கணிதம்
தொடர் இல்-1

அட்சரகணிதம்-1

ALGEBRA

யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கம்
2000

JAFFNA SCIENCE ASSOCIATION
EXECUTIVE COMMITTEE 2000/2001

President:
Prof.K.Balasubramanium

General Secretary:
Dr.S.Srisatkunarajah

President Elect:
Dr.N.Sivarajah

Past President:
Prof.P.Balasundarampillai

Treasurer:
Mr.V.Easwaran

Asst. General Secretary:
Mr.G.Mikunthan

Asst. Treasurer:
Dr.Mrs.S.Ramesh

Chief Editor:
Mr.K.K.Arulvel

Chairman:
Section A: Pure Science
Mr.A.Panchalingam

Chairman:
Section B: Applied Science and Technology
Prof.A.Navaratnarajah

Chairman:
Section C: Medical Science
Dr.K.Sivanesan

Chairman:
Section D: Social Science
Mr.V.P.Sivanathan

Printed at STP Computer World
Jaffna

கணிதம்
தொடர் இல-1

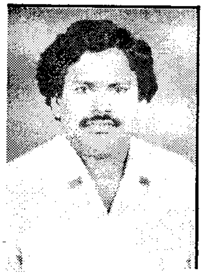
அட்சரகணிதம் - 1

க.அருளானந்தம், க.கமலநாதன்
பொ.மகேஸ்வரன், சு.வே.மகேந்திரன்

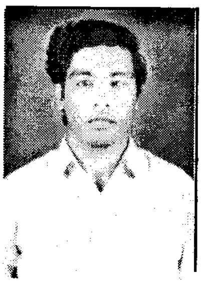
EDITED BY
Mr.P.Makinan, Mr.G.Mikunthan &
Dr.S.Srisatkunarajah

யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கம்
2000

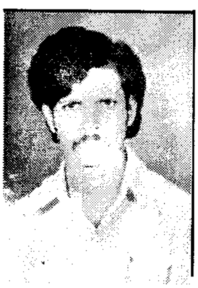
ஆசிரியர்களைப் பற்றி......



திரு.க.அருளானந்தம் B.Sc, Dip. in Ed.
சிரேஸ்ட கணித ஆசிரியர், ஹாட்லிக் கல்லூரி.
பரீட்சகர், க.பொ.த உயர்தரம்-கணிதம்
(Chapter 3 – Series)



திரு.க.கமலநாதன் B.Sc (Hons), Dip. in Ed.
சிரேஸ்ட கணித ஆசிரியர், விக்னேஸ்வராக் கல்லூரி.
பரீட்சகர், க.பொ.த உயர்தரம்-கணிதம்
(Chapter 2 – Quadratic Equations & Functions)



திரு.சு.வே.மகேந்திரன் B.Sc, Dip. in Ed.
சிரேஸ்ட ஆசிரியர், கொக்குவில் இந்துக் கல்லூரி,
பரீட்சகர், க.பொ.த உயர்தரம்-கணிதம்
(Chapter 1 – Factorisation)

திரு.பொ.மகேஸ்வரன் B.Sc(Hons) Dip. in Ed.
பிரதி அதிபர், யாழ்ப்பாணம் இந்துக் கல்லூரி,
பிரதம பரீட்சகர், க.பொ.த உயர்தரம்-கணிதம்
(Chapter 4 – Counting Methods)

பொருளடக்கம்

முகவுரை

க.பொ.த உயர்தர கல்வியின் அடிப்படை அறிவு வளர்த்தல்

(Knowledge Base Project – G.C.E. A/L)

இருபதாம் நூற்றாண்டுகளில் உலக நாடுகளின் அபிவிருத்தியானது ஆரம்பத்தில் மனித வளத்திலும் பின்னர் கைத்தொழில் மயமாக்கலிலும் தங்கியிருந்த காலம் போய் தற்சமயம் அந்நாட்டு மக்களின் விஞ்ஞான அறிவிலும், தொழில்நுட்ப வளர்ச்சியிலும் முழுமையாக தங்கியிருக்கின்றது. இதன்மூலம் ஒரு நாட்டினது அடிப்படை அறிவான விஞ்ஞானமும் தொழில்நுட்பமும் வெவ்வேறாக பிரிக்கப்பட முடியாமல் ஒன்றிணைந்திருப்பதனைக் காணலாம்.

அபிவிருத்தியடைந்துவரும் நாடுகளில் கலை, சமய சமூக கலாச்சாரங்கள் ஆழ வேர்விட்டு வளர்ந்திருப்பதை குழந்தையிலிருந்து முதியோர்வரை அவதானிக்கலாம். இருப்பினும் இந் நாடுகளில் விஞ்ஞான தொழில்நுட்ப கலாச்சார ஆளுமை நலிவடைந்துள்ளமை அவற்றின் அபிவிருத்திக்கு ஏற்பட்ட பின்னடைவாகும்.

"ஐந்தில் வளையாதது ஐம்பதில் வளையுமா?" என்ற பழமொழிக்கிணங்க விஞ்ஞான, தொழில்நுட்ப கைத்தொழில் கலாச்சாரமானது சிறுவயதிலிருந்தே கட்டியெழுப்பப்படவேண்டும் என்பதனை மையக்கருவாக்கி க.பொ.த உயர்தர கல்வியின் அடிப்படை அறிவு வளர்த்தல் (Knowledge Base Project – G.C.E.A/L) என்ற உன்னத பணியினை ஆரம்பித்துள்ளோம். கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர உயர்தரப் பரீட்சைக்குரிய பாடங்களில் சில பிரிவுகளிலுள்ள மாணவர்களினதும், ஆசிரியர்களினதும் அறிவாற்றலைத் தூண்டும் விதத்தில் அத்தியாயங்களாகவோ, உபபிரிவுகளாகவோ பாடவிதானத்தினை அடிப்படையாயக் கொண்ட நூல்கள் அனுபவமுடைய ஆசிரியர்களால் எழுதப்படுகின்றன. இவ்வகையான அறிவுசார் கையேடுகளை ஒவ்வொரு பாடத்திற்கும் வெளியிட வேண்டும் என்பது யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கத்தின் இனிவரும் ஆண்டுகளுக்குரிய முக்கிய கருத்திட்டமாகும்.

பாடசாலை மாணவர்களுக்கு மட்டுமல்லாது பல்கலைக் கழக மாணவரின் அடிப்படை அறிவை வளர்ச்சி செய்யவும் இந்நூல் அமைவதுடன் அதன்மூலம் இத்திட்டம் பல்கலைக் கழக மாணவரின் விஞ்ஞான, தொழில்நுட்ப வளர்ச்சிக்கு உதவி, நாட்டு மக்களின் வளத்தை மேன்மேலும் மேம்படுத்தும் கைங்கரியமுமாகும்.

“எண்ணும் எழுத்தும் கண்ணெனத் தகும்” என்பதற்கிணங்க யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கத்தின் முதல் வெளியீடாக கணித பாடத் தொடரில் முதலாவது அலகான அட்சரகணிதம்-1 எனும் இந்நூல் அமைகிறது. இந்நூலின் முழுமையான வழிகாட்டலுக்கு இதனை உருவாக்கிய ஆசிரியர் குழு முன்னின்று அரும்பணியாற்றியமை குறிப்பிடத்தக்கது. தமிழ் மாணவர்களின் நலன் கருதி வெளியிடப்படும் முதல் நூலான அட்சரகணிதம்-1 இனது அத்தியாயங்களை எழுதிய நூலாசிரியர்களும், பதிப்பாசிரியர்களும் எமது மக்களினதும் மாணவர்களினதும் பாராட்டுக்கும், மதிப்புக்கும் என்றென்றும் உரியவர்களாவர்.

நன்றி.

பேராசிரியர் க.பாலசுப்பிரமணியம்
தலைவர்,
யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கம்.

பதிப்பாசிரியர்களின் குறிப்பு

Editors Note.

கல்விப் பொது தராதர கணிதப் பாடவிதானத்திற்குரிய நூல்களை ஒரு தொடராக வெளியிட விரும்பி யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கம் எம்மை அணுகியபோது இப்பணியை ஒரு இன்றியமையாத தேவையாகக் கருதி ஏற்றுக் கொண்டோம். உடனடியாக திருவாளர்கள் பொ.மகினன், சு.வே.மகேந்திரன், க.அருளானந்தம், க.கமலநாதன், பொ.மகேஸ்வரன், இ.பாலசுப்பிரமணியம், கலாநிதி.சி.ஸ்ரீசற்குணராசா ஆகியோர் கொண்ட ஒரு ஆசிரியர் குழு இப்பணியை முன்னெடுக்க ஏற்படுத்தப்பட்டது.

அட்சரகணிதம்-1 (கணிதம் தொடர் இல1) எனும் இந்நூல் நான்கு அத்தியாயங்கள் கொண்டதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

அத்தியாயம்	ஆசிரியர்கள்
1. காரணிப்படுத்தல்	- திரு.சு.வே.மகேந்திரன்
2. இருபடிச்சமன்பாடுகளும், சார்புகளும்	- திரு.க.கமலநாதன்
3. தொடர்	- திரு.க.அருளானந்தம்
4. எண்ணும் முறைகள்	- திரு.பொ.மகேஸ்வரன்

இந்நூல் இணைந்த கணிதம், உயர்கணிதம் பயிலும் இரு சாராருக்கும் பயன்படும் முறையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும், அட்சரகணிதம்-2 (கணிதம் தொடர் இல2) எனும் நூல் ஈருறுப்பு விரிவு, சமனிலிகள், சிக்கல் எண்கள், சார்புகளும் வரைபுகளும் எனும் அத்தியாயங்களை உள்ளடக்கியதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

குறுகிய காலத்தில் சிறப்பான பணியினை மேற்கொண்ட ஆசிரியர் குழுவினர்களும், கணனி தட்டச்சு ஆக்கம் செய்து உதவிய S.T.P Computer World, செல்வி ந.வனிதா, செல்வன் ப.விமலநாதன் ஆகியோர்களும் பாராட்டப்பட வேண்டியவர்கள்.

அத்துடன் எமக்கு ஊக்கம் அளித்த யாழ்ப்பாண விஞ்ஞான சங்கத்தின் தலைவருக்கும் செயற்குழு உறுப்பினர்களுக்கும் எமது நன்றிகள்.

"எல்லாப் புகழும் இறைவனுக்கே"

திரு.பொ.மகினன், கலாநிதி.சி.ஸ்ரீசற்குணராசா
கணித புள்ளிவிபரவியற்துறை
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம்

அத்தியாயம் 1

1.1 காரணிப்படுத்தல் (Factorisation)

அறிமுகம்

இடைநிலை வகுப்புகளில் கல்வி பயிலும் மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் எளிய சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து மாறிகளின் பெறுமதிகளைக் காண்பதில் திறன் பெற்ற பின்னர் இருபடிச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண வேண்டிய தேவைக்குட்படுவர். இதற்கு இருபடிக்-கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தும் திறன்கள் அவர்களிற்குப் பெரிதும் உதவும். இவ்வறிவைப் பெற்ற மாணவர்களுக்கு க.பொ.த உயர்தர வகுப்பில் இரண்டாம் படிக்கு மேலான படிகளையுடைய பல்லுறுப்பிகளைக் காரணிப்படுத்த வேண்டிய தேவை எழுகின்றது. இத்தேவையை நிறைவு செய்வதற்கு மீதித்தேற்றம் பெரிதும் பயன்படும். மீதித்தேற்றத்தை அறிமுகப்படுத்துவதற்கு முன்பதாக பல்லுறுப்பிகள், அவற்றின் வகைகள், இயல்புகள் என்பன சுருங்கக் கூறுப்படுகின்றது. க.பொ.த உயர்தர வகுப்பில் இணைந்த கணிதம் கற்கும் மாணவர்களுக்கு ஒரு மாறியிலான மூன்றாம் படியிலான பல்லுறுப்பிகளைக் காரணிப்படுத்தலும் அது தொடர்பான பயிற்சிகளும் போதுமானவை. ஏனையவை உயர் கணிதம் கற்கும் மாணவர்களுக்குரியது.

பல்லுறுப்பி (Polynomial)

மறையற்ற முழு எண்களைச் சுட்டிகளாகக் கொண்ட மாறிகளினதும் பூச்சியமற்ற மாறிலி ஒன்றினதும் பெருக்கங்களைக் கொண்ட கோவை பல்லுறுப்பி எனப்படும்.

உ+ம் : (1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$

இது ஒரு மாறியைக் கொண்ட பல்லுறுப்பி ஆகும்.

(2) $2xy^2 + xy$

(3) $xy^2z - 2xy$

இவை பல மாறிகளிலான பல்லுறுப்பிகளாகும்.

ஏகபரிமாண பல்லுறுப்பி

ஒரு பல்லுறுப்பியின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் முதலாம் படியிலுள்ள ஒரு மாறி அல்லது மாறிலி இருப்பின் அது ஏகபரிமாண பல்லுறுப்பி எனப்படும்.

உ+ம் : (i) $x + 2y$ (ii) $x + y + z$ (iii) $2x + y + z$

ஏகவினப் பல்லுறுப்பி

ஒரு பல்லுறுப்பியின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள மாறிகளின் படிகளின் கூட்டுத்தொகை சமமாக இருப்பின் அது ஏகவினப் பல்லுறுப்பி எனப்படும்.

உ+ம் : (1) $xy + x^2$

(2) $x^2y + xyz$

(3) $ab(c-a) + bc(a-c) + ca(b-c)$

பல்லுறுப்பிகளின் வகுத்தல்

உ+ம் : (i) $\left(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 10x - 10\right) \div \left(x - 2\right)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 + 8x^2 + 15x + 40 \\ \hline
x-2 & 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 10x - 10 \\
 & \underline{3x^4 - 6x^3} \\
 & \quad 8x^3 - x^2 \\
 & \quad \underline{8x^3 - 16x^2} \\
 & \qquad 15x^2 + 10x \\
 & \qquad \underline{15x^2 - 30x} \\
 & \qquad\qquad 40x - 10 \\
 & \qquad\qquad \underline{40x - 80} \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{70}
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= 3x^3 + 8x^2 + 15x + 40$

மீதி $= 70$

இப்பிரித்தல் முறையை மாணவர்கள் இடைநிலை வகுப்புகளில் கற்றிருப்பினும் தொகுப்பு முறை வகுத்தலுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கு இங்கு காட்டப்பட்டுள்ளது.

