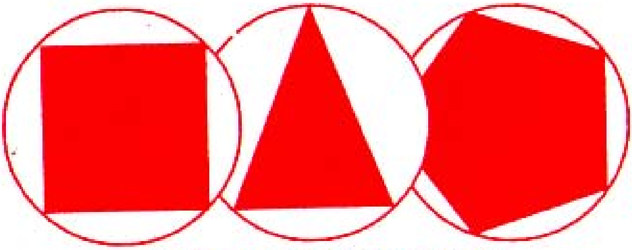
க. பொ. த உயர்தரம்

இணைந்த கணிதம்

(தூய கணிதப்பகுதி)

நுண்கணிதம்



G. C. E ADVANCED LEVEL

COMBINED MATHEMATICS

(Pure mathematics Component - Calculus)

திருத்திய பதிப்பு

கா. கணேசலிங்கம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

க. பொ. த உயர்தரம்

இணைந்த கணிதம்

(தூய கணிதப்பகுதி - நுண்கணிதம்)

K. GANESHALINGAM. B.Sc, Dip-in-Ed.

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4 - B, Pamankada Road,
Colombo - 06.
T. P : 2366707

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

BIBLIOGRAPHICAL DATA

Title	:	INNAINTHA KANITHAM [PURE MATHEMATICS - COMPONENT - CALCULUS]
Language	:	Tamil
Author	:	Karthigesu Ganeshalingam. B. Sc; Dip-in-Ed. Puttalai, Puloly
Publications	:	Sai Educational Publication 36/4 -B, Pamankada Road, Colombo - 06.
Date of issue	:	1st Edition - 1999, 2nd Edition - 2002. 3rd Edition - 2004 4th Edition (Revised Edition) - 2006.
No. of Pages	:	301
Copyright	:	Sai Educationa Publication
Type Setting	:	Miss. Mathivathani.A, Colombo - 06.
Printing	:	Students Offset Services, Chennai - 600 001

நூலின் விபரம்

தலைப்பு	:	க. பொ. த. உயர்தரம் இணைந்த கணிதம் (தூயகணிதப் பகுதி - நுண்கணிதம்) (திருத்திய பதிப்பு)
மொழி	:	தமிழ்
ஆசிரியர்	:	கார்த்திகேசு கணேசலிங்கம்
வெளியீடு	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம் 36/4 -B, பாமன்கட வீதி, கொழும்பு - 06.
பிரசுரந் திகதி	:	திருத்திய பதிப்பு - மாசி 2006.
பக்கங்கள்	:	301
பதிப்புரிமை	:	சாயி கல்வி வெளியீட்டகம்
கணணிப்பதிவு	:	செல்வி. மதிவதனி.ஆ, கொழும்பு - 06.
அச்சகம்	:	மாணவர் மறுதோன்றி அச்சகம், சென்னை.

என்னுரை

கற்றல் - கற்பித்தல் நடவடிக்கைகளினூடாக மாணவர்களும், ஆசிரியர்களும் பெற்ற அனுபவங்களின் அடிப்படையில் இந்நூல் திருத்திய பதிப்பாக வெளிவருகிறது.

புதிய பாடத்திட்டத்திற்கமைய **இணைந்த கணிதம்** எனும் பெயரில் அறிமுகம் செய்யப்பட்டிருக்கும் **நுண்கணிதப் பகுதிகள்** சகலதையும் இந்நூல் அடக்கியுள்ளது.

இப்புதிய திருத்திய பதிப்பின் சிறப்பம்சமாக மேலும் பல உதாரணங்கள் சேர்க்கப்பட்டிருப்பதுடன் புதிய உத்திக் கணக்குகளும், கடந்தகால பரீட்சை வினாக்களும் ஆங்காங்கே பொருத்தமான இடங்களில் புகுத்தப்பட்டுள்ளன. உதாரணங்களை மாணவர்கள் இலகுவாக விளங்கிக் கொள்ளும் முறையில் படிமுறை ஒழுங்கு மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. இதனை மாணவர்கள் விளங்கிக் கொள்வதன் மூலம் பதிய பிரசினங்களுக்கு ஆசிரியர் உதவியின்றித் தாமாகவே முகங் கொடுக்கக் கூடியதாக இருக்கும். அத்துடன் சுயகற்றலுக்கும் இந்நூல் துணைபுரியும்.

நிறைவுகள் ஏற்று ஆலோசனைகள் வழங்கி தூய கணிதத்தின் ஏனைய பகுதிகளையும் திருத்தியும் புதுக்கியும் வெளியிட ஆக்கமும் ஊக்கமும் தருவார்களென கணிதக் கல்வி உலகத்திடமிருந்து எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. இந்நூலை திருத்திய பதிப்பாக வெளிக் கொணரும் சாயி கல்வி வெளியீட்டகத்திற்கு எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

நன்றி

மாசி 2006

ஆசிரியர்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பொருளடக்கம்

1. சார்புகள் 01

2. எல்லைகள் 45

3. வகையீடு 78

4. பெறுதிகளின் பிரயோகங்கள் 124

5. தொகையீடு 192

6. பரப்பும் கனவளவும் 266

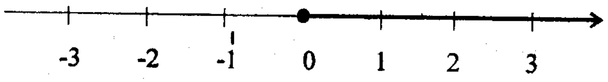
விடைகள் 296

1. சார்புகள்

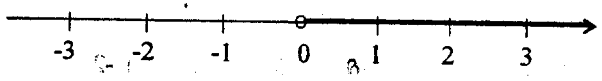
1.0 அறிமுகம்

மெய்யெண்களின் தொடை R ஆகும்.

$\{x : x \geq 0,\ x \in R\}$ என்னும் தொடை R_O^+ எனக் குறிக்கப்படும். இதனை எண் கோட்டில் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



$\{x : x > 0,\ x \in R\}$ என்னும் தொடை R^+ எனக் குறிக்கப்படும். இதனை எண் கோட்டில் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.



$R_o^+,\ R^+$ என்பன R இன் தொடைப்பிரிவுகள் ஆகும்.

$R_o^+ = R^+ \cup \{0\}$ ஆகும்.

ஆயிடைகள் (Intervals)

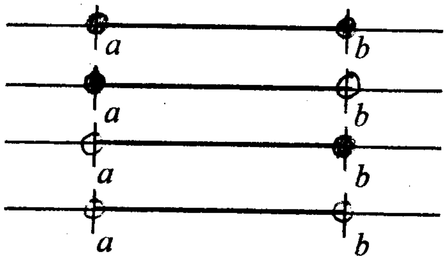
$a, b \in R.\quad a < b$ ஆயிருக்க,

$[a, b] = \{x : x \in R, a \leq x \leq b\}$

$[a, b) = \{x : x \in R, a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x : x \in R, a < x \leq b\}$

$(a, b) = \{x : x \in R, a < x < b\}$



என வரையறுக்கப்படும்.

இங்கு,

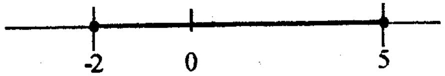
$[a, b]$ என்பது மூடிய ஆயிடை (Closed interval) எனவும்,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

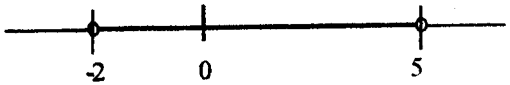
(a, b) என்பது திறந்த ஆயிடை (Open interval) எனவும் அழைக்கப்படும்.

உதாரணம் 1

ஆயிடை $[-2, 5]$ என்பது எண்கோட்டில் பின்வருமாறு குறிக்கப்படும்.



ஆயிடை $(-2, 5)$ என்பது எண்கோட்டில் பின்வருமாறு குறிக்கப்படும்.



$[-2, 5]$ என்ற ஆயிடையில்,

மிகப் பெரிய மெய்யெண் 5, மிகச்சிறிய மெய்யெண் -2
மிகப் பெரிய நிறையெண் 5, மிகச்சிறிய நிறையெண் -2

$(-2, 5)$ என்ற ஆயிடையில்,

மிகப்பெரிய மெய்யெண் இல்லை, மிகச்சிறிய மெய்யெண் இல்லை.
மிகப்பெரிய நிறையெண் 4, மிகச்சிறிய நிறையெண் -1 ஆகும்.

உதாரணம் 2

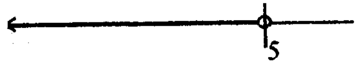
பின்வரும் ஆயிடைகளும் அவற்றினை எண்கோட்டில் குறிக்கும் முறைகளும் தரப்பட்டுள்ளன.

$[-2, \infty) = \{x : x \geq -2,\ x \in R\}$

$(-2, \infty) = \{x : x > -2,\ x \in R\}$

$(-\infty, 5] = \{x : x \leq 5,\ x \in R\}$

$(-\infty, 5) = \{x : x < 5, x \in R\}$



1.1 சார்பு (Function)

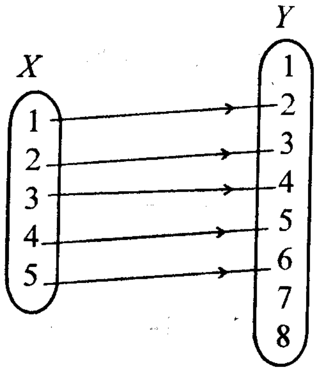
வரைவிலக்கணம் :

X, Y என்பன வெறுமையற்ற (non - empty) இரு தொடைகள் ஆகும். X என்ற தொடையில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும், Y என்னும் தொடையில் உள்ள தனியான மூலகம் ஒன்றுடன் யாதேனும் ஒரு தொடர்பைக் கொண்டிருக்கும்போது அத்தொடர்பு, சார்பு எனப்படும்.

உதாரணம் 3

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ என்க.

X இன் மூலகங்கள் $1, 2, 3, 4, 5$ என்பனமுறையே Y இன் மூலகங்கள் $2, 3, 4, 5, 6$ என்பவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது என்க.



இங்கு,

(i) X இலுள்ள **ஒவ்வொரு மூலகமும்,** Y இல் மூலகம் ஒன்றுடன் தொடர் படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(ii) X இன் ஒரு மூலகம் Y இன் ஒரு மூலகத்துடன் மட்டும் தொடர்படுத்தப் பட்டுள்ளது.
இவ்விரு நிபந்தனைகளும் திருப்தி செய்யப்பட்டுள்ளதால் இத்தொடர்பு ஒரு சார்பு ஆகும். இச்சார்பு f ஆனது,

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$f(x) = x + 1 \qquad x \in X$$ எனக் குறிக்கலாம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இங்கு தொடை X ஆட்சி (domain), தொடை Y இணை ஆட்சி (codomain) எனப்படும். மேலும் X இலுள்ள மூலகம் 1, Y இலுள்ள மூலகம் 2 உடன் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ளது. இதனை f இன் கீழ் 1 இன் விம்பம் 2 எனப்படும்.

$f(1) = 2$ f இன் கீழ் 1 இன் விம்பம் 2 ஆகும்.

$f(2) = 3$ f இன் கீழ் 2 இன் விம்பம் 3 ஆகும்.

$f(3) = 4$ f இன் கீழ் 3 இன் விம்பம் 4 ஆகும்.

$f(4) = 5$ f இன் கீழ் 4 இன் விம்பம் 5 ஆகும்.

$f(5) = 6$ f இன் கீழ் 5 இன் விம்பம் 6 ஆகும்.

சார்பு ஒன்றின் ஆட்சி, வீச்சு

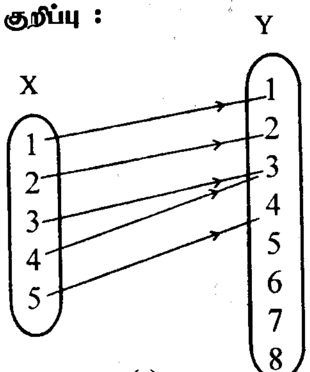
$f : X \longrightarrow Y$ சார்பு என்க.

f இன் ஆட்சி X ஆகும். இது $D(f) = X$ அல்லது $D_f = X$ என எழுதப்படும். f இன் வீச்சு $R(f)$ அல்லது R_f என எழுதப்படும்.

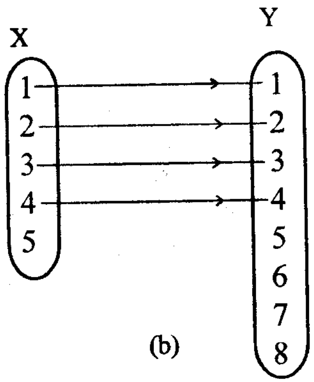
$R(f) = \{f(x) : x \in X\}$ ஆகும்.

மேலே தரப்பட்டுள்ள உதாரணத்தில் $R(f) = \{2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq Y$ ஆகும்.

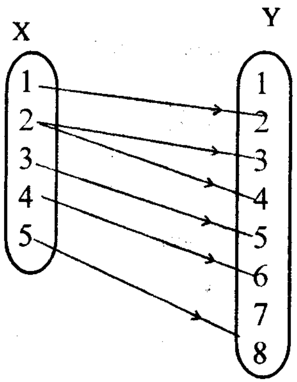
குறிப்பு :



(a)



(b)



(c)

தரப்பட்டுள்ள தொடர்புகள் (a), (b), (c) என்பவற்றில்,

(a) யினால் தரப்படும் தொடர்பு மட்டும் சார்பு ஆகும்.

(b), (c) யினால் தரப்படும் தொடர்புகள் சார்புகள் அல்ல

(b) இல் $5 \in X$ ஆனால் 5, Y இல் தொடர்பு படுத்தப்படவில்லை. எனவே இத்தொடர்பு சார்பு அல்ல

(c) இல் X இலுள்ள 2 என்னும் மூலகம், Y இல் 3, 4 ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே (c) இனால் தரப்படும் தொடர்பு சார்பு அல்ல.

> $f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு என்க.
> இப்பொழுது
>
> (i) $D(f) = A$
>
> (ii) $f(a) = b_1$ உம் $f(a) = b_2$ உம் $\Rightarrow b_1 = b_2$ $(a \in A,\ b_1,\ b_2 \in B)$
>
> $R(f) = \{f(x) : x \in A\}$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 4

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$

$f(x) = x + 2$ என சார்பு f வரையறுக்கப்படுகிறது.

$D(f) = A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R(f) = \{3, 4, 5, 6\}$ ஆகும்.

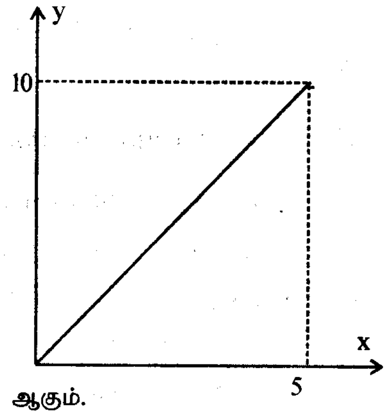
உதாரணம் 5

$A = \{x : 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5]$ என்க.

சார்பு g ஆனது, $g : A \longrightarrow R$

$g(x) = 2x$ என்க.

இங்கு $D(g) = [0, 5]$, $R(g) = [0, 10]$ ஆகும்.

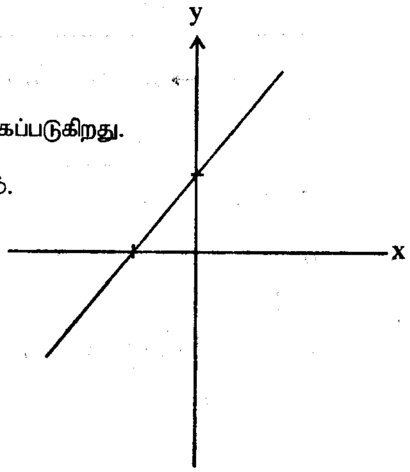


உதாரணம் 6

$h : R \longrightarrow R$

$h(x) = x + 1$, என வரையறுக்கப்படுகிறது.

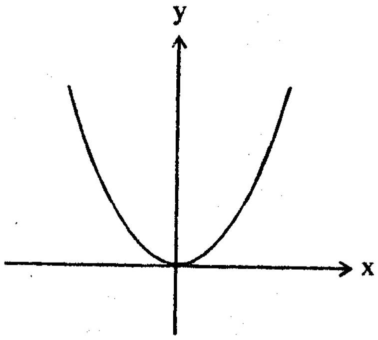
$D(h) = R$, $R(h) = R$ ஆகும்.



உதாரணம் 7

$g(x) = x^2 :$ $x \in R$

இங்கு $D_g = R$, $R_g = R_o^+$ ஆகும்.



உதாரணம் 8

சார்பு f ஆனது,

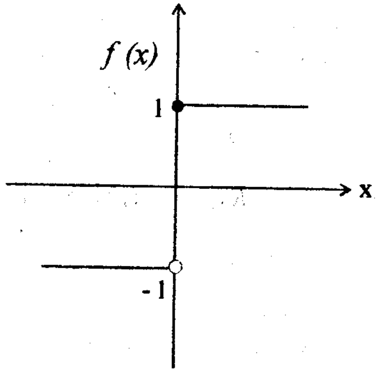
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \text{ எனின்} \\ 1 & x \geq 0 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.
இச்சார்பின் வரைபை வரைந்து ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

$D(f) = R$

$R(f) = \{-1, 1\}$

இங்கு f இன் வீச்சுத் தொடையில்
இரு மூலகங்கள் மட்டுமே உள்ளது.
என்பதை அவதானிக்க.



உதாரணம் 9

சார்பு f ஆனது,

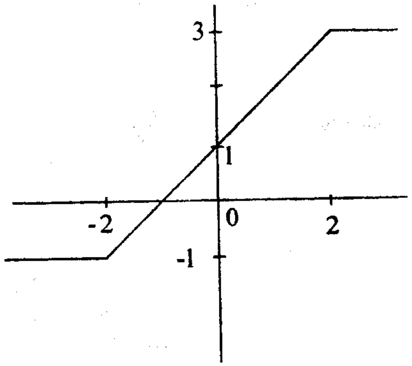
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -2 \text{ எனின்} \\ x + 1 & -2 < x \leq 2 \text{ எனின்} \\ 3 & x > 4 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. சார்பின் வரைபை வரைக
f இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இங்கு $D_f = R$

$R_f = [-1, 3]$



உதாரணம் 10

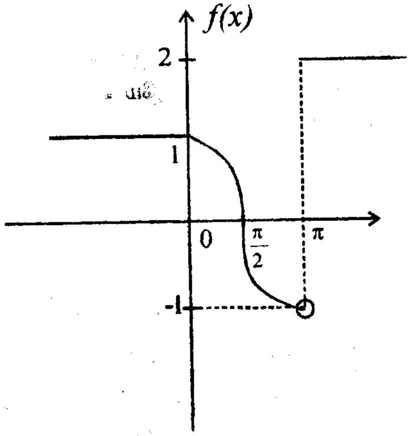
சார்பு f ஆனது,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \text{ எனின்} \\ \cos x & 0 < x < \pi \text{ எனின்} \\ 2 & x \geq \pi \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.
சார்பு f இன் வரிப்படத்தை வரைக. f இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றை எழுதுக.

$D_f = R$

$R_f = (-1, 1] \cup \{2\}$



உதாரணம் 11

$g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ என சார்பு g வரையறுக்கப்படுகிறது.
சார்பு g இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றை எழுதுக.

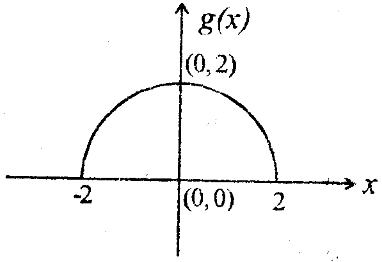
$4 - x^2 \geq 0$ ஆக உள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு மட்டும் சார்பு வரையறுக்கப்படும்.

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 4 \leq 0$

$(x-2)(x+2) \leq 0$

எனவே, $-2 \leq x \leq 2$



சார்பின் ஆட்சி $= \{x : -2 \leq x \leq 2, x \in R\}$ அல்லது $[-2, 2]$

வீச்சு $[0, 2]$ ஆகும்.

x என்பது மெய்யெண்ணாக இருக்க $[x]$ என்பது x இற்கு சமமான அல்லது x இலும் குறைந்த மிகப் பெரிய நிறையெண் (greatest integer less than or equal to x) என வரையறுக்கப்படும். வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$[2] = 2,\quad [2 \cdot 99] = 2,\quad [3] = 3\quad [1 \cdot 99] = 1$

$[0 \cdot 6] = 0\quad [-1 \cdot 2] = [-2]$ ஆகும்.

மேலும்

$-2 \leq x < -1$ எனின் $[x] = -2$

$-1 \leq x < 0$ எனின் $[x] = -1$

$0 \leq x < 1$ எனின் $[x] = 0$

$1 \leq x < 2$ எனின் $[x] = 1$

$2 \leq x < 3$ எனின் $[x] = 2$ ஆகும் என்பதை அவதானிக்க.

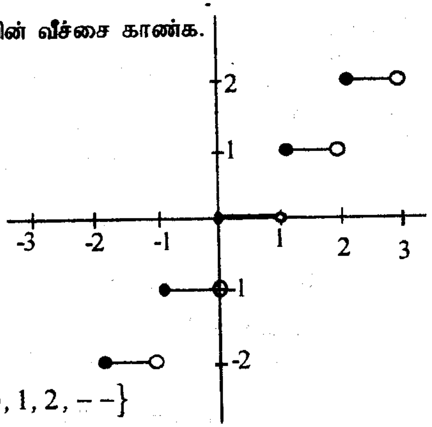
உதாரணம் 12

$g : R \longrightarrow R$

$g(x) = [x]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சார்பு g இன் வரைபினை வரைந்து சார்பின் வீச்சை காண்க.



$-2 \le x < 1$ எனின் $[x] = -2$

$-1 \le x < 0$ எனின் $[x] = -1$

$0 \le x < 1$ எனின் $[x] = 0$

$1 \le x < 2$ எனின் $[x] = 1$

சார்பு g இன் வீச்சு

$$R_g = \{---, -3, -2, -1, 0, 1, 2, --\}$$
$$= Z$$

இங்கு g இன் வீச்சு, நிறையெண்களைக் கொண்ட தொடை ஆகும்.

மட்டு (Modulus)

x ஒரு மெய்யெண்ணாக இருக்க $(x \in R)$

$|x| = x, \quad x \ge 0$ எனின்,

$= -x, \quad x < 0$ எனின்

என வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணம் $|5| = 5, \quad |-5| = 5$ ஆகும்.

$|x| = |-x|$ ஆகும்.

மட்டுச் சார்பு (Modulus function)

$|f| : R \longrightarrow R$

$|f|(x) = |f(x)|$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$|f|(x) = f(x), \quad f(x) \ge 0$ எனின்,

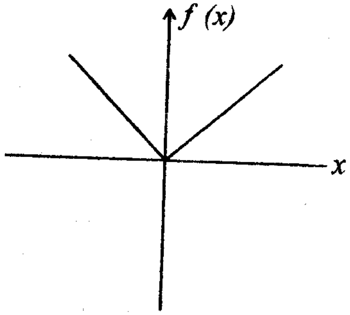
$= -f(x), \quad f(x) < 0$ எனின்,

எனக் கொள்ளப்படும்.

உதாரணம் 13

$f : R \longrightarrow R$

$f(x) = |x|$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. சார்பு f இன் வரைபினை வரைக. வீச்சைக் காண்க.



$f(x) = x; \quad x \ge 0$ எனின்,

$= -x, \quad x < 0$ எனின்,

f இன் வீச்சு $= R_o^+$ ஆகும்.

உதாரணம் 14

$f : R \longrightarrow R$

(i) $f(x) = |x+1|$

(ii) $g(x) = |3x-1| + 2$

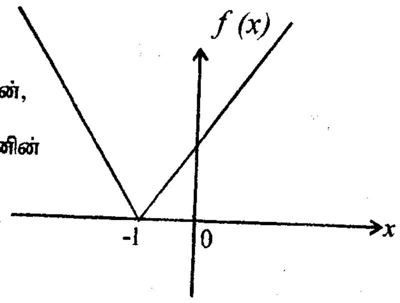
(iii) $h(x) = |2x+3| - 1$ ஆகிய வரைபுகளை வரைக.

f, g, h என்பவற்றின் வீச்சுக்களை எழுதுக.

(i) $f(x) = |x+1|$

$f(x) = x+1, \quad x \ge -1$ எனின்,

$= -(x+1) \quad x < -1$ எனின்



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

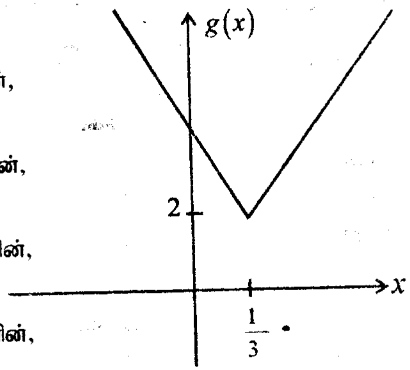
(ii) $g(x) = |3x - 1| + 2$

$g(x) = 3x - 1 + 2, \quad x \geq \frac{1}{3}$ எனின்,

$= -(3x - 1) + 2, \quad x < \frac{1}{3}$ எனின்,

$g(x) = 3x + 1, \quad x \geq \frac{1}{3}$ எனின்,

$= -3x + 3, \quad x < \frac{1}{3}$ எனின்,



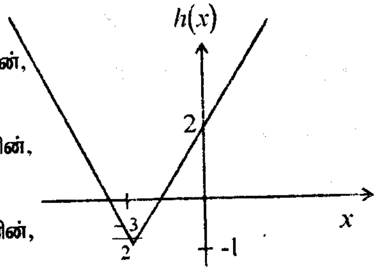
(iii) $h(x) = |2x + 3| - 1$

$h(x) = 2x + 3 - 1, \quad x \geq \frac{-3}{2}$ எனின்,

$= -(2x + 3) - 1, \quad x < -\frac{3}{2}$ எனின்,

$h(x) = 2x + 2, \quad x \geq -\frac{3}{2}$ எனின்,

$= -2x - 4, \quad x < -\frac{3}{2}$ எனின்,



$R_f = \{x : x \geq 0, x \in R\} = [0, \infty)$

$R_g = \{x : x \geq 2, x \in R\} = [2, \infty)$

$R_h = \{x : x \geq -1, x \in R\} = [-1, \infty)$

இரட்டைச்சார்பு (Even Function)

சார்பு f இன் ஆட்சியிலுள்ள எல்லா x இற்கும் $f(-x) = f(x)$ எனின் சார்பு f இரட்டைச் சார்பு எனப்படும். இரட்டைச்சார்பு, y அச்சுப்பற்றி சமச்சீரா அமையும்.

ஒற்றைச் சார்பு (Odd function)

சார்பு f இன் ஆட்சியிலுள்ள எல்லா x இற்கும். $f(-x) = -f(x)$ எனின். சார்பு f ஒற்றைச் சார்பு எனப்படும்.

ஆவர்த்தனச் சார்பு (Periodic function)

$f : R \longrightarrow R$ ஒரு சார்பு என்க. யாதாயினும் $x \in R$ இற்கு $f(x + k) = f(x)$ ஆகுமாறு ஒரு மாறிலி k இருக்கும் எனின் $f : R \longrightarrow R$ ஓர் ஆவர்த்தனச் சார்பு எனப்படும். k இன் மிகச்சிறிய நேர்ப் பெறுமானம், f இன் ஆவர்த்தனம் எனப்படும்.

உதாரணம் 15

$f(x) = cos\, x$ என்க. இங்கு f இன் ஆட்சி R

$f(-x) = cos(-x) = cos\, x = f(x)$ ஆகும்.

ஆகவே $f(x) = cos\, x$, ஓர் இரட்டைச் சார்பு ஆகும்.

இரட்டைச் சார்பு y அச்சுபற்றி சமச்சீரானது.

மேலும் f இன் வீச்சு $= [-1, 1]$

$g(x) = sin\, x$ என்க. இங்கு g இன் ஆட்சி R

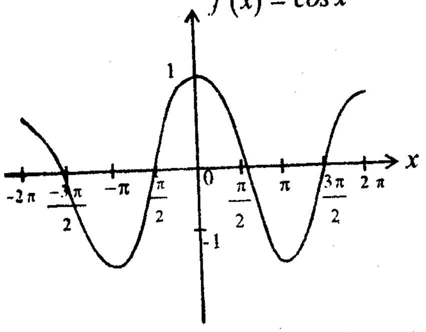
$g(-x) = sin(-x) = -sin\, x = -g(x)$ ஆகும்.

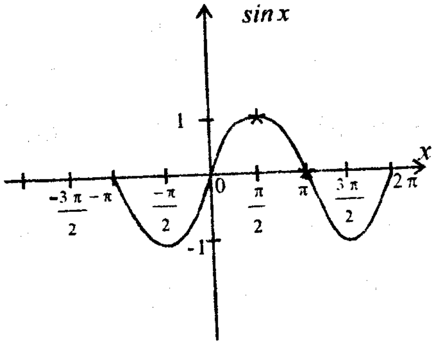
$g(-x) = -g(x)$ என்பதால் $g(x) = sin\, x$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ஆகும்.

g இன் வீச்சு $= [-1, 1]$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மேலும் $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ என்ற சார்புகளின் ஆவர்த்தனம் 2π ஆகும்.





1.2 இரு சார்புகளின் கூட்டுத்தொகை வித்தியாசம், பெருக்கம், ஈவு.

f, g என்பன இரு சார்புகள் என்க.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; x \in D(f) \cap D(g)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; x \in D(f) \cap D(g)$$
$$(f\,g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad ; x \in D(f) \cap D(g)$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; x \in D(f) \cap D(g) \; ; \; g(x) \neq 0$$

என வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணம் 16

$f : R \longrightarrow R$ $\qquad g : [0, \infty) \longrightarrow R$

$f(x) = x + 1$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$f+g,\ f-g,\ f\,g,\ \dfrac{f}{g}$ ஆகிய சார்புகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்

$$f+g : [0, \infty) \longrightarrow R$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + \sqrt{x} \quad , x \in [0, \infty)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x + 1 - \sqrt{x} \quad , x \in [0, \infty)$$
$$f\,g(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x}\,(x+1) \quad , x \in [0, \infty)$$
$$\frac{f}{g} : (0, \infty) \longrightarrow R$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$ ஆகும்.

$f+g,\ f-g,\ f\,g$ ஆகிய சார்புகளின் ஆட்சி $[0, \infty)$ ஆக இருப்பதையும் $\dfrac{f}{g}$ இன் ஆட்சி $(0, \infty)$ ஆக இருப்பதையும் அவதானிக்க.

1.3 ஒன்று - ஒன்று சார்பு, மேலான சார்பு (one - one function, onto function)

$f : A \longrightarrow B$ சார்பு என்க.

$x_1\ x_2 \in A$ என்க

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ எனின் f **ஒன்று - ஒன்று சார்பு** ஆகும்.

f இன் வீச்சு $R(f) = B$ எனின், சார்பு f - மேலானது எனப்படும்.

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு மேலான சார்பு எனின், $y \in B$ தரப்படின் $f(x) = y$ ஆகுமாறு $x \in A$ உண்டு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 17

$f : R \longrightarrow R$

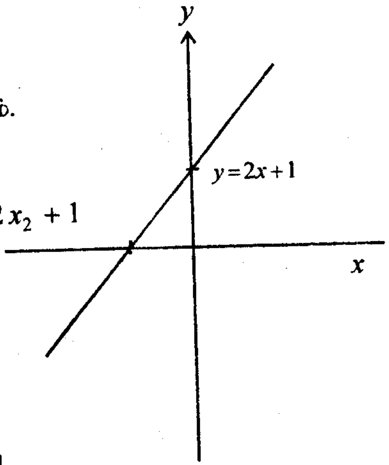
$f(x) = 2x + 1$. ஒரு சார்பு ஆகும்.

$x_1, x_2 \in R$ என்க

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$



எனவே f, $(1-1)$ சார்பு ஆகும்.

f இன் வீச்சு R ஆகும்.

அதாவது $y \in R$ தரப்படின் $\dfrac{y-1}{2} \in R$ ஆகும்.

$f(x) = 2x + 1$ என்பதால்

$f\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{y-1}{2}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$

எனவே சார்பு f, மேலானது ஆகும்.

உதாரணம் 18

$g ; R \longrightarrow R$

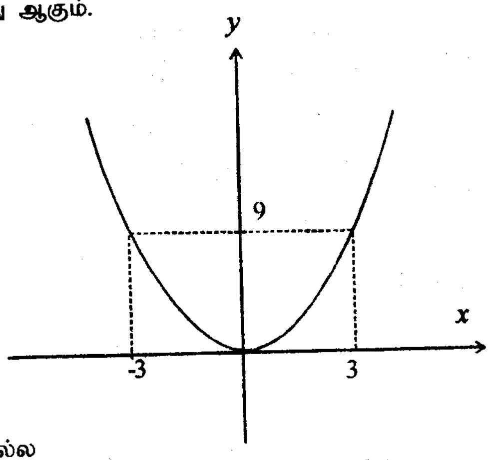
$g(x) = x^2$ என்க.

g ஒரு சார்பு ஆகும்.

$g(3) = 3^2 = 9$

$9(-3) = (-3)^2 = 9$

$g(3) = g(-3) \not\Rightarrow 3 = -3$



எனவே g ஆனது (1 - 1) சார்பு அல்ல

$-4 \in R$

$g(x) = x^2 = -4$ ஆகுமாறு $x \in R$ இல்லை

எனவே g **மேலான சார்பு அல்ல.**

மேலே தரப்பட்டுள்ள சார்பின், ஆட்சி, இணை ஆட்சி என்பவற்றை $[0, \infty)$ என வரையறுப்பதன் மூலம் g ஆனது $(1-1)$ மேலான சார்பு ஆக மாற்றலாம்.

$g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

$g(x) = x^2$ என்க.

$x_1, x_2 \in [0, \infty)$ என்க.

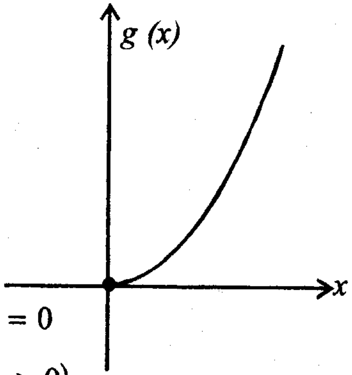
$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \; (x_1 + x_2 > 0)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$



எனவே g, $(1-1)$ சார்பு ஆகும்.

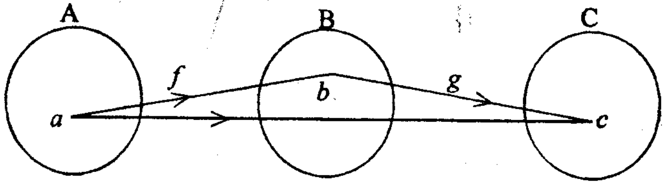
$y \in [0, \infty)$ என்க. $y \geq 0$ ஆகும்.

$g(\sqrt{y}) = y$ ஆகுமாறு $\sqrt{y} \in [0, \infty)$ உண்டு.

எனவே g **மேலான சார்பு** ஆகும்.

1.4 சேர்த்திச் சார்பு (Composite function)

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் என்க.



$f(a) = b$, $g(b) = c$ என்க $[a \in A, b \in B, c \in C]$

மேலே தரப்பட்டுள்ள f, g என்பவற்றின் சேர்த்திச் சார்பு gof ஆனது

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$gof : A \longrightarrow C$

$gof(x) = g[f(x)]$ $(x \in A)$ என வரையறுக்கப்படும்.

$gof(a) = g[f(a)] = g(b) = c$ ஆகும்.

உதாரணம் 19

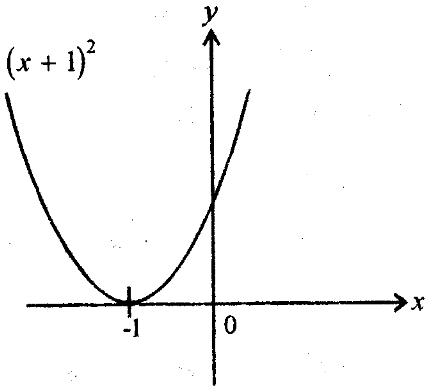
$f : R \longrightarrow R,$ $g : R \longrightarrow R$

$f(x) = x^2$ $g(x) = x + 1$ என்க.

(i) சார்பு fog ஐ வரையறுக்க.
fog. இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

(ii) சார்பு gof ஐ வரையறுக்க
gof இன் ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

(i) $fog(x) = f[g(x)] = f(x+1) = (x+1)^2$



$D(fog) = R$

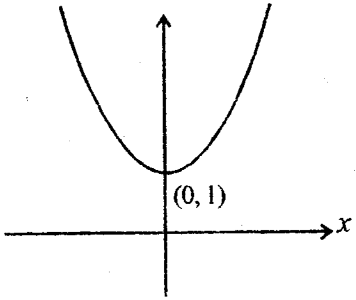
$R(fog) = R_o^+$

(ii) $(gof)(x) = g[f(x)]$

$= g(x^2) = x^2 + 1$

$D(gof) = R$

$R(gof) = \{x : x \in R, x \geq 1\}$



இங்கு $fog : R \longrightarrow R$

$fog(x) = (x+1)^2$

$gof : R \longrightarrow R$

$(gof)(x) = x^2 + 1$

$(x+1)^2 \neq x^2 + 1;$ பொதுவாக $fog \neq gof$ என்பதை அவதானிக்க.

1.5 சார்பு ஒன்றின் நேர்மாறு (Inverse of a function)

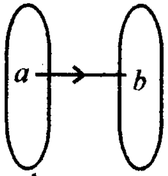
$f : A \longrightarrow B$ சார்பு (1 - 1) ஆனதும் மேலானதும் என்க. இவ்வாறான சந்தர்ப்பங்களில் f இன் நேர்மாறு சார்பு f^{-1} ஆனது

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ வரையறுக்கலாம்.

$f : A \longrightarrow B$

$f : A \longrightarrow B$

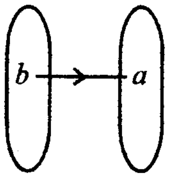
$f(a) = b$ என்க.



$f^{-1} : B \longrightarrow A$

$f^{-1}(b) = a$ என வரையறுக்கப்படும்.

$f^{-1} : B \longrightarrow A$



$f : A \longrightarrow B,$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ என்க.

$fof^{-1} : B \longrightarrow B$

$fof^{-1}(x) = x$ $(x \in B)$ ஆகவும்,

$f^{-1}of : A \longrightarrow A$

$f^{-1}of(x) = x$ $(x \in A)$ ஆகவும் இருக்கும்.

உதாரணம் 20

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$ $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ என்க.

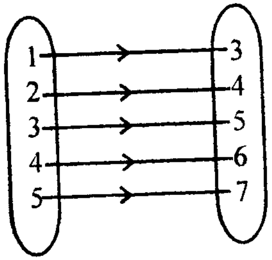
$f : A \longrightarrow B$

$f(x) = x + 2$ என்க.

சார்பு f ஆனது (1 - 1) உம் மேலானதும் ஆகும்.

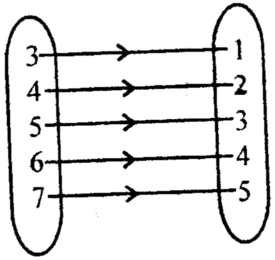
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$f : A \longrightarrow B$



$f(x) = x + 2\ ;\ x \in A$

$f^{-1} : B \longrightarrow A$



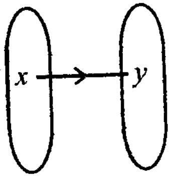
$f^{-1}(x) = x - 2\ (x \in B)$

உதாரணம் 21

$f : R \longrightarrow R$

$f(x) = 2x + 1$ ஆகும். சார்பு f, $(1 - 1)$ உம் மேலானதும் ஆகும்.

$f : R \longrightarrow R$



$y = 2x + 1$

$x = \dfrac{y - 1}{2}$

$f^{-1} : R \longrightarrow R$, நேர்மாறு சார்பு,

$f^{-1}(y) = \dfrac{y - 1}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$ ஆகும்.

$fof^{-1}(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left(\dfrac{x - 1}{2}\right)$

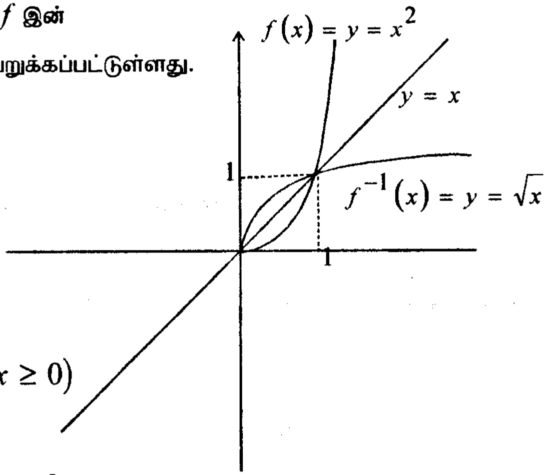
$= 2 \times \left(\dfrac{x - 1}{2}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$

$f^{-1}of(x) = f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}(2x + 1) = \dfrac{2x + 1 - 1}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

$fof^{-1}(x) = x = f^{-1}of(x)$ ஆகும்.

$f : R_o^+ \longrightarrow R_o^+$

$f(x) = x^2$ என்ற சார்பு (1 - 1) ஆகவும் மேலானதும் ஆகும். எனவே f இன் நேர்மாறு சார்பு, f^{-1} வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.



$f(x) = x^2$

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

$f^{-1} : R_o^+ \longrightarrow R_o^+$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$

இவ்விரு வரைபுகளையும் அவதானிக்க.

$f(x) = x^2$ இன் நேர்மாறு சார்பு, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ஆகும்.

$y = x$ இன் மேல், $f(x)$ இன் விம்பம், $f^{-1}(x)$ ஆகும் என்பதை அவதானிக்க.

$fof^{-1}(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \qquad (x \geq 0)$

$f^{-1}of(x) = f^{-1}\left[x^2\right] = \sqrt{x^2}\ x \qquad (x \geq 0)$

$fof^{-1}(x) = x = f^{-1}of(x)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மேலும் **உதாரணம்** 21 இல் தரப்பட்டுள்ள சார்பினை அவதானிக்க.

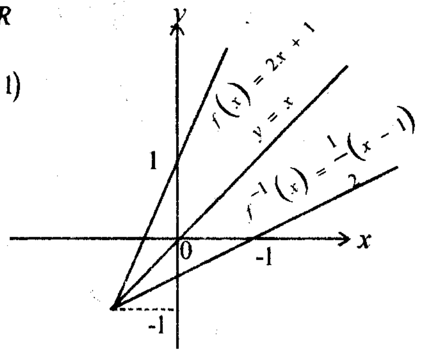
$f : R \longrightarrow R \qquad f^{-1} : R \longrightarrow R$

$f(x) = 2x + 1 \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

$y = x$ இன்மேல் $y = f(x)$

இன் விம்பம், $y = f^{-1}(x)$

ஆக இருப்பதை அவதானிக்கலாம்.



உதாரணம் 22

$f : R \longrightarrow R^+$

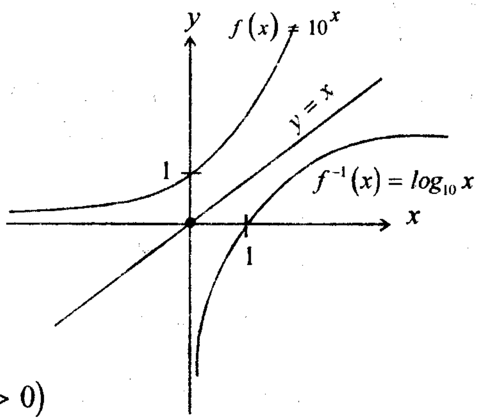
$f(x) = 10^x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

சார்பு f^{-1} ஐக் காண்க. $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ ஆகிய இரு வரைபுகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

$f : R \longrightarrow R^+$

$f(x) = 10^x$

$y = 10^x$



x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $y > 0$ எனவே மடக்கை வரையறுக்கலாம்.

$log_{10}\ y = x$

$f^{-1}(x) = log_{10} x \ (x > 0)$

$y = x$ இன் மேல் $y = f(x)$ இன்

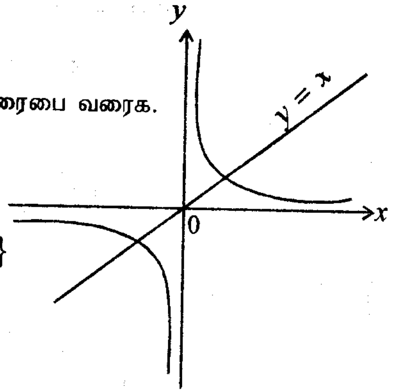
விம்பம் $y = f^{-1}(x)$ ஆக இருப்பதை அவதானிக்கலாம்.

உதாரணம் 23

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in R,\ x \neq 0$ என்க.

$f^{-1}(x)$ ஐக் காண்க. $f(x) = \frac{1}{x}$ இன் வரைபை வரைக.

$f(x) = \frac{1}{x}$



இங்கு $D(f) = R - \{0\}$, $R(f) = R - \{0\}$

$y = \frac{1}{x}$

ஆகவே $x = \frac{1}{y}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \ (x \in R,\ x \neq 0)$

$f^{-1} = f$ ஆகும்.

$y = x$ இன் மேல் $y = f(x)$ இன் விம்பம் அதே சார்பாக இருப்பதை அவதானிக்கலாம்.

$fof(x) = f[f(x)] = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ ஆகும்.

உதாரணம் 24

$f : R \longrightarrow R,\ g : R \longrightarrow R$ எனும் சார்புகள் முறையே

$f(x) = x^2 + 3,\ g(x) = 2x + 1$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

(a) சார்பு fog ஐக் காண்க.

(b) fog இன் வீச்சை. எழுதுக.

