க.பொ.த உயர் தரவகுப்புக்கான

பிரயோக கணிதம்

APPLIED MATHEMATICS
FOR
G.C.E. ADVANCED LEVEL

நிலையியல்
STATICS

கா. கணேசலிங்கம், B.Sc. Dip-in-Ed.

க. பொ. த

உயர்தர வகுப்புக்கான

பிரயோக கணிதம்

நிலையியல்
STATICS

K. Ganeshalingam. B. Sc. Dip in Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06.
Phone : 592707

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title	:	Applied Mathematics for G. C. E. (A/L) Statics
Language	:	Tamil
Author	:	Karthigesu Ganeshalingam B. Sc Dip. in. Ed Puttalai, Puloly.
Publications	:	Sai Educational Publication 36/4 B, Pamankada Road, Colombo – 06.
Date of Issue	:	First Edition - March 1997 Second Edition - January 1998 Third Revised Edition - January 2002
Copyright	:	Sai Educational Publication
Type Setting	:	SDS Computer Services, Col – 06. Tel : 553265.
Press	:	Printed at : G.M. Offset Press, Ch - 5. Ph : 5519 0944

நூலின் விபரம்

தலைப்பு	:	க. பொ. த. உயர்தர வகுப்புக்கான பிரயோககணிதம் – நிலையியல்.
மொழி	:	தமிழ்
ஆசிரியர்	:	கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம் புற்றளை, புலோலி
வெளியீடு	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம் 36/4 B பாமன்கட றோட், கொழும்பு – 06.
பிரசுரத் திகதி	:	முதற்பதிப்பு மார்ச் 1997 இரண்டாம் பதிப்பு ஜனவரி 1998 மூன்றாம் திருத்திய பதிப்பு ஜனவரி 2002
பதிப்புரிமை	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்
கணணிப்பதிவு	:	எஸ்.டி.எஸ் கம்பியூட்டர் சேர்விசஸ். இல.36, புகையிரத நிலைய வீதி, கொழும்பு 06
அச்சகம்	:	அச்சிட்டோர் : ஜீ.எம். ஆப்செட் பிரஸ், சென்னை – 5. போன் : 5591 0944

என்னுரை

கடந்த சில வருடங்களாக க. பொ. த (சா/த) சித்தியடைந்த மாணவர்கள் பலர் பல விசேட சித்தியையும் ஆற்றல்களையும் கொண்டிருந்த போதிலும் மேற்கொண்டு கல்வியை க. பொ. த (உ/த) கணித/ விஞ்ஞானப் பிரிவு தவிர்ந்த ஏனைய பிரிவுகளில் தொடர்வதை யாவரும் அறிவர். இவற்றுக்குப் பல காரணங்கள் இருந்த போதிலும் தமது ஆற்றல்களில் மாணவர்களுக்கு நம்பிக்கையின்மையும் ஒரு காரணமாக அமைகின்றது. விருத்தியடையக் கூடிய ஆற்றல்கள் கூட கணிதப் பயம் *(Fear of Mathematics)* எனும் உருவாக்கப்பட்ட ஒரு பீதியால் மழுங்கடிக்கப் படுகிறது. மேலும் க.பொ.த (சா/த) இல் கணிதக் கற்றல், க.பொ.த (உ/த) கணிதக் கற்றலுக்கு இலகு வழியமைத்துக் கொடுத்துள்ளதா என்பது கேள்விக்குரியதாக உள்ளது.

க. பொ. த (உ/த) கணிதப் பாடங்களில் பிரயோக கணிதம் ஒருமுக்கிய இடத்தை வகிக்கின்றது. எளிமையிலிருந்து படிமுறையாகக் கற்றல் மூலம் பிரயோக கணிதத்தை இலகுவாகவும், விருப்பமாகவும் கற்கலாம், கற்பிக்கலாம் என்ற எனது கற்றல் கற்பித்தல் அனுபவங்களின் விளைவாகப் பிரயோக கணிதத்தில் ஒரு சிறு பிரிவாகிய "நிலையியல்" பகுதியை உதாரணங்களுடன் நூலாக வெளிக்கொணர்ந்துள்ளேன். இந்நூலைக் கற்கும் மாணவன், கற்பிக்கும் ஆசிரியர் பிரயோககணிதத்தின் நிலையியல் பகுதியை மிகவும் எளிமையாக விளங்கிக் கொள்வதுடன், கணக்குகள் மூலம் எளிமையிலிருந்து சிக்கலான நிலையியல் பிரச்சனைகளை விளங்கிக் கொள்வதுடன் புதிய நிலையியல் சார்ந்த கணக்குகளுக்கும் முகங்கொடுக்க, விடைகாணத் தம்மைத் தயார்ப்படுத்திக் கொள்வார்கள் என்பதும் எனது எதிர்பார்ப்பாகும். நிறைவுகள் சொல்லற்க. குறைகள் சுட்டுக. எனது இந்நூலை நூலுருவில் கொணர்ந்து வெளியீடு செய்யும் சாயிக் கல்வி வெளியீட்டகத்தினருக்கு எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

நன்றி

ஜனவரி 2002

ஆசிரியர்

பொருளடக்கம்

1. விசை இணைகரவிதி, விசைப்பிரிப்பு, விளையுள் விசை

நிலையியல் (Statics)

விசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ் ஓய்விலிருக்கும் பொருட்களின் (திண்மம்) பொறியியல் நிலையியல் ஆகும்.

விசை (Force)

ஒரு பொருளினுடைய ஓய்வு நிலையையோ அல்லது மாறா இயக்க நிலையையோ மாற்றுகின்ற அல்லது மாற்ற முயலுகின்ற எத்தனம் விசை எனப்படும்.

விசையின் சிறப்பியல்புகள்

பொருளொன்றின் மீது விசை தொழிற்படும்போது, அதனை

(i) பருமன் (magnitude)

(ii) திசை (direction)

(iii) பிரயோகப் புள்ளி (Point of application)

என்பவற்றால் பூரணமாகக் குறிக்கலாம்.

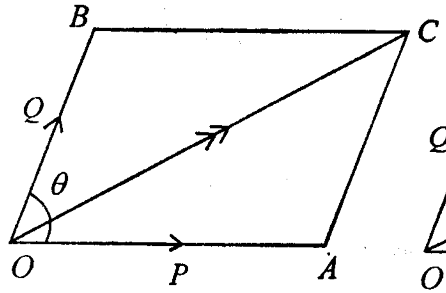
எனவே விசையின் பிரயோகப் புள்ளியினூடான, திசை கொண்ட கோட்டுத் துண்டத்தால் $(\overrightarrow{AB})$ விசையைக் குறிக்கலாம்.

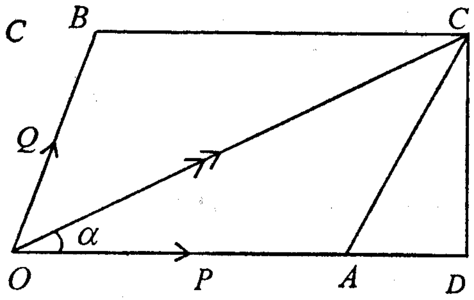
விளையுள் விசை (Resultant Force)

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகள் விறைப்பான பொருள் ஒன்றின் மீது தொழிற்படும் போது, அவ்விசைகளுக்குச் சமனான ஒரு விளைவைத் தரக்கூடிய ஒரே விசை அவற்றின் விளையுள் விசை எனப்படும்.

1. விசை இணைகரவிதி

O என்னும் ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் இரு விசைகள், O இலிருந்து வரையப்படும் OA, OB என்னும் இரு கோடுகளினால் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படின் இணைகரம் $OACB$ இன் மூலைவிட்டம் OC இனால் விளையுளானது, பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும்.





O இல் தாக்கும் P, Q எனும் இரு விசைகள் OA, OB என்பவற்றால் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படின், அவற்றின் விளையுள் R ஆனது இணைகரம் $OACB$ இன் மூலைவிட்டம் OC ஆல் குறிக்கப்படும்.

$\angle AOB = \theta, \qquad \angle COD = \alpha$ என்க.

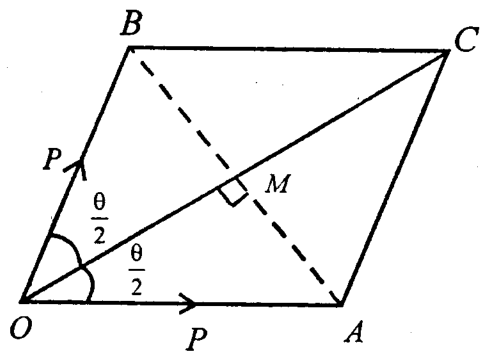
$$OC^2 = OD^2 + DC^2$$

$$= (OA + AD)^2 + DC^2$$

$$R^2 = (P + Q\cos\theta)^2 + (Q\sin\theta)^2$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$



விசைகள் $P = Q$ எனின்,
இணைகரம் $OACB$ இல்
$OA = OB$ ஆகவே $OACB$
ஒரு சாய்சதுரம்.

$$\angle AOC = \angle BOC = \frac{\theta}{2}$$

விளையுள் $R = OC = 2OM = 2P\cos\frac{\theta}{2}$

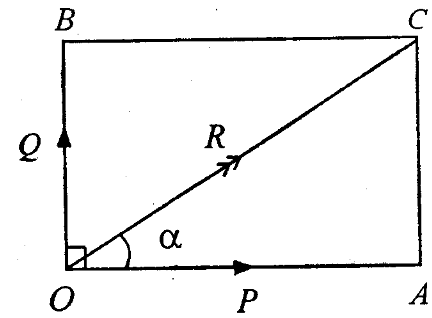
விசைகள் இரண்டும் சமமெனின் (பருமனில்), விளையுள் விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தை இருசமகூறாக்கும்.

விசைகள் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனின்,

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \ \cos\theta = 0, \ \sin\theta = 1$$

எனவே $R^2 = P^2 + Q^2$

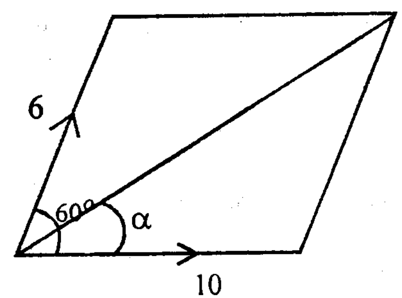
$\tan\alpha = \frac{Q}{P}$ ஆகும்.



உதாரணம் 1

$10N, 6N$ விசைகள் துணிக்கை ஒன்றில் ஒன்றுக்கொன்று 60° ஏற்றக் கோணத்தில் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$
$$= 10^2 + 6^2 + 2 \times 10 \times 6 \times \cos 60^\circ$$
$$= 100 + 36 + 60 = 196$$
$$R = \sqrt{196} = 14\,N$$
$$\tan\alpha = \frac{6\sin 60^\circ}{10 + 6\cos 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{13}$$



உதாரணம் 2

$P, P\sqrt{3}\,N$ பருமனுள்ள விசைகள் துணிக்கை ஒன்றின் மீது தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையின் பருமன் P எனின், விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தைக் காண்க.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$P^2 = P^2 + \left(P\sqrt{3}\right)^2 + 2 \times P \times P\sqrt{3} \times \cos\theta$$

$$P^2 = P^2 + 3P^2 + 2\sqrt{3}\,P^2\cos\theta$$

$$-3 = 2\sqrt{3}\,cos\,\theta$$

$$cos\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = 150^\circ$$

உதாரணம் 3

P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகள் θ கோணத்தில் தாக்கும் போது அவற்றின் விளையுளானது, பருமனில் $2P$ ஆகும். இவ்விரு விசைகளும் $(180^\circ - \theta)$ கோணத்தில் தாக்கும் போது விளையுளின் பருமன் P ஆகும். P, Q இற்கு இடையேயான விகிதத்தைக் காண்க.

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$ என்பதைப் பிரயோகிக்க.

$4P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$ ....(1)

$P^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\theta$ ....(2)

(1) இலிருந்து $2PQ\cos\theta = 3P^2 - Q^2$

(2) இலிருந்து, $2PQ\cos\theta = Q^2$

$3P^2 - Q^2 = Q^2$

$3P^2 = 2Q^2; \qquad P^2 : Q^2 = 2 : 3, \quad P : Q = \sqrt{2} : \sqrt{3}$

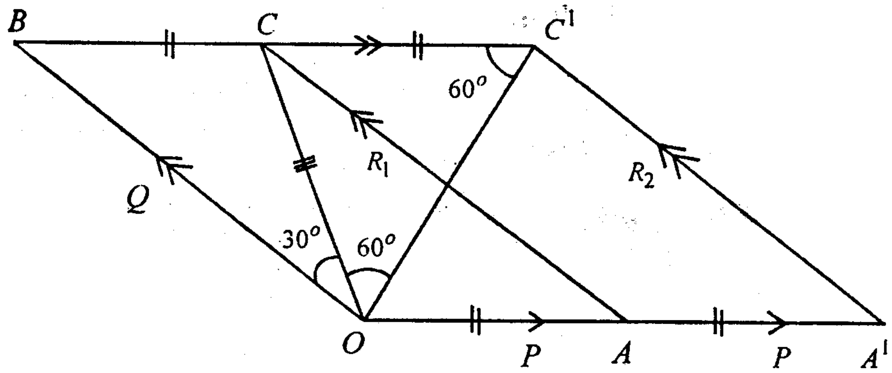
உதாரணம் 4

P, Q எனும் இரு விசைகள் OA, OB வழியே தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுள் பருமனில் P ஆகும். OA வழியே $2P$ உம், OB வழியே Q உம் தாக்கும் போது விளையுள் பருமனில் P ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) Q இன் பருமன் P இன் உறுப்புக்களில்.

(ii) OA, OB என்பவற்றுக்கிடையேயான கோணம்

(iii) ஒவ்வொரு விளையுளும் OA உடன் அமைக்கும் கோணம்.



P, Q என்பவற்றின் விளையுள் OC ஆலும், $2P, Q$ என்பவற்றின் விளையுள் OC^1 ஆலும் தரப்படுகின்றது. $R_1 = P, \quad R_2 = P;$

$OACB, \; OA^1C^1B$ என்பன இணைகரங்கள் ஆகும்.

$OA = AA^1 = OC^1 = OC = CC^1 = BC(=P)$ ஆகும்.

ΔBOC^1 இல் $CB = CC^1 = CO$

ஆகவே, $\angle BOC^1 = 90^\circ$ ஆகும்.

$OB^2 + OC^{\frac{1}{2}} = BC^{\frac{1}{2}}$

$Q^2 + P^2 = (2P)^2$

$Q^2 = 3P^2$

$Q = P\sqrt{3}$ 1

ΔOCC^1 சமபக்க முக்கோணி ஆகும்.

$\angle AOB = 150^\circ \; (90^\circ + 60^\circ)$ 2

R_1, OA உடன் அமைக்கும் கோணம் 120°

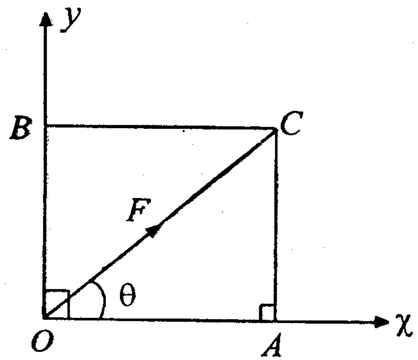
R_2, OA உடன் அமைக்கும் கோணம் 60°]..............3

2. விசைப் பிரிப்பு (Resolution of a Force)

ஒரு விசையானது இரு கூறுகளாக, முடிவில்லாத எண்ணிக்கையான வழிகளில் பிரிக்கலாம். ஏனெனில் தரப்பட்ட விசையின் தாக்கக் கோட்டினை மூலைவிட்டமாகக் கொண்டு எண்ணற்ற இணைகரங்கள் வரையலாம்.

விசையொன்றினை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் பிரித்தல்

விசை F ஆனது, $\vec{OC}$ ஆல் குறிக்கப்படுகின்றது என்க. இப்பொழுது Ox, Oy வழியே F இன் கூறுகளைக் காணவேண்டுமெனில் C யிலிருந்து Ox, Oy என்பவற்றுக்கான செங்குத்துக்கள் CA, CB என்க.



கோணம் $COX = \theta$ என்க.

$OA = F\cos\theta,\ OB = F\sin\theta$

எனவே Ox, Oy வழியேயான கூறுகள் முறையே

$\vec{OA} = F\cos\theta,\ \vec{OB} = F\sin\theta$ ஆகும்.

மறுதலையாக $\vec{OA}, \vec{OB}$ வழியே தாக்கும் $F\, sos\,\theta, F\sin\theta$ என்னும் இரு விசைகளின் விளையுளும் $\vec{OC}$ வழியே $\vec{F}$ ஆகும்.

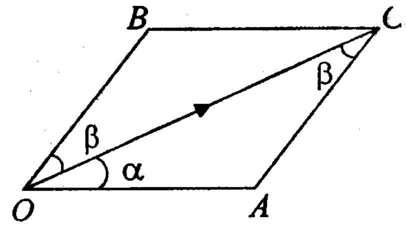
தரப்பட்ட விசை F ஐ, அவ்விசையின் திசையுடன் α, β கோணங்களில் பிரித்தல்

விசை F ஆனது $\vec{OC}$ ஆல் குறிக்கப்படுகின்றதென்க. OC யுடன் α, β கோணங்களை ஆக்குமாறும் OC மூலைவிட்டமாகவும் வரையப்பட்ட இணைகரம் $OACB$ ஆகும்.

ΔOAC இல்,

$$\frac{OA}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{OC}{\sin[180-(\alpha+\beta)]}$$

$$\frac{OA}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{F}{\sin(\alpha+\beta)}$$



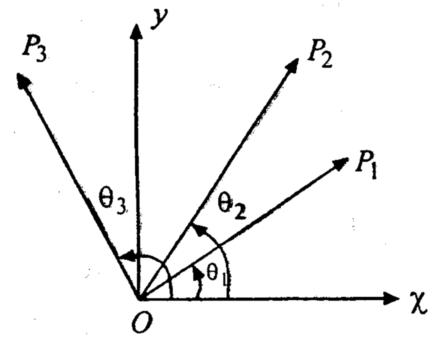
$$OA=\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad AC=\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\vec{OA}=\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad \vec{OB}=\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$ ஆகும்.

3. புள்ளி ஒன்றில் தாக்கும் பல ஒருதள விசைகளின் விளையுள்

புள்ளி O இல் $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ ஆகிய ஒரு தள விசைகள் தாக்குகின்றன என்க.

விசைகளின் தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுகள் Ox, Oy ஐ எடுக்க.



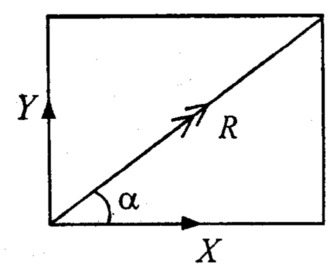
விசைகளை Ox, Oy வழியே பிரிக்க.

$\rightarrow X = P_1\cos\theta_1 + P_2\cos\theta_1 + P_3\cos\theta_3 + \ldots\ldots$

$\uparrow Y = P_1\sin\theta_1 + P_2\sin\theta_1 + P_3\sin\theta_3 + \ldots\ldots\ldots$

X, Y என்பவற்றின் விளையுள் R என்க.

$R=\sqrt{x^2+y^2}$; $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ ஆகும்.



எனவே தரப்பட்ட விசைகளின் விளையுள் R ஐ மேலே உள்ளவாறு காணலாம்.

உதாரணம் 5

a. $30N$ விசை ஒன்று ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான Ox, Oy எனும் திசைகளில் பிரிக்கப்படுகிறது. Oy வழியேயான கூறு $18N$ எனின், Ox வழியேயான விசைக் கூறையும், Ox உடன் விசை அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

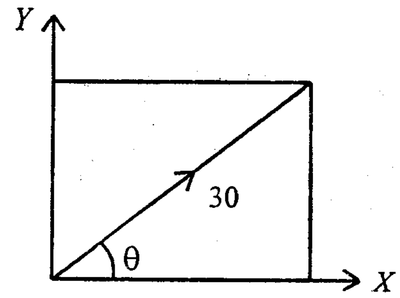
b. $24N$ விசையினை அதனுடன் $30^o, 45^o$ கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்க.

a. $\rightarrow X = 30 cos\theta$, $\uparrow Y = 30 sin\theta$

$$30 sin\theta = 18, \; sin\theta = \frac{3}{5}$$

ஆகவே $cos\theta = \frac{4}{5}$

$$\rightarrow X = 30 \; cos\theta = 30 \times \frac{4}{5} = 24 \; N$$

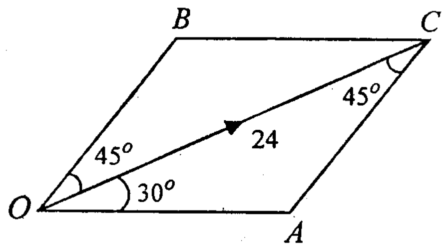


b. ΔOAC இல்,

$$\frac{OA}{sin\ 45^\circ} = \frac{AC}{sin\ 30^\circ} = \frac{OC}{sin\ 105^\circ}$$

$$\frac{OA}{sin 45^\circ} = \frac{AC}{sin 30^\circ} = \frac{OC}{cos 15^\circ}$$

$$OA = \frac{24 \, sin 45^\circ}{cos 15^\circ}, \quad AC = \frac{24 \, sin 30^\circ}{cos 15^\circ}$$



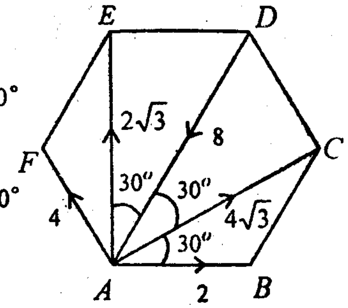
OA வழியேயான கூறு $= 24 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{48}{\sqrt{3}+1} N$

OB வழியேயான கூறு $= 24 \times \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} N$

உதாரணம் 6

$ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி புள்ளி A இல் AB, AC, DA, AE, AF வழியே $2, 4\sqrt{3}, 8, 2\sqrt{3}, 4N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

AB, AE ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை விசைகளை AB வழியே பிரிக்க.



$$\rightarrow X = 2 + 4\sqrt{3} \, cos 30^\circ - 8 \, cos 60^\circ - 4 \, cos 60^\circ$$
$$= 2 + 6 - 4 - 2 = 2$$

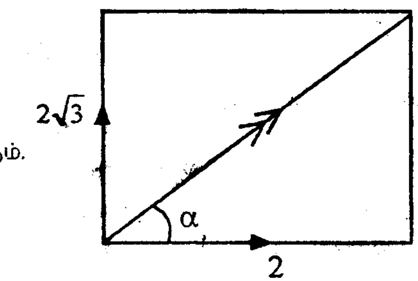
$$\uparrow Y = 4\sqrt{3} \, sin 30^\circ - 8 \, sin 60^\circ + 2\sqrt{3} + 4 \, sin 60^\circ$$
$$= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

விளையுள் $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}$

$$= 4 \, N$$

$$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \; ; \; \alpha = 60^\circ$$

எனவே விளையுள் AD வழியே $4N$ ஆகும்.



உதாரணம் 7

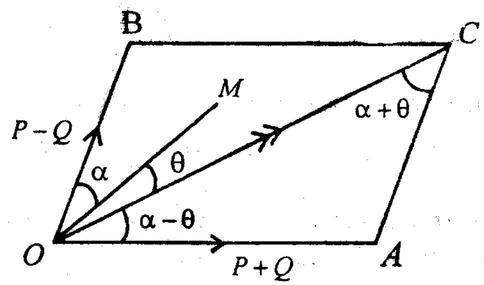
$(P + Q)$, $(P - Q)$ என்னுமிரு விசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 2α ஆகும். இவ் விசைகளின் விளையுள், இவ் விசைகளுக்கு இடையேயான இரு கூறாக்கியுடன் θ கோணத்தை ஆக்குகிறது எனின். $P \, tan\theta = Q \, tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

$(P + Q)$, $(P - Q)$ என்னும் விசைகள் முறையே OA, OB என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகின்றன.

$\angle AOM = \angle BOM = \alpha$.

$\angle MOC = \theta$

ΔOAC இற்கு சைன் விதியைப் பிரயோகிப்பதால்,



$$\frac{OA}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{AC}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{(P+Q)+(P-Q)}{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)} = \frac{(P+Q)-(P-Q)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}$$

$$\frac{2P}{2\sin\alpha\cos\theta} = \frac{2Q}{2\cos\alpha\sin\theta}$$

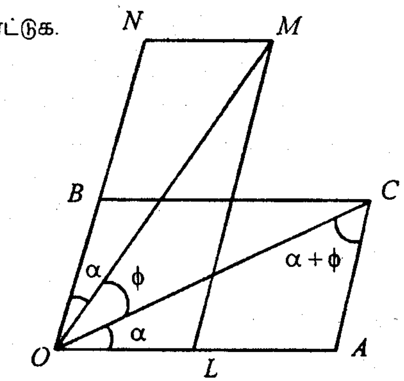
$$\frac{P\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{Q\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$P\tan\theta = Q\tan\alpha$$

உதாரணம் 8

P, Q என்னுமிரு விசைகள் θ கோணத்தில் தாக்குகின்றன. P, Q என்பவற்றின் தானங்களை தம்முள் மாற்றினால் புதிய விளையுள் ϕ கோணத்தினூடு திருப்பப் படுகின்றது.

$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$ எனக் காட்டுக.



$OACB, OLMN$ என்பன இணைகரங்கள். OA, OB என்பவற்றால் விசைகள் P, Q என்பன குறிக்கப்படுகின்றன.
விளையுள் OC ஆகும்.

ON, OL என்பவற்றால் விசைகள் P, Q குறிக்கப்படுகின்றன.
விளையுள் OM ஆகும்.

$\theta = 2\alpha + \phi$ ஆகும். ....(1)

ΔOAC இற்கு சைன் விதியைப் பிரயோகிக்க.

$$\frac{OA}{\sin(\alpha+\phi)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

$$\frac{P}{\sin(\alpha+\phi)} = \frac{Q}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{P+Q}{\sin(\alpha+\phi)+\sin\alpha} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha+\phi)+\sin\alpha}$$

$$\frac{P+Q}{2\sin\left(\frac{2\alpha+\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2}} = \frac{P-Q}{2\cos\left(\frac{2\alpha+\phi}{2}\right)\sin\frac{\phi}{2}}$$

$$\frac{P+Q}{\sin\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{\phi}{2}} = \frac{P-Q}{\cos\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{\phi}{2}}$$

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$$

பயிற்சி - 1

விசை இணைகரவிதி

1. பின்வரும் வினாக்களில் P, Q என்பன விசைகளையும், θ அவற்றிற்கிடையே யான கோணத்தையும், R அவற்றின் விளையுளையும் குறிக்கின்றது.

   i. $P = 8N, Q = 7N, \theta = 60^\circ$ எனின், R ஐக் காண்க.

   ii. $P = 15N, Q = 8N, \theta = 90^\circ$ எனின், R ஐக் காண்க.

   iii. $P = 10N, Q = 10N, \theta = 120^\circ$ எனின், R ஐக் காண்க.

   iv. $P = 9N, R = 15N, \theta = 90^\circ$ எனின், P ஐக் காண்க.

   v. $P = 3N, Q = 5N, R = 7N$ எனின், θ ஐக் காண்க.

2. ஒவ்வொன்றும் பருமனில் P இற்குச் சமமான இரு விசைகள் 120° கோணத்தில் தாக்குகின்றன. விளையுள் பருமனில் P இற்கு சமம் எனவும், தரப்பட்ட இரு விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தை இரு கூறாக்குகிறது எனவும் காட்டுக.

3. $P, P\sqrt{2}$ பருமன்களையுடைய இரு விசைகள் 135° கோணத்தில் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

4. ஒவ்வொன்றும் பருமனில் P இற்குச் சமமான இரு விசைகளின் விளையுள் (i) $\sqrt{3}\ P$ (ii) P (iii) $\frac{P}{2}$ இற்குச்சமமெனின், அவ்விசைகளுக் கிடையேயான கோணத்தைக் காண்க.

5. இரு விசைகளின் பருமன்களின் கூட்டுத்தொகை $24N$. அவ்விரு விசைகளினதும் விளையுள் சிறிய விசைக்குச் செங்குத்தாக $12N$ ஆகும். அவ்விரு விசைகளின் பருமன்களையும் அவற்றிற்கு இடையேயான கோணத்தையும் காண்க.

6. இரு விசைகள் 120° கோணத்தில் தாக்குகின்றன. பெரிய விசையின் பருமன் $80N$. விளையுள் சிறிய விசைக்குச் செங்குத்து எனின், சிறிய விசையின் பருமன் யாது?

7. $20N, 16N$ விசைகள் புள்ளியொன்றில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமன்

   (i) அதி உயர்வாக இருக்க

   (ii) மிகக் குறைவாக இருக்க

   விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தையும், விளையுளின் பருமனையும் காண்க.

8. புள்ளியொன்றில் தாக்கும் $P, 2P$ பருமன்களையுடைய விசைகளின் விளையுள் சிறிய விசைக்குச் செங்குத்தெனின், விளையுளையும், விசைகளுக்கிடைப் பட்ட கோணத்தையும் காண்க.

9. புள்ளியொன்றில் $P\,N, 10N$ பருமன்களையுடைய இரு விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விரு விசைகளினதும் விசையுளின் திசையும், முன்னைய இரு விசைகளினதும் திசைகளில் தாக்குகின்ற $(P+6)\ N, 15N$ ஆகிய இரு விசைகளினதும் விளை யுளின் திசையும் ஒன்றாக இருப்பின் P இன் பெறுமானம் யாது?

10. ஒவ்வொன்றும் பருமனில் P இற்குச் சமமான இருவிசைகள் புள்ளி ஒன்றில் α கோணத்தில் தாக்குகின்றன. விளையுள் விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தை இருகூறாக்குகிறது எனவும், விளையுளின் பருமன் $2P\,Cos\frac{\alpha}{2}$ எனவும் காட்டுக.

11. சம பருமன்களையுடைய இரு விசைகள் 2α கோணத்தில் தாக்கும் போதுள்ள விளையுளின் பருமன், விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் 2β ஆகவுள்ள போதுள்ள விளையுளின் பருமனின் இருமடங்கெனின் $Cos\,\alpha = 2Cos\,\beta$ எனக் காட்டுக.

12. P, Q எனுமிரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் P ஆகும். விசை P இரட்டிக்கப்படின் புதிய விளையுளின் Q இற்கு செங்குத்து என நிறுவுக.

13. புள்ளி ஒன்றில் தாக்கும் P, Q எனுமிரு விசைகளின் விளையுள் பருமனில் P இற்குச் சமமாகவும், அதே திசைகளில் தாக்குகின்ற $2P, Q$ எனும் விசைகளின் விளையுளும் பருமனில் P இற்குச் சமமாகவுமிருப்பின் Q இன் பருமனை P இல் காண்க.

    மேலும் P, Q என்பவற்றுக்கிடையேயான கோணம் 150^o எனவும் காட்டுக.

14. $(P+Q), (P-Q)$ பருமன்களையுடைய இரு விசைகள் புள்ளி ஒன்றில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமன் $\sqrt{P^2 + Q^2}$ எனின், விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தைக் காண்க.

15. P, Q எனுமிரு விசைகள் θ கோணத்தில் தாக்கும் போது இவற்றின் விளையுளின் $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ பருமன் ஆகும். விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் $(90-\theta)$ ஆகும் போது விளையுளின் பருமன் $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும். $\tan\theta = \dfrac{m-1}{m+1}$ எனக் காட்டுக.

விசைப்பிரிப்பு

1. $30N$ விசை கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. இவ்விசையின் நிலைக்கூறு $15N$ எனின் கிடைக் கூறையும், கோணம் θ ஐயும் காண்க.

2. $25N$ விசையை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில்
   i. விசைக்கூறுகளிரண்டினம் பருமன்கள் சமமாகுமாறு,
   ii. ஒரு விசைக்கூறின் பருமன் மற்றையதன் இரு மடங்காகுமாறு பிரிக்குக.

3. F எனும் விசை, அவ் விசையுடன் α, β கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில் முறையே P, Q எனுமிரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. P, Q என்பவற்றை F, α, β என்பவற்றில் காண்க.

4. $15N$ விசை இரு திசைகளில் பிரிக்கப்படும்போது, ஒரு கூறானது விசையுடன் 30° இல் $5N$ எனின், மற்றைய கூறின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

5. PN விசை இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு கூறினதும் பருமன் $20N$ எனின், அவற்றின் திசைகளைக் காண்க.

புள்ளியொன்றில் தாக்கும் பல விசைகளின் விளையுள்

1. புள்ளி A இல் $1, 2, \sqrt{3}N$ விசைகள் AP, AQ, AR திசைகளில் தாக்குகின்றன. $\angle PAQ = 60^\circ$, $\angle PAR = 90^\circ$ ஆகும். விளையுளைக் காண்க.

2. புள்ளி O இல் வெளிநோக்கி ஒவ்வொன்றும் பருமனில் P இற்குச் சமமான ஒரு தளவிசைகள் மூன்று தாக்குகின்றன. நடுவில் உள்ள விசை மற்றைய இரு

விசைகளுடன் 60° கோணத்தை அமைக்கிறது. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுளைக் காண்க.

3. $ABCD$ ஒரு சதுரம். $4, 4\sqrt{2}, 2N$ விசைகள் புள்ளி A இல் முறையே AB, AC, AD வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

4. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம். $AB = 8cm$, $BC = 6cm$. புள்ளி A இல் முறையே AB, AC, AD வழியே $20N, 50N, 30N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

5. புள்ளியொன்றில் $15N, 9N, 12N$ விசைகள் தளமொன்றில் தாக்குகின்றன. எந்த இரு விசைகளுக்கும் இடையேயான கோணம் 120° ஆகும். விளையுளைக் காண்க.

6. புள்ளியொன்றில் தாக்கும் கீழே தரப்பட்ட விசைகளின் விளையுளைக் காண்க. கிழக்கு நோக்கி $20N$, கி 60° வ நோக்கி $12N$, மே 30° தெ நோக்கி $18\sqrt{3}N$.

7. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. $2, 4\sqrt{3}, 6, 8\sqrt{3}, 4N$ விசைகள் புள்ளி A இல் முறையே AB, AC, AD, AE, AF வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

8. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. அறுகோணியின் மையம் O. $1N, 2N, 3N, 4N, 4N, 6N$ விசைகள் O இல் OA, OB, OC, OD, OE, OF வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

9. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி. AB, AC, BC என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமான திசைகளில் புள்ளியொன்றில் முறையே $2, 3, 4N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

10. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி. G அதன் மையப்போலி. புள்ளியொன்றில் GA, GB, GC, AB, BC, CA இற்குச் சமாந்தரமான திசைகளில் $8, 8, 12, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{3}, 2\sqrt{3}N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

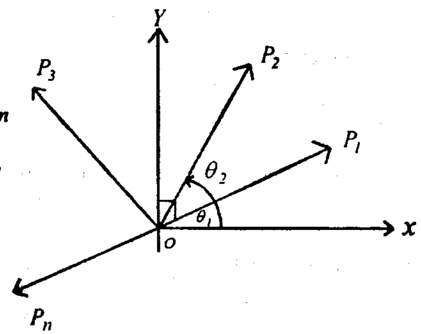
2. புள்ளி ஒன்றில் தாக்கும் ஒரு தளவிசைகளின் சமநிலை

புள்ளி O வில் விசைகள் $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ என்பன தொழிற்படுகின்றன. இவ்விசைகள் சமநிலையில் உள்ளன என்க. இவ்விசைத் தொகுதியை விசைகளின் தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் பிரிப்பதால்,

$$\rightarrow \quad X = P_1\cos\theta_1 + P_2\cos\theta_2 + \ldots\ldots + P_n\cos\theta_n$$

$$\uparrow \quad Y = P_1\sin\theta_1 + P_2\sin\theta_2 + \ldots\ldots + P_n\sin\theta_n$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$



சமநிலையிலிருப்பதால் $\quad R = 0$

ஆகவே $\quad X = 0, \quad Y = 0$

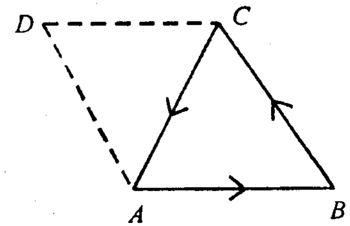
எனவே, துணிக்கை ஒன்றின் மீது தாக்கும் ஒரு தொகை விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் பிரித்த அவ்விசைகளின் கூறுகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை தனித்தனியே பூச்சியமாகும்.

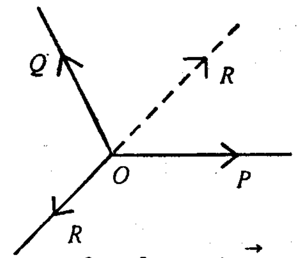
மூன்று விசைகளின் சமநிலை

விசை முக்கோணி *(triangle of forces)*

தேற்றம் :- ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூன்று விசைகள் ஓர் ஒழுங்கில் எடுக்கப்படும் முக்கோணியின் பக்கங்களால் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படின், அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

நிறுவல் :- C யில் தாக்கும் மூன்றுவிசைகள் P, Q, R என்பன முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ என்பவற்றால் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படுகிறது என்க.





இணைகரம் $ABCD$ ஐ பூர்த்தியாக்குக. $\vec{AB}, \vec{AD}$ என்பவற்றின் விளையுள் $\vec{AC}$ ஆகும்.

அதாவது P, Q என்பவற்றின் விளையுள் பருமனிலும், திசையிலும் தரப்படுகிறது. $\vec{AC}$ ஆல் விளையுள் பருமனில் R ஆகவும், திசையில் எதிராகவும் உள்ளது. எனவே P, Q, R சமநிலையிலிருக்கும்.

விசைமுக்கோணியின் மறுதலை *(Converse of the Triangle of forces)*

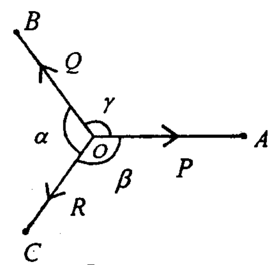
ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின் இவை பருமனிலும், திசையிலும் ஓர் ஒழுங்கிலெடுக்கப்பட்ட முக்கோணியின் பக்கங்களால் குறிக்கப்படலாம்.

லாமியின் தேற்றம் *(Lami's Theorem)*

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின் ஒவ்வொரு விசையும், மற்றைய இருவிசைகளுக்குமிடையிலுள்ள கோணத்தின் சைனிற்கு விகிதசமமாகும். அதாவது விசைகள் (O வில் தாக்கும்) P, Q, R என்பன சமநிலையிலிருப்பின்,

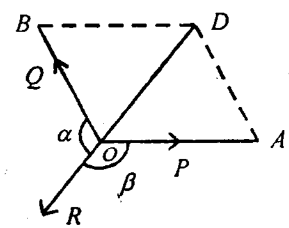
$$\frac{P}{\sin BOC} = \frac{Q}{\sin COA} = \frac{R}{\sin AOB} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$



$OADB$ இணைகரம்

விசை P, $\vec{OA}$ இனாலும், விசை Q $\vec{AD}$ யினாலும், விசை R, $\vec{DO}$ இனாலும் குறிக்கப்படலாம்.



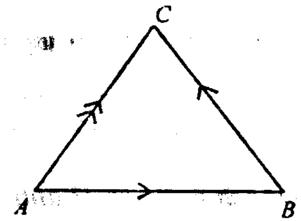
ΔOAD இல்,

$$\frac{OA}{\sin ADO} = \frac{AD}{\sin DOA} = \frac{DO}{\sin OAD}$$

$$\frac{P}{\sin(180-\alpha)} = \frac{Q}{\sin(180-\beta)} = \frac{R}{\sin(180-\gamma)}$$

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$ ஆகும்.

குறிப்பு : புள்ளி ஒன்றில் தாக்கும் இரு விசைகள் ABC என்னும் முக்கோணியின் பக்கங்கள் $\vec{AB}, \vec{BC}$ என்பவற்றால் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும் $\vec{AC}$ யால் குறிக்கப்படும்.



$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ஆகும்.

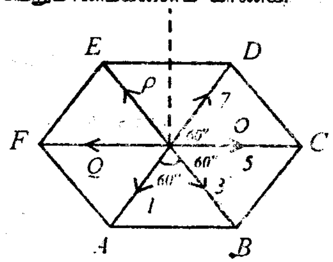
விசைப் பல்கோணி *(Polygon of Forces)*

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் எத்தொகை விசைகளும் ஓர் ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட பல்கோணியின் பக்கங்களால் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படின் அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

உதாரணம் 1

$ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. O அதன் மையம். O இல் $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$ வழியே $1, 3, 5, 7, P, Q$ நியூட்டன் விசைகள் தாக்குகின்றன. விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் P, Q என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

OC யின் திசையிலும், OC யிற்கு செங்குத்தான திசையிலும் விசைகளைப் பிரிக்க.



$$\vec{X} = 5 + 7\cos 60^\circ - P\cos 60^\circ - Q - 1\cos 60^\circ + 3\cos 60^\circ$$

$$= 5 + \frac{9}{2} - \frac{P}{2} - Q$$

$$= \frac{19}{2} - \frac{P}{2} + Q$$

$$\uparrow Y = 7\sin 60^\circ + P\sin 60^\circ - 1\sin 60^\circ - 3\sin 60^\circ$$

$$= \sin 60^\circ(3 + P)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(3 + P)$$

விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதால் $X = 0$, $Y = 0$ ஆகும்.

$$Y = 0 \Rightarrow P = -3$$

$$X = 0; \quad \frac{19}{2} - \frac{P}{2} - Q = 0$$

$$\frac{19}{2} + \frac{3}{2} - Q = 0$$

$$Q = 11$$

எனவே P, ($\vec{EO}$ வழியே) $3N$, Q, $11N$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

$24N$ நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை $1 \cdot 3m$ நீளா இழைமூலம் O எனும் புள்ளியிலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகிறது. துணிக்கைக்கு கிடையாக ஒரு விசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சமநிலையில்,

(i) துணிக்கை O வினூடாக நிலைக்குத்திலிருந்து $0 \cdot 5m$ தூரத்தில் ஓய்வடையும் எனின்,

(ii) O இனூடான நிலைக்குத்துடன் 30° இல் ஓய்வடையும் எனின்,

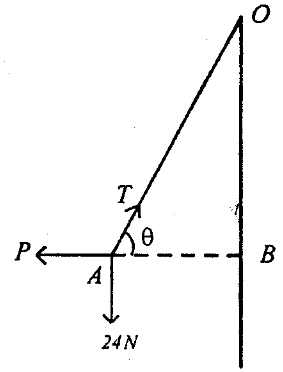
ஒவ்வொரு வகையிலும் P இன் பெறுமானத்தையும், இழையின் இழுவையையும் காண்க.

(i) $OA = 130cm, \ AB = 50cm$

ஆகவே $OB^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$

$OB = 120cm$

$sin\theta = \frac{12}{13}, \quad cos\theta = \frac{5}{13}$



முறை I

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க,

$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{P}{\sin(90+\theta)} = \frac{24}{\sin(180-\theta)}$$

$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{P}{\cos\theta} = \frac{24}{\sin\theta}$$

$$T = \frac{P}{\frac{5}{13}} = \frac{24}{\frac{12}{13}}$$

$$T = \frac{24 \times 13}{12} = 26N, \quad P = \frac{24 \times 5}{12} = 10N$$

முறை II

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு விசை முக்கோணியைப் பிரயோகிக்க,

ΔOBA இல், $24N \rightarrow OB$

$P \rightarrow BA$

$T \rightarrow AO$ வழியே குறிக்கலாம்.

$$\frac{24}{OB} = \frac{P}{BA} = \frac{T}{AO}$$

$$\frac{24}{120} = \frac{P}{50} = \frac{T}{130} \qquad \therefore \ T = 26N, \quad P = 10N$$

முறை III

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு,

$\leftarrow X = P - T cos\theta = 0$

$\uparrow Y = T\sin\theta - 24 = 0$

$T = 24 \times \frac{13}{12} = 26N; \qquad P = T cos\theta$

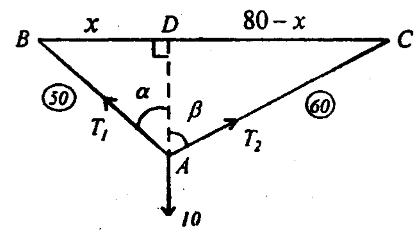
$= 26 \times \frac{5}{13} = 10N.$

உதாரணம் 3

$10N$ நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று $50cm, 60cm$ நீளமுள்ள இரு இழைகள் AB,AC என்பவற்றின் முனைகள் A இற்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறுமுனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் $80cm$ இடைத்தூரத்திலுள்ள B,C எனும் புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு இழையிலும் இழுவையைக் காண்க.

துணிக்கையில் தாக்கும் விசைகள்

நிறை $10N$, இழுவிசைகள் T_1, T_2 ஆகும்.



$BD = x cm; \ DC = (80-x) cm$ என்க.

$AD^2 = 50^2 - x^2 = 60^2 - (80-x)^2$

$(80-x)^2 - x^2 = 60^2 - 50^2$

$80(80-2x) = 110 \times 10$

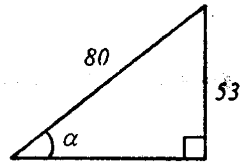
$x = \frac{265}{8} cm$

$BD = \frac{265}{8} cm, \ DC = 80 - \frac{265}{8}$

$= \frac{375}{8} cm$

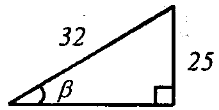
$sin\alpha = \frac{265}{8 \times 50} = \frac{53}{80}$; ஆகவே $cos\alpha = \frac{3\sqrt{399}}{80}$

$sin\beta = \frac{375}{8 \times 60} = \frac{25}{32}$; ஆகவே $cos\beta = \frac{\sqrt{399}}{32}$



சமநிலைக்கு, லாமியின் தேற்றம்.

$$\frac{T_1}{sin(180-\beta)} = \frac{T_2}{sin(180-\alpha)} = \frac{10}{sin(\alpha + \beta)}$$



$$\frac{T_1}{sin\beta} = \frac{T_2}{sin\alpha} = \frac{10}{sin(\alpha + \beta)}$$

$$T_1 = \frac{10\,sin\beta}{sin(\alpha + \beta)} \qquad T_2 = \frac{10\,sin\alpha}{sin(\alpha + \beta)}$$

இதிலிருந்து T_1, T_2 ஐக் கணிக்கலாம்.

உதாரணம் 4

இலேசான இழை ஒன்று ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள A, B எனுமிரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் வழியே W நிறையுடைய ஒப்பமான வளையம் ஒன்று வழுக்கிச் செல்லக் கூடியதாக உள்ளது. வளையம் ஒரு கிடைவிசை P யினால் இழுக்கப்படுகிறது. சமநிலைத் தானத்தில் இழையின் பாகங்கள் நிலைக்குத்துடன் $60°, 30°$ கோணங்களை அமைக்கின்றன. இழையின் இழுவையைக் காண்க. P ஐயும் காண்க.

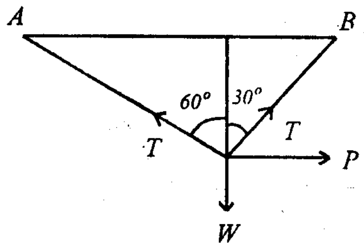
(i) கிடைவிசை P, வளையத்தில் பிரயோகிக்கப்படுகிறது.
(ii) இழை, ஒப்பமான வளையத்தினூடாகச் செல்வதால், இழையின் இரு பகுதிகளிலும் இழுவிசை சமமாகும்.

W இன் சமநிலைக்கு,

$$\rightarrow X = P + T\sin 30° - T\sin 60° = 0$$

$$P = T(sin 60° - sin 30°)$$

$$= T\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$



$$\uparrow Y = T\cos 30° + T\cos 60° - W = 0$$

$$T\left(cos 30° + cos 60°\right) = W$$

$$T\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = W$$

$$T = \frac{2W}{\sqrt{3}+1} \quad \text{---------------} (1)$$

$$P = T\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{2W}{(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{W \cdot (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} \quad \text{---------} (2)$$

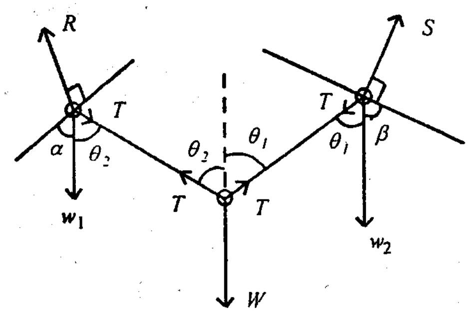
உதாரணம் 5

ஓர் இலேசான இழையின் நுனிகள் w_1, w_2 என்னும் நிறைகளையுடைய இரண்டு ஒப்பமான வளையங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழை தன்மீது வழுக்கக்கூடிய நிறை W வைக் கொண்ட ஒப்பமான மூன்றாம் வளையத்தைத் தாங்குகிறது. w_1, w_2 நிறை கொண்ட வளையங்கள நிலைக்குத்துடன் α, β என்னும் கோணங்களில் சாய்ந்துள்ள இரண்டு நிலைத்த கோல்களின் மீது வழுக்குதற்கு சுயாதீனமுடையன. சமநிலையில்,

(i) அவ்விழையின் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணங்கள் சமம் $(= \theta)$ எனக் காட்டுக.

(ii) W, w_1, w_2 என்பவற்றின் சமநிலைகளைத் தனித்தனியாகக் கருதி. $\cot\theta : \tan\beta : \tan\alpha = W : W + 2w_1 : W + 2w_2$ என நிறுவுக.

(i) W நிறையுள்ள வளையம் ஒப்பமானது. இழையின் மீது சுயாதீனமாக வழுக்கிச் செல்லக் கூடியதாயிருப்பதால் இழையின் இருபகுதிகளிலும் இழுவை சமமாகும். T என்க. வளையம் W இன் சமநிலைக்கு லாமியின் தேற்றம்.



$$\frac{T}{sin(180-\theta_1)}=\frac{T}{sin(180-\theta_2)}=\frac{W}{sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{T}{sin\theta_1}=\frac{T}{sin\theta_2}=\frac{W}{sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\Rightarrow sin\theta_1 = sin\theta_2$$

$\Rightarrow \theta_1=\theta_2$ ($=\theta$ என்க)

$$\frac{T}{sin\theta}=\frac{W}{sin2\theta}$$

$$T=\frac{W}{2cos\theta} \quad \text{-----------------(1)}$$

(ii) w_1 நிறையுடைய் வளையத்தில் தாக்கும் விசைகள் வளையத்தின் சமநிலைக்கு,

- **(i)** வளையத்தின் நிறை w_1
- **(ii)** இழையின் இழுவை T
- **(iii)** கோலினால் வளையத்தின் மீது மறுதாக்கம். (ஒப்பமான வளையம் எனவே மறுதாக்கம் கோலிற்கு செங்குத்து)

லாமியின் தேற்றம்.

$$\frac{w_1}{\sin[90+180-(\theta+\alpha)]}=\frac{T}{\sin(90+\alpha)}=\frac{R}{\sin\theta}$$

$$\frac{w_1}{-\cos(\theta+\alpha)}=\frac{T}{\cos\alpha}$$

$$T=-\frac{w_1\cos\alpha}{-\cos(\theta+\alpha)} \quad \text{-------------------------(2)}$$

(1), (2) இலிருந்து,

$$\frac{W}{2\cos\theta}=\frac{w_1\cos\alpha}{-\cos(\theta+\alpha)}$$

$$-W\cos(\theta+\alpha)=2w_1\cos\theta\cdot\cos\alpha$$

$$-W\cos\theta\cdot\cos\alpha+W\sin\theta\cdot\sin\alpha=2w_1\cos\theta\cdot\cos\alpha$$

$$W sin\theta\cdot sin\alpha=(W+2w_1)cos\theta\cdot cos\alpha$$

$$W tan\theta\cdot tan\alpha=W+2w_1$$

$$W tan\alpha=(W+2w_1)\,cot\theta$$

$$\frac{tan\alpha}{W+2w_1}=\frac{cot\theta}{W} \quad \text{---------------------(3)}$$

இவ்வாறே w_2 நிறையுடைய வளையத்தின் சமநிலையைக் கருதி,

$\frac{tan\beta}{W+2w_2}=\frac{cot\theta}{W}$ எனக் காட்டலாம். ---------------------(4)

(3), (4) இலிருந்து, $cot\theta : tan\alpha : tan\beta = W : W+2w_1 : W+2w_2$

பயிற்சி - 2

1. $10kg$ திணிவொன்று, $6m$, $8m$ நீளமுள்ள இரு மெல்லிய நீளா இழையின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறுமுனைகள் ஒரே கிடை மட்டத்தில் $10m$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப் பட்டுள்ளன. இழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

2. $2kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று மெல்லிய நீளா இழை ஒன்றினால் O எனும் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இத் துணிக்கை கிடையாக FN விசையினால் ஒரு பக்கத்திற்கு இழுக்கப்படுகிறது. சமநிலையில் இழை நிலைக்குத்துடன் 60° ஐ அமைக்கிறது. இழையிலுள்ள இழுவையையும், P இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

3. $10kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் 60° சாய்விலுள்ள ஒப்பமான சாய்தளமொன்றின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையை சமநிலையில் வைத்திருக்க (i) கிடையாக (ii) தளத்திற்கு சமாந்தரமாகப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையைக் காண்க.

4. $10kg$ திணிவொன்று $7m$, $10m$ நீளமுள்ள இழைகளின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு. இழையின் மறுமுனைகள் ஒரே கிடைமட்டத்தில் $12m$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு இழையிலுமுள்ள இழுவையைக் காண்க.

5. துணிக்கை ஒன்று ஒப்பமான சாய்தள ஒன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் துணிக்கையை சமநிலையில் வைத்திருக்க
(a) கிடையாக **(b)** சாய்தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையைக் காண்க.

(i) $10kg$ திணிவு $10m$ நீளமும், $6m$ உயரமுள்ள சாய்வில்
(ii) $45kg$ திணிவு $25m$ நீளமும், $20m$ உயரமுடைய சாய்வில்
(iii) $5mg$ திணிவு 30° சாய்வில்.

6. $10kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் 30° சாய்வுடைய ஒப்பமான சாய்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையைப் பேண துணிக்கைக்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த விசையின் பருமனையும், திசையையும் காண்க.

7. $5kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று, அதற்கு இணைக்கப்பட்ட இரு இழை களினால் தாங்கப்படுகிறது. ஓர் இழை கிடையுடன் 60° யில் சாய்ந்துள்ளது. மற்றைய இழையிலுள்ள இழுவை மிகக் குறைவாக இருப்பதற்கு அவ்விழையின் திசையைக் காண்க. இச்சந்தர்ப்பத்தில் இரு இழைகளிலுமுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

8. இலேசான கம்பியொன்று ஒரேமட்டத்தில் $1 \cdot 2m$ கிடைத் தூரத்திலுள்ள A, B எனுமிருபுள்ளிகளுக்கிடையில் ஈர்க்கப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் நடுப்புள்ளியில் $5kg$ திணிவொன்று தொங்கவிடப்பட்டபோது அது AB யிற்கு கீழ் $5cm$ இல் சமநிலையடைகிறது. கம்பியிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

9. இலேசான P எனும் துணிக்கைக்கு மூன்று இழைகள் இணைக்கப்பட்டு துணிக்கை ஓய்விலுள்ளது. இரு இழைகள் கப்பிகளின் மேலாகச்சென்று நிறைகளைத் தாங்கிக் கொண்டு நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்றன. மூன்றாவது இழைக்கு M kg திணிவு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முதலிரு இழைகளும் P யினூடான மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் எதிர்ப்பக்கங்களில் முறையே 30°, 45° கோணங்களை அமைக்கின்றன. M இற்கு மேலதிகமாக $10kg$ திணிவு இணைக்கப்படுகிறது. P தொடர்ந்தும் அதே தானத்தில் இருப்பதற்கு மற்றைய இரு இழைகளுக்கும் மேலதிகமாக என்ன நிறைகள் இணைக்கப்படல் வேண்டும்?

10. மெல்லிய இழை AB ஒன்று தாங்கக்கூடிய அதி உயர் இழுவை $100N$. B இல் $6kg$ திணிவொன்று இணைக்கப்பட்டு A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. புள்ளி B இல் கிடையாக PN விசையினால் இழுக்கப்படுகிறது. இழை அறும் தறுவாயிலிருப்பின் P யின் பெறுமானத்தையும், நிலைக்குத்துடன் இழையின் சாய்வையும் காண்க.

11. ஓர் இலேசான இழை $ABCD$ இரு நிலைத்தப்புள்ளிகள் A, D இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. B இல் $10kg$ திணியும். C இல் $M\,kg$ திணிவும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில், AB நிலைக்குத்துடன் 45° சாய்விலும். CD நிலைக்குத்துடன் 30° சாய்விலும், BC கிடையுடன் மேல்நோக்கி 45° சாய்விலும் உள்ளது. இழையின் AB, BC, CD பகுதிகளிலுள்ள இழுவைகளையும், M இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

12. $ABCD$ எனும் மெல்லிய இழை A, D எனும் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு B யிலும் C யிலும் சமநிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் AB, CD ஆகியன நிலைக்குத்துடன் முறையே $30^\circ, 60^\circ$ கோணங்களை அமைக்கின்றன. BC யிலுள்ள இழுவை, இந்நிறைக்கு சமமெனக்காட்டி BC நிலைக்கத்துடன் 60° இல் சாய்ந்திருக்குமெனக்காட்டுக.

13. A, D என்பன கிடைக்கோடு ஒன்றில் $48cm$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். $66cm$ நீளமுள்ள இலேசான இழை ஒன்றின் முனைகள் A, D என்பனவற்றிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழையில் B எனும் புள்ளி A யிலிருந்து $25cm$ தூரத்திலும் C எனும் புள்ளி D இலிருந்து $29cm$ தூரத்திலும் உள்ளது. B யிலிருந்து $14g$ திணிவு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. BC கிடையாக இருப்பதற்கு C இலிருந்து தொங்கவிடப்படவேண்டிய திணிவு யாது?

14. $W\,kg$ திணிவுடைய துணிக்கை ஒன்று இரு இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையிலுள்ளது. இழையிலுள்ள இழுவைகள் $P\ kg$, $Q\ kg$ ஆகவும் அவ்விழைகள் கிடையுடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணங்கள் முறையே θ, ϕ உம் எனின் $\sin\theta = \dfrac{W^2 + P^2 - Q^2}{2WP}$ எனக் காட்டுக.

15. முக்கோணி ABC இன் உள்வட்டமையம் I, P, Q, R எனும் விசைகள் I இல் முறையே IA, IB, IC வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் $P\sec\dfrac{A}{2} = Q\sec\dfrac{B}{2} = R\sec\dfrac{C}{2}$ என நிறுவுக.

16. முக்கோணி ABC இன் செங்குத்துமையம் H, . HA, HB, HC வழியே தாக்கும் P, Q, R ஆகிய மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பின் $P : Q : R := BC : CA : AB$ என நிறுவுக.

17. $0 \cdot 6m$ நீளமுள்ள இலேசான இழை ஒன்றின் முனைகள் ஒரே கிடைமட்டத்தில் $0 \cdot 3m$ இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B எனும் இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. $50N$ நிறையுடைய ஒப்பமானவளையம் இழையில் வழுக்குமாறு உள்ளது. இவ்வளையத்திற்கு PN கிடைவிசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சமநிலையில் வளையம் B இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே உள்ளது. P இன் பெறுமானத்தையும், இழையிலுள்ள இழுவையையும் காண்க.

18. $31cm$ நீளமுள்ள இழை ஒன்று ஒரே கிடைக்கோட்டில் $25cm$ இடைத்தூரத்திலுள்ள இருபுள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. $90g$ நிறையுடைய சிறிய வளைய மொன்று இவ்விழையில் வழுக்கிச் செல்லக் கூடியது. இவ்வளையத்திற்கு கிடையாக விசை ஒன்று பிரயோகிக்கப்பட சமநிலையில் இவ்வளையம். இழையின் மிகக்கிட்டிய முனையிலிருந்து $7cm$ தூரத்திலுள்ளது. விசையின் பெறுமானம் $50g$ எனக்காட்டி (அண்ணளவாக) இழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

19. $ABCD$ ஒரு சதுரம். CD யின் நடுப்புள்ளி E. AB, AD, EA, CA வழியே முறையே $16, 20, P, Q\ N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் P, Q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

20. $ABCD$ ஒரு சதுரம். $2, 3, \sqrt{2}, 9\,N$ விசைகள் A இல் AB, AC, AD வழியே தாக்குகின்றன. A யில் மேலதிக விசை ஒன்று பிரயோகிக்க நான்கு விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பின் மேலதிக விசையைக் காண்க.

3. சமாந்தர விசைகள், இணை, திருப்பம்

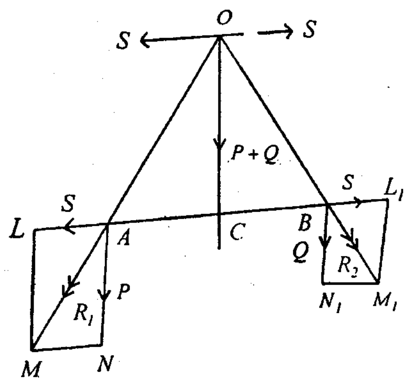
சமாந்தர விசைகள் (Parallel forces)

1. ஒத்த சமாந்தர விசைகள்
இரு சமாந்தர விசைகள் ஒரே திசையிற் செயற்படின் அவை (நிகர்த்த) ஒத்த சமாந்தர விசைகள் எனப்படும்.

2. ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள்
இரு சமாந்தர விசைகள் முரண் திசையிற் செயற்படின் அவை (நிகராத) ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள் எனப்படும்.

இரு ஒத்த சமாந்தர விசைகளின் விளையுள்

A, B எனும புள்ளிகளில் P, Q எனும் இரு ஒத்த சமாந்தர விசைகள் தொழிற்படுகிறது என்க. A இல் BA வழியே S எனும் விசையையும், B இல் AB வழியே S எனும் விசையையும் சேர்க்க. (இதனால் தொகுதியில் எவ்விதமாற்றமும் இல்லை)



P, S என்பவற்றின் விளையுள் R_1, இணைகரம் $ALMN$ இன் மூலைவிட்டம் AM இனால் தரப்படும். Q, S என்பவற்றின் விளையுள் R_2, இணைகரம் $BL_1M_1N_1$ இன் மூலைவிட்டம் BM_1 இனால் தரப்படும்.

AM, BM_1 என்பன நீட்டப்படும் போது O வில் சந்திக்கிறது என்க. விசை R_1 என்பது O வில் P, S எனும் இருவிசைகளாக AN, AL என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகப் பிரிக்கப்படலாம்.

R_2 என்பது O வில் Q, S எனும் இருவிசைகளாக BN_1, BL_1 என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகப் பிரிக்கப்படலாம். எனவே விளையுள் $(P + Q)$ ஆகும்.
விளையுள் $(P + Q)$ ஆனது AB ஐ C இல் சந்திக்கும் என்க.

$\Delta\, OCA, \Delta\, ANM$ என்பன ///

$$\frac{OC}{AN} = \frac{CA}{NM}$$

$$\frac{OC}{P} = \frac{AC}{S}$$

$$P \cdot AC = S \cdot OC \text{ ------------------ (1)}$$

$\Delta\, OCB, \Delta\, BN_1\, M_1$ ///

$$\frac{OC}{BN_1} = \frac{BC}{M_1 N_1}$$

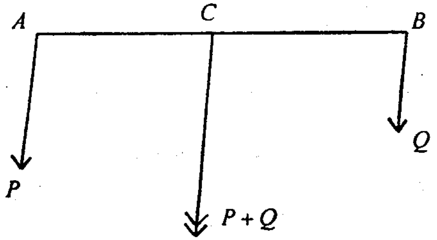
$$\frac{OC}{Q} = \frac{BC}{S}$$

$$Q \cdot BC = S \cdot OC \text{ ---------- (2)}$$

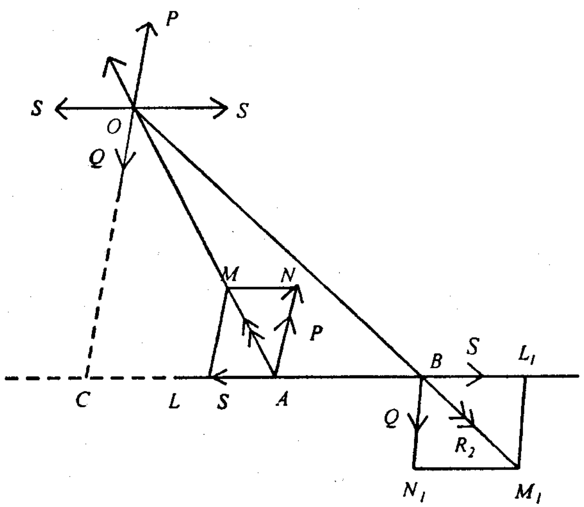
$$P \cdot AC = Q \cdot BC$$

P, Q என்பவற்றின் விளையுள் $(P + Q)$

$$P \cdot AC = Q \cdot BC$$



இரு ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகளின் விளையுள்



புள்ளிகள் A, B இல் P, Q எனும் ஒவ்வா சமாந்தர விசைகள் தாக்குகின்றன. $(P>Q)$ என்க) A இல் BA வழியே S என்ற விசையையும், B இல் AB வழியே S என்ற விசையையும் சேர்க்க. P, S என்பவற்றின் விளையுள் R_1, AM வழியேயும்,

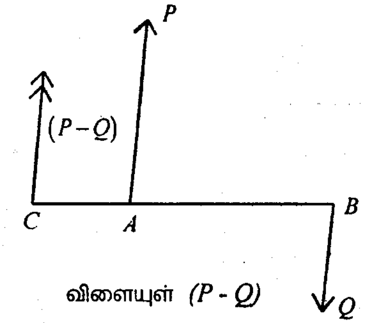
Q, S என்பவற்றின் விளையுள் R_2, BM_1 வழியேயும் தொழிற்படுகின்றன. தாக்கக் கோடுகள் AM, BM_1 என்பன O வில் சந்திக்கின்றன. R_1, R_2 என்பவற்றை மீண்டும் ஆரம்பத் திசைகளுக்குச் சமாந்தரமாகப் பிரிப்பதால் விளையுள் $(P - Q)$ எனப் பெறப்படும்.

$\Delta\, OCA,\ \Delta\, MLA$ ///

$$\frac{OC}{ML} = \frac{AC}{AL} = \frac{OA}{MA}$$

$$\frac{OC}{P} = \frac{AC}{S}$$

$$P \cdot AC = S \cdot OC \text{ ------------------ (1)}$$



விளையுள் $(P - Q)$

$$P \cdot AC = Q \cdot BC$$

$\Delta OCB,\quad \Delta M_1 L_1 B$

$$\frac{OC}{M_1 L_1} = \frac{BC}{L_1 B}$$

$$\frac{OC}{Q} = \frac{BC}{S}$$

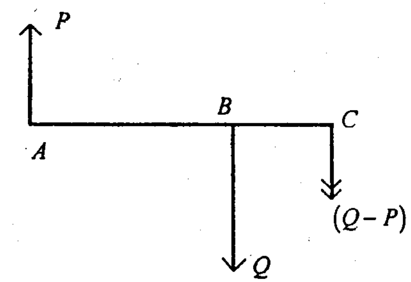
$$Q \cdot BC = S \cdot OC \text{ ------------------ (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து $P \cdot AC = Q \cdot BC$

மேலும் $Q > P$ எனின்,

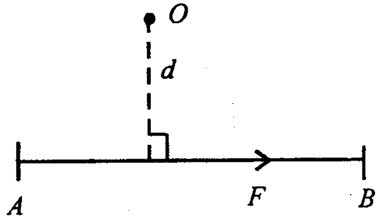
விளையுள் $(Q - P)$ உம்

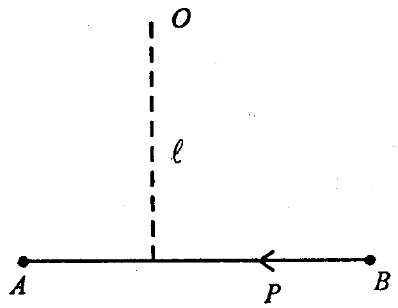
$P \cdot AC = Q \cdot BC$ உம் ஆகும்.



விசை ஒன்றின் திருப்பம் (Moment of a force)

ஒரு புள்ளி பற்றி, ஒரு விசையின் திருப்பமானது அவ்விசையினதும் அப்புள்ளியிலிருந்து அவ்விசையின் தாக்கக் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்தின் பெருக்கமும் ஆகும்.

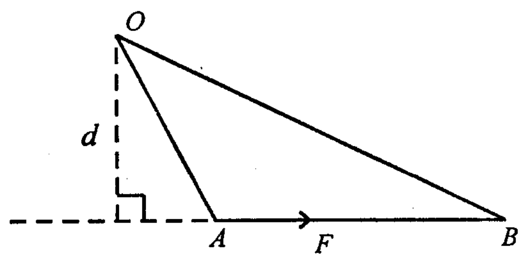


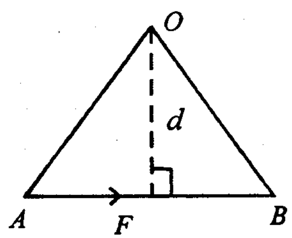


O பற்றிய திருப்பம் $= F \times d$
இங்கு O பற்றிய திருப்பம்
இடஞ்சுழியானது. எனவே
திருப்பம் $\curvearrowleft Fd$

O பற்றிய திருப்பம் $P \times \ell$
இங்கு O பற்றிய திருப்பம்
வலஞ்சுழியானது. எனவே
திருப்பம் $\curvearrowright Fd$ ஆகும்.

திருப்பத்தின் வரைபு வகைக் குறிப்பு (Graphical representation of moment)





விசை F ஆனது, பருமனில் AB யால் குறிக்கப்படுகிறது என்க. O விலிருந்து விசை F இன் தாக்கக்கோட்டின் செங்குத்துத் தூரம் d என்க.

O பற்றி விசையின் திருப்பம் $= \curvearrowleft F \cdot d$

$$= AB \cdot d$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot d$$

$$= 2\Delta\, OAB$$

எனவே திருப்பத்தின் பருமன் $2\Delta\, OAB$ யால் தரப்படும்.

திருப்பம் பற்றிய தேற்றம்

இரு விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி பற்றி அவற்றின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையானது, அப்புள்ளியைப் பற்றி அவற்றின் விளையுளின் திருப்பத்திற்குச் சமமாகும்.

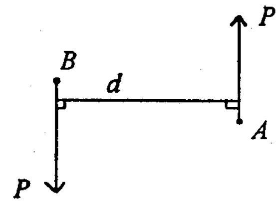
பொதுத் திருப்பத் தத்துவம்

ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தாக்கும் எத்தொகை ஒரு தள விசைகளும் ஒரு விளையுளை உடையனவாயின் அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை, அதே புள்ளி பற்றி அவற்றின் விளையுளின் திருப்பத்திற்குச் சமமாகும்.

இணை (Couple)

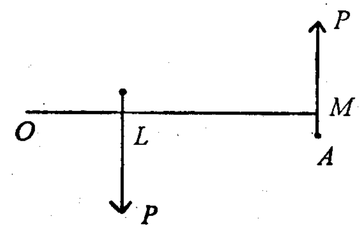
இரு ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள் பருமனில் சமமாகவும், வெவ்வேறு தாக்கக் கோடுகளிலும் தொழிற்படுமெனின் அவ்விரு விசைகளும் ஓர் இணைக்கு ஒடுங்கும். இணையின் திருப்பம் அவற்றுள் ஒரு விசையினதும் அவற்றிற்கிடையேயான தூரத்தினதும் பெருக்கமாகும்.

இணையின் திருப்பம் $= \curvearrowleft P \cdot d$

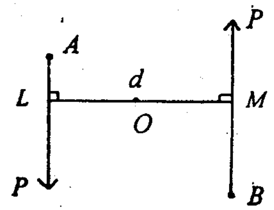


இணையின் தளத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி பற்றியும் இணையின் திருப்பம் ஒரு மாறிலியாகும்.

$$O \curvearrowleft = P \cdot OM - P \cdot OL$$
$$= P\,(OM - OL)$$
$$= P \cdot LM$$
$$= P \cdot d$$



$$O \curvearrowleft = P \cdot OL + P \cdot OM$$
$$= P\,(OL + OM)$$
$$= P \cdot LM$$



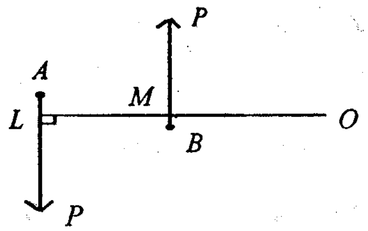
$$= P \cdot d$$

$$O \circlearrowright = P \cdot OL - P \cdot OM$$

$$= P\left(OL - OM\right)$$

$$= P \cdot LM$$

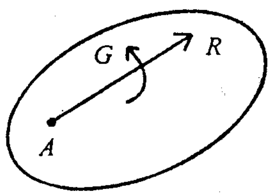
$$= P \, . \, d$$



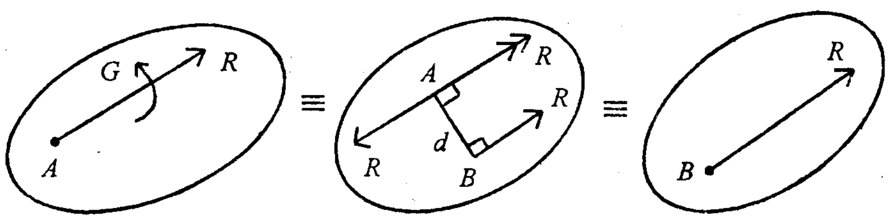
எனவே, இணையின் தளத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி பற்றியும் அவ்விணையின் திருப்பம் ஒரு மாறிலியாகும்.

ஒரே தளத்திலுள்ள ஒரு விசையும், ஓர் இணையும் ஒரு தனிவிசையாக ஒடுக்கப்படலாம்.

தளம் ஒன்றில் புள்ளி A யில் விசை R உம் தளத்தில் இடஞ்சுழியாக G எனும் இணையும் தொழிற்படுகிறது என்க.

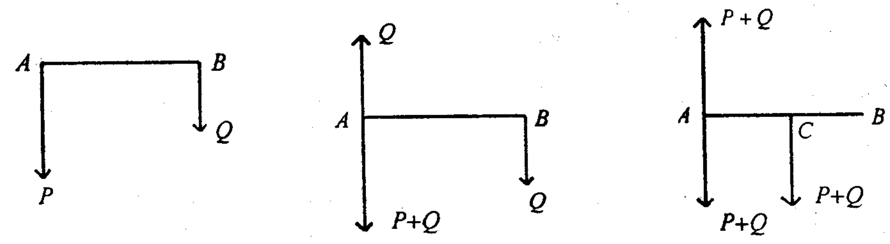


இணை G இற்குப் பதிலாக A இல் பருமனில் R உம் திசையில் எதிரானதுமான R எனும் விசையும் A யிலிருந்து d தூரத்தில் $\left(d = \dfrac{G}{R}\right)$ புள்ளி B இல் R எனும் விசையும் தொழிற்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

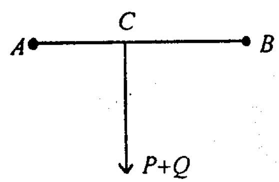


இப்பொழுது தரப்பட்ட விசைத் தொகுதி புள்ளி B இல் தனிவிசை R இற்கு ஒடுங்கும்.

எனவே விசை ஒன்றுடன் (R) இணை தொழிற்படும் போது (G) அதன் விளையுளானது இணையின் தளத்தில் தனி விசையாகும். இத்தனி விசையானது பருமனிலும், திசையிலும் R இற்குச் சமமாக இருக்கும் தாக்கக்கோடு மாற்றமடையும். சமாந்தர விசைகளின் விளையுளைக் காண்பதற்கு இம்முடிபைப் பயன்படுத்தலாம்.
A, B இல் சமாந்தர விசைகள் P, Q தாக்குகின்றன.



(i) (ii) (iii)



(i) இல் சமாந்தர விசைகள் P, Q என்பன A, B இல் தாக்குகின்றன.

(ii) பருமனில் சமனும் திசையில் எதிருமான விசைகள் Q, A இல் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. இதனால் தொகுதியில் எவ்விதமாற்றமும் இல்லை.

இப்பொழுது A இல் (P + Q) எனும் விசையும், $Q \cdot AB$ பருமனுள்ள (வலஞ்சுழியாக) இணையும் தொழிற்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

(iii) $Q \cdot AB$ பருமனுள்ள இணையை இப்பொழுது A இல் (P + Q), C இல் (P + Q) பருமனுள்ள விசைகளால் குறிக்கலாம்.

$Q \cdot AB = \left(P + Q\right). \, AC.$ எனவே விளையுள் C இல் (P + Q)

$Q\left(AC + CB\right) = \left(P + Q\right) AC$

$\underline{Q \cdot BC = P \cdot AC}$

உதாரணம் 1

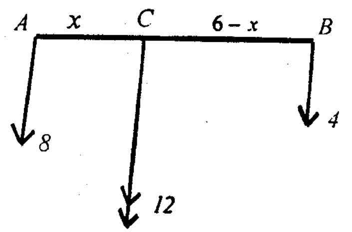
(i) A, B என்னும் புள்ளிகளில் $8N, 4N$ சமாந்தர விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுள் AB ஐ C இல் சந்திக்கிறது. $AB = 6cm$ ஆகும்.

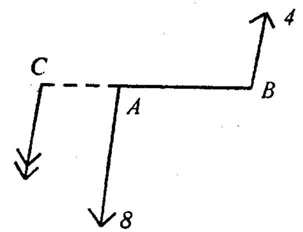
(a) விசைகள் ஒத்த சமாந்தர விசைகள் எனின்,

(b) விசைகள் ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள் எனின்,

விளையுளையும் நீளம் BC யையும் காண்க.

(ii) $ABCD$ ஓர் இணைகரம். A, B, C, D என்பவற்றில் ஒத்த சமாந்தர விசைகள் $P, 2P, P, 2P\ N$ தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.





(a) விளையுள் $8 + 4 = 12$

$8 \cdot x = 4(6 - x)$

$8x = 24 - 4x$

$12x = 24$

$x = 2cm$

$AC = 2cm$

$\therefore BC = 4cm$

(b) விளையுள் நீட்டப்பட்ட BA ஐ C இல் வெட்டுகிறது என்க.

$BC = xcm.$

விளையுள் $(8 - 4) = 4N$

$8 \cdot AC = 4 \cdot BC$

$8(x - 6) = 4x$

$8x - 48 = 4x$

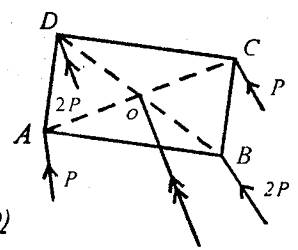
$4x = 48$

$x = 12 \qquad BC = 12cm$

(iii) ABCD இணைகரம். மூலைவிட்டங்கள் AC, BC என்பன O வில் வெட்டுகின்றன.

A இல் $P + C$ இல் $P = O$ இல் $2P\ (AO = OC)$

B இல் $2P + D$ இல் $2P = O$ இல் $4P\ (BO = OD)$



A இல் $P + B$ இல் $2P + C$ இல் $P + D$ இல் $2P = O$ இல் $6P$.

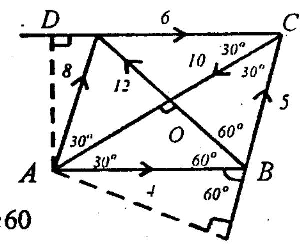
$\therefore$ விளையுள் O இல் $6P$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

சாய்சதுரம் $ABCD$ இன் ஒருபக்க நீளம் $10cm$, ஆகும். $\angle DAB = 60^\circ$ ஆகும். AB, BC, DC, AD, CA, BD வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிப்பிடும் திசைகளில் முறையே $4, 5, 6, 8, 10, 12\ N$ விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) A பற்றி (ii) மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி O பற்றி விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(i) A பற்றி திருப்புத்திறன் எடுக்க.
A யினூடாகச் செல்லும் விசைகளிற்குச் செங்குத்துத் தூரம் இல்லை.
எனவே $5, 6, 12N$ விசைகளை மட்டும் கருதுக.



$A \circlearrowleft = 5 \times 10 sin60 - 6 \times 10 sin60 + 12 \times 10 sin60$

$= 10 sin60 [5 - 6 + 12]$

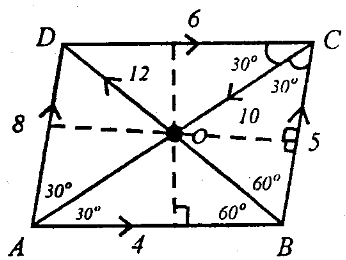
$= 10 sin\ 60 \times 11 \quad \underline{= 55\sqrt{3}\ N \cdot cm}$

$AO = OC = 10 sin60 = 5\sqrt{3}$

$O \circlearrowleft = 4 \times OA \sin 30 + 5 \times OC \sin 30$

$-6 \times OC \sin 30 - 8 \times OA \sin 30$

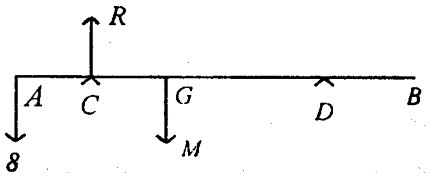
$= \dfrac{5\sqrt{3}}{2}[4 + 5 - 6 - 8] = \dfrac{-25\sqrt{3}}{2}\ N \cdot cm$



உதாரணம் 3

$20cm$ நீளமுடைய சீரற்ற கோல் AB, C, D எனும் இரு தாங்கிகளின் மீது கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. இங்கு $AC = BD = 4\ cm$ ஆகும். சமநிலையைக் குலைக்காது A யிலிருந்து தொங்கவிடப்படக்கூடிய அதிகூடிய திணிவு $8kg$. இதுபோல் B யிலிருந்து தொங்கவிடக்கூடிய அதிகூடிய திணிவு $10kg$. கோலின் திணிவையும், A யிலிருந்து கோலின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரத்தையும் காண்க.

கோலின் திணிவு $M\,kg$.
$AG = x cm$ என்க.



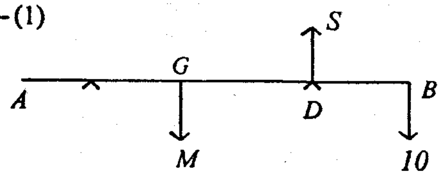
கோலின் சமநிலைக்கு

(i) $C \curvearrowleft = 0$

$8 \cdot AC - M \cdot GC = 0$

$8 \times 4 = M(x-4)$

$M(x-4) = 32$ ——————— (1)



(ii) $D \curvearrowleft = 0$

$M \cdot GD - 10 \times 4 = 0$

$M \cdot (16 - x) = 40$ ——————— (2)

$\frac{(1)}{(2)} \quad \frac{x-4}{16-x} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$

$5(x-4) = 4(16-x)$

$9x = 84$

$x = \frac{28}{3}\ cm$

$M(x-4) = 32$ இலிருந்து

$M\left(\frac{28}{3} - 4\right) = 32$

$M = 6\ kg$; புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $9\frac{1}{3} cm$.

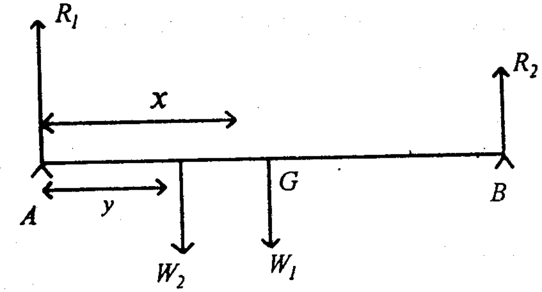
உதாரணம் 4

$5m$ நீளமுள்ள சீரில்லாத பலகை ஒன்று ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A, B என்னும் தாங்கிகளில் அதன் முனைகளிலிருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சிறுவன் A யிலிருந்து B யிற்கு நடந்து சென்ற போது A யிலும் B யிலும் உள்ள உயர் மறுதாக்கங்கள் முறையே $300N, 250N$ எனவும் A யிலே உள்ள இழிவு மறுதாக்கம் $100N$ எனவும் அவதானிக்கப்பட்டது.

பலகையின் நிறை W_1 எனவும் சிறுவனின் நிறை W_2 எனவும், A யிலிருந்து பலகையின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் x மீற்றர் எனவும், A யிலிருந்து சிறுவன் பலகையில் y மீற்றர் தூரத்திலும் உள்ளான் எனக் கொண்டு

(i) A, B யிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

(ii) இதிலிருந்து தேவையான சமன்பாடுகளைப் பெற்று W_1, W_2, x என்பவற்றைக் காண்க.



சமநிலைக்கு $\uparrow R_1 + R_2 - (W_1 + W_2) = 0$

$R_1 + R_2 = W_1 + W_2$ ——————— (1)

$A \curvearrowleft = 0$

$R_2 \cdot 5 - W_1 \cdot x - W_2 \cdot y = 0$

$R_2 = \frac{1}{5}[W_1 x + W_2 \cdot y]$ ——————— (2)

$B \curvearrowleft = 0$

$W_1(5-x) + W_2(5-y) - R_1 \cdot 5 = 0$

$R_1 = \frac{1}{5}[W_1(5-x) + W_2(5-y)]$ ——————— (3)

(3) இலிருந்து,

R_1 உயர்வாக இருக்க, $y = 0$ ஆதல் வேண்டும். [சிறுவன் A இல் உள்ளபோது]

$y=0$ ஆக, $R_1 = 300$,

(3) இலிருந்து, $300 = \frac{1}{5}\left[W_1(5-x) + W_2 \cdot 5\right]$ ------------------(A)

(2) இலிருந்து,

R_2 உயர்வாக இருக்க, $y = 5$ ஆதல் வேண்டும் [சிறுவன் B இல் உள்ளபோது]

$y = 5$ ஆக, $R_2 = 250$

(2) இலிருந்து, $250 = \frac{1}{5}\left[W_1 x + 5W_2\right]$ ------------------(B)

(3) இலிருந்து R_1 இழிவாக $y = 5$ ஆதல் வேண்டும் [சிறுவன் B இல் உள்ள போது]

$y = 5$ ஆக, $R_1 = 100$

$100 = \frac{1}{5}\left[W_1(5-x) + W_2 \times 0\right]$ ------------------(C)

(A) $\Rightarrow W_1(5-x) + 5W_2 = 1500$ ------------------(4)

(B) $\Rightarrow W_1 x + 5W_2 = 1250$ ------------------(5)

(C) $\Rightarrow W_1(5-x) = 500$ ------------------(6)

(4), (6) இலிருந்து $5W_2 = 1000$, $W_2 = 200N$

(5) இல் $W_2 = 200$ என இட, $W_1 \cdot x = 250$

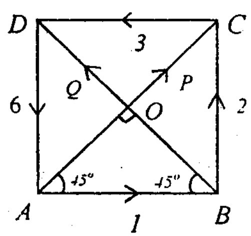
(6) இல் $5W_1 - W_1 x = 500$

$W_1 = 150N$

$x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ மீற்றர்

உதாரணம் 5

$ABCD$ $2m$ பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் $1, 2, 3, 6, P, Q$ நியூட்டன் பருமனுள்ள விசைகள் AB, BC, CD, DA, AC, BD வழியே (எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிப்பிடும் திசைகளில்) தாக்குகின்றன. இத்தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமெனின் P, Q இன் பெறுமானங்களையும், இணையின் திருப்பத்தையும் காண்க.



தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குவதால்,

(i) விசைகளின் விளையுள் விசை பூச்சியம்

(ii) எந்தவொரு புள்ளி பற்றியும் விசைகளின் திருப்பம் ஒரு மாறிலி.

