க.பொ.த உயர்தரம்

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப்பகுதி)

அட்சரகணிதம்

G.C.E. ADVANCED LEVEL

COMBINED MATHEMATICS

(Pure Mathematics Component - Algebra)

கா. கணேசலிங்கம், B.Sc. Dip-in-Ed.

க. பொ. த

உயர்தர வகுப்புக்கான

இணைந்த கணிதம்

(தூயகணிதப் பகுதி)

அட்சர கணிதம்

K. Ganeshalingam. B. Sc. Dip in Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
155/2, CANAL ROAD, COLOMBO - 06.
Phone : 592707

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title	:	INNAINTHA KANITHAM (PUREMATHEMATICS - COMPONENT - ALGEBRA)
Language	:	Tamil
Author	:	Karthigesu Ganeshalingam B. Sc.Dip – in – Ed. Puttalai, Puloly.
Publications	:	Sai Educational Publication 155/2, Canal Road, Colombo –06.
Date of Issue	:	August 2005
No of pages	:	372 + iv
Copyright	:	Sai Educational Publication.
Type Setting	:	SDS COMPUTER SERVICES, Col - 06. Tel : 593920

Printed at Students Offset Services, Chennai-600 001, ☎25382513

நூலின் விபரம்

தலைப்பு	:	க. பொ. த உயர்தரம் இணைந்த கணிதம் - (தூயகணிதப்பகுதி-அட்சரகணிதம்)
மொழி	:	தமிழ்
ஆசிரியர்	:	கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம். புற்றளை, புலோலி.
வெளியீடு	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம். 155/2, கனல் வீதி கொழும்பு - 06
பிரசுரத்திகதி	:	ஆகஸ்டு 2005
பக்கங்கள்	:	372 + iv
பதிப்புரிமை	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்.
கணணிப்பதிவு	:	எஸ்.டி.எஸ் கம்பியூட்டர் சேர்விசஸ், கொழும்பு - 06.

அச்சிட்டோர் : மாணவர் மறுதோன்றி அச்சகம், சென்னை - 1. ☎ 25382513

என்னுரை

புதிய பாடத்திட்ட **இணைந்த கணிதம்** - தூயகணிதப்பகுதி **நுண்**கணித நூலைத் தொடர்ந்து, தூயகணிதப்பகுதியில் **அட்சரகணிதம்** எனும் இந்நூல் வெளிவருகிறது. பாடத்திட்டத்தில் அடக்கப்பட்டுள்ள அட்சரகணிதப் பகுதிகள் யாவையும் இந்நூல் கொண்டுள்ளது.

இந்நூலில் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் உதாரணக் கணக்குகள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. உதாரணக் கணக்குகளைத் தொடர்ந்து பயிற்சிக் கணக்குகள் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றை மாணவர் தாமாகவே செய்வதற்கு உதாரணக் கணக்குகள் வழிவகுத்துக் கொடுக்கும் என்பது எனது எதிர்பார்ப்பாகும்.

கடந்த கால வினாப்பத்திரங்களில் வந்த அட்சரகணிதக் கணக்குகள் யாவும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

நிறைவுகள் ஏற்று குறைவுகள் சுட்டி மேலும் தூயகணிதத்தின் அடுத்த பகுதி நூலை வெளியிட ஆக்கமும் ஊக்கமும் தருவார்களென மாணவர்களையும் ஆசிரியர்களையும் கேட்டு இந்நூலைப் புத்தக உருவில் கொணர்ந்த சாயி கல்வி வெளியீட்டகத்தினருக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

நன்றி

ஆகஸ்ட் 2000 ஆசிரியர்

பொருளடக்கம்

****

பக்கம்

1. மீட்டல், சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், மடக்கை 1

2. மெய்யெண்கள், பல்லுறுப்பிகள், மீதித் தேற்றம், காரணித் தேற்றம் 36

3. இருபடிச் சமன்பாடுகள் 66

4. இருபடிச் சார்புகள், விகிதமுறு சார்புகள் 108

5. சமனிலிகள் 140

மீட்டல் பயிற்சி 1 171

6. தொடர்கள் 185

7. வரிசைமாற்றம், சேர்மானம் 238

8. ஈருறுப்பு விரிவு 270

9. சிக்கலெண்கள் 299

மீட்டல்பயிற்சி 2 335

விடைகள் 359

1. மீட்டல், சமன்பாட்டின் தீர்வுகள், மடக்கை

1.1 அட்சரகணிதக் கோவைகளின் விரிவுகள்

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a(a-b)-b(a-b)\\ &= a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

.2 காரணிகள்

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

காரணியாக்குக

உதாரணம் 1

$$18x^2 + 33x - 216$$
$$= 3[6x^2 - 11x - 72]$$
$$= 3[6x^2 - 27x + 16x - 72]$$
$$= 3[3x(2x-9) + 8(2x-9)]$$
$$= 3(2x-9)(3x+8)$$

உதாரணம் 2

$$x^4 + x^2 - y^4 - y^2$$
$$= x^4 - y^4 + x^2 - y^2$$
$$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 1(x^2 - y^2)$$
$$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 1)$$
$$= (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 1)$$

உதாரணம் 3

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2$$
$$= (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)$$
$$= [(a-b)^2 - c^2][(a+b)^2 - c^2]$$
$$= (a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$$

உதாரணம் 4

$$1 - a^2 - b^2 + 2ab$$
$$= 1 - [a^2 - 2ab + b^2]$$
$$= 1 - (a-b)^2$$
$$= [1 - (a-b)][1 + (a-b)]$$
$$= (1 - a + b)(1 + a - b)$$

உதாரணம் 5

$$a^4 + 4b^4$$
$$= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2$$
$$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$$
$$= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

உதாரணம் 6

$$(a-b)^3 + 8b^3$$
$$= (a-b)^3 + (2b)^3$$
$$= [(a-b) + 2b][(a-b)^2 - 2b(a-b) + (2b)^2]$$
$$= (a+b)(a^2 - 4ab + 7b^2)$$

உதாரணம் 7

$$81x^4y - 3xy^4$$
$$= 3xy[27x^3 - y^3]$$
$$= 3xy[(3x)^3 - y^3]$$
$$= 3xy(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$$

1.3 சுருக்குதல்

சுருக்குக

உதாரணம் 8

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{4a^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}+\frac{4a^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2+4a^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{4ab+4a^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{4a(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{4a}{a-b}$$

உதாரணம் 9

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(a-c)(a-b)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{(c-a)+(a-b)-(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{c-a+a-b-b+c}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-2(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{2}{(a-b)(a-c)}$$

உதாரணம் 10

$$\frac{3}{x^2+x-2}-\frac{2}{x^2+2x-3}+\frac{1}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{3}{(x+2)(x-1)}-\frac{2}{(x+3)(x-1)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{3(x+3)-2(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{3x+9-2x-4+x-1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{2x+4}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{2}{(x-1)(x+3)}$$

உதாரணம் 11

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\times\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}\div\frac{x^2+x}{x^3+2x^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}\times\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)}\times\frac{x^2(x+2)}{x(x+1)}\quad=x(x+2)$$

1.4 சுட்டிகள்

சுட்டி விதிகள்

$$\boxed{\begin{aligned} a^m\times a^n&=a^{m+n}\\ a^m\div a^n&=a^{m-n}\\ (a^m)^n&=a^{mn}\\ (ab)^m&=a^m b^m\end{aligned}}$$

உதாரணம் 12

பெறுமானம் காண்க

(i) 5^2 **(ii)** $(-5)^2$ **(iii)** 5^{-2} **(iv)** $8^{-2/3}$ **(v)** $\left(\frac{256}{81}\right)^{-1/4}$

(i) $5^2 = 5 \times 5 = 25$ **(ii)** $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

(iii) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ **(iv)** $8^{-2/3} = \left(2^3\right)^{-2/3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

(v) $\left(\frac{256}{81}\right)^{-1/4} = \left(\frac{81}{256}\right)^{1/4} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^{1/4} = \frac{3}{4}$

உதாரணம் 13

x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க

(i) $2^x \times 8^x = 64$ **(ii)** $(3x)^{-1/2} = \frac{1}{27}$ **(iii)** $16^{-x} = 64$

(i)
$$2^x \times 8^x = 64$$
$$2^x \times \left(2^3\right)^x = 2^6$$
$$2^{4x} = 2^6$$
$$4x = 6$$
$$x = 3/2$$

(ii)
$$3^{-\frac{1}{2}x} = 3^{-3}$$
$$-\frac{1}{2}x = -3$$
$$x = 6$$

(iii)
$$16^{-x} = 64$$
$$\left(2^4\right)^{-x} = 2^6$$
$$2^{-4x} = 2^6$$
$$-4x = 6$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

1.5 சமன்பாடுகள் தீர்த்தல்

ஒரு மாறியிலான சமன்பாடுகள்

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

உதாரணம் 14

$$x^{1/4} - x^{-1/4} = \frac{3}{2}$$

$y = x^{1/4}$ என்க.

$$y - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$$
$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$
$$(2y+1)\,(y-2) = 0$$
$$y = -\frac{1}{2}, 2$$
$$y = x^{1/4} > 0$$
$$\therefore\ y = 2$$
$$x^{1/4} = 2$$
$$x = 16$$

உதாரணம் 15

$$\frac{5}{x^2+6x+8} = \frac{1}{x^2+6x+5} + \frac{4}{x^2+6x+9}$$

$y = x^2 + 6x$ என்க.

$$\frac{5}{y+8} = \frac{1}{y+5} + \frac{4}{y+9}$$
$$5(y+5)\,(y+9) = (y+8)\,(y+9) + 4(y+8)\,(y+5)$$
$$5\left(y^2 + 14y + 45\right) = y^2 + 17y + 72 + 4\left(y^2 + 13y + 40\right)$$
$$70y + 225 = 17y + 72 + 52y + 160$$
$$y = 7$$
$$x^2 + 6x = 7$$
$$x^2 + 6x - 7 = 0$$
$$(x+7)\,(x-1) = 0$$
$$x = -7, 1$$

உதாரணம் 16

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$y = x + \dfrac{1}{x}$ என்க.

$$2\left(y^2-2\right)-9y+14=0$$

$$2y^2-9y+10=0$$

$$(2y-5)(y-2)=0$$

$$y=\frac{5}{2},\ y=2.$$

$y = 2$ எனின்,

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$$(x-1)^2=0$$

$$x=1,1$$

$y = \dfrac{5}{2}$ எனின்

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$(2x-1)(x-2)=0$$

$$x=\frac{1}{2},2$$

தீர்வுகள் $1, 1, \dfrac{1}{2}, 2$

உதாரணம் 17

$ax^4 - bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ என்ற வடிவிலமைந்த சமன்பாடுகள் $x \neq 0$; ஏனெனில் $x = 0$ ஒரு தீர்வு எனின், $a = 0$ ஆகும்.

சமன்பாட்டை x^2 ஆல் பிரிக்க.

$$ax^2-bx+c-\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$y = x + \dfrac{1}{x}$ எனும் பிரதியீட்டினால் இச்சமன்பாட்டினைத் தீர்க்கலாம்.

$$8x^4-42x^3+29x^2+42x+8=0$$

$x \neq 0$; x^2 ஆல் பிரிக்க,

$$8x^2-42x+29+\frac{42}{x}+\frac{8}{x^2}=0$$

$$8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-42\left(x-\frac{1}{x}\right)+29=0$$

$y = x - \dfrac{1}{x}$ என்க.

$$8\left(y^2+2\right)-42y+29=0$$

$$8y^2-42y+45=0$$

$$(2y-3)(4y-15)=0$$

$y = \dfrac{3}{2}$ அல்லது $y = \dfrac{15}{4}$

$y = \dfrac{3}{2}$ எனின்

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$(2x+1)(x-2)=0$$

$$x=-\frac{1}{2},2$$

$y = \dfrac{15}{4}$ எனின்

$$x-\frac{1}{x}=\frac{15}{4}$$

$$4x^2-15x-4=0$$

$$(4x+1)(x-4)=0$$

$x = -\dfrac{1}{4}$ அல்லது 4

தீர்வுகள் $-\dfrac{1}{2}, 2, -\dfrac{1}{4}, 4$

உதாரணம் 18

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = \sqrt{2x-1}$$

இருபக்கமும் வர்க்கிக்க

$$(3x+1)+(2-x)-2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 2x-1$$

$$2 = \sqrt{(3x+1)(2-x)}$$

$$4 = (3x+1)(2-x)$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(3x-2)(x-1) = 0$$

$$x = \frac{2}{3}, 1$$

$x = 1$ எனின், இ.கை.ப $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2-1 = 1$

வ.கை.ப $= \sqrt{1} = 1$

$x = \frac{2}{3}$ எனின், இ.கை.ப $= \sqrt{3} - \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

வ.கை.ப $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

தீர்வுகள் $1, \frac{1}{\sqrt{3}}$

உதாரணம் 19

$$(x-2)(x+3)(x+6)(x+1)+56=0$$

$$(x-2)(x+6)(x+3)(x+1)+56=0$$

$$(x^2+4x-12)(x^2+4x+3)+56=0$$

$y = x^2 + 4x$ என்க.

$$(y-12)(y+3)+56=0$$

$$y^2 - 9y + 20 = 0$$

$$(y-5)(y-4) = 0$$

$$y = 5,\ 4$$

$y = 5$ எனின்

$$x^2 + 4x = 5$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

$$x = -5, 1$$

$y = 4$ எனின்

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$= -2 \pm 2\sqrt{2}$$

தீர்வுகள் : $-5, 1, -2+2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2}$

உதாரணம் 20

$$4^{x+1} + 2^{4x+2} = 80$$

$$4^{x+1} + (2^2)^{2x+1} = 80$$

$$4 \cdot 4^x + 4 \cdot 4^{2x} = 80$$

$$4^x + (4^x)^2 = 20$$

$y = 4^x$ என்க.

$$y^2 + y - 20 = 0$$

$$(y+5)(y-4) = 0$$

$$y = -5, 4$$

$$y = 4^x > 0$$

ஆகவே $y = 4$

$$4^x = 4$$

$$x = 1$$

உதாரணம் 21

$$(x+1)^4 + (x-3)^4 = 256$$

$y = \frac{1}{2}\left[(x+1)+(x-3)\right]$ என்க.

$y = (x-1)$ ஆகும்.

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாடு

$$(y+2)^4 + (y-2)^4 = 256$$

$$\left(y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16\right) + \left(y^4 - 8y^3 - 24y^2 - 32y + 16\right) = 256$$

$$2y^4 + 48y^2 + 32 = 256$$

$$y^4 + 24y^2 - 112 = 0$$

$$\left(y^2 + 28\right)\left(y^2 - 4\right) = 0$$

$y = \pm 2, \quad \pm\sqrt{-28}$

$x = 3, -1, \quad 1 \pm \sqrt{-28}$

இருமாறியிலான சமன்பாடுகள்

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

உதாரணம் 22

$$2x^2 - 3xy + 5y^2 = 1$$

$$3x - 2y = 2$$

$3x - 2y = 2; \quad y = \frac{3x-2}{2}$ என சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட

$$2x^2 - 3x\left(\frac{3x-2}{2}\right) + 5\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2 = 1$$

$$8x^2 - 18x^2 + 12x + 45x^2 - 60x + 20 = 4$$

$$35x^2 - 48x + 16 = 0$$

$$(5x-4)(7x-4) = 0$$

$x = \frac{4}{5}$ அல்லது $\frac{4}{7}$

$y = \frac{3x-2}{2}$ என்பதில் பிரதியிட

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = \frac{4}{7} \\ y = \frac{1}{7} \end{array}\right\}$$

உதாரணம் 23

$x^2 + xy - 2y^2 = 0; \qquad x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y = 15$

முதலாவது சமன்பாடு x, y இல் ஏகவினமானது

$y = Vx$ என்க.

$$x^2 + Vx^2 - 2V^2x^2 = 0$$

$2V^2 - V - 1 = 0; \qquad (2V+1)(V-1) = 0$

$V = -\frac{1}{2}$ அல்லது 1

$y = -\frac{1}{2}x$ அல்லது $y = x$

$y = x$ என இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$x^2 + 2x^2 + 3x^2 + 4x + 5x - 15 = 0$$

$$6x^2 + 9x - 15 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$(2x+5)(x-1)=0$$

$x=-5/2$ அல்லது $x=1$

$x=-5/2$ எனின் $y=-5/2$, $x=1$ எனின் $y=1$

$y=-\frac{1}{2}x$, $x=-2y$ என இரண்டாவது சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$4y^2-4y^2+3y^2-8y+5y-15=0$$

$$3y^2-3y-15=0$$

$$y^2-y-5=0$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

$y=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ அல்லது $y=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

$x=-2y$ இல் பிரதியிட

$x=-1-\sqrt{21}$ அல்லது $x=-1+\sqrt{21}$

தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=1\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}\\y=-\frac{5}{2}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{21}\\y=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-1+\sqrt{21}\\y=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right\}$

உதாரணம் 24

$x^2+xy+4y^2=6$ ———— (1)

$3x^2+8y^2=14$ ———— (2)

$(1)\times 7,\quad \Rightarrow\quad 7x^2+7xy+28y^2=42$

$(2)\times 3,\quad \Rightarrow\quad 9x^2+24y^2=42$

$$9x^2+24y^2=7x^2+7xy+28y^2$$

$$2x^2-7xy-4y^2=0$$

$$(2x+y)(x-4y)=0$$

$x=-y/2$ அல்லது $x=4y$

$x=4y$ என சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட

$$56y^2=14$$

$y^2=\frac{1}{4}$, $y=\pm\frac{1}{2}$

$y=1/2$ எனின் $x=2$, $y=-1/2$ எனின் $x=-2$

$y=-2x$ என சமன்பாடு (2) இல் பிரதியிட

$$35x^2=14$$

$$x^2=\frac{2}{5}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{1}{5}\sqrt{10}$$

$x=\frac{1}{5}\sqrt{10}$ எனின், $y=-\frac{2}{5}\sqrt{10}$

$x=-\frac{1}{5}\sqrt{10}$ எனின், $y=\frac{2}{5}\sqrt{10}$

தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{5}\sqrt{10}\\y=-\frac{2}{5}\sqrt{10}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{5}\sqrt{10}\\y=\frac{2}{5}\sqrt{10}\end{array}\right\}$

1.6 விகிதமும், விகிதசமமும்

உதாரணம் 25

$a : b = 3 : 4$ எனின் (i) $2a - b : 3a - 2b$

(ii) $a^2 - ab - 2b^2 : a^2 - 4b^2$ ஐக் காண்க.

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ எனின், $a = \frac{3b}{4}$ ஆகும்.

(i) $2a - b = \frac{3b}{2} - b = \frac{b}{2}$

$3a - 2b = \frac{9b}{4} - 2b = \frac{b}{4}$

$\frac{2a - b}{3a - 2b} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $\quad 2a - b : 3a - 2b = 2 : 1$ ஆகும்.

(ii) $a^2 - ab - 2b^2 = \frac{9b^2}{16} - \frac{3b^2}{4} - 2b^2 = \frac{9b^2 - 12b^2 - 32b^2}{16} = \frac{-35b^2}{16}$

$a^2 - 4b^2 = \frac{9b^2}{16} - 4b^2 = \frac{-55b^2}{16}$

$a^2 - ab - 2b^2 : a^2 - 4b^2 = 7 : 11$ ஆகும்.

உதாரணம் 26

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ எனின், ஒவ்வொரு விகிதமும் பின்வருவனவற்றிற்கு சமம் எனக் காட்டுக.

(i) $\frac{5a - 7c + 3e}{5b - 7d + 3f}$ $\qquad$ (ii) $\sqrt{\frac{4a^2 - 5ace + 6e^2 f}{4b^2 - 5bde + 6f^3}}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ என்க; $\quad a = kb,\ c = kd,\ e = kf$ ஆகும்.

(i) $\frac{5a - 7c + 3e}{5b - 7d + 3f} = \frac{5kb - 7kd + 3kf}{5b - 7d + 3f} = \frac{k(5b - 7d + 3f)}{5b - 7d + 3f} = k$

ஆகவே $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{5a - 7c + 3e}{5b - 7d + 3f}$ ஆகும்.

(ii) $\sqrt{\frac{4a^2 - 5ace + 6e^2 f}{4b^2 - 5bde + 6f^3}}$

$= \sqrt{\frac{4k^2b^2 - 5k^3bdf + 6k^2f^3}{4b^2 - 5kbdf + 6f^3}}$

$= \sqrt{\frac{k^2(4b^2 - 5kbdf + 6f^3)}{(4b^2 - 5kbdf + 6f^3)}} = k$

ஆகவே $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \sqrt{\frac{4a^2 - 5ace + 6e^2 f}{4b^2 - 5bde + 6f^3}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 27

$\frac{x + y}{2a + b} = \frac{y + z}{2b + c} = \frac{z + x}{2c + a}$ எனின்

$\frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{(b + c)x + (c + a)y + (a + b)z}{2(ab + bc + ca)}$ எனக் காட்டுக.

$\frac{x + y}{2a + b} = \frac{y + z}{2b + c} = \frac{z + x}{2c + a} = k$ என்க.

$$k = \frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)}$$

$$k = \frac{2(x+y+z)}{3(a+b+c)}; \quad \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{3k}{2}$$

$$k = \frac{x+y}{2a+b} = \frac{y+z}{2b+c} = \frac{(x+y)-(y+z)}{(2a+b)-(2b+c)} = \frac{x-z}{2a-b-c} = \frac{z+x}{2c+a}$$

$$= \frac{(x-z)+(z+x)}{(2a-b-c)+(2c+a)} = \frac{2x}{3a-b+c}$$

இதேபோல் $k = \frac{2y}{3b-c+a}$, $\quad k = \frac{2z}{3c-a+b}$

இப்பொழுது $k = \frac{2x}{3a-b+c} = \frac{2y}{3b-c+a} = \frac{2z}{3c-a+b}$

$$k = \frac{2x(b+c)}{(3a-b+c)(b+c)} = \frac{2y(c+a)}{(3b-c+a)(c+a)} = \frac{2z(a+b)}{(3c-a+b)(a+b)}$$

$$k = \frac{2\left[x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)\right]}{3a(b+c)-\left(b^2-c^2\right)+3b(c+a)-\left(c^2-a^2\right)+3c(a+b)-\left(a^2-b^2\right)}$$

$$k = \frac{2\left[x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)\right]}{3\left[2ab+2bc+2ca\right]}$$

$$\frac{x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3k}{2}$$

ஆகவே $\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{2(ab+bc+ca)}$

1.7 மடக்கை

$10^1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad log_{10} 1000 = 3$

$5^3 = 125 \quad \Leftrightarrow \quad log_5 125 = 3$

$4^{5/2} = 32 \quad \Leftrightarrow \quad log_4 32 = 5/2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{1/2} 8 = -3$

$$\boxed{a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a y = x \quad (a > 0)}$$

மடக்கை விதிகள்

$log_a xy = log_a x + log_a y$

$log \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$

$log_a x^n = n\, log_a x$

மடக்கையின் அடியை மாற்றுதல்

$log_a b = x$ என்க.

$log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x$

$log_c b = x\, log_c a$

$$x = \frac{log_c b}{log_c a}$$

$$\boxed{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$$

$c = b$ எனின், $log_a b = \frac{log_b b}{log_b a} = \frac{1}{log_b a}$ ஆகும்.

$$\boxed{log_a b = \frac{1}{log_b a}}$$

$$log_b a \cdot log_c b \cdot log_a c = log_b a \cdot \frac{log_a b}{log_a c} \cdot log_a c$$

$$= log_b a \cdot log_a b = 1$$

$log_b a \cdot log_c b \cdot log_a c = 1$ ஆகும்.

உதாரணம் 28

a, b என்பன நேர் மெய்யெண்கள் எனின்,

$log_a b = \frac{1}{log_b a}$ எனக் காட்டுக.

பிரதியீடு $y = log_x 4$ ஐப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக

$4 log_{16} x - 1 = log_x 4$ ஐத் தீர்க்க.

$y = log_x 4$ என்க.

$y = log_x 4 \iff 4 = x^y$

$$\Rightarrow log_{16} 4 = y \, log_{16} x$$

$$\Rightarrow log_{16} 16^{1/2} = y \cdot log_{16} x$$

$$\frac{1}{2} = y \, log_{16} x$$

$$log_{16} x = \frac{1}{2y}$$

$4 log_{16} x - 1 = log_x 4$ என்பதில்

$$\frac{2}{y} - 1 = y$$

$$y^2 + y - 2 = 0, \quad (y+2)(y-1) = 0; \quad y = -2, 1$$

$y = -2$ எனின், $4 = x^{-2}$

$$4^{-1/2} = x$$

$$x = 1/2$$

$y = 1$ எனில், $4 = x^1 = 4$

$\therefore$ தீர்வு $x = \frac{1}{2}, \ 4$

உதாரணம் 29

(i) a, b என்பன நேரெண்களாக இருக்க

$\frac{1}{log_a ab} + \frac{1}{log_b ab} = 1$ எனக் காட்டுக.

(ii) தீர்க்க : **(a)** $log_2 x = log_4(x+6)$

(b) $log_8 \frac{x}{2} = \frac{log_8 x}{log_8 2}$

(i) $\frac{1}{log_a ab} + \frac{1}{log_b ab}$

$$= \frac{1}{log_a a + log_a b} + \frac{1}{log_b a + log_b b}$$

$$= \frac{1}{1 + log_a b} + \frac{1}{log_b a + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_b a}} + \frac{1}{\log_b a + 1}$$

$$= \frac{\log_b a}{1 + \log_b a} + \frac{1}{\log_b a + 1} = 1$$

(ii) (a) $\log_2 x = \log_4 (x+6)$

$y = \log_2 x \Rightarrow x = 2^y$

$$\log_4 x = \log_4 2^y$$

$$\log_4 x = \log_4 4^{\frac{1}{2}y}$$

$$\log_4 x = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\log_2 x = \log_4 (x+6)$$

$$2 \log_4 x = \log_4 (x+6)$$

$$\log_4 x^2 = \log_4 (x+6)$$

$$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$x = 3$ அல்லது -2

$x > 0$ ஆகவே $x = 3$

(b) $\log_8 {x/2} = \dfrac{\log_8 x}{\log_8 2}$

$$\log_8 x - \log_8 2 = \frac{\log_8 x}{\log_8 2}$$

$\log_8 x = y$ என்க. மேலும் $\log_8 2 = \log_8 (2^3)^{1/3} = \log_8 8^{1/3} = \frac{1}{3}$

$$y - \frac{1}{3} = \frac{y}{1/3}$$

$$\frac{1}{3}y - \frac{1}{9} = y$$

$$\frac{2}{3}y = -\frac{1}{9}; \therefore y = -\frac{1}{6}$$

$$\log_8 x = -\frac{1}{6}$$

$$x = 8^{-1/6} = (2^3)^{-1/6}$$

$$x = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$y = a^x$ இன் வரைபு. $x \longrightarrow a^x \quad (a > 1)$

$x = 0$ எனின் $y = a^0 = 1$

$x = 1$ எனின் $y = a^1 = a$

$x = -1$ எனின் $y = a^{-1} = \frac{1}{a}$

$(0, 1)$, $(1, a)$, $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$ என்பன $y = a^x$ இல் உள்ள புள்ளிகளாகும்.

$y = \log_a x$ இன் வரைபு . $x \longrightarrow \log_a x \quad (a > 1)$

$x = 1$ எனின், $y = \log_a 1 = 0$

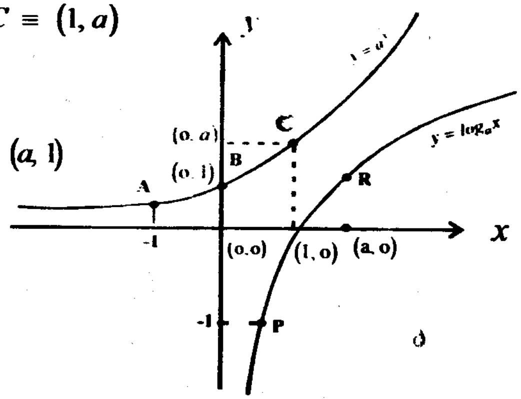
$x = a$ எனின், $y = \log_a a = 1$

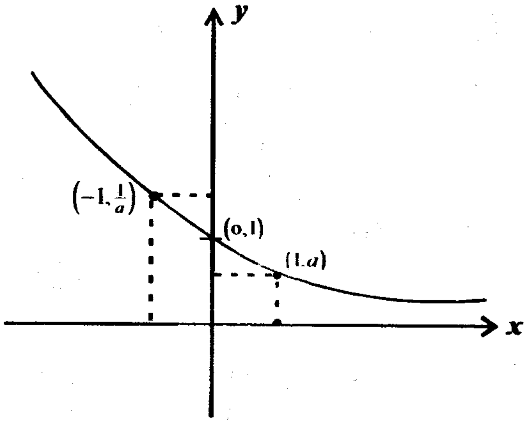
$x = \frac{1}{a}$ எனின், $y = \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = \log_a a^{-1} = -1$ ஆகும்.

$(1, 0)$, $(a, 1)$, $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ என்பன $y = \log_a x$ இல் அமைந்துள்ள புள்ளிகளாகும்.

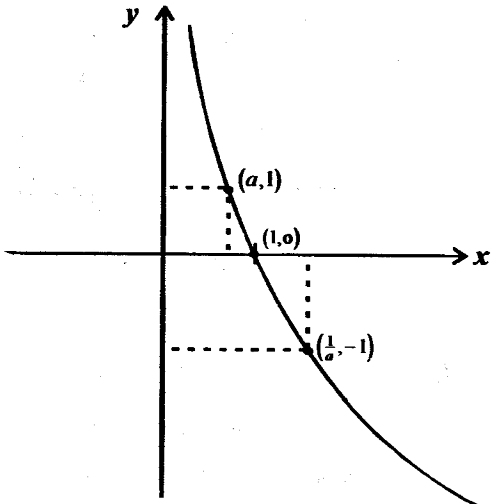
$A \equiv \left(-1, \frac{1}{a}\right),\ B \equiv (0,1),\ C \equiv (1, a)$

$P \equiv \left(\frac{1}{a}, -1\right),\quad Q \equiv (1, 0),\quad R \equiv (a, 1)$





$y = a^x$ இன் வரைபு $(0 < a < 1)$ $\qquad x \longrightarrow a^x$



$y = \log_a x$ இன் வரைபு $(0 < a < 1)$; $\quad x \longrightarrow \log_a x$

பயிற்சி 1.1

பின்வருவனவற்றை விரித்து எழுதுக

1. $(2x+3)^2$	2. $(2xy+z)^2$	3. $(x^2+y^2)^2$
4. $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)^2$	5. $(3a-4b)^2$	6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$
7. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$	8. $(ax-by)^2$	9. $(2x-5y)^2$
10. $(x+1)^3$	11. $(x-1)^3$	12. $(2x+3y)^3$
13. $(2x-3y)^3$	14. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$	15. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

16. $x + y = 7,\ xy = 12$ எனின் $x^2 + y^2$ பெறுமானம் யாது?

17. $x + y = a,\ xy = 20$ எனின் $x^2 + y^2,\ x^3 + y^3,\ x^4 + y^4$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

18. $x + \frac{1}{x} = 3$ எனில், $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $\quad x^3 + \frac{1}{x^3}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

19. $x = t + \frac{1}{t}$, $\quad y = t - \frac{1}{t}$ எனின், x இற்கும் y இற்குமிடையே t ஐச் சாராது தொடர்பொன்றினைக் காண்க.

20. $x = a\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $\quad y = a\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$ எனின், t ஐச் சாராது x, y, a என்பவற்றிற்கிடையே தொடர்பு ஒன்றைப் பெறுக.

பயிற்சி 1.2

காரணியாக்குக

1. $2x^2 + x - 1$ 2. $5x^2 + 14x - 3$ 3. $6x^2 - 11x - 72$

4. $18x^2 + 13x - 21$ 5. $6x^2 - 55x + 126$ 6. $6x^2 - x - 35$

7. $4xy + 9a^2 - x^2 - 4y^2$ 8. $2x^2 - x - 2y^2 + 2y - 3xy$

9. $4x^4 + 8x^2y^2 + 9y^2$ 10. $a^2(2x - 4y)^2 - b^2(2y - x)^2$

11. $a^2 - c^2 + 1 - c^2a^2$ 12. $4a^4 - 13a^2b^2 + 9b^4$

13. $x^2 - 9 + 9a^2 - 6ax$ 14. $x^6 - y^6$

15. $x^6 - y^6$ 16. $a^4 - a^3b - ab^3 + b^4$

17. $8a^3 - b^3 - a\left(2a^2 - 5ab + 2b^2\right)$ 18. $81x^3 - 3y^3$

19. $x^6 - 9x^3y^3 + 8y^6$ 20. $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$

காரணி அறிவை உபயோகித்துச் சுருக்குக

21. 103×97 22. $\sqrt{140 \times 148 + 16}$ 23. $100 \cdot 3 \times 99 \cdot 7$

24. $(a + b)(a - b)\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)$ 25. $12 \cdot 5^2 - 12 \times 13$

பயிற்சி 1.3

சுருக்குக

1. $\dfrac{a}{1 - a^2} + \dfrac{1}{a - 1}$ 2. $\dfrac{x}{x - y} - \dfrac{y}{x + y} + \dfrac{xy}{y^2 - x^2}$

3. $\dfrac{2}{1 + x} + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{3x}{1 - x^2}$ 4. $\dfrac{1}{(1 - x)^2} - \dfrac{1}{1 - x^2}$

5. $\dfrac{1}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{x^2 + x - 6} - \dfrac{2}{x^2 + 5x + 6}$

6. $\dfrac{2}{1 - x} - \dfrac{1}{(x - 1)^2} + \dfrac{3}{1 - x^2}$

7. $\dfrac{1}{(x - 3)^2} + \dfrac{1}{2x^2 - 5x - 3} - \dfrac{6}{4x^2 - 1}$

8. $\dfrac{2}{3x^2 - 14x + 8} - \dfrac{8}{13x - 6x^2 - 6} - \dfrac{4}{2x^2 - 11x + 12}$

9. $\dfrac{1}{(x - y)(y - z)} + \dfrac{1}{(y - x)(x - z)} + \dfrac{1}{(z - x)(y - x)}$

10. $\dfrac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{bc}{(c - a)(c - b)}$

11. $\dfrac{x + 1}{x^2 - 5x + 6} \div \dfrac{1 + x}{4 - x^2}$ 12. $\dfrac{\left(x^2 - 9\right)(x + 2)}{\left(x^2 - x - 12\right)\left(x^2 - x - 6\right)}$

13. $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \div \left(\dfrac{x}{x - y} - \dfrac{y}{x + y}\right)$

14. $\left(\dfrac{1}{a + b} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a - b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)$ 15. $\dfrac{\dfrac{1}{a} - 4a}{4 - 4a - \dfrac{1}{a}}$

பயிற்சி 1.4

பெறுமானங்களைக் காண்க

1. 50^0 , $64^{-\frac{2}{3}}$, $\left(2^4\right)^{-\frac{3}{2}}$, $16^{-\frac{1}{2}}$

2. $32^{-\frac{2}{5}} \div 125^{-\frac{2}{3}}$ $\qquad \dfrac{32^{-2/5} \times 216^{2/3}}{81^{3/4} \times 27^{-2/3}}$

3. **(a)** $y = 4^x$ ஆகும்.

(i) $x = \dfrac{3}{2}$ **(ii)** $x = -3$ எனின், y ஐக் காண்க.

(iii) $y = 32$ **(iv)** $y = \dfrac{1}{8}$ எனின், x ஐக் காண்க.

(b) $(\sqrt{8})^3 \times \dfrac{1}{\sqrt{27}} \times 6^{-5/2}$

4. $x = 9$, $y = 16$ எனின், பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $x^{\frac{1}{2}} y^{3/4}$ **(ii)** $\left(\dfrac{6x}{y}\right)^{1/3}$ **(iii)** $(4xy)^{-1/2}$ $\quad (x+y)^{-1/2}$

5. x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(a) $4^{-x} = 32$ **(b)** $x^{-1/2} = 4$ **(c)** $4^x = \sqrt{512}$

(d) $2^x \times 8^{x+1} = 4^3$

பயிற்சி 1.5

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

1. $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$
2. $x + 3\sqrt{5x} = 50$
3. $8\left(x^3 + x^{-3}\right) = 65$
4. $3\left[(x+7)^{1/2} + (x+7)^{-\frac{1}{2}}\right] = 10$
5. $x^{-1} + x^{-1/2} = \dfrac{3}{4}$
6. $x^{1/2} + x^{1/4} = 16$

7. $\dfrac{5}{x^2+6x+2} = \dfrac{3}{x^2+6x+1} - \dfrac{4}{x^2+6x+8}$
8. $\left(x + \dfrac{2}{x} - 1\right)\left(x + \dfrac{2}{x} + 4\right) = 6$
9. $\dfrac{x^2}{x^2+3x+2} + \dfrac{2\left(x^2+3x+2\right)}{x^2} = 12\dfrac{1}{6}$
10. $6\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 38 = 0$
11. $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 7\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 12\dfrac{3}{4}$
12. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 4$
13. $9x^{2/3} + 4x^{-2/3} = 37$
14. $\left(x^2 - 9x + 15\right)\left(x^2 - 9x + 20\right) = 6$
15. $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$
16. $x^4 + x^3 + - 4x^2 + x + 1 = 0$
17. $3x^4 - 20x^3 - 94x^2 - 20x + 3 = 0$
18. $5\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+13}$
19. $4\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x+20}$
20. $3\sqrt{x} + 2\sqrt{5-x} = 8$
21. $(x+3)(x+5)(x-2)(x-4) = 120$
22. $(x+1)(2x-7)(2x+1)(x-3) = 96$
23. $2^{x+1} + 2^{2x} = 8$
24. $2^{x^2} : 2^{3x} = 16 : 1$
25. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$
26. $(1-x)^4 + (1+x)^4 = 82$

29. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{2x+2y}{9}$ 30. $x + y = 1$; $2(x^2 + y^2) = 17$

31. $2x^2 - 3xy = 36$, $4x + 5y = 2$

32. $x + 2y = 3$; $3x^2 + 4y^2 + 12x = 7$

33. $4x^2 - 5y^2 = 16$; $9x^2 + 10y = 101$

34. $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$; $2x^2 - 2x + y = 13$

35. $8x^2 - 6xy + y^2 = 0$; $x^2 + y^2 + x = 6$

36. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 3x^2 + xy + y^2 = 5$

37. $2x^2 + 3xy = 26$; $3y^2 + 2xy = 39$

38. $x^2 - xy = 6$; $x^2 + y^2 = 61$

39. $x^2 + 2xy = 45$; $xy + 3y^2 = 22$

40. $x^2 + y^2 = 2y$; $2xy - y^2 = y$

41. $x^2 - x - y = 0$; $2x^2 + xy + 2y^2 = 5(x+y)$

42. $xy + y^2 = 4x + y$; $5xy + 2y^2 = 8x + 5y$

43. $2x^2 = x + y$; $2xy + y^2 = 3x$

44. $x + y = 5$; $x^3 + y^3 = 35$

45. $x - y = 3$; $x^3 - y^3 = 117$

46. $x + y = 10$; $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3}$

47. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133$; $x^2 + xy + y^2 = 19$

48. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{16}$; $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{9}$

49. $xy - \frac{x}{y} = 5$; $xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{5}$

50. $x^2 + xy + 3x = 6$; $y^2 + xy + 3y = 12$

51. $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{y-4} = 2$; $\frac{4}{x+1} - \frac{9}{y-4} = 5$

52. $(x+y)^2 + (x+y) = 6$

$x - y = 1$

53. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}$; $x^2 + xy = 6$

54. $(x+y)^{\frac{2}{3}} + 6(x-y)^{2/3} = 5(x^2 - y^2)^{1/3}$

$x - y = 2$

55. $x^3 + y^3 = 28$; $x^2y + xy^2 = 12$

56. $x^2 + 15xy - 4y^2 = 6$

$x^2 + y^2 = 1$

57. $xy - 3x - 3y + 12 = 0$

$2xy + 4x + 4y = 56$

பயிற்சி 1.6

1. $a : b = 10 : 3$ எனின், $2a - 5b : a - 3b$ ஐக் காண்க.
2. $a : b = c : d$ எனின், $a + b : b = c + d : d$

   $a - b : b = c - d : d$

   $a + b : a - b = c + d ; c - d$ என நிறுவுக.

3. $a : b = x - 2y : y + 2x$ எனின், $x : y = a + zb : b - 2a$ எனக் காட்டுக.

4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ எனின், ஒவ்வொரு விகிதமும் பின்வருவனவற்றிற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(i) $\dfrac{a^2 - ac + e^2}{b^2 - bd + f^2}$ (ii) $\dfrac{c^3 - a^2 ef}{d^3 - b^2 f^2} = \dfrac{ace}{bdf}$

5. $\dfrac{x}{b-c} = \dfrac{y}{c-a} = \dfrac{z}{a-b}$ எனின், (i) $x + y + z = 0$

(ii) $(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$ எனக்காட்டுக.

6. $\dfrac{x}{lm - n^2} = \dfrac{y}{mn - l^2} = \dfrac{z}{nl - m^2}$ எனின், (i) $lx + my + nz = 0$

(ii) $mx + ny + lz = 0$ எனக்காட்டுக.

7. $a : b = c : d$ எனின், $ab + cd : ab - cd = a^2 + c^2 : a^2 - c^2$ எனக்காட்டுக.

8. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{a+b}$ எனின், $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{a^2 + ab + b^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$ எனக்காட்டுக.

9. $\dfrac{y+z-x}{a} = \dfrac{z+x-y}{b} = \dfrac{x+y-z}{c}$ எனின்,

$\dfrac{x}{b+c} = \dfrac{y}{c+a} = \dfrac{z}{a+b}$ எனநிறுவுக.

10. $\dfrac{x+y}{3a-b} = \dfrac{y+z}{3b-c} = \dfrac{z+x}{3c-a}$ எனின்,

$\dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$ எனக்காட்டுக.

பயிற்சி 1.7

தீர்க்க

1. $log_2 4 + 2\, log_2 x - log_2 (2x - 1) = 2$

$log_{10}(x+y)^2 = 4$

$log_{10}\left(x^2 - y^2\right) = 3$

3. (i) $log_{10}\left(x^2 + 9\right) - 2\, log_{10} x = 1$

(ii) $\left(a + \sqrt{b}\right)^2$ இன் விரிவை எழுதுக. இதிலிருந்து $9 + 4\sqrt{5}$ இன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

4. $xy = 80$

$log_{10} x - 2\, log_{10} y = 1$

5. $log_x y = 12$

$xy = 8$

6. $log\,(x+y) = 0$

$2\, log\, x = log\,(y+1)$

7. $2\, log\, y = log\, 2 + log\, x$

$2^y = 4^x$

8. $log_2 x + log_2 y = 5$; $log_y x = 2$

9. $log_2\,(x - 5y + 4) = 0$; $log_2\,(x+1) - 1 = 2\, log_2\, y$

10. $log(x-2) + log_2 = 2\, log\, y$

$log\,(x - 3y + 3) = 0$

11. $log_a\left(a^2 - x^2\right) = 2 + log_a\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ எனக்காட்டுக.

12. $a^2 + b^2 = 23\,ab$ எனின், $log\, a + log\, b = 2\, log\left(\dfrac{a+b}{5}\right)$ எனக்காட்டுக.

13. $log_b a = \dfrac{1}{log_a b}$ எனவும், $log_b a \cdot log_c b \cdot log_a c = 1$ எனவும் காட்டுக.

14. $2\log_y x + 2\log_x y = 5$ எனின், $\log_y x = 2$ அல்லது $\frac{1}{2}$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து மேலே தரப்பட்ட சமன்பாட்டையும் $xy = 27$ என்ற சமன்பாட்டையும் திருப்தி செய்யும் x, y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

15. தீர்க்க : $\log_3 x - 4\log_x 3 + 3 = 0$

16. தீர்க்க : $\log_y x = 2, \quad 5y = x + 12\log_x y$

17. தீர்க்க : $\log_3 x - 2\log_x 3 = 1$

18. மடக்கை வாய்ப்பாடுகளை உபயோகித்து சுருக்கு.
(i) $\log_4 8\sqrt{2}$ (ii) $\log_5 49 \times \log_7 125$

19. (i) $\log_a b^2 \times \log_b a^3 = 6$ எனக் காட்டுக.
(ii) a, b என்பன நேராகவும் சமமற்றதாயும் இருப்பின் $\log_a b + \log_b a^2 = 3$ எனின் b ஐ a இல் காண்க.

20. $y = \log_a x^3$, $z = \log_x a$ எனின், $yz = 3$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $\log_a(3\log_a x) - \log_a(\log_x a) = \log_a 27$ ஆகும் போது y, z இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

21. $\log_{16}(xy) = \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ $\log_{16}(xy) = 3\frac{1}{2}$

$\frac{\log_4 x}{\log_4 y} = -8$ ஆகிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

22. தீர்க்க : $\log_3 x = y = \log_9(2x-1)$

23. தீர்க்க : $\log_2 x = \log_4(x+6)$

24. தீர்க்க : (i) $9\log_x 5 = \log_5 x$ (ii) $\log_8 \frac{x}{2} = \frac{\log_8 x}{\log_8 2}$

25. தீர்க்க : $\log_9 xy = \frac{5}{2}$; $\log_3 x \cdot \log_3 y = -6$

26. $x = \log_a b$ எனின், b இற்கான ஒரு கோவையை a, x இல் காண்க
இதிலிருந்து $\log_s t = \frac{\log_r t}{\log_r s}$ எனநிறுவுக.

27. s, t என்பன 1 இற்கு சமமற்ற நேர் எண்களாக இருக்க
(a) $\log_s t = \frac{1}{\log_t s}$ எனவும், (b) $\log_s t + \log_{1/s} t = 0$
எனவும் நிறுவுக.

28. $\log_a b = \log_b c = \log_c a$ எனின், $a = b = c = 1$ என நிறுவுக.

29. $p^2 = qr$ எனின், $\log_q p + \log_r p = 2\log_q p \cdot \log_r p$ எனக்காட்டுக.

30. $\alpha(\beta-\gamma) + \beta(\gamma-\alpha) + \gamma(\alpha-\beta) = 0$ எனக்காட்டுக.
$\alpha = \log_a$, $\beta = \log b$, $\gamma = \log c$ என இடுவதால்
$\left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} = 1$ எனக்காட்டுக.

31. u, v, s, t என்பன எல்லாம் நேராக இருக்க,
$$\log\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\log\left(\frac{s}{t}\right) = \log\left(\frac{u}{s}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{t}\right) + \log\left(\frac{u}{t}\right)\cdot\log\left(\frac{v}{s}\right)$$
எனக்காட்டுக.

2. மெய்யெண்கள், பல்லுறுப்பிகள், மீதித்தேற்றம், காரணித்தேற்றம்

மெய்யெண்கள் (*Real Numbers*)

மெய்யெண்கள் எனக் கூறும்போது இயற்கை எண்கள் நிறை எண்கள், விகிதமுறு எண்கள், விகிதமுறா எண்கள் ஆகியன பற்றித் தெரிந்திருத்தல் அவசியமாகும்.

$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ - இயற்கை எண்கள் (Natural numbers)
எண்ணும் எண்கள் (Counting numbers)
நேர்நிறை எண்கள் (Positive integers)

$Z_0^+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ - முழு எண்கள் (Whole numbers)
மறையற்ற நிறை எண்கள் (non negative integers)

$Z^- = \{......., -3, -2, -1\}$ - மறை நிறை எண்கள் (negative integers)

$Z_0^- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$ - நேரற்ற நிறை எண்கள் (non positive integers)

$Z = \{......., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - நிறை எண்கள் (integers)

விகிதமுறு எண்கள் (*Rational numbers*)

a, b என்பன நிறை எண்களாகவும் $b \neq 0$ ஆகவும் இருக்க, $\frac{a}{b}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படக்கூடிய எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனப்படும். விகிதமுறு எண்களின் தொடை Q ஆல் குறிக்கப்படும்.

$$Q = \left\{ x : \ x = \frac{a}{b}, \qquad a, b \in Z, \ b \neq 0 \right\}$$ ஆகும்.

$\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, 5, -7, 6\frac{2}{5}, 0$ என்பன விகிதமுறு எண்களாகும். விகிதமுறு எண்ணைத் தசமத்திலும் வகைக்குறிக்கலாம். $0 \cdot 3$ என்பது விகிதமுறு எண்ணாகும். ஏனெனில் $0 \cdot 3 = \frac{3}{10}$ ஆகும்.

தசமங்களை மூன்று வகையாக வகைப்படுத்தலாம்.

i. முடிவுள்ள தசமங்கள் (terminating)
ii. மீளும் தசமங்கள் (repeating)
iii. மீளாத் தசமங்கள் (non repeating)

முடிவுள்ள தசமங்கள்

$$0 \cdot 3 = \frac{3}{10}, \quad 0 \cdot 46 = \frac{46}{100}, \quad 0 \cdot 7897 = \frac{7897}{1000}$$

மீளும் தசமங்கள்

$$0 \cdot 333...... = 0 \cdot \bar{3} = \frac{1}{3}$$

$$0 \cdot 142857\ 142857...... = 0 \cdot \overline{142857} = \frac{1}{7}$$

$$0 \cdot 2727.... = 0 \cdot \overline{27} = \frac{3}{11}$$

எனவே முடிவுள்ள தசமங்களும், மீளும் தசமங்களும் விகிதமுறு எண்களாகும்.

விகிதமுறா எண்கள் (*Irrational Numbers*)

a, b நிறை எண்களாகவும், $b \neq 0$ ஆகவும் இருக்க, $\frac{a}{b}$ எனும் வடிவத்தில் எழுத முடியாத மெய் யெண்கள், விகிதமுறா எண்கள் எனப்படும். விகிதமுறாஎண்கள் சிலவற்றிற்கு உதாரணங்கள்.

$\sqrt{2} = 1 \cdot 41421356237095.....$

$\sqrt{3} = 1 \cdot 73205080.....$

$\pi = 3 \cdot 141592653.....$

இவை மீளாத் தசமங்களாக வகை குறிக்கப்பட்டுள்ளன. மீளாத் தசமங்களாக வகை குறிக்கப்படும் எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.

மெய்யெண்கள் (R)

- (Q) விகிதமுறு எண்கள்
  - நிறை எண்கள்
  - நிறை எண்கள் அல்லாதவை
- விகிதமுறா எண்கள் (Q')

$\boxed{Q \cup Q' = R}$ $\boxed{Q \cap Q' = \phi}$

மெய்யெண்களின் பண்புகள் (*Properties of real numbers*)

மெய்யெண்கள் பற்றிய அடிப்படைப் பண்புகள் சில இங்கு தரப்பட்டுள்ளன.

1. கூட்டலிற்கான அடைத்தல் பண்பு (*closure property for addition*)

a, b என்பன மெய்யெண்கள் எனின், $a+b$ உம் ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

$a, b \in R \Rightarrow a+b \in R$

பெருக்கலிற்கான அடைத்தல் பண்பு (*closure property for multiplication*)

a, b என்பன மெய்யெண்கள் எனின், ab உம் ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

$a, b \in R \Rightarrow ab \in R$

2. கூட்டலிற்கான பரிவர்த்தனை விதி (*commutative property for addition*)

a, b என்பன மெய்யெண்கள் எனின், $a + b = b + a$ ஆகும்.

$a, b \in R \Rightarrow a+b = b+a$

பெருக்கலிற்கான பரிவர்த்தனை விதி

(*Commutative property for multiplication*)

a, b என்பன மெய்யெண்கள் எனின் $ab = ba$ ஆகும்.

$a, b \in R \Rightarrow ab = ba$

3. சேர்த்திப் பண்பு (*Associative property*)

a, b, c என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க

$(a+b)+c = a+(b+c)$ (கூட்டலிற்கானது)

$(ab)c = a(bc)$ (பெருக்கலிற்கானது)

4. சர்வ சமன்பாட்டுப் பண்பு (*Identity property*)

a ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க.

$a + o = a = o + a$ (கூட்டலிற்கானது)

$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ (பெருக்கலிற்கானது)

5. நேர்மாறு பண்பு (*Inverse property*)

a ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க,

$a + (-a) = o = (-a) + a$ ஆகுமாறு $-a \in R$ உண்டு (கூட்டல்)

a ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க,

$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)a$ ஆகுமாறு $\frac{1}{a} \in R$ உண்டு (பெருக்கல்)

6. பூச்சியத்தின் பெருக்கல் பண்பு (*Multiplicative property of zero*)

a ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க,

$a \cdot o = o = o \cdot a$ ஆகும்.

7. பரம்பலின்பண்பு (*Distributive property*)

a, b, c என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க

$a(b+c) = ab + ac$ ஆகும்.

பல்லுறுப்பிகள் (*Polynomials*)

n என்பது பூச்சியம் அல்லது ஒரு நேர் நிறை எண்ணாகவும், $a_o, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பன மாறா மெய்யெண்களாகவும் இருக்க,

$a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_r x^r + \ldots\ldots + a_n x^n$ என்பது மாறி x இலான ஒரு பல்லுறுப்பி எனப்படும்.

$a_o, a_1 x, a_2 x^2, \ldots\ldots, a_r x^r, \ldots\ldots, a^n x^n$ என்பன உறுப்புக்கள் எனப்படும்.

$a_o, a_1, a_2, \ldots\ldots a_r \ldots . a_n$ என்பன குணகங்கள் (Coefficients) எனப்படும்.

$a_o + a_1 x + a_2 x^r + \ldots\ldots + a_r x^r + \ldots\ldots + a_n x^n$ என்ற பல்லுறுப்பியின் படி (degree) n ஆகும். இங்கு $a_n \neq o$ மாறியின் அதி உயர்படி n ஆகும்.

அதி உயர்படியைக் கொண்ட உறுப்பின் குணகம், a_n **முந்துறு குணகம்** (leading coefficient) எனப்படும். a_o – ஒருமை உறுப்பு எனப்படும்.

உதாரணம்

$x^2 - 3x + 3$ – x இல் ஒரு பல்லுறுப்பி. படி 2 ஆகும்.

$6x^3 - \sqrt{2}\, x + \frac{1}{4}$ – x இல் ஒரு பல்லுறுப்பி. படி 3 ஆகும்.

$3x^3 - \frac{1}{2} x^7 - x^3 - 10$ – x இல் ஒரு பல்லுறுப்பி. படி 7.

முந்துறுகுணகம் $-\frac{1}{2}$ ஆகும்.

ஓருறுப்பி (*monomial*)

ஒரு உறுப்பை மட்டும் கொண்ட பல்லுறுப்பி ஓருறுப்பி எனப்படும்.

உதாரணம்

$3x^4$,	ஓருறுப்பி.	- படி 4
$-\frac{5}{4} y^3$,	y இல் ஓருறுப்பி	- படி 3
$\sqrt{3}\, x^5$,	x இல் ஓருறுப்பி	- படி 5
$-17t$,	t இல் ஓருறுப்பி.	- படி 1
$5 = 5 \cdot 1 = 5 \cdot x^o$	ஓருறுப்பி.	- படி 0

இவ்வாறான ஓருறுப்பி ஒருமை எனப்படும். (பூச்சியம்) 0 என்பது விசேட வகையாகும். இதுவும் ஓருறுப்பியாகும். ஆனால் படி இல்லை என்பதைக் கவனத்தில் கொள்க.

ஈருறுப்பி (*Binomial*)

இரண்டு உறுப்புக்களை மட்டும் கொண்ட பல்லுறுப்பிகள், ஈருறுப்பிகள் எனப்படும்.

உதாரணம்

$1 + 2x$	படி 1	முந்துறு குணகம் 2
$5x^2 - \sqrt{3}x$	படி 2	முந்துறு குணகம் 5
$9x^4 + x^7$	படி 7	முந்துறு குணகம் 1
$\frac{1}{2}t^4 + 3\sqrt{2}\,t$	படி 4	முந்துறு குணகம் $\frac{1}{2}$

மூவுறுப்பி (*Trinomial*)

மூன்று உறுப்புக்களை மட்டும் கொண்ட பல்லுறுப்பிகள் மூவுறுப்பிகள் எனப்படும்.

உதாரணம்

$1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{2}x^2$ - படி 2 முந்துறு குணகம் $\sqrt{2}$

$2y - 6y^2 + 5y^4$ - படி 4 முந்துறு குணகம் 5

எனவே பல்லுறுப்பி என்பது ஓருறுப்பியாகவோ அல்லது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையான ஓருறுப்பிகளின் கூட்டுத்தொகையாக (அல்லது வித்தியாசமாக) இருக்கலாம்.

$6x^4 - \sqrt{2}\, x^2 - \frac{1}{3}$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்பி. (மூன்று உறுப்புக்களைக் கொண்டதால் இதனை மூவுறுப்பி எனவும் கூறலாம்)

இப்பல்லுறுப்பியின் முதலாம் உறுப்பின் படி 4. இரண்டாம் உறுப்பின் படி 2. மூன்றாம் உறுப்பின் படி o.

பல்லுறுப்பியின் படி 4 ஆகும்.

$x^2 - 5x + 2^7 + x^4$ - இப்பல்லுறுப்பியின் படி 4 ஆகும்.

பல்லுறுப்பிகள் அல்லாதவை (*Non polynomials*)

$2x^2 - 5x + 3 + \frac{7}{x}$ $\qquad$ $\sqrt{2}x + 5$

$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ $\qquad$ $\sqrt{x^2 - 5x + 2}$

என்பவை **பல்லுறுப்பி அல்லாதவை** ஆகும்.

பல மாறிகளிலான பல்லுறுப்பிகள்

உதாரணம்

பல்லுறுப்பி $4x^2 y^3$ இருமாறிகளிலான ஓருறுப்பி. - படி 5

பல்லுறுப்பி $12ab^2 c^3$ மூன்று மாறிகளிலான ஓருறுப்பி. - படி 6

பல்லுறுப்பி $4x^2y - 5xy$ இருமாறிகளிலான ஈருறுப்பி. - படி 3

பல்லுறுப்பி $4x^3y - \sqrt{3}xy^2z^5$ மூன்று மாறிகளிலான ஈறுப்பி. - படி 8

பல்லுறுப்பி $3x^2 - 2xy + y^2$ இருமாறிகளிலான மூவுறுப்பி. - படி 2

பல்லுறுப்பி $5x^4 - 12x^2y^3 - x^3y^3 - x^2 y$ - படி 6.

ஒரு மாறியிலான (x என்க) பல்லுறுப்புச் சார்புகளின் பொது வடிவம்

1. a_0 $(a_0 \neq 0)$ படி 0 ஆகும்.
2. $a_0 + a_1x$ $(a_1 \neq 0)$ படி 1 ஆகும்.
3. $a_0 + a_1x + a_2x^2$ $(a_2 \neq 0)$ படி 2 ஆகும்.
4. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ $(a_3 \neq 0)$ படி 3 ஆகும்.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+ a_rx^r + ...+ a_nx^n \ (a_n \neq 0)$ படி n ஆகும்.

சமமான / சர்வசமனான பல்லுறுப்பிகள்

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_n x^n$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...+ b_m x^m$ என்பன இரு பல்லுறுப்பிகள் என்க.

$m = n$ ஆகவும், $0 \leq i \leq n$ ஆக $a_i = b_i$ ஆகவும் இருப்பின் f, g என்பன சமமான சர்வசமனான பல்லுறுப்பிகள் எனப்படும்.

பல்லுறுப்பிகளின் கூட்டல்

$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+ a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$

$h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...+ b_mx^m \quad (b_m \neq 0)$ என்க

$g(x)$, $h(x)$ என்ற இருபல்லுறுப்பிகளினதும் கூட்டல் $g(x) + h(x)$ ஆனது

$g(x) + h(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$

என்பதால் தரப்படும். $F(x) = g(x) + h(x)$ எனின்

$F(x)$ இன் படி $\leq$ உயர்வு $\{g(x)$ இன் படி, $h(x)$ இன் படி$\}$

$m \neq n$ எனின் $F(x)$ இன் படி $=$ உயர்வு $\{g(x)$இன் படி, $h(x)$ இன் படி$\}$ ஆகும்.

$m = n$; $a_n + b_m \neq 0$ எனின், $F(x)$ இன் படி $n\ (= m)$ ஆகும்

$m = n$; $a_n + b_m = 0$ எனின், $F(x)$ இன் படி $< n\ (= m)$ ஆகும்.

பின்வரும் உதாரணங்களைக் கருதுக.

(i) $g(x) = 1 - 2x + 3x^2 + 5x^4$

$h(x) = 3x - x^4 - x^6$ என்க.

$g(x)$ இன் படி $= 4$, $h(x)$ இன் படி $= 6$

$F(x) = g(x) + h(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^4 - x^6$

$F(x)$ இன்படி $= 6$

$F(x)$ இன் படி $=$ உயர்வு $\{g(x)$இன் படி, $h(x)$இன் படி$\}$

$=$ உயர்வு $\{4, 6\} = 6$

(ii) $g(x) = 2 - 5x + 3x^2 + 5x^3 + 2x^5$

$h(x) = 1 - 10x - 6x^4 - x^5$

$g(x)$இன் படி $= 5$, $h(x)$ இன் படி $= 5$

$$F(x) = g(x) + h(x) = 3 - 15x + 3x^2 + 5x^3 - 6x^4 + x^5$$

$F(x)$ இன்படி $= 5$ ஆகும்.

(iii) $g(x) = 4 - 5x + 10x^2 - 7x^3 + x^5$

$h(x) = 1 + 3x - 8x^2 + 9x^3 - x^5$

$g(x)$ இன்படி $= 5$, $h(x)$ இன்படி $= 5$

$f(x) = g(x) + h(x) = 5 - 2x + 2x^2 + 2x^3$

$f(x)$ இன்படி $= 3$ ஆகும்.

பல்லுறுப்பிகளின் பெருக்கம்

$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots\dots + a_n x^n$, $(a_n \neq 0)$

$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots\dots + b_m x^m$ $(b_m \neq 0)$ என்க.

பல்லுறுப்பிகள் $g(x)$, $h(x)$ என்பவற்றின் பெருக்கம் $g(x)\cdot h(x)$ என்பதால் குறிக்கப்படும்.

$f(x) = g(x)\cdot h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots\dots + c_{m+n} x^{m+n}$ ஆகும்.

இங்கு $c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$

....

$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots\dots + a_2 b_0$

....

$c_{m+n} = a_n b_m$

$f(x)$ இன்படி $=$ $g(x)$ இன்படி $+$ $h(x)$ இன்படி

$= (n + m)$ ஆகும்.

உதாரணம்

$g(x) = 1 + x + x^2$

$h(x) = 2 - 4x + 5x^2 - x^3 + x^4$ என்க.

$g(x)$ இன்படி 2, $h(x)$ இன்படி 4 ஆகும்.

$$f(x) = g(x)\cdot h(x) = \left(1 + x + x^2\right)\left(2 - 4x + 5x^2 - x^3 + x^4\right)$$

$$= 2 - 2x + 3x^2 + 5x^4 + x^6$$

$f(x)$ இன்படி $6 =$ $g(x)$ இன்படி $+$ $h(x)$ இன்படி

$= 2 + 4$

பல்லுறுப்பிகளின் வகுத்தல்

அட்சரகணித நெடும்பிரித்தல் (*Algebraic long division*)

உதாரணம் 1

$5 + 4x^3 - 3x$ ஐ $(2x - 3)$ ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x + 3 \\
\hline
2x - 3 & 4x^3 - 3x + 5 \\
 & 4x^3 - 6x^2 \\
\hline
 & 6x^2 - 3x \\
 & 6x^2 - 9x \\
\hline
 & 6x + 5 \\
 & 6x - 9 \\
\hline
 & 14
\end{array}$$

$\boxed{4x^3 - 3x + 5 = (2x - 3)\left(2x^2 + 3x + 3\right) + 14}$ ஆகும்.

இங்கு $p(x) = 4x^3 - 3x + 5$, வகுப்பான் (dividend)

$Q(x) = 2x^2 + 3x + 3$ ஈவு (Quotient)

$(2x - 3)$ வகுத்தி (divisor)

14 மீதி (remainder) எனப்படும்.

$P(x) = (2x - 3)\,Q(x) + R$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$x^6 - 2x^4 - 2 + x^2$ ஐ $x^2 - x - 2$ ஆல் வகுக்க

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 6 \\
\hline
x^2 - x - 2 & x^6 - 2x^4 + x^2 - 2 \\
 & \underline{x^6 - x^5 - 2x^4} \\
 & x^5 \\
 & \underline{x^5 - x^4 - 2x^3} \\
 & x^4 + 2x^3 + x^2 \\
 & \underline{x^4 - x^3 - 2x^2} \\
 & 3x^3 + 3x^2 \\
 & \underline{3x^3 - 3x^2 - 6x} \\
 & 6x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{6x^2 - 6x - 12} \\
 & 12x + 10
\end{array}$$

$$x^6 - 2x^4 + x^2 - 2 = \left(x^2 - x - 2\right)\left(x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 6\right) + (12x + 10)$$

இங்கு ஈவு $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 6$ உம்

மீதி $12x + 10$ உம் ஆகும்.

உதாரணம் 3

$2x^4 + 3x^3 - x - 5$ என்பதை $(x + 2)$ ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 - x^2 + 2x - 5 \\
\hline
x + 2 & 2x^4 + 3x^3 - x - 5 \\
 & \underline{2x^4 + 4x^3} \\
 & -x^3 \\
 & \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 & 2x^2 - x \\
 & \underline{2x^2 + 4x} \\
 & -5x - 5 \\
 & \underline{-5x - 10} \\
 & 5
\end{array}$$

இங்கு ஈவு $\left(2x^3 - x^2 + 2x - 5\right)$ உம் மீதி 5 உம் ஆகும்.

தொகுப்பு முறை வகுத்தல் (*Synthetic division*)

$P(x)$ என்ற பல்லுறுப்பியை $(x + a)$ என்பதால் வகுக்கும் போது பெறப்படும் ஈவு, மீதி என்பவற்றைக் காணுதல்.

இம்முறையில் கவனிக்க வேண்டிய முக்கிய படிகள்.

1. பல்லுறுப்பி $P(x)$ இன் குணகங்களை x இன் வலுக்களின் இறங்குவரிசையில் எழுதுக. x இன் வலுக்கள் இல்லாதவிடத்து குணகங்களுக்கு பூச்சியம் (O) இடுக.
2. வகுத்தியை $(x - r)$ எனும் வடிவில் எழுதுக. r ஐப் பயன்படுத்தி இரண்டாம், மூன்றாம் வரிசையிலுள்ள எண்களைப் பின்வரும் முறையில் பெறுக.

வகுப்பானின் முதலாவது குணகத்தைக் கீழே கொண்டு வருக.

இதனை r ஆல் பெருக்கி இரண்டாவது குணகத்தின் கீழ் எழுதி அதனுடன் கூட்டுக.

கூட்டிப் பெற்ற பெறுமானத்தை r ஆல் பெருக்கி மூன்றாவது குணகத்தின் கீழ் எழுதி அதனுடன் கூட்டுக. இம்முறையினை மாறிலி உறுப்புக்குக் கூட்டும் வரை தொடர்ந்து செய்க.

3. மூன்றாம் வரிசையிலுள்ள கடைசி எண் மீதியைத் தரும். ஏனைய எண்கள் ஈவின் குணகங்களாகும்.

உதாரணம் 4

$2x^4 + 3x^3 - x - 5$ ஐ $(x + 2)$ ஆல் வகுக்கும்போது பெறப்படும் ஈவையும், மீதியையும் தொகுப்புமுறை வகுத்தல் மூலம் காண்க. (**உதாரணம் 3 இலுள்ள** வினா)

$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$

$P(x)$ இன் குணகங்கள். 2, 3, 0, -1, -5

$x + 2 = x - (-2)$ இங்கு $r = -2$ ஆகும்.

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 2 & 3 & 0 & -1 & -5 & \text{—— வரிசை 1} \\
 & & -4 & 2 & -4 & 10 & \text{—— வரிசை 2} \\
\hline
-2 & 2 & -1 & 2 & -5 & 5 & \text{—— வரிசை 3}
\end{array}$$

மீதி

ஈவு $(2x^3 - x^2 + 2x - 5)$ உம் மீதி 5 உம் ஆகும்.

உதாரணம் 5

$4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9$ ஐ $(2x - 1)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் ஈவையும், மீதியையும் தொகுப்புமுறை வகுத்தல் மூலம் காண்க.

$$2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9$

$P(x)$ இன் குணகங்கள் : 4 12 −21 −65 9

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 12 & -21 & -65 & 9 \\
 & & 2 & 7 & -7 & -36 \\
\hline
\frac{1}{2} & 4 & 14 & -14 & -72 & -27
\end{array}$$

$\therefore P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^3 + 14x^2 - 14x - 72\right) - 27$

$= \frac{(2x - 1)}{2}\left(4x^3 + 14x^2 - 14x - 72\right) - 27$

$= (2x - 1)\left(2x^3 + 7x^2 - 7x - 36\right) - 27$

ஈவு $2x^3 + 7x^2 - 7x - 36$, மீதி $= -27$

மீதித்தேற்றம் (*Remainder Theorem*)

$P(x)$ என்பது x இன் ஒரு பல்லுறுப்புச் சார்பு என்க. a ஒரு மாறிலியாக இருக்க, $P(x)$ என்பது $(x - a)$ ஆல் x ஐச் சாராத ஒருமீதி பெறப்படும் வரை வகுக்கப்படும் போது மீதி R எனின் $R = P(a)$ ஆகும்.

