P. வேலாயுதம் B. sc (வெக்டர்)
S. பிரேம்நாத் B. sc

GCE A/L APPLIED MATHEMATICS DYNAMICS

செயல்முறை வழிகாட்டிக்
கணக்குகளும் பயிற்சியும்

வெளியீடு :-
ஸ்ரீலங்கா புத்தகசாலை
234, காங்கேசன் துறை வீதி,
யாழ்ப்பாணம்.

விலை: ரூபா 37.50

R. K. M. Sri Koneswara Hindu College

(National School)

Trincomalee, Sri Lanka.

Prize Day

1998

PRIZE WINNER - 1997

Name : L. Sasregaram

Class : Yr 11

1st Place : –

2nd Place : Tamil, Music, Com.

3rd Place : Hinduism

Merit : S. Studies, Science, Maths

V. Kupan

Sectional Head.

Principal

15-10-1998

இயக்கவியல்
பிரயோக கணிதம்
(எறியம்)

APPLIED MATHEMATICS

(க. பொ. த. உயர்தர வகுப்புகளுக்குரியது)

ஆசிரியர்கள்:

வெக்டர் P. வேலாயுதம் B.Sc
S.பிரேம்நாத் B.Sc.

வெளியீடு:
ஸ்ரீலங்கா புத்தகசாலை
234 காங்கேசன் துறை வீதி
யாழ்ப்பாணம்.

அட்டை: இயக்கவியல் பிரயோக கணிதம் (எறியம்)

ஆசிரியர்கள்: P.வேலாயுதம் B. Sc
S. பிரேம்நாத் B. Sc

வெளியீடு: ஸ்ரீலங்கா புத்தசாலை,
234 காங்கேசன்துறை வீதி,
யாழ்ப்பாணம்.

விலை ரூபா 37/50

பதிப்பு: புரட்டாதி 1995

Typeset and Artwork by:
Zodiac Desktop Publishing Centre,
E.L. 1/8, Dias Place,
Gunasinghepura,
Colombo-12.

K. Rathreshan

அணிந்துரை

திரு. S. சிவசுப்பரமணியம் B.Sc (First Class)
இளைப்பாறிய பௌதிகவியற்துறை ஆசிரியர்
ஸ்கந்தவரோதய கல்லூரி
சுன்னாகம்

இது அறிவியல் உலகம், இருபதாம் நூற்றாண்டினைவழியனுப்பி வைக்கவும். இருபத்தோராம் நூற்றாண்டினை விரைந்து வரவேற்கவும் மனித இனம் முனைந்து செயலாற்றுகின்றது.

இன்றைய மாணவர்களே நாளைய தலைவர்கள். இன்று நாம் மாணவர்களைச் சரியாக வழி நடத்தினாலேதான் அடுத்த தலைமுறையை அவர்கள்வழி நடத்தும் தகமைகளைப் பெறுவார்கள் இதற்கேற்ப அறிவியற் கல்வியினை அளிப்பதில் நாம் அதிகளவு ஆர்வங் காட்ட வேண்டியுள்ளது.

இக்குறைபாட்டினைப் போக்கும் எண்ணத்துடன் பிரயோக கணிதம் கற்கும் மாணவர்கள் எறியம் பற்றிய அறிவை வளர்க்கவும், அதுபற்றிய கணக்குகளைச் சரியான முறையில் விளங்கிக் கொள்ளவும் தக்க முறையில் – செய்முறை விளக்கங்களுடன் இந்நூல் – பிரயோக கணிதம் (எறியம்) எழுதப்பட்டுள்ளது.

இந்நூலை ஆக்கியிருப்போர் என்னுடைய மாணாக்கர் இருவர் திரு P. வேலாயுதம் (வெக்டர்) B.Sc. திரு S பிரேம்நாத் B.Sc ஆகிய இருவரும் கற்கும்போதே கடுமையாக உழைத்தவர்கள் "சிறந்த மாணவனே நல்லாசிரியன்" என்பதற்கொப்ப இன்னும் கற்றுக்கொண்டிருக்கும் சிறந்த மாணவர் இவர்கள்.

இவர்தம் பட்டறிவால் மாணவர்க்கு ஏற்படும் இடர்களை உணர்ந்து அவர்களுக்கு உதவும் வகையில் இந்நூலை ஆக்கியிருக்கிறார்கள்.

கற்கும் மாணவர்களும், கற்பிக்கும் ஆசிரியர்களும் இந்நூல் மூலம் சிறந்த பயனடைவார்கள் என்பது எனது நம்பிக்கை.

இவர்களது கல்விப்பணியும், நூலாக்கப்பணியும் சிறக்க ஆதரவு வழங்கவேண்டியது நம் அனைவரதும் அருங்கடமையாகும்.

முகவுரை

எங்கும் எதிலும் கணிதம், அந்தக் கணிதம் தமிழ் மாணவர்களின் அவல நிலையும,அவர்கள் கல்வி கற்பதில் உள்ள சிரமங்களையும் மனதில் கருதி, இன்றைய க.பொ.த. உயர்தர வகுப்பில் பயிலும் மாணவ மணிகளுக்கு உகந்த வகையில் சில கணித நூல்களை எழுதமுனைந்தேன். அதன் ஆக்கமே இந்நூல். இன்று வெளிவரும் 'இயக்கவியலில் எறியம்" என்ற பகுதி இரண்டாவது வெளியீடாகும் கடந்த கால கணித பாடம் கற்பித்தலின் அனுபவங்களை மனதில் வைத்து இந்நூல் ஆக்கப்பட்டது. ஆக்கும் இவ்வேளையில் எனது அருமை மாணவனும் இளம் பட்டதாரியுமாகிய திரு. பிரேம்நாத் பல வழிகளில் உதவிபுரிந்துள்ளார்கள். அவர்களின் கருவும் இங்கு உருவமாக வந்துள்ளது. அத்தோடு எனது குருவாகிய திரு. சிவசுப்பிரமணியம் (மணியம்) அவர்களின் மேலான ஆலோசனைகளும் ஆசியும் கிடைக்கப் பெற்றேன்.

இன்றைய மாணவ உலகுக்கு இது ஒரு வரப்பிரசாதமாக அமையுமென எண்ணுகின்றேன். பலன் தரும் மரமாக அமைந்து மேலும் பல விழுதுகள் விடத்தொடங்கும்.

இந்நூலை வெளியிட உதவிய சிறிலங்கா புத்தகசாலையையும் எனது குருவுக்கும், எனது மாணவமணியாகி இப்போ உடனாசிரியனாக இருந்து இணை ஆசிரியராகச் செயலாற்றி திரு. பிரேநாத்துக்கும், இந்த நூலில் வரும் படங்களை வரைந்த ஆசிரியர் திரு. ஏ.ஆ. ककानந்தா அவர்களுக்கும் நன்றி உரித்தாகும்.

வேலாயுத பவனம்
உடுப்பிட்டி.

P. வேலாயுதம்

K. PRAITHEEPA

எறியம் (Projectiles)

1.பொருள் எறியப்படும் ஊடகத்தில் காற்றுத்தடைகளைப் புறக்கணிக்கும் போது உபயோகிக்கப்படும் சூத்திரங்கள் பின்வருவன.

1) $\underline{V}_F \; U_F + \underline{f}_F t$

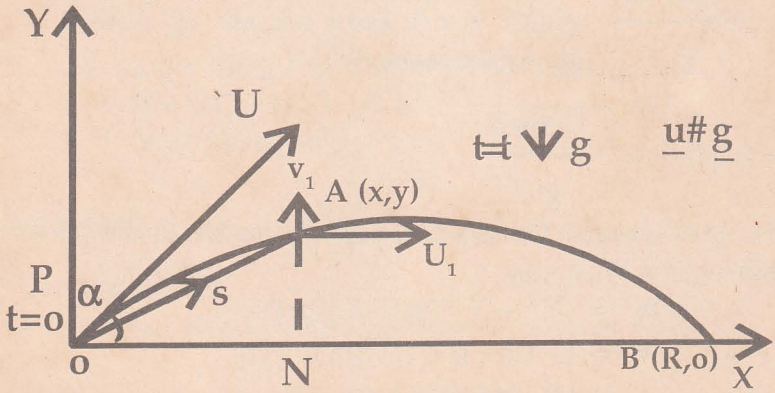
2) $\underline{S}_F = \underline{U}_F + 1/2 \underline{f}_F t^2$

3) $\underline{V}_F^2 = \underline{U}_F^2 + 2 \underline{f}_F \underline{S}_F$

இங்கு F மாட்டேற்றுச் சட்டத்தைக் குறிக்கின்றது t ஆனது சட்டத்தில் தங்கியிருப்பதில்லை, இதனாற்றான் t_F எனக் குறிப்பது வழக்கமில்லை மாணவர்கள் இயன்றளவு 1) ஐயும் 2) ஐயும் உபயோகித்தல் நன்று 3) ஐ உபயோகிக்கையில் a ,b பெருக்கத்தைக் கவனித்தல் வேண்டும்.

துணிக்கை ஒன்றானது புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்கும் போது அதன் பாதை 1) நேர்கோடு 2)பரவளைவு ஆகும். பாதை நேர்கோடாக இருப்பதற்கு U// g ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

U /-/ 1g ஆயிருக்கையில் பாதை பரவளைவு ஆகும். ஆள் கூற்றுக் கேத்திரகணிதத்தில் பரவளைவு கற்றபின்னர் இப்பகுதியை மீண்டும் திருப்பிப்பார்த்தல் நன்று



படம் -1

படத்தில் காட்டியவண்ணம் x ,y அச்சுகளைத் தேர்ந்தெடுப்போம். t அலகு நேரத்தில் துணிக்கை P இன் இடப்பெயர்ச்சி
$\rightarrow$
OA ஆகும்.

$\overline{OA} = \overline{ON} + \overline{NA}$ ஆதலால் $\overline{ON}$ கிடை இடப்பெயர்ச்சி $\overline{NA}$ நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சி ஆகும்.

$\underline{V} = \underline{U} + \underline{f}t$ ஐ பிரயோகிக்கப் பெறுவது

1) $\rightarrow U_1 = U \cos\alpha + 0t$
$= U \cos\alpha$ ---------- (1) t இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் அதாவது கிடைவேகம் ஒரு போதும் மாறாது.

2) $\uparrow$ $V_1 = U \sin\alpha - gt$ ---------- (2)

உய்தறிதல்

$t < \dfrac{U\sin\alpha}{g}$ ஆயின் $V_1 > 0$ அதவாவது துணிக்கை மேல் நோக்கிஇயங்குகின்றது என்பதாகும்.

$t > \dfrac{U\sin\alpha}{g}$ ஆயின் $V_1 < 0$ இங்கு பொருள் கீழ் நோக்கி இயங்குமென்பதாகும்.

$V_1 = 0$ ஆக, $t = \dfrac{U \sin\alpha}{g}$

Aயில் துணிக்கையின் வேகத்தின் பருமனைக் கணிக்கவேண்டுமாயின் அதன் பருமன் W ஆனது.

$W^2 = U_1^2 + V_1^2$ ஆற் பெறப்படும்.

$W^2 = U^2 \cos^2\alpha + (U \sin\alpha - gt)^2$

$= U^2 - 2Ug \sin\alpha\, t + g^2 t^2$ ----------(3)

வியாக்கியானம்

1) U, W, g, α தரப்படுமாயின் t இற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் உண்டு.

2) U, α, t, g தரப்படுமாயின்W இற்கு ஒரு பெறுமானம் மட்டும் உண்டு.

$g^2t^2 - 2Ug \sin\alpha\, t + U^2 - W^2 = 0$ ------ (3) இதன் மூலங்கள் t_1, t_2 என்போம்.

$$\therefore\ t_1 + t_2 = \frac{2U \sin\alpha}{g} \qquad \{W \text{ ஐச் சாராதது}\}$$

$$t_1 t_2 = \frac{U^2 - W^2}{g^2} \qquad \{\alpha \text{ இல் தங்காது}\}$$

t_1t_2 மெய்யாக இருத்தற்கு ≥ 0 ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$$\Delta = 4U^2g^2 \sin^2\alpha - 4g^2(U^2 - W^2) \geq 0$$

அதாவது $W^2 \geq U^2 \cos^2\alpha$

" " $W \geq U \cos\alpha$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

இதிலிருந்து நாம் அவதானிக்கக்கூடியது துணிக்கையின் இழிவு வேகத்தின் பருமன் கிடைவேகக் கூறுக்குச் சமமானதாகும்.

$\underline{S} = \underline{U}t + 1/2\ \underline{f}\ t^2$ ஐ உபயோகிக்கப் பெறுவது

1) -> $X = U \cos\alpha\, t + 1/2\ 0t^2$ ----------(1)

2) ↑ $Y = U\sin\alpha\, t - 1/2gt^2$ ----------(2)

உய்த்தறிதல்

1) Y= O ஆக t = 0, $\dfrac{2U \sin\alpha}{g}$

∴ துணிக்கை O இலிருந்து B ஐ அடைய எடுக்கும் நேரம்

$$\frac{2U \sin\alpha}{g}$$ ஆகும்.

குறிப்பு:

முன்னர் $t_1 + t_2 = \frac{2U \sin\alpha}{g}$ என அறிந்துள்ளோம் ஆகவே

மாணவர்கள் t_1, t_2 பற்றி ஆராய்தல் நன்று.

2) $t = \frac{2U \sin \alpha}{g}$ ஆக $x = R$ என்போம்

$$\therefore R = \frac{2U^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha \quad \text{----------(3)}$$

α இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்

$R \leq \frac{U^2}{g}$ ஆகும்.

R இன் உயர் பெறுமானம் $\frac{U^2}{g}$ ஆகும். இது $\alpha = \frac{\pi}{4}$

ஆகையால் இடம் பெறும்

$R \leq \frac{U^2}{g}$ இன் வியாக்கியானம்

1) Uதரப்படும் போது R இற்கு ஓர் உயர்வுப் பெறுமானம் உண்டு என்பதாகும்

2) Rதரப்படும் போது U இற்கு ஓர் இழிவுப் பெறுமானம் உண்டு என்பதாகும்.

குறிப்பு:

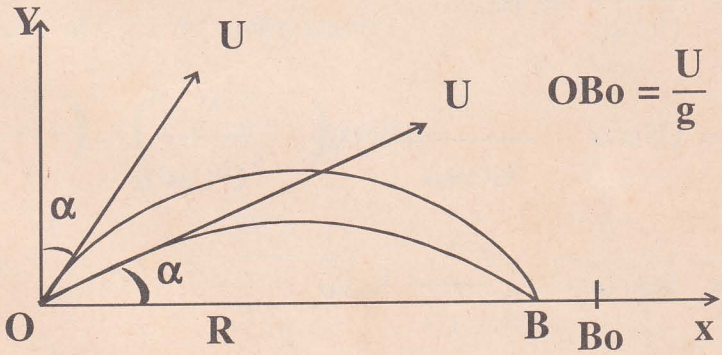
$$R = \frac{U^2}{g} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{U^2}{g} \sin(\pi - 2\alpha)$$

$$= \frac{U^2}{g} \sin 2(\pi/2 - \alpha)$$

$$= \frac{U2}{g} \sin 2\beta \quad \beta = \pi/2 - \alpha$$

இதிலிருந்து அறிவது R என்னும் வீச்சைப் பெற இரண்டு எறியல் கோணம் உண்டு என்பதாகும். அவை α, β எனக் கொண்டால் $\alpha + \beta = \pi / 2$ ஆகும்.



படம் – 2

$\alpha = \beta$ ஆயின் ஒரே யொரு கடவை மட்டும் உண்டு. அக்கடவை கிடைத்தளத்தை B_0 இல் சந்திக்குமென்போம்.

∴ U என்னும் வேகத்திற்கு எல்லைப்புள்ளி B_0 ஆகும். O ஐ

மையாகவும் $\frac{U^2}{g}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரைவோமாயின் இவ்வட்டத்திற்கு வெளியில் கிடக்கும் புள்ளிகளைத் துணிக்கை அடையமுடியாது இப்பகுதி பாதுகாப்பான பிரதேசம் என அழைக்கப்படும்

கடவையின் பரமானச் சமன்பாடுகள்

கடவையில் யாது மொரு புள்ளி (x.y) ஆயின்

$x = U \cos \alpha \ t$

$y = U \sin \alpha \ t - 1/2 \ gt^2$ ஆகும்.

இதை நாம் கடவையின் பரமானச்சமன்பாடு என அழைப்போம் இங்கு t பரமானமாகக் கருதப்படும். கடவையில் யாது மொருபுள்ளியின் தானக்காவி r (O ஐக் குறித்து)

$\underline{r} = (U \cos \alpha \ t) \underline{i} + (U \sin \alpha \ t - 1/2g \ t^2) \underline{j}$ என எழுதுவோம்.

கடவையின் சமன்பாடு

பரமானச் சமன்பாடுகளிலிருந்து t ஐ நீக்கப்பெறுவது கடவையின் சமன்பாடு ஆகும்.