$\rightarrow X = 1 - 3 + P\cos 45 - Q \cdot \cos 45 = 0$

$P - Q = 2\sqrt{2}$ ------------------(1)

$\uparrow Y = 2 - 6 + P\sin 45 + Q\sin 45 = 0$

$P + Q = 4\sqrt{2}$ ------------------(2)

(1), (2) இலிருந்து $P = 3\sqrt{2}$, $Q = \sqrt{2}$

$A \curvearrowleft = (2 \times 2) + (3 \times 2) + (Q \times 2\cos 45)$

$= 4 + 6 + \sqrt{2} \times 2\cos 45$

$= 12 \cdot N \cdot m$

எனவே இணையின் திருப்பம் $= 12 \cdot N \cdot m$

[O பற்றித் திருப்பம் எடுத்தல் இலகுவானது என்பதை அவதானிக்க.

$O \curvearrowleft = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 6 \times 1 = 12 N \cdot m$]

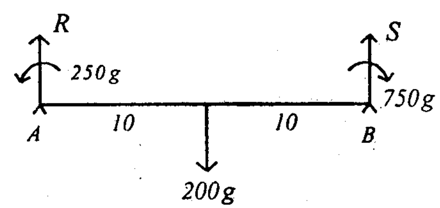
உதாரணம் 6

(i) $20m$ நீளமும் $200kg$ திணிவும் உடைய AB என்னும் சீரான கோல் A, B இல் உள்ள இரு தாங்கிகளில் கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. A இல் இடஞ்சுழியாக $250g$ Nm திருப்பமுள்ள இணையும், B இல் வலஞ்சுழியாக $750g\,Nm$ திருப்பமுள்ள இணையும் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. தாங்கிகளிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

(ii) W நிறையும் $2a$ நீளமுள்ள சீர்க்கோல் AB யின் முனை A இற்கு ஓர் இலேசான நீளா இழை இணைக்கப்பட்டு இழை சீலிங்கிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றது. கோலினையும், இழையையும் கொண்ட நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கோலுக்கு G திருப்பமுடைய இணை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. $G \leq Wa$ எனின், சமநிலை சாத்தியம் எனக் காட்டி, இந்நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்படுமிடத்து இழையின் இழுவையையும், நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வையும் காண்க.

(i) கோலின் சமநிலைக்கு

A, B யில் மறுதாக்கங்கள் R, S என்க.



$\uparrow R + S - 200g = 0$

$R + S = 200g$ ------------------(1)

$A \curvearrowleft = 0$

$S \cdot 20 - 200g \times 10 - 750g + 250g = 0$

$20S = 2500g$

$S = 125g, \quad R = 75g$

(ii) சமநிலைக்கு

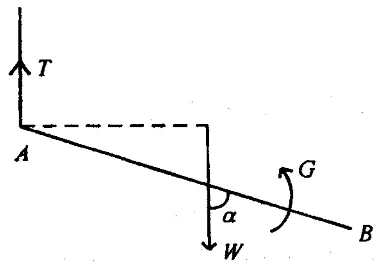
$\uparrow T - W = 0, \quad T = W$

$A \curvearrowleft = 0$

$-W \cdot a\sin\alpha + G = 0$

$G = W \cdot a\sin\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{G}{Wa} \qquad O \le \sin\alpha \le 1$



$\dfrac{G}{Wa} \le 1$

$G \le W \cdot a$

சமநிலையில் இழுவை $T = W, \quad Sin\alpha = \dfrac{G}{Wa}$

உதாரணம் 7

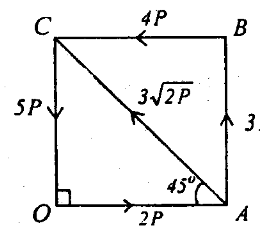
$OABC$ என்பது a பக்கமுள்ள ஒருசதுரம். விசைகள் $2P, 3P, 4P, 5P, 3\sqrt{2}P$ ஆகியன முறையே OA, AB, BC, CO, AC வழியே தாக்குகின்றன.

(i) விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும், திசையையும் காண்க.

(ii) A பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(iii) விளையுளின் தாக்கக்கோடு நீட்டப்பட்ட OA ஐ M இல் சந்திப்பின், AM இன் தூரத்தைக் காண்க.

OA இற்குச் சமாந்தரமாகவும்
OC இற்குச் சமாந்தரமாகவும்
விசைகளைப் பரிக்க

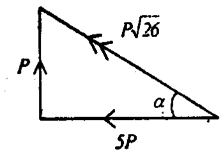


$\rightarrow X = 2P - 4P - 3\sqrt{2P}\ \cos 45°$

$= 2P - 4P - 3P = -5P$

$\uparrow Y = 3P - 5P + 3\sqrt{2}\,P \sin 45°$

$= 3P - 5P + 3P = P$



(i) $R = \sqrt{25P^2 + P^2} = P\sqrt{26}$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$

(ii) $A \curvearrowleft = 4P \times a + 5P \cdot a = 9P \cdot a$

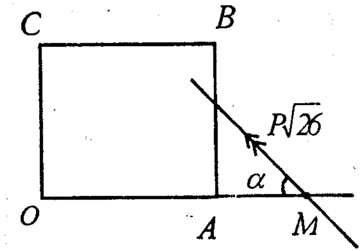
(iii) A பற்றி விளையுளின் திருப்பம் $= A$ பற்றி விசைகளின் திருப்பம்

$P\sqrt{26} \cdot AM \sin\alpha = 9P \cdot a$

$P\sqrt{26} \times x \sin\alpha = 9P \cdot a$

$\sqrt{26} \times x \times \dfrac{1}{\sqrt{26}} = 9a$

$\underline{\underline{x = 9a}}; \qquad AM = 9a$



$AM = x$ என்க.

உதாரணம் 8

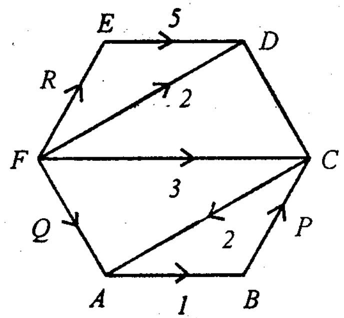
$ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். $1, 2, 3, 2, 5, P, Q, R$ நியூட்டன் விசைகள் முறையே $AB, CA, FC, FD, ED, BC, FA, FE$ வழியே தாக்குகின்றன. இத்தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் P, Q, R இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ஒரு பக்க நீளம் $2a$ என்க.

$\rightarrow X = 1 + 5 + 3 + 2\cos 30 - 2\cos 30$

$+ P\cos 60° + Q\cos 60° + R\cos 60°$

$= \dfrac{P + Q + R}{2} + 9$



$\uparrow Y = \uparrow P\sin 60 - Q\sin 60 + R\sin 60$

$+ 2\sin 60 - 2\sin 60$

$= (P - Q + R)\sin 60°$

$F \curvearrowleft = 1 \cdot 2a\sin 60 - 5 \cdot 2a\ \sin 60 - 2 \cdot 2a + P \cdot 4a\sin 60$

தொகுதி சமநிலையிலிருப்பதால் $X = 0, Y = 0, F \circlearrowleft = 0$

$F \circlearrowleft = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}\ P = 0$

$$P = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{------------} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} X = 0 \Rightarrow P + Q + R = -18 \\ Y = 0 \Rightarrow P - Q + R = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2Q = -18,\ Q = -9 \quad \text{------------} (2)$$

$$P = -11 - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{------------} (3)$$

பயிற்சி 3 (a)

முதலாம் இரண்டாம் வினாக்களில் சமாந்தரவிசைகள் P, Q இன் பிரயோகப் புள்ளிகள் A, B உம் அவற்றின் விளையுள் R, AB ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி C உம் ஆகும்.

1. P, Q என்பன ஒத்த சமாந்தர விசைகள்.

(i) $P = 5N, \quad Q = 8N, \quad AB = 26cm, \quad R, AC$ என்பவற்றைக் காண்க.

(ii) $P = 15N, Q = 15N, AB = 20cm, \quad R, AC$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(iii) $P = 8N, R = 18N, AC = 10cm, Q, AB$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(iv) $Q = 10N, AC = 14cm, AB = 20cm, P, R$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(v) $R = 60N, AC = 5cm, BC = 7cm, P, Q$ என்பனவற்றைக் காண்க.

2. P, Q என்பன ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள்

(i) $P = 21N \quad Q = 15N, AB = 8cm; R, AC$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(ii) $P = 17N \quad Q = 25N, AB = 20cm; R, AC$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(iii) $P = 8N, \quad R = 17N, AC = 90cm, Q, AB$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(iv) $Q = 11N, \quad AB = 17\frac{1}{2} cm, \quad AC = -14cm; P, R$ என்பனவற்றைக் காண்க.

(v) $AB = 24cm, \quad AC = -18cm, \quad R = 40N; \quad P, Q$ என்பனவற்றைக் காண்க.

3. ஒத்த சமாந்தர விசைகள் $9, 12N, 42cm$ இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனையும் விளையுள் AB ஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க. இவ்விசைகள் ஒவ்வா சமாந்தர விசைகள் எனின், விளையுளையும் விளையுளின் நிலையையும் காண்க.

4. இரு ஒத்த சமாந்தர விசைகளுள் ஒன்று $8N$, விளையுள் $20N$ ஆகும். விளையுள் $8N$ விசையிலிருந்து $6cm$ தூரத்திலுள்ளது. மற்றைய விசையையும் $8N$ விசையிலிருந்து அதன் தூரத்தையும் காண்க.

5. நான்கு சம ஒத்த சமாந்தர விசைகள் செவ்வகம் ஒன்றின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன. விளையுள், செவ்வகத்தின் மையத்தினூடு செல்லும் எனக் காட்டுக.

6. மூன்று சம ஒத்த சமாந்தர விசைகள் முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன. விளையுள் முக்கோணியின் மையப்போலியினூடாக செல்லும் எனக் காட்டுக.

7. மூன்று சம ஒத்த சமாந்தர விசைகள் முக்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. விளையுள் முக்கோணியின் மையப்போலி யினூடாகச் செல்கிறது எனக் காட்டுக.

8. சதுரம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் A, B, C இல் முறையே $4, 2, 4N$ பருமனுள்ள ஒத்த சமாந்தர விசைகள் தாக்குகின்றன. நான்கு விசைகளினதும் விளையுள் சதுரத்தின் மையத்தினூடு செல்லுமாறு உச்சி D இல் தாக்க வேண்டிய விசையின் பருமன் யாது?

9. முக்கோணி ABC இல் $AB = 4cm, \quad BC = 3cm, \quad AC = 5cm. \quad 2, 5, 3N$ பருமனுள்ள ஒத்த சமாந்தர விசைகள் உச்சிகள் A, B, C இல் தாக்குகின்றன. விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் நிலையைக் காண்க.

10. P, Q என்பன ஒத்த சமாந்தர விசைகள். Q, அதற்குச் சமாந்தரமாக x தூரத்தினூடு நகர்த்தப்படும் எனின் P இனதும் Q இனதும் விளையுள் $\dfrac{Qx}{P+Q}$ தூரத்தினூடு நகர்த்தப்படும் எனக் காட்டுக.

3 (b)

திருப்பம், இணை

1. $ABCD \quad 2a$ பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம். AB, BC, DC, AD, AC, BD வழியே $2, 4, 6, 3, 8\sqrt{2}, \ 16\sqrt{2N}$ விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) A பற்றி (ii) சதுரத்தின் மையம் O பற்றி இவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் காண்க.

2. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம் $AB = 12\ cm$, $BC = 5\ cm$. மூலைவிட்டங்கள் O இல் வெட்டுகின்றன. $4, 6, 8, 10, 26\ 39N$. விசைகள் முறையே BA, BC, CD, AD, CA, BD வழியே தாக்குகின்றன.
(i) B பற்றி (ii) O பற்றி இவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் காண்க.

3. $2a$ பக்கமுடைய சமபக்க முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் D, E, F ஆகும். BC, AC, AB, DA, BE, CF வழியே $2, 5, \sqrt{3}, 4, 6\sqrt{3}, 8N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. முக்கோணியின் ஒவ்வொரு உச்சி பற்றியும் மையப்போலி G பற்றியும் விசைத் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் காண்க.

4. கிடைக்கோடொன்றில் $1m$ இடைத்தூரங்களில் A, B, C, D எனும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. AD இற்குச் செங்குத்தாக மேல்நோக்கி $3N\ A$ இலும், AD இற்குச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி $2N\ B$ இலும் $4N$ விசை C இல் மேல்நோக்கி CD யுடன் $30°$ இலும் D இல் $6\sqrt{3N}$, DA யுடன் $60°$ இல் கீழ் நோக்கியும் தாக்குகிறது.
(i) A பற்றி (ii) C பற்றி இவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் காண்க.

5. $2a$ பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் மையம் O ஆகும். AB, BC, DC, DE, EF, AF வழியே $1, 2, 3, 4, 5, 6N$ விசைகள் தாக்குகின்றன.
(i) A பற்றி (ii) O பற்றி இவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் காண்க.

3 (c)

1. $1 \cdot 8m$ நீளமும் $10kg$ திணிவும் உடைய சீர்க்கோல் AB அதன் முனைகளில் இரு ஒப்பமான தாங்கிகள் மீது கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. கோலில் A யிலிருந்து $1 \cdot 2m$ தூரத்தில் $3kg$ திணிவு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தாங்கிகளிலுள்ள உதைப்பை காண்க.

2. $10m$ நீளமும் $40kg$ திணிவும் உடைய AB எனும் சீரான வளை A இலும் B இலிருந்து $2m$ தூரத்திலுள்ள தாங்கி C யிலும் கிடையாக ஒய்கிறது. A இலிருந்து $6m$ தூரத்தில் கோலில் ஒரு புள்ளியில் mkg திணிவு தொங்கவிடப்படுகிறது. கோலில் C யிலுள்ள மறுதாக்கம் A யிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் இரு மடங்கெனின் m இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. $1 \cdot 5m$ நீளமும் $3kg$ திணிவும் உடைய சீர்க்கோல் AB இல் A இலிருந்து $0 \cdot 3, 0 \cdot 6, 0 \cdot 9, 1 \cdot 2m$ தூரங்கள் முறையே $1kg, 2kg, 3kg, 4kg$ திணிவுகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கோலைக் கிடையாகச் சமநிலையில் வைத்திருக்க A இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அக்கோல் தாங்கப்பட வேண்டும் எனக் காண்க.

4. $3m$ நீளமும் $6kg$ திணிவும் உடைய சீரான வளை AB, A யிலும் கோலில் வேறொரு புள்ளியிலும் இரு ஒப்பமான தாங்கிகள் மீது கிடையாகத் தாங்கப் படுகிறது. B இல் $1kg$ திணிவும் B இலிருந்து $1m, 2m$ தூரங்களில் $2kg, 4kg$ திணிவுகளும் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. தாங்கி A இல் உதைப்பு $5gN$ எனின் A இலிருந்து மற்றைய தாங்கியின் தூரத்தைக் காண்க.

5. $1 \cdot 8m$ நீளமும் $1kg$ திணிவும் உடைய சீர்க்கோல் அதன் முனைகளில் தாங்கிகளின் மீது கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தாங்கியும் தாங்கக்கூடிய அதி உயர் உதைப்பு $6gN$ ஆகும். எந்த ஒரு தாங்கியையும் உடைக்காது $8 \cdot 5kg$ திணிவை கோலின் எப்பகுதியில் வைக்கலாம்?

6. $3 \cdot 6m$ நீளமும் $30kg$ திணிவும் உடைய சீரான வளை AB, முனைகள் A, B இல் இணைக்கப்பட்ட இரு நிலைக்குத்து இழைகளினால் கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு இழையும் $196N$ வரை மட்டாகத் தாங்கக் கூடியது எந்த ஒரு இழையையும் அறுக்காமல் $7 \cdot 5cm$ திணிவைக் கோலின் எப்பகுதியில் தொங்கவிடலாம் எனக் காண்க.

7. $0 \cdot 6m$ நீளமும் $17kg$ திணிவும் உடைய சீரான வளை AB இரு நிலைக்குத்தான இழைகளினால் கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. ஒரு இழை A இலிருந்து $7 \cdot 5cm$ தூரத்திலும் மற்றைய இழை B இலிருந்து $10cm$ தூரத்திலும் கோலில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முதலாவது இழை தாங்கக்கூடிய இழுவை $9gN$ இரண்டாவது இழை தாங்கக் கூடிய இழுவை $10gN$. எந்த ஒரு இழையையும் அறுக்காமல் $1 \cdot 7kg$ திணிவைக் கோலின் எப்பகுதியில் வைக்கலாம்?

8. $(a+b)$ நீளமும் W நிறையும் உடைய கோல் AB இன் புவியீர்ப்பு மையம் A யிலிருந்து a தூரத்தில் உள்ளது. இக்கோல் c இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு கத்தி விளிம்புகளின் மீது ஒவ்வொரு கத்தி விளிம்பிற்கும் அப்பால் உள்ள நீளங்கள் சமமாக இருக்குமாறு கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. கத்தி விளிம்பின் மீதான உதைப்புக்கள் முறையே $\frac{a-b+c}{2c}W$, $\frac{b-a+c}{2c}W$ எனக் காட்டுக.

9. கிடையான வளை $ABCD$ தாங்கிகள் B, C இன் மீது தாங்கப்படுகிறது. இங்கு $AB = BC = CD$. A இல் தொங்கவிடப்படும் pkg திணிவு அல்லது D இல் தொங்கவிடப்படும் qkg திணிவு அவ்வளையை மட்டமாகச் சரிக்குமெனத் தெரிகிறது. வளையின் திணிவைக் கண்டு வளையின் புவியீர்ப்புமையம் AD ஐ $2P+Q : P+2Q$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனக் காட்டுக.

10. $12kg$ திணிவும் G இல் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் உடைய நேரிய கிடைவளை $ABGCD$, ஒவ்வொன்றும் கோலின் நிறையை மட்டமாகத் தாங்கக்கூடிய இரு நிலைக்குத்து இழைகளினால் மட்டமாகத் தாங்கக்கூடிய இரு நிலைக்குத்து இழைகளினால் B, C இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $AB = 5cm$, $BG = 7 \cdot 5cm$, $GC = 10\ cm$, $CD = 7 \cdot 5cm$ ஆகும். A இலிருந்து $M_1\,kg$ திணிவும் D இலிருந்து $M_2\ Kg$ திணிவும் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள போது ஒவ்வொரு இழையிலுமுள்ள இழுவைகளைக் காண்க. இரு இழைகளும் அறும் தறுவாயிலிருப்பின் M_1, M_2 இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

3 (d)

1. $ABCD\ 1m$ பக்கமுள்ள சதுரம். AB, BC, CD, AD வழியே $4, 2, 1, 2N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஐ வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

2. $ABCD\ a$ பக்கமுள்ள சதுரம். AB, BC, CD, DA, AC, BD வழியே $1, 2, 3, 4, 9\sqrt{2}, \sqrt{2}N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஐ L இல் சந்திக்கிறது. விளையுளையும் AL இன் நீளத்தையும் காண்க. இவ்விசைத் தொகுதி LB, LD வழியே தாக்கும் P, Q எனும் இரு விசைகளுக்கு சமானமாயின் P, Q இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. $ABCD\ a$ பக்கமுள்ள சதுரம் DA, CB, CD, BA வழியே $11, 7, 19, 5N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு AD ஐ இரு கூறிடுகிறது எனவும், CD ஐ முக்கூறிடுகிறது எனவும் காட்டுக.

4. $ABCD$ ஒரு சதுரம் $4,8\ PN$ பருமனுள்ள விசைகள் AB, BC, DC வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் AC இற்கு சமாந்தரமெனின் P இன் பெறுமானத்தையும் விளையுளின் பருமனையும் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB, BC என்பவற்றை முறையே L, M என்பவற்றில் சந்திப்பின் $AL = LB = BM = MC$ எனக் காட்டுக.

5. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, EF, AF வழியே முறையே $3, 4, 2, 1, P, Q,$ நியூட்டன் விசைகள் தாக்குகின்றன. ஆறு விசைகளினதும் விளையுள் CE வழியே இருப்பின் P, Q இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

6. $ABCD\ a$ பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம், $4, 3, 2, 1, P, Q$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CD, AD, AC, DB வழியே தாக்குகின்றன.

   (i) விளையுள் AB வழியே இருக்குமெனின் P, Q ஐக் காண்க.

   (ii) விளையுளின் தாக்கக்கோடு B இனூடாக AC க்கு சமாந்தரமாக அமையுமெனின் விளையுளின் பருமனைக் காண்க.

7. $ABCD$ என்பது. பக்கமுள்ள சதுரம் $4, 7, 1, 4, 3\sqrt{2}$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, CB, CD, AD, BD வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

8. முக்கோணி ABC இல் $AB = 4a$, $AC = 3a$, $\hat{A} = 90^o$ ஆகும். $17P, 15P, 3P$ பருமனுடைய விசைகள் முறையே AB, BC, AC வழியே தாக்குகின்றன.

   (a) இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுளையும், விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB உடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

   (b) விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஐ வெட்டும்புள்ளி A யிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளதெனக் காண்க.

   இவ்விசைத் தொகுதிக்கு முக்கோணியின் தளத்தில் G திருப்பமுடைய இணை சேர்க்கப்படுகிறது. புதிய தொகுதியின் விளையுள் B யினூடாகச் செல்லும் எனின் இணை G இன்பருமனையும் போக்கினையும் காண்க.

9. செவ்வகம் $ABCD$ இல் $AB = a$, $AD = 2a$, M, AD யின் நடுப்புள்ளி. விசைகள் $P, 2P, 4P, 6P, 3\sqrt{2}P, \sqrt{5}P$, என்பன முறையே CB, DA, BA, CD, MB, DB வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க. விளையுள் AD ஐ X இல் சந்திப்பின் நீளம் AX ஐக் காண்க. இத் தொகுதிக்குச் சமவலுவான B, D யினூடாகத் தாக்கும் இரு சமாந்தர விசைகளைக் காண்க.

10. அடர் ஒன்று சமபக்க முக்கோணி ABC வடிவில் உள்ளது. D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். $4, 8, 4, 3, 3, N$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CA, BE, CF வழியே தாக்குகின்றன. அடரில் விளையுள் விசையைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு நீட்டப்பட்ட AD ஐ G இல் வெட்டுகிறது எனின் $DG = AD$ எனக் காட்டுக. அடரானது EF, DF, ED வழியே தாக்கும் மூன்று விசைகளினால் சமநிலையில் பேணப்படுகிறது எனின், இம்மூன்று விசைகளினதும் பருமன்களைக் காண்க.

4. உராய்வு – I

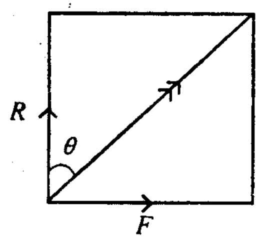
உராய்வு விதிகள் (Laws of Friction)

1. உராய்வின் திசையானது பொருள் இயங்க நாடும் திசைக்கு எதிரானதாகும்.
2. உராய்வின் பருமனானது ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு வரைக்கும் இயக்கத்தை உண்டு பண்ண நாடும் விசைக்கு சமமாகும்.
3. ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு உராய்வை மட்டுமே செயல்பட வைக்கலாம். இந்த உயர் அளவானது எல்லை உராய்வு எனப்படும்.
4. எல்லை உராய்வின் பருமனானது தந்த பரப்புகளுக்கிடையேயான செவ்வன் மறுதாக்கத்துடன் மாறா விகிதத்தைக் கொண்டுள்ளது. (இவ்விகிதம் அப் பரப்புக்களின் தன்மையிற் சார்ந்துள்ளது). இம் மாறாவிகிதம் உராய்வுக் குணகம் எனப்படும்.
5. செவ்வன் மறுதாக்கம் மாறாதிருக்கும் வரையில் உராய்வின் அளவானது அது தொடுகையுடனிருக்கும் பரப்புக்களின் பரப்பளவுகள் வடிவம் ஆகியவற்றில் தங்காததாகும்.
6. இயக்கம் ஏற்படும் போதும் உராய்வானது இயக்கத்தை எதிர்த்துக் கொண்டே இருக்கும். அது வேகத்தில் தங்காததாகவும், செவ்வன் மறுதாக்கத்திற்கு விகித சமமாகவும் இருக்கும். ஆனால் எல்லை உராய்விலும் சிறிது குறைவானதாகும்.

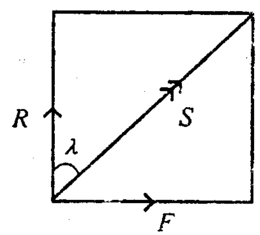
உராய்வு விசை - F

செவ்வன் மறுதாக்கம் - R என்க.

எல்லைச் சமநிலையில் $\frac{F}{R} = \mu$ ஆகும்.



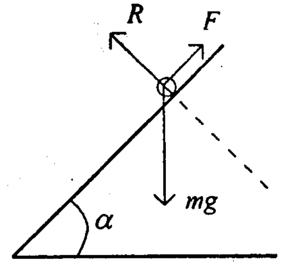
அதாவது பொருள் **மட்டுமட்டாக** இயங்க நாடும் நிலையில் மட்டும் உராய்வு விசை $F = \mu R$ ஆகும்.
எல்லைச் சமநிலையில்,
F, R என்பவற்றின் விளையுள் S எனின்,
S இற்கும் R இற்குமிடையேயான கோணம்
உராய்வுக் கோணம் (λ) எனப்படும்



(எல்லைச் சமநிலை)

$\tan\lambda = \frac{F}{R} = \mu$. சமநிலைக்கு $\theta \leq \lambda$ ஆகும்.

கரடான தளம் ஒன்றில் துணிக்கை ஒன்று வைக்கப்பட்டு இத்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக அதிகரிக்கப்படின் தளத்தின் சாய்வு, உராய்வுக் கோணத்திற்கு சமனாகும் வரை துணிக்கை சமநிலையிலிருக்கும்.



சமனிலைக்கு

$\nearrow \quad F - mg\sin\alpha = 0$

$\nwarrow \quad R - mg\cos\alpha = 0$

$\frac{F}{R} \leq \mu \Rightarrow \tan\alpha < \tan\lambda$

$\alpha \leq \lambda.$

எல்லைச் சமநிலையில் $\frac{F}{R} = \mu, \ \tan\alpha = \tan\lambda$

$\therefore \ \alpha \leq \lambda.$ எனின், சமநிலை

$\alpha = \lambda.$ எனின், எல்லைச் சமநிலை

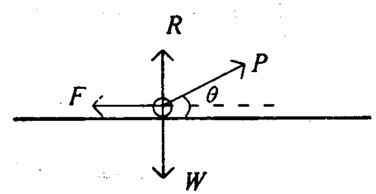
$\alpha > \lambda.$ எனின், கீழ்நோக்கி வழுக்கும்.

கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றில் W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத் துணிக்கையைத் தளத்தின் வழியே இயங்கச் செய்யும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காணல்

உராய்வுக் கோணம் λ என்க.

மிகக் குறைந்த விசை P,

கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்க.



எல்லைச் சமநிலையில்

$\rightarrow \quad P\cos\theta - F = 0$ ----------------- (1)

$\uparrow \quad P\sin\theta + R - W = 0$ ----------------- (2)

(1) இலிருந்து $F = P\cos\theta$

(2) இலிருந்து $R = W - P\sin\theta$

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta}{W - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin\lambda$$

$$P = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P இழிவாக இருக்க, $\cos(\theta - \lambda) = 1$

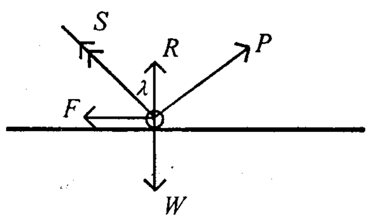
$$\Rightarrow \theta = \lambda$$

P இன் இழிவுப் பெறுமானம் $W\sin\lambda$

திசை, கிடையுடன் λ கோணத்தில்

மாற்றுமுறை (விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி)

துணிக்கையின் எல்லைச் சமநிலையைக் கருதுக.



(i) நிறை W

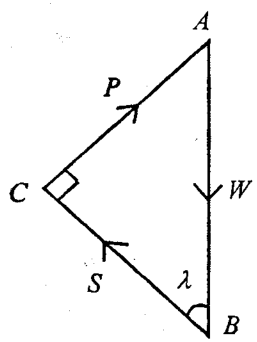
(ii) (F,R) என்பவற்றின் விசை S

(iii) பிரயோகிக்கும் (மிகக் குறைந்த) விசை P

$W \rightarrow AB$

$S \rightarrow BC$

$P \rightarrow CA$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.



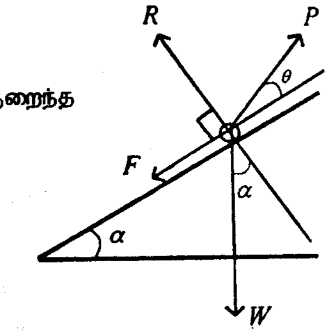
இங்கு P மிகக் குறைவாக இருக்க, AC, BC யிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore P = W\sin\lambda$

திசை கிடையுடன் λ

தளத்தின் சாய்வு α , தளத்தின் உராய்வுக் கோணம் λ , துணிக்கையின் நிறை Wஎன்க.

(i) $\alpha < \lambda$ எனின், துணிக்கையைத் தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காணல்.



$\alpha < \lambda$. எனவே துணிக்கை சாய்தளத்தில் சமநிலையிலிருக்கும். துணிக்கையை மேல் நோக்கித் தளத்தின் வழியே இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை P எனவும் அது தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனவும் கொள்க.

எல்லைச் சமநிலையில்,

↗ $P\cos\theta - F - W\sin\alpha = 0$

↖ $R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta - W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\alpha+\lambda)$$

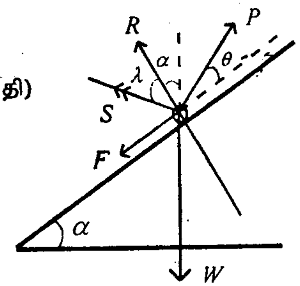
$$P = \frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P இழிவாக இருக்க, $\cos(\theta - \lambda) = 1$ $\quad \therefore \theta = \lambda$

P யின் இழிவுப் பெறுமானம் $W\sin(\lambda+\alpha)$

$W\sin(\lambda+\alpha)$ எனும் விசை, தளத்துடன் கோணம் λ இல் பிரயோகிக்க வேண்டும்.

மாற்றுமுறை (விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி)



துணிக்கையின் எல்லைச் சமநிலையைக் கருதுக.

(i) நிறை W

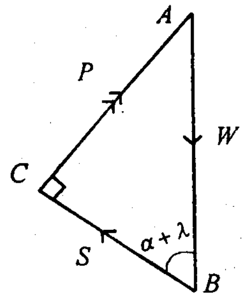
(ii) (F,R) என்பவற்றின் விளையுள் S.

(iii) மிகக் குறைந்த விசை P

$W \to AB$

$S \to BC$

$P \to CA$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

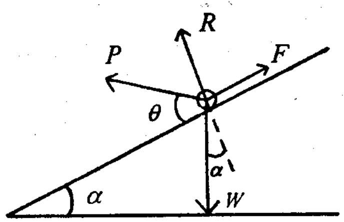


இங்கு P மிகக் குறைவாக இருக்க AC, BC யிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$$P = W\sin(\alpha+\lambda)$$

(ii) $\alpha < \lambda$ எனின் துணிக்கையைத் தளத்தின் வழியே கீழ்நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காணல்.

$\alpha < \lambda$ எனின், துணிக்கை சாய்தளத்தில் சமநிலையிலிருக்கும் துணிக்கையை கீழ்நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையை P எனவும், கோணம் θ எனவும் கொள்க.



எல்லைச் சமநிலையில்

$$P\cos\theta + W\sin\alpha - F = 0$$

$$P\sin\theta + R - W\cos\alpha = 0$$

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta + W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\lambda-\alpha)$$

$$P = \frac{W\sin(\lambda-\alpha)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

P இழிவாக இருக்க, $\cos(\theta-\lambda) = 1 \Rightarrow \theta = \lambda$

P யின் இழிவுப் பெறுமானம் $W\sin(\lambda-\alpha)$ ஆகும்.

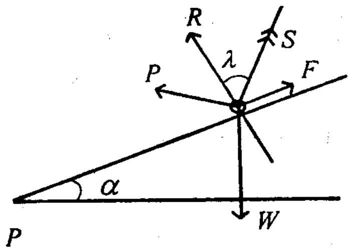
மாற்றுமுறை (விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி).

துணிக்கையின் எல்லைச் சமநிலையைக் கருதுக.

(i) நிறை W

(ii) (F,R) என்பவற்றின் விளையுள் S

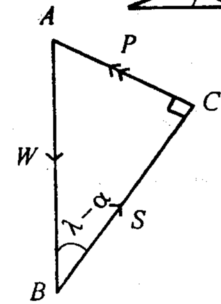
(iii) மிகக் குறைந்த விசை P



$W \to AB$

$S \to BC$

$P \to CA$

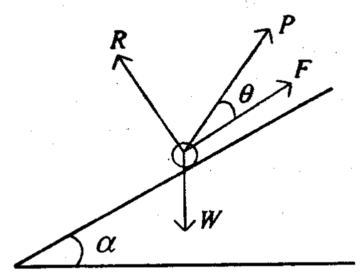


P மிகக் குறைவாக இருக்க, AC, BC யிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$$P = W\sin(\lambda-\alpha)$$

(iii) $\alpha > \lambda$ எனின், துணிக்கையை சாய்தளத்தில் தாங்கும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காணல்.

$\alpha > \lambda$ என்பதால் துணிக்கை கீழ்நோக்கி வழுக்கும். துணிக்கையை வழுக்காது தாங்கும் மிகக் குறைந்த விசை P என்க. தளத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ. துணிக்கை கீழ் நோக்கி வழுக்கும் எல்லைச் சமநிலையிலிருப்பதால் உராய்வு தளத்தின் வழியே மேல் நோக்கித் தொழிற்படும்.



எல்லைச் சமநிலையில்

$$P\cos\theta + F - W\sin\alpha = 0$$

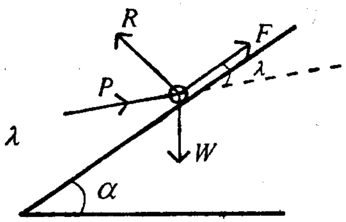
$$R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$$

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{W\sin\alpha - P\cos\theta}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$W\sin(\alpha-\lambda) = P\cos(\theta+\lambda)$$

$$P = \frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\theta+\lambda)}$$



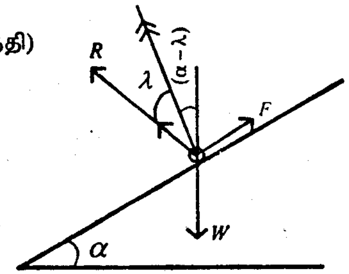
P இழிவாக இருக்க, $\cos(\theta+\lambda) = 1 \Rightarrow \theta = -\lambda$

P யின் இழிவுப் பெறுமானம் $W\sin(\alpha-\lambda)$

$\theta = -\lambda$ என்பதால், விசை. தளத்துடன் எதிர்த்திசையில் சாய்ந்திருக்க வேண்டும்.

முறை II (விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி)

துணிக்கையின் எல்லைச் சமநிலையைக் கருதுக.



(i) நிறை W

(ii) (F, R) இன் விளையுள் S

(iii) மிகக் குறைந்த விசை P

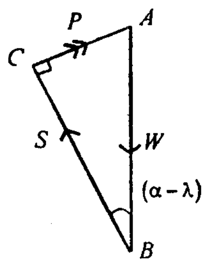
$W \to AB$

$S \to BC$

$P \to CA$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

P மிகக் குறைவாக இருக்க AC, BC யிற்குச் செங்குத்தாகும்.

$P = W\sin(\alpha-\lambda)$



(iv) $\alpha > \lambda$ எனின், துணிக்கையைத் தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காணல்

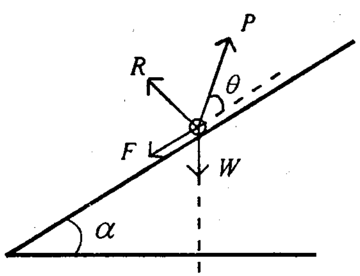
எல்லைச் சமநிலையில்

↗ $P\cos\theta - F - W\sin\alpha = 0$

↖ $R + P\sin\theta - W\cos\alpha = 0$

$$\frac{F}{R} = \mu = \tan\lambda$$

$$\frac{P\cos\theta - W\sin\alpha}{W\cos\alpha - P\sin\theta} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$



$$P\cos(\theta-\lambda) = W\sin(\lambda+\alpha)$$

$$P = \frac{W\sin(\lambda+\alpha)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

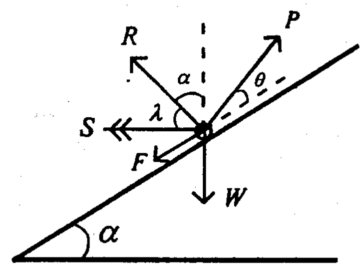
P இழிவாக இருக்க, $\cos(\theta-\lambda) = 1 \Rightarrow \theta = \lambda$

P யின் இழிவுப் பெறுமானம் $= W\sin(\lambda+\alpha)$

தளத்துடன் கோணம் λ ஐ ஆக்கும் திசையில்

மாற்றுமுறை (விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி)

துணிக்கையின் எல்லைச் சமநிலையைக் கருதுக.



(i) நிறை W

(ii) (F, R) இன் விளையுள் S

(iii) மிகக் குறைந்த விசை P

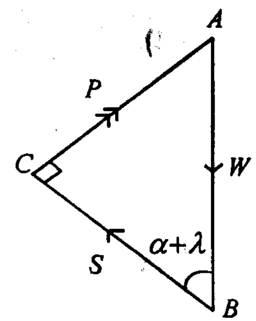
$W \to AB$

$S \to BC$

$P \to CA$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

P மிகக் குறைவாக இருக்க AC, BC யிற்குச் செங்குத்தாகும்.

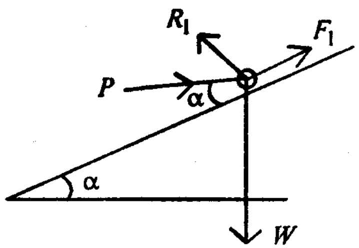
$P = W\sin(\alpha+\lambda)$ ஆகும்.

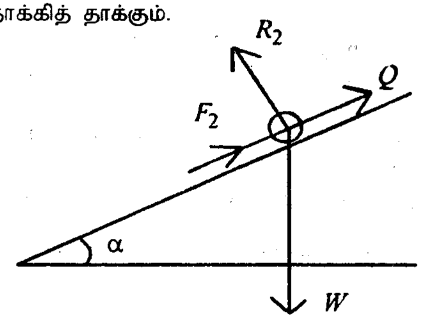


உதாரணம் 1

W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று கிடையுடன் α சாய்வுடைய கரடான சாய்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டு, கிடையாகத் தாக்கும் விசை P யினால் மட்டுமட்டாகத் தாங்கப்படுகிறது; இத்துணிக்கை தளத்தின் வழியே மேல்நோக்கித் தாக்கும் விசை Q இனாலும் மட்டுமட்டாகத் தாங்கப்படலாம். உராய்வுக் கோணத்தின் கோசைனை P, Q, W இல் காண்க.

துணிக்கை மட்டுமட்டாகத் தாங்கப்படுவதால், அது கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயி லுள்ளது. எனவே உராய்வு விசை மேல்நோக்கித் தாக்கும்.





எல்லைச் சமநிலையில்

$\nearrow \; F_1 + P\cos\alpha - W\sin\alpha = 0$ $\qquad$ $\nearrow \; F_2 + Q - W\sin\alpha = 0$

$\nwarrow \; R_1 - P\sin\alpha - W\cos\alpha = 0$ $\qquad$ $\nwarrow \; R_2 - W\cos\alpha = 0$

$$\mu = \frac{F_1}{R_1} = \frac{W\sin\alpha - P\cos\alpha}{W\cos\alpha + P\sin\alpha} \text{ ----(1)} \qquad \mu = \frac{F_2}{R_2} = \frac{W\sin\alpha - Q}{W\cos\alpha} \text{ ------(2)}$$

$$\frac{W\sin\alpha - P\cos\alpha}{W\cos\alpha + P\sin\alpha} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} \qquad \frac{W\sin\alpha - Q}{W\cos\alpha} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

$$\Rightarrow P = W\tan(\alpha - \lambda) \qquad Q = \frac{W\sin(\alpha - \lambda)}{\cos\lambda}$$

$$P = W\tan(\alpha - \lambda) \text{ ----------------(3)}$$

$$Q\cos\lambda = W\sin(\alpha - \lambda) \text{ ----------------(4)}$$

(3) இலிருந்து $\cot^2(\alpha - \lambda) = \dfrac{W^2}{P^2}$

(4) இலிருந்து $\operatorname{cosec}^2(\alpha - \lambda) = \dfrac{W^2}{Q^2\cos^2\lambda}$

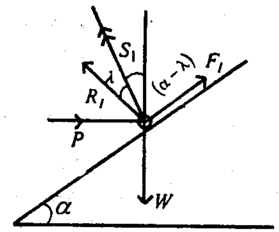
$$\operatorname{cosec}^2(\alpha - \lambda) = 1 + \cot^2(\alpha - \lambda)$$

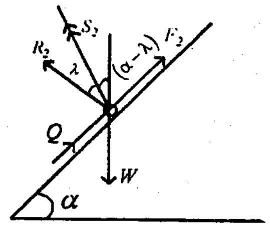
$$\frac{W^2}{Q^2\cos^2\lambda} = 1 + \frac{W^2}{P^2} \qquad \frac{W^2}{Q^2\cos^2\lambda} = \frac{P^2 + W^2}{P^2}$$

$$\cos^2\lambda = \frac{P^2W^2}{Q^2\left(P^2 + W^2\right)}$$

$$\cos\lambda = \frac{PW}{Q\sqrt{P^2 + W^2}}$$ ஆகும்.

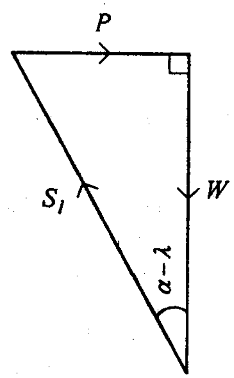
விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தியும் P, Q என்பவற்றைப் பெறலாம்.





சமநிலைக்கு

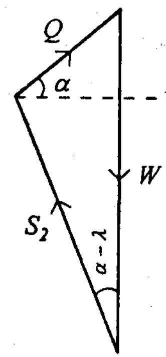
W, P, S_1 (F_1, R_1 என்பவற்றின் விளையுள்)



$$P = W\tan(\alpha - \lambda)$$

சமநிலைக்கு

W, Q, S_2 (F_2, R_2 என்பவற்றின் விளையுள்)



$$\frac{W}{\sin(90 + \lambda)} = \frac{Q}{\sin(\alpha - \lambda)}$$

$$Q = \frac{W\sin(\alpha - \lambda)}{\cos\lambda}$$

பயிற்சி - 4

1. $20kg$ திணிவுடைய பொருள் ஒன்று கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின்,

(i) கிடையாக (ii) 30° இல் தாக்கி பொருளை அசையச் செய்யும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க.

2. $40kg$ திணிவொன்று கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது ஓய்விலுள்ளது. கிடையாகத் தாக்கும் $98N$ விசை இத்திணிவை மட்டுமட்டாக இயக்கக்கூடியது. திணிவை தளத்தின் வழியே இயக்கத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க.

3. $10kg$ திணிவொன்று கிடையுடன் 30° சாய்வுடைய தளம் ஒன்றில் எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. தளத்தின் சரிவு 60° ஆக அதிகரிக்கப்படுகிறது எனின், துணிக்கையைத் தாங்கத் தளத்திற்கு சமாந்தரமாகப் பிரயோகிக்கப்பட வேண்டிய விசையாது?

4. $20kg$ திணிவொன்று $sin^{-1}\frac{3}{5}$ சாய்வுள்ள கரடான சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவிற்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{5}$ ஆகும். தளத்திற்கு சமாந்தரமாகத் தாக்கி

1. திணிவு கீழ்நோக்கி வழுக்குதலைத் தடுக்கும்.
2. திணிவைத் தளத்தில் மேல்நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க.

5. கரடான சாய்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்ட $40kg$ திணிவு தளத்திற்குச் சமாந்தரமான $196N$ விசையினால் தாங்கப்படும் போது கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயிலுள்ளது. இவ்விசையை $294N$ இற்கு அதிகரிக்கும் போது அது தளத்தில் மேல்நோக்கி இயங்கும் நிலையிலுள்ளது. உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

6. $610kg$ திணிவொன்று $tan^{-1}\frac{11}{60}$ சாய்வும், உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{6}$ உம் உடைய சாய்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுத் தளத்தின் பரப்பின் மேற்பகுதியுடன் $tan^{-1}\frac{5}{12}$ கோணத்தை ஆக்கும் திசையில் இழை ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவை சமநிலையில் பேண இழையிலுள்ள இழுவையின் எல்லைப் பெறுமானங்களைக் கிட்டிய முழு எண்ணில் காண்க.

7. இரு சாய்தளங்கள் பொது உச்சியைக் கொண்டுள்ளன. இரு சமநிறைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு தளத்தின் மேல் வைக்கப்பட்டு உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இலேசான இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு தளம் ஒப்பமாகவும் கிடையுடன் α சாய்விலும், மற்றைய தளம் கரடாகவும் கிடையுடன் β சாய்விலும் உள்ளது. ஒப்பமான தளத்திலுள்ள நிறை கீழ்நோக்கி அசையும் தறுவாயிலிருப்பின் $sin\alpha = sin\beta + \mu cos\beta$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ உராய்வுக் குணகம்.

8. கிடையுடன் 60°, 30° சாய்வுகளையுடைய சமகரடான இரட்டைச் சாய்தளம் ஒன்றில் K i wNa $2kg$, $1kg$ திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் வைக்கப்பட்டு தளங்களின் பொது உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. பாரம் கூடிய துணிக்கை கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயிலிருப்பின் உராய்வுக் குணகம் $5\sqrt{3} - 8$ எனக் காட்டுக.

9. (i) W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று கரடான கிடைத்தளமொன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. இதனை தளத்தின் வழியே இயக்கத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசை $W sin\lambda$ எனவும் விசையின் திசை கிடையுடன் λ கோணத்தில் மேல்நோக்கியும் இருக்கும் எனவும் காட்டுக.
இங்கு λ - உராய்வுக் கோணமாகும்.

(ii) கிடையுடன் α சாய்வும் λ உராய்வுக் கோணமும் உடைய கரடான சாய்தளம் ஒன்றில் W நிறையுடைய துணிக்கை வைக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) $\alpha < \lambda$ எனின், துணிக்கையைத் தளத்தில் மேனோக்கி இயக்கத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசை $W sin(\alpha + \lambda)$ எனவும், துணிக்கையைத் தளத்தில் கீழ்நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை $W sin(\lambda - \alpha)$ எனவும் காட்டுக.

(b) $\alpha > \lambda$ எனின், துணிக்கையைத் தாங்கும் மிகக் குறைந்த விசை $W sin(\alpha - \lambda)$ எனக் காட்டுக. திசையையும் காண்க.

10. நிறை ஒன்றினை சாய்தளமொன்றில் மேல் நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை P ஆகும். தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கி அதனை மேனோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை $P\sqrt{1+\mu^2}$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ உராய்வுக் குணகமாகும்.

A மீட்டற் பயிற்சிகள்

1. P, Q எனுமிரு விசைகளின் விளையுள் R ஆகும். Q இரட்டிக்கப்பட R இன் பருமன் இரட்டிக்கப்படுகிறது. Q எதிர்த்திசைக்கு மாற்றப்பட R இன் பருமன் இரட்டிக்கப்படுகிறது. $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

2. P, Q எனுமிரு விசைகள் θ கோணத்தில் தாக்குகின்றன. P, Q என்பவற்றின் தானங்களைத் தம்முள் மாற்றினால் புதிய விளையுள் ϕ கோணத்தினூடாகத் திருப்பப்படுகிறது. $\tan\frac{\phi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$ எனக் காட்டுக.

3. $(P+Q), (P-Q)$ எனுமிரு விசைகளுக்கிடையேயான கோணம் 2α ஆகும். இவ்விசைகளின் விளையுள் இவ்விரு விசைகளுக்கிடையேயான இரு கூறாக்கியுடன் θ எனும் கோணத்தை ஆக்குகிறது. $P\tan\theta = Q\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

4. ஒவ்வொன்றும் $10kg$ திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் மெல்லிய இழை ஒன்றின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு சுவரிலுள்ள இரு ஒப்பமான முனைகளின் மேலாகச் செல்கிறது. முனைகளை இணைக்கும் கோடு கிடையுடன் 30° ஐ அமைக்கிறது. ஒவ்வொரு முனையிலுமுள்ள உதைப்பைக் காண்க.

5. ஒவ்வொன்றும் $50kg$ திணிவுடைய இரு துணிக்கைகள் மெல்லிய இழை ஒன்றின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு சுவரில் இரு சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளில் அமைந்துள்ள மூன்று ஒப்பமான முனைகளின் மேலாகச் செல்கிறது. இரு சமபக்க முக்கோணியின் அடி கிடையாகவும் உச்சிக்கோணம் 30° ஆகவும் உள்ளது. ஒவ்வொரு முனைகளிலுமுள்ள உதைப்பைக் காண்க.

6. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி AB, BC, CA என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக துணிக்கை ஒன்றில் L, M, N எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமன் $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - LM - MN - NL}$ எனக் காட்டுக. மேலும் $L = M = N$ எனின் எனின், மட்டுமே துணிக்கை சமநிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

7. முக்கோணி ABC யின் சுற்றுவட்ட மையம் O, OA, OB, OC வழியே தாக்கும் P, Q, R ஆகிய விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின்
$$\frac{P}{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)} = \frac{Q}{b^2\left(c^2+a^2-b^2\right)} = \frac{R}{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$
எனக் காட்டுக.

8. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி AB, AC, AD, AE, AF வழியே $3, \sqrt{3}, 5, 2\sqrt{3}, 6N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. A இல் மேலதிக விசை ஒன்று பிரயோகிக்கப்பட ஆறுவிசைகளும் சமநிலையிலிருப்பின் மேலதிக விசையைக் காண்க.

9. $ABCD$ எனும் இழை A, D எனுமிரு நிலைத்த புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. B, C என்பவற்றில் ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் இழையின் பகுதிகள் AB, CD என்பன நிலைக்குத்துடன் முறையே $30^\circ, 60^\circ$ கோணங்களை அமைக்கின்றன. இழையின் ஒவ்வொரு பகுதிகளிலுமுள்ள இழுவைகளையும், நிலைக்குத்துடன் BC யின் சாய்வைக் காண்க.

10. P, Q எனும் இரு ஒத்த சமாந்தர விசைகள் முறையே A, B இல் தாக்குகின்றன. விசைகளின் தாக்குபுள்ளிகளின் தானங்களை மாற்றினால் விளையுளின் தாக்கும் புள்ளி AB யின் வழியே d தூரத்தினூடு அசையும் எனக் காட்டுக. இங்கு $d = \frac{P-Q}{P+Q}AB$

11. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C இல் மூன்று ஒத்த சமாந்தர விசைகள் P, Q, R தாக்குகின்றன. விளையுளின் தாக்கக்கோடு,

    (i) முக்கோணியின் மையப் போலியினூடு சென்றால் $P = Q = R$ எனக் காட்டுக.

    (ii) முக்கோணியின் உள் மையத்தினூடு சென்றால் $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ எனக் காட்டுக.

    (iii) முக்கோணியின் சுற்று வட்ட மையத்தினூடு சென்றால் $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ எனக் காட்டுக

12. ஒரு சீரான வளை AB, $1{\cdot}8m$ நீளமும் $24Kg$ திணிவும் உடையது. AB கிடையாக இருக்குமாறு C, D எனும் தாங்கிகளின் மீது தாங்கப்படுகிறது. இங்கு $CD = 0{\cdot}9m$ உம் தாங்கி C யிலுள்ள உதைப்பு தாங்கி D யிலுள்ள உதைப்பின் இருமடங்கெனின் தாங்கி C, தாங்கி D யிலும் A இற்குக் கிட்ட உள்ளதெனக் கொண்டு AC, BD இன் நீளங்களைக் காண்க.

13. $5m$ நீளமுடைய AB எனும் சீரற்ற ஒரு வளை A இலும் C இலும் இரு தாங்கிகளில் கிடையாகத் தாங்கப்படுகிறது. இங்கு $AC = 4m$ உம் வளையின் நிறை $350N$ உம் ஆகும். தாங்கிகளால் வளையின் மீதான மறுதாக்கங்கள் சமமானவையெனின் கோலின் நிறை தாக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

இப்பொழுது B இல் மேலதிக நிறை W இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) C யிலுள்ள மறுதாக்கம் A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் இரு மடங்கெனின்,

(b) கோல் மட்டுமட்டாகத் திரும்பும் நிலையிலிருப்பின் W ஐக் காண்க.

14. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $3P, 7P, P, 2P, mP, nP$ விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DE, EF, FA வழியே தாக்குகின்றன.

(a) இவ்விசைத் தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமெனின்,

(b) இவ்விசைத் தொகுதி AD வழியேயான ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்குமெனின் m, n என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

15. W நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று உராய்வுக் கோணத்திலும் பெரிதான சாய்வுடைய கரடான சாய்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை கீழ்நோக்கி வழுக்குதலைத் தடைசெய்யும் மிகக் குறைந்த கிடைவிசை W உம் துணிக்கையை மேல் நோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த கிடைவிசை $\sqrt{3}\,W$ உம் ஆகும். தளத்தின் சாய்வையும் உராய்வுக் கோணத்தையும் காண்க. துணிக்கையை சமநிலையில் வைத்திருக்கும் மிகக் குறைந்த விசையையும் காண்க.

16. $2W, 3W$ நிறையுடைய இரு துணிக்கைகள் மெல்லிய நீளா இழை ஒன்றின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையானது ஒரே கிடைமட்டத்தில் a இடைத்தூரத்தில் அமைந்திருக்கும் இரு ஒப்பமான முனைகளின் மேலாகச் செல்கிறது. முனைகளுக்கிடைப்பட்ட இழையின் பகுதியில் W நிறை ஒன்று கட்டப்படுகின்றது. சமநிலைத்தானத்தில் இழையின் விரிந்த பகுதிகளுக்கிடையேயான கோணம் 120° ஆகும். $W^1 = \sqrt{7}\,W$ எனவும், தாங்கிகளின் மட்டத்தின் கீழ் W^1 இன் ஆழம் $\dfrac{2a}{7\sqrt{3}}$ எனவும் நிறுவுக.

17. ஒப்பமான வட்டக் கம்பி ஒன்று அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்க நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. வட்டக்கம்பியின் மேல் அரைவாசிப் பகுதியிலுள்ள A, B எனுமிரு புள்ளிகளில் முறையே w_1, w_2 நிறையுடைய துணிக்கைகள் வைக்கப்பட்டு A ஐயும் B ஐயும் இணைக்கும் சிறுவில்லின் வழியே மெல்லிய

நீளா இழையொன்றினால் இவை இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சிறுவில் மையம் O வில் எதிரமைக்கும் கோணம் α ஆகும். OA நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனின், $\tan\theta = \dfrac{w_2 \sin\alpha}{w_1 + w_2 \cos\alpha}$ எனக் காட்டுக.

பாரம் கூடிய துணிக்கை, பாரம் குறைந்த துணிக்கையிலும் பார்க்க வட்டத்தின் அதி உயர் புள்ளிக்கு அண்மையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

18. $5m$ நீளமுள்ள சீரற்ற பலகை AB, ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள A, B எனும் தாங்கிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சிறுவன் A இலிருந்து B இற்கு நடந்து சென்ற பொழுது A, B என்பவற்றிலான உயர் மறுதாக்கங்கள் முறையே $30g, 25g\ N$ எனவும் A இலான இழிவு மறுதாக்கம் $10g\,N$ எனவும் அவதானிக்கப்பட்டது. சிறுவனினதும் பலகையினதும் நிறையைக் காண்க. A யிலிருந்து பலகையின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரத்தையும் காண்க.

19. AB என்பது l நீளமுடைய பாரமான கோலாகும். A இல் $2W$ நிறை தொங்கவிடப்பட்ட போது கோலில் C எனும் புள்ளியில் அக்கோல் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டது. இந்நிறை அகற்றப்பட்டு B இல் $3W$ நிறை தொங்கவிடப்பட்ட போது இக்கோல் கோலில் D எனும் புள்ளியில் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டது. $AC = BD$ எனின், கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் A இலிருந்து $\dfrac{2}{5}\ell$ இற்கும் $\dfrac{1}{2}\ell$ இற்குமிடையில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

மேலுள்ளவகையில் $AC = BD = \dfrac{\ell}{4}$ ஆகவும் A, B என்பவற்றிலிருந்து முறையே $2Q, 3W$ நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டும் உள்ள போது A இலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் கோல் சமநிலையில் தாங்கப்பட வேண்டும் எனக் காண்க.

20. சாய்சதுரம் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியே P, P, Q, Q எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன. சாய்சதுரத்தின் மையம் O பற்றி இவ்விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை யாது? இவ்விசைகளின் விளையுள் O இலிருந்து $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P+Q}{P-Q}\right] BD$ தூரத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக. $P = Q$ என்றவகையை ஆராய்க.

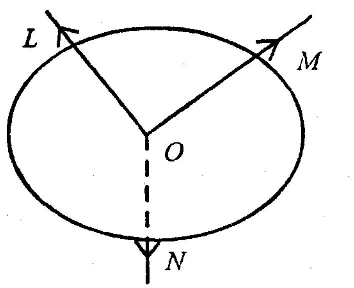
5. ஒரு தளவிசைகளின் கீழ் விறைப்பான உடலொன்றின் சமநிலை

மூன்று விசைகள்

மூன்று ஒரு தளவிசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ் ஒரு விறைப்பான பொருள் சமநிலையிலிருப்பின், இவ்விசையின் தாக்கக்கோடுகள் யாவும் சமாந்தரமானவை யாகவோ அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பனவாகவோ இருத்தல் வேண்டும்.

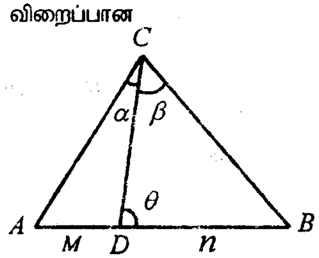
மூன்று விசைகளும் L, M, N என்க. அவை எல்லாம் சமாந்தரமல்ல என்க. எனவே இரண்டு விசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். L, M இரண்டும் O என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என்க. L, M என்பவற்றின் விளையுள் (R என்க) O இனூடு செல்லும்.

L, M, N என்பன சமநிலையிலிருப்பதால், R, N என்னும் இரண்டு விசைகளும் சமநிலையிலிருக்கும். R உம் N உம் பருமனில் சமமாகவும் எதிராகவும், ஒரே தாக்கக் கோட்டிலுமிருத்தல் வேண்டும். எனவே N உம் O இனூடு செல்லும்.



மூன்று விசைளின் (சமாந்தரமல்லாத) தாக்கத்தின் கீழ் விறைப்பான உடலொன்றின் சமநிலையின் போது,

(i) லாமியின் தேற்றம்
(ii) விசை முக்கோணி
(iii) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் பிரித்தல் என்பவற்றைப் பயன்படுத்தலாம்.



மேலும் பின்வரும் திரிகோண கணித முடிவுகளையும் பயன்படுத்தி இலகுவாகத் தீர்க்கலாம்.

முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AB இல் D எனும் புள்ளி $AD : DB = m:n$ $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ $\angle CDB = \theta$ ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளதென்க.

(i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$

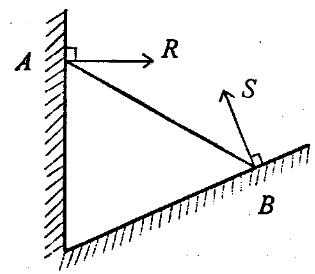
(ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot A - m\cot B$ ஆகும்.

விசைகளைக் குறிக்கும் போது பின்வருவனவற்றைக் கவனத்தில் கொள்க.

(i) பொருள் ஒன்றின் நிறை எப்போதும் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி இருக்கும்.

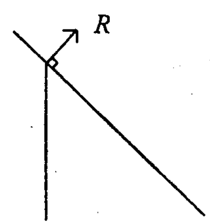
(ii) இரு சமவிசைகளின் விளையுள் அவ்விசைகளுக்கிடையேயான கோணத்தை இரு கூறாக்கும்.

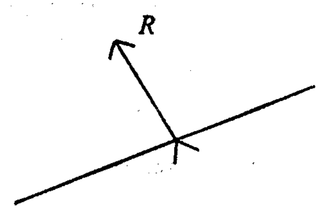
(iii) கோல் ஒன்று ஒப்பமான தளத்திற்கு எதிராக சமநிலையிலிருக்கும் போது, தளத்தினால் உள்ள மறுதாக்கம், தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.



கோல் AB, ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலும், ஒப்பமான சாய்தளத்திலும் தங்க கோலில் தாக்கும் மறுதாக்கங்கள் R, S என்பன படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

v) ஒப்பமான சுவரொன்றிற்கு மேலாகச் செல்லும், அல்லது ஒப்பமான முனை ஒன்றிற்கு மேலாகச் செல்லும் கோலில் மறுதாக்கம் கோலிற்கு செங்குத்தாகும்.





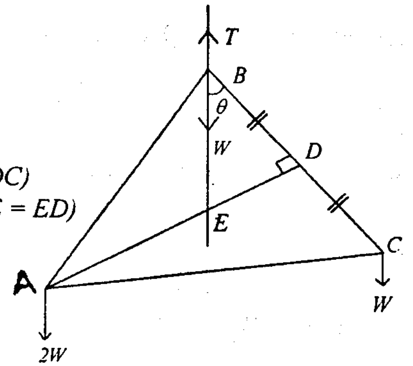
உதாரணம் 1

இலேசான சமபக்க முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C இற்கு முறையே $2W, W, W$ நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணி உச்சி B இற்கு இணைக்கப் பட்ட இலேசான இழையொன்றினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துக்கு BC இன் சாய்வைக் காண்க.

அடர் இலேசானது. எனவே நிறையற்றது.

அடரின் சமநிலைக்கு $\uparrow T - 4W = O$

$T = 4W$



B இல் $W + C$ இல் $W = D$ இல் $2W$ $(BD = DC)$

A இல் $2W + D$ இல் $2W = E$ இல் $4W$ $(AE = ED)$

$\therefore BE$ நிலைகுத்தாக அமையும். $(T = 4W)$

ABC சமபக்க முக்கோணி.

$AB = BC = CA = 2a$ என்க.

$AD = \sqrt{3}a$; $ED = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$, ΔBED இல்

$$\tan\theta = \frac{ED}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ஆகவே நிலைக்குத்துடன் BC இன் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

W நிறையும் $2a$ நீளமும் கொண்ட சீர்க்கோல் AB ஆனது, A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்குப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் முனை B ஐயும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $2a$ தூரத்திலுள்ள C என்னும் புள்ளியையும் இணைக்கும் $2a$ நீளமுடைய இலேசான இழையொன்றினால் கோல் கிடையுடன் சாய்வான நிலையில் தாங்கப்படுகிறது. இழையில் இழுவையும், A யில் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

கோல் AB யின் சமநிலைக்கு,

(i) கோலின் நிறை W, நிலைக்குத்தாக G இனூடு

(ii) இழுவை T, BC வழியே

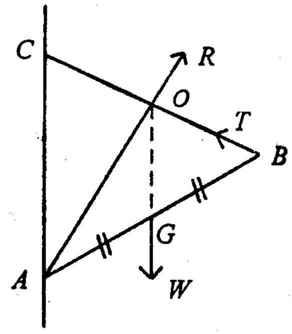
(iii) A இல் மறுதாக்கம் R.

எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன.

W, T என்பன O வில் சந்திப்பதால்,

R, O வினூடு செல்லும்.

$AB = BC = AC = 2a$.



முக்கோணி ABC இல், $AG = GB$

$AC // GO$. எனவே $BO = OC$

$AB = AC$, ஆகவே $AO \perp BC$

ΔAOC இல்,

$T \to OC$ $\qquad \dfrac{T}{OC} = \dfrac{W}{CA} = \dfrac{R}{AO}$

$W \to CA$

$R \to AO$ $\qquad \dfrac{T}{a} = \dfrac{W}{2a} = \dfrac{R}{\sqrt{3}a}$

ஆல் குறிக்கலாம்.

$$T = \frac{W}{2}, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

a ஆரையுடைய ஓர் அரைக்கோளக் குவளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், விளிம்பு மேன்முகமாகவும் இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. l நீளமுடைய ஒரு அழுத்தமான கோல் AB, அதன் முனை A குவளையின் உட்பரப்பைத் தொடவும் A யிற்கும் B யிற்குமிடையில் ஒரு புள்ளி குவளையின் விளிம்பைத் தொடவும் சமநிலையில் உள்ளது. கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகும்.

$AG = kl\,(k < 1)$. கிடையுடன் கோலின் சாய்வு θ எனின்,

$2a\cos 2\theta = kl\cos\theta$ என்பதால் தரப்படும் என நிறுவுக

$k = \dfrac{1}{2}$ எனின், இந்நிலையில் கோலின் சமநிலை சாத்தியமாவதற்குக் கோலின் நீளம்

$a\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ இற்கும் $4a$ இற்குமிடையில் இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக.

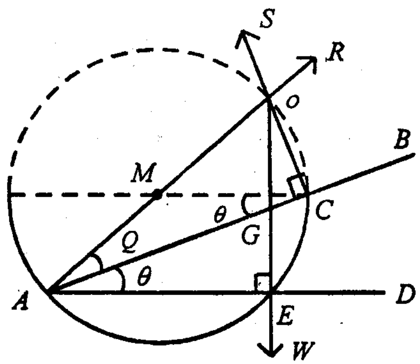
கோல் AB யின் சமநிலைக்கு

(i) A யில் மறுதாக்கம் - கோளத்தின் மையத்தினூடு செல்லும். (R)

(ii) C யில் மறுதாக்கம் - கோலிற்குச் செங்குத்தாகும். (S)

R, S இரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி O என்க.

(iii) கோலின் நிறை W ஆனது, O வினூடு செல்ல வேண்டும்.



முக்கோணி ACO இல் $\angle ACO = 90^\circ$ என்பதாலும், AO மையம் M இனூடு செல்வதாலும் AO விட்டமாக அமைதல் வேண்டும்.
ஆகவே $AO = 2a$.
AD கிடைக்கோடு என்க.

$\angle DAC = \theta$ எனின், $\angle ACM = \theta$, ஆகும். (ஒன்று விட்ட கோணங்கள்)

$\angle ACM = \angle MAC = \theta$ ஆகும். $(MA = MC)$

$\Delta\, OAE$ இல் $AE = AO\cos 2\theta = 2a\cos 2\theta$

$\Delta\, AGE$ இல், $AE = AG\cos\theta = kl\cos\theta$

$$2a\cos 2\theta = kl\cos\theta \text{ -------------- (1)}$$

$k = \frac{1}{2}$ எனின்,

$$2a\cos 2\theta = \frac{1}{2}l\cos\theta$$

$$4a\left(2\cos^2\theta - 1\right) = l\cos\theta$$

$$8a\cos^2\theta - l\cos\theta - 4a = 0$$

$$\cos\theta = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ஆதலால், $0 < \cos\theta < 1$

$$\cos\theta = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a} < 1$$

$$\sqrt{l^2 + 128a^2} < 16a - l$$

$$l^2 + 128a^2 < (16a - l)^2$$

$$l^2 + 128a^2 < 256a^2 - 32al + l^2$$

$$32al < 128a^2$$

$$l < 4a \text{ ------ ------ (2)}$$

$AB > AC$ ஆதல் வேண்டும்.

$$l > 2a\cos\theta$$

$$l > 2a\left[\frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}\right]$$

$$8l > l + \sqrt{l^2 + 128a^2}$$

$$7l > \sqrt{l^2 + 128a^2}$$

$$49l^2 > l^2 + 128a^2$$

$$48l^2 > 128a^2$$

$$l > a\sqrt{\frac{8}{3}} \text{ ---------- (3)}$$

(2), (3) இலிருந்து

$$a\sqrt{\frac{8}{3}} < l < 2a$$

உதாரணம் 4

$ABCD$ என்பது சீரான செவ்வகத்தட்டு; $AB=2a$; $AD=2b$. அத்தட்டானது ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள O எனும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து l நீளமுள்ள நீட்டமுடியாத ஒரு மெல்லிய இழை OA யினாலே தூக்கப்படுகிறது. D ஆனது அச்சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க, அத்தட்டு O வினூடாக அச்சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஓய்விலிருக்கிறது. θ, ϕ என்பன முறையே OA, AD என்பன நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் சாய்வுகளாயின், இவை

$$\frac{l}{b} = \frac{2\sin\phi}{\sin\theta}, \quad \frac{a}{b} = 2\tan\theta + \tan\phi$$

என்னும் சமன்பாடுகளாலே துணியப்படுமெனக் காட்டுக.

அடரின் சமநிலைக்கு

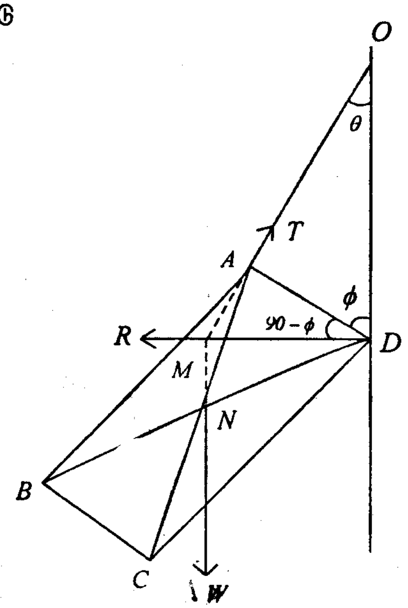
(i) இழுவிசை $T - AO$ வழியே

(ii) மறுதாக்கம் $R - D$ இல் சுவருக்கு செங்குத்தாக

(iii) அடரின் நிறை $W - N$ இல் நிலைக்குத்தாக

R உம், W உம் சந்திக்கும் புள்ளியினூடு
T இன் தாக்கக்கோடு செல்லவேண்டும்.

R, W, T மூன்று விசைகளும்
சந்திக்கும் புள்ளி M என்க.



$OA = l,\ AB = 2a,\ AD = 2b$

$\Delta\, OAD$ இற்கு சைன் விதியைப் பாவிக்க

$$\frac{OA}{\sin\phi} = \frac{AD}{\sin\theta} = \frac{OD}{\sin[180-(\theta+\phi)]}$$

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{2b}{\sin\theta} = \frac{OD}{\sin(\theta+\phi)} \text{ ------ (1)}$$

(i) இலிருந்து $\dfrac{l}{b} = \dfrac{2\sin\phi}{\sin\theta}$ -------- (A)

$$OD = \frac{2b\sin(\theta+\phi)}{\sin\theta} \text{ ---------- (2)}$$

$\angle\, ADB = \beta$ என்க. $\angle\, NDM = \beta - (90-\phi)$ ஆகும். $DN = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\tan\beta = \frac{a}{b}, \quad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\Delta\, DMN$ இல், $DM = DN\cdot\cos[\beta-(90-\phi)]$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos[\beta-(90-\phi)] \text{ -------------- (3)}$$

$\Delta\, ODM$ இல், $DM = OD\tan\theta = \dfrac{2b\sin(\theta+\phi)}{\cos\theta}$ ---------------- (4)

(3), (4) இலிருந்து,

$$\frac{2b\sin(\theta+\phi)}{\cos\theta} = \sqrt{a^2+b^2}\,[\cos\beta\sin\phi + \sin\beta\cos\phi]$$

$$2b\left[\frac{\sin\theta\cdot\cos\phi + \cos\theta\cdot\sin\phi}{\cos\theta}\right] = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\phi + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\phi\right]$$

$$2b\tan\theta\cos\phi + 2b\sin\phi = b\sin\phi + a\cos\phi$$

$$2\tan\theta + 2\tan\phi = \tan\phi + \frac{a}{b}$$

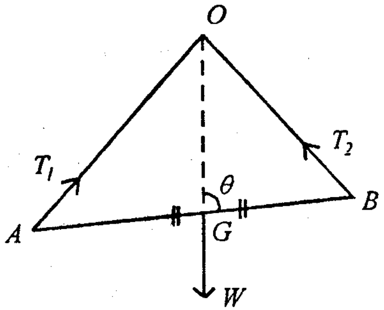
$$\frac{a}{b} = 2\tan\theta + \tan\phi \text{ ---------------- (B)}$$

உதாரணம் 5

W நிறையுடைய சீரான கோலொன்று அதன் முனைகளில் இணைக்கப்பட்ட இரு இழைகளினால் தாங்கப்பட்டுச் சமநிலையில் தொங்குகிறது. இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் T_1, T_2 எனக் காணப்படின் நிலைக்குத்துடனான கோலின் சாய்வின் கோணத்தின் கோசைன்.

$$\frac{|T_1^2 - T_2^2|}{W\{2(T_1^2+T_2^2) - W^2\}^{\frac{1}{2}}}$$ எனக் காட்டுக.

நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ என்க.
கோலின் சமநிலைக்கு T_1, T_2, W ஆகிய மூன்று விசைகளும் O இல் சந்திக்கின்றன.



$\Delta\, OAC$ இல்

விசை $T_1 \to AO$

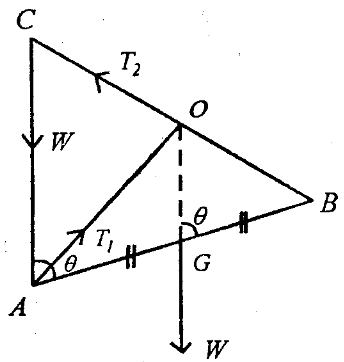
$T_2 \to OC$

$W \to CA$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகின்றன.

$\Delta\, ABC$ இல் $AG = GB$

$AC \;//\; GO$ (நிலைக்குத்து)

ஆகவே $DO = OC \;(= T_2)$ ஆகும்.



$\Delta\, ABC$ இல்

$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \cdot AC}$$

இங்கு $AC = W,\; BC = 2T_2,\; AB = \;?$

$\Delta\, ABC$ இல், $BO = OC$

அப்பலோனிசியின் தேற்றத்தைப் பாவிக்க,

$$AB^2 + AC^2 = 2\left[AO^2 + OC^2\right]$$

$$AB^2 + W^2 = 2\left[T_1^2 + T_2^2\right]$$

$$AB^2 = 2\left[T_1^2 + T_2^2\right] - W^2$$

$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \cdot AC}$$

$$= \frac{2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - W^2 + W^2 - \left(2T_2\right)^2}{2W \cdot \left\{2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - W^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2\left(T_1^2 - T_2^2\right)}{2W \cdot \left\{2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - W^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

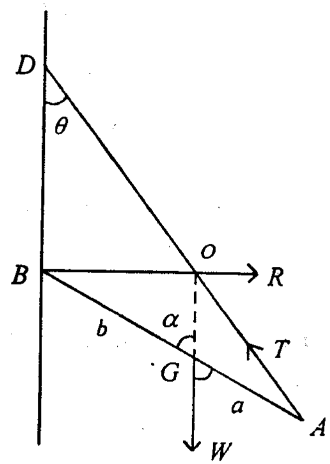
$$= \frac{T_1^2 - T_2^2}{W \cdot \left\{2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - W^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

உதாரணம் 6

நிறை W வை உடைய ஒருகோல் AB யின் ஈர்வை மையம் G ஆனது, அதனை முறையே a, b என்னும் நீளங்களையுடைய AG, GB ஆகிய இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தும் அதன் முனை B ஆனது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்கு எதிராகவும், B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளி D உடன் $l\,(> a + b)$ நீளமுள்ள இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் முனை A இணைக்கப்பட்டும் இருக்க, அக்கோல் நாப்பத்திலே ஓய்வில் கிடக்கின்றது.

(a) $\cos^2 \hat{ABD} = \dfrac{a^2}{b(b + 2a)}\left[\dfrac{l^2}{(a + b)^2} - 1\right]$ எனக்காட்டுக.

(b) இழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.



கோல் **AB** யின் சமநிலைக்கு,

(i) B யில் மறுதாக்கம் R

(ii) நிறை W

(iii) இழையின் இழுவை T

R, W இரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி O இனூடு, இழையின் இழுவை T செல்லவேண்டும்.

$AG = a,\; GB = b,\; AD = l$

$\Delta\, ADB$ இல் $GO \;//\; BD$

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AO}{OD} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow AO = \frac{la}{a+b}, \; OD = \frac{lb}{a+b}$$

மேலும் $\dfrac{OG}{BD} = \dfrac{a}{a+b}$

$OB = b\sin\alpha$, $\quad OG = b\cos\alpha$

$$DB^2 = DO^2 - OB^2 = \frac{l^2 b^2}{(a+b)^2} - b^2\sin^2\alpha$$

$$\frac{OG^2}{DB^2} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$\frac{b^2\cos^2\alpha}{\dfrac{l^2b^2}{(a+b)^2} - b^2\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\dfrac{l^2}{(a+b)^2} - \sin^2\alpha} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$(a+b)^2\cos^2\alpha = \frac{a^2l^2}{(a+b)^2} - a^2\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

$$(a+b)^2\cos^2\alpha - a^2\cos^2\alpha = \frac{a^2l^2}{(a+b)^2} - a^2$$

$$\left[(a+b)^2 - a^2\right]\cos^2\alpha = a^2\left[\frac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right]$$

$$b(2a+b)\cos^2\alpha = a^2\left[\frac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right]$$

$$\cos^2\alpha = \frac{a^2}{b(2a+b)}\left[\frac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right]$$

$$\cos^2 A\hat{B}D = \cos^2[180-\alpha] = \cos^2\alpha = \frac{a^2}{b(2a+b)}\left[\frac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right]$$

கோலின் சமநிலைக்கு,

$T\cos\theta - W = 0$; $T = W\sec\theta$

$$\cos\theta = \frac{BD}{OD}$$

$$\frac{OG}{BD} = \frac{a}{a+b}; \quad OG = b\cos\alpha; \quad \frac{b\cos\alpha}{BD} = \frac{a}{a+b}$$

$$BD = \frac{b(a+b)\cos\alpha}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{BD}{OD} = \frac{b(a+b)\cos\alpha}{a} \times \frac{(a+b)}{lb}$$

$$\cos\theta = \frac{(a+b)^2}{al}\cos\alpha$$

$$T = W\sec\theta = \frac{Wal}{(a+b)^2}\cdot\sec\alpha$$

$$= \frac{W a l}{(a+b)^2} \times \frac{\sqrt{(2a+b)}}{a} \times \frac{(a+b)}{\sqrt{l^2-(a+b)^2}}$$

$$= \frac{W l}{(a+b)} \sqrt{\frac{b(2a+b)}{l^2-(a+b)^2}}$$

உதாரணம் 7

(a) ஆரை a யையும், நிறை W வையும் உடைய சீர்க்கோளம் ஒன்று கிடையுடன் கோணம் α இலே சாய்ந்த நிலைத்த ஒப்பமான தளத்தின் மீது, கோள மேற் பரப்பில் உள்ள புள்ளி ஒன்றுடன் ஒரு நுனியும், தளத்தில் உள்ள புள்ளி ஒன்றுடன் மற்றைய நுனியும் இணைக்கப்பட்ட நீளம் l ஐ உடைய இலேசான நீட்டமுடியா இழை ஒன்றினாலே தாங்கப்பட்டு ஓய்வில் உள்ளது. இழை தளத்துடன் ஆக்கும் கோணம் θ வைக் காண்க.

கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கான விசை முக்கோணியை அமைக்க. இவ்விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக,

(i) இழையில் இழுவை $\dfrac{W(l+a)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ எனவும்,

(ii) தளத்திலிருந்தான மறுதாக்கம் $\dfrac{W\cos(\alpha-\theta)}{\cos\theta}$ எனவும் காட்டுக.

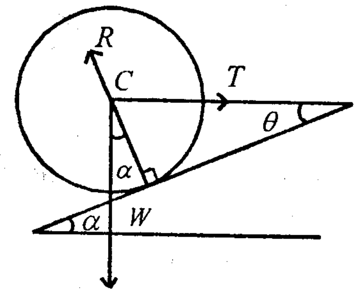
(b) நிறை W வை உடையதும், C யை மையமாகக் கொண்டதும், தளம் நிலைக்குத்தானதுமான வட்டச் சீர்த்தட்டு ஒன்று அதன் பரிதியிலே புள்ளி Aயில் நிலைத்த ஒப்பமான கிடைஅச்சைப் பற்றி அதன் சொந்தத் தளத்திலே சுயாதீனமாக அசையத்தக்கது. பரிதி மீது உள்ள ஒருபுள்ளி B யிலே நிலைத்த ஒப்பமான முளைக்கு எதிரே தட்டினைத் தங்கியிருக்கச் செய்வதன் மூலம் கோடு AC ஆனது மேன்முக நிலைக்குத்துடன் ஒருமாறாக் கூர்ங்கோணம் α இலே சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. முளை மீது உள்ள விசை மிகச் சிறியதாக இருக்கத்தக்கதாக B யின் தானத்தைக் கண்டு இச்சிறிய விசை யையும் காண்க.

(a) கோளத்தின் சமநிலைக்கு,

(i) நிறை W —— கோளத்தின்மையம் C யில் நிலைக்குத்தாக.

(ii) மறுதாக்கம் R- சாய்தளத்திற்கு செங்குத்தாக C யினூடு.

(iii) இழையின் இழுவை T.

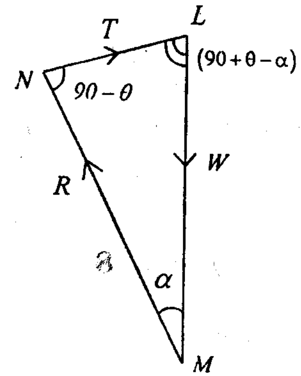


இம் மூன்று விசைகளும் C இல் சந்திக்கும்.

தளத்துடன் இழையின் சாய்வு θ ,

$$\sin\theta = \frac{a}{a+l}$$

விசை முக்கோணி LMN ஆகும்.

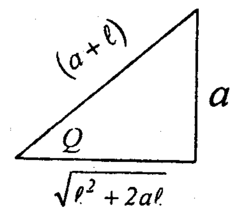


$$\frac{LM}{\sin[90-\theta]} = \frac{MN}{\sin[90+(\theta-\alpha)]} = \frac{NL}{\sin\alpha}$$

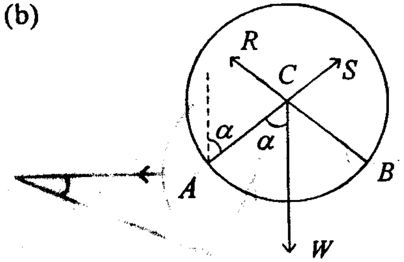
$$\frac{W}{\cos\theta} = \frac{R}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{T}{\sin\alpha}$$

$$T = \frac{W\sin\alpha}{\cos\theta} \quad , \quad R = \frac{W\cos(\theta-\alpha)}{\cos\theta}$$

$$T = \frac{W\sin\alpha\,(a+l)}{\sqrt{l^2+2al}}$$



(b)

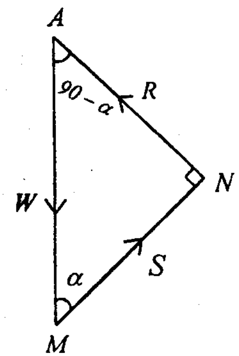


வட்டத்தட்டின் சமநிலைக்கு,

(i) நிறை W, நிலைக்குத்தாக மையம் C இல்.

(ii) B இல் மறுதாக்கம் R, C இனூடு செல்லும்.

(iii) A இல் மறுதாக்கம் S.



W, R என்பன C இல் சந்திப்பதால், S உம் C இனூடு செல்லும்.

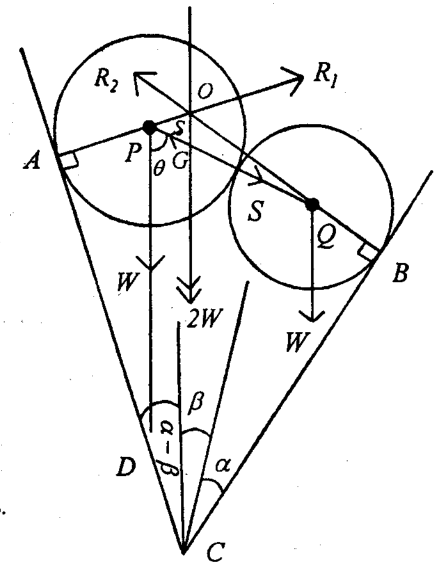
$W - LM$ இனாலும், S, MN இனாலும் குறிக்கப்படுகிறது. R சிறிதாக இருக்க, LN, MN இற்கு செங்குத்தாகும்.

சிறியவிசை $R = W \sin\alpha$; $\angle ACB = 90^\circ$

உதாரணம் 8

உச்சி கீழ்முகமாகவும், அச்சு நிலைக்குத்துடன் β சாய்வில் உள்ளதுமான ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான செவ்வட்டக் கூம்பின் உட்பக்கத்தில் சமநிறையுள்ள இரண்டு ஒப்பமான கோளங்கள் ஓய்வில் இருக்கின்றன. ஒவ்வொரு கோளமும் அக்கூம்பை ஒரு புள்ளியில் மாத்திரம் தொடுகின்றது. அக்கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் α எனின், அக் கோளங்களின் பொதுச் செவ்வன் நிலைக்குத்துடன்

$cot^{-1}\left\{\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}\right\}$ எனுங் கோணத்தை ஆக்குமென நிறுவுக.



இருகோளங்களினதும் சமநிலையை ஆராய

கோளம் P யின் சமநிலைக்கு,

R_1, S, W தாக்குகின்றன.

கோளம் Q வின் சமநிலைக்கு,

R_2, S, W தாக்குகின்றன.

கோளம் P, Q இரண்டினதும் சமநிலைக்கு

$R_1, R_2, 2W$ மூன்றுவிசைகளும் O இல் சந்திக்கும் G, PQ இன் நடுப்புள்ளி.

$\angle APD = 90 - (\alpha - \beta) = \angle POG$

$\angle QOG = 90 - (\alpha + \beta)$

நிலைக்குத்துடன் PQ இன் சாய்வு θ என்க.