(c) $f(x) = 12 \cdot g^{-1}(x)$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(a) $fog(x) = f[g(x)] = f(2x + 1)$

$$= (2x + 1)^2 + 3$$

$$= 4x^2 + 4x + 4$$

(b) $fog(x) = 4x^2 + 4x + 4$

$$= 4\left[x^2 + x + 1\right]$$

$$= 4\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$$

$$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \geq 3$$

fog இன் வீச்சு $= \{x : x \geq 3, x \in R\}$

(c) $g(x) = 2x + 1$

$$y = 2x + 1$$

$$x = \frac{y - 1}{2}$$

(d) $g^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}, \; x \in R$

$$f(x) = 12 \cdot g^{-1}(x)$$

$$x^2 + 3 = 12 \times \left(\frac{-1}{2}\right),$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

$$(x - 3)^2 = 0; \; x = 3$$

உதாரணம் 25

$f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}, \; x \in R, x \neq 1$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) f இன் வீச்சு

(b) $fof(x)$ இன் பெறுமானம்

(c) $f^{-1}(x)$ என்பவற்றைக் காண்க.

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}, \; x \neq 1, x \in R$$

f இன் ஆட்சி $R - \{1\}$

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 1} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)^2}$$

$x < -3$ எனின் $f(x) > 0$

$-3 < x < 1$ எனின் $f(x) < 0$

$x > 1$ எனின் $f(x) > 0$

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 1} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to 1$

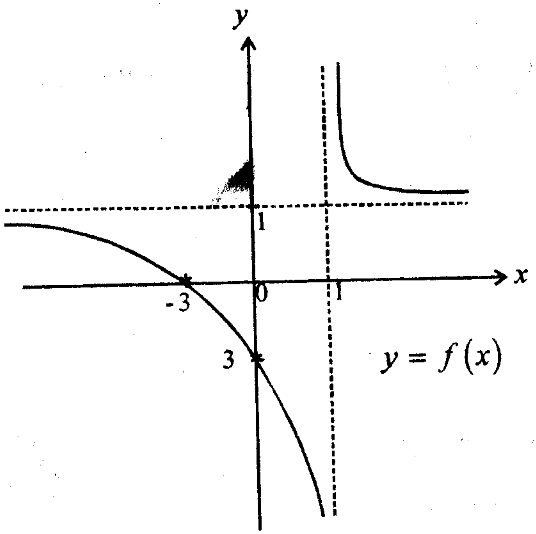
$x \to -\infty$ ஆக, $f(x) \to 1$

மேலும் $f(x) = 1$ எனின் $\frac{x + 3}{x - 1} = 1$

$$4 = 0$$

எனவே $f(x) \neq 1$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



f இன் வீச்சு $R(f) = R - \{1\}$ ஆகும்.

$$fof(x) = f[f(x)] = f\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+3}{x-1}+3}{\frac{x+3}{x-1}-1}$$

$$= \frac{4x}{4} = x$$

$fof(x) = x$ என்பதால் $f^{-1} = f$

அதாவது $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1} \quad x \neq 1$ ஆகும்.

$f = f^{-1}$ என்பதால் $f(x)$ என்ற சார்பு $y = x$ பற்றி சமச்சீரானதாகும்.

உதாரணம் 26

(a) $g : R - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow R$ எனும் சார்பு

$g(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. சார்பு g, $(1 - 1)$ ஆனால் மேலானது அல்ல எனக் காட்டுக.

(b) $f : R \longrightarrow R$ எனும் சார்பு

$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) f, $(1-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக f இன் ஆட்சியைக் காண்க.

(ii) இந்த ஆட்சிக்குரிய f இன் வீச்சு யாது?

(iii) நேர்மாறு சார்பு f^{-1} ஐயும், ஆட்சியையும், அதற்கான வீச்சையும் குறிப்பிடுக.

(a) $x_1, x_2 \in R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ என்க.

$g(x_1) = g(x_2)$ என்க.

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{2x_1-1} = \frac{x_2+1}{2x_2-1}$$

$$\Rightarrow (x_1+1)(2x_2-1) = (x_2+1)(2x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 1 = 2x_1x_2 - x_2 + 2x_1 - 1$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 3x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore g\ (1-1)$ சார்பு ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$y = \frac{1}{2} \in R$ என்க.

$$g(x) = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}$$

$$2x + 2 = 2x - 1$$

$$3 = 0$$

இது பொருந்தாது.

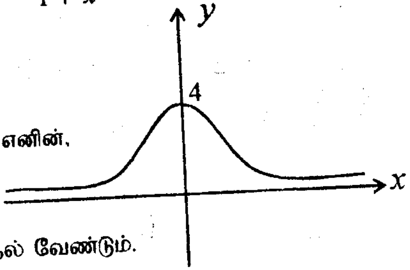
எனவே $\frac{1}{2} \in R$ தரப்படின் $g(x) = \frac{1}{2}$ ஆகுமாறு x என்ற மூலகம் R இல் இல்லை. எனவே g மேலானது அல்ல.

(b) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$, $x \in R$

இங்கு x இற்குப்பதிலாக $-x$ ஐப் பிரதியிட்டாலும் $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ எனப் பெறப்படும். சார்பு y அச்சு பற்றி சமச்சீரானது. மேலும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x) > 0$

$1 + x^2 \geq 1$ என்பதால்,

$0 < \frac{4}{1+x^2} \leq 4$ ஆகும். $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ என்ற



வளையி பின்வருமாறு அமையும்.
சார்பு (1-1) ஆக இருக்க வேண்டும் எனின்,
f இன் ஆட்சி $= \{x : x \geq 0\}$
அல்லது $\{x : x \leq 0\}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

f(1-1) ஆக இருக்க ஆட்சியை $A = \{x : x \geq 0\}$ என வரையறுப்போம்.

இந்த ஆட்சிக்குரிய வீச்சு $B = \{0 < y \leq 4\}$ ஆகும்.
இப்பொழுது சார்பு f ஐப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

$$f : [0, \infty) \longrightarrow (0, 4]$$

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

$x_1, x_2 \in [0, \infty)$ என்க.

$f(x_1) = f(x_2)$ என்க.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4}{1+x_1^2} = \frac{4}{1+x_2^2}$$

$$\Rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 \geq 0)$$

இப்பொழுது சார்பு f, (1-1) ஆகவும், மேலானதாகவும் உள்ளது. எனவே f இன் நேர்மாறு சார்பு f^{-1} ஐ வரையறுக்கலாம்.

$$y = \frac{4}{1+x^2}$$

$x^2 + 1 = \frac{4}{y}$, $\quad x^2 = \frac{4}{y} - 1$

$x^2 = \frac{4-y}{y}$, $\quad x = \sqrt{\frac{4-y}{y}} \; (x > 0)$

$$f : [0, \infty) \longrightarrow (0, 4]$$

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$f^{-1} : (0, 4] \longrightarrow [0, \infty)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4 - x}{x}} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு f , f^{-1} இரண்டும் (1 - 1) உம், மேலானதும் ஆகும்.

உதாரணம் 27

f, g எனும் சார்புகள்

$f(x) = 4 + ln\,(1 + 5x),\ x > 0;$

$g(x) = 2 + x^2,\quad x \in R$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) f ஒன்று - ஒன்று எனக் காட்டுக. (ii) f இன் வீச்சை எழுதுக.

(iii) $f^{-1}(x)$ ஐ x இல் காண்க.

(iv) $fog(x)$ ஐக் கண்டு fog இன் ஆட்சியையும், வீச்சையும் கூறுக.

(i) $f(x) = 4 + ln(1 + 5x)\quad x > 0$

$x_1, x_2 > 0 \quad f(x_1) = f(x_2)$ என்க.

$\Rightarrow 4 + ln(1 + 5x_1) = 4 + ln(1 + 5x_2)$

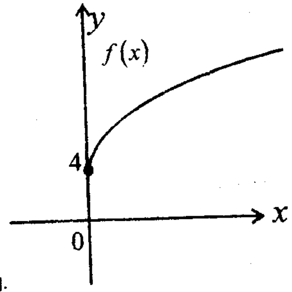
$\Rightarrow ln(1 + 5x_1) = ln(1 + 5x_2)$

$\Rightarrow 1 + 5x_1 = 1 + 5x_2$

$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

எனவே f, ஒன்று - ஒன்று சார்பு ஆகும்.



(ii) $x > 0$ என்பதால், $f(x) > 4$ ஆகும்.

f இன் பருமட்டான வரைபு தரப்பட்டுள்ளது.

f இன் வீச்சு $= \{x : x > 4,\ x \in R\}$ ஆகும்.

(iii) $f(x) = 4 + ln(1 + 5x)\ [x > 0]$

$y = 4 + ln(1 + 5x)\ [x > 0,\ y > 4]$

$ln(1 + 5x) = y - 4$

$1 + 5x = e^{y - 4}$

$x = \frac{1}{5}\left[e^{y - 4} - 1\right]$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\left[e^{x - 4} - 1\right]\ (x > 4)$

f^{-1} இன் ஆட்சி $= \{x : x > 4;\ x \in R\}$

(iv) $f(x) = 4 + ln(1 + 5x),\ x > 0$

$g(x) = 2 + x^2;\ x \in R$

$fog(x) = f[g(x)] = f(2 + x^2)\ \ (2 + x^2 > 1$ எல்லா x இற்கும்$)$

$= 4 + ln\left[1 + 5(2 + x^2)\right]$

$= 4 + ln(11 + 5x^2)$

fog இன் ஆட்சி $= R$

வீச்சு $= \{x : x \geq 4 + ln 11\}$

உதாரணம் 28

சார்புகள் f, g என்பன

$f(x) = x - 1,\ x > 1$

$g(x) = 10^x,\ x > 0$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

சார்பு $h,\ h = gof$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $x > 1$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(i) h இன் வீச்சைக் கூறுக. (ii) h ஒன்று - ஒன்று எனக் காட்டுக

(iii) h^{-1} இன் ஆட்சியையும், வீச்சையும் எழுதுக.

(i) $f(x) = x - 1, \quad x > 1 \quad g(x) = 10^{x}, x > 0$

$h(x) = gof(x) \; ; x > 1$

$h(x) = gof(x) = g[f(x)] \;\; (x > 1)$

$= g(x-1)$

[இங்கு $x > 1$ என்பதால் $x - 1 > 0$]

$= 10^{x-1}$

இங்கு h இன் வீச்சு $= \{x : x > 1, x \in R\}$

(ii) $x_1, x_2 > 1 \quad h(x_1) = h(x_2)$ என்க.

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow 10^{x_1 - 1} = 10^{x_2 - 1}$

$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

எனவே h ஒன்று - ஒன்று சார்பு ஆகும்.

(iii) h இன் வீச்சு $(1, \infty)$ ஆகும்.

$h(x) = y = 10^{x-1}$

$y = 10^{x-1} \;\; (x > 1)$

$log\, y = x - 1$

$x = 1 + log_{10}\, y$

$h^{-1}(x) = 1 + log_{10}\, x$

h^{-1} இன் ஆட்சி $= h^{-1}$ இன் வீச்சு $= (1, \infty)$

பயிற்சி 1 (a)

1. சார்பு f ஆனது,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -3 \text{ எனின்} \\ 2x + 3, & -3 < x < 0 \text{ எனின்} \\ 1 & x \geq 0 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. f இன் வரைபை வரைக. f இன் வீச்சை எழுதுக

2. சார்பு g ஆனது,

$$g(x) = \begin{cases} 4 & x \leq -4 \text{ எனின்} \\ \dfrac{x^2}{4} & -4 < x < 4 \text{ எனின்} \\ 4 & x \geq 4 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. சார்பு g இன் வரைபினை வரைக. g இன் வீச்சை எழுதுக.

3. சார்பு h ஆனது,

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \text{ எனின்} \\ sin\, x & 0 < x \leq \pi \text{ எனின்} \\ 2, & x > \pi \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. h இன் வரைபினை வரைந்து, h இன் வீச்சை எழுதுக.

4. சார்பு f ஆனது,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x < 0 \text{ எனின்} \\ 1 + 2x & x > 0 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. h இன் வரைபினை வரைக. h இன் வீச்சை எழுதுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. சார்பு g ஆனது,

$$g(x)=\begin{cases}2-3x, & x<1 \text{ எனின்}\\ -1 & x\geq 1 \text{ எனின்}\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. g இன் வரைபினை வரைக. g இன் வீச்சை எழுதுக.

6. சார்பு f ஆனது,

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0 \text{ எனின்}\\ 2-x & 0\leq x<2 \text{ எனின்}\\ 2 & x>2 \text{ எனின்}\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. f இன் வரைபினை வரைக. f இன் வீச்சை எழுதுக.

7. சார்பு g ஆனது,

$$g(x)=\begin{cases}1 & x<-1 \text{ எனின்}\\ x^2 & -1\leq x<2 \text{ எனின்}\\ 0 & x\geq 2 \text{ எனின்}\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. g இன் வரைபினை வரைக. g இன் வீச்சை எழுதுக.

8. சார்பு p ஆனது,

$$p(x)=\begin{cases}0 & x<0 \text{ எனின்}\\ 4-x^2 & 0\leq x<2 \text{ எனின்}\\ 0 & x\geq 2 \text{ எனின்}\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. p இன் வரைபினை வரைக. p இன் வீச்சை எழுதுக.

9. $f(x)=9-x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=\sqrt{9-x^2}$ என்ற ஒவ்வொரு சார்பிற்கும் ஆட்சியை எழுதுக. ஒவ்வொரு சார்பினதும் வரைபை தனித்தனியாக வரைக. வீச்சுக்களை எழுதுக.

10. $f(x)=x^2-4$, $g(x)=-\sqrt{x}$, $h(x)=\sqrt{x^2-4}$ என்ற ஒவ்வொரு சார்பிற்கும் ஆட்சியை எழுதுக. ஒவ்வொரு சார்பினதும் வரைபினைத் தனித்தனியாக வரைக. வீச்சுக்களை எழுதுக.

11. $f(x)=|x+2|$, $g(x)=|x|+2$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை வரைக. சார்புகளின் வீச்சுக்களை காண்க.

12. $h(x)=|2x-1|$, $p(x)=|2x|-1$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை வரைக. சார்புகளின் வீச்சுக்களைக் காண்க.

13. $f(x)=|3x-2|+1$, $g(x)=|2x+3|-2$ ஆகியவற்றின் வரைபு களை வரைக. சார்புகளின் வீச்சுக்களை எழுதுக.

14. $f(x)=x-[x]$ என்ற சார்பின் வரைபை வரைக. சார்பின் வீச்சை எழுதுக.

15. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, $h(x)=\tan x$ என்ற சார்புகளின் ஆட்சியை எழுதுக. இவற்றுள்

a) (i) ஒற்றைச் சார்பு
(ii) இரட்டைச் சார்பு எவை எனக் கூறுக.

b) சார்புகள் ஒவ்வொன்றினதும் வீச்சுக்களை எழுதுக.

16. f என்னும் இரட்டைச் சார்பு (even function), π ஆவர்த்தனம் ஐக் கொண்டுள்ளது.

$$f(x)=\begin{cases}4x^2 & 0\leq x\leq \frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi}{4}<x\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$-\pi\leq x\leq\pi$ இல் f இன் வரைபினை வரைக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

17. $f(x) = x^2$ எனின் $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ ஐக் காண்க.

18. $g(x) = 2x^2 + 3x$ எனின், $\frac{g(1+h) - g(1)}{h}$ ஐக் காண்க.

19. $g(x) = x^2 + x - 1$ எனின் $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ ஐக் காண்க.

20. $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ எனின் $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ஐக் காண்க.

21. $f(x) = \frac{1}{x}$ என்ற சார்பின் (i) ஆட்சியை எழுதுக. (ii) வரைபினை வரைக. (iii) வீச்சை எழுதுக.

22. $g(x) = \frac{1}{x^2}$ என்ற சார்பின் (i) ஆட்சியை எழுதுக. (ii) வரைபினை வரைக. (iii) வீச்சை எழுதுக.

23. $f(x) = x + |x|$, $g(x) = x - |x|$ என்ற சார்புகளின் வரைபுகளை வரைக வீச்சுக்களை எழுதுக.

24. (i) $f(x) = |x+2| + |x+3| - 7$

(ii) $h(x) = |3-2x| - |3x+2|$

(iii) $g(x) = |2x+5| - |x+6| - 2$ என்பவற்றின் சார்புகளை வரைக. வீச்சுக்களை எழுதுக.

25. $0 \le x \le 2\pi$ இல் $f(x) = |\sin x|$, $g(x) = |\cos x|$

$h(x) = |x^2 - 2x - 8|$ இன் வரைபுகளை வரைக.

26. $0 \le x \le 2\pi$ இல் $f(x) = \cos x + |\cos x|$ இன் வரைபை வரைக.

பயிற்சி 1 (b)

1. சார்பு $f : R \longrightarrow R$ ஆனது,

$f(x) = x^2 - 4x$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

சார்பு f, ஒன்று - ஒன்று அல்ல, மேலானது அல்ல எனக் காட்டுக.

2. சார்பு $g : R - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow R$ ஆனது

$g(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

சார்பு g, ஒன்று - ஒன்று ஆகும். ஆனால் மேலானது அல்ல எனக் காட்டுக.

3. சார்புகள் f, g என்பன $R : \rightarrow R$, $f(x) = 10x$, $g(x) = x + 3$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. சார்புகள் fog, gof, என்பவற்றைக் காண்க. fog, gof என்பன ஒன்று - ஒன்று, மேலானவை எனக் காட்டுக.

4. சார்புகள் f, g என்பன $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{3-x}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

(a) f, g என்பவற்றின் சாத்தியமான மிகப் பெரிய ஆட்சியை எழுதுக.

(b) gof இன் சாத்தியமான மிகப்பெரிய ஆட்சி. அதற்கொத்த வீச்சு என்பவற்றைக் காண்க.

5. சார்புகள் f, g என்பன

$f(x) = -2x - 3, \ x \in R$

$g(x) = 6 - x, \quad x \in R$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

(a) சார்பு f இன் கீழ் -2 இன் விம்பம் யாது?

(b) $fog, \ f^{-1}$ என்பவற்றைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6. சார்புகள் f, g, h என்பன $R^+ \longrightarrow R^+$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

$f(x) = 3x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $h(x) = \dfrac{1+x}{x}$ ஆகும்.

R^+ இல் சேர்த்திச் சார்பு $L = hogof$ ஆனது

$L(x) = 1 + \sqrt{1+3x^2}$ ஆல் தரப்படும் என நிறுவுக.

L இன் வீச்சை எழுதுக.

7. எல்லா மெய்யெண் x இற்கும் சார்பு f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எல்லா மெய்யெண் x, y இற்கும் $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ ஆகும்.

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) ஒன்றில் $f(0) = 0$ அல்லது $f(x) = 1$

(b) ஒன்றில் $f(1) = 1$ அல்லது $f(x) = 0$

(c) எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $\{f(x)\}^n = f(x^n)$ என நிறுவுக.

மேலே தரப்பட்டவாறுள்ள $[f(xy) = f(x) \cdot f(y)]$ மெய்ச்சார்பு ஒன்றிற்கு உதாரணம் தருக.

8. (a) $f(x) = ||x+2| - |x||$, $x \in R$ என வரையறுக்கப்படும். f இன் வீச்சை எழுதுக.

(b) $g(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$ ஆகும்.

(i) g ஆனது ஒன்று - ஒன்று சார்பாக இருக்கத்தக்கதாக பொருத்தமான ஆட்சியை வரையறுக்க. வீச்சை எழுதுக.

(ii) சார்பு g^{-1} ஐ வரையறுத்து அதற்கொத்த ஆட்சி, வீச்சு என்பவற்றைத் தருக.

9. சார்புகள் f, g என்பன

$f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

(a) $gof(x) = \dfrac{7}{3x-5}$ எனக் காட்டுக.

(b) (i) f (ii) g (iii) gof என்பவற்றிற்கு இயலுமான மிகப் பெரிய ஆட்சியையும், வீச்சையும் தருக.

10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ ஆகும்.

(a) f இன் மிகப்பெரிய ஆட்சியையும், அதற்கொத்த வீச்சையும் எழுதுக.

(b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1+2x}{x-1}$ எனக் காட்டுக.

(c) f^{-1} இன் ஆட்சியையும் வீச்சையும், எழுதுக.

11. (a) சார்பு f ஆனது,

$f(x) = 3x^2 - 6x + 2, x > 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) $x > 1$ இல் $y = f(x)$ இன் வரைபை வரைக.

(ii) f இன் வீச்சை எழுதுக.

(iii) f^{-1} உள்ளதெனக் காட்டி, f^{-1} ஐக் காண்க f^{-1} இன் ஆட்சியை எழுதுக.

(iv) ஒரே அச்சுக்களில் $y = f(x)$ இன் வரைபையும் $y = f^{-1}(x)$ இன் வரைபையும் வரைக.

(v) சார்புகள் f, f^{-1} வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறினை எழுதுக.

(b) சார்பு g ஆனது,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$g(x) = \dfrac{1}{x-5}, \ x > 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) gof ஐக் காண்க.

(ii) gof இன் ஆட்சி $x > k$ எனத் தரப்படின் k இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது.

12. சார்புகள் f, g என்பன

$f(x) = x^2 + 1, \ x \geq 0$

$g(x) = e^{-x} \ ; \ x \geq 0$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) f, g இன் வீச்சுக்களை எழுதுக.

(ii) $f^{-1}, \ g^{-1}$ என்பவற்றைக் காண்க.

(iii) fog ஐக் கண்டு, $3\,fog(x) = 4\,g(x) + 2$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

13. சார்பு f ஆனது

$f(x) = 4x - x^2, \ 2 \leq x \leq 4$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) f என்பது ஒன்று - ஒன்று சார்பு எனக் காட்டுக.

(ii) f இன் வீச்சு யாது?

(iii) f^{-1} உள்ளதெனக் காட்டி அதனைக் காண்க.

14. சார்புகள் h, g என்பன

$h(x) = 2 - \quad [illegible] \in R$

$g(x) = \dfrac{1}{1-x} \quad x \in R, \ x \neq 0, 1$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

(i) சார்பு goh ஐக் கண்டு அதன் ஆட்சியைக் காண்க.

(ii) g^{-1} ஐக் கண்டு அதன் வீச்சைக் குறிப்பிடுக.

15. f, g எனும் சார்புகள் $f(x) = 4 + \ell n(1 + 5x), \ x > 0$

$g(x) = 2 + x^2, \ x \in R$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) f இன் வீச்சைக் கூறுக.

(ii) f ஒன்று - ஒன்று எனக் காட்டுக.

(iii) $f^{-1}(x)$ ஐ x இல் காண்க.

(iv) $fog(x)$ ஐக் கண்டு fog இன் ஆட்சியையும் வீச்சையும் கூறுக.

16. சார்புகள் f, g என்பன

$f(x) = x - 1, \ x > 1$

$g(x) = 10^x, \ x > 0$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

சார்பு $h, \ h = gof, \ x > 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) h இன் வீச்சைக் கூறுக.

(ii) h ஒன்று - ஒன்று எனக் காட்டுக.

(iii) h^{-1} இன் ஆட்சியையும், வீச்சையும் குறிப்பிடுக.

17 **(b)** $f : N \longrightarrow Z, \quad g : Z \longrightarrow N, \quad h : N \longrightarrow R$

ஆகிய சார்புகள் முறையே $f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = |x + 2|$

$h(x) = \sqrt{x}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. f என்பது ஒன்று -- ஒன்று ஆனால் மேலானது அல்ல. g என்பது மேலானது ஆனால் ஒன்று - ஒன்று அல்ல என நிறுவுக. சேர்த்திச் சார்புகள் $gof, \ hog$ என்பவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்து $ho\,(gof), \ (hog)\,of$ ஆகிய இரு சார்புகளும் சமமானவை என நிறுவுக.

(1997)

18. **(b)** $g : A \longrightarrow B$ உம் $h : B \longrightarrow A$ உம் ஒவ்வொரு $b \in B$ யிற்கும் $(goh)(b) = b$ ஆக உள்ளன எனக் கொள்வோம். h ஆனது ஒன்று - ஒன்று எனவும், மேலானது எனவும் காட்டுக.

$A = R$ எனவும், $B = \{x : x \in R, \ x \geq 0\}$ எனவும் கொள்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$g : A \longrightarrow B$ உம் $h : B \longrightarrow A$ உம் முறையே

$g(a) = a^2$, $h(b) = \sqrt{b}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

ஒவ்வொரு $b \in B$ இற்கும் $(goh)(b) = b$ எனக் காட்டுக.

ஒவ்வொரு $a \in A$ இற்கும் $(hog)(a) = a$ உண்மையானதா?
உமது விடையை மெய்ப்பிக்க.

(1998)

19.(b)(i) ஒவ்வொரு $x \in R$ இற்கும் $f(x)$ ஆனது பல பெறுமானங்களை எடுக்க முடியும் எனவும்,

(ii) ஒவ்வொரு $x_1, x_2 \in R$ இற்கும் $|f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2|$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு $x \in R$ இற்கும் $f(x)$ ஆனது உண்மையில் ஒரு பெறுமானத்தை மாத்திரம் எடுக்கிறதென நிறுவுக.
f ஒரு சார்பா?

(c) $g : R \to (0, 1)$ ஆனது,

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$ இனால் வரையறுக்கப்படும்.

g ஆனது ஒன்று - ஒன்று உம், மேலானதும் எனக் காட்டுக.
ஒன்று - ஒன்று உம் மேலானதுமான $h : (0, c) \to R$ எனும் சார்பு உள்ளதா? இங்கு $c = 10^{-1999}$ உமது விடையை மெய்ப்பிக்க.

(1999)

20. (b) $f(x) = sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right)$ எனவும், $g(x) = log_{10}(4 - x)$ எனவும் கொள்க. இங்கு x மெய்யானது.

(i) f, g ஆகியவற்றின் ஆட்சிகளைக் கண்டு, இதிலிருந்து $f + g$ யின் ஆட்சியைக் காண்க.

(ii) $f o g(-96)$ இன் பெறுமானம் யாது?

21.(c) $f : Z \longrightarrow Z$ ஆனது, $f(x) = 3x + n - nx$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறது என்க. இங்கு n தரப்பட்ட நிறை வெண் ஆகும்.

(i) f ஒன்று - ஒன்று ஆக இருப்பதற்கு
(ii) f ஆனது மேலானதாக இருப்பதற்கு
n இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
மேலும் f இன் நேர்மாறு சார்பு உளதாக இருக்கும்போது அதனைக் காண்க.

(2000)

22. யாதாயினும் $x \in R$ இற்கு $f(x + k) = f(x)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு மாறிலி k இருக்குமெனின் $f : R \longrightarrow R$ ஆனது ஓர் ஆவர்த்தனச் சார்பு எனக் கூறப்படும். k யின் மிகச்சிறிய நேர்ப் பெறுமானம் (அது உளதாக இருப்பின்) f இன் ஆவர்த்தனம் எனப்படும்.

$g : R \longrightarrow R$ என்பது $x \in R$ இற்கு $g(x) = sin^2 x$ இனால் வரையறுக்கப்படுகிறதெனக் கொள்வோம். g ஆவர்த்தனமானதெனக் காட்டி, அதன் ஆவர்த்தனத்தைக் காண்க.
g, h ஆகியவற்றிற்கு ஒரே ஆவர்த்தனமும் ஆனால் $g + h$ இற்கு ஆவர்த்தனம் எதுவும் இல்லாமலும் இருக்கத்தக்கதாக ஓர் ஆவர்த்தனச் சார்பு $h : R \longrightarrow R$ ஐக் காண்க.

(2000)

23. சார்பு $f : R \longrightarrow R$, சார்பு $g : D \longrightarrow R$ என்பன

$$f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}, \quad g(x) = log_x 10$$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

இங்கு D என்பது $log_x 10$ வரையறுக்கப்படக் கூடிய x இன் பெறுமானங்கள் ஆகும்.

(i) f இன் வீச்சையும், f இன் நேர்மாறு சார்பையும் காண்க.
(ii) g இன் ஆட்சி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $fog(\sqrt{10})$ இன் பெறுமானம் என்பவற்றைக் காண்க.

24. சார்புகள் f, g என்பன

$$f(x)=\frac{x}{x-1},\ x\in R,\ x\neq 1$$

$$g:R\longrightarrow R$$

$g(x)=sin^2 x$ என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

(i) f, g என்பவற்றின் வீச்சுக்களைக் காண்க.

(ii) $fof(x)$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து f இன் நேர்மாறு சார்பைக் காண்க.

(iii) $fog(x)=1$ ஆகுமாறு x ஐக் காண்க.

25. நிறையெண்களின் தொடை Z எனவும் மறையற்ற நிறையெண்களின் தொடை N ஆகவும் இருக்க

சார்பு $f:Z\longrightarrow N$

$$f(x)=\begin{cases} f(x): & ,\ x\geq 0 \text{ எனின்} \\ -2x-1 & x<0 \text{ எனின்} \end{cases}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) தொடை $\{f(x): -3\leq x\leq 3\}$

(ii) தொடை $\{x: 3\leq f(x)\leq 9\}$

(iii) f இன் நேர்மாறு சார்பு f^{-1}

26. $g(x)=2x+1$, $fog(x)=\dfrac{8x^2+8x-3}{4x^2+4x+2}$ ஆகும். f, f^{-1} என்பவற்றைக் காண்க. ஒத்த ஆட்சிகளைக் குறிப்பிடுக.

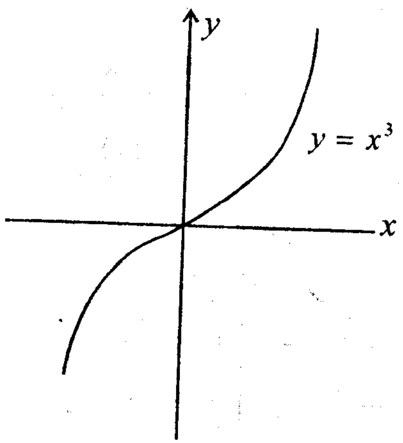
2. எல்லைகள்

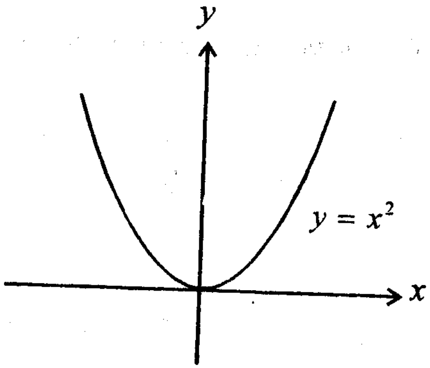
2.0 அறிமுகம்

x அதிகரித்துச் செல்கையில் x^2, x^3 என்பனவும் அதிகரித்துச் செல்வதை அவதானிக்கலாம். $x=10$ ஆக, $x^2=100$ ஆகவும் $x=100$ ஆக $x^2=1000$ ஆகவும் அதிகரிக்கும். இவ்வாறு x முடிவிலியை அணுகும் போது, x^2 முடிவிலியை அணுகும். இதனை

$x\longrightarrow +\infty$ ஆக, $x^2\longrightarrow +\infty$ ஆகும்.

$x\longrightarrow +\infty$ ஆக, $x^3\longrightarrow +\infty$ ஆகும் என எழுதப்படும்.





x மறைப் பெறுமானங்களினூடாகக் குறைந்து செல்கையில் x^2 அதிகரித்துச் செல்வதையும் x^3 குறைந்து செல்வதையும் வரைபுகளிலிருந்து காணலாம்.

$x\longrightarrow -\infty$ ஆக, $x^2\longrightarrow +\infty$

$x\longrightarrow -\infty$ ஆக, $x^3\longrightarrow -\infty$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

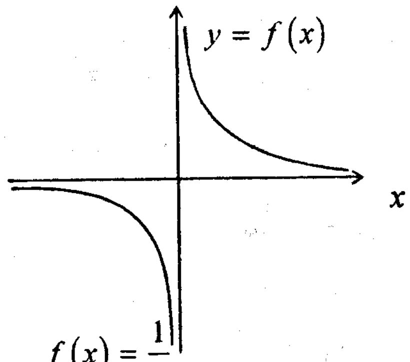
பின்வரும் குறிப்பீடுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

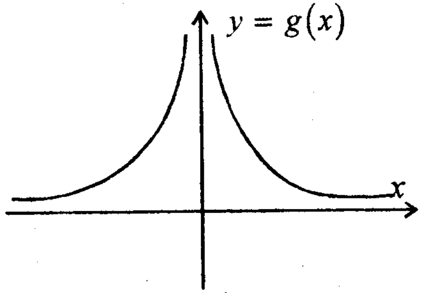
$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

"x முடிவிலி ஆக, x^2 இன் எல்லை முடிவிலி ஆகும்." என்றவாறு இதனை வாசிக்கலாம்

(i) $f(x) = \frac{1}{x};\ x \neq 0$ (ii) $g(x) = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0$ என்ற இருவரைபுகளையும் அவதானிக்க. இரு வரைபுகளிலும் x நேர்ப் பெறுமானங்களினூடாக அதிகரித்துச் செல்கையில் $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ என்பன குறைந்து செல்வதையும், பூச்சியத்தை அணுகுவதையும் அவதானிக்கலாம்.



$f(x) = \frac{1}{x}$



$g(x) = \frac{1}{x^2}$

"x, முடிவிலியை அணுக, $\frac{1}{x}$ பூச்சியத்தை அணுகும்." என்பது

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ ஆகும். அல்லது

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ என எழுதப்படும். இது x முடிவிலி ஆக $\frac{1}{x}$ இன் எல்லை பூச்சியம் ஆகும். என வாசிக்கப்படும். இவ்வாறே,

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $\frac{1}{x^2} \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$x \to -\infty$ ஆக, $\frac{1}{x} \to 0$ ஆகும்.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $\frac{1}{x^2} \longrightarrow 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

மேலே தரப்பட்டுள்ள வரைபுகளிலிருந்து,

$x \longrightarrow \infty$ ஆக, $x^2 \longrightarrow \infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow \infty$ ஆக, $x^3 \longrightarrow \infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $x^2 \longrightarrow \infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $x^3 \longrightarrow -\infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow \infty$ ஆக, $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$x \longrightarrow \infty$ ஆக, $\frac{1}{x^2} \longrightarrow 0$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $\frac{1}{x^2} \longrightarrow 0$ ஆகும். எனக் காணலாம்.

எல்லைகளைக் கணிக்கும்போது மிகவும் அவதானமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$x \longrightarrow \infty$ ஆகும் போது $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ எனின்,

$x \longrightarrow \infty$ ஆகும் போது $f(x) + g(x) \to \infty$, $f(x) \cdot g(x) \to \infty$ ஆகும் எனக் கூறமுடியும்.

ஆனால் $x \longrightarrow \infty$ ஆகும் போது $f(x) - g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ஆகியவற்றின் நடத்தைகள் பற்றி திட்டமாகக் கூறமுடியாது. இங்கு $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$ போன்ற சந்தர்ப்பங்கள் பற்றி இங்கு எடுத்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(A) $x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும், $g(x) \to \infty$ ஆகும். எனின்,
$x \to \infty$ ஆக, $f(x) - g(x)$ இன் எல்லை பற்றியாது கூறலாம்?

1. $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ என்க. $f(x) - g(x) = 2x - x = x$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to \infty$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) - g(x) \to \infty$ ஆகும்.

2. $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ என்க $f(x) - g(x) = x - 2x = -x$

$x \longrightarrow \infty$ ஆக $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to \infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow \infty$ ஆக, $f(x) - g(x) = -x \to -\infty$ ஆகும்.

3. $f(x) = x + 5$, $g(x) = x$ என்க. $f(x) - g(x) = 5$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to \infty$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) - g(x) = 5 \to 5$ ஆகும்.

எனவே $x \to \infty$ ஆக, $f(x) - g(x)$ இன் நடத்தை பற்றி திட்டமாக எதுவும் கூறமுடியாது. சார்புகளை பொறுத்து எல்லைகள் வேறுபடும்.

(B.) $x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to \infty$ ஆகும் எனின்

$x \to \infty$ ஆக, $\frac{f(x)}{g(x)}$ இன் எல்லை பற்றி யாது கூறலாம்?

1. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x$ என்க. $\frac{f(x)}{g(x)} = 2x$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to \infty$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $\frac{f(x)}{g(x)} = 2x \to \infty$ ஆகும்.

2. $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ என்க. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to \infty$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ ஆகும்.

3. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ என்க. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும், $g(x) \to \infty$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x} \to 0$ ஆகும்.

எனவே $x \to \infty$ ஆக $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ இன் எல்லை பற்றி திட்டமாக எதுவும் கூறமுடியாது.

(C.) $x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to 0$ ஆகும். எனின்,

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \cdot g(x)$ இன் எல்லை பற்றி யாது கூறலாம்?

1. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$ என்க. $f(x) \cdot g(x) = x^2 \times \dfrac{1}{x} = x$ ஆகும்

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும், $g(x) \to 0$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \cdot g(x) = x \to \infty$ ஆகும்.

2. $f(x) = x^2$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ என்க. $f(x) \cdot g(x) = -x$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to \infty$ ஆகும். $g(x) \to 0$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \cdot g(x) = -x \to -\infty$ ஆகும்.

3. $f(x) = 2x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ என்க. $f(x) \cdot g(x) = 2$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக. $f(x) \to \infty$ ஆகும், $g(x) \to 0$ ஆகும்.

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \cdot g(x) = 2 \to 2$ ஆகும்.

எனவே $x \to \infty$ ஆக, $f(x) \cdot g(x)$ இன் எல்லை பற்றி திட்டமாக எதுவும் கூறமுடியாது.

(D.) $x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to 0$ $g(x) \to 0$ எனின்,

$x \to \infty$ ஆக, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ இன் எல்லை பற்றி யாது கூறலாம்?

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \infty$

2. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -x$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to -\infty$

3. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$

$x \to \infty$ ஆக. $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 2$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to -1$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x}$

$x \to \infty$ ஆக, $f(x) \to 0$ $g(x) \to 0$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$

எல்லைகள் பற்றிய பின்வரும் தோற்றங்களை (நிறுவலின்றிப்) பயன்படுத்தலாம்.

$a, A, B, k \in R$ என்க.

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ $\lim_{x\to a} g(x) = B$ என்க

1. $\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$

2. $\lim_{x\to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$

3. $\lim_{x\to a} \{K \cdot f(x)\} = K \cdot \lim_{x\to a} f(x) = KA$

4. $\lim_{x\to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = AB$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B} \; (B \neq 0)$

2.1 எல்லைகள்

உதாரணம் 1
எல்லைகளைக் காண்க.

(i) $\lim_{x\to -\infty} x^2 + x$ (ii) $\lim_{x\to +\infty} x^2 - x$

(iii) $\lim_{x\to +\infty} x^2 + x$ (iv) $\lim_{x\to -\infty} x^2 - x$

(i) $\lim_{x\to -\infty} x^2 + x = +\infty \left[x \longrightarrow +\infty \text{ ஆக}, \; x^2 \longrightarrow +\infty\right]$

(ii) $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to +\alpha} x(x-1)$

$= \infty \cdot \left[x \to +\infty \text{ ஆக}, (x-1) \to \infty\right]$

(iii) $\lim_{x\to -\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to -\infty} x(x-1) = +\infty$

(iv) $\lim_{x\to -\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to -\infty} x(x-1) = +\infty$

உதாரணம் 2
எல்லைகளைக் காண்க.

(i) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+1}$ (ii) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

(iii) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ (iv) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{x^2+1}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(v) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ (vi) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{1+0} = 2$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1+\frac{1}{x^2}} = \infty$

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$

(v) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{1+0} = 2$

(vi) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{1+\frac{1}{x^2}} = -\infty$

உதாரணம் 3

எல்லைகளைக் காண்க.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x}+x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{4x^2+x}+x}$ (iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-x}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x \cdot \times \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right]} = \frac{1}{2}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x}+x}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+x}+x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\alpha} \frac{x}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+1} = +\infty$$

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}-x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}-x} \times \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$\lim \frac{x\left[\sqrt{x^2+2}+x\right]}{2} = \infty$$

எல்லைகளைக் கணித்தல்

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad x \neq 2$$

$\lim_{x\to2} f(x)$ ஐக் காண்க

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$x = 2+h$ ஆக, $f(x) = \frac{(2+h)^2-4}{2+h-2} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h$

$h \to 0$ ஆக, $x \to 2+0$ ஆகும். $f(x) \to 4$ ஆகும்.

$x \to 2^+$ ஆக, $f(x) \to 4$ ஆகும்.

$x = 2$ இல், $f(x)$ இன் வலதுபக்க எல்லை 4 ஆகும்.

இது $\lim_{x\to2^+} f(x) = 4$ என எழுதப்படும்.

$x = 2$ இல் $f(x)$ இன் வலதுபக்க எல்லை 4 ஆகும். ———— **(1)**

$x = 2-h$ எனின், $f(x) = \frac{(2-h)^2-4}{2-h-2} = \frac{-4h+h^2}{-h} = 4-h$

$h \to 0$ ஆக, $x \to 2-0$ ஆகும், $f(x) \to 4$ ஆகும்.

இது $\lim_{x\to2-} f(x) = 4$ என எழுதப்படும். ________ **(2)**

(1), (2) இலிருந்து $\lim_{x\to2} f(x) = 4$ ஆகும்.

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \text{ ஆகும்.}$$

எல்லைகளைக் கணிக்கும்போது பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 4

பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் காண்க

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ (ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

(iii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-8x+7}{7x^2-6x-1}$

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$= \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$

$= \lim_{x\to 2} (x^3+x+1)$

$= 3$

(iii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-8x+7}{7x^2-6x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-7)}{(7x+1)(x-1)}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x-7}{7x+1}$

$= \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$

உதாரணம் 5

பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் கணிக்க

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-2x^2-1}{x^2}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]}{1+x-1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \left[\sqrt{1+x}+1\right]$

$= 2$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-2x^2-1}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-(2x^2+1)}{x^2} \times \frac{\sqrt{x^4+1}+(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+1}+(2x^2+1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^4+1)-(2x^2+1)^2}{x^2\left[\sqrt{x^4+1}+(2x^2+1)\right]}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^4+1)-(4x^4+4x^2+1)}{x^2\left[\sqrt{x^4+1}+(2x^2+1)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2(3x^2+4)}{x^2\left[\sqrt{x^4+1}+(2x^2+1)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(3x^2+4)}{\sqrt{x^4+1}+(2x^2+1)}$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

தேற்றம்

$$\lim \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$$ ஆகும். இங்கு $n \in Q$

நிறுவல்

(i) n - நேர்நிறையெண் என்க.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\ldots\ldots+a^{n-1}\right)}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+----a^{n-1}\right)$$

$$= a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}$$ [n - உறுப்புக்கள்]

$$= n\cdot a^{n-1}$$

(ii) n - மறையெண் என்க.

$n = -m$ என்க. இங்கு $m > 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^m} - \frac{1}{a^m}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-1\left(x^m - a^m\right)}{x^m a^m (x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-1}{x^m \cdot a^m}\left[\frac{x^m - a^m}{x-a}\right]$$

$$= \frac{-1}{a^{2m}} \times m a^{m-1}$$

$$= (-m)\, a^{-m-1}$$

$$= n a^{n-1}$$

(iii) n ஒரு பின்னம் என்க.

$n = \frac{p}{q}$; இங்கு p, q நிறையெண்கள். $q > 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x-a}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{x \to a} \frac{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p - \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q - \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q}$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} \left[x^{\frac{1}{q}} = y, a^{\frac{1}{q}} = b\right]$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{y^p - b^p}{y - b} \times \frac{y - b}{y^q - b^q}$$

$$= pb^{p-1} \times \frac{1}{qb^{q-1}}$$

$$= \frac{p}{q} b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}}$$

$$= n \cdot a^{n-1}$$

உதாரணம் 6

பின்வருவனவற்றின் எல்லைகளைக் கணிக்க.

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{16} - 1}{x^8 - 1}$ (ii) $\lim_{x \to a} \frac{(x+2)^{\frac{5}{3}} - (a+2)^{\frac{5}{3}}}{x - a}$

(iii) $\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$ எனின் n ஐக் காண்க.

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{16} - 1}{x^8 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{16} - 1}{x - 1} \times \frac{x - 1}{x^8 - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^{16} - 1^{16}}{x - 1} \times \frac{x - 1}{x^8 - 1^8}$$

$$= \left(16 \times 1^{15}\right) \times \left(\frac{1}{8 \times 1^7}\right) = \frac{16}{8} = 2$$

(ii) $\lim_{x \to a} \frac{(x+2)^{\frac{5}{3}} - (a+2)^{\frac{5}{3}}}{x - a}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x+2)^{\frac{5}{3}} - (a+2)^{\frac{5}{3}}}{(x+2) - (a+2)}$$

$x + 2 = y, a + 2 = b$ என்க

[$x \to a$ எனின் $x + 2 \to a + 2$ ஆகும். ஆகவே $y \to b$]

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{y \to b} \frac{y^{\frac{5}{3}} - b^{\frac{5}{3}}}{y - b}$$

$$= \frac{5}{3} b^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a+2)^{\frac{2}{3}}$$

(iii) $\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$

$$n 2^{n-1} = 80$$

$$n \cdot 2^{n-1} = 5 \times 2^4$$

$n \cdot 2^{n-1} = 5 \times 2^{5-1}$ எனவே $n = 5$ ஆகும்.

தேற்றம்

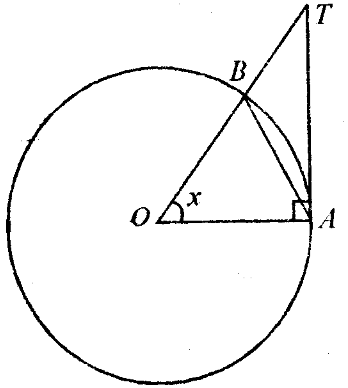
x ஆரையனில் அளக்கப்பட்டிருக்க, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ஆகும்.

இம்முடிபை நிறுவ, x நேர்ப்பெறுமானங்களினூடு பூச்சியத்தை அணுக,

$\frac{\sin x}{x} \to 1$ என கேத்திரகணித முறையில் நிறுவலாம்.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ என நிறுவுவோம்.

வட்டத்தின் மையம் O
ஆரை r என்க.
$\angle AOB = x$ ஆரையன்
வட்டத்திற்கு A இலுள்ள
தொடலி நீட்டப்பட்ட
ஆரை OB ஐ T இல் சந்திக்கிறது.



முக்கோணி OAB யின் பரப்பு < ஆரைச்சிறை OAB இன் பரப்பு < முக்கோணி OAT இன் பரப்பு

$$\frac{1}{2} r \cdot r \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r \cdot r \tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \qquad \left[\sin x > 0 \text{ என்பதால் } \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \right]$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$x \to 0$ ஆக, $\frac{1}{\cos x} \to 1$ என்பதால்

$x \to 0$ ஆக, $\frac{x}{\sin x} \to 1$ ஆகும்.