1.2 தொகுப்பு முறை வகுத்தல் (Synthetic Division)

இம்முறையில் தரப்பட்ட பல்லுறுப்பியின் குணகங்கள் x இன் அடுக்குகளின் இறங்கு வரிசைப்படியான ஒழுங்கில் ஒரு நிரையில் எழுதப்படும்.

பின் வகுக்கும் கோவையைப் பூச்சியமாக்கும் x இன் பெறுமதியால் முதலாம் குணகத்தைப் பெருக்கி அடுத்த குணகத்திற்குக் கீழ் இரண்டாம் வரிசையில் எழுதிக் கூட்டல் வேண்டும். பெற்ற விடையை மீண்டும் x இன் பெறுமதியால் பெருக்கி அடுத்த குணகத்தின் கீழ் எழுதிக் கூட்டல் வேண்டும். இவ்வாறு தொடர்ந்து செய்து 2ம், 3ம் நிரைகளை உருவாக்கலாம். இங்கு முதலாம் எண் நேராக 3ம் நிரைக்கு இறக்கப்படும். மூன்றாம் வரிசையில் இறுதி எண் ஈவாகவும், ஏனைய எண்கள் வரிசையில் ஈவின் குணகங்களையும் தரும்.

மேலுள்ள உதாரணம் : தொகுப்பு முறையில் செய்தல்

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	3	2	-1	10	-10
$\times 2$	$\times 2$	6			
	3	8	-1	10	-10
		$\times 2$	16		
	3	8	15	10	-10
			$\times 2$	30	
	3	8	15	40	-10
				$\times 2$	80
	3	8	15	40	$\boxed{70}$
	$3x^3$	$8x^2$	$15x$	40	மீதி

$\therefore$ ஈவு $= 3x^3 + 8x^2 + 15x + 40$

மீதி $= 70$

உ+ம் : (ii) $\left(4x^3 - 4x^2 + 5x + 7 \right) \div \left(2x - 1 \right)$

பல்லுறுப்பிகளின் வகுத்தல்

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - x + 2 \\
\hline
2x - 1 & 4x^3 - 4x^2 + 5x + 7 \\
 & \underline{4x^3 - 2x^2} \\
 & \quad - 2x^2 + 5x \\
 & \quad \underline{- 2x^2 + x} \\
 & \qquad\qquad 4x + 7 \\
 & \qquad\qquad \underline{4x - 2} \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{9}
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= 2x^2 - x + 2$

மீதி $= 9$

தொகுப்பு முறையால் வகுத்தல்

பிரிக்கும் எண்ணைப் பூச்சியமாக்கும் x இன் பெறுமானம் $\frac{1}{2}$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\
 & 4 & -4 & 5 & 7 \\
\times \frac{1}{2} & & 2 & -1 & 2 \\
\hline
 & 4 & -2 & 4 & \boxed{9} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 4x^2 & -2x & 4 & \text{மீதி}
\end{array}
$$

இங்கு $4x^3 - 4x^2 + 5x + 7 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(4x^2 - 2x + 4\right) + 9$

$$= (2x - 1)\left(2x^2 - x + 2\right) + 9$$

$\therefore$ ஈவு $= 2x^2 - x + 2$

மீதி $= 9$

உ+ம் : (iii) $\left(x^4 + 2x^2 + 5x + 12\right) \div (x - 2)$

	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	1	0	2	5	12
$\times 2$		2	4	12	34
	1	2	6	17	$\boxed{46}$
	x^3	$2x^2$	$6x$	17	மீதி

$\therefore$ ஈவு $= x^3 + 2x^2 + 6x + 17$

மீதி $= 46$

1.3 மீதித்தேற்றம் (Remainder Theorem)

$f(x)$ என்பது x இலான பல்லுறுப்பிச் சார்பாக இருக்க α என்பது ஒரு மாறிலியாக $f(x)$ ஐ $(x - \alpha)$ ஆல் x ஐச் சாராத மீதி வரும் வரை வகுப்பின் மீதி $f(\alpha)$ ஆகும்.

நிறுவல் : f(x) ஐ $(x - \alpha)$ ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு $\phi(x)$ எனவும் மீதி R எனவும் கொள்க.

$$f(x) = (x - \alpha)\phi(x) + R$$

$$x = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 0.\phi(\alpha) + R$$

$$\therefore R = f(\alpha)$$

$\therefore$ மீதி $f(\alpha)$ ஆகும்.

குறிப்பு :

(i) வகுக்கும் கோவை $ax + b$ எனின் மீதி R.

(ii) வகுக்கும் கோவை $ax^2 + bx + c$ எனின் மீதி $px + q$

(iii) வகுக்கும் கோவை $ax^3 + bx^2 + cx + d$ எனின் மீதி $lx^2 + mx + n$ என்ற வடிவில் அமையும்.

உ+ம் : (1) $3x^3 - 2x + 3$ என்பதை $2x + 1$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி யாது?

$$\frac{3x^3 - 2x + 3}{2x + 1} = \phi(x) + \frac{R}{2x + 1}$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 2x + 3 = (2x + 1)\phi(x) + R$$

$x = -\frac{1}{2}$ ஆக

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 0 + R$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{8} + 1 + 3 = R$$

$$\Rightarrow \frac{29}{8} = R$$

$$\therefore R = {}^{29}\!/_{8}$$

உ+ ம் : (2) $x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ என்பதை $x^2 - 3x + 2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 15x - 5 \text{ என்க.}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{x^2 - 3x + 2} = \phi(x) + \frac{ax + b}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x - 1)\phi(x) + ax + b$$

$$f(1) = a + b = 1 + 4 \cdot 1 - 18 \cdot 1 + 15 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$f(2) = 2a + b = 16 + 32 - 72 + 30 - 5 = 1$$

$$a = 4$$

$$\therefore b = -7$$

$$\therefore \text{மீதி} = 4x - 7$$

உ+ ம் : (3) $(x^2 + 1)$ ஆல் வகுபடுவதும் $(x - 1)^2 (x + 1)$ ஆல் வகுக்கும் போது $(-10x + 6)$ ஐ மீதியாகத் தருவதுமாக-வுள்ள நாலாம் படிக் கோவையைக் காண்க.

$$f(x) = (x^2 + 1)(lx^2 + mx + n)$$

$(x - 1)^2 (x + 1)$ வகுக்கும் போது மீதி $(-10x + 6)$

கிடைப்பதால்

$$f(x) = (x - 1)^2 (x + 1)(ax + b) - 10x + 6$$

$$\therefore (x^2 + 1)(lx^2 + mx + n) = (x - 1)^2 (x + 1)(ax + b) - 10x + 6 \qquad \text{———} ①$$

$$x = 1 \Rightarrow 2(1 + m + n) = -4$$

$$\Rightarrow 1 + m + n = -2 \qquad \text{———} ②$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 - m + n = 8 \qquad \text{———} ③$$

சர்வ சமன்பாட்டை இரு பக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட்டு $x = 1$ எனப் பிரதியிட

$$(x^2+1)(2lx+m)+2x(lx^2+mx+n)$$
$$\equiv \frac{d}{dx}\left[(x-1)^2(x+1)(ax+b)\right]-10$$

$$x = 1 \Rightarrow 2(2l+m)+2(l+m+n) = -10$$
$$\Rightarrow 3l+2m+n = -5 \quad \text{④}$$
$$\text{②} - \text{③} \Rightarrow m = -5$$
$$\therefore \text{②} \Rightarrow l+n = 3$$
$$\text{④} \Rightarrow 3l+n = 5$$
$$\Rightarrow l = 1,\ n = 2$$
$$\therefore f(x) = (x^2+1)(x^2-5x+2)$$

குறிப்பு :

சர்வ சமன்பாடு ① இல் x இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதன் மூலம் ஏனைய சமன்பாடுகள் பெறப்படலாம். வகையீடு அவசியம் இல்லை.

காரணித்தேற்றம் (Factor Theorem)

$f(x)$ ஒரு பல்லுறுப்பிச் சார்பாக இருக்க α என்பது $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலமாயிருப்பின் $(x - \alpha)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

நிறுவல் : $f(x)$ ஐ $(x - \alpha)$ ஆல் வகுக்க ஈவு $\phi(x)$ உம் மீதி R உம் என்க.

$\therefore$ மீதித்தேற்றத்தின் படி

$$R = f(\alpha)$$

ஆனால் α என்பது $f(x) = 0$ இன் மூலம்

$$\therefore f(\alpha) = 0$$

$$\therefore R = 0$$

$\therefore f(x) = (x - \alpha)\phi(x) + R$ இல் $R = 0$

$\therefore f(x) = (x - \alpha)\phi(x)$

$\therefore (x - \alpha)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

காரணித்தேற்றத்தின் மறுதலை

> $(x - \alpha)$ என்பது $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்பியின் காரணியாயின் α என்பது $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

நிறுவல் : $(x - \alpha)$ என்பது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாதலால்

$$f(x) = (x - \alpha)\phi(x) + 0 \quad \text{———} \quad ①$$

மீதித்தேற்றத்தின் படி $R = f(\alpha)$

① இன் படி $R = 0$

$$\therefore f(\alpha) = 0$$

$\therefore \alpha$ என்பது $f(x) = 0$ இன் ஒரு மூலம் ஆகும்.

உதாரணம் :

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ ஐக் கருதுக.

$$f(1) = 1 - 3 + 2$$
$$= 0$$

$\therefore\ (x - 1)$ ஓர் காரணி

$$f(2) = 4 - 3\times 2 + 2$$
$$= 0$$

$\therefore\ (x - 2)$ காரணி ஆகும்.

$$\Rightarrow\ f(x) = (x - 1)(x - 2)$$

வினா : $2x^4 - 3x^3 + ax - 6$ என்பதை $(x + 2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுக்கும் போது a யின் பெறுமானம் யாது?

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + ax - 6}{x + 2} = \phi(x) + \frac{p}{x + 2}$$ இங்கு

$$p = 0$$

$$\Rightarrow\ 2x^4 - 3x^3 + ax - 6 = (x + 2)\,\phi(x) + p$$

$x = 2$ ஆக

$$2(-2)^4 - 3(-2)^3 + a(-2) - 6 = 0 + 0$$
$$32 + 3\times 8 - 2a - 6 = 0$$
$$2a = 50$$
$$a = 25$$

* $(x + 2)$ காரணியாதலால் $f(-2) = 0$ ஆகும்.

$$\Rightarrow\ f(-2) = 2(-2)^4 - 3(-2)^3 + a(-2) - 6 = 0$$
$$32 + 3\times 8 - 2a - 6 = 0$$
$$a = 25$$

1.4 மீள் காரணிகள்

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்பிக்கு $(x - \alpha)$ ஒரு மீள்காரணி எனின் $f'(x)$ இற்கு $(x - \alpha)$ என்ற காரணி உண்டு.

நிறுவல்:

$f(x) = (x - \alpha)^r \phi(x)$ என எழுதலாம்.

$r > 1$ ஆகுமாறு நேர்முழு எண்

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}\left[(x - \alpha)^r \phi(x)\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x - \alpha)^r \phi'(x) + \phi(x) r (x - \alpha)^{r-1}$$

$$= (x - \alpha)^{r-1}[(x - \alpha)\phi'(x) + r\phi(x)]$$

$\therefore (x - \alpha)$ ஆனது $f'(x)$ இன் காரணி

குறிப்பு :

$(x - \alpha)^r$ என்ற வடிவிலுள்ள கோவைகளால் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்பதற்கு மேலுள்ள முறை பயன்படும்.

உதாரணம் :

$x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 12x + 5$ ஐ $(x-1)^2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி யாது?

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 12x + 5$ என்க.

$f(x) = (x - 1)^2 \phi(x) + px + q$ என எழுதலாம்.

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 + p + q$

$\therefore p + q = -1$ ———— ①

$$f'(x) = (x-1)^2 \phi'(x) + \phi(x) 2(x-1) + p$$

$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 + 0 + p$

ஆனால் $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 14x - 12$

$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

$\therefore p = 0$

$\therefore$ ① $\Rightarrow q = -1$

$\therefore$ மீதி -1 ஆகும்.

பயிற்சி 1.a :

1. $4x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 5$ என்பதை $2x^2 - 3x + 1$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.
2. $ax^4 - 2x^3 + bx^2 - 6x - 9$ என்பது $x^2 - 2x - 3$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடின் a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
3. $2x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ என்பதை $x^2 - 1$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $2x + 3$ ஆகும். a, b ஐக் காண்க.
4. $x^8 + 2x^7 + ax^2 + bx + c$ இக்கோவை செப்பமாக $x^2 + x - 2$ ஆல் வகுக்கப்படும். ஆனால் $(x+1)$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது மீதி -8 ஆகும். a, b, c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
5. $7x^4 - 5x^3 + ax^2 + 5x - 3$ இக்கோவையானது $x - 1$ ஆல் வகுபடும் போது மீதி 0 ஆயின் a இன் பெறுமானம் யாது?
6. $4x^3 - (3p+2)x^2 - (p^2 - 1)x + 3$ ஐ $x - p$ திருத்தமாக வகுக்கின்றது. இங்கு p ஒரு முழு எண் ஆகும். p இன் இப்பெறுமானத்திற்கு கோவை $x - 1$ ஆல் வகுபடும் போது பெறப்படும் மீதியைக் காண்க.

7. $ax^4 + 4x^3 - 18x^2 + bx - 5$ என்பது $x^2 - 3x + 2$ என்பதனாலே வகுபடும் போது பெறப்படும் மீதி $4x - 7$ என்பதாகும். a , b ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. $f(x)$ என்பதை $(x-a)(x-b)$ என்பதால் வகுக்கும் போது மீதி $px + q$ ஆகும். $a \neq b$,

$$p = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$q = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{a - b}$$ எனக் காட்டுக.

