க.பொ.த உயர் தரம்

பிரயோக கணிதம்

இயக்கவியல் - பகுதி I

DYNAMICS - PART I

APPLIED MATHEMATICS FOR G.C.E. ADVANCED LEVEL

கா. கணேசலிங்கம், B.Sc. Dip-in-Ed.

க. பொ. த

உயர்தர வகுப்புக்கான

பிரயோக கணிதம்

இயக்கவியல் - பகுதி I

K. Ganeshalingam. B. Sc. Dip in Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, Pamankada Road, Colombo -06
Phone :366707

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title	:	APPLIED MATHEMATICS FOR G.C.E. (A/L) DYNAMICS - PART - I
Language	:	Tamil
Author	:	Karthigesu Ganeshalingam B. Sc.Dip – in – Ed. Puttalai, Puloly.
Publications	:	Sai Educational Publication 36/4 B, Pamakada Road, Colombo –06
Date of Issue	:	First Edition March 1998, sencond Edition May 1999 Third Revised Edition January 2001
No of pages	:	333 + iv
Copyright	:	Sai Educational Publication.
Type Setting	:	SDS COMPUTER SERVICES, Col - 06. Tel : 553265

நூலின் விபரம்

தலைப்பு	:	க. பொ. த உயர்தரம் பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் - பகுதி - I
மொழி	:	தமிழ்
ஆசிரியர்	:	கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம். புற்றளை, புலோலி.
வெளியீடு	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம். 36/4 B, பாமன்கட வீதி கொழும்பு - 06
பிரசுரத்திகதி	:	முதற் பதிப்பு பங்குனி 1998, 2வது பதிப்பு வைகாசி 1999, திருத்திய 3வது பதிப்பு தை 2001, 4வது பதிப்பு தை 2003
பக்கங்கள்	:	333 + iv
பதிப்புரிமை	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்.
கணனிப்பதிவு	:	எஸ்.டி.எஸ் கம்பியூட்டர் சேர்விசஸ், கொழு - 0-6. 553265

என்னுரை

அநேக மாணவர்களது வேண்டுகோளிற்கிணங்க உதாரணச் செய்கைகளுடன் **"பிரயோக கணிதம்"** - இயக்கவியல் - பகுதி - 1 என்னும் இந்நூல் திருத்திய பதிப்பாக வெளியிடப்படுகிறது. ஏற்கனவே வெளிவந்த இந்நூலின் இருபதிப்புகளிலும் மாணவர்கள் முகங்கொடுத்த பிரச்சினைகளை இலகுவாக்கும் பொருட்டு அவ்வப்பகுதிகளில் உதாரணக் கணக்குகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

வழமையாக எனது நூல்களில் மாணவர்களை எளிமையான பிரச்சினங்களிலிருந்து சிக்கலான பிரச்சினங்களை நோக்கிக் கொண்டு செல்லும் உத்தியே கையாளப்படுகிறது. அடிப்படை அறிவினை சிறப்பாகப் பெற்றபின்னர் மேற்கொண்டு பிரச்சினங்களை தாமாகவே விடுவிக்க விழையும் மனப்பாங்கை விருத்தி செய்வதே இந்நூலின் நோக்கமாகும்.

புதிய பாடத்திட்டத்திலுள்ள பிரயோககணித இயக்கவியல் அலகுகள் இந்நூலிலும், பகுதி - 2 இலும் முற்றாக உட்படுத்தப் பட்டுள்ளன. இந்நூலைக் கற்கும் மாணவர்கள் தாமாகவே புதிய கணக்குகளை செய்ய விழையும் திறனை விருத்தி செய்து கொள்வர் என எதிர்பார்க்கிறேன். நிறைவுகள் சொல்லற்க. குறைவுகள் சுட்டுக. எனது இந்நூலை திருத்திய பதிப்பாகக் கொணர்ந்த சாயி வெளியீட்டகத்தினருக்கு எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

நன்றி

தை 2001

ஆசிரியர்

பொருளடக்கம்

அலகு I

நேர்கோடொன்றில் இயக்கம்
(Motion in a straight line)

கதி : இயங்குகின்ற ஒரு துணிக்கையின் கதி, அத் துணிக்கை தன் பாதையை வரைகின்ற வீதமாகும்.
ஒரு துணிக்கையானது சமநேரங்களில், அவை எத்துணைச் சிறியனவாயினும், தன்பாதையில் சமநீளங்கள் செல்லுமாயின், அது மாறாக் கதியுடன் செல்லுகின்றதெனப்படும். கதி ஓர் எண்ணிக்கணியமாகும்.

இடப்பெயர்ச்சி : இயங்குகின்ற ஒரு துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி, அதனுடைய நிலை மாற்றமாகும். இயங்குகின்ற ஒரு துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியை அறிவதற்கு அவ்வியங்கும் துணிக்கையின் இருநிலைகளையும் இணைக்கும் கோட்டின் நீளத்தினையும், திசையையும் அறிதல் வேண்டும். இடப்பெயர்ச்சியானது பருமன், திசை இரண்டையும் கொண்டது. இரு ஒரு காவிக்கணியமாகும்.

வேகம் : இயங்குகின்ற ஒரு துணிக்கையின் வேகம், அதன் இடப்பெயர்ச்சியின் வீதமாகும். ஆகவே, வேகமானது பருமன், திசை இரண்டையும் கொண்டுள்ளது. எனவே ஒரு துணிக்கையானது, ஒரு குறித்த திசையில் இயங்கி, எத்துணைச் சிறிய நேரமாயினும் சமநேரங்களில், சமநீளங்கள் செல்லுமாயின், அது சீரான வேகத்துடன் இயங்குகின்றதெனப்படும்.

குறிப்பு : நேர்கோடொன்றில் சீரான கதியுடன் இயங்கும் துணிக்கை சீரான வேகத்தைக் கொண்டுள்ளது. கதி சீரானதாகவும் அதன் பாதை ஒரு வட்டமாகவோ அல்லது வளையியாகவோ இருப்பின் வேகம் சீரானதல்ல.

ஆர்முடுகல் : இயங்கும் துணிக்கை ஒன்றின் ஆர்முடுகல், அதன் வேகமாற்ற வீதமாகும். எனவே ஆர்முடுகல் பருமன், திசை இரண்டையும் கொண்டுள்ளது.

எத்துணைச் சிறிய நேரமாயினும் சமநேரங்களில், சமவேகமாற்றம் நிகழ்ந்தால் ஆர்முடுகல் சீரானதாகும்.
ஒரு துணிக்கையானது வேகம் u உடன் புறப்பட்டுத் தன் இயக்கத்திசையில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் இயங்குகிறது என்க. t நேரமுடிவில் அதன் வேகம் v ஆகவும், அது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து சென்ற இடப்பெயர்ச்சி s ஆகவுமிருந்தால்

(i) $v = u + at$ **(ii)** $s = ut + \frac{1}{2} at^2$ **(iii)** $v^2 = u^2 + 2as$

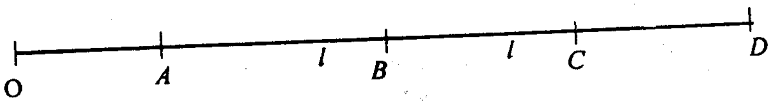
என்ற மூன்று தொடர்புகளையும் பெறலாம்.

புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்து இயக்கத்தின்போது, கீழ்நோக்கிய இயக்கத்தில் a இற்குப் பதிலாக g ஐயும், மேல்நோக்கிய இயக்கத்தின்போது $-g$ ஐயும் பயன்படுத்துவோம். இங்கு g புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் ஆகும்.

உதாரணம் 1

நேர்கோடு OD வழியே இயங்கும் துணிக்கை ஒன்று நேரம் $t=0$ இல் O விலிருந்து புறப்பட்டு சீரான அமர்முடுகலுடன் சென்று D இல் கணநிலை ஓய்விற்கு வருகிறது. அது தன் பயணத்தின் போது, தன் பாதை OD யிலுள்ள புள்ளிகள் A,B,C என்பவற்றை முறையே $t=T, 2T, 4T$ எனும் நேரங்களில் கடக்கிறது. இங்கு $AB=BC=l$ ஆகும்.

(a) நீளம் CD **(b)** நீளம் OA என்பவற்றை l இல் காண்க.



$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

O இல் ஆரம்பவேகம் u, அமர்முடுகல் f என்க.

$$\longrightarrow OA = uT - \frac{1}{2} f T^2 \text{ ------------ (1)}$$

$$OB = u \cdot 2T - \frac{1}{2} f (2T)^2 \text{ ------ (2)}$$

$$OC = u \cdot 3T - \frac{1}{2} f (4T)^2 \text{ ------ (3)}$$

$$(2)-(1),\ uT - \frac{3}{2} f T^2 = l \text{ ------------ (4)}$$

$$(3)-(2),\ 2uT - \frac{12}{2} f T^2 = l \text{ ------------ (5)}$$

(4), (5) இலிருந்து $u = \dfrac{3l}{2T}$, $f = \dfrac{l}{3T^2}$ ஆகும்.

(1) இல் $u = \dfrac{3l}{2T}$, $f = \dfrac{l}{3T^2}$ எனப்பிரதியிட

$$OA = \frac{3l}{2T} \cdot T - \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3T^2} \cdot T^2$$

$$= \frac{3l}{2} - \frac{l}{6} = \frac{4l}{3}$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$\longrightarrow 0 = u^2 - 2f \cdot OD$$

$$OD = \frac{u^2}{2f} = \frac{9l^2}{4T^2} \times \frac{3T^2}{2l} = \frac{27l}{8}$$

$$CD = OD - \left(l + l + \frac{4l}{3}\right)$$

$$= \frac{27l}{8} - \frac{10l}{3} = \frac{l}{24}$$

உதாரணம் 2

(i) பந்து ஒன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $21\ ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது. எறியல் புள்ளிக்குக் கீழ் 280m ஆழத்திலுள்ள புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரம் என்ன?

(ii) ஓய்விலிருந்து விழும் பொருள் ஒன்று தன் இயக்கத்தின் இறுதி செக்கனில் சென்ற தூரம், முந்திய செக்கனில் அது சென்ற தூரத்திற்கு $3:2$ எனும் விகிதத்தில் உள்ளது. அப்பொருள் விழவிடப்பட்ட உயரத்தையும், தரையை அடையும் போது அதற்குள்ள வேகத்தையும் காண்க?

(i) $\uparrow s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

$$-280 = 21t - \frac{1}{2} t \times 9 \cdot 8t^2$$

$$-40 = 3t - 0 \cdot 7t^2$$

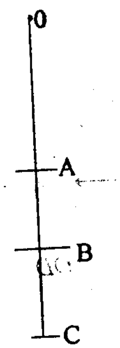
$$7t^2 - 30t - 400 = 0$$

$$(7t + 40)\ (t - 10) = 0$$

$t = -\dfrac{40}{7}$ அல்லது 10.

$t > O$. எனவே நேரம் 10 செக்கன்கள் ஆகும்.

(ii) O விலிருந்து A, B, C என்னும் புள்ளிகளை அடைய எடுத்த நேரங்கள் முறையே $(t-2)$, $(t-1)$, t செக்கன்கள் என்க.



$$\downarrow \quad s = ut + \frac{1}{2} + at^2$$

$$OC = \frac{1}{2} g t^2$$

$$OB = \frac{1}{2} g (t-1)^2$$

$$OA = \frac{1}{2} g (t-2)^2$$

(இறுதி செக்கனில்) t ஆவது செக்கனில் சென்ற தூரம் BC ஆகும்.

$$BC = OC - OB = \frac{1}{2} g (2t-1)$$

$(t - 1)$ ஆவது செக்கனில் சென்ற தூரம் AB ஆகும்.

$$AB = OB - OA = \frac{1}{2} g (2t-3)$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2} \; ; \; \frac{2t-1}{2t-3} = \frac{3}{2}$$

$$t = \frac{7}{2} \text{ செக்கன்கள்}$$

விழ்விடப்பட்ட உயரம் $= \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \times \frac{49}{4} = \frac{49g}{8}$

நிலத்தை அடிக்கும் போது அதற்குள்ள வேகம் $\downarrow v = u + gt$

$$= g \times \frac{7}{2} = \frac{7g}{2}$$

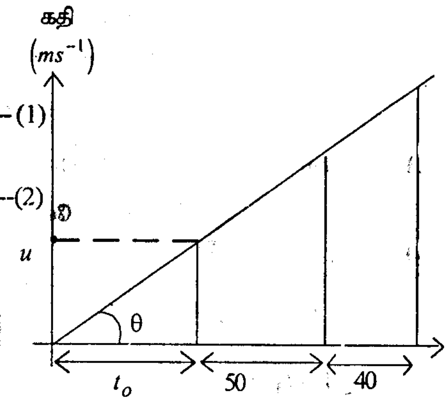
உதாரணம் 3

ஓய்விலிருந்து தொடங்கிச் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் புகையிரதம் ஒன்று இரு அடுத்து வரும் 900 மீற்றர் தூரங்களை முறையே 50 செக்கனிலும், 40 செக்கனிலும் செல்வதாக அவதானிக்கப்படுகிறது. கதி- நேர வரைபுகளை வரைந்து உரிய மாறா ஆர்முடுகல் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் புகையிரதத்தின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

(i) மேற்குறித்த இரு தூரங்களில் முதலாவதனுள் புகுவதற்கு 155 செக்கனுக்கு முன்பாகப் புகையிரதம் ஓய்விலிருந்து செல்லத் தொடங்கியது எனவும்

(ii) இரண்டாம் தூர அளவின் இறுதியில் புகையிரதம் தொடக்க ஓய்வுத் தானத்திலிருந்து அண்ணளவாக 3km தூரம் சென்றுள்ளது எனவும் காட்டுக.

$$S = ut + \frac{1}{2} at^2$$



$$900 = 50u + \frac{1}{2} a \times 50 \times 50 \text{ ---- } (1)$$

$$1800 = 90u + \frac{1}{2} a \times 90 \times 90 \text{ ---- } (2)$$

$$(1) \Rightarrow u + 25a = 18$$

$$(2) \Rightarrow u + 45a = 20$$

$$a = \frac{1}{10} ms^{-2}$$

$$u = 18 - \frac{5}{2} = \frac{31}{2} ms^{-1}$$

$\tan\theta = a = \frac{u}{t_o}$, $t_o = \frac{u}{a} = \frac{31}{2} \times 10 = 155$ செக்கன்கள்

சென்ற மொத்தத் தூரம் $= \left(\frac{1}{2} \times 155 \times \frac{31}{2} + 1800\right)$ மீற்றர்

$$= (1201 \cdot 25 + 1800)m$$

$$= 3001 \cdot 25m$$

$$\simeq 3km.$$

உதாரணம் 4

(a) புகையிரதம் ஒன்று மொத்தத்தூரம் s ஐச் செல்லும் போது தூரம் ps இற்கு ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகலிலும், அடுத்ததாகச் சீரான கதி V உடனும் இறுதியிலே தூரம் qs இற்கு ஓய்வு வரைக்கும் சீரான அமர்முடுகலுடனும் செல்கின்றது. இங்கு $p > 0$, $q > 0$, $p + q < 1$ ஆகும். இயக்கத்திற்கு வேக – நேர வரையை வரைந்து, முழுப்பயணத்திற்கும் சரர்சரிக்கதி

$$\frac{V}{1 + p + q}$$ எனக் காட்டுக.

(b) புகையிரதம் ஒன்று ஓய்விலிருந்து ஓய்விற்குச் செல்வதற்கு மொத்த நேரம் T ஐ எடுக்கிறது. அது நேரம் PT யிற்கு ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகலில் செல்லும் அதேவேளை, பயணத்தின் இறுதியில் நேரம் qT இற்குச் சீரான அமர்முடுகலுடன் சென்று ஓய்விற்கு வருகிறது. இங்கு $p + q < 1$ ஆகும். இடை நேரத்தில் புகையிரதம் சீரான கதி V உடன் செல்கிறது. புகையிரதத்தின் இயக்கத்திற்கு வேக – நேர வரைபை வரைந்து முழுப்பயணத்திற்குமான சராசரிக்கதி $\frac{V}{2}(2 - p - q)$ எனக் காட்டுக.

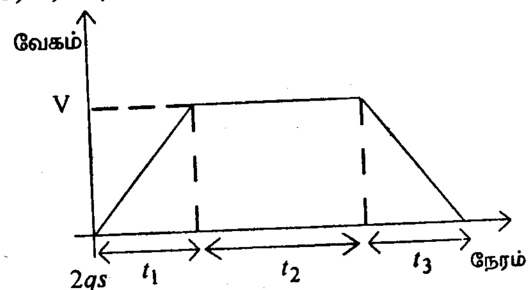
(c) மேலே (a) இலா (b) இலா சராசரிக்கதி மிகப் பெரியது?

(a)

$$\frac{1}{2} V \cdot t_1 = ps$$

$$V \cdot t_2 = (1 - p - q)\, s$$

$$\frac{1}{2} V \cdot t_3 = qs$$



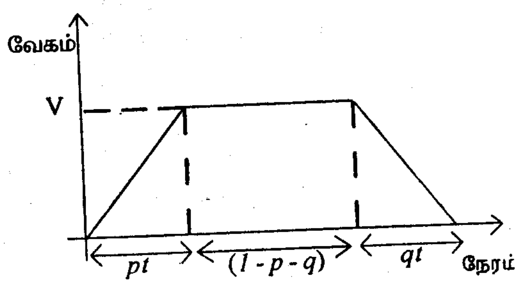
$$t_1 = \frac{2ps}{V},\ t_2 = \frac{(1 - p - q)\, s}{V},\ t_3 = \frac{2qs}{V}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2ps + 2qs + (1 - p - q)\, s}{V}$$

$$= \frac{(1 + p + q)\, s}{V}$$

சராசரிக்கதி V_1 என்க. $V_1 = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{V}{1 + p + q}$

(b) புகையிரதம் சென்ற மொத்தத் தூரம் l எனின்



$$l = \frac{1}{2}\left[T + (1 - p - q)\, T\right] V$$

$$l = \frac{VT}{2}\left[2 - p - q\right]$$

சராசரிக்கதி V_2 என்க. $V_2 = \frac{l}{T} = \frac{V}{2}(2 - p - q)$

(c)

$$V_2 - V_1 = \frac{V}{2}(2 - p - q) - \frac{V}{(1 + p + q)}$$

$$= \frac{V}{2(1 + p + q)}\left[(2 - p - q)(1 + p + q) - 2\right]$$

$$= \frac{V}{2(1 + p + q)}\left[\{2 - (p + q)\}\{1 + (p + q) - 2\}\right]$$

$$= \frac{V}{2(1 + p + q)}\left[\{(p + q)\} - (p + q)^2\right]$$

$$= \frac{V}{2(1 + p + q)}(p + q)\left[1 - (p + q)\right] > 0$$

எனவே $V_2 > V_1$

உதாரணம் 5

துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $u\,ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது. செக்கன்களின் பின்னர் இன்னொரு துணிக்கை அதே எறியல் புள்ளியிலிருந்து அதே தொடக்க வேகத்தடன் எறியப்படுகிறது. இரண்டு துணிக்கைகளின் இயக்கத்திற்குமான வேக – நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து,

(i) இரு துணிக்கைகளும் $\left(\frac{t}{2} + \frac{u}{g}\right)$ செக்கன்களின் பின் சந்திக்கும் எனவும்

(ii) சந்திக்கும் போது அவற்றின் கதி $\frac{1}{2} gt$ எனவும்

(iii) எறியற் புள்ளியிலிருந்து $\frac{4u^2 - g^2 t^2}{8g}\, m$ உயரத்தில் சந்திக்கும் எனவும்

நிறுவுக.

இரு துணிக்கைகளும் சந்திக்கும் போது **இடப்பெயர்ச்சி** சமமாகும். நேரம் OL இல் சந்திக்கும் என்க. முதலாம் துணிக்கையின்

இடப்பெயர்ச்சி $= \Delta\ AB - \Delta\ BLC$

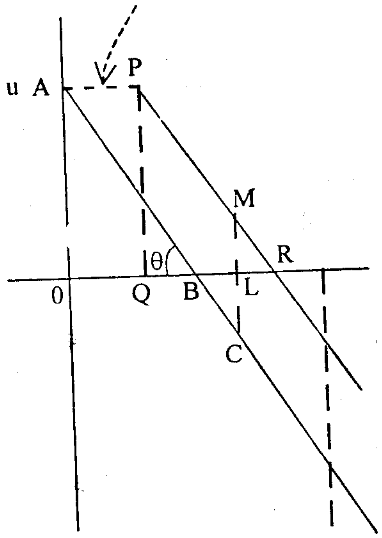
இரண்டாம் துணிக்கையின்

இடப்பெயர்ச்சி $\Delta\ OPQR - \Delta\ MLR$

$\Delta\ OAB - \Delta\ BLC = \Delta\ PQR - \Delta\ MLR$

$\tan\theta = g$ என்பதால் $OB = \dfrac{u}{g}$, $QR = \dfrac{u}{g}$

மேலும் $t = OQ = AP = BR$ ஆகும்.



$\Delta\ OAB = \Delta\ PQR$ என்பதால்

$\Delta\ BLC = \Delta\ MLR$

$\Delta\ BLC = \Delta\ MLR \Rightarrow BL \cdot LC = ML \cdot LR \Rightarrow \dfrac{BL}{RL} = \dfrac{LM}{LC}$ ----------- (1)

$\Delta\ BLC\ |||\ \Delta\ RLM \Rightarrow \dfrac{BL}{RL} = \dfrac{LC}{LM}$ ----------- (2)

(1), (2) இலிருந்து $LM = LC$, $BL = RL$

சந்திக்கும் நேரம் $= OL = OB + BL$

$$= OB + \frac{1}{2} BR$$

$$= \frac{u}{g} + \frac{t}{2} \text{ ----------- } (*)$$

$LC = LM$, $\tan\theta = \dfrac{LM}{LR}$

$\therefore$ ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் கதி $= \dfrac{1}{2} gt$ ----------- (*)

உயரம் $= \Delta\ OAB - \Delta\ BLC$

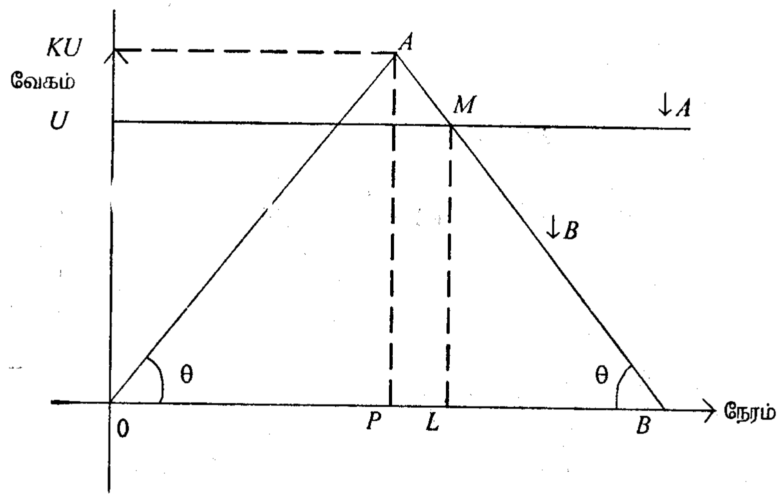
$$= \frac{1}{2} u \cdot \frac{u}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{gt}{2}$$

$$= \frac{u^2}{2g} - \frac{gt^2}{8} = \frac{4u^2 - g^2 t^2}{8g} \text{ ----------- } (*)$$

உதாரணம் 6

ஒரு புகைவண்டி B ஓய்வு நிலையிலிருந்து சீரான ஆர்முடுகல் f உடன் ஒரு நிலையத்தில் இருந்து புறப்படும் அதே நேரத்தில், இன்னொரு புகைவண்டி A ஒரு சீரான கதி U உடன் அதேநிலையத்தினூடாகச் செல்கிறது. அவ்விரு புகைவண்டிகளும் சமாந்தரமான பாதைகளிலே ஒரே திசையில் செல்கின்றன. புகைவண்டி B, தன்கதி $KU\ (K > 1)$ ஆகுமட்டும் ஆர்முடுகலுடன் சென்று, பின்னர் சீரான அமர்முடுகல் f இனால் தடுப்புக்களைப் பிரயோகித்து அடுத்த நிலையத்தில் ஓய்விற்கு வருகிறது. அவ்விரு புகைவண்டிகளுக்குமான வேக – நேர வரைபுகளை ஒரேவரிப்படத்தில் வரைக.

$K < \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ எனில், B இற்கு A ஐக் கடக்க இயலாது என்பதைக் காட்டுவதற்கு இவ்வரிப்படத்தை பயன்படுத்துக.



நேரம் OL இல்,
B சென்ற தூரம் $<$ A சென்ற தூரம் எனின்,
B இற்கு A ஐக் கடக்க இயலாது.

$$\tan\theta = f = \frac{KU}{OP}, \quad OP = \frac{KU}{f}$$

$$\tan\theta = f = \frac{(K-1)U}{PL}, \quad PL = \frac{(K-1)U}{f}$$

$$OL = OP + PL = \frac{KU + (K-1)U}{f} = \frac{(2K-1)U}{f}$$

நேரம் OL இல்,

$$A \text{ சென்ற தூரம் } = U \cdot \frac{(2K-1)\,U}{f} = \frac{(2k-1)\,U^2}{f}$$

$$B \text{ சென்ற தூரம் } = \frac{1}{2}\,KU \cdot \frac{KU}{f} + \frac{1}{2}\,(KU+U)\,(K-1)\frac{U}{f}$$

$$= \frac{U^2}{2f}\left(2k^2 - 1\right)$$

$$\frac{U^2}{2f}\left(2k^2-1\right) < (2k-1)\,\frac{U^2}{f}$$

$$\frac{1}{2}\left(2k^2-1\right) < 2K-1$$

$$K^2 - 2k < -\frac{1}{2}$$

$$K^2 - 2k + 1 < \frac{1}{2}$$

$$(K-1)^2 < \frac{1}{2}$$

$$K - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [\ (K-1) > 0 \text{ என்பதால் }\ ]$$

$$K < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

உதாரணம் 7

ஒரு துணிக்கையானது $t = 0$ இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O விலே ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு நேர்ப்பாதை வழியே இயங்குகிறது. அத்துணிக்கையானது நேரம் t_1 இற்கு சீரான ஆர்முடுகல் f_1 உடன் இயங்குகிறது. அது அடுத்த நேரம் t_2 இற்கு சீரான அமர்முடுகல் f_2 உடனும், அதன்பின் ஒரு சீரான ஆர்முடுகல் f_1 உடனும் இயங்குகிறது. $(f_1, f_2 > 0)$

(a) $f_2\,t_2 < f_1\,t_1$ **(b)** $f_2\,t_2 = f_1\,t_1$ **(c)** $f_2\,t_2 > f_1\,t_1$

என்ற வகைகளுக்கு வேறுபடுத்திக் கொண்டு அத்துணிக்கையின் இயக்கத்திற்கு வேக – நேர வரைபுகளை வரைக.

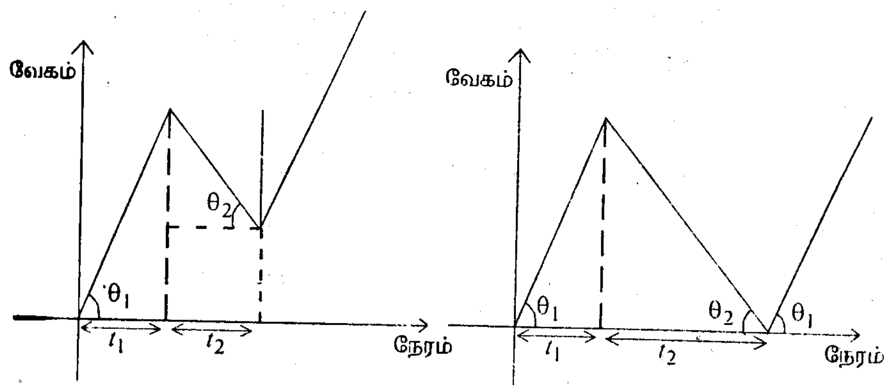
வேக – நேர வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) $f_2\,t_2 \le f_1\,t_1$ எனின், அத்துணிக்கையானது தன் இயக்கத் திசையை ஒருபோதும் மாற்றாது.

(ii) $f_2\,t_2 < 2f_1t_1$ எனின், அத்துணிக்கையானது O வினூடாக ஒருபோதும் செல்லாது.

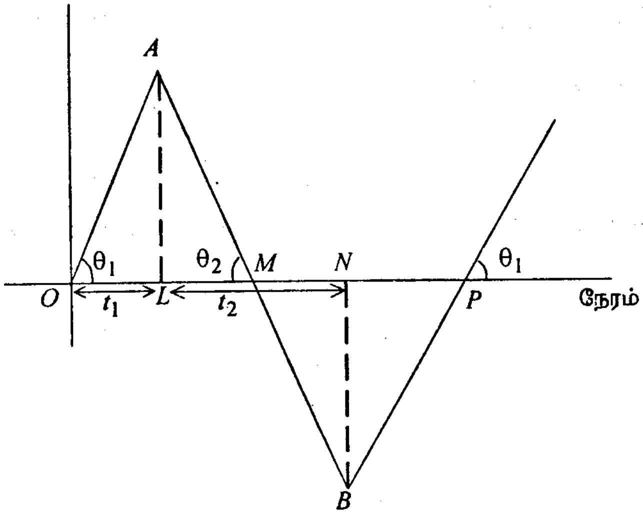
(iii) $f_2\,t_2 = 2f_1t_1$ எனின், அத்துணிக்கையானது நேரம் $(2t_1 + t_2)$ இலே கணநேரம் O விற்குத் திரும்புகிறது.

(iv) $f_2t_2 > 2f_1t_1$ எனின், அத்துணிக்கையானது பின்னர் வரும் இயக்கத்திலே O வினூடாக இருமுறை செல்கிறது.



$\tan\theta_1 = f_1, \quad \tan\theta_2 = f_2$

$\underline{f_2t_2 < f_1\,t_1}$



$f_2\, t_2 > f_1\, t_1$

(i) $(t_1 + t_2)$ நேர முடிவில் துணிக்கையின் வேகம் $(f_1 t_1 - f_2\, t_2)$ ஆகும்

$f_2 t_2 \le f_1 t_1$ எனின், $\quad f_1 t_1 - f_2 t_2 \ \ge\ 0$

எனவே துணிக்கையின் இயக்கத்திசை மாறாது.

(ii) படம் (III) இல் $f_2\, t_2 > f_1\, t_1$. எனவே நேரம் OM, இன் பின் துணிக்கையின் இயக்கத்திசை மாறும். அதாவது O வை நோக்கி இயங்கும்.

இங்கு $\quad OL = t_1,\ LM = \dfrac{f_1 t_1}{f_2},\ MN = t_2 - \dfrac{f_1 t_1}{f_2} = \dfrac{f_2 t_2 - f_1 t_1}{f_2}$

$$NP = \frac{f_2 t_2 - f_1\, t_1}{f_1}$$

$$\Delta\, OAM \text{ இன் பரப்பு } = \frac{1}{2}\left[t_1 + \frac{f_1\, t_1}{f_2}\right] \cdot f_1\, t_1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{f_2 + f_1}{f_2}\right) f_1\, t_1^2$$

$$\Delta\, MBP \text{ இன் பரப்பு } = \frac{1}{2}\left[\frac{f_2 t_2 - f_1\, t_1}{f_2} + \frac{f_2\, t_2 - f_1 t_1}{f_1}\right](f_2\, t_2 - f_1\, t_1)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{(f_1 + f_2)}{f_1\, f_2}\,(f_2\, t_2 - f_1\, t_1)^2$$

O விலிருந்து துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி

$$= \Delta OAM - \Delta\, MBP$$

$$= \frac{f_2 + f_1}{2 f_1 f_2}\left[f_1^2\, t_1^2 - (f_2\, t_2 - f_1\, t_1)^2\right]$$

$$= \frac{f_2 + f_1}{2 f_1\, f_2}\left[f_2\, t_2\, (2 f_1\, t_1 - f_2\, t_2)\right]$$

$$= \frac{(f_2 + f_1)\,(2 f_1\, t_1 - f_2\, t_2)\, t_2}{2 f_1}$$

(ii) $f_2\, t_2 < 2 f_1\, t_1$ எனின், $\Delta OAM - AMBP > O$

O இலிருந்து இடப்பெயர்ச்சி நேர் என்பதால் துணிக்கை O விற்குத் திரும்பாது.

(iii) $f_2\, t_2 = 2\, f_1\, t_1$ எனில், O விலிருந்து இடப்பெயர்ச்சி $= 0$.

எனவே் துணிக்கை O விற்கு வந்து பின்னா் ஆா்முடுகலுடனும் ஆரம்ப இயக்கத்திசையில் செல்லும்.

இதற்கான நேரம் $= t_1 + t_2 + \dfrac{f_2\, t_2 - f_1\, t_1}{f_1}$

$$= t_1 + t_2 + \frac{2 f_1\, t_1 - f_1\, t_1}{f_1} = t_1 + t_2 + t_1 = (2 t_1 + t_2)$$

(iv) $f_2\, t_2 > 2 f_1\, t_1$ எனில், O விலிருந்து இடப்பெயர்ச்சி < 0

எனவே துணிக்கை O வைக் கடந்து கணநிலை ஓய்விற்கு வந்த பின்னர் மீண்டும் ஆர்முடுகலுடன் O வினூடு செல்லும்.

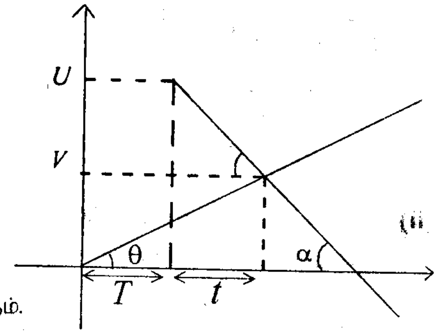
உதாரணம் 8

வாயுக் கூண்டொன்று $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் நிலத்திலிருந்து மென்மையாக விடப்படுகின்றது. அது f என்னும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி எழுகின்றது. $t = T$ நேரத்தில் நிலத்திலுள்ள அதே புள்ளியிலிருந்து கல் ஒன்று வேகம் U உடன் நிலைக்குத்துத் திசையில் எறியப்படுகிறது. வாயுக்கூண்டிற்கும், கல்லிற்கும் வேக – நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

கல், வாயுக் கூண்டை மட்டுமட்டாகத் தொடுகிறதெனின்,

$$U = T\left[f + \sqrt{f^2 + fg}\right]$$ என நிறுவுக.

கல், அதன் உச்ச உயரத்தை அடையும் போது நிலத்திலிருந்து வாயுக்கூண்டின் தூரத்தைக் காண்க.



$\tan\theta = f, \quad \tan\alpha = g$

வாயுக் கூண்டின் வேகம் ஓய்விலிருந்து அதிகரித்துச் செல்கிறது.
கல்லின் வேகம் U இலிருந்து குறைந்து செல்கின்றது.
கல் வாயுக் கூண்டினை மட்டுமட்டாகத் தொடுமெனின் அப்பொழுது இரண்டினதும் வேகம் சமமாகும்.

$$\tan\theta = f = \frac{V}{T+t}, \quad \tan\alpha = g = \frac{U-V}{t}$$

$$V - ft = fT \quad \text{------------------} (1)$$

$$V + gt = U \quad \text{------------------} (2)$$

(1), (2) இலிருந்து,

$$(2) - (1) \quad t = \frac{U - fT}{f+g}$$

$$V = f(T+t) = f\left[T + \frac{U - fT}{f+g}\right]$$

$$= f\left[\frac{U + gT}{f+g}\right]$$

இரண்டும் தொடும் போது இரண்டும் சென்ற தூரங்கள் சமம்.
வரைபிலிருந்து,

$$\frac{1}{2}V(T+t) = \frac{1}{2}(V+U)t$$

$$VT = UT$$

$$fT\left[\frac{U+gT}{f+g}\right] = U\left[\frac{U-fT}{f+g}\right]$$

$$U^2 - 2fT\cdot U - fgT^2 = 0$$

$$U = \frac{2fT \pm \sqrt{4f^2T^2 - 4fgT^2}}{2}$$

$$U = fT \pm T\sqrt{f^2 + fg}$$

$$U > 0$$

ஆகவே $\quad U = fT + T\sqrt{f^2 + fg}$

$$= T\left[f + \sqrt{f^2 + fg}\right]$$ ஆகும்.

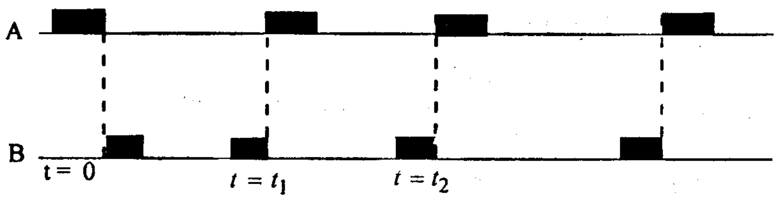
உதாரணம் 9

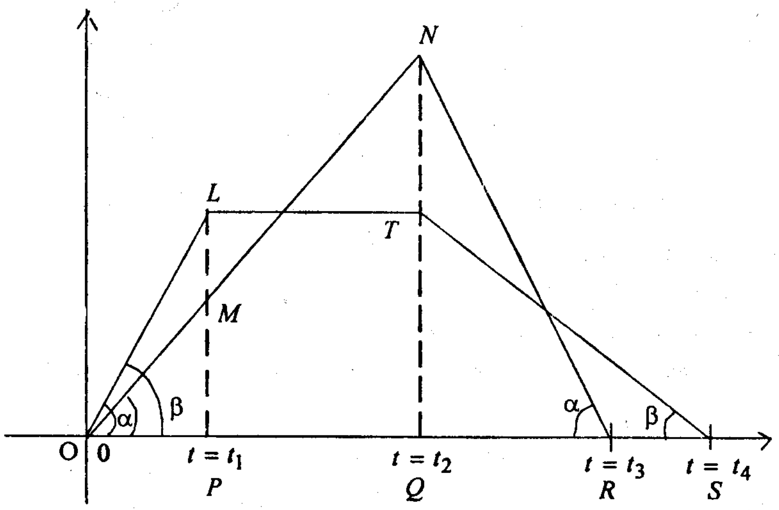
முறையே a, b என்னும் நீளங்களையுடைய A, B எனும் இரு புகைவண்டிகள் நேரான சமாந்தரப் புகைவண்டிப் பாதைகள் வழியே ஓடுகின்றன. தொடக்கத்திலே (நேரம் $t = 0$) A யின் முற்பக்கம், B யின் பிற்பக்கத்திற்கு மட்டுமட்டாகப் பின்னதாக இருக்க அவை சீரான வீதம் f இல் A யும், சீரான வீதம் f^1 இல் $(<f)$ B யுமாக ஓய்விலிருந்து ஒருங்கே ஆர்முடுகத் தொடங்குகின்றன. $t = t_1$ எனும் கணத்திலே A யின் பிற்பக்கமானது B யின் முற்பக்கத்தை மட்டுமட்டாகக் கடக்கும் போது A ஆனது அதுஅடைந்த மாறா வேகத்துடன் இயங்கத் தொடங்குகிறது. $t = t_2$ என்னும் கணத்திலே B யின் முற்பக்கமானது மறுபடியும் A யின் பிற்பக்கத்தை முந்திச்செல்ல முயலும் போது இரு புகைவண்டிகளும், சீரான வீதம் f^1 இல் A யும், சீரான வீதம் f இல் B யும் என்றவாறு அமர்முடுகத் தொடங்குகின்றன. B, A ஆகிய இரு புகைவண்டிகளும் முறையே $t = t_3$, $t = t_4\ (> t_3)$ என்னும் கணங்களிலே ஓய்விற்கு வருகின்றன.
இரு புகைவண்டிகளின் இயக்கங்களுக்குமான வேக – நேர வளையிகளை ஒரேவரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு முறையில்

(i) $t_1^{\,2} = \dfrac{2(a+b)}{f - f^1}$ (ii) $t_2 = \left(\dfrac{2f}{f_1} - 1\right) t_1$

(iii) $t_4 - t_3 = \dfrac{\left(f - f^1\right)^2}{f f^1}\, t_1$ எனக் காட்டுக.

மேலும் பயணத்தின் இறுதியில் A யின் B தொடர்பான அமைவானது $t = t_1$ எனும் கணத்திலே உள்ள அமைவை ஒத்ததெனின் $\dfrac{f}{f_1} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ எனவும் காட்டுக.





$\tan\alpha = f \;,\; \tan\beta = f^1$

(i) நேரம் t_1 இல், புகையிரதம் A சென்ற தூரம் $- B$ சென்ற தூரம் $= a + b$

$\Delta\, OPL - \Delta\, OPM = a + b$

$$\frac{1}{2} t_1 \cdot f t_1 - \frac{1}{2} t_1 \cdot f^1 t_1 = a + b$$

$$\frac{1}{2} t_1^{\,2} \left(f - f^1\right) = a + b$$

$$t_1^{\,2} = \frac{2(a+b)}{f - f^1}$$

(ii) $(t_2 - t_1)$ நேர இடைவெளியில் A, B சென்ற தூரங்கள் சமமாகும்.

$$f t_1 (t_2 - t_1) = \frac{1}{2}\left(f^1 t_1 + f^1 t_2\right)(t_2 - t_1)$$

$$2 f t_1 = f^1 t_1 + f^1 t_2$$

$$t_2 = \frac{\left(2f - f^1\right) t_1}{f^1}$$

$$t_2 = \left(\frac{2f}{f_1} - 1\right) t_1$$

(iii) $\tan\alpha = f = \dfrac{f^1 t_2}{t_3 - t_2} \Rightarrow t_3 - t_2 = \dfrac{f^1 t_2}{f}$ ---------------------- (1)

$\tan\beta = f^1 = \dfrac{f t_1}{t_4 - t_2} \Rightarrow t_4 - t_2 = \dfrac{f t_1}{f^1}$ ---------------------- (2)

(2) − (1), $t_4 - t_3 = \dfrac{f t_1}{f^1} - \dfrac{f^1 t_2}{f}$

$$= \frac{f t_1}{f^1} - \frac{f^1}{f}\left(\frac{2f - f^1}{f^1}\right) t_1$$

$$= \frac{\left(f - f^1\right)^2}{f f^1} \cdot t_1$$

(iv) $(t_3 - t_2)$ நேர இடையில் B சென்ற தூரம் $= (t_4 - t_2)$ நேர இடையில் A சென்ற தூரம்

$$\Delta RQN = \Delta SQT$$

$$\frac{1}{2}(t_3 - t_2)\, f^1 t_2 = \frac{1}{2}(t_4 - t_2)\, f t_1$$

$$\frac{f^1 t_2}{f}\, f^1 t_2 = \frac{f t_1}{f^1} \cdot f t_1$$

$$\frac{f^{1^2}\, t_2^{\,2}}{f} = \frac{f^2 . t_1^{\,2}}{f^1}$$

$$\frac{f^{1^2}\left(\frac{2f - f^1}{f^1}\right)^2 t_1^{\,2}}{f} = \frac{f^2\, t_1^{\,2}}{f^1}$$

$$(2f - f^1)^2 \cdot f^1 = f^3$$

$$f^3 - 4f^2 f^1 + 4 f f^{1^2} - f^{1^3} = 0$$

$$(f - f^1)\left[f^2 - 3ff^1 + f^{1^2}\right] = 0$$

$f \neq f^1$; ஆகவே $f^3 - 3ff^1 + f^{1^2} = 0$

$$f = \frac{3f^1 \pm \sqrt{9f^{1^2} - 4f^{1^2}}}{2}$$

$$f = \frac{3f^1 \pm \sqrt{5f^{1^2}}}{2}$$

$$f = f^1\left[\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$$

$f > f'$ ஆதலால்

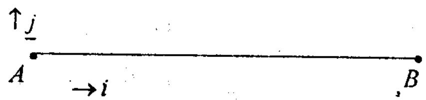
$$f = f^1\left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$$

$$\frac{f}{f^1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

உதாரணம் 10

A, B என்பன இரு நிலையங்களாகும். $\underline{i}$ என்பது A யிலிருந்து Bக்கு திசைகொண்ட ஓர் அலகுக் காவி ஆகும். $\underline{j}$ என்பது AB க்குச் செங்குத்தான ஓர் அலகுக் காவியும் ஆகும். நேரம் $t = 0$ இல் R_1 என்னும் ஒரு வாணம் A யிலிருந்து மெதுவாகப் புறப்பட்டு $f(\underline{i} + \underline{j})$ எனும் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்கிறது. நேரம் t_o செக்கன்களுக்குப் பின்னர் R_2 என்னும் வாணம் B யிலிருந்து புறப்பட்டு $2f(-\underline{i} + \underline{j})$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் R_1 ஐச் சந்திக்குமுகமாகவே செல்கிறது. $(t_o + t_c)$ செக்கன்களில் வாணங்கள் ஒன்றையொன்று மோதுகின்றன. ஒரே வரைபடத்தில் R_1, R_2 இன் பாதையையும், ஒரே வரிப்படத்தில் கதி – நேர வளையிகளையும் வரைக.

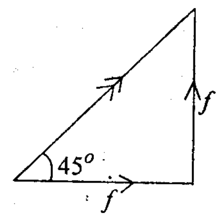
$t_c = t_o\left(1 + \sqrt{2}\right)$ எனக் காட்டுக.



A யின் ஆர்முடுகல் $f\underline{i} + f\underline{j}$

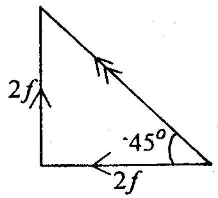
ஆர்முடுகலின் பருமன் $\sqrt{f^2 + f^2}$

$$= f\sqrt{2}$$



A யின் தொடக்க வேகம் பூச்சியம். எனவே A யின் இயக்கத்திசை ஆர்முடுகலின் திசையிலேயே இருக்கும்.

B யின் ஆர்முடுகல் $2f\left(-\underline{i}+\underline{j}\right)$

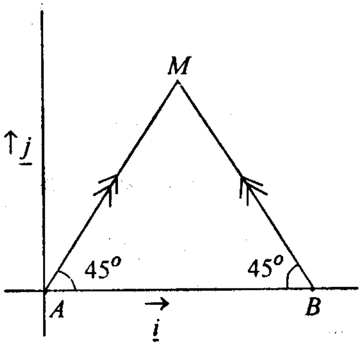


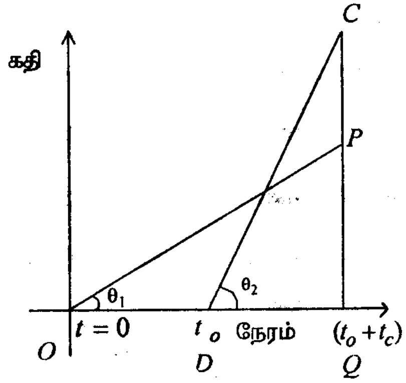
ஆர்முடுகலின் பருமன் $= \sqrt{(2f)^2 + (2f)^2}$

$= 2\sqrt{2}\, f$

B யின் தொடக்க வேகம் பூச்சியம் ஆதலால், B யின் இயக்கத்திசை ஆர்முடுகல் வழியே இருக்கும்.

R_1 , R_2 இன் பாதை





R_1 இன் இயக்கப்பாதை AM வழியே

R_2 இன் இயக்கப்பாதை BM வழியே

மோதுகை நிகழும் புள்ளி M

R_1 சென்ற தூரம் $= AM$

R_2 சென்ற தூரம் $= BM$

$AM = BM$

$\tan\theta_1 = \sqrt{2}\, f$

$\tan\theta_2 = 2\sqrt{2}\, f$

$AM = BM$ என்பதால்

$\Delta\, OPQ = \Delta\, CDQ$

$\Delta\, OPQ = \Delta\, CDQ$

$$\frac{1}{2}(t_o + t_c)\sqrt{2} f\,(t_o + t_c) = \frac{1}{2}\, t_c \cdot 2\sqrt{2} f \cdot t_c$$

$$(t_o + t_c)^2 = 2 \cdot t_c^2$$

$$t_o + t_c = \sqrt{2}\, t_c \left[t_c > 0\,, (t_o + t_c) > 0\right]$$

$$\left(\sqrt{2} - 1\right) t_c = t_o$$

$$t_c = \frac{t_o}{\sqrt{2} - 1} = \left(\sqrt{2} + 1\right) t_o$$

உதாரணம் 11

துணிக்கை ஒன்று ஒரு புள்ளி A யிலே ஓய்விலிருந்து தொடங்கி நேர்கோடு ஒன்றின் வழியே இயங்குகின்றது. அதன் ஆர்முடுகல் தொடக்கப் பெறுமானம் $2ms^{-2}$ இலிருந்து 20 செக்கனில் பூச்சியத்திற்குச் சீராகக் குறைகிறது. அடுத்து அது மேலும் 20 செக்கனுக்கு மாறா வேகத்துடனும் பின்னர் சீரான அமர்முடுகல் $4ms^{-2}$ உடனும் சென்று ஒரு புள்ளி B யில் ஓய்விற்கு வருகிறது.

A யிலிருந்து B யிற்குத் துணிக்கையின் இயக்கத்துக்கான ஆர்முடுகல் - நேர வரைபைப் பரும்படியாக வரைக. இவ்வரைபைப் பயன்படுத்தி

(i) உயர் வேகம்

(ii) அமர்முடுகல் ஏற்படும் நேர ஆயிடை, என்பவற்றைக் காண்க.

தொடக்கத்திலிருந்து முதல் 20 செக்கனின் போது நேரம் t யிலே துணிக்கையின்

கதி $V = 2t - \dfrac{t^2}{20}$; $t < 20$ எனக்காட்டுக.

முழுப்பயணத்திற்குமான வேக – நேர வரைபை வரைக. இதிலிருந்து துணிக்கை சென்ற மொத்தத் தூரத்தைக் காண்க.

$0 < t < 20$

நேரம் t இல் ஆர்முடுகல் a என்க.

$$\frac{a}{20-t} = \frac{2}{20}$$

$$a = \frac{2}{20}(20-t)$$

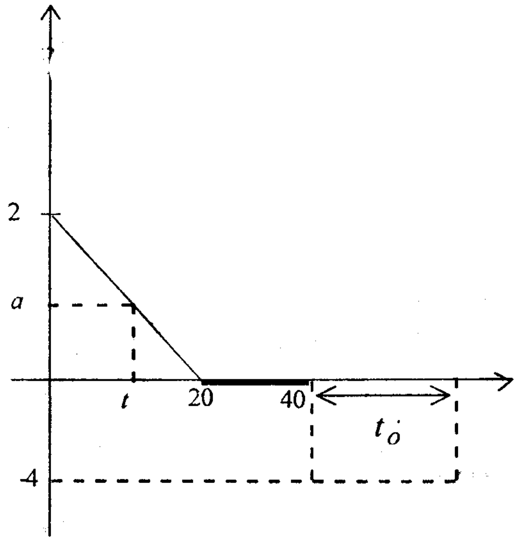
$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{20}\,(20-t)$$

$$\int dv = \int \frac{2}{20}(20-t)\,dt$$

$$v = \frac{2}{20}\left[20t - \frac{t^2}{2}\right] + C$$

$t = 0$ இல் $v = 0 \Rightarrow C = 0$

$$v = 2t - \frac{t^2}{20}$$



உயர் வேகம் $t = 20$ இல், $v = 20ms^{-1}$

அல்லது

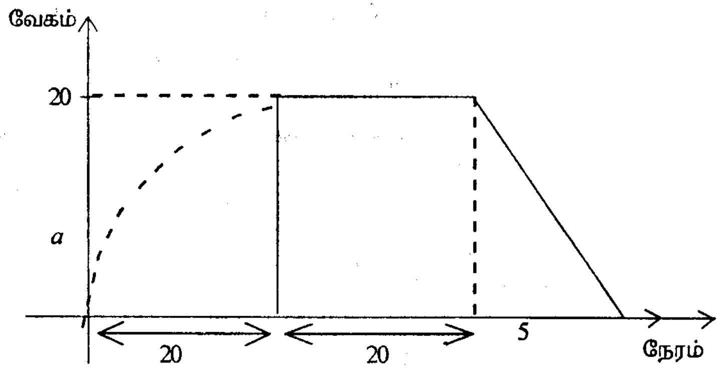
முக்கோணியின் பரப்பு = வேக மாற்றம்

உயர் வேகம் $= \frac{1}{2} \times 20 \times 2 = 20ms$

செவ்வகப் பரப்பு = வேகமாற்றம்

$$t_o \times 4 = 20 - 0$$

$t_o = 5$ செக்கன்கள்



மொத்தத் தூரம் $= \int_0^{20}\left(2t - \frac{t^2}{20}\right)dt + (20 \times 20) + \frac{1}{2} \times 5 \times 20$

$$= \left[t^2 - \frac{t^3}{60}\right]_o^{20} \quad 400 + 50$$

$$= \left[400 - \frac{400}{3}\right] + 400 + 50$$

$$= \frac{2150}{3}\,m$$

பயிற்சி I

1 (a) சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயக்கம் (Motion with uniform acceleration)

1. ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகல் $0 \cdot 6 ms^{-2}$ உடன் புறப்படும் கார் ஒன்று 30 செக்கன் முடிவில் அடைந்த வேகத்தையும், சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

2. ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகலுடன் புறப்படும் புகையிரதம் ஒன்று, 10 செக்கன்களில் $15\ ms^{-1}$ எனும் வேகத்தைப் பெறுகிறது. ஆர்முடுகலைக் கணித்து 10 செக்கன்களில் சென்ற தூரத்தைக் காண்க.

3. $100\ ms^{-1}$ தொடக்க வேகத்துடனும், $4\ ms^{-2}$ அமர்முடுகலுடனும் இயங்கும் துணிக்கை ஓய்வடையுமுன் சென்ற தூரம் யாது?

4. $108\ kmh^{-1}$ உடன் செல்லும் கார் ஒன்று, சீரான அமர்முடுகலினால் 10 செக்கன்களில் ஓய்விற்குக் கொண்டு வரப்படுகிறது. அமர்முடுகலையும் இந் நேரத்தில் சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

5. ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகலுடன் புறப்பட்டுச் செல்லும் கார் ஒன்று, இயங்கத்தொடங்கி 6 ஆவது செக்கனில் $5 \cdot 5 m$ தூரம் செல்கிறது. முதல் 5 செக்கன்களிலும் சென்ற தூரம் யாது?

6. சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்லும் கார் ஒன்று, தன் கதியை $50\ m$ தூரத்தில் $18\ kmh^{-1}$ இலிருந்து $72 kmh^{-1}$ இற்கு அதிகரிக்கிறது. இதன் ஆர்முடுகலையும், $25\ m$ ஐக் கடந்தபொழுது அதன் கதியையும் காண்க.

7. துணிக்கை ஒன்று சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது. 4 செக்கன்களின் பின் வேகம் $8 ms^{-1}$ ஆகவும், 10 செக்கன்களின் பின் வேகம் $56 ms^{-1}$ ஆகவுமிருப்பின் 12 செக்கன்களின் பின் வேகம் என்ன?

8. சீரான அமர்முடுகலுடன் செல்லும் புகைவண்டித் தொடரொன்றின் முற்பக்கம் குறித்த ஒரு புள்ளியை $60 kmh^{-1}$ உடன் கடக்கிறது. 3 செக்கன்களில் பின் அவ் வண்டித் தொடரின் பிற்பக்கம் அதே புள்ளியை $54\ kmh^{-1}$ உடன் கடக்கிறது. வண்டித் தொடரின் நீளம் யாது?

9. சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்று, முதலாவது செக்கனில் 6m தூரத்தையும், அடுத்த செக்கனில் 8m தூரத்தையும் கடக்கிறது. $1 \cdot 5$ செக்கன்களில் பின் துணிக்கையின் வேகம் யாது?

10. $40\ kmh^{-1}$ உடன் இயங்கும் புகையிரதம் ஒன்று, 4 நிமிடங்கள் சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கி ஓய்விற்கு வருகிறது. ஓய்வடையுமுன் புகையிரதம் சென்ற தூரம் என்ன?

11. துணிக்கை ஒன்று நேர்கோடொன்றில் $10 ms^{-1}$ தொடக்கவேகத்துடனும், $4\ ms^{-2}$ எனும் ஆர்முடுகலுடனும் 6 செக்கன்களுக்கு இயங்கிப் பின்னர், $8\ ms^{-2}$ எனும் அமர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது. அது ஓய்வடையுமுன் சென்ற முழுத் தூரத்தையும் காண்க.

12. சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் கார் ஒன்று, அடுத்தடுத்த கிலோமீற்றர் தூரங்களை முறையே 30, 20 செக்கன்களில் கடக்கிறது. காரின் ஆர்முடுகலைக் காண்க. ஒவ்வொரு கிலோமீற்றருக்குமான சராசரிக் கதியைக் காண்க.

13. துணிக்கை ஒன்று சீரான ஆர்முடுகலுடன் 3 செக்கன்களுக்கு இயங்கி 27 மீற்றர் தூரத்தைக் கடக்கிறது. பின்னர் அது சீரானகதியுடன் அடுத்த 5 செக்கன்களுக்கு இயங்கி மேலும் 60m தூரம் செல்கிறது. துணிக்கையின் தொடக்க வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையும் காண்க.

14. சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் புகையிரதம் ஒன்று, அடுத்தடுத்த கிலோமீற்றர் தூரங்களை முறையே $10\ kmh^{-1}$, $20\ kmh^{-1}$ உடன் கடக்கிறது. அடுத்த கிலோமீற்றர் தூரத்தை என்ன கதியுடன் கடக்கும் எனக் காண்க.

15. சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்று, அடுத்தடுத்து வரும் t நேர இடைவெளிகளில் a, b, c ஆகிய தூரங்களைக் கடக்கின்றது.

(i) $2b = a + c$ **(ii)** ஆர்முடுகல் $\dfrac{c-b}{t^2}$

(iii) தொடக்கவேகம் $\dfrac{3a-b}{2t}$ எனக் காட்டுக.

16. நேர்கோடொன்றில் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்று, இரு அடுத்தடுத்த செக்கன்களில் முறையே 10, 15 மீற்றர்களைக் கடக்கிறது. ஆர்முடுகலைக் காண்க.

17. நேர்கோடொன்றில் O எனும் புள்ளியில், ஓய்விலிருந்து ஒரு துணிக்கை $2\,ms^{-2}$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் நேர்கோடொன்றின் வழியே இயங்குகிறது. 3 செக்கன்களின் பின், ஓய்விலுள்ள இன்னொரு துணிக்கை O விலிருந்து அதே திசையில் $4\ ms^{-2}$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது. இரண்டாவது துணிக்கை முதலாவதை எப்போது முந்திச் செல்லும் எனக் காண்க.

18. துணிக்கை ஒன்று $200\ cms^{-1}$ வேகத்துடன் புறப்பட்டு $10\,cms^{-2}$ எனும் சீரான அமர்முடுகலுடன் நேர்கோடொன்றில் இயங்குகிறது. அது 1500 cm தூரம் செல்ல எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும்? இங்கு பெறப்படும் இரு விடைகளுக்குமான காரணத்தை விளக்குக.

19. இரு துணிக்கைகள், ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் புறப்பட்டு அந்நேர் கோட்டின் வழியே இயங்குகின்றன. முதலாவது துணிக்கை ஒரு சீரான வேகம் u உடனும், இரண்டாவது ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகல் f உடனும் இயங்குகின்றன. இரண்டாவது துணிக்கை முதலாவதைக் கடக்குமுன் அத் துணிகைகளுக்கிடையேயான மிகப்பெரிய தூரம் $\frac{u^2}{2f}$ எனவும், இது புறப்பட்ட நேரத்திலிருந்து $\frac{u}{f}$ நேரமுடிவில் நிகழுமெனவும் காட்டுக.

20. நேர்கோடு OD இன் வழியே இயங்கும் துணிக்கை ஒன்று நேரம் $t=0$ இல் O விலிருந்து புறப்பட்டு சீரான அமர்முடுகலுடன் சென்று D இல் கணநிலை ஓய்விற்கு வருகிறது. அது தன் பயணத்தின் போது, தன் பாதை OD இலுள்ள புள்ளிகள் A, B, C என்பவற்றை முறையே $t=T, 2T, 4T$ எனும் நேரங்களில் கடக்கிறது. இங்கு $AB = BC = l$ ஆகும்.

(a) நீளம் CD **(b)** நீளம் OA என்பவற்றை l இல் காண்க.

1 (b) புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்து இயக்கம் (Verical motion under gravity)

(அவசியமான இடங்களில் ஈர்வையினாலான ஆர்முடுகல் $g = 9 \cdot 8\ ms^{-2}$ எனக் கொள்க.)

1. துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $20\,ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது.

(i) அது அடைந்த அதி உயர் உயரம்
(ii) அதி உயர் உயரத்தை அடைய எடுத்த நேரம்
(iii) மீண்டும் எறியற்புள்ளியை அடைய எடுத்த நேரம்
(iv) எறியற்புள்ளியை அடையும்போது வேகம், என்பவற்றைக் காண்க.

2. துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $24 \cdot 5\ ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது.

(i) எப்பொழுது வேகம் $4 \cdot 9\,ms^{-1}$ ஆக இருக்கும்?
(ii) எறியற் புள்ளிக்கு திரும்பிவர எடுக்கும் நேரம் யாது?
(iii) எந்நேரங்களில் எறியல்புள்ளிக்கு மேல் $19 \cdot 6m$ உயரத்திலிருக்கும்?

3. பந்து ஒன்று ஓய்விலிருந்து விழுகின்றது.

(i) 10 செக்கன்களில் விழுந்த தூரம்
(ii) 98m ஐ விழ எடுத்த நேரம்
(iii) 100m விழுந்ததும் அதன் வேகம் என்பவற்றைக் காண்க.

4. கிணறு ஒன்றினுள் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படும் கல் ஒன்று, கிணற்றின் அடியை 4 செக்கன்களில் அடைகிறது எனின், கிணற்றின் ஆழம் என்ன?

5. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஓய்விலிருந்து விழுகின்ற துணிக்கை ஒன்று, தனது இயக்கத்தின் இறுதி செக்கனில் முழுத்தூரத்தின் $\frac{9}{25}$ ஐக் கடக்கின்றது. கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

6. பந்து ஒன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $21\ ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது. எறியல் புள்ளிக்குக் கீழ், 280m ஆழத்திலுள்ள புள்ளியை அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

7. குன்று ஒன்றின் அடியிலிருந்து $V\ ms^{-1}$ உடன் கல் ஒன்று, நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி எறியப்படும் அதே வேளையில் குன்றின் உச்சியிலிருந்து இன்னொருகல், முதலாவது கல்லினை அடிக்குமாறு விழவிடப்படுகிறது. t நேரத்தின் பின் கற்கள் ஒன்றையொன்று அடிப்பின் குன்றின் உயரம் என்ன?

8. ஓய்விலிருந்து விழுகின்ற துணிக்கை ஒன்று $2 \cdot 45m$ உயரமான யன்னல் ஒன்றைக் கடந்து செல்ல 5 செக்கன்கள் எடுத்தது. எவ்வுயரத்திலிருந்து கல் விழுந்திருக்குமெனக் காண்க.

9. பந்தொன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி எறியப்படும் அதேவேளையில் இன்னொருபந்து அதனை அடிக்குமாறு விழவிடப்படுகிறது. இரண்டும் சந்திக்கும் போது அவற்றின் கதிகள் சமமெனின், ஒரு பந்தானது மற்றையதன் 3 மடங்கு தூரம் பயணம் செய்திருக்குமெனக் காட்டுக.

10. நிலத்திற்கு மேல் h உயரத்திலிருந்து பந்தொன்று விழவிடப்படுகிறது. பந்து நிலத்தை அடித்த கதியின் அரைப்பங்கு கதியுடன் நிலைக்குத்தாக மேலெழுகின்றது. பந்து எவ்வுயரத்திற்கு மேலெழும்பும் எனக் காண்க.

11. நிலத்திற்கு மேல் h உயரத்திலிருந்து விழுகின்ற பந்தொன்று நிலத்தை அடித்து $\frac{h}{9}$ உயரத்திற்கு மேலெழுகின்றது. பந்து நிலத்தை அடித்தபின் உள்ள கதிக்கும், நிலத்தை அடிக்கும்போதுள்ள கதிக்குமுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

12. துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $u\ ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது. t செக்கன்களின் பின் இன்னொரு துணிக்கை, அதே எறியல்புள்ளியிலிருந்து அதே தொடக்க வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது.

(i) இரு துணிக்கைகளும் $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ செக்கன்களின் பின் சந்திக்குமெனவும்

(ii) சந்திக்கும்போது அவற்றின் கதிகள் $\frac{1}{2}gt$ எனவும்,

(iii) எறியற் புள்ளியிலிருந்து $\frac{4u^2 - g^2 t^2}{8g}\ m$ உயரத்தில் சந்திக்கும் எனவும்

நிறுவுக.

13. $9 \cdot 8\ ms^{-1}$ சீர்க்கதியுடன் மேலே எழுகின்ற ஒரு பலூனிலிருந்து, ஒருகல் விழவிடப்பட்டுத் தரையை 12 செக்கனில் அடைகிறது. கல் விழவிடப்படும் போது அப் பலூனின் உயரம் என்ன?

14. ஒரு துணிக்கையானது $19 \cdot 6m$ உயரத்திலிருந்து விழவிடப்படும்போது, வேறொரு துணிக்கை அவ்வுயரத்தின் அடியிலிருந்து $19 \cdot 6\ ms^{-1}$ உடன மேனோக்கி எறியப்படுமெனின், அவை சந்திக்க எடுக்கும் நேரம் என்ன?

15. ஒரு துணிக்கை, ஓர் உயரம் h இலிருந்து விழவிடப்படுகிறது. அத்தூரத்தின் $\frac{2}{3}$ பங்கு விழுந்ததும், அது விழவிடப்பட்ட அக்கணத்திலே மேல்முகமாக எறிந்த ஓர் இரண்டாம் துணிக்கையைக் கடக்கின்றது. பின்னையது எவ்வுயரத்தை அடையும் எனக் காண்க.

16. ஒரு பந்தானது புவியீர்ப்பின் கீழ் 5 செக்கனுக்கு விழுந்த பின், ஒரு கண்ணாடித் தட்டுக்கூடாகச் சென்று தன் வேகத்தின் அரைப் பங்கை இழக்கின்றனது. இப்பொழுது அது தரையை ஒரு செக்கனில் அடையுமெனில், தரைக்கு மேல் கண்ணாடியின் உயரத்தைக் காண்க.

1 (C) வேக - நேர வளையி (Velocity - time curve)

1. நிலையம் A இல், ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகல் $0 \cdot 15\ ms^{-2}$ உடன் புறப்பட்டுச் செல்லும் புகையிரம் 2 நிமிடங்களின் பின், அது அடைந்த கதியுடன் 11 நிமிடங்கள் பயணம் செய்கிறது. பின்னர் $1 \cdot 5\ ms^{-2}$ சீரான அமர்முடுகலினால் நிலையம் B இல் ஓய்விற்று வருகிறது. வேக - நேர வளையியை வரைந்து தூரம் AB ஐக் காண்க.

2. புகையிரதம் ஒன்று ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகலுடன் $\frac{1}{2}\ km$ தூரம் பயணம் செய்கிறது. பின்னர் $1\frac{1}{2}\ km$ தூரத்தை மாறாக்கதியுடன் ஓடி, இறுதியாகச் சீரான அமர்முடுகலினால் $\frac{1}{4}\ km$ தூரத்தில் ஓய்விற்று வருகிறது. முழுப் பிரயாணத்திற்குமான நேரம் 5 நிமிடங்கள் எனின், வேக - நேர வளையியை வரைந்து ஆர்முடுகல், அமர்முடுகல் என்பவற்றைக் காண்க.

3. கார் ஒன்று 12 km தூரத்திலுள்ள விமான நிலையம் ஒன்றிற்கு, பயணிகளை ஏற்றிச் செல்கிறது. ஓய்விலிருந்து புறப்படும் இக்கார், சீரான ஆர்முடுகலுடன் சென்று அதி உயர்கதி $120\,kmh^{-1}$ ஐ அடைகின்றது. உயர்கதியில் பயணம் செய்யும் இக்கார், இறுதியில் சீரான அமர்முடுகலினால் ஓய்விற்கு வருகிறது. அமர்முடுகலின் பருமன், ஆர்முடுகலின் பருமனில் இரு மடங்காகும். பிரயாணத்திற்கான மொத்தநேரம் $7\frac{1}{2}$ நிமிடங்களாகும். காரின் இயக்கத்திற்கான வேக - நேர வளையியை வரைக. கார் அதி உயர்கதியுடன் பிரயாணம் செய்த நேரத்தையும், ஆர்முடுகலையும் காண்க.

4. சுரங்கமொன்றினுள் அமைந்துள்ள X, Y எனும் இருபுகையிரத நிலையங்களுக்கிடையேயான தூரம் 900m. X இல் ஓய்விலிருந்து புறப்படும் புகையிரம், சீரான ஆர்முடுகலுடன் சென்று $20\,ms^{-1}$ எனும் உயர்கதியை அடைகிறது. குறித்த ஒரு நேரம் வரை இம்மாறாக் கதியுடன் சென்று, பின்னர் சீரான அமர்முடுகலினால் Y இல் ஓய்விற்கு வருகிறது. இம் மூன்று வகையான இயக்கங்களிற்குமான நேரம் $2:3:1$ என இருப்பின், X இலிருந்து Y இற்குச் செல்ல எடுத்த நேரம் யாது?

5. 675m ஆழமான சுரங்கமொன்றினுள், ஓர் உயர்த்தி இறங்குவதற்கு 45 செக்கன்கள் எடுக்கின்றது. ஓய்விலிருந்து புறப்படும் உயர்த்தியானது, முதற் கால்பங்கு தூரத்தை சீரான ஆர்முடுக்லுடனும் பின்னர் மாறாக்கதியுடனும் சென்று இறுதியான கால்பங்கு தூரத்தை சீரான அமர்முடுகலுடனும் சென்று ஓய்வடைகிறது. மாறாக் கதியைக் காண்க.

6. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஓய்விற்குச் செல்லும் வண்டி ஒன்று, அதன் இயக்கத்தின் முதற் பகுதியை சீரான ஆர்முடுகல் a உடனும் இறுதிப் பகுதியை சீரான அமர்முடுகல் $2a$ உடனும் செல்கிறது. பயணம் செய்த நேரம் t ஆகவும், தூரம் h ஆகவும் இருப்பின் $h = \frac{1}{3}at^2$ எனக் காட்டுக.

7. உயர்த்தி ஒன்று தன் இயக்கத்தின் முதல் பகுதியை சீரான ஆர்முடுகல் a உடனும், பின் மாறாக் கதியுடனும் சென்று, இறுதிப் பகுதியை சீரான அமர்முடுகல் a உடனும் செல்கின்றது. உயர்த்தி இயங்கிய தூரம் s ஆகவும், இயக்கத்திற்கு எடுத்த நேரம் t ஆகவுமிருப்பின், உயர்த்தி மாறாக்கதியுடன் இயங்கிய நேரம் $\left(t^2 - \frac{4s}{a}\right)^{1/2}$ எனக் காட்டுக.

8. ஒரு கடுகதிப் புகையிரதம் வழக்கமாகச் சீரான வேகம் $u\,ms^{-1}$ உடன் இரு நிலையங்கள் A, B களுக்கிடையில் ஓடுகிறது. ஒருநாள், அது $f_1\,ms^{-2}$ எனும் சீரான அமர்முடுகலுடன் தனது வேகத்தைக் குறைத்து, A இற்கும் B இற்குமிடையிலுள்ள ஓர் அடையாளப்புள்ளி C யில் ஓய்விற்கு வருகிறது. C யில் அது t_o செக்கன்களுக்குத் தங்கி நிற்கின்றது. அது பின்பு $f_2\,ms^{-2}$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் தனது வேகத்தை அதிகரித்துத் தனது வழமையான வேகம் $u\,ms^{-1}$ ஐயும் பெறுகிறது. வேக-நேர வளையியை வரைக. அடையாளப்புள்ளி C யில் தாமதித்தால் இப்புகையிரம் நிலையம் B ஐக் குறித்த நேரதிற்கு T செக்கனின் பின்பு கடக்கிறன்றது. T இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுக.

$f_1 : f_2$ என்பவை f ஐ அதிகரிக்காதெனின் T ன் இழிவுப் பெறுமானம் $t_o + \frac{u}{f}$ என நிறுவுக.

9. P, Q எனும் இரு புகையிரதங்கள், நிலையம் A யிலிருந்து, நிலையம் B இற்கு ஒரே பாதையால் செல்கின்றன. இரு புகையிரதங்களும் A யில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு B இல் ஓய்விற்கு வருகின்றன. புகையிரம் P, தன்னுடைய இயக்கத்தின் முதல் மூன்றில் ஒருபங்கு நேரத்திற்கு சீரான ஆர்முடுகல் f உடனும், அடுத்த மூன்றில் ஒருபங்கு நேரத்திற்கு சீரான கதியுடனும், இறுதியான மூன்றில் ஒருபங்கு நேரத்திற்கு சீரான ஆர்முடுகலுடனும் செல்கின்றது. புகையிரம் Q தன் இயக்கத்தின் முதல் மூன்றில் ஒருபங்கு தூரத்தை சீரான ஆர்முடுகல் f உடனும் அடுத்த மூன்றில் ஒருபங்கு தூரத்தை சீரான கதியுடனும், இறுதி மூன்றில் ஒருபங்கு தூரத்தை சீரான அமர்முடுகல் f உடனும் செல்கின்றது. இரு புகையிரதங்களுக்கும் எடுத்த நேரம் $\sqrt[3]{3} : 5$ எனும் விகிதத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

10. $30\,ms^{-1}$ உடன் சென்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு புகையிரதம் A என்னும் புள்ளியைக் கடக்கும் போது, தடுப்புக்கள் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. தடுப்புக்கள் காரணமாக $3\lambda\,ms^{-2}$ எனும் அமர்முடுகல் பெறப்படுகிறது. கதி $10\,ms^{-1}$ ஐ அடைந்ததும் புகையிரதம் இம் மாறாக் கதியுடன் சிறிது தூரம் பிரயாணம் செய்கிறது. பின்னர் $\lambda\,ms^{-2}$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலினால் புள்ளி B ஐக் கடக்கும் போது மீண்டும் $30\,ms^{-1}$ வேகத்தைப் பெறுகிறது. A, B இற்கிடைப்பட்ட

தூரம் 4km ஆகவும், எடுத்த நேரம் 4 நிமிடங்கள் ஆகவும் இருப்பின், $(a)\ \lambda$ இன் பெறுமானத்தையும் (b) 10 km^{-1} உடன் சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

11. ஒன்றையொன்று செங்குத்தாகச் சந்திக்கும் இரு நேரான தெருக்களின் சந்தியிலிருந்து $13\frac{1}{3}m$ தூரத்தில் பஸ் தரிப்பு நிலையம் ஒன்று உள்ளது. பஸ் ஒன்று $1ms^{-1}$ எனும் கதியுடன் பஸ்தரிப்பைத் தாண்டிச் சென்று சந்தியில் இடதுபுறமாகத் திரும்பிச் செல்கிறது. அது இயக்கம் முழுவதற்கும் $\frac{2}{3}ms^{-2}$ எனும் ஆர்முடுகலுடன் செல்கிறது. பஸ் சந்தியில் திரும்பும் போது, பஸ்தரிப்பில் நிற்கும் ஒரு பையன், ஒரு நேரான கோட்டின் வழியே சீரான கதியுடன் ஓடி, சந்தியிலிருந்து $46\frac{2}{3}m$ தூரத்தில் பஸ்சினைப் பிடிக்கின்றான். அவனுடைய கதியை ms^{-1} இல் காண்க. அவன் பாதையின் வழியே ஓடி மட்டுமட்டாக பஸ்சைப் பிடிப்பதற்கு என்ன சீரான கதியுடன் ஓட வேண்டும் எனக் காண்க.

12. X எனும் கார், சீரான ஆர்முடுகலுடன் சென்று, A எனும் நிலையான புள்ளியை $30\ kmh^{-1}$ உடன் கடந்து செல்கிறது. A இலிருந்து $\frac{1}{4}\ km$ தூரம் சென்றதும், கார் அது பெற்ற கதி $V\ kmh^{-1}$ உடன் சீரான கதியில் பயணம் செய்கிறது. X, புள்ளி A ஐக் கடந்து சென்ற 6 செக்கன்களின் பின்னர், வேறொருகார் Y அதே பாதையில் அதே திசையில், $45\ kmh^{-1}$ உடன் A ஐக் கடந்து செல்கிறது. அதன் ஆர்முடுகல் $\frac{5}{33}\ ms^{-2}$ ஆகும். Y, $75\ kmh^{-1}$ ஐ அடைந்ததும் மாறாக்கதியில் செல்கிறது. கார் Y, A இற்கு அப்பால் 1km தூரத்தில் X ஐக் கடந்து செல்கிறது. இத் தூரத்தைக் கடப்பதற்கு Y இற்கு எடுத்த நேரம் 59 செக்கன்கள் எனக் காட்டுக. X ஆனது ஆர்முடுகலுடன் சென்ற நேரத்திற்கும், மாறாக் கதியுடன் சென்ற நேரத்திற்குமுள்ள விகிதம் 4 : 9 எனில் V இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

13. ஒரு கட்டிடத்தின் அடித்தளமாகிய A இல் இருந்து, h உயரத்திலுள்ள Z என்ற உச்சித் தளத்திற்கு ஓர் உயர்த்தி ஏறியது. இவ்வியக்கம் மூன்று நிலைகளில் நடைபெற்றது. முதல் நிலையில் உயர்த்தி ஓய்விலிருந்து f_1 எனும் ஒருமை

ஆர்முடுகலுடன் u எனும் கதியை அடையும் வரை இயங்கியது. இரண்டாவது நிலையில் u எனும் சீரான கதி t நேரத்திற்கு நிலை நிறுத்தப்படுகிறது. மூன்றாம் நிலையில் உயர்த்தி Z இல் ஓய்விற்கு வரும்வரை f_2 எனும் ஒருமை அமர்முடுகலுடன் இயங்கியது. அந்த உயர்த்தி A யிலிருந்து Z இற்கு ஏறுவதற்கெடுத்த முழுநேரம் $T=\frac{u}{2}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)+\frac{h}{u}$ எனக் காட்டுக.

f_1 , f_2 என்பவை f ஐ மீறமுடியாமலும், u என்பது v ஐ மீறமுடியாமலும் இருப்பின், $h>\frac{v^2}{f}$ அல்லது $h\ge\frac{v^2}{f}$ என்பதற்கேற்ப எடுத்த மிகக் குறைந்த நேரம் $2\sqrt{\frac{h}{f}}$ ஆக அல்லது $\left(\frac{v^2+fh}{vf}\right)$ ஆக இருக்குமெனக் காட்டுக.

14. ஒரு நேர்த் தெருவிலுள்ள A, B என்ற இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலான தூரம் $2a$ மீற்றர் ஆகும். AB இனது நடுப் புள்ளியாகிய C இல் ஓர் ஒடுக்கமான அகழியுண்டு. ஒருலொறி $u\ ms^{-1}$ எனும் கதியுடன் A இல் சென்று கொண்டிருக்கின்றது. அது இடைவெளி AC யில் மாறாத ஒரு வீதத்தில் கதியைக் குறைத்துக் கொண்டு, சென்று C ஐ $v\ ms^{-1}$ என்ற கதியில் அடைகிறது. அகழியில் ஏற்பட்ட கணக்குலுக்கம் காரணமாக C யில் அதன் கதி $w\,(<v)\,ms^{-1}$ ஆல் திடீரெனக் குறைகிறது. அந்த லொறி, பின்னர் இடைவெளி CB யில் சீரான அமர் முடுகலுடன் சென்று B இல் நிற்கின்றது. அந்த லொறியின் இயக்கத்திற்கு ஒரு வேக - நேர வரைபினை வரைக. லொறி A யிலிருந்து B யிற்குச் செல்ல எடுக்கும் முழுநேரம்.

$2a\left\{\frac{1}{v+u}+\frac{1}{v-w}\right\}$ செக்கன்கள் எனக் காட்டுக.

AC, CB எனும் இடைவெளிகளில் லொறியினுடைய அமர்முடுகல்களைக் கண்டு $w=v-\sqrt{u^2-v^2}$ எனின், அவ் அமர்முடுகல்கள் சமம் எனக் காட்டுக.

15. $v\ ms^{-1}$ எனும் கதியுடன், நேர்ான வீதியிற் செல்லும் மோட்டார் சைக்கிளோட்டி எதிரேயுள்ள பாலமொன்றைக் காண்கின்றான். AB எனும் பாலத்தின் நீளம் $2l$ மீற்றர். பாலத்தின் நடுப்புள்ளியாகிய D, அக்கணததில், மோட்டார் சைக்கிளின்

நிலையாகிய C இல் இருந்து d மீற்றர் ($d > l$) தூரத்திலுள்ளது. பாலத்தின் மேல் செல்லும் போக்குவரத்திற்குள்ள கதி எல்லை $u\, ms^{-1}$ ஆகும். A, B ஆகிய பாலத்தின் இரு முடிவிலும் சைக்கிளின் கதி $u\, ms^{-1}$ ஆயிருக்குமாறு, சைக்கிளோட்டி சிறிது நேரத்திற்குத் தனது வேகத்தை $f\, ms^{-2}$ எனும் சீரான வீதத்தில் குறைத்து அதே $f\, ms^{-2}$ எனும் சீரான வீதத்தல் கூட்டுகிறான். சைக்கிளோட்டியினுடைய இயக்கத்திற்குரிய வேக - நேர வளையியினைக் வரைக. சைக்கிளோட்டி பாலத்தின் மேலிருக்கும் பொழுது அவனது மிகச்சிறிய வேகத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்து $v \leq u\sqrt{\dfrac{d}{l}}$ ஆயிருப்பின் மாத்திரமே இயக்கம் சாத்தியமாகுமெனக் காட்டுக. ஆரம்ப நிலையான C இலிருந்து பாலத்தைக் கடப்பதற்கு எடுத்த முழுநேரத்தையும் காண்க.

16. ஒரு பஸ் வண்டி u எனும் மாறாக்கதியுடன் நேர்ப்பாதையொன்றிற் செல்கிறது. அது வீதியிலுள்ள A எனும் புள்ளியிலிருக்கும் போது, பிரயாணி ஒருவர் a தூரம் முன்னால் இருக்கும் O என்ற பஸ்தரிப்பிடத்தில் இறங்க விரும்புகிறார். சாரதி A, B, C என்ற இடங்களில் இருக்கும் போது, வரிசையாகத் தடையைப் பிரயோகிக்கிறார். (இங்கு $AB, = BC = CO = \dfrac{a}{3}$) பஸ் AB, BC, CO என்ற இடைவெளிகளில் $f,\ 2f,\ 3f$ ஆகிய அமர்முடுகலுடன் சென்று O விலே ஓய்விற்கு வருகிறது. வேக - நேர வரைபினை வரைந்து $f = \dfrac{u^2}{4a}$ என நிறுவுக. பஸ் A இலிருந்து O வுக்கு வர எடுக்கும் நேரம்

$$\left[12 - \left(\sqrt{30} + \sqrt{2}\right)\right]\frac{a}{3u}$$ செக்கன்கள் என நிறுவுக.

17. ஓர் ஏவுகணையானது, முதல் $3t$ செக்கன்களுக்கு மேன்முக ஆர்முடுகல் $\dfrac{g}{3}$ உடனும், அடுத்த $2t$ செக்கன்களுக்கு மேன்முக ஆர்முடுகல் $\dfrac{g}{2}$ உடனும், அடுத்த t செக்கன்களுக்கு மேன்முக ஆர்முடுகல் g உடனும், நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி ஏவப்படுகிறது. பின்னர் எரிபொருள் அடைக்கப்பட, ஏவுகணை புவியீர்ப்பின் கீழ் தரையில் விழுகிறது. ஏவுகணையின் இயக்கத்திற்கு வேக நேர வரைபினை வரைக. வரைபிலிருந்து பின்வருவனவற்றைத் துணிக.

(i) ஏவுகணை, அதன் மிகப்பெரிய உயரத்தை அடைய எடுத்த நேரம்
(ii) அடைந்த மிகப்பெரிய உயரம்
(iii) ஏவுகணை ஏவப்பட்ட பின் மறுபடியும் பூமியை அடைய எடுத்த நேரம்
(iv) பூமியை அடையும் போது ஏவுகணையின் கதி.

18. X, Y எனும் இரண்டு புகைவண்டிகள், அடையக்கூடிய உயர் கதிகள் முறையே $u\, ms^{-1}$, $V\ (< u)\ ms^{-1}$ உம் ஆகும். வண்டிகள் இரண்டும் fms^{-2} எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் புறப்பட்டுத் தத்தம் உயர் வேகங்களில் சென்று, fms^{-2} எனும் சீரான அமர்முடுகலுடனேயே ஓய்விற்கு வருகின்றன. X உம் Y உம் A எனும் நிலையத்திலிருந்து, ஒரே நேரத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு B எனும் நிலையத்தில், ஒரே நேரத்தில் ஓய்விற்கு வருகின்றன. வண்டி X ஆனது, A இற்கும் B இற்குமிடையேயுள்ள C எனும் நிலையமொன்றில் t_o செக்கன்களுக்கு நிறுத்தப்பட்டது. அது A யிற்கும் C யிற்குமிடையே t_1 செக்கன்களுக்கும், C யிற்கும் B யிற்குமிடையே t_2 செக்கன்களுக்கும் தனது சீரான வேகத்துடன் ஓடியது. Y ஆனது இடையே நில்லாது ஓடியது. X இற்கும் Y இற்குமுரிய வேக - நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து,

$$(t_1 + t_2)(u - v) = \frac{v^2}{f} + t_o\, v - \frac{2}{f}(u - v)^2$$ எனக்காட்டுக.

19. முறையே $3f\ ms^{-2}$ உம் fms^{-2} உம் ஆன ஒருமையான ஆர்முடுகல்களோடு நகரும் A உம் B யுமான இரு புகைவண்டிகள் S_1 என்னும் நிலையத்தை ஒரே வேளையில், நேரம் t_1 செக்கன்களில் கடந்து செல்கையில் நேரான சமாந்தரப் பாதைகளில் ஒரே திசையாக முறையே $v\, ms^{-1}$, $2v\, ms^{-1}$ ஆகிய கதிகளில் செல்கின்றன. $3f\ ms^{-2}$ என்னும் ஒருமையான ஆர்முடுகலை $(t_2 - t_1)$ செக்கன்களுக்குப் பேணும் A எனும் புகைவண்டி, S_2 என்னும் நிலையத்தைக் கடந்து சென்ற பின், t_2 செக்கனில் அடைந்த கதியான ஒருமைக் கதியிலேயே செலுத்தப்படுகிறது. நேரம் t_2 செக்கனிலே A உம் B உம் ஆகிய புகைவண்டிகள் இரண்டாவது நிலையமான S_2 ஐக் கடந்து சென்று அதன் பின் மீண்டும் t_3 செக்கனில் மூன்றாவது நிலையமான S_3 ஐ இரு புகைவண்டிகளும் கடந்து செல்கின்றன. நிலையங்கள் S_1 இற்கும் S_3 இற்கும் இடையில் A யும் B உம் ஆன இரு புகைவண்டிகளின் இயக்கங்களுக்கு வேக – நேர வளையிகளை உபயோகித்து பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) $t_2 - t_1 = \frac{v}{f}$ செக்கன்கள்

(ii) நேரம் t_2 செக்கனில் A இனதும் B இனதும் கதிகள் முறையே $4v\ ms^{-1}$, $3v\ ms^{-1}$ ஆகும்.

(iii) $t_3 - t_2 = \frac{2v}{f}$

(iv) நிலையங்கள் S_1 , S_3 ஆகியவற்றுக்கிடையிலுள்ள தூரம் $\frac{21v^2}{2f}$ மீற்றர் ஆகும்.

20. மோட்டார் வண்டிப் போட்டி ஒன்றில் X என்னும் வண்டி முடிவு நிலையில் இருந்து 1100m தூரத்திலிருக்கும் போது $38{\cdot}5ms^{-1}$ எனும் வேகத்துடனும் $0{\cdot}44\,ms^{-2}$ எனும் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடனும் செல்கின்றது. அதே நேரத்தில் Y என்னும் வண்டி X இற்கு பின்னே 220m தூரத்தில் $48{\cdot}4\,ms^{-1}$ எனும் வேகத்துடன் $0{\cdot}55ms^{-2}$ எனும் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடனும் செல்கின்றது. முடிவு நிலையிற்கு முன்னே $242\,m$ தூரத்திரல் Y ஆனது X ஐக் கடந்து செல்லும் எனக் காட்டுக. X ஆனது முடிவு நிலையை அடைய 1 செக்கனின் முன்னர் Y ஆனது அந்நிலையை அடையுமெனக் காட்டுக.

21. ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று கரடான கிடைத்தளத்தின் வழியே, ஒரு புள்ளி Q வை நோக்கி கதி $3U$ உடன் எறியப்படுகிறது. அதேவேளையில் Q விலிருந்து வேறொரு துணிக்கையானது கதி $7U$ உடன் P ஐ நோக்கி எறியப்படுகிறது. P இற்கும் Q இற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் a ஆகவும், ஒவ்வொரு துணிக்கைக்கும், தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும், $u^2 < \frac{a\mu g}{29}$ ஆகவும் இருப்பின் துணிக்கைகள் ஒன்றோடொன்று மோதுவதில்லை எனக் காட்டுக.

$u^2 = \frac{a\mu g}{9}$ எனின், நேரம் $\sqrt{\frac{a}{9\mu g}}$ இற்குப் பின்னர், P இலிருந்து $\frac{5a}{18}$ தூரத்தில் துணிக்கைகள் ஒன்றோடொன்று மோதுமெனக் காட்டுக.

22. A, B, C என்பன மூன்று கம்பங்களாகும். B ஆனது A இற்கு 380 மீற்றர் அப்பாலும், C ஆனது B இற்கு $1{\cdot}96$ கிலோமீற்றர் அப்பாலும் இருக்கக் கூடியதாக இக்கம்பங்கள் நேரிய ஓட்டப்பாதையொன்றில் இருக்கின்றன. சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்கின்ற ஒரு கார் X ஆனது, A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு 1 நிமிடமும், B இலிருந்து C இற்குச் செல்வதற்கு 2 நிமிடமும் எடுக்கிறது. அதன் ஆர்முடுகலை மீற்றர் / செக்கன் / செக்கன் என்பதில் கண்டு, C இல் அதன் கதி 23 மீற்றர்/ செக்கன் எனக் காட்டுக.

$\frac{1}{5}$ மீற்றர் / செக்கன் / செக்கன் சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்கின்ற வேறொரு கார் Y ஆனது, X ஐக் காட்டிலும் 10 செக்கன் முன்பாக C ஐக் கடக்கிறது. அப்போது அதன் கதி $\frac{109}{7}$ மீற்றர் / செக்கன் ஆகும். X ஆனது Y ஐ எங்கே கடக்கின்றதெனக் காண்க.

23. பொலிஸ் அலுவலர் ஒருவர், மோட்டார் கார் ஒன்று சீரான உயர் கதி u உடன் இயங்குவதை அவதானிக்கிறார். கார் அவரைக் கடந்து செல்லும் தறுவாயில், அவர் தனது மோட்டார் சைக்கிளில் ஏறிக் காரைத் துரத்தத் தொடங்குகிறார். அவர் தனது உயர் கதி v அடையும்வரை மாறா ஆர்முடுகல் f உடன் செல்கிறார். அவர் தனது தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து $a\left(>\frac{v^2}{2f}\right)$ தூரம் சென்ற பின்னர் காரைக் கடந்து செல்லக் கூடியதாக இருக்கின்றது.

வேக – நேர வளையி ஒன்றை எடுத்து நோக்கியோ, வேறு விதமாகவோ பொலிஸ் அலுவலர் $\left(\frac{a}{u}-\frac{v}{f}\right)$ நேரம் தனது உயர் கதியில் சென்றுகொண்டிருந்தார் எனக் காட்டுக.

u, v, a, f என்பவற்றைத் தொடர்புபடுத்தும் தொடர்பொன்றைக் கண்டு, இதிலிருந்து

$$v = \frac{af}{u}\left\{1-\left(1-\frac{2u^2}{af}\right)^{1/2}\right\}$$

எனக் காட்டுக.. இவ் விடையைப் பெற்றவிதத்தைத் தெளிவாகக் காட்டுக.

24. f எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன், நேரான புகையிரதப் பாதைவழியாகச் செல்கின்ற l நீளமுள்ள புகையிரதம் ஒன்றிற்கு, $2V$ என்னும் உயர் கதி உண்டு. புகையிரதப் பாதைக்குச் சமாந்தரமாக வீதி ஒன்று வழியாக புகையிரதம் செல்லும் அதே திசையிற் செல்கின்ற கார் ஒன்றிற்கு, $2f$ என்னும் சீரான ஆர்முடுகலும், $3V$ எனும் உயர்கதியும் உண்டு. தொடக்கத்திலே புகையிரதத்தின் பிற்பக்கம், காரின் முற்பக்கத்துடன் ஒரே மட்டத்திலிருக்கப் புகையிரதத்தினதும், காரினதும் கதிகள் முறையே V உம், $\frac{1}{2}V$ உம் ஆகும். புகையிரதமும், காரும் அவற்றின் உயர்கதிகளை முறையே t_1, t_2 என்னும் நேரங்களில் அடைகின்றன. புகையிரதத்தின் முற்பக்கமும், காரின் முற்பக்கமும் $t_3\ (> t_2)$ நேரத்தில் ஒரே மட்டத்தை அடைகின்றன. புகையிரதத்தின் இயக்கத்திற்கும், காரின் இயக்கத்திற்குமான வேக – நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இதிலிருந்து புகையிரதத்தின் பிற்பக்கம் மீண்டும் t_1 நேரத்தில் காரின் முற்பக்கத்துடன் ஒரே மட்டத்திலிருக்குமென உய்த்தறிக.

$t_3 = \frac{l}{V} + \frac{17V}{16f}$ எனவும், $3V^2 < 16fl$ எனவும் காட்டுக.

25. A, B எனுமிரு புகையிரதநிலையங்கள், $6km$ இடைத்தூரத்தில் உள்ளன. புகையிரதம் ஒன்று A ஐ $40\,kmh^{-1}$ உடன் கடந்து செல்கிறது. அது இக்கதியை $5km$ இற்கு நிலைநிறுத்தி, பின்னர் சீரான அமர்முடுகலினால் B இல் ஓய்விற்கு வருகிறது. முதலாவது புகையிரதம் A ஐக் கடப்பதற்கு, 2 நிமிடங்களுக்கு முன்னர் இரண்டாவது புகையிரதம் A இல் ஓய்விலிருந்து, $10\,kmh^{-1}\,\mathrm{min}^{-1}$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் புறப்பட்டுச் சென்று, பின்னர் சீரான அமர்முடுகலினால் முதலாவது புகையிரதம் ஓய்விற்கு வரும் அதே கணத்தில் B இல் ஓய்விற்கு வருகிறது.
ஒரே வரிப்படத்தில் இரு புகையிரதங்களுக்குமான வேக – நேர வரைபுகளை வரைக. வரைபிலிருந்து, இரண்டாவது புகையிரதம் பயணத்திற்கு எடுத்த நேரம் $12\frac{1}{2}$ நிமிடங்கள் எனக் காட்டுக. அதன் அதி உயர் கதியையும், அமர்முடுகலை $kmh^{-1}\,\mathrm{min}^{-1}$ இலும் காண்க.

26. A, B எனுமிரு எஞ்சின்கள் சமாந்தரமான தண்டவாளங்களின் வழியே ஒரே திசையில் f, $\frac{3}{2}f$ எனும் சீரான அமர்முடுகல்களுடன் செல்கின்றன. இந்த எஞ்சின்கள் ஒரே நேரத்தில் P எனும் அடையாளப் புள்ளியை (Signal box) u, $\frac{u}{2}$ எனும் வேகங்களுடன் கடந்து செல்கின்றன. எஞ்சின்கள் Q எனும் அடையாளப் புள்ளியை மீண்டும் ஒரே நேரத்தில் அடைந்து, முறையே சீரான அமர்முடுகல்கள் f, F என்பவற்றினால் அடுத்த நிலையத்தில் ஓய்விற்கு வருகின்றன. இரு எஞ்சின்களுக்குமான வேக – நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

(a) எஞ்சின் A ஆனது, B இலும் பார்க்க முன்னே இருக்கும் மிகக் கூடிய தூரம் $\frac{u^2}{4f}$ எனக் காட்டுக.

(b) Q ல் எஞ்சின்களின் வேகத்தையும், PQ இன் தூரத்தையும் காண்க.

(c) $F : f = 49 : 36$ எனக் காட்டுக.

27. இரு மோட்டார் கார்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து, ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஒரே திசையில் செல்கின்றன. முதலாவது கார் சீராக ஆர்முடுகிச் சென்று 4 செக்கன்களில் $20\,kmh^{-1}$ என்ற கதியை அடைந்து, பின்னர் இம் மாறாக் கதியில் செல்கின்றது. முதலாவது கார் புறப்பட்டு 2 செக்கன்களின் பின்னர் இரண்டாவது கார் $3\frac{1}{3}\,kmh^{-1}\,s^{-1}$ என்ற சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்கின்றது. இரண்டு கார்களுக்குமான வேக – நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. முதலாவது கார் புறப்பட்டு எவ்வளவு நேரத்தின் பின் இரண்டாவது கார் முதலாவது காரை முந்திச் செல்லும் எனக் காண்க. அவ்வாறு முந்திச் செல்கையில், கார் சென்ற தூரத்தைக் காண்க. முதலாவது கார் புறப்பட்டு என்ன நேரங்களின் பின் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புக் கதி $12\,kmh^{-1}$ ஆக இருக்கும் என்பதைக் காண்க.

28. வான் வண்டி ஒன்று, பட்டணம் A இலிருந்து நேரான பெருந்தெரு வழியே பட்டணம் B இற்கு செல்கிறது. நேரம் $t = 0$ இலே வான் வண்டியானது, A இலே ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, அதன் உயர் கதி $2u$ ஐ அடைவதற்கு மாறா ஆர்முடுகல் f உடன் இயங்குகின்றது. $t = \frac{u}{2f}$ ஆகும் போது

A இற்கும் B இற்கும் இடையிலுள்ள C இலே இருக்கும் போக்குவரத்துப் பொலிஸ் கார் ஒன்றை வான் வண்டி கடந்து செல்கின்றது. வான் வண்டி காரைக் கடந்து சென்ற அதேவேளை, பொலிஸ்காரின் சாரதி வான்வண்டியைக் காண்கின்றார். இதிலிருந்து மேலும் $t = \dfrac{u}{2f}$ நேரத்தின் பின்னர் C இலே ஓய்விலிருந்து புறப்படும் பொலிஸ் கார் இயன்றவரை விரைவில் வான்வண்டியைப் பிடிப்பதற்கு $2f$ எனும் மாறா ஆர்முடுகலுடன் செல்கின்றது. $t_o (> 0)$ எனும் நேரகாலத்திற்குத் தனது உயர் கதியைப் பேணும் வான் வண்டி, அதன்பின்னர் $2f$ எனும் மாறா அமர்முடுகலின் கீழ் B இல் ஓய்விற்கு வருகிறது. வான் வண்டியைக் கடந்து செல்லும் வரை, பொலிஸ்கார் பேணுகின்ற அதன் உயர் கதி $3u$ எனில், வான் வண்டியினதும், பொலிஸ்காரினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக – நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து $t_o \geq \dfrac{9u}{8f}$ ஆக இருப்பின் வான் வண்டியைப், பொலிஸ்கார் அவற்றின் உயர் கதிகளின் போது கடந்து செல்ல முடியும் எனக் காட்டுக.