$P(x) = (x - a)\,Q(x) + R$ என்க. $[Q(x)$ - ஈவு, R - மீதி$]$

$P(a) = (a - a)\;Q(x) + R$ ஆகவே மீதி $P(a)$ ஆகும்.

உதாரணம் 6

i. $4x^3 + 10x^2 - 19x + 5$ ஐ $(x - 3)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதியைக் காண்க.

ii. $x^6 - 2x^4 + x^2 - 2$ ஐ $\left(x^2 - x - 2\right)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதியைக் காண்க.

iii. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7$ ஐ $x^2 - 4x + 3$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி யாது?

i. $P(x) = 4x^3 + 10x^2 - 19x + 5 = (x - 3)\,Q(x) + R$

$P(3) = 4 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 - 19 \cdot 3 + 5 = (3 - 3)\;Q(3) + R$

$= 108 + 90 - 57 + 5 = 0 + R$

$R = 146$

ii. $P(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 - 2 = \left(x^2 - x - 2\right) g(x) + (Ax + B)$

$$= (x-2)(x+1)\, g(x) + (Ax + B)$$

$P(2) = 2^6 - 2 \cdot 2^4 + 2^2 - 2 = 0 + 2A + B$

$P(-1) = 1 - 2 + 1 - 2 = 0 - A + B$

$2A + B = 34$

$-A + B = -2$

$\therefore A = 12, \quad B = 10 \qquad \therefore$ மீதி $12x + 10$

[$x^2 - x - 2$, ஆல் பிரிக்கும்போது மீதி $Ax + B$ வடிவில் அமைந்திருக்கும் என்பதைக் கவனிக்க.]

iii. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7 = \left(x^2 - 4x + 3\right) h(x) + Ax + B$

$$= (x-3)(x-1)\; h(x) + Ax + B$$

$P(1) = 1 - 5 + 6 - 7 = 0 + A + B$

$P(3) = 81 - 135 + 54 - 7 = 0 + 3A + B$

$A + B = -5$ ———— (1)

$3A + B = -7$ ———— (2)

$A = -1, \quad B = -4$

$\therefore$ மீதி $Ax + B = -x - 4$

உதாரணம் 7

i. வேறு வேறான x இன் நான்கு பெறுமானங்களுக்கு $px^3 + qx^2 + rx + s$ மறைந்துவிடின் p, q, r, s என்பன எல்லாம் பூச்சியம் எனக் காட்டுக.

p, q, r, s என்பன பூச்சியம் அன்றெனின் $x^2 - 1$ என்பது இதன் ஒரு காரணியாகுமாறு p, q, r, s என்பவற்றிற்கிடையே தொடர்பொன்றைக் காண்க.

ii. $mx^4 + x^2 - 1$ இன் காரணி $\left(x^2 + 1\right)$ ஆகுமாறு மாறிலி m ஐக் காண்க.

i. வேறு வேறான நான்கு பெறுமானங்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்க.

$p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = 0$ ———— (1)

$p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s = 0$ ———— (2)

$p\gamma^3 + q\gamma^2 + r\gamma + s = 0$ ———— (3)

$p\delta^3 + q\delta^2 + r\delta + s = 0$ ———— (4)

$(1) - (2) \Rightarrow p\left(\alpha^3 - \beta^3\right) + q\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + r(\alpha - \beta) = 0$

$\Rightarrow (\alpha - \beta)\left[p\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right) + q(\alpha + \beta) + r\right] = 0$

$\alpha \neq \beta$ எனவே $(\alpha - \beta) \neq 0$

$\therefore p\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right) + q(\alpha + \beta) + r = 0$ ———— (5)

இவ்வாறே $(2) - (3) \Rightarrow p\left(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2\right) + q(\beta + \gamma) + r = 0$ ———— (6)

$(3) - (4) \Rightarrow p\left(\gamma^2 + \gamma\delta + \delta^2\right) + q(\delta + \delta) + r = 0$ ———— (7)

$(5) - (6) \Rightarrow p(\alpha + \beta + \gamma) + q = 0$ [$\alpha - \gamma \neq 0$ என்பதால்] ———— (8)

$(6) - (7) \Rightarrow p(\beta + \gamma + \delta) + q = 0$ [$\beta - \delta \neq 0$ என்பதால்] ———— (9)

$(8) - (9) \Rightarrow p(\alpha - \delta) \neq 0$

$\Rightarrow p = 0$ [$(\alpha - \delta) \neq 0$ என்பதால்]

$p = 0$ எனின் $(8) \Rightarrow q = 0$

$p = 0, q = 0, \; (7) \Rightarrow r = 0$

$p = 0, \; q = 0, \; r = 0$ எனின் $s = 0$

$\therefore p = q = r = s = 0$ ஆகும்.

(x^2-1), $f(x)$ இன் காரணி எனின்

$f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s = (x^2-1)\, g(x)$ என்க.

$f(1) = P + q + r + s = 0$

$f(-1) = 1 - p + q - r + s = 0$

$p + r = q + s = 0$ ஆகும்.

ii. $mx^4 + x^2 - 1 = (x^2+1)\, h(x)$ என்க.

இங்கு *h(x)*, இரண்டாம் படியிலிருத்தல் வேண்டும்.

$mx^4 + x^2 - 1 = (x^2+1)(ax^2 + bx + c)$

மாறிலி : $c = -1$

x இன் குணகம் $b = 0$

x^2 இன் குணகம் $a + c = 1 \Rightarrow a = 2$

x^4 இன் குணகம் $a = m$

$\therefore m = 2$

$2x^4 + x^2 - 1 = (x^2+1)\ (2x^2-1)$

பல்லுறுப்பி ஒன்றின் பூச்சியம் (*Zero of a Polynomial*)

பல்லுறுப்பி ஒன்றினைப் பூச்சியமாக்கும் எந்த ஒரு எண்ணும் அப்பல்லுறுப்பியின் பூச்சியம் ஆகும்.

உதாரணம்: $P(x) \equiv x^2 - 3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்பியைக் கருதுக.

$P(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$

1, $p(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

$P(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$

$x)$ இன் இன்னொரு பூச்சியமாகும்.

காரணித்தேற்றம் (*Factor Theorem*)

பல்லுறுப்பி $P(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் a எனின், $(x - a)$, $P(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

$P(x) = (x-a)\, g(x) + R$ என்க.

$P(a) = O + R = R$ என்க.

$P(a) = 0$ என்பதால் $R = 0$ $\qquad P(x) = (x-a)\ g(x)$

எனவே $(x-a)$, $P(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

மறுதலையாக $(x-a)$ என்பது பல்லுறுப்பி $P(x)$ இன் ஒரு காரணி எனின் a ஆனது $P(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

$(x - a)$ என்பது $P(x)$ இன் ஒருகாரணியாதலால்

$P(x) \equiv (x-a)\ Q(x)$

$P(a) = (a-a)\ Q(a) = 0$

$P(a) = 0$ என்பதால், a ஆனது $P(x)$ இன் ஒரு பூச்சியமாகும்.

உதாரணம் 8

$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$ என்ற பல்லுறுப்பியின் காரணிகளைக் காண்க.

பல்லுறுப்பி 4 ஆம் படியில் உள்ளது.

24 இன் காரணிகளைக் கருதுக (நேர், மறை இரண்டுகுறிகளும்)

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

$P(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$

$P(1) = 1 - 6 + 3 + 26 - 24$
$= 0$

$(x-1)$, $P(x)$ இன் ஒருகாரணி

$P(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 - 2x + 24)$

$Q(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

$Q(-2) = -8 - 20 + 4 + 24 = 0$

எனவே $(x - 2)$ $Q(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2-7x+12)$$
$$= (x-1)(x+2)(x-3)(x-4)$$

மீளும் காரணிகள் (*Repeated factors*)

பல்லுறுப்பி $f(x)$ இற்கு $f(a) = 0$ எனின் $(x - a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். (காரணித்தேற்றம்) $f(x)$ இன் மீளும் காரணி $(x - a)$ என்க.

இப்பொழுது $f(x) = (x-a)^2\, g(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[(x-a)^2 \cdot g(x)\right]$$

$$f'(x) = (x-a)^2\, g'(x) + 2(x-a)\,g(x)$$
$$= (x-a)\left[(x-a)\,g'(x) + 2g(x)\right]$$
$$= (x-a)\,h(x)$$

ஆகவே $(x-a)$ என்பது $f'(x)$ இனி ஒரு காரணியாகும்.

உதாரணம் 9

$x^3 - 5x^2 + 7$ ஐ $(x-1)^2$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதியைக் காண்க

$$f(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 7 = (x-1)^2 \cdot g(x) + (Ax + B)$$
$$f(1) = 1 - 5 + 7 = A + B$$
$$A + B = 3$$
$$x^3 - 5x^2 + 7 = (x-1)^2\, g(x) + (Ax + B)$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$3x^2 - 10x = 2(x-1)\,g(x) + (x-1)^2\, g'(x) + A$$

$x = 1$ எனப்பிரதியிட

$$3 - 10 = O + A$$
$$A = -7, \qquad B = 10$$

எனவே மீதி $= -7x + 10$ ஆகும்.

உதாரணம் 10

$-9x^2 + 12x + p$ இற்கு மீளும் காரணிகள் இருப்பின் p இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + p$$

$f(x)$ இற்கு மீளும் காரணிகள் இருப்பதால், அக்காரணி

$f'(x)$ இனது காரணியாகவும் இருக்கும்.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$
$$= 6(x^2 - 3x + 2)$$
$$= 6(x-1)(x-2)$$

எனவே மீளும் காரணி $(x - 1)$ அல்லது $(x - 2)$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$(x - 1)$ எனின் $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + p$ என்பதில்,

$f(1) = 2 - 9 + 12 + p = 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$p + 5 = 0 \Rightarrow p \; -5$$

$(x - 2)$ மீளும் காரணி எனின்,

$f(2) = 16 - 36 + 24 + p = 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$p = -4$$

$\therefore p$ இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் $-5, -4$ ஆகும்.

பொதுக்காரணிகள் (*common factors*)

$f(x).\, g(x)$ என்னும் இரு பல்லுறுப்புச் சார்புகளுக்கு $(x - a)$ ஒரு பொதுக்காரணி எனின், K_1, K_2 மாறிலிகளாக இருக்க $(x - a)$ என்பது $K_1 f(x) + K_2\, g(x)$ இன் காரணியாகவும் இருக்கும்.

$(x - a)$, $f(x)$ இன் ஒரு காரணி $f(x) = (x - a)\,p(x)$
$(x - a)$, $g(x)$ இன் ஒரு காரணி $g(x) = (x - a)\,q(x)$.

$$K_1 f(x) + K_2 g(x) = K_1 (x-a)\, p(x) + K_2 (x-a)\, q(x)$$
$$= (x-a)\left[K_1 p(x) + K_2\, q(x)\right]$$

ஆகவே $(x-a)$, $K_1\, f(x) + K_2\, g(x)$ இன் காரணியாகும்.

உதாரணம் 11

$x^3 + ax^2 + b$, $ax^3 + bx^2 + x - a$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்பிகளுக்கும். ஒரு பொதுக்காரணி இருப்பின் இப் பொதுக்காரணி, $\left(b - a^2\right)x^2 + x - a\,(1+b)$ என்ற பல்லுறுப்பியினதும் காரணியாகும் எனக் காட்டுக.

$P(x) \equiv x^3 + ax^2 + b$, $Q(x) = ax^3 + bx^2 + x - a$ என்பவற்றின் பொதுக்காரணி $(x - \alpha)$ என்க.

$$P(\alpha) = \alpha^3 + a\alpha^2 + b = 0 \text{ ——— } (1)$$

$$Q(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + \alpha - a = 0 \text{ ——— } (2)$$

$$(1) \times a, \quad a\alpha^3 + a^2\alpha^2 + ab = 0 \text{ ——— } (3)$$

$$(2) - (3), \left(b - a^2\right)\alpha^2 + \alpha - a(1+b) = 0$$

எனவே α என்பது, $\left(b - a^2\right)x^2 + x - a(1+b)$ என்ற பல்லுறுப்பியின் பூச்சியம் ஆகும். $\therefore\ (x - \alpha)$, $\left(b - a^2\right)x^2 + x - a(1+b)$ என்ற பல்லுறுப்பியின் காரணியாகும்.

உதாரணம் 12

$ax^3 + bx + c$ என்பது வடிவம் $x^2 + px + 1$ உடைய ஒரு காரணியைக் கொண்டதெனின் $a^2 - c^2 = ab$ எனக் காட்டுக

இங்கு $ax^3 + bx + c$ உம் $cx^3 + bx^2 + a$ உம் பொது இருபடிக் காரணியொன்றை உடையதென்பதை உய்த்தறிக.

$P(x) = ax^3 + bx + c - x$ இல் மூன்றாம் படியிலானது.

$x^2 + px + 1$. இரண்டாம்படி. எனவே மற்றைய காரணி ஏகபரிமாணமானது (முதலாம் படி). மேலும் $p(x)$ இல் x^3 இன் குணகம் a, மாறிலி c ஆதலால்

$$ax^3 + bx + c = \left(x^2 + px + 1\right)(ax + c).$$

$$x^2 \text{ இன் குணகம்: } 0 = ap + c \Rightarrow p = -\frac{c}{a}$$

$$x \text{ இன் குணகம்: } b = a + cp \Rightarrow p = \frac{b-a}{c}$$

$$\frac{b-a}{c} = \frac{-c}{a} \Rightarrow a^2 - c^2 = ab$$

$a, c \neq 0$ ஆகையால் $x \neq 0$

$x = \dfrac{1}{y}$ என்க

$$ax^3 + bx + c \equiv \left(x^2 + px + 1\right)(ax + c)$$

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^3 + b\left(\frac{1}{y}\right) + c \equiv \left(\frac{1}{y^2} + \frac{p}{y} + 1\right)\left(\frac{a}{y} + c\right)$$

$$cy^3 + by^2 + a \equiv \left(y^2 + py + 1\right)(cy + a)$$

$$\Rightarrow \quad cx^3 + bx^2 + a \equiv \left(x^2 + px + 1\right)(cx + a)$$

எனவே $ax^3 + bx + a$, $cx^3 + bx^2 + a$ ஆகிய இரண்டிற்கும் பொது இருபடிக் காரணி உள்ளது.

உதாரணம் 13

ஏகபரிமாணக் காரணிகள் இரண்டினைக் காண்பதன் மூலம்

$(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

இங்கு a ஒருமை ஆகும்.

$$f(x) \equiv (a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4.$$

$$f(1) \equiv (a-1)^4 + 0 - (a-1)^4 = 0$$

$\therefore (x-1)$ இன் ஒரு காரணி.

$$f(a) = 0 + (a-1)^4 - (a-1)^4$$
$$= 0$$

$(x - a)$, $f(x)$ இன் காரணியாகும்.

$f(x)$, x இல் 4 ஆம் படியிலுள்ளது. எனவே எஞ்சியுள்ளது x இன் 2ஆம் படியிலுள்ளது. மேலும் $f(x)$ இல் x^4 இன் குணகம் 2.

$$(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4 \equiv (x-1)(x-a)\left[2x^2 + mx + n\right]$$

இங்கு m, n என்பவற்றை a இல் காண வேண்டும்.

$x = 0$ ஆக, $a^4 + 1 - (a-1)^4 = an$

$$a^4 + 1 - \left(a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1\right) = an$$

$$\Rightarrow n = 4a^2 - 6a + 4$$

x இன் குணகம்: $-4a^3 - 4 = -(a+1)n + am$

$$-4a^3 - 4 = -(a+1)\left(4a^2 + 6a + 4\right) + am$$

$$-4a^3 - 4 = -4a^3 + 2a^2 + 2a - 4 + am$$

$$\Rightarrow m = -2(a+1)$$

$$f(x) = (x-1)(x-a)\left[2x^2 - 2(a+1)x + 4a^2 - 6a + 4\right]$$

$$= 2(x-1)(x-a)\left[x^2 - (a+1)x + \left(2a^2 - 3a + 2\right)\right]$$

பயிற்சி 2

1. பின்வருவனவற்றை (a) அட்சரகணித நெடும் பிரித்தல் முறை (b) தொகுப்பு முறை வகுத்தல் மூலம், ஈவு, மீதி என்பவற்றைக் காண்க.

i. $\left(x^2 + 3x - 7\right) \div (x - 2)$ ii. $\left(2x^3 - 3x + 1\right) \div (x - 2)$

iii. $\left(x^3 + 2x^2 - 3x - 4\right) \div (x + 2)$

iv. $\left(2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 13\right) \div (x - 3)$

v. $\left(4x^5 - 30x^3 - 50x - 2\right) \div (x + 3)$

vi. $\left(4x^4 + 12x^3 - 21x^2 - 65x + 9\right) \div (2x + 3)$

2. i. $3x^4 - 16x^2 - 3x + 7$ ஐ $(x+2)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

ii. $x^6 - 2x^4 + x^2 - 2$ ஐ $x^2 - x - 2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

3. i. $2x^6 - x^5 - 2x^3 - 2$ ஐ $(x-1)(x+1)(2x-1)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

ii. $x^5 - 7x^3 + 4x - 2$ ஐ $(x-1)(x+1)(x-3)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

4. $x^3 - px + q$ ஐ $x^2 - 3x + 2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $4x - 1$ எனின் p, q ஐக் காண்க.

5. $f(x) \equiv 2x^4 + ax^2 + bx - 60$ எனக. $(x - 1)$ ஆல் $f(x)$ ஐ வகுக்கு போது மீதி -94 ஆகும் $(x - 3)$ $f(x)$ இன் ஒரு காரணி. ஒருமைகள் a, b ஐக் காண்க.

6. $\left(x^2 + 1\right)$ என்பது $x^4 + px^3 + 3x + q$ என்பதன் ஒரு காரணி எனின் p, q என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. p, q இன் இப் பெறுமானங்களுக்கு

$x^4 + px^3 + x^2 + 3x + q + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய்மூலங்களைக் காண்க.

7. பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது, $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது மீதி $a(x-2)(x-3)+b(x-3)(x-1)+c(x-1)(x-2)$ ஆகும். ஒருமைகள் a, b, c ஐ $f(1), f(2), f(3)$ இல் காண்க.
k ஓர் ஒருமையாக இருக்க
$(x^5 + kx^2)$ ஐ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியில் உறுப்பு x^2 இல்லாதிருப்பதற்கான k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது, $x^2 - a^2$ $(a \neq 0)$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது பெறப்படும் மீதி $\frac{1}{2a}\left[f(a) - f(-a)\right] x + \frac{1}{2}\left[f(a) + f(-a)\right]$ எனக் காட்டுக. $x^n - a^n$ ஐ $x^2 - a^2$ ஆல் வகுக்கும் போது
i. n இரட்டை **ii.** n ஒற்றை ஆகும் போது மீதியைக் காண்க.

9. காரணித் தேற்றத்தைக் கூறுக.
(a) பின்வரும் பல்லுறுப்பிகளைக் காரணியாக்குக
(i) $x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 53x + 60$
(ii) $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$
(iii) $x^3 - x^2(5 + a) + x(6 + 5a) - 6a$ (a – ஒருமை)

(b) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க
(i) $x^2 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$ (ii) $x^3 - 15x^2 + 74x = 120$
(iii) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$
(iv) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$
(v) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

10. (i) $2x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ என்பதை $(x^2 - 1)$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $2x + 3$ ஆயின் a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
(ii) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

11. (i) $x^8 + 2x^7 + ax^2 + bx + c$ என்பது $x^2 + x - 2$ என்பதால் சரியாக வகுபடக் கூடியதாகவும், $(x+1)$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது -8 மீதியைக் கொடுக்கக் கூடியதாகவும் இருப்பின் a, b, c என்பவற்றைக் காண்க.
(ii) $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 5x + 4y + k \equiv (lx + my + n)(l'x + m'y + n')$ ஆகும் வண்ணம் k, l, m, n, l', m', n' என்னும் ஒருமைகளைக் காண்க.

12. மீதித் தேற்றத்தைக் கூறி, அதனை நிறுவுக.
(i) $f(x)$ என்பது x இன் பல்லுறுப்புச் சார்பாகவும், $f(1) = a$, $f(-1) = b$, $f(0) = c$ ஆகவும் இருப்பின் $f(x)$ என்பதை $(x^2 - 1)$ ஆல் வகுக்கவரும் மீதி $\frac{1}{2}(a-b)\,x + \frac{1}{2}(a+b)$ எனக்காட்டுக
$f(x)$ என்பதை $(x^3 - x)$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க.

(ii) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற பல்லுறுப்புச் சார்பு, $(x^2 - 1)$, $(x^2 - 4)$ என்பவற்றால் வகுக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே $5x - 2$, $11(x - 1)$ ஆயின் a, b, c, d என்பவற்றைக் காண்க.

13. (i) $f(x)$ என்பது x இன் ஒரு பல்லுறுப்பி. $f(x)$ ஐ $(x-a)(x-b)$ என்பதால் வகுக்கப்படும் போது மீதி
$$\left[\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right] x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$
என நிறுவுக.

இங்கு a,b என்பன ஒருமைகள், $a \neq b$

$F(x) \equiv x^7 + lx^2 + mx + n$ என்பது $x+1$, $x^2 - x$ என்பவற்றால் வகுக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே 2, $x+2$ ஆகும்.
l, m, n என்பவற்றைக் காண்க.

14. $(x+1)^2$ ஆனது $x^5 + 2x^2 + mx + n$ என்பதன் ஒரு காரணி எனின் நிறை எண்கள் m, n ஐக் காண்க.

15. $x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ ஐ $(x-2)^2$ ஆல் வகுக்க மீதி யாது?

16. $x^4 - mx^2 + n$ ஐ $(x+1)^2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $(5x - 2)$ ஆகுமாறு ஒருமைகள் m, n என்பவற்றைக் காண்க.

17. $2x^3 - ax^2 - 12x - 7$ எனும் சார்பு மீளும் காரணியைக் கொண்டிருப்பதற்கான a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

18. $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - p = 0$ எனும் சமன்பாடு இரு சம மூலங்களைக் கொண்டுள்ளது. p இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

19. $f(x) \equiv ax^2 + 2x - 1$, $g(x) \equiv x^2 + 4x + a$ என்ற இரு சார்புகளுக்கும் பொதுக்காரணி ஒன்று இருப்பின் மாறிலி a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

20. $x^3 + mx - 1 = 0$, $x^3 - 3x + m = 0$ எனும் இரு சமன்பாடுகளுக்கும் பொது மூலம் ஒன்று இருப்பின் m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

21. $(2x+1)$ ஆல் சரியாக வகுபடக் கூடியதும், $(x-1)$, $(x-2)$ என்பவற்றால் வகுக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே -6, -5 ஐத் தருவதுமான இருபடிச் சார்பு $f(x)$ ஐக் காண்க.

$g(x) \equiv (px+q)^2 f(x)$ ஆக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
இங்கு p, q என்பன ஒருமைகள்

$g(x)$ ஐ $(x-2)^2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $-39-3x$ எனின் $g(x)$ ஐக் காண்க.

22. $(x+t)$ என்பது, $x^3 + px^2 + q$, $ax^3 + bx + c$ ஆகியவற்றின் ஒரு பொதுக்காரணி எனின், அது $apx^2 - bx + qa - c$ என்ற சார்பினதும் பொதுக்காரணியாகும் எனக் காட்டுக.

$x^3 + \sqrt{7}x^2 - 14\sqrt{7}$, $2x^3 - 13x - \sqrt{7}$ என்ற இரு சார்புகளுக்கும் பொதுக்காரணி ஒன்று உண்டெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $2x^3 - 13x - \sqrt{7} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலகங்களையும் காண்க.

23. $f(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 - 3x + q$; இங்கு q பூச்சியம் அல்லாத நிறையெண் ஆகும். $(x-q)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனின் q இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. q இன் இப்பெறுமானத்திற்கு $f(x)$ ஐ ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாகத் தருக. $f(x) \equiv (x-a)(2x-1)(x+1) + bx + c$ ஆகுமாறு a, b, c ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க.

24. $f(x) \equiv x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b+1)x + a$ ஆகும். இங்கு a, b என்பன மாறிலிகள் ஆகும்.

(i) $f(x)$, இருபடிக் கோவை ஒன்றின் நிறைவர்க்கம் எனவும் அத்துடன்
(ii) $f(x)$ இன் ஒரு காரணி $(x+2)$ எனவும், தரப்படின் a, b என்பவற்றைக் காண்க. அத்துடன் $f(x)$ இன் எல்லாக் காரணிகளையும் எழுதுக.

25. $f(x)$, $g(x)$ என்பன x இலான பல்லுறுப்பிகளாகும். $f(x)$ ஐ $3x^2 + x - 2$ இனாலும் $g(x)$ ஐ $(x^2 - 1)$ இனாலும் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே $(2x+1)$ உம் $(x+2)$ உம் ஆகும்.

பல்லுறுப்பி $f(x) + g(x)$ இன் ஏகபரிமாணக் காரணி ஒன்றைக் காண்க.

$f(x) \cdot g(x)$ ஐ இவ் ஏகபரிமாணக் காரணியினால் வகுக்கும்போது மீதியைக் காண்க.

26. பல்லுறுப்பி $f(x)$ ஆனது

$f(x) \equiv x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) $(x-1)$ அல்லது $(x+1)$, $f(x)$ இன் ஒரு காரணியன்று எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x)$ ஆனது $(x^2 - 1)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

(iii) $F(x)$ ஆனது $(x^2 + 1)$ இனால் வகுக்கப்படும் போது கிடைக்கும் மீதி 2 எனக் காட்டி, இதிலிருந்து $f(x) - 2$ இன் ஏகபரிமானக் காரணி ஒன்றைப் பெறுக.

27. (i) $x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ என்ற பல்லுறுப்பியை

$Ax(x+1)(x+2) + Bx(x+1) + cx + D$ என்னும் வடிவில் உணர்த்துக.

(ii) $2x^3 + bx^2 + cx + 18$ இன் காரணிகளின், $(x-2), (x+3)$ எனத் தரப்படின், b, c ஐக் கண்டு, தரப்பட்ட பல்லுறுப்பியைக் காரணியாக்குக.

28. $x^3 + 1$ என்பது $x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 2$ இன் ஒரு காரணி எனின் a, b, c ஐக் காண்க.

29. $P(x), Q(x)$ என்னும் இரு பல்லுறுப்பிகளுக்கு $(x-p)$ ஒரு பொதுக் காரணி எனின், $(x-p)$ என்பது $[P(x) - Q(x)]$ இன் ஒரு காரணியாகும் எனநிறுவுக.

$ax^3 + 4x^2 - 5x - 10$, $ax^3 - 9x - 2$ ஆகிய பல்லுறுப்பிகளுக்கு ஒரு பொதுக் காரணி இருப்பின் $a = 2$ அல்லது $a = 11$ எனக் காட்டுக.

30. $x^3 + 4x^2 + x + p$ என்பது $(x+q)$ இனால் சரியாக வகுபடக்கூடியதெனின் p, q ஆகிய மெய்யெண்களுக்கிடையே தொடர்பொன்றினைப் பெறுக. இத் தொடர்பிலிருந்து $q = -1$ ஆகும் போது p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. p இன் இப் பெறுமானத்திற்கு $x^3 + 4x^2 + x + p$ இன் காரணிகளைக் காண்க.

31. $4x^3 - (3p+2)x^2 - (p^2 - 1)x + 3$ என்பதன் ஒரு காரணி $(x-p)$ ஆகுமாறு p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. p யின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் ஒத்த மற்றைய காரணியைக் காண்க.

32. $(x-k)^2$ என்பது $x^3 + 3px + q$ என்பதன் ஒரு காரணி எனின் $4p^3 + q^2 = 0$ என நிறுவுக. மற்றைய காரணி $(x + 2k)$ எனவும் காட்டுக.

33. காரணியாக்குக. $x^6 + x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 32x - 32$

34. $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{1}{(b-c)(c-a)} + \dfrac{1}{(c-a)(a-b)} = 0$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ $\dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(b-c)^2} + \dfrac{1}{(c-a)^2}$ என்பது நிறைவர்க்கமாகும் எனக் காட்டுக.

35. $x + y = a$, $z + x = 2b$, $y + z = 3c$ எனின்,

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$, இன் பெறுமானத்தை a, b, c இல் காண்க.

36. c இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு $3x^3 - 5x^2 + 7x + c$,

$2x^3 - 7x^2 + 22x + c$ என்பவற்றிற்கு ஒரு பொதுக்காரணி இருக்குமெனக் காண்க.

37. i. x இலான ஒரு இருபடிக் கோவையை $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ என்பவற்றால் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே $k, 2k, 4k$ எனின், கோவையை $(x-4)$ ஆல் வகுக்கும் போது பெறப்படும் மீதியை k இல் காண்க.

ii. $f(x) = 12x^3 - 4x^2 - 13x - 4$ ஆகும். காரணித்தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(2x+1)$ $f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டி, $f(x)$ ஐக் காரணியாக்குக.

iii. m, n என்பன நிறை எண்களாக இருக்க, $x^m + nx$ ஐ $x^2 - x - 2$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி $2x + 6$ ஆயின் m, n ஐக் காண்க.

3. இருபடிச் சமன்பாடுகள்
(Quadratic Equations)

இருபடிச்சமன்பாடும், அதன் மூலங்களும்

$ax^2+bx+c=0$; (a, b, c மெய்யெண்கள்; $a \neq 0$) என்பது இருபடிச் சமன்பாடொன்றின் பொதுவடிவம் ஆகும்.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

எனவே சமன்பாட்டின் மூலகங்கள்

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ஆகும்.

மூலங்களை α, β எனக் கொள்க.

$$\alpha+\beta=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ஆகும்.

$3x^2+5x-2=0$ இன் மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை $-\frac{5}{3}$ உம்,

பெருக்குத் தொகை $\frac{-2}{3}$ உம் ஆகும்.

$$3x^2+5x-2=0$$

$$(3x-1)(x+2)=0$$

$$x=\frac{1}{3}, -2$$

கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{3}-2=-5/3$. பெருக்குத் தொகை $\frac{-2}{3}$ ஆகும்.

இருபடிச் சமன்பாடொன்றிற்கு இரு மூலங்கள் மட்டுமே உண்டு

$ax^2+bx+c=0$, (a, b, c மெய்யெண்கள் $a \neq 0$) இற்கு α, β, γ என்னும் மூலங்கள் உண்டெனக.

α, β, γ என்பன $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்களாகையால்

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \text{———} (1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \text{———} (2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \text{———} (3)$$

$$(1)-(2), \quad a\left(\alpha^2-\beta^2\right)+b\,(\alpha-\beta)=0$$

$\alpha \neq \beta$ என்க, $\quad a(\alpha+\beta)+b=0$ ——— (4)

இதேபோல் (1), (3) இலிருந்து

$a(\alpha+\gamma)+b=0$ ——— (5)

$$(4)-(5), \quad a(\beta-\gamma)=0$$

$a \neq 0$ என்பதால் $\beta-\gamma=0$

$$\beta=\gamma$$

எனவே இருபடிச் சமன்பாடொன்றிற்கு இரு மூலங்கள் மட்டும் உண்டு.

மூலங்கள் தரப்படின் இருபடிச் சமன்பாடொன்றினை அமைத்தல்

$\lambda,\ \mu$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$(x-\lambda)\ (x-\mu)=0$$

$x^2-(\lambda+\mu)x+\lambda\mu=0$ ஆகும்.

3, -5 என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு.

$$(x-3)\left[x-(-5)\right]=0$$

$$(x-3)\ (x+5)=0$$

$$x^2+2x-15=0$$

$\left(1+\sqrt{3}\right), \left(1-\sqrt{3}\right)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$\left[x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right]=0$$

$$x^2-\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)\right]x+\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)=0$$

$$x^2-2x-2=0$$

மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை, பெருக்குத்தொகை என்பவற்றிற்கும் சமன்பாட்டின் குணகங்களுக்குமிடையேயான தொடர்பினைக் காணும் வேறொரு முறை

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α,β என்க.

$\therefore\ x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ ——— (1)

α,β என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)=0$$

$x^2-(\alpha+\beta)\ x+\alpha\beta=0$ ——— (2)

(1), (2) இலிருந்து $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ஆகும்.

$ax^2+bx+c=0,\ px^2+qx+r=0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனை

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலகங்கள் α,β

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$px^2+qx+r=0$ இன் மூலங்களும் $\alpha,\ \beta$ ஆகும்.

$$\alpha+\beta=-\frac{q}{p}, \quad \alpha\beta=\frac{r}{p}$$

$$-\frac{b}{a}=-\frac{q}{p} \Rightarrow \frac{a}{p}=\frac{b}{q}$$

$$\frac{c}{a}=\frac{r}{p} \Rightarrow \frac{a}{p}=\frac{c}{r}$$

எனவே $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$ ஆகும்.

$a = p, b = q, c = r$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனிக்க.

$$2x^2 + 7x - 15 = 0$$

$$4x^2 + 14x - 30 = 0$$

$$-6x^2 - 21x + 45 = 0$$

$x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} = 0$ ஆகிய எல்லா சமன்பாடுகளினதும் மூலங்கள் $-5, \frac{3}{2}$ ஆக இருப்பதை அவதானிக்கலாம்.

உதாரணம் 1

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்.

(i) $x^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$ (iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை a, b, c இல் காண்க.

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β

எனவே $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ஆகும்.

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

(ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\left[\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right]$

$$= (\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\right]$$

$$= \frac{-b}{a}\left[\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right]$$

$$= \frac{-b}{a}\left(\frac{b^2 - 3ac}{a^2}\right)$$

(iii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \times \frac{a}{c}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{ac}$$

உதாரணம் 2

$x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்,

(i) $\alpha^2 + \beta, \quad \beta^2 + \alpha$ (ii) $\alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta + \frac{1}{\beta}$

என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட, இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2 - ax + b = 0$ இன் மூலகங்கள் α, β

எனவே $\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = b$ ஆகும்.

(i) $\alpha^2 + \beta, \ \beta^2 + \alpha$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு.

$$\left[x - (\alpha^2 + \beta)\right]\left[x - (\beta^2 + \alpha)\right] = 0$$

$$x^2 - \left[\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta\right]x + \left[\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta\right] = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha+\beta)$$

$$= a^2 - 2b + a$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta = (\alpha+\beta)\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) + (\alpha\beta)^2 + \alpha\beta$$

$$= (\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta\right] + (\alpha\beta)^2 + \alpha\beta$$

$$= a\left(a^2 - 3b\right) + b^2 + b$$

ஆகவே சமன்பாடு

$$x^2-\left(a^2-2b+a\right)x+\left(a^3-3ab+b^2+b\right)=0$$ ஆகும்.

(ii) $\alpha+\frac{1}{\alpha},\ \beta+\frac{1}{\beta}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$\left[x-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right]\left[x-\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\right]=0$$

$$x^2-\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$$

$$x^2-\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x+\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)=0$$

$$x^2-\left[a+\frac{a}{b}\right]x+\left(b+\frac{1}{b}+\frac{a^2-2b}{b}\right)=0$$

$$bx^2-(ab+a)x+\left(b^2+1+a^2-2b\right)=0$$

உதாரணம் 3

$3x^2-5x+7=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$ எனின்

$3\left(\alpha^5+\beta^5\right)-5\left(\alpha^4+\beta^4\right)+7\left(\alpha^3+\beta^3\right)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$3x^2-5x+7=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$

எனவே, $3\alpha^2-5\alpha+7=0,\quad 3\beta^2-5\beta+7=0$

$$3\left(\alpha^5+\beta^5\right)-5\left(\alpha^4+\beta^4\right)+7\left(\alpha^3+\beta^3\right)$$

$$=\left(3\alpha^5-5\alpha^4+7\alpha^3\right)+\left(3\beta^5-5\beta^4+7\beta^3\right)$$

$$=\alpha^3\left(3\alpha^2-5\alpha+7\right)+\beta^3\left(3\beta^2-5\beta+7\right)$$

$$=\alpha^3\times O+\beta^3\times O=0$$

உதாரணம் 4

$t+\frac{1}{t}=T+\frac{1}{T}$ ஆயின், $t=T$ அல்லது $t=\frac{1}{T}$ என நிறுவுக.

$\alpha,\ \beta$ என்பன $px^2+qx+r=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda$ எனின், $\lambda+\frac{1}{\lambda}=\frac{q^2-2pr}{pr}$ எனக் காட்டுக.

$a_1b_2^2c_1=a_2b_1^2c_2$ எனத் தரப்படின் $\alpha_1,\ \beta_1$ என்பன $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ என்ற சமன்பாட்டினதும், $\alpha_2,\ \beta_2$ என்பன $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ என்ற சமன்பாட்டினதும் மூலங்கள் எனின் $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ அல்லது $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ என நிறுவுக.

$$t+\frac{1}{t}=T+\frac{1}{T}$$

$\frac{t^2+1}{t}=\frac{T^2+1}{T}$; $Tt^2-\left(T^2+1\right)t+T=0$ இது t இலான இருபடிச்சமன்பாடு

$$(Tt-1)(t+T)=0$$

$Tt-1=0$ அல்லது $t-T=0$

$t=\frac{1}{T}$ அல்லது $t=T$ ஆகும்.

$px^2+qx+r=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$.

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{-q}{p},\ \alpha\beta=\frac{r}{p}$

$\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$ எனின் $\lambda+\frac{1}{\lambda}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{q^2-2pr}{pr}$$

$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ இன் மூலங்கள் α_1, β_1

$$\therefore \quad \lambda = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \text{ எனின்}, \quad \lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{b_1^2 - 2a_1 c_1}{a_1 c_1} = \frac{b_1^2}{a_1 c_1} - 2 \quad (1)$$

$a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ இன் மூலங்கள் α_2, β_2

$$\mu = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \text{ எனின்}, \quad \mu + \frac{1}{\mu} = \frac{b_2^2 - 2a_2 c_2}{a_2 c_2} = \frac{b_2^2}{a_2 c_2} - 2 \quad (2)$$

$$a_1 b_2^2 c_1 = a_2 b_1^2 c_2 \Rightarrow \frac{b_2^2}{a_2 c_2} = \frac{b_1^2}{a_1 c_1}$$

எனவே (1), (2) இலிருந்து $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \mu + \frac{1}{\mu}$

$\therefore \quad \lambda = \mu$ அல்லது $\frac{1}{\mu}$; எனவே $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ அல்லது $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$.

உதாரணம் 5

$x^2 + px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும்.

$S_n = \alpha^n + \beta^n$ ஆக இருக்க, $S_n^2 - S_{2n}$, $S_n S_{n+1} - S_{2n+1}$

என்பவற்றை α, β இல் எழுதி

$S_{2n} = S_n^2 - 2q^n$ எனவும், $S_{2n+1} = S_n \cdot S_{n+1} + pq^n$ எனவும் காட்டுக.

S_7 இற்கு p, q இல் ஒரு கோவையைப் பெறுக.

$x^2 + px + q = 0$ இன் மூலகங்கள் α, β

ஆகவே $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$ ஆகும்.

$$S_n^2 - S_{2n} = \left(\alpha^n + \beta^n\right)^2 - \left(\alpha^{2n} + \beta^{2n}\right)$$
$$= \left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n\right) - \left(\alpha^{2n} + \beta^{2n}\right)$$
$$= 2(\alpha\beta)^n = 2q^n$$

எனவே, $S_n^2 - S_{2n} = 2q^n$

ஆகவே, $S_{2n} = S_n^2 - 2q^n$ ஆகும்.

$$S_n \cdot S_{n+1} - S_{2n+1} = \left(\alpha^n + \beta^n\right)\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) - \left(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}\right)$$
$$= \left(\alpha^{2n+1} \quad \beta^{2n+1} + \alpha^{n+1}\beta^n + \alpha^n\beta^{n+1}\right) - \left(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}\right)$$
$$= \alpha^n\beta^n(\alpha + \beta) = -pq^n$$

ஆகவே $S_{2n+1} = S_n \cdot S_{n+1} + p \cdot q^n$ ஆகும்.

$S_{2n+1} = S_n \cdot S_{n+1} + p \cdot q^n$ என்பதில் $n = 3$ எனப்பிரதியிட

$S_7 = S_3 \cdot S_4 + pq^3$

மீண்டும் அதே சமன்பாட்டில் $n = 1$ எனப் பிரதியிட

$$S_3 = S_1 S_2 + pq = -p\left(p^2 - 2q\right) + pq$$
$$= -p^3 + 3pq$$

$S_{2n} = S_n - 2q^n$ என்பதில் $n = 2$ எனப் பிரதியிட

$$S_4 = S_2^2 - 2q^2$$
$$= \left(p^2 - 2q\right)^2 - 2q^2$$
$$= p^4 - 4p^2 q + 2q^2$$

$$S_7 = S_3 S_4 + pq^3$$
$$= \left(-p^3 + 3pq\right)\left(p^4 - 4p^2 q + 2q^2\right) + pq$$
$$= -p^7 + 7p^5 q - 14p^3 q^2 + 7pq^3 \text{ ஆகும்.}$$

பிரித்துக்காட்டி (*Discriminant*)

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள்

$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ஆகும்.

இங்கு b^2-4ac என்பது பிரித்துக்காட்டி எனப்படும். b^2-4ac என்பது Δ என்னும் குறியீட்டினால் குறிக்கப்படும்.

$ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாடு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருக்க வேண்டுமெனின், $\Delta\geq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$\Delta\geq 0$ எனின் மட்டுமே $\sqrt{b^2-4ac}$ இற்கு மெய்ப் பெறுமானம் உண்டு.

$\Delta<0$ எனின் மூலங்கள் கற்பனை மூலங்கள் எனப்படும்.

ஆகவே $ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு

$\Delta>0$ $\Leftrightarrow$ இருவேறு மெய்மூலங்கள்

$\Delta=0$ $\Leftrightarrow$ பொருந்தும் மெய்மூலங்கள்

$\Delta<0$ $\Leftrightarrow$ கற்பனை மூலங்கள் உண்டு.

பின்வரும் உதாரணங்களை அவதானிக்க.

$2x^2+5x+1=0$

இங்கு $\Delta=25-8=17>0$

எனவே இரு வேறு மெய் மூலங்கள் உண்டு.

$2x^2+5x+1=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$$

எனவே மெய்மூலங்கள் $\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}$, $\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4}$ ஆகும்.

$4x^2-20x+25=0$

இங்கு $\Delta=400-400=0$

எனவே சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தும் மெய்மூலங்கள் உண்டு.

$4x^2-20x+25=0$

$(2x-5)^2=0$

$x=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}$ என்பன பொருந்தும் மெய்மூலங்கள் ஆகும்.

$x^2+x+1=0$

இங்கு $\Delta=1-4=-3<0$

எனவே சமன்பாட்டிற்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ என்பன சமன்பாட்டின் கற்பனை மூலங்களாகும்.

உதாரணம் 6

(i) a, b, c என்பன மெய்யாக இருக்க, $(x-a)(x-b)=c^2$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் உண்டெனக் காட்டுக.

(ii) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கற்பனையானவை எனின், $ax^2-2(a+b)x+(a-2b+4c)=0$ இன் மூலங்களும் கற்பனை யானவை என நிறுவுக.

(iii) a, b, c என்பன மெய்யாக இருக்க.
$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக்காட்டுக. மூலங்கள் இரண்டும் பொருந்துவனவாக இருக்க a, b, c இற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

(i) $(x-a)(x-b)=c^2$

$$x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$$

$$\Delta=[-(a+b)]^2-4(ab-c^2)$$

$$=a^2-2ab+b^2+4c^2$$

$$=(a-b)^2+4c^2$$

$(a-b)^2\geq 0,\ 4c^2\geq 0$. எனவே a, b, c இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்கட்கும்

$\Delta\geq 0$.

ஆகவே சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் உண்டு.

(ii) $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் கற்பனையாதலால்

$$b^2-4ac<0$$

$$ax^2-2(a+b)x+(a+2b+4c)=0$$

$$\Delta=[-2(a+b)]^2-4a(a+2b+4c)$$

$$=4a^2+8ab+4b^2-4a^2-8ab-16ac$$

$$=4(b^2-4ac)<0$$

ஆகவே சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கற்பனையானவை.

(iii) $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

$$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)$$

$$=4\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]$$

$$=4\left[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right]$$

$$=4\times\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$=2\left[(a-b)^2+(b-c)^2\ (c-a)^2\right]\geq 0$$

$\Delta\geq 0$ எனவே சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் உண்டு.

மூலங்கள் பொருந்துவனவாக இருக்க $\Delta=0$ ஆதல் வேண்டும்.

அதாவது $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ ஆதல் வேண்டும்.

$a=b=c$ ஆயினால் மட்டும் $\Delta=0$ ஆகும்.

உதாரணம் 7

(i) $x^2-px+p=0$ என்னும் சமன்பாடு

(a) பொருந்தும் மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு

(b) இருவேறு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு

p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $x(kx+2)+4k-3=0$ என்னும் சமன்பாடு.

மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $x^2-px+p=0$

$$\Delta=p^2-4p$$

(a) பொருந்தும் மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு $\Delta=0$ ஆகும்.

$$p^2-4p=0$$

$$p(p-4)=0$$

ஆகவே $p=0$ அல்லது 4.

(b) இரு வேறு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு

$\Delta>0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$p^2-4p>0$$

$p(p-4)>0$ ஆதல வேண்டும்.

$p<0$ எனின், $p(p-4)>0$

$p=0$ எனின், $p(p-4)=0$

$O < p < 4$ எனின், $p(p - 4) < 0$
$p = 4$ எனின், $p(p - 4) = 0$
$p > 4$ எனின், $p(p - 4) > 0$

ஆகவே இருவேறு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு $p<0$ அல்லது $p > 4$ ஆதல் வேண்டும்.

(ii) $x(kx+2)+4k-3=0$

$kx^2+2x+(4k-3)=0$

$\Delta = 4-4k(4k-3)$

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்கட்கு $\Delta \geq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$4-4k(4k-3) \geq 0$

$1-k(4k-3) \geq 0$

$1-4k^2+3k \geq 0$

$4k^2-3k-1 \leq 0$

$(4k+1)(k-1) \leq 0$

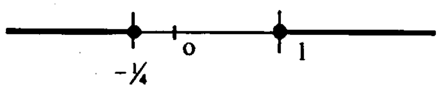
$E=(4k+1)(k-1)$

$k<-\frac{1}{4}$ எனின் $E>0$

$k=-\frac{1}{4}$ எனின் $E=0$

$-\frac{1}{4}<k<1$ எனின் $E<0$

$k = 1$ எனின் $E=0$
$k > 1$ எனின் $E>0$



எனவே $-\frac{1}{4} \leq k \leq 1$ ஆதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 8

$ax(x+1)+2-3x=0$ என்னும் சமன்பாடு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான a இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$ax(x+1)+2-3x=0$

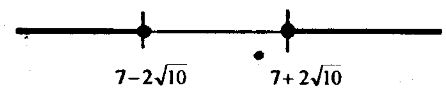
$ax^2+(a-3)x+2=0$

$\Delta = (a-3)^2-8a$

$\quad = a^2-14a+9$

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்கட்கு $\Delta \geq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$a^2-14a+9 \geq 0$



$(a-7)^2-40 \geq 0$

$(a-7)^2-\left(2\sqrt{10}\right)^2 \geq 0$

$\left(a-7-2\sqrt{10}\right)\left(a-7-2\sqrt{10}\right) \geq 0$

$\left[a-\left(7+2\sqrt{10}\right)\right]\left[a-\left(7-2\sqrt{10}\right)\right] \geq 0$

$a \leq 7-2\sqrt{10}$ அல்லது $a \geq 7+2\sqrt{10}$ ஆகும்.

இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றின் மூலங்களின் தன்மை

(a) $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் இரண்டும் நேராக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை

i. மூலங்கள் மெய்மூலங்களாக இருத்தல் வேண்டும்.
எனவே $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

ii. $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ இரண்டும் நேராயிருத்தல் வேண்டும்.

$$-\frac{b}{a}>0,\quad \frac{c}{a}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{a}<0,\quad \frac{c}{a}>0$$

$a, c>0$ ஆகவும், $b<0$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும்.

அல்லது $a,\ c<0$ ஆகவும் $b>0$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும்.

(b) $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் இரண்டும் மறையாக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை

i. மூலங்கள் மெய்மூலங்களாக இருத்தல் வேண்டும்.

$\Delta=b^2-4ac\geq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

ii. $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$-\frac{b}{a}>0,\quad \frac{c}{a}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{a}>0,\quad \frac{c}{a}>0$$

$a,\ b,\ c>0$ அல்லது $a,\ b,\ c<0$ ஆதல்வேண்டும்.

(c) $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்களில் ஒன்று நேராகவும், மற்றையது மறையாகவும் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை.

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}<0 \Rightarrow ac<0$$

$ac<0$ எனின், $b^2-4ac>0$

எனவே, $ac<0$ என்பது போதுமானது.

$ac<0$ எனின் மூலங்கள் மெய்யானவையாகவும், ஒன்று நேராகவும் மற்றையது மறையாகவும் இருக்கும்.

1. இருபடிச்சமன்பாடொன்றின் மூலங்கள் α,β எனின் $\alpha+k,\quad \beta+k$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$ என்க.

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ ஆகும்.

$\alpha+k,\ \beta+k$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு.

$$[x-(\alpha+k)]\,[x-(\beta+k)]=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta+2k)\,x+\left[\alpha\beta+k(\alpha+\beta)+k^2\right]=0$$

$$x^2-\left[-\frac{b}{a}+2k\right]x+\left[\frac{c}{a}+k\left(-\frac{b}{a}\right)+k^2\right]=0$$

$ax^2+(b-2ka)x+\left(c-kb+ak^2\right)=0$ ஆகும்.

வேறுமுறை

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$ என்க.

$$x=\alpha,\ \beta$$

$y=x+k$ எனின் $\qquad x=y-k$ ஆகும்.

$ax^2+bx+c=0$ இல் $x=y-k$ எனப்பிரதியிட

$$a(y-k)^2+b(y-k)+c=0$$

$$ay^2+(b-2ka)\,y+\left(c-bk+ak^2\right)=0$$

y ஐ x ஆல் மாற்றீடு செய்ய, சமன்பாடு

$ax^2+(b-2ka)\,x+\left(c-bk+ak^2\right)=0$ ஆகும்.

எனவே $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$ எனின் $x\rightarrow(x-k)$ எனப்பிரதியீடு செய்வதால் பெறப்படும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha+k,\quad \beta+k$ ஆகும்.

2. **இருபடிச்சமன்பாடொன்றின் மூலங்கள் α, β எனின் $m\alpha$, $m\beta$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு**

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β என்க.

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ஆகும்.

$m\alpha, m\beta$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$(x - m\alpha)(x - m\beta) = 0$$

$$x^2 - m(\alpha + \beta)x + m^2\alpha\beta = 0$$

$$x^2 - m\left(-\frac{b}{a}\right)x + m^2\frac{c}{a} = 0$$

$$ax^2 + mbx + m^2c = 0$$

வேறுமுறை

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β என்க.

$x = \alpha, \beta$ ஆகும்.

$y = mx$ எனின் $x = \dfrac{y}{m}$

$x = \dfrac{y}{m}$ என $ax^2 + bx + c = 0$ இல்பிரதியிட

$$a \cdot \frac{y^2}{m^2} + b \cdot \frac{y}{m} + c = 0 \Rightarrow ay^2 + mby + m^2c = 0$$

$\therefore ay^2 + mby + m^2c = 0$ இன் மூலங்கள் $y = m\alpha, m\beta$ ஆகும்.

$m\alpha, m\beta$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$ax^2 + mbx + m^2c = 0$ ஆகும்.

எனவே $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $x \to \dfrac{x}{m}$ எனப்பிரதியீடு செய்வதால் பெறப்படும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $m\alpha, m\beta$ ஆகும்.

3. **இருபடிச் சமன்பாடொன்றின் மூலங்கள் α, β எனின் $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு**

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ஆகும்.

$\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்டசமன்பாடு

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 = 0$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

வேறுமுறை

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β என்க.

$x = \alpha, \beta$

$y = \dfrac{1}{x}$ என்க. இப்பொழுது $x = \dfrac{1}{y}$

$ax^2 + bx = c = 0$ இல் $x \to \dfrac{1}{x}$ எனப்பிரதியிட,

பெறப்படும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ ஆகும்.

பொது மூலம் ஒன்றினையுடைய இருபடிச்சமன்பாடுகள்

$ax^2 + bx + c = 0$, $px^2 + qx + r = 0$ என்பனவற்றிற்கு பொதுமூலம் α உண்டு என்க.

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ———— (1)

$p\alpha^2 + q\alpha + r = 0$ ———— (2)

$(1) \times q - (2) \times b,$ $\alpha^2 = \dfrac{br - qc}{aq - bp}$

$(1) \times p - (2) \times a,$ $\alpha = \dfrac{ar - pc}{pb - aq}$

$$\frac{br - qc}{aq - bp} = \left(\frac{ar - pc}{pb - aq}\right)^2$$

$(ar - pc)^2 = (aq - bp)(br - qc)$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்காது, மூலங்களின் தன்மைபற்றிக் கூறுக.

(i) $3x^2 - 17x + 21 = 0$ **(ii)** $2x^2 = 5x + 2 = 0$

(iii) $5x^2 + 8x - 2 = 0$ **(iv)** $2x^2 - 6x - 1 = 0$

(i) $3x^2 - 17x + 21 = 0$

$\Delta = 17^2 - 4 \times 3 \times 21 = 289 - 252 = 37 > 0$

(a) மெய்மூலங்கள் உண்டு. மூலங்கள் α, β என்க.

(b) $\sqrt{37}$ விகிதமுறா எண். மூலங்கள் விகிதமுறாதவை ஆகும்.

(c) $\alpha + \beta = \dfrac{17}{3} > 0$, $\alpha\beta = \dfrac{21}{3} > 0$ எனவே மூலங்கள் இரண்டும் நேரானவை.

(ii) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 > 0$

(a) மெய் மூலங்கள் உண்டு.

(b) $\sqrt{9} = 3$ விகிதமுறு எண். மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகும்.

(c) $\alpha + \beta = -\dfrac{5}{2}, \alpha\beta = 1$ இரண்டு மூலங்களும் மறையானவை.

(iii) $5x^2 + 8x - 2 = 0$

$\Delta = 8^2 + 4 \times 5 \times 2 = 64 + 40 = 104 > 0$

(a) $\Delta > 0$ மெய்மூலங்கள் உண்டு.

(b) $\sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ விகிதமுறா எண் - மூலங்கள் விகிதமுறாதவை ஆகும்.

(c) $\alpha + \beta = -8/5$, $\alpha\beta = -2/5$ ஒருமூலம் நேராகவும், மற்றையது மறையாகவும் அமையும்.

(iv) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

$\Delta = 6^2 + 4 \times 2 \times 1 = 36 + 8 = 44 > 0$

(a) $\Delta > 0$ எனவே மெய்மூலங்கள் உண்டு.

(b) $\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ விகிதமுறா எண். மூலங்கள் விகிதமுறாதவை.

(c) $\alpha + \beta = \dfrac{6}{2} = 3$, $\alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$ ஒருமூலம் நேராகவும், மற்றையது மறையாகவும் அமையும்.

உதாரணம் 10

$x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ca = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலம் இருப்பின், மற்றைய மூலங்கள் $x^2 + cx + ab = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக்காட்டுக.

$x^2 + ax + bc = 0$, இன் மூலங்கள் α , β

$x^2 + bx + ca = 0$ இன் மூலங்கள் α, γ என்க.

$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = bc\ , \alpha + \gamma = -b, \alpha\gamma = ca$

α இரண்டு சமன்பாடுகளினதும் பொது மூலம் என்பதால்.

$$\alpha^2 + a\alpha + bc = 0$$

$$\alpha^2 + b\alpha + ca = 0$$

$$(a-b)\ \alpha = c\ (a-b)$$

$$\alpha = c$$

$\alpha = c,\ \alpha\beta = bc\ \therefore \beta = b$ மேலும் $\alpha + \beta = -a.$,

$a + b + c = 0$

$\alpha = c,\ \alpha\gamma = ca\ \therefore\ \gamma = a$

β, γ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$(x - \beta)\ (x - \gamma) = 0$$

$$x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$$x^2 + cx + ab = 0$$

உதாரணம் 11

$(x-1)^2 = a^2\ (x+a)$ என்னும் இருபடிச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

a இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு, மேற்படி இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கும் $(x-a)^2 = x(a-1)^2$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கும் பொதுமூலம் இருக்கும் எனக்காண்க.

$$(x-1)^2 = a^2\ (x+a)$$

$$x^2 - \left(a^2 + 2\right)x + \left(1 - a^3\right) = 0$$

$$\left[\ x - (1-a)\right]\left[x - \left(1 + a + a^2\right)\right] = 0$$

$x = 1 - a$ அல்லது $x = 1 + a + a^2$ ஆகும்.

$x = 1 - a$ பொதுமூலம் எனின், இரண்டாம் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$(1-2a)^2 = (1-a)(a-1)^2$$

$$1 - 4a + 4a^2 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3$$

$$a^3 + a^2 - a = 0$$

$$a\left(a^2 + a - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$x = 1 + a + a^2$ பொது மூலம் எனின்,

$$\left(a + a^2\right)^2 = \left(1 + a + a^2\right)(a-1)^2$$

$$1 + 2a^2 + a^4 = \left(1 + a + a^2\right)\left(1 - 2a + a^2\right)$$

$$1 + 2a^2 + a^4 = 1 - a - a^3 + a^4$$

$$a^3 + 2a^2 + a = 0$$

$$a(a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = 0, -1$$

$\therefore a$ எடுக்கும் பெறுமானங்கள் 0, -1 ஆகும்.

உதாரணம் 12

$x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y + 9 = 0$ எனின் x எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கும் எனவும், y 3 இற்கும் -1 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானங்களை எடுக்காது எனவும் காட்டுக.

$$x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y + 9 = 0$$

$$x^2 + (y-3)x + \left(-2y^2 - 3y + 9\right) = 0$$

இது x இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. x இன் மெய்ப்பெறுமானங்கட்கு $\Delta \geq 0$ ஆகும்.

$$\Delta = (y-3)^2 - 4\left(-2y^2 + 3y + 9\right) \geq 0$$

$$9y^2 - 18y - 27 \geq 0$$

$$y^2 - 2y - 3 \geq 0$$

$$(y-3)(y+1) \geq 0$$

$y \leq -1$ அல்லது $y \geq 3$ எனவே y, -1 இற்கும் 3 இற்குமிடையில் எப் பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

$$x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y + 9 = 0$$

$$-2y^2 + (x+3)\,y + \left(x^2 - 3x + 9\right) = 0$$

இது y இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு

$$\Delta = (x+3)^2 + 8\left(x^2 - 3x + 9\right)$$

$$= 9x^2 - 18x + 72$$

$$= 9\left[x^2 - 2x + 8\right]$$

$$= 9\left[(x-1)^2 + 7\right] \geq 63 > 0$$

x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $\Delta \geq 0$ ஆதலால் x எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்.

உதாரணம் 13

$ax^2 + 2bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்,

$acx^2 + 2b(c+a)\,x + (a+c)^2 = 0$ இன் மூலங்களை α, β இல் காண்க.

$ax^2 + 2bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகையால்

$\alpha + \beta = \dfrac{-2b}{a}, \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ஆகும்.

$acx^2 + 2b(c+a)x + (a+c)^2 = 0$ இன் மூலங்கள் λ, μ என்க.

$$\lambda + \mu = -\frac{2b(c+a)}{ac} = \frac{-2bc}{ac} + \frac{-2ab}{ac}$$

$$= -\frac{2b}{a} - -\frac{2b}{c}$$

$$= \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$\lambda + \mu = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad \text{———} \quad (1)$$

$$\lambda\mu = \frac{(a+c)^2}{ac} = \frac{a^2 + 2ac + c^2}{ac} = \frac{a}{c} + 2 + \frac{c}{a} = \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} \quad \text{——} \quad (2)$$

$$(\lambda - \mu)^2 = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu$$

$$= \left(\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 4\left(\alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

$$= \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 2\alpha\beta + \frac{2}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha} + 4\right) - \left(4\alpha\beta + 8 + \frac{4}{\alpha\beta}\right)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - 2\alpha\beta - \frac{2}{\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{\beta} + \frac{2\beta}{\alpha} - 4$$

$$= \left(\alpha - \beta - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2$$

$$\lambda - \mu = \pm\left(\alpha - \beta - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{———} \quad (3)$$

(1), (3) இலிருந்து

$$\lambda + \mu = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \qquad \lambda + \mu = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$\lambda - \mu = \alpha - \beta - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \qquad \lambda - \mu = -\alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

$$\lambda = \alpha + \frac{1}{\beta} \qquad \lambda = \beta + \frac{1}{\alpha}$$

$$\mu = \beta + \frac{1}{\alpha} \qquad \mu = \alpha + \frac{1}{\beta}$$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$\alpha + \frac{1}{\beta}, \quad \beta + \frac{1}{\alpha}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 14

$k\left(x^2 + x + 1\right) = 2x + 1$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் நேராயின், k இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

$$k\left(x^2 + x + 1\right) = 2x + 1$$

$$kx^2 + (k-2)x + (k-1) = 0$$

இது x இல் இருபடிச்சமன்பாடாகும்.

(i) மூலங்கள் α, β இரண்டும் மெய்யாக இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) $\alpha + \beta,\ \alpha,\ \beta$ இரண்டும் நேராக இருத்தல் வேண்டும்.

(i) $\Delta \geq 0, \quad (k-2)^2 - 4k(k-1) \geq 0$

$$k^2 - 4k + 4 - 4k^2 + 4k \geq 0$$

$$-3k^2 + 4 \geq 0$$

$$3k^2 - 4 \leq 0$$

$$\left(\sqrt{3}k - 2\right)\left(\sqrt{3}k + 2\right) \leq 0$$

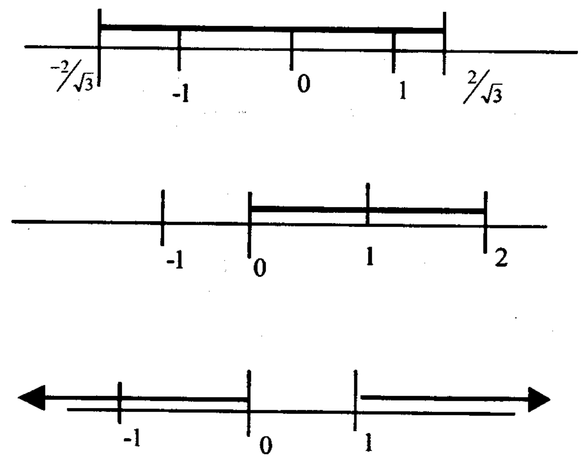
$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(ii) $\alpha + \beta > 0 \qquad -\frac{(k-2)}{k} > 0 \qquad k(k-2) < 0$

$$0 < k < 2$$

$\alpha\beta > 0 \qquad \frac{k-1}{k}, \qquad k(k-1) > 0$

$k < 0$ அல்லது $k > 1$



எனவே $1 < k \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

உதாரணம் 15

$ax^2 + a^2x + 1 = 0, \quad bx^2 + b^2x + 1 = 0$ ஆகியவற்றிற்கு ஒரு பொதுமூலம் உண்டெனின், இவற்றின் மற்றைய மூலங்கள் $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

$ax^2 + a^2x + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் α, β

$bx^2 + b^2x + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் α, γ என்க.

$$\alpha + \beta = -a \text{ ——— } (1) \qquad \alpha + \gamma \ -b \text{ ——— } (3)$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{a} \text{ ——— } (2) \qquad \alpha\gamma = \frac{1}{b} \text{ ——— } (4)$$

(1) − (3), $\quad \beta - \gamma = b - a$

(2) − (4), $\quad \alpha(\beta - \gamma) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$

எனவே $\alpha = \frac{1}{ab}$ ——— (5)

(1) + (3), $\quad 2\alpha + (\beta + \gamma) = -(a+b)$ ——— (6)

(2) + (4) $\quad \alpha(\beta + \gamma) = \frac{a+b}{ab}$ ——— (7)

(5), (7) இலிருந்து $\beta + \gamma = (a+b)$

(6) இல் பிரதியிட $\alpha = -(a+b)$

எனவே $a + b = \frac{-1}{ab}$

β, γ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$(x - \beta)(x - \gamma) = 0$$

$$x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{ab}x + \beta\gamma = 0$$

மேலும் $(2) \times (4)$, $\alpha^2\beta\gamma = \frac{1}{ab} \Rightarrow \beta\gamma = ab$

எனவே சமன்பாடு $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ ஆகும்.

ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதத்தில் பிரயோகம்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

$$by^2 + 2hxy + ax^2 = 0$$

$$b(y - m_1x)(y - m_2x) = 0$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1m_2 = \frac{a}{b}$$

$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0$ என்பன உற்பத்தியினூடு செல்லும் நேர் கோடுகளாகும். இரு கோடுகளுக்குமிடைப்பட்ட கோணம் α எனின்,

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_1m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{\frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}\right| = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right|$$ ஆகும்.

$a = -b$ எனின் இரு கோடுகளும் செங்குத்தானவை.

உதாரணம் 16

$3x^2 - 5xy + y^2 = 0$ என்பதால் தரப்படும் இரு நேர் கோடுகளுக்கிடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

$$y^2 - 5xy + 3x^2 = 0$$

$$(y - m_1 x)\,(y - m_2 x) = 0$$

$$m_1 + m_2 = 5, \qquad m_1 m_2 = 3$$

இரு கோடுகளுக்குமிடையிலான கோணம் α எனின்,

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{25 - 12}}{1 + 3}\right| = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$by^2 + (2hx + 2f)y + \left(ax^2 + 2gx + c\right) = 0$$

இது y இல் ஓர் இருபடிச்சமன்பாடு ஆகும்.

$$y = \frac{-(2hx + 2f) \pm \sqrt{(2hx + 2f)^2 - 4b\left(ax^2 + 2gx + c\right)}}{2b}$$

$$y = \frac{-hx - f \pm \sqrt{(hx + f)^2 - b\left(ax^2 + 2gx + c\right)}}{b}$$

$(hx + f)^2 - b\left(ax^2 + 2gxd + c\right)$ ஒரு நிறைவர்க்கமாக இருப்பின் மட்டுமே $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

உதாரணம் 17

$2x^2 - xy - y^2 - 3x + 6y - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$y^2 + (x - 6)y - \left(2x^2 - 3x - 5\right) = 0$$

$$y = \frac{-(x-6) \pm \sqrt{(x-6)^2 + 4\left(2x^2 - 3x - 5\right)}}{2}$$

$$y = \frac{-(x-6) \pm \sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{2}$$

$$= \frac{-(x-6) \pm (3x - 4)}{2}$$

$$y = \frac{-(x-6) + (3x - 4)}{2}, \qquad y = \frac{-(x-6) - (3x - 4)}{2}$$

$$= x + 1, \qquad y = -2x + 5$$

எனவே நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$y - x - 1 = 0, \qquad y + 2x - 5 = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 3

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களை வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

(i) $3x^2 - 8x - 16 = 0$ (ii) $2x^2 + 6x - 1 = 0$

(iii) $x^2 + x + 1 = 0$ (iv) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

2. $x^2 + x + 1 = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\alpha^3 + \beta^3$ (iii) $\alpha^4 + \beta^4$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $x^2 + ax + b = 0$ இன் மூலகங்கள் α, β எனின் $\alpha^3 + \beta^3 = 3ab - a^3$ எனக் காட்டுக.

$(\alpha - 1)^2, (\beta - 1)^2$ ஐ மூலகங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$x^2 - (a^2 - 2b + 2a + 2)\,x + (a + b + 1)^2 = 0$ எனக்காட்டுக.

4. $x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்களை a, b ஆகவும், $x^2 + rx + s = 0$ இன் மூலங்கள் c, d ஆகவுமிருப்பின் பின்வருவனவற்றை p, q, r, s இல் காண்க.

(i) $a(b + c + d) + b(c + d) + cd$

(ii) $(a - c)^2 + (b - d)^2 + (b - c)^2 + (a - d)^2$

5. (i) $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $\dfrac{\alpha^2}{\beta}, \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) $x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்களுக்குமிடையேயான வித்தியாசம் 1 எனின் $p^2 = 4q + 1$ எனக் காட்டுக.

6. $x^2 + x - 1 = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின், $\alpha^2 = \beta + 2,\ \beta^2 = \alpha + 2$ என நிறுவுக. $\dfrac{\alpha + 1}{\beta + 1}, \dfrac{\beta + 1}{\alpha + 1}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 + 3x + 1 = 0$ எனக்காட்டுக.

7. (i) $x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும்..

$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \alpha^3 + \beta^3 = 61$ ஆகும் போது p, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $x^2 + mx + n = 0$ இன் மூலங்கள் x_1, x_2 எனின், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) $(x_2 + m)^{-1} + (x_1 + m)^{-1}$ (b) $(x_2 + m)^{-2} + (x_1 + m)^{-2}$

(c) $(x_2 + m)^{-3} + (x_1 + m)^{-3}$ (d) $\dfrac{x_1^2}{x_2 + m} + \dfrac{x_2^2}{x_1 + m}$

8. (i) $x^2 + ax + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு சமமற்ற மூலங்கள் b உம் c உம் ஆகும். $(b + a), (c + a)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - ax + 1 = 0$ எனக்காட்டுக.