9. $x^2 + 1$ ஆல் வகுபடக்கூடிய ஆனால் $(x-1)^2(x+1)$ ஆல் வகுபடும் போது $(-10x + 6)$ ஐ மீதியாக இருக்கக்கூடிய x இலுள்ள 4ம் படி மெய்ப்பல்லுறுப்பி ஒன்றை அட்சர கணித முறையாக மட்டும் காண்க.

10. $f(x)$ என்பது x இலுள்ள ஒரு பல்லுறுப்பி. $f(1) = a$, $f(-1) = b$, $f(0) = c$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $x^2 - 1$ ஆல் வகுபடும் போது மீதி $\frac{1}{2}(a-b)x + \frac{1}{2}(a+b)$ எனக் காட்டுக. $f(x)$ ஆனது $x^3 - x$ ஆல் வகுபடும் போது மீதி $\frac{1}{2}(a+b-2c)x^2 + \frac{1}{2}(a-b)x + c$ எனக் காட்டுக.

11. $f(x) = x^7 + lx^2 + mx + n$ என்பது $x + 1$ என்பதாலும் $x^2 - x$ என்பதாலும் வகுக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே 3 உம் $x + 2$ உம் ஆகும். l, m, n என்பவற்றைக் காண்க.

12. $x^3 + 3px + q$ இன் காரணி ஒன்று $(x-a)^2$ எனும் வடிவில் இருப்பின் $q^2 + 4p^3 = 0$ எனக் காட்டுக.

13. $x^3 + ax^2 + bx + c$ என்பது $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+2)$ என்பவற்றால் வகுபடும் போது மீதிகள் முறையே 2 , -1, 15 ஆகும். கோவையை $x+1$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

முப்படிக் கோவையின் சினைகளைக் காண்க.

14. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ என்ற பல்லுறுப்பிச் சார்பு (x^2-1), (x^2-4) என்பவற்றால் வகுக்கப்படும் போது மீதிகள் முறையே $(5x-2)$ $11(x-1)$ எனின் a , b , c என்பவற்றைக் காண்க.

15. $x^6 - 2x^4 + x^2 - 2$ என்ற பல்லுறுப்பியை $x^2 - x - 2$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதி $12x + 10$ எனக் காட்டுக.

16. $x^3 - ax + b$ என்பதை $x^2 - 3x + 2$ ஆல் வகுக்க மீதி $4x - 1$ எனின் a , b யைக் காண்க.

1.5 பல்லுறுப்பிச் சார்புகளைக் காரணிப்படுத்தல்
(Factorisation of Polynomial Function)

சமச்சீர் பல்லுறுப்பிச் சார்பு
(Symmetric Polynomial Function)

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்டிருக்கும் பல்லுறுப்பிச் சார்புகளில் எவையேனும் இரு மாறிகளைத் தமக்குள் மாற்றும் போது சார்பு மாறாதிருப்பின் அது சமச்சீர் சார்பு எனப்படும்.

உ+ம் : 1. $x + y$

2. $x^2 + xy + y^2$

3. $x + y + z$

4. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$

சமச்சீர் முரண் சார்பு (ஓராயச் சமச்சீர்ச் சார்பு)
(Skew Symmetric Polynomial Function)

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்டிருக்கும் சார்பில் இரு மாறிகளைத் தமக்குள் மாற்றும் போது சார்பானது குறியை மட்டும் மாற்றினால் அது சமச்சீர் முரண் சார்பு எனப்படும்.

உ+ம் : 1. $x - y$

2. $(x-y)(y-z)(z-x)$

வட்டப் பல்லுறுப்பிச் சார்பு (Cyclic Polynomial Fuction)

x, y, z, u, v, w ஆகிய மாறிகளைக் கொண்ட சார்பில்

$x \rightarrow y$

$y \rightarrow z$

$z \rightarrow \imath$

$u \rightarrow v$

$v \rightarrow w$

$w \rightarrow x$ என மாற்றும் போது சார்பு மாறாது இருப்பின் அது வட்டப் பல்லுறுப்பிச் சார்பு எனப்படும்.

குறிப்பு :

1. இரு சமச்சீர் சார்புகளைப் பெருக்கும் போதும் வகுக்கும் போதும் பெறப்படும் சார்புகள் சமச்சீர் சார்புகள் ஆகும்.
2. இரண்டு சமச்சீர் முரண் சார்புகளைப் பெருக்கும் போதும் வகுக்கும் போதும் பெறப்படும் சார்புகள் சமச்சீர் சார்புகள் ஆகும்.
3. ஒரு சமச்சீர் சார்பையும் ஒரு சமச்சீர் முரண் சார்பையும் பெருக்கும் போதும் வகுக்கும் போதும் பெறப்படும் சார்பு ஆனது சமச்சீர் முரண் சார்பு ஆகும்.

மீதித் தேற்றத்தின் மூலம் பல்லுறுப்பிச் சார்புகளைக் காரணிப்படுத்தல்

உ+ம் : 1) $f(x,y,z) = xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$

இது வட்டச் சமச்சீர் முரண் சார்பு ஆகும்.

$x = y$ ஆக

$$f(y,y,z) = yy(y-y)+yz(y-z)+zy(z-y)$$

$$= 0 + yz(y-z) - yz(y-z)$$
$$= 0$$

$\therefore \ (x-y)$ ஓர் காரணி

இவ்வாறே $(y-z)$, $(z-x)$ ஆகியன காரணிகளாகும்.

$f(x,y,z)$ ஆனது x, y, z ல் மூன்றாம் படிச் சார்பாகும்.

$\therefore \ f(x,y,z) = A(x-y)(y-z)(z-x)$ என எழுதலாம்.

முறை I : x^2y இன் குணகத்தைச் சமப்படுத்த

$$-A = 1$$
$$A = -1$$
$$\therefore \ f(x,y,z) = -(x-y)(y-z)(z-x)$$

முறை II : $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$ ஆக

$$-1(2) = A(0-1)(1+1)(-1-0)$$
$$-2 = 2A$$
$$A = -1$$

குறிப்பு :

i) x, y, z இல் 1ம் படியில் உள்ள ஏகவினமான வட்ட சமச்சீர் சார்பின் பொது வடிவம் $\lambda(x+y+z)$ ஆகும்.

ii) x, y, z இல் 2ம் படியில் உள்ள ஏகவினமான வட்ட சமச்சீர் சார்பின் பொது வடிவம் $\lambda\left(x^2+y^2+z^2\right) + \mu\left(xy+yz+zx\right)$ ஆகும்.

iii) x, y, z இலான ஏனவினச் சார்பைக் காரணிப்படுத்துவதற்கு முதலாம் படிக் காரணிகள் காணும் முறைகள்

(a) $x = 0$ என இட $f(x,y,z) = 0$ எனின் x ஒரு காரணி

(b) $x = y$ என இட $f(x,y,z) = 0$ எனின் $x-y$ ஒரு காரணி

(c) $x = -y$ என இட $f(x,y,z) = 0$ எனின் $x+y$ ஒரு காரணி

(d) $x = y+z$ என இட $f(x,y,z) = 0$ எனின் $x-y-z$ ஒரு காரணி

(e) $x = -y-z$ என இட $f(x,y,z) = 0$ எனின் $x+y+z$ ஒரு காரணி

உ+ம் : 2) $f(x,y,z) = x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3$

இது வட்ட சமச்சீர் முரண் சார்பு ஆகும்.

$x = y$ ஆக

$$f(y,y,z) = y(y-z)^3 + y(z-y)^3 + z(y-y)^3$$
$$= y(y-z)^3 - y(y-z)^3$$
$$= 0$$

$\therefore$ $(x-y)$ ஓர் காரணி ஆகும்.

இவ்வாறே $(y-z)$, $(z-x)$ ஆகியன காரணிகளாகும்.

$f(x,y,z)$ 4ம் படி ஏகவின வட்ட சமச்சீர் முரண் சார்பு

$(x-y)(y-z)(z-x)$ 3ம் படி ஏகவின வட்ட சமச்சீர் முரண் சார்பு

எனவே குறிப்பு (2) ன் படி

$f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)\ \lambda(x+y+z)$ என எழுதலாம்.

இங்கு $\lambda(x+y+z)$ 1ம் படி ஏகவின வட்ட சமச்சீர் சார்பின் பொது வடிவம்.

xy^3 இன் குணகத்தைச் சமப்படுத்த

$$1 = \lambda$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

உ+ம் : 3) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

இது வட்ட சமச்சீர் சார்பு ஆகும்.

$x = -y-z$ என இட

$$f(-y-z,y,z) = (-y-z)^3 + y^3 + z^3 - 3(-y-z)yz$$

$$= -(y+z)^3 + y^3 + z^3 + 3(y+z)yz$$

$$= -(y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3) + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2$$

$$= 0$$

$\therefore$ $(x+y+z)$ ஓர் காரணி ஆகும்.

$f(x,y,z)$ ஆனது x, y, z ல் மூன்றாம் படி ஏகவின வட்டச் சமச்சீர்

அத்துடன் $(x+y+z)$ முதலாம் படி ஏகவின வட்டச் சமச்சீர்

எனவே குறிப்பு (2) ன் படி

$$\therefore\ f(x,y,z) = (x+y+z)\,[\lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu(xy+yz+zx)]$$

என எழுதலாம்.

இங்கு $\lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu(xy+yz+zx)$ இரண்டாம் படி ஏகவின வட்டச் சமச்சீர் சார்பின் பொது வடிவம்.

x^3 இன் குணகத்தைச் சமப்படுத்த

$$1 = \lambda$$

xyz இன் குணகத்தைச் சமப்படுத்த

$$-3 = 3\mu$$

$$\mu = -1$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (x+y+z)\,[(x^2+y^2+z^2) - (xy+yz+zx)]$$

உ+ம் : 4) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$f(a,b,c) = (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ என்க.

$a = -b$ என இட

$f(-b,b,c) = c^3-(-b)^3-b^3-c^3 = 0$

$\therefore$ $(a+b)$ ஓர் காரணி.

$f(a,b,c)$ சமச்சீர் சார்பாதலால்

$(b+c)$, $(c+a)$ என்பவையும் காரணிகள் ஆகும்.

$f(a,b,c)$ மூன்றாம் படிச் சார்பாதலால்

$f(a,b,c) = \lambda(a+b)(b+c)(c+a)$ என எழுதலாம்.

ab^2 இன் குணகத்தைச் சமன் செய்ய

$\lambda = 3$ ஆகும்.

$\therefore$ $f(a,b,c) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

பயிற்சி 1.b :

காரணிப்படுத்துக.

1) $f(a,b,c) \equiv (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)+8abc$

2) $f(a,b,c) \equiv a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

3) $f(a,b,c) \equiv a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

4) $f(x,y,z) \equiv x^2(y^3-z^3)+y^2(z^3-x^3)+z^2(x^3-y^3)$

5) $f(a,b,c) \equiv bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

6) $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

7) $f(a,b,c) \equiv a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

8) $f(a,b,c) \equiv bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

9) $f(a,b) \equiv (a+b)^5 - a^5 - b^5$

10) $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4$

11) $f(a,b,c) \equiv (bc+ca+ab)^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3$

12) $f(a,b,c) \equiv (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

13) $f(x,y,z) \equiv (x+y)^3(x-y) + (y+z)^3(y-z) + (z+x)^3(z-x)$

14) $f(a,b,c) \equiv a^3 + 8b^3 + 27c^3 - 18abc$

15) $f(x,y,z) \equiv (x+y)(y+z)(z+x) + xyz$

16) $f(a,x) \equiv (a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$

பயிற்சி 1.c :

1) (i) $(x-y)$ என்பது $f(x,y,z) \equiv x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$ என்பதன் காரணி எனக்காட்டி, இதிலிருந்து கோவையை முற்றாகக் காரணிப்படுத்துக.

x , y , z மெய்க்கணியங்களாகவும் சமனற்றவையாகவும் இருப்பின் $f(x,y,z) = 0$ ஆக முடியாது என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $ax^3 + bx + c$ என்பது $x^2 + px + 1$ என்பதை ஒரு காரணியாகக் கொண்டதெனின் $a^2 - c^2 = ab$ எனக் காட்டுக.

$ax^3 + bx + c$ உம் $cx^3 + bx + a$ உம் பொது இருபடிக் காரணியைக் கொண்டதென உய்த்தறிக.

2) $f(x)$, $g(x)$ என்பன x இலான பல்லுறுப்பிகளாகும். $f(x)$ ஐ $3x^2 + x - 2$ இனாலும் $g(x)$ ஐ $x^2 - 1$ இனாலும் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே $2x+1$, $x+2$ ஆகும். பல்லுறுப்பி $f(x) + g(x)$ இன் ஏகபரிமாணக் காரணி ஒன்றைக் கண்டு $f(x) \cdot g(x)$ ஐ இவ் ஏகபரிமாணக் காரணிகளால் வகுக்கும் போது மீதி -1 எனக் காட்டுக.

3) x^2-k என்பது $2x^4+(3k-4)x^3+(2k^2-5k-5)x^2+(2k^3-2k^2-3k-6)x+6$ இன் ஒரு காரணியாக இருக்கத்தக்கதாக k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

k இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் நேர் ஒத்த $f(x)$ இன் எஞ்சிய காரணிகளைக் காண்க.

4) $f(x)\equiv x^4-4x^3+10x^2-12x+5$ எனின் $x-1$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும் எனக் காட்டுக.

$f(x)$ ஐ $(x-a)^2(x^2+bx+c)$ எனும் வடிவத்தில் தருக.

இங்கு $a\,,b\,,c$ ஒருமைகள்.

x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும் $f(x)\geq 0$ என்பதை உய்த்தறிக.

5) $f(x)\equiv px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ என்பது x^2+a ஆல் வகுபட்டால் மீதி $(s-qa)x+pa^2-ra+t$ எனக் காட்டுக.

$\alpha\,,-\alpha$ என்பன $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களெனின் $ps^2-qrs+q^2t=0$ எனக் காட்டுக.