$t_o < \dfrac{9u}{8f}$ எனில் $0 < t_1 < \dfrac{u}{f}$ ஆயிருக்க $t = \dfrac{2u}{f} + t_o + t_1$ ஆகும் போது வான் வண்டியைப் பொலிஸ்கார் கடந்து செல்வதாகவும் இருப்பின்

$$t_1 = \left(\frac{11u^2 - 8f\,u t_o}{8f^2}\right)^{1/2} - \frac{u}{2f}$$ எனக் காட்டுக.

29. முறையே a, b என்னும் நீளங்களையுடைய A, B எனும் இரு புகைவண்டிகள் நேரான சமாந்தரப் புகைவண்டிப் பாதைகள் வழியே ஓடுகின்றன. தொடக்கத்திலே (நேரம் $t = 0$ இல்) A இன் முற்பக்கம். B இன் பிற்பக்கத்திற்கு மட்டுமட்டாகப் பின்னதாக இருக்க. அவை சீரானவீதம் f இல் A யும் சீரானவீதம் f^1 இல் $(< f)$ B யுமாக ஓய்விலிருந்து ஒருங்கே ஆர்முடுகத் தொடங்குகின்றன. $t = t_1$ எனும் கணத்திலே, A யின் பிற்பக்கமானது. B யின் முற்பக்கத்தை மட்டுமட்டாகக் கடக்கும் போது, A அனது அது அடைந்த மாறா வேகத்துடன் இயங்கத் தொடங்குகின்றது. $t = t_2$ எனும் கணத்திலே, B யின் முற்பக்கமானது மறுபடியும் A யின் பிற்பக்கத்தை முந்திச் செல்ல முயலும் போது, இரு புகைவண்டிகளும், சீரான வீதம் f^1 இல் A யும், சீரான வீதம் f இல். B யும் என்றவாறு அமர்முடுகத் தொடங்குகின்றன. B , A ஆகிய இரு புகைவண்டிகளும் முறையே $t = t_3$, $t = t_4 \left(> t_3\right)$ என்னும் கணங்களிலே ஓய்விற்கு வருகின்றன. இரு புகைவண்டிகளின் இயக்கங்களுக்குமான வேக – நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுமுறையில்

(i) $t_1^2 = 2\,\dfrac{(a+b)}{f - f^1}$ (ii) $t_2 = \left(\dfrac{2f}{f^1} - 1\right)t_1$

(iii) $t_4 - t_3 = \dfrac{\left(f - f^1\right)^2}{f f^1}\, t_1$ எனக் காட்டுக.

30. உயர்த்தி ஒன்றின் கூரையிலிருந்து விற்றராசு ஒன்றினால் ஒரு துணிக்கை நிலைக்குத்தாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. உயர்த்தியின் மேன் முக இயக்கம் மூன்று கட்டங்களில் நடைபெறுகின்றது. முதலாவது கட்டத்தில் உயர்த்தியானது ஓய்விலிருந்து மாறா ஆர்முடுகலுடன் கிளம்புகின்றது. அப்போது விற்றராசின் வாசிப்பு $\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)kg$ ஆகும். இரண்டாவது கட்டத்தில் உயர்த்தியானது மாறா வேகம் $v\,ms^{-1}$ உடன் t_o செக்கனுக்குக் கிளம்புகிறது. அப்போது விற்றாசின வாசிப்பு $1Kg$ ஆகும். இறுதிக் கட்டத்தில் உயர்த்தியானது ஓய்வை அடையும் வரை மாறா அமர்முடுகலுவுடன் கிளம்புகிறது. அப்போது விற்றராசின் வாசிப்பு $\left(1 - \dfrac{a}{g}\right)kg$ ஆகும். இங்கு $0 \leq a < g$. அதன் பயணத்தின் போது உயர்த்தி கிளம்பிய மொத்தத் தூரம் h மீற்றரும், எடுத்த மொத்த நேரம் T செக்கனும் ஆகும். ஒவ்வொரு கட்டத்தின் போதும் உயர்த்தியின் ஆர்முடுகலைக் காணக.

(i) உயர்த்தியின் இயக்கத்துக்கான ஆர்முடுகல் - நேர வளையியை வரைந்து $t_o = T - \dfrac{2v}{a}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) உயர்த்தியின் இயக்கத்துக்கான வேக – நேர வளையியை வரைந்து இதிலிருந்து $v^2 - a\,Tv + ah = 0$ எனக் காட்டுக.

$T \geq 2\sqrt{\dfrac{h}{g}}$ என்பதை உய்த்தறிக.

அலகு 2

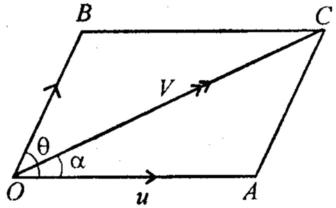
விளையுள் வேகமும், தொடர்பு வேகமும்

விளையுள் வேகம் : இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட வேகங்களுக்குச் சமானமான வேகம் அவற்றின் விளையுள் வேகம் எனப்படும்.

வேக இணைகரம் : இயங்குகின்ற ஒரு புள்ளிக்கு, ஒரு புள்ளியூடாக வரைந்த இணைகரமொன்றின் இருபக்கங்களாற் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படும் வேகங்கள் ஒருங்கே உண்டெனின், அவை அப்புள்ளியினூடாகச் செல்லும் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தாற் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்பட்டுள்ள வேகத்திற்குச் சமமாகும்.

OA , OB என்பவற்றால் வேகங்கள் u , v குறிக்கப்படின் அவற்றின் விளையுள் வேகம் V, OC ஆல் குறிக்கப்படும்.

$$V^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

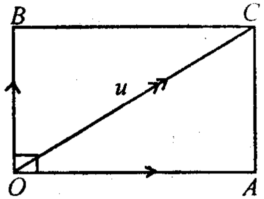


விளையுள் வேகம், u இன் திசை (OA) உடன் அமைக்கும் கோணம் α எனின்

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\theta}{u + v\cos\theta}$$ ஆகும்.

வேகத்தின் கூறுகள்

(I) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் $OACB$ ஒரு செவ்வகம். வேகம் u ஆனது OA வழியே $u\cos\theta$ ஆயும் OA இற்குச் செங்குத்தாக OB வழியே $u\sin\theta$ ஆயும் துணியப்படலாம்.



(II) தந்த இருதிசைகளில் வேகத்தின் கூறுகள்.

ஒரு வேகம் u இன் கூறுகளை அதனோடு α, β எனும் தந்த இரு கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில் காணல்.

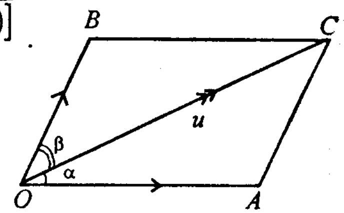
பருமனில் திசையிலும் OC ஆல் வேகம் u குறிக்கப்படுகிறது. அதனோடு α, β எனும் கோணங்களை அமைக்குமாறு OA , OB ஐ வரைந்து இணைகரம் $OACB$ ஐப் பூர்த்தி செய்க.

முக்கோணி OAC இற்கு சைன் விதியைப் பிரயோகிக்க.

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{OC}{\sin\left[180 - (\alpha + \beta)\right]}$$

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin(a + \beta)}$$

$$OA = \frac{u\sin\beta}{\sin\alpha + \beta} \quad AC = \frac{u\sin\alpha}{\sin(a + \beta)}$$

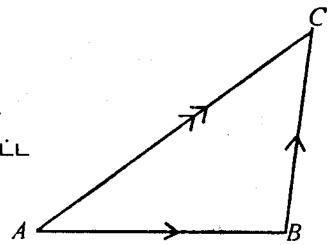


எனவே OA , OB வழியேயான வேகக் கூறுகள் முறையே

$$\frac{u\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{u\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$ ஆகும்..

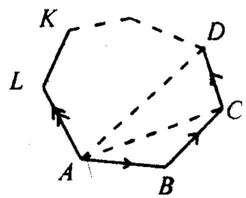
வேக முக்கோணி

இயங்கும் ஒரு துணிக்கைக்கு வரிசைக் கிரமமாக ஒரு முக்கோணியினுடைய பக்கங்கள் AB, BC என்பவற்றால் குறிக்கப்பட்டுள்ள வேகங்கள் ஒருங்கே உண்டெனில், அவை AC யால் குறிக்கப்பட்ட வேகத்திற்குச் சமம்.

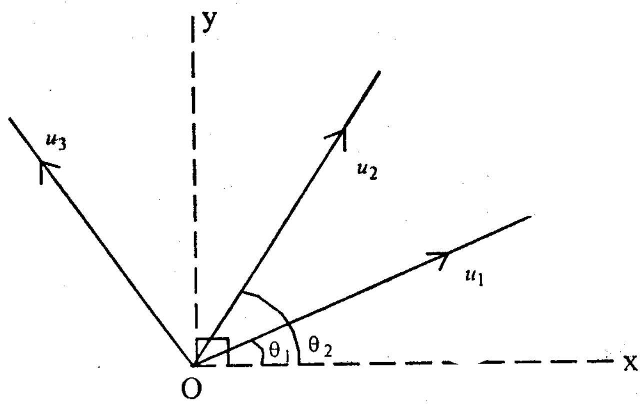


வேகப் பல்கோணி

இயங்கும் துணிக்கைக்கு ஒரு பல்கோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CD, ...KL என்பவற்றால் குறிக்கப்பட்ட வேகங்கள் ஒருங்கே உண்டெனின், விளையுள் வேகம் AL இனால் குறிக்கப்படும்.



ஒரு துணிக்கைக்கு ஒரே தளத்தில் பல்வேறு திசைகளில் வேகங்கள் ஒருங்கே உண்டெனின் அவற்றின் விளையுளைக் காணல்.

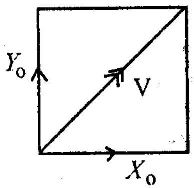


$$X_o = u_1 \cos\theta_1 + u_2 \cos\theta_2 + u_3 \cos\theta_3 + ---$$

$$Y_o = u_1 \sin\theta_1, + u_2 \sin\theta_2 + u_3 \sin\theta_3 + ---$$

$$V^2 = Xo^2 + Yo^2$$

$$V = \sqrt{Xo^2 + Yo^2}$$



உதாரணம் 1

இரு நேரிய தெருக்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக O இல் குறுக்கிடுகின்றன. A, B என்னும் இரு கார்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு தெருவிலே O ஐ நோக்கி 20, $40 ms^{-1}$ சீரான கதியுடன் செல்கின்றன. குறித்த ஒரு கணத்தில் அவை O விலிருந்து முறையே 300m, 400m தூரங்களில் உள்ளன. A இன் B தொடர்பான வேகத்தைக் காண்க. தொடரும் இயக்கத்தில் அவைகளுக்கிடையேயான மிகக் கிட்டிய தூரத்தையும், அதற்கான நேரத்தையும் காண்க.
அவை அந்நிலையிலிருக்கும் போது கார்களின் நிலைகளைத் தெளிவாகப் படத்தில் காட்டுக.

$$V_{A,E} = \leftarrow 20 ms^{-1}$$

$$V_{B,E} = \downarrow 40 ms^{-1}$$

$$V_{A,B} = V_{A,E} + V_{E,B}$$

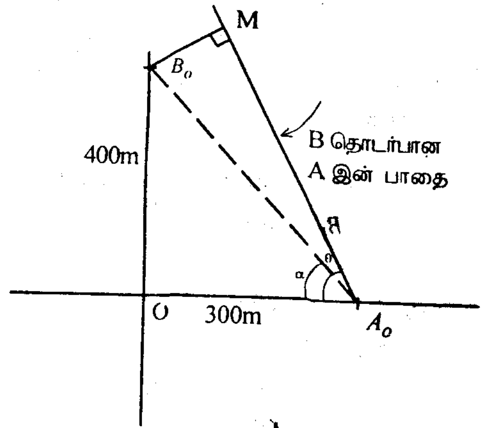
$$\overleftarrow{20 ms^{-1}} + \uparrow 40 ms^{-1}$$

$$V^2 = 20^2 + 40^2$$

$$= 20^2 \left[1^2 + 2^2\right]$$

$$= 20^2 \times 5$$

$$\left.\begin{aligned} V &= 20\sqrt{5}\ ms^{-1} \\ \tan\theta &= 2 \end{aligned}\right\}$$



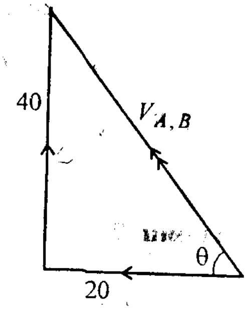
$$A_o B_o = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500m, \ \tan\alpha = \frac{4}{3}$$

மிகக் கிட்டிய தூரம் $= = 500 \ sin(\theta - \alpha)$

$$= 500\left[sin\theta \cdot cos\alpha - cos\theta \cdot sin\alpha\right]$$

$$= 500\left[\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{5}\right]$$

$$= 500 \times \frac{2}{5\sqrt{5}} = 40\sqrt{5}\, m$$



கிட்டிய தூரத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம் $= \frac{AoM}{V}$

$$A_o M = 500\ cos(\theta - \alpha)$$

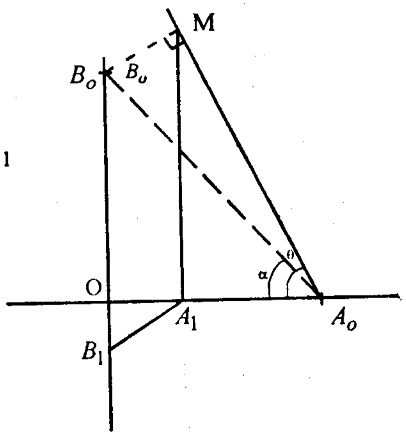
$$= 500\left[cos\theta \cdot cos\alpha + sin\theta \cdot sin\alpha\right]$$

$$500\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{5}\right]$$

$$= 220\sqrt{5}\ m$$

$= \frac{220\sqrt{5}}{20\sqrt{5}} = 11$ செக்கன்கள்.

குறிப்பு:
$MA_1 \parallel B_o O$
$A_1 B_1 \parallel M B_o$



மிகக்கிட்ட உள்ள போது A இன் நிலை A_1

B யின் நிலை B_1 ஆகும்.

11 செக்கன்களில் A சென்ற தூரம்

$$A_o A_1 = 11 \times 20 = 220\, m$$

ஆகவே $OA_1 = 80 m$

11 செக்கன்களில் B சென்ற தூரம்

$$B_o B_1 = 11 \times 40 = 440 m$$

$$OB_1 = 40 m$$

$$A_1 B_1 = \sqrt{80^2 + 40^2} = 40\sqrt{5}\, m$$

உதாரணம் 2

(a) $10\, k\,m\,h^{-1}$ உடன் கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பல் A, காலை 9 மணிக் B என்னும் கப்பலிலிருந்து தென்மேற்காக 30 km தூரத்தில் உள்ளது. A ஐ சந்திப்பதற்காக B, $15\, k\,m\,h^{-1}$ உடன் பயணம் செய்கின்றதெனின்

(i) B செல்ல வேண்டிய திசையையும்

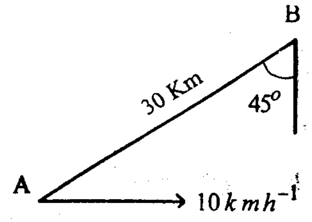
(ii) சந்திப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

(b) சமாந்தரக் கரைகளையுடைய 300m அகலமான ஆற்றின் ஒரு கரையில் எனும் புள்ளி உள்ளது. A இற்கு நேரெதிரே மறுகரையிலுள்ள புள்ளியிலிருந் ஆற்றோட்டத்தின் திசையில் 400m தூரத்தில் B எனும் புள்ளி உள்ள ஆற்றின் வேகம் $4\, k\,m\,h^{-1}$ ஆகும். மனிதன் ஒருவன் நிலையான நீரில் $V\, k\,m\,h^{-1}$ உடன் படகொன்றை வலித்துச் செல்ல முடியும். அவன் A யிலிருந்து புறப்பட் B ஐச் சென்றடைவதற்கு V இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க

இவ்வேகத்துடன் சென்றால் B ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

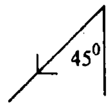
(a) $V_{A,E} = \longrightarrow 10\, k\,m\,h^{-1}$

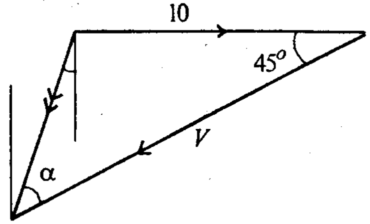
$V_{B,E} = 15\, k\,m\,h^{-1}$



B ஆனது A ஐச் சந்திக்க வேண்டுமெனின்
A தொடர்பான B இன் பாதை
BA வழியே இருத்தல் வேண்டும்.

$$V_{B,E} = V_{B,A} + V_{A,E}$$

$15 =$  $+ \longrightarrow 10$



வேக முக்கோணிக்கு சைன் விதியைப் பாவிக்க.

$$\frac{10}{\sin\alpha} = \frac{15}{\sin 45}$$

$$\sin\alpha = \frac{2 \times \sin 45}{3}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3 \times 1{\cdot}414} = 0{\cdot}4715$$

$$\alpha = 28^o$$

எனவே தெற்கிற்கு 17^o மேற்கு நோக்கி B செல்ல வேண்டும்.

$$V^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \times 10 \times 15 \times \cos 107^o$$

$$= 10^2 + 15^2 + 2 \times 10 \times 15 \times 0{\cdot}2924$$

$$V^2 = 5^2\left[2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \times 0{\cdot}2924\right]$$

$$= 5^2 \times 16{\cdot}5088$$

$$V = 5 \times 4{\cdot}06 = 20{\cdot}3\, k\,m\,h^{-1}$$

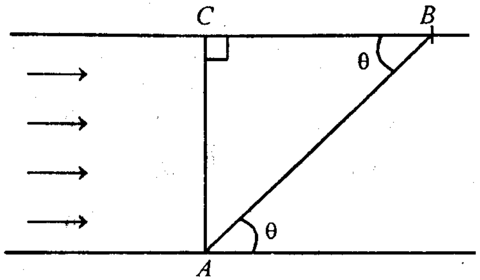
சந்திக்க எடுத்த நேரம் $= \dfrac{30}{20 \cdot 3}$ மணி

$= 1 \cdot 47$ மணித்தியாலங்கள்

[$V = 15\cos\alpha + 10\cos 45$ என்பதிலிருந்தும் V ஐக் கணிக்கலாம்]

(b) $AC = 300\,m$, $CB = 400\,m$
$AB = 500\,m$ ஆகும்.

$sin\theta = \dfrac{3}{5}, \quad cos\theta = \dfrac{4}{5}$

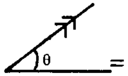


R – ஆறு, B – படகு

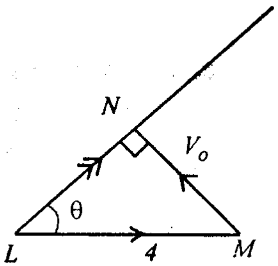
$V_{R,E} = \longrightarrow 4\,kmh^{-1}$

$V_{B,R} = V\ kmh^{-1}$

$V_{B,E} = V_{B,R} + V_{R,E}$



$= V_o + \underset{4}{\longrightarrow}$



மிகக் குறைந்த வேகம் V_o எனின்,

$V_o = 4\,sin\theta = 4 \times \dfrac{3}{5} = 2 \cdot 4\,kmh^{-1}$

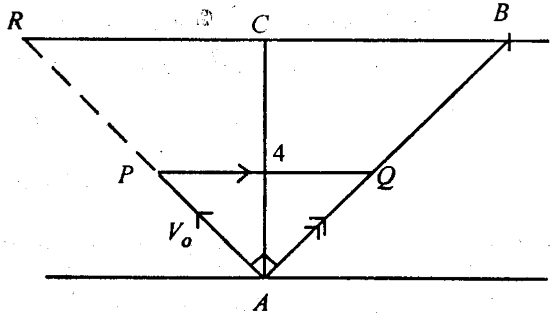
ஆறு தொடர்பான படகின் கதி $2 \cdot 4\,kmh^{-1}$ இலும் குறைவாக இருப்பின் அவன் B ஐ அடைய முடியாது.

நேரம் $= \dfrac{AB}{4\,cos\theta}$

$= \dfrac{500}{\dfrac{16}{5} \times \dfrac{1000}{3600}}$ செக்கன்

$= \dfrac{125 \times 9}{2}$ செக்கன்கள்

$= \dfrac{125 \times 9}{2 \times 60} = 9 \cdot 4$ நிமிடங்கள்



[**குறிப்பு:** இங்கு ΔAPQ வேக முக்கோணி ஆகும்.

A யிலிருந்து B ஐச் சென்றடைய எடுத்த நேரம் $\dfrac{AB}{AQ}$

$\dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{\text{பூமி தொடர்பான தூரம்}}{\text{பூமி தொடர்பான வேகம்}}$

$\dfrac{AR}{AP} = \dfrac{\text{ஆறு தொடர்பான தூரம்}}{\text{ஆறு தொடர்பான வேகம்}}$

APQ, ARB என்பன இயல்பொத்த முக்கோணங்கள் என்பதால் $\dfrac{AB}{AQ} = \dfrac{AR}{AP}$ ஆகும்.]

உதாரணம் 3

மழை மெதுவாகத் தூறிக்கொண்டிருந்த போது சிறிய மழைத்துளிகள் நிலையான வளியில் $8\sqrt{3}\ ms^{-1}$ மாறாக் கதியுடன் நிலைக்குத்தாக விழுகின்றன. வடக்கிலிருந்து ஒரு உறுதியான காற்று வீசிய பொழுது மழைத்துளிகள் நிலைக்குத்துடன் 30^o கோணம் அமைய சாய்வாக விழுகின்றன. காற்றின் கதியைக் காண்க.

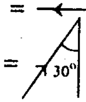
வடக்கிலிருந்து இந்த உறுதியான காற்று வீசிக்கொண்டிருந்த போது மழையில் வடக்கு நோக்கிச் சீரான கதியுடன் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவனுக்கு மழைத்துளிகள் நிலைக்குத்துடன் 60^o கோணம் அமைய சாய்வாக வீழ்வதாகத் தோற்றுகிறது.

சைக்கிள் காரனின் கதியைக் காண்க.

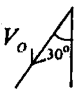
மழை – R, காற்று – W, சைக்கிளோட்டி – C

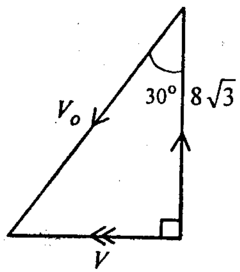
$V_{R,W} = \downarrow 8\sqrt{3}\ ms^{-1}$

$V_{W,E} = \longleftarrow$

$V_{R,E} =$ 

$V_{W,E} = V_{W,R} + V_{R,E}$

$\underset{V}{\longleftarrow} = \uparrow 8\sqrt{3} + V_o$ 



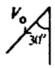
$$\tan 30^\circ = \frac{V}{8\sqrt{3}} \Rightarrow V = 8ms^{-1}$$

$V_{W,E} = \longleftarrow 8ms^{-1}$

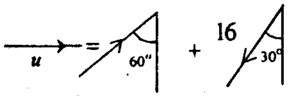
$V_o = 16ms^{-1}$

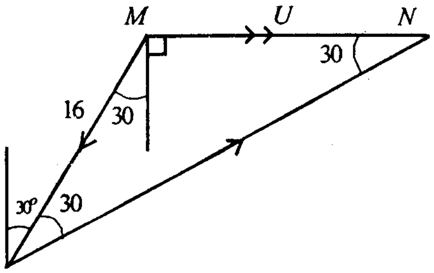
$V_{C,E} = \quad ums^{-1} \rightarrow$

$V_{R,C} =$ 

$V_{R,E} =$  $\left(V_o = 16ms^{-1}\right)$

$V_{C,E} = V_{C,R} + V_{R,E}$





LMN இரு சமபக்க முக்கோணி $u = 16ms^{-1}$

சைக்கிளோட்டியின் வேகம், வடக்கு நோக்கி $16ms^{-1}$

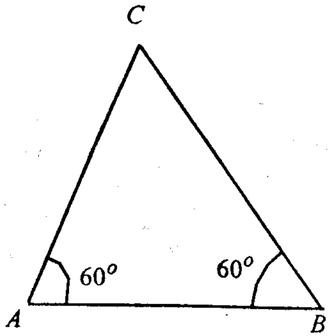
உதாரணம் 4

a பக்கமுடைய சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளிலே A, B, C என்னும் மூன்று விமானநிலையங்கள் அமைந்துள்ளன. அமைதியான நாளொன்றில் காற்று வீசாதபோது விமானமொன்று ஆகக்கூடிய கதி v உடன் செல்லவல்லது. AB என்னும் திசையிலே $u\,(< v)$ எனும் கதியுடன் காற்று வீசும்போது இவ்விமானம் இடைவழியில் நிற்காமல் சுற்றுப்பாதை $ABCA$ வழியே செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம்

$\left[\dfrac{v + \sqrt{4v^2 - 3u^2}}{v^2 - u^2}\right] a$ எனக் காட்டுக.

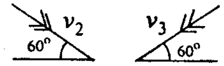
அமைதியான நாளொன்றில் $ABCA$ வழியே கதி v உடன் செல்வதற்கு விமானம் N இலீற்றர் எரிபொருளை உபயோகிக்கும் எனின் காற்று வீசும் நாளொன்றில் அதற்கு வேண்டிய எரிபொருள் எவ்வளவாகும்?

காற்று – W, விமானம் - P



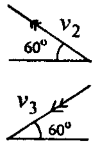
$V_{W,E} = \longrightarrow u$

$V_{P,W} = v$

$V_{P,E} = \xrightarrow{v_1}$, 

$V_{P,E} = V_{P,W} + V_{W,E}$

$\xrightarrow{v_1} = v + \rightarrow u$



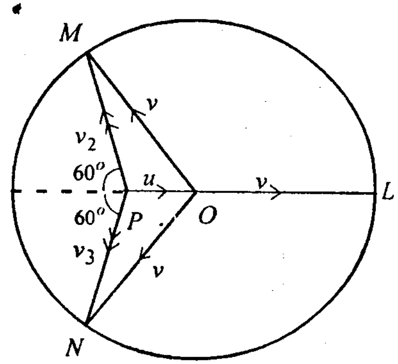
விமானம் $A \rightarrow B$ இற்குச் செல்ல வேகம் v_1

$v_1 = v + u$

விமானம் $B \rightarrow C$ இற்குச் செல்ல வேகம் v_2

விமானம் $C \rightarrow A$ இற்கு செல்ல வேகம் v_3

$v_2 = v_3$



$\Delta\, OPM$ இல்,

$$v^2 = u^2 + v_2^2 - 2u \cdot v_2 \cos 120$$

$$v_2^{\,2} + u\,v_2 + \left(u^2 - v^2\right) = 0$$

$$v_2 = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4\left(u^2 - v^2\right)}}{2}$$

$$v_2 = \frac{-u \pm \sqrt{4v^2 - 3u^2}}{2}$$

$v_2 > 0$ ஆதலால் $v_2 = \dfrac{-u+\sqrt{4v^2-3u^2}}{2}$

மொத்த நேரம் $\dfrac{a}{v+u}+\dfrac{a}{v_2}+\dfrac{a}{v_3}$

$$= \frac{a}{v+u} + \frac{2a\times 2}{\sqrt{4v^2-3u^2}-u}$$

$$= \frac{a}{v+u} + \frac{4a}{\sqrt{4v^2-3u^2}-u}\times\frac{\sqrt{4v^2-3u^2}+u}{\sqrt{4v^2-3u^2}+u}$$

$$= \frac{a}{v+u}+\frac{4a\times\sqrt{4v^2-3u^2}+u}{4v^2-3u^2-u^2}$$

$$a\left[\frac{1}{v+u}+\frac{\sqrt{4v^2-3u^2}+u}{v^2-u^2}\right]$$

$$a\left[\frac{v-u+\sqrt{4v^2-3u^2}+u}{v^2-u^2}\right]$$

$$T = a\left[\frac{v+\sqrt{4v^2-3u^2}}{v^2-u^2}\right]$$

காற்று வீசாதபோது விமானம் எடுக்கும் நேரம் $\dfrac{3a}{v}$

$\dfrac{3a}{v}$ நேரத்திற்கு எரிபொருள் $=N$. லீற்

T நேரத்திற்கு எரிபொருள் $= \dfrac{N}{\frac{3a}{v}}\times T$

$$= \frac{Nv}{3a}\times a\left[\frac{v+\sqrt{4v^2-3u^2}}{v^2-u^2}\right]$$

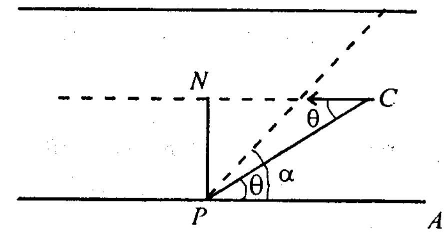
$$= \frac{Nv}{3}\left[\frac{v+\sqrt{4v^2-3u^2}}{v^2-u^2}\right]$$

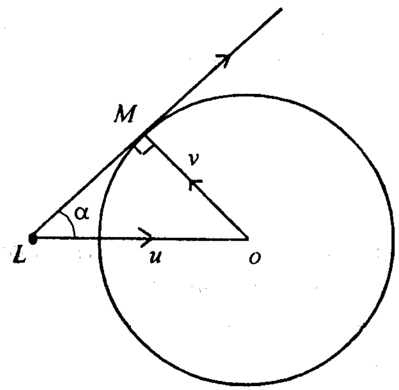
[பூமி தொடர்பான விமானத்தின் பாதை முறையே AB, BC, CA வழியே இருத்தல் வேண்டும். வேகமுக்கோணி வரையும் போது முதலில் பருமன் $u\rightarrow$ இருக்குமாறு நேர்கோடு PO வரையப்படுகிறது. பின்னர் பருமன் $v(>u)$ ஐ ஆரையாகவும் O வை மையமாகவும் கொண்ட வட்டம் வரையப்படுகிறது. PL, PM, PN என்பன BC, CA, AB க்குச் சமாந்தரமாக பூமி தொடர்பான வேகங்களைக் குறிக்கிறது.]

உதாரணம் 5

ஒரு நடைபாதை விளிம்பிலிருந்து d m தூரத்திலுள்ள ஒரு நேர்ப்பாதை வழியாக சீரான வேகம் $u\ ms^{-1}$ உடன் ஒரு சைக்கிளோட்டி C என்பவன் ஒரு தெருவில் செல்கிறான். ஒரு கணத்தில் சைக்கிளோட்டிக்கு முன்பாக $h\,m$ தூரத்தில் நடைபாதை விளிம்பில் நிற்கும் ஒரு நடைமனிதன் P, தெருவில் காலடி வைக்கிறான். P யிலிருந்து சைக்கிளின் பாதைக்கு செங்குத்தின் அடி N ஆகும். $[PN=d, CN=h]$. அந்த நடை மனிதன் ஒரு நேர்கோட்டில் சீரான வேகம் $v\,(<u)\ ms^{-1}$ உடன் நடக்கிறான். தொடர்பு வேகக் கோட்பாட்டின் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாகவோ, அந்நடை மனிதன் சைக்கிள் காரனுக்கு முன்பாக ஆபத்தின்றி தெருவைக் கடப்பதற்கு

$v > \dfrac{ud}{\sqrt{h^2+d^2}}$ என நிறுவுக.





$V_{C,E} = \leftarrow u$

$V_{P,E} = v$

சைக்கிள்காரனுக்கு முன்பாகக் கடக்க, சைக்கிளோட்டி தொடர்பான மனிதன் Pயின் வேகத்தின் திசை PA யுடன் அமைக்கும் கோணம் α ஆனது θ விலும் பெரிதாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$V_{P,C} = V_{P,E} + V_{E,C}$$

$$= v + \underset{u}{\longrightarrow}$$

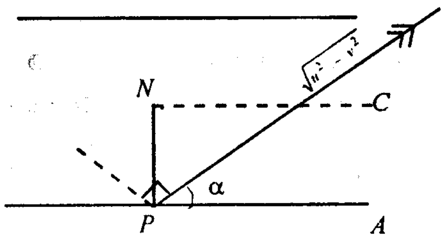
ஆபத்தின்றிக் கடப்பதற்கு $\alpha > \theta$

$$\sin\alpha > \sin\theta$$

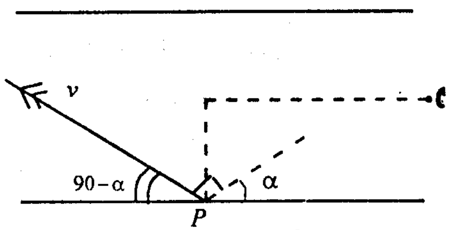
$$\frac{v}{u} > \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

$$v > \frac{ud}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

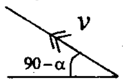
[இங்கு பல்வேறு முக்கோணிகள் வரையப்படலாம். எனினும் சைக்கிளோட்டி தொடர்பான மனிதனின் பாதை, α மிகப் பெரிதாகுமாறு அமைவதற்கு, வட்டத்திற்கு தொடலியாக அமையும் போதே பெறப்படும்]



சைக்கிளின் சட்டத்தில் மனிதன் பாதை



பூமியின் சட்டத்தில் மனிதனின் பாதை

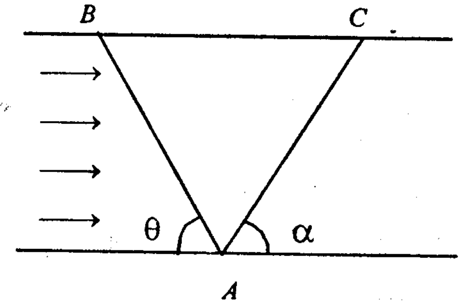
அதாவது, $V_{M,E} =$ 

உதாரணம் 6

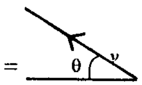
நேரான சமாந்தரக் கரைகளையுடைய ஓர் ஆறு சீரான வேகம் $u\,ms^{-1}$ உடன் பாய்கிறது. நீர் தொடர்பாக $v\,ms^{-1} (> u)$ உடன் நேர்ப்பாதையில் படகைச் செலுத்தும் படகோட்டி ஒருவன் ஒரு கரையிலுள்ள A என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டு நீரோட்டத்திற்கு எதிர் வழியாக ஆற்றைக் கடந்து மறுகரையிலுள்ள B என்ற புள்ளியை அடைய விரும்புகிறான். A யிற்கும் B யிற்குமிடையிலுள்ள தூரம் c மீற்றர் ஆகும். AB என்ற

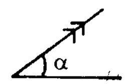
நேர்வரை ஆற்றின் கரையுடன் θ என்ற கூர்ங்கோணத்தை ஆக்குகிறது. படகு AB க்கு சமாந்தரமான திசையை நோக்கி இருக்கும் பொருட்டு படகோட்டி தன்னை சீராக உஞற்றிப் படகைச் செலுத்துகிறான். கரை தொடர்பாகப் படகோட்டியின் பாதையை வரைக.

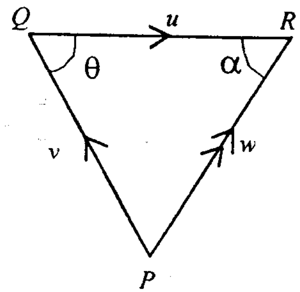
அவன் எதிர்க்கரையை C என்ற புள்ளியில் அடைந்து கரைவழியே சென்று B ஐ அடைந்தால் முழுப்பிரயாணத்திற்கும் எடுத்த மொத்த நேரம் $\frac{c}{v-u}$ செக்கன்கள் எனக் காட்டுக.



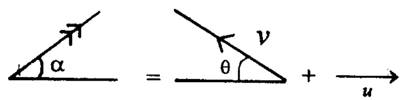
$V_{R,E} = \rightarrow u$

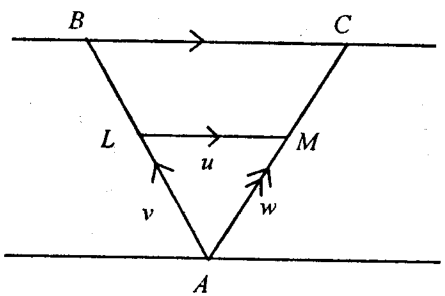
$V_{M,R} =$ 

$V_{M,E} =$ 



$$V_{M,E} = V_{M,R} + V_{R,E}$$





மனிதன் A யிலிருந்து C யிற்கு செல்ல எடுத்த நேரம் $= \frac{AC}{w}$ ஆகும்.

C யிலிருந்து B யிற்கான இயக்கம்

$$V_{M,R} = \longleftarrow V$$

$$V_{R,E} = \longrightarrow u$$

$$V_{M,E} = V_{M,R} + V_{R,E}$$

$$= \underset{v}{\longleftarrow} + \underset{u}{\longrightarrow}$$

$$= \longleftarrow (v-u)$$

C யிலிருந்து B இற்கு செல்ல எடுத்த நேரம் $\frac{BC}{v-u}$ ஆகும்.

மொத்த நேரம் $T = \frac{AC}{w} + \frac{BC}{v-u}$ ----------------------(1)

முக்கோணிகள் ALM, ABC என்பவை இயல்பொத்தவை.

$\frac{AB}{AL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{AM}$ ஆகும்.

$\frac{c}{v} = \frac{BC}{u} = \frac{AC}{w}$ ----------------------(2)

(2) இலிருந்து $\frac{AC}{w} = \frac{c}{v}$; $BC = \frac{cu}{v}$

(1) இல் பிரதியிட $T = \frac{c}{v} + \frac{cu}{v(v-u)}$

$$= \frac{c}{v}\left[1 + \frac{u}{v-u}\right]$$

$$= \frac{c}{v-u}$$

உதாரணம் 7

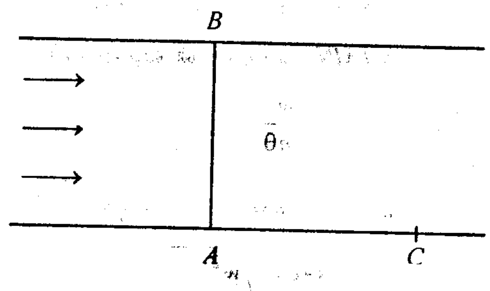
அசையாத நீரிலே u எனும் கதியையுடைய பையனொருவன் $v(<u)$ என்னும் கதியுடன் பாய்கின்ற ஒரு ஆற்றின் கரையிலுள்ள A என்னும் புள்ளியிலிருந்து எதிர்க்கரையிலுள்ள நேர்எதிரான புள்ளி B யிற்கு நீந்திச் செல்ல விரும்புகிறான். அவன் எத்திசையை நோக்கித் தன்னை வைத்திருக்க வேண்டும் எனக் காண்க.

பையன் இருக்கும் அதே கரையில் ஆற்றின் நீரோட்டத்திசைப் பக்கத்திலே C எனும் புள்ளியில் ஒரு முதலை இருக்கிறது. பையன் ஆற்றில் குதித்த அதே கணத்தில் பையனை இடைமறிக்கும் நோக்குடன் முதலை நீந்தத் தொடங்குகிறது. அசையாத நீரில் முதலையின் கதி $w(>u)$ எனக் கொண்டு, எத்திசையை நோக்கி முதலை தன்னை வைத்திருத்தல் வேண்டும் எனக் காண்க. இவ்வகையில் பையனை இடைமறிக்க முதலை எடுக்கும் நேரம் $\frac{AC}{\sqrt{v^2+w^2-u^2}-v}$ எனக் காட்டுக.

$$V_{R,E} = \to v$$

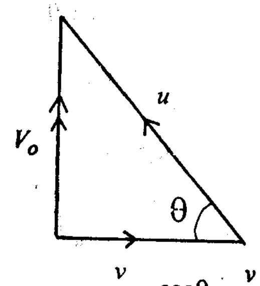
$$V_{B,R} = u$$

$$V_{B,E} = \uparrow$$



$$V_{B,E} = V_{B,R} + V_{R,E}$$

$$\Uparrow = u + \underset{v}{\longrightarrow}$$



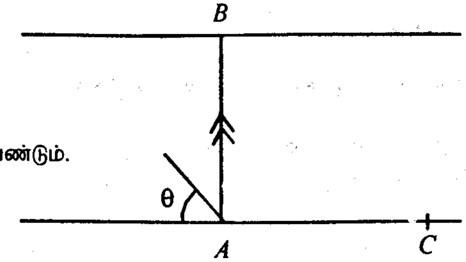
$\cos\theta = \frac{v}{u}$

ஆறுபாயும் திசைக்கு எதிர்த்திசையுடன் $\cos^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ எனும் கோணத்தை அமைக்கும் திசையை நோக்கி, அவன் தன்னை வைத்திருத்தல் வேண்டும்.

$$v_o = \sqrt{u^2 - v^2}$$

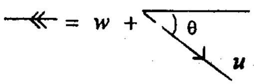
முதலை (C) பையனைச் சந்திப்பதற்கு,

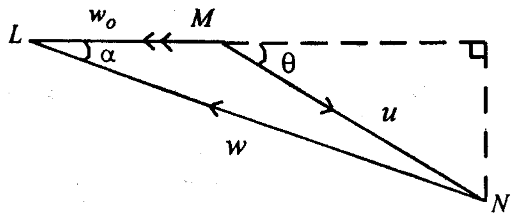
$V_{C,B}$ ஆனது $\overrightarrow{CA}$ வழியே இருத்தல் வேண்டும்.



$V_{C,B} = \longleftarrow$

$V_{C,B} = V_{C,R} + V_{R,B}$





$V_{C,B} = ML = w_o = w\cos\alpha - u\cos\theta$

ΔLMN இற்கு சைன் விதியைப் பிரயோகிக்க.

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin\theta}$$

$$w\sin\alpha = u\sin\theta = v_o = \sqrt{u^2 - v^2}$$

எனவே $w\cos\alpha = \sqrt{w^2 - u^2 - v^2} = \sqrt{w^2 + v^2 - u^2}$

மேலும் $u\cos\theta = v$

$V_{C,B} = w_o = \sqrt{v^2 + w^2 - u^2} - v$ ஆகும்.

முதலை இடை மறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம்

$$= \frac{AC}{\sqrt{v^2 + w^2 - u^2} - v}$$ ஆகும்.

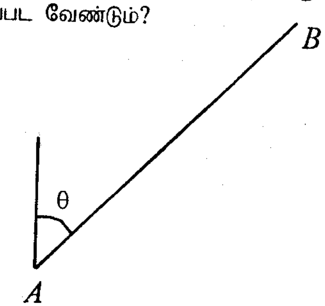
உதாரணம் 8

ஆகாய விமானம் ஒன்று T மணித்தியாலங்கள் பறக்கப் போதுமான எரிபொருளைக் கொண்டு செல்கிறது. அமைதியான வெளியில் அதன் கதி $u\,kmh^{-1}$ ஆகும். விமானம் அதன் பாதையை மாற்றுவதில் புறக்கணிக்கத்தக்க நேரத்தையே செலவிடுகிறதெனக் கொண்டு காற்று, வடக்கு – தெற்கு திசையிலே கதி $V(<u)\,kmh^{-1}$ உடன் வீசும்போது வடக்கின் θ^o கிழக்குத் திசையிலே விமானத்தின் (வெளியே செல்லும், திரும்பி வரும்) செயற்பாட்டு வீச்சு.

$$R = \frac{T\left(u^2 - V^2\right)}{2\sqrt{u^2 - V^2\sin^2\theta}}$$ எனக் காட்டுக.

θ இன் எப் பெறுமானத்திற்கு R உயர்வாகும்?
உயர் வீச்சை அடைவதற்கு விமானம் அதன் வெளிச் செல்லும் பறப்பிலும், திரும்பிவரும் பறப்பிலும் எத்திசைகளில் செலுத்தப்பட வேண்டும்?

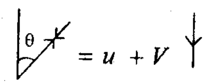
AB = d என்க.



$V_{W,E} = \downarrow v\,kmh^{-1}$

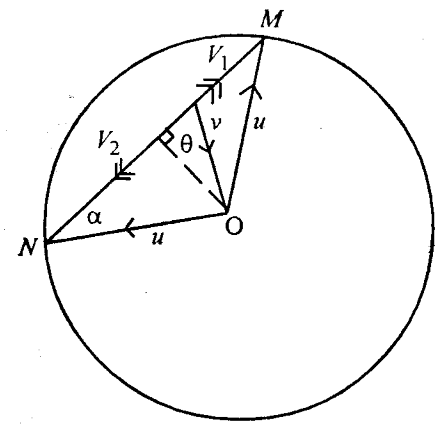
$V_{P,W} = u\,kmh^{-1}$

$V_{P,E} = V_{P,W} + V_{W,E}$



$V_1 = u\cos\alpha - V\cos\theta$ ---------- (1)

$V_2 = u\cos\alpha + V\cos\theta$ ---------- (2)



ΔOLM இற்கு சைன் விதி,

$$\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin\theta}$$

$V\sin\theta = u\sin\alpha$ ------------ (3)

$V_1 + V_2 = 2\,u \cos\alpha$

$V_1 V_2 = u^2 \cos^2\alpha - V^2 \cos^2\theta$

$= u^2\left(1 - \sin^2\alpha\right) - V^2\left(1 - \sin^2\theta\right) = u^2 - V^2$

பிரயாணத்திற்கு எடுக்கும் நேரம் $T = \dfrac{d}{V_1} + \dfrac{d}{V_2}$

$$d\left[\frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}\right] = \frac{d \cdot 2u\cos\alpha}{u^2 - V^2}$$

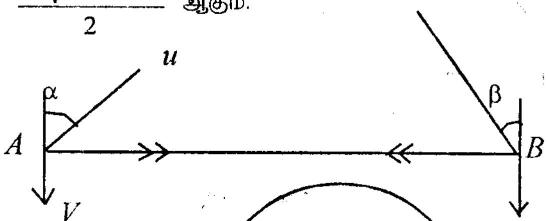
$$T = \frac{2d\sqrt{u^2 - V^2\sin^2\theta}}{u^2 - V^2}$$

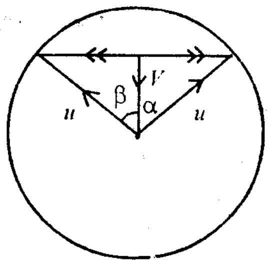
$$d = \frac{T\left(u^2 - V^2\right)}{2\sqrt{u^2 - V^2\sin^2\theta}} = R$$

R உயர்வாக இருக்க $\sqrt{u^2 - V^2\sin^2\theta}$ இழிவாக இருத்தல் வேண்டும்.

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ஆகும் போது, R உயர்வாகும்.

R உயர்வு $= \dfrac{T\left(u^2 - V^2\right)}{2\sqrt{u^2 - V^2}} = \dfrac{T\sqrt{u^2 - V^2}}{2}$ ஆகும்.





$V_{P,E} = V_{P,W} + V_{W,E}$

$\longleftrightarrow = u + \;\big|\; V$

$\alpha = \beta$

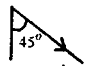
$\alpha = \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{V}{u}\right)$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

கப்பல் ஒன்று மேற்கு நோக்கி $30\,km h^{-1}$ இல் செல்கிறது. இரண்டாம் கப்பல் தெற்கு நோக்கி $20\,km h^{-1}$ இல் செல்கிறது. முதலாம் கப்பலிலுள்ள மாலுமிகளுக்கு மூன்றாம் கப்பல் ஒன்று தென்கிழக்கு திசையில் செல்வதாகத் தோற்றுகிறது. இரண்டாம் கப்பலிலுள்ள மாலுமிகளுக்கு அது வடக்கிற்கு 60^0 மேற்குத் திசையில் செல்வதாகத் தோன்றுகிறது. மூன்றாம் கப்பல் தெற்கிற்கு 75^0 மேற்குத் திசையில் செல்கினறதெனக் காட்டி, அதன் கதியைக் காண்க.

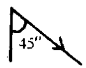
$V_{S_1,E} = \longleftarrow 30\,km h^{-1}$

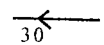
$V_{S_2,E} = \downarrow 20\,km h^{-1}$

$V_{S_3,S_1} =$ 

$V_{S_3,S_2} =$ 

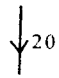
$V_{S_3,E} = V_{S_3,S_1} + V_{S_1,E}$

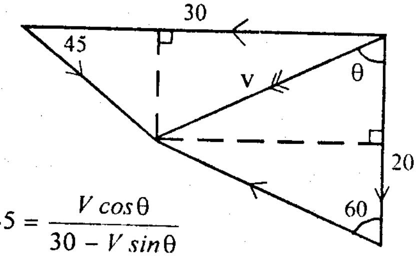
$V =$ 

$+$ 

$V_{S_3,E} = V_{S_3,S_2} + V_{S_2,E}$

$V =$ 

$+$ 



$\tan 45 = \dfrac{V\cos\theta}{30 - V\sin\theta}$

$\tan 60 = \dfrac{V\sin\theta}{20 - V\cos\theta}$

$V\cos\theta + V\sin\theta = 30$ -------------(1)

$\sqrt{3}\,V\cos\theta + V\sin\theta = 20\sqrt{3}$ ---------(2)

$(1) \div (2),\quad \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$

$\sqrt{3}\cos\theta = \left(2\sqrt{3} - 3\right)\sin\theta$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$\theta = 75^0$

$$V = \frac{30}{\cos 75 + \sin 75} = \frac{30}{\sin 15^\circ + \sin 75^\circ}$$

$$= \frac{30}{2\sin 45^\circ \cos 30}$$

$$= \frac{15 \times \sqrt{2} \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{6}\, kmh^{-1}$$

உதாரணம் 10

சீரான ஆர்முடுகல் f உடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி இயங்கும் ஒரு பலூன் B யிலிருந்து ஒருகல் P தரையில் போடப்படுகின்றது. t செக்கன்களுக்குப் பின்னர் B யிலிருந்து ஒரு இரண்டாம் கல் Q தரையில் போடப்படுகிறது. Q போடப்பட்டு T செக்கன்களுக்குப் பின்னர் P ஆனது தரையை அடைகிறது. ஈர்ப்பிலான ஆர்முடுகல் g எனத் தரப்படின் B தொடர்பாக ஒவ்வொரு கல்லினதும் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

பலூன் B தொடர்பாக P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக, நேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து கல் P தரையை அடையும் கணத்திலே, தரையிலிருந்து பலூன் B இருக்கும் உயரத்தைக் கண்டு, அப்போது P யிற்கும் Q விற்குமிடையிலுள்ள தூரம்

$$t(g+f)\left(T + \frac{t}{2}\right)$$ எனக் காட்டுக.

நேரம் $t = 0$ இல் பலூனின் வேகம் $\uparrow u$ என்க.

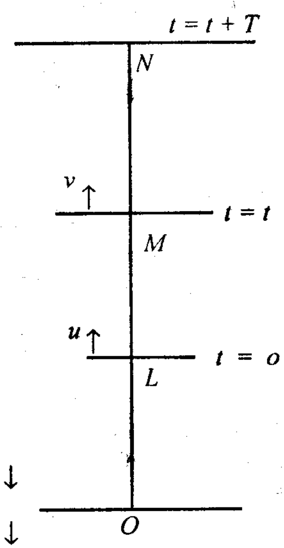
$V_{B,E} = \uparrow u$ எனவே $V_{P,E} = \uparrow u$

$V_{P,B} = V_{P,E} + V_{E,B} = \uparrow u + \downarrow u = 0$

நேரம் $t = t$ இல் பலூனின் வேகம் $\uparrow v$ என்க.

$V_{B,E} = \uparrow v$; எனவே $V_{Q,E} = \uparrow v$

$V_{Q,B} = V_{Q,E} + V_{E,B} = \uparrow v + \downarrow v = 0$



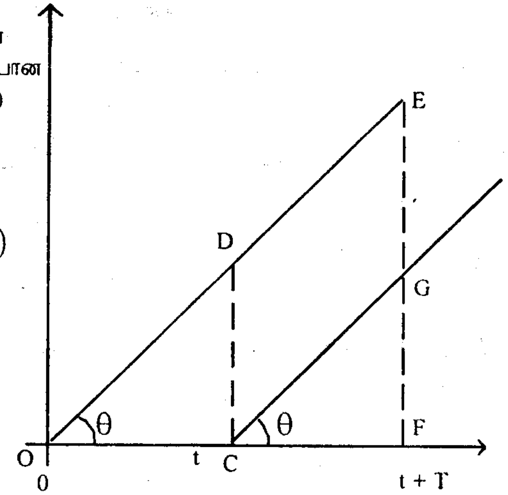
ஆர்முடுகல் :

$A_{P,E} = \downarrow g,\quad A_{B,E} = \uparrow f,\quad A_{Q,E} = \downarrow g$

$A_{P,B} = A_{P,E} + A_{E,B} = \downarrow g + \downarrow f = (g+f)\downarrow$

$A_{Q,B} = A_{Q,E} + A_{E,B} = \downarrow g + \downarrow f = (g+f)\downarrow$

$\tan\theta = (g+f)$ (பலூன் தொடர்பான வேகம்)



தரையிலிருந்து பலூனின் உயரம்

$= \Delta\, OEF$

$= \frac{1}{2}(T+t)(g+f)(T+t)$

$= \frac{1}{2}(g+f)(T+t)^2$

P யிற்கும் Q விற்குமிடையேயான

தூரம் $= \Delta OEF - \Delta CGF$

$= \frac{1}{2}(g+f)(T+t)^2 - \frac{1}{2}(g+f)\,T^2$

$= \frac{1}{2}(g+f)\left[(T+t)^2 - T^2\right]$

$= \frac{1}{2}(g+f)\,t\,(2T+t) = t(g+f)\left(T + \frac{t}{2}\right)$ ஆகும்.

இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பாவித்துச் செய்யப்பட்டுள்ளது.

O - தரை

நேரம் $(t+T)$ இல் துணிக்கை P சென்ற தூரம் LO.

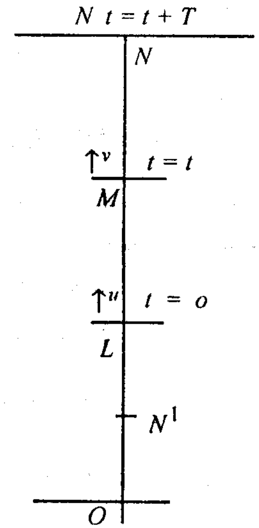
$\downarrow LO = -u(t+T) + \frac{1}{2}g(t+T)^2$ ------------(1)

நேரம் $(t+T)$ இல் பலூன் சென்ற தூரம்

$\uparrow LN = u(t+T) + \frac{1}{2}f(t+T)^2$ ------------(2)

$(1) + (2),\quad ON = \frac{1}{2}(g+f)(t+T)^2$

பலூனின் உயரம் $= \frac{1}{2}(g+f)(t+T)^2$



நேரம் T இல் கல் Q இயங்கியதூரம் MN^1 என்க.

$$\downarrow MN^1 = -VT + \frac{1}{2}gT^2$$

$$= -(u+ft)\,T + \frac{1}{2}gT^2 \quad \text{------------(3)}$$

$$LM = ut + \frac{1}{2}ft^2 \quad \text{------------(4)}$$

P, Q இற்கிடையேயான தூரம் ON^1 ஆகும்.

$$OM - MN^1$$

$$OL + LM - MN^1$$

$$= -u(t+T) + \frac{1}{2}g(t+T)^2 + ut + \frac{1}{2}ft^2 - \left[-(u+ft)\,T + \frac{1}{2}gT^2\right]$$

[(1), (3), (4) இலிருந்து]

$$= ftT + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}ft^2 + gtT$$

$$= tT(f+g) + \frac{1}{2}t^2(g+f)$$

$$= t(f+g)\left(T + \frac{t}{2}\right)$$ ஆகும்.

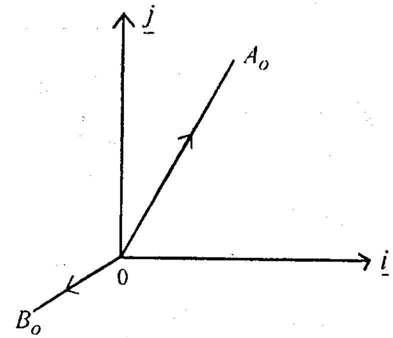
உதாரணம் 11

நண்பகல் 12 மணிக்கு வெளிச்சவீடு O ஐக் குறித்து இரு கப்பல்கள் A, B என்பவற்றின் தானக் கவிகள் முறையே $5\underline{i} + 20\underline{j}$ உம் $-20\underline{i} - 10\underline{j}$ உம் ஆகும். இங்கு $\underline{i}, \underline{j}$ என்பன முறையே கிழக்கு, வடக்குத் திசைகளிலான அலகுக் காவிகளாகும். [அலகுகள் km, kmh^{-1} இல் உள்ளன.] A, B என்பவற்றின் வேகங்கள் முறையே $(-21\underline{i} - 5\underline{j})$ உம் $(15\underline{i} + 25\underline{j})$ உம் ஆகும்.

A இன் B தொடர்பான வேகத்தைக் காண்க.

நண்பகல் 12 மணிக்குப்பிறகு t மணித்தியாலங்களில் B தொடர்பான A இன் தானக் காவியைக் காண்க.

இரு கப்பல்களும் எப்பொழுது மிகக்கிட்டியதூரத்திலிருக்கும் என்பதைக் (கிட்டிய நிமிடத்திற்கு) காண்க.



$$V_{A,E} = (-21\underline{i} - 5\underline{j})$$

$$V_{B,E} = (15\underline{i} + 25\underline{j})$$

$$V_{A,B} = V_{A,E} + V_{E,B}$$

$$= (-21\underline{i} - 5\underline{j}) - (15\underline{i} + 25\underline{j})$$

$$= -36\underline{i} - 30\underline{j}$$

t மணித்தியாலங்களில் A இன் தானக்காவி $\vec{OA}$ என்க,

$$\vec{OA} = \vec{OA_o} + t(-21\underline{i} - 5\underline{j})$$

$$(5\underline{i} + 20\underline{j}) + t(-21\underline{i} - 5\underline{j}) = (5-21t)\underline{i} + (20-5t)\underline{j}$$

B இன் தானக்காவி $\vec{OB}$ என்க.

$$\vec{OB} = \vec{OB_o} + t(15\underline{i} + 25\underline{j})$$

$$= (-20\underline{i} - 10\underline{j}) + t(15\underline{i} + 25\underline{j})$$

$$= (-20+15t)\underline{i} + (25t-10)\underline{j}$$

B ஐக் குறித்து A இன் தானக்காவி $\vec{BA}$

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

$$= \left[(5-21t)\underline{i} + (20-5t)\underline{j}\right] - \left[(-20+15t)\underline{i} + (25t-10)\underline{j}\right]$$

$$= (25-36t)\underline{i} + (30-30t)\underline{j}$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(25-36t)^2 + (30-30t)^2}$$

$$= \sqrt{2196t^2 - 3600t + 1525}$$

$$= \sqrt{2196\left(t^2 - \frac{3600}{2196}t + \frac{1525}{2196}\right)}$$

$$= \sqrt{2196\left[t^2 - \frac{100t}{61} + \left(\frac{50}{61}\right)^2 - \left(\frac{50}{61}\right)^2 + \frac{1525}{2196}\right]}$$

$$= \sqrt{2196\left[\left(t - \frac{50}{61}\right)^2 + \frac{1525}{2196} - \frac{2500}{3721}\right]}$$

$t = \frac{50}{61}$ இல் $\left|\overrightarrow{BA}\right|$ இழிவாக இருக்கும்.

$\frac{50}{61} \times 60 \simeq 49$ நிமிடம்

12·49 க்கு அவை கிட்டிய தூரத்திலிருக்கும்.

உதாரணம் 12

(a) P, Q எனும் இரு துணிக்கைகள் முறையே $(\underline{i} + \underline{j})$, $(-\underline{i} + 2\underline{j})$ எனும் வேகங்களுடன் இயங்குகின்றன. Q இன், P தொடர்பான வேகத்தை எழுதுக.

துணிக்கை P உற்பத்தியிலிருக்கும் அதேவேளை Q ஆனது $(2\underline{i} + \underline{j})$ ஐ தானக்காவியாகவுடைய புள்ளியில் உள்ளது. தொடரும் இயக்கத்தில் P, Q இற்கிடையேயான மிகக் குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

(b) A, B எனுமிரு துணிக்கைகள் முறையே $u\underline{i} + v\underline{j}$, $-4\underline{i} + 3\underline{j}$ எனும் மாறா வேகங்களுடன் Oxy தளத்தில் இயங்குகின்றன. A தொடர்பாக B யின் வேகத்தைக் காண்க.
நேரம் $t = 0$ இல், A ஆனது உற்பத்தி O விலும், B ஆனது தானக் காவி $10\underline{i}$ யைக் கொண்ட புள்ளியிலும் உள்ளன. பின்னர் துணிக்கைகள் ஒன்றுடனொன்று மோதுகின்றன.

(i) v யின் பெறுமானத்தையும் A யின் மிகச் சிறிய கதியையும் காண்க.
(ii) $t = 2$ ஆகும்போது மோதுகை நிகழுமெனின், u வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(a) $V_{P,E} = \underline{i} + \underline{j}$

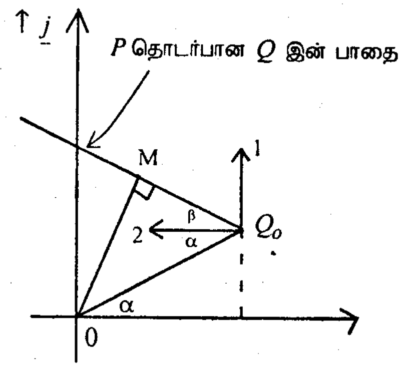
$V_{Q,E} = (-\underline{i} + 2\underline{j})$

$V_{Q,P} = V_{Q,E} + V_{E,P}$

$= (-\underline{i} + 2\underline{j}) + (-\underline{i} - \underline{j})$

$= -2\underline{i} + \underline{j}$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\tan\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta$



தொடரும் இயக்கத்தில் P, Q இற்கிடையேயான மிகக்கிட்டிய தூரம் $= OM$ ஆகும்.

$$OM = OQ_o \sin 2\alpha$$

$$= \sqrt{5} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ ஆகும்.}$$

வேறொரு முறையிலும் மிகக் கிட்டிய தூரத்தைக் கணிக்கலாம்.

t நேரத்தின் பின் P யின் தானக்காவி $\overrightarrow{OP}$, Q இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OQ}$ என்க.

$$\overrightarrow{OP} = t(\underline{i} + \underline{j})$$

$$\overrightarrow{OQ} = (2\underline{i} + \underline{j}) + t(-\underline{i} + 2\underline{j}) = (2-t)\underline{i} + (1+2t)\underline{j}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2-2t)\underline{i} + (1+t)\underline{j}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(2-2t)^2 + (1+t)^2}$$

$$= \sqrt{5t^2 - 6t + 5}$$

$$= \sqrt{5\left[t^2 - \frac{6}{5}t + 1\right]}$$

$$= \sqrt{5\left[\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{25}\right]}$$

$t = \frac{3}{5}$ ஆக $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ இழிவாக இருக்கும்.

இழிவுப் பெறுமானம் $\sqrt{5 \times \frac{16}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

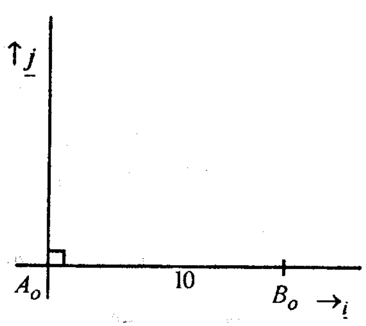
(b) $V_{A,E} = u\underline{i} + v\underline{j}$

$V_{B,E} = -4\underline{i} + 3\underline{j}$

$V_{B,A} = V_{B,E} + V_{E,A}$

$= \left(-4\underline{i} + 3\underline{j}\right) + \left(-u\underline{i} - v\underline{j}\right)$

$= (-4 - u)\underline{i} + (3 - v)\underline{j}$



துணிக்கைகள் மோதுவதால் $V_{B,A}$ ஆனது $\overrightarrow{B_o A_o}$ வழியே இருத்தல் வேண்டும்.

$\Rightarrow 3 - v = 0, \quad -4 - u < 0$

$v = 3, \quad u > -4$

A யின் கதி $= \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{9 + u^2}$ ஆகும்.

A யின் கதியின் மிகச்சிறிய பெறுமானம் $= \sqrt{9 + u^2} = \sqrt{9} = 3 \ (u = 0)$

மோதுகை நடைபெற எடுக்கும் நேரம் $= \frac{10}{\left|V_{B,A}\right|} = \frac{10}{u+4} = 2 \Rightarrow u = 1$

அல்லது

நேரம் t இன் பின் சந்திக்கும் எனின்

A இன் தானக்காவி $\underline{r}_A = t\left(u\underline{i} + v\underline{j}\right)$

B இன் தானக்காவி $\underline{r}_B = 10\underline{i} + t\left(-4\underline{i} + 3\underline{j}\right)$

சந்திக்கும் போது, $\underline{r}_A = \underline{r}_B$

$$\left(ut\underline{i} + vt\underline{j}\right) = (10 - 4t)\underline{i} + 3t\underline{j}$$

$\Rightarrow ut = 10 - 4t, \quad vt = 3t$

$\Rightarrow v = 3; \quad t = 2$ எனின் $2u = 10 - 8$

$2u = 2$

$u = 1$

பயிற்சி 2

விளையுள் வேகம் 2 (a)

1. $6kmh^{-1}$ உடன் சீராகப் பாய்கின்ற ஆற்றுக்குக் குறுக்காக $8kmh^{-1}$ உடன் வள்ளம் ஒன்று வலித்து செல்லப்பட்டால், வள்ளத்தின் விளையுள் வேகத்தைக் காண்க.
ஆற்றின் அகலம் $100m$ எனின், ஆற்றின் மறுகரையில் எவ்வளவு தூரத்தில் வள்ளம் சென்றடையும் எனக் காண்க.

2. $100m$ அகலமான ஆறு, $3kmh^{-1}$ உடன் பாய்கின்றது. $5kmh^{-1}$ உடன் நீந்தக் கூடிய ஒருவன் ஆற்றுக்கு நேர் குறுக்காகக் கடந்து எதிர்க்கரையை அடைய விரும்புகிறான். அவன் நீந்த வேண்டிய திசையையும், எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

3. சிறுவன் ஒருவன் $20kmh^{-1}$ உடன் சைக்கிளில் செல்கின்றான். அவன் கல் ஒன்றினை எறியும் போது, அதன் விளையுள் வேகம் அவன் பயணம் செய்கின்ற

திசைக்குச் செங்குத்தாக இருக்க வேண்டுமெனின், $10ms^{-1}$ உடன் கல்லினை எத்திசையில் எறியவேண்டுமெனக் காண்க.

4. துணிக்கை ஒன்று குறித்த இரு திசைகளில் சம கதிகளைக் கொண்டுள்ளது இக்கதிகளில் ஒன்று அரைவாசியாகப்படின், விளையுள் வேகமானது மற்றைய வேகத்துடன் அமைக்கும் கோணமும் அரைவாசியாக்கப்படுகின்றது. இரு வேகங்களுக்கும் இடையிலான கோணம் 120° எனக் காட்டுக.

5. கப்பல் ஒன்று வடக்கிற்கு 30° கிழக்குத்திசையில் (வ 30° கி) $18kmh^{-1}$ உடன் செல்கிறது. கப்பலின் மேற்தளத்தில் நிற்கும் ஒருவர் கப்பலின் பாதைக்குச் செங்குத்தான திசையில் முன்புறமாகவும், மறுபுறமாகவும் $1ms^{-1}$ என்ற கதியுடன் நடக்கின்றார். அவரின் உண்மையான இயக்கத் திசைகளைக் காண்க.

6. AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமொன்றின் பரிதியில் O யாதாயினுமொரு புள்ளி ஆகும். O இற்கு பருமனிலும், திசையிலும் OA, OB என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் வேகங்கள் இருப்பின் இவற்றின் விளையுள் O இனூடாகச் செல்லும் விட்டத்தினால் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

7. துணிக்கை ஒன்றிற்கு x அச்சின் திசையுடன் 0°, 60°, 150°, 300° கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில் முறையே v, $2v$, $3\sqrt{3}v$, $4v$, எனும் வேகங்கள் இருப்பின் விளையுள் வேகத்தைக் காண்க.

தொடர்பு வேகம் 2 (b)

1. A என்னும் ஒரு கப்பல், கிழக்கு நோக்கி $24kmh^{-1}$ உடனும், B என்னும் இரண்டாவது கப்பல் வடக்கு நோக்கி $32kmh^{-1}$ உடனும் செல்கிறது. B இன் A தொடர்பான வேகத்தைக் காண்க.

2. இரு நேரிய தெருக்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக O இல் குறுக்கிடுகின்றன. A, B எனும் இரு கார்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு தெருவில் O ஐ நோக்கி $20, 40ms^{-1}$ சீரான கதியுடன் செல்கின்றன. குறித்த ஒரு கணத்தில் அவை O விலிருந்து முறையே $300m$, $400m$ தூரங்களில் உள்ளன. அவைகளுக்கிடையேயான மிகக் கிட்டிய தூரத்தையும், அதற்கான நேரத்தையும் காண்க. அவை அந்நிலையிலிருக்கும் போது கார்களின் நிலைகளைத் தெளிவாகப் படத்தில் காட்டுக.

3. வடகிழக்குத் திசையில் $20kmh^{-1}$ உடன் செல்லும் கப்பலில் உள்ள ஒருவருக்கு இன்னொரு கப்பல் ஒன்று கிழக்குத் திசையில் $10kmh^{-1}$ உடன் செல்வது போலத் தெரிகிறது. இரண்டாவது கப்பலின் வேகத்தையும் இயக்கத்திசையையும் காண்க.

4. மேற்கு நோக்கி $28kmh^{-1}$ உடன் செல்லும் கப்பலில் உள்ள ஒருவருக்கு நேர்தெற்கே $2km$ தூரத்திலுள்ள கப்பலொன்று வடக்குத்திசையில் $21kmh^{-1}$ இல் செல்வது போல் தெரிகிறது. இக் கப்பலின் வேகத்தையும் அவைகள் மிகக் கிட்ட வரும்போது அவைகளுக்கிடையேயான தூரத்தையும் காண்க.

5. இரு தெருக்கள் ஒன்றையொன்று P இல் செங்கோணத்தில் குறுக்கிடுகின்றன. அவற்றில் ஒன்றில் $4 \cdot 5\ kmh^{-1}$ இல் நடந்து செல்லும் A என்பவன் மற்றைய தெருவில் $6Kmh^{-1}$ இல் நடந்து செல்லும் B என்பவனை P இல் காண்கின்றான். அப்போது A, P யிலிருந்து $50m$ தூரத்தில் உள்ளான். A இன் B தொடர்பான வேகத்தைக் காண்க. A, $18m$ தூரம் நடந்ததும் இருவரும் மிக அண்மையில் இருப்பர் எனக் காட்டுக.

6. உறுதியான காற்று வடக்கிற்கு 60° மேற்கிலிருந்து $12kmh^{-1}$ உடன் வீசுகின்றது. கிழக்கு நோக்கி $8\ kmh^{-1}$ உடன் நடந்து செல்லும் ஒருவருக்கு காற்று என்ன வேகத்துடன் வீசுவதாகத் தோன்றும்? தெற்கு நோக்கி நடந்து செல்லும் ஒருவருக்கு காற்று மேற்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றினால் அவரின் கதியைக் காண்க.

7. தென்கிழக்காக $13 \cdot 5kmh^{-1}$ இல் ஓடுகின்ற ஒருவருக்கு காற்று தெற்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. அவர் அதேதிசையில் $6kmh^{-1}$ உடன் நடந்து செல்கையில் காற்று தென்மேற்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றின் வேகத்தைக் காண்க.

8. $10kmh^{-1}$ உடன் கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பல் A காலை 9 மணிக்கு B எனும் கப்பலிலிருந்து தென்மேற்காக $3km$ தூரத்தில் உள்ளது. A ஐச் சந்திப்பதற்காக B, $15kmh^{-1}$ உடன் பயணம் செய்கின்றது எனின்,

(i) B செல்ல வேண்டிய திசையையும்

(ii) சந்திப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

9. நேரான சமாந்தரக் கரைகளையுடைய ஆற்றின் அகலம் 250m ஆகும். $3kmh^{-1}$ உடன் ஆறு பாய்கின்றத. நிலையான நீரில் $5kmh^{-1}$ உடன் நீந்தக்கூடிய ஒருவருக்கு
(a) எதிர்க்கரையை அடைய எடுக்கும் மிகக்குறைந்த நேரம்
(b) மறுகரையில் நேர் எதிரேயுள்ள புள்ளியை அடைய எடுத்த நேரம் என்பவற்றைக் காண்க.

10. சமாந்தரக் கரைகளையுடைய 300m அகலமான ஆற்றின் ஒரு கரையில் A எனும் புள்ளி உள்ளது. A இற்கு நேர் எதிரே மறுகரையிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து ஆற்றோட்டத்தின் திசையில் 400m தூரத்தில் B எனும் புள்ளி உள்ளது. ஆற்றின் வேகம் $4kmh^{-1}$ ஆகும். மனிதனொருவன் நிலையான நீரில் $vkmh^{-1}$ உடன் படகொன்றை வலித்துச்செல்ல முடியும். அவன் A யிலிருந்து புறப்பட்டு B ஐச் சென்றடைவதற்கு v இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க. இவ்வேகத்துடன் சென்றால் B ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

11. விமானம் ஒன்று நிலையான வளியில் $400kmh^{-1}$ உடன் பறக்கக்கூடியது. தெற்கிலிருந்து $50kmh^{-1}$ உடன் காற்று வீசும் போது இவ்விமானம் X என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட - கிழக்கேயுள்ள Y இற்குச் சென்று மீண்டும் X இற்குத் திரும்ப வேண்டியுள்ளது.
(i) புறமுகப் பறத்தலிற்கான
(ii) திரும்பிய பறத்தலிற்கான விமானம் செலுத்த வேண்டிய திசையைக் காண்க.

தூரம் Xy ஆனது 1000km எனின் இரு பயணங்களுக்குமான நேரங்களைக் காண்க.

12. ஒன்றையொன்று 60° இல் குறுக்கிடும் இரு நேரிய தெருக்களில், ஒவ்வொன்றிலும் ஒவ்வொரு காராக குறுக்கிடும் சந்தியை நோக்கிச் செல்கின்றன. அவற்றினுடைய கதிகள் 20 , $32kmh^{-1}$ ஆகவும், குறித்த கணத்தில் சந்தியிலிருந்து 70 , 40m தூரங்களிலும் உள்ளன. அவை மிகக் கிட்டிய தூரத்திலுருக்கும் போது ஒவ்வொரு காரும் சந்தியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளதெனக் காண்க.

13. இரு கப்பல்கள் அவற்றிடமுள்ள ஒளிமுதல்கள் மூலம் ஒன்றுக்கொன்று 16km தூரம் வரை தொடர்பு கொள்ள முடியும். முதலாவது கப்பல் நள்ளிரவு 12 மணிக்கு துறைமுகத்திலிருந்து $8kmh^{-1}$ உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. அரை மணித்தியாலத்தின்பின் இரண்டாவது கப்பல் வடமேற்கு நோக்கி $14kmh^{-1}$ உடன் செல்கின்றது. முதலாவது தொடர்பாக இரண்டாம் கப்பலின் வேகத்தைக் காண்க. எந்நேரத்தில் அவைகளுக்கிடையேயான தொடர்பு அற்றுப்போகும் எனக் காண்க.

14. இரு தெருக்கள் 45° இல் ஒன்றையொன்று குறுக்கிடுகின்றன. A , B எனும் இரு மோட்டார் கார்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு தெருவிலே சந்தியை நோக்கி $20kmh^{-1}$ இல் பயணம் செய்கின்றன. A ஆனது சந்தியிலிருந்து $3km$ தூரத்திலும், B யானது சந்தியிலிருந்து $2\ km$ தூரத்திலும் உள்ளது.
(i) அவைகளுக்கிடையேயான மிகக் கிட்டிய தூரத்தையும்
(ii) அப்பொழுது சந்தியிலிருந்து A யின் தூரத்தையும் காண்க.

15. மழைத்துளிகள் $3ms^{-1}$ உடன் நிலைக்குத்தாக விழுகின்றன. காற்று வடக்கு நோக்கி $18kmh^{-1}$ உடன் வீசும்போது, வடக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒருவருக்கு மழைத்துளிகள் என்ன வேகத்தில் விழும்?

16. A , B என்னும் இருகப்பல்கள் நண்பகல் 12 மணிக்கு P , Q என்னும் புள்ளிகளில் உள்ளன. இங்கு $PQ = 39$km. கப்பல் A , PQ இற்கு செங்குத்தான திசையில் $45kmh^{-1}$ இல் செல்கின்றது. கப்பல் B ஆனது $30kmh^{-1}$ உடன் நேரிய பாதையொன்றில் A ஐ இயலக்கூடிய அளவு நெருங்கிச் செல்லுமாறு பயணம் செய்கிறது. B இன் இயககத் திசையைக் காண்க.
இரு கப்பல்களும் எப்பொழுது மிகக் கிட்ட வரும் எனக் காண்க.

17. $6kmh^{-1}$ உடன் மேற்கு நோக்கி ஓடுகின்ற ஆறு தொடர்பாக ஒரு கப்பல் வடக்கு நோக்கி $8kmh^{-1}$ உடன் செல்கிறது. கிழக்கு நோக்கி $20kmh^{-1}$ உடன் செல்லும் புகையிரதத்தின் கப்பல் தொடர்பான வேகம் யாது?

18. $4kmh^{-1}$ உடன் வடக்கு நோக்கி நடக்கும் ஒருவனுக்கு மழைத்துளிகள் நிலைக்குத்தாக வீழ்வதாகத் தோற்றியது. அவன் தனது கதியை $8kmh^{-1}$ ஆக அதிகரித்த போது மழைத்துளிகள் 45° கோணத்தில் அவனைச் சந்திப்பதாகத் தோன்றியது. மழைத்துளிகளின் வேகத்தைக் காண்க.

19. கிழக்கிலிருந்து மாறாக்கதியுடன் காற்று வீசிக்கொண்டிருந்த பொழுது ஒருவன் A என்னும் இடத்திலிருந்து சைக்கிளில் புறப்பட்டு ஒரு மட்டான நேர்ப்பாதை வழியாக A யிற்கு வடக்கே $18km$ தூரத்திலுள்ள B என்னும் இடத்திற்குச் செல்கின்றான். அவன் $6kmh^{-1}$ உடன் முதல் அரைவாசித் தூரத்தையும் கடக்கின்றான். காற்று கி 30° வடக்கிலிருந்து வீசுவதாக அவனுக்குத் தோன்றுகிறது. காற்றின் கதி யாது?
சைக்கிள்காரன் மீதி அரைவாசித்தூரத்தையும் கடக்கும் போது தன் கதியைக் கூட்டுகின்றான். காற்று வ 30° கிழக்கிலிருந்து வீசுவதாக அவனுக்குத் தோற்றுகிறத. A யிலிருந்து B யிற்குச் செல்ல எடுத்த மொத்த நேரம் யாது?

20. மழை மெதுவாகத் தூறிக்கொண்டிருந்த பொழுது சிறிய மழைத்துளிகள் நிலையான வளியில் $8\sqrt{3}\,ms^{-1}$ மாறாக் கதியுடன் நிலைக்குத்தாக விழுகின்றன. வடக்கிலிருந்து ஒரு உறுதியான காற்று வீசிய பொழுது மழைத்துளிகள் நிலைக்குத்துடன் 30° கோணம் அமைய சாய்வாக விழுகின்றன. காற்றின் கதியைக் காண்க?

வடக்கிலிருந்து இந்த உறுதியான காற்று வீசிக்கொண்டிருந்த பொழுது மழையில் வடக்கு நோக்கிச் சீரான கதியுடன் செல்லும் ஒருவனுக்கு மழைத்துளிகள் நிலைக்குத்துடன் 60° கோணம் அமைய சாய்வாக வீழ்வதாகத் தோற்றுகின்றன. சைக்கிள்காரனின் கதியைக் காண்க?

2 (C)

1. குறித்த ஒரு கணத்தில் X, Y எனும் இருகப்பல்களுக்கிடைத் தூரம் d ஆகும். X இன் வேகம் XY உடன் இடஞ்சுழியாக α திசையில் u ஆகவும், Y இன் வேகம் YX உடன் வலஞ்சுழியாக β திசையில் v ஆகவும் உள்ளது. Y தொடர்பான X இன் வேகத்தைக் காண்க?

(i) அவைகளுக்கிடையேயான மிகக்குறைந்த தூரத்தையும்

(ii) இதற்கான நேரத்தையும் காண்க?

2. ABC எனும் மூன்று கப்பல்கள் 12, 9, $15kmh^{-1}$ இல் பயணம் செய்கின்றன. குறித்த ஒரு கணத்தில் $AB = 4\ km$, $BC = 3\ km$, $CA = 5\ km$ ஆகவும், A தொடர்பான C யின் வேகம் CB வழியேயும், C தொடர்பான B இன் வேகம் BA வழியேயும் உள்ளன. A யின் இயக்கத் திசை AB வழியே இருப்பின், B யினதும் C யினதும் இயக்கத் திசைகளைக் காண்க?

3. கப்பல் ஒன்று வடக்கிலிருந்து 60° கிழக்காக (வ 60° கி) $30\,kmh^{-1}$ உடன் செல்கிறது. பி. பகல் 1மணிக்கு இரண்டாவது கப்பல் ஒன்று முதலாவதற்குக் கிழக்கே $20\,km$ தூரத்தில் காணப்படுகிறது. முதலாவது கப்பலைச் சந்திப்பதற்கு இரண்டாவதற்கு இருக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த வேகத்தைக் காண்க?

இரண்டாவது கப்பலின் வேகம் $24kmh^{-1}$ எனின் அது இரு திசைகளில் சென்று முதலாவது கப்பலைச் சந்திக்கலாம் எனக் காட்டி அவற்றுள் சந்திக்க எடுக்கும் மிகக்குறைந்த நேரத்தைக் காண்க.

4. நிலையான வழியில் v எனும் கதியுடன் செல்லக்கூடிய விமானம் ஒன்று w கதியுடன் வீசுகின்ற காற்றுடன் θ கோணத்தை அமைக்கும் திசையில்

பறந்து செல்கிறது. விமானி தன் பாதையுடன் α கோணத்தை ஆக்கும் திசையில் விமானத்தை செலுத்த வேண்டுமெனக் காட்டுக. இங்கு $v\sin\alpha = w\sin\theta$ ஆகும்.

விமானம் சென்றடைய வேண்டிய தூரம் d ஆகவும், புறமுகப்பறத்தலினதும் திரும்பிய பறத்தலினதும் நேரங்கள் t_1, t_2 ஆகவுமிருப்பின்

(a) $d(t_1 + t_2) = 2v\,t_1\,t_2\cos\alpha$

(b) $d(t_1 \sim t_2) = 2wt_1\,t_2\cos\theta$

(c) $d^2 = t_1\,t_2\left(v^2 - w^2\right)$ எனக் காட்டுக

5. ஒருநாசகாரி வடக்கு நோக்கி u நொட்டுக்கள் என்ற கதியுடன் செல்கிறது. ஒரு நாள் நடு இரவு நாசகாரிக்குக் கிழக்கே d நொட்டிக்கல் மைல்களுக்கு அப்பால் எதிரிக்கப்பலொன்று காணப்பட்டது. எதிரிக்கப்பல் வடக்கிலிருந்து θ° மேற்கு எனும் திசையிலே v நொட்டுக்கள் $(v\cos\theta > u)$ என்ற கதியுடன் செல்கின்றது. தொடர்பு வேகத்தைப் பாவித்து நாசகாரி தொடர்பான எதிரிக்கப்பலின் வேகத்தைக் காண்க. நாசகாரி தொடர்பான எதிரிக்கப்பலின் பாதையையும் வரைக.

$\dfrac{dv\sin\theta}{v^2 + u^2 - 2uv\cos\theta}$ மணிக்கு அவை மிகக் கிட்டிய தூரமாகிய

$\dfrac{d(v\cos\theta - u)}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos\theta}}$ தூரத்திலிருக்குமெனவும் காட்டுக.

6. A, B எனும் இரு விமானமிறங்கு துறைகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் $d\,$km ஆகும். AB இன் திசையுடன் θ எனும் திசையிலே $u\,kmh^{-1}$ உடன் உறுதியான கிடையான காற்று வீசுகிறது. X, Y ஆகிய இரண்டு விமானங்கள் முறையே A, B ஆகிய இறங்கு துறைகளிலிருந்து ஒருங்கமையப் புறப்பட்டு நேரான கிடையான பாதைகளில் செல்கின்றன. நிலையான வளியில் ஒவ்வொரு விமானத்தினதும் கதி $v\,kmh^{-1}$ ஆகும்.

(i) $v > u$ ஆயின், விமானங்கள் X உம் Y உம் முறையே AB. BA வழியே பறக்க முடியுமென்றும் அவை புறப்பட்டு $\dfrac{d}{2\sqrt{v^3 - u^2\sin^2\theta}}$ மணியின் பின்னர் ஒன்றையொன்று கடக்குமெனவும் காட்டுக.

(ii) விமானங்கள் ஒன்றையொன்று மிகக் குறைந்த இயல்தகு நேரத்தில் சந்திக்க வேண்டுமெனின் அவை செல்லவேண்டிய வழிகளைக் காண்க. அவை சந்திக்கும் புள்ளி AB என்ற கோட்டிலிருந்து $\frac{d\ u\sin\theta}{2v}$ km தூரத்திலிருக்குமெனவும் காட்டுக.

7. a பக்கமுடைய சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சியிலே A , B , C எனும் மூன்று விமான நிலையங்கள் அமைந்துள்ளன. அமைதியான நாளொன்றில் காற்று வீசாதபோது விமானமொன்று ஆகக் கூடிய கதி v உடன் செல்ல வல்லது. AB என்னும் திசையிலே $u\,(< v)$ என்னும் கதியுடன் சீரான காற்று வீசும்போது இவ்விமானம் இடைவழியில் நிற்காமல் சுற்றுப்பாதை $ABCA$ வழியே செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\left[\frac{v + \sqrt{4v^2 - u^2}}{v^2 - u^2}\right]a$ எனக் காட்டுக.

அமைதியான நாளொன்றில் $ABCA$ வழியே கதி v உடன் செல்வதற்கு விமானம் N லீற்றர் எரிபொருளை உபயோகிக்குமெனின் காற்றோட்டமுள்ள நாளில் அதற்கு வேண்டிய எரிபொருள் எவ்வளவாகும்?

8. விமானம் ஒன்று A இல் இருந்து B இற்கு நேர் வழியில் பறந்து மீழ்கிறது. அமைதியான காலநிலையில் கதி u ஆகவும், இரு பிரயாணங்களுக்குமெடுத்த நேரம் T ஆகவும் அமையும் ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் காற்றின் வேகம் AB யிற்குச் சாய்வாக கோணம் θ ஆகவுள்ள திசையில் v ஆகும். போகும் பிரயாணத்திலும், மீளும் பிரயாணத்திலும் விமானம் AB யிற்குச் சாய்வாக $\sin^{-1}\frac{v\sin\theta}{u}$ என்னும் திசையில் செல்ல வேண்டுமென நிறுவுக.

இரு பிரயாணங்களுக்கும் எடுத்த நேரம் $\frac{Tu\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\theta}}{u^2 - v^2}$ எனக் காட்டுக.

விமானத்தின் முழுச்செல்வழி ஒரு கிடையான $ABCD$ எனும் சதுரமாகவும், காற்றின் திசை ஒரு மூலைவிட்டத்திற்கு சமாந்தரமாகவும் இருந்தால் சுற்றுப்பிரயாணத்திற்கு எடுத்த முழு நேரத்தையும் காண்க.

9. ஆகாய விமானமொன்றின் செலுத்தும் கதி $v\,kmh^{-1}$ ஆகும். காற்றில்லாத ஒரு அமைதி நாளிலே மீள எரிபொருளிடாமல் அவ்விமானம் நிற்காது பறக்கக் கூடிய உயர் தூரம் $d\,km$ ஆகும். காற்றுள்ள ஒரு நாளில் வடக்கிலிருந்து $u\,kmh^{-1}$ உடன் ஓர் உறுதியான சீரான காற்று வீசும்போது ஆகாய விமானம் ஓர் அடி O வில் இருந்து வடக்கிற்கு θ° கிழக்குத் திசையிலுள்ள புள்ளி R இற்கு நிற்காது பறந்து அடி O விற்கு மீண்டும் வருகிறது. தூரம் OR இன் இயல்தகு உயர் பெறுமதி $\frac{d1 - k^2}{2\left(1 - k^2\sin^2\theta\right)^{1/2}}$ km எனக் காட்டுக. இங்கு $k = \frac{u}{v}$ ஆகும்.

பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் வெளிநோக்கிய உள்நோக்கிய பறப்புக்களின் போது நுகரப்பட்ட எரிபொருளின் விகிதத்தைக் காண்க.

(i) $\theta = 0$; **(ii)** $\theta = \pi/2$, **(iii)** $\theta = \pi$

10. O எனும் விமான நிலையத்தை சுற்றி A , B , C ஆகிய மூன்று விமான நிலையங்கள் அமைந்துள்ளன. $OA = OB = OC = a$ மீற்றர். $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA$ ஆகும். அமைதியான நாளொன்றில் விமானம் ஒன்று பறக்கும் உயர்கதி ums^{-1} ஆகும். உறுதியான ஒரு காற்று OA இன் திசையாக vms^{-1} கதியோடு வீசுகிறது. $(u > v)$ $OAOBOCO$ ஐப் பறப்பதற்கு விமானம் எடுக்கும் மிகக்குறைந்த நேரம் $\frac{2a\left[u + \sqrt{4u^2 - 3v^2}\right]}{u^2 - v^2}$ எனக் காட்டுக.

11. **(i)** பக்கம் a ஐ உடைய சதுரம் $ABCD$ இன் உச்சிகளில் A, B, C, D எனும் நான்கு விமான நிலையங்கள் அமைந்துள்ளன. அமைதியான வளியில் ஒரு விமானத்தின் கதி u ஆகும். AB இன் திசையில் உறுதியானதும் ஒரு சீரானதுமான காற்று $v(< u)$ எனும் கதியுடன் வீசும்போது விமானமானது இடைவழியில் நிற்காது $ABCDA$ வழியே செல்ல எடுக்கும் நேரம் $2a\left[\frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} + \frac{u}{u^3 - v^2}\right]$ எனக் காட்டுக.

(ii) ஒரு சீராகச் செல்லும் ஆறொன்றின் ஒரு கரையில் P , Q என்னும் துறைமுகங்கள் உள்ளன. நீராவிக் கப்பல் ஒன்று P இலிருந்து Q விற்குச் செல்ல எடுக்கும் நேரம் t_1 மணித்தியாலங்கள் ஆகவும், Q விலிருந்து P யிற்குச் செல்ல எடுக்கும் நேரம் t_2 மணித்தியாலங்கள் ஆகவும்

$(t_2 > t_1)$ உள்ளன. ஒரு மரக்கட்டை P யிலிருந்து Q விற்கு மிதந்து செல்ல எடுக்கும் நேரம் $\dfrac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1}$ மணி எனக் காட்டுக.

12. ஒரு கப்பல் u எனும் சீரான கதியுடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கிறது. அக் கப்பலிலிருந்து ஒரு உலங்கு வானூர்தி (Helicopter) ஒரு சிறு தீவிற்குப் பறந்து உடனே அக்கப்பலுக்குத் திரும்புகிறது. பறத்தல் முழுவதற்கும் உலங்குவானூர்தி கப்பலுக்குத் தொடர்பான ஒரு சீர்க்கதி u உடன் வடக்கிற்கு α மேற்காக நேர்க்கிடைக் கோட்டில் செல்கிறது. புறமுகப்பறத்தலினதும், திரும்பிய பறத்தலினதும் வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ உலங்குவானூர்தி பறக்கும் போது அத்தீவிலிருந்து அவதானிக்கப்படும் அதன் வேகம் ஒரு செங்கோணத்தினால் திரும்பும் எனக் காட்டுக. அக்கப்பல் செல்லும் வழிக்கும் அத்தீவிற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் d எனின் உலங்கு வானூர்தி முழுப்பறத்தலுக்கும் செலவழித்த மொத்த நேரம் $\dfrac{2d}{u\sin\alpha}$ எனக் காட்டுக.

13. AB எனும் நேரான புகைவண்டிப் பாதை ஒன்று CD எனும் நேரான தெருவை O விலே இடைவெட்டுகிறது. $\angle AOC = \theta$. ஒரு புகைவண்டியும் ஒரு காரும் முறையே v_1, v_2 எனும் சீர்க்கதிகளுடன் திசைகள் AO, CO இலே O ஐ நோக்கிச் செல்கின்றன. காரினது புகைவண்டி தொடர்பான வேகத்தைக் காண்க. புகைவண்டியின் நீளம் l ஆகும். O விலிருந்து காரின் தூரம் d_2 ஆக இருக்கும் போது O விலிருந்து புகைவண்டியின் எஞ்சின் தூரம் d_1 ஆயிருக்க $\dfrac{d_2}{v_2} < \dfrac{d_1}{v_1}$ அல்லது $\dfrac{d_2}{v_2} > \dfrac{d_1 + l}{v_1}$ ஆயிருந்தால், காரானது புகைவண்டியுடன் மோதாதென உய்த்தறிக.

14. X, Y, Z என்ற மூன்று பறவைகள் முறையே A, B, C என்ற மர உச்சிகளிலே இருக்கின்றன. A, B, C ஒரே கிடைத்தளத்தில் உள்ளன. $AB = BC = CA = a$ மீற்றர் ஆகும். ஒவ்வொரு பறவையின் கதியும் அசையா வளியில் vms^{-1} ஆகும். ஓர் உறுதியான கிடைக் காற்று $u\,(< v)\,ms^{-1}$ கதியுடன் இடையம் AD யின் திசையில் வீசுகிறது. இங்கு D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி. பறவைகள் X, Y, Z ஒரேசமயத்தில் $(t = 0)$ A, B, C ஐ விட்டு

நீங்கி சீரான கதியுடன் AB, BC, CA ஆகிய பாதைகளிலே பறந்து B, C, A என்பவற்றில் முறையே t_1, t_2, t_3 செக்கன்களின் பின்னர் அமர்கின்றன. t_1, t_2, t_3 ஐக் கண்டு

(i) $t_1 < t_2 > t_3$ எனவும்

(ii) $t_3 - t_1 = \dfrac{\sqrt{3}\, au}{v^2 - u^2}$ எனவும் காட்டுக.

15. நேர் தெற்கே 36 நொற்றுக்கதியில் ஒரு கப்பலும் நேர்கிழக்கே 24 நொற்றுக் கதியில் இரண்டாவது கப்பல் ஒன்றும் செல்கின்றன. முதல் கப்பலிலுள்ள மாலுமிகளுக்கு மூன்றாவது கப்பல் ஒன்று வடகிழக்குத் திசையில் செல்வதாகத் தோற்றுகையில், இரண்டாவது கப்பலிலுள்ள மாலுமிகளுக்கு அது தெற்கிற்கு 30° மேற்கான ஒரு திசையில் செல்வதாகத் தோற்றுகிறது. மூன்றாவது கப்பல் செல்லும் திசையையும், அதன் கதியையும் காண்க.

16. கப்பல் ஒன்று நேர் வடகிழக்குத் திசையில் 24 நொற்றுக் கதியில் செல்கிறது. இன்னொரு கப்பல் 16 நொற்றுக் கதியில் நேர் வடமேற்குத் திசையில் செல்கிறது. மூன்றாம் கப்பலொன்று, முதலாம் கப்பலோட்டிகளுக்கு மேற்குத் திசையில் செல்வதைப் போலவும் இரண்டாம் கப்பலோட்டிகளுக்கு கிழக்கிற்கு 15° வடக்கான திசையிலே செல்வதைப் போலவும் தோன்றுகிறது. மூன்றாம் கப்பலின் கதியையும் செல்வழியையும் காண்க.

17. a அகலமுடைய நேரான ஆறு ஒன்று w எனும் ஒருமைக் கதியுடன் ஓடுகின்றது. படகொன்றிலிருக்கும் மனிதனொருவன் ஒருகரையிலிலுள்ள X எனும் புள்ளியிலிருந்து நேரெதிரே மறுகரையிலுள்ள Y எனும் புள்ளியை அடைய விரும்புகிறான். நிலையான நீரில் அவனுடைய படகின் கதி v ஆகும்.

(i) $v > w$ ஆயின் மட்டுமே அவன் Y ஐ அடைய முடியுமெனக் காட்டுக. இச்சந்தர்ப்பத்தில் அவன் Y ஐ அடைய எடுத்த நேரத்தைக் காண்க.

(ii) $v < w$ எனின், அவன் எதிர்க்கரையை Y இலிருந்து மிக அருகில் அடைவதற்கு படகைச் செலுத்த வேண்டிய திசையைக் காண்க. இதற்கான நேரத்தையும் காண்க.

(iii) அவன் மிகக் குறைந்த நேரத்தில் ஆற்றைக் கடக்க வேண்டுமெனில் படகினை எத்திசையில் செலுத்த வேண்டும்? இதற்கு எடுக்கும் நேரம் யாது?

18. b மீற்றர் அகலான நேர் கரைகளையுடைய ஓர் ஆறு $w\, ms^{-1}$ என்ற மாறாக் கதியில் பாய்கின்றது. X என்பது ஆற்றின் கரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். Y என்பது X இற்கு நேரெதிரே மற்றைய கரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். நிலையான நீரில் ஒரு பையன் $v(>w)ms^{-1}$ என்ற கதியில் நீந்த முடியும். ஆறு பாயும் திசைக்கு எதிர்த்திசையுடன் θ எனும் கோணம் அமைய அவன் X இலிருந்து நீந்துகிறான். கரைகளுக்குத் தொடர்பாக அப்பையனுடைய வேகத்தைக் காண்க.

அவன் ஆறு பாயும் திசையில் எதிர்க்கரையிலுள்ள Z எனும் புள்ளியை அடைகிறான். அதன்பின் அவன் கரையோரமாக ஆறுபாயும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் Z இலிருந்து Y இற்கு $u\, ms^{-1}$ கதியில் ஓடுகிறான். அவன் Y ஐ அடைய எடுக்கும் முழுநேரம் T செக்கன்கள்.

$T = \frac{b}{uv}\left[(u+w)\,cosec\,\theta - v\cot\theta\right]$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

ஆறு பாயும் திசைக்கு எதிர்த்திசையுடன் $\cos^{-1}\left(\frac{v}{u+w}\right)$ எனும் கோணத்தில் அவன் நீந்தினால் T இன் பெறுமதி அதிகுறைந்தது எனவும் காட்டுக.

19. ஆற்றங்கரையொன்றில் A எனும் புள்ளியிலுள்ள ஒரு மனிதன் ஆற்றின் மேற்பாகத்தில் மறுகரையிலுள்ள B எனும் புள்ளியை அடைய விரும்புகிறான். அதன் நேரிய சமாந்தரமான கரைகளுக்கிடையே அடங்கலும் நீரானது ஒரேவேகத்துடன் பாய்கின்றது எனக் கொண்டு A யிலிருந்து B யிற்கு நேராகத் துடுப்பு வலித்துச் செல்வதற்கு அவன் படகை எத்திசையை நோக்கி வைத்தல் வேண்டும்?
அவன் துடுப்பு வலிக்கும் போது, சீராக உஞற்றியும் எதிர்க்கரையை C என்னும் புள்ளியில் சென்றடையும் வரை தனது படகை AB இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நிலையான திசையை நோக்கியவாறு வைத்தும் சென்று பின்னர் B ஐ அடையும் வரை கரைவழியே துடுப்பு வலித்தும் சென்றால் எடுக்கும் மொத்த நேரமானது அவன் நீரோட்டத்திற்கு எதிராக AB என்னும் தூரத்தை துடுப்பு வலித்துச் சென்றிருந்தால் எடுத்திருக்கக் கூடிய அதே நேரமாகுமெனக் காட்டுக.