$t = \frac{x}{U\cos\alpha}$ ஆகும்.

$$\therefore y = U\sin\alpha \ \frac{x}{U\cos\alpha} \ 1/2g \ \frac{x^2}{U^2\cos^2\alpha}$$

$$= x\tan\alpha - 1/2g \ \frac{x^2}{U^2} \ \sec^2\alpha$$

$= ax^2 + bx$ வடிவம் இங்கு $a < 0$

$\therefore$ கடவை ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$y = x \tan \alpha - 1/2g \frac{x^2}{U^2} (1+ \tan^2\alpha) \qquad \text{---------(1)}$$

இச்சமன்பாட்டின் பிரயோகம்:-

1. தரப்பட்ட புள்ளியை அடிப்பதற்கு இழிவு எறிவேகத்தில் பருமனைக் காண்போம்.

$x = a, y = h$ எனக் கொண்டால்

$$h = aT - 1/2g \frac{a^2}{U^2} (1+ T^2) \text{ ஆகும், } T= \tan \alpha$$

$$a^2 T^2 - \frac{2U^2}{g} (aT) + a^2 + \frac{2U^2h}{g} = 0 \qquad \text{----------(2)}$$

$\tan\alpha$ மெய்யாக இருப்பதால் $\Delta \geq 0$ ஆயிருத்தல்.
வேண்டும்$(- \alpha \leq T \leq \alpha)$ ஆயிருப்பதால்

$$\Delta = \left(\frac{2U^2}{g}\right)^2 - 4 \left(a^2 + \frac{2U^2 h}{g}\right) \geq 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அ∴து } \frac{U^4}{g^2} - a^2 - \frac{2U^2h}{g} \geq 0$$

$$U^4 - 2U^2hg - a^2 g^2 \geq 0$$

$$(U^2 - hg)^2 - g^2 (a^2 + h^2) \geq 0$$

$$\left(U^2 - hg - g\sqrt{a^2+h^2}\right)\left(U^2 - hg + g\sqrt{a^2+h^2}\right) \geq 0$$

$U^2 - hg + g\sqrt{h^2+a^2} > 0$ ஆதலால்

$U^2 - gh - g\sqrt{h^2+a^2} \geq 0$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்

$\therefore\ U^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2+a^2}\right)$ ஆகும்.

வியாக்கியானம் 1

(a , h) எனும் தரப்பட்ட புள்ளியை துணிக்கை அடிப்பதற்கு இழிவு எறிவேகத்தின் பருமன் U_0 ஆனது

$U_0^2 = g\left(h + \sqrt{h^2+a^2}\right)$ ஆல் பெறப்படும்.

2) $\sqrt{h^2+a^2} = R$ எனவும், $h = R\ \text{Sin}\theta$ எனவும் கொண்டால்

$U^2 \geq g\,[R\ \text{Sin}\ \theta + R]$ என எழுதலாம்.

$\therefore\ U^2 \geq g\,R\,(\text{Sin}\theta + 1)$

R.θ தரப்படுமாயின் U இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\sqrt{gR\,(1+\text{Sin}\theta)}$ ஆகும். இதை நாம் θ சாய்வுடைய தளத்தில் மேல்நோக்கி R எனும் வீச்சைப் பெறுவதற்குத் தேவையான இழிவு எறிவேகத்தின் பருமனாகும் எனக் கொள்ளலாம்.

U,θ தரப்படுமாயின்

$$R \leq \frac{U^2}{g(1+\text{Sin}\theta)}$$ என இடலாம்

∴ R இன் உயர்வுப் பெறுமானம்

$$\frac{U^2}{g\,(1+\text{Sin}\ \theta)}$$ ஆகும்.

இதை நாம் நாம் சாய்தளத்தில் மேல்நோக்கி எறியும்போது

பெறக்கூடிய உயர் வீச்சு எனக் கூறுவோம்.

2. எறியல் புள்ளியிலிருந்து a தூரத்தில் h உயரமுடைய சுவர் ஒன்றைத்தாண்டுவதற்கு தேவையான இழிவு எறிவேகத்தைக் காண்போம்.

$$Y = x \tan\alpha - 1/2g \frac{x^2}{U^2} (1 + \tan^2\alpha)$$ இல் $x = a$ ஐப் பிரதியிடப் பெறுவது

$$y = aT - 1/2g \frac{x^2}{U^2} (1+T^2)$$ ஆகும்.

இது $\tan\alpha = T$ இல் இருபடிக் கோவையாகும்.

$$\therefore V = -\frac{g}{2U^2}\left\{(aT)^2 - \frac{2U^2}{g}(aT)\right\} - \frac{ga^2}{2U^2}$$

$$= \frac{g}{2U^2}\left\{\left(at - \frac{U^2}{g}\right)^2 - \frac{U^2}{g2}\right\} - \frac{ga^2}{2U^2}$$

$$= \left(\frac{U^2}{2g} - \frac{ga^2}{2U^2}\right) - \frac{g}{2U^2}\left(aT - \frac{U^2}{g}\right)^2$$

$$\leq \frac{U^2}{2g} - \frac{ga^2}{2U^2}$$ சமம் $aT = \frac{U^2}{g}$ ஆகும் போது

$\therefore y$ இன் உயர் பொறுமானம்

$$\frac{U^2}{2g} - \frac{ga^2}{2U^2}$$ ஆகும்

இப்பெறுமானம் h இலும் பெரிது அல்லது சமன் ஆயின் துணிக்கை சுவரைத்தாண்ட முடியும் என்பதாகும்.

∴ சுவரைத்தாண்டுவதற்கு.

$$\frac{U^2}{2g} - \frac{ga^2}{2U^2} \geq h$$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $U^4 - 2U^2 hg - g^2 a^2 \geq 0$ ஆயிருத்தல் வேண்டும். இதற்கு முன்புள்ள பகுதியிலிருந்து அறிவது.

$U^2 \geq g\,(h + \sqrt{h^2+a^2})$ ஆயிருத்தல் வேண்டும் என்பதே

$U^2 = g\,(h + \sqrt{h^2+a^2})$ ஆயின்

$$\tan\alpha = \frac{U^2}{2g}$$ ஆகும் இது இழிவு எறிவேகத்தின் எறியல் கோணத்தைத் தரும்.

இங்கும் $U^2 \geq g\,R\,(1+\sin\theta)$

$$R \leq \frac{u2}{g\,(1+\sin\theta)}$$

என்பவற்றிற்கு வியாக்கியானம் கொடுக்கலாம்.

குறிப்பு :-

உபயோகம் (1) உம் (2) உம் ஒரே முடிவைத்தந்தாலும் பௌதிக விளக்கம் வேறானவை என்பதை மாணவர்கள் அறிந்திருத்தல் வேண்டும் .

$u^2 \geq g(h+\sqrt{h^2+a^2})$ ஐப் பின்வருமாறு பெறலாம்

$$y = a\tan\alpha - 1/2 \frac{ga^2}{U^2} (1+\tan^2 x) \geq h$$ ஆகும்வண்ணம்

α இற்கு மெய்ப்பெறுமானம் ஒன்று உண்டாயின் சுவரைத் துணிக்கை தாண்ட முடியும் என்பதாகும்.

அதாவது $a^2 \tan^2\alpha - \frac{2u^2}{g} a \tan\alpha + \frac{2u^2h}{g} + a^2 \leq 0$ ஆயிருக்கும் வண்ணம் α இற்கு மெய்ப்பெறுமானம் இருத்தல் வேண்டும்.

இது $\left(\frac{2u^2}{g}\right)^2 - 4.1.\left(a^2 + \frac{2u^2h}{g}\right) \geq 0$ ---------- (1)

ஆயிருக்கையில் நிகழும்

குறிப்பு :-

$y = ax^2 + bx + c$ வரைபில் மாணவர்கள் கற்றுள்ளீர்கள் என்பதைக் கவனித்தல் வேண்டும்.

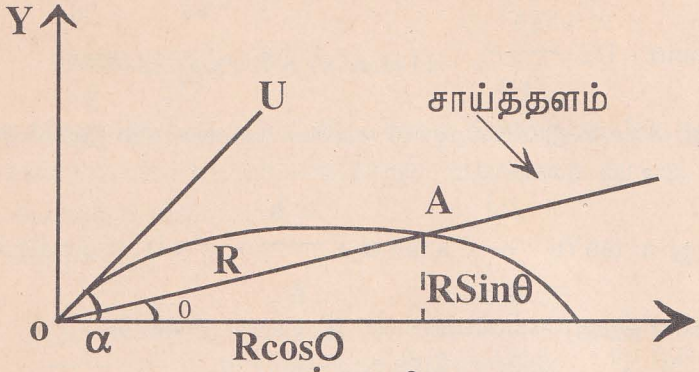
$(1) => u^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + a^2}\right)$

$u^2 = g\left(h + \sqrt{h^2 + a^2}\right)$ ஆக

$\tan\alpha = \frac{2u^2}{2g}$ $\left(\Delta = 0\ x = -\frac{b}{2a}\right)$ இருபடிச்சமன்பாடு

அதாவது $\tan\alpha = \frac{u^2}{ag}$ ஆகும்.

3. கிடையுடன் சாய்வுடைய சாய்தளத்தில் வீச்சைப் பெறுதல்



படம் – 3

கடவையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - 1/2g \frac{x^2}{u^2} (1+\tan^2 \alpha)$$ ஆகும்.

A(R Cos θ, R Sin θ) ஆதலால் நாம் பெறுவது

$$R\sin \theta = R \cos\theta \tan \alpha - 1/2g \frac{R^2\cos^2\theta}{U^2} (1+ \tan \alpha)$$

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \alpha - \frac{Rg}{2u^2} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{Rg}{2u^2} - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2\alpha} = \cos \theta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin \theta$$

$$= \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos\alpha}$$

$$\therefore R = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{\cos\alpha \sin(\alpha - \theta)}{\cos^2\theta}$$

இங்கு R சாய்தளத்தில் (1) வீச்சைக் குறிக்கும்.

R இன் உயர் பெறுமானம்

$$R = \frac{u^2}{g} \frac{[\sin(2\alpha - \theta) - \sin\theta]}{\cos^2\theta}$$

$$R \leq \frac{u^2}{g}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$$ சமம் $2\alpha - \theta = \pi/2$

$$\leq \frac{u^2}{g}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$$

$\therefore$R இன் உயர் பெறுமானம் $\dfrac{u^2}{g(1+\sin\theta)}$ ஆகும் .

குறிப்பு :-

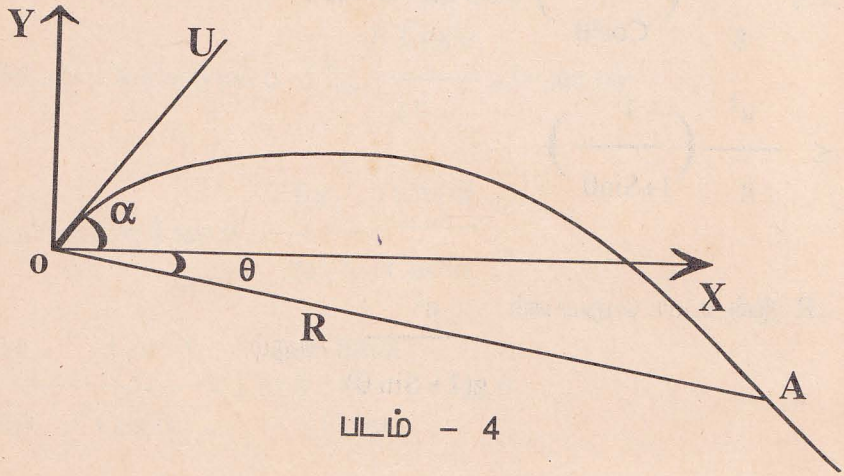
$$R = \frac{U^2}{g}\left[\frac{\sin(2\alpha - \theta) - \sin\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

$$= \frac{U^2}{g}\left[\frac{\sin(2\beta - \theta) - \sin\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

என இடலாம் இங்கு $2\alpha - \theta + 2\beta - \theta = \pi$ ஆகும்.

$\therefore$R என்னும் வீச்சைப் பெற இரு எறியக் கோணங்கள் உண்டு என்பதாகும். அவை α , βஆகும் .

$\alpha = \beta$ ஆக $2\alpha - \theta = \pi/2$ ஆகும் இக்கடவை உயர் வீச்சைத்தரும்



படம் – 4

$$R = \frac{2u^2}{g} \frac{\cos\alpha \sin(\alpha - \theta)}{\cos^2\theta}$$ இல் $\theta \to -\theta$ இடப் பெறுவது

$$R = \frac{2u^2}{g} \frac{\cos\alpha \sin(\alpha + \theta)}{\cos^2\theta}$$ ஆகும்

இது சாய்தளத்தில் கீழ் நோக்கிய வீச்சைத் தரும்.

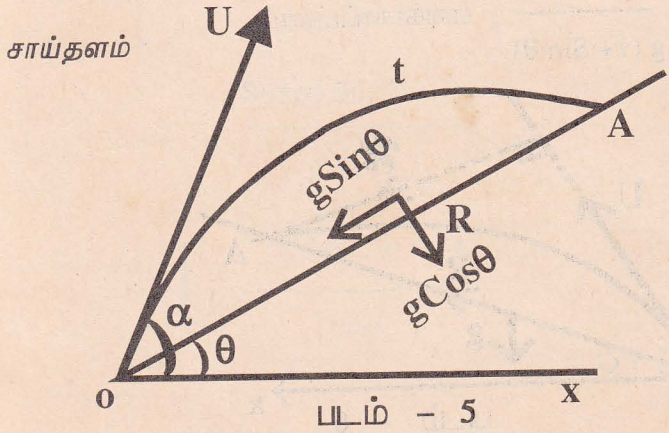
மேலும் $R \leq \frac{u^2}{g} \frac{1}{1 - \sin\theta}$ எனக்காட்டலாம் சமம்

$2\alpha + \theta = \pi / 2$ ஆக நிகழும்

∴ உயர் வீச்சு

$$R = \frac{u^2}{g(1 - \sin\theta)}$$ ஆகும்.

மாணவர்கள் உயர்வீச்சுக்குரிய கடவைகளைக் கீறிப்பார்த்தல் வேண்டும்.



படம் – 5

$\underline{S} = \underline{u}t + 1/2\underline{f}t^2$ ஐ பிரயோகிக்கப் பெறுவது

1) ல் $0 = u \sin(\alpha - \theta)\, t - 1/2\, g \cos\theta\, t^2$

$$\therefore t = \frac{2U \sin(\alpha - \theta)}{g \cos\theta} \quad (t \neq 0)$$

குறிப்பு :-

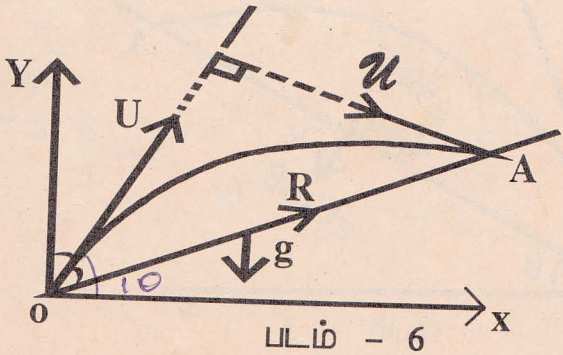
உண்மையான இடப் பெயர்ச்சிக்குச் செங்குத்தாக இச் சமன்பாட்டைப் பிரயோகித்து பறப்பு நேரத்தைப் பெறமுடியும் என்பதைக் கவனித்தல் வேண்டும் .

2) $\rightarrow R \cos\theta = u \cos\alpha\, t + 1/2\, 0t^2$

$$= u\cos\alpha \frac{2u \sin(\alpha - \theta)}{g\cos\theta}$$

$$\therefore R = \frac{2u^2}{g} \frac{\cos\alpha \sin(\alpha - \theta)}{\cos^2\theta}$$

$$R \leq \frac{u^2}{g(1 + \sin\theta)}$$ எனக் காட்டலாம்



படம் – 6

$2\alpha - \theta = \pi / 2$ ஐ $\alpha - \theta = \pi / 2 - \alpha$ என இடலாம்
அ- து u இன் திசை < Aoy ஐ இரு கூறிடும்.
$\underline{\mathbf{v}}^2 - \underline{\mathbf{u}}^2 + 2\underset{\sim}{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{s}}$ ஐப் பிரயோகிக்கப் பெறுவது
$\underline{\mathbf{v}}^2 = \underline{\mathbf{u}}^2 + 2\underset{\sim}{g} \cdot \underline{\mathbf{R}}$ ஆகும்

அ-து $v^2 = u^2 + 2g\,R\,\mathrm{Cos}(\pi / 2 + \theta)$

$$= u^2 - 2g\,R\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

$$= u^2 - 2g \frac{u^2 \mathrm{Sin}\,\theta}{g\,(1 + \mathrm{Sin}\,\theta)}$$

$$= u^2 \left(\frac{1 - \mathrm{Sin}\theta}{1 + \mathrm{Sin}\theta} \right) \qquad \text{----- (1)}$$

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{ft}$ ஐ பிரயோகிக்கப் பெறுவது

$$v^1 = u - g\,\mathrm{Sin}\,\alpha \frac{2u\,\mathrm{Sin}\,(\alpha - \theta)}{g\,\mathrm{Cos}\,\theta} \qquad (2\alpha - \theta = \pi / 2)$$

$$= u - 2u \frac{\mathrm{Sin}(\alpha)\,\mathrm{Sin}\,(\alpha - \theta)}{\mathrm{Cos}\,\theta}$$

$$= u \left[1 - \frac{2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\theta} \right]$$

$$= u \left[1 - \frac{\text{Sin } 2\alpha}{\text{Sin } 2\alpha} \right]$$

$$= o$$

∴ A ஐ அடையும்போது A யில் வேகம் **v** ஆயின் **v** , **v** = 0 ஆகும்.