$\angle OPG = 180 - [90 - (\alpha - \beta) + \theta] = 90 - [\theta - \alpha + \beta]$

$\angle OQG = 180 - [180 - \theta + 90 - \alpha - \beta] = [\theta + \alpha + \beta] - 90$

$\Delta\, OPG$ இற்கு சைன் விதியைப் பாவிக்க.

$$\frac{OG}{\sin[90 - (\theta - \alpha + \beta)]} = \frac{PG}{\sin[90 - (\alpha - \beta)]}$$

$$\frac{OG}{PG} = \frac{\cos(\theta - \alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \quad \text{------------(1)}$$

$\Delta\, OQG$ இற்கு

$$\frac{OG}{\sin\{-[90 - (\theta + \alpha + \beta)]\}} = \frac{QG}{\sin[90 - (\alpha + \beta)]}$$

$$\frac{OG}{-\cos[\theta + \alpha + \beta]} = \frac{QG}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{OG}{QG} = \frac{-\cos(\theta + \alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)} \quad \text{------------(2)}$$

$PG = OG$ என்பதால்,

$$\frac{cos[\theta - (\alpha - \beta)]}{cos(\alpha - \beta)} = \frac{- cos(\theta + \alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{cos\theta \cdot cos(\alpha - \beta) + sin\theta \cdot sin(\alpha - \beta)}{cos(\alpha - \beta)} = \frac{- cos\theta \cdot cos(\alpha + \beta) + sin\theta \cdot sin(\alpha + \beta)}{cos(\alpha + \beta)}$$

$$cos\theta + sin\theta \cdot tan(\alpha - \beta) = - cos\theta + sin\theta \cdot tan(\alpha + \beta)$$

$$2 cos\theta = sin\theta \left[tan(\alpha + \beta) - tan(\alpha - \beta)\right]$$

$$2 cot\theta = \frac{sin(\alpha + \beta)}{cos(\alpha + \beta)} - \frac{sin(\alpha - \beta)}{cos(\alpha - \beta)}$$

$$cot\theta = \frac{sin(\alpha + \beta) \cdot cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) sin(\alpha - \beta)}{2\, cos(\alpha + \beta)\, cos(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{sin 2\beta}{cos 2\alpha + cos 2\beta}$$

$$\theta = cot^{-1}\left\{\frac{sin 2\beta}{cos 2\alpha + cos 2\beta}\right\}$$

பயிற்சி - 5

1. W நிறையுடைய சீரான கோல்கள் AB, A இல் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. B இல் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடைவிசை $\frac{W}{2}$ இனால், இக்கோல் ஒரு பக்கத்திற்கு இழுக்கப்படுகிறது. சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வையும் A யிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

2. W நிறையுடைய AB எனும் சீர்ச்சட்டமொன்று A யிலுள்ள ஒரு பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் அசையக் கூடியது. A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $AC = AB$ எனவுள்ள C எனும் புள்ளியையும், கோலின் மறுமுனை B ஐயும் இணைக்கும் இழையினால் சட்டமானது மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் 30° இல் சமநிலையில் பேணப்படுகிறது. இழையிலுள்ள இழுவையையும், பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

13. $AB = BC$ ஆகவுள்ள இருசமபக்க செங்கோணமுக்கோணி வடிவ W நிறையுடைய அடர் ABC, A இல் நிலையான புள்ளிக்குச் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு AC நிலைக்குத்தாகவும், C, A யிற்கு மேலாகவும் இருக்குமாறு C உடன் இணைத்த கிடை இழையினால் சமநிலையில் பேணப்படுகிறது. இழையிலுள்ள இழுவையையும், பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

4. W நிறையும் சமபக்க முக்கோணிவடிவும் உடைய சீரான அடர் ABC இனது உச்சி A, ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்குப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. அது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அப்புள்ளியைப் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக் கூடியது. அவ்வடர் A இற்குமேல் B அமைய AB நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும் உச்சி C ஒரு ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடுமாறும் தங்கியுள்ளது. சுவருக்கும் அடருக்குமிடையேயான மறுதாக்கத்தையும் A யிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

5. W நிறையுடைய ஒரு சீர்க்கோல் ACB ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் A இல் சாய்ந்தும் B இன் மட்டத்தில் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளி D ஐயும் C ஐயும் இணைக்கும், ஓர் இழையினால் B ஐ மேற்புறமாகக் கொண்டும் தாங்கப்படுகிறது. சுவருடன் CD யின் சாய்வு 30° எனின், இழையின் இழுவையையும் சுவரிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க. $AC = \frac{1}{3} AB$ என நிறுவுக.

6. ஒரு சீர்க்கோல் AB அதன் மேல் முனை A ஓர் ஒப்பமான முளையில் சாய்ந்திருக்கப்பெற்றும் A இன் மட்டத்திலுள்ள புள்ளி C இல் இணைத்த ஓர் இலேசான நாணிற்கு முனை B இணைக்கப்பெற்றும் கிடையுடன் α கோணத்தில் சமநிலையிலுள்ளது. அந்நாண் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் β

$tan\beta = 2 tan\alpha + cot\alpha$ என்பதால் தரப்படுமெனவும் $AC = \frac{AB\, sec\alpha}{1 + 2 tan^2 \alpha}$ எனவும் நிறுவுக.

7. $63cm$ ஆரையும் $5kg$ திணிவும் உள்ள ஒரு கோளம் ஓர் ஒப்பமான நிலைக் குத்துச் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து $24cm$ நீள இழையொன்றினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

8. $2W$ நிறையும் ℓ நீளமும் உடைய சீர்க்கோல் AB அதன்மேல் முனை A இலுள்ள ஒப்பமான பிணையல் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. A இனூடான நிலைக்குத்திலிருந்து a தூரத்தில் B இருக்குமாறு கோல் சமநிலையிலிருக்கத்தக்கதாக B இல் ஒரு கிடை விசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது.

பிணையிலுள்ள மறுதாக்கம் $W\left[\dfrac{4\ell^2 - 3a^2}{\ell^2 - a^2}\right]^{1/2}$ என நிறுவுக.

9. கிடையுடன் α சாய்வுடைய ஓர் ஒப்பமான தளத்தின்மீது, நிறை W உடைய ஒருகோளம் அதன் ஆரைக்குச் சமனான நீளமுள்ள ஓர் இழையினாலே, அக்கோளத்தின் மீது ஒரு புள்ளிக்கும், அத்தளத்தின் மீது ஒரு புள்ளிக்கும் தொடுக்கப்பட்டு சமநிலையில் உள்ளது. அவ்விழையின் இழுவை $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}W$ எனக் காட்டுக.

10. W நிறையுடைய கோல் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நீளத்தை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிகிறது. இக்கோல் ஒப்பமான பொட்கோளம் ஒன்றின் உட் புறத்தில் சமநிலையிலுள்ளது. கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள இக்கோல் கோளத்தின் மையத்தில் 2α கோணத்தை எதிரமைக்கிறது.

$\tan\theta = \dfrac{1}{3}\tan\alpha$ எனக் காட்டுக. கோலின் ஒவ்வொருமுனையிலுமுள்ள மறுதாக்கங்களை W, α சார்பில் காண்க.

11. $3W, 5W$ நிறையுடைய இரு சிறிய வளையங்கள் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள a ஆரையுடைய ஒப்பமான வட்டக்கம்பியொன்றில் வழுக்கிச் செல்லக்கூடியவை. இவ்விரு வளையங்களும் $\dfrac{8a}{3}$ நீளமுடைய இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் இணைக்கப்பட்டு, இழையானது கம்பியின் அதி உயர் புள்ளிக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $\dfrac{a}{3}$ உயரத்திலுள்ள ஒப்பமான முளை ஒன்றின் மேலாகச் செல்கிறது. முளையினூடான நிலைக்குத்திற்கு எதிர்ப்பங்களில் வளையங்கள் ஓய்வடைகின்றன. கம்பியினால் ஒவ்வொரு வளையத்தின் மீதுமான மறுதாக்கத்தைக் கண்டு இழையின் இழுவை $\dfrac{15W}{4}$ எனக் காட்டுக.

கம்பி சீரானதாகவும் W நிறை உடையதாகவுமிருப்பின் கம்பியைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையின் கிடை நிலைக் கூறுகளைக் காண்க.

12. நிலைக்குத்தாக நிலைப்படுத்தப்பட்ட a ஆரையுடைய ஒப்பமான வட்ட வளையமொன்றின் உட்புறத்தில் a நீளமுடைய மெல்லிய கோலொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் புவியீர்ப்புமையம் அதன் நீளத்தை $3:4$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பின் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}(7\sqrt{3})$ எனக் காட்டுக. இரு முனைகளிலுமான மறுதாக்கங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

13. W நிறையுள்ள சீர்க்கோல் AB இன் முனை B இற்கு w நிறை ஒன்று இணைக்கப்பட்டு கோலின் நீளத்திற்குச் சமமான நீளமுடைய இரு மெல்லிய இழைகள் OA, OB என்பவற்றால் நிலையான புள்ளி O இலிருந்து இக்கோல் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் OA, OB என்பவற்றின் இழுவைகள் R, S எனின், $\dfrac{R}{W} = \dfrac{S}{W+2w}$ எனக்காட்டுக. OA, நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தை ஆக்கினால் $\tan\alpha = \dfrac{(W+2w)\sqrt{3}}{3W+2w}$ எனக் காட்டுக.

14. இலேசான நீளா இழையொன்றின் இரு முனைகளும் ஒரு பக்கம் a ஆகவுள்ள சீரான சமபக்க முக்கோண அடரொன்றின் இரு முனைகளுக்கு இணைக்கப் பட்டுள்ளன. அவ்விழை ஒப்பமான சிறிய முளை ஒன்றின் மேலாகச் செல்கின்றது. அடர் தன் ஒரு பக்கம் நிலைக்குத்தாயிருக்கும்படி சமநிலையில் தொங்குகிறது. இழையின் இருபகுதிகளும் நிலைக்குத்துடன் 30° சாய்விலிருக் கின்றன எனவும், இழையின் நீளம் $a\sqrt{3}$ எனவும் காட்டுக.

15. $3a$ நீளமுடைய மெல்லிய கோலொன்றின் புவியீர்ப்புமையம். கோலின் முச்சம கூறிடும் புள்ளியிலுள்ளது. கோலின் முனைகளானது $6a$ நீளமுள்ள இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் முனைகளுக்குத் தொடுக்கப்பட்டு, இழையானது ஒப்பமான முனையின் மேலாகச் செல்கிறது. சமநிலையில் கோல் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}$ எனக் காட்டுக.

16. a ஆரையுடைய ஓர் அழுத்தமான அரைக்கோளக் குவளை. அதனச்சு நிலைக் குத்தாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. W நிறையுடைய ஒரு சீர்க்கோல் ACB, அதன் கீழ்முனை A குவளையின் உட்புறத்தைத் தொட்ட வாறும் கோலின் ஒரு புள்ளி C குவளையின் விளிம்பைத் தொட்டவாறும் கிடையுடன் 30° இல் சமநிலையிலுள்ளது. கோலின் நீளம் $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ என நிறுவி A யிலும் C யிலும் கோலிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

17. ஓர் இலேசான இழையின் ஒரு முனை W நிறையுடைய AB எனும் கோலின் A என்னும் முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழை P எனும் புள்ளியிலுள்ள நிலைத்த ஒப்பமான முளையின் மேலாகவும் கோலின் முனை B இலுள்ள சிறிய இலேசான வளையத்தினூடாகவும் சென்று அதன் மறுமுனையில் $2W$ நிறையைத் தாங்குகிறது. சமநிலையில் $AP : PB = 5 : 1$ என நிறுவுக.

18. ஓர் இலேசான இழையின் இரண்டு முனைகளும் ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள A, B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கிணைக்கப்பட்டுள்ளன. முறையே $3kg$, $4kg$ உடைய P, Q ஆகிய இரண்டு துணிக்கைகள் இழையின் நீளத்தின் வழியே இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையில் P, Q ஆகியவற்றினூடு செல்லும் நிலைக்குத்துக்கள் AB ஐ முக்கூறுடுகின்றன. AB இலிருந்து P, Q என்பவற்றின் ஆழங்களின் விகிதம் $10 : 11$ எனக் காட்டுக.

19. விளிம்பு கிடையாக நிலைப்படுத்திய ஓர் ஒப்பமான அரைக்கோளக்குவளையினுள் l நீளமுடைய ஒப்பமான சீர்க்கோல் அதன் ஒருமுனை குவளையின் உட் பரப்பைத் தொடவும் கோலின் ஒருபுள்ளி விளிம்பைத் தொடவும் சமநிலையில் உள்ளது. குவளையின் ஆரை r ஆகவும் கிடையுடன் கோலின் சாய்வு θ ஆகவும் இருப்பின். $4r\cos 2\theta = l\cos\theta$ எனக் காட்டுக. இவ்வாறு சமநிலையில் இருக்க ℓ ஆனது $\frac{2\sqrt{6}}{3}r$ இலும் பெரிதாக இருக்கவேண்டும் எனக் காட்டுக

20. ஒரு கூம்புப்பாத்திரமானது h உயரமும் உச்சிக்கோணம் 90° ஐயும் உடையது. அது தன் உச்சி கீழ்நோக்கி இருக்கும் வண்ணம் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஒப்பமான சீர்க்கோல், அதன் ஒரு முனை கூம்பினுட்புறமும் மறுமுனை கூம்பிற்கு வெளியிலிருக்கும் வண்ணமும் சமநிலையிலுள்ளது. கோலானது கிடையுடன் $\theta\,(<45^\circ)$ கோணத்தை ஆக்கின், கோலின் நீளம் $\frac{4h}{\cos\theta\,(\cos\theta+\sin\theta)^2}$ எனக் காட்டுக.

21. $ABCD$ என்பது சீரான செவ்வகத்தட்டு $AB = 2a$, $AD = 2b$. அத்தட்டானது ஒப்பமான ஒரு நிலைக்கத்துச் சுவரிலுள்ள O எனும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து ℓ நீளமுள்ள நீட்டமுடியாத ஒரு மெல்லிய இழை OA யினாலே தூக்கப்படுகிறது. D ஆனது அச்சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க. அத்தட்டு O வினூடாக அச்சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஓய்விலிருக் கின்றது. θ, ϕ என்பன நிலைக்குத்துடன் முறையே OA, AD என்பவற்றின் சாய்வுகளாயின் இவை $\frac{\ell}{b} = \frac{2\sin\phi}{\sin\theta}$, $\frac{a}{b} = \tan\phi + 2\tan\theta$ என்னும் சமன் பாடுகளாலே துணியப்படுமெனக் காட்டுக.

22. AB என்னும் பாரமான சீர்க்கோலொன்றின் A என்னும் முனை ஒப்பமான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடுகிறது. ஓரிழையின ஒரு முனை அக்கோலிலுள்ள ஒரு புள்ளி C யிற்கு $AC = \frac{1}{4}AB$ ஆகும்படி இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. மற்றைய முனை அச்சுவருக்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அக்கோலானது நிலைக்குத்திற்கு ஒரு கோணத்தில் சாய்ந்த நிலையில் ஓய்விலிருந்தால் இழையின் நீளத்தைக் காண்க.

23. a நீளமான சீரான கோலொன்று ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரான நீளமான ஓரிழையினால் தாங்கப்படுகிறது. அவ்விழை அக்கோலின் ஒரு

முனைக்குக் கட்டப்பட்டு, மற்றைய முனை அச்சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கோல் $\cos^2\theta = \frac{\ell^2 - a^2}{3a^2}$ என்பதால் தரப்படும். θ என்னும் கோணத்தில் அச்சுவருக்குச் சாய்ந்த நிலையில் ஓய்விலிருக்கக் கூடுமெனக் காட்டுக. சமநிலை நிகழத்தக்கதாக $a : \ell$ என்னும் விகிதத்தின் எல்லைகளைக் காண்க.

24. ஒரு கோலானது r ஆரையுடைய ஓர் ஒப்பமான அரைக் கோளக் கிண்ணத் திற்குள் முழுவதுமாய்க் கிடக்கின்றது. அதன் புவியீர்ப்புமையம் அதனை a, b எனும் நீளப்பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றது. அது சமநிலையிலிருக்கும் போது கிடையுடன் அதன் சாய்வு θ ஆக இருந்தால் $\sin\theta = \frac{b - a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$ எனக் காட்டுக. மேலும் அக்கோலிற்கும், கிண்ணத்திற்குமிடையேயுள்ள மறுதாக்கங் களையும் காண்க. இங்கு $b > a$:

25. P, P என்னும் சமநிறைகள் C என்னும் ஒப்பமான ஒரு முனைக் கட்டைக்கு மேலாகச் செல்லும் ACP, BCP என்னும் இரண்டு இழைகளுக்கு இணைக்கப்படுகின்றன. AB என்பது W நிறையுடைய பாரமான வளை. அதன் புவியீர்ப்புமையம் A யிலிருந்து a தூரத்திலும், B யிலிருந்து b தூரத்திலும் உள்ளது. AB ஆனது கிடையுடன் $\tan^{-1}\left[\frac{a - b}{a + b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளதெனக் காட்டுக.

26. தன் புவியீர்ப்பு மையத்தால் a, b என்னும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படும் ஒரு வளை ஒப்பமான கோளம் ஒன்றினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் அது கிடையுடன் ஆக்கும் சாய்வு θ ஆகவும், அக்கோள மையத்தில் எதிரமைக் கப்படும் கோணம் 2α ஆகவுமிருப்பின் $\tan\theta = \frac{b - a}{b + a}\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

27. ஒரு சீர்க்கோலானது தன்னுடைய ஒரு முனையிலுள்ள ஒரு பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத தளத்திலே இயக்கப்படவல்லது. அதன் மற்றைய முனையில்

அக்கோலின் நிறையின் அரைப்பங்கிற்குச் சமனான ஒரு நிறை இணைக் கப்பட்டுள்ளது. இம்முனை அப்பிணையலுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே c என்னும் உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு ℓ நீளமான ஓரிழையினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கோலினது நிறை W ஆயின், அவ்விழையின் இழுவை $\frac{\ell W}{c}$ எனக் காட்டுக.

28. $2a$ நீளமுடைய சீரான வளையொன்று தனது ஒருமுனை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராய்க் கிடைக்கவும் அச்சுவருக்குச் சமாந்தரமாய் அதிலிருந்து b என்னும் தூரத்திலுள்ள ஓர் ஒப்பமான கிடைக்கோலின் மீது தன்நீளத்தின் ஒரு புள்ளி கிடக்கவும் சமநிலையிலுள்ளது. நிலைக்குத்திற்கு அவ்வளையின் சாய்வு $\sin^{-1}\left[\frac{b}{a}\right]^{1/3}$ எனக் காட்டுக.

29. a விட்டமுடைய ஓர் ஒப்பமான அரைக் கோளக் கிண்ணமானது தன்விளிம்பு ஒப்பமான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. பாரமான சீர்க்கோலொன்று ஒரு முனை அக்கிண்ணத்தின் உட்பரப்பின் மீதும் மற்றைய முனை அச்சுவருக்கெதிரேயும் இருக்குமாறு $60°$ இல் சாய்ந்ததாய்ச் சமநிலையிலிருக்கின்றது. அக்கோலின் நீளம் $\left[a + \frac{a}{\sqrt{13}}\right]$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

30. (i) na ஆரையுடைய ஒப்பமான கோளவடிவப் பாத்திரமொன்றினுள் ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் a ஆரையும் உடைய இருகோளங்கள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு கோளங்களிற்குமிடையேயான மறுதாக்கம் $\frac{W}{\sqrt{n^2 - 2n}}$ எனக் காட்டுக.

(ii) R ஆரையுடைய பொள் உருளை ஒன்று தன்பிறப்பாக்கிகள் கிடையாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் r ஆரையுடைய இரு சம உருளைகள் சமச்சீராக இதனுள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இதே போன்ற மூன்றாவது உருளையொன்று இவ்விரு உருளைகளின் மேலும் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது. $R < r\left(1 + 2\sqrt{7}\right)$ ஆக இருந்தாலன்றி சமநிலை சாத்தியமில்லை எனக் காட்டுக.

31. அரையுச்சிக் கோணம் $tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ ஆகவுள்ள ஒரு சீரான செவ்வட்டக் கூம்பு அதன் உச்சிக்கும் வட்ட அடியின் பரிதியின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இழுத்துக் கட்டப்பட்டதும் முனையின் மேலாகச் செல்வதுமான இலேசான நீளா இழை யினால் ஒரு சிறிய ஒப்பமான முனையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இக்கூம்பு தனதச்சுக் கிடையாவிருக்கும் வண்ணம் ஓய்ந்திருக்கும் எனின் கேத்திர கணித முறையாலோ, வேறுவழியாகவோ இழையின் நீளம் கூம்பின் உயரத்தின் மூன்று மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

32. W நிறையுடைய சீரான கோலொன்று அதன் முனைகளில் இணைக்கப்பட்ட இரு இழைகளினால் தாங்கப்பட்டுச் சமநிலையில் தொங்குகிறது. இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் T_1, T_2 எனக் காணப்படின் நிலைக்குத்துடனான கோலின் சாய்வின் கோணத்தின் கோசைன் $\dfrac{\left|T_1^2 - T_2^2\right|}{W\left\{2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - W^2\right\}^{1/2}}$ எனக் காட்டுக

33. நிறை W வை உடைய ஒரு கோல் AB இன் ஈர்வைமையம் G ஆனது, அதனை a, b எனும் நீளங்களையுடைய இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. நீளம் $\ell\ (> a + b)$ ஐ உடைய நீட்டமுடியாத இலேசான இழை ஒன்று இக்கோலின் இரு முனைகளிலும் கட்டப்பட்டுள்ளது. கோல் சமநிலையில் இருக்கிறது.

(a) (i) $\angle APG = \angle BPG$

(ii) $cos\angle APG = \dfrac{a+b}{2\ell}\,\dfrac{\left[\ell^2 - (a+b)^2\right]^{1/2}}{ab}$ எனக் காட்டுக.

(b) இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

34. $4a$ நீளமுள்ள பாரமான சீரான கோல் ஒன்று $\sqrt{3}\,a$ ஆரையுள்ள நிலைத்த ஒப்பமான அரைக்கோளக் கிண்ணம் ஒன்றின் மேற்பரப்பை அதன் ஒரு முனை தொட்டுக்கொண்டிருக்க, அக்கிண்ணத்தின் விளிம்பு மீது ஓய்விலிருக்கிறது. கிண்ணத்தின் விளிம்பு கிடையானதெனின், கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\dfrac{\pi}{6}$ ஆரையன் எனக் காட்டுக.

35. நிறை W வை உடைய ஒரு சீரான முக்கோணி அடர் ABC ஆனது A, B ஆகிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்ட இலேசான இழைகளினால் ஒரு புள்ளி O விலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு BC நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு தொங்குகிறது. இழைகள் AO, BO ஆகியன கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணங்கள் முறையே α, β ஆகவும் இழைகள் AO, BO ஆகியவற்றிலுள்ள இழுவைகள் முறையே T, T^1 ஆகவும் இருப்பின்,

(a) $T = \dfrac{W\,sin\,\beta}{sin\,(\alpha + \beta)}$ $\quad T^1 = \dfrac{W\,sin\,\alpha}{sin\,(\alpha + \beta)}$ எனக் காட்டுக.

(b) $tan\ ABC = \dfrac{3\,tan\,\alpha\ tan\,\beta}{2\,tan\,\beta - tan\,\alpha}$ எனக் காட்டுக.

36. ஒரு பாரமான சீர்க்கோல் AB யானது, அதன் ஒருமுனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க, A யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள வளையும் C யிற்கூடாகச் சென்று அக்கோலின் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட ஓர் இழை ACB யாலே தாங்கப்பட்டு ஓய்வில் இருக்கிறது எனின்.

$\tan BAC = 2\cot\dfrac{1}{2}\,(ACB)$ என நிறுவுக.

37. W^1 நிறையையும் r ஆரையையும் உடைய ஒரு கோளம் ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீளம் l உள்ள இழை ஒன்றினால் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது; W நிறையையும் $2a$ நீளத்தையும் உடைய ஒரு சீர்க்கோல் அதே புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு அப்புள்ளி பற்றி சுயாதீனமாகத் திரும்பக் கூடியதாக உள்ளது. அக்கோலானது, அக்கோளத்தைத் தொட்டவண்ணம் ஓய்வில் இருப்பின் நிலைக்குத்துடன் அவ்விழையினால் ஆக்கப்படும் கோணம் θ வானது,

$\tan\theta = \dfrac{W a \cos^2\alpha}{W^1 r + W a \sin\alpha\ \cos\alpha}$ எனக் காட்டுக;

இங்கு $\cos\alpha = \dfrac{r}{l + r}$ ஆகும். மேலும் இழையின் இழுவை

$\dfrac{W^1\left(W a\,cot\,\alpha + W^1 r\right)}{\sqrt{W^2 a^2 cos^2\alpha + 2WW^1 a r\,sin\alpha\cdot cos\alpha + W^{1^2} r^2}}$ எனக் காட்டுக.

38. ஓர் இலேசான கோல் ABயின் முனைகள் A,B என்பன ஒருநிலைத்த புள்ளி Oவிற்கு இலேசான நீளா இழைகள் AO, BO என்பவற்றாலே தொடுக்கப் பட்டுள்ளன. AO,BO என்பன சம நீளமுடையனவாய் ஒன்றுக்கொன்று செங் கோணங்களில் உள்ளன. A,B என்பவற்றிலிருந்து W_1, W_2 என்னும் நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கிடையுடன் கோலின் சாய்வு θ ஆனது,

$tan\theta = \dfrac{W_1 \sim W_2}{W_1 + W_2}$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

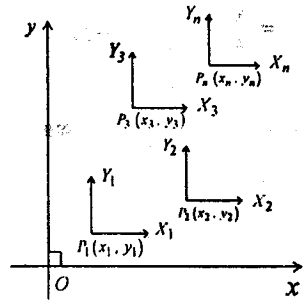
39. நிறை W உம் ஆரை a உம் உடைய ஒருசீர்க்கோளம் ஒருபுள்ளி P யிலிருந்து l நீள இழைமூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது; அக்கோளத்திற்குக் கீழே தொங்குவதற்குப் போதிய நீளமான ஓர் இழையினால் w என்னும் ஒருநிறை P யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட் டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் முதல் இழையின்

சாய்வு $sin^{-1} \dfrac{wa}{(W+w)(a+l)}$ எனக் காட்டுக.

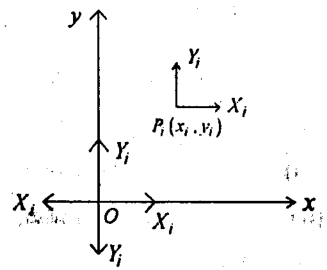
6. ஒருதள விசைத் தொகுதி

ஒருதள விசைத் தொகுதி ஒன்று அதன் தளத்திலுள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் பொதுவாக ஒரு தனி விசைக்கும் இணைக்கும் ஒருமித்து ஒடுக்கப்படலாம்.

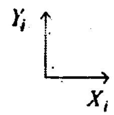
விசைத்தொகுதியின் தளத்தில் O யாதாயினும் ஒருபுள்ளி; Ox, Oy என்பன ஒன்றுக் கொன்று செங்குத் தான அச்சுக்கள் $P_i(x_i, y_i)$ எனும் புள்ளியில் (X_i, Y_i) எனும் விசை தாக்குகின்றது. $i = 1,2,3,....n$ ஆகும்.

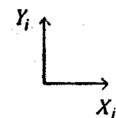


இப்பொழுது $P_i(x_i, y_i)$ இல் (X_i, Y_i) கூறுகளைக் கொண்ட விசையைக் கருதுக. உற்பத்தி O இல் Ox வழியேயும் அதற்கு எதிர்த்திசையிலும் X_i என்ற விசையையும், Oy வழியேயும் அதற்கு எதிர்த் திசையிலும் Y_i என்ற விசையையும் சேர்க்க இதனால் தொகுதியில் எவ்விதமாற்றமும் இல்லை.



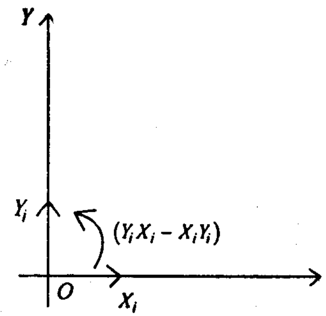
இப்பொழுது,

P_i இல்


$\equiv$ O இல்


உம் ,
$(Y_i x_i - X_i y_i)$ திருப்பமுடைய இணையும்.

இவ்வாறு எல்லா விசையையும் கருத தரப்பட்ட விசைத்தொகுதி O வில் என்ற விசைக்கும், G என்ற இணைக்கும் சமானமாகும்.

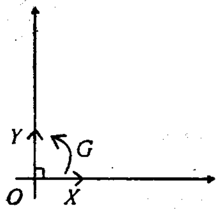


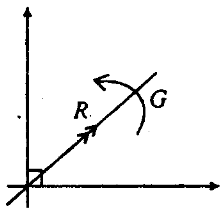
இங்கு $X = X_1 + X_2 + ... X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$G = \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$ என்க.





எனவே தரப்பட்ட விசைத்தொகுதி O வில் **தனிவிசை** R இற்கும் இணை G இற்கும் ஒடுக்கப்படலாம்.

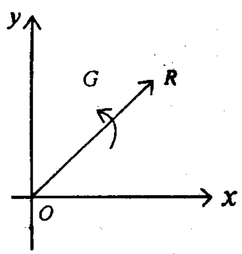
(i) $R=0$, $G=0$ எனின், தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்.

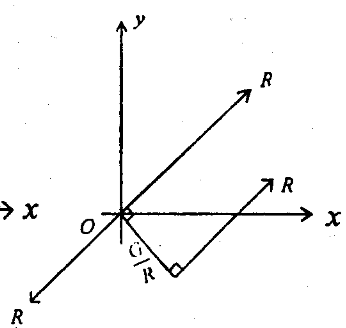
(ii) $R=0$, $G\neq 0$ எனின், தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும்.

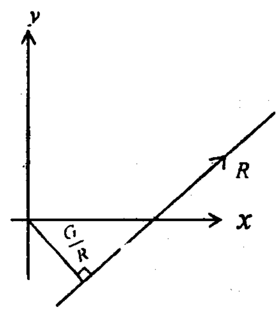
(iii) $R\neq 0$, $G=0$ எனின், தொகுதி O வில் ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்கும்.

(iv) $R\neq 0$, $G\neq 0$ எனின், தொகுதி O வில் ஒருதனி விசைக்கும், இணைக்கும் ஒடுங்கும்.

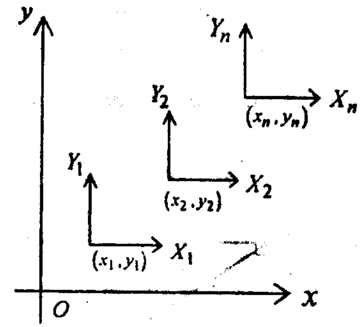
வகை **(IV)** இல் இத்தொகுதி O விலிருந்து $\frac{G}{R}$ தூரத்தில் ஒருதனி விசை R இற்கு ஒடுக்கப்படலாம்.

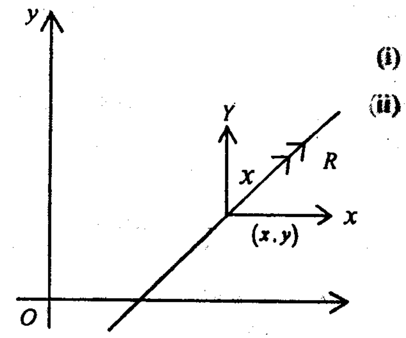






ஒரு தள விசைத்தொகுதி ஒன்று ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்குமாயின், அதன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணல்





புள்ளி $P_i(x_i, y_i)$ இல் (X_i, Y_i) கூறுகளைக் கொண்ட விசைகள் தாக்குகின்றன. $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ ஆகும்.

$$\rightarrow \quad X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\uparrow \quad Y = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$O \circlearrowleft G = (Y_1 x_1 - X_1 y_1) + (Y_2 x_2 - X_2 y_2) + \ldots\ldots (Y_n x_n - X_n y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i)$$

விளையுள் விசை $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

விளையுளின் தாக்கக்கோட்டில் (x, y) யாதாயினும்மொரு புள்ளி.
O பற்றி விளையுளின் திருப்பம் $=$ O பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சர கணிதக் கூட்டுத்தொகை.

$$Y \cdot x - X \cdot y = G$$

ஆகவே, தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு $Y \cdot x - X \cdot y = G$ ஆகும்.

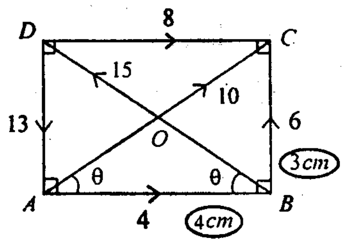
உதாரணம் 1

$ABCD$ ஒரு செவ்வகம் $AB = 4cm$, $BC = 3cm$ ஆகும். $AB, BC, DC, DA\ AC, BD$ வழியே $4,6,8,13,10,15\,N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை

(i) A இல் ஒரு தனி விசையாகவும், இணையாகவும்

(ii) மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி O வில் ஒருதனி விசையாகவும் இணையாகவும் ஒடுக்குக.

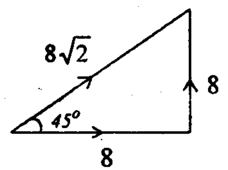
$$\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad \sin\theta = \frac{3}{5}$$



$$\rightarrow \quad X = 4 + 8 + 10\cos\theta - 15\cos\theta$$
$$= 12 - 5\cos\theta$$
$$= 12 - 4 = 8$$

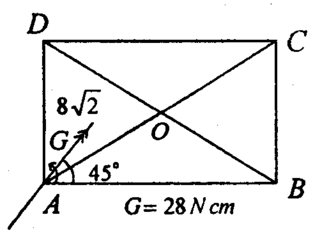
$$\uparrow \quad Y = 6 - 13 + 10\sin\theta + 15\sin\theta$$
$$= -7 + 25\sin\theta$$
$$= -7 + 15 = 8$$

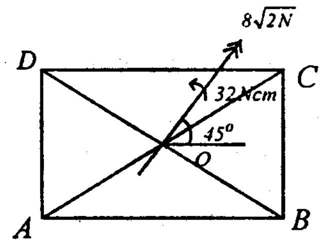
$$A \circlearrowleft \quad = (6\times 4) - (8\times 4) + (15\times 4\sin\theta)$$
$$= 24 - 32 + 36 = 28$$



$$O \circlearrowleft \quad = 4\times\frac{3}{2} + 6\times 2 - 8\times\frac{3}{2} + 13\times 2$$
$$= 6 + 12 - 12 + 26 = 32$$

(i) A இல் (ii) O வில்

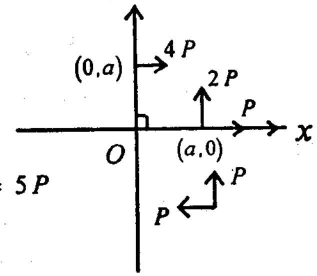




உதாரணம் 2

$(P, 2P), (-P, P), (4P, 0)$ ஐக் கூறுகளாகக் கொண்ட விசைகள் முறையே $(a, 0), (a, -a), (0, a)$ என்பவற்றை ஆள்கூறுகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியை உற்பத்தியில் ஒருவிசைக்கும், இணைக்கும் ஒடுக்குக. விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு $4y - 3x = 2a$ என உய்த்தறிக.

$$\rightarrow \quad X = P + (-P) + 4P = 4P$$



$$\uparrow \quad Y = 2P + P + 0 = 3P$$

விளையுள் $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{4P^2 + 3P^2} = 5P$

$$O \circlearrowleft \quad = 2P\times a + Pxa - P\times a - 4P\times a$$
$$= -2Pa$$

எனவே தரப்பட்ட விசைத் தொகுதி O இல் $5P$. பருமனுள்ள விசைக்கும் $\circlearrowleft -2Pa$ திருப்பமுடைய இணைக்கும் சமமாகும்.

O பற்றி விளையுளின் திருப்பம் $= O$ பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சர கணிதக் கூட்டுத்தொகை

$$Y\cdot x - X\cdot y = G$$
$$3P\cdot x - 4Py = -2Pa$$
$$3x - 4y = -2a$$
$$4y - 3x = 2a$$

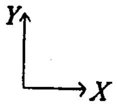
$\therefore$ தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு $4y - 3x = 2a$

உதாரணம் 3

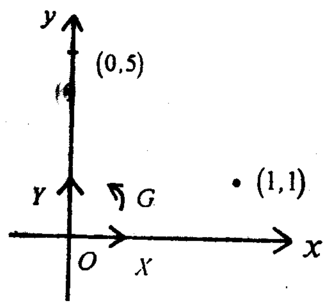
(0,0), (1,1), (0,5) என்னும் புள்ளிகள் பற்றி ஒருதள விசைத் தொகுதி ஒன்றின் திருப்பங்கள் முறையே 45, 39, 0 அலகுகளாகும். விளையுளின் பருமனையும், அதன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

இவ்விசைகள் முறையே $4y = 3x + 20$, $y = 5$ எனும் கோடுகள் வழியே தாக்கும் P, Q எனும் விசைகளுக்கு சமவலுவானதாயின் P, Q என்பவற்றின் பருமன்களைக் காண்க.

தரப்பட்டவிசைத் தொகுதி O இல்

விசை  இற்கும் இணை G இற்கும்

ஒடுக்கப்படலாம் என்க.



$$O \circlearrowleft \quad = G = 45 \text{ ---------------(1)}$$

$$(1,1) \circlearrowleft \quad = X \times 1 - Y \times 1 + G = 39$$

$$X - Y + G = 39 \text{ ---------------(2)}$$

$$(0,5) \circlearrowleft \quad = 5X + G = 0 \text{ ---------------(3)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) \text{ இலிருந்து } & G = 45 \\ (3) \text{ இலிருந்து } & X = -9 \\ (2) \text{ இலிருந்து } & Y = -3 \end{array}\right\}$$

தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

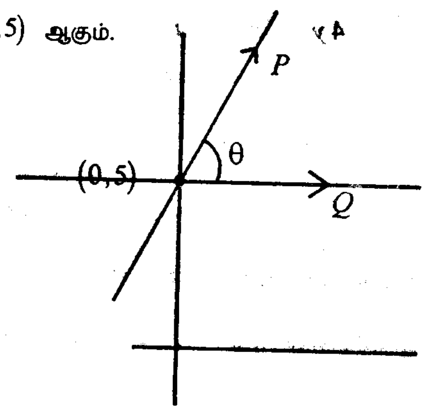
$$Yx - Xy = G$$

$$-3x + 9y = 45$$

$$x - 3y + 15 = 0 \text{ ---------------(4)}$$

$y = 5$, $4y = 3x + 20$ என்னும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு $(0,5)$ மேலும் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு $x - 3y + 15 = 0$,

y அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறு $(0,5)$ ஆகும்.



$$\tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \quad X = Q + P\cos\theta$$

$$= Q + \frac{4P}{5}$$

$$\uparrow \quad Y = P\sin\theta = \frac{3P}{5}$$

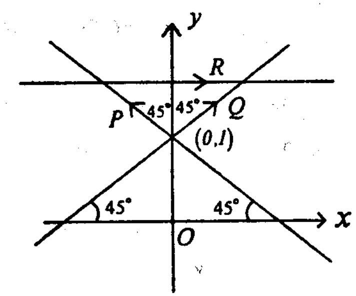
$$\frac{3P}{5} = -3 \Rightarrow P = -5$$

$$Q + \frac{4P}{5} = -9 \Rightarrow Q = -5$$

P, Q என்பவற்றின் பருமன்கள் 5 அலகுகள் ஆகும்.

உதாரணம் 4

P, Q, R என்னும் மூன்று விசைகள் $x + y = 1$, $y - x = 1$, $y = 2$ என்னும் கோடுகளால் ஆக்கப்பட்ட முக்கோணியின் பக்கங்களின் வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



$$\rightarrow \quad X = (Q - P)\cos 45 + R$$

$$\uparrow \quad Y = (P + Q)\sin 45$$

$$O \circlearrowleft \quad = G = P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - Q\frac{1}{\sqrt{2}} - 2R$$

தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y \cdot x - X \cdot y = G$$

$$(P + Q)\frac{1}{\sqrt{2}}x - \left[(Q - P)\frac{1}{\sqrt{2}} + R\right]y = \frac{P}{\sqrt{2}} - \frac{Q}{\sqrt{2}} - 2R$$

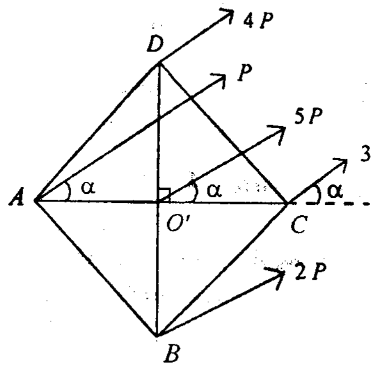
அல்லது

$$\frac{P}{\sqrt{2}}(x + y - 1) + \frac{Q}{\sqrt{2}}(x - y + 1) - R(y - 2) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 5

P, $2P$, $3P$, $4P$ என்னும் பருமன்களையுடைய நான்கு விசைகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளிலும் $5P$ என்னும் பருமனுடைய ஐந்தாவது விசை ஒன்று சதுரத்தின் மையம் O விலும் தாக்குகின்றன. விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் சதுரத்தின் தளத்தில் உள்ளன. அவையெல்லாம் மூலைவிட்டங்களில் ஒன்றுடன் அதேகோணம் α வை அமைக்கின்றன.

மூலை விட்டங்களை அச்சுக்களாகக் குறித்து விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.இவ்விளையுள் α இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடு செல்லும் எனக் காட்டுக.



$$\rightarrow \quad X = P\cos\alpha + 2P\cos\alpha + 3P\cos\alpha + 4P\cos\alpha + 5P\cos\alpha = 15P\cos\alpha$$

$$\uparrow \quad Y = P\sin\alpha + 2P\sin\alpha + 3P\sin\alpha + 4P\sin\alpha + 5P\sin\alpha = 15P\sin\alpha$$

[OA = OB = OC = OD = a என்க]

$$O \circlearrowleft \quad = G = -Pa\sin\alpha + 3Pa\sin\alpha - 4Pa\cos\alpha + 2P\cos\alpha$$
$$= 2Pa(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$Y\cdot x - X\cdot y = G$$

$$15P\sin\alpha\cdot x - 15P\cos\alpha\cdot y = 2Pa(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$15\sin\alpha\cdot x - 15\cos\alpha\, y = 2a(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$(15x - 2a)\sin\alpha - (15y - 2a)\cos\alpha = 0$$

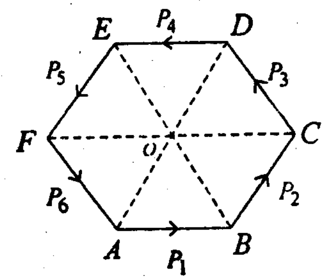
இந்நேர்கோடு α இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $15x - 2a = 0$, $15y - 2a = 0$ என்னும் இரு நேர்கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$\therefore \left(\dfrac{2a}{15}, \dfrac{2a}{15}\right)$ என்னும் நிலைத்த புள்ளியினூடு விளையுள் செல்லும்.

உதாரணம் 6

ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றின் ஓரொழுங்கில் எடுத்த பக்கங்களின் வழியே $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ பருமன்களையுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன.

$\sum_{i=1}^{6} P_i = 0$; $P_1 - P_4 = P_3 - P_6 = P_5 - P_2$ எனின், தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும் எனக் காட்டுக.



$$\rightarrow \quad X = P_1 - P_4 + P_2\cos 60 - P_3\cos 60 - P_5\cos 60 + P_6\cos 60$$

$$= (P_1 - P_4) + \frac{1}{2}(P_6 - P_3) + \frac{1}{2}(P_2 - P_5)$$

$$= (P_1 - P_4) - \frac{1}{2}(P_1 - P_4) - \frac{1}{2}(P_1 - P_4) = 0$$

$$\uparrow \quad Y = P_2\sin 60 + P_3\sin 60 - P_5\sin 60 - P_6\sin 60$$

$$= \sin 60\left[(P_3 - P_6) - (P_5 - P_2)\right] = 0$$

$$O \circlearrowleft \quad G = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6)\sqrt{3}\, a = 0$$

$[AB = 2a]$

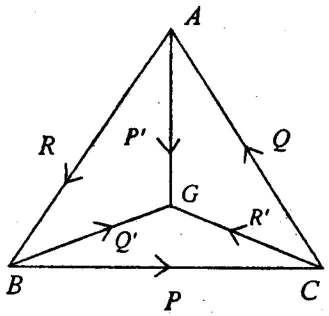
$R = 0,\ G = 0$; எனவே தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்.

உதாரணம் 7

முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி G ஆகும். BC, CA, AB வழியே தாக்கும் P, Q, R எனும் விசைகள் AG, BG, CG வழியே தாக்கும் P', Q', R' என்னும் விசைகளுடன் சமநிலையில் இருக்கின்றன எனின்,

$\dfrac{PP'}{AG\cdot BC} + \dfrac{QQ'}{BG\cdot CA} + \dfrac{RR'}{CG\cdot AB} = 0$ என நிறுவுக.

P, Q, R, P', Q', R' என்பன சமநிலையில் உள்ளதால் எந்த ஒரு புள்ளி பற்றியும் திருப்பு திறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.



[A யிலிருந்து B யின் செங்குத்துத்தூரம் h எனின்,

$\frac{1}{2}BC\cdot h = \Delta\ ABC\ ;\ h = \frac{2\Delta\ ABC}{BC}$]

$$A \circlearrowleft\ = P\cdot\frac{2\Delta\ ABC}{BC} + Q'\cdot\frac{2\Delta\ ABG}{BG} - R'\cdot\frac{2\Delta\ ACG}{CG} = 0 \text{ ------------ (1)}$$

$$B \circlearrowleft\ = Q\cdot\frac{2\Delta\ ABC}{CA} + R'\cdot\frac{2\Delta\ BGC}{CG} - P'\cdot\frac{2\Delta\ AGB}{AG} = 0 \text{ --------- (2)}$$

$$C \circlearrowleft\ = R\cdot\frac{2\Delta\ ABC}{AB} + P'\cdot\frac{2\Delta\ AGC}{AG} - Q'\cdot\frac{2\Delta\ BGC}{BG} = 0 \text{ --------- (3)}$$

$$(1)\times\frac{P'}{AG} + (2)\times\frac{Q'}{BG} + (3)\times\frac{R'}{CG} \Rightarrow \frac{PP'}{AG\cdot BC} + \frac{QQ'}{BG\cdot CA} + \frac{RR'}{CG\cdot AB} = 0$$

உதாரணம் 8

A B C D என்னும் செவ்வகம் ஒன்றில் $AB=8m,\ BC=6m$. P, Q, R, S என்பன முறையே AB, BC, CD, DA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். PQ, QR, RS, SP, AC, BD வழியாக எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிக்கும் திசைகளில் முறையே நியூட்டன் பருமனுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) இவ்விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்க முடியாதெனவும்,

(ii) இத்தொகுதி ஓரிணையாக ஒடுங்குமெனில் அப்பொழுது $\lambda = \mu = 10$ எனவும்

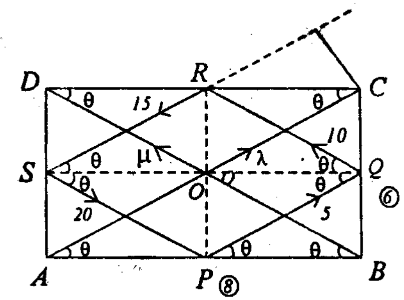
(iii) இத்தொகுதி C ஊடாகச் செயற்படுகின்ற தனியொரு விசையாக ஒடுங்குமெனின் அப்பொழுது $\mu = 35$ எனவும், தனிவிசையின் மிகச் சிறிய பருமன் 24 நியூட்டன் எனவும் காட்டுக.

$PQRS$ ஒரு சாய்சதுரம் ; ஒருபக்கநீளம் $5m$

$\angle QPB = \theta$ எனின்,

$$\cos\theta = \frac{4}{5}\ ,\ \sin\theta = \frac{3}{5}$$

$$OQ = 4m$$



(i) $O \circlearrowleft\ = (5 + 10 + 15 + 20) \times 4\sin\theta$

$$= 50 \times 4 \times \frac{3}{5} = 120\,N.m$$

தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் எந்தவொரு புள்ளி பற்றியும் திருப்புத் திறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

ஆனால் $O \circlearrowleft\ = 120\,N.m \neq 0$ எனவே தொகுதி சமநிலையில் இருக்கமுடியாது.

(ii) $\rightarrow X = 5\cos\theta - 10\cos\theta - 15\cos\theta + 20\cos\theta + \lambda\cos\theta - \mu\cos\theta$

$$= (\lambda - \mu)\cos\theta = (\lambda - \mu)\frac{4}{5} \text{ ------------- (1)}$$

$\uparrow Y = 5\sin\theta + 10\sin\theta - 15\sin\theta - 20\sin\theta + \lambda\sin\theta + \mu\sin\theta$

$$(\lambda + \mu - 20)\frac{3}{5} \text{ ------------- (2)}$$

தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும் எனின், $X = 0,\ Y = 0$

$\lambda - \mu = 0,\ \lambda + \mu - 20 = 0$

$\therefore \lambda = \mu = 10$ ஆகும்.

(iii) தொகுதி C யினூடாக தனிவிசையாக ஒடுங்கும் எனின் $C \circlearrowleft\ = 0$

$$C \circlearrowleft\ = -10 \times 4\sin\theta - \mu \times 8\sin\theta + 20 \times 12\sin\theta + 15 \times 4\sin\theta + 5 \times 4\sin\theta$$

$$= 4\sin\theta\,[-10 - 2\mu + 60 + 15 + 5]$$

$$= 4\sin\theta\,[70 - 2\mu]$$

$$C \circlearrowleft\ = 0 \Rightarrow 70 - 2\mu = 0\ ;\ \mu = 35$$

$\mu = 35$ எனின், பகுதி (ii) இலிருந்து

$X = (\lambda - 35)\frac{4}{5}$, $Y = (\lambda + 15)\frac{3}{5}$; விளையுள் R எனின்,

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \frac{1}{25}\left[16(\lambda - 35)^2 + 9(\lambda + 15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{25}\left[25\lambda^2 - 850\lambda + 1225 \times 16 + 225 \times 9\right]$$

$$= \left[\lambda^2 - 34\lambda + 865\right]$$

$$= (\lambda - 17)^2 + 576$$

$$R = \sqrt{(\lambda - 17)^2 + 576}$$

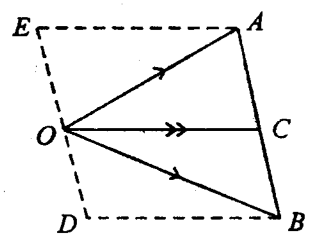
R இழிவாக இருக்க $\lambda = 17$; R இழிவு $= \sqrt{576} = 24$ நியூட்டன்.

விசைகளுக்கான $\lambda - \mu$ தேற்றம்

$\lambda\vec{OA}, \mu\vec{OB}$ என்பவற்றால் தரப்படும் இரு விசைகளின் விளையுள் $(\lambda + \mu)\vec{OC}$ ஆகும். இங்கு C என்பது AB இல் $AC : CB = \mu : \lambda$ ஆகுமாறு அமைந்த ஒரு புள்ளியாகும்.

அதாவது, $\lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB} = (\lambda + \mu)\vec{OC}\ [AC : CB = \mu : \lambda]$

நிறுவல்



$OCAE$, $OCBD$ ஆகிய இணைகரங்களைப் பூர்த்தியாக்குக.

$\vec{OE}, \vec{OC}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் $\vec{OA}$

$\vec{OD}, \vec{OC}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் $\vec{OB}$ ஆகும்.

$$\vec{OE} + \vec{OC} = \vec{OA} \quad \text{------------ (1)}$$

$$\vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OB} \quad \text{------------ (2)}$$

(1) இலிருந்து $\lambda\left(\vec{OE} + \vec{OC}\right) = \lambda\vec{OA}$

(2) இலிருந்து $\mu\left(\vec{OD} + \vec{OC}\right) = \mu\vec{OB}$

$$\lambda\vec{OB} + \lambda\vec{OC} = \lambda\vec{OA}$$

$$\underline{\mu\vec{OD} + \mu\vec{OC} = \mu\vec{OB}}$$

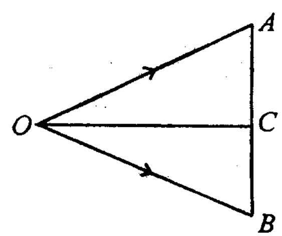
$$\lambda\vec{OE} + \mu\vec{OD} + (\lambda + \mu)\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$$

$\lambda\vec{OE}, \mu\vec{OD}$ என்பன O வில் தாக்கும் பருமனில் சமமும் எதிருமான விசைகள்.

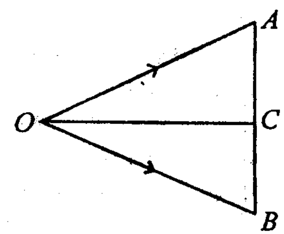
எனவே $\lambda\vec{OE} + \mu\vec{OD} = \underline{0}$

$$\lambda\vec{OE} + \mu\vec{OB} = (\lambda + \mu)\vec{OC}$$

உதாரணமாக,



$\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OC}\ [AC = BC]$ ஆகும்.



$2\vec{OA} + 3\vec{OB} = 5\,\vec{OC}[AC : CB = 3 : 2]$

ஒருதள விசைத்தொகுதி ஒன்றின் சமநிலைக்கான நிபந்தனைகள்

அவ்விசைத் தொகுதியினை, தளத்திலுள்ள ஏதாவதுதொரு புள்ளி O விலே தாக்கும் ஒரு தனிவிசை R ஆகவும், இணை G ஆகவும் ஒடுக்கும்போது $R=0,\ G=0$ ஆக இருப்பின் அவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

இந்நிபந்தனைகளைப் பின்வருமாறும் கூறலாம் (வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகள்)

(i) இரண்டு செங்குத்தான திசைகளில் விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் அட்சர கணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவும், தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

அல்லது

(ii) ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகள் பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை தனித்தனியே பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

அல்லது

(iii) இரண்டு புள்ளிகள் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை தனித்தனியே பூச்சியமாகவும் அப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுக்குச் செங்கோணத்தில் இல்லாத யாதும் ஒரு திசையில் அவ்விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

இணைகள்

ஓர் இணையானது பருமனில் சமமானதும் எதிரானதும், வேறுவேறு தாக்கக்கோடுகளைக் கொண்ட இரு சமாந்தர விசைகளாதலால் எந்தவொரு திசையிலும் இரு விசைகளின் பிரித்தபகுதிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். மேலும் அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளி பற்றியும் அவ்விணையின் திருப்பம் ஒரு மாறிலியாகும். (இது அலகு 3 இல் நிறுவப்பட்டுள்ளது)

இணைகளின் சேர்க்கை

தேற்றம் : ஒரே தளத்தில் தாக்கும் இரு இணைகள் அவற்றின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகையைத் திருப்பமாகக் கொண்ட ஒரு தனி இணைக்குச் சமவலுவானது.

இத்தேற்றத்திலிருந்து பின்வரும் முடிபுகளைப் பெறலாம்.

(1) ஒரு தளத்தில் தாக்கும் இரு இணைகளின் திருப்பங்கள் சமமாகவும், எதிராகவும் இருப்பின் அவை ஒன்றையொன்று சமன் செய்யும்.

(2) சமதிருப்பங்களையுடைய ஒரே தளத்திலுள்ள எவையேனும் இரு இணைகள் சமவலுவானவை.

உதாரணம் 9

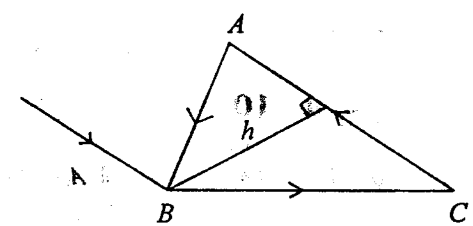
(i) ஓரொழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களால் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஓர் இணைக்குச் சமானம் என நிறுவுக.

ii) ஓரொழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு தளப்பல்கோணியின் பக்கங்களால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் அப்பல்கோணியின் பரப்பளவின் இருமடங்காற் குறிக்கப்படுந் திருப்பத்தையுடைய ஓர் இணைக்கு சமானம் என நிறுவுக.

(i) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$

$= \left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) + \vec{CA}$

$= B$ இல் $\vec{AC} + \vec{CA}$



இவ்விருவிசைகளும் இணைக்கு ஒடுங்கும்.

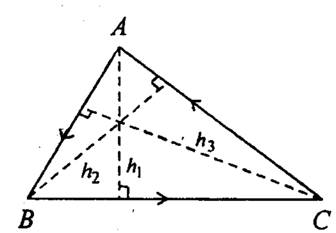
இணையின் திருப்பம். $AC \cdot h = 2 \times \frac{1}{2} AC \cdot h = 2\,\Delta\, ABC$

அல்லது

$A \circlearrowleft = BC \cdot h_1 = 2 \times \frac{1}{2} BC \cdot h_1 = 2\,\Delta\, ABC$

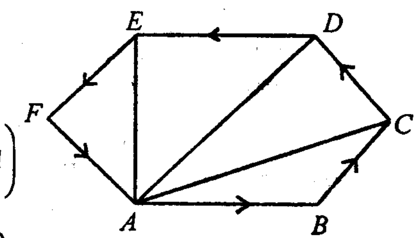
$B \circlearrowleft = CA \cdot h_2 = 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot h_2 = 2\,\Delta\, ABC$

$C \circlearrowleft = AB \cdot h_3 = 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot h_3 = 2\,\Delta\, ABC$



$A \circlearrowleft = B \circlearrowleft = C \circlearrowleft$. ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத 3 புள்ளிகள் பற்றிய திருப்பங்கள் சமம். எனவே விசைத்தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும்.

(ii) பல்கோணி $ABCDEF$ ஐக் கருதுக.



$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA}$

$= \left(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}\right) + \left(\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA}\right)$

$+ \left(\vec{AD} + \vec{DE} + \vec{EA}\right) + \left(\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FB}\right)$

$= 2\,\Delta ABC$ திருப்பமுடைய இணை $+ \circlearrowleft 2\,\Delta ACD$ திருப்பமுடைய இணை

$\circlearrowleft 2\,\Delta ADE$ திருப்பமுடைய இணை $+ \circlearrowleft 2\,\Delta 2AEF$ திருப்பமுடைய இணை

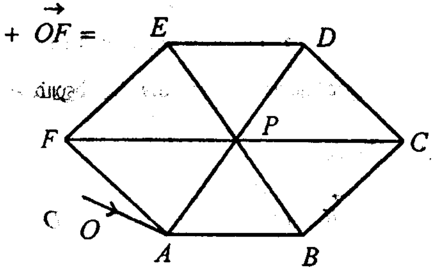
$= 2\times$ அறுகோணி $ABCDEF$ இன் பரப்பளவு திருப்பமுடைய இணை

உதாரணம் 10

(i) ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் சுற்றுவட்டமையம் P ஆகும். O ஏதாவதுதொருபுள்ளி. $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$ ஆகிய ஆறு விசைகளினதும் விளையுள் $6\vec{OP}$ ஆகும் என நிறுவுக.

(ii) முக்கோணி ABC யின் மையப்போலி G ஆகும். BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் D, E, F ஆகும். O யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. $\vec{OD}, \vec{OE}, \vec{OF}$ ஆகிய மூன்று விசைகளினதும் விளையுள் $3\vec{OG}$ ஆகும் என நிறுவுக.

(i) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} =$



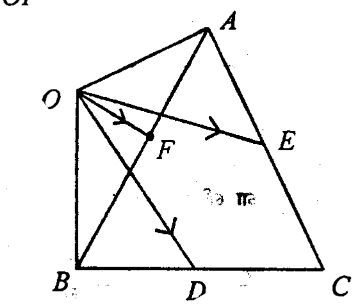
$\vec{OA} + \vec{OD} = 2\vec{OP}\ [AP = PD]$

$\vec{OB} + \vec{OE} = 2\vec{OP}\ [BP = PE]$

$\vec{OC} + \vec{OF} = 2\vec{OP}\ [CP = PE]$

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = 6\vec{OP}$

(ii) $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OD}$

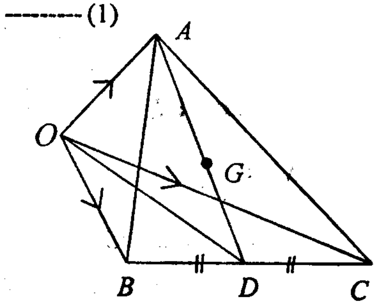


$\vec{OC} + \vec{OA} = 2\vec{OE}$

$\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OF}$

$2\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right) = 2\left(\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}\right)$

ஆகவே $\vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ -------- (1)



இப்பொழுது $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OD}\ [BD = DC]$

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{OD}$

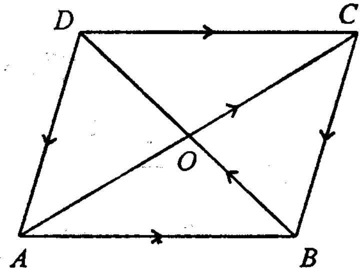
$= 3\vec{OG}\ [AG : GD = 2 : 1]$

உதாரணம் 11

ABCD ஓர் இணைகரமாகும். விசைத் தொகுதி ஒன்று $\vec{AB}, \vec{CB}, \vec{DC}, \vec{DA}, \vec{AC}, \vec{BD}$ என்பவற்றால் பூரணமாகக் குறிக்கப்படுகிறது. தொகுதியின் விளையுளானது பருமனிலும்,

திசையிலும் $2\vec{AB}$ என்பதால் குறிக்கப்படுமெனவும், இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் எனவும் காட்டுக.

ABCD இணைகரம்.



$\vec{AB} + \vec{CB} + \vec{DC} + \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{BD}$

இப்பொழுது

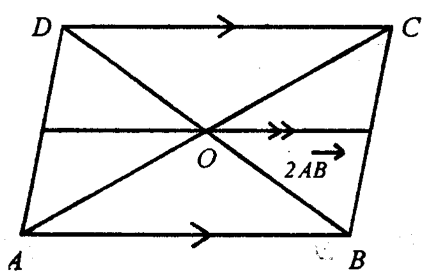
$\vec{DA} + \vec{AC} =$ A இல் $\vec{DC} = A$ இல் $\vec{AB}$

$\vec{CB} + \vec{BD} = B$ இல் $\vec{CD} = B$ இல் $\vec{BA}$

$\vec{DA} + \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD} = A$ இல் $\vec{AB}$ $+ B$ இல் $\vec{BA} = \underline{0}$ (சமநிலையிலிருக்கும்)

எஞ்சியுள்ள விசைகள்

$\vec{AB} + \vec{CD} = O$ இனூடு $2\vec{AB}$



உதாரணம் 12

(i) A,B,C என்பன ஒரே கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகளாகும். விசைத்தொகுதி ஒன்று $\alpha\vec{BC}, \beta\vec{CA}, \gamma\vec{AB}$ என்பவற்றால் தரப்படுகிறது. $\alpha = \beta = \gamma$ ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே இத்தொகுதி ஓர் இணையிற்கு ஒடுங்குமென நிறுவுக.

(ii) ஒரு தள நாற்பக்கல் ABCD யின் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் $p\vec{AB}, q\vec{CB}, r\vec{CD}, s\vec{AD}$ எனும் விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின் $pr = qs$ ஆகுமெனக்காட்டுக.

(iii) நாற்பக்கல் ABCDஇன் பக்கங்கள் AB,BC,CD,DA வழியே தாக்கும் P,Q,R,S எனும் விசைகள் சமநிலையில் உள்ளன.

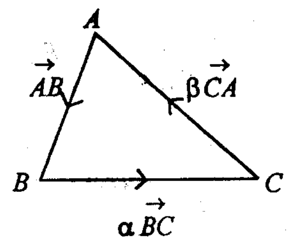
$$\frac{P\cdot R}{AB\cdot CD} = \frac{Q\cdot S}{BC\cdot DA}$$ எனக்காட்டுக.

இந்நிபந்தனை மட்டும் சமநிலைக்குப் போதுமானதா?

(i) $A\circlearrowright = \alpha\, BC\cdot h_1 = \alpha\cdot 2\Delta ABC$

$B\circlearrowright = \beta\, CA\cdot h_2 = \beta\cdot 2\Delta ABC$

$C\circlearrowright = \gamma\, AB\cdot h_3 = \gamma\cdot 2\Delta ABC$



(a) $\alpha = \beta = \gamma$ என்க.

$\alpha\cdot 2\Delta ABC = \beta\cdot 2\Delta ABC = \gamma\cdot 2\Delta ABC$

இப்பொழுது $A\circlearrowright = B\circlearrowright = C\circlearrowright\ (\neq 0)$

ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகள் பற்றிய திருப்பங்கள் சமமாகையால் தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும்.

(b) மறுதலையாக தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும் என்க.

இப்பொழுது $A\circlearrowright = B\circlearrowright = C\circlearrowright$

$\alpha\cdot 2\Delta ABC = \beta\cdot 2\Delta ABC = \gamma\cdot 2\Delta ABC$

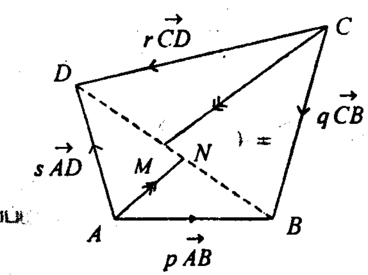
$\alpha = \beta = \gamma$

(ii) $p\vec{AB} + s\vec{AD} = (p+s)\vec{AN}$

$[BN : ND = s : p]$

$q\vec{CB} + r\vec{CD} = (q+r)\vec{CM}$

$[BM : MD = r : q]$



நான்கு விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$(p+s)\overrightarrow{AN},\ (q+r)\overrightarrow{CM}$ ஆகிய இருவிசைகளும்

(i) சமமாகவும் (ii) எதிராகவும் (iii) ஒரேதாக்கக் கோட்டிலும் இருத்தல் வேண்டும்.

நிபந்தனை (iii) இலிருந்து $M \equiv N$

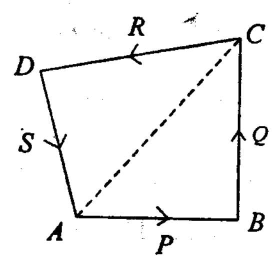
$$\frac{s}{p} = \frac{r}{q}\ ; \quad \text{ஆகவே } pr = qs$$

(iii) P,Q,R,S சமநிலையிலிருப்பதால்

$$A \circlearrowright = 0$$

$$Q\cdot\frac{2\,\Delta\,ABC}{BC} + R\cdot\frac{2\,\Delta\,ACD}{CD} = 0$$

$$Q\cdot\frac{\Delta\,ABC}{BC} = -R\cdot\frac{2\,\Delta\,ACD}{CD} \quad \text{———(1)}$$



$$\left[\frac{1}{2}BC.h = \Delta\,ABC\right]$$

$$h = \frac{2\,\Delta\,ABC}{BC}$$

$$C \circlearrowright = 0$$

$$P\cdot\frac{2\,\Delta\,ABC}{AB} + S\cdot\frac{2\,\Delta\,ACD}{DA} = 0$$

$$P\cdot\frac{\Delta\,ABC}{AB} = -R\cdot\frac{S\,\Delta\,ACD}{DA} \quad \text{———(2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{Q}{BC}\times\frac{AB}{P} = \frac{R}{CD}\times\frac{DA}{S}$$

$$\frac{P\cdot R}{AB\cdot CD} = \frac{Q\cdot S}{BC\cdot DA}$$

இங்கு $A \circlearrowright = 0,\ C \circlearrowright = 0$ என்ற முடிவுகளைப் பயன்படுத்தியே

$\dfrac{P\cdot R}{AB\cdot CD} = \dfrac{Q\cdot S}{BC\cdot DA}$ என்பது பெறப்பட்டது.

எனவே நான்கு விசைகளினதும் விளையுள் AC வழியே இருப்பினும் இதே முடிபு பெறப்படும். ஆகவே இந்நிபந்தனை மட்டும் சமநிலைக்குப் போதுமானது **அல்ல.**

அதாவது

விசைத்தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும் $\Rightarrow \dfrac{P\cdot R}{AB\cdot CD} = \dfrac{Q\cdot S}{BC\cdot DA}$

$\not\Leftarrow \dfrac{P\cdot R}{AB\cdot CD} = \dfrac{Q\cdot S}{BC\cdot DA}$

விசைத்தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்

உதாரணம் 13

ABC என்பது ஒரு முக்கோணி. D என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி ஆகும். ஒருதளவிசைத் தொகுதியொன்று $3\overrightarrow{AB}, 4\overrightarrow{AD}, 5\overrightarrow{AC}$ என்பவற்றாலும் முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவின் நான்கு மடங்கால் குறிக்கப்படும். திருப்பத்துடடன் ABC இன்போக்கில் உள்ள ஒரு இணையாலும் குறிக்கப்படுகிறது எனின், தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க. விளையுள் BC ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியின் தூரம் D யிலிருந்து $\dfrac{BC}{12}$ எனக் காட்டுக.

ABC யின் போக்கில் உள்ளதும், ABCயின் பரப்பளவின் நான்கு மடங்கால் குறிக்கப்படும் திருப்பத்தையுடையதுமான இணை, $2\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CA}$ என்பவற்றால் குறிக்கலாம். எனவே தரப்பட்டவிசைத் தொகுதி

$$= 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$$

$$\left(4\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \text{ என்பதால்}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{AB} + \left(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) + 5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}$$

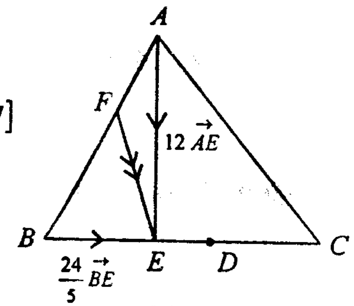
$$= 7\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AC}$$

$= 7\vec{AB} + 5\vec{AC} + 2\vec{BC}$

$7\vec{AB} + 5\vec{AC} = 12\vec{AE}$ $[BE : EC = 5 : 7]$

$2\vec{BC} = 2 \times \frac{12}{5}\vec{BE}$

$= \frac{24}{5}\vec{BE}$



$7\vec{AB} + 5\vec{AC} + 2\vec{BC} = 12\vec{AE} + \frac{24}{5}\vec{BE}$ $\quad \underbrace{\left(\frac{BE}{BC} = \frac{5}{12}\right)}$

$= \frac{84}{5}\vec{FE}$ $[AF : FB = 2 : 5]$

விளையுள் BC ஐ சந்திக்கும் புள்ளி E, $\quad DE = DB - BE$

$\frac{1}{2}BC - \frac{5}{12}BC = \frac{1}{12}BC$

உதாரணம் 14

D,E,F ஆகிய புள்ளிகள் முறையே முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களான BC.CA,AB இல் $\frac{BD}{DC} = p$, $\frac{CE}{EA} = q$, $\frac{AF}{FB} = r$ ஆகுமாறு உள்ளன. $\vec{AD}, \vec{BE}, \vec{CF}$ ஆகிய மூன்று விசைகளும்

(i) $p = q = r = 1$ எனின், எனின் மட்டுமே சமநிலையில் இருக்கும் எனவும்.

(ii) $p = q = r \neq 1$ எனின், எனின் மட்டுமே இணைக்கு ஒடுங்கும் எனவும் காட்டுக.

$\vec{AB} + p\vec{AC} = (p+1)\vec{AD}$ $[BD : DC = p]$

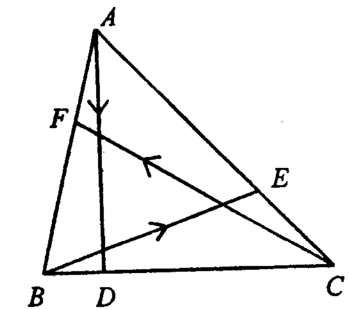
$\vec{BC} + q\vec{BA} = (q+1)\vec{BE}$ $[CE : EA = q]$

$\vec{CA} + r\vec{CB} = (r+1)\vec{CF}$ $[AF : FB = r]$

$\vec{AD} = \frac{1}{p+1}\vec{AB} + \frac{p}{p+1}\vec{AC}$

$\vec{BE} = \frac{1}{q+1}\vec{BC} + \frac{q}{q+1}\vec{BA}$

$\vec{CF} = \frac{1}{r+1}\vec{CA} + \frac{r}{r+1}\vec{CB}$



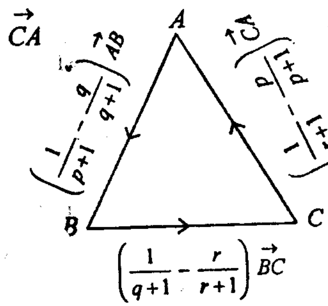
$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \left(\frac{1}{p+1} - \frac{q}{q+1}\right)\vec{AB} + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{r}{r+1}\right)\vec{BC} + \left(\frac{1}{r+1} - \frac{p}{p+1}\right)\vec{CA}$

(i) $p = q = r = 1$ என்க.

$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{BC} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{CA}$

$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{AB}$

$= \underline{0}$



ஆகவே, தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்.

மறுதலையாக, தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும் என்க.

$A\circlearrowright = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{q+1} - \frac{r}{r+1}\right)BC \cdot h_1 = 0$

$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{r}{r+1}\right) \cdot 2\Delta ABC = 0$

$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{r}{r+1}\right) = 0 \quad$ ....(1)

இவ்வாறே $B\circlearrowright = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1}\right)CA\cdot h_2 = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1}\right) = 0 \quad \text{..............(2)}$$

$$C\circlearrowright = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1}\right)AB\cdot h_3 = 0$$

$$\frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1} = 0 \quad \text{.................(3)}$$

(1), (2) இலிருந்து, $\frac{1}{q+1}-\frac{r}{r+1} = \frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1}$

$$\frac{1}{q+1} = \frac{r}{r+1}+\frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1}$$

$$\frac{1}{q+1} = 1-\frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

$$q+1 = p+1$$

$$p = q$$

(2), (3) இலிருந்து

$$\frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1}$$

$$\frac{1}{r+1} = \frac{p}{p+1}+\frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1} = 1-\frac{q}{q+1} = \frac{1}{q+1}$$

$$r+1 = q+1\,;\; r = q$$

ஆகவே $p = q = r$

மேலும் $\frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1} = 0\,;\; \frac{1}{p+1}-\frac{p}{p+1} = 0\,;\; p = 1$

ஆகவே $p = q = r = 1$ ஆகும்.

(ii) $p = q = r = \lambda\ (\neq 1)$ என்க.

இப்பொழுது

$$\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\left[\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}\right]$$

$$= \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot 2\,\Delta ABC \circlearrowright$$ திருப்பமுடைய இணை

மறுதலையாக தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும் என்க.

$$A = B = C = G\,(\neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{q+1}-\frac{r}{r+1}\right)BC\cdot h_1 = \left(\frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1}\right)CA\cdot h_2 = \left(\frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1}\right)AB\cdot h_3$$

$$\left(\frac{1}{q+1}-\frac{r}{r+1}\right)2\,\Delta ABC = \left(\frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1}\right)2\,\Delta ABC = \left(\frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1}\right)2\,\Delta ABC$$

$$\frac{1}{q+1}-\frac{r}{r+1} = \frac{1}{r+1}-\frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}-\frac{q}{q+1} \neq 0$$

எனவே பகுதி **(I)** இலிருந்து $p = q = r \neq 1$

$(p = q = r = 1$ எனின் $G = 0$ ஆகும்.)

உதாரணம் 15

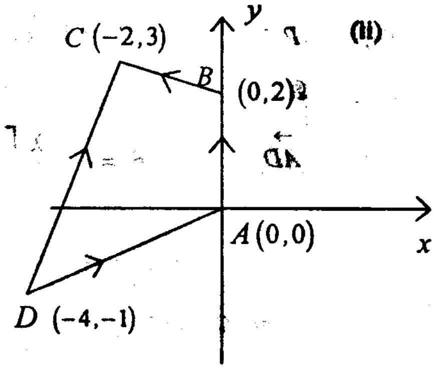
ABCD என்னும் நாற்பக்கலின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே (0,0), (0,2), (-2,3), (-4,-1) ஆகும். $\vec{AB}$, $3\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் நாற்பக்கலின் பக்கங்களின் வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும், தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

$$\vec{AB} = (0-0, 2-0) = (0,2)$$

$$3\vec{BC} = 3(-2-0, 3-2), = (-6,3)$$

$\vec{CD} = \left(-4-(-2), -1-3\right) = (-2,-4)$

$\vec{DA} = \left(0-(-4), 0-(-1)\right) = (4,1)$



விசையின்கூறு		தாக்கும்புள்ளியின்ஆள்கூறு		திருப்பம்
X_i	Y_i	x_i	y_i	$Y_i x_i - X_i y_i$
0	2	0	0	0
-6	3	0	2	12
-2	-4	-2	3	14
4	1	0	0	0

$X = \sum X_i = -6-2+4 = -4$

$Y = \sum Y_i = 2+3-4+1 = 2$

$G = 26$

விளையுளின் பருமன் $= \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$Y \cdot x - X \cdot y = G \; ; \; 2x+4y = 26$

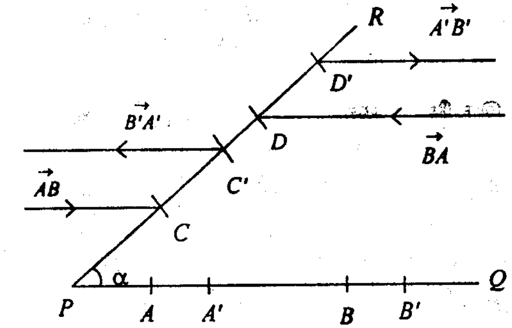
$x + 2y = 13$

உதாரணம் 16

தளமொன்றில் தாக்குகின்ற சமமும் எதிருமான திருப்பங்களையுடைய இணைகள் சமநிலையில் உள்ளன. எனக் காட்டுக.

PQ, PR என்னும் இருநேர்கோடுகள் P யில் இடை வெட்டுகின்றன. A, A', B, B' என்பன $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ ஆகுமாறு PQ மீதுள்ள புள்ளிகளாகும். C, C', D, D' என்பன $\vec{CC'} = \vec{DD'}$ ஆகுமாறு PR மீதுள்ள புள்ளிகளாகும்.

$\vec{AC}, \vec{C'A'}, \vec{CB}, \vec{B'C'}, \vec{BD}, \vec{D'B'}, \vec{DA}, \vec{A'D'}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் சமநிலையிலுள்ள எனக் காட்டுக.



$AA' = BB' \; ; \; CC' = DD'$

$\vec{AC} + \vec{CB} = C$ இல் $\vec{AB}$

$\vec{BD} + \vec{DA} = D$ இல் $\vec{BA}$

$\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD} + \vec{DA} = C$ இல் $\vec{AB} + D$ இல் $\vec{BA}$

$= (AB \times CD \sin\alpha$ திருப்பமுடைய இணை

$\vec{B'C'} + \vec{C'A'} = C'$ இல் $\vec{B'A'}$

$\vec{A'D'} + \vec{D'B'} = D'$ இல் $\vec{A'B'}$

$\vec{B'C'} + \vec{C'A'} + \vec{A'D'} + \vec{D'B'} = C'$ இல் $\vec{B'A'} + D'$ இல் $\vec{A'B'}$

$= A'B' \times C'D' \sin\alpha$ திருப்பமுடைய இணை

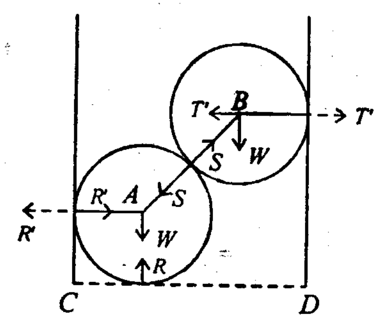
$AB = A'B'$, $CD = C'D'$ என்பதால் இரு இணைகளினதும் பருமன் சமம். திசைகளில் எதிரானவை எனவே சமநிலையிலிருக்கும்.

உதாரணம் 17

ஒவ்வொன்றும் ஆரை r ஐயும், நிறை W வையும் உடைய இரண்டு ஒப்பமான கோளங்கள் இரண்டு முனைகளும் திறந்த a ஆரையுடைய பொள் உருளை ஒன்றின் உட்பக்கத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்வுருளை தன் அச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்க, ஒரு கிடைத்தளத்தின்

மீது ஓய்விலிருக்கின்றது. $r > \frac{1}{2}a$ ஆயிருக்க, அவ்வுருளை கவிழாதிருக்க உருளையின் நிறை $2W\left(1-\frac{r}{a}\right)$ இலும் குறையக் கூடாதென நிறுவுக.

இரு கோளங்களினதும் மீது தாக்கும் விசைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவை தவிர்ந்த உருளையின் நிறை W_0 (என்க) உம், தரையினால் உருளையின் மீது மறுதாக்கமும் இருக்கும். மேலும் உருளையின் மீது (கோளத்தினால்) R', T' எனும் தாக்கங்கள் இருக்கும்.



கோளங்கள் இரண்டினதும் சமநிலைக்கு

$\uparrow$ $R - 2W = 0$

$R = 2W$ ———————(1)

$\rightarrow$ $R' - T' = 0$

$R' = T'$ ———————(2)

உருளை கவிழும் தறுவாயிலிருக்குமிடத்து (அது D பற்றித் திரும்பும் நிலையில்) உருளை, கோளங்கள் இரண்டினதும் சமநிலைக்கு D யினூடு உருளையில் நிலைக்குத்து மறுதாக்கம் P உண்டு. D பற்றிய தொகுதியின் இடஞ்சுழித்திருப்பம் $\geq$ D பற்றிய தொகுதியின் வலஞ்சுழித்திருப்பம் எனின் உருளை கவிழாது சமநிலையில் இருக்கும்.

$$W_0.a + W.r + W(2a - r) - R(2a-r) \geq 0$$

$$W_0.a + W.r + W(2a - r) - 2W(2a-r) \geq 0$$

$$W_0.a + 2W.r - 2Wa \geq 0$$

$$W_0.a \geq 2W(a-r)$$

$$W_0 \geq 2W\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

உருளையின் மிகக் குறைந்த நிறை $2W\left(1-\frac{r}{a}\right)$ ஆகும்.

பயிற்சி - 6 (a)

1. $ABCD$, a பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம். AB, BC, DC, AD வழியே 5, 4, 3, 2, N விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை
   (i) A இல் ஒரு தனிவிசையாகவும், இணையாகவும்
   (ii) சதுரத்தின் மையம் O இல் ஒரு தனிவிசையாகவும், இணையாகவும் ஒடுக்குக.

2. $2a$ பக்கமுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் மையம் O ஆகும். AB, BD, CD, DE, EF, FA வழியே முறையே $1, 2, 3, 4, 5, 6N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை
   (i) O இல் ஒரு தனிவிசையாகவும், இணையாகவும்
   (ii) B இல் ஒரு தனிவிசையாகவும் இணையாகவும் ஒடுக்குக.

3. a பக்கமுள்ள $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின் தளத்தில் ஒரு தொகுதி விசைகள் தாக்குகின்றன. A, B, C எனும் புள்ளிகள் பற்றி இவ் விசைத் தொகுதியின் திருப்பங்கள் முறையே M_1, M_2, M_3 ஆகும்.
   (i) D பற்றித் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்
   (ii) தொகுதியின் விளையுளின் பருமன்
   (iii) விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஐப் பிரிக்கும் விகிதம் என்பவற்றைக் காண்க.

4. $2a$ பக்கமுடைய சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் தளத்தில் விசைத்தொகுதி ஒன்று தாக்குகின்றது. மூன்று உச்சிகளும் பற்றிய திருப்பங்கள் முறையே G_1, G_2, G_3 எனின் விளையுளின் பருமன் $\dfrac{\sqrt{G_1^2, + G_2^2, + G_3^2 - G_2\,G_3 - G_3\,G_1 - G_1\,G_2}}{a\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

5. முக்கோணம் ABC இல் $AB = a$, $BC = 2a$, $\angle ABC = 90^\circ$ ஆகும். ABC யின் தளத்திலுள்ள ஒரு தொகுதி விசைகளின் A, B, C பற்றிய திருப்பங்கள் முறையே

$+M_1, +M_2, -M_3$ ஆகும். மணிக்கூட்டுக் கம்பியின் திசைக்கு எதிர்த் திசையிலுள்ள திருப்பங்கள் நேரானவை எனக் கொள்ளப்பட்டது. இத் தொகுதி விசைகளின் விளையுளையும் அதன் தாக்கக் கோடு BC ஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க. விளையுளானது AC க்குச் செங்குத்தெனின் $4M_1 = 5M_2 + M_3$ என நிறுவுக.

6. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம். இங்கு $AB = 5m$, $BC = 3m$. 2, 4, 3, $11N$ விசைகள் முறையே AB, BC, DC, DA வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி மூலைவிட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியில் தனிவிசைக்கும், இணைக்கும் ஒடுக்கப் படுகிறது. இவ்விசையினையும், இணையையும் காண்க.

7. $1m$ பக்கமுடைய சதுரம் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியே 3, 4, 2, $1N$ விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை

(i) A இல் ஒரு தனிவிசையாகவும் இணையாகவும்,

(ii) B, C என்பவற்றிக்கூடான இரு சமாந்தரவிசைகளாக ஒடுக்குக.

8. அடரொன்றின் தளத்தில் விசைத்தொகுதி ஒன்று தாக்குகின்றது. A, B என்பன அடரில் ஏதாவது இருபுள்ளிகள். இவ்விசைத்தொகுதி A, B என்பவற்றில் தனி விசைக்கும் இணைக்குமாக ஒடுக்கப்படுமிடத்து இணையின் திருப்பங்கள் முறையே G_a, G_b ஆகும். இவ்விசைத்தொகுதி AB யின் நடுப்புள்ளியில் ஒரு தனிவிசைக்கும் இணைக்கும் ஒடுக்கப்படுமெனின் இணையின் திருப்பம் $\frac{1}{2}(G_a + G_b)$ எனக் காட்டுக.

9. சமநிலையில் இல்லாத ஒரு தளவிசைத் தொகுதி ஒன்று தனிவிசைக்கு அல்லது இணைக்கு ஒடுக்கப்படலாம். என நிறுவுக.

(i) $ABCD$ ஒரு சதுரம். 3, 2, 4, 3, PN பருமனிலுள்ள விசைகள் முறையே AB, CB, CD, AD, DB வழியே தாக்குகின்றன. இத்தொகுதி இணைக்கு சமவலுவானதெனின் P இல் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $10Nm$ திருப்பமுடைய இணை ஒன்று $2m$ பக்கமுள்ள சதுரப்பலகை $ABCD$ இல் தொழிற்படுகிறது. இவ்விணையை AB, BD, CA வழியே தொழிற்படும் விசைகளாக மாற்றுக.

10. (i) 3, 4, 6, 7 அலகு பருமனுள்ள விசைகள் a பக்கமுள்ள சதுரம் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA, வழியே தாக்குகின்றன. மேலும் சதுரத்தின் தளத்தில் இணை ஒன்றும் தொழிற்படுகிறது. முழுத் தொகுதியும் சதுரத்தின் மையத்தினூடு தொழிற்படும் ஒரு தனி விசைக்கு சமானதெனின் இணையின் பருமனைக் காண்க. விளையுளின் பருமனையும் தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.

(ii) ABC $0 \cdot 6m$ பக்கமுள்ள சமபக்க முக்கோணி AB, BC, CA வழியே 4, 3, 3, N விசைகள் தொழிற்படுகின்றன. விளையுளைக் காண்க. C யிலிருந்து விளையுளின் தாக்கக் கோட்டிற்குரிய செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

முக்கோணி ABC இன் தளத்தில் C இல் புதிய விசை ஒன்று சேர்க்கப்பட தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குமெனின் புதிய விசையின் பருமனையும், திசையும் காண்க.

11. சதுரம் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA, வழியே P, Q, R, S பருமன் களையுடைய விசைகள் தொழிற்படுகின்றன. $P = 5$ எனவும். நான்கு விசைகளினதும் விளையுள் பருமனில் $\sqrt{5}$ இற்கு சமமாகவும் விளையுளின் தாக்கக்கோடு D யினூடாகவும் BC இன் நடுப்புள்ளியினூடாகவும் செல்கிறது எனவும் தரப்படின் Q, R, S இற்கான இரு தொடைப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

12. $ABCD$ ஒரு சதுரம் H, K என்பன CD, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். AH, KH, KA வழியே P, Q, R எனும் பருமன்களையுடைய விசைகள் தாக்கு கின்றன.

(a) இவ்விசைகளின் விளையுள் BD வழியே இருப்பின் $P: Q: R$ ஐக் காண்க.

(b) இவ்விசைகள் ஒருபோதும் சமநிலையிலிருக்காது எனக் காட்டுக.

எனினும் Q இன் திசை புறமாற்றப்படின் இத்தொகுதி இணைக்கு ஒடுக்கப்படலாம். எனக் காட்டி இவ்வகையில் $P: Q: R$ ஐக் காண்க.

13. $ABCDEF$ என்பது a பக்கமுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணி. 2P, P, 2P, 3P, 2P, P பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CD, ED, EF, AF வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி AC வழியேயான $2\sqrt{3P}$ பருமனுள்ள விசைக்கும் ஓர் இணைக்கும் ஒருமித்து ஒடுக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இணையின் பருமனைக் காண்க.

இத்தொகுதி இணையில்லாது தனி விசை ஒன்றுக்கு ஒடுக்கப்படலாம் எனக் காட்டி இவ்விசையின் தாக்கக்கோடு நீட்டப்பட்ட FA ஐ X இல் சந்திப்பின் AX இன் நீளத்தைக் கணிக்க.

14. முக்கோணி ABC இல் $AB = AC = 10a$, $BC = 12a$ ஆகும். BC யின் நடுப்புள்ளி D உம் புள்ளி E, AC இல் கோணம் BEC 90° ஆகுமாறும் அமைந்துள்ளது. $2P, 10P, 5P, 10P$ பருமன்களையுடைய விசைகள் CB, AD, BE, AC வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளையும் விளையுளின் தாக்கக்கோடு BC உடன் அமைக்கும் கோணத்தையும் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோடு BC ஐ F இல் சந்திப்பின் BF இன் நீளத்தைக் காண்க.

