் மேன்முக விசையைப் பிரயோகிப்பதனால் கிடையாகச் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. அவ்விசையின் பருமன் யாது?

3. ஒரு மீற்றர் நீளமடைய சீரான சட்டமொன்று அதன் நடுப் புள்ளியிலிருந்து 10 சதம மீற்றர் தூரத்திலுள்ள புள்ளியில் ஒரு முளையினால் தாங்கப்படுகின்றது. சட்டமானது ஒரு கிடைநிலையிற் சமநிலையடைவதற்கு, தாங்கு புள்ளிக்கு அண்மையிலுள்ள முளையில் 60 கிராம் திணிவு வைக்கப்படவேண்டியுள்ளது. கோவில் திணிவைக் காண்க.

4. 20 m நீளமும் 40 kgwt நிறையுமடைய ஒரு சீரான வளையானது 10m இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு முளைகள் மீது கிடையாக ஒய்வி லுள்ளது. அவற்றில் ஒன்றின் மீது தாக்கம் 30 kgwt ஆகும். எனின் வளையின் முளைகளிலிருந்து முளைகளின் தூரங்களைக்காண்க. இரு முளைகளிலும் தாக்கங்கள் சமமாயிருக்குமாறு 60 kgwt நிறையுடைய மனிதன் அவ்வளைமீது எங்கே நிற்கவேண்டும்?

5. 15m நீளமடைய AB என்னும் ஒரு மரச்சட்டம் ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ளது. முளை A இல் 28 N விசையை நிலைக்குத்தாகப் பிரயோகிக்கும் போது சட்டமானது மட்டுமட்டாக நிலைபெயருகின்றது. இவ்வாறு 32 N விசையை B இல் நிலைக்குத்தாகப் பிரயோகிக்கும் போதும் அது மட்டாக நிலைபெயருகின்றது. ஆயின் சட்டத்தின் நிறையையும் A இலிருந்து அதன் புவியீர்ப்புமையத்தின் தூரத்தையும் காண்க.

6. AD எண்பது 12ம் நீளமுடைய சீரந்ற ஒரு கோலாகும். B, C என்பன A, B, C D என்ற ஒழுங்கில் உள்ளனவும் கோலை முச்சம் கூறிடுவனவராயுமின் புள்ளிகளாகும். B, C என்பனவற்றில் ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு விளிம்புகளினால் கோல் தாக்கப்படுகின்றது A இல் 18 kgwt நிறையுடைய சுமையை வைக்கும்போது அல்லது D இல் 12 kgwt நிறையுடைய சுமையை வைக்கும்போது கோலானது மட்டு மட்டாகச் சரிகின்றது. கோலின் நிறையையும் அதன் புவியீர்ப்புமையைம் AD ஐப் பிரிக்கும் விகிதத்தையும் காண்க.

7. ஒர் இரசாயனத் தராசின் தட்டுகள் சுற்று நிறைவேறுபாடுடையன. ஒரு பொருளை ஓவ்வொரு தட்டிலும் மாறி மாறி வைத்து நிறுத்தபோது அது 9.9 gms உம் 10; 1 gms உம் உடையதாகக் காணப்பட்டது. அப்பொருளின் உண்மையான நிறை யாது?

8. ஒரு பொய்யான தராசிலுள்ள பிழை அதன் சிறைகளின் நீள வேறுபாடாயிருந்தது. குறுகிய சிறையின் நீளம் 10cm ஆகும். பொருளொன்றை தட்டுக்களில் மாறி மாறி வைத்து நிறுத்தபோது அது 21 gms உம் 20 gms உம் உடையதாகக் காணப்பட்டது. அதன் நீண்ட சிறையின் நீளம் யாது?

9. ஒரு தராசின் சிறைகள் பாரமற்றவையும், வேறுன நீளங்கள் உடையனவாயும் உள்ளது. இதன் தட்டுக்கள் வேறுன நிறைகளுடையனவாகும். சுமைகளைவையும் தட்டுக்களில் இல்லாத போது சிறைகள் கிடைச்சமநிலை அடையவில்லை. a, b kgwt நிறைகளுடைய பொருட்களை ஒரே தட்டில் வைத்து நிறுத்தபோது அவை முறையே x,y kgwt நிறைகளுடையவையாகக் காணப்பட்டன. பின்னர் பொருட்கள் வைத்த அடே தட்டில் பிறிதொரு பொருளை வைத்து நிறுத்தபோது அது z kgwt நிறையுடையதாகக் காணப்பட்டது. எனின் இதன் உண்மையான நிறையைக் காண்க.

10. வழுவுள்ள (பொய்யான) தராசொன்றின் புயங்கள் சம நீளமற்றவையும் தட்டுக்கள் சமநிறையற்றவையும் ஆகும். ஆனால் தட்டுக்களில் நிறைகளெனதுவுமில்லாத போது புயங்கள் கிடைச்சமநிலை அடைகின்றன. ஒரு தட்டில் திணிவு M உள்ளபோது மறுதட்டில் திணிவு m₁ இனால் சமப்படுத்தப்பட்டது பின் திணிவு M ஜ மறு தட்டிற்கு மாற்றியபோது முன்னையதட்டில், இதைச் சமட்டுத்துவதற்கு, திணிவு m₂ வைக்கப்படவேண்டியுள்ளது. M² = m₁ m₂ எனக் காட்டுக. தராசத் தட்டுக்களைத் தம்முட் புயமாற்றம் செய்தபோது மேற் கண்டவாறு சமப்படுத்த வேண்டிய திணிவுகள் m₃, m₄ ஆகும். எனின் சிறைகளின் நீளங்களிடைப்பட்ட விகிதத்தைக் காண்க.

சமாந்தரமற்ற விசைகள்

11. சமாந்தரமற்ற மூன்று விசைகள் ஒர் உடலிற் செயற்படும்போது அங் சமநிலையில் இருப்பின் அவ்விசைகளின் தாக்கக்கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

12. நீளமுடைய AB எண்ணும் சீரான ஒரு கோல் அதன் ஒரு முனை A ஆனது ஒர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் படிந்திருக்கவும் மறுமுனை B இற்கு இணைக்கப்பட்ட, 10ம் நீளமுடைய, ஒர் இழை மூலம் இற்கு நேர்மேலேயுள்ள புள்ளி C இல் இணைக்கப்பட்டும் கோலானது சமநிலையிற் தாங்கப்படுகின்றது. அப்போது கோல் சுவருடன் கொண்ம் அமைப்பின் $27 \cos^2 \theta = 16$ எனக் காட்டுக.

12. நீளம் 15ம் உடைய பாரமான சீர்கோலை மற்று அதன் முனை களில் இணைக்கப்பட்ட 12ம், 9ம் நீளங்களுடைய இழைகளினால் ஒரே புள்ளி O இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோலானது நிலைக்குத் துடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்தவாறு சமநிலை அடையின் $\sin \theta = 24/25$ எனக் காட்டுக. கோலின் நிறை 20 N ஆயின் இழைகளிற் காணப்படும் இழைவைகளையும் காண்க.

13. ஒரு சீர்கோல் AB ஆனது 4ம் நீளமும் 8 kg திணிவழுடையது. முனை A ஆனது வளையொன்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை B இல் ஒரு கிடை விசையைப் பிரயோகிக்கப்பட்டும் போது கோலானது நிலைக்குத்துடன் 30° அமைத்த வண்ணம் சமநிலை அடைகின்றது. இவ்விசையின் பருமனையும் பிணையவினால் மறு தாக்க தத்தையும் காண்க.

14. ஒரு சீர்கோல் AB இன் முனை A ஆனது ஒரு வளையிலுள்ள புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் நிறை 10 N ஆகும். கீழ்முள்ள மறுமுனை B இல் ஒரு கிடைவிசை, $5\sqrt{3}$ N, பிரயோகிக்கப்படும் போது கோல் நிலைக்குத்துடன் எக்கோணம் அபைத் துச் சமநிலையடையும். பிணையவினால் கோலிற் செயற்படும் விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

15. நிறை W உடைய சீர்கோல் AB ஆனது A இலுள்ள பிணையல் பற்றி சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. மறுமுனையில் கிடைவிசை H பிரயோகிக்கப்படும் போது கோலானது சீழ்முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் அமைத்தவாறு சமநிலையிலுள்ளது, H ஜ W, θ சார்பாகக் காண்க; பிணையவினால் மறுதாக்கம்

$$\frac{W}{2} \sqrt{4 + \tan^2 \theta} \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

16. ஆனால் 3m உம் 15 kgwt நிறையுமடைய சீரான பொட்கோள் மொன்று, கிடையுடன் 45° இற் சாய்ந்துள்ள ஓர் அழுத்தமான தளத் தின் மீது வைக்கப்பட்டு அதன் வளைபரப்பி லுள்ள புள்ளியொன்றில் இணைக்கப்பட்ட 2m நீளமுடைய மெல்லிமூடியொன்றினால் சாய்தளத் திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது கோனம் சமநிலை அடைந்துள்ளபோது இழையிலுள்ள இழுவையையும் தளத்தினால் கோளத்தில் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

17. நிறை W உடைய ஒரு சீரான கோளத்தின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிற் தொடுக்கப்பட்ட ஓர் இழையின் மறுமுனையானது ஓர் அழுத்தமான நிலைக்குத்துச் சவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் நீளம் கோளத்தின் ஆரையின் இருமடங்காகும். இழையிற் காணப்படும் இழுவையையும் சவர்மீது கோளத்தினு வேற்படும் உதைப்பையும் காண்க.