$x \to 0$ ஆக, $\frac{1}{\frac{x}{\sin x}}$ 1 ஆகும்.

ஆகவே $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

இப்போது $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ எனக் காட்ட வேண்டும்.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$$

$x = -y$ என்க, $x \to 0^-$ எனின், $y \to 0^+$ ஆகும்.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin(-y)}{(-y)}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{-\sin y}{-y}$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 1$$

எனவே $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ஆகவே $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ஆகும்.

குறிப்பு

$x \to 0$ ஆக, $\frac{\sin x}{x} \to 1$ ஆகும்.

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$x \to 0$ ஆக, $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{1}{\cos x} \to 1$ என்பதால்

$x \to 0$ ஆக, $\frac{\tan x}{x} \to 1$ ஆகும்.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

உதாரணம் 7

எல்லைகளைக் கணிக்க

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(i) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \times \frac{bx}{\sin bx} \times \frac{ax}{bx}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin ax}{ax}\right] \times \left(\frac{bx}{\sin bx}\right) \times \left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

(ii) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \times \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \times \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{4} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 8

எல்லைகளைக் கணிக்க

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \tan 3x}{4x - \sin 5x}$ (ii) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{4x - \sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x + \tan 3x}{x}}{\dfrac{4x - \sin 5x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{\tan 3x}{x}}{\dfrac{4x}{x} - \dfrac{\sin 5x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x} + 3\cdot\dfrac{\tan 3x}{3x}}{4 - 5\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{2\times 1 + 3\times 1}{4 - 5\times 1} = \frac{5}{-1} = -5$$

(ii) $$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{2\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}$$

$$= \cos a \times 1 = \cos a$$

$\left[\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;\right.$ இங்கு x ஆரையனில் அளக்கப்படும். $\Big]$

உதாரணம் 9

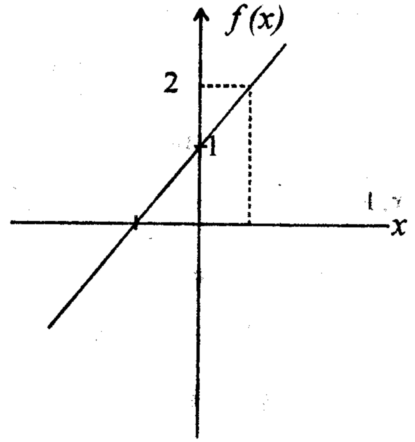
சார்பு f ஆனது,

$f(x) = x + 1$ என

வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. $x \in R$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 + 1 = 2$ ஆகும்.

மேலும் $f(1) = 2$ ஆகும்.



உதாரணம் 10

சார்பு g ஆனது,

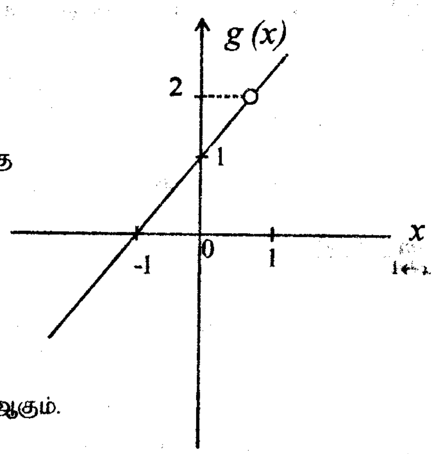
$g(x) = x + 1;\ (x \neq 1)$

என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு சார்பானது 1 தவிர்ந்த ஏனைய பெறுமானங்களில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே g இன் ஆட்சி

$D_g = R \setminus \{1\}$ ஆகும்.

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2$ ஆகும்.

$g(1)$ வரையறுக்கப்படவில்லை.



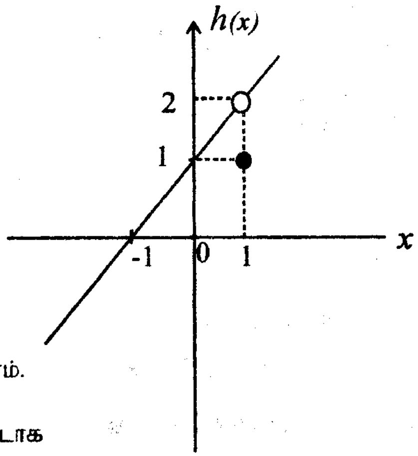
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 11

சார்பு h ஆனது,

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \text{ எனின்} \\ 1, & x = 1 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.



இங்கு சார்பின் ஆட்சி $D_h = R$ ஆகும்.

$\lim_{x \to 1} h(x)$ இன் பெறுமதியைக் காண்போம்.

x, 1 இலும் குறைந்த பெறுமானங்களினூடாக

1 ஐ அணுகும் போது $h(x)$ ஆனது 2 ஐ அணுகும்.

$\lim_{x \to 1^-} h(x) = 2$ ஆகும்.

$x = 1$ இல் இடதுபக்க எல்லையின் பெறுமானம் 2 ஆகும்.

x, 1 இலும் கூடிய பெறுமானங்களினூடாக 1 ஐ அணுகும் போது, $h(x)$ ஆனது 2 ஐ அணுகும்.

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = 2$ ஆகும்.

$x = 1$ இல் வலதுபக்க எல்லையின் பெறுமானம் 2 ஆகும்.

$\lim_{x \to 1^-} h(x) = 2 = \lim_{x \to 1^+} h(x)$

ஆகவே $\lim_{x \to 1} h(x) = 2$ ஆகும்.

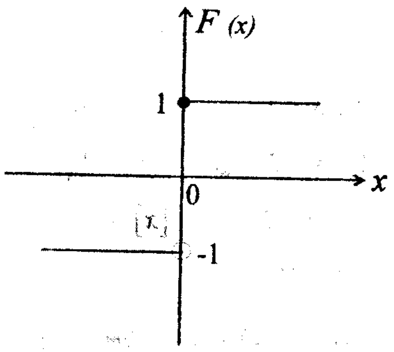
இங்கு $h(1) = 1$ ஆகும்.

உதாரணம் 12

சார்பு F ஆனது,

$$F(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \text{ எனின்} \\ 1, & x \geq 0 \text{ எனின்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.



$\lim_{x \to 0} F(x)$ ஐ ஆராய்க.

$\lim_{x \to 0^-} F(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = 1$

$x = 0$ இல் இடதுபக்க எல்லை $= -1$

$x = 0$ இல் வலது பக்க எல்லை $= +1$

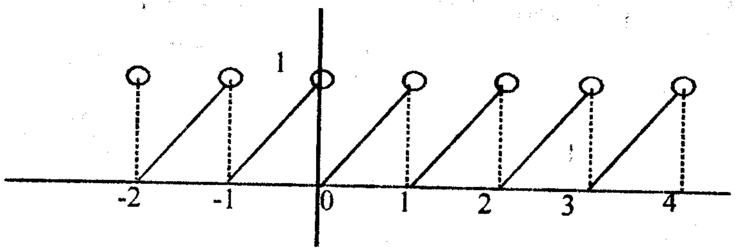
$-1 \neq 1$

$\lim_{x \to 0^-} F(x) \neq \lim_{x \to 0^+} F(x)$

எனவே $\lim_{x \to 0} F(x)$ இல்லை.

உதாரணம் 13

$f(x) = x - [x]$ என்ற சார்பின் வரைபை வரைக. வரைபிலிருந்து x நிறையெண்களை அணுகும் போது சார்பிற்கு எல்லை இல்லை எனக் காட்டுக.



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$-2 \le x < 0$ இல் $[x] = -2$ | $x - [x] = x + 2$

$-1 \le x < 0$ இல் $[x] = -1,$ | $x - [x] = x + 1$

$0 \le x < 1$ இல் $[x] = 0,$ | $x - [x] = x$

$1 \le x < 2$ இல் $[x] = 1,$ | $x - [x] = x - 1$

$2 \le x < 3$ இல் $[x] = 2,$ | $x - [x] = x - 2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \ne \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

எனவே $\lim_{x\to 0} f(x)$ இற்கு பெறுமானம் இல்லை.

இவ்வாறே x இன் நிறையெண் பெறுமானங்களில் $\lim_{x\to a} f(x) \; (a \in Z)$ இற்குப் பெறுமானம் இல்லை என்பதை அவதானிக்க

ஆனால் $f(a) = 0$ ஆகும். இங்கு $a \in Z$

உதாரணம் 14

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (ii) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ஐக் காண்க.

(i) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad (x > 0; \text{ எனவே } |x| = x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

(ii) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad (x < 0; \text{ எனவே } |x| =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-1\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= -1$$

[குறிப்பு $\sqrt{5^2} = 5;$ $\sqrt{(-5)^2} = 5$ ஆகும்.

$\sqrt{x^2} = |x| = x;$ $x \ge 0$ எனின்

$= -x;$ $x < 0$ எனின்]

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 2

பின்வரும் எல்லைகளைக் காண்க.

1. (i) $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 1000x$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} x^3 - 1000x^2$

   (iii) $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 1000x$ (iv) $\lim_{x\to-\infty} x^3 - 1000x^2$

2. (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{2x+1}$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{2x+1}$

   (iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{2x^2+1}$ (iv) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{2x+1}$

   (v) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{2x+1}$ (vi) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{2x^2+1}$

3. (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x^2+3x+2}$

4. (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x-7}{x^3-3x^2+1}$ (ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5x-7}{x^3-3x^2+1}$

5. (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-5x-10}{x^2+6x+10}$ (ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-5x-10}{x^2+6x+10}$

6. (i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - x$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-x}$

   (iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+x}-x}$ (iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x-2x}}$

   (v) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}+x}$ (vi) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}-2x^2-1}{x^2}$

7. (i) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{4x^2+2x+1}{3x}}$

   (iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{9x^2-3x}}$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x}$

8. (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$

9. (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3----+n)$

   (ii) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+----}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$

10. (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$

11. (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x}{x+2} - 3x$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}$

12. (i) $\lim_{x\to2} \frac{x^4-16}{x-2}$ (ii) $\lim_{x\to2} \frac{x^5-32}{x^2-4}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3-27}$ (iv) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^4-81}{x^3+27}$

13. (i) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^{\frac{5}{7}}-a^{\frac{5}{7}}}{x^{\frac{3}{7}}-a^{\frac{3}{7}}}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

14. (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^3}$

15. (i) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}\,\sqrt{3x-2}}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$

(iii) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-1}}$ (iv) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

16. $\lim \dfrac{x^n-3^n}{x-3}=108$ எனின் n இன் பெறுமானத்தைக் காணக.

17. (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$ (ii) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$

18. (i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^3-x^2-1}{3x^3-3x^2+2x-2}$ (ii) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-x^2-1}{3x^3-3x^2+2x-2}$

19. (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ (iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

20. (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$ (iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x+3x}{2x+\sin 3x}$

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\cos 4x}$

25. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\sin a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\tan x}{1-\cos x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sec x-\cot x}{x}$

29. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x-\tan x)$

30. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x-2}{\tan x-1}$

31. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

32. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$

33. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}$

34. $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan \dfrac{\pi x}{2}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. வகையீடு (Differentiation)

3.1 அறிமுகம்

$f(x)$ என்பது x இன் ஒரு சார்பு என்க. x இல் ஏற்படும் மாற்றம் பொதுவாக $f(x)$ இன் பெறுமானத்தில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தும். x இல் ஏற்படும் அதிகரிப்பு அல்லது குறைவு **"ஏற்றம்" (Increment)** எனப்படும். ஏற்றம் நேராகவோ அல்லது மறையாகவோ இருக்கலாம். x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx அல்லது h. என்பதால் குறிக்கப்படும்.

உதாரணமாக $f(x) = x^2 + 2x - 1$ எனின்

$f(x+\delta x) = (x+\delta x)^2 + 2(x+\delta x) - 1$ ஆகும்.

$y = x^2 + 2x - 1$ என்க. x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு y இல் அதற்கு ஒத்த ஏற்றம் δy என்பதால் குறிக்கப்படும்.

$y = x^2 + 2x - 1$ எனின்

$y + \delta y = (x+\delta x)^2 + 2(x+\delta x) - 1$ ஆகும்.

$$\delta y = (y+\delta y) - y$$

$$= \left[(x+\delta x)^2 + 2(x+\delta x) - 1\right] - \left[x^2 + 2x - 1\right]$$

$$= 2x \cdot \delta x + 2 \cdot \delta x + (\delta x)^2$$

$= \delta x\,[2x + 2 + \delta x]$ ஆகும்.

வரைவிலக்கணம்

சார்பு ஒன்றின் பெறுதி. அல்லது வகையீட்டுக் குணகம்.

$f(x)$ என்பது x இன் சார்பு என்க.

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ என்பது x ஐக் குறித்து $f(x)$ இன் பெறுதி. (derivative) அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் (differential Coefficient) எனப்படும். இது $f'(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$$f'(x) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y என்பது x இன் ஒரு சார்பு ஆகும்.

x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு y இல் அதற்கு ஒத்த ஏற்றம் δy என்க.

$\lim_{\delta x\to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பது x ஐக் குறித்து y இன் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது பெறுதி எனப்படும். இது $\dfrac{dy}{dx}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 1

பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளை முதல் தத்துவங்களிலிருந்து காண்க.

(i) $x^2 + 5x + 5$ (ii) $\frac{1}{x^3}$

(i) $f(x) = x^2 + 5x + 5$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 5(x+h) + 5$$

$$f(x+h) - f(x) = \left[(x+h)^2 + 5(x+h) + 5\right] - \left[x^2 + 5x + 5\right]$$

$$= 2xh + 5h + h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + 5 + h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + 5 + h) = 2x + 5$$

ஆகவே $f'(x) = 2x + 5$

(ii) $y = \frac{1}{x^3}$

x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு y இல் அதற்கு ஒத்த ஏற்றம் δy என்க.

$$y + \delta y = \frac{1}{(x + \delta x)^3}$$

$$\delta y = (y + \delta y) - y$$

$$= \frac{1}{(x + \delta x)^3} - \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{-\left[(x + \delta x)^3 - x^3\right]}{x^3 (x + \delta x)^3}$$

$$= \frac{-\left[\left\{(x + \delta x) - x\right\}\left\{(x + \delta x)^2 + x(x + \delta x) + x^2\right\}\right]}{x^3 (x + \delta x)^3}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\left[(x + \delta x)^2 + x(x + \delta x) + x^2\right]}{x^3 (x + \delta x)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{-\left[(x + \delta x)^2 + x(x + \delta x) + x^2\right]}{x^3 (x + \delta x)^3}$$

$$= \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4}$$

3.2 அட்சரகணித சார்புகளின் வகையீடு

◈ x^n இன் x ஐக் குறித்த வகையீட்டுக் குணகத்தினைக் காணல்.

$f(x) = x^n$ என்க.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$= \lim_{y \to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x}$ $\qquad [y = x + h$ என்க$]$

$= n x^{n-1}$

உதாரணம் 2

(i) $f(x) = x^7$ எனின் $f'(x) = 7x^6$ அல்லது $y = x^7$ எனின் $\dfrac{dy}{dx} = 7x^6$

அல்லது $\dfrac{d}{dx}(x^7) = 7x^6$

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ எனின் $f(x) = x^{-3}$, $\qquad f'(x) = (-3)x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$,

$y = \dfrac{1}{x^3}$ எனின் $y = x^{-3}$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = (-3)x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = (-3)x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

(iii) $f(t) = \sqrt{t}$, எனின் $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $f'(t) = \dfrac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$y = \sqrt{t}$ எனின் $y = t^{\frac{1}{2}}$ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\, t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

(iv) $f(t) = \dfrac{1}{t^n}$ எனின் $f(t) = t^{-n}$, $f'(t) = (-n)t^{-n-1} = \dfrac{-n}{t^{n+1}}$

$y = \dfrac{1}{t^n}$ எனில், $y = t^{-n}$, $\dfrac{dy}{dt} = (-n)t^{n-1} = \dfrac{-n}{t^{n+1}}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^n}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-n}\right) = (-n)\, t^{-n-1} = \frac{-n}{t^{n+1}}$$

◈ $f(x) = c$ எனில் (c ஒரு மாறிலி) $\dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = \dfrac{c - c}{\delta x} = 0$

எனவே $f'(x) = 0$ ஆகும்.

f, g என்பன x இன் இரு சார்புகள் எனின்

(i) $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \dfrac{d}{dx}(f(x)) + \dfrac{d}{dx}(g(x))$

(ii) $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)] - \dfrac{d}{dx}[g(x)]$

$F(x) = f(x) + g(x)$ என்க.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= f'(x) + g'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

◆ C என்பது ஒரு மாறிலியாக இருக்க.

$$\frac{d}{dx}[Cf(x)] = C\frac{d}{dx}[f(x)] \text{ ஆகும்.}$$

$F(x) = Cf(x)$ என்க.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{C\cdot f(x+h) - Cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} C\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= C\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = C\frac{d}{dx}[f(x)]$$

உதாரணம் 3

(i) $f(x) = 5x^3$ என்க.

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$$

(ii) $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ என்க.

$$f'(x) = 3 \times 2x + 2$$
$$= 6x + 2$$

(iii) $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}$

$$= \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times (-2)x^{-3} + \frac{1}{3} \times (-3)x^{-4}$$

$$= \frac{-1}{x^3} + \frac{-1}{x^4} = -\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$$

(iv) $y = at^2 + bt + c$ (இங்கு a, b, c மாறிலிகள்)

$$\frac{dy}{dt} = 2at + b$$

பயிற்சி 3 (a)

1. பின்வரும் சார்புகளின் பெறுதிகளை எழுதுக.

$$x, x^2, x^3, x^4, x^{100}\ \frac{-1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. பின்வரும் சார்புகளை முதல் தத்துவங்களிலிருந்து வகையிடுக.

(i) $2x+1$ (ii) $\frac{1}{2x+1}$ (iii) $x^2 - x$ (iv) $\sqrt{x}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

3. பின்வருவனவற்றின் வகையீட்டுக் குணகங்களை எழுதுக.

(i) $2x^5 + 3x^3 + 12x + 25$ (ii) $3x^5 - 5x^3$

(iii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

(v) $ax^n + \frac{b}{x^n}$ (vi) $\frac{1}{ax^2} + \frac{1}{bx} + \frac{1}{c}$

(vii) $3x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{5}} - 3x^{-\frac{4}{3}}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(viii) $2x^3 + 3x + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{7x^5}$

◈ f, g என்பன x இன் இரு சார்புகள்

$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$ ஆகும்.

$F(x) = f(x) \cdot g(x)$ என்க.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\} + g(x)\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\right]$$

$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

அல்லது

$u \equiv u(x)$, $v \equiv v(x)$, $y = uv$ எனின் $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$ ஆகும்.

x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு u, v, y என்பவற்றில் ஒத்த ஏற்றங்கள் முறையே $\delta u, \delta v, \delta y$ என்க.

$$y = uv$$

$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v)$$

$$\delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) - uv$$

$$= u\delta v + v\cdot\delta u + \delta u \cdot \delta v$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\cdot\frac{\delta v}{\delta x} + v\cdot\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u\cdot\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\left[u\cdot\frac{\delta v}{\delta x} + v\cdot\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u\cdot\frac{\delta v}{\delta x}\right]$$

$$= u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} + o\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$

f, g என்பன x இன் இரு சார்புகள்

$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\cdot f'(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ ஆகும்.

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ என்க.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\left\{\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h}\right\}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \left\{ \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)\, g(x)} \left\{ g(x) \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \left\{ g(x) \cdot f'(x) \cdot g'(x) \right\}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

அல்லது

$u \equiv u(x),\ v = v(x),\ y = \dfrac{u}{v}$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \dfrac{du}{dx} - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$ ஆகும்.

x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு u, v, y என்பவற்றில் ஒத்த ஏற்றங்கள் முறையே $\delta u, \delta v, \delta y$ என்க.

$$y = \frac{u}{v}, \quad y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$$

$$\delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v(u + \delta u) - u(v + \delta v)}{v(v + \delta v)}$$

$$= \frac{v \cdot \delta u - u \cdot \delta v}{v(v + \delta v)}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{v(v + \delta v)} \left[v \cdot \frac{\delta u}{\delta x} - u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{v(v + \delta v)} \left[v \cdot \frac{\delta u}{\delta x} - u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} \right]$$

$$= \frac{v \cdot \dfrac{du}{dx} - u \cdot \dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

உதாரணம் 4

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $(x^2 - x + 1)(x^2 + 2)$ **(ii)** $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

(i) $y = (x^2 - x + 1)(x^2 + 2)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - x + 1) \times 2x + (x^2 + 2)(2x - 1)$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2x^3 - x^2 + 4x - 2$$

$$= 4x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + x + 1)(2x - 1) - (x^2 - x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

பயிற்சி 3 (b)

1. வகையிடுக

(i) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

(ii) $(x^2 + 1)(3x^3 - 1)$

(iii) $(ax + b)(cx + d)$

(iv) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

(v) $\dfrac{x + 1}{x + 2}$

(vi) $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x + 2}$

(vii) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

(viii) $\dfrac{(x - 1)(x - 2)}{x - 3}$

◈ ஒரு சார்பினது சார்பின் வகையீடு.

y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகவும், z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகவும் இருப்பின்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \text{ ஆகும்.}$$

[உதாரணமாக :- $y = z^4$, $z = x^3 + 3x$ எனின்

$y = (x^3 + 3x)^4$ ஆகும்.]

x இல் ஒரு சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு z, y என்பவற்றில் அதற்கு ஒத்த ஏற்றங்கள் முறையே $\delta z, \delta y$ என்க.

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta z} \times \frac{\delta z}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta z} \times \frac{\delta z}{\delta x}$$

$$= \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \quad [\delta x \to 0, \text{ ஆக } \delta y, \delta z \to 0]$$

உதாரணம் 5

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $(2x^2 + 5x + 1)^4$ (ii) $(x^2 + 1)^5 (3x^5 + 2)^2$ (iii) $\sqrt{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$

(i) $y = (2x^2 + 5x + 1)^4$

$z = 2x^2 + 5x + 1$ என்க. இப்பொழுது $y = z^4$

$$\frac{dy}{dz} = 4z^3, \quad \frac{dz}{dx} = 4x + 5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 4(2x^2 + 5x + 1)^3 (4x + 5)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $y = (x^2+1)^5 (3x^5+2)^2$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)^5 \times \frac{d}{dx}(3x^5+2)^2 + (3x^5+2)^2 \times \frac{d}{dx}(x^2+1)^5$$

$$= (x^2+1)^5 \times 2(3x^5+2)\frac{d}{dx}(3x^5+2) + (3x^5+2)^2 \times 5(x^2+1)^4 \times \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= 2(x^2+1)^5 (3x^5+2) \times 15x^4 + 5(3x^5+2)^2 \times (x^2+1)^4 \times 2x$$

$$= 10x(x^2+1)^4 (3x^5+2)\left[3x^3(x^2+1) + (3x^5+2)\right]$$

$$= 10x(x^2+1)^4 (3x^5+2)(6x^5+3x^3+2)$$

(iii) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}} = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{(1-x^3)\cdot 3x^2 - (1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{6x^2}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{3x^2}{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}$$

பயிற்சி 3 (C)

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

1. $(2x^2+3x+1)^{10}$
2. $\sqrt{1+x^2+x^4}$
3. $\sqrt{\dfrac{1+x}{2+x}}$
4. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$
5. $\dfrac{(2x-3)^2}{(3x+4)^3}$
6. $(2x+1)^3(3x-2)^2$
7. $(x^2+1)^5(x^2-1)^6$
8. $(x^n+a^n)^m$
9. $x^2(x^3-1)^2$
10. $\dfrac{(x-1)^3}{(2x^2+1)^3}$

3.3 திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் வகையீடு

(i) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad \Rightarrow \quad = \cos x\cdot 1 = \cos x$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

(iii) $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$= \frac{1}{\cos x \cdot \cos x} \cdot 1 = \sec^2 x$$

(iv) $f(x) = \operatorname{cosec} x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x} \cdot \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x} \cdot \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sin(x+h)\sin x} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{-1}{\sin x \cdot \sin x} \cdot \cos x 1$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$f'(x) = -\cos ec\, x \cdot \cot x$$

$$f(x) = \sec x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \cdot \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \cdot \frac{2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos x \cdot \cos x} \times \sin x \times 1$$

$$= \sec x \cdot \tan x$$

(vi) $f(x) = \cot x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}\left[\frac{\sin x\cos(x+h) - \cos x\sin(x+h)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sin(x+h)\sin x}\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sin x \cdot \sin x} = -\cos ec^2 x$$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ என்ற முடிபையும், மற்றும் முன்னர் கற்ற

$\frac{d}{dx}(uv), \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$ ஆகிய முடிபுகளையும் பயன்படுத்தி ஏனைய சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காணலாம்.

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ஆகும்.

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$= \sin x(-1) = -\sin x$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 6

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\sin 3x$ (ii) $\cos^2 \dfrac{1}{x}$ (iii) $\sqrt{1+x^2}\cdot \sin^3 \sqrt{x}$

(i) $y = \sin 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \, \frac{d}{dx}(3x) = 3\cos 3x$$

(ii) $y = \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left[-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left[-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(iii) $y = \sqrt{1+x^2}\, \sin^3 \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{d}{dx}\sin^3\sqrt{x} + \sin^3\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\; 3\sin^2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\;\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin^3\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x$$

பயிற்சி 3 (d)

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\sin mx \cdot \cos nx$ (ii) $\sin^m x \cdot \cos^n x$ (iii) $\operatorname{cosec} 3x$

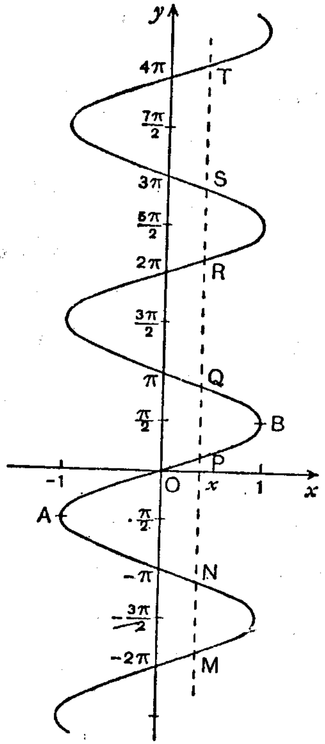
(iv) $\dfrac{1}{3}\sin 3x + \sin^3 x$ (v) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ (vi) $\sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}}$

(vii) $x^3\cdot\tan^2 x$ (viii) $x\sec^2 x$ (ix) $\sin^3 x + \cos x^3$

(x) $\sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x}$ (xi) $\sin 2x\cdot\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (xii) $x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(xiii) $\tan x\cdot\sec 3x$ (xiv) $\sin\left(\sqrt{\sin x + \cos x}\right)$

3.4 நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் வகையீடு



(i) $y = \sin^{-1} x$

(இங்கு $-1 \le x \le 1$ ஆகும்.)

$y = \sin^{-1} x$ ஐக் கருதுக.

இங்கு $-1 \le x \le 1$. $-1 \le x \le 1$ ஆகுமாறுள்ள x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கு y இற்கு பல பெறுமானங்கள் உண்டு.

உதாரணமாக $x = \dfrac{1}{2}$ எனின்

$y = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \ldots$ என்ற பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

சார்பு $y = \sin^{-1} x$ ஐ வரையறுப்பதற்கு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

இவ்வாறே $y = cos^{-1} x$ இல்

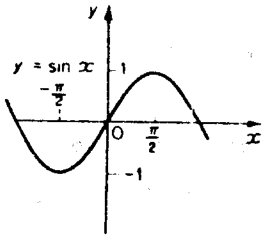
$o \leq y \leq \pi$ எனவும் $y = tan^{-1} x$ இல் $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ எனவும்

வரையறுக்கப்படுகிறது. இவ்வீச்சுக்கள் தலைமைப் பெறுமானங்கள் எனப்படும்.

$sin^{-1} x$ இன் தலைமைப் பெறுமானங்கள் $-\frac{\pi}{2}$ இற்கும்

$+\frac{\pi}{2}$ இற்குமிடையிலிருக்கும்.

அதாவது $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

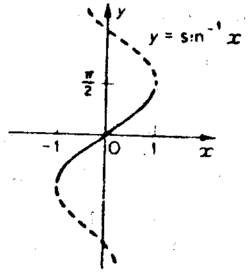


$y = sin^{-1} x$

$x = sin y$

இரு பக்கமும் x ஐக் குறித்து

வகையிட $1 = cos y \cdot \frac{dy}{dx}$



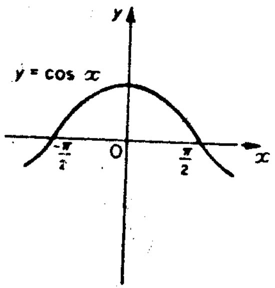
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left[cos^2 y = 1 - sin^2 y = 1 - x^2\right]$$

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ இல்

$cos y > 0 \quad \therefore cos y = +\sqrt{1 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



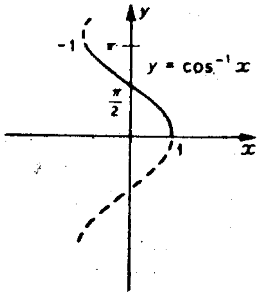
(ii) $y = cos^{-1} x \left[-1 \leq x \leq 1\right]$

தலைமைப் பெறுமானங்களுக்கு

$o \leq y \leq \pi \quad x = cos y$. இரு

பக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$1 = (-sin y) \frac{dy}{dx}$$



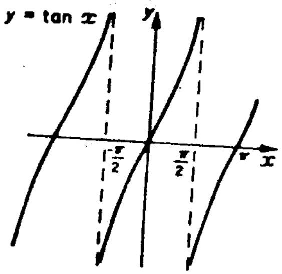
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sin y}$$

$\left[sin^2 y = 1 - cos^2 y = 1 - x^2\right]$

$0 < y < \pi$ இல் $sin y > 0$

$sin y = \sqrt{1 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



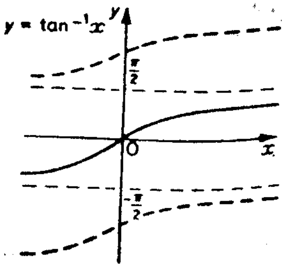
(iii) $y = tan^{-1} x \left[-\infty < x < \infty\right]$

தலைமைப் பெறுமானங்களுக்கு

$-\frac{\pi}{2} < y \frac{\pi}{2}, \quad x = tan y$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து

வகையிட



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$1 = \left(sec^2\ y\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(iv) $y = cot^{-1} x \left[-\infty < x < \infty\right]$

தலைமைப் பெறுமானங்களுக்கு $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$x = cot\, y$. இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$1 = \left(-cosec^2\ y\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{cosec^2 y} = \frac{-1}{1 + cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

(v) $y = sec^{-1} x\left[x \leq -1 \text{ அல் லது } x \geq 1\right]$

$0 \leq y \leq \pi$ ஆகும்.

$x = sec\, y$

இருபக்கமும் x ஐக்
குறித்து வகையிட

$$1 = sec\, y \cdot tan\, y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec\, y\ tan\, y}$$

$$= \pm \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \left[tan^2 y = sec^2 y - 1\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \left[x > 1 \text{ எனின்}, tan\, y > 0, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \left[x < -1 \text{ எனின்}, tan\, y < 0, \quad \frac{\pi}{2} < y < \pi\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \text{ ஆகும்.}$$

(vi) $y = cosec^{-1} x$

$\left[x \leq -1, \text{ அல் லது } x \geq 1\right]$

$$x = cosec\, y \left[-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right]$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$1 = -cosec\, y\ cot\, y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{cosec\, y\ cot\, y} \left[\begin{array}{l} cot^2 y = cosec^2 y - 1 \\ \quad = x^2 - 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \left[x > 1 \text{ எனில் } tan\, y > 0, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{-1}{-x\sqrt{x^2 - 1}} \left[x < -1 \text{ எனில் } tan\, y < 0, \frac{-\pi}{2} < y < 0\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} \text{ ஆகும்.}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$y = sin^{-1}\frac{x}{a}$ என்க. $a \in R, a \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} \times \frac{1}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} \times \frac{1}{a}$$

$$= \frac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}} \times \frac{1}{a}$$

ஆகவே $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \times \frac{1}{a}$ $\quad (a > 0$ எனின் $|a| = a)$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{\sqrt{a^2-x^2}}_{>0} \times \frac{1}{a}$ $\quad (a < 0$ எனின் $|a| = -a)$

$$= \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}; & a > 0 \text{ எனின்} \\ \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}; & a < 0 \text{ எனின்} \end{cases}$$

$y = cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ என்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & a > 0 \text{ எனின் } \left(\sqrt{a^2} = a\right) \\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & a < 0 \text{ எனின் } \left(\sqrt{a^2} = -a\right) \end{cases}$$

$y = tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ என்க. $a \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2}{a^2+x^2} \times \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad = \frac{a}{a^2+x^2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 7

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $sin^{-1}\left(2x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$ (ii) $tan^{-1}\left(\dfrac{cos x - sin x}{cos x + sin x}\right)$

(iii) $cos^{-1}\left(\dfrac{3+5cos x}{5+3cos x}\right)$ (iv) $sin^{-1}(cos x)$

(i) $y = sin^{-1}\left(2x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2\left(1-x^2\right)}} \times \frac{d}{dx}\left(2x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1-2x^2\right)^2}} \times \left\{2x \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times (-2x) + \sqrt{1-x^2} \times 2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1-2x^2\right)^2}} \times \left\{\frac{-2x^2 + 2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1-2x^2\right)^2}} \times \frac{2\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \left(1-2x^2 > 0 \text{ எனின்}\right) \\ \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \left(1-2x^2 < 0 \text{ எனின்}\right) \end{cases}$$

அல்லது

$y = sin^{-1}\left(2x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$ இல் $x = sin\theta$ எனப் பிரதியிட

$y = sin^{-1}\left(2 sin\theta \cdot cos\theta\right)$

$y = sin^{-1}\left(sin 2\theta\right)$

$sin y = sin 2\theta$

$y = n\pi + (-1)^n \cdot 2\theta$ ஆகும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= (-1)^n \cdot 2 \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= (-1)^n \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

n ஒற்றை அல்லது இரட்டை என்பதற்கு ஏற்ப இருதீர்வுகள் பெறப்படும்.

(ii) $y = tan^{-1}\left(\dfrac{cos x - sin x}{cos x + sin x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{cos x - sin x}{cos x + sin x}\right)^2} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{cos x - sin x}{cos x + sin x}\right)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2}\times$$

$$\frac{(\cos x+\sin x)(-\sin x-\cos x)-(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2}\times$$

$$\frac{-\left[(\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2\right]}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=-1$$

(iii) $y=\cos^{-1}\left(\dfrac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)^2}}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right)$$

$$=-\sqrt{\frac{(5+3\cos x)^2}{(5+3\cos x)^2-(3+5\cos x)^2}}\times$$

$$\frac{(5+3\cos x)(-5\sin x)-(3+5\cos x)(-3\sin x)}{(5+3\cos x)^2}$$

$$=-\frac{(5+3\cos x)}{\sqrt{16\sin^2 x}}\times\frac{-16\sin x}{(5+3\cos x)^2}$$

$$=\frac{-(5+3\cos x)}{4\,|\sin x|}\times\frac{-16\sin x}{(5+3\cos x)^2}$$

$$=\frac{4\sin x}{|\sin x|\,(5+3\cos x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}\dfrac{4}{5+3\cos x} & \sin x>0 \text{ எனின்}\\[2ex] \dfrac{-4}{5+3\cos x} & \sin x<0 \text{ எனின்}\end{cases}$$

(iv) $y=\sin^{-1}(\cos x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\times\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$=\frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$=\frac{-\sin x}{|\sin x|}$$

$$\frac{dy}{dx}\begin{cases}=\ 1, & \sin x>0\\ \ -1 & \sin x<0 \text{ எனின்}\end{cases}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 3 (e)

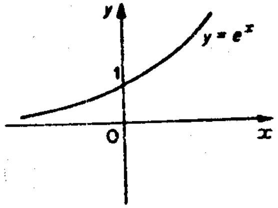
பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

1. $sin^{-1}\left(\frac{a+b\sin x}{b+a\sin x}\right)(a<b)$
2. $cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$
3. $cos^{-1}\left(\frac{a-b\sin x}{a+b\sin x}\right)$
4. $tan^{-1}\frac{a+bx}{a-bx}$
5. $tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
6. $sec^{-1}\left(\frac{-1}{2x^2-1}\right)$
7. $cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$
8. $cosec^{-1}(\sec x)$
9. $tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
10. $cos^{-1}\left(\frac{2\cos x+3\sin x}{\sqrt{13}}\right)$

3.5 அடுக்குக்குறிச் சார்பு, மடக்கைச் சார்புகளின் வகையீடு

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$ ஆகும்.



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \ldots\ldots$$

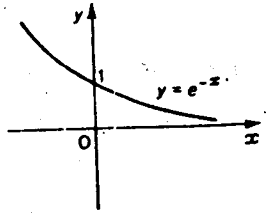
$e = 2\cdot 71828\ldots\ldots$ என்னும் ஒருவிகிதமுறா எண்ணாகும்

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ஆகும்.

x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $e^x > 0$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$



$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = 1$ ஆகும்.

இந்த முடிபினை நிறுவலின்றி உபயோகிக்கலாம்.

$f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x\left[\frac{e^h-1}{h}\right]$$

$$= e^x \times 1 = e^x$$

$f(x) = e^x$ எனின் $f'(x) = e^x$ ஆகும்.

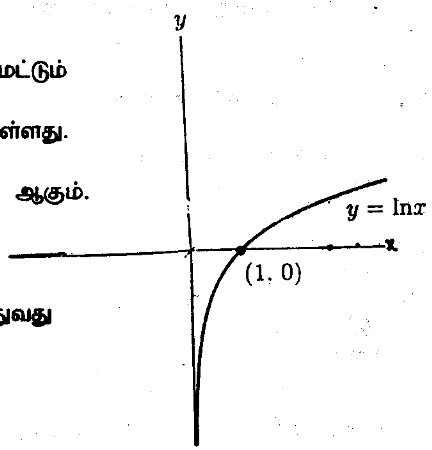
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மடக்கைச் சார்பு

நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு மட்டும் மடக்கை வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$y = log_e x$ இங்கு $x > 0$ ஆகும்.

e ஐ அடியாகக் கொண்ட மடக்கையை ln என எழுதுவது வழக்கம்.



$y = ln x \Leftrightarrow x = e^y$

$x = e^y$

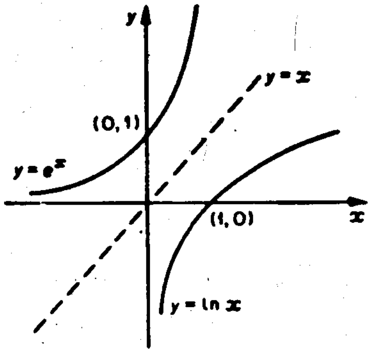
இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$1 = \frac{d}{dx}\left(e^y\right)$$

$$1 = \frac{d}{dy}\left(e^y\right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = e^y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$



$f(x) = ln x$ எனின் $f'(x) = \frac{1}{x}$ ஆகும்.

$y = x$ இன் மேல் e^x இன் தெறிப்பு $ln x$ ஆகும்.

உதாரணம் 8

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $e^{ax} \sin bx$ (ii) $x e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$ (iii) $x e^{\sqrt{x \sin x}}$

(iv) $ln \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$ (v) x^{x^2}

(i) $y = e^{ax} \sin bx$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax} \cdot \frac{d}{dx}(\sin bx) + \sin bx \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)$$

$$= e^{ax}\, b \cos bx + \sin bx\, a \cdot e^{ax}$$

$$e^{ax}\left[a \sin bx + b \cos bx\right]$$

(ii) $y = x \cdot e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \times 1 + x \cdot e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} + x \cdot e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= e^{\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right]$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $y = x \cdot e^{\sqrt{x \cdot sin x}}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x \cdot sin x}} + x \cdot e^{\sqrt{x \cdot sin x}} \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x sin x}\right)$$

$$= e^{\sqrt{x \cdot sin x}} + x \cdot e^{\sqrt{x \cdot sin x}} \frac{1}{2\sqrt{x sin x}}(sin x + x cos x)$$

$$= e^{\sqrt{x \cdot sin x}} \left[1 + \frac{x(sin x + cos x)}{2\sqrt{x sin x}}\right]$$

(iv) $y = ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$= \frac{1}{2}\left[ln(1-x) - ln(1+x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right]$$

$$\frac{-1}{1-x^2}$$

(v) $y = x^{x^2}$

$ln y = x^2 ln x$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + ln x \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[x + 2x \cdot ln x\right]$$

$$= x^{x^2}\left[x + 2x\, ln x\right]$$

பயிற்சி 3 (f)

பின்வருவனவற்றின் பெறுமதிகளைக் காண்க.

1. e^{x^2+1}
2. $\frac{a + be^x}{a - be^x}$
3. $x \cdot e^{sin x}$
4. $x^2 e^{\sqrt{x}}$
5. $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$
6. $tan^{-1}\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$
7. $ln \frac{x}{x - \sqrt{1+x^2}}$
8. $ln(ln x)$
9. a^{x^2+1}
10. $x^{sin x}$
11. $2^x + x^{cos x}$
12. $ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$
13. $ln\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\right)$
14. $ln\frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} + x}$
15. $log \frac{sin^m x}{cos^n x}$

3.6 உள்ளார் வகையீடு (Implicit differentiation), அடுத்தடுத்த வகையீடு (Successive differentiation)

$f(x)$ இன் முதலாவது பெறுதி $f'(x)$ எனக் குறிக்கப்படுவது போன்று இரண்டாம், மூன்றாம் .... பெறுதிகள் முறையே $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$...... எனக் குறிக்கப்படும்.

x ஐக் குறித்த y இன் முதலாவது பெறுதி $\frac{dy}{dx}$ ஆகும். இரண்டாம் மூன்றாம் .... பெறுதிகள் முறையே $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$,......... என்றவாறு குறிக்கப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 9

உள்ளார் வகையீடு

1. $2x^2 + 3x^2 y + 4y^2 x = 5$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$2x^2 + 3x^2 y + 4y^2 x = 5$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$4x + \left(3x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 6xy\right) + \left(4y^2 + 4x \cdot 2y \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(3x^2 + 8xy\right)\frac{dy}{dx} = -\left(4x + 6xy + 4y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 6xy + 4y^2}{3x^2 + 8xy}$$

2. $y\tan x + x^2 \cos\frac{x}{y} = 3$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$y\tan x + x^2 \cos\frac{x}{y} = 3$$

இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\left\{y\sec^2 x + \tan x \frac{dy}{dx}\right\} + \left\{2x\cos\left(\frac{x}{y}\right) - x^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{y - x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}\right\} = 0$$

$$y^3 \sec^2 x + y^2 \tan x\frac{dy}{dx} + 2xy^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right) - x^2 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left[y^2 \tan x + x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]\frac{dy}{dx} = x^2 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - y^3 \sec^2 x - 2xy^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - y^3 \sec^2 x - 2xy^2 \cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2 \tan x + x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)}$$

அடுத்தடுத்து வகையிடல்

1. $y = \sin\left(m\sin^{-1} x\right)$ எனின்

$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2 y = 0$ என நிறுவுக.

$$y = \sin\left(m\sin^{-1} x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(m\sin^{-1} x\right)\frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{dy}{dx} = m\cos\left(m\sin^{-1} x\right)$$

மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}} = -m^2 \sin\left(m\sin^{-1} x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = -m^2 y$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2 y = 0$$

2. $y\sqrt{x} = \sin x$ எனின்

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$ என நிறுவுக.

$$y\sqrt{x} = \sin x$$

x ஐக் குறித்து வகையிட, $\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx} + y\frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos x$

$$2x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}\cos x$$

மீண்டும் வகையிட

$$2x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x}\,(-\sin x) + 2\cos x\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -2xy + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x}\right)$$

$$2x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dx} = -2xy + \frac{y}{2x}$$

$$2x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \cdot \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{2} - 2x^2\right)$$

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

3. $x = a\sec^2\theta, \quad y = a\tan^3\theta$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\cot\theta}{4a}$ என நிறுவுக.

$$x = a\sec^2\theta \qquad y = a\tan^3\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cdot 2\sec\theta\,(\sec\theta\tan\theta) \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3a\tan^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$= 2a\sec^2\theta \cdot \tan\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\tan^2\theta\,\sec^2\theta}{2a\sec^2\theta\,\tan\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\tan\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{3}{2}\tan\theta\right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \sec^2\theta \times \frac{1}{2a\sec^2\theta \cdot \tan\theta}$$

$$= \frac{3\cot\theta}{4}$$

4. $x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 - \cos\theta)$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{\theta}{2}$ எனக் காட்டி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க.

$x = a(\theta - sin\theta)$ $\quad$ $y = a(1 - cos\theta)$

$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - cos\theta)$ $\quad$ $\frac{dy}{d\theta} = a\,sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \Big/ \frac{dx}{d\theta}$$

$$= \frac{sin\theta}{1 - cos\theta} = \frac{2\,sin\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2}}{2\,sin^2\frac{\theta}{2}} = cot\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(cot\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{a(1 - cos\theta)}$$

$$= -\frac{1}{2}cosec^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{a \cdot 2\,sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{cosec^4\frac{\theta}{2}}{4a}$$

5. பின்வரும் சார்புகளின் n ஆவது பெறுமதிகளைக் காண்க.

(i) x^n $\quad$ **(ii)** $sin\,x$ $\quad$ **(iii)** $ln \cdot x$

1. $f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

$f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2}$

$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 1$

$= n!$

2. $g(x) = sin\,x$

$g'(x) = cos\,x = sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$g^{(2)}(x) = -sin = sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$

$g^{(3)}(x) = -cos\,x = sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

$g^{(4)}(x) = sin\,x = sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right)$

$g^{(n)}(x) = sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

3. $h(x) = ln\,x$

$h'(x)\frac{1}{x}$

$h^{(2)}(x) = (-1) \cdot \frac{1}{x^2}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$h^{(3)}(x) = (-1)(-2)\frac{1}{x^3}$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)(-2)......[-(n-1)]\frac{1}{x^n}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

பயிற்சி 3 (g)

பின்வருவனவற்றில் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

1. $x^2 + y^2 = a^2$

2. $y^2 = 4ax$

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

5. $x^2 \sin xy + y\cos x = 2$

6. $x\sec y + y\cos x + 3xy = 4$

7. $x = \frac{a(1-t)^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2bt}{1+t^2}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

8. $x = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

9. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ எனின் $\frac{dy}{dx} = 1$ எனக் காட்டுக.