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $m : n$ எனும் விகிதத்திலிருப்பின் $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} = \dfrac{b^2 - 2ac}{ac}$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $x^2 + 6x + 12 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $m : n$ என இருப்பின் $m^2 + n^2 = mn$ என உய்த்தறிக.

9. $(7p + 1)x^2 + (5p - 1)\,x + p = 1$ எனும் சமன்பாடு சமமான மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

10. $(a-1)x^2-2x+(a-1)=0$ மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான a இன் உயர்வுப் பெறுமானம் யாது?

11. $x^2-(4+k)x+9=0$ மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

12. $x^2-(3p+1)x+p^2-1=5p$ எனும் சமன்பாடு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

13. a,b என்பன நிறையெண்களாக இருக்க,

$x^2+2x=(2a+2b+1)(2a+2b-1)$ இன் மூலங்கள் நிறையெண்களாகும் எனக்காட்டுக.

14. $px^2-6qx-(9p-10q)=0$ இன் மூலங்கள் $2\alpha-3,\ 2\beta-3$ எனின் $\alpha,\ \beta$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. $x^2-3px+p^2=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha,\ \beta$ ஆகும்; இங்கு $\alpha>\beta$, $p>0$ ஆகும். $\alpha^2+\beta^2,\ \alpha-\beta$ என்பவற்றைக் காண்க.

$\frac{\alpha^3}{\beta},-\frac{\beta^3}{\alpha}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. $x^2+(k-3)x+k=0$ என்னும் சமன்பாடு

(i) இரு வேறு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு

(ii) மூலங்கள் இரண்டும் ஒரே குறியை உடையனவாக இருப்பதற்கு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

17. $x^2+kx-6k=0,\ x^2-2x-k=0$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலம் இருப்பின் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

18. $x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0\quad(a\neq b)$ என்பவற்றிற்கு ஒரு பொது மூலம் இருப்பின், $2x^2+(a+b)x=(a+b)^2$ இன் மூலங்கள் $x=1,\ x=-\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

19. $x^2-cx+d=0,\ x^2-ax+b=0$ எனும் சமன்பாடுகள் பொதுமூலம் ஒன்றை உடையதெனவும், இரண்டாம் சமன்பாடு சமமூலங்களைக் கொண்டதெனவும் தரப்படின் $2(b+d)=ac$ எனக்காட்டுக.

20. $2x^2+bx-15=0,\ 2x^2-bx+6=0$ என்பவற்றிற்கு பொதுமூலம் உண்டெனின் b இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க. b இன் இப்பெறுமானங்களுக்கு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

21. $x^2+ax+b=0,\ x^2+px+q=0$ எனும் சமன்பாடுகள் பொதுமூலம் ஒன்றைக் கொண்டுள்ளன. $x^2+bx+a=0,\ x^2+qx+p=0$ ஆகிய சமன்பாடுகளும் பொதுமூலம் ஒன்றைக் கொண்டுள்ளன. $a+b=p+q=-1$ எனக்காட்டுக.

22. $a, b\ c$ மெய்யெண்களாக இருக்க

(i) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$

(ii) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$

ஆகிய இருசமன்பாடுகளும் மெய்மூலங்களையுடையன எனநிறுவுக. a, b, c என்பன கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின் (i) இன் மூலங்கள் சமமாக இருக்கும் எனவும் a, b, c என்பன இசை விருத்தியில் (*Harmonic*) இருப்பின் (ii) இன் மூலங்கள் சமமாக இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

23. $ax^2+2bx+c=0$ எனும் சன்பாடு மெய்மூலங்களையுடையது எனவும், m, n எனும் மெய்யெண்கள் $m^2>n>0$ ஆகவும் உள்ளன எனத் தரப்படின் $ax^2+2mbx+nc=0$ மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

24. $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானதும், நேரானதும் எனத்தரப்படின் $a^2x^2+\left(2ac-b^2\right)x+c^2=0$ இன் மூலங்களும் மெய்யானவையும் நேரானவையும் எனக்காட்டுக.

25. $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் $a^1x^2+b^1x+c^1=0$ இன் மூலங் களின் **தலைகீழ்** எனின் $ab^1=bc^1$ எனவும் $aa^1=cc^1$ எனவும் காட்டுக.

26. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் **தலைகீழ்** மூலங்களாக உடைய இருபடிச்சமன்பாடுகளை எழுதுக. (i) $5x^2-20x+17=0$

(ii) $qx-r=px^2$ (iii) $ax^2+bx+c=0$

27. $x^2+7x+8=0$ இன் மூலங்களிற்கு பருமனில் சமமாகவும், குறிகளில் எதிராகவும் உடைய மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

28. $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் $bx^2+cx+a=0$ இன் மூலங்களின் மூன்று மடங்கெனின் *a, b, c* இற்கிடையே தொடர்பு ஒன்றினைப் பெறுக.

29. $px^2+qx+r=0$ இன் மூலங்கள் $rx^2+qx+p=0$ இன் மூலங்களின் r/p மடங்கு எனக்காட்டுக.

30. $x^2+px+q=0$ இன் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

31. α,α^1 என்பன $(x-\beta)\left(x-\beta^1\right)=\gamma$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனின் $(x-\alpha)\left(x-\alpha^1\right)+\gamma=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\beta,\ \beta^1$ எனக்காட்டுக.

32. $x^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α,β ஆகவும் $x^2+\lambda bx+\lambda^2c=0$ இன் மூலங்கள் $\ ,\delta$ ஆகவும் இருப்பின்

(i) $(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)=2\lambda^2c\left(b^2-2c\right)$

(ii) $(\ \gamma+\beta\delta),\ (\alpha\delta+\beta\gamma)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $x^2-\lambda b^2x+2\lambda^2c\,(b^2-2c)$ எனக்காட்டுக.

33. k ஒரு மெய் மாறிலியாக இருக்க $9x^2+6x+1=4kx$ எனும் சமன் பாட்டின் மூலங்கள் α,β எனின்,

(a) $\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $x^2+6x+9=4kx$ எனக்காட்டுக.

(b) α,β மெய்யாக இருக்கும் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(c) α,β நேராகும் வண்ணம் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

34. $x^2+px+q=0$ இன் மூலங்கள் α , β ஆகும்.

(i) மூலங்களின் வித்தியாசம் $2\sqrt{3}$ எனவும், மூலங்களின் தலைகீழ்ப் பெறுமானங்களின் கூட்டுத்தொகை 4 எனவும் தரப்படின் *p, q* என்பவற்றின் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\alpha+\dfrac{2}{\beta}$, $\beta+\dfrac{2}{\alpha}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

35. $f(x)=x^2+(k+2)x+2k$ எனக.

(a) k இன் எல்லாமெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும், $f(x)=0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

(b) $f(x-k)=0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

(c) $f(x-k)-2x=0$ இன் மூலங்கள் $x=0, 7$ எனின், k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

k இன் இப் பெறுமானத்திற்கு $f(x-k)-2x$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(d) $2c=2-k$ எனத்தரப்பட்டிருக்க, $f(x-k)+c^2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமானவை எனக்காட்டுக. $k=1$ ஆகும் பொழுது இச்சமமூலங்களைக் காண்க.

36. (i) $f_1(x)=x^2+px+q$, $f_2(x)=x^2+p'x+q'$ என்க.

$f_1(x)=0$ இன் ஒருமூலத்தினதும், $f_2(x)=0$ இன் ஒரு மூலத்தினதும் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாவதற்குரிய நிபந்தனையைக் காண்க.

(ii) α, β என்பன $f_1(x)=0$ இனதும் α', β' என்பன $f_2(x)=0$ இனதும் மூலங்களாயிருக்க

$$f_1(\alpha')\,f_1(\beta')=f_2(\alpha)\,f_2(\beta)=(q-q')^2+(p-p')\,(pq'-p'q)$$

எனக்காட்டுக.

37. (i) $a^2x^2+6abx+ac+8b^2=0$ எனும் சமன்பாடு சமமூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் $ac(x+1)^2=4b^2x$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் சமமானவை எனக்காட்டுக.

(ii) $3x^2-5x=k$ இன் மூலங்கள் $4:3$ எனும் விகிதத்திலிருப்பின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

38. $ax^2+2bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்,

$ax^2+2bx+c=\dfrac{8(b^2-ac)}{a}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களை α,β இல் காண்க.

39. (i) α,β என்பன $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் எனின்,

$cx^2-2bx+4a=0$ இன் மூலங்களை α, β இல் காண்க.

(ii) பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான λ இன் மிகக்குறைந்த, மிகக்கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$x^2+xy+y^2=\lambda$$
$$x^2-xy+y^2=1$$

40. (i) α, β என்பன $k^2x^2+(kx+1)(x+k)+1=0$ இன் மூலங்களாகும்.

இங்கு $k\neq 0,-1$. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ ஐ k இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

$\alpha^2\beta^2+(\alpha\beta+1)(\alpha+\beta)+1=0$ என நிறுவுக.

(ii) $x^2-kx+4=0$ இன் மூலங்கள் மெய்யாக இருக்கும் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) மூலங்கள் மெய்யாகவும், நேராகவும் இருக்கும் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) மூலங்கள் மெய்யாகவும், நேராகவும், $3:1$ எனவும் அமையும் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

41. a, b என்பன சமமற்ற நேர் எண்களாக இருக்க,

$\dfrac{\lambda}{2x}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் x இன் பெறுமானங்கள் சமமாக இருக்குமாறு λ இன் பெறுமானங்களை a, b இல் காண்க.

இது உண்மையாகுமாறுள்ள λ இன் இரு பெறுமானங்கள் λ_1, λ_2 ஆகவும், இதற்கொத்த x இன் பெறுமானங்கள் x_1, x_2 ஆகவும் இருப்பின் $\lambda_1\lambda_2=(a-b)^2$ எனவும் $x_1x_2=1$ எனவும் நிறுவுக.

42. $9x^2 + 2xy + y^2 - 92x - 20y + 244 = 0$ எனின்,
$3 \leq x \leq 6$ எனவும், $1 \leq y \leq 10$ எனவும் நிறுவுக.

43. α, β என்பன $x^2 + px + q = 0$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இங்கு p, q மெய்யெண்கள் ஆகும்.
$\lambda = \alpha + \beta^2, \mu = \beta + \alpha^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.
α, β என்பன கற்பனையானவையெனின், $p = -1$ எனின் மட்டும் λ உம் μ உம் மெய்யாகும் என நிறுவுக.
இவ்வகையில் $\lambda = \mu = 1 - q$ என நிறுவுக.

44. $2x^2 - qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha + 1, \beta + 2$ ஆகும்; இங்கு α, β என்பன $x^2 - bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்களாகவும், $\alpha \geq \beta$ ஆகவும் உள்ளது. q, r என்பவற்றை b, c இல் காண்க. $\alpha = \beta$ ஆகும்போது $q^2 = 4(2r + 1)$ எனக்காட்டுக.

45. (i) α, β என்பன இரண்டும் நேராகவும், α^2, β^2 என்பன $x^2 - bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகவும் இருப்பின், (இங்கு $b > 2c > 0$), α, β ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) $px^2 - 8x + p - 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை எனின் p இன் வீச்சுயாது?
$x^2 - px + p = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களும் மெய்யானவை எனத்தரப்படின் p இன் புதியவீச்சு யாது?

46. $f(x) \equiv (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + (x - a)(x - b)$ ஆகும்.
[இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள் எல்லாம் வேறுவேறானவை]
$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாடு மெய்யான வேறுவேறான (p, q என்க) இரு மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.
$p + q, \; pq$ என்பவற்றை a, b, c இல் காண்க.

(i) p, b, q என்பன கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின் c, b, a கூட்டல் விருத்தியில் இருக்கும் எனவும் $f(a) = f(c) = -2f(b)$ எனவும் காட்டுக.

(ii) c, b, a என்பன பெருக்கல் விருத்தியில் இருப்பின் $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமையும் எனவும் காட்டுக.

47. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடிக் கோடுகளுக்கிடையேயுமான கோணத்தைக் காண்க.

(i) $3x^2 + 2xy - 2y^2 = 0$ (iii) $2x^2 + xy - 4y^2 = 0$

(ii) $x^2 + xy - 5y^2 = 0$ (iv) $x^2 - 3xy - y^2 = 0$

48. பின்வரும் சோடிக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைத் தனித்தனியாகக் காண்க..

(i) $3x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 15y - 28 = 0$

(ii) $2x^2 + xy - y^2 + 3x - 3y - 2 = 0$

49. (i) $3x^2 - 8xy - 3y^2 = 0$ ஆல் தரப்படும் நேர் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைத் தனித்தனியாகக் காண்க.

(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் நேர்கோடுகளில் ஒன்று $(1, 2)$ இற் கூடாகவும், மற்றையது $(-3, 4)$ இற் கூடாகவும் செல்கின்றது. $a : h : b$ ஐக் காண்க.

(iii) $x^2 + 2hxy - y^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

50. (i) $x^2 - xy - ky^2 + 2y + x - 1 = 0$ எனும் சமன்பாடு ஒருசோடி நேர்கோடுகளைக் குறிக்குமெனின் k இன் பெறுமானம் யாது?

(ii) $y^2 - 4xy + x^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் இரு நேர்கோடுகளும் ஒன்றையொன்று 60° இல் இடைவெட்டுகின்றன எனக்காட்டுக. அவற்றுள் ஒருநேர்கோடு x அச்சுடன் 15° ஐ அமைக்கின்றது எனக்காட்டி, ஒவ்வொரு நேர்கோட்டுடனும் 60° ஐ அமைப்பதும், உற்பத்தியினூடு செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. இருபடிச்சார்புகள், விகிதமுறு சார்புகள்

இருபடிச்சார்புகள் (*Quadratic Functions*)

a, b, c என்பன மெய்யெண்களாகவும், $a \neq 0$ ஆகவுமிருக்க

$f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ என்பது, மாறி x இலான இருபடிச் சார்பு ஆகும்.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

வகை $I : a > 0$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$x = -\frac{b}{2a}$ இல் $f(x) = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$x \neq -\frac{b}{2a}$ எனின், $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$

ஆகவே $x \neq -\frac{b}{2a}$ எனில், $f(x) > \frac{4ac - b^2}{4a}$

$a > 0$ எனின் $x = -\frac{b}{2a}$ இல் $f(x)$ இற்கு இழிவு உண்டு.

இழிவுப்பெறுமானம் $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ஆகும்.

$a > 0$

(i) $b^2 - 4ac < 0$ எனின்

$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் > 0

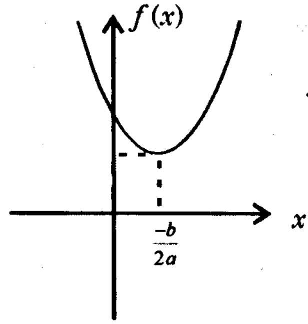
(ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனின்

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $= 0$

(iii) $b^2 - 4ac > 0$ எனின்

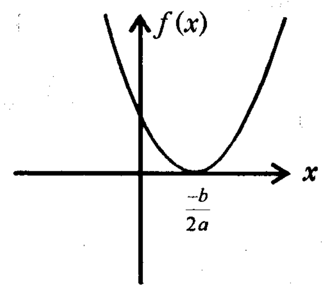
$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$

$f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் < 0



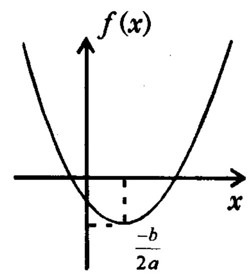
$a > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$



$a > 0$

$b^2 - 4ac = 0$



$a > 0$

$b^2 - 4ac > 0$

(i) $b^2 - 4ac < 0$ எனின், $y = f(x)$ எனும் வளையி x அச்சை வெட்டாது.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனின், $y = f(x)$ எனும் வளையி x அச்சைத் தொடும்.

(iii) $b^2 - 4ac > 0$ எனின், $y = f(x)$ எனும் வளையி x அச்சை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

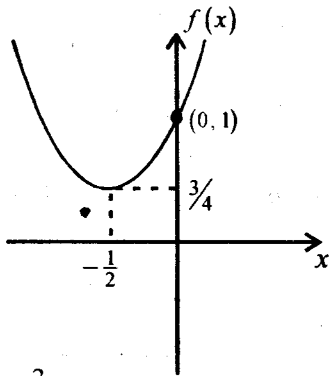
உதாரணம்

(i) $f(x) = x^2 + x + 1$

இங்கு $a = 1 > 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$



$x = -\frac{1}{2}$ இல் $f(x) = \frac{3}{4}$

$x \neq -\frac{1}{2}$ எனின் $f(x) > \frac{3}{4}$

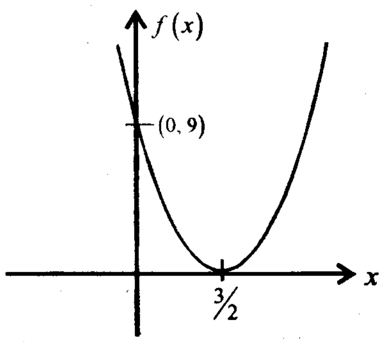
$x = -\frac{1}{2}$ இல் $f(x)$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் $\frac{3}{4}$

(ii) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

$a = 4 > 0$, $\Delta = 144 - 144 = 0$

$$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

$$= (2x - 3)^2$$



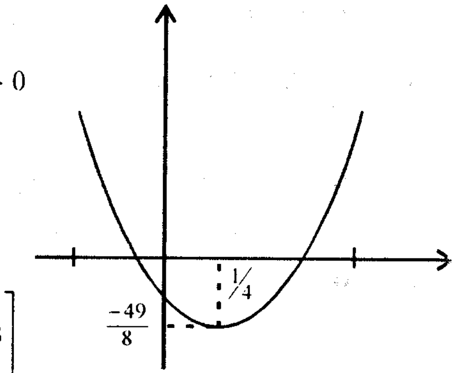
$x = \frac{3}{2}$ இல் $f(x) = 0$

$x \neq \frac{3}{2}$ எனின் $f(x) > 0$

$x = \frac{3}{2}$ இல் இழிவு, இழிவுப்பெறுமானம் $= 0$

(iii) $f(x) = 2x^2 - x - 6$

$a = 2 > 0$, $\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$



$$f(x) = 2x^2 - x - 6$$

$$= 2\left[x^2 - \frac{1}{2}x - 3\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 3\right]$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

$x = \frac{1}{4}$ இல் $f(x) = -\frac{49}{8}$

$x \neq \frac{1}{4}$ எனின் $f(x) > -\frac{49}{8}$, $x = \frac{1}{4}$ இல் இழிவுப்பெறுமானம் $= \frac{-49}{8}$

வகை *II*

***a* < o**

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$x = -\frac{b}{2a}$ இல் $f(x) = \frac{4ac - b^2}{4a}$

$x \neq -\frac{b}{2a}$ எனின் $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$

ஆகவே $x \neq -\frac{b}{2a}$ எனின் $f(x) < \frac{4ac - b^2}{4a}$

$a < 0$ எனின்,

$x = -\frac{b}{2a}$ இல் $f(x)$ இற்கு உயர்வு உண்டு.

உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ஆகும்.

$a < 0$

(i) $b^2 - 4ac < 0$ என்க.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$$

$f(x)$ இன் உயர்வுப்பெறுமானம் < 0 ஆகும்.

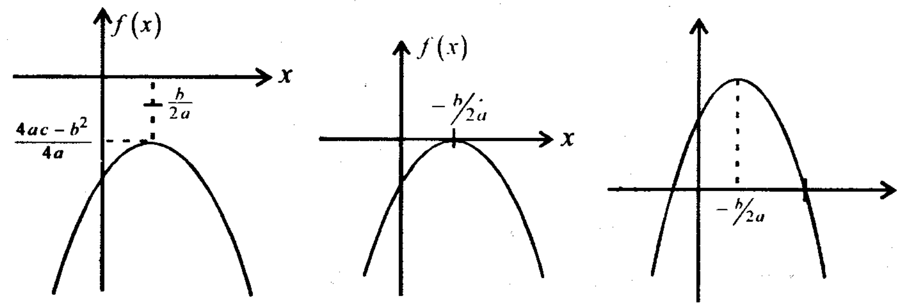
(ii) $b^2 - 4ac = 0$ என்க. $\frac{4ac - b^2}{4a} = 0$

$f(x)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் 0 ஆகும்.

(iii) $b^2 - 4ac > 0$ என்க.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$$

$f(x)$ இன் உயர்வுப்பெறுமானம் > 0 ஆகும்.



$a < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ | $a < 0$ $\Delta = 0$ | $a < 0$ $\Delta > 0$ (iii)

(i) $b^2 - 4ac < 0$ எனின், $y = f(x)$ என்னும் வளையி x அச்சை வெட்டாது.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனின், $y = f(x)$ என்னும் வளையி x அச்சைத் தொடும்.

(iii) $b^2 - 4ac > 0$ எனின், $y = f(x)$ என்னும் வளையி x அச்சை இருபுள்ளிகளில் வெட்டும்.

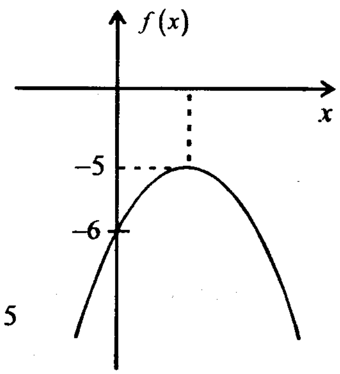
உதாரணம்

(i) $f(x) = -x^2 + 2x - 6$; $a = -1 < 0$, $\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$

$$= -\left[x^2 - 2x + 6\right]$$

$$= -\left[(x-1)^2 + 5\right]$$

$$= -(x-1)^2 - 5$$



$x = 1$ எனில் $f(x) = -5$

$x \neq -1$ எனில், $f(x) < -5$

$x = -1$ இல் உயர்வு பெறுமானம் $= -5$

(ii) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

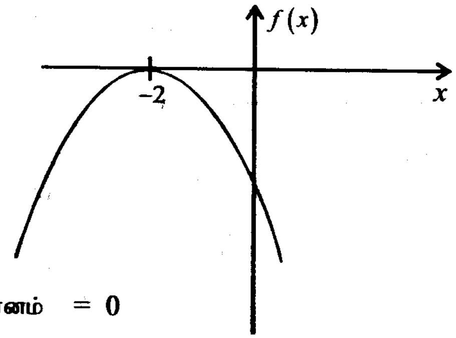
$a = -1, \quad \Delta = 16 - 16 = 0$

$f(x) = -(x+2)^2$

$x = -2$ இல் $f(x) = 0$

$x \neq -2$ எனில் $f(x) < 0$

$x = -2$ இல் உயர்வுப் பெறுமானம் $= 0$



(iii) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

$$= -\left[x^2 - 5x - 6\right]$$

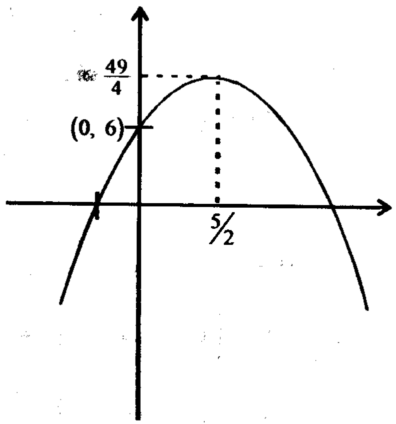
$$= -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 6\right]$$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$

$x = \frac{5}{2}$ இல் $f(x) = \frac{49}{4}$

$x \neq \frac{5}{2}$ எனின் $f(x) < \frac{49}{4}$

$x = \frac{5}{2}$ இல் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{49}{4}$



$y = ax^2 + bx + c$ இன் வடிவம் பரவளைவாகும்.

$a > 0$ ஆகவும், $b^2 - 4ac < 0$ ஆகவும் இருப்பின் x இன் எல்லாப்பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c$ நேரானது ஆகும்

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$a > 0, \quad b^2 - 4ac < 0$ ஆகையால் $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ ஆகும்.

$a > 0$ ஆதலால் x இன் எல்லாப்பெறுமானங்களுக்கும் $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$

ஆகவே x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c > 0$ ஆகும்.

அதாவது, $a > 0, \ b^2 - 4ac < 0$ எனின், x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c > 0$ ஆகும்.

மேலும் $x = -\frac{b}{2a}$ இல் $f(x)$ இன் இழிவுப்பெறுமானம் $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ஆகும்.

$a < 0$ ஆகவும், $b^2 - 4ac < 0$ ஆகவும் இருப்பின் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c < 0$ ஆகும்

$f(x) \equiv ax^2 + bx + c$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$a < 0, b^2 - 4ac < 0$ ஆகையால் $\dfrac{4ac - b^2}{4a} < 0$

$a < 0$ ஆதலால் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்கட்கும் $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$

ஆகவே x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c < 0$ ஆகும்.

மேலும் $x = \dfrac{-b}{2a}$ இல் $f(x)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $2x^2 + 2x + 3$ நேரானது எனக்காட்டுக.

$$2x^2 + 2x + 3 = 2\left[x^2 + x + \frac{3}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right]$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$$\geq \frac{5}{2} > 0$$

[x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$]

$\therefore$ x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $2x^2 + 2x + 3$ நேரானதாகும்.

உதாரணம் 2

$y = 3x^2 + 5x + k$ என்ற சார்பின் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) வளையி x அச்சைத் தொடுமெனின்

(ii) வளையி x அச்சை வெட்டுமெனின், k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$y = 3x^2 + 5x + k$$

$$= 3\left[x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{k}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{k}{3} - \frac{25}{36}\right]$$

$$= 3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{12k - 25}{36}\right]$$

$$= 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{12k - 25}{12}$$

$\therefore$ $x = -\dfrac{5}{6}$ இல், $y = \dfrac{12k - 25}{12}$

$x \neq -\dfrac{5}{6}$ எனின் $y > \dfrac{12k - 25}{12}$

$\therefore$ சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் $\dfrac{12k - 25}{12}$

(i) வளையி x அச்சைத் தொடுமெனின் $\dfrac{12k - 25}{12} = 0$

$$k = \frac{25}{12}$$

(ii) வளையி x அச்சை வெட்டுமெனின் $\dfrac{12k - 25}{12} < 0$

$$k < \frac{25}{12}$$

[குறிப்பு : இருபடிச்சார்பு வளையி $y = ax^2 + bx + c$

x அச்சைத் தொடுவதற்கு $b^2 - 4ac = 0$

$y = 3x^2 + 5x + k$, x அச்சைத் தொடும் எனின்,

$$\Delta = 25 - 12k = 0, \qquad k = \frac{25}{12}$$

x அச்சை வெட்ட வேண்டுமெனின் $\Delta > 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$25 - 12k > 0$$

$$25 > 12k$$

$$k < \frac{25}{12} \quad]$$

உதாரணம் 3

$f(x) = 9 + 2(k+4)x + 2kx^2 \ (k \neq 0)$

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x)$ நேராகுமாறு k இன் பெறுமானவீச்சைக் காண்க.

$$f(x) = 9 + 2(k+4)x + 2kx^2$$

$$= 2kx^2 + 2(k+4)x + 9$$

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x) > 0$ ஆவதற்கு

(i) x^2 இன் குணகம் $2k > 0$ ஆதல் வேண்டும். **(ii)** $\Delta < 0$ ஆதல் வேண்டும்.

(i) $2k > 0 \ \Rightarrow \ k > 0 ------(1)$

(ii) $\Delta < 0 \ \Rightarrow \ 4(k+4)^2 - 72k < 0$

$$(k+4)^2 - 18k < 0$$

$$k^2 - 10k + 16 < 0$$

$$(k-2)(k-8) < 0$$

$$\therefore \ 2 < k < 8 ------(2)$$

(1), (2) இலிருந்து, $2 < k < 8$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

p, x என்பவற்றின் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு

$f(x) \equiv (2p^2+1)x^2 + 2(4p^2-1)x + (2p^2+1)$ ஆகும்.

சார்பு இழிவாக இருக்கும் p, x இன் பெறுமானங்களையும், சார்பின் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் காண்க.

$$(2p^2+1)x^2 + 2(4p^2-1)x + 4(2p^2+1)$$

$$= 2p^2(x^2 + 4x + 4) + (x^2 - 2x + 4)$$

$$= 2p^2(x+2)^2 + (x-1)^2 + 3$$

p, x இன் எல்லாப் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $2p^2(x+2)^2 \geq 0$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

$p = 0, \ x = 1$ ஆகும் போது மட்டும் $2p^2(x+2)^2 + (x-1)^2 = 0$

$\therefore p = 0, \ x = 1$ ஆக சார்பின் இழிவுப் பெறுமானம் 3 ஆகும்.

விகிதமுறு சார்புகள் (*Rational Functions*)

$P(x), Q(x)$ என்பன x இன் இருபல்லுறுப்புச் சார்புகளாக இருக்க $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ என்பது $(Q(x) \neq 0)$, x இல் விகிதமுறு சார்பு எனப்படும்.

$P(x)$இன்படி $< Q(x)$ இன்படி எனின், $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ முறைமை விகிதமுறு சார்பு (*proper rational function*) எனப்படும்.

$P(x)$ இன் படி $\geq Q(x)$ இன் படி எனின் $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ முறைமையில் விகிதமுறுசார்பு (*improper rational function*) எனப்படும்.

உதாரணம்

$\dfrac{x+4}{x^2+x+1}$, $\dfrac{x^2-x+1}{x^3+2x^2-4}$ - முறைமை விகிதமுறு சார்புகள்

$\dfrac{2x^2-3x-5}{x+2}$. $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ - முறைமையில் விகிதமுறு சார்புகள் ஆகும்.

உதாரணம் 5

x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $\dfrac{6x+5}{3x^2+4x+2}$ எனும் சார்பு $-\dfrac{3}{2}$ இற்கும் 3 இற்கும் வெளியேயுள்ள எந்த ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காதெனக் காட்டுக.

$\dfrac{6x+5}{3x^2+4x+2} = y$ என்க.

$$3yx^2 + (4y-6)x + (2y-5) = 0$$

$$\Delta = (4y-6)^2 - 4 \times 3y(2y-5)$$

$$= -8y^2 + 12y + 36$$

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$

$$-8y^2 + 12y + 36 \geq 0$$

$$2y^2 - 3y - 9 \leq 0$$

$$(2y+3)(y-3) \leq 0$$

$$\therefore \quad -\frac{3}{2} \leq y \leq 3$$

$\therefore$ சார்பு $-\dfrac{3}{2}$ இற்கும், 3 இற்கும் வெளியேயுள்ள எந்த ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

உதாரணம் 6

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{x^2-12}{2x-7}$ எனும் சார்பு 3 இற்கும் 4 இற்குமிடையிலுள்ள எந்தவொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது எனக்காட்டுக.

$\dfrac{x^2-12}{2x-7} = y$ என்க.

$$x^2 - 2yx + (7y-12) = 0$$

$$\Delta = 4y^2 - 4(7y-12)$$

$$= 4\left[y^2 - 7y + 12\right]$$

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$

$$4\left[y^2 - 7y + 12\right] \geq 0$$

$$y^2 - 7y + 12 \geq 0$$

$$(y-4)(y-3) \geq 0$$

$y \leq 3$ அல்லது $y \geq 4$

$\therefore$ சார்பு 3 இற்கும் 4 இற்குமிடையில் எந்தவொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

உதாரணம் 7

x மெய்யாக இருக்க $\dfrac{(x-2)^2+16}{2(x+2)}$ என்னும் சார்பு $-4(\sqrt{2}+1)$ இற்கும் $4(\sqrt{2}-1)$ இற்குமிடையிலுள்ள எந்தவொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது எனக்காட்டுக.

$\dfrac{(x-2)^2+16}{2(x+2)} = y$ என்க.

$$x^2 - (4+2y)x + (20-4y) = 0$$

$$\Delta = (4+2y)^2 - 4(20-4y)$$
$$= 4\left[y^2 + 4y + 4 - 20 + 4y\right]$$
$$= 4\left[y^2 + 8y - 16\right]$$

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$

$$y^2 + 8y - 16 \geq 0$$
$$(y+4)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$$
$$\left(y + 4 - 4\sqrt{2}\right)\left(y + 4 + 4\sqrt{2}\right) \geq 0$$
$$\left[y - 4\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\left[y - \left\{-4\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\right] \geq 0$$
$$y \leq -4\left(\sqrt{2}+1\right) \quad \text{அல்லது} \quad y \geq 4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$\therefore$ தரப்பட்ட கோவை $-4\left(\sqrt{2}+1\right)$ இற்கும், $4\left(\sqrt{2}-1\right)$ இற்குமிடையில் எந்தவொரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

உதாரணம் 8

$\dfrac{x^2+3x-4}{5x-k}$ எனும் சார்பு பொருத்தமான x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தையும் எடுக்குமெனின் k இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\frac{x^2+3x-4}{5x-k} = y \quad \text{என்க.}$$
$$x^2 + (3-5y)x - 4(ky-4) = 0$$
$$\Delta = (3-5y)^2 - 4(ky-4)$$
$$= 25y^2 - (4k+30)\,y + 25$$

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$25y^2 - (4k+30)\,y + 25 \geq 0$$

y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$$25y^2 - (4k+30)\,y + 25 \geq 0 \quad \text{ஆக இருக்க}$$

(i) y^2 இன் குணகம் > 0

(ii) $\Delta \leq 0$ ஆதல் வேண்டும்.

y^2 இன் குணகம் $25 > 0$

$$\Delta = (4k+30)^2 - 4 \times 25 \times 25 \leq 0$$
$$k^2 + 15k - 100 \leq 0$$
$$(k+20)(k-5) \leq 0$$
$$-20 \leq k \leq 5$$

உதாரணம் 9

$a > 4$ எனின், $\dfrac{x^2-a}{x-2}$ என்னும் சார்பு, x இன் வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்கு யாதுமொரு தரப்பட்ட பெறுமானத்தை எடுக்கும் எனக்காட்டுக.

$a < 4$ எனின் குறித்த இரு பெறுமானங்களுக்கிடையில் யாதுமொரு பெறுமானத்தையும் சார்பு எடுக்காது எனவும் காட்டுக.

$$\frac{x^2-a}{x-2} = y \quad \text{என்க.}$$
$$x^2 - yx + (2y-a)$$
$$\Delta = y^2 - 4(2y-a)$$
$$= y^2 - 8y + 4a$$

i) y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $\Delta > 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$$y^2 - 8y + 4a$$

இங்கு y^2 இன் குணகம் $1 > 0$

$\Delta = 64 - 16a < 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$a > 4$ ஆதல் வேண்டும்.

$a > 4$ எனின் சார்பு எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்.

(ii) $a < 4$ என்க.

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$

$$y^2 - 8y + 4a \geq 0$$

$$y^2 - 8y + 16 + 4a - 16 \geq 0$$

$$(y-4)^2 - \left(2\sqrt{4-a}\right)^2 \geq 0$$

$$\left[y - 4 - 2\sqrt{4-a}\right]\left[y - 4 + 2\sqrt{4-a}\right] \geq 0$$

$$\left[y - \left\{4 + 2\sqrt{4-a}\right\}\right]\left[y - \left\{4 - 2\sqrt{4-a}\right\}\right] \geq 0$$

$y \leq 4 - 2\sqrt{4-a}$ அல்லது $y \geq 4 + 2\sqrt{4-a}$

சார்பு $4 - 2\sqrt{4-a}$ இற்கும் $4 + 2\sqrt{4-a}$ இற்குமிடையில் எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்காது.

உதாரணம் 10

பின்வருவனவற்றைப் பகுதிப்பின்னங்களாக்குக.

(i) $\dfrac{x+7}{x^2 - x - 6}$ **(ii)** $\dfrac{3x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 8x}$ **(iii)** $\dfrac{3x^2 + 9x + 13}{(x-1)\left(x^2 + 2x + 5\right)}$

(i) $$\frac{x+7}{x^2 - x - 6} = \frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

எனவே $x + 7 = A(x+2) + B(x-3)$ ——— (1)

$x = -2$ எனின், $-2 + 7 = O + B(-2-3)$

$5 = -5B$

$B = -1$

$x = 3$ எனின், $3 + 7 = A(3+2) + o$

$5A = 10$

$A = 2$

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{(x-3)} - \frac{1}{(x+2)}$$

அல்லது

(1) இலிருந்து x இன் குணகத்தைச் சமப்படுத்த

$A + B = 1$

மாறிலி உறுப்பைச் சமப்படுத்த

$2A - 3B = 7$

இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க, $A = 2, \ B = -1$

$$\frac{x+7}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{(x-3)} - \frac{1}{x+2}$$

(ii) $$\frac{3x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{3x^2 - 7}{x(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2)(x+4) + Bx(x-2) + Cx(x+4)}{x(x+4)(x-2)}$$

$3x^2 - 7 = A(x-2)(x+4) + Bx(x-2) + Cx(x+4)$ ——— (1)

$x = 0$ எனின், $-7 = -8A$; $\quad A = \dfrac{7}{8}$

$x = -4$ எனின், $41 = 24B$; $B = \frac{41}{24}$

$x = 2$ எனின், $5 = 12C$; $C = \frac{5}{12}$

$$\frac{3x^2 - 7}{x^2 + 2x^2 - 8x} = \frac{7}{8x} + \frac{41}{24(x+4)} + \frac{5}{12(x-2)}$$

அல்லது

(1) இலிருந்து x^2 இன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$A + B + C = 3$

x இன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$2A - 2B + 4C = 0$

மாறிலி உறுப்பைச் சமப்படுத்த

$-8A = -7$

மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் $A = \frac{7}{8}, \quad B = \frac{41}{24}, \quad C = \frac{5}{12}$

$$\therefore \frac{3x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{7}{8x} + \frac{41}{24(x+4)} + \frac{5}{12(x-2)}$$

(iii) $$\frac{3x^2 + 9x + 13}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + c}{x^2 + 2x + 5}$$

$$= \frac{A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + c)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$$

$$3x^2 + 9x + 13 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + c)(x-1)$$

$$= (A + B)x^2 + (2A - B + c)x + (5A - c)$$

x^2 இன் குணகம்; $A + B = 3$

x இன் குணகம்; $2A - B + C = 9$

மாறிலி $5A - C = 13$

இவற்றிலிருந்து, $A = \frac{25}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{21}{8}$

$$\therefore \frac{3x^2 + 9x + 13}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{25}{8(x-1)} - \frac{(x-21)}{8(x^2 + 2x + 5)}$$

உதாரணம் 11

பகுதிப்பின்னங்களாக்குக.

(i) $\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$ **(ii)** $\frac{3x^2 - 5}{(x+2)^3}$

(i) $$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$9 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$$

$$9 = (A + B)x^2 + (4A + B + C)x + (4A - 2B - C)$$

x^2 இன் குணகம் : $A + B = 0$

x இன் குணகம் : $4A + B + C = 0$

மாறிலி : $4A - 2B - C = 9$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து $A = 1, \quad B = -1, \quad C = -3$

$$\therefore \frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

(ii) $$\frac{3x^2-5}{(x+2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x+2)+C}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{Ax^2+(4A+B)x+(4A+2B+C)}{(x+2)^3}$$

x^2 இன் குணகம் : $A=3$

x இன் குணகம் : $4A+B=0$

மாறிலி : $4A+2B+C=-5$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து $A=3, \quad B=-12, \quad C=7$

ஆகவே $$\frac{3x^2-5}{(x+2)^3}=\frac{3}{x+2}-\frac{12}{(x+2)^2}+\frac{7}{(x+2)^3}$$

$\frac{f(x)}{g(f)}$ என்னும் வடிவிலுள்ள சார்புகளில் $f(x)$ இன்படி $< g(x)$ இன்படி ஆக இருக்கையில் பகுதிப்பின்னங்களாக எழுதும் முறை மேலே தரப்பட்டுள்ளது. $f(x)$ இன்படி $\geq g(x)$ இன்படி ஆக இருக்கையில் பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதும் முறை அடுத்த உதாரணத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 12

பகுதிப்பின்னங்களாக்குக.

(i) $\frac{x^2+7x-14}{(x+5)(x-3)}$ **(ii)** $\frac{x^3+4x^2-x-17}{(x+3)(x-2)}$

$$\frac{x^2+7x-14}{(x+5)(x+3)}=A+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x-3}$$

$$x^2+7x-14=A(x+5)(x-3)+B(x-3)+C(x+5)$$

$$=Ax^2+(2A+B+C)x+(-15A-3B+5C)$$

x^2 இன் குணகம் : $A=1$

x இன் குணகம் : $2A+B+C=7$

மாறிலி : $-15A-3B+5C=-14$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து, $A=1, B=3, C=2$ ஆகும்.

$$\frac{x^2+7x-14}{(x+5)(x-3)}=1+\frac{3}{x+5}+\frac{2}{x-3}$$

(ii) $$\frac{x^3+4x^2-x-17}{(x+3)(x-2)}=Ax+B\frac{C}{x+3}+\frac{D}{x-2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x+3)(x-2)+C(x-2)+D(x+3)}{(x+3)(x+2)}$$

$$x^3+4x^2-x-17=(Ax+B)(x+3)(x-2)+C(x-2)+D(x+3)$$

$x=2$ எனின், $8+16-2-17=D(2+3)$

$5=5D$

$D=1$

$x=-3$ எனின், $-27+36+3-17=-5C$

$-5=-5C$

$C=1$

$x=0$ எனின், $-17=-6B-2C+3D$

$6B=18$

$B=3$

$x=1$ எனின், $1+4-1-17=-4(A+B)-C+4D$

$-13=-4A-9$

$A=1$

$$\frac{x^3+4x^2-x-17}{(x+3)(x-2)}=x+3+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}$$

பயிற்சி 4

1. பின்வரும் சார்புகளின் பருமட்டியான வரைபுகளை வரைக. அவற்றின் உயர்வு அல்லது இழிவுப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் எழுதுக. இங்கு $a, b > 0$ உம் $c < 0$ உம் ஆகும்.

(i) $f(x) = (x-a)^2 + b$ (ii) $f(x) = (x+a)^2 + b$

(iii) $f(x) = (x-a)^2 - b$ (iv) $f(x) = (x+a)^2 - b$

(v) $f(x) = b - (x-a)^2$ (vi) $f(x) = b - (x+a)^2$

(vii) $f(x) = c - (x-a)^2$ (viii) $f(x) = c - (x+a)^2$

2. x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $3x^2 + 6x + 20$ நேரானது எனக்காட்டுக.

3. $5 + 6x - x^2$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $12x^2 + 24x + 13$ இன் இழிவுப்பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. $y = 2x^2 - 3x + c$ என்ற வளையி
(i) x அச்சைத் தொடுவதற்குரிய
(ii) x அச்சை வெட்டுவதற்குரிய c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. வளையி $y = ax^2 + (ax+b) + b$ x அச்சைத் தொடுவதற்கு a, b இற்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

7. எல்லா மெய் x இற்கும் $2x^2 + 4x - 22 + m(x+5) > 0$ ஆக இருப்பதற்கான m இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

8. a, x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $(a^2+1)x^2 - 2a^2 x + (a^2-1)$, எனும் சார்பின் பெறுமானம் ஒருபோதும் -1 இலும் குறையாதென நிறுவுக.

9. $y = (a-b-c)x^2 + ax + b + c$ என்பதால் தரப்படும் வளையி x அச்சை. இரு வேறு புள்ளிகளில் வெட்டும் அல்லது x அச்சைத் தொடும் என நிறுவுக.
வளையி x அச்சைத் தொடுவதற்கு a, b, c இற்கிடையேயான தொடர்பு ஒன்றினைக் காண்க.

10. $k(x+2)^2 - (x-1)(x-2)$, $(k \neq 1)$ என்னும் இருபடிச்சார்பு x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கு மட்டும் பூச்சியமாகுமாறு k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(a) சார்பு இழிவுப்பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
(b) சார்பின் பெறுமானம் $\frac{25}{2}$ இலும் அதிகரிக்காமலிருக்கும் k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
(c) $k = \frac{1}{2}$, $k = \frac{5}{2}$ ஆகிய வகைகளில் வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

11. $ax^2 + bx + c \equiv a(x+p)^2 + q$ $(a \neq 0)$ எனின், q ஐ, a, b, c இன் உறுப்புக்களில் காண்க.
$b^2 < 4ac$ எனின், தரப்பட்ட கோவை $ax^2 + bx + c$ ஆனது x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் a இன் குறியையே கொண்டிருக்குமென உய்த்தறிக.
$g(x) = (k-6) + (k-3)x - x^2$ எனின், $g(x)$ எப்போதும் மறையாக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானவீச்சைக் காண்க.

12. $f(x) \equiv 3x^2 - 5x - k$, x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் 1 இலும் பெரிதாக இருப்பதற்கான k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
k இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x = \frac{5}{6}$ ஆகும்போது $f(x)$ இற்கு இழிவுப் பெறுமானம் உண்டெனக் காட்டுக.
இழிவுப் பெறுமானம் பூச்சியமெனின் k ஐக் காண்க.

13. $a > 0, \quad b^2 < 4ac$ எனின் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c > 0$ என நிறுவுக.

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $x^2 + kx + 3 + k$ நேராக இருக்கும் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $k\left(x^2 + kx + 3 + k\right)$ நேராக இருக்கும் k இன் பெறுமானங்களை உய்த்தறிக.

14. (a) $f(x) = nx^2 - mx + (m - n)$ என்ற சார்பின் வளையியானது

(i) $m = 2n$ எனின், x அச்சைத் தொடும் எனக்காட்டுக.

x அச்சை $(\alpha, 0)$ எனும் புள்ளியில் தொடுமெனின் α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) [illegible] $2n$ எனின், வளையி x அச்சை இரு வேறுபுள்ளிகளில் வெட்டுமெனக்காட்டுக.

(b) $y = ax^2 + 2bx + c + k\left(x^2 + 1\right)$ இனால் தரப்படும் வளையியைக் கருதுக. $a = c$ ஆகவும், $b = 0$ ஆகவும் இருந்தாலன்றி k இன் இரு வேறு பெறுமானங்களுக்கு வளையி x அச்சைத் தொடும் என நிறுவுக.

$y = ax^2 + 2bx + c$ என்னும் வளையி x அச்சைத் தொடும் எனின், மேலே தரப்பட்ட வளையி x அச்சைத் தொடுவதற்கான k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

15. x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் சார்பு $\dfrac{x+2}{x^2 + 3x + 6}$, $-\dfrac{1}{5}$ இலும் குறைவாகவோ அல்லது $\dfrac{1}{3}$ இலும் கூடுதலாகவோ இருக்க முடியாது எனக்காட்டுக.
x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு, (ஏதும் இருப்பின்) சார்பு இப்பெறுமானங்களை எடுக்கும் எனக்காண்க.

16. p, q என்பன மெய்யாகவும், $q > 4$ ஆகவும் இருப்பின், $\dfrac{x^2 + px + p}{x^2 + qx + q}$ எனும் சார்பு $\dfrac{p}{q}$ இற்கும் $\dfrac{p-4}{q-4}$ இற்குமிடையில் இருக்காது எனக்காட்டுக.

17. α, β இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் [illegible] $\alpha - \beta$ என்னும் சார்பின் பெறுமானம் α இற்கும் β இற்கும் இடையே இருக்காது எனக்காட்டுக. $(\alpha \neq \beta)$

18. x மெய்யாக இருக்க, சார்பு $\dfrac{x^2 - 1}{(x-2)(x+k)}$ எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் எடுக்கக் கூடியதாக k இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க.

19. x மெய்யாகவும், $y = \dfrac{x^2 + 2x + \lambda}{2x - 3}$ எனவும் தரப்பட்டிருக்க, y எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கக்கூடிய λ இன் அதிஉயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

20. x மெய்யாக இருக்க $\dfrac{kx^2 - 6x + 4}{4x^2 - 6x + k}$ என்பது, எந்த ஒரு மெய்ப் பெறுமானத்தையும் எடுக்கக்கூடிய k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

21. x மெய்யாக இருகக் $\dfrac{x^2 + p}{x - 1}$ எந்த ஒரு மெய்ப் பெறுமானத்தையும் எடுக்கக்கூடிய p இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

$p = 3$ ஆகும் போது $\dfrac{x^2 + p}{x - 1}$ எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்களின் வீச்சுயாது?

22. x மெய்யாகவும் $y = \dfrac{x+\lambda}{(x+2)(x+3)}$ ஆகவும் இருக்க,

(i) $\lambda = 1$ ஆக, y ஆனது $3 - 2\sqrt{2}$ இற்கும் $3 + 2\sqrt{2}$ இற்குமிடையிலுள்ள எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்காது எனக்காட்டுக.

(ii) $\lambda = 1$ ஆக y நேராக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) y எந்த ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கக்கூடியதான λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

23. மாறிலி a இன் பெறுமானம், இருபடிச்சார்பு $f(x) = x^2 + 4x + a + 3$ ஒருபோதும் மறையாகாதவாறு உள்ளது.

$a\,f(x) = (x^2 + 2)(a - 1)$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையைத் தீர்மானிக்க.

சமன்பாடு சமமான மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான a இன் பெறுமானம் யாது?

24. $\dfrac{ax^2 + 1}{x^2 + x + a} = 2$ எனின், a இன் பெறுமானத்தின் எல்லைகளைக் காண்க.

25. $3x^2 - 6xy + 10y - 3 = 0$ என்னும் x இலான சமன்பாடு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. இந்நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்படின் மூலங்கள் சமமாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை யாது?

26. **(i)** a, b, c என்பன மெய் ஒருமைகளாகவும், $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

λ என்பது யாதுமொரு ஒருமையாக இருக்க $\alpha + \lambda,\ \beta + \gamma$ என்பவற்றை மூலங்களாக உடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\alpha + \dfrac{b}{2a},\ \beta + \dfrac{b}{2a}$ என்னும் இரு எண்கள்

ஒன்றுக்கொன்று எதிர்க்குறிகளை உடையன எனவும் அவை இரண்டும் மெய்யாகவோ அல்லது முற்றாகக் கற்பனையாகவோ உள்ளன எனவும் காட்டுக.

(ii) $m = 3$ அல்லது m -1 என இருந்தால் - அவ்வாறிருந்தால் மாத்திரமே $x^2 + x + 1 = mx$ என்னும் இருபடிச்சமன்பாடானது இரு பொருந்தும் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக்காட்டுக.

$y = x^2 + x + 1$ எனும் சார்பின் பரும்படியான வரைபை வரைக.

$y = 3x,\ y = -x$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இரண்டினதும் வரைபுகளை அதேபடத்தில் தெளிவாகக் குறித்துக் காட்டுக.

$m > 3$ அல்லது $m < -1$ ஆக இருந்தால் - அவ்வாறிருந்தால் மாத்திரமே $x^2 + x + 1 = mx$ என்னும் இருபடிச்சமன்பாடானது இரு மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருக்குமென்பதை இவ்வரைபுகளிலிருந்து உய்த்தறிக.

27. **(i)** $f(x) \equiv ax^2 + 2bx + c,\quad g(x) = 2(ax + b)$ என்க; இங்கு a, b, c என்பன மெய் ஒருமைகள். பின்வரும் இருபடிக்கோவையின் பிரித்துக் காட்டியை எழுதுக.

$F(x) \equiv f(x) + \lambda\, g(x)$; இங்கு λ மெய் ஒருமை ஆகும்.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யாகவும் வேறுவேறாகவும் இருப்பின் $F(x) = 0$ இன் மூலங்களும் மெய்யாகவும் வேறு வேறாகவும் இருக்கும் என உய்த்தறிக.

(ii) $y = x^2 - x - 2,\qquad y = 2x - 1,\qquad y = -2x + 1$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்குரிய வளையியையும், நேர்கோடுகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

$x^2 - x - 2 + (2x - 1) = 0$

$x^2 - x - 2 - (2x - 1) = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றினதும் ஒருமூலம் தான் $x^2 - x - 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கிடையில் அமையும் என உய்த்தறிக.

28. $p < -1$ எனின், பொருத்தமான x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{x+1}{(x-p)(x-1)}$ யாதுமொரு தரப்பட்ட பெறுமானத்தை எடுக்கும் எனக்காட்டுக.

29. $a < -2$ அல்லது $a > 1$ ஆயின், பொருத்தமான x இன் பெறுமானங்களுக்கு $\dfrac{ax+1}{(x-1)(2x+1)}$ என்பது யாதுமொரு மெய்ப்பெறுமானத்தை எடுக்கும் எனக்காட்டுக.

30. (a) $x = 2$ என்பது $\lambda^2 x^2 + 2(2\lambda - 5)x + 8 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனின் λ இன் பெறுமானங்களையும் அவற்றிற் கொத்த மற்றைய மூலங்களையும் காண்க.

(b) x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $\lambda^2 x^2 + 2(2\lambda - 5)x + 8$ நேராக இருக்கும் λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

31. $a > 0$ ஆகவும், $b^2 - 4ac < 0$ ஆகவும் இருப்பின் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c$ நேரானது எனக்காட்டுக.

(i) x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $2x^2 + 6x + 1 + k(x^2 + 2)$ நேராகுமாறு k இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(ii) $f(x) = 4x^2 + 4px - (3p^2 + 4p - 3)$ என்பது x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேராக இருக்குமாறு p இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

$p = 0,\ p = 1$ ஆக இருக்கையில் வளையிகளை வரைந்து முடிவினை விளக்குக.

32. a, b, c ஆகியன மெய்யாக இருக்க $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ என்னும் கோவையை $f(x) \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்னும் வடிவில் எப்போதும் எழுதலாம் எனக்காட்டுக. இங்கு α, β ஆகிய இரண்டும் (i) மெய்யாக அல்லது சிக்கலாக இருக்கும்.

a யை ஒரு நேர் மாறிலியாகக் கொண்டு மேலே குறிப்பிட்ட இரு சந்தர்ப்பங்களை எடுத்துக் காட்டுவதற்கு வரைபுகள் வரைக. a ஒரு மறைமாறிலியாக இருக்கும்போது இவ்வரைபுகளில் ஏற்படும் மாற்றம் யாது?

$x = p$ ஆக இருக்கும்போது $f(x) > 0$ ஆகவும், $x = q\ (q > p)$ ஆக இருக்கும் போது $f(x) < 0$ ஆகவும் இருப்பின், $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாடானது இரு மெய்யான வேறு வேறான மூலங்களைக் கொண்டிருக்குமெனவும், அவற்றுள் ஒன்று மாத்திரமே p யிற்கும் q விற்கும் இடையில் இருக்கும் என்பதையும் மேலே எடுத்து நோக்கிய வரைபுகளைக் கொண்டு அல்லது வேறுவிதமாகக் காட்டுக.

$x^2 + b_1 x + c_1 = 0;\quad x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ என்னும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் முறையே α_1, β_1 உம் α_2, β_2 உம் ஆகும்.

$\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$ ஆயின் $f(x) \equiv 2x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 = 0$ என்னும் சமன்பாடானது இரு மெய்யான வேறுவேறான மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக்காட்டுக.

33. (i) a, b, c என்பன மெய்யெண்களாகவும், $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ ஆனது ஒன்றில் $a\left[(x-p)^2 + q^2\right]$ ஆகவோ, அன்றி $a\left[(x-p)^2 - r^2\right]$ ஆகவோ எடுத்துரைக்கப் படலாம் எனக் காட்டுவதோடு, இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

இங்கு p, q, r என்பன மெய்யெண்களாகும். $b^2 - 4ac = 0$ ஆகும்போது யாது நிகழும்?

(ii) $f_1(x) \equiv -x^2 + 2x + 3$ என்பதை மேற்கூறப்பட்ட வடிவங்களுள் ஒன்றில் எடுத்துரைத்து, இதிலிருந்து $y = f_1(x)$ என்னும் சார்பின் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$f(x)$ இன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தை இப்படத்திலே தெளிவாகக் காட்டுக.

(c) **(i)** $d > 5$ இற்கும் **(ii)** $d < 5$ இற்கும்

$y = f_2(x) \equiv x^2 - 2x + d$ என்பதன் வரைபுகளை மேலுள்ள அதே படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

$f_1(x) = f_2(x)$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாடானது $d > 5$ ஆயிருக்கையில் மெய் மூலங்கள் எதையும் கொண்டிருக்கவில்லை எனவும் $d < 5$ ஆயிருக்கையில் இரு மெய்யான வேறு வேறான மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனவும் உய்த்தறிக. $d = 5$ ஆயிருக்கையில் யாது நிகழும்?

34. a, b, c என்பன மாறிலிகளாகவும் $a < 0$ ஆகவும் இருப்பின் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c$ ஆனது மறைக் குறியை உடையதாயிருப்பதற்கான நிபந்தனை ஒன்றைப் பெறுக.

$$f(x) \equiv px^2 - 2x + 3p + 2 \text{ எனின்,}$$

(i) $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாடானது பொருந்தும் மெய்மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான p இன் இரு பெறுமானங்களையும் காண்க.

(ii) x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x) < 0$ ஆயிருப்பதற்கான p யின் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க.

$p = -2$, $p = 1$ ஆகிய வகைகளில் $y = f(x)$இன்வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

(A) பகுதிப்பின்னங்களாக்குக

1. $\dfrac{3}{x^2 - 1}$ 2. $\dfrac{x - 1}{x^2 - 5x + 4}$ 3. $\dfrac{x + 3}{x^2 + x}$

4. $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{2x(x - 3)(x + 1)}$ 5. $\dfrac{6}{(x^2 - 1)(x - 4)^2}$ 6. $\dfrac{3x - 1}{(x^2 - 9)(x^2 - 1)}$

7. $\dfrac{2}{(x - 1)(x^2 + 1)}$ 8. $\dfrac{2x^2 + x + 1}{(x - 3)(2x^2 + 1)}$ 9. $\dfrac{x^2 + 3}{x(x^2 + 1)}$

10. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2(2x + 1)}$ 11. $\dfrac{x^2 + x + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$ 12. $\dfrac{x}{(x - 1)(x - 2)^2}$

13. $\dfrac{9x}{(2x + 1)^2(1 - x)}$ 14. $\dfrac{7x + 4}{(x - 3)(x + 2)^2}$ 15. $\dfrac{x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

16. $\dfrac{x^2 + 4x - 7}{(x + 1)(x^2 + 4)}$ 17. $\dfrac{x^2 + 2}{(x^2 + 2x + 3)(2x + 1)}$ 18. $\dfrac{x^2}{(x + 1)^3}$

19. $\dfrac{2x^3 + 2x^2 + 2}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}$ 20. $\dfrac{2x + 1}{(x + 1)^2(2x - 5)}$

21. $\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{(x + 1)(x - 3)(2x - 1)}$ 22. $\dfrac{4 + 3x + 2x^2}{(1 - 2x)(1 - x^2)}$ 23. $\dfrac{4x}{x^4 - 1}$

(B) பகுதிப்பின்னங்களாக்குக

1. $\dfrac{5x^2 - 71}{(x + 5)(x - 4)}$ 2. $\dfrac{3x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 53x - 186}{(x + 4)(x^2 + 9)}$

3. $\dfrac{2x^2 + x - 5}{(x + 2)(x + 1)}$ 4. $\dfrac{x^4 + x^3 - 19x^2 - 44x - 21}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$

5. சமனிலிகள் (*Inequalities*)

a, b என்பன இரு மெய்யெண்கள் என்க. $a > b$ அல்லது $a = b$ அல்லது $a < b$ ஆக இருக்கும். $a > b$ எனின், $a = b + x$ என எழுதலாம். $a - b = x$, இங்கு $x > 0$. எனவே $a - b > 0$. $a = b$ எனின் $a - b = 0$ ஆகும். $a < b$ எனின் $a = b - x$, இங்கு $x > 0$. $a - b = -x < 0$ ஆகும்.

வரைவிலக்கணம் (*Definition*)

i. $a - b > 0$ எனின் $a > b$ எனப்படும்.
ii. $a - b < 0$ எனின் $a < b$ எனப்படும். $a, b \in R$

எடுப்புக்கள் (*Propositions*)

1. $a > b$ எனின் $a + c > b + c$, $a - c > b - c$	1. $a < b$ எனின் $a + c < b + c$, $a - c < b - c$
2. $a > b : m > 0$ எனின், $ma > mb$; $n < 0$ எனின், $na < nb$	2. $a < b$, $m > 0$ எனின் $ma < mb$; $n < 0$ எனின் $na > nb$
3. $a > b, c > d$ எனின். $a + c > b + d$	3. $a < b, c < d$ எனின் $a + c < b + d$
4. $a > b > 0$; $c > d > 0$ எனின் $ac > bd$	4. $0 < a < b$, $0 < c < d$ எனின் $ac < bd$.

நிறுவல்:

1. $a > b$ என்க.
எனவே $a - b > 0$
$(a + c) - (b + c) = a - b > 0$
அதாவது $(a + c) - (b + c) > 0$
ஆகவே, $a + c > b + c$
$(a - c) - (b - c) = a - b > 0$

அதாவது $(a - c) - (b - c) > 0$
ஆகவே $a - c > b - c$.

2. $a > b$; $m > 0$ என்க
$a > b$ ஆதலால் $(a - b) > 0$; $m > 0$
ஆகவே, $m(a - b) > 0$
$ma - mb > 0$
$ma > mb$.
$a > b$; $n < 0$ என்க.

எனவே $(a - b) > 0$, $n < 0$
$n(a - b) < 0$
$na - nb < 0$ எனவே $na < nb$.

3. $a > b$; $c > d$ என்க.
$a > b$; ஆகவே $(a - b) > 0$
$c > d$ ஆகவே $(c - d) > 0$.
$(a - b) + (c - d) > 0$
$(a + c) - (b + d) > 0$ ஆகவே $a + c > b + d$.

4. $a > b > 0$; $c > d > 0$
$a > b$; $c > 0$. $c(a - b) > 0$
$ac - ab > 0$; $ac > bc$ ——————— (1)
$c > d$, $b > 0$; $b(c - d) > 0$
$bc - bd > 0$; $bc > bd$ ——————— (2)
$\therefore ac > bd$.

உதாரணம் 1
தீர்க்க

(a) $2(1 - 2x) + x < 3(1 + x) - 7$ **(b)** $\frac{3}{4}x - 3 > \frac{1}{2} + x$

(a)
$2(1 - 2x) + x < 3(1 + x) - 7$
$2 - 4x + x < 3 + 3x - 7$
$2 - 3x < 3x - 4$
$-6x < -6$
$x > -1$

(b) இருபக்கமும் 4 ஆல் பெருக்க
$3x - 12 > 2 + 4x$
$3x - 4x > 2 + 12$
$-x > 14$
$x < -14$

(c) $x - 1 < 3x + 1 \leq x + 5$

$x - 1 < 3x + 1$	$3x + 1 \leq x + 5$
$x - 3x < 1 + 1$	$3x - x \leq 5 - 1$
$-2x < 2$	$2x \leq 4$
$x > -1$	$x \leq 2$

$$-1 < x \leq 2$$

உதாரணம் 2

பின்வரும் சமனிலிகள் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $(2x + 3)(x - 1) \geq 0$ (b) $x^2 - 5x \leq 6$

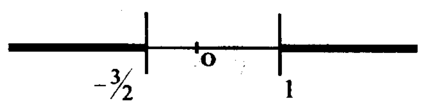
(c) $x(2x + 1)(x - 3) \geq 0$

(d) $(x - 1)(x - 2) < (x - 2)(x - 3) \leq 20$

(a) $(2x + 3)(x - 1) \geq 0$

$E = (2x + 3)(x - 1)$ என்க.

$E = 0$ எனின், $x = -\frac{3}{2}, 1$



$x < -3/2$ எனின் $E > 0$

$x = -3/2$ எனின் $E = 0$

$-3/2 < x < 1$ எனின் $E < 0$ $x \leq -\frac{3}{2}$ **அல்லது** $x \geq 1$

$x = 1$ எனின் $E = 0$

$x > 1$ எனின் $E > 0$

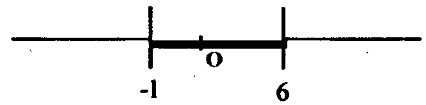
(b) $x^2 - 5x \leq 6$

$x^2 - 5x - 6 \leq 0$

$(x - 6)(x + 1) \leq 0$

$E = (x - 6)(x + 1)$

$E = 0$ எனின் $x = -1, 6$



$x < -1$ எனின் $E > 0$

$x = -1$ எனின் $E = 0$

$-1 < x < 6$ எனின் $E < 0$

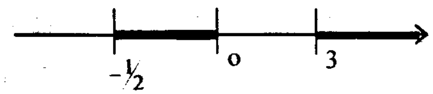
$x = 6$ எனின் $E = 0$ $-1 \leq x \leq 6$

$x > 6$ எனின் $E > 0$

(c) $x(2x + 1)(x - 3) \geq 0$

$E = x(2x + 1)(x - 3)$ என்க.

$E = 0$ எனின் $x = -\frac{1}{2}, 0, 3$



$x < -\frac{1}{2}$ எனின் $E < 0$

$x = \frac{1}{2}$ எனின் $E = 0$

$-\frac{1}{2} < x < 0$ எனின் $E > 0$

$x = 0$ எனின் $E = 0$

$0 < x < 3$ எனின் $E < 0$ எனவே தீர்வு $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$; $x \geq 3$

$x = 3$ எனின் $E = 0$

$x > 3$ எனின் $E > 0$

(d) $(x - 1)(x - 2) < (x - 2)(x - 3) \leq 20$

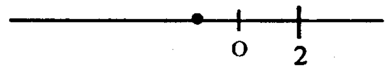
$(x - 1)(x - 2) < (x - 2)(x - 3)$

$(x - 1)(x - 2) - (x - 2)(x - 3) < 0$

$(x - 2)[(x - 1) - (x - 3)] < 0$

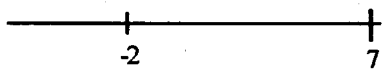
$2(x-2) < 0$

$x < 2$ ———————— (1)



$(x-2)(x-3) \leq 20$

$x^2 - 5x - 14 < 0$



$(x-7)\ (x+2) \leq 0$

$-2 \leq x \leq 7$ ———————— (2)

(1) , (2) இலிருந்து, $-2 \leq x < 2$

உதாரணம் 3

பின்வரும் சமனிலிகள் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

i. $\dfrac{2x-5}{x} < 0$ **ii.** $\dfrac{3-4x}{2-x} \leq 2$ **iii.** $\dfrac{x-1}{x-2} \geq \dfrac{x-2}{x-3}$

iv. $\dfrac{x^2+8}{x} > 9$ **v.** $-3 \leq \dfrac{(x-1)\ (x-5)}{(x-3)} \leq 3$

(i) $\dfrac{2x-5}{x} < 0$

எனவே $x(2x-5) < 0.$ $\left[\dfrac{2x-5}{x} \times x^2 < 0;\ x^2 > 0\right]$

$0 < x < 5/2$

(ii) $\dfrac{3-4x}{2-x} \leq 2$

$\dfrac{3-4x}{2-x} \leq 2,\ \dfrac{3-4x}{2-x} - 2 \leq 0 \cdot\ (x \neq 2)$

$$\frac{3-4x-2(2-x)}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{-(1+2x)}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{1+2x}{(x-2)} \leq 0$$

இருபக்கமும் $(x-2)^2$ ஆல் பெருக்க,

$$(1+2x)\ (x-2) \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 2 \qquad (x \neq 2)$$

(iii) $\dfrac{x-1}{x-2} \geq \dfrac{x-2}{x-3}$

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} \geq 0 \qquad (x \neq 2, 3)$$

$$\frac{(x-1)(x-3)-(x-2)^2}{(x-2)\ (x-3)} \geq 0$$

$$\frac{-1}{(x-2)\ (x-3)} \geq 0$$

$$(x-2)\ (x-3) \leq 0$$

$$2 < x < 3 \qquad (x \neq 2,\ 3)$$

(iv) $\dfrac{x^2+8}{x} > 9$

$$\frac{x^2+8}{x} > 9;\ \frac{x^2+8}{x} - 9 > 0$$

$$\frac{x^2-9x+8}{x} > 0$$

$$\frac{(x-1)(x-8)}{x} > 0$$

$$\frac{x(x-1)(x-8)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$$

$$x(x-1)(x-8) > 0 \qquad \therefore\ 0 < x < 1\ ;\ x > 8$$

(v) $$-3 \leq \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)} \leq 3$$

$$-3 \leq \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)}\ ;\ x \neq 3$$

$$0 \leq 3 + \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)}$$

$$\frac{(x-1)(x-5)+3(x-3)}{(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{x^2-3x-4}{(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x-4)(x+1)}{(x-3)^2} \geq 0 \quad (x \neq 3)$$

$$(x-3)(x-4)(x+1) \geq 0$$

$-1 \leq x < 3\ ;\ x \geq 4$ ———————— (A)

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)} \leq 3$$

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)} - 3 \leq 0$$

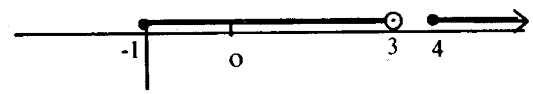
$$\frac{(x-1)(x-5)-3(x-3)}{(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-9x+14}{(x-3)} \leq 0$$

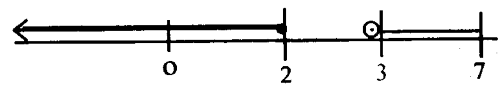
$$\frac{(x-2)(x-7)}{(x-3)} \leq 0$$

$$(x-2)(x-7)(x-3) \leq 0$$

$x \leq 2\ ;\quad 3 < x \leq 7$ ———————— (B)



(A)



(B)

(A), (B) இரண்டையும் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமானங்கள்.