18. ஒரு கோல் AB ஆனது 3m நீளமும் 8 kg திணிவுமடையது. இதன் புவியீரப்புமையாக G உம் AG = 1 யூம் ஆகும். முனை A ஆனது நிலைக்குத்துச் சவரொன்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் அழுத்தமாகப் பினைக்கப்பட்டுள்ளது B இல் இணைக்கப்பட்ட மெல்லிமூடியொன்றில் மறுமுனையானது A இற்க நேரமேலையுள்ள புள்ளி C உடன் BC கிடையாக விருக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிலையில் $\angle BAC = 60^\circ$ ஆகும். பினையிலிருந்து A நீல் மறுதாக்கத்தையும், ஒழையிலுள்ள இழுவையையும் காண்க

19. ABC என்று ஒரு சீரான மூக்கோளித்தள அடராகும். A, B இற்கு இணைத்த தொங்கிவிடப்பட்டுள்ளது. BC நிலைக்குத்தாகவும் நுந்து இவ் அடர் தொங்கிவிடப்பட்டுள்ளது. AO, BO இழைகள் இறுக்கமாகவும் இருக்க அடர் சமநிலையிலுள்ளது. AO, BO என்பன நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணங்கள் முறையே α , β ஆயின் $2 \cot \alpha - \cot \beta = 3 \cot B$ எனக் காட்டுக.

20. ஒரு சீரான கணத்தின்மத்தின் விலிம்புகள் / நீளமுடையன. இவற்றில் ஒன்றின் நடுப்புள்ளியில் 1 நீளமான ஓர் இழையின் ஒரு முனை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனை ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையிற் தொடுத்த விலிம்புத்து சவரிற்குச் சமாந்தரமாயிருக்க, கணத்தின்மமானது சமநிலையிற் தொங்குகின்றது. இந்நிலையில் சவருடன் இழையின் சாய்வைக் கணிக்கு.

21. ABCD என்பது, சிரான், செல்வக வடிவிலுள்ள தளஅடராகும். இதன் நிறை W மும் $AB = a$, $AD = b$ மும் ஆகும். உச்சி B இலே $2W$ நிறையுடைய துணிக்கையென்று ஒட்டப்பட்டுள்ளது. இவ் அடரானது உச்சி A இற் கட்டப்பட்ட இழையொன்றில் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது, சமநிலையின்போது மூலைவிட்டம் AC நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம்

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{4ab}{5a^2 + b^2} \right\} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

22. நீளம் a உடைய சிர்கோல் AB இன் முனை A ஆனது நிலைக்குத் தான் ஒப்பமான ஒரு சுவரிற்படிந்தும், மறுமுனை B ஆனது l ($>a$) நீளமுடைய இலேசான இழையொன்றினால் A இற்கு நேர் மேலேயுள்ள ஒரு புள்ளி C உடன் இணக்கப்பட்டும் கோல் AB யும் இழை BC யும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையிலுள்ளன. இந்நிலையில் கோலானது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் அமைப்பின்

$$\cos^2 \theta = \left\{ \frac{l^2 - a^2}{3a^2} \right\} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

23. $2W$ நிறையும் l நீளமுள்ள ஒரு சிர்க்கட்டம் AB ஆனது அதன் மேன்முனை A இலுள்ள ஓர் ஒப்பமான பிணையல் பற்றி சுயாதீனமாகத் திருப்பவல்லது. A இலாடான நிலைக்குத்திலிருந்து a தூரத்தில் B இருக்கவும் சமநிலையிற் சட்டம் இருக்கவும் B இல் ஒரு அளவான கிடைவிசை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. இந்நிலையில் பிணையவில் மறுதாக்கத் தின் பருமன்

$$W\sqrt{\left(\frac{4l^2 - 3a^2}{l^2 - a^2} \right)} \text{ என நிறுவுக.}$$

24. ஓர் அழுத்தமான சுவரிலிருந்து c தூரத்தில் அச்சுவரிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கிடைமேசைப்பரப்பின் அழுத்தமான விளிம்பு உள்ளது. $2l$ நீளமான சிர்கோலோன்றின் ஒரு முனை சுவரில் அழுத்தியவாறும் கோவில் ஒரு புள்ளி மேசைவிலிம்பினால்த் தாங்கப்பட்டும் கோலானது சுவரிற்கும் மேசைக்குமிடையே ஒரு பதியிருக்கவும் மறுபகுதி மேசைக்கு மேலாகவுமிருக்க சமநிலையிலுள்ளது. கோலானது சுவரிற்கும் மேசைவிளிம்பிற்கும் செங்குத்தான் ஒரு தளத்திலுள்ளது என விளக்குக. கோல் சுவருடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனில் $\sin^3 \theta = c/l$ எனக் காட்டுக,

25. ஒரு கிடைக்கோட்டில் இடைவெட்டும் ஒரு அழுத்தமான சாய் தளங்கள் கிடையுடன் α , β ($> \alpha$) கோணங்களை அமைக்கின்றன. இவ் இடைவெட்டுக்கோடு தளங்களின் கீழ் மட்டமாகவுள்ளது. ஒரு சீரான கோவில் முனைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு சாய்தளத்திற் கிடக்குமாறு தளங்களின் இடைவெட்டுக் கோட்டுக்கு செங்குத்தான் ஒரு தளத்தில் கோல் சமநிலையிலுள்ளது. கோல் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் கு ஆனது

$$\tan \theta = \left(\frac{2}{\cot \alpha - \cot \beta} \right) \text{ இங்கு தரப்படுமெனக் காட்டுக.}$$

26. அழுத்தமான வட்டக் கம்பியோன்று நிலைக்குத்தாக தளம் இருக்குமாறு நிலையாகவுள்ளது. ஒரு சிறு வளையம் இக்கட்டியில் கோர்க் கப்பட்டுள்ளது. இவ்வளையம் ஓர் இழையினால் கம்பியின் உச்சியுடன் இணக்கப்பட்டுள்ளது. இழையமைத்தில் 20° கோணம் அமைக்கின்றது. $\approx 90^\circ$. வளையம் W நிறை உடையதாயின் இழையிலுள்ள இழையை யாது? கம்பியினால் வளையத்தில் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

27. விட்டம் d உடைய ஓர் அழுத்தமான அரைக்கோளக் கிண்ணமானது அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், விளிம்பு ஓர் அழுத்தமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டவாறு மேன்முகமாயிருக்கவும் நிலையாகவுள்ளது பாரமான சீர்கோலெரன்று, ஒரு முனை அக்கோளக் கிண்ணத்தின் உட்பரப்பிலும் மறுமுனை சுவரிலும் படிந்தவாறு. கோளத்தின் மையத்தினாலாடான சுவரிற்குச் செங்குத்தான் தளத்தில் சமநிலையிலுள்ளது. கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் 60° ஆயின் அதன் நீளம்

$$d \left(1 + \frac{1}{\sqrt{13}} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

28. ஆரை a உடையதும் வட்டவடிவிலமைந்ததுமான அழுத்தமான கம்பிவளையமொன்று நிலைக்குத்துத்தாக நிலையாகவுள்ளது. தினிவு ட உடைய சிறுமோதிரமொன்று இதில் வழக்குதற்குச் சுயாதீனமடையது. மோதிரமானது $l (< a\sqrt{2})$ நீளமுடைய இழையினால் வட்டக் கம்பியில், அதன் கிடைவிட்டத்தின் ஒரு முனைப்புள்ளியில், இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் இழையிற் காணப்படும் இழையை

$$\frac{(2a^2 - l^2)}{a \sqrt{4a^2 - l^2}} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

29. ஆரை na உடைய கோளவடிவப் பாத்திரத்தினுள், ஒவ்வொன்றும் நிறை W உம் ஆரை a உம் உடைய இரு அழுத்தமான சீர்க்கோளங்கள் சயாதீனமாகச் சமநிலையிலுள்ள கோளங்களிடைப்பட்டதாக்கம் $W / \sqrt{n} = 2n$ எனக் காட்டுக.