உய்த்தறிதல்

$$v^2 = u^2 \left(\frac{1 - \text{Sin } \theta}{1 + \text{Sin } \theta} \right) \text{ ஐ}$$

$$\frac{v^2}{1 - \text{Sin } \theta} = \frac{u^2}{1 + \text{Sin } \theta} \text{ என இடலாம்}$$

$$\therefore \frac{v^2}{g\,(1 - \text{Sin}\theta)} = \frac{u^2}{g\,(1 + \text{Sin } \theta)\,\theta} \text{ ஆகும்}$$

அதாவது O விலிருந்து u வேகத்துடன் எறியும் போது பெறப்படும் கடவையும், A யிலிருந்து V வேகத்துடன் எறியப்படும் கடவையும் ஒன்றாகும். தத்தம் உயர்வீச்சைப் பெறுவதற்கு

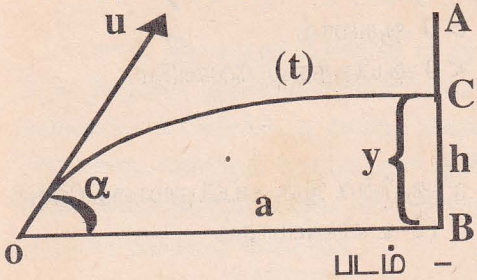
உதாரணம் 1

O இலிருந்து கிடையாக a தூரத்திலுள்ள, h உயரமான நிலைக்குத்துச் சுவரை நோக்கி, m திணிவுள்ள சிறு பந்து ஒன்று சுவரின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வீசப்படுகிறது.

$$\frac{u^2}{g} < h + (h^2 + a^2)^{1/2} \text{ ஆயின்}$$

பந்து சுவரைத் தாண்ட மாட்டாது எனக் காட்டுக. சுவர் ஒப்பமானது

எனக்கொண்டு பந்தானது சுவருடன் மோதி மீண்டும் எறியப்புள்ளி O வை அடைவதற்குத் தேவையான அதிகுறைந்த எறியற்கதி $[ga\,(1+1/e)]^{1/2}$ என உய்த்தறிக. இங்கு e மீளமைவுக் குணகம் ஆகும்.



படம் – 7

$\underline{S} = \underline{ut} + 1/2\ \underline{ft}^2$ ஐ பிரயோகிக்க பெறுவது

(i) –> $a = u \cos\alpha\, t$ (ii) ↑ $y = u \sin\alpha\, t - 1/2gt^2$

$$\therefore y = a \tan\alpha - 1/2g \frac{a^2}{u^2} (1 + \tan^2\alpha) \text{ ஆகும்} \quad \text{-----(1)}$$

$\tan\alpha$ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $y < h$ ஆயின் பந்து சுவரைத் தாண்டமாட்டாது.

$$\text{அ–து } a \tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2} (1+ \tan^2\alpha) < h \quad \text{----(2)}$$

ஆயின் சுவரைத் தாண்ட முடியாது.

$$\text{இதனை } a^2\tan^2\alpha - \frac{2u^2}{g} a \tan\alpha + \frac{2u^2h}{g} + a^2 > 0 \text{ என இடலாம்}$$

[$ax^2 + bx + c > 0$ ஆயிருத்தற்கு $a > 0, b^2 - 4ac < 0$ என்பதை உபயோகிப்போம்.]

$a^2 > 0$ ஆதலால்

$$\Delta = \left(\frac{2u^2a}{g}\right)^2 - 4a^2 \left(a^2 + \frac{2u^2h}{g}\right) < 0 \text{ ஆயிருத்தல் வேண்டும்}$$

அ-து $u^4 - 2u^2hg - a^2g^2 < 0$

$$\left(u^2 - gh + g\sqrt{h^2 + a^2}\right)\left(u^2 - gh - g\sqrt{a^2 + h^2}\right) < 0$$

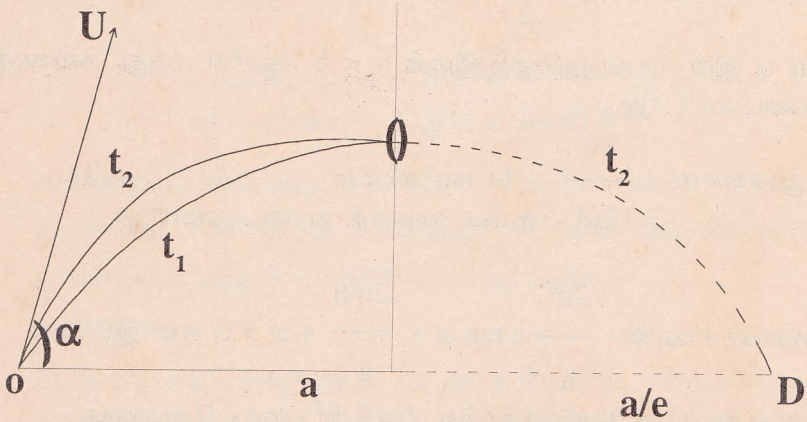
$u^2 - gh + g\sqrt{h^2 + a^2} > 0$ ஆதலால்

$u^2 - gh - g\sqrt{h^2 + a^2} < 0$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore \dfrac{u^2}{g} < h + \sqrt{h^2 + a^2}$ ஆயின் α இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் (2) உண்மையாகும்

$\therefore < h + \sqrt{h^2 + a^2}$ ஆயின் சுவரைத் தாண்டமுடியாது.

$u^2 \geq g\,[h + \sqrt{h^2 + a^2}]$ ஆயின் பந்து சுவரைத் தாண்ட முடியும் என்பதாகும்.
$h = 0$ ஆக $u^2 \geq ga$ ஆகும்



படம் - 8

$t_1 = \dfrac{a}{u\,\text{Cos}\alpha}$ $\quad t_2 = \dfrac{a}{eu\,\text{Cos}\alpha}$

$$t_1 + t_2 = \frac{a + a/e}{u \cos \alpha} = \frac{d}{u \cos \alpha} \qquad d = a + \frac{a}{e}$$

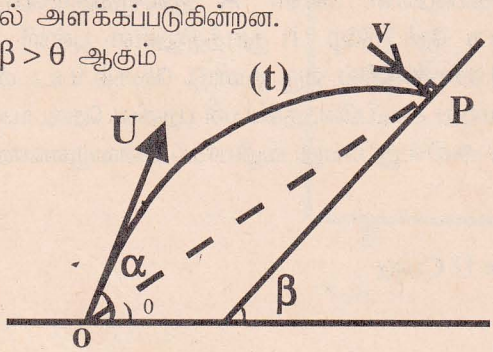
சுவர் இல்லாது போனால் பந்து Dஐ அடைய எடுக்கும் நேரம் $(t_1 + t_2)$ ஆகும். இதற்குக் காரணம் மொத்தல் நிகழ்வதால் சுவருக்குச் சமாந்தரமான வேகக்கூறு மாற்றம் அடையாதது என்பதே O விலிருந்து D ஐ அடைவதற்குத் தேவையான எறிவேகத்தின் இழிவுப்பெறுமானம் பந்து சுவரைமோதி O வை அடைவதற்குரிய எறிவேகத்தின் இழிவுப் பெறுமானத்திற்குச் சமமாகும்

$\therefore$ a –> a (1 +1/e) இடப்பெறுவது $u^2 \geq ga\,(1 + 1/e)$ ஆகும்.

$\therefore$ இழிவு எறியல் வேகத்தின் பருமன் $[ga\,(1 + 1/e)]^{1/2}$ ஆகும்

உ+ ம்2 O என்னும் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கையொன்று கிடையுடன் α சாய்வில் வீசப்படுகிறது. துணிக்கை கிடையுடன் β சாய்வுள்ள சாய்தளத்தைப் புள்ளி P இல் செங்குத்தாக அடிக்கிறது OP கிடையுடன் சாய்வு θ ஆயின் $\tan\alpha = \cot\beta + 2\tan\theta$ எனக் காட்டுக. கோணங்கள் ஒரே போக்கில் அளக்கப்படுகின்றன.

$\pi/2 > \alpha > \beta > \theta$ ஆகும்



$\underset{\sim}{S} = \underline{ut} + 1/2\, \underset{\sim}{g}t^2$ ஐ OP⊥ ^{2} உபயோகிக்கப் பெறுவது

$\text{ห}\,0 = u \sin(\alpha - \theta)\, t - 1/2 g \cos\theta\ t^2$

$$\therefore t = \frac{2u \sin(\alpha - \theta)}{g \cos\theta} \quad - (1) \quad (t \ \# 0)$$

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{gt}$ ஐ தளத்திற் சமாந்தரமாகப் பிரயோகிக்கப் பெறுவது

$< \beta \quad 0 = u \cos(\alpha - \beta) - g \sin \beta t$

$$\therefore t = \frac{u \cos(\alpha - \beta)}{g \sin \beta} \quad -(2)$$

$$\therefore 1, 2 \Rightarrow \frac{2u \sin(\alpha - \theta)}{g \cos\theta} = \frac{u \cos(\alpha - \beta)}{g \sin \beta}$$

சுருக்கப் பெறுவது $\tan \alpha = \cot \beta + 2\tan \theta$ ஆகும்.

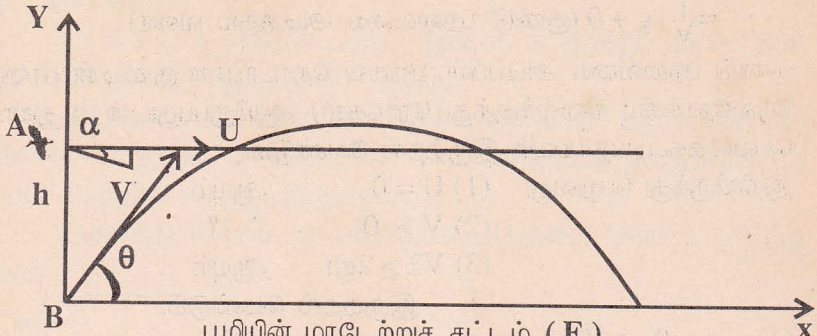
உ+ ம் 3 கிடையுடன் α கோணம் சாய்வுள்ள நேர் கோட்டில் ஒரு பறவை மேனோக்கி, ஒரு சீர் வேகம் u உடன் பறக்கிறது. பறவை அதன் பாதையிலுள்ள புள்ளி A இலிருக்கும்போது, A இற்கு நிலைக்குத்தாக நேர் கீழே h தூரத்திலுள்ள புள்ளி B இலிருந்து கிடையுடன் θ கோணத்தில் ஒரு குண்டு, வேகம் v உடன் சுடப்பட்டது. குண்டு பறவையை அடிப்பின், குண்டின் பறவை தொடர்பான பாதையை உபயோகித்து அல்லது வேறு, வழியாகப் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1) $V \cos \theta = U \cos\alpha$

2) $\theta > \alpha$

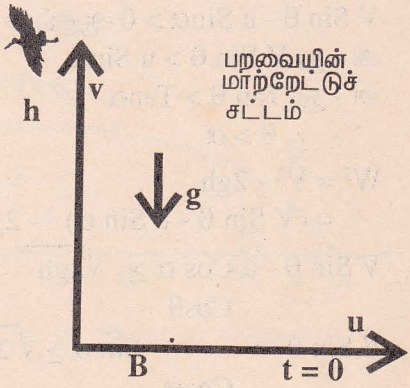
3) $V > \sqrt{2gh} \cos \alpha \operatorname{cosec}(\theta - \alpha)$

குண்டு பறவையை அடிக்கும் போது அதன்பறவை தொடர்பான வேகத்தைக் காண்க .



பூமியின் மாடேற்றுச் சட்டம் (E)

படம் – 10



பறவையின் மாற்றேட்டுச் சட்டம்

படம் 11

Vs, Bi = Vs, E + VE, Bi

v Sin θ u Cosα (t = 0 நேரத்தில்)

↑–> v Cos θ + <–↓

u Sin α

v Sin θ - u Sin α = v

↑–> v Cos θ - u Cos α = u

As,Bi = As, E + AE, B

$= \downarrow g + 0$ (குண்டு பறவையை அடிக்கும் வரை)

குண்டு பறவையை அடிப்பின், பறவை தொடர்பான குண்டின் பாதை மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்து நேர்கோடு ஆயிருப்பதுடன் h தூரம் செல்லக்கூடியதாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

இதிலிருந்து பெறுவது (1) $U = 0$ ஆயும்

(2) $V > 0$ " "

(3) $V2 \geq 2gh$ ஆயும்

இருத்தல் வேண்டும்.

(1) $u = 0$ ஆயின்

$V \cos\theta = u \cos\alpha$ ஆகும்.

(2) $V > 0$ ஆயின்

$V \sin\theta - u \sin\alpha > 0$ ஆகும்

அ - து $V \sin\theta > u \sin\alpha$

அ - து $\tan\theta > \tan\alpha$

$\therefore \theta > \alpha$

(3) $W^2 = V^2 - 2gh$

$= (V \sin\theta - u \sin\alpha)^2 - 2gh \geq 0$

$V \sin\theta - u \cos\alpha \geq \sqrt{2gh}$

$V \sin\theta - v \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha} \sin\alpha \geq \sqrt{2gh}$

$V \sin(\theta - \alpha) \geq \sqrt{2gh} \cos\alpha$

அ -து $V \geq \sqrt{2gh} \cos\alpha \operatorname{cosec}(\theta - \alpha)$ ஆகும்.

குண்டு பறவையை அடிக்கும்போது பறவை தொடர்பான குண்டின் வேகம் W ஆகும். இங்கு W ஆனது

$W^2 = (V \sin\theta - u \sin\alpha)^2 - 2gh$ ஆற் பெறப்படும்.

உ+ம் 4. கிரிக்கெற் ஆட்டக்காரர் ஒருவர் பந்தொன்றை நிலமட்டத்திலிருந்து நீண்ட திடல் வழியே எறிந்தார். அப்பந்துR m தூரத்திலுள்ள விக்கட் காவலாளரின் பாதத்தில் விழுந்தது பந்தின் தொடக்க கிடையானதும் நிலைக்குத்தானதுமான கூறுகள் முறையே

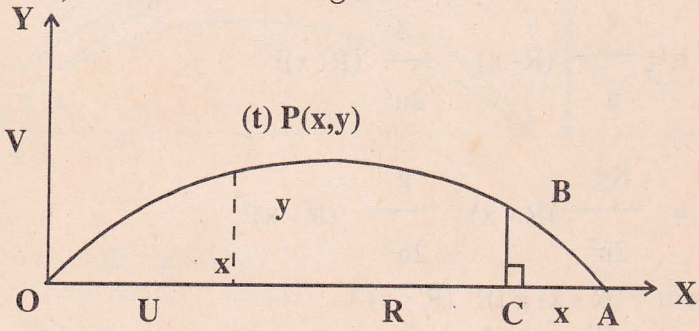
u, v m /s எனின்

uv = Rg /2 எனக்காட்டுக. இங்கே g ஆனது m /s^2 இல் புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் ஆகும்.

விக்கட் காவலாளர் திடலிலுள்ள கிரிக்கட் ஆட்டக்காரரை நோக்கி x m தூரம் சென்றிருந்தால் அவர் அப்பந்தை நிலத்திலிருந்து h m உயரத்தில் பிடித்து இருக்கலாம்.

பந்தானது விக்கட் காவலாளரின் பாதத்தை அடைய எடுத்த நேரம்

$$R\sqrt{\frac{2h}{gx(R-x)}}$$ எனக்காட்டுக.



படம் – 12

$S = ut + 1/2gt^2$ ஐ

(i) –> $X = ut$ (1)

(ii) ↑ $Y = vt - 1/2gt^2$ (2)

t ஐ நீக்கப்பெறுவது

$$Y = v\frac{X}{u} - 1/2\, g\frac{X^2}{u^2} \quad (3)$$

{ கடவையின் சமன் பாட்டைக் குறிக்கும். }

Y= 0, X= R ஆதலால்

$$0 = \frac{v}{u} 2' - \frac{g}{2u^2} R^2$$

$$\therefore R = \frac{2uv}{g}$$

$$\therefore uv = \frac{Rg}{2}$$ ஆகும்.