$-1 \leq x \leq 2\ ;\qquad 4 \leq x \leq 7$

உதாரணம் 4

$a,\ b,\ c$ என்பன மெய்யெண்கள் எனின்,

i. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

ii. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

iii. $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$ என நிறுவுக.

i. $(a-b)^2 \geq 0$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$

ii. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ——————— (1)

$b^2 + c^2 \geq 2bc$ ——————— (2)

$c^2 + a^2 \geq 2ca$ ——————— (3)

$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 2\,(ab + bc + ca)$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

அல்லது

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

iii. $\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right) - \left(a^3 + b^3\right)^2$

$= a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6 - a^6 - 2a^3b^3 - b^6$

$= a^2b^4 + a^4b^2 - 2a^3b^3$

$= a^2b^2\left(b^2 - 2ab + a^2\right)$

$= a^2b^2(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore \left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right) \geq \left(a^3 + b^3\right)^2$

உதாரணம் 5

a, b, c, d என்பன நேரெண்களாயிருக்க,

i. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ எனக் காட்டுக.

ii. $\frac{a+b+c+d}{4} \geq (abcd)^{1/4}$ எனக் காட்டுக.

$d = \frac{a+b+c}{3}$ எனப்பிரதியிட்டு

$\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}$ என உய்த்தறிக.

$a, b, c, d > 0$

எனவே $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ என்பன மெய்யானவை

$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ——————————— (1)

இரு எண்களின் (நேர்) கூட்டல் இடை $\geq$ பெருக்கல் இடை.

ii. $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\qquad (x, y, > 0)$

$x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$ என்க

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$$

$\therefore \frac{a+b+c+d}{4} \geq (abcd)^{1/4}$ ——————— (2)

நான்கு எண்களின் கூட்டல் இடை $\geq$ பெருக்கல் இடை

(2) இல் $d = \frac{1}{3}(a+b+c)$ எனப்பிரதியிட

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq (abc)^{1/4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4}$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3/4} \geq (abc)^{1/4}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}$$

மூன்று எண்களின் கூட்டல் இடை $\geq$ பெருக்கல் இடை.

உதாரணம் 6

இரு மாறும் மெய்எண்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலி எனின், அவை சமனாயிருக்கும் போதே, அவற்றின் பெருக்கம் உயர்வாக இருக்கும் எனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ

$\left(11-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\left(7+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)$ இன் மிகக்கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

எண்கள் x, y என்க.

$x + y = k$ மாறிலி

$$xy = x(k-x)$$
$$= -x^2 + kx$$
$$= -\left[\left(x-\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right]$$
$$= -\left(x-\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$x = \frac{k}{2}$ ஆக. xy இன் உயர்வு பெறப்படும்.

xy இன் உயர்வு $= \left(\frac{k}{2}\right)^2$

$x = \frac{k}{2}$ எனின், $y = \frac{k}{2}$ $\therefore x = y$ ஆகும் போது உயர்வு பெறப்படும்.

$$a = 11 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} \qquad b = 7 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$a + b = 18$$

ab இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $\left(\frac{18}{2}\right)^2 = 81$

உதாரணம் 7

u, v, w என்பன நேராகவும், $u+v+w=1$ ஆகவும் இருப்பின்

$8\,uvw \leq (1-u)(1-v)(1-w) \leq \frac{8}{27}$ என நிறுவுக.

$1-u = v+w > 0 \qquad 1-v = w+u > 0$

$1-w = u+v > 0$

$$(1-u)(1-v)(1-w) = (v+w)(w+u)(u+v)$$
$$\geq 2\sqrt{vw}\cdot 2\sqrt{wu}\cdot 2\sqrt{uv}$$
$$= 8\,uvw$$

எனவே $8\,uvw \leq (1-u)(1-v)(1-w)$ ———— (1)

$1-u,\ 1-v,\ 1-w$ ஒவ்வொன்றும் நேரானவை $\left[\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}\right]$

$$(1-u)(1-v)(1-w) \leq \left[\frac{(1-u)+(1-v)+(1-w)}{3}\right]^3$$

$$(1-u)\ (1-v)\ (1-w) \leq \left[\frac{3-(u+v+w)}{3}\right]^3$$

$$(1-u)\ (1-v)\ (1-w) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad \text{— (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து,

$$8\,uvw \leq (1-u)\ (1-v)\ (1-w) \leq \frac{8}{27}$$

உதாரணம் 8

i. a, b என்பன நேரெண்களாகவும் $a+b=4$ ஆகவும் இருப்பின்

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{17}{2}$$ எனக் காட்டுக.

ii. a, b என்பன நேரெண்களாயின்,

$$a + \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b}$$ எனக்காட்டுக.

(i) $a, b > 0.$ $\qquad \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > 0$

$a + b = 4.$ $\qquad 0 \leq \sqrt{ab} \leq 2$

$$0 \leq ab \leq 4$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 16 - 2ab$$

$$= 16 + (-2ab)\ [-ab \geq -4]$$

$$\geq 8$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2\ b^2} \geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 8 > 0 \\ \frac{1}{a^2\ b^2} \geq 16 > 0 \end{array}\right]$$

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8 + \frac{1}{2}$$

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{17}{2}$$

(ii) $a, b, > 0$

$$a + \frac{b}{2a} \quad \sqrt{a^2 + b}$$

$$x = a + \frac{b}{2a} > 0$$

$$y = \sqrt{a^2 + b} > 0$$

$$x^2 - y^2 = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(a^2 + b\right)$$

$$= a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2} - a^2 - b$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} > 0$$

$$x^2 - y^2 > 0$$

$$(x-y)\ (x+y) > 0$$

$x > 0,\ y > 0$ எனவே $x + y > 0$

ஆகவே $x - y > 0$

$$x > y$$

$$a + \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b}$$ ஆகும்.

மட்டு (*Modulus*)

x ஒரு மெய்யெண்ணாயிருக்க,

$|x| = x\ ;\quad x \geq 0$ எனின்

$\quad\ = -x\ ;\quad x < 0$ எனின்

உதாரணம்: $|2| = 2$

$|-2| = -(-2) = 2$

உதாரணம் 9

$|2x+1| = 3$ எனின் x ஐக் காண்க.

$|2x+1| = 3$

$2x+1 = 3$ அல்லது $2x+1 = -3$

$2x = 3-1$ $2x = -3-1$

$x = 1$ $x = -2$

உதாரணம் 10

$x^2 - 5|x| + 6 = 0$ ஐத் தீர்க்க

$x \geq 0$ எனின் $|x| = x$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2, 3$

$x < 0$ எனின் $|x| = -x$

$x^2 - 5|x| + 6 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$x = -2, -3$

எனவே, தீர்வுகள் -2, -3, 2, 3

உதாரணம் 11

தீர்க்க $x^2 + |x| - 6 = 0$

$x \geq 0$ எனின்

$x^2 + |x| - 6 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$x = -3, 2$

$x \geq 0$ எனவே $x = 2$

$x < 0$ எனின்

$x^2 + |x| - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3, -2$

$x < 0$; எனவே $x = -2$

தீர்வுகள் -2, 2

உதாரணம் 12

தீர்க்க. $x^2 + 5|x| + 6 = 0$

$x \geq 0$ எனின்

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$x = -2, -3$

$x > 0$ ஆதலால் $-2, -3$ பொருந்தாது

$x < 0$ எனின்

$x^2 + 5|x| + 6 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2, 3$

$x < 0$ ஆதலால் $2, 3$ பொருந்தாது

∴ **சமன்பாட்டிற்கு மெய்த்தீர்வ இல்லை.**

உதாரணம் 13

தீர்க்க **i.** $|3x-5| > -2$ **ii.** $|3x-5| > 2$

i. எல்லா மெய் x இற்கும் $|3x-5| \geq 0$; ஆதலால்

எல்லா x இற்கும் $|3x-5| \geq 2$

ii. $|3x-5| > 2$

எல்லா x இற்கும் $|3x-5| \geq 0$

$|3x-5| > 2$ என்பதில் சமனிலியின் இருபக்கங்களும் நேரானவை.

[$a > b > 0$ எனின் $a^2 > b^2$ ஆகும்.]

$(3x-5)^2 > 2^2$

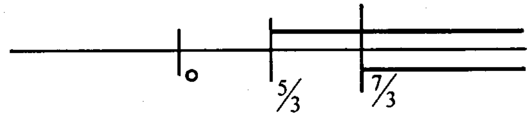
$(3x-5)^2 - 2^2 > 0$

$(3x-7)(3x-3) > 0$

$x < 1$ அல்லது $x > \frac{7}{3}$

முறை II

$|3x-5| > 2$



$x \geq \frac{5}{3}$ எனில், $|3x-5| = 3x-5$

$3x - 5 > 2$

$3x > 7$

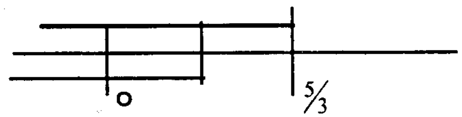
$x > \frac{7}{3}$ $\quad \therefore x > \frac{7}{3}$

$x < \frac{5}{3}$ எனில், $|3x-5| = -(3x-5)$

$|3x-5| > 2\ ;\ -(3x-5) > 2$

$-3x > -3$

$x < 1$



தீர்வு : $x < 1$ அல்லது $x > \frac{7}{3}$

$|x| \leq a$ என்க.

$a < 0$ எனில் இச்சமனிலி பொருந்தாது

$a > 0$ எனில், $\quad x \geq 0$ எனில் $|x| = x \leq a$ ——————— (1)

$x < 0$ எனில் $|x| = -x \leq a$

$x \geq -a$ ——————— (2)

(1), (2) இலிருந்து $-a \leq x \leq a$ ஆகும்.

எனவே $|x| \leq a\ (a > 0)$ எனில் $-a \leq x \leq a$ ஆகும்.

உதாரணம் :- $\quad |x-2| < 4$ எனில்,

$-4 < x-2 < 4$

$-2 < x < 6$ ஆகும்.

$|x| > a$ என்க $(a > 0)$

$x > 0$ எனின், $\quad |x| = x > a$

$x < 0$ எனின் $|x| = -x$

$-x > a$

$x < -a$

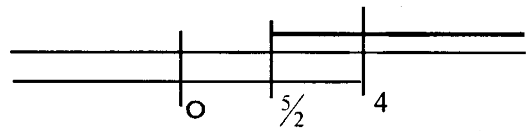
$x < -a$ அல்லது $x > a$ ஆகும்.

உதாரணம் 14

i. $|2x-5| < x-1$

ii. $|5-x| > 2+2x$

i. $|2x-5| < x-1$



$x \geq \frac{5}{2}$ எனில் $|2x-5| = 2x-5$

$|2x-5| < x-1$

$2x-5 < x-1$

$x < 4$

$\therefore \frac{5}{2} \leq x < 4$ ——————— (A)

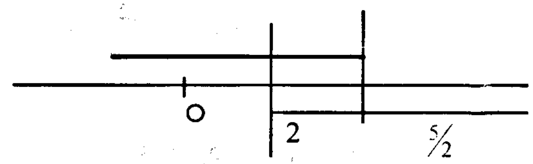
$x < \frac{5}{2}$ எனில், $|2x-5| = -(2x-5)$

$|2x-5| < x-1$

$-(2x-5) < x-1$

$6 < 3x$

$2 < x$



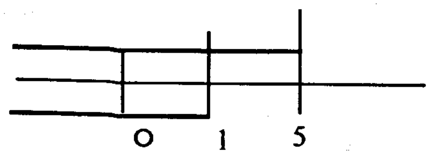
$2 < x < 5/2$ ——————— (B)

(A), (B) இலிருந்து $2 < x < 4$

(ii) $|5 - x| > 2 + 2x$

$x \leq 5$ எனில் $|5 - x| = 5 - x$

$$|5 - x| > 2 + 2x$$
$$5 - x > 2 + 2x$$
$$5 - 2 > 2x + x$$
$$3 > 3x$$
$$1 > x \qquad \therefore x < 1$$

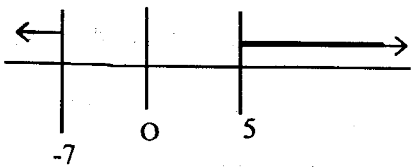


$x > 5$ எனில், $|5 - x| > 2 + 2x$

$$-(5 - x) > 2 + 2x$$
$$-5 - 2 > x$$
$$x < -7$$

இங்கு தீர்வு இல்லை

$\therefore$ தீர்வு $x < 1$ ஆகும்.



உதாரணம் 15

தீர்க்க. **i.** $|3x + 2| > |2x - 3|$

ii. $|1 - 5x| < |3 - 4x|$

i. $|3x + 2| > |2x - 3|$

$|3x + 2|, |2x - 3| \geq 0$ ஆதலால்.

$$(3x + 2)^2 > (2x - 3)^2$$
$$(3x + 2)^2 - (2x - 3)^2 > 0$$
$$(5x - 1)(x + 5) > 0$$

$x < -5$ அல்லது $x > \frac{1}{5}$

ii. $|1 - 5x| < |3 - 4x|$

$|1 - 5x|, |3 - 4x|, \geq 0$ ஆதலால்,

$$(1 - 5x)^2 - (3 - 4x)^2 < 0$$
$$(1 - 5x - 3 + 4x)(1 - 5x + 3 - 4x) < 0$$
$$(-2 - x)(4 - 9x) < 0$$
$$(x + 2)(9x - 4) < 0$$
$$-2 < x < \frac{4}{9}$$

உதாரணம் 16

தீர்க்க: $|x - 4| + |2x - 1| > 4$

$x < \frac{1}{2}$ எனின் $|x - 4| + |2x - 1| > 4$

$$-(x - 4) - (2x - 1) > 4.$$
$$-3x > -1$$
$$x < \frac{1}{3}$$

ஆகவே, $x < \frac{1}{3}$ ———————— (A)

$\frac{1}{2} \leq x < 4$ எனின்

$|x - 4| + |2x - 1| > 4$

$-(x - 4) + (2x - 1) > 4$

$x > 1$ ஆகவே $1 < x < 4$ ———————— (B)

$x \geq 4$ எனில் $\quad x-4+2x-1>4$

$3x > \quad 9$

$x > 3 \quad$ எனவே $x \geq 4$ ———————— (C)

(A), (B), (C) என்பவற்றிலிருந்து $\quad x < \frac{1}{3}$ அல்லது $x > 1$

உதாரணம் 17

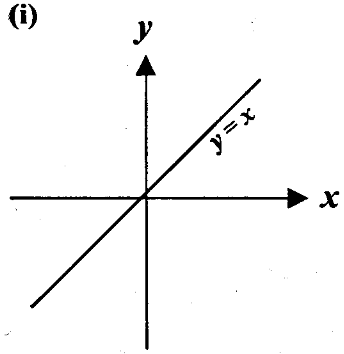
பின்வருவனவற்றின் வரைபுகளை வரைக.

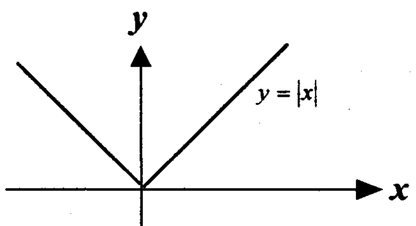
i. $y = x, \quad y = |x|$ **ii.** $y = 2x - 5, \quad y = |2x - 5|$

iii. $y = 3 - 4x, \ y = |3 - 4x|$

iv. $y = x^2 - 5x + 4, \ y = |x^2 - 5x + 4|$

(i)

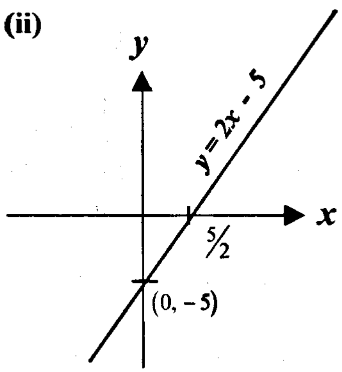


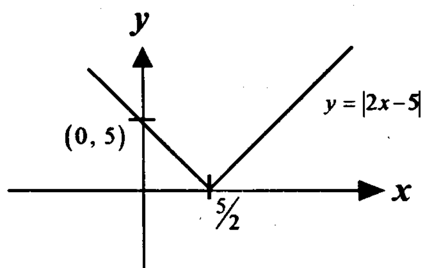


$x \geq 0$ எனின் $y = x$

$x < 0$ எனின் $y = -x$

(ii)

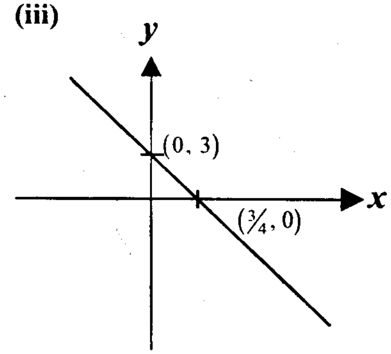


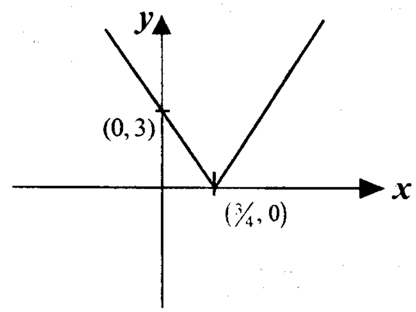


$x \geq \frac{5}{2}$ எனின் $y = 2x-5$

$x < \frac{5}{2}$ எனின் $y = -(2x-5)$

(iii)

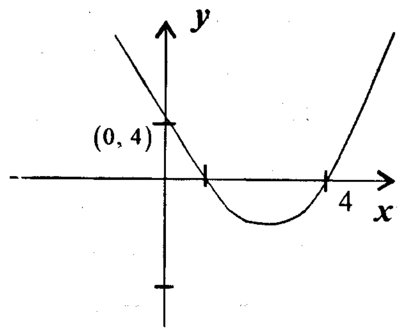


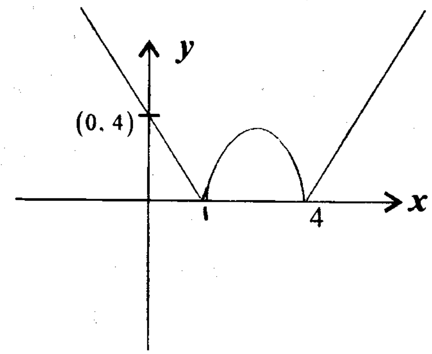


$x \leq \frac{3}{4}$ எனின் $y = 3 - 4x$

$x > \frac{3}{4}$ எனின் $y = -(3 - 4x)$

(iv) $y = x^2 - 5x + 4$ $\qquad$ $y = |x^2 - 5x + 4|$





[$y = f(x)$ என்ற வளையியின், x அச்சின் கீழ் உள்ளபகுதி x அச்சில் தெறிப்படைந்து உள்ளவாறு $y = |f(x)|$ என்ற வளையி இருக்கும்]

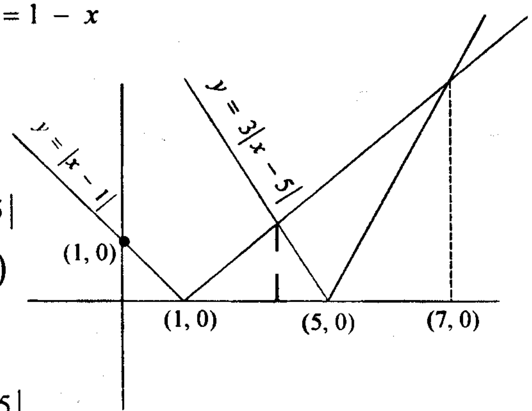
உதாரணம் 18

ஒரே அச்சுக்களில் $y = |x - 1|, \quad y = 3|x - 5|$ என்பவற்றின் வரைபுகளை வரைந்து $|x - 1| > 3|x - 5|$ ஆகுமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

$y = |x - 1|$

$x < 1$ எனின் $y = -(x - 1) = 1 - x$

$x \geq 1$ எனின் $y = x - 1$



$y = 3|x - 5|$

$x < 5$ எனின், $y = 3|x - 5|$

$$= -3(x-5)$$
$$= 15 - 3x$$

$x \geq 5$ எனின், $y = 3|x - 5|$

$$= -3(x-5)$$
$$= 3x - 15$$

$x > 5$ எனின், $y = |x - 1| = x - 1$

$$y = 3|x - 5| = 3(x - 5)$$

இருவனையிகளும் சந்திக்கும் புள்ளியில்,

$$x - 1 = 3(x - 5)$$
$$x = 7$$

$1 < x < 5$ எனின், $y = |x - 1| = x - 1$

$$y = 3|x - 5| = -3(x - 5)$$

இருவளையிகளும் சந்திக்கும் புள்ளியில்

$$x - 1 = -3(x - 5)$$
$$x = 4$$

எனவே $4 < x < 7$ என்ற வீச்சில்

$|x - 1| > 3|x - 5|$ ஆகும்.

பயிற்சி 4

1. பின்வரும் சமனிலிகளைத் தீர்க்க

(a) $3(6x - 5) - 10(x - 4) \geq 3(x - 1)$

(b) $2(x - 3) - 3(5x - 2) \leq 6(3 - 2x)$

(c) $\frac{1}{3}(x - 2) - \frac{1}{2}(3x - 1) > 2$ **(d)** $x - 1 < 3x + 1 \leq x + 5$

(e) $3x + 2 \geq 2x - 1$ உம் $7x + 3 < 5x + 2$ உம்

2. பின்வரும் சமனிலிகளைத் தீர்க்க

i. $(x - 2)(x - 1) > 0$ **vii.** $x^2 - x \leq 6$

ii. $(2x - 1)(x + 1) \leq 0$ **viii.** $x^2 - 2x + 5 > 0$

iii. $(2 - x)(2x + 3) \geq 0$ **ix.** $12 - 4x < x^2$

iv. $(x - 1)^2 > 9$ **x.** $-x^2 - 4x - 3 < 0$

v. $(x - 1)(x + 2) \leq 4$ **xi.** $2x^2 - 11x + 12 < 0$

vi. $x^2 > 3x$ **xii.** $3x^2 \geq x - 1$

3. தீர்க்க

i. $(x - 1)(x + 2)(x - 3) > 0$ **ii.** $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$

iii. $x - 4 < x(x - 4) < 5$ **iv.** $x - 3 > x^2 - 9 > -5$

v. $3x + 4 < x^2 - 6x < 9 - 2x$

4. பின்வரும் சமனிலிகள் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க?

i. $\frac{1}{x - 3} < -1$ **ii.** $\frac{3x + 4}{x} \leq 1$ **iii.** $\frac{4 - 2x}{x} > 1$

iv. $\frac{2x - 4}{x - 1} < 3$ **v.** $\frac{x - 2}{x} < 1$ **vi.** $\frac{x - 1}{2 + x} < 1$

5. **பின்வரும் சமனிலிகள் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க.**

i. $\dfrac{12}{x-3} < x+1$ ii. $\dfrac{x}{x-2} < \dfrac{x}{x-1}$

iii. $\dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)} > 0$ iv. $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} < 0$

v. $\dfrac{x^2+12}{x} > 7$ vi. $\dfrac{x^2+6}{x} > 5$

vii. $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x} > \dfrac{x+6}{3}$ viii. $-2 \le \dfrac{3x-6}{(x-1)(x-3)} \le 2$

ix. $-3 \le \dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)} \le 3$ x. $\dfrac{5x-4}{x^2+2} > \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{5}{x+2}\right]$

xi. $\dfrac{2x^2+5x+7}{3x+5} \ge 2$ xii. $\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2+2x+6} < \dfrac{1}{2}$

6. x இன் எப் பெறுமானங்களுக்கு $0 \le \dfrac{x}{x-1} \le 2$

7. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x}$ ஆகுமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

8. $2 \ge \dfrac{x-1}{x+1} \ge 0$ எனின் x ஐக் காண்க.

9. $\dfrac{2}{x-1} < x < \dfrac{3}{x-2}$ ஐத் தீர்க்க.

10. $\dfrac{x+a}{b} > \dfrac{a}{x+b}$ i. $a,$ இன் தீர்வுயாது?

ii. $a < b < 0$ எனின் x இன் தீர்வு யாது?

11. a, b, c என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க, பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

i. $a^2 + b^2 \ge 2ab$ ii. $2\left(a^2 + b^2\right) \ge (a+b)^2$

iii. $\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \ge bc + ca + ab$

iv. $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - (a+b+c)^2 \ge 0$

v. $a^3 b + ab^3 \le a^4 + b^4$

vi. $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

vii. $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

viii. $\left(a^4+b^4+c^4\right)^2 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge abc\,(a+b+c)$

12. i. $a > 0$ ஆகவும் x, y என்பன சமமற்ற நேர் அல்லது மறை நிறை எண்களாகவும் இருப்பின் $a^{3x} + a^{3y}$; $a^{2x+y} + a^{x+2y}$ என்னும் கோவைகளில் பெரியது யாது?

ii. x, y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + xy + y^2 \ge 0$ எனக்காட்டுக. $(x+y)\left(x^3+y^3\right) \le 2\left(x^4+y^4\right)$ என உய்த்தறிக.

13. i. p மெய்யெண்ணாக இருக்க. $p(1-p) \le \dfrac{1}{4}$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ $p+q=1$ ஆகவும் $0 < p < 1$ ஆகவும் இருப்பின் $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?

ii. $b \le c \le 1$ எனின் $b(1-c) \le \dfrac{1}{4}$ எனவும் நிறுவுக.

14. i. $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ எனின் $0 < x + y - xy < 1$ எனக் காட்டுக.

ii. $a < x < y$ உம் $a > 0$ உம் எனின் $\dfrac{y}{y-a} < \dfrac{x}{x-a}$ எனக் காட்டுக.

15. x, y என்பன நேர்எண்கள் எனின் $x^4 + y^4 \geq x^3 y + xy^3 \geq 2x^2y^2$ எனக் காட்டுக.

16. a, b, c என்பன நேர்எண்கள் எனின்

$$2\left(a^3 + b^3\right) \geq \left(a^2 + b^2\right)(a + b)$$

$$3\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)(a + b + c)$$ எனக் காட்டுக.

17. a, b, c, d என்பன நேரெண்கள் எனின்

i. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ii. $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

iii. $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$

iv. $ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 \geq 6abc$

v. $(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$

vi. $(a + b + c + d)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right) \geq 16$

vii. $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} \geq 6$

viii. $(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 9abc$

ix. $\left(a^2 + b^2\right)\left(a^7 + b^7\right) \geq \left(a^4 + b^4\right)\left(a^5 + b^5\right)$ என நிறுவுக.

18. $x + y - 3z = 0$ எனின் $x^2 + y^2 - 3z^2 \geq 0$ எனநிறுவுக.

19. $x + y + z = a,\quad xy + yz + zx = 0,\ a > 0$ எனின் x, y, z ஒவ்வொன்றும் $-\dfrac{1}{3}a$ இற்கும் a இற்குமிடையில் கிடக்கும் எனக்காட்டுக.

20. i. x மெய்யெண்ணாக இருக்க, $x^3 - 2x^2 + 8 \geq 4x$ ஆகும். x இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானம் யாது?

ii. $a, b, c > 0$ எனின் $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ எனக் காட்டுக.

$a + b + c = 1$ ஆகும்போது $\dfrac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc}$ யின் ஆகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

21. $x, y, z > 0$ எனின், i. $(x + y + z)^3 \geq 27xyz$ எனவும்

ii. மேலும் $xyz = 8$ எனின் $xy + yz + zx \geq 12$ எனவும் காட்டுக.

22. $a, b > 0$ எனின்

i. $a + b = 1$ எனின் $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{25}{2}$ எனக்காட்டுக.

ii. $a + \dfrac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b} > a + \dfrac{b}{2a + 1}$ (இங்கு $2a + 1 > b$) எனக் காட்டுக.

iii. $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \geq \dfrac{8}{(a + b)^2}$ எனக் காட்டுக.

23. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)$
$\left[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right]$ எனக்காட்டுக.

a,b,c நேராக இருப்பின் $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ என உய்த்தறிக. l,m,n

என்பன எவையேனும் மூன்று நேர்எண்களாயின் $\frac{1}{3}(l + m + n) \geq 3\sqrt{lmn}$

என இதிலிருந்து அல்லது வேறுமுறையில் காட்டுக.
ஒரு செங்கோண இணைகரப்பரவை வடிவத்தில் உள்ள மூடியவொரு பெட்டியின் நீளம், அகலம், உயரம் ஆகியன முறையே x, y, z அலகுகளாகும். அப்பெட்டியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு A அலகுகளும் கனவளவு V அலகுகளும் ஆகும். அதன் நான்கு மூலைவிட்டங்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் p அலகுகளும் ஆகும்.

(i) $A \leq 2p^2$ எனவும் **(ii)** $V \leq \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{6}}$ எனவும் **(iii)** $V \leq \frac{p^3}{3\sqrt{3}}$

எனவும் நிறுவுக.

24. தீர்க்க:

i. $|x + 3| = 2$ **ii.** $\left|\frac{1}{x + 1}\right| = 1$ **iii.** $x^2 - |x| - 6 = 0$

25. பின்வரும் சமனிலிகள் திருப்திப்படுத்தும் x இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க?

i. $|x - 3| > 4$ **ii.** $|x + 2| \leq 1$ **iii.** $|2x + 5| \geq 3$

iv. $|3 - 4x| < 3$ **v.** $|x + 1| > 1$

26. $f(x) = x^2 - x - 2$ எனின், $f(x) < |f(x)|$ ஆகுமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

27. தீர்க்க.

i. $|2 + x| > |1 + 2x|$ **ii.** $|5 - x| < |1 + x|$

iii. $|3 - 2x| < |4 + x|$ **iv.** $|x - 1| > 3|x - 2|$

28. **i.** $|x - 2| < 2x$ ஆகுமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ii. $x^2 < |x - 2|$ ஆகுமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

iii. $\frac{|x|}{x - 1} \leq 1$ ஆயின், x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

29. **(a)** $\left|\frac{x - 3}{x + 1}\right| < 2$ எனின் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) தீர்க்க: **i.** $\left|\frac{2x + 3}{x - 1}\right| < 1$ **ii.** $\frac{2x + 3}{x - 1} < 1$

30. $|2x + 3| - |x + 4| < 2$ எனின் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

31. a, b, c என்பன நேரானவையெனின் $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\frac{a + b + c + d}{4} \geq (abcd)^{1/4}$ என்பதைப் பெறுக.

$(a + 3b)(b + 3c)(c + 3a) \geq 64abc$ என்பதை உய்த்தறிக.

32. a, b என்பன நேராயின் $(1 - a)(1 - b) > 1 - a - b$ எனநிறுவுக.
a, b, c என்பன நேராகவும் அவற்றுள் ஒன்றாவது 1 இலும் குறைவாகவும் இருப்பின், $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 1 - a - b - c$ என நிறுவுக.

33. **i.** $x + y < 2, \quad x - y < 4, \quad 2x + y > 2$ ஆகும்.
$0 < x < 3$ எனக்காட்டி y இற்கு ஒத்த சமனிலி ஒன்றைப் பெறுக.

ii. x, y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + y^2 - 4x \geq 6y - 13$ எனக் காட்டுக.

34. A, B இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$\sin A \sin B \leq \sin^2 \frac{1}{2}(A + B)$ எனநிறுவுக.

A, B, C, D எல்லாம் 0 இற்கும் π இற்கும் இடையில் இருப்பின்

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin D \leq \left\{\sin \frac{1}{4}(A + B + C + D)\right\}^4$$

எனக் காட்டுக.

$D = \frac{1}{3}(A + B + C)$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம்

$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \sin\left\{\frac{1}{3}(A + B + C)\right\}^3$ என உய்த்தறிக.

35. x, y, z என்பன நேரானவையெனின், $\left(\frac{x^3 + y^3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3$

எனவும், $\left(\frac{2x^3 + y^3}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{2x^2 + y^2}{3}\right)^3$ எனவும் காட்டுக.

$x^2 + y^2 = 2w^2$ எனப்பிரதியிடுவதன் மூலம் அல்லது வேறுவழியாக, x, y, z என்பன நேராயின்

$\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3$ என நிறுவுக.

மீட்டல் பயிற்சி 1

1. (i) α, β என்பன $x^2 + ax + b = 0$ என்னும் இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகும்; இங்கு a யும் b யும் ஒருமைகள்.

$S_0 = 2$ ஆகவும், $S_n = \alpha^n + \beta^n$, $n = 1, 2, 3\ldots\ldots$ ஆகவுமிருப்பின்

$S_n + a \cdot S_{n-1} + b \cdot S_{n-2} = 0 \quad n = 2, 3\ldots$ ஆகும் எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து a, b இன் உறுப்புக்களில் $\alpha^5 + \beta^5$ ஐயும் $1/\alpha^5$, $1/\beta^5$ என்பவற்றை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டையும் காண்க.

(ii) $n > 2$ என்பது ஒன்றை நேர்நிறைஎண் எனின், $x^n + 2$ என்பது, $x^2 - 1$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது பெறப்படும் மீதி $x + 2$ ஆகும் எனக்காட்டுக.

(1982)

2. (i) x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு $0 < p < 1$ எனின் $\frac{x - p}{x^2 - 2x + p}$ எனும் சார்பு எல்லா பெறுமானங்களையும் கொள்ள முடியும் எனக்காட்டுக. உமது விடையை $p = 3/4$ ஆகும்போது ஒரு வரைபால் விளக்குக.

(ii) $x^2 + 1$ ஆல் வகுபடக்கூடிய ஆனால் $(x-1)^2(x+1)$ ஆல் வகுக்கும்போது $-10x + 6$ ஐ மீதியாகத் தரக்கூடிய x இலான நாலாம்படி மெய்ப்பல்லுறுப்பியொன்றைக் காண்க.

(1983)

3. (i) $x + y + z = 0$
$ax + by + cz = 0$

$x^3 + y^2 + z^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b)$ என அமையும் வண்ணம் x, y, z என்பன மெய்மாறிகள் எனின், மெய் a, b, c இற்கு $a \neq b \neq c$ என அமையுமெனின் $\frac{x}{b - c} = \frac{y}{c - a} = \frac{z}{a - b} = 1$ எனக்காட்டுக.

$\left[(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 \equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)\right.$ என்பதைப் பயன்படுத்தலாம்.$\left.\right]$

(ii) $f(x) = px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ ஆகும். $f(x)$ என்பது $(x^2 + a)$ ஆல் வகுக்கப்பட்டால் மீதி $(s - qa)x + pa^2 - ra + t$ எனக்காட்டுக.
α, உம் $-\alpha$ உம் $f(x) = 0$ என்பதன் மூலங்கள் எனின், $ps^2 - qrs + q^2 t = 0$ எனும் தொடர்பை p, q, r, s, t திருப்தியாக்கும் எனக்காட்டுக.

(1984)

4. (ii) $x^2 + px + 1$ என்பது $ax^5 + bx^2 + c$ என்பதன் காரணி எனின் $(a^2 - c^2)(a^2 - c^2 + bc) = a^2 b^2$ எனநிறுவுக.

இந்நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்பட்டால் $x^2 + px + 1$ என்பது $cx^5 + bx^3 + a$ என்பதன் ஒரு காரணியாகும் எனவும் காட்டுக.

(1985)

5. (i) ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை, பெருக்கம் ஆகியவற்றிற்கான கோவைகளை அதன் குணகங்களில் பெறுக.
α, β என்பன, $x^2 + px + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆயின் $\alpha + \lambda$, $\beta + \lambda$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு λ ஓர் ஒருமையாகும். மேலும் γ, δ என்பன $x^2 + qx + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனின் $(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha + \delta)(\beta - \delta) = q^2 - p^2$ ஆகுமென நிறுவுக.

(1987)

6. (i) இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும், பெருக்கத்திற்கும் உரிய கோவைகளை அதன் குணகங்களின் சார்பில் பெறுக. $(a + x)(b + x) - c(a + x) - d(b + x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின், $(\alpha - \beta)^2 = (a - b + c - d)^2 + 4cd$ எனக்காட்டுக.
a, b, c, d ஆகியன மெய்யாகவும் c, d ஆகிய இரண்டும் நேராகவும் அல்லது மறையாகவும் இருப்பின் α, β ஆகியன மெய்யானவை என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $a > 0$ ஆகவும், $b^2 < 4ac$ ஆகவுமிருப்பின் $ax^2 + bx + c$ என்னும் கோவையானது x இன் மெய்ப் பெறுமானங்கள் யாவற்றிற்கும் நேரானது எனக் காட்டுக.
$(x^2 - x - 2)(x^2 + x + 1)(x - 3)$ என்னும் கோவை நேராக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(1988)

7. (i) இரு நேர்எண்களின் கூட்டலிடையானது அவ்வெண்களின் பெருக்கலிடையிலும் பெரியது அல்லது பெருக்கலிடைக்குச் சமம் எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $n > r \geq 0$ இற்கு $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$ என நிறுவுக.

யாதாயினும் ஒருநிறையெண் $n \geq 1$ இற்கு $(n+1)^n \geq 2^n\, n!$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $acx^2 - b(c + a)x + (c + a)^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை, $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β இன் சார்பில் எடுத்துரைக்க. இங்கு a, b, c ஆகியன மாறிலிகள்.

(iii) $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ என்னும் சமனிலி உண்மையாக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(1989)

8. (i) $(x^2 - k)$ என்பது $f(x) \equiv 2x^4 + (3k - 4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 + (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6$ இன் வகுத்தியாக இருக்கத் தக்கதாக k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
k இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் நேரொத்த $f(x)$ இன் எஞ்சிய காரணிகளைக் காண்க.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2}\left\{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\right\}$ எனக்காட்டுக.

$x = b + c - a, \quad y = c + a - b, \quad z = a + b - c$ எனின்

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4\left(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\right)$ என்பதைக் காட்டுக.

[$x^3 + y^3 + z^2 - 3xyz \equiv (x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + zx\right)$ என்பதைப் பயன்படுத்தலாம்.] **(1989)**

9. (i) p, q என்பன $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். இங்கு k ஒரு மாறிலி.

(a) $(p - q)^2 = 4\left(k^2 - k - 2\right)$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து மூலங்கள் 4 ஆல் வித்தியாசப்படும்படி உள்ள சமன்பாடுகளை மேற்தரப்பட்ட வடிவில் எழுதுக.

(b) $k \neq -2$ எனத்தரப்படின் $\dfrac{p^2}{q}$ ஐயும் $\dfrac{q^2}{p}$ ஐயும் மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை அமைக்க.

$1 + \dfrac{p^2}{q}$ ஐயும் $1 + \dfrac{q^2}{p}$ ஐயும் மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

(ii) $\dfrac{(x + 2)(3x - 1)}{4x^3 - 3x + 1} \geq 0$ என்னும் சமனிலி உண்மையாக இருப்பதற்குரிய x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(1990)

10. (i) a, b, c ஆகியன மெய்யெண்கள் எனின்

$\left(a^2 + b^2\right)x^2 + 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)x + b^2 + c^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவை என நிறுவுக.

(ii) $ax^2 + bx + c = 0; \quad a^1 x^2 + b^1 x + c^1 = 0$ என்னும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் விகிதங்கள் சமமெனின் $\dfrac{b^2}{ac} = \dfrac{b^{1^2}}{a^1 c^1}$ எனக்காட்டுக.

(iii) பின்வரும் சமனிலி வலிதாக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} > \frac{3}{x + 2}$$ **(1990 special)**

11. (i) $x - 4 < x(x - 4) \leq 5$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(ii) $y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) + \dfrac{1}{2}n\left(e^x + e^{-x}\right)$ ஆகும்;

இங்கு n ஒருமாறிலி $n \geq 2$

$t = e^x$ என இட்டு அல்லது வேறுவிதமாக

(a) y யின் இழிவுப்பெறுமானம் $\sqrt{n^2 - 1}$ எனக்காட்டுக.

(b) $k > \sqrt{n^2 - 1}$ எனின், சமன்பாடு $y = k$ ஆனது, t யிற்கு இரு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்குமெனக் காட்டி, இம் மூலங்களைக் காண்க.

(c) $k = \sqrt{2n(n + 1)}$ ஆக இருக்கும்போது மேலே குறிப்பிட்ட இரு மூலங்களிலும் பெரியது $1 + \sqrt{\dfrac{2n}{n + 1}}$ எனக்காட்டி சிறியமூலத்தைக் காண்க.

மேலே குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பத்தில் $n\,(\geq 2)$ இன் பெறுமானம் எதுவெனிலும், சமன்பாடு $y = k$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் இருமெய்ப்பெறுமானங்களும் எப்போதும் $ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$ இற்கும் $ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ இற்குமிடையே இருக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

(1991)

12. (i) $|2x + 5| - |x + 6| < 2$ ஆக இருக்கும் x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

(ii) $f(x)$ என்னும் சார்பானது $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) எல்லா x இற்கும் $|f(x)| < 1$ எனவும்

(b) $x = f(y)$ எனின், $y = \frac{1}{2} ln \left(\frac{(1+x)}{1-x} \right)$ எனவும் காட்டுக.

அத்தோடு, $y = f(x)$, $y = \frac{1}{2} ln \left(\frac{(1+x)}{1-x} \right)$ என்பவற்றின் வரைபுகள் ஒன்றையொன்று உற்பத்தியில் தொடுகின்றன எனவும் காட்டுக.

(1991 special)

13. (i) a, b என்பன மெய்யெண்கள் எனின்,

$(a^2 + b)^2 + (b^2 + a)^2 < (a^2 + b^2 + 1)^2$ எனக்காட்டுக.

(ii) x மெய்யாக இருக்க $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$ என்பது இரு நிலையான பெறுமானங்களுக்கிடையேயுள்ள பெறுமானத்தைக் கொண்டிருக்க மாட்டாது எனக் காட்டுக.

(iii) $S = 3x^2 - 28x + 60$ எனவும், $S^1 = 5x^2 - 32x + 56$ எனவும் இருப்பின் $ps - qs^1$ என்பது $r(x - \alpha)^2$ என்னும் வடிவத்திலே இருப்பதற்கான $\frac{p}{q}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$3x^2 - 28x + 60 = l(x - h)^2 + m(x - k)^2$ ஆகவும்

$5x^2 - 32x + 56 = l^1 (x - h)^2 + m^1 (x - k)^2$ ஆகவும் இருப்பதற்கு

l, m, l^1, m^1, h, k என்பவற்றைக் காண்க.

(1991 special)

14. (i) $t = x + \frac{1}{x}$ என எழுதுவதன் மூலம் $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$ என்க. E என்பது $y^2 + y + a$ என்னும் வடிவில் எழுதப்படலாம் எனக்காட்டுக; இங்கு a ஒரு மாறிலி ஆகவும், y ஆனது $x^2 + bx + c$ என்னும் வடிவத்திலும் உள்ளன. இங்கு b, c ஆகியன மாறிலிகளாகும். இதிலிருந்து x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் $E \geq 3$ எனக்காட்டுக.

(iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{(x-2)} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ ஆகுமாறு k என்னும் ஒரு மாறிலியையும், x இன் ஒரு சார்பு f ஐயும் காண்க.
$f(x)$ ஐ $(x-1)$ இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாக எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்து $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ இன் பகுதிப்பின்னங்களைக் காண்க.

(1992)

15. (a) $x, y \neq 0$ ஆயிருக்க, x, y, λ, μ என்னும் மெய்க்கணியங்கள் $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$, $x + y = \lambda$, $\frac{y}{x} = \mu$ என்னும் தொடர்புகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. λ, μ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஒரு தொடர்பைப் பெற்று, μ மெய்யாக இருப்பதற்கு λ வின் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\lambda = 3$ ஆக இருக்கும்போது $\frac{y}{x}$ ஐத் துணிக.

(b) $x, a, b > 0$ ஆகவும் $a > b$ ஆகவும் $x^2 > ab$ ஆகவும் இருக்கும்போது

$\frac{x + a}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + b^2}} > 0$ எனக்காட்டுக.

(c) $|2x - 1| < 3x + 5$ ஆக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

(1992)

16. (a) $x^2 - 11x + 30 \neq 0$ ஆகவும் $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ ஆகவும்

இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(b) a, b, c, p, q, r ஆகியவை எல்லாம் நேரெனின்

$$\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right) \geq 9$$ எனக்காட்டுக.

(c) $|5-3x| \geq 2-3x$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(1993)

17. (a) $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ என்பதை $k+\dfrac{A}{(x-a)}+\dfrac{B}{(x-a)}+\dfrac{C}{(x-c)}$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, c எல்லாம் வேறு வேறானவை. k, A, B, C ஆகிய மாறிலிகளைத் துணிக.

$a=b \neq c$ என்னும் வகையையும் ஆராய்க.

a, b, c, d ஆகியன யாவும் வேறு வேறானவையாய் இருக்கும் போது

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)}$$

$$+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1$$ என்பதை உய்த்தறிக.

(b) ஏகபரிமாணக் காரணிகள் இரண்டைக் காண்பதன் மூலம் $(a-x)^4+(x-1)^4-(a-1)^4$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

(1993)

18. (a) $x^2 > |5x+6|$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right]$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து எவையேனும் மறையில்லா x, y, z இற்கு $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ என உய்த்தறிக.

நேரான p, q, r இற்கு

(i) $\dfrac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$ **(ii)** $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \geq \dfrac{9}{p+q+r}$

(iii) $\dfrac{p}{q+r}+\dfrac{q}{r+p}+\dfrac{r}{p+q} \geq \dfrac{3}{2}$ என்பவற்றை உய்த்தறிக.

(1994)

19. (a) $x^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும். இங்கு b, c மெய்யானவை. α^3, β^3 என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைப் பெறுக.

$b^3-6b+9=0$ ஆகவும் $c=2$ ஆகவும் இருப்பின் α, β என்பவற்றின் மெய்ப்பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து $y^3-6y+9=0$ இன் மெய்மூலத்தைக் காண்க.

(b) x உம் k உம் மெய்யெனில் எல்லா x இற்கும்

$0 \leq \dfrac{(x+k)^2}{x^2+x+1} \leq \dfrac{4}{3}\left(k^2-k+1\right)$ எனக்காட்டி $\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ என்னும் கோவையானது அதன் ஆகவும் சிறிய பெறுமானத்தையும் ஆகவும் பெரிய பெறுமானத்தையும் எடுக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(1994)

20. (i) $7-x > 2\left|x^2-4\right|$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) எந்த ஒரு நேர் x இற்கும் $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$ எனக் காட்டுக.

a, b, c என்பன நேர் எண்கள். மேற்போந்த முடிவைப் பயன்படுத்தி $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ எனக்காட்டுக.

$a+b+c=1$ எனில் $(2-a), (2-b), (2-c)$ என்பவை நேரானவை எனக்காட்டுக.

$\dfrac{a}{2-a}+\dfrac{b}{2-b}+\dfrac{c}{2-c} \geq \dfrac{3}{5}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1995)

21. (i) x, y என்பன மெய்யாக இருக்க,

$2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 8y + 15 = 0$ எனில் x ஆனது $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ இற்கும் $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ இற்கும் இடையே கிடக்க முடியாதெனவும், y ஆனது 1 இற்கும் 3 இற்குமிடையே கிடக்க முடியாதெனவும் காட்டுக.

(ii) $(a+b)$ என்பது $x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் ஆகும் என்பதை வாய்ப்புப்பார்க்க.

$a, b\,(a \neq b)$ என்பன மெய்யாக இருப்பின் மேற்போந்த சமன்பாடு ஒரேயொரு மெய்ம்மூலத்தைக் கொண்டிருக்கும் எனநிறுவுக.

$x^3 - 6x - 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை மேற்போந்த வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கு, அதற்கு ஒரேயொரு மெய்ம்மூலம் உண்டெனத் தரப்பட்டிருக்க அதனைக் காண்க.

(1995)

22. (ii) $z \geq x$ ஆகவும் a, b, x, z ஆகியன எல்லாம் நேராகவும் இருக்க, $x^2 y = az + bz^3$ எனின் $y \geq 2\sqrt{ab}$ என நிறுவுக.

(iii) $|3x - 4| > 2 - 5x$ ஆக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க. **(1996)**

23. (i) $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களான α, β என்பன மெய்யாயிருப்பதற்கான நிபந்தனை ஒன்றைக் காண்க. $a \neq 0$ ஆயிருக்க a, b, c ஆகியன மெய்ம்மாறிலிகளாகும்.

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ எனவும் $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ எனவும் காட்டுக.

அத்துடன் $(4\alpha - 3\beta)(4\beta - 3\alpha) = \frac{49ac - 12b^2}{a^2}$ எனவும் காட்டி

$12b^2 < 49ac < \frac{49b^2}{4}$ எனின் β ஆனது $\frac{3\alpha}{4}$ இற்கும் $\frac{4\alpha}{3}$ இற்கும் இடையே கிடக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $p \neq 0$ என்பதுடன் p, q, r மெய்ம்மாறிலிகளாக இருக்க,

$px^4 + qx^3 + rx^2 - qx + p = 0$ என்னும் சமன்பாடானது y இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக ஒடுக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு $y = x - \frac{1}{x}$ இதிலிருந்து x இலுள்ள மேற்குறித்த சமன்பாடு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு p, q, r என்பன திருப்தி செய்யும் நிபந்தனை ஒன்றைக் காண்க. **(1996)**

24. (a) மெய்யான எல்லா a, b இற்கும் $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ எனக்காட்டுக.

மேலே பெற்ற முடிபைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுமுறையில்

$a + b + x = 1$

$a^2 + b^2 + x^2 = 3$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளும், மெய்யான a, b இற்குத் திருப்திப் படுத்தப்படாத மெய்யான x இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

(b) $|5x - 8| < 3x - 2$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானத் தொடையைக் கணிக்க.

(c) a, b என்பன நேர் மாறிலிகளாக இருக்க $b > a$ எனில் $y = \frac{x - a}{x^2 - b^2}$ என்னும் கோவையானது மெய்யான x இற்கு எந்தப் பெறுமானத்தையும் கொள்ளலாம் எனக் காட்டுக. அத்துடன் $a > b$ ஆயிருக்கும் போது y ஆனது குறித்த ஓர் ஆயிடையிற் கிடக்கும் பெறுமானங்கள் தவிர்ந்த எந்தப் பெறுமானத்தையும் கொள்ளலாம் எனக் காட்டுக.

(1997)

25. (b) α, β என்பன $x^2 + qx + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகவும், γ, δ என்பன $x^2 + x + q = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகவும் இருக்கட்டும்.

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + q\gamma + 1)(\delta^2 + \delta q + 1)$$

எனக்காட்டுக.

தரப்பட்டிருக்கும் இருபடிச்சமன்பாடுகள் இரண்டும் குறைந்த பட்சம் ஒரு பொது மெய்ம்மூலத்தையேனும் கொண்டிருப்பதற்கான q இன் எல்லாப் பெறுமானங்களையும் துணிக. **(1997)**

26. (i) பின்வரும் ஒவ்வொரு சமனிலிக்கும் அதனைத் திருப்தி செய்யும் x இன் பெறுமானத் தொடையைத் துணிக.

(α) $x^3 + 3x^2 < x + 3$

(β) $|x+2| + |x-3| < 7$

(ii) $y = x^2 - 4x + 3,\quad x^2 + y^2 = 4$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப் படத்தில் பருமப்படியாக வரைந்து $y \le x^2 - 4x + 3,\quad x^2 + y^2 \le 4$ ஆகிய இரு சமனிலிகளும் திருப்திப்படுத்தும் பிரதேசத்தை நிழற்றிக் காட்டுக.

(b) **"எதிர்மறுப்பு நிறுவல்"** முறையைப் பயன்படுத்தி $x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ என்பது $x \pm n$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு காரணியைக் கொண்டிருக்கவில்லை எனக்காட்டுக.

(1997)

27. (a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)(x-\lambda)}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. x ஆனது மெய்யாகவும் 2 இலிருந்தும் λ இலிருந்தும் வேறுபட்டும் இருக்கும்போது y ஆனது யாதாயினும் ஒரு மெய்ப்பெறுமானத்தை எடுப்பதற்கு λ இற்கான பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(b) (i) x, y நேரெனின்,

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} > \frac{x+y}{1+x+y}$$ எனக்காட்டுக.

(ii) $\dfrac{7}{x-5} < x + 1$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

(1998)

28. (a) a, b, c என்பன சமமில்லாத மூன்று எண்கள். x, y, z என்பன $x^2 = a + yz,\quad y^2 = b + zx,\quad z^2 = c + xy$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின் $ax + by + cz = 0$ ஆக இருந்தால் மாத்திரம் $x + y + z = 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

[$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + yz) = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

என்ற முடிவைப் பயன்படுத்தலாம்]

(b) சமன்பாடு $x^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $\alpha + \beta = -b,\ \alpha\beta = c$ எனவும் காட்டுக. 0 இலிருந்தும் -1 இலிருந்தும் வேறுபட்டயாதாயினும் ஒரு மெய்யெண் p யிற்கு $\alpha = 1 + \dfrac{1}{p}$ ஆகவும் $\beta = 1 + \dfrac{1}{p+1}$ ஆகவும் இருப்பின் $(1+b+c)^2 = b^2 - 4c$ எனவும் $c = -1$ எனவும் காட்டுக.

அதோடு b, c ஆகியவற்றின் சார்பில் குணகங்களை எடுத்துரைத்து $1 - \dfrac{1}{p},\ 1 - \dfrac{1}{p+1}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றைப் பெறுக.

(1998)

29. (i) $\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{x}{x-2}$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

(ii) $y = 3 - |x+2|$ இனாலும் $y = |2x - 3x^2 + x^3|$ இனாலும் தரப்படும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமப்படியாக வரைக.

சமனிலிகள் $3 - |x+2| \ge y \ge |2x - 3x^2 + x^3|$ திருப்தியாக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

(c) எல்லா மெய் x இற்கும் $x^2 + 2x + 3 > 0$ எனக்காட்டுவதற்கு எதிர் மறுப்பு முறை நிறுவலைப் பயன்படுத்துக.

(1998)

30. (a) வேறுவேறான p, q, r இற்கு

$x^3 + y^3 + z^3 = 3(p-q)(q-r)(r-p)$ ஆகவும்

$px + qy + rz = 0$ ஆகவும் $x + y + z = 0$ ஆகவும் இருப்பின் $x = q - r,\ y = r - p,\ z = p - q$ எனக்காட்டுக.

$$\left[x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\left[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right]\right.$$

என்பதைப் பயன்படுத்தலாம். $\}$

(b) $(n > 1)$ என்பது தரப்பட்ட ஒருநிறையெண் எனவும் $t > 0$ எனவும் கொள்க. t மாறும் போது $(n+1).t + \frac{n-1}{t}$ இன் மிகச்சிறிய பெறுமானம் l ஐக் காண்க.

$k > l$ ஆகும்போது சமன்பாடு $(n+1)t + \frac{n-1}{t} = k$ யின் இருமூலங்களும் நேரானவை எனக்காட்டுக.

$(n+1)t + \frac{n-1}{t} = \sqrt{8n(n+1)}$ இன் பெரியமூலத்தை n இன் சார்பில் காண்க.

(1998)

31. (a) சமனிலி $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| > 4$ ஐத் தீர்க்க.

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ஆகவும், $g(x) = 6x^2 - 16x + 19$ ஆகவும் இருக்கட்டும்.

$f(x) + \lambda\, g(x)$ ஆனது $a(x+b)^2$ என்னும் வடிவில் இருக்குமாறு λ வின் பெறுமானங்களைக் காண்க; இங்கு a, b ஆகியன மெய்மாறிலிகள்.

இதிலிருந்து $f(x) = A(x-3)^2 + B(x+c)^2$ வடிவத்தில் எடுத்துரைத்து A, B, C ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் தருக.

$g(x) = 10A(x-3)^2 + 5B(x+c)^2$ எனக்காட்டுக.

அதோடு $\frac{f(x)}{g(x)}$ இன் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தையும் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தையும் காண்க.

6. தொடர்கள் (series)

கூட்டல் தொடர் (Arithmetic series)

கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் முதலாம் உறுப்பு a, பொது வித்தியாசம் d ஆகும். இத் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு U_r,

$Ur = a + (r-1)d$ என்பதால் தரப்படும்.

n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n, எனின்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} Ur = \sum_{r=1}^{n} a + (r-1)d = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

இரு கூட்டல் தொடர்களின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைகளின் விகிதம் $2n : n+1$ ஆகும். எட்டாம் உறுப்புக்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

முதலம் உறுப்பு a_1	முதலாம் உறுப்பு a_2
பொது வித்தியசம் d_1	பொது வித்தியாசம் d_2
n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை s_1	n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை s_2
$S_1 = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d_1\right]$	$S_2 = \frac{n}{2}\left[2a_2 + (n-1)d_2\right]$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\left[2a_1 + (n-1)d_1\right]}{\left[2a_2 + (n-1)d_2\right]} = \frac{2n}{n+1}$$

எட்டாம் உறுப்புக்களின் விகிதம் $\frac{a_1 + 7d_1}{a_2 + 7d_2}$

$n = 15$ ஆக, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2a_1 + 14d_1}{2a_2 + 14d_2} = \frac{30}{16}$

$$\frac{a_1 + 7d_1}{a_2 + 7d_2} = \frac{15}{8}$$ ஆகும.

உதாரணம் 2

கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் முதல் n. உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $2n$ ஆகும். முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை n எனின், முதல் $4n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க

$$S_n = 2n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \Rightarrow 2a + (n-1)d = 4 \text{———} (1)$$

$$S_{2n} = n = \frac{2n}{2}\left[2a + (2n-1)d\right] \Rightarrow 2a + (2n-1)d = 1 \text{———} (2)$$

$$S_{4n} = \frac{4n}{2}\left[2a + (4n-1)d\right]$$

$$= \frac{4n}{2} = 2n\left[2a + (n-1)d + 3nd\right]$$

$$= \frac{4n}{2} = 2n\left[4 + 3nd\right]$$

$$(2) - (1) \Rightarrow nd = -3$$

$$\therefore S_{4n} = 2n\left[4 - 9\right] = -10n$$

$4n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $= -10n$. ஆகும்.

பெருக்கல் தொடர் (Geometric series)

முதலாம் உறுப்பு a, பொது விகிதம் r, n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n என்க.

$$U_p = ar^{p-1}$$

$$S_n \sum_{p=1}^{n} U_p = \sum_{p=1}^{n} ar^{p-1}$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$$

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a\left(1-r^n\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{(1-r)} \quad (r \neq 1)}$$

$S_n = a + a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots + a$ ($r = 1$ எனின்)

$= na$

தொடர் ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனை

$\sum U_r$ $\qquad S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ என்க.

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $S_n \longrightarrow$ முடிவுள்ள எல்லை (ℓ) எனின் தொடர் $\sum U_r$ ஒருங்கு தொடர் எனப்படும். இத் தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை l ஆகும். இது $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \ell$ என எழுதப்படும்

பெருக்கல் தொடர் ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனை

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} ar^{p-1} = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

(i) $-1 < r < 1$ எனின், $n \longrightarrow \infty$ ஆக, $r^n \longrightarrow 0$

(ii) $r > 1$ எனின், $n \longrightarrow \infty$ ஆக, $r^n \longrightarrow \infty$

(iii) $r < -1$ எனின், $n \longrightarrow \infty$ ஆக, r^n; முடிவின்றி அலையும் (Oscillates infinitely)

(iv) $r = 1$ எனின், $S_n = na$,

$n \longrightarrow \infty$ ஆக $S_n \longrightarrow \infty$ ($a > 0$ எனின்)

$S_n \longrightarrow -\infty$ ($a < 0$ எனின்)

(v) $r = -1$ எனின்

$$S_n = a - a + a - a + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n a$$

$= 0$ (n இரட்டை எனின்)

$= a$ (n ஒற்றை எனின்)

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, S_n முடிவுள்ளதாக அலையும் (Oscillates)

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \cdot r^n$$

$r = -1$ ஆகும் போது தொடர் ஒருங்காது

எனவே, பெருக்கல் தொடர் ஒருங்குவதற்கு (தொடரின் பொதுவிகிதம் r) $|r| < 1$ ஆதல் வேண்டும்.

$|r| < 1$ எனின், $n \longrightarrow \infty$ ஆக, $S_n \longrightarrow \dfrac{a}{1-r}$ ஆகும். முடிவிலி

உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $9/4$ ஆகவும், முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 2 ஆகவும் இருப்பின் தொடரைக் காண்க. முதலாம் உறுப்பு a, பொதுவிகிதம் r என்க.

$$a + ar + ar^2 = \frac{9}{4}, \quad a\left(1 + r + r^2\right) = \frac{9}{4} \text{ ———— } (1)$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = 2 \text{ ———— } (2)$$

$a = 2(1-r)$ என (1) இல் பிரதியிட

$$2(1-r)\left(1 + r + r^2\right) = \frac{9}{4}$$

$$1 - r^3 = \frac{9}{8}$$

$$r^3 = -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$ ஆகவே $r = -\frac{1}{2}$, $a = 3$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

பின்வரும் இரண்டு பெருக்கல் தொடர்களும் ஒருங்கத்தக்கதாக x இன் பொதுப் பெறுமானம் யாதும் இல்லை எனக் காட்டுக.

(i) $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^r$ (ii) $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^r$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^r = 1 + \left(\frac{5x-6}{3x-2}\right) + \left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^2 + \ldots\ldots$$

தொடர் ஒருங்கு $|r| < 1$ ஆதல் வேண்டும்.

$$|r| = \left|\frac{5x-6}{3x-2}\right| < 1$$

$$\left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^2 < 1$$

$$(5x-6)^2 - (3x-2)^2 < 0$$

$$(2x-4)(8x-8) < 0$$

$$(x-2)(x-1) < 0$$

$$\therefore\ 1 < x < 2 \text{ ———— } (A)$$

முதலாவது தொடர் ஒருங்க $1 < x < 2$ ஆகும்.

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^r = 1+\frac{2x-1}{4x-5}+\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^2+\dots\dots\dots$$

தொடர் ஒருங்க $|r| = \left|\frac{2x-1}{4x-5}\right| < 1$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^2 < 1$$

$$(2x-1)^2 - (4x-5)^2 < 0$$

$$(-2x+4)(6x-6) < 0$$

$$(x-2)(x-1) > 0$$

$x < 1$ அல்லது $x > 2$ ———————— (B)

இரண்டாவது தொடர் ஒருங்க $x < 1$ அல்லது $x > 2$ ஆகும். எனவே இரு தொடர்களும் ஒருங்கத்தக்கதாக x இற்குப் பொதுப் பெறுமானம் இல்லை.

உதாரணம் 5

முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும் பொதுவிகிதம் r ஆகவும் உடைய பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n எனின், $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

என நிறுவுக. $\frac{S_{3n}-S_{2n}}{S_n} = r^{2n}$ என நிறுவுக.

$r = \frac{1}{2}$ எனத் தரப்படின், $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_{3n}-S_{2n}}{S_n}$ ஐக் காண்க

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad S_{2n} = \frac{a(1-r^{2n})}{1-r},\quad S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r}$$

$$S_{3n} - S_{2n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} - \frac{a(1-r^{2n})}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r}\left[r^{2n} - r^{3n}\right]$$

$$= \frac{a\cdot r^{2n}}{1-r}\left[1-r^n\right]$$

$$\frac{S_{3n}-S_{2n}}{S_n} = r^{2n} \text{ ஆகும்.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_{3n}-S_{2n}}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(r^2\right)^n$$

$r = \frac{1}{2}$ எனின் $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

இங்கு முதலாம் உறுப்பு $a = \frac{1}{4}$, பொதுவிகிதம் $r = \frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 6

$4 + 44 + 444 + 4444 + \dots\dots\dots$ என்னும் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க

$u_1 = 4,\quad u_2 = 4\times 10 + 4,\quad u_3 = 4\times 10^2 + 4\times 10 + 4$

$$u_r = 4 + 4\times 10 + 4\times 10^2 + \dots\dots\dots\, 4\times 10^{r-1}$$

$$= 4\left[1 + 10 + 10^2 + \dots\dots + 10^{r-1}\right]$$

$$= 4\left[\frac{10^r - 1}{10 - 1}\right] = \frac{4}{9}\left[10^r - 1\right]$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{4}{9}\left(10^r - 1\right)$$

$$= \frac{4}{9}\sum_{r=1}^{n}\left(10^r - 1\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left[(10-1) + \left(10^2 - 1\right) + \left(10^3 - 1\right) + \dots\dots\dots + \left(10^n - 1\right)\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[\left(10 + 10^2 + \dots\dots\dots + 10^n\right) - n\right]$$

$$= \frac{4}{9}\left[10\frac{\left(10^n - 1\right)}{10 - 1} - n\right]$$

$$= \frac{4}{81}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$$

உதாரணம் 7

$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \dots\dots\dots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right]$ எனக் காட்டுக.

$$S_n = 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \dots\dots\dots + n\cdot 3^{n-1} \quad \text{------} (1)$$

$$3\cdot S_n = 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \dots\dots + (n-1)\cdot 3^{n-1} + n\cdot 3^n \quad \text{------} (2)$$

$$(1)-(2), \quad -2\cdot S_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 \dots\dots + 3^{n-1} - n\cdot 3^n$$

$$-2\cdot S_n = \left(1 + 3 + 3^2 + \dots\dots\dots + 3^{n-1}\right) - n\cdot 3^n$$

$$-2\cdot S_n = \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n\cdot 3^n$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{3^n - 1}{2} - n\cdot 3^n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3^n(2n-1) + 1\right]$$

கணிதத் தொகுத்தறி முறை (*Mathematical Induction*)

கணிதத் தொகுத்தறி முறை முடிவுகளை நேர் நிறை எண்களுக்கு நிறுவும் போது பயன்படுத்தப்படும். இங்கு $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை என நிறுவுதல் வேண்டும். p நேர் நிறை எண்களாக இருக்க $n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என எடுத்துக் கொண்டு $n = p + 1$ இற்கு உண்மை என நிறுவுதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 8

கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப்பயன்படுத்தி

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனவும்

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ எனவும் நிறுவுக.

$\sum r^2$ விரி தொடர் எனவும், $\sum \frac{1}{r(r+1)}$ ஒருங்கு தொடர் எனவும் காட்டி, இரண்டாவது தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 1$ ஆக இ.கை பக்கம் $= \displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1^2 = 1$

$$\text{வ.கை பக்கம்} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$$

இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

$\therefore\ n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை. $n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$\sum_{r=1}^{p} r^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{p+1} r^2 = \sum_{r=1}^{p} r^2 + (p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$

$$= \frac{(p+1)}{6}\left[p(2p+1) + 6(p+1)\right]$$

$$= \frac{(p+1)}{6}\left[2p^2 + 7p + 6\right]$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)(p+1+1)\left[2(p+1)+1\right]}{6}$$

$n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர்நிறைஎண் n இற்கும்

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ஆகும்.}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக, $S_n \longrightarrow \infty$ ஆகும். எனவே $\sum r^2$ விரி தொடராகும்

(ii) $$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$n = 1 \text{ ஆக இ.கை. பக்கம்} = \sum_{r=1}^{1} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{வலது கைப்பக்கம்} = \frac{1}{2}$$

இடது கைப்பக்கம் = வலது கைப்பக்கம்

$\therefore\ n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$$\sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{p}{p+1}$$

$$\sum_{r=1}^{p+1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

$n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால்

எல்லா நேர் நிறை எண்ணிற்கும் $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ ஆகும்.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ ஆகும்.}$$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக $S_n = \dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 1$

எனவே, $\sum \dfrac{1}{r(r+1)}$ ஒருங்கு தொடராகும்

$$S_\infty = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 9

n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $3^{2n+2} - 8n - 9$, 64 ஆல் (மீதியின்றி) வகுபடும் எனக் காட்டுக.

$f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ என்க.

$n = 1$ ஆக, $f(1) = 3^4 - 8 - 9 = 64$

64, $f(x)$ ஐப் பிரிக்கும். $\therefore$ $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

64, $f(p)$ ஐப் பிரிக்கும். அதாவது 64, $3^{2p+2} - 8p - 9$ ஐப் பிரிக்கும்.

$$\begin{aligned} f(p+1) &= 3^{2p+4} - 8(p+1) - 9 \\ &= 3^2 \cdot 3^{2p+2} - 8p - 17 \\ &= 3^2\left[3^{2p+2} - 8p - 9\right] + 64p + 64 \\ &= 9 \cdot f(p) + 64\,(p+1) \end{aligned}$$

64, $f(p)$ ஐப் பிரிக்கும் 64, $64(p+1)$ ஐப்பிரிக்கும். எனவே, 64, $f(p+1)$ ஐப்பிரிக்கும். எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர் நிறை எண் n இற்கும் 64, $f(n)$ ஐப் பிரிக்கும்.