30 நீளம் l உடைய சீர்கோல் AB ஆனது அதன் மூலை A ஓர் ஒப்பமான மூலையிற்படிந்தவாறும், A இன் மட்டத்திலுள்ள புள்ளி C இந்கு இணைத்த இழையொன்று மறுமூலை B யுடன் இணைக்கப்பட்டும், சமநிலையிலுள்ளது. இந்நிலையில் கோல், நாண் BC என்பன கிடையுடன் அமைக்கும் கோணங்கள் முறையே α , β ஆயின் $\tan \beta = 2 \tan \alpha + \cot \alpha$ எனக் காட்டுக. AC ஜி l , α சார்பாகக் காண்க.

31. சீரான கோளமொன்றின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி, கிடையுடன் α சாய்வுடைய சாய்தளத்தின் ஒரு புள்ளியுடன், ஒர் இலை சான இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்தளம் அழுத்தமானதாகும் இழையின் நீளம் கோளத்தின் ஆரையின் நான்கு மடங்காகும். கோளத்தின் நிறை W ஆயின் அது சமநிலையிலுள்ளபோது இழையில் இழைவ ($5W \sin \alpha$) / 3 எனக் காட்டுக. தளத்தினால் கோளத்தின் மீதான மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

32. நிறை W உடைய சீர்கோல் AB இன் மூலை A ஆனது வளைபொன்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியிற் சயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. B இந்கு இணைத்த ஓர் இழையினால் கோலானது நிலைக்குத்தடன் சீரோணத்தில் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. இழையிலுள்ள இழைவ இழிவாயிருத்தற்கு இழையின் திசையைக் காண்க. இச் சந்தர்ப்பத்தில் பிணையில் மறுதாக்கத்தின் பருமையும் காண்க.

33 நிறை W உடைய சீர்கோல் AB இன் ஒரு மூலை A ஆனது கிடையுடன் α ($< 45^\circ$) சாய்வுடைய ஒப்பமான சாய்தளத்தின் மீதும் மறுமூலை B ஆனது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சவரிற் படிந்தும் இருக்க, கோலானது சாய்தளத்துடன் α கோணமும் கிடையுடன் 2α இருக்க, கோணமும் அமைக்குமாறு வைக்கப்பட்டு அதன் நடுப்புள்ளிக்கு இணைத்த கிடை இழையினற் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. இழையிலுள்ள இழைவை

$$\frac{W}{2} \left(\tan \alpha + \cot \alpha \right) \text{எனக் காட்டுக.}$$

34. AB என்பது 24 cm நீளமுடைய ஒரு சீரற்ற கோலாகும். அது 13 cm ஆரையுடைய ஓர் ஒப்பமான கோளத்தின் உட்புறத்தில் கிடையுடன் $\tan^{-1} (3/5)$ கோணத்திற் சாய்ந்தவண்ணம் சமநிலையிலுள்ளதெனின் அதன் புண்யீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

3 . நீளம் 4a உடைய சீர்கோலைன்று ஆரை $a\sqrt{3}$ உம் அச்ச நிலைக்குத்தாயுமுள்ள ஒர் அழுத்தமான அரைக்கோளத்தினுள்ளே ஒரு முனை இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது கிண்ணத்தின் வீளிப்பிற்கு வெளியே கோவின் காற்பங்கு நீண்டிருக்குமெனக் காட்டுக. இவ்வாறு கிடக்கக்கூடிய அதிகிறிய கோவின் நீளம் $a2\sqrt{2}$ எனவும் காட்டுக.

36. ஒரு பாரமான கோலானது ஆரை γ உடைய ஒர் ஒப்பமான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தினுள் முழுமையாகக் கிடக்கின்றது அதன் புவியீர்ப்புமையம் அதனை a, b என்றும் நீளப் பகுதிகளாகப் பிரிக் கின்றது. இங்கு $b > a$ ஆகும். சமநிலையில் கோஸ் உள்ள போது அது கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ ஆயின்

$$\sin \theta = \left(\frac{b - a}{2\sqrt{\gamma^2 - ab}} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

கோவின் நிறை W ஆயின் முனை B இலுள்ள மறுதாக்கம்

$$\frac{a \gamma W}{(a + b) \sqrt{\gamma^2 - ab}} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

A இலுள்ள மறுதாக்கத்தை உய்த்தறிக.

37. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் V நிறையுடைய இரு சீரான கோல்கள் அவற்றின் ஒவ்வொரு முனைகள் ஒரு புள்ளியில் சுயாதின மாகப் பினைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் மறுமுனைகளில் ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமுடைய இரு இழைகளின் முனைகளில் ஒவ்வொன்று இணக்கப்பட்டுள்ளது, இழைகளின் மறுமுனைகள் வளையொன்றிலுள்ள ஒரே புள்ளியிற் கட்டப்பட்டுள்ளன இக்கோல்களிடையே ஆரை γ உடைய சீரான வட்டத்தட்டெடான்று வைக்கப்படுகின்றது. சமநிலையின்பேருது கோல்களிடைப்பட்ட கோணம் 2θ ஆயுள்ளது, $\frac{1}{3} \gamma^2 \sin^2 \theta \tan \theta [3V + 2W]$ எனக் காட்டுக. கோல்கள் அழுத்தமானவை எனக் கொள்க.

38. ABC என்பது சீரான ஒரு முக்கோணித் தட்டாகும். $\angle C$ ஒரு விரிகோணமாகும். இத்தட்டானது, வீளிம்பு AC ஒரு கிடைமேசைமீது படிந்தவாறு ஒரு நிலைக்குத்துக்தளத்தில் ABC அமையுதாறு நிற்கின்றது தட்டின் நிறை W ஆயின் தட்டு கவிழாதவாறு B இற் தொங்க விடப்படக்கூடிய பெரிய நிறை

$$\frac{1}{3} \left(\frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{c^2 - a^2 - b^2} \right) W \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இங்கு $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ ஆகும்: $c^2 > a^2 + 3b^2$ ஆயின் யாது கூறலாம்?

39. உயரம் h மும் அரையுச்சிக்கோணம் α மும் உடைய சீரான திண்மக் கூம்பொன்று அதன் அடி ஓர் அழுத்தமான நிலைக்குத்துச் சவர்மீது முற்றுகப் படிந்திருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு அதன் உச்சியை யும் சவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் இணைக்கும் இழையொன்றினால்த் தாங்கப்படுகின்றது, இழையும் கூம்பின் அச்சும் சவரிற்குச் செங்குத் தான் ஒரு தளத்தில் உள்ளன. இவ்வாரை சமநிலைக்குச் சாத்தியமான பெரிய இழையின் நீளம் $h \sqrt{(9 + 16 \tan^2 \alpha)} / 3$ எனக் காட்டுக.

40. A, B C என்பன ஒவ்வொன்றும் ஆரை r மும் நிறை W மும் உடைய சர்வசமமான உருளைகளாகும். அச்சு கிடையாகவும் ஆரை R ஆகவுமுள்ள நிலையான பொள் உருளை ஒன்றினுள்ளே B, C ஆகிய உருளைகள் சமச் சீராகவும் கிடையாகவும் வைக்கப்படுகின்றன. பின் இவற்றின் மீது உருளை A ஆனது சமச்சீராக வைக்கப்படுகின்றது. எல்லா உருளைகளினதும் அச்சுக்கள் சமாந்தரமாகவும் கிடையாகவும் உள்ளன. அவற்றின் தொடுபூரப்புகள் அழுத்தமானவையாகும் இந் நிலையில் கீழ் உருளைகள் B, C தொடுகையில் இருப்பின் $R < r(1 + 2\sqrt{7})$ எனக் காட்டுக.