15. முக்கோணி ABC இல் $AB = 4m$, $BC = 5m$, $CA = 3m$ ஆகும். D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். 4, 5, 3, P, Q நியூற்றன் பருமன்களையுடைய விசைகள் AB, BC, CA, ED, CF வழியே தாக்குகின்றன. தொகுதியில் விளையுள் EF வழியே தாக்குகின்றதெனின் P, Q என்பவற்றைக் கணிக்க. விளையுளின் பருமன் $20N$ எனக் காட்டுக.

இவ்விசைத் தொகுதி AC வழியே தாக்கும் L பருமனுடைய விசைக்கும், CF வழியே தாக்கும் M பருமனுடைய விசைக்கும் G திருப்பமுடைய இணைக்கும் சமானமெனின் L, M, G என்பவற்றைக் காண்க.

16. ABC ஒரு முக்கோணி $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ என்பவற்றால் முற்றாகத் தரப்படும் விசைகள் இணைக்கு ஒடுங்குமெனவும் இணையின் திருப்பம் $2\Delta ABC$ ஆல் தரப்படுமெனவும் காட்டுக. $[\Delta ABC = \Delta ABC$ இன் பரப்பு$]$ ABC ஒரு முக்கோணி $\alpha = \beta = \gamma$ எனின் மட்டுமே விசைகள் $\alpha\vec{BC}, \beta\vec{CA}, \gamma\vec{AB}$ என்பன ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமென நிறுவுக.

17. BA, CA எனும் கோடுகள் வழியே விசைகள் P, Q தாக்குகின்றன. $\angle BAC = 2\alpha$ ஆகும். இவ்விருவிசைகளுக்குச் சமானமான A யின் உள்ளிருகூறாக்கி வெளி இருகூறாக்கி வழியே தாக்கும் சோடி விசைகளை எழுதுக.

ABC என்பது A இல் செங்கோணத்தையுடைய இரு சமபக்க முக்கோணி. BCD, BC யின் மறுபக்கத்திலமைந்த சமபக்க முக்கோணி ஆகும். $3, 2, 3, 10, 14N$ விசைகள் முறையே AB, BC, CA, BD, CD வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளின் தாக்கக்கோடு A யிலிருந்து $\frac{\sqrt{3}}{15}AB$ தூரத்திலுள்ளது எனக் காட்டுக.

18. $ABCD$ எனும் செவ்வகமொன்றில் $AB = 8m$, $BC = 6m$, P, Q, R, S என்பன முறையே AB, BC, CD, DA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். PQ, QR, RS, SP, AC, BC வழியாக எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிக்கும் திசைகளில் முறையே $5, 10, 15, 20, \lambda, \mu$ நியூற்றன் பருமன்களையுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) இவ்விசைத் தொகுதியானது சமநிலையில் இருக்கமுடியாதெனவும்,

(ii) இத்தொகுதியானது ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனில் அப்பொழுது $\lambda = \mu = 10$ எனவும்,

(iii) இத்தொகுதி C ஊடாகச் செயற்படுகின்ற தனியொரு விசையாக ஒடுங்குமெனில், அப்பொழுது $\mu = 35$ எனவும், தனிவிசையின் மிகச் சிறிய பருமன் 24 நியூற்றன் எனவும் காட்டுக.

19. ஒரு தொகுதி ஒரு தளமானவிசைகள் $(0, 0), (1, 0), (2, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளைப் பற்றி முறையே $5, 1, 0$ ஆகிய இடஞ்சுழியான திருப்பங்களைக் கொண்டுள்ளன. விளையுளையும் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

20. தரப்பட்ட விசைத்தொகுதியொன்றின் $(2, 0), (0, 2), (2, 2)$ என்னும் புள்ளிகள் பற்றிய திருப்பங்கள் முறையே $1, 15, 7$ அலகுகள் ஆகும். இத்தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைக் கண்டு அது $4x - 3y = 9$ என்ற கோட்டிலே தாக்குகிறது எனக் காட்டுக.

21. நிலைத்த ஒரு சோடி செங்கோண அச்சுக்களின் திசைகளிலே n எண்ணிக்கையுள்ள ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்றின் n ஆவது விசையின் கூறுகள் (X_i, Y_i) ஆகும். இவ்விசை பிரயோகிக்கப்படும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x_i, y_i) ஆகும். $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$ ஆகும். இவ்விசைத் தொகுதியானது ஒரு தனி விசையினால் பிரதியீடு செய்யப்படக் கூடுமாயின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $a = \sum_{i=1}^{n} Yi$, ; $b = -\sum_{i=1}^{n} Xi$

$$c = \sum_{i=1}^{n}(x_i Y_i - y_i X_i) \text{ ஆகும்.}$$

$(0,0)$, $\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $(2a, 2a)$ புள்ளிகள் பற்றி ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்றின் திருப்பங்கள் முறையே $\sqrt{3}\, aF, \frac{2aF}{\sqrt{3}}, aF$ ஆகும். இத்தொகுதி F பருமனுடைய ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவானது எனக் காட்டி, இவ்விசையின் தாக்கக்கோடு X அச்சை எங்கே வெட்டுகிறது என்பதையும் காண்க.

22. $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,5)$ என்னும் புள்ளிகள் பற்றி ஒரு தளவிசைத் தொகுதி ஒன்றின் திருப்பங்கள் முறையே 45, 39, 0 அலகுகளாகும். விளையுளினது பருமனையும், அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க. இவ்விசைகள் முறையே $4y = 3x + 20$, $y = 5$ எனும் கோடுகள் வழியே தாக்கும் P, Q எனும் விசைகளுக்கு சமவலுவானதாயின் P, Q என்பவற்றின் பருமன்களைக் காண்க.

23. ABC எனும் முக்கோணியின் பக்கங்களான BC, CA, AB வழியாக எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிக்கும் போக்கில் முறையே P, Q, R எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன. BC, CA, AB எனும் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $x = 0$; $y = 0$; $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ ஆகும்.

(i) $P\sec = Q\, cosec\,\theta = R$ என இருப்பின் இத் தொகுதியானது ஒரு இணைக்கு சமவலுவுடையதெனக் காட்டி அதன் திருப்பத்தையும் காண்க.

(ii) தொகுதியானது தனியொரு விசைக்கு சமவலுவுடையுதெனில் அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

24. ஒவ்வொரு அச்சின் வழியேயும் உள்ள அளவீட்டலகு $1cm$ ஆயிருக்கச் செங்கோணத் தெக்காட்டின் அச்சுத் தொகுதியொன்று குறித்து O, A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ ஆகும். OA, AB, BC வழியாக P, Q, R நியூற்றன் விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளானது $x - y - 5 = 0$ எனும் கோட்டின் வழியே கிடக்கின்றது. விளையுளின் பருமன் Q ஆகுமெனக் காட்டுக. தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படும் போது விளையுளை $x - y - 3 = 0$ எனும் கோட்டிற்கு இடமாற்றும் இணையின் திருப்பத்தையும் காண்க.

25. Ox, Oy எனும் ஆள்கூற்று அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாக முறையே X, Y எனும் விசைக் கூறுகளைக் கொண்ட விசையொன்றை $F = X_i + y_j$ என்னும் காவியால் குறித்தல் முடியும். இங்கு i, j என்பவை முறையே Ox, Oy இற்குச் சமாந்தரமான அலகுக் காவிகளாகும்.

ஒரு விசைத் தொகுதியானது ஒரு செவ்வகத்தின் $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$, $(0,4)$ என்னும் உச்சிகளிலே முறைப்படி தாக்குபவையான $3i$, $4j$, $2i$, $5j$ என்னும் விசைகளையும் புள்ளி $(a, 0)$ இல் தாக்கும் $P_i + Q_j$ என்னும் ஐந்தாம் விசையையும் கொண்டதாகும். $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$ ஆனவை பற்றி இவ்விசைத் தொகுதியின் இடஞ்சுழியான திருப்பங்கள் முறையே m_1, m_2, m_3 ஆகும். P, Q, a என்பவற்றை m_1, m_2, m_3 ஆனவை சார்பாகக் காண்க.

(a) (i) $m_1 - m_2 = 27$ ஆயிருக்கும் போது ஐந்தாம் விசையானது அச்சு Ox வழியேயிருக்குமெனக் காட்டுக.

(ii) $m_3 - m_2 = 20$ ஆயிருக்கும் போது ஐந்தாம் விசையானது அச்சு Oy இற்குச் சமாந்தரமாயிருக்குமெனக் காட்டுக.

(b) இவ்விசைத் தொகுதியானது சமநிலையிலிருக்கும் போது ஐந்தாம் விசையின் பருமனையும், திசையையும் தாக்கக் கோட்டையும் காண்க.

6 b

1. ABC ஒரு முக்கோணி. G அதன் மையப்போலி. O முக்கோணியின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி. விசைகள் $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ என்பவற்றின் விளையுள் $3\overrightarrow{OG}$ ஆல் தரப்படுமென நிறுவுக.

2. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் சுற்றுவட்டமையம் P ஆகும். O ஏதாவதொரு புள்ளி. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ ஆகிய ஆறு விசைகளினதும் விளையுள் $6\overrightarrow{OP}$ ஆகுமென நிறுவுக.

3. ABC ஒரு முக்கோணி. $2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}$ என்பவற்றின் விளையுள் $6\overrightarrow{DE}$ எனக் காட்டுக. இங்கு D, E என்பன முறையே BC, CA என்பவற்றில்

$BD = DC, CE = \frac{1}{3} CA$ ஆகுமாறு அமைந்த புள்ளிகளாகும்.

4. முக்கோணி ABC இன் தளத்தில் O யாதாயினுமொரு புள்ளி D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ என்பவற்றின் விளையுள் $3\overrightarrow{OG}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு G மையப்போலி ஆகும்.

5. ABC ஒரு முக்கோணி $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ என்பவற்றின் விளையுள் $4\overrightarrow{ED}$ என நிறுவுக. இங்கு D, E என்பன முறையே BC, CA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும்.

6. $ABCD$ ஒரு நாற்பக்கல் $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும், $2\,AC$ ஆல் குறிக்கப்படலாம் எனவும் அதன் தாக்கக்கோடு BD ஐ இரு கூறாக்குமெனவும் காட்டுக.

7. முக்கோணி ABC இன் இடையங்கள் AD, BE ஆகும். $\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{CB}, 3\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DA}$ ஆகியவற்றின் விளையுள் $5\,CH$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு H, AB இல் $AH : HB = 3 : 7$ ஆகுமாறு அமைந்த ஒரு புள்ளியாகும்.

8. $ABCD$ ஒரு சரிவகம் AB, DC இற்குச் சமாந்தரமாகும். விசைகள் $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ என்பவற்றின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும் $2\overrightarrow{EF}$, ஆல் குறிக்கப்படும் எனக் காட்டுக. இங்கு E, F என்பன முறையே AB, CD என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். விளையுளின் தாக்கக்கோடு நீட்டப்பட்ட BA ஐ A யிலிருந்து $\frac{1}{2} CD$ தூரத்தில் வெட்டுகின்றது எனக் காட்டுக.

9. ABC ஒரு முக்கோணி. விசைகள் $2\overrightarrow{AC}, 3\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ என்பவற்றின் விளையுள் $K\,PQ$ ஆகும். இங்கு P, Q என்பன BC, AC இல் அமைந்த இரு புள்ளிகளாகும். K இன் பெறுமானத்தையும் $BP : PC, \; AQ : QC$ என்பவற்றையும் காண்க.

10. (i) ABC ஒரு முக்கோணி. $6\overrightarrow{AB}, 10\overrightarrow{AC}, 3\overrightarrow{CB}$, என்பவற்றின் விளையுள் $\ell\,YX$ ஆல் தரப்படுகிறது. இங்கு X, Y என்பன BC, AC இல் அமைந்த புள்ளிகளாகும். ℓ இன் பெறுமானத்தையும் $AY : YC$, $BX : XC$ என்பவற்றையும் காண்க.

(ii) முக்கோணி PQR இன் மையப்போலி G. விசைகள் $\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GQ}, \overrightarrow{GR}$ சமநிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

11. $\lambda\overrightarrow{OA}, \; \mu\overrightarrow{OB}$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் இருவிசைகளின் விளையுள் $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $AC : CB = \mu : \lambda$ ஆகும் வண்ணம் C என்பது AB யிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். G என்பது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியாகும். $3\overrightarrow{BG}, 3\overrightarrow{CG}, 3\overrightarrow{GA}, 2\overrightarrow{CB}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் CA க்குச் சமாந்தரமென நிறுவுக. விளையுளின் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டையும் காண்க.

12. D என்பது $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ ஆகுமாறு முக்கோணி ABC இன் BC என்னும் பக்கத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். விசைகள் $2\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{AC}, 3\overrightarrow{BA}, 3\overrightarrow{AD}$ என்பவற்றின் விளையுள் AB ஐ R இலும் AC ஐ S இலும் சந்திக்கிறது. $\frac{AR}{RB}, \frac{AS}{SC}$ ஆகியவற்றினைக் காண்க. இவற்றின் விளையுள் $\frac{15}{2}\overrightarrow{RS}$ எனவும் காட்டுக.

13. முக்கோணம் ABC இல் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களில் D, E, F எனும் புள்ளிகள் முறையே $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{m}{n}$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன.

$\vec{AD}, \vec{BE}, \vec{CF}$ ஆகிய குறிக்கும் விசைகள் ABC இன் போக்கில் $2\left[\frac{n-m}{n+m}\right]\Delta$ என்னும் திருப்பமுடைய இணைக்குச் சமவலுவாகும் எனக் காட்டுக. இங்கு Δ என்பது முக்கோணம் ABC யின் பரப்பாகும். $m = n$ ஆயின் இவ்விசைத் தொகுதி பற்றி யாது கூறலாம்?

14. A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளாகும். D என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி. ஒரு தளவிசைத் தொகுதி ஒன்று $\vec{AB}, 2\vec{AC}, \vec{DA}$ என்பவற்றாலும் ABC என்ற போக்கில் உள்ளதும் முக்கோணியின் பரப்பின் இருமடங்கு திருப்புத்திறன் உடையதுமாகிய இணை ஒன்றாலும் பூரமாகக் கொடுக்கப்படுகிறது. இத் தொகுதியின் விளையுள் $6\vec{PQ}$ என நிறுவுக. P, Q என்பன $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1}, \frac{BQ}{QC} = \frac{1}{3}$ ஆகவும் இருக்குமாறு AB, BC இலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளாகும்.

15. D, E, F ஆகியபுள்ளிகள் முறையே முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களான BC, CA, AB இல் $\frac{BD}{DC} = p$, $\frac{CE}{EA} = q$, $\frac{AF}{FB} = r$ ஆகுமாறு உள்ளன. $\vec{AD}, \vec{BE}, \vec{CF}$ ஆகிய மூன்று விசைகளும்,

(i) $p = q = r = 1$ எனின் மட்டுமே சமநிலையிலிருக்குமெனவும்,

(ii) $p = q = r \neq 1$ எனின் மட்டுமே இணைக்கு ஒடுக்கப்படலாம் எனவும் காட்டுக.

6 (c)

a, b, c என்பன BC, CA, AB என்பவற்றின் நீளங்களாகவுள்ள முக்கோணி ABC இன் உள்மையம் I ஆகும். $a\vec{PA}, b\vec{PB}, c\vec{PC}$ என்பவற்றின் விளையுள் $(a+b+c)\vec{PI}$ ஆகுமென நிறுவுக.

2. $ABCD$ ஓர் இணைகரம். $\vec{BC}, \vec{AC}, 3\vec{BA}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும் $2\vec{BD}$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டி விளையுளின் தாக்கக் கோட்டினைக் காண்க.

3. செவ்வகம் $ABCD$ இன் தளத்தில் P ஒரு புள்ளி $\vec{AB}, 2\vec{DC}, \ell\vec{PA}, \ell\vec{BP}, m\vec{CP}; m\vec{PD}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைத்தொகுதி ஒன்று சமநிலையிலுள்ளது. ℓ ஐ m சார்பாகக் காண்க.

P, AB இற்கு சமாந்தரமான நேர்கோட்டில் யாதுமொரு புள்ளி என நிறுவி இக்கோடு AD ஐப் பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

4. $\ell\vec{AB}, m\vec{BC}, \ell\vec{CD}, m\vec{DA}$ என்ற விசைகள் நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைகள் ஓர் இணைக்கு சமானமெனின் $\ell = m$ அல்லது $ABCD$ ஓர் இணைகரமென நிறுவுக.

5. W நிறையுடைய சீரான சதுரவடிவத் தகடு $ABCD$ அதன் உச்சி A நிலைக்குத்தான கரமான சுவரொன்றைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறும் C யில் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசை W இனாலும் சமநிலையில் பேணப்படுகிறது. உராய்வுக் குணகம் 1 இலும் குறைவாக இருக்க முடியாதெனக் காட்டி கிடையுடன் AB இன் சாய்வைக் காண்க.

6. $ABCD$ என்பது a மீற்றர் பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் $10, 5, 10, 15N$ விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA வழியே தாக்குகின்றன. இந்நான்கு விசைகளுடனும் இன்னொரு விசை சேர்க்கப்பட தொகுதி $5aNm$ திருப்பமுடைய இணைக்கு ஒடுங்குமெனின் புதிய விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு என்பவற்றைக் காண்க.

7. முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q, R ஆகும். விசைகள் $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}, K\vec{PQ}, K\vec{QR}, K\vec{RP}$ என்பன சமநிலையிலிருப்பின் K இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. செவ்வகம் $ABCD$ இல் $AB = a, BC = b$. M, BC இன் நடுப்புள்ளி $K>O$ ஆக இருக்க மூன்று விசைகள் $K\vec{AM}, K\vec{MC}, K\vec{CD}$ என்பவற்றால் முற்றாக வகை குறிக்கப்படுகின்றன. விளையுளின் பருமனையும், திசையையும் A யிலிருந்து தாக்கக்கோட்டின் தூரத்தையும் காண்க.

இத் தொகுதியின் விளையுள் AB யின் நடுப்புள்ளியினூடாகச் செல்வதற்கு இத் தொகுதியுடன் சேர்க்கப்பட வேண்டிய இணையின் பருமனைக் காண்க.

9. $ABCDE$ ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஒவ்வொன்றும் பருமனில் P இற்கு சமமான ஐந்து விசைகள் AE, ED, DC, CB, BA வழியேயும் ஒவ்வொன்றும் பருமனில் Q இற்கு சமமான ஐந்து விசைகள் AC, CE, EB, BD, DA வழியேயும் தாக்குகின்றன. P, Q என்பன ஒரு குறித்த விகிதத்திலிருப்பின் தரப்பட்ட 10 விசைகளும் சமநிலையிருக்கும் எனக் காட்டி இவ் விகிதத்தைக் காண்க.

10. (i) A, B, C என்பன ஒரே கோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளாகும். விசைத் தொகுதியொன்று $\alpha\vec{BC}, \beta\vec{CA}, \gamma\vec{AB}$ என்பவற்றால் தரப்படுகிறது. $\alpha = \beta = \gamma$ ஆக இருந்தால் மட்டுமே இத் தொகுதி ஓர் இணையிற்கு ஒடுங்குமென நிறுவுக.

(ii) ஒரு தள நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் $p\vec{AB}, q\vec{CB}, r\vec{CD}, s\vec{AD}$ எனும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் $pr = qs$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

11. முக்கோணி ABC யின் சுற்றுவட்டமையம் O ஆகும் P, Q, R, P', Q', R' என்னும் விசைகள் முறையே BC, CA, AB, OA, OB, OC வழியே தாக்குகின்றன. ஆறுவிசைகளும் சமநிலையிலிருப்பின்,

$P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$ எனவும்

$\frac{PP'}{a} + \frac{QQ'}{b} + \frac{RR'}{c} = 0$ எனவும் காட்டுக.

12. முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே P, Q, R என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமன் S எனின், $S^2 = P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR\cos A - 2RP\cos B - 2PQ\cos C$ எனக் காட்டுக. மேலும் இவ்விளையுளின் தாக்கக்கோடு முக்கோணி ABC யின் நிமிர்மையத்தினூடு செல்லுமெனின் $P\sec A + Q\sec B + R\sec C = 0$ எனக் காட்டுக.

13. நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியே தாக்கும் விசைகள் P, Q, R, S சமநிலையிலுள்ளன.

$\frac{P\cdot R}{AB\cdot CD} = \frac{Q\cdot S}{BC\cdot DA}$ எனக் காட்டுக.

இந்நிபந்தனை மட்டும் சமநிலைக்குப் போதுமானதா?

14. $ABCD$ இணைகரமாகும். விசைத்தொகுதி ஒன்று $\vec{AB}, \vec{CB}, \vec{DC}, \vec{DA}, \vec{AC}, \vec{BD}$ என்பவற்றால் பூரணமாகக் குறிக்கப்படுகிறது. தொகுதியின் விளையுளானது பருமனிலும் திசையிலும் $2\vec{AB}$ என்பதால் குறிக்கப்படுமெனவும், இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றதெனவும் காட்டுக.

15. தளமொன்றில் தாக்குகின்ற சமமும் எதிருமான திருப்பங்களையுடைய இரு இணைகள் சமநிலையில் உள்ளன எனக்காட்டுக PQ, PR என்னும் இருநேர்கோடுகள் P யில் இடைவெட்டுகின்றன. A, A', B, B' என்பன முறையே $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ ஆகுமாறு PQ மீதுள்ள புள்ளிகளாகும். C, C', D, D' என்பன $\vec{CC'} = \vec{DD'}$ ஆகுமாறு PR மீதுள்ள புள்ளிகளாகும். $\vec{AC}, \vec{C'A'}, \vec{CB}, \vec{B'C'}, \vec{BD}, \vec{D'B'}, \vec{DA}, \vec{A'D'}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன எனக் காட்டுக.

16. $ABCD$ என்னும் நாற்பக்கலின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(0,0), (0,2), (-2, 3), (-4, -1)$ ஆகும். $\vec{AB}, 3\vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$ ஆகியவற்றால் முற்றாகக்

குறிக்கப்படும் விசைகள் நாற்பக்கலின் பக்கங்கள் வழியே தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுள் விசையின் பருமனையும் அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க..

17. xy தளத்திலுள்ள நிலைத்ததொரு அடரின் மீது (x_r, y_r) எனும் புள்ளிகளில் விசைகள் (X_r, Y_r), $r = 1,2,3,.....n$ தாக்குகின்றன. (a,b) எனும் புள்ளிகள் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரக்கணிதக் கூட்டுத்தொகை M, $M = G - aY + bX$ என்னும் சமன்பாட்டினால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இங்கு $G = \sum_{r=1}^{n}(x_r Y_r - y_r X_r)$ $X = \sum_{r=1}^{n} X_r$

$Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$

$(\sqrt{3},1)$, $(-\sqrt{3},1)$, $(0,2)$ என்னும் மூன்று புள்ளிகள் பற்றி ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்றின் திருப்பங்களின் அட்சரக்கணிதக் கூட்டுத்தொகைகள் முறையே $2, 8, 6$ ஆகும். இத்தொகுதியானது x அச்சுடன் 60° கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு தனி விசைக்கு சமவலுவானது எனக் காட்டி அதன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. $P, 2P, 3P, 4P$ எனும் பருமன்களையுடைய நான்கு விசைகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளிலும், $5P$ எனும் பருமனையுடைய ஐந்தாவது விசையொன்று சதுரத்தின் மையம் O விலும் தாக்குகின்றன. விசைகளின் தாக்கக்கோடுகள் சதுரத்தின் தளத்திலுள்ளன. அவையெல்லாம் மூலைவிட்டங்களில் ஒன்றுடன் அதே கோணம் α வை அமைக்கின்றன. மூலைவிட்டங்களை அச்சுக்களாகக் குறித்து விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்விளையுள் α இன் எல்லாப் பெறுமதிகளுக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியூடே செல்லும் எனக் காட்டுக.

19. ஒரு தளவிசைகளின் தொகுதி ஒன்று ஒரு தனிவிசைக்கோ அல்லது ஒரு இணைக்கோ சமவலுவாக இருக்கும் அல்லது சமநிலையாக இருக்கும் எனக் காட்டுக.

ஒரு தளவிசைகளின் தொகுதியொன்று G என்னும் திருப்ப இணைக்கு ஒடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தொகுதியின் ஒவ்வொரு விசையும் அதன் பிரயோகப்புள்ளி பற்றி செங்கோணத்தினூடாக விசைகளின் தளத்தில் சுழற்றப்பட்டபோது இத்தொகுதி H எனும் திருப்ப இணைக்கு ஒடுக்கப்பட்டது. ஒவ்வொரு விசையும் α எனும் கோணத்தின் ஊடாகச் சுழற்றப்படும்போது இத்தொகுதி $G\cos\alpha + H\sin\alpha$ எனும் திருப்ப இணைக்குச் சமவலுவாகும் எனக் காட்டுக.

20. ஒரேகோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் பற்றி ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்றின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக இருப்பின் விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

ABC எனும் முக்கோணியின் கோணங்களின் இரு கூறாக்கிகள் I எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. $P, P, \lambda P, \mu P, \gamma P$ ஆகிய விசைகள் BC, CA, BA, IB, IC ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்குகாட்டும் திசையில் முறையே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பின் λ, μ, γ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. $\lambda \neq 2$, $\mu = 2\lambda\cos\frac{B}{2}$, $\gamma = 2\cos\frac{C}{2}$ எனின் அப்போது விசைத் தொகுதி தனிவிசையாக ஒடுங்கும் என உய்த்தறிந்து இதன் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

21. A,B,C,D,E,F எனும் புள்ளிகள் ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்றின் உச்சிகளாகும். $2P$, P, $2P$, P எனும் பருமன்களைக் கொண்ட விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{ED}$ வழியே தாக்குகின்றன. மேலும் λP, μP எனும் இருவிசைகள் முறையே $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$ வழியே தாக்குமாயின் ஆறுவிசைகளும் EB வழியே தாக்கும் விசையொன்றிற்கு ஒடுங்குமாறு λ, μ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. தொகுதியானது சமநிலையில் இருப்பதற்கு λ, μ என்பவற்றின் ஏற்ற பெறுமானங்களை ஏன் கணிக்க முடியாது என்பதை விளக்குக.

22. n ஒரு தளவிசைகளின் தொகுதி ஒன்றின் r ஆவது விசை (X_r, Y_r) ஆனது, தளத்தில் உள்ள செங்கோணத் தெக்காட்டின் அச்சுக்கள் Oxy குறித்துப் புள்ளி $A_r(x_r, y_r)$, $r = 1,2,...n$ இலே தாக்குகிறது. புள்ளி $P = (x, y)$ பற்றி விசைகளின் தொகுதியின் திருப்பம் G_p ஆனது.

$G_p = G_0 - xY + yX$ இனாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இங்கு $X = \sum_{r=1}^{n} X_r$ $\quad Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$ $\quad G = \sum_{r=1}^{n} (x_r Y_r - y_r X_r)$

ஒரு முக்கோணி ABC, இன் ; AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்கள் முறையே $x + y = a, y - x = a, y = 2a$ ஆகியவற்றினாலே தரப்படுகின்றன. இங்கு a > 0 தொகுதி ஒன்று முறையே AB, BC, CA ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு முறையினாலே காட்டப்படும் போக்கிலே தாக்கும் R, R, S எனும் பருமன்களையுடைய விசைகளையும் முக்கோணி ABC இன் தளத்தில் போக்கு ACB யிலே தாக்குகின்ற திருப்பம் $2aS$ ஐ உடைய ஓர் இணையையும் கொண்டுள்ளது. $S \# \sqrt{2}\,R$ ஆக இருப்பின் இத்தொகுதி ஒரு தனி விசையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டி அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$S = \sqrt{2}\,R$ ஆயின் யாது நடைபெறும்?

23. (x, y) தளத்தில் $(x_r, y_r), r = 1, 2, \ldots n$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள விசைகள் (X_r, Y_r) என்பன ஒரு தள விசைத்தொகுதி ஒன்றை அமைக்கின்றன. $P\ (x, y)$ எனும் புள்ளி பற்றித் தொகுதியின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை M ஆனது, $M - G - Yx + Xy$ இனாற் தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு

$$X = \sum_{r=1}^{n} X_r \qquad Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$$

$$G = \sum_{r=1}^{n} (x_r Y_r - y_r X_r)$$ ஆகும்.

தொகுதியானது ஒரு தனிவிசைக்கு ஒடுங்குமெனின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$(2,1), (0,0), (-3,4)$ எனும் புள்ளிகள் பற்றி ஒருதளவிசைத் தொகுதி ஒன்றின் திருப்பங்கள் முறையே $11, 5, -15$ அலகுகள் ஆகும். விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. தொகுதியானது புள்ளி $(3, 2)$ இலுள்ள விசை ஒன்றுடன் சேர்ந்து ஓர் இணையிற்கு ஒடுங்குமாயின் இவ்விசையின் தாக்கக்கோடானது $2x - y - 4 = 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

24. Oxy தளத்தில் உள்ள விசைகளின் தொகுதி ஒன்றைப் பொதுவாக இணை ஒன்றுடன் சேர்த்து O விலே தாக்கும் ஒருதனிவிசையாக ஒடுக்கலாம் எனக் காட்டுக.
(X, Y) என்பன தனிவிசையின் கூறுகளையும், Go என்பது இணையின் திருப்பத்தையும் குறிப்பிடட்டும். $X^2 + Y^2 \neq 0$ எனின், கோடு $Yx - Xy - G_0 = 0$ வழியே தாக்குகின்ற ஒரு தனிவிளையுள் விசைக்கு இத்தொகுதி சமானமெனக் காட்டுக.

தொகுதி ஒன்று முறையே BC, CA, AB வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் போக்கில் தாக்குகின்ற P, Q, S என்னும் மூன்று விசைகளைக் கொண்டது. A யை உற்பத்தியாகவும் AB x அச்சாகவும் கொண்டு X, Y, G_0 ஆகியவற்றைக் காண்க.

விளையுள் விசையின் தாக்கக்கோட்டின் தெக்காட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இதிலிருந்தோ வேறு விதமாகவோ முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையத்தினூடாக விளையுள் விசை செல்லுமெனில்
$P \sec A + Q \sec B + S \sec C = 0$ எனக் காட்டுக.

7. மூட்டிய கோல்கள்

ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட பாரமான கோல்கள்

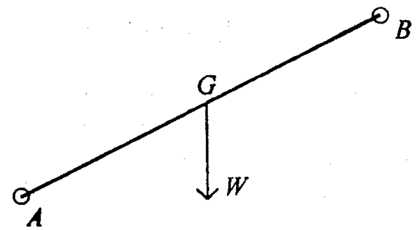
பாரமான கோல் AB, A **யிலும்,** B யிலும் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளது என்க.

கோலின் சமநிலைக்கு,

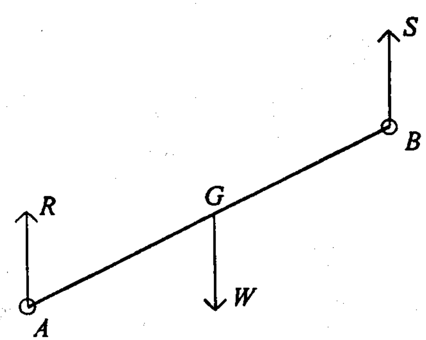
(i) A **யில் உள்ளவிசை** R

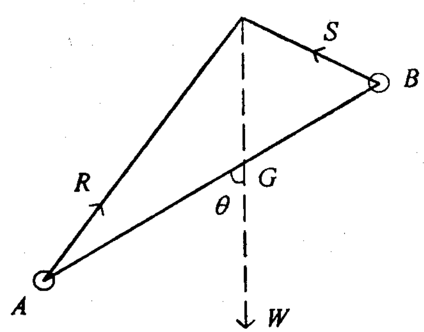
(ii) B **யில் உள்ள விசை** S

(iii) G **இல் நிறை** W



மூன்று விசைகளும் சமாந்தரமாக இருக்கலாம், அல்லது ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கலாம்.





A, B யில் உள்ள விசைகள் R, S என்பன W உடன் G இல் சந்திக்க முடியுமா என்பதைப் பார்ப்போம். நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ என்க.

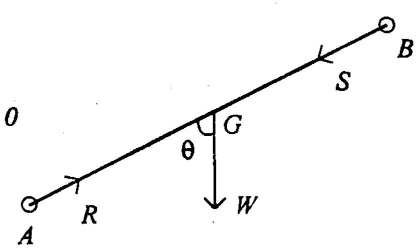
கோலின் சமநிலைக்கு,

கோலின் வழியே, $\nearrow$ $R - S - W\cos\theta = 0$

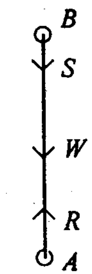
கோலுக்குச் செங்குத்தாக, $W\sin\theta = 0$

$W \neq 0$ என்பதால், $\sin\theta = 0$

$\theta = 0$, **கோல் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்.**

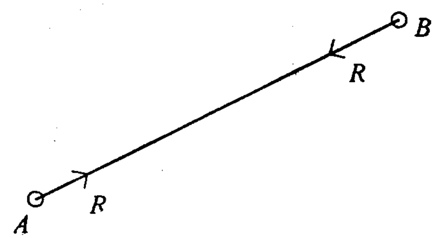


எனவே பாரமான கோல்களில், கோல்களின் முனைகளிலுள்ள விசைகள் (கோல் நிலைக்குத்தாக இருந்தால் அல்லாது) கோலின் வழியே **தாக்க மாட்டாது** என்பதைக் கவனத்திற் கொள்க.



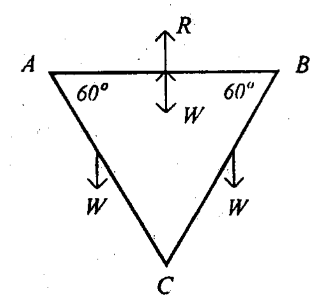
ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான கோல்கள்

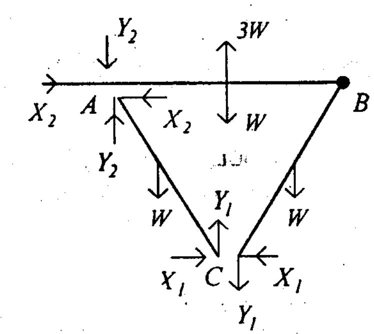
இலேசான கோல்கள் - (நிறையற்றன.) AB என்பது A யிலும், B யிலும் தாக்கும் இரு விசைகளினால் மட்டும் சமநிலையிலிருக்கும். இவ்விரு விசைகளும் சமமும், எதிருமாக ஒரே தாக்கக்கோட்டிலும் இருத்தல் வேண்டும். எனவே A யிலும், B யிலும் உள்ள விசைகள் கோலின் வழியே தாக்கும்.



உதாரணம் 1

ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய மூன்று சம சீர்க்கோல்கள் AB, BC, CA என்பன சமபக்க முக்கோணி ஒன்றை அமைக்குமாறு ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இது AB யின் நடுப்புள்ளியில் தாங்கப்பட்டால் ஒவ்வொரு மூட்டிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.





தொகுதியின் சமநிலைக்கு, $\uparrow R - 3W = 0$

$$R = 3W$$

கோலின் நீளம் $2a$ என்க.

.கோல் AC யின் சமநிலைக்கு, $A \curvearrowright = 0$

$X_1 \cdot 2a\sin 60 + Y_1 \cdot 2a\cos 60 - Wa \cdot \cos 60 = 0$ ------------------(1)

கோல் BC யின் சமநிலைக்கு $B \curvearrowright = 0$

$-X_1 \cdot 2a\sin 60 + Y_1 \cdot 2a\cos 60 + W \cdot a\cos 60 = 0$ ------------------(2)

(1)+(2) $\Rightarrow Y_1 = 0$

(1)-(2) $X_1 = \dfrac{W}{4\sin 60} = \dfrac{W}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}W}{6}$

BC **யின் சமநிலைக்கு,**

$\leftarrow X_2 - X_1 = 0$ $\qquad \uparrow Y_2 - W = 0$

$X_2 = X_1 = \dfrac{\sqrt{3}W}{6}$ $\qquad Y_2 = W$

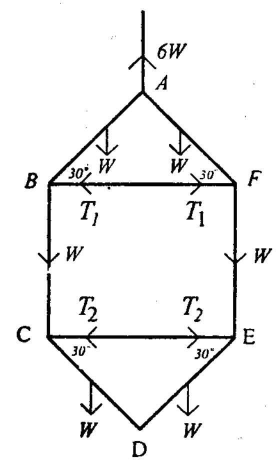
$\therefore$ A யில் மறுதாக்கம் $\sqrt{X_2^2 + Y_2^2} = \sqrt{\dfrac{3W^2}{36} + W^2} = W\sqrt{\dfrac{13}{12}}$

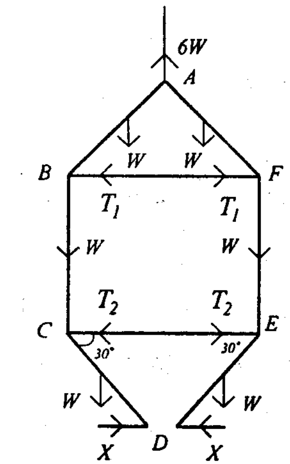
இதேபோல் B யில் மறுதாக்கம் $W\sqrt{\dfrac{13}{12}}$ எனவும் காட்டலாம்.

[குறிப்பு : தரப்பட்ட தொகுதி C யினூடான நிலைக்குத்து அச்சு பற்றி சமச்சீரானது. எனவே C யினூடான நிலைக்குத்து அச்சு பற்றி விசைகளும் சமச்சீராக இருக்கும். எனவே $Y = O$. (நிலைக்குத்துக் கூறு) எனக் கொள்ளலாம்.]

உதாரணம் 2

ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய ஆறு சமகோல்கள், அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு $ABCDEF$ எனும் அறுகோணி ஆக்கப்பட்டுள்ளது. அது புள்ளி A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அறுகோணி வடிவம் BF, CE என்னும் இலேசான இரு கோல்களால் பேணப்படுகிறது. BF, CE இலுள்ள உதைப்புக்களைக் காண்க.





இச்சட்டப்படல் AD பற்றி சமச்சீரானது.

எனவே மூட்டு D இல் மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக்கூறு 0 ஆகும். $(Y = 0)$ [கோலின் நீளம் $2a$ என்க]

CD யின் சமநிலைக்கு,

$C \curvearrowright = 0$

$OB = b$

$OA = a$

$$X \cdot 2a\sin 30 - W \cdot a\cos 30^\circ = 0$$

$$X = \frac{W\cot 30}{2} = \frac{W\sqrt{3}}{2}$$

BC, CD **யின் சமநிலைக்கு,**

$$B \curvearrowright = 0$$

$$X \cdot \left(2a + 2a\sin 30^\circ\right) - T_2 \cdot 2a - W a\cos 30 = 0$$

$$\frac{W\sqrt{3}}{2} \times 3a - W \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = T_2 \cdot 2a$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{3}W}{2}$$

AB, BC, CD **யின் சமநிலைக்கு,**

$$A \curvearrowright = 0$$

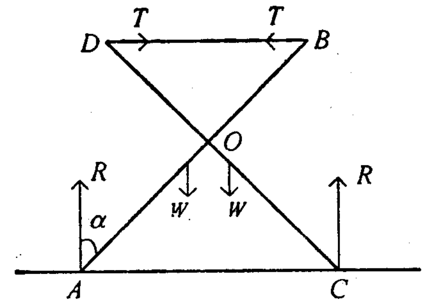
$$-T_1 \cdot a - T_2 \cdot 3a + X \cdot 4a + W a\cos 30 + W \cdot a\cos 30 + W \cdot 2a\cos 30 = 0$$

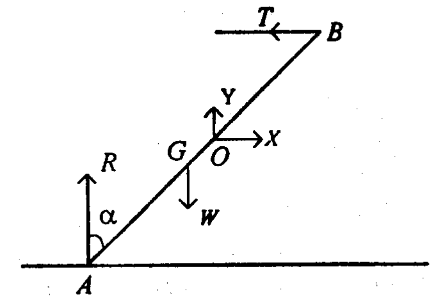
$$-T_1 - \frac{3\sqrt{3}W}{2} + \frac{4\sqrt{3}W}{2} + \frac{4\sqrt{3}W}{2} = O.$$

$$T_1 = \frac{5\sqrt{3}W}{2}$$

உதாரணம் 3

ஒவ்வொன்றும் நிறை W உம், நீளம் a உம் உள்ள AB, CD என்னும் இரண்டு சீரான கோல்கள் ஒரு புள்ளி O வில் ஒருங்கே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இங்கு OB, OD என்பன ஒவ்வொன்றும் நீளம் b ஐ உடையன. A, C என்னும் முனைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது கிடக்க B, D என்னும் முனைகள் ஓர் இலேசான இழையினாலே தொடுக்கப்பட்டிருக்க, அக்கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்வில் இருக்கின்றன. நிலைக்குத்துடன் அக்கோல்களுள் யாதும் ஒன்றின் சாய்வு α எனின், அம் மூட்டில் உள்ள மறுதாக்கம் $\dfrac{aW}{2b}\tan\alpha$ என நிறுவுக.





AB, CD **இரண்டினதும் சமநிலைக்கு,**

$$\uparrow 2R - 2W = 0$$

$$R = W$$

$$OB = b$$

$$AB = a$$

AB **யின் சமநிலைக்கு,**

$$\uparrow R - W + Y = 0$$

$$W - W + Y = 0$$

$$Y = 0$$

$$\rightarrow X - T = 0$$

$$T = X$$

$$O \curvearrowright = 0$$

$$T \cdot b\cos\alpha + W \cdot \left(\frac{a}{2} - b\right)\sin\alpha - R\,(a - b)\sin\alpha = 0$$

$$T b\cos\alpha + W\left(\frac{a}{2} - b\right)\sin\alpha - W(a - b)\sin\alpha = 0$$

$$T b\cos\alpha = \frac{Wa}{2}\sin\alpha$$

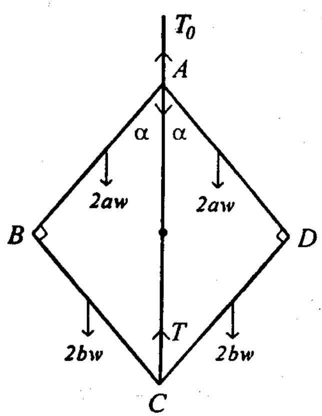
$$T = \frac{Wa}{2b}\tan\alpha$$

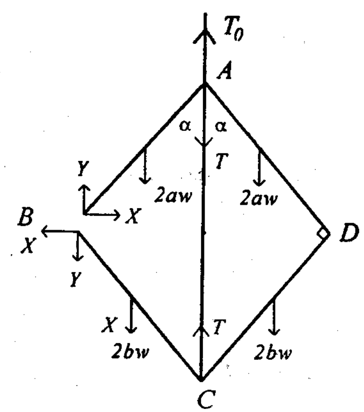
எனவே மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கம் $\dfrac{Wa}{2b}\tan\alpha$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

$AB = AD$, $BC = CD$ ஆகவுள்ள AB, BC, CD, DA என்னும் நான்கு பாரமான சீர்க் கோல்கள் தம் முனைகளில் மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, BC என்பன செங்கோணங்களில் இருக்குமாறுள்ள நீளத்தைக் கொண்ட ஓர் இழையினால் A, C என்னும் முனைகள் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இச்சட்டப்படல் A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, C ஐ இணைக்கும் இழையின் நீளம் ℓ ஆகவும், கோல்கள் AB, AD என்பன நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் α ஆகவும் கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை w ஆகவும் இருப்பின் அவ்விழையின் இழுவை,

$w\ell\sin\alpha\left(1 + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\right)$ என நிறுவுக.





$AB = AD = 2a$, $\quad BC = CD = 2b$ எனக.

இழையின் நீளம் $\ell = 2a\cos\alpha + 2b\sin\alpha$

$$\ell = 2(a\cos\alpha + b\sin\alpha); \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\left.\begin{aligned} a\cos\alpha + b\sin\alpha &= \frac{\ell}{2} \\ a\sin\alpha &= b\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= \frac{\ell}{2}\sin\alpha \\ a &= \frac{\ell}{2}\cos\alpha \end{aligned}$$

AB யின் சமநிலைக்கு, $A \circlearrowleft = 0$

$$2aw\cdot a\sin\alpha - Y\cdot 2a\sin\alpha + X\cdot 2a\cos\alpha = 0 \text{ ---------- (1)}$$

BC யின் சமநிலைக்கு, $C \circlearrowleft = 0$

$$2bw\cdot b\cos\alpha + Y\cdot 2b\cos\alpha + X\cdot 2b\sin\alpha = 0 \text{ ---------- (2)}$$

$$(1) \Rightarrow X\cos\alpha - Y\sin\alpha = -a\,w\sin\alpha$$

$$(2) \Rightarrow \frac{X\sin\alpha + Y\cos\alpha = -bw\cos\alpha}{Y = w\left(a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha\right)}$$

BC, CD யின் சமநிலைக்கு, $D \circlearrowleft = 0$

$$2bw\cdot b\cos\alpha - T\cdot 2b\cos\alpha + 2b\,w\cdot 3b\cos\alpha + w\left(a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha\right)4b\cos\alpha = 0$$

$$T = w\left[4b + 2\left(a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha\right)\right]$$

$$= 2w\left[2b + a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha\right]$$

$$= 2w\left[\ell\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha - \frac{\ell}{2}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\right]$$

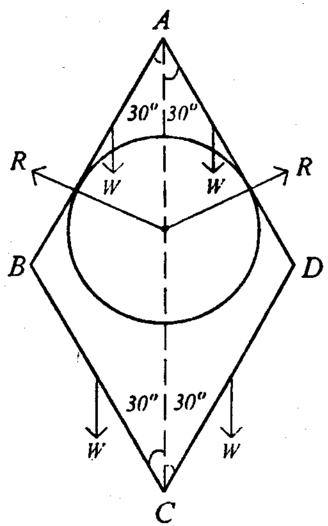
$$= 2w\left[\frac{2\ell\sin\alpha + \ell\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha - \ell\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2}\right]$$

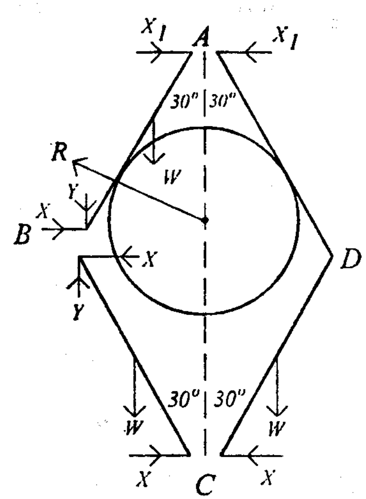
$$= w\ell\sin\alpha\left[2 + \sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha\right]$$

$$= w\ell\sin\alpha\left[1 + \sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha\right]$$

உதாரணம் 5

ஒருங்கு பிணைக்கப்பட்ட நீளம் a யுள்ள நான்கு பாரமான சீர்க்கோல்கள் $ABCD$ எனும் சட்டப்படலை ஆக்குகின்றன. இச்சட்டப்படல் c ஆரையுடைய ஒப்பமான உருளை ஒன்றினால் AB, AD என்பன உருளையைத் தொட்டவண்ணம் இருக்க நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் சமநிலையில் உள்ளது. ஒவ்வொரு கோலும் நிலைக்குத்துடன் 30° கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனின், $a = 4\sqrt{3}\,c$ எனக் காட்டுக. மேலே உள்ள பிணையலிலும், கீழேயுள்ள பிணையலிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.





தொகுதியின் சமநிலைக்கு

$$\uparrow 2R\cos 60^\circ - 4W = 0$$

$$R = 4W$$

AB யின் சமநிலைக்கு

$$\rightarrow X + X_1 - R\sin 60^\circ = 0$$

$$X + X_1 - 4W\sin 60^\circ = 0$$

$$X_1 = 2\sqrt{3}\,W - \frac{W}{2\sqrt{3}}$$

$$X_1 = \frac{11W}{2\sqrt{3}} \quad \text{------------} (2)$$

BC யின் சமநிலைக்கு,

$$B \curvearrowright = 0$$

$$X\cdot a\cos 30^\circ - W\cdot\frac{a}{2}\sin 30^\circ = 0$$

$$X = \frac{W}{2\sqrt{3}} \quad \text{---------------} (1)$$

$$\uparrow Y - W = 0\,; \quad Y = W \qquad\qquad A \curvearrowright = 0$$

AB யின் சமநிலைக்கு,

$$X\cdot a\cos 30 + Y\cdot a\sin 30 + W\cdot\frac{a}{2}\sin 30 - R\cdot C\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{W}{2\sqrt{3}} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W\cdot\frac{a}{2} + W\cdot\frac{a}{4} = 4W\cdot c\sqrt{3}$$

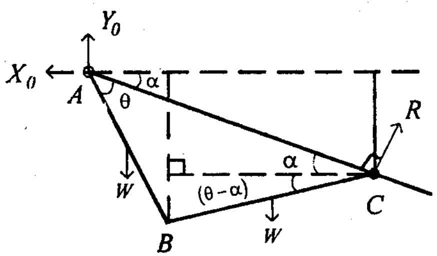
$$\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = 4C\sqrt{3}$$

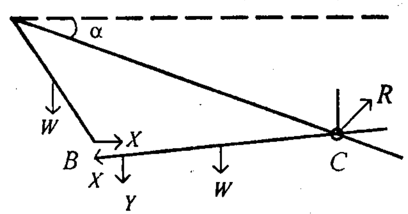
$$a = 4\sqrt{3}\,C$$

$(1), (2)$ இலிருந்து மூட்டுக்களில் உள்ள தாக்கங்களின் விகிதம் $11:1$ ஆகும்.

உதாரணம் 6

ஒவ்வொன்றும் சமநீளத்தையும் W நிறையையும் உடைய இரு சீர்க்கோல்கள் AB, BC என்பன B இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB என்னும் கோல் A பற்றி சுயாதீனமாக இயங்கக்கூடியது; கிடையுடன் ஒரு கோணம் α இல் கீழ்முகமாகச் சாய்ந்து A யிற் கூடாகச் செல்லும் ஒரு நிலையாயுள்ள ஒப்பமான கோல் வழியே சுயாதீனமாக இயங்கக் கூடிய ஒருவளையமானது C யில் உண்டு. சமநிலையில் $\tan BAC = \frac{1}{2}\cot\alpha$ எனவும், B யிலுள்ள தாக்கத்தின் கிடைக்கூறு $\frac{3}{8}W\sin 2\alpha$ எனவும் காட்டுக.





$AB = BC = 2a$ என்க.

AB, BC யின் சமநிலைக்கு, $A \curvearrowright = 0$

$$R \cdot 4a\cos\theta - Wa\cos(\theta+\alpha) - W\left[2a\cos(\theta+\alpha) + a\cos(\theta-\alpha)\right] = 0$$

$$4R\cos\theta = W\left[4\cos\theta\cdot\cos\alpha - 2\sin\theta\sin\alpha\right]$$

$$R = \frac{W}{2}\left[2\cos\alpha - \tan\theta\cdot\sin\alpha\right] \quad \text{-----------------(1)}$$

BC யின் சமநிலைக்கு $B \curvearrowright = 0$

$$R\cdot 2a\cdot\cos\theta - W\cdot a\cos(\theta-\alpha) = 0$$

$$R = \frac{W}{2}\left[\cos\alpha + \tan\theta\sin\alpha\right] \quad \text{-----------------(2)}$$

(1), (2) இலிருந்து

$$2\cos\alpha - \tan\theta\cdot\sin\alpha = \cos\alpha + \tan\theta\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = 2\tan\theta\cdot\sin\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2}\cot\alpha$$

$$\tan BAC = \frac{1}{2}\cot\alpha$$

BC யின் சமநிலைக்கு

$$\rightarrow R\sin\alpha - X = 0$$

$$X = R\sin\alpha$$

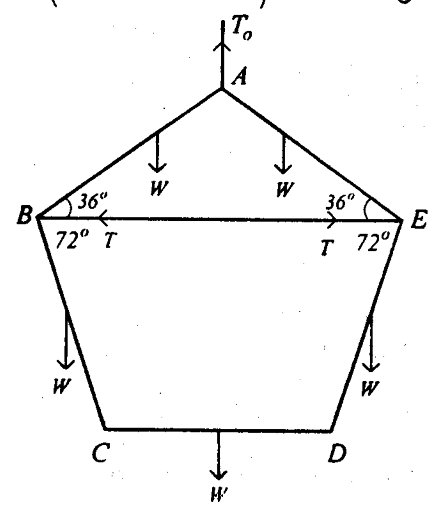
$$= \frac{W}{2}\left[\cos\alpha + \tan\theta\cdot\sin\alpha\right]\sin\alpha$$

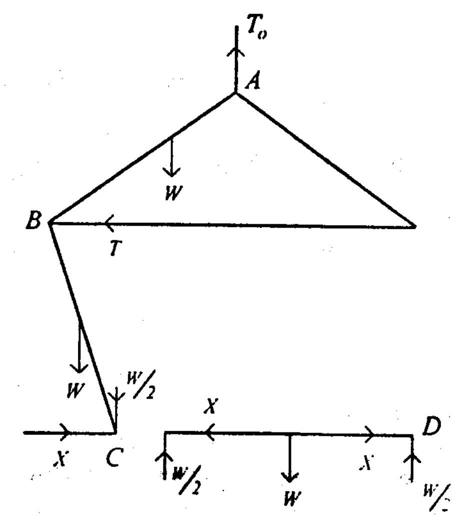
$$= \frac{W}{2}\left[\cos\alpha\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}\cot\alpha\cdot\sin^2\alpha\right]$$

$$= \frac{W}{4}\left[3\cos\alpha\cdot\sin\alpha\right] = \frac{3W}{8}\sin 2\alpha$$

உதாரணம் 7

ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய ஐந்து சீரான சமகோல்கள் ஓர் ஐங்கோணியை ஆக்குமாறு தம்முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அவ்வைங்கோணி ஒரு உச்சிக்கு இணைத்த ஓர் இழையினால் நிலைக்குத்தாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அடுத்த இரு உச்சிகளும் அவ்வைங்கோணி ஒழுங்கானதாய் இருக்கும் படியான நீளமுள்ள ஓர் இலேசான கோலினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கோலிலுள்ள தகைப்பு $W\left(\tan 18^\circ + 2\tan 54^\circ\right)$ எனக் காட்டுக.





இச்சட்டப்படல் A யினூடான நிலைக்குத்துப் பற்றி சமச்சீரானது. மூட்டுக்கள் C, D யிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் சமமானவை. எனவே கோல் CD யின் சமநிலைக்கு. C, D யிலுள்ள மறுதாக்கங்களின் நிலைக்குத்துக் கூறு $\frac{W}{2}$ ஆதல் வேண்டும். இப்பொழுது BC யின் சமநிலைக்கு. [கோல் ஒன்றின் நீளம் $2a$ என்க]

$B \circlearrowleft = 0$

$$X \cdot 2a\cos 18^\circ - \frac{W}{2} 2a\sin 18^\circ - W \cdot a\sin 18^\circ = O$$

$$X = W\tan 18^\circ \qquad \text{-------------}(1)$$

AB, BC யின் சமநிலைக்கு, $A \circlearrowleft = 0$

$$X\left(2a\cos 18^\circ + 2a\cos 54^\circ\right) + \frac{W}{2}\left(2a\sin 54^\circ - 2a\sin 18^\circ\right)$$

$$+ W\left(2a\sin 54^\circ - a\sin 18^\circ\right) + W a\sin 54^\circ - T \cdot 2a\cos 54^\circ = 0$$

$$T = \frac{1}{2\cos 54^\circ}\left[W\tan 18^\circ\left(2\cos 18^\circ + 2\cos 54^\circ\right) + 4W\sin 54^\circ - 2W\sin 18^\circ\right]$$

$$= \frac{W}{2\cos 54^\circ}\left[2\sin 18^\circ + 2\tan 18^\circ\cos 54^\circ + 4\sin 54^\circ - 2\sin 18^\circ\right]$$

$$= \frac{W}{2\cos 54^\circ}\left[2\tan 18^\circ\cos 54^\circ + 4\sin 54^\circ\right]$$

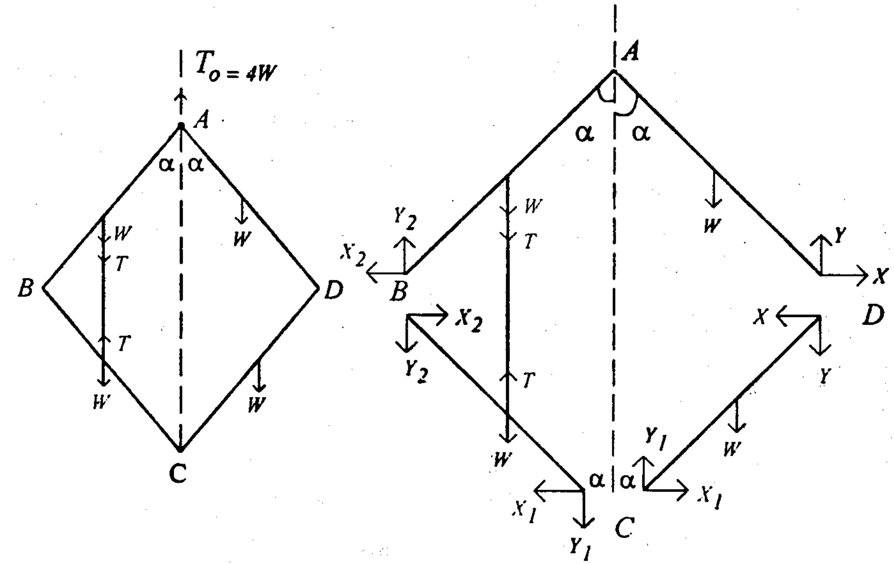
$$= W\left[\tan 18^\circ + 2\tan 54^\circ\right]$$

உதாரணம் 8

ஒவ்வொருன்றும் நிறை W வை உடைய நான்கு சமச்சீர்க்கோடுகள் சாய்சதுரம் $ABCD$ ஐ ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளிலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. உச்சி A யிலிருந்து இச்சாய்சதுரம் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை AB, BC ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கின்ற இலேசான இழையினால் A யிற்குக் கீழே C யும் $D\hat{A}B = 2\alpha$ ஆகவும் இருக்க நாப்பத்தில் பேணப்படுகிறது. மூட்டு D யில் உள்ள மறுதாக்கம் கிடையென நிறுவி அதன் பருமனைக் காண்க. இதிலிருந்து.

i. இழையில் உள்ள இழுவை $4W$ எனக் காட்டுக.

ii. மூட்டு B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்கூறைக் கண்டு B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனைக் காண்க.



கோல் ஒன்றின் நீளம் 2a என்க.

AD யின் சமநிலைக்கு

$A \circlearrowleft = 0$

$$X \cdot 2a\cos\alpha + Y \cdot 2a\sin\alpha - W \cdot a\sin\alpha = 0 \qquad \text{-------------}(1)$$

CD யின் சமநிலைக்கு $C \circlearrowleft = 0$

$$X \cdot 2a\cos - Y\, 2a\sin\alpha - W \cdot a\sin\alpha = 0 \qquad \text{-------------}(2)$$

$(1)-(2)$, $Y = 0$; ஆகவே $X = \frac{W}{2}\tan\alpha$

CD யின் சமநிலைக்கு

$\rightarrow X_1 - X = 0, \quad X_1 = X = \frac{w}{2} tan\alpha$

$\uparrow Y_1 - W = 0; \quad Y_1 = W$

BC யின் சமநிலைக்கு $B \circlearrowleft = 0$

$- Y_1 \cdot 2a sin\alpha - X_1 \cdot 2a cos\alpha - W \cdot a sin\alpha + T \cdot a sin\alpha = 0$

$- 2W sin\alpha - \frac{W}{2} \cdot tan\alpha \cdot 2 cos\alpha - W sin\alpha + T = 0$

$T = 4W$

(i) இழையில் இழுவை $4W$ ஆகும்.

(ii) BC யின் சமநிலைக்கு

$\uparrow T - W - Y_1 - Y_2 = 0$

$4W - W - W - Y_2 = 0; \quad Y_2 = 2W$

$\rightarrow X_2 - X_1 = 0; \quad X_2 = X_1 = \frac{W}{2} tan\alpha$

B யில் மறுதாக்கம். $W\sqrt{4 + \frac{tan^2\alpha}{4}}$

$= \frac{W}{2}\sqrt{16 + tan^2\alpha}$

பயிற்சி - 7

1. ஒவ்வொன்றும் W நிறையான மூன்று சீரான சமகோல்கள் ஒரு சமபக்க முக்கோணி வடிவில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இம்முக்கோணி அதன் பக்கங்களின் ஒன்றின் நடுப்புள்ளியில் தாங்கப்படின் மூட்டுக்களில் தாக்கங்களைக் காண்க.

2. $ABCD$ என்னும் சதுரம் சுயாதீனமாக ஒருமித்து மூட்டிய ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய நான்கு சமமான சீர்க்கோல்களாலானது. இவ்வொழுங்கு கீழ்மூட்டு C இலே தாங்கப்பெற்றும், C ஐயும் A ஐயும் தொடுக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் அவ்வடிவத்தில் பேணப்பட்டுள்ளது. இக்கோலிலுள்ள உதைப்பையும் மூட்டுக்கள் B அல்லது D இன் தாக்கத்தின் பருமனையும். திசையையும் காண்க.

3. ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$. ஒருமிக்க மூட்டியிருக்கும் ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய நான்கு சமமான சீர்க்கோல்களாலானது. இவ்வொழுங்கு மூட்டு A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பெற்றும், கோணம் $C\hat{A}D = 30^o$ எனக் கொண்டு A ஐயும் C ஐயும் தொடுக்கும் ஓர் இழையினால் அவ்வடிவத்திற் பேணப்பெற்றுமுள்ளது. இழையின் இழுவையையும் B அல்லது D இல் மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

4. AB, BC என்னும் இரு சம நீளக்கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB இன் நிறை W உம் BC இன் நிறை $2W$ உம் ஆகும். அவை A, C என்னும் முனைகளை ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது கொண்டு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையைப் பேண A இலும் C இலும் எக்கிடைவிசைகள் பிரயோகிக்கப்பட வேண்டும்.

5. ஒரே ஆக்கப்பொருளினாலான ஒரே குறுக்குவெட்டுள்ள AB, BC எனும் இரு கோல்களின் நீளம் முறையே a, b மீற்றராகும். இவை B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. ABC ஒரு செங்கோணமாக அமையுமாறு ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இவற்றின் முனைகள் A, C இணைக்கப்பட்டுத் தொங்குகின்றன. ஒரு மீற்றர் கோலின் நிறை $W \cdot kg$ ஆயின் மூட்டு B இலும் இணைப்பு A, C இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

6. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, BC, CD, DE, EA என்னும் ஐந்து சீரான சமகோல்கள் அவற்றின் முனைகளிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டும் ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி அமைப்பில் A இல் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டும் இருக்கின்றன. A ஐ C உடனும் D உடனும் இணைக்கும் இலேசான இழை

களினால் இவ்வுருவ அமைப்புப் பேணப்படுகிறது. B, E என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கண்டு, ஒவ்வோர் இழையிலுமுள்ள இழுவை $2W\cos 18^\circ$ எனக் காட்டுக.

7. மூன்று சமகோல்கள் AB, BC, CD உம் அவற்றைப் போல இருமடங்கு நீளமுள்ள கோல் AD உம் A, B, C, D ஆகியவற்றில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப் பட்டுள்ளன. இச் சட்டப்படல் BC இன் நடுப்புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. அக்கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை w உம் மிக நீண்ட கோலின் நிறை $2w$ உம் ஆயின் அப்பிணையல்களின் மீதுள்ள விசைகளின் பருமன் களைக் காண்க. A, B என்பவற்றிலுள்ள விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் BC இற்குக் கீழ் ஆழம் $\frac{BC}{\sqrt{3}}$ இல் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக.

8. A இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டும் B, C என்பவற்றை ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்திற் கொண்டும் தங்கும் W_1, W_2 நிறைகளையுடைய AB, AC எனும் இரு சீரான சமநீளக் கோல்கள் BC ஐ இணைக்கும் ஒரு நீளா இழையினால் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றன. AC இல் A இலிருந்து $\frac{3}{4}AC$ தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு w நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழையின் இழுவை $\frac{1}{4}\left(W_1 + W_2 + \frac{1}{2}w\right)\tan\frac{A}{2}$ என நிறுவுக.

9. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் a நீளமுமுள்ள AB, CD என்னும் இரு சீர்க்கோல்கள் O இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இங்கு $OB = OD = b$. அக்கோல்கள் A, C என்னும் முனைகளை ஓர் ஒப்பமான மேசையின் மீது கொண்டும் B, D என்னும் முனைகள் ஓர் இலேசான இழையினால் இணைக்கப்பெற்றும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றன. அப்பொருத்தில் மறுதாக்கம் $\frac{aW}{2b}\tan\alpha$ என நிறுவுக. இங்கு α நிலைக்குத்துடன் கோல் ஒவ்வொன்றினதும் சாய்வு ஆகும்.

10. ஒரே ஆக்கப் பொருளினாலானவையும், ஒரே தடிப்பும் வெவ்வேறான நீளங்களுமுள்ளனவுமான AB, BC என்னும் இரு சீர்க்கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டும் A, C எனும் முனைகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் நிலைப்பட்டும் உள்ளன. மூட்டு B இல் தகைப்புக் கோணம் ABC இன் இரு கூறாக்கியான BD வழியே செயற்படுகிறது எனவும், அதன் பருமன் $\frac{1}{2}W\frac{BD}{AC}$ எனவும் காட்டுக. இங்கு W ஒவ்வொரு கோலினதும் நிறை.

11. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையுமுடைய AB, BC, CD, DA ஆகிய நான்கு கோல்கள் A, B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC இனதும் CD இனதும் நடுப்புள்ளிகள் $2a\sin\theta$ நீளமுடைய இலேசான கோலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் A இல் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. அவ்விலேசான கோலிலுள்ள உதைப்பு $4W\tan\theta$ எனக் காட்டுக. B இலும் C இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

12. ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளத்தையும் W நிறையையுமுடைய நான்கு சீரான கோல்கள் AB, BC, CD, DA என்பவற்றால் A, B, C, D என்பவற்றில் ஒப்பமாகப் பிணைத்து ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இது A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டு B ஐயும் D ஐயும் இணைக்கும் ஒரு மெல்லிய இலேசான கோல் BD இனால் ஒடுங்காமல் தடை செய்யப்பட்டுள்ளது. $B\hat{A}D = 2\alpha$ எனில், பிணையல் C யிலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் கணித்துக் கோல் BD யிலுள்ள உதைப்பு $2W\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

13. சமநீளமுடைய AB, BC, CD, DA ஆகிய நான்கு கோல்கள் ஒரு சாய்சதுரத்தை ஆக்கும் வண்ணம் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் AB, AD இலேசானவை. கோல்கள் BC, CD ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய சீரான கோல்கள் ஆகும். சட்டப்படல் A இல் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B இற்கும் D இற்கும் இணைக்கப்பட்ட வேறோர் சமநீளமுடைய இலேசான BD எனும் கோலினால் இந்நிலையில் சட்டப்படல் பேணப்படுகிறது. இக்கோலிலுள்ள உதைப்பு $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ எனக் காட்டுக.

14. ஒருமித்து மூட்டிய ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய நான்கு சீரான சமகோல்களைக் கொண்டு ஒரு சதுர உருவம் $ABCD$ அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இவ்வொழுங்கு புள்ளி A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டும் A, C என்னும் மூட்டுக்களை இணைக் கும் இழையொன்றினால் சதுர உருவத்தில் பேணப்பட்டுள்ளது. மூட்டு B அல்லது D இல் தாக்கத்தின் பருமனையும், இழையின் இழுவையையும் காண்க.

15. AB, BC, AC ஆகிய மூன்று சீரான சமநீளமுடைய கோல்கள் A, B, C இலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. CA, AB ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் BC, $2W$ நிறையுமுடையன. சட்டப்படல் C இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. BC கிடையுடன் $tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ எனும் கோணத்தை அமைக்குமென நிறுவுக. A இலும் B இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

16. ஒவ்வொன்றும் $8a$ நீளமுள்ள AB, BC, CA என்றகோல்கள் A,B,C என்னும் புள்ளிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC, CA என்னும் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் AB ஆனது $2W$ நிறையும் உடையன. D,E என்பன BC என்ற கோலில் முறையே B இலும் C இலும் இருந்து a தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளாகும். இச்சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் BC கிடை யாகவும் A ஆனது BC இன்மட்டத்திற்கு மேலாகவும் இருக்குமாறு D இலும் E இலும் உள்ள இருகத்தி முனைகளில் வைத்துச் சமநிலையில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. மூட்டுக்கள் A,B,C இல் உள்ள மறுதாக்கங்களின் பருமன்கள் முறையே $\frac{W}{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}W$, $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ எனக் காட்டுக. D இலும் E இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

17. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் $2a$ நீளமுமுள்ள OA, AB, BC எனும் ஒரு சீர்கோல்கள் மூன்று A, B என்பவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளது. O ஆனது ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்கு ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. C யில் ஒரு கிடை விசை W பிரயோகிக்கப்பட்டது. சமநிலைத் தானத்தில் BC யானது நிலைக்குத்திற்குக் கோணம் $tan^{-1}(2)$ இல் சாய்ந்திருக்குமெனக் காட்டுக. நிலைக்குத்துடன் AB, OA என்பவற்றின் சாய்வுகளையும் O,A,B என்பவற்றி லுள்ள மறுதாக்கங்களையும் துணிக.

18. ஒவ்வொன்றும் $4a$ நீளமும் முறையே W_1, W_2, W_3 என்னும் வெவ்வேறான நிறையுமுடைய BC, CA, BA எனும் மூன்று சீரான கோல்கள் ஒரு முக்கோணி வடிவில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அம்முக்கோணியானது ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள P, Q என்னும் இரண்டு ஒப்பமான முளைகளை AB தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறும், AB க்குக் கீழே C இருக்குமாறும் ஓய்விலிருக்கின்றது. இங்கு $AB = BQ =$ a, w_1, w_2 எனும் நிறைகள் முறையே புள்ளிகள் A,B என்பவற்றிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. சமநிலைக்கு.

$$W_3 + 2W_1 + 3w_2 - w_1 \geq 0$$

$$W_3 + 2W_2 - w_2 + 3w_1 \geq 0$$

எனக் காட்டுக. கோல் BC மீது மூட்டு C யினது மறுதாக்கத்தைத் துணிக.

19. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB,BC,CD,DA என்னும் நான்கு கோல்கள் A, B, C, D இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரு கிடைக்கோட்டிலுள்ள E, F என்னும் இரு ஒப்பமான முளைகளின் மீது AB, AD என்பவை தாங்கப்பட்டுள்ளன. A ஆனது C இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே இருக்கும் படி $ABCD$ ஆனது ஒரு சதுர உருவத்தில் தொங்கினால் E, F ஆனவை முறையே AB, AD ஆனவற்றை இரு கூறிடுமெனக் காட்டுக. A, C என்பவற்றிலும் முளைகளிலுமுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

20. சமநீளமும் சமநிறையுமுடைய நான்கு சீரான கோல்கள் ஒரு சங்கிலியை அமைக்குமாறு அவற்றின் நுனிகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சங்கிலியின் சுயாதீன நுனிகள் ஒரேகிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதியானது சமநிலையில் இருக்குமாறு முதலாம் நான்காம் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் α எனும் கோணத்தை ஆக்குகின்றன. இரண்டாம் மூன்றாம் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் $tan^{-1}\left(\frac{1}{3}tan\,\alpha\right)$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளனவெனக் காட்டிப் பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

21. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் w நிறையும் கொண்ட AB, AC என்னும் இரண்டு சமமான சீரான கோல்கள் ஒப்பமாக A இல் மூட்டப்பட்டு அச்சு கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள r ஆரையைக் கொண்ட ஒப்பமான வட்ட உருளையின் மேல் சமச்சீராக ஓய்வில் இருக்கிறது. ஒவ்வொரு கோலும் கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனின். $a\,cos^3\theta.\ cose\theta = r$ எனக் காட்டுக. A இல் உள்ள மூட்டின் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

22. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, BC, CD, DA என்னும் சமமான சீரான நான்கு கோல்களைச் சுயாதீனமாக மூட்டிப் பெறப்பட்ட அமைப்பு A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. AD, DC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் இலேசான நீளா இழையொன்றினால் இச்சட்டப்படல் ஒரு சதுரவடிவில் வைத்திருக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் இழையிலுள்ள இழுவையையும் காண்க.

23. ஒவ்வொன்றும் நிறை $8w$ உம் நீளமும் $5a$ கொண்ட சமனான ஒரு சீரான AB, BC என்னும் இருகோல்களும் நிறை $14w$ உம் நீளம் $6a$ உம் கொண்ட ஒரு

சீரான மூன்றாம் கோல் AC ஒன்றும் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டு ABC என்னும் முக்கோணியொன்று உருவாக்கப்படுகிறது. A யிலிருக்கும் ஒரு ஒப்பமான அச்சாணியிலிருந்து முக்கோணியானது ஒரு நிலைக்குத்தான தளத்தில் தொங்குகிறது. AC கிடையாகவும் B ஆனது AC யிற்குக் கீழாகவும் அமையும் வண்ணம் முக்கோணியானது சமநிலையில் இருப்பதற்கு இணையொன்று கோல் AC யிற்குப் பிரயோகிக்கப்படுகிறது.

(i) இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க. ஒருவரிப்படத்தில் அதன் போக்கை காட்டுக.

(ii) BC மீது CA, AB என்பவற்றால் உஞற்றப்பட்ட விசைகளின் கிடைக்கூறுகளையும் நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும் காண்க.

24. ஒவ்வொன்று w நிறையுடைய நான்கு சமசீர்க்கோல்கள் AB, BC, CD, DA அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு சதுரம் ஒன்றை உருவாக்கு கின்றன. இச்சதுரம் A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டு C இல் $3W$ நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB யினதும் AD யினதும் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் மெல்லிய கிடைக்கோலொன்றினால் இச்சட்டப்படல் சதுரவடிவில் பேணப்படுகிறத. இக்கோலிலுள்ள உதைப்பு $10W$ எனக் காட்டுக.

25. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய ஐந்து சமசீர்க்கோல்கள் AB, BC, CD, DE, EA என்பன முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ABCDE ஐ உருவாக்குகின்றன. இவ்வொழுங்கு CD கிடையாக இருக்குமாறும் ஒழுங்கான ஐங்கோணி வடிவில் பேணப்படுமாறும் AB, AE என்பன இரு ஒப்பமான முளைகளின் மீது தாங்கப்படுகின்றன. தாங்கிகளின் மீதான மறுதாக்கங்களைக் காண்க. B, C, D, E என்பவற்றிலான மறுதாக்கங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் கிடைக்கூறுகள் $W\cot\dfrac{2\pi}{5}$ இற்கு சமமெனக் காட்டி A யிலான மறுதாக்கம். $\left(\dfrac{5}{2}\tan\dfrac{\pi}{5}-\cot\dfrac{2\pi}{5}\right)W$ எனும் கிடைவிசையெனக் காட்டுக.

26. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, BC என்னும் இருசமச்சீர்க்கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இக்கோல்கள் தன் அச்சு கிடையாக நிலைப் படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான திண்ம உருளையொன்றைத் தொட்டவண்ணம் அச்சிற்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் சமநிலையில் உள்ளன. சமநிலைத்தானத்தில் கோல்கள் செங்கோணத்திலிருப்பின் ஒவ்வொரு கோலின் நீளமும் உருளையின் விட்டத்தின் இருமடங்கெனக் காட்டுக.

27. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் உடைய OA, AB, BC என்னும் மூன்று சமச்சீர்கோல்கள் A, B என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு O இலுள்ள நிலைத்த பிணையலிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது. கோல் BC இற்கு C இல் கிடையாக P எனும் விசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சமநிலையில் BC கிடையுடன் 45° ஐ அமைக்கிறது.

(a) P ஐ W இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

(b) பிணையல் O இலுள்ள விசை $\dfrac{W}{2}\sqrt{37}$ என நிறுவுக.

(c) O வினூடான நிலைக்குத்திலிருந்து C இன் தூரம் அண்ணளவாக $2\cdot 44a$ எனக் காட்டுக.

28. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையுமுடைய AB, BC எனும் சீரான வளைகள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. C இல் ஒரு இலேசான வளையம் இணைக்கப்பட்டு வளையம் ஒப்பமான நிலைத்த கிடைக்கோலொன்றில் அசையக் கூடியதாக உள்ளது. இக்கோலிற்கு கீழே $3a$ ஆழத்திலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்கு முனை A சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. இரு வளைகளிலொன்று நிலைக்குத்தாக இருந்தால் மட்டுமே சமநிலை சாத்தியமாகுமெனக் காட்டுக. தொகுதி (i) AB நிலைக்குத்தாக (ii) BC நிலைக்குத்தாக இருக்கும் போது C இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

29. ஒவ்வொன்றும் W எனும் நிறையுடைய இரு சமமான ஒரு சீரான கோல்கள் AB, AC என்பவை A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் முனைகள் B, C ஆனவை இலேசான நீட்டமுடியாத இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் α அமைக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்கள் மீது B, C என்பன சமச்சீராய் ஓய்விலுள்ளன. BC கிடையாகவும் A ஆனது BC இற்கு மேலாகவும் உள்ளன. B இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க. $BAC = 2\theta$ ஆயிருக்க $\tan\theta > 2\tan\alpha$ எனும் நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட இழையிலுள்ள இழுவையானது $\frac{1}{2}W(\tan\theta - 2\tan\alpha)$ ஆகுமெனக் காட்டுக. முனை A இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

30. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் W நிறையும் உள்ள AB, BC, CD என்னும் சீரான மூன்று கோல்கள் B இலும் C இலும் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC கிடையாகவும் AB, CD ஆகிய ஒவ்வொன்றும் நிலைத்த ஒப்பமான ஒரு முனையினாலே தாங்கப்பட்டுமிருக்க இத்தொகுதி சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. இம்முனைகள் இரண்டும் ஒரே கிடை மட்டத்திலும் $2C$ இடைத்தூரத்திலும்

இருக்கின்றன. AB ஆனது நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு $\sin\alpha = \left[\frac{3(c-a)}{2a}\right]^{\frac{1}{3}}$ B இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் கண்டு, அது கிடையுடன் கோணம் $\tan^{-1}\left[\frac{1}{3}\tan\alpha\right]$ ஐ ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக.

31. ஒவ்வொன்றும் நீளம் a ஐயும் நிறை W வையும் உடைய AB, AC என்னும் இரு சம சீர்க்கோல்கள் A யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. நிறையற்றதும் நீளம் b $(< a)$ யை உடையதுமான ஒரு சலாகை BD ஆனது B யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு AC மீது வழுக்குகின்ற ஒப்பமான இலேசான வளையம் ஒன்றுடன் D யில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தொகுதியானது A யில் ஒப்பமான ஒரு சிறிய ஊசியிலே தொங்கவிடப்பட்டு சமநிலையில் இருக்கின்றது. AC யிற்கும் கீழ்முக நிலைக்குத்துக்குமிடையே உள்ள கோணம் α எனின் $\tan\alpha = \frac{b}{a+\sqrt{a^2-b^2}}$ எனக் காட்டுக. கோல் BD யில் உள்ள உதைப்பையும் மூட்டு மீது ஊசியினது மறுதாக்கத்தின் கூறுகளையும் காண்க.

32. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் a நீளமும் உடைய சீரான ஆறுசமகோல்கள் அறுகோணி $ABCDEF$ ஐ அமைக்குமாறு ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இவை உச்சி A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு $a\sqrt{3}$ நீளமுள்ள இலேசான ஒரு கிடைக்கோல் LM இனால் ஒழுங்கான ஓர் அறுகோணி வடிவத்தில் பேணப்பட்டுள்ளன. இங்கு L, M ஆகிய முனைகள் $BL = FM = x$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக முறையே BC, EF ஆகியவற்றில் உள்ள புள்ளிகளுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. உச்சி D இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க. கோல் LM இல் உள்ள உதைப்பு $3\sqrt{3}W$ எனக் காட்டுக. தூரம் x ஆனது $\frac{a}{6}$ ஆகுமெனவும் காட்டுக.

33. இலேசான ஐந்து கோல்கள் AB, BC, CD, DA, AC என்பவற்றால் சட்டப்படல் ஒன்று ஆக்கப்பட்டுள்ளது. $ABCD$ சதுரவடிவில் உள்ளது. AC மூலைவிட்டமாகும். B, D என்பவற்றில் முறையே mW, nW நிறைகள் இணைக்கப்பட்டு இச்சட்டப்படல் உச்சி A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல் BC, CD இலுள்ள உதைப்புக்களையும் நிலைக்குத்திற்கு கோல் AB இன் சாய்வையும் காண்க.

கோல் AC யிலுள்ள இழுவை $mnW\sqrt{\frac{2}{m^2+n^2}}$ எனக் காட்டுக.

34. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் $2a$ நீளமும் உடைய சீரான ஐந்து கோல்கள் $ABCDE$ என்னும் ஒழுங்கான ஐங்கோணியை அமைக்குமாறு ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. BC, DE என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் இலேசான கோலொன்றினால் இது ஒழுங்கான ஐங்கோணி வடிவில் பேணப்படுகிறது. இலேசான கோலிலுள்ள உதைப்பு அண்ணளவாக $6 \cdot 61W$ எனக் காட்டுக.

35. சமநீளமுடைய நான்கு சீர்க்கோல்கள் AB, BC, CD, DE என்பன B, C, D என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் AB, DE ஒவ்வொன்றும் w நிறையும் BC, CD ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் உடையன. இத்தொகுதி ஒரே கிடைமட்டத்தில் $2a$ இடைத்தூரத்திலுள்ள A, E என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. B, C, D எனும் புள்ளிகள் AE ஐ அடியாகக் கொண்ட அரைவட்டவில்லில் அமைந்திருப்பின் $w = \left(2\sqrt{2}+1\right)W$ என நிறுவுக. C யில் மறுதாக்கத்தை W இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

36. $ABCDEF$ என்னும் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி ஆறு சமமான சீர்க்கோல்களால் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு ஆக்கப்பட்டுள்ளது. AB யானது ஒரு கிடைத்தளத்தை தொட்டுக்கொண்டிருக்க, அச்சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கிறது. C, F என்பன ஓர் இலேசான நீளா இழையால் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கோல் ஒன்றின் நிறை W எனின், அவ்விழையின் இழுவை $W\sqrt{3}$ எனவும், மூட்டு E யிலுள்ள தாக்கம் $\frac{W}{2}\sqrt{\frac{7}{8}}$ ஆகும் எனவும் காட்டுக.

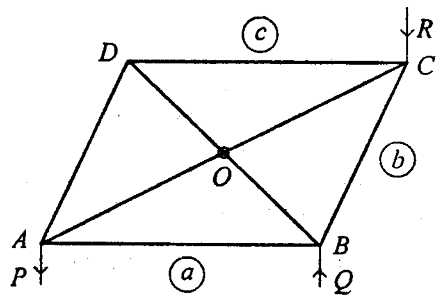
37. ஒவ்வொன்றும் நிறை W வை உடைய ஐந்து சீரான கோல்கள் தம் முனைகளில் ஒன்றுக்கொன்று சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு $ABCDE$ எனும் ஐங்கோணி பெறப்படுகிறது. இவ்வைங்கோணி $ABCDE$, ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது CD யானது ஓய்வில் இருக்கும்படி நிலைக்குத்துக் தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வொழுங்கான ஐங்கோணி வடிவம் BC, DE என்பனவற்றைத் தொடுக்கும் ஓர் இலேசான இழையினால் பேணப்படுகிறது. அவ்விழையின் இழுவை $W\left(\cot\frac{\pi}{5} + 3\cot\frac{2\pi}{5}\right)$ என நிறுவுக.

8. சட்டப்படல் - தகைப்பு வரிப்படம்

போவின் குறிப்பீடு *(Bow's Notation)*

இங்கு விசைகளுக்கிடையேயான பிரதேசம் (வெளி) எழுத்துக்களினால் குறிக்கப்படும். பின்வரும் சட்டப்படலை அவதானிக்க. இங்கு தரப்பட்டுள்ள கோல்கள் யாவும் இலேசானவை. விசைகள் P, Q, R என்பன தாக்குகின்றன.

விசை P, விசை Q, கோல் AB என்பவற்றிற்கிடைப்பட்ட வெளி a என்பதாலும் விசை Q, விசை R, கோல் BC என்பவற்றிற்கிடைப்பட்ட வெளி b என்பதாலும் விசை R, விசை P, கோல்கள் CD, DA என்பவற்றிற்கிடைப்பட்ட வெளி c என்பதாலும் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.



ab என்பது விசை Q ஐயும், bc என்பது விசை R ஐயும் ca என்பது விசை P ஐயும் குறிப்பதாகக் கொள்ளப்படும்.

தகைப்பு வரிப்படம் *(Stress Diagram)*

தகைப்பு வரிப்படம் வரையும் போது, பருமட்டாக வரையப்படுவதால் விசையின் பருமன்களைக் கணிப்பு முறையில் கணித்தல் வேண்டும்.

இங்கு வரிப்படம் வரையும்போது எடுக்கப்படும் ஒழுங்கு ஒன்றில் இடஞ்சுழியாக அல்லது வலஞ்சுழியாக இருத்தல் வேண்டும். ஒரே வரிப்படத்தில் இரண்டு ஒழுங்குகளையும் மாறி மாறிப் பாவிக்கக்கூடாது.

உதாரணம் 1

இலேசான ஐந்து கோல்களைச் சுயாதீனமாக மூட்டுவதன் மூலம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல அமைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு A ஐ நிலைத்த புள்ளி ஒன்றில் சுயாதீனமாகப் பிணைப்பதன் மூலம் சட்டப்படல் நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB நிலைக்குத்தாயும் BC கிடையாகவும் இருக்கும் அதேவேளை

$A\hat{D}B = 90^o$; $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 30^o$ ஆகும். C யில் ஒரு $100N$ சுமை தொங்கும். அதேவேளை ஒரு கிடைவிசை P ஆனது B லே $\overrightarrow{CB}$ இன் திசையில் தாக்குகிறது. P யைக் கண்டு A யில் உள்ள பிணையலில் இருக்கும் மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறையும், நிலைக்கூறையும் பெறுக.

போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்திச் சட்டப்படலிற்கான தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து, இழுவைகளையும், உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, எல்லா ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைத் துணிக.

சட்டப்படலின் சமநிலைக்கு,

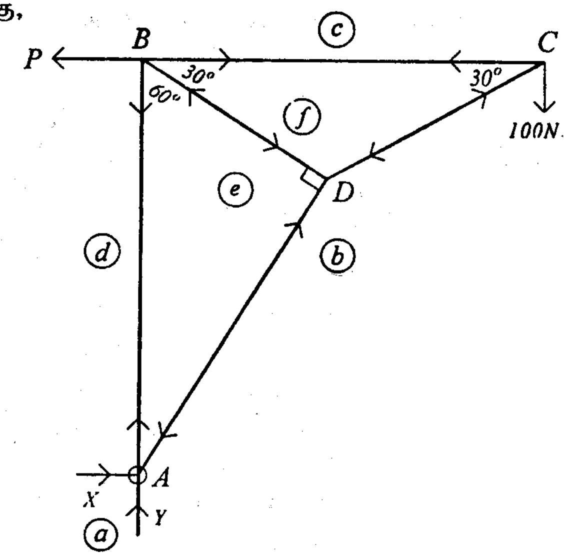
$\rightarrow$ $X - P = 0$

$X = P$

$\uparrow$ $Y - 100 = 0$

$Y = 100$

$AB = 2a$ என்க.