தொடர்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணல்

$\sum_{r=1}^{n} r$, $\sum_{r=1}^{n} r^2$, $\sum_{r=1}^{n} r^3$ என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகைகளைக் காண்போம். இக் கூட்டுத்தொகைகளைக் காண்பதற்கு பல்வேறு முறைகள் உண்டு.

$\sum_{r=1}^{n} r$ ஐக் காணல்.

முறை I $\quad f(r) = r^2$

$$f(r) - f(r-1) = r^2 - (r-1)^2 = 2r - 1 \text{ ஆகும்.}$$

$$\boxed{f(r) - f(r-1) = 2r - 1}$$

$$\begin{array}{lrcl} r = 1, & f(1) - f(0) &=& 2 \cdot 1 - 1 \\ r = 2, & f(2) - f(1) &=& 2 \cdot 2 - 1 \\ r = 3, & f(3) - f(2) &=& 2 \cdot 3 - 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ r = n-1 & f(n-1) - f(n-2) &=& 2(n-1) - 1 \\ r = n, & f(n) - f(n-1) &=& 2 \cdot n - 1 \end{array}$$

$$f(n) - f(0) = 2 \cdot \sum_{r=1}^{n} r - n$$

$$n^2 - 0 = 2 \cdot \sum_{r=1}^{n} r - n$$

ஆகவே $\sum_{r=1}^{n} r = \dfrac{n^2 + n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

முறை II

$f(r) = Ar^2 + Br$ என்க.

$f(r) - f(r-1) = r$ ஆகுமாறு A, B ஐக் காணல் வேண்டும்.

$$\left(Ar^2 + Br\right) - \left[A(r-1)^2 + B(r-1)\right] = r$$

$$2Ar + (B - A) = r; \quad 2A = 1, \quad B - A = 0; \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{r = f(r) - f(r-1)}$$

$$\begin{array}{ll} r = 1 & 1 = f(1) - f(0) \\ r = 2 & 2 = f(2) - f(1) \\ r = 3 & 3 = f(3) - f(2) \end{array}$$

....

....

$$\begin{array}{ll} r = n-1 & n-1 = f(n-1) - f(n-2) \\ r = n & n = f(n) - f(n-1) \end{array}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r = f(n) - f(0) = An^2 + Bn = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$ ஆகும்.

ஆகவே, $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ ஆகும்.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காணல்.

முறை I

$f(r) = r^3$ என்க.

$f(r) - f(r-1) = r^3 - (r-1)^3 = 3r^2 - 3r + 1$ ஆகும்.

$$\boxed{f(r) - f(r-1) = 3r^2 - 3r + 1}$$

$$\begin{array}{ll} r = 1, & f(1) - f(0) = 3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 \\ r = 2, & f(2) - f(1) = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1 \\ r = 3, & f(3) - f(2) = 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 1 \end{array}$$

....

....

$$\begin{array}{ll} r = n-1, & f(n-1) - f(n-2) = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \\ r = n, & f(n) - f(n-1) = 3n^2 - 3\cdot n + 1 \end{array}$$

$$f(n) - f(0) = 3\cdot\sum_{r=1}^{n} r^2 - 3\sum_{r=1}^{n} r + n$$

$$n^3 = 3\sum_{r=1}^{n} r^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{r=1}^{n} r^2 = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{n\left[2n^2 + 3n + 1\right]}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

முறை II

$f(r) = Ar^3 + Br^2 + Cr$ என்க.

$r^2 = f(r) - f(r-1)$ ஆகுமாறு A, B, C ஐக் காணல் வேண்டும்.

$$r^2 = \left[Ar^3 + Br^2 + cr\right] - \left[A(r-1)^3 + B(r-1)^2 + C(r-1)\right]$$

$$= A\left[r^2 + r(r-1) + (r-1)^2\right] + B(2r-1) + C$$

$$= 3Ar^2 + (2B-3A)r + (A - B + C)$$

$$\Rightarrow \quad 3A = 1, \qquad 2B - 3A = 0, \qquad A - B + C = 0$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B \; \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{r^2 = f(r) - f(r-1)}$$

$$1^2 = \cancel{f(1)} - f(0)$$
$$2^2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$$
$$3^2 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)}$$

....

....

$$(n-1)^2 = \cancel{f(n-1)} - f(n-2)$$
$$n^2 = f(n) - \cancel{f(n-1)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = f(n) - f(o)$$

$$= \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - 0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

உதாரணம் 9

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$ எனக் காட்டுக

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n+1)^2$

(ii) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots - (2n)^2 + (2n+1)^2$

(iii) $\sum_{r=1}^{n} r(r+4)$

(i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n+1)^2$

$$= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (2n+1)^2\right] - \left[2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2\right]$$

$$= \left[1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (2n+1)^2\right] - 2^2\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{2n+1} r^2 - 4\sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - 4\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{6}\left[(4n+3) - 2n\right]$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

(ii) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots\ldots\ldots - (2n)^2 + (2n+1)^2$

$$= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + (2n+1)^2\right]$$

$$- 2\left[2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots\ldots + (2n)^2\right]$$

$$= \sum_{r=1}^{2n+1} r^2 - 8\sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - 8\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{6}\left[(4n+3) - 4n\right] = (n+1)(2n+1)$$

(iii) $\sum_{r}^{n} r(r+4)$

முறை I $\quad \sum_{r=1}^{n} r(r+4) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + 4\sum_{r=1}^{n} r$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\left[(2n+1) + 12\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

முறை II $\quad Ur = r(r+4) = r^2 + 4r$

$$f(r) = Ar^3 + Br^2 + Cr$$

$f(r) - f(r-1) = Ur$ ஆகுமாறு A, B, C, ஐக் காணல் வேண்டும்.

$$f(r) - f(r-1) = U_r$$

$$A\left[r^3 + (r-1)^3\right] + B\left[r^2 - (r-1)^2\right] + C\left[r - (r-1)\right] = r^2 + 4r$$

$$A\left[3r^2 - 3r + 1\right] + B\left[2r - 1\right] + C = r^2 + 4r$$

$$3A\,r^2 + (2B - 3A)r + (A - B + C) = r^2 + 4r$$

$$\Rightarrow 3A = 1,\ 2B - 3A = 4,\ A - B + C = 0$$

$$A = \frac{1}{3},\quad B = \frac{5}{2},\quad C = \frac{13}{6}$$

$$\begin{aligned}
Ur &= f(r) - f(r-1)\\
U_1 &= f(1) - f(o)\\
U_2 &= f(2) - f(1)\\
&\ \ \vdots\\
U_{n-1} &= f(n-1) - f(n-2)\\
Un &= f(n) - f(n-1)\\
\hline
\sum_{r=1}^{n} Ur &= f(n) - f(0)
\end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+4) = \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{13}{6}n\right) - 0$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}$$

வித்தியாசமுறை மூலம் கூட்டுத்தொகை காணல்

(i) $Ur = r$ என்க $\quad \sum_{r=1}^{n} U_r$

$Vr = \lambda r(r+1)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$Vr - V_{r-1} = Ur$ ஆகுமாறு λ ஐக் காணல் வேண்டும்.

$$\lambda r(r+1) - \lambda(r-1)r = r$$

$$\lambda r\left[(r+1) - (r-1)\right] = r$$

$2\lambda r = r\ ;\ \lambda = \frac{1}{2}$ ஆகும்.

$$Ur = V_r - V_{r-1}, \text{ என்பதில்}$$

$$U_1 = V_1 - V_o$$
$$U_2 = V_2 - V_1$$
$$U_3 = V_3 - V_2$$
$$Un = V_n - V_{n-1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = V_n - V_o = \lambda n(n+1) = \frac{1}{2} n(n+1) \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $Ur = r(r+1)$ என்க. $\sum_{r=1}^{n} U_r$

$Vr = \lambda r(r+1)(r+2)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$Ur = Vr - Vr - 1$ ஆகுமாறு λ ஐக் காணவேண்டும்.

$= \lambda r(r+1)(r+2) - \lambda(r-1)r(r+1)$

$= \lambda r(r+1)[(r+2)-(r-1)]$

$= 3\lambda \cdot Ur \quad \therefore \lambda = \frac{1}{3}$. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} Ur$ ஐக் காணலாம்.

(iii) $Ur = r(r+1)(r+2)$ என்க.

$Vr = \lambda r(r+1)(r+2)(r+3)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$Ur = V_r - V_{r-1}$ ஆகுமாறு λ ஐக் காணவேண்டும்.

$= \lambda r(r+1)(r+2)(r+3) - \lambda(r-1)r(r+1)(r+2)$

$= \lambda r(r+1)(r+2)[(r+3)-(r-1)]$

$= 4\lambda \cdot Ur \quad \therefore \lambda = \frac{1}{4}$, இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} Ur$ ஐக் காணலாம்.

(iv) $Ur = \frac{1}{r(r+1)}$ என்க.

$Vr = \frac{\lambda}{r}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$Ur = V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு λ ஐக் காண வேண்டும்.

$Ur = \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda}{r+1} \qquad = \frac{\lambda}{r(r+1)} = \lambda \cdot Ur \qquad \therefore \lambda = 1$

$$Ur = V_r - V_{r+1}$$

$$U_1 = V_1 - V_2$$
$$U_2 = V_2 - V_3$$
$$U_3 = V_3 - V_4$$
$$U_{n-1} = V_{n-1} - V_n$$
$$U_n = V_n - V_{n+1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = V_1 - V_{n+1} \text{ ஆகும்.}$$

(v) $Ur = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ என்க.

$Vr = \frac{\lambda}{r(r+1)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$Ur = V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு λ ஐக் காணவேண்டும்.

$= \frac{\lambda}{r(r+1)} - \frac{\lambda}{(r+1)(r+2)} = \frac{2\lambda}{r(r+1)(r+2)} = 2\lambda \cdot Ur$

ஆகவே $\lambda = \frac{1}{2}$, இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} Ur$ ஐக் காணலாம்.

(vi) $Ur = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$ என்க.

$Vr = \dfrac{\lambda}{r(r+1)(r+2)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$V_r - V_{r+1} = Ur$ ஆகுமாறு λ ஐக் காணவேண்டும்.

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{\lambda}{r(r+1)(r+2)} - \frac{\lambda}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$= \frac{\lambda[r+3-r]}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$= 3\lambda \cdot \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$\lambda = \dfrac{1}{3}$, இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} Ur$ ஐக் காணலாம்.

உதாரணம் 10

(i) $1 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \cdot 14 + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு Ur ஐ எழுதுக. $Ur = Vr - Vr - 1$ ஆகுமாறு Vr ஐ வரையறுத்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} Ur$ ஐக் காண்க.

(ii) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dfrac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பை Wr ஐ எழுதுக. $Wr = a_r - a_{r+1}$ ஆகுமாறு ar ஐ வரையறுத்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} Wr$ ஐக் காண்க.

(i) $1 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \cdot 14 + \ldots\ldots$

இங்கு $a + (r-1)d = 1 + (r-1) \cdot 3 = 3r - 2$

r ஆவது உறுப்பு $Ur = (3r-2)(3r+1)(3r+4)$ ஆகும்.

$Vr = \lambda(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)$ என வரையறுக்க.

$$Ur = V_{r-}\ V_{r-1} = \lambda(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)$$
$$- \lambda(3r-5)(3r-2)(3r+1)(2r+4)$$
$$= \lambda(3r-2)(3r+1)(3r+4)\left[(3r+7) - (3r-5)\right]$$

$= 12\lambda \cdot Ur \cdot$ ஆகவே $\lambda = \dfrac{1}{12}$

$$U_r = V_r - V_{r-1}$$
$$U_1 = V_1 - V_o$$
$$U_2 = V_2 - V_1$$
$$U_3 = V_3 - V_2$$
$$U_n = V_n - V_{n-1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = V_{n-} V_0 = \frac{1}{12}\left[(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7) + 56\right]$$

(ii) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dfrac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} \ldots\ldots$

$1 + (n-1)2 = 2n - 1$

r ஆவது உறுப்பு $Wr = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ஆகும்.

$a_r = \dfrac{\lambda}{(2r-1)(2r+1)}$ என வரையறுக்க.

$$Wr = a_r - a_{r+1} = \frac{\lambda}{(2r-1)(2r+1)} - \frac{\lambda}{(2r+1)(2r+3)}$$

$$= \frac{\lambda\left[(2r+3)-(2r-1)\right]}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$$

$= 4\lambda \cdot Wr$ ஆகவே $\lambda = \frac{1}{4}$

$$\underline{W_r = a_r - a_{r+1}}$$

$$W_1 = a_1 - a_2$$
$$W_2 = a_2 - a_3$$
$$W_{n-1} = a_{n-1} - a_n$$
$$Wn = a_n - a_{n+1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Wr = a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right]$$ ஆகும்.

பகுதிப்பின்னங்களை உபயோகித்து கூட்டுத்தொகை காணல்

உதாரணம் 11

(i) $Ur = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ஆகும். Ur ஐப் பகுதிப்பின்னமாக எழுதுவதன் மூலம் $\sum_{r=1}^{n} Ur$ ஐக் காண்க.

(ii) $\frac{8}{1\cdot2\cdot3} + \frac{10}{2\cdot3\cdot4} + \frac{12}{3\cdot4\cdot5} + \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் r ஆம் உறுப்பு V_r ஐ பகுதிப்பின்னமாக எழுதுவதன் மூலம் $\sum_{r=1}^{n} V_r$ ஐக் காண்க.

(i) $$Ur = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} = \frac{A}{2r-1} + \frac{B}{2r+1} + \frac{C}{2r+3}$$

$$= \frac{A(2r+1)(2r+3) + B(2r-1)(2r+3) + C(2r-1)(2r+1)}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$$

$$1 = A(2r+1)(2r+3) + B(2r-1)(2r+3) + C(2r-1)(2r+1)$$

$r = \frac{1}{2}$ எனின், $1 = A \times 2 \times 4, \quad A = \frac{1}{8}$

$r = -\frac{1}{2}$ எனின், $1 = B \times (-2)(2) \quad B = -\frac{1}{4}$

$r = -\frac{3}{2}$ எனின், $1 = C \times (-4)(-2) = C = \frac{1}{8}$

$$\underline{U_r = \frac{1}{8(2r-1)} - \frac{1}{4(2r+1)} + \frac{1}{8(2r+3)}}$$

$$r = 1,\ U_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{40}$$
$$U_2 = \frac{1}{24} - \frac{1}{20} + \frac{1}{56}$$
$$U_3 = \frac{1}{40} - \frac{1}{28} + \frac{1}{72}$$
$$U_4 = \frac{1}{56} - \frac{1}{36} + \frac{1}{88}$$

....

....

$$U_{n-2} = \frac{1}{8(2n-5)} - \frac{1}{4(2n-3)} + \frac{1}{8(2n-1)}$$
$$U_{n-1} = \frac{1}{8(2n-3)} - \frac{1}{4(2n-1)} + \frac{1}{8(2n+1)}$$
$$U_n = \frac{1}{8(2n-1)} - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8(2n+3)} + \frac{1}{8(2n+1)} - \frac{1}{4(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{8(2n+3)} - \frac{1}{8(2n+1)}$$

(ii) $\frac{8}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{10}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots\dots\dots$

$a + (r-1)d = 8 + (r-1)\cdot 2 = 2r + 6$

$$Vr = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+2}$$

$$= \frac{A(r+1)(r+2) + Br(r+2) + C_r(r+1)}{r(r+1)(r+2)}$$

$$2r + 6 = A(r+1)(r+2) + Br(r+2) + C_r(r+1)$$

$r = 0;\quad 6 = 2A,\quad A = 3$

$r = -1,\quad 4 = -B,\quad B = -4$

$r = -2,\quad 2 = 2C,\quad C = 1$

$$V_r = \frac{3}{r} - \frac{4}{r+1} + \frac{1}{r+2}$$

$$V_1 = 3 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}$$

$$V_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}$$

$$V_3 = \frac{3}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5}$$

$$V_4 = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$$

$$V_{n-2} = \frac{3}{n-2} - \frac{4}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$V_{n-1} = \frac{3}{n-1} - \frac{4}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$V_n = \frac{3}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Vr = 3 - 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{4}{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

உதாரணம் 12

பின்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத்தொகையை

(அ) பகுதிப்பின்னமுறை மூலம் (ஆ) வித்தியாசமுறை மூலம் காண்க.

(i) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)}$ (ii) $\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)}$

(i) (அ) $U_r = \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2(r+2)}$

$$U_r = \frac{1}{2r} - \frac{1}{2(r+2)}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$U_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$U_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

$$U_4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$$

$$U_{n-2} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}$$

$$U_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

$$U_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

(ஆ) $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)} = \dfrac{r+1}{r(r+1)(r+2)}$

$V_r = \dfrac{Ar+B}{r(r+1)}$ என வரையறுக்க.

$U_r = V_r - V_{r+1}$ என்பதில்

$$\frac{r+1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{Ar+B}{r(r+1)} - \frac{A(r+1)+B}{(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{(Ar+B)(r+2) - [A(r+1)+B]r}{r(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{Ar+2B}{r(r+1)(r+2)} = U_r$$

$$\Rightarrow A = 1,\ B = \frac{1}{2}$$

$$U_r = V_r - V_r + 1$$

$$U_1 = V_1 - V_2$$
$$U_2 = V_2 - V_3$$
$$U_3 = V_3 - V_4$$

....

....

$$U_{n-1} = V_{n-1} - V_n$$
$$U_n = V_n - V_{n+1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} Ur = V_1 - V_{n+1} = \frac{A+B}{2} - \frac{A(n+1)+B}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

(ii) பகுதிப்பின்னமுறை உதாரணம் 11 இல் தரப்பட்டுள்ளது.

(ஆ) வித்தியாசமுறை

$$U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)}$$

$$Vr = \frac{Ar+B}{r(r+1)}$$

$$V_r - V_{r+1} = \frac{Ar+B}{r(r+1)} - \frac{A(r+1)+B}{(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{Ar+2B}{r(r+1)(r+2)} = U_r$$

$$\Rightarrow A = 2,\quad B = 3,\quad V_r = \frac{2r+3}{r(r+1)}$$

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= V_1 - V_2 \\
U_2 &= V_2 - V_3 \\
U_3 &= V_3 - V_4 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
U_{n-1} &= V_{n-1} - V_n \\
U_n &= V_n - V_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1} \quad = \frac{5}{2} - \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)}$$

ஒருங்கு தொடர்

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடர் எனின் $n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ ஆகும்.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r\,, \quad S_m = \sum_{r=1}^{m} U_r \quad \text{என்க.}$$

தொடர் ஒருங்கு தொடராதலால்

$n \to \infty$ ஆக, $S_n \to l$ (முடிவுள்ள பெறுமானம்)

$m \to \infty$ ஆக, $S_m \to l$ ஆகும்.

$m = n - 1$ என்க.

$\therefore n \to \infty$ ஆக, $S_n - S_{n-1} \to 0$

$\therefore n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ ஆகும். $\left[S_n - S_{n-1} = U_n\right]$

ஆனால் இதன் மறுதலை எப்போதும் உண்மையல்ல.

அதாவது $n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ எனின் $\sum U_n$ ஒருங்கு தொடர் எனக் கூறமுடியாது.

$n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0 \not\Rightarrow \sum U_n$ ஒருங்கு தொடர்

$\sum \frac{1}{n}$ என்ற தொடரைக் கருதுக.

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots\dots\dots + \frac{1}{16}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{17} + \dots\dots\dots + \frac{1}{32}\right) + \dots\dots\dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots\dots$$

வலது கைப்பக்கத்தில் இரண்டாம் உறுப்பிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் 1 ஐப் பொது விகிதமாகவும் $\frac{1}{2}$ ஐ முதலாம் உறுப்பாகவும் கொண்ட பெருக்கல் தொடராகும். இது ஒருங்கு தொடரல்ல. $\therefore \sum \frac{1}{n}$, ஒருங்கு தொடரல்ல.

$p \Rightarrow q$ எனின், $\sim q \Rightarrow \sim p$ ஆகும்.

மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்தில் $\sum U_n$ ஒருங்கு தொடரெனின் $n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ ஆகும்.

$\sum U_n$ ஒருங்கு தொடராகும் $\Rightarrow n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ ஆகும்.

$$p \Rightarrow q$$

p என்பது $\sum U_n$ ஒருங்கு தொடராகும். q என்பது $n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ ஆகும்.

$\sim q$ என்பது, $n \to \infty$ ஆக, $U_n \not\to 0$ ஆகும்.

p என்பது $\sum U_n$ ஒருங்குதொடர் அல்ல.

$n \to \infty$ ஆக, $U_n \not\to 0 \Rightarrow \sum U_n$ ஒருங்கு தொடரல்ல.

உதாரணம் $U_n = n(n+1)$ என்க. $\sum U_n$

$\sum U_n$. ஒருங்கு தொடர் என்க.

ஆகவே $n \to \infty$ ஆக, $U_n \to 0$ ஆகும்.

ஆனால் $n \to \infty$ ஆக, $U_n = n(n+1) \to \infty$ ஆகும்.

இது ஒரு எதிர்மறுப்பு

$\therefore \sum U_n$ ஒருங்கு தொடர் அல்ல

பின்வரும் உதாரணத்தை அவதானிக்க.

p இரட்டை எண் எனின், மட்டுமே p^2 இரட்டை எண் ஆகும்.

அதாவது p இரட்டை எண் $\Leftrightarrow p^2$ இரட்டை எண்.

நிறுவல்: p இரட்டை எண் என்க.

$$\Rightarrow p = 2k \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow p^2 = (2k)^2$$

$$\Rightarrow p^2 = 2\left(2k^2\right)$$

$$\Rightarrow p^2 = 2m\,(m \in Z)$$

$\Rightarrow p^2$ இரட்டை எண்.

$\therefore$ p இரட்டை எண் $\Rightarrow p^2$ இரட்டை எண் .... (A)

மறுதலையாக p^2 இரட்டை எண் என்க.

p இரட்டையெண் அல்ல எனக் கொள்க. எனவே p ஒற்றை எண் ஆகும்.

$p = 2k - 1, \quad k \in Z$

$$P^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$$

$$= 2\left(2k^2 - 2k\right) + 1$$

$$= 2m + 1. \quad m \in Z$$

$2m$ இரட்டை எண். எனவே $(2m+1)$ ஒற்றை எண்

ஆகவே p^2 ஒற்றை எண்

இது ஒரு எதிர்மறுப்பு

$\therefore p$ இரட்டை எண் ஆகும்.

$\therefore p^2$ இரட்டை எண் $\Rightarrow p$ இரட்டை எண் .... (B)

(A), (B) என்பவற்றிலிருந்து, p இரட்டை எண் $\Leftrightarrow p^2$ இரட்டை எண்.

விகிதமுறு எண்: $a, b \in Z$ ஆகவும், $b \neq 0$ ஆகவும் இருக்க $\frac{a}{b}$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படக் கூடிய எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனப்படும்.

இப்பொழுது $\sqrt{2}-$ விகிதமுறா எண் என நிறுவுவோம்.

$\sqrt{2}-$ விகிதமுறு எண் என்க.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in Z, \quad b \neq 0$ மேலும் $(a, b) = 1$

அதாவது a, b இன் பொதுக்காரணி 1 மட்டுமேயாகும்.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ இரட்டை எண்

$\Rightarrow a$ இரட்டை எண்

$\Rightarrow a = 2k \quad (k \in Z)$ .... (1)

$$\Rightarrow a^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2k^2$$

$\Rightarrow b^2$ இரட்டை எண்

$\Rightarrow b$. இரட்டை எண்

$\Rightarrow b = 2m\,(m \in Z)$ .... (2)

எனவே $(a, b) = 2$ இது ஒரு எதிர்மறுப்பு

எனவே $\sqrt{2}$. ஐ $\frac{a}{b}$ எனும் வடிவில் எழுதமுடியாது.

ஆகவே $\sqrt{2}$. விகிதமுறு எண் அல்ல

$\sqrt{2}$. விகிதமுறா எண் ஆகும்.

உதாரணம்

a, b என்பன $a < b$ ஆக உள்ள எவையேனும் இரு மெய்யெண்கள் என்க.

$a < \frac{a+b}{2} < b$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $x > \frac{1}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் மிகச் சிறிய மெய்யெண் x இல்லை எனக்காட்டுக.

$a < b$ (தரவு) எனவே $a - b < 0$ ஆகும்.

இப்பொழுது $a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}(a-b) < 0$

ஆகவே $a < \frac{a+b}{2}$ .... (1)

$\frac{a+b}{2} - b = \frac{1}{2}(a-b) < 0$

ஆகவே $\frac{a+b}{2} < b$ .... (2)

(1), (2) இலிருந்து $a < \frac{a+b}{2} < b$ ஆகும்.

$x > \frac{1}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் மிகச் சிறிய மெய்யெண் x இன் பெறுமானம் a என்க. இப்பொழுது $a > \frac{1}{2}$. அத்துடன் $\frac{1}{2}$ இலும் பெரிதான மிகச் சிறிய மெய்யெண் a ஆகும். முதலாம் பகுதியிலிருந்து

$$\frac{1}{2} < a \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + a\right) < a$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a < a$$

$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a\right)$ என்னும் எண் $\frac{1}{2}$ இலும் பெரியது ஆனால் a இலும் சிறியது. இது $\frac{1}{2}$ இலும் பெரிதான மிகச் சிறிய மெய்யெண் a என்பதற்கு முரணானது. இது ஓர் எதிர்மறுப்பு ஆகும். எனவே $x > \frac{1}{2}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் மிகச் சிறிய மெய்யெண் x இல்லை.

உதாரணம்

$\sqrt{5}$. விகிதமுறா எண் எனக் காட்டுக.

$\sqrt{5}$ விகிதமுறு எண் என்க.

$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, இங்கு $p, q \in Z$, $q \neq 0$

p, q இற்கு பொதுக்காரணிகள் இல்லை என்க. அதாவது $(p, q) = 1$ ஆகும்.

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q}$$

$$p^2 = 5q^2$$

p^2 என்பது 5 இன் ஒரு மடங்காகும்

5 என்பது ஒரு முதன்மையெண் ஆதலால்,

$\left(p^2 = 5k \Rightarrow p \cdot p = 5k\right)$ 5, p ஐப் பிரிக்கும் $(k \in Z)$

$p = 5m$ .... (1)

$p^2 = 5q^2$

$25m^2 = 5q^2$

$q^2 = 5m^2$

q என்பது 5 இன் ஒரு மடங்கு ஆகும்.

$q = 5n$ .... (2)

(1), (2) இலிருந்து 5, p, q என்பவற்றின் பொதுக்காரணி ஆகும்.

அதாவது $(p, q) = 5$

இது ஒரு எதிர்மறுப்பு ஆகும்.

எனவே $\sqrt{5}$ - விகிதமுறு எண்

உதாரணம்

அடுத்து வரும் மூன்று நேர் நிறையெண்களின் கூட்டுத்தொகை 3 ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

எண்கள் $n, \quad n+1, \quad n+2 \qquad (n \geq 1)$

$\ell =$ கூட்டுத்தொகை $= n + (n+1) + (n+2)$

$= 3n + 3 = 3(n+1)$

$l = 3(n+1) \qquad (n+1 \in Z)$

$\therefore 3, \ell$ ஐ ப்பிரிக்கும்

உதாரணம்

அடுத்து வரும் மூன்று நேர் நிறையெண்களின் பெருக்கம் 6 ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

$P(n) = n(n+1)(n+2) \qquad (n \geq 1)$

$n = 1$ எனின், $P(1) = 1 \times 2 \times 3 = 6$

6, $P(1)$ ஐப் பிரிக்கும். ஆகவே $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை.

$n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என்க.

$P(p) = p(p+1)(p+2)$ ஐ 6 பிரிக்கும்.

$P(p+1) = (p+1)(p+2)(p+3)$

$= p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)$

$= P(p) + 3(p+1)(p+2)$

$p+1, \; p+2$ இவற்றுள் ஒன்று இரட்டையெண் ஆகும்.

எனவே $3(p+1)(p+2)$ ஐ 6 பிரிக்கும்.

$P(p)$ ஐ 6 பிரிக்கும்.

எனவே $P(p+1)$ ஐ 6 பிரிக்கும்

ஆகவே $n = p+1$ ஆக முடிபு உண்மை

எனவே கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் 6, $n(n+1)(n+2)$ ஐப்பிரிக்கும்.

பயிற்சி 6

1. கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 21. முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 78. பொது வித்தியாசம் 4 எனின் முதலாம் உறுப்பைக் காண்க.

2. நேரெண்களைக் கொண்ட கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 21. அவ்வுறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 165 எனின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

3. கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் pஆவது, qஆவது rஆவது உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R எனின், $p(Q-R) + q(R-P) + r(P-Q) = 0$ எனக் காட்டுக.

4. இரு கூட்டல் தொடர்களின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைகளின் விகிதம் $13 - 7n : 3n + 1$ ஆகும். இத்தொடர்களின் முதலாம் உறுப்புக்களின் விகிதம் $3:2$ எனவும், இரண்டாம் உறுப்புக்களின் விகிதம் $-4:5$ எனவும் நிறுவுக.

5. $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots$ என்னும் கூட்டல் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஆகும். $U_m = 4, U_{4m} = 24 \quad S_{4m} = 44S_m$ எனின் U_1 இனதும் m இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R எனின் $(P, Q, R, > 0)$

   $(q-r)\log P + (r-p)\log Q + (p-q)\log R = 0$ எனக் காட்டுக.

7. முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும், பொதுவிகிதம் r ஆகவும் உடைய பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை S_n குறிக்கிறது. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

   (i) $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

   (ii) $r^{m-n} = \dfrac{S_{m+p} - S_m}{S_{n+p} - S_n}$

8. $5 + 55 + 5555 + 5555 + ...$ என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $\frac{5}{81}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$ என நிறுவுக.

9. ar, br என்பன $Ur = ar \pm br$ ஆகுமாறு இருப்பின்

$$\sum_{r-1}^{n} Ur = \sum_{r-1}^{n} ar \pm \sum_{r-1}^{n} br$$ எனக் காட்டுக.

$Ur = \frac{2^r - 1}{3^{r+1}}$ எனின் $\sum_{r-1}^{n} Ur = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ என நிறுவுக.

10. $1 + \frac{x}{a}(1+x) + \frac{x^2}{a^2}\left(1 + x + x^2\right) + \frac{x^3}{a^3}\left(1 + x + x^2 + x^3\right) + ...$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காட்டுக.

11. $1 + (1+x)\sin\theta + \left(1 + x + x^2\right)\sin^2\theta + ...$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. $-1 < x < 1$ ஆகவும், $-1 < \sin\theta < 1$ ஆகவும், இருக்க, இத்தொடர் ஒருங்குமென நிறுவி, முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{(1 - x\sin\theta)(1 - \sin\theta)}$ என நிறுவுக.

12. (i) x இன் குறிப்பிட்ட வீச்சுக்களுக்கு

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{3x^2 - 9x - 1}{2x+3}\right)^r = \frac{3 + 2x}{4 + 11x - 3x^2}$$

என நிறுவி, இவ்வீச்சங்களைக் காண்க.

(ii) $r \neq 1$ எனின், $1 + 2r + 3r^2 + ... + nr^{n-1} + ...$ என்னும் முடிவிலித் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1 - r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$ என நிறுவுக.

$-1 < r < 1$ எனின், $n \to \infty$ ஆக, $nr^n \to 0$ என எடுத்து, $-1 < r < 1$ எனின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

13. (i) $\sum_{r=0}^{\infty}\left(x^2 - 2x - 2\right)^r$ என்னும் தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இன் வீச்சங்களைக் காண்க.

(ii) $U_r = (2r-1)\,3^r$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

14. $1 + \left(\frac{3x+2}{x+10}\right) + \left(\frac{3x+2}{x+10}\right)^2 + ...$

$1 + \left(\frac{3x-9}{x+1}\right) + \left(\frac{3x-9}{x+1}\right)^2 + ...$

என்ற பெருக்கற் தொடர்கள் இரண்டும் ஒருங்குவதற்கான x இன் பொதுவான வீச்சுக்களைக் காண்க.

S_1, S_2 என்பன முறையே இரு தொடர்களினதும் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாயின் $2S_1 = 13S_2$ ஆவதற்கு x இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானம் மட்டுமே உண்டு என நிறுவுக.

15. (i) $\sum_{r=1}^{n} r^2 \cdot 2^r$ ஐக் காண்க.

(ii) $x = \frac{1}{3}$ உம், $x = \frac{1}{2}$ உம் ஆக, $1 + \frac{2x}{2x+b} + \left(\frac{2x}{ax+b}\right)^2 + ...$ என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை முறையே 2 உம் ... உம் ஆயின் a, b என்பவற்றைக் கண்டு தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இ... வீச்சுக்களைக் காண்க.

16. (i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என நிறுவுக.

$1^2 + 4^4 + 7^2 + 10^2 + \dots\dots$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ என்பது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

17. (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையால் நிறுவுக.

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஐக் காண்க. இத் தொடர் ஒருங்குதொடர் என நிறுவி முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

18. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ என்பதைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ (a) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} 3(r+1)(r+2)$ (b) $\displaystyle\sum_{r=n}^{2n} \frac{r^2}{n^2}$ என்பவற்றைக் காண்க.

19. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ என கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

முதல் n இரட்டை எண்களின் கனங்களின் கூட்டுத்தொகையை உய்த்தறிக.

$1\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 6 + \dots\dots + (n-2)n(n+2)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\,n\,(n+2)} = \frac{11}{96}$ எனக் காட்டுக.

20. $f(r) = Ar^4 + Br^3 + Cr^2 + Dr$ எனக் கொண்டு $f(r) - f(r-1) = r^3$ ஆகுமாறு A, B, C, D ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ எனக் காட்டுக.

$1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 5 + 5\cdot 6\cdot 7 \dots\dots + (2n-1)\cdot 2n(2n+1)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

21. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனக் காட்டுக.

$a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 + \dots\dots + (a+nd)^2$

$= \dfrac{1}{6}(n+1)\left[6a(a+nd) + d^2 n(2n+1)\right]$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து

$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots\dots + m^2 = \dfrac{m}{6}(m+1)(m+2)$ [m. இரட்டை எண்]

$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots\dots + m^2 = \dfrac{m}{6}(m+1)(m+2)$ [m. ஒற்றை எண்]

எனவும் காட்டுக.

22. (a) கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பாவித்து நிறுவுக.

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \frac{n}{3}(n+1)(n+5)$

(ii) $2\cdot 1! + 5\cdot 2! + 10\cdot 3! + \dots\dots + (n^2+1)\cdot n! = n\cdot(n+1)!$

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 \dots\dots + (-1)^{r+1}\cdot r^2 + \dots\dots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$\frac{1}{2} n(n+1)$ (n ஒற்றை எனின்)

$-\frac{1}{2} n(n+1)$ (n இரட்டை எனின்), எனக் காட்டுக.

23. **(a)** $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \ldots\ldots + (2r-1) \cdot (2r+1)(2r+3) + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2r} + \ldots\ldots$

என்னும் தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை

$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n+1)}{2 . 4 \ldots\ldots 2n} - 1$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையிலோ

அல்லது வேறு வழியாலோ நிறுவுக.

24. $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \ldots\ldots + n(2n-1)$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகை

$\frac{1}{6} n(n+1)(4n-1)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

$1 \cdot (2n-1) + 2 \cdot (2n-3) + \ldots\ldots + n[2n-(2n-1)]$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

25. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐக் காண்க.

முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S ஐக் காண்க.

இத் தொடரில் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும், S இற்குமிடையேயான வித்தியாசம் 10^{-3} இலும் குறைவாக இருக்குமெனக் காண்க.

26. r ஆவது உறுப்புக்கள் முறையே (i) $\frac{1}{2r(2r+2)}$ (ii) $\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ ஆகவுள்ள தொடர்களின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இதிலிருந்து r ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{r(r+2)}$ ஆகவுள்ள தொடரின் முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை உய்த்தறிக.

27. $f(r) \equiv \frac{1}{r^2}$ எனின், $f(r) - f(r+1)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களைக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கு தொடர் என நிறுவி, இதன் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையக் காண்க.

28. (i) $f(r) \equiv \frac{1}{r!}$ எனின், $f(r) - f(r+1)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{(r+1)!}$ ஐக் காண்க.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{51} (98+2r)^2$ ஐக் காண்க.

29. (i) $f(r) \equiv r!$ எனின் $f(r+1) - f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் $2n$ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஆகும். $\frac{1}{4} - S_n < 10^{-4}$ ஆகுமாறு n இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

30. (i) $f(r) \equiv \cos 2r\theta$ எனின், $f(r) - f(r+1)$ ஐ சுருக்குக.

இதிலிருந்து $\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ஆகும்.

முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S எனின் $S - S_n < \frac{1}{10^3}$ ஆகுமாறு n இனது மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) முடிவிலி பெருக்கல் தொடர் ஒன்றினை உபயோகித்து $0 \cdot 4321 = \frac{713}{1650}$ எனக் காட்டுக.

$$\left[0 \cdot 4321 = 0 \cdot 43212121\ldots\right]$$

31. (a) கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால்

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ என நிறுவுக.

(b) $f(r) \equiv \log\left(1 + \frac{1}{r}\right)$ எனின்

$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$ என நிறுவுக.

32. (a) கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால்

$\sum_{r=1}^{n} r \cdot 2^{r-1} = 1 + (n-1)2^n$ என நிறுவுக.

(b) $-1 < r < 1$ ஆகவும் $S_n = \sum_{p=1}^{n} r^p$ ஆகவும் இருப்பின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\lim_{n \to \infty} S_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot r^n$ (iii) $\sum_{q=1}^{n} S_q$

33. $S_n = \sum_{r=0}^{n} a^r \left(1 + a + a^2 + \ldots + a^r\right)$, $(|a| \neq 1)$ எனின் $(1-a) S_n$ ஐக் கருதி, $S_n = \frac{1 - a^{2n+2}}{(1-a^2)(1-a)} - \frac{a^{n+1}(1 + a^{n+1})}{(1-a)^2}$ எனக் காட்டுக.

$n \to \infty$ ஆக, S_n ஓர் எல்லையை அணுகுமெனின் a இன் பெறுமானங்களைக் கூறுக.

a இன் இப் பெறுமானத்திற்கு முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

34. நேர் நிறை எண்கள் பின்வருமாறு அடைப்புக்குள் இடப்பட்டுள்ளன. $(1), (2, 3) (4, 5, 6), \ldots$ இங்கு r ஆவது அடைப்பினுள் r நிறையெண்கள் உள்ளன. r ஆவது அடைப்பினுள் உள்ள முதல் எண்ணிற்கும், கடைசி எண்ணிற்கும் கோவை ஒன்றினைப் பெறுக.

முதல் 20 அடைப்பினுள் உள்ள எல்லா நிறை எண்களினதும் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. r ஆவது அடைப்பினுள் உள்ள நிறைஎண்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{2}\left(r^2 + 1\right)$ என நிறுவுக.

35. $\frac{4}{3} + \frac{9}{8} + \frac{16}{15} + \ldots + \frac{n^2}{n^2 - 1}$ எனும் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

36. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ என்னும் தொடர்கள் x இன் குறிப்பிட்ட வீச்சுக்களுக்கு ஒருங்குகின்றன. அவ்வீச்சுக்களைக் குறிப்பிடுக. இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுத்தொகை முதலாவது தொடரின் கூட்டுத் தொகையின் இருமடங்கெனின் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $n(n+1) \equiv (n-1)(n-2)+4(n-1)+2$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $n \geq 3$ ஆகும் போது,

$\frac{n(n+1)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ

$1 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 3}{1!} + \frac{3 \cdot 4}{2!} + \frac{4 \cdot 5}{3!} + ... + \frac{n(n+1)}{(n-1)!} + ...$ என்னும்

தொடரின் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுதொகையைக் காண்க.

37. (i) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகவும் $f(n) = 3^{2n} + 7$ ஆகவும் இருப்பின் $f(n+1) - f(n)$ ஆனது 8 இனாற் செப்பமாகப் பிரிக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

(ii) $-1 < a < 1$ ஆக இருக்க, $n \to \infty$ ஆகும்போது

$na^n \to 0$ ஆக இருப்பின், $n \to \infty$ ஆகும் போது

$a^n \to 0$ ஆகும் என்பதை உய்த்தறிக.

$-1 < a < 1$ ஆகவும், $U_r = a^{r-1}$ ஆகவும் இருப்பின் $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்பதோடு இது ஒருங்கும் எனவும் காட்டுக. மேலும் $V_r = ra^{r-1}$ ஆக இருப்பின் $(1-a)\sum_{r=1}^{n} V_r = \sum_{r=1}^{n} U_r - na^n$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} V_r$ என்பது ஒருங்குமெனக் காட்டி, அதன் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

38. $Ur \equiv f(r+1) - f(r)$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} Ur = f(n+1) - f(1)$ என நிறுவுக.

(i) பொருத்தமான λ விற்கு $f(r) = \frac{\lambda(4r+1)}{r(r+1)}$ என எடுத்து

$\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ ஐக் காண்க.

இத் தொடர் ஒருங்குமென நிறுவி, முடிவிலி வரைக்குமான அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) பொருத்தமான μ விற்கு $f(r) = \mu(r-1)\, r\,(r+2)$ என எடுத்து

$\sum_{r=1}^{n} r(3r+5)$ ஐக் காண்க. இத் தொடர் ஒருங்குவதில்லையென நிறுவுக.

(iii) $U_r = cos\left[\theta + (r-1)\alpha\right]$ எனின், $2sin\frac{\alpha}{2}\, U_r = f(r+1) - f(r)$

ஆக இருக்குமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து α ஆனது 2π யின் ஒரு மடங்காக இராத போது $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

39. (i) $f(r) = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$ எனின் $f(r) - f(r-1) = r^2$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காண்க.

எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} r(7r-1) = \sum_{r=1}^{2n} r(r+1)$ என நிறுவுக.

(ii) $U_r = \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஆயின், கணிதத்தொகுத்தறிவைக் கொண்டு,

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து (அ) $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதையும்

(ஆ) எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

$\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} < \dfrac{1}{4}$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

40. $S_n = \sum_{r=1}^{n} \dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனின், $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$ என நிறுவுவதற்கு கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்துக.

$S_n' = \dfrac{1}{r(r+1)}$ எனின், $\dfrac{1}{r(r+1)} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r+1}$

என எழுதுவதனால் S_n' ஐக் காண்க.

p, q என்பன ஒருமைகளாக இருக்க.

$S_n'' = \sum_{r=1}^{n} \dfrac{pr+q}{r(r+1)(r+2)}$ எனின், $S_n'' = p\left[S_{n+1}' - \dfrac{1}{2}\right] + q \cdot S_n$

என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து p, q என்பவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் மேலே குறிக்கப்பட்ட கடைசித் தொடரானது ஒருங்குமெனக் காட்டி, முடிவிலி வரைக்குமான அதன் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

41. (i) $U_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ எனின், $U_n - U_{n+1}$ ஐச் சுருக்குக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ஐக் காண்க,

இத்தொடரின் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $\dfrac{6-7x}{(1-x)(2-x)}$ என்பதைப் பகுதிப்பின்னங்களில் தருக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு முறையிலோ

$\dfrac{6-7x}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $a_n = 2^{2-n} - 1$ ஆகும். x இன் எந்தப் பெறுமானங்களுக்கு இவ்விரிவு வலிதானதாக இருக்கும் எனக் கூறுக.

42. $U_r = \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ எனின், $U_r = \dfrac{A}{r+1} + \dfrac{B}{r+2} + \dfrac{C}{r+3}$ என அமையக்கூடியதாக A, B, C ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2(n+2)} - \dfrac{3}{2(n+3)}$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் இதே முடிவைத் தனியாகப் பெறுக. இத்தொடரானது ஒருங்குமெனக்காட்டி முடிவிலி வரைக்கும் இதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

43. (i) $\sum_{r=1}^{n} r = \dfrac{n(n+1)}{2}$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் நிறுவுக.

$r^3 - (r-1)^3 \equiv 3r^2 - 3r + 1$ எனும் சமன்பாட்டை உபயோகித்து

$\sum_{r=1}^{n} r^2$ என்பதைக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} r(3r+1)$ ஐக் காண்க.

ii. $\dfrac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)} = \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{(r+3)} + \dfrac{C}{(r+4)}$ என

அமையின் A, B, C ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க.

இதனால் $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$ என்பதன் பெறுமானங் காண்க.

இத் தொடர் ஒருங்கும் என உய்த்தறிந்து முடிவிலி வரைக்கும் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

44. $U_r = (ar+b)(ar+b+a)(ar+b+2a)\ldots[ar+b+(k-1)a]$ என்க

i. $U_r = V_r - V_{r-1}$ ஆகுமாறு V_r ஐக் காண்பதுடன்

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} (3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)$ ஐக் காண்க.

ii. $\dfrac{1}{U_r} = W_r - W_{r+1}$ ஆகுமாறு W_r ஐக் காண்பதுடன் $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{Ur}$ ஐக் காண்க.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)(3r+7)}$ ஐக் காண்க.

இத் தொடர் ஒருங்குதொடர் எனநிறுவி, இதன் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

45. கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$, $n \in Z^+$ எனநிறுவுக.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{2n} r^3$ ஐக் கருதுவதன் மூலம் $S_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (2r-1)^3$

$T_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (2r)^3$ என்பவற்றைக் காண்க. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n}$ ஐக் காண்க.

46. எல்லா $x \in R$ இற்கும் $(x \geq 1)$

$\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = 1$ எனக்காட்டுக.

$U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ஆகவுள்ள தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களின்

கூட்டுத்தொகை $S_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

i. எல்லா $n \geq n_o$ இற்கும் $S_n > 999$ ஆகுமாறு n_o இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ஒருங்குதொடரா என்பதைத் தீர்மானிக்க.

47. **(a)** 10, 13, 16, 19, 22, 25,..............., 307 என்ற கூட்டல் விருத்தியின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. மேலுள்ள விருத்தியின் ஒவ்வொரு மூன்றாம் உறுப்பும் அகற்றப்படின் மீதியாக உள்ள உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(b) $f(x) \equiv (2x-1)(2x+1)$, $x \in R$, எனத் தரப்படின் $\dfrac{1}{f(x)}$ ஐப்

பகுதிப்பின்னங்களாக உணர்த்துக. இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{f(r)} = \frac{n}{2n+1}$

எனக்காட்டுக. $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{f(r)}$ ஐக் காண்க.

(c) நேர்நிறையெண்கள் $U_1, U_2, \ldots\ldots U_n, \ldots\ldots$ ஆன தொடரி ஒன்று n நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க $n \geq 1$ இற்கு $U_1 = 1,\ U_{n+1} = 3U_n + 2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$U_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ எனக் காட்டுக.

48. $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ ஐக் கண்டு $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ என உய்த்தறிக்க

யாதாயினும் ஒரு நேர்நிறையெண் n இற்கு $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} < 2$ எனக் காட்டுக. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$ என உயத்தறிக.

i. யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறையெண் n இற்கு $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

ii. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாடு.

ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறையெண் n இற்கு $\frac{n^n}{2^n \cdot n!} > \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$ ஒருங்குவதில்லையெனக்காட்டுக.

49. யாதாயினும் நேர் நிறையெண் $n \geq 2$ இற்கு

$\frac{2n^2 + n + 1}{n!} = \frac{A}{(n-2)!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{n!}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$\frac{4}{1!} + \frac{11}{2!} + \frac{22}{3!} + \frac{37}{4!} + \ldots\ldots = 6e - 1$ என நிறுவுக.

இங்கு $e = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!}$ ஆகும்.

50. (i) $U_r = \frac{r+4}{r(r+1)(r+2)}$ எனின்,

$U_r = 2V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு ஒருமை k ஐக் காண்க.

இங்கு $V_r = \frac{k}{r(r+1)}$ ஆகும். இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{U_r}{2^{r+1}}$ ஐக் காண்க.

(ii) $\ell_n(1-x) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} \quad (|x| < 1)$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$\ell_n(2) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r,\ \ell_n(3) = \ell_n(2) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{1}{3}\right)^r$ என நிறுவுக.

$W_r = \frac{1}{r(r+1)}$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} \frac{W_r}{2^r} = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{2^r} - \frac{1}{(n+1)2^n}$ எனக் காட்டுக.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{W_r}{2^r} = 1 - \ell_n(2)$ என உய்த்தறிக.

7. வரிசை மாற்றமும், சேர்மானமும்

காரணியக் குறிப்பீடு (*Factorial Notation*)

n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $n!$ அல்லது $\underline{n|}$ என்பது

$n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ என வரையறுக்கப்படும்.

மேலும் $0! = 1$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணமாக $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ஆகும்.

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ ஆகும்.}$$

காரணியம் பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம்

$F(0) = 1, \quad F(n) = n \cdot F(n-1)$ இங்கு $n \in Z^+$

இதிலிருந்து, $F(1) = 1 \cdot F(0) = 1 \times 1 = 1$

$F(2) = 2 \cdot F(1) = 2 \times 1 = 2$

$F(3) = 3 \cdot F(2) = 3 \times 2 \times 1$

$F(4) = 4 \cdot F(3) = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ எனப் பெறலாம்.

$n\,P_r$ என்பது $n\,P_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ ஆகும்.

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$8\,P_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \text{ ஆகும்.}$$

nC_r என்பது, $nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ஆகும். இங்கு $n \in Z^+$ $0 \le r \le n$

r - நிறையெண்

$$nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

எனவே $nC_r = nC_{n-r}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

(a) பின்வருவனவற்றின் எண் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $6!$ **(ii)** $5P_5$ **(iii)** $7\,P_5$ **(iv)** $7C_5$

(b) $nC_5 = nC_{10}$ எனின் n இன் பெறுமானம் யாது?

(c) $nC_r + nC_{(r-1)} = {}^{n+1}C_r$ எனக் காட்டுக?

(a) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$$5\,P_5 = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120$$

$$7\,P_5 = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

$$7C_5 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 21$$

(b) $nC_5 = nC_{10}$

ஆனால் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $nC_5 = nC_{n-5}$

$$nC_{n-5} = nC_{10}$$

$$n-5 = 10, \quad n = 15$$

(c) $nC_r + nC_{r-1} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!} + \dfrac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!} \times \frac{(n+1)}{r\,(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\ \ r!} = {}^{n+1}C_r$$

வரிசை மாற்றம் (*Permutation*)

ஒரு குறித்த எண்ணிக்கையான பொருட்களின் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஒழுங்கு அவற்றின் வரிசை மாற்றம் எனப்படும்.

a, b என்பவற்றின் வரிசை மாற்றங்கள் ab, ba ஆகும்.
a, b, c என்பவற்றின் வரிசை மாற்றங்கள்.

$abc, \quad acb, \quad bca, \quad bac, \quad cab, \quad cba,$ ஆகும்.

இரு எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றம்

a, b என்க.

முதலாம் இடம் **இரண்டாம் இடம்**

$a \longrightarrow b$

அல்லது

$b \longrightarrow a$

முதலாம் இடம் 2 முறைகளில் (a, அல்லது b) நிரப்பப்படலாம். முதலாம் இடம் நிரப்பப்பட்டபின் 1 எழுத்து எஞ்சியிருக்கும். எனவே இரண்டாம் இடம் 1 முறையில் நிரப்பப்படலாம். எனவே வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $2 \times 1 = 2$.

மூன்று எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றம்

a, b, c என்க.

முதலாம் இடம் 3 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். முதலாம் இடம் நிரப்பப்பட்ட பின் 2 எழுத்துக்கள் எஞ்சியிருக்கும். எனவே இரண்டாம் இடம் 2 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம் முதலிரண்டு இடங்களும் நிரப்பப்பட்ட பின் ஒரு எழுத்து எஞ்சியிருக்கும். எனவே மூன்றாம் இடம் 1 முறையில் நிரப்பப்படலாம்.

முதலாம் இடம் **இரண்டாம் இடம்** **மூன்றாம் இடம்**

a — b — c
அல்லது
a — c — b

அல்லது

b — c — a
அல்லது
b — a — c

அல்லது

b — a — b
அல்லது
b — b — c

முதலாம் இடம் 3 முறைகளில் (a அல்லது b அல்லது c) நிரப்பப்படலாம். முதலாம் இடம் நிரப்பப்படும். ஒவ்வொரு முறைக்கும் இரண்டாம் இடம் 2 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். முதலிரண்டு இடங்களும் நிரப்பப்பட்ட பின் மூன்றாம் இடம் முறையில் நிரப்பப்படலாம்.
எனவே வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $3 \times 2 \times 1 = 6$.

வேறுவேறான n பொருட்களின் வரிசை மாற்றம்

வேறு வேறான n பொருட்கள் உள்ளன. முதலாம் இடம் n முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். முதலாம் இடம் நிரப்பப்பட்ட பின் இரண்டாம் இடம் $(n-1)$ முறைகளில் நிரப்பப்படலாம் முதலிரண்டு இடங்களும் நிரப்பப்பட்ட பின் மூன்றாம் இடம் $(n-2)$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். இவ்வாறு வரிசை மாற்றங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots 3 \times 2 \times 1 = n!$ ஆகும்.

வேறு வேறான n பொருட்களிலிருந்து ஒரு நேரத்தில் எடுக்கப்பட்ட r பொருட்களின் வரிசை மாற்றம்

முதலாம் இடம்	n	முறைகளில் நிரப்பப்படலாம்.
இரண்டாம் இடம்	$(n-1)$	முறைகளில் நிரப்பப்படலாம்.
மூன்றாம் இடம்	$(n-2)$	முறைகளில் நிரப்பப்படலாம்.
r ஆவது இடம்	$(n-r+1)$	முறைகளில் நிரப்பப்படலாம்.

எனவே வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1) \text{ ஆகும்.}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots.3\times2\times1}{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே வேறு வேறான n பொருட்களிலிருந்து ஒரு நேரத்தில் எடுக்கப்பட்ட r பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை nP_r எனின்

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ ஆகும்.}$$

எல்லாம் வித்தியாசமல்லாத பொருட்களிலிருந்து வரிசை மாற்றங்கள்

a, b, c, d, d, d என்பவற்றிலிருந்து பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை காண்போம்.

வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை x என்க. அவற்றுள் ஒன்றைக் கருதுக. உதாரணமாக $adbcdd$ ஐக் கருதுக.

இங்கு d களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். d இற்குப் பதிலாக a, b, c தவிர்ந்த ஏனைய புதிய வேறுவேறான எழுத்துக்களால் மாற்றீடு செய்தால் (x, y, z என்க) $a\ d\ b\ c\ d\ d$ என்ற ஒழுங்கிற்குப்பதிலாக வேறு ஆறு வரிசை மாற்றங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம். (3!) அதாவது

$$adbcdd \longrightarrow axbcyz, \quad axbczy$$
$$aybcxz, \quad aybczx$$
$$azbcxy \quad azbcyx \text{ என்பனவாகும்.}$$

இவ்வாறே ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றத்திற்கும் 3! வரிசை மாற்றங்கள் பெறப்படும். எனவே x எண்ணிக்கைக்குப் பதிலாக $x\times3!$ வரிசை மாற்றங் களைப் பெறலாம்.

ஆறு எழுத்துக்களும் வேறு வேறானவையெனின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 6!

$$x\times3! = 6!$$

$$x = \frac{6!}{3!}$$

n பொருட்களில் r பொருட்கள் ஒரே மாதிரியானவை எனின் n பொருட்களிலிருந்தும் பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n!}{r!}$ ஆகும். n பொருட்களில் r_1 ஒரே வகையானவை, r_2 இன்னொரு ஒரே வகையானவை, r_3 இன்னொரு வகையானவை எனின் n பொருட்களினதும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ r_3!}$ ஆகும்.

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை x என்க.

r_1 எழுத்துக்கள் ஒரே மாதியானவை. இந்த r_1 எழுத்துக்களையும் ஏனைய எழுத்துக்களிலிருந்து வேறுபட்ட புதிய எழுத்துக்களால் மாற்றும் போது (மற்றைய எழுத்துக்களின் தானங்களை மாற்றாது) பெறப்படும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $r_1!\times x$ ஆகும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட வரிசை மாற்றங்களில் r_2 எழுத்துக்களும் மாற்றப்படும் போது வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $r_2!\times(r_1!\times x)$ ஆகும்.

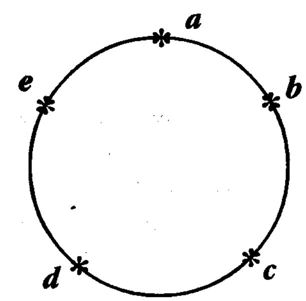
$$r_3!\times r_2!\times r_1!\times x = n!$$

$$x = \frac{n!}{r_1!\times r_2!\times r_3!} \text{ ஆகும்.}$$

வட்டம் ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தக் கூடிய முறைகளின் எண்ணிக்கை

a, b, c, d, e என்பவற்றை வட்டம் ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை இங்கு பார்ப்போம். நேர்கோடொன்றில் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை 5! ஆகும்.

$a\ b\ c\ d\ e,\quad b\ c\ d\ e\ a,\quad c\ d\ e\ a\ b$
$d\ e\ a\ b\ c,\quad e\ a\ b\ c\ d$ ஆகிய ஐந்தும் நேர்கோட்டு ஒழுங்கில் வேறு வேறானவை. ஆனால் வட்ட ஒழுங்கில் இந்த ஐந்தும் ஒன்றாகும்.



ஆகவே வட்ட ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை

$\frac{1}{5}\times5! = 4!$ ஆகும்.

n வேறு வேறான பொருட்களின் **வட்ட** ஒழுங்கிலான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $(n-1)!$ ஆகும்.
n பொருட்களில் ஒன்று வட்டத்தின் ஏதாவது ஒரு இடத்தில் வைக்கப்பட்டபின், ஏனைய $(n-1)$ பொருட்களும் $(n-1)!$ வழிகளில் வைக்கப்படலாம் என்பதேயாகும்.

உதாரணம் 2

பின்வரும் இலக்கங்களை உபயோகித்து எத்தனை 4 இலக்க எண்களை அமைக்கலாம்? ஒவ்வொரு எண்ணிலும் ஒரு இலக்கம் ஒருமுறை மட்டும் பயன்படுத்தலாம்.

(i) 1, 3, 5, 7, 9 **(ii)** 0, 1, 3, 5, 7, 9

(i) 4 இலக்க எண்களில் முதலாம் இடம் 5 முறையில் நிரப்பப்படலாம். இரண்டாம் இடம் 4 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். மூன்றாம் இடம் 3 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். நான்காம் இடம் 2 முறைகளில் நிரப்பப்படலாம். எனவே மொத்த வழிகள் $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

(ii) $\square\ \square\ \square\ \square$

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

உதாரணம் 3

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கம் ஒருமுறை மட்டும் பயன்படுத்தப்படலாம் எனின் 2000 இற்கும் 3000 இற்கும் இடையில் எத்தனை எண்களை அமைக்கலாம்?

(ii) *ORANGE* என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்கள் எல்லாவற்றையும் பயன்படுத்தி
(a) O வில் தொடங்கும் வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?
(b) O வில் தொடங்காத வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை?

(i) நான்கு இலக்க எண்கள் 2000 - 3000 இற்குமிடையில்

$\square\ \square\ \square\ \square$

முதலாம் இடத்தில் 2 என்ற இலக்கம் மட்டும் வரும்

$$1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ii) *ORANGE* என்பதில் 6 வேறு வேறான எழுத்துக்கள் உள்ளன.
வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 6!$

$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= 720$$

(a) O இல் தொடங்கும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= \boxed{O}\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

$$1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(b) O வில் தொடங்காத வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 600$$

அல்லது $720 - 120 = 600$

உதாரணம் 4

மூன்று வேறு வேறான இலக்கங்களாலான எல்லா நேர்நிறை எண்களையும் கருதுக. இவற்றுள்

(a) ஒற்றை எண்கள் எத்தனை?
(b) இரட்டை எண்கள் எத்தனை?
(c) 700 இலும் பெரிதான எண்கள் எத்தனை?
(d) 5 ஆல் பிரிபடக்கூடிய எண்கள் எத்தனை?

மூன்று வேறுவேறான இலக்கங்களாலான நேர்நிறை எண்களின் எண்ணிக்கை $\square\ \square\ \square$

$$9 \times 9 \times 8 = 648$$

(a) ஒற்றை எண்கள்

மூன்றாவதாக உள்ள கூட்டில் வரக்கூடிய எண்கள் 1, 3, 5, 7, 9. முதலாவதாக உள்ள கூட்டில் O உம், மூன்றாவதாக உள்ள கூட்டில் இடப்பட்ட எண்ணும் வரமுடியாது. எனவே ஒற்றை எண்களின் எண்ணிக்கை.

$$8 \times 8 \times 5 = 320$$

(b) இரட்டை எண்கள்

2, 4, 6, 8 இல் முடிவடையும் எண்களின் எண்ணிக்கை

$\square\ \square\ \square$

$$8 \times 8 \times 4 = 256$$

O இல் முடிவடையும் எண்களின் எண்ணிக்கை

$\square\ \square\ \square$

$$9 \times 8 \times 1 = 72$$

$\therefore$ இரண்டை எண்களின் எண்ணிக்கை
$= 256 + 72 = 328$

(c) 700 இலும் பெரிய எண்களின் எண்ணிக்கை

$\square\ \square\ \square$

$3 \times 9 \times 8$ [முதலாம் கூட்டில் 7,8,9 வரலாம்]
$= 216$

(d) 5 ஆல் வகுக்கப்படும் எண்களின் எண்ணிக்கை
O இல் முடிவடையும் எண்களின் எண்ணிக்கை $= 72$
5 இல் முடிவடையும் எண்களின் எண்ணிக்கை $= 8 \times 8 \times 1 = 64$
$\therefore$ மொத்தம் $= 72 + 64 = 136$

உதாரணம் 5

ELEVEN என்ற சொல்லிலுள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் எடுத்துப் பெறக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றுள்

(i) எத்தனை, E இல் தொடங்கி E இல் முடிவடையும்.
(ii) எத்தனை, E இல் தொடங்கி N இல் முடிவடையும்.
(iii) எத்தனை $3E$ யும் ஒன்றாக வரும்.

E - 3, L - 1, V - 1, N - 1 - மொத்தம் 6 எழுத்துக்கள்

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$

(i) $\boxed{E} * * * * \boxed{E}$
L - 1, E - 1, V - 1, N - 1
எண்ணிக்கை $= 4! = 24$

(ii) $\boxed{E} * * * * \boxed{N}$
L - 1, E - 2, V - 1

எண்ணிக்கை $\frac{4!}{2!} = 12$

(iii) 3E யும் ஒன்றாக வரும்போது
EEE - 1, L - 1, V - 1, N - 1
எண்ணிக்கை $= 4! = 24$

உதாரணம் 6

4 சிறுவர்களும், 3 சிறுமிகளும் வரிசையொன்றில் இருக்கக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

(i) சிறுவர், சிறுமியர் மாறி மாறி இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?

(ii) சிறுவர்கள் ஒன்றாகவும், சிறுமிகள் ஒன்றாகவும் இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை எவ்வளவு?
வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 7!$
$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

(i) B * B * B * B
G G G
4 சிறுவர்களின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$= 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
3 சிறுமிகளின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$= 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
மொத்த ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 4! \times 3!$
$= 24 \times 6 = 144$

(ii) BBBB GGG அல்லது GGG BBBB
வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$= 2 \times 4! \times 3! = 2 \times 144 = 288$

உதாரணம் 7

4 சிறுவர்களும், 4 சிறுமிகளும் வரிசையொன்றில் இருக்கக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக் காண்க.

(i) சிறுவர், சிறுமியர் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) சிறுவர், சிறுமியர் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று இருக்குமாறும் குறித்த ஒரு சிறுவனும் ஒரு சிறுமியும் அருகருகே இருப்பதற்குமான ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) சிறுவர் சிறுமியர் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று இருக்குமாறும் குறித்த ஒரு சிறுவனும் சிறுமியும் அருகருகே இருக்காமலும் இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?
வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 8! = 40\,320$

(i) B ∗ B ∗ B ∗ B ∗
G G G G
அல்லது
∗ B ∗ B ∗ B ∗ B
G G G G

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 2 \times 4! \times 4! = 1152$$

(ii) குறித்த ஒரு சிறுவனையும், சிறுமியையும் தவிர்த்து ஏனைய 3 சிறுவர் களினதும் 3 சிறுமிகளினதும் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று அமர்ந்திருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை.

(1) B G B G B G ———— $3! \times 3!$

அல்லது

(2) G B G B G B ———— $3! \times 3!$

குறித்த சிறுவனும், சிறுமியும் B_1, G_1 எனக் கொள்க.

(1) ↑B G ↑B G ↑B G ↑ ———— எண்ணிக்கை $4 \times 3! \times 3!$

$B_1 \ G_1$

(1) B ↑G B ↑G B ↑G ———— எண்ணிக்கை $4 \times 3! \times 3!$

$G_1 \ B_1$

வகை (1) இல் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 3! \times 3! + 3 \times 3! \times 3!$

$$= 3! \times 3!\ (4 + 3)$$
$$= 7 \times 3! \times 3!$$

(2) G ↑B G ↑B G ↑B எண்ணிக்கை $3 \times 3! \times 3!$

$B_1 \ G_1$

(2) ↑G B ↑G B ↑G B ↑ எண்ணிக்கை $4 \times 3! \times 3!$

$G_1 \ B_1$

வகை (2) இல் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை

$$= 3 \times 3! \times 3! + 4 \times 3! \times 3!$$
$$= 7 \times 3! \times 3!$$

மொத்த எண்ணிக்கை $= 2 \times 7 \times 3! \times 3! = 504$

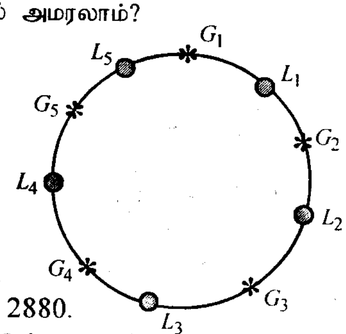
(iii) வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 1152 - 504 = 648$$

உதாரணம் 8

(i) 5 பேர் வட்டமேசையொன்றைச் சுற்றிவர இருக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) 5 ஆண்களும் 5 பெண்களும் வட்டமேசையொன்றைச் சுற்றிவர, இரு பெண்கள் ஒன்றாக இல்லாதவாறு எத்தனை வழிகளில் அமரலாம்?



(i) $\frac{1}{5} \times 5! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

(ii) 5 ஆண்கள் அமரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 4!$ இப்பொழுது 5 பெண்கள் படத்தில் காட்டியவாறு அமரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 5!$. எனவே மொத்த எண்ணிக்கை $= 4! \times 5! = 2880$. இடஞ்சுழி, வலஞ்சுழி என்பன வேறுபடுத்தப்பட்டுள்ளன. இவ் வேறுபாடு தேவை யில்லையெனின் எண்ணிக்கை $= \frac{1}{2} \times 2880 = 1440$

சேர்மானங்கள் (*Combinations*)

தரப்பட்ட ஒரு தொடை பொருட்களிலிருந்து குறித்த எண்ணிக்கையான பொருட்களைத் தெரிவு செய்யக்கூடிய முறைகள் சேர்மானங்கள் எனப்படும்.

எல்லாம் வேறுவேறான n பொருட்களிலிருந்து, $r\,(\leq n)$ பொருட்களைத் தெரிவு செய்யக்கூடிய முறைகளைக் காணல்

முறைகளின் எண்ணிக்கை nC_r என்க. $(nC_r = x$ என்க$)$. r பொருட்களை ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகள் $= r!$

1 முறையில் ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகள் $= r!$
x முறையில் ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகள் $= x \times r!$
ஆனால் n வேறுவேறான பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை nP_r

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

ஆகவே $x \times r! = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

$$x = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

$\therefore\ nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

7 ஆசிரியர்களிலிருந்தும், 4 மாணவர்களிலிருந்தும் 6 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்று தெரிவு செய்ய வேண்டியுள்ளது.

(i) குழுவில் சரியாக 2 மாணவர்கள் இருப்பதற்குரிய
(ii) குழுவில் குறைந்தது 2 மாணவர்கள் இருப்பதற்குரிய தெரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) 4 ஆசிரியர்கள், 2 மாணவர்கள்

$$7C_4 \times 4C_2 = \frac{7!}{4!\,3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 35 \times 6 = 210$$

(ii) 4 ஆசிரியர், 2 மாணவர்கள்
3 ஆசிரியர், 3 மாணவர்கள்
2 ஆசிரியர், 4 மாணவர்கள்
தெரிவுசெய்யப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= 7C_4 \times 4C_2 + 7C_3 \times 4C_3 + 7C_2 \times 4C_4$
$= 35 \times 6 + 35 \times 4 + 21 \times 1$
$= 210 + 140 + 21 = 371$

உதாரணம் 10

11 பிரதிநிதிகள் மாநாடொன்றிற்கு வந்திருந்தனர்.

(i) இவர்களிலிருந்து 5 பேரைக் கொண்ட குழுவினை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்.

(ii) இவர்களில் குறித்த இருவர், தெரிவு செய்யப்படின், ஒன்றாகத் தெரிவு செய்யப்படவேண்டும் எனின் 5 பேரைக் கொண்ட குழுவினை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

(iii) இவர்களில் குறித்த இருவர், ஒருவர் குழுவில் இருப்பின் மற்றவர் குழுவில் இருக்கமாட்டார் எனின் 5 பேரைக் கொண்ட குழுவொன்றினை எத்தனை வழிகளில் தெரிவுசெய்யலாம்?