10. $y(1-x) = x^2$ எனின்

    $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 2$ என நிறுவுக.

11. $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ எனின்

    $x\frac{d^2y}{dx^2} - (n+x)\frac{dy}{dx} + ny = 0$ என நிறுவுக.

12. $x = \sin t$, $y = \sin mt$ எனின்

    $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ என நிறுவுக.

பின்வரும் சார்புகளின் n ஆவது பெறுதியைக் காண்க.

13. $y = (ax+b)^n$

14. $y = \sin 2x$

15. $y = \cos 3x$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. பெறுதிகளின் பிரயோகங்கள்
(Application of Derivatives)

4.1 படித்திறன் (Gradient)

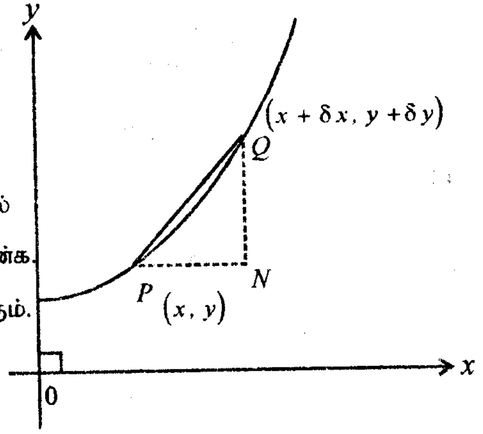
$y = f(x)$ என்ற வளையியைக் கருதுக.

வளையியில் $P(x, y)$ ஒருபுள்ளி.

P யிற்கு அண்மையில் வளையியில் ஒருபுள்ளி $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ என்க.

இங்கு $PN = \delta x$, $NQ = \delta y$ ஆகும்.

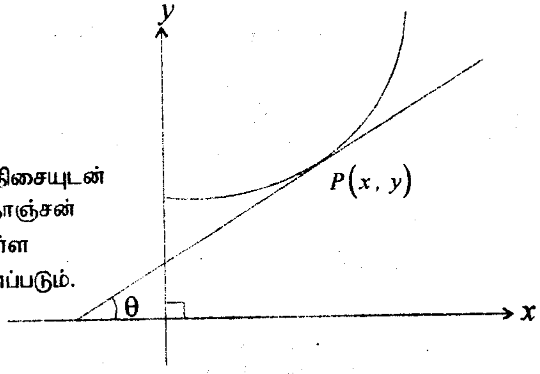
$\frac{\delta y}{\delta x} = tan\ \angle QPN$ ஆகும்.



புள்ளி Q ஆனது வளையியின் வழியே அசைந்து P ஐ அணுகும்போது நாண் PQ ஆனது, வளையிக்கு P இல் தொடலியாக அமையும்.

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = tan\theta$$

தொடலி x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் அமைக்கும் கோணத்தின் தாஞ்சன் அவ்வளையிக்கு P யிலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் எனப்படும்.



உதாரணம் 1

$y = x^2 - 2x - 3$ என்ற வளையிக்கு $x = 4$ இல் வரையப்பட்ட

(i) தொடலியின் சமன்பாடு

(ii) செவ்வனின் சமன்பாடு என்பவற்றைக் காண்க.

$y = x^2 - 2x - 3$

$x = 4$ ஆக, $y = 16 - 8 - 3 = 5$

புள்ளி $(4, 5)$ ஆகும்.

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = 2 \times 4 - 2 = 6$$

$m = 6$, புள்ளி $(4, 5)$

தொடலியின் சமன்பாடு : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 5 = 6(x - 4)$$

$$y - 6x + 19 = 0$$

செவ்வனின் சமன்பாடு : $y - 5 = -\frac{1}{6}(x - 4)$

$$6(y - 5) = -(x - 4)$$

$$6y + x - 34 = 0.$$

4.2 மாற்ற வீதம் (rate of change)

x இன் ஒரு சார்பு $f(x)$ என்க.

(i) சராசரி மாற்ற வீதம் (average rate of change)

x ஆனது x_1 இலிருந்து x_2 இற்கு மாறும் போது

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ என்பது x ஐக் குறித்து $f(x)$ இன் சராசரி மாற்ற வீதம் எனப்படும்.

(ii) கணநிலை மாற்ற வீதம் (instantaneous rate of change)

$x = x_0$ இல் x ஐக் குறித்து $f(x)$ இன் கணநிலை மாற்றவீத

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ என்பதால் தரப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 2

கோளவடிவான பலூன் ஒன்று அதன் ஆரை $0\cdot 2cms^{-1}$ என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்குமாறு விரிகிறது. அதன் ஆரை $5cm$ ஆக இருக்கும்போது அதன் மேற்பரப்பு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

பலூனின் ஆரை $r\,cm$ என்க. பலூனின் மேற்பரப்பளவு $A = 4\pi r^2\,cm^2$

பலூனின் கனவளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3\,cm^3$ ஆகும்.

இங்கு $\frac{dr}{dt} = 0\cdot 2\,cms^{-1}$ ஆகும் (t - நேரம்)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\times\frac{dr}{dt} \quad \begin{bmatrix} A = 4\pi r^2 \\ \frac{dA}{dr} = 8\pi r \end{bmatrix}$$

$$= 8\pi r \times 0\cdot 2$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=5} = 8\pi\times 5\times 0\cdot 2 = 8\pi cm^2 s^{-1}$$

உதாரணம் 3

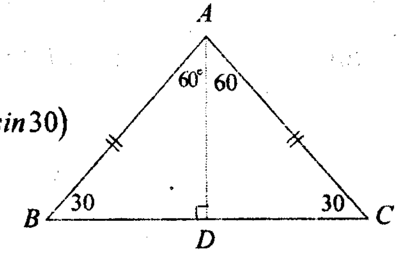
உச்சிக்கோணம் 120° ஆகவுள்ள ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணியின் இருசமமான பக்கங்களும் $0\cdot 2cms^{-1}$ என்ற மாறா வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது. மிகவும் நீளமான பக்கம் $10cm$ ஆக உள்ள கணத்தில் பரப்பளவு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

ABC இல் $\angle A = 120^\circ$, $AB = AC = x\,cm$ என்க.

பரப்பளவு $A = \frac{1}{2}\times BC\times AD$

$$= \frac{1}{2}\times(2x\cos 30)\times(x\sin 30)$$

$$= \frac{1}{2}\times 2x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{x}{2}$$



$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \quad \text{———— (1)}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0\cdot 2cms^{-1} \quad \text{———— (2)} \qquad [\,t \text{ - நேரம்}]$$

$$BC = 10 = 2x\cos 30$$

$$10 = 2x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}} \quad \text{———— (3)}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\times\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\,x}{4}\times 0\cdot 2$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{x=\frac{10}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{4}\times\frac{10}{\sqrt{3}}\times 0\cdot 2 = 1cm^2 s^{-1}$$ ஆகும்.

4.3 அதிகரிக்கும் சார்புகள், குறையும் சார்புகள்

(i) அதிகரிக்கும் சார்பு (increasing function)

$a,b\in R \quad a<b$

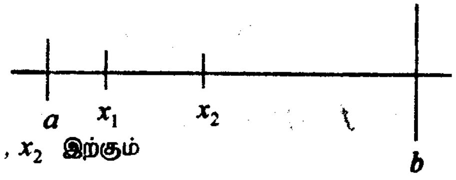
ஆயிடை (a,b) ஐக் கருதுக.

$x_1, x_2 \in (a,b)$ என்க.

$x_1 < x_2$ ஆகவுள்ள எல்லா x_1, x_2 இற்கும்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ எனின்

f என்பது (a,b) இல் அதிகரிக்கும் சார்பு எனப்படும்.



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) குறையும் சார்பு (decreasing function)

ஆயிடை (a, b) ஐக் கருதுக.

$x_1, x_2 \in (a, b)$ என்க.

$x_1 < x_2$ ஆகவுள்ள எல்லா x_1, x_2 இற்கும்

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ எனின்

f என்பது (a, b) இல் குறையும் சார்பு எனப்படும்.

இதிலிருந்து சார்பு f (a, b) இல் வகையிடத்தக்கதெனின்

எல்லா $x \in (a, b)$ இற்கும் $f'(x) > 0$ எனின் f ஆனது (a, b) இல் அதிகரிக்கின்றது எனப்படும்.

எல்லா $x \in (a, b)$ இற்கும் $f'(x) < 0$ எனின், f ஆனது (a, b) இல் குறைகின்றது எனப்படும்.

உதாரணம் 4

பின்வரும் சார்புகள் (a) அதிகரிக்கும் (b) குறையும். ஆயிடைகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

(ii) $g(x) = -x^2 - 6x + 1$

(iii) $h(x) = x^5 + 2x^3 + x - 100$

(i) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

$x < 1$ எனின், $f'(x) < 0$; $(-\infty, 1)$ இல் f குறையும்.

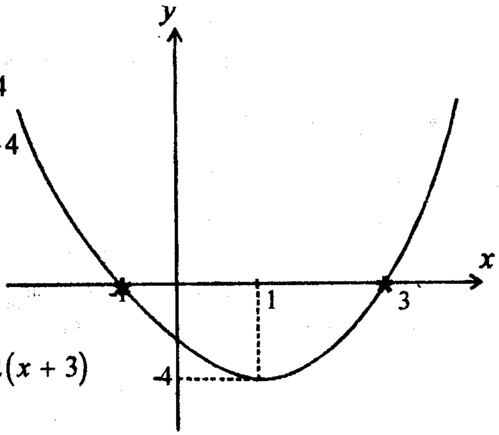
$x > 1$ எனின் $f'(x) > 0$; $(1, \infty)$ இல் f அதிகரிக்கும்.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

$= (x - 1)^2 - 4$

$x = 1$ இல், $f(x) = -4$

$x \neq 1$ எனின் $f(x) > -4$



(ii) $g(x) = -x^2 - 6x + 1$

$g'(x) = -2x - 6 = -2(x + 3)$

$x < -3$ எனின் $g'(x) > 0$; $(-\infty, -3)$ இல் g அதிகரிக்கும்

$x > -3$ எனின் $g'(x) < 0$ $(-3, \infty)$ இல் g குறையும்

$g(x) = -x^2 - 6x + 1$

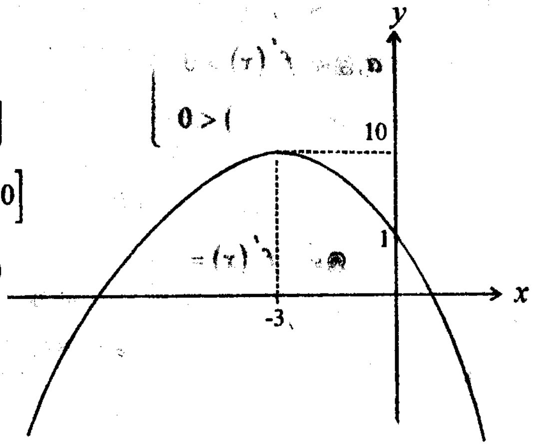
$= -[x^2 + 6x - 1]$

$= -[(x + 3)^2 - 10]$

$= -(x + 3)^2 + 10$

$x = -3$ இல் $g(x) = 10$

$x \neq -3$ எனின் $g(x) < 10$



(iii) $h(x) = x^5 + 2x^3 + x - 100$

$h'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$

x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $h'(x) \geq 1 > 0$ ஆகும்.

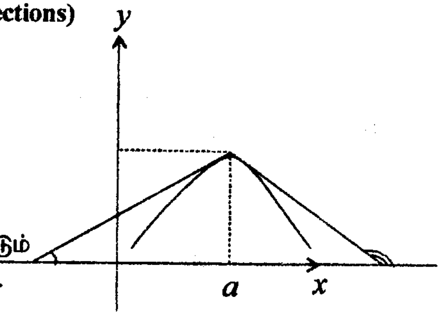
எனவே எல்லா $x \in R$ இற்கும் சார்பு h அதிகரிக்கும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4.4 உயர்வு, இழிவு, விபத்திப்புள்ளிகள்
(Maximum, Minimum, Point of inflections)

(i) உயர்வு

தரப்பட்டுள்ள சார்பு $y = f(x)$ ஐக் கருதுக. $x = a$ இல் சார்பு உயர்வு ஒன்றினைக் கொண்டுள்ளது. $x = a$ இல் வளையிக்கு வரையப்படும் தொடலி x அச்சுக்கு சமாந்தரமாகும்.



a இற்கு இடதுபக்கத்தில் வளையிக்கு வரையப்படும் தொடலிகள் x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் கூர்ங்கோணத்தையும், a இன் வலதுபக்கத்தில் வளையிக்கு வரையப்படும் தொடலிகள் x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் விரிகோணத்தையும் அமைப்பதைக் காணலாம். $\delta > 0$ ஆயிருக்க.

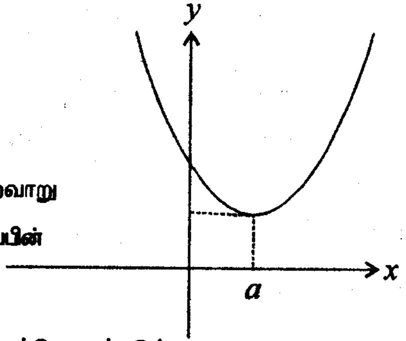
$$\left.\begin{array}{r} x = a, \text{ இல் } f'(x) = 0 \\ a - \delta < x < a, \text{இல் } f'(x) > 0 \\ a < x < a + \delta, \text{இல் } f'(x) < 0 \end{array}\right\}$$

என்றவாறு இருப்பின் $y = f(x)$ இற்கு $x = a$ இல் உயர்வு உண்டு எனப்படும்.

(ii) இழிவு

$$\left.\begin{array}{r} x = a, \text{ இல் } f'(x) = 0 \\ a - \delta < x < a, \text{இல் } f'(x) > 0 \\ a < x < a + \delta, \text{இல் } f'(x) < 0 \end{array}\right\}$$

என்றவாறு இருப்பின்

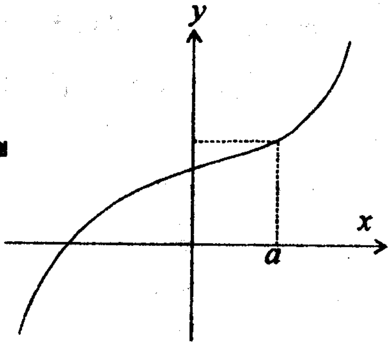


$y = f(x)$ இற்கு $x = a$ இல் இழிவு உண்டு எனப்படும்.

(iii) விபத்திப்புள்ளி

$$\left.\begin{array}{r} x = a \text{ இல் } f'(x) = 0 \\ a - \delta < x < a \text{ இல் } f'(x) > 0 \\ a < x < a + \delta \text{ இல் } f'(x) > 0 \end{array}\right\}$$

என்றவாறு இருப்பின்

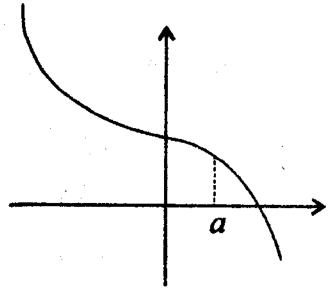


$y = f(x)$ இற்கு $x = a$ இல் விபத்திப் புள்ளி உண்டு எனப்படும்.

அல்லது

$$\left.\begin{array}{r} x = a \text{ இல் } f'(x) = 0 \\ a - \delta < x < a \text{ இல் } f'(x) < 0 \\ a < x < a + \delta \text{ இல் } f'(x) < 0 \end{array}\right\}$$

என்றவாறு இருப்பின்



$y = f(x)$ இற்கு $x = a$ இல் விபத்திப்புள்ளி உண்டு எனப்படும்.

உதாரணம் 5

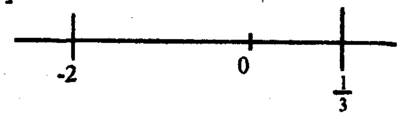
$y = (x+2)^2 (2x-3)$ என்ற வளையியின் உயர்வு, இழிவுகளைக் கண்டு, சார்பின் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$$y = (x+2)^2 (2x-3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+2)^2 \times 2 + (2x-3) \times 2(x+2)$$

$$= 2(x+2)\left[(x+2) + (2x-3)\right]$$

$$= 2(x+2)(3x-1)$$



$\frac{dy}{dx} = 0$ எனின் $x = -2, x = \frac{1}{3}$ ஆகும்.

$x < -2$ எனின் $\frac{dy}{dx} > 0$, y அதிகரிக்கும்.

$-2 < x < \frac{1}{3}$ எனின் $\frac{dy}{dx} < 0$, y குறையும்.

$x > \frac{1}{3}$ எனின் $\frac{dy}{dx} > 0$, y அதிகரிக்கும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x = -2$ இல் y இற்கு உயர்வு உண்டு $y = 0$

$x = \frac{1}{3}$ இல் y இற்கு இழிவு உண்டு $y = -\left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{-343}{27}$

உயர்வுப்புள்ளி $(-2, 0)$

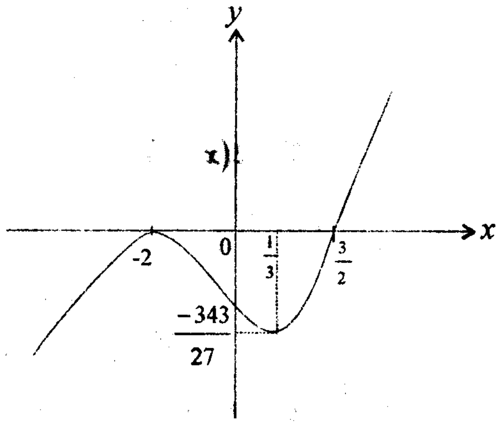
இழிவுப்புள்ளி $\left(\frac{1}{3}, \frac{-343}{27}\right)$

$x = 0$ இல் $y = -12$

$y = 0$ எனின் $x = -2, \frac{3}{2}$

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $y \longrightarrow +\infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $y \longrightarrow -\infty$ ஆகும்.



உதாரணம் 6

$y = (x+1)^2 (2-x)$ என்ற வளையியின் உயர்வு, இழிவுகளைக் கண்டு, வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

$y = (x+1)^2 (2-x)$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^2 \times (-1) + (2-x) \times 2(x+1)$$

$$= (x+1)\left[-(x+1) + 2(2-x)\right]$$

$$= (x+1)(-3x+3)$$

$$= -3(x+1)(x-1)$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக, $x = -1, 1$ ஆகும்.

$x < -1$ எனின், $\frac{dy}{dx} < 0$ y குறையும்.

$-1 < x < 1$ எனின், $\frac{dy}{dx} > 0$ y அதிகரிக்கும்.

$x > 1$ எனின், $\frac{dy}{dx} < 0$ y குறையும்.

$x = -1$ இல் இழிவு உண்டு $y = 0$, $(-1, 0)$

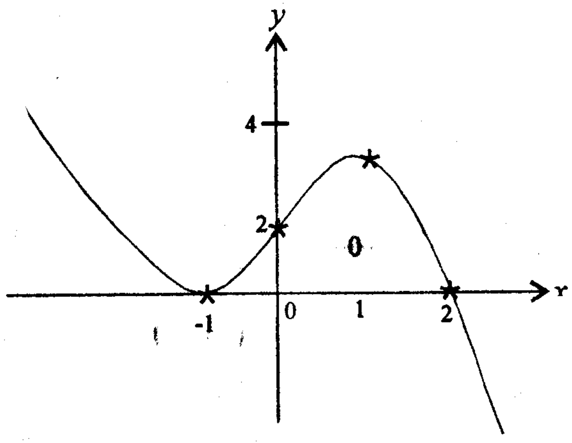
$x = 1$ இல் உயர்வு உண்டு, $y = 4$ $(1, 4)$

$x = 0$ எனின் $y = 2$ ஆகும்.

$y = 0$ எனின், $x = -1, 2$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $y \longrightarrow +\infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $y \longrightarrow -\infty$ ஆகும்.



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 7

$y = (x+1)^2 (x-4)^3$ என்ற வளையியின் உயர்வு, இழிவுகளைக் கண்டு, வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

$y = (x+1)^2 (x-4)^3$

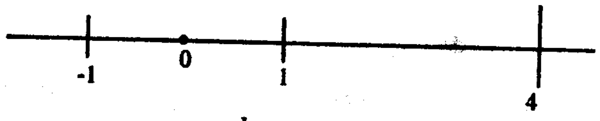
$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^2 \times 3(x-4)^2 + (x-4)^3 \times 2(x+1)$$

$$= (x+1)(x-4)^2 \left[3(x+1) + 2(x-4)\right]$$

$$= (x+1)(x-4)^2 \times 5(x-1)$$

$$= 5(x+1)(x-1)(x-4)^2$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ எனின் $x = -1, 1, 4$ ஆகும்.



$x < -1$ எனின்	$\frac{dy}{dx} > 0$	y அதிகரிக்கும்.
$-1 < x < 1$ எனின்	$\frac{dy}{dx} < 0$	y குறையும்.
$1 < x < 4$ எனின்	$\frac{dy}{dx} > 0$	y அதிகரிக்கும்.
$x > 4$ எனின்	$\frac{dy}{dx} > 0$	y அதிகரிக்கும்.

$x = -1$ இல் y இற்கு உயர்வு. $(-1, 0)$

$x = 1$ இல் y இற்கு இழிவு. $(1, -108)$

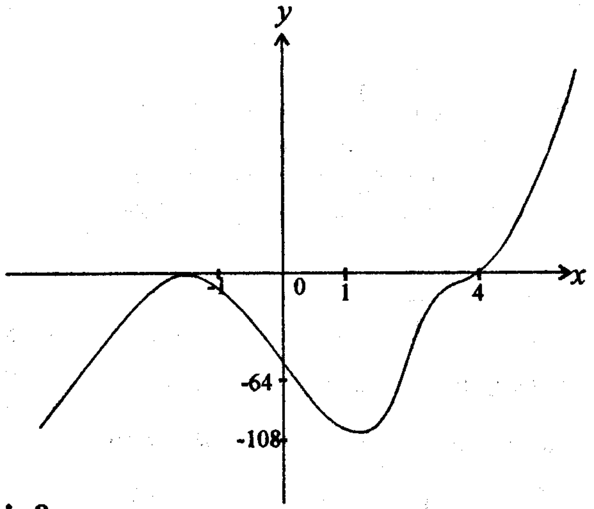
$x = 4$ இல் y இற்கு விபத்திப்புள்ளி உண்டு. $(4, 0)$

$x = 0, \ y = -64$

$y = 0, \ x = -1, 4$

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $y \longrightarrow +\infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $y \longrightarrow -\infty$ ஆகும்.



உதாரணம் 8

$y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ எனும் வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

$x - 1 + \frac{1}{x+1} = k$ எனும் சமன்பாட்டுக்கு $-4 < k < 0$ என்ற வீச்சில் மெய்த்தீர்வுகள் இல்லை என்பதை உய்த்தறிக.

$y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

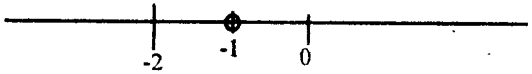
$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ எனின் $x = 0,$ அல்லது $x = -2$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x = -1$ இல் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை. $x < \; = -1$ அணுகு கோடு ஆகும்.



$x < -2$ எனின் $\quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad$ y அதிகரிக்கும்.

$-2 < x < -1$ எனின் $\quad \frac{dy}{dx} < 0 \quad$ y குறையும்.

$-1 < x < 0$ எனின் $\quad \frac{dy}{dx} < 0 \quad$ y குறையும்.

$x > 0$ எனின் $\quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad$ y அதிகரிக்கும்.

$x = -2$ இல் y இற்கு உயர்வு உண்டு. உயர்வுப்புள்ளி $(-2, -4)$

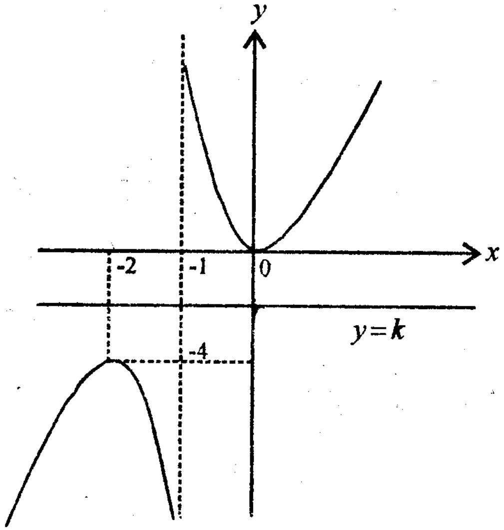
$x = 0$ இல் y இற்கு இழிவு உண்டு இழிவுப்புள்ளி $(0, 0)$

$x = 0$ இல் $y = 0$

$y = 0$ இல் $x = 0$

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $y \longrightarrow +\infty$ ஆகும்.

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $y \longrightarrow -\infty$ ஆகும்.



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$-4 < k < 0$ எனின் $y = k$ என்ற நேர்கோடு (x அச்சிற்கு சமாந்தரமானது) வளையியை வெட்டாது. எனவே $x - 1 + \frac{1}{x+1} = k$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு $-4 < k < 0$ இல் மெய்த்தீர்வு இல்லை.

உதாரணம் 9

விவசாயி ஒருவர் செவ்வகக் காணித்துண்டு ஒன்றை ஒரு வேலியினால் உள்ளடைத்துப் பின்னர் அதன் பக்கங்களில் ஒன்றுக்கு சமாந்தரமாக வேறொரு வேலியை அமைப்பதன் மூலம் அக்காணித் துண்டை இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்க வேண்டியுள்ளது. வேலிகளின் மொத்த நீளம் $1800m$ எனில் அதனால் உள்ளடக்கத்தக்க மிகப் பெரிய பரப்பளவையுடைய செவ்வகக் காணித்துண்டின் பரிமாணங்களைக் காண்க.

வேலியின் மொத்த நீளம் $\quad = (3x + 2y)m$

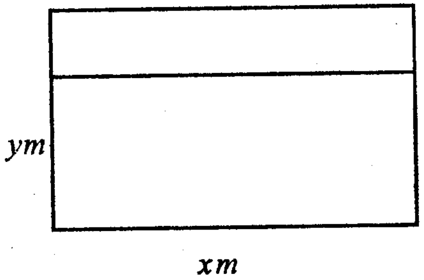
காணித்துண்டின் பரப்பளவு $\quad A = xy m^2$

$$3x + 2y = 1800$$

$$A = xy$$

$$A = x\left[\frac{1800 - 3x}{2}\right]$$

$$A = \frac{1800x}{2} - \frac{3x^2}{2}$$



$$\frac{dA}{dx} = \frac{1800}{2} - 3x$$

$$= 900 - 3x = 3(300 - x)$$

$0 < x < 300$ இல் $\quad \frac{dA}{dx} > 0 \quad$ A - அதிகரிக்கும்.

$x > 300$ இல் $\quad \frac{dA}{dx} < 0 \quad$ A - குறையும்.

எனவே $x = 300$ இல் உயர்வாகும். $x = 300$ எனின் $y = 450$

எனவே பரிமாணங்கள் $450m, 300m,$ ஆகும்.

உதாரணம் 10

ஒரு கூம்பு தரப்பட்ட வேறொரு கூம்பினுள் அதனுடைய உச்சி தரப்பட்ட கூம்பின் அடித்தளத்தின் மையத்திலும், அதன் அடித்தளத்தின் பரிதி தரப்பட்ட கூம்பின் வளைபரப்பிலும் இருக்குமாறு உள்ளுருவமாக அமைந்துள்ளது. இக்கூம்பு அதிஉயர் கனவளவைக் கொள்ள வேண்டும் எனில் அதனுடைய உயரம்

தரப்பட்ட கூம்பின் உயரத்தின் $\frac{1}{3}$ பங்கு ஆதல் வேண்டும் எனக் காட்டுக.

தரப்பட்ட கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் α

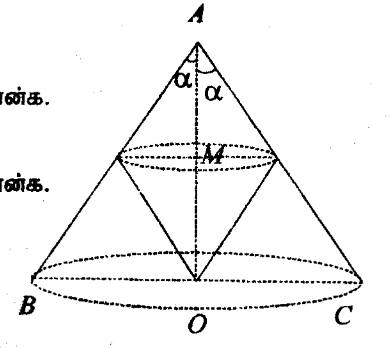
உயரம் h என்க

ஆரை $r = h\tan\alpha$ ஆகும்.

அமைக்கப்படும் கூம்பின் உயரம் $= x$ என்க.

$$OM = x$$

அமைக்கப்பட்ட கூம்பின் கனவளவு V என்க.



$$V = \frac{1}{3}\pi \times \text{ஆரை}^2 \times \text{உயரம்}$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times (h-x)^2 \tan^2\alpha \cdot x$$

$$= \frac{\pi}{3}\tan^2\alpha\left[h^2x - 2hx^2 + x^3\right] \quad (\pi, h, \alpha \text{ என்பன மாறிலிகள்})$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}\tan^2\alpha\left[h^2 - 4hx + 3x^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\tan^2\alpha(3x-h)(x-h)$$

$\frac{dV}{dx} = 0$ ஆக, $x = \frac{h}{3}$ அல்லது h.

$x < h$ எனவே $x = h$ பொருந்தாது.

$0 < x < \frac{h}{3}$ இல் $\frac{dV}{dx} > 0$ V அதிகரிக்கும்

$\frac{h}{3} < x < h$ இல் $\frac{dV}{dx} < 0$ V குறையும்

எனவே $x = \frac{h}{3}$ இல் V உயர்வாகும்.

4.5 சமனிலிகளிற்கு பிரயோகித்தல்

உதாரணம் 11

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ இல் $x > \sin x$ எனக் காட்டுக.

(ii) $x > 0$ எனின், $(x-1)e^x + 1 > 0$ எனவும்

$(x-2)e^x + x + 2 > 0$ எனவும் நிறுவுக.

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $f(x) = x - \sin x$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ இல் $0 < \cos x < 1$ என்பதால் $1 - \cos x > 0$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ இல் $f'(x) > 0$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ இல், x அதிகரிக்க $f(x)$ அதிகரிக்கும்.———(1)

$x = 0$ இல் $f(x) = x - \sin x = 0$ ———(2)

$(1), (2)$ இலிருந்து $0 < x < \frac{\pi}{2}$ இல் $f(x) > 0$

$x - \sin x > 0$

$x > \sin x$ ஆகும்.

(ii) $f(x) = (x-1)e^x + 1$ என்க.

$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x$$

$$= x \cdot e^x$$

$x > 0$ எனின் $f'(x) > 0$

எனவே $x > 0$ எனின், x அதிகரிக்க $f(x)$ அதிகரிக்கும்.———(1)

$x = 0$ எனின் $f(x) = (0-1) \times 1 + 1 = 0$ ———(2)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(1), (2) இலிருந்து $x > 0$ எனின் $f(x) > 0$

$x > 0$ எனின் $(x-1)e^x + 1 > 0$ ஆகும்.

$g(x) = (x-2)e^x + x + 2$ என்க.

$$g'(x) = (x-2)e^x + e^x \times 1 + 1$$

$$= (x-1)e^x + 1$$

$$g^{(2)}(x) = (x-1)e^x + e^x$$

$$= x \cdot e^x$$

$x > 0$ எனின் $g^{(2)}(x) > 0$ ஆகும்.

$x > 0$ எனின் $g'(x)$ அதிகரிக்கும்.————(1)

$x = 0$ எனின் $g'(x) = (0-1) \times 1 + 1 = 0$————(2)

(1), (2) இலிருந்து $x > 0$ எனின் $g'(x) > 0$ ஆகும்.

$x > 0$ எனின் $g(x)$ அதிகரிக்கும்.————(3)

$x = 0$ எனின் $g(x) = -2 + 0 + 2 = 0$————(4)

(3), (4) இலிருந்து $x > 0$ எனின் $g(x) > 0$

ஆகவே $x > 0$ எனின் $(x-2)e^x + x + 2 > 0$ ஆகும்.

உதாரணம் 12

$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ என்ற சார்பின் உயர்வு இழிவுகளைக் கண்டு $y = f(x)$ இன் வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

(i) $x = 0$ எனில் $y = 1$

(ii) $y = 0$ எனில் $x^2 - x + 1 = 0$

x இற்கு மெய்த்தீர்வுகள் இல்லை. எனவே வளையி x அச்சை வெட்டாது.

(iii) $$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$x \longrightarrow \pm\infty$ ஆக, $y \longrightarrow 1$

(iv) $$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)(2x-1) - (x^2 - x + 1)(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

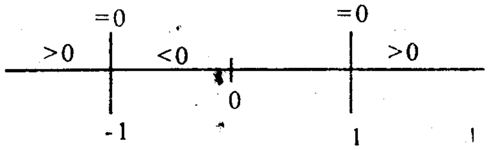
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ அல்லது $x = +1$

$x < -1$ இல் $f'(x) > 0$

$x = -1$ இல் $f'(x) = 0$

$-1 < x < 1$ இல் $f'(x) < 0$

$x = 1$ இல் $f'(x) = 0$



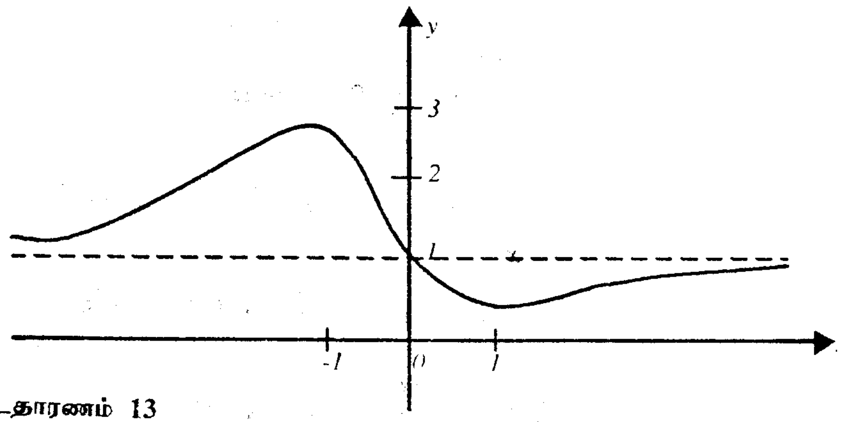
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x > 1$ இல் $f'(x) > 0$

$x = -1$ இல் உயர்வு உண்டு, $f(x) = 3$

$x = 1$ இல் இழிவு உண்டு $f(x) = \frac{1}{3}$

$(-1, 3)$ உயர்வு, $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ இழிவு ஆகும்.



உதாரணம் 13

$y = \frac{x^2(8x-5)}{(x-1)^2}$ என்னும் சார்பு ஓர் உயர்வையும் இரு இழிவுகளையும் கொண்டுள்ளதென நிறுவுக.
சார்பின் பருமட்டான வரைபடத்தை வரைக.

(i) $x = 0$ எனின் $y = 0$

(ii) $y = 0$ எனின் $x = 0, \frac{5}{8}$

(iii) $x = 1$ அணுகு கோடு

(iv) $y = \frac{x^2(8x-5)}{(x-1)^2} = \frac{8x-5}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக $y \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக $y \longrightarrow -\infty$

(v) $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2\left[8x^2+(8x-5)2x\right] - x^2(8x-5)\,2(x-1)}{(x-1)^4}$

$= \frac{(x-1)2x\left[4x(x-1)+(8x-5)(x-1)-x(8x-5)\right]}{(x-1)^4}$

$= \frac{2x\left[4x^2-12x+5\right]}{(x-1)^3}$

$= \frac{2x(2x-1)(2x-5)}{(x-1)^3}$

$\frac{dy}{dx} = 0$ எனில் $x = 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$

>0	0	<0	½	>0	1	<0	5/2	>0

$x < 0$ ஆக, $\frac{dy}{dx} > 0$

$0 < x < \frac{1}{2}$ ஆக, $\frac{dy}{dx} < 0$

$\frac{1}{2} < x < 1$ ஆக, $\frac{dy}{dx} > 0$

$1 < x < \frac{5}{2}$ ஆக, $\frac{dy}{dx} < 0$

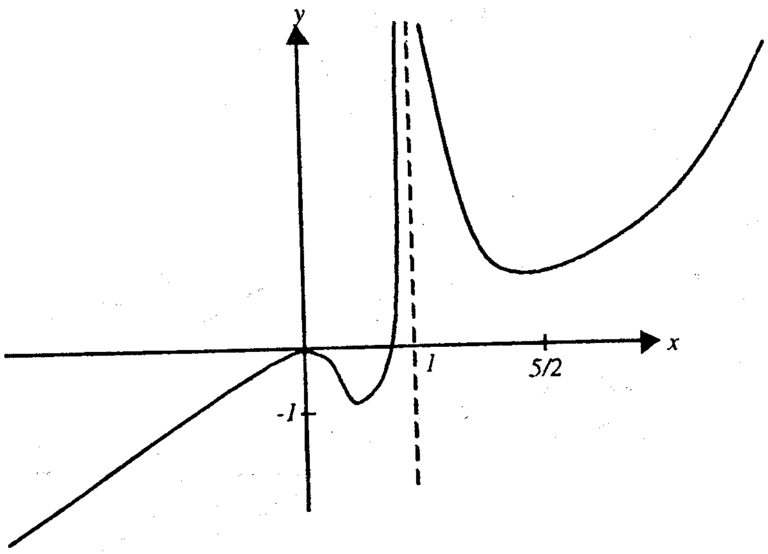
$x > \frac{5}{2}$ ஆக, $\frac{dy}{dx} > 0$

$x = 0$ இல் உயர்வு $y = 0$

$x = \frac{1}{2}$ இல் இழிவு $y = -1$

$x = \frac{5}{2}$ இல் இழிவு $y = \frac{125}{3}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



உதாரணம் 14

$f(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 5x - 5\right) e^x$ என்னும் சார்பின் உயர்வு இழிவு பெறுமானங்களைக் கண்டு பருமட்டான வரைபினை வரைக.

இதிலிருந்து $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ என்னும் சமன்பாடு ஓரேயொரு மெய் மூலத்தை மட்டும் கொண்டதென உய்த்தறிக.

(i) $x = 0$ எனின் $f(x) = -5$

(ii) $x \longrightarrow +\infty$ ஆக, $f(x) \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக, $f(x) \longrightarrow 0$

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 5x - 5\right) e^x + \left(3x^2 - 6x + 5\right) e^x$$

$$= \left(x^3 - x\right) e^x$$

$$= x\,(x-1)\,(x+1) e^x$$

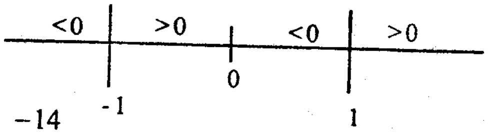
$f'(x) = 0$ எனின் $x = -1, 0, 1$

$x < -1$ எனின் $f'(x) < 0$

$-1 < x < 0$ எனின் $f'(x) > 0$

$0 < x < 1$ எனின் $f'(x) < 0$

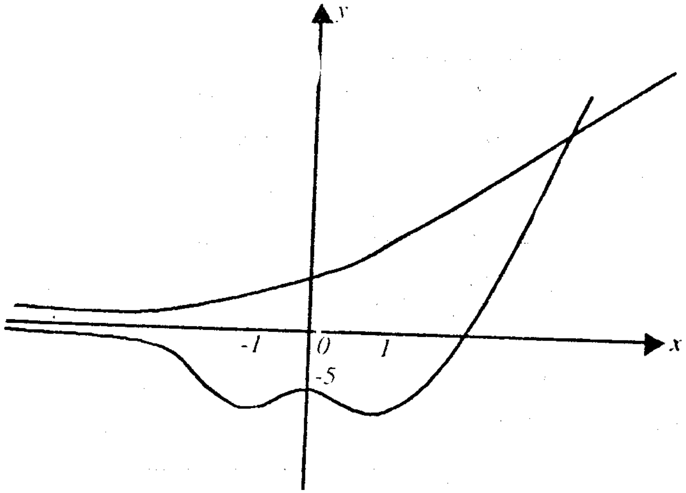
$x > 1$ எனின் $f'(x) > 0$



$x = < -1$ இல் இழிவு $f(x) = \dfrac{-14}{e}$

$x = 0$ இல் உயர்வு $f(x) = -5$

$x = 1$ இல் இழிவு $f(x) = -2e$



$$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 5 = 1$$

$$\left(x^3 - 3x^2 + 5x - 5 = 1\right) e^x = e^x$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவே $y = \left(x^3 - 3x^2 + 5x - 5\right) e^x$ என்றவளையையும்

$y = e^x$ என்றவளையையும் வெட்டும் புள்ளியின் x ஆள்கூறு, தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மெய்த்தீர்வு ஆகும். இங்கு இரு வளையிகளும் ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டுவதால் ஒரு மெய்த்தீர்வு மட்டும் உண்டு.

உதாரணம் 15

(i) $f(x) \equiv 3x^5 - 5x^3 + C$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு C என்பது யாதாயினுமொரு மாறிலியாகும். $y = f'(x) = 15x^2\left(x^2 - 1\right)$ இன் பருமட்டி வரைபொன்றை வரைக. இவ்வரைபிலே $f'(x)$ இன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைத் தெளிவாகக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $f(x)$ ஆனது ஒரேயொரு உயர்வையும் ஒரேயொரு இழிவையும் கொண்டிருக்கும் என்பதை உய்த்தறிக. அதோடு (i) $|x| > 1$ ஆயின் மாத்திரம் $f(x)$ ஆனது x உடன் அதிகரிக்கும் என்பதையும்

(ii) $y = f(x)$ எனும் வரைபின் நான்கு புள்ளிகளில் மாத்திரம் வரையப்பட்ட தொடலிகள் $x + y = 0$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாக இருக்கின்றதென்பதையும் இப்புள்ளிகள் எல்லாம் $|x| < 1$ என்னும் வீச்சிலே இருக்கின்றதென்பதையும் உய்த்தறிக.

[$y = f(x)$ இன் வரைபை இங்கு வரைய வேண்டியதில்லை.]

$y = f'(x) = 15x^2\left(x^2 - 1\right)$

(i) $x = 0$ எனின், $y = 0$

(ii) $y = 0$ எனின், $x = -1, 0, 1$

(iii) $x \longrightarrow \pm\infty$, $y \longrightarrow \infty$

(iv) $\frac{dy}{dx} = 60x^3 - 30x$

$= 30x\left(2x^2 - 1\right)$

$= 30x\left(\sqrt{2}\,x - 1\right)\left(\sqrt{2}\,x + 1\right)$

$\frac{dy}{dx} = 0$ எனின், $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனின் $\frac{dy}{dx} < 0$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$ எனின் $\frac{dy}{dx} > 0$

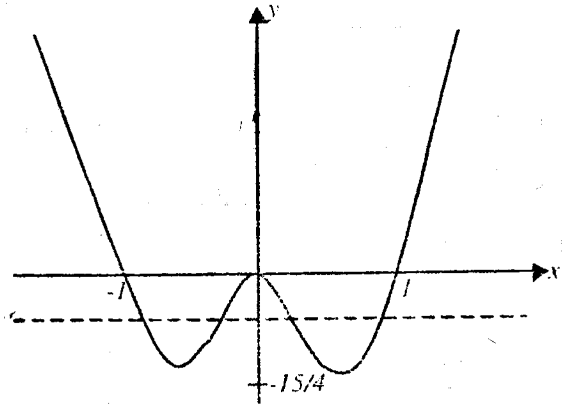
$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனின் $\frac{dy}{dx} < 0$

$x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனின் $\frac{dy}{dx} > 0$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ இல் இழிவு, $y = -\frac{15}{4}$

$x = 0$ இல் உயர்வு $y = 0$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ இல் இழிவு $y = -\frac{15}{4}$



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(i) $x < -1$ அல்லது $x > 1$ இல் மட்டும் $f'(x) > 0$ ஆகும்.

எனவே $x < -1$, $x > 1$ இல் மட்டும் x அதிகரிக்க $f(x)$ அதிகரிக்கும்.

$|x| > 1$ இல் மட்டும் x அதிகரிக்க $f(x)$ அதிகரிக்கும்.

(ii) $y = f(x)$ இற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் $x + y = 0$ என்னும் கோட்டிற்கு சமாந்தரமாயிருத்தல் வேண்டும்.

எனவே $f'(x) = -1$ ஆதல் வேண்டும்

$f'(x) = -1$ இல் வரையும் நேர்கோடு வளையியை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இப்புள்ளிகளின் x ஆள் கூறு -1, +1 இற்கிடையில் உள்ளன.

உதாரணம் 16

$y = \dfrac{x^3(x-1)^2}{(2x+1)^2}$ என்ற சார்பு ஓர் இழிவையும், இரண்டு உயர்வையும் கொண்டுள்ளதென நிறுவுக. இதன் பருமட்டான வரைபினை வரைக.

$$y = \frac{x^3(x-1)^2}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)^2\left[x^3\cdot 2(x-1) + 3x^2(x-1)^2\right] - x^3(x-1)^2\, 4(2x+1)}{(2x+1)^4}$$

$$= \frac{x^2(2x+1)(x-1)\left[2x(2x+1) + 3(2x+1)(x-1) - 4x(x-1)\right]}{(2x+1)^4}$$

$$= \frac{x^2(2x+1)(x-1)(6x^2+3x-3)}{(2x+1)^4}$$

$$= \frac{3x^2(x-1)(2x-1)(x+1)}{(2x+1)^3}$$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ எனின் $x = -1,\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$ ஆகும்.

$x < -1$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} > 0$

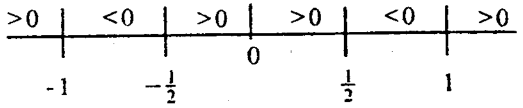
$-1 < x < -\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{dy}{dx} < 0$

$-\dfrac{1}{2} < x < 0$, $\dfrac{dy}{dx} > 0$

$0 < x < \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{dy}{dx} > 0$

$\dfrac{1}{2} < x < 1$, $\dfrac{dy}{dx} < 0$

$x > 1$ $\dfrac{dy}{dx} > 0$



$x = -1$ இல் உயர்வு $y = -4$

$x = 0$ இல் விபத்திப்புள்ளி $y = 0$

$x = \frac{1}{2}$ இல் உயர்வு $y = \dfrac{1}{128}$

$x = 1$ இல் இழிவு $y = 0$

எனவே சார்பு ஓர் இழிவையும் இரண்டு உயர்வையும் கொண்டுள்ளது.