திரிகோணகணிதக் குறிப்புகள்:

- 1) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
 $\tan(A+B) = (\tan A + \tan B) / (1 - \tan A \tan B)$
- 2) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$
 $= 2 \cos^2 A - 1$
 $\tan 2A = 2 \tan A / (1 - \tan^2 A)$
- 3) முக்கோணி ABC இல்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab/\cos C.$$



4. மூட்டிய கோல்கள்

1. அ) ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய சீரான இரு சம கோல்கள் AB, DC என்பவற்றின் முனைகள் A, D என்பன ஒரே கிடைமட்டத் திலுள்ள இந் புள்ளிகளுடன் அமுத்தமாகப் பினைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் மறுமுனைகள் B, C என்பன AD இலும் சிறிய நீளமுடைய ஓர் இலோசான கோலின் முனைகளுடன் அமுத்தமாகப் பினைக்கப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் சமநிலையில்த் தொங்கும்போது AB, DC என்பன நிலைக்குத்துடன் 30° ஜி அமைக்கின்றன, BC கிடையாகவுள்ளது. மூட்டு B இலை AB மீதான மறுதாக்கம் யாது? கோல் BC இல் இழுவையா, உதைப்பா காணப்படுகின்றது?

ஆ) சீர்ச் சமகோல்கள் AB, BC என்பன சமநீலம் 2a உம் சமநிறை W உம் உடையன. முனைகள் A, C என்பன ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளுடன் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்களின் மறு முனைகள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் சமநிலையிற் தொங்கும்போது அவை நிலைக்குத்துடன் x கோணம் அமைப்பின் மூட்டு B இலை கோல்களில் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

2. ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் W நிறையுடைய நான்கு சீர்ச் சமகோல்கள் A, B, C, D இல் அமுத்தமாக மூட்டப்பட்டு நாற்பக்கல் ABCD பெறப்படுகின்றது. A இனிருந்து இத்தொகுதி தொங்க விடப்படுகின்றது. B D ஜி இணைக்கும் ஓர் இலோசான சட்டத்திலை ABCD ஆனது சதுர வடிவிற் பேணப்படுகின்றது. குறுக்குச் சட்டம் BD இலுள்ள விசையையும் மூட்டு C இல் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

3. ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் W நிறையுடைய AB, BC ஆகிய சீர்க்கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன AB ஆனது புள்ளி X இலும் BC ஆனது புள்ளி Y இலுமாக ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள இரு அமுத்தமான முனைகளினால் தாங்கப்படுகின்றன. BX = x உம் BY = y உம் ஆயுள்ளபோது கோல்கள் கிடைநிலையிற் சமநிலையுள்ளன X, Y இல் மறுதாக்கங்களைக் காண்க. பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

அ) $x > a$ ஆயின் $y < a$ ஆகும்

ஆ) $2xy = a(x + y)$

இ) B இல் கோல்கள் மீதான மறுதாக்கங்கள் $W(x-y)/(x+y)$ பருமனுடையன. ($x > y$) ஆகும் $x = 2a$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

4. ஒரே நீளமும் சமநிறத் W உட்டுடைய நான்கு சீர்க்கோல்கள் A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளில், இரண்டிரண்டு கோல்களின் முனைகளாக, அழுத்தமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன இச் சட்ட வேலைப்படானது A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு A, C என்பவற்றை ஓர் இழையினால் இணைப்பதன் மூலம் ABCD என்ற சதுர வடிவிற் பேணப்படுகிறது. இழை AC இற் காணப்படும் இழுவிசையையும் மூட்டுக்கள் B, C, D இனால் கோல்களில் மறுதாக்கங்களையற் காண்க.

5. A இல் அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்ட இருகோல்கள் AB, AC என்பன சம நீளங்களும் மறையே W, V நிறையும் உடையன. B, C என்பன ஒரே மூட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளுடன் பிணைக்கப்பட்டு கோல்கள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. $BC = 2a$ உம் BC இந்குக் கீழே A இன் ஆழம் d உம் ஆயின் A இல் கோல்கள் மீதான மறுதாக்கங்களின் கிடை, நிலைக்கூறுகள் முறையே

$$\frac{(W + V)a}{4d}, \frac{W - V}{4} \text{ ஆகிய பருமன்களுடையன எனக்காட்டுக.}$$

6. பார்மானவையும் சர்வசமமானவையுமான நான்கு சீர்கோல்கள் சாய்சதுரம் ABCD ஜி அமைக்குமாறு முனைகளிற் சுபாதீனமாக மூடப்பட்டுள்ளன, ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடையன. இச் சட்ட வேலைப்பாடானது A இலிருந்து தொங்க விடப்பட்டு BC, CD இன் நடுபுள்ளிகளை இணைக்கும், அவைன நீளமுடைய இலேசான கோலினால் ABCD ஆனது சதுரவடிவிற் பேணப்படுகின்றது. B இல் மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்கூறுகளைக் காண்க. இலேசான கிடைக்கோவிலுள்ள உடைப்பு 4 W எனவும் காட்டுக.

7. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, BC ஆகிய சீர்ச் சம கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு, கிடையாக அச்சுகள் நிலையான ஒப்பமான ஓர் உருளை மீது கோல்களின் ஒவ்வொரு புள்ளி தொடுகையிலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல்களின் தளம் உருளையின் அச்சிற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது. சமத்திலைபின்போது கோல்கள் தம்மிடையே 90° ஜி அமைக்கின்றன. எனின் ஒவ்வொரு கோலின் நீளமும் உருளையின் விட்டத்தின் இருமடங்காகுமெனக் காட்டுக. பிணையினால் கோல்களில் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

8. AB, AC என்னும் சமபாரமான சமநீசீச் சீர்ச்சட்டங்கள் A இல் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. AC இன் நடுபுள்ளியும் முனை B உம் ஒரு சிறிய இலேசான இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. B, C என்பன ஓர் அழுத்தமான கிடைத்தளத்தில் இருக்குமாறு ABC ஆனது நிலைக்குத்தாக வைக்கப்படுகின்றது. இழை இறுக்கமாக சமநிலையிற் சட்டங்கள் உள்ளபோது $\angle BAC = 60^\circ$ ஆகும், இழையிலுள்ள இழுவையை சட்டமொன்றின் நிறை, W, சார்பாகக் காண்க. மூட்டு A இல் கோல்களில் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

9. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய மூன்று சமமான சீர்க்கோல் கள் சமபக்க முக்கோணியொன்றை ஆக்குமாறு ஒப்பரவாக மூட்டப் பட்டுள்ளன. இத் தொகுதியைனது கோல்களில் ஒன்றின் மையத்தில் (சுவரோன்றில் நீண்டுள்ள ஓர் ஆணியினால்,) தாங்கப்படுகின்றது. கீழே யுள்ள மூட்டினால் கோல்களில் மறுதாக்கம் $W \sqrt{3} / 6$ உம் மேலுள்ள மூட்டுக்களினால் கோல்களில் மறுதாக்கம் $W \sqrt{13 / 12}$ உம் எனக் காட்டுக இவற்றின் திசைகளையும் குறிப்பிடுக.

10. AB, AC என்னும் சமநீளமுடைய சீரான கோல்கள் முறையே M, N தினிவுகளுடையன. இவை A இற் சுபாதினமாகப் பினைக்கப் பட்டுள்ளன. முனைகள் B, C என்பன இலோசான சிறிய இழையொள் றினால் இனைக்கப்பட்டுள்ளன. கோல் AC இல், A இலிருந்து கோவிள் முக்காற்பங்கு தூரத்தில், தினிவு m உடைய துணிக்கை ஒட்டப்பட்டுள்ளது. B, C என்பன ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீதும் ABC ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலுமிருக்க கோல்கள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையின் போது $\angle BAC = 2\theta$ ஆயின் அப்போது இழையிலுள்ள இழுவை $\frac{1}{2}(M + m + N)$ எனக் காட்டுக.

11. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் $2l$ நீளமுடைய நான்கு சீரான கோல்கள் மூட்டப்பட்டு சாய்சதுரமொன்று ஆக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டுக்கள் சுபாதினமானவை. ஒத்ரே மட்டத்தில் 2α இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு அழுத்தமான சமாந்தரக் கிடைக்கம்பிகளினால், சாய்சதுரத்தின் மேல் இரு பக்கங்கள், தாங்கப்படுமாறு கோல்களின் சட்டவேலைப்பாடு கோர்க்கப்பட்டுள்ளது. கீழேயுள்ள மூட்டில் நிறை W தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. சமநிலையின்போது கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ ஆயின்

$$\sin^3 \theta = \frac{a(4W + w)}{4l(2W + w)} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

12. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் $2l$ சாய்வுள்ள இரு ஒப்பமான தளங்கள் அவற்றினடியில் ஒரு கிடையான நேர்கோட்டில் பொருந்துகின்றன. AB, AC என்னும் சமநீளமுடைய இரு சீர்க்கோல்கள், A இல் சுயாதினமாகப் பினைக்கப்பட்டு B, C என்பன ஒவ்வொரு சாய்தளத்தில் ஒவ்வொன்று தங்குமாறும் கோல்களின் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும், சாய்தளங்களின் பொருந்து கோட்டிற்குச் செங்குத் தாக தளம் ABC அமையுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது சமநிலையில் ஒவ்வொரு கோலும் கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் அமைக்கின்றன. எனின் $\tan \theta = \frac{2l}{w}$ எனக் காட்டுக. கோல்கள் சமநிறையுடையன எனக் கொள்க.