(i) $11C_5 = \dfrac{11!}{6! \times 5!} = \dfrac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$
$= 462$

(ii) குறித்த இருவரும் தெரிவு செய்யப்படின், ஏனைய 9 பேரிலிருந்தும் 3 பேரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.
குறித்த இருவரும் தெரிவு செய்யப்படவில்லை எனின் ஏனைய 9 பேரிலிருந்தும் 5 பேரைத் தெரிவு செய்யவேண்டும்.

ஆகவே, எண்ணிக்கை $= 1 \times 9C_3 + 9C_5$
$= 84 + 126$
$= 210$

(iii) $11C_5 - 1 \times 9C_3$
$= 462 - 84 = 378$
அல்லது
குறித்த இருவரில் ஒருவரையும், ஏனைய 9 பேரிலிருந்து 4 பேரையும் தெரிவு செய்யலாம். அல்லது
குறித்த இருவரையும் தவிர்த்து, ஏனைய 9 பேரிலிருந்து 5 பேரையும் தெரிவு செய்யலாம்.

ஆகவே $2C_1 \times 9C_4 + 9C_5$

$2 \times 9C_4 + 9C_5 = 2 \times 126 + 126 = 378$

உதாரணம் 11

தளமொன்றில் A, B, C, ... ஆகிய 10 புள்ளிகள் உள்ளன. எந்த ஒரு மூன்று புள்ளிகளும் நேர்கோடொன்றில் அமைந்திருக்கவில்லை.

(i) இப்புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் பெறக்கூடிய நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(ii) A அல்லது B யினூடாகச் செல்லாத நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iii) இப்புள்ளிகளால் பெறக்கூடிய முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

(iv) இம் முக்கோணிகளில் எத்தனை முக்கோணிகள் A ஐ உச்சியாகக் கொண்டுள்ளன?

(v) இம் முக்கோணிகளில் எத்தனை முக்கோணிகள் AB ஐ ஒருபக்கமாகக் கொண்டுள்ளன?

(i) எந்த ஒரு மூன்று புள்ளிகளும் நேர்கோடொன்றில் அமைந்திருக்கவில்லை யாதலால், எந்த இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகளும் வேறு வேறானவை. எனவே நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை $= 10C_2 = 45$

(ii) A அல்லது B யினூடாகச் செல்லாத நேர்கோடுகள், ஏனைய 8 புள்ளிகளிலிருந்து பெறப்படும் நேர்கோடுகளாகும். $8C_2 = 28$

(iii) முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை $= 10C_3$
$= 120$

(iv) உச்சி A ஐயும், ஏனைய 9 புள்ளிகளில் இரண்டையும் இணைத்துப் பெறப்படும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை $= 9C_2 = 36$

(v) A, B என்ற இரு புள்ளிகளையும், ஏனைய 8 புள்ளிகளில் ஒன்றையும் இணைத்து பெறப்படும் முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கை $8C_1 = 8$

உதாரணம் 12

7 ஆண்களிலிருந்தும் 5 பெண்களிலிருந்தும் 5 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்றை இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துமுகமாக ஆனால் குறிப்பிட்ட ஒரு ஆணையும், குறிப்பிட்ட ஒரு பெண்ணையும் ஒன்றாகக் குழுவில் வைத்திருக்கா வண்ணம் எத்தனை முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம் எனக்காண்க.

7 ஆண்களிலிருந்தும், 5 பெண்களிலிருந்தும் இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப் படுத்துமாறு நிபந்தனை இன்றி தெரிவு செய்யப்படும் முறைகள்

ஆண்	பெண்	
4	1 ⟶	$7C_4 \times 5C_1 = 35 \times 5 = 175$
3	2 ⟶	$7C_3 \times 5C_2 = 35 \times 10 = 350$
2	3 ⟶	$7C_2 \times 5C_3 = 21 \times 10 = 210$
1	4 ⟶	$7C_1 \times 5C_4 = 7 \times 5 = 35$
		770

குறித்த ஆணும் பெண்ணும் தெரிவு செய்யப்படமிடத்து, 5 பேரைத் தெரிவு செய்யும் வழிமுறைகள்

எஞ்சியுள்ள ஆண்கள் - 6
எஞ்சியுள்ள பெண்கள் - 4
இவர்களிலிருந்து மூவரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

ஆண்		பெண்	
3 ⟶	0	$6C_3$	$= 20 = 20$
2 ⟶	1	$6C_2 \times 4C_1$	$= 15 \times 4 = 60$
1 ⟶	2	$6C_1 \times 4C_2$	$= 6 \times 6 = 36$
0 ⟶	3	$4C_3$	$= 4 = 4$
			120

ஆகவே, குறிப்பிட்ட ஒரு ஆணையும், குறிப்பிட்ட ஒரு பெண்ணையும் ஒன்றாக வைத்திருக்காவண்ணம் தெரிவு செய்யக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை
$770 - 120 = 650$

உதாரணம் 13

(i) ஆங்கில அரிச்சுவடியிலுள்ள 5 உயிரெழுத்துக்கள், 20 மெய்யெழுத்துக்கள் என்பவற்றிலிருந்து மூன்றெழுத்துள்ள சொற்கள அமைக்கப்படுகின்றன. முதலாம் மூன்றாம் எழுத்துக்கள் வேறு வேறு மெய்யெழுத்துக்களாகவும், இரண்டாம் எழுத்து உயிரெழுத்தாகவும் இருக்குமாறு எத்தனை சொற்கள் அமைக்கலாம்?

(ii) ஒருவரிடம் எல்லாம் வித்தியாசமான 24 புத்தகங்கள் உண்டு. அவற்றுள் 12 புத்தகங்களை அலுமாரித்தட்டொன்றில் எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம்?

(i) உயிரெழுத்துக்கள் - 5

மெய்யெழுத்துக்கள் - 20

1 உயிரெழுத்தையும் 2 மெய்யெழுத்தையும் தெரிவு செய்யும் முறைகளின்

vz z pfi f $= 5C_1 \times 20C_2$

$= 5 \times 190 = 950$

உயிரெழுத்து நடுவில் அமையுமாறு ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை

$= 950 \times 2 = 1900$

(ii) 24 புத்தகங்களிலிருந்து 12 புத்தகங்களைத் தெரிவு செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கை $= 24C_{12}$ ஒவ்வொரு தெரிவையும் 12 ! முறைகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம். எனவே $24C_{12}$ தெரிவையும் ஒழுங்குபடுத்தும் முறைகளின் எண்ணிக்கை $24C_{12} \times 12!$

$$\frac{24!}{12!}$$

உதாரணம் 14

(i) "ENGINEERING' என்னும் சொல்லிலுள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. அவற்றுள் எத்தனையில் 3E களும் ஒருமிக்க இருக்கும்? எத்தனை வழிகளில் 3E களும் முதலில் இருக்கும்?

(ii) 32 அட்டைகளைக் கொண்ட தொகுதி ஒன்றில் 8 கறுப்பு நிற அட்டைகளும், 8 சிவப்பு நிற அட்டைகளும், 8 நீலநிற அட்டைகளும் 8 பச்சை நிற அட்டைகளும் இருக்கின்றன. ஒரே நிறத்தைக் கொண்ட அட்டைகள் யாவும் வித்தியாசமானவை.

(a) தொகுதியிலிருந்து 3 அட்டைகள் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) அதோடு (a) இல் உள்ள தெரிவுகளின் எத்தனை எண்ணிக்கையில் தெரிவுகள் யாவும் வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிருக்கமாட்டாது?

(i) ENGINEERING - எழுத்துக்களின் எண்ணிக்கை 11.

E - 3, N - 3, G - 2, I - 2, R - 1

வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{11!}{3!\,3!\,2!\,2!}$

$= 277200$

3E களும் ஒன்றாகவரும் வழிகளின் எண்ணிக்கை x என்க.

EEE - 1, N - 3, G - 2, I - 2, R - 1

மொத்தம் - 9

$$x = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 15120$$

3 E களும் முதலில் வரும் வழிகள்

$$1 \times \frac{8!}{3!\ 2!\ 2!} = 1680$$

(ii) 8 - கறுப்பு, 8 - சிவப்பு, 8 - நீலம், 8 - பச்சை

(a) 3 அட்டைகளைத் தெரியும் முறைகள் $= 32C_3 = 4960$

(b) 4 நிறங்களிலிருந்து 3 நிறங்கள் $4C_3$ வழிகளில் தெரியப்படும். $4C_3 = 4$. வெவ்வேறு நிறங்களைத் தெரியும் வித்தியாசமான தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை.

$$4 \times (8C_1 \times 8C_1 \times 8C_1) = 2048$$

எல்லா வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிராத தெரிவுகள்

$4960 - 2048 = 2912$

உதாரணம் 15

(a) GONAPINUWALA என்னும் சொல்லின் எழுத்துக்களைக் கொண்டு செய்யத்தக்க வேறுவேறான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை

(i) ஒருதடவை எல்லாப் பன்னிரண்டு எழுத்துக்களையும் எடுக்கும்போது,

(ii) பன்னிரண்டு எழுத்துக்களில் இருந்து ஒருதடவை எவையேனும் நான்கு எழுத்துக்களை எடுக்கும்போது, காண்க.

(b) வேறுவேறான பத்து வெள்ளி நாணயங்களையும், வேறுவேறான ஐந்து செப்பு நாணயங்களையும் கொண்டு பை ஒன்றிலிருந்து எட்டு நாணயங்களைக் கொண்டு செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை

(i) தெரிவுகளில் எவ்விதமான கட்டுப்பாடும் இல்லாதபோது

(ii) தெரிவு செய்யப்படும் நாணயங்களில் குறைந்தபட்சம் இரு செப்பு நாணயங்களேனும் இருக்க வேண்டியபோது காண்க.

(a) GONAPINUWALA ———— 12 எழுத்துக்கள்

G - 1, O - 1, N - 2, A - 3, P - 1, I - 1, U - 1, W - 1, L - 1

(i) வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{12!}{2!\ 3!}$

(ii) தடவைக்கு நான்காக எடுக்கும் போது பின்வரும் முறைகளில் நிகழலாம்.

	தெரிவுசெய் யப்படும் வழிகள்	வரிசை மாற்றங்கள்
(i) 3 ஒரேஇனம், 1 வேறு - 3, 1	$1C_1 \times 8C_1$	$8 \times \dfrac{4!}{3!} = 32$
(ii) 2 ஒரே இனம், 2 ஒரேஇனம் - 2, 2	$2C_2$	$1 \times \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$
(iii) 2 ஒரே இனம், மற்றைய		
இரண்டும் வேறானவை - 2, 1, 1	$2C_1 \times 8C_2$	$\dfrac{2 \times 28 \times 4!}{2!} = 678$
(iv) எல்லாம் வேறானவை - 1, 1, 1, 1	$9C_4$	$126 \times 4! = 3024$

வரிசைமாற்றங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை $= 32 + 6 + 678 + 3024$
$= 3740$

(b) 10 வெள்ளி, 5 செப்பு

(i) 8 நாணயங்களைத் தெரிவு செய்யும் முறைகள் $= 15C_8$

(ii) எல்லாம் வெள்ளியாக இருத்தல் $10C_8$ முறைகள் $= 45$

1 செப்பும், 7 வெள்ளிகள் $5C_1 \times 10C_7 = 600$

$\therefore$ குறைந்த பட்சம் 2 செப்பு நாணயங்கள் இருத்தல்

$= 15C_8 - (45 + 600)$

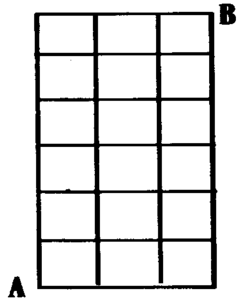
உதாரணம் 16

(i) 8 விநியோகத்தர்களிடமிருந்து வழங்கு பொருட்களை வருவிப்பதற்கான கட்டளைகளை விடுக்கும் கம்பனி ஒன்று 5 வரவழைத்தற் கட்டளைகளை விடுக்க விரும்புகிறது.

(a) வரவளைத்தற் கட்டளைகள் ஐந்தையும் (5) விடத்தக்க வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையையும்,

(b) குறித்த ஒரு விநியோகத்தர் I (எனக்) பெறும் வரவழைத்தற் கட்டளைகளின் எண்ணிக்கை செப்பமாக 2 ஆக இருப்பதற்கான வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) தரப்பட்டுள்ள உருவிலிருக்கும் 3 கிடைப்பாதைகளையும், 5 நிலைக்குத்துப்பாதைகளையும் கொண்ட நெய்யரியைக் கருதுக. இங்கு அனுமதிக்கப்படும் இயக்கங்கள்



(a) வலப்பக்கம் நோக்கிய இயக்கமாகவும்,

(b) மேல் நோக்கிய இயக்கமாகவும் இருப்பின்

A யிலிருந்து B யிற்கான பாதைகளின் எண்ணிக்கையைத் துணிக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ எண் 5 ஐ மறையற்ற நான்கு நிறையெண்களின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதத்தக்க வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) 8 விநியோகத்தர்கள் உள்ளனர். அவர்கள் A B C D E F G H எனக.

5 கட்டளைகள் உள்ளன. முதலாவது கட்டளை 8 வழிகளில் (Aயிடமிருந்து அல்லது Bயிடமிருந்து, அல்லது C யிடமிருந்து, அல்லது H என) விடுக்கப்படலாம்.

இவ்வாறே ஒவ்வொரு கட்டளையும் 8 வழிகளில் விடுவிக்கப்படலாம். எனவே இரண்டு கட்டளைகள் விடுக்கப்படும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

$= 8 \times 8 = 8^2 = 64$

இவ்வாறு ஐந்து கட்டளைகள் விடுக்கப்படும் வழிகளின் எண்ணிக்கை

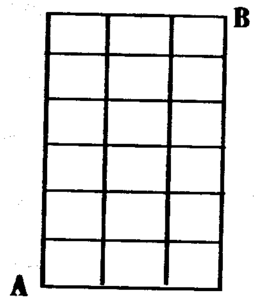
$= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^5 = 32768$

மேலே உள்ள விநியோகத்தர்களில் குறித்த A என்பவர் 5 கட்டளைகளில் 2 கட்டளைகளை மட்டும் பெறவேண்டும் எனக.

A என்பவர் ஏதாவது 2 கட்டளைகளை மட்டும் பெறும்போது மீதி 3 ஐயும், 7 விநியோகத்தர்களிடம் விடப்படுகிறது.

எனவே A என்பவர் 2 கட்டளைகளையும், மீதி 3 ஐ 7 பேரிடமும் விடத்தக்க வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 5C_2 \times 7 \times 7 \times 7 = 10 \times 343 = 3430$

(ii) இங்கு கிடை இயக்கங்கள் 3 உம், நிலைக்குத்து இயக்கங்கள் 5 உம் உள்ளன. கிடை இயக்கத்தை S எனவும், மேல்நோக்கிய இயக்கத்தை U எனவும் கொண்டால் S, S, S, U, U, U, U, U என்பவற்றின் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை A யிலிருந்து B யிற்கான பாதையின் எண்ணிக்கையாகும்.



$$= \frac{8!}{5!\;3!} = \frac{8\times 7\times 6}{3!} = 56$$

உதாரணம் 17

9 பொருட்களில் 4 பொருட்கள் ஒரே வகையானவை; 2 பொருட்கள் இன்னொரு வகையானவை; ஏனைய 3 உம் வெவ்வேறானவை. இந்த பொருட்களிலிருந்து 3 பொருட்களை எத்தனை வகைகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

தெரிவு செய்யப்படும் போது பின்வரும் முறையில் அமைந்திருக்கலாம்?

(i) 3 பொருட்களும் ஒரேவகை

(ii) 2 பொருட்கள் ஒரே வகை, மற்றையது வேறானது

(iii) மூன்றும் வேறு வேறானவை

(i) $1C_1 = 1$ வழி (ii) $2C_1 \times 4C_1 = 8$ வழிகள்

(iii) $5C_3 = 10$ வழிகள்

மொத்தம் $= 1 + 8 + 10 = 19$ வழிகள்

ஒரு தொகுதி பொருட்களை வேறு வேறு கூட்டங்களாகப் பிரித்தல்

(i) $(m+n)$ எண்ணிக்கையான பொருட்களை முறையே m, n எண்ணிக்கை கொண்ட இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை,

${}^{m+n}C_m$ அல்லது ${}^{m+n}C_n$ ஆகும்.

$${}^{m+n}C_m = {}^{m+n}C_n = \frac{(m+n)!}{m!\;n!}$$ ஆகும். ———— (1)

(ii) $(m+n+p)$ பொருட்களை முறையே m, n, p பொருட்கள் கொண்ட மூன்று கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகள். முதலில் $(m+n+p)$ பொருட்களை $m, (n+p)$ கொண்ட இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை.

${}^{m+n+p}C_m$ அல்லது ${}^{m+n+p}C_{n+p}$ ஆகும்.

$$= \frac{(m+n+p)!}{m!\,(n+p)!}$$ ஆகும். ———— (A)

இப்பொழுது $(n+p)$ பொருட்களை, n, p கொண்ட இருகூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை.

${}^{n+p}C_n$ அல்லது ${}^{n+p}C_p$ ஆகும்.

$$= \frac{(n+p)!}{n!\;\;p!}$$ ஆகும். ———— (B)

ஆகவே, m, n, p பொருட்களைக் கொண்ட மூன்று கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $(A), (B)$ என்பவற்றிலிருந்து,

$$\frac{(m+n+p)!}{m!\,(n+p)!} \times \frac{(n+p)!}{n!\;\;p!} = \frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$$ ஆகும்.

(a) $m = n$ எனின், கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

(1) இல் $$\frac{(m+n)!}{2!\;\;m!\;n!} = \frac{(2n)!}{2!\,(n!)^2}$$ ஆகும்.

(2) இல் $$\frac{(m+n+p)!}{2!\;\;m!\;n!\;p!} = \frac{(2n+p)!}{2!\;\;(n!)^2\;p!}$$ ஆகும்.

(b) $m = n = p$ எனில் (2) இல் $$\frac{(m+n+p)!}{3!\;\;m!\;n!\;p!} = \frac{(3n)!}{3!\;\;(n!)^3}$$ ஆகும்.

A, B, C ஆகிய 3 பொருட்களை 2, 1 எண்ணிக்கையான இரு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$3C_2 = \frac{3!}{2!\;\;1!} = 3$$ ஆகும்.

$\boxed{\boxed{AB}\quad\boxed{C}}$ ———— (1)

$\boxed{\boxed{AC}\quad\boxed{B}}$ ———— (2)

$\boxed{\boxed{BC}\quad\boxed{A}}$ ———— (3)

A, B, C ஆகிய 3 பொருட்களை ஒவ்வொன்றும் 1 பொருளைக் கொண்ட 3 கூட்டங்களாகப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை.

$$\frac{3!}{(3)!\ 1!\ 1!\ 1!} = 1$$

$\boxed{\boxed{A} \quad \boxed{B} \quad \boxed{C}}$ ———— (1)

A, B, C, D ஆகிய நான்கு பொருட்களை 3, 1 எண்ணிக்கையான இரு கூட்டங்களாகப்பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{4!}{3!\ 1!} = 4$ ஆகும்.

A, B, C, D ஆகிய நான்கு பொருட்கள் 2, 2 கொண்ட இரு கூட்டங்களாப் பிரிக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{4!}{2! \times 2!} \times \dfrac{1}{2!} = 3$ ஆகும்.

$\boxed{ABC \mid D}$ ———— (1)

$\boxed{ACD \mid B}$ ———— (2)

$\boxed{ABD \mid C}$ ———— (3)

$\boxed{BCD \mid A}$ ———— (4)

$\boxed{AB \mid CD}$ ———— (1)

$\boxed{AC \mid BD}$ ———— (2)

$\boxed{AD \mid BC}$ ———— (3)

உதாரணம் 18

(i) 32 பரிசுகளை 4 மாணவர்களுக்கிடையில் ஒவ்வொருவரும் 8 பரிசுகளைப் பெறுமாறு எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

(ii) 32 பரிசுகளை, ஒவ்வொன்றும் 8 பரிசுகொண்ட நான்கு கூட்டங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலம்?

(i) $32C_8 \times 24C_8 \times 18C_8 \times 8C_8$

$$= \frac{32!}{24! \times 8!} \times \frac{24!}{16! \times 8!} \times \frac{16!}{8!\ 8!} \times 1 = \frac{32!}{8!\,8!\,8!\,8!}$$

(ii) $\dfrac{32!}{8! \times 8! \times 8! \times 8!} \times \dfrac{1}{4!}$ ஆகும்.

ஏனெனில், ஒவ்வொன்றும் 8 பரிசுகளைக் கொண்ட 4 கூட்டங்கள் A, B, C, D ஐக் கருதுக.
A, B, C, D என்பன 4 மாணவர்களுக்கிடையில் $4!$ வழிகளில் $(=24)$ கொடுக்கப்படலாம்.
ஆனால் A, B, C, D ஐ 4 கூட்டங்கள் கொண்ட ஒரு தொகுதியாகக் கருதினால் $4!\ (=24)$ வழிகளும் ஒரு தொகுதியையே கருதுகின்றன.

$\boxed{A\ B\ C\ D,}$ $\boxed{A\,C\,B\,D\ ..}$...... என்றவாறான வேறுபாடு இங்கு இல்லை.

எல்லாம் வித்தியாசமற்ற n பொருட்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் எந்த ஒரு எண்ணிக்கையிலான பொருட்களை எடுக்கக் கூடிய சேர்மானங்கள்

n பொருட்களில் p ஒருவகையானவை; q இன்னொருவகையானவை; r மூன்றாவது வகையானவை என்க.
ஒரே வகையான p பொருட்களில் 0, 1, 2, 3, ... அல்லது p பொருட்களை எடுக்கலாம்; எனவே $(p + 1)$ வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். இங்கு O என்பது ஒரே வகையான p பொருட்களில் எதையும் தெரிவு செய்யாதிருத்தல் இவ்வாறே q பொருட்கள், r பொருட்களையும் கருதுவதால்

ஆகவே, மொத்தத் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $=(p+1)(q+1)(r+1)$ ஆகும்.
இங்கு எல்லாப் பொருட்களையும் தவிர்க்கும் முறையும் அடங்குவதால், தெரிவு செய்யப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை
$(p+1)(q+1)(r+1) - 1$ ஆகும்.
பின்வரும் உதாரணத்தை அவதானிக்க.
$a\ a\ a \quad b\ b\ b\ b \quad c\ c\ c\ c\ c,\ d,\ e$
என்பவற்றிலிருந்து ஒரு தடவையில் எந்த ஒரு எண்ணிக்கையான எழுத்தையும் எடுக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை.
a ஐ எடுக்கக் கூடிய வழிகள் 0, 1, 2, 3, ———— 4 வழி
b ஐ எடுக்கக்கூடிய வழிகள் 0, 1, 2, 3, 4 ———— 5 வழி
c ஐ எடுக்கக்கூடிய வழிகள் 0, 1, 2, 3, 4, 5 ———— 6 வழி
d ஐ எடுக்கக்கூடிய வழிகள் 0, 1, ———— 2 வழி
e ஐ எடுக்கக்கூடிய வழிகள் 0, 1, ———— 2 வழி
மொத்த வழிகள் $= 4 \times 5 \times 6 \times 2 \times 2$ ஆகும்.

ஆனால் எல்லாம் O ஆக உள்ள போது எந்த ஒரு எழுத்தும் எடுக்கப்படவில்லை.
எனவே மொத்த எண்ணிக்கை $= 4 \times 5 \times 6 \times 2 \times 2 - 1$
$= 480 - 1 = 479$ ஆகும்.

உதாரணம் 19

(a) 80 இன் காரணிகள் எத்தனை? **(b)** 360 இன் காரணிகள் எத்தனை?

(a) முதன்மை எண்களின் பெருக்கமாக எழுதுதல் வேண்டும்

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$= 2^4 \times 5^1$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 5 \times 2 = 10$

இங்கு $(10 - 1) = 9$ என்பதை நாம் எடுக்க வேண்டியதில்லை. ஏனெனில் 1 என்பதும் ஒரு காரணியாகும்.

80 இன் காரணிகள் $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$

(b) $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

உதாரணம் 20

(i) 98 ஐ இருநிறையெண்களின் பெருக்கமாக எத்தனை வழிகளில் எழுதலாம்?

(ii) 144 ஐ இருநிறையெண்களின் பெருக்கமாக எத்தனை வழிகளில் எழுதலாம்?

(i) $98 = 2 \times 7 \times 7 = 2^1 \times 7^2$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 2 \times 3 = 6$

இரு நிறையெண்களின் பெருக்கமாக 3 வழிகளில் எழுதலாம்.

காரணிகள் : 1, 2, 7, 14, 49, 98.

பெருக்கமாக எழுதுதல் 1×98, 2×49, 7×14 - 3 வழிகள்.

(ii) $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^4 \times 3^2$

காரணிகளின் எண்ணிக்கை $= 5 \times 3 = 15$

144 இன் காரணிகளுள் 12 ஐத்தவிர ஏனைய காரணிகளின் எண்ணிக்கை 14. இவற்றினை 7 வழிகளில் இரு நிறையெண்களின் பெருக்கமாக எழுதலாம். $12 \times 12 = 144$ என்பதால் மொத்தமாக 8 வழிகளில் எழுதலாம்.

144 இன் காரணிகள்,

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, $\boxed{12,}$ 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144

பயிற்சி 7

1. நிறுவுக (i) $\frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{50}{7}$ (ii) $100! = 2^{50} \quad 50!\ (1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . 99)$

2. ${}^{2n}P_3 = 12 \cdot {}^{n}P_2$ எனின் n ஐக் காண்க.

3. $n! = 5040$ எனின் n ஐக் காண்க.

4. ${}^{m+n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$ எனின் m, n ஐக் காண்க.

5. ${}^{n}P_4 = 18 \times {}^{n-1}P_2$ எனின் n ஐக் காண்க.

6. விளையாட்டு மைதானம் ஒன்றிற்கு 4 வாயில்கள் உண்டு. ஒரு வாயிலால் மைதானத்தினுள் உட்சென்று இன்னொரு வாயிலால் வெளியேறுவதற்கான வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

7. ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை ஒரு முறைமட்டும் பயன்படுத்தி 1, 2, 3, 4, 5 ஆகிய இலக்கங்களைக் கொண்டு எத்தனை நிறையெண்களை அமைக்கலாம்?

8. 1870 என்ற எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களைக் கொண்டு ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை 1 முறை மட்டும் பயன்படுத்தலாம் எனின், எத்தனை நிறையெண்களை அமைக்கலாம்?

9. 4, 8, 7, 6, 9 ஆகிய எல்லா இலக்கங்களையும் பயன்படுத்தி ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை ஒருமுறை மட்டும் பாவித்து 96 இல் தொடங்கும் எத்தனை எண்களை அமைக்கலாம்?

10. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எல்லா இலக்கங்களையும் பயன்படுத்தி ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை ஒருமுறை மட்டும் பாவித்து பெறப்படும் எண்களில் எத்தனை எண்கள்

(i) 2000 இதற்கும் 3000 இற்குமிடையில் இருக்கும்

(ii) 5 ஆல் பிரிபடும் **(iii)** 25 ஆல் பிரிபடும்

11. 0, 1, 2, 5, 6, 8 ஆகிய இலக்கங்களை பயன்படுத்தி ஒரு எண்ணில் ஒரு இலக்கத்தை மீளவும் பாவிக்கலாம் எனின்,

(i) எத்தனை 4 இலக்க எண்கள் அமைக்கலாம்?

(ii) இவற்றுள் எத்தனை 2 ஆல் பிரிபடக்கூடியவை?

(iii) இவற்றுள் எத்தனை 5 ஆல் பிரிபடக்கூடியவை?

12. 7, 8, 9 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி எத்தனை நான்கு இலக்கங்களுக்கு மேற்படாத எண்கள் அமைக்களம்?

13. 4 ஆண்களும் 4 பெண்களும் வரிசை ஒன்றில் அமரும் போது எந்த இரு பெண்களும் ஒன்றாக இராதவாறு உள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?

14. 4 ஆண்களும் 4 பெண்களும் வரிசையொன்றில் அமரும் போது பெண்கள் எப்பொழுதும் ஒன்றாக அமரும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை யாது?

15. n மாணவர்கள் வரிசையொன்றில் அமரும் போது குறித்த இரு மாணவர்கள் எப்பொழுதும் பிரிந்திருப்பதற்கான ஒழுங்கு முறைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

16. மாணவன் ஒருவன் மூன்று பரிசுகளையும் பெறுவதற்கு தகுதியுடையவனெனின் 20 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் 3 பரிசுகளையும் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

17. 12 மாணவர்களுக்கிடையில் இரு வேறு பரிசுகளை
   (i) ஒருவர் இரு பரிசுகளையும் பெறமுடியும் எனின்
   (ii) ஒருவர் ஒரு பரிசை மட்டும் பெறமுடியும் எனின், எத்தனை வழிகளில் வழங்கலாம்?

18. ஓட்டப்பந்தயம் ஒன்றில் 10 போட்டியாளர்கள் பங்கு பற்றுகின்றனர். முதல் மூன்று பரிசுகளையும் பெறக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

19. 4 சிவப்புநிறம், 2 நீலநிறம், 2 பச்சைநிறம் கொண்ட கொடிகள் எல்லாவற்றையும் நிலைக்குத்துக்கம்பம் ஒன்றில் தொங்க விடுவதன் மூலம் எத்தனை வித்தியாசமான சைகைகளைப் பெறலாம்?

20. 6 வித்தியசமான புத்தகங்களை ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (i) 3 குறித்த புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒன்றாக இருப்பதற்குரிய
   (ii) 3 குறித்த புத்தகங்கள் எப்போதும் தனியாக இருப்பதற்குரிய வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

21. மேசையொன்றில் வட்டமக 5 பேர், அவர்களின் இருவர் எப்போதும் ஒன்றாக இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் அமரலாம்?

7 (b)

1. 8 சிவப்பு நிறம், 7 கறுப்பு நிறம், 5 நீலநிறம் கொண்ட பேனைகளிலிருந்து ஒவ்வொரு நிறத்திலும் நான்காக மொத்தம் 12 பேனைகளை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

2. (i) $2 \times {}^{n}C_4 = 35 \times {}^{n}{}_{2}C_3$ எனின் n ஐக் காண்க.

   (ii) $28C_{r+4} = {}^{28}C_{r-2}$ எனின் r ஐக் காண்க.

3. 8 பொருட்களிலிருந்து தெரிவு செய்யக்கூடிய தெரிவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை யாது?

4. 9 சிறுவர்களிலிருந்தும் 3 சிறுமிகளிலிருந்தும் 4 பேரைக் கொண்ட குழுவொன்று எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்?
   (i) இக்குழுக்களில் குறைந்தது ஒருசிறுமியாவது இருக்கும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?
   (ii) இக்குழுக்களில், சரியாக ஒரு சிறுமிமட்டும் இருக்கும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை யாது?

5. பரீட்சை ஒன்றில் 13 வினாக்களில் 10 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும்.
   (i) எத்தனை வழிகளில் வினாக்களைத் தெரிவு செய்யலாம்?
   (ii) முதல் இரண்டு வினாக்களுக்கும் கட்டாயம் விடை அளிக்க வேண்டும் எனின்,
   (iii) முதலாம் அல்லது இரண்டாம் வினாவுக்கு விடை அளிக்க வேண்டும். ஆனால் இரண்டிற்கும் அல்ல எனின்
   (iv) முதல் 5 வினாக்களில் ஏதேனும் 3 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் எனின்,
   (v) முதல் 5 வினாக்களில் ஆகக்குறைந்தது 3 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் எனின், எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

6. எல்லாம் சமநீளமுள்ள ஒன்பது, வித்தியாசமான நிறக் குச்சிகளிலிருந்து, அவற்றிலிருந்து உருவாக்கப்பட்ட முக்கோணிகளுள், மூன்று முக்கோணிகளை எத்தனை வித்தியாசமான வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்.

7. m பக்கங்களையுடைய பல்கோணியொன்றின் மூலைவிட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{1}{2}m(m-3)$ நிறுவுக.

8. m பக்கங்களையுடைய பல்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை இணைப்பதன் மூலம் பெறக்கூடிய வேறுவேறான முக்கோணிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

9. குறித்த நீளமுள்ள நேர்கோடொன்று m புள்ளிகளில் வெட்டப்பட்டால், பெறப்படும் கோட்டுத்துண்டங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

10. வித்தியாசமான நிறங்களையுடைய 10 பந்துகளில் 2 வெள்ளை நிறமுடையவை. அவை 4 பந்துகள் கொண்ட கூட்டங்களாக எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்வாறு எடுக்கப்படும் இயல்தகு கூட்டங்கள் யாவற்றிலும் எத்தனை கூட்டங்களில் வெள்ளைப்பந்தொன்றை காணலாம்?

11. ஆங்கில 5 உயிரெழுத்துக்களிலும் 21 மெய்யெழுத்துக்களிலுமிருந்து வேறு வேறு எழுத்துக்களைக் கொண்ட சொற்கள் உருவாக்கப்படுகின்றன. 2 உயிரெழுத்தையும் 3 மெய்யெழுத்துக்களையும் கொண்ட சொற்கள் எத்தனை?

12. 3 பெரிய எழுத்துக்கள் (*Capitals*), 6 மெய்யெழுத்துக்கள் 4 உயிரெழுத்துக்கள் என்பன தரப்பட்டுள்ளன. பெரிய எழுத்து ஒன்றுடன் தொடங்கி 3 மெய்யெழுத்துக்களையும் 2 உயிரெழுத்துக்களையும் கொண்டிருக்கக் கூடியதாக எத்தனை சொற்கள் அமைக்கலாம்?

13. 123456 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் 4 இலக்கங்களை எடுத்து 4 இலக்கங்களையுடைய எண்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. 3, 4 எனும் இரு இலக்கங்களையும் கொண்டிருக்கும் எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

14. (i) 123456 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் 4 இலக்கங்களை எடுத்து,
(ii) 123450 ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து ஒரு தடவையில் 5 இலக்கங்களை எடுத்து,
25 ஆல் பிரிபடும் எத்தனை எண்கள் அமைக்கலாம்?

15. 50 ஆண்களையும் 20 பெண்களையும் , இரு பெண்கள் ஒன்றாக. இருக்காதவாறு ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய முறைகளின் எண்ணிக்கை $50! \times 20! \times 51C_{20}$ எனக் காட்டுக.

16. பக்கங்களில் ஒன்று 10 cm அல்லது 11 cm அல்லது 12 cm ஆக இருக்குமாறு எத்தனை முக்கோணிகள் அமைக்கலாம்?

17. "*examination*" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு மூன்றாக எடுத்து எத்தனை சொற்கள் அமைக்கலாம்.

18. "*alliteration*" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களைத் தடவைக்கு நான்காக எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

19. 9 பொருட்களில் 4 பொருட்கள் ஒரேமாதிரியானவை, 2 பொருட்கள் இன்னொரு வகையானவை, ஏனைய 3 பொருட்களும் வேறு வேறானவை. இவற்றிலிருந்து பொருட்களைத் தெரிவு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை யாது?

20. "*devastation*" என்ற சொல்லிலிருந்து தடவைக்கு 4 எழுத்துகள் எடுக்கப்பட்டு சொற்கள் அமைக்கப்படுகின்றன. இரு உயிரெழுத்துக்களையும் இரு மெய்யெழுத்துக்களையும் கொண்டிருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை யாது? இவற்றுள் எத்தனை சொற்களில் இரண்டு t உம் ஒன்றாக வருகின்றன?

21. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ஆகிய இலக்கங்களிலிருந்து தடவைக்கு 5 இலக்கங்களை எடுத்து எத்தனை வித்தியாசமான எண்கள் அமைக்கலாம்?

22. வெவ்வேறான பத்துப் புத்தங்கள் (நான்கு பச்சை நிறமுடையவை, நான்கு நீல நிறமுடையவை, இரண்டு சிவப்பு நிறமுடையவை) தட்டு ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளன. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் எல்லாக் கணிப்புக்களையும் தெளிவாகக்காட்டிப் புத்தகங்களைத் தட்டில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) நிறமும் ஒழுங்கும் புறக்கணிக்கப்படும்போது,

(ii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்க வைக்கப்படும் போது,

(iii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும் வைக்கப்படும்போது,

(iv) பச்சை நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும், ஒரே ஒழுங்கிலும் ஆனால் சிவப்பு நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் பிரித்து வைக்கப்படும் போது.

23. (a) 1 ஐந்து ரூபா நாணயத்தையும் 2, இரண்டு ரூபா நாணயங்களையும், 4 ஐம்பது சத நாணயங்களையும் ஒரு பை கொண்டுள்ளது. வெவ்வேறு வகையான 3 நாணயங்கள் எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

(b) HOMOGENEOUS என்னும் சொல்லின் எழுத்துக்களை (எல்லாவற்றையும் எடுத்து) 3 326 400 வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம் எனக்காட்டுக. இவற்றுள் எத்தனை மெய்யெழுத்துக்களுடன் ஆரம்பித்து மெய்யெழுத்துக்களில் முடிவடைகின்றன.

(c) பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் 0, 1, 4, 5, 6, 7 ஆகியவற்றிலிருந்து எத்தனை நான்கு இலக்க எண்கள் ஆக்கப்படலாம்?

(i) இலக்கங்கள் மீளவருவது அனுமதிக்கப்பட்டால்

(ii) இலக்கங்கள் இருமுறைக்கு மேல் மீளவருவது அனுமதிக்கப் படாவிட்டால்.

24. (i) KANAKARAYAN KULUM என்னும் சொல்லின் பதினாறு எழுத்துக்களையும் கொண்டு தடவைக்கு எல்லா எழுத்துக்களையும் கொண்டு செய்யத்தக்க வேறுவேறான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
அத்துடன் மேற்போந்த சொல்லின் உயிர்எழுத்துக்கள் A யும் U உம் தவிர்ந்த ஏனைய எழுத்துக்களைக் கொண்டு தடவைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுக்கும்போது செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை 41 எனக்காட்டுக.

(ii) எந்த இரு பெண்பிள்ளைகளும் ஒருவரையொருவர் அடுத்து இராதவாறு ஆறு ஆண்பிள்ளைகளையும் நான்கு பெண்பிள்ளைகளையும் வட்டமொன்று வழியே எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

25. 9 பொருட்களை சமமாக, 3 குழந்தைகளுக்கிடையில் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்?

26. 9 மாணவர்களை, ஒவ்வொரு குழுவிலும் 3 மாணவர்கள் உள்ள 3 குழுக்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

27. 10 மாணவர்கள் மூன்று குழுக்களாக ஒன்றில் நான்கு பேரும், மற்றைய ஒவ்வொன்றிலும் 3 பேராக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

28. 12 அங்கத்தவர்களை முறையே 5, 4, 3 அங்கத்தவர்கள் கொண்ட மூன்று குழுக்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

29. பெட்டி ஒன்றினுள் 12 பந்துகள் உள்ளன. மூன்று பந்துகளாக, அடுத்தடுத்து 4 தடவைகளில் பிரதி வைப்பின்றி எத்தனை வழிகளில் எடுக்கலாம்?

30. 120 காரணிகளின் பெருக்கமானது ஒவ்வொன்றும் 20 காரணிகளைக் கொண்ட 6 பெருக்கங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

31. 8 பொருட்கள் ஒவ்வொன்றும் 2 பொருட்கள் கொண்ட கூட்டங்களாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாம்?

32. 8 நாணயங்களிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் நான்கு நாணயங்கள் கொண்டதாக எத்தனை பொதிகள் ஆக்கலாம்?
இவற்றுள் குறித்த ஒரு நாணயம் எத்தனை பொதிகளில் இருக்கும்?

33. n மாணவர்கள் இரு குழுக்களாக, குறைந்தது குழுவொன்றில் ஒரு மாணவனாவது இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

34. 14 அங்கத்தவர்கள் 6 குழுக்களாகப் பிரிக்கப்படுகின்றனர். இரு குழுக்களில் ஒவ்வொன்றிலும் 3 பேரும், மற்றைய ஒவ்வொன்றிலும் 2 பேரும் இருக்குமாறு எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கப்படலாம்?

35. ஒரே வகையான 7 பழங்களை நான்கு மனிதர்களிடையே

(i) குறைந்தது ஒருவர் ஒரு பழத்தையாவது பெறுமாறு

(ii) ஒருவருக்கோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்டோருக்கோ பழங்கள் எதுவும் கிடைக்காமலிருப்பினும் எத்தனை வழிகளில் கொடுக்கலாம்.

36. (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 என்னும் ஏழு நிறையெண்களிலிருந்து ஒரு தடவைக்கு மூன்று நிறையெண்களை எடுப்பதன் மூலம் செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?
இவ்வரிசை மாற்றங்களில் எத்தனை

(i) நிறையெண் 2 ஐக் கொண்டிருக்கும்?

(ii) 1, 4 என்னும் நிறையெண்களைக் கொண்டிருக்கும்?

(iii) 3,5 என்னும் நிறையெண்களைக் கொண்டிருக்கும்?

(b) முதலாம் பையில் செப்பமாக 8 பந்துகளைக் கொண்டிருக்கத்தக்கதாக வெவ்வேறான 10 பந்துகளை 5 பைகளிலே எத்தனை விதங்களில் இடலாம்?

8. ஈருறுப்பு விரிவு (Binomial Expansion)

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

இங்கு விரிவின் உறுப்புக்களிலுள்ள குணகங்கள் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளன.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

இது பஸ்காலின் (Pascal) முக்கோணி எனப்படும்.

ஈருறுப்புத் தேற்றம் (நேர்நிறைஎண் சுட்டிக்குரியது)

n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க,

$$(a+b)^n = nc_o\, a^n + nc_1 a^{n-1} b + nc_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + nc_r a^{n-r} b^r + \ldots + nc_n b^n$$

ஆகும். இங்கு $nc_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

இத்தேற்றத்தைக் கணிதத்தொகுத்தறிமுறை மூலம் நிறுவலாம்.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} nc_r \cdot a^{n-r} b^r \left(= \sum_{r=1}^{n+1} nc_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1} \right)$$

$n=1$ ஆக, இ. கை. ப $= (a+b)^1 = \cdot a+b$

வ. கை. ப $= \sum_{r=0}^{2} 1c_r\, a^{1-r} b^r$

$= 1c_o\, a^1 \cdot b^o + 1c_1\, a^o\, b^1$

$= a+b$

இ. கை. ப = வ. கை. ப

$\therefore$ $n=1$ ஆக முடிவு உண்மை.

$n=p$ இற்கு முடிவு உண்மை என்க.

$$(a+b)^p = \sum_{r=0}^{p} pc_{r-1} a^{p-r} b^r$$

$$= pc_o\, a^p + pc_1\, a^{p-1} b + pc_2\, a^{p-2} b^2 + \ldots + pc_{r-1} a^{p-r+1} b^{r-1} + pc_r\, a^{p-r} \cdot b^r + \ldots + pc_p\, b^p$$

$= (a+b)^{p+1} = (a+b)\,(a+b)^p$ (ii)

$= (a+b)\left[pc_o a^p + pc_1 a^{p-1} b + \ldots + pc_p \cdot b^p\right]$

$= a\left[pc_o\, a^p + pc_1 a^{p-1} b + pc_2 a^{p-2} b^2 + \ldots + pcra^{p-r} b^r + \ldots + pcpb^b\right]$

$+b\left[pc_o\, a^p + pc_1 a^{b-1} b + \ldots + pcra^{b-r} b^r + \ldots + pc_p b^b\right]$

$= pcoa^{p+1} + pc_1 a^p b + \ldots + pcra^{p-r} b^r + \ldots + pcp \cdot ab^p$

$+ pcoa^p b + \ldots + pcr-1\, a^{p-r} b^r + \ldots + pcp-1ab^p + pcp \cdot b^{p+1}$

$= pco\, a^{p+1} + (pc_1 + pco)\, a^p b + \ldots + \left(pcr + pc_{r-1}\right)$

$a^{p-r} b^r + \ldots + pc_p\, b^{p+1}$

$= {}^{p+1}co\; a^{p+1} + {}^{p+1}c_1\; a^p b + \ldots +$

${}^{p+1}cra^{p+1-r} b^r + \ldots + {}^{p+1}c_{p+1}\, b^{p+1}$

$$\left[pc_r + pc_{r-1} = {}^{p+1}c_r \; ; \; pc_o = 1 = {}^{p+1}c_o \; ; \; pc_p = 1 \; {}^{p+1}c_{p+1}\right]$$

$$\sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}c_r \, a^{p+1-r} \, b^r$$

$\therefore n = p + 1$ ஆக முடிவு உண்மை.

எனவே கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்,

$$(a+b)^n = \sum_{r=o}^{n} nc_r \, a^{n-r} b^r \quad \text{ஆகும்.}$$

ஈருறுப்பு விரிவில் $(n+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன.

பொது உறுப்பு : $nC_r a^{n-r} \cdot b^r$ ($r+1$ ஆவது உறுப்பு)

$nC_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$ (r ஆவது உறுப்பு)

உதாரணம் 1

பின்வருவனவற்றின் விரிவை எழுதுக.

(i) $(2+3x)^6$ **(ii)** $\left(3xy - \frac{2x}{y}\right)^5$

(i) $(2+3x)^6 = 2^6 \, 6c_1 \, 2^5 (3x) + 6c_2 \, 2^4 (3x)^2$

$$+ 6c_3 \, 2^3 (3x)^3 + 6c_4 \cdot 2^2 (3x)^4 + 6c_5 \cdot 2 (3x)^5 + (3x)^6$$

$$= 64 + 576x + 2160x^2 + 4320x^3 + 4860x^4 + 2916x^5 + 729x^6$$

(ii) $\left(3xy - \frac{2x}{y}\right)^5$

$$= (3xy)^5 + 5C_1 (3xy)^4 \left(\frac{-2x}{y}\right)$$

$$+ 5C_2 (3xy)^3 \left(\frac{-2x}{y}\right)^2 + 5C_3 (3xy)^2 \left(-\frac{2x}{y}\right)^3$$

$$+ 5C_4 (3xy) \left(\frac{-2x}{y}\right)^4 + \left(\frac{-2x}{y}\right)^5$$

$$= 243x^5 y^5 - 810x^5 y^3 + 1080x^5 y - \frac{720x^5}{y} + \frac{240x^5}{y3} - \frac{32x^5}{y5}$$

உதாரணம் 2

(i) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{10}$ இன் விரிவில் 7 ஆவது உறுப்பு யாது?

(ii) $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{18}$ இன் விரிவில் x^6 இன் குணகம்

(iii) $\left(\frac{y\sqrt{x}}{3} - \frac{3}{x\sqrt{y}}\right)^{16}$ இன் விரிவில் நடு உறுப்பு என்பவற்றைக் காண்க.

(i) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{10}$

$$T_7 = 10C_6 \, 1^4 \left(-\frac{1}{2}x\right)^6$$

$$= \frac{105}{32} x^6$$

(ii) $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{18}$

$$T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-r} (-x)^r$$

$$= (-1)^r \, {}^{18}C_r \, x^{3r-36}$$

$$3r - 36 = 6$$

$$r = 14$$

$$T_{15} = {}^{18}C_{14} (-1)^{14} \cdot x^6$$

$\therefore x^6$ இன் குணகம் $= {}^{18}C_{14} = 3060$

(iii) $\left(\frac{y\sqrt{x}}{3} - \frac{3}{x\sqrt{y}}\right)^{16}$

இவ் விரிவில் 17 உறுப்புக்கள் உண்டு. எனவே நடுஉறுப்பு ஒன்பதாம் (9 ஆம்) உறுப்பு ஆகும்.

$$T_9 = 16C_8 \left(\frac{y\sqrt{x}}{3}\right)^8 \left(\frac{-3}{x\sqrt{y}}\right)^8$$

$$= 16C_8 \frac{y^4}{x^4} = 12870 \frac{y^4}{x^4}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

(i) $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^6$ இன்விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பு யாது?

(ii) n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், $(a + x)^n = 3b + 6bx + 5b\,x^2 + \ldots\ldots$ எனின் a, b, n ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^6$

$$T_{r+1} = 6C_r\,(2x)^{6-r} \left(\frac{-3}{x^2}\right)^r$$

$$= 6C_r \cdot 2^{6-r}\,(-3)^r \cdot x^{6-3r}$$

x ஐச் சாராத உறுப்பினைப் பெற, $6 - 3r = 0$

$r = 2$

$$T_3 = 6c_2\; 2^4\,(-3)^2$$
$$= 15 \times 16 \times 9 = 2160$$

(ii) $(a + x)^n = 3b + 6bx + 5bx^2 + \ldots\ldots$

$$(a + x)^n = a^n + nC_1 \cdot a^{n-1}\,x + nC_2\; a^{n-2}\,x^2 + \ldots\ldots$$

$$= a^n + n \cdot a^{n-1}\,x + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,x^2 + \ldots\ldots$$

$$a^n = 3b \text{ ——— } (1)$$

$$n \cdot a^{n-1} = 6b \text{ ——— } (2)$$

$$\frac{n\,(n-1)\,a^{n-2}}{2} = 5b \text{ ——— } (3)$$

$(1) \div 2 \quad \frac{a}{n} = \frac{1}{2}\;; \qquad n = 2a$

$(2) \div 3 \quad \frac{2a}{n-1} = \frac{6}{5}\;; \qquad 10a = 6\,(n-1)$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க $a = 3.\; n = 6,\; b = 243$

உதாரணம் 4

(i) $(3 + 2x - x^2)(1 + x)^{34}$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகம் பூச்சியமாகுமாறு r இற்கு ஒரு பெறுமானம் உண்டெனக் காட்டுக.

(ii) $\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^5 + \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^5$ ஐச் சுருக்குக.

(iii) $\left(\sqrt{2} + 1\right)^7 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^7$ ஐச் சுருக்குக. இதிலிருந்து $\left(\sqrt{2} + 1\right)^7$ இன் பெறுமானத்தின் முழு எண்பகுதியைக் காண்க.

(i) $\left(3 + 2x - x^2\right)(1 + x)^{34}$

$$= \left(3 + 2x - x^2\right)\,[1 + \ldots\ldots + {}^{34}C_{r-2}\,x^{r-2} + {}^{34}C_{r-1}\,x^{r-1} + {}^{34}C_r\,x^r \ldots.]$$

x^r இன் குணகம் $3 \cdot {}^{34}C_r + 2 \cdot {}^{34}C_{r-1} - {}^{34}C_{r-2}$

$$= \frac{3 \cdot 34!}{(34 - r)!\; r!} + \frac{2 \cdot 34!}{(35 - r)!\,(r - 1)} - \frac{34!}{(36 - r)!\;(r - 2)!}$$

$$= \frac{34!}{(34-r)!\,(r-2)!}\left[\frac{3}{r\,(r-1)} + \frac{2}{(35-r)\,(r-1)} - \frac{1}{(36-r)!\,(35-r)}\right]$$

$$= \frac{34!}{(34-r)!\,(r-2)!}\left[\frac{3\,(36-r)\,(35-r) + 2r\,(36-r) - r\,(r-1)}{(36-r)\,(35-r)\,r(r-1)}\right]$$

$$= \frac{34!}{(34-r)!\,(r-2)!}\left[\frac{(36-r)\,(105-r) - r\,(r-1)}{(36-r)\,(35-r)\,r(r-1)}\right]$$

x^r இன் குணகம் 0 ஆக

$$(36-r)\,(105-r) - r\,(r-1) = 0$$

$$r = 27$$

எனவே x^{27} இன் குணகம் 0 ஆகும்.

(ii) $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^5$

$y = \sqrt{1-x^2}$ என்க.

$$(1+y)^5 = 1 + 5C_1\,y + 5C_2\,y^2 + 5C_3\,y^3 + 5C_4\,y^4 + y^5$$

$$= 1 + 5y + 10\,y^2 + 10\,y^3 + 5y^4 + y^5$$

$$(1-y)^5 = 1 - 5y + 10y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5$$

$$(1+y)^5 + (1-y)^5 = 2\left(1 + 10\,y^2 + 5y^4\right)$$

$y = \sqrt{1-x^2}$ எனப்பிரதியிட

$$\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^5 = 2\left[1 + 10\left(1-x^2\right) + 5\left(1-x^2\right)^2\right]$$

$$= 2\left[1 + 10 - 10x^2 + 5 - 10x^2 + 5x^4\right]$$

$$= 32 - 40x^2 + 10x^4$$

(iii) $\left(\sqrt{2}+1\right)^7 - \left(\sqrt{2}-1\right)^7$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 + 7C_1\left(\sqrt{2}\right)^6 + 7C_2\left(\sqrt{2}\right)^5$$

$$+ 7C_3\left(\sqrt{2}\right)^4 + 7C_4\left(\sqrt{2}\right)^3 + 7C_5\left(\sqrt{2}\right)^2 + 7C_6\left(\sqrt{2}\right) + 1$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 + 56 + 21\left(\sqrt{2}\right)^5 + 140$$

$$+ 35\left(\sqrt{2}\right)^3 + 42 + 7\sqrt{2} + 1$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 - 56 + 21\left(\sqrt{2}\right)^5 - 140$$

$$+ 35\left(\sqrt{2}\right)^3 - 42 + 7\sqrt{2} - 1$$

$$\therefore \left(\sqrt{2}+1\right)^7 - \left(\sqrt{2}-1\right)^7 = 112 + 280 + 84 + 2$$

$$= 478$$

இப்பொழுது

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^7 = 478 - \left(\sqrt{2}-1\right)^7$$

$0 \;\; \sqrt{2} - 1 < 1 \cdot \;\; \left(\sqrt{2} \cong 1\cdot414....\right)$

ஆகவே $0 < \left(\sqrt{2}-1\right)^7 < 1$

$477 < \left(\sqrt{2}+1\right)^7 < 478$

$\left(\sqrt{2}+1\right)^7$ இன் பெறுமானத்தின் முழு எண் 477. ஆகும்.

உதாரணம் 5

m என்பது ஓர் ஒற்றை நேர்நிறையெண் எனின்,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m = \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + mC_1\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)$$

$$+ mC_2\left(x^{m-4}+\frac{1}{x^{m-4}}\right) + \ldots\ldots + mC_{\frac{m-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

என நிறுவுக. $\left(x+\frac{1}{x}\right) = 1$ எனின்,

மேலே உள்ளவாறு $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3, \left(x+\frac{1}{x}\right)^5, \left(x+\frac{1}{x}\right)^7$

என்பவற்றை விரிப்பதால் $x^3 + \frac{1}{x^3} = -2,\ x^5 + \frac{1}{x^5} = 1 = x^7 + \frac{1}{x^7}$

எனவும் நிறுவுக.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m$ இங்கு m ஒற்றை எண்.

tபு ; $(m+1)$ உறுப்புக்கள் உள்ளன. $(m+1)$ இரட்டை எண் ஆதலால் இரண்டு நடு உறுப்புக்கள் உள்ளன.

$\frac{m+1}{2}$ ஆம் உறுப்பு $\frac{m+3}{2}$ ஆம் உறுப்பும் நடுஉறுப்புகளாகும்.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^m = mCo\,x^m + mC_1\,x^{m-1}\cdot\frac{1}{x} + mC_2\,x^{m-2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$+\ldots\ldots + mC_{\frac{m-1}{2}}\ x^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$+ mC_{\frac{m+1}{2}}\ x^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m+1}{2}} + \ldots\ldots + mC_{m-2}\ x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2}$$

$$+ mC_{m-1}\,x\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1} + mC_m\left(\frac{1}{x}\right)^m$$

$$= x^m + mC_1\,x^{m-2} + mC_2\,x^{m-4} + \ldots\ldots + mC_{\frac{m-1}{2}}\,x + mC_{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$+\ldots\ldots + mC_{m-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-4} + mC_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{m-2} + \left(\frac{1}{x}\right)^m$$

[$mC_r = mC_{m-r}$ என்பதால்]

$$= \left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + mC_1\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right) + mC_2\left(x^{m-4}+\frac{1}{x^{m-4}}\right)$$

$$+ \ldots. + mC_{\frac{m-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} T_{\frac{m+1}{2}} = {}^mC_{\frac{m-1}{2}}\ x^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m-1}{2}} \\ T_{\frac{m+3}{2}} = {}^mC_{\frac{m+1}{2}}\ x^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m+1}{2}} \end{array}\right]$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) + 3C_1\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$1^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3.$$

ஆகவே $x^3 + \frac{1}{x^3} = -2.$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+5C_1\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+5C_2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$1^5 = \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+5\times(-2)+10\times 1.$$

ஆகவே $\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)=1.$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^7 = \left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+7C_1\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)7C_2\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+7C_3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$1 = \left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+7\times 1+21\times(-2)+35$$

ஆகவே $\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)=1$

மிகப் பெரிய உறுப்பு

ஈருறுப்பு விரிவின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் மிகப்பெரியதனைக் (மட்டுப்பெறுமானம்) காணும் முறை இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 6

$(x+4a)^8$ இன் விரிவில் $x=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{3}$ ஆகும்போது மிகப்பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

$$T_{r+1} = 8C_r\, x^{8-r}(4a)^r$$

$$Tr = 8C_{r-1}\, x^{9-r}(4a)^{r-1}$$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{8C_r}{8C_{r-1}}\times\left(\frac{(4a)}{x}\right)$$

$$= \frac{8-r+1}{r}\cdot\frac{4a}{x}$$

$x=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{3}$ ஆக,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{9-r}{r}\cdot\frac{8}{3} = \frac{72-8r}{3r}$$

$\frac{72-8r}{3r}>1$ எனின் $\frac{T_{r+1}}{T_r}>1$

$r<6\frac{6}{11}$ .... $T_{r+1}>T_r$ —————— (1)

$\frac{72-8r}{3r}<1$ எனின் $\frac{Tr+1}{Tr}<1$

$r>6\frac{6}{11}$ எனின் $T_{r+1}<Tr$ —————— (2)

(1) இலிருந்து $r\le 6$ எனின் $T_{r+1}>T_r$

$r\ge 7$ எனின் $T_{r+1}<T_r$

$T_1<T_2<T_3.....<T_6<T_7>T_8>T_9.....$

எனவே மிகப்பெரிய உறுப்பு T_7– ஏழாம் உறுப்பு

$$T_7 = 8C_6\, x^2(4a)^6$$

$$= 28\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^6$$

$$= \frac{28672}{729}$$

[குறிப்பு: $(x-4a)^8$ எனத் தரப்பட்டிருப்பினும் இதேவிடை பெறப்படும். ஏனெனில் $\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right|$ இன் பெறுமானமே இங்கு கருதப்படுகிறது]

உதாரணம் 7

$\left(\frac{1}{5}+\frac{5x}{16}\right)^{12}$ இன் விரிவில் $x=\frac{2}{5}$ ஆக மிகப் பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

$$T_{r+1} = 12C_r\left(\frac{1}{5}\right)^{12-r}\left(\frac{5x}{16}\right)^r$$

$$T_r = 12C_{r-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{13-r}\left(\frac{5x}{16}\right)^{r-1}$$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{12C_r}{12C_{r-1}}\cdot 5\cdot\left(\frac{5x}{16}\right)$$

$x=\frac{2}{5}$ ஆக $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{12-r+1}{r}\cdot\frac{5}{8}$

$$= \frac{65-5r}{8r}$$

$\frac{65-5r}{8r} > 1$ எனின் $\frac{T_{r+1}}{T_r} > 1$

$r < 5$ எனின், $T_{r+1} > T_r$ ——— (1)

$\frac{65-5r}{8r} < 1$ எனின், $\frac{T_{r+1}}{T_r} < 1$

$r > 5$ எனின் $T_{r+1} > T_r$ ——— (2)

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = 1$ எனின் $\frac{T_{r+1}}{T_r} = 1$

$r = 5$ எனின் $T_{r+1} = T_r$ ——— (3)

(1), (2), (3) இலிருந்து,

$T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 = T_6 > T_7 > T_8 \;.....> T_{13}.$

ஆகவே மிகப்பெரிய உறுப்புக்கள் T_5, T_6 ஆகும்.

$$T_5 = {}^{12}C_4\left(\frac{1}{5}\right)^8\cdot\left(\frac{5x}{16}\right)^4$$

$$= {}^{12}C_4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{16}\right)^4$$

$$T_6 = {}^{12}C_5\left(\frac{1}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{5x}{12}\right)^5$$

$$= {}^{12}C_5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$T_5 = T_6$ எனக் காட்டலாம்.

மிகப்பெரிய குணகம்

உதாரணம் 8

$(3+2x)^{15}$ இன்விரிவில் மிகப்பெரிய குணகத்தைக் காண்க.

$$T_{r+1} = {}^{15}C_r\ 3^{15-r}\ (2x)^r$$

$$T_r = {}^{15}C_{r-1}\ 3^{16-r}\ (2x)^{r-1}$$

T_r இன் குணகம் V_r என்க. $(1 \le r \le 16)$

$V_{r+1} = {}^{15}C_r\ 3^{15-r}\ 2^r \quad , \quad V_r = {}^{15}C_{r+1}\ 3^{16-r}\ 2^{r-1}$

$$\frac{V_{r+1}}{V_r} = \frac{{}^{15}C_r}{{}^{15}C_{r-1}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{15-r+1}{r}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\frac{V_{r+1}}{V_r} = \frac{2(16-r)}{3r}$$

$$\frac{2(16-r)}{3r} > 1 \text{ எனின் } \quad \frac{V_{r+1}}{V_r} > 1$$

$$r < 6\frac{2}{5} \text{ எனின் } \quad V_{r+1} > V_r$$

$$r \le 6 \text{ எனின் } \quad V_{r+1} > V_r \text{ ——————— } (1)$$

$$\frac{2(16-r)}{3r} < 1 \text{ எனின் } \quad \frac{V_{r+1}}{V_r} < 1$$

$$r > 6\frac{2}{5} \text{ எனின் } \quad V_{r+1} < V_r$$

$$r \ge 7 \text{ எனின் } \quad V_{r+1} < V_r \text{ ——————— } (2)$$

(1), (2) இலிருந்து

$V_1 < V_2 < V_3 \ldots < V_6 < V_7 > V_8 \ldots > V_{16}.$

மிகப்பெரிய குணகம் $V_7 = {}^{15}C_6 \cdot 3^9 \cdot 2^6$

உதாரணம் 9

(i) $\left(1+2x+3x^2\right)^4$ இன் விரிவை x இன் ஏறடுக்குகளில் x^4 வரை எழுதுக.

(ii) $\left(1+x^2-\frac{1}{x^2}\right)^5$ இன் விரிவை எழுதுக.

(i) $\left(1+2x+3x^2\right)^4 = \left[1+x(2+3x)\right]^4$

$$= 1 + 4C_1\left[x(2+3x)\right] + 4C_2\left[x^2(2+3x)^2\right] + 4C_3\left[x^3(2+3x)^3\right] + 4C_4 \cdot x^4(2+3x)^4$$

$$= 1 + 4x(2+3x) + 6x^2(2+3x)^2 + 4x^3(2+3x)^3 + x^4(2+3x)^4$$

$$= 1 + 8x + 12x^2 + 6x^2\left(4+12x+9x^2\right) + 4x^3(8+36x+\ldots) + x^4(16+\ldots+)$$

$$= 1 + 8x + 36x^2 + 104x^3 + 214x^4$$

(ii) $\left(1+x^2-\frac{1}{x^2}\right)^5 = \left[\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+1\right]^5$

$$= \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^5 + {}^5C_1\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^4 + {}^5C_2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^3 + {}^5C_3\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2 + {}^5C_4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) + 1$$

$$\left(x^{10} - 5x^6 + 10x^2 - \frac{10}{x^2} + \frac{5}{x^6} - \frac{1}{x^{10}}\right) + 5\left(x^8 - 4x^4 + 6 - \frac{4}{x^4} + \frac{1}{x^8}\right) + 10\left(x^6 - 3x^2 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^6}\right) + 10\left(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}\right) + 5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 1$$

$$= x^{10} + 5x^8 + 5x^6 - 10x^4 - 15x^2 + 11 + \frac{15}{x^2} - \frac{10}{x^4} - \frac{5}{x^6} + \frac{5}{x^8} - \frac{1}{x^{10}}$$

ஈருறுப்புக்குணகங்களின் பண்புகள்
(Properties of the Binomial eoefficients)

உதாரணம் 10

$(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots + C_n x^n$ எனின்,

இங்கு $C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$

(i) $C_o + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n = 2^n$

(ii) $C_o^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots\ldots + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{n!\, n!}$

(iii) $C_o + 2\cdot C_1 + 3\cdot C_2 + \ldots\ldots + (n+1)\, C_n = 2^n + n\cdot 2^{n-1}$

(iv) $C_o + \dfrac{1}{2} C_1 + \dfrac{1}{3}\cdot C_2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{n+1} C_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ எனக்காட்டுக.

(i) $(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n x^n$

$x = 1$ ஆக

$(1+1)^n = C_o + C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots + C_n$

$C_o + C_1 + C_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots C_n = 2^n$ ஆகும்.

(ii) $(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots + C_n x^n$ ——— (1)

$(x+1)^n = C_o x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n$ ——— (2)

$$(1+x)^{2n} = \left(C_o + C_1 x + \ldots\ldots + C_n x^n\right)\left(C_o x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots C_n\right)$$

வ. கை. ப இல் x^n இன் குணகம் $= C_o^2 + C_1^2 \ldots\ldots\ldots + C_n^2$

இ. கை. ப இல் $T_r = {}^{2n}C_r\, x^r$

x^n இன் குணகம் $= {}^{2n}C_n = \dfrac{(2n)!}{n!\, n!}$

$$C_o^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots\ldots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{n!\, n!}$$

(iii) $C_o + 2\cdot C_1 + 3\cdot C_2 + \ldots\ldots\ldots (n+1)\cdot C_n$

$$= (C_o + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n) + (C_1 + 2C_2 + 3\cdot C_3 + \ldots\ldots + n\cdot C_n)$$

$$= 2^n + \left[n + 2\frac{n(n-1)}{2!} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots\ldots + n - 1\right]$$

$$= 2^n + n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \ldots + 1\right]$$

$$= 2^n + n\,(1+1)^{n-1}$$

$$= 2^n + n\cdot 2^{n-1}$$

(iv) $C_o + \dfrac{1}{2} C_1 + \dfrac{1}{3} C_2 + \dfrac{1}{4} C_3 + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{n+1} C_n$

இப்பொழுது,

$$(n+1)\left[C_o + \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3 + \ldots + \frac{1}{n} C_{n-1} + \frac{1}{n+1} C_n\right]$$

$$= (n+1)\left[1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{n(n-1)}{2!} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= (n+1) + \frac{(n+1)\,n}{2!} + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3!} + \ldots\ldots + 1$$

$$= \left[1 + (n+1) + \frac{(n+1)\,n}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1\right] - 1$$

(அடைப்பினுள் $n+2$ உறுப்புக்கள் உள்ளன)

$$= (1+1)^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 1$$

இருபக்கமும் $(n+1)$ ஆல் பிரிக்க.

$$C_o + \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}C_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$ ஆகும்.

(iii), (iv) என்பவற்றை வேறு முறையிலும் நிறுவலாம்.

(iii) $(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$

$$x(1+x)^n = C_o x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + \ldots\ldots + C_n x^{n+1}$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட.

$$(1+x)^n + x \cdot n(1+x)^{n-1} = C_o + C_1 \cdot 2x + C_2 \cdot 3x^2 + \ldots + C_n \cdot (n+1)x^n$$

$x = 1$ எனப்பிரதியிட,

$$2^n + n \cdot 2^{n-1} = C_o + 2 \cdot C_1 + 3 \cdot C_2 + \ldots + (n+1)C_n$$

(iv) $(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n x^n$.

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்துத் தொகையிட,

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + A = C_o x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + C_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$x = 0$ எனின், $A = -\frac{1}{n+1}$

$x = 1$ ஆக,

$$C_o + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

பயிற்சி 8

பின்வரும் ஈருறுப்புக்களின் விரிவை எழுதுக

1. $(5+4x^2)^4$
2. $(a+3x)^6$
3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$
4. $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{y}\right)^6$
5. $\left(1-\frac{1}{2}x\right)^{10}$
6. $(2x+3y)^5$

பின்வருவனவற்றை எழுதிச் சுருக்குக.

7. $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^7$ இன் விரிவில் 5 ஆம் உறுப்பு
8. $(x^3+3xy)^9$ இன் விரிவில் 6 ஆம் உறுப்பு
9. $\left(\frac{a}{b}-\frac{2b}{a^2}\right)^{13}$ இன் விரிவில் 10 ஆம் உறுப்பு
10. $\left(\frac{1}{2}-+\frac{2}{3}x\right)^{n+2}$ இன் விரிவில் பொது உறுப்பு
11. $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^9$ இன் விரிவில் இரு நடுஉறுப்புக்கள்
12. $\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^8$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பு
13. $\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ இன் விரிவில் y ஐச் சாராத உறுப்பு
14. $\left(x^2+\frac{2y}{x}\right)^{10}$ இன் விரிவில் x^8 இன் குணகம்

15. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ இன் விரிவில் நடு உறுப்பு $(-2)^n \frac{1\cdot3\cdot5......(2n-1)}{n!}$

எனக்காட்டுக.