(i) $x = 0$ எனின் $y = 0$

(ii) $y = 0$ எனின் $x = 0, 1$

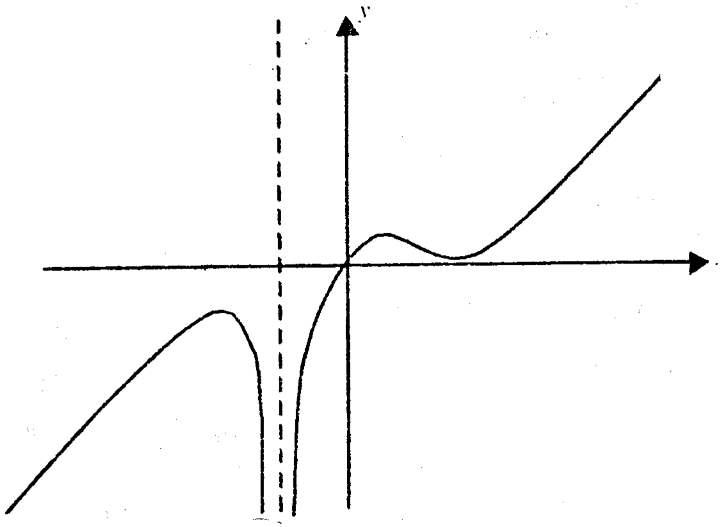
(iii) $y = \dfrac{x^3(x-1)^2}{(2x+1)^2} = \dfrac{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2}$

$x \longrightarrow +\infty$ ஆக $y \longrightarrow +\infty$

$x \longrightarrow -\infty$ ஆக $y \longrightarrow -\infty$

(iv) $x = -\dfrac{1}{2}$ ஓர் அணுகு கோடு.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



$f(x) = |x|, \quad x \in R$

$f(x) = x, \quad x \geq 0$

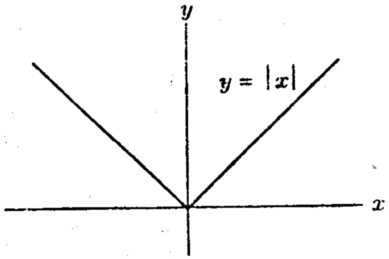
$\quad = -x, \quad x < 0$ எனில்,

இங்கு f, $x = 0$ இல் வகையிடத்தக்கதல்ல.

எனினும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x) \geq 0$. மேலும் $f(0) = 0$.

எனவே $x = 0$ இல் சார்பிற்கு இழிவு உண்டு.

இழிவுப் பெறுமானம் 0 ஆகும்.



எனவே உயர்வு, இழிவு காண்பதற்குப் பின்வரும் வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்த முடியும்.

சார்பு $f, (a-\delta, a+\delta)$ என்ற ஆயிடையில் தொடர்ச்சியானதும் a தவிர்ந்த ஏனைய $(a-\delta, a+\delta)$ இன் எல்லா மூலகங்களுக்கும் வகையிடத்தக்கதும் என்க.

f இன் பெறுமதி f', $(a-\delta, a)$ இல் நேராகவும் $(a, a+\delta)$ இல் மறையாகவும் இருப்பின், f இற்கு a இல் உயர்வு உள்ளதெனப்படும்.

f', $(a-\delta, a)$ இல் மறையாகவும் $(a, a+\delta)$ இல் நேராகவும் இருப்பின் f இற்கு a இல் இழிவு உள்ளதெனப்படும்.

இரண்டாம் பெறுதிகளை உபயோகித்து உயர்வு இழிவுகளைக் காணல்

$y = f(x)$ என்க.

(i) $x = a$ இல் $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ஆகவும்

$x = a$ இல் $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ ஆகவும் இருப்பின்

$x = a$ இல் $y = f(x)$ எனும் சார்பிற்கு உயர்வு உண்டு எனப்படும்.

உதாரணம்

$y = x - x^2$

$\dfrac{dy}{dx} = 1 - 2x$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ எனின் $x = \dfrac{1}{2}$

$x < \dfrac{1}{2}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} > 0$

$x > \dfrac{1}{2}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} < 0$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{2}$ இல் $y = x - x^2$ இற்கு உயர்வு உண்டு.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

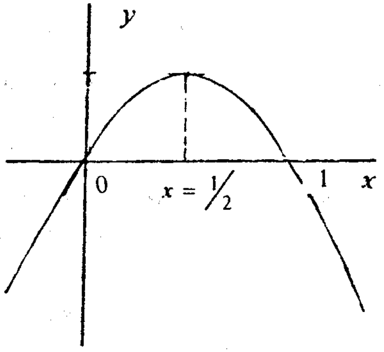
இரண்டாம் பெறுதியை உபயோகித்தல்

$y = x - x^2$

$\frac{dy}{dx} = 1 - 2x$

$x = \frac{1}{2}$ இல் $\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0$



எனவே $x = \frac{1}{2}$ இல் $y = x - x^2$ இற்கு உயர்வு உண்டு.

(ii) $x = a$ இல் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகவும்

$x = a$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ஆகவும் இருப்பின்

$x = a$ இல் $y = f(x)$ இற்கு இழிவு உண்டு எனப்படும்.

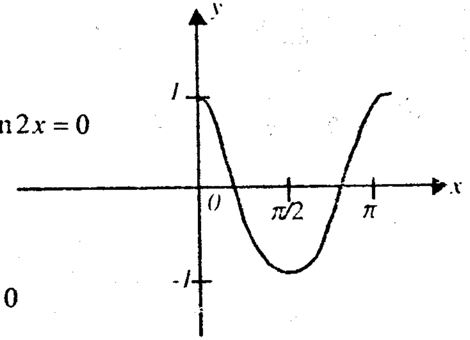
உதாரணம்

$y = \cos 2x \qquad x \in (0, \pi)$

$\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{dy}{dx} = 0$ எனின். $\sin 2x = 0$

$x \in (0, \pi), \quad \therefore \ x = \frac{\pi}{2}$



$x < \frac{\pi}{2}$ எனில் $\frac{dy}{dx} < 0$

$x > \frac{\pi}{2}$ எனில் $\frac{dy}{dx} > 0$

எனவே $x = \frac{\pi}{2}$ இல் $y = \cos 2x$ இற்கு இழிவு உண்டு.

இரண்டாம் பெறுதியை உபயோகித்தல்

$y = \cos 2x \qquad x \in (0, \pi)$

$\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x, \quad x = \pi/2$ இல் $\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos 2x$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x = \pi/2} = -4\cos\pi = 4 > 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ இல் $y = \cos 2x$ இற்கு இழிவு உண்டு.

இவற்றின் மறுதலைகள் எப்போதும் உண்மையாக இருக்கவேண்டியதில்லை என்பதைக் கவனத்திற் கொள்ளவேண்டும்.

(i) அதாவது $x = a$ இல் $y = f(x)$ இற்கு உயர்வு இருப்பின் $x = a$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ஆக இருக்கவேண்டியதில்லை.

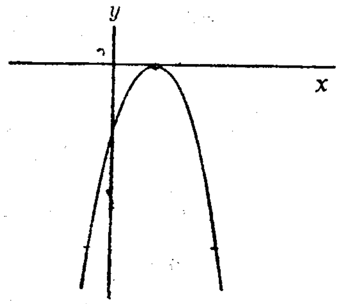
உதாரணம் $y = -(x-1)^4$ ஐக் கருதுக.

$\frac{dy}{dx} = -4(x-1)^3$

$\frac{dy}{dx} = 0$ எனில், $x = 1$

$x < 1$ எனில் $\frac{dy}{dx} > 0$

$x > 1$ எனில் $\frac{dy}{dx} < 0$



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவே $x=1$ இல் $y=-(x-1)^4$ இற்கு உயர்வு உண்டு.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-12(x-1)^2$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=0$$ ஆகும் என்பதை அவதானிக்க.

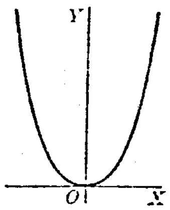
இவ்வாறே, $x=a$ இல் $y=f(x)$ இற்கு இழிவு இருப்பின் $x=a$ இல்

$$\frac{d^2y}{dx^2}>0$$ ஆக இருக்க வேண்டியதில்லை

உதாரணம் $y=x^4$ ஐக்கருதுக.

$$\frac{dy}{dx}=4x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$ எனின்,



$x<0$ எனில் $\frac{dy}{dx}<0$

$x>0$ எனில் $\frac{dy}{dx}>0$

$\therefore x=0$ இல் $\frac{dy}{dx}$ இற்கு இழிவு உண்டு.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=0$$ ஆகும் என்பதை அவதானிக்க.

உதாரணம் 17

(i) வட்டத்தட்டு ஒன்றின் ஆரை செக்கனுக்கு $0\cdot1cm$ எனும் வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது. தட்டின் ஆரை 25cm ஆக இருக்க தட்டின் பரப்பு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

(ii) கோளவடிவமான பலூன் ஒன்றின் கனவளவு செக்கனுக்கு $900cm^3$ என்ற வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது. கோளத்தின் ஆரை 15cm ஆக இருக்க பலூனின் ஆரை அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

(i) $$\frac{dr}{dt}=0\cdot1\ cms^{-1}$$

$$A=\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=(2\pi r)\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=25}=2\pi\times25\times0\cdot1=5\pi cm^2\ s^{-1}$$

(ii) $$\frac{dv}{dt}=900cm^3\ s^{-1}$$

$$\frac{dv}{dt}=\left(\frac{dv}{dr}\right)\frac{dr}{dt} \qquad v=\frac{4}{3}\pi r^3,\ \frac{dv}{dr}=4\pi r^2$$

$$=4\pi r^2\cdot\frac{dr}{dt}$$

$$900=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{900}{4\pi r^2},\ \left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=15}=\frac{900}{4\pi\times225}=\frac{1}{\pi}cms^{-1}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 18

தரப்பட்ட பரப்பளவுடைய உலோகமொன்றிலிருந்து மூடியற்ற செவ்வட்ட உருளை ஒன்று செய்ய வேண்டியுள்ளது. உருளையின் கொள்ளளவு உயர்வாக இருப்பதற்கு உருளையின் ஆரைக்கும், உயரத்திற்குமிடையேயான விகிதத்தைக் காண்க.

கனவளவு $V = \pi r^2 h$ பரப்பளவு $A = \pi r^2 + 2\pi rh$

A - மாறிலி

$$V = \pi r^2 \left[\frac{A - \pi r^2}{2\pi r}\right]$$

$$= \frac{Ar}{2} - \frac{\pi r^3}{2}$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{2} - \frac{3\pi r^2}{2}$$

$\frac{dV}{dr} = 0,$ $A = 3\pi r^2$

$$\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2$$

$$h = r$$

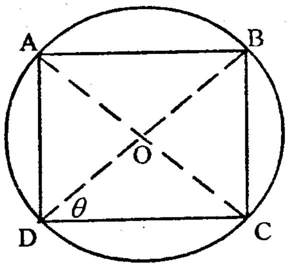
$$\frac{d^2V}{dr^2} = -3\pi r < 0$$

$h = r$ ஆக உயர்வு பெறப்படும்.

உதாரணம் 19

a என்னும் ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க செவ்வகங்களுள் பெரியதன் பரப்பளவைக் காண்க.

வட்டத்தின் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்ட செவ்வகம் ABCD



$\angle BAD = 90^0$ ஆதலால் BD விட்டம்

$\angle ABC = 90^0$ ஆதலால் AC விட்டம்

வட்ட மையம் O என்க.

செவ்வகத்தின் பரப்பு A = AD . DC

$$= (2a\sin\theta)\cdot(2a\cos\theta)$$

$$= 2a^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta} = 4a^2 \cos 2\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \qquad [2\theta < \pi]$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{d^2A}{d\theta^2} = -8a^2 \sin 2\theta$$

$$\left(\frac{d^2A}{d\theta^2}\right)_{\theta = \pi/4} = -8a^2 < 0$$

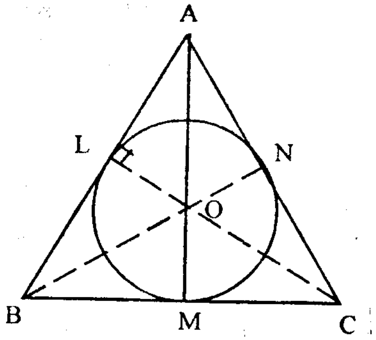
$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ இல் உயர்வு

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனின் ABCD சதுரம் ஆகும்.

உதாரணம் 20

தந்த ஒரு வட்டத்திற்குச் சுற்றுருவமாக வரையத்தக்க இருசமபக்க முக்கோணிகளுள் இழிவுப் பரப்பளவு கொண்டது சமபக்க முக்கோணமாகுமென நிறுவுக.

வட்டத்தின் மையம் O, ஆரை a என்க.



ABC இருசமபக்க முக்கோணி

AB = AC

AL = AN, BL = BM, CN = CM (தொடலி)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

BL = CN ஆகையால் BM = CM
எனவே M, BC யின் நடுப்புள்ளி

$OM \perp BC, \quad AM \perp BC \quad \therefore AOM$, நேர்கோடு

ABC யின் பரப்பளவு $A = \frac{1}{2} BC \cdot AM$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\tan B/2}\right) a \left(1 + \frac{1}{\sin A/2}\right)$$

$$= a^2\left[\frac{1}{\tan B/2}\left(\frac{1+\cos B}{\cos B}\right)\right]$$

$\tan B/2 = t$ என்க.

$$A = \frac{2a^2}{t\left(1-t^2\right)}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{-2a^2\left(1-3t^2\right)}{t^2\left(1-t^2\right)^2}$$

$$\frac{dA}{dt} = 0 \Rightarrow t = 1/\sqrt{3}, \left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_{t=\frac{1}{\sqrt{3}}} > 0$$

$\therefore$ இழிவு $\angle B = 60^0$ இல் உண்டு

$\therefore$ ABC சமபக்க முக்கோணி.

உதாரணம் 21

முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து பின்வருவனவற்றின் பெறுதியைக் காண்க.

(i) $\frac{\tan x}{x}$ (ii) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (iii) $x \cos x$ (iv) $\sqrt{1-x^2}$

(v) $f(x)$ என்பது x இன் வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாகவும் $f(x) > 0$. ஆகவும் இருக்க, x குறித்து $\sqrt{f(x)}$ இன் பெறுதியை முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து பெறுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(i) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\tan(x+h)}{x+h} - \frac{\tan x}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}\left[\frac{x\tan(x+h) - (x+h)\tan x}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}\left[x\left\{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h}\right\} - (x+h)\tan x\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}\left[\frac{x(\tan x + \tan h) - (x+h)\tan x(1 - \tan x \tan h)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}\left[\frac{x\tan h - h\tan x + x\tan^2 x \tan h + h\tan^2 x \tan h}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}\left[x \cdot \frac{\tan h}{h} - \tan x + x\tan^2 x \cdot \frac{\tan h}{h} + \tan^2 x \tan h\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[x - \tan x + x\tan^2 x + 0\right] \quad h \to 0 \text{ ஆக}, \tan h \to 0, \frac{\tan h}{h} \to 1$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[x - \tan x + x\left(\sec^2 x - 1\right)\right]$$

$$= \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

(ii) $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{1}{x+h}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+h}+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+h}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[2\sin\frac{1}{2}\left\{\frac{2x+h}{x(x+h)}\right\}\bullet\sin\frac{h}{2x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\sin\frac{(2x+h)}{2x(x+h)}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2x(x+h)}}{\frac{h}{2x(x+h)}}\times\frac{1}{2x(x+h)}$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\times 1\times\frac{1}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(iii) $f(x)=x\cdot\cos x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\cos(x+h)-x\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x\left[\cos(x+h)-\cos x\right]+h\cos(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} x\left[\frac{2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{h}\right]+\left[\frac{h\cos(x+h)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} -x2\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)\bullet\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2\left(\frac{h}{2}\right)}+\cos(x+h)$$

$$= -x2\sin x\times\frac{1}{2}+\cos x$$

$$= -x\sin x+\cos x$$

iv) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h}\times\frac{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[1-(x+h)^2\right]-\left[1-x^2\right]}{h\left(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h}\times\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lim_{h\to 0} -(2x+h) \times \frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

$$= -2x \times \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(v) $G(x) = \sqrt{f(x)}$

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h} \times \frac{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{f(x+h)} + \sqrt{f(x)}}$$

$$= f'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

உதாரணம் 22

(i) α உம் β உம் ஒருமைகளாக இருக்க $(\alpha+\beta x)\, e^{\frac{y}{x}} = x$ எனின்

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y \right)^2$$ என நிறுவுக.

(ii) y என்பது x இன் ஒரு சார்பாக இருக்க, அவை

$x - \frac{dy}{dx} = 3\left(y^2 x^6 - y + 4\right)$ என்பதால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது

நேரடிப் பிரதியீடு மூலம் $y = \frac{2}{x^3} \tan\left(2x^3 - \alpha\right)$ என்பது மேற்போந்த தொடர்பைத் திருப்தி செய்யுமெனக் காட்டுக.

(iii) $y = tan(x+y)$ எனில் $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ஐ y இல் மாத்திரம் பெறுக.

(i) $(\alpha+\beta x)\, e^{\frac{y}{x}} = x$

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{x}{\alpha+\beta x}$$

$$\ln\left(e^{\frac{y}{x}}\right) = \ln\left(\frac{x}{\alpha+\beta x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = \ln x - \ln(\alpha+\beta x)$$

$$y = x\left[\ln x - \ln(\alpha+\beta x)\right]$$

x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \left[\ln x - \ln(\alpha+\beta x)\right] + x\left[\frac{1}{x} - \frac{\beta}{\alpha+\beta x}\right]$$

$$x\frac{dy}{dx} = x\left[\ln x - \ln(\alpha+\beta x)\right] + \left(1 - \frac{\beta x}{\alpha+\beta x}\right)x$$

$$x\frac{dy}{dx} = y + \frac{\alpha x}{\alpha+\beta x}$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = \frac{\alpha x}{\alpha+\beta \alpha}$$

மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிட,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=\frac{(\alpha+\beta x)\alpha-\alpha x\beta}{(\alpha+\beta x)^2}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta x)^2}$$

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\alpha^2x^2}{(\alpha+\beta x)^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$$

(ii) $$y=\frac{2}{x^3}\tan\left(2x^3-\alpha\right)$$

$$x^3y=2\tan\left(2x^3-\alpha\right)$$

$$x^3\frac{dy}{dx}+3x^2y=2\sec^2\left(2x^3-\alpha\right)\times 6x^2$$

$$x\frac{dy}{dx}+3y=12\sec^2\left(2x^3-\alpha\right)$$

$$x\frac{dy}{dx}+3y=12\left[1+\tan^2\left(2x^3-\alpha\right)\right]$$

$$x\frac{dy}{dx}+3y=12\left(1+\frac{y^2x^6}{4}\right)$$

$$x\frac{dy}{dx}=3\left(y^2x^6-y+4\right)$$

(iii) $$y=\tan(x+y)$$

இரு பக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2(x+y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\left[1+\tan^2(x+y)\right]\left[1+\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$-y^2\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-1}{y^2}-1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{2}{y^3}\times\frac{-\left(1+y^2\right)}{y^2}$$

$$=\frac{-2\left(1+y^2\right)}{y^5}$$

உதாரணம் 23

$x=t^2+4,\quad y=t^3-3t$ ஆகிய பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி தரப்படுகிறது. இங்கு $t\neq 0$ ஆகும். வளையியின் "t" புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் காண்க. இதிலிருந்து வளையியின் திரும்பல் புள்ளிகளைக் கண்டு உயர்வு, இழிவுகளைத் தீர்மானிக்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x = t^2 + 4,\qquad y = t^3 - 3t$

$\dfrac{dx}{dt} = 2t \qquad \dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t} \quad \text{——— (1)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3t^2 - 3}{2t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{3t^2 - 3}{2t}\right) \times \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{2t \times 6t - \left(3t^2 - 3\right) \times 2}{4t^2} \times \frac{1}{2t}$$

$$= \frac{6t^2 + 6}{8t^3} = \frac{3\left(t^2 + 1\right)}{4t^3} \quad \text{——— (2)}$$

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ எனில் $\dfrac{3t^2 - 3}{2t} = 0$

$$3(t-1)(t+1) = 0$$

$$t = \pm 1$$

$t = 1$ எனின், $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{3 \times 2}{4} = \dfrac{3}{2} > 0$

ஆகவே, $t = 1$ இல் இழிவு உண்டு

$t = -1$ எனின் $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2} < 0$

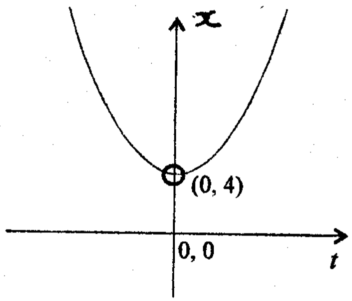
ஆகவே, $t = -1$ இல் உயர்வு உண்டு.

$t = 1$ எனில் $x = 5,\ y = -2$ இழிவுப் புள்ளி $(5, -2)$

$t = -1$ எனில் $x = 5,\ y = 2$ உயர்வுப் புள்ளி $(5, 2)$

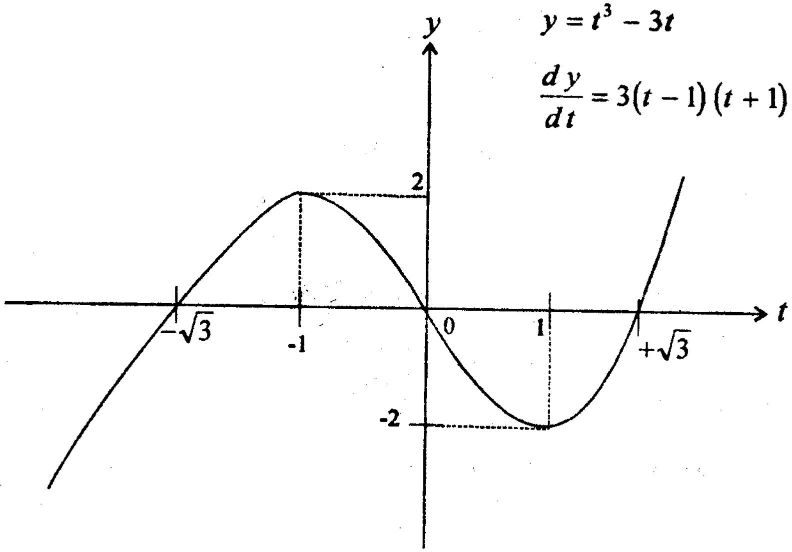
$x = t^2 + 4$

t ஆனது $-\infty$ இலிருந்து 0 க்கு அதிகரிக்க x ஆனது $+\infty$ இலிருந்து 4 க்கு குறையும். t ஆனது 0 இலிருந்து ∞ க்கு அதிகரிக்க x ஆனது 4 இலிருந்து ∞ க்கு அதிகரிக்கும் எப்பொழுதும் $x > 4$ ஆகும்.

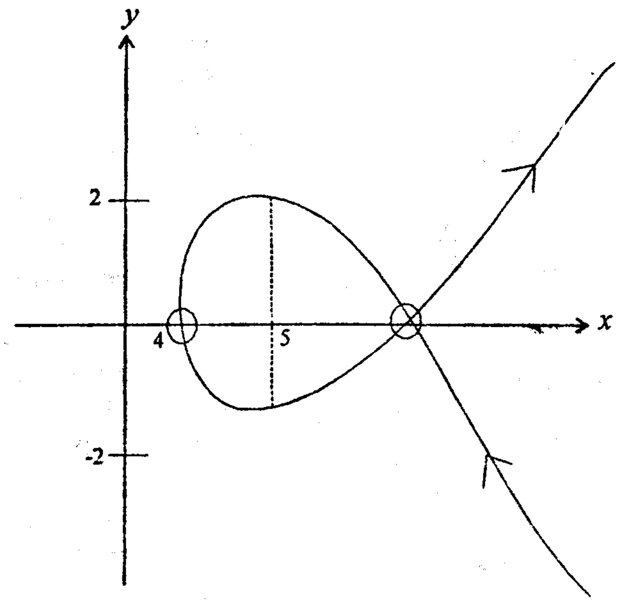


$y = t^3 - 3t$

$\dfrac{dy}{dt} = 3(t-1)(t+1)$



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



பயிற்சி 4

1. முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

u, v என்பன x இன் சார்புகளாயின்

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2 + x^2}$$ என நிறுவுக.

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\ \tan\frac{x}{2}\right]$ $(a > b > o)$

(ii) $\tan^{-1}\left[\frac{a\sin x + b\cos x}{a\cos x - b\sin x}\right]$ இங்கு a , b என்பன ஒருமைகள்

2) (i) u, v என்பன x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனின்,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$ என நிறுவுக

(ii) x ஐக் குறித்து வகையிடுக

(a) $\sin^{-1}\left[\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right]$ $o < x < \pi$

(b) $\ln\left[\frac{\sqrt{3} + \tan x}{\sqrt{3} - \tan x}\right]$ $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

3) x ஐக் குறித்து $y = \sin^{-1} x$, $y = \tan^{-1} x$ என்பவற்றின் வகையீட்டுக் குணகங்களைப் பெறுக.

$1 < x < \frac{3}{2}$ ஆயின்

(i) $2\ \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ (ii) $2\sin^{-1}\sqrt{x-1}$

(iii) $\sin^{-1} 2\sqrt{(2-x)(x-1)}$ என்ற x இன் சார்புகள்

ஒவ்வொன்றினதும் வகையீட்டுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}$ எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. முதற் தத்துவங்களிலிருந்து $x \neq 0$ ஆகும் போது $x \sin \frac{1}{x}$ என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க

x ஐக் குறித்து வகையிடுக

(a) $\sin^{-1}\left(e^{-\tan^2 x}\right)$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} \ln \sqrt{1+\cos^2 x}$

5. x ஐக் குறித்து $\tan^2 x$ என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தை முதல் தத்துவங்களிலிருந்து காண்க.

(i) $e^{\tan^2 x} \ln|\tan x|$ (ii) $\left(1-\sqrt{x}\right)^3 \cos^2\left(e^x\right)$

u, v என்பன x இன் சார்புகளாயின்

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ என நிறுவுக.

u, v, w என்பன x இன் சார்புகள் ஆயின் $\frac{d}{dx}(uvw)$ என்பதற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுக.

(i) $\sin(\sin x) \cdot \tan^2 x$

(ii) $\sin\left(1+x^2\right) \cdot e^{1+x^2} \ln\left(1+x^2\right)$

6. பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \left(x^2<1\right)$ (ii) $\ln\left[\frac{e^x \sin x}{\left(1-x^2\right)^2}\right]$

7. $x > 0$ எனின்

(i) $x - \ln(1+x) > \frac{\frac{1}{2}x^2}{1+x}$ எனவும்

(ii) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 > \ln(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$ எனவும் நிறுவுக.

8. $o < x < \frac{\pi}{2}$ எனின்

$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 > \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$ என நிறுவுக

9. (i) வட்டம் ஒன்றின் பரப்பளவு சீரான வீதத்தில் அதிகரிக்குமெனின் சுற்றளவின் அதிகரிப்பு அதன் ஆரைக்கு நேர்மாறாக மாறும் எனக் காட்டுக.

(ii) சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் பக்கம் செக்கனுக்கு 3cm எனும் சீரான வீதத்தில் அதிகரிக்குமெனின், பக்கம் 10cm ஆக இருக்க முக்கோணியின் பரப்பளவு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

(iii) 5m ஆரையும் 10m உயரமும் உடைய கூம்பு வடிவான நீர்த்தாங்கி ஒன்றினுள் நிமிடத்துக்கு $2m^3$ என்ற வீதத்தில் நீர் செலுத்தப்படுகிறது. நீரின் உயரம் 2m ஆக இருக்கையில் நீரின் உயரம் அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

(iv) இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 24 ஆகவும், அவற்றின் பெருக்குத் தொகை உயர்வாகவும் இருக்குமாறு இரு நேர்எண்களைக் காண்க.

(v) இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை 16 ஆகவும், அவற்றின கனங்களின் கூட்டுத்தொகை இழிவாகவும் இருக்குமாறு இரு நேர் எண்களைக் காண்க.

(vi) 18cm பக்கமுடைய சதுரவடிவத் தாள் ஒன்றிலிருந்து தாளின் ஒவ்வொரு மூலையிலும் சதுரம் ஒன்றை வெட்டுவதால், மூடியற்ற பெட்டி ஒன்று செய்யப்படுகிறது. பெட்டியின் கனவளவு உயர்வாக இருப்பதற்கு, வெட்டியெடுக்கப்பட வேண்டிய சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளத்தைக் காண்க.

10. தரப்பட்ட ஒரு கோளத்திற்கு உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேர்வட்டக் கூம்புகளுள் மிகப் பெரிய கனவளவு கொண்ட கூம்பின் கனவளவு, அக்கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{8}{27}$ என நிறுவுக.

11. தந்த ஒரு கோளத்திற்கு சுற்றுருவாக வரைந்த இழிவு வளைபரப்புக் கொண்ட கூம்பின் அரை உச்சிக்கோணம் $\sin^{-1}\left(\sqrt{2}-1\right)$ எனக் காட்டுக.

12. தனது அடியின் ஆரை a உம் உயரம் h ஆகவுமுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேர்உருளைகளுள் மிகப்பெரிய கனவளவுடையதன் உயரம் $\frac{1}{3}h$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. ஒரு பாடசாலை விளையாட்டு மைதானம், அதனுடைய சுற்றளவின் வழியே 440 m நீளமான ஓட்டப்பாதையை உடையதாக அமைக்கப்படவுள்ளது. அவ்விளையாட்டு மைதானம் அதனுடைய குறுகிய இருபக்கங்களிலும் இரு அரைவட்டங்களோடு கூடிய ஒரு செவ்வக வடிவுடையதாக அமைக்கப் படவுள்ளது. செவ்வக வடிவப் பகுதியின் அதிகூடிய சாத்தியமான பரப்பளவு $7700 m^2$ எனக் காட்டுக. ($\pi = \frac{22}{7}$ எனக் கொள்க)

14. ஒரு கூம்பு, தரப்பட்ட வேறொரு கூம்பினுள், அதனுடைய உச்சி தரப்பட்ட கூம்பின் அடித்தளத்தின் மையத்திலும், அதன் அடித்தளத்தின் பரிதி தரப்பட்ட கூம்பின் வளைபரப்பிலும் இருக்குமாறு உள்ளுருவமாக அமைந்துள்ளது. இக்கூம்பு அதிஉயர் கனவளவைக் கொள்ள வேண்டும் எனின், அதனது உயரம் தரப்பட்ட கூம்பினுடைய உயரத்தின் மூன்றில் ஒரு பங்கு ஆதல் வேண்டும் என நிறுவுக.

15. A, B என்பன 5 km தூரத்திலுள்ள இரு நகரங்களாகும். இந்நகரங்களிலிருந்து ஒரு நேரான ஆற்றங்கரைக்குச் செங்குத்துக்களாகிய AM, BN என்பவற்றின் நீளங்கள் முறையே 1 km, 4 km ஆகும். ஆற்றங்கரையில் M, N என்பவற்றுக்கிடையே உள்ள நீர் இறைக்கும் நிலையம் P ஆகும். P யிலிருந்து A, B என்பவற்றுக்குச் செல்லும் நேர்க் குழாய்களின் நீளங்களின் கூட்டுத்தொகை இழிவுப் பெறுமானமாக இருக்க $MP : PN = 1 : 4$ என நிறுவுக.

16. $y = (x-1)^4 (x-2)^3$ ஆகுக. இச்சார்பின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங் களைக் கண்டு, சார்பின் வரைபை வரைக.

17. $y = 2x^3 + (3-2x)^3$ இன் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க. வளையியை பருமட்டாக வரைக.

18. $y = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$ எனும் சார்பில் a, b மாறிலிகள் $x = \frac{1}{6}$ ஆகவும் $x = -1$ ஆகவும் இருக்கும் போது சார்பு திரும்பல் புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ளது. a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து திரும்பல் புள்ளிகளின் இயல்பைத் தீர்மானிக்க. வளையியை பருமட்டாக வரைக.

19. $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ என்னும் வளையி $x = -2$ இல் உயர்வை யுடையது $x = 1$ எனும் புள்ளியில் இழிவைக் கொண்டுள்ளதாகவும், x அச்சைத் தொடுவதாகவும் உள்ளது. a, b, c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) உயர்வுப்புள்ளி (ii) இழிவுப்புள்ளி

(iii) அச்சுக்களை வளையி வெட்டும் புள்ளி என்பவற்றைக் குறிப்பிட்டு வளையியை வரைக.

20. a ஆரையுடைய கோளத்தின் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேர் உருளைகளுள், உயர் வளைபரப்புக் கொண்டதன் உயரம் $a\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

21. $y = \frac{x^{\frac{2}{3}} (2x+1)^2}{(2x-1)}$ என்னும் சார்பு இரு உயர்வுகளையும் இரு இழிவுகளையும் கொண்டுள்ளதெனக் காட்டுக. இச்சார்பின் பருமட்டான வரைபினை வரைக.

22. (i) $y = \frac{x}{x^2+1}$ என்னும் வளையியைப் பரும்படியாக வரைக.

(ii) ஒரு குறித்த அளவு சீரான மெல்லிய பொருளிலிருந்து திறந்த உருளைப் பாத்திரமொன்று அமைக்கவேண்டியிருக்கிறது. அதனுடைய உயரம் அதன் அடியின் ஆரைக்கு சமனாக இருக்கும் போது இந்தப்பாத்திரம் சாத்தியமான மிகக் கூடிய கனவளவைக் கொண்டிருக்குமெனக் காட்டுக.

23. $y = \frac{3x^2-3}{6x-10}$ என்னும் வளையிமீதுள்ள உயர்வு, இழிவுப்புள்ளிகள் $(k, k), \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ எனும் வடிவத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக இவ்வளையியின் பரும்படி வரைபொன்றை வரைக. $xy = 1$ எனும் செங்கோண அதிபர்வளைவின் பரும்படி வரைபொன்றை அதே படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து $3x^3 - 9x + 10 = 0$ என்னும் சமன்பாடு ஒரேயொரு மெய்மூலத்தை மாத்திரமே கொண்டிருக்கும் எனவும், இம்மூலமானது -1 இலும் குறைவானது எனவும் காட்டுக.

24. $y = \frac{x^2+x}{x^2-3x+2}$ எனின்

(i) y, x உடன் அதிகரிக்கும்

(ii) y, x உடன் குறையும் x இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க. y இன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் கண்டு வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மேலேயுள்ள வளையியும் $y = k$ என்னும் கோடும் இடைவெட்டுவதைக் கருத்திற்கொண்டு. $(k-1)x^2 - 3kx + 2(k-1) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு $-2\left(3\sqrt{2}+4\right) < k < 2\left(3\sqrt{2} - 4\right)$ எனின் மெய்மூலங்கள் இல்லை என உய்த்தறிக.

25. $y = f(x) = \dfrac{(x-1)^3\,(6x+1)}{(x+1)^3}$ எனின் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x(x-1)^2\,(x+6)}{(x+1)^4}$

எனக்காட்டுக $x = 1$ ஆகும்போது y இற்கு உயர்வோ இழிவோ பெறப்படாது என உய்த்தறிக $y = f(x)$ இன் பரும்படியான வரைபை வரைக. இவ் வரைபைப் பயன்படுத்தி $-\left(\dfrac{49}{5}\right)^2 < k < -1$ எனின் $(x-1)^3\,(6x+1) - k\,(x+1)^3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு மெய்மூலங்கள் இல்லை எனக் காட்டுக.

26. (i) $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ என்னும் வளையியைப் பரும்படியாக வரைக.

$x - 1 + \dfrac{1}{x+1} = k$ எனும் சமன்பாட்டுக்கு $-4 < k < 0$ என்ற வீச்சில் மெய்த்தீர்வுகள் இல்லை என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 3t$ ஆகிய பரமானச் சமன்பாடுகளால், ஒரு வளையி தரப்படுகிறது, இங்கு $t \neq 0$ ஆகும். வளையியின் "t" புள்ளியில் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐயும் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் காண்க. இதிலிருந்து வளையியின் திரும்பற் புள்ளிகளைக் கண்டு உயர்வு, இழிவுகளைத் தீர்மானிக்க.

27. (i) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ எனின் $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ எனக் கேத்திர கணித முறையால் நிறுவுக. இதிலிருந்து நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கூடாக $\theta \longrightarrow 0$ ஆக, $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \longrightarrow 1$ ஆகுமெனக் காட்டுக. முதற் தத்துவங்களிலிருந்து $\dfrac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos ax$ என நிறுவுக. இங்கு a ஓர் ஒருமை

$y = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{b}\right)$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, $-b < x < b$ எனின் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(a) $\left(x^2+1\right)^{1/2}\,\sin^3 2x$ (b) $\sin^2\left(a\sin^{-1}\dfrac{x}{b}\right)$

(ii) $y = \{\ln(x-a)\}^2$; இங்கு $x - a > 0$ எனின் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க

$(x-a)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + (x-a)\dfrac{dy}{dx} = 2$ எனக் காட்டுக. (1982)

28. (i) பெறுதியைப் பரிட்சிப்பதன் மூலம் $\dfrac{x}{(x-1)\,(x-4)}$ என்பதன் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$y = \dfrac{x}{(x-1)\,(x-4)}$ எனும் வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

$-1 < k < -\dfrac{1}{9}$ இற்கு $k(x-1)(x-4) - x = 0$ எனும் சமன்பாடு மெய்த்தீர்வுகளைக் கொண்டிராது என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t}{1+t^2}$ எனும் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு t ஒரு பரமானம். வளையி மீது ஒருபுள்ளி t இல் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐயும் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் காண்க. இதிலிருந்து வளையிமீதுள்ள கண நிலைப்புள்ளிக்ளையும் அவற்றின் இயல்புகளையும் காண்க.

(1982)

29. (i) முதற் தத்துவங்களிலிருந்து $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இதிலிருந்து $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ என உய்த்தறிக.

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ (b) $\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|$

(ii) $y = e^{m\tan^{-1}x^2}$ எனின்

$$\left(1+x^4\right)\frac{dy}{dx} = 2mxy$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\left(1+x^4\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(2x^2-m\right)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$

எனக்காட்டுக.

(1983)

30. (i) முதலாவது பெறுதியை மட்டும் கருத்திற் கொண்டு

$$f(x) = \frac{(x-5)^3(4x+1)}{(x+1)}$$ என்னும் சார்பின் உயர்வு, இழிவுப்

பெறுமானங்களைக் காண்க $y = f(x)$ இன் வரைபினைப் பருமட்டாக வரைக., (5,0) எனும் புள்ளியைப்பற்றி யாது கூறுவீர்?

(ii) $ay^2 = x^3$ எனும் வளையி மீதுள்ள புள்ளி $P\left(at^2, at^3\right)$ யில் வரையப்பட்ட தொடலி வளையியை மீண்டும் Q வில் சந்திக்கிறது. Q வின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

O உற்பத்தியும், N, P யிலிருந்து x அச்சுக்கான செங்குத்தின் அடியும். R, PQ வினதும் y அச்சினதும் இடை வெட்டும் புள்ளியும் எனின் OQ உம் RN உம் x அச்சுக்குச் சமமாகச் சாய்ந்துள்ளன என நிறுவுக.

(1983)

31. (i) f உம் g உம் x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளெனின்

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$ என நிறுவுக.

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(a) $e^{x^2}\cdot\sin 2x$ (b) $\sqrt{x}\,\sin^{-1}(2x-1)$

(c) $\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}\right)\ln\left|\sec x + \tan x\right|$

(ii) α உம் β உம் ஒருமையாக இருக்க $(\alpha+\beta x)e^{\frac{y}{x}} = x$ எனின்

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$$ என நிறுவுக

(1984)

32. (i) $\frac{x^3}{1+x^4}$ என்பதன் முதலாவது பெறுதியை மாத்திரம் கொண்டு இதன் உயர்வுப் பெறுமானத்தையும் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் காண்க. இந்த வளையிக்கு ஒரு பருமட்டான வரிப்படம் வரைக.

(ii) $x = e^{\theta}\cos\theta,\ y = e^{\theta}\sin\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி தரப்படுகிறது. பரமானம் θ ஆகவுள்ள புள்ளி P யில் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
வளையியின் வழியே P மாறும்போது OP யிற்கும் P யிலுள்ள தொடலிக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ஒருமையாக அமையும் காட்டுக. இங்கு O என்பது ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி ஆகும்.

(1984)

33. (a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ எனின் $\sin x < x < \tan x$ எனக் கேத்திரகணித முறையால் நிறுவுக. இதிலிருந்து நேர்ப்பெறுமானங்களுக்கூடாக $x \to 0$ ஆக $\frac{\sin x}{x} \to 1$ எனக் காட்டுக. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$ ஐக் காண்க.

(b) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(i) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (ii) $\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq 1)$

(c) $y_n = \sec x \cdot \tan^n x$ எனின்.

$\dfrac{d y_n}{d x} = n y_{n-1} + (n+1) y_{n+1}$ எனக் காட்டுக.

n இற்குப் பொருத்தமான பெறுமானத்தைக் கொடுப்பதன் மூலம்

$\int \sec x \tan x \, dx$ என்பதைக் காண்க.

(1985)

34. (i) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ எனின் $\sin x < x < \tan x$ எனக் கேத்திர கணிதமுறையால் நிறுவுக. x ஆனது நேர்ப்பெறுமானங்களுக்கூடாக O ஐ அணுக

$\dfrac{\sin x}{x}$ இன் எல்லையை உய்த்தறிக.

பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x + \tan 7x}{6x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + x - \cos x}{\sin x}$

(ii) $y_n = \sin^n x$ என்க. இங்கு n யாதாயினும் ஒரு முழுஎண்

$\dfrac{d^2 y_n}{d x^2} = n(n-1)\, y_{n-2} - n^2 y_n$ எனக் காட்டுக.

$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} y_n \, dx \quad (n > 1)$ என்க.

$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} \dfrac{d^2 y_n}{dx^2} dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $I_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

I_4 இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(1986)

35. (i) n என்பது ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்க

$\lim_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

n ஒரு மறை நிறை யெண்ணாக இருக்க இம்முடிபு சரியென அதிலிருந்து உய்த்தறிக.

$n\,(\neq 0)$ யாதேனும் ஒரு நிறையெண் எனின்,

$\dfrac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$ என அதிலிருந்து காட்டுக.

(ii) முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து

$\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ என நிறுவுக.

$\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$ ஐக் காண்க.

x ஐக் குறித்து $\{\ln|\tan^{-1} x|\}^2$ ஐ வகையிடுக.

(iii) $y = x \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ என்க.

$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{1}{(1+x)} + \dfrac{1}{(1-x)}$ என நிறுவுக.

(1987)

36. (i) பெறுமானம் காண்க

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \sin 3x}{x - \sin 3x}$ (b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x) \sec 2x$

(ii) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(a) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$; a ஒரு மாறிலி

(b) $\tan\left(2\tan^{-1}\dfrac{x}{2}\right)$

(c) $\sqrt{1+\sin^2\sqrt{x}}$

(iii) $y=e^x\sin x$ எனின்

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda\dfrac{dy}{dx}+\mu y=0$ ஆகுமாறு λ,μ ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க. (1988)

37. (i) முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து $\dfrac{\sin x}{x}$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

(ii) a, b மாறிலிகளாக இருக்க, $\cos^{-1}\left(\dfrac{a\cos x+b}{b\cos x+a}\right)$ ஐ, x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(iii) y என்பது x இன் ஒரு சார்பாகவும், $x=\tan\theta$ ஆயுமிருக்க $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\dfrac{dy}{d\theta}, \dfrac{d^2y}{d\theta^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

$(1+x^2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+y=0$ எனின்

$\dfrac{d^2y}{d\theta^2}+y=0$ என நிறுவுக.

(1989)

38. (i) முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து $\dfrac{\tan x}{x}$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

(ii) a, b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்கும்போது

$\tan^{-1}\left(\dfrac{a-b\sin x}{b+a\sin x}\right)$ ஐ, x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(iii) y என்பது x இன் ஒரு சார்பாகும் $x=\sin\theta$ ஆகும்.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\dfrac{dy}{d\theta}, \dfrac{d^2y}{d\theta^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\cdot\dfrac{dy}{dx}+ky=0$ எனின்

$\dfrac{d^2y}{d\theta^2}+ky=0$ என நிறுவுக.

(1990)

39. (i) $\sqrt{1-x^2}$ இன் பெறுதியை முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(ii) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$, $Z=\sin^{-1}x$ எனின்

$\dfrac{dy}{dz}$ ஐக் காண்க.

(iii) y என்பது x இன் சார்பாகும் $x=\sqrt{1-z^2}$ ஆகும்.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\dfrac{dy}{dz}, \dfrac{d^2y}{dz^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பாக எடுத்துரைக்க.

$(1-z^2)\dfrac{d^2y}{dz^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dz}+z^2y=0$ எனின்

$x\neq 0$ இற்கு $\dfrac{d^2y}{dz^2}+y=0$ என நிறுவுக.

(1990 Special)

40. (i) u, v என்பன x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகள் எனின் $\dfrac{d}{dx}(uv)$ இற்குரிய சூத்திரம் ஒன்றை முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து பெறுக.

(ii) $y=\dfrac{u}{v}$ எனின், மடக்கைகளை எடுத்துப் பின்னர் வகையிடுவதன்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மூலம் $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$ எனக் காட்டுக

(iii) u_i, v_i என்பன x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளெனின்

$$y = \frac{u_1 \cdot u_2 \,.....\, u_n}{v_1\, v_2 \,.....\, v_n}$$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = y \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx} - \frac{1}{v_i}\frac{dv_i}{dx_i} \right)$$ எனக் காட்டுக.