$\infty = 30^\circ$ ஆக ட ஜி 60° இற் பேணுநற் த கோல்களின் நடுப் புள்ளிகள் ஓர் இலேசான் இழையினால் இணக்கப்பட்டன, சமநிலையில் பின்யவில் ஒரு கோல்மீதான மறுதாக்கத்தின் பருமன் இழையிலுள்ள இழவையின் பருமனின் இரு மடங்காகுமெனக் காட்டுக.

13. சமநீளமும் சமநிறை, W, உம் உடைய ஐந்து சீரான கோல்கள் முனைகளில் சமாதீனமாக மூட்டப்பட்டு ஐங்கோணி ABCDE உருவாக கப்பட்டுள்ளது BC, DE இன் நடுப்புள்ளிகள் ஓர் இலேசான சிறிய இழையினால் இணக்கப்படுகின்றன. பின் CD மூன்று ஒரு கிடைப் பரப்பின்மீது இருக்குமாறு ABCDE ஐ ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி வடிவில் சமநிலையில் வைக்க முடிகின்றது. இந்நிலையில் இழை இறுத்தகமாயிருப்பின் அதிலுள்ள இழவை $[\cot(\pi/5) + 3\cot(2\pi/5)]W$ எனக் காட்டுக.

14 ஒரே நிறை W உடைய ஆறு சமமான சீர்க்கோல்கள் A, B, C, D, E, F இல் முனைகள் சமாதீனமாக மூட்டப்பட்டு ABCDEF என்ற அறுகோணிச் சட்டவேலைப்பாடு பெறப்படுகின்றது. இது A இல்ருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B, F உம் C, E உம் இலேசான கோல்களால் குறுக்கிடப்பட்டு ABCDEF மூன்று ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவிற் பேணப்படுகின்றது. கிடைக்கோல்கள் BF, CE இலுள்ள உதைப்புக்களையும் மூட்டுக்கள் B, C, D இலை கோல்கள் மீதான மறுதாக்கங்களையும் காணக்.

இணையின் பிரயோகம்

15. AB, AC என்பன ஒவ்வொன்றும் 23 நீளமும் W நிறையுமடைய சீர்க்கோல்களாகும். BC என்பது $4\pi \sin \theta$ நீளமடையதும் V நிறை யுடையதுமான பிறிதொரு சீர்கோலாகும். இவை முக்கோணி ABC ஐ ஆக்கமாறு A, B, C இல் சமாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இம் முக்கோணி B இலாடான அச்சாணியிலிருந்து சமாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. BC கிடையாகவும் A ஆனது BC இற்குக் கீழாயும் இருக்குமாறு கோல் AB இற்கு ஓர் இணை பிரயோகிக்கப்பட்டு முக்கோணிச் சட்டம் சமநிலையிஸ்ப் பேணப்படுகின்றது.

அ) இணையின் திருப்பத்தையும்,

ஆ) CA மீது EC, BA இலை உருற்றப்படும் மறுதாக்கங்களின் கீட்டாலைக் கூட்டுரை மும் காணக்.

16. நான்து சமமான கோல்கள் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு சாய்சதுரம் ABCD பெறப்பட்டுள்ளது. AD, DC இன் நடுப்புள்ளி களை இலேசான சிறிய இழைவியான்று இணைக்கின்றது. இத் தொகுதி யானது ஓர் அழுத்தமான மேசைமீது, BC நிலையாக இருக்குமாறு, கிடையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்ற கோலிற்கு L பருமனு டைய இணையொன்றைப் பிரயோகிப்பதால் இழையானது இறுக்கமான ஒரு நிலையிற் பேணப்படுகின்றது. இந்நிலையில் $\angle ABC = 2\theta$ ஆகும். இங்கு $\theta < 90^\circ$. இழையிற் காணப்படும் இழுவிசை $\frac{2L}{(AB \cos \theta)}$ எனக் காட்டுக.

17. AB, BC, CD என்பன முறையே a, b, c நீளமுடைய மூன்று இலேசான கோல்களாகும். இவை B, C ஆகிய முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன A, D என்பன ஒரே கிடைமட்டத் தில் $[b + \sqrt{(a^2 + c^2)}]$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. C இல் நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல் BC ஐக் கிடைநிலையிற் பேணுதற்கு அதற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய இணையின் பருமன் $Wbc^2 / (a^2 + c^2)$ எனக் காட்டுக.



5 மீட்டல் உதாரணங்கள்

1. அ) மாறுப் பருமன்களுடைய இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமனின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்கள் முறையே P, Q ஆகும். அவ் விசைகள் மூலம் கோணத்திற் செயற்படும் போது அவற்றின் விளையுளின் பருமன்

$$\sqrt{\left\{ P^2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + Q^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right\}} \text{ எனக் காட்டுக}$$

ஆ சமாந்தரமற்ற இருவிசைகளின் தாக்கக்கோடுகள் புள்ளி O இற் சந்திக்கின்றன. இவற்றின் பருமன்கள் P, Q உம் விளையுளின் பருமன் R உம் ஆகும். நேர்வரையொன்று இவற்றின் (P, Q, R இன்) தாக்கக்கோடுகளை முறையே A, B, M இற் சந்திக்கின்றது.

$$\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OM} \text{ எனக் காட்டுக}$$

2. ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள புள்ளிகள் P, Q இற்கு ஒரு நீளா இழையின் மீண்டும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இதை மூலியிலுள்ள இரு வேறுன புள்ளிகள் A, B இல் முறையே 3, 2m திணிவுகளுடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறு துணிக்கைகள் சமநிலையிற் தொங்கிக் கொண்டுள்ளபோது இழையின் பகுதிகள் யாவும் இறுக்கமாயும் PA, AB, BQ என்பன கிடையுடன் முறையே மூலம் கோணங்களை அமைத்தவாறும் உள்ளன.

$$\tan \theta = \frac{3}{2m} - \frac{2}{3} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

3. விசைகளிற்கான விசிதத் தேற்றத்தைக் காறுக.

P என்பது முக்கோணி ABC இன் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். \vec{PA} , \vec{PB} , \vec{PC} என்பவற்றினால் பருமன், திசை, தானம் (தாக்கக்கோடு) ஆகியவற்றில் வகைத்திருக்கப்படும் மூன்று விசைகளினதும் விளையுளானது \vec{PG} இனால் முற்றுகத் தரப்படுமெனக் காட்டுக இங்கு G என்பது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி ஆகும்.

4. ABCDEF என்பது a பக்கநீளமுடைய ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி யாகும். AB, BC, CD, DE, EF வழியே சமபருமன்கள் P உடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ் ஜந்து விசைகளினதும் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க, விளையுளின் தாக்கக்கோடு A இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திலுள்ளது. இவ் ஜந்து விசைகளினதும் தொத்திச் சமவலுவானதாக CD, FA வழியே செயற்படும் இரு விசைகளைக் காண்க.

5. ABCD என்பது a பக்கமுடைய ஒரு சதுரமாகும். ஒரு தொகுதி யானது AB, BC, CD, DA வழியே செயற்படும் 2P, 2P, P, 3P பருமன்களுடைய நான்கு விசைகளையும் ABCD சுற்றுப் போக்கில Pa திருப்பமுடைய இணையொன்றையும் கொண்டுள்ளது. இத்தொகுதியானது $P/\sqrt{2}$ பருமனுடைய ஒரு தனி விசைக்குச் சமவலுவானதெனக் காட்டுக. இவ்விசையின் தாக்கக்கோடு AB ஜ் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

6. ABCDEF என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். AB, BC DC, ED வழியே முறையே 2P, P, 2P, P பருமன்களுடைய விசைகளும் EF, AF வழியே முறையே hP, kP பருமன்களுடைய விசைகளும் செயற்படுகின்றன. மேற்படி ஆறுவிசைகளினதும் தொகுதியானது

அ) EB வழியே செயற்படும் ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவாகுமாறு h, k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ஆ) சமநிலையடையுமாறு h, k இற்கு சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்முடியாது என்பதை விளக்குக.