16. a, b, n என்பன நேர் நிறை எண்களாக இருக்க $(a+b)^n$ இனது விரிவின் முதல் மூன்று உறுப்புக்கள் முறையே $729, 2916, 4860$ எனின் a, b, n என்பவற்றைக் காண்க.

17. $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x^3}\right)^{10}$ இனது விரிவின் x^5 இன் குணகத்தையும், x ஐச் சாராத உறுப்பையும் காண்க.

18. $(1+x)^{2n}$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகம், $(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவின் x^n இன் குணத்தின் இருமடங்காகும் எனக்காட்டுக.

19. $\left(a^2-\frac{x}{a^3}\right)^{10}$ இன் விரிவின் a^{12} ஐக் கொண்ட உறுப்பு இல்லை எனக்காட்டுக.

20. $\left(x^2-x^{-4}\right)^{6r}$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க.

21. $\left(1+x^2\right)^2(1+x)^n = a_o + a_1 x + a_2 x + a_3 x^3 + ...$ ஆகவும் a_o, a_1, a_2 என்பன ஒரு கூட்டல் விருத்தியிலும் இருப்பின் n இன் இயல்தகு இரு பெறுமானங்களையும் காண்க. இப் பெறுமானங்களுக்கு விரிவை பூரணமாக எழுதுக.

22. $(1+ax)^4(2-x)^3$ இன் விரிவின் x^2 இன் குணகம் 6 எனின் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

23. $(1-3x)\left(1+x^3\right)^{10}$ இன் விரிவில் x^{22} இன் குணகத்தைக் காண்க.

24. $(1+ax)^8(1+3x)^4-(1+x)^3(1+2x)^4$ இன் விரிவில் x இன் குணகம் 0 எனின் a ஐக் காண்க. x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க.

25. $(1+x)^n$ இன் விரிவில்

(i) n இரட்டை எனின், நடுஉறுப்பின் குணகம்.

$$\frac{1\cdot3\cdot5.....(n-1)}{1\cdot2\cdot3..........\frac{n}{2}}2^{n/2}$$ எனவும்

(ii) n ஒற்றை எனின் இரு நடுஉறுப்புக்களுள் ஒவ்வொன்றினதும் குணகம்

$$\frac{1\cdot3\cdot5.....n}{1\cdot2\cdot3....\left(\frac{n+1}{2}\right)}2^{\frac{n-1}{2}}$$ எனவும் காட்டுக.

26. (a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$ எனின், $x^7+\frac{1}{x^7}=1$ எனக் காட்டுக.

(b) $(x+2y)^7$ இன் விரிவை எழுதுக. இதிலிருந்து $(1.02)^7$ இன் பெறுமானத்தை நான்கு பொருளுடைய இலக்கங்களுக்குத் தருக.

27. விரித்து எழுதிச் சுருக்குக.

(i) $\left(2\sqrt{a}+3\right)^6+\left(2\sqrt{a}-3\right)^6$ (ii) $\left(x-\sqrt{3}\right)^4+\left(x+\sqrt{3}\right)^4$

(iii) $\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^4+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^4$

28. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $(1+x)^n$ இன் விரிவில் $0\le r\le n$ ஆக, x^n இன் குணகம் ஒரு நிறையெண் ஆகுமென நிறுவுக.

$(1+x)^n=(1+x)(1+x)......n$ தடவைகள் என்ற வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்துக.
இதிலிருந்து P உம் Q உம் n இல் தங்கியுள்ள நேர்நிறையெண்க ளாயிருக்குமிடத்து, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ என்பதை $P+Q\sqrt{2}$ ஆக எடுத்துரைக்கலாம் எனக் காட்டுக.

$P^2-2q^2=(-1)^n$ எனவும் காட்டுக.

மேலும் $P = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$ எனக் காட்டி Q இற்கு ஓர் ஒத்த பெறுமானத்தைக் காண்க

(ii) $\left(3x^2+1\right)$ உம் $\left(3x^2+3x+1\right)$ உம், $f(x) \equiv 27x^6+1$ இன் காரணிகள் எனத் தரப்படுமிடத்து குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதன் மூலம் $f(x)$ இன் மற்ற இருபடிக் காரணியைக் காண்க.
இதிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் 170 000 இலும் பெரிதான மூன்று காரணிகளாக, $3^{33}+1$ எனும் நிறையெண்ணைப் பிரிக்க.

$\left[3^6 = 729, 3^{11} = 177\ \ 147\right]$

29. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^{n} C_r\, x^r$

என நிறுவுக. இங்கு $C_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

n என்பது ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க $\left(5+2\sqrt{5}\right)^n$ இன் முழுவெண்ணும் பின்னமும் முறையே p, f என்பவற்றினால் குறிப்பிடப்படுமெனின்

$f + \left(5-2\sqrt{5}\right)^n = 1$ ஆகுமென நிறுவுக. அதிலிருந்து

p ஆனது ஓர் ஒற்றையெண் என உய்த்தறிக.

மேலும் இதிலிருந்து $(1-f)(p+f) = 5^n$ எனவும்,

$\left(5+2\sqrt{5}\right)^n = \dfrac{p+1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 - 5^n}$ எனவும் காட்டுக.

30. ${}^nC_r < n \cdot {}^{n-1}C_{r-1}$, $r = 2, 3, \ldots\ldots n$ என்பதை வழமையான குறிப்பீடுகளைக் கொண்டு காட்டுக.

$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + {}^nC_3\, x^3 + \ldots\ldots + {}^nC_{n-1}\, x^{n-1} + {}^nC_n\, x^n$
எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$(a+b)^n = a^n + {}^nC_1 \cdot a^{n-1} b + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + {}^nC_{n-1}\, a \cdot b^{n-1} + b^n$
என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து a உம் b உம் நேரெண்களாகவும் $n \geq 2$ ஆகவும் இருப்பின்

$(a+b)^n - a^n < nb\,(a+b)^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

31. **(i)** r இன் எல்லா நேர் நிறைஎண் பெறுமானங்களுக்கும், $\dfrac{1}{r!} \leq \dfrac{1}{2^{r-1}}$ என கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறுவிதமாக காட்டுக.

(ii) n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - 1$ ஐ ஈருறுப்புத் தேற்றத்தினால் வழமையான முறையில் விரிக்க. இவ்விரிவின் r ஆவது

உறுப்பை $\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{r!}$ என்னும் வடிவில்

எழுதலாம் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து இவ்வுறுப்பானது $\dfrac{1}{r!}$ இற்கு மேற்படாதெனக் காட்டுக.

மேலும் இவ்விரிவின் உறுப்புக்களைப் பொதுவிகிதம் $\dfrac{1}{2}$ ஆகவும் முதல் உறுப்பு 1 ஆகவுமுள்ள பெருக்கல் தொடரின் உறுப்புக்களுடன் ஒப்பிடுவதன் மூலம் n இன் எல்லா நேர்நிறையெண் பெறுமானங்களுக்கும்

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ எனக் காட்டுக.

32. $\left(2+3x+2x^2\right)^5$ இன் விரிவை x இன் ஏறடுக்குகளில் x^3 வரை எழுதுக

33. $\left(1+2x+ax^2\right)^n$ இன் விரிவை x இன் ஏறடுக்குகளிலான விரிவில் மூன்றாம் உறுப்பு பூச்சியம் எனின் a ஐ n இல் காண்க.

34. $\left(1+ax+bx^2+cx^3\right)^{10}$ இன், x இன் ஏறடுக்குகளிலான விரிவில் x, x^2, x^3 என்பவற்றின் குணகங்கள் முறையே 20, 200, 1000 எனின் a, b, c என்பவற்றைக் காண்க.

35. $\left(1+2x+2x^2\right)^3$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகம் a_n எனின் $a_o+a_2+a_4+a_6=63$, $a_1+a_3+a_5=62$ என நிறுவுக.

36. $\left(2-x+3x^2\right)^6$ இன் விரிவில் x^4 இன் குணகத்தைக் காண்க.

37. $\left(1-3x+2x^2\right)^7$ இன் x இன் ஏறடுக்குகளிலான விரிவை x^3 வரை எழுதுக.

38. $\left(2-x-x^2\right)^7$ இன் விரிவில் x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க.

39. $\left(1-2x+2x^2\right)^{10}=1+ax+bx^2+\ldots\ldots$ எனின் a, b ஐக் காண்க.

40. பின்வரும் விரிவுகளில் மிகப்பெரிய உறுப்பைக் காண்க.

(i) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)^4$, $x=1$ ஆக. **(ii)** $(2-3x)^9$, $x=\frac{3}{2}$ ஆக.

41. $(1+x)^n=C_o+C_1x+C_2x^2+\ldots..+C_nx^n$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக. (இங்கு $C_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ஆகும்.

(i) $C_1+2\cdot C_2+3\cdot C_3+\ldots\ldots+n\cdot C_n=2^{n-1}$

(ii) $C_2+2\cdot C_3+3\cdot C_4+\ldots\ldots+(n-1)\cdot C_n=1+(n-2)\cdot 2^{n-1}$

(iii) $C_1-2\cdot C_2+3\cdot C_3+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}nC_n=0$

(iv) $C_o-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

(v) $\frac{C_1}{C_o}+2\cdot\frac{C_2}{C_1}+3\cdot\frac{C_3}{C_2}+\ldots..+n\cdot\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$

(vi) $2\cdot C_o+2^2\cdot\frac{C_1}{2}+2^3\cdot\frac{C_2}{3}+\ldots\ldots+2^{n+1}\frac{\cdot C_n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

42. (i) $(1+x)^n=C_o+C_1x+C_2x^2+\ldots\ldots+C_nx^n$ எனின்

$$C_1^2+2\cdot C_2^2+\ldots..+n\cdot C_n^2=\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$ என நிறுவுக.

(ii) $(3+2x)^{15}$ இன் விரிவின் மிகப்பெரிய குணத்தைக் காண்க.

43. (i) $(1+x)^n=C_o+C_1x+\ldots..+C_nx^n$ எனின்

$C_o, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ என்ற ஈருறுப்புக் குணகங்களில் மிகப்பெரியது

n இரட்டையாயின் $\frac{C_n}{2}$ எனவும்

n ஒற்றையாயின் $\frac{C_{n-1}}{2}=\frac{C_{n+1}}{2}$ எனவும் நிறுவுக.

(ii) $\left(2x+\frac{1}{3x}\right)^{20}$ என்னும் விரிவில் (a) மிகப்பெரிய குணகத்தையும்

(b) $x=\frac{1}{2}$ ஆயின் மிகப்பெரிய உறுப்பையும் காண்க.

44. n என்பது ஒரு நேர் நிறையெண்ணாயிருக்க,

$(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + ...+ C_n x^n$ என நிறுவுக.

இங்கு $C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$

(i) $C_o C_1 + C_1 C_2 + ...+ C_{n-1} C_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $C_o C_1 - C_1 C_2 + ...+ (-1)^{n-1} C_{n-1} C_n$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

45. n என்பது நேர் நிறையெண்ணெனின்,

$(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + ...+ C_n x^n$ என நிறுவுக.

இங்கு $C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\, r!}$

$\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{12x^2}\right)^{15}$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில்

(i) x ஐச் சாராத உறுப்பு

(ii) $x = \dfrac{1}{4}$ ஆயின் மிகப்பெரிய உறுப்பு என்பவற்றைக் காண்க.

46. (i) x இன் ஏறடுக்குகளில் $(2x+3x^2)^{15}$ இன் விரிவிலுள்ள மிகப் பெரிய குணகத்தைக் காண்க.

(ii) $(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + ...+ C_n x^n$ எனின்

$C_o + 2\cdot C_1 + 3\cdot C_2 + ...+ (n+1) C_n = (n+2)\cdot 2^{n-1}$

எனக் காட்டுக.

47. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகவும்,

$(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + ...+ C_n x^n$ ஆகவும் இருக்க.

$C_o^2 - C_1^2 + C_2^2 - ......+ (-1)^n C_n^2 = 0$ (n ஒற்றை எனின்)

$= \dfrac{(-1)^{n/2}\, n!}{\left(n/2\,!\right)^2}$ (n இரட்டை எனின்) எனவும் நிறுவுக.

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ இன் விரிவில் x ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க.

இவ்வுறுப்பு விரிவின் மிகப்பெரிய உறுப்பாக அமைய x இன் நிபந்தனைகள் யாவை?

48. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகவும்

$(1+x)^n = C_o + C_1 x + C_2 x^2 + ...+ C_n x^n$ ஆகவும் இருக்க,

(i) $C_o C_r - C_1 C_{r+1} + ...+ C_{n-r} C_n$ ஐக் காண்க

(ii) $C_o C_r - C_1 C_{r+1} + ...+ (-1)^{n-r} C_{n-r} C_n$

$= 0\cdot$ $(n-r)$ ஒற்றை எனின்

$= \dfrac{(-1)^{\frac{n-r}{2}}\, n!}{\left(\frac{n-r}{2}\right)!\left(\frac{n+r}{2}\right)!}$ $(n-r)$ இரட்டை எனின்

என நிறுவுக.

49. $(1 + ax + x^2)^n$ இன் விரிவில் x^5 இன் குணகத்தைக் காண்க. இங்கு n ஒரு நேர்நிறையெண். இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ

${}^{2n}C_5 = 32\cdot {}^nC_5 + 6\cdot {}^nC_3 + 32\cdot {}^nC_4$ எனக் காட்டுக.

50.(a) $\left(1+\frac{x}{5}\right)^6$ இன் ஈருறுப்பு விரிவில் x இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்தி $(1\cdot 01)^6$ ஐ நான்கு பொருளுடைய இலக்கங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பெறுமானம் கணிக்க.

(b) $(1-\lambda x)^6 = 1 - 12x + px^2 + qx^3 + \ldots\ldots$ எல்லா மெய் x இற்கும் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. λ, p, q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து $(1+x)^2(1-4x)^6$ என்பதன் விரிவில் x^3 இன் குணகத்தைக் காண்க.

51. (i) a, b என்பன மெய்யெண்களாகவும், n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகவுமிருக்க, $(a+b)^n$ இற்கான ஈருறுப்பு விரிவை எழுதுக.

$(x+2)^5$ ஐ விரித்து எழுதி, இதிலிருந்து $(x+2)^5-(x-2)^5$ ஐ x இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாக உணர்த்துக.
$2\cdot 1^5 + 1\cdot 9^5$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $\left(2x+\frac{k}{2x}\right)^9$ இன் விரிவில் x^5 இன் குணகம் 128 ஆகும் ஒருமை k இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

52. (i) $(1-2x)^6$ ஐ x இன் ஏறடுக்குகளில் விரிக்க.

இதிலிருந்து $(0\cdot 98)^6$ ஐயும் $(1\cdot 02)^6$ ஐயும் ஐந்து தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணிக்க.

(ii) $\left(x-\frac{3}{5x^2}\right)^7$ இன் விரிவில் x இனதும் $\frac{1}{x^5}$ இனதும் குணகங்களைக் கணிக்க.

9. சிக்கலெண்கள்

$x^2-1=0$ இன் தீர்வைக் கருதுக.

$x^2-1=0, \quad (x+1)(x-1)=0; \quad x=-1$, அல்லது 1 ஆகும்.

$x^2+1=0$ இன் தீர்வினைக் கருதுக.

$x^2+1=0; \quad x^2=-1$ எனவே மெய்த்தீர்வு இல்லை.

i எனும் குறியீடு $i^2=-1$ ஆகுமாறுள்ள எண்ணைக் குறிக்கின்றது என்க.

$x^2+1=0; \quad x^2-i^2=0$

$(x-i)(x+i)=0$

$x=-i$ அல்லது i

சிக்கலெண் ஒன்றின் பொதுவடிவம்

a, b என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க சிக்கலெண் $a+ib$ எனக் குறிக்கப்படும். a என்பது சிக்கலெண்ணின் மெய்ப்பகுதி எனவும் b என்பது சிக்கலெண்ணின் கற்பனைப்பகுதி எனவும் குறிப்பிடப்படும். சிக்கலெண் Z ஆனது

$Z = a+ib$ எனின்,
$Re(Z)=a, \quad Im(Z)=b$ ஆகும்.
$a+ib$ என்பதில் $a=0$ எனின், சிக்கலெண் ib ஆகும்.
இது தூய கற்பனை எண் எனப்படும்.

சிக்கலெண்களின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல்

$Z_1 = a+ib, \quad Z_2 = c+id$ எனின்,

$Z_1+Z_2=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

$Z_1-Z_2=(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

$Z_1\cdot Z_2=(a+ib)\ (c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$ ஆகும்.

உடன் புணரிச் சிக்கலெண் (*Complex conjugate*)

$Z = a + ib$ எனின், Z இன் உடன் புணரிச்சிக்கலெண் $\bar{Z} = a - ib$ என வரையறுக்கப்படும்.

$Z + \bar{Z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$ – மெய்யெண்

$Z \cdot \bar{Z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ – மெய்யெண்

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + ib} \cdot \frac{(c - id)}{(c - id)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

சிக்கலெண் ஒன்றின் மட்டு (*modulus of a complex number*)

$Z = a + ib$ எனின், Z இன்மட்டு, $|Z|$ எனக்குறிக்கப்படும்.

$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ என வரையறுக்கப்படும். $|Z| \geq 0$ ஆகும்.

சமன்பாடு தீர்த்தல்

$x^2 + x + 1 = 0$ இன் தீர்வினைக் காணும் முறை இங்கு தரப்பட்டுள்ளது.

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ தீர்வுகள் மெய்யானவை அல்ல.

$x^2 + x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ என்பதில் $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$$

பூச்சியம்

$Z = 0$ எனின், $Z = a + ib = 0 \iff a = 0,\ b = 0$ ஆகும்.

சிக்கலெண்கள்

$Z_1 = a + ib, \quad Z_2 = c + id$ என்க.

$Z_1 = Z_2$ எனின், $a + ib = c + id$

$$(a - c) + i(b - d) = 0$$
$$a - c = 0,\ b - d = 0$$
$$a = c,\ b = d$$

ஆகவே, $a + ib = c + id \iff a = c,\ b = d$ ஆகும்.

இருபடிச் சமன்பாட்டின் சிக்கலெண் மூலங்கள்

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad a, b, c$ என்பன மெய்யெண்கள்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac < 0$ எனின், $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{i^2(4ac - b^2)}}{2a}$

$x = \dfrac{-b}{2a} \pm i\,\dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ $\quad (4ac - b^2 > 0$ ஆகும்.)

$x = p \pm iq$ ஆகும்.

இருபடிச்சமன்பாடொன்றின் ஒரு மூலம் $p + iq$ எனின், $(p, q \in R)$ மற்றையது அதன் உடன் புணரி $p - iq$ ஆகும்.

உதாரணம் 1

(i) $x^2 - 2x + 10$ ஐ ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதி $\dfrac{x}{x^2 - 2x + 10}$ ஐப் பகுதிப்பின்னமாகத் தருக.

(ii) $Z = a + ib \quad (b \neq 0)$ ஆகவும் $Z + \omega$, $Z\omega$ என்பன மெய்யெண்களாகவும் இருப்பின் $\omega = a - ib$ எனக் காட்டுக.

(iii) $(2 + i)$ இனை ஒரு மூலமாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாட்டைக் காண்க

(iv) $3 - 4i$ இன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

(i) $x^2 - 2x + 10 = x^2 - 2x + 1 + 9$

$$= (x-1)^2 - 9i^2 = (x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i)$$

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 10} = \frac{A + iB}{(x - 1 - 3i)} + \frac{C + iD}{(x - 1 + 3i)}$$

$$= \frac{(A + iB)(x - 1 + 3i) + (C + iD)(x - 1 - 3i)}{(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i)}$$

$$x = (A + iB)(x - 1 + 3i) + (C + iD)(x - 1 - 3i)$$

$x = 1 - 3i$ எனின்

$1 - 3i = 0 + (C + iD)(-6i)$

$1 - 3i = 6D - 6Ci$

$C = \frac{3}{6}, \; D = \frac{1}{6}$

$x = 1 + 3i$ எனின்

$1 + 3i = (A + iB)\, 6i + 0$

$= -6B + 6Ai$

$B = -\frac{1}{6}, \; A = \frac{3}{6}$

$$\frac{x}{x^2 - 2x + 10} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3-i)}{x - 1 - 3i} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3+i}{x - 1 + 3i}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{3-i}{x-1-3i} + \frac{3+i}{x-1+3i}\right]$$

(ii) $Z = a + ib; \; \omega = c + id$

$Z + \omega = (a + c) + i(b + d)$

$Z + \omega$ ஒரு மெய்யெண். ஆகவே $b + d = 0; \quad d = -b$

$Z\omega = (ac - bd) + i(ad + bc)$

$Z\omega$ ஒரு மெய்யெண். ஆகவே $ad + bc = 0$

$-ab + bc = 0; \quad b(c - a) = 0; \; b \neq 0 \; \therefore \; c = a$

எனவே $\omega = a - ib$ ஆகும்.

(iii) ஒரு மூலம் $(2 + i)$ எனின், மற்றைய மூலம் $(2 - i)$ ஆகும்.

சமன்பாடு $[x - (2+i)][x - (2-i)] = 0$

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

(iv) $\sqrt{3 - 4i} = a + ib$ என்க.

$3 - 4i = (a + ib)^2$

$= (a^2 - b^2) + i\,2ab$

$a^2 - b^2 = 3$

$2ab = -4$

$\Rightarrow a = \pm 2, \quad b = \mp 1$

$\sqrt{3 + 4i} = \pm(2 - i)$ ஆகும்.

1 இன் கன மூலங்கள்

$x^3 = 1$ ஐத் தீர்க்கும் போது பெறப்படும் x இன் பெறுமானங்கள் 1 இன் கனமூலங்கள் ஆகும்.

$x^3 - 1 = 0$

$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ அல்லது $x^2 + x + 1 = 0$

$x^2 + x + 1 = 0; \quad x \; \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

எனவே 1 இன் கன மூலங்கள் $1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்.

$\omega = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்க.

$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ஆகும்.}$$

$\omega = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ என்க.

$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே கற்பனை மூலங்களில் ஒன்று ω எனின், மற்றையது ω^2 ஆகும்.

எனவே 1 இன் கன மூலங்கள் $1, \omega, \omega^2$ ஆகும்.

[இங்கு $\omega = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ அல்லது $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$]

ω என்பது $x^3-1=0$ இன் ஒரு மூலம் என்பதால் $\omega^3 = 1$ ஆகும்.

மேலும் ω என்பது $x^2+x+1=0$ இன் மூலம் ஆதலால்

$1+\omega+\omega^2 = 0$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$1,\ \omega,\ \omega^2$ என்பன 1 இன் கன மூலங்கள் எனின்,

(a) $\frac{(1+\omega)^2}{\omega}$ **(b)** $\left(1+2\omega+3\omega^2\right)\left(3+2\omega+\omega^2\right)$ **(c)** $\omega^7+\omega^8+\omega^9$

என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $(1+i)^{20}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(i) $x^3 = 1$

$x^3-1=0$

$x = 1, \omega, \omega^2$ என்பதால்

$\omega^3-1=0 \quad \Rightarrow \omega^3 = 1$

$(\omega-1)\left(\omega^2+\omega+1\right)=0;\quad \omega \neq 1$ எனவே $1+\omega+\omega^2=0$

(a) $$\frac{(1+\omega)^2}{\omega} = \frac{\left(-\omega^2\right)^2}{\omega} = \frac{\omega^4}{\omega} = \omega^3 = 1$$

(b) $\left(1+2\omega+3\omega^2\right)\left(3+2\omega+\omega^2\right)$

$$= \left(1+\omega+\omega^2+\omega+2\omega^2\right)\left(1+\omega+\omega^2+\omega+2\right)$$

$$= \left(\omega+2\omega^2\right)(\omega+2)$$

$$= \omega\,(1+2\omega)(\omega+2)$$

$$= \omega\left[(1+\omega+\omega)(1+\omega+1)\right]$$

$$= \omega\left(\omega-\omega^2\right)\left(1-\omega^2\right)$$

$$= \omega^2(1-\omega)\left(1-\omega^2\right)$$

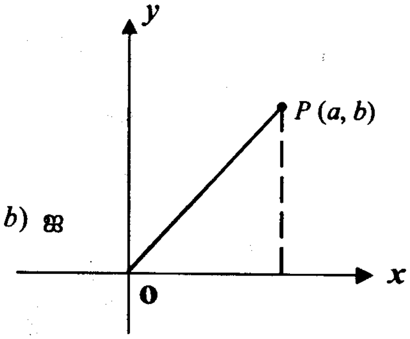
$$= \omega^2\left[1-\omega-\omega^2+\omega^3\right]$$

$$= \omega^2\left[2-\omega-\omega^2\right] = 3\omega^2$$

(c) $\omega^7 + \omega^8 + \omega^9 = \omega^7\left(1 + \omega + \omega^2\right) = \omega^7 \times 0 = 0$

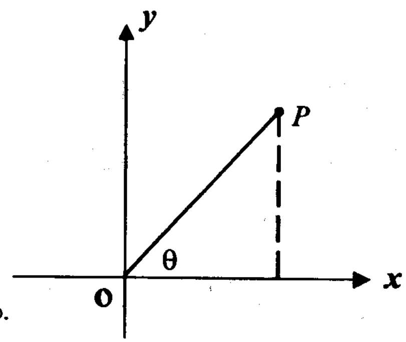
(ii) $(1+i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10} = (2i)^{10} = \left(i^2\right)^5 \cdot 2^{10} = -2^{10}$

ஆகன் வரிப்படம் (*The Argand Diagram*)



$Z = a + ib$ என்க.
Ox, Oy என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்கள். Ox, Oy என்பன முறையே மெய்அச்சு, கற்பனைஅச்சு என அழைக்கப்படும்.
சிக்கலெண் Z ஆனது Oxy தளத்தில் (a, b) ஐ ஆள்கூறாக உடைய புள்ளி $P(a, b)$ யினால் குறிக்கப்படும்.
$Z = a + ib \leftrightarrow P(a, b)$

சிக்கலெண் ஒன்றின் முனைவாள் கூற்று வடிவம்



$Z = a + ib$ என்க.

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$= r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ [$r \geq 0$ ஆகும்]

$Z = a + ib \qquad Z \equiv (r, \theta)$ ஆகும்.

இங்கு $a = r\cos\theta$, $\quad b = r\sin\theta$ ஆகும்.

சிக்கலெண் ஒன்றின் மட்டும் வீச்சமும்

$Z = a + ib$ என்க. ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z, P எனும் புள்ளியினால் குறிக்கப்படுகிறது. Z இன் மட்டு நீளம் OP யினால் குறிக்கப்படும்.

OP யின் நீளம் $= r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ ஆகும்.

$Z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

r - மட்டு, θ – வீச்சம் ஆகும்.

$-\pi < \theta \leq \pi$ ஆகுமாறு θ அமைந்திருப்பின் θ தலைமை வீச்சம் (*principal argument*) எனப்படும். இது $arg\,(Z)$ எனக் குறிக்கப்படும்.பொதுவாக வீச்சம் என்னும் போது θ இற்கு பல பெறுமானங்கள் உண்டு. இது $Arg\,(Z)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 3

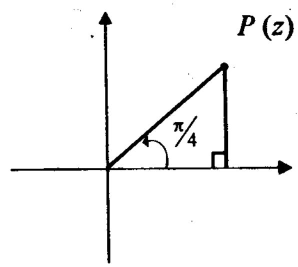
பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, தலைமை வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க.

(i) $1+i$ (ii) $-1+i$ (iii) $-1-i$ (iv) $1-i$

(i) $Z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

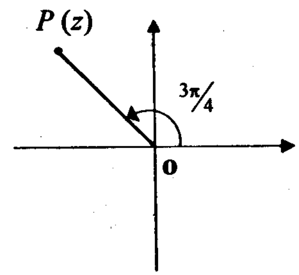
மட்டு $= \sqrt{2}$, $\quad arg(Z) = \frac{\pi}{4}$



(ii) $Z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

மட்டு $= \sqrt{2}$, $arg(Z) = \frac{3\pi}{4}$

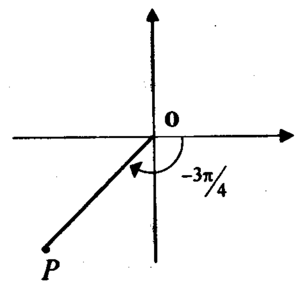


(iii) $Z = -1 - i$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$$



மட்டு $= \sqrt{2}$, $\quad arg(Z) = \dfrac{-3\pi}{4}$

இங்கு $Z = -1 - i$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$ எனவும் எழுதலாம்.

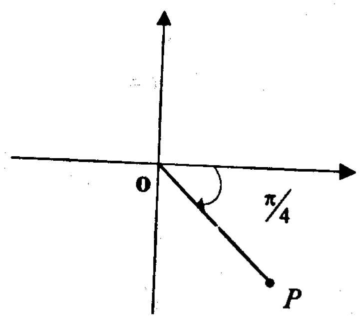
இங்கு $\dfrac{5\pi}{4}$ **தலைமை வீச்சம் அல்ல** என்பதைக் கவனிக்க.

$\dfrac{5\pi}{4}$, **வீச்சங்களுள் ஒன்று** $Arg\,(Z) = \dfrac{5\pi}{4}$

(iv) $Z = 1 - i$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\pi/4\right) + i\sin\left(-\pi/4\right)\right]$$



மட்டு $\sqrt{2}$; $\quad arg\,(Z) = \left(-\pi/4\right)$

$$Z = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$$ எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு $Arg\,(Z) = \dfrac{7\pi}{4}$ ஆகும்.

இங்கு $\dfrac{7\pi}{4}$ **தலைமை வீச்சம் அல்ல.**

$Z_1 \equiv (r_1, \theta_1)$, $\quad Z_2 \equiv (r_2, \theta_2)$ எனின், Z_1, Z_2, Z_1/Z_2 ஐ காணல்

$$Z_1 \equiv (r_1, \theta_1) \qquad Z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$Z_2 \equiv (r_2, \theta_2) \qquad Z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1 r_2\cdot\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$Z_1 Z_2 \equiv \left(r_1 r_2, (\theta_1 + \theta_2)\right)$$

மேலும் $|Z_1 Z_2| = |Z_1|\,|Z_2|$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\;\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\;\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} \equiv \left(\frac{r_1}{r_2},\ \theta_1 - \theta_2\right)$$

மேலும் $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2}$

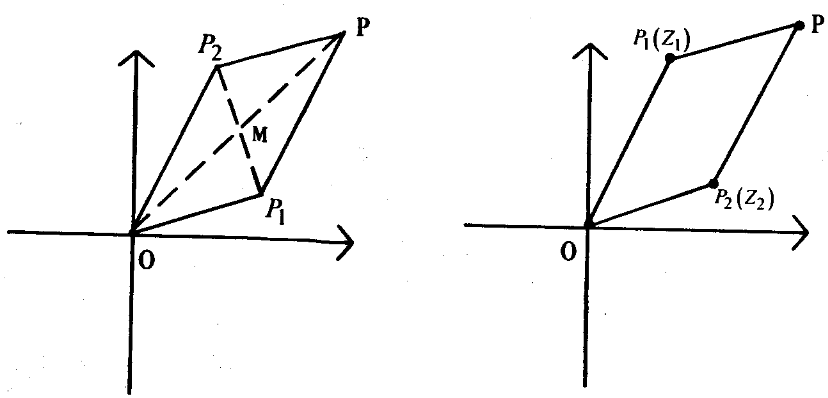
குறிப்பு: θ_1, θ_2 என்பன தலைமை வீச்சமாக இருப்பினும், $\theta_1 + \theta_2$, $\theta_1 - \theta_2$ என்பன தலைமை வீச்சமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

ஆகன் வரிப்படத்தில் $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$, $Z_1 \cdot Z_2$, Z_1 / Z_2 ஆகிய சிக்கலெண்களை வகைக் குறித்தல்

$Z_1 = x_1 + i\,y_1$, $\quad Z_2 = x_2 + i\,y_2$ என்க.

Z_1, Z_2 என்னும் சிக்கலெண்கள் ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$

(i) இணைகரம் $OP_1\,PP_2$ ஐப் பூர்த்தியாக்குக. புள்ளி P சிக்கலெண் $Z_1 + Z_2$ ஐக் குறிக்கும்.



நிறுவல் : $P_1 P_2$, OP என்பன M இல் இடைவெட்டுகின்றன என்க.

M, $P_1 P_2$ இன் நடுப்புள்ளி.

ஆகவே $M \equiv \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\,;\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

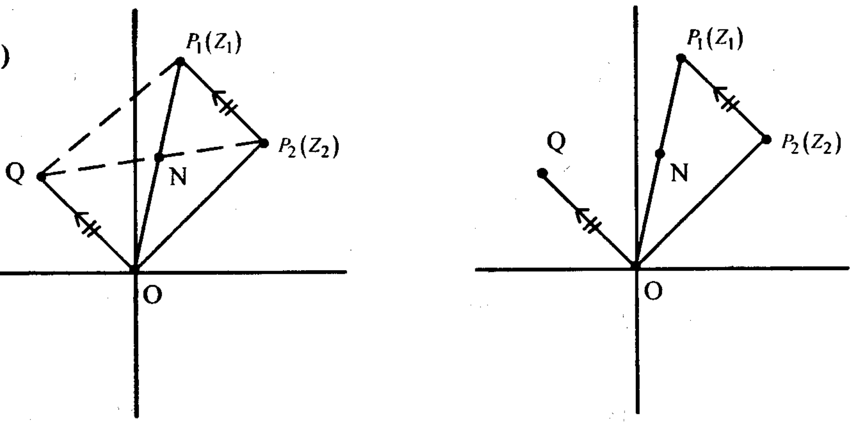
M, OP இன் நடுப்புள்ளி. $O \equiv (0, 0)$

ஆகவே $P \equiv (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

P குறிக்கும் சிக்கலெண் $(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

$$= (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = Z_1 + Z_2$$

(ii)



$P_2\,P_1$ இற்கு சமனும், சமாந்தரமும் ஆக $O\,Q$ வரையப்படுகிறது. புள்ளி Q, சிக்கலெண் $Z_1 - Z_2$ ஐக் குறிக்கும்.

நிறுவல் : $O\,P_1$, $Q\,P_2$ என்பன N இல் இடைவெட்டுகின்றன.

$O\,P_2\ P_1\,Q$ ஓர் இணைகரம்.

$O\,P_1$ இன் நடுப்புள்ளி N; $\quad N \equiv \left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{y_1}{2}\right)$

$Q\,P_2$ இன் நடுப்புள்ளி N; $\quad P_2 \equiv (x_2\,, y_2)$

எனவே $Q \equiv (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$ ஆகும்.

Q குறிக்கும் சிக்கலெண் $(x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

$$= (x_1 + i\,y_1) - (x_2 + i\,y_2) = Z_1 - Z_2$$

மேலே (i) இலுள்ள படத்திலிருந்து, முக்கோணியில் சமனிலித் தேற்றத்திலிருந்து

$O\,P_1 + P_1\,P > O\,P$ (முக்கோணி $O\,P_1\,P$ இல்)

$|Z_1| + |Z_2| > |Z_1 + Z_2|$ ———————— (1)

OP_1, $P_1\,P$ என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் எனின்,

$O\,P_1 + P_1\,P = O\,P$

$|Z_1| + |Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ ———————— (2)

(1), (2) இலிருந்து $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$ ———— (A)

மேலும் ΔOP_1P இல், $OP + PP_1 > OP_1$

$|Z_1 + Z_2| + |Z_2| > |Z_1|$; $|Z_1 + Z_2| > |Z_1| - |Z_2|$ ———— (3)

ΔOP_1P இல் $OP + OP_1 > PP_1$

$$|Z_1 + Z_2| + |Z_1| > |Z_2|$$

$$|Z_1 + Z_2| > |Z_2| - |Z_1| \text{ ———— } (4)$$

(3), (4) இலிருந்து

$$|Z_1| \sim |Z_2| < |Z_1 + Z_2|$$

OP_1, P_1P என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் எதிர்த்திசைகளில் அமையும் எனின்

$|Z_1| \sim |Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ ஆகும்.

ஆகவே $|Z_1| \sim |Z_2| \le |Z_1 + Z_2|$ ———— (B)

(A), (B) இலிருந்து

$$\boxed{|Z_1| \sim |Z_2| \le |Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|}$$

$Z_1 = 6 + 8i$, $Z_2 = 3 + 4i$ என்க.

$|Z_1| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; $|Z_2| - \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$Z_1 + Z_2 = (6 + 8i) + (3 + 4i) = 9 + 12i$

$$|Z_1 + Z_2| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$

இங்கு $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ ஆகும்.

$Z_1 = 6 + 8i$, $Z_2 = -3 - 4i$ என்க.

$|Z_1| = 10$; $|Z_2| = 5$

$Z_1 + Z_2 = (6 + 8i) + (-3 - 4i)$

$= 3 + 4i$

$|Z_1 + Z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

இங்கு $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| - |Z_2$ ஆகும்.

, NjNghy ;(ii) இலுள்ள உருவினை உபயோகித்து

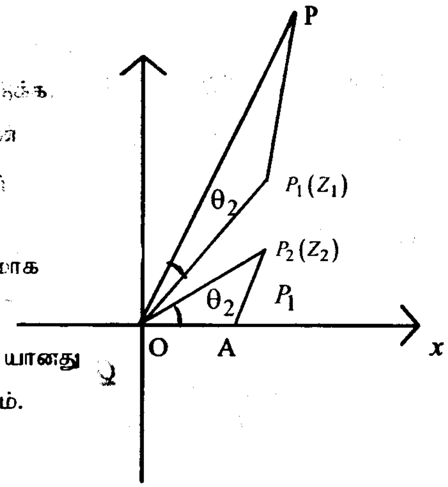
$$\boxed{|Z_1| \sim |Z_2| \le |Z_1 - Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|}$$

என நிறுவலாம்.

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$. $r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ என்க.

$$OP_1 = r_1, \quad P_1\hat{O}X = \theta_1 \quad OP_2 = r_2 \quad P_2\hat{O}X = \theta_2$$

(iii) அச்சு Ox இல் OA ஆகுமாறு A எனும் புள்ளியை எடுக்க. P_2A ஐ இணைக்க. OP_1 உடன் θ_2 அமைக்குமாறு O இனூடு நேர் கோடு வரையப்படுகிறது. OAP_2 எனும் கோணத்திற்கு சமமாக OP_1P வரையப்படுகிறது. இரு கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி P யானது சிக்கலெண் $Z_1 \cdot Z_2$ ஐக் குறிக்கும்.



நிறுவல்:

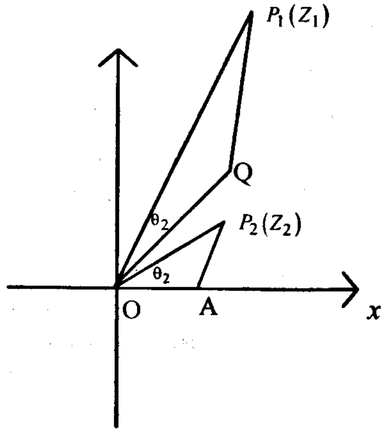
ΔOP_1P, ΔOAP_2 என்பவை இயல்பொத்தவை

$$\frac{OP_1}{OA} = \frac{OP}{OP_2}$$

$$\frac{r_1}{1} = \frac{OP}{r_2}; \quad OP = r_1r_2, \quad P\hat{O}X = \theta_1 + \theta_2$$

$$\therefore \; P \equiv (r_1r_2, (\theta_1 + \theta_2))$$

(iv) அச்சு Ox இல் $OA = 1$ அலகு ஆகுமாறு A என்னும் புள்ளியை எடுக்க. OP_1 உடன் θ_2 அமைக்குமாறு O இனூடு நேர்கோடு வரையப்படுகிறது. OP_2A எனும் கோணத்திற்கு சமமாகுமாறு OP_1Q வரையப்படுகிறது. இரு கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி Q, சிக்கலெண் $\frac{Z_1}{Z_2}$ ஐக் குறிக்கும்



நிறுவல் : ΔOQP_1, ΔOAP_2

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OP_1}{OP_2}$$

$$\frac{OQ}{1} = \frac{r_1}{r_2} \; ; \quad OQ = \frac{r_1}{r_2} \quad Q\hat{O}X = \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore \quad Q \equiv \left(\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right)$$

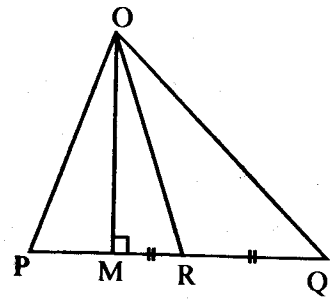
உதாரணம் 4

(i) OPQ எனும் முக்கோணியின் பக்கம் PQ வின் நடுப்புள்ளி R எனில், கேத்திர கணிதமுறைப்படி $OP^2 + OQ^2 = 2\left(OR^2 + PR^2\right)$ என நிறுவுக.

(ii) Z, a என்பன இரு சிக்கலெண்களாக இருக்க,

$|Z+a|^2 + |Z-a|^2 = 2\left\{|Z|^2 + |a|^2\right\}$ என ஆகன் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

(i) ORQ, ORP என்பவற்றில் ஒன்று விரிகோணமாயும், மற்றையது கூர்ங்கோணமாயும் அமையும். விரிகோண முக்கோணி ORQ இல்



$$OQ^2 = RO^2 + RQ^2 - 2\,RQ \cdot RM \text{ ——(1)}$$

கூர்ங்கோண முக்கோணி ORP இல்

$$OP^2 = RO^2 + RP^2 + 2\,RP \cdot RM \text{ ——(2)}$$

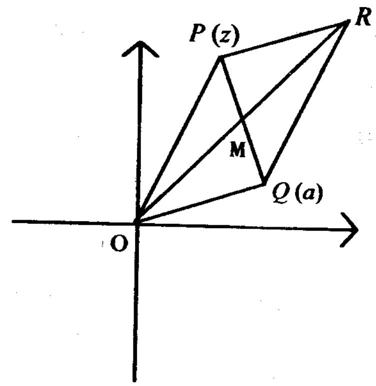
$(1) + (2)$, $\quad OP^2 + OQ^2 = 2\left(OR^2 + PR^2\right)$ ஆகும்.

(iii) P, Q என்னும் புள்ளிகள் ஆகன் வரிப்படத்தில் Z, a எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. $OPRQ$ இணைகரம்

புள்ளி R, சிக்கலெண் $(Z + a)$ ஐக் குறிக்கிறது.

$OR = |Z + a|$; $\quad PQ = |Z - a|$

ஆகும். முக்கொணி OPQ இல் M, PQ இன் நடுப்புள்ளி. பகுதி (i) இலிருந்து



$$OP^2 + OQ^2 = 2\left(OM^2 + PM^2\right)$$

$$|Z|^2 + |a|^2 = 2\left[\left\{\frac{1}{2}|Z+a|\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}|Z-a|\right\}^2\right]$$

$$|Z|^2 + |a|^2 = \frac{1}{2}\left[|Z+a|^2 + |Z-a|^2\right]$$

$$\therefore \quad |Z+a|^2 + |Z-a|^2 = 2\left[|Z|^2 + |a|^2\right]$$

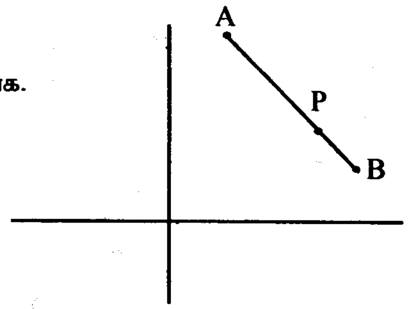
உதாரணம் 5

(i) ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B என்னும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. AB யில் P எனும் புள்ளி. $AP : PB = m:n$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. P குறிக்கும் சிக்கலெண் $\dfrac{nz_1 + mz_2}{m+n}$ எனக் காட்டுக. AB யின் நடுப்புள்ளி குறிக்கும் சிக்கலெண் யாது?

(ii) ஆகன் வரிப்படத்தில் நாற்பக்கலொன்றின் உச்சிகள் A, B, C, D என்பன முறையே a, b, c, d எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன.

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனின் மட்டுமே $a - b = d - c$ என நிறுவுக.

ஓர் இணைகரத்தின் மேற்கூறிய உடைமையைப் பயன்படுத்தி ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சம கூறிடும் என நிறுவுக.



(i) $Z_1 = x_1 + i\,y_1,\ Z_2 = x_2 + i\,y_2$ என்க.

$A \equiv (x_1, y_1),\quad B \equiv (x_2, y_2)$

$AP : PB = m : n$

$$P \equiv \frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

P குறிக்கும் சிக்கலெண் $\dfrac{nx_1 + mx_2}{n+m} + i\,\dfrac{ny_1 + my_2}{n+m}$

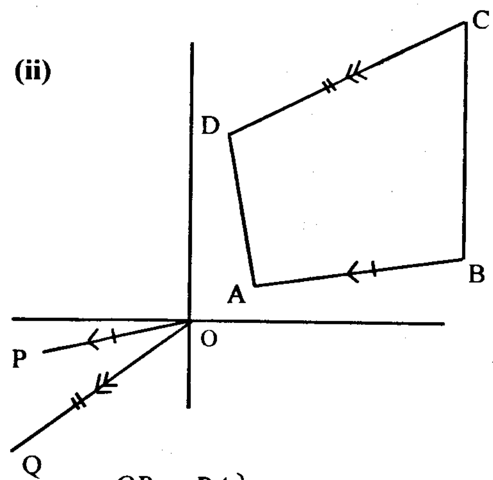
$$= \frac{1}{n+m}\left[(nx_1 + iny_1) + (mx_2 + imy_2)\right]$$

$$= \frac{1}{n+m}\left[n(x_1 + iy_1) + m(x_2 + iy_2)\right]$$

$$= \frac{nZ_1 + mZ_2}{m+n}$$

AB யின் நடுப்புள்ளி P எனின் $m = n = 1$. P குறிக்கும் சிக்கலெண் $\dfrac{Z_1 + Z_2}{2}$

(ii)



$\left.\begin{array}{l} OP = BA \\ OP \parallel BA \end{array}\right\}$ புள்ளி P, சிக்கலெண் $a - b$ ஐக் குறிக்கும்.

$\left.\begin{array}{l} OQ = CD \\ OQ \parallel CD \end{array}\right\}$ புள்ளி Q சிக்கலெண் $d - c$ ஐக் குறிக்கும்.

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் என்க.

இப்பொழுது $AB = DC,\ AB \parallel DC$.

ஆகவே $OP = OQ,\ OP \parallel OQ$

எனவே $P \equiv Q$.

ஆகவே $a - b = d - c$

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் $\Rightarrow a - b = d - c$ ——— (1)

மறுதலையாக $a - b = d - c$ என்க.

இப்பொழுது $P \equiv Q$.

$OP = OQ\ ,\ OP \parallel OQ$.

$AB = DC\ ,\ AB \parallel DC$

ஆகவே $ABCD$ இணைகரம்

$a - b = d - c \Rightarrow ABCD$ இணைகரம் ——— (2)

(1), (2) இலிருந்து $ABCD$ இணைகரம் $\Leftrightarrow a - b = d - c$

$$ABCD \text{ இணைகரம் } \Rightarrow a - b = d - c$$
$$\Rightarrow a + c = b + d$$
$$\Rightarrow \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$$

$\dfrac{a+c}{2}$ குறிக்கும் சிக்கலெண் AC யின் நடுப்புள்ளி.

$\dfrac{b+d}{2}$ குறிக்கும் சிக்கலெண் BD யின் நடுப்புள்ளி.

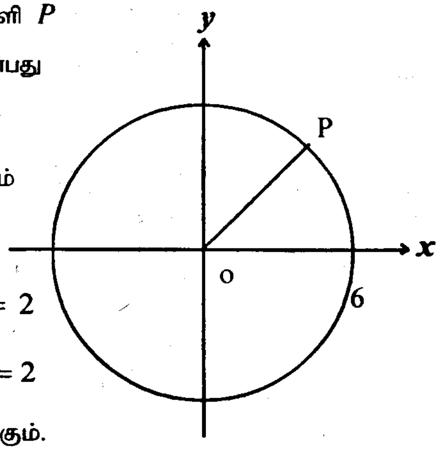
AC யின் நடுப்புள்ளி $\equiv$ BD யின் நடுப்புள்ளி

ஆகவே, இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடும்.

ஒழுக்குகள்

ஆகன் வரிப்படத்தில் $|Z| = 2$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி Z இன் ஒழுக்கை அவதானிப்போம்.

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z, புள்ளி P யினால் குறிக்கப்படுகிறதென்க. $|Z|$ என்பது நீளம் OP ஆகும். $OP = 2$ ஆகுமாறு அசையும் புள்ளி P யின் ஒழுக்கு O வை மையமாகவும் 2 ஐ ஆரையாகவும் உடைய ஒரு வட்டமாகும்.



$Z = x + iy$ என்க, $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$

$x^2 + y^2 = 2^2$; $(x - o)^2 + (y - o)^2 = 2$

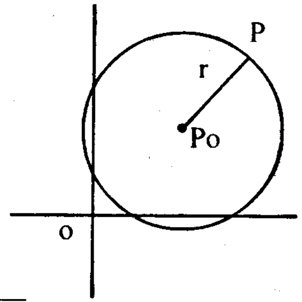
வட்டத்தின் மையம் (o, o), ஆரை 2 ஆகும்.

Z_o என்பது தரப்பட்ட எண்ணாக இருக்க $|Z - Z_o| = r \, (>0)$ ஆகுமாறு அசையும் புள்ளி Z இன் ஒழுக்கு Z_o ஐ மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டமாகும்.

சிக்கலெண் Z_o குறிக்கும் புள்ளி P_o என்க.

$|Z - Z_o|$ என்பது நீளம் $P_o P = r$ ஆகும்

$Z_o = x_o + iy_o$, $Z = x + iy$ என்க



$$|Z - Z_o| = |(x + iy) - (x_o + iy_o)|$$
$$= |(x - x_o) + i(y - y_o)|$$

$$|Z - Z_o| = r \Rightarrow \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} = r$$

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

இது (x_o, y_o) r ஐ மையமாகவும் r ஐ ஆரையாகவும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

உதாரணம் 6

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் z, புள்ளி P யினால் குறிக்கப்படுகிறது.

(i) $|Z + 1| = 3$ **(ii)** $|Z + 2 - i| = 4$

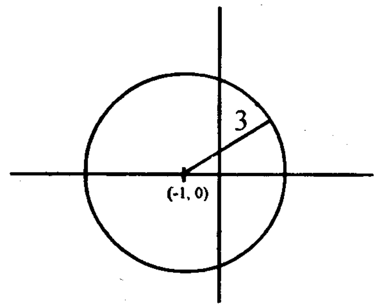
என வரையறுக்கப்படும். புள்ளி P யின் ஒழுக்குகளைக் காண்க. வரைபுகளின் தெக்காட்டின் சமன்பாடுகளையும் தருக.

(i) $|Z + 1| = 3$ எனின், $|Z - (-1)| = 3$; $AP = 3$

$A \equiv (-1, 0)$ என்க. P குறிக்கும் சிக்கலெண் $z = x + iy$

A ஐ மையமாகவும் $AP = 3$ ஆகுமாறும் P யின் ஒழுக்கு வட்டத்தில் அமையும்.

$$|Z + 1| = 3$$
$$|x + iy + 1| = 3$$
$$|(x + 1) + iy| = 3$$
$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 3$$
$$(x + 1)^2 + y^2 = 3^2$$

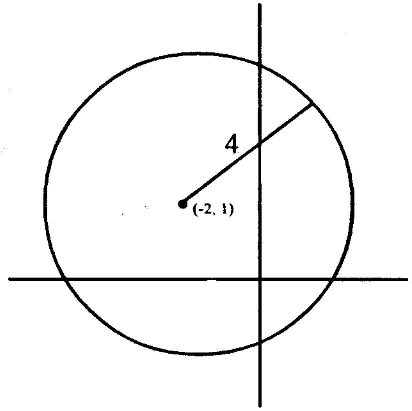


மையம் $(-1, 0)$, ஆரை 3 ஆகவுடைய வட்டத்தில் P அசையும்.

(ii) $|Z + 2 - i| = 4$

$$|Z - (-2 + i)| = 4$$

இங்கு வட்டத்தின் மையம் குறிக்கும் சிக்கலெண் $(-2 + i)$
ஆரை 4 அலகுகள் ஆகும்.



$Z = x + iy$ என்க.

$$|Z + 2 - i| = 4$$

$$|x + iy + 2 - i| = 4$$

$$|(x + 2) + i(y - 1)| = 4$$

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = 4$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$

மையம் $(-2, 1)$, ஆரை 4 அலகுகள.

உதாரணம் 7

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z குறிக்கும் புள்ளி P ஆகும்.
$|Z - 2 - i| = |Z + 4 - 9i|$ ஆகுமாறு புள்ளி P அசையும் எனின் P இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் காட்டுக.
ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. (தெக்காட்டின் ஆள்கூறில்) இவ்வொழுக்கில் $|Z|$ இழிவாக இருக்கும் $|Z|$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

முறை 1

$$|Z - 2 - i| = |Z + 4 - 9i|$$

$$|Z - (2 + i)| = |Z - (-4 + 9i)|$$

$$Z_1 = 2 + i, \ Z_2 = -4 + 9i$$

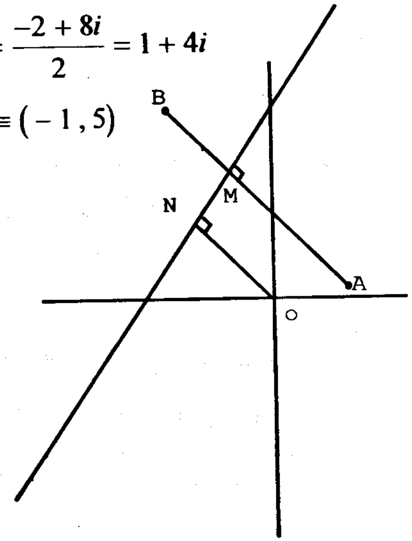
$$|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$$

$Z_1 \to A$, $Z_2 \to B$ என்க. A, B நிலையான புள்ளிகள்

$$Z \to P$$

$|Z - Z_1| = |Z - Z_2|$ எனின்,

$PA = PB$ ஆகுமாறு அசையும்.
புள்ளி P இன் ஒழுக்கு AB யின் செங்குத்து சமவெட்டி ஆகும்.



AB யின் நடுப்புள்ளி $\dfrac{Z_1 + Z_2}{2} = \dfrac{-2 + 8i}{2} = 1 + 4i$

$A \equiv (2, 1)$, $B \equiv (-4, 9)$, $M \equiv (-1, 5)$

AB யின் படித்திறன் $\dfrac{9 - 1}{-4 - 2}$

$$= -\frac{4}{3}$$

எனவே P இன் ஒழுக்கின் சமன்பாடு

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$4y = 3x + 23$ ஆகும்.

$|Z|$ என்பது நீளம் OP ஆகும்.
OP இழிவாக இருக்கும் புள்ளி N ஆகும். ON, நேர்கோட்டிற்கு செங்குத்தாகும்.
(o, o) இலிருந்து $4y - 3x - 23 = 0$ இற்கான

செங்குத்துத் தூரம் $ON = \dfrac{|-23|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{23}{5}$ ஆகும்.

முறை 2

$$|Z - 2 - i| = |Z + 4 - 9i|$$

$Z = x + iy$ என்க.

$$|x + iy - 2 - i| = |x + iy + 4 - 9i|$$

$$\left|(x-2)^2 + i\,(y-1)\right| = \left|(x+4) + i\,(y-9)\right|$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x+4)^2 + (y-9)^2$$

$$16y - 12x - 92 = 0$$

$$4y - 3x - 23 = 0$$

P இன் ஒழுக்கு $4y - 3x - 23 = 0$ என்னும் நேர்கோடு

உதாரணம் 8

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z புள்ளி P யினால் குறிக்கப்படுகிறது. $|Z + 4 + 4i| = 3$ ஆகுமாறு புள்ளி P அசைகிறது. $|Z - 2|$ இன் அதிஉயர், மிகக் குறைந்த பெறுமானங்களைக் காண்க. P இன் நிலைகளை வரிப்படத்தில் காட்டுக.

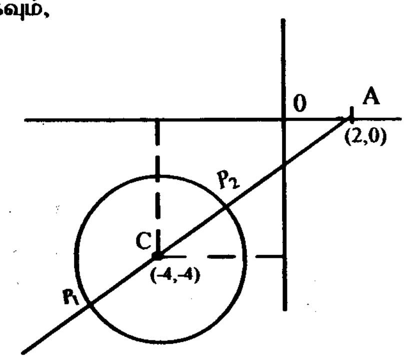
$|Z + 4 + 4i| = 3$, $|Z - (-4 - 4i)| = 3$

புள்ளி P யானது $(-4, -4)$ ஐ மையமாகவும், 3 ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தில் அசைகிறது.

$|Z - 2|$ என்பது வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியையும் $(2, 0)$ ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் நீளமாகும்.

மிகக் கூடிய நீளம் AP_1 ,

மிகக் குறைந்த நீளம் AP_2 ஆகும்.



$$AC = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

$$AP_1 = \sqrt{52} + 3$$

$$AP_2 = \sqrt{52} - 3$$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z_o ஒருநிலையான புள்ளி A இனால் குறிக்கப்படுகிறது.

$arg\,(Z - Z_o) = \dfrac{\pi}{6}$ இனால் தரப்படும் Z இன் ஒழுக்கு யாது?

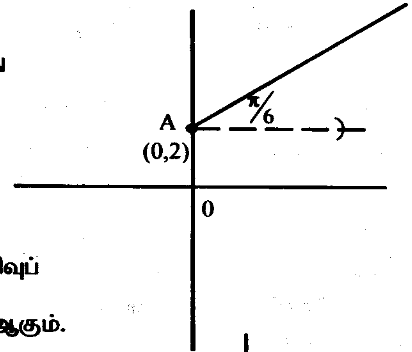
(i) $arg\,(Z - 2i) = \dfrac{\pi}{6}$

(ii) $arg\,(Z - 4 + i) = \dfrac{2\pi}{3}$ ஆகுமாறு அசையும் சிக்கலெண் Z இன் ஒழுக்கினை வரைந்து காட்டுக.

ஒவ்வொரு ஒழுக்கிலும் $|Z|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?

(i) $arg\,(Z - 2i) = \pi/6$

Z இன் ஒழுக்கானது, A இலிருந்து மெய் அச்சிற்குச் சமாந்தரமான கோட்டுடன் $\dfrac{\pi}{6}$ கோணத்தை அமைக்கிறது.



இவ்வொழுக்கில் $|Z|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $|Z| = OA = 2$ ஆகும்.

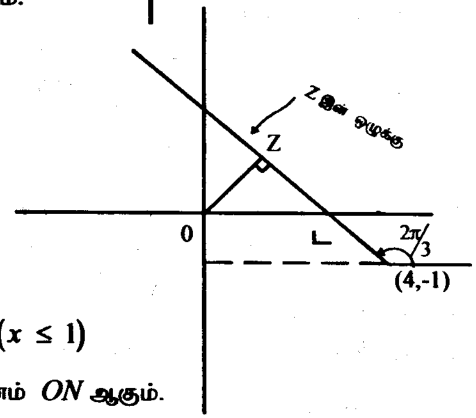
(ii) $arg\,(Z - 4 + i) = \dfrac{2\pi}{3}$

$arg\,\left(Z - (4 - i)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y + 1 = -\sqrt{3}\,(x - 4)$$

$$y + \sqrt{3x} = 4\sqrt{3} - 1 \quad (x \leq 1)$$



இங்கு $|Z|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் ON ஆகும்.

$$ON = OL\,Sin\,\frac{\pi}{3} \qquad \frac{4\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - 1}{2}$$

பயிற்சி 9

1. பின்வருவனவற்றை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக.

   (i) $(3+5i)+(7-2i)$ (ii) $(4+2i)-(1-5i)$

   (iii) $(2+3i)(3-7i)$ (vi) $(2+4i)(5-2i)$

   (v) $(5+3i)^2$ (vi) $\dfrac{3+i}{5-i}$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

   (i) $x^2 - x + 3 = 0$ (ii) $x^2 - 2\cos\theta\, x + 1 = 0$

   (iii) $x^4 + 1 = 0$ (vi) $x^2 + 2x + 2 = 0$

3. பின்வருவனவற்றை ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாகத் தருக.

   (i) $x^2 + 2x + 5$ (ii) $x^2 + 4x + 5$

   (iii) $4x^2 - 4x + 2$ (vi) $x^2 + 2ax + (a^2 + b^2)$

4. பகுதியை சிக்கலெண்ணிலான ஏகபரிமாணக் காரணியாக எழுதுவதன் மூலம் பகுதிப் பின்னமாக்குக.

   (i) $\dfrac{6}{x^2 - 2x + 10}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2 + 1}$

5. $x^2 + px + q = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $2 - 3i$ எனின் p, q என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. a, b, c என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்காது $-\dfrac{b}{a}, \dfrac{c}{a}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

   $ax^2 + bx + c = 0$ இன் ஒரு மூலம் தரப்பட்டுள்ளது.

   (i) $2 + i$ (ii) $3 - 4i$ (iii) i (vi) $5i - 12$ v) $-1 - i$

7. பின்வரும் சிக்கலெண்களின் வர்க்க மூலங்களைக் காண்க.

   (i) $21 - 20i$ (ii) $2i$ (iii) $-2i$

8. $x^4 + 11x^2 - 10x + 50 = 0$ இன் ஒரு மூலம் $1 - 2i$ எனின், ஏனைய மூலங்களைக் காண்க.

9. $(3+i)$, $(1+3i)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட x இன் நான்காம் படியிலான சமன்பாடு ஒன்றைப் பெறுக.

10. $8x^3 - 44x^2 + 86x - 65 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களில் ஒன்று $\dfrac{1}{2}(3 - 2i)$ எனின், ஏனைய மூலங்களைக் காண்க.

11. $x^3 + ax - 4c^3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்கள் சிக்கலெண்களாகும். மெய்மூலம் $x = 2c$ எனின் சிக்கல் மூலங்களை c இன் உறுப்புக்களில் மட்டும் காண்க.

12. தீர்க்க : $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$

13. $x^3 + px + q = 0$ இன் ஒரு மூலம் $\alpha + i\beta$ எனின்,

    (i) $2\alpha + (\alpha^2 + \beta^2) = q$ (ii) $3\alpha^2 - \beta^2 = -p$ என நிறுவுக.

    (iii) α என்பது $8x^3 + 2px - q = 0$ இன் மூலம் எனக் காட்டுக.

1 இன் கன மூலங்கள் $1, \omega, \omega^2$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

14. $1 + \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{\omega^2} = 0$

15. $1 + \omega^4 + \omega^8 = 0$

16. $\left(1-\omega+\omega^2\right)\left(1+\omega-\omega^2\right)\left(1-\omega-\omega^2\right)=8$

17. $(1-\omega)^5=-9\,(2+\omega)$

18. $x=a+b\,,\ y=a\omega+b\omega^2,\ Z=a\omega^2+b\omega$ எனின்

$xyz=a^3+b^3$ எனக்காட்டுக.

19. $S_n=1-\omega+\omega^2-\omega^3+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\omega^{n-1}$ S_n ஐக் காண்க.

m ஒற்றை எண், இரட்டை எண் என்பவற்றை வெவ்வேறாகக் கருதுவதன் மூலம்

(i) $n=3m$ (ii) $n=3m+1$ (iii) $n=3m+2$ $(m=0,1,2,\ldots\ldots)$

ஆகும்போது S_n இனைக் கணிக்க.

20. $x^3+1=0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து -1 இன் கன மூலங்களைக் காண்க. சிக்கல் மூலங்களில் ஒன்று λ எனின் மற்றைய மூலத்தை λ இல் காண்க.

$1+\lambda^2=\lambda$ என நிறுவுக.

21. (i) $Z_1=24+7i$, $Z_2=6$ எனின் $\left|Z_1+Z_2\right|$ இன் அதிகூடிய, அதி குறைந்த பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $Z=r\,(cos\theta+i\,sin\theta)$ எனின் $Z^2=r^2\,(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\left(2\sqrt{3}-2i\right)$ இன் வர்க்கமூலங்களைக் காண்க.

22. பின்வரும் சிக்கலெண்களில் மட்டு, arg. என்பவற்றைக் காண்க.

(i) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{3-i}$ (ii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$ (iii) $-i$

23. (a) $1,\omega,\omega^2$ என்பன ஒன்றின் கன மூலங்கள் எனின், பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $1+\omega+\omega^2$

(ii) $\left(1+2\omega+3\omega^2\right)\left(1+3\omega+2\omega^2\right)$

$x^3-1=0,\ px^5+qx+r=0$ எனும் சமன்பாடுகள் பொதுமூலத்தைக் கொண்டிருப்பின்

$(p+q+r)\left(p\omega^5+q\omega+r\right)\left(p\omega^{10}+q\omega^2+r\right)=0$

எனக் காட்டுக.

(b) $|Z-1|=3\,|Z+1|$ ஆயின் ஆகன் வரிப்படத்தில் z இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக. இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரையையும் காண்க.

24. (i) ஆகன் வரிப்படத்திலேயுள்ள P யும் Q வும் Z_1 , Z_2 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. O என்பது உற்பத்தியாகும். $|Z_1-Z_2|=|Z_1+Z_2|$ எனின் OP என்பது OQ விற்குச் செங்குத்தாகும் எனக் காட்டுக.

(ii) a,b என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க $(3+2i)(7+5i)$ என்பதை $a+ib$ எனும் வடிவில் தருக.

$11-29i$ இனது ஒரு சோடி காரணிகளை உய்த்தறிக. இதிலிருந்து 11^2+29^2 என்பதை இரு நேர்நிறைஎண்களின் பெருக்கமாகத் தருக.

(iii) $|Z+1|+|Z-1|=4$ ஆகவும், $arg\,(iZ)=\pi$ ஆகவுமுள்ள Z எனும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

25. (i) $Z=4-3i$ எனின் $Z+\dfrac{1}{Z}$ ஐ $a+ib$ எனும் வடிவில் எழுதுக.

(ii) $4i$ இன் வர்க்கமூலங்கள் இரண்டினையும் $a+ib$ எனும் வடிவில் தருக.

(iii) $Z_1 = 5 - 5i + Z_2 = -1 + 7i$ எனின்

$|Z_1 + Z_2| < |Z_1 - Z_2| < |Z_1| + |Z_2|$ என நிறுவுக.

26. சிக்கலெண்கள் $Z_1 = \dfrac{a}{1+i}$, $Z_2 = \dfrac{b}{1+2i}$ என்பன

$Z_1 + Z_2 = 1$ ஆகுமாறு உள்ளன: இங்கு a, b மெய்யெண்கள் a, b என்பவற்றைக் காண்க.

a, b இன் இப் பெறுமானங்களுக்கு ஆகன் வரிப்படத்தில் Z_1, Z_2 எனும் சிக்கலெண்கள் குறிக்கும் புள்ளிகளிற்கு இடையேயான தூரத்தைக் காண்க.

27. Z என்பது 1 இன் மூன்று கனமூலங்களில் ஏதாவதொன்று எனின் $1 + Z + Z^2$ என்ற கோவையின் இரு இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.
1 இனது கனமூலங்களில் சிக்கல் மூலம் ω எனின்
பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக.

$$\left(1 + 3\omega + \omega^2\right)^2, \left(1 + \omega + 3\omega^2\right)^2$$

இரு கோவைகளினதும் பெருக்கம் 16 எனவும், கூட்டுத் தொகை —4 எனவும் காட்டுக.

28. $Z_1 = 1 - i$, $Z_2 = 7 + i$ எனின்

(i) $Z_1 - Z_2$ **(ii)** $Z_1 Z_2$ **(iii)** $\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 \quad Z_2}$

என்பவற்றின் மட்டுக்களைக் காண்க.

(b) ஆகன் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z ஐ புள்ளி P குறிக்கிறது $|Z - 1| = |Z - 3i|$ ஆகுமாறு உள்ள Z இன் ஒழுக்கை வரைக.

இந்த ஒழுங்கில் $|Z|$ இழிவாக இருக்கும் Z ஐக் காண்க.

29. **(i)** $Z = 3 + 4i$ எனின், $\dfrac{1}{Z^2}$, $\sqrt{z}$ என்பவற்றை

$a + ib$ எனும் வடிவில் தருக.

(ii) $|Z - 3 + 6i| = 2|Z|$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி Z இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் வரைக.
இவ்வளையியின் சமன்பாட்டை தெக்காட்டின் வகையில் தருக.

30. **(i)** $a = 3 - i$, $b = 1 + 2i$ எனின்,

$2a + 3b$, $\dfrac{a}{3b}$ என்பவற்றின் மட்டுக்களைக் காண்க.

(ii) $|Z| = 3$ ஆல் வரையறுக்கப்படும் ஒழுக்கை வரைக.