6) x^2+px+1 என்பது ax^5+bx^2+c என்பதன் காரணி எனின் $(a^2-c^2)(a^2-c^2+bc)=a^2b^2$ என நிறுவுக. இந்நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்பட்டால் x^2+px+1 என்பதும் cx^5+bx^3+a என்பதன் காரணியாகும் எனக் காட்டுக.

7) $f(x)\equiv x^4-bx^3-11x^2+4(b+1)x+a$ இங்கு $a\,,\ b$ மாறிலிகள் ஆகும். $f(x)$ இருபடிக்கோவை ஒன்றின் நிறைவர்க்கம் எனவும் $f(x)$ இன் ஒரு காரணி $x+2$ எனவும் தரப்படின் $a\,,\ b$ ஐக் காண்க.

8) $x^3+3px^2+3qx+r$ ஆனது $(x-\alpha)^2(x-\beta)$ ஆல் வகுபடக்கூடியது. $[x\neq\beta,\ \alpha\neq 0,\ p^2\neq q]$

$\alpha^2+2p\alpha+q=0$ எனவும், $p\alpha^2+2q\alpha+r=0$ எனவும் காட்டி

$\alpha=\dfrac{r-pq}{2(p^2-q)}$ என உய்த்தறிக.

9) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ இன் காரணிகளைக் காண்க. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக a, b, c எனும் சமனில்லாத மூன்று எண்கள் x , y , z என்பவற்றின் சார்பில் $x^2=a+yz$, $y^2=b+zx$, $z^2=c+xy$ என்பவற்றினால் தரப்படின் $ax+by+cz=0$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $x+y+z=0$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

10) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)$ எனக் காட்டுக.

$x+y+z=0$

$ax+by+cz=0$

$x^3+y^3+z^3\equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)$ என அமையும் வண்ணம் x , y , z ஆகியன மெய்மாறிகள் எனின், மெய் a , b , c க்கு $a\neq b\neq c$ என அமையின்

$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=1$ எனக் காட்டுக.

11) $f(x,b,c)\equiv x^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2x^2c^2-2x^2b^2$ இங்கு b , c மாறிலிகள். $f(x,b,c)$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

இதிலிருந்து $f(x,b,c)=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க. இங்கு x ஓர் மாறி ஆகும்.

அத்தியாயம் 2

இருபடிச் சமன்பாடுகள், இருபடிச் சார்புகள், விகிதறு சார்புகள்

அறிமுகம்:

கணிதத்தில் சமன்பாடு அமைத்தலும் அதனைத் தீர்த்தலும் முக்கிய இடத்தை வகிக்கின்றன. எளிய சமன்பாடு, ஒருங்கமை சமன்பாடு, இருபடிச் சமன்பாடு, வகையீட்டுச் சமன்பாடு எனப் பலவகையான சமன்பாடுகளை நாம் எப்போதும் எதிர்கொள்கின்றோம்.

எனவே இவ்வத்தியாயத்தில் **இருபடிச் சமன்பாடுகள்** அதன் மூலங்கள், தன்மைகள் என்பன விரிவாக நோக்கப்படுகின்றன. அத்துடன் **இருபடிச் சார்புகள்,** அவற்றின் இயல்புகள், உடமைகள், அவற்றின் பருமட்டான வரைபு என்பன பற்றி விளக்கப்படுகின்றன.

இருபடிச் சார்புகளும், இருபடிச் சமன்பாடுகளும் ஒன்றோ-டொன்று பிரிக்கமுடியாத இரு பகுதிகளாகும்.

இவ்வத்தியாயத்தின் இறுதிப்பகுதியில் **விகிதமுறு சார்புகள்,** அவற்றின் வீச்சம், வரைபு என்பன பற்றி எடுத்து நோக்கப்பட்டுள்ளது.

இருபடிச் சார்புகளின் வரைபுகளை இலகுவில் நாம் இனங் காணமுடியும். ஆனால் விகிதமுறு சார்புகளின் வரைபுகளை இனங் காணமுடியாது. இவற்றின் வரைபுகளை வரைவதற்கு சில படிமுறைகளை ஒழுங்கான முறையில் நாம் மேற்கொள்ள வேண்டும். அப்படிமுறைகள் இங்கு எடுத்துக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

2.1 இருபடிச் சமன்பாடுகளும் தீர்வுகளும்

$a, b, c \in \Re,\ a \neq 0$ ஆயிருக்க $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் வடிவில் அமைந்த சமன்பாடு **இருபடிச் சமன்பாடு** எனப்படும்.

இச்சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் x இன் பெறுமானங்கள் இவ்விருபடிச்சமன்பாட்டின் **மூலங்கள்** எனப்படும்.

இவ்விருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு எப்போதும் மூலங்கள் இருக்கும் எனவும், அவை மெய் மூலங்களாகவோ, சிக்கலெண் மூலங்களாகவோ இருக்கலாம் எனவும் கீழ்வரும் பகுதிகளில் காண்போம்

2.1.1 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலகங்கள்

தேற்றம் 1

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ஆகும்.

நிறுவல்: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$\Rightarrow\left[x-\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=0$$

எனவே $x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ அல்லது

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\therefore$ மூலங்கள் $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ஆகும்.

குறிப்பு: $\Delta=b^2-4ac<0$ எனின் மேற்படி மூலங்கள் சிக்கல் எண்களாக அமைகின்றன. அல்லாதவிடத்து மெய் மூலங்கள் மட்டும் இருக்கும்.

2.1.2 மூலங்களின் எண்ணிக்கை

தேற்றம் :2

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α,β,γ ஆகவும் $\alpha\neq\beta,\alpha\neq\gamma$ ஆகவும் இருப்பின் $\beta=\gamma$ ஆகும்.

நிறுவல்: α,β,γ என்பன $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள்

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ....(1)

$a\beta^2+b\beta+c=0$ ....(2)

$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ ....(3)

$(1) - (2) \Rightarrow a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0$

$$a(\alpha + \beta) + b = 0 \quad (\because \alpha \neq \beta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$(1) - (3) \Rightarrow a(\alpha^2 - \gamma^2) + b(\alpha - \gamma) = 0$

$$\therefore a(\alpha + \gamma) + b = 0 \; (\because \alpha \neq \gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$(4)-(5) \Rightarrow a(\beta - \gamma) = 0$

$$\therefore \; \beta - \gamma = 0 \qquad (\because a \neq 0)$$

$$\therefore \; \beta = \gamma$$

எனவே இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றிற்கு இரு மூலகங்கள் மட்டுமே இருக்கும்.

2.1.3 மூலகங்களின் கூட்டுத்தொகை, பெருக்குத்தொகை

தேற்றம் 3

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ ஆகும்.

நிறுவல்

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள்

$\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ என முன்னர் பார்த்தோம்.

$\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ என்க. அப்போது

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{2a}$ என்பது உடனடியாகப் பெறப்படும்.

மேலும் $\alpha\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta = \frac{-b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

குறிப்பு

1. மேற்படி முடிவு 2.1.3 ஐப் பயன்படுத்தி 2.1.2 இற்கான இன்னொரு நிறுவல்

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α,β,γ என்க.

α,β மூலங்கள் என்பதால் $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ ....(1)

α,γ மூலங்கள் என்பதால் $\alpha+\gamma = -\frac{b}{a}$ ....(2)

(1)-(2) $\Rightarrow$ $\beta-\gamma=0$

$$\therefore \beta=\gamma$$

$\therefore$ இரு மூலங்கள் மட்டுமே இருக்கும்.

2. தரப்பட்ட பெறுமானங்கள் α,β ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு

இச்சமன்பாடு உடனடியாக $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ என எழுதப்படலாம். அதாவது α,β ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே தரப்பட்ட பெறுமானங்கள் α, β இற்கு அவற்றின் கூட்டுத்தொகை, பெருக்குத்தொகை என்பன அறியப்படின் அவற்றை மூலங்களாக உடைய இருபடிச்சமன்பாடு உடனடியாக அறியப்படும்.

2.1.4 இரு இருபடிச்சமன்பாடுகள் ஒரே மூலங்களைக் கொண்டிருக்க நிபந்தனை

தேற்றம் 4

$ax^2 + bx + c = 0$, $px^2 + qx + r = 0$ என்பன ஒரே மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ ஆக இருக்கும்.

நிறுவல்

$ax^2 + bx + c = 0$, $px^2 + qx + r = 0$ என்பன ஒரே மூலங்கள் α, β ஐக் கொண்டுள்ளன என்க.

α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள்

$$\therefore \ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\alpha\beta$ என்பன $px^2 + qx + r = 0$ இன் மூலங்கள்

$$\therefore \ \alpha + \beta = -\frac{q}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\alpha\beta = \frac{r}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$(1)\ \&\ (3) \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{q}{p}$$

அதாவது $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

$$(2)\ \&\ (4) \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{r}{p}$$

அதாவது $\frac{a}{p} = \frac{c}{r}$

$\therefore \ \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ ஆகும்.

குறிப்பு

இந்நிபந்தனை ஒரு போதிய நிபந்தனையாகவும் அமையும் ஏனெனில் $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ எனின் இருபடிச்சமன்பாடுகளும் ஒத்ததாகின்றன.

அ-து $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow px^2 + qx + r = 0$ ஆகும்.

உதாரணங்கள் 2.1.a

2.1 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ஆல் தரப்படும்

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$\frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \quad = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$= 2$ அல்லது $-1/2$ ஆகும்.

2. $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைப் பெறுக.

$ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும்.

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைப் பெறுவதற்கு $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$ இன் பெறுமானங்கள் காண வேண்டும்.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு

$x^2-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$ என எழுதப்படலாம்.

$\therefore$ (1), (2) $\Rightarrow$ வேண்டிய சமன்பாடு

$$x^2-(-b/c)x+a/c=0 \text{ ஆகும்.}$$

அ-து $cx^2+bx+a=0$ ஆகும்.

குறிப்பு:

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் சமன்பாட்டில் x இற்குப் பதிலாக $\frac{1}{x}$ ஐ பிரதியீடு செய்வதன் மூலம் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ இனை மூலங்களாக உடைய சமன்பாடு $cx^2 + bx + a = 0$ உய்த்தறியப்படலாம்.

3. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் α^2, β^2 மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைப் பெறுக.

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும்.

$$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

இனி $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^2 \cdot \beta^2$ ஐக் காண்போம்.

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு

$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2 \cdot \beta^2 = 0$ ஆகும்.

அ-து $x^2 - \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)x + \frac{c^2}{a^2} = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$ ஆகும்.

4. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $\alpha + \beta$, $\frac{1}{\alpha + \beta}$ ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைப் பெறுக.

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β

எனவே $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$ ஆகும்.

இனி $(\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha + \beta}$,. $(\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{\alpha + \beta}$ என்பவற்றைக் காண்போம்.

$$(\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 + 1}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2} + 1}{-(\frac{b}{a})}$$

$$= -\frac{(b^2 + a^2)}{ab}$$

$$(\alpha + \beta) . \frac{1}{\alpha + \beta} = 1$$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு

$$x^2 - [(\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha + \beta}]x + (\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} = 0$$

அ-து $x^2 + \frac{b^2 + a^2}{ab} + 1 = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab = 0$ ஆகும்.

5. $4x^2 - 30x + k = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 5 ஆல் வித்தியாசப்படுபவையாக அமைவதற்கு k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$4x^2 - 30x + k = 0$ இன் மூலங்கள் α, β என்க.

$$\therefore \quad \alpha + \beta = \frac{30}{4}, \alpha\beta = \frac{k}{4}$$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ என எழுதப்படலாம்.

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\frac{30}{4})^2 - \frac{4k}{4}$$

$$= \frac{900}{16} - k$$

$$= \frac{225}{4} - k$$

ஆனால் $\alpha - \beta = 5$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \frac{225}{4} - k = 25$$

$225-4k=100$

$\therefore$ $4k=125$

$$k=\frac{125}{4}$$

6. $x^2 + ax + 8 = 0$ இன் ஒரு மூலம் மற்றையதன் வர்க்கமாக இருப்பதற்கு a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$x^2 + ax + 8 = 0$ இன் மூலங்கள் α, β என்க.

$\therefore$ $\alpha+\beta = -a, \alpha\beta = 8$

ஒரு மூலம் மற்றையதன் வர்க்கம்

அ-து $\alpha = \beta^2$ (என்க)

$\alpha\beta = 8 \Rightarrow \beta^2\beta = 8$

$\therefore\ \beta^3 = 8$

$\beta = 2$

$\therefore\ \alpha = 4$

$\therefore\ \alpha + \beta = -a = 4 + 2$

$\therefore\ a = -6$

2.2 மூலங்களின் தன்மை

2.2.1 தன்மை காட்டி

தேற்றம் 5

சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ ஐ கருதுக. $\Delta = b^2 - 4ac$ என்க.

1. $\Delta > 0$ ஆயின் சமன்பாட்டிற்கு இரு மெய்மூலங்கள் உண்டு.
2. $\Delta = 0$ ஆயின் சமன்பாட்டிற்கு பொருந்தும் இரு சமமான மெய்மூலங்கள் உண்டு.
3. $\Delta < 0$ ஆயின் சமன்பாட்டிற்கு உடன் புணரிச் சிக்கலெண் மூலங்கள் உண்டு

நிறுவல்:

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள்

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ எனப் பார்த்தோம்.

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ எனின் $\sqrt{b^2 - 4ac}$ மெய்ப் பெறுமானம் ஆகும்.

$\therefore$ சமன்பாட்டிற்கு, $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ எனும் இரு மெய்த்தீர்வுகள் உண்டு.

2. $\Delta = 0$

$\therefore$ $b^2 - 4ac = 0$

$\therefore$ $x = \dfrac{-b \pm 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$

எனவே சமன்பாட்டிற்கு $\dfrac{-b}{2a}$ இற்கு சமமான இரு பொருந்தும் மூலங்கள் உண்டு.

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ $\sqrt{b^2-4ac}$ கற்பனையானது.

$\therefore$ $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ உம் $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ உம் உடன்புணரிச் சிக்கலெண்களாகும்.

$\therefore$ மூலங்கள் உடன்புணரிச் சிக்கலெண்களாக இருக்கும்.