$A \curvearrowright = 0$

$$P \cdot 2a = 100\left[AD \cos 60^\circ + DC \cos 30^\circ\right]$$

$$P \cdot 2a = 100\left[2a \sin 60^\circ \cos 60^\circ + 2a \cos 60^\circ \cos 30^\circ\right]$$

$$2P = 100\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$P = 50\sqrt{3}\,N$$

ஆகவே $X = 50\sqrt{3}\,N$, $Y = 100N$

(i) முதலில் $a \to b \to c \to d \to a$ எனும் ஒழுங்கில் (இடஞ்சுழியாக) எடுக்கப்பட்டு விசைப்பல்கோணி வரையப்படுகிறது.

(ii) மூட்டு A யில் $d \to a \to b \to e \to d$ என்ற ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்டு விசைப்பல்கோணி வரையப்படுகிறது.

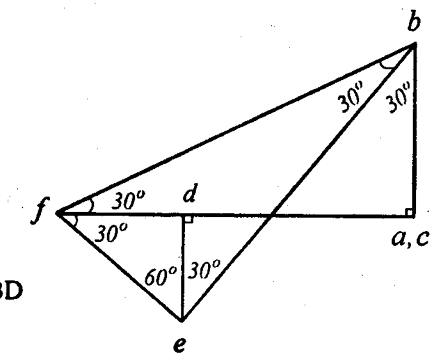
(iii) மூட்டு B யில் $c \to d \to e \to f \to c$ என்ற ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்டு விசைப்பல்கோணி வரையப்படுகிறது.

(iv) மூட்டு C யின் சமநிலையைக் கருதி $b \to c$, $c \to f$, $f \to b$ என்ற ஒழுங்கில் விசைப்பல்கோணி பூர்த்தியாக்கப்படுகிறது.

$ab = bc = 100$

$da = cd = 50\sqrt{3}$

$bf = \dfrac{bc}{\cos 60^\circ} = \dfrac{100}{\frac{1}{2}} = 200$ — CD



$ef = bf\cos 60^\circ = 200 \times \dfrac{1}{2} = 100$ — BD

$be = bf\sin 60^\circ = 200 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$ — AD

$cf = 200\cos 30^\circ = 100\sqrt{3}$ — BC

$ed = ef\sin 30^\circ = 100 \times \dfrac{1}{2} = 50$ — AB

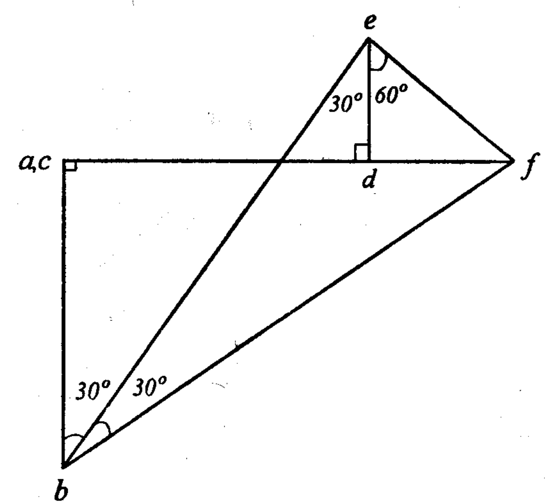
கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	50	-
BC	$100\sqrt{3}$	-
CD	-	200
BD	-	100
AD	-	$100\sqrt{3}$

வலஞ்சுழியாக வரையும்போது தகைப்பு வரிப்படம் அமையும் முறையைப் பார்ப்போம்.

(i) முதலில் $a \to d \to c \to b \to a$ எனும் ஒழுங்கிலும்,

(ii) மூட்டு A யில் $b \to a \to d \to c \to b$ எனும் ஒழுங்கிலும்

(iii) மூட்டு B யில் $e \to d \to c \to f \to e$ எனும் ஒழுங்கிலும் வரையப்படுகிறது.



இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஒரே பெறுமானங்களே பெறப்படும் என்பதைக் கவனிக்க.

உதாரணம் 2

AB, BC, CD, DA என்னும் இலேசான கோல்கள் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு $ABCD$ என்னும் சாய்சதுர வடிவ சட்டப்படல் உள்ளது. உச்சிகள் B,D என்பன $\angle BAD = 2\alpha \left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆகுமாறு BD எனும் ஒரு இலேசான கோலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சட்டப்படலை உச்சி B ஆனது ஒப்பமான தாங்கியின் மீது தங்கவும், A யிலுள்ள நிலைக்குத்தான விசை ஒன்றினாலும், நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் AB கிடையாகவும், CD இற்கு கீழாகவும் இருக்க ஓய்கிறது. C இல் நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A யிலுள்ள விசையையும், B இல் மறுதாக்கத்தையும் காண்க. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைந்து ஒவ்வொரு கோலிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க. இழுவை, உதைப்பு என்பவற்றை வேறுபடுத்துக.

சமநிலைக்கு

$\uparrow S - R - W = 0$

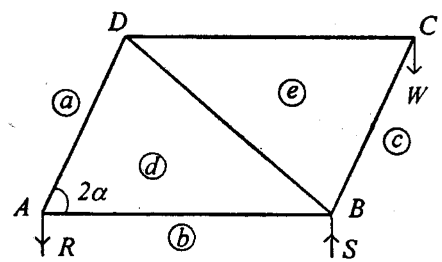
$S - R = W$

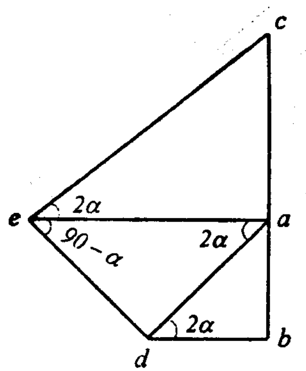
$A \circlearrowright = 0$

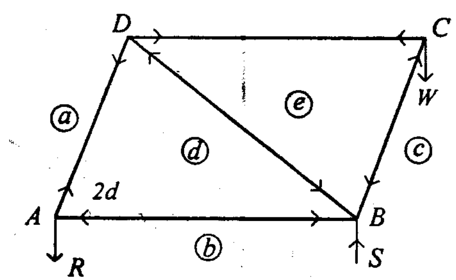
$S \cdot a - W(a + a\cos 2\alpha) = 0$

$S = W(1 + \cos 2\alpha)$

$R = W\cos 2\alpha$







$ab = W\cos 2\alpha$, $ac = W$ ஆகும்.

$$bd = \frac{ab}{\tan 2\alpha} = W\cos 2\alpha \cdot \cot 2\alpha - AB$$

$$ad = \frac{ab}{\sin 2\alpha} = \frac{W\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = W\cot 2\alpha - AD$$

$$ae = \frac{ac}{\tan 2\alpha} = \frac{W}{\tan 2\alpha} = W\cot 2\alpha - CD$$

$$ce = \frac{ac}{\sin 2\alpha} = \frac{W}{\sin 2\alpha} = W\operatorname{cosec} 2\alpha - BC$$

$$\frac{ed}{\sin 2\alpha} = \frac{ad}{\sin(90-\alpha)} \quad ; \quad ed = \frac{W\cot 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= W\cos 2\alpha \cdot \sec\alpha - BD$$

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	–	$W\cos 2\alpha \cdot \cot 2\alpha$
BC	–	$W\, coses 2\alpha$
CD	$W\cot 2\alpha$	–
AD	$W\cot 2\alpha$	–
BD	–	$W\cos 2\alpha\ \sec\alpha$

குறிப்பு :

(i.) $a \to b \to c \to a$ என்ற ஒழுங்கிலும்

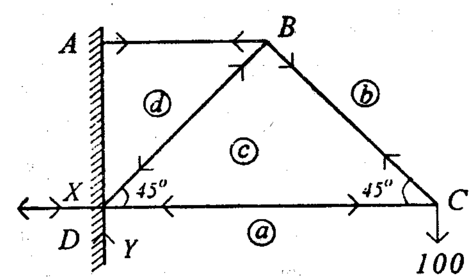
(ii.) மூட்டு A யில் $a \to b \to d \to a$ என்ற ஒழுங்கிலும்

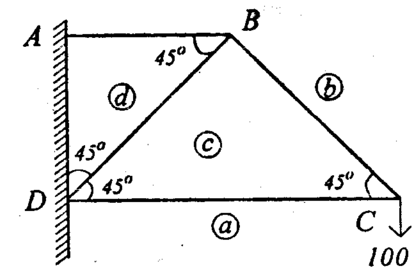
(iii.) மூட்டு C யில் $c \to a \to e \to c$ என்ற ஒழுங்கிலும்

(iv.) மூட்டு D யில் $e \to a \to d \to e$ என்ற ஒழுங்கிலும் வரையப்பட்டுள்ளது.

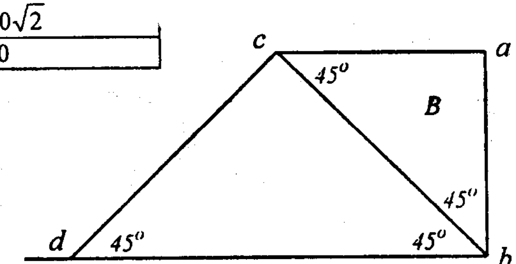
உதாரணம் 3

நான்கு இலேசான கோல்கள் AB, BC, CD, BD என்பன B, C, D என்பனவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு பெறப்பட்ட சட்டப்படல் A யிலும் D யிலும் நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. C யில் $100N$ நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படம் வரைக. கோல்களில் தகைப்புகளைக் கண்டு அவை இழுவையா, உதைப்பா என வேறுபடுத்துக.





கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	200	-
BC	$100\sqrt{2}$	-
BD	-	$100\sqrt{2}$
DC	-	100



$ab = 100$; $ac = 100 - CD$ $\qquad bc = cd = 100\sqrt{2} - BD$

$bc = 100\sqrt{2} - BC \qquad bd = 100\sqrt{2} \times \dfrac{1}{cos 45} = 200 - AB$

[முதலில் C யின் சமநிலைக்கு $a \to b \to c \to a$ என்ற ஒழுங்கிலும் பின்னர், B யின் சமநிலைக்கு $c \to b \to d \to c$ என்ற ஒழுங்கிலும் வரையப்பட்டுள்ளது.]

A யில் மறுதாக்கம், $200\,N$ ஆகும்

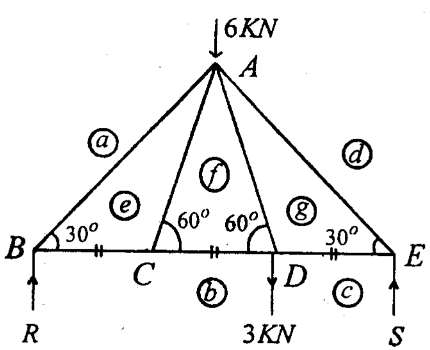
D யில் மறுதாக்கம் $\to -100\sqrt{2}\cos 45 - 100 + X = 0 \Rightarrow X = 200$

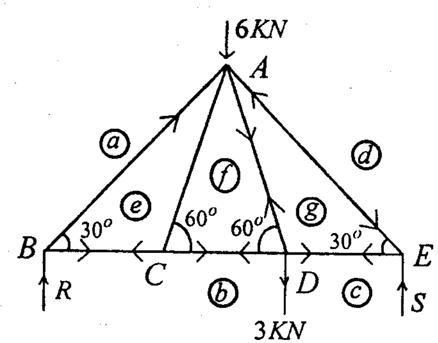
$$\uparrow Y - 100\sqrt{2}\sin 45 = 0 \Rightarrow Y = 100$$

$\therefore$ மறுதாக்கம் $100\sqrt{5}\ N$

உதாரணம் 4

சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட நிலைக்குத்தான சட்டப்படல் உருவிலே காட்டப்பட்டுள்ளது. இது A யிலும் D யிலும் $6\,KN, 3\,KN$ சுமைகளைக் கொண்டும் B யிலும் E யிலும் நிலைக்குத்தாகக் தாங்கப்பட்டும் உள்ளது. $BC = CD = DE$ ஆகும். B யிலும் E யிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து இதிலிருந்து கோல் களிலுள்ள விசைகளைக் கண்டு அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் கூறுக.





சமநிலைக்கு

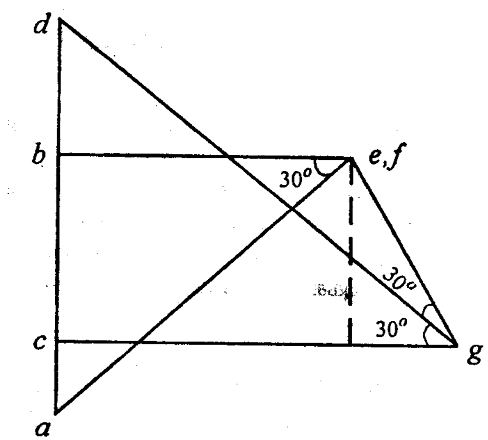
$\uparrow R + S - 9 = 0$

$R + S = 9$

$B \circlearrowleft = 0$

$S \cdot 3a - 3 \cdot 2a - 6 \cdot \dfrac{3a}{2} = 0$

$S = 5kN$; $R = 4\,kN$



$ab = 4$

$be = 4\sqrt{3}$ – BC

$ac = 8$ – AB

$cd = 5$

$dg = 10$ – AE

$cg = 5\sqrt{3}$ – DE

$bf = be = 4\sqrt{3}$ – CD

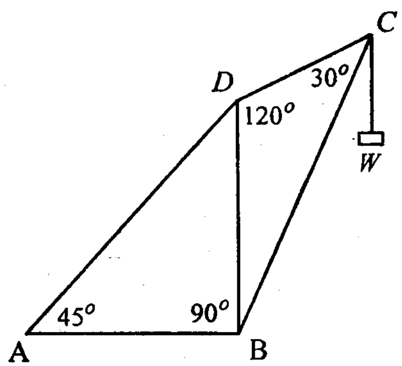
$gf = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ – AD

$e \equiv f$

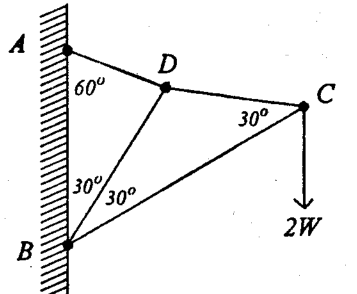
கோல்	இழுவை	உதைப்பு
AB	-	8
BC	$4\sqrt{3}$	-
CD	$4\sqrt{3}$	-
DE	$5\sqrt{3}$	-
AE	-	10
AC	-	-
AD	$2\sqrt{3}$	-

பயிற்சி - 8

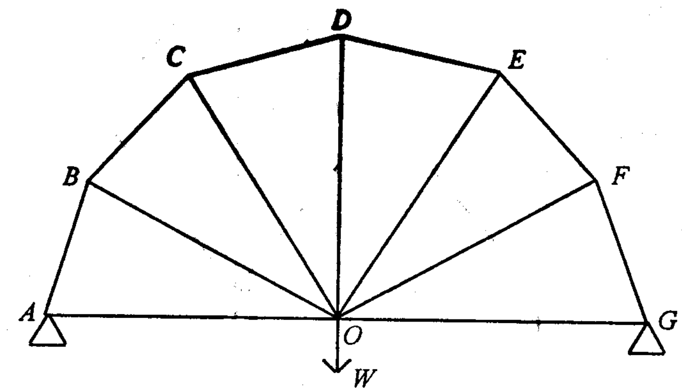
1. A, B, C, D யில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்ட ஐந்து இலேசான கோல்கள் AB, CD, DA, BD இன் நிலைக்குத்தான சட்டப்படலை படம் காட்டுகிறது. C யில் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுமை W பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சட்டப்படல் ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள A, B எனும் புள்ளிகளில் தாக்கும் நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப்படுகிறது. விசைப்படத்தை வரைவதன் மூலம் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. இழுவைகளையும் நெருக்கல்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



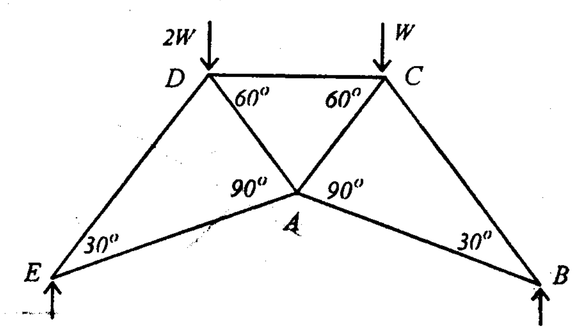
2. நான்கு இலேசான சுயாதீன மூட்டப்பட்ட AD, BD, BC, CD ஆகிய கோல்களாலானதும், நிலைக்குத்துத்தளத்தில் உள்ளதும் நிலைக்குத்தான சுவரில் A இலும் B இலும் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டதுமான சட்டப்படல் ஒன்றை வரிப்படம் காட்டுகிறது. C யில் $2W$ நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களையும் A இலும் B இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் வரைபு மூலம் காண்க.



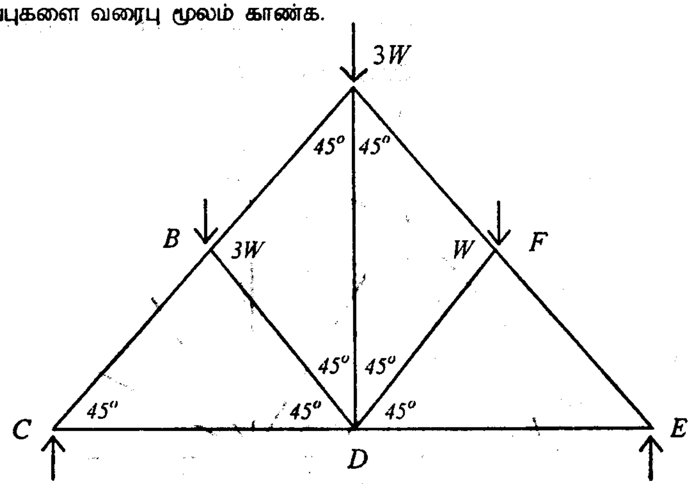
3. AB, BC, CD, DE, EF, FG எனும் சமமான இலேசான ஆறு கோல்களும் மற்றும் $OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG$ எனும் சமமான இலேசான ஏழு கோல்களும் A, O, G ஒரு நேர்கோட்டிலமையும் வண்ணம் அழுத்தமாக மூட்டப்பட்டுள்ளதைப் படம் காட்டுகிறது. படம் O இல் சுமைப்படுத்தப்பட்டு ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A, G எனும் நிலைக்குத்துத் தாங்கிகளில் ஓய்கின்றது. கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காட்டுவதற்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து OB, OC, OD, OE, OF என்பவற்றிலுள்ள தகைப்புக்கள் யாவும் $(2-\sqrt{3})W$ இற்குச் சமமாகும் எனக் காட்டுக. இவை உதைப்புக்களா அல்லது இழுவைகளா?



4. A, B, C, D, E ஆகியவற்றில் ஏழு இலேசான கோல்கள் அழுத்தமாக மூட்டப்பட்ட நிலைக்குத்துச் சட்டப்படலை படம் காட்டுகிறது. இச்சட்டப்படல் முறையே W, $2W$ ஆகிய நிறைகளால் C யிலும் D யிலும் சுமையேற்றப்பட்டு ஒரே கிடை நிலையிலுள்ள E இலும் B இலும் நிலைக்குத்தான விசைகளினால் தாங்கப்படுகிறது. விசைப்படம் வரைவதன் மூலம் இழுவைகளையும், நெருக்கல்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

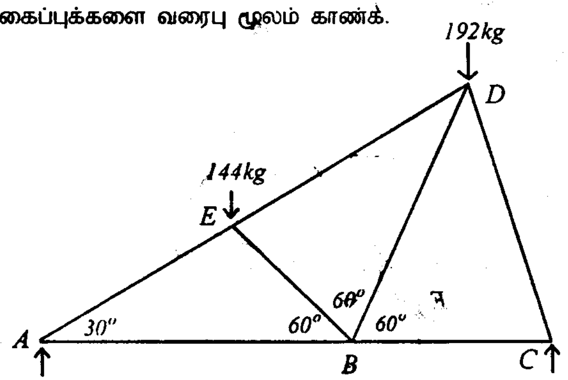


5. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஒன்பது இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப் படலொன்றை உரு காட்டுகிறது. DA நிலைக்குத்தாக உள்ளது. இச்சட்டப்படல் A இல் $3W$, B இல் $3W$, C இல் W ஆகிய நிறைகளால் சுமையேற்றப்பட்டு C இலும் E இலும் ஒப்பமான தாங்கிகள் மீது ஓய்விலிருக்கின்றது. எவை இழுவைகள் என்றும் எவை உதைப்புக்கள் என்றும் குறிப்பிட்டு கோல்களிலுள்ள தகைப்புகளை வரைபு மூலம் காண்க.

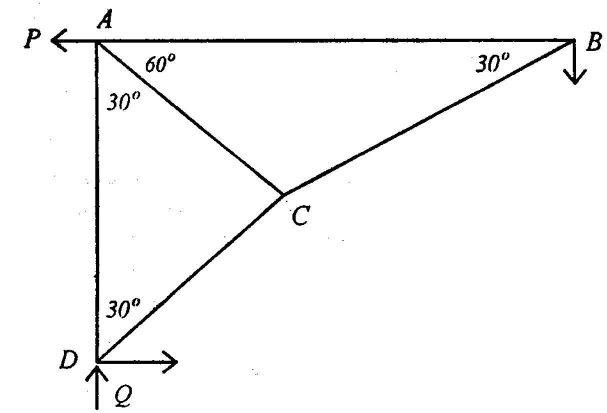


6. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் ஒன்றை உரு காட்டுகிறது. AB உம் BC உம் கிடையாக இருக்க சட்டப்படலானது A யிலும் C யிலும் தாங்கப்படுகிறது. $192Kg$, $144Kg$ கொண்ட சுமைகள் முறையே D, E இல் தாங்கப்படுகின்றன. A, C என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

எவை இழுவை என்றும், எவை உதைப்புக்கள் என்றும் குறிப்பிட்டு கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களை வரைபு மூலம் காண்க்.



7. வரிப்படத்தில் காட்டியவாறு ஐந்து இலேசான கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு சட்டப்படலொன்றை அமைக்கின்றன. $90Kg$ உடைய சுமையொன்று B இலிருந்து தொங்குகின்றது. $P, (P, Q)$ எனும் விசைகளை முறையே A, D என்பவற்றில் பிரயோகித்து சட்டப்படலானது சமநிலையில் நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. (P கிடையாகவும் Q நிலைக்குத்தாகவும் உள்ளன.) P, Q என்பவற்றின் பருமனைக் காண்க. வரிப்படமூலம் ஒவ்வொரு கோலிலுமுள்ள தகைப்பைக் கண்டு அது இழுவையா அல்லது உதைப்பா எனக் குறிக்குக.



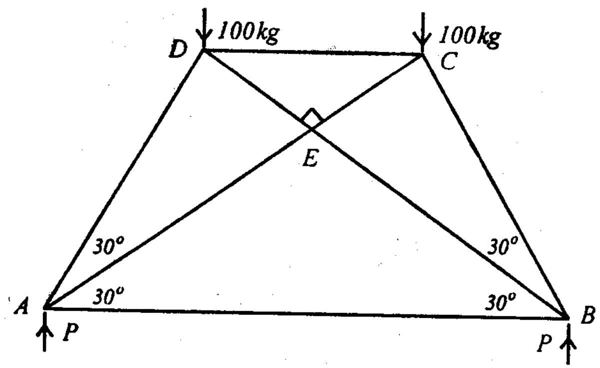
8. A, B, C, D ஆகியவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான எட்டுக்கோல்களாலான சட்டப்படல் ஒன்று படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அது A, B ஆகியவற்றில் இருக்கும் P, P எனும் நிலைக்குத்தான இரு ஆதாரங்களின் மீது தங்கியிருக்கின்றது. அது D, C ஆகியவற்றில் முறையே $100Kg, 100Kg$ எனும் சுமைகளைக் காவுகின்றது. AB கிடையானது $AE = AD = BE = BC$ ஆகும். P இன் பெறுமானத்தை எழுதுக.

கோல் DC இலுள்ள உதைப்பு xkg ஆகுமெனக் கொண்டு சட்டப்படலுக்கான தகைப்புவரிப்படத்தைப் பரும்படியாக வரைக.

கோல் AB யிலுள்ள இழுவை ykg ஆயின் தகைப்பு வரிப்படத்தில் கேத்திர கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி $y = 100 - \left(\sqrt{3} - 1\right)x$ எனக் காட்டுக.

x, y ஆகியவற்றின் செப்பமான பெறுமானங்களை ஏன் ஒரே வேளையிற் காண இயலாது எனக் காட்டுக.

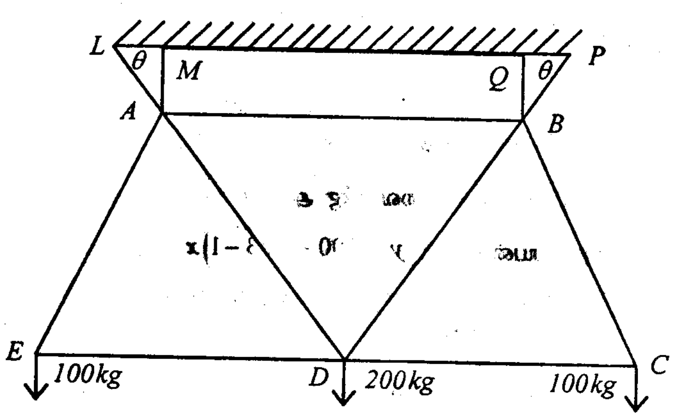
$x = Y$ எனின் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.



9. A, B, C, D, E ஆகியவற்றில் மூட்டப்பட்ட இலேசான ஏழு சமகோல்களாலான ஒரு சட்டப்படல் $ABCDE$ இவ்வுருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது. C, D, E ஆகிய மூட்டுக்களில் முறையே $100Kg$, $200Kg$, $100Kg$ என்னும் சுமைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. முறையே A, B ஆகியவற்றினூடாகச் செல்லும் LAM, PBQ என்னும் இலேசான ஒப்பமான இரு சம இழைகளினால் இச்சட்டப்படலானது AB கிடையாக இருக்க ஒரு பாவுபலகையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க

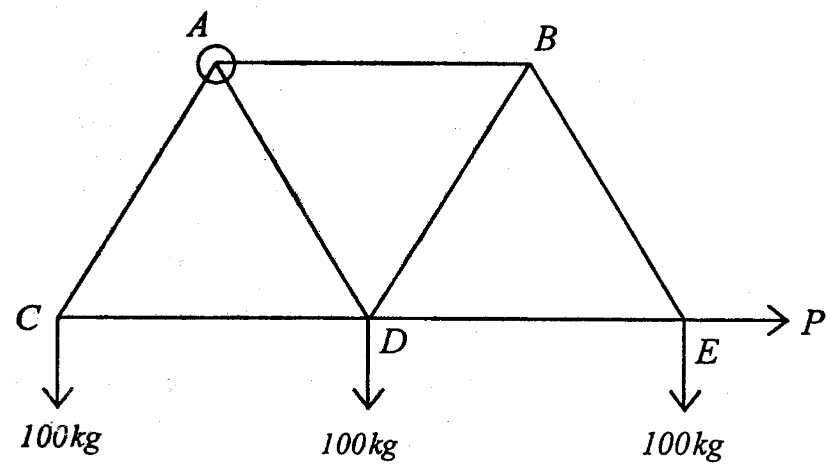
தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றைப் பருமப்படியாக வரைந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களை θ இன் சார்பிற் காண்க.

$\theta < 30^o$ ஆக இருக்குமெனின், கோல் AB யிலுள்ள தகைப்பானது மற்றைய கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காட்டிலும் கூடுதலாக இருக்குமெனக் காட்டுக.



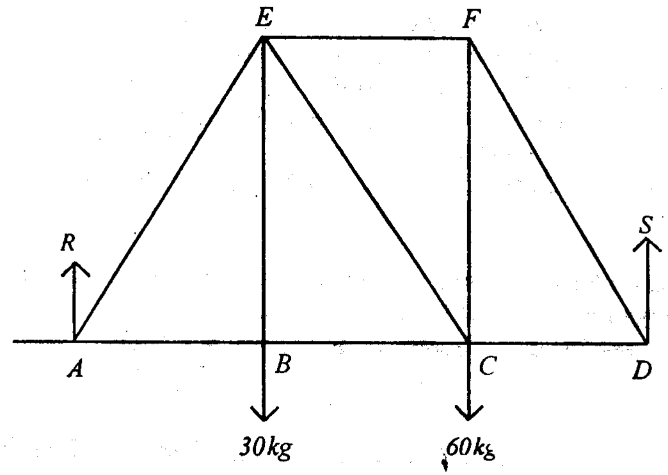
10. A, B, C, D, E ஆகியவற்றிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான ஏழு சமகோல்களாலான சட்டப்படல் ஒன்று உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளது. இச் சட்டப்படலானது C, D, E ஆகியவற்றில் ஒவ்வொன்றும் $100Kg$ நிறையுடைய மூன்று சுமைகளைக் காவுகின்றது. அது நிலைத்த ஒரு புள்ளி A உடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு புள்ளி E யிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற ஒரு கிடைவிசை P யினால் CDE கிடையாக இருக்குமாறு பேணப்படுகிறது. P ஐக் காண்க.

தகைப்பு வரிப்படமொன்றை வரைந்து இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. தகைப்பு வரிப்படத்திலிருந்து A யிலுள்ள மறுதாக்கத்தை உய்த்தறிக.



11. A, B, C, D, E, F ஆகியவற்றிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான ஒன்பது கோல்களைக் கொண்ட சட்டப்படல் ஒன்று உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளது. $ABCD$ கிடையானது $AB = BC = CD = BE = CF$. $ABC = DCF = 90^\circ$ இச்சட்டப்படலானது B, C ஆகியவற்றில் முறையே $30Kg$, $60Kg$ எனும் நிலைக்குத்தான இரு சுமைகளைக் கொண்டுள்ளது. அது A, D ஆகியவற்றில் R, S எனும் நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப்படுகிறது. R, S ஆகியவற்றைத் துணிக.

தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து இதிலிருந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புக் களைக் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

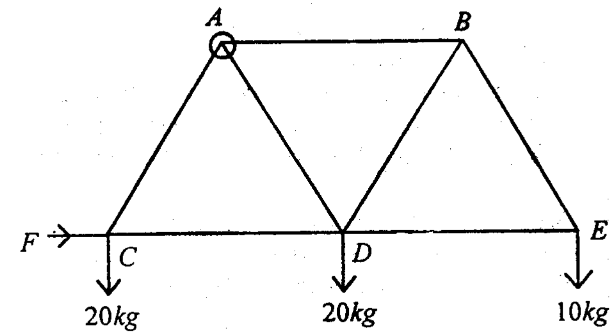


12. சுயாதீனமாக மூட்டிய இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படல் ஒன்று ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி $ABCDE$ இன் வடிவத்திலும் AC, AD என்பவற்றை மூலைவிட்டங்களாகக் கொண்டும் அமைகின்றது. இச்சட்டப்படல் அதன், ஆகவும் கீழே உள்ள கோல் CD கிடையாக இருக்க நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் இருக்கிறது அது C யிலும் D யிலும் தாங்கப்பட்டுள்ளது. B, A, E ஆகியவற்றில் முறையே $W, 2W, W$ நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. C, D ஆகியவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவையெனக் கொண்டு அவற்றைக் கணிக்க.

தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றைப் பரும்படியாக வரைந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களின் செப்பமான பெறுமானங்களைக் கணித்து இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

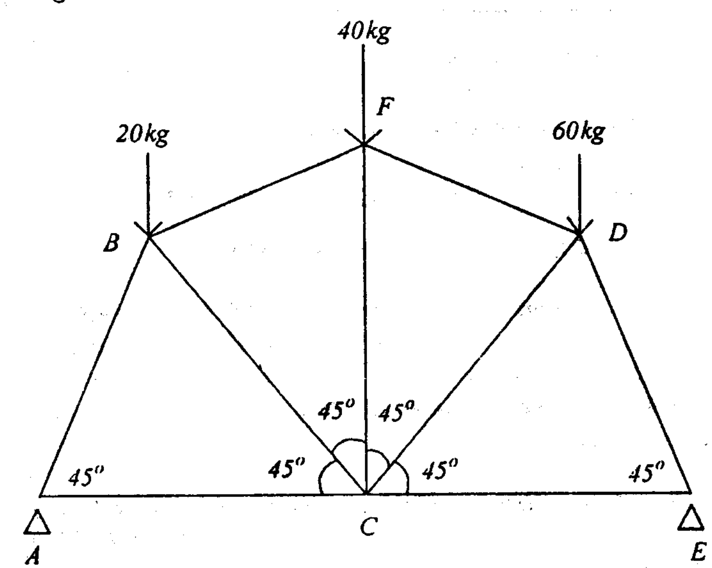
13. A, B, C, D, E ஆகியவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான ஏழு சமகோல்களாலான சட்டப்படல் ஒன்றை இவ்வுரு வகை குறிக்கிறது. C, D, E ஆகியவற்றில் $20Kg, 20Kg, 10Kg$ எனும் மூன்று சுமைகளை இச்சட்டப்படல் காவுகிறது. அது நிலைத்த ஒரு புள்ளி A உடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு புள்ளி C யிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற ஒரு கிடைவிசை F இனால் CDE கிடையாக இருக்குமாறு பேணப்படுகிறது. விசை F ஐயும் A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு, நிலைக்கூறு என்பவற்றையும் காண்க.

தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைந்து இதிலிருந்து இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி எல்லாக் கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.



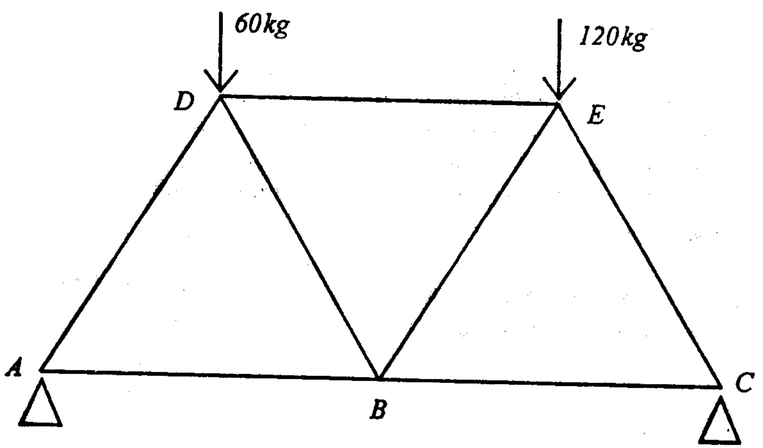
14. இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படலொன்றை இவ்வுரு வகை குறிக்கின்றது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு B, F, D ஆகிய மூட்டுக்களில் சுமைகள் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. AC, CE ஆகியன கிடையானவை. இவை ஒவ்வொன்றும் $10m$ நீளமானவை. $CF = 8m$. அதோடு நீங்கள் $AB = BC = CD = DE$; $BF = FD$ ஆகும். A, E ஆகியவற்றில் உள்ள மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவை யெனக் கொண்டு அவற்றைக் கணிக்க.

மூட்டு A யில் ஆரம்பித்து தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைந்து கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



15. உருவிற் காட்டப்பட்டிருக்கும் சட்டப்படல் இலேசானவையும் சமமானவையும் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டவையுமான $AB, BC, CE, BD, BE, DE, AD$ என்னும் ஏழு கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. அது அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் ABC கிடையாகவும் இருக்க, A யிலும் C யிலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்பட்டு, D, E ஆகியவற்றில் முறையே $60Kg, 120Kg$ என்னும் சுமைகளைக் காவுகின்றது.

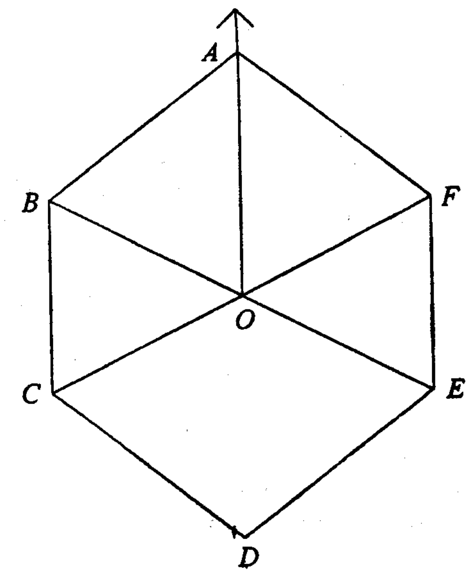
A யிலும் C யிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க. தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைந்து இதிலிருந்து ஒவ்வொரு கோலிலும் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



16. பாரமான சீரான ஒரு கோலின் நிறை W ஆனது அக்கோலின் முனைகளிலே வைக்கப்படும் $\frac{W}{2}, \frac{W}{2}$ என்னும் இரு நிறைகளுக்குச் சமனாகும் (இரு நிறைகளினாற் பிரதியிடப்படலாம்) எனக் காட்டுக.

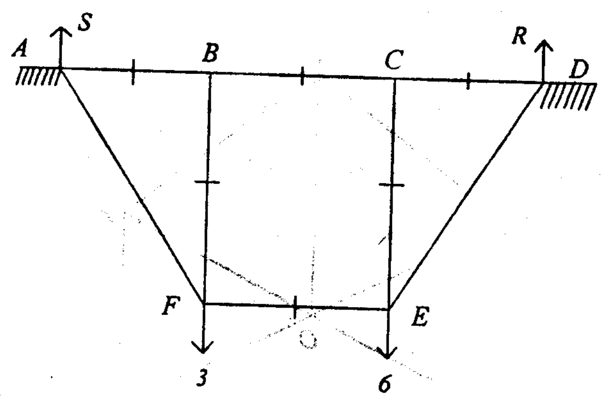
சம அளவிற் பாரமான சீரான கோல்களினால் $ABCDEF$ என்னும் ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்று உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. A, B, C, E, F ஆகிய ஐந்து உச்சிகளும் மையம் O உடன் முறையே OA, OB, OC, OE, OF என்னும் இலேசான கோல்களினால் இணைக்கப்பட்டு அறுகோணியானது A யிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது.

போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தித் தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைந்து, இதிலிருந்து இலேசான கோல்களின் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் கூறுக.



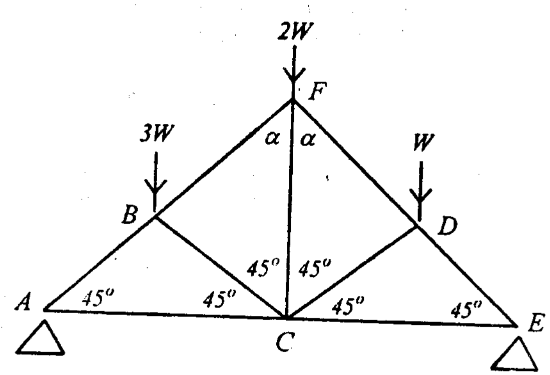
17. A யிலும் D யிலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்பட்டிருக்கும் பாலக்கேடர் *(Bridge Girder)* ஒன்றை இப்படம் வகைக்குறிக்கிறது. இச்சட்டப்படல் ஒன்பது இலேசான சலாகைகளைக் கொண்டுள்ளது. அவற்றுள் AB, BC, CD, BF, CE, FE ஆகிய ஆறும் ஒவ்வொன்றும் $1m$ நீளமானவையும் எஞ்சிய AF, BE, ED ஆகிய மூன்றும் ஒவ்வொன்றும் $\sqrt{2m}$ நீளமானவையும் ஆகும். காட்டப்பட்டவாறு முறையே F, E ஆகியவற்றில் இருந்து 3, 6 ஆகிய மெற்றிக் தொன் சுமைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. ஆதாரம் D யிலுள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்தான ஒரு விசை R எனக் கருதி R ஐக் காண்க. D, C, E, F, B, A எனும் ஒழுங்கிலே போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தித் தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைக.

இதிலிருந்து S இன் பெறுமானத்தையும் எல்லாச் சலாகைகளிலும் உள்ள தகைப்புகளையும் கண்டு இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



18. இவ்வுரு A, B, C, D, E, F ஆகியவற்றிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான ஒன்பது கோல்களினாலான சட்டப்படல் ஒன்றை வகைக்குறிக்கின்றது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு B, F, D ஆகிய மூட்டுகளிற் சுமைகள் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. AC, CE ஆகியன கிடையானவை. அதோடு $AB = BC = CD = DE = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{CE}{\sqrt{2}}$ ஆகும். $BF = FD$. A, E ஆகியவற்றில் உள்ள மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவையெனக் கொண்டு அவற்றைக் காண்க.

$\theta <$ தான் $^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ ஆயிருக்கும் போது போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி மேலேயுள்ள சட்டப்படலுக்குத் தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைக. கோல் CD இல் உள்ள தகைப்பு பூச்சியம் எனில் α வைக் கண்டு இதிலிருந்து எஞ்சிய எட்டுக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைத் துணிந்து இழுவைகளையும் நெருக்கல்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



9. உராய்வு - II

உராய்வு விதிகள், உராய்வுக்கோணம் என்பன பற்றி அலகு 4 இல் தரப்பட்டுள்ளது. எல்லைச் சமநிலையில் செவ்வன் மறுதாக்கத்திற்கும் விளையுள் மறுதாக்கத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் உராய்வுக் கோணம் (λ) ஆகும். $\mu = \tan\lambda$

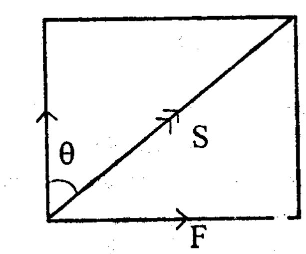
செவ்வன் மறுதாக்கம் R

(F,R) என்பவற்றின் விளையுள் மறுதாக்கம் S

R,S என்பனவற்றிற்கிடையேயான கோணம் θ

எல்லைச் சமநிலையில் $\theta = \lambda$

சமநிலைக்கு ஆகும். $\theta \leq \lambda$



உதாரணம் 1

சீரான நேர்க் கோலொன்று, அதன் ஒரு முனை கரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிலே சாய்ந்திருக்கவும், அதன் கீழ்முனை ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தின் மீது இருக்கவும், ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றது. கிடையுடன் சாய்வு α ஆயிருக்குமிடத்து, உராய்வு இரண்டு முனைகளிலும் எல்லையுறுவதாயிருக்க, இரண்டு தொடுகைகளுக்கும் உராய்வுக்கோணம் ஒரேயளவானதெனின்,

உராய்வுக்கோணம் $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ என நிறுவுக.

AB **யின் சமநிலைக்கு**

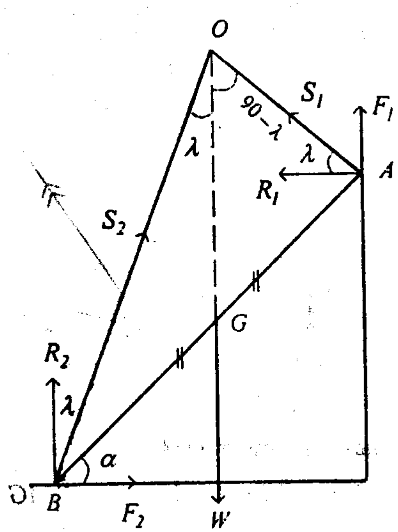
(I) நிறை W

(II) A யில் விளையுள் மறுதாக்கம் S_1

(III) B யில் விளையுள் மறுதாக்கம் S_2

மூன்றுவிசைகளும் ஒருபுள்ளியில் (O வில்) சந்திக்கும்.

எல்லைச்சமநிலையில் இருப்பதால் A, B ஆகிய இரு தொடுகைகளிலும் செவ்வன் மறுதாக்கத்திற்கும் விளையுள் மறுதாக்கத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் λ ஆகும்.



$AG = GB; \angle AOB = 90^\circ \quad \Rightarrow AG = GB = GO$ ஆகும்.

$\Rightarrow \angle GOB = \angle GBO = \lambda$

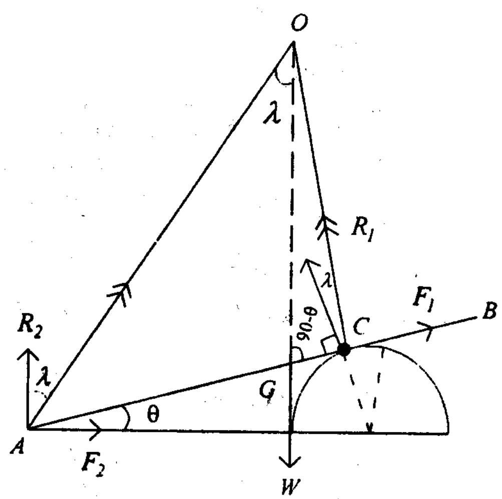
$$2\lambda + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஆரை a ஐ உடைய ஓர் அரைவட்டமானது தன்தளம் நிலைக்குத்தாயும், தன் விட்டம் நிலத்தின் மீது அசையாதிருக்கும்படியும் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. அதே நிலைக்குத்துத்தளத்தில் நீளம் ℓ ஐ உடைய ஒரு சீரான பாரமான கோல், அதன் ஒரு முனை நிலத்தில் கிடக்க அவ்வரைவட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது. அக்கோலுக்கும், நிலம், அரைவட்டம் என்பவற்றிற்கிடையேயான உராய்வுக்கோணம் λ எனின், எல்லைச்சமநிலையில் கிடையுடன் அக்கோலின் சாய்வு θ,

$\ell \sin^2\theta = a \sin 2\lambda$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.



கோல் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது.

$$(AG + GC)\cot(90 - \theta) = AG \cdot \cot\lambda - GC \cdot \cot(\theta - \lambda)$$

$$a\cot\theta \cdot \tan\theta = \frac{\ell}{2}\cot\lambda - \left(a\cot\theta - \frac{\ell}{2}\right)\cot(\theta - \lambda)$$

$$a = \frac{\ell}{2}\cot\lambda - \left(a\cot\theta - \frac{\ell}{2}\right)\cot(\theta - \lambda)$$

$$a\left[1 + \cot\theta \cdot \cot(\theta - \lambda)\right] = \frac{\ell}{2}\left[\cot\lambda + \cot(\theta - \lambda)\right]$$

$$a\left[\frac{\sin\theta \cdot \sin\theta(\theta - \lambda) + \cos\theta \cdot \cos(\theta - \lambda)}{\sin\theta \cdot \sin(\theta - \lambda)}\right] =$$

$$\frac{\ell}{2}\left[\frac{\cos\lambda \cdot \sin(\theta - \lambda) + \cos(\theta - \lambda)\sin\lambda}{\sin\lambda \cdot \sin(\theta - \lambda)}\right]$$

$$\frac{a\cos\lambda}{\sin\theta \cdot \sin(\theta - \lambda)} = \frac{\ell\sin\theta}{2\sin\lambda \cdot \sin(\theta - \lambda)}$$

$$\ell \sin^2\theta = a\sin 2\lambda$$

உதாரணம் 3

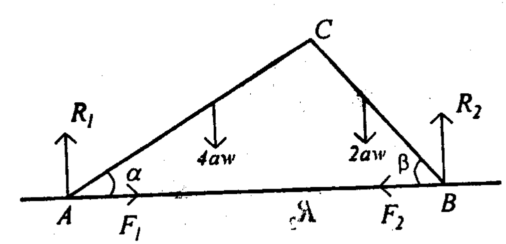
சீரான ஒரே கோலிலிருந்து வெட்டப்பட்ட AC, BC என்னும் நேரான மெல்லிய இரு கோல்கள் C இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது A, B என்னும் முனைகள் இருக்க நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றிலே வைக்கப்பட்டுள்ளன. $AC = 2BC$ எனின் ACB என்னும் கோணமானது படிப்படியாக அதிகரிக்கப்பட வழுக்குதல் முதலில் A யில் ஏற்படும் எனக்காட்டுக.

$BC = 2a, \ AC = 4a,$

ஓரலகு நீளத்தின் நிறை W என்க.

$\angle CAB = \alpha, \ \angle CBA = \beta$ எனின்,

$\beta > \alpha$ ஆகும்.



AC, BC யின் சமநிலைக்கு,

$$F_1 - F_2 = 0$$

$F_1 = F_2 \ (= F$ என்க$)$ ------------ (1)

$\uparrow R_1 + R_2 - 6aw = 0$

$$R_1 + R_2 = 6aw$$

$A \circlearrowleft = 0$

$$R_2\,(4a\cos\alpha + 2a\cos\beta) - 2aw\,(4a\cos\alpha + a\cos\beta) - 4aw \cdot 2a\cos\alpha = 0$$

$$R_2 = \frac{8\cos\alpha + \cos\beta}{2\cos\alpha + \cos\beta}\,aw \quad \text{---------}(2)$$

$B \circlearrowleft = 0$

$$-R_1\,(4a\cos\alpha + 2a\cos\beta) + 2aw \cdot a\cos\beta + 4aw\,(2a\cos\beta + 2a\cos\alpha) = 0$$

$$R_1 = \frac{4\cos\alpha + 5\cos\beta}{2\cos\alpha + \cos\beta}\,aw \quad \text{---------}(3)$$

$$R_2 - R_1 = \frac{4(\cos\alpha - \cos\beta)}{2\cos\alpha + \cos\beta}$$

$$0 < \alpha < \beta < \pi/2 \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta > 0$$

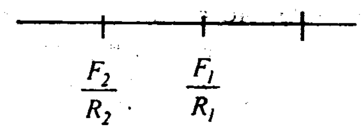
$R_2 - R_1 > 0;\quad R_2 > R_1$

$$\frac{1}{R_2} < \frac{1}{R_1}$$

$F_1 = F_2$; ஆகவே $\dfrac{F_2}{R_2} < \dfrac{F_1}{R_1}$

சமநிலைக்கு $\dfrac{F_1}{R_1} \le \mu,\ \dfrac{F_2}{R_2} \le \mu$

$$\frac{F_2}{R_2} < \frac{F_1}{R_1} \le \mu$$



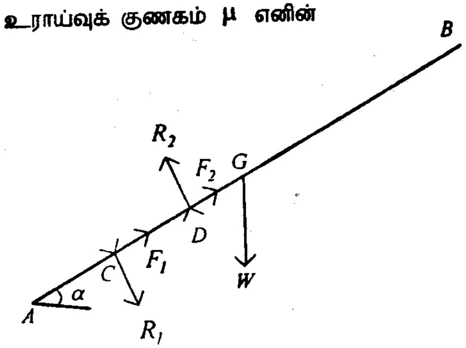
ACB அதிகரிக்க $\dfrac{F_2}{R_2}, \dfrac{F_1}{R_1}$ என்பவற்றில் $\dfrac{F_1}{R_1}$ முதலில் μ ஐ அடையும்.

எனவே வழுக்குதல் முதலில் A யில் நடைபெறும்.

உதாரணம் 4

இரு மெல்லிய சமாந்தரமான கிடையான சலாகைகள் a தூரத்திலிருக்கின்றன. இவற்றைக் கொண்டுள்ள தளம் கிடைக்கு α கோணம் சாய்ந்துள்ளது. ℓ நீளமுள்ள $(\ell > 2a)$ ஒரு மெல்லிய சீரான கோல் இச் சலாகைகள் ஒன்றின் கீழும் மற்றையதன் மேலும் இவை இரண்டிற்கும் செங்குத்தாக தொடுகையோடு ஓய்விலிருக்கின்றது. கோலுக்கும் ஒவ்வொரு சலாகைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனின்

$\mu \ge \dfrac{a\tan\alpha}{\ell - a}$ எனக் காட்டுக.



$CD = a;\quad DG = x$ என்க.

$AC = GB = \dfrac{\ell}{2}$; கோலின் நிறை W

AB யின் சமநிலைக்கு

கோலின் வழியே $\nearrow F_1 + F_2 - W\sin\alpha = 0$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha \quad \text{..........}(1)$$

$$\nwarrow R_2 - R_1 - W\cos\alpha = 0$$

$$R_2 - R_1 = W\cos\alpha \quad \text{..........}(2)$$

$D \circlearrowleft = 0;\ R_1 a - Wx\cdot\cos\alpha = 0$

$$R_1 = \frac{W\cdot x\cdot\cos\alpha}{a} \quad \text{..........}(3)$$

(2) இலிருந்து $R_2 = W\cos\alpha\left(\dfrac{a+x}{a}\right)$ ....(4)

$$F_1 \le \mu R_1,\ F_2 \le \mu R_2$$

$$F_1 + F_2 \le \mu\,(R_1 + R_1)$$

$$W\sin\alpha = F_1 + F_2 \le \mu \cdot W\cos\alpha\left(\frac{a+2x}{a}\right)$$

$$a\tan\alpha \le \mu\,(a + 2x)$$

$$\mu \geq \frac{a \tan\alpha}{a + 2x}$$

$$\ell \geq 2(a + x)$$

$$\ell \geq 2a + 2x \; ; \; \ell - a \geq a + 2x$$ ஆகும்.

$$\frac{1}{a + 2x} \geq \frac{1}{\ell - a}$$ ஆகும்.

$$\mu \geq \frac{a \tan\alpha}{a + 2x} \geq \frac{a \tan\alpha}{\ell - a}$$

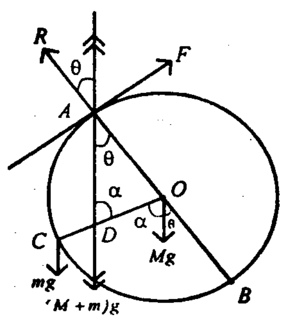
உதாரணம் 5

திணிவு M ஐ உடைய ஒரு வளையம் நிலைக்குத்துத்தளத்தில் ஒரு கரடான முளையில் தொங்குகின்றது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு பூச்சி அவ்வளையத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டு மெதுவாய் மேல்நோக்கி நகருகின்றது. λ வானது அவ்வளையத்திற்கும், முளைக்குமிடையேயான உராய்வுக்கோணமாயும் a ஆனது அவ்வளையத்தின் ஆரையாகவும் இருக்குமிடத்து $\sin\lambda > \dfrac{m}{M + m}$ எனின், அப்பூச்சி அம்முளையை அடைதல் முடியும் என்றும், மற்றும் $\sin\lambda < \dfrac{m}{M + m}$ எனின், அப்பூச்சி $a\left[\lambda + \sin^{-1}\left(\dfrac{M + m}{m}\sin\lambda\right)\right]$ என்னும் ஒரு விற்தூரம் சென்றதும் அவ்வளையம், அம்முளையில் வழுக்கும் என்றும் நிறுவுக.

வளையத்தின் சமநிலைக்கு

F, R இரண்டும் A இல் தாக்குவதால்.
Mg, mg இரண்டினதும் விளையுள் $(M + m)g$ ஆனது A யினூடாக செல்ல வேண்டும்.

$$Mg \cdot OD = mg\, CD$$



$$M \cdot OD = m(a - OD)$$

$$OD = \frac{ma}{M + m}$$

மேலும் (F,R) என்பவற்றின் விளையுள் $(M+m)g$ இற்கு பருமனில் சமமாக நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி இருத்தல் வேண்டும்.

சமநிலைக்கு $\theta \leq \lambda$

$$\sin\theta \leq \sin\lambda$$

$\Delta\, OAD$ இல் $\dfrac{OA}{\sin\alpha} = \dfrac{OD}{\sin\theta}$

$$\sin\theta = \frac{m}{M + m}\sin\alpha \quad \text{------------} (1)$$

$$\sin\theta = \frac{m}{M + m}\sin\alpha \leq \sin\lambda$$

பூச்சி முளையை அடைய θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $\sin\theta \leq \sin\lambda$ ஆதல் வேண்டும். அதாவது $\sin\theta$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $\leq \sin\lambda$ ஆதல் வேண்டும்.

ஆகவே $\dfrac{m}{M + m} \leq \sin\lambda$

$\therefore \sin\lambda \geq \dfrac{m}{M + m}$ ஆதல் வேண்டும்.

$\sin\lambda < \dfrac{m}{M + m}$ என்க.

வளையம் வழுக்கும் போது $\theta = \lambda$

மேலும் (1) இலிருந்து $\sin\alpha = \dfrac{M + m}{m}\sin\lambda$ ஆகும்.

பூச்சி அசைந்ததூரம் $=$ வில் BC

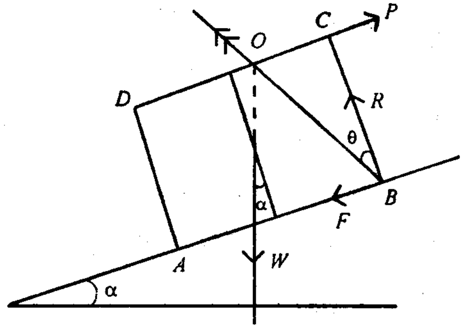
$$= a(\lambda + \alpha)$$

$$= a\left[\lambda + \sin^{-1}\left(\frac{M + m}{m}\sin\lambda\right)\right]$$ ஆகும்.

உதாரணம் 6

ஒரு சதுர அடர் தன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்கவும், அதன் ஒருபக்கம் ஒரு கரடான சாய்தளத்தின் மீது அதிஉயர் சாய்வுக்கோட்டின் வழியே ஓய்வில் கிடக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக்குணகம் μ ஆகும். மேல் மூலைக்கு ஓர் இழை இணைக்கப்பட்டு அத்தளத்தில் மேன்முகமாக அதி உயர் சாய்வுக் கோட்டிற்கு சமாந்தரமான திசையில் இழுக்கப்படுகின்றது.

இழுவை படிப்படியாக கூட்டப்படின் அத்தளத்தின் சாய்வுக்கோணம் $tan^{-1}(1-2\mu)$ என்பதிலும் சிறிதோ, பெரிதோ என்பதற்கேற்ப அச்சதுரம் வழுக்கும் அல்லது கவிழும் (ஒருச்சரியும்) எனக் காட்டுக.



அடர் B பற்றி கவிழும் நிலையில்,

P, W என்பன சந்திக்கும் புள்ளி O விஞாடு F, R என்பவற்றின் விளையுள் மறுதாக்கம் செல்ல வேண்டும்.

$\theta < \lambda$ எனின், முதலில் கவிழும்

$\theta > \lambda$ எனின், முதலில் வழுக்கும்

$\theta < \lambda \Rightarrow tan\theta < tan\lambda$

$$\frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\tan\lambda}{a} < \mu$$

$$\frac{1 - tan\lambda}{2} < \mu$$

$$1 - 2\mu < tan\alpha$$

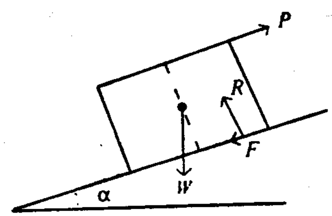
$$tan\alpha > 1 - 2\mu$$

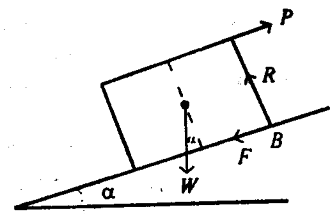
$$\alpha > tan^{-1}(1 - 2\mu)$$

$\alpha > tan^{-1}(1 - 2\mu)$ எனின், அடர் முதலில் கவிழும்.

$\alpha < tan^{-1}(1 - 2\mu)$ எனின், அடர் முதலில் வழுக்கும்.

அல்லது





சாய்தளத்தின் வழியே

சமநிலைக்கு

$$\nearrow \quad P - F - W\sin\alpha = 0$$

$$\nwarrow \quad R - W\cos\alpha = 0$$

$$\frac{F}{R} \leq \mu$$

$$\frac{P - W\sin\alpha}{W\cos\alpha} \leq \mu \quad P \leq W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$P > W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ எனின், வழுக்கும். ---------------- (1)

B பற்றி திருப்பம்.

(ii) $\quad P \cdot a > W\left[\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\tan\alpha\right]\cos\alpha$ எனின், B பற்றி கவிழும்.

$$P > W\cos\alpha\left(\frac{1+\tan\alpha}{2}\right) \text{ ---------------- } (2)$$

(1), (2) **இலிருந்து**

$$W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \gtrless \frac{W\cos\alpha}{2}(1+\tan\alpha)$$ என்பதற்கேற்ப

முதலில் **கவிழுதல்** அல்லது வழுக்குதல் நடைபெறும்.

அதாவது $\dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha} \gtrless \dfrac{1+\tan\alpha}{2}$ என்பதற்கேற்ப

$2(\tan\alpha + \mu) \gtrless 1 + \tan\alpha$ என்பதற்கேற்ப

$\tan\alpha \gtrless 1 - 2\mu$ என்பதற்கேற்ப

முதலில் கவிழுதல் அல்லது வழுக்கு தல் நடைபெறும்.

உதாரணம் 7

(i) ஒரு சீர்த்திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு கரடான சாய்தளம் ஒன்றிற் பொருந்துமாறு தங்கியிருக்கிறது. கிடையுடன் தளத்தின் இயன்றளவு மிகக்கூடிய சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ எனக்காட்டுக.

(ii) ஒரு சீர்த் திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு கிடையுடன் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$ இற் சாய்ந்திருக்கின்ற கரடான தளமொன்றிற் பொருந்துமாறு சமநிலையிலிருப்பின் கிடையுடன் அரைக்கோளத்தின் தட்டையான அடியின் சாய்வைக் காண்க.

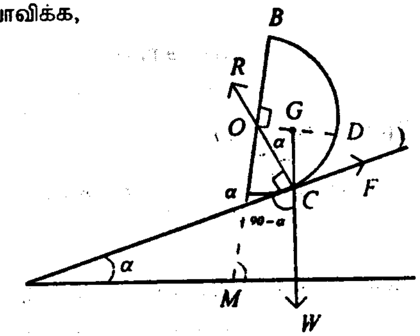
(iii) சீரான திண்ம அரைக் கோளம் ஒன்று அதன் வளைபரப்பு கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றையும், ஒப்பமான நிலைக்குத்துச்சுவர் ஒன்றையும் தொட்டுக் கொண்டிருக்க ஓய்விலிருக்கின்றது. அரைக் கோளத்துக்கும், நிலத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக்குணகம் μ_1 ஆனது $\mu_1 > \frac{3}{8}$ என இருப்பின் அரைக்கோளம் எவ்வமைவிலும் ஓய்வில் இருக்கலாம் எனக் காட்டுக.

$\mu_1 < \frac{3}{8}$ எனின் நிலைக்குத்துடன் அரைக்கோளத்தின் அடி ஆக்கத்தக்க மிகச் சிறிய கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{8\mu_1}{3}\right)$ எனக் காட்டுக.

சுவரும் கரடாக இருக்குமெனின் மிகச் சிறிய **இக்கோணமானது** $\cos^{-1} 8\mu_1\left(\dfrac{1+\mu_2}{1+\mu_1\mu_2}\right)$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

இங்கு μ_2 என்பது சுவருக்கும், அரைக்கோளத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் கோணம் ஆகும்.

(i) $\Delta\, OCG$ இற்கு சைன் விதியைப் பாவிக்க,



$$\frac{OG}{\sin O\hat{C}G} = \frac{OG}{\sin O\hat{C}G}$$

$$\frac{3a}{8\sin\alpha} = \frac{a}{\sin OGC} =$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{8}\sin OGC \le \frac{3}{8}$$

[அரைக்கோளத்தின் சமநிலைக்கு F, R, W என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. (மூன்றும் C இனூடாக செல்லும்) F, R என்பவற்றின் விளையுள் CG வழியே இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே சமநிலைக்கு $\alpha \le \lambda$]

எல்லைச் சமநிலையில் $\sin\lambda = \sin\alpha \le \dfrac{3}{8}$

$$\alpha \le \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$$

அதிகூடிய சாய்வு (கிடையடன்) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$ ஆகும்.

(ii) தள அடி AB யானது கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $(\theta + \alpha)$ ஆகும்.

$\Delta\, OCG$ இல்

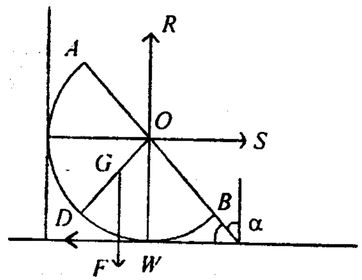
$$\frac{OG}{\sin OCG} = \frac{OC}{\sin OGC}$$

[illegible] $\dfrac{OG}{\sin\alpha} = \dfrac{OC}{\sin(\theta+\alpha)}$ [illegible]

$$\sin(\theta+\alpha) = \frac{OC}{OG}\sin\alpha$$

$$= \frac{8}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$$

கிடையுடன் அடியின் சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ஆகும்.



(iii) $OG = \frac{3}{8}a$

தட்டையான அடி AB நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் α என்க.

அரைக்கோளத்தின் சமநிலைக்கு,

$$\rightarrow F - S = 0 \quad \text{------------}(1)$$

$$\uparrow R - W = 0 \quad \text{------------}(2)$$

$$O = 0$$

$$W \cdot \frac{3}{8} a\cos\alpha - F \cdot a = 0 \quad \text{------------}(3)$$

(3) $\Rightarrow F = \frac{3}{8} W\cos\alpha$

(2) $\Rightarrow R = W$

$$\frac{F}{R} \le \mu_1$$

$$\frac{3\cos\alpha}{8} \le \mu_1 \quad \text{------------}(4)$$

α இன் எல்லாப்பெறுமானங்களுக்கும், $\frac{3\cos\alpha}{8} \le \frac{3}{8}$

$\frac{F}{R}$ இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{3}{8}$.

எனவே $\mu_1 > \frac{3}{8}$ எனின், அரைக்கோளம் எவ்வமைவிலும் ஓய்வில் இருக்கலாம்

$\mu_1 < \frac{3}{8}$ எனின் (4) இலிருந்து $\quad \cos\alpha \le \frac{8\mu_1}{3}$

$$\alpha \ge \cos^{-1}\left(\frac{8\mu_1}{3}\right)$$

அரைகோளத்தின் அடி நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும்

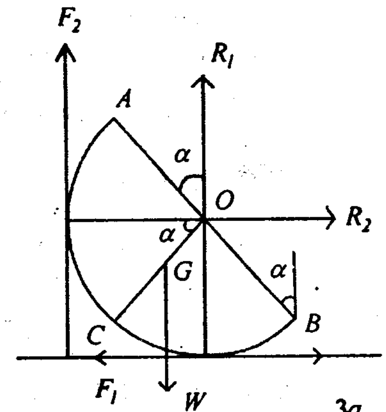
மிகச் சிறிய கோணம். $\cos^{-1}\left(\frac{8\mu_1}{3}\right)$

சமநிலைக்கு

$$\rightarrow F_1 - R_2 = 0 \quad \text{------------}(1)$$

$$\uparrow F_2 + R_1 - W = 0 \quad \text{------------}(2)$$

$$O) = F_1 \cdot a - F_2 \cdot a + \frac{3W}{8} a\cos\alpha = 0 \text{------}(3)$$



$OG = \frac{3a}{8}$

எல்லைச் சமநிலையில்

$F_1 = \mu_1 R_1, \quad F_2 = \mu_1 R_2$

(1) $\Rightarrow \mu_1 R_1 - R_2 = 0$

(2) $\mu_2 R_2 + R_1 = W$

$$R_1 \frac{W}{1+\mu_1\mu_2}, \quad R_2 = \frac{\mu_1 W}{1+\mu_1\mu_2}$$

$$F_1 + F_2 = \frac{3W}{8}\cos\alpha$$

$$\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 = \frac{3w}{8}\cos\alpha$$

$$\frac{\mu_1(1+\mu_2)}{1+\mu_1\mu_2} W = \frac{3W}{8}\cos\alpha$$

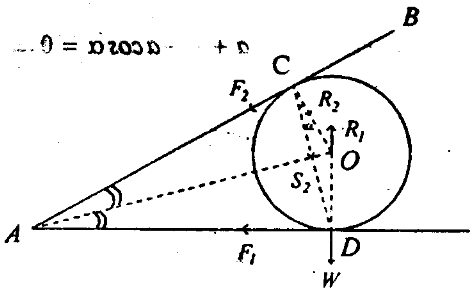
$$\cos\alpha = \frac{8\mu_1(1+\mu_2)}{3(1+\mu_1\mu_2)}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{8\mu_1(1+\mu_2)}{3(1+\mu_1\mu_2)}\right]$$

உதாரணம் 8

ஒரு சீரான உருளை தன் அச்சு கிடையாயிருக்க ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது இருக்கின்றது. ஒரு பலகை அவ்வுருளைக்குக் குறுக்கே ஒரு முனை அத்தளத்தின் மீது கிடக்கும்படி இருக்கிறது. அப்பலகை அவ்வுருளையின் மீது மட்டுமட்டாய் வழுக்கும் நிலையில் இருக்கும்போது அவற்றிற்கிடையேயான உராய்வுக் கோணமானது, கிடையுடன் அப்பலகையின் சாய்வின் அரைப்பங்கு எனக் காட்டுக.

உருளையின் சமநிலையைக் கருதுக.



(i) உருளையின் நிறை W, O இல் D யினூடாக செல்லும்

(ii) D யில் உராய்வு விசை F_1 செவ்வன் மறுதாக்கம் R_1 என்பவற்றின் விளையுள் S_1

(iii) C யில் பலகையால் உருளையின் மீதான உராய்வுவிசை F_2 செவ்வன் மறு தாக்கம் R_2 என்பவற்றின் விளையுள் S_2 என்பன தாக்குகின்றன.

முதலிருவிசைகளும் D யினூடு செல்வதால், மூன்றாம் விசையும் D யினூடு செல்ல வேண்டும்.

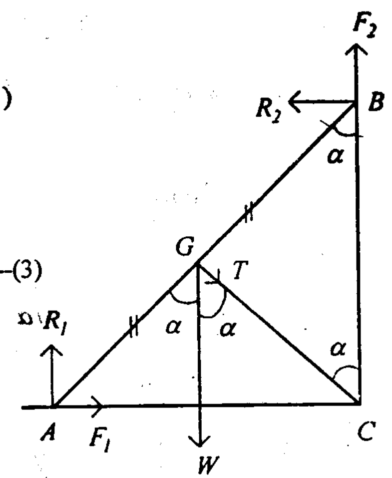
பலகை எல்லைச்சமநிலையில் இருப்பதால் R_2, S_2 என்பவற்றிற்கிடையேயான கோணம் $\alpha =$ உராய்வுக் கோணம் ஆகும்.

$\lambda = \alpha = \frac{1}{2} B\hat{A}D$ ஆகும்.

உதாரணம் 9

நிறை W வை உடைய சீர் ஏணி ஒன்று நிலைக்குத்துடன் கோணம் α வை ஆக்கிக்கொண்டு முனை B நிலைக்குத்து கரட்டுச் சுவருக்கு எதிரேயும் முனை A யானது கிடையான கரட்டுத் தளத்தின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. A யினூடான சுவருக்குச் செங்குத்தான கோடு சுவரை C யில் சந்திக்கிறது. ABC ஆனது நிலைக்குத்துத் தளமாகும். ஒவ்வொரு தொடுகைப் புள்ளியிலும் உராய்வுக்குணகம் $\mu\left(<\tan\frac{\alpha}{2}\right)$ ஆகும். ஏணியின் நடுப்புள்ளியானது இறுக்கமான இழை ஒன்றினால் புள்ளி C உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணி கீழ் நோக்கி நழுவும் எல்லை நாப்பத்தில் இருக்குமெனின் இழையில் உள்ள இழுவை $T = \frac{W}{2\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right]$ என நிறுவுக. உராய்வுக்கோணம் λ எனின் $T = \frac{W\sin(\alpha-2\lambda)}{\sin 2\mu}$ என்பதை உய்த்தறிந்து. $\mu < \tan\frac{\alpha}{2}$ விற்கான மேற்குறித்த தேவையை மெய்ப்பிக்க.

ஏணியின் சமநிலைக்கு



$\uparrow F_2 + R_1 - W - T\cos\alpha = 0$ ---------- (1)

$\rightarrow F_1 + R_2 + T\sin\alpha = 0$ ---------- (2)

$\overset{\curvearrowleft}{C} = 0;$

$R_2 \cdot 2a\cos\alpha - R_1 \cdot 2a\sin\alpha + Wa\sin\alpha = 0$ ---- (3)

$\overset{\curvearrowleft}{G} = 0;\ F_2 \cdot a\sin\alpha + R_2 \cdot a\cos\alpha +$

$F_1 \cdot a\cos\alpha - R_1 \cdot a\sin\alpha = 0$ ------ (4)

எல்லைச் சமநிலையில் இருப்பதால்.

$F_1 = \mu R_1, \quad F_2 = \mu R_2$ ---------- (5)

(3) $\Rightarrow 2R_1\sin\alpha - 2R_2\cos\alpha = W\cdot\sin\alpha$ ---------- (6)

(4),(5) $\Rightarrow R_1(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) + R_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 0$ ——— (7)

7) $\Rightarrow \dfrac{R_2}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \dfrac{R_1}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$

(6) ஐப்பாவிக்க,

$$= \frac{2R_1\sin\alpha - 2R_2\cos\alpha}{(2\sin\alpha\cos\alpha + 2\mu\sin^2\alpha) - (2\sin\alpha\cos\alpha - 2\mu\cos^2\alpha)}$$

$$= \frac{W\sin\alpha}{2\mu}$$

$$R_2 = \frac{W\sin\alpha\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2\mu}$$

$$R_1 = \frac{W\sin\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{2\mu}$$

(2) இலிருந்து $T\sin\alpha = R_2 - F_1$

$$T = \frac{W\sin\alpha\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2\mu} - \frac{\mu W\sin\alpha\,(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{2\mu}$$

$$= \frac{W[(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)] - \mu\cos\alpha - \mu^2\sin\alpha}{2\mu}$$

$$= \frac{W}{2\mu}\left[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right]$$

$$= W\left[\frac{1-\mu^2}{2\mu}\sin\alpha - \cos\alpha\right]$$

$$= W\left[\frac{1}{\tan 2\lambda}\sin\alpha - \cos\alpha\right]$$

$$= W\left[\frac{\cos 2\lambda}{\sin 2\lambda}\sin\alpha - \cos\alpha\right]$$

$$= W\left[\frac{\sin\alpha\cos 2\lambda - \cos\alpha\sin 2\lambda}{\sin 2\lambda}\right] = \frac{W\sin(\alpha - 2\lambda)}{\sin 2\lambda}$$

$$\mu < \tan\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 2\lambda < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow (\alpha - 2\lambda) > 0$$

அல்லது இழை தொய்யும். $\Rightarrow \sin(\alpha - 2\lambda) > 0$

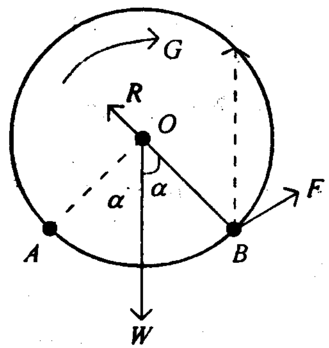
உதாரணம் 10

a ஆரையும் W நிறையும் உடைய சீரான ஒருவட்டஉருளைக் குற்றியானது ஒன்றுக்கொன்று $2a\sin\alpha$ என்னும் தூரத்தில் ஒரேமட்டத்தில் உள்ள இரண்டு கரடான சமாந்தரமான கிடைச் சலாகைகளுக்கிடையில் தன்னச்சு கிடையாய் இருக்குமாறு கிடக்கிறது. அச்சலாகைகளுக்கும் அச்சுக்கும் செங்குத்தான ஒரு தளத்தில் அக்குற்றிக்குப் படிப்படியாகக் கூடுதலுறும் ஓர் இணை பிரயோகிக்கப்படின்

(i) உராய்வுக்கோணம் λ வானது α இலும் பெரிதாக இருப்பின் அவ்விணை $Wa\sin\alpha$ என்னும் பருமனையுடையதாயிருக்குமிடத்து அக்குற்றி அச்சலாகைகளுள் ஒன்றுக்கு மேலாகப் புரளும் எனக் காட்டுக.

(ii) ஆனால் α ஆனது λ விலும் பெரிதாக இருப்பின் அவ்விணை $Wa\sin\lambda\cos\lambda\sec\alpha$ எனின் அக்குற்றி சலாகைகளில் வழுக்கும் எனக் காட்டுக.

$AB = 2a\sin\alpha$ என்பதால் $\angle AOB = 2\alpha$. இங்கு O மையமாகும். இணை G பிரயோகிக்கப்படுகின்றது என்க.

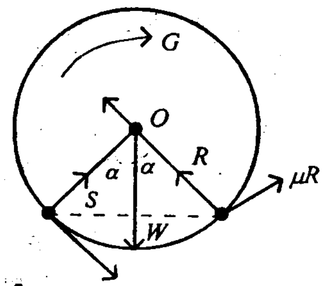


(i) B பற்றி உருளை புரளும் நிலையில்
தாக்கும் விசைகள்
B இல் உராய்வு விசை F,
B இல் செவ்வன் மறுதாக்கம் R, உருளையின் நிறை WC இல்,
மற்றும் இணை G உம் தொழிற்படுகிறது.
F இனதும் R இனதும் விளையுள் நிலைக்குத்தாக W ஆக இருத்தல் வேண்டும்.
R இற்கும் விளையுள் W இற்கு மிடையேயுள்ள கோணம் α ஆகும்
இங்கு $\lambda > \alpha$ எனின் உருளை B பற்றி புரளும்.

B $W \cdot a \sin\alpha - G = 0$

$$G = W \cdot a \sin\alpha$$

(ii) $\lambda < \alpha$ எனின்



அக்குற்றி சலாகைகளில் வழுக்கும் நிலையில்.

O↻ $\mu R \cdot a + \mu s \cdot a = G$

$$\mu a(R + s) = G \text{ ——— } (1)$$

$$\mu S\cos\alpha + S \cdot \sin\alpha + \mu R\cos\alpha - R\sin\alpha = 0$$

$$\mu(R + S)\cos\alpha = (R - S)\sin\alpha \text{ ——— } (2)$$

$$S\cos\alpha - \mu S \cdot \sin\alpha + R\cos\alpha + \mu R\sin\alpha - W = 0$$

$$\mu(R - S)\sin\alpha + (R + S)\cos\alpha = W \text{ ——— } (3)$$

(2) இலிருந்து $(R - S) = \mu \dfrac{(R + S)\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(3) இல் பிரதியிட $\mu^2(R + S)\cos\alpha + (R + S)\cos\alpha = W$

$$(1 + \mu^2)(R + S)\cos\alpha = W$$

(i) இல் $R + S = \dfrac{W}{(1 + \mu^2)\cos\alpha}$ எனப் பிரதியிட

$$G = \mu a \frac{W}{(1 + \mu^2)\cos\alpha}$$

$$= \frac{W \cdot a}{\cos\alpha} \times \frac{\mu}{1 + \mu^2}$$

$$= \frac{Wa \cdot 2\mu}{2\cos\alpha(1 + \mu^2)}$$

$$= \frac{Wa \cdot \sin 2\lambda}{2\cos\alpha} = Wa\sec\alpha \cos\lambda \sin\lambda$$

$\therefore$ இணையின் பருமன் $Wa\sec\alpha \cos\lambda \sin\lambda$ எனின் உருளை சலாகைகளில் வழுக்கும்.

பயிற்சி - 9

1. கிடை நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரில் சாய்ந்திருக்கிறது. நிலத்தினதும், சுவரினதும் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே $\frac{3}{5}$ உம் $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும். ஏணி நழுவுந் தறுவாயில் நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வைக் காண்க.

2. கரடான கிடை நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்டுள்ள ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கிறது. நிலத்தின் உராய்வுக் குணகம் $\frac{5}{8}$ ஆகும். ஏணியின் சாய்வு 45° ஆயின் ஏணியின் நிறைக்குச் சமமான நிறையுடைய மனிதன் ஒருவன் ஏணியின் நீளத்தின் முக்காற் பங்கு மட்டும் ஏறலாம் எனக் காட்டுக.

3. நிலத்திலிருந்து உயரம் h இல் ஒரு குடைதாங்கியின் கரடான வளையத்தின் உட்புறத்தில் l நீளமான ஒரு சீர்க்கோல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அது ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றின் மீதும் தங்கியுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}$ இலும் குறைவாயின் கோல் நிலைக்குத்தாக இருந்தாலொழிய சமநிலை சாத்தியமாகாதெனக் காட்டுக.

4. ஒரு சீர்க்கோல் கிடையாகவும், அதனுடன் 120° இற் சாய்ந்துமிருக்கும் இரு தளங்களிற் சமமாகச் சாய்ந்து எல்லைச் சமநிலையில் தங்கியிருக்கிறது. கோலிற்கும், தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் கோணம் 30° எனின் கோலிற்கும் கிடைத்தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{\sqrt{3}}{5}$ எனக்காட்டுக.

5. l நீள சீர்க்கோலொன்று h உயரத்திலிருக்கும் ஓர் ஒப்பமான கிடைச்சட்டத்தின் மீது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சாய்ந்து (அதற்கு மேலாக) இருக்கிறது. கோலின் கீழ் முனை கரடான கிடைத்தளத்தில் தங்கியுள்ளது. கிடையுடன் அக்கோலின் சாய்வு θ ஆக இருக்கும் போது அது நழுவும் தறுவாயிலிருப்பின் கோலிற்கும், நிலத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{l \sin 2\theta \sin\theta}{4h - l \sin 2\theta \cos\theta}$ எனக் காட்டுக.

6. $2a$ நீளமுள்ள சீரான ஏணி ஒன்று அதன் ஒருமுனை ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தின் மீது புள்ளி O இலே தங்கியிருக்கிறது. அவ்வேணி அதன் மேன்முனையில் கட்டப்பட்டதும் O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $2a$ தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு கப்பியின் மேலாகச் செல்வதுமான ஒரு கயிற்றினால் நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இற் சாயுமாறு தாங்கப்பட்டுள்ளது. ஏணிக்கும், தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\tan\frac{\alpha}{2}$ இலும் அதிகமாக இருப்பின் மட்டுமே சமநிலை சாத்தியமாகுமென நிறுவுக.

7. ஒரு சீர்க்கோல் AB, ஒரு கரடான சாய்தளத்தில் முனை A பொருந்தப்பெற்றுத் தங்கியிருக்கிறது. இத்தளம் கிடையுடன் 30° ஐ ஆக்குகின்றது. அக்கோல் தளத்தின் மேன்முகத் திசையுடன் கோணம் 30° ஆக்கியும் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் அமைந்திருக்கிறது. அது முனை B உடன் இணைத்த ஓர் இழையினாற் சமநிலையில் பேணப்பட்டும், தளத்திற்கு சமாந்தரமாக இழுக்கப்பட்டுமுள்ளது. A இலுள்ள உராய்வுக்கோணம் ஆகக் குறைந்தது $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ஆக இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக.

8. a நீளமுள்ள சீர்க்கோலொன்று a ஆரையுள்ள நிலைத்த கரடான கோளப் பரப்பொன்றிற்குள் தன் ஒரு முனை அப்பரப்பின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலே கிடக்க எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கிறது. உராய்வுக் குணகம் $\left(\sqrt{15} - \sqrt{12}\right)$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

9. W நிறையும் நீளத்தையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB அதன் முனைகள் A, B முறையே m, n எனும் நிலைக்குத்துச் சுவர்களைத் தொட சுவர்களுக்கிடையில் ஓய்வில் உள்ளது. சுவர்களுக்கிடைத் தூரம் $2d$ $(<2a)$ கோலுக்கூடாகச் செல்லும் நிலைத்தளம் சுவர்களுக்குச் செங்குத்தாகவுள்ளது. A, B க்குக் கீழே உள்ளது.

சுவர் m கரடானதும் சுவர் n அழுத்தமானதும் ஆயின் $\mu > \frac{2\sqrt{a^2 - d^2}}{d}$ என நிறுவுக. இங்கு μ - சுவர் m இற்கும் கோலுக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் சுவர் m அழுத்தமானதும் சுவர் n கரடானதுமாயின் என்ன சம்பவிக்கும்?

10. ஒரு மரக்குற்றி a ஆரையும் l நீளமும் உடைய ஒரே சீரான நேர்வட்ட உருளையின் வடிவமுடையது. அம்மரக்குற்றியின் வட்டவடிவமான விளிம்புகளில் ஒன்று கரடான ஒரு கிடைத்தரையில் ஓய்விலிருக்கிறது. மற்றையது கரடான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிறது. அம்மரக் குற்றியின் அச்சுசுவருக்குச் செங்குத்தாகவுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருக்கிறது. இரு தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின் இம்மரக்குற்றி சறுக்கும் தறுவாயில் அதுகிடையுடன் அமைக்கும் சாய்வினைத் துணிக. (இது தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வு எல்லை உராய்வு எனக் கொள்க)

11. ஒவ்வொன்றும் நீளமுள்ள ஆனால் $W_1, W_2, (W_2 < W_1)$ எனும் நிறைகொண்ட AB, BC என்னும் சீரான இரண்டு கோல்கள் B யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுப் படி ஏணியொன்றை உருவாக்குகின்றன. A யும் C யும் ஒரு கரடான கிடைத்தரையில் இருக்கக் கோல்கள் இரண்டும் ஒரு நிலைக்குத்தான தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. A யிலும் C யிலும் உள்ள உராய்வுக்குணகம் μ ஆகும். W என்னும் நிறையுடைய ஒரு மனிதன் A இலிருந்து தொடங்கி ஏணியில் ஏறுகிறான். அவன் குறிப்பிட்ட தூரம் ஏறியவுடன் வழுக்குதல் ஏற்படுகிறதாயின் அது C யில் முதலில் ஏற்படுமெனக் காட்டுக. $\angle ABC = 2\theta$ எனின், நழுவல் ஏற்படு முன்னர் மனிதன் ஏணி வழியே ஏறிய தூரத்தைக் காண்க.

12. ஒரே நீளமுள்ள AB, AC என்னும் இரண்டு சீரான வளைகள் A யில் ஒப்பமாக ஒருங்கே பிணைக்கப்பட்டு, ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தின் மீது முனைகள் B, C என்பன கிடக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒன்றின் நிறை மற்றையதன் நிறையின் இரு மடங்கெனின், சமநிலைக்கு உராய்வுக்குணகத்தின் மிகச் சிறிய பெறுமானம் $\frac{3}{5}\tan\frac{1}{2}\angle BAC$ எனக் காட்டுக.

உராய்வுக் குணகத்திற்கு இப் பெறுமானம் இருந்தால் எம் முனையில் உராய்வு எல்லையுறுவதாகும்.

13. சமமான நீளமும் முறையே $2W, W$ நிறைகளுமுடைய இரு ஒரு சீரான கோல்கள் AB, AC என்பன A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. B யும் C யும் கரடான கிடைத்தளத்திலிருக்கக் கோல்கள் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்விலிருக்கின்றன. ஒவ்வொரு தொடுகைப் புள்ளியிலும் உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். எல்லைச் சமநிலையில் வழுக்குதல் B இலா C இலா நிகழும் எனத் தீர்மானிக்க.

இந்நிலையில் A இலுள்ள எதிர்த்தாக்கத்தைக் கண்டு $\angle ABC = tan^{-1}\left(\frac{3}{5\mu}\right)$ எனவும் காட்டுக.

14. ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை $ABCD$ ஆனது B இல் W நிறையையும் C இல் $60Kg$ நிறையையும் தாங்க, முனைகள் A, D என்பன முறையே $10Kg$, $5Kg$ நிறையுடைய வளையங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டு நிலையான கரடான கிடைக்கம்பியில் வழுக்கக்கூடியதாக உள்ளன. AB கிடையுடன் $60°$ இலும் BC கிடையுடன் $30°$ இலும் CD கிடையுடன் $60°$ இலும் இருக்கத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கிறது. C என்பது B இற்குக் கீழே உள்ளது. W இன் பெறுமானத்தையும் இழையின் வெவ்வேறு பகுதிகளின் இழுவையையும் காண்க. உராய்வுக் குணகம் μ இரண்டு வளையங்களுக்கும் சமமாயின் இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{3\sqrt{3}}{10}$ எனக் காட்டுக.