20. வடக்கு நோக்கிக் கப்பல் ஒன்று ஒரு நேர்ப்பாதை வழியே $u\, kmh^{-1}$ எனும் ஒருமைக் கதியுடன் செல்கிறது. நேரம் $t=0$ இல் எதிரி நீர் மூழ்கி ஒன்று இக்கப்பல் தொடர்பாக வடக்கிற்குக் கிழக்கே கோணம் θ° அமையும் திசையில்

$d$km தூரத்தில் தோன்றுகின்றது. நீர்மூழ்கியின் அதிஉயர் கதி $v kmh^{-1}$ ஆகும். $v < u\sin\theta$ எனின் நீர்மூழ்கியானது கப்பலைத் தடைசெய்ய இயலாது எனக் காட்டுக.

$u\sin\theta < v < u$ ஆயின் $t = t_1$, $t = t_2$ என்பவற்றுக்கிடையிலான எந்த ஒரு தருணத்திலும் நீர்மூழ்கியானது கப்பலைத் தடை செய்யக் கூடும் எனக் காண்பித்து t_1, t_2 என்பவற்றைக் காண்க. $t_2 - t_1$ எனும் நேர இடைவேளையைக் கணிக்க..

21. நிலையான நீரில் மனிதனொருவன் படகொன்றை உறுதியான கதி $u\, ms^{-1}$ உடன் வலிக்க முடியும். நாயொன்று உறுதியான கதி $v\, ms^{-1}$ உடன் நீந்த முடியும். a மீற்றர் அகலமான $V\, ms^{-1}$ எனும் உறுதியான வேகத்துடன் பாயும் நேரிய ஆறொன்றின் கரையிலுள்ள புள்ளி A யில் மனிதன் நிற்கிறான். அதே கரையிலுள்ள புள்ளி B யில் நாய் நிற்கின்றது. AB d மீற்றர் நீளமானதும், $V\ (V < u < v)$ யின் திசையிலுள்ளதுமாகும். A யிற்கு நேர்எதிரே மற்றக்கரையிலுள்ள புள்ளி C ஐ அடையும் வண்ணம் மனிதன் தனது படகை வலிக்கிறான். A யிலிருந்து C யிற்கு அவன் செல்ல எடுத்த நேரம் $\frac{a}{\sqrt{u^2 - V^2}}$ செக்கன்கள் எனக் காட்டுக.

மனிதன் தனது படகை A யிலிருந்து தள்ளும் போது B யில் உள்ள நாய் ஆற்றில் பாய்ந்து ஆற்றில் மனிதனைச் சந்திக்கும் வண்ணம் ஒரு நேர்கோட்டில் நீந்துகிறது. AC மீது A யிலிருந்து $\frac{d\sqrt{u^2 - V^2}}{\sqrt{v^2 - u^2 + V^2} - V}$ மீற்றர் தூரத்தில் புள்ளி D யில் இத்தூரம் a இலும் குறைவாக இருக்கும் ஆகில், நாய் மனிதனைச் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

22. ஒரு கப்பலானது வடக்கு நோக்கி u வேகத்துடன் செல்கிறது. காற்றானது கிழக்கிற்கு θ° வடக்கு என்ற திசையில் இருந்து வீசுவது போலத் தோன்றுகிறது. இங்கு $0 < \theta < 45^\circ$ ஆகும். அக்கப்பலானது திரும்பித் தெற்கு முகமாக அதே கதி u உடன் இயங்குகிறது. அப்பொழுது காற்றானது தெற்கு θ° கிழக்குத்திசையில் இருந்து வீசுவது போலத் தோற்றுகிறது. காற்றின் உண்மைக்கதி u என நிறுவி அதன் திசையைக் காண்க.

23. போர்க் கப்பல் ஒன்று நேரான செல்வழி ஒன்றிலே சீரான கதியுடன் செல்கிறது. குறித்த நாள் ஒன்றிலே பகைவர் கப்பல் ஒன்று போர்க் கப்பலுக்கு நேர்கிழக்கே $d$km தூரத்தில் இருப்பதாகக் காணப்பட்டது. பகைவர் கப்பல் வடக்கு நோக்கி $v\ kmh^{-1}$ எனும் சீரான கதியுடன் செல்கிறது. போர்க்கப்பல் அடையக்கூடிய உயர் கதி $u\ kmh^{-1}$ ஆகும். இங்கு $(u < v)$ அதன் துவக்குகள் சுடும் வீச்சு $R\,km$ ஆகும். $R < \dfrac{d\sqrt{v^2 - u^2}}{v}$ எனின் பகைவர் கப்பல் ஆபத்தில் இருக்க மாட்டாது என்று தொடர்பு வேகக் கோட்டின் மூலமாகக் காட்டுக.

24. S_1, S_2 எனும் இரு கப்பல்களின் தானக்காவிகள் முறையே r_1, r_2 ஆகும். இவை ஒரு தொடை அச்சுக்கள் Oxy தொடர்பாக $r_1 = (1 + 4t)\,i + 7t\ j$; $r_2 = 6ti + (1 + 8t)\ j$ இனால் தரப்படுகிறது. இங்கு t மணித்தியாலத்தில் நேரமாகும், தூரங்கள் கலவர் மைலில் அளக்கப்படுகின்றன.

(a) S_1 தொடர்பாக S_2 தானக்காவி

(b) S_1 தொடர்பாக S_2 இன் வேகம் ஆகியவற்றைக் காண்க. S_1 இற்கும் S_2 இற்கும் இடையிலுள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் கலவர் மைல் $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

25. ஒரு கப்பல் P ஆனது கதி $u\,kmh^{-1}$ இல் செல்லத்தக்கது. குறித்த கணம் ஒன்றில் ஓர் இரண்டாம் கப்பல் Q ஆனது P யிற்கு நேர் வடக்கே தூரம் $d$km இல் கதி $2u\,kmh^{-1}$ இல் கிழக்கு நோக்கிச் செல்வதாக அவதானிக்கப்பட்டது. P யிற்கும் Q விற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் ஓர் இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக கப்பல் P யின் செல்வழி செப்பம் செய்யப்படுகிறது. வேக முக்கோணியை வரைந்து

(i) P யினது செல்வழியின் திசை

(ii) Q தொடர்பான P யின் வேகம் என்பவற்றைக் காண்க.
P யின் பாதையை Q இன் சட்டத்தில் பரும்படியாக வரைந்து இதிலிருந்து

(iii) P இற்கும் Q விற்கும் இடையிலுள்ள இழிவுத்தூரம்

(iv) கப்பல்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகக்கிட்டிய தூரத்தில் இருக்கும் நிலையை அடையு முன்பாக எடுக்கும் நேரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

26. u நொற்று உயர் கதியையுடைய Q எனும் கடத்தற்காரரின் படகு ஒன்று தானம் A இல் இருக்கிறது. A யிற்கு நேர்தெற்கே a கலவர் மைல் தூரத்திலே P என்னும் உரோந்துப் படகொன்று $v\,(> u)$ நொற்று மாறாவேகத்துடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றதெனத் தகவல் கிடைக்கின்றது. P இன் செல்வழியில் மாற்றம் எதுவும் இல்லை எனில், P இன் பாதையில் இருந்து இயன்றவரை தூரத்தில் இருக்குமாறு Q செல்ல வேண்டிய திசையைக்காண்க. இச்சந்தர்ப்பத்தில் அவற்றுக்கிடையேயுள்ள மிகக் குறைவான தூரம் $\dfrac{a\dot{u}}{v}$ எனக் காட்டுக.

இன்னொரு சந்தர்ப்பத்தில் வேகம் v உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்ற உரோந்துப்படகு P ஆனது மேற்கே b கலவர் மைல் தூரத்தில் Q என்ற கப்பலைக் காண்கிறது. Q ஆனது $\sqrt{v^2 - u^2}$ நொற்று வேகத்துடன் கிழக்கிலிருந்து தெற்காக $\cos^{-1}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ எனும் கோணத்தில் செல்வதாக P இற்குத் தோற்றுகிறது. கடத்தல் காரரின் படகு Q ஆனது அதன் உயர் கதி u உடன் இயங்குகிறதெனக் காட்டி இயக்கத்திசையையும் காண்க.

இப்பொழுது படகு Q ஆனது அதன் செல்வழியை மாற்றாது இருப்பின், அதனை இடைமறிக்கும் பொருட்டு P ஆனது மேற்கிலிருந்து வடக்காக $\sin^{-1}\left(\dfrac{u^2}{v^2}\right)$ எனும் கோணத்தை அமைக்கும் திசை வழியே செல்ல வேண்டுமெனவும் $\dfrac{bv}{\sqrt{v^2 - u^2}\left[u + \sqrt{u^2 + v^2}\right]}$ மணித்தியாலத்தின் பின்னர் இடைமறித்தல் நிகழும் எனவும் காட்டுக.

27. அசையா வளியிலே விமானம் ஒன்றின் கதி $u\,kmh^{-1}$ ஆகும். புவிதொடர்பான அதன் செல்வழியானது d km பக்கத்தையுடைய $ABCDEFA$ என்னும் ஒழுங்கான அறுகோணி ஆகும். $\overrightarrow{AB}$ இன் திசைவழியே $v\ kmh^{-1}\,(v < u)$ எனும் வேகத்துடன் உறுதியான சீரான காற்று வீசுகிறது. அறுகோணியின் ஆறு பக்கங்களினதும் வழியேயான எல்லாப் பறப்புக்களுக்கும் வேகமுக்கோணிகளை வரைக.

எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு காட்டுகின்ற போக்கிலே செல்வழியைப் பூர்த்தி செய்வதற்கு விமானம் எடுக்கும் மொத்த நேரம்

$$\frac{2d}{u^2 - v^2}\left[u + \sqrt{4u^2 - 3v^2}\right]$$ மணித்தியாலம் எனக் காட்டுக.

காற்றுத் தொடர்பான விமானத்தின் பாதை ஒரு மூடிய வளையியாகுமா? உமது விடைக்கு நியாயம் தருக?

28. ஒரு போர்க்கப்பல் A அமைதியான கடலில் $u\ kmh^{-1}$ எனும் மாறாக் கதியுடன் நேர்வடக்காகச் செல்கிறது. ஒரு குறித்த கணத்தில் கப்பல் B ஆனது A யிற்கு நேர் கிழக்கே d km தூரத்திலிருந்தது. அக்கணத்தில் B ஆனது தனது இயக்கத்திசையைப் பொருத்தமாக மாற்றி A யினை இயன்றளவு மிக நெருங்கித் தாக்கும் எண்ணத்துடன் செல்கிறது. B யின் அதி கூடிய கதி $v\ kmh^{-1}$ ஆகும். $(v < u)$ இரு கப்பல்களினதும் குண்டு வீச்சுத்தூரம் r km ஆகும். இக்கப்பல்கள் மிகக் கிட்டவரும் போது மட்டுமட்டாக ஒன்றையொன்று தாக்கும் நிலையில் இருந்தனவெனின்

$r^2 u^2 = d^2 \left(u^2 - v^2\right)$ என நிறுவுக.

A யிற்கு மிகக் கிட்டவர B எடுக்கும் நேரம் என்ன? A , B யின் ஆரம்ப நிலைகளையும், மிகக்கிட்ட உள்ள போது அவற்றின் நிலைகளையும் பூமியின் மாட்டேற்று சட்டத்தில் வரைந்து காட்டுக.

29. சீரான கதி $u\ kmh^{-1}$ உடன் நேர்கோட்டில் செல்லும் சரக்குக் கப்பலைச் சந்திக்குமுகமாக ஒரு மோட்டார்ப் படகு துறைமுகம் ஒன்றை விட்டுப் புறப்படுகிறது. கப்பலின் பாதைக்கும், துறைமுகத்திற்கும் இடையிலுள்ள மிகக் கிட்டிய தூரம் a km ஆகும். கப்பல் துறைமுகத்திலிருந்து b km ஆக இருக்கையில் படகு புறப்படுகிறது. கப்பலை அடைவதற்கு படகிற்குத் தேவையான அதிகுறைந்த சீரான கதி $\frac{au}{b}$ எனக் காட்டுக.

படகு $u\ kmh^{-1}$ வீதம் $\left(u > v > \frac{au}{b}\right)$ செல்ல வல்லதாயின்

$$\frac{2\sqrt{b^2 v^2 - a^2 - u^2}}{u^2 - v^2}$$ மணித்தியாலங்களுள் சென்று சந்திக்கக்கூடிய தன் பாதையின் ஒரு புள்ளியிலே கப்பல் உள்ளதென நிறுவுக.

30. A எனும் கப்பல் கிழக்கு நோக்கி $8\,ms^{-1}$ உடனும், B எனும் கப்பல் தெற்கு நோக்கி $10\,ms^{-1}$ உடனும் செல்கின்றன. கப்பல் A ஆனது கப்பல் B யிலிருந்து வடக்கிற்கு $60°$ கிழக்காக $3\ km$ தூரத்தில் இருக்கும் கணத்தில் ஒரு வள்ளம் a யில் இருந்து புறப்பட்டு நேரான பாதையில் $14\,ms^{-1}$ உடன் B யிற்குப் பயணம் செய்கிறது. அது B ஐ 500 செக்கனில் வந்தடையும் எனக் காட்டுக. வள்ளம், கப்பல் B ஐ அடைந்ததும் உடனடியாக நேர்ப்பாதை $14ms^{-1}$ எனும் வேகத்துடன் A யிற்குத் திரும்புகிறது. திரும்பிச் செல்லும் பயணத்திற்கான நேரத்தைக் காண்க.

31. சமாந்தரக் கரைகளையுடைய ஆறு ஒன்றின் அகலம் 40m. ஆற்றங்கரையின் ஒரு பக்கத்தில் A ஒரு புள்ளி. மறு கரையில் ஆற்றோட்டத்திசையில் $AB = 50$m ஆகுமாறு B எனும் புள்ளி அமைந்துள்ளது. ஆற்றின் சீரான கதி $4ms^{-1}$ ஆகும். வள்ளம் ஒன்று A யில் இருந்து புறப்பட்டு B இற்குச் செல்வதற்கு நிலையான நீரில் வள்ளத்தின் மிகக் குறைந்த கதி யாது?

A யில் இருந்து B யிற்குச் செல்ல வள்ளம் ஒன்றிற்கு $7\frac{1}{2}$ செக்கன்கள் எடுக்கின்றதெனில் நீர் தொடர்பான வள்ளத்தின் கதியையும், திசையையும் காண்க.

வள்ளம் A யில் இருந்து B யிற்குச் செல்கையில் ஆற்றின் கரைகளுக்குச் செங்குத்தான ஆற்றுக்குக் குறுக்காகச் செல்லும் பாலத்தின் மேல் நடந்து செல்லும் ஒரு மனிதனுக்கு இவ் வள்ளம் ஆற்றின் கரைகளுக்குச் சமாந்தரமாகச் செல்வது போலத் தோற்றுகிறது. மனிதனின் கதியைக் காண்க.

32. நிலையான நீரில் $8\ kmh^{-1}$ உடன் செல்லக் கூடிய வள்ளம் ஒன்று A எனும் புள்ளியிலிருந்து கிழக்கிற்கு $60°$ தெற்கே 10 km தூரத்திலுள்ள B எனும் புள்ளிக்குச் சென்று அங்கிருந்து B இற்கு நேர் மேற்கே மேற்கே 10km தூரத்திலுள்ள C எனும் புள்ளிக்குச் செல்கிறது. நீரோட்டத்தின் வேகம் வடக்கிலிருந்து தெற்காக $4\ kmh^{-1}$ எனின் A யிலிருந்து C ஐ அடைய எடுத்த நேரம் 2 மணி 20 நிமிடங்கள் (அண்ணளவாக) எனக்காட்டுக.

33. மட்டமான பாதையொன்றலே தெற்கு நோக்கி u எனும் மாறாக் கதியுடன் செல்கின்ற சைக்கிளோட்டி ஒருவனுக்கு காற்று மேற்கிற்கு $\theta°$ வடக்குத்திசையில் வீசுவதாகத் தோற்றுகிறது. அவர் அதே கதியில் வடக்கு நோக்கிச் செல்கையில் காற்று மேற்கிற்கு $\phi°$ வடக்குத்திசையில் வீசுவது போலத் தோற்றுகிறது.

அவர் வடக்கு நோக்கி $2u$ கதியுடன் செல்கையில் காற்றானது மேற்கிற்கு ψ வடக்கு நோக்கி வீசுமெனக் காட்டுக?
இங்கு $2\tan\psi = 3\tan\phi - \tan\theta$.. காற்றின் திசையைத் தீர்மானிக்குக.

34. கப்பல் ஒன்று $10\,kmh^{-1}$ கதியுடன் அலகுக்காவி இன் $\underset{\sim}{i}$ திசையில் இயங்குகிறது. இரண்டாவது கப்பல் ஒன்று $u\,kmh^{-1}$ உடன் காவி $\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ இற்குச் சமாந்தரமான திசையில் இயங்குகிறது. இங்கு $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அலகுக்காவிகளும் பருமனில் 1km உம் ஆகும். ஆரம்பத்தில் முதலாவது கப்பல் தானக்காவி $10(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$ ஐ உடைய புள்ளியிலும், இரண்டாவது கப்பல் உற்பத்தியிலும் உள்ளன.

(a) $u = 10\sqrt{5}$ எனின் இரு கப்பல்களுக்குமிடையிலான மிகக் குறைந்த தூரம் 10km எனக் காட்டுக.

(b) இரண்டு கப்பல்களும் ஒன்றுடனொன்று மோதும் நிலையில் இருப்பின் u இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ஆரம்ப நிலையிலிருந்து மோதுகை நிகழ எடுத்த நேரத்தைக் காண்க.

35. நேரம் t இல் இரு புள்ளிகள் P, Q என்பவற்றில் தானக்காவிகள் முறையே

$\underset{\sim}{p} = 2a\underset{\sim}{i} + (a\cos wt)\underset{\sim}{i} + (a\sin wt)\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{q} = (a\sin wt)\underset{\sim}{i} - (a\cos wt)\underset{\sim}{j} + 3ak$ இங்கு a, w என்பன ஒருமைகள்

Q தொடர்பான P இன் தானக் காவி $\underset{\sim}{r}$ ஐக் காண்க

Q தொடர்பான P இன் வேகம் $\underset{\sim}{V}$ ஐக் காண்க

r, $\underset{\sim}{V}$ என்பன செங்குத்தாக இருக்கும் t இன் பெறுமானங்களைக் காண்க?
P, Q இற்கிடையேயான அதிகுறைந்த, அதிகூடிய தூரங்களைக் காண்க.

36. வடக்கு நோக்கி 16 கலவர் மைல் / மணித்தியாலம் என்னும் கதியிற் செல்கின்ற ஒரு போர்க் கப்பல் A யின் தலைவர் மேற்கு நோக்கி 8 கலவர் மைல் தூரத்தில் ஓர் எதிரிக் கப்பல் B இருப்பதைக் காண்கிறார். கப்பல் B ஆனது தெற்கிலிருந்து 30° கிழக்குத் திசையில் இயங்குவதாகத் தோற்றுகிறது. B யின் உண்மை வேகமானது தெற்கிலிருந்து 60° கிழக்குத் திசையில் உள்ளது.

(i) B யின் உண்மை வேகத்தின் பருமனைக் காண்க.

(ii) A தொடர்பாக B யின் வேகத்தின் பருமனைக் காண்க.

(iii) A, B ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று மிக அண்மையில் இருக்கும் போது B யில் இருந்து A யின் திசைகோளைக் காண்க.

(iv) A ஆனது 7 கலவர் மைல் என்னும் சுடும் உயர் வீச்சைக் கொண்டிருக்குமெனின் B ஆனது $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ நிமிடத்திற்கு ஆபத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

37. (a) துறைமுகம் A யில் இருந்து $d\,cosec\,\alpha\,km$ நோகிழக்காக ஒரு துறைமுகம் B உள்ளது. B யிலிருந்து புறப்படும் ஒரு வள்ளம் Q வின் d km வீச்சுக்குள்ளே செல்வதற்கு வேறொரு வள்ளம் P ஆனது $v\,kmh^{-1}$ கதியில் துறைமுகம் A ஐ விட்டு புறப்படுகின்றது. வள்ளம் Q ஆனது தெற்கு நோக்கி $u\,(< v)$ kmh^{-1} இற் செல்கின்றது. வீச்சுக்குள்ளே செல்வதற்கு P செல்ல வேண்டிய எல்லைத்திசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் 2α எனக் காட்டுக.

(b) A ஒரு மாறிலியாக இருக்க $|\overrightarrow{AB}| = a$ ஆகுமாறு A, B என்பன தளம் ஒன்றிலே இயங்குகின்ற இரு துணிக்கைகள் ஆகும். எந்த ஒரு கணத்திலும் A, B ஆகியவற்றின் வேகங்கள் $\overrightarrow{AB}$ உடன் இடஞ்சுழிப்போக்கில் முறையே $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ ஆகிய கோணங்களை அமைக்கும் திசைகளில் உள்ளன. கோடு AB இன் கோணக்கதி $\frac{u}{a}$ எனின், எந்த ஒரு கணத்திலும் A, B ஆகிய இரு துணிக்கைகளினதும் கதிகளைக் காண்க.

அலகு 3

நியூற்றனின் இயக்க விதிகள்

திணிவு: ஒரு பொருளின் திணிவு, அப்பொருளில் உள்ள சடப்பொருளின் அளவாகும்.

விசை: விசை என்பது, ஒரு பொருளினுடைய ஓய்வு நிலையையோ அல்லது மாறா இயக்கத்தையோ மாற்றுகின்ற அல்லது மாற்ற முயலுகின்ற ஒன்று ஆகும்.

நிறை: ஒரு பொருளின் நிறையானது அப் பொருளைப் புவி ஈர்க்கும் விசை ஆகும்.

உந்தம்: ஒரு பொருளின் உந்தம், அதனுடைய திணிவை வேகத்தாற் பெருக்க வருவது ஆகும்.

m திணிவும் v வேகமும் உள்ள பொருள் ஒன்றின் உந்தம் mv ஆகும்.
உந்தத்தின் திசை வேகத்தின் திசையாகும். அந்தம் ஒரு காவிக்கணியம் ஆகும்.

நியூற்றனின் விதிகள்

விதி I: ஒவ்வொரு பொருளும் புறவிசை ஒன்றினால் தாக்கப்பட்டாலன்றித் தன் ஓய்வு நிலையிலேயோ அல்லது நேர்கோட்டில் சீரான இயக்கநிலையிலோ இருக்கும்.

விதி II: உந்த மாற்ற வீதம் அழுத்திய விசைக்கு விகிதசமமாய் அவ் விசை தாக்கும் நேர்கோட்டுத் திசையிலேயே நடைபெறும்.

விதி III: ஒவ்வொரு தாக்கத்திற்கும் ஒரு சமனானதும் எதிரானதுமான மறுதாக்கம் உண்டு.

விதி II: பொருளின் திணிவு m அதனில் பிரயோகிக்கப்படும் விசை P என்க.
இரண்டாம் விதிப்படி

$P \propto$ உந்த மாற்றவீதம்

$P \propto mv$ மாறும் வீதம்

$P \propto m(v$ மாறும் வீதம்) $[m -$ மாறாதிருக்க$]$

$P \propto ma\,[a -$ ஆர்முடுகல்$]$

$P = kma$

$P = 1$, $m = 1$, $a = 1$ எனின் $k = 1$
எனவே $P = ma$

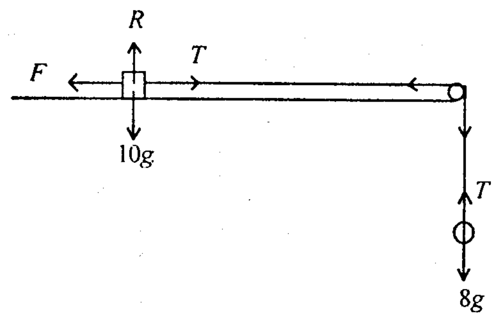
இங்கு P நியூற்றன் (N), $mkg, a\ ms^{-2}$ ஆகும். எனவே $1\ kg$ திணிவொன்றில் $1 ms^{-2}$ ஆர்முடுகலை ஏற்படுத்தும் விசை $1\ N$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

$10\ kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று கரடான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்துணிக்கை இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது மேசையின் ஓரத்திலுள்ள நிலைத்த ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று மறுமுனையில் $8Kg$ திணிவொன்றினைத் தாங்குகின்றது. மேசைக்கும் $10\ Kg$ திணிவிற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ ஆகும். தொடக்கத்தில் இழை இறுக்கமாகவும், மேசையின் ஓரத்திலிருந்து $1{\cdot}5m$ தூரத்திலும் உள்ளது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டால்,

(a) தொகுதியின் ஆர்முடுகல்
(b) 10 kg திணிவு மேசையின் ஓரத்தை அடையும் போது அதன் கதி என்பவற்றைக் காண்க.

$$F = \mu R = \frac{1}{4} \times 10g = \frac{5g}{2}$$



தொகுதியின் ஆர்முடுகல் f என்க.
P = ma ஐப் பிரயோகிக்க.

$$10, \longrightarrow \quad T - F = 10f$$

$$T - \frac{5g}{2} = 10f \text{ ---------------(1)}$$

$$8 \downarrow \quad 8g - T = 8f \text{ -------------(2)}$$

$$(1)+(2), \quad f = \frac{11g}{36}$$

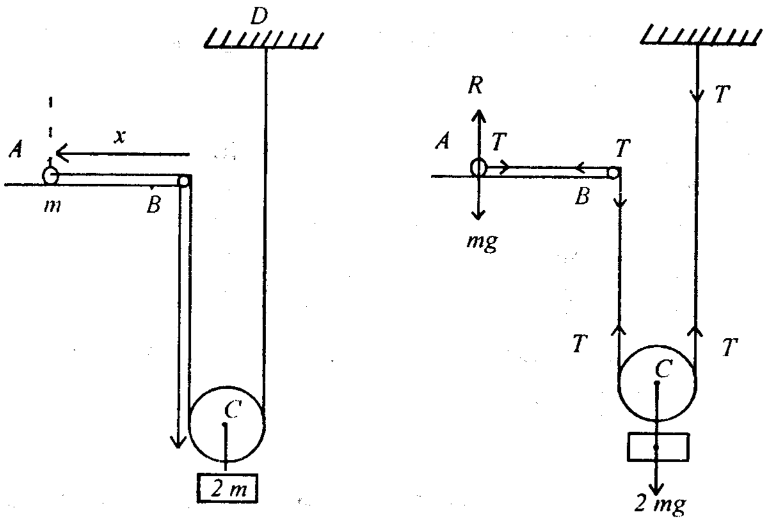
$v^2 + u^2 + 2as$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$$v^2 = 0 + 2 \times \frac{11g}{36} \times \frac{3}{2} = \frac{11g}{12}$$

$$v = \sqrt{\frac{11g}{12}}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

m திணிவுடைய துணிக்கை *A* ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசைமீது உள்ளது. இத்துணிக்கை இலேசான நீளா இழையினால் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது மேசையின் ஓரத்திலுள்ள நிலைத்த ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று பின்னர் இயங்கும் இலேசான கப்பி *C* யின் கீழாகச் சென்று, இழையின் மறுமுனை பாவு பலகையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. *C* இல் $2m$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. *C* யின் ஆர்முடுகலையும், இழையின் இழுவையையும் காண்க.



x, y என்பன நிலையான புள்ளி B யிலிருந்து அளக்கப்படுகின்றன.

$x + 2y =$ மாறிலி

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 0$$

$$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$$

[நேரம் t ஐக் குறித்த வகையீடு, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$]

$\ddot{x} = -f$ என்க. இப்பொழுது $\ddot{y} = f/2$

$\ddot{x} = -f$, A யின் ஆர்முடுகல் $\rightarrow f \cdot$ ஆகும்.

$$A_{A,E} = \rightarrow f \quad , \quad A_{C,E} = \downarrow f/2$$

$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க

$$\xrightarrow{A}, \; T = m \cdot f \quad \text{———} \quad (1)$$

$$C \downarrow \quad 2mg - 2T = 2m \cdot \frac{f}{2} \quad \text{———} \quad (2)$$

$$2mg = 3mf$$

$$f = \frac{2g}{3}$$

C யின் ஆர்முடுகல் $\downarrow \frac{g}{3}$, $T = \frac{2mg}{3}$

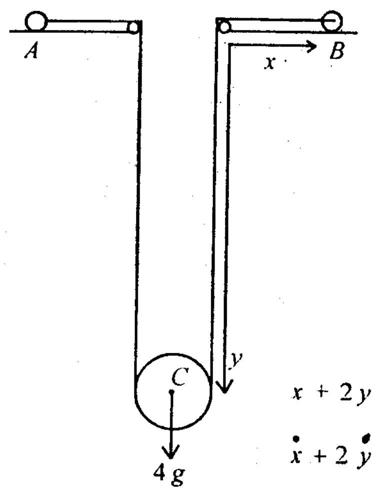
உதாரணம் 3

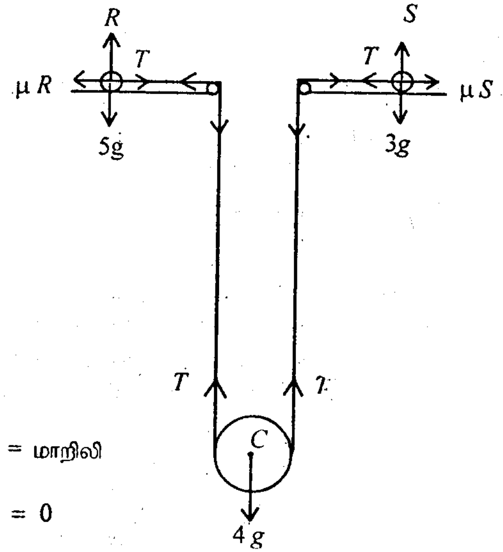
படத்தில் காட்டியவாறு A, B எனும் இரு துணிக்கைகள் இலேசான இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு இழை இலேசான ஒப்பமான கப்பி C யின் கீழாகச் செல்கின்றது. C யில் 4 kg திணிவு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, B என்பவற்றின் திணிவுகள் முறையே 5 kg, 3 kg ஆகும்.

(i) A, B என்பன கரடான கிடைமேசையில் உள்ளன. A, B இன் உராய்வுக் குணகம் சமமாகும். A யிலுள்ள உராய்வு வழுக்குதலைத் தடுக்க மட்டாகப் போதியது. ஆனால் B இல் அவ்வாறல்ல எனின் உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

(ii) A, B என்பன ஒப்பமான மேசைமீது உள்ளதெனக் கொண்டு ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

(i)





$x + 2y =$ மாறிலி

$\dot{x} + 2\dot{y} = 0$

$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$

$\ddot{x} = -f$ எனின் $\ddot{y} = \dfrac{f}{2}$

$A_{B,E} = \xleftarrow{} f, \quad A_{C,E} = \downarrow \dfrac{f}{2}$

A யிலுள்ள உராய்வு இயக்கத்தை மட்டுமட்டாகத் தடுக்கக் கூடியது.

எனவே $T = \mu R = \mu 5g$ ——— (1)

$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$\xleftarrow{B}, \; T - \mu 3g = 3 \cdot f$ ——— (2)

$C \downarrow \quad 4g - 2T = 4 \cdot \dfrac{f}{2}$ ——— (3)

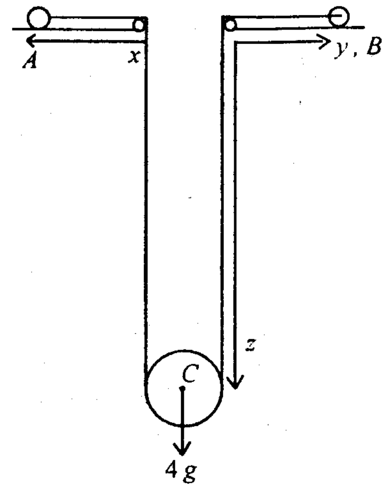
(2), (3) இலிருந்து,

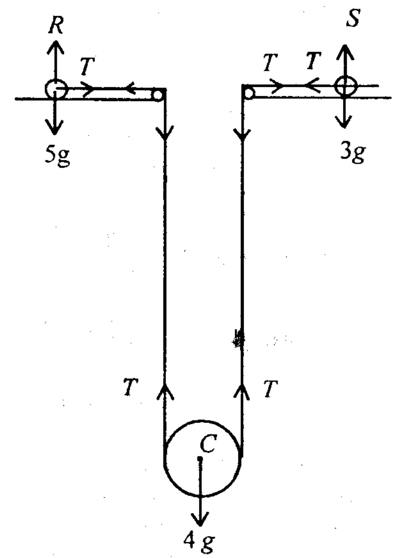
$8T = 6\mu g + 12g$

(1) இலிருந்து. $40\mu g = 6\mu g = 6\mu g + 12g$

$\mu = \dfrac{6}{17}$

(ii)





$x + y + 2z =$ மாறிலி.

$\dot{x} + \dot{y} + 2\dot{z} = 0$

$\ddot{x} + \ddot{y} + 2\ddot{z} = 0$

$\ddot{x} = -f_1, \quad \ddot{y} = -f_2$ எனின்

$\ddot{z} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$

$A_{A.E} = \rightarrow f_1, \qquad A_{B,E} = \leftarrow f_2, \qquad A_{C,E} = \downarrow \dfrac{f_1 + f_2}{2}$

P = ma ஐப் பிரயோகிக்க,

$A \rightarrow T = 5f_1$

$B \leftarrow T = 3f_2$

$C \downarrow 4g - 2T = 4\left(\dfrac{f_1 + f_2}{2}\right) = 2(f_1 + f_2)$

(1),(2) இலிருந்து $2T = 5f_1 + 3f_2$

$$4g - 2T = 2f_1 + 2f_2$$

$$4g = 7f_1 + 5f_2 \quad \text{———(3)}$$

$$0 = 5f_1 - 3f_2 \quad \text{———(4)}$$

(3),(4) இலிருந்து, $f_1 = \frac{6g}{23}$, $f_2 = \frac{10g}{23}$, $\frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{8g}{23}$

உதாரணம் 4

இலேசான நீளா இழை ஒன்று ஒப்பமான நிலையான கப்பி ஒன்றின் மேலாகச் சென்று இழையின் ஒரு முனையில் $5m$ திணிவும், மறுமுனையில் m திணிவுடைய ஒப்பமான கப்பி ஒன்றும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டாவது கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இன்னுமோர் இலேசான இழையின் ஒரு நுனிக்கு $3m$ திணிவுடைய ஒரு துணிக்கையும், மறுமுனைக்கு m திணிவும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொகுதி புவியீர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாக இயங்கினால் பாரம் கூடிய துணிக்கையின் ஆர்முடுகலையும், இழைகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள இழுவையையும் காண்க.

$A_{5m,E} = \downarrow F$

$A_{B,E} = \uparrow F$

$A_{m,B} = \uparrow f$

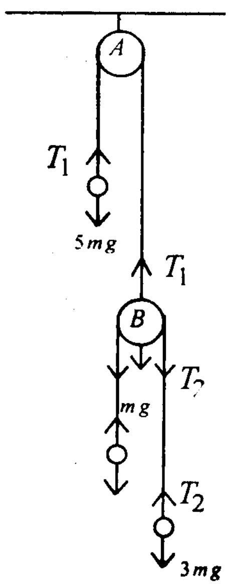
$A_{3m}, B = \uparrow f$

$A_{m,E} = A_{m,B} + A_{B,E}$

$= \uparrow f + \uparrow F = \uparrow (F + f)$

$A_{3m,E} = A_{3m,B} + A_{B,E}$

$\downarrow f + \uparrow F = \downarrow (f - F)$



P = ma ஐப் பிரயோகிக்க

(B)

$5m\downarrow$, $5mg - T_1 = 5mF$ ———(1)

$m\uparrow$, $T_1 - 2T_2 - mg = mF$ ———(2)

$m\uparrow$, $T_2 - mg = m\cdot(f + F)$ ———(3)

$3m\downarrow$ $3mg - T_2 = 3m(f - F)$ ———(4)

$$(1) + (2) + (3) - (4) \Rightarrow f = 5F$$

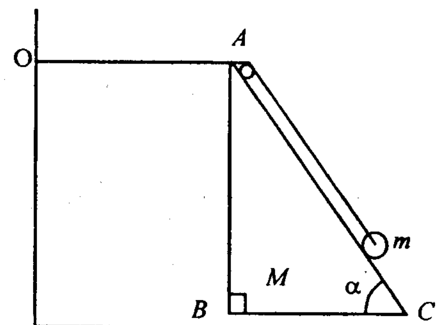
$$(3),(4) \Rightarrow 2g = 4f - 2F$$

$$2g = 20F - 2F$$

$$F = \frac{g}{9}, \; f = \frac{5g}{9}$$

$$T_1 = \frac{40mg}{9}, \; T_2 = \frac{5mg}{3}$$

உதாரணம் 5



M திணிவுடைய ஒப்பமான ஆப்பு ABC ஆனது, ஓர் ஒப்பமான மேசை மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் $AC = a$, $\angle ACB = \alpha$ ஆகும். m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று ஆப்பின் முகம் AC மீது வைக்கப்பட்டு இலேசான இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு A யிலுள்ள நிலைத்த இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று இழையின் மறுமுனை O ஆனது OA கிடையாக இருக்கும்படி, நிலைத்தபுள்ளி O விற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொடக்கத்தில் துணிக்கை AC மீது A யிற்கு அண்மையில் இருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை இறுக்கமாக இருக்க, தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. துணிக்கைக்கும் ஆப்பிற்குமிடையே தொடுகை உள்ளதெனக் கொண்டு துணிக்கை C ஐ அடையும்போது ஆப்பின்கதி

$\sqrt{\frac{2amg \sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}}$ எனவும்,இழையின் இழுவை $\frac{[M + m(1 - \cos\alpha)]\, mg \sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$

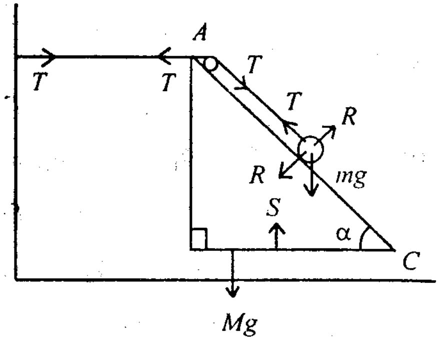
எனவும் நிறுவுக.

$A_{M,E} = \leftarrow f$

$A_{m,M} = \underset{\alpha}{\searrow} f$ (நீளா இழை)

$A_{m,E} = A_{m,M} + A_{M,E}$

$= \underset{\alpha}{\searrow} f +$



$\underline{P = m a}$ ஐப் பிரயோகிக்க,

தொகுதி

$$\leftarrow T = M f + m(f - f\cos\alpha)$$

$$T = [M + m(1 - \cos\alpha)] f \text{ ------------------ } (1)$$

$\underset{\alpha}{\searrow}\, m$ $\quad mg\sin\alpha - T = m[f - f\cos\alpha]$

$$mg\sin\alpha - T = m(1 - \cos\alpha) f \text{ ------------------ } (2)$$

$(1)+(2),\quad mg\sin\alpha = [M + 2m(1 - \cos\alpha)] f$

$$f = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$$

ஆப்பு தொடர்பான துணிக்கையின் இயக்கம்

$$\searrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = 0 + \frac{1}{2} f t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{f}}$$

ஆப்பிற்கு $\leftarrow v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்க,

$$v = 0 + f \times \sqrt{\frac{2a}{f}}$$

$$v = \sqrt{2af} = \sqrt{\frac{2a\,mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}}$$

இழையின் இழுவை $T = [M + m(1 - \cos\alpha)] \cdot \dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1 - \cos\alpha)}$

உதாரணம் 6

திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கை ஒன்று திணிவு λm ஐயும் கோணம் α ஐயும் உடைய ஆப்பு ஒன்றின் ஒப்பமான சாய்முகத்தின் வழியே கீழ்நோக்கி வழுக்கிச் செல்ல வல்லது. ஆப்பு, வைக்கப்பட்டுள்ள கிடைமேசைமீது சுயாதீனமாகச் செல்லத்தக்கது. ஆப்பின் திணிவுமையத்தினூடாக, ஆப்பின் அதிஉயர் சரிவுக் கோட்டின் தளத்தின் வழியே தாக்கும் கிடைவிசை Kmg ஐப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் திணிவுடன் ஆப்பு முன்னோக்கி அசையச் செய்யப்படுகின்றது. பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தின் போது ஆப்பின் ஆர்முடுகல் $\dfrac{g(K - \sin\alpha\cos\alpha)}{\lambda + \sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

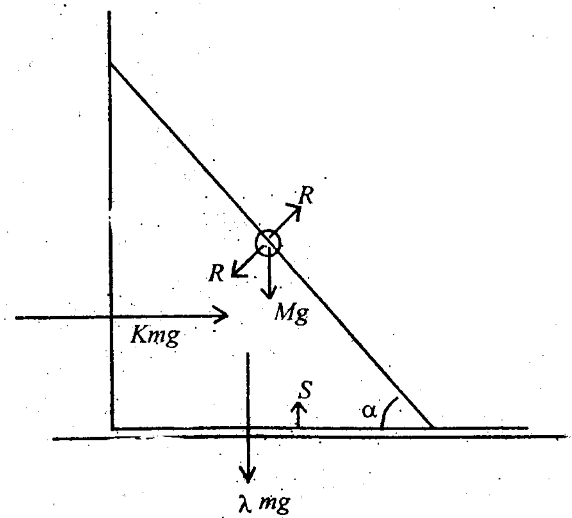
ஆப்பு தொடர்பாகத் துணிக்கையின் இயக்கத்தின் ஆர்முடுகலைக் கண்டு, இத்தொடர்பு இயக்கம் சீர்க்கதியாக இருப்பதற்கு $K = (\lambda + 1)\tan\alpha$ ஆக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

$A_{W,E} = \longrightarrow F$

$Am, W = \underset{\alpha}{\searrow} f$

$A_{m,E} = A_{m,W} + A_{W,E}$

$= \underset{\alpha}{\searrow} f + \longrightarrow F$



$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

தொகுதி

$$\longrightarrow Kmg = \lambda mF + m\left(F + f\cos\alpha\right) \quad \text{———(1)}$$

$$m, \quad mg\sin\alpha = m\left(f + F\cos\alpha\right) \quad \text{———(2)}$$

$$(1) \Rightarrow (\lambda + 1)F + \cos\alpha \cdot f = Kg \quad \text{———(3)}$$

$$(2) \Rightarrow \cos\alpha F + f = g\sin\alpha \quad \text{———(4)}$$

$$(3) - (4) \times \cos\alpha, \; F = \frac{g(K - \sin\alpha\cos\alpha)}{\lambda + \sin^2\alpha}$$

$$f = g\sin\alpha - F\cos\alpha$$

$$= g\left[\frac{\sin\alpha\left(\lambda + \sin^2\alpha\right) - \left(K - \sin\alpha\cos\alpha\right)\cos\alpha}{\lambda + \sin^2\alpha}\right]$$

ஆப்பு தொடர்பான துணிக்கையின் இயக்கம் சீராக இருக்க, $f = 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\Rightarrow \sin\alpha\left(\lambda + \sin^2\alpha\right) = \left(K - \sin\alpha\cos\alpha\right)\cos\alpha$$

$$K = \tan\alpha\left(\lambda + \sin^2\alpha\right) + \sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \tan\alpha\left[\left(\lambda + \sin^2\alpha\right) + \cos^2\alpha\right] = \tan\alpha\left[\lambda + 1\right]$$

உதாரணம் 7

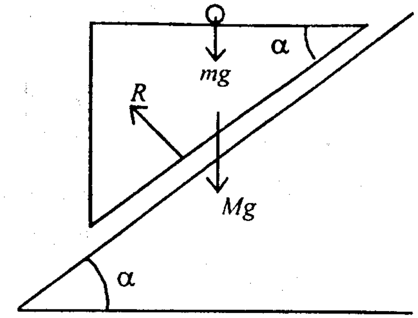
M திணிவும், கோணம் α உம் உள்ள ஆப்பு ஒன்று, கோணம் α ஆக அமைந்த ஒப்பமான சாய்தளமொன்றில் ஆப்பின் மேல்முகம் கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் இத்தொகுதி ஓய்விலிருக்கும் போது m திணிவுள்ள துணிக்கை ஒன்று ஒப்பமான கிடையான ஆப்பின் மேன்முகத்தில் வைக்கப்படுகிறது. ஆப்பினதும், துணிக்கையினதும் ஆர்முடுகலைக் காண்க. ஆப்பிற்கும் தளத்திற்குமிடையேயான மறுதாக்கம் $\dfrac{M(M+m)g\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக. வெளியில் இத் துணிக்கையின் பாதை என்ன?

$$A_{M,E} = F$$

$$A_{m,M} = \longrightarrow f$$

$$A_{m,E} = A_{m,M} + A_{M,E}$$

$$= \longrightarrow f + F$$



$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

துணிக்கை m, →, $0 = m\left(f - F\cos\alpha\right)$ ———(1)

தொகுதி $(M+m)g\sin\alpha = M \cdot F + m\left(F - f\cos\alpha\right)$ ———(2)

$$(1) \Rightarrow f = F\cos\alpha \quad \text{———(3)}$$

$$(2) \Rightarrow (M+m)g\sin\alpha = (M+m)F - m\cos\alpha \cdot f \quad \text{———(4)}$$

$$(3),(4) \Rightarrow \frac{f}{\cos\alpha} = \frac{F}{1} \Rightarrow \frac{f}{\cos\alpha} = \frac{F}{1} = \frac{(M+m)F - m\cos\alpha \cdot f}{(M+m) - m\cos^2\alpha}$$

ஆகவே $\dfrac{f}{\cos\alpha} = \dfrac{F}{1} = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$

$$F = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \quad f = \frac{(M+m)g\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

தொகுதிக்கு, $\nwarrow \; R - (M+m)g\cos\alpha = M \cdot 0 + m\left(-f\sin\alpha\right)$

$$R = (M+m)g\cos\alpha - \frac{m(M+m)g\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$R = \frac{(M+m)g\cos\alpha\left[M + m\sin^2\alpha - m\sin^2\alpha\right]}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$R = \frac{M(M+m)g\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$A_{m,E} = \longrightarrow f + \underset{\alpha}{\nearrow} F$$

$$= \longrightarrow (f - F\cos\alpha) + \downarrow F\sin\alpha$$

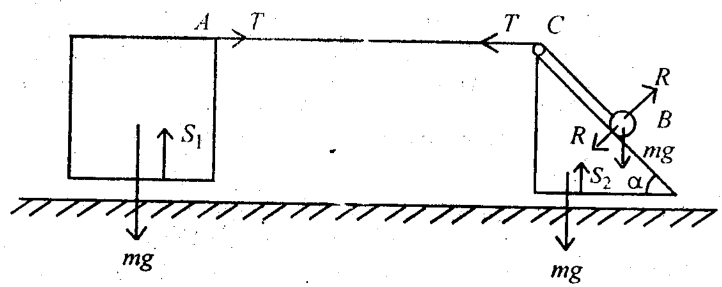
$$= \downarrow F\sin\alpha$$

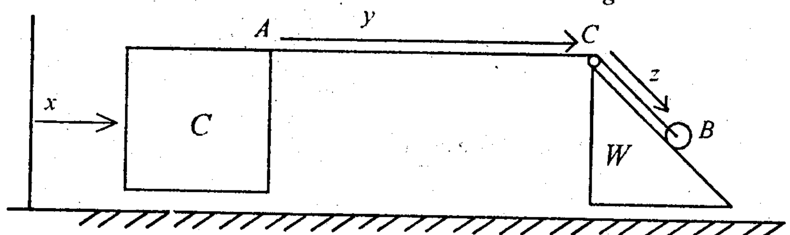
m. இன் ஆரம்பவேகம் O, ஆர்முடுகல் $\downarrow F\sin\alpha$. எனவே m இன் பாதை நிலைக்குத்தான நேர்கோடு ஆகும்.

உதாரணம் 8

ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய ஒரு கனக்குற்றியும், ஓர் ஆப்பும் ஓர் அழுத்தமான கிடைமேசையின் மேல் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் இலேசான நீளா இழை AB, கனக்குற்றியினதும், ஆப்பினதும் மையநிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டுப்பரப்பில் கிடக்கிறது. அதன் ஒரு முனை கனக்குற்றியிலுள்ள ஒரு புள்ளி A யில் கட்டப்பட்டும், மறுமுனை ஆப்பின் சாய்தளத்தில் கிடக்கும் ஒரு திணிவு m உடன் இணைக்கப்பட்டும் உள்ளது. ஆப்பின் சாய்முகம் கிடையுடன் ஆக்கும்கோணம் α ஆகும். ஆப்பிலுள்ள ஒரு சிறிய இலேசான அழுத்தமான கப்பி C யின் மேலாக இழை செல்கிறது. AC கிடையாகவுள்ளது. இத் தொகுதி இழை இறுக்கமாக இருக்க ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது.

$\alpha < \cos^{-1}\left(2 - \sqrt{3}\right)$ எனின், துணிக்கையின் மேலுள்ள ஆப்பின் மறுதாக்கம் $\dfrac{\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1}{\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 5} mg$ என நிறுவுக.





கனக்குற்றி $- C$, ஆப்பு $- W$, துணிக்கை $- P$

$y + z =$ மாறிலி, $\dot{y} + \dot{z} = 0$, $\ddot{y} + \ddot{z} = 0$ $\quad \ddot{z} = f$ எனின், $\ddot{y} = -f$ ஆகும்.

$$A_{C,E} = F_{\rightarrow}, \quad A_{W,C} = \rightarrow \ddot{y}, \quad A_{P,W} = \underset{\alpha}{\searrow} \ddot{z}$$

$$A_{W,C} = \rightarrow -f = \leftarrow f$$

$$A_{P,W} = \underset{\alpha}{\searrow} f$$

$$A_{W,E} = A_{W,C} + A_{C,E}$$

$$= \underset{f}{\longleftarrow} + \longrightarrow F = \longrightarrow (F - f)$$

$$A_{P,E} = A_{P,W} + A_{W,C} + A_{C,E}$$

$$= \underset{\alpha}{\searrow} f + \underset{f}{\longleftarrow} + \longrightarrow F = \longrightarrow (F - f) + \underset{\alpha}{\searrow} f$$

<u>$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க</u>

தொகுதி,

$$\longrightarrow 0 = mF + m(F - f) + m\left[F - f + f\cos\alpha\right]$$

$$3F = (2 - \cos\alpha) f$$

$$\frac{F}{2 - \cos\alpha} = \frac{f}{3} \quad \text{———} (1)$$

C இற்கு, $T = mF$ ———— (2)

$$P, \ \underset{\alpha}{\searrow} \ mg\sin\alpha - T = m\left[(F - f)\cos\alpha + f\right] \text{———} (3)$$

$(2) + (3)$, $g\sin\alpha = (1 + \cos\alpha) F + (1 - \cos\alpha) f$ ——— (4)

(1), (4) இலிருந்து.

$$\frac{F}{2-\cos\alpha} = \frac{f}{3} = \frac{F(1+\cos\alpha) + f(1-\cos\alpha)}{(2-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) + 3(1-\cos\alpha)}$$

$$= \frac{g\sin\alpha}{5 - 2\cos\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\frac{F}{2-\cos\alpha} = \frac{f}{3} = \frac{g\sin\alpha}{5-2\cos\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\frac{f-F}{1+\cos\alpha} = \frac{g\sin\alpha}{5-2\cos\alpha - \cos^2\alpha}$$

துணிக்கை $P \nearrow R - mg\cos\alpha = m(F - f)\sin\alpha$

$$R = mg\cos\alpha - \frac{mg\sin^2\alpha\,(1+\cos\alpha)}{5-2\cos\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$R = \frac{\cos\alpha\left(5-2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - \left(1-\cos^2\alpha\right)(1+\cos\alpha)}{5-2\cos\alpha - \cos^2\alpha}\,mg$$

$$= \frac{-\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 1}{-\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 5}\,mg$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1}{\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 5}\,mg$$

துணிக்கை , ஆப்புடன் தொடுகையிலிருக்க $R > O$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 5 = (\cos\alpha + 1)^2 - 6 < 0$$

எனவே $\cos^2\alpha - 4\cos + 1 < 0$ ஆக வேண்டும்.

$$\left[\cos\alpha - \left(2-\sqrt{3}\right)\right]\left[\cos\alpha - \left(2+\sqrt{3}\right)\right] < 0$$

$$2 - \sqrt{-3} < \cos\alpha < 2 + \sqrt{3}$$

$$2 - \sqrt{3} < \cos\alpha$$

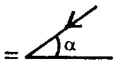
$$\alpha < \cos^{-1}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

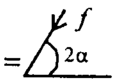
உதாரணம் 9

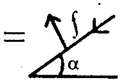
M திணிவுடைய ஒப்பமான ஆப்பொன்றின் மைய நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டுமுகம் ABC ஆகும். $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \alpha \left(< \frac{\pi}{4}\right)$ ஆகும். கிடையுடன் α கோணச் சாய்வொன்றின் மீது B இன் கீழ் A ஆகவும், AB ஒரு உயர்சாய்வுக்கோடு வழியேயும் இருக்கும்படி ஆப்பு வைக்கப்பட்டுள்ளது. முறையே m_1, m_2 திணிவுகளுடைய P, Q எனும் துணிக்கைகள் C இன் மேல் செல்லும் நீட்டமுடியாத இலேசான இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டு AC, CB எனும் பக்கங்கள் மீது இழை, ACB எனும் தளத்தில் கிடக்குமாறு அமைந்துள்ளன. இழை இறுக்கமாகவும், தொகுதி ஓய்விலேயும் வைத்து விடுவிக்கப்பட்டால் , துணிக்கைகள் ஆப்புடன் தொடுகையிலிருக்குமென எடுத்துக் கொண்டு,

(i) ஆப்பின் ஆர்முடுகலையும்
(ii) ஆப்பு தொடர்பாக P, Q என்பவற்றின் ஆர்முடுகலையும்
(iii) தளத்தின் மீது ஆப்பின் தாக்கத்தையும் காண்க. ஆப்பு தொடர்பாக P, Q என்பன ஓய்விலிருந்தால் $m_2 = m_1 \sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

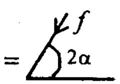
ஆப்பு $- W$

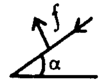
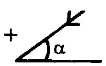
$A_{W,E} =$  F

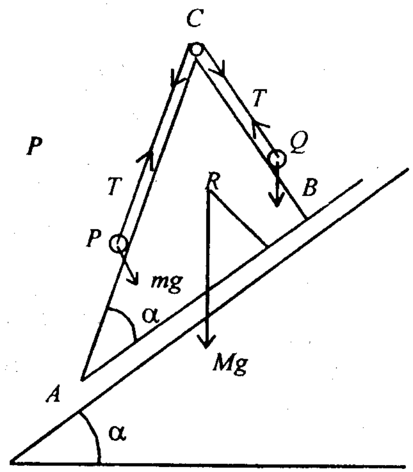
$A_{P,W} =$ 

$A_{Q,W} =$ 

$A_{P,E} = A_{P,W} + A_{W,E}$

$=$  $+$  F

$A_{Q,W} = A_{Q,W} + A_{W,E}$ $=$  $+$  F



P = ma ஐப் பிரயோகிக்க,

தொகுதி, $(M + m_1 + m_2) g \sin\alpha = M \cdot F + m_1 (F + f\cos\alpha) + m_2 F$

$$(M + m_1 + m_2) g \sin\alpha = (M + m_1 + m_2) F + m_1 \cos\alpha \cdot f \text{ —— (1)}$$

P, , $m_1 g \sin 2\alpha - T = m_1 (f + F\cos\alpha)$ ———— (2)

Q $T - m_2 g \cos\alpha = m_2 f$ ——— (3)

(2) + (3) $m_1 g \sin 2\alpha - m_2 g \cos\alpha = m_1 \cos\alpha \; F + (m_1 + m_2) f$ ——— (4)

$$(M + m_1 + m_2) F + m_1 \cos\alpha \cdot f - (M + m_1 + m_2) g \sin\alpha = 0$$

$$m_1 \cos\alpha F + (m_1 + m_2) f - g\cos\alpha (2 m_1 \sin\alpha - m_2) = 0$$

$$\frac{F}{\begin{vmatrix} m_1 \cos\alpha & -(M + m_1 + m_2) g \sin\alpha \\ m_1 + m_2 & -(2m_1 \sin\alpha - m_2) g\cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{-f}{\begin{vmatrix} M + m_1 + m_2 & \ldots\ldots \\ m_1 \cos\alpha & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} M + m_1 + m_2 & m_1 \cos\alpha \\ m_1 \cos\alpha & m_1 + m_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{F}{\begin{vmatrix} m_1 \cos\alpha & -(M + m_1 + m_2) g \sin\alpha \\ m_1 + m_2 & -(2m_1 \sin\alpha - m_2) g\cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} M + m_1 + m_2 & m_1 \cos\alpha \\ m_1 \cos\alpha & m_1 + m_2 \end{vmatrix}}$$

$$F = \frac{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2)\sin\alpha - m_1 \cos\alpha \; (2m_1 \sin\alpha - m_2)}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - m_1^2 \cos^2\alpha} g$$

$$f = \frac{(M + m_1 + m_2)\cos\alpha \; (2m_1 \sin\alpha - m_2) - (M + m_1 + m_2) m_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - m_1^2 \cos^2\alpha} g$$

$$= \frac{(M + m_1 + m_2) \cos\alpha \; (m_1 \sin\alpha - m_2)}{(M + m_1 + m_2)(m_1 + m_2) - m_1^2 \cos^2\alpha} g$$

தொகுதி $R - (M + m_1 + m_2) g \sin\alpha = M \cdot 0 + m_2 \cdot f + m_1 (-f \sin\alpha)$

$$R = (M + m_1 + m_2) g \sin\alpha + (m_2 - m_1 \sin\alpha) \cdot f$$

f இற்குப் பிரதியிடுவதனால் R ஐக் காணலாம்.

ஆப்பு தொடர்பாக P, Q என்பன ஓய்விலிருந்தால், $f = 0$

$$f = 0 \Rightarrow m_1 \sin\alpha = m_2$$

உதாரணம் 10

திணிவு M உள்ள ஆப்பு ஒன்று ஒரு ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது ஓய்விலுள்ளது, அதற்கு அத்தளத்தில் இயங்குவதற்கு சுயாதீனமுண்டு. ஆப்பின் சாய்முகமானது கிடைத்தளத்துடன் கோணம் α ஐ அமைக்கின்றது. திணிவு m உள்ள துணிக்கை ஒன்று கிடைத்தளத்திலிருந்து h என்னும் உயரம் ஒன்றை அடைவதற்கான மட்டுமட்டான கதியுடன் ஆப்பின் அடியிலிருந்து ஆப்பின் சாய்முகத்தின் உயர் சாய்வுக் கோட்டின் வழியே எறியப்படுகிறது. இக்கோடு ஆப்பின் திணிவு மையத்தினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ளது.

துணிக்கை எவ்வேகத்துடன் எறியப்பட்டதெனக் காண்க.

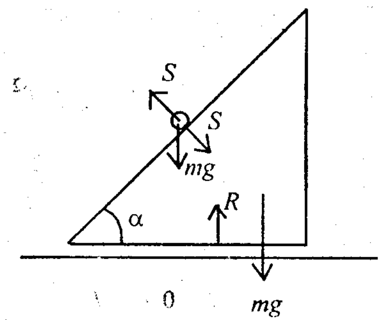
துணிக்கையானது ஆப்பின் அடிக்குத் திரும்பிவந்ததும் $\frac{4mh\cot\alpha}{M + m}$ எனும் தூரம் ஆப்பானது கடந்தது எனக் காட்டுக.

$A_{M,E} = \longrightarrow F$

$A_{m,M} = \nearrow_{\alpha} f$

$A_{m,E} = A_{m,M} + A_{m,E}$

$= \nearrow_{\alpha} f + \longrightarrow F$



P = ma ஐப் பிரயோகிக்க,

தொகுதி $\rightarrow$ $0 = MF + m(F + f\cos\alpha)$

$$0 = (M + m) F + m\cos\alpha \cdot f \text{ ——— (1)}$$

$$m\ \underset{\alpha}{\nearrow} - mg \sin\alpha = m(f + F\cos\alpha)$$

$$-g\sin\alpha = f + F\cos\alpha \text{ ——— (2)}$$

(1) இலிருந்து $\dfrac{F}{-m\cos\alpha} = \dfrac{f}{M+m}$

(2) இலிருந்து $\dfrac{F}{-m\cos\alpha} = \dfrac{f}{M+m} = \dfrac{f + F\cos\alpha}{M+m-m\cos^2\alpha} = \dfrac{-g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$

$$F = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \ ; \ f = \frac{-(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

ஆப்பு தொடர்பான துணிக்கையின் இயக்கம்

$$\underset{\alpha}{\nearrow} \quad v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = u^2 + 2f\cdot\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$u^2 = \frac{-2hf}{\sin\alpha} = \frac{2(M+m)gh}{M+m\sin^2\alpha}$$

துணிக்கை ஆப்பின் அடிக்கு வர எடுத்த நேரம் T என்க.

$$\underset{\alpha}{\nearrow} \quad s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = uT + \frac{1}{2}fT^2$$

$$T \neq 0 \ ; \ T = -\frac{2u}{f}$$

இந்நேரத்தில் ஆப்பு சென்றதூரம்.

$$\longrightarrow d = 0 + \frac{1}{2}FT^2$$

$$= \frac{1}{2}\times F\times\frac{4U^2}{f^2}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)}\times\frac{8(M+m)gh}{(M+m\sin^2\alpha)}\times\frac{(M+m\sin^2\alpha)^2}{(M+m)^2g^2\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{4mh\cot\alpha}{M+m}$$

உதாரணம் 11

m, m^1 திணிவுள்ள இரு துணிக்கைகள் அழுத்தமான கிடைத்தளத்திலிருக்கும் M திணிவுள்ள ஓர் ஆப்பின் இரு அழுத்தமான முகங்களில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஆப்பின் முகங்கள் கிடையுடன் முறையே α, α^1 எனும் கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளன.
இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்குகிறது.
ஆப்புத்தொடர்பாக துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல்களைக் காண்க.

$\alpha^1 < \tan^{-1}\left[\dfrac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M+m^1+m\sin^2\alpha}\right]$ ஆக. இருப்பின்

m^1 ஆனது தானிருக்கும் முகத்தின் மேல் நோக்கி இயங்கும் எனக் காட்டுக.

$$A_{M,E} = \longrightarrow F$$

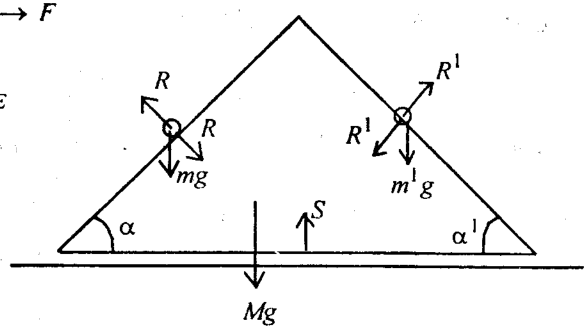
$$A_{m,M} = \underset{\alpha}{\swarrow} f \ ; \ A_{m^1,M} = \underset{\alpha^1}{\searrow} f^1$$

$$A_{m,E} = A_{m,M} + A_{M,E}$$

$$\underset{\alpha}{\swarrow} f + \longrightarrow F$$

$$A_{m^1,E} = A_{m^1,M} + A_{M,E}$$

$$= \underset{\alpha^1}{\searrow} f^1 + \longrightarrow F$$

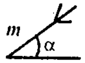


$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

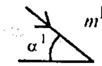
தொகுதி

$$\longrightarrow 0 = MF + m\left(F - f\cos\alpha\right) + m^1\left(F + f^1\cos\alpha^1\right)$$

$$0 = \left(M + m + m^1\right)F - m\cos\alpha\cdot f + m^1\cos\alpha^1\cdot f^1$$



, $mg\sin\alpha = m\left(f - F\cos\alpha\right)$



m^1, $m^1 g\sin\alpha = m^1\left(f^1 - F\cos\alpha^1\right)$

$$\left(M+m+m^1\right)F - m\cos\alpha\cdot f + m^1\cos\alpha^1\cdot f^1 = 0 \text{ ——— } (1)$$

$$-\cos\alpha\, F + f - g\sin\alpha = 0 \text{ ——— } (2)$$

$$\cos\alpha^1 F + f^1 - g\sin\alpha^1 = 0 \text{ ——— } (3)$$

$$\frac{F}{\left|\quad\right|} = \frac{-f}{\left|\quad\right|} = \frac{f^1}{\left|\quad\right|} = \frac{-1}{\left|\quad\right|}$$

$$\frac{f^1}{\begin{vmatrix} M+m+m^1 & -m\cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & 1 & -g\sin\alpha \\ \cos\alpha^1 & 0 & -g\sin\alpha^1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} M+m+m^1 & -m\cos\alpha & m^1\cos\alpha^1 \\ -\cos\alpha & 1 & 0 \\ \cos\alpha^1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{f^1}{\left(M+m+m^1\right)\left(-g\sin\alpha^1\right) + m\cos\alpha\left(\sin\alpha\cos\alpha^1 + \sin\alpha\cos\alpha^1\right)g}$$

$$= \frac{-1}{\left(M+m+m^1\right) - m\cos^2\alpha - m^1\cos^2\alpha^1}$$

$$f^1 = \frac{\left(M+m+m^1\right)\sin\alpha^1 - m\cos\alpha\left[\sin\alpha\cos\alpha^1 + \cos\alpha\sin\alpha^1\right]}{M + m\sin^2\alpha + m^1\sin^2\alpha^1}\, g \text{ ——— } (4)$$

$$\frac{-f}{\begin{vmatrix} M+m+m^1 & M^1\cos\alpha^1 & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & -g\sin\alpha \\ \cos\alpha^1 & 1 & -g\sin\alpha^1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{M + m\sin^2\alpha + m^1\sin^2\alpha^1}$$

$$\frac{-f}{\left(M+m+m^1\right)g\sin\alpha - m^1\cos\alpha^1 g\left(\cos\alpha\sin\alpha^1 + \sin\alpha\cos\alpha^1\right)}$$

$$= \frac{-1}{M + m\sin^2\alpha + m^1\sin^2\alpha^1}$$

$$f = \frac{\left(M+m+m^1\right)\sin\alpha - m^1\cos\alpha^1\left(\sin\alpha\cos\alpha^1 + \cos\alpha\cdot\sin\alpha^1\right)}{M + m\sin^2\alpha + m^1\sin^2\alpha^1}\, g \text{ ——— } (5)$$

(4) இலிருந்து

$$f^1 = \frac{\left(M+m+m^1 - m\cos^2\alpha\right)\sin\alpha^1 - m\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha^1}{M + m\sin^2\alpha + m^1\sin^2\alpha^1}\, g$$

$$f^1 = \frac{\left(M+m_1\ m\sin^2\alpha\right)\sin\alpha^1 - m\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha^1}{M + m\sin^2\alpha + m^1\sin^2\alpha^1}$$

$$f^1 < 0 \Leftrightarrow \tan\alpha^1 < \frac{m\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{M + m^1 + m\sin^2\alpha}$$

$\tan\alpha^1 < \dfrac{M\sin\alpha\cos\alpha}{M + m^1 + m\sin^2\alpha}$ எனின் $f^1 < 0$

எனவே m^1, சாய்தளத்தில் மேனோக்கி இயங்கும்.

பயிற்சி 3

3 (a)

1. $6\,N$ விசை ஒன்று (i) $12kg$ திணிவின் மீது (ii) $12g$ திணிவின் மீது தொழிற்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

2. $12\,kg$ திணிவின் மீது தொழிற்படும் விசை ஒன்று 5 நிமிடங்களில் $15\,kmh^{-1}$ எனும் கதியைப் பிறப்பிக்கின்றது. விசையின் பருமனைக் காண்க.

3. கிடையான பாதையிலே $48\,kmh^{-1}$ என்ற சீரான கதியுடன் செல்லும் புகையிரதம் 75 இல் 1 ஆன சரிவிலே மேல்நோக்கி ஏறத் தொடங்குகிறது. எஞ்சினின் இழுப்புவிசை மாறவில்லை எனக் கொண்டு ஓய்விற்கு வருமுன் புகையிரதம் சரிவில் எவ்வளவு தூரம் செல்லும் எனக் காண்க. கிடையான பாதையிலும், சரிவிலும் உராய்வு முதலியவற்றாலான தடை விசை ஒரே அளவெனக் கொள்க.

4. வண்டி ஒன்று 112 இல் 1 ஆன சாய்விலே, கீழ் நோக்கி சீரான கதியுடன் இயங்குகிறது. இவ்வண்டி இதே சரிவில் சாய்வின் அடியில் இருந்து மேல் நோக்கி $18\,kmh^{-1}$ உடன் இயங்கத் தொடங்கினால் ஓய்விற்கு வருமுன் எவ்வளவு தூரம் செல்லும்?

5. கிடையான பாதையில் $80\,kmh^{-1}$ சீரான கதியில் இயங்கும் புகையிரதம் ஒன்று 15 இல் 1 ஆன சரிவிலே ஏறத்தொடங்குகிறது. சரிவிலே எஞ்சினின் இழுப்பு விசை புகையிரதத்தின் நிறையின் $\frac{1}{100}$ ஆகவும், உராய்வு முதலியவற்றாலான தடை விசை புகையிரதத்தின் நிறையின் $\frac{1}{150}$ ஆகவும் உள்ளது. சரிவில் $2{\cdot}5\,km$ தூரம் ஏறியதும் புகையிரம் ஓய்வடையும் எனக் காட்டுக.

6. எஞ்சினின் இழுப்புவிசை புகையிரதத்தின் நிறையின் $\frac{1}{80}$ ஆயும், தடுப்புவிசை புகையிரதத்தின் நிறையின் $\frac{1}{30}$ ஆகவுமிருக்க, இப்புகையிரதம் 240 இல் 1 ஆன சாய்விலே மேனோக்கி ஓய்வில் இருந்து ஓய்விற்கு $4{\cdot}8\,km$ தூரத்தைச் செல்ல எடுக்கும் நேரம் யாது? தடுப்புக்கள் பிரயோகிக்கப்படும் போது, நீராவி நிறுத்தப்படுகின்றதெனக் கொள்க.

7. (a) $70\,kg$ திணிவுடைய மனிதன் ஒருவன் உயர்த்தி ஒன்றில் தரையில் நிற்கிறான்.
   - (i) உயர்த்தி $4\,ms^{-2}$ ஆர்முடுகலுடன் மேனோக்கி இயங்கும்போது,
   - (ii) உயர்த்தி $4\,ms^{-2}$ ஆர்முடுகலுடன் கீழ்நோக்கி இயங்கும்போது,

   தரையில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

   (b) $13N$ நிறையுடைய பொருள் ஒன்று இயங்கும் உயர்த்தி ஒன்றில் உள்ள விற்றராசில் வைக்கப்பட்ட போது, 12 N எனக் காட்டியது. நிறுக்கப்பட்ட கணத்தில் உயர்த்தியின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

   (c) உயர்த்தி ஒன்றில் உள்ள விற்றராசில் துணிக்கை ஒன்று தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. உயர்த்தி மேனோக்கி சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் போது விற்றராசு $10\,kg$ ஐக் காட்டியது. உயர்த்தி கீழ் நோக்கி முன்னையதைப் போல இரு மடங்கு பருமனுடைய ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும்போது $7\,kg$ ஐக் காட்டியது. பொருளின் திணிவையும், கீழ்நோக்கிய ஆர்முடுகலையும் காண்க.

8. நிலைக்குத்தாக நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ள கேடயம் ஒன்று மரம், இரும்பு ஆகிய இரு தகடுகளினால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இரும்பு, மரம் ஆகியவற்றின் தடிப்புக்கள் முறையே $2\,cm$, $4cm$ ஆகும். கிடையாகச் சுடப்படுகின்ற குண்டொன்று முதலில் இரும்பினூடாகச் சென்று, பின்னர் மரத்தினுள் $2cm$ தூரம் ஊடுருவுகின்றது. இதே போன்ற இன்னொரு குண்டு, இதே கதியுடன் கிடையாக எதிர்த்திசையில் சுடப்பட்டபோது, முதலில் மரத்தினூடாகச் சென்று பின்னர் இரும்பினுள் $1\,cm$ தூரம் ஊடுருவுகின்றது. இரும்பு, மரம் என்பவற்றின் சராசரித் தடைகளை ஒப்பிடுக.

9. $100g$ திணிவுடைய குண்டொன்று கிடையாக $150\,ms^{-1}$ உடன் சென்று நிலையான மரக்குற்றி ஒன்றினுள் $8cm$ ஊடுருவுகின்றது. மரக்குற்றியின் தடை சீரானதெனக் கொண்டு குற்றியின் தடிப்பு $4cm$ ஆக இருப்பின், குண்டு என்ன கதியுடன் வெளியேறும் எனக் காட்டுக.

10. $30\,g$ திணிவுடைய குண்டொன்று நிலையான மரக்குற்றி ஒன்றினுள் $294\,ms^{-1}$ இல் கிடையாகச் சுடப்பட்டது. குண்டு $\frac{1}{150}$ செக்கனில் ஓய்விற்கு வந்தால், மரக்குற்றியின் தடை சீரானதெனக் கொண்டு அதனைக் கணிக்க.

3 (b)

1. $6\,kg$, $10\,kg$ திணிவுடைய இருதுணிக்கைகள் ஒரு இலேசான இழையினால் இணைக்கப்பட்டு ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்கின்றன.
   (i) அவற்றின் பொது ஆர்முடுகல் (ii) இழையின் இழுவை
   (iii) கப்பியில் விசை என்பவற்றைக் காண்க.

2. ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றில் $9\,kg$ திணிவு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்திணிவு இலேசான இழையால் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது மேசையின் ஓரத்தில் உள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று, இழையின் மறு முனையில் $7kg$ திணிவு சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றது. தொகுதியின் ஆர்முடுகலையும், இழையின் இழுவையையும், கப்பியிலான விசையையும் காண்க.

   ஆரம்பத்தில் $7\,kg$ திணிவுக் கப்பியின் ஓரத்திலும், $4{\cdot}2m$ நீளமான இழையானது மேசையின் விளிம்புக்குச் செங்குத்தாகவும், இறுக்கமாகவும் உள்ளது. நிலத்திலிருந்து மேசையின் விளிம்பின் உயரம் $2{\cdot}1m$.
   (i) $7kg$ திணிவு நிலத்தை அடிக்க எடுத்த நேரம்
   (ii) இதன்பின்னர் $5kg$ திணிவு மேசையின் விளிம்பை அடைய எடுத்த நேரம் என்பவற்றைக் காண்க.

3. $5\,kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று $4m$ உயரமும், $20\,m$ நீளமுமான ஒப்பமான சாய்தளம் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்துணிக்கை ஒரு இலேசான இழையால் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது தளத்தின் உச்சியில் உள்ள கப்பியின் மேலாகச் சென்று மறுமுனையில் $3kg$ திணிவைத் தாங்குகின்றது. பொது ஆர்முடுகலையும், இழையின் இழுவையையும் காண்க. ஆரம்பத்தில் $5\,kg$ திணிவு சாய்தளத்தின் அடியிலும், $3kg$ திணிவு மட்டுமட்டாக கப்பியின் கீழ் தொங்கிக்கொண்டும் உள்ளது.
   (i) $3\,kg$ திணிவு நிலத்தை அடிக்க எடுத்த நேரம்
   (ii) இது நடைபெற்ற பின் இழை மீண்டும் இறுக எடுத்த நேரம் என்பவற்றைக் காண்க.

4. $2kg$ திணிவு ஒன்று $9m$ நீளமும், $3m$ உயரமும் உள்ள சாய்தளத்தின் அடியில் உள்ளது. இத்திணிவு $9m$ நீளமான இலேசான இழையால் இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறு முனைக்கு $1kg$ திணிவு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை, தளத்தின் அதி உயர் சரிவுக்கோட்டின் வழியே உள்ளது. $1kg$ திணிவு சாய்தளத்தின் உச்சியின் மேலாக மட்டாகத் தொங்குகிறது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து இயங்கவிடப்படுகிறது. $2kg$ திணிவு முதலில் ஓய்விற்கு வருமுன் அது இயங்கும் தூரத்தைக் காண்க.

5. $4kg$ திணிவொன்று கரடான கிடைமேசையில் வைக்கப்பட்டு, மேசையின் விளிம்பிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இழை ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மறுமுனையில் $3kg$ திணிவு சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது. மேசைக்கும் $4kg$ திணிவுக்குமிடையேயான உராய்வுக்குணகம் ½ ஆகும். 7 செக்கன் முடிவில் திணிவுகளின் வேகத்தையும் சென்ற தூரத்தையும் காண்க.

6. பொது உச்சியை உடைய இரு கரடான சாய்தளங்கள் கிடையுடன் 30^o, 60^o சாய்வுகளை உடையன. $4kg$ திணிவு முதலாவது சாய்தளத்திலும், $12kg$ திணிவு இரண்டாவது சாய்தளத்திலும் வைக்கப்பட்டு உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இழையின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உராய்வுக்குணகம் ½ எனின் விளையுள் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

7. ஆப்பொன்றின் மத்திய குறுக்கு வெட்டுமுகம் முக்கோணி ABC ஆகும். இங்கு $\angle ABC = 90^o$, $\angle BAC = \theta\ (< 45^o)$. ஆப்பு கரடான கிடை நிலமொன்றில் AC ஐக் கொண்டுள்ள முகம் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் இலேசான இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது ஆப்பின் உச்சி B யில் உள்ள இலேசான கப்பியின் மேலாகச் செல்கிறது. துணிக்கைகள் ஒவ்வொன்றும் ஆப்பின் ஒப்ப முகங்கள் AB, BC என்பவற்றில் தங்கியுள்ளன. கிடைத்தளமானது ஆப்பின் இயக்கத்தைத் தடை செய்யப் போதுமான அளவு கரடானது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. துணிக்கைகளினது ஆர்முடுகலையும், இழையின் இழுவையையும் காண்க. ஆப்பின் திணிவு M எனின் ஆப்பிற்கும், கிடைத் தளத்திற்குமிடையேயான செவ்வன் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

8. $2m$ திணிவுடைய துணிக்கை A கிடையுடன் α சாய்வுடைய நிலைத்த ஒப்பமான சாய்தளமொன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்துணிக்கை மெல்லிய நீளா இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு, சாய்தளத்தின் உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று மறு முனையில் நிலைக்குத்தாக B எனும் m திணிவைத் தாங்குகிறது. தொகுதி சமநிலையில் இருப்பின் α ஐக் காண்க. இழையினால் கப்பியில் ஏற்படும் விளையுள் விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. இப்பொழுது B இற்கு மேலும் m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டு தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. B இன் ஆர்முடுகலையும் இழையின் இழுவையையும் காண்க. இழையினால் கப்பியில் ஏற்படும் விளையுள் விசையின் பருமனையும், திசையையும் காண்க.

9. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் 45^o சாய்வுடையதும், ஒன்று ஒப்பமானதும் மற்றையது கரடானதுமான இரு சாய்தளங்களின் உச்சிகள், ஒரு கிடைக்கோட்டின்

வழியே சந்திக்கின்றன. m திணிவுடைய P எனும் துணிக்கை ஒப்பமான தளத்தின் மீதும் $3m$ திணிவுடைய Q எனும் துணிக்கை கரடான தளத்தின் மீதும் வைக்கப்பட்டு சாய்தளங்களின் பொது உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பி A இன் மேலாகச் செல்லும் இழையின் நுனிகளிற்கு P, Q என்பன இணைக்கப்பட்டுள்ளன. P, Q, A என்பவற்றைக் கொண்டுள்ள தளம் சாய்தளங்கள் சந்திக்கும் கிடைக்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இழை இறுக்கமாக இருக்கத், தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் பருமன் $\frac{g}{5\sqrt{2}}$ எனத் தரப்படின்.

(a) இழையிலுள்ள இழுவை

(b) Q இற்கும், தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக்குணகம்.

(c) இழையினால் கப்பியில் ஏற்படும் விசையின் பருமன், திசை என்பவற்றைக் காண்க.

10. முறையே $2a$, $4a$ தடிப்புக்களைக் கொண்ட இரு மரத்தட்டுக்கள் X, Y அவற்றின் தள முகங்கள் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு சிறிய இடைவெளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. m திணிவுடைய ஒரு சிறிய குண்டு கிடையாக v கதியுடன் X இனுள் அதன் தள முகங்களிற்குச் செங்குத்தாகச் சுடப்பட்டது. அது u கதியுடன் X இல் இருந்து வெளியேறி Y யினுள் a தூரம் ஊடுருவிச் சென்று ஓய்வடைகிறது. குண்டின் இயக்கத்திற்கு X, Y என்பவற்றின் தடை R_1 , R_2 எனும் ஒருமை விசைகள் எனின் R_1 , R_2 என்பவற்றிற்கு m,u,v,a என்பவற்றில் கோவைகளைப் பெறுக.

m திணிவுடைய இதே போன்ற இரண்டாவது குண்டொன்று இப்பொழுது Y யினுள் u கதியுடன் தளமுகத்திற்குச் செங்குத்தாக கிடையாகச் சுடப்படுகிறது.

$v < \frac{u}{2}$ எனின், குண்டு Y யிலிருந்து வெளியேறும் எனக் காட்டுக.

$v = \frac{1}{3}u$ எனின், குண்டு Y யிலிருந்து வெளியேறி X இனுள் செல்லும் (புவியீர்ப்பின் குண்டு அதனுள் எவ்வளவு தூரம் ஊடுருவும் எனக் காண்க. தாக்கம் புறக்கணிக்கப்படலாம்)

3C

1. ஒப்பமான நிலைத்த கப்பி ஒன்றின் மேலாகச செல்லும் ஒரு இலேசான நீளா இழையின் ஒரு நுனிக்கு $5m$ திணிவுடைய ஒரு துணிக்கையும், மறு முனைக்கு m திணிவுடைய ஒப்பமான இரண்டாவது கப்பியும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இரண்டாவது கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இன்னோர் இலேசான நீளா இழையின் ஒரு நுனிக்கு $3m$ திணிவுடைய ஒரு துணிக்கையும், மறுமுனைக்கு m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கையும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி புவியீர்ப்பின் கீழ் சுயாதீனமாக இயங்கினால் பாரம் கூடிய துணிக்கையின் ஆர்முடுகலையும், இழைகள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள இழுவையையும் காண்க.

2. $6m$ திணிவுடைய ஓர் ஒப்பமான ஆப்பொன்றின் மையத்தினூடான செங்குத்துக் குறுக்குவெட்டு ABC எனும் முக்கோணமாகும். இங்கு $AB = AC$; $\angle BAC = 90^o$ BC கொண்டுள்ள முகம் கிடைத்தளமொன்றுடன் தொடுகையில் உள்ளது. $3m, m$ திணிவுடைய துணிக்கைகள் AB , AC எனும் முகங்களில் வைக்கப்பட்டு A யின் மேலாகச் செல்லும் இலேசான நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டால், ஆப்பின் ஆர்முடுகலையும், ஆப்பிற்கும் கிடைத்தளத்திற்குமிடையேயான மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

3. இலேசான நீளா இழையொன்றின் ஒரு முனை, ஒரு கிடையான பாவுபலகை (Ceiling) க்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழையானது, ஓர் இலேசான ஒப்பமான இயங்கும் கப்பியின் கீழாகச் சென்று பின்னர் நிலைத்த ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று இழையின் மறுமுனையில் ஒரு இலேசான தட்டு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இலேசான கப்பியில் C எனும் ஒரு நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. தட்டில் B எனும் ஒருநிறை வைக்கப்பட்டு அதன் மேல் A எனும் வேறொரு நிறையும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கப்பியைத் தொடாத இழையின் பாகங்கள் யாவும் நிலைக்குத்தாக உள்ளன. A, B ஒவ்வொன்றினதும் திணிவு m மும் C யின் திணிவு km உம் ஆகும். தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டால் இயங்கும் கப்பியின் ஆர்முடுகலைக் காண்க. $k > 4$ எனின், தட்டு மேனோக்கி இயங்குமெனக் காட்டுக. தொகுதி இயங்கும் போது இழையின் இழுவையையும் நிறைகள் A, B இற் கிடையேயான மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

4. A_1 , A_2 என்பன ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு நிலையான கப்பிகள் A_1 , A_2 இன் மேலாகச் செல்லும் இழையின் துனிகளிற்கு M_1 , M_2 திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. M_3 திணிவுடைய ஒப்பமான கப்பியொன்று A_1 , A_2 என்பவற்றிற்கிடையில் இழையில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கப்பியைத் தொடாத இழையின் பாகங்கள் நிலைக்குத்தாக உள்ளன. எல்லாத் துணிக்கைகளும் இயக்கத்திலிருக்கையில் இழையின் இழுவையைக் காண்க. M_1 , M_2 இயங்கத்தக்கதாக M_3 ஓய்விலிருப்பின், $4 M_1 M_2 = M_3 (M_1 + M_2)$ எனக் காட்டுக.

5. நிலையான கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்லும் இழையொன்றின் ஒரு முனையில் m திணிவுடைய துணிக்கையொன்றும் மறு முனையில் இலேசான

கப்பியொன்றும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இக் கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இழையின் நுனிகளில் m_1, m_2 திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகலைக் காண்க. $M = \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ எனின், M ஓய்விலிருக்கும் அல்லது மாறா வேகத்துடன் இயங்குமெனக் காட்டுக.

6. ஒப்பமான கிடை மேசையொன்றிலிருக்கும் M திணிவுடைய துணிக்கை ஒரு மெல்லிய இழையினால் இணைக்கப்பட்டு மேசையின் ஓரத்திலுள்ள நிலைத்த ஒப்பமான கப்பியின மேலாகச் சென்று, m திணிவுடைய இயங்கும் கப்பியின் கீழாகச் சென்று, மறுமுனை கிடையான பாவுபலகையில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசையையும் கப்பிகளையும் தொடாத இழையின் பாகங்கள் நிலைக்குத்தாக உள்ளன. திணிவு m, $\dfrac{mg}{4M+m}$ ஆர்முடுகலுடன் கீழ் நோக்கி இயங்குமெனக் காட்டுக.

7. $ABCD$ எனும் மெல்லிய இழையின் முனை A. நிலையான புள்ளி ஒன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டு, M திணிவுடைய இயங்கும் கப்பியின் கீழாகச் சென்று பின்னர் C எனும் நிலைத்த கப்பியின் மேலாகச் சென்று, மறு முனையில் M^1 திணிவு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. M இன் கீழ் நோக்கிய ஆர்முடுகல்

$\dfrac{m - 2M^1}{M + 4M^1}\, g$ எனக் காட்டுக.

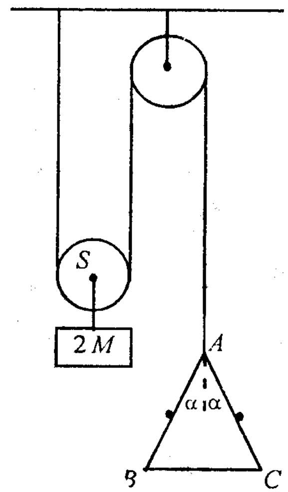
8. இழையொன்றின் ஒரு முனை, நிலையான புள்ளி ஒன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டு M திணிவுடைய இயங்கும் கப்பி A இன் கீழாகச் சென்று, பின்னர் நிலையான கப்பியொன்றின் மேலாகச் சென்று, பின் M^1 திணிவுடைய இயங்கும் கப்பியின் கீழாகச் சென்று, இழையின் மறுமுனை கப்பி A இன் அச்சுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை இறுக்கமாகவும் இழையின் பாகங்கள் நிலைக்குத்தாகவும் உள்ளன. A யின் ஆர்முடுகல் $\dfrac{4M - 2M^1}{4M + M^1}\, g$ எனக் காட்டுக.

9. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று M திணிவும், α சாய்வும், ஒப்பமான சாய்முகத்தையும் கொண்ட ஆப்பு ஒன்றின் மீது வழுக்குகிறது. ஆப்பு ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றிலே இயங்குவதற்குச் சுயாதீனமுடையது. ஆப்பின் ஆர்முடுகல் $\dfrac{mg \sin\alpha \cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டி ஆப்பிற்கும், துணிக்கைக்கு மிடையேயான மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

10. m திணிவுடைய ஆப்பு ஒன்று, கிடையான மேசை ஒன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று ஆப்பின் சாய்முகத்தில் உள்ளது. ஆப்பின் சாய்முகம் கிடையுடன் 30^o ஐ அமைக்கின்றது. கிடை மேசையிலிருந்து துணிக்கை h உயரத்திலிருக்கையில் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகின்றது. ஆப்பின் ஆர்முடுகலையும், துணிக்கை கிடைத்தளத்தை அடைய எடுத்த நேரத்தையும் காண்க.

11. M திணிவும், கோணம் α உம் உடைய ஒப்பமான ஆப்பொன்று ஒப்பமான கிடைத்தளத்திலே அசைவதற்குச் சுயாதீனமுடையது. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று சாய்வின் மத்திய உயர் சாய்வுக்கோட்டின் வழியே நேரே மேனோக்கி u எனும் வேகத்துடன் ஏறியப்படுகிறது. எறியற்புள்ளிக்குத் துணிக்கை திரும்பி வர எடுக்கும் நேரம் என்ன? ஆப்பிற்கும், துணிக்கைக்குமிடையேயான மறுதாக்கம் $\dfrac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

12. தரப்பட்டிருக்கும் உருவம் ஒரு ஏற்றும் பொறியைக் காட்டுகிறது. S இலேசான ஒப்பமான கப்பி, ABC, சீரான நேர் வட்டக் கூம்பு வடிவான பாரம். கூம்பின் திணிவு M. $\angle BAC = 2\alpha \cdot S$ இல் $2M$ கட்டப் பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள P, Q என்னும் இரு சிறிய சமமான குண்டுகள் கூம்பின் அழுத்தமான மேற்பரப்பில் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. கூம்பு $\dfrac{4mg\sin^2\alpha}{3M + 4m\sin^2\alpha}$ எனும் ஆர்முடுகலுடன் இறங்கும் எனக் காட்டுக. இழையில் உள்ள இழுவிசையையும் காண்க.

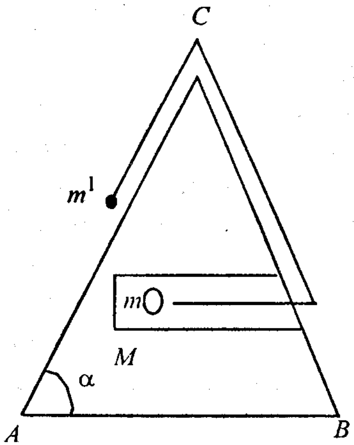


13. p , q என்பன ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மேல் ஓய்விலுள்ள இலேசான ஆப்பொன்றின் முகங்களாகும். முறையே m, km திணிவுடைய A, B ஆகிய துணிக்கைகள் முறையே p, q இன் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A, B, இனூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளம் ஆப்பின் மத்திய வெட்டுமுகமாயுள்ளது. p, q ஆகிய முகங்கள் கிடையுடன் முறையே α , β ஆகிய சாய்வில் உள்ளன.

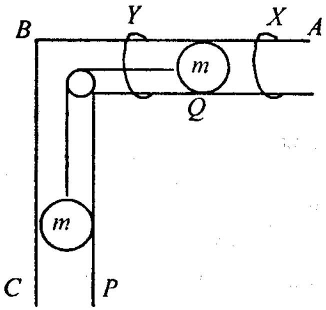
அமைப்பு ஓய்விலிருந்து அசைய ஆரம்பிக்குமாயின், $k < \dfrac{\sin\alpha \cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$

ஆயின் B, முகம் q இல் மேனோக்கி இயங்குமெனக் காட்டுக.

14. M திணிவுள்ள ஓர் ஒப்பமான ஆப்பின் மையக் குறுக்குவெட்டு ABC எனும் முக்கோணியாகும். அவ் ஆப்பானது AB ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஒப்பமான ஒரு கிடைமேசை மீது இருக்குமாறு ஓய்விலிருக்கிறது. $\angle BAC = \alpha$; தளம் ABC யிலே பக்கம் BC யிலிருந்து சிறுவிட்டமுள்ள ஒப்பமான துவாரம் AB க்குச் சமாந்தரமாகத் துளையிடப்பட்டுள்ளது. m திணிவுள்ள துணிக்கை ஒன்று அத்துவாரத்தின் உள்ளே வைக்கப்பட்டு பக்கம் AC யிலுள்ளதும் m^1 திணிவுடையதுமான துணிக்கையுடன் உச்சி C மீது செல்லும் ஒரு நீளா இழையினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பின்னர் முழுத் தொகுதியும் மெதுவாக இயங்கவிடப்படுகிறது.



$m > m^1 \cos\alpha$ எனின் அவ்வாப்பானது BA யினால் குறிக்கப்படும் போக்கிலுள்ள திசையிலே இயங்குமென நிறுவுக. m இன் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

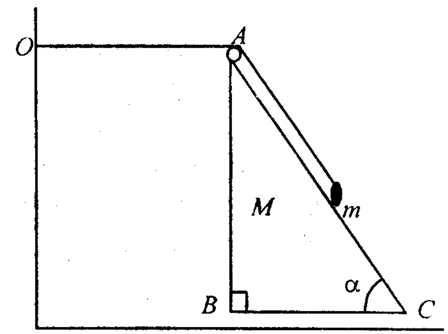
15. 

M திணிவுடைய மெல்லிய குழாயொன்று B இல் 90^o இல் வளைக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்ற பகுதி கிடையாகவும் நிலையான ஒப்பமான L, M என்ற வளையங்களிற்கூடாக சுயாதீனமாக வழுக்கக்கூடியதாகவும் உள்ளது. BC எனும் பகுதி நிலைக்குத்தாக உள்ளது. AB, BC என்பவற்றுள் உராய்வில்லாமல் சுயாதீனமாக அசையக்

கூடிய ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள P, Q ஆகிய இரண்டு துணிக்கைகள் B இல் உள்ள புறக்கணிக்கத்தக்க திணிவுடைய கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கும்படி இவ்வமைப்பு ஓய்வில் நிறுத்தப்பட்டு பின் மெதுவாக விடப்பட்டது. P யின் ஆர்முடுகலின் நிலைக்குத்துக்கூறு, கிடைக்கூறு என்பன முறையே

$\dfrac{M+2m}{2M+3m}\,g$, $\dfrac{Mg}{2M+3m}$ எனக் காட்டுக. இழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

16. M திணிவுடைய ஒப்பமான ஆப்பு ABC ஆனது ஓர் ஒப்பமான மேசை மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் $AC = a$, $\angle ACB = \alpha$ ஆகும். m திணிவுடைய சிறிய துணிக்கை ஒன்று நீளா இழையினால் இணைக்கப்பட்டு இழையானது A இலுள்ள இலேசான கப்பியின் மீதாகச் சென்று, இழையின் மறுமுனை O எனும் நிலைத்த புள்ளிக்கு இணைக் கப்பட்டுள்ளது. OA கிடையாக உள்ளது. துணிக்கை AC யின் மீது A யிற்கு அண்மையில் இருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை இறுக்கமாக இருக்க, தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. துணிக்கைக்கும், ஆப்பிற்கும் இடையே தொடுகை உள்ளதெனக் கொண்டு துணிக்கை C ஐ அடையும் போது ஆப்பின் கதி



$\sqrt{\dfrac{2amg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}}$ எனவும்,

இழையின் இழுவை $\dfrac{M+m(1-\cos\alpha)\,mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$ எனவும் நிறுவுக.

17. ABC என்பது M திணிவுள்ள ஒழுங்கான ஆப்பு ஒன்றின் மையக்குறுக்கு வெட்டாகும். ஆப்பிற்கு AB மேசையுடன் தொடுகையிலிருந்தவாறு இயங்க சுயாதீனமுடையது. $\angle ACB = 90^o$, $\angle CAB = \alpha$ · m_1 , m_2 எனும் திணிவுகளுள்ள P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஆப்பின் C என்னும் புள்ளிக்கு அண்மையில் வைக்கப்பட்டுப் பின் தொகுதி முழுவதும் ஓய்விலிருந்து மென்மையாக விடுவிக்கப்படுகின்றன. ஆப்பினதும், துணிக்கைகளினதும்

ஆர்முடுகலைத் துணிவதற்குப் போதிய எண்ணிக்கையான சமன்பாடுகளை எழுதுக. பின்னர் நிகழும் இயக்கத்தில் PQ என்ற கோடு கிடையாக இருந்தால் $M\ cos 2\alpha = m_1\ sin^2\alpha - m_2\ cos^2\alpha$ எனக் காட்டுக.

18. M திணிவுடைய ஒப்பமான ஆப்பொன்றின் மைய நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டுமுகம் ABC ஆகும். $\angle ABC = \frac{\pi}{2}, \angle BAC = \alpha \left(< \frac{\pi}{4}\right)$ ஆகும். கிடையுடன் α கோணச் சாய்தளமொன்றின் மீது B இன் கீழ் A ஆகவும், AB ஒரு உயர் சாய்வுக்கோடு வழியேயும் இருக்கும்படி ஆப்பு வைக்கப்பட்டுள்ளது. முறையே m_1, m_2 திணிவுகளுடைய P, Q எனும் துணிக்கைகள் C இன் மேல் செல்லும் நீட்டமுடியாத இலேசான இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டு AC, CB எனும் பங்கங்கள் மீது இழை, ACB எனும் தளத்தில் கிடக்குமாறு அமைந்துள்ளன. இழை இறுக்கமாகவும், தொகுதி ஓய்விலேயும் வைத்து விடுவிக்கப்பட்டால் துணிக்கைகள் ஆப்புடன் தொடுகையிலிருக்குமென எடுத்துக் கொண்டு

(i) ஆப்பின் ஆர்முடுகலையும்
(ii) ஆப்புத் தொடர்பான P,Q என்பவற்றின் ஆர்முடுகலையும்
(iii) தளத்தின் மீது ஆப்பின் தாக்கத்தையும் காண்க.

ஆப்பு தொடர்பாக, P, Q என்பன ஓய்விலிருந்தால் $m_2 = m_1\ sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

19. M திணிவுடைய ஒரு சீரான ஆப்பொன்றின் மையக் குறுக்கு வெட்டானது ABC எனும் இருசமபக்க முக்கோணமாய் அமைந்துள்ளது. $\angle A = \angle B = \alpha$, AB ஒரு கிடை மேசையைத் தொட்டவண்ணம் ஆப்பு ஓய்விலுள்ளது. உச்சி C ஐ மட்டுமட்டாக அடையுமாறு m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை A யிலிருந்து AC யின் வழியே u கதியுடன் எறியப்படுகிறது.

$u^2 = \dfrac{(M+m)2gh}{M + m sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக. இங்கு h ஆனது AB யிலிருந்து C இன உயரமாகும். பின்னர் துணிக்கையானது உச்சி C ஐ மெதுவாகத் தாண்டி ஆப்பின் மற்றைய முகத்தின் மீது கீழ்நோக்கி வழுக்குகின்றது. துணிக்கை B ஐ அடையும் போது ஆப்பு, ஆரம்பநிலையிருந்து நகர்ந்த தூரத்தைக் காண்க.