(iv) $\tan^{-1} x$ ஐக் குறித்து $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ ஐ வகையிடுக.

(1991)

41. (i) x ஐக் குறித்து $\operatorname{cosec} x$ இன் பெறுதியை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(ii) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

(iii) $y = \tan(x+y)$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ y இல் மாத்திரம் பெறுக.

(1991 **Special**)

42. (i) f என்பது x இன் வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாகவும் $f(x) > 0$ ஆகவும் இருக்க, x குறித்து $\sqrt{f(x)}$ இன் பெறுதியை முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து பெறுக.

(ii) x குறித்து $\tan^{-1} x$ இன் பெறுதியைக் காண்க

$x = \tan\theta$ என எடுத்தும் x குறித்து $\tan^{-1} x$ இன் பெறுதியைப் பயன்படுத்தியும்

$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ என்பவற்றின் பெறுதிகளைக் காண்க.

(iii) $y = \left(\sin^{-1} x\right)^2$ எனின்

$$\left(1-x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$$ எனக் காட்டுக.

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\cdot\frac{dy}{dx} = 2$$ என உய்த்தறிக.

(1992)

43. (a) $-1 < x < 1$ ஆகும்போது பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

விடைகள் இரண்டும் சமமாக இருப்பது ஏன் என விளக்குக.

(b) முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து x குறித்து $\sec x$ இன் பெறுதியைக் காண்க. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் $y = (\sec x + \tan x)^{1/2}$ ஆகவும் இருப்பின்

(i) $2\frac{dy}{dx} = y\sec x$ எனவும்

(ii) $2\frac{d^2y}{dx^2} = (\sec x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}$ எனவும் நிறுவுக.

(1993)

14. (a) $x \neq 0$ ஆகும்போது முதற் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ஐப் பெறுக.

(b) $y = e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$ எனில் $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\frac{d^3y}{dx^3}$ என்பது λy என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு λ தீர்மானிக்கபடவேண்டிய ஒரு மாறிலியாகும்.

(c) $x = \sin\theta$, $y = \sin n\theta$ ஆக இருக்கட்டும். இங்கு n ஒரு மாறிலியும் $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும் n, θ ஆகியவற்றின் சார்பில் $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகியவற்றைப் பெற்று இதிலிருந்து

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$ எனவும் காட்டுக.

(1994)

45. **(i)** முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து $y = -\cot x - x$ என்ற சார்பின் பெறுதியைக் காண்க.

(ii) y என்பது x இன் ஒரு சார்பாக இருக்க, அவை

$$x\frac{dy}{dx} = 3\left(y^2x^6 - y + 4\right)$$ என்பதால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன

(a) நேரடிப் பிரதியீடு மூலம்

$y = \frac{2}{x^3}\tan\left(2x^3 - \alpha\right)$ என்பது மேற்போந்த தொடர்பைத் திருப்தி செய்யுமெனக் காட்டுக இங்கு α ஓர் ஒருமை.

(b) இடு தொடர்பானது $\frac{dv}{dx} = 3x^2(V+4)$ என்பதற்கு ஒடுக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு $V = x^3y$ ஆகும்.

(iii) $x = 2t^3 + 1$, $y = 4t^4 - 1$ எனில்.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$ எனக் காட்டுக.

(1995)

46. **(i)** பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x - x}{\tan 3x - 2x}$

(ii) முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x$ என நிறுவி

$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$ என்பதை உய்த்தறிக.

(iii) (a) $y = \sin(\sin x)$ எனின்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x \cdot \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$$ எனக் காட்டுக.

(b) k ஒருமாறிலியாகவும், $\theta \neq 0$, $\cos\theta \neq 0$ ஆகவும் இருக்க.

$x = k(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = k(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ எனின்,

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஆகியவற்றை θ வின் சார்புகளாகக் காண்க.

(1996)

47. **(a)** பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right\}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\tan^2 4x - x^2}$

(b) x குறித்து $x\cos x$ இன் பெறுதியை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(c) $y = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=2$$ எனக் காட்டுக.

48. $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+2)(x-4)}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. f இன் உயர்வு, இழிவுகள் எவையேனும் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க. அத்துடன் $f(x)$ இன் வரையின் நிலைக்குத்து அணுகு கோட்டினதும், கிடை அணுகு கோட்டினதும் சமன்பாடுகளைப் பெற்று $f(x)$ இன் வரையைப் பரும்படியாக வரைக.

$f(x)$ இன் வரையைப் பயன்படுத்தி $f(x)-\ln(x-3)$ இன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்க.

(1997)

49. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$ ஐக் காண்க.

(ii) $o<x<\frac{\pi}{2}$ இல் $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$ எனக் காட்டுக.

(iii) $x>0$ இற்கு $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ எனில்

$$2y\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\frac{1}{4\sqrt{x\left(x+\sqrt{x}\right)}}$$ எனக் காட்டுக.

50. (i) (a) a, b என்பன வேறு வேறான நிறை எண்களாக இருக்க

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(ax^b-bx^a\right)}{x^b-x^a}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) y ஆனது x இன் ஒருவகையிடத்தக்க சார்பாகவும், x ஆனது z இன் ஒருவகையிடத்தக்க சார்பாகவும் இருப்பின் முதற் கோட்பாடுகள் மூலம்.

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}$$ என நிறுவுக.

$0<x<1$ ஆக இருக்கும் போது $\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ குறித்து $\cos^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ ஐ வகையிடுக.

(C) x என்பது நேராகவும் $x^y=e^{x-y}$ ஆகவும் இருப்பின் $x\neq\dfrac{1}{e}$ இற்கு $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$ எனக் காட்டுக.

(1998)

51. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$ எனக் கொள்க.

(i) x இன் எம் மெய்ப் பெறுமானத்திற்கு $f(x)$ ஆனது $-7-4\sqrt{3}$ இற்கும், $-7+4\sqrt{3}$ இற்குமிடையே இருப்பதில்லை எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x)$ ஐ $A+\dfrac{B}{(x-3)}+\dfrac{C}{(x-4)}$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க. இங்கு A, B, C என்பன மாறிலிகள். இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக f இன் உயர்வுகளையும், இழிவுகளையும் காண்க.

(iii) f இன் நிலைக்குத்து அணுகு கோட்டினதும், கிடை அணுகு கோட்டினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(iv) f இன் வரையைப் பரும்படியாக வரைக.

(1998)

52. (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{\sqrt{20+\sin^2 x}-\sqrt{20}}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $x > 1$ இற்கு $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ எனின் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(iii) $x^2 + 2xy - y^2 = \tan^{-1} x - 9$ எனின் புள்ளி (0,3) இல் $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

53. (a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left\{ \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}} \right\}$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

x ஆனது $\dfrac{\pi}{2}$ ஐ அணுகும் போது மேற்குறித்த சார்புக்கு எல்லை இருக்கிறதா? உமது விடையை மெய்ப்பிக்க.

(b) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ எனின் $x = 1$ ஆகும் போது $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(c) $y = \left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^2$ எனின்,

$$\left(1+x^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y \text{ எனக்காட்டுக.}$$

54. $f(x) = (x-1)^2 (x+1)$ ஆக இருக்கட்டும்

$y = f(x)$ இன் வரைபைப் பருமட்படியாக வரைந்து, அது ஆள்கூற்றச்சுக்களைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகளையும் திரும்பற்புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகளையும் காட்டுக.

அதோடு $y = \dfrac{1}{f(x)}$ இன் வரைபையும் பருமட்படியாக வரைந்து

(i) அது y அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும்
(ii) திரும்பற் புள்ளிகளின் (இருப்பின்) ஆள் கூறுகளையும்
(iii) அணுகு கோடுகளையும் காட்டுக.

(1999)

55. (a) பெறுமானங் காண்க. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(2\sin x)}{1 - \cos 2x}$

(b) $y = e^{k \sin^{-1} x}$ எனின் $\dfrac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = ky$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $k-$ ஒரு மாறிலி $x = \dfrac{1}{2}$ ஆக, $\dfrac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(c) A, B, C என்னும் மூன்று நகரங்கள் $A\hat{B}C = \dfrac{\pi}{2}$, $AB = 15km$, $BC = 50km$ ஆகுமாறு AB, BC ஆகிய நேர்வீதிகளால் தொடுக்கப் பட்டுள்ளன. நகர் A யை வீதி BC இல் உள்ள ஓர் இடம் D உடன் தொடுக்கும் வேறொரு நேர்வீதியை அமைப்பதற்கான உத்தேச செயற்றிட்டம் உள்ளது. ஒரு காருக்காகப் பிரிவு DC யிலும் உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ள வீதி AD யிலும் அனுமதிக்கப்பட்டுள்ள உயர் கதிகள் முறையே $50\,kmh^{-1}$, $40\,kmh^{-1}$ ஆகும். நகர் A யிலிருந்து $x\,km$ தூரத்தில் D இருப்பின் அனுமதிக்கப்பட்ட உயர் கதிகளில் கார் செல்வதகாக் கொண்டு அது A யிலிருந்து D யினூடாகச் செல்வதாகக் எடுக்கும் மொத்த நேரம் $T(x)$ ஐ மணித்தியாலங்களில் காண்க. O விலிருந்து $50km$ இற்கு x அதிகரிக்கும்போது $\dfrac{dT}{dx}$ இன் குறியைப் பரிசோதிக்க. கார் ஒன்
A யிலிருந்து C வரைக்குமான பயணத்தை ஆகவும் குறுகிய நேரத்தி பூர்த்தி செய்வதைச் சாத்தியமாக்குமாறு D யிற்கு மிகப் பொருத்தமா இடத்தைக் காண்க.

(2000

56. (a) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ எனின்,

$$y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0; \quad t \neq 2n\pi, \quad m \in Z \text{ எனக் காட்டு}$$

(b) A, B, C என்னும் மூன்று நகரங்கள் $AB = AC$ ஆகுமாறு இருசமபக் முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளில் உள்ளன. $BC = 12\,km$ உம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

A யினூடான குத்துயரம் $16 km$ உம் ஆகும். இழிவுக் குழாய் அளவைப்பயன்படுத்தி A, B, C ஆகிய மூன்று நகர்களுக்கும் குழாய் நீ வழங்குவதற்கு A யினூடான குத்துயரத்தின் வழியே A யிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் கிணறு இருத்தல் வேண்டும்.

(2001

57. (a) $y = e^{4x} - \sin 3x$ எனின் $\frac{d^2 y}{d x^2} - 8\frac{d y}{d x} + 25 y = 0$ எனக் காட்டுக.

$\left(\frac{d y}{d x}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) திண்மக்கோளம் ஒன்றிலிருந்து கோளத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்கின்ற அச்சைக் கொண்ட ஒரு செவ்வட்ட உருளை வெட்டப்படுகிறது. உருளையின் கனவளவானது கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ இற்கு மேற்பட முடியாதெனக் காட்டுக.

(2002

58. (a) $y = e^{\cos x}$ எனின்

$\left(\frac{d y}{d x}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^4 y}{d x^4}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^5 y}{d x^5}\right)_{x=0}$

ஐக் காண்க.

(b) $y = \frac{2x}{1+x^2}$ எனின் $\frac{d y}{d x} = 0$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

y யின் அந்த நிலையான பெறுமானங்களின் இயல்பை முதற் பெறுமதியின் நடத்தையை மாத்திரம் கருத்திற் கொண்டு ஆராய்க.

$y = \frac{2x}{1+x^2}$ எனும் வளையியைப் பரும்படியாக வரைக.

(2003

59. (a) $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$ என்க.

$\frac{d y}{d x} + y = 2 \cdot e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x)$ எனக் காட்டுக.

$\frac{d^2 y}{d x^2} + p\frac{d y}{d x} + q y = 0$ ஆகுமாறு p, q எனும் இரு எண்களைத் துணிக.

$\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_{x=0}$ ஐக் துணிக.

(b) செவ்வகச் சுவரொட்டி ஒன்று அதன் இடப்பக்கத்திலும் வலப் பக்கத்திலும் ஒவ்வொன்றும் $6 cm$ அகலமுள்ள ஓரங்களினாலும் மேற்பக்கத்திலும் கீழ்ப்பக்கத்திலும் ஒவ்வொன்றும் $8 cm$ அகலமுள்ள ஓரங்களினாலும் சூழப்பட்ட $972 cm^2$ பரப்பளவுள்ள ஒரு செவ்வக அச்சிடப்பட்ட பிரதேசத்தைக் காட்சிப்படுத்துமாறு செய்ய வேண்டியுள்ளது. மிகச் சிறிய பரப்பளவைக் கொண்ட சுவரொட்டியின் பரிமாணங்களைக் காண்க.

(2004)

60. (a) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$ எனின் $(1 - x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} - x\frac{d y}{d x} - 1 = 0$

எனக் காட்டுக.

$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_{x=0}, \left(\frac{d^4 y}{d x^4}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) சதுர அடியை உடையதும் மூடி இல்லாததும் $256 cm^2$ கொள்ளளவுள்ளதுமான ஒரு செவ்வகப் பெட்டியை அமைக்க வேண்டியுள்ளது இதன் செவ்வகப் பக்கங்களுக்குத் தேவைப்படும் ஆக்கப் பொருளின் ஒரு சதுர சென்ரி மீற்றருக்கான செலவு, அடிக்குத் தேவைப்படும் ஆக்கப் பொருளின் ஒரு சதுர சென்ரி மீற்றருக்கான செலவின் 8 மடங்காக இருப்பின் மிக மலிவான பெட்டியின் பரிமாணங்களைக் காண்க.

(2005)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. தொகையீடு (Integration)

5.1 அறிமுகம்

தொகையிடுதலாகிய செய்கை, வகையிடுதலாகிய செய்கைக்கு நேர்மாறு என்பது இங்கு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$f(x)$ ஐ வகையிடும் போது பெறப்படும் சார்பு $f'(x)$ ஆகும்.

$f'(x)$ ஐத் தொகையிடும் போது பெறப்படும் சார்பு $f(x)$ ஆகும்.

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

$\int g(x)\,dx$ என்பதில் $g(x)$ என்பது தொகையீட்டுச்சார்பு ஆகும்.

c என்பது ஒரு மாறிலியாக இருக்க $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$;

$$\frac{d}{dx}[f(x)+c] = f'(x) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $\int f'(x)\,dx = f(x)+c$; இங்கு c தொகையீட்டுமாறிலி எனப்படும்.

உதாரணமாக,

$$\frac{d}{dx}(x+c) = 1; \text{ எனவே } \int 1\,dx = \int dx = x+c$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+c) = 2x; \text{ எனவே } \int 2x\,dx = x^2+c$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}+c\right) = x; \text{ எனவே } \int x\,dx = \frac{x^2}{2}+c$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+c\right) = x^2; \text{ எனவே } \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+c$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right] = x^n; \quad (n \neq -1), \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

முன்னர் கற்ற வகையீடுகளிலிருந்து சில சார்புகளின் தொகையீடு கீழே தரப்பட்டுள்ளது. தொகையீட்டு மாறிலி தவிர்க்கப்பட்டுள்ளது.

1) $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = x^n$; $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n+1 \neq 0)$

2) $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$; $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

3) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$; $\int \cos x\,dx = \sin x$

4) $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$; $\int \sin x\,dx = -\cos x$

5) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$; $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

6) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$; $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$

7) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$; $\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x$

8) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$; $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x$

9) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$; $\int e^x\,dx = e^x$

10) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ $(-a<x<a)$

11) $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \cos^{-1}\frac{x}{a}$ $[-a<x<a]$

12) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2+x^2}$; $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தேற்றங்கள் :

(i) $\int c f(x) dx = c \int f(x)\, dx$; c − மாறிலி

(ii) $\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

(iii) $\int f'(ax)\, dx = \frac{1}{a} f(ax)$; a − மாறிலி

உதாரணம் 1

பின்வரும் கோவைகளின் தொகையீடுகளை எழுதுக.

(i) $x^{10},\ x^{20},\ x^{-5},\ \sqrt{x},\ \frac{1}{\sqrt{x}},\ \frac{1}{x^{10}}$

(ii) $(x+3)^2,\ \left(2x^3 - 3x + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}\right)$

(i) $\int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + c$

$\int x^{20} dx = \frac{x^{21}}{21} + c$

$\int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c$

$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$

$\int \frac{1}{x^{10}}\, dx = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-9}}{-9} + c = -\frac{1}{9x^9} + c$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $\int (x+3)^2 dx = \frac{(x+3)^3}{3} + c$

$\int \left(2x^3 - 3x + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}\right) dx$

$= \int \left(2x^3 - 3x + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-3}\right) dx$

$= 2\int x^3 dx - 3\int x\, dx + \frac{1}{2}\int x^{-2} dx - \frac{1}{3}\int x^{-3} dx$

$= 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{(-1)} - \frac{1}{3}\frac{x^{-2}}{(-2)} + c$

$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + c$

உதாரணம் 2

தொகையிடுக.

(i) $\int (2x+1)^3 dx,\quad \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$

(ii) $\int \frac{x^2}{x+1} dx,\quad \int \frac{x+1}{x^2} dx,\quad \int \frac{x+1}{x+2} dx$

(i) $\int (2x+1)^3 dx, = \frac{(2x+1)^4}{4} \times \frac{1}{2} + c = \frac{(2x+1)^4}{8} + c$

$\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \int (2x+1)^{-3} dx = \frac{(2x+1)^{-2}}{-2} \times \frac{1}{2} + c$

$= -\frac{1}{4(2x+1)^2} + c$

(ii) $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int \frac{x^2-1+1}{x+1}\,dx = \int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$$= \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} + \ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{x+1}{x^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int x^{-2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{x+1}{x+2}\,dx = \int \frac{x+2-1}{x+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= x - \ln|x+2| + c$$

உதாரணம் 3

தொகையிடுக.

(i) $\int \sin 3x\,dx$, $\int \sin^2 x\,dx$, $\int \cos^2 2x\,dx$

(ii) $\int \sin^3 x\,dx$, $\int \tan^2 x\,dx$

(i) $\int \sin 3x\,dx = -\frac{\cos 3x}{3} + c$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right] + c$$

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right] + c$$

(ii) $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)\,dx$

$$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right] + c$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + c$$

பயிற்சி 5 (a)

தொகையிடுக.

1) (i) $\int 6x^5\,dx$, $\int 2x^{15}\,dx$, $\int (x+1)^2\,dx$

(ii) $\int (x^3+3x^2+3x+1)\,dx$, $\int (5x+2)^4\,dx$

2) $\int (x-1)^4\,dx$, $\int \frac{1}{(2x+5)^4}\,dx$

3) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$, $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

4) $\int \frac{x^3+1}{x-1}\,dx$, $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$

5) $\int \cos^2 x\,dx$ $\int \cot^2 x\,dx$

6) $\int \sin 4x \cos 2x\,dx$ $\int \cos 2x \sin x\,dx$

7) $\int \cos 3x \cos 2x\,dx$, $\int \sin 3x \sin 2x\,dx$

8) $\int \cos^3 x\,dx$, $\int \cos^4 x\,dx$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5.2 வரையறுத்த தொகையீடு

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ என்க.

$\int_a^b f(x)\,dx$ – வரையறுத்த தொகையீடு ஆகும்.

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ என வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணமாக $\int_2^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125-8}{3}$

$$= \frac{117}{3} = 39.$$

5.3 மேலும் சில தொகையீட்டு முறைகள்.

(a) பகுதிப்பின்னங்களாக்குதல்

உதாரணம் 4

(i) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ **(ii)** $\int \frac{dx}{x^3-4x}$

(iii) $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^2}\,dx$ **(iv)** $\int \frac{x+4}{x^2-2x}\,dx$

(i) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

(ii) $\int \frac{dx}{x^3-4x} = \int \frac{dx}{x(x-2)(x+2)}$

$$= \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}\right]dx$$

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = \frac{1}{8}$$

$$= \int \left[-\frac{1/4}{x} + \frac{1/8}{x-2} + \frac{1/8}{x+2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x+2| - \frac{1}{4}\ln|x| + c$$

$$= \frac{1}{8}\ln|x^2-4| - \frac{1}{4}\ln|x| + c$$

(iii) $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}\right]dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= [\ln|x+1|]_0^1 - 2\left[\frac{1}{x+1}\right]_0^1$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) - 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \ln 2 + 1$$

(iv) $\int \frac{x+4}{x^2+2x}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}\right)dx$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$A = 2, \quad B = -1$

$$= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+2| + c$$

(b) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$ என்னும் வடிவம்.

$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ஆகும்.

ஆகவே $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

தொகையிடுக.

(i) $\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6}\, dx$ (ii) $\int \frac{4x}{(x+2)(x^2+4)}\, dx$

(iii) $\int \frac{x+4}{3x^2+12x+13}\, dx$

(i) $$\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6}\, dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\, dx + \int \frac{3\, dx}{x^2+4x+6}$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\, dx + 3\int \frac{dx}{(x+2)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \ln|x^2+4x+6| + \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c$$

(ii) $$\int \frac{4x\, dx}{(x+2)(x^2+4)} = \int \left[\frac{A}{(x+2)} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\right] dx$$

$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 2$

$$= \int \frac{-1}{(x+2)}\, dx + \frac{x+2}{x^2+4}\, dx$$

$$= \int \frac{-1}{(x+2)}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{x^2+4} + \int \frac{4}{x^2+2^2}\, dx$$

$$= -\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + 4\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right| + 2\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

(iii) $$\int \frac{x+4}{3x^2+12x+13}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x+24}{3x^2+12x+13}\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\int \frac{(6x+12)\, dx}{3x^2+12x+13} + \int \frac{12\, dx}{3\left(x^2+4x+\frac{13}{3}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\int \frac{(6x+12)\, dx}{3x^2+12+13} + 4\int \frac{dx}{(x+2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln|3x^2+12x\ \ 13| + 4\sqrt{3}\tan^{-1}\sqrt{3}(x+2)\right] + c$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(c) $\int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx$ எனும் வடிவம்

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{ax^2+2bx+c}\right] = \frac{1}{2}\left(ax^2+2bx+c\right)^{-1/2} \times (2ax+2b)$$

$$= \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

ஆகவே $\int \frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx = \sqrt{ax^2+2bx+c}$ + மாறிலி; ஆகும்.

உதாரணம் 6

(i) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{4-x-x^2}}\,dx$ (ii) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{-5-6x-x^2}}\,dx$

(i) $$\int \frac{1+2x}{\sqrt{4-x-x^2}}\,dx = -2\int \frac{-\frac{1}{2}(1+2x)}{\sqrt{4-x-x^2}}\,dx$$

$$= -2\sqrt{4-x-x^2} + c$$

(ii) $$\int \frac{4x+5}{\sqrt{-5-6x-x^2}}\,dx = \int \frac{-4(-x-3)-7}{\sqrt{-5-6x-x^2}}\,dx$$

$$= -4\int \frac{(-x-3)}{\sqrt{-5-6x-x^2}} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x+3)^2}}$$

$$= -4\sqrt{-5-6x-x^2} - 7\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c$$

(d) பிரதியீட்டால் தொகையிடுதல்

உதாரணம் 7

(i) $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^3)^2}$ (ii) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (iv) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

(i) $\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^3)^2}$

$t = 1+x^3$ என்க.

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{3t} + c = \frac{-1}{3(1+x^3)} + c$$ ஆகும்.

(ii) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$

$$= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\,dx$$

$u = \sin x$ என்க.

$\frac{du}{dx} = \cos x$ ஆகும்.

$$= \int u^4(1-u^2)\,du$$

$$= \int (u^4-u^6)\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

$x = \frac{1}{u}$ என்க.

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-a^2}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{1-a^2u^2}}$$

$$= \frac{-1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-u^2}}$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{u}{1/a}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^{-1}(au) + c$$

$$= -\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) + c$$

(iv) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

$x+1 = \frac{1}{u}$ என்க.

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{1-\left(\frac{1}{u}-1\right)^2}}$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{2u-1}}$$

$$= -\sqrt{2u-1} + A = -\sqrt{\frac{2}{x+1}-1} + A$$

$$= -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + A$$

(e) $\int \operatorname{cosec} x\, dx$, $\int \sec x\, dx$ என்பவற்றைக் காணல்.

(i) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}\, dx$

$$= \int \frac{\operatorname{cosec} x\cot x + \operatorname{cosec}^2 x}{(\operatorname{cosec} x + \cot x)}\, dx$$

$$= -\ln\left|\operatorname{cosec} x + \cot x\right| + c$$

பிரதியீட்டுமுறை.

$$\int \operatorname{cosec} x \cdot dx = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ என்க.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\sec^2 x/2 = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$$

(ii) $\int \sec x \, dx$

$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{(\sec x + \tan x)} dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

பிரதியீட்டுமுறை.

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$t = \tan \frac{x}{2}$ எனக.

$$\int \sec dx = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2}$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}}\right| + c$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$$

(iii) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} \quad (a+b>0)$

$t = \tan \frac{x}{2}$ எனக.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{a+b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

வகை (i) $a-b>0$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

$$= \frac{2}{a-b} \int \frac{dt}{\frac{a+b}{a-b} + t^2}$$

$$= \frac{2}{a-b} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} + c$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வகை (ii) $a-b=0$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{2a} = \frac{1}{a}\int dt$$

$$= \frac{1}{a}\, t + c = \frac{1}{a}\tan\frac{x}{2} + c$$

வகை (iii) $a-b<0$

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \int \frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

$$= \int \frac{2dt}{(b+a)-(b-a)t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b+a}}\int\left[\frac{dt}{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,t} + \frac{dt}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,t}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ \ln\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{x}{2}} + c$$

பயிற்சி 5 (b)

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக.

1) (i) $\frac{x}{x^2-1}$ (ii) $\frac{x+1}{x^2+1}$ (iii) $\frac{2x+1}{x^2+4x+3}$

(iv) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ (v) $\frac{2x+7}{x^2+4x+5}$ (vi) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$

2) (i) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{2+x}{\sqrt{1-x^2}}$ (iii) $\frac{3x+7}{\sqrt{4-2x-2x^2}}$

3) பெறுமானம் காண்க.

(i) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3}\,dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^2}\,dx$ (iii) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$

(iv) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+6x-3x^2}}$ (v) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x)^3}$ (vi) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக.

4) (i) $\frac{x^2}{x^6+1}$ (ii) $\frac{3x+1}{(9x^2+6x+2)^5}$ (iii) $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

(iv) $\sec^2 x\tan x$ (v) $\sin^5 x$ (vi) $\cos^7 x$

(vii) $\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}$ (viii) $\frac{1}{x\ln x}$ (ix) $\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

(x) $\frac{1}{5+3\cos x}$

5) பெறுமானம் காண்க.

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(2+\sin x)}\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}\,dx$

(iii) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{4-x}$ (iv) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2 x\cos 2x\,dx$

(v) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx\ \left(x=\sin^2\theta\right)$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}\ \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(vii) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$ $\left(x+1=\frac{1}{t}\right)$

(viii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+3\cos x}$ $\left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$

(ix) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\left(x=\frac{1}{t}\right)$

(x) $I=\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{x+2}}$ ஆயின், $\sqrt{x+2} = u$

எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $I = a\tan^{-1} f + b$ எனும் வடிவில் எழுதுக..

$2x+5=\frac{1}{t}$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$I = p\sin^{-1} g + q$ எனும் வடிவில் எழுதுக.

இங்கு a, b, p, q, என்பன ஒருமைகளும், f, g என்பன x இன் சார்புகளும் ஆகும்.

(xi) $\int (x+1)(x+3)^5\, dx$ $(u = x+3)$

(xii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x = \tan\theta)$

(xiii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ $(x = a\sin\theta)$

(xiv) $\int \frac{2x+1}{(x-3)^6}\, dx$ $(t = x-3)$

(xv) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$ $(x = \sec^2\theta)$

(xvi) $\int_0^1 \frac{8}{3+4x}\, dx$, $\int_0^1 \frac{8}{\sqrt{3+4x}}\, dx$, $\int_0^1 \frac{8x}{3+4x}\, dx$.

(f) பகுதிகளாகத் தொகையிடல்.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$$

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int \frac{d}{dx}(uv)\, dx - \int v\frac{du}{dx}\, dx$$

$$\int u\frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\, dx$$

உதாரணம் 8

$$\int x^2 e^x\, dx$$

$u = x^2, \frac{dv}{dx} = e^x$ என எடுக்க,

$$\int x^2 e^x = x^2 e^x - \int e^x 2x$$

$$= x^2 e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] \qquad \left(x = u, \frac{dv}{dx} = e^x\right)$$

$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x +$ மாறிலி

உதாரணம் 9

$$\int x^2 \sin x\, dx$$

$u = x^2, \frac{dv}{dx} = \sin x$ என எடுக்க,

$$\int x^2 \sin x\, dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)\, 2x\, dx$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\, dx\right]\left[u = x\frac{dv}{dx} = \cos x\right]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \text{ மாறிலி.}$$

உதாரணம் 10

$$\int \tan^{-1} x\, dx$$

$u = \tan^{-1} x,\ \dfrac{dv}{dx} = 1$ என எடுக்க.

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \text{ மாறிலி.}$$

உதாரணம் 11

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx,\ \int e^{ax}\cos bx\, dx$$

$I = \int e^{ax}\sin bx\, dx,\ J = \int e^{ax}\cos bx\, dx$ என்க

$u = \sin bx,\ \dfrac{dv}{dx} = e^{ax}$ என எடுக்க,

$$I = \int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}\, b\cos bx\, dx$$

$$aI = e^{ax}\sin bx - bJ$$

$$aI + bJ = e^{ax}\sin bx \longrightarrow (1)$$

$$J = \int e^{ax}\cos bx\, dx$$

$$u = \cos bx,\ \frac{dv}{dx} = e^{ax}$$

$$J = \int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx - \int \frac{e^{ax}}{a}(-b\sin bx)\, dx$$

$$aJ = e^{ax}\cos bx + bI$$

$$-bI + aJ = e^{ax}\cos bx \longrightarrow (2)$$

(1), (2) இலிருந்து, $I = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$

$$J = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}$$

உதாரணம் 12

$I_n = \int \sec^n\theta\, d\theta$ எனின் $(n \ge 2)$

$(n-1)\, I_n = \sec^{n-2}\theta\tan\theta + (n-2)\, I_{n-2}$ என நிறுவுக.

$$I_n = \int \sec^n\theta\, d\theta$$

$$= \int \sec^{n-2}\theta\ \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \sec^{n-2}\theta\tan\theta - \int \tan\theta\,(n-2)\sec^{n-3}\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\, d\theta$$

$$= \sec^{n-2}\theta\cdot\tan\theta - (n-2)\int \sec^{n-2}\theta\,\tan^2\theta\cdot d\theta$$

$$= \sec^{n-2}\theta\cdot\tan\theta - (n-2)\int \sec^{n-2}\theta\left(\sec^2\theta - 1\right) d\theta$$

$$= \sec^{n-2}\theta\cdot\tan\theta - (n-2)\left[\int \sec^n\theta\, d\theta - \int \sec^{n-2}\theta\, d\theta\right]$$

$$I_n = \sec^{n-2}\theta\cdot\tan\theta - (n-2)\left[I_n - I_{n-2}\right]$$

$$(n-1)\, I_n = \sec^{n-2}\theta\tan\theta + (n-2)\, I_{n-2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 13.

$$I_n = \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx \qquad (n \geq 0)$$ எனின்,

$$2(n+2)\, I_n = (2n+1)\, I_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$ எனக் காட்டுக.

$$I_n = \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$u = x^{n+\frac{1}{2}}, \ \dfrac{dv}{dx} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ என்க.

இப்பொழுது $v = \left(-\dfrac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$$I_n = \int x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[x^{n+\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$- \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}\right)(1-x)^{\frac{3}{2}} \left(n+\frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 0 + \frac{2n+1}{3} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{2n+1}{3} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)\, dx$$

$$3 I_n = (2n+1) \left[\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx - \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\, dx \right]$$

$$= (2n+1)\left[I_{n-1} - I_n \right]$$

$$(2n+4)\, I_n = (2n+1)\, I_{n-1}$$

பயிற்சி 5 (c)

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக.

1) (i) $x^4 e^x$ (ii) $\ln x$ (iii) $x \sec^2 x$ (iv) $x \sin x \cos x$

(v) $\sin^{-1} x$

2) (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x (x + \sin x)\, dx$ ஐக் காண்க.

(ii) $\displaystyle\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$

(iii) $\displaystyle\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx$

எனக் காட்டுக.

3) (i) $\displaystyle I_n = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ எனின் $(n > 1)$

$n.\, I_n + (n-1)\, I_{n-2} = x^{n-1}\sqrt{1+x^2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $t = u^2$ எனப் பிரதியிடலால்.

$\displaystyle\int_0^x \ln\left(t + \sqrt{t}\right) dt$ ஐக் காண்க.

4) (i) $\displaystyle I_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx \quad (n \geq 1)$ எனின் I_n ஐ I_{n-1} இல் எழுதுக.

I_5 ஐ e இல் காண்க.

(ii) $x = \dfrac{1}{y}$ எனப் பிரதியிடுவதால்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

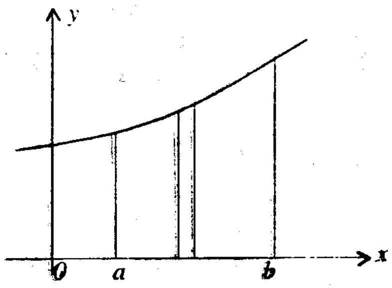
$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}$$ எனக் காட்டுக.

5) $x=\sin\theta$ அல்லது $x=\cos\theta$ அல்லது இரண்டு பிரதியீடுகளையும் உபயோகித்து $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5.4 வரையறுத்த தொகையீடும் அதன் பண்புகளும்

வரையறுத்த தொகையீடு பற்றி ஏற்கனவே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. வேறொரு முறையிலும் இதனைக் கருதலாம்.

$y=f(x)$ என்ற வளையியைக் கருதுக. $x=a$, $x=b$ என்ற நேர் வரைகளாலும் வளையியாலும், x அச்சாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு, சிறிய சம அகலங்களைக் கொண்ட செவ்வகக் கீலங்களாக, y அச்சுக்கு சமாந்தரமாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க. இவ்வாறான செவ்வகக் கீலங்களுள் ஒன்று PQRS ஆகும்.



OP = x, PQ = δx என்க.

செவ்வகம் PQRS இன் பரப்பளவு $= f(x)\,\delta x$

இவ்வாறான செவ்வகங்கள் எல்லாவற்றினதும் பரப்பளவு $= \sum_{x=a}^{b} f(x)\delta x$ ஆகும்.

$\delta x \longrightarrow 0$ ஆக, இச் செவ்வகங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு x = a இலிருந்து, x = b வரையான வளையின் கீழான பரப்பு ஆகும்.

$\therefore$ பரப்பளவு $$A = \lim_{\delta x\to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$ ஆகும்.

வரையறுத்த தொகையீட்டின் பண்புகள்

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$ ஆகும்.

1) $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$ ஆகும்.

2) $$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_o^{-a} f(-x)\,dx$$ ஆகும்.

$\int_0^a f(x)\,dx$ $\quad x=-y$ என்க. $\frac{dx}{dy}=-1$

$x: 0 \longrightarrow a$ எனின், $-x=y: 0 \longrightarrow -a$

$$= \int_0^{-a} f(-y)\,(-dy)$$

$$= -\int_0^{-a} f(-y)\,dy = -\int_0^{-a} f(-x)\,dx$$

3) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x)+f(-x)\}\,dx$$ ஆகும்.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

வலதுபக்கத்திலுள்ள முதலாவது தொகையீட்டைக் கருதுக.

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$; $\quad x=-y$ எனின் $\frac{dx}{dy}=-1$

$x: -a \to o;\ y=-x: a \longrightarrow o$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy)$$

$$= -\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

ஆகவே $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(-x) + f(x)\}\,dx$ ஆகும்.

குறிப்பு :

(i) $f(x)$ என்பது இரட்டைச் சார்பு எனின், $f(-x) = f(x)$ ஆகும். அதாவது சார்பு y அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீராகும்.

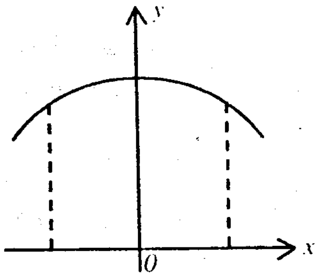
உதாரணம் : $f(x) = \cos x$ $f(x) = x^2$ என்பனவாகும்.

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \int_{o}^{a} \{f(-x) + f(x)\}\,dx$$

என்பதில்

$$= \int_{o}^{a} \{f(x) + f(x)\}\,dx$$

$$= 2\int_{o}^{a} f(x)\,dx$$ ஆகும்.



(ii) $f(x)$ என்பது ஒற்றைச்சார்பு எனின் , $f(-x) = -f(x)$ ஆகும். ஓர் ஒற்றைச் சார்பின் வரைபு எதிர்க்கால் வட்டங்களில் சமச்சீராகும்.

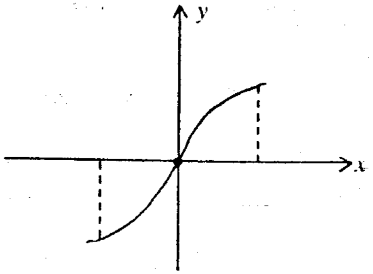
உதாரணம் : $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$ என்பனவாகும்.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(-x) + f(x)\}\,dx$ என்பதில்

$$= \int_{0}^{a} \{-f(x) + f(x)\}\,dx = \int_{0}^{a} 0\,dx = 0$$

உதாரணமாக. $= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx = 0$ ஆகும்..



4) $\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$ ஆகும்.

$\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ $x = a - y$ என்க

$$\frac{dx}{dy} = -1$$

$= \int_{a}^{0} f(a-y)(-dy)$ $x: 0 \longrightarrow a$, $a - x : a \longrightarrow 0$

$y : a \longrightarrow 0$

$$= \int_{0}^{a} f(a-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx.$$

உதாரணமாக,

$\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \sin\left(\pi/2 - x\right)dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$ ஆகும்.

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = [0-(-1)] = 1$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$ என நிறுவலாம்.

$f(x) = \sin^n x$ என்க.

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx$$

என்பதைப் பயன்படுத்த,

இங்கு $f(x) = sinx$

$a = \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\pi/2 - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$ ஆகும்.

உதாரணம் 14

(i) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$ என நிறுவுக.

(ii) $\int_{\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = 0$ எனக் காட்டுக.

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $\int_a^b f(x) \, dx$

$x = a + b - y$ என்க.

$\frac{dx}{dy} = -1, \quad y = a + b - x$

$x : a \longrightarrow b$

$a + b - x : b \longrightarrow a$

$y : b \longrightarrow a$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_b^a f(a+b-y)(-dy)$$

$$= -\int_b^a f(a+b-y) \, dy = \int_a^b f(a+b-y) \, dy = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$$

(ii) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(-x)}{1+\cos^2(-x)} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$= 0$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$ என்க $\longrightarrow$ (1)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\pi/2 - x\right)}{\cos\left(\pi/2 - x\right) + \sin\left(\pi/2 - x\right)}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\, dx \longrightarrow 2$$

$(1)+(2)$, $2I = \int_0^{\pi/2} dx$

$$2I = \pi/2$$

$$I = \pi/4$$

பயிற்சி 5 (d)

1) $\int_a^b f(tx)\,dx = \frac{1}{t}\int_{ta}^{tb} f(tx)\,dx$ என நிறுவுக. இங்கு t ஒரு மாறிலி.

2) $\int_0^a x^m (a-x)^n\,dx = \int_0^a x^n (a-x)^m\,dx$ என நிறுவுக.

3) $\int_0^a \left(ax - x^2\right)^3 \left\{x^3 + (x-a)^3\right\} dx = 0$ என நிறுவுக.

4) $I = \int_0^{\pi/2} \left(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(a\sin^2\theta + b\cos^2\theta\right) d\theta$

எனக் காட்டி. $I = \frac{\pi}{4}(a+b)$ என உய்த்தறிக.

இங்கு a, b என்பன மாறிலிகள்.

5) $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)$ என நிறுவுக.

$\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$ எனக் காட்டுக.

6) n ஓர் இரட்டை எண்ணாயிருக்க,

$\int_{-\pi}^{+\pi} x \sin^n x\,dx = 0$ எனவும்,

n ஓர் ஒற்றை எண்ணாயிருக்க,

$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin^n x\,dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$ எனவும் நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin^5 x\,dx$ ஐக் கணிக்க.

7) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+x)^2 \sin 2x\,dx = 2\pi$ என நிறுவுக.

8) பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\int_0^{\pi} \cos x \sin^2 2x\,dx = 0$

(ii) $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = 0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \ \sec^6 x \, dx = 0$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta} \, d\theta = 0$ (இங்கு n இரட்டைஎண்)

(v) $\displaystyle\int_0^3 x^2 \sqrt{3-x} \, dx = \frac{144\sqrt{3}}{45}$

(vi) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$

உதாரணம் 15

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$ ii) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx$

iii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan x} \, dx$ iv) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x} \, dx$

v) $\displaystyle\int \cot^5 x \, dx$ vi) $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^5 x \, dx$

vii) $\displaystyle\int \sec^6 x \ dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1-x}} \, dx$

$$= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx$

$u = \sin x$ என்க

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \ dx = \int \sqrt{\sin x} \ \cos^2 x \ \cos x \, dx$$

$$= \int u^{1/2} \left(1-u^2\right) du$$

$$= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{5/2} \right) du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x + c$$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan x} \, dx = \int \frac{1}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} \, dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x) + (-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} \, dx$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx + \int \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \ln|\cos x + \sin x|\right] + c$$

(iv) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$

$x = u^2$

$\frac{dx}{du} = 2u$

$\int \sin\sqrt{x}\, dx = \int \sin u\, 2u\, du$

$2\int u \sin u\, du = 2[u(-\cos u) -]\int(-\cos u)\,du$

$= 2\,[-u\cos n + \sin u] + c$

$= -2\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x} + c$

(v) $\int \cot^5 x\, dx = \int \cot^3 x \cot^2 x\, dx$

$= \int \cot^3 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx$

$= \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x - \int \cot^3 x\, dx$

$= \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^2 x - \int \cot x \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \cot x\, dx$

முதலாம் இரண்டாம் தொகையீட்டில்
u = cot x எனப்பிரதியிட

$\frac{du}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$

$= \int u^3(-du) + \int u\, du + \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

$= \frac{-u^4}{4} + \frac{u^2}{2} - \ln|\sin x| + A$

$= \frac{-\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + A$

(vi) $\int \operatorname{cosec}^5 x\, dx$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

$I = \int \operatorname{cosec}^5 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^3 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= \operatorname{cosec}^3 x\,(-\cot x) - \int(-\cot x)\, 3\operatorname{cosec}^2 x\,(-\operatorname{cosec} x \cot x\, dx)$

$= -\operatorname{cosec}^3 x \cot x - 3\int \operatorname{cosec}^3 x \cot^2 x\, dx$

$= -\operatorname{cosec}^3 x \cot x - 3\int \operatorname{cosec}^3 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$

$= -\operatorname{cosec}^3 x \cot x - 3\int \operatorname{cosec}^5 x + 3\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

$4I = -\operatorname{cosec}^3 x \cot x + 3\int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

$J = \int \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

$J = \int \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x)\, dx$

$= \operatorname{cosec} x\,(-\cot x) - \int(-\cot x)(-\operatorname{cosec} x \cot x)\, dx$

$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \int \operatorname{cosec} x \cot^2 x\, dx$

$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \int \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\, dx$

$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \int \operatorname{cosec}^3 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x\, dx$

$2J = -\operatorname{cosec} x \cot x + \int \operatorname{cosec} x\, dx$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= -\operatorname{cosec} x \cot x - \ln\left|\operatorname{cosec} x + \cot x\right| + c$$

$$4I = \left(-\operatorname{cosec}^3 x \cot x\right) + \frac{3}{2}\left[-\operatorname{cosec} x \cot x - \ln\left|\operatorname{cosec} x + \cot x\right| + c\right]$$

$$I = -\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^3 x \cot x - \frac{3}{8}\operatorname{cosec} x \cot x - \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{cosec} x + \cot x\right| + c$$

(vii) $\int \sec^6 x\, dx = \int \sec^4 x \sec^2 x\, dx$

$t = \tan x$ என்க

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 x\right)^2 \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \left(1 + t^2\right)^2 dt$$

$$= \int \left(1 + 2t^2 + t^4\right) dt$$

$$= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c$$

$$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$$

உதாரணம் 16

(i) n ஒரு நேர் நிறை எண் ஆகும் போது,

$$\int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta = \frac{2}{3+n}\int \sin\theta \cos^n\theta\, d\theta - \frac{\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta}{3+n}$$

என நிறுவுக.

(ii) m, n என்பன நேர் நிறை எண்களாக இருக்க,

$$\int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x\, dx = (-1)^m \frac{n}{(2m+1)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2}\int_0^{\pi/2} x^{n-2} \sin(2m+1)x\, dx$$

எனக் காட்டுக.

(i) $I = \int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta$

$$= \int \sin^2\theta \cos^n\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$u = \sin^2\theta \quad \frac{dv}{d\theta} = \cos^n\theta \sin\theta$$

$$I = \sin^2\theta\left(-\frac{\cos^{n+1}\theta}{n+1}\right) - \int\left(-\frac{\cos^{n+1}\theta}{n+1}\right) 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{n+1} + \frac{2}{n+1}\int \cos^n\theta \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{-\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{n+1} + \frac{2}{n+1}\int \cos^n\theta \sin\theta\left(1 - \sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{-\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{n+1} + \frac{2}{n+1}\left[\int \cos^n\theta \sin\theta\, d\theta - \int \cos^n\theta \sin^3\theta\, d\theta\right]$$

$$(n+1)I = -\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta + 2\int \cos^n\theta \sin\theta\, d\theta - 2I$$

$$I = \frac{2}{n+3}\int \cos^n\theta \sin\theta\, d\theta - \frac{\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{n+3}$$

(ii) $\int x^n \sin(2m+1)x\, dx$

$$u = x^n, \quad \frac{dv}{dx} = \sin(2m+1)x$$

$$\int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x\, dx = \left[x^n\left(\frac{-\cos(2m+1)x}{(2m+1)}\right)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(2m+1)x}{(2m+1)}\, n \cdot x^{n-1} dx$$

$$= 0 - \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(2m+1)x}{(2m+1)}\, n x^{n-1}\, dx$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \frac{n}{2m+1} \int_0^{\pi/2} \cos(2m+1)x \quad x^{n-1}\, dx$$

$u = x^{n-1},\ \frac{dv}{dx} = \cos(2m+1)x$ என்க.

$$= \frac{n}{2m+1}\left\{\left[x^{n-1}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)}\ (n-1)\,x^{n-2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{n}{2m+1}\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)} - \frac{(n-1)}{(2m+1)}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\ \sin(2m+1)\,x\,dx\right\}$$

$$= (-1)^m\frac{n}{(2m+1)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\ \sin(2m+1)x\,dx$$

உதாரணம் 17

பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி

$\int \sin(\ln x)\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

r ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் போது,

$I = \int x^r \sin(\ln x)\,dx,\ J = \int x^r \cos(\ln x)\,dx$ எனின்

$\left(1+\frac{r}{2}\right)I - \frac{r}{2}J = \frac{x^{r+1}}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] +$ மாறிலி என நிறுவுக.