குறிப்பு:

1. $\Delta = b^2 - 4ac$, சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$ இன் தன்மைகாட்டி என அழைக்கப்படும்.
2. $\Delta = 0$ ஆயின் சமன்பாடு $ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 = 0$ ஆகும்.

அப்போது $x = \dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b}{2a}$ எனப் பொருந்தும் இரு சமனான மூலங்கள் உண்டு எனக் கருதப்படும்.

3. $\Delta>0$ ஆயின் மெய்மூலங்கள் இருக்கும் எனக் கண்டோம்.
அ-து $b^2 - 4ac > 0$ ஆயின் மூலங்கள் மெய்யானவை.
தரப்பட்ட சமன்பாட்டில் a, c என்பன முரண்குறிகளைச் கொண்டிருப்பின் b எப்பெறுமானத்தைக் கொண்டிந்தாலும் $b^2 - 4ac>0$ ஆகும்.

எனவே **a, c** என்பன முரண்குறிகளைக் கொண்டிருப்பின் மூலங்கள் எப்போதும் மெய்யாக இருக்கும்.

4. $\Delta= b^2 - 4ac$ என்பது மூலங்களின் தன்மையை வேறு பிரித்துக் காட்டுவதால் அது இருபடிச்சமன்பாட்டில் பிரித்துக்காட்டி எனவும் தன்மை காட்டி எனவும் அழைக்கப்படும்.

2.2.2 மூலங்கள் இரண்டும் நேராக இருப்பதற்கு நிபந்கனை

தேற்றம் 6

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலகங்கள் இரண்டும் நேராக இருப்பதற்கு
i) $b^2- 4ac>0$ ஆயிருக்க வேண்டும். அத்துடன்
ii) $a>0, c>0, b<0$ ஆக அல்லது
$a<0, c<0, b>0$ ஆக இருக்க வேண்டும்

நிறுவல்: மூலங்கள் இரண்டும் நேராக இருப்பதற்கு

i) மூலங்கள் மெய்யாக இருக்க வேண்டும். எனவே
$b^2- 4ac>0$…………..(I)

ii) மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை

அ-து $-\frac{b}{a} > 0$ …………..(II)

அத்துடன் மூலங்களின் பெருக்குத்தொகை

அ-து $\frac{c}{a} > 0$ ………………………….. .(III)

(II), (III) $\Rightarrow$

a உம் c உம் ஒரே குறியையும் b அவற்றின் முரண்-குறியையும் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

எனவே $a>0$, $c>0$ அத்துடன் $b<0$ அல்லது $a<0$, $c<0$ அத்துடன் $b>0$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

2.2.3 மூலங்கள் இரண்டும் மறையாக இருப்பதற்கு நிபந்தனை

தேற்றம் 7

> $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் இரண்டும் மறையாக இருப்பதற்கு
> (i) $b^2 - 4ac>0$ அத்துடன்
> (ii) $a>0, b>0, c>0$ அல்லது $a<0, b<0, c<0$ ஆயிருக்க வேண்டும்
> அ-து a,b,c என்பன மூன்றும் ஒரே குறியுடையனவாக இருக்க வேண்டும்.

நிறுவல்: மூலங்கள் இரண்டும் மறையாக இருப்பதற்கு

(i) மூலங்கள் மெய்யாக இருக்க வேண்டும்.

எனவே b^2-$4ac>0$ ....(I)

மேலும்

(2) மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை

அ-து $-\frac{b}{a}<0$ ....(II)

அத்துடன் மூலங்களின் பெருக்குத்தொகை

அ-து $\frac{c}{a}>0$ ....(III)

(II), (III) $\Rightarrow$ a, b, c மூன்றும் ஒரே குறிகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்

$\therefore$ $a>0$, $b>0$, $c>0$ அல்லது

$a<0$, $b<0$,$c<0$ ஆயிருக்க வேண்டும்

2.2.4 மூலங்களுள் ஒன்று நேராயும் மற்றயது மறையாகவும் இருக்க நிபந்தனை

தேற்றம் 8

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் முரண்குறிகளைக் கொண்டிருப்பதற்கு a, c என்பன முரண்குறிகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

நிறுவல் :

மூலங்களுள் ஒன்று நேராகவும் மற்றது மறையாகவும் இருப்பதற்கு

(i) மூலங்கள் மெய்யாக இருக்க வேண்டும்

அ-து $b^2 - 4ac > 0$

அத்துடன்

(ii) மூலங்களின் பெருக்கம்

$\frac{c}{a} < 0$ ஆக வேண்டும் எனவே a, c என்பன முரண்குறிகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்

எனவே $ac<0$ ஆக இருக்கும்

ஆகவே $b^2 - 4ac>0$ ஆக இருக்கும்

எனவே இவ்வகையில் $ac<0$ ஆயிருத்தல் மட்டும் போதுமானது அ-து a, c என்பன முரண்குறிகளைக் கொண்டிருத்தல் மட்டும் போதுமானது.

உதாரணங்கள்

1. $x^2 - px + (p + 3) = 0$ என்னும் சமன்பாடு

   (i) பொருந்தும் மூலங்களை

   (ii) மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கு p இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க.

(i) மூலங்கள் பொருந்துபவையாக இருப்பதற்கு

$\Delta=0$

$p^2 - 4(p + 3) = 0$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p - 6)(p + 2) = 0$

$\therefore\ p = 6$ அல்லது $p = -2$

(ii) மூலங்கள் மெய்யாக இருப்பதற்கு

$\Delta>0$

$\therefore\ \Delta= p^2 - 4(p + 3)$

$= (p - 6)(p + 2) >0$

$\therefore\ p>6, p< -2$

$\therefore\ p>6$ அல்லது $p< -2$ ஆயின் சமன்பாடு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்

2. $x^2 + ax + a^2 = 0$ இன் மூலங்களின் தன்மையைத் துணிக. இங்கு $a \neq 0$.

$\Delta=b^2 - 4ac$

$=a^2 - 4a^2$

$= -3a^2<0$

$\therefore$ இதன் மூலங்கள் உடன்புணரிச்சிக்கல் எண்களாகும்.

3. $3x^2 + (k - 1)x - 2 = 0$ இன் மூலங்கள் சமனாயும் முரண்குறிகள் உடையவையாயும் இருப்பதற்கு k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

மூலங்கள் α,β என்க

இவை சமனாயும் முரண்குறிகளை உடையனவாயும் இருப்பதற்கு

$\alpha = -\beta$

$\therefore \alpha + \beta = 0$

ஆனால் $\alpha + \beta = -\left(\frac{k-1}{3}\right)$

$$\therefore -\left(\frac{k-1}{3}\right) = 0$$

$$\therefore k = 1$$

4. $x^2 + (a - 3)x + a = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் ஒரே குறியை உடையவையாக இருப்பதற்கு a இன் பெறுமானங்களை அல்லது பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

மூலங்கள் இரண்டும் நேராக இருக்கலாம் அல்லது இரண்டும் மறையாக இருக்கலாம்

(i) மூலங்கள் இரண்டும் நேராக இருப்பதற்கு

(i) $(a - 3)^2 - 4a \geq 0$

(ii) $a - 3 < 0, a > 0$

$\therefore$(i) $a^2 - 10a + 9 \geq 0$

$(a - 9)(a - 1) \geq 0$

$\therefore a \leq 1, a \geq 9$

(ii) $a - 3 < 0$, $a > 0$

$\therefore a < 3$ $a > 0$

$\therefore a = 1$ ஆகும்.

(ii) மூலங்கள் இரண்டும் மறையாக இருப்பதற்கு

(i) $a - 3 > 0$, $a > 0$

$\therefore a > 3$

$a - 3)^2 - 4a \geq 0$

$a \geq 9, \qquad a \leq 1$

$\therefore$ **$a \geq 9$ ஆகும்.**

$x^2 + kx - 6k = 0, x^2 - 2x - k = 0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரு பொது மூலம் உண்டெனில் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

பொது மூலம் α என்க.

$\therefore \ \alpha^2 + k\alpha - 6k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\alpha^2 - 2\alpha - k = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots(2)$

(1)-(2) $\quad (k+2)\alpha - 5k = 0$

$$\alpha = \frac{5k}{k+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) x 2 + (2) x k

$$(k+2)\alpha^2 - 12k - k^2 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{12k + k^2}{k+2} \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \left(\frac{5k}{k+2}\right)^2 = \frac{12k + k^2}{k+2}$$

$$\frac{25k}{k+2} = 12 + k$$

$$25k = (12 + k)(k + 2)$$

$$k^2 - 11k + 24 = 0$$

$\therefore \ (k-3)(k-8) = 0$

$\therefore \ k = 3, 8$

6. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலகங்கள் மெய்யானவையாயும் நேரானவை-யானவையாயும் இருப்பின் $c^2x^2 + (2ac - b^2)x + a^2 = 0$ இன் மூலகங்களும் மெய்யானவை நேரானவை எனக் காட்டுக.

$ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலகங்கள் மெய்யானவை நேரானவை

$\therefore\ b^2 - 4ac > 0$ & a, c என்பன ஒரே குறி

$\therefore\ b^2 - 2ac > 2ac$ & a, c ஒரே குறி

a, c ஒரே குறியாகையால்

$2ac > 0$

$\therefore b^2 - 2ac > 0$

அ-து $2ac - b^2 < 0$

c^2, a^2 என்பன எப்போதும் நேர்

$\therefore$ சமன்பாடு $c^2x^2 + (2ac - b^2)x + x^2 = 0$

இல் $c^2 > 0, a^2 > 0,\quad 2ac - b^2 < 0$

$\therefore$ மூலகங்கள் நேரானவை

இனி இதன் தன்மை காட்டி

$$\begin{aligned}\Delta &= (2ac - b^2)^2 - 4a^2c^2\\ &= 4a^2c^2 - 4b^2ac + b^4 - 4a^2c^2\\ &= b^4 - 4b^2ac\\ &= b^2(b^2 - 4ac) > 0\end{aligned}$$

$\therefore$ மூலங்கள் மெய்யானவை

பயிற்சி 2.a

1. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆயும் $\alpha + 1, \beta + 1$ என்பன பூச்சியமற்றவை ஆயும் இருப்பின் $\dfrac{1}{\alpha+1}, \dfrac{1}{\beta+1}$ ஐ மூலங்களாக உடைய இருபடிச் சமன்பாடு $(c - b - a)x^2 + (b - 2a)x + a = 0$ எனக் காட்டுக.

2. $x^2 + ax + b = 0$ இன் ஒரு மூலம் மற்றையதன் வர்க்கம் எனின் $a^2 + 3ab + b + b^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

3. α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகும்.

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{b^2\left(a^2 + c^2\right) - 2ac(\alpha - c)^2}{a^2c^2}$$ எனக்காட்டுக.

4. $x^2 + 2bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் $\alpha, \ \beta$ எனின்

i) $\alpha^3 + \beta^3 = 2b(3c - 4b^2)$ எனக்காட்டுக.

ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$ ஐ மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டை எழுதுக.

5. $(x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + (x - a)(x - b) = 0$ இன் தீர்வுகள் மெய்யானவை என நிறுவுக.

6. k இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு $x^2 - 3 + k(2x + 3) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வித்தியாசம் 2 ஆகும்.

7. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் சிக்கல் எண்கள் எனின் $ax^2 - 2(a + b)x + (a + 2b + 4c) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களும் சிக்கலானவை எனக்காட்டுக.

8. $x^2 + tx + t^2 - 3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாக இருப்பதற்கு t இன் எல்லைகளைக் காண்க.

9. $x^2 - 2ax + b^2 = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும். $x^2 - 2cx + d^2 = 0$ இன் மூலங்கள் p, q ஆகும். $\alpha p + \beta p, \alpha q + \beta p$ ஐ மூலங்களாக உடைய இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - 4acx + 4(a^2d^2 + b^2c^2 - b^2d^2) = 0$ எனக் காட்டி இதன் மூலங்கள் சமமாக இருப்பதற்கு $a = \pm b, a = \pm d$ எனக் காட்டுக.

10. $ax^2 + bx + c = 0, \ bx^2 - cx + a = 0$ என்னும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் வித்தியாசங்கள் சமனாயின் $b^4 - a^2c^2 = 4ab(bc - a^2)$ எனக் காட்டுக.

11. $x^2 - ax + b = 0, x^2 - cx + d = 0$ என்னும் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு பொது மூலம் உண்டெனின் அவற்றின் மற்றைய மூலங்கள்

$(bc - ad)x^2 - (b^2 - d^2)x + bd(a - c) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக.

12. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்
$acx^2 - b(c + a)x + (c + a)^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை α, β இல் தருக.

13. $x^2 - 3x + a^2 - 9 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் -2 க்கும் 4 க்கும் இடையே இருப்பின் $-\frac{3}{2}\sqrt{5} \le a \le -5$ அல்லது $\sqrt{5} \le a \le \frac{3\sqrt{5}}{2}$ எனக் காட்டுக.

14. $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆகும். λ என்பது யாதாயினும் ஒரு ஒருமை ஆயின் $\alpha + \lambda, \beta + \lambda$ என்பவற்றை மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\alpha + \frac{b}{2a}$, $\beta + \frac{b}{2a}$ என்னும் இரு எண்கள் ஒன்றிக்கொன்று எதிர் குறிகளை உடையன. எனவும் அவை இரண்டும் மெய்யானவை அல்லது இரண்டும் முற்றாக கற்பனையானவை எனவும் காட்டுக.

15. $ab > 0$, $c \neq 0$ ஆயிருக்க $\frac{a}{x+c} + \frac{k}{x} + \frac{b}{x-c} = 0$ என்னும் சமன்பாடு சமமான மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான k இன் பெறுமானங்கள் k_1, k_2 எனின் $k_1k_2 = \frac{(a-b)^2}{4}$ எனக் காட்டுக. kஆனது k_1, k_2 ஆக இருக்கும்போதுள்ள x இன் பெறுமானங்களின் பெருக்கம் c^2 எனக்காட்டுக.