7. ABC என்பது ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். BC, CA, AB இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே L, M, N ஆகும். 1, 2, 3, P, Q, 1 நியூ. விசைகள் முறையே AB, BC, CA, NM, ML, LN வழியே செயற்படுகின்றன. இவ்விசைத்தொகுதி நாப்பமடையாது எனக்காட்டுக.

அ) தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமாயின்
 $P = 2$ எனவும் $Q = 3$ எனவும் காட்டுக.

ஆ) தொகுதியானது N இலுாடான ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவானதாயின் $Q = 5$ எனக் காட்டுக. இச் சந்தர்ப்பத்தில் $P = 4$ ஆயின் அவ்விசையின் பருமனையும் அதன் தாக்கக்கோடு BC ஜ் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

8. ஆள்கூற்றச்சுக்கள் O_x, O_y குறித்து A, B, C இன் ஆள்கூறுகள் முறையே (9a. 0), (0, -4a), (6a, 4a) ஆகும். BC → → → OA, CA வழியே முறையே 15P, S, T பருமங்களுடைய விசைகள் செயற் படுகின்றன. இவ் விசைகள் ஒர் இணையாக ஒடுங்கினால்

அ) P சார்பாக S, T இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ஆ) இணையின் திருப்புத்திறனை a, P சார்பாகக் காண்க.

இ) இணையின் போக்கு யாது?

9. முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே முறையே P, Q, R பருமங்களுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. விளையுளின் தாக்கக்கோடு ABC இன்

அ) நிமிர்மையத்தினாடும் உள்மையத்தினாடும் செல்லின் $P : Q : R = (\sec B - \sec C) : (\sec C - \sec A) : (\sec A - \sec B)$

ஆ) நிமிர்மையத்தினாடும் சுற்றுமையத்தினாடும், செல்லின் $P : Q = (b^2 - c^2) \cos A : (c^2 - a^2) \cos B$ எனக் காட்டுக.

மேற்படி மூன்று விசைகளும் திருப்பம் G உடைய ஒர் இணைக்குச் சமவலுவாயின்

$$\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} = \frac{G}{2\Delta} \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

இங்கு Δ என்பது ABC இன் பரப்பின் எண்பெறுமானமாகும்.

10. P, Q, R பருமங்களுடைய விசைகள் முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே முறையே தாக்குகின்றன. இவை S பருமனுடைய ஒரு தனிவிசைக்கு சமவலுவாயின்

$$S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR \cos A - 2RP \cos B - 2PQ \cos C$$

எனக் காட்டுக,

11. ABCD என்பது பக்க நீளம் a உடைய ஒரு சதுரமாகும். AB, BC, CD, DA, BD வழியே முறையே 1, 3, 5, 7, $8\sqrt{2}$ N விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனைக் காண்க. AB, AD என்பவற்றை முறையே x, y நேர் அச்சுக்களாகக் கொண்டு விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. தளம் Oxy இற் செயற்படும் ஒரு விசைத்தொகுதியின் O (0, 0) A (a, 0), B (0, b) பற்றிய திருப்பங்கள் முறையே L, pL, qL ஆகும். இங்கு $L \pm 0$, p, q ± 1 ஆகும். இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு T (k, 0) என்ற புள்ளியூடு செல்கின்றது. k ஜைப் விளையுளின் பருமனையும் a, b, p, q, L சார்பாகக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின்சமன்பாடு

$$(1-p) \frac{x}{a} + (1-q) \frac{y}{b} = 1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

13. ஒரேதள விசைத்தொகுதியொன்று சமநிலையில் இருத்தற்கான, சமவலுவான, நிபந்தனைத் தொடைகள் மூன்றினைத் தருக.

முக்கோணி ABC இன் உள்வட்ட மையம் I ஆகும். AB, BC, AC, IA, IB வழியே முறையே P, P, 2P, 4P \cos(A/2), 2P \cos(B/2) பருமன்களுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி சமனிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக

14. ABCD என்பது ஒரு செவ்வகமாகும். இதன் சுற்றுவட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி P ஆகும். $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}, \vec{PD}$ என்பவற்றினால் முற்றுக்க் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையானது, மாறுப் பருமனுடையதும் சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தினாடான தாக்கக்கோட்டை உடையதுமானதெனக் காட்டுக.

$\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{CP}, \vec{DP}$ இனால்க் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையாக காண்க.

15. முக்கோணி ABC இன் நியிர்மையம் H ஆகும். AH, BH, CH வழியே முறையே $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ பருமன்களுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவ்விசைகளின் தாக்கக்கோடுகள் A, B, C பற்றி ஒரே போக்கில் சம கோணம் $\theta (< 90^\circ)$ இனால் சுழற்றுப்படுகின்றன. எனின் விசைத்தொகுதி ஓர் இணையாக மாறுமெனக் காட்டுக. இதன் திருப்பம் $4\lambda \Delta \sin \theta$ பருமனுடையது எனவும் காட்டுக. இங்கு Δ என்பது முக்கோணியின் பரப்பின் எண்பெறுமானமாகும்.

16. ஒரு திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் உயரம் h உம் அடியினது ஆரை r உம் ஆகும். ஓர் இலேசான இழையின் ஒரு முளை கூம்பின் உச்சியுடனும், மறுமுளை கூம்பின் அடியின் வளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி யிடலும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பின் இழையானது ஓர் அழுத்தமான யிடலும்

முளையின்மீது போடப்பட்டு கூம்பு தொங்கவிடப்பட்டபோது கூம்பின் அச்சு கிடையாக இருக்குமாறு அது சமநிலையடையின் இழையின் நீளம் $\sqrt{(h^2 + 4a^2)}$ எனக் காட்டுக,

17. கோல் AB இன் ஒரு மூளை A ஆனது கிடையுடன் யாய்வுடைய ஓர் அழுத்தமான சாய்தளத்தின் மீதாயும் மறுமுனை B ஆனது ஓர் அழுத்தம்:ன நிலைக்குத்துச் சுவர்மீதாயும் இருக்கக் கோல் சமநிலையிலுள்ளது அப்போது கோலானது கிடையுடன் பி கோணம் அமைக்கின்றது. எனின் $AG : GB = \sin\alpha : \sin\beta : \cos(\alpha + \beta)$ எனக் காட்டுக. இங்கு G ஆனது கோவின் புவியீரப்பு மையமாகும்.

18. இரு தளப்பரப்புக்களும் திறந்துள்ள சீரான, மெல்லிய தகட்டினால் ஆக்கப்பட்ட, உருளையொன்று ஓர் அழுத்தமான தளத்தின்மீது அச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்குமாறும் வட்டவளிம்பொன்று தளத்தில் தொடுகையிலிருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளையின் ஆரை a உம் நிறை W உம் ஆகும். உருளையினுள் ஒவ்வொன்றும் r ஆரையும் V நிறையுமடைய இரு ஒப்பமான கோளங்கள் ஒன்றன்மீது ஒன்றூக்கவைக்கப்படுகின்றன. இங்கு $2a > 2r > a$ ஆகும். உருளையானது கவிழும் தறுவாயில் மட்டாக நியிர்ந்து நிற்கின்றதெனின் V ஜா, r, W சார்பாகக் காண்க.

19. AB என்னும் ஏணியொன்று ஒரு கரடான தரையில் மூளை A உம், அழுத்தமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றில் மூளை B படிந்த வாறும் நிலைக்குத்துச் தளமொன்றிற் சமநிலையிலுள்ளது. இதன் புவியீரப்பு மையம் G ஆனது கீழ்மூளை A இறங்கு அண்மையிலிருக்கின்றது. $AG : GB = 2 : 3$ ஆகும். மூளை A இல் தரையினால் மறுதாக்கத்தின் தாக்கக்கோடானது நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}(1/2)$ என்ற கோணம் அமைக்கின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. கோல் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(4/5)$ எனக் காட்டுக. ஏணியின் நிறை W ஆயின் A இற் செயற்படும் உராய்வு விசையைக் காண்க.

20. நிறை W உடைய சீரான கோவொன்றின் ஒரு மூளை கிடைத் தரையிலும் மறுமுனை ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற்கெதிராயும் இருக்குமாறு கோல் சமநிலையிலுள்ளது. அப்போது சுவரினால் மேல் மூளையில் மறுதாக்கம் $W/3$ ஆயுள்ளது. தரையினால் கீழ்மூளையில் மறுதாக்கத்தைக் காண்க நிலைக்குத்துடன் கோவின் சாய்வென்ன? கீழ்மூளையிற் செயற்படும் உராய்வு விசை யாது?