$c = 5 + i$ எனவும் $|Z| = 3$ எனவும் தரப்படின்

$|Z + c|$ இன் உயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

31. ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B எனும் புள்ளிகள் சிக்கலெண்கள் Z_1 , Z_2 ஐக் குறிக்கின்றன. இங்கு $o < arg\, Z_1 < arg\, Z_2 < \pi/2$. $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$ என்பன குறிக்கும் புள்ளிகள் C,D ஐக் காண்பதற்கான கேத்திரகணித அமைப்புக்களைக் தருக.

$arg(Z_1 - Z_2) - arg(Z_1 + Z_2) = \dfrac{\pi}{2}$ எனின் $|Z_1| = |Z_2|$ என நிறுவுக.

32. $Z = cos\theta + i\, sin\theta$, இங்கு θ மெய் ஆகும்.

$\dfrac{1}{1+Z} = \dfrac{1}{2}\left(1 - i\, tan\dfrac{\theta}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

(i) $\dfrac{2Z}{1+Z^2}$ **(ii)** $\dfrac{1-Z^2}{1+Z^2}$ என்பவற்றை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு a, b என்பன θ இன் சார்புகள் ஆகும்.

33. **(i)** $(3 + 2i)^2$, $\dfrac{1}{(3+2i)^2}$ என்பவற்றை $a + ib$ என்னும் வடிவில் தருக.

(ii) ஆகன் வரிப்படத்தில் Z என்னும் சிக்கலெண்ணை புள்ளி P குறிக்கிறது. $|Z-1| = 3|Z+i|$ எனின் P இன் ஒழுக்கை வரைக. ஒழுக்கின் சமன்பாட்டை தெக்காட்டின் வடிவில் தருக.

இவ்வொழுக்கில் $|Z| = |Z-1+i|$ எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் புள்ளிகளைக் காண்க.

34. **(i)** $Z = 3+4i$ எனின், $Z + \dfrac{25}{Z}$ ஐ எளிய வடிவில் தருக.

(ii) $Z = x+iy$ எனின், $Z + \dfrac{1}{Z}$ இன் மெய்ப்பகுதியையும் கற்பனைப் பகுதியையும் காண்க.

ஆகன் வரிப்படத்தில் $\operatorname{Im}\left(Z + \dfrac{1}{Z}\right) = 0$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளிகளின் ஒழுக்கை வரைக.

35. **(i)** $5+12i$ இன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

(ii) பின்வரும் ஒவ்வொரு சிக்கலெண்ணினதும் மட்டு, வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க.

(a) $1-i$ **(b)** $(4+3i)$ **(c)** $(1-i)(4+3i)$

இச் சிக்கலெண்கள் ஆகன் வரிப்படத்தில் A, B, C எனும் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படின் முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) $|Z-i| = 1$ ஆக இருக்கும் போது, $|Z+1|$ இன் அதி உயர் பெறுமானத்திற்கும் அதிகுறைந்த பெறுமானத்திற்கும் உள்ள விகிதம் என்ன?

36. **(i)** சிக்கலெண் Z உம், உடன் புணரி $\bar{Z}$ உம்

$Z\bar{Z} + 2iZ = 12+6i$ எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்து மெனின் Z இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) பின்வரும் சிக்கலெண்களை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

(a) $4+3i$ **(b)** $4-3i$ **(c)** $\dfrac{4+3i}{4-3i}$ **(d)** 1 இன் கனமூலங்கள்.

37. **(a)** **(i)** $|Z-1-i| = 2$

(i) $ReZ = 1$ உம் $-\dfrac{\pi}{3} \leq arg\, Z \leq \dfrac{\pi}{4}$ உம்

ஆகும் போது ஆகன் வரிப்படத்தில் Z இன் ஒழுக்கைக் காட்டுக.

ஒவ்வொரு கையிலும் $|Z|$ இன் அதி உயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) ஆகன் வரிப்படத்தில் புள்ளி P யின் ஆள் கூறுகள் (x, y) ஆகும். P குறிக்கும் சிக்கலெண் $x+iy$ ஆகும். இரண்டாவது ஆகன் வரிப்படத்தில் Q இன் ஆள் கூறுகள் (u, v) ஆகும்.

Q இன் ஆள்கூறுகளை சிக்கலெண் ω இன் வடிவில் தருக.

$Z = \omega^2$ எனின் x, y என்பவற்றை u, v இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

p, $x^2+y^2 = 16$ எனும் வட்டத்தில் கிடக்கின்றதெனின், Q, $u^2+v^2 = 4$ எனும் வட்டத்தில் கிடக்கின்றதென நிறுவுக.

38. **(a)** x, y, x_1, y_1 என்பன மெய்யாக இருக்க $Z = x+iy$, $Z_1 = x_1 + iy_1$, ஆகும். $|Z+Z_1| = |Z-Z_1|$ எனின் $\dfrac{iZ}{Z_1}$ மெய் என நிறுவுக.

$|Z+1| + |Z-1| = 4$ எனின் Z இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(b) $2 + cos\theta + isin\theta$ இன் மட்டு $(5+4\cos\theta)^{1/2}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து.

$\dfrac{2+cos\theta + i\,sin\theta}{2+cos\theta - i\,sin\theta}$ இன் மட்டு 1 எனக் காட்டுக.

39. **(a)** **(i)** $\dfrac{1-i}{(3-i)^2}$ **(ii)** $(c+i)^4$ என்பவற்றை

$a+ib$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு a, b, c மெய்யானவை.

$Z = x + iy$, $Z^2 = a + ib$ இங்கு x, y, a, b மெய்யானவை எனின்

$2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a$ என நிறுவுக.

$Z^4 + 6Z^2 + 25 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்து இச் சமன்பாட்டின் நான்கு மூலங்களையும் $x + iy$ எனும் வடிவில் தருக.

40. $(1 + 3i)Z_1 = 5(1 + i)$ எனின். Z_1 , Z_1^2 என்பவற்றை $a + ib$ எனும் வடிவில் தருக.

$|Z - Z_1| = |Z_1|$ எனின் Z இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் வரைக.

ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $\left|\dfrac{Z}{Z-3}\right| = \dfrac{1}{2}$ எனின் Z இன் ஒழுக்கு யாது?

41. இவ்வினாவின் சிக்கலெண் Z இன் வீச்சம் $\arg Z$
$-\pi < \arg z < \pi$ ஆகுமாறு உள்ளது.

(a) சிக்கலெண் Z இன் மட்டு r உம் வீச்சம் θ உம் ஆகும். $0 < \theta < \pi/2$.
பின்வரும் சிக்கலெண்களின் மட்டு, வீச்சம் என்பவற்றை r , θ இன் சார்பில் காண்க.

(i) Z^2 **(ii)** $\dfrac{1}{Z}$ **(iii)** iZ

(b) சிக்கலெண் Z ஆனது $|Z| = 1$ ஆகுமாறு இருப்பின்

$1 \leq |2 + Z| \leq 3$ எனவும், $-\pi/6 \leq \arg(Z + 2) \leq \pi/6$ எனவும் நிறுவுக.

42. $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டு, வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க. மூலங்கள் α , β எனின்

$(\alpha + \beta + 4i)(\alpha\beta + 8i)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$(2 - 3i)Z = 4 + i$ ஐத் திருப்தி செய்யும் Z ஐக் காண்க.

ஆகன் வரிப்படத்தில் $|Z + 2i - 1| < |Z - i|$ ஆகுமாறுள்ள Z இனால் குறிக்கப்படும். பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

43. **(a)** சிக்கல் எண் $\dfrac{(1+i)^4}{(-1+i)^2}$ இன் மட்டையும், வீசலையும் காண்க.

(b) $12 + 5i$ இன் வர்க்கமூலங்களை $a + bi$ எனும் வடிவில் காண்க. இங்கு a, b மெய்யானவை.

ஆகன் வரிப்படத்தில் இவ் வர்க்கமூலங்களை வகை குறிக்கும் P, Q எனும் புள்ளிகளைக் காட்டுக. Q' என்பது Q இனால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணின் உடன் புணரியைக் காட்டும் புள்ளியாகும். $QPRQ'$ ஆனது சாய்சதுரமாக இருக்கத்தக்கதாகப் புள்ளி R இனால் வகை குறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்ணைக் காண்க.

44. **(a)** சிக்கல் எண்களின் மட்டினதும், சிக்கல் உடன் புணரியினதும் பின்வரும் இயல்புகளை நிறுவுக.

(i) $|Z|^2 = Z\bar{Z}$ **(ii)** $\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$

(iii) $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ **(iv)** $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$

a_o, a_1, a_2 என்பன மெய்மாறிலிகளாகவும், α என்பது $a_o x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ இன் ஒரு மூலமாகவும் இருப்பின்

$\bar{\alpha}$ உம் ஒரு மூலம் எனக் காட்டுக.

(b) இருபடிச்சமன்பாடு $x^2 + ax + b = 0$ ஐக் கருதுக. இங்கு a, b ஆகியன மெய்யானவை. α , β என்பன இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருக்கட்டும்.

$|\alpha| = |\beta| = 1$ எனின் $|b| = 1$ எனக் காட்டுக.

a, b ஆகியவற்றிற்கு தக்க பெறுமானங்களைத் தெரிந்தெடுத்து $|b| = 1$ எனின் $|\alpha| = |\beta| = 1$ என்பது பின் தொடராது எனக் காட்டுக.

ஆயினும் α , β மெய்யானவையாக இராதபோது $|b| = 1$ எனின் $|\alpha| = |\beta| = 1$ எனக் காட்டுக.

45. ஆகன் வரிப்படத்தில் P_1 , P_2 எனும் புள்ளிகள் முறையே Z_1 , Z_2 எனும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன. $P_1 P_2$ மீது P எனும் புள்ளியானது $\frac{P_1 P}{PP_2} = \frac{m}{n}$ ஆக இருக்கின்றது. இங்கு $m , n > 0$. P யினால் வகை குறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்ணைக் காண்க.

P_1 , P_2 , P_3 என்பன ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே Z_1, Z_2 , Z_3 என்னும் சிக்கல் எண்களை வகைகுறிக்கும் ஒரே கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகளாகும். முக்கோணி $P_1 P_2 P_3$ இன் மையப்போலி G ஆனது, சிக்கல் எண் $\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3}$ ஐ வகை குறிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_3| = |Z_3 - Z_1|$ எனின்

$|Z_1 + Z_2 - 2Z_3| = |Z_1 + Z_3 - 2Z_2| = |Z_2 + Z_3 - 2Z_1|$ எனக் காட்டுக.

46. ஆகன் வரிப்படத்தில் P_o , P எனும் புள்ளிகள் முறையே Z_o , Z எனும் சிக்கல் எண்களை வகை குறிக்கின்றன. சிக்கல் எண் $Z - Z_o$ ஐ வகைகுறிக்கும் ஆகன் வரிப்படத்தில் உள்ள புள்ளியைக் காண்பதற்கு கேத்திர கணித அமைப்பைத் தருக.

பின்வரும் வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் P யின் ஒழுக்கை முழுமையாக விபரிக்க

(i) $|Z + 2 - i| = \sqrt{5}$ ஆக இருக்கும் போது

(ii) $arg\,(Z + 2) = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும் போது

இரு ஒழுக்குகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, அவற்றின் பொதுப்புள்ளிகளின் நேரொத்த சிக்கல் எண்களைக் காண்க.

மீட்டற் பயிற்சிகள் 2

1. $k > 1$ எனின், $\frac{(2k - 1)}{2k} > \frac{(2k - 2)}{(2k - 1)}$ எனக் காட்டுக.

$$U_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 .... (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 .... 2n}$$ ஆகவும்

$$V_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 .... (2n - 2)}{2 \cdot 3 \cdot 5 ...... (2n - 1)} \; ; \; (n > 1)$$ ஆகவுமிருப்பின்

$U_n > V_n$ எனக் காட்டுக.

$$\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ..... (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ..... 2n} \right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}} \; (n >)$$ என உய்த்தறிக.

$$W_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ..... (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ..... 2n} (2n + 1)$$ எனின், $W_{n+1} - W_n$ ஐக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n+1} U_r = (W_{n+1} - 1)$ எனவும், முடிவுறாத் தொடரி

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்காது எனவும், உய்த்தறிக. **(1982)**

2. (i) (a) n ஒரு நேர்நிறையெண் எனின் ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$,

இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$ எனக் காட்டுக.

(b) n யாதுமோர் நேர்நிறையெண் எனின்,

$$(1 + x)^n = {}^nC_o + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + ... + {}^nC_r x^r + ... + {}^nC\ x^n$$

எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

(c) $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n \, (1 + x)^n$ என்பதையும் ஈருப்பு விரிவை பயன்படுத்தி

$${}^{2n}C_n = \left({}^nC_o\right)^2 + \left({}^nC_1\right)^2 + \ldots + \left({}^nC_r\right)^2 + \ldots\ldots + \left({}^nC_n\right)^2$$ எனக் காட்டுக.

(ii) 15 துடுப்பாட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஊர் சுற்றும் குழு 7 துடுப்படிப் போரையும், 6 பந்து எறிவோரையும், 2 விக்கற் காவலர்களையும் கொண்டது. 11 ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும் குறைந்தது 5 துடுப்படிப்போரும், 4 பந்து எறிவோரும், 1 விக்கற் காவலனும் இருத்தல் வேண்டும்.

(a) துடுப்படிப்பவன் ஒருவனும், விக்கற் காவலன் ஒருவனும் காயமடைந்தன ரெனின் தெரியப்படக்கூடிய வேறுபட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) எல்லா ஆட்டக்காரர்களும் உள்ளனர் எனின் எத்தனை வேறுபட்ட குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?

(1982)

3. (i) U_n உம் V_n உம், $U_n = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k}$, $V_n = \sum_{k=1}^{4n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இங்கு n ஒரு நேர்நிறையெண் கணிதத் தொகுத்தறி தத்துவத்தின் மூலம் $U_n = V_n$ என நிறுவுக.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} r^k$ எனும் பெருக்கற் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$-1 < r < 1$ எனின் $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k$ உண்டு என உய்த்தறிக.

$r < -2$ அல்லது $r \geq 0$ எனின் $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{r}{(1+r)^k}$ உண்டு

எனக் காட்டுக. **(1983)**

4. (i) a_r என்பது $\left(1 + x + x^2\right)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகத்தைக் குறிக்கின்றது. இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண் $a_3 = 2a_2$ எனின், $n = 5$ என நிறுவுக.

(ii) 7 மனிதர்களிலிருந்தும் 5 சீமாட்டிகளிலிருந்தும் 5 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்றை இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துமுகமாக ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட மனிதனையும் ஒரு குறிப்பிட்ட சீமாட்டியையும் ஒன்றாகக் குழுவில் வைத்திருக்காவண்ணம் எத்தனை முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம் எனக் காண்க.

(1983)

5. $Z = x + iy$ என்னும் சிக்கலெண் ஒன்றின் உடன் புணரி $\overline{Z}$ என்பது $\overline{Z} = x - iy$ இனால் தரப்படின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\overline{(\alpha + \beta)} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ (ii) $\overline{(\alpha - \beta)} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$

(iii) $\overline{\alpha\,\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ (iv) $\overline{\left(\alpha^{-1}\right)} = \left(\overline{\alpha}\right)^{-1}$ (v) $\left(\overline{\alpha^n}\right) = \left(\overline{\alpha}\right)^n$

இங்கு α, β என்பன சிக்கலெண்களும் n ஒரு நேர்நிறையெண்ணும் ஆகும்.

$a_oZ^n + a_1Z^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}Z + a_n$ என்னும் மெய்யெண்களுடனான பல்லுறுப்பி $Z = Z_o$ இல் மறையும் எனின் $Z = \overline{Z_o}$ இலும் மறையும் எனக் காட்டுக. **(1983)**

6. (i) $n \geq 1$ என்பதற்கு, $tan\theta_{n+1} = tan\theta_n \cdot Sec\theta_1 + Sec\theta_n \cdot tan\theta_1$ என அமையுமாறு $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots$ என்பன கூர்ங்கோணங்களின் தொடரியாகும். $n \geq 1$ என்பதற்கு

$Sec\theta_{n+1} = Sec\theta_n \cdot Sec\theta_1 + tan\theta_n \cdot tan\theta_1$ எனக் காட்டுக.

$n \geq 1$ என்பதற்கு $tan\theta_n + Sec\theta_n = (tan\theta_1 + Sec\theta_1)^n$ என்பதைக் கணிதத்தொகுத்தறி முறையால் காட்டுக.

(ii) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ என்னும் பெருக்கல் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$-1 < r < 1$ எனின் $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ உண்டு என உய்த்தறிக.

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{10^r}, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n$$ எனக் கொண்டு $S - S_n < 10^{-20}$ என்பதற்கு

n இனது மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1984)

7. Z உம் ω உம் சிக்கலெண்களாகும். $\bar{Z}$ உம் $\bar{\omega}$ உம் இவற்றின் சிக்கலெண் உடன் புணரிகளைக் குறிக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $Z\bar{\omega} + \bar{Z}\omega = 2\,\text{Re}(Z\bar{\omega})$

(ii) $(Z+\omega)(\overline{Z+\omega}) = Z\bar{Z} + \omega\bar{\omega} + 2\,\text{Re}(Z\bar{\omega})$

(iii) $2|Re\,Z|\,|Im\,z| \le |Z|^2$ (iv) $|Z| \le |Re\,Z| + |Im\,z| \le \sqrt{2}\,|Z|$

(v) $|Z+\omega| \le |Z| + |\omega|$

இங்கு ReZ உம் $Im\,Z$ உம் Z இன் மெய்ப்பகுதியையும் கற்பனைப்பகுதியையும் குறிக்கின்றன. (கேத்திர கணித நிறுவல்கள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படமாட்டாது)

(1984)

8. (i) நேர் நிறை எண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக. p உம் n உம் நிறையெண் எனின்,

p^n என்பது $(1+p)^{p^{n-1}} - 1$ என்பதை வகுக்கும் என நிறுவுக.

[$(1+p)^{p^n} = (1+p)^{p^{n-1}}\ (1+p)^{p^{n-1}} \ldots\ldots\ldots (1+p)^{p^{n-1}}$;

p காரணிகள் என்பதை உதவியாகக் கொள்ளலாம்]

(ii) PREPOSSESSED என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் ஒருமுறைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்களை அமைக்கலாம்?

(1984)

9. (i) எல்லா $n \ge 1$ இற்கும்

$S_1 > \sqrt{3}$; $S_{n+1} = \dfrac{3(1+S_n)}{3+S_n}$ என அமையும் வண்ணம்

$S_1, S_2\ S_3, \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ என்பது நேர் எண்களின் தொடரியாகும்.

$\left(S_{n+1}^2 - 3\right)$ என்பதை S_n இல் தருக.

கணிதத் தொகுத்தறிக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $S_n > \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் $S_{n+1} < S_n$ என உய்த்தறிக.

(ii) $tan\dfrac{x}{2} = cot\dfrac{x}{2} - 2\,cot\,x\ (o < x < \pi)$ என்னும் தொடர்பைப்

பயன்படுத்தி $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\, tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} cot\frac{x}{2^n} - cot\,x$

எனக்காட்டுக.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - cot\,x$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1985)

10. (i) $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} C_r\, x^r$ எனின், இங்கு $C_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ஆகும்.

$\displaystyle\sum_{r=0}^{n} (r+1) C_r\, x^r = \{1 + (n+1)x\}\ (1+x)^{n-1}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} (r+1) C_r^{\,2}$, $\{1 + (n+1)x\}\ (1+x)^{2n-1}$ இன்

விரிவில் x^n என்பதன் குணகம் $\dfrac{(n+2)\,(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$ இற்குச் சமம் எனக்

காட்டுக.

(ii) TISSAMAHARAMA என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

(1985)

11. (i) $k > 0$ ஆயிருக்க, $x^2 - x - k = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் நேரான மறையான மூலங்கள் முறையே $\alpha, -\beta$ ஆகும். எல்லா $n \geq 1$ இற்கும் $S_1 > \alpha$, $S_{n+1} = \sqrt{k + S_n}$ ஆகுமாறு $S_1, S_2\, S_3, \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ என்பது நேர் நிறை எண்களின் தொடரியாகும்

$S_{n+2}^2 - S_{n+1}^2 = S_{n+1} - S_n$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா நேர் நிறை எண்களுக்கும் $S_{n+1} < S_n$ எனவும், $S_n > \alpha$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots\ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் n ஆம் உறுப்பு U_n ஐ எழுதுக.

U_n ஐ $V_n - V_{n+1}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதக் கூடியதாக V_n ஐ கண்டு $\sum_{r\,1}^{n} U_r = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$ உண்டு என உய்த்தறிக. **(1986)**

12. (i) நேர் நிறையெண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

$\left(3\sqrt{2}\,x - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^8$ என்னும் பல்லுறுப்பியின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) KAHATAGASDIGILIYA என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் எனக் காட்டுக.

(1986)

13. (i) $U_r = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$, $\quad f(r) = \frac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)}$

$f(r) - f(r-1) = U_r$ ஆகுமாறு λ, μ எனும் ஒருமைகளைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

தொடரானது ஒருங்குமென நிறுவி அதன் முடிவிலிக் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) அடுத்துவரும் நான்கு நிறையெண்களின் பெருக்கமானது 24 ஆல் பிரிக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

$n \geq 2$ எனின் கணிதத் தொகுத்தறிமுறையைப் பயன்படுத்தி $n^5 - 5n^3 + 60n^2 - 56n$ ஆனது 120 இனால் வகுபடும் என நிறுவுக.

(1987)

14. (i) $3\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right) - 2\left(\cos^6\theta + \sin^6\theta\right) = 1$ எனக் காட்டுக.

(ii) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$ ஐத் தீர்க்க.

15. (i) $\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக.

U_r ஐ $f(r) - f(r-1)$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்தோ வேறுவிதமாகவோ, $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்கும் போது $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ ஆனது 54 இனால் வகுபடத்தக்கது என நிறுவுக.

(1988)

16. (i) நேர் நிறையெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

$\left(x^{1/2} + x^{-3/4}\right)^n$ இன் விரிவில் உள்ள அதியுயர் குணகமானது 9

ஆவது உறுப்பில் மட்டும் இருப்பதாகத் தரப்பட்டுள்ளது. n ஐயும் விரிவில் x^4 இன் குணகத்தையும் காண்க.

(ii) சைகையாளர் ஒருவரிடம் ஆறுகொடிகள் இருக்கின்றன. அவற்றுள் ஒரு கொடி நீலமானது. இரண்டு கொடிகள் வெண்ணிறமானவை. எஞ்சியவை சிவப்பு நிறமானவை. அவர் கொடிக்கம்பம் ஒன்றிலே கொடிகளை உயர்த்தி செய்திகளை அனுப்புகிறார். இங்கு கொடிகள் அமைந்திருக்கும் வரிசைக் கிரமத்தின் மூலம் செய்திகள் அறியப்படுகின்றன. அவர்

(அ) எல்லா ஆறு கொடிகளையும் பயன்படுத்தி

(ஆ) சரியாக ஐந்து கொடிகளைப் பயன்படுத்தி அனுப்பத்தக்க செய்திகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(1988)

17. (i) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 4}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

என்னும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஆகும். U_{r+1} ஐ U_r இன் சார்பில் எடுத்துரைக்க. $f(r)-f(r-1)=U_r$ ஆகவும்,

$f(r)=(Ar+B)\cdot U_{r+1}$ ஆகவும் இருக்கதக்கதாக $f(r)$ என்பது r இன் ஒரு சார்பாகும். இங்கு A, B ஆகியன மாறிலிகள். A B இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு, இதிலிருந்து

$$\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{1}{2}\left\{\frac{4\cdot 7\cdot 10\ldots\ldots\ldots(3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots\ldots\ldots(3n-1)}-1\right\}$$ எனக்காட்டுக.

(ii) நேர்நிறையெண் n இற்கு, $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ ஆனது 17 இனால் வகுபடத்தக்கதெனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் நிறுவுக. அதோடு, இம்முடிபினை வேறொரு முறையிலும் நிறுவுக.

(1989)

18. (i) ஒரு அலுமாரியில் வெவ்வேறு வகையான 16 பாடநூல்கள் உள்ளன. இவற்றில் 3 அட்சர கணித நூல்களும் 4 நுண்கணித நூல்களும், 3 கேத்திர கணித நூல்களும், ஏனையவை திரிகோண கணித நூல்களும் ஆகும். இந்நூல்களை எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம். மேலும், ஒவ்வொரு பாடத்துறை பற்றிய நூல்கள் ஒருமிக்க இருக்க வேண்டியபோதுள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(ii) $\left(5\sqrt{2}+7\right)^{1/3}-\left(5\sqrt{2}-7\right)^{1/3}$ ஆனது 2 இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(1989)

19. நேர்நிறையெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(a) $x=\frac{1}{3}$ ஆக இருக்கும் போது x இன் ஏறுவலுக்களில் $\left(\frac{1}{2}+x\right)^9$ இன் விரிவில் உள்ள அதியுயர் உறுப்பின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $(1+x)^n=C_o+C_1x+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_nx^n$ எனின்

$\frac{C_r}{C_{r-1}}r\left(C_r+C_{r-1}\right)=(n+1)\cdot C_{r-1}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $C_o+3\cdot C_1+5\cdot C_2+\ldots..+(2n+1)\cdot C_n=2^n(n+1)$ என நிறுவுக.

(1989)

20. (i) $\frac{1}{3!},\ \frac{5}{4!},\ \frac{11}{5!},\ \frac{19}{6!},\ldots\ldots$ என்னும் தொடரியின் n ஆவது உறுப்பு

$U_n=\frac{\lambda}{n!}+\frac{\mu}{(n+1)!}+\frac{\nu}{(n+2)!}$ எனும் வடிவிலான

தொடர்போன்றினைத் திருப்தி செய்கிறது. $n=1,\ 2,\ 3$ எனப் பிரதியிட்டு λ,μ,ν ஐக் காண்க.

$n=4$ இற்கு வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ, $\sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$

எனக் காட்டுக. $\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ ஒருங்குமா? காரணம் தருக?

(ii) $x^{p+1} + y^{p+1} = (x+y)(x^p + y^p) - xy(x^{p-1} + y^{p-1})$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ n நேர் நிறையெண் ஆக, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ என்பது 2^n ஆல் வகுபடும். எனக் காட்டுக.

$(3+\sqrt{5})^n$ இன் முழு எண் பகுதியை ஒன்றால் அதிகரிப்பதால் பெறும் எண் 2^n இன் ஓர் முழு எண் மடங்காகும் என உய்த்தறிக.

(1990)

21. (a) OBSEQUIOUSNESS இன் எல்லா எழுத்துக்களும் இருக்கும் ஒழுங்குகளில் எண்ணிக்கையை

(i) எழுத்துக்களின் ஒழுங்குகளில் எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லா திருக்கும்போது காண்க.

(ii) Q என்னும் எழுத்தை எப்போதும் ஒரு U தொடரும் போது காண்க.

(b) 14 ஆண்பிள்ளைகளையும் 12 பெண்பிள்ளைகளையும் உடைய வகுப்பொன்றிலிருந்து 3 ஆண்பிள்ளைகளையும், 3 பெண்பிள்ளைகளையும் கொண்ட குழுவொன்றைத் தெரியக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை

(i) எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாதபோது காண்க.

(ii) ஒரு குறித்த ஆண்பிள்ளையும் ஒரு குறித்த பெண்பிள்ளையும் ஒருங்கு சேவை செய்ய விரும்பாத போது காண்க.

(1990)

22. நேர்நிறையெண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக?

(i) $x=4$ ஆக, $(10+3x)^{15}$ இன் விரிவில் அதிஉயர் உறுப்பைக் காண்க.

(ii) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}(1+x)^n\right] = -\frac{1}{x^2}(1+x)^n + \frac{n}{x}(1+x)^{n-1}$$ என்னும் முடிவைப் பாவித்தோ, வேறுவிதமாகவோ

$$\sum_{r=1}^{n-1} r\cdot {}^nC_{r+1} = 1 + (n-2)\,2^{n-1}$$ எனக் காட்டுக.

(1990)

23. (i) $$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \equiv n^3$$

$$\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{8}\left(n-\frac{1}{2}\right) \equiv n^3$$

என்னும் சர்வசமன்பாடுகளை வாய்ப்புப் பார்த்து, அவற்றைப் பயன்படுத்தி

$\sum_{r=1}^{n} r^3$, $\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்பது 54 இன் மடங்காகும் என நிறுவுக.

(1990 விசேட)

24. (i) RELATIVISTIC என்னும் சொல்லின் எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக் களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

அவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்கள் 3I களும் ஒருமிக்க வரும்?

அவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்களில் 3I களுள் இரண்டு ஒருமித்தும் மூன்றாவது அவற்றை அடுத்து வராமலும் இருக்கும்.

(ii) பை ஒன்றில் வெவ்வேறான 8 வெள்ளி நாணயங்களும், 4 செப்பு நாணயங்களும் உள்ளன. 7 நாணயங்களின் வெவ்வேறு தெரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றுள் எத்தனை தெரிவுகளில குறைந்தபட்சம் ஒரு வெள்ளி நாணயமேனும் இருக்கும்.

(1990 விசேட)

25. n என்பது ஓர் நேர் நிறையெண் எனின் $(a+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரிவைத் தந்து அதனை நிறுவுக.

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^{15}$$ இன் விரிவில் x இல் தங்கியிராத உறுப்பையும் $x = \frac{1}{4}$ ஆக இருக்க அதிஉயர் உறுப்பையும் காண்க.

$(1+x)^4(1-x^2)^n$, $(1-x)^n(1+x)^{n+4}$ என்னும் விரிவுகளில்

$x^r\ (n \geq 2r)$ இன் குணகங்களைக் கண்டு

$$(-1)^r\left[{}^nC_r - 6\cdot{}^nC_{r-} + {}^nC_{r-2}\right] = {}^nC_o\cdot{}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1\cdot{}^{n+4}C_{2r-1}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nC_{2r}\cdot{}^{n+4}C_o$ எனக் காட்டுக.

(1990 விசேட)

26. (i) $f(r) = \dfrac{1}{r^2}$ $(r \neq 0)$ எனின், $f(r) - f(r+1) = \dfrac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$

எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2\cdot 3^2} + \dfrac{7}{3^2\cdot 4^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

இனுடைய முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. மேலே உள்ள தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உமது விடைக்குக் காரணம் தருக.

(ii) $|x| < 1$ இற்கு $ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\ldots\ldots - \dfrac{x^n}{n}\ldots\ldots$

எனக் கொண்டு

$$\ell n_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots.$$

எனக் காட்டுக.

$\dfrac{1}{r(r+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைப்பதன் மூலம்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r - \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

எனக் காட்டுக. $n \longrightarrow \infty$ ஆகும் போது, $S_n \longrightarrow 1 - ln2$ என உய்த்தறிக.

(1991 விசேட)

27. நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றிற்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(i) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r\cdot{}^nC_r x^{r-1} = n(1+x)^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $n(1+x)^{n-1}$; $(1+x)^n$ என்பவற்றின் இருவிரிவுகளையும் எடுத்து நோக்குவதன் மூலம் $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r\cdot\left({}^nC_r\right)^2$ ஆனது. $n(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவிலுள்ள x^{n-1} இன் குணகத்துக்கு சமமாகும் எனக் காட்டுக.

(iii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r\left({}^nC_r\right)^2 = \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1991)

28. (i) $\dfrac{a+1}{2} + \dfrac{a+3}{4} + \dfrac{a+7}{8} + \dfrac{a+15}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ எனும் தொடரின் முதல n உறுப்புககளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இங்கு a ஒரு மாறிலி.

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் கண்டு

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

(iii) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறுவிதமாக $7^{2n} - 48n - 1$ என்பது 2304 என்பதால் வகுபடும் என நிறுவுக.

(1991 விசேட)

29. (i) நேர் முழு எண் சுட்டி ஒன்றிற்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறுக.

$(1+x)^n$ விரிவில x இன் குணகம் C_r எனின,

(a) பகுதிப் பின்னம் மூலமாகவோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+n)} = \sum_{0}^{n}(-1)^r\frac{C_r}{(x+r)}$$ எனவும்

(b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} C_r^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{15}$ இன் விரிவில்

(a) x ஐச் சாராத உறுப்பு

(b) அதிஉயர் எண் பெறுமானத்தையுடைய

(c) $x = \frac{3}{4}$ ஆக, அதிஉயர் எண் பெறுமா

என்பவற்றைக் காண்க.

30. (i) $\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots\dots + \frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(}$

முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை
தொடர் ஒருங்குமெனக் காட்டி, முடிவிலி
தொகையைக் காண்க.

(ii) எந்த ஒரு நேர் நிறையெண் n உம் $5m$, $5n$
வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்
வெண். இதிலிருந்து n^2 எனும் வடிவிலுள்ள எ
5 இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதியானது
ஏதாவது ஒன்றாகும் என்பதை உய்த்தறிக.

31. n ஒரு நேர்நிறைவெண்ணாக இருக்க வழமையான (

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots +$

என நிறுவுக.

$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ இன் விரிவில் x இன் குணகத்தைக் க

$\left(1-x^2\right)^n = (1-x)^n (1+x)^n$ இன் இருபக்கங்களை

$C_o C_r - C_1 C_{r-1} + C_2 C_{r-2} + \dots (-1)^r C_r C_o =$

$= (-1)^{r/2} C$

எனக் காட்டுக.

இங்கு $(1+x)^n = C_o + C_1 x + \dots\dots + C_r x^r + \dots\dots + C_n x^n$ ஆகும்.

(1992)

32. (a) $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ஆக இருக்கட்டும்.

இங்கு $U_r = r(r+1)(r+2)$

$S_n = \frac{1}{4} r(r+1)(r+2)(r+3)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது

வேறுவிதமாக $\sum_{r=1}^{n} V_r$ ஐக் காண்க.

இங்கு $V_r = \frac{1}{S_r}$

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ எனும் தொடர் ஒருங்காது எனவும், ஆனால் $\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ எனும் தொடர் ஒருங்கும் எனவும் முடிவிலி வரைக்குமான அதன் கூட்டுத் தொகை $\frac{2}{9}$ ஆகும் எனவும் காட்டுக.

(b) n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $2^{2n+1} - 6n - 2$ என்பது 18 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக. (1993)

33. வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க

$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \dots + x^n$

என நிறுவுக. முழுமையான அட்சரகணித முறைகளைப் பயன்படுத்தி

(i) $C_1 + 2\cdot C_2 + 3\cdot C_3 + \dots\dots + n\cdot C_n = n\cdot 2^{n-1}$ எனவும்

(ii) $C_o - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \dots\dots\dots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ எனவும் காட்டுக.

(1993)

34. (a) $U_r = r(r+1)$ ஆக இருக்கட்டும்

$\sum_{r=1}^{n} U_r$, $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r}$ ஆகியவற்றைக் கண்டு, தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்காதெனவும், அதேவேளை தொடர் $\sum \frac{1}{U_r}$ ஒருங்குகிறதெனவும் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

r ஆம் உறுப்பு a_r ஆனது, $a_r = \dfrac{r^2(r^2+1)+2(r^3-1)}{r(r+1)}$

என்பதனால் கொடுக்கப்படும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ ஒருங்காதெனவும் காட்டுக.

(b) S_n என்பது, $\frac{3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாக இருக்கட்டும். கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)2^n}$ எனக் காட்டுக. **(1994)**

35. n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க, $(1+x)^{2n}$ இன் ஈருறுப்புவிரிவை எழுதுக. மேற்போந்த விரிவில் நடுஉறுப்பு $\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{n!}2^n x^n$ எனக் காட்டுக.

x நேர் எனக் கொண்டு இவ்விரிவின் அதி உயர் உறுப்புக்கு அதிஉயர் குணகம் இருப்பதற்கான x இன் வீச்சைக் காண்க. **(1994)**

36. $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{2\cdot4\cdot6}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots\ldots$ என்னும் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு U_r ஆகவும், $f(r) = \dfrac{1}{4(r+2)(r+4)}$ ஆகவும் இருப்பின்

$f(r) - f(r-2) = U_r$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \dfrac{11}{96}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) எந்தவொரு மறையில்லா நிறையெண் n இற்கும் $n^7 - n$ என்பது 7 இனால் வகுபடும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறி கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக. முறையான நிறையெண்களுக்கு இம் முடிபை உய்த்தறிக. எந்தவொரு ஒற்றை நிறையெண் n இற்கும் $n^7 - n$ என்பது 168 ஆல் வகுபடும் என்பதை உய்த்தறிக. **(1995)**

37. ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்கும் போது $(1+x)^n$ இற்கான ஈருறுப்பு விரிவைக் கூறி நிறுவுக.

மேற்போந்த விரிவைப் பயன்படுத்தி, அட்சரகணித முறைப்படி $^nC_0 + 2\,^nC_1 x + 3\,^nC_2 x^2 + \ldots + (n+1)\,^nC_n x^n$ என்பது $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

(i) $[1+(n+1)x](1+x)^{2n-1}$ என்பதை விரிப்பதன் மூலமும் x^n இன் குணகத்தைக் கருதுவதன் மூலமும் $(^nC_0)^2 + 2(^nC_1)^2 + 3(^nC_2)^2 + \ldots + (n+1)(^nC_n)^2$ இன் கூட்டுத்தொகை $\dfrac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(ii) n இரட்டையாயிருக்கும் போது $^nC_0 + 3\,^nC_2 + 5\,^nC_4 + \ldots + (n+1)\,^nC_n$ இன் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. **(1995)**

38. (ii) $V_r - V_{r-1} = 2r \; (r \geq 2)$ எனவும், $V_1 = 1$ ஆகவும் இருப்பின்

$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$ என்பதைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக

$V_n = n^2 + n - 1$ எனக் காட்டுக.

$U_r = \frac{V_r}{(r+2)!}$ எனத்தரப்படுமிடத்து $f(r) - f(r+1) = U_r$ ஆகுமாறு

$f(r)$ என்னும் சார்பைக் கண்டு இதிலிருந்து

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$ எனக் காட்டுக.

$\sum U_r$ ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(ii) n ஒரு நேர் நிறையெண் ஆயின் $4 \cdot 6^n + 5^{n+1}$ என்பது 20 இனால் வகுபடும் போது மீதி 9 ஆகுமெனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக. **(1996)**

39. (i) n பொருட்களிலிருந்து ஒரு தடவை r ஆக எடுக்கப்படும் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை முதற் கோடுபாடுகளிலிருந்து காண்க.

(ii) 75000 இலும் பெரிதான எத்தனை நிறையெண்கள் பின்வரும் நிபந்தனைகள் இரண்டையும் திருப்தி செய்யும்?

(a) நிறையெண்ணின் இலக்கங்கள் யாவும் வேறு வேறானவை.

(b) 0, 1 ஆகிய இலக்கங்கள் அவ்வெண்ணில் தோன்றுவதில்லை.

(iii) நிறையெண் ஒன்றின் இலக்கங்கள் 1 அல்லது 2 ஆக மாத்திரமே இருக்கலாம். அத்துடன் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை பத்தாகும். அத்தகைய நிறையெண்கள் எத்தனை உள்ளன. **(1996)**

40. நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றிற்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(i) $(3x + 2y)^{20}$ என்னும் விரிவில் (a) அதிஉயர் எண் குணகம்

(b) $x = \frac{1}{3},\; y = \frac{3}{2}$ ஆகவும் இருக்க அதிஉயர் உறுப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$x)^n \equiv (1 + x)^{2n}$ என்னும் சர்வசமனின்

பமுள்ள x^r இன் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம்

$_s = {}^{2n}C_r$ எனக்காட்டுக.

டுத்தொகை $\sum_{S=0}^{n} \left({}^nC_s\right)^2 = {}^{2n}C_n$ எனக்காட்டுக.

னும் விரிவில் (i) x இன் ஒற்றை வலுக்களில்

லுக்களில் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. **(1996)**

$\frac{\sqrt{r}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{r})}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$(r-1) - f(r) = U_r$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

$- \frac{U_n}{\sqrt{n}}$ எனக்காட்டுக.

ந் தொடரானது ஒருங்கும் என்பதற்கு மேற்போந்த

டுத்துக.

யெண் எனில் கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்

$^{+2} + 3^{2n}$ ஆனது 120 இனால் வகுக்கப்படும்போது

னக் காட்டுக. **(1997 – old)**

னும் சொல்லின் 11 எழுத்துக்களைக் கொண்டு

றுவேறான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக்

icient என்ற சொல்லின் 11 எழுத்துக்களிலிருந்தும்

எழுத்துக்களின் வேறு வேறான தேர்வுகளின்

க் காண்க.

(b) 8 வெள்ளைப் பந்துக்களையும் 6 கறுப்புப் பந்துக்களையும் பை A கொண்டிருக்க, 6 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 3 கறுப்புப் பந்துகளையும் பை B கொண்டுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் 4 வெள்ளைப்பந்துகளையும் 2 கறுப்புப் பந்துகளையும் கொண்டிருக்குமாறு 6 பந்துகள் உள்ள எத்தனை தொடைகள் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

(i) 6 பந்துகளும் ஒரே பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் போது

(ii) கறுப்புப் பந்துகள் இரண்டு பைகளில் ஏதாவதொன்றிலிருந்தும் வெள்ளைப் பந்துகள் மற்றப் பையிலிருந்து எடுக்கப்படும்போதும்

(iii) பந்துகள் எடுக்கப்படும் பைகள் தொடர்பாக எந்தவொரு நிபந்தனையும் இல்லாதபோது.

(1997 – old)

43. n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாயிருக்க $(1+x)^n$ இற்கான ஈருறுப்பு விரிவைக் கூறி அதனை நிறுவுக.

a, b என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க $(a+b)^n$ இற்கான விரிவை உய்த்தறிக.

(i) $1\cdot{}^nC_1 a\cdot b^{n-1} + 2\cdot{}^nC_2 a^2 b^{n-2} + 3\cdot{}^nC_3 a^3 b^{n-3} + \ldots + n\cdot{}^nC_n\cdot a^n$ என்னும் கூட்டுத்தொகையை அட்சரகணித முறையாகப் பெறுமானம் கணித்து, $a+b=1$ எனில் அக்கூட்டுத்தொகை na இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(ii) $a+b=1$ ஆகுமாறு கொடுக்கப்பட்ட நேரான a, b இற்கு ${}^nC_r\, a^r b^{n-r}$ இன் மிகப்பெரிய பெறுமானமானது $r=r_0$ இல் நேர்கின்றதெனக் காட்டுக. இங்கு $na-b \le r_0 \le na+a,\ 0 \le r \le n$ ஆகும்.

$a=b=\frac{1}{2}$ என்பதைக் கருத்திற் கொண்டு $n=4$ ஆகும்போதும் $n=5$ ஆகும்போதும் r_0 இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

r_0 இன் ஒருதனிமையை ஆராய்க. (1997- old)

44. (a) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r x^r$ எனக்கொண்டு, $\sum_{r=0}^{n} C_r$ ஐயும் $\sum_{r=0}^{n} C_r^2$ ஐயும் காண்க.

இதிலிருந்து முறைக்கு இரண்டுவீதம் $C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ எடுக்கப்படும்போது கிடைக்கும் பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(b) $(1-\lambda x)^9 = 1 - px + qx^2 - rx^3 + \ldots\ldots$ எனத்தரப்பட்டிருக்கும்போது p இன் பெறுமானம், q இன் பெறுமானம் r இன் பெறுமானம் ஆகியவற்றை λ இன் சார்பில் காண்க.

இதிலிருந்து $(1-x)^9(1-3x)^9$ இன் விரிவில் x^3 இன் எண்குணகத்தைக் காண்க. (1997)

45. (a) r ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க,

$$U_r = \frac{2r+3}{r^2(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}$$ எனவும்

$$f(r) = \frac{k}{r^2(r+1)^2(r+2)^2}$$ எனவும் கொள்க. இங்கு k ஒரு மாறிலி

$U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு k யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $g(r)$ என்பது, r நேர்நிறையெண்ணாக இருக்க, $U_r = g(r) - g(r+1)$ ஐயும் திருப்தியாக்குமெனின் $g(r) = f(r) + c$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு c ஒருமாறிலி.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் கண்டு, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

(b) $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ n = 3, 4\ldots\ldots$ இற்கு $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ என்க.

கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேர்நிறையெண் n இற்கு $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ என நிறுவுக. (1998)

இருக்குமாறு V_n ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{U_r} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}$ எனக்

காட்டுக. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_n}$ இன பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(b) $(1+kx)^{10} = a_o + a_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{10} x^{10}, x \in R$

எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a_2 = \frac{20}{9}$; k ஒரு நேர் மாறிலி. k யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{11^{10} - 7^{10}}{2 \cdot 9^{10}}$$ எனக் காட்டுக.

$a_o + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(2000)

51. (a) $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4}$ என்னும் சிக்கலெண்ணின் மட்டையும், வீசலையும் அட்சரகணித முறையாகக் காண்க.

(b) P_1 , P_2 என்னும் புள்ளிகள் ஆகன் வரிப்படத்தில் முறையே Z_1 , Z_2 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன. ஆகன் வரிப்படத்திலே சிக்கலெண் $Z_1 + Z_2$ ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளியின் தானத்தைப் பெற்றுக் கொள்வதற்குரிய கேத்திரகணித அமைப்பை தருக.

$Z_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$ என்னும் சிக்கலெண்களை ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்க.

மேற்குறித்த பேறைப் பயன்படுத்தி $Z_1 + Z_2$ இன் தானத்தைக் காண்க.

$tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ ஐ உய்த்தறிக. **(2000)**

விடைகள்

பயிற்சி- 1.1

1. $4x^2 + 12x + 9$ **2.** $4x^2y^2 + 4xyz + z^2$ **3.** $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

4. $\frac{4x^2}{9} + 2xy + \frac{9y^2}{4}$ **5.** $9a^2 - 24ab + 16b^2$ **6.** $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

7. $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ **8.** $a^2x^2 - 2ab\,xy + b^2y^2$

9. $4x^2 - 20xy + 25y^2$ **10.** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

11. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ **12.** $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

13. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$ **14.** $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$

15. $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ **16.** 25 **17.** 41, 189, 881

18. 7, 18 **19.** $x^2 - y^2 = 4$ **20.** $ay = x^2 - 2a^2$

1.2

1. $(2x-1)(x+1)$ **2.** $(5x-1)(x+3)$ **3.** $(2x-9)(3x+8)$

4. $(9x-7)(2x+3)$ **5.** $(2x-9)(3x-14)$ **6.** $(3x+7)(2x-5)$

7. $(3a+x-2y)(3a-x+2y)$ **8.** $(x-2y)(2x+y-1)$

9. $(2x^2+3y^2-2xy)(2x^2+3y^2+2xy)$

10. $(x-2y)^2(2a-b)(2a+b)$ **11.** $(a^2+1)(1-c)(1+c)$

12. $(2a^2-3b^2-ab)(2a^2-3b^2+ab)$ **13.** $(x-3a-3)(x-3a+3)$

14. $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

34. $x = 3,\ y = 1$ $\quad x = \frac{13}{6},\ y = \frac{-13}{18}$

$x = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{105}\right)$ $\quad y = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{105}\right)$

35. $x = 1,\ y = 2;\ x = {6}/{5},\ y = -{12}/{5};$

$x = \frac{1}{34}\left(-1 \pm \sqrt{409}\right),\ y = \frac{1}{17}\left(-2 \pm 2\sqrt{409}\right)$

36. $x = 1, y = 1;\ x = -1,\ y = 1;$ $\quad$ 37. $x = +2,\ y = \pm 3$

38. $x = \pm 6,\ \ y = \pm 5$ $\quad$ 39. $x = \pm 5,\ y = \pm 2,\ x = \pm 9,\ y = \pm \frac{11\sqrt{3}}{3}$

40. $x = y = 1,\ \ x = y = 0,\ \ x = \frac{3}{5},\ \ y = \frac{1}{5}$

41. $x = y = 2,\ \ x = y = 0,\ \ x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{3}{4}$

42. $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x = 1\ \ y = \pm 2$

43. $x = y = 1,\ \ x = y = 0$ $\quad$ 44. $x = 2, y = 3, x = 3, y = 2$

45. $x = 5,\ y = 2,\ x = -2,\ \ y = -5$ $\quad$ 46. $x = 9,\ y = 1;\ x = 1,\ y = 9$

47. $x = \pm 3, y = \pm 2, x = \pm 2, y = \pm 3$ $\quad$ 48. $x = 8\ \ y = 2\ ;\ x = 2,\ y = 8$

49. $x = \pm \frac{1}{5}\sqrt{26},\ y = \pm \sqrt{26}$ $\quad$ 50. $x = 1, y = 2\ ;\ x = -2, y = -4$

51. $x = \frac{1}{4},\ y = 1$ $\quad$ 52. $x = \frac{3}{2},\ \ y = \frac{1}{2}\ ;\ x = 1,\ y = 2$

53. $x = \pm 2,\ y = \pm 1;\ \ x = \pm 2\sqrt{3},\ \ y = \pm\sqrt{3}$

54. $x = 9,\ y = 7\ ;\ x = -28,\ y = 26$ $\quad$ 55. $x = 1,\ y = 3\ ;\ x = 3, y = 1$

56. $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}},\ \ y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ \ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

57. $x = 2, y = 6\ ;\ x = 6, y = 2$

பயிற்சி-1.7

1. $x = 1$ $\quad$ 2. $x = 55,\ y = 45$ $\quad$ 3. $x = 1,\ \ 2 + \sqrt{5}$

4. $x = 40,\ y = 2$ $\quad$ 5. $x = 2, y = 4$ $\quad$ 6. $x = 1,\ y = 0$

7. $x = \frac{1}{2},\ \ y = 1$ $\quad$ 8. $x = 4,\ y = 2$

9. $x = 7,\ \ y = 2$ $\quad$ 10. $x = 10,\ y = 4$ $\quad$ 14. $x = 3,\ y = 9$

$x = -{1}/{2},\ y = {1}/{2}$ $\quad x = 4\ \ y = 3$ $\quad x = 9,\ y = 3$

15. $x = 3,\ \frac{1}{81}$ $\quad$ 16. $x = 4,\ y = 2,\ x = 9,\ y = 3$

17. $x = 9,\ \ y = \frac{1}{3}$ $\quad$ 18. $\frac{7}{4},\ \ 6$ $\quad$ 19. $b = a^2$

20. $y = 9,\ \ z = \frac{1}{3}$ $\quad$ 21. $x = 4^8,\ \ y = \frac{1}{4}$ $\quad$ 22. $x = 1,\ y = 0$

23. $x = 3$ $\quad$ 24. $x = 125,\ \ \frac{1}{125}$ $\quad$ 25. $x = 3^6,\ \ y = \frac{1}{3}$

$x = {\sqrt{2}}/{2}$ $\quad x = \frac{1}{3},\ \ y = 3^6$

பயிற்சி-2.1

1. (i) ஈவு $x + 5$, மீதி 3 $\quad$ (ii) ஈவு $2x^2 + 4x + 5$, மீதி 11

(iii) ஈவு $x^2 - 3$, மீதி 2 $\quad$ (iv) ஈவு $2x^2 + x^2 - x - 3$, மீதி 4

(v) ஈவு $4x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 18x + 4$, மீதி -14

(vi) ஈவு $2x^3 + 3x^2 - 15x - 10$; மீதி 39

2. (i) -3 $\quad$ (ii) $12x + 10$

3. (i) $x^2 - 3x - 1$ $\quad$ (ii) $9x^2 - 2x - 11$

4. $p = 3,\ q = 5$ $\quad$ 5. $a = 1,\ \ b = -37$ $\quad$ 6. $p = 3,\ q = -1;\ -3, 0$

7. $a = \frac{1}{2} f(1), \quad b = -f(2), c = \frac{1}{2} f(3); \; -90$

8. (i) 0 (ii) $a^{n-1} x - a^n$

9. (i) -3, -1, 4, 5 (b) (i) $1, 3 \pm \sqrt{2}$ (ii) 4, 5, 6

(ii) 1, 3, 5, 7 (iii) $-1, -\frac{1}{5}, -5$ (iv) $1, 1, -1, \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$

(iii) 2, 3, a (v) $1, 1, \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)$

10. $a = 1, b = 2$ (ii) $1, 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

11. (i) $a = 3, \; b = 2, \; c = -8$

12. (i) $\left[\frac{1}{2}(a+b) - c\right] x^2 + \frac{1}{2}(a-b)x + c$

(ii) $a = 2, \; b = -3, c = 3, d = 1$

13. $\ell = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}, n = 2$ 14. $m = -1, n = -2$ 15. $-2x + 2$

16. $m = \frac{9}{2}, n = -\frac{7}{2}$ 17. $a = 3$ 18. $7, -1, -\frac{23}{16}$ 19. $a = 3$

20. $m = -2$ 21. $2x^2 - 5x - 3, \; (x+1)^2 \left(2x^2 - 5x - 3\right)$

22. $\sqrt{7}, \quad \frac{1}{2}\left(-\sqrt{7} \pm \sqrt{5}\right)$

23. $q = -2, \; (x-1)(x+2)(2x+1), \quad a = 0, \; b = -1, \; c = -2$

24. $a = 36, b = 2; \quad (x+2)^2 (x-3)^2$ 25. $(x+1)$; -1

26. (i) $A = 1, \quad B = -6, \; C = 9, \quad D = -7$ (ii) $b = -1, \quad c = -15$

27. $a = 3, \; b = 3, \; c = 0$ 29. $p = -6; \; (x-1)(x+2)(x+3)$

30. $p = -1; \quad 4x^3 + x^2 + 3 = (x+1)\left(4x^2 - 3x + 3\right)$

$p = \frac{3}{2}; \; 4x^3 - \frac{13}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(4x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right)$

32. $(x+1)(x-2)(x+2)^2\left(x^2 - 2x + 4\right)$

34. $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2ab - 3ac - 6bc$

35. $c = -57, \; 0, \; 535$

36. (i) $7k$ (ii) $(2x+1)(2x+1)(3x-4)$ (iii) $m = 4, \; n = -3$

பயிற்சி-3

1. (i) $-\frac{4}{3}, \; 4$ (ii) $-3 \pm \sqrt{11}$ (iii) $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (iv) $5/2, \; 5/2$

2. (i) -1 (ii) 2 (iii) -1

4. (i) $q + s + pr$ (ii) $2\left(p^2 - pr + r^2 - 2q - 2S\right)$

5. (i) $a^2 cx^2 + b\left(b^2 - 3ac\right)x + ac^2 = 0$

7. (i) $p = -1, \; q = -20$ (ii) $\frac{1}{n}, \quad \frac{m^2 - 2n}{n^2}, \quad \frac{m^3 - 3mn}{n^3}, \quad m$

9. $-\frac{1}{3}, 5$ 10. 2 11. $k \leq -10$ அல்லது $k \geq 2$

12. $p \leq -5$ அல்லது $p \geq -\frac{1}{5}$ 14. $px^2 - 3(p+q)x + 7q = 0$

15. $7p^2, \sqrt{5}\,p, \; x^2 - 21\sqrt{5}\, p^2 x - p^4 = 0$

16. $k < 1$ அல்லது $k > 9, \; k \geq 9$ 17. 0, 3, 8

20. $b = -7,\ 7$

26. $17x^2 - 20x + 5 = 0,\quad rx^2 - qx + p = 0,\quad ax^2 + bx + a = 0$

27. $x^2 - 7x + 8 = 0$ 28. $b = c = 3a$

29. $rx^2 + qx + p = 0$ 30. $x^2 + \left(2q - p^2\right)x + q^2 = 0$

33. $k \le 0$ அல்லது $k \ge 3$; $k \ge 3$

34. $p = -4,\ q = 1;\quad p = 3,\ q = -\frac{3}{4}$

$qx^2 + p(q+2)\,x + \left(q^2 + 4q + 4\right) = 0$

35. $0, k-2;\quad k = 7;\quad \frac{-49}{4};\ -\frac{1}{2}$

36. $\left(pp^1 + 2q + 2q'\right)^2 = \left(p^2 - 4q\right)\left(p'^2 - 4q'\right)$

37. $k = \frac{-100}{49}$ 38. $2\alpha - \beta,\quad 2\beta - \alpha$

39. (i) $-\frac{2}{\alpha}, \frac{-2}{\beta}$ (ii) $\frac{1}{3}, 3$ 40. $|k| \ge 4,\quad k \ge 4,\ \frac{8}{\sqrt{3}}$

41. $\left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)^2$ 44. $q = 2b + 6,\ r = 2c + 3b + 4 + \sqrt{b^2 - 4c}$

45. (i) $x^2 - x\sqrt{b + 2c} + c = 0$

(ii) $-2 \le p \le 8$; $-2 \le p \le 0$ அல்லது $4 \le p \le 8$

48. (i) $3x - 2y - 7 = 0,\quad x + y + 4 = 0$

(ii) $2x - y - 1 = 0\quad x + y + 2 = 0$

49. (i) $3x + y = 0,\quad x - 3y = 0$; (ii) $8 : 1 : -3$

50. (i) $k = 1,$ (ii) $y + x = 0$

பயிற்சி 4

3. 14 4. 1 5. (i) $c = \frac{9}{8}$ (ii) $c < \frac{9}{8}$ $a = b$

7. $8 < m < 24$ 9. $a = 2(b + c)$

10. $k = -\frac{1}{48}$; (a) $k < 1$ (b) $k \le \frac{1}{2}$ 11. $-3 < k < 5$

12. $k < -\frac{37}{12},\ k = -\frac{25}{12}$ 13. $-2 < k < 6$; $0 < k < 6$

14. (a) $\alpha = 1$ (b) $k = 0,\ k = -(a + c)$ 15. 0, - 4

18. $-1 \le k \le 1$ 19. $\lambda = \frac{-21}{4}$ 20. $-10 \le k \le 2$

21. $p < -1$; ≤ -2 அல்லது ≥ 6

22. (ii) $-3 < x < -2$ அல்லது $x > -1$ (iii) $2 \le \lambda \le 3$

23. $= 1$ 24. $a \le 1$ அல்லது $a \ge \frac{3}{2}$ 25. $y \le \frac{1}{3}$ அல்லது $y \ge 3$

30. $\lambda = 1, -3$; $x = 4, \frac{4}{9}$ 31. (i) $k > 1$

$\lambda < -\frac{5}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right),\ \lambda > \frac{5}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

(A) 1. $\frac{3}{2(x-1)} + \frac{3}{2(x+1)}$ 2. $\frac{4}{3(x-4)} - \frac{1}{3(x-1)}$

3. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1}$ 4. $\frac{7}{24(x-3)} + \frac{7}{8(x+1)} - \frac{2}{3x}$

5. $\frac{3}{25(x+1)} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{16}{75(x-4)} + \frac{2}{5(x-4)^2}$

6. $\frac{1}{6(x-3)}+\frac{5}{24(x+3)}-\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}$ 7. $\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}$

8. $\frac{22}{19(x-3)}+\frac{1-6x}{19(2x^2+1)}$ 9. $\frac{3}{2x}-\frac{x}{2(x^2+2)}$

10. $\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x+1}$ 11. $\frac{3}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{x}{2(x^2+1)}$

12. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$ 13. $\frac{1}{1-x}+\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{(2x+1)^2}$

14. $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}$ 15. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2x+1}{2(x^2+1)}$

16. $\frac{-2}{x-1}+\frac{3x+1}{x^2+4}$ 17. $\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{x^2+2x+3}$

18. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}$ 19. $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}$

20. $\frac{1}{7(x+1)^2}-\frac{1}{49(x+1)}+\frac{24}{49(2x-5)}$

21. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2x-1}$ 22. $\frac{8}{1-2x}-\frac{9}{2(1-x)}+\frac{1}{2(1+x)}$

23. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2+1}$

(B) 1. $5-\frac{6}{x+5}+\frac{1}{x+4}$ 2. $3x-5+\frac{2}{x+4}-\frac{x+6}{x^2+9}$

3. $2-\frac{1}{x+2}-\frac{4}{x+1}$ 4. $x-5+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}$

பயிற்சி 5

2. (i) $x<1$ அல்லது $x>2$ (ii) $-1\le x\le \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{3}{2}\le x\le 2$

(iv) $x<-2$ அல்லது $x>4$ (v) $-3\le x\le 2$ (vi) $x<0$ அல்லது $x>3$

(vii) $-2<x<3$ (viii) R (ix) $x<-6$ அல்லது $x>2$

(x) $x<-3$ அல்லது $x>-1$ (xi) $\frac{3}{2}<x<4$ (xii) R

3. (i) $-2<x<1$; $x>3$ (ii) $3<x<4$; $-4<x<-1$

(iii) $4<x<5$; $-1<x<1$ (iv) $-2<x<3$ (v) $-5<x<-2$

4. (i) $2\le x<3$ (ii) $-2<x<0$ (iii) $o<x<\frac{4}{3}$ (iv) $x<-1$, அல்லது $x>1$

(v) $x<0$ (vi) $x>-2$

5. (i) $-3<x<3$; $x>5$ (ii) $-1<x<2$; $x<0$ (iii) $1<x<2$; $x=3$

(iv) $-1<x<1$; $2<x<3$ (v) $0<x<3$; $x<4$ (vi) $0<x<2$; $x>3$

(vii) $x>0$ (viii) $x\le 0$; $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$, $x\ge 4$

(ix) $-1\le x\le 2$, $4\le x\le 7$ (x) $-4<x<-2$, $1<x<2$, $x>3$

(xi) $-\frac{5}{3}\le x\le -1$; $x\ge 3/2$ (xii) $\frac{2}{3}<x<2$

6. $x\le o$, $x\ge 2$ **7.** $-2<x<-1$; $x>0$

8. $x\le -3$; $x\ge 1$ **9.** $2<x<3$ **10.** (i) $-(a+b)<x<-b$

(ii) $x<0$; $-b<x<-(a+b)$ **25.** (i) $-5, -1$, (ii) $0, -2$ (iii) $3, -3$

26. (i) $x<-1$ அல்லது $x>7$ (ii) $-3\le x\le -1$

(iii) $x\le -4$ அல்லது $x\ge -1$ (iv) $o<x<\frac{3}{2}$ (v) $x<-2$, $x>0$

27. (i) $-1<x<1$ (ii) $x>2$ (iii) $-\frac{1}{3}<x<7$ (iv) $\frac{7}{4}<x<\frac{5}{2}$; $x\ne 2$

28. (i) $x>\frac{2}{3}$ (ii) $-2<x<1$ (iii) $x<1$

29. (a) $x < -5$, அல்லது $x > \frac{1}{3}$ **(b)** $-4 < x < -\frac{3}{2}$

$-4 < x < 1$

30. $-3 < x < 3$ **33.** $-2 < y < 2$

பயிற்சி 6

1. 3 **2.** 4, 7, 10 **5.** $U_1 = -2, \ m = 10$

10. $\left\{\frac{a^n - x^n}{a - x} - \frac{a^n x - x^{2n+1}}{a - x}\right\} \Big/ a^{n-1}(1 - x)$

13. $-1 < x < 1 - \sqrt{2}$ அல்லது $1 + \sqrt{2} < x < 3$

18. $(a)\ n^3 + 6n^2 + 11n$ $(b)\ \frac{1}{6n}\left[14n^2 + 15n + 1\right]$

19. $2n^2(n+1)^2$, $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2n(n+1) + 3$

20. $n(n+1)\left(2n^2 + 2n - 1\right)$ **24.** $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$

25. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$; $\frac{1}{4}$; 21

26. $\frac{n}{4n+1}$, $\frac{n}{2n+1}$; $\frac{n(6n+5)}{(4n+1)(2n+1)}$ **28.** 1 191 700

29. 70 **30.** 11 **32.** $\frac{r}{1-r}$, $\frac{r}{(1-r)^2}$, $\frac{r\left[n - (n+1)r + r^{n+1}\right]}{(1-r)^2}$

33. $|a| < 1$ **34.** $\frac{r^2 - r + 2}{2}$, $\frac{r^2 + r}{2}$, 22 155.

35. $\frac{4n-1}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$ **36.** $-\frac{1}{2}$

பயிற்சி 7

7 (a)

2. $n = 2$ **3.** $n = 7$ **4.** $m = 6, n = 2$ **5.** $n = 6$ **6.** 12 **7.** 325
8. 48 **9.** 6 **10.** 60, 120, 24 **11.** 1080, 720, 360 **12.** 120
13. $5! \times 4!$ **14.** 2880 **15.** $(n-1)!\ (n-2)!$ **16.** 8000
17. 144, 32 **18.** 720 **19.** 420 **20.** 720, 144, 576 **21.** 12

7 (b)

4. 495, 369, 252 **5.** 286, 165, 110, 80, 276 **6.** 95284

8. $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ **9.** $\frac{1}{2}m(m+3)$ **10.** 140 **11.** 1 596 000

12. 43 200 **13.** 144 **14.** 12, 42 **16.** 10 **17.** 399 **18.** 160

19. 19 **20.** 1638,39 **21.** 2111 **22.** $10!$, $3! \times 4! \times 4! \times 2!$, 6, 3600

23. 15, $\frac{20 \times 9!}{3! \times 2!}$, 1080, 975 **24.** $\frac{16!}{3!\,6!\,2!}$, 43200 **25.** 1680

26. 280 **27.** 2100 **28.** 27, 720 **29.** 369 600 **30.** $\frac{(120)!}{6!\,(20!)^6}$

31. 105 **32.** 70, 35 **33.** $2^{n-1} - 1$ **34.** 3 153 150 **35.** 20, 120

பயிற்சி 8

7. $70x^3y^4$ **8.** $30618\,x^{17}y^5$ **9.** $366080\,\frac{b^5}{a^{14}}$

10. $\frac{(n+3)!}{r!\,(n+3-r)!}\ \frac{x^r}{2^{n+3-r} \cdot 3^r}$ **11.** $\frac{63}{16}x^5y^4$, $-\frac{63}{8}x^4y^5$

12. 112 **13.** $\frac{105}{32}x^{10}$ **14.** $3360\,y^4$ **16.** $n = 6, a = 3, b = 2$

17. $\frac{-405}{16}x^5$, $\frac{8505}{32}$ **20.** $\frac{6r!}{(2r)!\,(4r)!}$ **21.** $n = 2, 3$

22. $a = 0, 1$ **23.** -360 **24.** $-\frac{1}{8}$, $-8\frac{9}{16}$ **26.** $1 \cdot 149$

27. (i) $2\left(64a^3+2160a^2+4860a+729\right)$ (ii) $2+8x^2-8x^4$

32. $32+240x+880x^2+2640x^3$ 33. $a=2(1-n)$

34. $a=2, b=2, c=-32$ 36. 3660

37. $1-21x+203x^2-1197x^3+\ldots..$ 38. 224 39. $a=-20, b=200$

பயிற்சி 9

1. (i) $10+3i$ (ii) $3+7i$ (iii) $27-5i$ (iv) $18+16i$

(v) $16+3i$ (vi) $\dfrac{7+4i}{13}$

2. (i) $\dfrac{1}{2}(1\pm i\pi)$ (ii) $\cos\theta \pm i\sin\theta$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i), -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

3. (i) $(x+1+2i)(x+1-2i)$ (ii) $(x-2+i)(x-2-i)$
(iii) $(2x+1+i)(2x+1-i)$ (iv) $(x+a+ib)(x+a-ib)$

4. (i) $\dfrac{i}{x-1+3i}-\dfrac{i}{x-1-3i}$ (ii) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i}{x+i}-\dfrac{i}{x-i}\right)$

5. $p=4, \quad q=13$

6. (i) 4, 5 (ii) 6, 25 (iii) 0, 1 (iv) -24, 169 (v) -2, 2

7. (i) $\pm(5-2i)$ (ii) $\pm(1+i)$ (iii) $\pm(1-i)$

8. $(1+2i)$, $(-1+3i)$, $(-1-3i)$

9. $x^4-8x^3+32x^2-80x+100=0$

10. $\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}(3+2i)$ 11. $-c(1\pm i)$ 12. $1, 1, \omega, \omega^2$

19. (i) -2ω (ii) $\dfrac{1-\omega}{1+\omega}$ (iii) $\dfrac{1}{\omega}$ (m ஒற்றை)

(i) 0 (ii) 1 (iii) $1-\omega$ (m இரட்டை)

21. (i) 31, 19 22. (i) $1, \pi/2$ (ii) $1, \pi$ (iii) $1, -\pi/2$

சாயி கல்வி வெளியீடுகள்

க.பொ.த உயர்தரம்

புதிய பாடத்திட்டத்திற்குரியவை

(ஆண்டு 2000 உம் அதற்குப் பின்வரும்)

1. உயிரியல் பகுதி -1
2. உயிரியல் பகுதி - 2(A) தொழிற்படும் விலங்கு
3. உயிரியல் பகுதி - 2(B) தொழிற்படும் விலங்கு
4. உயிரியல் பகுதி - 3(A) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி I
5. உயிரியல் பகுதி - 3(B) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி II
6. உயிரியல் பகுதி - 4(A) உயிரின் தொடர்ச்சி
7. உயிரியல் பகுதி - 4(B) மனிதனும் சூழலும் + பிரயோக உயிரியல்
8. சேதன இரசாயனம் - பரீட்சை வழிகாட்டி
9. பிரயோக கணிதம் - நிலையியல
10. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி I
11. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி II
12. பிரயோக கணிதம் - நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
13. இணைந்த கணிதம் - நுண்கணிதம்
14. இணைந்த கணிதம் - அட்சர கணிதம்
15. இணைந்த கணிதம் - திரிகோணகணிதம்
16. இணைந்த கணிதம் - ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06. SRILANKA.