15. பாரமான சீரான கம்பி AB யின் முனை A இற்கு இலேசானவளையம் ஒன்று இணைக்கப்பட்டு வளையம் கரடான நிலைத்த கிடைக்கோல் ஒன்றின்மேல் வழுக்கிச் செல்லக்கூடியதாக உள்ளது. கம்பியின் மறுமுனை B மெல்லிய நீளா இழையால் இணைக்கப்பட்டு கோலிலுள்ள நிலையான புள்ளி C இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. $\angle ABC = 90°$ ஆகவும் கம்பி நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தை ஆக்கும் போது அது எல்லைச் சமநிலையிலிருந்தால் வளையத்திற்கும், கோலிற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ, $\mu\left(1 + cos^2\alpha\right) = sin\alpha\ cos\alpha$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

16. இரு சீக்கோல்கள் AB, BC என்பன சமநீளமும் W_1, W_2 நிறைகளும் உடையன. இவை B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு A, C ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தில் தங்க AB, BC ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்விலுள்ளன. $ABC = 2\theta\ (W_1 > W_2)$

A யிலும் C யிலும் உள்ள உராய்வுக் குணகங்கள் μ இற்கு சமமெனின் θ அதிகரிக்கப்பட வழுக்குதல் முதலில் C இல் ஏற்படுமெனக் காட்டி $\mu = \frac{(W_1 + W_2)\tan\alpha}{W_1 + 3W_2}$ என நிறுவுக. இங்கு α முதலில் வழுக்குதல் நடைபெறும் போதுமுள்ள θ இன் பெறுமானம் ஆகும்.

17. இரண்டு சமமான சீரான ஏணிகள் ஒரு முனையில் மூட்டப்பட்டு, மற்றைய முனைகள் ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தின் மீது தங்கும்படி நிற்கின்றன. அவ்வேணிகளுள் ஒன்றின் நிைக்கு சமமான நிறையுடைய ஒரு மனிதன் அவ்வேணிகளுள் ஒன்றில் ஏறுகிறான். அப்போது மற்றைய ஏணி முதலில் வழுக்குமென நிறுவுக.

அவன் ஒரு தூரம் x ஏறியதும் அது வழுக்கியதெனின் a ஒவ்வோர் ஏணியின் நீளமாயும், α நிலைக்குத்துடன் ஒவ்வொன்றினதும் சாய்வு ஆயுமிருக்க உராய்வுக் குணகம் $\frac{(a + x)\tan\alpha}{2a + x}$ ஆகும் என நிறுவுக.

18. $w, 3w$ நிறையுடைய A, B எனும் இரு சிறிய வளையங்கள் கரடான கம்பி ஒன்றில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. A இற்கும் கம்பிக்கும், B இற்கும் கம்பிக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ ஆகும். நீளா இழையொன்றின் முனைகள் A, B என்பவற்றிற்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் நடுப்புள்ளி M இல் W நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணம் AMB செங்கோணமாகும். நிறை W படிப்படியாக அதிகரிக்கப்படின் வழுக்குதலால் எந்தவளையத்தின் சமநிலை குலையும் எனக் காண்க.

19. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீக்கோல் AB, அதன் முனை A ஒரு கரடான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்ட வண்ணம் நிலைத்த ஒப்பமான முளை P இன் மீது ஓய்கின்றது. கோல் AB மேனோக்கிய நிலைக்குத்துடன் θ எனும் கூர்ங்கோணத்தை ஆக்குகிறது. A யிலிருந்து P யின் தூரம் x ஆகவும், கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும் இருக்கக் கோலின் முனை A கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயிலிருப்பின் $(x - a)\tan^2\theta - \mu a\tan\theta + x = 0$ என நிறுவுக. $x = \frac{3a}{2}$ எனின் $\mu > \sqrt{3}$ ஆயிருந்தாலன்றி எல்லைச் சமநிலைத்தானம் சாத்தியமில்லை என உய்த்தறிக

20. ஒவ்வொன்றும். நீளமும் W நிறையுமுடைய AB, BC, CD என்னும் மூன்று சீர்ச்சட்டங்கள் B, C என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கரடான நிலைத்த கிடைக்கோலொன்றில் வழுக்கிச் செல்லக் கூடியவாறுள்ள இரு சிறிய இலேசான வளையங்களுக்கு A, D இணைக்கப்பட்டுத் தொகுதி சமச்சீராகத் தொங்குகிறது. எல்லைச் சமநிலைத் தானத்தில் நீளம் $AD\ \frac{119}{5}$ ஆகும். கோலுக்கும், வளையமொன்றிற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க. மூட்டு B இல் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

21. $(a + b)$ நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச்சட்டம் AB, புள்ளி P இல் செங்கோணத்தில் வளைக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $AP = a$. இச்சட்டம் P ஒரு கரடான கிடைத் தரையையும், B ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரையும் தொட்ட வண்ணம் ஓய்விலுள்ளது. சட்டத்தைக் கொண்டுள்ள நிலைக்குத்துத் தளம் சுவரினதும் தரையினதும் இடை வெட்டும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தானது. சட்டத்திற்கும் தரைக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் ½ ஆகும். PB இற்கும் தரைக்குமிடையேயான கூர்ங்கோணம் α இற்கும் β இற்குமிடையே இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக. இங்கு $\tan\alpha = \frac{b^2}{a^2}$, $\tan\beta = \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2}$ ஆகும்.

22. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் சமநிறைகளையுமுடைய AB, BC, CD, DE எனும் நான்கு கோல்கள் B, C, D என்பவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் முனைகள் A, E கரடான கிடைத்தளமொன்றில் தங்க சமச்சீராக உள்ளது. கோல்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $1/4$ ஆகும். AE இன் அதி உயர்விரிவு $\frac{2a\left(\sqrt{10} + 5\sqrt{2}\right)}{5}$ என நிறுவி, இவ்வுருவின் இதற்கொத்த உயரத்தைக் காண்க.

23. a ஆரையுடைய ஒப்பமான செவ்வட்ட உருளை ஒன்று அதன் அச்சு நிலைப்படுத்தப்பட்டும் அதன் ஒரு பிறப்பாக்கி நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்ட வண்ணமும் உள்ளது. W நிறையுடைய ஒரு கோல் உருளைக்குக் குறுக்காக ஒரு முனை சுவரைத் தொட்டவண்ணம் உருளையின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக சமநிலையிலுள்ளது.

(i) கோலின் புவியீர்ப்பு மையமானது உருளையின் அச்சுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ளதெனவும், கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையேயான உராய்வுக் கோணம் λ எனவும், எல்லைச் சமநிலையில் கோல் உள்ளதெனவும் தரப்படின் கோலுக்கும் உருளைக்கமிடையேயான மறுதாக்கம் $W \cot \lambda$ எனக் காட்டுக. கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையேயான விளையுள் மறுதாக்கத்தையும், நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வையும் காண்க.

(ii) சுவர் ஒப்பமாகவும் கோல் கிடையுடன் 45° சாய்விலும் இருப்பின் கோலின் நிறையின் தாக்கக் கோடானது உருயையின் அச்சிலிருந்து $\left(\sqrt{2}-1\right) a$ தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக.

24. ஆரையுடைய வட்ட உருளையொன்று அதன் வளைபரப்பு கிடைத்தளமொன்றுடன் தொடுகையிலிருக்க நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. $4a$ நீளமுடைய சீர்க்கோலொன்று முனை A கிடைத்தளத்தைத் தொட்டவண்ணம் உருளைக்குக் குறுக்காக அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளைக்கும், கோலுக்கமிடையேயான தொடுகை ஒப்பமானதும், தளத்திற்கும் கோலுக்குமிடையேயான தொடுகை கரடானதுமாகும். AB கிடையுடன் 2α கோணத்தை ஆக்குகிறது. கோலானது உருளையில் கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயிலிருப்பின் கோலுக்கும் உருளைக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆனது

$$\mu = \frac{\sin 4\alpha}{\cot \alpha - 1 - \cos 4\alpha}$$ என்பதால் தரப்படுமெனக்க ாட்டுக.

25. W நிறையுடைய பாரமான சீர்வளை AB இன் முனை A இற்கு ஒரு மெல்லிய இழை இணைக்கப்பட்டு இழையானது ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் சென்று மறுமுனையில் சுமையொன்றைக் காவுகின்றது. வளையின் மறுமுனை கிடையுடன் α சாய்வுடைய கரடான சாய்தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணம் கிடையாக ஓய்கின்றது. இழை வளை B இனூடான அதிஉயர் சரிவுக்கோடு என்பன ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளன. உராய்வுக் கோணம் λ ஆகவும், B கீழ்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயிலுமிருப்பின் சுமையின் நிறையைக் கண்டு பின்வரும் இருவகைகளுக்குமான படங்களை வரைக. (a) $\lambda > \alpha$ (b) $\lambda < \alpha$

வகை *(a)* இல் $\alpha > \frac{\pi}{2} - \lambda$ எனின், சுமையின் நிறை என்னவாயிருப்பினும் B மேல் நோக்கி வழுக்காது எனக் காட்டுக.

26. W என்னும் நிறையை உடைய ஒரு திண்ம அரைக் கோளம் தன் வளைபரப்பு ஒரு கரடான சாய்தளத்தில் எல்லைச்சமநிலையில் ஓய்வில் இருக்கின்றது; அதன் விளிம்பில் ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்ட ஒரு நிறை Pயால் அதன் தளமுகமானது கிடையாக வைக்கப்பட்டிருக்கிறது எனின் உராய்வுக் குணகம் $\dfrac{P}{\sqrt{W(W+2P)}}$ என நிறுவுக.

27. ஒரு மெல்லிய சீரரைக் கோளக் கிண்ணம் அதன் வளைபரப்பு ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தில் (உராய்வுக் குணகம் μ) பொருந்துமாறு தங்கியும் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றில் சாய்ந்துமிருக்கிறது. கிண்ணம் நழுவுந்தறு வாயிலிருப்பின் நிலைக்குத்துடன் கிண்ணத்தினது அச்சின் சாய்வு $\sin^{-1}(2\mu)$ என நிறுவுக.

28. ஒரு பாரமான சீர்க்கோல் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் இருக்குமாறு A இலுள்ள கரடான முனையொன்றின் மேலும் A இலும் உயர்ந்த மட்டத்திலிருக்கும் B இலுள்ள இன்னொரு கரடான முனையின் கீழும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிலையில் தங்கு மிகக் குறுகிய கோலின் நீளம் $a\left(1+\tan\alpha \cot\lambda\right)$ எனக் காட்டுக.

இங்கு முனைகளின் இடைத்தூரம் a. முனைகளை இணைக்கும் கோடு கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் λ உராய்வுக் கோணம்.

29. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் 45 சாய்விலுள்ள இரு நிலைத்த கரடான சாய்தளங்களுக்கிடையில் W நிறையும் a ஆரையும் உடைய சீரான வட்ட அடர் தனது தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு ஓய்விலுள்ளது. தளங்களின் இடைவெட்டுக் கோடு அடரின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. ஒவ்வொரு தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வுக் குணம் $\frac{1}{2}$ ஆயின் அடரை அதன் தளத்தில் மையம் பற்றிச் சுழற்றத் தேவையான மிகக் குறைந்த இணையின் திருப்பம் $2\sqrt{2}\,\dfrac{Wa}{5}$ எனக் காட்டுக.

30. கிடையுடன் α சாய்வுடைய கரடான சாய்தளமொன்றில் கோளம் ஒன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோளத்தின் மையத்தையும் தளத்தின் அதி உயர் சரிவுக்கோடொன்றையும் கொண்ட தளத்திலே கோளத்தின் மேற்பரப்பிலுள்ள புள்ளி ஒன்றில் கோளத்திற்குத் தொடலியாக ஒரு விசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது.

விசையின் திசை கிடையுடன் β கோணத்தை ஆக்குகிறது. (α ஐ ஒத்த அதே போக்கில்) உராய்வுக் குணகம் μ எனின், சமநிலைக்கு

$\mu \geq \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta}$ எனக் காட்டுக.

β மாறும் போது சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு μ இன் இழிவுப்பெறுமானம் $\tan \frac{1}{2}\alpha$ எனக் காட்டுக.

பிரயோகிக்கப்படும் விசை இழிவாக இருப்பதற்கு μ இன் இயல்தகு இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{2} \tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

31. h உயரமும் r ஆரையுமுடைய ஒரு சீர் உருளை அதன் தட்டையான அடி ஒரு கரடான தளத்திற் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாகக் கூட்டப்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகத்திலும் $\dfrac{2r}{h}$ குறைவாயின் உருளை வழுக்குமுன் கவிழுமெனக் காட்டுக.

32. செவ்வட்டக் கூம்பொன்று அதனடி ஒரு கரடான சாய்தளத்திற் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ ஆயின் கூம்பு ஒரே நேரத்தில் வழுக்கும் தறுவாயிலும், கவிழும் தறுவாயிலும் இருப்பின் கூம்பின் கோணம் $2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{16}\right)$ எனக் காட்டுக.

33. ஒரு சமபக்க முக்கோணி அதன் ஒருபக்கம் கரடான கிடைத்தளமொன்றிற் பொருந்துமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியிருக்கிறது. படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடைவிசை ஒன்று முக்கோணியின் அதி உயர் உச்சியின் மீது செயல்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகம் $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ இலும் குறைவாக இருப்பின் முக்கோணி ஒருச்சரியமுன் வழுக்குமென நிறுவுக்

34. பக்கங்கள் a, b ஐ உடைய செவ்வகம் a நீளப்பக்கமொன்று ஒரு கரடான கிடைமேசையில் பொருந்துமாறு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருக்கிறது. படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடைவிசை ஒன்று செவ்வகத்தினது தளத்தில் மேற்பக்க வழியே செயல்படுகிறது. செவ்வகம் வழுக்குமுன் ஒருச்சரிவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

35. ABC எனுமொரு முக்கோணி அடர் BC ஒரு கரடான கிடைத்தளத்தின் மீது பொருந்துமாறு நிற்கிறது. இங்கு C செங்கோணம். B இற்குக் கீழே C இருக்குமாறு BC இற்குச் செங்குத்தான அதன் சொந்தத் தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சினைப் பற்றி அத்தளம் ஒருச் சரிக்கப்படின் உராய்வுக் குணகம் $\tan A$ இலும் குறையவோ கூடவோ இருந்ததற்கிணங்க அவ்வடர் வழுக்கவோ ஒருச்சரியவோ தொடங்கும் எனக் காட்டுக.

36. W நிறையுடைய ஒரு சீர் வட்ட உருளை அதன் அச்சு கிடையாகவும் வளைபரப்பு நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றைத் தொடுமாறும் ஓர் இழையினால் தாங்கப்படுகிறது. இவ்விழை உருளையில் அரை குறையாகச் சுற்றப்படும் அச்சுவருடன் கோணம் α ஐ ஆக்குமாறு சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் $\mathrm{cosec}\,\alpha$ இலும் குறையலாகாதெனவும் சுவரின் மீதான செவ்வன் அமுக்கம் $W \tan\dfrac{\alpha}{2}$ எனவும் காட்டுக.

37. நீளம் ℓ ஐ உடைய ஓர் இழைக்கு அதன் நுனிகளில் இரு இலேசான வளையங்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன; இவை கிடையுடன் சாய்வு β வில் நிலைப்படுத்திய ஒரு கரடான நேர்க்கம்பியின் மீது வழுக்குகின்றன. ஒரு பாரமான ஒப்பமான வளையம் அவ்விழையைத் தனக்கூடாகக் கொண்டு சமநிலையில் தொங்குகின்றது. μ வானது $\tan\beta$ விலும் பெரிதாகவும் அவ்வளையங்கள் கம்பி என்பவற்றிற் கிடையேயான உராய்வுக் குணகமாகவும் இருக்குமிடத்து அக்கம்பியின் மீதான வளையங்களுக் கிடையேயுள்ள மிகப்பெரிய தூரம் $\dfrac{\ell(\mu - \tan\beta)}{(1+\mu^2)^{1/2}}$ எனக் காட்டுக.

38. O வை மையமாகக் கொண்ட w நிறையுடைய சீரான வட்டவடிவ வளையமொன்றிலுள்ள Q என்னும் தரப்பட்ட புள்ளியிலே w நிறையுள்ளவொரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத் தொகுதியானது P என்னுமொரு முளையின் மீது எல்லைச் சமநிலையிலே தொங்குகிறது. வளையத்துக்கும், முளைக்குமிடையிலான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும் $POQ = \theta$ ஆகவுமிருப்பின் $\mu = \dfrac{\sin\theta}{2 - \cos\theta}$ எனக் காட்டுக.

$\mu \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனின், வளையத்தின் எந்தப் புள்ளி முளையைத் தொட்டாலும் தொகுதி சமநிலையிலே தொங்கக் கூடியதாயிருக்குமென உய்த்தறிக.

39. $2a$ பக்கத்தைக் கொண்ட சீரான $ABCD$ எனும் சதுர அடர் ஒன்று அதன் மூலைவிட்டம் AC நிலைக்குத்தாக இருக்கவும் BC, CD ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் இரு ஒரே மட்டத்திலுள்ள கரடான முளைகளின் மீது இருக்கக் கூடியதாகவும் ஓய்விலுள்ளது. ஒவ்வொரு தொடுகையிலுமுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். படிப்படியாக அதிகரிக்கும் P எனும் கிடைவிசை அடரின் தளத்தில் A இல் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. $\mu \geq 1/2$ எனின், முளைகளில் ஒன்றின் மேல் அடர் திரும்பும் எனக் காட்டுக.

40. அரைக்கோளக் கிண்ணம் அதன் விளிம்பு கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. கிண்ணத்தின் ஆரைக்குச் சமமான நீளத்தையுடைய ஒரு சீரான கோல் கிண்ணத்தின் மையத்தினூடு செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கிண்ணத்தினுள்ளே எல்லைச் சமநிலையில் ஓய்விலுள்ளது. கோலினதும் கிண்ணத்தினதும் இரண்டு தொடுகைப் புள்ளிகளிலும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனின் கோல் கிடையுடன் $tan^{-1}\left[\frac{4\mu}{3-\mu^2}\right]$ என்னும் கோணத்தை அமைக்குமெனக் காட்டுக.

41. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய இரு சமதுணிக்கைகள் கரடான கிடை மேசையொன்றில் வைக்கப்பட்டும் உறுதியான நீளா இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவை இரண்டையும் இயங்கும் தறுவாயிலிருக்கச் செய்வதற்கு இழையுடன் கோணம் θ ஆக்கும் திசையிலே அவற்றிலொன்றிற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த விசை $2\mu W\cos\theta$ என நிறுவுக. இங்கு μ மேசைக்கும் துணிக்கைகளிலொன்றிற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம்.

42. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச்சட்டம் AB, அதன் முனை A கரடான கிடை நிலமொன்றிற் பொருந்துமாறு நிலைக்குத்தாக நிற்கிறது. A யிருந்து a தூரத்திலுள்ள C என்னும் புள்ளியில் நிலத்தில் நிலைப்படுத்திய ஒரு சிறு கப்பியின் கீழாகச் செல்லும் இலேசான கயிறொன்று B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை B, AC இன் நிலைக்குத்துத் தளத்திலே C இற்தப்பாலுள்ள பக்கம் நோக்கித் தாழ்த்தப்படுகிறது. இந்நேரத்தில் கயிறு BC உறுதியாக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டத்திற்கும் கிடையிற்குமிடையேயான சாய்வு θ.

$\cos\theta\left(\alpha+2\ell\cos\theta\right)=2\mu\sin\theta\left(a+\ell\cos\theta\right)$ இனால் தரப்படும் போது சட்டம் வழுக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, சட்டத்திற்கும், நிலத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம்.

43. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, CD எனுமிரு சமசீர்க் கோல்கள் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளில் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவை முனைகள் A, C என்பன μ உராய்வுக் குணகமுள்ள கரடான கிடைத்தளமொன்றின் மீது பொருந்துமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் இழையின் இரு நுனிகளுக்கும் ஒவ்வொன்றும் W இற்குச் சமமான நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விழை B இற்கும் D இற்கும் மேலாகச் செல்லவிடப்படுகிறது. சமநிலையின் எல்லைத் தானத்தில் கிடையுடன் கோல்கள் $tan^{-1}\left(\frac{3}{1+2\mu}\right)$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமென நிறுவுக.

44. கரடான நிலமொன்றின் மீதிருக்கும் பாரமான சீர் செவ்வகக் குற்றியொன்றின் மேல் விளிம்பின் நடுப்புள்ளியில் குற்றியை மேல்ப்பக்கத்துடன் $\theta\left(<90^{\circ}\right)$ எனும் கோணத்தில் மேனோக்கி இழுக்குமாறு விசையொன்று மையநிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. இந்நிலைக்குத்து வெட்டுமுகத்தின் கிடைப்பக்கங்கள் b நீளம் உடையவை. நிலைக்குத்துப் பக்கங்கள் நீளம் உடையவை. $tan\theta > \frac{tan\alpha - 2\mu}{\mu\, tan\alpha}$ ஆயின், குற்றி அடி விளிம்பொன்றைக் குறித்துத் திரும்பத் தொடங்குமெனக் காட்டுக. இங்கு $tan\alpha = \frac{b}{a}$, μ உராய்வுக் குணகம்.

45. கிடைத்தளமொன்றின் மீதிருக்கும் $2a$ நீளமான ஒரு சீர்க்கோல் AB, முனை A உடன் இணைத்துள்ளதும் B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $2h$ உயரத்திலிருக்கும் ஒரு கப்பியின் மேலாகச் செல்வதுமான கயிறொன்றினால் உயர்த்தப்படுகிறது. முனை B, தளத்தின் மீது வழுக்கவில்லையெனக் கொண்டு கோல் நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கும் போது தளத்தின் மறுதாக்கத்திற்கும் B இலுள்ள நிலைக்குத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்து $h > \frac{a}{\mu}$ எனின், முனை B வழுக்காது கோல் நிலைக்குத்தாக உயர்த்தப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு μ உராய்வுக் குணகம்.

46. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் $a, 2a$ நீளங்களையுமுடைய AB, BC எனும் இரு சீர்க்கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இக்கோல்களின் முனைகள் A, C என்பன கரடான கிடைத்தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணம் நிலைக்குத்துத்தளமொன்றில் நிற்கின்றன. கோணம் $ABC = 90^\circ$ ஆகும். கோல்களில் ஒன்று எல்லைச் சமநிலையிலிருப்பின் கோல்களுக்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தின் இழிவுப்பெறுமானத்தைக் காண்க. மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

47. ஒவ்வொன்றும் l நீளமும் W நிறையுமுடைய இரு சீர்க்கோல்கள் AB, BC என்பன B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டவண்ணமும் C கரடான கிடை நிலத்தைத் தொட்டவண்ணமும் கோல்கள் நிலைக்குத்துத் தளத்திலும் ஓய்விலுள்ளன. C இற்கும் நிலத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் ½ ஆகும். கோல்கள் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ள போது அக்கோல்களுக்கிடையேயான கோணத்தைக் காண்க.

48. $l, 2l$ நீளங்களையும் $W, 2W$ நிறைகளையும் உடைய AB, BC எனும் இரு சீர்க்கோல்கள் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இக்கோல்கள் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலே BC கிடையாகவும் B இலிருந்து $\frac{3\ell}{2}$ தூரத்திலுள்ள கரடான முளையைத் தொட்டுக் கொண்டும் ஓய்கிறது. AB யின் முனை A கரடான கிடைத்தளமொன்றில் ஓய்விலுள்ளது. கோணம் ABC, 120° ஆகும். BC இற்கும் முளைக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ, A இற்கும் நிலத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ. சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு μ, இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

49. W நிறையுடைய ஒரு சீர் ஏணி அதன் ஒரு முனை கரடான கிடைநிலத்தைத் தொட்ட வண்ணமும் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொட்டவண்ணமும் சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் ஓய்விலுள்ளது. கோல் நிலத்துடன் ஆக்கும் கோணம் $tan^{-1} 2$ உம் ஏணிக்கும், நிலத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும். $2W$ நிறையுடைய ஒரு பையன் சமநிலையைக் குலைக்காது ஏணியில் எவ்வளவு தூரம் ஏறலாமெனக் காண்க. பையன் ஏணியின் உச்சியை அடைய ஏணியை வழுக்காது இருக்கச் செய்வதற்கு ஏணியின் அடியில் பிரயோகிக்க வேண்டிய மிகக் குறைந்த கிடை விசை யாது?

50. $2l$ நீளமும் W நிறையுமுடைய ஒரு சீர்க்கோல் AB, A ஒரு கரடான கிடை நிலத்தைத் தொட்ட வண்ணமும் கோலிலுள்ள புள்ளி C கிடைத் தண்டவாளமொன்றைத் தொட்டவண்ணமும் கிடையுடன் 45° சாய்வில் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது. தண்டவாளம் AB ஐக் கொண்டுள்ள நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. கோலுக்கும் நிலத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ உம் கோலுக்கும் தண்டவாளத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(i) A இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கத்தின் பருமனும் திசையும்

(ii) AC யின் நீளம்

51. $2a$ நீளமும் $4W$ நிறையும் உள்ள சீர்க்கோலொன்று அதன் முனைகளில் இணைக்கப்பட்ட a நீளமுள்ள இரு மெல்லிய நீளா இழைகளினால் கிடை நிலையில் தாங்கப்படுகிறது. இழைகளின் மறுமுனைகள் ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள இரு சிறிய வளையங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டு வளையங்கள் நிலைத்த கரடான கிடைச் சட்டமொன்றில் வழுக்கிச் செல்லக்கூடியதாக உள்ளன. வளையம் ஒவ்வொன்றிற்கும் சட்டத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் ½ ஆகும். சமநிலையில் கோலுக்கும், சட்டத்திற்குமிடையேயான தூரம் $\frac{4a}{5}$ இலும் குறையலாகாது எனக் காட்டி இரு வளையங்களுக்குமிடையேயான மிகக் குறைந்த அதிகூடிய தூரங்களைக் காண்க.

52. இரு சமசீர்ப்பலகைகள் AB, CD என்பன அவற்றின் முனைகள் B, D என்பன ஒரு கரடான கிடை நிலத்தில் தங்கவும் மேல் முனைகள் A, C என்பன ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டும் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் ஓய்விலுள்ளன. மூன்றாம் சமபலகை ஒன்று A இற்கும் C இற்குமிடையில் செருகப்பட்டு நிலத்தைத் தொடாது A, C என்பவற்றிலுள்ள உராய்வினால் நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகிறது. A யிலும் C யிலும் உராய்வுக் குணகம் μ. B இலும் D இலும்

உராய்வுக் குணகம் μ^1. AB, CD என்பன கிடையுடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளன. கோணம் θ இன் வீச்சை μ, μ^1 என்பவற்றில் காண்க. $\mu\mu^1 > \frac{1}{3}$ ஆயினால் மட்டும் இந்நிலையில் சமநிலை சாத்தியமாகுமென உய்த்தறிக.

53. ஆரை a உம், மையம் C யும் உடைய கரடான பாரமான சீக் கோளமொன்று கிடைத்தரையைப் புள்ளி D இல் தொட்டவண்ணம் ஓய்கிறது. நீளம் $2b$ உம் நிறை W உம் கொண்ட ஒரு சீர்க்கோல் AB தரையில் A என்னும் நிலையான புள்ளிக்கு ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு கோளத்தை E என்னும் புள்ளியில் தொட்டுக்கொண்டு ஓய்கின்றது. $2b > a \cot\theta$ ஆகவும், கோல் நிலைக்குத்துத் தளம் ACD யிலுமுள்ளது. தொடுகைகள் D, E என்பவற்றிலுள்ள உராய்வுகள் வழுக்கலைத் தடுப்பதற்குப் போதியதெனின்,

(i) E இலுள்ள தாக்கம் எதிர்த்தாக்கம் இரண்டும் ED வழியே தொழிற்படுமெனவும், ஒவ்வொன்றினதும் பருமன் $\dfrac{W b \sin\theta \left(1 - \tan^2\theta\right)}{a}$ எனக் காட்டுக.

(ii) D, E இரண்டிலும் உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். $\lambda > \theta$ எனின், இவ்விரு தொடுகைகளிலும் உராய்வு எல்லை உராய்வல்ல எனக் காட்டுக. ஆனால் $\lambda = \theta$ எனின், எல்லை உராய்வு E யிலியே இருக்கு மெனவும் D இல் அல்ல எனுவும் நிறுவுக.

54. மையம் O வையும் ஆரை ஐயும் திணிவு M ஐயும் உடைய சீர்க்கோளம் ஒன்று கரடான கிடைத்தளத்தில் ஓய்கின்றது. M திணிவும் $2a$ நீளமுடைய சீர்க்கோல் AB, முனை A கிடைத்தளத்தில் தாங்கியும் கோலில் ஒரு புள்ளி C கோளத்தைத் தொட்டவண்ணமும் உள்ளது. O, A, C என்பன ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலும் AB கிடையுடன் 60° சாய்விலுமுள்ளது.

(i) மூன்று தொடுகைப் புள்ளிகளிலும் உராய்வின் பருமன் ஒரேயளவினதெனக் காட்டுக.

(ii) கோலுக்கும், கோளத்திற்குமிடையேயான செவ்வன் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(iii) மூன்று தொடுகைப் புள்ளிகளிலும் உராய்வுக் குணகம் μ ஆகவும் அவற்றில் ஒன்றில் உராய்வு, எல்லைஉராய்வாகவும் உள்ளது. கோலுக்கும் கோளத்திற்குமிடையேயான தொடுகையே அதுவெனக் காட்டி μ வைக் காண்க.

55. ஒவ்வொன்றும் a ஆரையும் W நிறையுமுடைய ஒரு சீரான கோளங்கள் கரடான கிடைநிலத்தில் அவற்றின் மையங்கள் $2\sqrt{2a}$ இடைத்தூரத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. a ஆரையும் W நிறையுமுடைய மூன்றாவது கோளம் இவ்விரு கோளங்களின் மேலும் மூன்று கோளங்களின் மையங்களும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. எல்லாத் தொடுகைகளிலும் உராய்வுக் குணகமானது μ இற்குச் சமமாயின் சமநிலையில் இருப்பதற்குரிய μ இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?

56. M திணிவும் a ஆரையும் உடைய ஒரு பாரமான வட்ட வடிவான வளையம் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ள கரடான முளையில் தொங்குகிறது. m திணிவுடைய ஒரு பூச்சி வளையத்தின் மிகக் கீழான புள்ளியிலிருந்து மெதுவாக மேனோக்கி நகர்கிறது. பூச்சியினுடைய திணிவு $\dfrac{M \sin\lambda}{(1 - \sin\lambda)}$ இலும் குறைவாக இருப்பின் பூச்சி முளையை அடைய முடியுமெனக் காட்டுக. இங்கு λ என்பது வளையத்திற்கும் முளைக்குமிடையேயான உராய்வுக் கோணம். பூச்சியின் திணிவு m, $\dfrac{M \sin\lambda}{(1 - \sin\lambda)}$ இலும் கூட இருந்தால் வளையம் முனையில் வழுக்கு முன் பூச்சி வளையத்தின் வழியே நகரக்கூடிய தூரம் $a\left[\pi + \sin^{-1}\dfrac{m + \sin\lambda}{m}\right]$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

57. சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்று கிடையான தரையையும் நிலைக்குத்தான சுவரையும் இதன் வளைபரப்புத் தொட்டவண்ணம் ஓய்விலிருக்கிறது. தரையும் சுவரும் சமகரடானவை எனின் அரைக்கோளத்தின் தள அடி கிடையுடன் அமைக்கும் சாய்வுக் கோணம் $\sin^{-1}\dfrac{8\mu(1 + \mu)}{3\left(1 + \mu^2\right)}$ இலும் அதிகரிக்க முடியாதெனக் காட்டுக. இங்கு μ ஒவ்வொரு தொடுகையிலும் உராய்வுக் குணகம் ஆகும்.

58. கிடைக்கு α கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள தளத்தில் அதன் நான்கு விளிம்புகள் அதி உயர் சரிவுக்கோட்டிற்கு சமாந்தரமாக அமையும் வண்ணம் சதுரமுகிவடிவ சீரான குற்றி ஒன்று நிற்கிறது. குற்றியின் மிக மேலேயுள்ள விளிம்பில் அதற்குச் செங்கோணமாகப் படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடைவிசை ஒன்று நிலைக்குத்துத் தளத்தில் குற்றியின் திணிவு மையத்தினூடாக குற்றியைத் தளத்தில் மேலே

அசையச் செய்யக்கூடிய திசையில் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. குற்றிக்கும் தளத்திற்குமிடையிலுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனின்,

$$\mu > \frac{1 - tan\alpha}{2 + tan\alpha + tan^2\alpha}$$ எனின் குற்றிவழுக்காது திரும்புமெனக் காட்டுக.

59. சமமான ஒரு சீரான இரு ஏணிகள் பிணைக்கப்பட்டு ஒரு படி ஏணி உருவாக்கப்படுகிறது. படி ஏணியானது ஒரு கிடைத்தளம் மீது நிற்கிறது. ஒரு மனிதனின் நிறையானது ஏணிகளில் ஒன்றின் நிறையின் இரு மடங்காகும். மனிதன் ஒரு ஏணி மீது ஏறுகிறான். முதலில் வழுக்குவது மற்ற ஏணி எனக் காட்டுக.

மனிதன் ஏணியின் நீளத்தின் அரைப்பங்கு தூரம் ஏறியதும் ஏணி வழுக்கத் தொடங்கினால் உராய்வுக் குணகமானது $\frac{2}{3}tan\theta$ எனக் காட்டுக. இங்கு θ என்பது ஒவ்வொரு ஏணியும் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணமாகும்.

60. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் 45° அமைக்கும் இரு தளங்களுக்குமிடையே $2a$ எனும் நீளம் கொண்ட இலேசான கோல் ஒன்று கிடையாய் ஓய்விலுள்ளது. கோல் அமைந்துள்ள நிலைக்குத்துத் தளமானது அவ்விரு சாய்தளங்களின் இடைவெட்டுக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது. ஒவ்வொரு தளத்திற்கும் கோலிற்கு மிடையேயான உராய்வுக் குணகம் ½ ஆகும். W எனும் நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று கோலின் நடுப்புள்ளியில் வைக்கப்படுகின்றது. துணிக்கையானது கோல் வழியே படிப்படியாக நகர்த்தப்பட்டால் அது தூரம் $\frac{4a}{5}$ செல்லுமுன்னர் கோலானது நழுவானது எனக் காட்டுக.

61. ஒவ்வொன்றும் திணிவு m ஐ உடைய சீரான இரு சமகோளங்களின் மையங்கள் A, B ஆகும். இக்கோளங்கள் கரடான கிடைமேசை ஒன்றிலே ஒன்றையொன்று தொடாமல் ஓய்விலிருக்கின்றன. திணிவு M ஐயும் மையம் C யையுமுடைய சீரான மூன்றாவது கோளம் ஒன்று தளம் ABC நிலைக்குத்தாகவும் கோணம் $ACB = 2\alpha$ ஆகவுமிருக்குமாறு மற்றைய இரு கோளங்களின் மீதும் ஓய்விலிருக்கிறது. கோளம் C யிற்கு கோளங்கள் A, B ஆகிய ஒவ்வொன்றிற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ_1 உம் மேசைக்கும் கோளங்கள் A, B ஆகிய ஒவ்வொன்றிற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ_2 உம் ஆகும்.

(i) $\mu_1 \geq tan\frac{\alpha}{2}$ எனவும்,

(ii) $\mu_2 \geq \frac{M\ tan\frac{\alpha}{2}}{M + 2m}$ எனவும் காட்டும்.

எத்தொடுகைப் புள்ளி கூடுதலான கரடாக இருக்கும்? விடையை நியாயப்படுத்துக.

62. r சென்றிமீற்றர் ஆரையும் W நியூற்றன் நிறையும் உள்ள சீரான கோளம் ஒன்றின் மேற்பரப்பிலுள்ள புள்ளி ஒன்றுடன் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விழையின் மற்றைய நுனியானது கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

நிலைத்த புள்ளிக்கு $\frac{3r}{2}$ சென்ரி மீற்றர் கீழேயுள்ள ஒரு புள்ளியில் சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டு கோளம் சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. கோளம் சுவரைத் தொடும்புள்ளி கீழ்நோக்கி நழுவுந்தறுவாயிலும் கோளத்திற்கும் சுவருக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{3}{4}$ ஆகும் எனின், நிலைக்குத்துடன் இழையின் சாய்வைக் காண்க. இழையின் இழுவை $\frac{5W}{6}$ நியூற்றன் எனக் காட்டுக.

63. சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்று அதன் வளைபரப்பு கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றையும் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றையும் தொட்டுக் கொண்டிருக்க ஓய்விலிருக்கின்றது. அரைக் கோளத்திற்கும் தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\mu_1 > \frac{3}{8}$ எனின், அரைக்கோளம் எவ்வமைவிலும் ஓய்விலிருக்கலாமெனக் காட்டுக. $\mu_1 < \frac{3}{8}$ எனின், நிலைக்குத்துடன் அரைக்கோளத்தின் அடி ஆக்கத்தக்க மிகச் சிறிய கோணம் $cos^{-1}\left(\frac{8\mu_1}{3}\right)$ எனக் காட்டுக. சுவரும் கரடாக இருக்கு மெனின் மிகச் சிறிய இக்கோணமானது $cos^{-1} 8\mu_1 \frac{(1+\mu_2)}{1+\mu_1\mu_2}$ இனாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு μ_2 என்பது அரைக்கோளத்துக்கும், சுவருக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகமாகும்.

64. a ஆரையுள்ள சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்று அதன் வளைந்த மேற்பரப்பானது கரடான கிடைத் தரை ஒன்றையும் கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றையும் தொட்டுக் கொண்டிருக்க ஓய்வில் இருக்கின்றது. இரு தொடுகைப் புள்ளிகளிலும் உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். அரைக்கோளம் நழுவும் தறுவாயிலிருப்பின் தரையிலும் சுவரிலும் உள்ள மொத்த மறுதாக்கங்கள் சுவரிலிருந்து $\dfrac{a(1-\mu)}{1+\mu^2}$ தூரத்தில் உள்ள புள்ளி ஒன்றில் இடைவெட்டுமெனக் காட்டுக. தள அடியானது கிடையுடன் ஒரு கோணம் α விலே சாய்ந்திருக்கும் என்பதை உய்த்தறிக. இங்கு $sin\,\alpha = \dfrac{8\mu(1+\mu)}{3(1+\mu^2)}$ ஆகும்.

65. நிறை W வையும் நீளம் $2a$ யையும் உடைய சீரான ஒரு கோல் AB, A ஆனது கரடான கிடைத்தரை ஒன்றின் மீதும் B ஆனது கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்கு எதிரேயும் இருக்கக் கிடையுடன் ஒரு கோணம் α விலே வைக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கோல் சுவருக்குச் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் இருக்கிறது. A, B ஆகிய இரண்டிலும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\mu(<1)$ ஆகும். கோல் எல்லை நாப்பத்தில் இருக்குமெனின் $tan\,\alpha = \dfrac{1-\mu^2}{2\mu}$ எனக் காட்டுக. கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\theta(<\alpha)$ ஆகவும் கோல் கீழ்நோக்கி நழுவுவதை மட்டுமட்டாகத் தடுக்கக் கூடியதாக திருப்பம் M உடைய இணை ஒன்று கோலினூடாக நிலைக்குத்துத் தளத்திற் பிரயோகிக்கப்பட்டுமிருப்பின் $(1+\mu^2)\,M = (1-2\mu\,tan\theta-\mu^2)\,Wa\,cos\theta$ எனக் காட்டுக.

66. நிலையியலில் உராய்வுக் கோணத்தை வரையறுக்க.

(a) சீரான கோல் ஒன்று அதன் மேல் முனை கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்கு எதிரே தங்கியும் கீழ்முனை கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீதும் இருக்க நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றிலே ஓய்விலிருக்கின்றது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு $\alpha\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆக இருக்கும் போது கோலானது இரு முனைகளிலும் எல்லை நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. இரு முனைகளுக்கும் உராய்வுக் குணகம் சமம். கேத்திர கணித

இரு முனைகளுக்கும் உராய்வுக் குணகம் சமம். கேத்திர கணித முறையாகவோ வேறுவிதமாகவோ உராய்வுக் கோணம் $\dfrac{\alpha}{2}$ எனக் காட்டுக.

(b) பக்கம் $2a$ ஆகவுள்ள சதுரத்தை அடியாகவும் உயரம் $2b$ யை உடைய பாரமான சீர்ச் செவ்வகக் குற்றி ஒன்று உராய்வுக் கோணம் λ வை உடைய கரடான கிடைத்தரை ஒன்றின் மீது நிற்கிறது. மேல் விளிம்புகளின் ஒன்றின்நடுப்புள்ளியில் அவ்விளிம்புக்குச் செங்குத்தாக ஈர்வை மையத்தினூடாகக் கிடைவிசை ஒன்று நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பிரயோகிக்கப்பட்டு நாப்பம் குலையும் வரை அதிகரிக்கப்படுகிறது. $tan\,\lambda \begin{matrix} <a \\ >2b \end{matrix}$ இற்கேற்ப இது நேரொத்த கீழ் விளிம்பைப் பற்றி ஒருச்சரிவதன் மூலமோ நழுவுவதன் மூலமோ நடைபெறும் எனக் காட்டுக.

67. நிறை W வையும் நீளம் $2a$ யையும் உடைய சீரான ஏணி ஒன்று அதன் ஒருமுனை ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றக்கு எதிரேயும் மறுமுனை கரடான தரைமீதுமிருக்க ஓய்விலிருக்கின்றது. உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். ஏணியின் நிறையின் நான்கு மடங்கு நிறையை உடைய மனிதன் ஒருவன் ஏணி நழுவாதிருக்க அதன் முழு நீளத்திற்கும் ஏறக் கூடியதாக உள்ளது. ஒப்பமான முனையிலே கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் சாய்வு θ எனின், தொகுதியின் பொது நாப்பத் தானம் ஒன்றைக் கருதுவதன் மூலம் $\mu \ge \dfrac{9\,tan\,\theta}{10}$ எனக் காட்டுக.

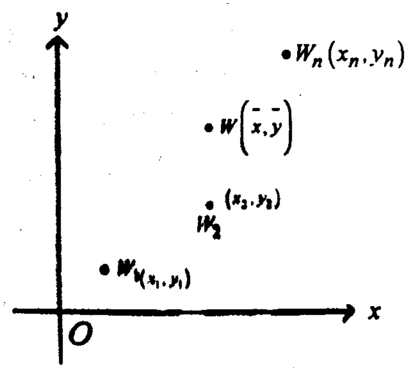
இப்பொழுது ஏணியின் அடியானது சுவரிலிருந்து $a\sqrt{2}$ தூரத்திலும், $\mu \le \frac{1}{2}$ ஆகவும் இருப்பின் ஏணி நழுவாதிருக்க அம்மனிதன் மீண்டும் அதன் முழு நீளத்திற்கும் ஏறக்கூடியதாக இருப்பதற்குக் கோலினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தேவைப்படுகின்ற இணையின் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

10. புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of Gravity)

$W_1, W_2 .... W_n$ நிறையுடைய துணிக்கைகள் (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ என்பவற்றை ஆள்கூறுகளாகவுள்ள புள்ளிகளில் உள்ளதென்க.

புவியீர்ப்பு மையம் $G \equiv \left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ என்க.

தளம் Oxy கிடையாக உள்ளதென்க.



$$W = W_1 + W_2 + ... + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Ox பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

$$W . \bar{y} = W_1 y_1 + W_2 y_2 + W_3 y_3 + ... W_n y_n$$

$$\bar{y} = \frac{W_1 y_1 + W_2 y_2 .... W_n x_n}{W_1 + W_2 + ... W_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

Oy பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

$$W . \bar{x} = W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3 + ... W_n x_n$$

$$\bar{x} = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 .... W_n x_n}{W_1 + W_2 + ... W_n}$$

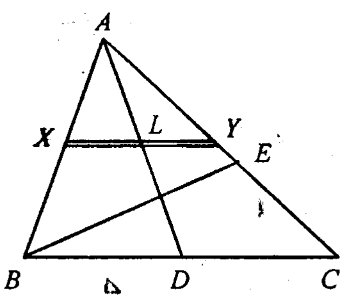
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆள்கூறு $= \left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} \right)$

சீரான முக்கோண அடர் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்

ABC என்பது முக்கோணி அடர்.
D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி.
இவ்வடரானது BC இற்கு சமாந்தரமான மிகச்சிறிய கீலங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

XLY என்பது அச்சிறிய கீலங்களுள் யாதாயினும் ஒன்று என்க.



$\Delta\ AXL \quad \Delta\ ABD$ என்பவை இயல்பொத்தவை.

$$\frac{AL}{AD} = \frac{XL}{BD} \quad \text{--------------} (1)$$

$\Delta\ ALY, \Delta\ ADC$ என்பவை இயல்பொத்தவை.

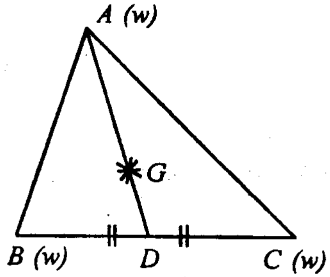
$$\frac{AL}{AD} = \frac{LY}{DC} \quad \text{--------------} (2)$$

$(1), (2)$, $BD = DC$ என்பவற்றிலிருந்து $XL = LY$.
$\therefore$ ஒவ்வொரு கீலத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம் AD யில் இருக்கும்.
எனவே அடரின் புவியீர்ப்பு மையம் இடையம் AD யில் இருக்கும்.
இதேபோல் புவியீர்ப்பு மையம் இடையம் BE யில் இருக்கும் என நிறுவலாம்.
முக்கோணி அடரின் புவியீர்ப்பு மையம் இடையங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி G இலிருக்கும்.

$[AG : GD = 2 : 1]$

ஒரு முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மூலைகளில் வைக்கப்பட்ட ஒரே நிறையுடைய மூன்று துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்தோடு பொருந்தும்.

முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C ஒவ்வொன்றிலும் w நிறை வைக்கப் பட்டுள்ளது என்க.



B இல் w இனதும் C இல் w இனதும் விளையுள்

D இல் $2w$ ஆகும். $(BD = DC)$

இப்பொழுது A இல் W இனதும், D இல் $2w$ இனதும் விளையுள் G இல் $3w$ ஆகும்.

$(AG : GD = 2 : 1)$

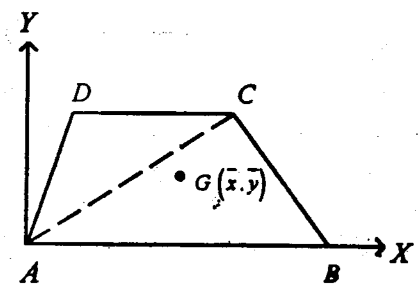
எனவே மூன்று துணிக்கைகளினதும், புவியீர்ப்பு மையம் முக்கோணி அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் பொருந்தும்.

சீரான சரிவக வடிவ அடர் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்

$ABCD$ என்பது சரிவக வடிவ அடர் AB, DC யிற்கு சமாந்தரம், நீளம் $AB = a, CD = b$ அவற்றிற்கிடையேயான தூரம் h என்க.

முறை I

சரிவகம் $ABCD$ ஐ $\Delta ABC, \Delta ADC$ ஆகப்பிரிக்க.



ΔABC யின் நிறை $= \frac{1}{2} ahw$

ΔACD யின் நிறை $= \frac{1}{2} bhw$

ΔABC யின் நிறையை உச்சிகள் A, B, C ஒவ்வொன்றிலும் வைக்கப்பட்ட $\frac{1}{6} ahw$ நிறைக்குச் சமமாகவும்.

ΔACD யின் நிறையை உச்சிகள் A, C, D ஒவ்வொன்றிலும் வைக்கப்பட்ட $\frac{1}{6} bhw$ நிறைக்கு சமமாகவும் கொள்ளலாம்.

A யில் $\frac{1}{6}(a+b)hw$, B யில் $\frac{1}{6} ahw$, C யில் $\frac{1}{6}(a+b)hw$, D யில் $\frac{1}{6} bhw$ தளம் $ABCD$ கிடையாக உள்ளதென்க.

புவியீர்ப்பு மையம் $G \equiv (\bar{x}, \bar{y})$

AB (X அச்சு) பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$\frac{1}{2}(a+b)hw \cdot \bar{y} = \frac{1}{6}(a+b)hw \cdot h + \frac{1}{6} bhw \cdot h$$

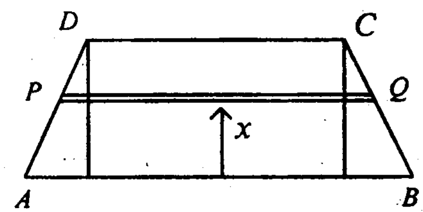
$$3(a+b).\bar{y} = (a+2b).h$$

$$\bar{y} = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$$

முறை II

தொகையிட்டு முறை மூலம் காணல்

அடர் AB க்கு சமாந்தரமாக சிறிய கீலங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க. அவ்வாறான ஒரு கீலம் PQ ஆகும். AB யிலிருந்து PQ இன் தூரம் x. தடிப்பு δx என்க.



$$\frac{h-x}{h} = \frac{PQ-b}{a-b}$$

$$ah - ax - bh + bx = PQh - bh$$

$$PQ = a + \frac{(b-a)}{h}x$$

PQ இன் நிறை $\left[a + \left(\frac{b-a}{h}\right)x\right]\delta x\, w$

AB யிலிருந்து PQ இன் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $= x$

AB பற்றி திருப்பம் எடுக்க

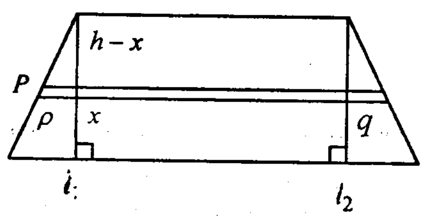
$$\int_0^h \left[a + \left(\frac{b-a}{h}\right)x\right] dx\, w . \bar{x} = \int_0^h \left[a + \left(\frac{b-a}{h}\right)x\right] x\, dx\, w$$

$$\left[ax + \left(\frac{b-a}{h}\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^h \bar{x} = \left[\frac{ax^2}{2} + \left(\frac{b-a}{h}\right)\frac{x^3}{3}\right]_O^h$$

$$\left[ah + \left(\frac{b-a}{h}\right)\frac{h^2}{2}\right]\bar{x} = \left[\frac{ah^2}{2} + \left(\frac{b-a}{h}\right)\cdot\frac{h^3}{3}\right]$$

$$(a+b)\frac{h}{2}\bar{x} = [a+2b]\frac{h^2}{6}$$

$$\bar{x} = \left(\frac{a+2b}{a+b}\right)\cdot\frac{h}{3}$$



$$\left[\frac{h-x}{p} = \frac{h}{l_1};\ \frac{h-x}{q} = \frac{h}{l_2}\right.$$

$$\left[\frac{h-x}{h} = \frac{p}{l_1} = \frac{q}{l_2} = \frac{p+q}{l_1+l_2} = \frac{PQ-b}{a-b}\right]$$

$$\frac{h-x}{h} = \frac{p}{l_1} = \frac{q}{l_2} = \frac{p+q}{l_1+l_2} = \frac{PQ-b}{a-b}\Bigg]$$

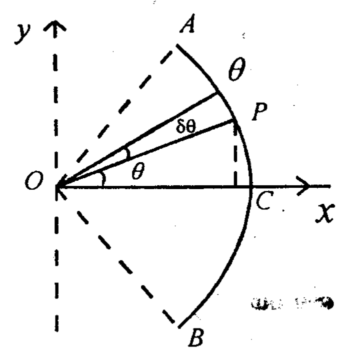
சீரான வட்டவில் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்

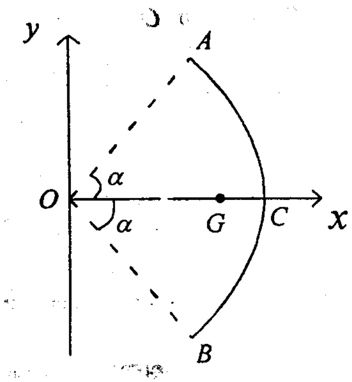
வட்டவில் ACB என்க. வில்லின் மையம் O, ஆரை r

$\angle AOB = 2\alpha$ ஆகும். $\angle AOC = \angle BOC = \alpha$

சமச்சீரின்படி வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் G, OC (x அச்சு) யிலிருக்கும்.

$OG = \bar{x}$ என்க.





$\angle COP = \theta, \angle POQ = \delta\theta$ (இங்கு θ - ஆரையனில் அளக்கப்படும்.)

வில் PQ இன் நிறை $= r\,\delta\theta \cdot w$

Oy யிலிருந்து வில் PQ இன் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $= r\cos\theta$.

Oy பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

$$\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\, d\theta \cdot w\right]\bar{x} = \int_{-a}^{a} (r\, d\theta\, w) r\cos\theta$$

$$r\,w[\theta]_{-\alpha}^{+\alpha} \cdot \bar{x} = r^2 w\,[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}$$

$$r\,2\alpha \cdot w \cdot \bar{x} = r^2\, w \cdot \times 2\sin\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\left[\int_0^r (x \cdot 2\,\alpha \cdot dx)\right] OG = \int_0^a (x\,2\alpha\; dx)\, w \cdot \frac{x \sin\alpha}{\alpha}$$

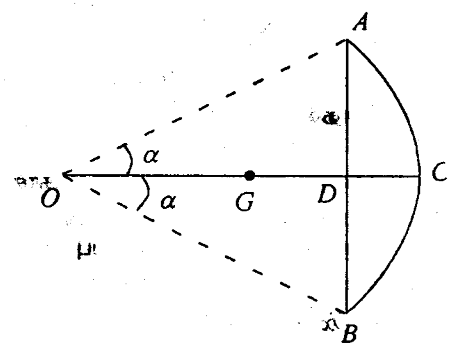
$$2\alpha\, w \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r \cdot OG = 2 \sin\alpha\; w \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$2\alpha\, w \cdot \frac{r^2}{2} \cdot OG = 2 \sin\alpha\; w \cdot \frac{r^3}{3}$$

$$OG = \frac{2}{3}\,\frac{r \sin\alpha}{\alpha}$$

வட்டத்துண்டம் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்

வட்டத்துண்டம் ACB என்க. வில் AB வட்ட மையம் O வில் எதிரமைக்கும் கோணம் 2α என்க.



ஆரைச்சிறை $OACB$ யின் புவியீர்ப்பு மையம், முக்கோணி OAB இன் புவியீர்ப்பு மையம் இரண்டும் OC யிலிருப்பதால் வட்டத்துண்டம் ACB யின் புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருக்கும்.

ஆரைச்சிறை OAB இன் நிறை

$$W_1 = \frac{1}{2} r^2 (2\alpha) w = r^2 \alpha\, w$$

$$OG_1 = \frac{2}{3}\,\frac{r \sin\alpha}{\alpha}$$

முக்கோணி OAB இன் நிறை $W_2 = \frac{1}{2} \times 2r \sin\alpha \times r \cos\alpha\; w$

$$= r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot w$$

$$OG_2 = \frac{2}{3} r \cos\alpha.$$

வட்டத்துண்டம் ACB இன் நிறை $= W_1 - W_2$

$$= \left(r^2 \alpha - r^2 \sin\alpha \cos\alpha\right) w$$

பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$\left(W_1 - W_2\right) OG = W_1 \cdot OG_1 - W_2 \cdot OG_2$$

$$\left(r^2 \alpha - r^2 \sin\alpha \cos\alpha\right) w \cdot OG = r^2 \alpha \cdot w \cdot \frac{2}{3}\,\frac{r \sin\alpha}{\alpha} - r^2 \sin\alpha \cos\alpha\, w \cdot \frac{2}{3} r \cos\alpha.$$

$$(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)\, OG = \frac{2r \sin\alpha}{3} - \frac{2r \sin\alpha \cos^2\alpha}{3}$$

$$OG = \frac{2r \sin\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right)}{3(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)}$$

$$= \frac{2r \sin\alpha \cdot \sin^2\alpha \times 2}{3\,(2\alpha - 2 \sin\alpha \cos\alpha)}$$

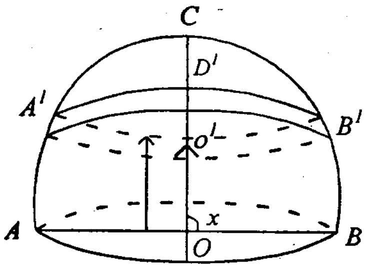
$$= \frac{4r \sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

திண்ம அரைக்கோளமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்

திண்ம அரைக்கோளத்தின் தள அடியின் விட்டம் AB, O மையம் ஆகும். அரைக் கோளமானது அடிக்குச் சமாந்தரமான சிறிய வட்டத்தட்டுக்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

சமச்சீரின்படி, எல்லாத்தட்டுக்களினதும் புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருப்பதால் அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருக்கும். புவியீர்ப்பு மையம் G என்க.

ஆரை r என்க. $OO' = x$



$A'D'B'$ இன் நிறை $= \pi\left(r^2 - x^2\right)\delta x\, w$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

$$\left[\pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx\, w\right] OG = \pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx\, w\cdot x$$

$$\pi w\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \cdot OG = \pi w\left[\frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

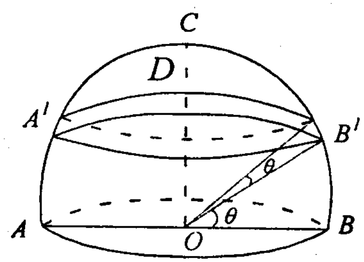
$$\pi w\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right]\cdot OG = \pi w\left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right]$$

$$OG = \frac{3r}{8}$$

பொள் அரைக்கோளம் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்

பொள் அரைக்கோளத்தின் தள அடியின் விட்டம் AB; மையம் O என்க. ஆரை r. அரைக் கோளமானது தள அடிக்குச் சமாந்தரமான சிறிய வளையங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

சமச்சீரின்படி, பொள் அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருக்கும்.



வளையம் $A'D'B'$ இன் மையம் O' $\angle B'OB = \theta$ என்க.

வளையத்தின் ஆரை $r\cos\theta$; $OO' = r\sin\theta$

வளையத்தின் நிறை $(2\pi r\cos\theta)r\delta\theta\cdot w$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$\left[\int_0^{\pi/2}(2\pi r\cos\theta)r\,d\theta\cdot w\right] = OG\int_0^{\pi/2}(2\pi r\cos\theta)r\,d\theta\; w\cdot r\sin\theta$$

$$2\pi r^2 w\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot OG = \pi r^3 w\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$2\pi r^2 w\cdot OG = \frac{\pi r^3 w}{2}\left[1-(-1)\right]$$

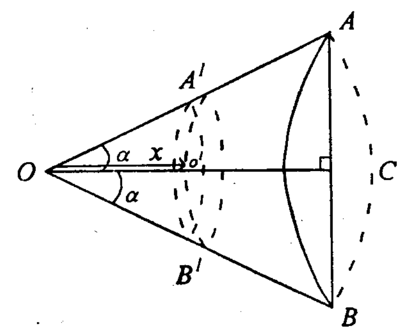
$$OG = \frac{r}{2}$$

திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம்

திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் வட்ட அடியின் விட்டம் AB. மையம் C ஆகும். O உச்சி. $OC = h$.

திண்மக் கூம்பு அடிக்குச் சமாந் தரமான வட்டத்தட்டுக்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க. சமச்சீரின்படி கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருக்கும். $OO' = x$. O' ஐ மைய மாகக் கொண்ட சிறிய வட்டத்தட்டின் நிறை

$= \pi\left(x\tan\alpha\right)^2\cdot\delta x\cdot w$



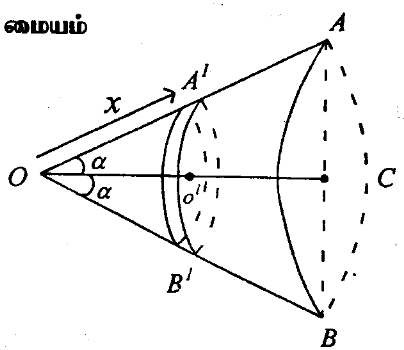
O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

$$\left[\int_0^h \pi\left((x\tan\alpha)^2\, dx\ w\right)\right] OG = \int_0^h \pi\ (x\tan\theta)^2\ d\,x\,w\cdot x$$

$$\pi\ \tan^2\alpha\ w\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h\ OG\ =\ \pi\ \tan^2\alpha\ w\ \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h$$

$$OG\ =\frac{3h}{4}$$

பொள் செவ்வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம்



பொள் செவ்வட்டக் கூம்பின் வட்ட அடியின் விட்டம் AB. மையம் Oஆகும். அடிக்குச் சமாந்தரமாக சிறிய வளையங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க.

சமச்சீரின்படி புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருக்கும்.

$OA^1 = x$ என்க.

சிறிய வளையம் $A^1O^1B^1$ இன் நிறை $=(2\pi\cdot x\sin\alpha)\delta x\cdot w$ $\quad OO^1 = x\cdot\cos\alpha$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

$$\left[\int_0^{\frac{h}{\cos\alpha}} 2\pi\ x\ \sin\alpha\cdot d\,x\cdot w\right]\cdot OG = \int_0^{\frac{h}{\cos\alpha}} (2\ \pi\ x\ \sin\alpha\ d\,x\,w)\cdot x\cos\alpha$$

$$2\pi\cdot\sin\alpha\ w\ \int_0^{\frac{h}{\cos\alpha}} x\ \ d\,x\cdot OG\ = 2\pi\ \sin\alpha\ \ \cos\alpha\cdot w\ \int_0^{\frac{h}{\cos\alpha}} x^2\ \ d\,x$$

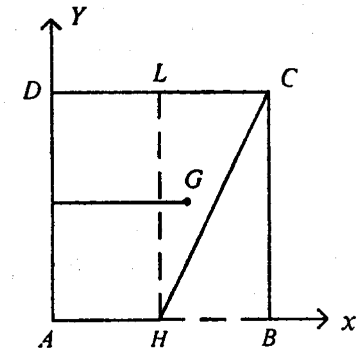
$$2\pi\sin\alpha\cdot w\cdot\frac{h^2}{2\cos^2\alpha}\cdot OG\ =\ 2\pi\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot w\ \frac{h^3}{3\cos^3\alpha}$$

$$OG\ =\ \frac{2}{3}\,h$$

உதாரணம் 1

$ABCD$ ஒரு சீரான சதுர அடர். H, AB யிலுள்ள ஒரு புள்ளி. CBH என்னும் பகுதி நீக்கப்படுகிறது. AD யிலிருந்து மீதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

மீதி தன் தளம் நிலைக்குத்தாய் இருக்குமாறும், AH ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தைத் தொடுமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $\dfrac{AH}{AB}$ ஆனது, $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ இலும் பெரிதாக இருந்தாலன்றி சமநிலை நிகழ முடியாது எனக் காட்டுக.



$AD = a\ \ ,\ \ AH\ =\ x$ என்க.

$AHCD$ யின் புவியீர்ப்பு மையம் G என்க.

$$G\ \equiv\ \left(\bar{x}, \bar{y}\right)$$

செவ்வகம் $AHLD$ யின் நிறை $= a\,x\,w$

AD யிலிருந்து தூரம் $\dfrac{x}{2}$ இல்

முக்கோணி HLC இன் நிறை $=\ \dfrac{1}{2}\,a\cdot(a-x)\,w$

இந் நிறையை H இல் $\dfrac{1}{6}\,a\,(a-x)\,w$ $\quad L$ இல் $\dfrac{1}{6}\,a\,(a-x)\,w,$

C இல் $\dfrac{1}{6}\,a\,(a-x)\,w$ எனக் கொள்ளலாம்.

AD பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$\left[axw + \frac{1}{2}a(a-x)w\right]\bar{x} = (axw)\cdot\frac{x}{2} + \left(\frac{2}{6}a(a-x)w\right)x + \left(\frac{1}{6}a(a-x)w\right)a$$

$$\left[6ax + 3a(a-x)\right]\bar{x} = 3ax^2 + 2ax(a-x) + a^2(a-x)$$

$$3a(a+x)\bar{x} = 3ax^2 + 2a^2x - 2ax^2 + a^3 - a^2x$$

$$3(a+x)\bar{x} = x^2 + ax + a^2$$

$$\bar{x} = \frac{x^2 + ax + a^2}{3(a+x)}$$

AH கிடைத்தளத்தை தொட்டவாறு அடர் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையிலிருக்க, $\bar{x} < x$ ஆதல் வேண்டும்.

$$\bar{x} = \frac{x^2 + ax + a^2}{3(a+x)} < x$$

$$x^2 + ax + a^2 < 3ax + 3x^2$$

$$2x^2 + 2ax - a^2 > 0$$

$$x^2 + ax - \frac{a^2}{2} > 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{3a^2}{4} > 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 > \frac{3a^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right) > \frac{\sqrt{3}\,a}{2}$$

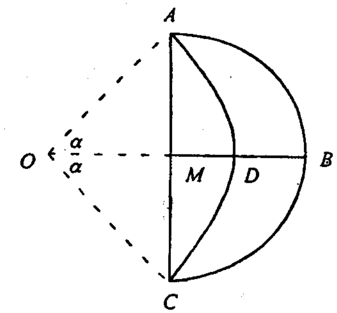
$$x > \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)a$$

உதாரணம் 2

ஒன்று ஓர் அரைவட்டமாயும் மற்றையது தன் மையத்தில் ஒரு கோணம் $2\alpha\,(<\pi)$ வை எதிரமைக்கும் ஒரு வட்ட வில்லாயும் உள்ள சீரான ஒரே கம்பியின் துண்டுகள் இரண்டு ஒரு பிறை வடிவத்தை ஆக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. புவியீர்ப்புமையம் உள் வில்லில் இருக்குமாறு α இருந்தால், அது

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)$$

என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.



ABC - அரைவட்ட வில்

வட்டமையம் - M

ADC - வட்டவில்

வட்ட மையம் - O

அரைவட்டவில், வட்டவில் என்பவற்றின் புவியீர்ப்புமையம் OB யிலிருப்பதால் சேர்த்திப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமும், OB யில் இருக்கும்.

$OA = a$ என்க. $OA = a$ எனின், $AM = a\sin\alpha$

ABC யின் நிறை $W_1 = (\pi a \sin\alpha)w$

$$OG_1 = OM + \frac{2}{\pi}a\sin\alpha$$

$$= a\cos\alpha + \frac{2}{\pi}a\sin\alpha$$

ADC யின் நிறை $W_2 = (a\,2\alpha)w$

$$OG_2 = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

$$(W_1 + W_2)\,OG = W_1 \cdot OG_1 + W_2 \cdot OG_2$$

$$(\pi a\sin\alpha + a2\alpha)w\cdot OG = (\pi a\sin\alpha\, w)\left(a\cos\alpha + \frac{2}{\pi}a\sin\alpha\right) + (a2\alpha\cdot w)\cdot\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

$OG = OD = a$ ஆதலால்,

$$(\pi a\sin\alpha + a2\alpha)w\cdot a = (\pi a\sin\alpha\, w)\left(a\cos\alpha + \frac{2}{\pi}a\sin\alpha\right) + (a2\alpha\cdot w)\cdot\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

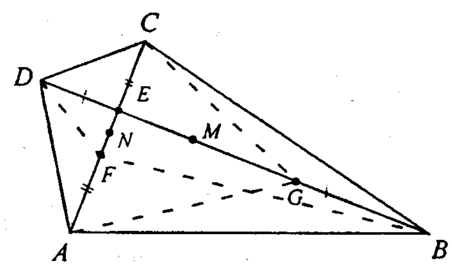
$$\pi\sin\alpha + 2\alpha = \pi\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha$$

$$\pi\sin\alpha\,(1-\cos\alpha) + 2\alpha = 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)$$

உதாரணம் 3

ABCD ஒரு நாற்பக்கல், AC, BD என்பன ஒன்றையொன்று E இல் வெட்டுகின்றன. AC, BD என்பவற்றில் F, G என்னும் புள்ளிகள் முறையே $AF = EC$, $BG = ED$ ஆகுமாறு எடுக்கப்பட்டுள்ளன. முக்கோணிகள் BFD, AGC என்பவற்றின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் ஒன்றோடொன்று பொருந்தும் எனக் காட்டுக.



$AF = EC$, $BG = DE$

$\Delta\, BFD$ இன் நிறை W_1 என்க.

இதனை

B இல் $\frac{W_1}{3}$ + F இல் $\frac{W_1}{3}$ +

D இல் $\frac{W_1}{3}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$= (B$ இல் $\frac{W_1}{3}$ + D இல் $\frac{W_1}{3}$ $) + F$ இல் $\frac{W_1}{3}$

$= M$ இல் $\frac{2W_1}{3}$ + F இல் $\frac{W_1}{3}$

[BD இன் நடுப்புள்ளி $M \Rightarrow EG$ இன் நடுப்புள்ளி M] ---------------- (1)

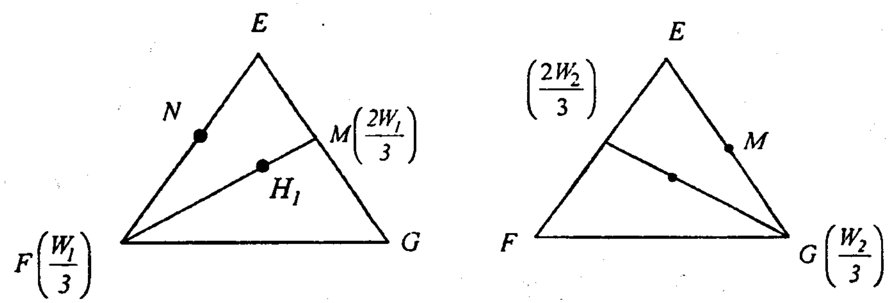
$\Delta\, GAC$ இன் நிறை W_2 என்க. இதனை

A இல் $\frac{W_2}{3}$ + C இல் $\frac{W_2}{3}$ + G இல் $\frac{W_2}{3}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$= (A$ இல் $\frac{W_2}{3}$ + C இல் $\frac{W_2}{3}$ $) + G$ இல் $\frac{W_2}{3}$

$= N$ இல் $\frac{2W_2}{3}$ + இல் G இல் $\frac{W_2}{3}$

[AC இன் நடுப்புள்ளி $N \Rightarrow EF$ இன் நடுப்புள்ளி N] ---------------- (2)



(1) இலிருந்து,

F இல் $\frac{W_1}{3}$ + M இல் $\frac{2W_1}{3}$ = H_1 இல் W_1 $\quad [FH_1 : H_1N = 2:1]$

(2) இலிருந்து,

G இல் $\frac{W_2}{3}$ + N இல் $\frac{2W_2}{3}$ = H_2 இல் W_2 $\quad [GH_2 : H_2N = 2:1]$

$H_1 \equiv H_2$; அதாவது $\Delta\, EFG$ இன் மையப்போலி

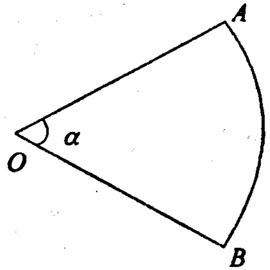
$\Delta\, BFD$ இனதும், $\Delta\, AGC$ இனதும் மையப்போலிகள் ஒன்றோடொன்று பொருந்தும்.

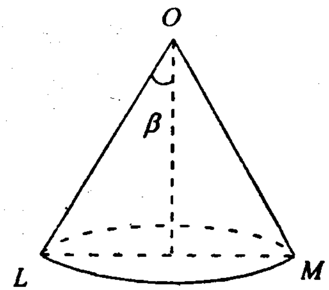
உதாரணம் 4

மையம் O ஆகவும், ஆரை r ஆகவுமுடைய ஒரு சீர்வட்ட அடரின் ஒரு பகுதி ஆரைச்சிறை OAB ஆகும். $\angle AOB = \alpha$ ஆகும். இவ்வாரைச்சிறை OA, OB என்பன ஒன்றாகப் பொருந்துமாறு செய்து ஒரு செவ்வட்டப் பொட்கூம்பு உருவாக்கப்படுகிறது. O இலிருந்து இப்பொட்கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{2r\cos\theta}{3}$ **எனக் காட்டுக.**

இங்கு $\sin\theta = \frac{\alpha}{2\pi}$ ஆகும்.

இப்பொட்கூம்பின் அடி, கூம்பின் நிறைக்குச் சமனான வட்டவடிவ தாள் ஒன்றினால் மூடப்படுகிறது. O விலிருந்து இத்தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{5r\cos\theta}{6}$ என நிறுவுக?





வில் AB யின் நீளம் $= r\alpha$

உருவாக்கப்பட்ட பொட்கூம்பின் ஆரை R என்க.

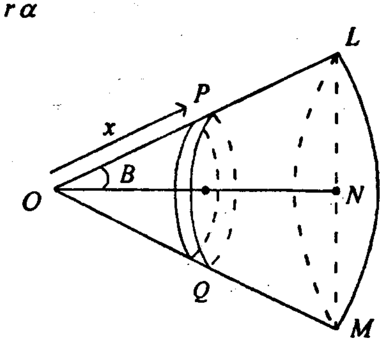
கூம்பின் அடியின் சுற்றளவு $= 2\pi R = r\alpha$

$$R = \frac{r\alpha}{2\pi}$$

$$r\sin\beta = \frac{r\alpha}{2\pi}$$

$$\sin\beta = \frac{\alpha}{2\pi}$$

எனவே $\beta = \theta$ (தரவின் படி)



சமச்சீரின் படி புவியீர்ப்பு மையம் ON இலிருக்கும்.

வளையம் PQ இன் நிறை $= (2\pi x\sin\beta)\,\delta x\, w$

O விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $= x\cos\beta$

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

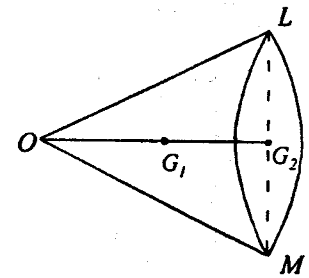
$$\left[\int_0^r (2\pi x\sin\beta)\,dx\cdot w\right] OG_1 = \int_0^r (2\pi x\sin\beta)\,dx\cdot w \times x\cos\beta\,dx$$

$$\int_0^r x\,dx\cdot OG_1 = \cos\beta\int_0^r x^2\,dx$$

$$\frac{r^2}{2}\cdot OG_1 = \frac{r^3}{3}\cdot\cos\beta$$

$$OG_1 = \frac{2}{3}r\cdot\cos\beta$$

$$= \frac{2}{3}r\cos\theta$$



கூம்பின் நிறை $= W_1 = \frac{1}{2}r^2\alpha w$ $\quad OG_1 = \frac{2}{3}r\cos\theta$

வட்டத்தட்டின் நிறை $= W_2 = \frac{1}{2}r^2\alpha w$ $\quad OG_2 = r\cos\theta$

O பற்றித்திருப்பம் எடுக்க,

$$(W_1 + W_2)\,OG = W_1\cdot OG_1 + W_2\cdot OG_2$$

$$W_1 = W_2$$

$$2\,OG = OG_1 + OG_2$$

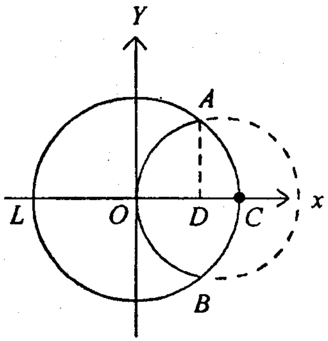
$$= \left(\frac{2}{3}r + r\right)\cos\theta$$

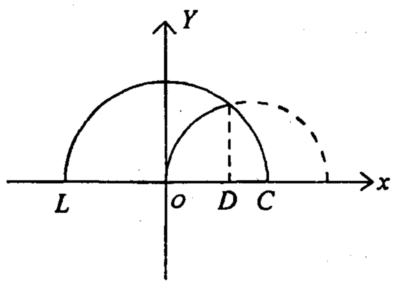
$$OG = \frac{5}{6}r\cos\theta$$

உதாரணம் 5

சீரான திண்மக் கோளமொன்று அதே ஆரையுடைய கோள மேற்பரப்பொன்றினால் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. கோள மேற்பரப்பின் மையம் திண்மக் கோளத்தின் மேற்பரப்பிலுள்ளது. இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பெரிய பகுதியின் திணிவு மையத்தைக் காண்க?

இப்பகுதி அதன் வட்ட விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றி சமநிலையில் தொங்க விடப்பட்டால் சமச்சீர் அச்சு கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ, $\tan\theta = \dfrac{16\sqrt{3}}{33}$ ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டுக?





$O \equiv (o,o)$

வட்டத்தின் ஆரை a

வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$x^2 + y^2 = a^2$, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

வில் AOB இன் மையம் C

$OD = DC = a/2$

$AD = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$

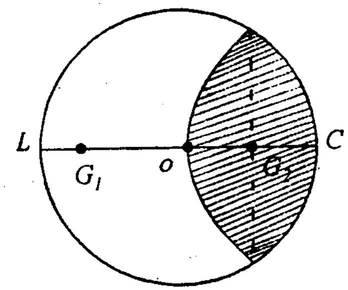
அரைவட்டமானது x அச்சுப் பற்றி 2π இனூடு சுழற்றப்பட கோளம் பெறப்படும்.

கோளத்தின் கனவளவு

$$\pi \int_{-a}^{+a} y^2\, dx$$

$$\pi \int_{-a}^{+a} \left(a^2 - x^2\right) dx$$

$$\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3}\pi a^3$$



சமச்சீர் அச்சு LOC

சிறிய பகுதியின் கனவளவு

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{a}{2}} a^2 - (x-a)^2\, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(a^2 - x^2\right) dx\right]$$

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{a}{2}} \left(2ax - x^2\right) dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \left(a^2 - x^2\right) dx\right]$$

$$= \pi \left[\left\{a x^2 - \frac{x^3}{3}\right\}_0^{\frac{a}{2}} + \left\{a^2 x - \frac{x^3}{3}\right\}_{\frac{a}{2}}^{a}\right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{24}\right) + \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{24}\right)\right]$$

$$= \frac{5\pi a^3}{12}$$

சிறிய பகுதியின் திணிவு $M_2 = \dfrac{5\pi a^3}{12} m$ (ஓரலகின் திணிவு $- m$)

பெரிய பகுதியின் சிணிவு $M_1 = \dfrac{4}{3}\pi a^3 m - \dfrac{5\pi a^3}{12} m = \dfrac{11\pi a^3}{12} m$

சமச்சீரின்படி திணிவு மையம் LOC இலிருக்கும்.

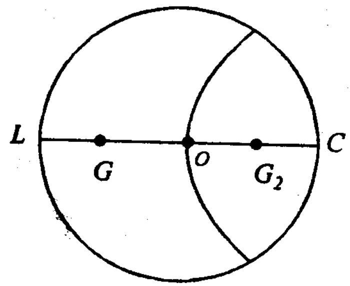
O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

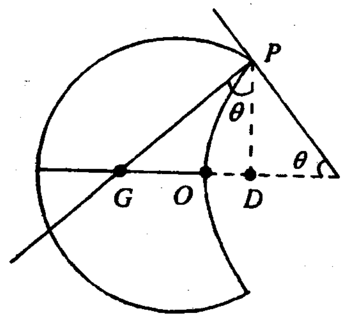
$$(M_1 + M_2)\,0 = M_1 \cdot OG_1 - M_2 \cdot OG_2$$

$$M_1 \cdot OG_1 = M_2 \cdot OG_2$$

$$\frac{11\pi a^3}{12} OG_1 = \frac{5\pi a^3}{12} \times \frac{a}{2}$$

$$OG_1 = \frac{5}{22} a$$





P இலிருந்து தொங்கவிடப்படின் *PG* நிலைக்குத்தாகும்.
கிடையுடன் சமச்சீர் அச்சு ஆக்கும் கோணம் θ ஆகும்.

$$\tan\theta = \frac{GD}{PD} = \frac{GO + OD}{PD} = \frac{\frac{5a}{22} + \frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

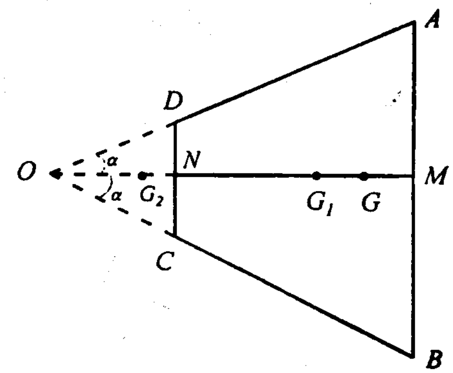
$$= \frac{16}{22} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{16}{11\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{33}$$

உதாரணம் 6

தன் அரை உச்சிக்கோணம் α ஆகவுள்ள சீரான செவ்வட்டக்கூம்பின் ஒரு அடித்துண்டு அச்சின் $\frac{1}{n}$ பங்கை வெட்டுவதால் (அடிக்குச் சமாந்தரமாக) பெறப்படுகிறது.

$\tan^2\alpha < \frac{1}{4}\,\frac{3n^4 - 4n^3 + 1}{n^3 - 1}$ எனின் . ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது வளைபரப்பு கிடக்க அந்த அடித்துண்டு ஓய்வில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.



$OM = h$ என்க.

$$ON = \frac{1}{n} h = \frac{h}{n}$$

\$ kG *OAB* இன் நிறை $= W_1 = \frac{1}{3}\pi\,(h\tan\alpha)^2 \cdot h \cdot w$

புவியீர்ப்பு மையம் G_1, $OG_1 = \frac{3}{4}h$

கூம்பு *OCD* இன் நிறை $= W_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{n}\tan\alpha\right)^2 \cdot \frac{h}{n} w$

புவியீர்ப்பு மையம் G_2. $OG_2 = \frac{3}{4}\frac{h}{n}$

துண்டு *ABCD* இன் நிறை $= W_1 - W_2$

இதன் புவியீர்ப்பு மையம் *OM* இலிருக்கும். *G* என்க.

N பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$(W_1 - W_2)\,NG = W_1 \cdot NG_1 - (-W_2 \cdot NG_2)$$

$$\frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha\, w\left[1 - \frac{1}{n^3}\right]\cdot NG = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha\, w \cdot \left[\frac{3h}{4} - \frac{h}{n}\right] - \frac{1}{3}\frac{\pi h^3 \tan^2\alpha}{n^3} w\left[-\frac{h}{4n}\right]$$

$$\left[1-\frac{1}{n^3}\right]\cdot NG = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^4}\right)h = \frac{3n^4-4n^3+1}{4n^4}\cdot h$$

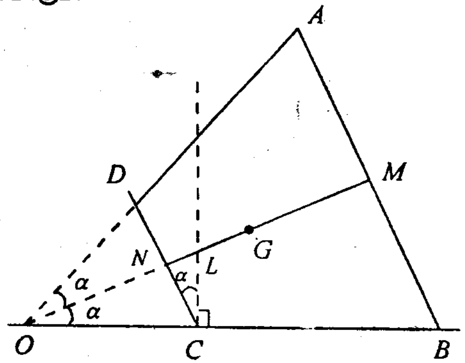
$$NG = \frac{3n^4-4n^3+1}{4n\left(n^3-1\right)}\,h$$

$NG > NL$ எனின், சமநிலை சாத்தியமாகும்.

$$NL = \frac{h}{n}\tan^2\alpha$$

$$\frac{h}{n}\tan^2\alpha < \frac{3n^4-4n^3+1}{4n\left(n^3-1\right)}\cdot h$$

$$\tan^2\alpha < \frac{3n^4-4n^3+1}{4\left(n^3-1\right)}$$



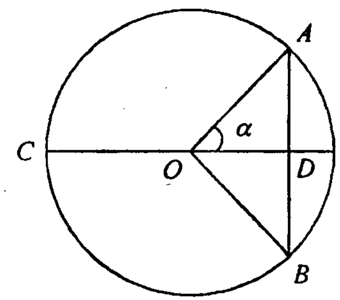
உதாரணம் 7

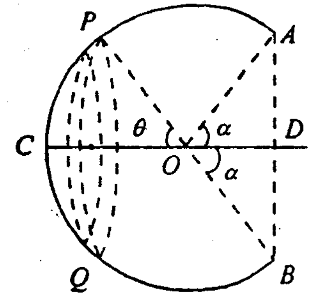
கிண்ணம் ஒன்று ஆரை r ஐ உடைய மெல்லிய சீர்க்கோள ஓட்டின் மையத்திலிருந்து தூரம் $r\cos\alpha$ இல் உள்ள தளத்தில் இருக்கும் வட்ட ஓரத்தைக் கொண்ட அவ்வோட்டின் பெரும்பகுதியின் வடிவத்தில் அமைந்துள்ளது.

(i) அலகுப் பரப்பளவுக்கான திணிவு σ எனின், கிண்ணத்தின் திணிவு $2\pi r^2\sigma(1+\cos\alpha)$ எனக் காட்டுக?

(ii) கிண்ணத்தின் திணிவு மையம் வட்ட ஓரத்தின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{r}{2}(1+\cos\alpha)$ இல் உள்ளது எனக் காட்டுக?

(iii) மேலே (i), (ii) ஆகியவற்றின் பேறுகளைப் பயன்படுத்தி ஆரை a யை உடைய சீர்த் திண்ம அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையத்தைக் காண்க?





சமச்சீரின்படி புவியீர்ப்பு மையம் G, COD இல் இருக்கும்.

AB க்கு சமாந்தரமான சிறிய வளையங்களாக கிண்ணத்தைக் கருதுக.

வளையம் PQ இன் திணிவு $= 2\pi r\sin\theta\cdot(r\delta\theta)\sigma$

O விலிருந்து திணிவு மையம் $= r\cos\theta$

மொத்த திணிவு $= \int_0^{\pi-\alpha} 2\pi r\sin\theta\cdot r\,d\theta\,\sigma$

$$2\pi r^2\sigma\int_0^{\pi-\alpha}\sin\theta\,d\theta = 2\pi r^2\sigma\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi-\alpha}$$

$$= 2\pi r^2\sigma(1+\cos\alpha) \quad \text{---------------(1)}$$

G - கிண்ணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க

$$2\pi r^2\sigma(1+\cos\alpha)\,OG = \int_0^{\pi-\alpha} 2\pi r\sin\theta\cdot r\,d\theta\,\sigma\cdot r\cos\theta$$

$$= \pi r^3\sigma\int_0^{\pi-\alpha}\sin 2\theta\,d\theta$$

$$= \pi r^3\sigma\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi-\alpha}$$

$$= \frac{\pi r^3 \sigma}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$OG = \frac{\pi r^3 (1 - \cos 2\alpha)}{4\pi r^2 (1 + \cos\alpha)}$$

$$= \frac{r \times 2\sin^2\alpha}{4(1 + \cos\alpha)}$$

$$= \frac{r}{2}\,\frac{1 - \cos^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{r}{2}(1 - \cos\alpha) \text{ --------------- } (2)$$

G கிண்ணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்

எனவே D யிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $= \frac{r}{2}(1 - \cos\alpha) + r\cos\alpha$

$$= \frac{r}{2}(1 + \cos\alpha)$$

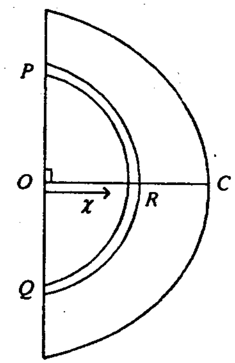
(1) இலிருந்து r ஆரையுள்ள பொள் அரைக்கோளத்தின்

திணிவு $= 2\pi r^2 \sigma \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi r^2 \sigma$

(2) இலிருந்து r ஆரையுள்ள பொள் அரைக்கோளத்தின் திணிவு மையம்

O விலிருந்து $= \frac{r}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{r}{2}$

a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் சமச்சீரின்படி OC யிலிருக்கும்.



திண்ம அரைக்கோளம் O வை மையமாகக் கொண்ட ஓடுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது என்க.

ஓடு PQ இன் திணிவு $(2\pi x^2 \delta x \sigma)$

O விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{x}{2}$

O பற்றி திருப்பம் எடுக்க,

$$\left[\int_0^a 2\pi x^2 dx\, \sigma\right] \cdot \bar{x} = \int_0^a \left(2\pi x^2 dx\, \sigma\right) \cdot \frac{x}{2}$$

$$2\pi\sigma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \cdot \bar{x} = \pi\sigma\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$\frac{2\pi a^3}{3}\sigma \cdot \bar{x} = \pi\sigma\frac{a^4}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8}a$$

உதாரணம் 8

விளையாட்டுப் பொருள் ஒன்று r ஆரையுடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளமொன்றையும் r ஆரையையும், h உயரமும் உடைய செவ்வட்டத் திண்ம கூம்பொன்றையும் கொண்டுள்ளது. இரண்டினதும் தள அடிகளும் ஒன்றாகப் பொருந்துமாறு இவை ஒட்டப்பட்டுள்ளன. அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி கூம்பினது அடர்த்தியின் k மடங்காகும். கூம்பின் உச்சி O விலிருந்து இக்கூட்டுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு

மையத்தூரம் $\dfrac{k(3r^2 + 8rh) + 3h^2}{4(2kr + h)}$ எனக் காட்டுக.