21. கிடையுடன் சமசாய்வு கூட உடைய இரு ஒப்பமான சாய்தளச்கள் அவற்றின் அடியில் ஒரு கிடைக்கோடு | இந்பொருந்து கிணறன். A, B, C என்பன சம ஆரைகளும் சம நிறைகளுமடைய சர்வசமமான மூன்று சீரான அழுத்தமான உருளைகளாகும். A, B என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரு தளத்தைத் தொடுமாறும் அச்சுக்கள் கிடையாகவிருக்குமாறும், சமச்சீராக சாய்களங்களினிடையே வைக்கப்பட்டுள்ளன. பின் உருளை C ஆனது A, B மீது அதனச்சும் கிடையாயிருக்குமாறு சமச்சீராக வைக்கப்படுகின்றது. A, B தொடுகையில் இருப்பின் அவற்றிடப்பட்ட தாக்கங்களின் பருமனை உருளையொன்றின் நிறை, கூட சார்பாகப் பெறுக. A, B என்பன பிரியாதிருத்தற்கான நிபந்தனை $\tan \alpha > \sqrt{3}/9$ எனக் காட்டுக.

22. ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் Wநிறையுமடைய AB, BC, CD, DA ஆகிய நான்கு சீர்கோல்கள் A, B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC, CD ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் $2a \sin \theta$ நீளமடைய கோல் R இனால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது இச் சட்டப்படலானது A இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படின் கோல் R இற்காணப்படும் வசையைத் தீர்மானிக்குக. B, C இல் மறுதாக்கங்களின் பருமன்கள் முறையே $W\sqrt{(25\tan^2\theta + 4)}/2, 5W(\tan \theta)/2$ எனவும் காட்டுக.

23. சீரான மெஸ்விப நேரிய கம்பிபான்று 120 cm நீளமும் 360 gm/wt. நிறையுமடையது. இது AB, BC, CA, ஆகிய மூன்று துண்டுகளாகக்கப்பட்டு A, B, C இற்க சுயாதீனாக மூட்டப்படுகின்றது. AB : BC : CA = 3 : 4 : 5 ஆகும். இம் முக்கோணப் படலானது A இலிருந்து இழையொன்றினால்த் தொங்கவிடப்படுகின்றது. சமநிலையின் போது AB கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(4/3)$ எனக் காட்டுக மூட்டுக்கள் B, C இல் மறுதாக்களையும் காணக.

24. சீரான ஏகவினமான கோலொன்று மூன்று துண்டுகளாகக்கப்பட்டு முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ABC என்ற முக்கோணிக் கீட்டப்படல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இது உச்சி A இலிருந்து ஒர் இழையினால் தொங்கவிடப்பட்டபோது BC கிடையாயிருக்கச் சமநிலையடைந்தது. கோவில் ஓரலவுத் நீளத்தின் நிறை w ஆகும். AB = c, BC = a, CA = b கோல் AB மீது முனை B இற்க செயற்படும். மறுதாக்கத்தைக் காணக அத்துடன் $\frac{w}{AB}$ நிலைக்கத்துடன் அமைக்கும் கோணம்

$$\tan^{-1} \left\{ \cot C \left(1 + \frac{\sin B}{\sin A} \right) \right\} \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

$AE > AB / AB$ என்று நீண்டுமொத்தமாக வெளியேற்று

போடப்பட்டுள்ளது.

பெறுமானங்கள், கோவைகள், முடிபுகள்

அலகு 1 (பக்கம் :- 1 — 5)

3. அ) $7N, \tan^{-1} (3\sqrt{3} / 13)$,
 ஆ) $26N, 16N$ விசையுடன் $\tan^{-1} (7\sqrt{3} / 23)$
 இ) $15N, 12N$ விசையுடன் $\tan^{-1} (3 / 4)$
4. அ) 60° , ஆ) $3N$
5. அ) $P = 12, 6\sqrt{3} N$,
 ஆ) $6\sqrt{5} N, 10N$ விசையுடன் $\tan^{-1} (2 / 11)$
6. அ) 45° , ஆ) $120^\circ, \cos^{-1} (-7 / 8) = 151^\circ$
8. $(m - 1) / (m + 1)$
11. அ) $10N, AB$ யுடன் $\tan^{-1} (\frac{3}{4}\sqrt{3})$
 ஆ) $20N, AB$ யுடன் $\tan^{-1} (3 / 4)$
12. அ) $18\sqrt{3} N$ வடக்கே, ஆ) $10N, AB$ யுடன் 60°
14. ஆ) $1 : \sqrt{3} : \sqrt{3}$
15. $26N, PQ$ எடன் $\tan^{-1} (12 / 5)$, போக்கைப்படத்திற் காட்டுக.
16. $P = \sqrt{5}, Q = 3\sqrt{2}$
19. அ) $(g / 4) N$, ஆ) $(g\sqrt{3}/6) N$, தளத்திற்குச் சமாந்தரமான விசை சிறியது.
20. $F = 8g / 3$, இழுவை $= (10g / 3) N$
21. இழுவை 0.125 kgwt
22. A இங்கு இணைத்த இழையில் $(6 / 5) \text{ kgwt}$, மற்றயிலில் $(8 / 5) \text{ kgwt}$
23. $(7g / 2) N$, தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக, $(7\sqrt{3}g / 2) N$
25. $5\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \text{ kgwt}, 10(\sqrt{3} - 1) \text{ kgwt}$,

அலகு 2. (பக்கம் : 6-15)

1. 14N, A இலிருந்து 5m இல்.
2. 5N (பெரிய விசையின் போக்கில்), நீட்டப்பட்ட ML இல் L இலிருந்து 2m இல்.
3. 13N, $\tan^{-1}(5/12)$, AD இன் நெப்புள்ளி.
4. $10\sqrt{2}N$, ABவட்டம் 45° , 0.32m.
5. $12\sqrt{2}N$, ABவட்டம் 45° , AP = 5.5m
6. 2N, சமாந்தரம் BA, நீட்டப்பட்ட BC கூடுமினிருந்து 4m இல்
7. $2\sqrt{5}N$, ABவட்டம் $\tan^{-1}2$, ABகூடும் A இலிருந்து 4.5m இல்
8. 5N, ABவட்டம் $\tan^{-1}(4/3)$, A இலிருந்து 4.5m இல்
9. 7N, ADவட்டம் $\tan^{-1}4\sqrt{3}$, AM = 1.75m
10. 8N, 30° ; ($3a/4$)m, ($3a/8$)m
11. P = 15, 15N, 30°
12. P = 10, 20N, Bஇலிருந்து ($3/4$)m இல்.
13. X = 6
14. P = 6, CE=13 m
15. P = $10\sqrt{3}$, Aஇலிருந்து ($11/9$)m இல்
16. 8N
17. P = 6, 20N, $\tan^{-1}(4/3)$, Q = $2\sqrt{2}$
18. Bஇனாடு $4\sqrt{10}$ N, ABவட்டம் $\tan^{-1}3$ இல், Cஇனாடு மரண போக்கில் $3\sqrt{10}$ N,
19. $\sqrt{10}N$, ABCD சுற்றுப்போக்கில் 18Nm திருப்பமுடையது.
20. $10\sqrt{3}N$, $4\sqrt{19}N$ ABவட்டம் $\tan^{-1}(\sqrt{3}/4)$
21. 4m, $2\sqrt{5}N$, 5N, 5N
22. $12\sqrt{2}N$, ABவட்டம் 45° , AM = 2m, MC வழியே $6\sqrt{5}N$, MB வழியே 6N.
23. 42Nm, ABCD சுற்றுப்போக்கில்.
24. $24\sqrt{2}N$, ABவட்டம் 45° , 288Nm
25. 12N, EF இற்குச் சமாந்தரம், $21\sqrt{3}Nm$
26. X = 24, Y = 10, Z = 15

28. $3, 5, 2, \sqrt{57} N$

29. $P = -6, Q = 15$

30. அ) $4\sqrt{5} N$, AB யுடன் $\tan^{-1} 2$, AB ஓ விளையல் வெட்டும் புள்ளி M ஆயின் AM = 2m, இ) $4\sqrt{5} N$, D யுடன் $\tan^{-1}(0.5)$ இல்

31. ABCD சுற்றுப்போக்கில் 4Nm . (33) 4.5Nm

35. $(a+b+c+d) \text{Nm}$. (38) i) $m = 2, n = 6$, ii) $9Pa\sqrt{3}$
iii) $x = 3a\sqrt{3}, Q = P\sqrt{31}$, திருப்புத்திறன் $5Pa\sqrt{3}$

அலகு 3 (பக்கம் : 16 - 24)