16. p, q என்பன $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இங்கு k ஓர் மாறிலி எனின் $(p - q)^2 = 4(k^2 - k - 2)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து மூலங்கள் 4 ஆல் வித்தியாசப்படும்படி உள்ள சமன்பாடுகளை மேற்தரப்பட்ட வடிவில் எழுதுக. $k \neq -2$ எனத்தரப்படின்

$\frac{p^2}{q}$ ஐயும் $\frac{q^2}{p}$ ஐயும் மூலங்களாக கொண்டுள்ள சமன்பாட்டை அமைக்குக. $1+\frac{p^2}{q}$ ஐயும் $1+\frac{q^2}{p}$ ஐயும் மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

$ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β எனின் $x+2+\frac{1}{x}=\frac{b^2}{a^2}$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை α, β சார்பில் உணர்த்துக.

18. α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் ஆயும் $\alpha^n + \beta^n = \Delta_n$ ஆயும் இருப்பின் $a\Delta_{n+2} + b\Delta_{n+1} + c\Delta_n = 0$ எனக் காட்டுக. இங்கு n நேர் முழு எண்.

19. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் p, q என்பன சமனற்றவை ஆக இருப்பின் $p + q^3 = q + p^3$ ஆக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனையை a, b, c இல் தருக.

20. $ax^2 + bx + c = 0$ இன் ஒரு மூலம் மற்றையதன் வர்க்கத்தின் நேர்மாறு எனின் $a^3 + c^3 + abc = 0$ எனக்காட்டுக.

21. $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ இன் மூலங்கள் p, q ஆயின் p+q, pq ஐ a, b, c இல் காண்க. p, b, q ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின் c, b, q ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் இருக்கும் எனவும் c, b, a ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் இருப்பின் $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் இருக்குமெனவும் காட்டுக.

22. a, b என்பன சமமற்ற இரு மெய் எண்கள் ஆகவும் $a + b \neq 0$ ஆகவும் இருப்பின் $(a - b)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^3 - b^3 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a, b என்பன ஒரே குறி, எதிர்க்குறி என்பதற்கேற்ப

மெய்யானவை அல்லது கற்பனையானவை எனக்காட்டுக. மூலங்களின் வித்தியாசம் $\dfrac{2(a+b)\sqrt{ab}}{a-b}$ எனக்காட்டுக.

23. α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்கள் ஆகவும் $\alpha:\beta = \lambda:\mu$ ஆகவும் இருப்பின் $\lambda/\mu b^2 = (\lambda+\mu)^2 ca$ எனக் காட்டுக.

24. $x^2 + 2ax + b = 0, y = x + \dfrac{1}{x}$ எனின் $by^2 + 2a(1 + b)y + (1 - b)^2 + 4a = 0$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $x^2 + 2ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின் $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)^2 = \dfrac{4a^2(1+b)^2 - 2b(1-b^2)}{b^2}$ எனக்காட்டுக.

2.3 இருபடிச்சார்புகள்

a, b, c மெய் எண்களாகவும் ஆகவும் $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க

f(x) $= ax^2+bx+c$ என்பது x என்னும் மாறியிலான இருபடிச்சார்பு எனப்படும்.

2.3.1 இருபடிச் சார்பு ஒரு நிறை வர்க்கமாக அமைய நிபந்தனை

தேற்றம் 9

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ஆனது $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ என்னும் வடிவில் அமையும் எனின் மட்டும் $b^2 - 4ac = 0$

நிறுவல்

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

எனவே $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ எனின் மட்டும் $b^2 - 4ac = 0$

2.3.2 இருபடிச்சார்பின் சமச்சீர்த் தன்மை

தேற்றம் 10

$f(x) = ax^2 + bx + c$ என்னும் சார்பின் வரைபானது $x = -\dfrac{b}{2a}$ என்னும் கோடு பற்றி சமச்சீராக இருக்கும். அது $f\left(-\dfrac{b}{2a}+h\right) = f\left(-\dfrac{b}{2a}-h\right), \forall h$

நிறுவல்

$$f(x) = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$x \quad = -\dfrac{b}{2a} + h$ எனப்பிரதியிட

$$f\left(-\frac{b}{2a}+h\right) = ah^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$x = -\dfrac{b}{2a} - h$ எனப் பிரதியிட

$$f\left(-\frac{b}{2a}-h\right) = a(-h)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$= ah^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$\therefore\ f\left(-\frac{b}{2a}-h\right) = f\left(-\frac{b}{2a}+h\right)$$

h இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் இது உண்மையாக இருப்பதனால் கோடு $x=-\frac{b}{2a}$ பற்றி f(x) ஆனது சமச்சீராக இருக்கும்

2.3.3 இருபடிச்சார்பின் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்கள்

தேற்றம் 11

$f(x) = ax^2 + bx + c$ என்க

(i) $a<0$ எனின் சார்பு $f(x)$; $x=-\frac{b}{2a}$ இல் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ஐ எடுக்கும்.

(ii) $a>0$ எனின் சார்பு $f(x)$; $x=-\frac{b}{2a}$ இல் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ஐ எடுக்கும்

நிறுவல் :

1. $a<0$ எனின்

$f(x) = ax^2 + bx + c$ என்பது

$f(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ என எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம்

இங்கு $\frac{4ac-b^2}{4a}$ என்பது ஓர் மாறிலி ஆகும்.

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ என்பது x உடன் மாறுகின்றது. x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ஆக இருப்பதால் $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$

அத்துடன் $x=-\frac{b}{2a}$ ஆகும் போது $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

எனவே $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ஆனது $x=\frac{-b}{2a}$ இல் உயர்வுப் பெறுமானம் பூச்சியம் எடுக்கும் இதிலிருந்து

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ஆனது $x=-\frac{b}{2a}$ இல் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$ பெறும் என அறியப்படும்

(ii) a>0 எனின்

எப்போதும் $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ஆகும்

எனவே $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ஆனது $x=-\frac{b}{2a}$ இல் இழிவுப் பெறுமானம் பூச்சியம் எடுக்கும்.

இதிலிருந்து $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ஆனது $x=-\frac{b}{2a}$ இல் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{4ac-b^2}{4a}$ பெறும்

2.3.4 $b^2 - 4ac < 0$ ஆயிருக்கும்போது சார்பின் குறி

தேற்றம் 12

$f(x)= ax^2 + bx + c$, அத்துடன் $\Delta= b^2- 4ac<0$ என்க
(i) $a>0$ எனின் $f(x) >0, \quad \forall x$
(ii) $a<0$ எனின் $f(x) <0, \quad \forall x$

நிறுவல் :

$$f(x) = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right\}$$ எனப் பார்த்தோம்

$$f(x) = a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac<0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) > 0$$

$\therefore$ $a>0$ ஆயின் $f(x)>0$ ஆகும்.

$a<0$ ஆயின் $f(x)<0$ ஆகும்.

2.3.5 $b^2- 4ac= 0$ ஆகும்போது சார்பின் குறி

தேற்றம் 13

$f(x) = ax^2 + bx + c$ அத்துடன் $\Delta= b^2 - 4ac$ என்க.
(i) $x = -\frac{b}{2a}$ எனின் $f(x)=0$
(ii) $x \neq -\frac{b}{2a}$ எனின் $f(x)$ இன் குறி a இன் குறியை ஒத்திருக்கும்

நிறுவல் :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x \frac{b}{2a}\right)^2, \qquad b^2 - 4ac = 0$$

(i) $x = -\frac{b}{2a}$ எனின் $f(x) = 0$

(ii) $x \neq -\frac{b}{2a}$ என்க.

$$\left(x \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \qquad \forall\, x \neq -\frac{b}{2a}$$

$\therefore$ $a>0$ எனின் $f(x)>0$

$a<0$ எனின் $f(x)<0$

அ-து $f(x)$ இன் குறி a இன் குறியை ஒத்திருக்கும்

2.3.6 b^2-4ac>0 எனின் சார்பின் குறி

தேற்றம் 14

$f(x) = ax^2 + bx + c$ அத்துடன் $ax^2bx + c = 0$ இன் மூலகங்கள் α, β என்க.

(i) x ஆனது α, β இரண்டிலும் பெரிதாக அல்லது இரண்டிலும் சிறிதாக இருப்பின் $f(x)$ இன் குறியும் a இன் குறியும் ஒன்றாகும்

(ii) x ஆனது α, β இரண்டிற்குமிடையில் இருப்பின் $f(x)$ இன் குறி a இன் குறிக்கு முரணாகும்.

(iii) $x = \alpha$ அல்லது $x = \beta$ எனின் $f(x) = 0$ ஆகும்

நிறுவல் : $b^2 - 4ac > 0$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ என்பதை

$$f(x) = a\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$ என எழுதலாம் என

முன்னர் பார்த்தோம்.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ எனின்

$f(x) = a[x - \alpha][x - \beta]$ என எழுதலாம்.

(i) x என்பது α, β இரண்டிலும் பெரிதாக அல்லது சிறிதாக இருப்பின்

$(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ f(x) இன் குறி a இன் குறியை ஒத்திருக்கும்

(ii) x என்பது α, β இரண்டிற்கும் இடையில் இருப்பின் $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ ஆகும்.

$\therefore$ f(x) இன் குறி a இன் குறிக்கு முரணாகும்.

(iii) $x = \alpha$ அல்லது β எனின் $f(x) = 0$ ஆகும்.

2.3.7 இருபடிச்சார்புகளின் வரைபுகள்

வகை I a>0

இவ்வகையில் சார்பின் இயல்புகள் பற்றி நாம் முன்னர் கற்றவற்றை இங்கு சுருக்கமாகப் பார்ப்போம்.

(i) சார்பு $x = -\frac{b}{2a}$ என்னும் கோடு பற்றிச் சமச்சீரானது

(ii) சார்பிற்கு உயர்வுப் பெறுமானம் இல்லை

(iii) $x = \frac{-b}{2a}$ இல் சார்பு இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ஐக் கொண்டிருக்கும்

(iv)a) $b^2 - 4ac<0$ எனின் $f(x) > 0, \forall x$

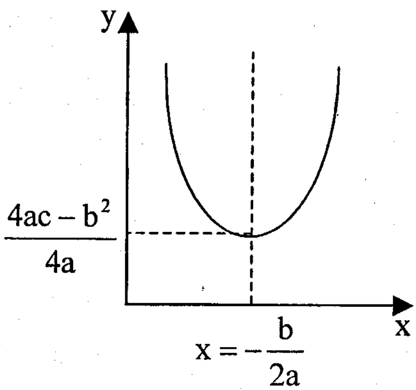
b) $b^2 - 4ac=0$ எனின் $f(x) \geq 0, \forall x$

c) $b^2 - 4ac>0$ எனின்

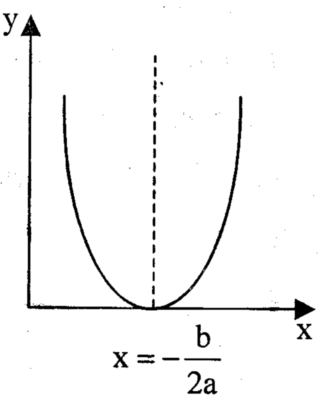
$x < \alpha,\ x > \beta$ ஆகும்போது $f(x) > 0$, $\alpha < x < \beta$ ஆயின் $f(x) < 0$.

ஆகவே சார்பின் வரைபு மூன்று வகையிலும் பின்வருமாறு அமையும்.

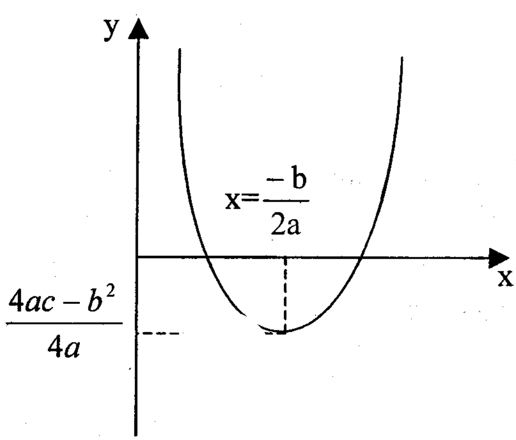
a) b^2-4ac<0



b) b^2-4ac=0



c) b^2-4ac>0



வகை II a<0

இவ்வகையில் சார்பின் இயல்புகள் பற்றி நாம் முன்பு பார்த்தவற்றை இங்கு சுருக்கமாகப் பார்ப்போம்

(i) சார்பு $x = \frac{-b}{2a}$ எனும் கோடு பற்றி சமச்சீரானது

(ii) $x = \frac{-b}{2a}$ இல் சார்பு உயர்வுப் பெறுமானம்

$\frac{4ac - b^2}{4a}$ ஐக் கொண்டிருக்கும்

(iii) சார்பிற்கு இழிவுப் பெறுமானம் இல்லை

(iv) a) $b^2 - 4ac < 0$ எனின் $f(x) < 0 \quad \forall x$

b) $b^2 - 4ac = 0$ எனின் $f(x) \leq 0 \quad \forall x$

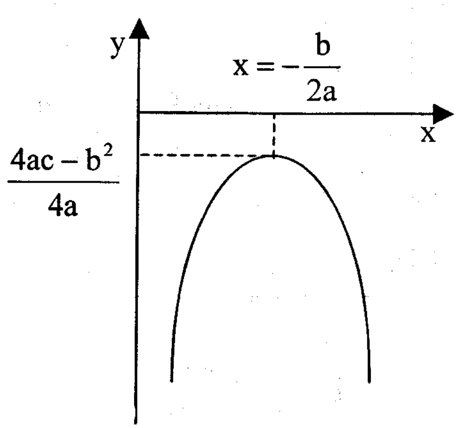
c) $b^2 - 4ac > 0$ எனின்

$x < \alpha, x > \beta$ எனின் $\quad f(x) < 0$

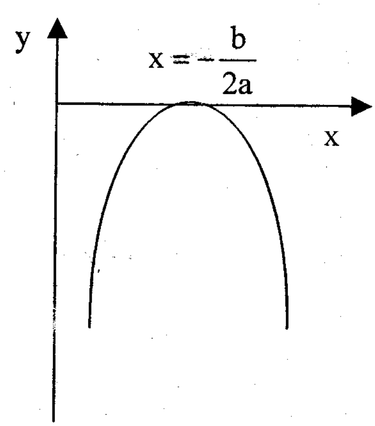
$\alpha < x < \beta$ எனின் $\quad f(x) > 0$

ஆகவே சார்பின் வரைபு மூன்று வகைகளிலும் பின்வருமாறு அமையும்.