20. m, m^1 திணிவுள்ள இரு துணிக்கைகள் அழுத்தமான கிடைத்தளத்திலிருக்கும் M திணிவுள்ள ஓர் ஆப்பின் இரு அழுத்தமான முகங்களில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஆப்பின் முகங்கள் கிடையுடன் முறையே α, α^1 எனும் கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளன. இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்கினால்

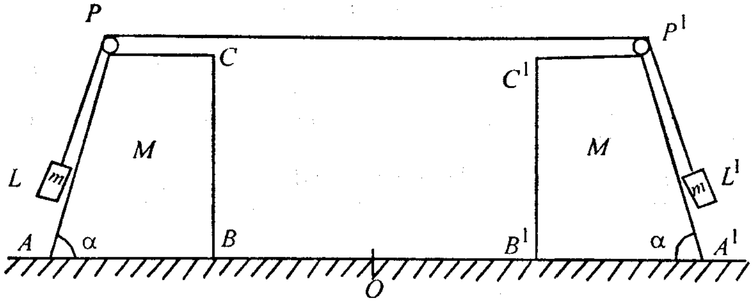
$\alpha^1 < tan^1\left[\dfrac{m\ sin\ \alpha\ cos\alpha}{M + m^1 + m\ sin^2\ \alpha}\right]$ ஆக இருக்கும். போது

m^1 ஆனது தானிருக்கும் முகத்தில் மேல் நோக்கி இயங்குமெனக் காட்டுக. ஆப்பு தொடர்பாக m^1 ஓய்விலிருந்தால் தளத்திற்கும், ஆப்பிற்குமிடையே மறுதாக்கம் $\dfrac{(M+m^1)(M+m^1+m)}{M+m^1+m\ sin^2\ \alpha}$ எனக் காட்டுக.

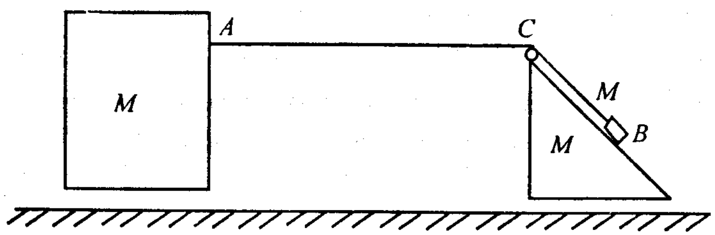
21. திணிவு M உள்ள ஆப்பு ஒன்று, ஒரு ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது ஓய்வில் உள்ளது. அதற்கு அத்தளத்தில் இயங்குவதற்குச் சுயாதீனமுண்டு. ஆப்பின் சாய்முகமானது கிடைத்தளத்துடன் கோணம் α ஐ ஆக்குகின்றது. திணிவு m உள்ள துணிக்கை ஒன்றானது கிடைத்தளத்தில் இருந்து h என்னும் மிகக்கூடிய உயரம் ஒன்றை அடைவதற்கு மட்டுமட்டான கதியுடன் ஆப்பின் அடியில் இருந்து ஆப்பின் சாய்முகத்தின் உயர்சாய்வுக் கோட்டின் வழியே எறிப்படுகின்றது. இக் கோடு ஆப்பின் திணிவுமையம் ஊடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ளது. துணிக்கை எவ்வேகத்துடன் எறியப்பட்டதெனக் காண்க. துணிக்கையானது ஆப்பின் அடிக்கு திரும்பி வந்ததும் $\dfrac{4mh\ cot\ \alpha}{M+m}$ எனும் தூரத்தை ஆப்பானது கடந்தது எனக் காட்டுக.

22. தரப்பட்டுள்ள படம் ஒரு கோட்டை வாயிலிலுள்ள வழுவற்றன்மையுடைய கேற்றொன்றின் மத்திய நிலைக்குத்தான குறுக்குவெட்டுப் பரப்பை காட்டுகிறது. $ABCP$, $A^1B^1C^1P^1$ என்பன இரு அழுத்தமான ஒவ்வொன்றும் M திணிவுடைய சம ஆப்புக்கள் ஆகும். இவை ஓர் அழுத்தமான கிடை நிலத்தில் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய சம சுமைகள் L, L^1 ஆப்புகளின் சாய்முகங்களில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவை ஆப்புக்களில் இறுக்கப்பட்டிருக்கும் இரு சிறு அழுத்தமான இலேசான P, P^1 என்னும்

கப்பிகளின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆப்பின் நிலைக்குத்து முகங்கள் $CB, C^1 B^1$ ஒவ்வொன்றும் கேற் பாதையின் மையம் O விலிருந்து a தூரத்தில் ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டன. கேற்பாதை மூடுவதற்குச் செல்லும் நேரம் $2\sqrt{\frac{a}{g\sin\alpha}\left\{1-\cos a+\frac{M}{2m}\right\}}$ என நிறுவுக.



23. ஒவ்வொன்றும் M திணிவுள்ள ஒரு கனக்குற்றியும் ஆப்பும் ஒரு அழுத்தமான கிடை மேசையின் மேல் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. கனக் குற்றியினதும், ஆப்பினதும் மைய நிலைக்குத்து வெட்டுமுகத்தில் கிடக்கும் AB எனும் இலேசான இழையின் ஒரு முனை கனக்குற்றியினுள் A என்னும் ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழை கிடைக்கு α சாய்விலிருக்கும் ஆப்பின் ஒப்பமான முகத்தில் ஓய்விலிருக்கும் M திணிவுடைய துணிக்கையை மறுமுனை B யில் தாங்குகிறது. கோடு AC கிடையாக இருக்குமாறு ஆப்பிற்குப் பொருத்தப்பட்ட C என்னும் சிறிய இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாக இழை செல்கிறது. இழை இறுக்கமாக இருக்க அமைப்பு ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. $\alpha < \cos^{-1}\left(2-\sqrt{3}\right)$ ஆயின், துணிக்கையின் மேலுள்ள ஆப்பின் மறுதாக்கம் $\frac{\cos^2\alpha-4\cos\alpha+l}{\cos^2\alpha+2\cos\alpha-5}Mg$ எனக் காட்டுக.



24. ஒப்பமான ஓர் ஆப்பின் மையக்குறுக்கு வெட்டுமுகம் ஒரு முக்கோணி ABC ஆகும். $\angle ACB \frac{\pi}{2}$ · AB ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மேலிருக்க, ஆப்பானது ஓய்விலுள்ளது. ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் துணிக்கை ஒன்று CA யின் நீளம் முழுவதிலும் வழுக்கிச் செல்ல எடுக்கும் t_1 எடுக்கிறது. இதே போல் CB யின் நீளம் முழுவதிலும் வழுக்கிச் செல்ல எடுக்கும் நேரம் t_2 ஆகும். ஆப்பின் திணிவானது துணிக்கையின் திணிவின் n மடங்கிற்கு சமமெனின் $\left(\frac{t_1}{t_2}\right)=\frac{n+\sin^2 A}{n+\cos^2 A}\cot^2 A$ என நிறுவுக.

ஆப்பானது ஓரிடத்தில் நிலையாக அமர்த்தப்பட்டால் $\frac{T_2}{T_1}=\tan A$ என உய்த்தறிக. இங்கு T_1, T_2 என்பன முறையே CA, CB வழியே துணிக்கை வழுக்கிச் செல்ல எடுக்கும் நேரங்கள் ஆகும்.

25. C இல் செங்கோணத்தையுடைய குறுக்கு வெட்டு முகம் ABC எனும் முக்கோணி வடிவில் அமைந்த ஒப்பமான ஓர் ஆப்பு அதன் AB ஐக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது தங்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது.

(i) ஆப்பு நிலைப்படுத்தப்பட்ட போது C இல் ஓய்விலிருந்து விடப்படும் துணிக்கை ஒன்று A ஐ அடைய எடுத்த நேரம் t_1 ஆகவும், இதே போல் CB வழியே எடுத்த நேரம் t_2 ஆகவுமிருப்பின் $\tan A=\frac{t_2}{t_1}$ எனக் காட்டி AB ஐ t_1, t_2 சார்பாகக் காண்க.

(ii) ஆப்பின் திணிவு துணிக்கையின் திணிவின் n மடங்காகவும், துணிக்கையும் ஆப்பும் இயங்குவதற்கு சுயாதீனமுடையனவாக இருப்பின் CA வழியே துணிக்கை இயங்க எடுத்த நேரம் $t_1\left[1-\frac{t_1^2}{(n+1)\left(t_1^2+t_2^2\right)}\right]^{1/2}$ எனக் காட்டுக.

26. M திணிவுள்ள ஓர் ஆப்பின் மையக்குறுக்கு வெட்டானது, $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{4}$ ஆகுமாறு உள்ள ABC எனும் இருசமபக்க முக்கோணி ஆகும். அவ்வாப்பானது BC ஐக் கொண்டுள்ள தள முகம் மேசையைத் தொடும்படி ஒரு கிடை மேசை மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. $m, m^1 \left(m^1 > m\right)$ திணிவுகளுடைய X , X^1 எனும் துணிக்கைகள் முறையே AB , AC மீது A இற்கு அருகே வைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்நிலையில் தொகுதி பிடிக்கப்பட்டு பின்னர் மென்மையாக விடுவிக்கப்படுகிறது. எல்லாத் தொடுகைகளும் ஒப்பமானவை என எடுத்துக் கொண்டு C யிலிருந்து B யின் போக்கில் அவ்வாப்பின் மேசை தொடர்பான ஆர்முடுகல் F ஆயிருக்க X, X^1 இன் ஆப்பு தொடர்பான ஆர்முடுகல்கள் சரிவுகளில் கீழ் நோக்கும் திசைகளில் f , f^1 எனின் பின்வருவனவற்றைப் பெறுக.

$$\frac{2F}{m^1 - m} = \frac{f\sqrt{2}}{M + m} = \frac{f^1\sqrt{2}}{M + m^1} = \frac{2g}{2M + m + m^1}$$

X ஆனது சரிவு AB இன் அடியை அடைவதற்கு முன் X^1 ஆனது சரிவு AC ஐ அடையுமெனக் காண்க.

X^1 ஆனது ஆப்பை விட்டு விலகும் போது X இற்கும் ஆப்பிற்குமிடையேயுள்ள மறுதாக்கம் திடீர் மாற்றமடைகின்றதெனக் காட்டி இம்மாற்றம் X இன் மீது ஒரு கணத்தாக்கத்தை ஏன் உண்டாக்கவில்லை என்பதை விளக்குக.

27. M திணிவும், கோணம் α உம் உள்ள ஆப்பு ஒன்று, கோணம் α ஆக அமைந்த ஒப்பமான சாய்தளமொன்றில் ஆப்பின் மேன் முகம் கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் இத்தொகுதி ஓய்வில் இருக்கும் போது m திணிவுள்ள துணிக்கை ஒன்று ஒப்பமமான கிடையான ஆப்பின் மேன்முகத்தில் வைக்கப்படுகிறது. ஆப்பினதும், துணிக்கையினதும் ஆர்முடுகலைக் காண்க. ஆப்புக்கும், தளத்திற்குமிடையேயான மறுதாக்கம் $\frac{M(M+m)g\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக. வெளியில் இத்துணிக்கையின் பாதை என்ன?

28. M திணிவையும் α சாய்வையும் உடைய ABC எனும் ஓர் ஒப்பமான ஆப்பானது ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது சுயாதீனமாக இயங்கக்கூடியது. சாய்முகம் AC மீது m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை வைக்கப்பட்டு மெல்லென விடப்படுமிடத்து வெளியில் அதன் பாதையானது, $M\tan\theta = (M+m)\tan\alpha$ என்பதால் தரப்படும் θ எனுமோர் ஒருமைக்கோணத்தைக் கிடையுடன் அமைக்கின்றதெனக் காட்டுக.

29. திணிவு M உடைய ஒப்பமான ஆப்பு ஒன்றின் மையக்குறுக்கு வெட்டானது ABC எனும் முக்கோணி ஆகும். $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $\angle CAB = \alpha \cdot AB$ ஆனது ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றுடன் தொட்டவண்ணம் ஆப்பானது ஓய்விலுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய P, Q எனுமிரு துணிக்கைகள் முறையே CA, CB எனும் பக்கங்கள் வழியே வழுக்கிச் செல்ல சுயாதீனமுண்டு. ஆப்பின் ஆர்முடுகலைக் காண்க. C யில் நிலைத்த இலேசான கப்பி ஒன்றின் மீது செல்லும் இலேசான நீட்ட முடியாத இழை ஒன்றினால் துணிக்கைகள் P, Q இணைக்கப் பட்டுள்ளன. ஆப்பின் ஆர்முடுகல் $\frac{mg\cos 2\alpha}{2M + 3m - m\sin 2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

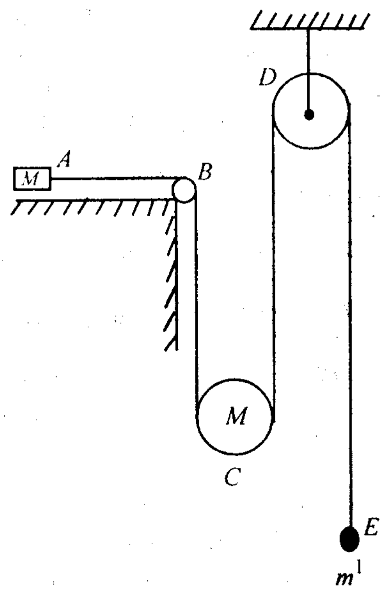
30. ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது நிறுத்தப்பட்டிருக்கும் ஆப்பு ஒன்றின் ஒப்பமான சரிந்த முகம் ஒன்றை, m திணிவுள்ள துணிக்கை ஒன்று தொட்டுக் கொண்டு இருக்கின்றது. ஆப்பின் திணிவு M ஆகும். ஆப்பின் சரிந்த முகம் கிடையுடன் α இற் சாய்ந்திருக்கிறது. இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுமாயின், ஆப்பின் ஆர்முடுகல் $\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக. துணிக்கை ஆப்பினது முகத்தின் வழியே s தூரம் செல்லும் நேரத்தில் ஆப்பு d தூரம் செல்லும் எனின், $\left(1 + \frac{M}{m}\right) d = s\cos\alpha$ எனக் காட்டுக. அத்தோடு ஆப்பிற்கும், மேசைக்குமிடையேயுள்ள மறுதாக்கம் $\frac{M(M+m)g}{M + m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

31. கோணம் α ஐயுடைய ஒப்பமான ஆப்பு ஒன்று ஒப்பமான கிடைமேசை மீது இருக்கின்றது. ஆப்பினது சாய்முகத்தின் அடியிலே துணிக்கை ஒன்று உள்ளது. ஆப்பு மேசை வழியே மாறா ஆர்முடுகல் F உடன் இயங்கச் செய்யப்படுகிறது. $F > g\tan\alpha$ எனின் துணிக்கை ஆப்பின் சாய்ந்த முகத்தில் ஏறுமென நிறுவுக. ஆப்பு நேரம் T யிற்கு இவ்விதமாக இயங்கிப் பின்னர் மாறா வேகத்துடன்

அசைகின்றது. $T = \left[\dfrac{2gh\sec\alpha}{F(F\cos\alpha - g\sin\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}$ ஆக இருப்பின் துணிக்கை தளத்திலே மேனோக்கி உயரம் h ஐ மட்டுமட்டாக அடையுமெனக் காட்டுக.

32. திணிவு M ஐயும், கோணம் α ஐயும் உடைய ஆப்பு ஒன்று ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் ஒரு கோணம் α இல் சாய்ந்துள்ள தளத்தின் வழியே மேல் நோக்கி வேகம் u உடன் எறியப்படுகின்றது. அது $\dfrac{2u\left(M + m\sin^2\alpha\right)}{(M+m)g\sin\alpha}$ நேரத்திற்குப் பின்னர் தளத்தின் மீதுள்ள தொடக்க எறியற்புள்ளிக்குத் திரும்பி வருமெனக் காட்டுக. இந்நேரத்தில் ஆப்பு இயங்கிய தூரத்தைக் காண்க. மேசை தொடர்பாக துணிக்கையின் பாதை யாது?

33.



இவ்வுருவிலே நிலைத்த ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீதுள்ள திணிவு m ஐ உடைய பொருள் A ஐயும், திணிவு m^1 ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை E ஐயும் தொடுக்கும் நீட்ட முடியாத இலேசான ஓர் இழை $ABCDE$ உடன் சிறிய கப்பிகளின் ஒழுங்கமைப்பு ஒன்று காட்டப் பட்டுள்ளது. B, D என்பன நிலைத்த ஒப்பமான கப்பிகளாகும். இக்கப்பி களின் மேலாக இழை செல்கிறது.

C என்பது திணிவு M ஐ உடைய அசையத்தக்க ஒப்பமான ஒரு கப்பியாகும். இக்கப்பி இழையின் இரு பகுதிகளினாலே தாங்கப்படுகின்றது. இழையின் பகுதி AB கிடையானது. இழையின் BC, CD, DE பகுதிகள் நிலைக்குத்தானவை. நேரம் t இல் AB, DE

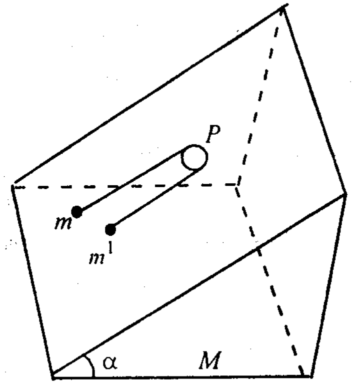
ஆகிய பகுதிகளின் நீளங்கள் முறையே x, y எனின் m, m^1, M ஆகிய திணிவுகளுக்குரிய இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதி இழையிலுள்ள இழுவை T யானது, $T\left[\dfrac{4}{M} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m^1}\right] = 3g$ இனாலே தரப்படும் என உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து $\dfrac{2}{M} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m^1}$ ஆக இருப்பின், கப்பி C நிலையாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

34. **(i)** உயர்த்தி ஒன்றின் மேல்நோக்கிய இயக்கம் மூன்று கட்டங்களில் நடைபெறுகிறது. கட்டம் I இல் , அது சீரான ஆர்முடுகல் f உடன் இயங்குகிறது. கட்டம் II இல் அது சீரானவேகத்துடன் இயங்குகிறது. கட்டம் III இல் அது சீரான அமர்முடுகல் $2f$ உடன் இயங்குகிறது. உயர்த்தியின் கூரையிலுள்ள விற்றராசு ஒன்றினால் பொருள் ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கட்டம் I இல் தராசின் வாசிப்பு 18 kg உம் கட்டம் III இல் தராசின் வாசிப்பு 9 kg உம் ஆகும். கட்டம் II இல் உள்ள வாசிப்பையும் f இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

(ii) துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் சாய்வு α இலுள்ள கரடான தளம் ஒன்றின் வழியே சீரான வேகத்துடன் கீழ்நோக்கி வழுக்கிச் செல்கின்றது. தளத்தின் சாய்வு k இற்கு அதிகரிக்கப்படியின் துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $g\dfrac{\sin[(k-1)\alpha]}{\cos\alpha}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\alpha < k\alpha < \dfrac{\pi}{2}$

35. α சாய்வுடைய ஒப்பமான ஆப்பு ஒன்று, ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் இரு நுனிகளிலும் $m, m^1, \left(m > m^1\right)$ என்னும் திணிவுகள் இணைக்கப்பட்ட $2l$ நீளமுள்ள நீட்டமுடியாத இலேசான இழை ஒன்று ஆப்பின் சாய்ந்த மேல் முகத்திலிருந்து நீட்டிக்கொண்டிருக்கும் சிறிய ஓர் ஒப்பமான முளை P ஐச் சுற்றிச் செல்கிறது. துணிக்கைகள் ஆப்பின் முகத்துடன் தொடுகையில் உள்ளன. தொடக்கத்தில் துணிக்கைகள் ஒன்றுக்கொன்று அண்மையாகவும் முளையில் இருந்து l தூரத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப் பட்டுள்ளன.



இழையின் ஒவ்வொரு பகுதியும் இறுக்கமாகவும் சாய்முகத்தின் அதி உயர் சரிவுக்கோடு ஒன்றின் வழியாகவும் உள்ளன. பாரம் குறைந்த துணிக்கை m^1 முளையை அடையமுன்னர் ஆப்பின் ஆர்முடுகல்

$$\frac{\left(m - m^1\right) g \sin a \cos a}{M\left(m + m^1\right) + 4\, m m^1 + \left(m - m^1\right) \sin^2 \alpha}$$ என

நிறுவுக. இங்கு M ஆப்பின் திணிவு ஆகும்.

(ஆப்பின் கீழ்விளிம்பிலிருந்து முளை P இன் தூரமானது $2\,l$ இலும் பார்க்க கூடியதாகுமெனக் கருதுக.) பாரம் குறைந்த துணிக்கை முளையை அடையும் போதுஆப்பு மேசை மீது $\dfrac{l\left(m - m^1\right)\cos a}{M + m + m^1}$ எனும் தூரம் சென்றிருக்கும் என உய்த்தறிக.

36. திணிவு M உம், உயரம் h உம் சாய்வு $\alpha\left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ உம் உடைய ஒப்பமான ஆப்பு ஒன்று, உயர்த்தி ஒன்றின் பெரிய ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது அதன் ஓரத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலே சுயாதீனமாக இயங்கவல்லது. உயர்த்தி மாறா ஆர்முடுகல் a உடன் ஏறுகின்றது. $k\,M\,(k \geq 1)$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று ஆப்பின் முகத்தின் வழியே அதன் கீழ் விளிம்பிலிருந்து தொடங்கி V என்னும் வேகத்துடன் நேர் மேலே எறியப்படுகிறது. துணிக்கையின் இயக்கமானது ஆப்பின் சாய்முகத்தின் அதி உயர் சாய்வுக்கோடு வழியாக நடைபெறுகின்றதெனக் கொண்டு எந்த ஒரு நேரத்திலும் துணிக்கைக்கும், ஆப்பிற்குமிடையேயான மறுதாக்கம் R ஆனது.

$$R = \frac{k\,M\,(g + a)\cos\alpha}{1 + k\sin^2\alpha}$$ என்பதாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$$V > \left[\frac{2\,(1 + k)\,(g + a)\,h}{1 + k\sin^2\alpha}\right]^{1/2}$$ எனில், துணிக்கை எறியல் புள்ளிக்குத் திரும்பாது என நிறுவுக. எந்தவொரு நேரத்திலும் ஆப்பிற்கும், உயர்த்தியின் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட மறுதாக்கம் யாது?

அலகு 4

வேலை, வலு, சக்தி

வேலை (Work): ஒரு விசை தனது பிரயோகப்புள்ளியை இயக்கினால், அவ்விசை வேலை செய்கின்றதெனப்படும். வேலையின் அளவானது பின்வருமாறு தரப்படும்.

வேலை = விசை × விசையின் திசையில் பிரயோகப்புள்ளி அசைந்த தூரம்.

வேலையின் அலகு: விசை நியூட்டனிலும், தூரம் மீற்றரிலும் இருக்க, வேலையின் அலகு யூல் (J) ஆகும்.

விசை ஒன்றினால் செய்யப்பட்ட வேலை மறையாக இருப்பின், வேலையானது அவ்விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்டதாகும்.

உ+ம் : உராய்வு விசைக்கெதிராக செய்யப்பட்ட வேலை ஈர்வைக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை

m திணிவுடைய துணிக்கை, நிலைக்குத்தாக h தூரம் உயர்த்தப்படின் mgh ஈர்வைக்கெதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை ஆகும்.

விசை F மாறுமெனின், s_1 இலிருந்து s_2 விற்கு இயங்கச் செய்யப்பட வேலை $\int_{s_1}^{s_2} F\,ds$ ஆகும்

வலு (power): வலு என்பது, வேலை செய்யும் வீதமாகும். அதாவது ஒரு அலகு நேரத்தில் செய்யப்பட்ட வேலை ஆகும்.

வலுவின் அலகு: வலுவின் அலகு யூல்/செக் என்பதாகும். இது வாற்று (W) (*watt*) என அழைக்கப்படும்.

மீள்தன்மை இழையில் இழுவை: மீள்தன்மை இழையில் உள்ள இழுவை. அதன் நீட்சிக்கு விகிதசமமாகும் $T \propto$ நீட்சி (x)

$T = \dfrac{\lambda x}{l}$ இங்கு l இழையின் இயற்கை நீளம். λ இழையின் மீள் தன்மைமட்டு.

மீள்தன்மை இழை ஒன்றின் இயற்கை நீளம் l மீள்தன்மை மட்டு λ என்க. இவ்விழையில் நீட்சியை x_1 இலிருந்து x_2 விற்கு அதிகரிக்கச் செய்யப்பட்ட

வேலை $\int_{x_1}^{x_2} T\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \lambda \frac{x}{l}\,dx = \frac{\lambda}{l}\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$

$$\frac{\lambda}{l}\left[\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right]$$

$$\frac{\lambda}{l}\left[\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda}{l}(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\lambda x_2}{l} + \frac{\lambda x_1}{l}\right](x_2 - x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}(T_2 + T_1)(x_2 - x_1) \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு T_1, T_2 என்பன முறையே நீட்சி x_1, x_2 ஆக இருக்கும் போதுள்ள இழுவைகள் ஆகும். எனவே இயற்கை நீளம் l உடைய மீள்தன்மை இழையொன்றில் e நீட்சியை ஏற்படுத்த செய்யப்பட்ட வேலை $\frac{\lambda e^2}{2l}$ ஆகும்.

சக்தி (Energy) : ஒரு பொருளின் சக்தி வேலைசெய்வதற்கான அதன் வல்லமை ஆகும். எனவே சக்தி வேலையைப் போன்று யூல் (J) இனால் அளக்கப்படும். சக்தியில் பல வடிவங்கள் உண்டு. நாம் பொறியியலில், பொறிமுறை சக்தி பற்றிக் கருதுவோம், இது இயக்கசக்தி, அழுத்தசக்தி என இருவகைப்படும்.

இயக்க சக்தி: (Kinetic Energy) ஒரு பொருள் தனது இயக்கம் காரணமாகப் பெறும் சக்தியே இயக்கச் சக்தியாகும். இப் பொருள் ஓய்வுக்கு வருமுன் செய்யும் வேலையைக் கொண்டு இச் சக்தி தனி அலகுகளில் அளக்கப்படும்.
m திணிவுள்ள பொருள் ஒன்று v வேகத்துடன் இயக்கினால், அப் பொருளின் இயக்க சக்தி $\tfrac{1}{2}mv^2$ ஆகும்.

m திணிவுடைய இப் பொருள் F எனும் மாறா விசையால் ஓய்விற்குக் கொண்டு வரப்படுகிறதென்க. இதனால் பெறப்படும் ஆர்முடுகல் a எனவும், இடப்பெயர்ச்சி s எனவும் கொண்டால், வரைவிலக்கணத்தின் படி

இயக்கச் சக்தி $(K \cdot E)$ = செய்யப்பட்ட வேலை

$$= F \cdot s$$
$$= ma \cdot s$$
$$K \cdot E = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad (v^2 = 2as)$$

அழுத்த சக்தி: (Potential Energy)

அழுத்தசக்தி என்பது நிலையைக் குறித்த சக்தியாகும். ஒரு பொருளானது, தன் நிலையில் இருந்து விடுவிக்கப்பட்டு அது இயங்கத் தொடங்குமெனின் அப் பொருளிற்கு அழுத்தசக்தி உண்டெனப்படும். பொதுவாக இரு வகையான அழுத்தசக்தி உண்டு.

(i) ஈர்வையிலான அழுத்தசக்தி: (gravitational potential energy)
(ii) மீள்தன்மை அழுத்தசக்தி : (elastic potential energy)

அழுத்த சக்தியை வரையறுக்கும் போது,

ஒரு பொருள் தனது உண்மையான தானத்தில் இருந்து, ஒரு நியமத்தானத்திற்குச் செல்கையில், அது செய்யவல்ல வேலையே அழுத்தசக்தியாகும் என வரையறுக்கலாம். m திணிவுடைய பொருள் ஒன்று, பூமியின் மேற்பரப்பிற்கு மேல் h உயரத்திலிருப்பின், பொருளின் அழுத்த சக்தி mgh ஆகும். (இது ஈர்வையிலான அழுத்த சக்தியாகும்.) இங்கு பூமியின் மேற்பரப்பு நியமத்தானமாகும். எனவே ஈர்வையிலான அழுத்த சக்தியானது, பொருளின் நிலையானது, நியமத்தானத்திற்கு மேலே அல்லது கீழே என்பதற்கேற்ப நேர் அல்லது மறைப் பெறுமானங்களைக் கொள்ளக்கூடியது.

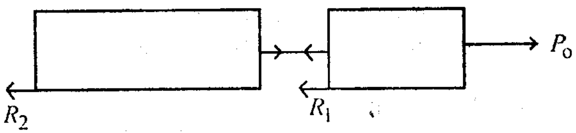
மீள்தன்மை அழுத்த சக்தி:

ஈர்க்கப்பட்ட மீள்தன்மை இழை, ஈர்க்கப்பட்ட விற்சுருள், ஒடுக்கப்பட்ட விற்சுருள் என்பவற்றில் காணலாம். ஈர்க்கப்பட்ட இழை / விற்சுருள் விடுவிக்கப்பட்டதும், இயங்கத் தொடங்குகிறது. இவ்வாறே ஒடுக்கப்பட்ட விற்சுருளும் விடுவிக்கப்பட்டதும் இயங்கத் தொடங்குகிறது. ஆனல் இங்கு சக்தியானது, ஒரு போதும் மறைப்பெறுமானத்தை கொண்டிருப்பதில்லை. a இயற்கை நீளமும் λ மீள்தன்மை மட்டும் கொண்ட விற்சுருள் ஒன்று x தூரம் நீட்சியடையும் போது அல்லது x தூரம் ஒடுக்கப்படும் போது, மீள்தன்மை அழுத்த சக்தி $\frac{1}{2}\frac{\lambda x^2}{a}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

புகையிரத எஞ்சின் ஒன்று பெட்டியுடன் இழுவைச் சட்டத்தால் (tow-bar) இணைக்கப்பட்டுள்ளது. எஞ்சினின் இயக்கத்திற்கான மாறாத்தடை $40,000\,N$ ஆக இருக்கும் அதேவேளை, பெட்டியின் இயக்கத்திற்கான தடை $20,000\,N$ ஆகும். எஞ்சின் விருத்தியாக்கும் வலு $900\,KW$ எனின், கிடைப்பாதையிலே புகையிரதத்தின் உயர் கதியை $km\,h^{-1}$ இல் காண்க.

அடுத்து புகையிரதம் கிடையுடன் மாறாச் சாய்வு $sm^{-1}\left(\frac{1}{50}\right)$ ஐக் கொண்ட பாதை ஒன்றில் மேனோக்கிச் செல்கிறது. எஞ்சின் வேலை செய்யும் வலு $900\,KW$ ஆகும். மாறா உராய்வு விசைகளுக்கு எதிராக இயக்கம் நடைபெறுகிறது. புகையிரத்தின் மொத்தத் திணிவு 340 மெட்ரிக் தொன் எனின், அது $5\,ms^{-1}$ கதியில் செல்லும் போது அதன் ஆர்முடுகல் $\frac{13}{85}ms^{-2}$ எனக்காட்டுக. மேலும் எஞ்சினின் திணிவு, பெட்டியின் திணிவின் மும்மடங்கெனின், இக்கணத்தில் இழுவைச் சட்டத்தில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.
[1 மெட்ரிக் தொன் = 1000 kg; $g = 10\,ms^{-2}$ எனக் கொள்க.]



எஞ்சின் பிரயோகிக்கும் விசை P_o நியூட்டன் எனக.

எஞ்சினின் அதி உயர்கதி $V\,kmh^{-1}$ என்க. $V\,kmh^{-1} = \frac{V \times 1000}{3600} ms^{-1}$

$$= \frac{5V}{18}$$

எஞ்சின் அதிஉயர் கதியில் செல்வதால், ஆர்முடுகல் பூச்சியம்

$\longrightarrow$ $P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க

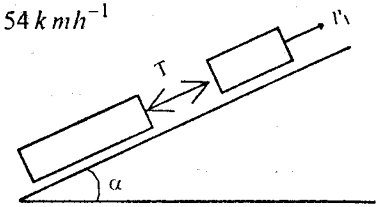
$$P_o - (R_1 + R_2) = m \times o$$

$$P_o = R_1 + R_2 = 40000 + 20000 = 60000\,N$$

$$P_o \times \frac{5V}{18} = 900 \times 10^3$$

$$60000 \times \frac{5V}{18} = 900 \times 10^3; \qquad V = 54\,kmh^{-1}$$

எஞ்சின் பிரயோகிக்கும் விசை P_1 என்க.



மொத்தத்தடை விசை $= 60,000 + 340 \times 10^3 \times g\,sin\alpha$

$$= 60,000 + 340 \times 10^3 \times 10 \times \frac{1}{50}$$

$$= 60,000 + 68000 = 128000\,N$$

$$P_1 \times 5 = 900 \times 10^3 \quad P_1 = 180 \times 10^3\,N$$

$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$$P_1 - 128000 = 340 \times 10^3 \times a$$

$$180 \times 10^3 - 128 \times 10^3 = 340 \times 10^3 \times a$$

$$a = \frac{13}{85} ms^{-2}$$

பெட்டிக்கு $P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க,

இழுவைச் சட்டத்தில் இழுவை T என்க.

$$T - \left[20,000 + 85 \times 10^3 \times 10 \times \frac{1}{50}\right] = 85 \times 10^3 \times \frac{13}{85}$$

$$T - [20,000 + 17000] = 10^3 \times 13$$

$$T = 50 \times 10^3\,N$$

உதாரணம் 2

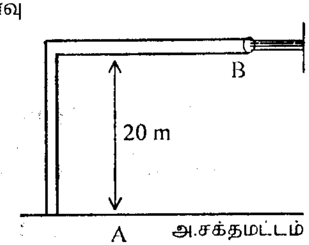
(a) பம்பி ஒன்று 20 m ஆழத்திலிருந்து நீரை உயர்த்தி $0\cdot 2m$ விட்டமுள்ள குழாய் ஒன்றினூடாக $16 ms^{-1}$ கதியிற் கிடையாக விடுகிறது. ஒரு செக்கனில் பம்பி செய்யும் வேலையைக் கணிக்க. மீள்தன்மையில்லாத் தளச் சுவரொன்றை அடையும் போது நீரின் வேகம் அழிக்கப்படத்தக்கதாக நீர் அதே வேகத்துடன் அந்தச் சுவர் மீது செவ்வனாகச் சாடுமாயின் சுவர் மீதுள்ள உதைப்பைக் காண்க.

($1m^3$ நீரின் திணிவு $= 1000\,kg$. $\pi = 3\cdot 14$, $g = 9\cdot 8ms^{-2}$ எனக் கொள்க.)

(b) m திணிவுள்ள ஒரு குண்டு, M திணிவுள்ள ஒரு நிலைத்த மரக்குற்றியை d தடிப்பிற்கு ஊடுருவுகின்றது. மரக்குற்றி அசைவதற்கு சுயாதீனமாகவும், தடை சீராகவும், குற்றி நிலையாக இருந்த பொழுது உள்ள அளவிலும் தடை இருப்பின் ஊடுருவிய தடிப்பு $\dfrac{Md}{M+m}$ எனக் காட்டுக.

(a) 1 செக்கனில் வெளியேற்றப்படும் நீரின் கனவளவு

$$\left(\pi \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 16\right) m^3$$



1 செக்கனில் வெளியேற்றப்படும் நீரின் திணிவு

$$= \left(\pi \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 16\right) \times 10^3\, kg$$

$$= 31\cdot 4 \times 16\, kg$$

A இல் சக்தி $= 0$: B இல் சக்தி $= \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh$

$$= \frac{1}{2} \times (31\cdot 4 \times 16) \times 16 \times 16 + (31\cdot 4 \times 16) \times 9\cdot 8 \times 20$$

$$= 31\cdot 4 \times 16\,[128 + 196]\, J$$

$$= 31\cdot 4 \times 16 \times 324\, J$$

$$= 162878\, J$$

1 செக்கனில் ஏற்பட்ட சக்தி மாற்றம் = 1 செக்கனில் செய்யப்பட்ட வேலை
= 162878 J

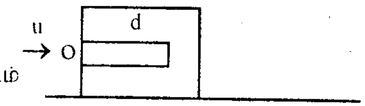
சுவர் மீதான உதைப்பு P எனின், $P = 1$ செக்கனில் ஏற்பட்ட உந்தமாற்றம்

$$P = m(v-u) = P = 31\cdot 4 \times 16\,[0 - (-16)]$$

$$= 31\cdot 4 \times 16 \times 16\, N$$

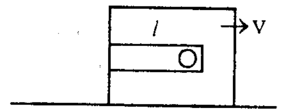
$$= 8038\, N$$

(b) குற்றி நிலையாக உள்ள போது,
குற்றியின் தடைவிசையை P என்க.
செய்யப்பட்ட வேலை = இயக்க சக்தி நட்டம்



$$P\cdot d = \frac{1}{2}mu^2 - 0$$

$$Pd = \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{------------------} (1)$$



குற்றி அசைவதற்கு சுயாதீனமாக உள்ள போது,
குண்டுபதிந்ததும், இரண்டினதும் பொது வேகம் V என்க, குண்டு சென்றதூரம் b என்க.
உந்தக்காப்புவிதி

$$\longrightarrow \quad mu = (M+m)V$$

செய்யப்பட்ட வேலை = இயக்கசக்தி நட்டம்

$$P\ell = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2$$

$$= \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= \frac{1}{2}mu^2\left[1 - \frac{m}{M+m}\right] = \frac{1}{2}\frac{Mmu^2}{M+m} \quad \text{----------} (2)$$

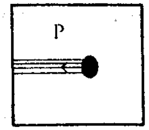
$$(2) \div (1), \quad \frac{l}{d} = \frac{M}{M+m}$$

$$l = \frac{Md}{M+m}$$

அல்லது

குற்றியின் தடைவிசை P என்க.

குண்டின் இயக்கத்திற்கு



$\longrightarrow$

$$-P = mf$$

$$\longrightarrow v^2 = u^2 + 2fs$$

$$0 = u^2 - \frac{2P}{m} \cdot d$$

$$d = \frac{mu^2}{2P} \text{ ------------(1)}$$

குற்றி இயங்குவதற்கு சுயாதீனமாக உள்ளபோது,

$A_{M.E} \longrightarrow F, \quad A_{m.M} = \longrightarrow f$ எனக.

$$A_{m.E} = A_{m.M} + A_{M.E} = \longrightarrow f + \longrightarrow F = \longrightarrow (f + F)$$

$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க

தொகுதி

$$\longrightarrow O = MF + m(F + f)$$

$$(M + m)F + mf = 0 \text{ ------------ (2)}$$

$$\xrightarrow{m}, \ -P = m(F + f) \text{ ------------ (3)}$$

$$\Rightarrow f = -\frac{P(M+m)}{Mm}$$

குற்றி தொடர்பான குண்டின் இயக்கம்,

$$V^2 = u^2 + 2as$$

$$o = u^2 + 2fl$$

$$l = \frac{u^2 \cdot Mm}{2P(M+m)}$$

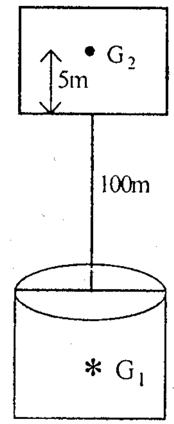
(1) இலிருந்து, $l = \dfrac{Md}{M+m}$

உதாரணம் 3

நியூட்டன், யூல், வாற்று ஆகியவற்றை வரையறுத்து பயன்படுத்தப்படும் அலகுகளையும், இக் கணியங்களின் பௌதீகப் பரிமாணங்களையும் கூறுக.

மேலே இருப்பதுவும் 10m பக்கமுள்ளதுமான கனவடிவ நீர்த்தாங்கி ஒன்றின் அடியானது, தரைக்கு மேலே 100 m உயரத்திலிருக்கிறது. 5m ஆரையுள்ள வாங்கு தொட்டி (sump) ஒன்று தரையிலே அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலே நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. மோட்டார் ஒன்று வாங்கு தொட்டியிலிருந்து தாங்கிக்கு நீரைப் பம்புகின்றது. 15 நிமிடத்தில் தாங்கியில் நீர் நிரம்புகிறது. மோட்டாரின் சராசரி வலு 1237 KW ஆகுமெனக் காட்டுக.

[$g = 10ms^{-2}$, $\pi = \dfrac{22}{7}$, 1 கனமீற்றர் நீரின் திணிவு = 1000 kg எனக் கொள்க.]



தொட்டி கொள்ளும் நீரின் கனவளவு $= 10 \times 10 \times 10 m^3$

நீரின் திணிவு $= 10^3 \times 10^3 = 10^6 \, kg$

$$10 \times 10 \times 10 = \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times h$$

$$h = \frac{140}{11}$$

வாங்கு தொட்டியிலிருந்து வெளியேற்றப்பட்ட

திணிவு மைய ஆழம் $= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{140}{11} = \dfrac{70}{11}$

ஏற்பட்ட சக்தி மாற்றம் $= mgh = 10^6 \times 10 \times \left[5 + 100 + \dfrac{70}{11}\right] J$

$$= \frac{10^6 \times 10 \times 1225}{11} J$$

15 நிமிடத்தில் ஏற்பட்ட சக்தி மாற்றம் $= \dfrac{10^6 \times 10 \times 1225}{11} J$

1 செக்கனில் ஏற்பட்ட சக்தி மாற்றம் $= \dfrac{10^6 \times 10 \times 1225}{11 \times 15 \times 60} J$

$\therefore$ வலு $= \dfrac{10^6 \times 10 \times 1225}{11 \times 15 \times 60} W = \dfrac{10^6 \times 10^3 \times 1225}{11 \times 15 \times 60 \times 10^3} KW \simeq 1237 \, KW$

உதாரணம் 4

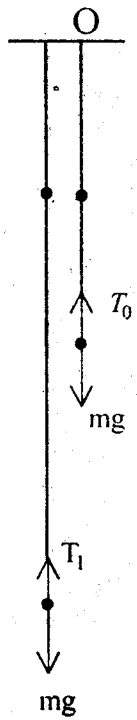
திணிவு ஒன்று a இயற்கை நீளமுடைய மீள்தன்மை இழையினால் O எனும் நிலைத்தபுள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் இழையின் நீளம் $\frac{5a}{3}$.

இத் துணிக்கை O வில் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்பட்டால் தொடரும் இயக்கத்தில் இழையின் உயர் நீளம் 3a ஆகுமெனக் காட்டுக.

அப்போது துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி 2g எனக் காட்டுக.

O விலிருந்து துணிக்கை 2a தூரத்திலிருக்கும் போது அதன் கதி யாது?

ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{1}{2}g$ ஆக இருக்கையில் துணிக்கையின் கதியைக் காண்க.



சமநிலையில் $mg = T_o = \lambda \times \frac{\frac{2}{3}a}{a}$

$$mg = \frac{2\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{3mg}{2}$$

இழையின் அதிஉயர் நீட்சியில் வேகம் $= 0$
இழையின் உயர் நீளம் l என்க.
அழுத்தசக்தி + இயக்கசக்தி + மீள்தன்மை அழுத்தசக்தி = மாறிலி
O வினூடான கிடைக்கோட்டை அழுத்த சக்தி மட்டமாகக் கொள்க.

$$-mgl + 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3mg}{2}\,\frac{(l-a)^2}{a} = 0$$

$$-4al + 3(\ell - a)^2 = 0$$

$$3l^2 - 10la + 3a^2 = 0$$

$$(3l - a)(l - 3a) = 0$$

$$l = \frac{a}{3} \text{ அல்லது } l = 3a$$

$l > a,\ l = 3a$

இழையின் அதி உயர் நீளம் $3a$ ஆகும்.

இழுவை T என்க. $T = \frac{3mg}{2} \times \frac{2a}{a} = 3mg$

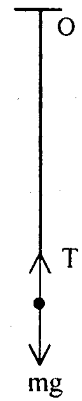
$\uparrow P = ma$ ஐப் பாவிக்க

$$T - mg = ma$$

$$3mg - mg = ma$$

$$a = 2g$$

எனவே ஆர்முடுகல் நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி $2g$ ஆகும்.
துணிக்கை O விலிருந்து $2a$ தூரத்திலிருக்கும்போது வேகம் v என்க. சக்திக் காப்பு விதியைப் பயன்படுத்த



$$-mg\,2a + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{3mg}{2}\times\frac{a^2}{a} = 0$$

$$v^2 = \frac{5ag}{2},\quad v = \sqrt{\frac{5ag}{2}} \text{ ------------------ (1)}$$

ஆர்முடுகல் $\uparrow \frac{1}{2}g$ என்க.

$\uparrow P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க,

$$T - mg = m\cdot\frac{g}{2} \Rightarrow T = \frac{3mg}{2}$$

$$T = \lambda \times \frac{\text{நீட்சி}}{\text{இயற்கை நீளம்}} = \frac{3mg}{2} = \frac{3mg}{2}\times\frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow x = a$$

எனவே நீட்சி a ஆகும். O விலிருந்து துணிக்கையின் ஆழம் $2a$

எனவே முதற்பகுதியிலிருந்து (1), துணிக்கையின் கதி $\sqrt{\frac{5ag}{2}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

திணிவு M ஐயும் நீளம் $2a$ யை உடைய ஓரத்தையும் கொண்ட சீர்த் திண்மக் கனவடிவக் குற்றி ஒன்று ஒப்பமான கிடை மேசையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இரு சமாந்தர நிலைக்குத்து முகங்களுக்கிடையே நடுவில் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நேரிய நுண் துவாரத்தை ஆக்குமாறு குற்றி துளைக்கப்படுகின்றது. இத்துவாரம் கனவடிவக் குற்றியின் மேற்கிடை ஓரங்கள் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி A யினூடாகச் செல்கிறது. கிடையுடன் துவாரத்தின் சாய்வு $\alpha\left(<\frac{\pi}{4}\right)$ ஆகும். திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை P ஆனது துவாரத்திலே A யில் வைக்கப்பட்டு, இத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது.

ஏகபரிமாண உந்தக் காப்புக் கோட்பாடுகளையும், பொறிமுறை சக்திக் கோட்பாடுகளையும் தொகுதிக்குப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $AP=x$ ஆக இருக்கும்போது குற்றி தொடர்பாகத் துணிக்கை P யின் வேகம் $\dot{x}\,(=v)$ ஆனது $\dot{x}^2 = \dfrac{2(M+m)\,gx\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ இனாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து குற்றி தொடர்பாகத் துணிக்கை P யின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

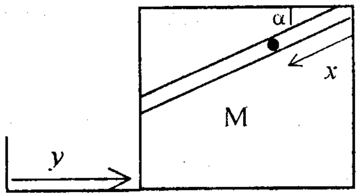
துணிக்கை P ஆனது நேரம் $2\sqrt{\dfrac{a(M+m)\sin^2\alpha}{g(M+m)\sin^2\alpha\cos\alpha}}$ இற்குப் பின்னர் துவாரத்தின் மற்றைய முனையிலிருந்து வெளிவரும் எனவும், இந் நேரத்திலே குற்றிக்குக் கிடைக்கும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி $\dfrac{gaMm^2\sin2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}$ எனவும் காட்டுக.

$V_{M,E} = \longrightarrow \dot{y}$

$V_{m,M} = \underset{\alpha}{\swarrow}\,\dot{x}$

$V_{m,E} = V_{m,M} + V_{M,E}$

$= \underset{\alpha}{\swarrow}\,\dot{x} + \longrightarrow \dot{y}$



தொகுதி $\longrightarrow$ உந்தக் காப்புவிதி

$$M\dot{y} + m(\dot{y} - \dot{x}\cos\alpha) = 0$$

$$(M+m)\dot{y} = m\dot{x}\cos\alpha \quad \text{--------------(1)}$$

சக்திக் காப்பு விதி,

$$\frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{y}^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{y}\dot{x}\cos\alpha\right] - mgx\sin\alpha = 0$$

$$(M+m)\dot{y}^2 + m\dot{x}^2 - 2m\cos\alpha\,\dot{x}\dot{y} = 2mgx\sin\alpha \quad \text{--------------(2)}$$

(1) இலிருந்து $\dot{y} = \dfrac{m\dot{x}\cos\alpha}{M+m}$ என (2) இல் பிரதியிட

$$(M+m)\frac{m^2\dot{x}^2\cos^2\alpha}{(M+m)^2} + m\dot{x}^2 - 2m\cos\alpha\,\dot{x}\,\frac{m\dot{x}\cos\alpha}{(M+m)} = 2mgx\sin\alpha$$

$$\frac{m\dot{x}^2\left[m\cos^2\alpha + (M+m) - 2m\cos^2\alpha\right]}{(M+m)} = 2mgx\sin\alpha$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2(M+m)gx\sin\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)}$$

இருபக்கமும் நேரம் t ஐக் குறித்து வகையிட

$$2\dot{x}\ddot{x} = \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)}\dot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

ஆப்பு தொடர்பான துணிக்கையின் இயக்கம்,

$$\swarrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$\frac{2a}{\cos\alpha} = 0 + \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$$

$$t^2 = \frac{4a}{\ddot{x}\cos\alpha} = \frac{4a(M+m\sin^2\alpha)}{(M+m)g\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{a(M+m\sin^2\alpha)}{g(M+m)\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$x = \dfrac{2a}{\cos\alpha}$ ஆகும் போது, $\dot{x}^2 = \dfrac{2(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\times\dfrac{2a}{\cos\alpha}$

$$\dot{y}^2 = \frac{m^2 \dot{x}^2 \cos^2\alpha}{M+m} = \frac{m^2}{M+m} \cdot \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \times \frac{2a}{\cos\alpha} \times \cos^2\alpha$$

குற்றியின் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி $= \frac{1}{2} M \dot{y}^2$

$$= \frac{g\,a\; M m^2 \sin 2\alpha}{(M+m)\left(M + m\sin^2\alpha\right)}$$ ஆகும்.

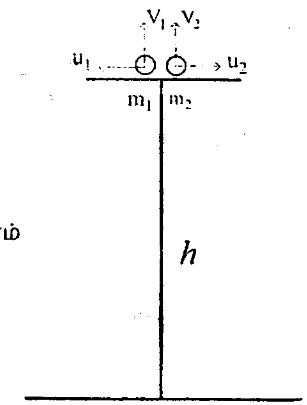
உதாரணம் 6

m திணிவுள்ள ஓடொன்று மேல்நோக்கி நிலைக்குத்தாக u வேகத்தில் தரையிலிருந்து சுடப்படுகிறது. ஓடு அதிஉயர் உயரத்தை அடைந்தவுடன் E அளவுள்ள உட் சக்தியினால் இது m_1, m_2 திணிவுகளைக் கொண்ட இரு துண்டுகளாக வெடிக்கிறது. இரு துண்டுகளினதும் தொடர்பு வேகம் கிடையான திசையில் அமைந்துள்ளது. இரு துண்டுகளும் ஒரே நேரத்தில் தரையில் மோதும் என்றும் அவற்றின் இடைத்தூரம்

$$= \frac{u}{g}\left\{\frac{2E(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\right\}^{1/2}$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

நிலமட்டத்தில் வெடித்திருந்தால் இரு துண்டுகளுக்குமிடையிலுள்ள

தூரம் $= \frac{2u}{g}\left\{\frac{2E(m_1+m_2)}{m_1 m_2}\right\}^{1/2}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.



$V^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பாவிக்க.

$O = u^2 - 2gh$

$h = \frac{u^2}{2g}$ - துணிக்கை m அடைந்த அதிஉயர் உயரம்

உந்தக் காப்புவிதி

$\longrightarrow m_2 u_2 - m_1 u_1 = 0$ ---------------(1)

$\uparrow m_2 v_2 + m_1 v_1 = 0$ ---------------(2)

$V_{m_1, m_2} = V_{m_1, E} + V_{E, m_2}$

$= \uparrow v_1 \; \overleftarrow{u_1} + \overleftarrow{u_2} \; \downarrow v_2 = \overleftarrow{(u_1 + u_2)} + \uparrow (V_1 - V_2)$

V_{m_1, m_2} ஆனது கிடையாக இருப்பதால், $V_1 - V_2 = 0; \;\; V_1 = V_2$

$(2) \Rightarrow m_2 v_2 + m_1 v_1 = 0 \Rightarrow m_2 v_2 + m_1 v_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 0 = V_1$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = 2E \quad \text{-----------(3)}$$

$(1) \Rightarrow \frac{u_1}{m_2} = \frac{u_2}{m_1}$ -----------(4)

$\downarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்க

$h = 0 + \frac{1}{2}gt^2$

$t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{u^2}{g^2}; \quad t = \frac{u}{g}$ ---------------(5)

இரு துணிக்கைகளும் t நேரத்தின் பின் நிலத்தை அடிக்கும்.

துணிக்கைகள் நிலத்தை அடிக்கும் தூரங்கள் முறையே R_1, R_2 எனின்

$\longleftarrow R_1 = u_1 \times t, \quad \overrightarrow{R_2} = u_2 \times t$

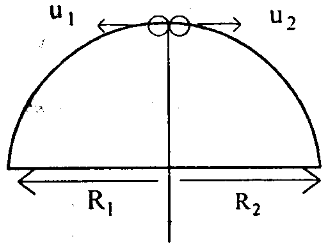
இடைத்தூரம் $R = R_1 + R_2 = (u_1 + u_2)\,t$ ---------(6)

$$(4) \Rightarrow \frac{u_1}{m_2} = \frac{u_2}{m_1} = \frac{u_1 + u_2}{m_1 + m_2} = K \text{ என்க.}$$

$$K^2 = \frac{u_1^2}{m_2^2} = \frac{u_2^2}{m_1^2} = \frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)} = \frac{2E}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}$$

ஆகவே $K = \sqrt{\dfrac{2E}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}}$

$$\therefore \frac{u_1 + u_2}{m_1 + m_2} = \sqrt{\frac{2E}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}}$$



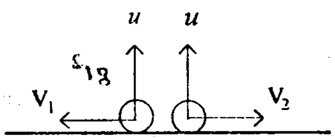
$$(6) \Rightarrow R = (u_1 + u_2) t$$

$$= \frac{u}{g} \cdot (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{2E}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}}$$

$$= \frac{u}{g} \sqrt{\frac{2E (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

நிலமட்டத்தில் வெடித்திருப்பின் ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் நிலைக்குத்து வேகம் u ஆகும்.

உந்தக் காப்பு விதி



$$\longrightarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = 0$$

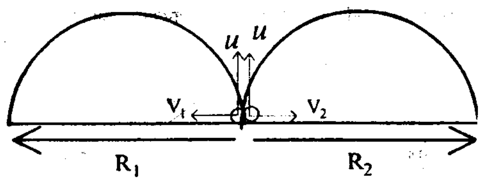
$$m_2 v_2 = m_1 v_1 \quad \text{———— (1)}$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{———— (2)}$$

$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2} a t^2$$

$$o = u \cdot T - \frac{1}{2} g \cdot T^2$$

$$T = \frac{2u}{g}$$



$$\leftarrow R_1 = V_1 \cdot T$$

$$\rightarrow R_2 = V_2 \cdot T$$

$$R_1 + R_2 = (V_1 + V_2) T$$

$$= \frac{2u}{g} (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{2E}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}}$$

$$= \frac{2u}{g} \sqrt{\frac{2E (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

உதாரணம் 7

(a) M எனும் திணிவுடைய ரயில் பாரக்கட்டை வண்டியொன்று ஒப்பமான நேரான கிடைத் தண்டவாளம் மீது ஓய்விலுள்ளது. அவ்வண்டியின் ஒரு விளிம்பில் நிற்கும் m எனும் திணிவுடைய ஒரு மனிதன் தண்டவாளத்திற்குச் சமாந்தரமான கிடைத்திசையிலே வண்டியின் சார்பாக u என்னும் வேகத்துடன் வெளியே குதிக்கிறான். வண்டியின் வேகத்தைக் காண்க.

(b) ஒவ்வொருவரும் m திணிவுடைய n எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு மக்கள் குழு ஓய்விலுள்ள வண்டியின் விளிம்பில் நிற்கிறது.

(ii)

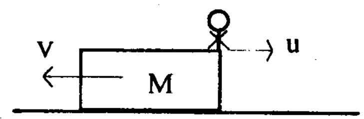
(i) எல்லோரும் ஒரே நேரத்தில் வண்டியின் சார்பாக u என்னும் வேகத்துடன் (a) இல் கூறியவாறு குதித்தால் வண்டியின் வேகத்தைக் காண்க.

(ii) ஒவ்வொருவரும் அடுத்தடுத்து வண்டியின் சார்பாக u எனும் வேகத்துடன் (a) இல் கூறியவாறு குதித்தால் வண்டியின் முடிவு வேகமானது

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{mu}{M + rm} \text{ ஆகுமெனக் காட்டுக.}$$

(i) இலுள்ள முடிவானது (ii) இலுள்ள முடிவிலும் பெரிதாகுமா? உமது விடைக்கு காரணங்காட்டி விளக்குக.

(a) $V_{T,E} = V$ [T - ரயில்வண்டி]



$V_{M,T} \longrightarrow u$ [M - மனிதன்]

$$V_{M,E} = V_{M,T} + V_{T,E}$$

$$= \xrightarrow[u]{} + \xleftarrow[V]{}$$

$$= \longleftarrow (V - u)$$

உந்தக் காப்புவிதி.

$$\longleftarrow \quad MV + m(V-u) = 0$$

$$V = \frac{mu}{M+m}$$

(b) **(i)** எல்லோரும் ஒரே நேரத்தில் குதிக்கும்போது,

$$V_{T.E} = \longleftarrow V_0 \qquad V_o \longleftarrow \boxed{} \rightarrow u$$

உந்தக் காப்பு விதி

$$\overleftarrow{MV_0 + nm(V_0 - u) = 0}$$

$$V_0 = \frac{nmu}{M+nm}$$

(ii) முதலாவது மனிதன் குதித்தபின் வண்டியின் வேகம் V_1 என்க.

$$V_{T.E} = \longleftarrow V_1 \qquad V_1 \longleftarrow \boxed{M+(n-1)m} \rightarrow u$$

$$V_{M.E} = V_{M,T} + V_{T,E}$$

$$= \longleftarrow V_1 + \longrightarrow u$$

$$= \longleftarrow (V_1 - u)$$

உந்தக் காப்பு விதி,

$$\longleftarrow \left[M + (n-1)m\right] V_1 + m(V_1 - u) = 0$$

$$V_1 = \frac{mu}{M+nm}$$

இரண்டாவது மனிதன் குதித்தபின் வண்டியின் வேகம் V_2 என்க.

$$V_2 \longleftarrow \boxed{M+(n-2)m} \rightarrow u$$

உந்தக் காப்புவிதி,

$$\longleftarrow \left[M + (n-2)m\right] V_2 + m(V_2 - u) = \left[M + (n-1)m\right] V_1$$

$$V_2 = V_1 + \frac{mu}{M+(n-1)m} = \frac{mu}{M+nm} + \frac{mu}{M+(n-1)m}$$

மூன்றாவது மனிதன் குதித்தபின், வண்டியின் வேகம் V_3 என்க.

$$V_3 \longleftarrow \boxed{M+(n-3)m} \rightarrow u$$

$$\longleftarrow$$

உந்தக்காப்புவிதி

$$\left[M+(n-3)m\right] V_3 + m(V_3 - u) = \left[M+(n-2)m\right] V_2$$

$$V_3 = \frac{mu}{M+(n-2)m} + V_2$$

$$V_3 = \frac{mu}{M+nm} + \frac{mu}{M+(n-1)m} + \frac{mu}{M+(n-2)m}$$

இவ்வாறே n மனிதர்களும் குதித்தபின் வண்டியின் வேகம் V_n எனின்

$$V_n = \frac{mn}{\left[M+\{n-(n-1)m\}\right]} + V_{n-1}$$

$$= \frac{mu}{M+m} + V_{n-1}$$

$$V_n = \frac{mu}{M+nm} + \frac{mu}{M+(n-1)m} + \frac{mu}{M+(n-2)m} + \dots\dots\dots\dots + \frac{mu}{M+m}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{mu}{M+rm}$$ ஆகும்.

$$M+m < M+2m < M+3m < \ldots\ldots\ldots\ldots < M+nm$$

$$\frac{1}{M+m} > \frac{1}{M+2m} > \frac{1}{M+3m} \ldots\ldots\ldots > \frac{1}{M+nm}$$

$$\frac{mu}{M+m} > \frac{mu}{M+nm}; \quad \frac{mu}{M+2m} > \frac{mu}{M+nm}; \quad \frac{mu}{M+3m} > \frac{mu}{M+nm};$$

ஆகவே $\sum_{r=1}^{n} \frac{mu}{M+rm} > \frac{nmu}{M+nm}$ ஆகும்.

உதாரணம் 8

உந்தக் காப்புக் கோட்பாட்டையும், சக்திக்காப்புக் கோட்பாட்டையும் குறிப்பிடுக.

இயற்கை நீளம் l ஐயும் மட்டு λ வையும் உடைய இலேசான வில் ஒன்றினாலே தொடுக்கப்பட்ட முறையே m, M எனும் திணிவுகளையுடைய இரு துணிக்கைகள் P, Q என்பன ஒப்பமான கிடை மேசையொன்றின் மீது l என்னும் இடைத்தூரத்தில் கிடக்கின்றன. துணிக்கை P ஆனது Q வை நோக்கி u எனும் வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. நேரம் t யிலே துணிக்கை P இயங்கிய தூரத்தை x எனவும், வில்லின் நீளத்தை y எனவும் எடுத்து உந்தச் சமன்பாட்டையும், சக்திச் சமன்பாட்டையும் எழுதுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுமுறையில்

(i) வில்லின் மிகப்பெரிய நெருக்கல் $\sqrt{\frac{\ell m M}{\lambda(M+m)}}\, u$ எனக் காட்டி, இது ஏற்படும் போது திணிவு மையம் தொடர்பான P யின் வேகத்தைக் காண்க.

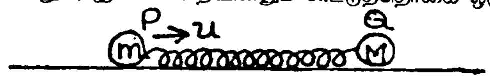
(ii) வில்லானது அதன் இயற்கை நீளத்துக்கு மறுபடியும் விரிவடைந்த போது திணிவுகள் P, Q ஆகியவற்றின் வேகங்கள் முறையே $\left(\frac{m-M}{m+M}\right)u$, $\frac{2mn}{m+M}$ எனக் காட்டுக.

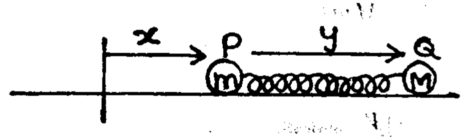
உந்தக்காப்பு கோட்பாடு

ஒரு தொகுதித் துணிக்கைகள் மீது தொழிற்படும் வெளிவிசைகளின், ஒரு குறித்ததிசையிலான கூறுகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் எனின், அத் திசையிலான உந்தம் ஒரு மாறிலியாகும்.

சக்திக் காப்புக் கோட்பாடு

காப்புவிசைப் புலமொன்றின் தாக்கத்தின் கீழ் உள்ள தொகுதி ஒன்றின் அழுத்த சக்தியினதும், இயக்கசக்தியினதும் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.





$V_{P,E} = \longrightarrow \dot{x}, \quad V_{Q,P} = \longrightarrow \dot{y}$

$V_{Q.E} = V_{Q.P} + V_{P.E} = \longrightarrow \dot{y} + \longrightarrow \dot{x} = \longrightarrow (\dot{x} + \dot{y})$

உந்தக் காப்புவிதி

$\longrightarrow m\dot{x} + M(\dot{x} + \dot{y}) = mu$ ------------- (1)

சக்திக் காப்புவிதி,

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{1}{2}\lambda\frac{(l-y)^2}{l} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$mx^2 + M(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{\lambda(\ell-y)^2}{l} = mu^2 \text{ ------------- (2)}$$

(i) வில்லின் மிகப்பெரிய நெருக்கலின் போது y இழிவாக இருக்கும். எனவே $\dot{y} = 0$

$\dot{y} = 0$ எனின் (i) இலிருந்து $\dot{x} = \dfrac{mu}{M+m}$

(2) இல் பிரதியிட

$$(M+m)\frac{m^2 u^2}{(M+m)^2} + \frac{\lambda}{\ell}(\ell - y)^2 = mu^2$$

$$\frac{\lambda}{\ell}(\ell - y)^2 = mu^2\left[1 - \frac{m}{M+m}\right] = \frac{Mmu^2}{M+m}$$

$$\ell - y = \sqrt{\frac{Mmu^2\ell}{\lambda(M+m)}}$$

$\therefore$ மிகப் பெரிய நெருக்கல் $\sqrt{\dfrac{Mm\ell}{\lambda(M+m)}}\,u$ ஆகும்.

திணிவுமையம் G இன் வேகம் $(\longrightarrow)V$ எனின்,

$$(M+m)V = mu$$

$$V = \frac{mu}{M+m}$$

$V_{P.G} = V_{P.E} + V_{E.G}$

$$= \xrightarrow{\dot{x}} + \underset{V}{\longleftarrow}$$

$$= \longrightarrow \dot{x} - v = \frac{mu}{M+m} - \frac{mu}{M+m} = 0$$

(ii) வில்லானது மறுபடியும் இயற்கை நீளத்திற்கு வரும்போது,

$$y = \ell \Rightarrow y - \ell = 0$$

$$\Rightarrow m\dot{x}^2 + M(\dot{x} + \dot{y})^2 = mu^2$$

(1) இலிருந்து

$$m\dot{x}^2 + M\left[\frac{m^2}{M^2}(u - \dot{x})^2\right] = mu^2$$

$$\frac{m}{M}(u - \dot{x})^2 = u^2 - \dot{x}^2$$

$$\frac{m}{M}(u - \dot{x})^2 = (u - \dot{x})(u + \dot{x})$$

$u \neq \dot{x}$, $\dfrac{m}{M}(u - \dot{x}) = (u + \dot{x})$

$$\dot{x} = \frac{m-M}{m+M}u$$

$$\dot{x} + \dot{y} = \frac{m}{M}\left[u - \frac{m-M}{m+M}u\right]$$

$$\dot{x} + \dot{y} = \frac{2mu}{M+m}$$

$V_{P.E} = \dfrac{m-M}{m+M}u$, $\quad V_{Q.E} = \dfrac{2mu}{M+m}$ ஆகும்.

பயிற்சி 4

4 (a)

1. (a) 500 kg திணிவு 10 m உயரத்திற்கு பாரம் தூக்கி ஒன்றினால் உயர்த்தப்படுகிறது. பாரம் தூக்கி செய்த வேலையைக் காண்க.

   (b) புகையிரதம் ஒன்று 6 km இடைத் தூரத்திலுள்ள இரு நிலையங்களிற்கிடையில் பயணம் செய்கிறது. இயக்கத்திற்கான சராசரித் தடை 600 நியூட்டன் எனின் தடைக்கெதிராக செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க.

2. குற்றி ஒன்று $sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ சாய்விலே $6ms^{-1}$ உடன் மேல்நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. 1 செக்கனில் புவியீர்ப்புக் கெதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை 490J எனின், குற்றியின் திணிவு யாது?

3. 5 kg திணிவு ஒன்று, கிடையுடன் 30^0 சாய்விலுள்ள கரடான சாய்தளத்தின் வழியே, தளத்திற்கு சமாந்தரமான இழை ஒன்றினாலே மேல்நோக்கி இழுக்கப்படுகிறது. குற்றியை 3 m தூரம் சீரான கதியில் இழுக்கச் செய்யப்பட்ட வேலை 90 J எனின், தளத்திற்கும், குற்றிக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

4. (i) 70 kg திணிவுடைய மனிதன் ஒருவன் 150 m உயரமான குன்றின் உச்சியை 14 நிமிடங்களில் ஏறுகிறான். அவனின் சராசரி வேலைசெய்யும் வீதத்தைக் காண்க.

   (ii) சமாந்தரக் கரைகளையுடைய ஓர் ஆற்றின் அகலம் 90 m உம் அதன் சராசரி ஆழம் $3\cdot 6m$ உம் ஆகும். ஆற்றின் சராசரிக் கதி $6kmh^{-1}$ ஆகும். அதனுடைய இயக்கச்சக்தியின், அரைப்பங்கினை வேலையாக மாற்றினால் பெறப்படும் வலு யாது?

5. 450 kw இல் வேலை செய்யும் எஞ்சின் ஒன்று, 240×10^3 kg மொத்தத் திணிவுடைய புகையிரதம் ஒன்றைக் கிடையான பாதையில் புகையிரதத்தின் நிறையின் $\frac{1}{100}$ பங்கு தடை விசைக்கு எதிராக இழுத்துச் செல்கிறது. அதன் கதி $48kmh^{-1}$ ஆக இருக்கையில் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

   புகையிரதம் $\frac{1}{80}$ ஆன சாய்வில் மேல்நோக்கிச் செல்லக் கூடிய உயர்கதி யாது?

6. 1000 kg திணிவுடைய கார் ஒன்று, அதன் நிறையின் $\frac{1}{25}$ பங்கு தடைவிசைக்கு எதிராக கிடையான பாதையொன்றில் செல்கிறது. எஞ்சின் 10 kw வலுவில் வேலை செய்கின்றதெனில், காரின் உயர் கதியையும், எஞ்சினின் இழுப்பு விசையையும் காண்க. கார் இப்பொழுது $600kg$ திணிவுடைய வண்டி ஒன்றை அதன் நிறையின் 20 இல் 1 தடைவிசைக்கெதிராக இழுத்துச் செல்கின்றது. காரின் கதி $32\,kmh^{-1}$ ஆக இருக்கையில், காரையும், வண்டியையும் இணைக்கும் இழையின் இழுவையைக் காண்க.

7. 1000 kg திணிவுடைய கார் ஒன்று, கிடையுடன் $sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ சாய்வுடைய தளத்தில் மேல்நோக்கி உயர்கதி $15ms^{-1}$ இல் செல்கின்றது. இயக்கத்திற்கான உராய்வுத்தடை காரின் நிறையின் 10 இல் 1 ஆகும். கிடையான பாதையில் காரின் உயர் கதியைக் காண்க. கார், அதன் உயர் வலுவின் அரைப்பங்குடன் வேலை செய்யும் போது, இதே சரிவில் கார் கீழ் நோக்கி $30ms^{-1}$ உடன் செல்கையில் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

8. 10000 kg திணிவுடைய லொறி ஒன்று, 10 இல் 1 ஆன சாய்விலே 1200 N தடை விசைக்கெதிராக மேல்நோக்கி உயர்கதி $24\,kmh^{-1}$ இல் செல்லவல்லது. எஞ்சினின் வலுவைக் கிலோவாற்றில் காண்க. தடையானது வேகத்தின் வர்க்கத்துடன் நேராக மாறுகின்றதெனக் கொண்டு மட்டமான பாதையில் லொறியின் உயர் கதியை kmh^{-1} இல் காண்க.

9. 1000 kg திணிவுடைய கார் ஒன்று, கிடையான பாதையில் அதன் நிறையின் 30 இல் 1 தடை விசைக்கெதிராக செல்கிறது. எஞ்சினின் வலு 15 kw எனின், கார் அடையக்கூடிய உயர்கதியைக் காண்க. கார் இப்பொழுது 600 kg திணிவுடைய வண்டி ஒன்றை அதன் நிறையின் 20 இல் 1 தடைவிசைக்கெதிராக இழுத்துச்செல்கிறது. இணைப்பிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

10. 1000 kg திணிவுடைய கார் ஒன்று R நியூட்டன் மாறாத் தடை விசைக்கெதிராக இயங்குகிறது. கிடையான பாதையில் காரின் உயர் கதி $120\,kmh^{-1}$ ஆகவும், $sin\theta = \frac{1}{100}$ ஆகவுள்ள சாய்தளத்தில் மேனோக்கிச் செல்கையில் உயர்கதி $60\,kmh^{-1}$ ஆகவும் இருப்பின், காரின் வலுவைக் கணிக்க.

1000 kg திணிவுடைய வண்டி ஒன்றினை கார். வண்டி என்பவற்றின் இயக்கத்திற்கான மொத்த தடை விசை $3R$ நியூட்டனிற்கெதிராக இக்கார் இழுத்துச் செல்கிறது. கார் உயர் வலுவில் வேலை செய்கிறதெனக் கொண்டு,

(a) மட்டமான பாதையில் செல்கையில்

(b) சாய்விலே மேனோக்கிச் செல்கையில் உயர்கதியைக் காண்க.

11. W நிறையுடைய கார் வலு H இல் வேலை செய்கிறது. இயக்கத்திற்கு உராய்வு காரணமாக, மாறாத்தடை விசை R ஆகும். கார் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ சாய்விலே மேல் நோக்கிச் செல்லும் போது அதன் உயர் கதி v ஆகவும், அதே சாய்வில் கீழ் நோக்கிச் செல்லும் போது உயர் கதி $2v$ ஆகவும், உள்ளது. தடைவிசை R ஐ W, n உறுப்புகளில் காண்க. மட்டமான பாதையில் காரின் உயர் கதி U ஆகும். இக் கார், தரப்பட்ட சாய்வில் மேல்நோக்கி $U/2$ இல் செல்லும் போது, காரின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

12. $M\,kg$ திணிவுடைய கார் ஒன்றின், எஞ்சின் ஒருமை வலு H kw இல் வேலை செய்கிறது. காரின் இயக்கத்திற்கான உராய்வுத் தடை விசை ஓர் ஒருமையாகும். கிடையான பாதையில் காரின் உயர் கதி Vms^{-1} ஆகும். கிடையுடன் α சாய்வான பாதையில் $\frac{V}{2}\,ms^{-1}$ இல் (a) மேல்நோக்கி (b) கீழ்நோக்கிச் செல்கையில் காரின் ஆர்முடுகலை M, V, H, α, g என்பவற்றில் காண்க. (b) இல் காரின் ஆர்முடுகல் (a) இல் காரின் ஆர்முடுகலை போல் இரு மடங்கெனின் $\sin\alpha$ ஐ, V, H, g இல் காண்க. இச்சாய்வில் மேல்நோக்கிச் செல்கையில் காரின் உயர்கதியை V இல் காண்க.

13. $500 \times 10^3\,kg$ திணிவுடைய வண்டித்தொடர் ஒன்று $\sin^{-1}\left(\frac{1}{100}\right)$ சாய்விலே கீழ் நோக்கிச் செல்லக்கூடிய உயர்கதி $96\,kmh^{-1}$ உம், அதே சாய்வில் மேல் நோக்கிச் செல்லக்கூடிய உயர்கதி $48\,kmh^{-1}$ உம் ஆகும். இயக்கத்திற்கான மொத்தத் தடை அதன் கதியுடன் நேராக மாறுகிறதெனவும், இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் எஞ்சின் ஒருமை வலுவில் வேலை செய்கின்றதெனவும் கொண்டு, எஞ்சினின் வலுவைக் காண்க.

14. 900 kg திணிவுடைய கார் ஒன்று, நேரான மட்டமான பாதையில் செல்கிறது. இயக்கத்திற்கான தடை $\left(200 + kv^2\right)N$ ஆகும். இங்கு k ஒரு மாறிலியும் v, ms^{-1} இல் வேகமும் ஆகும். கார் $22 \cdot 2\,k$W இல் வேலை செய்யும் போது, அதன் உயர் கதி $30\,ms^{-1}$ எனின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
எஞ்சின், இதே வலுவில் வேலை செய்யும் போது, மட்டமான பாதையில் அதன் கதி $18\,ms^{-1}$ ஆக இருக்கையில் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{15}\right)$ ஆன சாய்விலே மேனோக்கி $24\,ms^{-1}$ கதியில் செல்வதற்கு மேலும் அண்ணளவாக $4 \cdot 9\,k$W வலு தேவைப்படும் எனக் காட்டுக.

15. $M\,kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, ஓய்விலிருந்து ஒருமையான கிடை விசை F நியூட்டனின் கீழ் இயங்குகிறது. அதே கணத்தில், அதே M திணிவுடைய இன்னொரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து மாறாக் கிடைத்திசையில் $P\ Js^{-1}$ வீதம் வேலை செய்யும் விசையினால் இயங்குகிறது. T செக்கன்களின் பின்னர் இரண்டினதும் கதிகள் $V\,ms^{-1}$ எனின் $P = \frac{1}{2}FV$ எனக் காட்டுக. $4T$ செக்கன் முடிவில் கதிகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

4 (b)

1. $15\,m$ ஆழத்திலிருந்து, நிமிடத்திற்கு $4 \cdot 5\,m^3$ நீர் வீதம் $40\,cm^2$ குறுக்கு வெட்டுப் பரப்புள்ள குழாய் மூலம் நீர் வெளியேற்றப்படுகிறது. இதற்குத் தேவையான வலுவைக் காண்க. [$1\,m^3$ நீரின் நிறை $= 1000\,kg$]

2. செக்கன் ஒன்றிற்கு $0 \cdot 1\,m^3$ நீர் வீதம், $100\,cm^2$ குறுக்குவெட்டுப் பரப்புள்ள குழாயினால் $12\,m$ உயரத்திற்கு நீரைச் செலுத்தும் எஞ்சினின் வலு யாது?

3. ஆறு ஒன்றிற்கு மேல், $60\,m$ உயரத்திலுள்ள தாங்கி ஒன்றின் கொள்ளளவு $140\,m^3$. இதனை நிரப்புவதற்கு 24 மணித்தியாலங்கள் எடுக்கின்றது. எஞ்சினால் செய்யப்படும் வேலையின் $\frac{2}{3}$ பங்கு மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றதெனின், எஞ்சினின் வலு யாது?

4. **(i)** m திணிவு ஒன்று, வளித்தடைக்கெதிராகப் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படுகிறது. h உயரத்தினூடு விழுந்ததும் அது v என்னும் வேகத்தை அடைகிறது. வளித்தடைக் கெதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க.

(ii) A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு இழையானது ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்கிறது. A யின் திணிவு m உம், B யின் திணிவு $2m$ உம் ஆகும். தொடக்கத்தில் A உம், B உம் கப்பியிலிருந்து $2l$ ஆழத்தில் இழை இறுக்கமாக இருக்க ஓய்விலிருக்கின்றன. தொகுதி மெதுவாக விடுவிக்கப்பட்டால், ஒவ்வொரு துணிக்கையும் l தூரம் அசைந்தும் அவற்றின் வேகத்தைக் காண்க.

5. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் $2l$ இலேசான நீளா இழையொன்றினால், இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A என்னும் துணிக்கை ஒப்பமான மேசையின் மீது தங்கியிருக்க, துணிக்கை B மேசையின் ஓரத்திற்கு மேலால் சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது. மேசையின் மீதுள்ள இழை ஓரத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. A மேசையின் ஓரத்திலிருந்து l தூரத்திலுள்ளது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்பட்டால், துணிக்கை A மேசையின் ஓரத்தை அடையும் போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

6. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, இரு மெல்லிய நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு இழையும் ஒரே கிடை மட்டத்தில் $2a$ இடைத் தூரத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு ஒப்பமான இரு கப்பிகளின் மேலாகச் செல்கின்றன. இழைகளின் மறு முனைகளில் ஒவ்வொன்றும் $3m$ திணிவுடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொடக்கத்தில் m திணிவுடைய துணிக்கை, கப்பிகளுக்கிடையிலான நடுப்புள்ளியில் பிடிக்கப்பட்டு, மற்றைய துணிக்கைகள் சுயாதீனமாகத் தொங்கிக் கொண்டிருக்கையில் மெதுவாக விடப்படுகிறது. திணிவு m ஆனது கணநிலை ஓய்விற்கு வருமுன் நிலைக்குத்தாக $\frac{12a}{35}$ தூரம் விழும் எனக் காட்டுக.

7. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, கரடான கிடைமேசை மீது ஓய்விலுள்ளது. துணிக்கைக்கும், மேசைக்கும் இடையேயான உராய்வுக்குணகம் μ. இத்துணிக்கை, இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு மேசையின் விளிம்பிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று, மறு முனையில் m_2 திணிவைத் தாங்குகிறது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டு m துணிக்கை மேசையில் d தூரம் இயங்கியதும், ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் கதியைக் காண்க.

8. m திணிவுடைய குண்டொன்று u கதியுடன் கிடையாகச் சென்று நிலைத்த மரக்குற்றி ஒன்றினுள் c தூரம் ஊடுருவுகின்றது. இயக்கத்திற்கான மரக்குற்றியின் தடை ஓர் ஒருமையெனக் கொண்டு அதனைக் காண்க. குற்றியின் தடிப்பு $\frac{3c}{4}$ ஆக இருப்பின், குண்டு என்ன வேகத்துடன் வெளியேறும் எனவும் அதற்கான நேரத்தையும் காண்க.

4 (c)

1. $2a$ இயற்கை நீளமும், $2mg$ மீள்தன்மைமட்டும் கொண்ட, சுருள்வில்லொன்றின் நடுப்புள்ளிக்கு m திணிவு ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சுருள் வில்லின் ஒரு முனை சீலிங்கிலுள்ள P எனும் புள்ளிக்கும், மறுமுனை நிலத்திலுள்ள Q எனும் புள்ளிக்கும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. Q இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே P உள்ளது. $PQ = 4a$ ஆகும். துணிக்கை சமநிலையில் உள்ள போது, P இலிருந்து அதன் தூரத்தைக் காண்க?

2. a இயற்கை நீளமும், $2mg$ மீள்தன்மைமட்டும் கொண்ட AB என்னும் மீள் தன்மை இழையும் $2a$ இயற்கை நீளமும் $3mg$ மீள்தன்மை மட்டும் கொண்ட AC என்னும் மீள்தன்மை இழையும், A இல் ஒன்றாகக்கட்டப்பட்டு B, C என்பன ஒரே கிடைக்கோட்டில் $6a$ இடைத்தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB யின் நீளத்தைக் காண்க?

3. l இயற்கை நீளமும், $2mg$ மீள்தன்மைமட்டும் கொண்ட இலேசான சுருள் வில்லொன்றின் ஒரு முனை ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றிலுள்ள O எனும் ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு, மறுமுனை, மேசையின் மீது ஓய்விலிருக்கும் m திணிவுடைய P என்னும் துணிக்கைக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசை மீது $OP = \frac{5l}{2}$ ஆகுமாறு துணிக்கை இழுக்கப்பட்டு விடுவிக்கப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் சுருள் வில்லின் இழுவையையும், துணிக்கையின் ஆர்முடுகலையும் காண்க. $OP = l$ ஆகும் போது, துணிக்கையின் வேகம் என்ன?

4. $1m$ இயற்கை நீளமுடைய மீள் தன்மை இழை ஒன்று, $1 \cdot 2m$ இற்கு இழுக்கப்பட்ட போது, அதிலுள்ள சக்தி $16\,J$ எனின், $1 \cdot 5m$ இற்கு இழுக்கப்பட்ட போது அதிலுள்ள சக்தி எவ்வளவு?

5. l இயற்கை நீளமும், $2mg$ மீள்தன்மைமட்டும் உடைய இலேசான மீள்தன்மை இழை AB இன் முனை A நிலைப்படுத்தப்பட்டு, முனை B யிற்கு m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை A யில் பிடிக்கப்பட்டு விழவிடப்படுகிறது.தொடரும் இயக்கத்தில் AB இன் உயர் நீளத்தைக் காண்க.

6. l இயற்கை நீளமும், $4mg$ மீள்தன்மை மட்டும் கொண்ட இலேசான மீள் தன்மை இழை AB இன் முனை B இற்கு m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டு, இழையின் மறுமுனை A நிலைத்த ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை அதன் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து d தூரம் கீழே இழுக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. துணிக்கை மட்டுமட்டாக A ஐ அடையுமெனில் d ஐக் காண்க.

7. $2a$ இயற்கை நீளத்தையுடைய மீள் தன்மை இழை ஒன்றின் முனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் $2a$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் நடுப்புள்ளியில் m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத்தானத்தில் இழையின் ஒவ்வொரு பகுதியும் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை அமைப்பின் இழையின் மீள்தன்மை மட்டினைக் காண்க.

8. $2a$ இயற்கை நீளததையுடைய மீள் தன்மை இழை ஒன்றின் சுயாதீன முனையிலிருந்து W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டபோது அதில் b நீட்சி ஏற்பட்டது. இப்பொழுது இத் துணிக்கை அகற்றப்பட்டு இழையின் நடுப்புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டது. இழையின் இரு முனைகளும் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள A, B எனுமிரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டன. இங்கு $AB > 2a$ சமநிலையில் இழையின் கீழ்ப்பகுதி இறுக்கமாக உள்ளதெனக் கொண்டு, நடுப்புள்ளியிலிருந்து துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி $\frac{b}{4}$ எனக் காட்டுக.

9. விற்சுருள் ஒன்றை சுருக்குவதற்கு அல்லது விரிப்பதற்குத் தேவையான விசை அதன் சுருக்கம் அல்லது நீட்சிக்கு ஏற்ப மாறுகிறது. விற்சுருளை $1\,cm$ க்குச் சுருக்குவதற்குத் தேவையான விசை $20\,N$ எனின், அதனை மேலும் $1\,cm$ க்குச் சுருக்குவதற்குச் செய்ய வேண்டிய வேலையைக் காண்க.

10. ஒரு முனை நிலைப்படுத்தப்பட்ட இலேசான சுருள்வில் ஒன்றின் மறுமுனைக்கு M திணிவு இணைக்கப்பட e நீட்சி ஏற்படுகிறது. இந்நிலையில், M இற்கு மேலும் ஒரு m திணிவு இணைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விடப்பட்டால் சுருள் வில்லின் உயர் விரிவைக் காண்க.

11. ஒவ்வொன்றும், a இயற்கை நீளமும், $\frac{15mg}{16}$ மீள்தன்மைமட்டும் உடைய இரு இழைகள் m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டு, இழையின் மறுமுனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் $2a$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இருபுள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலைத்தானத்தில் ஒவ்வொரு இழையும் நிலைக்குத்துடன் $cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ இல் சாய்ந்திருக்குமெனக் காட்டித் துணிக்கையை AB இன் நடுப்புள்ளிக்கு உயர்த்தச் செய்யவேண்டிய வேலையைக் காண்க.

12. திணிவு ஒன்று a இயற்கை நீளமுடைய மீள் தன்மை இழையினால் O என்னும் நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் இழையின் நீளம் $\frac{5a}{3}$. இத்துணிக்கை O வில் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்பட்டால் தொடரும் இயக்கத்தில் இழையின் உயர் நீளம் $3a$ ஆகுமெனக் காட்டுக.
O விலிருந்து திணிவு $2a$ தூரத்திலிருக்கும் போது அதன் கதி யாது?

13. m_1, m_2 திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் A, B l இயற்கை நீளமும் λ மீள் தன்மைமட்டும் உடைய இழையினால் இணைக்கப்பட்டு ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீது l இடைத்தூரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A ஆனது BA வழியே வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது. இழையின் அதி உயர் நீட்சியின் போது ஒவ்வொரு துணிக்கையின் வேகமும் $\frac{m_1 u}{m_1 + m_2}$ எனக் காட்டுக. மேலும் இழையின் அதிஉயர் நீட்சி $\left[\frac{m_1 m_2 lu^2}{(m_1 + m_2)\lambda}\right]^{1/2}$ எனக் காட்டுக

14. a இயற்கை நீளமும், W மீள்தன்மைமட்டும் உடைய இலேசான மீள் தன்மை இழையொன்றின் ஒருமுனை, சீலிங்கிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு நிலைப்படுத்தப்பட்டு மறுமுனையில் W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கைக்கு P எனும் கிடை விசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சம நிலைத் தானத்தில் இழையின் நீளம் $3a$ எனின்,
   (i) கிடையுடன் இழை ஆக்கும் கோணம் யாது?
   (ii) P ஐ W இன் உறுப்புக்களில் காண்க.
P ஐ கிடையாகப் பிரயோகிக்காது, இதே சாய்வில் இழை இருக்குமாறு சமநிலையில் இருப்பதற்கு P யின் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தையும், நிலைக்குத்துடன் P யின் திசையையும் காண்க. இந் நிலையில் இழையின் நீளம் $\frac{3a}{2}$ எனவும் காட்டுக.

15. a இயற்கை நீளமுடைய மீள்தன்மை இழையொன்றில் ஒரு முனை, நிலையான புள்ளி A இற்கு இணைக்கப்பட்டு மறுமுனைக்கு m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்துணிக்கை A இல் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படுகிறது. துணிக்கை $3a$ தூரம் விழுந்ததும் முதலில் ஓய்விற்கு வருகிறது. அதனுடைய பாதையின் அதி தாழ்ந்த புள்ளியில் துணிக்கையின் ஆர்முடுகல், மேல்நோக்கி

$2g$ எனக் காட்டுக. ஆர்முடுகலின் பருமன் $\frac{1}{2}g$ ஆக இருக்கையில் துணிக்கையின் கதியை a, g இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

16. a இயற்கை நீளமும் λ மீள்தன்மைமட்டும் உடைய இலேசான சுருள் வில்லொன்று x தூரம் நெருக்கப்படும் போது அதிலுள்ள மீள்தன்மை அழுத்த சக்தி $\frac{\lambda x^2}{2a}$ எனக் காட்டுக.

m திணிவுடைய ரொல்லி (trolley) ஒன்று, கிடையுடன் 30^o சாய்வுடைய ஒப்பமான சாய்தளமொன்றில் கீழ் நோக்கி ஓடுகின்றது. இந்த ரொலியின் முற்பக்கத்தில் தளத்திகுச் சமாந்தரமாக இலேசான சுருள்வில்லொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சுருள்வில்லின் இயற்கை நீளம் a உம், மீள்தன்மை மட்டு $\frac{mga}{c}$ உம் ஆகும். இங்கு c ஓர் ஒருமையாகும். ஓய்விலிருந்து புறப்படும் ரொல்லி, b தூரம் அசைந்ததும் சுருள் வில்லானது நிலையான தடுப்பு ஒன்றுடன் மோதுகிறது. சுருள்வில் x தூரம் நெருக்கப்பட்டதும் ரொலியின் வேகம் v ஆனது,

$\frac{cv^2}{g} = c(b+x) - x^2$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

$c = \frac{a}{10}$, $b = 2a$ எனின், முதலில் ரொலியானது கணநிலை ஓய்விற்கு வருமுன் அது சென்ற தூரத்தைக் காண்க.

17. W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று, ஒவ்வொன்றும் a நீளமுடைய இரு இலேசான நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டு, இழையின் மறு முனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் a இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு இழையினதும் இழுவையை எழுதுக. இப்பொழுது, இவற்றுள் ஓர் இழை அதே இயற்கை நீளமுடைய மீள்தன்மை இழை ஒன்றினால் மாற்றீடு செய்யப்படுகிறது. புதிய சமநிலைத் தானத்தில் மீள் தன்மை இழையின் நீளம் $\frac{5a}{4}$ ஆகும். இவ்விழையின் மீள்தன்மை மட்டு $\frac{7W}{\sqrt{39}}$ எனக் காட்டுக. மற்றைய இழையிலுள்ள இழுவை $5 : \sqrt{13}$ என்னும் விகிதத்தில் அதிகரிக்கும் எனக் காட்டுக.

18. W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று, மீள்தன்மை இழை AB யின் C எனும் புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $AC = \frac{4a}{3}$, $CB = \frac{4a}{7}$ என்பன இயற்கை நீளங்களாகும். இழையின் முனைகள் A, B என்பன a ஆரையுடைய நிலைத்த அரைக்கோளப் பாத்திரமொன்றின் கிடைவிட்டத்தின் விளிம்புகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கையானது, பாத்திரத்தின் ஒப்பமான உட்பரப்பைத் தொட்ட வண்ணம் கோணம் BAC 30^o ஆகுமாறு ஓய்கிறது. இழையின் மீள்தன்மைமட்டு W எனக்காட்டி, பாத்திரத்தினால் துணிக்கையின் மீதான மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

19. A, B என்பன ஒரே கிடைக்கோட்டில் $3l$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். m திணிவுடைய P எனும் துணிக்கை $4l$ நீளமுடைய இலேசான நீளா இழையால் A இற்கும், l நீளமும் மீள்தன்மை மட்டுமுடைய மீள்தன்மை இழையால் B யிற்கும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொடக்கத்தில் P யானது நீட்டப்பட்ட AB இல் $BC = l$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி C யில் பிடிக்கப்பட்டு, இரு இழைகளும் மட்டாக இறுக்கமாக இருக்க ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. $\lambda = \frac{1}{4}mg$ எனின், AP நிலைக்குத்தாக இருக்கும் போது, துணிக்கையின் கதி $2\sqrt{gl}$ எனக் காட்டுக. இந்நிலையில் மீள்தன்மை இழையின் இழுவையைக் காண்க.

20. A, B எனும் இரு நிலைத்த புள்ளிகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் $20\,cm$ இடைத்தூரத்தில் உள்ளன. ஒரு மெல்லிய மீள்தன்மை இழையின் முனைகள் A, B இல் இழை மட்டாக இறுக்கமாக இருக்க நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. $AP = 15cm$ ஆகுமாறு இழையிலுள்ள புள்ளி P யில் $5\,kg$ குற்றி ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத்தானத்தில் P, AB யிற்குக் கீழ் APB செங்கோணமாக அமையுமாறு உள்ளது. கோணம் $BAP = \theta$ எனின், AP, BP என்பவற்றின் நீட்சிகளின் விகிதம் $\frac{4\cos\theta - 3}{4\sin\theta - 1}$ எனக் காட்டி θ ஆனது

$$\cos(4\cos\theta - 3) = 3\sin\theta(4\sin\theta - 1)$$

என்னும் சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக.

4 (d)

1. ஒவ்வொன்றும் $50 \times 10^3\ kg$ திணிவுடைய 6 புகையிரதப்பெட்டிகளைக் கொண்ட புகையிரதம் ஒன்றை, $90 \times 10^3\ kg$ திணிவுடைய எஞ்சினானது, பின்புறத்திலிருந்து தள்ளுகின்ற $60 \times 10^3\ kg$ திணிவுடைய மற்றுமோர் எஞ்சினின் உதவியுடன் 98 இல் 1 எனும் சாய்வு வழியே மேனோக்கி இழுத்துச் செல்கிறது. முன்னுள்ள எஞ்சினும், பின்னுள்ள எஞ்சினும் முறையே 330 KW, 270 KW வலுவை சில்லுகளில் வழங்க வல்லவை. உராய்வுத்தடையையும் வழித்தடையும் நிறையின் $\frac{1}{147}$ எனக் கொண்டு, புகையிரதத்தின் ஆர்முடுகலை அதன் கதி $V km$ / மணி இல் காண்க. புகையிரதத்தின் கதியானது மணிக்கு $28 \cdot 8$ கிலோமீற்றரை மீறமுடியாதெனக் காட்டுக. கதியானது 24 கிலோமீற்றராக இருக்கும்போது இரண்டாவது புகையிரதப்பெட்டிக்கும், மூன்றாவது புகையிரதப் பெட்டிக்கும் இரண்டாவது புகையிரதப்பெட்டிக்கும், மூன்றாவது புகையிரதப் பெட்டிக்கும் இடையில் இருக்கும் இணைப்பிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

2. வேலை, வலு ஆகியவற்றை வரையறுத்து அவற்றின் அலகுகளையும் குறிப்பிடுக. $0 \cdot 004$ சதுரமீற்றர் குறுக்குவெட்டுள்ள நாசியையுடைய குழாயினூடாக நிமிடத்துக்கு $2 \cdot 4$ கனமீற்றர் வீதம் 12 மீற்றர் ஆழத்திலிருந்து 80% திறனுள்ள எஞ்சினால் நீர் இறைக்க வேண்டுமெனில், அதன் வலு எவ்வளவாய் இருத்தல் வேண்டும்? நீர்த்தாரை நிலைக்குத்தான சுவருக்குச் செங்குத்தாக செலுத்தப்பட்டால் நீர் பின்னதைக்காது எனக்கொண்டு, சுவரில் உஞற்றப்பட்ட விசையைக் காண்க. (1 கனமீற்றர் நீரின் திணிவு 10^3 கிலோகிராம், $g = 10 ms^{-2}$)

3. பொறியியலில் பயன்படுத்தப்படும் (அ) நியூற்றன் (ஆ) யூல் (இ) வாற்று எனும் அலகுகளை வரையறுக்க. அவற்றின் பௌதீகப் பரிமாணங்களைக் கூறுக.

ஒரு துறைமுகத்தில் $10^5\ kg$ திணிவுடைய மோட்டர் படகொன்று $4 \times 10^5\ kg$ திணிவுடைய அடி தட்டையான படகொன்றினை நீளாக் கயிறு ஒன்றால் இழுக்கிறது. மோட்டார் படகிலுள்ள எஞ்சின் 400 KW இல் வேலை செய்யும் போது, மோட்டார் படகும், அடி தட்டையான படகும் $36\ kmh^{-1}$ எனும் வேகத்துடன் $0 \cdot 06 ms^{-2}$ எனும் ஆர்முடுகலுடனும் இயங்குகிறது. மோட்டார்படகு, அடி தட்டையான படகு இரண்டினதும் இயக்கத்திற்கான மொத்த வளி நீர்த்தடையைக் காண்க. மோட்டார் படகினதும், அடிதட்டையான படகினதும் வளி நீர்த்தடைகள் அவற்றின் திணிவிற்கு விகிதசமமெனில் கயிற்றில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

4. (i) குறுக்கு வெட்டு $600 mm^2$ உள்ள கிடையான நீர்த்தாரை ஒன்று, $80 ms^{-1}$ வேகத்துடன் நிலையான நிலைக்குத்தான சுவரில் சாடுகிறது.

(a) நீரை எறிவதற்குத் தேவையான வலு.

(b) சுவரிலிருந்து நீர் பின்னதை அடையாது எனக் கருதி, சுவரின் மேல் உள்ள விசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) m திணிவுள்ள ஒரு குண்டு, M திணிவுள்ள ஒரு நிலைத்த மரக்குற்றியை d தடிப்பத்திற்கு ஊடுருவுகின்றது. மரக்குற்றி அசைவதற்குச் சுயாதீனமாகவும், தடை சீராகவும், குற்றி நிலையாக இருந்த பொழுது உள்ள அளவிலும் தடை இருப்பின் ஊடுருவிய தடிப்பு $\frac{Md}{M+m}$ எனக் காட்டுக.

5. குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு $1000 mm^2$ ஆகவுள்ள குழாயினூடாக ஒரு நிமிடத்திற்கு $1 \cdot 2 m^3$ நீரை $15\ m$ உயரத்திற்கு ஒரு பம்பியினால் உயர்த்தவேண்டி உள்ளது. $1 m^3$ நீரின் நிறை $1000\ kg$ எனவும் $g = 9 \cdot 81 ms^{-2}$ எனவும் கருதிப் பம்பியின் வலுவைக் காண்க.

6. பம்பி ஒன்று $20m$ ஆழத்திலிருந்து நீரை உயர்த்தி, $0 \cdot 2$ விட்டமுள்ள குழாய் ஒன்றினூடாக $16 ms^{-1}$ கதியிற் கிடையாக விடுகிறது. ஒரு செக்கனில் பம்பி செய்யும் வேலையைக் கணிக்க. மீள்தன்மையில்லாத தளச்சுவர் ஒன்றை அடையும் போது நீரின் வேகம் அழிக்கப்படத்தக்கதாக நீர் அதே வேகத்துடன் அந்தச் சுவர் மீது செவ்வனாகச் சாடுமாயின் சுவர் மீதுள்ள உதைப்பைக் காண்க.