1. $4 \text{kgwt}, 6 \text{kgwt}$ 2. $4 \text{kgwt} (= 40 N)$

3. 240 gm 4. $2.5 \text{m உம் } 7.5 \text{m உம்}$, தாக்கம் குறைவாக விருந்த முனையிலிருந்து $35/6$ மீற். இல்

5. $60N, 8m$ 6. $30 \text{kgwt}, AG : GD = 8 : 7$

7. 10gmwt 8. $\sqrt{105} \text{cm}$

9. $\frac{[bx - ay + (a - b)z]}{(x - y)} \text{ kgwt}$ 10. $(M - m_3) : (m_4 - M)$

12. $16N, 12N$ 13. $(4\sqrt{3}/3) \text{kgwt}, (4\sqrt{39}/3) \text{kgwt}$

14. $5\sqrt{7}N$, நீலைச்சுத்துடன் $\tan^{-1}(\sqrt{3}/2)$ இல்

16. $(75\sqrt{2}/8) \text{kgwt}, (105\sqrt{2}/8) \text{kgwt}$

17. $W\sqrt{2}/4, W\sqrt{2}/4$ 18. $(16\sqrt{3}/3) \text{kgwt}, (8\sqrt{3}/3) \text{kgwt}$

20. $\cot^{-1} 3$ 26. $2W \sin \alpha, W$

30. $AC = \frac{l \sec \alpha}{1 + 2 \tan^2 \alpha}$ 32. AB இட்கு செங்குத்து, பினையலில்

மறுதாக்கம் $-\frac{W}{2} \sqrt{\frac{4 - 3 \sin^2 \theta}{(4 - 3 \sin^2 \theta)}}$

34. ஒரு முனையிலிருந்து 9cm இல்

அலகு 4 (பக்கம் :- 25 - 29)

1. அ) $W\sqrt{3}/6$, இழுவை ஆ) $(W \cot \alpha)/2$ கிடையாக
2. $2W$, உதைப்பு, $W/2$ கிடையாக
3. $\frac{2yW}{x+y}$, $\frac{2xW}{x+y}$, $\frac{2a}{3}$ 4. $2W$, $W/2$, $W/2$, $W/2$
6. $3W/2$, W 7. W கிடையாக
8. இழுவை = $W/2$, மறுதாக்கம் = $W/2$, கிடையுடன் 30° இல்
9. கிடையாக, கிடையுடன் $\tan^{-1} 2\sqrt{3}$ இல்
14. BF இல் $\frac{5W\sqrt{3}}{2}$, CE இல் $\frac{W\sqrt{3}}{2}$
15. அ) $2a(2W + V) \sin \theta$
ஆ) $\frac{(W + V)}{2} \tan \theta$, $\frac{V}{2}$, $\frac{(W + V)}{2} \tan \theta$, $\frac{(2W + V)}{2}$

அலகு 5 (பக்கம் :- 30 - 35)

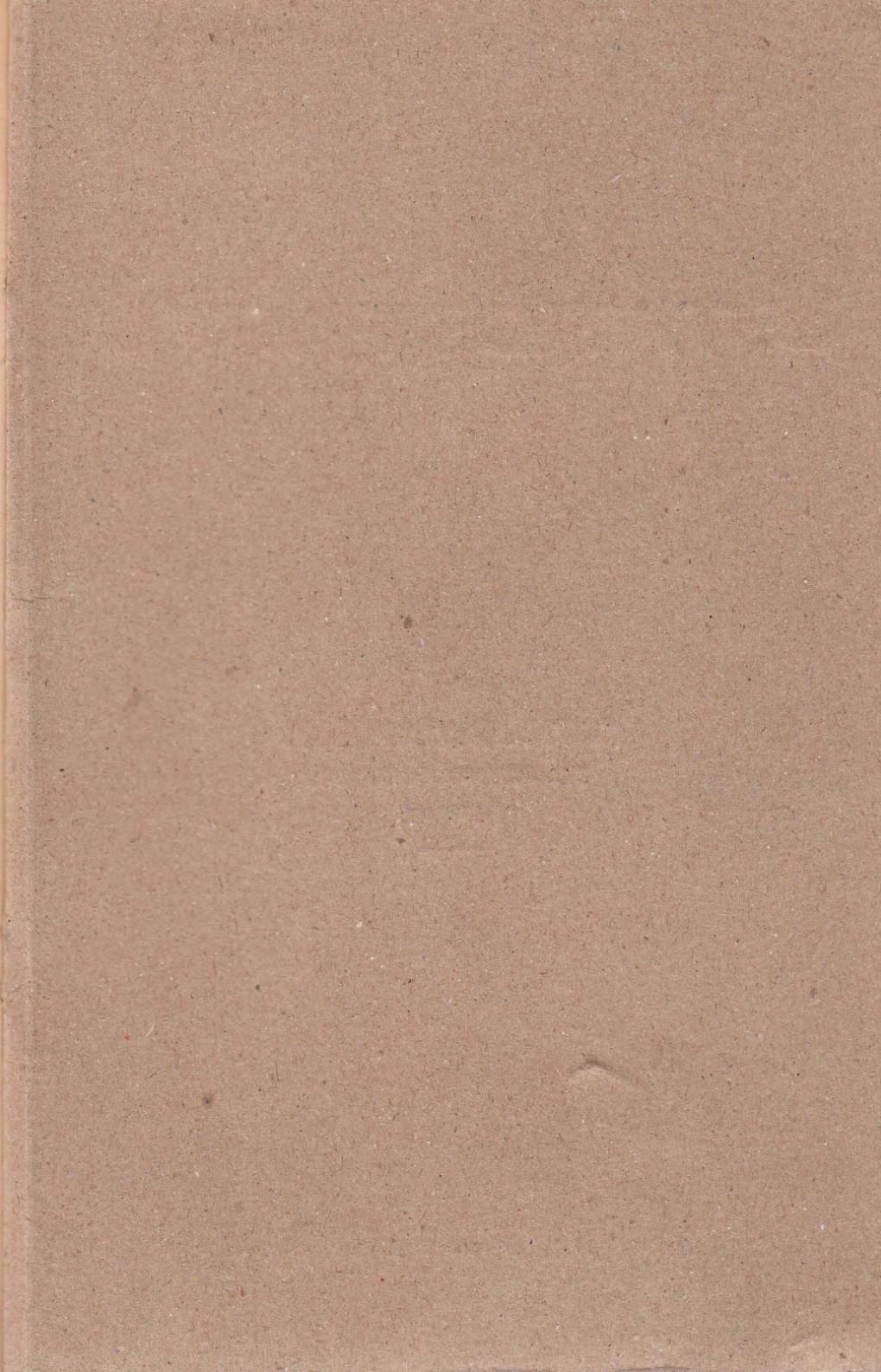
4. P , // AE , $3a\sqrt{3}$, $3P$, $2P$
5. A இலிருந்து $4a$ உம் B இலிருந்து $5a$ உம்
6. அ) $h = k = 4$ 7. ஆ) 2 நியூ. நடுப்புள்ளி L
8. அ) $S = -18P$, $T = 15P$ ஆ) $-7\pi aP$ இ) $P > 0$ யின் $ABCD$ சுற்றுப்போக்கில்.
11. $4\sqrt{10}N$, $x + 3y = 4a$
12. $k = \frac{a}{1-p}$, $L \sqrt{\left(\left(\frac{1-p}{a}\right)^2 + \left(\frac{1-q}{b}\right)^2\right)}$
14. P இனாடு $\overrightarrow{2DA}$ 18. $2(a - r)V = aW$
19. $W/2$ 20. $\frac{W\sqrt{10}}{3}$, $\tan^{-1}(2/3)$, $\frac{W}{3}$
21. உருளையின் நிறை W எனின் $W\sqrt{3}(3\sqrt{3} \tan \alpha - 1)/6$
24. $\frac{W}{2} \sqrt{\left(a^2 + (a+b)^2 \cot^2 C\right)}$



மாற்றிக் கொள்ளவும்

பக்கம்	எண்	தவறு	மாற்றம்
12	85	BD	DB
12	36	(ii) $Q = 9P$	(ii) $Q = 7P$
76	1	கட்டையினால்	கட்டைகளினால்
17	6	தாங்கப்படுகின்றது	தாங்கப்படுகின்றது
24	திரி. குறி.	$- 2ab/\cos C$	$- 2abc\cos C$





STATICS PART 1

By :

S. THURAIAPPAH

ST. JOHN'S COLLEGE,
JAFFNA.

மேக்காடி 40/1, நாவலர் விதி, யாழ்ப்பாணம்.