$\int \cos(\ln x)\,dx$ ஐக் காண்க,

இதிலிருந்து I, J இற்கிடையில் இன்னொரு தொடர்பினைப் பெறுக.

$$I = \frac{x^{r+1}}{r^2+2r+2}\left[(r+1)\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{ மாறிலி}$$

என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ஐக் காண்க.

$\int \sin(\ln x)\,dx$

$$u = \sin(\ln x),\quad \frac{dv}{dx} = 1$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\ \sin(\ln x) - \int x\ \cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \longrightarrow (1)$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) - \int x\left[-\sin(\ln x)\right]\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \longrightarrow (2)$$

(1) , (2) இலிருந்து

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{ மாறிலி}$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] + \text{ மாறிலி}$$

$$I = \int x^r \cdot \sin(\ln x)\,dx.\quad J = \int x^r \cos(\ln x)\,dx$$

$$I = x^r\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] - \int\left[\frac{x}{2}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] r\cdot x^{r-1}\cdot dx$$

$$I = \frac{x^{r+1}}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] - \frac{r}{2}\int x^r\cdot\sin(\ln x)\,dx + \frac{r}{2}\int x^r\cos(\ln x)\,dx$$

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)I - \frac{r}{2}J = \frac{x^{r+1}}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{மாறிலி}$$

$$(2+r)I - rJ = x^{r+1}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{மாறிலி} \longrightarrow (3)$$

$$J = \int x^r\cdot\cos(\ln x)\,dx = x^r\cdot\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] -$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$-\int \frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right]\cdot r x^{r-1}\, dx$$

$$J = \frac{x^{r+1}}{2}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] - \frac{r}{2}I - \frac{r}{2}J$$

$$rI + (2+r)J = x^{r+1}\left[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right] + \text{மாறிலி} \quad \text{———}(4)$$

(3), (4) இலிருந்து,

$$I = \frac{x^{r+1}}{r^2+2r+2}\left[(r+1)\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{மாறிலி}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$$I = \int y^r \cdot \sin(\ln y)\, dy = \frac{y^{r+1}}{(r+1)^2+1}\left[(r+1)\sin(\ln y) - \cos(\ln y)\right] \text{——}(A)$$

$\ln y = bx$ என்க.

$y = e^{bx}$ $\quad \frac{dy}{dx} = b\cdot e^{bx}$ ஆகும்.

$I = \int y^r \sin(\ln y)\, dy$ என்பதில்

$y = e^{bx}$ எனப் பிரதியிட

$$I = \int \left(e^{bx}\right)^r \cdot \sin(bx)\cdot b\cdot e^{bx}\, dx$$

$$= b\int e^{bx(r+1)}\sin bx\cdot dx$$

$b(r+1) =$ என்க.

இப்பொழுது $I = b\int e^{ax}\cdot \sin bx\cdot dx$ இற்கு A இல் பிரதியிட

$$= \frac{e^{ax}\cdot b^2}{\left(a^2+b^2\right)}\left[\frac{a}{b}\sin(bx) - \cos bx\right]$$

எனவே $\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\sin(bx) - b\cos bx\right]$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 18

(i) $x = \tan\theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{2n-3}{n-2}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\int \cos 2x.\tan^3 x\, dx$ ஐக் காண்க.

(i) $x = \tan\theta$ என்க $\quad x : 0 \longrightarrow \infty$

$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta$ $\quad \tan\theta : 0 \longrightarrow \infty$

$\theta : 0 \longrightarrow \pi/2$

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^{2n}\theta} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-4}\theta\ \left(1-\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-4}\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2}\left(\cos^{2n-4}\theta\,\sin\theta\right)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-4}\theta - \int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\cos^{2n-3}\theta}{2n-3}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-4}\theta\ d\theta + \int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos^{2n-3}\theta}{2n-3}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta^{2n-4}\, d\theta + \left[-\frac{\sin\theta \cos^{2n-3}}{2n-3} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n-3}\theta}{2n-3} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \cos\theta^{2n-4}\, d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta^{2n-3}}{2n-3}\, d\theta$$

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2n-3} I_n$$

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-3} I_{n-1} \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \cdot \tan^3 x\ dx$

$$\int_0^{\pi/4} \left(2\cos^2 x - 1\right)\left(\sec^2 x - 1\right) \tan x\, dx$$

$$u = \sec^2 x$$

$$\frac{du}{dx} = 2\sec x\ (\sec x\ \tan x) = 2\sec^2 x\ \tan x = 2u\ \tan x$$

$$\tan x\ dx = \frac{du}{2u} \qquad x : 0 \longrightarrow \pi/4$$

$$\sec^2 x : 1 \longrightarrow 2$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{u} - 1\right)(u-1)\frac{du}{2u}$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{u^2} + \frac{3}{2u} - \frac{1}{2}\right) du$$

$$= \left[\frac{1}{u} + \frac{3}{2}\ln u - \frac{u}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\ln 2 - 1$$

5.5 ஒடுக்கற் சூத்திரம் (Reduction Formulae)

(i) $I_n = \int \sin^n x \cdot dx$ என்க.

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \cdot dx = \sin^{n-1} x\ (-\cos x) - \int (n-1)\sin^{n-2} x\left(-\cos^2 x\right) dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\ \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1 - \sin^2 x\right) dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\ \cos x + (n-1)\left[\int \sin^{n-2} dx - \int \sin^n x\ dx\right]$$

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cdot cox + (n-1)\ I_{n-2} - (n-1)\ I_n$$

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\ I_{n-2} \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin x\ dx$ எனின்,

$$I_n = \left[-\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{(n-1)}{n}\ I_{n-2}$$

$$\therefore\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ ஆகும்.}$$

(ii) $I_n = \int \cos^n x\ dx$

$$= \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \cdot dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \frac{d}{dx} \cdot (\sin x) dx$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int \sin x\ (n-1)\cos^{n-2} x\ (-\sin x)\ dx$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \left(1-\cos^2 x\right) dx$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\left[\int \cos^{n-2} x \, dx - \int \cos^n x \, dx\right]$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\left[I_{n-2} - I_n\right]$$

$$I_n = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$ ஆகும்.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \left[\frac{\cos x^{n-1} \cdot \sin x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

$$I_n = 0 + \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(iii) $I_n = \int x^n e^{ax} dx = \int x^n \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right) dx$

$$= x^n \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot n x^{n-1} \cdot dx$$

$$= \frac{x^n \cdot e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int e^{ax} \cdot x^{n-1} \cdot dx$$

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$ ஆகும்.

(iv) $\text{Im},n = \int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ எனின்

$(m+n)\,\text{Im},n = -\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x + (m-1)\, I_{m-2,\,n}$ எனக் காட்டுக.

$$\text{Im},n = \int \sin^{m-1} x \left(\cos^n x \sin x\right) dx$$

$$= \int \sin x^{m-1} x \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos^{n+1} x}{n+1}\right) dx$$

$$= \frac{-\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x}{n+1} + \int \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} (m-1)\sin^{m-2} x \cdot \cos x \, dx$$

$$(n+1)\,\text{Im},n = -\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x + \int m-1 \cos^n x \cdot \sin^{m-2} x \cos^2 x dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} + (m-1)\int \cos^n x \cdot \sin^{m-2} x \left(1-\sin^2 x\right) dx$$

$$= \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} + (m-1)\left[\int \cos^n x \cdot \sin^{m-2} x \, dx - \int \cos^n x \cdot \sin^m x dx\right]$$

$$(n+1)\,\text{Im},n = -\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (m-1)\left[I_{m-2,\,n} - I_{m,\,n}\right]$$

$$(m+n)\,\text{Im},n = -\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (m-1)\,\text{Im}-2,n$$

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ எனின்,

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ என நிறுவப்பட்டுள்ளது.

(i) n இரட்டை நேர் நிறை எண் எனக.

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot I_{n-4}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) n ஒற்றை எண் எனின்,

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = o - (-1) = 1$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

உதாரணமாக

$$I_8 = \int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cdot dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{35\pi}{256}$$

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{16}{35}$$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$ ஆகும்

i) n இரட்டையெண்ணாயிருக்க

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$ என நிறுவப்பட்டுள்ளது.

$$J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \frac{1}{2} J_0$$

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0 x \, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$J_n = \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$$ (n - இரட்டை எண்)

இவ்வாறே $J_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$ (n - ஒற்றை எண்)

மேலும் $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$ என்ற முடிவை பயன்படுத்தி

$$\int_0^{\pi/2} cox^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n \left(\pi/2 - x\right) dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

என்ற முடிவைப் பயன்படுத்தலாம்.

(v) $I_n = \int_0^1 x^{n+1/2} (1-x)^{1/2} dx$ எனின்

$2(n+2)\, I_n = (2n+1)\ I_{n-1}\ (n \geq 1)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ வேறுவழியாகவோ,

$\int_0^1 x^2 \sqrt{x - x^2}\, dx = \frac{5\pi}{128}$ எனக் காட்டுக.

$$I_n = \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{1/2} dx$$

$u = x^{n+\frac{1}{2}}, \frac{dv}{dx} = (1-x)^{1/2}$ என்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$v = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$$

$$I_n = \left[x^{n+1/2}\left(-\frac{2}{3}(1-x)\right)^{3/2}\right]_0^1 - \int -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 0 + \frac{2n+1}{3}\int(1-x)^{\frac{3}{2}}x^{n-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2n+1}{3}\int(1-x)(1-x)^{\frac{1}{2}}x^{n-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$3I_n = 2n+1\left[\int(1-x)^{1/2}x^{n-\frac{1}{2}}\,dx - \int(1-x)^{1/2}x^{n+\frac{1}{2}}\,dx\right]$$

$$3I_n = (2n+1)\left[I_{n-1} - I_n\right]$$

$$2(n+2)\,I_n = (2n+1)\,I_{n-1}$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x^{2+\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I_n = \frac{2n+1}{2(n+2)}I_{n-1}$$

$$I_2 = \frac{5}{8}I_1$$

$$I_1 = \frac{3}{6}I_0$$

$$I_2 = \frac{5}{16}I_0 = \frac{5}{16}\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx$$

$x = \sin^2\theta$ எனப்பிரதியிட

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$I_2 = \frac{5}{16}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta\cdot\cos\theta)\,(2\sin\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$= \frac{5}{32}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta$$

$$= \frac{5}{64}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{5}{64}\left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{5}{64}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{128}$$

பயிற்சி 5 (c)

1. $I_n = \int_0^x \frac{t^n\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$ எனின், $n \geq 1$

$nI_n + (n-1)I_{n-2} = x^{n-1}\sqrt{1+x^2}$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

2. $I_n = \int \cot^n \theta \, d\theta$ எனின்

$$(n-1)\left[I_n + I_{n-2}\right] = -\cot^{n-1}\theta$$ எனக் காட்டுக.

3. $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$ எனின்,

$$(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$$ எனக் காட்டுக. $(n \geq 0)$

I_6 ஐக் கணிக்க.

4. $I_n = \int_0^{\pi/3} \sin\theta \, d\theta$ எனின்,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{2n}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$y = a(1-\cos\theta)$ என இடுவதன்மூலம்

$$\int_0^{a/2} \left(2ay - y^2\right)^{5/2} dy = \frac{a^6}{192}\left(20\pi - 27\sqrt{3}\right)$$ எனக் காட்டுக.

5. $I_n = \int_0^\infty x^{2n} \cdot e^{-x^2} dx \quad \left(n > -\frac{1}{2}\right)$; எனின்

$$I_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) I_n$$ எனக் காட்டுக.

6. $I_n = \int_0^\infty e^{-x} \sin^n x \, dx, \quad J_n = \int_0^\infty e^{-x} \cos^n x \, dx$ என்க.

$n > 1$ ஆக இருக்க,

$$(n^2+1) I_n = n(n-1) I_{n-2}$$

$$(n^2+1) J_n = 1 + n\,(n-1) J_{n-2}$$ என நிறுவுக.

$I_2 + J_2$ ஐக் கணித்து, $(I_6 + J_6)$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

7. $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$ எனின்

$$(m+n)\, I_{m,n} = \cos^{n-1} x \, \sin^{m+1} x + (n-1)\, I_{m,n-2}$$ எனக் காட்டுக.

8. $I_n = \int \tan^n \theta \, d\theta$ எனின் $I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} - I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/4} \tan^6 \theta \, d\theta$ ஐக் கணிக்க.

9. $I_n = \int \frac{\cos^{2n} x}{\sin x} dx$, எனில் $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ என்பதைப் பாவித்து

$$(2n+1)\, I_{n+1} = (2n+1) I_n + \cos^{2n+1}$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int \frac{\cos^6 x}{\sin x} dx$ ஐக் காண்க.

10. $I_n = \int x^n \left(1+x^3\right)^7 dx$ எனின் $I_n = \frac{1}{n+22}\left\{x^{n-2}\left(1+x^3\right)^8 - (n-2)\, I_{n-3}\right\}$

எனக்காட்டி, $\int x^5 \left(1+x^3\right)^7 dx$ ஐக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 5

1. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\int_{-2}^{1} \sqrt{\frac{2+x}{1-x}}\, dx = \frac{3\pi}{2}$

(ii) $\int_{1}^{2} \sqrt{\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}}\, d = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\int_{0}^{2} \frac{x^2+2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = 2\pi$

(iv) $\int_{1}^{\infty} \frac{x^2+3}{x^2\left(x^2+4\right)}\, dx = \frac{\pi+12}{32}$

(v) $\int_{1}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^2\left(x^2+1\right)}\, dx = 2 - \frac{\pi}{4}$

(vi) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = 1$

(vii) $\int_{1}^{2} \left(\frac{x-1}{2-x}\right)^{1/2} dx = \frac{\pi}{2}$

2. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3\tan^2 x} = \frac{2}{3}$

(ii) $\int_{0}^{1} |3x-1|\, dx = \frac{5}{6}$

(iii) $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \tan x - \sec x + c$

(iv) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\, dx = \pi/4$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = 1$

(vi) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x}\, dx = \frac{\pi}{4}$

(vii) $\frac{d}{dx}\left(x^{\cos^{-1}x}\right) = x^{\cos^{-1}x}\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(viii) $\int_{0}^{\pi} |\cos x|\, dx = 2$

(ix) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx = x - \tan x + \sec x + c$

(x) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} = 8$

(xi) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}}\, dx = \pi/4$

(xii) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c$

(xiii) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right) = -\frac{1}{2}$

(xiv) $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}\right) + c$

(xv) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin^{-1} x} = 1$

(xvi) $\int_{-3}^{3} |2x+1|\, dx = \frac{37}{2}$

(xvii) $\int_{0}^{\pi/2} \ln \tan x\, dx = 0$

(xviii) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1+x}}\, dx = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$

(xix) $\int (\sin x + \cos x)e^x\, dx = e^x \sin x + c$

(xx) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}\, dx = \pi/4$

(xxi) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + c$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(xxii) $\int_0^{\pi/2} \left(2\sin^5 x - 3\sin^7 x\right)\cos^2 x\, dx = 0$

(xxiii) $f(x)$ என்பது x ஐக் குறித்து வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாக இருக்க,

(a) $f(x)$ என்பது ஒற்றைச் சார்பெனின், அதன் பெறுதி இரட்டைச் சார்பு எனவும்

(b) $f(x)$ என்பது ஒன்றைச் சார்பெனின், அதன் பெறுதி இரட்டைச்சார்பு எனவும் காட்டுக.

3. $y = -x$ எனப்பிரதியீடு செய்தாலோ அல்லது வேறுவழியாலோ,

(a) $\int_{-1}^{1} x^2 \tan x\, dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\frac{x^4}{x^2+1} = A\left(x^2-1\right) + \frac{b}{x^2+1}$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் A, B ஐக் காண்க.

$\int x^3 \tan^{-1} x,\, dx$ ஐக் காண்க.

4. $o < \alpha < \pi$ எனின்,

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{x dx}{\sin x} = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\pi - x)}{\sin x}$$ எனக் காட்டுக

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{x dx}{\sin x} = \frac{\pi}{2} \ln 3$$ என நிறுவுக.

5. $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \{f(x) + f(-x)\}\, dx$ என நிறுவுக.

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin x} dx$$ எனில் $I = 2\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து I ஐக் கணிக்க.

பெறுமானம் காண்க : $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx$

6. (i) $\int_0^t \sin \omega x \cos \omega(t-x)\, dx = \frac{1}{2} t \sin \omega t$ எனக் காட்டுக.

(ii) பெறுமானம் கணிக்க: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \sin 2x\, dx$

(iii) m, n என்பன நேர் நிறை எண்களாக இருக்க

(iv) $\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0,\ m \neq n;$ எனக் காட்டுக

$m = n$ எனின் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

$2\sin x\left(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x\right) = \sin 8x$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 8x}{\sin^2 x}\, dx = 8\pi$ எனக் காட்டுக.

7. $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^{a} \{f(-x) + f(x)\}\, dx$ எனநிறுவுக.

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x}{1+e^x} \sin^4 x\, dx$$ எனின், $J = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx$ எனக் காட்டுக.

J இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

8. பெறுமானம் கணிக்க.

(i) $\int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \sin\theta)^3 \, d\theta$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \theta\,(\cos\theta - \sin\theta)^2 \, d\theta$

9. $In = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) d, x \; (n > 0)$ எனின்,

$In = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$ என நிறுவுக.

10. $\int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) \sin x \, dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(\cos 2x) \cos x \, dx$ என நிறுவுக.

11. (a) $I_n = \int \sec^n x \, dx$ எனின்

$(n-1) I_n = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) I_{n-2}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/4} \sec^5 x \, dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_0^x \frac{1-t}{\sqrt{1+t}} dt$ உயர்வாக இருக்கும் x இன் நேர்ப்பெறுமானத்தைக் காண்க. x இன் இப் பெறுமானத்திற்கு தொகையீட்டைக் காண்க.

12. $U_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cdot \sin x \, dx \quad (n > 1)$ எனின்,

$U_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1) U_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

U_4 ஐக் காண்க.

13. $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$ எனக் காட்டுக.

$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx$ என உய்த்தறிக. இதிலிருந்து தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

14. $\int_{-a}^a f(x)\, dx = \int_0^a \{ f(x) + f(-x) \} dx$ என நிறுவுக.

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+x)^2 \sin 2x \, dx$ பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

15. $Un = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta$ எனின், $U_n - U_{n-1}$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து எல்லா நேர்நிறை எண் n இற்கும் $U_n = \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

இதே போன்ற ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தி,

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \frac{1}{2} n\pi$ எனக் காட்டுக.

$\int_0^{\pi/2} \frac{(2n+1)\sin\theta - \sin(2n+1)\theta}{\sin^3\theta} \, d\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு n ஒரு நேர் நிறை எண் ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

16. $x = \frac{1}{t}$ என்ற பிரதியீட்டையும் $[-1,0]$, $[0,1]$ ஆகிய ஆயிடைகளையும் கருதி, θ என்பது π இன் முழுஎண்மடங்காக இல்லாதபோது,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2x\cos\theta+x^2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1-2x\cos\theta+x^2}$$ என நிறுவுக.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1-2x\cos\theta+x^2}$$ இன் பெறுமானம் காண்க. $0<\theta<\pi$

(i) $\theta = -\frac{\pi}{4}$, (ii) $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ஆகும்போது.

தொகையீட்டின் பெறுமானம் யாது?

17. $U_n = \int_0^{\alpha} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx$, $V_n = \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,dx$ எனின்

(i) $n\left(U_{n+1} - U_n\right) = \sin 2n\alpha$

(ii) $V_{n+1} - V_n = U_{n+1}$ என நிறுவுக.

n ஒரு நேர்நிறை எண்ணாயிருக்க,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = \frac{n\pi}{2}$$ என உய்த்தறிக.

18. (i) பெறுமானம் காண்க. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ [$n \longrightarrow \infty$ ஆக,

$x^n e^{-x/2} \longrightarrow 0$ எனக் கொள்க.

$x^n \cdot e^{-x/2} \longrightarrow 0$ எனக் கொ...]

(ii) $$\int_0^{\infty} \frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{(\pi+4)}{16}$$ எனக்காட்டுக.

19. (i) $x = t^2\ (t>0)$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_1^k \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = 2\int_1^{\sqrt{k}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = -\int_1^{\sqrt{k}} t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{k}}{1+k} + \tan^{-1}\left(\sqrt{k}\right) - \frac{\pi}{4}$$ எனக் காட்டுக.

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$ என உய்த்தறிக.

(ii) பெறுமானம் காண்க $\int_1^k \tan^6 x\,dx$ (1982)

20. (i) $Q(x) \equiv (x-\alpha)^2(x-\beta)$ இங்கு α உம் β உம் மெய்யானவையும் வேறு வேறானவையும்

(ii) $P(x)$ என்பது படி மூன்றிலும் குறைவானதாயும்

(iii) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)} + \frac{B_1}{(x-\beta)}$$ ஆகவும் இருப்பின்

$$A_1 = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)},\quad A_2 = \frac{P^1(\alpha)}{(\alpha-\beta)} - \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$B_1 = \frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}$$ எனக் காட்டுக. இங்கு $P^1(x) = \frac{d}{dx}P(x)$

$\alpha>0$, $\beta>0$, உம் $k>\partial>$ உயர்வு (α,β) ஆகவும் இருப்பின்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\int_{\partial}^{k} \frac{x}{(x-\alpha)^2\,(x-\beta)}\,dx$$ ஐ மதிப்பிடுக.

$$\lim_{x\to\infty}\int_{8}^{k} \frac{x}{(x-2)^2\,(x-6)}$$ முடிவுள்ளதென உய்த்தறிக.

(1983)

21. (i) மதிப்பிடுக. $\int x \tan^{-1} x\, dx$

(ii) $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ என்பதைப் பகுதிப்பின்னங்களில் தந்து

$$\frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)}$$

$$+\frac{2x}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2}$$ எனவும் காட்டுக.

மதிப்பிடுக $\int_{2}^{k} \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2}\,dx \qquad (k>2)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{2}^{k} \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2}\,dx$$ என்பது முடிவுள்ளதென உய்த்தறிக.

(1984)

22. $\int_{0}^{k} \frac{dt}{a^2+b^2t^2}$ என்பதன் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இங்கு a, b, k என்பன நேர் ஒருமைகள்.

$$\lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k} \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{\pi}{2ab}$$ என்பதை உய்த்தறிக.

$t = \tan x$ என எழுதுவதன் மூலம்

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2ab}$$ எனக் காட்டுக.

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx \qquad J = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$$

எனக் கொண்டு $a^2 I + b^2 J = \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

இதையும் I, J இல் இன்னுமோர் ஏகபரிமாணச் சேர்மானம் ஒன்றையும் பயன்படுத்தி I ஐயும் J ஐயும் a,b ஆகியவற்றில் வெளியார்த்தமாகக் காண்க.

$$\int_{0}^{\pi/2} \frac{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx$$ என்னும் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(1985)

23. (i) $I = \int_{0}^{a} \frac{x^2}{x^2+(x-a)^2}\,dx \qquad J = \int_{0}^{a} \frac{(x-a)^2}{x^2+(x-a)^2}\,dx$ என்க.

$I = J = \frac{a}{2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $y = e^{-x}$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}\,dx$$ எனும் தொகையீட்டைக் கணிக்க.

(1986)

24. $\int_{0}^{p} \sin x\,\sin(p-x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin p - p\cos p)$

எனக் காட்டுக. இங்கு p ஆனது ஒருமையாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$I = \int_0^p \phi(x)\,dx, \quad J = \int_0^p \phi(p-x)\,dx$$ என்க.

இங்கு $\phi(x)$ ஆனது x இன் தொகையிடத்தக்க சார்பாகவும், p ஆனது ஒரு நேர் ஒருமையாகவும் உள்ளன.

$I = J$ எனக் காட்டுக.

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும்

$f(x) + f(p-x) = q$ ஆகுமாறு $f(x)$ என்பது

x இன் தொகையிடத்தக்க சார்பாகும். இங்கு $p(>0), q$ என்பன ஒருமைகள் ஆகும்.

(i) $\int_0^p f(x)\,dx = \frac{1}{2}pq$ எனவும்

(ii) $\int_0^p \sin x.\sin(p-x)\,f(x, \quad\quad p - p\cos p)$ எனவும்

காட்டுக.

(1987)

25. (i) $f(x)$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக எடுத்துரைக்க. இங்கு

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

பெறுமானம் கணிக்க $\int_0^k f(x)\,dx, \quad (k>0)$

$\lim_{k\to\infty} \int_0^k f(x)\,dx$ முடிவுள்ளது என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்தோ, வேறுவிதமாகவோ

$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\tan\theta)^2}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(ii) $I = \int_\alpha^\beta \sin(\ln x)\,dx, \quad J = \int_\alpha^\beta \cos(\ln x)\,dx$ என்க.

இங்கு $0 < \alpha < \beta$

$I + J = \beta\sin(\ln\beta) - \alpha\sin(\ln\alpha)$ எனக் காட்டுக.

இதனைப் பயன்படுத்தியும், I, J என்பவற்றின் வேறோர் ஏகபரிமாணச் சேர்க்கையை எடுத்து நோக்கியும் I, J ஆகியவற்றின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(1988)

26. பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int \sin(\ln x)\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

r ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்போது,

$$I = \int x^r \sin(\ln x)\,dx$$

$$J = \int x^r \cos(\ln x)\,dx$$ ஆகவுமிருப்பின்

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)I - \frac{r}{2}J = \frac{x^{r+1}}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{மாறிலி}$$

என நிறுவுக.

$x^{r+1}\sin(\ln x)$ ஐ வகையிட்டோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ I யிற்கும் J யிற்குமிடையே வேறொரு தொடர்பினைப் பெற்று

$$I = \frac{x^{r+1}}{r^2+2r+2}\left[(r+1)\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + \text{மாறிலி}$$

என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இங்கு a, b ஆகியன ஒருமைகள்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

27. (i) $x(1-x)^2 = (1+x^2)(x-2)+2$,

$x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4) - 4$,

என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

மேற்தரப்பட்ட முடிபுகளைப் பாவித்து

$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{(1+x^2)}\,dx$ இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$\frac{22}{7} > \pi > 3$ என உய்த்தறிக.

(ii) n என்பது ஒரு நேர் நிறை எண் ஆகும் பொழுது,

$$\int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta = \frac{2}{3+n}\int \sin\theta \cos^n\theta\, d\theta - \frac{\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta}{3+n}$$

என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta$ பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1990)

28. (i) $x = \pi - y$ எனப் பிரதியிட்டுத் தொகையீடு $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ஐ $0, \frac{\pi}{2}$ என்னும் எல்லைகளுக்கிடையேயான தொகையீடாக உருமாற்றுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனக் காட்டுக.

(ii) m, n என்பன நேர் நிறை எண்கள் எனின்,

$$\int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x\,dx = (-1)^m \frac{n}{(2m+1)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\sin(2m+1)x\,dx$$

எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/2} x^4 \sin 3x\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(1990 விசேட)

29. (i) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து, $\int_0^{\pi} x\sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$ எனக் காட்டுக.

இங்கு n ஒரு நேர்நிறை எண்.

அத்தோடு, $n \geq 2$ இற்கு

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \cdot dx = (n-1)\int_0^{\pi} \sin^{n-2} x\,dx$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$, $\int_0^{\pi} x\sin^5 x\,dx$ ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

(ii) $\frac{d}{d\theta}\ln(\sec\theta + \tan\theta) = \sec\theta$ எனக்காட்டி, அதனைப்பயன்படுத்தி

$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ ஐக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2}$$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(1991)

30. (i) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ ஐக் காண்க. இங்கு a, b என்பன மாறிலிகள்.

(ii) $a>b>o$, $b>a>o$ என்னும் வகைகளுக்கு

$$\int \frac{c\sin x + d}{a+b\cos x} \, dx$$ இன் பெறுமானங் காண்க.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{3+5\cos 2x}$ என்பதைக் காண்க.

(iii) $I(k) = \int_0^k x^2 e^{-x} \, dx$ என்ற தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக்

கணித்து $\lim_{k\to\infty} I(k)$ உள்ளதா எனப் பரிசீலிக்க.

(1991- விசேட)

31. (a) $a > o$ எனின் $\frac{d}{dx}(a^x)$ ஐக் கண்டு $\int_0^c \frac{a^x}{a^x+1} \, dx$ ஐப்

பெறுமானம் கணிக்க. இங்கு c ஒரு மாறிலி.

$O<c\leq\frac{\pi}{2}$ ஆயிருக்க $I = \int_{-e}^{c} \frac{\cos x}{1+a^x} \, dx$, $J = \int_{-c}^{+c} \frac{a^x \cos x}{1+a^x} \, dx$

எனின்

(i) $t=-x$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேறுவிதமாகவோ $I=J$ எனக் காட்டுக.

(ii) $I+J$ ஐக் கணிக்க. இதிலிருந்து $c = \frac{\pi}{6}$ ஆக இருக்கும்போது J இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $\int \frac{dx}{(2+x)^{1/2}(2-x)^{3/2}}$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(1992)

32. (a) $\int \frac{8x+7}{2x^2+8x+10} \, dx$ ஐக் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடுவதன் மூலம்

$$3\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{cosec}^{1/2} x \, dx$$ எனக் காட்டுக.

(c) $x = \tan\theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-3)}{(n-2)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$$ எனக் காட்டுக.

(1993)

33. (a) $u = \frac{1}{x} - x$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தியோ, அல்லது வேறுவிதமாகவோ,

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4} \, dx$$ என்னும் தொகையீட்டைப் பெறுமானங் கணிக்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(b) n ஒரு நேர்நிறை எண் என்க.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\,dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,dx = 0$$ எனக்காட்டி

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$ என்பதை உய்த்தறிக.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}\,dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$ எனக்காட்டி

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x}\,dx$$ இன்பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(1994)

34. (i) பெறுமானம் காண்க.

$$\int \frac{5x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$$

(ii) $x+1=\frac{1}{t}$ எனப்பிரதியீடு செய்யவதன் மூலம்

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)\left(4x-3-x^2\right)^{1/2}} = \int_{1/4}^{1/2} \frac{dt}{\left[(4t-1)(1-2t)\right]^{1/2}}$$

எனக் காட்டுக.

$t = \frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta$ என இடுவதன் மூலமோ,

வேறுவிதமாகவோ, இத் தொகையீட்டின் பெறுமானம் $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

எனக்காட்டுக.

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{315}$ எனக்காட்டுக.

(1995)

35. (i) பிரதியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்தியோ, வேறுவிதமாகவோ,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+1}}$$ ஐக் காண்க.

(ii) பகுதிகளாத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தியோ, வேறுவிதமாகவோ

$\int x^3 \tan^{-1} x\,dx$ ஐப் பெறுக.

(iii) $\int \cos 2x \tan^3 x\,dx$ ஐப் பெறுமானம் கணிக்க.

(1996)

36. (a) $\int x(\ln x)^2\,dx$ என்னும் வரையறாத தொகையீட்டைக் காண்க.

(b) $\int_0^{\pi/4} \frac{2\,dx}{3\sin 2x + 4\cos 2x} = \frac{1}{5}\ln 6$ எனக்காட்டுக.

(c) $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$ எனக் காட்டுக,

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக I ஐப் பெறுமானம் கணிக்க.

(1997)

37. (a) f, g என்பன ஆயிடை $[-a, a]$ மீது தொகையிடத்தக்க இரு சார்புகளாக இருக்கட்டும். $[-a, a]$ இல் எல்லா x இற்கும்,

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ எனவும் கொள்க.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$ எனவும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$ எனவும் காட்டுக.

$\int_{-1}^{+1} \frac{x^2 + x^3}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$ ஐக் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^a x^2 h'''(x)\,dx = a^2 h''(a) - 2a h'(a) + 2h(a) - 2h(o)$$

எனக்காட்டுக.

இங்கு $h'(x) = \frac{d}{dx}h(x)$, $h''(x) = \frac{d^2h}{dx^2}$, $h'''(x) = \frac{d^3h}{dx^3}$

$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^{5/2}}\,dx$ ஐக் காண்க. (1997)

38. **(a)** $\frac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக எழுதுக.

இதிலிருந்து $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ எனக்காட்டி, இதிலிருந்து

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$ எனக்காட்டுக.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$ என உய்த்தறிக.

(1998)

39. $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$ ஐக் காண்க (சாடை : $t = \tan\frac{x}{2}$ ஐ இட்டுப்பார்க்க)

$\frac{\cos^2 x}{2+\sin x} = A + B\sin x + \frac{C}{2+\sin x}$ ஆகுமாறு

A, B, C ஆகிய மாறிலிகளைத் துணிக.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{2+\sin x}\,dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\ \ln(2+\sin x)\,dx = \ln 2 + \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$$ ஐ உய்த்தறிக

(1999)

40. **(a)** பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$\int_1^8 \frac{1}{\left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க

(b) $I = \int_0^{\pi} e^{-2x}\cos x\,dx$, $J = \int_0^{\pi} e^{-2x}\sin x\,dx$ எனவும் கொள்க.

பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்டுத்தி $I = 2J$ எனவும்

$J + 2I = 1 + e^{-2\pi}$ எனவும் பெறுக. இதிலிருந்து I, J என்பவற்றின் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

(c) $\int \frac{x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

(2000)

41. **(a)** பிரதியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்தி

$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி

$\int_2^4 x \cdot ln x \, dx = a ln b + c$ எனக் காட்டுக.

இங்கு a, b, c ஆகியன துணியப்பட வேண்டிய நிறையெண்கள்.

(c) $\int_0^1 \frac{7x - x^2}{(2-x)(x^2+1)} \, dx$ ஐக் காண்க.

(2001)

42. (a) பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி

$\int_0^1 x \, tan^{-1} x \, dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(c) $\int_1^2 \frac{5x - 4}{(1 - x + x^2)(2 + x)} \, dx$ ஐக் காண்க.

(2002)

43. (a) தகுந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_1^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$ இன் பெறுமானங் காண்க

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 x^2 \cdot e^{2x+3} \, dx$ இ

பெறுமானத்தைக் காண்க.

(c) $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$ ஐக் காண்க.

(2003)

44. (a) தகுந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி-

$\int_{11}^{23} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொடையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int e^{3x} \cdot cos 4x \, dx$ ஐக் காண்க.

(c) $\int sin^4 2x \, dx$ ஐக் காண்க.

(2004)

45. (a) $tan \frac{x}{2} = t$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4 sin x}$ ஐப் பெறுமானங் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_0^1 15x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$ ஐக் காண்க.

(c) $\int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-2)(x^2 - 5x + 6)}$ ஐக் காண்க.

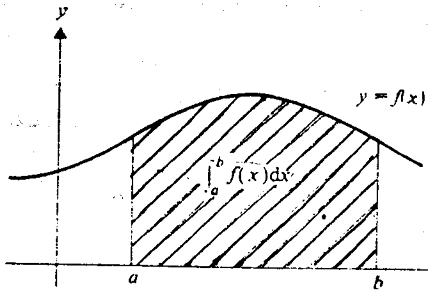
(2005)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6. பரப்பும் கனவளவும்

பரப்பு :

வளையி $y = f(x)$ இனாலும் x அச்சாலும் $x = a,\ x = b$ என்ற நேர்கோடுகளாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு A, வரையறுத்த தொகையீடு



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$ என்பதால் தரப்படும்

என 4·4 இல் தரப்பட்டுள்ளது.

i) வளையி ஒன்றிற்கும் x அச்சிற்குமிடையேயுள்ள பரப்பளவைக் காணல்.

$y = 6x - x^2$ என்ற வளையிக்கும், x அச்சுக்குமிடையேயுள்ள பரப்பளவை இங்கு காண்போம்.

$y = 6x - x^2$

$y = 0$ எனின் $x = 0, 6$

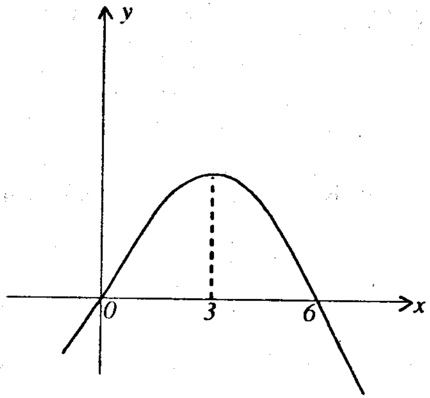
$y = 6x - x^2$

$= 9 - 9 + 6x - x^2$

$= 9 - (x-3)^2$

$x = 3$ இல் $y = 9$

$x \neq 3$ ஆக, $y < 9$



தேவையான பரப்பு $A = \int_0^6 y\,dx = \int_0^6 (6x - x^2)\,dx$

$$= \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6$$

$= 108 - 72 = 36$ அலகுகள்.

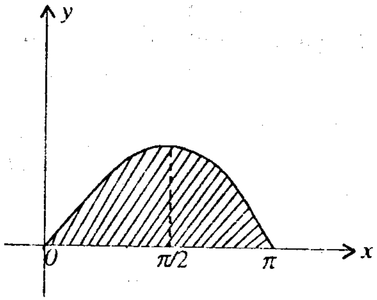
ii) $y = \sin x, \quad y = \cos x. \quad [0 \le x \le \pi]$

என்ற இரு வளையிகளையும் கருதுக.

பரப்பளவு $= \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi}$

$= 1 + 1 = 2$ சதுர அலகு.



பரப்பளவு $= \int_0^{\pi} \cos x\,dx$

$= [\sin x]_0^{\pi}$

$\sin \pi - \sin 0 = 0$

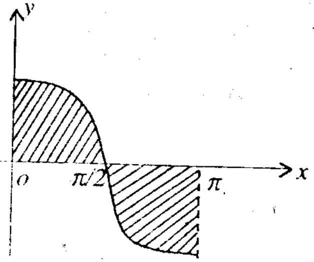
மேலும்

$$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$$

$= [\sin x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$

$= \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right] + \left[\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right]$

$1 + (-1) = 0$

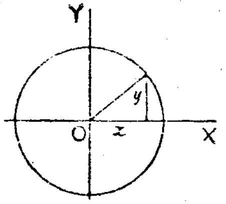


x அச்சிற்கு மேலேயுள்ள பரப்பளவின் பெறுமானம் நேராகவும், x அச்சிற்குக் கீழேயுள்ள பரப்பளவின் பெறுமானம் மறையாக இருப்பதையும் அவதானிக்க.

வட்டம் ஒன்றின் பரப்பளவு

வட்டத்தின் ஆரை a என்க

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக.



$y^2 = a^2 - x^2, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

x அச்சிற்கு மேலேயுள்ள வளையி $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ என்பதாலும்

x அச்சிற்கு கீழேயுள்ள வளையி $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ என்பதாலும் தரப்படுகிறது.

இங்கு $A \equiv (-a, o)$, $B \equiv (a, o)$

சமச்சீரின்படி, x அச்சிற்கு மேல் உள்ள பகுதியின் (அரைவட்டத்தின்) பரப்பளவின் இருமடங்கு வட்டத்தின் பரப்பளவாகும்.

வட்டத்தின் பரப்பளவு $A = 2\int_{-a}^{-a} y\,dx$

$$= 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\; dx$$

$x = a\sin\theta$ எனப் பிரதியிட, $\dfrac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

$x: -a \longrightarrow +a; \quad \theta: -\pi/2 \longrightarrow \pi/2$

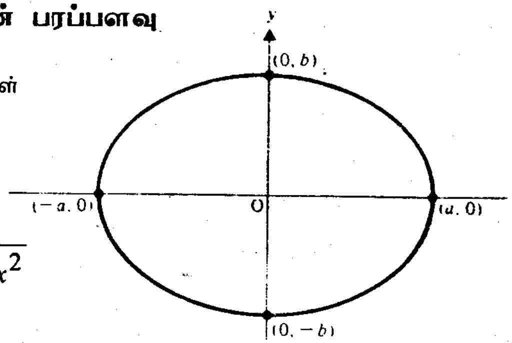
$$A = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a\cos\theta)\,(a\cos\theta)\,d\theta$$

$$a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\theta\; d\theta = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \pi a^2$$

நீள்வளையம் ஒன்றின் பரப்பளவு



நீள்வளையம் x, y அச்சுக்கள் பற்றி சமச்சீரானது.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

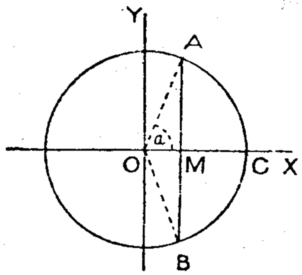
$A \equiv (a, o), \quad A' \equiv (-a, o)$

நீள்வளையத்தின் பரப்பளவு $= 2\int_{-a}^{+a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\; dx \left[4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\; dx\right]$

$$= \frac{b}{a}\int_{-a}^{+a} 2\sqrt{a^2 - x^2}\cdot dx$$

$$= \frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$$

வட்டத்துண்டம் ஒன்றின் பரப்பளவு



நாண் AB, y அச்சிற்கு சமாந்தரமாகும்.
வட்டத்துண்டம் ACB ஆகும்.

$\angle AOB = 2\alpha$ என்க.

$\angle AOM = \angle BOM = \alpha$ ஆகும்.

வட்டத்தின் ஆரை a என்க.

$OM = a\cos\alpha$, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2$$

வட்டத்துண்டம் ACB இன் பரப்பளவு

$= 2 \times ACM$ இன் பரப்பளவு

$$= 2\int_{a\cos\alpha}^{a} y\,dx = 2\int_{a\cos\alpha}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\; dx$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x = a\cos\theta$ எனப் பிரதியிட

$$= 2\int_{\alpha}^{0} a\sin\theta\,(-a\sin\theta\,d\theta)$$

$$= a^2 \int_0^{\alpha} 2\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\alpha} (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\,(\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha)$$

இதிலிருந்து ஆரைச்சிறை O A C B இன் பரப்பளவைக் காணலாம்.

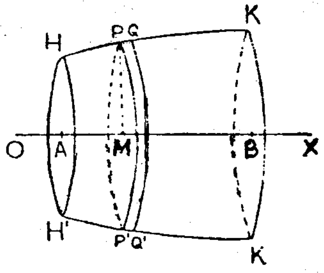
ஆரைச்சிறை O A C B இன் பரப்பளவு =
வட்டத்துண்டம் A C B + முக்கோணம் O A B இன் பரப்பளவு

$$a^2\,(\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha) + \frac{1}{2}\cdot 2a\sin\alpha\cdot a\cos\alpha$$

$$= a^2\alpha = \frac{1}{2}\,a^2\,(2\alpha)$$ ஆகும்.

கனவளவு

சுற்றுத்திண்மம்: சுற்றுத்திண்மமானது, தனது அச்சிற்குச் செங்கோணங்களில் ஒரு தளத்தால் வெட்டப்படும் ஒவ்வொரு வெட்டுமுகமும் வட்டமாகவுள்ள ஒரு பொருள் ஆகும். இங்கு $HKK'H'$ என்பது அவ்வாறான திண்மமொன்றைக் குறிக்கிறது. அச்சு O x அத்திண்மத்தின் அச்சு ஆகும். தளமுகங்கள் H HH', KK' என்பன முறையே A, B ஆகியவற்றை மையங்களாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களாகும்.



$y = f(x)$ என்ற வளையியைக் கருதுக.

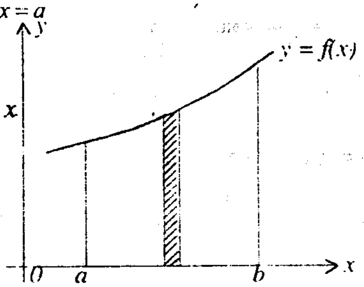
$x = a$, $a = b$ என்பவற்றிற்கிடையிலுள்ள வளையி x அச்சு பற்றி பூரணமாக சுற்றப்படுகிறது என்க. இவ்வாறு சுற்றப்படுவதால் பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் கணிக்கும் முறையைப் பார்ப்போம்.

y அச்சிற்கு சமாந்தரமான கீலம் P Q ஐக் கருதுக. O Q = x, Q P = y கீலத்தின் தடிப்பு δx என்க.

P Q ஆனது x அச்சுப்பற்றி சுழற்றப்படும் போது பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $= \pi y^2\,\delta x$ ஆகும்.

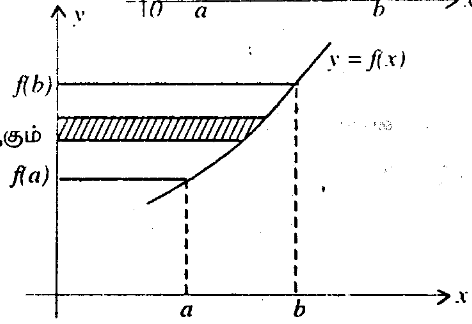
எனவே திண்மத்தின் கனவளவு $$= \lim_{\delta x\to 0} \sum_{x=a}^{b} \pi y^2\,\delta x$$

$$= \int_a^b \pi y^2 dx$$



இவ்வாறே, $y = f(a)$, $y = f(b)$ என்பவற்றிற்கிடையேயான பகுதி y அச்சுப்பற்றி பூரணமாக சுழற்றப்பட பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi x^2 dy$$ ஆகும்

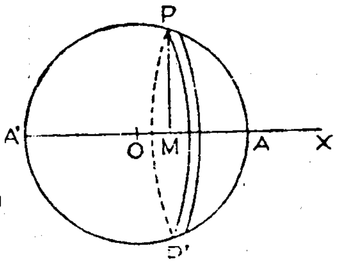


கோளத்தின் கனவளவு

கோளத்தின் ஆரை a என்க

வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$ ஐக் கருதுக.