Y= h ஆக, X = R - x ஆகும்

$$\therefore h = \frac{v}{u} (R- x) - \frac{g}{2u^2} (R- x)^2$$

$$h = \frac{Rg}{2u^2} (R - x) - \frac{g}{2u^2} (R - x)^2$$

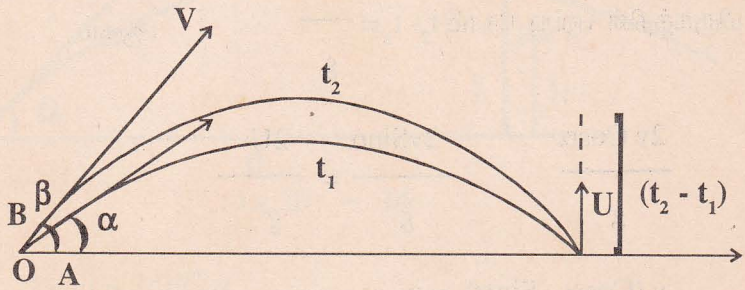
$$2u^2h = (R - x) g [R- (R - x)]$$
$$= (R - x) xg$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{(R - x) xg}{2h}}$$

X= R ஆக,

$$t = \frac{R}{u} = R\sqrt{\frac{2h}{gx (R - x)}}$$ ஆகும்

உ+ ம் 5. கிடைநிலத்திலுள்ள ஒருபுள்ளி O விலிருந்து ஒரே நேரத்தில் A, B எனும் இரு பந்துகள் v எனும் கதியுடன் எறியப்படுகின்றன. O விலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு சிறு மிருகத்தைப் பந்து A அடிக்க மிருகமானது U என்னும் கதியுடன் வளியினுள் நிலைக்குத்தாக மேலெழுகின்றது. மிருகமானது மீண்டும் நிலத்தை அடையும் கணத்தில் பந்து B ஆனது மிருகத்தை அடிக்கிறது . $V^2 = U^2 + ag$ எனக்காட்டுக. இவ்வியக்கம் சாத்தியமாவதற்கு V இன் வீச்சைப் பெறுக.



$S = ut + 1/2gt^2$ ஐ

(1) A ↑ $0 = v \sin\alpha\, t_1 - 1/2\, gt_1^2$

$$\therefore t_1 = \frac{2v\sin\alpha}{g} \quad (t_1 = 0)$$

இதேபோல $t_2 = \dfrac{2v \sin\beta}{g}$

–>

(11) A $a = v \cos\alpha \dfrac{2v \sin\alpha}{g}$

$$= \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$$

இதேபோல $a = \frac{v^2 \sin 2\beta}{g}$

$\therefore \sin 2\alpha = \sin 3\beta$

அ-து $2\alpha = \pi - 2\beta$

$\alpha + \beta = \pi / 2$ ஆகும்.

மிருகத்தின் பறப்பு நேரம் $t_2 - t_1 = \frac{2u}{g}$ ஆகும்.

$$\frac{2v \cos\alpha}{g} - \frac{2v \sin\alpha}{g} = \frac{2U}{g}$$

$v(\cos\alpha - \sin\alpha) = u$

$v^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = u^2$

$v^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \cos\alpha) = U^2$

$$v^2\left(1 - \frac{ag}{v^2}\right) = u^2$$

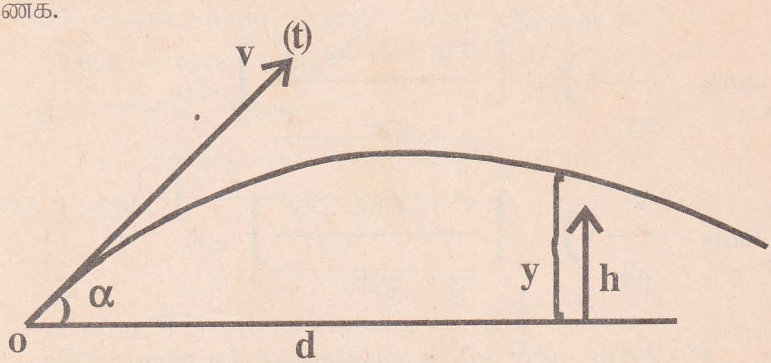
$\therefore v^2 = u^2 + ag$ ஆகும்

$ag > 0$ ஆதலால் $v > u$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்

உ+ ம் 6. டெனிஸ் ஆட்டக்காரர் ஒருவர் h உயரமுள்ள வலைக்கு நேர் குறுக்காகப் பந்தொன்றை மற்றொரு டெனிஸ் ஆட்டக்காரருக்கு பணிக்கின்றார். வலையிலிருந்து d தூரத்தில் தரைக்கு அண்மையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடையுடன் α கோணத்தில் v வேகத்துடன் அப்பந்து எறியப்பட்டுள்ளது.

$$\tan^2\alpha - \left(\frac{2v^2}{gd}\right)\tan\alpha + 1 + \frac{2v^2h}{gd^2} < 0$$ எனக்காட்டுக

U எனும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்திலும் பெரிதாக v இருப்பின் α என்பது $\alpha_1, \alpha_2 (< \alpha_1)$ எனும் இரு பெறுமானங்களுக்கிடையில் இருக்கவேண்டும் என்பதை இதிலிருந்து உய்த்தறிக. α_1, α_2, U ஐக் காண்க.



படம் - 14

$S = ut + 1/2ft^2$ ஐ

(i) $\rightarrow d = v \cos\alpha \, t$

(ii) $\uparrow V = v \sin\alpha \; t - 1/2 \, gt^2$

$$= d \tan\alpha - 1/2g \frac{d^2}{v^2} (1 + \tan^2\alpha) > h$$

வலைக்கு மேலால் செல்வதற்கு

$$\frac{gd^2}{2v^2} \tan^2\alpha - d \tan\alpha + h + \frac{gd^2}{2v^2} < 0$$

$$\therefore \tan^2\alpha - \frac{2v^2}{gd} (\tan\alpha) + \frac{2v^2h}{d^2g} + 1 < 0 \qquad \text{I}$$

$$\left(\tan\alpha - \frac{v^2}{gd}\right)^2 + 1 + \frac{2v^2h}{d^2g} - \frac{v^4}{g^2d^2} < o$$

$$\left(\tan\alpha - \frac{v^2}{gd}\right)^2 + \left[\frac{d^2g^2 + 2v^2hg - v^4}{g^2d^2}\right] < o$$

$$\left(\tan\alpha - \frac{v^2}{gd}\right)^2 - \left[\frac{v^4 - 2x^2hg - d^2g^2}{g^2d^2}\right] < 0 \qquad II$$

$v^4 - 2v^2hg - d^2g^2 > 0$ ஆயிருக்கையில் I உண்மையாகும்.

$(v^2 - hg)^2 - (g\sqrt{h^2 + d^2})^2 > 0$

$(v^2 - hg + g\sqrt{h^2 + d^2})(v^2 - hg - g\sqrt{h^2 + d^2}) > 0$

$v^2 - gh + g\sqrt{h^2 + d^2} > 0$ ஆதலால்

$v^2 - hg - g\sqrt{h^2 + d^2} > 0$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore \quad v^2 > g[h + \sqrt{h^2 + d^2}] = u^2$ என்க

$\therefore$ v ஆனது u இலும் பெரிதாக இருப்பின் $\tan\alpha$ இற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் உண்டு.

$$II => \left(\tan\alpha - \frac{v^2}{gd}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{v^4 - 2v^2hg - d^2g^2}}{gd}\right)^2 < 0$$

$$\left(\tan\alpha - \frac{v^2}{gd} + \frac{\sqrt{v^4 - 2v^2hg - d^2g^2}}{gd}\right)$$

$$\left(\tan\alpha - \frac{v^2}{gd} - \frac{\sqrt{v^4 - 2v^2hg - d^2g^2}}{gd}\right) < 0$$

$(\tan\alpha - \tan\alpha_2)(\tan\alpha - \tan\alpha_1) < 0$ என இடலாம்

$\tan\alpha_2 < \tan\alpha < \tan\alpha_1$

அ- து $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ ஆகும்

இங்கு $\alpha_1 = \tan^{-1}\left[\frac{v^2 + \sqrt{v^4 - 2v^2hg - d^2g^2}}{gd}\right]$

$\alpha_2 = \tan^{-1}\left[\frac{v^2 - \sqrt{v^4 - 2v^2hg - d^2g^2}}{gd}\right]$ ஆகும்

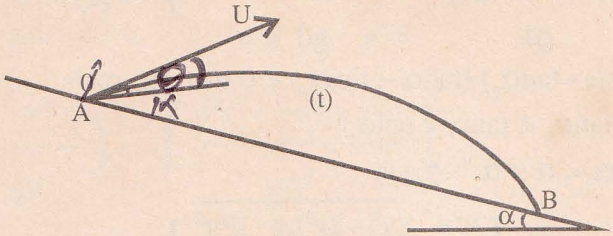
∴ v ஆனது u இலும் பெரிதாக இருப்பின் α என்பது α_1, α_2 என்னும் இரு பெறுமானங்களுக்கிடையில் இருக்கும்.

குறிப்பு 1. $y = ax^2 + bx + c < 0, a > 0$ என்ற வகையில் வரைபை எடுத்து நோக்கலாம்.

2. $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$ வீச்சல் கடவைகளை வரைந்து பார்த்தல் நன்று.

உ+ம் 7. கிடையுடன் α கோணம் சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தின் புள்ளி A இனூடாகச் செல்லும் அதியுயர் சரிவுக்கோடு l ஆகும் A இலிருந்து வேகம் U உடன் வீசப்பட்ட ஓர் ஏவுகணை சாய்தளத்தை l இல் A இற்குக் கீழேயுள்ள புள்ளி B இல் அடிக்கிறது AB இன் அதிகூடிய நீளமென்ன?

ஒரு கடற்படைத்தளத்தில் $\sqrt{2gk}$ வேகத்துடன் ஏவுகணைகளை வீசக்கூடிய துப்பாக்கிகள், கடல் மட்டத்திலிருந்து h உயரத்தில் நிறுவப்பட்டுள்ளன . இத்துப்பாக்கிகளால் ஏவுகணைகளை வீசக்கூடிய அதியுயர் கிடைவீச்சு $2\sqrt{k(k+h)}$ என நிறுவுக.



படம் - 15

$S = ut + 1/2ft^2$ ஐ

~ ~ ~

(1) ↑ $0 = u \operatorname{Sin}(\theta + \alpha)\, t - 1/2\, g \operatorname{Cos}\alpha\, t^2$

$$\therefore t = \frac{2u \operatorname{Sin}(\theta + \alpha)}{g \operatorname{Cos}\alpha} \qquad (t \# 0)$$

(11) -> $AB \operatorname{Cos}\alpha = u \operatorname{Cos}\theta \dfrac{2u \operatorname{Sin}(\theta+\alpha)}{g \operatorname{Cos}\alpha}$

$$\therefore AB = \frac{2u^2}{g} \frac{\operatorname{Sin}(\theta+\alpha) \operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

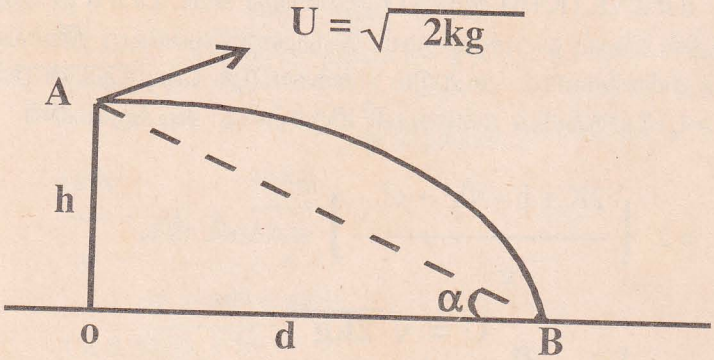
$$= \frac{u^2}{g} \left(\frac{\operatorname{Sin}(2\theta + \alpha) + \operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha} \right)$$

$$\leq \frac{u^2}{g}\left(\frac{1+\text{Sin}\alpha}{1-\text{Sin}^2\alpha}\right)$$ சமம் $2\theta + \alpha = \pi/2$ ஆக

$$\therefore AB \leq \frac{u^2}{g(1-\text{Sin}\alpha)}$$

∴ AB யின் அதிகூடிய நீளம்

$$\frac{u2}{g(1-\text{Sin}\alpha)}$$ ஆகும்.



படம் - 16

$$\sqrt{h^2 + d^2} = \frac{u^2}{g\,(1 - \text{Sin}\alpha)}$$ பகுதி I

$$\sqrt{h^2 + d^2} = \frac{2K}{\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}}\right)}$$

$$\therefore \quad 2K = h + \sqrt{h^2 + d^2}$$

$$(2K + h)^2 = h^2 + d^2$$

$$d^2 = 4K^2 + 4Kh$$

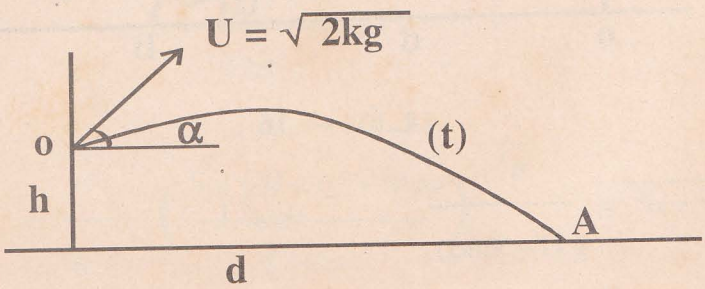
$$\therefore \; d = 2\sqrt{K(K+h)}$$

$\therefore$ அதியுயர் கிடைவீச்சு $2\sqrt{K(K+h)}$ ஆகும்

உ+ ம் 8 கிடைநிலத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி O இற்கு நேர்மேலாக h உயரத்தில் ஒரு குண்டு வெடிக்கிறது. அதன் சன்னங்கள் எல்லாத் திசைகளிலும் ஒரே கதி $\sqrt{2gK}$ உடன் வீசப்படுகின்றன.

$d < 2\sqrt{K(K+h)}$ ஆயின் O இலிருந்து கிடையாக d தூரத்தில் நிலத்தில் நிற்கும் ஒரு சிறுமிருகம், இருமுறை வெவ்வேறு திசைகளில் வரும் சன்னங்களால் அடிபடும் எனக்காட்டுக வெடித்தலின் பின் t_1, t_2 $(t_2 > t_1)$ நேரங்களில் சன்னங்கள் மிருகத்தை அடிக்குமெனின்

$$t_2 - t_1 = 2\left[\frac{2K + h - \sqrt{h^2 + d^2}}{g}\right]^{1/2}$$ எனக்காட்டுக.



படம் – 17

$S = u\,t + 1/2\, f\, t^2$ ஐ

~ ~ ~

(1) –> $d = u\cos\alpha\, t$ -------(1)

(11) ↓ $h = -\, u\sin\alpha\, t + 1/2 g t^2$ -------(2)

$$\therefore h = -\, d\tan\alpha + 1/2\, g \frac{d^2}{u^2} (1+\tan^2\alpha)$$

$$d^2\tan^2\alpha - \frac{2u^2}{g} d\tan\alpha + d^2 - \frac{2u^2 h}{g} = 0 \quad \text{------(3)}$$

இது $\tan\alpha$ இல் இருபடிச்சமன்பாடு α இன் மெய்ப்பெறுமானத்திற்கு – $\alpha \leq \tan\alpha \leq \alpha$ ஆதலால் $\tan\alpha$ இற்கும் இருமெய்ப்பெறுமானம் இருத்தற்கு

$$\Delta = \frac{4u^4}{g^2} - 4\left(d^2 - \frac{2u^2h}{g}\right) > 0$$

ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$$\frac{4g^2K^2}{g^2} - d^2 + \frac{4gKh}{g} > 0$$

$$\therefore d^2 < 4K^2 + 4Kh$$

$$d < 2\sqrt{K(k+h)}$$

$\therefore d < 2\sqrt{K(k+h)}$ ஆயின் $\tan\alpha$ இற்கு இரு வெவ்வேறு பெறுமானங்கள் உண்டு.

அ – து இருமுறை வெவ்வேறு திசைகளில் வரும் சன்னங்கள் மிருகத்தை அடிக்கும் என்பதாகும்.

$(u\cos\alpha\, t)^2 = d^2$

$$(u\sin\alpha\, t)^2 = (1/2gt^2 - h)^2$$

கூட்ட $$u^2 t^2 = d^2 + 1/4g^2 t^4 + h^2 - hgt^2$$

$$g^2t^4 - 4(u^2 + hg)\, t^2 + 4(h^2 + d^2) = 0$$

$$g^2t^4 - 4(2gk + hg)\, t^2 + 4(h^2 + d^2) = 0 \text{ -------(4)}$$

இதன் மூலகங்கள் t_1^2, t_2^2 ஆகும்.