($1 m^3$ நீரின் திணிவு $= 1000 kg$, $\pi = 3 \cdot 14$, $g = 9 \cdot 81 ms^{-2}$ எனக் கொள்க)

7. $M\ kg$ திணிவுள்ள கார் ஒன்று, அதன் எஞ்சின் P கிலோவாற்றிலே தொழிற்படும் போது, மட்டமான வீதி ஒன்றிலே u கிலோமீற்றர் / மணித்தியாலம் என்னும் மாறாக் கதியில் செல்கிறது. கார் R நியூட்டன் எனும் மாறாத்தடைக்கு உட்படின் $R = 36000\ P u^{-1}$ எனக் காட்டுக. இப்பொழுது எஞ்சின் தொடுப்பகற்றப்பட்டுத் தடுப்புக்கள் பிரயோகிக்கப்படும் போது கார் s மீற்றர் தூரத்தில் ஓய்விற்கு வருகிறது. மொத்தத் தடை முன்னர் போலவே இருக்கின்றதெனக் கொண்டு தடுப்புகளின்

அமர்முடுகும் விசை $\left(\frac{25}{648}\right) Ms^{-1}\ u^{-2} - 3600\ Pu^{-1}$ எனக் காட்டுக.

எஞ்சின் இன்னும் தொடுப்பகற்றப்பட்டிருக்குமெனின், அதே தடையும் தடுப்பு விசையும் தாக்கும் போது, $u\ kmh^{-1}$ என்பதில் ஆரம்பித்து, கணநிலை ஓய்விற்கு வரமுன் அந்தக் கார் $sin^{-1}\left(\frac{1}{c}\right)$ சரிவுள்ள மலை ஒன்றிலே

$25\ csu^2\ \left(25cu^2 + 648\ gs\right)^1$ மீற்றர் தூரம் மேலே செல்லுமெனக் காட்டுக.

8. நியூட்டன், யூல், வாற்று ஆகியவற்றை வரையறுத்து பயன்படுத்தப்படும் அலகுகளையும், இக்கணியங்களின் பௌதிகப் பரிமாணங்களையும் கூறுக. NkNy , UggJTk;$10m$ பக்கமுள்ளதுமான கனவடிவ நீர்த்தாங்கி ஒன்றின் அடியானது, தரைக்கு மேலே $100m$ உயரத்தில் இருக்கிறது. $5m$ ஆரையுள்ள வாங்கு தொட்டி (Sump) ஒன்று தரையிலே அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதிலே நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. 15 நிமிடத்திலே தாங்கியில் நீர் நிரப்புகின்றது. மோட்டாரின் சராசரி வலு $1237\ KW$ ஆகுமெனக் காட்டுக. [$g = 10ms^{-2}$, $\pi = \frac{22}{7}$, 1 கனமீற்றர் நீரின் திணிவு $1000\ kg$ எனக் கொள்க]

9. இயக்கவியலில் கையாளப்படுகின்றவாறு விசை, வேலை, வலு ஆகியவற்றின் அலகுகளாகிய நியூற்றன், யூல், வாற்று ஆகியவற்றை வரையறுக்க.

பம்பி ஒன்று பெரிய ஏரி ஒன்றிலிருந்து நீரை இறைத்து, அதனை ஏரியின் மேற்பரப்பிற்கு மேலே 100 மீற்றர் உயரத்திலே $10ms^{-1}$ கதியில் வழங்குகின்றது. பம்பியின் குறுக்கு வெட்டு $2\ cm$ ஆரையுள்ள வட்டமாகும்.

(a) 1 செக்கனில் வழங்கப்படும நீரின் திணிவு

(b) இந் நீர்த்திணிவின் இயக்கசக்தி

(c) இந் நீர்த்திணிவின் அழுத்தசக்தியில் உள்ள அதிகரிப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

[$\pi = \frac{22}{7}$, $g = 10ms^{-2}$ 1 கன மீற்றர் நீரின் திணிவு 1000 kg]

பம்பியின் திறன் 80% எனின், பம்பி $16{\cdot}5\ KW$ வீதத்திலே தொழிற்படுகிறது எனக் காட்டுக.

10. திணிவு $M\ kg$ உடைய கார் ஒன்று, இயங்கும் போது அதன் எஞ்சின் மாறா வலு H வாற்றை விருத்தியாக்குகின்றது. காரின் இயக்கத்திற்குரிய தடை மாறிலியாகும். மட்டமான வீதி ஒன்றிலே காரின் கதி vms^{-1} ஆகும். கார்

(i) கிடையுடன் α விற் சாய்ந்துள்ள வீதி ஒன்றிலே நேரே மேல் நோக்கி

(ii) $sin\ \alpha < \frac{H}{mvg}$ எனின், அதே வீதியில் நேரே கீழ் நோக்கிச் செல்லும் போது

அதன் உயர்கதியைக் காண்க. சாய்ந்த வீதியில் கீழ்நோக்கிச் செல்லும் போது உள்ள உயர்கதியானது அதே வீதியில் மேல்நோக்கிச் செல்லும் போதுள்ள உயர்கதியின் இரு மடங்கெனின், கிடையுடன் வீதியின் சாய்வு α ஆனது, $sin\alpha = \frac{H}{3\ Mvg}$ இனாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

கார் சாய்ந்த வீதியில் கீழ் நோக்கிச் செல்வதாகவும், கதி v ஆகவும் இருப்பின் அதன் ஆர்முடுகல் யாது?

11. $950\ kg$ திணிவுடைய கார் ஒன்று $375\ kg$ ஐ உடைய வண்டித்தொடர் ஒன்றை 30^o கோணச் சரிவு ஒன்றின் வழியே, மேல் நோக்கி இழுக்கின்றது. கார் 9550 நியூற்றன் வலிப்பு விசையை உஞற்றுகிறது. வீதியானது இவை ஒவ்வொன்றுக்கும் $2N\ kg^{-1}$ என்னும் தடையை அளிக்கின்றது. ஈர்வையிலான ஆர்முடுகல் $g = 10ms^{-2}$ ஆகுமெனக் கொண்டு, காரும் வண்டித்தொடரும் $200m$ தூரம் சென்ற பின்னர், ஓய்விலிருந்து அடையப்பட்ட கதியைக் காண்க.

இழுவைச்சட்டம் இப்போது உடைந்து, வண்டித்தொடர் முதலிற் சரிவு வழியே மேல் நோக்கியும், பின்னர் மறுபடியும் கீழ் நோக்கியும் உருளுகின்றது. அது தொடக்க ஓய்வுப்புள்ளியை அடையும் போது எய்தும் கதி அண்ணளவாக $125\ kmh^{-1}$ எனக் காட்டுக.

12. எஞ்சின் ஒன்று $40000N$ மாறாத் தடை ஒன்றுக்கு எதிராக மட்டமான புகையிரதப் பாதை ஒன்றிலே $10ms^{-1}$ உறுதிக் கதியுடன் செல்கின்றது. எஞ்சினின் வலுப்பயப்பை (Output) KW இல் காண்க. பின்னர் எஞ்சினானது இழுவைச் சட்டம் ஒன்று மூலம் புகையிரதப் பெட்டி ஒன்றுடன் இணைக்கப்படுகிறது. பெட்டியின் இயக்கத்திற்கான மாறாத்தடை 20000N ஆகும். இப்போது எஞ்சினின் வலுப்பயப்பு $900KW$ எனின், மட்டமான புகையிரதப் பாதையிலே புகையிரதத்தின் உயர் கதியை ms^{-1} இல் காண்க. இச் சந்தர்ப்பத்தில் இழுவைச்சட்டத்திலுள்ள இழுவை யாது?

புகையிரதம் அதே வலுப்பயப்பு $900KW$ உடன், அதே மாறா உராய்வு விசைகளுக்கெதிராகக் கிடையுடன் $sin^{-1}\left(\frac{1}{50}\right)$ சாய்வுள்ள ஒரு சரிவு வழியாக ஏறுகிறது. புகையிரதத்தின் மொத்தத்திணிவு 340 மெற்றிக் தொன் எனின்,

(i) $5ms^{-1}$ வேகத்துடன், சரிவு வழியாக மேல் நோக்கிச் செல்லும் போது புகையிரதத்தின் ஆர்முடுகல் $\frac{13}{85}\, ms^{-2}$ எனவும்,

(ii) சரிவு வழியே மேல் நோக்கிச் செல்லும் போது புகையிரதத்தின் உயர்கதி $7ms^{-1}$ இற்குச் சற்றே கூடுதலானது எனவும் காட்டுக.

($g = 10ms^{-2}$, 1 மெற்றிக் தொன் $= 1000\, kg$ ஆகும்.)

13. நீர்ப்பம்பி ஒன்று செக்கனுக்கு $12\, kg$ நீரை $7\cdot 5m$ உயரத்துக்கூடாக உயர்த்துகின்றது. இந்நீரானது $10ms^{-1}$ கதியுடன் ஒரு தாரையாக வெளியேறுகின்றது. ஒவ்வொரு செக்கனுக்கும் இந்நீருக்குக் கொடுக்கப்படும் பொறிமுறைச் சக்தியைக் கண்டு, இதிலிருந்து பம்பி விருத்தி செய்த பலித (பயன்பாடு) வலு $1\cdot 5KW$ எனக் காட்டுக. கிடைக்கு மேலே 30^o என்னும் கோணத்தில் தாரை திசைப்படுத்தப்பட்டுள்ள தெனத் தரப்படுமிடத்து நீர் அடைந்த மேலதிக உயரத்தைக் காண்க.

நீர்த்தாரையானது, அதன் அதி உயர்புள்ளியிலே, நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்கெதிராகச் சாடி, அதன் முழு உந்தமும் அவ்விடத்தே அழிகின்றது. சுவர் மீது உஞற்றப்படும் விசை ஏறத்தாழ $104N$ எனக் காட்டுக.

14. மோட்டார் சைக்கிள் ஒன்று $H\, KW$ என்னும் மாறா வீதத்தில் வேலை செய்கிறது. மட்டமான தரை மீது $20ms^{-1}$ இலும், கிடையுடன் $\frac{\pi}{6}$ கோணத்தை அமைக்கும் மலைவழியே மேல்நோக்கி $10ms^{-1}$ இலும் அதே மலைவழியே கீழ்நோக்கி $50ms^{-1}$ இலும் ஓட்டுபவரால் மோட்டார் சைக்கிளைச் செலுத்த முடியும். ஓட்டுபவரினதும், மோட்டார் சைக்கிளினதும் மொத்த திணிவு $2M\, kg$ ஆகும். மோட்டார் சைக்கிளின் கதி $u\, ms^{-1}$ ஆயிருக்கும் போது, இயக்கத்திற்கான தடையின் பருமன் $R = a + bu + cu^2\ kg$ நிறை என்பதாலே தரப்படுகிறது. இங்கு $a, b, c,$ என்பவை மாறிலிகளாகும்.

$a = \frac{51H - 7M}{3}$, $b = \frac{3M - 16\,H}{20}$, $c = \frac{6\,H - M}{600}$ எனக் காட்டுக.

$H \geq \frac{5\left(\sqrt{2} - 1\right)}{12} M$ என்பதை உய்த்தறிக.

15. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, இயற்கை நீளம் $15a$ உம், மீள்தன்மைமட்டு $\frac{105\, mg}{16}$ உம் உடைய இலேசான மீள்தன்மை இழை AB யின் நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் முனைகள் A, B ஒரே கிடை மட்டத்தில் $15a$ இடைத் தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை மட்டுமட்டாக இறுக்கமாக இருக்கத் துணிக்கையானது, AB யின் அதே கிடைமட்டத்தில் ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. அது AB யின் மட்டத்திற்குக் கீழே $4a$ தூரம் விழுந்ததும் அதன் வேகம் $\frac{5}{2}\sqrt{ag}$ எனக் காட்டுக.

அலகு 5

கணத்தாக்கு விசைகள், மீள்தன்மைப் பொருட்களின் மொத்தல்
(Impulsive Forces, Impact of elastic bodies)

1. கணத்தாக்கு (Impulse):

விசையொன்றின் கணத்தாக்கு

விசை F மாறிலி எனின், விசை $\times$ தொழிற்படுநேரம் = கணத்தாக்கு என வரையறுக்கப்படும்.

$$I = F \times t$$
$$= \text{mat} \ (F = ma)$$
$$= m(v-u)\ (v = u + at)$$
$$= mv - mu$$

= உந்தமாற்றம் (இறுதி உந்தம் – ஆரம்ப உந்தம்)

விசை F, மாறி எனின்,

$$I = \int_o^t F\,dt = \int_o^t (m\frac{dv}{dt})\,dt = \int_u^v m\,dv = mv - mu$$

$= m(v-u) =$ உந்த மாற்றம்

எனவே, கணத்தாக்கு = உந்த மாற்றம்

$\boxed{I = \Delta(m\underline{v})}$ கணத்தாக்கு ஒரு காவிக் கணியமாகும்.

மிகப்பெரிய விசைகள் மிகச்சிறிய நேரம் தொழிற்படுமெனின், அவ்விசைகள் கணத்தாக்கு விசைகள் எனப்படும். சம்மட்டி அடி, ஓர் இலக்கின் மீது துப்பாக்கிக் குண்டின் மொத்தல், இரு பில்லியட் பந்துகளின் மோதல் என்பன இதற்கு உதாரணங்களாகும். இவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் விசையின் முழு விளையுளை, கணத்தாக்கினை, அதன் உந்த மாற்றத்தைக் கொண்டு அளக்கலாம்.

2. இரு பொருட்களின் மொத்தல் (Impact of two bodies)

1. மொத்தல் நடைபெறும் பொருட்கள் ஒப்பமான கோள வடிவமானவை எனக் கொள்ளப்படும்.

2. மொத்தல் நடைபெறும் பொருட்கள் தமது வடிவத்தைத் திரும்பப் பெற்று, மறுதுள்ளல் நிகழ்வதற்குக் காரணமான பண்பு மீள்தன்மை எனப்படும். பொருள்களின் மீளமைவுக்குணகம், அது ஆக்கப்பட்ட திரவியத்தில் தங்கியிருக்கிறது. மீளமைவுக் குணகம் (coefficient of restitution) e என்பதால் குறிப்பிடப்படும். இங்கு $0 < e < 1$ ஆகும்.

   $e = 0$ எனின், அப்பொருள் மீள்தன்மையின்றியது எனப்படும்.

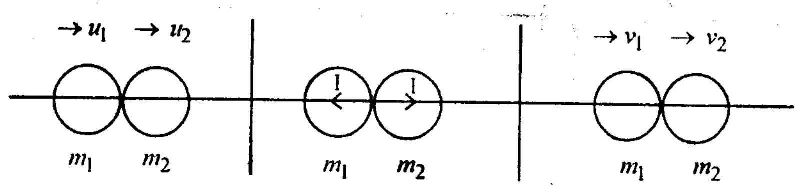
   $e = 1$ எனின், பூரண மீள் தன்மையுடையது எனப்படும்.

நியூற்றனின் பரிசோதனைவிதி:

இரு பொருட்கள் மோதும்போது, அவ்விரண்டினதும் **பொதுச்செவ்வன்** வழியேயான, ஒன்றையொன்று விட்டுப்பிரியும் தொடர்புவேகத்திற்கும், ஒன்றையொன்று அணுகும் தொடர்பு வேகத்திற்கும் உள்ள விகிதம் e ஆகும்.

3. (a) நேரடி மொத்தல் (direct impact)

இரு பொருட்கள் மோதும்போது, ஒவ்வொன்றினதும் இயக்கத்திசையும் அவை மோதும் கணத்திலுள்ள பொதுச் செவ்வன் வழியே இருப்பின், மொத்தல் **நேரடியானது** எனப்படும்.



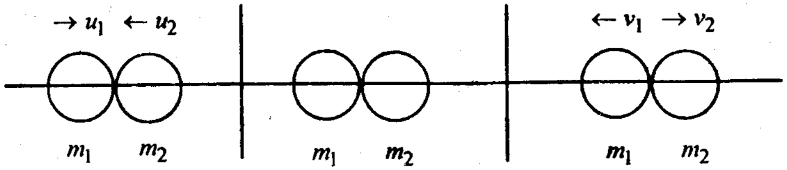
இரு கோளங்களுக்கும் உந்தக்காப்பு விதி,

$$\longrightarrow m_2v_2 + m_1v_1 = m_2u_2 + m_1u_1 \text{ ---------------------(1)}$$

நியூற்றனின் பரிசோதனைவிதி, (பொதுச் செவ்வன் வழியே) ஒன்றையொன்று விட்டுப்பிரியும் தொடர்பு வேகம் = $e \times$ ஒன்றையொன்று அணுகும் தொடர்புவேகம்

$$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2) \text{ ---------------(2)}$$

(1), (2) இலிருந்து v_1, v_2 ஐக் கணிக்கலாம். மேலும் இங்கு $u_1 > u_2$ எனின், மட்டுமே மொத்தல் நிகழும் என்பதை அவதானிக்க.



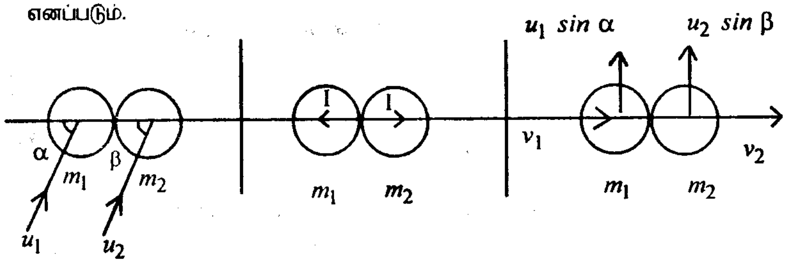
→ உந்தக்காப்புவிதி

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = m_1 u_1 - m_2 u_2 \text{ ——— (1)}$$

நி.ப. விதி, $v_2 + v_1 = e(u_1 + u_2)$ ------- (2)

(b) சரிவான மொத்தல் (Oblique impact)

மோதும் பொருட்கள் இரண்டில், ஒன்றின் அல்லது இரண்டினதும் இயக்கத் திசைகள் பொதுச் செவ்வன் வழியே இல்லை எனில், மொத்தல் சரிவானது எனப்படும்.



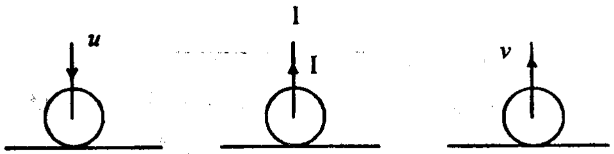
உந்தக்காப்புவிதி

$$\longrightarrow m_2 v_2 + m_1 v_1 = m_2 u_2 \cos\beta + m_1 u_1 \cos\alpha$$

நி.ப.விதி $v_2 - v_1 = e(u_1 \cos\alpha - u_2 \cos\beta)$

இரு சமன்பாடுகளிலுமிருந்து v_1, v_2 ஐக் கணிக்கலாம்.

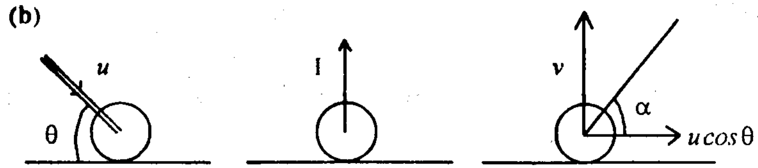
4. (a) ஒரு நிலைத்த ஒப்பத்தளத்தில் ஒப்பமான கோளத்தின் மொத்தல்



நி. ப. விதிப்படி, $v = eu$ (பொதுச் செவ்வன்வழியே)

$e = 1$ எனின் $v = u$ ஆகும்.

(b)



நி. ப. விதிப்படி $v - o = e(u\sin\theta - o)$ (பொதுச் செவ்வன்வழியே)

$$v = e\,u\sin\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{v}{u\cos\theta} = \frac{e\,u\sin\theta}{u\cos\theta} = e\tan\theta$$

பூரண மீள்தன்மையெனின் $e = 1$, $\alpha = \theta$, விளையுள் கதி u ஆகும். $e = 0$ எனின், $v = 0$. எனவே கோளத்தின் இயக்கத்திசை தளத்தின் வழியே.

குறிப்பு: வெளிக் கணத்தாக்கு விசைகளின் விளையுள், பூச்சியம் எனின் உந்தக் காப்பு விதியைப் பிரயோகிக்கலாம். அல்லது வெளிக்கணத்தாக்கு விசை எதுவும் செய்யற்படாதவொரு திசையிலேயே உந்தக் காப்பு விதியை பிரயோகிக்கலாம். நியூற்றனின் பரிசோதனை விதி, பொதுச் செவ்வன் வழியே பாவிக்கப்பட வேண்டும்.

கணத்தாக்கத்தினால் ஏற்பட்ட சக்தி மாற்றம்.

சக்திமாற்றம் = இறுதிச் சக்தி − ஆரம்பசக்தி

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$= \frac{1}{2}m(v^2 - u^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(\underline{v} - \underline{u}).(\underline{v} + \underline{u})$$

$$= \frac{1}{2}\underline{I}.(\underline{v} + \underline{u})$$

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{2}\underline{I}.(\underline{v} + \underline{u})}$$

உதாரணம் 1

(a) குழாயின் திசையிலே பின்னடிக்கவல்ல $10^4\,kg$ திணிவுள்ள பீரங்கி ஒன்று $100kg$ திணிவுள்ள குண்டு ஒன்றினை $400\,ms^{-1}$ உடன் சுடுகின்றது. பீரங்கி பின்னடிக்கும் வேகத்தைக் காண்க.
பீரங்கி $12cm$ தூரத்தில் ஓய்விற்கு வருமாறு மாறாத் தடைவிசை ஒன்று பிரயோகிக்கப்படின், தடைவிசையைக் காண்க.

(b) M திணிவுடைய பீரங்கி ஒன்று கிடைநிலத்திலுள்ளது. m திணிவுள்ள குண்டொன்று குழாயின் வழியே u கதியுடன் சுடப்படுகிறது.

(i) குழாய் கிடையாக இருப்பின்

(ii) குழாய் 30^{o} ஏற்றக்கோணத்தில் இருப்பின்

பீரங்கி பின்னடிக்கும் கதியைக் காண்க.
ஒவ்வொரு வகையிலும் t செக்கன்களில் பீரங்கியை ஓய்வுக்குக் கொண்டு வரத்தேவையான ஒருமை விசையைக் காண்க.

(a) $\rightarrow$ உந்தக்காப்பு விதி

$$100 \times 400 - 10^4 \times V = 0$$

$$V = 4\,ms^{-1}$$

$$\leftarrow \quad v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = 4^2 + 2 \times a \times \frac{12}{100}$$

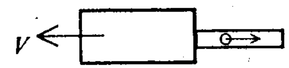
$$a = \frac{-1600}{24}\,ms^{-2} \left(\rightarrow \frac{1600}{24}\,ms^{-2}\right)$$

தடைவிசை PN எனின்

$\rightarrow P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க, $P = 10^4 \times \dfrac{1600}{24}$

$$= \frac{10^4 \times 1600}{24} = \frac{2}{3} \times 16^6\,N$$

(b) பீரங்கி பின்னடிக்கும் வேகம் $V\,ms^{-1}$



$$V_{G,E} = \leftarrow V\,ms^{-1}$$

$$V_{B,G} = \rightarrow u\,ms^{-1}$$

$$V_{B,E} = V_{B,G} + V_{G,E}$$

$$= \xrightarrow[u]{} + \xleftarrow[v]{}$$

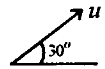
$$= \rightarrow (u - v)$$

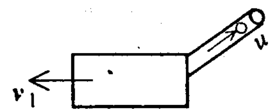
$\rightarrow$ உந்தக்காப்பு விதி, $m(u - v) - MV = 0$

$$V = \frac{mu}{M + m}$$

(ii) $V_{G,E} = \leftarrow V_1$

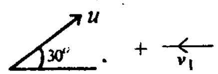
$V_{B,G} =$



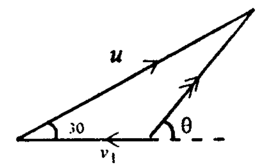


$V_{B,E} = V_{B,G} + V_{G,E}$

$=$



$$= \rightarrow (u\cos 30 - V_1) + \uparrow u\sin 30$$



உந்தக்காப்பு விதி

$$\longrightarrow m(u\cos 30 - V_1) - MV_1 = 0$$

$$(M + m)V_1 = mu\cos 30$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{3}\,mu}{2(M + m)}$$

(i) இல் $\leftarrow v = u + at$ ஐப் பாவிக்க.

$$0 = V + at,$$

$$a = -\frac{V}{t}$$

விசை P_1 எனின்

$\rightarrow$ $P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$$P = M\frac{V}{t} = \frac{M\,mu}{(M+m)\,t}$$

(ii) இல் விசை P_2 எனின்

$$P_2 = M\frac{v_1}{t} = \frac{M\,mu\sqrt{3}}{2\,(M+m)\,t}$$ ஆகும்.

[(ii) இல் உந்தக்காப்பு விதி, கிடையாக மட்டும் பிரயோகிக்கப்படலாம். ஏனெனில், பீரங்கி பின்னடிக்கும் போது நிலத்தினால் பீரங்கிக்கு நிலைக்குத்துத் திசையில் கணத்தாக்கு விசை ஒன்று உண்டு. மேலும் குண்டின் ஆரம்ப இயக்கத்திசை கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\theta > 30^\circ$ ஆகும்.]

உதாரணம் - 2

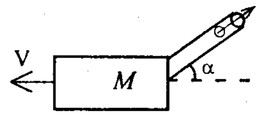
(a) M திணிவுடைய பீரங்கி ஒன்று கிடையான நிலத்திலே சுயாதீனமாகப் பின்னடிக்கக் கூடியது. குழாயின் ஏற்றக்கோணம் α ஆகும். m திணிவுடைய குண்டொன்று சுடப்படுகின்றது. குண்டு குழாயை விட்டுக் கிடையுடன் β கோணத்தில் வெளியேறும் எனக் காட்டுக.

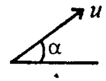
இங்கு $\tan\beta = \frac{M+m}{M}\tan\alpha$ ஆகும்.

(b)(i) $160g$ திணிவுடைய கிரிக்கெட் பந்து ஒன்று கிடையாக $25ms^{-1}$ உடன் இயங்குகிறது. ஆட்டக்காரன் $20ms^{-1}$ உடன் கிடையாக எதிர்த்திசையிலே அப்பந்தை அடிக்கிறான். பந்தில் ஏற்பட்ட கணத்தாக்கு யாது?

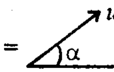
(ii) $120g$ திணிவுடைய பந்தொன்று கிடையாக $15ms^{-1}$ உடன் இயங்குகிறது. ஓர் அடியினால் 60° இனூடு கிடையாகத் திருப்பப்பட்டு $18ms^{-1}$ இல் செல்கின்றது. பந்துக்குக் கொடுக்கப்பட்ட கணத்தாக்கினைக் காண்க.

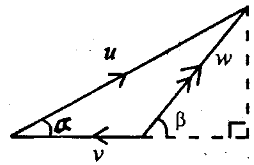
(a) $V_{G,E} = \leftarrow V$.



$V_{B,G}$ =  என்க.

$$V_{B,E} = V_{B,G} + V_{G,E}$$

=  + $\overleftarrow{v}$



$$\frac{u}{\sin(180-\beta)} = \frac{v}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{w}{\sin\alpha}$$

$$\tan\beta = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha - V} \text{ ---------------------- (1)}$$

$\longrightarrow$ உந்தக்காப்புவிதி

$$m\,(u\cos\alpha - V) - MV = 0$$

$$v = \frac{mu\cos\alpha}{M+m} \text{ ---------------------- (2)}$$

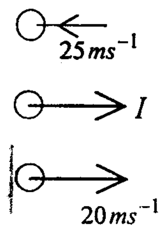
(1), (2) இலிருந்து, $\tan\beta = \dfrac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha - \dfrac{mu\cos\alpha}{M+m}}$

$$\tan\beta = \frac{M\tan\alpha}{M+m}$$ ஆகும்.

(b) (i) $\underline{I} = \Delta\,(m\,\underline{V}) = m\,(\underline{V} - \underline{u})$

$\rightarrow$ $I = \frac{160}{1000}\left[20 - (-25)\right]$

$= \frac{160}{1000} \times 45 = \frac{36}{5}\ Ns^{-1}$



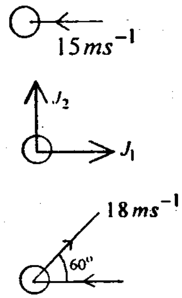
கணத்தாக்கினை இரு செங்குத்தான திசைகளில் J_1 , J_2 என்க.

$$J_1 = \frac{120}{1000}\left[18\cos 60 - (-15)\right]$$

$$= \frac{120}{1000} \times 24$$

$$J_2 = \frac{120}{1000}\left[18 \sin 60 - 0\right]$$

$$= \frac{120}{1000} \times 9\sqrt{3}$$



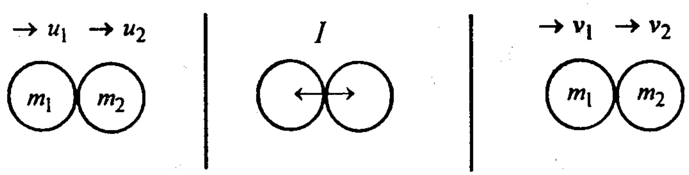
கணத்தாக்கு $J = \sqrt{{J_1}^2 + {J_2}^2}$

$$= \frac{120}{1000} \times 4\sqrt{91}$$

$$= \frac{12\sqrt{91}}{25} \; Ns^{-1}$$

உதாரணம் 3

m_1 , m_2 திணிவும், சம ஆரையும் உடைய இரு கோளங்கள் நேரடியாக மோதுகின்றன. ஒரு கோளத்திலிருந்து மற்றைய கோளத்திற்கு மாற்றப்பட்ட உந்தம் $\dfrac{m_1 m_2 (1+e) v}{m_1 + m_2}$ எனவும், மொத்தலினால் இழக்கப்பட்ட இயக்க சக்தி $\dfrac{m_1 m_2 v^2 \left(1+e^2\right)}{2(m_1+m_2)}$ எனவும் காட்டுக. இங்கு v என்பது மோதுகைக்கு சற்று முன் கோளங்களின் தொடர்பு வேகமும், e மீளமைவுக்குணகமும் ஆகும்.



உந்தக்காப்புவிதி

$$\rightarrow m_2 V_2 + m_1 V_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \text{ ------------------ } (1)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனைவிதி

$$\dot{V}_2 - V_1 = e(u_1 - u_2) \text{ ------------------ } (2)$$

(1) , (2) இலிருந்து $v_2 = \dfrac{m_1 u_1 (1+e) + u_2 (m_2 - em_1)}{m_1 + m_2}$

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2) u_1 + m_2 u_2 (1+e)}{m_1 + m_2}$$

$\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$

$m_2 \rightarrow I = m_2 (V_2 - u_2)$, $\qquad \overset{m_1}{\rightarrow} - I = m_1 (V_1 - x_1)$

$$I = m_2 \left[\frac{m_1 u_1 (1+e) + u_2 (m_2 - em_1)}{m_1 + m_2} - u_2\right]$$

$$= \frac{m_2 \left[m_1 u_1 (1+e) + u_2 (m_2 - em_1) - (m_1 + m_2) u_2\right]}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1+e)(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \quad (u_1 > u_2)$$

இங்கு கோளம் m_2, உந்தத்தைப் பெறுகிறது. கோளம் m_1 உந்தத்தை இழக்கிறது. மொத்த உந்தம் மாறிலி.

சக்தி மாற்றம் $= \frac{1}{2} \underline{I} \cdot (\underline{u} + \underline{V})$

$$\Delta E = \frac{1}{2} I (v_2 + u_2) - \frac{1}{2} I (v_1 + u_1)$$

$$= \frac{1}{2} I \left[(v_2 - v_1) - (u_1 - u_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2} I \left[e(u_1 - u_2) - (u_1 - u_2)\right]$$

$$-\frac{1}{2} I (u_1 - u_2)(1 - e) = -\frac{1}{2} I v (1 - e)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 (1 - e^2)$$

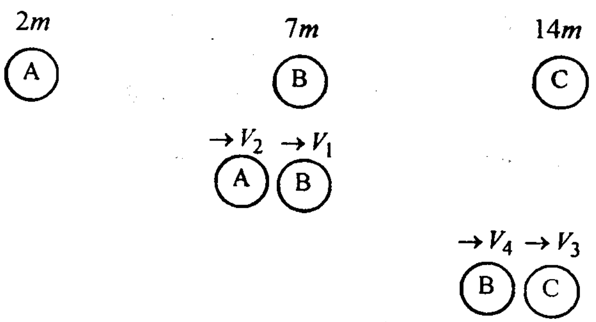
சக்தி நட்டம் $\dfrac{m_1 m_2 v^2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)}$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

சம பருமன்களைக் கொண்டனவும் முறையே $2m, 7m, 14m$ திணிவுகளை உடையனவுமான A,B,C எனும் மூன்று ஒப்பமான கோளங்கள் கிடை மேசையின் மீது அவற்றின் மையங்கள் நேர் கோட்டிலும் A யிற்கும் C யிற்குமிடையே B யும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு சோடி கோளங்களுக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். இப்பொழுது கோளம் A ஆனது, கோளம் B மீது நேரடியாகச் சாடுமாறு எறியப்படுகிறது. இரு மொத்தல்களுக்குப் பின்னர் A யும் C யும் சமகதிகளுடன் எதிர்த்திசைகளில் இயங்குமெனின் e இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, இதன் போது,

(i) இரண்டாம் மொத்தலுக்குப் பின்னர் கோளம் B உடனடியாக ஓய்வுக்குக் கொண்டுவரப்படும் எனவும்,

(ii) இரு மொத்தல்களுக்கும் பின்னர் எஞ்சியிருக்கும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி தொடக்கப் பெறுமானத்தின் $\dfrac{2}{9\lambda}$ எனவும் காட்டுக.



முதலாம் மோதுகையின் பின் B,A என்பவற்றின் வேகங்கள் முறையே V_1, V_2 என்க.

→ உந்தக்காப்பு விதி

$$7mV_1 + 2mV_2 = 2mu$$

நியூ.ப.விதி $V_1 - V_2 = eu$

$$7V_1 + 2V_2 = 2u \quad \text{---------- (1)}$$

$$V_1 - V_2 = eu \quad \text{---------- (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து $V_1 = \dfrac{2u(1+e)}{9}$, $V_2 = \dfrac{u(2-7e)}{9}$

இரண்டாம் மோதுகையின் பின் C, B என்பவற்றின் வேகங்கள் முறையே V_3, V_4 என்க.

→ உந்தக்காப்புவிதி, $14mV_3 + 7mV_4 = 7mV_1$

நி.ப.விதி, $V_3 - V_4 = eV_1$

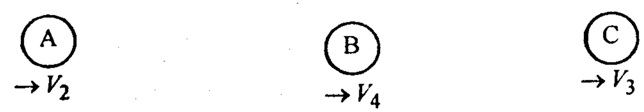
$$2V_3 + V_4 = V_1 \quad \text{---------- (3)}$$

$$V_3 - V_4 = eV_1 \quad \text{---------- (4)}$$

$$V_3 = \frac{V_1(1+e)}{3} = \frac{2u(1+e)^2}{27}$$

$$V_4 = \frac{V_1(1-2e)}{3} = \frac{2u(1+e)(1-2e)}{27}$$

இரு மோதுகைகளின் பின்னர்,



(i) தரவிலிருந்து $V_3 = -V_2$

$$\therefore \frac{2u(1+e)^2}{27} = \frac{u(7e-2)}{9}$$ என்பதால் ஆகும்.

$$2(1+e)^2 = 3(7e-2)$$

$$2e^2 - 17e + 8 = 0$$

$$(2e-1)(e-8) = 0$$

$$e = \frac{1}{2}, 8.$$

$0 < e, 1$ என்பதால், $e = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

$e = \frac{1}{2}$ எனின் $V_4 = 0$. எனவே B ஓய்விற்கு வரும்.

(ii) $V_3 = \dfrac{2u(1+e)^2}{27} = \dfrac{u}{6}$

இறுதியாக உள்ள இயக்கசக்தி $= \dfrac{1}{2} \times 14m \times \dfrac{u^2}{36} + \dfrac{1}{2} \times 2m \times \dfrac{u^2}{36}$

$$= \frac{8mu^2}{36} = \frac{2mu^2}{9}$$

ஆரம்ப இயக்கசக்தி $= \dfrac{1}{2} \times 2m \times u^2 = mu^2$

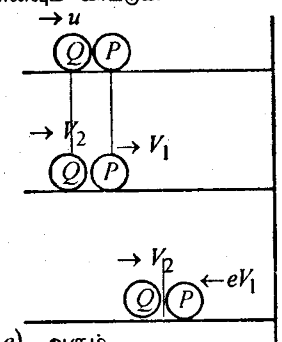
$$\frac{\text{இறுதி இயக்கசக்தி}}{\text{ஆரம்ப இயக்கசக்தி}} = \frac{2mu^2}{9} \times \frac{1}{mu^2} = \frac{2}{9}$$

உதாரணம் 5

ஓர் ஒப்பமான மீள்தன்மைக் கோளம் P ஆனது ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து தூரம் d யிலே ஓய்விலிருக்கின்றது. P யிற்குச் சர்வசமனான ஒரு கோளம் Q ஆனது தளத்தின் வழியே சுவருக்கு செங்குத்தான திசையில் இயங்கி P யுடன் நேரடியாக மோதுகிறது. ஒவ்வொரு மோதுகைக்கும் மீளமைவுக் குணகம் e எனின்,

(i) முதலாம் மோதுகை நடைபெற்று $\dfrac{2d(1+e)}{u(1+e^2)}$ நேரத்திற்குப் பின்னர் சுவரிலிருந்து தூரம் $\dfrac{2e^2 d}{1+e^2}$ இலே இரு கோளங்களும் மீண்டும் மோதும் எனவும்,

(ii) P உடனான இரண்டாம் மோதுகைக்குப் பின்னர் கோளம் Q ஓய்விற்கு கொண்டுவரப்படுமெனின் $e^3 + e^2 + 3e = 1$ எனவும் காட்டுக.



→ உந்தக்காப்புவிதி

$$mV_1 + mV_2 = mu$$

$$V_1 + V_2 = u \text{ ---------------- } (1)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனைவிதி

$$V_1 - V_2 = eu \text{ ---------------- } (2)$$

(1), (2) இலிருந்து $V_1 = \dfrac{u(1+e)}{2}$, $V_2 = \dfrac{u}{2}(1-e)$ ஆகும்.

முதலாவது மொத்தலின் பின் (P,Q), கோளம் P சுவரை அடிக்க எடுத்த நேரம் t_1 என்க. $t_1 = \dfrac{d}{V_1}$ ---------------- (3)

சுவரை அடித்தபின். இரண்டாம் மோதுகை (P,Q) க்கான நேரம் t_2 எனின்,

$(t_1 + t_2)$ நேரத்தில் Q சென்ற தூரம் $+ t_2$ நேரத்தில் P சென்ற தூரம் $= d$

$$(t_1 + t_2)V_2 + eV_1 t_2 = d \text{ ----------- } (4)$$

$$t_2(V_2 + eV_1) = d - V_2 \cdot t_1 = d - \frac{dV_2}{V_1} = \frac{d(V_1 - V_2)}{V_1}$$

$$t_2 = \frac{d(V_1 - V_2)}{V_1(V_1 + eV_1)} \text{ -------------- } (5)$$

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{V_1} + \frac{d_1 (V_1 - V_2)}{V_1 (V_2 + eV_1)}$$

$$= \frac{d}{V_1}\left[\frac{V_1 (1+e)}{V_2 + eV_1}\right] = \frac{d\,(1+e)}{V_2 + eV_1}$$

$$= \frac{d\,(1+e)}{\frac{u}{2}(1-e) + e\,\frac{u}{2}(1+e)}$$

$$= \frac{2d\,(1+e)}{u\left(1+e^2\right)}$$

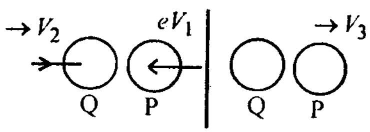
மோதுகை நடைபெற எடுக்கும் நேரம் $= \dfrac{2d\,(1+e)}{u\left(1+e^2\right)}$

சுவரிலிருந்து தூரம் $= eV_1\, t_2$

(5) இலிருந்து $= \dfrac{eV_1 \cdot d(V_1 - V_2)}{V_1 (V_2 + eV_1)}$

$$= \frac{e \cdot d \cdot eu}{\frac{u\left(1+e^2\right)}{2}}$$

$$= \frac{2e^2\, d}{1+e^2}$$



→ உந்தக்காப்பு விதி

$$mV_3 = mV_2 - meV_1$$

$$V_3 = V_2 - eV_1 \text{------------------} (1)$$

நியூற்றனின் பரிசோதனை விதி,

$$V_3 = e\,(V_2 + eV_1) \text{----------------} (2)$$

$$V_2 - eV_1 = e\,(V_2 + eV_1)$$

$$\frac{u}{2}(1-e) - e\,\frac{u}{2}(1+e) = e\left[\frac{u}{2}(1-e) + e\,\frac{u}{2}(1+e)\right]$$

$$(1-e) - e\,(1+e) = e\,(1-e) + e^2\,(1+e)$$

$$1 - e - e - e^2 = e - e^2 + e^2 + e^3$$

$$e^3 + e^2 + 3e = 1$$

உதாரணம் 6

வேகம் u உடன் இயங்கும் M திணிவுள்ளதொரு கோளம், ஓய்விலுள்ள m திணிவுள்ள இன்னொரு கோளத்தின் மீது சரிவாக மோதுகின்றது. மோதும் கணத்தில் u இன் திசை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் கோணம் α ஐ ஆக்குமாறு மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். மோதுகையால் M இன் இயக்கத் திசை β கோணத்தினூடு திருப்பப்படின்,

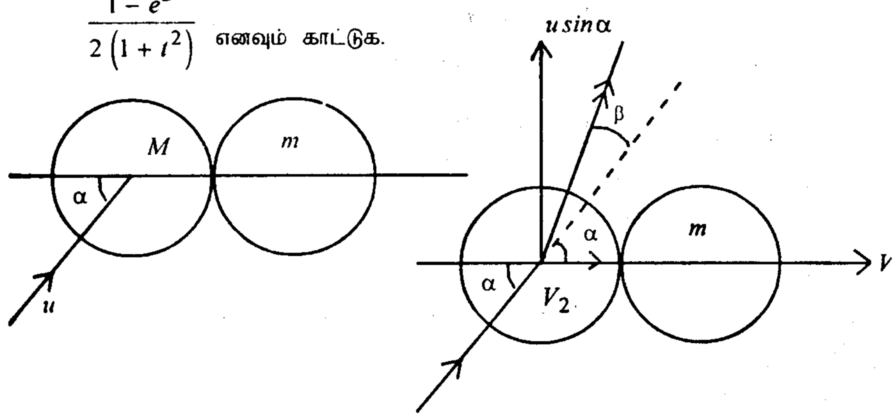
$$\tan\beta = \frac{m\,(1+e)\,\tan\alpha}{(M - em) + (M + m)\tan^2\alpha}$$ எனக் காட்டுக.

$M = m$ ஆகவும் $t = \tan\alpha$ எனவும் இருப்பின்

(i) $\tan\beta = \dfrac{(1+e)\,t}{2t^2 + 1 - e}$ எனவும்

(i) இழக்கப்படும் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் பின்னம்

$\dfrac{1-e^2}{2\left(1+t^2\right)}$ எனவும் காட்டுக.

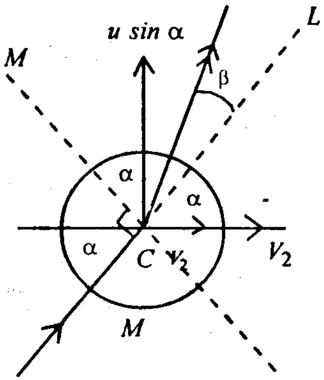


→ உந்தக் காப்புவிதி

$$mV_1 + MV_2 = Mu\cos\alpha$$

நி.ப.விதி, $\underline{V_1 - V_2 = e\,u\cos\alpha}$, $V_1 = \dfrac{Mu\cos\alpha\,(1+e)}{M+m}$

$$V_2 = \frac{u\cos\alpha\,(M-em)}{M+m}$$



CL வழியே வேகக்கூறு

$$= V_2\cos\alpha + u\sin^2\alpha$$

CM வழியே வேகக்கூறு

$$= u\sin\alpha\cos\alpha - V_2\sin\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{u\sin\alpha\cos\alpha - V_2\sin\alpha}{V_2\cos\alpha + u\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{u\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{u\sin\alpha\cos\alpha\,(M-em)}{M+m}}{\dfrac{u\cos^2\alpha\,(M-em)}{M+m} + u\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{m(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{(M-em)\cos^2\alpha + (M+m)\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{m(1+e)\tan\alpha}{(M-em) + (M+m)\tan^2\alpha}$$

(i) $\tan\beta = \dfrac{m(1+e)\tan\alpha}{(M-em) + (M+m)\tan^2\alpha}$ என்பதில்,

$M = m,\ \tan\alpha = t$ எனப் பிரதியிட

$$\tan\beta = \frac{m(1+e)\,t}{m(1-e) + 2m\,t^2}$$

$$= \frac{(1+e)\,t}{2t^2 + 1 - e}$$ ஆகும்.

(ii) $M = m$ எனில்

$$V_1 = \frac{u\cos\alpha\,(1+e)}{2}$$

$$V_2 = \frac{u\cos\alpha\,(1-e)}{2}$$

m இற்கு, $\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$ ஐப் பிரயோகிக்க,

$$\rightarrow I = m(V_1 - 0)$$

$$I = mV_1$$

சக்தி மாற்றம் $\Delta E = \dfrac{1}{2} I (V_1 + 0) - \dfrac{1}{2} I (V_2 + u\cos\alpha)$

$$= -\frac{1}{2} I (V_2 - V_1 + u\cos\alpha)$$

$$= -\frac{1}{2} I\left[-eu\cos\alpha + u\cos\alpha\right]$$

$$-\frac{1}{2} M \frac{u\cos\alpha\,(1+e)}{2}\cdot u\cos\alpha\,(1-e)$$

$$= -\frac{1}{2} mu^2 \left[\frac{(1-e^2)\cos^2\alpha}{2}\right]$$

இழக்கப்பட்ட இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி $= \dfrac{1}{2} mu^2 \left[\dfrac{(1-e^2)}{2\sec^2\alpha}\right]$

$$= \frac{1}{2} mu^2 \left[\frac{1-e^2}{2(1+t^2)}\right]$$

உதாரணம் 7

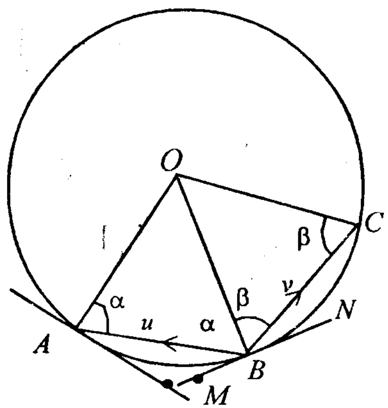
ஒப்பமான ஒரு வட்டத் தட்டு ஒன்று கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் ஓரத்தைச் சுற்றி நிலைக்குத்தான விளிம்பு உண்டு. அதன் விளிம்பின் உட்புறத்திலுள்ள புள்ளி Aயிலிருந்து தட்டின் மேற்பரப்பு வழியே, துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. முதல் இரு மோதுகைகளும் விளிம்பிலுள்ள B, C எனும் புள்ளிகளில் நடைபெறுகின்றன. இங்கு வில் AC தட்டின் மையத்தில் அமைக்கும் கோணம் 90^0 ஆயும், புள்ளி B வில் AC யில் இருக்குமாறும் அமைந்துள்ளது. விளிம்புடனான கணததாக்குகள் கிடைத்திசையில் அமைந்துள்ளன எனவும், மீளமைவுக் குணகம் $\frac{2}{3}$ எனவும் கொண்டு எறியற் திசையானது A யினூடான விட்டத்துடன் $tan^{-1}2$ எனும் கோணத்தை அமைக்கிறது எனக் காட்டுக.

AB, BC என்பவற்றைத் துணிக்கை கடக்க எடுத்த நேரங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

மையம் O. ஆரை a என்க.

$\angle AOC = 90^0$ எனவே

$\angle ABC = 135^0$ ஆகும்



AB வழியே வேகம u உடன் எறியப்படுகிறது.
B உடன் மோதும் கணத்தில்,
OB வழியே வேகம் $u\cos\alpha$
MB வழியே வேகம் $u\sin\alpha$

மோதியபின்,

BO வழியே, $eu\cos\alpha = \frac{2}{3}u\cos\alpha$

BN வழியே, $u\sin\alpha$ (வேகக்கூறு மாறாது)
விளையுள் வேகம் BC வழியே உள்ளது.

$$\tan\beta = \frac{u\sin\alpha}{eu\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{e}$$

$$3\tan\alpha = 2\tan\beta$$

$$3\tan\alpha = 2\tan(135-\alpha)$$

$$3\tan\alpha = 2\tan[180-(45+\alpha)]$$

$$3\tan\alpha = -2\tan(45+\alpha)$$

$$3\tan\alpha = -2\frac{(1+\tan\alpha)}{1-\tan\alpha}$$

$$3\tan^2\alpha - 5\tan\alpha - 2 = 0$$

$$(3\tan\alpha+1)(5\tan\alpha-2) = 0$$

$$\tan\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \tan\alpha = 2$$

$0 < \alpha < 90^0$ ஆதலால் $\tan\alpha = 2$

A யிலிருந்து Bக்கு எடுத்த நேரம் $T_1 = \frac{2a\cos\alpha}{u}$

B யிலிருந்து Cக்கு எடுத்த நேரம் $T_2 = \frac{2a\cos\beta}{v}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{v\cos\alpha}{u\cos\beta}$$

$$= \frac{u\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{4}{9}\cos^2\alpha}\,\cos\alpha}{u[-\cos(45+\alpha)]}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{4}{9}\cos^2\alpha}}{\sin^2 45\sin\alpha - \cos 45\cos\alpha}\cos\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{4}{9}\cos^2\alpha}}{\sin 45\tan\alpha - \cos 45}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{4}{45}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{40}{45}}\times\sqrt{2} = \frac{4}{3}$$

உதாரணம் 8

இரு சமபந்துகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையில் ஒன்றையொன்று தொட்டவண்ணம் உள்ளன. மூன்றாவது சமபந்து ஒன்று அவற்றின் பொதுத்தொடலி வழியே இயங்கி அவற்றுடன் ஒரே நேரத்ததில் மோதுகிறது. ஒவ்வொரு கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனில் மோதுகையினால் ஏற்பட்ட இயக்கசக்தி நட்டம். ஆரம்ப இயக்க சக்தியின் $\frac{3}{5}\left(1-e^2\right)$ எனக் காட்டுக.

உந்தக்காப்புவிதி

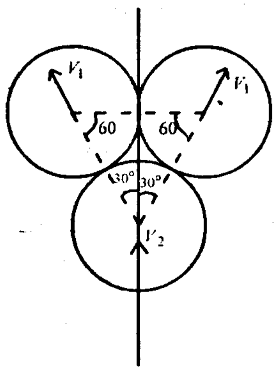
$$\uparrow 2m V_1 \cos 30 + mV_2 = m u \text{ ------------ } (1)$$

நியூற்றனின் பரிசோதனைவிதி

$$V_1 - V_2 \cos 30 = e u \cos 30 \text{ ------------ } (2)$$

$$(1) \Rightarrow, \ \sqrt{3}\, V_1 + V_2 = u \text{ ------------ } (3)$$

$$(2) \Rightarrow, \ \underline{2V_1 - \sqrt{3}\, V_2 = \sqrt{3}\, e\, u} \text{ ------------ } (4)$$



$$V_1 = \frac{\sqrt{3}\, u\,(1+e)}{5}$$

$$V_2 = \frac{(2-3e)\, u}{5}$$

ஆரம்ப இயக்க சக்தி $= \frac{1}{2} m u^2$

இறுதி இயக்க சக்தி $= 2 \times \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} m V_2^2$

$$= \frac{1}{2} m \left[2 \times \frac{3u^2 (1+e)^2}{25} + \frac{(2-3e)^2}{25} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m u^2 \left[\frac{6 + 12e + 6e^2 + 4 - 12e + 9e^2}{25} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m u^2 \left(\frac{2+3e^2}{5} \right)$$

சக்தி நட்டம் $= \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u^2 \left(\frac{2+3e^2}{5} \right)$

$$= \frac{1}{2} m u^2 \left[\frac{3}{5}\left(1-e^2\right) \right] \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 9

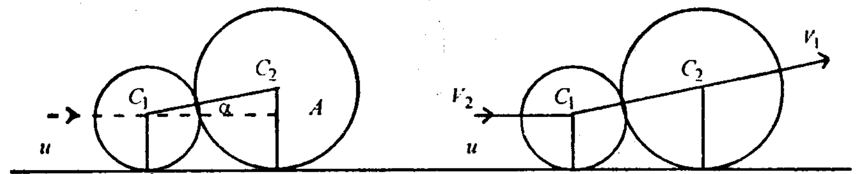
நிறை மீள்சக்தி மோதுகையை வரையறுக்க.

m என்னும் திணிவும் a எனும் ஆரையும் கொண்ட A எனும் உதை பந்தொன்று ஒப்பமான கிடை நிலத்தில் ஓய்வில் உள்ளது. அதே திணிவு m உம் ஆனால் $b\ (< a)$ என்னும் ஆரையும் கொண்ட இன்னொரு பந்து, நிலத்திலே u எனும் கிடை வேகத்துடன் சென்று உதைபந்து Aஐ அடிக்கிறது. இருபந்துகளின் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடும், காவி u உம் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளன. மோதலானது நிறை மீள் சக்தியுடையதென எடுத்துக் கொண்டு, உதை பந்து A பெறும் வேகமானது

$$\frac{2u \cos\alpha}{1+\cos^2\alpha} \text{ ஆகுமெனக் காட்டுக.}$$

இங்கு $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ ஆகும்.

பந்திற்கும், நிலத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆயின் நிலத்தின் மீதான உதைபந்து A இன் கிடைவீச்சைக் காண்க.



$$\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$$

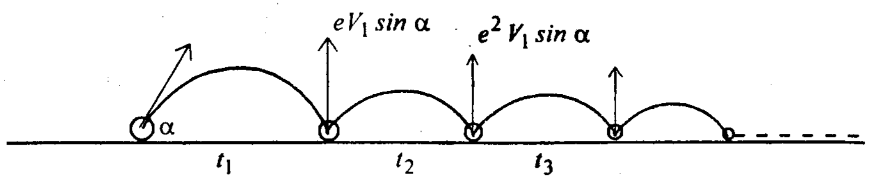
உந்தக்காப்புவிதி

$$\rightarrow mV_1 \cos\alpha + m V_2 = mu \text{ ------------ } (1)$$

நி.ப.விதி. $V_1 - V_2 \cos\alpha = u \cos\alpha$ ------------ (2)

$$(1) \Rightarrow V_1 \cos\alpha + V_2 = u \text{ ------------ } (3)$$

(2), (3) இலிருந்து. $V_1 = \frac{2u\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}$



மோதுகையின் போது கிடைவேகம் மாறாது. $\rightarrow V_1 \cos\alpha$

முதலாவது மோதுகைக்கு எடுத்த நேரம் t_1 எனின்,

$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2} gt^2$$

$$0 = V_1 \sin\alpha \; t_1 - \frac{1}{2} g{t_1}^2$$

$$t_1 = \frac{2V_1 \sin\alpha}{g}$$

மொத்த நேரம் $T = t_1 + t_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \frac{2V_1 \sin\alpha}{g} + \frac{2e V_1 \sin\alpha}{g} + \frac{2e^2 V_1 \sin\alpha}{g} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2V_1 \sin\alpha}{g} \left(1 + e + e^2 + \ldots\ldots\ldots\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 V_1 \sin\alpha}{g} \left(\frac{1 - e^h}{1 - e}\right)$$

$$= \frac{2V_1 \sin\alpha}{g(1-e)}$$

ஆகவே கிடைவீச்சு $V_1 \cos\alpha \cdot T$

$$= \frac{V_1 \cos\alpha \cdot 2 V_1 \sin\alpha}{g}$$

$$= \left(\frac{2u \cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha}\right)^2 \frac{\sin 2\alpha}{g} \quad ---$$

உதாரணம் 10

M திணிவும் α சாய்வும் உடைய ஒப்பமான ஆப்பு ஒன்று ஒப்பமான மேசையொன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளது. நிலைக்குத்தாக விழுகின்ற m திணிவுள்ள கோளம் ஒன்று, ஆப்பின் சாய்முகத்தை P என்னும் ஒரு புள்ளியில் அடிக்கிறது. மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் கோளத்தின் வேகம் u ஆகும். ஆப்பிற்கும், கோளத்துக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின், ஆப்பு

$$\frac{mu(1 + e) \sin\alpha \cos\alpha}{M + m \sin^2\alpha}$$ என்ற வேகத்துடன் இயங்கத் தொடங்குகிறதெனக் காட்டுக.

கோளம் மோதிப்பிரியும் திசை கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ,

$$\tan\theta = \frac{(M+m)\sin^2\alpha - e\, M\cos^2\alpha}{M(1+e)\sin\alpha \cos\alpha}$$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

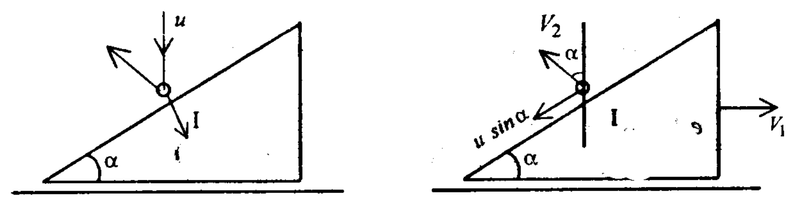
ஆப்பின் சாய்முகம் போதியளவு நீளமாக இருப்பின் துணிக்கை மீண்டும் அதனை அடிக்க எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

இரண்டாவது மொத்தல் புள்ளி Q ஆனது

$$PQ = \frac{2e(1 + e)(M + m)\, u^2 \sin\alpha}{(M + m \sin^2\alpha)g}$$ இனால் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

$e = o$ எனின், முதலாவது மொத்தல் காரணமான இயக்கசக்தி நட்டம்

$$\frac{M mu^2 \cos^2\alpha}{2(M + m \sin^2\alpha)}$$ எனவும் காட்டுக.



உந்தக்காப்புவிதி

தொகுதி

$$\rightarrow \; MV_1 - m(V_2 \sin\alpha + u \sin\alpha \cos\alpha) = 0$$

நியூற்றனின் பரிசோதனை விதி

$$V_1 \sin\alpha + V_2 = eu\cos\alpha$$

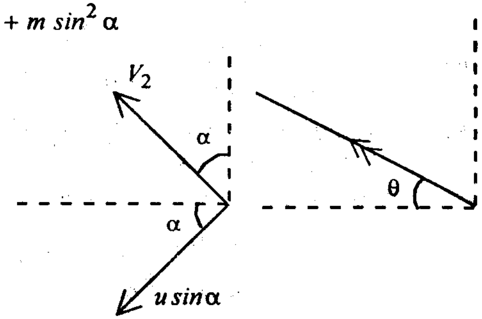
$$MV_1 - mV_2 \sin\alpha = mu\sin\alpha\cos\alpha \text{ ------------------ } (1)$$

$$\underline{V_1 \sin\alpha + V_2 = eu\cos\alpha} \text{ ----------------- } (2)$$

(1), (2) இலிருந்து $$V_1 = \frac{mu\sin\alpha\cos\alpha\,(1+e)}{M + m\sin^2\alpha} \text{ ---------------- } (*)$$

$$V_2 = \frac{u\cos\alpha\left(eM - m\sin^2\alpha\right)}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{V_2\cos\alpha - u\sin^2\alpha}{V_2\sin\alpha + u\sin\alpha\cos\alpha}$$



$$= \frac{u\cos^2\alpha\left(eM - m\sin^2\alpha\right) - u\sin^2\alpha\left(M + m\sin^2\alpha\right)}{u\sin\alpha\cos\alpha\left(eM - m\sin^2\alpha\right) + u\sin\alpha\cos\alpha\left(M + m\sin^2\alpha\right)}$$

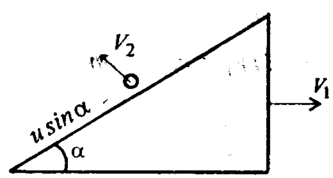
$$= \frac{u\left[eM\cos^2\alpha - m\sin^2\alpha\cos^2\alpha - M\sin^2\alpha - m\sin^4\alpha\right]}{u\sin\alpha\cos\alpha\left[eM - m\sin^2\alpha + M + m\sin^2\alpha\right]}$$

$$= \frac{eM\cos^2\alpha - (M+m)\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\,M(1+e)} \text{ --------------- } (*)$$

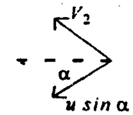
எனவே கிடையுடன் கீழ்நோக்கி θ அமைந்திருக்கும்.

ஆப்புத் தொடர்பான துணிக்கையின் இயக்கம்

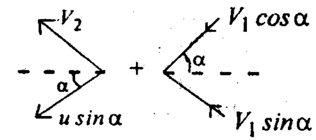
$$V_{M,E} = \rightarrow V_1$$



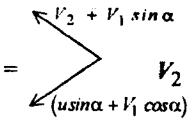
$V_{m.E} =$



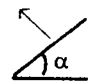
$$V_{m.M} = V_{m,E} + V_{E.M}$$



=



$$V_2 + V_1\sin\alpha = eu\cos\alpha$$



$$\underline{S = ut + \frac{1}{2}at^2}$$

$$O = eu\cos\alpha \cdot T - \frac{1}{2}g\cos\alpha \cdot T^2$$

$$T = \frac{2eu}{g}$$

$$\underline{S = ut + \frac{1}{2}at^2}$$

$$(u\sin\alpha + V_1\cos\alpha)\,T + \frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot T^2$$

$$= \left[u\sin\alpha + \frac{Mu\sin\alpha\cos^2\alpha(1+e)}{M + m\sin^2\alpha}\right] \cdot \frac{2eu}{g} + \frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot \frac{4e^2u^2}{g^2}$$

$$= \frac{2eu^2 \sin\alpha}{\left(M + m\sin^2\alpha\right)g}\left[M + m\sin^2\alpha + m\cos^2\alpha\,(1+e) + e\left(M + m\sin^2\alpha\right)\right]$$

$$= \frac{2eu^2 \sin\alpha\,(M+m)(1+e)}{\left(M + m\sin^2\alpha\right)g} \text{ ------------------------- } (*)$$

முதலாவது மோதுகையின் போது ஏற்பட்ட சக்திமாற்றம்.

$$\Delta E = \frac{1}{2} I \sin\alpha\,(V_1 + o) + \frac{1}{2} I\,(V_2 - u\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} I\left[V_2 + V_1\sin\alpha - u\cos\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2} I\left[eu\cos\alpha - u\cos\alpha\right]$$

$$= -\frac{1}{2} I u\cos\alpha\,(1-e)$$

$e = o$ எனின், $\Delta E = -\frac{1}{2} I u\cos\alpha$

$$\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$$

ஆப்பு $\rightarrow I\sin\alpha = MV_1$

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\frac{MV_1}{\sin\alpha}\cdot u\cos\alpha$$

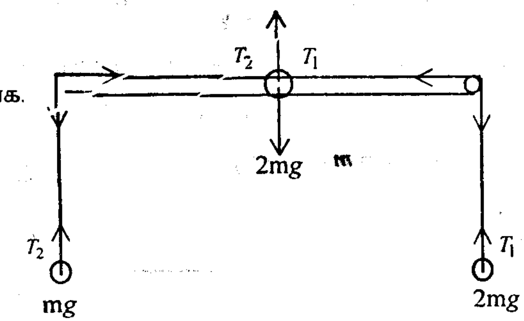
$$= -\frac{1}{2} M \cdot \frac{mu\sin\alpha\cos\alpha}{\left(M + m\sin^2\alpha\right)} \cdot \frac{u\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

சக்தி நட்டம் $= \dfrac{1}{2}\dfrac{Mmu^2\cos^2\alpha}{\left(M + m\sin^2\alpha\right)}$

உதாரணம் 11

நீளம் $8a$ ஐ உடைய இலேசான, நீட்டமுடியாத இழை ஒன்றின் இரு நுனிகளிலும் முறையே திணிவு $m, 2m$ ஐ உடைய A, B எனுமிரு துணிக்கைகளும், இழையின் நடுப்புள்ளியுடன் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை C யும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழை ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது $4a$ இடைத் தூரத்திலிருக்கும் இரு சமாந்தர ஓரங்களுக்குச் செங்குத்தான கோடு வழியே செல்கின்றது. மேசை மீள் தன்மையின்றிய கிடைத் தரைக்கு மேலே உயரம் $3a$ யில் உள்ளது. A, B ஒவ்வொன்றும் தரைக்கு மேலே உயரம் a யில் இருக்கும் போது துணிக்கைத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுமெனின், நேரம் $\sqrt{\frac{10a}{g}}$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கை B தரையிலே பட்டு நேரம் $6\sqrt{\frac{2a}{5g}}$ இற்கு ஓய்வில் இருந்து அதன் பின்னர் அது $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2ag}{5}}$ உடன் அசைக்கப்பட்டு இயக்கம் மீண்டும் ஆரம்பிக்குமெனக் காட்டுக.

$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க



தொகுதியின் ஆர்முடுகல் a என்க.

$2m\downarrow, \quad 2mg - T_1 = 2ma$

$2m\rightarrow \quad T_1 - T_2 = 2ma$

$m\uparrow \quad T_2 - mg = ma$

$$a = \frac{g}{5}$$

$2m$ திணிவு நிலத்தை அடிக்க எடுத்த நேரம் t என்க.

$2m$ திணிவு நிலத்தை அடிக்கும் போது வேகம் v என்க.

$2m\downarrow, \ s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = o + \frac{1}{2} \times \frac{g}{5} \times t^2$

$t^2 = \frac{10a}{g} \qquad t = \sqrt{\frac{10a}{g}}$

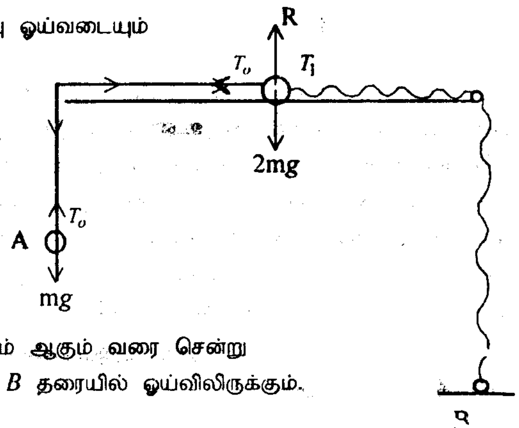
$\downarrow_{2m}, \ u^2 = u^2 + 2as$

$u^2 = o + 2 \times \frac{g}{5} a$

$u^2 = \frac{2ag}{5}$

$u = \sqrt{\frac{2ag}{5}}$

நிலத்தை அடித்ததும் $2m$ திணிவு ஓய்வடையும் இழை தொய்யும்.



இப்பொழுது $P = ma$ ஐப் பாவிக்க

$$\downarrow mg - T_0 = mf$$

$$2m \leftarrow \quad T_o = mf$$

$$f = \frac{g}{3}$$

m திணிவு அதன் வேகம் பூச்சியம் ஆகும் வரை சென்று மீண்டும் திரும்பிவரும். அதுவரை B தரையில் ஓய்விலிருக்கும்.

$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = vt - \frac{1}{2}ft^2$$

$$t \neq o, \quad t = \frac{2v}{f} = \frac{6}{g}\sqrt{\frac{2ag}{5}} = 6\sqrt{\frac{2a}{5g}}$$

மீண்டும் இழை இறுகும் போது A, B துணிக்கைகளில் ஏற்படும் கணத்தாக்குகள் முறையே I_1, I_2 எனவும் பொதுவேகம் V_o எனவும் கொள்க.

$$A\downarrow \; I_1 = m(V_o - V) \text{ ---------------- } (1)$$

$$C\leftarrow, \; I_1 - I_2 = 2m(V_o - V) \text{ -------------- } (2)$$

$$B\uparrow, \quad I_2 = m(V_o - o) \text{ ---------------- } (3)$$

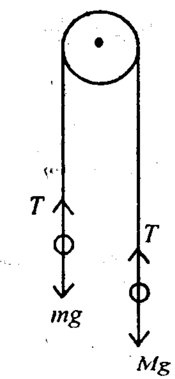
$$(1)+(2)+(3), \quad V_o = \frac{3V}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2ag}{5}}$$

உதாரணம் 12

இரு திணிவுகள் m, M ஆகியவற்றை இணைக்கும் இலேசான இழையொன்று ஓர் ஒப்பமான மீள்தன்மையின்றிய கிடைத்தளத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே அமைந்துள்ள ஒப்பமான நிறையற்ற கப்பி ஒன்றின் மேலாகச் செல்கிறது. இயக்கத்தைத் தடை செய்யக் கூடியவாறு M பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. M ஐ விடுவித்த பின் அது தளத்தை அடைய t செக்கன்கள் எடுப்பின், தொகுதி இழை இறுகிய கணச் சமநிலைக்கு

முதன் முறையாக வரும் நேரம் $\frac{3Mt}{M+m}$ எனக் காட்டுக.

njhFjp $3t$ நேரத்தின் பின்னர் M தளத்திலிருக்குமாறு சமநிலைக்கு வரும் எனக் காட்டுக.



$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.

$$M\downarrow \; Mg - T = Mf \text{ ------------- } (1)$$

$$m\uparrow \; T - mg = mf \text{ -------------- } (2)$$

$$f = \frac{(M-m)g}{M+m}$$

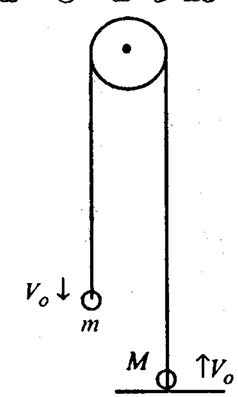
M திணிவுடைய துணிக்கை நிலத்தை அடிக்கும் போது அதன் கதி V என்க.

$v = u + at$ ஐப் பாவிக்க.

$$\downarrow m, V = 0 + \frac{M-m}{M+m}gt$$

$$V = \frac{M-m}{M+m}gt$$

M திணிவு நிலத்தை அடித்ததும் ஓய்வடையும், m திணிவு அதன் கதி பூச்சியமாகும் வரை புவியீர்ப்பின் கீழ் மேல் சென்று மீண்டும் கீழ் நோக்கி இயங்கும். இழை இறுக எடுத்த நேரம் t_1 என்க.



$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = V \cdot t_o - \frac{1}{2}g t_o^2$$

$$t_o = \frac{2V}{g} = 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)t$$

இழை இறுகும் போது கணத்தாக்கு I என்க. இழை இறுகியதும் துணிக்கையின் பொதுக்கதி V_o என்க.

$$\underline{I} = \Delta\left(m\underline{V}\right)$$

$$M \uparrow \quad I = M\left(V_o - o\right)$$

$$m \downarrow \quad -I = m\left(V_o - V\right)$$

$$V_o = \frac{mV}{M+m}$$

தொகுதி அமர்முடுகலுடன் வேகம் பூச்சியமாகும் வரை இயங்கும். இதற்கான t_1 நேரம் என்க.

$M, \uparrow \; v = u + at$ ஐப் பாவிக்க

$$0 = V_o - \frac{(M-m)}{M+m} g \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{V_o\,(M+m)}{(M-m)\,g} = \frac{m}{(M+m)} \cdot \frac{M-m}{M+m}\,g\,t \cdot \frac{(M+m)}{(M-m)\,g} = \frac{mt}{M+m}$$

இழை இறுகிய நிலையில் முதல் முறையாக கணநிலை ஓய்விற்கு எடுக்கும் நேரம் T_1 எனின்

$$T_1 = t + t_o + t_1$$

$$= t + 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)t + \frac{mt}{M+m} = \frac{3Mt}{M+m}$$

பின்னர் மீண்டும் திணிவு M நிலத்தை அடித்துப் பின் இழை இறுகிய நிலையில் தொகுதி கணநிலை ஓய்விற்குவர எடுக்கும் நேரம் T_2 எனின்,

$$T_2 = \frac{mt}{M+m} + 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right) \cdot \frac{mt}{M+m} + \frac{m}{M+m}\;\frac{mt}{M+m}$$

$$= \frac{3M}{M+m} \cdot \frac{mt}{M+m}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{3Mt}{M+m} + \frac{3M}{M+m} \cdot \frac{mt}{M+m} + \frac{3M}{M+m} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot \frac{mt}{M+m} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{3Mt}{M+m}\left[1 + \frac{m}{M+m} + \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

மொத்த நேரங்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{m}{M+m}$ ஐ பொது விகிதமாகக் கொண்ட ஒரு பெருக்கல் தொடராக அமையும். $\frac{m}{M+m} < 1$

$$T = \frac{3Mt}{M+m}\left[\frac{1}{1 - \frac{m}{M+m}}\right] = 3t$$

உதாரணம் 13

A, B என்னுமிரு சிறிய துணிக்கைகள் முறையே M, m என்னும் திணிவுகளை உடையன. அவை a நீளமுடைய இலேசான நீளா இழையினால் இணைக்கப்பட்டு ஓர் ஒப்பமான அழுத்தமான கிடை மேசையில் $l\,(< a)$ இடைத்தூரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A, B என்பவற்றை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக u எனும் கிடைவேகத்துடன் பந்து B அடிக்கப்படுகிறது.

(a) இழை இறுக்கமாகும் போது அவ்விழையிலுள்ள கணத்தாக்கிழுவையைக் காண்க. குலுக்கலினால் ஏற்பட்ட இயக்கசக்தி நட்டம் $\frac{M m u^2 \cos^2 \alpha}{2\,(M+m)}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{l}{a}\right)$ ஆகும்

(b) $l = a/2$ எனின்

(i) சக்தி நட்டம் யாது?

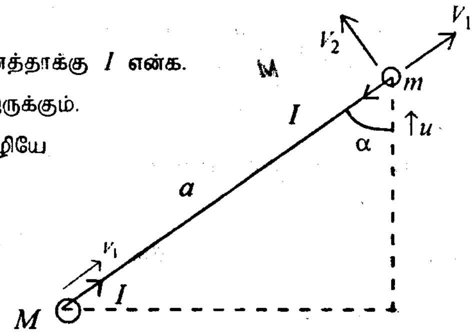
(ii) A நிலைப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் சக்தி நட்டம் யாது?

$M=m$ எனின் (ii) இல் ஏற்பட்ட சக்தி நட்டம் (i) இல் ஏற்பட்ட சக்தி நட்டத்தின் இரு மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

இழை இறுகும் போது இழையில் கணத்தாக்கு I என்க.

M இன் வேகம், இழையின் வழியே இருக்கும்.

நீளா இழையாகையால் இழையின் வழியே வேகங்கள் சமம்.



$V_2 = u\sin\alpha$ ---------- (1)

$$\underline{I} = \Delta\left(m\underline{V}\right)$$

$M \nearrow \quad I = M\left(V_1 - o\right)$ ---------- (2)

$m \nearrow \quad -I = m\left(V_1 - u\cos\alpha\right)$ ---------- (3)

(2), (3) இலிருந்து $V_1 = \dfrac{m\,u\cos\alpha}{M+m}$

$$I = MV_1 = \frac{M\,mu\cos\alpha}{M+m}$$

M இல் சக்திமாற்றம் $= \dfrac{1}{2}\,I\left(V_1 + o\right)$

m இல் சக்திமாற்றம் $= -\dfrac{1}{2}\,I\left(V_1 + u\cos\alpha\right)$

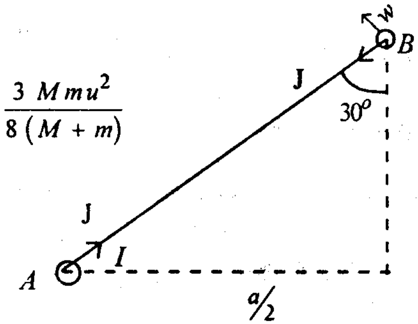
மொத்த சக்திமாற்றம் $= \dfrac{1}{2}\,I\left(V_1 + o\right) - \dfrac{1}{2}\,I\left(V_1 + u\cos\alpha\right)$

$$= -\frac{1}{2}\,I\,u\cos\alpha$$

சக்தி நட்டம் $= \dfrac{1}{2}\,I\,u\cos\alpha = \dfrac{M\,mu^2\cos^2\alpha}{2\left(M+m\right)}$

(b). $l = \dfrac{a}{2}$ எனின்,

$$\sin\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(i) சக்தி நட்டம் $\dfrac{M\,mu^2}{2\left(M+m\right)} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3\,M\,mu^2}{8\left(M+m\right)}$

(ii) A நிலைப்படுத்தப்பட்டிருப்பின்

$W = u\sin 30 = \dfrac{u}{2}$ ---------------- (4)

m இற்கு $\underline{I} = \Delta\left(m\,\underline{V}\right)$ ஐப் பாவிக்க,

$$-J = m\left(0 - u\cos 30\right)$$

$$J = mu\cos 30$$

சக்தி மாற்றம் $= -\dfrac{1}{2}\,J\left(u\cos 30 + 0\right)$

$$= -\frac{1}{2}\,mu^2\cos^2 30$$

$$= -\frac{1}{2}\,mu^2 \times \frac{3}{4}$$

சக்தி நட்டம் $= \dfrac{3mu^2}{8}$

அல்லது

ஆரம்ப சக்தி $= \dfrac{1}{2}\,mu^2$

இறுதி சக்தி $= \dfrac{1}{2}\,m\left(\dfrac{u}{2}\right)^2$

சக்தி நட்டம் $= \dfrac{1}{2}\,mu^2 - \dfrac{1}{2}\,m\,\dfrac{u^2}{4} = \dfrac{3}{8}\,mu^2$

$$\frac{V_1}{V\cos^2\alpha} = \frac{-V_2}{2V\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{3+\sin^2\alpha}$$

$$V_1 = \frac{V\cos^2\alpha}{3+\sin^2\alpha} = \frac{V}{3\sec^2\alpha+1} = \frac{V}{4+3\tan^2\alpha}$$

$$V_2 = \frac{-2V\sin\alpha\cos\alpha}{3+\sin^2\alpha} = \frac{-2V\tan\alpha}{4+3\tan^2\alpha}$$

$$\leftarrow I = \Delta(m\underline{V}),\ R;\quad I_1 = mV_1 = \frac{mV}{4+3\tan^2\alpha}$$

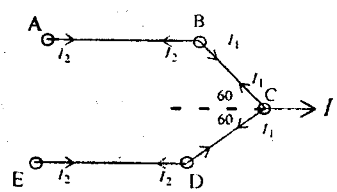
$$\overset{Q}{\leftarrow},\quad I_2\cos\alpha - I_1 = mV_1$$

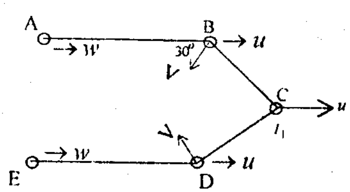
$$I_2\cos\alpha = mV_1 + mV_1$$

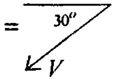
$$I_2 = \frac{2mV_1}{\cos\alpha} = \frac{2mV\sec\alpha}{3+4\tan^2\alpha}$$

உதாரணம் 15

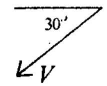
ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள A,B,C,D,E என்னும் ஐந்து துணிக்கைகள் ஒரே நீளமுள்ள நீட்ட முடியாத ஐந்து மெல்லிய இழைகளினால் அவ்வொழுங்கிலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழைகள் ஓரொழுங்கான அறுகோணியினது நான்கு அடுத்துள்ள பக்கங்களை ஆக்கிக் கொண்டிருக்கும் படி அத்துணிக்கைகள் ஒப்பக் கிடைமேசையின் மீது கிடக்கின்றன. AB க்கு சமாந்தரமான திசையிலும் போக்கிலும் I என்னும் ஒரு கணத்தாக்கு C இற்குப் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. அக்கணத்தாக்கு பிரயோகிக்கப்பட்ட பின்பு C இன் வேகம் u ஆகவும், B இன் C தொடர்பான வேகம் v ஆகவுமிருந்தால் v அளக்கப்படும் போக்கைச் சார்ந்து A இன் வேகம் $u \pm \frac{\sqrt{3}}{2}v$ எனக் காட்டுக. u, v என்பவற்றையும், அவ்விழைகளின் கணத்தாக்கிழுவைகளையும் I, m என்பவற்றில் காண்க.





$V_{C.E} = \rightarrow u$ ஆகும். C தொடர்பான B இன் வேகம் v எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $V_{B.C} =$ 

$$V_{B.E} = V_{B.C} + V_{C.E}$$

$=$  $+ \rightarrow u$

AB நீளா இழையாதலால் AB இன் வழியே A யினதும் B யினதும் வேகங்கள் சமமாகும்.

ஆகவே $w = u - V\cos 30$

$$= u - \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

[v ஆனது எதிர்த்திசையிலிருப்பின் $w = n + v\cos 30 = u + \frac{\sqrt{3}}{2}v$ ஆகும்.]

$$\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$$

தொகுதி $\rightarrow I = mu + 2\left[m\,w + m\,(u - V\cos 30)\right]$

$$mu + 2\left[m\,(u - v\cos 30) + m\,u - v\cos 30\right]$$

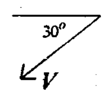
$$I = m\left[5u - 2\sqrt{3}\,v\right]$$

$$= mu + 2\left[m(u - \cos 30) + m\,(u - V\cos 30)\right]$$

$$I = m\left[5u - 2\sqrt{3}\,v\right]$$

$$5u - 2\sqrt{3}\,v = \frac{I}{m} \quad \text{------------------ (1)}$$

A இற்கு, $\rightarrow,\ I_2 = m\,(u - V\cos 30)$

B இற்கு,  $I_2\cos 30 = mv$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}u = \frac{7}{4}V \quad \text{------------------ (2)}$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\sqrt{3}\,u}{7}$$

$M = m$ எனில்

(i) இல் சக்தி நட்டம் $\dfrac{3m^2 u^2}{8 \times 2m} = \dfrac{3}{16} mu^2$

(ii) இல் சக்தி நட்டம் $= \dfrac{3}{8} mu^2$

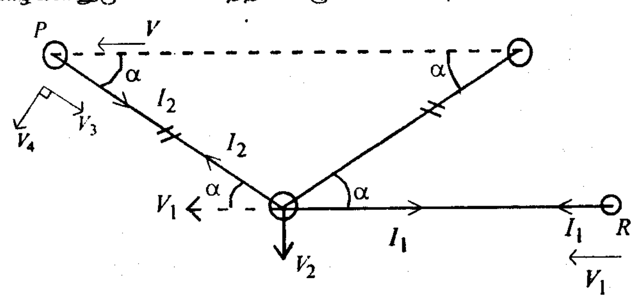
உதாரணம் 14

ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள மூன்று சமதுணிக்கைகள் P, Q, R ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையில் ஓய்விலுள்ளன. P, Q விற்கும், Q, R இற்குமாக அவை நீட்டமுடியாத நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழைகள் இறுக்கமாக இருக்குமாறும், அவ்விழைகளின் இடைக்கோணம் $\alpha \left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆகுமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளன.

P இற்கு RQ விற்கு சமாந்தரமாக V என்னும் வேகம் கொடுக்கப்பட்டது.

இழை மீண்டும் இறுக்கமாகும் போது R ஆனது $\dfrac{V}{3 + 4\tan^2\alpha}$ எனும் வேகத்தைப் பெறுமென நிறுவுக.

இரு இழைகளிலுமுள்ள கணத்தாக்கிழுவைகளையும் காண்க.



இழை இறுகும் போது QR இலுள்ள கணத்தாக்கு I_1,

PQ இலுள்ள கணத்தாக்கு I_2 என்க.

துணிக்கை P யிற்கு $V_4 = V\sin\alpha$ (PQ இற்கு செங்குத்தான வேகம் மாறாது)

$$V_4 = V\sin\alpha \text{ ---------------- (1)}$$

PQ நீளா இழையாதலால் இழையின் வழியே P யினதும், Q வினதும் வேகம் சமனாகும்.

$$V_3 = V_2 \sin\alpha - V_1\cos\alpha \text{ ----------------- (2)}$$

$\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$ ஐப் பிரயோகிக்க.

தொகுதி $\leftarrow o = mV_1 + mV_1 + m(V_4\sin\alpha - V_3\cos\alpha - V)$

$$2V_1 - V_3\cos\alpha = V\cos^2\alpha \text{ -------------- (3)}$$

$\downarrow o = mV_2 + m(V_3\sin\alpha + V_4\cos\alpha)$

$$V_2 + V_3\sin\alpha = -V\sin\alpha\cos\alpha \text{ ----------------- (4)}$$

(2), (3) ; $2V_1 - \cos\alpha\,(V_2\sin\alpha - V_1\cos\alpha) = V\cos^2\alpha$

$$\left(2 + \cos^2\alpha\right)V_1 - \sin\alpha\cos\alpha\, V_2 = V\cos^2\alpha \text{ ------------------- (A)}$$

(2), (4) ; $V_2 + \sin\alpha(V_2\sin\alpha - V_1\cos\alpha) = -V\sin\alpha\cos\alpha$

$$-\sin\alpha\cos\alpha\, V_1 + \left(1 + \sin^2\alpha\right)V_2 = -V\sin\alpha\cos\alpha \text{ ------------------ (B)}$$

(A), (B) ஐத் தீர்க்க.

$$\frac{V_1}{\begin{vmatrix} -\sin\alpha\cos\alpha & -V\cos^2\alpha \\ 1 + \sin^2\alpha & V\sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix}} = \frac{-V_2}{\begin{vmatrix} 2 + \cos^2\alpha & -V\cos^2\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & V\sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 + \cos^2\alpha & -\sin\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & 1 + \sin^2\alpha \end{vmatrix}}$$

$$\frac{V_1}{V\cos^2\alpha} = \frac{-V_2}{V\cos\alpha\left[\sin\alpha\left(2 + \cos^2\alpha\right) - \cos^2\alpha\sin\alpha\right]}$$

$$= \frac{1}{\left[2 + 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right]}$$

(1), (2) இலிருந்து $u = \frac{7I}{23m}$, $v = \frac{2\sqrt{3}\,I}{23m}$

$$I_2 = \frac{mv}{\cos 30} = \frac{4I}{23}$$

துணிக்கை C இற்கு $\underline{I} = \Delta(mv)$

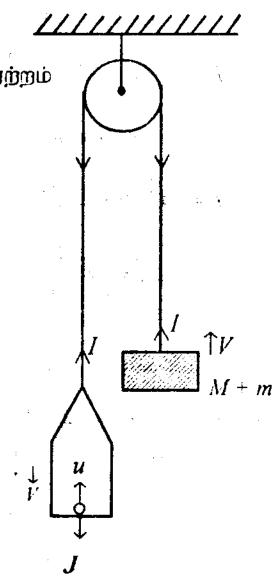
$$I_2 = 2I, \cos 60 = mu$$

$$I_1 = I - mu = I - \frac{7I}{23} = \frac{16I}{23}$$

உதாரணம் 16

H ஆழத்தினையும் M திணிவையும் கொண்ட வாளியொன்று $(M+m)$ திணிவுள்ள எதிர் நிறுத்தலோடு இலேசான ஒப்பமான கப்பிமேற் செல்லும் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. m திணிவுள்ள தவளையொன்று வாளியின் அடியின் மத்தியில் இருக்கின்றது. இத் தொகுதி ஓய்விலிருக்கிறது. தவளை வாளியின் விளிம்பின் மட்டத்தை அடையக்கூடிய அளவுக்கு நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கிப் பாய்கிறது. மீண்டும் தவளை வாளியின் அடியை அடைவதற்கு செல்லும் நேரம் $2\sqrt{\frac{H}{g}\left(\frac{2M+m}{M+m}\right)}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் வெளியில் தவளையின் தனி நிலைக்குத்து ஏற்றம் $\frac{H(2M+m)}{2(M+m)}$ எனவும் காட்டுக.



தவளையின் பூமி தொடர்பான ஆரம்பவேகம் u என்க. கணத்தாக்கினால் $(M+m)$ இன் மேல் நோக்கிய கதி v எனின், வாளியின் கீழ் நோக்கிய கதி v ஆகும்.

$$\boxed{\underline{I} = \Delta(m\underline{v})}$$

$$(M+m)\uparrow,\ I = (M+m)(V-o)$$

$$I = (M+m)V \text{ ---------------- } (1)$$

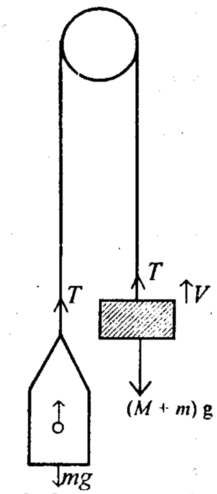
வாளி $\downarrow J - I = M(V-o)$ ---------------- (2)

$$(1) + (2),\ J = (2M+m)V$$

$$mu = (2M+m)V$$

$$V = \frac{mu}{(2M+m)} \text{ ---------------- (A)}$$

$P = ma$ ஐப் பிரயோகிக்க.



[தவளை வாளி தொடர்பாகச் சென்ற அதிஉயரம் H என்பதால்]

$$(M+m)\downarrow,\quad (M+m)g - T = (M+m)f$$

வாளி $\uparrow$, $T - Mg = Mf$

$$f = \frac{m}{2M+m}g$$

வாளி தொடர்பான தவளையின் இயக்கம்

வாளி $-B$, தவளை $-F$

வாளியின் தொடக்க வேகம் $\downarrow V$

தவளையின் தொடக்க வேகம் $\uparrow u$

$$V_{B,E} = \downarrow V, \quad V_{F,E} = \uparrow u$$

$$V_{F,B} = V_{F,E} + V_{E,B}$$

$$= \uparrow u + \uparrow V = \uparrow(u+V)$$

$$A_{F,B} = A_{F,E} + A_{E,B}$$

$$\downarrow g + \downarrow\frac{m}{2M+m}g = \frac{2(M+m)}{2M+m}g\downarrow$$

வாளி தொடர்பான தவளையின் இயக்கம்

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பாவிக்க,

$$0 = (u+V)^2 - \frac{4(M+m)}{2M+m}gH$$

$$(u+V)^2 = \frac{4(M+m)}{2M+m}gH \text{ ---------------- (1)}$$

$\uparrow S = uT + \frac{1}{2} aT^2$ [வாளியின் அடியை அடிக்க எடுத்த நேரம் T என்க]

$$0 = (u+v)T - \frac{1}{2} \cdot \frac{2(M+m)}{2M+m} gT^2$$

$$T \neq 0, \quad T = \frac{(2M+m)}{(M+m)g}(u+v)$$

$$T = \frac{(2M+m)}{(M+m)g} \cdot \sqrt{\frac{4(M+m)}{2M+m} gH}$$

$$T = 2\sqrt{\frac{H(2M+m)}{g(M+m)}}$$

வெளியில் தவளையின் நிலைக்குத்துத் தேற்றம் s எனின் $\uparrow v^2 = u^2 + 2gs$

என்பதில் $s = \frac{u^2}{2g}$ ஆகும்.

(A) இலிருந்து $V = \frac{mu}{(2M+m)}$ என (1) இல் பிரதியிட

$$\left(u + \frac{mu}{2M+m}\right)^2 = \frac{4(M+m)}{2M+m} gH$$

$$\frac{4(M+m)^2 u^2}{(2M+m)^2} = \frac{4(M+m)}{2M+m} gH$$

$$u^2 = \frac{2M+m}{M+m} gH$$

$$s = \frac{u^2}{2g} = \frac{2M+m}{2(M+m)} H$$

பயிற்சி 5

5 (a) கணத்தாக்கு விசைகள்

1. $30g$ திணிவுடைய குண்டொன்று ஒப்பமான கிடை மேசை மீதிருக்கும் $5kg$ திணிவுடைய மரக்குற்றியொன்றினுள் $630ms^{-1}$ உடன் கிடையாகச் சுடப்பட்டது. குண்டு குற்றியினுள் பதிந்ததும், இரண்டினதும் பொதுவேகத்தை காண்க.

2. குழாயின் திசையிலேயே பின்னடிக்கவல்ல $10^4 Kg$ திணிவுள்ள பீரங்கி ஒன்று $100\ kg$ திணிவுள்ள குண்டு ஒன்றினை $400ms^{-1}$ உடன் சுடுகின்றது. பீரங்கி பின்னடிக்கும் வேகத்தைக் காண்க.
பீரங்கி $12cm$ தூரத்தில் ஓய்வுக்கு வருமாறு மாறாத் தடைவிசை ஒன்று பிரயோகிக்கப்படின், தடை விசையைக் காண்க.

3. M திணிவுடைய பீரங்கி ஒன்று கிடை நிலத்திலுள்ளது. m திணிவுள்ள குண்டொன்று குழாயின் வழியே u கதியுடன் சுடப்படுகிறது.
(a) குழாய், கிடையாக இருப்பின்
(b) குழாய், கிடையுடன் $30°$ ஏற்றக்கோணத்தில் இருப்பின் பீரங்கி பின்னடிக்கும் கதியைக் காண்க.
ஒவ்வொரு வகையிலும் t செக்கன்களில் பீரங்கியை ஓய்விற்கு கொண்டுவரத் தேவையான ஒருமை விசையைக் காண்க.

4. கிடையுடன் $30°$ சாய்விலுள்ள சாய்தளம் ஒன்றில் ஓய்விலுள்ள $20 \times 10^3 Kg$ திணிவுடைய பீரங்கி ஒன்று $200kg$ திணிவுள்ள குண்டொன்றினை கிடையாக $630ms^{-1}$ உடன் சுடுகின்றது. பீரங்கி பின்னடிக்கும் வேகத்தையும், அது ஓய்வுக்கு வருமுன் தளத்தில் மேல்நோக்கி எவ்வளவு தூரம் செல்லும் என்பதையும் காண்க.

5. $10^3 Kg$ திணிவுடைய முளை ஒன்றின் மீது $5 \times 10^3 Kg$ திணிவுடைய முளை செலுத்தி ஒன்று $3m$ உயரத்திலிருந்து விழுகின்றது. முளை $8cm$ தூரம் செலுத்தப்பட்டிருப்பின், நிலத்தின் சராசரித் தடையைக் காண்க.

6. km திணிவுடைய பீரங்கி ஒன்று கிடையான நிலத்திலே சுயாதீனமாக பின்னடிக்கக் கூடியது. குழாயின் ஏற்றக் கோணம் α ஆகும். m திணிவுடைய குண்டொன்று சுடப்படுகிறது. குண்டு, குழாயை விட்டுக் கிடையுடன் β கோணத்தில் வெளியேறுகிறதெனக் காட்டுக.

இங்கு $tan\,\beta = \left(\frac{k+1}{k}\right) tan\,\alpha$ ஆகும்.

7. (a) 160 g திணிவுடைய கிரிக்கட் பந்து ஒன்று கிடையாக $25ms^{-1}$ உடன் இயங்குகிறது. ஆட்டக்காரன் $20ms^{-1}$ கிடையாக எதிர்த் திசையில் அப்பந்தினை அடிக்கிறான். பந்தில் ஏற்பட்ட கணத்தாக்கு யாது?

(b) $12ms^{-1}$ உடன் கிடையாக இயங்கும் பந்து ஒன்று, ஓர் அடியினால் $60°$ இனூடு கிடையாகத் திருப்பப்பட்டு $18ms^{-1}$ இல் செல்கிறது. பந்துக்குக் கொடுக்கப்பட்ட கணத்தாக்கினைக் காண்க.

8. (a) $0{\cdot}12\,kg$ திணிவுடைய எறியும் அம்பு (dart) ஒன்று $20ms^{-1}$ கதியுடன் குறி பார்த்து எறியும் பலகையைத் தாக்கி $0{\cdot}1$ செக்கனில் ஓய்வுக்கு வருகிறது. பலகையினால் வழங்கப்பட்ட சராசரி விசையைக் காண்க.

(b) கிடையாக u கதியுடன் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்று $2l$ நீளமுள்ள நீளா இழையினால் தொங்கும் ஓய்விலுள்ள சமதிணிவுடைய துணிக்கையுடன் மோதி இணைந்து விடுகிறது. இழையானது $60°$ இனூடு சுழற்சியடைந்ததும் ஓய்விற்கு வருமெனின் $u^2 = 8gl$ எனக் காட்டுக.

9. 160 g திணிவுடைய கிரிக்கட் பந்து ஒன்று பந்து அடிப்பவனை நோக்கி கிடையாக இயங்குகிறது. பந்து கிரிக்கெட் மட்டையில் படுவதற்குச் சற்று முன் அதன் கதி $30ms^{-1}$ ஆகும். பந்து கிரிக்கெட் மட்டையில் பட்டு ஆரம்பத்திசையிலிருந்து $90°$ ஊடாக விலகி, கிடையுடன் $45°$ ஏற்றக் கோணத்தில் $40ms^{-1}$ இல் செல்கிறது. பந்திற்குக் கொடுக்கப்பட்ட கணத்தாக்கத்தின் பருமனைக் காண்க.

10. தீயணைக்கும் எஞ்சின் ஒன்று, ஏரி ஒன்றிலிருந்து நீரைப் பெற்று அதே மட்டத்தில் $80\,mm$ விட்டமுள்ள வட்டக்குழாய் மூலம், $30ms^{-1}$ கதியில் நீரை வெளியேற்றுகிறது. இந் நீர்த்தாரை நிலைக்குத்தான சுவர் ஒன்றைச் செங்குத்தாக அடிக்கிறது. நீர் சுவரில் இருந்து தெறிப்படையவில்லையெனின்,

(i) எஞ்சின் வலுவையும்

(ii) சுவரில் ஏற்படும் விசையையும் காண்க.

11. m திணிவுள்ள குண்டொன்று கிடையாக v வேகத்துடன் இயங்கி, குண்டின் திசையிலே சுயாதீனமாக இயங்கவல்ல M திணிவுடைய குற்றியொன்றினை அடித்து அதனுள் பதிந்துவிடுகிறது. இம் மோதுகையினால் ஏற்பட்ட இயக்க சக்தி

நட்டம் $\frac{1}{2}\frac{Mmv^2}{(M+m)}$ எனக் காட்டுக.

பின்னர், குற்றி அதே திசையில், அதே வேகத்துடனியங்கும் சம குண்டொன்றினால் தாக்கப்பட்டால் மேலதிக இயக்க சக்தி நட்டம்.

$$\frac{M^2mv^2}{2(M+2m)(M+m)}$$ எனக் காட்டுக.

5 (b) - நேரடி மொத்தல்

1. $6ms^{-1}$ உடன் இயங்கும் $2kg$ திணிவுடைய கோளம், அதேதிசையில் $4ms^{-1}$ உடன் இயங்கும் சம அளவான $3kg$ திணிவுடைய கோளம் ஒன்றுடன் மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{3}{4}$ எனின், மோதுகையின் பின் ஒவ்வொரு கோளத்தின் கதியையும், மோதுகையால் ஏற்பட்ட இயக்க சக்தி நட்டத்தையும் காண்க.

2. $16ms^{-1}$ உடன் இயங்கும் $10kg$ திணிவுடைய கோளம் ஒன்று, எதிர்த் திசையில் $4ms^{-1}$ உடன் இயங்கும் $5kg$ திணிவுடைய சம அளவான கோளமொன்றுடன் மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின், மோதுகையின் பின், ஒவ்வொரு கோளத்தின் கதியையும், மோதுகையால் ஏற்பட்ட கணத்தாக்கினையும் காண்க.