இவ்வட்டத்தின் x அச்சிற்கு மேல் அமைந்துள்ள வளையி x அச்சுப்பற்றி பூரணமாக சுற்றப்படின் a ஆரையுடைய கோளம் பெறப்படும்.



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கோளத்தின் கனவளவு

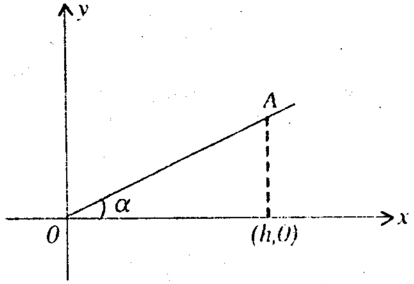
$$= \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx$$

$$= 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi a^3$$

கூம்பின் கனவளவு

ஆரையும், h உயரமுடைய கூம்பு ஒன்றைக் கருதுக. கூம்பின் ஆரை உச்சிக் கோணம் α என்க.



$\tan\alpha = \dfrac{a}{h}$ ஆகுமாறுள்ள,

$y = (\tan\alpha)\, x$ என்ற நேர்கோட்டைக் கருதுக. இந்நேர்கோட்டின் O A என்னும் பகுதி Ox. அச்சுப்பற்றி பூரணமாகச் சுற்றப்படும் போது, a ஆரையும் h உயரமும் உடைய கூம்பு பெறப்படும்.

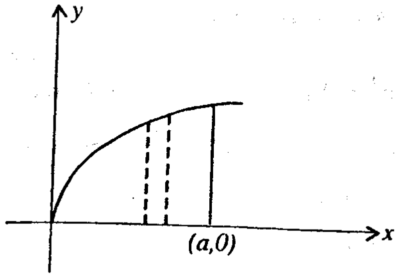
கூம்பின் கனவளவு $$= \pi \int_0^h y^2 dx$$

$$= \pi \int_0^h \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$

$$= \pi \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் $(a > 0)$, அதன் முதலாம் காற்பகுதியில் $x = 0$ இலிருந்து $x = a$ வரையுள்ள பகுதி (i) x அச்சுபற்றி (ii) y அச்சு பற்றி பூரணமாக சுற்றப்படின் பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவினைக் காணல்.

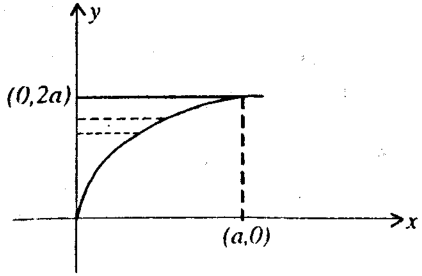
(i) கனவளவு $$= \pi \int_0^a y^2 dx$$



$$= \pi \int_0^a 4ax\, dx$$

$$= 4\pi a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = 2\pi a^3$$

(ii) கனவளவு $$\pi \int_0^{2a} x^2 dy$$



$$= \pi \int_0^{2a} \frac{y^4}{16a^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{16a^2} \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2a} = \frac{2\pi a^3}{5}$$

உதாரணம் 1

(i) $2x - 3y + 4 = 0$ என்னும் கோடும், $y^2 = 4x$ என்ற பரவளைவும் P, Q இல் வெட்டுகின்றன. பரவளைவின் வில் P Q இனாலும் நேர்கோடு P Q இனாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

இப்பரப்பு முழுவதையும் x அச்சுபற்றி சுழற்றுவதால் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(ii) $y = \dfrac{x}{1+x}$ இன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

x அச்சு, $x = 2$ எனும் கோடு, $x = 0$ க்கும் $x = 2$ இற்கும் இடையிலுள்ள வளை கோட்டின் பகுதி இவற்றினால் உண்டாகும் பரப்பளவைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இப்பரப்பு x அச்சைப்பற்றி பூரணமாகச் சுழற்றப்பட்டால் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(i) $y^2 = 4x,\ 2x - 3y + 4 = 0$ எனும் இரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க

$y^2 = 6y - 8,\ y^2 - 6y + 8 = 0,\ (y-4)(y-2) = 0;$

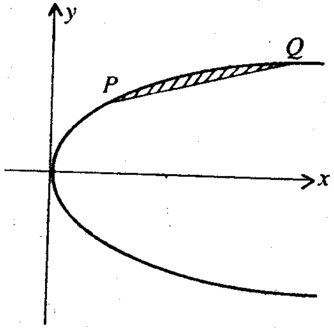
$y = 4$ அல்லது $y = 2$

$x = 4 \qquad x = 1$

$P \equiv (1,2) \quad Q(4,4)$ என்க.

தேவையான பரப்பளவு A_1 என்க.

$$A_1 = \int_1^4 y_1\,dx - \int_1^4 y_2\,dx$$



$$= \int_1^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_1^4 \frac{1}{3}(2x+4)\,dx$$

$$= \left[2 \times \frac{2}{3}x^{3/2}\right] - \frac{1}{3}\left[x^2 + 4x\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3}\left[4^{3/2} - 1^{3/2}\right] - \frac{1}{3}\left[(16+16) - (1+4)\right]$$

$$= \frac{4}{3} \times 7 \quad - \frac{1}{3} \times 27 \ = \frac{28}{3} - \frac{27}{3} = \frac{1}{3}$$ சதுர அலகுகள்

இப்பரப்பினை x அச்சுபற்றி சுழற்றுவதால் பெறப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு V_1 என்க.

$$V_1 = \pi\int_1^4 y_1^2\,dx - \pi\int_1^4 y_2^2\,dx$$

$$= \pi\left[\int_1^4 4x\,dx - \int_1^4 \left(\frac{2x+4}{3}\right)^2 dx\right]$$

$$= \pi\left\{\left[2x^2\right]_1^4 - \frac{1}{9}\left[\frac{4x^3}{3} + 8x^2 + 16x\right]_1^4\right\}$$

$$= \pi\left\{30 - \frac{1}{9}\left[\frac{256}{3} + 128 + 64 - \left(\frac{4}{3} + 8 + 16\right)\right]\right\}$$

$$= \pi\ \left[30 - 28\right] = 2\pi$$ கன அலகுகள்

(ii) $y = \dfrac{x}{x+1}$

$x = o$ இல் $y = o$

$x = -1$ இல் அணுகு கோடு

$x \longrightarrow \pm\infty$ ஆக, $y = \dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1} \longrightarrow 1$

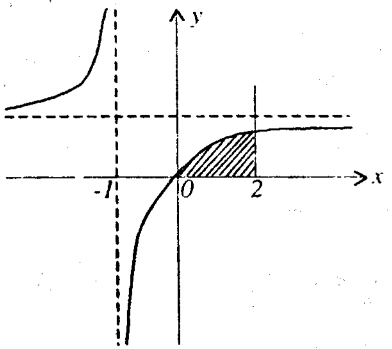
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0\ (x \neq -1$ எனின் $)$

மேலும்

$x < -1$ எனின் $y > 0$

$-1 < x < 0$ எனின் $y < 0$

$x > 0$ எனின் $y > 0$



தேவையான பரப்பளவு A_2 என்க.

$$A_2 = \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \left[x - \ln|1+x|\right]_0^2 \ = 2 - \ln 3$$

கனவளவு V_2 என்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$V_2 = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left\{1-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\right\} dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left\{1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx$$

$$= \pi\left[x-2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_0^2$$

$$= \pi\left[\frac{8}{3}-2\ln 3\right]$$

உதாரணம் 2

(i) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ என்ற ஆயிடையில் $y=\sin^2 x$, $y = 1+\cos^2 x$ ஆகிய சார்புகளுக்கான வளையிகளை ஒரேவரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட S என்னும் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

(i) y அச்சுபற்றியும் (ii) x அச்சுபற்றியும்
S என்பது இரு செங்கோணங்களினூடு சுழற்றப்படுகிறது. இந்த இரு வகைகளிலும் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

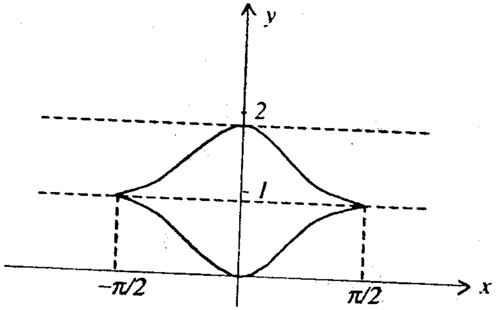
$-\pi/2 \le x \le \pi/2$

$f(x) = \sin^2 x$

$g(x) = 1+\cos^2 x$ என்க.

$f(-x) = f(x)$

$g(-x) = g(x)$



எனவே $f(x)$, $g(x)$ இரண்டும் இரட்டைச் சார்புகள்.

மேலும் $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 1$

தேவையான பரப்பளவு $S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x)\,dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{g(x)-f(x)\}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left\{\left(1+\cos^2 x\right)-\sin^2 x\right\} dx$$

$$2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx = 2\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi \text{ சதுர அலகு}$$

S ஆனது x அச்சுபற்றி இரு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும் போது பெறப்படும் கனவளவு V_1 என்க.

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left(1+\cos^2 x\right)^2-\left(\sin^2 x\right)^2\right\} dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left[1+\cos^2 x-\sin^2 x\right] dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx = \pi\times\pi = \pi^2$$

(ii) y அச்சுபற்றி 2 செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும் போது பெற்ப்படும் கனவளவு V என்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$V = \pi \int_0^1 x_1^2 \, dy + \pi \int_1^2 x_2^2 \, dy$$

$$y = \sin^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x \cos x$$

$$= \sin 2x$$

$$\pi \int_0^1 x_1^2 \, dy = \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x \, dx$$

$$y = 1 + \cos^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos x \sin x$$

$$= -\sin 2x$$

$$\pi \int_1^2 x_2^2 \, dy = \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x \, dx$$

$$y : 1 \longrightarrow 2$$

$$\cos^2 x : 0 \longrightarrow 1$$

$$x : \pi/2 \longrightarrow 0$$

எனவே $V = 2\pi \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x \, dx$

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = \left[x^2 \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{x.\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + o + \left[\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$$

கனவளவு $V = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right)$ கன அலகுகள்

உதாரணம் 3

(i) $y = x^3$ என்ற வளையியாலும் $y = 2x$, $y = x$ என்னும் நேர் கோடுகளாலும் வரைப்புறும் உருவத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) $y = xe^x$ என்ற வளையியாலும் $y = o$, $x = 1$ என்னும் நேர் கோடுகளாலும் வரைப்புறும் பரப்பாளவானது $x = 1$ எனும் நேர்கோடுபற்றி சுழற்றப்படுகிறது. இத்திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(i) $y = x^3$, $y = x$ இரண்டு வரைபுகளும் வெட்டும் புள்ளிகளில்

$$x^3 = x \; ; \; x^3 - x = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = -1, \; 0, \; 1$$

$$y = -1, 0, 1$$

(ii) $y = x^3$, $y = 2x$ என்பன வெட்டும்புள்ளிகளில்

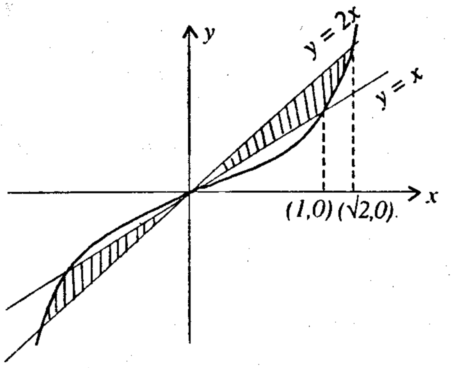
$$x^3 = 2x, \quad x^3 - 2x = 0$$

$$x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$x = -\sqrt{2}, \; 0, \; \sqrt{2}$$

$$y = -2\sqrt{2}, \; 0, \; 2\sqrt{2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



தேவையான பரப்பளவு $2\left[\int_0^{\sqrt{2}} 2x\,dx - \int_0^1 x\,dx - \int_1^{\sqrt{2}} x^3\,dx\right]$

$$= 2\left\{\left[x^2\right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= 2\left\{2 - \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right\}$$

$2 \times \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$ சதுர அலகுகள்

(ii) $y = xe^x$

$x = o$ எனின் $y = o$

$x \longrightarrow +\infty,\ y \longrightarrow +\infty,\ x \longrightarrow -\infty,\ y \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$x > o$ எனின் $y > o$; $x < o$ எனின் $y < o$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = e^x(x+1) = o$$

$\frac{dy}{dx} = o$ எனின், $x = -1$

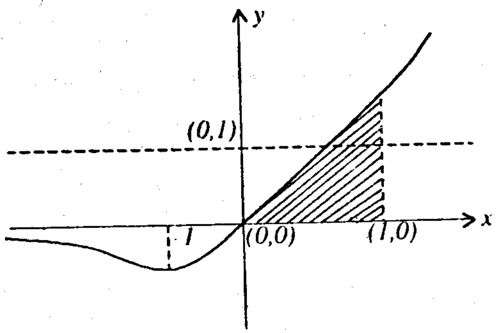
$x < -1$ எனின் $\frac{dy}{dx} < o$

$x > -1$ எனின் $\frac{dy}{dx} > o$

ஆகவே $x = -1$ இல் y இற்கு இழிவு உண்டு

$x = -1,\ y = -\frac{1}{e}$

$x = 1$ எனும் கோடு பற்றி தரப்பட்ட பரப்பளவு சுழற்றப்படும் போது பெறப்படும் கனவளவு V என்க.



$$V = \pi \int_0^e (1-x)^2\,dy$$

$y = xe^x$

$\frac{dy}{dx} = (x+1)e^x$

$y: 0 \longrightarrow e$

$x: 0 \longrightarrow 1$

$$= \pi \int_0^1 (1-x)^2 e^x (1+x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 e^x \left(1 - x - x^2 + x^3\right) dx$$

$$= \pi \left[\int_0^1 e^x \cdot dx - \int x \cdot e^x \cdot dx - \int x^2 e^x\,dx + \int x^3 e^x\,dx\right]$$

இதனைத் தொகையிடுவதனால் $V = \pi\,4e$ எனப் பெறலாம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 4

$y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$ இனால் ஒரு வளையி C தரப்படுகிறது.

(i) $0 \le y \le 2$ எனவும்

(ii) $x \longrightarrow \pm\infty$ ஆக, $y \longrightarrow 1$ எனவும் காட்டுக.

tisap$C$ ஐப் பரும்படியாக வரைக.

மேலே குறிப்பிட்ட வளையியைப் பயன்படுத்தியும், சமச்சீரைக் கருத்திற் கொண்டும்

$y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$ இனால் தரப்படும் வளையி C' ஐ

அதே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

அத்துடன் வளையி C யினாலும் கோடுகள் $x = 2,\ y = 1$ ஆகியவற்றாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக கோடு $x = 2$ இனாலும் $0 \le x \le 2$ என்னும் ஆயிடையில் C, C' ஆகிய வளையிகளாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம் S' இன் பரப்பளவை உய்த்தறிக. S' ஐக் கோடு $y = 1$ பற்றி π ஆரையின்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

$$y = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$$

$$y\left(x^2+4\right) = x^2 - 4x + 4$$

$$(y-1)x^2 + 4x + (4y-4) = 0$$

x இன் மெய்ப் பெறுமானங்கட்கு $\Delta \ge 0$

$$16 - 16(y-1)^2 \ge 0$$

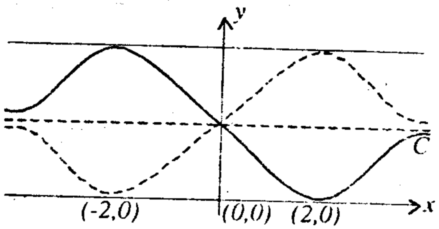
$$1 - (y-1)^2 \ge 0$$

$$(y-1)^2 - 1 \le 0$$

$$y(y-2) \le 0$$

$\Rightarrow 0 \le y \le 2$

$$y = \frac{(x-2)^2}{x^2+4} = \frac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}{1 + \frac{4}{x^2}}$$



$x \longrightarrow \pm\infty$ ஆக, $y \longrightarrow 1$

$y = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ $(2,0)$ திரும்பல்புள்ளி

$$y = 2 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2+4} = 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2x^2 + 8$$

$$x^2 = 4x + 4 = 0,\ (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$(-2, 2)$ திரும்பல்புள்ளி

$x = 0$ எனில் $y = 1$.

$f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$ எனின் (வளையி C)

$f(-x) = \dfrac{(-x-2)^2}{(-x)^2+4} = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$ (வளையி C')

ஆகவே y அச்சின் மீது C இன் விம்பம் C' ஆகும்.

பரப்பளவு $S = \displaystyle\int_0^2 \left\{1 - \frac{(x-2)^2}{x^2+4}\right\} dx$

$$= \int_0^2 \frac{4x}{x^2+4}\,dx = 2\left[\ln\left|x^2+4\right|\right]_0^2$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= 2\left[\ln 8 - \ln 4\right] = 2\ln\frac{8}{4} = 2\ln 2$$ சதுர அலகு.

பரப்பளவு $S' = 2 \times 2\ln 2 = 4\ln 2$

கனவளவு $V = \pi \int_0^2 (1-y)^2\, dx$

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{4x}{x^2+4}\right)^2 dx$$

$$= 16\pi \int_0^2 \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\, dx$$

$x = 2\tan\theta$ எனப் பிரதியிட

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sec^2\theta$$

$$V = 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{4\tan^2\theta \cdot 2\sec^2\theta\, d\theta}{4\sec^2\theta \cdot 4\sec^2\theta}$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2\theta\, d\theta}{2\sec^2\theta} = 4\pi \int_0^{\pi/4} 2\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/4} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = 4\pi\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$= 4\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$ கன அலகுகள்

பயிற்சி 6

1. (a) (1,1) என்னும் புள்ளியில் $x^3 + y^3 = 2xy$ என்ற வளையியின் தொடலியைக் காண்க.
   வளையியிக்கு இப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலி, வளையியைத் திரும்பவும் உற்பத்தியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

   (b) முதலாம் காற்பகுதியில், $x^2 + y^2 = 2$ என்ற வட்டத்தாலும் $y^2 = x$ என்ற பரவளைவாலும் x– அச்சாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.

2. $2x + 3y - 7 = 0$ என்னும் கோடு, $xy = 1$ என்னும் வளையியை A, B இல் சந்திக்கிறது.

   (i) AB என்ற நாணாலும் A, B இற்கு இடைப்பட்ட வளையியின் வில்லாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பரப்பளவையும்

   (ii) வளையிக்கு A, B இலுள்ள தொடலிகளாலும், A, B இற்கு இடைப்பட்ட வளையியின் வில்லாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பரப்பளவையும் காண்க.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தின் பரப்பு πab என நிறுவுக.

   $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ என்னும் நீள்வளையங்களின் பொதுவான பரப்பளவைக் காண்க.

4. S என்னும் வளையியை $y = 4 - 4x + 3x^2 - x^3$ என்னும் சமன்பாடு குறிக்கிறது.

   (i) S இற்கு (1, 2) இலுள்ள தொடலியும் $y^2 = 4x$ என்னும் பரவளைவின் தொடலியும் செங்குத்தெனவும்,

   (ii) S இற்கு (2, 0) என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட செவ்வன் (6, 1) இற்கூடாகச் செல்கிறதெனவும் காட்டுக.

   மேலும் S இல் x அதிகரிக்க y குறைகின்றதெனவும் காட்டுக. $0 \le x \le 2$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இல் x அச்சாலும், S இன் வில்லாலும் $y^2 = 4x$ என்னும் பரவளைவின் வில்லாலும் முதற் கால்பகுதியில் அடைக்கப்படும் பரப்பளவு $\frac{31}{12}$ எனவும் நிறுவுக.

5. $y^2 = 16x, \quad 3y = 4(4 - x^2)$ என்னும் பரவளைவுகள் (1, 4) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் எனக் காட்டுக. முதற் காற்பகுதியில் வேறொரு புள்ளியிலும் வெட்டாதென பருமட்டான வரைபு கீறிக் காட்டுக.

முதற் காற்பகுதியில் இரு பரவளைவு விற்களாலும் x அச்சாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு $\frac{44}{9}$ எனக் காட்டுக.

$x = C$ என்னும் நேர்கோட்டினால் இப்பரப்பு $(-C^3 + 12C - 5) : (C^3 - 12C + 16)$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனவும் காட்டுக, இங்கு $1 < C < 2$ ஆகும்.

6. $xy = 4$ என்னும் செங்கோண அதிபரவளைவில் புள்ளி P (4, 1) இலுள்ள செவ்வன் x அச்சை A யில் சந்திக்கின்றதாயின் A இனது ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அச் செங்கோண அதிபரவளைவானது $y^2 = 16x$ என்னும் பரவளைவை Q என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றது. Q இனது ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

O என்பது உற்பத்தியாயின், அப்பரவளைவின் வில் OQ ஆலும் அச் செங்கோண அதிபரவளைவின் வில் QP ஆலும், கோட்டுத் துண்டம் PA ஆலும், x அச்சாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவு $\frac{61}{24} + 8\ln 2$ சதுர அலகுகளாகும் என நிறுவுக.

7. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ இல் $y = \tan x, \quad y = \sqrt{2}\cos x$ எனும் இரு வளையிகளும் ஒரேயொரு புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டும் எனக்காட்டி, அவற்றின் வரைபுகளையும் ஒரே வரைபில் பருமட்டாக வரைக.

இரு வளையியின் விற்களாலும் x அச்சினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு S இன் பருமனைக் காண்க.

x அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாக S சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவின் பருமன் $\frac{\pi}{2}$ அலகுகளாகும் எனக் காட்டுக.

8. C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $x^2 = 2y$ உம் $y^3 = 2x^2$ உம் ஆகும். ஒரே படத்தில் C_1, C_2 என்பவற்றின் பரும்படியான வரைபுகளை வரைக.
தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் காணாது

$$\int_0^2 \left(3\sqrt{2}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2}\int_0^2 \left(\sqrt{y} - \frac{y^{3/2}}{2}\right) dy$$ எனக் காட்டுக.

இந்த இரு வளையியின் விற்கள் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு S ஆனது $\frac{32}{15}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

(a) x அச்சுபற்றி 4 செங்கோணங்களின் ஊடாகவும்,
(b) y அச்சுபற்றி 2 செங்கோணங்களின் ஊடாகவும்
பரப்பு S சுழற்றப்பட்டால் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

9. $y = \frac{1}{x^2+1}, 2y = x^2$ என்னும் சமன்பாடுகளால் தரப்படும் வளையிகள் C_1, C_2 என்பவற்றை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து, அவற்றின் வெட்டுப் புள்ளிகளை தெளிவாகக் குறிப்பிடுக.

C_1, C_2 என்பவற்றினால் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவு A இன் பருமன் $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

x அச்சைப் பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகப் பரப்பளவு A சுழற்றப்பட்டால் பிறப்பிக்கப்பட்ட திண்மத்தின் கனவளவு V இன் பருமனானது,

$$2\pi\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \frac{\pi}{10}$$ கன அலகுகள் எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x = \tan\theta$ எனப் பிரதியீட்டு தொகையீட்டில் பெறுமானத்தைக் கணித்து, V இன் பருமனைப் பெறுக.

10. $x^2 = 4y$, $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்குரிய ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

முதற்கால் வட்டத்தில் இவ்விருவளையிகளும் y அச்சும் உள்ளடைக்கும் S என்னும் பரப்பு $\int_0^2 \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx - \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

$S = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

நான்கு செங்கோணங்களினூடாக x அச்சுப்பற்றி S சுழற்றப்பட்டால் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

11. $y = \frac{3x^2}{x^2+4}$ என்னும சார்பினாலே தரப்படும் வளையியை வரைக.

$y = \frac{3}{4}x$ என்னும் நேர்கோடானது வளையியை $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ என்னும் புள்ளியிலே தொடுகின்றதெனக் காட்டுக. இந்நேர்கோட்டினாலும், வளையியாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க.

y அச்சைப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாக இப் பரப்பளவைச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவு $4\pi\,(3\ln 2 - 2)$ எனக் காட்டுக.

12. $y = \frac{4}{k^2x^2 - 1}$ என்னும் சார்பின் பரும்படி வரைபொன்றை வரைக. இங்கு $k = \frac{3}{\pi}$

x அச்சு, y அச்சு, $x = \frac{3}{\pi}$ இலுள்ள நிலைக்கூறு ஆகியவற்றாலும் மேலே குறிக்கப்பட்ட வளையியின் பகுதியாலும் வரைப்புற்ற முதலாம் கால் பகுதியிலுள்ள பரப்பானது y– அச்சு பற்றி நான்கு செங் கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகிறது.

இங்கு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{4}{9}\pi^3 \ln 2$ அலகுகள் ஆகுமெனக் காட்டுக.

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள $y = sec x$ என்னும் சார்பின் வரைபை அதே படத்தில் வரைக. இவ்விருவரைபுகளும் ஒரேயொரு புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டும் எனவும், இப்புள்ளியின் x ஆள்கூறு $\frac{3}{\pi}$ எனவும் காட்டுக.

x அச்சு, y அச்சு $x = \frac{3}{\pi}$ இலுள்ள நிலைக்கூறு, இவ்விரு வளையியினதும் இரு பகுதிகள் என்பவற்றால் வரைப்புற்ற பரப்பைக் காண்க.

13. ஒரே படத்தில் $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y = 2 - x^2$ எனும் வளையிகளைப் பருமட்டாக வரைக. இவ்விரு வளையிகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவு S இன் பருமனானது $\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$ அலகுகள் ஆகுமெனக் காட்டுக.

S என்பது y அச்சுபற்றி சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $2\pi\,(\ln 2) - \frac{\pi}{2}$ கன அலகுகள் எனக் காட்டுக.

(1982)

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு πab எனக் காட்டுக. மேற்படி நீள்வளையம் y அச்சுபற்றி இரு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தையும் $(y-b)^2 = \frac{b^2}{a}x$ எனும் பரப்பளவையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

நீள்வளையத்தாலும் பரவளைவாலும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் வரைப்புற்ற பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

S, y– அச்சுபற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{7}{15}\pi a^2 b$ எனக் காட்டுக.

(1983)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

15. $y^2 = 4x, \quad y^2 = \frac{8}{x} - 4$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கான வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.
இந்த இரு வளையிகளும் உள்ளடக்கும் S என்னும் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.
S என்பது நான்கு செங்கோணங்களினூடாக y அச்சுபற்றி சுழற்றப்பட்டால் உருவாகும் V என்னும் கனவளவு

$$128\pi \int_0^2 \frac{dy}{\left(y^2+4\right)^2} - \frac{4\pi}{5}$$ என்னும் கோவையால்

தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$y = 2\tan\theta$ எனப் பிரதியிட்டு

$V = \frac{2\pi}{5}(8 + 5\pi)$ எனக் காட்டுக. (1984)

16. $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ என்ற ஆயிடையில் $y = \sin^2 x, \quad y = 1+\cos^2 x$ ஆகிய சார்புகளுக்கான வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட S என்னும் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

(i) y அச்சுப்பற்றியும் (ii) x அச்சுப்பற்றியும்,
S என்பது இரு செங்கோணங்களினூடு சுழற்றப்படுகிறது.

இந்த இரு வகைகளிலும் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

(1985)

17. ஒரே வரிப்படத்தில் $y^2(2-x) = 4x, \quad y^2 = 4(2-x)$ எனும் சமன்பாடுகளுக்குரிய வளையிகளை வரைக.

இவ்விரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட S இன் பரப்பளவின் பருமனைக் காண்க.

S ஆனது y அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகிறது.
இவ்வாறு உருவாக்கப்படும் கனவளவிற்குரிய ஒரு கோவையை வரையறுத்த தொகையீடுகளில் காண்க.
[தொகையீடுகள் கணிக்கப்படத் தேவையில்லை]

(1986)

18. முறையே $y = 1 - \frac{3}{x+3}, \quad y = \frac{x}{x^2+1}$ என்பவற்றினால் தரப்பட்ட C_1, C_2 என்னும் வளையிகளின் இடைவெட்டுப்புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகளை காண்க.

ஒரே வரிப்படத்தில் இவ்விரு வளையிகளையும் வரைந்து அவற்றின் அணுகு கோடுகளையும், திரும்பல் புள்ளிகளையும் காட்டுக.

முதலாம் கால் வட்டத்தில் C_1, C_2 என்பவற்றினால் வரைப்புற்ற முடிவுள்ள பிரதேசம் S இன் பரப்பளவானது,

$\frac{7}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 3 - 2$ எனக் காட்டுக.

C_2, கோடுகள் $y = 0, x = 2$ என்பவற்றினால் வரைப்புற்ற பரப்பளவானது x அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

(1987)

19. சமன்பாடுகள் முறையே $y^2 = 8x, \quad x^2 = 3\sqrt{3}\,y$ ஆகவுள்ள C_1, C_2 என்னும் வளையிகளை ஒரே உருவில் பரும்படியாக வரைக. C_1, C_2 என்னும் வளையிகள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு S ஐக் காண்க.

பரப்பளவு S ஆனது
(a) x அச்சைப்பற்றி (b) y அச்சைப்பற்றி
ஒரு செங்கோணத்தினூடாகத் திருப்பப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(1988)

20. $x^2 = 4y, \quad x^2 = y^3$ எனும் இரு வளையிகளினதும் பரும்படிப்படம் ஒன்றை ஒரே உருவில் வரைக. முதற் காற்பகுதியில் இவ்விரு வளையிகளும் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு S ஐக் காண்க.

S ஆனது (a) x அச்சுபற்றி (b) y அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும்போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

(1989)

21. (i) $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x^2}$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் வளையியைப் பரும்படியாக வரைக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வளையியாலும், கோடுகள் $x=1, x=a\,(>1)$, $y=\frac{x}{4}$ என்பவற்றாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

a முடிவிலியை அணுக, இப்பரப்பளவு பற்றி யாது கூறமுடியும்?

(ii) வளையி $y = 2x - x^2$ ஆலும், x அச்சினாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு y அச்சுபற்றி நான்கு செங்கோணங்களால் சுழற்றப்படுகிறது. பெறப்படும் கனவளவு $\frac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக. (1990)

22. $y^2 = 16x$, $3y = 4\left(4 - x^2\right)$ ஆகியவற்றால் தரப்படும் இரு வளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டியாக வரைந்து, அவை முதல் கால் வட்டத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டும்புள்ளி (1, 4) ஆகும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

இவ்விரு வளையிகளாலும் x அச்சினாலும் வரைப்புற்ற, முதலாம் கால்வட்டத்திலுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.
இப்பரப்பளவானது,
(i) x அச்சுபற்றி (ii) y அச்சுபற்றி
சுழற்றப்படுமாயின் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.
(1990 விசேட)

23. பரவளைவு $y^2 = 4x$, அதிபரவளைவு $x^2 - y^2 = 1$, கோடு $x = 4$ ஆகியவற்றை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டியாக வரைக.

(i) $x^2 - y^2 - 1 \le 0$ ஆகவும், $y^2 - 4x \le 0$ ஆகவும் இருக்கும் பிரதேசம் S_1 ஐக் காட்டி, S_1 இனால் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) பரவளைவு $y^2 = 4x$ இனாலும் கோடு $x = 4$ இனாலும் வரைப்புற்ற பிரதேசம் S_2 ஆகும்.
பரப்பளவு S_2 ஐக் கோடு $x = 4$ பற்றி நான்கு செங் கோணங்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.
(1991)

24. (i) $y = x^3$ என்ற வளையினாலும் $y = 2x$, $y = x$ என்னும் நேர் கோடுகளாலும் வரைப்புறும் உருவத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) $y = xe^x$ எனும் வளையியாலும் $y = 1$, $y = 0$, $x = 1$ என்னும் நேர்கோடுகளாலும் வரைப்புறும் பரப்பளவானது $y = 1$ என்னும் நேர்கோடுபற்றிச் சுழற்றப்படுகிறது. இத்திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.
(1991 விசேட)

25. $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ எனின், $y = f(x)$, $y = \frac{1}{f(x)}$ ஆகிய வளையிகளின் இடை வெட்டுப்புள்ளிகள் எவையேனுமிருப்பின் அவற்றின் ஆள்கூறுகளைத் தந்து வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டியாக வரைக.

(i) மேலேயுள்ள இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட முடிவுள்ள பிரதேசம் R இன் பரப்பளவின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(ii) பிரதேசம் R ஐ y அச்சு பற்றி π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.
(1992)

26. $y = \frac{(x-2)^2}{x^2+4}$ இனால் ஒரு வளையி C தரப்படுகிறது.

(i) $0 \le y \le 2$ எனவும்

(ii) $x \longrightarrow \pm\infty$ ஆக, $y \longrightarrow 1$ எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக C யின் மீதுள்ள நிலையான புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதி, வளையி C ஐப் பருமட்டியாக வரைக.

மேலே குறிப்பிட்ட வளையியைப் பயன்படுத்தியும், சமச்சீரைக் கருத்திற் கொண்டும்,

$y = \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$ இதனால் தரப்படும் வளையி C' ஐ அதே வரிப்படத்தில் பருமட்டியாக வரைக.

அத்துடன் வளையி C யினாலும் கோடுகள் $x = 2$, $y = 1$ ஆகியவற்றாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாகக் கோடு $x = 2$ இனாலும் $0 \le x \le 2$ என்னும் ஆயிடையிலே C, C' ஆகிய வளையிகளாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

S' இன் பரப்பளவை உய்த்தறிக. S' ஐக் கோடு $y = 1$ பற்றி π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(1993)

27. $y^2 = 3x\left(1 - x^2\right)$ என்பதாலே தரப்படும் வளையியின் பரும்படி வரைபை வரைக.

(i) $0 \le x \le \frac{1}{3}$ இற்கு, மேற்போந்த வளையியின் முதற் கால் வட்டத்தில் கிடக்கின்ற பகுதி C ஆக இருக்கட்டும்.

C யினாலும் $x = \frac{1}{3}$ என்ற கோட்டினாலும் x அச்சினாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) S என்பது y அச்சு பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(1994)

28. $y^2 = x, \quad y = 2 - x^2$ ஆகிய சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும் C_1, C_2 எனும் வளையிகளின் பரும்படிப் படங்களை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளாலும் $y = 2$ எனும் கோட்டினாலும் வரைபுற்ற பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

பிரதேசம் S ஐக் கோடு $4x + 1 = 0$ பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

(1995)

29. முறையே $y = x^3 + x^2 - x, \quad y = x^2$ என்பவற்றால் தரப்படும் C_1, C_2 எனும் வளையிகளின் பரும்படிப் படங்களை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

C_1, C_2 ஆகிய இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைப் பெறுக.

S ஐக் கோடு $y = 1$ பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் சுற்றற்திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{2}{3}\pi$ எனக் காட்டுக.

(1996)

30. முறையே $3y = 2x(4x - x), \quad x^2 + y^2 - 5x + 2 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளினால் தரப்படுகின்ற C_1, C_2 வளையிகளின் பரும்படிப் படங்களை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

C_1, C_2 இற்கிடையே கோடு $y = 2$ இற்கு மேலே கிடக்கின்ற பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

S ஐ x அச்சுபற்றி நான்கு செங்கோணங்களின் ஊடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பெறப்படும் சுற்றற்திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{1043}{270}\pi$ எனக் காட்டுக.

(1997)

31. (a) கோடு $2x + 3y = 5$ ஆனது $xy = 1$ ஐ P, Q எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. வளையியின் வில் PQ வினாலும் P, Q ஆகியவற்றில் வளையிக்குள்ள தொடலிகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(b) $y^2 = 4(x - 2), \quad y^2 = 8(5 - x)$ என்னும் இரு பரவளைவுகளினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசமானது x அச்சைப்பற்றி π ஆரையினூடாகச் சுழற்றப்படுகிறது. அவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(1998)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடைகள் 1 (b)

3. $fog(x) = 10(x+3),\ gof(x) = 10x+3$

4. (a) $R, \{x : x \in R, x \leq 3\}$ (b) $gof(x) = \sqrt{1-x^2}, \{x : -1 \leq x \leq 1, x \in R\}$

$\{x : 0 \leq x \leq 1, x \in R\}$

5. (a) 1 (b) $fog(x) = 2x - 15,\ f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x+3)$

6. $\{x : -x > 2, x \in R\}$ 7. $f(x) = x^2, x^3,$

8. (a) $\{x : 0 \leq x \leq 2, x \in R\}$

(b) (i) $\{x : x \geq 0, x \in R\},\ \{x : 0 \leq x \leq 4, x \in R\}$

(ii) $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4}{x} - 1},\ \{x : 0 < x \leq 4\}\ \{x : x \geq 0, x \in R\}$

9. (b) (i) $R - \{4\},\ R - \{1\},$ (ii) $R - \{2\},\ R - \{1\},$ (iii) $R - \left\{4, \frac{5}{3}\right\},\ R - \{0, 1\}$

10. (a) $R - \{2\},\ R - \{1\},$ (b) $R - \{1\},\ R - \{2\},$

11. (ii) $\{x : x > -1, x \in R\}$ (iii) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{3}}$ (iv) $(2, 2)$

(b) $gof(x) = \frac{1}{3x^2 - 6x - 3},\ 1 + \sqrt{2}$

12. (i) $\{x : x \geq 1\}, \{x : 0 < x \leq 1\}$ (ii) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1},\ g^{-1}(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$fog(x) = e^{-2x} + 1,\quad 0\ or\ ln3$

விடைகள் 2

1. (i) ∞ (ii) ∞ (iii) ∞ (iv) $-\infty$

2. (i) $\frac{3}{2}$ (ii) ∞ (iii) 0 (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $-\infty$ (vi) 0

3. (i) 1 (ii) 1 4. (iv) 0 (ii) 0 5. (i) ∞ (ii) $-\infty$

6. (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) 1 (iii) ∞ (iv) ∞ (v) $\frac{1}{2}$ (vi) -1

7. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{2}{3}$ (iv) $\frac{1}{2}$

8. (i) 3 (ii) 0 9. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{1}{2}$ 10. (i) 1 (ii) 0

11. (i) -4 (ii) 0 12. (i) 32 (ii) 20 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) -4

13. (i) $\frac{5}{3}a^{\frac{1}{2}}$ (ii) $-\frac{1}{2}$ 14. (i) 1 (ii) 1

15. (i) -8 (ii) 1 (iii) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ (iv) -1

16. (i) 4 17. (i) $\frac{c}{a}$ (ii) $\frac{a}{c}$ 18. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$

19. (i) k (ii) 3 (iii) $\frac{-5}{2}$ 20. (i) 0 (ii) $\frac{9}{2}$ (iii) 1

21. $\frac{1}{4}$ 22. $\frac{1}{2}$ 23. $\frac{1}{2}$ 24. $\frac{9}{16}$ 25. 0

26. $2\sqrt{a}\ cos a$ 27. 2 28. $\frac{1}{2}$ 29. 0 30. 2

31. $\sqrt{2}$ 32. $\frac{1}{2}$ 33. $\frac{1}{2}$ 34. $\frac{2}{\pi}$

பயிற்சி 3 (a)

1. $1, 2x, 3x^2, 4x^3\ 100x^{99}, -\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{x^3}, \frac{-3}{x^4}, \frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(xi)

(i) $10x^4 + 9x^2 + 12$ (ii) $15x^4 - 15x^2$ (iii) $1 - \frac{1}{x^2}$

(iv) $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}$ (v) $anx^{n-1} - \frac{ln}{x^{n+1}}$ (vi) $\frac{-2}{ax^3} - \frac{1}{bx^2}$

(vii) $4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-1}{2}} - x^{-\frac{6}{5}} + 4x^{-\frac{7}{3}}$ (viii) $6x^2 + 3 - \frac{2}{x^2} + \frac{15}{x^4} - \frac{5}{7x^6}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 3 (b)

(i) $4x^3+2x$ (ii) $15x^4+9x^2-2x$ (iii) $2acx+bc+ad$

(iv) $3x^2-12x+11$ (v) $\frac{1}{(x+2)}$ (vi) $\frac{-x^4-4x^2+4x+1}{(x^3-x+2)}$

(vii) $\frac{x(x^3+3x+2)}{(x^2+1)^2}$ (viii) $\frac{x^2-6x+7}{(x-3)^2}$

பயிற்சி 3 (c)

1. $10(2x^2+3x+1)^9(4x+3)$ 2. $\frac{2x^3+x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$ 3. $\frac{1}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+2)^{\frac{3}{2}}}$

4. $\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ 6. $6(2x+1)^2(3x-2)(5x-1)$ 7. $2x(x^2-1)^5(x^2+1)^4(11x^2+1)$

8. $mnx^{n-1}(x^n+a^n)^{m-1}$ 9. $2x(4x^6-5x^3+1)$ 10. $\frac{-2(x-1)(4x^2-6x-1)}{(2x^2+1)^4}$

பயிற்சி 3 (d)

1. $m\cos mx\cos nx-n\sin mx\sin x$ 2. $\sin^{m-1}x\cdot\cos^{n-1}x\ (m\cos^2x-n\sin^2)$

3. $-3\cot 3x\ \mathrm{cosec}\,3x$ 4. $\cos^3x$ (v) $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ (vi) $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

(vii) $x^2\tan x(3\tan x+2x\cdot\sec^2x)$ (viii) $\sec^2x(1+2x\tan x)$

(ix) $3(\sin^2x\cos x-x$) (x) $-4\,\mathrm{cosec}\,2x\cdot\cot 2x$

(xi) $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (xii) $\frac{(\cos x-\sin x)\cos\left(\sqrt{\sin x+\cos x}\right)}{2\sqrt{(\sin x+\cos x)}}$

பயிற்சி 3 (e)

1. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\sin x}$ 2. $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ 3. $\frac{\sqrt{ab}\cos x}{(a+b\sin x)\sqrt{\sin x}}$

4. $\frac{ab}{a^2+b^2x^2}$ 5. $\frac{1}{2(1+x^2)}$ 6. $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ 7. $\frac{1}{2}$ 8. -1

9. $\frac{1}{2}$ 10. 1

பயிற்சி 3 (f)

1. $2xe^{x^2+1}$ 2. $\frac{2abe^x}{(a-be^x)^2}$ 3. $e^{\sin x}(1+x\cos x)$

4. $xe^{\sqrt{x}}\left(2+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ 5. $\frac{-8e^{4x}}{(e^{4x}-1)^2}$ 6. $\frac{-2e^{2x}}{1+e^{4x}}$

7. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 8. $\frac{1}{x\ln x}$ 9. $2xa^{x^2+1}\ln a$

10. $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$ 11. $2^x\ln 2+x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin\ln x\right)$

12. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ 13. $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 14. $\frac{-2}{\sqrt{1+x^2}}$ 15. $m\cot x+n\tan x$

பயிற்சி 3 (g)

1. $-\frac{x}{y}$ 2. $\frac{2a}{y}$ 3. $\frac{-b^2x}{a^2y}$ 4. $-\frac{ax+hy}{hx+by}$

5. $\frac{y\sin x-x^2y\cos xy-2x\sin xy}{x^3\cos xy+\cos x}$ 6. $\frac{y\sin x-\sec y-3y}{x\sec y\tan y+\cos x+3x}$ 7. $-\frac{b}{a}$

8. -1 13. $a^n n!$ 14. $2^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2x\right)$ 15. $3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 4

1. (i) $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\,sec^2\frac{x}{2}}{a\,sec^2\frac{x}{2}+b\left(1-tan^2\frac{x}{2}\right)}$ (ii) 1

2. (a) $\dfrac{-4}{5+3cos\,x}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{3}\,sec^2 x}{3-tan^2 x}$

9. (ii) $15\sqrt{3}\,cm^2 s^{-1}$ (iii) $\frac{2}{n}m$ | நிமிடம் (iv) 12, 12
   (v) 8, 8 (vi) $3cm$

பயிற்சி 5 (b)

1. (i) $\frac{1}{2}ln\left|x^2-1\right|+c$ (ii) $\frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|+tan^{-1}x+c$

   (iii) $\frac{5}{2}ln\left|x+3\right|-\frac{1}{2}ln\left|x+1\right|+c$ (iv) $x+ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

   (v) $ln\left|x^2+4x+5\right|+3tan^{-1}(x+2)+c$

   (vi) $\frac{1}{2}ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

2. (i) $-\sqrt{1-x^2}+c$ (ii) $2\,sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$

   (iii) $-\frac{3}{2}\sqrt{4-2x-2x^2}+\frac{11}{2\sqrt{2}}\,sin^{-1}\frac{2x+1}{3}$

3. (i) $ln\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (ii) $ln2+1$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

   (v) $\frac{1}{8}$ (vi) 2

4. (i) $\frac{1}{3}tan^{-1}x^3+c$ (ii) $\dfrac{-1}{24\left(9x^2+6x+2\right)^4}+c$ (iii) $\frac{1}{4}sin^{-1}x^4+c$

(iv) $\frac{1}{2}tan^2 x+c$ (v) $-cos\,x+\frac{2}{3}cos^3 x-\frac{1}{5}cos^5 x+c$

(vi) $sin\,x-sin^3 x+\frac{3}{5}sin^5 x-\frac{1}{7}sin^7 x+c$ (vii) $\frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{1}{2}sin\,x\right)+c$

(viii) $ln(ln\,x)$ (ix) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c$ (x) $\frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{1}{2}tan\frac{x}{2}\right)$

5. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $1-\frac{2}{\pi}$ (iii) $\frac{1}{6}$

பயிற்சி 5

3. (a) O (b) $A=1,B=1,\frac{1}{4}\left(x^4tan^{-1}x-\frac{1}{3}x^3+x-tan^{-1}x\right)+c$

5. 2, 1

7. $\frac{3\pi}{16}$

8. o, $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$

11. $\frac{7\sqrt{2}+3ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}$, 1, $\frac{1}{3}\left(8\sqrt{2}-10\right)$

12. $\frac{1}{2}\left(\pi^3-24\pi+48\right)$

13. $1-\frac{\pi}{4}$

14. 2π

15. $n(n+1)\pi$

16. $\frac{\pi}{2|sin\theta|},\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

SAI EDUCATIONAL PUBLICATION
36/4 - B, Pamankada Road,
Colombo - 06. T. P : 2366707

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org