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{4g\,(2K + h)}{g^2}$$

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{4(h^2 + d^2)}{g^2}$$

$$(t_2 - t_1)^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2$$

$$= \frac{4(2K + H)}{g} - \frac{4\sqrt{h^2 + d^2}}{g}$$

$$= 4\left[\frac{2K + h - \sqrt{h^2 + d^2}}{g}\right]$$

$$\therefore t_2 - t_1 = 2\left[\frac{2K + h - \sqrt{h^2 + d^2}}{g}\right]^{1/2}$$ ஆகும்

உ+ம் 9 t = 0 நேரத்தில், ஒரு புள்ளி O இலிருந்து கிடையுடன் α கோணம் சாய்வில் வேகம் v உடன் ஒரு தூணிக்கை புவியீர்ப்பின் கீழ் வீசப்பட்டது. நேரம் t இல் துணிக்கை இருக்கும் புள்ளி P ஆயின், துணிக்கையின் பரவளைவுப்பாதைக்கு P இலான தொடலி O இனூடே செல்லும் நிலைக்குத்துக்கோட்டை Q இற்சந்தித்தால், Q இன் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

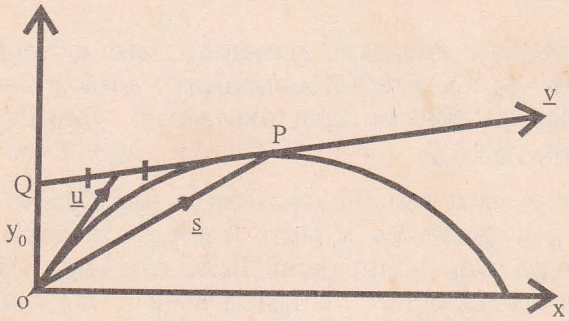
PQ இனது நடுப்புள்ளி, பரவளைவிற்கு O இலான தொடலியிலிருக்குமென நிறுவுக.

$S = ut + 1/2\, g\, t^2$ $\qquad$ $v = u + gt$

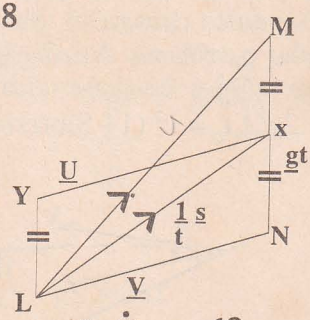
$\sim \quad \sim \quad \sim$ $\qquad$ $\sim \quad \sim \quad \sim$

$1/t\ S = u + 1/2g\ t$

$\sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim$



படம் – 18



படம் – 19

ΔOQP உம் ΔLYX உம் வடிவொத்தவை.

$$\therefore LY = \frac{yo}{t} = 1/2gt$$

$$\therefore yo = 1/2gt^2 \quad \text{----------} \quad (1)$$

$$\frac{dyo}{dt} = gt \quad \text{----------} \quad (2)$$

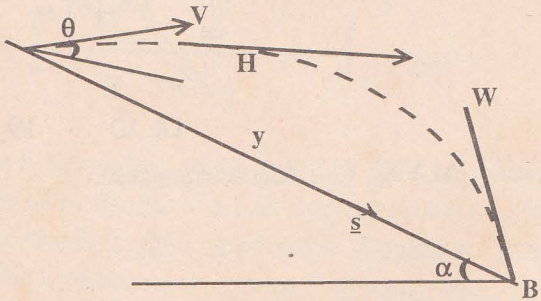
$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = g \quad \text{----------} \quad (3)$$

∴ Q இன் ஆர்முடுகல் மேல்நோக்கி g ஆகும்.

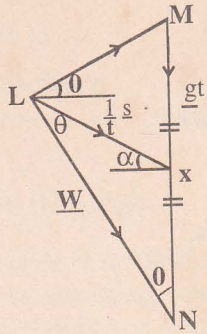
LYMX இணைகரங்கள் ஆதலால் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று இருகூறிடும். அ–து YX இன் நடுப்புள்ளியினூடு காவி u செல்லும். u பரவளைவிற்கு O இலான தொடலியாதலால் இது PQ இன் நடுப்புள்ளியினூடு செல்லும்.

உ+ ம் 10 கிடையுடன் α கோணம் அமைக்கும் தளத்திலுள்ள புள்ளி A யிலிருந்து ஒரு துணிக்கை v என்ற வேகத்துடன் எறியப்பட்டு. துணிக்கை Aக்குக் கீழே உள்ள புள்ளி Bயில் விழுந்தது. AB அதி கூடிய பெறுமானத்தைப் பெறுவதற்குத் தேவையான எறியற்கோணத்தைக் காண்க. AB மிகப் பெரியதாயிருக்கும்போது துணிக்கையின் பாதையில் மிக உயந்த புள்ளி H ஆகும். t_1 t_2 என்பன முறையே துணிக்கை Aயிலிருந்து Hஇற்கும் H இலிருந்து Bயிற்கும் செல்ல எடுத்த நேரங்களாயின்

$2g^2 t_1 t_2 = v^2 (1+ \text{Sin}\alpha)$ என நிறுவுக.



படம் – 20



படம் - 21

$$w = v + gt$$

$$\sim \quad \sim \quad \sim$$

$$S = v\,t + 1/2\, g\, t^2$$

$$\sim \quad \sim \quad \sim$$

$$\therefore\ 1/t\ S = v + 1/2\ g\ t$$

$$\sim \quad \sim \quad \sim$$

Δ LXM இற்கு கோசைன் விதிப்படி

$$v^2 = \left(\frac{gt}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{t} S\right)^2 - 2\ \frac{gt}{2}\ \frac{S \cos(90 - \alpha)}{t}$$

$$= \left(\frac{gt}{2} = \frac{S}{t}\right)^2 + gS - gS \sin\alpha$$

$\geq gS\,(1 - \sin\alpha)$ சமம் $\quad \dfrac{gt}{2} = \dfrac{s}{t}$ ஆக

அ - து LX = MX

$$\therefore S \leq \frac{v^2}{g(1 - \sin\alpha)}$$

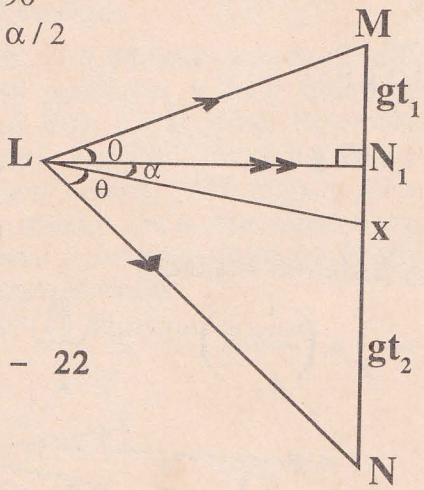
∴ AB இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம்

$$\frac{v^2}{g(1 - \sin\alpha)}$$ ஆகும்.

LX = MX ஆதலால் $\angle MLN = 90^0$ ஆகும்

$\therefore 2\theta + \alpha = 90^0$

$\therefore \theta = 45 - \alpha / 2$



படம் - 22

$MN_1 = gt_1$ $\qquad$ $MN = gt = g(t_1 + t_2)$

$N_1N = gt_2$

X ஐ மையமாகவும் MX ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தை எடுத்துக் கொண்டால்

$MN_1 \; N_1N = LN_1^2$

$\therefore \quad g^2t_1t_2 = v^2\cos^2\theta$ --------(1)

$2\theta = 90 - \alpha$

$$\cos 2\theta = \sin\alpha$$

$$2\cos^2\theta - 1 = \sin\alpha$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{1 + \sin\alpha}{2} \quad \text{-------(2)}$$

$\therefore 2g^2t_1t_2 = v^2(1 + \sin\alpha)$ ஆகும்.

குறிப்பு: உ+ ம் 9 உம் 10 உம் காவிக்கேத்திரகணித முறையால் செய்து காட்டப்பட்டுள்ளது. மாணவர்கள் விளங்கிக்கொள்வது சுலபமானது. இங்கு காவிக்கூட்டல் மட்டும் உபயோகிக்கப்படுகிறது.

பயிற்சி

1. நிலத்திலிருந்து O என்னும் புள்ளியிலிருந்து வேகம் V உடனும் கிடையுடன் கோணம் α ஏற்றத்திலும் ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. அத்துணிக்கையின் கடவையின் தளத்தில் O இலிருந்து கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் எடுக்கப்படும் அச்சுக்கள் குறித்து அக்கடவையின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. அதிலிருந்து உயரம் h உள்ளது. O விலிருந்து தூரம் d உள்ளதுமான ஒரு மெல்லிய் நிலைக்குத்தான நேர்சுவர் ஒன்றின் மேலாகச் செல்லும்படி அத்துணிக்கையை எறிவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளைப் பெறுக.

$V2= \frac{18gh}{5}$ ஆயும், d ஆனது $\frac{12h}{5}$

இற்குப் பெரிதாயுமிருந்தால் எறியற்கோணம் எவ்வளவாக இருந்தாலும் அத்துணிக்கையை அச்சுவருக்கு மேலாகச் செல்லும்படி எறிய இயலாது எனக்காட்டுக. (Dec 1969

2. கிடையுடன் கோணம் β இல் சாய்ந்துள்ள தளமொன்றின் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கையொன்று நிலைக்குத்துடன் θ ஆக்கும் திசையில் கதி u உடன் எறியப்படுகின்றது. அத்துணிக்கையானது O இற்கு மேலுள்ள P என்னும் புள்ளியொன்றில் தளத்தை அடிக்கின்றது. OP ஆனது தளத்தின் உயர்சாய்வுக் கோடொன்றாகும். OP என்னும் தூரத்தைக் கண்டு, u ஒரு நிலையான கணியமாக இருக்கையில் அத்தூரம் $\theta = \pi/4 - \beta/2$ ஆகும்போது மிகக் கூடியது எனக்காட்டுக. (1970 Dec)

3. கிடையுடன் கோணம் β இல் சாய்ந்துள்ள தளமொன்றில் உள்ள O என்னும் புள்ளியொன்றிலிருந்து துணிக்கைகள் இரண்டு u என்னும் ஒரே கதியுடன் ஆனால் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் உயர் சாய்வுக்கோடொன்றுடான நிலைக்குத்தான தளமொன்றில் எறியப்படுகின்றன துணிக்கைகள் தளத்தை P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளில் மோதினால் துணிக்கைகளின் எறியக்கோணங்கள் என்னவாக இருந்தாலும்.

$[Op_1 - OP_2] = \frac{2u^2}{g} \tan \beta$. Se:$\beta$

எனக்காட்டுக. (Apr 1972)

4. மலையொன்றின் செங்குத்தான விளிம்பிலிருந்து ஒரு மனிதன் கல்லொன்றை கிடையுடன் சாய்வுக்கோணம் x கொண்ட திசையிலேயே வேகம் u உடன் எறிகின்றான். t இடைவேளையின் பின்னர் முதலாவது கல் எறியப்படும் திசையுடன்கோணம் $\pi/2+\theta$ விலே வேகம் v உடன் வேறொரு கல் எறியப்படுகின்றது. இரு கற்களும் மோதுகின்றன. v ஐக் காண்க. (Apr 1975)

5. O என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடையுடன் சாய்வுக்கோணம் θ கொண்ட திசையிலே துணிக்கையொன்று கதி u உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கையின் பாதையானது O இனூடாகக் கிடையுடன் கோணம் α $(<\theta)$ அமைக்கும் நேர்கோட்டை R என்னும் புள்ளியொன்றில் சந்திக்கின்றது R ஆனது O இன் மட்டத்திற்கு மேலோ, அல்லது கீழோ அமைவதைப் பொறுத்து தூரம் OR ஆனது முறையே

$$\frac{2u^2\text{Cos Sin}(\theta-\alpha)}{g\text{Cos}^2\alpha} \quad \backslash \quad \frac{2u^2\text{Cos }\theta\text{ Sin}(\theta+\alpha)}{g\text{Cos}^2\alpha}$$

இனால் தரப்படும் எனக்காட்டுக. u,α என்பவை நிலையான கணியங்களெனக் கொண்டு தூரம் OR ஆனது ஆகக்கூடுதலான அளவினதாகவிருக்க θ பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. சாய்வு α ஆகவுள்ள சாய்தளத்தின் மீது, அதன் அடியிலிருந்து நிலைக்குத்துக்கு β என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள திசையில், வேகம் u உடன் எறியப்பட்ட துணிக்கையின் வீச்சைக் காண்க.

h உயரமுடைய சுவரொன்றினாற் சூழப்பட்ட விளையாட்டு மைதானமொன்றினுள். சுவரிலிருந்து A தூரத்திலுள்ள ஒரு வெளிப்புள்ளியிலிருந்து ஒரு பந்தானது எறியப்படவுள்ளது. அது எறியப்பட வேண்டிய மிகக் குறைந்த வேகம் யாது? அவ்வாறு எறியப்படுமிடத்து மைதானத்தினுள் எவ்வளவு தூரத்தினுள் அது விழும்? (Apr 1979)

7. தரையிலுள்ள புள்ளி O இலிருந்து கிடையாக 16 அடி தூரத்தில் 12 அடி உயரமுள்ள நிலைக்குத்துச் சுவருள்ளது. சுவரை மட்டுமட்டாகக் கடக்க O இலிருந்து எறியப்பட வேண்டிய துணிக்கையின் அதிகுறைந்த வேகத்தைக் காண்க.

துணிக்கையானது இவ்வேகத்தில் எறியப்படுமாயின், அது மீண்டும் O இன் மட்டத்திற்கு வரும்போது, சுவரிலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

8. ஒரே திணிவுள்ள இரு துணிக்கைகள், கிடையுடன் 30^0 இற் சாய்ந்துள்ள அதியுயர் சரிவுக்கோட்டில் 1 இடைத்தூரமுள்ள இரு புள்ளிகள் A,B இலிருந்து ஒரே கணத்தில் $\sqrt{(gl)}$ வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றன. A,B இற்கு மேலேயுள்ளது. A இலுள்ள துணிக்கை கிடையாக Bஐ நோக்கி வீசப்பட, B இலுள்ள துணிக்கை கிடையுடன் 60^0 இல் Aஐ நோக்கி வீசப்படுகிறது. துணிக்கைகள் மோதுமென்றும், இரண்டும் ஒன்றாகச் சேர்ந்தால், சேர்ந்த திணிவு கிடைக்கு கீழே 30^0 இலுள்ள ஒரு திசையில் அசையத் தொடங்கும் என நிறுவுக.

9. ஒரு துணிக்கையானது, கிடைத்தரையிலுள்ள புள்ளி O இலிருந்து v என்னும் வேகத்தில் ஏற்றக்கோணம் α உடன் வீசப்பட, துணிக்கையானது O இலிருந்து x தூரத்திலும், தரையிலிருந்து y உயரத்திலுமுள்ள புள்ளி P இற்கூடாகச்செல்கிறது.

$$y + x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2} \operatorname{Sec}^2\alpha$$

(1) x = 50 அடி: y = 20 அடி: v = 50 அடி/செக் ஆயின், $\tan\alpha$ இன் இரண்டு சாத்தியமான பெறுமானங்களையும் காண்க அடுத்த இரு வீசுகோடுகளுக்கூடாக அனுமதிக்கப்பட்டால், துணிக்கை நிலத்தை அடிக்கும் புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

(11) x = 50 அடி: v = 50 அடி/செக் ஆயின் y இன் அதியுயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

10. ஒரு நிலைக்குத்தான h உயரமுள்ள ஒரு பாறை உச்சியிலிருந்து ஓர் எறியம் v என்ற வேகத்துடன் பாறையினடியிலிருந்து c தூரத்தில் கடலிலுள்ள ஒரு இலக்கை அடிக்குமாறு எறியப்படுகிறது. எறியக்கோணம் θ எனின் தான் θ ல் ஒரு சமன்பாட்டைக் காண்க.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வகையாகவோ சாத்தியமான இரு திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பின் $hy^2 = gc^2$ என நிறுவுக.

இச் சந்தர்ப்பத்தில் கிடைக்கு மேலாக எறியப்படும் பொழுது

ஏற்றக்கோணம் தான் $- 1 \dfrac{(b^2+c^2)^{1/2}+c}{h}$

எனவும், கீழாக எறியப்படும்போது இறக்கக்கோணம் தான்

$- 1 \dfrac{(b^2+c^2)^{1/2}-c}{h}$ எனவும் நிறுவுக

11. A,B என்பன வெளியில் d தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள் B யானது A யின் மட்டத்திற்கு மேலேயுள்ளது ஒரு துணிக்கை P,A யிலிருந்து B ஐ நோக்கி V என்ற வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றது. அதே கணத்தில் Q என்ற சமதிணிவுள்ள துணிக்கை B யில் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்பட்டது. எந்த நேரத்திலும் P யின் சார்பான Q வின் வேகத்தைக் கண்டு d/v என்ற நேரத்தில் துணிக்கைகள் மோதுமென நிறுவுக. மோதுகையின் பின்னர் துணிக்கைகள் இரண்டும் ஒன்றாக இணைந்து கிடைத்திசையில் அவை இயங்க ஆரம்பித்தால் அவ் ஆரம்பவேகம்

$\dfrac{\sqrt{(v^4-4g^2d^2)}}{2v}$ எனக்காட்டுக.

12. ஒரு கல் ஒரு புள்ளியிலிருந்து $10\sqrt{2}$ அடி/செக் என்ற வேகத்துடன் மேல் நிலைக்குத்துடன் 45^0 கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. ஒரு செக்கனின் பின் கீழ்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் 45^0 கோணத்தில் இரண்டாவது கல்லொன்று முதலாவது கல்லை அடிக்குமாறு என்ன வேகத்துடன் எறியப்பட வேண்டுமெனக் காண்க. இரண்டாவது கல்முதலாவது கல்லை 1/3 செக்கனில் சந்திக்குமெனவும் காட்டுக.