3. சம ஆரையும் $3m$, $2m$, m திணிவுகளையும் உடைய மூன்று பூரண மீள்தன்மைக்கோளங்கள் A, B, C ஓர் கிடையான தளத்தில் நேர் கோடொன்றில் உள்ளன. A ஆனது B ஐ நோக்கி u கதியுடன் எறியப்படுகிறது. A, B ஐ மோதிப் பின்னர் B, C ஐ மோதுகிறது. இரு மோதுகைகளினதும் பின்னர் A, B, C ஒவ்வொன்றினதும் கதிகளைக் காண்க. மேலும் மொத்தல்கள் ஏன் நடைபெறாது என்பதை விளக்குக.

4. ஒவ்வொன்றும் சம ஆரையும், சமதிணிவுமுடைய இரு பூரண மீளதன்மைக் கோளங்கள் எதிர்த்திசைகளில் இயங்கி, நேரடியாக மோதுகின்றன. அவற்றின் கதிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படும் எனக் காட்டுக.

5. m, m^1 திணிவும், சம ஆரையும் உடைய இரு கோளங்கள் நேரடியாக மோதுகின்றன. ஒருகோளத்திலிருந்து மற்றைய கோளத்திற்கு மாற்றப்பட்ட உந்தம் $\dfrac{mm^1(1+e)}{m+m^1}\times$ (மோதுகையின் முன் தொடர்புவேகம்) எனக் காட்டுக.

6. ஒவ்வொன்றும் சம ஆரையும், $3m$, $2m$, m திணிவும் உடைய A, B, C என்னும் மூன்று கோளங்கள் அவற்றின் மையங்கள் ஒரு நேர் கோட்டில் அமையுமாறு, இதே ஒழுங்கில் ஒப்பமான மேசை ஒன்றின் மீது ஓய்வில் உள்ளன. அவைகளுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ ஆகும். A ஆனது, B ஐ அடிக்குமாறு V கதியுடன் எறியப்படுகிறது. மூன்று மோதல்கள் மட்டுமே நிகழுமெனக்காட்டி, அவற்றின் இறுதி வேகங்கள் முறையே, $\frac{150}{128}V$, $\frac{57}{128}V$, $\frac{68}{128}V$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

7. m, m^1 திணிவும், சம ஆரையும் கொண்ட இரு ஒப்பமான கோளங்கள், நேரடியாக மோதுகின்றன. மோதுகைக்குச் சற்று முன் அவற்றின் தொடர்பு வேகம் v ஆகவும், மீளமைவுக் குணகம் e ஆகவும் இருப்பின் மொத்தலினால் இழக்கப்பட்ட இயக்கசக்தி $\dfrac{mm^1 v^2\left(1-e^2\right)}{2\left(m+m^2\right)}$ எனக் காட்டுக.

8. $2m$ திணிவுடைய கோளம் A, கதி $2u$ உடன் இயங்கி, அதே திசையில் கதி u உடன் இயங்கும் m திணிவுடைய கோளம் B உடன் மோதுகிறது. பின்னர் கோளம் B ஆனது, நிலைக்குத்தான ஒப்பமான சுவரொன்றினைச் செங்குத்தாக மோதுகிறது. A இற்கும் B இற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகவும், B இற்கும், சுவருக்குமிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் $\frac{3}{4}$ ஆகவுமிருப்பின், A இற்கும், B இற்குமிடையே மீண்டும் ஒரு மோதுகை நடைபெறும் எனக் காட்டுக.

9. $2m$ திணிவுடைய கோளம் A கிடைத்தளம் ஒன்றில், கதி u உடன் இயங்கி அதே ஆரையும், m திணிவும் உடைய ஓய்விலிருக்கும் ஒப்பமான கோளம் B உடன் நேரடியாக மோதுகின்றது. கோளங்களிற்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின், மோதுகையின் பின்னர் அவற்றின் கதிகளைக் காண்க.

பின்னர் கோளம் B, பூரண மீள்தன்மையுடைய, நிலைக்குத்துச் சுவருடன் மோதி மீண்டும் A உடன் நேரடியாக மோதுகின்றது. இப்பொழுது B யின் கதி $\frac{2}{9}(1+e)^2 u$ எனக் காட்டி, A யின் கதியைக் காண்க.

10. சம ஆரையும் சம திணிவும் கொண்ட மூன்று கோளங்கள் A, B, C ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது, நேர்கோடொன்றில் அதே ஒழுங்கில் ஒன்றிலிருந்து ஒன்று விலகி ஓய்விலுள்ளன. A, B ஐ நோக்கி V கதியுடன் நேரடியாக எறியப்படுகிறது. இவ்விரு கோளங்களுக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின் $(0<e<1)$ கோளம் C இயங்கத் தொடங்கியதும் ஒவ்வொரு கோளத்தினதும் வேகங்களைக் காண்க.
இரண்டாவது தடவையாக A, B உடன் மோதுமெனக் காண்க.

11. ஒவ்வொன்றும் $4m$ திணிவுடைய இரு சம கோளங்கள் B, C ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளன. m திணிவும் B, C என்பவற்றின் ஆரையையும் உடைய கோளம் A ஆனது B, C இன் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டின் வழியே V வேகத்துடன் இயங்கி B உடன் மோதுகிறது. பின்னர் B கோளம் C உடன் மோதுகிறது. முதலாவது மோதுகையினால் A ஓய்வடையுமெனின் A, B யிற்கிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் $\frac{1}{4}$ எனக் காட்டுக. B, C யிற்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின் இரண்டாவது மோதுகையின் பின் B, C இன் வேகங்களைக் காண்க. இரு மொத்தல்களினாலும் இழக்கப்பட்ட மொத்த இயக்க சக்தி $\dfrac{27mV^2}{64}$ எனக் காட்டுக.

12. சம ஆரையும் $m, \lambda m, \lambda^2 m$ திணிவுகளையும் கொண்ட மூன்று கோளங்கள் A, B, C என்பன கிடையான, நேரான தவாளிப்பு (groove) ஒன்றின் வழியே இயங்குவதற்கு சுயாதீனமுடையவை. இங்கு λ ஓர் ஒருமை. A யிற்கும் C யிற்குமிடையில் B உள்ளது. இந்த இரு கோளங்களிற்குமிடையேயான மோதுகை நேரடியானதும் மீளமைவுக்குணகம் e உம் ஆகும். தொடக்கத்தில் B உம் C உம் ஓய்விலுள்ளன. A ஆனது தவாளிப்பின் வழியே u கதியுடன் B ஐ நோக்கி எறியப்படுகிறது. முதலாவது மொத்தலின் பின் A, B இன் வேகங்கள் முறையே $\dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}u$, $\dfrac{1+e}{1+\lambda}u$ எனக் காட்டுக.
இரண்டாவது மொத்தலின் பின் B, C என்பவற்றின் வேகங்களைக் காண்க. $\lambda e<1$ எனத் தரப்படின், $e<\lambda$ எனின், மூன்றாவது மொத்தல் ஒன்று நிகழும் எனக் காட்டுக.

13. (a) V என்னும் கதியுடன் ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீது இயங்கும் m திணிவுடைய ஒரு கோளம், அதே ஆரையும் ஓய்விலுள்ளதுமான $2m$ திணிவுடைய கோளம் ஒன்றுடன் நேரடியாக மோதுகிறது. இரு கோளங்களுக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின், மோதுகையின் பின் இரு கோளங்களினதும் கதிகளைக் காண்க. இம் மொத்தலின் போது இயக்கசக்தியின் அரைப்பங்கு இழக்கப்பட்டால் e யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) நேர்கோடொன்றில் u கதியுடன் இயங்கும் துணிக்கை ஒன்றிற்கு அதன் இயக்கத்திசையில் I என்னும் கணத்தாக்கு ஒன்று கொடுக்கப்படுகிறது. இயக்க சக்தியின் அதிகரிப்பு $\dfrac{I(I+2mu)}{2m}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

14. 5 m திணிவுடைய சுத்தியல், வேகம் V உடன் கிடையாக இயங்கி, நிலையான m திணிவுடைய கிடையான ஆணி ஒன்றை அடிக்கிறது. சுத்தியலுக்கும் ஆணிக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $3/5$ ஆகும். ஆணியின் வேகம் யாது? ஆணி அடிக்கப்பட்டதும், அது உடனடியாக ஒப்பமான கிடை மேசை மீது சுயாதீனமாக இயங்கத்தக்க nm திணிவுடைய குற்றியொன்றினுள் ஊடுருவுகின்றது. ஊடுருவுதல் R பருமனுள்ள மாறா விசையொன்றினால் தடுக்கப்படுகிறது. ஆணி, குற்றியினுள் ஊடுருவியதும் இரண்டினதும் பொது வேகத்தைக் காண்க. ஆணி ஊடுருவிய நேரம். $\dfrac{4\,mnV}{3(n+1)R}$ எனக் காட்டுக

15. ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றின் மீது V கதியுடன் இயங்கும் m திணிவுடைய கோளம் A, அதே ஆரையும் λm திணிவுமுடைய ஓய்விலுள்ள கோளம் B உடன் நேரடியாக மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையிலான மீளமைவுக் குணகம் $2/3$ ஆகும். மொத்தலின் பின், A இனதும் B இனதும் கதிகளைக் காண்க. பின்னர் கோளம் B, நிலைக்குத்தான சுவரைச் செங்குத்தாக மோதிப் பின்னடிக்கிறது. B யிற்கும், சுவரிற்குமிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் $2/3$ ஆகும். A யிற்கும் B யிற்குமிடையே மீண்டும் மொத்தல் நிகழாதெனின் $\lambda \geq 19/6$ ஆகுமெனக் காட்டுக. $\lambda = 6$ எனின், A ஆனது B ஐ அடிக்கும்போது இழக்கப்பட்ட இயக்கசக்தி நட்டம் $\dfrac{5\,mV^2}{21}$ எனக் காட்டுக.

16. ஒப்பமான கிடைத் தரையின் மீது இயங்கும் ஒப்பமான ஒரு சிறிய கோளம், ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து d தூரத்தில் தரையின் மீது ஓய்விலுள்ள இதே போன்ற சர்வசமனான கோளம் ஒன்றுடன் மோதுகிறது. மொத்தலானது கோளங்களின் மையமிணைகோட்டின் வழியேயும், சுவருக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ளது. சம்பந்தப்பட்ட எல்லா மொத்தல்களிலும் மீளமைவுக்குணகம் e எனக் கொண்டு, கோளங்களுக்கிடையேயான இரண்டாவது மோதுகை, சுவரிலிருந்து $\dfrac{2de^2}{(1+e^2)}$ தூரத்தில் நிகழுமெனக் காட்டுக.

17. A, B, C என்பன சம ஆரையும் முறையே M, M, m திணிவுகளையுமுடைய மூன்று பூரண மீள்தன்மையுடைய கோளங்களாகும். ($M > m$) இக்கோளங்கள், அவற்றின் மையங்கள் ஒரே நேர்கோட்டிலிருக்குமாறும், C, A ற்கும் B இற்கும் இடையில் இருக்குமாறும் ஓய்விலுள்ளன. C, A ஐ நோக்கி மையமிணை கோட்டின் வழியே எறியப்படுகிறது. C, A யுடன் மோதியபின்னர் B யுடன் மோதுமெனக் காட்டுக. $M < (\sqrt{5}+2)\,m$ எனின், அது A யுடன் இரண்டாம்முறை மோதாது எனக் காட்டுக. இரண்டாவது மோதுகையின் பின், மூன்று கோளங்களினதும் இயக்கசக்திகளின் விகிதங்களைக் காண்க. சக்தி எதுவும் இழக்கப்படவில்லை என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

18. m, m^1 திணிவும், சமமான ஆரையும் உடைய இரு ஒப்பமான கோளங்கள் நேரடியாக மோதுகின்றன. மொத்தலின் போது கணத்தாக்கு I ஆகவும் அவற்றின் திணிவுமையத்தின் வேகம் u ஆகவும், திணிவுமையம் தொடர்பாக கூடிய கதியை உடைய கோளத்தின் வேகம் v ஆகவும் இருப்பின், இக் கோளத்தினால் இழக்கப்பட்ட இயக்க சக்தி $\dfrac{1}{2}\,I\left[2u+(1-e)\,v\right]$ என நிறுவுக.

19. கிடையாக அமைந்த வட்டமான தவாளிப்பு (groove) ஒன்றின் விட்டமொன்றின் அந்தங்களில் A, B என்னும் இரு சம கோளங்கள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A ஆனது தவாளிப்பின் வழியே எறியப்படுகிறது. t நேரத்தின் பின் A ஆனது B ஐ மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனில், இரண்டாவது மோதுகை $\dfrac{2t}{e}$ நேரத்தின் பின் நிகழும் எனக் காட்டுக.

20. நிலையான கிடைத்தளத்திற்கு மேல் h உயரத்திலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று விழ விடப்படுகிறது. தளத்திற்கும், துணிக்கைக்குமிடையேயான

மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். துணிக்கை தளத்தை அடித்து ஓயும் வரை அது கடந்த மொத்ததூரம் $\frac{1+e^2}{1-e^2}h$ எனவும், அதற்கான நேரம் $\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ எனவும் காட்டுக.

21. A, B, C என்ற சீரான கோளவடிவ, ஒரே ஆரையுள்ள, பிலியட் பந்துகளின் திணிவுகள் முறையே m_1, m_2, m_3 ஆகும். அவை மையங்கள் ஒரே நேர்வரையிலும் A இற்கும் C இற்குமிடையில் B இருக்குமாறும் ஒப்பக்கிடை பிலியட் மேசையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. பந்து A ஆனது ABC என்ற திசையிலே u என்ற வேகத்துடன் நேரடியாக B உடன் மோதுமாறு எறியப்படுகிறது. பின்னர் பந்து B, C ஐ அடிக்கிறது. e, e^1 என்பன முறையே A, B இற்கும் B, C இற்கும் இடையிலான மீளமைவுக் குணகங்களாயின், இம்மோதல்களின் பின் A யினதும், B யினதும் வேகங்களைக் காண்க.

$m_1 m_3 \left(I + e^1 + ee^1\right) < em_2 \left(m_1 + m_2 + m_3\right)$ எனின் அப்பந்துகளிடையே வேறு மோதல்கள் நடைபெறாதெனவும் நிறுவுக.

22. ஒரு நீளமான செவ்வட்ட உருளை வடிவுடைய பொட்பாண்டம் (மூடியற்ற) l நீளத்தையும் M திணிவையுமுடையது. அதன் மூடிய முனை மேன்முகமாக இருக்க ஒரு மீள்தன்மையின்றிய கிடை நிலத்தின் மேல் அது கவிழ்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வுருளையின் கீழ்முனை மத்தியிலிருந்து $u\left(> \sqrt{2gl}\right)$ என்னும் வேகத்துடன் நிலைக்குத்துத் திசையில் m திணிவுடைய ஒரு சன்னம் பாண்டத்தினுள் சுடப்பட்டது. பாண்டத்திற்கும் சன்னத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின், பாண்டம் நிலத்தை விட்டுக் கிளம்பும் வேகத்தைக் காண்க.

பாண்டம் தொடர்பாக சன்னத்தின் இயக்கத்தை மேற்கொண்டு அல்லது வேறுவழியாக

$$u^2 = 2gl\left(1 + \frac{1+\frac{M}{m}}{4e(1+e)}\right)$$ எனின்,

பாத்திரமும் சன்னமும் ஒரே கணத்தில் மீண்டும் நிலத்தை அடையும் என நிறுவுக.

23. நீண்ட, ஒப்பமான கிடைமேசையொன்றின் மேல் ஒரே கோட்டிலுள்ள மூன்று புள்ளிகளில் A, B, C என்னும் மூன்று சிறிய சமமான கோளங்கள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. B, C என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரம் a மீற்றர். கோளம் A ஆனது u மீற்றர் / செக்கன் என்னும் வேகத்துடன் ABC யின் திசையில் எறியப்படுகிறது. கோளம் A கோளம் B ஐ அடிக்கிறது. (முதலாம் மோதுகை). பின்னர் கோளம் B, கோளம் C ஐ அடிக்கிறது. (இரண்டாம் மோதுகை). கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆயின் இரண்டாம் மோதுகை நிகழ்ந்த உடனே அம்மூன்று கோளங்களினதும் கதிகளைக் காண்க.

இரண்டாம் மோதுகை நிகழ்ந்து $\frac{8ae}{\left[(1+e)\,(1+e)^2\right]u}$

செக்கன்களுக்குப் பின் A ஆனது B ஐ அடிக்குமெனக் காட்டுக.

24. முறையே m_1, m_2, m_3 திணிவுள்ள A, B, C எனும் மூன்று கோளங்கள் ஓர் அழுத்தமான கிடை மேசை மேல் ஒரு நேர் கோட்டில் ஓய்விலிருக்கின்றன. A ஆனது u வேகத்துடன் B ஐ நோக்கி மேசைவழியே எறியப்படுகிறது. மோதுகையினால் A ஓய்விற்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது. B, C ஐ மோதுகின்றது. இதனால் B யும் ஓய்விற்குக் கொண்டு வரப்படுகிறது. C ஆனது ஒரு நிலைக்குத்தான சுவரைச் செங்குத்தாக மோதி, பின்னடிப்பால் B ஐ மோதி B, A ஐ மோதி மீண்டும் இயங்குகின்றன. யாதுமிரு கோளங்களுக்கும், C இற்கும் சுவருக்குமிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் e எனின் $m_1 = em_2 = e^2 m_3$ எனக் காட்டுக. இறுதியாக எல்லாம் இயங்கும்போது, துணிக்கைகளின் வேகங்களைக் காண்க.

25. மீள்தன்மை உடல்களின் மோதுகைக்குரிய நியூட்டனின் மீளமைவு விதியைத் தெளிவாகக் கூறுக.

ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய, இரு சிறிய கோளங்கள் வட்ட வடிவிலுள்ள மெல்லிய ஒப்பமான குழாயினுள்ளே அசைவதற்கு சுயாதீனமுடையவை. M திணிவுள்ள அக் குழாய் அதன் தளம் கிடையாக இருக்கும்படி ஒப்பமான தரையில் ஓய்விலுள்ளது. கோளங்கள் குழாயின் விட்டமொன்றின் முனைகளில் நிறுத்தப்பட்டு u என்னும் ஒரே வேகத்துடன் ஒன்றையொன்று நோக்கி எறியப்பட்டன. உந்தக்காப்பு, சக்திச் சமன்பாட்டின் மூலமோ அல்லது வேறு வகையாலோ கோளங்கள் மட்டு மட்டாக மோதவிருக்கும் போது, குழாயின் வேகத்தைக் காண்க. கோளங்களுக்குடையேயான தொடர்பு அணுகு வேகம்

$2u\sqrt{\frac{M}{M+2m}}$ எனவும் காட்டுக.

26. $2l$ நீளமும் M திணிவுமுள்ள ஒரு நேர்க்குழாய் AB இன் குறுக்குவெட்டு ஒரு சிறிய வட்டமாகும். அதனுடைய அச்சு கிடையாக இருக்க, அது ஓர் அழுத்தமான மேசையின் மேல் ஓய்விலிருக்கிறது. m திணிவுள்ள, ஓர் அழுத்தமான மாபிள் அக் குழாய்க்குள் பட்டும் படாமலும் அசையக்கூடியதாக உள்ளது. அந்த மாபிள் AB இன் நடுப்புள்ளியாகிய O வில் வைக்கப்பட்டு, அக்குழாயின் A, B என்ற இரு அந்தங்களும் வட்டவடிவமான மூடிகளினால் மூடப்பட்டன. மூடி A இற்கு AB இன் திசையில் I என்னும் கணத்தாக்கு கொடுக்கப்பட்டது. குழாய் தொடர்பாக மாபிளின் இயக்கத்தைக் கொண்டு அல்லது வேறுவழியாக, தொகுதியினது பின் நடைபெறும் இயக்கத்தில், மாபிள் மூடி A ஐ அடித்தபின் குழாயின் மையம் O விற்குத் திரும்பிவர எடுக்கும் மொத்த நேரம் $\frac{lM}{I}\left(1+\frac{1}{e}\right)$ எனக் காட்டுக.

இங்கு e என்பது மாபிளுக்கும், மூடிக்குமிடையிலான மீளமைவுக்குணகம். மாபிள் O விலிருக்கும் அதே கணத்தில் அக்குழாய் அதனுடைய முன்னையை நிலையிலிருந்து $\left[\left(1+\frac{1}{e}\right) \Big/ \left(1+\frac{m}{M}\right)\right] l$ தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக.

27. M திணிவுடைய ஒப்பமான நேரிய குழாயொன்று, இரு முனைகளும் மூடப்பட்டு ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீதுள்ளது. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று ஒரு முனையிலிருந்து, மறுமுனையை நோக்கி கதி u உடன் எறியப்படுகிறது. துணிக்கை இருமுனைகளுடனும் தொடர்ச்சியாக மாறி மாறி மோதுகிறது. துணிக்கைக்கும் குழாய்க்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். $(2n-1)$ மோதுகைகள், $2n$ மோதுகைகளின் பின்னர் குழாயின் வேகம் முறையே

$$\frac{mu\left(1+e^{2n-1}\right)}{M+m}, \quad \frac{mu\left(1-e^{2n}\right)}{M+m}$$ எனக் காட்டுக.

28. கிடையுடன் $\tan^{-1}\frac{5}{12}$ சாய்வுள்ள சாய்தளமொன்றின் உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இழையின் நுனிகளுக்கு, ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டு A சாய்தளத்தின் மீதும், B சுயாதீனமாகத் தொங்கிய வண்ணமும் உள்ளன. இழையானது அதியுயர் சரிவுக் கோடொன்றின் வழியேயுள்ள நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. A யிற்கும் தளத்திற்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆகும். B ஆனது h தூரம் இறங்கியதும் இழை அறுகிறது. துணிக்கை A ஆனது மேலும் d தூரம் தளத்தில் மேல்நோக்கி

அசைந்த பின் ஓய்வுக்கு வருகிறது. நிலத்தை அடிப்பதற்கு B மேலும் h தூரம் விழுந்து, மீண்டும் நிலத்திலிருந்து h தூரம் மேலெழுகின்றது.

(a) இழை அறும்போது துணிக்கைகளின் கதி
(b) d இன் பெறுமானம் (h இல்)
(c) துணிக்கை, நிலத்தை அடிக்கும் போது ஏற்படும் கணத்தாக்கு
(d) துணிக்கை B இற்கும், நிலத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் என்பவற்றைக் காண்க.

29. வடகிழக்குத் திசையிலே செக்கனுக்கு $5\sqrt{2}$ மீற்றர் கதியிற் கிடையாகச் செல்லும் $200g$ திணிவுள்ள பந்து ஒன்றின் இயக்கமானது, மேற்குக் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ தெற்கான திசையிலே செக்கனுக்கு $\frac{65}{16}$ மீற்றர் கதியில், துடுப்பொன்றின் அடியினால் மாற்றியமைக்கப்படுகிறது. மேற்கிற்கு திசையிலும் தெற்குத் திசையிலும், பந்தின் வேகமாற்றக் கூறுகளைக் காண்க. பந்துக்கும், துடுப்புக்குமிடையிலான தொடுகை $\frac{1}{64}$ செக்கன் நேரம் நிலைத்திருந்தால், துடுப்பினால் பந்தின் மீது செலுத்தப்பட்ட சராசரி விசையானது, மேற்கிற்கு கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ தெற்கான திசையில் 14 நியூற்றன் எனக் காட்டுக.

30. நிலைக்குத்தான இரு சமாந்தர சுவர்கள் 12 மீற்றர் இடைத்தூரத்திலுள்ளன. சுவர்களுக்கிடையில் நிலத்தில் P என்னும் ஒரு புள்ளி, ஒரு சுவரிலிருந்து $3m$ தூரத்திலும் Q என்னும் இன்னொரு புள்ளி மற்றைய சுவரிலிருந்து $4m$ தூரத்திலும் உள்ளது. கோடு PQ சுவர்களுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. P யிலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிட்ட உள்ள சுவரை நோக்கி நேரடியாக $1ms^{-1}$ உடன் எறியப்படும். அதே வேளையில் Q விலிருந்து இரண்டாவது துணிக்கை, தனக்கு அண்மையிலுள்ள சுவரை நோக்கி நேரடியாக $2ms^{-1}$ உடன் எறியப்படுகிறது. நிலம் ஒப்பமானதாகவும், துணிக்கைகளுக்கும் சுவருக்கும், இரு துணிக்கைகளுக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{3}{4}$ ஆகவும் உள்ளது. துணிக்கைகள் X என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. மோதுகை காரணமாக முதலாவது துணிக்கை ஓய்வுக்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது. X இலிருந்து மிகக் கிட்ட உள்ள சுவரின் தூரத்தையும் துணிக்கைகளின் திணிவுகளுக்கிடையேயான விகிதத்தையும் காண்க. துணிக்கைகளுக்கிடையே இரண்டாவது மோதுகை நடைபெறுவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

5 (c) – சரிவான மொத்தல்

1. $10ms^{-1}$ கதியில் இயங்கும் 2 kg திணிவுள்ளதொரு கோளம் ஓய்விலுள்ள $4kg$ திணிவுள்ள கோளம் ஒன்றினை சரிவாக மோதுகிறது. மோதும் கணத்தில் முதற்கோளத்தின் இயக்கத் திசை, மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் 60° ஐ அமைக்கிறது. மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின் மொத்தலின் பின் கோளங்களின் வேகங்களைக் காண்க.

2. $6ms^{-1}$ இல் இயங்கும் $8kg$ திணிவுள்ளதொரு கோளம் ஓய்விலிருக்கும் $4Kg$ திணிவுள்ள கோளத்தின் மீது சரிவாக மோதும் போது முதற் கோளத்தின் இயக்கத்திசை, மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் 30° அமைகின்றது. மீளமைவுக்குணகம் $\frac{3}{4}$ என்றால் மொத்தலின் பின் கோளங்களின் வேகங்களைக் காண்க.

3. $8ms^{-1}$ இல் இயங்கும் $2kg$ திணிவுள்ளதொரு கோளம், $2ms^{-1}$ இல் இயங்கும் $4kg$ திணிவுள்ளதொரு கோளத்துடன் மோதுகிறது. மொத்தலின் முன்னர் அவற்றின் வேகங்கள், மோதும் கணத்து மையக்கோட்டுடன் 30° கோணத்தை அமைக்கும் ஒத்த சமாந்தர திசைகளிலிருப்பின், மீளமைவுக்குணகம் $\frac{1}{3}$ எனக் கொண்டு, மொத்தலின் பின்னருள்ள ஒவ்வொரு கோளத்தினதும் வேகத்தைக் காண்க.

4. வினா 3 இல் கோளங்கள் ஒவ்வாத சமாந்தர திசைகளில் இயங்கினால் மொத்தலின் பின்னர் அவற்றின் வேகங்களைக் காண்க.

5. சமகதி u உடன் இயங்கும், சம பந்துகள் இரண்டு மோதும் கணத்தில் அவற்றின் இயக்கத்திசைகள் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் $30^\circ, 60^\circ$ கோணங்களை அமைக்கின்றன.

   (a) $e = 1$ எனின்

   (b) $e = \frac{1}{2}$ எனின் மோதுகையின் பின்னருள்ள வேகங்களைக் காண்க.

6. m திணிவுள்ளதொரு கோளம், ஓய்விலிருக்கும் சம ஆரையும், M திணிவுள்ளதுமான கோளத்துடன் மோதுகிறது. $m = eM$ எனின் மோதுகையின் பின்னருள்ள கோளங்களின் இயக்கத் திசைகள் செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

7. ஒரு பூரண மீள்தன்மைக் கோளம், ஓய்விலுள்ள அதே ஆரையுடைய இன்னொரு கோளத்துடன் மோதுகிறது. மொத்தலின் பின்னர் அவற்றின் இயக்கத் திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயின் அவற்றின் திணிவுகள் சமம் எனக் காட்டுக.

8. U கதியுடன் இயங்கும் ஓர் ஒப்பமான கோளம், சமதிணிவும், சம ஆரையும் கொண்ட ஓய்விலிருக்கும் கோளம் B ஐ சரிவாக மோதுகிறது. மோதும் கணத்தில் A இன் இயக்கத்திசை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் α கோணத்தை அமைக்கிறது. மீளமைவுக் குணகம் e எனின், மோதுகையின் பின் A யினதும் B யினதும் வேகங்களின் பருமன்களையும், திசைகளையும் காண்க.

   $\tan^2 \alpha = \frac{8}{27}$ எனவும், $e = \frac{2}{3}$ எனவும் தரப்படின்,

   (a) மொத்தலின் காரணமாக A இன் கதி அரைப்பங்காகிறது எனவும்,

   (b) A இன் இயக்கத்திசை $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$ என்னும் கோணத்தினூடாகத் திருப்பப்படுகிறதெனவும் காட்டுக.

9. ஒப்பமான கோளம் A, சமதிணிவுடைய இதேபோன்ற ஓய்விலிருக்கும் இன்னொரு கோளம் B ஐ சரிவாக மோதுகிறது. மோதுகைக்குச் சற்று முன்னும், பின்னும் A இன் இயக்கத்திசை, மோதும் கணத்தில் கோளங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் முறையே α, β கோணங்களை அமைக்கிறது. கோளங்களுக் கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின்,

   $\cot \beta = \frac{1}{2}(1 - e)\cot \alpha$ எனக் காட்டுக.

   A இன் இயக்கத்திசை திருப்பப்படும் கோணத்தின் தாஞ்சனை α, e இன் உறுப்புக்களில் காண்க. α மாறும் போது $\tan^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - e)$ ஆக இருக்கும் போது இக்கோணம் உயர்வாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

10. வேகம் u உடன் இயங்கும் M திணிவுள்ளதொரு கோளம், ஓய்விலுள்ள M^1 திணிவுள்ள இன்னொரு கோளத்தின் மீது சரிவாக மோதுகிறது. மோதும் கணத்தில் u இன் திசை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் கோணம் α ஐ ஆக்குமாறு

மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். மோதுகையால் M இன் இயக்கத்திசை β கோணத்தினூடாகத் திருப்பப்படின்,

$$\tan\beta = \frac{-M^1\,(1+e)\tan\alpha}{\left(M - eM^1\right) + \left(M + M^1\right)\tan^2\alpha}$$ எனக் காட்டுக.

11. 3 M திணிவுடைய ஒப்பமான கோளம் A, ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையின் மேல் ஓய்விலுள்ளது. இதை சம ஆரையும் M திணிவும் கொண்ட B எனும் ஒப்பமான கோளம் ஒன்று u வேகத்துடன் மேசை வழியே இயங்கி சரிவாக மோதுகிறது. மோதும் கணத்தில் B யின் இயக்கத்திசை, மையமிணை கோட்டுடன் α கோணத்தை அமைக்கிறது. மோதுகையின் பின் B யின் இயக்கத்திசை, ஆரம்பத்திசைக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. கோளங்களிற்கிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் e, $\frac{1}{3}$ இலும் பெரிதாக இருக்கவேண்டுமென நிறுவி.

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \tan\alpha \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனத் தரப்படின் e இன் பெறுமானத்தையும், மோதுகையின் பின் A இன் கதியையும் காண்க.

12. ஒப்பமான கிடை மேசை வழியே இயங்கும் ஒப்பமான பந்து ஒன்று அம்மேசை மீது ஓய்விலிருக்கும் அதே ஆரையும், திணிவும் கொண்ட பந்து ஒன்றினைச் சரிவாக மோதுகிறது. மோதும் கணத்தில் இயங்கும் பந்தின் திசை, மையமிணை கோட்டுடன் 30° ஐ அமைக்கின்றது. பந்துகளிற்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின், முதலாவது கோளத்தின் இயககத்திசை θ கோணத்தினூடு திருப்பப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. இங்கு $\tan\theta = \frac{(1+e)\sqrt{3}}{5-3e}$

13. km திணிவுடைய ($k > 1$) ஒப்பமான கோளம் S, ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளது. S இன் அதே ஆரையையும் m திணிவுமுடைய இரண்டாவது கோளம் S ஐ நோக்கி இயங்கி அதனைச் சரிவாக மோதுகிறது. மோதுகையின் பின் இரு கோளங்களினதும் இயக்கத்திசைகள் செங்குத்தாக இருப்பின், கோளங்களிற்கிடையேயான மீளமைவுககுணகம் $\frac{1}{k}$ என நிறுவுக.

$k = 2$ எனவும், மொத்தல் காரணமாக இழக்கப்பட்ட இயக்க சக்தி, ஆரம்ப இயக்க சக்தியின் கால் பங்கு எனவும் தரப்படின், தொடக்க இயக்கத் திசை மையமிணை கோட்டுடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

14. m திணிவுடைய ஒப்பமான கோளம் A, u கதியுடன் இயங்கி $2m$ திணிவுமுடைய நிலையாகவுள்ள ஒப்பமான கோளம் B உடன் மோதுகிறது. மீளமைவுக்குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆகும். மோதும் கணத்தில் A இன் இயக்கத்திசை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் θ கோணத்தை அமைக்கின்றது. மோதுகையின் பின் உடனடியாக A இன் இயக்கத் திசை மையமிணை கோட்டுடன் ϕ கோணத்தை அமைக்கின்றது. B இயங்கத் தொடங்கும் கதியைக் காண்க.

$\tan\phi = 9\tan\theta$ எனக் காட்டுக.

$\tan\theta = \frac{1}{3}$ ஆக இருக்கும் போது, A யின் இயக்கத் திசையிலான விலகல் மிகப் பெரிதாக இருக்கும் எனக் காட்டி, இம் மிகப் பெரிய கோணத்தின் தான்சன் $\frac{4}{3}$ எனவும் காட்டுக.

15. செவ்வக வடிவப் பிலியட் மேசை ஒன்று a நீளமும் b அகலமும் உடையது. $(a > b)$ பந்து மேசையின் எந்தப் பக்கத்தை அடிக்கும் போதும் மேசைக்கும் பந்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் e ஆகும். ஒப்பமான சிறிய பந்து ஒன்று மேசையின் ஒரு பக்கத்தினை அடித்து, ஆரம்ப இயக்கத் திசைக்குச் செங்கோணத்தில் செல்கிறது. இரு இயக்கத் திசைகளும் மொத்தல் நடைபெற்ற பக்கத்துடன் அமைக்கும் கூர்ங்கோணங்கள் $\cot^{-1}\left(\sqrt{e}\right)$, $\tan^{-1}\left(\sqrt{e}\right)$ முறையே எனக் காட்டுக.

ஒப்பமான சிறிய பந்து ஒன்று, அகலப் பக்கத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து மேசை வழியே எறியப்படுகிறது. அப் பந்து ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் அடித்து செவ்வகவடிவமான பாதை வழியே சென்று மீண்டும் A இற்கு வருகிறது. புள்ளி A, அப்பக்கத்தினை $\left(a\sqrt{e} - be\right) : \left(b - a\sqrt{e}\right)$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

16. ஒரு ஒப்பமான நிலைக்குத்தான சுவர்கள், ஒப்பமான கிடைத் தரை ஒன்றில் கூர்ங்கோணம் θ வில் இடைவெட்டுகின்றன. தரையிலுள்ள ஒரு துணிக்கை,

கிடையாக ஒரு சுவருக்குச் செங்குத்தான திசையில், அச்சுவரில் இருந்து விலகி எறியப்படுகிறது. துணிக்கை ஒவ்வொரு சுவருடனும் ஒரு முறை மோதிய பின், துணிக்கை முதலில் அடித்த சுவரிற்குச் சமாந்தரமான திசையில் இயங்குகிறது. துணிக்கைக்கும், ஒவ்வொரு சுவரிற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும்

$(1 + 2e)\ tan^2\ \theta = e^2$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கை இரண்டாவது சுவரை விட்டுச் செல்லும் திசை முதலாவது சுவரிற்குச் சமாந்தரமாக இருப்பதற்கு θ, 30° இலும் கூடுதலாக இருக்கமுடியாது எனக் காட்டுக.

17. பாதை ஒன்று, ஒப்பமான கிடைத் தரையையும் சமாந்தரமான, நிலைக்குத்தான இரு நீண்ட சுவர்களையும் கொண்டது. இரு சுவர்களும் தரையை முறையே AB, DC என்ற கோடுகளின் வழியே சந்திக்கின்றது. அவற்றின் இடைத்தூரம் a ஆகும். ஒரு சிறிய கோளம் A இலிருந்து AB யுடன் θ கூர்ங்கோணத்தை ஆக்கும் திசையில் DC யிலுள்ள ஒரு புள்ளி அடிக்குமாறு கிடையாக எறியப்படுகிறது. $2n$ ஆவது மோதுகையில் கோளம், AB ஐ B யில் அடிக்கின்றது.

நீளம் AB, $\dfrac{a\left(1 - e^{2n}\right)\ cot\ \theta}{e^{2n-1}\ (1 - e)}$ எனக் காட்டுக.

இங்கு e, கோளத்திற்கும் ஒவ்வொரு சுவரிற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் ஆகும். எறியற் கதி u எனின், A யிலிருந்து B யிற்கு வர எடுத்த நேரம் யாது?

18. ஒப்பமான ஒரு வட்டத்தட்டு ஒன்று, கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இத்தட்டிற்கு அதன் ஓரத்தைச் சுற்றி நிலைக்குத்தான விளிம்பு உண்டு. அதன் விளிம்பின் உட்புறத்திலுள்ள புள்ளி A யிலிருந்து தட்டின் மேற்பரப்பு வழியே துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. முதல் இரு மோதுகைகளும் விளிம்பிலுள்ள B, C என்னும் புள்ளிகளில் நடைபெறுகின்றன. இங்கு வில் AC தட்டின் மையத்தில் அமைக்கும் கோணம் 90° ஆயும், புள்ளி B வில் AC யில் இருக்குமாறும் அமைந்துள்ளது. விளிம்புடனான கணத்தாக்குகள் கிடைத்திசையில் அமைந்தன எனவும், மீளமைவுக்குணகம் $2/3$ எனவும் கொண்டு எறியற் திசையானது, A இனூடாக விட்டத்துடன் $tan^{-1}\ 2$ எனும் கோணத்தை அமைக்கின்றதெனக் காட்டுக.
AB, BC என்பவற்றைத் துணிக்கை கடக்க எடுத்த நேரங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

19. A, B என்னும் இரு ஒப்பமான கோளங்கள், சம ஆரையையும் முறையே m, km திணிவுகளையும் கொண்டுள்ளன. கோளம் B ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மேல் ஓய்விலுள்ளது. கோளம் A, கோளம் B ஐ நோக்கி u கதியுடன் எறியப்படுகிறது. மோதும் கணத்தில் u இன் திசையானது மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் 60° ஐ அமைக்கின்றது. மீளமைவுக் குணகம் $\dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

மோதுகையின் பின் B இன் கதி $\dfrac{3u}{4\,(k + 1)}$ எனக் காட்டி, A இன் கதியைக் காண்க.

மோதுகையின் பின் A யின் இயக்கத்திசையானது B இன் இயக்கத் திசையுடன் $tan^{-1}\left(2\sqrt{3}\right)$ கோணத்தை அமைக்குமெனின், k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மோதுகையால் ஏற்பட்ட இயக்கசக்தி நட்டம் $\dfrac{1}{32}\ mu^2$ எனவும் காட்டுக.

20. சம ஆரையும் m_1, m_2 திணிவுமுடைய இரு கோளங்கள் ஒப்பமான ஒரு கிடைத்தரையின் மேல் ஓய்விலுள்ளன. m_1 திணிவுடைய கோளம் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றிற்குச் சமாந்தரமாக m_2 ஐ மோதுவதற்காக எறியப்படுகிறது. மோதுகையின் பின் m_2 ஆனது, சுவருடன் α கோணத்தில் சுவரை அடிக்கிறது. m_1, m_2 இற்கிடையேயும் m_2 இற்கும், சுவருக்குமிடையேயுமான மீளமைவுக்குணகம் e ஆகும். கோளங்களின் இறுதிவேகங்கள் சமாந்தரமானவையெனின்,

$m_2\ (1 + e)^2\ cos^2\ \alpha = (m_1 + m_2)\ e$ எனக் காட்டுக.

21. M திணிவுடைய ஒப்பமான அரைக்கோளமொன்று ஓர் ஒப்பக் கிடைமேசை மீது தன் தளமுகம் மேசையைத் தொட்ட வண்ணம் ஓய்விலுள்ளது. m திணிவுடைய கோளம் ஒன்று நிலைக்குத்தாக அரைக் கோளத்தின் மீது விழவிடப்படுகிறது. மோதும் கணத்தில் மையங்களை இணைக்கும் கோடு நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தை ஆக்குகிறது. மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் கோளத்தின் வேகம் u ஆகும். கோளங்களுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனக் கொண்டு மோதுகையின் பின்னர் கோளங்களின் வேகங்களைக் காண்பதற்கு சமன்பாடுகளை எழுதுக.

$\alpha = 45^\circ$ ஆகவும் $2\ M = em$ ஆகவுமிருப்பின் மோதுகையின் பின் அரைக்கோளத்தின் கதி u ஆகும். எனவும் காட்டுக.

22. இரு சம பந்துகள் ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசையில் ஒன்றையொன்று தொட்ட வண்ணம் உள்ளன. மூன்றாவது சம பந்தொன்று அவற்றின் பொதுத் தொடலி வழியே இயங்கி அவற்றுடன் ஒரே நேரத்தில் மோதுகிறது. ஒவ்வொரு கோளங்களுக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனில், மோதுகையினால் ஏற்பட்ட இயக்க சக்தி நட்டம். ஆரம்ப இயக்கசக்தியின் $\frac{3}{5}\left(1 - e^2\right)$ எனக் காட்டுக.

23. M திணிவும், α சரிவுமுள்ள ஒப்பமான சாய்தளம், அதன் ஓரத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்திலே சுயாதீனமாக இயங்கக்கூடியது. m திணிவுள்ளதொரு ஒப்பமான கோளம் அதன் மீது u வேகத்துடன் விழுகின்றது. கோளம் மோதிப் பிரியும் திசை கிடையுடன் ஆக்கும் θ கோணம் எனக் காட்டுக. இங்கு

$$\tan\theta = \frac{(M+m)\sin^2\alpha - e\,M\cos^2\alpha}{M(1+e)\sin\alpha\ \cos\alpha}$$

$e = 0$ எனில் மொத்தல் காரணமான இயக்க சக்தி நட்டம்

$$\frac{Mmu^2\cos^2\alpha}{2\left(M + m\sin^2\alpha\right)}$$ எனவும் காட்டுக.

24. ஒப்பக் கிடைத்தளதிலே ஓய்விலிருக்கும் M திணிவுடைய ஒப்பக் கோளமொன்று அதே தளத்தின் V என்னும் வேகத்துடனியங்கும் வேறோர் ஒத்த ஆரையுடைய ஒப்பக் கோளத்தினால் சாடப்பட்டது. இரண்டாவது கோளம் m திணிவுடையது. மோதும் கணத்திலே கோளத்தின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு v இன் திசையுடன் ϕ கோணத்தை அமைக்கிறது. மீளமைவுக்குணகம் e ஆகும். இயங்கும் கோளம் செங்கோணத்தினூடாக திருப்பப்படுமாயின்

$$\tan^2\phi = \frac{e\ M - m}{M + m}$$ எனக் காட்டுக.

மோதுகையால் இழந்த இயக்க பண்புச் சக்தியைக் கணிக்க.

25. m திணிவுடைய ஒப்பமான A என்னும் கோளம், அதே ஆரையும் ஆனால் M திணிவுடைய ஒப்பமான நிலையான B எனும் கோளத்தை V எனும் வேகத்துடன்

சாடுகிறது. A இன் இயக்கத்திசை மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் θ எனும் கோணத்தை ஆக்குகிறது. மீளமைவுக்குணகம் e ஆகவும், மோதலுக்குப் பின் A இன் இயக்கத்திசை, மோதும் கணத்திலுள்ள மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் ϕ கோணத்தையும் ஆக்கினால் $\frac{\tan\phi}{\tan\theta}$ ஐ $e\ m$, M என்பவற்றில் எழுதுக. மோதுகையால் இழக்கப்பட்ட இயக்கபண்புசக்தி

$$\frac{Mm\left(1 - e^2\right)V^2\cos^2\theta}{2(M+m)}$$ எனக் காட்டுக.

26. A, B, C, D என்பன ஒப்பமான அடியும், சுவர்களுமுடைய கூடத்தின் செவ்வகத்தளத்தினுச்சிகளாகும். அதன் பக்கங்களின் நீளங்கள் $AB = DC = 10m$ ஆகவும், $BC = AD = 8m$ ஆகவும், உள்ளன. O என்பது AB இல் A இலிருந்து $\frac{2}{3}m$ தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். O இலிருந்து சிறியகோளவடிவான துணிக்கையொன்று, நீட்டப்பட்ட AO உடன் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும் திசையிலே, $13\frac{1}{3}\ ms^{-1}$ எனும் கிடைவேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. இத்துணிக்கை BC, CD, DA, AB என்பவற்றைக் கொண்டுள்ள சுவர்களைத் தொடர்ச்சியாக X, Y, Z, P இல் அடிக்குமாயின் OX, ZY இற்குச் சமாந்தரமாகு மென்றும் XY, PZ இற்குச் சமாந்தரமாகுமென்றும் நிறுவுக. மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆயின், துணிக்கை O விலிருநது P இற்கு வர எடுத்த நேரம் 3 செக்கன்கள் எனக் காட்டுக

27. ஒரு மீளமைவுப் பொருள், நிலைத்த ஒப்பமான தளத்தைச் சரிவாக அடிக்கிறது. மோதுகைக்கு முன்னும், பின்னும் இயக்கத்தின் திசை தளத்துடன் அமைக்கும் சாய்வுகள் முறையே α, β எனின் $\tan\beta = e\tan\alpha$ எனக் காட்டுக. இங்கு e மீளமைவுக்குணகம்.

ஒரு கிடையான வட்டத்திற்கு அதன் ஓரத்தைச் சுற்றி நிலைக்குத்தான விளிம்பு உண்டு. தட்டின் வழியே அதன் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அப்புள்ளியிலுள்ள ஆரையுடன் α என்னும் கோணத்தை ஆக்கும்படி ஓர்

ஒப்பமான சிறியகோளம் எறியப்படுகிறது. அது இரண்டு மோதுகைகளின் பின்னர் ஆரம்பப்புள்ளிக்கு வருமாயின், $\tan^2 \alpha = \dfrac{e^3}{1 + e + e^2}$ என நிறுவுக.

28. A, B, C என்னும் மையங்களையுடைய மூன்று அழுத்தமான சீரான சமமான பில்லியட் பந்துகள், ஓர் அழுத்தமான கிடைமேசையிலுள்ளன. A, B என்னும் பந்துகள் மிகவும் கிட்ட உள்ளன. கோணம் $ABC = \pi - \alpha \left(\alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

C என்ற பந்து திசை CB இலே u என்னும் வேகத்துடன் வீசப்படுகிறது. அது பந்து B ஐ அடிக்க, B ஆனது அதன்பின் A ஐ அடிக்கிறது. பந்துகளிற்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். ($0 < e < 1$). இம் மோதல்களுக்குப் பின்னர் B யினதும் C யினதும் வேகங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\alpha \geq \sin^{-1} \dfrac{(1 - e)}{1 + e}$ எனின், அடுத்தடுத்து விரைந்து நிகழும் மோதல்கள் இரண்டேயிரண்டுதான் எனக் காட்டுக.

29. ஒப்பமான பிலியட்டுப் பந்தொன்று $a, \lambda a$ $(\lambda < 1)$ எனும் பக்கங்களையுடைய ஒரு செவ்வகவடிவ பிலியட்டு மேசைமீது $c, \mu c.$ $(\mu < 1)$ எனும் பக்கங்களை யுடைய செவ்வகமொன்றை வரைகின்றதெனில், பந்துக்கும் மேசையின் பக்கங்களுக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\left(\dfrac{\lambda - \mu}{1 - \lambda\mu}\right)^2$ எனக் காட்டுக.

30. மீள்சக்தி மோதுகையை வரையறுக்க.

m எனும் திணிவும், α எனும் ஆரையும் கொண்ட A எனும் உதைபந் தொன்று ஒப்பமான கிடைநிலத்தில் ஓய்விலுள்ளது. அதே திணிவு m உம் ஆனால் $(b < a)$ எனும் ஆரையும் கொண்ட இன்னொரு பந்து, நிலத்திலே u எனும் கிடைவேகத்துடன் சென்று உதைபந்து A ஐ அடிக்கிறது. இருபந்துகளின் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடும், காவி u உம் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளன. மோதலானது மீள்சக்தியுடையதென எடுத்துக் கொண்டு, உதைபந்து A பெறும் வேகமானது $\dfrac{2u\cos\alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

இங்கு $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{a - b}{a + b}\right)$ ஆகும்.

பந்திற்கும், நிலத்திற்குமிடையான மீளமவுக் குணகம் e ஆயின், நிலத்தின் மீதான உதைபந்து A இன் கிடை வீச்சைக் காண்க.

31. ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையும், ஒப்பமானவையுமான பூரண மீள்தன்மையுடைய இரு கோளங்கள் சரிவாக ஒன்றுடனொன்று மோதுகின்றன. தொடக்கத்தில் ஒருகோளம் ஓய்விலுள்ளது. மோதுகையின் பின் அவற்றின் பாதைகள் செங்கோணத்தில் உள்ளனவெனக் காட்டுக.

ஒவ்வொன்றும் $3cm$ ஆரையுடைய அத்தகைய S_1, S_2 என்னும் கோளங்கள் இரண்டின் மையங்கள் முறையே A, B என்னும் புள்ளிகளில் உள்ளன. இங்கு $AB = 16cm$ ஆகும். சமமான மூன்றாவது கோளம் S_3 ஆனது, முதலில் S_1 ஐயும், அதன் பின்னர் S_2 ஐயும் அடிக்குமாறு AB இற்குச் செங்குத்தாக எறியப்படுகிறது. முதலாவது இரண்டாவது மோதுகைகளின் போது S_3 இன் மையம் C, C^1 என்னும் புள்ளிகளில் உள்ளது. S_3 இன் இறுதி இயக்கத்திசையும் AB இற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. தூரம் CC^1 ஐக் காண்க.

S_1, S_2, S_3 கோளங்களின் இறுதிக்கதிகள் $20 : 12 : 9$ என்ற விகிதங்களில் உள்ளனவெனக் காட்டுக.

32. M திணிவுடைய ஒப்பமான ஆப்பு ஒன்று, அதன் மேல்முகமானது கிடையுடன் α கோணத்திற் சாய்ந்திருக்க, ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளது. நிலைக்குத்தாக விழுகின்ற m திணிவுள்ள துணிக்கை ஒன்று, ஆப்பின் மேன்முகத்தை P என்னும் ஒரு புள்ளியில் அடிக்கிறது. மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னர் துணிக்கையின் வேகம் u ஆகும். துணிக்கைக்கும், ஆப்பிற்கு மிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம் e எனின், ஆப்பு

$$V = \frac{mu\,(1 + e)\sin\alpha\,\cos\alpha}{M + m\sin^2 \alpha}$$

என்ற வேகத்துடன் இயங்கத் தொடங்குகின்றதெனக் காட்டுக. ஆப்பின் மேல்முகம் போதிய அளவு நீளமாக இருப்பின், துணிக்கை மீண்டும் அதனை அடிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க. இரண்டாவது மொத்தலின் புள்ளி Q ஆனது

$$PQ = \frac{2e\,(1 + e)(M + m)u^2 \sin\alpha}{\left(M + m\sin^2 \alpha\right)g}$$

இனாலே தரப்படுகின்றது என்பதை உய்த்தறிக.

33. ஆரை a யையும், மையம் O வையும் உடைய நிலையான கோளவடிவ ஓடு ஒன்றின் ஒப்பமான உட்பக்க மேறபரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து P என்னும் துணிக்கை ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. B, B^1 கிடையாக இருக்க துணிக்கையானது; B, B^1 என்னுமிரு புள்ளிகளில் ஓட்டை அடித்துவிட்டுப் பின்னர் ஓட்டிலுள்ள A^1 என்னும் புள்ளிக்கு நிலைக்குத்தாக மேனோக்கிச் செல்கிறது. AA^1 இற்கு BB^1 சமாந்தரமாகும். மொத்தல்கள் பூரண மீள்தன்மையுடையன ஆகும். நிலைக்குத்துடன் OA இன் சாய்வு θ ஆனது $cos^2 \theta = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)$ என்பதனாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

P யின் இயக்கம் ஆவர்த்தனமானதெனக் காட்டி அதன் ஆவர்த்தனக் காலத்தை காண்க.

5 (d)

கணத்தாக்கிழுவைகள்

1. மீள்தன்மையின்றிய மேசை ஒன்றிற்கு மேலே $3a$ உயரத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒப்பமான சிறிய கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்லும் 4 a நீளமுடைய, இலேசான நீளா இழை ஒன்றின் முனைகளுக்கு $2m, m$ திணிவுடைய A, B எனும் இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு துணிக்கையும் மேசைக்கு மேல் a உயரத்திலிருக்கும் போது தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. தொகுதியின் ஆர்முடுகலின் பருமனைக் கண்டு A மேசையை அடித்து ஓய்வடையும் கணத்தில் B யின் வேகம் V ஆனது. $V = \left(\frac{2ga}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

பின்வருவனவற்றை V, g இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

(a) A மேசையை அடிக்க எடுத்த நேரம்

(b) A மீண்டும் இயக்கத்திற்கு இழுக்கப்படுமுன், மேசையில் ஓய்விலிருக்கும் நேரம்

(c) A இயக்கத்திற்கு இழுக்கப்படும் கதி

(d) A இயக்கத்திற்கு இழுக்கப்பட்டு, மீண்டும் மேசையை அடிக்க எடுத்த நேரம்

2. $m, 3m$ திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் $2l$ நீளமுள்ள ஒரு இலேசான நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டு, இழை ஒப்பமான சிறிய கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்கிறது. ஒவ்வொரு துணிக்கையும் கப்பியின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலிருக்குமாறு

கப்பியுடன் பிடிக்கப்பட்டு, ஒரே நேரத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படுகின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) இழை இறுதிச் சற்றுப் பின், ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் கதி $\sqrt{\frac{gl}{2}}$

(b) கணத்தினால் ஏற்பட்ட சக்தி நட்டம் 3 mgl

(c) பாரம் குறைந்த துணிக்கை மொத்த நேரம் $\sqrt{\frac{61}{g}}$ இன் பின்னர், கப்பியை அடையும்.

3. $2m$, $3m$ திணிவுடைய துணிக்கைகள் P, Q என்பன ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்லும் இழையின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப் பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக நிலைக்குத்தாக தொங்கிக் கொண்டிருக்கையில் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. நேரம் t இன் பின்னர் துணிக்கை P, m திணிவுடைய ஓய்விலிருக்கும் துணிக்கையைத் தன்னுடன் எடுத்துக் கொள்கிறது. கணத்தாக்குக் காரணமாக தொகுதியின் இயக்கச் சகதி நட்டம் $\frac{mg^2 t^2}{60}$ எனக் காட்டுக.

4. ஒப்பமான நிலைத்த தாங்கி ஒன்றின் மேலாகச் செல்லும், இலேசான நீளா இழை ஒன்றின் முனைகளுக்கு ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய இரு தராசுத் தட்டுக்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு தராசுத் தட்டில் $2m$ திணிவுடைய மீள்தன்மையின்றிய துணிக்கை A வைக்கப்பட்டுள்ளது. தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் இழைகள் நிலைக்குத்தாக இருக்கத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. தட்டின் ஆர்முடுகலையும், இழையின் இழுவையையும் காண்க. தொகுதி இயங்கவிடப்படும் அதே கணத்தில், $3m$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படுகிறது. t செக்கன்களின் பின்னர், அது A ஐ அடித்து அதனுடன் இணைந்து விடுகிறது. இழையினால் ஏற்பட்ட கணத்தாக்கிழுவையையும், இக்கணத்தாக்கின் பின் உடனடியாக ஒவ்வொரு தட்டினது கதியையும் காண்க.

5. இரு திணிவுகள் $3m$ உம், m உம் ஒப்பமான கப்பியொன்றின் மேலாகச்செல்லும் ஓர் இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன முதற்றிணிவு நிலத்தில் படுமாறு தொகுதி முழுவதும் ஓய்விலுள்ளது. ஒரு மூன்றாவது திணிவு m, h உயரத்திலிருந்து விழுந்து இரண்டாவது திணிவுடன் மோதி அதனுடன் ஒட்டி, தொகுதி முழுவதையும் இயங்க வைக்கிறது. $3m$ திணிவு நிலத்திலிருந்து $\frac{h}{5}$ உயரம் கிளம்புமெனக் காட்டுக.

6. ஒப்பமான தளம் ஒன்று கிடையுடன் 30° சாய்வில் ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றிற்கு மேல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. தளத்தின் கீழ் ஓரம் மேசையிலிருந்து a உயரத்தில் உள்ளது. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய P, Q எனுமிரு துணிக்கைகள் $2a$ நீளமுடைய இலேசான இழையால் இணைக்கப்பட்டு P ஆனது சாய்தளத்தின் கீழ் ஓரத்தில் பிடிக்கப்பட்டு Q ஆனது, P யிற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே மேசை மீது ஓய்விலுள்ளது. துணிக்கை P ஆனது சாய்தளத்தின் அதி உயர் சாய்வுக்கோடொன்றின் வழியே மேல்நோக்கிக் $u\left(>\sqrt{ag}\right)$ கதியுடன் எறியப்படுகிறது. Q இயக்கத்திற்கு இழுக்கப்படும் போது, இழையில் ஏற்படும் கணத்தாக்கிழுவையைக் காண்க. இயக்கத்தின் போது இழையிலுள்ள இழுவையையும், Q தளத்தின் விளிம்பை மட்டுமட்டாக அமையுமெனின் u இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

7. $m, 2m, 3m$ திணிவுகளையுடைய A, B, C என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் இதே ஒழுங்கில் நேர்கோடொன்றில் ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மேல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அடுத்தடுத்த இரு துணிக்கைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் a ஆகும். ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமுடைய இலேசான இரு நீளா இழைகளால் A யும் B யும், B யும் C யும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை A ஆனது CBA யின் திசையில் U என்னும் கதியுடன் எறியப்படுகிறது. C இயங்கத் தொடங்க எடுக்கும் நேரத்தையும், C இன் தொடக்கக் கதியையும் காண்க. C இயக்கத்திற்கு இழுக்கப்படும் போது, BC, AB என்பவற்றிலுள்ள கணத்தாக்கிழுவைகளின் விகிதம் $3:1$ எனக் காட்டுக. மொத்த இயக்கசக்தி நட்டத்தையும் காண்க.

8. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் $2l$ நீள இலேசான நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொடக்கத்தில் அவை ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றில் l இடைத் தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A யிலுள்ள துணிக்கை மேசை வழியே u வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. B யிலுள்ள துணிக்கை இயங்கத் தொடங்கும் கதியை பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் காண்க. u இன் திசையானது,

- **(a)** BA வழியே
- **(b)** AB உடன் 120° கோணத்தில்
- **(c)** AB க்குச் செங்குத்தாக.

ஒவ்வொரு வகையிலும் இழையின் கணத்தாக்கு இழுவையையும் காண்க.

9. m_1, m_2 திணிவுடைய இரண்டு துணிக்கைகள் இலேசான நீளா இழையொன்றின் முனைகளுக்கிணைக்கப்பட்டு ஒப்பமான கிடையான மேசையின் மேல் இழை இறுக்கமாக இருக்கும் படி வைக்கப்பட்டுள்ளன. m_2 என்னும் துணிக்கை, இழையுடன் α என்னும் கூர்ங்கோணத்தை ஆக்குமாறு v எனும் கிடை வேகத்துடன் m_1 இல் இருந்து விலக்கி எறியப்பட்டது.

m_1 ஆனது $\dfrac{m_2 v\cos\alpha}{m_1+m_2}$ என்னும் கதியுடன் இயக்கத்திற்கு இழுக்கப் படுகிறதெனவும், கணத்தாக்குக் காரணமாக இழக்கப்பட்ட இயக்கப்பண்புச்சக்தி $\dfrac{m_1 m_2 v^2\cos^2\alpha}{2(m_1+m_2)}$ எனவும் காட்டுக.

10. m, m^1 திணிவுடைய இரண்டு சிறிய பந்துகள், கிடையான ஒப்பமான தரையிலே சமாந்தரமான இரண்டு நேர் வரைகளின் வழியே முறையே u, u^1 என்ற $\left(u>u^1\right)$ கதியுடன் ஒரே திசையில் செல்கின்றன. இரண்டு பந்துகளும் நீளா இலேசான இழையினாலே இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழை இறுகும் கணப்போது சமாந்தரக் கோடுகளுடன் அது α என்ற கோணத்தை ஆக்குமாறு செய்வதற்குத்தக்க நீளமுடையது. இழை இறுகும் போது இழையிலுள்ள கணத்தாக்கிழுவை $\dfrac{mm^1\left(u-u^1\right)\cos\alpha}{m+m^1}$ எனவும், இழந்த இயக்கப் பண்புச் சக்தி $\dfrac{mm^1\left(u-u^1\right)^2\cos^2\alpha}{2\left(m+m^1\right)}$ எனவும் நிறுவுக.

11. A, B என்னும் சிறிய பந்துகள் முறையே M, m என்னும் திணிவுகளையுடையன. அவை a நீளமுடைய இலேசான நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டு, ஓர் அழுத்தமான கிடை மேசையில் $l\,(<a)$ இடைத்தூரத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. AB என்பவற்றை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக u என்னும் கிடைவேகத்துடன் பந்து B அடிக்கப்படுகிறது. இழை இறுக்கமாகும் போது, அவ்விழையிலுள்ள கணத்தாக்கிழுவையைக் காண்க. குலுக்கலினால் ஏற்பட்ட

இயக்க சக்தி நட்டம் $\dfrac{Mmu^2 \cos^2 \alpha}{2(M+m)}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)$ ஆகும். A, B என்ற பந்துகளின் திணிவுமையம் G மேசையின் மீதுள்ள ஒரு நேர்கோட்டில் செல்லுமென நிறுவி அதன் வேகத்தையும் காண்க.

12. M, m திணிவுடைய P, Q எனும் இரண்டு துணிக்கைகளும் a நீள இலேசான நீளா இழையொன்றினால் இணைக்கப்பட்டு ஓர் ஒப்பமான மேசையில் $\dfrac{a}{2}$ தூரத்தில் ஓய்விலுள்ளன. துணிக்கை Q விற்கு ஒரு கிடைக் கணத்தாக்கு mu, PQ விற்குச் செங்குத்தான திசையில் பிரயோகிக்கப்பட்டது. இழை இறுகும் போது பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும், இழையால் ஏற்றப்படும் கணத்தாக் கிழுவையையும், சக்தி நட்டத்தையும் காண்க.

(a) P இயங்குவதற்கு சுயாதீனமாக இருந்தால்

(b) P நிலைப்படுத்தப்பட்டிருப்பின்

$M = m$ எனின், (b) யில் ஏற்பட்ட சக்தி நட்டம் (a) இல் ஏற்பட்ட சக்தி நட்டத்தின் இரு மடங்காகும் என உய்த்தறிக.

13. M திணிவுடைய ஒரு வாளியும், m திணிவுடைய ஒரு கல்லும் a நீளமுடைய ஓர் இலேசான நீளாக் கயிற்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. a யிலும் பெரிதான ஆழத்தையுடைய ஒரு கிணற்றின் அழுத்தமான விளிம்பிற்கு அண்மையில் வாளியிருக்கும் போது, இவை ஒரு கிடை நிலத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கயிறு நேராகவும் கிணற்றின் விளிம்பிற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ளது. பின்பு வாளி மெதுவாக கிணற்றுக்குள் தள்ளி விடப்படுகிறது. கிணற்றின் சுவர்கள் அழுத்தமானவையெனின், கிணற்றின் விளிம்பைக் கல்லு அடையும் போது அதன் வேகம் என்ன? கல் கிணற்றின் விளிம்பை விட்டு நீங்கும் போது கயிற்றில் ஏன் ஒரு கணத்தாக்குக் குலுக்கம் ஏற்படுகிறதென விளக்கி குலுக்கலினால் ஏற்படும் இயக்கசக்தி நட்டம் $\dfrac{mM^2 ag}{(M+m)^2}$ என நிறுவுக.

14. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய மூன்று துணிக்கைகள் A, B, C ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது கோணம் ABC, 120° ஆகுமாறு ஓய்விலுள்ளன. B ஆனது A யிற்கும், C யிற்கும் இலேசான நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டு இழைகள் மட்டாக இறுக்கமாக உள்ளன. துணிக்கை B யிற்கு J என்னும் கணத்தாக்கு BC உடன் 120° ஐயும் BA உடன் 90° ஐயும் ஆக்கும் கிடைத்திசையில் கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு இழையினது கணத்தாக்கிழுவையையும், ஒவ்வொரு துணிக்கையினது தொடக்க வேகத்தையும் காண்க.

15. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய, மூன்று துணிக்கைகள் A, B, C ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஓய்விலுள்ளன. மெல்லிய நீளா இழைகள் A ஐயும் B ஐயும், B ஐயும் C ஐயும் இணைக்கின்றன. இழைகள் இறுக்கமாகவும், கோணம் ABC 135° ஆகவும் உள்ளது. துணிக்கை C யிற்கு J என்னும் கணத்தாக்கு AB இற்குச் சமாந்தரமான திசையில் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. A ஆனது $\dfrac{J}{7m}$ கதியுடன் இயக்கத்தொடங்குகிறதெனக் காட்டி BC யிலுள்ள கணத்தாக்கிழுவையைக் காண்க.

16. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய, இரு துணிக்கைகள் இலேசான நீளா இழையொன்றினால் இணைக்கப்பட்டு இழையின் நடுப்புள்ளிக்கு M திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை மட்டாக இறுக்கமாக இருக்குமாறும், இழை ஒரு நேர்கோட்டில் இருக்குமாறும் உள்ளது. துணிக்கை M இற்கு மேசை வழியே இழைக்குச் செங்குத்தாக V என்னும் வேகம் கொடுக்கப்படுகிறது. இழையின் அந்தங்களிலுள்ள இரு துணிக்கைகளும் மோதும் கணத்தில்

(a) M இன் வேகம் $\dfrac{MV}{M+2m}$ எனவும்

(b) மற்றைய ஒவ்வொரு துணிக்கையின் கதியும் $\dfrac{2M(M+m)^{\frac{1}{2}} V}{M+2m}$

எனவும் நிறுவுக.

17. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய மூன்று துணிக்கைகள் A, B, C என்பன AB, BC என்னும் இரு இலேசான நீளா இழைகளினால், தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்குமாறு துணிக்கைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கோணம் $ABC = \pi - \alpha \left(\alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆகும். திசை BA இல் ஒரு கணத்தாக்கு I, A யிற்குப் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. கணத்தாக்குப் பிரயோகித்த பின்னர் உடனடியாக A, B என்பவற்றின் வேகங்களைக் காண்க.

C யின் வேகம் $\dfrac{I \cos\alpha}{m(4 - \cos^2\alpha)}$ என வாய்ப்புப் பார்க்க.

18. முறையே m_1, m_2, m_2 திணிவுடைய A, B, C ஆகிய மூன்று சிறிய முத்துக்கள் கழுத்தணி (neck lace) ஒன்றை அமைக்குமாறு a நீளமுள்ள மூன்று நீளா இழைகளினால் ஒன்றுக்கொன்று தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கழுத்தணி ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையின் மேல் B உம் C உம் a தூரத்திலும், A என்பது BC யின் நடுப்புள்ளியிலிருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A என்பது BC யிற்குச் செங்குத்தான கிடைத்திசையிலே u எனும் வேகத்துடன் எறியப்படின், இழைகள் இறுக்கமாகும் போது, B இற்கும் C இற்கும் அளிக்கப்பட்ட வேகத்தைக் காண்க. இழக்கப்பட்ட இயக்கப்பண்புச் சக்தி $\dfrac{3m_1 m_2 u^2}{2(2m_1 + 3m_2)}$ எனக் காட்டுக. சக்திக்காப்பு விதியைப் பயன்படுத்தி தொடரும் இயக்கத்தில் B உம் C உம் மோதவிருக்கும் போது, அவைகளின் தொடர்பு வேகம். $\dfrac{\sqrt{2}\, m_1}{\left(m_1^2 + 2m_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ எனக் காட்டுக.

19. முறையே M, m, m திணிவுகளையுடைய மூன்று துணிக்கைகள் A, B, C ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது, ஓய்விலுள்ளன. B உம் C உம் A உடன் சம நீள இலேசான நீளா இழைகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாகவும், கோணம் $BAC, 2\alpha$ ஆகவும் உள்ளது. துணிக்கை A ஆனது கோடு BC இன் நடுப்புள்ளியை நோக்கி u எனும் வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. இழைகள் மீண்டும் இறுகும் போது இழைகளில் ஏற்படும் கணத்தாக்கிழுவை $\dfrac{Mmu\cos\alpha}{M + 2m\cos^2\alpha}$ எனக் காட்டுக. இழக்கப்பட்ட ஆரம்ப இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் பின்னத்தைக் காண்க.

20. A, B என்னும் இரு சம ஒப்பமான கோளங்கள் ஓர் மீள்தன்மையற்ற இலேசான நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டு, இழை இறுக்கமாக இருக்கும் வண்ணம் ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளன. அதே திணிவுடைய C என்ற மூன்றாவது கோளம் AB யுடன் θ என்ற கூர்ங்கோணத்தை ஆக்கும் திசையில் u வேகத்துடன் B ஐ நேரடியாக மோதுமாறு மேசை வழியே எறியப்படுகிறது. இழையில் ஏற்பட்ட கணத்தாக்கு காரணமாக A இற்குக் கொடுக்கப்பட்ட வேகம் $\dfrac{(1+e)u\cos\theta}{3 + \sin^2\theta}$ என நிறுவுக.

இங்கு e மீளமைவுக்குக் குணகமாகும்.

21. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள இரு சம ஒப்பமான கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்ட வண்ணம் அவற்றின் மையங்கள் ஒரு கிடைக்கோட்டில் அமையும் வண்ணம் நிலைக்குத்தான இரு இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. மூன்றாவது சம கோளம் ஒன்று இரு கோளங்களையும் சமச்சீராக மோதும் வண்ணம் நிலைக்குத்தாக u என்னும் வேகத்துடன் விழுகின்றது. மூன்று கோளங்களின் மையங்களும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. மூன்று கோளங்களும் பூரண மீள்தன்மையுடையனவாயின், விழும் கோளம் $\dfrac{5u}{7}$ எனும் வேகத்துடன் மோதித் திரும்பும் என்றும், மற்ற இரு கோளங்களும் $\dfrac{2\sqrt{3}u}{7}$ என்ற வெளிநோக்கிய வேகத்துடன் இயங்க ஆரம்பிக்கும் எனவும் காட்டுக.

22. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள மூன்று சம திணிவுகள் P, Q, R ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஓய்விலுள்ளன. P, Q இற்கும் Q, R இற்குமாக அவை இரு நீட்டமுடியாத நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழைகள் இறுக்கமாக இருக்குமாறும், அவ்விழைகளின் இடைக்கோணம் $\alpha\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆகுமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. P இற்கு RQ வுக்கு சமாந்தரமாக V என்னும் வேகம் கொடுக்கப்பட்டது. இழை மீண்டும் இறுக்கமாகும் போது R ஆனது $\dfrac{V}{3 + \tan^2\alpha}$ என்னும் வேகத்தைப் பெறும் என நிறுவுக. இரு இழைகளிலு முள்ள கணத்தாக்கிழுவைகளையும் காண்க.

23. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய P, Q, R ஆகிய மூன்று சிறிய பந்துகள் M திணிவுடைய C என்னும் துணிக்கைக்கு மூன்று சமமான இலேசான நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கும் படி பந்துகள் P, Q, R ஒப்பமான கிடையான மேசையின் மேல் உள்ள சமபக்க முக்கோணியின் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை C முக்கோணியின் மையத்தில் உள்ளது. R என்னும் பந்திற்கு CR உடன் $\alpha\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ கோணத்தை அமைக்கும் திசையில் J என்னும் கணத்தாக்குப் பிரயோகிக்கப்பட்டது. கணத்தாக்கிற்குச் சற்றுப் பின் பந்து R இன் வேகம் என்ன?
கணத்தாக்கினால் பிறப்பிக்கப்பட்ட இயக்க சக்தி

$$\frac{J^2}{2}\left[\frac{2m+(m+M)\sin^2\alpha}{m(3m+2M)}\right]$$ எனக் காட்டுக.

24. ஒரு சதுரத்தின் நான்கு மூலைகளிலும் இருக்கும் m திணிவுள்ள சம துணிக்கைகள் சதுரத்தின் பக்கங்களாக அமையும் நாலு இலேசான இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு மூலை விட்டத்தின் வழியே வெளிநோக்கி ஒரு துணிக்கைக்கு P என்னும் கணத்தாக்கு கொடுக்கப்பட்டது. அத்துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் $\frac{p}{2m}$ எனக் காட்டுக. மற்றைய துணிக்கைகளின் தொடக்க வேகங்களைக் காண்க.

25. நான்கு சம திணிவுகள், $ABCD$ என்னும் ஓரிழையின் சம தூரங்களில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A,B,C,D என்பன ஓரொழுங்கான அறுகோணி ஒன்றின் உச்சிகளில் அமையுமாறும், இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கும் வண்ணமும் இத்தொகுதி ஓர் அழுத்தக் கிடைமேசையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A க்கு BA இன் திசையில் ஓர் உந்தம் I கொடுக்கப்பட்டது. AB யில் கணத்தாக்கிழுவை $\frac{15}{28}I$ என நிறுவுக.

26. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள A,B,C,D,E என்னும் ஐந்து துணிக்கைகள் ஒரே நீளமுள்ள நீட்டமுடியாத 5 மெல்லிய இழைகளினால் அவ்வொழுங்கிலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழைகள் ஓரொழுங்கான அறு கோணியினது நான்கு அடுத்துள்ள பக்கங்களை ஆக்கிக் கொண்டிருக்கும் படி அத்துணிக்கைகள் ஒப்பக் கிடைமேசை மீது கிடக்கின்றன. AB க்கு சமாந்தரமான திசையிலும், போக்கிலும் I என்னும் ஒரு கணத்தாக்கு C இற்குப் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. அக்கணத்தாக்குப் பிரயோகிக்கப்பட்ட பின்பு C இன் வேகம் u ஆகவும், B இன் C தொடர்பான வேகம் v ஆகவுமிருந்தால் v அளக்கப்படும் போக்கைச் சார்ந்து A இன் வேகம் $u \pm v\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. u,v என்பவற்றையும், அவ்விழைகளின் கணத்தாக்கிழுவைகளையும் I,m என்பவற்றில் துணிக.

27. M திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை C, ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய இரு சம துணிக்கைகள் A இற்கும் B இற்கும், ஒவ்வொன்றும் l நீளமான இரு இலேசான நீளா இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆரம்பத்தில்

$AC = CB = l\sin\theta$ ஆகுமாறு A ஐயும் B ஐயும் தொடுக்கும் கோட்டின் மீது A,B,C ஓய்விலுள்ளன. துணிக்கை C, வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி எறியப்படுகிறது. இழை இறுக்கமாகும் போது A யிற்கும் B யிற்கும் பகிரப்பட்ட வேகங்களைக் கண்டு குலுக்கத்தின் காரணமாக் இயக்க சக்தி இழப்பு $$\frac{Mmu^2\cos^2\theta(1-\lambda\cos\theta)}{M+2m\cos^2\theta}$$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $\lambda = \frac{2lg}{u^2}\ (<1)$

$M = m$ ஆகவும் $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆயுமிருப்பின் இயக்க சக்கிதியின் இழப்பு $\theta = \frac{\pi}{4}$ ஆகும் போது மிகப் பெரிதாகுமெனக் காட்டுக.

28. திணிவுகள் m உம் M உம் $(M > m)$ கொண்ட இரு துணிக்கைகள் நிலையான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் நீட்ட முடியாத இலேசான இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நிலையான ஒப்பமான கிடையான மீள் தன்மையற்ற மேசையினால், இதன் மேல் சாடக் கூடியவாறு M இனது இயக்கம் தடுப்புடையது. மேசையின் மேலே H உயரத்தில் M இருக்கும் போது இத்தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. M என்பது கணநிலை ஓய்விற்கு வரும் அடுத்தடுத்த உயரங்கள் $\left(\frac{m}{M+m}\right)^2$ என்பதைப் பொது விகிதமாகக் கொண்ட பெருக்கல் விருத்தியாக அமையுமெனக் காட்டுக.

29. தரப்பட்ட H ஆழத்தினையும், M திணிவினையும் கொண்ட வாளியொன்று $M + m$ திணிவுள்ள எதிர் நிறுத்தலோடு இலேசான ஒப்பமான கப்பி மேற்செல்லும் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. m திணிவுள்ள தவளையொன்று வாளியின் அடியின் மத்தியில் இருக்கின்றது. இத்தொகுதி ஓய்விலிருக்கின்றது. தவளை வாளியின் விளிம்பின் மட்டத்தை அடையக்கூடிய அளவுக்கு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிப் பாய்கிறது. மீண்டும் தவளை வாளியின் அடியை அடைவதற்கிடையில் செல்லும் நேரம் $2\sqrt{\frac{H}{g}\left(\frac{2M+m}{M+m}\right)}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் வெளியில் தவளையின் தனி நிலைக்குத்து ஏற்றம் $\frac{H(2M+m)}{2(M+m)}$ எனவும் காட்டுக.

30. நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான ஒரு கப்பி மீது செல்கின்ற நீளா இழை ஒன்றினால் M திணிவுள்ள வாளி ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழை அதன் மறு நுனியிலே சம திணிவு M உள்ள எதிரீடு செய்யும் நிறையைக் காவுகின்றது. வாளியின் தட்டையான அடியை u என்னும் வேகத்துடன் அடிக்குமாறு m திணிவுள்ள ஒரு மாபிள் நிலைக்குத்தாக விழவிடப்படுகிறது. மாபிளுக்கும், வாளிக்குமிடையிலுள்ள மீளமைவுக் குணகம் e எனில் முதலாம் மொத்தலுக்கும் இரண்டாம் மொத்தலுக்குமிடையே கழியும் நேரத்தைக் காண்க. மேலும் முதலாவது மொத்தலிருந்து $T = \frac{2eu}{(1-e)g}$ என்னும் மொத்த நேரத்தின் பின்னர் எல்லா மொத்தல்களும் முடிவடையும் எனவும் இக் கால ஆயிடை T யின் போது எதிரீடு செய்யும் நிறையானது கப்பியை அடையாது எனத் தரப்படின் இக்கால இடையின் போது எதிரீடு செய்யும் நிறையின் சராசரி கதி $\frac{mu}{2M+m}$ எனவும் காட்டுக.

31. A,B,C என்பன மூன்று சமமான சிறிய கோளங்கள். A யும் B யும் $2a$ நீளமுள்ள மீள்தன்மையின்றிய இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டிருக்க, B யும் C யும் சர்வ சமமான இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவை A யும் B யும் a என்னும் இடைத்தூரத்திலிருக்க ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. A யினதும் B யினதும் மையமிணை கோட்டுக்குச் செங்குத்தாக B யினதும் C யினதும் மையமினை கோடு அமையுமாறு B,C ஆகியனவுங்கூட a என்னும் இடைத்தூரத்திலுள்ளன. கோளம் C ஆனது BC என்னும் திசையில் வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது. AB இறுக்கமான உடனடியாகப் பின்னர் கோளங்கள் A, C ஆகியவற்றின் கதிகளைத் துணிந்து, இக்கணத்தில் B யினது வேகமானது, C யின் தொடக்க இயக்கத் திசையுடன் $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கின்ற திசையிலே $\frac{2\sqrt{7}u}{13}$ எனக் காட்டுக. மேலும் BC இறுக்கமடையும் போது இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியின் பின்ன இழப்பு $\frac{1}{2}$ எனவும் AB இறுக்கமடையும் போது அது $\frac{8}{13}$ எனவும் காட்டுக.

அலகு 6

எறிபொருட்கள் (Projectiles)

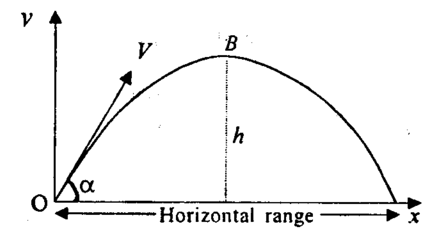
வீசற்கோணம் (Angle of prpjection): வீசற்கோணம் என்பது, துணிக்கை வீசப்படும் திசை, வீசற் புள்ளியினூடு செல்லும் கிடைத்தளத்துடன் ஆக்கும் கோணமாகும். இது ஏற்றக்கோணம் (angle of elevation) எனவும் அழைக்கப்படும்.

வீசுகோடு (Trajectory): வீசுகோடு என்பது துணிக்கை செல்லும் பாதை ஆகும்.

வீச்சு (Range): வீச்சு என்பது வீசற் புள்ளிக்கும், அப்புள்ளியினூடான தளம் எதுவும் வீசுகோட்டைச் சந்திக்கும் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம்.

u கதியுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது.

(1) அடைந்த அதி உயரம் (H)



$$\uparrow v^2 = u^2 + 2fs$$

$$0 = u^2 \sin^2\alpha - 2gH$$

$$H = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

(2) அதியுயர் உயரத்தை அடைய எடுத்த நேரம் (t)

$$\uparrow v = u + ft$$

$$O = u\sin\alpha - gt$$

$$= \frac{u\sin\alpha}{g}$$

(3) பறப்பு நேரம் (T) – (எறியற்புள்ளியினூடான கிடைமட்டத்தை அடைய எடுத்த நேரம்)

$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2}ft^2$$

$$O = u\sin\alpha\, T - \frac{1}{2}gT^2$$

$$T \neq o, \quad T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

(4) கிடைவீச்சு (R)

$$\rightarrow s = ut + \frac{1}{2} f t^2$$

$$R = u\cos\alpha \ T + O$$

$$u\cos\alpha \ . \ \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

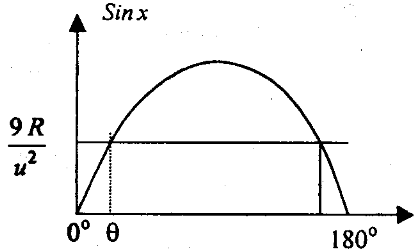
தரப்பட்ட எறியல் கதி u இற்கு R உயர்வாக இருப்பதற்கு $\sin 2\alpha = 1$ ஆதல் வேண்டும். $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$

எறியற் கோணம் 45° இல் அதி உயர் கிடைவீச்சு $= \frac{u^2}{g}$ ஆகும்.

தரப்பட்ட ஒரு எறியற் கதிக்கு ஒரு தரப்பட்ட கிடை வீச்சினைப் பெறப் பொதுவாக இரு எறியற் கோணங்கள் உண்டு.

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{u^2}{g}$$

கிடை வீச்சின் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{u^2}{g}$ ஆகும். இதற்குரிய எறியற் கோணம் 45° ஆகும்.



$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2} \left[\frac{gR}{u^2} \leq 1\right]$$

$\frac{gR}{u^2} = 1$ எனில் $\sin 2\alpha = 1, \ 2\alpha = 90^\circ, \ \alpha = 45^\circ$

$$\sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2} \qquad \left(\frac{gR}{u^2} < 1\right)$$

$2\alpha = \theta$ அல்லது $180 - \theta$

$\alpha = \frac{\theta}{2}$ அல்லது $90 - \frac{\theta}{2}$

எனவே பொதுவாக இரு எறியற்கோணங்கள் உண்டு.

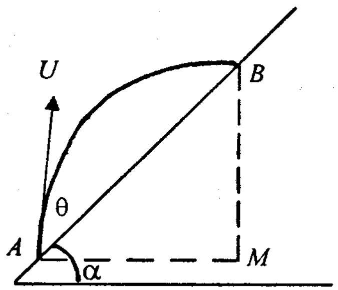
சாய்தளத்தில், பறப்பு நேரம், வீச்சு

தளத்தின் சாய்வு α, தளத்துடன் எறியல் வேகத்தின் திசை θ என்க. தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் இயக்கத்தைக் கருதுக.

$$S = ut + \frac{1}{2} f t^2$$

$$O = u\sin\theta \ T - \frac{1}{2} g\cos\alpha . \ T^2$$

$$T \neq oo, \ T = \frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}$$



$$AM = u\cos(\theta + \alpha). \ T$$

$$= u\cos(\theta + \alpha). \ \frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

$$AM = \frac{2u^2 \cos(\theta + \alpha)\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

$$AB = \frac{AM}{\cos\alpha} = \frac{2u^2 \cos(\theta + \alpha)\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

$$AB = \frac{u^2}{g\cos^2\alpha} \left[\sin(2\theta + \alpha) - \sin\alpha\right]$$

AB உயர்வாக இருப்பதற்கு $(2\theta + \alpha) = 1$ ஆதல் வேண்டும்.

(இங்கு u, g, α என்பன ஒருமைகள் ஆகும்.)

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

AB உயர்வு $= \frac{u^2}{g\cos^2\alpha}\cdot(1-\sin\alpha)$

$= \frac{u^2(1-\sin\alpha)}{g\left(1-\sin^2\alpha\right)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\alpha)}$ ஆகும்.

இவ்வாறே சாய்தளத்தில் கீழ் நோக்கி எறியப்படுகையில் உயர்வீச்சு $\frac{u^2}{g(1-\sin\alpha)}$ எனப் பெறலாம்.

சாய்தளத்திலும் ஒரு தரப்பட்ட வீச்சினைப் பெற பொதுவாக இரு எறியற் கோணங்கள் உண்டு.

காவிகளின் பிரயோகம்

துணிக்கை ஒன்று, O விலிருந்து $\underline{u}$ என்னும் வேகத்துடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகிறது. t நேரத்தில் துணிக்கையின் தானக்காவி (O பற்றி) $\underline{r}$, வேகம் $\underline{v}$ எனின்,

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}t$

$\underline{r} = \underline{u}t + \frac{1}{2}\underline{g}t^2$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OP} = \underline{r}$

$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \underline{g}$

$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{g}$

$\int d\underline{v} = \int \underline{g}\, dt$

$\underline{v} = \underline{g}t + \underline{c}$ --------------- (1)

t = 0 இல் $\underline{v} = \underline{u}$, எனவே $\underline{c} = \underline{u}$

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}t$

$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{u} + \underline{g}t$

$\int d\underline{r} = \int \left(\underline{u} + \underline{g}t\right) dt$

$\underline{r} = \underline{u}t + \frac{1}{2}t^2\underline{g} + \underline{c}$

t = o இல் $\underline{r} = \underline{0}$. எனவே $\underline{c} = 0$

$\underline{r} = \underline{u}t + \frac{1}{2}t^2\underline{g}$ --------------- (2)

(1), (2) இலிருந்து

$$\underline{r} = \underline{u}t + \frac{1}{2}\underline{g}t^2$$

$$\underline{r}\cdot\underline{g} = \left(\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{g}t\right) t\cdot\underline{g}$$

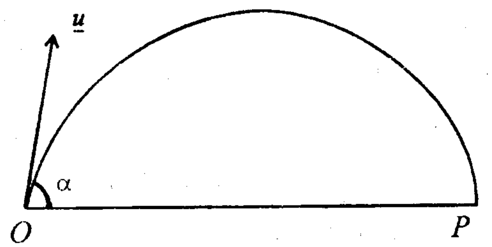
$$\underline{r}\cdot\underline{g} = \frac{1}{2}\left(2\underline{u} + \underline{g}t\right) t\cdot\underline{g}$$

$$2\underline{r}\cdot\underline{g} = \left(\underline{u} + \underline{g}t + \underline{u}\right)\cdot\underline{g}t$$

$$2\underline{r}\cdot\underline{g} = (\underline{v} + \underline{u})\cdot(\underline{v} - \underline{u})$$

$$v^2 - u^2 = 2\underline{r}\cdot\underline{g} \text{ --------------- } (3)$$

கிடைத்தளத்தில் எறியம்



பறப்பு நேரம் T, கிடைவீச்சு R என்பவற்றைக் காணல்

$|\underline{u}| = u$, $|\underline{g}| = g$ ஆகும்.

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}T$ --------------- (1)

$\underline{r} = \underline{u}T + \frac{1}{2}\underline{g}T^2$ -------------- (2)

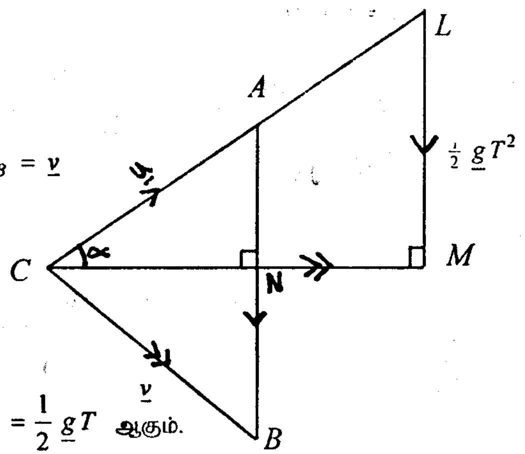
ΔOAB இல்

$$\vec{OA} = \underline{u}, \quad \vec{AB} = \underline{g}T, \quad \vec{CB} = \underline{v}$$

ΔOLM இல்

$$\vec{OL} = \underline{u}T, \ \vec{LM} = \frac{1}{2}\underline{g}T^2$$

$$\vec{OM} = \underline{r}$$



$OL : OA = T : 1$ என்பதால் $\vec{AN} = \frac{1}{2}\underline{g}T$ ஆகும்.

எனவே N, AB யின் நடுப்புள்ளி.

ஆகவே, $\Delta ANC \equiv \Delta BNC$ ஆகும்.

ஆகவே $|\underline{v}| = |\underline{u}| = u$ ஆகும்.

கோணம் $BCN = \alpha$

எனவே துணிக்கை α கோணத்தில் u எனும் கதியுடன் தளத்தை அடிக்கும்.

ΔACN இல்

$$AN = AC \sin\alpha$$

$$\frac{1}{2}gT = u\sin\alpha \ \Rightarrow T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

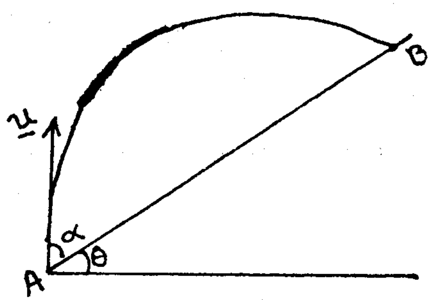
ΔALM இல்,

கிடைவீச்சு $R = CM = CL\cos\alpha$

$$= uT\cos\alpha = u\cos\alpha\,\frac{2u\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

சாய்தளத்தில் எறியம்



தளத்தின் சாய்வு θ

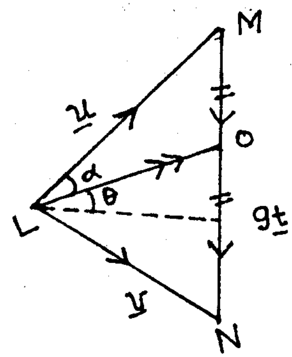
தளத்துடன் $\underline{u}$ வேகத்துடன்

α ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது.

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}t$ --------------- (1)

$$\underline{r} = \underline{u}t + \frac{1}{2}\underline{g}t^2$$

$\frac{1}{t}\underline{r} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{g}t$ --------------- (2)



ΔLMN இன் பக்கங்களால் $\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}t$

ΔLMO இன் பக்கங்களால் $\frac{1}{t}\underline{r} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{g}t$ உம்

வகைகுறிக்கப்படுகின்றன.

ΔLMO வில்,

$$\frac{LM}{sin(90+\theta)} = \frac{MO}{sin\alpha} = \frac{}{sin\left[90-(\theta+\alpha)\right]}$$

$$\frac{u}{cos\theta} = \frac{gt}{2\,sin\alpha}\,,\; t = \frac{2u\,sin\alpha}{g\,cos\theta}$$

சாய்தளத்தில் பறப்பு நேரம் $t = \dfrac{2u\,sin\alpha}{g\,cos\theta}$

$$\frac{LM}{\cos\theta} = \frac{MO}{\sin\alpha} = \frac{LO}{\cos(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{u}{\cos\theta} = \frac{gt}{2\sin\alpha} = \frac{r}{t\cos(\theta+\alpha)}$$

$$r = \frac{u\cos(\theta+\alpha)}{\cos\theta} \cdot t$$

$$= \frac{2u^2\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha}{g\cos^2\theta}$$

சாய்தளத்தில் (மேல்நோக்கிய) வீச்சு $= \dfrac{2u^2\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha}{g\cos^2\theta}$

உதாரணம் 1

u என்னும் கதியுடன் கிடைக்கு α கோணத்தில் எறியப்பட்ட துணிக்கை அடையும் அதிஉயர் உயரத்தையும், கிடைவீச்சையும் காண்க.

u என்னும் தொடக்கக் கதியுடன் எறியப்படும் துணிக்கை ஒன்று அடையக்கூடிய அதிஉயர் கிடைவீச்சு R ஆகும். இத்துணிக்கை அடைந்த கிடைவீச்சு $\frac{3}{5}R$ எனின், இயல்தகு இரு எறியல் கோணங்களையும் காண்க.

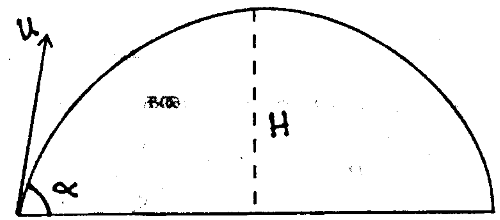
இக்கோணங்களுக்கு ஒத்த அதிஉயர் உயரங்களின் வித்தியாசம் $\frac{2}{5}R$ எனக் காட்டுக

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

பறப்பு நேரம் t என்க.

$$\uparrow\; o = u\,sin\alpha\; t - \frac{1}{2}g t^2$$

$$t \neq o,\; t = \frac{2u\,sin\alpha}{g}$$



கிடை வீச்சு l எனின்,

$$\rightarrow\; l = u\,cos\alpha \cdot t$$

$$= u\cos\alpha\,\frac{2u\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$l = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$\uparrow\; v^2 = u^2 + 2as$$

அதிஉயர் உயரம் H என்க.

$$o\; u^2\sin^2\alpha - 2gH$$

$$H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

அதிஉயர் வீச்சினைப் பெற $\sin 2\alpha = 1,\;\; \alpha = 45^\circ$

l உயர்வு $= R = \dfrac{u^2}{g}$ ஆகும்.

$$= \frac{3}{5}R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{u^2}{g} = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{3}{5}$$

$$3\tan^2\alpha - 10\tan\alpha + 3 = 0$$

$$(3\tan\alpha - 1)(\tan\alpha - 3) = 0$$

$\tan\alpha = \frac{1}{3}, 3.$ ஆகவே இரு எறியல் கோணங்கள் உண்டு

முதலாவது வகையில் துணிக்கை அடைந்த அதி உயர் உயரம் H_1

இரண்டாவது வகையில் துணிக்கை அடைந்த அதிஉயர் உயரம் H_2 என்க.

$$H_1 = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2}{2g} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20} \cdot \frac{u^2}{g} = \frac{1}{20} R \left[\tan\alpha = \frac{1}{3}\right]$$

$$H_2 = \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{u^2}{2g} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20} \frac{u^2}{g} = \frac{9}{20} R$$

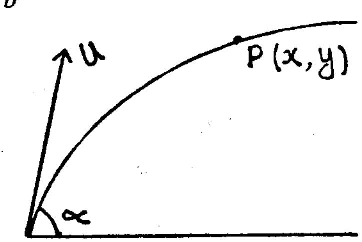
$$H_2 - H_1 = \frac{9}{20} R - \frac{1}{20} R = \frac{2}{5} R$$

உதாரணம் 2

கிடையுடன் கூடிய θ விலே வேகம் u உடன் எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்றுக்கு எறியல் புள்ளியினூடாக உள்ள கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீதுள்ள வீச்சைக் காண்க.

தரையிலிருந்து பந்து ஒன்று இரு சுவர்களை மட்டுமட்டாகத் தாண்டிச் செல்லுமாறு எறியப்படுகிறது. முதலாம் சுவர் எறியல் புள்ளியிலிருந்து உயரம் a யிலும் தூரம் b இலும் இருக்கும் அதே வேளை, இரண்டாம் சுவர் எறியல் புள்ளியிலிருந்து உயரம் b இலும் தூரம் a இலும் இருக்கிறது. கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. எனக் காட்டுக.

எறியல் கோணம் α எனின் $\frac{a\tan\alpha - b}{b\tan\alpha - a} = \frac{a^2}{b^2}$ எனவும் காட்டி $\tan\alpha > 3$ என்பதை உய்த்தறிக.



கிடைவீச்சு $= \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$\rightarrow x = u\cos\alpha\, t \quad \text{------------} \quad (1)$$

$$\uparrow y = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{------------} \quad (2)$$

(i) $x = b$ ஆக $y = a$

$$b = u\cos\alpha\, t$$

$$a = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$a = b\tan\alpha - \frac{gb^2\sec^2\alpha}{2u^2} \quad \text{------------} \quad (1)$$

(2) $x = a$ ஆக $y = b$

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} \quad \text{------------} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow b\tan\alpha - a = \frac{gb^2\sec^2\alpha}{2u^2}$$

$$(2) \Rightarrow a\tan\alpha - b = \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2}$$

$$\frac{a\tan\alpha - b}{b\tan\alpha - a} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 b\tan\alpha - a^3 = ab^2\tan\alpha - b^3$$

$$\tan\alpha = \frac{a^3 - b^3}{ab(a - b)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \quad \text{------------} \quad (A)$$

$$(1) \times a,\ a^2 = ab\tan\alpha - \frac{gab^2\sec^2\alpha}{2u^2} \quad \text{------------} \quad (3)$$

$$(2) \times b,\ b^2 = ab\tan\alpha - \frac{ga^2 b\sec^2\alpha}{2u^2} \quad \text{------------} \quad (4)$$

$$(3)-(4)\ a^2-b^2=\frac{gab\sec^2\alpha}{u^2}(a-b)$$

$$\frac{u^2}{g\sec^2\alpha}=\frac{ab}{2(a+b)} \quad \text{---------------------------} \quad (B)$$

$$\text{கிடைவீச்சு} = \frac{u^2}{g sec^2\alpha}=\frac{u^2\cdot 2tan\alpha}{g(1+tan^2\alpha)}=\frac{u^2}{g sec^2 g\alpha}\cdot 2tan\alpha$$

$$=\frac{ab}{2(a+b)}\cdot\frac{2(a^2+ab+b^2)}{ab}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} \quad \text{-------------} \quad B$$

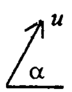
(A) இலிருந்து $\tan\alpha=\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab}=\dfrac{(a^2+b^2)+ab}{ab}\geq\dfrac{2ab+ab}{ab}\geq 3$ ஆகும்.

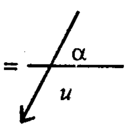
உதாரணம் 3

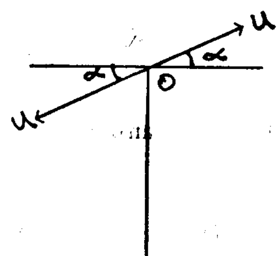
இரு பாரமான துணிக்கைகள் A, B என்பன ஒரே கணத்தில் ஒரே புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகின்றன. முதலாவது துணிக்கை A, u கதியுடன் கிடையுடன் α கோணத்திலும் இரண்டாவது துணிக்கை B, முதலாவது திசைக்கு எதிர்த்திசையில் அதே கதி u உடனும் எறியப்படுகின்றன.

(i) A யின் B தொடர்பான பாதை

(ii) அவற்றின் வேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் போது துணிக்கைகளுக்கிடையேயான தூரம் என்பவற்றைக் காண்க.