(a) பொது அடியின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட சமநிலையில் கூம்பின் அச்சு கீழ்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் கோணம் ϕ ஐ அமைக்கிறது எனின் $\tan\phi$ ஐக் காண்க.

(b) $h = 2r$ ஆகவும், அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பிலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் ஒப்பமான கிடைத்தளம் ஒன்றைத் தொட்டவண்ணம் இப்பொருள் சமநிலையில் இருக்குமெனின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

கூம்பின் அடர்த்தி ρ எனின், அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி $k\rho$ ஆகும்.

கூம்பின் நிறை $W_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rho g$

புவியீர்ப்பு மையம் G_1 . $OG_1 = \frac{3h}{4}$

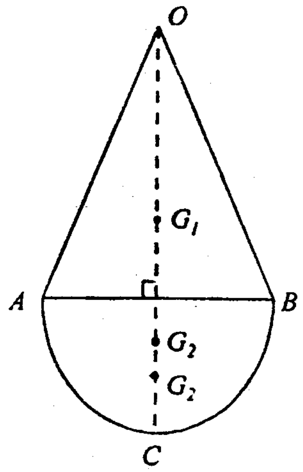
அரைக்கோளத்தின் நிறை

$$W_2 = \frac{2}{3}\pi r^3 k\rho g$$

புவியீர்ப்பு மையம் G_2

$$OG_2 = \left(h + \frac{3}{8}r\right)$$

புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது OG_1G_2C என்னும் நேர்கோட்டில் இருக்கும்.



O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$(W_1 + W_2)\,OG = W_1 \cdot OG_1 + W_2 \cdot OG_2$$

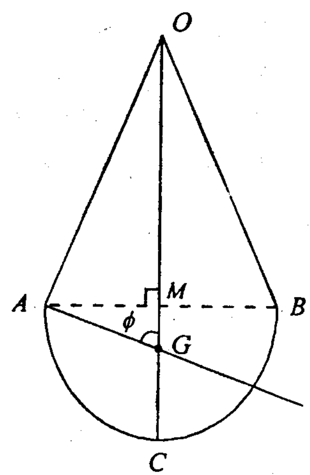
$$\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho g + \frac{2}{3}\pi r^3 k\rho g\right) OG = \frac{1}{3}\pi r^2 h\rho g \times \frac{3h}{4} + \frac{2}{3}\pi r^3 k\rho g\left(h + \frac{3}{8}r\right)$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \rho g\left[h + 2kr\right] OG = \frac{1}{3}\pi r^2 \rho g\left[\frac{3h^2}{4} + 2kr\left(h + \frac{3r}{8}\right)\right]$$

$$\left[h + 2kr\right] OG = \left[\frac{3h^2}{4} + 2kr\left(\frac{8h + 3r}{8}\right)\right]$$

$$OG = \frac{3h^2 + k\left(8rh + 3r^2\right)}{4\,(h + 2kr)} \text{ ---------- (1)}$$

(a) A யிலிருந்து தொங்கவிடப்படும்போது AG நிலைக்குத்தாக இருக்கும். AG கூம்பின் அச்சு OC யுடன் அமைக்கும் கோணம் ϕ என்க



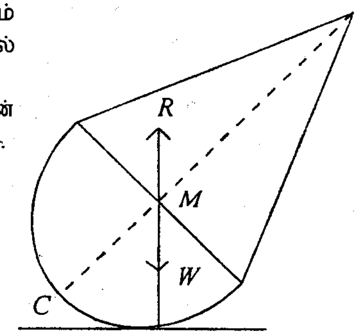
$$\tan\phi = \frac{AM}{MG} = \frac{r}{OG - h}$$

$$= \frac{r}{\dfrac{3h^2 + k\left(8rh + 3r^2\right)}{4\,(h + 2kr)} - h}$$

$$= \frac{4r\,(2kr + h)}{3h^2 + k\left(3r^2 + 8rh\right) - 4h(2kr + h)}$$

$$= \frac{4r\,(2kr + h)}{3kr^2 - h^2}$$

(b) அரைக்கோளத்தின் வளை பரப்பிலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி யும் கிடைத்தளம் ஒன்றைத் தொட்டவண்ணம் சமநிலையில் இருப்பதால் மறுதாக்கம் M இனூடு செல்லவேண்டும். அவ்வாறே பொருளின் நிறையும் M இனூடு செல்ல வேண்டும்.



$$OG = OM = h = 2r$$

$$OG = h = \frac{k\left(3r^2 + 8rh\right) + 3h^2}{4(2kr + h)}$$

$$2r = \frac{k\left(3r^2 + 16r^2\right) + 12r^2}{4(2kr + 2r)}$$

$$2 = \frac{19k + 12}{8(k + 1)}$$

$$16k + 16 = 19k + 12$$

$$4 = 3k$$

$$k = \frac{4}{3}$$

பயிற்சி - 10

புவியீர்ப்பு மையம்

1. $ABCD$ எனும் செவ்வக வடிவ அடரில் $AB = 12cm, AD = 8cm, E, AD$ இன் நடுப்புள்ளி CED எனும் முக்கோணப் பகுதி வெட்டியெடுக்கப்படுகிறது. மீதியின் புவியீர்ப்புமையத்தை AB, AE என்பவற்றிலிருந்து காண்க.

2. $ABCD$ $12cm$ பக்கமுள்ள ஒரு சதுரப்பலகை E என்னும் புள்ளி AC யில் D யிலிருந்து $3cm$ தூரத்தில் உள்ளது. முக்கோணி CED நீக்கப்படுகிறது. AB, AE என்பவற்றிலிருந்து மீதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

3. $ABCD$ ஒரு சீரான செவ்வகத் தட்டு. $AB = 80cm$, $BC = 120cm$ ஆகும். E, BC இன் நடுப்புள்ளி. முக்கோணி ABE தட்டிலிருந்து வெட்டி அகற்றப்பட்டபின் மீதிப்பகுதி A இலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. நிலைக்குத்துடன் பக்கம் AD இன் சாய்வைக் காண்க.

4. $ABCDEF$ a பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவிலுள்ள சீரான அட்டைத் தாள். முக்கோணி ABC ஐ வெட்டி முக்கோணி DEF மீது பொருத்தின் முழுவதினதும் புவியீர்ப்பு மையம் $\frac{2}{9}a$ தூரம் நகர்த்தப்படுகிறதென நிறுவுக.

5. $ABCD$ என்பது ஒரு சரிவக வடிவ சீரான அடர். இங்கு AB, DC சமாந்தரமானவை. AB, CD என்பவற்றின் நீளங்கள் முறையே a, b ஆகும். AB, CD என்பவற்றிற் கிடையேயான தூரம் h ஆகும். AB இலிருந்து அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$ எனக் காட்டுக.

6. சீரான முக்கோணி அடர் ABC இல் D, BC இன் நடுப்புள்ளி. முக்கோணியின் திணிவு மையத்தினூடாக BC இற்கு சமாந்தரமாக வரையப்படும் நேர்கோடு பக்கங்கள் AB, AC ஐ முறையே E, F இல் வெட்டுகிறது. நாற்பக்கல் $BEFC$ இன் புவியீர்ப்பு மையமானது D இலிருந்து $\frac{7}{45}AD$ தூரத்தில் AD இல் அமைக்கின்றதென நிறுவுக.

7. முக்கோணி ABC வடிவில் வளைத்த சீர்க்கம்பியானது A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A யினூடான நிலைக்குத்துக்கோடு BC ஐ D இல் சந்திப்பின் $\frac{BD}{DC} = \frac{a+b}{a+c}$ எனக் காட்டுக.

8. ABC ஒரு சீரான முக்கோணி அடர் $BD : DC = DE : EA = AF : FB$ ஆகுமாறு D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாகும். முக்கோணி ABC இன் புவியீர்ப்பு மையமும், முக்கோணி DEF இன் புவியீர்ப்புமையமும் ஒன்றென நிறுவுக.

9. $ABCD$ நாற்பக்கல் வடிவுடைய ஒரு சீரான அடர். AC, BD என்பன L இல் சந்திக்கின்றன. AC இலும் BD இலும் முறையே M, N என்னும் புள்ளிகள் $AM = CL$, $BN = DL$ ஆகுமாறுள்ளன. இந்நாற்பக்கலின் திணிவு மையம் முக்கோணி LMN இன் திணிவு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறதெனக் காட்டுக.

10. $18cm$ விட்டமுள்ள வட்டத்தட்டொன்றில் $6cm$ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரம் வெட்டப்பட்டுள்ளது. இத்துவாரத்தின் மையம் தட்டின் மையத்திலிருந்து $4cm$ தூரத்திலுள்ளது. தட்டின் மீதிப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

11. சீரான அரைவட்டத் தட்டொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. சீரான தடிப்புள்ள ஓர் உலோகத் துண்டு AC ஐ விட்டமாகக் கொண்ட அரைவட்டப்பகுதி ABC ஐயும் $AD = CD$ என்றவாறுள்ள முக்கோணிப்பகுதி ACD ஐயுமுடையது. தளம் $ABCD$ நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றின் மீது வைக்கப்படுமிடத்து உலோகத் துண்டானது வட்டவில்லின் எப்புள்ளியும் கிடைத்தளத்தைத் தொடுமாறு சமநிலையிலே தங்கிங்கியிருப்பதற்கு முக்கோணியின் உயரத்திற்கும், அரைவட்டத்தின் ஆரைக்குமிடையேயான விகிதத்தைக் காண்க.

12. வட்டவில் வடிவுள்ள சீரான கம்பியொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. சீரான அகலமும், தடிப்புமுள்ள ஒரு மெல்லிய உலோகத்துண்டின் ஒரு பகுதி r ஆரையுள்ள ஒரு பாதி உருளை வடிவில் வளைக்கப்பட்டு எஞ்சிய பகுதி பாதி உருளையின் ஒரு விளிம்பின் வழியே அதற்குத் தொடலியாகவுள்ள l நீளமான தட்டைத் துண்டாகும். $l, 2r$ இலும் பெரியதெனின் அப்பொருளானது தட்டையான துண்டு கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுமாறு தங்கியிருக்கக் கூடியதெனக் காட்டுக.

13. யைம் O ஆகவும், ஆரை r ஆகவுமுடைய ஒரு சீர் வட்டஅடரின் ஒரு பகுதி ஆரைச் சிறை OAB ஆகும். $\angle AOB = \alpha$ ஆகும். இவ்வாரைச சிறை OA, OB என்பன ஒன்றாகப் பொருந்துமாறு செய்து ஒரு செவ்வட்டப் பொட் கூம்பு உருவாக்கப்படுகிறது. O விலிருந்து இப்பொட் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத் தூரம் $\frac{2r\cos\theta}{3}$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $\theta = \frac{\alpha}{2\pi}$ ஆகும். இப்பொட்கூம்பின் அடி பொட் கூம்பின் நிறைக்குச் சமமான வட்டவடிவமான தாள் ஒன்றினால் மூடப்படுகிறது. O விலிருந்து இத்தொகுதியின் புவியீர்ப்புமையம் $\frac{5r\cos\theta}{6}$ என நிறுவுக.

14. r ஆரையுள்ள மெல்லிய சீர் அரைக்கோளக் கிண்ணமொன்று அதே பொருளினாலான்தும் அதே தடிப்பும் அதே ஆரையுடையதுமான ஒரு வட்ட அடியின் மீது நிற்கிறது. இவற்றினிடைப்படும் தண்டின் நீளம் கிண்ணத்தின் ஆரைக்குச் சமம். அதன் நிறை அக்கோளத்தின் நிறையிற் காற்பங்கு. புவியீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து தண்டின் நீளத்தின் $\frac{13}{14}$ பங்கு உயரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

15. a ஆரையுடைய ஒரு சீர் அரைவட்டக் கோலின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. a ஆரையுடைய ஒரு வட்டத் தட்டு ஒரு விட்டத்தினால் இரண்டாக வெட்டப்படுகிறது. இதன் ஓரலகு பரப்பின் திணிவு σr. இங்கு σ ஒரு மாறிலி. r மையத்திலிருந்துள்ள தூரம் ஆகும். வட்டத்தட்டின் ஒரு பாதியினது புவியீர்ப்பு மையத் தூரத்தைக் காண்க.

16. ஒரு திண்மக் கூம்பானது அடர்த்தி ρ உம்; ஆரை r உம் உயரம் $4r$ உம் கொண்டது. இக் கூம்பானது ஆரை r உம் அடர்த்தி σ உம் உள்ள ஒரு அரைக்கோளத்துடன் தளமுகங்கள் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. முழுத்திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையமானது பொதுத் தளப்பரப்பிலிருந்து $\frac{r}{8}\left[\frac{16\rho - 3\sigma}{2\rho + \sigma}\right]$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

$\rho = \sigma$ எனின், இத் திண்மமான பொதுத் தளப்பரப்புள்ள விளிம்பில் ஓர் இழையால் கட்டித் தொங்கவிடப்படும் போது கூம்பின் அச்சு நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{24}{13}\right)$ என நிறுவுக.

17. $2\alpha\,(<\pi)$ எனும் கோணத்தை மையத்தில் அமைக்கும் வட்டவில்லொன்றின் வடிவத்திற்கு வளைக்கப்பெற்ற சீரான கம்பியொன்றின் ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

சீரான ஒரே கம்பியின் இரு துண்டுகளில் ஒன்று அரைவட்டமாகவும் மற்றையது $2\theta\,(<\pi)$ எனும் கோணத்தை மையத்தில் அமைக்கின்ற வட்டவடிவ வில்லாகவும் அமைந்திருக்க இரண்டும் ஒரு பிறை வடிவத்தை உண்டாக்கும் வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இப்பிறையின் புவியீர்ப்பு மையமானது உட்பக்கவில்லில் இருப்பின் θ ஆனது, $2\sin\theta\,(1+\sin\theta) = 2\theta + \pi\sin\theta\,(1-\cos\theta)$ எனும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துகிறதெனக் காட்டுக

18. r ஆரையைக் கொண்ட சீரான அரை வட்ட அடர் ஒன்றின் திணிவு மையம் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{4r}{3\pi}$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

h உயரமும் அடியின் ஆரை a உம் உள்ள சீரான திண்ம செவ்வட்டக கூம்பு ஒன்று ஒரு தளத்தினால் அதன் அச்சுக்கு ஊடாக இரு பாதிகளாக வெட்டப்படுகிறது. பாதிகளில் ஒன்று கூம்பின் அடி அரைப்பங்காக உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படுகிறது. இதன் அடியானது கிடையோடு அமைக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{4a}{\pi h}\right)$ எனக் காட்டுக.

19. பின்வருவனவற்றின் திணிவு மைய நிலையைக் காண்க.

(i) a எனும் ஆரையுள்ளவொரு சீரான திண்ம அரைக்கோளம்

(ii) h எனும் உயரமுள்ளவொரு சீரான திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பு

a எனும் ஆரையுள்ள அரைக்கோளமொன்றையும் அதன் தளஅடியின் மேல் பொருத்தப்பட்டுள்ள h எனும் உயரமும் a எனும் அடி ஆரையுள்ள செவ்வட்டக்

கூம்பொன்றையும் கொண்டமைந்த சீரான திண்மப் பொருளொன்று அரைக் கோளமானது மேசையுடன் தொடுகையிலிருக்கும் வண்ணம் கரடான கிடை மேசையொன்றின் மேல் ஓய்விலுள்ளது. இத் திண்மப் பொருளின் சமநிலைத்தானமானது உறுதியானது அல்லது உறுதியற்றதென்பதற்கேற்ப h ஆனது $a\sqrt{3}$ இலும் சிறிது அல்லது பெரிது எனக் காட்டுக.

20. அரைக்கோளமொன்று அரை உச்சிக் கோணம் 2α உடைய செவ்வட்டக் கூம்பொன்றும் ஒரு பொதுவான வட்ட அடி வழியே அடியின் எதிர்ப்பக்கங் களிலமையுமாறு இணைக்கப்பட்டு உருவாகும் வடிவத்திலே சீரான மெல்லிய பொருளினால் ஒரு பொள்ளுடல் அமைக்கப்படுகிறது.

$6\cos\alpha = \sqrt{37} - 1$ எனின், அரைக்கோளப் பரப்பிலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியும் ஒப்பமான ஒரு கிடைத்தளத்தைத் தொட்டவண்ணம் அந்த உடலானது சமநிலையில் நிற்குமெனக் காட்டுக.

21. a ஆரையுடைய ஒரு அரைவட்டத் தள அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் அதன் மையத்திலிருந்து $\dfrac{4a}{3\pi}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

$2a$ ஆரையுடையதும் O வை மையமாக உடையதுமான ஒரு அரைவட்ட அடரின் அடியானது AOB ஆகும். அடியை AO ஆகவும், ஆரை a ஆகவும் கொண்ட ஒரு அரைவட்ட அடர் இதிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதி A இல் தொங்கவிடப்படின் சமநிலையில் AOB இன் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3\pi}\right)$ என நிறுவுக.

22. ஒரு திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையைக் காண்க. ஒரு செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பின் ஒரு பகுதி h உயரமுடையது. இதன் வட்ட முகங்கள் a, b ஆரைகளை உடையன. $(b > a)$. இக்கூம்பு a ஆரையுள்ள வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கட்டித் தொங்கவிடப்பட்டால் அச்சு நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் θ பின்வரும் சமன்பாட்டினால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

$$\left(a^2 + 2ab + 3b^2\right) h\tan\theta = 4a\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

23. 2α கோணத்தையுடைய a ஆரையுடைய வட்ட ஆரைச் சிறையின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்டமையத்திலிருந்து $\dfrac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

இவ்வட்டத்தின் காற்பங்கின் வில் PQ ஆகும்;. P, Q இலுள்ள தொடலிகள் T இல் சந்திக்கின்றன. PT, QT என்பவற்றாலும் வில்; PQ ஆலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தை வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து காண்க.

24. a ஆரையுடைய சீரான அரைவட்ட அடரின் புவியீர்ப்பு மையம் வட்ட அடரின் மையத்திலிருந்து $\dfrac{4a}{3\pi}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

ACB என்பது a ஆரையுடைய ஒரு சீரான அரைவட்ட அடர். AOB விட்டமாகவும் OC, AB இற்குச் செங்குத்தான ஆரையாகவுமுள்ளது. இவ்வரை வட்ட அடரிலிருந்து $OPQR$ எனும் சதுரப்பகுதி ஒன்று வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. புள்ளி P, OB இல் $OP = \dfrac{a}{2}$ ஆகுமாறு உள்ளது. மீதிப்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தை OA, OC என்பவற்றிலிருந்து காண்க.

இதிலிருந்து இம் மீதிப்பகுதி A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டால் சமநிலையில் AB நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தின் தான் ½ இலும் சற்றுக் குறைவான தெனக் காட்டுக.

25. W நிறையும் a ஆரையுமுடைய சீரான திண்ம அரைக் கோளமொன்றின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு இழையொன்றின் நுனி இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறுமுனை ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு சுவரைத் தொட்ட வண்ணம் சமநிலையில் ஓய்கிறது. சுவரினால் அரைக்கோளத்தின் மீதான மறுதாக்கம் $\dfrac{3W}{8}$ ஆகும். நிலைக்குத்துடன் தளமுகத்தின் சாய்வைக் காண்க. இழையின் நீளம் $\dfrac{2}{15}a\sqrt{73}$ எனக் காட்டுக.

26. மெல்லிய சீரான அரைக்கோள ஓடு ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையம் சமச்சீரான ஆரையில் அதன் நடுப்புள்ளியில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

W நிறையுடைய மெல்லிய அரைக்கோள ஓடொன்று அதன் வளைபரப்பு

கிடைத்தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணமுள்ளது. விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு $\frac{W}{2}$ நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத் தானத்தில் விளிம்பையுடைய தளம் நிலைக்குத்துடன் $45°$ அமைக்கின்றதெனக் காட்டுக.

a ஆரையுடைய திண்ம அரைக்கோளமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம், அதன் தளமுகத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{3}{8}a$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

சீரான சதுரமுகி ஒன்றின் ஒருமுகம், சீரான அரைக் கோளமொன்றின் அடியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பொருத்தப்பட்ட சதுரமுகியின் முகத்தின் மூலைவிட்டம், அரைக்கோளத்தின் அடியின் விட்ட மொன்றாக அமைந்துள்ளது. அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி ρ_1 சதுரமுகியின் அடர்த்தி ρ_2 ஆகும். இணைக்கப்பட்ட திண்ம உரு அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பின் எந்த ஒரு புள்ளியும் கிடைத்தளத்தைத் தொட்டவண்ணம் சமநிலையிலிருப்பின் $\pi \rho_1 = 8\rho_2$ எனக் காட்டுக.

28. திண்ம செவ்வரியம் ஒன்றின் மத்திய குறுக்கு வெட்டு சரிவகம் $ABCD$ ஆகும். இங்கு A உம் D உம் செங்கோணங்கள். $AD = CD = a$; $AB = b$ ஆகும். இத்திண்ம அரியத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை AB, AD என்பவற்றிலிருந்து காண்க.

AB யினூடான முகம் கிடைத்தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணம் சமநிலையில் ஓய்வதற்கு $\frac{b}{a}$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ எனக் காட்டுக.

புறக்கணிக்கத்தக்க தடிப்பும் பரப்படர்த்தி ρ உம் உடைய சீ உலோகத்தினால் செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. இக் கூம்பு σ பரப்படர்த்தியும் கூம்பின் வட்ட விளிம்பின் ஆரைக்குச் சமனான ஆரையுடைய அரைக் கோளமொன்றுடன் இருவிளிம்புகளும் பொருந்துமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பாத்திரம் கூம்பின் பிறப்பாக்கி ஒன்று ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணம் மட்டுமட்டாகச் சமநிலையிலுள்ளது. கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் α ஆனது,

$\rho\left(\cot^2\alpha + 3\right) = 3\sigma\left(\cos\alpha - 2\sin\alpha\right)$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படு மெனக் காட்டுக.

30. மெல்லிய சீரான பொள் அரைக் கோளமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

இவ்வரைக் கோளம் தன் வளைபரப்பு கிடையுடன் சாய்வுடைய தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணம் சமநிலையிலுள்ளது. தளத்தின் உராய்வு வழுக்குதலைத் தடுக்கப்போதுமானதெனக் கொண்டு $\alpha \leq 30°$ என நிறுவுக.

31. வெளி ஆரை a ஆகவும், உள் ஆரை b ஆகவும் கொண்ட சீரான அரைக்கோள ஓட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் மைத்திலிருந்து $\frac{3}{8}\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

இதிலிருந்து
(i) a ஆரையுடைய திண்ம அரைக்கோளமொன்றின்
(ii) a ஆரையுடைய பொள் அரைக்கோளமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

32. சீரான திண்மக் கோளமொன்று அதே ஆரையுடைய கோள மேற்பரப்பொன்றினால் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. கோளமேற்பரப்பின் மையம் திண்மக் கோளத்தின் மேரப்பிலுள்ளது. இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பெரிய பகுதியின் திணிவு மையத்தைக் காண்க.

இப்பகுதி அதன் வட்டவிளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றி சமநிலையில் தொங்கவிடப்பட்டால் சமச்சீர் அச்சு கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் θ,

$\tan\theta = \frac{16\sqrt{3}}{33}$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

33. $ABCD$ ஒரு சீரான செவ்வக அடர். $AB = p$, $BC = 3p$. AD இல் E எனும் புள்ளி $ED = 3q$ ஆகுமாறு உள்ளது. சரிவகம் $ABCD$ இன் புவியீர்ப்பு மையம் AB யிலிருந்து $\frac{3p^2 - 3pq + q^2}{2p - q}$ தூரத்தில் உள்ளதெனக் காட்டி BC யிலிருந்து புவியீர்ப்புமையத் தூரத்தைக் காண்க. இச்சரிவகம் E யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட BC கிடையாக உள்ளது.

$q = \frac{1}{2}p\left(3 - \sqrt{3}\right)$ என நிறுவுக.

34. $ABCD$ ஒரு சரிவக வடிவமான அடர். AB, DC இற்கு சமாந்தரமாகவும் $AB = 2a$ $CD = a$, $AD = h$, கோணம் BAD 90° ஆகுமாறும் உள்ளது. AD, AB என்பவற்றிலிருந்து அடரின் புவியீர்ப்புமையத் தூரத்தைக் காண்க. இவ்வடர் அதன் விளிம்பு BC, கிடைமேசையைத் தொட்டவண்ணம் நிலைக்குத்தாக வைக்கப்படுகிறது. அடர் இந்நிலையில் கவிழாது சமநிலையிலிருக்க h இன் இழிவுப் பெறுமானத்தை a இல் காண்க.

35. $ABCD$ என்பது $3m$ பக்கமுடைய சதுரவடிவுடைய சீரான உலோக அடர் ஆகும். E, F எனும் புள்ளிகள் முறையே AB, BC என்பவற்றில் $BE = BF = xm$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. BEF எனும் பகுதி வெட்டி அகற்றப்படுகிறது. மீதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தை AD யிலிருந்து காண்க. இம்மீதி AE ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீதும் AD நிலைக்குத்தாகவும் சமநிலையிலிருக்க $2x^3 - 54x + 81 \geq 0$ ஆயிருத்தல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

$x = 2$ ஆகவும், மிதிப்பகுதியின் திணிவு $14Kg$ ஆகவுமிருப்பின் இந்நிலையில் சமநிலை சாத்தியமாவதற்கு C இல் பிரயோகிக்க வேண்டிய கிடை விசையின் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தை நியூற்றனில் காண்க.

36. W நிறையுடைய சீரான நாற்பக்கல் வடிவ அடர் $ABCD$ இன மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்பன O இல் செங்கோணத்தில் இடை வெட்டுகின்றன. இங்கு $2AO = OC = 2b$, $Ob = OD = a$. அடரின் புவியீர்ப்பு மையம் OC யிலிருக்குமெனக் காட்டி O விலிருந்து தூரத்தைக் காண்க. இவ்வடர் CD ஒரு கிடைமேசையைத் தொட்டவண்ணம் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு உச்சி A இல் kW நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. $a < b\sqrt{2}$ எனவும், அடர் தன் தளத்தில் கவிழும் தறுவாயிலும் உள்ளதெனவும் தரப்படின் k இன் பெறுமானத்தை a, b இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

37. சீரான முக்கோண அடரொன்றின் புவியீர்ப்பு மையமும் அதன் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்ட மூன்று சமதுணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றாகுமெனக் காட்டுக.

w நிறையுடைய ஒரு சீரான அடர் நாற்பக்கல் $ABCD$ வடிவுடையது. மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்பன P இல் சந்திக்கின்றன. $AP < PC$, $BP < PD$. Q, R எனும் புள்ளிகள் முறையே AC, BD என்பவற்றில் $QC = AP$, $RD = BP$ ஆகுமாறு உள்ளன. ABD, BCD முக்கோணங்களை சமவலுவுடைய துணிக்கைகளால் பிரதியீடு செய்வதன் மூலமோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ, அடரின் புவியீர்ப்பு மையமும் Q வில் வைக்கப்பட்ட $\frac{w}{3}$ நிறையுடைய துணிக்கையினதும் BD இன் நடுப்புள்ளியில் வைக்கப்பட்ட $\frac{2w}{3}$ நிறையுடைய துணிக்கையினதும் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றாகுமெனக் காட்டுக. முழு அடரினதும் புவியீர்ப்பு மையமும் முக்கோணி PQR இன் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றாகுமென உய்த்தறிக.

38. சீரான செவ்வக வடிவ அடர் $ABCD$ இல் $AB = 4a$, $BC = 3a$ ஆகும். CD இல் E எனும் புள்ளி $CE = \lambda a$ ஆகுமாறு அமைந்துள்ளது. BCE எனும் பகுதி வெட்டி அகற்றப்பட்டுள்ளது. மீதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரத்தை AD, AB என்பவற்றிலிருந்து காண்க. இம்மீதி A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்க விடப்பட்ட போது AM நிலைக்குத்தாக இருக்க சமநிலையடைந்தது. M, BE இன் நடுப்புள்ளி ஆகும். λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

39. சீரான அடரொன்றில் $AB = BC = 2a$ ஆகவும், $AC = 2\sqrt{2a}$ ஆகவும் முககோணி ABC வரையப்பட்டுள்ளது. BC ஐ விட்டமாகக் கொண்டு முக்கோணிக்கு எதிர்ப்பக்கத்தில் அரைவட்டமொன்று வரையப்பட்டுள்ளது. முக்கோணியினாலும் அரைவட்டத்தினாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. இப்பகுதி B இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட AB நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(2 + \frac{3\pi}{4}\right)$ எனும் கோணத்தை அமைக்குமெனக் காட்டுக.

இப்பொழுது AB இல் P எனும் புள்ளி எடுக்கப்பட்டு முக்கோணி APC வெட்டி அகற்றப்படுகிறது. மீதிப்பகுதி BC நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு தொங்குகிறது. நீளம் BP ஐக் காண்க.

40. A ஐ மையமாகவும் R ஆரையாகவும் கொண்ட சீரான வட்ட அடரொன்றிலிருந்து B ஐ மையமாகவும் r ஆரையாகவும் கொண்ட துளை வெட்டி அகற்றப்படுகிறது. இங்கு $r < R$. $AB = R - r$ ஆகவும், துளையிடப்பட்ட அடரின் புவியீர்ப்புமையம் A யிலிருந்து $\frac{4r}{9}$ தூரத்திலுமிருப்பின் $R = \frac{5r}{4}$ எனக் காட்டுக.

41. α அரை உச்சிக்கோணமும் h உயரமுமுடைய சீரான திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து $\frac{3h}{4}$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

இக்கூம்பினை அடிக்கு சமாந்தரமான தளத்தினால் உச்சியிலிருந்து $\frac{1}{2}h$ தூரத்தில் வெட்டுவதால் கூம்பின் துண்டம் பெறப்படுகிறது. பெரிய தள அடியிலிருந்து இத்துண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{11h}{56}$ எனக் காட்டுக.

இத்துண்டம் தன்வளைபரப்பு கிடை மேசையொன்றைத் தொட்ட வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $45\cos^2\alpha \geq 28$ ஆக இருந்தாலன்றி சமநிலை சாத்திய மில்லை எனக் காட்டுக.

42. சீரான திண்ம உரு ஒன்று $3r$ ஆரையையும் $4r$ உயரத்தையுமுடைய செவ்வட்டக் கூம்பொன்றையும் அதனடியுடன் பொருத்தப்பட்ட $3r$ ஆரையையும் $6r$ உயரத்தையு முடைய உருளையையும் கொண்டுள்ளது. இவ்வுருவின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் கண்டு கூம்பின் வளைபரப்பு கிடைத்தளமொன்றைத் தொட்ட வண்ணம் சமநிலையிலிருக்க முடியாது என உய்த்தறிக.

43. a ஆரையுடைய வட்ட அடரின் ஆரைச் சிறை AOB இன் புவியீர்ப்பு மையம் O விலிருந்து $\frac{2a\sin\theta}{3\theta}$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக. கோணம் $AOB = 2\theta$ ஆகும்.

$\theta = \frac{\pi}{6}$ எனத்தரப்படின் AB ஐ நாணாகக் கொண்ட வட்டத் துண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

இத்துண்டம் A இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படின் AB, கீழ் நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{11 - 2\pi\sqrt{3}}{2\pi - 3\sqrt{3}}\right)$ எனக் காட்டுக.

44. W நிறையுடைய ஒரு சீரான முக்கோண வடிவ அடர் ABC இல் $AB = AC = 2a$ கோணம் $BAC = 2\alpha$. பக்கம் AB ஆனது a ஆரையுடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளத்தின் விட்டமொன்றின் வழியே பொருந்துமாறு இணைக்கப் பட்டுள்ளது. முக்கோண அடரின் தளம் அரைக்கோளத்தின் தள அடிக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இவ்வுடல் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு ஒரு கிடைத்தளத்தைத் தொட்டவண்ணம் BC நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு சமநிலையிலுள்ளது. அரைக்கோளத்தின் நிறை $\frac{8}{9}W\cot\alpha$ எனக் காட்டுக. AB யில் $AP = \frac{2}{3}a$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி P இற்கு W நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொழுது BC யின் நடுப்புள்ளி A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே இருக்குமாறு சமநிலையடைகிறது. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

45. h உயரமுடைய திண்ம செவ்வட்ட சீரான கூம்பொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அடியிலிருந்து $\frac{1}{4}h$ தூரத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

திண்ம செவ்வட்ட உருளையொன்றிலிருந்து r ஆரையும் h உயரமுடைய செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று துளையிடப்பட்டு அகற்றப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் அடி செவ்வட்ட உருளையின் அடியுடன் பொருந்துகிறது. கூம்பின் உச்சி O உருளையின் எதிர்ப்பக்க அடியின் நடுப்புள்ளியிலுள்ளது. துளையிடப்பட்ட உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் O விலிருந்து $\frac{3h}{8}$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

இத்துளையிடப்பட்ட உருளை O மேனோக்கி இருக்குமாறு கிடைத்தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. தளம் படிப்படியாக சரிக்கப்படுகிறது. தளத்தின் உராய்வு வழுக்குதலைத் தடுக்கப்போதுமானதெனக் கொண்டு தளத்தின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{8r}{5h}\right)$ இலும் அதிகரிப்பின் உருளை கவிழுமெனக் காட்டுக.

46. விளையாட்டுப் பொருளொன்று r ஆரையுடைய சீரான திண்ம அரைக்கோள மொன்றையும், r ஆரையும் h உயரமுமுடைய செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பொன்றையும் கொண்டுள்ளது. இரண்டினது தள அடிகளும் ஒன்றாகப் பொருந்துமாறு இவை ஒட்டப்பட்டுள்ளன. அரைக்கோளத்தின் அடர்த்தி கூம்பினது அடர்த்தியிலும் k மடங்காகும். கூம்பின் உச்சி O விலிருந்து இக் கூட்டுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தூரம் $\frac{k(3r^2 + 9rh) + 3h^2}{4(2kr + h)}$ எனக் காட்டுக.

(a) பொது அடியின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இப்பொருள் தொங்கவிடப்பட சமநிலையில் கூம்பின் அச்சுக் கீழ்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் கோணம் ϕ ஐ அமைக்கிறது எனின், $tan\phi$ ஐக் காண்க.

(b) $h = 2r$ ஆகவும் அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பிலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றைத் தொட்டவண்ணம் இப்பொருள் சமநிலையிலிருக்குமெனின் k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

47. சீரான மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

ஒரு சீரான செங்கோண ஆப்பு அதன் ஒரு முகம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு கரடான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது நிற்கிறது. a ஆரையுடைய சீரான மெல்லிய சுவரையுடைய அரைக்கோளக் கிண்ணமொன்று அதன் வளைந்த மேற்பரப்பு ஆப்பின் நிலைக்குத்தான முகத்தைத் தொடுமாறும் கிண்ணத்தின் விளிம்பு அம்முகத்திற்குச் சமாந்தரமான நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருக்குமாறும் ஓய்கிறது. கிண்ணத்தின் நிறை ஆப்பின் நிறைக்குச் சமமாகவும் கிண்ணத்திற்கும் ஆப்பிற்குமிடையேயான தொடுகை அழுத்தமானதாகவுமிருப்பின் ஆப்பு கவிழாமல் இருக்க வேண்டுமெனின் அதன் கிடையான முகம் ஒன்று எவ்வளவு அகலமாக இருக்க வேண்டுமெனக் காண்க.

48. சீரான h உயரமுள்ள திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அடியின் மையத்திலிருந்து $\frac{h}{4}$ தூரத்திலிருக்கும் என்பதை தொகையீடு மூலம் காண்க.

தள அடி ஒன்றைக் கொண்ட சீரான கூம்பு வடிவ ஓடு ஒன்றின் புறமேற்பரப்பும் உள்மேற்பரப்பும் பொது அச்சைக் கொண்ட செவ்வட்டக் கூம்புகளாகும். புறமேற்பரப்பினது உயரமும், அடி ஆரையும் முறையே $117cm$ உம் $30\ cm$ உம் ஆகும். உள் மேற்பரப்பின் உயரமும் அடி ஆரையும் முறையே $39cm$ உம் $10cm$ உம் ஆகும். ஓட்டின் புற மேற்பரப்பின் அடியின் AB எனும் விட்டமொன்றின் மையம் O ஆகும். ஒரு நுனி புள்ளி A யிலும் மற்றைய நுனி ஒரு நிலையான புள்ளியிலும் தொடுக்கப்பட்ட நீட்டமுடியாத இழை ஒன்றினால் ஓடானது தொங்கவிடப்படுகிறது. ஓடு சமநிலையில் தொங்கினால் AB என்பது நிலைக்குத்துடன் கோணம் $45°$ அமைக்குமெனக் காட்டுக.

49. ஆரை a உடைய ஒரு சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் திணிவு மையமானது தளமுகத்தின் மையம் O விலிருந்து $\frac{3}{8}a$ தூரத்திலிருக்குமெனத் தொகையீட்டு முறை மூலம் காட்டுக.

அரைக் கோளமானது P எனும் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து இரு இழைகளினால் தொங்குகின்றது. ஒரு இழை O விலும் மற்ற இழை தளமுகத்தின் ஓரத்திலுள்ள Q எனும் புள்ளி ஒன்றிலும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. $PO = PQ = \frac{5\sqrt{2a}}{2}$ எனத் தரப்படுமாயின் OQ ஆனது கிடையுடன் கோணம் $tan^{-1}\left(\frac{4}{31}\right)$ ஐ அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

50. மையம் O உம் r எனும் ஆரையும் α எனும் கோணமும் கொண்ட வட்ட ஆரைச்சிறை வடிவிலுள்ள ஒரு தாள் துண்டு AOB யின் ஓரம் OA யானது OB யுடன் பொருத்தப்பட்டு செவ்வட்டக் கூம்பு ஒன்று உருவாக்கப்படுகிறது. கூம்பின் திணிவு மையமானது O விலிருந்து $\frac{2}{3} r\cos\theta$ எனும் தூரத்திலுள்ளது என நிறுவுக.

இங்கு $\sin\theta = \frac{\alpha}{2\pi}$. மேற்குறிப்பிட்ட கூம்பினது அதே திணிவும் வட்ட வடிவமும் கொண்ட தாள் ஒன்று கூம்பின் அடியில் பொருத்தப்பட்டு கூம்பானது மூடப்படுகிறது. மூடப்பட்ட கூம்பின் திணிவு மையமானது O விலிருந்து $\frac{5}{6} r\cos\theta$ தூரத்திலுள்ளது என நிறுவுக.

51. a ஆரையுள்ள சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் ஈர்வை மையத்தைக் காண்க.

a ஆரையும் l நீளமும் அரைக்கோளத்தின் அதே அடர்த்தியுமுள்ள சீரான செவ்வட்டத் திண்ம உருளை ஒன்றின் தளமுகங்களில் ஒன்று அரைக்கோளத்தின் வட்ட அடியுடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு சேர்த்திப் பொருள் ஒன்று ஆக்கப்படுகிறது. தளமுகத்திலிருந்து சேர்த்திப் பொருளின் ஈர்வை மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

இப்பொருள் அதன் வளைபரப்பானது ஒப்பமான கிடைமேசையொன்றைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க எந்நிலையிலும் ஓய்விலிருக்க $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக

52. $y^2 = 4ax\ ;\ x = a$ என்பவற்றின் வரைபுகளினால் வரைப்புற்ற பிரதேசத்தை x அச்சு பற்றி சுழற்றுவதனால் பிறப்பிக்கப்படும் சீரான திண்மத்தின் ஈர்வை மையம் ஆனது $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ இல் இருக்குமெனக் காட்டுக $9W$ நிறையுள்ள அத்தகைய திணம்மம் ஒன்று $2a$ ஆரையும் $4W$ நிறையுமுள்ள சீரான திண்ம அரைக்கோளமொன்றுடன் அத்திண்மத்தின் தளமுகம் அரைக்கோளத்தின் தளமுகத்துடன் பொருந்தக் கூடியவாறு மூடப்பட்டுள்ளது. விளையும் திண்மமானது அரைக்கோளத்தினது வளைபரப்பின் புள்ளி எதுவும் ஒரு கிடைத்தளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க நாப்பத்திலே ஓய்விலிருக்கலாமெனக் காட்டுக.

53. அடி ஆரை r ஐயும் உச்சிக்கோணம் α வையும் உடைய சீரான செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பு ஒன்றின் ஈர்வை மையம் ஆனது உச்சியிலிருந்து $\frac{4}{3} r \cot\alpha$ விலே அச்சின் மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

சீரான செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பு ஒன்றின் அடித்துண்டு ஒன்று $a, \lambda a\ (\lambda > 1)$ எனும் ஆரைகளைக் கொண்ட வட்ட முனைகளையும் உயரம் h ஐயும் உடையது. சிறிய அடியின் மையத்திலிருந்து அடித்துண்டின் ஈர்வை மையத்தின் தூரம் $\frac{h}{4}\left[\frac{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}\right]$ எனக் காட்டுக.

சிறிய அடியின் பரிதியில் இருக்கும் புள்ளி ஒன்றிலிருந்து இவ்வடிவத் துண்டு சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத்தானத்தில் அச்சானது நிலைக்குத்துடன் ஒரு கோணம் $\alpha\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ இல் சாய்ந்திருக்கிறது $\tan\alpha$ ஐக் காண்க.

54. *(i)* ஆரை a யையுடைய ஒரு சீரான வட்ட ஆரைச்சிறை OAB யின் வடிவத்திலுள்ள விசிறி ஒன்று அதன் மையம் O விலே ஆரையின் கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது. விசிறியின் ஈர்வை மையமானது சமச்சீர் அச்சிலே O விலிருந்து $\frac{2}{3} a \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ தூரத்தில் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

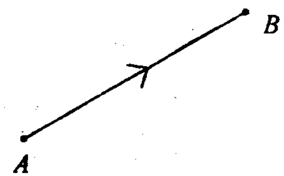
(ii) மேலே *(i)* இற்குறிப்பிட்ட விசிறி OAB ஆனது I யிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. நாப்பத்தானத்தில் விசிறியின் சமச்சீர் அச்சு நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\sin^{-1}\left(\frac{3\alpha \sin\alpha}{\sqrt{9\alpha^2 + 4\sin^2\alpha - 6\alpha\sin 2\alpha}}\right)$ ஐ ஆக்குமெனக் காட்டுக.

11. விசைகளுக்கான காவிப்பிரயோகமும், முப்பரிமாண விசைத்தொகுதியும்

காவி (Vector)

பருமன், திசை இரண்டும் கொண்ட கணியம் காவிக் கணியம் ஆகும்.

காவி, திசை கொண்ட கோட்டுத்துண்டத்தால் குறிக்கப்படும். $\overrightarrow{AB}$ என எழுதப்படும் அல்லது $\underline{a}$ என எழுதப்படும்.



காவியின் பருமன் (Magnitude of a Vector)

காவி $\underline{a}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ யின் பருமன் $|\underline{a}|$ $\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)$ என்பதால் குறிக்கப்படும்.

பூச்சியக்காவி அல்லது சூனியக்காவி (Zero Vector / Null Vector)

பருமன் பூச்சியமாகவுடைய காவி, பூச்சியக் காவி எனப்படும். இது $\underline{0}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

அலகுக்காவி (Unit Vector)

ஓரலகு பருமனையுடைய காவி அலகுக்காவி எனப்படும். $\underline{u}$ அலகுக்காவி எனின் $|\underline{u}| = 1$ ஆகும்.

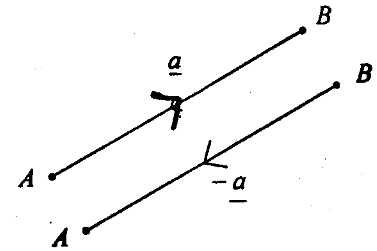
$\underline{a}$ என்பது தரப்பட்ட ஒரு காவியாக இருக்க $\underline{a}$ இன் திசையில் உள்ள அலகுக்காவி $\underline{u}$ எனின்,

$\underline{u} = \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ ஆகும்.

மறைக்காவி (Negative vector)

$\underline{a}$ என்பது ஒரு தரப்பட்ட காவியாக இருக்க, $|\underline{a}|$ பருமனையுடையதும் $\underline{a}$ யின் திசைக்கு எதிரானதுமான காவி $\underline{a}$ இன் மறைக்காவி எனப்படும். இது $-\underline{a}$ என்பதால் குறிக்கப்படும்.

$\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ எனின், $\overrightarrow{BA} = -\underline{a}$ ஆகும்.



சமமான காவிகள் (Equal Vectors)

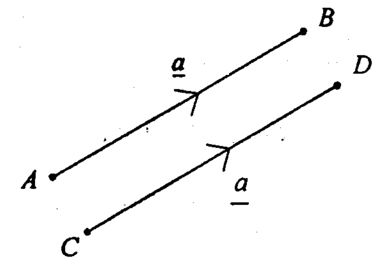
இரு காவிகள் சம பருமன்களையும் ஒரே திசையையும் கொண்டிருப்பின் அவை சம காவிகள் எனப்படும்.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ என்பன சம்மான காவிகள். $\Leftrightarrow$

(i) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

(ii) $AB \parallel CD$

$A \rightarrow B\ ;\ C \rightarrow D$ ஒரே போக்கிலிருக்கும்.



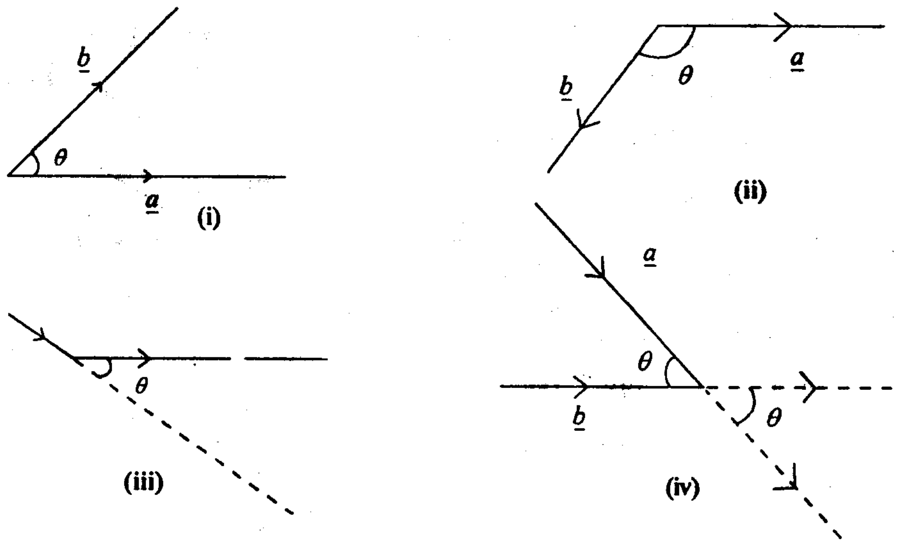
தானக்காவி (Position Vector)

நிலைத்த புள்ளி O வைக் குறித்து A என்னும் தரப்பட்ட புள்ளியின் நிலை $\overrightarrow{OA}$ ஆல் தரப்படும். இங்கு $\overrightarrow{OA}$ என்பது A இன் தானக் காவி ஆகும்.

இவ்வாறே B, C, D என்பவற்றின் தானக்காவிகள் $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

இரு காவிகளுக்கிடையிலான கோணம் (Angle between two vectors)

$\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பன இரு காவிகள்



$0 \leq \theta \leq \pi$ ஆகும்.

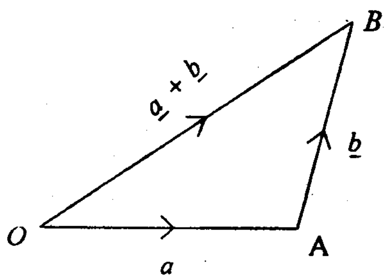
காவிக்கூட்டல் (Addition of vectors)

$\underline{a}$, $\underline{b}$ என்பன இருகாவிகளாக இருக்க $\underline{a} + \underline{b}$ என்னும் காவி, காவிக்கூட்டலுக்கான முக்கோணி விதியைப் பாவித்துப்பெறலாம்.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ எனின்,

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ என வரையறுக்கப்படும்.

$\overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b}$ ஆகும்.

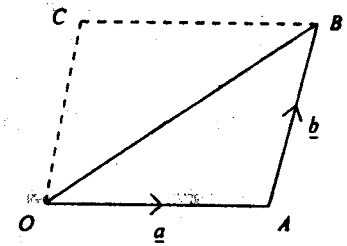


$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்பன காவிகளாயிருக்க,

(i) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

(i) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ என்க.



இணைகரம் $OABC$ பூர்த்தியாக்கப்படுகிறது.

$\overrightarrow{OC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{a}$ ஆகும்.

காவிக்கூட்டல் விதியின் படி

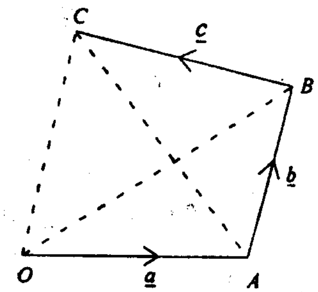
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= \underline{a} + \underline{b} \quad \text{———(1)}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= \underline{b} + \underline{a} \quad \text{———(2)}$$

(1), (2) இலிருந்து $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (பரிவர்த்தனை விதி)

(ii) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{c}$ என்க.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \quad \text{———(1)}$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC}$$
$$= (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} \quad \text{———(2)}$$

(1), (2) இலிருந்து $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ (சேர்த்திவிதி)

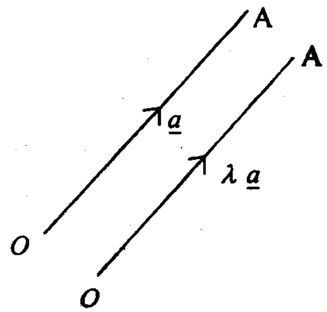
காவியொன்றை எண்ணியால் பெருக்குதல்

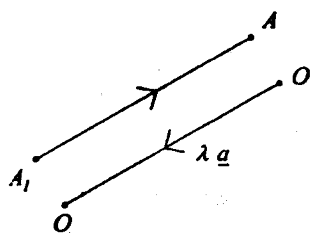
$\underline{a}$ என்பது ஒரு காவியாகவும், λ ஒரு எண்ணியாகவும் இருக்க, $\lambda \underline{a}$ என்பதன் கருத்து.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ என்க. $\lambda > 0$ என்க.

காவி $\lambda \overrightarrow{OA}$ என்பது, $\lambda \left| \overrightarrow{OA} \right| = \lambda |\underline{a}|$

பருமனையுடையதும் OA யிற்கு சமாந்தரமானதும், O விலிருந்து A யின் போக்கில் உள்ளதுமானகாவி.





$\lambda < 0$ எனின் காவி $\lambda \underline{a}$ என்பது $|\lambda||\underline{a}|$ பருமனுள்ளதும், OA இற்கு சமாந்தரமானதும் A யிருந்து O வின் போக்கில் உள்ளதுமான காவி.

மேலும் $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ ஆகும்.

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$$

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$$

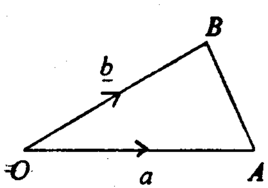
A, B என்னுமிரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ எனின்,

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ஆகும்.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

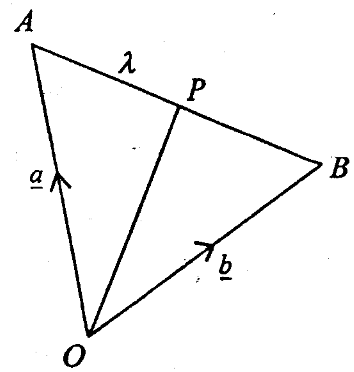
$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$



விகிதத்தேற்றம் (Ratio Theorem)

A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகவும், P என்பது AB யில் $AP : PB = \lambda : \mu$ ஆகுமாறும், அமைந்திருப்பின் P யின் தானக்காவி $\overrightarrow{OP}$ ஆனது, $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\mu \underline{a} + \lambda \underline{b}}{\lambda + \mu}$ ஆகும்.



$$AP : PB = \lambda : \mu$$

$$\Longleftrightarrow \mu \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$$

$$\mu\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right) = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$$

$$\mu \overrightarrow{OP} - \mu \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OP}$$

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{OP} = \mu \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$$

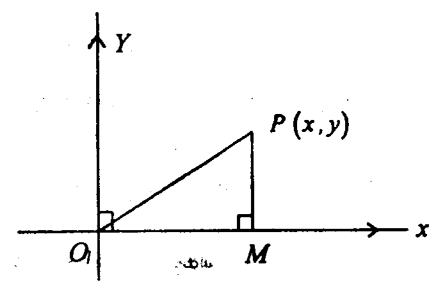
$$\overrightarrow{OP} = \frac{\mu \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{\lambda + \mu} = \frac{\mu \underline{a} + \lambda \underline{b}}{\lambda + \mu}$$

Oxy ஆள்கூற்றச்சுத் தொகுதி

Ox வழியே அலகுக்காவி $\underline{i}$

Oy வழியே அலகுக்காவி $\underline{j}$ என்க.

$P \equiv (x, y)$ என்க.



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$$

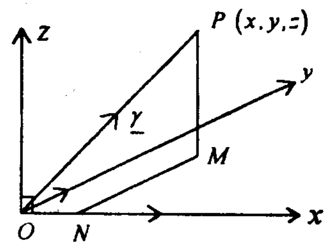
$= x\underline{i} + y\underline{j}$ ஆகும். மேலும் $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overrightarrow{OP}$ யின் திசையிலான அலகுக்காவி $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\underline{i} + y\underline{j}\right)$ ஆகும்.

$Oxyz$ என்பது. செங்கோண வலதுகை ஆள்கூற்றச்சுத் தொகுதி என்க. Ox, Oy, Oz வழியேயான அலகுக் காவிகள் முறையே $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்க.

$P \equiv (x, y, z)$ என்க

$PM \perp$ தளம் oxy: $MN \perp ox$ ஆகும்.



$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NM} + \vec{MP}$

$\vec{OP} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ ஆகும்.

$OP^2 = OM^2 + MP^2 = ON^2 + NM^2 + MP^2$

$= x^2 + y^2 + z^2$

$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

எனவே $\left|\vec{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\vec{OP}$ யின் திசையிலான அலகுக்காவி $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}\right)$

$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$; $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$ எனின்,

$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1)\underline{i} + (a_2 + b_2)\underline{j} + (a_3 + b_3)\underline{k}$

$\underline{a} - \underline{b} = (a_1 - b_1)\underline{i} + (a_2 - b_2)\underline{j} + (a_3 - b_3)\underline{k}$ ஆகும்.

எண்ணிப்பெருக்கம் (Scalar product)

$\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் இருகாவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கம்

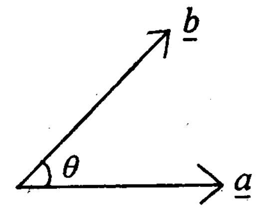
$\underline{a}\cdot\underline{b}$ ஆனது $\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$

என வரையறுக்கப்படும். இங்கு θ என்பது $\underline{a}, \underline{b}$ இற்கிடையேயான கோணம் ஆகும்.

மேலும் $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cos\theta$ ஓர் எண்ணியாகும்.

(i) $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$ ஆகும்.

வரைவிலக்கணத்திலிருந்து,



$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cos\theta$

$\underline{b}\cdot\underline{a} = |\underline{b}|\cdot|\underline{a}|\cos\theta$

எனவே $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$

(ii) $\underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}||\underline{a}|\cos 0$

$= |\underline{a}||\underline{a}| \times 1 = |\underline{a}|^2 = \underline{a}^2$ எனவும் எழுதப்படும்.

(iii) $\underline{a}, \underline{b}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான காவிகள் எனின்,

$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ ஆகும்.

(iv) $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அலகுக் காவிகளாயிருப்பின்.

$\underline{i}\cdot\underline{i} = |\underline{i}|\cdot|\underline{i}|\cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\underline{j}\cdot\underline{j} = |\underline{j}|\cdot|\underline{j}|\cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\underline{k}\cdot\underline{k} = |\underline{k}|\cdot|\underline{k}|\cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\underline{i}\cdot\underline{i} = \underline{j}\cdot\underline{j} = \underline{k}\cdot\underline{k} = 1$

$\underline{i}\cdot\underline{j} = |\underline{i}|\cdot|\underline{j}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$\underline{i}\cdot\underline{j} = \underline{j}\cdot\underline{i} = 0$ ஆகும்.

இவ்வாறே $\underline{i}\cdot\underline{j} = \underline{j}\cdot\underline{k} = \underline{k}\cdot\underline{i} = 0$

(v) $\underline{a}\cdot(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c}$ ஆகும்.

$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$, $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$ எனின்,

$\underline{a}\cdot\underline{b} = \left(a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}\right)\cdot\left(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}\right)$

$$= a_1\underline{i}\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)+a_2\underline{j}\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)$$

$$+a_3\underline{k}\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)$$

$$= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$ ஆகும்.

காவிப் பெருக்கம் (Vector Product)

$\underline{a},\underline{b}$ எனும் இருகாவிகளின் காவிப்பெருக்கம் $\underline{a}\wedge\underline{b}$ ஆனது, $\underline{a}\wedge\underline{b}=|\underline{a}|\;|\underline{b}|\sin\theta\;\underline{n}$ என வரையறுக்கப்படும்.

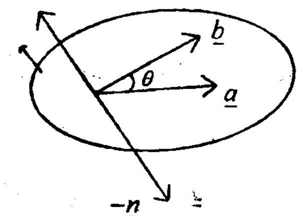
இங்கு $0\le\theta\le\pi$; θ, $\underline{a},\underline{b}$ இற்கிடையிலான கோணம் $\underline{n}$ - தளம் $(\underline{a},\underline{b})$ இற்கு செங்குத்தான அலகுக்காவி. $(\underline{a},\underline{b},\underline{n})$ வலதுகை ஆள்கூற்றச்சுத் தொகுதியில் அமைந்திருக்கும்.

[கவனிக்க: $\underline{a}\wedge\underline{b}\neq\underline{b}\wedge\underline{a}$

$$\underline{a}\wedge\underline{b}=|\underline{a}|\;|\underline{b}|\sin\theta\;\underline{n}$$

$$\underline{b}\wedge\underline{a}=|\underline{b}|\;|\underline{a}|\sin\theta\;(-\underline{n})$$

எனவே $\underline{a}\wedge\underline{b}=-\underline{b}\wedge\underline{a}$ ஆகும்.]



$$\underline{a}\wedge\underline{a}=|\underline{a}||\underline{a}|\sin 0\;\underline{n}=\underline{0}$$

$\underline{a},\underline{b}$ என்பன செங்குத்தான காவிகள் எனின்,

$$\underline{a}\wedge\underline{b}=|\underline{a}||\underline{b}|\sin 90\;\underline{n}$$

$$=|\underline{a}||\underline{b}|\,\underline{n}$$

$\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ என்பன காவிகளாயிருக்க.

$\underline{a}\wedge(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}\wedge\underline{b}+\underline{a}\wedge\underline{c}$ ஆகும்.

செவ்வக, வலதுகை ஆள்கூற்றச்சுத் தொகுதி $Oxyz$ இன் Ox, Oy, Oz வழியேயான அலகுக்காவிகள் $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ ஆக இருக்க,

$$\underline{i}\wedge\underline{i}=|\underline{i}||\underline{i}|\sin 0\;\underline{n}=\underline{0}$$

இவ்வாறே, $\underline{i}\wedge\underline{i}=\underline{j}\wedge\underline{j}=\underline{k}\wedge\underline{k}=\underline{0}$

$$\underline{i}\wedge\underline{j}=|\underline{i}||\underline{j}|\sin 90\;\underline{k}=\underline{k}$$

$$\underline{j}\wedge\underline{k}=|\underline{j}||\underline{k}|\sin 90\;\underline{i}=\underline{i}$$

$$\underline{k}\wedge\underline{i}=|\underline{k}||\underline{i}|\sin 90\;\underline{j}=\underline{j}$$

$\underline{a}=a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}$, $\underline{b}=b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}$ என்க.

$$\underline{a}\wedge\underline{b}=\left(a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}\right)\wedge\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)$$

$$=a_1\underline{i}\wedge\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)+a_2\underline{j}\wedge\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)$$

$$+a_3\underline{k}\wedge\left(b_1\underline{i}+b_2\underline{j}+b_3\underline{k}\right)$$

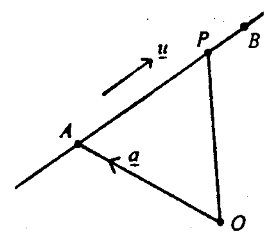
$$=a_1b_2\underline{k}+a_1b_3\left(-\underline{j}\right)+a_2b_1\left(-\underline{k}\right)+a_2b_3\underline{i}$$

$$+a_3b_1\underline{j}+a_3b_2\left(-\underline{i}\right)$$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\underline{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\underline{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\underline{k}$$

$$\underline{a}\wedge\underline{b}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$ எனவும் எழுதலாம்.

நேர்கோட்டின் காவிச்சமன்பாடு



(i) நேர்கோடு AB யில்

A இன் தானக்காவி $\underline{a}$ என்க.

AB இற்கு சமாந்தர திசையில் அலகுக்காவி $\underline{u}$ என்க.

நேர்கோடு AB இல் P யாதுமொருபுள்ளி எனின்,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

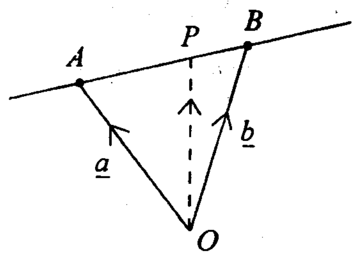
$\underline{r} = \underline{a} + \lambda \underline{u}$

நேர்கோடு AB இன் காவிச் சமன்பாடு $\underline{r} = \underline{a} + \lambda \underline{u}$ ஆகும்.

(ii) நேர்கோட்டில் A, B என்பன.
இரு நிலையான புள்ளிகள்;

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ என்க.

P, AB யில் யாதுமொருபுள்ளி எனின்,



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

$\underline{r} = \underline{a} + t\,(\underline{b} - \underline{a})$ $\left[\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}\right]$

$= (1 - t)\,\underline{a} + t\,\underline{b}$ ஆகும்.

AB யின் காவிச் சமன்பாடு $\underline{r} = (1 - t)\,\underline{a} + t\,\underline{b}$ ஆகும்.

விசைகளுக்கான காவிப்பிரயோகம்

$\underline{F_1}, \underline{F_2}, \ldots\ldots \underline{F_n}$ என்னும் விசைகளின் விளையுள் $\underline{R}$ எனின்,

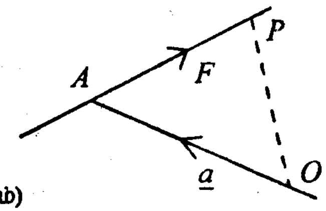
$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \ldots\ldots \underline{F_n}$ ஆகும்.

ஒரு புள்ளி பற்றி விசையின் திருப்பம்

O என்னும் புள்ளி பற்றி விசை $\underline{F}$ இன் திருப்பம் $\underline{a} \wedge \underline{F}$ என வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$; A என்பது விசை $\underline{F}$ இன் தாக்கக் கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி ஆகும்.

விசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

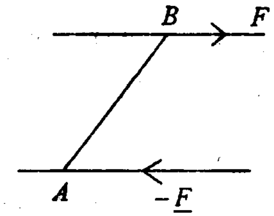


விசை $\underline{F}$ இன் தாக்கக் கோட்டின்

காவிச் சமன்பாடு, $\underline{r} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\underline{F}$ ஆகும்.

$= \underline{a} + \lambda\,\underline{F}$ ($\lambda -$ பரமானம்)

இணை ஒன்றின் காவித்திருப்பம்

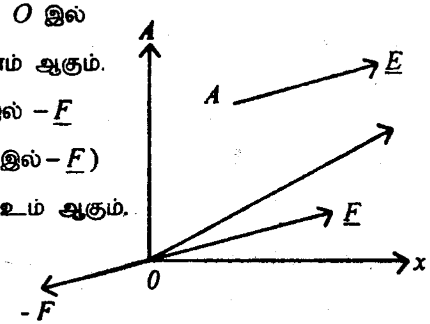


இரு சமாந்தர நேர்கோடுகள் வழியே தாக்கும் $\underline{F}, -\underline{F}$ என்னும் இரு விசைகளைக் கருதுக.

இவ்விசைகள் ஓர் இணையை உருவாக்கும்.

இவ்விசையின் திருப்பம் $= \overrightarrow{AB} \wedge \underline{F}$ ஆகும். (அல்லது $\overrightarrow{BA} \wedge -\underline{F}$ ஆகும்.)

$\mathrm{Gs}\ \$\ \mathrm{p}A$ யில் தாக்கும் விசை $\underline{F}$, உற்பத்தி O இல் விசை $\underline{F}$ இற்கும் இணை $\underline{G}$ இற்கும் சமானம் ஆகும்.



A இல் $\underline{F} = A$ இல் $\underline{F} + O$ இல் $\underline{F} + O$ இல் $-\underline{F}$

$= O$ இல் $\underline{F} + (A$ இல் $\underline{F} + O$ இல் $-\underline{F})$

$= O$ இல் $\underline{F}$ உம் இணை $\underline{G}$ உம் ஆகும்.

$\left(\underline{G} = \overrightarrow{OA} \wedge \underline{F}\right)$

முப்பரிமாணத்தில் விசைத்தொகுதி

உற்பத்தி O குறித்து புள்ளி A_i இன் தானக்காவி $\underline{r_i}$.

A_i இல் தாக்கும் விசை $\underline{F_i}$ என்க. $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$

தரப்பட்ட விசைத் தொகுதி புள்ளி O இல், விசை $\underline{R}$ இற்கும் இணை $\underline{G}$ இற்கும் சமானம் ஆகும்.

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F_i} \ , \quad \underline{G} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r_i} \wedge \underline{F_i} \text{ ஆகும்.}$$

(i) $\underline{R} = \underline{0}$, $\underline{G} = \underline{0}$ எனின், தொகுதி சமநிலையில் இலிருக்கும்.

(ii) $\underline{R} = \underline{0}$, $\underline{G} \neq \underline{0}$ எனின், தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்கும்.

(iii) $\underline{R} \neq \underline{0}$, $\underline{G} = \underline{0}$ எனின், தொகுதி O வினூடு செல்லும் ஒரு தனி விசையாகும்.

(IV) $\underline{R} \neq \underline{0}$, $\underline{G} \neq \underline{0}$ எனின்.

(a) $\underline{R} \cdot \underline{G} = 0$ எனின், விசை R உம் இணை G உம் ஒரே தளத்தன. எனவே இவ்விசைத் தொகுதி ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுக்கப்படலாம்.

(b) $\underline{R} \cdot \underline{G} \neq 0$ எனின், விசை $\underline{R}$ உம் இணை $\underline{G}$ உம் ஒரே தளத்தன அல்ல. எனவே தொகுதி ஓர் இணை $\underline{G}$ இற்கும், அதன் தளத்திலல்லாத விசை $\underline{R}$ இற்கும் ஒருமித்து ஒடுக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

Ox, Oy என்னும் செங்கோணத் தெக்காட்டின் அச்சுக்கள் வழியே உள்ள அலகுக் காவிகள் முறையே $\underline{i}, \underline{j}$ ஆகும். துணிக்கை ஒன்றின் மீது தாக்கும் $\underline{P}, \underline{Q}$ என்னும் இரு விசைகள் முறையே $4\underline{i} + 3\underline{j}$, $-3\underline{i} - 4\underline{j}$ என்னும் காவிகளுக்கு சமாந்தரம். இரு விசைகளினதும் விளையுளானது காவி $\underline{i}$ யின் திசையிலே 7N ஐ உடைய ஒரு விசையாகும். P, Q ஆகியவற்றின் பருமன்களைக் கணிக்க?

$|\underline{P}| = P$, $|\underline{Q}| = Q$ என்க.

$4\underline{i} + 3\underline{j}$ இன் திசையில் அலகுக்காவி $= \frac{1}{5}\left(4\underline{i} + 3\underline{j}\right)$

$-3\underline{i} - 4\underline{j}$ இன் திசையில் அலகுக்காவி $= \frac{1}{5}\left(-3\underline{i} - 4\underline{j}\right)$

$$\underline{P} + \underline{Q} = 7\underline{i}$$

$$\frac{P}{5}\left(4\underline{i} + 3\underline{j}\right) + \frac{Q}{5}\left(-3\underline{i} - 4\underline{j}\right) = 7\underline{i}$$

$$\left(\frac{4P}{5} - \frac{3Q}{5}\right)\underline{i} + \left(\frac{3P}{5} - \frac{4Q}{5}\right) = 7\underline{i}$$

$$\frac{4P}{5} - \frac{3Q}{5} = 7 \quad \text{------------(1)}$$

$$\frac{3P}{5} - \frac{4Q}{5} = 0 \quad \text{------------(2)}$$

$$4P - 3Q = 35$$

$$3P - 4Q = 0$$

$$P = 20N \qquad Q = 15N$$

$$|\underline{P}| = 20N, \quad |\underline{Q}| = 15N$$

உதாரணம் 2

A, B என்னுமிரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $8\underline{i} + 6\underline{j}$, $5\underline{i} - 12\underline{j}$ ஆகும். AB, x அச்சை C யில் வெட்டுகிறது.

(i) C யின் தானக்காவியைக் காண்க.

(ii) $OADB$ இணைகரம் ஆகுமாறு உச்சி D யின் தானக்காவியைக் காண்க.

40N பருமனுடைய $\underline{F_1}$ என்னும் விசை O இல் $\overrightarrow{OA}$ வழியேயும், 26N பருமனுடைய $\underline{F_2}$ என்னும் விசை O இல் $\overrightarrow{OB}$ வழியேயும் தாக்குகிறது. $\underline{F_1}, \underline{F_2}$ என்பவற்றை $\underline{i}, \underline{j}$ இல் எழுதி இவ்விரு விசைகளினதும் பருமனைக் காண்க. விளையுள் C யினூடு செல்லும் எனக் காட்டுக.

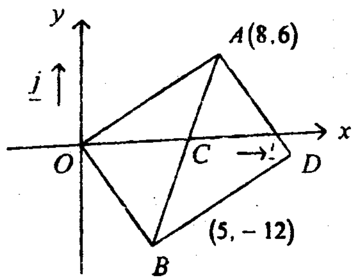
இப்பொழுது $\underline{F_1}$ இற்குப் பதிலாக O இல் $\overrightarrow{OA}$ வழியே $\underline{F_3}$ எனும் விசை தாக்கும்போது $\underline{F_2}, \underline{F_3}$ என்பவற்றின் விளையுள் D யினூடு செல்லும் எனின், $\underline{F_3}$ ஐ $\underline{i}, \underline{j}$ இல் காண்க.

$AC : CB = m : n$ என்க.

$$\vec{OC} = \frac{n\vec{OA} + m\vec{OB}}{n+m}$$

$$= \frac{n\left(8\underline{i} + 6\underline{j}\right) + m\left(5\underline{i} - 12\underline{j}\right)}{n+m}$$

$$= \frac{(8n+5m)\,\underline{i} + (6n-12m)\,\underline{j}}{n+m}$$



C, x அச்சில் இருப்பதால்,

$6n - 12m = 0\,;\; n = 2m$

$\vec{OC} = \dfrac{21\,i}{3} = 7\,\underline{i}$ ஆகும்.

$OADB$ இணைகரம், $\vec{OD} = x\underline{i} + y\underline{j}$

$$\vec{OA} = \vec{BD}$$

$$\vec{OA} = \vec{OD} - \vec{OB}$$

$$8\underline{i} + 6\underline{j} = \left(x\underline{i} + y\underline{j}\right) - \left(5\underline{i} - 12\underline{j}\right)$$

$$= (x-5)\underline{i} + (y+12)\underline{j}$$

$x - 5 = 8\;;\quad y + 12 = 6$

$x = 13\quad;\quad y = -6$

ஆகவே $\vec{OD} = 13\underline{i} - 6\underline{j}$ ஆகும்.

$\left|\underline{F_1}\right| = 40 \quad \vec{OA} = 8\underline{i} + 6\underline{j}\;;\; \vec{OB} = 5\underline{i} - 12\underline{j}\;;\; \left|\vec{OA}\right| = 10$

$\left|\vec{OB}\right| = 13$

$\vec{OA}$ வழியேயான அலகுக்காவி $\dfrac{1}{10}\left(8\underline{i} + 6\underline{j}\right)$

ஆகவே $\underline{F_1} = 40\left[\dfrac{1}{10}\left(8\underline{i} + 6\underline{j}\right)\right]$

$= 32\,\underline{i} + 24\,\underline{j}$

OB வழியேயான அலகுக்காவி. $\dfrac{1}{13}\left(5\underline{i} - 12\underline{j}\right)$

$$\underline{F_2} = 26 \times \frac{1}{13}\left(5\underline{i} - 12\underline{j}\right) = 10\underline{i} - 24\underline{j}$$

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} = \left(32\underline{i} + 24\underline{j}\right) + \left(10\underline{i} - 24\underline{j}\right)$$

$$= 42\,\underline{i}$$

விளையுள் Ox அச்சுவழியே இருப்பதால் C யினூடு செல்லும்.

விசை $\underline{F_3} = X\underline{i} + Y\underline{j}$ என்க.

$$\underline{F_2} + \underline{F_3} = \left(X\underline{i} + Y\underline{j}\right) + \left(10\underline{i} - 24\underline{j}\right) = (X+10)\underline{i} + (Y-24)\underline{j}$$

$\underline{F_2} + \underline{F_3}$ ஆனது D யினூடு செல்வதால்,

$$\frac{X+10}{13} = \frac{Y-24}{-6}\;(= \lambda \text{ என்க})$$

$$X = 13\lambda - 10\;,\quad Y = -6\lambda + 24$$

ஆகவே $\underline{F_3} = (13\lambda - 10)\underline{i} + (-6\lambda + 24)\underline{j}$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

$\underline{F_1}, \underline{F_2}, \underline{F_3}$ என்னும் விசைகள் முறையே $\underline{r_1}, \underline{r_2}, \underline{r_3}$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளின் தாக்குகின்றன. இங்கு

$$\underline{F_1} = 5\underline{i} + 6\underline{j} \;;\; \underline{r_1} = c\,\underline{i} + \underline{j}$$

$$\underline{F_2} = a\underline{i} - 4\underline{j} \;;\; \underline{r_2} = 2\,\underline{i} - \underline{j}$$

$$\underline{F_3} = -6\,\underline{i} + b\,\underline{j} \;;\; \underline{r_3} = 3\,\underline{i} + 2\,\underline{j}$$

இவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பின் ஒருமைகள் a, b, c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இம் மூன்று விசைகளும் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக்காவியையும் காண்க.

இப்பொழுது $\underline{F_3}$ இன் திசை புறமாற்றப்பட்டுத் தொகுதிக்கு விசைகளின் தளத்தில் இடஞ்சுழியாக 21 அலகு பருமனுள்ள இணை ஒன்று சேர்க்கப்பட்டது. புதிய தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும், விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டையும் காண்க.

$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} = (a-1)\,\underline{i} + (b+2)\,\underline{j}$$

சமநிலையிலிருப்பதால் $\underline{R} = \underline{0}$, ஆகவே $(a-1) = 0$, $b+2 = 0$

$$a = 1 \,,\; b = -2$$

மேலும் O பற்றி திருப்பங்களின் அட்சர கணிதக்கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

$$\overset{\curvearrowright}{O} = \underline{r_1} \wedge \underline{F_1} + \underline{r_2} \wedge \underline{F_2} + \underline{r_3} \wedge \underline{F_3} = \underline{0}$$

$$\left(c\,\underline{i} + \underline{j}\right) \wedge \left(5\,\underline{i} + 6\underline{j}\right) + \left(2\,\underline{i} - \underline{j}\right) \wedge \left(\underline{i} - 4\,\underline{j}\right) + \left(3\,\underline{i} + 2\,\underline{j}\right) \wedge \left(-6\,\underline{i} - 2\,\underline{j}\right)$$

$$(6c-5)\underline{k} + (-8+1)\underline{k} + (-6+12)\underline{k} = (6c-6)\underline{k} = 0$$

$$c = 1$$

$$a = 1 \,,\; b = -2 \,,\; c = 1$$

மூன்று விசைகள் (ஒருதள) தாக்கி சமநிலையில் இருப்பதால் மூன்று விசைகளும் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்.

$\underline{F_1}$ இன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\underline{r} = \left(\underline{i} + \underline{j}\right) + \lambda\left(5\underline{i} + 6\underline{j}\right) \qquad \text{------------ (1)}$$

$\underline{F_2}$ இன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\underline{r} = \left(2\,\underline{i} - \underline{j}\right) + \mu\left(\underline{i} - 4\,\underline{j}\right) \qquad \text{------------ (2)}$$

$\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ ஆக $\underline{r}$ ஆனது, இரண்டு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியைக் குறிக்கிறது என்க.

$$\left(\underline{i} + \underline{j}\right) + \lambda_0\left(5\underline{i} + 6\,\underline{j}\right) = \left(2\underline{i} - \underline{j}\right) + \mu_0\left(\underline{i} - 4\,\underline{j}\right)$$

$$(1 + 5\lambda_0)\underline{i} + (1 + 6\lambda_0)\,\underline{j} = (2 + \mu_0)\underline{i} + (-1 - 4\mu_0)\,\underline{j}$$

$$1 + 5\mu_0 = 2 + \mu_0 \qquad 5\lambda_0 - \mu_0 = 1$$

$$1 + 6\lambda_0 = -1 - 4\mu_0 \qquad 6\lambda_0 + 4\mu_0 = -2$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{13} \,,\quad \mu_0 = -\frac{8}{13}$$

இருவிசைகளும் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக்காவி $\underline{r} = \left(\underline{i} + \underline{j}\right) + \frac{1}{13}\left(5\,\underline{i} + 6\,\underline{j}\right)$

$$\underline{r} = \frac{1}{13}\left(18\,\underline{i} + 19\,\underline{j}\right)$$

இப்பொழுது $\quad \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} = \left(5\,\underline{i} + 6\,\underline{j}\right) + \left(\underline{i} - 4\,\underline{j}\right) + \left(6\,\underline{i} + 2\,\underline{j}\right)$

$$\underline{R} = 12\underline{i} + 4\,\underline{j}$$

$$\overset{\curvearrowright}{O} = \left(\underline{i} + \underline{j}\right) \wedge \left(5\,\underline{i} + 6\,\underline{j}\right) + \left(2\,\underline{i} - \underline{j}\right) \wedge \left(\underline{i} - 4\,\underline{j}\right) + \left(3\,\underline{i} + 2\,\underline{j}\right) \wedge \left(6\,\underline{i} + 2\,\underline{j}\right) + 21\underline{k}$$

$$= (6-5)\,\underline{k} + (-8+2)\,\underline{k} + (6-12)\,\underline{k} + 21\underline{k}$$

$$= 10\underline{k}$$

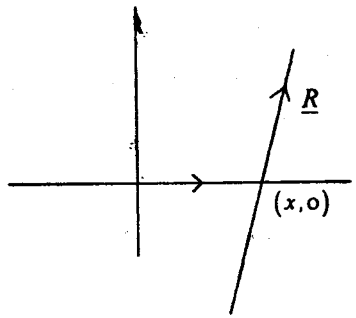
விளையுளின் பருமன் $|\underline{R}| = \sqrt{12^2+4^2} = 4\sqrt{10}$

$$x\underline{i}\wedge\underline{R} = 10\underline{k}$$

$$x\underline{i}\wedge\left(12\underline{i}+4\underline{j}\right) = 10\underline{k}$$

$$4x\underline{k} = 10\underline{k}$$

$$4x = 10\ ,\quad x = 5/2$$



எனவே தாக்கக்கோட்டின் காவிச் சமன்பாடு

$$\underline{r} = \frac{5}{2}\underline{i}+\lambda\left(12\underline{i}+4\underline{j}\right)$$

உதாரணம் 4

oxy தளத்திலான முக்கோண அடர் ஒன்றின் உச்சிகள் O,A,B என்னும் புள்ளிகளில் உள்ளன. $\underline{i}\,,\underline{j}$ என்பன முறையே Ox, Oy வழியே உள்ள அலகுக் காவிகள் ஆகும். $\overrightarrow{OA} = 4\underline{i}+3\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = -2\underline{i}+6\underline{j}$ ஆகும். $7\underline{j}\,,\ 2\underline{i}+2\underline{j}\,,\ \underline{i}-5\underline{j}$ என்னும் விசைகள் அடரின்மீது முறையே O,A,B என்னும் புள்ளிகள் மீது தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியானது, O விலே தாக்கும் ஒருதனிவிசை $\underline{R}$ உடன் திருப்பம் $\underline{G}$ ஆகவுள்ள ஓரிணைக்கு சமவலுவானதெனத் தரப்பட்டிருப்பின் $\underline{R}$ ஐக் கண்டு $|\underline{G}| = 6$ எனக்காட்டுக. இணையின் போக்கு யாது?

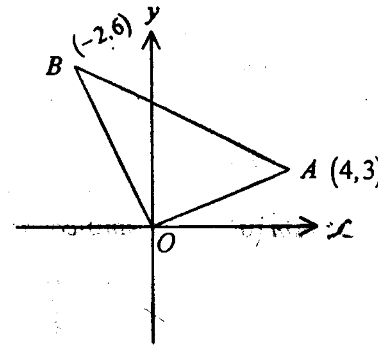
இவ்விணையை O விலே தாக்கும் ஒருவிசை $-\underline{R}$ இனாலும், அடரின் ஓரம் OA மீது புள்ளி D யிலே தாக்கும் ஒருவிசை $\underline{R}$ இனாலும் பிரதியிட்டால் $OD = \frac{6}{7}OA$ எனக்காட்டுக.

மேற் குறித்த விசைத் தொகுதியுடன் D யிலே பிரயோகிக்கப்படும் 5 அலகுகள் விசை ஒன்றினால் அடரைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கலாம் எனக் காட்டி இம் மேலதிக விசையின் திசையில் அலகு விசையை எடுத்துரைக்க.

$\underline{F_1} = 7\underline{j}$ — O வில்

$\underline{F_2} = 2\underline{i}+2\underline{j}$ — $4\underline{i}+3\underline{j}$ இல்

$\underline{F_3} = \underline{i}-5\underline{j}$ — $-2\underline{i}+6\underline{j}$ இல்



விளையுள் $\underline{R} = \underline{F_1}+\underline{F_2}+\underline{F_3}$

$$= 7\underline{j}+\left(2\underline{i}+2\underline{j}\right)+\left(\underline{i}-5\underline{j}\right)$$

$$\underline{R} = 3\underline{i}+4\underline{j}$$

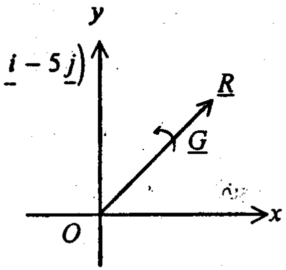
$$|\underline{R}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \text{ அலகு}$$

$$O\circlearrowleft = \underline{G} = \left(4\underline{i}+3\underline{j}\right)\wedge\left(2\underline{i}+2\underline{j}\right)+\left(-2\underline{i}+6\underline{j}\right)\wedge\left(\underline{i}-5\underline{j}\right)$$

$$= (8-6)\underline{k}+(10-6)\underline{k} = 6\underline{k}$$

$$|\underline{G}| = 6$$

இடஞ்சுழியாக 6 அலகுகள்.



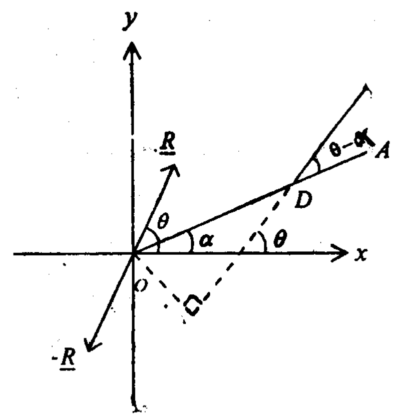
இப்பொழுது இணையானது O இல் $-\underline{R}$ இனாலும். D இல் $\underline{R}$ இனாலும் பிரதியிடப்பட்டுள்ளது.

$|\underline{R}| = 5$ என்பதால், $5\times OM = 6$

$$OM = \frac{6}{5} \text{ ஆகும்.}$$

$\underline{R}$ Ox உடன் அமைக்கும் கோணம் θ எனின், $\left(\underline{R} = 3\underline{i}+4\underline{j}\right)$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}\ ,\quad \sin\theta = \frac{4}{5} \text{ ஆகும்.}$$

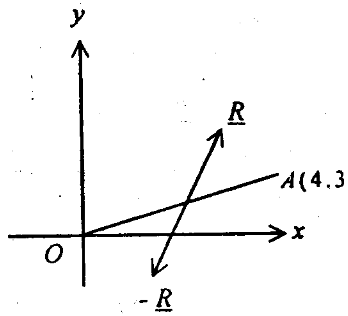


OA, Ox உடன் அமைக்கும் கோணம் α எனின், $\left(\overrightarrow{OA} = 4\underline{i} + 3\underline{j}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \;,\quad \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\theta - \alpha) = \sin\theta\cdot\cos\alpha - \cos\theta\cdot\sin\alpha$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{7}{25}$$



$$OD\sin(\theta-\alpha) = \frac{6}{5}$$

$$OD \times \frac{7}{25} = \frac{6}{5}$$

$$OD = \frac{6}{7}\times 5 \;=\; OD = \frac{6}{7}\,OA$$

அடரைச் சமநிலையில் வைத்திருக்க D யில் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசை $-\underline{R}$ ஆகும். $\left(\left|-\underline{R}\right| = 5\right)$

$$= -3\underline{i} - 4\underline{j}$$

இத்திசையில் அலகுவிசை $\frac{1}{5}\left(-3\underline{i} - 4\underline{j}\right)$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

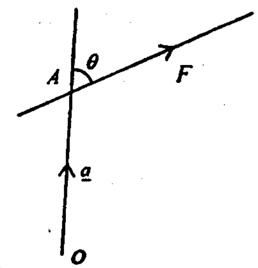
உற்பத்தி O வைக் குறித்து தானக்காவி $\underline{a}$ யை உடைய புள்ளியினூடு விசை $\underline{F}$ இன் தாக்கக்கோடு செல்கிறது. O பற்றி விசை $\underline{F}$ இன் காவித் திருப்பத்தை வரையறுத்து, திருப்பத்தின் பருமன், திசை என்பவற்றைத் தெளிவாகக் கூறுக.

விசைகளின். தொகுதி ஒன்று உற்பத்தியில் தாக்கும்
$\underline{F_1} = 2\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$, $\underline{F_2} = 6\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{F_3} = -4\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$
என்பவற்றுடன் வேறு இருவிசைகள் $\underline{F_4}$, $\underline{F_5}$ என்பவற்றாலும் தரப்படுகிறது.

$\underline{a} = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ ஐத் தானக்காவியாகவுடைய புள்ளி A இல் விசை $\underline{F_4} = \lambda\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$ உம், (λ ஒரு மாறிலி) $\underline{b} = -8\underline{i} - 4\underline{k}$ ஐத் தானக் காவியாகவுடைய புள்ளி B இல் விசை $\underline{F_5} = -7\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k}$ உம் தாக்குகின்றன. இங்கு $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ என்பன முறையே செவ்வகத் தெக்காட்டின் அச்சுக்கள் Ox, Oy, Oz வழியேயான அலகுக்காவிகள் ஆகும்.

இத்தொகுதியானது O வில் $\underline{R}$ எனும் விசையுடன் ஒருமித்து $\underline{G}$ திருப்பமுடைய இணைக்கு ஒடுக்கப்படும் எனின் $\underline{R}$ இற்கான ஒரு கோவையை எழுதி $\underline{G} = -4\underline{i} + (2\lambda + 14)\underline{j} + (\lambda + 9)\underline{k}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

தொகுதி $\underline{F}$ எனும் தனி விசைக்கு ஒடுக்கத்தக்கதாக λ இன் பெறுமானத்தைத் துணிக. $\underline{F}$ ஐக் கண்டு தாக்கக் கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டினை $\underline{r} = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k} + \mu\left(\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}\right)$ எனும் வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு μ ஒரு பரமானம் ஆகும்.