13. ஒரு பந்து α என்ற ஏற்றக்கோணத்தில் v என்ற வேகத்துடன் எறியற் புள்ளியிலிருந்து d என்ற கிடைத்தூரத்திலுள்ள அழுத்தமான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரை நோக்கி எறியப்பட்டது. சுவரை அடித்த பந்து மீண்டும் எறியற்புள்ளிக்கு திரும்பினால் தன்னுருவடைதற் குணகம்.

$\dfrac{gd}{V^2\sin 2\alpha - d}$ என நிறுவுக.

14. ஒரு துணிக்கையானது கிடையுடன் α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு தளத்தின் அடியிலிருந்து u வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றது. இயக்கமானது அதியுயர் சரிவுக்கோடு செல்லும் தளத்தில் நிகழ்கிறது. துணிக்கை தளத்தைச் செங்கோணத்திலடிப்பின் $\tan\theta = 1/2 \operatorname{Cot}\alpha$ என நிறுவுக.

இங்கு θ சாய்தளத்திற்கும் எறியல் திசைக்குமிடையேயுள்ள கோணம் சாய்தளத்தில் துணிக்கையின் வீச்சு.

$$\frac{2u^2 \text{ சைன்}\alpha}{g(1+3\text{சைன்}^2\alpha)}$$ என நிறுவுக.

15.ஒரு துணிக்கை v என்ற நிலைக்குத்து வேகத்துடன் α கோணமமைக்கும் ஒரு தளத்தின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்டது கீழ்மூக வீச்சு மிகப் பெரிதாயிருப்பதற்கு எறியற்கோணம் எவ்வாறிருக்க வேண்டுமெனக்காண்க. இவ்வீச்சின் அந்தங்களிலுள்ள வேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக்காட்டுக.

துணிக்கையின் பாதையில் அதியுயர் புள்ளியிலிருந்து கீறப்படும் நிலைக்குத்துக்கோடு இவ்வீச்சத்தை $\tan 2\alpha/2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமெனவும் காட்டுக.

16. ஒரு துணிக்கை o என்ற புள்ளியிலிருந்து θ என்னும் ஏற்றக்கோணத்தில் u என்ற வேகத்துடன் எறியப்பட்டது. துணிக்கை T என்ற இலக்கை அடிக்கிறது. OT என்பது கிடைக்குமேலே α இல் சாய்ந்துள்ளது.

$$OT = \frac{u^2 \operatorname{Sec}^2\alpha}{g}[\operatorname{Sin}(2\theta-[\alpha)-\operatorname{Sin}\alpha]$$ என நிறுவுக.

மற்றொரு துணிக்கை O விலிருந்து அதே வேகம் u உடனும் ஏற்றக்கோணம் ϕ உடனும் ($\phi > \theta$) எறியப்பட்டது. இத்துணிக்கையும் T ஐ அடித்தால் $\phi = \pi/2 + \alpha - \theta$ எனக்காட்டுக. இவ்விரு பறப்புகளுக்கிடையேயுள்ள நேரவித்தியாசம்.

$$\frac{2u\operatorname{Sec}\alpha}{g}[\operatorname{Sin}(\theta-\alpha) - \operatorname{Cos}\theta)$$ எனவும் காட்டுக.

17. ஒரு பாரமான துணிக்கையானது u வேகத்துடனும் α சாய்விலும் O என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்டது.O வினூடாக கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் ஆள் கூற்று அச்சுக்கள் எடுக்கப்படின் துணிக்கையின் பாதையின்

சமன்பாடு $y = x\text{தான்}\alpha - \dfrac{(gx^2\text{சீக}^2\alpha)}{2u^2}$

பாதையின் குறித்த புள்ளி (x_1, y_2) இனூடாகச் செல்லும் வண்ணம் எறியக்கூடிய கோணங்கள α_1, α_2 ஆயின்

தான் $(\alpha_1 + \alpha_2) = -\left(\dfrac{x_1}{y_1}\right)$ என நிறுவுக.

18. A,B என்பன நிலமட்டத்துக்கு மேல் A,B எனும் உயரங்களிலும் AB=c ஆகுமாறும் உள்ள இரு புள்ளிகளாகும் $\upsilon^2 \geq g(a+b+c)$ ஆயினன்றி u எனும் வேகத்துடன் நிலத்திலிருந்து A,B என்பவற்றுக்கூடாகச் செல்லுமாறு ஒரு கல்லை எறிய முடியாது எனக்காட்டுக.

19. OX,OY ஐ கிடை, நிலைக்குத்து அச்சுகளாக கொண்டால் p எனும் புள்ளியின் ஆள்கூறு (x,y) ஆகும் O விலிருந்து u வேகத்துடன் எறியப்படும் துணிக்கை ஒன்று P இனூடாகச் செல்லுமாறு இரண்டு பாதைகளால் எறியப்படலாம் என நிறுவி, அவ்விரு பாதைகளும் pயில் செங்குத்தில் வெட்டின் u,x,y என்பவற்றுக்கிடையில் ஒரு தொடர்பைப் பெறுக.

20. ஒரு நீர்த்தாரைவட்டில் 20அடி ஆரையுடைய கோளத்தின் ஒரு பகுதியாகும். கோளத்தின் மையத்திலுள்ள நாசியினூடாக,(nozzle) 12அடி / செக் வேகத்துடன் கிடையாக ஒருநீர்த்துளி வெளிப்படுகிறது. இது வட்டிலை அதன் இழிவுப்புள்ளியிலிருந்து 4அடி உயரத்தில் அடிக்குமென நிறுவு.

நாசியைவிட்டு 6 அடி/செக் வேகத்துடன் கிடையாக வெளிப்படும் வேறொரு நீர்த்துளி வட்டிலை எப்புள்ளியில் அடிக்குமெனக் காண்.

21. கிடையுடன் கோணம் ϕஇல் சாய்ந்திருக்கும். ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒருதுணிக்கைகிடையுடன் θகோணத்தில் அதியுயர் சரிவுக்கோட்டினூடே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில்

வீசப்பட்டது. துணிக்கை தளத்தை செங்குத்தாக அடித்தால் தான் $(\theta - \phi) = 1/2$ கோதா ϕ என நிறுவுக.
ϕ மாறும்பொழுது θ இன் இழிவுப்பெறுமானத்தைக் காண்.

22. M திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை, கிடைத்தளத்திலுள்ள புள்ளி O இலிருந்துவீசப்பட்டது. O இலிருந்து கிடையாக a தூரத்திலுள்ள 3/4a உயரமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு மேலாகத் துணிக்கை செல்வதற்கு, எறிவேகத்தின் வர்க்கம் 2ga இலும் குறையக்கூடாதென நிறுவு.

23. h உயரமுடைய ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியில் நிற்கும் ஒரு வேலையாள் a ஒரு பொருளை தொடக்க வேகம் u உடன் கோபுரத்தின்அடியிலிருந்து d தூரத்தில் நிலத்தில் நிற்கும் வேலையாள் bக்கு எறிகிறான் u போதியளவு பெரிதாயின் அவன் அப்பொருளை இரு திசைகளில் எறியலாம் என நிறுவி

$$u^2 = \frac{gd^2}{h}$$ ஆயின்

இவ்விரு திசைகளும் செங்கோணத்திலுள்ளன என நிறுவுக.
இந்நிபந்தனையோடு, $d \geq \sqrt{3}h$ ஆயின் வேலையாள் B பொருளை A க்குத் திருப்பி அதே தொடக்கவேகம் u உடன் எறிய முடியும் என நிறுவுக.

24. ஒரு கோட்டைக்கு அணுகும் வழி, கிடைக்கு கோணம் α சாய்வுடைய ஒரு சாய்தளம் ஆகும். இச்சாய்தளத்தில் X என்ற புள்ளியில் ஒரு துப்பாக்கி வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. x இலிருந்து ஒரு துப்பாக்கிக்குண்டு சாய்தளத்துக்குச் செங்குத்தாக u வேகத்துடன் சுடப்படுகிறது துப்பாக்கிக்குண்டு சாய்தளத்தை y என்ற புள்ளியில் அடிக்கிறது.

$$XY = \frac{2u2}{g}$$ தான் α சீக α எனக்காட்டுக.

y இல் வைக்கப்பட்டுள்ள அதேபோன்ற ஒரு துப்பாக்கி அதே u என்னுந் தொடக்க வேகத்துடன் எத்திசையிலும் சுடக்கூடியது. $\alpha \leq$ சைன்$^{-}$ (1/3) ஆயின், y இலுள்ள துப்பாக்கியின் வீச்சுக்குள் (range) X உள்ளதென நிறுவு

25. ஒரு செங்குத்தான நேரிய h உயரமுள்ள மலைத்தொடர் ஒரு சம தரைக்கு குறுக்கே செல்கிறது. மலைத்தொடரிலிருந்து கிடைத்தூரம் a இல் ஒரு பீரங்கி உள்ளது. பீரங்கிக் குண்டு பீரங்கிவாயிலிருந்து வெளியேறும் வேகம் u ஆயின்.

$u^2 \geq g[h+ \sqrt{h^2+a^2}\ )$

ஆயினன்றி, மலைத்தொடருக்கு மேலாகக் குண்டைச் சுடுவதற்கு அப்பீரங்கியால் இயலாதென்று காட்டு.$u^2 = g\ (h+ \sqrt{h^2+a^2})$ ஆயின் மலைத்தொடருக்கு அப்பால் பீரங்கிக்குண்டு சென்றடையக்கூடிய புள்ளி சமதரையில் ஒன்றே யொன்றுமட்டுமே உண்டென்று காட்டி, அப்புள்ளிக்கும் பீரங்கிக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

26. ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி p இலிருந்து ஒரு துணிக்கையானது அத்தளத்தின் உயர்சாய்வுக் கோடொன்றிற்கூடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே வேகம் u உடன் எறியப்படுகின்றது. அவ்வுயர் சாய்வுக்கோட்டிலுள்ள வீச்சு PQ ஆனது உயர்வாக இருத்தற்கு எறியக் கோணத்தைத் துணி.

அத்துணிக்கையானது அத்தளத்தைQ இலே அடிக்கும் போது அதன் வேகம் v ஆயின், புறமாற்றுத்திசையிலே அதே பரவளைவுப் பாதையானது Q இலிருந்து வேகம் v ஓடு எறியப்படும் ஒரு துணிக்கைக்கு அச்சாய்தளத்திலே உயர்வு வீச்சு QP ஐத் தருமெனக் காட்டு.

27. h உயரமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துக் கோபுரம் OA இனது உச்சியிலிருந்து ஒருதுணிக்கையானது தரப்பட்ட ஒரு கதி v உடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. அத்துணிக்கையானது O இனூடாகவுள்ள கிடைத்தளத்தை p இல் அடித்தால்,

$op \leq \frac{v\ \sqrt{v^2+2gh}}{g}$ எனக் காட்டுக.

Qஎன்பது துண்டம் OP இலுள்ள ஒரு புள்ளியாயின்,Q ஐ அடைய அத்துணிக்கையானது இருதிசைகளில் கல் எறியப்படலாமென்றும் எறியப்படக்கூடிய அவ்விரு திசைகளிடையே உள்ள கோணத்தின் இருகூறாக்கி, கோணம்OAQ இன் இருகூறாக்கிக்குச் செங்குத்தென்றுங் காட்டுக.

28. புவியிலுள்ள ஒரு புள்ளிO இலிருந்து ஒரு வாணம் கதி u உடன் நிலைக்குத்தாய் மேல்நோக்கிச் சுடப்படுகின்றது அவ்வாணமானது புவியை விட்டு எழுந்தவுடனே வெடிக்கின்றது. அதன் 'உடைபகுதிகள்" (fragments)பல்வேறு திசைகளிலே சிதறுகின்றன. உடைபகுதிகள் எல்லாம் புவியின் மேற்பரப்புக்கு மேலே இருக்கும் வரையும் அவ்வுடைபகுதிகளின் திணிவுமையம் G தொடக்க வேகம் U உடனும் அமர்முடுகல் g உடனும், நிலைக்குத்தாய் மேலே இயங்குமெனக் காட்டு.

அவ்வாணம் வெடிக்கும்போது ஓர் உடைபகுதி மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோணமθஆக்கும் திசையில் G தொடர்பாகv(<u) கதியுடன் சிதறப்படுகின்றது. அதன் கிடை

வீச்சு $\frac{2v}{g}$ சைன்θ (u + v கோசைθ)எனக் காட்டு.

v = u/2ஆயிருக்க, G தொடர்பாக எல்லாத் திசைகளிலும் உடைபகுதிகள் சிதறப்பட்டால், வாணம் சுடும் நிலையத்தில் (launching site)வேலை செய்யும் ஆட்களின் பாதுகாப்பான பிரதேசம், O மையமும், $u^2/2g$ சைன் ϕ (2 +கோசைθ) ஆரையுமுடைய வட்டத்தின் புறப்பாகமாகும் எனக்காட்டுக.

இங்கு ϕ = கோசை$^{-1}$ $\frac{(V^3 - 1)}{2}$

29. ஓர் ஆகாயவிமானம் ஒரு சீர்க்கதி v உடன் நிலைக்குத்தானa ஆரையுள்ள வட்டத்தின் வில்லாக்கும் பாதையில் பறக்கிறது. தரையிலுள்ள புள்ளி O இற்கு, நிலைக்குத்தாக நேர்மேலே, h உயரத்தில் வட்டத்தின் மையம் உள்ளது. தரையிலிருந்து y உயரத்தில் விமானம் இருக்கும்போது போடப்படும் குண்டு தரையில் O இல் வந்து அடைகிறது. $ky^2 + y(a^2-2hk)+k(h^2-a^2)=0$ என்னும் சமன்பாட்டால்y தரப்படுமென நிறுவு.

இங்கு $k = h + \frac{a^2g}{2v^2}$

30. a ஆரையும் தரையிலிருந்து h உயரத்திலுமுள்ள கிடைவட்டம் ABCஇல் ஓர் ஆகாயவிமானம் ஒரு சீர்க்கதி v உடன் பறக்கிறது வட்டம் ABCஇன் மையத்திற்கு நிலைக்குத்தாக நேர்கீழே, தரையிலுள்ள புள்ளிoவில் ஒரு விமானத்தடுப்புத் துப்பாக்கி உள்ளது. விமானம் A இல் உள்ளபோது. Oஇலிருந்து $3\sqrt{hg}$ வேகத்துடன் சுடப்படும் குண்டு விமானம் B இல் உள்ளபோது அதை அடிக்கிறது. $a = 3\sqrt{7h}$

எனவும் வில் AB யின் நீளம்

$4v.\left(\frac{h}{g}\right)^{1/2}$ எனவும் நிறுவுக

31. கிடையுடன் கோணம் β ஆக்கும் திசையில் மேல்நோக்கிய நேர்கோட்டில் ஒரு பறவை ஒரு சீர்க்கதி u உடன் பறக்கிறது. தரையிலுள்ள ஒரு பையன், பறவை நிலைக்குத்தாக நேர்மேலே h உயரத்திலுள்ளபோது, ஏற்றக்கோணம் α உள்ள திசையில் ஒரு கல்லை எறிகிறான். கல் எறியப்படும் வேகம் என்னவாயிருந்தாலும் தான் $\alpha > \frac{\sqrt{2gh}}{u}$ சீக β + தான் β அல்லவெனின், கல் பறவையை அடியாதெனக் காட்டு. கல் மட்டுமட்டாகப் பறவையைத் தொட்டுக் கொண்டு (இரண்டும் பாதிக்கப்படாமல்) செல்லுமாயின், பொதுவாக மீண்டும் ஒருமுறை கல் பறவையை அடிக்குமெனக் காட்டு.

32. வேகம் $\sqrt{2gh}$ உடன் ஒரு துப்பாக்கியின் குண்டு சுடப்படுகிறது. b உயரமும், கிடைத்தூரம் a உம் உள்ள மலைக்கு மேலால் இக்குண்டு செல்வதானால்

$a2 - 4bh < 4h^2$ எனக் காட்டு.

துப்பாக்கியின் கிடைமட்டத்தில் உள்ளதும். மலையின் அப்பாலுள்ள பக்கத்திலுள்ளதுமான ஒரு புள்ளி, குண்டின் ஒரு கடவையினால் மாத்திரம் அடையலாம் எனின் துப்பாக்கியிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரம்

$$\frac{a^3 + 2abh + ab(4h2 - 4bh - a^2)^{1/2}}{a^2 + b^2}$$

என்னும் இருபெறுமானங்களுக்கு இடையில் இருக்குமென நிறுவுக.

33. ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து, 20 அடி தூரத்தில், ஒரு பந்து ஓய்வில் தரையில் இருக்கிறது. பந்து அடிக்கப்படும் பொழுது அது சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத்தளத்தில் 40அடி செக் வேகத்துடன் இயங்கத்தொடங்கும். அதன் திசை மாறக்கூடியதாகும் பந்து சுவருக்கு மேலாகச் சென்று நிலத்தை அடிக்கக்கூடிய அதிகிட்டி

அதிகிட்டிய புள்ளி A உம் அதிதொலை புள்ளி B உம் ஆகும். ABஇன் தூரத்தைப் பின்வரும் இரு வகைகளிலும் காண்.
சுவரின் உயரம் 1) 2 அடி (11) 5அடி : g 32 அடி/செக்^{2}

34. கிடையுடன் α கோணம் சாய்வுள்ள தளத்திலுள்ள புள்ளி O இலிருந்து ஒரு மீள் தன்மைபந்து, தளத்துடன் β கோணம் ஆக்கும் திசையில் எறியப்படுகிறது. பந்தின் பாதை அதியுயரச் சரிவுக் கோட்டிற்கூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளது nஆம் மோதலில் பந்து மீண்டும் **O** ஐ அடையுமாயின்
(1-e) கோதா α கோதா β = 1- e^n என நிறுவுக.பந்திற்கும் தளத்திற்கும் மீளமைவுக்குணகம் eஆகும் இன்னும்rஆம் மோதல் தளத்திற்கு செங்குத்தாயின்

$e^n - 2e^r + 1 = o$ என நிறுவுக.

35. இரு சமாந்தர நிலைக்குத்தான சுவர்களின் இடைத்தூரம் a ஆகும். ஒரு சுவரின் அடியிலிருந்து v வேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு சிறு மீள் தன்மைக் கோளம் மற்றச் சுவரில் மோதி மீண்டும் முதல் சுவரை புள்ளி**P**இல் அடிக்கிறது சுவர்களிற்கு செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கோளத்தின் இயக்கம் உள்ளது. மீளமைவுக் குணகம் e எனின் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து புள்ளி இன் P அதிகூடிய உயரம்

$$1/2 \frac{v^2}{g} - 1/2 \frac{ga^2 (1+e)^2}{v^2 e}$$ என நிறுவுக.

இந்த வகையில் கோளம் **P** ஐ அடிக்கும்பொழுது. அதன் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக்கூறு கீழ் நோக்கியுள்ளது என நிறுவுக.

36. ஒரு மாடிப்படிகள் ஒவ்வொன்றின் அகலம் **a**, உயரம் **h**; ஆகும் மேல் படியின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையாக u வேகத்துடன் (படிகளில் விழுந்து வரும்படி) வீசப்பட்டது.

$u^2 < \frac{ga^2}{2h}$ ஆயின் துணிக்கை அடுத்த படியை அடிக்கும் எனக் காட்டுக

இந்தப் படியை அடித்து மீண்டும் அதற்கு அடுத்த படியை அடிப்பதற்கு, நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு என நிறுவுக.

$$a < u\,(1+2e)\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$u\left\{1 + e + \sqrt{1+e^2}\right\}\sqrt{\frac{2h}{g}} < 2a$$

இங்கு துணிக்கைக்கும், படிகளுக்கும் இடையே மீளமைவுக்குணகம் e

37. ஒரு விமானமானது **v** எனும் சீரான வேகத்துடன் hஎன்னும் ஒரு மைல் உயரத்தில் பறக்கிறது. அவ்விமானம் துப்பாக்கி ஒன்றுக்கு நேர்மேலாகச் சென்றபின், விமானத்தை நோக்கி நேரிலக்காகத் துப்பாக்கி சுடப்படுகின்றது. அப்பொழுது துப்பாக்கியிலிருந்து நோக்குகையில் விமானத்தின் ஏற்றக்கோணம் α ஆகும். குண்டின் தொடக்க வேகம்

$$Kv\,\mathrm{Sec}\alpha,\ (K>1) \text{ எனின் } \alpha = \tan^{-}\left(\frac{1}{v}\sqrt{\frac{gh}{2\,(K-1)}}\right)$$

என இருப்பின் குண்டானது விமானத்தைத் தாக்காது எனக் காட்டுக.

38. டெனிஸ் ஆட்டக்காரரொருவர் **h** உயரமுடைய வலைக்கு நேர்குறுக்காகப் பந்தொன்றை மற்றொரு டெனிஸ் ஆட்டக் காரருக்குப் பணிக்கின்றார். வலையிலிருந்து **d** தூரத்தில் தரைக்கு அண்மையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடையுடன் α கோணத்தில் v வேகத்துடன் அப்பந்து எறியப்பட்டுள்ளது.

$$\tan^2\alpha - \frac{2V^2}{gd}\tan\alpha + 1 + \frac{2V^2h}{gd^2} < 0$$

எனக் காட்டுக.

u எனும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானமுள்ளதிலும் பெரிதாக **v** இருப்பின் α என்பது α_1 α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$ என்னும் இரு பெறுமானங்களுக்கு

இடையிலிருக்கவேண்டும் என்பதை இதிலிருந்து உய்த்தறிக α_1 α_2 u என்பவற்றைக் காண்க.

39.தரைமட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று கதி **u** உடன் எறியப்படுகின்றது $u^2 < g\sqrt{b^2 + h^2} + h$ ஆயின் எறியப் புள்ளியிலிருந்து **d** தூரத்திலிருக்கும் **h** உயரமுடைய சுவரொன்றைத் துணிக்கையால் தாண்டிச்செல்ல முடியாதெனக் காட்டுக.
கிடையுடன் கோணம் α சாய்வுடைய தளமொன்றில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் துணிக்கை ஒன்று அதியுயர்வான சரிவுக்கோட்டின் வழியே மேல்நோக்கி அளக்கப்பட்ட தூரம் s ஐ அணுகுவதற்கு அத்துணியானது எறியப்படவேண்டிய மிகக் குறைவான கதியை உய்த்தறிக.

(1974 Apr)

40. **u** என்னும் பருமனுடைய ஒருமை வேகத்துடன் **h** என்னும் ஒருமைல் உயரத்தில் பறக்கின்ற ஒரு விமானம் துப்பாக்கி நிலையமொன்றை நேர்மேலாகக் கடக்கின்றது. துப்பாக்கிக் குண்டு ஒன்று விமானத்தை தாக்கவேண்டுமாயின் துப்பாக்கி நிலையத்துக்கு நேர்மேலாகச் செல்லும் கணத்திலே, சுடப்படவேண்டிய குண்டின் இழிவான துப்பாக்கி வாய் வேகமென்ன? இதற்கு பொருத்தமான ஏற்றகோணம் என்ன?

(1979 August)

41. ஒரு ஒப்புரவான சாய்தளத்தின் அடியான **A** யிலிருந்து ஒருதுணிக்கை அதிகூடிய சரிவுக்கோடு **A** யினூடாகக் கொண்ட நிலைக்குத்துத் தளத்தில் **v** வேகத்தோடு எறியப்படுகின்றது. தளம் கிடைக்கு α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. துணிக்கை தளத்தை செங்குத்தாக **B** இல் தாக்குகின்றது. தொடக்கவேகம் **AB** யுடன் θ கோணத்தை அமைத்தால் $\text{Cot}\theta\ \text{Cot}\alpha$ 2 எனக்காட்டுக. **AB** ஐக் காண்க.

இத்துணிக்கை **B** யிலிருந்து பின்னதை அடைந்து தளத்தை **A** யிற்கும், **B** யிற்கும் இடையிலுள்ள **C** என்னும் புள்ளியில் பின்னர் தாக்குகின்றது. தளத்திற்கும், துணிக்கைக்கும் இடையிலுள்ள மீளமைவுக் குணகம் **e** எனின்.

$$e^2 = \frac{BC}{AB}$$ எனக் காட்டுக.

(1980 Aug)

42. கிடையுடன் α கோணத்தை அமைக்குமாறு **V** என்னும் வேகத்துடன் **O** எனும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. அச்சுக்களைப் பொருத்தமாகத் தெரிவு செய்வதன் மூலம் துணிக்கையின் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = X \tan \alpha - \left(\frac{9X^2}{2V^2}\right) (1 + \tan^2\alpha)$$

எனும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாமென நிறுவுக.

(1980 Nov)

43. மட்டமான தரையிலுள்ள P எனும் புள்ளியிலிருந்து 45^0 சாய்வில் v எனும் வேகத்துடன் ஒரு வெடிகுண்டு சுடப்படுகின்றது. வெடிகுண்டின் பாதையானது

$$y\ x - \frac{9x2}{v2}$$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் என நிறுவுக.

இங்கு x, y என்பன முறையே P இலிருந்து கிடைத்தூரமும், நிலைக்குத்துத் தூரமுமாகும். X a ஆயுள்ள புள்ளி Q இல் இவ்வெடிகுண்டு நிலத்தைத் தாக்குகின்றது P இலிருந்து 45^0 சாய்வில் வேகம் u உடன் சுடப்பட்ட இரண்டாவது வெடி குண்டு Q இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே h தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றது.

$$u^2 = \frac{V^4}{V^2 gh}$$ என நிறுவுக. (1981 Apr)

44. ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி **P** யிலிருந்து ஒரு துணிக்கையானது அத்தளத்தின் உயர் சாய்வுக்கோடொன்றிற்கூடான ஒரு நிலைக்குத்து தளத்திலே கதி u உடன் மேல்நோக்கி எறிய ப்பட்டது. துணிக்கையின் உயர் வீச்சைப் பெறுக. இவ்வுயர் வீச்சு **PQ** ஆயின், Q லிருந்து என்ன கதியுடன் வீசப்பட்டால் உயர்வீச்சு QP ஆக இருக்கும் இக்கதியைப்பற்றி யாது கூறுவீர்?

p ஐக் குவியமாகவும் $2u^2/g$ ஐ செவ்வக அகலமாகக் கொண்ட பரவளைவில் Q இருக்குமென உய்தறிக.

பரவளைவு ஒன்றின் முனைவாள் சமன்பாடு

$$\frac{1}{r} = 1 + \cos\theta$$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

45. ஒரு துணிக்கை புள்ளி A யிலிருந்து கிடையுடன் α எனும் கோணத்தில் வேகம் **v** உடன் வீசப்படுகின்றது. அது **p** எனும் புள்ளியை அடையும் போது அதன் வேகம் கிடையுடன் β கோணத்தில் சாய்த்துள்ளது. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. P இல் வேகத்தின் நிலைக்கூறு $v\cos\alpha \tan\beta$
2. A இன் மட்டத்திற்கு மேல் P இன் உயரம்
$$\frac{v^2(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)}{2g\cos^2\beta}$$
3. A இலிருந்து P யிற்கு செல்ல எடுத்த நேரம்
$$\frac{v\sin(\alpha - \beta)}{g\cos\beta}$$
4. AP யின் கிடையான தூரம்
$$\frac{v^2\sin(\alpha - \beta)\cos\alpha}{g\cos\beta}$$

46. கிடையுடன் β சாய்வுள்ள சாய்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு துணிக்கைகள் **u** எனும் வேகத்துடன் ஒரே நேரத்தில் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது இரு துணிக்கைகளும் சாய்தளத்தில் ஒரே வீச்சைக் கொண்டுள்ளது இரு துணிக்கைகளின் இயக்கமும் அதியுயர்சாய்வுக்கோட்டினூடாக நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன பரப்பு நேர வித்தியாசம்.

$$\frac{4u}{g\cos\beta}\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_2}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு $\alpha 1, \alpha 2$ என்பன கிடையுடன் எறியல் கோணங்களாகும்

47. மலையொன்றின் செங்குத்தான விளிம்பிலிருந்து ஒரு மனிதன் கல்லொன்றைகிடையுடன் சாய்வுக் கோணம் α கொண்ட திசையிலே வேகம் **u** உடன் எறிகிறான் . **T** இடைவேளையின் பின்னர் முதலாவது கல் எறியும் திசையுடன் கோணம் $\pi/2+\theta$ விலே வேகம் **v** உடன் வேறொரு கல் எறியப்பட்டது. இரு கற்களும் மோதுகின்றன. **T** ஐக் காண்க.

(1975Apr)

48. கிடையுடன் α கோணம் சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தில் புள்ளி **A**யினூடாக செல்லும் அதியுயர் சரிவுக் கோடு 1 ஆகும் **A**யிலிருந்து வேகம் **u** உடன் வீசப்பட்ட ஓர் ஏவுகணை சாய்தளத்தின் மேலேயுள்ள புள்ளி **B** இல் அடிக்கிறது . **AB** ஐக் காண்க.

$$AB \leq \frac{u2}{g(1+\sin x)}$$ என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து ஒரு செங்குத்தான நேரிய **h** உயரமுள்ள சுவருக்கு மேலாகச் சுவரிலிருந்து கிடைத்தூரம் **a** யிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து ஏவுகணை வீசப்பட வேண்டிய இழிவு வேகத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க

49.நிலத்திலுள்ள **A** எனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வேகம் **V** உடனும் கிடையுடன் கோணம் $\alpha(<\pi/2)$ ஏற்றத்திலும் ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகின்றது. அத்துணிக்கையின் கடவையின் தளத்தில் அதன் அதியுயர் புள்ளி **o** வினூடாகக் கிடையாக**(OX)**நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி **(OY)** அச்சுக்களை எடுப்பதன் மூலம் அக்கடவையின் சமன்பாட்டை $2v^2y=gx^2Sec^2\alpha$ எனும் வடிவில் உணர்த்தலாம் எனக் காட்டுக.

$\alpha=\pi/4$ஆயிருக்கையில் உயரம் **h** உம் **a** கிடைத்தூரமுள்ள இரு சுவர்களுக்கு மேலாக மருவிக்கொண்டு செல்லுமாயின் $v^2=2gh+g\sqrt{a^2+4h^2}$ என நிறுவுக.

50. கடல் மட்டத்திலிருந்து **h** உயரத்திலுள்ள மலையுச்சியின் விளிம்பில் ஒரு கோட்டை அமைந்துள்ளது. கோட்டையிலிருந்து $\sqrt{2\lambda gh}$ கதியில் ஓர் ஓடு நங்கூரமிடப்பட்டுள்ள கப்பலைத் தாக்குவதற்காகச் செலுத்தப்படுகிறது. இதற்குப் பிரதியீடாகக் கப்பலில் இருந்து $\sqrt{2gh}$ கதியில் $(\mu>1)$ கோட்டையைத் தாக்குவதற்காக ஓர் ஓடு செலுத்தப்படுகிறது. முதலாவது ஓடும் இரண்டாவது ஓடும் தங்கள் குறி இலக்கங்களைத் தாக்கக்கூடிய அதி பெரிய கிடையான வீச்சுகளான R_1 இனதும் R_2 இனதும் விகிதம்.

$$\frac{R1}{R1} = \frac{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}{\sqrt{\mu(\mu-1)}}$$ எனக்காட்டுக. (1980 Aug)

51. ஒரு போக்கப்பல் **V** வேகத்தோடு முன்னோக்கிச் செல்கிறது. பின்னோக்கிக் குறி பார்க்கக்கூடியவாறு துப்பாக்கியொன்று இக்கப்பலில் α எனும் ஏற்றக்கோணத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துப்பாக்கிக்குச் சார்பாக ஓட்டின் எறி வேகம் $u\ (>v)$ என அமைந்தால் வீச்சு.

$$\frac{2u}{g}\ \text{Sin}\alpha\ (u\text{Cos}\alpha-v)$$ எனக்காட்டுக.

ஏற்றக்கோணம்

$$\cos^{-1}\left[\frac{v+\sqrt{v^2+8u^2}}{4u}\right]$$ ஆக இருந்தால்

வீச்சு உயர்வாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

52.t = o என்னும் நேரத்தில் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து இரு சிறிய துணிக்கைகள் **P,Q** என்பன கிடையுடன் α_1,α_2 என்னும் கோணம் சாய்விலே u_1,u_2 என்னும் வீசல் வேகங்களுடன் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் புவியீர்ப்பில் இயங்க எறியப்படுகின்றன.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1) PQஎப்போதும் ஒரு நிலையான நேர்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

2) வேகங்கள் சமாந்தரமாய் வருவதற்கு எடுத்த நேரம்.

$$\frac{U_1U_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{g_1U_2\cos\alpha_2-U_1\cos\alpha_1}$$

3) அவற்றின் பாதையில் வேறு ஒரு பொதுப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்ல எடுக்கும் நேர ஆயிடை

$$\frac{2U_1U_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{g(U_1\cos\alpha_1+U_2\cos\alpha_2)}$$

53.O எனும் புள்ளியிலிருந்து **v** என்னும் கதியுடன் αஎறி கோணத்தில் எறியப்பட்ட எறியம் **x** கிடைத்தூரத்தில் **y** உயரத்தில் உள்ள புள்ளியினூடு செல்லுமாயின்

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$$ என நிறுவுக.

x = 50', y = 20' ஆகவுள்ள புள்ளியினூடு செல்வதற்கு தேவையான அதிகுறைந்த வேகத்தையும் எறியற் கோணத்தையும் காண்க.

v=50 அடி/செ ஆகும்போது எறியற்கோணங்களைக் காண்க. அத்திசையில் எறியப்பட்ட எறியங்கள் தரையில. அடிக்கும் புள்ளிகளின் இடைத்தூரம் அண்ணளவாக 15 என நிறுவுக.