$V_{A,E}=$ 

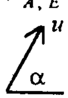
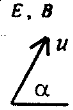
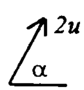
$V_{B,E}=$ 



ஆர்முடுகல்

t = o இல் வேகம்

$V_{A,B}=V_{A,E}+V_{E,B}$

$=$  $+$  $=$ 

$V_{A,B}=V_{A,E}+V_{E,B}$

$=\downarrow g+\uparrow g=0$

தொடர்பான ஆர்முடுகல் பூச்சியமாதலால். எனவே A யின் வேகம் B தொடர்பான பாதை O வினூடு, α கோணத்தில் ஒரு நேர்கோடாகும்.

t நேரத்தின் பின் A இன் வேகம் $\rightarrow u\cos\alpha,\ \uparrow u\sin\alpha-gt$

t நேரத்தின் பின் B இன் வேகம் $\leftarrow u\cos\alpha,\ \downarrow u\sin\alpha+gt$

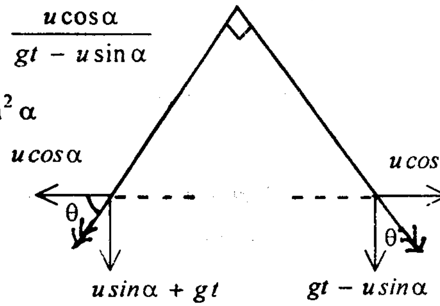
இரு வேகங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பின்,

$$\tan\theta=\frac{gt+u\sin\alpha}{u\cos\alpha}=\frac{u\cos\alpha}{gt-u\sin\alpha}$$

$$u^2\cos^2\alpha=g^2t^2-u^2\sin^2\alpha$$

$$u^2=g^2t^2$$

$$t=\frac{u}{g}$$



எனவே,வேகம் செங்குத்தாக இருக்கும் போது, துணிக்கைகளுக்கிடையேயான

தூரம் $=2u\cdot\dfrac{u}{g}=\dfrac{2u^2}{g}$ ஆகும்.

குறிப்பு: செங்குத்தாக இருக்கும் போது நேரத்தைக் கணிப்பதற்கு காவிகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

t நேரத்தின் பின் A, B இன் வேகங்கள் முறையே $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ எனின்

$$\underline{v_1}=\underline{u}+\underline{g}t$$

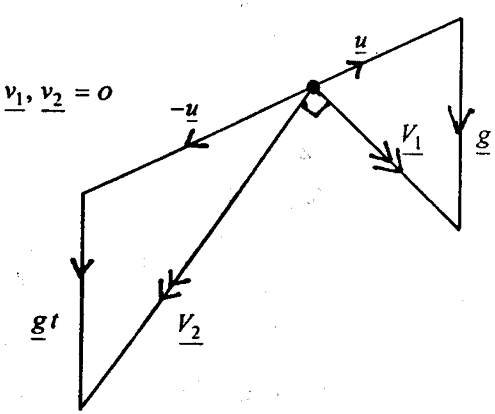
$$\underline{v_2}=-\underline{u}+\underline{g}t$$

$\underline{v_1}, \underline{v_2}$ செங்குத்தாக இருப்பதால் $\underline{v_1}\cdot\underline{v_2}=o$

$$(\underline{u}+\underline{g}t)\cdot(-\underline{u}+\underline{g}t)=o$$

$$-u^2+g^2t^2=o$$

$t=\dfrac{u}{g}$ ஆகும்.



உதாரணம் 4

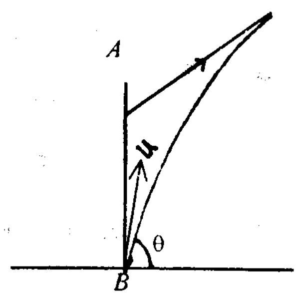
பறவை ஒன்று கிடையுடன் α என்னும் கோணச்சாய்விலுள்ள நேர்ப் பாதையில் u என்னும் சீர்க்கதியுடன் வானோக்கிப் பறக்கிறது. பறவை அதன் பாதையில் A என்னும் புள்ளியில் இருக்கையில் A யிலிருந்து நிலைக்குத்தாக h என்னும் தூரத்திலுள்ள B என்னும் புள்ளியிலிருந்து, கிடையுடன் θ என்னும் கோணத்திலே V என்னும் வேகத்திலே துப்பாக்கிக் குண்டொன்று சுடப்பட்டது. குண்டு பறவையை அடித்தால் பறவை தொடர்பாகக் குண்டின் பாதையை அவதானிப்பதாலோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ,

(i) $v \cos\theta = u \cos\alpha$

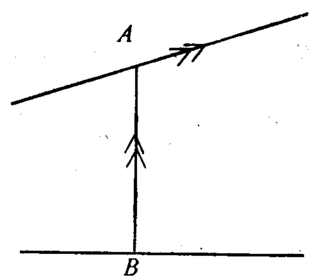
(ii) $\theta > \alpha$

(iii) $v > \sqrt{2gh}\cos\alpha \operatorname{cosec}(\theta-\alpha)$ எனக் காட்டுக.

குண்டு பறவையை அடிக்கும் தொடர்பு வேகம் என்ன?

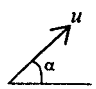


பூமியின் சட்டம்

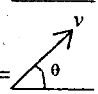


பறவையின் சட்டம்

பறவை $-P$ குண்டு $-B$ என்க.

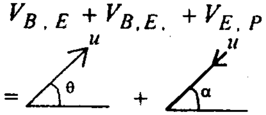
$V_{P,E} =$ 

$A_{P,E} = 0$

t=o இல், $A_{P,E} =$ 

$A_{B,E} = \downarrow g$

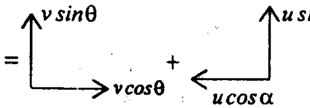
$V_{B,E} + V_{B,E.} + V_{E,P}$

$=$ 

$A_{B,P} = A_{B,E} + A_{E,P}$

$= \downarrow g + o$

$= \downarrow g$

$V_{B,P} =$ 

$= \rightarrow(v\cos\theta - u\cos\alpha) + \uparrow(V\sin\alpha - u\sin\alpha)$

குண்டு பறவையை அடிப்பதற்கு $V_{B,P}$ ஆனது $\uparrow$ (BA வழியே) இருத்தல் வேண்டும்.

(i) $\rightarrow(v\cos\theta - u\cos\alpha) = 0$

$v\cos\theta = u\cos\alpha$ --------------- (1)

(ii) $(v\sin\theta - u\sin\alpha)$, $\uparrow$ இருப்பதற்கு

$v\sin\theta - u\sin\alpha > 0$ ஆதல் வேண்டும்.

(i) இலிருந்து $v\sin\theta - \dfrac{v\cos\theta}{\cos\alpha}\sin\alpha > 0$

$$\frac{v\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} > 0$$

$\Rightarrow \sin(\theta-\alpha) > 0$

$\theta > \alpha$ ஆகும்.

குண்டு, பறவையை அடிக்கவேண்டுமெனில், A இல் பறவை தொடர்பான குண்டின் வேகம் >0 ஆதல் வேண்டும்.

$v^2 = u^2 + 2as$ என்பதில்

$w^2 = (v\sin\theta - u\sin\alpha)^2 - 2gh > 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\left(v\sin\theta - \frac{v\cos\theta}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha\right)^2 > 2gh$$

$[v\sin(\theta-\alpha)]^2 > 2gh\cos^2\alpha$

$\sin(\theta-\alpha) > 0$ என்பதால்

$v\sin(\theta-\alpha) > 2gh\cos\alpha$; $\underline{v > 2gh\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}(\theta-\alpha)}$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

a என்னும் ஆரையும் h என்னும் ஆழமும் கொண்ட வட்டமான கிணறொன்றின் அடியின் மையத்திலே ஒரு தவளை அமர்ந்திருக்கிறது. தவளை எத்திசையிலும் உச்சக்கதி u உடன் மேல்நோக்கி குதிக்க வல்லமையுடையது.

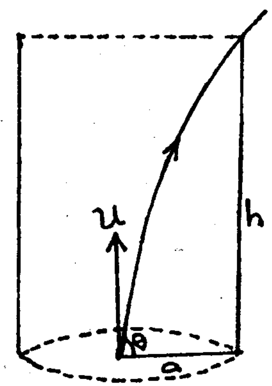
$u^2 \ge g\left[h + \sqrt{h^2 + a^2}\right]$ ஆயின், தவளை கிணற்றை விட்டு வெளியே குதிக்க முடியுமெனக் காட்டுக.

இந்நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்பட்டால் கிணற்றினது அடியின் எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் வெளியே குதிக்க தவளைக்கு இயலுமென அதிலிருந்த உய்த்தறிக.

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\rightarrow a = u\cos\theta \cdot t$

$\uparrow \quad h = u\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$



$$h = a\tan\theta - \frac{g\,a^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\theta\right)$$

$$\frac{ga^2}{2u^2}\tan^2\theta - a\tan\theta + \left(\frac{g\,a^2}{2u^2} + h\right) = 0$$

$$\Delta = a^2 - \frac{4ga^2}{2u^2}\left(\frac{ga^2}{2u^2} + h\right)$$

$$= \frac{a^2}{u^4}\left[u^4 - 2u^2\,gh - g^2\,a^2\right]$$

$\tan\theta$ இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \ge 0$ ஆக வேண்டும்.

$$u^4 - 2\,u^2\,gh - g^2\,a^2 \ge 0$$

$$u^4 - 2ghu^2 + g^2\,h^2 - g^2\left(a^2 + h^2\right) \ge 0$$

$$\left(u^2 - gh\right)^2 - g^2\left(a^2 + h^2\right) \ge 0$$

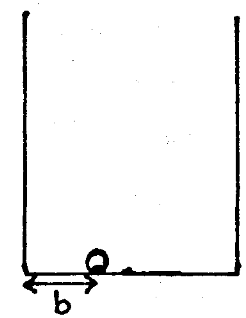
$$\left[u^2 - gh - g\sqrt{a^2 + h^2}\right]\left[u^2 - gh + g\sqrt{a^2 + h^2}\right] \ge 0$$

$\left[u^2 - gh + g\sqrt{a^2 + h^2}\right] > 0$ ஆதலால்,

$u^2 - gh - g\sqrt{a^2 + h^2} \ge 0$ ஆகும்

$u^2 \ge g\left[h + \sqrt{a^2 + h^2}\right]$ எனின் தவளை கிணற்றை விட்டு வெளியே குதிக்க முடியும்

தவளை, கிணற்றின், அடியின் விளிம்பிலிருந்து b தூரத்தில் உள்ள தென்க. தவளை வெளியே குதிக்கத் தேவையான வேகம் V எனின்,



$V^2 \ge g\left[h + \sqrt{b^2 + h^2}\right]$

$b < a$ ஆதலால்

$u^2 \ge v^2$ ஆகும். அதாவது $u^2 \ge g\left[h + \sqrt{b^2 + h^2}\right]$ ஆகும் எனவே கிணற்றின் அடியின் எந்தவொரு புள்ளியிலிருந்தும் தவளை வெளியே குதிக்க முடியும்.

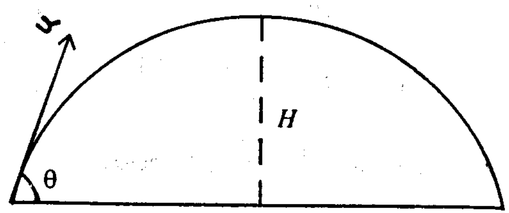
உதாரணம் 6

கொல்லப் பந்து ஒனறு, தரை மீதுள்ள ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து புறப்பட்டுக் கிடையுடன் θ ஆரையன் ஏற்றத்தில் u மீற்றர் / செக்கன் கதியில் செல்லக் கூடியதாக அடிக்கப்படுகிறது. பந்தின் கிடை வீச்சு $g^{-1}\,u^2\,\sin 2\theta$ எனவும், அடையப்படும் ஆகவும் கூடிய உயரம் $\frac{1}{2}g^{-1}u^2\,\sin^2\theta$ எனவும் காட்டுக.

P யுடன் ஒரே மட்டத்தில் பந்து வீழ்வதாகவும், பந்து புற்றரையில் விழத்தக்க மிகக் கிட்டிய புள்ளியும், மிகத் தொலைவிலுள்ள புள்ளியும், P யிலிருந்து முறையே $\frac{\sqrt{3}}{2}\,g^{-1}\,u^2$ மீற்றர், $g^{-1}u^2$ மீற்றர் தூரத்திலிருப்பின் $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

பந்து புற்றரையில் படுமாறு அடையத்தக்க ஆகவும் கூடிய உயரத்தைக் காண்க.

$\underline{s = ut + \frac{1}{2}at^2}$



$\uparrow 0 = u\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$t \neq 0, \ t = \frac{2\,u\sin\theta}{g}$

$\rightarrow$ கிடைவீச்சு $R = u\cos\theta \cdot t = u\cos\theta \cdot \frac{2u\sin\theta}{g} = g^{-1}u^2\sin 2\theta$

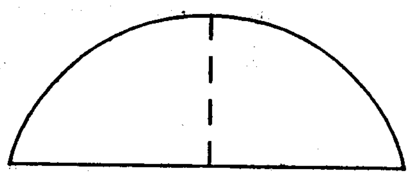
அதிஉயர் உயரம் H என்க.

$\uparrow \underline{v^2 = u^2 + 2as}$

$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH$

$H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{1}{2}g^{-1}u^2\sin^2\theta$

மிகத் தொலைவிலுள்ள புள்ளியானது, $R = g^{-1}u^2\sin 2\theta$ என்பதில் $\theta = 45^o$ எனப்பிரதியிட, R உயர்வு $= g^{-1}u^2$ ஆகும்.



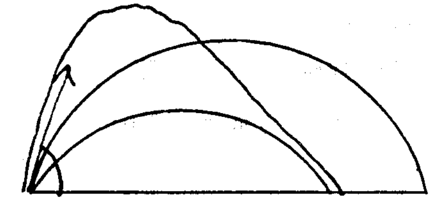
மிகக்கிட்டிய புள்ளிக்கானது $R = g^{-1}u^2\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2 g^{-1}$

என்பதில் $\sin 2\theta = \sqrt{3}/2$, $\quad 2\theta = \frac{\pi}{3}$ அல்லது $\frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

$\theta = \frac{\pi}{6}$ அல்லது $\frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

எனவே $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

$H = \frac{1}{2}g^{-1}u^2\sin^2\theta$ என்பதில்



$\theta = 60^o$ ஆகும் போது

அதிஉயர் உயரம் பெறப்படும்.

$H = \frac{1}{2}g^{-1}u^2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}g^{-1}u^2$ ஆகும்.

உதாரணம் 7

$2a$ கிடைத்தூரத்திலுள்ள ஒவ்வொன்றும் a உயரமான இரு நிலைக்குத்தான சுவர்களை மட்டாகக் கடந்து செல்லுமாறு துணிக்கை ஒன்று நிலமட்டத்திலிருந்து $\sqrt{kag}$ எனும் கதியுடன் எறியப்படுகிறது. எறியல் கோணம் α எனின், எறியல் புள்ளியானது கிட்ட உள்ள சுவரிலிருந்து $a(k\sin\alpha\cos\alpha - 1)$ என்னும் தூரத்தில் இருக்க வேண்டும் எனவும், எறியல் கோணம் α ஆனது, $\sec^4\alpha - (k^2 - 2k)\sec^2\alpha + k^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனவும் காட்டுக.

$k = 4$ ஆகும்போது எறியல் புள்ளியினைக் காண்க. துணிக்கை அடைந்த அதிஉயர் உயரம் $\frac{3a}{2}$ எனவும் காட்டுக.

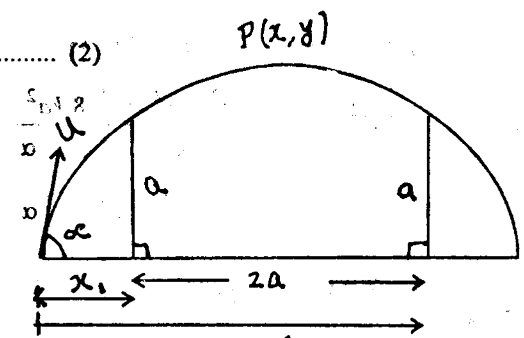
$\underline{s = ut + \frac{1}{2}at^2}$

$\rightarrow x = u\cos\alpha \cdot t$ .... (1)

$\uparrow y = u\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ .... (2)

$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\alpha$

$u = \sqrt{kag}$



ஆகவே, சமன்பாடு $x^2 \dfrac{sec^2\alpha}{2ka} - tan\alpha\, x + y = 0$

இது x இல் ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு

$y = a$ ஆக இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் x_2 , x_1 என்க.

($x_2 > x_1$ என்க)

$$sec^2\alpha\, x^2 - 2ka\,tan\alpha\, x + 2ka^2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2ka\, tan\,\alpha}{sec^2\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2ka^2}{sec^2\alpha}$$

மேலும் தரவிலிருந்து $x_2 - x_1 = 2a$

$$\therefore x_2 + x_1 = \frac{2ka\,tan\alpha}{sec^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$x_2 - x_1 = 2a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(3) - (4) $$2x_1 = 2a\left(k\frac{tan\alpha}{sec^2\alpha} - 1\right)$$

$$x_1 = a\left(k\, sin\alpha\, cos\alpha - 1\right)$$

எறியல் புள்ளியிலிருந்து சுவரின் தூரம் $= a\left(k\, sin\alpha\, cos\alpha - 1\right)$

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2$$

$$(2a)^2 = \frac{4k^2a^2\, tan^2\alpha}{sec^4\alpha} - \frac{8ka^2}{sec^2\alpha}$$

$$sec^4\alpha = k^2\left(sec^2\alpha - 1\right) - 2k\, sec^2\alpha$$

$$sec^4\alpha - \left(k^2 - 2k\right) sec^2\alpha + k^2 = 0$$

$k = 4$ எனின், $u = 2\sqrt{ag}$

$$sec^4\alpha - 8sec^2\alpha + 16 = 0$$

$$\left(sec^2\alpha - 4\right)^2 = 0$$

$$cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

துணிக்கை அடைந்த மிகப்பெரிய உயரம் $= \dfrac{u^2\, sin^2\alpha}{2g} = \dfrac{4ag}{2g} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3a}{2}$

உதாரணம் 8

துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்துடன் 2β சாய்வுடைய சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து அதி உயர் சாய்வுக் கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயங்குமாறு மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. துணிக்கையின் தொடக்க கதி $u\,cos\beta$ ஆகவும், திசை நிலைக்குத்துடன் β கோணத்திலும் அமைந்துள்ளது.

(i) பறப்பு நேரம் $\dfrac{u}{g}$ (ii) சாய்தளத்தில் வீச்சு $\dfrac{u^2}{2g}$

(iii) தளத்தை அடிக்கும் கதி $u\,sin\beta$ எனக் காட்டுக.

தளத்தை துணிக்கை அடிக்கச் சற்றுமுன் துணிக்கையின் இயக்கத் திசை செங்கோணம் ஒன்றினூடாகவும் திரும்பியுள்ளதெனக் காட்டுக.

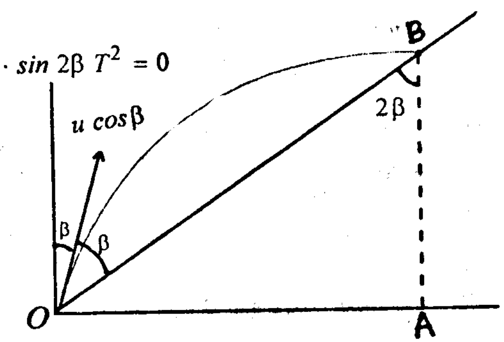
$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

பறப்பு நேரம் T என்க.

$$o = u\,cos\beta \cdot sin\beta\, T - \frac{1}{2}\, g \cdot sin\, 2\beta\, T^2 = 0$$

$$T \neq 0,\ T = \frac{2\,u\,sin\,\beta\, cos\beta}{g\, sin2\beta}$$

$$= \frac{u}{g}$$



$\rightarrow OA = u\cos\beta\ \sin\beta \cdot T$

$$= \frac{u^2 \sin\beta\ \cos\beta}{g}$$

$$OB = \frac{OA}{\sin 2\beta} = \frac{u^2}{2g} \quad \therefore \text{ சாய்தளத்தில் வீச்சு } = \frac{u^2}{2g}$$

$\underline{v = u + at}$ தளத்தை அடிக்கும்போது, தளத்திற்கு செங்குத்தான வேகம் v_1 என்.

$$v_1 = u\cos\beta \cdot \sin\beta - g\ \sin 2\beta \cdot \frac{u}{g}$$

$$= -\, u\sin\beta\ \cos\beta$$

தளத்தின் வழியே வேகம் v_1 என்க.

$$\nearrow v_2 = u\ \cos\beta \cdot \cos\beta - g\ \cos 2\beta \cdot \frac{u}{g}$$

$$= u\cos^2\beta - \left(u\ \cos^2\beta - u\ \sin^2\beta\right)$$

$$= u\sin^2\beta$$

$$\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = \sqrt{(u\ \sin\beta\ \cos\beta)^2 + \left(u\sin^2\beta\right)^2}$$

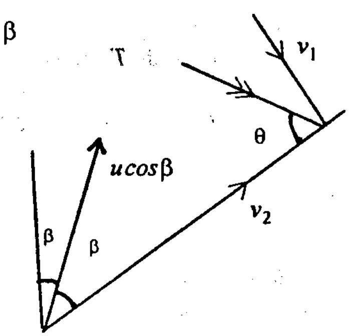
$$= \sqrt{u^2\ \sin^2\beta\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right)}$$

$$= \sqrt{u^2\ \sin^2\beta} = u\ \sin\beta$$

$$\tan\theta = \frac{u\ \sin\beta\ \cos\beta}{u\sin^2\beta}$$

$$\tan\theta = \cot\beta = \tan(90-\beta)$$

$$\theta = 90 - \beta$$

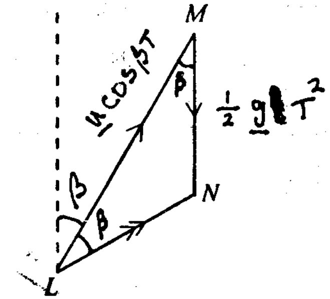


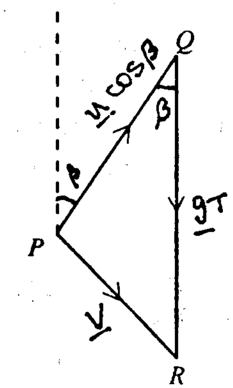
எனவே தளத்தை அடிக்கும் போது அதன் வேகம் செங்கோணத்தினூடு திருப்பப்படும்.

[காவியைப்பயன்படுத்துவதன் மூலம்

$\underline{r} = \underline{u}\,t + \frac{1}{2}\,\underline{g}\,t^2,$ $\qquad \underline{v} = \underline{u} + \underline{g}\,t$ என்பதில்

$\underline{r} = \underline{u}\cos\beta\ T + \frac{1}{2}\,\underline{g}\,T^2$ $\qquad \underline{v} = \underline{u}\cos\beta + \underline{g}\,T$





$\Delta\ LMN$ இல்

$$\frac{LM}{\sin[180-2\beta]} = \frac{MN}{\sin\beta} = \frac{LN}{\sin\beta} \qquad \left|\underline{u}\right| = u \quad \left|\underline{g}\right| = g$$
$$\left|\underline{r}\right| = r = LN$$

$$\frac{u\cos\beta\cdot T}{\sin 2\beta} = \frac{gT^2}{2\sin 2\beta}\ ;\ T = \frac{u}{g} \text{ ஆகும்}$$

$$r = LN = MN = \frac{u\ \cos\beta\cdot T}{\sin 2\beta}\cdot\sin\beta = \frac{u}{2}\cdot\frac{u}{g} = \frac{u^2}{2g} \text{ ஆகும்}$$

முக்கோணி PQR இல்

$$PQ = \left|\underline{u}\ \cos\beta\right| = u\ \cos\beta$$

$$QR = \left|\underline{gT}\right| = g \times \frac{u}{g} = u$$

கோணம் $PQR = \beta$

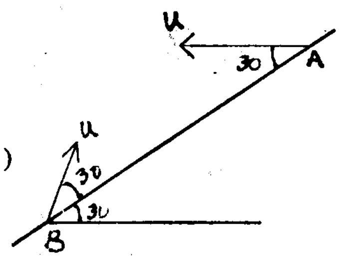
எனவே கோணம் QPR ஆனது செங்கோணமாயிருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \left|\underline{v}\right| = u\ \sin\beta$$

$\therefore$ தளத்தை அடிக்கும் போது வேகம் $u\sin\beta$ வேகம், செங்கோணத்தினூடு திருப்பப்பட்டுள்ளது]

உதாரணம் 9

கிடையுடன் 30^o சாய்வுடைய சாய்தளமொன்றின் அதி உயர் சரிவுக்கோடொன்றில் A , B என்னுமிரு புள்ளிகள் l இடைத்தூரத்திலுள்ளன. A யானது B யிலும் மேலான மட்டத்திலுள்ளது. A, B என்பவற்றிலிருந்து சம திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் ஒரே நேரத்தில், ஒரே கதி $\sqrt{gl}$ உடன் எறியப்படுகின்றன. A யிலுள்ள துணிக்கை B ஐ நோக்கி கிடையாக எறியப்படும் அதே வேளை, B யிலுள்ள துணிக்கை A ஐ நோக்கி கிடையுடன் 60^o ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. துணிக்கைகள் மோதும் என நிறுவி, மோதுகையின் போது அத்துணிக்கை ஒன்று சேருமெனின், சேர்த்திக் திணிவு, கிடைக்கு கீழாக 30^o திசையிலே இயங்கத் தொடங்கும் எனக் காட்டுக.



துணிக்கை B இற்கு தளத்தின் வழியே, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

↗ $d_1 = u\cos 30\cdot t - \frac{1}{2} g\sin 30\cdot t^2$ ------- (1)

தளத்திற்கு செங்குத்தாக,

$h_1 = u\sin 30\cdot t - \frac{1}{2} g\cos 30\cdot t^2$ ---------(2)

துணிக்கை A இற்கு தளத்தின் வழியே

↙ $d_2 = u\cos 30\cdot t + \frac{1}{2} g\sin 30\cdot t^2$ ------- (3)

தளத்திற்கு செங்குத்தாக,

$o = u\sin 30\cdot t - \frac{1}{2} g\cos 30\cdot t^2$ ----------- (4)

(2), (4) இலிருந்து $h_1 = h_2$ ஆகும்.

மோதும் போது $d_1 + d_2 = l$

(1) + (3) $d_1 + d_2 = 2u\cos 30\cdot t = l$

$$2\sqrt{gl}\cos 30\cdot t = l$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{3g}}$$

எறியப்பட்டு $\sqrt{\frac{l}{3g}}$ நேரத்தின் பின்னர் மோதுகை நடைபெறும்.

$\sqrt{\frac{l}{3g}}$ நேரத்தின் பின் துணிக்கையின் வேகங்கள்

B யின், தளத்தின் வழியேயான வேகம்

↗ $v_1 = \sqrt{gl}\cos 30 - g\sin 30\cdot\sqrt{\frac{l}{3g}}$

$$= \frac{\sqrt{3gl}}{2} - \frac{\sqrt{3gl}}{6} = \frac{\sqrt{3gl}}{3}$$

தளத்திற்கு செங்குத்தாக வேகம்

↖ $v_2 = \sqrt{gl}\cos 30 + g\cos 30\sqrt{\frac{l}{3g}} = 0$

A யின் தளத்தின் வழியேயான வேகம்

↙ $w_1 = \sqrt{gl}\cos 30 + g\sin 30\sqrt{\frac{l}{3g}}$

$$= \frac{2\sqrt{3gl}}{3}$$

தளத்திறகு செங்குத்தான வேகம்,

↖ $w_2 = \sqrt{gl}\sin 30 - g\cos 30\frac{l}{\sqrt{3g}} = 0$

மோதுகையின் போது இரு துணிக்கைகளினதும் வேகங்கள் தளத்திற்கு சமாந்தரமாகும்

↙ உந்தக்காப்புவிதி

$$2m V_o = m w_1 - m v_1$$

$-V_o = \frac{\sqrt{3gl}}{6}$ எனும் வேகம் கிடையுடன் கீழாக 30^o இல்

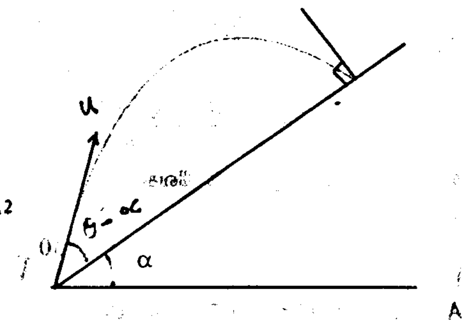
உதாரணம் 10

கிடையுடன் α என்னும் சாய்வுக் கோணத்தை அமைக்கும் தளத்திலுள்ள O என்னும் புள்ளியிலிருந்து அதிஉயர் சரிவுக் கோட்டினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே கிடையுடன் θ கோணத்தை அமைக்குமாறு துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. துணிக்கை மீண்டும் தளத்தை செங்கோணத்தில் அடிப்பின்

$$(\theta-\alpha) = \frac{1}{2}\cot\alpha \quad \text{என நிறுவுக.}$$

$\underline{s = ut + \frac{1}{2}at^2}$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக,



பறப்பு நேரம் t என்க.

$$0 = u\sin(\theta-\alpha)\, t\ \tfrac{1}{2}\, g\cos\alpha\cdot t^2$$

$$t \neq 0, \quad t = \frac{2u\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$$

தளத்தை செங்குத்தாக, அடிப்பதால், தளத்தை அடிக்கும்போது தளத்தின் வழியே வேகம் பூச்சியம் ஆகும்

$$v = u + at$$

$$o = u\sin(\theta-\alpha) - g\sin\alpha\cdot\frac{2u\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$$

$$\tan(\theta-\alpha) = \frac{1}{2}\cot\alpha$$

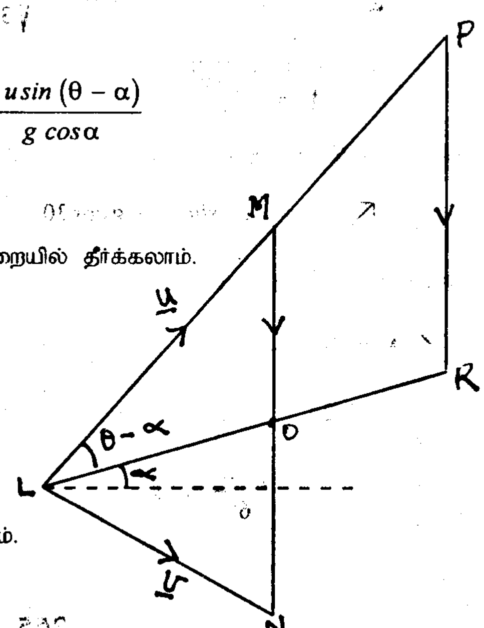
காவியைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் முறையில் தீர்க்கலாம்.

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}\,t$

$\underline{r} = \underline{u}\,t + \frac{1}{2}\underline{g}\,t^2$

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{g}\,t$ இற்கு வரையப்பட்ட முக்கோணி LMN ஆகும்

$\vec{LM} = \underline{u}$, $\vec{MN} = \underline{g}t$, $\vec{LN} = \underline{v}$ ஆகும்.



மேலும், கோணம் $OLN = 90^o$

$\underline{r} = \underline{u}\,t + \frac{1}{2}\underline{g}\,t^2$ இற்கு

வரையப்பட்ட முக்கோணி LPR ஆகும்.

$\vec{LP} = \underline{u}t$, $\vec{PR} = \frac{1}{2}\underline{g}\,t^2$, $\vec{LR} = \underline{r}$ $\qquad |\underline{u}| = u, |\underline{g}| = g$

$\frac{LP}{LM} = t$ ஆதலால், $\frac{PR}{MO} = t$

ஆகவே $MO = \frac{gt}{2}$

எனவே O, MN இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

$\underline{\Delta\ LMN}$ இற்கு

$$(1+1)\cot(90-\alpha) = 1\cot(\theta-\alpha) - 1\cot 90^o$$

$$2\tan\alpha = \cot(\theta-\alpha)$$

$$\tan(\theta-\alpha) = \frac{1}{2}\cot\alpha$$

உதாரணம் 11

ஒப்பமான சாய்தளமொன்றிலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்று, r ஆவது மோதுகையின் போது தளத்தை செங்குத்தாக அடிக்கின்றது. n ஆவது மோதுகையின்போது எறியல் புள்ளிக்கு வருகிறது. பந்துக்கும், தளத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின்

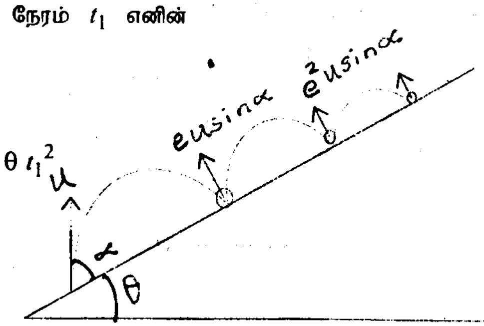
$e^2 - 2e^r + 1 = 0$ எனக் காட்டுக.

முதலாவது மோதுகைக்கு எடுத்த நேரம் t_1 எனின்

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = u\sin\alpha\cdot t_1 - \frac{1}{2}g\cos\theta\, t_1^2$$

$$t_1 = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}$$



மோதுகைகளுக்குமான மொத்த நேரம் Tr எனின்

$$Tr = t_1 + t_2 + t_3 + \dots\dots + t_r$$

$$= \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta} + \frac{2eu\sin\alpha}{g\cos\theta} + \dots\dots + \frac{2e^{r-1}u\sin\alpha}{g\cos\theta}$$

$$= \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}\left[1 + e + e^2 + \dots\dots + e^{r-1}\right]$$

$$= \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}\frac{\left(1-e^r\right)}{(1-e)} \text{ ------------- (A)}$$

மோதுகையால், தளத்தின் வழியேயான வேகத்தில் மாற்றமில்லை. r ஆவது மோதுகையில் தளத்தை செங்குத்தாக அடிப்பதால் நேரம் Tr இல் தளத்தின் வழியே வேகம் பூச்சியம் ஆகும்.

$$v = u + at$$

$$o = u\cos\alpha - g\sin\theta\, Tr$$

$$Tr = \frac{u\cos\alpha}{g\sin\theta} \text{ ------------- (B)}$$

(A) , (B) இலிருந்து, $\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}\frac{\left(1-e^r\right)}{1-e} = \frac{u\cos\alpha}{g\sin\theta}$ ------------- (1)

n மோதுகைகளுக்கு எடுத்த நேரம், (A) யிலிருந்து,

$$Tn = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}\frac{\left(1-e\right)^n}{1-e} \text{ ------------- (C)}$$

n ஆவது மோதுகையின்போது துணிக்கை எறியல் புள்ளிக்கு வருவதால், தளத்தின் வழியே $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பாவிக்க,

$Tn\nearrow$ $o = u\cos\alpha\cdot Tn - \frac{1}{2}g\sin\theta\, Tn^2$

$$Tn = \frac{2u\cos\alpha}{g\sin\theta} \text{ ------------- (D)}$$

(C) , (D) யிலிருந்து. $\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}\frac{\left(1-e^n\right)}{1-e} = \frac{2u\cos\alpha}{g\sin\theta}$ --------------- (2)

$(2)\div(1)$, $\frac{1-e^n}{1-e^r} = 2$

$e^n - 2e^r + 1 = 0$ ஆகும்.

உதாரணம் 12

கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ள தளம் ஒன்றின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி O விலிருந்து ஒரு துணிக்கை P ஆனது தொடக்கவேகம் $\underline{u}$ தளத்துடன் கோணம் $\theta\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ வை ஆக்கிக்கொண்டு அதியுயர் சரிவுக்கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்குமாறு எறியப்படுகிறது. நேரம் T இற்குப் பின்னர் துணிக்கை சாய்தளத்துடன் புள்ளி M இல் மோதுமெனின், அப்போது அதன் தானக்காவி $\underline{r} = \underline{u}T + \frac{1}{2}\underline{g}T^2$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு g ஆனது ஈர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல்.

இக்காவிச் சமன்பாட்டை வகை குறிக்கும் முக்கோணி OLM ஐ வரைக.

இவ்வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $T = \frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}$ எனக் காட்டி, $|\underline{r}|$ ஐக் காண்க.

சாய்தளத்தின் வழியே மேன்முகமாக உயர்வீச்சு R ஐத் தரும் θ வின் பெறுமானம் $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ ஐ உய்த்தறிந்து, R இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மேலும் R ஐத் தரும் P யின் இப்பாதைக்கு

(i) பறப்பு நேரம் $T = \frac{\sqrt{2}u}{g\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$ எனவும்,

(ii) $R = \frac{gT^2}{2}$ எனவும் காட்டுக.

$\underline{r} = \underline{u}T + \frac{1}{2}\underline{g}T^2$

$\Delta\, OLM$ இற்கு சைன் விதியைப் பாவிக்க

$$\frac{OL}{\sin(90+\alpha)} = \frac{LM}{\sin\theta} = \frac{OM}{\sin[90-(\theta+\alpha)]}$$

$$\frac{uT}{\cos\alpha} = \frac{gT^2}{2\sin\theta} = \frac{r}{\cos(\theta+\alpha)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2u\sin\theta}{g\cos\alpha}, \quad r = \frac{2u^2\cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{g\cos^2\alpha}$$

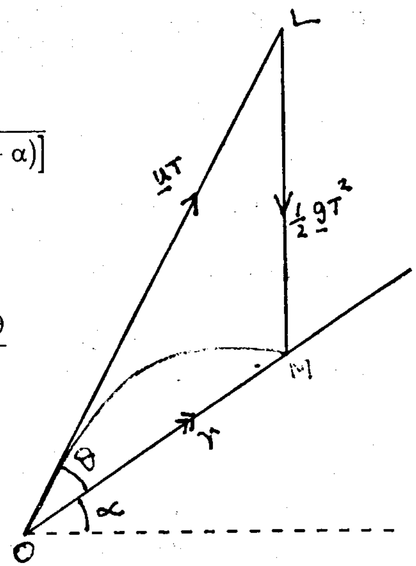
$$r = \frac{u^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin(2\theta+\alpha) - \sin\alpha\right]$$

உயர்வாக இருக்க, $\sin(2\theta+\alpha) = 1$

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

$$R = \frac{u^2}{g\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha)$$

$$= \frac{u^2}{g(1+\sin\alpha)}$$



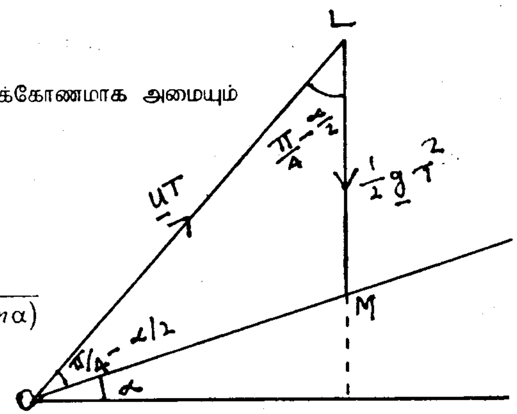
OM உயர்வாக இருக்கும்போது,

$\Delta\, OLM$ இருசமபக்க முக்கோணமாக அமையும்

$$OM = LM$$

$$R = \frac{1}{2}gT^2$$

$$\frac{1}{2}gT^2 = \frac{u^2}{g(1+\sin\alpha)}$$



$$T^2 = \frac{2u^2}{g^2(1+\sin\alpha)}$$

$$T = \frac{2u^2}{g^2\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$T = \frac{\sqrt{2}\,u}{g\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

பயிற்சி 6

6 (a)

1. துணிக்கை ஒன்று $30ms^{-1}$ உடன் 30° ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது.
(i) துணிக்கை அடைந்த அதி உயர் உயரம் (ii) பறப்பு நேரம்
(iii) கிடை வீச்சு (iv) $4m$ உயரத்தில் துணிக்கை இருக்கும் போது, அதன் கதியும், இயக்கத்திசை என்பவற்றைக் காண்க.

2. கிடைத்தளத்திலிருந்து $60m$ உயரமான புள்ளி ஒன்றிலிருந்து, $600ms^{-1}$ உடன் குண்டு ஒன்று கிடையாகச் சுடப்பட்டது. எறியற் புள்ளியிலிருந்து கிடையாக எவ்வளவு தூரத்தில் குண்டு நிலத்தை அடிக்கும் எனக் காண்க.

3. $160\,m$ உயரமான நிலைக்குத்தான குன்றின் உச்சியிலிருந்து, $180ms^{-1}$ கதியில் கிடையுடன் 30° ஏற்றக்கோணத்தில் குண்டொன்று சுடப்பட்டது. குன்றின் அடியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் குண்டு கிடைத்தரையை அடிக்கும் எனக் காண்க.

4. சிறுவன் ஒருவன் கிடையுடன் 30° இல் $28ms^{-1}$ உடன் P என்னும் புள்ளியிலிருந்து கல் ஒன்றினை எறிகின்றான்.
(i) கல் தன் பாதையில் அதி உயர் புள்ளியை அடைய எடுத்த நேரம்
(ii) கல் அடைந்த அதி உயர் உயரம்
(iii) எறியற் புள்ளியினூடான கிடைத்தளத்தைக் கல் அடிக்க எடுத்த நேரம்
(iv) கிடைத் தளத்திலான வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

5. கிடையாக $360kmh^{-1}$ உடன் பறக்கும் ஒரு விமானம் தரையில் கிடையாக $200\,m$ தூரத்திலுள்ள நிலை ஒன்றினைத் தாக்குவதற்காகக் குண்டொன்றினை விழவிடுகின்றது. குண்டு அந் நிலையைத் தாக்குவதற்கு விமானம் எவ்வுயரத்தில் பறக்க வேண்டும்?

6. எறியற் புள்ளியிலிருந்து $32m$ தூரத்திலுள்ள $12m$ உயரமான சுவரை, எறிபொருள் கிடைத்திசையில் மட்டுமட்டாகக் கடந்து செல்கிறது. எறிபொருளின் கதியையும் எறியற் கோணத்தையும் காண்க.

7. துணிக்கை ஒன்று O என்னும் புள்ளியிலிருந்து $30ms^{-1}$ தொடக்க வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. O வின் அதே மட்டத்தில் $60m$ தூரத்தலுள்ள புள்ளியை இத்துணிக்கை அடைய வேண்டுமெனில் இரு எறியல் கோணங்கள் உண்டெனக் காட்டி அவற்றைக் காண்க. $\left(g = 10ms^{-1}\right)$

8. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து $50ms^{-1}$ தொடக்கக் கதியுடன் எறியப்படும் துணிக்கை ஒன்று, O விலிருந்து கிடையாக $10m$ தூரத்தில் உள்ள, $50m$ உயரமான சுவரை மட்டுமட்டாகக் கடக்கின்றது. இரு இயல்தகு எறியற் கோணங்களையும் காண்க. $\left(g = 10ms^{-2}\right)$

9. தொடக்கக்கதி u உடன் எறியப்படுகின்ற துணிக்கை ஒன்று எறியற்புள்ளியிலிருந்து கிடையாக $5u$ தூரத்தில், u உயரத்திலுள்ள புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது. இது சாத்தியமாவதற்கு இரு எறியற் கோணங்கள் உண்டெனின் $u^2 > 20\,(u + 125)$ எனக் காட்டுக. ஒரு எறியற் கோணம் மட்டுமே உண்டெனிற் u இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. $\left(g = 10ms^{-2}\right)$

10. $2m$ உயரமான சுரங்கப் பாதை ஒன்றினுள் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகின்றது. தொடக்கக் கதி u எனின் சுரங்கத்தினுள் அதி உயர் வீச்சு $4\sqrt{\dfrac{u^2 - 4g}{g}}$ எனக் காட்டுக.

11. தரப்பட்ட எறியற் கதிக்குத் துணிக்கை ஒன்று அடையக்கூடிய உயர் கிடைவீச்சு R ஆகும் எனின் அதே எறியற் கதியுடன் எறியற் புள்ளியிலிருந்து கிடை நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே $\frac{1}{2}R,\ \frac{1}{4}R$ ஆகவுடைய புள்ளியினூடாகச் செல்லுமாறு எறியப்படலாம் எனக் காட்டுக. இச் சந்தர்ப்பத்தில் எறியக் கோணத்தின் தான்சனின் பெறுமானம் 1 அல்லது 3 எனக் காட்டி இரண்டாவது சந்தர்ப்பத்தில் கிடை வீச்சு $\frac{3}{5}R$ எனக் காட்டுக.

12. எறிபொருள் ஒன்று அடைந்த அதி உயர் உயரம் H ஆகவும், கிடை வீச்சு R ஆகவும் இருப்பின் எறிபொருளின் தொடக்கக் கதி $\left[2g\left(H + \dfrac{R^2}{16H}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

13. P,Q என்னும் இரு துணிக்கைகள், ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A,B என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் u, $2u$ கதிகளுடன் எறியப்படுகின்றன. P ஆனது அதன் அதி உயர் கிடை வீச்சு AB ஐ அடையுமாறு எறியப்படுகிறது. இரு துணிக்கைகளும் மோதுமெனின், Q இன் எறியற் கோணத்தைக் காண்க. அவை மோதும் உயரத்தை u,g இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

14. கிடைத்தரையில் $150m$ இடைத்தூரத்திலுள்ள A,B என்னுமிரு புள்ளிகளிலிருந்து இரு துணிக்கைகள் P,Q ஒரே நேரத்தில் எறியப்படுகின்றன. P நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி A யிலிருந்து ums^{-1} உடன் எறியப்படுகிறது. இரண்டாம் துணிக்கை Q, B யிலிருந்து A ஐ நோக்கி α ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. இரு துணிக்கைகளும், அவை இரண்டும் AB இற்கு மேல் அதி உயர் உயரத்திலிருக்கும் போது மோதுமெனின் $tan\alpha = \dfrac{u^2}{150g}$ எனக் காட்டுக.

15. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து இரு துணிக்கைகள் ஒரே நேரத்தில், ஒரே தொடக்கக் கதியுடன், ஆனால் α, $90^\circ - \alpha$ ஏற்றக் கோணங்களில் எறியப்படுகின்றன. இரு எறியங்களினதும் கிடை வீச்சுக்கள் சமமெனக் காட்டுக. துணிக்கைகளின் பறப்பின் போது அவற்றினை இணைக்கும் கோடு கிடையுடன் 45° ஐ அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

16. O எனும் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. O விற்கு மேலே அதன் அதி உயர் உயரம் h இலுள்ள கதியானது, O விற்கு மேலே $\dfrac{h}{2}$ உயரத்திலுள்ள கதியின் $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ மடங்காகும். எறியற் கோணம் கிடையுடன் 60° ஐ ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக.

17. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று u தொடக்கக் கதியுடன் எறியப்படுகிறது. இத் துணிக்கை O விலிருந்து a கிடைத் தூரத்தில் நிலைக்குத்தாக b உயரத்திலுள்ள புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது. இரு எறியற் கோணங்கள் உண்டெனக் காட்டி இக்கோணங்கள் α_1, α_2 எனின் $tan(\alpha_1 + \alpha_2) = -\dfrac{a}{b}$ எனக் காட்டுக.

18. $56m$ உயரமான கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து கிடையுடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் u கதியுடன் எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்று 4 செக்கன்களின் பின்னர் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து $32m$ தூரத்தில் விழுகிறது. u ஐயும் α ஐயும் காண்க. (துணிக்கையின் பாதை கோபுரத்திற்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது)

இரண்டாவது துணிக்கை ஒன்று அதே கணத்தில் அதே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கிடையுடன் α கோணத்தில் கீழ் நோக்கி எறியப்படுகிறது. இது நிலத்தை அடிக்க எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும் எனவும், இரண்டு துணிக்கைகளும் நிலத்தை அடிக்கும் புள்ளிகளுக்கிடையேயான தூரத்தையும் காண்க. $(g = 10ms^{-2})$

19. கிடை நிலத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று v கதியுடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. துணிக்கை அடையும் அதி உயர் உயரம் $\dfrac{v^2 sin^2\alpha}{2g}$ எனக் காட்டுக.

கிரிக்கெட் விளையாட்டின் போது பந்து வீசுபவர் விக்கெட்டில் இருந்து கிடையாக $20m$ தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் அவர் இருக்கையில், பந்தினை வீசுகிறார். பந்தானது நிலத்திற்கு மேலே $2m$ உயரத்தில் அவர் கையை விட்டு நீங்கி நிலத்தை அடிக்காமல் விக்கெட்டிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே நிலத்திலிருந்து $\dfrac{3}{4}m$ உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது. நிலத்திற்கு மேலே பந்து அடைந்த அதி உயர் உயரம் $3m$ ஆகும். பந்து கிடையுடன் வீசப்பட்டதெனக் காண்க.

விக்கெட்டின் மேலாகப் பந்து செல்லும் போது அதன் இயக்கத்திசை கிடையுடன் அமைக்கும் $tan^{-1}\left(\dfrac{3}{8}\right)$ கோணம் எனக் காட்டுக. பந்து கையை விட்டு நீங்கி எவ்வளவு நேரத்தின் பின் விக்கெட்டின் மேலாகச் செல்லும் எனக் காண்க.

20. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று v கதியுடன் கிடையுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. O விற்கு மேலே துணிக்கை அடையும் அதி உயர் உயரம் H ஆகவும் O வினூடான கிடைத்தளத்தில் வீச்சு R ஆகவும் இருப்பின்

(a) $H = \dfrac{v^2 sin^2\alpha}{2g}$ **(b)** $R = \dfrac{v^2 sin\,2\alpha}{g}$ எனவும் காட்டுக.

$16H^2 - 8R_0 H + R^2 = O$ என உய்த்தறிக. இங்கு R_o என்பது தரப்பட்ட எறியற் கதிக்கான உயர் வீச்சு ஆகும்.

$R_o = 200m$, $R = 192m$ எனத்தரப்படின் H இன் இரு இயல்தகு பெறுமானங் களையும், அவற்றிற்கு ஒத்த α இன் பெறுமானங்களையும் காண்க.

21. u எனும் கதியுடன், கிடைக்கு α ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்பட்ட துணிக்கை அடையும் அதியுயர் உயரத்தையும், கிடை வீச்சையும் காண்க.

u என்னும் தொடக்கக் கதியுடன் எறியப்படும் துணிக்கை ஒன்று அடையக் கூடிய அதியுயர் கிடைவீச்சு R ஆகும். u கதியுடன் எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்றின் கிடைவீச்சு $\frac{3}{5}R$ ஆகும். இயல்தகு இரு எறியற் கோணங்களையும் காண்க. இக்கோணங்களுக்கு ஒத்த அதி உயர் உயரங்களின் வித்தியாசம் $\frac{2}{5}R$ எனக் காட்டுக.

22. உற்பத்தி O விலிருந்து v கதியில் கிடையுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. O விலிருந்து துணிக்கை கிடையாக x தூரம் அசைந்து பொழுது O விற்கு மேல் அதன் நிலைக்குத்து உயரம் y ஆனது

$y = x\tan\alpha - \frac{g x \sec^2\theta}{2v^2}$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

O விலிருந்து $1400 cm/s$ இல் எறியப்பட்ட பந்து ஒன்று P என்னும் புள்ளியில் பிடிக்கப்பட்டது. புள்ளி P, O விலிருந்து கிடையாக $1000cm$ தூரத்தில் O வின் மட்டத்திற்கு மேல் $187{\cdot}5cm$ உயரத்திலுள்ளது. இரு இயல்தகு எறியற் கோணங்களையும் காண்க.

பந்து O விலிருந்து இதே தொடக்க கதியுடன் எறியப்பட்டு P இற்கு மேலே $562{\cdot}5cm$ தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லுமெனின் ஒரு எறியற் கோணம் மட்டுமே உண்டெனக் காட்டுக.

23. கிடை நிலத்திற்கு மேல் a உயரத்திலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து பந்தொன்று V கதியில் கிடையுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. அது தன்னுடைய பறப்பின் அதியுயர் புள்ளியில் நிலைக்குத்தான சுவரை செங்குத்தாக மோதிப்

பின்னடிக்கின்றது. எறியற் புள்ளியிலிருந்து சுவரின் தூரம் $\frac{V^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$ எனக் காட்டி மோதுகையின் பின் $\sqrt{\frac{V^2 \sin^2\alpha + 2ag}{g}}$ நேரத்தின் பின் பந்து நிலத்தை அடிக்குமெனக் காட்டுக.

24. h உயரமுள்ள மலை உச்சியிலிருந்து குண்டொன்று சுடப்பட்டது. இக் குண்டு மலையின் அடியிலிருந்து a தூரத்தில் கடலில் விழுந்தது. கடல் மட்டத்திற்கு மேல் குண்டு அடைந்த அதி உயர் உயரம் $(h+b)$ எனின் எறியற் கோணம் α ஆனது $a^2\tan^2\alpha - 4ab\tan\alpha - 4bh = 0$ என்னும் சமன்பாட்டில் தரப்படுமென நிறுவுக.

25. இரு துணிக்கைகள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் எறியப்படின் இயக்கம் முழுவதும் அவற்றினை இணைக்கும் கோட்டின் திசை மாறாதிருக்குமெனக் காட்டுக.

26. நிலைக்குத்தான கம்பம் AB, கிடைத்தளத்திலுள்ள புள்ளி A யில் நடப் பட்டுள்ளது கிடைத்தளத்திலுள்ள புள்ளி C யில் கம்பத்தின் உச்சி B யின் ஏற்றக் கோணம் α ஆகும். புள்ளி C யிலிருந்து கிடையுடன் θ_1, θ_2 கோணங்களில் இரு துணிக்கைகள் ஒரே நேரத்தில் எறியப்படுகின்றன. முதலாவது துணிக்கை கம்பத்தின் உச்சியை அடிக்கும் அதே நேரத்தில் இரண்டாவது துணிக்கை கம்பத்தின் அடியை அடிக்கின்றது எனின் $\tan\theta_1 - \tan\theta_2 = \tan\alpha$ என நிறுவுக.

27. b உயரமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து a தூரத்தில் கிடை நிலத்திலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து பந்து ஒன்று எறியப்படுகிறது. எறியற் கதி V ஆகவும் அதன் திசை கிடையுடன் α ஆகவும் உள்ளது. சுவருக்கு மேல் எவ்வளவு உயரத்தால் துணிக்கை சுவரைக் கடந்து செல்லும் எனக் காண்க. பந்து மட்டுமட்டாகச் சுவரைக் கடந்து சென்றால் அது தன் பாதையில் அடைந்த அதிஉயர் உயரம் $\frac{a^2\tan^2\alpha}{4(a\tan\alpha - b)}$ எனக் காட்டுக.

28. பந்து ஒன்று இரு சுவர்களை மட்டுமட்டாகக் கடந்து செல்லுமாறு எறியப்படுகிறது. முதலாவது சுவர் எறியற் புள்ளியிலிருந்து b இடைத்தூரத்திலும் எறியற் புள்ளிக்கு மேல் சுவரின் உயரம் a ஆகவும் இரண்டாவது சுவர் எறியற் புள்ளியிலிருந்து a கிடைத்தூரத்திலும் எறியற் புள்ளிக்கு மேல் அதன் உயரம் b ஆகவும் உள்ளது.

பந்தின் கிடைவீச்சு $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ எனவும் எறியற் கோணம் $tan^{-1}(3)$ இலும் பெரிதாகும் எனவும் காட்டுக.

29. பாரமான துணிக்கை ஒன்று O என்னும் புள்ளியிலிருந்து α ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. துணிக்கையின் பாதையின் தளத்தில் O வினூடாக கிடை, நிலைக்குத்து ஆள்கூற்றுக்கள் குறித்து துணிக்கையின் பாதையின் (பரவளைவின்) சமன்பாடு $y = x\left(1 - \dfrac{x}{R}\right) tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

இங்கு R துணிக்கையின் கிடை வீச்சு ஆகும்.
பரவளைவின் மீது கிடை அச்சிற்கு மேல் ஒரே உயரம் h இலுள்ள இரு புள்ளிகளின் இடைத்தூரம் $2a$ எனின் $R(R - 4h\cot\alpha) = 4a^2$ எனக் காட்டுக.

30. எறிபொருள் ஒன்று எறியற் புள்ளியிலிருந்து a கிடைத்தூரத்தில் $\dfrac{a}{2}$ உயரத்திலுள்ள இலக்கினை அடிக்குமாறு $\sqrt{2ga}$ தொடக்கக் கதியுடன் எறியப்படுகிறது. இயல்தகு இரு எறியற் கோணங்களையும் கண்டு அதற்கான இரு பறப்பு நேரங்களின் விகிதங்களையும் காண்க.

31. இரு பாரமான துணிக்கைகள் A, B என்பன ஒரே கணத்தில் ஒரே புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகின்றன. முதலாவது துணிக்கை A, u கதியுடன் α கோணத்திலும் இரண்டாவது துணிக்கை B முதலாவது திசைக்கு எதிர்த் திசையில் அதே கதி u உடனும் எறியப்படுகின்றன.

(i) A இன் B தொடர்பான பாதை
(ii) அவற்றின் வேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் போது துணிக்கைகளுக்கிடையேயான தூரம் என்பவற்றைக் காண்க.

32. u கதியுடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்றின் கிடை வீச்சு $\dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ எனவும் துணிக்கை அடையும் அதி உயர் உயரம் $\dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$ எனவும் காட்டுக.
பந்து ஒன்று கிடை நிலத்திலுள்ள A என்னும் புள்ளியிலிருந்து α ஏற்றக்கோணத்தில் $49ms^{-1}$ உடன் அடிக்கப்படுகிறது. அது A யின் அதே மட்டத்திலுள்ள புற்றரையின் மீது விழுகின்றது. A யிலிருந்து புற்றரையின் மிகக் கிட்டிய, ஆகவும் கூடிய தூரங்கள் முறையே $196m$, $245m$ ஆகும். α இன் இயல்தகு பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

பந்து புற்றரையில் விழக் கூடியவாறு அது அடையக் கூடிய அதி உயர் உயரத்தைக் காண்க.

A யிலிருந்து 24.5 கிடைத் தூரத்திலுள்ள மரம் ஒன்றினைக் கடந்து, பந்து புற்றரையில் விழவேண்டுமெனில், பந்து புற்றரையில் எங்கும் விழமுடியும் எனக்கொண்டு, மரத்தின் அதி உயர் உயரத்தைக் காண்க.

33. கிடையான நிலத்திலுள்ள புள்ளி O வில் h உயரமுள்ள OP என்னும் நிலைக்குத்தான கம்பம் ஒன்று நிற்கிறது.

(a) P யிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் இரு துணிக்கைகள் ஒரே கதியுடன், வித்தியாசமான ஏற்றக் கோணங்களில் எறியப்படுகின்றன. துணிக்கைகளுக்கிடையேயான தூரம், நேரத்துடன் அதிகரிக்கிறதெனக் காட்டுக.

(b) புள்ளி O விலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி V வேகத்துடன் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படும் அதே சமயத்தில், புள்ளி P யிலிருந்து V வேகத்துடன் கிடையுடன் θ ஏற்றக் கோணத்தில் இன்னொரு துணிக்கை எறியப்படுகிறது. $\dfrac{h}{2V}$ நேரத்தின் பின்னர், அவை இரண்டும் கிட்டிய தூரத்திலிருக்கும் எனக் காட்டி, கிட்டிய தூரத்தைக் காண்க.

34. இரு சிறுவர்கள், கிடையான நிலத்தில் a இடைத் தூரத்தில் நிற்கின்றார்கள். முதலாவது சிறுவன் $2h$ உயரத்தில் v என்னும் வேகத்துடன் பந்தை எறிகின்றான். மற்றச் சிறுவன் h உயரத்தில் அப்பந்தினைப் பிடிக்கின்றான். பந்தின் எறியற் திசை கிடையுடன் மேல்நோக்கி θ கோணமாகும்.

$ga^2 tan^2\theta - 2v^2 a\, tan\theta + ga^2 - 2v^2 h = 0$ எனக்காட்டுக.

$a = 2\sqrt{2h}$ உம் $2gh$ உம் எனின்

(i) θ இன் பெறுமானம்
(ii) நிலத்திற்கு மேல் பந்து அடைந்த உயரம் என்பவற்றைக் காண்க.

35. இரு துணிக்கைகள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து, ஒரே கதியுடன், எறியப்படுகின்றன. எறியற்கோணங்கள் முறையே $2\alpha, \alpha$ உம் T நேர இடைவெளியிலும் எறியப்படுகின்றன. பறப்பின் போது இரு துணிக்கைகளும் மோதும் எனின் எறியற் கதியை T, α இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

துணிக்கைகளில் ஒன்று அதி உயர் உயரத்தில் இருக்கும் போது மொத்தல் நிகழும் எனில் α ஆனது $4\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0$ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

6. O என்னும் புள்ளியிலிருந்து v என்னும் வேகத்துடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. துணிக்கையின் பாதையின் தளத்தில் Ox, Oy என்பவற்றைக் கிடை, நிலைக்குத்து அச்சுக்களாக எடுத்து துணிக்கையின் பாதையின் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha - \left(\frac{g}{2v^2}\right)x^2\sec^2\alpha$ எனக் காட்டுக.

$50m$ உயரமுள்ள நிலைக்குத்தான கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து $100m$ தூரத்தில் கிடையான தளத்திலுள்ள A என்னும் புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று α என்னும் ஏற்றக் கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. இங்கு $\tan\alpha = 3$ ஆகும். துணிக்கை மட்டுமட்டாகச் சுவரைக் கடந்து கிடைத்தரையிலுள்ள B என்னும் புள்ளியில் விழுகிறது. துணிக்கையின் தொடக்கக் கதியையும், AB யின் தூரத்தையும் காண்க.

தளத்திற்கு மேல் துணிக்கை அடைந்த அதி உயர் உயரம் யாது? $\left(g = 10ms^{-2}\right)$

ஒரு துணிக்கை u கதியுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. இங்கு $\tan\alpha = 3$ ஆகும். துணிக்கையின் கதி $\frac{u}{2}$ ஆக இருக்கும் போது அதன் உயரத்தை u, g இன் உறுப்புக்களிற் காண்க. இவ்வுயரத்தில் துணிக்கை இயங்கும் திசையையும் காண்க. எறியப்பட்டு t_1, t_2 ஆகிய நேரங்களில் $(t_2 > t_1)$ துணிக்கையின் இயக்கத்திசை கிடையுடன் 45° அமைக்கின்றதெனின் $t_1 = 2t_1$ எனக் காட்டுக.

விமானம் ஒன்று v கதியுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் பறக்கிறது. விமானம் h உயரத்திலிருக்கும் போது குண்டு ஒன்று விழவிடப்பட்டது. குண்டு விழவிடப்பட்ட இடத்திற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தரையிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து குண்டு தரையில் இலக்கை அடிக்கும் புள்ளிக்கான தூரம் R ஆனது

$gR = \frac{1}{2}v^2\sin 2\alpha + V\left(2gh + v^2\sin^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

39. O, A என்பன இரு புள்ளிகள். O உற்பத்தியாகும். OA இனூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் Ox கிடை அச்சாகவும் O இனூடான மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துக் கோடு Oy நிலைக்குத்து அச்சாகவும் கொள்ளப்படுகிறது. $A \equiv (a, b)$ ஆகும். புள்ளி A யினூடு செல்லுமாறு O விலிருந்து கதி v உடன் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. $v^2 < g\left\{b + \sqrt{a^2+b^2}\right\}$ எனின் இது சாத்தியமில்லை எனக் காட்டுக.

$v^2 > g\left\{b + \sqrt{a^2+b^2}\right\}$ எனின் இரு எறியற் திசைகள் உண்டெனக் காட்டுக.

40. எறியற் புள்ளியிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள நிலைக்குத்தான சுவரொன்றை நோக்கி எறிபொருள் ஒன்று u கதியுடன் எறியப்படுகிறது. எறியற் புள்ளிக்கு மேல் எறிபொருள் சுவரை அடிக்கும் அதி உயர் உயரம் $\frac{u^4 - g^2a^2}{2gu^2}$ எனக் காட்டுக.

6 (b)

1. u என்னும் கதியுடன் எறியப்படுகின்ற துணிக்கை ஒன்று எறியற் புள்ளியினூடான 30° இல் சாய்ந்துள்ள தளத்தைச் செங்கோணத்தில் அடிக்கின்றது. சாய்தளத்தில் வீச்சு $\frac{4u^2}{7g}$ எனக் காட்டுக.

2. பாரமான துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்துடன் 2β சாய்வுடைய சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து அதி உயர் சாய்வுக் கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயங்குமாறு மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. துணிக்கையின் தொடக்கக் கதி $u\cos\beta$ ஆகவும், திசை நிலைக்குத்துடன் β கோணத்திலும் அமைந்துள்ளது.

(i) பறப்பு நேரம் $\frac{u}{g}$

(ii) சாய்தளத்தில் வீச்சு $\frac{u^2}{2g}$

(iii) தளத்தை அடிக்கும் கதி $u \sin\beta$ எனக் காட்டுக. தளத்தைத் துணிக்கை அடிக்கச் சற்று முன் துணிக்கையின் இயக்கத்திசை செங்கோண மொன்றினூடாகத் திரும்பியுள்ளதெனவும் காட்டுக.

எறிபொருள் ஒன்று எறியற் புள்ளியிலிருந்து θ ஏற்றக்கோணத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லுமாறும், அப்புள்ளியில் கிடையுடன் β சாய்வுடைய சாய்தளத்தைச் செங்கோணத்தில் அடிக்குமாறும் எறியப்படுகிறது. எறிபொருளின் எறியற் கோணம் α ஆனது $\tan\alpha = \cot\beta + 2\tan\theta$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

α சாய்வுடைய சாய்தளமொன்றிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று V கதியுடன் $(\alpha + \theta)$ என்னும் ஏற்றக்கோணத்தில் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயங்குமாறு எறியப்படுகிறது. துணிக்கை தளத்தைக் கிடையாக அடிப்பின் $\tan\theta = \dfrac{\sin\alpha \cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

இரட்டைச் சாய்தளம் ஒன்றின் கிடையான அடியின் ஒரு முனையிலிருந்து எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்று சாய்தளத்தின் உச்சியை மருவிச் சென்று அடியின் மற்றைய முனையை அடிக்கின்றது. இயக்கம் முழுவதும் தளங்களின் அதி உயர் சரிவுக்கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நடை பெறுகிறதெனக் கொண்டு எறியற் கோணம் $\tan^{-1}(\tan\alpha + \tan\beta)$ எனக் காட்டுக. இங்கு α, β என்பன தளங்களின் சாய்வுகளாகும்.

கிடையுடன் α சாய்வுடைய சாய்தளமொன்றிலே தரப்பட்ட எறியற் கதிக்கு தளத்திலே மேல் நோக்கிய கீழ் நோக்கிய அதியுயர் வீச்சுக்களின் விகிதம் $(1 - \sin\alpha) : (1 + \sin\alpha)$ எனக் காட்டுக.

கிடையுடன் α என்னும் சாய்வுக் கோணத்தை அமைக்கும் தளத்திலுள்ள O என்னும் புள்ளியிலிருந்து அதி உயர் சரிவுக் கோட்டினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே கிடையுடன் θ கோணத்தை அமைக்குமாறு துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை மீண்டும் தளத்தைச் செங்கோணத்திலடிப்பின் $\tan(\theta - \alpha) = \dfrac{1}{2}\cot\alpha$ எனக் காட்டுக. தளத்தின் மாறுபடும் சாய்விற்கு θ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. l என்பது கிடையுடன் α என்ற சாய்விலிருக்கும் தளத்திலுள்ள A என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் அதி உயர் சரிவுக்கோடாகும். ஏவுகணை ஒன்று கதி u உடன் A இலிருந்து சாய்தளத்தைக் கோடு l இலே A இற்குக் கீழே உள்ள புள்ளி B யில் தாக்குமாறு சுடப்பட்டது. நீளம் AB இன் உயர்வுப் பெறுமானம் யாது?

கடற்படைத்தளம் ஒன்று தங்கள் ஏவுகணைகளுக்கு $\sqrt{2gk}$ எனும் வாய் வேகத்தைக் கொடுக்கும் பீரங்கிகளை உடையது. அப்பீரங்கிகள் கடல் மட்டத்திலிருந்து h என்ற உயரத்தில் பொருத்தப்பட்டிருப்பின் கடற்றளம் கிடைத்தளத்துடன் ஈடுபடக்கூடிய உயர் வீச்சு $\sqrt{2k(k+h)}$ எனக் காட்டுக.

9. h உயரமுடைய ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியில் நிற்கும் ஒரு வேலையாள் A ஒரு பொருளை u என்னும் ஆரம்ப வேகத்துடன் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து d தூரத்தில் நிற்கும் ஒரு வேலையாள் B இற்கு எறிகின்றான். u போதியளவு பெரிதாயின், அவன் அப்பொருளை இரு திசைகளில் எறியலாம் என நிறுவி, $u^2 = \dfrac{gd^2}{h}$ எனின் இவ்விரு திசைகளும் செங்கோணத்திலுள்ளன என நிறுவுக.

இந் நிபந்தனை திருப்தியாகும் போது $d \geq \sqrt{3}\,h$ ஆயின் வேலையாள் B பொருளை A க்குத் திருப்பி அதே ஆரம்ப வேகத்துடன் எறிய முடியுமெனக் காட்டுக.

10. ஒரு கோட்டைக்கு அணுகும் வழி கிடையுடன் α சாய்வுடைய ஒரு சாய்தளமாகும். இச்சாய்தளத்தில் X என்ற புள்ளி ஒன்றில் ஒரு துப்பாக்கி நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. X இலிருந்து ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக u வேகத்துடன் சுடப்படுகிறது. துப்பாக்கிக் குண்டு சாய்தளத்தை Y என்ற புள்ளியில் அடிக்கிறது.

$XY = \left(\dfrac{2u^2}{g}\right)\tan\alpha \,.\, \sec\alpha$ எனக் காட்டுக. Y இல் வைக்கப்பட்டுள்ள அதே போன்றொரு துப்பாக்கி அதே u என்னும் தொடக்கக்கதியுடன் எத்திசையிலும் சுடக்கூடியது. $\alpha \leq \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ எனின், Y இலுள்ள துப்பாக்கியின் வீச்சுக்குள் X உள்ளதென நிறுவுக.

11. பறவை ஒன்று கிடையுடன் α என்னும் கோணச் சாய்விலுள்ள நேர்ப்பாதையில் u என்னும் சீரான கதியுடன் வானோக்கிப் பறக்கிறது. பறவை அதன் பாதையில் A என்னும் புள்ளியில் இருக்கையில் A யிலிருந்து நிலைக்குத்தாக h என்னும்

தூரத்திலுள்ள B என்னும் புள்ளியிலிருந்து கிடையுடன் θ என்னும் கோணத்திலே v என்னும் வேகத்திலே துப்பாக்கிக் குண்டொன்று சுடப்பட்டது. குண்டு பறவையை அடித்தால் பறவை தொடர்பான குண்டின் பாதையை அவதானிப்பதாலோ அல்லது வேறு விதமாகவோ

(i) $v\cos\theta = u\cos\alpha$

(ii) $\theta > \alpha$

(iii) $v > \sqrt{2gh}\cos\alpha.\operatorname{cosec}(\theta - \alpha)$ எனக் காட்டுக.

குண்டு பறவையை அடிக்கும் தொடர்பு வேகம் என்ன?

12. கிடையுடன் 30° சாய்வுடைய சாய்தளமொன்றின் அதியுயர் சரிவுக்கோடொன்றில் A, B என்னுமிரு புள்ளிகள் l இடைத்தூரத்தில் உள்ளன. A, B என்பவற்றிலிருந்து சம திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் ஒரே நேரத்தில் ஒரேகதி $\sqrt{gl}$ உடன் எறியப்படுகின்றன. A யானது B யிலும் மேலான மட்டத்திலுள்ளது. A யிலுள்ள துணிக்கை B ஐ நோக்கி கிடையாக எறியப்படுகிறது. B யிலுள்ள துணிக்கை A ஐ நோக்கி கிடையுடன் 60° ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. துணிக்கைகள் மோதுமென நிறுவி, மோதுகையின் போது அத்துணிக்கைகள் ஒன்று சேருமெனின் சேர்த்தித் திணிவு கிடைக்குக் கீழாக 30° திசையில் இயங்கத் தொடங்கும் எனக் காட்டுக.

13. கிடையுடன் α சாய்வுடைய ஒப்பமான நிலைத்த சாய்தள மொன்றிலுள்ள புள்ளி O விலிருந்து பூரண மீள்தன்மையுடைய துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. எறியல் வேகமானது, O வினூடான அதியுயர் சாய்வுக்கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே மேனோக்கிய அதிஉயர் சரிவுக் கோட்டுடன் θ கோணத்தை அமைக்கிறது. $\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\alpha$ எனின் துணிக்கை தளத்தை அடித்த பின் மீண்டும் O விற்குத் திரும்புமென நிறுவுக.

14. u கதியுடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் துணிக்கை ஒன்று எறியப்படுகிறது. இயக்கத்தின் போது நேரம் $t \geq 0$ இற்கு அதனுடைய கிடை நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சிகள் x, y என்பவற்றையும் வேகத்தின் கிடை நிலைக்குத்துக் கூறுகள் $\dot{x}, \dot{y}$ என்பவற்றையும் காண்க. இயக்கம் முழுவதற்கும் $2\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = \tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

சாய்தளமொன்றின் அடியிலிருந்து அதனை அடிக்குமாறு துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் α கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. துணிக்கை அதியுயர் சரிவுக் கோடொன்றினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயங்குகிறது. தளத்தின் சாய்வு கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ஆகும்.

(a) துணிக்கை சாய்தளத்தைச் செங்கோணத்தில் அடித்தால் α இன் பெறுமானம் யாது?

(b) $\alpha = \tan^{-1}(2)$ எனின் துணிக்கை சாய்தளத்தை அடிக்கச் சற்றுமுன் கிடையுடன் அதன் இயக்கத்திசையைக் காண்க.

15. கிடையுடன் β சாய்வுடைய சாய்தளத்திலுள்ள புள்ளி O விலிருந்து V கதியுடன் கிடையாக எறியப்படும் P என்னும் ஒரு துணிக்கை O இனூடான அதி உயர் சாய்வுக்கோட்டை A இல் அடிக்கிறது. பறப்பு நேரம் $\frac{2V}{g}\tan\beta$ எனக் காட்டுக. P, A ஐ அடிக்கும் போது கிடைக்கும், P இன் இயக்கத் திசைக்குமிடையேயான கூர்ங்கோணத்தின் தான்சன் $2\tan\beta$ எனக் காட்டுக.

இரண்டாவது துணிக்கை Q, O விலிருந்து V கதியுடன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக எறியப்படுகிறது. Q தளத்தை மீண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி A எனக் காட்டுக.

16. கிடையுடன் α கோணச்சாய்விலுள்ள சாய்தளம் ஒன்றிலுள்ள புள்ளி A யிலிருந்து பந்து ஒன்று ஈர்வையின் கீழ் எறியப்பட்டது. எறியல் வேகம் V ஆனது A இனூடான மேல் நோக்கிய அதி உயர் சரிவுக்கோட்டுடன் θ கோணத்தை அமைக்கிறது. இயக்கம் அதி உயர் சரிவுக் கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நடைபெறுகிறது. பந்து தளத்தை A இற்கு மேலே உள்ள ஒரு புள்ளியில் அடிக்கிறது. பந்திற்கும் தளத்திற்கும் இடையேயான மீளமைவு குணகம் e ஆகும். பந்து தளத்தை முதலில் $\frac{2V\sin\theta}{g\cos\alpha}$ நேரத்தின் பின்னர் அடிக்குமெனக் காட்டுக.

முதலாவது மோதுகைக்கும், இரண்டாவது மோதுகைக்கும் இடையேயான நேரத்தைக் காண்க.

$tan\alpha . tan\,\theta < \frac{1}{2+e}$ எனின் தளத்துடனான பந்தின் இரண்டாவது மோதுகை முதலாவது மோதுகை நடைபெற்ற புள்ளியின் மட்டத்திற்கு மேலே இடம் பெறும் எனவும் காட்டுக.

இரண்டாவது மோதுகையின் போது பந்து தளத்தினைச் செங்குத்தாக அடித்தால் e ஐ, α, θ இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

17. கிடை நிலத்திலுள்ள A என்னும் புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் பந்து ஒன்று ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுடன் மோதி மீண்டும் A இற்குத் திரும்புகின்றது. சுவருக்கும், பந்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகவும் சுவரில்லாவிடின் பந்தின் கிடை வீச்சு R ஆகவுமிருப்பின் A யிலிருந்து சுவரின் கிடைத்தூரம் $\frac{eR}{1+e}$ எனக் காட்டுக.

18. ஒப்பமான சாய்தளத்திலுள்ள ஒருபுள்ளி A யிலிருந்து பந்து ஒன்று கிடையுடன் θ ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. பந்து தளத்தை ஒருமுறை அடித்துப் பின் மீண்டும் A இற்குத் திரும்புகிறது. தளத்தின் சாய்வு α ஆகவும் பந்திற்கும், தளத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகவும் இருப்பின் $cot\,(\theta - \alpha) = (1+e)\,tan\,\alpha$ என நிறுவுக.

19. பந்து ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறது. பந்து சுவரை மோதி மீண்டும் எறியற் புள்ளிக்குத் திரும்புகிறது. எறியற்கோணம் α எறியற் கதி u என்பன $u^2\ sin\,2\alpha = ag\frac{1+e}{e}$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படுமென நிறுவுக.
இங்கு e பந்துக்கும் சுவருக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம். எறியற் Gs$pf Nky;geJ Rtiumbf;Fk;c auk; $tan\,\alpha$ இற்கு விகிதசமமாகும் எனக் காட்டுக.

20. ஒப்பமான சாய்தளமொன்றிலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து எறியப்பட்ட துணிக்கை ஒன்று r ஆவது மோதுகையின் போது தளத்தைச் செங்குத்தாக அடிக்கிறது. n ஆவது மோதுகையின் போது எறியற் புள்ளிக்கு வருகிறது. பந்துக்கும், தளத்திற்கும் இடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e எனின் $e^n - 2.e^r + 1 = 0$ எனக் காட்டுக.

6 (c)

1. பறவை ஒன்று கிடையுடன் $60°$ ஏற்றக் கோணத்தில் $14ms^{-1}$ மாறாக் கதியில் பறக்கிறது. பறவை சிறுவன் ஒருவனுக்கு நேர் மேலே $10m$ உயரத்திலிருக்கும் கணத்தில் அவன் θ ஏற்றக்கோணத்தில் பறவையை அடிப்பதற்காகக் கல் ஒன்றினை எறிகின்றான். கல் பறவையை அடிப்பதற்கு $\theta \geq 75°$ ஆதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

2. u என்னும் பருமனுடைய ஒருமை வேகத்துடன் h என்னும் ஒருமை உயரத்திற் பறக்கின்ற ஒரு விமானம் துப்பாக்கி நிலையமொன்றை நேர் மேலாகக் கடக்கின்றது. துப்பாக்கிக் குண்டொன்று விமானத்தைத் தாக்க வேண்டுமெனில் விமானமானது துப்பாக்கி நிலையத்திற்கு நேர் மேலாகச் செல்லும் கணத்திலே சுடப்பட வேண்டிய குண்டின் இழிவளவான துப்பாக்கி வாய் வேகம் $\sqrt{u^2 + 2gh}$ எனக் காட்டுக. இதற்குப் பொருத்தமான ஏற்றக் கோணம் என்ன?

3. ஓர் ஒப்பமான சாய்தளத்தின் அடியான A யிலிருந்து ஒரு துணிக்கை அதி உயர் சரிவுக் கோடு A இன் ஊடான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே V வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. தளம் கிடைக்கு α கோணத்தினூடு சாய்ந்துள்ளது. துணிக்கை தளத்தைச் செங்குத்தாக B இல் தாக்குகிறது. தொடக்க வேகம் AB உடன் θ கோணத்தை அமைத்தால் $cot\,\theta\ cot\,\alpha = 2$ எனக் காட்டுக.
இத்துணிக்கை B இல் பின்னதை அடைந்து தளத்தை A இற்கும் B இற்கும் இடையிலுள்ள புள்ளி C யில் பின்னர் தாக்குகிறது. தளத்திற்கும் துணிக்கைக்குமிடையிலான மீளமைவுக் குணகம் e எனின் $e^2 = \frac{BC}{AB}$ எனக் காட்டுக.

4. மட்டமான தரையிலுள்ள P என்னும் புள்ளியிலிருந்து $45°$ சாய்வில் V என்னும் வேகத்துடன் ஒரு வெடி குண்டு சுடப்படுகிறது. வெடிகுண்டின் பாதையானது $y = x - \frac{gx^2}{V^2}$ என்னும் சமன்பாட்டினால் தரப்படுமென நிறுவுக. இங்கு x, y என்பன முறையே P யிலிருந்தான கிடைத்தூரமும் நிலைக்குத்துத் தூரமும் ஆகும். $x = a$ ஆயுள்ள புள்ளி Q வில் இவ் வெடி குண்டு நிலத்தைத் தாக்குகிறது. P யிலிருந்து $45°$ சாய்வில் வேகம் u உடன் சுடப்பட்ட இரண்டாவது வெடிகுண்டு Q விற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே h தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது. $u^2 = \frac{V^4}{V^2 - gh}$ என நிறுவுக.

5. மலை உச்சியில் நிற்கும் ஒரு மனிதன் ஒரு கல்லை u வேகத்தோடு மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் α கோணம் அமைக்கும் திசையில் எறிகிறான். T நேர இடைவெளிக்குப் பின் அதே இடத்திலிருந்து இன்னுமொரு கல்லை v வேகத்துடன் மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் $\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \theta\right)$ கோணம் அமையும் திசையில், முன் எறிந்த கல் நகரும் தளத்தில் எறிந்தான். இரண்டு கற்களும் மோதினால் $u \sin\alpha < v\cos(\theta + \alpha)$ என இருப்பின்

$$T = \frac{2uv \cos\theta}{g\left\{v\cos(\theta + \alpha) + u \sin\alpha\right\}}$$ எனக் காட்டுக.

X, Y என்னும் இரு புள்ளிகள் ஒரே கிடைமட்டத்தில் d இடைத்தூரத்திலும் உள்ளன. இரண்டு சிறிய கோளங்கள் A யும் B யும் முறையே X, Y இலிருந்து ஒருங்கே எறியப்படுகின்றன. கோளம் A கதி u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகின்றது. கோளம் B உம் மேல் நோக்கி அதே கதி U உடன் எறியப்படுகின்றது. ஆனால் அதன் எறியற் திசை XY ஊடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கிடக்கும் வண்ணம் XY உடன் ஏற்றக் கோணம் $\alpha\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ வை அமைக்கும் வண்ணம் உள்ளது. A தொடர்பாக B இன் வேகம் ஒருமை எனக் காட்டுக. அதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்தோ, வேறு வழியாகவோ $\frac{d}{2u} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ என்னும் நேரத்தில் இரு கோளங்களும் இழிவுத்தூரத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக. இத்தூரத்தைக் காண்க.

7. ஒரு விமானமானது v என்னும் சீரான வேகத்துடன் h என்னும் ஒருமை உயரத்தில் பறக்கிறது. அவ்விமானம் துப்பாக்கியொன்றுக்கு நேர் மேலாகச் சென்றபின் விமானத்தை நோக்கி நேரிலக்காகத் துப்பாக்கி சுடப்படுகிறது. அப்பொழுது அத் துப்பாக்கியிலிருந்து நோக்குகையில் விமானத்தின் ஏற்றக் கோணமானது α ஆகும். குண்டின் தொடக்க வேகம் $kv \sec\alpha \ (k > 1)$ எனில்

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{v} \sqrt{\frac{gh}{2(k-1)}}$$ என இருப்பின் குண்டானது விமானத்தைத் தாக்குமெனக் காட்டுக.

8. மலை ஒன்றின் செங்குத்தான விளிம்பிலிருந்து ஒரு மனிதன் கல்லொன்றை கிடையுடன் சாய்வுக் கோணம் α கொண்ட திசையில் வேகம் u உடன் எறிகிறான். T இடைவேளையின் பின்னர் முதலாவது கல் எறியப்படும் திசையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{2} + \theta$ விலே வேகம் v உடன் வேறொரு கல் எறியப்படுகிறது. இரு கற்களும் மோதுகின்றன. T ஐக் காண்க.

9. ஒரு றப்பர் பந்து ஓய்விலிருந்து 2 மீற்றர் தூரம் நிலைக்குத்தாய் விழுந்து கிடைக்கு $\frac{\pi}{6}$ ஆரையன் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள ஒரு கூரையுடன் மோதுகிறது. கூரையின் கீழ் ஓரத்திலிருந்து முதலாம் மொத்தல் புள்ளியின் தூரம் 8 மீற்றரிலும் பார்க்கக் கூடியதாக இருப்பினும் பந்துக்கும் கூரைக்குமிடையிலான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆயினும் பந்தானது முடிவிலே கூரை வழியே கீழ் நோக்கி உருளுமெனக் காட்டுக.

10. கிடைக்கு α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு தளத்தின் மீதுள்ள புள்ளி O விலிருந்து டென்னிஸ் பந்தொன்று வேகம் u உடன் எறியப்பட்டது. O வினூடாகவுள்ள அதி உயர் சரிவுக் கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளி P யில் தளத்தைப் பந்து அடிக்குமாறு மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ எறியற்திசை அமைக்கின்றது. P, O வின் மட்டத்திற்கு மேலாக இருக்குமெனில்

$$OP = \frac{2u^2 \sin\theta \cos(\theta + \alpha)}{g \cos^2\alpha}$$ எனக் காட்டுக.

OP யின் மிகப் பெரிய வீச்சு கோணம் $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ ஆகும் போது நிகழும் எனவும் θ இன் இப் பெறுமானத்திற்கு O விலிருந்து P யிற்குப் பறப்பு நேரம் $\frac{u}{g} \sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ எனவும் காட்டுக.

11. கடல் மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலுள்ள மலை உச்சியின் விளிம்பில் ஒரு கோட்டை அமைந்துள்ளது. கோட்டையிலிருந்து $\sqrt{2\lambda gh}$ கதியில் ஓர் ஓடு நங்கூரமிடப்பட்டுள்ள கப்பலைத் தாக்குவதற்காகச் செலுத்தப்படுகிறது. இதற்குப் பிரதியீடாக கப்பலிலிருந்து $\sqrt{2\mu gh} \ (\mu > 1)$ கதியில் கோட்டையைத் தாக்குவதற்கு ஓர் ஓடு செலுத்தப்படுகிறது. முதலாவது ஓடும் இரண்டாவது ஓடும்

தங்கள் இலக்குகளைத் தாக்கக் கூடிய அதி உயர் கிடையான வீச்சுகளான R_1 இனதும் R_2 வினதும் விகிதம் $\dfrac{R_1}{R_2} = \sqrt{\dfrac{\lambda(\lambda+1)}{\mu(\mu-1)}}$ எனக் காட்டுக.

12. ஒரு போர் கப்பல் V வேகத்தோடு முன்நோக்கிச் செல்கிறது. பின்நோக்கிக் குறிபார்க்கக் கூடியவாறு துப்பாக்கி ஒன்று இக்கப்பலில் α என்னும் ஏற்றக் கோணத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. துப்பாக்கிக்குச் சார்பாக ஓட்டின் எறியல் வேகம் $u(>V)$ என அமைந்தால் வீச்சு $\dfrac{2u}{g}\sin\alpha\,(u\cos\alpha - V)$ எனக் காட்டுக.

ஏற்றக் கோணம் $\cos^{-1}\left[\dfrac{V+\sqrt{V^2+8u^2}}{4u}\right]$ ஆக இருந்தால் வீச்சு உயர்வாக இருக்குமெனவுங் காட்டுக.

13. கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர் ஒருவர் பந்தொன்றை நிலமட்டத்திலிருந்து நீண்ட திடல் வழியே எறிந்தார். அப்பந்து Rm தூரத்திலுள்ள விக்கட் காவலாளரின் பாதத்தில் விழுந்தது. பந்தின் தொடக்க வேகத்தின் கிடையானதும் நிலையானதுமான கூறுகள் முறையே $u, v\,ms^{-1}$ எனின் $uv = \dfrac{Rg}{2}$ எனக் காட்டுக. விக்கற் காவலாளர் திடலிலுள்ள கிரிக்கட் ஆட்டக்காரரை நோக்கி xm தூரம் சென்றிருந்தால் அவர் அப்பந்தை நிலத்திலிருந்து hm உயரத்தில் பிடித்திருக்கலாம். பந்தானது விக்கட் காவலாளரின் பாதத்தை அடைய எடுத்த நேரம் $R\sqrt{\dfrac{2h}{gx(R-x)}}$ செக்கன்கள் எனக் காட்டுக.

14. a என்னும் ஆரையும் h என்னும் ஆழமும் கொண்ட வட்டமான கிணறொன்றின் அடியின் மையத்திலே ஒரு தவளை அமர்ந்திருக்கின்றது. தவளை எத்திசையிலும் உச்சசக்தி u உடன் மேல் நோக்கிக் குதிக்க வல்லமையுடையது. $u^2 \geq g\left[h+\sqrt{h^2+a^2}\right]$ ஆயின் தவளை கிணற்றை விட்டு வெளியே குதிக்க முடியுமெனக் காட்டுக. இந்த நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்பட்டால் கிணற்றினது அடியின் எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் வெளியே குதிக்கத் தவளைக்கு இயலுமென அதிலிருந்து உய்த்தறிக.

15. சிறுவர்கள் இருவர் கிடைத்தரையில் $9m$ இடைத்தூரத்திலே நிற்கின்றனர். ஒருவர் $2m$ உயரத்திலிருந்து பந்து ஒன்றை $9ms^{-1}$ வேகத்துடன் எறிகிறார். மற்றவர் அதனை $1m$ உயரத்தில் பிடிக்கின்றார். முதற் சிறுவன் பந்தை எறிந்த கிடைக்கு மேலான சாய்வு யாது? பந்து தரைக்கு மேலே அடைந்த உயரமானது 4.025 மீற்றருக்கு மேற்படாது எனக் காட்டுக. $(g = 10ms^{-1})$

16. கொல்ப்பந்து ஒன்று தரை மீதுள்ள ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து புறப்பட்டுக் கிடையுடன் θ ஆரையன் ஏற்றத்தில் u மீற்றர் செக்கன் கதியில் செல்லக் கூடியதாக அடிக்கப்படுகின்றது. பந்தின் கிடை வீச்சு $g^{-1}u^2\sin 2\theta$ எனவும் அடையப்படும் ஆகவும் கூடிய உயரம் $\dfrac{1}{2}g^{-1}u^2\sin^2\theta$ எனவும் காட்டுக.

P உடன் ஒரே மட்டத்திலுள்ள புற்றரையில் பந்து வீழ்வதாகவும் பந்து புற்றரையில் விழத்தக்க மிகக் கிட்டிய புள்ளியும் மிகத் தொலைவிலுள்ள புள்ளியும் P யிலிருந்து முறையே $\dfrac{\sqrt{3}}{2}g^{-1}u^2$ மீற்றர், $g^{-1}u^2$ மீற்றர் தூரத்திலிருப்பின் $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$ எனக் காட்டுக. பந்து புற்றரையிற் படுமாறு அடையத்தக்க ஆகவும் கூடிய உயரத்தைக் காண்க.

17. தரைமீதுள்ள ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் கோணம் α இலே வேகம் $v\left(>\sqrt{gd}\right)$ உடன் எறியப்படுகின்றது. அது A யிலிருந்து தூரம் d இல் இருக்கின்ற h உயரமுள்ள கம்பம் ஒன்றின் உச்சியை மட்டுமட்டாகக் கடந்து செல்கின்றது. $h = d\tan\alpha - \dfrac{1}{2}g\dfrac{d^2}{v^2}\cdot\left(1+\tan^2\alpha\right)$ எனக் காட்டுக.

$\tan\alpha = \dfrac{v^2}{gd}$ ஆக இருக்கும் போது α இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு h அதி உயர்ந்ததென நிறுவுக. இதிலிருந்து α இன் இப் பெறுமானத்திற்கு முழுப்பறப்பிலும் துணிக்கை அடைந்த அதிஉயர் உயரம் $\dfrac{v^6}{2g\left(v^4+g^2d^2\right)}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

18. ஒரு புள்ளி O விலிருந்து துணிக்கை ஒன்று நிலைக்குத்துடன் ஒரு கோணம் θ விலே வேகம் u உடன் எறியப்படுகின்றது. OP ஆனது கிடையுடன் ஒரு கோணம் α விலே சாய்ந்திருக்கத்தக்கதாகத் துணிக்கையின் பாதையில் ஒரு புள்ளி P உள்ளது. $OP = \dfrac{2u^2 \sin\theta\cos(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

α ஆனது நிலைப்பட்டிருப்பின் $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ஆக இருக்கும் போது OP உயர்வானதெனக் காட்டி α இன் வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்கு P இன் ஒழுக்கு O ஐக் குவியமாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவாகுமெனக் காட்டுக.

9. நீளப்பாய்ச்சல் வீரர் ஒருவர் தரையைப் பிரிந்து செல்லும் கணத்தில் (ஓடுவதன் காரணமாக) ஒரு கிடை வேகம் u வையும் பாய்வதன் காரணமாக கிடையுடன் ஒரு கோணம் θ விற் சாய்ந்த ஒரு வேகம் λu வையும் கொண்டுள்ளார்.

அவருடைய பாய்ச்சலின் கிடை நீளம் l ஆனது $l = \dfrac{2u^2}{g}(1+\lambda\cos\theta)\sin\theta$ வினாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$\lambda = 1$ ஆகவும் θ ஆனது l ஐ உயர்வாக்குமாறு தெரிந்தெடுக்கப்பட்டும் இருப்பின் பாயும் போது அவருடைய அதிஉயர் உயரம் அண்ணளவாக $\dfrac{l}{7}$ இற்குச் சமம் எனவும் காட்டுக.

துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் சாய்வு α வை உடைய தளம் ஒன்றின் மீதுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து கதி u உடன் ஈர்வையின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி அதன் உயர் வீச்சு $\dfrac{u^2}{g(1+\sin\alpha)}$ எனக் காட்டுக.

அதோடு தளத்தின் வழியே கீழ் நோக்கியுள்ள உயர்வீச்சையும் பெறுக. மேலும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் உயர் வீச்சை அடைவதற்கு எறியற் திசையானது சாய்தளத்திற்கும் மேன்முக நிலைக்குத்துக்குமிடையேயுள்ள கோணத்தை இரு கூறிட வேண்டும் எனவும் காட்டுக.

A என்னும் ஆகாயவிமானம் ஒன்று கிடையுடன் $\alpha\left(\neq\frac{\pi}{2}\right)$ கோணத்தை அமைக்கின்ற ஒரு நேர்கோடு வழியே சீரான வேகம் u உடன் கிளம்புகின்றது.

நிலத்திலுள்ள விமான நாசகாரத் துவக்கு ஒன்றுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே h உயரத்தில் விமானம் இருக்கின்ற கணத்திலே துவக்கு ஒரு குண்டு S ஐக் கிடையுடன் கோணம் θ விலே வேகம் V உடன் சுடுகின்றது. குண்டு விமானத்தைத் தாக்கினால் S இன் A தொடர்பான பாதையைக் கருதுவதன் மூலம் அல்லது வேறுவிதமாக

(i) $V^2 > u^2\left\{1 + k^2 + 2k\sin\alpha\right\}$ எனவும்

(ii) $\tan\theta > k\sec\alpha + \tan\alpha$ எனவும் காட்டுக. இங்கு $k = \dfrac{\sqrt{2gh}}{u}$

$k > 1$ ஆயின் $\theta > \cos^{-1}\left(\dfrac{u}{\sqrt{2gh}}\right)$ என்பதை உய்த்தறிக.

22. தரைக்கு மேலே h உயரத்தில் ஓய்விலிருக்கின்ற m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று கொண்டிருக்கும் சக்தியைக் காண்க. கிடையுடன் $\dfrac{\pi}{3}$ ஆரையின் சாய்வில் உள்ள நேரிய தென்னைமரம் ஒன்றின் உச்சிக்கு $20Kg$ நிறை உள்ள புறக்கணிக்கத்தக்க உயரமுடைய சிறுவன் ஒருவன் ஏறும்போது ஈர்வைக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை $2\sqrt{3}\ KJ$ ஆகும். தென்னை மரத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

தென்னை மரத்தின் உச்சியிலே சிறுவன் தேங்காய் ஒன்றைப் பறித்து அதனைத் தென்னை மரத்தின் அடியை அடிக்குமாறு கிடையுடன் α என்னும் ஏற்றக் கோணத்தில் $V\ ms^{-1}$ கதியுடன் எறிந்தால் $\cos\alpha\sin\left(\alpha + 60^\circ\right) = \dfrac{25}{V^2}$ எனக் காட்டி $V \geq 10\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்பதை உய்த்தறிக. $\left(g = 10ms^{-1}\right)$

23. கிடையுடன் α சாய்வை உடைய தளம் ஒன்றிலிருக்கும் புள்ளி O இலிருந்து வேகம் u உடன் ஒரு துணிக்கை எறியப்படுகிறது. எறியல் திசையானது மேன்முக அதி உயர்சரிவுக் கோட்டுடன் B கோணத்தை அமைக்கிறது. இங்கு $0 < \alpha + \beta < \dfrac{\pi}{R}$ அதி உயர் சரிவுக் கோட்டைக் கொண்டுள்ள நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஈர்வையின் கீழ் இயக்கம் நடைபெறுகிறது. துணிக்கையின் முதலாவது மொத்தலானது தளத்துக்குச் செவ்வனாக O விலிருந்து d தூரத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளி P யில் நடைபெறுமாயின்

(a) $\beta = tan^{-1}\left(\frac{1}{2} cot\ \alpha\right)$

(b) $d = \frac{2u^2}{g} \frac{sin\ \alpha}{1+3sin^2\ \alpha}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $|u|$ இன் தரப்பட்டுள்ள ஒரு பெறுமானத்துக்கு $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ஆக இருக்கும் போது d இன் அதி உயர் பெறுமானம் $\frac{u^2}{g\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் இரண்டாம் மொத்தலானது P இற்கும் O இற்கும் இடையே $PQ = e^2 d$ ஆகுமாறுள்ள Q என்னும் புள்ளியில் நடைபெறுகிறதெனவும், இம் மொத்தலுக்குச் சற்று முன்னருள்ள வேகம் eu ஆகவும் O விலுள்ள தொடக்க எறியல் திசைக்கு சமாந்தரமாகவும் இருக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு e மீளமைவுக் குணகம்.

பலவினப் பயிற்சிகள்

1. கட்டடம் ஒன்றிலிருந்து தூக்கியொன்று இறங்கிச் செல்கிறது. முதல் மூன்றிலொரு தூரத்தை ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகலோடும், அடுத்த மூன்றிலொரு தூரத்தை சீரான வேகத்தோடும், இறுதியான மூன்றிலொரு தூரத்தை சீரான அமர்முடுகலோடும் சென்று அடித்தளத்தை அடையும் போது ஓய்வுக்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது. இது இறங்குவதற்கு எடுக்கப்பட்ட நேரம், ஒரு துணிக்கை சுயாதீனமாக விழும்போது தூக்கி சென்ற தூரத்தைப் போல் நான்கு மடங்கு தூரத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரத்திற்குச் சமமாகும். தூக்கியின் இயக்கத்திற்கு வேக- நேர வளையியைப் பரும்படியாக வரைந்து, இந்தத் தூக்கியில் ஒரு மனிதன் நின்றால், அவனது பாதத்தில் பட்டறியும் ஆரம்ப அமுக்கம், அவனது நிறையின் $\frac{23}{48}$ பங்கு என நிறுவுக. இறக்கத்தின் இறுதியில் அம் மனிதனிலுள்ள அமுக்கத்தைக் காண்க.