O பற்றி விசை $\underline{F}$ இன் காவித் திருப்பம்.

$\underline{M} = \underline{a} \wedge \underline{F}$ ஆகும்.

$\left|\underline{M}\right| = \left|\underline{a}\right|\left|\underline{F}\right|\sin\theta$ ஆகும்.

$$= \left|\underline{F}\right| \times \left(\left|\underline{a}\right|\sin\theta\right)$$

$\underline{M}$ இன் திசை $(\underline{a}, \underline{F})$ ஐக் கொண்டதளத்துக்கு செங்குத்தாகவும் $(\underline{a}, \underline{F}, \underline{M})$ என்பது வலதுகை ஆள்கூற்றச்சுத் தொகுதி ஒன்றிலுமிருக்கும்.

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{5} F_i = (\lambda - 3)\underline{i} + 4\underline{j} - 8\underline{k}$$

$$O) = \underline{G} = \underline{0}\wedge\underline{F_1} + \underline{0}\wedge\underline{F_2} + \underline{0}\wedge\underline{F_3} + \underline{a}\wedge\underline{F_4} + \underline{b}\wedge\underline{F_5}$$

$$= \underline{a}\wedge\underline{F_4} + \underline{b}\wedge\underline{F_5}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -8 & 0 & -4 \\ -7 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0\,\underline{i} + (2\lambda + 2)\underline{j} + (1 + \lambda)\underline{k} + (-4)\,\underline{i} + 12\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$$

$$= -4\,\underline{i} + (2\lambda + 14)\,\underline{j} + (9 + \lambda)\,\underline{k}$$

தொகுதி ஒரு தனிவிசைக்கு ஒடுங்க $\underline{R} \neq \underline{0}$ ஆகவும், $\underline{R} \cdot \underline{G} = 0$ ஆகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

இங்கு $\underline{R} \neq \underline{0}$ ஆகும்.

$$\underline{R} \cdot \underline{G} = 0 \Rightarrow \left[(\lambda - 3)\,\underline{i} + 4\,\underline{j} - 8\,\underline{k}\right] \cdot \left[-4\,\underline{i} + (2\lambda + 14)\,\underline{j} + (9 + \lambda)\,\underline{k}\right] = 0$$

$$-4(\lambda - 3) + 4\,(2\lambda + 14) - 8(9 + \lambda) = 0$$

$$-\lambda + 3 + 2\lambda + 14 - 2(9 + \lambda) = 0$$

$$-\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$\lambda = -1$ ஆக, $\underline{R} = \underline{F} = -4\,\underline{i} + 4\,\underline{j} - 8\,\underline{k}$

$\underline{G} = -4\,\underline{i} + 12\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$ ஆகும்.

விசை $\underline{F}$ இன் தாக்கக்கோட்டில் உள்ள யாதும் ஒருபுள்ளியின் தானக்காவி

$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ என்க.

$\underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{G}$ என்பதால்,

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ -4 & +4 & -8 \end{vmatrix} = -4\,\underline{i} + 12\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$$

$$(-8y - 4z)\,\underline{i} + (8x - 4z)\,\underline{j} + (4x + 4y)\,\underline{k} = -4\,\underline{i} + 12\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$$

$$(-2y - z)\,\underline{i} + (2x - z)\,\underline{j} + (x + y)\,\underline{k} = -\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + 2\,\underline{k}$$

$$-2y - z = -1$$

$$2x - z = 3$$

$$x + y = 2$$

$x = t$ என்க. (t - பரமானம்)

$$y = 2 - t\ ,\ z = 2t - 3$$

$$\underline{r} = t\,\underline{i} + (2 - t)\,\underline{j} + (2t - 3)\,\underline{k}$$

$t = \mu + 1$ எனப் பிரதியிட

$$\underline{r} = (\mu + 1)\,\underline{i} + (-\mu + 1)\,\underline{j} + (2\mu - 1)\,\underline{k}$$

$$\underline{r} = \left(\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}\right) + \mu\left(\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}\right)$$

- தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.

உதாரணம் 6

தானக்காவி $a\,\underline{i} + b\,\underline{j}$, $a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$, $c\,\underline{k}$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளில் முறையே $P\,\underline{i}$, $Q\,\underline{j}$, $R\,\underline{k}$ என்னும் பூச்சியமல்லாத விசைகள் தாக்குகின்றன; இங்கு a,b,c ஆகியன நேர்மாறிலிகளும் $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ என்பன முறையே Ox, Oy, Oz என்னும் வலக்கைத் தெக்காட்டின் அச்சுக்கள் வழியே உள்ள அலகுக்காவிகளும் ஆகும். இவ்விசைத் தொகுதியானது O விலே ஒரு தனிவிசை $\underline{F}$ இனாலும், திருப்பக்காவி $\underline{G}$ யை உடைய ஓர் இணையினாலும் பதிலிடப்படுமெனின் $\underline{F}$, $\underline{G}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

காவி $\underline{G}$ ஆனது Oy அச்சுக்குச் செங்குத்தெனக் காட்டுக.

அத்தோடு $\dfrac{a}{P} = \dfrac{b}{Q} + \dfrac{c}{R}$ எனின், இத்தொகுதி ஒரு தனிவிசைக்கு சமவலுவானது எனவும் காட்டுக.

மேலும் $Q = 2P$, $R = 3P$, $b = \dfrac{4}{3}a$, $c = a$ எனத் தரப்படின்

(i) இத்தொகுதி ஒரு தனி விளையுள் விசையாக ஒடுங்குகிறது என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க

(ii) விளையுளின் தாக்கக் கோடானது Oy அச்சைத் தானக்காவி $y_1\,\underline{j}$ ஆகவுள்ள புள்ளியிலே சந்திக்குமெனின் $y_1 = -\frac{2a}{3}$ எனக்காட்டுக

(iii) விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டை எழுதுக.

$$\underline{F} = P\,\underline{i} + Q\,\underline{j} + R\,\underline{k}$$

$$O\circlearrowright = \underline{G} = \left(a\,\underline{i} + b\,\underline{j}\right) \wedge P\,\underline{i} + \left(a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}\right) \wedge Q\,\underline{j} + c\,\underline{k} \wedge R\,\underline{k}$$

$$= -bP\,\underline{k} + aQ\,\underline{k} - c\,Q\,\underline{i}$$

$$= -cQ\,\underline{i} + (aQ - bP)\,\underline{k}$$

$$\underline{G}\cdot\underline{j} = \left[-cQ\,\underline{i} + (aQ - bP)\,\underline{k}\right]\cdot\underline{j} = 0$$

எனவே G ஆனது Oy அச்சுக்குச் செங்குத்தானதாகும்.

மேலும் $\underline{F} \neq \underline{0}$; $\underline{F}\cdot\underline{G} = 0$ எனின், தொகுதி தனி விசைக்கு ஒடுங்கும்.

$$\underline{F}\cdot\underline{G} = 0 \Rightarrow -cPQ + R(aQ - bP) = 0$$

$$PQ\cdot c + PR\cdot b = RQ\cdot a$$

இருபக்கமும் PQR ஆல் பிரிக்க,

$$\frac{c}{R} + \frac{b}{Q} = \frac{a}{P} \quad \text{ஆகும்.} \qquad \text{------------(1)}$$

$Q = 2P$, $R = 3P$, $b = \frac{4}{3}a$, $c = a$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(1) இல் $\frac{c}{R} + \frac{b}{Q} = \frac{a}{3P} + \frac{4a}{6P} = \frac{a}{P}$

இ.கை.ப = வ.கை.ப

எனவே இத்தொகுதி ஒரு தனிவிசையாக ஒடுங்கும்.

(ii) இப்பொழுது $\underline{F} = P\left(\underline{i} + 2\,\underline{j} + 3\,\underline{k}\right)$ ------------(2)

$$\underline{G} = -c\,Q\,\underline{i} + (aQ - bP)\,\underline{k}$$

$$= -2aP\,\underline{i} + \left(2aP - \frac{4aP}{3}\right)\underline{k}$$

$$= -2aP\,\underline{i} + \frac{2aP}{3}\,\underline{k} \qquad \text{------------(3)}$$

விளையுள் y அச்சை $y_1\,\underline{j}$ ஐ தானக்காவியாகக் கொண்ட புள்ளியில் வெட்டுவதால்.

$$y_1\,\underline{j} \wedge \underline{F} = \underline{G} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$y_1\,\underline{j} \wedge \left[P\left(\underline{i} + 2\,\underline{j} + 3\,\underline{k}\right)\right] = -2aP\,\underline{i} + \frac{2aP}{3}\,\underline{k}$$

$$-Py_1\,\underline{k} + 3Py_1\,\underline{i} = -2aP\,\underline{i} + \frac{2aP}{3}\,\underline{k}$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$$3Py_1 = -2a \quad ; \quad -Py_1 = \frac{2aP}{3}\,\underline{k}$$

$$y_1 = -\frac{2a}{3}$$

எனவே தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\underline{r} = -\frac{2a}{3}\,\underline{j} + \lambda\left(\underline{i} + 2\,\underline{j} + 3\,\underline{k}\right) \quad \text{ஆகும்.}$$

பயிற்சி - 11

(a)

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு விசையையும் $ai + bj$ எனும் வடிவில் எழுதுக.

(i) 15 அலகு பருமனுடைய விசை $3i + 4j$ இன் திசையில்

(ii) 65 அலகு பருமனுடைய விசை $5i - 12j$ இன் திசையில்

(iii) 28 அலகு பருமனுடைய விசை $-i + \sqrt{3}j$ இன் திசையில்

(iv) 50 அலகு பருமனுடைய விசை $24i - 7j$ இற்குச் சமாந்தரமாக

(v) 20 அலகு பருமனுடைய விசை PQ இற்குச் சமாந்தரமான கோட்டின் வழியே இங்கு $P = (-1, 7)$, $Q = (1, 5)$.

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு விசையினதும் தாக்கக்கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டை எழுதுக

(i) $(2i - 3j)$ தானக்காவியையுடைய புள்ளியினூடாகத் தாக்கும் விசை $F = 8i - 7j$

(ii) உற்பத்தியினூடாகத் தாக்கும் விசை $F = 4i$

(iii) $(i + j)$, $(5i + 11j)$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாக உடைய புள்ளிகளினூடு தாக்கும் விசை.

(iv) $(7, 8)$ எனும் புள்ளியினூடாக $i - 2j$ இற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும் விசை.

(v) x அச்சின் வழியே தொழிற்படும் விசை.

3. பின்வரும் ஒவ்வொரு விசையையும் $ai + bj$ எனும் வடிவில் எழுதுக.

(i) விசையின் பருமன் $65N$, தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$r = i + \lambda(5i - 12j)$$

(ii) விசையின் பருமன் 4N ; தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$r = 7i - 8j + \lambda i$$

(iii) விசையின் பருமன் $8\sqrt{2}\,N$ தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$r = (3+\lambda)i + (\lambda - 1)j$$

(iv) விசையின் பருமன் $13N$; தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$r = (2 + 4\lambda)i + (5 - 7\lambda)j$$

(v) விசையின் பருமன் $20N$; தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 3x - 1$$

4. $F_1 = i + 5j$; $F_2 = 3i - 2j$ எனும் விசைகள் i, $-3i + 14j$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகவுடைய புள்ளிகளினூடாகத் தாக்குகின்றன.

(i) விளையுளைக் காண்க.

(ii) இரு விசைகளினதும் தாக்கக் கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டை எழுதி, இரு விசைகளும் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

(iii) விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

5. $50N$ பருமனுடைய F_1 எனும் விசை உற்பத்தியினூடாக $(24i - 7j)$ இன் திசையில் தாக்குகிறது. $F_2 = -2i + j$ எனும் இரண்டாவது விசை ஒன்று $(5, 0)$ எனும் புள்ளியினூடாகத் தாக்குகிறது.

(i) விளையுள் விசையைக் காண்க.

(ii) விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. விசைகள் $2i - 3j$, $5i + j$, $-4i + 7j$ என்பன முறையே $i + j$, $-2i + 2j$, $3i - 4j$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளினூடாகத் தாக்குகின்றன.

(i) உற்பத்தி பற்றி

(ii) $i - j$ ஐத் தானக் காவியாகவுடைய புள்ளி பற்றி விசைகளின் விளையுள் திருப்பத்தைக் காண்க.

7. விசை $F_1 = 3i + 7j$; தாக்கும் புள்ளியின் தானக் காவி $i + j$

விசை $F_2 = 5i - 4j$; தாக்கும் புள்ளியின் தானக் காவி $7i - 2j$

விசை $F_3 = i - 6j$ உற்பத்தியில்

இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க.

விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் தெக்காட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் காவிச் சமன்பாடு ஒன்றினை எழுதுக.

8. $10N, 3\sqrt{5}N, 25N$ பருமன்களையுடைய விசைகள் முறையே

$r_1 = i - 2j + \lambda(4i + 3j)$; $r_2 = -2i + 4j + \lambda(2i - j)$:

$r_3 = 4i + \lambda(7i - 24j)$ என்பவற்றைக் காவிச் சமன்பாடுகளாகக் கொண்ட கோடுகளின் வழியே தாக்குகின்றன. இத் தொகுதிக்கு F_4 எனும் நான்காவது விசை ஒன்று சேர்க்கப்படத் தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் F_4 யையும் F_4 இன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

9. $7i + 5j$, $2j + 3j$, λi ஆகிய மூன்று விசைகளும் உற்பத்தியில் தாக்குகின்றன. இங்கு விசைகளின் அலகு நியூற்றன் ஆகும்.

இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமன் $17N$ எனின், λ இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் இரண்டையும் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் இரு திசைகளும் Oy உடன் சமமாகச் சாய்ந்துள்ளன எனக் காட்டுக.

10. A, B என்னுமிரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $8i + 6j$, $5i - 12j$ ஆகும். AB, x அச்சை C இல் வெட்டுகிறது.

(i) C இன் தானக் காவியைக் காண்க.

(ii) $OADB$ இணைகரமாகுமாறு உச்சி D இன் தானக்காவியைக் காண்க.

$40N$ பருமனுடைய F_1 எனும் விசை O இல் $\overrightarrow{OA}$ வழியேயும், $26N$ பருமனுடைய F_2 எனும் விசை O இல் $\overrightarrow{OB}$ வழியேயும் தாக்குகிறது. F_1, F_2 ஐ i, j இன் உறுப்பக்களில் எழுதி, இவ்விரு விசைகளினதும் விளையுளின் பருமனைக் காண்க. விளையுள் C யினூடு செல்லுமெனக் காட்டுக.

இப்பொழுது F_1 இற்குப் பதிலாக O இல் OA வழியே F_3 எனும் விசை தாக்கும் போது F_2, F_3 என்பவற்றின் விளையுள் D இனூடாகச் செல்லுமெனின் F_3 ஐ i, j இல் காண்க.

(b)

1. F எனும் விசை $4i + 3j$ ஐ தானக் காவியாக உள்ள புள்ளி P இல் தாக்குகிறது. புள்ளி A இன் தானக்காவி a எனத் தரப்படுமிடத்துப் பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் A பற்றி F இன் காவித் திருப்பத்தைக் காண்க.

(a) $F = 6i + 5j$, $a = i - j$

(b) $F = 2i - 3j$, $a = -2i + 2j$

(c) $F = -3i + 2j$, $a = 6i + j$

(d) $F = -5i + j$, $a = 4i - j$

2. $F_1 = 6i + 5j$; $F_2 = -3i - 2j$ ஆகிய இரு விசைகளும் முறையே $r_1 = i + 2j$, $r_2 = -2i + 3j$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகவுடைய புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. உற்பத்தி O பற்றி அவ்விரு விசைகளினதும் திருப்பங்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் காணக. O விலிருந்து இவ்விசைகளின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டிற்கான செங்குத்துத் தூரத்தையும் காண்க.

3. $F_1 = 2i + 2j$; $F_2 = i - j$ ஆகிய இருவிசைகளும் முறையே $r_1 = i$, $r_2 = 2j$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகவுடைய புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க. O பற்றி இவ்விசைகளின் திருப்பம் யாது? விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் காவிச் சமன்பாடு யாது?

4. F_1, F_2, F_3 எனும் விசைகள் r_1, r_2, r_3 என்பற்றைத் தானக்காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. இங்கு

$F_1 = 5i + 6j$ $\quad r_1 = ci + j$

$F_2 = ai - 4j$ $\quad r_2 = 2i - j$

$F_3 = -6i + bj$ $\quad r_3 = 3i + 2j$

இவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் ஒருமைகள் *a, b, c* என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு மூன்று விசைகளும் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

இப்பொழுது F_3 இன் திசை புறமாற்றப்பட்டுத் தொகுதிக்கு விசைகளின் தளத்தில் இடஞ்சுழியாக *21* அலகு பருமனுள்ள இணை ஒன்று சேர்க்கப்பட்டது. புதிய தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும், விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டையும் காண்க.

5. பின்வரும் விசைத் தொகுதி சமநிலையிலுள்ளது எனக் காட்டுக.

விசை $F_1 = i - j$ புள்ளி $r_1 = i + k$ இல்

விசை $F_2 = i - k$ புள்ளி $r_2 = 2i$ இல்

விசை $F_3 = 2j + k$ புள்ளி $r_3 = i - 2j$ இல்

விசை $F_4 = -2i - j$ புள்ளி $r_4 = 3i + j + k$ இல்

6. பின்வரும் விசைத் தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி, இணையின் காவித் திருப்பத்தைக் காண்க.

விசை $F_1 = i + 2j - 3k$ புள்ளி $r_1 = i - j + 2k$ இல்

விசை $F_2 = i - j + 2k$ புள்ளி $r_2 = 2i + j - k$ இல்

விசை $F_3 = -3i + j - 3k$ புள்ளி $r_3 = 3i + k$ இல்

விசை $F_4 = i - 2j + 4k$ புள்ளி $r_4 = j - 2k$ இல்

7. **(a)** F, $-F$ எனும் இரு விசைகள் r_1, r_2 என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. இங்கு
$F = 2i + 6j - 3k$, $r_1 = 2j$, $r_2 = i + j + k$ ஆகும்.

இணையின் திருப்பத்தைக் கண்டு, இதிலிருந்து இருவிசைகளினதும் தாக்கக்கோடுகளுக்கிடையேயான தூரத்தைக் காண்க.

(b) F_1, F_2 என்னும் இரு விசைகள் $3i + 2j + k$ ஐத் தானக் காவியாகவுடைய புள்ளி *A* இல் தாக்குகின்றன. என்பன முறையே காவிகள் $6i + 3j - 2k$, $4i + 7j + 6k$ என்பவற்றின் திசைகளில் தாக்குகின்றன. F_1, F_2 என்பவற்றின் பருமன்கள் முறையே 14 , $\sqrt{101}$ அலகுகளாகும். F_1, F_2 என்பவற்றின் விளையுளைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் காவிச் சமன்பாடொன்றை எழுதுக.

8. $\sqrt{21}$, $2\sqrt{51}$ பருமன்களைக் கொண்ட விசைகள் F_1, F_2 என்பவற்றின் தாக்கக் கோடுகளின் காவிச் சமன்பாடுகள் முறையே
$r_1 = 2i - 7j + k + 3\lambda(i + 4j + 2k)$ $r_2 = 3i - 4j + \mu(i + 5j + 5k)$
ஆகும். இவ்விருவிசைகளினதும் விளையுளைக் காண்க.

விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் சந்திக்குமெனக் காட்டி, சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

9. F_1, F_2 எனும் விசைகள் முறையே a_1, a_2 என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. $F_1 = 2i - 2k$, $F_2 = i - 2j + k$, $a_1 = i + 2j + 3k$, $a_2 = 4i - pk$ ஆகும். F_1, F_2 என்பவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் சந்திக்குமெனின் p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. F_1, F_2 என்பவற்றின் விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடொன்றினை எழுதுக.

10. **(a)** F_1, F_2, F_3 ஆகிய மூன்று விசைகள் துணிக்கை ஒன்றின் மீது தாக்குகின்றன. இங்கு F_1 இன் பருமன் *14* அலகும், $-6i + 2j - 3k$ இன் திசையிலும் உள்ளது.

$F_2 = ai + bj + ck$ உம் F_3 ஆனது, பருமனிலும் திசையிலும் AB ஆல் குறிக்கப்படுகிறது. இங்கு *A, B* என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $7i - 2j + 5k$, $3i + j + k$ ஆகும். மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பின் *a, b, c* என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) முக்கோணி PQR உச்சிகள் Q, R என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $8i + 3j + 5k$, $6i + 4j + 9k$ ஆகும். PQ, PR வழியே (எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு குறிப்பிடும் திசையில்) முறையே $6i + 4j + 2k$, $8i + 10j + 12k$ என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. மூன்றாவது விசை F, P யினூடாகத் தாக்குகிறது. இம்மூன்று விசைகளும் சமநிலையிலிருப்பின்

(i) விசை F இன் பருமன்

(ii) P யின் தானக் காவி

(iii) F இன் தாக்கக் கோட்டின் காவிச் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

11. (a) ஒரு விசை F ஆனது, r ஐ தானக் காவியாகக் கொண்ட புள்ளியொன்றில் தாக்குகிறது. புள்ளி A இன் தானக் காவி a எனின், A பற்றி விசையின் காவித் திருப்பம் யாது?

A, B எனுமிரு புள்ளிகள் பற்றி விசை F இன் திருப்பங்கள் சமமெனின் AB, F இன் தாக்கக் கோட்டிற்கு சமாந்தரமெனக் காட்டுக, j, $i + 2i - k$ எனும் தானக் காவிகளுடைய இரு புள்ளிகள் பற்றி ஓரலகு பருமனையுடைய R எனும் விசையின் திருப்பங்கள் சமம் எனின், R இன் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $4\sqrt{3}$ அலகு பருமனுடைய இருவிசைகள் $r = i + 2j + t(i - j + k)$, $\boldsymbol{r} = 2i - \boldsymbol{k} + s(i - j + k)$ என்பவற்றைக் காவிச் சமன்பாடுகளாகக் கொண்ட கோடுகள் வழியே தாக்கி இணை ஒன்றை உருவாக்குகின்றன. இணையின் திருப்பத்தின் பருமனைக் காண்க. இணையைக் கொண்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தான அலகுக் காவியொன்றையும் காண்க.

12. $F_1 = -3i + 2j + k$, $F_2 = j - k$ ஆகிய விசைகள் முறையே $r_1 = 2i - 3j + k$, $r_2 = -i + k$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. F_3 எனும் மூன்றாவது விசை, தொகுதிக்குச் சேர்க்கப்படுகிறது.

(i) தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் F_3 இன் பருமனைக் காண்க. F_3 இன் தாக்கக்கோட்டின் காவிச் சமன்பாடொன்றைக் காண்க.

(ii) விசை F_3 உற்பத்தியில் தாக்கி, தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குமெனின் F_3 ஐயும் இணையின் பருமனையும் காண்க.

13. (a) $F = i - j + 2k$ எனும் விசை $-i - j + k$ ஐத் தானக் காவியாகக் கொண்ட புள்ளியில் தாக்குகின்றது. இவ்விசையானது உற்பத்தியில் தாக்கும் சம விசைக்கு ஓர் இணையுடன் ஒருமித்து சமானமெனக் காட்டுக. இணையின் காவித் திருப்பம் யாது?

(b) $R = i + j - k$ எனும் விசை உற்பத்தியில் தாக்குகிறது. இவ்விசையுடன் $i + j + 2k$ காவித்திருப்பமுடைய இணை G சேர்க்கப்படுகிறது. இணையின் காவித் திருப்பமானது விசைக்குச் செங்குத்தானதெனக் காட்டி விசையும் இணையும் ஒரு தளமானவையெனக் காட்டுக. இத் தொகுதிக்குச் சமவலுவளவான தனிவிசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(c) $2i$ ஐத் தானக் காவியாகவுடைய புள்ளியில் $i + 2j - k$ எனும் விசையும் அத்துடன் $2i - j$ காவித்திருப்பமுடைய இணையும் தாக்குகின்றன. இத்தொகுதியை மேலும் ஒடுக்கமுடியாதென நிறுவுக.

விசை உற்பத்தியினூடாகத் தாக்குமாறு இத்தொகுதிக்குச் சமவலுவான இன்னொரு தொகுதியைக் காண்க.

14. 26, $4\sqrt{41}$, 15 நியூற்றன் விசைகள் முறையே முக்கோணி OAB இன் பக்கங்கள் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BO}$ வழியே தாக்குகின்றன. O வைக் குறித்து A, B என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $5i + 12j$, $3i + 4k$ ஆகும். இவ்விசைகளின் விளையுள் $-3i - 4k$ எனக் காட்டி O பற்றி விளையுளின் திருப்பத்தின் பருமனைக் காண்க.

15. $-9i + j - 2k$, $3i + 2j - 3k$, $-6i + 3j + 5k$ ஆகிய விசைகள் முறையே $-11i + 2j - 5k$, $i - 4j + 5k$, $-8i + 4j - 8k$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகக் கொண்ட புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகள் இணைக்கு சமவலுவானதெனக் காட்டி, இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

16. பின்வரும் ஒவ்வொரு விசைத் தொகுதியும் சமநிலையிலுள்ளன எனக் காட்டுக.

(a) விசைகள் $3\vec{AB}$, $4\vec{AC}$. இங்கு A, B, C என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $4i-k,\ 4j+3k,\ 7i-3j-4k$ ஆகும்.

(b) விசை $F_1 = 3i+4j+5k$, புள்ளி $L(7i+9j+11k)$ இல்

விசை $F_2 = i+j+k$ புள்ளி $M(4i+4j+4k)$ இல்

விசை $F_3 = -4i-5j-6k$ புள்ளி $N(5i+6j+7j)$ இல்

விசைகள் F_1, F_2 இற்கிடையேயான கோணத்தின் கோசைனையும் காண்க.

17. நான்முகி $ABCD$ இன் உச்சிகள் A, B, C, D இன் தானக் காவிகள் முறையே a, b, c, d ஆகும். இங்கு

$a = 3i-4j+k$, $b = 4i+4j-2k$, $c = 4i+k$, $d = I-2j+k$ ஆகும்.

$30,\ 3\sqrt{13}$ அலகு பருமனுள்ள விசைகள் CB, CD வழியே தாக்குகின்றன. மூன்றாவது விசை ஒன்று A இல் தாக்குகிறது. இத்தொகுதி இணைக்கு ஒடுங்குமெனின், இணையின் பருமனையும் A இல் தாக்கும் விசையையும் காண்க.

18. $F_1 = 3i - j + 2k$

$F_2 = -i - 4j + k$

$F_3 = i + j - 2k$ ஆகிய விசைகள்,

$r_1 = 6i - j + k$, $r_2 = i - 8j + k$, $r_3 = i - 2j + 3k$ என்பவற்றைத் தானக் காவிகளாகவுடைய புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. நான்காவது விசை F_4 இம் மூன்று விசைகளுடன் சேர்க்கப்படத் தொகுதி சமநிலையிலுள்ளது. F_4 ஐயும் F_4 இன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தி O பற்றி F_4 இன் திருப்பதையும் காண்க.

19. உற்பத்தி O குறித்து r ஐ தானக் காவியாகக் கொண்ட புள்ளி A இனூடாக F எனும் விசை தாக்குகிறது. O பற்றி விசை F இன் காவித் திருப்பத்தை வரையறுத்து இது விசையின் தாக்கக்கோட்டிலுள்ள புள்ளி A இல் தங்கியிருக்கவில்லையெனக் காட்டுக.

ஒரு தொகுதி விசைகள் $F_1 = i-2j+2k$, $F_2 = i+j+k$ $F_3 = i-2j-4k$ என்பன உற்பத்தி O இலும் $F_4 = i-2j-k$, $-2i+4j+2k$ ஐத் தானக் காவியாகவுடைய புள்ளியினூடாகவும் $F_5 = -i-2j-7k$, $i-2j-k$ ஐத் தானக் காவியாகவுடைய புள்ளியினூடாகவும் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை O வினூடான ஒரு தனி விசை R உடன் இணை G இற்கும் ஒடுக்குக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு விதமாகவோ இத்தொகுதியானது $i-j+k$ எனும் புள்ளியினூடு தாக்கும் $F = 4i-8j-4k$ எனும் தனிவிசைக்குச் சமவலுவானது என வாய்ப்புப் பார்க்க.

20. உற்பத்தி O குறித்து முக்கோணி ABC இன் உச்சிள் A, B, C என்பவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $3i+j+2k$, $I+5j+6k$, $4i-j+4k$ ஆகும். விசைகள் P, Q, R என்பன முறையே $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ வழியே தாக்குகின்றன. $|P| = 18$, $|Q| = 14$, $|R| = 6$ இவ்விசைகளின் விளையுள் $-2i+4j+4K$ எனக் காட்டி O பற்றி விசைகளின் திருப்பத்தைக் காண்க.

λ ஒருமையாக இருக்க $s = \lambda(-i+3j+2k)$ எனும் விசைத் தொகுதிக்குச் சேர்க்கப்படுகிறது. விசை S, $7j$ ஐ தானக் காவியாகவுடைய புள்ளியினூடாகத் தாக்குகிறது. O பற்றி இவ்விசைகளின் மொத்தத் திருப்பம் பூச்சியம் ஆகுமாறு λ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இவ்வகையில் விளையுள் விசையைக் காண்க.

பலவினப் பயிற்சிகள்

1. (i) ABC எனும் ஓர் சீரான முக்கோண அடரானது A, B எனும் உச்சிகளுடன் இணைக்கப்பட்ட OA, OB என்னும் இரு இழைகளினால் O விலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்விழைகளிலுள்ள இழுவையானது அவற்றின் நீளங்களுக்கு விகிதசமமாக உள்ளதெனில் O வை C யுடன் இணைக்கும் நேர்கோடானது AB யின் நடுப்புள்ளியினூடாகச் செல்ல வேண்டுமெனக் காட்டுக.

(ii) $ABCD$ என்னுமோர் நாற்பக்கலின் மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்பன O வில் இடைவெட்டுகின்றன.

ஒரு விசைத் தொகுதியானது $\vec{AB}, \vec{BD}, \vec{DC}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படுகிறது. இவ்விசைத் தொகுதியானது AC இற்குச் சமாந்தரமாக B, D என்பவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் இரு விசைகளுக்கு சமவலுவானவை எனக் காட்டுக.

இவ்விரு விசைகளும் $\vec{AC}$ என்பதால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசையினை விளையுளாகக் கொண்டிருப்பதற்குரிய நிபந்தனையானது AOB, DOC எனும் முக்கோணிகள் பரப்பளவிலே சமனாதல் வேண்டுமென்பதாகும் என மேலும் காட்டுக.

2. $\lambda \vec{OA}$, $\mu \vec{OB}$ என்பவற்றினால் குறிக்கப்படும் இரு விசைகளின் விளையுள் $(\lambda+\mu)\vec{OC}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு $AC : CB = \mu : \lambda$ ஆகுமாறு C, AB இல் ஒரு புள்ளியாகும்.

$\lambda \vec{BC}$, $\mu \vec{CB}$, $\gamma \vec{AB}$ என்பவற்றினால் முழுமையாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஒரு முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் வழியே தாக்குகின்றன. மூன்று விசைகளும் பொதுவாக R எனும் தனிவிசைக்கு சமவலுவானவை எனக் காட்டுக. R இன் தாக்கக்கோடானது முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களைப் பிரிக்கும் விகிதங்களைக் காண்க. மூன்று விசைகளும் ஓரிணைக்கு சமவலுவாக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை என்ன?

3. **(a)** P, Q எனும் ஒரு சோடிச் சமாந்தர விசைகளின் விளையுளைக் காண்க. இவ்விசைகள் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கும் போது உமது நிறுவல் குலைந்து விடுகிறதா? ஓர் இணையைத் தனி விசையொன்றினாலன்றி மற்றோர் இணையினாலேயே சமப்படுத்தலாமெனக் காட்டுக. இணையானது ஒரு விசையிலும் வேறாகத் தன்னளவிலே ஒரு சார்பற்ற தனிப்பொருளாகுமென நீர் கருதுவீரா?

(b) Ox, Oy எனும் செவ்வக அச்சுக்கள் குறித்து (x_i, y_i) எனும் ஆள்கூறுகளையுடைய P_i எனும் புள்ளிகளில் முறையே F_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n)$ எனும் பருமன் கொண்ட ஒரு தள சமாந்தர விசைகள் தாக்குகின்றன. ஒவ்வொரு விசையையும் Ox இற்கு θ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. அவ்விசைகளின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

θ ஆனது மாறும் போது ஒத்த விளையுளானது அத்தளத்திலே நிலைத்த ஒரு புள்ளி G இனூடாகச் செல்லும் என உய்த்தறிக.

தரப்பட்ட ஒருதள அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தினது இடம் காண்பதற்கு இம்முடிவை ஆதாரமாகக் கொண்ட எளிய பரிசோதனை ஒன்றைச் சுருக்கமான ஒரு விளக்கத்துடன் விபரிக்குக.

4. முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x+y=1,\ y-x=1,\ y=2$ ஆகும். P, Q, R எனும் மூன்று விசைகள் AB, BC, CA வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி G. முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே தாக்கும் விசைகள் P, Q, R என்பன AG, BG, CG வழியே தாக்கும் P', Q', R' ஆகிய விசைகளுடன் சமநிலையிலிருப்பின்.

$$\frac{P \cdot P'}{AG \cdot BC} + \frac{Q \cdot Q'}{BG \cdot CA} + \frac{R \cdot R'}{CG \cdot AB} = 0$$ என நிறுவுக.

6. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C என்பவற்றிலிருந்து BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்களின் அடிகள் முறையே D, E, F ஆகும். BC, CA, AB வழியே தாக்கும். X, Y, Z விசைகளின் தொகுதியும் பாதமுக்கோணி DEF இன் பக்கங்கள் EF, FD, DE வழியே தாக்கும், P, Q, R விசைகளின் தொகுதியும் சமவலுவானவை எனின்,

$$2P = \frac{Y}{\cos B} + \frac{Z}{\cos C}$$ என நிறுவுக.

7. ABC எனும் முக்கோணியின் தளத்தில் O எனும் புள்ளி அமைந்துள்ளது. முறையே A, B, C ஆகியவற்றில் வைக்கப்பட்ட m_1, m_2, m_3 ஆகிய திணிவுள்ள துணிக்கைகளின் திணிவு மையம் G ஆகும்.

$m_1\vec{OA}+m_2\vec{OB}+m_3\vec{OC} = (m_1+m_2+m_3)\vec{OG}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு முறையாகவோ,

$m_1 : m_2 : m_3 = \tan A : \tan B : \tan C$ எனின் $m_1\vec{OA}, m_2\vec{OB}, m_3\vec{OC}$ ஆகியவற்றின் விளையுள் முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையத்தின் ஊடாகச் செல்கிறது எனக் காட்டுக.

$m_1\vec{OA}, m_2\vec{OB}, m_3\vec{OC}$ ஆகியவற்றின் விளையுள் முக்கோணி ABC இன் சுற்றுமையத்தினூடாகச் சென்றால் $m_1 : m_2 : m_3$ எனும் விகிதங்களைக் காண்க.

8. i, j என்பன தளமொன்றிலுள்ள நிமிர்கோண அலகுக்காவிகள் ஆகும். உற்பத்தி O குறித்து $r = xi + yj$ என்னும் தானக்காவியினால் குறிக்கப்படும் தளத்திலுள்ள புள்ளி P யில் $F = Xi + Yj$ எனும் விசை தாக்குகிறது.
P இல் உள்ள F என்னும் விசை O இல் உள்ள சமவிசைக்கு இணையொன்றுடன் சமவலுவுடையதாகும் எனக் காட்டுக.
$i+2j,\ 2i+j,\ 3i+2j$ என்னும் தானக்காவிகளினால் குறிக்கப்படும் புள்ளிகளில் முறையே F_1, F_2, F_3 எனும் மாறும் விசைகள் தாக்குகின்றன. நேரம் t இலே

$F_1 = i\cos t + j\sin t$

$F_2 = i\sin t - 2j\cos t$

$F_3 = j\cos t$ ஆகும்.

இத்தொகுதி O இல் F எனும் தனிவிசையாகவும், G எனும் இணையாகவும் ஒடுக்கப்பட்டால் F இனதும் G இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிந்து t ஐச் சாராத நிலையான ஒரு புள்ளியினூடு இக்கோடு செல்கிறது எனக் காட்டுக.

9. a எனும் புள்ளியில் தாக்கும் விசை F ஒன்று r எனும்புள்ளியில் தாக்கும் ஒருவிசை F இற்கு இணையொன்றுடன் சமவலுவானது எனக் காட்டுக.

$F_1 = i + 2j + 3k$

$F_2 = -3i + j - 4k$

$F_3 = 2i - 3j + k$ என்பவற்றினால் தரப்பட்ட விசைகள் F_1, F_2, F_3 என்பன முறையே r_1, r_2, r_3 என்னும் புள்ளிகளினூடாகத் தாக்குகின்றன. இங்கே

$r_1 = i + 2j + 3k$

$r_2 = 2i + 3j + k$

$r_3 = 3i + j + 2k$ ஆகும்.

விசைகள் ஓர் இணையிற்கு சமவலுவுடையன எனக் காட்டுக. இவ் இணையின் காவித்திருப்பத்தையும் காண்க.

10. P, Q என்பன மாறிலிகளாகவும் θ என்பது பரமானமாகவும் உள்ள $(P\cos\theta, P\sin\theta), (-Q\sin\theta, Q\cos\theta)$ எனும் இருமாறும் விசைகள் முறையே $(a, 0), (-a, 0)$ எனும்புள்ளிகளிலே தாக்குகின்றன. இத்தொகுதி ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவான தெனக்காட்டி இவ்விசையின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இக்கோடானது நிலைத்த ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

11. O, A, B, C எனும் புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகள் முறையே $(0, 0), (3, 0), (3, 4)$ $(0, 4)$ ஆகும் $7, 6, 2, 4, 5$ அலகு பருமனுள்ள விசைகள் முறையே OA, AB, BC, CO, OB ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் போக்குகளிலும், 16 அலகு திருப்பமுள்ள இணை ஒன்று போக்கு $OCBA$ யிலும் தாக்குகின்றன. ஐந்து விசைகளையும் இணையையும் தொகுதியாகக் கொண்டு X, Y, G ஆகியவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்து இத் தொகுதியானது கோடு $3x - 4y - 5 = 0$ வழியே தாக்குகின்ற ஒருதனி விளையுளுக்கு சமவலுவானது எனக்காட்டுக.

12. W நிறையுடைய சீரான ஒரு ஏணி அழுத்தமான நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது சாய்ந்துள்ளது. அதன் அடி சுவரிலிருந்து அப்பால் கிடைக்கு α கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் கரடான நிலம் ஒன்றின் மீதுள்ளது. ஏணி எல்லைச் சமநிலையிலிருக்கு மெனின் அதன் சுவருடனான சாய்வு $\tan^{-1}\{2\tan(\lambda-\alpha)\}$ எனக் காட்டுக. இங்கு λ உராய்வுக்கோணம். நிலத்துடனான மொத்த மறுதாக்கம் $W\sec(\lambda-\alpha)$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

13. இரு சமமான சீரான AB உம் BC ஆன ஏணிகள் B இல் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் ஏணிகளின் நடுப்புள்ளிகளில் கயிறு இறுக்கமாக இருக்கும்போது கோணம் $ABC = 2\theta$ ஆகும் வண்ணம் கயிறு தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. A எனும் முனை சுயாதீனமாகச் சுழலப்பொருத்தப்பட்டுக்

கிடைக்குக் கீழ் α எனும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள உயர் சாய்வுக் கோடாக AC எனும்கோடு அமையும் வண்ணம் A இனூடான ஒப்பமான சாய்தளத்தில் C எனும் முனை உள்ளது. ஒவ்வொரு ஏணியின் நிறையும் W ஆக இருக்கும்போது சமநிலையில் கயிற்றிலுள்ள இழுவை $W(2\sin\alpha + \cos\alpha\tan\theta)$ எனக்காட்டுக.

14. $2m$ பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC யிலே BC, CA, AB எனும்பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே L, M, N ஆகும்.
$1, 2, 3, P, Q, 1$. நியூட்டன் பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CA, NM, ML, LN வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் திசைகளிலே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக.

(i) இத்தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனின் $P = 2$ எனவும், $Q = 3$ எனவும் காட்டுக.

(ii) இத்தொகுதி N இனூடாகத் தாக்கும் தனியொரு விளையுள் விசையாக ஒடுங்குமெனின் $Q = 5$ எனக்காட்டுக. $P=4$ எனவும் தரப்பட்டிருக்குமாயின் விளையுள் விசையின் பருமனையும், விளையுள் விசையானது BC வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

15. ஒருதள விசைத் தொகுதி எதனையும் திருப்பம் G ஐ உடைய ஓர் இணையுடன் சேர்த்து புள்ளி O வில் (Ox, Oy அச்சுக்கள் வழியே உள்ள கூறுகள் முறையே X, Y ஆக இருக்கும்) ஒரு விசையினால் பிரதியிடலாமெனக் கொண்டு சமாந்தரமல்லாத எவையேனும் இருதிசைகள் வழியே உள்ள துணிசல்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகைகள் தனித்தனியாகப் பூச்சியமெனின் தொகுதி ஓர் இணைக்கு சமவலுவான தெனக் காட்டுக.
பக்கம் a ஐ உடைய ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்றின் AB, BC, CD, DE, EF, FA என்னும் பக்கங்களின் வழியே எழுத்து ஒழுங்கு முறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே P, Q, R, S, T, U என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன.
$P-S=R-u=r-Q$ எனின் இத்தொகுதியானது.

திருப்பம் $G=\frac{3}{2}a\{P+Q+R+S+T+U\}$ ஐ உடைய ஓர் இணைக்கு சமவலுவானதெனக் காட்டுக.

16. முறையே $3a, 4a, 5a$ நீளமுள்ள AB, BC, CA என்னும் சீரான மூன்று கோல்கள் A, B, C என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இக்கோல்களின் நிறைகள் அவற்றின் நீளங்களுக்கு விகிதசமமாகும். இத்தொகுதியானது A யிலிருந்து ஓர் இழையினால் தொங்கவிடப்பட்டு ஓய்விலிருக்கிறது. கோல் AB ஆனது கிடையுடன் $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ இற் சாய்ந்திருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

கோல்களின் அலகு நீளத்திற்கான நிறையை w எனக் கொண்டு மூட்டுக்கள் B, C ஆகியவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

17. விசைத் தொகுதி (Xr, Yr) ஆனது புள்ளிகள் (x_r, y_r) , $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ இலே தாக்குகின்றன. புள்ளி (x, y) பற்றித் தொகுதியின் திருப்பம் M ஆனது $M=G-Yx-Xy$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

இங்கு $X=\sum_{r=1}^{n}X_r$ $\quad Y=\sum_{r=1}^{n}Y_r$

$$G=\sum_{r=1}^{n}(Y_r x_r - X_r y_r)$$

A $(a, o-)$, B $(o, -a)$ எனும் புள்ளிகள் பற்றித் தொகுதியொன்றின் திருப்பம் முறையே $\lambda G, -\lambda G$ ஆகும். $G \neq 0$ இத்தொகுதிக்கு X, Y ஆகியன ஒருமித்து மறையமாட்டாதெனவும் தொகுதியானது $(1-\lambda)x-(1+\lambda)y-a=0$ எனும் கோடு வழியே ஒருங்குமெனவும் காட்டுக.
இக்கோடானது நிலைத்து ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்கிறது என்பதை உய்த்தறிந்து அதன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

18. $2a$ நீளமுள்ளதும் W நிறையுடையதுமான சீரான ஒரு கோல் AB ஆனது $2l$ நீளமுள்ள ஓர் இழை AOQ வினால் ஒப்பமான ஒரு முனை O விலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இங்கு இழையின் நுனிகளில் ஒன்று கோலுடன் A இல் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மறுநுனியானது கோலின் மீது வழுக்கிச் செல்கின்ற இலேசான ஒப்பமான சிறிய ஒரு வளையம் Q வுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் கிடையுடன் ஒரு கோணம் θ வில் சாய்ந்துள்ளது. வளையம் Q வினதும் கோல் AB யினதும் நாப்பத்தை எடுத்துநோக்கிப் பின்வரும் முடிவுகளை உய்த்தறிக.

(i) இழையின் நேர்ப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ விற் சாய்ந்துள்ளது.

(ii) இழையிலுள்ள இழுவை $\frac{1}{2}W\sec\theta$ ஆகும்.

(iii) கோணம் θ ஆனது $a\cos^3\theta = l\sin\theta$ வினாலே தரப்படும்.

19. நிறை W வை உடைய ஒரு கோல் AB ஆனது ஆரை r ஐயும் மையம் C யையும் உடைய நிலையானதும் ஒப்பமானதும் அரைக்கோளவடிவம் குவளை

ஒன்றினுள்ளே முழுமையாக ஓய்விலிருக்கின்றது. AB இன் ஈர்வைமையம் G ஆனது அதனை a, b எனும் நீளங்களையுடைய இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இங்கு $b > a, r > \sqrt{ab}$ நாப்பத்தானத்தில் கிடையுடன் கோலின் சாய்வு θ எனின் $\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$ எனவும், $CG = \sqrt{r^2 - ab}$ எனவும் காட்டுக.

கோலுக்கும், குவளைக்குமிடையேயுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

20. பருமன் திசை தாக்கக் கோடு ஆகியவை $\overrightarrow{BC}$ இனால் வகை குறிக்கப்படும் விசை ஒன்றின் ஒரு புள்ளி A பற்றிய திருப்பத்தின் பருமனானது முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவின் இருமடங்காகுமென நிறுவுக.

$ABCD$ ஒரு சரிவகம். இங்கு AD, BC ஆகியன சமாந்தரமாகவும், E, F என்பன முறையே AD, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகவும் உள்ளன. தொகுதி ஒன்று $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ ஆகியவற்றினால் வகை குறிக்கப்படும் ஆறு விசைகளைக் கொண்டுள்ளது.

நீட்டப்பட்ட DA மீது P ஒரு புள்ளி எனின், தொகுதியின் P பற்றிய திருப்பத்தின் பருமன் $\dfrac{4(AP - BF)S}{AD + BC}$ எனக் காட்டுக. இங்கு சரிவகம் $ABCD$ இன் பரப்பளவும் S ஆகும்.

தொகுதியின் விளையுள் பருமனில் $2\overrightarrow{EF}$ இற்குச் சமமெனக் காட்டி அதன் தாக்கக் கோடானது AD ஐச் சந்திக்கும் தானத்தையும் காண்க.

21. ஒவ்வொன்றும் நிறை W வை உடைய AB, BC எனும் இரு சமகோல்கள் B யிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் மீள்தன்மையில்லா இழையொன்றினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு இழை நீட்டப்படும் போது கோணம் ABC செங்கோணத்தை உருவாக்கத்தக்க நீளத்தையுடையது. தொகுதியானது புள்ளி A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டு நாப்பத்தானத்தில் இருப்பின் நிலைக்குத்துடன் AB யின் சாய்வு தான் $^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ எனவும், இழையில் உள்ள இழுவை $\dfrac{3W}{\sqrt{5}}$ எனவும் காட்டுக.

அத்தோடு கோல் BC மீது மூட்டு B யின் மறுதாக்கமானது BC வழியே தாக்குகின்றதெனவும் காட்டுக.

22. நிறை W வையும், ஆரை a யையும் உடைய சீரான திண்மக் கோளம் ஒன்று நிலைத்த ஒரு புள்ளி O விலிருந்து நீளம் a யை உடைய இழை ஒன்றினாலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதே நிறை W வையும் நீளம் $4a$ யையும் உடைய சீரான கோல் ஒன்றின் முனை ஒன்று அதே புள்ளி O வுடன் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் கோளத்தைத் தொட்டுக் கொண்டு ஓய்வில் இருக்குமெனின் நிலைக்குத்துடன் இழையினதும், கோலினதும் சாய்வுகள் ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{\pi}{12}$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. அதோடு இழையில் உள்ள இழுவை $\dfrac{W\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ எனவும் காட்டி, கோளத்துக்கும் கோலுக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

23. $P, 4P, 2P, 2P, 3P, 3P$ என்னும் ஆறு விசைகள் ஒழுங்கான ஓர் அறுகோணி $ABCDEF$ இன் AB, BC, CD, DE, EF, FA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக எழுத்துக்களின் ஒழுங்குமுறை காட்டும் திசைகளிலே முறையே தாக்குகின்றன. இத்தொகுதி ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. அறுகோணியின் பக்கம் ஒன்றின் நீளம் a எனின் இணையின் பருமனைக் காண்க.

இதிலிருந்து முதல் ஐந்து விசைகளினதும் விளையுளின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

24. AB, BC, CD, DA என்னும் நான்கு சீரான சம கோல்கள் ஒரு சதுரம் $ABCD$ யை உருவாக்கக்கூடியதாக ஒரு மிக்கச் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி புள்ளி A யிலிருந்து தொங்குகின்றது. AB, BC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கின்ற நீட்டமுடியாத இழை ஒன்றினாற் சதுர வடிவம் பேணப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு கோலினதும் நிறை W எனின்,

(i) C யில் உள்ள மறுதாக்கமானது நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\tan^{-1}(1/2)$ இற் சாய்ந்த திசையிலே $\dfrac{W\sqrt{5}}{2}$ எனவும்,

(ii) D யில் உள்ள மறுதாக்கமானது கிடைத்திசை ஒன்றிலே $\frac{W}{2}$ எனவும்,

(iii) தொடுக்கும் இழையின் இழுவை $4W$ எனவும்,

(iv) B யில் உள்ள மறுதாக்கமானது நிலைக்குத்துடன் கோணம் $tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ இற் சாய்ந்த திசையிலே $\frac{W\sqrt{17}}{2}$ எனவும் நிறுவுக.

25. ஆரை a யை உடைய சீரான கோள ஓடு ஒன்று மையம் O விலிருந்து தூரம் $a \cos \alpha$ வில் உள்ள தளம் ஒன்றினால் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ பெரிய பகுதியின் ஈர்வை மையம் (புவியீர்ப்பு மையம்) புள்ளி O விலிருந்து தூரம் $\frac{a}{2}(1 - cos\,\alpha)$ இற் சமச்சீர் அச்சின் மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

அதே திரவியத்தினாலானதும் ஆரை $a\,sin\,\alpha$ வை உடையதுமான தட்டு ஒன்றினால் ஓட்டின் பெரிய பகுதி மூடப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறாக உண்டாக்கப்படும் சேர்த்திப் பொருளின் ஈர்வைமையம் புள்ளி O விலிருந்து தூரம் $\frac{a(1 - cos\,\alpha)^2}{3 - cos\,\alpha}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

26. கிடையுடன் கோணம் α விலே எதிர்ப் போக்குகளில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட இரு சம கரடான சாய்தளங்களின் மீது சீரான செவ்வட்ட உருளை ஒன்று கிடையாக ஓய்வில் இருக்கின்றது. உருளையின் அச்சு தளங்கள் இடைவெட்டும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகும். உருளைக்குப் பிரயோகிக்கப்படும் திருப்பம் M ஐ உடைய இணை ஒன்று அதனை அதன் அச்சுப்பற்றித் திருப்ப நாடுகின்றது. உருளையின் நிறை W ஆகவும் அதன் ஆரை a ஆகவும் உராய்வுக் கோணம் λ இருப்பின் உருளை நழுவுந் தறுவாயில்

$M = \frac{1}{2} W a\, sec\,\alpha\, sin 2\lambda$ எனக் காட்டுக.

27. நீளம் $2a$ வையும் நிறை W வையும் உடைய சீரான ஒப்பமான ஒரு கோல் AB ஆனது அதன் நிலைத்த முனை A பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. $2W$ நிறையை உடைய சிறிய ஒப்பமான ஒரு வளையம் C ஆனது கோலின் வழியே வழுக்கவல்லது. புள்ளி A இருக்கும் அதே கிடைமட்டத்தில் உள்ள நிலைத்த

ஒரு புள்ளி D யிற்கு $\frac{a}{4}$ நீளமுடைய நீட்டமுடியாத இழை ஒன்றினால் வளையம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையும் கோலும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. $AD = \frac{a}{4}$ ஆகும். நாப்பத் (சமநிலை) தானத்திலே கோலுக்கும் வளையத்துக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தைக் கண்டு, கோல் கிடையுடன் $\frac{\pi}{3}$ என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

அத்துடன் இழையில் உள்ள இழுவையையும் முனை A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

28. $Oxy-$ தளத்தில் உள்ள $A_r \equiv (x_r, y_r)$ என்னும் புள்ளிகளிலே தாக்குகின்ற ஒரு தள விசைகளின் தொகுதி ஒன்று $(X_r, Y_r)\; r = 1,2,.....n$ என்னும் கூறுகளைக் கொண்டுள்ளது. புள்ளி $P = (x, y)$ பற்றித் தொகுதியின் திருப்பம் $G - Yx + Xy$ எனக் காட்டுக. இங்கு

$$X = \sum_{r=1}^{n} X_r \qquad Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$$

$$G = \sum_{r=1}^{n} (Y_r x_r - X_r y_r)$$

$X^2 + Y^2 \neq 0$ எனத் தரப்படுமிடத்து தொகுதியின் விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

$A = (2a, 0),\, B = (0, a)$ ஆகிய புள்ளிகள் பற்றித் தொகுதிக்கு $H, 2H$ ஆகிய திருப்பங்கள் உள்ளதோடு $y = x$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமான துணிசல்களின் (துணித்த பகுதிகளின்) கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். தொகுதிக்கு X, Y, G ஆகியவற்றைக் கண்டு, விளையுளானது கோடு $x + y = 3a$ வழியே தாக்குகின்ற $\frac{H}{a}(-i + j)$ என்னும் ஒரு விசையாகுமெனக் காட்டுக. இங்கு i, j என்பன Ox, Oy ஆகிய அச்சுகள் வழியே உள்ள அலகுக் காவியாகும்.

29. ஒவ்வொன்றும் a நீளத்தையும் W நிறையையும் உடைய AB, BC, CD என்னும் மூன்று சீரான சம கோல்களும் $2a$ நீளத்தையும் $2W$ நிறையையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AD யும் A, B, C, D ஆகியவற்றிற் சுயாதீனமாக ஒருமிக்க மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC யின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட, இச்சட்டப்படல் நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) உள்ளது. கோல் AB மீது மூட்டுகள் A, B ஆகியவற்றில் உள்ள மறுதாக்கங்களின் பருமன்களையும், திசைகளையும் கண்டு அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் BC யிற்குக் கீழே $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ என்னும் ஆழத்திற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

30. பின்வருவனவற்றின் திணிவு ஈர்வை (புவியீர்ப்பு) மையத்தின் தானம் ஆகியவற்றைத் தொகையிடல் மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ காண்க.

(i) a ஆரையையும் σ பரப்படர்த்தியையும் உடைய சீரான ஓர் அரைக்கோளவடிவ ஓடு

(ii) h உயரத்தையும் α அரையுச்சிக் கோணத்தையும் $k\sigma$ பரப்படர்த்தியையும் உடைய சீரான ஒரு பொட் கூம்பு

$a = h\tan\alpha$ எனத் தரப்பட்டிருக்க பொது வட்டத்தின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இப்பரப்புகள் இரண்டும் கிடைக்குமாறு அவற்றின் வட்டவடிவ விளிம்புகள் வழியே அவை ஒருமிக்க மூட்டப்பட்டுள்ளன.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{36+k^2}-k}{6}$$ என இருப்பின்

இச்சேர்த்திப் பொருளானது அரைக்கோளவடிவப் பரப்பின் எந்தப் புள்ளியும் ஒப்பமான கிடைத்தளம் ஒன்றுடன் தொடுகையில் இருக்க, நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) நிற்க முடியுமெனக் காட்டுக.

31. ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ உடைய AB, BC என்னும் இலேசான இரு சம கோல்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக B யிலே விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் சமமாகச் சாய்ந்தும் ஆரை a யை உடைய நிலைப்படுத்தப்பட்ட கரடான கிடை வட்டவடிவ உருளை ஒன்றின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாகத் தளம் ABC அமைந்தும் இருக்குமாறு அவ்வுருளை மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. W, W என்னும் சம நிறைகள் A, C ஆகியவற்றிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருக்க, தொகுதி நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) உள்ளது.

ஒவ்வொரு தொடுகைப் புள்ளியிலும் உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{W\sqrt{2}}{1+\mu}$ எனக் காட்டுக. இங்கு μ என்பது உராய்வுக் குணகம் ஆகும்.

அங்கு எல்லை நாப்பம் (சமநிலை) இருக்குமாறு மேலதிகமான ஒரு நிறை w ஆனது A யிலிருந்து மெதுவாகத் தொங்கவிடப்பட்டால்

$$\frac{w}{W} = \frac{2\mu}{\mu^2-\mu+1}$$ எனவும் w ஆனது $2W$ வை விஞ்சமுடியாதெனவும் காட்டுக.

32. விறைப்பான பொருள் ஒன்றின் மீது தாக்குகின்ற மூன்று ஒருதள விசைகள் அதனை நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) வைத்திருக்குமெனில் அவை ஒன்றில் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் அன்றேல் சமாந்தரமான இருக்குமெனக் காட்டுக.

W நிறையும் ஆரை r உம் உள்ள சீரான ஒப்பமான அரைக்கோளவடிவக் குவளை *(bowl)* ஒன்று ஒப்பமான கிடைமேசை ஒன்று மீது ஓய்விற் கிடக்க W நிறையும் $2l$ நீளமும் உள்ள சீரான கோல் ஒன்று அதன் ஒரு பகுதி குவளையினுள் இருக்க ஓய்விற் கிடக்கின்றது. கிடையுடன் அரைக்கோளத்தின் அடியின் சாய்வு $\frac{\pi}{6}$ ஆகும். கிடையுடன் கோலின் சாய்வு $\theta\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ ஆகவும், குவளையின் விளிம்பில் உள்ள மறுதாக்கம் R ஆகவும் இருப்பின் கேத்திரகணித முறையாகவோ வேறுவிதமாகவோ

(i) $\theta = \frac{1}{2}\left(\cos^{-1}\frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

(ii) $l = \frac{1}{2} r\sec\theta$

(iii) $R = \frac{W}{\left(8+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^{\frac{1}{2}}}$ என நிறுவுக.

33. இணை ஒன்றின் திருப்பத்தை வரையறுத்து G_1, G_2 ஆகிய திருப்பங்களை உடைய இரு ஒருதள இணைகளின் விளையுளும் ஓர் இணையாகுமெனக் காட்டி, அதன் திருப்பத்தைக் காண்க.

செங்கோண ஆள்கூற்றுத் தொகுதி ஒன்று குறித்து (x_i, y_i), $i = 1,2,3,\dots n$ என்னும் புள்ளிகளிலே தாக்குகின்ற (X_i, Y_i) என்னும் ஒரு தள விசைத் தொகுதி ஒன்று (X, Y) எனும் ஒரு தனிவிசையாகவோ ஓர் இணை G ஆகவோ ஒடுங்கும் அல்லது சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டி முதலாவது வகையிலே விசைக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

எவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் பற்றிய ஒருதள விசைத் தொகுதி ஒன்றின் திருப்பங்கள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமெனில் தொகுதியானது சமநிலையில் உள்ளதெனக் கூற முடியுமா? உமது விடைக்கு நியாயந் தருக.

34. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுடைய AB, AC என்னும் சீரான சமகோல்கள் இரண்டு A யிலே சுயாதீனமாக கூட்டப்பட்டு, அவற்றின் முனைகள் B, C என்பன இலேசான இழை ஒன்றினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள சம கரடான இரு தளங்களின் மீது B யும் C யும் சமச்சீராக ஓய்விற் கிடக்கின்றன. சாய்தளங்களின் சரிவுகள் ஒன்றையொன்று நோக்கியவாறிருக்கக் கோல்களின் தளம் நிலைக்குத்தாகவுள்ளது. கோணம் BAC ஆனது 2θ ஆகவும் B, C ஆகிய இரு முனைகளிலும் உள்ள உராய்வுக் கோணம் β ஆகவும் இருக்கக் கோல்கள் எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளன. இழையில் உள்ள இழுவை T ஆனது

$T = \frac{1}{2} W \tan\theta + W \tan(\beta - \alpha)$ என்பதாலே தரப்படுகிறதெனக் காட்டுக.

மூட்டு A யிலும் முனை B யிலும் கோல் AB மீதுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க. அத்துடன்

$$\frac{BP}{AB} = \frac{\cos\theta}{\cos(\alpha - \beta)}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு P என்பது இந்த இரு மறுதாக்கங்களினதும் தாக்கக் கோடுகளில் வெட்டும் புள்ளியாகும்.

35. r என்னும் ஆரையை உடைய மெல்லிய சீரான அரைக்கோள வடிவ ஓடு ஒன்றின் ஈர்வை (புவியீர்ப்பு) மையத்தின் தானத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக a என்னும் ஆரையை உடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் ஈர்வை மையம் அதன் சமச்சீரச்சிலே அதன் அடியின் மையத்தில் இருந்து $\frac{3a}{8}$ தூரத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

மூடிய பாத்திரம் ஒன்று மெல்லிய சீரான அரைக்கோள வடிவ ஓடு ஒன்றையும் அதே மெல்லிய சீரான திரவியத்தினாலான தள வட்டவடிவ அடியையும் கொண்டுள்ளது. இவை ஒவ்வொன்றினதும் ஆரை a ஆகும். இப்பாத்திரம் முற்றாக நீரினால் நிரப்பப்பட்டு அதன் விளிம்பின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டபோது அதன் அடி கீழ்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கச் சமநிலையிலே தொங்குகிறது. ஓட்டின் திரவியத்தின் தன்னீர்வை (தன்னீர்ப்பு) எதுவாயிருப்பினும்

$\frac{1}{3} < \tan\theta < \frac{3}{8}$ எனக் காட்டி பாத்திரத்தின் நிறைக்கும் பாத்திரத்திற் கொள்ளப்பட்டிருக்கும் நீரின் நிறைக்கும் இடையிலான விகிதத்தை θ வின் சார்பிற் காண்க.

36. "உராய்வுக் கோணம்" எனும் பதத்தை வரையறுக்க.

(a) W என்னும் நிறையை உடைய சீரான திண்மக் கோளம் ஒன்று கிடையுடன் α எனும் சாய்வை உடைய தளம் ஒன்றின் மீது ஓய்வில் உள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். கோளமானது அதன் அதியுயர் புள்ளியுடன் தளத்துடன் இணைக்கப்பட்ட கிடை இழை ஒன்றினாலே தாங்கப்பட்டுள்ளது.

$\alpha \le 2\tan^{-1}(\mu)$ எனக் காட்டி இழையிலுள்ள உயர் இழுவையைக் காண்க.

(b) W என்னும் நிறையை உடைய சீரான திண்மக் கோளம் ஒன்று கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்கு எதிராக ஓய்விலிருக்கக் கோளத்தினதும் சுவரினதும் தொடுகைப் புள்ளிக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரில் உள்ள நிலைத்த புள்ளி ஒன்றுடன் இணைக்கப்பட்ட இழை ஒன்றினாலே தாங்கப்பட்டுள்ளது. இழையானது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ வை அமைக்கின்றது. சமநிலையானது எல்லைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் λ எனில் இழையிலுள்ள இழுவையைக் கண்டு θ வின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு இவ்விழுவையின் இழிவுப்பெறுமானம் $w\cos\lambda$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து λ ஆனது $\cos^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$ ஐ விஞ்சமுடியாதெனக் கேத்திரகணித முறையாகக் காட்டுக.

37. விறைப்பான பொருள் ஒன்றின் மீது தாக்குகின்ற சமாந்தரமற்ற மூன்று ஒரு தள விசைகள் அதனை நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) வைத்திருக்குமெனில் அவை ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்க வேண்டுமெனக் காட்டுக.

நிறை W வை உடைய ஒரு கோல் AB யின் ஈர்வை மையம் (புவியீர்ப்பு மையம்) C ஆனது அதனை முறையே a, b என்னும் நீளங்களை உடைய AC, CB ஆகிய இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தும் அதன் முனை B ஆனது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்கு எதிராகவும் B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளி D உடன் $l\,(> a + b)$ நீளமுள்ள இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் முனை A இணைக்கப்பட்டும் இருக்க அக்கோல் நாப்பத்திலே ஓய்விற் கிடக்கின்றது.

(a) $\cos^2 ABD = \dfrac{a^2}{b(b+2a)}\left[\dfrac{l^2}{(a+b)^2} - 1\right]$ எனக்காட்டுக.

(b) இழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

38. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தின் மையம் O உம் ஆரை R உம் ஆகும். தொகுதி ஒன்று முறையே BC, OA, CA, OB, AB, OC ஆகியவற்றின் வழியே எழுத்துக்களின் ஒழுங்கு முறையினாற் காட்டப்படும் போக்கிலே தாக்கும் L, L, M, M, N, N என்னும் பருமன்களை உடைய ஆறு விசைகளையும் முக்கோணி ABC யின் தளத்திற் போக்கு ACB யிலே தாக்குகின்ற திருப்பம் $\lambda R(L + M + N)$ ஐ உடைய பூச்சியமற்ற ஓர் இணையையும் கொண்டுள்ளது. தொகுதியானது

(a) ஒரு தனிவிசையாக ஒடுங்குமெனில்,
$L^2 + M^2 + N^2 > LM + MN + NL$ எனவும்

(b) ஒரு தனி இணையாக ஒடுங்குமெனில் $L = M = N$, $\lambda \neq 1/2$ எனவும் காட்டுக.

இத்தொகுதி நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) இருப்பதற்கான வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகளின் ஒரு தொடையைக் குறிப்பிடுக.

39. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளத்தையும் W நிறையையும் உடைய AB, AC என்னும் இரு சீரான சம கோல்கள் A இலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. a நீளம் உள்ளதும் நிறையற்றதுமான BC என்னும் ஒரு சலாகையானது B யிலே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டும் AC மீது வழுக்கிச் செல்கின்ற சிறிய, ஒப்பமான, இலேசான வளையம் ஒன்றுடன் D யில் இணைக்கப்பட்டும் உள்ளது. ஒப்பமான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது முனைகள் B, C ஆகியன ஓய்விற் கிடக்கத் தொகுதியானது நிலைக்குத்துத தளம் ஒன்றிலே நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) உள்ளது. கோல் BD இலுள்ள தகைப்பு $\dfrac{W}{12}\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$ எனக் காட்டுக.

கோல் AB மீது மூட்டு A இலே உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும், திசையையும் அதன் தாக்கக் கோடானது CB யைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

40. பின்வருவனவற்றின் ஈர்வை மையத்தின் (புவியீர்ப்பு மையத்தின்) தானத்தைக் காண்க.

i. h உயரமுடைய சீரான செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பு

ii. a ஆரையை உடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளம்

அடர்த்தி ρ உம், அடி ஆரை a உம், உயரம் $4a$ உடைய சீரான செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பு ஒன்றும் அடர்த்தி $\lambda\rho$ உம் அடி ஆரை a உம் உடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றும் அவற்றின் அடிகள் பொருந்துமாறு ஒன்றாகப் பொருத்தப்படுவதன் மூலம் ஆக்கப்பட்ட சேர்த்தியுடலின் வடிவத்திலே விளையாட்டுப் பொருள் ஒன்று உள்ளது. பொது அடியின் மையத்திலிருந்து இவ்விளையாட்டுப் பொருளின் ஈர்வை மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க. ஒப்பமான கிடைத்தளம் ஒன்றுடன் கூம்பின் வளைபரப்பு தொடுகையிலிருக்க இவ்விளையாட்டுப் பொருள் உறுதிச் சமநிலையில் இருக்கமுடியாதெனின் $\lambda > 20$ எனக் காட்டுக.

41. **(a)** சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்று அதன் வளைபரப்பானது கரடான கிடைத் தளம் ஒன்றையும் சம கரடான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றையும் தொட்டுக் கொண்டிருக்க ஓய்விலுள்ளது. அரைக்கோளத்தின் அடியானது நிலைக்குத்துடன் ஆக்கத்தக்க மிகச் சிறிய கோணம் $\tan^{-1}(2\sqrt{2})$ எனில், தொடுகைப் புள்ளிகள் இரண்டிலும் உள்ள உராய்வுக் கோணம்

$\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{23} - 4}{7}\right)$ எனக் காட்டுக.

(b) கிடையுடனான சாய்வு $\alpha\left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ ஆகவுள்ள கரடான தளம் ஒன்றின் மீது ஓய்வில் இருக்கும் W நிறையை உடைய துணிக்கை ஒன்று இலேசான நீளா இழை ஒன்றினால் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

இழைக்கும் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டுக்கும் இடைப்பட்ட கூர்ங்கோணம் θ எனில்,

$\theta \le \sin^{-1}\left[\frac{\tan\lambda}{\tan\alpha}\right]$ என நிறுவுக. இங்கு $\lambda\ (<\alpha)$ உராய்வுக் கோணம்.

அத்துடன் θ வின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு இழையிலுள்ள இழுவையின் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

42. விறைப்பான பொருள் ஒன்றின் மீது தாக்குகின்ற சமாந்தரமற்ற ஒரு தள விசைகள் மூன்று அதனை நாப்பத்தில் (சமநிலையில்) வைத்திருக்குமெனில் விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

பக்கம் a யையும் நிறை W வையும் உடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC யின் வடிவத்தைக் கொண்ட சீரான அடர் ஒன்று ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றிலே, உச்சி B ஆனது சுவருடன் தொடுகையிலும் உச்சி A ஆனது a நீளமுடைய இலேசான நீட்டமுடியாத இழை ஒன்றினாற் சுவரில் உள்ள ஒரு புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டும் இருக்க ஓய்வில் உள்ளது. நாப்ப (சமநிலை)த் தானத்திலே கீழ்முக நிலைக்குத்துக்கும், இழை OA யிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\theta\left(<\frac{\pi}{12}\right)$ ஆனது, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$ என்பதனாலே தரப்படுமெனக் காட்டுக. இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

43. O என்னும் ஒரு புள்ளியினாலும் O விற்கூடாகச் செல்லாத ஒரு கோடு l இனாலும் ஒது தளம் துணியப்பட்டுள்ளது. இத்தளத்தில் உள்ள இன்னொரு கோடு m வழியே ஒரு தாக்குகின்ற ஒரு விசை O ஆனது l வழியே தாக்குகின்ற ஒரு விசையினாலும் O விற்கூடாகத் தாக்குகின்ற வேறொரு விசையினாலும் ஒரு தனியாகப் பதிலீடு செய்யப்படலாமெனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC யின் தளத்திலே தாக்குகின்ற ஒரு விசை P_i ஆனது முக்கோணியின் பக்கங்கள் வழியாக முறையே தாக்குகின்ற $\alpha_i\, \overrightarrow{BC}, \beta_i\, \overrightarrow{CA}, \gamma_i\, \overrightarrow{AB}$ ஆகிய மூன்று விசைகளினாற் பதிலீடு செய்யப்படலாமென நிறுவுக.

முக்கோணி ABC யின் தளத்திலே விசைத் தொகுதி ஒன்றை உருவாக்குகின்ற அத்தகைய n விசைகள் $P_i \quad i = 1, 2, \ldots n$ இருப்பின்

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i$$

என இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரமே இத்தொகுதியானது இணை ஒன்றுக்கும் சமவலுவுடையதாய் இருக்குமெனக் காட்டுக.

இத்தொகுதி எந்நிபந்தனைகளின் கீழ் நாப்பத்தில் இருக்கும்?

44. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளத்தையும், W நிறையையும் உடையனவும் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டனவுமான கோல்களினால் உருவாக்கப்பட்ட $ABCDE$ என்னும் ஓர் ஐங்கோணியானது A ஆகவும் மேலாகவும் CD கிடையாகவும் AB, AE ஆகியன ஒப்பமான முனைகள் P, Q உடன் தொடுகையிலும் இருக்க நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றிலே சமச்சீராகத் தாங்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு P, Q ஆகியன ஒரே கிடைமட்டத்திலும் ஐங்கோணி ஒழுங்கானதாக இருக்குமாறு அமைந்த இடைத் தூரத்திலும் உள்ளன. முனைகளின் மீதுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கண்டு,

(i) B, C, D, E ஆகியவற்றில் உள்ள மறுதாக்கங்களின் கிடைக்கூறுகள் சமம் எனவும், $W\cot\frac{2\pi}{5}$ என்னும் பருமனை உடையன எனவும்

(ii) மூட்டு A யில் உள்ள மறுதாக்கமானது $W\left(\frac{5}{2}\tan\frac{\pi}{5} - \tan\frac{\pi}{10}\right)$ என்னும் ஒரு கிடை விசை எனவும்,

(iii) முனைகள் P, Q இற்கு இடைப்பட்ட தூரமானது $\frac{4a}{5}\left[6\cos^2\frac{\pi}{5} - 1\right]$ கோசை $\frac{\pi}{5}$ எனவும் காட்டுக.

விடைகள்

பயிற்சி - I (a)

1. (i) 13N (ii) 17N (iii) 10N.
   (iv) 12N (v) $\theta = 60^\circ$

3. P நியூட்டன், P இற்கு செங்குத்தாக.

4. (i) 60° (ii) 120° (iii) $cos^{-1}\left(\frac{-7}{8}\right)$

5. 9, 15, $cos^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right)$

6. 40 நியூட்டன்

7. O^o, 36 நியூட்டன் 180^o, 4N

8. $\sqrt{3}\,P$, 120^o

9. 12N

10. $cos^{-1}\left[\frac{-\left(P^2+Q^2\right)}{2\left(P^2-Q^2\right)}\right]$

I (b)

1. $15\sqrt{3N}$, 30^o

2. (i) $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ (ii) $5\sqrt{5}$, $10\sqrt{5}$

3. $\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

4. $tan^{-1}\frac{1}{6-\sqrt{3}}$

5. $cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

I (c)

1. $\frac{\sqrt{57}}{2}N$ AP யுடன் $tan^{-1}\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2. $\cancel{2P}$

3. 10N, AB உடன் $tan^{-}\left(\frac{3}{4}\right)$

4. $60\sqrt{2}\,N$ AB யுடன் 45^o

5. $\frac{3\sqrt{21}}{2}N$

6. $2\sqrt{7}\,N$ மே $tan^{-1}(3\sqrt{3})$ தெ

7. $6\sqrt{21}\,N$ AB யுடன் $tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{3}$

8. 6N OE வழியே.

9. $\sqrt{39}\,N$

10. GC வழியே 10N

பயிற்சி - 2

1. $8g, 12g$
2. $4g, 2\sqrt{3}\,g$
3. $10\sqrt{3}\,g$, $5\sqrt{3}\,g$
4. $8-1g$, $5\cdot5g$
5. $7\frac{1}{2}g, 6g$; $60g, 36g$; $2\cdot9\times10^3g$; $2\frac{1}{2}\times10^3$
6. 5g N, தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக
7. முதலாம் இழைக்குச் செங்குத்தாக $\frac{5\sqrt{3}}{2}g$, $\frac{5}{2}g$
8. $30\cdot1g$
9. $5\sqrt{2}$ $(\sqrt{3}-1)g$, $10\left(\sqrt{3}-1\right)g$
10. $80g$, 54^o
11. $5\sqrt{2}$ $5\sqrt{2}, 10, 5\left(\sqrt{3}-1\right)kg$
13. 10 g
17. $\frac{125}{4}$, 25 N
19. $12\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$
20. $13N$, BA உடன் $tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

பயிற்சி - 3 (a)

1. (i) $13N, 16\,cm$ (ii) $25N, 10\,cm$
   (iii) $\frac{30}{7}N, \frac{100}{7}cm$ (v) $35N, 25N$

2. (i) $6N, 20\,cm$ (ii) $18\,N, \frac{250}{9}cm$ (iii) $25N, 61\frac{1}{5}cm$
   (iv) $\frac{99}{4}, \frac{55}{4}N$ (v) $70\,N, 30\,N$

3. $21\,N, AC = 24\,cm$; $3N, AC = 126$ cm

4. $12\,N$, 10 cm 5. $2\,N$

9. BD இன் நடுப்புள்ளி D, AC இல் $AD ; DC = 3 ; 2$

3 (b)

1. $28a, -3a$ 2. $40, -14$ 4. $-25, -13$

5. $\frac{9\sqrt{3a}}{2}, 3\sqrt{3a}$

3 (c)

1. $6g, 7g$ 2. $20\,kg$ 3. $0 \cdot 865\,m$

4. $2\frac{1}{2}m$ 5. மையத்திலிருந்து இருபக்கமும் $\frac{9}{34}m$ வரை

6. மையத்திலிருந்து இருபக்கமும் $0 \cdot 6m$ வரை

7. இருமுனைகளிலுமிருந்து $17 \cdot 5cm$ க்கு அப்பால்

10. $\frac{48 + 9M_1 - 3M_2}{7}g$, $\frac{36 + 10M_2 - 2M_1}{7}g$; $M_1 = M_2 = 6kg$

3 (d)

1. $5N$; AB உடன் $tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$, A யிலிருந்து $\frac{3}{4}\,m$

2. $10N$; AB உடன் $tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right), \frac{3}{4}a, 10\,N$ 12 N

3. $30\,N$, BA உடன் உடன் $tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ 4. $8\sqrt{2}\,N$

5. $P = 14, \; Qd = 16$ 6. $P = \sqrt{2}, \; Q = 5\sqrt{2}, \; 4\sqrt{2}$

7. $0 \cdot 3\,Nm$ 9. $10\,P, tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) 7P, 3P, a$

10. $5, 8, 12 + \sqrt{3}, 12 - \sqrt{3}$

பயிற்சி - 4

1. $10g$ N 2. $\frac{1}{4}, \frac{40g}{\sqrt{17}}g$ 3. $\frac{10\sqrt{3}}{3}g$

4. $8 \cdot 8g, 15 \cdot 2g$ 5. $\frac{1}{\sqrt{39}}$ 6. $12g, 213g$

A மீட்டற் பயிற்சிகள்

13. A யிலிருந்து $2\,m$, $100\,N$, $700\,N$ 14. $m = 8, \; n = 0; \; m = 13, n = 0$

15. $52\frac{1}{2}^{o}, 7\frac{1}{2}^{o}$ தளத்துடன் $7\frac{1}{2}^{o}$ இல் 19. $\frac{11}{20}$

பயிற்சி - 5

1. $45^o, \frac{\sqrt{5}}{2}w$ 2. $W\sin 15^o \; W\cos 15^o$ நிலைக்குத்துடன் 15^o இல்

3. $\frac{W}{6}, \frac{\sqrt{37}}{6}W$, கிடையாக நிலைக்குத்துடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$

4. $\frac{\sqrt{3}W}{3}$, கிடையாக, $\frac{2\sqrt{3}W}{3}$ நிலைக்குத்துடன் 30^o இல்

5. $\frac{2\sqrt{3}W}{3}, \frac{\sqrt{3}W}{3}$ 7. $\frac{29}{4}g\,N$

10. $\frac{W}{\sqrt{1+8\cos^2\alpha}} \quad \frac{2W}{\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}$

11. $\frac{9W}{4}, \frac{15W}{4}, \frac{1}{4}\left(5\sqrt{5}-9\right)W, \frac{7W}{2}$ 12. $4:3$

பயிற்சி - 6 (a)

1. (i) $10N, AB$ உடன் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right); a$

(ii) $10N, AB$ உடன் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right); 4a$

2. (i) $6N, BA$ உடன் $60^o, 22\sqrt{3}a$

(ii) $6N, BA$ உடன் $60^o, 22\sqrt{3}a$

5. $\frac{\left[4(M_1-M_1)^2+(M_2+M_3)^2\right]^{1/2}}{2a} \quad \tan^{-1}\left[\frac{M_2+M_3}{}\right] \quad \frac{2a\,M_2}{M_2+M_3}$

6. $\sqrt{74}, \tan^{-1}\left(\frac{-7}{5}\right) AB$ உடன், 36 அலகு

7. $\sqrt{10}, AB$ உடன் $\tan^{-1}(3)$; $6Nm, B$ இல் $\sqrt{160}\,N, C$ இல் $\sqrt{90}\,N$

9. $\sqrt{2}; \quad 10, \quad 5\sqrt{2}, \quad 5\sqrt{2}$

10. (i) $10a, 3\sqrt{2}, CA$ வழியே

(ii) 1N, AB இற்கு சமாந்தரமாக, $\frac{6\sqrt{3}}{5}m, 1N, BA$ இற்கு சமாந்தரமாக

11. -5, 3, - 4, -5, 7, -6 13. $\sqrt{3}\,Pa, \; \frac{1}{2}a$

14. $17P, \tan^{-1}\frac{15}{8}, 10\cdot 4a$

15. $P=8, Q=4\sqrt{13}, \; L=12, \; M=8\sqrt{13}, \; G=24$

19. $4x-3y-5=0$ 22. $P=Q=5$ 24. $\sqrt{2}\,Q$

6 (b)

9. $k=\frac{20}{3}, \quad BP:PC=2:3, \quad AQ:QC=1:3$

10. $1=24 \quad AY:YC=1:2 \quad BX:XC=5:3$

6 (c)

2. AB யின் நடுப்புள்ளியினூடாக 3. 1 = 3 - m, 2 : 1

4. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ 6. $k=4$ 7. $k=-4$

8. kb, AD யிற்கு சமாந்தரமாக, A யிலிருந்து $\frac{3a}{2}$ தூரத்தில் kab

பயிற்சி - 7

1. $\sqrt{\frac{3W}{6}}$ கிடையாக, ஒவ்வொரு மேல் முட்டிலும் $\frac{\sqrt{39}}{6}W$,

கிடையுடன் $tan^{-1}(2\sqrt{3})$

2. 2W கிடையாக $\frac{W}{2}$ **3.** 2W, கிடையாக $\frac{\sqrt{3}\,W}{6}$ **4.** $\frac{3W}{4}$

5. B இல் கிடையாக $\frac{ab\,(a+b)\,W}{4\left(a^2+b^2\right)}$ $\frac{\left(a^3-b^3\right)}{2\left(a^2+b^2\right)}$ நிலைக்குத்தாக

C இல் கிடையாக $\frac{ab\,(a+b)\,W}{4\left(a^2+b^2\right)}$ $\frac{\left(a^3+2ab^2+b^3\right)W}{2\left(a^2+b^2\right)}$ நிலைக்குத்தாக

A இல் கிடையாக $\frac{ab\,(a+b)W}{4\left(a^2+b^2\right)}$ $\frac{\left(a^2+2a^2b+b^3\right)W}{2\left(a^2+b^2\right)}$ நிலைக்குத்தாக

6. கிடையாக $\frac{W}{4\cos 18}$ நிலைக்குத்தாக $W\frac{1}{4\sin 18}$

7. A யிலும் D இலும் $\frac{\sqrt{7}}{2}W.B$ இலும் C இலும் $\frac{\sqrt{19}}{2}W$

14. கிடையாக $\frac{W}{2}\cdot 2W$

பயிற்சி - 9

18. A இல் **20.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{W\sqrt{13}}{4}$ கிடையுடன் $tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

23. $W\cos 2\lambda\ \mathrm{cosec}\ \lambda.$ **25.** $\frac{1}{2}W\sec(\alpha-\lambda)$

26. $sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ **46.** $\frac{4}{7}\cdot\frac{W}{2}$ கிடையுடன் $tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

47. $150\cdot 3^o$ **48.** $\frac{7\sqrt{3}}{24}$ **49.** $\frac{3}{4},\ \frac{W}{4}$

50. $\frac{\sqrt{5W}}{4}$, நிலைக்குத்துடன் $tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{4\ell}{3}$

51. $\frac{4a}{5}, \frac{16a}{5}$ **52.** $\frac{2}{3\mu^1} \leq \tan\theta \leq 2\mu$

55. $\sqrt{2-1}$

பயிற்சி - 10

15. $\frac{3a}{\pi}$ **39.** $a\sqrt{2}$

பயிற்சி - 11 (a)

1. **(i)** $9i+12j$ **(ii)** $25i-60j$ **(iii)** $-14i+14\sqrt{3j}$

(iv) $48i-14j$ **(v)** $\pm(10\sqrt{2i}-10\sqrt{2j})$

2. **(i)** $r=(2i-3j)+\lambda(8i-7j)$ **(ii)** $r=\lambda i$

(iii) $r=(i+j)+\lambda(4i+10j)$

(iv) $r=(7i+8j)+\lambda(i-2j)$ **(v)** $r=\lambda i$

3. **(i)** $\pm(25i-60j)$ **(ii)** $\pm 4i$ **(iii)** $\pm(8i+8j)$

(iv) $\pm\sqrt{\frac{13}{5}}(4i-7j)$ **(v)** $\pm 2\sqrt{10}\,(i+3j)$

4. **(i)** $4i+3j,$

(ii) $r=i+\lambda(i-5j), r=(-3i+14j)+\mu(3i-2j)$

(iii) $r=(3i+10j)+t\,(4i+3j)$

5. $46i-13j$ $r=12i-7j+\lambda\,(46i+13j)$

6. வலஞ்சுழியாக $12,\ 20.$

7. $r = \frac{14}{3} i + \lambda (9i - 3j)$

8. $-21i + 21j, \quad r = \frac{92}{21} i + \lambda (-i + j)$

9. $\lambda = 6, -24$

10. $7i, \ 13i - 6j, \quad F_1 = 32i + 24j, \quad F_2 = 10i - 24j,$

$42N \quad F_3 = 16i + 12j$

11 (b)

4. $a = 1, \ b = -2, \ c = 1, \ \frac{1}{13} (18i + 19j), \ 4\sqrt{10}$

$r = \frac{11}{4} i + t (3i + j)$

7. (a) $3i - 5j - 8k, \sqrt{2}$

8. $r = (4i + j + 5k) + \lambda (3i + 14j + 12k)$

9. $P = 4, \ r = 3i + 2j + 5k + \lambda \ (3i - 2j - k)$

10. (a) $a = 16, \quad b = -7, \quad c = 10$

(b) $14\sqrt{3}, \ 2i - j + 3k, \quad r = (2i - j + 3k) + \lambda \ (i + j + k)$

11. $\pm \frac{3}{3} (i + j - k); \quad 4\sqrt{14}, \pm \frac{1}{\sqrt{14}} \ (3i + 2j - k)$

12. $3\sqrt{2}, \ r = (-i - j + 2k) + t (i - j); \quad 3i - 3j, \ 6\sqrt{3}$

13. $-i + 3j + 2k, \quad r = -2j + k + \lambda (i + j - k)$:

O இல் $i + 2j - k$ எனும் விசையும் $2i + j + k$ காவித்திருப்பமுடைய இணையும்

14. $40\sqrt{10}$

15. $-i + 33j + 21k$

17. $18\sqrt{26}, -9i + 18j - 18k, \frac{4i - j - 3k}{\sqrt{26}}$

18. $F_4 = -3i + 4j - k, \quad r = 3i - k + \lambda (3i - 4j + k)$

$4i + 6j + 12k$

சாயி கல்வி வெளியீடுகள்

க.பொ.த உயர்தரம்

புதிய பாடத்திட்டத்திற்குரியவை

(ஆண்டு 2000 உம் அதற்குப் பின்னரும்)

1. உயிரியல் பகுதி -1
2. உயிரியல் பகுதி - 2(A) தொழிற்படும் விலங்கு
3. உயிரியல் பகுதி - 2(B) தொழிற்படும் விலங்கு
4. உயிரியல் பகுதி - 3(A) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி I
5. உயிரியல் பகுதி - 3(B) தொழிற்படும் தாவரம் பகுதி II
6. உயிரியல் பகுதி - 4(A) உயிரின் தொடர்ச்சி
7. உயிரியல் பகுதி - 4(B) மனிதனும் சூழலும் + பிரயோக உயிரியல்
8. சேதன இரசாயனம் - பரீட்சை வழிகாட்டி
9. பிரயோக கணிதம் - நிலையியல்
10. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி I
11. பிரயோக கணிதம் - இயக்கவியல் பயிற்சிகள் பகுதி II
12. பிரயோக கணிதம் - நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
13. இணைந்த கணிதம் - நுண்கணிதம்
14. இணைந்த கணிதம் - அட்சர கணிதம்
15. இணைந்த கணிதம் - திரிகோணகணிதம்
16. இணைந்த கணிதம் - ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம் (அச்சில்)

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4B, PAMANKADA ROAD, COLOMBO - 06. SRILANKA.