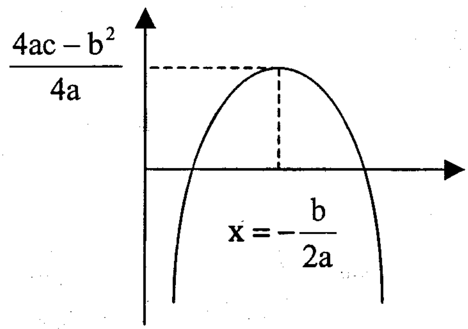
a) b^2-4ac<0



b) b^2-4ac=0



c) $b^2 - 4ac > 0$



உதாரணங்கள்

1. $f(x) = 3x^2 + 6x + 20$ எனும் சார்பு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேரானது எனக் காட்டுக. அதன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

$f(x) = 3x^2 + 6x + 20$

$$= 3[x^2 + 2x + \frac{20}{3}]$$

$$= 3[(x+1)^2 - 1 + \frac{20}{3}]$$

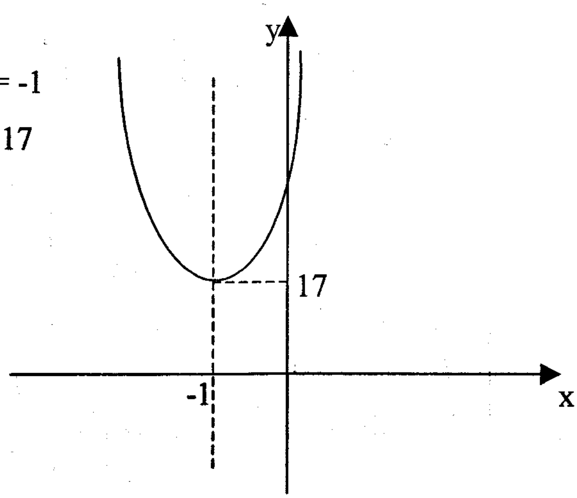
$$= 3(x+1)^2 + 17$$

$\therefore \quad f(x) > 0 \quad \forall x$

இதன் சமச்சீர் அச்சு $x = -1$

இழிவுப் பெறுமானம் $= 17$

$\therefore$ வரைபு $\Rightarrow$



2. $y = 2x^2 - 3x + k$ என்னும் சார்பு

i) x அச்சைத் தொடுவதற்கு

ii) x அச்சை வெட்டுவதற்கு

k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(1) $y = 2x^2 - 3x + k$

$$= 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{k}{2}\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{k}{2} - \frac{9}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{8k - 9}{16}\right]$$

x அச்சைத் தொடுவதற்கு $x = \frac{3}{4}$ ஆகும் போது $y = 0$ ஆக வேண்டும்.

$x = \frac{3}{4}$ ஆக $y = 2\left(\frac{8k - 9}{16}\right) = 0$

$8k - 9 = 0$

$k = \frac{9}{8}$

(ii) x அச்சை வெட்டுவதற்கு வெட்டும் புள்ளிகளுக்கூடாக x அதிகரிக்கும் போது சார்பின் குறி மாற வேண்டும். இது $b^2 - 4ac > 0$ ஆகும் போது மாத்திரமே நிகழும்

$b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times k > 0$

$9 - 8k > 0 \Rightarrow k < \frac{9}{8}$ ஆயிருக்க வேண்டும்.

3. a, b, x என்பன மெய்யானவை எனின் $f(x) = x^2 - (a + b)x + a^2 - ab + b^2$ என்னும் சார்பு ஒரு போதும் மறைப் பெறுமானத்தைக் கொள்ளாது எனக் காட்டுக.

$f(x) = x^2 - (a+b)x + a^2 - ab + b^2$

$\Delta = (a+b)^2 - 4(a^2 - ab + b^2)$

$= (a^2 + 2ab + b^2) - 4(a^2 - ab + b^2)$

$= -3a^2 + 6ab - 3b^2$

$= -3(a^2 - 2ab + b^2)$

$= -3(a-b)^2 < 0$

$\therefore$ 2.3.4 இன்படி $f(x) > 0$ ஆக இருக்கும்

4. $f(x) = x^2 + 2(a-k)x + a^2$ ஆனது x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேரானது எனின் $0 < k < 2a$ எனக் காட்டுக.

x^2 இன் குணகம் $= 1$

$\therefore$ x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் f(x) நேராக இருப்பதற்கு $\Delta < 0$ ஆதல் வேண்டும்.

$\therefore \ 4(a-k)^2 - 4a^2 < 0$

$(a-k)^2 - a^2 < 0$

$-2ak + k^2 < 0$

$k(k - 2a) < 0$

$\therefore \ 0 < k < 2a$ ஆகும்.

6. x,y என்பன நேர் மெய் எண் பெறுமானங்களைக் கொள்ளும்போது $f(x, y) = 2x^2 - 8xy + 11y^2 - 4x - 4y + 14$ என்பது நேரானது எனக் காட்டுக. $f(x, y) = 0$ ஆகுமாறமைந்த x, y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$f(x, y) = 2x^2 - 8xy + 11y^2 - 4x - 4y + 14$

$= 2[x^2 - 4xy + \frac{11}{2}y^2 - 2x - 2y + 7]$

$= 2[(x - 2y - 1)^2 + \frac{11}{2}y^2 - 4y^2 - 4y - 1 - 2y + 7]$

$= 2[(x - 2y - 1)^2 + \frac{3}{2}y^2 - 6y + 6]$

$$= 2[(x - 2y - 1)^2 + \frac{3}{2}(y^2 - 4y + 4]$$
$$= 2(x - 2y - 1)^2 + 3(y - 2)^2$$

$\therefore \quad f(x, y) > 0 \qquad \forall\ x, y$

$f(x, y) = 0$ ஆக இருப்பதற்கு $(y-2)^2 = 0, \qquad (x - 2y - 1) = 0$

$\therefore\ y = 2$

$x = 5$

2.3.8 $n^{ம்}$ படியிலுள்ள பொது அட்சரகணிதச் சமன்பாடு

n என்பது ஒரு நேர்முழு எண்ணாகவும் $a_n \neq 0$ ஆகவும் இருப்பின் $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_1x + a_0 = 0$ என்பது x இல் $n^{ம்}$ படியையுடைய ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாடு எனப்படும்.

2.3.9 $n^{ம்}$ படியிலுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கும் குணகங்க-ளுக்குமிடையிலுள்ள தொடர்பு

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_0 = 0$ இன் மெய்மூலங்கள்

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_{n-1} + \alpha_n$ என்க.

எனின்

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots\alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i \neq j \neq k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots\ldots\ldots\alpha_n = \frac{(-1)^n a_n}{a_n}$$

பொதுவாக 3ம் படியிலுள்ள சமன்பாட்டைக் கருதினால் இதன் வடிவம்

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

இதன் மெய்மூலங்கள் α, β, γ எனின்

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.b

1. $f(x) = x^2 + 3px + p$ என்னும் இருபடிச்சார்பு நேராக இருப்பதற்கு p இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = 16 - x^2$ எனின் $f(x)$, $g(x)$ இரண்டும் நேராக இருப்பதற்குரிய x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
3. $f(x) = x^2 - k(x + 1)$ என்பது x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேராயின் k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
4. $f(x) = 4x^2 + 4px - (3p^2 + 4p - 3)$ என்னும் சார்பு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேராக இருப்பின் p இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.
5. x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்
   $f(x) = x^2 - (a + b + c)x + a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - ac - ab$ என்னும் சார்பு
   நேரானது எனக் காட்டுக. இங்கு a, b, c, x என்பன மெய்யானவை.
6. x, a, b என்பன மெய்யானவை எனின் $f(x) = x^2 - (a + b)x + a^2 - ab + b^2$ என்னும் சார்பு நேரானது எனக் காட்டுக. $x = a = b$ எனின் $f(x) = 0$ ஆகும் எனவும் காட்டுக.
7. $x^2 + 2(a - h)x + a^2$ என்னும் சார்பு x இன் எல்லாப் பெறுமானத்திற்கும் நேராயின் $0 < h < 2a$ எனக் காட்டுக.

8. $x = 2$ ஆகும்போது $f(x) = 0$ ஆகுமாறும் $x > 2$ ஆகும்போது $f(x) > 0$ ஆகுமாறும் $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் -9 ஆகுமாறும் இருக்கக்கூடியதாக $f(x) = x^2 + ax + b$ என்னும் வடிவில் $f(x)$ ஐ அமைக்க.

9. $3x^2 + 2xy + y^2 + 2hx + 2y + 3 \equiv (x + y + 1)^2 + ax^2 + 2bx + c$ என்னும் சர்வ சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யக்கூடியவாறு h இன் பெறுமானத்தை a, b, c இல் காண்க. இதிலிருந்து $-1 < k < 3$ ஆயின் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேரானது எனக் காட்டுக. இங்கு $a > 0, b^2 < ac$

10. $a > 0$ ஆகவும் $b^2 - 4ac < 0$ ஆகவும் இருப்பின் $ax^2 + bx + c$ என்னும் கோவை x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேரானது எனக் காட்டுக. $(x^2 - x - 2)(x^2 + x + 1)(x - 3)$ என்னும் கோவை நேராக இருக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சுக்கள் யாவை?

11. x, y என்னும் இருமாறிகள் $x^4 + 2yx^2 + 2y^2 - y - 1 = 0$ ஆல் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன. x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானத்திற்கும் $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \le y \le 1$ என நிறுவுக. $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) < y < -\frac{1}{2}$ ஆயிருக்கையில் x இற்கு நான்கு வேறுவேறான பெறுமானங்கள் உண்டு எனவும் $-\frac{1}{2} < y < 1$ ஆயிருக்கையில் x இற்கு இரண்டே இரண்டு பெறுமானங்களே உண்டு. எனவும் காட்டுக.

12. $f(x) = 2x^2 + kxy + 3y^2 - 5y - 2$ ஆனது இரு ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதப்படுவதற்கு k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13. x,y இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(xy) = 3x^2 + 12xy + 7y^2 + k(x^2 + y^2) > 0$ ஆகுமாறு k இன் வீச்சைக் காண்க?

14. u, v என்பன $u + v$ மாறிலியாகுமாறு மாறும் இரு கணியங்கள் என்க. எனின் uv இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $u = v$ ஆகும் போது பெறப்படும் எனக் காட்டுக.

15. u,v என்பன $u \times v$ மாறிலியாக இருக்கும்போது மாறும் இரு கணியங்கள் என்க. எனின் $u + v$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $u = v$ ஆக இருக்கும்போது பெறப்படும் எனக் காட்டுக.

16. x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு $(2x - 7 - 5x^2)(x^2 + 5x + 6)(x + 1)$ என்பது நேராக இருக்கும் எனக் காண்க.

17. a, x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $(a^2 + 1)x^2 - 2a^2x + a^2-1$ என்றும் கோவை -1 இலும் சிறிதாக இருக்க முடியாது எனக் காட்டுக.

18. i) a என்பது நேர்மாறிலி எனின் $a(x^2 + 2x - 8)$ என்பது மறையாக இருக்குமாறுள்ள x இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க. இச்சார்பின் இழிவுப் பெறுமனம் -27 ஆக இருக்கக்கூடியவாறு a இன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

ii) $x = 1$ இல் சார்பின் பெறுமானம் 0 ஆகுமாறும் $x = 0$ இல் சார்பின் பெறுமானம் 10 ஆகுமாறும் உயர்வுப் பெறுமானம் 18 ஐக் கொண்டிருக்குமாறும் இரு சார்புகள் $f(x), g(x)$ ஐக் காண்க.

19. $f(x) = 9 + 2(k + 4)x + 2kx^2, (k \neq 0)$ என்னும் சார்பு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நேராக இருக்குமாறு உள்ள k இன் பெறுமானங்களின் தொடையைத் தருக.

2.4 விகிதமுறு சார்புகள்

$f(x)$, $\phi(x)$ என்பன இரு பல்லுறுப்பிச் சார்புகள் என்க. எனின் $y=\frac{f(x)}{\phi(x)}$ என்னும் வடிவிலமைந்த சார்புகள் விகிதமுறு சார்புகள் எனப்படும்.

விகிதமுறு சார்புகளுக்கு சில உதாரணங்கள்:

1) $y=\frac{x+1}{x-1}$

2) $y=\frac{2x^2+3x+1}{x^2+5x+5}$

3) $y=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+3)}$

4) $y=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}$

5) $y=\frac{x^3+4x^2+2x+1}{x^2+4}$

$f(x)$, $\phi(x)$ என்பன இருபடிச் சார்புகளாக அமையும் போது விகிதமுறு சார்புகளின் தன்மை. அவற்றின் வரைபுகள் பற்றி உதாரணங்கள் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

உதாரணங்கள்

1. $y=\frac{3x^2+10x+7}{x^2+2x+2}$ இன் சார்பை பருமட்டாக வரைக.

$$y=\frac{3x^2+10x+7}{x^2+2x+2}$$

$y(x^2+2x+2)=3x^2+10x+7$

$(y-3)x^2+(2y-10)x+(2y-7)=0$……………….I

x இன் மெய்ப்பெறுமானத்திற்கு

$(2y-10)^2-4(y-3)(2y-7)\geq 0$

$-4y^2+12y+16\geq 0$

$y^2 - 3y - 4 \leq 0$

$(y - 4)(y + 1) \leq 0$

$-1 \leq y \leq 4$

$\therefore$ வரைபு $y = -1, y = 4$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையில் கிடக்கும்

$y = -1$ ஆகும்போது

$I \Rightarrow -4x^2 - 12x - 9 = 0$

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$(2x + 3)^2 = 0$

$\therefore \; x = -\frac{3}{2}$

$y=4$ ஆகும்போது

$I \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1$

$\therefore$ $(1, 4)$ உயர்வுப் புள்ளி ஆகும்.