2. A, B எனுமிரு புகையிரதங்கள் X, Y எனுமிரு புகையிரத நிலையங்களுக்கிடையே நேரிய சமாந்தரப் பாதைகளின் வழியே ஓடுகின்றன. அவை நிலையம் X ஐ ஒரே நேரத்தில் விட்டு நீங்கி Y ஐ t செக்கனில் அடைகின்றன. புகையிரதம் A, ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அதன் கதி $u\,ms^{-1}$ ஆகும் வரை $f\,ms^{-2}$ எனும் சீரான வீதத்தில் ஆர்முடுகிச் செல்கின்றது. அது பின்னர் பாதையின் ஒரு பகுதி வழியே $u\,ms^{-1}$ எனும் சீரான கதியுடன் ஓடி இறுதியாக $f ms^{-2}$ எனும் சீரான வீதத்தில் அமர்முடுகி நிலையம் Y ஐ ஓய்வில் வந்தடைகிறது. புகையிரதம் B ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, சிறிது நேரத்திற்கு $f^1\ ms^{-2}$ எனும் சீரான வீதத்தில் சென்று கதியைப் பெறுகிறது. பின்னர் நிலையம் Y இல் ஓய்வுக்கு வரு முன்னர் $f^1\ ms^{-2}$ எனும் அதே சீரான வீதத்தில் அமர்முடுகிச்செல்கிறது. புகையிரதம் A யினதும், B யினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக- நேர வளையிகளை ஒரே படத்தில் வரைந்து $u\left(t - \frac{u}{f}\right) = \frac{1}{4} f^1 t^2$ எனக் காட்டுக.

B தொடர்பான A இன் இயக்கத்திற்கான வேக- நேரவளையியை வேறொரு படத்திலும் வரைக. ஒவ்வொரு படத்திலும் வேக- நேர வளையியின் பருமனையும் வடிவத்தையும் தெளிவாகக் குறித்துக் காட்டுக.

3. A,B எனும் இரண்டு சிறிய பரல்கள் (கல்லுருண்டைகள்) O எனும் புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A ஆனது ஒரு நிலைக்குத்து வேகம் u உடன் t=o என்ற நேரத்தில் மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. A தனது அதிஉயர் உயரத்தை அடைகையில், O விலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி அதே வேகம் u உடன் B வீசப்படுகிறது. t=o என்ற கணத்திலிருந்து A யின் B தொடர்பான இயக்கத்துக்கான வேக- நேர வளையியைப் பருமட்டாக வரைக. இதிலிருந்து பரல்கள், நேரம் $\frac{3u}{2g}$ இல் மோதுமெனக் காட்டுக.

4. O எனும் ஒரு சிறிய பொருள் u எனும் வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி எறியப்பட்டது. அப் பொருள் தான் அடையக் கூடிய அதிஉயர் உயரத்தின் அரைவாசி உயரத்தை அடையும் போது வெடித்து A,B எனும் இரு சம பாகங்களாகப் பிரிகிறது. அவ்வெடியின் விளைவினால் பாகம் A யானது கணநிலை ஓய்விலிருக்கின்றது. மற்றப் பாகமாகிய B யின் வேகம் இரு மடங்காகிறது எனக் காட்டுக.

பொருள் O இனதும் பாகங்கள் A,B ஆகியவற்றினதும் வேக- நேர வரைகோடுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு பாகங்களின் கதிகள் சமமாக இருக்கும் போது பாகம் A எறியற்புள்ளியை மட்டாக அடையும் என உய்த்தறிக.

ஒரு நேர்ப்பாதையில் செல்லும் கப்பலொன்று, ஓய்விலிருந்து அதன் வேகம் $16ms^{-1}$ ஆகும் வரை $8ms^{-2}$ எனும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகிறது. அதன் பின் அக்கப்பல் ஒரு சீரான வேகத்துடன் இயங்குகிறது. கப்பல் இயங்கும் திசைக்குச் செங்குத்தாய் A,B,C எனும் மூன்று திரைகள் $AB=BC=156m$ ஆகுமாறு கப்பலின் தட்டிலிருக்கின்றன. கப்பல் இயங்கும் திசையில் $200ms^{-1}$ வேகத்துடனியங்கும் ஒரு குண்டு கப்பல் இயங்கத் தொடங்கும் கணத்தில் திரை A ஐ ஊடுருவிச் செல்கிறது. பின்னர் திரை B ஐயும் அதன் பின்னர் திரை C ஐயும் ஊடுருவிச் செல்கிறது. திரையொன்றை ஊடுருவிச் சென்ற உடனே பூமிக்குத் தொடர்பான குண்டின் வேகம், அது ஊடுருவிச் செல்வதற்கு ஒருகணம் முன்புள்ள வேகத்தின் $\frac{4}{5}$ ஆகும். திரைகளுக்கிடையில் குண்டு ஒரு சீரான வேகத்துடன் இயங்குகிறது. குண்டுக்கும் கப்பலுக்குமான வேக- நேர வளைகோடுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. அந்த உருவத்தை மாத்திரம் பயன்படுத்தி A யிலிருந்து B இற்கு குண்டு செல்ல எடுக்கும் நேரம் 1 செக்கன் எனக் காட்டுக. மேலும் B இலிருந்து C இற்குக் குண்டு செல்ல எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

6. A,B என்பன இரு நிலையங்கள் ஆகும். $\underset{\sim}{i}$ என்பது A யிலிருந்து B க்கு திசை கொண்ட ஒரு அலகுக் காவியாகும். $\underset{\sim}{j}$ என்பது AB யிற்குச் செங்குத்தான ஓர் அலகுக் காவியுமாகும். நேரம் t=o இல் R_1 என்னும் ஒரு வாணம் A யிலிருந்து மெதுவாகப் புறப்பட்டு $f\left(\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}\right)$ என்னும் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்கிறது. நேரம் $t_\circ$ செக்கன்களுக்குப் பின்னர் R_2 என்னும் வாணம் B யிலிருந்து புறப்பட்டு $2f\left(-\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}\right)$ ஆர்முடுகலுடன் R_1 ஐச் சந்திக்கும் முகமாகவே செல்கிறது. $\left(t_\circ+t_c\right)$ செக்கன்களில் வாணங்கள் ஒன்றை ஒன்று மோதுகின்றன.ஒரே வரைபடத்தில் R_1, R_2 இன் பாதையையும், ஒரே வரிப்படத்தில் வேக- நேர வளையிகளையும் வரைக. $t_c=t_\circ\left(1+\sqrt{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

7. நேரம் t-o இல் m திணிவுள்ள ஒரு சிறிய மாபிள் P, நிலத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து கதி u உடன் நிலைக்குத்தாக மேனோக்கி எறியப்படுகிறது. அதே நேரத்தில் m திணிவுடைய இன்னொரு சிறிய மாபிள் Q,, A யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே h உயரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி B யில் ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. மாபிள்களும், நிலமும் பூரண மீள்தன்மை உடையவை. AB யின் மீது C என்னும் புள்ளியில் அவற்றின் கதிகள் சமமாகும் போது இரு மாபிள்களும் மோதுகின்றன.

(i) $AC:CB=3:1$ **(ii)** $u^2=2gh$ எனக் காட்டுக.

$o\le t\le\frac{5h}{u}$ எனும் ஆயிடையில் மாபிள்கள் P யினதும் Q இனதும் வேக- நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில பருமட்டாக வரைக. அவற்றை முறையே (———) எனும் தொடர்ச்சியான கோட்டினாலும், (• • •) என்ற புள்ளிக் கோட்டாலும் குறித்துக் காட்டுக. P தொடர்பான Q இன் இயக்கத்திற்கான வேக- நேர வளையியை வேறொரு வரைபில் வரைக.

8. t நேரத்தில் P எனும் புள்ளியின் தானக் காவியான $\underset{\sim}{r}$ என்பது $\underset{\sim}{r}=x\underset{\sim}{i}+y\underset{\sim}{j}$ என்பதாற் தரப்படுகிறது. இங்கு x உம் y உம் Ox, Oy அச்சுக்கள் குறித்து P இன் செவ்வகத்தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளாகும். $\underset{\sim}{i}$ உம் $\underset{\sim}{j}$ உம் Ox,Oy வழியேயான அலகுக் காவிகள் ஆகும்.

(a) V எனும் வேகக் காவியையும்

(b) f எனும் ஆர்முடுகல் காவியையும் எழுதுக. .01

P எனும் புள்ளி a எனும் ஆரையையும் O எனும் மையத்தையும் கொண்ட வட்டத்தில் நகர்கிறது. $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$ எனும் உருமாற்றத்தால் $\overrightarrow{OP}$

எனும் ஆரைக்காவி வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள f இனது கூறுகளைக் காண்க. இங்கு θ என்பது ox, op என்பவற்றிற்கிடையிலான கோணமாகும்.

ஆர்முடுகல் காவியானது f என்பது PO உடன் α எனும் ஒருமையான கோணம் அமைக்கும் வண்ணம் P யினது இயக்கம் அமைந்துள்ளது. t எனும் நேரத்தில் கதி V ஆனது $\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} \pm \frac{t}{a} \tan\alpha$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இங்கு V_o என்பது தொடக்கக் கதியாகும். ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் $V-t$ வளையியை பருமட்டாக வரைக.

9. T, T^1 எனும் இரு புகையிரதஎஞ்சின்கள் A, B எனும் இரு நிலையங்களுக்கிடையே சமாந்தரமான புகையிரதப் பாதைகள் வழியே ஓடுகின்றன. அவை நிலையம் A யில் ஓய்விலிருந்து ஒருங்கே ஆரம்பித்து நிலையம் B இலே ஒருங்கே ஓய்விற்கு வருகின்றன. T, T^1 எனும் எஞ்சின்கள் முறையே f, f^1 $(f^1 < f)$ என்னும் சீரான ஆர்முடுகல்களுடனும் பின்னர் முறையே u, u^1 $(u^1 > u)$ எனும் சீரான கதிகளுடனும், இறுதியாக முறையே f, f^1 எனும்சீரான அமர்முடுகல்களுடனும் இயங்குகின்றன.

(i) $AB = d$ என எடுத்து ஒரே வரிப்படத்திலே T, T^1 எஞ்சின்களின் இயக்கங்களின் வேக- நேர வளையிகளைப் பரும்படியாக வரைக.

(ii) அத்துடன் T தொடர்பான T^1 இன் இயக்கத்துக்கான வேக- நேர வளையியை வேறான வரிப்படமொன்றில் பரும்படியாக வரைக. உருவத்தின் வடிவத்தினதும், பருமனினதும் முழுமையான விவரணத்தைத் தரும் வண்ணம் அவற்றைக் கவனாமாகப் பெயர் குறிக்க.

(iii) நிலையம் A இலிருந்து நிலையம் B இற்கான பயணத்தின் போது T இலுள்ள எஞ்சின் சாரதியினால் காணப்படுகின்றவாறு I^1 இலுள்ள எஞ்சின் சாரதியின் நிலையை – வெளி நேர வரைபடமொன்றில் வளையிகளின் தன்மையைக் குறித்துரைத்து விவரிக்க.

T தொடர்பான T^1 இன் பாதையை வேறான படமொன்றிலே திசை கொண்ட குற்றிட்ட கோடொன்றினால் காட்டுக.

10. பாரமான ஒரு துணிக்கை ஒன்று நேரம் t=o இல் நிலைக்குத்தாக, நிலத்திலிருந்து மேனோக்கி வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது. துணிக்கைக்கும், நிலத்திற்கும் இடையேயான மீளமைவுக்குணகம் $e(<1)$ ஆகும். எல்லா $t \geq o$ இற்கும் ஆர்முடுகல் - நேர வளையியையும், வேக- நேர வளையியையும் வரைக.

(a) நிலத்திற்கு மேலே h உயரத்திலுள்ள புள்ளியொன்றை, துணிக்கை முதல் தடவையாக t_1, t_2 நேரங்களின் பின்னர் மேல்நோக்கி, கீழ்நோக்கி கடக்கின்றதெனின், $t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$ எனக் காட்டுக.

(b) வேக- நேர வளையியை உபயோகித்து துணிக்கை ஓய்விற்கு வருமுன் அது கடந்த மொத்தத்தூரத்தைக் காண்க. முழு இயக்கத்திற்குமான சராசரிக்கதி $\frac{u}{2(1+e)}$ என உய்த்தறிக.

11. A,B என்னுமிரு புகையிரத நிலையங்கள் $10km$ இடைத்தூரத்தில் உள்ளன. A ஐ மணிக்கு $60km$ இல் கடக்கும் ஒரு புகையிரதமானது இக்கதியை $8km$ தூரத்திற்குத் தொடர்ந்து பேணிப் பின்னர் சீராக அமர்முடுகி B யில் ஓய்விற்கு வருகிறது. முதலாவது புகையிரதம் A யைக் கடப்பதற்கு 12 நிமிடத்திற்கு முன்னர், A யிலே ஓய்விலிருந்து புறப்பட்ட இரண்டாவது புகையிரதம், சிறிது நேரத்திற்கு $5km/$ மணி/ நிமிடம் என்னும் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய பின்னர் சீராக அமர்முடுகி முதலாவது புகையிரதம் B யை அடையும் அதே நேரத்தில் B பில் ஓய்விற்கு வருகிறது. இரண்டிற்கும் ஒரே அச்சுக்களைப் பயன்படுத்தி வேக- நேர வரைபுகள் இரண்டையும் வரைக.

இப்பயணத்திற்கு இரண்டாவது புகையிரதம், 24 நிமிடங்களை எடுக்கின்ற தெனக் காட்டி, அதன் அதிஉயர் கதியையும் $km/$ மணி/ நிமிடம் என்பதில் அதன் அமர்முடுகலையும் காண்க.

12. நிலத்திலிருந்து அதே உயரத்தில் A,B எனும் இரு பயணி விமானங்கள் முறையே $u, v\left(v > \sqrt{2}\,u\right)$ எனும் சீரான வேகங்களுடன் விரைந்து செல்கின்றன. விமானம் A யானது, வடக்குத் திசையில் செல்கிறது. ஒரு கணத்தில் விமானம் A யிலுள்ள ரேடர் தொலைக்காட்டித் திரை காட்டியவாறு விமானம் B ஆனது கிழக்கே d எனும் தூரத்தில் ஒரு மோதல் பாதையிலுள்ளது. B இயங்கும் திசையைக் காண்க.

மோதலைத் தவிர்ப்பதற்காக விமானம் A ஆனது கதியோ, உயரமோ மாறாமலிருக்க தன் பாதையை உடனடியாக மாற்றியமைக்கிறது. கேத்திர கணித முறையிலோ அல்லது வேறு முறையிலோ

(i) விமானம் A எப் பாதையில் செல்லலாம் எனவும்,

(ii) விமானம் A இன் பாதையானது, வடக்கிற்கு மேற்கே $\cos^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$ திசையில்

அமைக்கப்பட்டபோது B இன் A தொடர்பான கதியானது அதி குறைவாயிருக்குமெனவும்,

(iii) விமானம் B ஆனது, விமானம் A யிலிருந்து மிகக்கூடிய தூரத்திலிருப்பதற்கான A இன் பாதையானது தெற்கிற்கு மேற்கே கோணம் $\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$ திசையில் அமையவேண்டும் எனவும் காட்டுக.

(ii),(iii) ஆகிய வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் A இற்கும் B இற்குமிடையிலான மிகக் குறைவான தூரத்தைக் காண்க.

13. விளையாட்டு மைதானமொன்றிலுள்ள A, B என்னுமிரு புள்ளிகளில் ஒரு ஒலி பெருக்கிகள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. காற்று வீசாத அமைதியான நாளொன்றில் A, B என்பவற்றிலுள்ள ஒலிபெருக்கிகள் மூலம் வரும் அறிவிப்புக்களை, அவ்விளையாட்டு மைதானத்திலே C எனும் புள்ளியில் நிற்கும் (கேட்குநர்) ஒருவரால் ஒரே நேரத்தில் கேட்கக்கூடியதாக இருக்கிறது. $CA = CB = a\ cm \cdot \angle ACB = \frac{\pi}{2}$ CB வழியே $v\,cms^{-1}$ எனும் ஒரு சீரான கதியுடன் ஒரு உறுதியான காற்று கிடையாக வீசுகிறது. வளி தொடர்பான ஒலியின் வேகத்தை $c.cms^{-1}$ எனக் கொண்டு, கேட்குநர் ஒரே அறிவிப்பை அடுத்தடுத்து இரு முறை கேட்பாரெனக் காட்டி, இவற்றிற்கிடைப்பட்ட கால இடையைக் காண்க.

வேகம் v ஆனது c யுடன் ஒப்பிடுகையில் சிறிதாக இருக்கும் போது இக்கால இடையானது $\frac{av}{c^2}$ செக்கன் ஆகுமென்பதை உய்த்தறிக.

14. நேரான கரைகளைக் கொண்ட $4km$ அகலமுள்ள ஆறொன்று, உறுதியான சீரான கதி $3kmh^{-1}$ உடன் பாய்கின்றது. A என்பது ஒரு கரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியும், எதிர்க்கரையிலே A இற்கு நேரெதிராக உள்ள புள்ளி B யும் ஆகும். B உள்ள அதே கரையில் உள்ளதும் ஆனால் ஓட்டத்திற்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளதும் BC=$3km$ ஆகுமாறும் உள்ள புள்ளி C ஆகும். அமைதியான நீரிலே $5kmh^{-1}$ எனும் கதியிலே துடுப்பு வலிக்கக்கூடிய ஒரு மனிதன், தோணியானது எப்பொழுதும் திசை $\overrightarrow{AC}$ நோக்கி இருக்குமாறு A யிலிருந்து தொடங்கி துடுப்பு வலிக்கிறான். எதிர்க்கரையை அவன் எந்த இடத்தில், எந்நேரம் வந்தடைந்தான்?

அமைதியான வளியிலே $9\,kmh^{-1}$ கதியில் பறக்கக்கூடிய இருபறவைகள் C யிலுள்ள சிறிய மரமொன்றின்மீது அமர்ந்திருக்கின்றன. சீரான உறுதியான காற்றொன்று $6\,kmh^{-1}$ என்னும் கதியுடன் $\overrightarrow{BA}$ என்னும் திசையில் ஆற்றுக்குக் குறுக்காக வீசுகிறது. t=o இலே A யை விட்டு மனிதன் போகும்போது அவ்விரு பறவைகளும் வெவ்வேறு திசைகளில் C இலிருந்து ஒருங்கே புறப்பட்டுத் தோணியின் பாய்மரத்தை நோக்கிச் செல்கின்றன. தோணியானது ஆற்றிலே இன்னமும் இருக்கையில் $\frac{5}{8+3\sqrt{5}}$ மணி என்னும் நேரத்தில் ஒரு பறவை பாய்மரத்தை அடையும் எனக் காட்டுக. தோணிக்காரன் எதிர்க்கரையை அடையும் போது மற்றப் பறவை பாய்மரத்திலிருந்து $3\left(\sqrt{5}-1\right)km$ தூரத்தில் இன்னமும் இருக்குமெனக் காட்டுக. பாய்மரத்தை அடைவதற்கு அது மேலும் எவ்வளவு நேரம் பறக்க வேண்டும்.

15.(a) ஓர் ஆறு $2d$ என்னும் இடைத்தூரத்தில் சமாந்தரமான ஆற்றங்கரைகளைக் கொண்டுள்ளது. அதிலுள்ள நீர், கரைகளுக்கு சமாந்தரமாகப் பாய்கிறது. ஆற்றின் ஓரங்களிலே பூச்சியமாக இருக்கும் நீரோட்டத்தின் கதி ஆற்றின் நடுப்பகுதி வரை சீராக அதிகரித்து அங்கே u ஆகிறது. நீர் தொடர்பாக நீச்சற்காரர் ஒருவரின் கதி $2u$ ஆகும். அவர் ஆற்றங்கரைகளுக்குச் செங்குத்தான கோடு ஒன்று வழியே ஆற்றிற்கு நேர் குறுக்கே சென்றடையக் கூடியதாக நீந்துகிறார். அவர் தமக்கு அண்மையிலுள்ள ஆற்றங்கரையிலிருந்து x தூரத்திலிருக்கும் போது நீரோட்டத்தின் வேகத்தைக் கண்டு வேக முக்கோணியை வரைக. இதிலிருந்து $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{u^2}{d^2}\left(4d^2 - x^2\right)$ எனக் காட்டுக. இவ்வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தொகையிட்ட நீச்சல்காரர் ஆற்றை $\frac{\pi d}{3u}$ எனும் நேரத்தில் கடப்பாரென்பதை உய்த்தறிக.

(b) $0.6m$ விட்டமுடைய சில் ஒன்று கிடையான தரை வழியே செக்கனுக்கு 0.7 ஆரையன் என்னும் சீரான கோணவேகத்துடன் உருளுகின்றது. எந்தவொரு நேரத்திலும் சில்லின் கிடை விட்டத்தின் முனைப் புள்ளிகளின் வேகங்கள் நிமிர்கோணத்திற்குரியனவெனக் காட்டி, இவ்வேகங்களின் பருமன்களைக் காண்க.

16.(a) P என்னும் துணிக்கை நேர்கோடு $y = x$ இன் வழியே நேரம் t இல் அதன் கதி $\sqrt{2}\ ut$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. இங்கு u ஒரு ஒருமை. இரண்டாவது துணிக்கை Q. நேர் y அச்சின் வழியே u எனும்

மாறாக்கதியில் இயங்குகிறது. t=o இல் துணிக்கை P, புள்ளி (-4,- 4) இல் O ஐ நோக்கி இயங்குகிறது. Q உற்பத்தியிலுள்ளது. (O உற்பத்தியாகும்)

(i) நேரம் t இல், P இன் Q தொடர்பான வேகம்

(ii) t=2 இல் PQ இன் தூரம் என்பவற்றைக் காண்க.

(b) நேரிய சமாந்தரக் கரைகளையுடைய am அகலமான ஆறு, வடக்கு நோக்கி $u\,ms^{-1}$ கதியில் பாய்கின்றது. O கரையிலுள்ள ஒருபுள்ளி A என்பது O இற்கு நேரெதிரே கிழக்காக மறுகரையிலுள்ள ஒரு புள்ளி. Ox, Oy எனும் ஆள்கூற்றச்சுக்கள் முறையே கிழக்கு, வடக்குத் திசைகளில் எடுக்கப்படுகின்றன. நிலையான நீரில் v கதியுடன் செல்லக் கூடிய வள்ளம் ஒன்று O விலிருந்து புறப்பட்டு ஆற்றைக் கடக்கிறது.

(i) u ஒரு ஒருமையாகவும் $\frac{1}{6}v$ இற்கு சமமாகவும் இருந்தால், வள்ளம் O இலிருந்து A ஐச் சென்றடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

(ii) $u = x(a-x)\dfrac{v}{a^2}$ ஆகுமாறு u மாறுகிறதெனவும், வள்ளம் கிழக்கு நோக்கியுமிருக்குமாறு செலுத்தப்பட்டால், வள்ளத்தின்ஆள்கூறுகள்

$(x, y), \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(a-x)}{a^2}$ எனும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யுமெனக் காட்டுக.

வள்ளம் மறுகரையை C எனும் புள்ளியில் அடைந்தால் AC யின் தூரத்தையும் எடுத்த நேரத்தையும் காண்க.

17. நேரிய சமாந்தரக் கரைகளையுடையதும், $240m$ அகலமுமான ஓர் ஆறு $5ms^{-1}$ சீரான கதியில் பாய்கின்றது. வள்ளம் ஒன்று நிலையான நீரில் $12ms^{-1}$ இல் செல்லக்கூடியது. சைக்கிளோட்டி ஒருவன் ஆற்றங்கரையின் ஓரத்திலுள்ள நேர்ப்பாதை வழியே ஆற்றோட்டத்தின் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் $4ms^{-1}$ கதியில் செல்கிறான். சைக்கிளோட்டி செல்லும் கரைக்கு எதிர்ப்பக்கத்திலுள்ள கரையின் O எனும் புள்ளியிலிருந்து இவ்வள்ளம் புறப்படுகையில் சைக்கிளோட்டி O இற்கு நேரெதிரே உள்ள புள்ளியிலிருந்து, ஆற்றோட்டத்தின் திசையில் $80m$ தூரத்திலுள்ளான். வள்ளம் ஆனது, நீர் தொடர்பாகக் கரைக்குச் செங்குத்தான திசையில் செலுத்துப்படுகிறது. இயக்கத்தின் போது சைக்கிளோட்டிக்கும், வள்ளத்திற்குமிடையேயான மிகக்குறைந்த தூரத்தையும், அதற்கான நேரத்தையும் காண்க.

வள்ளமானது O விலிருந்து நேரெதிரே உள்ள புள்ளியைச் சென்றடையுமாறு

செலுத்தப்பட்டால், அதற்கான நேரம் அண்ணளவாக 22 செக்கன்கள் எனக் காட்டுக.

18. $\underline{i}, \underline{j}$ என்பன கிழக்கு, வடக்கு நோக்கிய அலகுக்காவிகளாகும். தூரங்கள் கிலோமீற்றரிலும், வேகங்கள் kmh^{-1} இலும் அளக்கப்பட்டபொழுது $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ எனும் இரு கப்பல்களின் நிலைகள் பின்வருமாறு.

நிலை	வேகம்	நேரம்
$S_1, r_1 = \underline{i} + 3\underline{j}$	$\underline{v}_1 = \underline{i} + 2\underline{j}$	மு.ப 10.00 மணி
$S_2, r_2 = \underline{i} + 2\underline{j}$	$\underline{v}_2 = 5\underline{i} + 6\underline{j}$	மு.ப 11.00 மணி

கப்பல்கள் தொடர்ந்து இவ்வேகங்களில் செல்லுமெனின் இயக்கத்தின் போது அவைகளுக்கிடையேயான மிகக் குறைந்த தூரத்தையும், அப்பொழுது நேரத்தையும் காண்க.

மு.பகல் 11.00 மணிக்கு முதலாவது கப்பல் தனது வேகத்தை $\frac{11}{3}i + 2j$ ஆக மாற்றியதெனில், இரு கப்பல்களும் ஒன்றுடனொன்று மோதுமெனவும் அப்பொழுது நேரத்தையும் காண்க.

19. M திணிவுடைய சீரான ஆப்பு ஒன்றின் மத்தியகுறுக்குவெட்டு முக்கோணி ABC ஆகும். இவ்வாப்பு AB ஐக் கொண்ட முகம் கிடை மேசை ஒன்றின் மீது கிடக்க வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணங்கள் CAB, ABC என்பன முறையே α, $\frac{\pi}{2}$ ஆகும். ஆப்பின் சாய்முகத்தில் m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று வைக்கப்பட்டு மாறாப் பருமனையுடைய கிடைவிசை P நிலைக்குத்து முகத்தில் அம்முகத்திற்குச் செங்குத்தாக ஆப்பின் திணிவு மையத்தை நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. விசையின் திசையில் ஆப்பின் ஆர்முடுகல் F எனின் $P = mg\sin\alpha\cos\alpha + \left(M + m\sin^2\alpha\right)F$ எனவும் கிடைத்தளத்திற்கும், ஆப்பிற்குமிடையேயான மறுதாக்கம் $\left(M + m\cos^2\alpha\right)g + MF\sin\alpha\cos\alpha$ எனவும் காட்டுக.

20. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, ஒப்பமான கிடைமேசையிலுள்ள $2m$ திணிவுடைய ஆப்பு ஒன்றின் கரடான சாய்முகத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் சாய்முகத்தின் சாய்வு α ஆகவும், ஆப்புக்கும் துணிக்கைக்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும் உள்ளது

இங்கு $\mu < \tan\alpha$ தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. ஆப்பு f எனும் ஆர்முடுகலுடன் இயங்கத் தொடங்கும் எனின் f ஆனது $2f = (g\cos\alpha - f\sin\alpha)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$\alpha = 45^\circ, \mu \frac{1}{2}$ எனின், 1 செக்கனில் ஆப்பு தொடர்பாக துணிக்கை சென்ற தூரத்தைக் காண்க.

21. m என்னும் திணிவுடைய துப்பாக்கிக் குண்டொன்று, ஓய்விலுள்ளதும் துப்பாக்கிக் குண்டின் வேகத்தின் திசையில் சுயாதீனமாக இயங்கக் கூடியதுமான M திணிவுள்ள ஒரு மரக்குற்றியினுள் கிடையாக V என்னும் வேகத்துடன் சுடப்படுகிறது. அடுத்துள்ள இயக்கத்தில் துப்பாக்கிக் குண்டானது குற்றியினுள் S என்னும் தூரத்திற்கு ஊடுருவுகின்றது. ஊடுருவலின் போது துப்பாக்கிக் குண்டிற்கும், குற்றிக்குமிடையேயான விசை F ஆனது, ஒருமையாகும் எனக் கொண்டு துப்பாக்கிக் குண்டு, குற்றி என்பவற்றின் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுமுறையில் $F = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)\frac{V^2}{2S}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

22. உந்தக் காப்புக் கோட்டைக் கூறுக.
m திணிவுள்ள ஒரு குண்டு u எனும் வேகத்தோடு சென்று இரண்டு துண்டுகளாக வெடிக்கின்றது. இவற்றில் $\frac{1}{3}m$ திணிவுள்ள துண்டு ஒன்று ஆரம்பத்தின் இயக்கத்தின் திசையோடு கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ அமைத்து $2u$ வேகத்தில் செல்கிறது. மற்றைய துண்டின் கதியைக் காண்க. இந்த வெடிப்பால் வெளியிடப்பட்ட அதி குறைந்த சக்தியின் அளவு $\frac{11mu^2}{12}$ எனக் காட்டுக.

23. m திணிவுடைய ABC என்னும் குழாய் ஒன்று B யில் செங்கோண வடிவத்தில் வளைக்கப்பட்டுள்ளது. பகுதி AB யிற்கு இரு நிலைத்த வளையங்களினூடாக கிடையாய் வழுக்கிச் செல்ல சுயாதீனமுண்டு. பகுதி BC நிலைக்குத்தாயுள்ளது. B யிலுள்ள புறக்கணிக்கத்தக்க திணிவுடைய ஒப்பமான கப்பியொன்றின் மீது செல்லும் நீட்ட முடியாத இழை ஒன்று, ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகளைத் தொடுக்கிறது. P, Q என்பன முறையே AB, BC இல் உராய்வின்றிச் செல்கின்றன. தொகுதியானது ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. உந்தக் காப்புக் கோட்பாட்டையும் சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டையும் பயன்படுத்தி Q ஆனது தொடக்க நிலையிலிருந்து y தூரம் விழுந்த பொழுது அதன் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறு y ஆனது $y^2 = \frac{6gy}{5}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.
இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாகவோ Q இன் ஆர்முடுகலின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இழையிலுள்ள இழுவையைக் கண்டு துணிக்கை Q விற்கும் குழாயிற்குமிடையிலான மறுதாக்கம் $\frac{mg}{5}$ எனக் காட்டுக.

24.(a) M எனும் திணிவுடைய ரயில் பாரக்கட்டை வண்டியொன்று ஒப்பமான நேரான கிடைத் தண்டவாளம் மீது ஓய்விலுள்ளது. அவ்வண்டியின் ஒரு விளிம்பில் நிற்கும் m எனும் திணிவுடைய ஒரு மனிதன் தண்டவாளத்திற்குச் சமாந்தரமான கிடைத்திசையிலே வண்டியின் சார்பாக u என்னும் வேகத்துடன் வெளியே குதிக்கின்றான். வண்டியின் வேகத்தைக் காண்க.

(b) ஒவ்வொருவரும் m திணிவுடைய n எண்ணிக்கை கொண்ட மக்கள் குழு ஓய்விலுள்ள வண்டியின் விளிம்பில் நிற்கிறது.

(i) எல்லோரும் ஒரே நேரத்தில் வண்டியின் சார்பாக u என்னும் வேகத்துடன் (a) இல் கூறியவாறு குதித்தால் வண்டியின் வேகத்தைக் காண்க.

(ii) ஒவ்வொருவரும் அடுத்தடுத்து வண்டியின் சார்பாக u என்னும் வேகத்துடன் (a) இல் கூறியவாறு குதித்தால் வண்டியின் முடிவு வேகமானது $\sum_{r=1}^{n}\frac{mu}{M+rm}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. (i) இலுள்ள முடிவானது (a) யிலுள்ள முடிவிலும் பெரிதாகுமா? உமது விடைக்குக் காரணம் காட்டி விளக்குக.

25. m திணிவுடைய குண்டொன்று கிடையாக u கதியுடன் நிலையான மரக்குற்றி ஒன்றினுள் சுடப்பட்ட போது குண்டானது $\frac{2u}{3}$ கதியுடன் வெளியேறியது. மரக்குற்றியானது ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றிலே சுயாதீனமாக அசையக்கூடியதாக உள்ள போது, இப்பரிசோதனை மீளவும் செய்யப்பட்டது.

குண்டானது குற்றி தொடர்பாக $\frac{u}{2}$ கதியுடன் வெளியேறுகிறது இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் குண்டு ஊடுருவிச் செல்வதற்கான தடை விசை ஒருமையானதெனக் கொண்டு இரண்டாவது சந்தர்ப்பத்தில் குற்றியின் திணிவையும், அதன் இறுதி வேகத்தையும் காண்க.

26. வண்டித்தொடர் ஒன்று நேரான பாதை வழியே A என்னும் புள்ளியிலிருந்து $100m$ தூரம் F என்னும் மாறும் விசை ஒன்றினால் இழுத்துச் செல்லப்படுகிறது. விசை F இன் பருமன் $\left(6-\frac{x}{20}\right)N$ ஆகும். இங்கு x ஆனது A யிலிருந்து வண்டித் தொடர் அசைந்த தூரம் ஆகும். விசை F ஆனது பாதையுடன் 30° கோணத்தை அமைக்கின்றதெனின் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க.

27. சீரான வேகம் $60\,kmh^{-1}$ உடன் கிடையாக இயங்கும் பாரவண்டி ஒன்று, இழு வண்டி ஒன்றை இழுத்துச் செல்கிறது. இழுவண்டியின் முற்பக்க விளிம்பிலிருந்து 9 மீற்றர் தூரத்திலே இழுவண்டியின் கரடான செவ்வக வடிவத் தளத்தின் மீது சிறிய சுமை ஒன்று ஓய்விலுள்ளது. d மீற்றர் தூரத்திலே பாரவண்டியை நிற்பாட்டுவதற்காக t=o என்னும் நேரத்திலே தொடங்கி சீரான அமர்முடுகல் ஒன்று பாரவண்டிக்குக் கொடுக்கப்பட்டது. இழுவண்டி தொடர்பாக சுமை அசையத்தொடங்கினால் $\mu < \frac{125}{9d}$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ என்பது சுமைக்கும் இழுவண்டியின் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட உராய்வுக் குணகம் ஆகவும் d = 25 ஆகவும் $\mu = 0 \cdot 4$ இருப்பின், $2\frac{\sqrt{13}}{3}ms^{-1}$ என்னும் வேகத்துடன் சுமையானது இழுவண்டியின் முற்பக்க விளிம்பை $\frac{25-\sqrt{13}}{6}$ செக்கனில் அடையும் எனக் காட்டுக.

28. வேகம் v உடன் இயங்கும் திணிவு m உடைய துணிக்கை ஒன்றை அதன் இயக்கத்துக்கு எதிரான திசையில் மாறும் விசை ஒன்றினால் ஓய்விற்குக் கொண்டு வருவதில் செய்யப்படும் வேலை $\frac{1}{2}mv^2$ எனக்காட்டுக.

நேரம் t=o இலே ஓய்விலிருந்து தொடங்கும் g நிறையுடைய விளையாட்டுக் கார் ஒன்று ஒப்பமான கிடைத்தரை மீது இயங்குகிறது. நேரம் t யில்

கார் மீதுள்ள வலிப்பு விசை F ஆனது $F = \left(10 + 19x - 2x^2\right)g$ இனாலே தரப்படுகிறது. இங்கு நேரம் t யிற் கார் சென்ற தூரம் x ஆகும். $0 \le x \le 12$

(i) $o \le x \le \frac{19}{4}$ ஆகும் போது மாத்திரம் கார் மீதான வலிப்பு விசை F அதிகரிக்குமெனக் காட்டுக.

(ii) $o \le x \le 12$ ஆக இருக்கும் போது விசை தூரவளையியை வரைந்து இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக காரின் உயர்கதி $10\sqrt{\frac{23g}{3}}$ எனக் காட்டுக.

(iii) பொம்மைக் காரின் கதி உயர்வாக இருக்கையில் காரின் எஞ்சின் வேலை செய்யும் வலுவைக் காண்க.

29. நேர் கோடு ஒன்றிலே சென்ற தூரம் x இன் சார்பாகவுள்ள ஆர்முடுகல் $f(x)$ உடன் பொருள் ஒன்று ஓய்விலிருந்து இயங்குகிறது. வளையி $f(x)$ இன் கீழுள்ள பரப்பளவு A எனின் பொருள் இத்தூரத்தைச் செல்வதில் அடைந்த கதி V ஆனது $V = \sqrt{2A}$ என்பதாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$800km$ திணிவுள்ள கார் ஒன்று, ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு நேரான மட்ட வீதி ஒன்றின் வழியே இயங்குகிறது. அது $400N$ எனும் மாறாத் தடைக்கு உட்படுத்தப்பட்டுள்ளது. செல்லும் தூரத்துடன் சீராக அதிகரிக்கின்ற எஞ்சின் இழுப்பு விசையானது, தொடக்கத்திலே $1200N$ ஆரம்பித்து கார் $150m$ சென்றவுடன் $3600N$ அதிகரிக்கின்றது. ஆர்முடுகல் - தூர வளையியைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு முறையில் $150m$ சென்ற பின்னர் கார் அடைந்த கதியைக் காண்க. இதே நிலமைகளின் கீழ் கிடையுடன் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{120}\right)$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள வீதி ஒன்றின் வழியே, மேல் நோக்கி $150m$ இயங்கும் போது கார் அடையும் கதியைக் காண்க.

30. பனிக்கட்டி மீது வழுக்கிச் செல்லும் M திணிவுடைய ஒருவர் (ஸ்கேற்றர்) ஒப்பமான பரந்த பனிக்கட்டிப் படலம் ஒன்றின் மீது ஓய்வில் நிற்கிறார். ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய இரு சிறிய பாரமான கோள வடிவப் பந்துகளை அவர் காவுகிறார்.

(i) ஸ்கேற்றர், இரு பந்துகளையும் ஒரே நேரத்தில் கிடைத்திசையியே u என்னும்

தொடர்பு வேகத்துடன் எறிகிறார். ஸ்கேற்றர் பெற்றுக் கொண்ட வேகத்தையும் அவர் செலவழித்த சக்தியையும் காண்க.

i) ஸ்கேற்றர் இரு பந்துகளையும் பின்னடுத்து (அடுத்தடுத்து) ஒரே கிடைத்திசையில் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் u என்னும் தொடர்பு வேகத்துடன் எறிகிறார். ஸ்கேற்றர் பெற்றுக் கொண்ட வேகம் $\dfrac{(2M + 3m)\, mu}{(M + 2m)(M + m)}$ எனவும் அவர் செலவழித்த சக்கி $\dfrac{1}{2} \dfrac{\left(2M^2 + 4Mm + m^2\right)}{(M + m)(M + 2m)} mu^2$ எனவும் காட்டுக.

1. ஒரு சிறுவன் பந்து ஒன்றினை $2\sqrt{ag}$ தொடக்கக் கதியுடன் கிடையுடன் θ ஏற்றக் கோணத்தில் எறிகின்றான். அப் பந்து ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரை அடித்து, அவனுடைய கைக்குத் திரும்புகிறது. நிலைக்குத்து இயக்கத்தை கருதிப் பந்தின் பறப்பு நேரம் $4\left(\dfrac{a}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta$ எனக் காட்டுக.

கிடை இயக்கத்தைக் கருதுவதன் மூலம் சுவரிலிருந்து பையனின் தூரம் a எனக் கொண்டு பந்திற்கும், சுவரிற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\dfrac{1}{(4\sin 2\theta - 1)}$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. கோணம் θ, 15° இலும் குறைய முடியாதென உய்த்தறிக.

2. ஒரே மட்டத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் இரு சம துணிக்கைகள் எறியப்படுகின்றன. முதலாவது துணிக்கை A இலிருந்து B ஐ நோக்கி u கதியுடன் AB யுடன் 45° ஏற்றக் கோணத்திலும் இரண்டாவது துணிக்கை B யிலிருந்து A ஐ நோக்கி v கதியுடன் BA உடன் 60° ஏற்றக் கோணத்திலும் எறியப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு துணிக்கையும் தன்னுடைய பாதையின் அதிஉயர் புள்ளியிலிருக்கும் போது ஒன்றுடன் ஒன்று நேரடியாக மோதுகின்றன எனின் $v^2 : u^2$ ஐக் காண்க. $u^2 = ag\left(3 - \sqrt{3}\right)$ என நிறுவுக. இங்கு $AB = a$ ஆகும். மோதுகையின் பின் முதலாவது துணிக்கை நிலைக்குத்தாகக் கீழே விழுகின்றது. துணிக்கைகளுக்கிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ எனக் காட்டுக.

33. m திணிவுள்ள ஓடொன்று மேல் நோக்கி நிலைக்குத்தாக u வேகத்தில் தரையிலிருந்து சுடப்படுகிறது. ஓடு அதிஉயர் உயரத்தை அடைந்த உடன் E அளவுள்ள உட்சக்தியினால் இது m_1, m_2 ஆகிய திணிவுகளைக் கொண்ட இரு துண்டுகளாக வெடிக்கின்றது. இரு துண்டுகளினதும் தொடர்பு வேகம் கிடையான திசையில் அமைந்துள்ளது. இரு துண்டுகளும் ஒரே நேரத்தில் தரையில் மோதும் என்றும் அவற்றின் இடைத்தூரம் $\dfrac{u}{g}\left\{\dfrac{2E\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ எனவும் காட்டுக. சுடப்பட்டவுடன் ஓடு நிலமட்டத்திலே வெடித்திருந்தால் இரு துண்டுகளுக்குமிடையிலுள்ள தூரம் $\dfrac{2u}{g}\left\{\dfrac{2E\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

34. h உயரமுடைய மலை உச்சியிலிருந்து u கதியுடன் எறிகணை ஒன்று ஏவப்படுகிறது. மலையின் அடியிலிருந்து எறிகணை கடலில் விழக்கூடிய அதிகூடிய தூரம் $\dfrac{u}{g}\sqrt{u^2 + 2gh}$ எனக் காட்டுக.

35. கிடையுடன் β கோணம் அமைக்கும் திசையில் மேல் நோக்கி u என்ற சீரான வேகத்துடன் ஒரு நேர்கோட்டில் ஒரு பறவை பறக்கிறது. பறவை சிறுவன் ஒருவனுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே h உயரத்திலிருக்கும் போது அவன் α ஏற்றக்கோணத்தில் கல் ஒன்றை எறிகின்றான். எறியல் வேகம் யாதாக இருப்பினும் $\tan\alpha > \left(\dfrac{\sqrt{2gh}}{u}\right)\sec\beta + \tan\beta$ ஆக இருந்தாலொழிய கல் கறவையை அடிக்க முடியாதெனக் காட்டுக.

கல், பறவையை மட்டுமட்டாக மருவிச் சென்றால், கல், பறவை இரண்டினதும் இயக்கங்கள் குழப்பப்படவில்லையெனக் கொண்டு பொதுவாகப் பறவை மீண்டும் அடிபடும் எனக் காட்டுக.

36. துணிக்கை ஒன்று கிடையான நிலத்திலிருந்து b இடைத்தூரத்தில் ஒவ்வொன்றும் a உயரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளினூடு செல்லுமாறு எறியப்படுகிறது. மிகக் குறைந்த எறியல் வேகத்தின் பருமனையும், திசையையும் காண்க.

7. ஒப்பமான கிடை நிலத்திலுள்ள A எனும் புள்ளியிலிருந்து பந்தொன்று எறியப்படுகிறது. அது நிலைக்குத்தான சுவரொன்றைச் செங்குத்தான அடித்து நிலத்தில் ஒரு முறை அடித்து மீண்டும் A இற்கு வருகிறது. சுவர் ஒப்பமானதும், சுவரிற்கும், பந்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். பந்திற்கும், நிலத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகத்தைக் காண்க.

8. படிக்கட்டு (Staircase) ஒன்றின் உச்சியின் விளிம்பிலிருந்து கிடையாக u கதியுடன் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. ஒவ்வொரு படியினதும் அகலம் a உம் உயரம் h உம் ஆகும். $u^2 < \frac{ga^2}{2h}$ எனின், பந்து முதலாவது படியை அடிக்குமெனக் காட்டுக. பந்திற்கும் ஒவ்வொரு படிக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். இரண்டாவது மோதுகை இரண்டாவது படியில் நிகழ்வதற்கான நிபந்தனை $a < u(1+2e)\sqrt{\frac{2h}{g}}$ உம் $u\left[1+e+\sqrt{1+e^2}\right]\sqrt{\frac{2h}{g}} < 2a$ உம் ஆகுமெனக் காட்டுக.

9. α சாய்வும் b நீளமும் உடைய சாய்தளமொன்றின் உச்சியின் மீது, உச்சியிலிருந்து நிலைக்குத்தாக a உயரத்திலுள்ள புள்ளி ஒன்றிலிருந்து, துணிக்கை ஒன்று விழவிடப்படுகிறது. நான்காவது மோதுகையில் துணிக்கை தளத்தின் அடியை அடையுமெனின்
$b = 4ae(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2)\sin\alpha$ எனக் காட்டுக. இங்கு e துணிக்கைக்கும், தளத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம்

10. α சாய்வுடைய ஒப்பமான சாய்தளமொன்றின் அடியிலிருந்து, பந்து ஒன்று தளத்துடன் θ கோணம் அமைக்கும் திசையில் எறியப்பட்டது. n ஆவது மோதுகையின் பின் பந்து நிலைக்குத்தாகப் பின்னடிக்குமெனின்
$\cos(\alpha+\theta) = \sin\theta \sin\alpha \frac{1+e}{1-e}(1-e^n)$ எனக் காட்டுக. இங்கு e பந்திற்கும், தளத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம்.

11. பந்து ஒன்று ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து சுவரை நோக்கி எறியப்படுகிறது. பந்து சுவரை மோதி, சுவரிலிருந்து எறியற் புள்ளிக்கு அப்பால் விழுகின்றது. எறியற்கதி u ஆகவும், சுவருக்கும் பந்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகவும் இருப்பின் $u^2 > \frac{1+e}{e}ag$ எனக் காட்டுக.

42. m திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று u கதியுடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்பட்டு அதிஉயர் உயரத்தை அடைகையில், $2m$ திணிவுடைய இரண்டாவது துணிக்கை ஒன்று அதே எறியற் புள்ளியிலிருந்து $2u$ கதியுடன் மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. இரண்டாவது துணிக்கை எறியப்பட்டு $\frac{u}{4g}$ நேரத்தின் பின் இரண்டும் மோதுமெனக் காட்டி, மோதுகை நடைபெறும் புள்ளியின் உயரத்தைக் காண்க.

மோதுகையின் போது இரு துணிக்கைகளும் ஒன்றிணையுமெனின், இணைந்த துணிக்கை எறியற் புள்ளிக்கு மேல் அடையும் அதிஉயர் உயரம் $\frac{19u^2}{18g}$ எனக் காட்டுக.

43. ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசையில், ஒய்விலுள்ள a ஆரையும் nm திணிவுமுடைய வட்டவளையம் ஒன்றின் மையத்திலிருந்து, m திணிவுடைய மீள்தன்மைத் துணிக்கை ஒன்று மேசை வழியே u வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. துணிக்கைக்கும், வளையத்துக்குமிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் e எனின் முதலாம் இரண்டாம் மோதுகைகளின் பின் வளையத்தினதும், துணிக்கையினதும் வேகங்களைக் காண்க. இரண்டாம் மோதுகை நிகழும் கணத்தில் வளையமானது $\frac{2a(1+e)}{(n+1)e}$ தூரத்தினூடு அசைந்திருக்குமெனக் காட்டுக.

44. $f\,ms^2$ என்னும் ஆர்முடுகலுடன் ஏறுகின்ற உயர்த்தி ஒன்றின் உச்சியிலிருந்து பந்து ஒன்று விழவிடப்படுகிறது. உயர்த்தியின் உயரம் h மீற்றர் ஆகவும் பந்துக்கும், உயர்த்தியின் தரைக்குமான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகவுமிருப்பின், பந்து உயர்த்தியின் தரையை அடித்து முடிய எடுக்கும் நேரம் $\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{f+g}}$ செக்கன்கள் எனக் காட்டுக.

45. ஓர் ஒப்பமான வட்ட வடிவமான கிடைமேசை ஒன்று ஒப்பமான நிலைக்குத்தான வளையம் ஒன்றினால் சூழப்பட்டுள்ளது. இரு சம துணிக்கைகள், விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து மேசை வழியே ஒரே நேரத்தில் V கதியுடன் இரு வேறு திசைகளில் எறியப்படுகின்றன. எறியற்திசை ஒவ்வொன்றும் A யினூடான விட்டம் AB உடன் 30° ஐ அமைக்கின்றன. ஒவ்வொரு துணிக்கைக்கும்

வளைத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். $e > \frac{1}{3}$ எனின் ஒவ்வொரு துணிக்கையும் விளிம்புடனான ஒரு மோதுகையின் பின் AB யிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

அவை இரண்டும் சந்திக்கும்போது அவை ஒன்றிணைந்து விடும் எனின் பின்னடுத்த இயக்கத்தில் இணைந்த துணிக்கையின் பொது வேகம் $\frac{\sqrt{3}}{4}(1-e)V$ எனக் காட்டுக.

46. l இயற்கை நீளமும் λ மீள்தன்மை மட்டும் கொண்ட மீள்தன்மை இழை ஒன்று $(l+x)$ நீளம் இழுக்கப்பட்ட போது செய்யப்பட்ட வேலை $\frac{1}{2}\frac{\lambda x^2}{l}$ என நிறுவுக.

இயற்கை நீளம் $2a$ உம் மீள்தன்மை மட்டு Mg உம் உடைய இலேசான மீள்தன்மை இழை ஒன்றின் முனைகள், ஓர் ஒப்பமான கிடைமேசையில் $2a$ இடைத்தூரத்திலுள்ள P,Q என்னுமிரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழையின் நடுப்புள்ளிக்கு M திணிவுடைய துணிக்கை இணைக்கப்பட்டு மேசையின் மீது ஓய்விலுள்ளது. m திணிவுடைய இரண்டாவது துணிக்கை ஒன்று மேசை வழியே PQ இற்குச் செங்குத்தான திசையில் முதலாவது துணிக்கையை நேரடியாக மோதும் வண்ணம் எறியப்படுகிறது. மோதுகையால் இரண்டாவது துணிக்கை ஓய்வுக்கு வருகிறது. முதலாவது துணிக்கை, கணநிலை ஓய்வுக்கு வருமுன் இழையின் உயர் நீட்சி $4a$ ஆகும். பின்னர் இத்துணிக்கை இரண்டாவது துணிக்கையை மோதுகிறது. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) துணிக்கைகளுக்கிடையேன மீளமைவுக்குணகம் $\frac{m}{M}$

(b) இரண்டாவது துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் $\frac{M}{m}\sqrt{2ag}$

(c) இரண்டாவது துணிக்கையின் இறுதிவேகம் $\sqrt{2ag}$

47. நிலத்திலிருந்து எறியப்படும் துணிக்கை ஒன்று ஒப்பமான கிடையான பாவுபலகை ஒன்றை அடிக்கிறது. நிலத்திலிருந்து பாவுபலகையின் உயரமானது, பாவுபலகை இல்லாவிடின் துணிக்கை அடையும் அதிஉயர் உயரத்தின் λ மடங்காகும். மீளமைவுக் குணகம் e எனக் கொண்டு எறியற் புள்ளியிலிருந்து, துணிக்கை நிலத்தை அடிக்கும் புள்ளியின் தூரமானது, பாவுபலகை இல்லாவிடின் துணிக்கை அடையும் கிடை வீச்சின்

$$\frac{1}{2}\left[1-(1+e)(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}+\left\{e^2+\lambda\left(1-e^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$$ மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

48. $3m$ திணிவுடைய பொருள் ஒன்று நேர்கோடொன்றிலே u கதியுடன் இயங்கும் போது, அது வெடிக்கின்றது. இதன் காரணமாக அது $m, 2m$ திணிவுகளைக் கொண்ட A,B என்னும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றது. இவ்விரு பகுதிகளும் அதே நேர்கோட்டில் ஆனால் எதிர்த் திசைகளிலே இயங்குகின்றன. வெடிப்புக் காரணமாகக் கொடுக்கப்பட்ட மேலதிக இயக்கசக்தி $3mu^2$ எனின் A,B இன் கதிகளைக் காண்க. வெடித்த உடன் பகுதி B ஆனது அதே நேர்கோட்டில் சுயாதீனமாக இயங்கத்தக்க ஓய்விலுள்ள M திணிவுடைய பொருள் ஒன்றை உடனடியாக அடிக்கின்றது. மொத்தல் பூரண மீள்தன்மையுடையதாக இருக்க $M > 6m$ எனின், B அடுத்து A யுடன் மோதும் எனக் காட்டுக.

49. நேர்கோடொன்றில் இயங்கும் A,B என்னுமிரு துணிக்கைகள் எப்பொழுதும் ஒரே ஆர்முடுகல் a ஐக் கொண்டுள்ளன. நேரம் t=0 இல் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே u_1, u_2 ஆகும். நேரம் t இல் B இன் A தொடர்பான வேகம் என்ன? m திணிவுடைய P என்னும் துணிக்கை O என்னும் நிலையான புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து கிடை நிலமொன்றின் மீது விழவிடப்படுகின்றது. நிலத்தை அடிப்பதற்கு உடனடியாகச் சற்று முன் துணிக்கையின் கதி u ஆகும். அது நிலத்தை அடித்துத் திரும்பும் கணத்தில் $2m$ திணிவுடைய இரண்டாவது துணிக்கை Q,O வில் ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படுகிறது. P யிற்கும் நிலத்திற்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும்.

$e < \frac{1}{2}$ ஆயின் P ஆனது, Q ஐ அடிப்பதற்கு முன் இரண்டாம் முறையும் நிலத்துடன் மோதும் எனக் காட்டுக.

$e = \frac{3}{4}$ எனின், Q ஆனது விழவிடப்பட்டு $\left(\frac{2u}{3g}\right)$ நேரத்தின் பின்னர், P உம் Q உம் மோதுமெனக் காட்டி மோதுகையின் பின் உடனடியாக P யின் வேகத்தைக் காண்க. P யிற்கும் Q இற்குமிடையேயான மீளமைவுக்குணகம் $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

50. M திணிவுடைய A என்னும் துணிக்கையும், ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய B, C என்னும் இரு துணிக்கைகளும் ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளன. இழைகள் இறுக்கமாகவும், கோணம் ABC 135° ஆகவும் இருக்குமாறும் சமமான இலேசான நீளா இழைகள் Aஐ B உடனும் B ஐ C உடனும் தொடுக்கின்றன. AB க்குச் செங்குத்தாகவும் மேசைக்கு சமாந்தரமாகவும் துணிக்கை C இற்கு I என்னுமோர் கணத்தாக்கு கொடுக்கப்படுகிறது. கருதப்படவேண்டிய வகைகள் இரண்டு உள்ளனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொரு வகையிலும் A யின் தொடக்க வேகத்தையும் C யின் இயக்கத் திசையையும் காண்க.

51. l என்னும் நீளமும், M என்னும் திணிவுள்ளதும், இரு முனைகளும் மூடப்பட்டதுமான நேரிய குழாயொன்று கிடைமேசையொன்றின் மீது சுயாதீனமாக இயங்கவல்லது. குழாயானது தன் நடுப்புள்ளியில் m எனும் திணிவுடைய துணிக்கையொன்றைக் கொண்டுள்ளது. குழாயின் உட்பரப்பு ஒப்பமாயிருக்க துணிக்கை ஆனது குழாய் வழியே, v எனும் வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது (துணிக்கை) மேசை தொடர்பாக $\left(\dfrac{Me^2+m}{M+m}\right)v$ எனும் வேகத்துடனும் குழாய் தொடர்பாக தன் தொடக்கத் திசையிலும் இயங்கி $\dfrac{l}{2v}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)^2$ என்னும் நேரத்தின் பின்னர் குழாயின் நடுப்புள்ளியைக் கடக்குமெனக் காட்டுக.

இங்கு e என்னும் துணிக்கைக்கும், குழாயின் இரு முனைகளில் ஒன்றுக்குமிடையிலான மீளமைவுக் குணகமாகும். இந் நேரத்தில் குழாய் எவ்வளவு தூரம் அசைந்துள்ளது?

52. வடகிழக்குத் திசையிலே செக்கனுக்கு $5\sqrt{2}$ மீற்றர் கதியில் கிடையாகச் செல்லும் 200கிராம் திணிவுள்ள பந்து ஒன்றின் இயக்கமானது மேற்குக் கோணம் $tan^{-1}\left(\dfrac{5}{12}\right)$ தெற்கான திசையிலே செக்கனுக்கு $\dfrac{65}{16}$ மீற்றர் கதியில் துடுப்பொன்றின் அடியினால் மாற்றியமைக்கப்படுகிறது. மேற்குத் திசையிலும், தெற்குத்திசையிலும் பந்தின் வேகமாற்றக் கூறுகளைக் காண்க.

பந்துக்கும் துடுப்புக்குமிடையிலான தொடுகை $\dfrac{1}{64}$ செக்கன் நேரம் நிலைத்திருந்தால் துடுப்பினால் பந்தின் மீது செலுத்தப்பட்ட சராசரி விசையானது மேற்குக் கோணம் $tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ தெற்கான திசையிலே 14 நியூற்றன் எனக் காட்டுக.

53. முறையே M திணிவும், m திணிவும் கொண்ட A,B என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஒப்பமான ஒரு கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் நீளா இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆரம்பத்தில் A ஆனது ஒரு ஒப்பமான கிடை மேசை மீது ஓய்விலிருக்க, B யானது மேசையிலிருந்து h உயரத்தில் தொங்குகிறது. பின்பு B யானது H என்னும் மேலதிகமான உயரத்திற்கு ஏற்றப்பட்டு கீழே விழவிடப்படுகின்றது. $\left(\dfrac{m^2}{M^2-m^2}\right)H<h$ எனின் B யானது மேசையை அடையாதெனக் காட்டுக. $\left(\dfrac{m^2}{M^2-m^2}\right)H\geq h$ எனின், இவ்வியக்கத்தின் போது A எழும்பும் அதிகூடிய உயரம் $\dfrac{m}{(M+m)^2}\{2(M+m)h+mH\}$ எனக் காட்டுக.

54. அசைந்து செல்லும் ஒப்பமான A என்னும் கோளம், நிலையானதும், சர்வசமமானதுமான B என்னும் கோளத்துடன் மோதுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். A இனது இயக்கத்திசைக்கும், மோதுகைக்குச் சற்று முன் மையங்களின் கோட்டுக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் α ஆகும். மோதுகையினால் A யினது இயக்கத் திசை $tan^{-1}\left[\dfrac{(1+e)\,tan\,\alpha}{1-e+2\,tan^2\,\alpha}\right]$ என்னும் கோணத்தினூடாக விலகிச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

மோதுகையால் இழந்த இயக்கப் பண்புச் சக்தியின் பின்னம் $\frac{1}{2}\left(1-e^2\right)$ இலும் அதிகரிக்க முடியாதெனக் காட்டுக.

55. நிறை மீள் சக்தி மோதுகை என்பதை வரையறை செய்க.
நிலையான m திணிவுள்ள அணுவுடன் u கதியில் அசையும் M திணிவுள்ள நியூற்றன் ஒன்று மோதுகிறது. மோதுகை நிறை மீள் சக்தி உடையது எனக் கருதி மோதுகைக்குப் பின் அணுவின் உயர்வுக்கதி ஆன v என்பது $\dfrac{2Mu}{M+m}$

என்பதால் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக. u என்னும் ஒரே கதியுடைய நியூற்றன்கள் ஐதரசன் அணுவுடனும், நைதரசன் அணுவுடனும் மோதினால்

$$\frac{V_N}{V_H} = \frac{1 + \frac{M}{m_H}}{\frac{M}{m_H} + \frac{m_N}{m_H}}$$ எனக் காட்டுக.

இங்கே உம் V_N உம் V_H முறையே நைதரசன் அணுவின் உயர்வுக்கதியும் ஐதரசன் அணுவின் உயர்வுக்கதியுமாகும். (நியூற்றனும், அணுவும் ஒரு சரிவான மோதுகையிலுள்ள துணிக்கைகளாகக் கருதப்படுகின்றன.)

56. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m உடைய X, Y என்னும் இரு குரங்குகள், P என்னும் ஒப்பமான நிலைத்த கப்பியொன்றின் மீது செல்லும் இலேசான நீட்ட முடியாத கயிறொன்றின் முனைகளைப் பிடித்துக் கொள்கின்றன. குரங்கு X ஆனது கயிற்றின் சார்பாக u என்னும் ஒரு சீரான வேகத்துடன் கயிற்றில் ஏறத் தொடங்குகிறது. தொடர்ந்து நடைபெறும் இயக்கத்தில் குரங்குகள் Xஉம் Y உம் ஒரே ஒருமை வேகம் $\frac{u}{2}$ உடன் கப்பி P ஐ அணுகுகின்றன எனக் காட்டுக.

(i) குரங்கு X இனாலும் (ii) குரங்கு Y இனாலும்
செய்யப்படும் வேலை வீதம் யாது? உமது விடைக்குக் காரணம் காட்டி விளக்குக.

57. சமஆரையும் M, m, m என்னும் திணிவுகளும் உடைய A,B,C என்னும் ஒப்பமான மூன்று கோளங்கள் ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றில் கிடக்கின்றன. தொடக்கத்திலே B,C ஆகியன ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு ஓய்விற் கிடக்கும் போது A ஆனது B,C ஆகியவற்றின் பொதுத் தொடலி வழியே கிடையாக வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது.

மொத்தலுக்கு உடனடியாகப் பின்னர் B,C ஆகியவற்றின் வேகங்களின் பருமன்கள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{\sqrt{3}\,u\,M\,(1+e)}{2M+3m}$ எனக் காட்டுக. இங்கு e என்பது ஒவ்வொரு சோடி கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம். மொத்தலுக்குப் பின்னர் A யின் வேகத்தைக் கான்க.

மொத்தல் காரணமாகத் தொடக்க இயக்கப் பாட்டுச் சக்தியில் $\frac{3m\left(1-e^2\right)}{2M+3m}$ இழக்கப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

58. சம ஆரையுள்ள A,B,C என்னும் மூன்று கோளங்களின் திணிவுகள் முறையே $m, 2m, 3m$ ஆகும். இக் கோளங்கள் ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்றின் மீது A இற்கும் C இற்குமிடையே B உம், அவற்றின் மையங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் இருக்குமாறு ஓய்விலுள்ளன. மையமிணை கோட்டின் வழியே B ஐ நோக்கி A இற்கு ஒரு வேகம் u கொடுக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு சோடி கோளங்களுக்குமிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம் e எனில்

(i) B உடன் மோதி, உடனடியாகப் பின்னர் A இன் கதி
(ii) C உடன் மோதி, உடனடியாகப் பின்னர் B இன் கதி
ஆகியவற்றைக் காண்க.

$e > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ எனின், A ஆனது B உடன் இரண்டாவது தடவை மோதாதெனக் காட்டுக.

59. A,B என்னும் இரு சிறு கோளங்களின் திணிவுகள் முறையே $2m, m$ ஆகும். அவை அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கக்கூடியதாக, ஒப்பமான தளம் ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. கோளம் B ஆனது சுவரிலிருந்து தூரம் x இலும், கோளம் A யிற்கும் சுவருக்குமிடையேயும் இருக்கிறது. A யிற்கும் B யிற்குமிடையிலுள்ள மீளமைவுக் குணகம் e உம், B யிற்கும் சுவருக்குமிடையிலுள்ள மீளமைவுக் குணகம் $1/2$ உம் ஆகும். கோளம் A ஆனது மையமிணை கோடு வழியே வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது. அப்போது அது B யில் நேரடியாக மோதுகிறது. பின்னர் B ஆனது சுவரில் மோதி, பின்னதைத்து A யில் மறுபடியும் மோதுகிறது. முதல் மொத்தலுக்குப் பின்னர் A,B ஆகியவற்றின் வேகங்களைக் காண்க.

(i) B ஆனது சுவரில் மோதும் கணத்திலே A ஆனது சுவரிலிருந்து து $\frac{3ex}{2(1+e)}$ இல் இருக்கிறது எனவும்

(ii) B மீது A யின் முதல் மொத்தலுக்கும், B மீது A யின் இரண்டாம் மொத்தலுக்குமிடையே உள்ள நேர ஆயிடையானது e யில் தங்கி யிருப்பதில்லை எனவும் நிறுவுக.

60. வேகம் u உடன் இயங்குகின்ற கோளம் A ஆனது ஓய்விலிருக்கும் ஒரு சம கோளம் B யுடன் மோதுகிறது. கோளங்கள் A,B ஆகியவற்றின் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோடானது u வின் திசையுடன் கோணம் ϕ யிற் சாய்ந்துள்ளது. மொத்தலுக்குப் பின் கோளம் A யின் இயக்கத்திசையானது, u இன் திசையுடன்

θ கோணத்தை ஆக்குகிறது. $(1-e)\cot\phi = 2\cot(\theta+\phi)$ எனக் காட்டுக. இங்கு e என்பது மீளமைவுக் குணகம்

கோளங்கள் பூரண மீள்தன்மையுடையவை எனின் $\theta+\phi=\frac{\pi}{2}$ என உய்த்தறிந்து இயக்கப்பாட்டுச் சக்தியிலுள்ள இழப்பைக் காண்க. உங்கள் விடை சரியானது என்பதற்குக் காரணம் தருக.

61. கிடை மேசை ஒன்றின் மீது வேகம் u உடன் இயங்குகின்ற ஓர் ஒப்பமான கோளம் A ஆனது, மேசை மீது ஓய்விலிருக்கின்ற சர்வசமமான ஒரு கோளம் B ஐ அடிக்கிறது. மோதும் கணத்தில் அவற்றின் மையமிணை கோட்டுடன் A இன் இயக்கத்திசை ஒரு கூர்ங்கோணம் α ஐ ஆக்குகிறது. கோளம் B ஒரு வேகம் $\frac{u}{2}(1+e)\cos\alpha$ வை எய்துகிறதெனக் காட்டுக. இங்கு e என்பது மீளமைவுக் குணகம்

இம் மோதுகையின் விளைவால் கோளம் A அதன் இயக்க சக்தியில் கால்வாசியை இழக்கின்றது.

(i) $\sqrt{2} \le \tan\alpha \le \sqrt{3}$ எனவும்,

(ii) மொத்தலுக்கு உடனடியாகப் பின்னர் A யின் இயக்கத்திசையானது மையமிணை கோட்டுடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணத்தின் மிகக் குறைந்த பெறுமானம் $\tan^{-1}\left(2\sqrt{2}\right)$ எனவும் காட்டுக.

62. A,B,C என்னும் மூன்று துணிக்கைகளின் திணிவுகள் முறையே $m, 2m, 2m$ ஆகும். AB,AC என்னும் இலேசான நீளா இழைகள் மூலம் A ஆனது B,C ஆகியவற்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழைகள் இறுக்கமாகவும், கோணம் $BAC = 60^\circ$ ஆகவும் இருக்குமாறு தொகுதி ஒப்பமான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. திசை $\overrightarrow{BA}$ இல் A இற்கு ஒரு கணத்தாக்கு I பிரயோகிக்கப்படுகிறது. துணிக்கைகளின் தொடக்க வேகங்களைக் கண்டு $\overrightarrow{BA}$ உடன் $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$ கோணத்தை அமைக்கின்ற திசை ஒன்றிலே A இயங்கத் தொடங்குமெனவும் காட்டுக. தொகுதிக்கு வழங்கப்பட்ட இயக்கத்திசையை I,m ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

63. வேகம் u உடன் செல்கின்ற ஒப்பமான பந்து ஒன்று, நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான தளம் ஒன்றை, தளத்துடன் θ கோணத்தை அமைக்கும் திசையிலே அடித்துப் புறமுகச் செவ்வனுடன் கோணம் ϕ யை அமைக்கும் திசைவழியே வேகம் v உடன் பின்னதைக்கிறது.

$\cot\theta\cot\phi = e$ எனக் காட்டுக. இங்கு e என்பது பந்துக்கும், தளத்துக்குமிடைப்பட்ட மீளமைவுக் குணகம். நான்கு விளிம்புகளிலும் ஒப்பமான நிலைக்குத்து ஓரத்தினால் வரைப்புற்ற பொக்கணையற்ற *(proketless)* ஒப்பமான செவ்வகவடிவக் கிடைப் பிலியட்டு மேசை ஒன்றின் நான்கு மூலைகளும் $A,B,C,D,$ ஆகும். நேரம் t=o இலே மேசையின் மேற்பரப்பு வழியே $\overrightarrow{AB}$ உடன் α கோணத்தை அமைக்கும் திசையிலே, AB யின் நடுப்புள்ளி P யிலிருந்து ஒப்பமான பிலியட்டுப்பந்து ஒன்று ஓரங்கள் BC, CD, DA ஐ முறையே Q,R,S என்னும் புள்ளிகளில் அடுத்தடுத்து அடிப்பதற்கு வேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது. பந்துக்கும், ஓரத்துக்குமிடையேயான மீளமைவுக் குணகம் $e(>o)$ ஆகும். Q,R,S ஆகியவற்றின் முதலாவது மொத்தல்களின் பின்னர் பந்து தொடக்கப் புள்ளி P யிற்கு நேரம் T யிலே திரும்பி வருமெனின்,

(i) $PQRS$ இணைகரம் எனவும்

(ii) $a = |\overrightarrow{AB}|$ ஆயிருக்க $T = \frac{a}{2u}\sec\alpha\left(1+e^{-1}\right)^2$ எனவும் நிறுவுக.

64. ஒரு கணத்தாக்கு $\underline{I}$ ஆனது துணிக்கை ஒன்றின் வேகத்தை $\underline{u}$ இலிருந்து $\underline{v}$ யிற்கு மாற்றினால் இயக்கசக்தி மாற்றம் ΔE ஆனது $\Delta E = \frac{1}{2}\,\underline{I}\cdot\left(\underline{u}+\underline{v}\right)$ இனாலே தரப்படுமென நிறுவுக.

ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்றின் மூன்று பக்கங்களான AB, BC, CD ஆகியன அமையுமாறு சமநீளமுள்ள மூன்று இலேசான நீளா இழைகள் AB, BC, CD ஆகியவற்றால் ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள நான்கு சம துணிக்கைகள் A,B,C,D தொடுக்கப்பட்டு இழைகள் இறுக்கமாக இருக்க ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது கிடக்கின்றன. துணிக்கை A ஆனது I பருமனுடைய கணத்தாக்கு ஒன்றை மேசை வழியே $\overrightarrow{BA}$ என்னும் திசையில் பெறுகிறது. துணிக்கை D யின் தொடக்கக் கதி $\frac{I}{28m}$ எனக் காட்டுக. தொகுதிக்கு கொடுக்கப்படும் இயக்க சக்தியை m, I ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

5. $2a$ என்னும் இடைத்தூரத்திலும் ஒரே கிடைமட்டத்திலும் உள்ள A, B என்னும் நிலைத்த இரு புள்ளிகளிலிருந்து, ஒவ்வொன்றும் l நீளமுள்ள இரு சமமான நிலைக்குத்தான நீளா இழைகளினால் ஒவ்வொன்றும் M திணிவும், ஆரை a உம் உடைய இரு சம கோளங்கள் அவற்றின் மையங்கள் ஒரே மட்டத்திலிருக்கத் தொடுகையில் இருக்குமாறு, தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. $m\,(<2M)$ திணிவும் $\left(\sqrt{2}-1\right)a$ ஆரையும் உள்ள சிறிய கோளம் ஒன்று AB இன் நடுப்புள்ளியில் அதன் மையம் இருக்குமாறு பிடிக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகிறது. இது மற்ற இரு கோளங்களையும் ஒருங்கே அடிக்கிறது. மொத்தல் நடைபெறும் கணத்திலே மூன்று கோளங்களினதும் மையங்கள் நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை அமைக்குமாறு உள்ளன. M திணிவுள்ள ஒவ்வொரு கோளத்திற்கும் கொடுக்கப்படும் வேகம் $\dfrac{mu\,(1+e)}{2M+m}$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $u=\sqrt{2gl}$, e மீளமைவுக்குணகம். ஒவ்வொரு இழையிலுமுள்ள கணத்தாக்கிழுவை J எனில், மொத்தலினால் ஏற்பட்ட இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி இழப்பு $Ju(1-e)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக மொத்தலின் போது m திணிவுள்ள கோளம் கணநிலை ஓய்வுக்கு வருமெனின் தொகுதியின் இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி இழப்பு $mgl\left(1-\dfrac{m}{2M}\right)$ எனக் காட்டுக.

6. ஒவ்வொன்றும் a நீளமான இலேசான நீளா இழைகள் AC, CB ஆகியவற்றினால் ஒவ்வொன்றும் m திணிவான A, B, C என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவை ஒப்பமான கிடை மேசை ஒன்றின் மீது $AB=a$ ஆகவும் AB யின் நடுப்புள்ளியில் C யும் இருக்க வைக்கப்பட்டுள்ளன. AB இற்குச் செங்குத்தாகக் கிடைவேகம் u உடன் துணிக்கை C எறியப்படுகிறது. இழைகள் இறுக்கமாகும் போது A, B, C ஆகியவற்றின் வேகங்களைக் கண்டு இயக்கப்பாட்டுச் சக்தி இழப்பு $\dfrac{3}{10}mu^2$ எனக் காட்டுக.

அடுத்துள்ள இயக்கத்திலே துணிக்கைகள் A யும் B யும் $\dfrac{\sqrt{30}}{15}u$ என்னும் தொடர்பு வேகத்துடன் மோதுமெனக் காட்டுக. துணிக்கைகள் A யும் B யும் நிறை மீள்தன்மையானவை எனில் எல்லா நேரத்திலும் நிகழப்போகும் இயக்கத்தை முற்றாக விபரிக்க.

67. M திணிவுடைய கோளவடிவப் பந்தொன்று, நிலையான புள்ளியிலிருந்து இழையொன்றின் மூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. m திணிவுடைய இன்னொரு கோளம் நிலைக்குத்தாக இயங்கி u வேகத்துடன் மோதுகிறது. மோதும் கணத்தில் கோளங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு நிலைக்குத்துடன் α என்னும் கூர்ங்கோணத்தை ஆக்குகிறது. மீளமைவுக் குணகம் e ஆகும். மோதுகையினால் ஏற்பட்ட இயக்கசக்தி நட்டம் $\dfrac{\left(1-e^2\right)Mm\,u^2\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.

68. m திணிவுடைய ஒரு துணிக்கை l, நீளமான ஓர் இழையினால் M திணிவுடைய சிறிய மோதிரம் ஒன்றிற்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மோதிரம் ஓர் ஒப்பமான கிடைக் கம்பியில் அசையக் கூடியதாகச் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை கம்பியுடன் மோதிரத்திலிருந்து $l\cos\alpha$ தூரத்தில் பிடிக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து விழவிடப்படுகின்றது. இழை இறுகும் போது அதிலேற்படும் கணத்தாக் கிழுவையைக் கண்டு இதனால் ஏற்படும் சக்தி நட்டம் $\dfrac{Mmg\,l\sin^3\alpha}{M+m\cos^2\alpha}$ என நிறுவுக.

69. M திணிவுடைய ஒரு வாளி, இலேசான இழையின் ஒரு முனைக்குக் கட்டப்பட்டுள்ளது. இழை நிலையான ஒரு கப்பியின் மீதாகச் சென்று, பின் $2M$ திணிவுடைய அசையும் கப்பிக்குக் கீழாகச் சென்று மறுமுனை நிலையான புள்ளி O விற்குக் கட்டப்பட்டுள்ளது. கப்பியுடன் பொருந்தாத இழையின் பகுதிகள் நிலைக்குத்தாக உள்ளன. தொகுதி ஓய்விலிருக்கும் போது m திணிவும், மீளமைவுக் குணகம் e யும் உடைய ஒரு துணிக்கை u வேகத்துடன் வாளிக்குள் நிலைக்குத்தாகப் போடப்படுகிறது. துணிக்கை வாளியை அடித்து நிலைக்குத்தாகப் பின்னதைக்குமாயின், வாளிக்குள் கொடுக்கப்பட்ட வேகம் $\dfrac{2mu\,(1+e)}{(3M+2m)}$ எனக் காட்டுக.

வாளிக்கும், துணிக்கைக்கும் இடையில் கணத்தாக்கு $\dfrac{3Mmu\,(1+e)}{(3M+2m)}$ எனவும் நிறுவுக.

70. ஒவ்வொன்றும் m திணிவுடைய A, B, C, D என்னும் நான்கு சம துணிக்கைகள் சமமானவையும் நீட்ட முடியாதனவையுமான இலேசான நான்கு இழைகளினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அத் துணிக்கைகள் ஒரு மேசை மீது இவ்விழைகளினால் உருவாக்கப்பட்ட பக்கங்களை உடைய சாய்சதுரம் ஒன்றின் மூலைகளிலே கிடக்கின்றன. இங்கு கோணம் $BAD = 2\alpha$ ஆகும். மூலைவிட்டம் CA வழியான வெளிப்புறம் நோக்கிய I என்னும் கணத்தாக்கு ஒன்றை A பெறுகின்றது. மூலைவிட்டங்கள் CA, BD ஆகிவற்றுக்குச் சமாந்தரமாக B யின் தொடக்க வேகத்தின் கூறுகள் முறையே u, v ஆகும். $u = \frac{I}{4m}$ எனவும் $v = \frac{I}{4m} \sin 2\alpha$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து ஒவ்வொரு இழையிலும் உள்ள கணத்தாக்கிழுவையைக் காண்க.

71. ஒப்பமானதும் பரந்து அகன்றதுமான கிடைத்தரை மீது அதன் தளமுகம் இருக்க ஓய்விற்கிடக்கின்ற a என்னும் ஆரையை உடைய ஒப்பமான சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் மீது சிறிய ஆரையுடைய சீரான கோளவடிவ மாபிள் ஒன்று ஈர்வையின் கீழ் நிலைக்குத்தாக விழுகின்றது. அரைக்கோளத்தின் திணிவு மாபிளின் திணிவின் இரு மடங்கும், மோதுகை பூரண மீள்தன்மையுடையதும் ஆகும். மோதும் கணத்திலே மையமிணை கோடு, மேன் முக நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கின்றது. மொத்தலுக்குச் சற்றுமுன் மாபிளின் கதி u ஆகும்.

(i) அரைக்கோளத்துடனான மொத்தலுக்குச் சற்றுப் பின்னர், மாபிளின் வேகத்தின் நிலைக்கூறு மறைக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(ii) மாபிளுக்கும், தரைக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $e(<1)$ எனில் தரையுடன் மாபிளின் முதலாவது மொத்தலுக்குச் சற்றுப் பின்னர் அதன் வேகத்தின் கிடைக்கூறும், நிலைக்குத்துக் கூறும் முறையே

$$u\sqrt{\frac{2}{3}},\ e\left\{2ag\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}^{1/2}$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து சிறிது நேரத்தின் பின்னர், மாபிளின் வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறு மீண்டும் மறைகிறதெனக் காட்டுக.

72. இரு திணிவுகள் m, M ஆகியவற்றை இணைக்கும் இலேசான இழை ஒன்று ஓர் ஒப்பமான மீள் தன்மையின்றிய கிடைத்தளத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே அமைந்துள்ள ஒப்பமான நிலையான கப்பியொன்றின் மீது செல்கிறது.

இயக்கத்தைத் தடை செய்யக்கூடிய முறையில் M பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. M ஐ விடுவித்த பின்னர் தளத்தை அடைய t செக்கன் எடுப்பின் தொகுதி இழை இறுகிய கணச்சமநிலைக்கு முதன் முதலாக வரும் நேரம் $\frac{3Mt}{M+m}$ எனக் காட்டுக. தொகுதி $3t$ நேரத்தின் பின்னர் M தளத்திலிருக்குமாறு சமநிலைக்கு வருமெனக் காட்டுக.

73. $2a$ இடைத்தூரத்திலுள்ள ஒவ்வொன்றும் a உயரமான இரு நிலைக்குத்தான சுவர்களை மட்டாகக் கடந்து செல்லுமாறு துணிக்கை ஒன்று நில மட்டத்திலிருந்து $\sqrt{agk}$ எனும் கதியுடன் எறியப்படுகின்றது. எறியற் கோணம் α எனின் எறியற் புள்ளியானது கிட்ட உள்ள சுவரிலிருந்து $a(k \sin\alpha \cos\alpha - 1)$ எனும் தூரத்தில் இருக்க வேண்டும் எனவும் எறியற் கோணம் α ஆனது $\sec^4\alpha - (k^2 - 2k)\sec^2\alpha + k^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனவும் காட்டுக.

$k = 4$ ஆகும் போது எறியற்புள்ளியினைக் காண்க. துணிக்கை அடைந்த அதிஉயர் உயரம் $\frac{3a}{2}$ எனவும் காட்டுக.

74. P எனும் ஒரு துணிக்கை O எனும் புள்ளியிலிருந்து V வேகத்துடன் α ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்படுகிறது. O விற்கு மேல் துணிக்கை அடையும் உயரம் H ஆனது $H = \frac{V^2}{2g}\sin^2\alpha$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

துணிக்கையின் பாதையில் A, B என்னுமிரு புள்ளிகள் O விற்கு மேலே $h\ (< H)$ உயரத்திலுள்ளன. A யிலும் B யிலும் துணிக்கையின் இயக்கத்திசை கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் θ ஆகும்.

$\tan^2\theta = \frac{H-h}{H}\tan^2\alpha$ என நிறுவுக.

A யிலிருந்து B இற்குத் துணிக்கை செல்ல எடுத்த நேரமானது, துணிக்கை O விலிருந்து தன் பாதையின் அதிஉயர் புள்ளியை அடைய எடுத்த நேரத்திற்குச் சமமாயின் $4h = 3H$ என நிறுவுக.

ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது ஓய்வில் நிற்கும் M திணிவுடைய ஒரு மனிதன் m திணிவுடைய பந்தொன்றினை எறிகின்றான். அதே தளத்தின் மீது நிற்கும் M^1 திணிவுடைய நாய் ஒன்று, அப்பநதினைப் பிடிக்கின்றது. பந்து மனிதனை விட்டு நீங்கும் போது, மனிதன் தொடர்பான பந்தின் வேகம் V ஆகவும் கிடையுடன் ஏற்றக் கோணம் θ ஆகவும் உள்ளது. நாய் $\dfrac{MmV\cos\theta}{\left(M^1+m\right)\left(M+m\right)}$ என்னும் வேகத்தைப் பெறுகிறதென நிறுவுக.

அலகு - 1

1 (a)

1. 18 ms^{-1} ; 270m
2. 1·5ms^{-2} , 75m
3. 1250m
4. 3ms^{-2} ; 150m
5. 12·5 m
6. 3·75ms^{-2} , 14·6ms^{-1}
7. 74 ms^{-1}
8. 47·5m
9. 8ms^{-1}
10. $1\frac{1}{3}$ km
11. 204 ¼ m
12. $\frac{2}{3}$ ms^{-2} ; 33 $\frac{1}{3}$ ms^{-1}; 50ms^{-1}
13. 6ms^{-1} , 2ms^{-2}
14. 10 $\sqrt{7}$ kmh^{-1}
16. 5ms^{-2}
17 $(6 + 3\sqrt{2})$
20. $\frac{l}{24}$; $\frac{4l}{3}$

1 (b)

1. 20·4 m , 2·04 செக், 4·08 செக் , 20 ms^{-1}
2. 2 செக் , 5 செக் 1, 4
3. 490 m, 2 $\sqrt{5}$ செக், 44.3ms^{-1}
4. 78·4m
5. 122·5m
6. 10 செக்
7. Vt மீற்றர்
8. யன்னலின் மேல் உச்சிக்கு மேல் 0·3m
10. ¼ h
11. 1 : 3

13. 588m

14. 1 செக்

15. $\frac{3h}{8}$

16. 3 g

1 (c)

1. 13·1 km
2. $0{\cdot}1ms^{-2}$, $0{\cdot}2\ ms^{-2}$
3. 4·5 நிமிடங்கள், $\frac{5}{18}\ ms^{-2}$
4. 60 செக்
5. $22{\cdot}5\ ms^{-1}$

10. $\frac{1}{6} > 800m$

11. 6.9 ms-1, $\frac{13+4\sqrt{10}}{3}\ ms^{-1}$

12. $60\ kmh^{-1}$

25. $57{\cdot}6\ kmh^{-1}$, $8{\cdot}55\ kmh^{-1}\ min^{-1}$

26. $3u$, $3.5u$, $\frac{4u^2}{f}$

27. 14 செக், $66\frac{2}{3}$ m, 3·2, 4·4, 11·6 செக்

1 (d)

1. 40·8m, 4·1 செக்
2. $30^\circ 40'$
3. 3·3 செக், $7{\cdot}27\ ms^{-1}$
4. $\frac{l^2 - h^2}{l}\sqrt{\frac{g}{2h}}$

6. $70ms^{-1}$, 250m, $14\frac{2}{7}$m
7. $4ms^{-1}$, $-12ms^{-1}$
8. $10ms^{-1}$, $40ms^{-1}$, $2 < t < 5$, $6\frac{5}{6}$m, $7ms^{-2}$, 2 அல்லது 5 செக்
9. 6 ; $7\frac{5}{12}$ m
10. $-34\ ms^{-1}$, $-39ms^{-1}$, $\frac{1}{10}$ s
11. 6m, 2·5m, $1ms^{-1}$, ½ செக்
12. 4 செக் $24\ ms^{-1}$, 144m

அலகு - 2

2 (a)

1. $10\ kmh^{-1}$, 75 m
2. ஆறுபாயும் திசைக்கு எதிர்த்திசையுடன் $\sin^{-1}(\frac{4}{5})$, 90 செக்
3. அவன் செல்லும் திசையுடன் $123^\circ 45'$ இல்

5. வடக்கிற்கு $18^\circ 42'$ கிழக்காக, வடக்கிற்கு $41^\circ 18'$ கிழக்காக

7. v, 120°

2 (b)

1. $40kmh^{-1}$, வடக்கிலிருந்து $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$ மேற்காக.
2. $40\sqrt{5}$ m, 11 செக்
3. $28kmh^{-1}$, கி $30^\circ 22'$ வடக்காக,
4. $19{\cdot}8kmh^{-1}$ வ $41^\circ 31'$ மேற்காக, $\sqrt{2}$ km

6. $6{\cdot}46kmh^{-1}$, மே 60° வடக்காக, $6\ kmh^{-1}$
7. $9{\cdot}6\ kmh^{-1}$, மே 6° தெற்கிலிருந்து
8. தெ 17° மே, 1·5 மணி
9. 180 செக், 225 செக்
10. 2·4, 9·4 நிமிடங்கள்
11. வ $50{\cdot}1^\circ$ கி, தெ $39{\cdot}9^\circ$ மே
12. 40·4m, 7·3m
13. $10{\cdot}2\ kmh^{-1}$, மே 10°வ, பி. ப 2·06
14. 0·9 km, 0·5km
15. $7{\cdot}3ms^{-1}$, கிடையுடன் $\tan^{-1}(0{\cdot}45)$
16. PQ உடன் $\sin^{-1}(\frac{2}{3})$, 12·46 மணி

2 (c)

1. $V_o = \sqrt{v^2 + u^2 + 2nv\cos(\alpha+\beta)}$, $\tan^{-1}\left\{\frac{v\sin\beta - u\sin\alpha}{v\cos\beta + u\cos\alpha}\right\}$ $\frac{d\,(v\sin\beta - u\sin\alpha)}{V_o}$ $\frac{d\,(v\cos b + u\cos\alpha)}{V_o^2}$
2. B, CB வழியே, C, CB உடன் $\tan^{-1}(\frac{4}{3})$ இல்
3. $15\ kmh^{-1}$, 13·26

9. $V + u : v - u$, $1:1$, $v - u : v + u$

30. 1754 செக்

31. $3{\cdot}2ms^{-1}$, $5\frac{1}{3}ms^{-1}$ ஆற்றின் கரைகளுக்குச் செங்குத்தாக $5\frac{1}{3}$ ms^{-1}

33. மேற்கிலிருந்து வடக்காக $\alpha°$, $2 \tan \alpha = \tan \theta + \tan \phi$

34. $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ kmh^{-1}, $1\frac{1}{2}$ மணி

35. $a\sqrt{5}$, $5a$

அலகு - 3

3 (a)

1. $\frac{1}{2}$ ms^{-2}, 500 ms^{-2}
2. $\frac{1}{6}N$
3. 680 m
4. 71·4 m
6. 379 செக்
7. 966N, 406N; கீழ்நோக்கி $\frac{g}{13}$, $\frac{g}{9}$
8. 2 : 1
9. $75\sqrt{2}$ ms^{-1}
10. 1323 N

3 (b)

1. $2{\cdot}45$ ms^{-2}, $7\frac{1}{2}$ g N, 15g N
2. $4{\cdot}3$ ms^{-2}, $\frac{63}{16}g$, $\frac{63\sqrt{2}}{16}g$: 1 செக், ½ செக்
3. $2{\cdot}45$ ms^{-1}, $\frac{9}{4}$ g, 1·81 செக், 4·52 செக்
4. 4m

   8 ms^{-1}, 34·3m
6. $2{\cdot}2$ ms^{-2}
7. $\frac{g}{2}(\cos\theta - \sin\theta)$, $\frac{mg}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$, $Mg + \frac{mg}{2}(3 + \sin 2\theta)$
8. $30°$, $mg\sqrt{3}$ நிலைக்குத்துடன் $30°$, $g/4$ $\frac{3\sqrt{3}\,mg}{2}$ நிலைக்குத்துடன் $30°$
9. $\frac{6mg}{5\sqrt{2}}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6mg}{5}$ நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி
10. $R_1 = \frac{m}{4a}(u^2 - v^2)$, $R_2 = \frac{mv^2}{2a}$, $\frac{5a}{4}$

3 (c)

1. $\frac{g}{9}$, $\frac{40}{9}$ mg, $\frac{5}{3}$ mg
2. $\frac{g}{8}$
3. $\frac{6kmg}{k+8}$, $\frac{3kmg}{k+8}$
5. $M : \frac{4m_1m_2 - M(m_1+m_2)}{4m_1m_2 + M(m_1+m_2)}g$; $m_1 : \frac{4m_1m_2 + M(m_1-3m_2)}{4m_1m_2 + M(m_1+m_2)}g$, $m_2 : \frac{M(3m_1-m_2) - 4m_1m_2}{4m_1m_2 + M(m_1+m_2)}g$
10. $\frac{\sqrt{3}}{5}g$, $\sqrt{\frac{5h}{g}}$

அலகு 4

4 (a)

1. 49,000 J, 3×10^6 J
2. 166·6 kg
3. 0·13
4. 122·5 W, 375 kw
5. $0{\cdot}079$ ms^{-1}, $10.2ms^{-1}$
6. $25{\cdot}5$ ms^{-1} 392 N, 4 5 6·8N
7. $45ms^{-1}$, $1{\cdot}715$ ms^{-2}
8. 73½ kW, 50 kmh^{-1}
9. $45{\cdot}9ms^{-1}$, 905N
10. 3270W, 40kmh^{-1}, 24kmh^{-1}
11. $\frac{3W}{n}$, $\frac{2g}{n}$
12. $\frac{10^3H}{Mv} - g\sin\alpha$, $\frac{10^3H}{Mv} + g\sin\alpha$, $\frac{10^3H}{3mvg}$, $\frac{3V}{4}$
13. 1306·7kw
15. 2 : 1

4 (b)

1. 24·2kw
2. 16·8kw
3. 1·43kw
4. mgh $-\frac{1}{2}$ m v^2; $\sqrt{\frac{2gl}{3}}$
7. $\sqrt{\frac{2gd\ (m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}}$
8. $\frac{mu^2}{2a}$; $\frac{1}{2}\ v$, $\frac{c}{u}$

4 (c)

1. $\frac{9a}{4}$
2. $\frac{16\,a}{7}$
3. 3mg, 3g
4. 100 J
5. $(3 + \sqrt{5})\ \frac{l}{2}$
6. $\frac{3l}{4}$
7. ½ mg (cotθ - cosθ)
9. 0.3 J
10. $(1 - \frac{2m}{M})$ C
11. $\frac{11\ mga}{12}$
12. $\sqrt{\frac{5ag}{2}}$
14. 30°, W $\sqrt{3}$, $\frac{W\sqrt{3}}{2}$, 30°
15. $\sqrt{\frac{5ag}{2}}$
16. $\frac{5a}{2}$
18. $\frac{W}{2}\ (2\sqrt{3} - 3)$
19. mg

4 (d)

1. 115×10^3 N
2. 8·5kw, 400N
3. 10^4 N, $3{\cdot}2 \times 10^4$N
5. 6·943 kW
6. 162878 J , 8038N

அலகு - 5

5 (a)

1. 5·01 ms^{-1}
2. 4ms^{-1} , $\frac{3}{2} \times 10^4$ நியூட்டன்
3. $\frac{mv}{M + m}$, $\frac{mv\sqrt{3}}{2\,(M + m)}$, $\frac{Mmv}{(M + m)t}$, $\frac{Mmv\sqrt{3}}{2\,(M + m)\,t}$
4. 5·45ms^{-1}, 3·03m
5. $15{\cdot}9 \times 10^5$ N
7. 7·2Ns, $\frac{12\sqrt{7}}{5}$ Ns
8. 24 நியூட்டன்
9. 8 Ns
10. 67·9 kW, 4·52 kN

5(b)

1. 5·4ms^{-1} , 3·9ms^{-1} , 1·05J
2. 6ms^{-1} , 16ms^{-1} , 100 Ns
3. $\frac{u}{5}$, $\frac{2u}{5}$, $\frac{8u}{5}$
9. $\frac{u\ (2-e)}{3}$, $\frac{2u\ (1+e)}{3}$, $\frac{u}{9}$ (e^2+8e-2)
10. $\frac{V}{2}$ (1-e), $\frac{V}{4}$ $(1-e^2)$, $\frac{V}{4}$ $(1+e)^2$

11. $\frac{V}{16}$, $\frac{3V}{16}$

12. $\frac{(1+e)(1-\lambda e)u}{(1+\lambda)^2}$, $\frac{(1+e)^2 u}{(1+\lambda)^2}$

13. $\frac{V}{2}(1+e)$, $\frac{V}{3}(1-2e)$, $\frac{1}{2}$

14. $\frac{4V}{3}$, $\frac{4V}{3(n+1)}$

15. $\frac{(3-2\lambda)V}{3(\lambda+1)}$, $\frac{5V}{3(\lambda+1)}$

17. $4Mm\,(M+m)^2 : 4Mm\,(M-m)^2 : (M-m)^4$

28. $2\sqrt{\frac{gh}{13}}$, $\frac{2h}{9}$, $\sqrt{\frac{13}{15}}$, $m\left[\sqrt{\frac{2sh}{13}}\left(\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)\right]$

30. 3·5 மீற்றர் 4 : 17 , $11\frac{16}{81}$

5 (c)

13 45°

17. $\frac{a\,(1-e^{2n})}{u\,e^{2n-1}(1-e)\sin\theta}$ 18 : 4 : 3

5 (d)

1. $\frac{g}{3}$, $\frac{3V}{g}$, $\frac{2V}{g}$, $\frac{V}{3}$, $\frac{2V}{g}$

2. $\frac{m}{a}\sqrt{u^2-ag}$, $\frac{mg}{4}$, $7ga$

7. $\frac{4a}{v}$ $\frac{v}{6}$ $\frac{5mv^2}{12}$

8. $\frac{u}{2}$, $\frac{u\sqrt{13}}{8}$, $\frac{u\sqrt{3}}{4}$, $\frac{mu}{2}$, $\frac{mu\sqrt{13}}{4}$

14. $\frac{7J}{15}$ $\frac{4\sqrt{3}J}{15}$ A : $\frac{J\sqrt{3}}{15m}$ AB வழியே, B : $\frac{2\sqrt{21}J}{15m}$

$\tan^{-1}(3\sqrt{3})$, C : CB வழியே $\frac{4\sqrt{3}J}{15m}$

24. $\frac{P}{2\sqrt{2m}}$, $\frac{P}{2\sqrt{2m}}$, O

அலகு - 6

6 (a)

1. 11·5m, 3·06 செக். 79·5m $28{\cdot}66ms^{-1}$. கிடையுடன் $\tan^{-1}0{\cdot}466$
2. 2100m
3. $1800\sqrt{3}$ m
4. $\frac{10}{7}$ செக், 10m, $\frac{20}{7}$ செக் 69·3m
5. 19·6m
6. $25{\cdot}6\ ms^{-1}$. கிடையுடன் $\tan^{-1}(3/4)$
7. $20{\cdot}9^\circ$, $69{\cdot}1^\circ$
8. $76{\cdot}5^\circ$, $40{\cdot}1^\circ$
9. $61ms^{-1}$
13. $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{u^2}{18g}(4\sqrt{7}-7)$
18. $10ms^{-1}$ $\tan^{-1}(3/4)$, 2·8 செக், 9.6m
19. $\tan^{-1}(1/4)$, 1·13 செக்
20. 64m, 36m, $\sin^{-1}(4/5)$ $\sin^{-1}(3/5)$
30. 45°, $71^\circ 34'$, $\sqrt{5}:1$
31. A இன் எறியல் திசையினை நேர்கோடு, $\frac{2u^2}{g}$
32. $26{\cdot}6^\circ < a < 63{\cdot}4^\circ$. 98m
33. $h\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{2}}$
34. $35{\cdot}3^\circ$ $\frac{7h}{3}$
35. $g\ T\frac{(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{2\sin\alpha}$
36. $20\sqrt{5}\ ms^{-1}$. 120m. 90m

6 (b)

16. $\frac{2\,ev\sin\theta}{g\cos\alpha}$. $\frac{1}{2}\cot\alpha\cot\theta - 1$

சாயி கல்வி வெளியீடுகள்

க.பொ.த உயர்தரம்

புதிய பாடத்திட்டத்திற்குரியவை

(ஆண்டு 2000 உம் அதற்குப் பின்னரும்)

1. உயிரியல் பகுதி -1
2. உயிரியல் பகுதி - 2(A) தொழிற்படும் விலங்கு
3. உயிரியல் பகுதி - 2(B) தொழிற்படும் விலங்கு
4. உயிரியல் பகுதி - 3(A) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி I
5. உயிரியல் பகுதி - 3(B) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி II
6. உயிரியல் பகுதி - 4(A) உயிரின் தொடர்ச்சி
7. உயிரியல் பகுதி - 4(B) மனிதனும் சூழலும் + பிரயோக உயிரியல்
8. சேதன இரசாயனம் - பரீட்சை வழிகாட்டி
9. பிரயோக கணிதம் - நிலையியல்
10. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி I
11. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி II
12. பிரயோக கணிதம் - நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
13. இணைந்த கணிதம் - நுண்கணிதம்
14. இணைந்த கணிதம் - அட்சர கணிதம்
15. இணைந்த கணிதம் - திரிகோணகணிதம்
16. இணைந்த கண்ிதம் - ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06. SRILANKA.