54. பறக்கும் பறவையொன்றை அடிப்பதற்கு α என்னும் ஏற்றக்கோணத்தில் **v** எனும் வீசல் வேகத்துடன் ஒரு கல் எறியப்படுகின்றது. கல்வீசப்பட்ட கணத்தில் இப்புள்ளிக்கு நிலைக்குத்தாக **h** உயரத்தில் **u** எனும் வேகத்துடனும் **f** என்னும் ஆர்முடுகலுடனும் ஒரு கிடைக்கோட்டில் பறக்கின்றது. மீண்டும் பறவையும் கல்லும் ஒரே நிலைக்குத்துக்கோட்டில் வரும் போது கல்லின் உயரம் என்ன? $\tan\alpha < g/f$

ஆயின் **v** யின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு அவ்வுயரத்தின் அதிகூடிய பெறுமானம் என்ன? அதிலிருந்து v இன் எப்பெறுமா னத்திற்கும் $\tan\alpha < \{(f^2h^2 + 2ghu^2)^{1/2} - fh\}/u^2$ ஆயின் பறவையைக் கல் அடிக்காது என நிறுவுக.

55. ஒரு லொறியின் கீழ், மேல் தட்டுகளுக்குமிடைப்பட்ட உயரம் **h** ஆகும். அந்த லொறி கிடையுடன் α சாய்வுள்ள சாய்தளத்தில் மேனோக்கி kg எனும் மாறா ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது.லொறியிற்குள் துணிக்கை ஒன்றானது சுயாதீனமாக விழவிடப்படுமாயின் லொறி தொடர்பான துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் சாய்தளத்துடன் கோணம் β அமைக்குமாயின் $\cot\beta = k\sec\alpha + \tan\alpha$ எனக்காட்டுக.

துணிக்கை ஒன்றானது கீழ் தட்டிலிருந்து (A) தட்டுடன் $\theta(>\beta)$ கோணம் அமையும் திசையில் லொறிசார்பாக V எனும் வேகத்துடன் மேனோக்கிய திசையில் எறியப்படுகிறது. துணிக்கையானது மேல்தட்டை B என்னும் புள்ளியில் அடிக்கிறது. இங்கு AB=h ஆகும். இதன் பறப்பு நேரம்

$$\frac{2v\cos\theta}{g\cos\alpha\cos\beta}$$ எனக்காட்டுக.

$$h = \frac{2v^2\cos\theta\tan\beta\sin(\theta-\beta)}{g\cos\alpha\cos\beta}$$ என உய்த்தறிக.

56. 144 அடி உயரமான ஒரு வெளிச்ச வீட்டின் உச்சியிலிருந்து ஒரு கல்லானது கிடையுடன் 30° ஏற்றத்தில் **256** அடி/செ வேகத்துடன் கடலை நோக்கி எறியப்படுகின்றது. பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

1) வெளிச்ச வீட்டின் அடியிலிருந்து கடலிற் கல்லு மோதுந் துரம்.

2) கல்லு நீர்ப்பரப்புடன் மோதுந்திசை கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம்.

57. புவியின் மீதுள்ள கிடைத் தரையின்மீது **R** என்னும் ஆகக் கூடிய துரத்திற்கு குறித்த ஒரு கருவியை விண்வெளி வீரரொருவரால் எறியமுடியும். சந்திரன்மீது அவர் இருக்கையில் கிடைத்தரை மீதிலேயே $\sqrt{11}R$ எனும் துரத்திலுள்ள சகவிண்வெளி வீரருக்கு அதே கருவியை எறியும்படி கேட்கப்படுகின்றார். சந்திரன் மீது ஈர்ப்பினாலானது ஆர்முடுகல் g / 6 எனக்கொண்டு கருவியை மிகவிரைவாகச் சேர்ப்பதற்கான எறியக்கோணம்

$$\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{11}}$$ எனக்காட்டுக.

(1981 Aug)

58. மலை உச்சியில் நிற்கும் ஒரு மனிதன் கல்லொன்றை **u** வேகத்தோடு மேல்நோக்கும் நிலைக்குத்தோடு α கோணம் அமையும் திசையில் எறிந்தான். **T** இடைவெளிக்குப் பின், அதே இடத்திலிருந்து இன்னுமோர் கல்லை **v** வேகத்தோடு மேல்நோக்கும் நிலைக்குத்தோடு $\alpha + \pi/2 + \theta$ கோணம் அமையும் திசையில், முன் எறிந்த கல் நகரும் தளத்தில் எறிந்தான். இரண்டு கற்களும் மோதினால்,

$u \sin \alpha < v \cos(\theta+\alpha)$ என இருப்பின்,

$$T = \frac{2uv \cos \theta}{g\{v\cos(\theta+\alpha) + u\sin \alpha\}}$$ எனக்காட்டுக.

(Aug 1981)

59. P,Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் A என்னும் புள்ளி யொன்றில் இருந்து , ஒருங்கே அதே வேகம் **U** வுடன் ஆனால் மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் முறையே θ $(\pi/2-\theta)(\theta<\pi/2)$ என்னும் கோணங்களை அமைக்கும் வேறான திசைகளில் எறியப்படுகின்றன. **P** யினதும் , Q வினதும் பாதைகள் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலும்,**A** யூடான நிலைக்குத்தின் ஒரே பக்கத்திலும் கிடக்கின்றன. Q தொடர்பான **P** யின் வேகம் ஓர் ஒருமை என நிறுவுக. இதிலிருந்தோ வேறுவழியாகவோ PQ நிலைக்குத்துடன் எப்போதும் $\pi/4$ எனும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் எனக் காட்டுக. துணிக்கைQ மீண்டும் **A** யைப்போன்று அதே கிடைமட்டத்தில் இருக்கும் போது,

PQ வினது தூரம் $\frac{4u^2}{g} \cos(\theta + \pi/4) \sin \theta$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

இத்தூரம் அதிகூடுதலாக இருக்கும் θ வின் பெறுமதியைக்காண்க.
(Aug 1982 Int)

60.x,y என்னும் இரு புள்ளிகள் ஒரே கிடைமட்டத்திலும்,d இடைத்தூரத்திலும் உள்ளன இரண்டு சிறிய கோளங்கள A யும் B யும் முறையே xy இலிருந்து ஒருங்கே எறியப்படுகின்றன. கோளம் **A** கதி **u** வுடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. கோளம் B யும் மேல் நோக்கி அதேகதி u உடன் எறியப்படுகின்றது. ஆனால் அதன் எறியற்திசை x,y ஊடாகவுள்ள நிலைக்குத்துத் தளத்திற் கிடக்கும்வண்ணமும் YX உடன் ஏற்றக்கோணம் $\alpha < \pi / 2)$ வை அமைக்கும் வண்ணம் உள்ளது. A தொடர்பாக B யின் வேகம் ஓர் ஒருமை எனக் காட்டுக .அதன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இதிலிருந்தோ, வேறுவழியாலோ $d / 2u \tan (\pi 4 + \alpha / 2)$ எனும் நேரத்தில் இரு கோளங்களும் இழிவுத் தூரத்தில் இருக்கும் எனக்காட்டுக. இத்தூரத்தைக் காண்க.

61. ஒரு குண்டு நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி விழுகின்றது. தரையில் O எனும் புள்ளியை மட்டாக அடையும்போது வெடித்துப் பல துண்டுகளாகப்பிரிந்த துண்டுகள் பல திசைகளிலும் சென்றன. வெடிக்கமுன் குண்டின் கதி u ஆகும் . குண்டின்தொடர்பாக ஒவ்வொரு சன்னமும் $(v > u)$கதி உடையதாகும் $k = uv$ ஆகவும்.

$$\cos\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{4}$$ ஆகவும் இருப்பின் துண்டுகளெல்லாம்

O வை மையமாவும் $\frac{2v2}{g}$ $\sin\alpha\,[\cos\alpha - k]$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தினுள் தரையில் விழுமென நிறுவுக.

O விலிருந்து d தூரத்தில் ஒரு சிறு மிருகம் இருமுறைகளில் வெவ்வேறு திசைகளில் வரும் சன்னங்களால் தாக்கப்பட்டதெனின் தாக்கப்பட்ட இரு கணங்களைத் தரும் சமன்பாடொன்றைப் பெறுக.

62. ஒரு பாரமான துணிக்கை O என்னும் புள்ளியிலிருந்து கிடையுடன் α கோணத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றபோது அது ஒரு பரவளைவுப் பாதையில் இயங்குகின்றது. O விற்கூடாகக் கிடை,

நிலைக்குத்து அச்சுகள் குறித்த துணிக்கையின் பாதை $y\ x\ (1 - x / R) \tan\alpha$ என நிறுவுக. இங்கு R என்பது கிடைவீச்சாகும் அதன் பாதையில் h என்னும்உயரமுடையஇரு புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 2a ஆயின் $R (R - 4h \operatorname{Cot} \alpha) = 4a^2$ என நிறுவுக.

63. ஒரு துணிக்கை ஒரு குறித்த கதி u உடன் எறியப்படுகையில் அதன் கிடை வீச்சு $R (< u^2 / g)$ ஆகும். கிடைக்கும், எறியும் வேகத்திற்குமிடையிலான கோணத்திற்கு ஒரு இயல்தகு பெறுமானங்கள் உண்டென்றும் அப்பெறுமானங்கள் நிரப்புகின்றன என்றும் காட்டுக. மேலும் இரு எறியக்கோணங்களுக்கு இசைவாகப் பறப்பு நேரங்கள் t, t என்றால்

$$tt' = \frac{2R}{g}$$ எனக் காட்டுக.

64. ஒரு கிடைத்தளத்திற்குமேல் h உயரத்திலுள்ள O என்னும் புள்ளியிலிருந்து இரு துணிக்கைகள் u என்னும் சமகதிகளுடன் எதிர் திசைகளில் எறியப்படுகின்றன $u^2 > 2gh$ என்றால் அத்துணிக்கைகள் தளத்திலே படும் புள்ளிகளுக்கிடையிலான அதியுயர் இயல்தகு தூரம் $\frac{(u^2 + 2gh)}{g}$ எனக் காட்டுக. $u^2 > 2gh$ என்றால், அப்புள்ளி களுக்கிடையிலுள்ள அதியுயர் இயல்தகு தூரம் என்ன?

65. ஓர் எறிபொருள் ஒரு கிடைத்தளம் மீது 20' செக்$^{-1}$ எனும் ஓர் எறியற்கதியுடன் எறியப்படுகையில் 12அடி வீச்சுடையதாக இருப்பதற்கு θ என்னும் இரு இயல்தகு ஏற்றக் கோணங்கள் உண்டென்றும், $12\tan^2\theta - 25\tan\theta + 12 = 0$ ஆலே அவை தரப்படும் என்றும் காட்டுக.

இரு துணிக்கைகள் ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து ஒரே கணத்தில் A யூடான கிடைத்தளத்தில் A யிலிருந்து 12அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளி B யிற்படுமாறு 20' செக்$^{-1}$ கதிகளுடன் $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ ஏற்றக்கோணங்களில் எறியப்படுகின்றன. X ஏற்றத்துடன் எறியப்படும் துணிக்கை மீளமைவுக்குணகம் 1/4 உடன் தளத்திலிருந்து பின்னதைப்பின் அது மற்றத்துணிக்கையானது B ஐ அடையுமுன்னர் எண்ணற்ற பலதடவைகள் பின்னதைக்கும் எனக்காட்டுக.

66. ஒரு துணிக்கை கிடைக்கு மேலே θ கோணத்தில் u வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றது. நேரம்

$\frac{u \sin \phi}{g \cos (\phi - \theta)}$ வின்பின் அதன் வேகம் ϕ கோணத்தினூடே திரும்பியிருக்கும் என்றும், பின்னர் கதி $u\cos\theta \sec (\phi - \theta)$ என்றும் காட்டுக.

67. ஓர் ஆகாய விமானம் 4900அடி உயரத்தில் 150 mph கதியுடன் கிடையாகப் பறக்கின்றது. தரையிலுள்ள ஒரு பொருளில் குண்டுபோடுவதற்கு வளித்தடை புறக்கணிக்கப்பட, விமானத்திலிருந்து அப்பொருளின் இறக்கக்கோணம் $\tan^{-1} (14/11)$ ஆகும் குண்டு போடப்படவேண்டும் எனக் காட்டுக.

68. இரு துணிக்கைகள் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் v எனும் ஒரே கதியுடன் θ , 2θ ஏற்றக்கோணங்களில் ஒரே நேரத்தில் எறியப்படுகின்றன. இங்கு $\theta < 45^0$ நேரம்

$\frac{v}{g} \cos \theta / 2 \operatorname{Cosec} \frac{3\theta}{2}$ விற்குப் பின் அவற்றின் வேகங்கள் சமாந்தரமாகுமெனக் காட்டுக.

69. ஒரு குண்டின் வாய்க்கதி $\sqrt{2ag}$ துவக்கிலிருந்து முறையே h, k என்னும் கிடை, நிலைக்குத்துத் தூரங்களிலுள்ள ஒரு பொருளிற் சுடவேண்டியுள்ளது. பொருள் துவக்கிலும் உயரமானது. $h^2 > 4a (a - k)$ என்றால் இது அசாத்தியம் எனவும் $h^2 < 4a (a - k)$ என்றால் துவக்கிக்கு இரு இயல்தகு ஏற்றங்கள் உண்டு எனவும் காட்டுக.
பின்னைய சந்தர்ப்பத்தில், இரு எறியக்கோணங்களும், θ, ϕ எனின் $\tan (\theta + \phi) = - h / k$ எனக் காட்டுக.

70. ஓர் எறிபொருளின் தொடக்க வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே p, q ஆகும். நேரம் t இற் சென்றகிடை, நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் x , y என்றால், x ஐயும், y ஐயும் t இல் எடுத்துரைக்க. அன்றியும் எய்தப்பெற்ற அதியுயர் உயரம் H ஐயும் எறியப்புள்ளிக்கூடான ஒரு கிடைத்தளமீதுள்ள வீச்சு R ஐயும் காண்க.

$$y = \frac{4Hx (R - x)}{R^2}$$ எனக் காட்டுக.

71. வேகம் v உடன் வீசப்பட்டதொரு குண்டு வீசற்புள்ளியினூடானதொரு கிடைத்தளத்திலுள்ளதொரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை மட்டுமட்டாக

அடையும். அதேபுள்ளியின் மேல் h உயரத்திலுள்ள இன்னுமொரு புள்ளியைத் தாக்குமாறு அக்குண்டினை அதே ஏற்றக்கோணத்துடன் வீசவேண்டுமானால் வேகத்தினை

$$\frac{v2}{(v2 - gh)^{1/2}}$$

ஆகக்கூட்டுதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

72. ஒரு பொருள் அதன் மேல் நோக்கிய பாதையில் வீசற்புள்ளியிலிருந்து கிடையாக x அடி தூரத்திலும் நிலைக்குத்தாக y அடி தூரத்திலுமுள்ளதொரு புள்ளியினூடே செல்கின்றது. வீசற்புள்ளியினூடான கிடைத்தளத்திலே வீச்சு R எனின் வீசற்கோண ஏற்றம்

$$\tan^{-1}\left[\frac{y}{x}\ \frac{R}{(R - x)}\right]$$ எனக் காட்டுக.

73. β சாய்வு கொண்ட ஒரு சாய்தளத்தின் மீது மேல்நோக்கிதளந்தொடர்பான ஏற்றக்கோணம் α உடன் வீசப்பட்டதோர் எறிபொருளின் வீசற்புள்ளியினூடாக வீச்சு $R \operatorname{Sec}\beta\ (1 - \tan\alpha \tan\beta)$ எனக்காட்டுக. இங்கு R என்பது தொடர்பேற்றக்கோணம் α உம் வீசல் வேகமும் அதேபெறுமதியில் ஆகும்போதுள்ள கிடைவீச்சு

74. நிலைக்குத்துடன் 2β சாய்ந்துள்ளதொரு தளத்தின் மீதுள்ளதொரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பாரமான துணிக்கை வீசப்பட்டது. சாய்தளத்தின் அதியுயர் சாய்வுக்கோட்டினூடாகச் செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தின் மேல்பகுதியிலே அத்துணிக்கை இயங்குகின்றது. துணிக்கையின் தொடக்கவேகம் $u\operatorname{Cos}\beta$ அதன் தொடக்க இயக்கத்திசை நிலைக்குத்துடன் β சாய்ந்துள்ளது. துணிக்கையின் பறப்புநேரம் u / g எனவும், தளத்தின் மீது அதன் வீச்சு $u^2 / 2g$ எனவும், அது தளமீது மோதும் வேகம் $u\operatorname{Sin}\beta$ எனவும், அப்பொழுது அதன் இயக்கத்திசை ஒரு செங்கோணத்தினூடு திரும்பிவிட்டதெனவுங் காட்டுக.

75. ஒரு எறிபொருள் அதன் வீசற்புள்ளியிலிருந்து θ ஏற்றக்கோணத் திலமைந்துள்ளதொரு புள்ளியினூடு செல்லுதல் வேண்டும் அப்புள்ளியிலே கிடையுடன் β சரிவுள்ள சாய்தளத்தின் மீது செங்குத்தாக மோதவும் வேண்டும். அது வீசப்படவேண்டிய ஏற்றக்கோணம் பின்வருமாறு பெறப்படும் எனக்காட்டுக.

$\tan\alpha = \operatorname{Cot}\beta + 2\tan\theta$

விற்பனையாளர்:
லங்கா புத்தசாலை,
G. L. (1-2), டயஸ் பிளேஸ்,
கொழும்பு – 12.