$(\frac{-3}{2}, -1)$ இழிவுப் புள்ளி ஆகும்.

$x = 0$ ஆக $\quad y = \frac{7}{2}$

$y = 0$ ஆக $\quad 3x^2 + 10x + 7 = 0$

$(3x + 7)(x + 1) = 0$

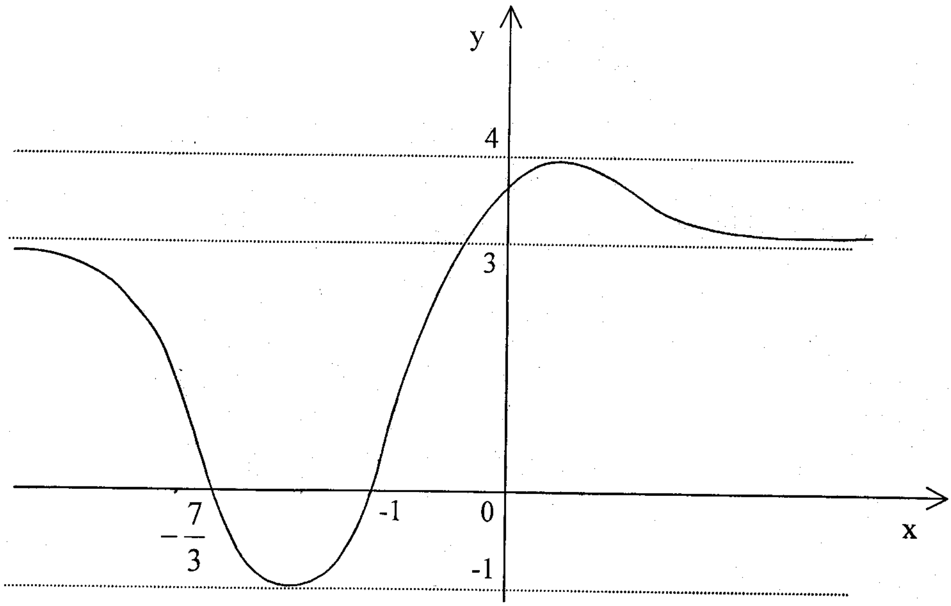
$x = -1, -7/3$

$$y = \frac{3x^2 + 10x + 7}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{3 + \frac{10}{x} + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$x \to \infty$ ஆக $\quad y \to 3$

$x \to -\infty$ ஆக $\quad y \to 3$



2. $y = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ எனின் y இன் வரைபு, $x = 1$ என்னும் கோடு பற்றி சமச்சீரானது எனக்காட்டி அதன் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

$$y = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$x = 1+\delta$ எனப் பிரதியிட $y = \frac{(2+\delta)(\delta-2)}{\delta^2}$

$$= \frac{\delta^2 - 4}{\delta^2}$$

$x = 1-\delta$ எனப் பிரதியிட $y = \frac{(2-\delta)(-\delta-2)}{(-\delta)^2}$

$$= \frac{(\delta - 2)(\delta + 2)}{\delta^2}$$

$$= \frac{\delta^2 - 4}{\delta^2}$$

இரு வகையிலும் y இன் பெறுமானங்கள் சமனாக இருப்பதனால் சார்பின் வரைபு $x = 1$ என்னும் கோடு பற்றி சமச்சீராக இருக்கும்

$$y = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$(x^2 - 2x + 1)y = x^2 - 2x - 3$$

$$(y - 1)x^2 - 2x(y - 1) + y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I}$$

x இன் மெய்ப்பெறுமானத்திற்கு

$$4(y - 1)^2 - 4(y - 1)(y + 3) \geq 0$$

$$\therefore\ (y - 1)[(y - 1) - (y + 3)] \geq 0$$

$$-4(y - 1) \geq 0$$

$$y - 1 \leq 0$$

$$y \leq 1$$

$y = 1$ ஆக I இலிருந்து x இற்கு பெறுமானம் ஏதும் இல்லை. எனவே சார்புக்கு உயர்வு இழிவு இல்லை.

$$y = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$x = -1, 3$ ஆக $\quad y = 0$

$x = 0$ ஆக $\quad y = -3$

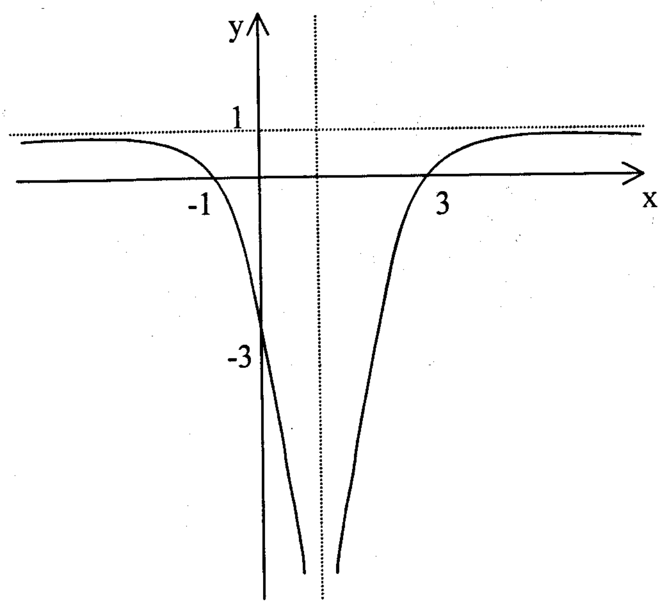
$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} == \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$x \to \infty$ ஆக $y \to 1$

$x \to -\infty$ ஆக $y \to 1$

$x \to -1$ ஆக $y \to -\infty$

ஆகவே சார்பின் வரைபு



3. $0<p<1$ எனின் $\dfrac{x-p}{x^2-2x+p}$ என்னும் சார்பு எல்லா மெய்ப் பெறுமானத்தையும் எடுக்கும் எனக் காட்டுக. $p = \frac{3}{4}$ ஆகும்போது அதன் வரைபை வரைக.

$$y = \frac{x-p}{x^2-2x+p}$$

$y(x^2 - 2x + p) = x - p$

$yx^2 - (2y + 1)x + (yp + p) = 0$

x இன் மெய்ப் பெறுமானத்திற்கு

$\Delta = (2y + 1)^2 - 4y(yp + p) \geq 0$

ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$\Delta=(2y+1)^2-4y(y+1)p$

$=4y^2+4y+1-4y^2p-4yp$

$=4y^2(1-p)+4y(1-p)+1$

$$=(1-p)\left[4y^2+4y+\frac{1}{1-p}\right]$$

$$=(1-p)\left[(2y+)^2-1+\frac{1}{1-p}\right]$$

$$=(1-p)\left[(2y+1)^2+\frac{p}{1-p}\right]$$

$0<p<1$ ஆகையால் $1-p<0$

$$\therefore\ \frac{p}{1-p}>0$$

$$\therefore\ \Delta>0$$

$\therefore$ y எல்லாப் பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்

$p=\frac{3}{4}$ ஆக

$$y=\frac{x-\frac{3}{4}}{x^2-2x+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{4x-3}{4x^2-8x+3}$$

$$=\frac{4x-3}{(2x-3)(2x-1)}$$

$0<p=\frac{3}{4}<1$ ஆகையர்ல் சார்பு எல்லாப் பெறுமானத்தையும் எடுக்கும்

$x=\frac{3}{4}$ ஆக $y=0$

$x=0$ ஆக $y=-1$

$x \to \frac{3}{2}$ ஆகும்போது y இன் பெறுமானத்தைப் பார்ப்போம். x ஆனது $\frac{3}{2}$ ஐ இருவழிகளில் அணுகலாம்.

(1) $-\infty$ இலிருந்து அதிகரித்து $\frac{3}{2}$ ஐ அணுகுதல்

(2) ∞ இலிருந்து குறைந்து $\frac{3}{2}$ ஐ அணுகுதல்

இவ்விரு வகைக்கும் y இன் பெறுமானம் சமனாக இருக்க வேண்டியதில்லை. இதனைக் காண்பதற்கு நாம் பின்வரும் வழிமுறையைப் பின்பற்றுவோம்.

(1) $x = \frac{3}{2} - \delta$ எனப் பிரதியிட

$$y = \frac{4x-3}{(2x-3)(2x-1)}$$

$$= \frac{4\left[x - \frac{3}{4}\right]}{4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}-\delta\right) - \frac{3}{4}}{\left[\left(\frac{3}{2}-\delta\right)-\frac{3}{2}\right]\left[\left(\frac{3}{2}-\delta\right)-\frac{1}{2}\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}-\delta\right)}{(-\delta)(1-\delta)}$$

$\delta \to 0$ ஆக $x \to 3/2$ ஆகும்.

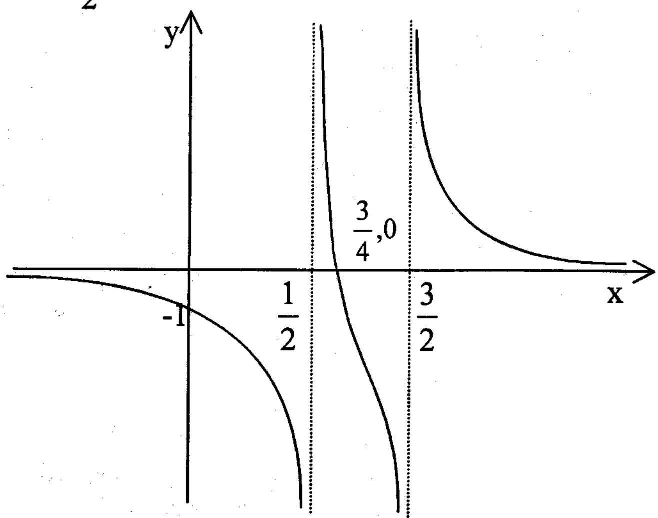
$\therefore\ \delta \to 0$ ஆக $y \to -\infty$ ஆகும்.

இதேபோல $x = 3/2 + \delta$ எனப்பிரதியிட

$$y = \frac{\frac{3}{4} + \delta}{(+\delta)(1+\delta)}$$

$\delta \to 0$ ஆக $y \to +\infty$ ஆகும்.

இதேபோல $x \to \frac{1}{2}$ ஆக $y \to \pm\infty$ எனக் காணலாம்.



பயிற்சி **2.c**

1. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $y = \frac{3x-1}{(x+3)(x-1)}$ என்னும் சார்பு எல்லாப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும் எனக்காட்டி அதன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

2. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $f(x) = \frac{12x}{x^2 + 2x + 4}$ இன் வீச்சைக் காண்க. அதன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

3. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $0 < \frac{4}{x^2 + 2x + 2} \leq 4$ எனக்காட்டுக.

   $y = \frac{4}{x^2 + 2x + 2}$ இன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

4. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $f(x)=\frac{(x+1)(x-6)}{(x+3)(x-2)}$ என்பது எல்லாப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும் எனக்காட்டி $y=\frac{(x+1)(x-6)}{(x+3)(x-2)}$ இன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

5. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $f(x)=\frac{x^2-k}{x-2}$ என்னும் சார்பு எல்லாப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும் எனின் k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க. $k=9$ எனின் f(x) இன் வரைபை வரைக.

6. x என்பது மெய்யானது எனின் $y=\frac{2x^2+3x}{x^2+3x-4}$ என்னும் சார்பு $\frac{1}{5}$ க்கும் $\frac{9}{5}$ இற்கும் இடையே எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்காது எனக்காட்டி அதன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

7. $y=\frac{(x+a)^2}{x^2+x+1}$ எனின் y நேரானது எனவும் y ஆனது 0 க்கும் $\frac{4}{3}(a^2-a+1)$ க்கும் இடையே இருக்கும் எனவும் காட்டுக. இங்கு x,a என்பன மெய்யானவை

8. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $y=\frac{6x+5}{3x^2+4x+2}$ ஆனது -1.5 க்கும் 3 க்கும் வெளியே இருக்காது எனக் காட்டி அதன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

9. k இன் எப்பெறுமானத்திற்கு $\frac{x^2-2x+1}{x^2-k}$ என்னும் சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம் 3 எனக் காண்க. k இன் இழிவுப் பெறுமானத்திற்கு இதன் வரைபை வரைக.

அத்தியாயம் 3

தொடர் (Series)

அறிமுகம்

தொடர்கள் பற்றிய இவ்வத்தியாயத்தில் (3.1) பகுதியில் தொடரி, தொடர், தொடரின் பகுதிக்கூட்டுத்தொகை, ஒருங்கல் பற்றி வரைவிலக்கணங்களும், $\sum r$, $\sum r^2$, $\sum r^3$ காண்பதற்கான வழிமுறைகளும் கூறப்பட்டுள்ளது.

(3.2) பகுதியில் வித்தியாச செய்கைமுறைகள்

(i) $f(r) - f(r-1)$ (ii) $f(r) - f(r-2)$

(iii) $f(r) - f(r+1)$ (iv) $f(r) - f(r+2)$

கூறப்பட்டுள்ளது.

(3.3) பகுதியில் கணிதத்தொகுத்தறிவு முறை, பகுதிப்பின்னமுறை விவாதிக்கப்பட்டுளது.

(3.4) பகுதியில் பல பகுதிகளையும் கொண்ட பயிற்சிகள் வழங்கப்பட்டுள்ளது.

கணக்குகள் செய்யும்போது பொதுவாக $\sum r$, $\sum r^2$, $\sum r^3$ என்னும் முடிவுகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

"$\ast$" அடையாளமிடப்பட்டுள்ள பயிற்சிகள் சற்று கடினமானவை. இவை தவிர்ந்த மற்றைய பயிற்சிகள் "இணைந்த கணிதம்" கற்கும் மாணவர்களுக்கு போதுமானவையாகும்.

3.1 தொடரின் கூட்டுத்தொகை

முதலாவதாக தொடர், தொடரின் கூட்டுத்தொகை என்பதால் யாது விளங்கப்படும் என்பது பற்றி கூறுவோம். இயற்கை எண்களின் தொடை N என்க.

அதாவது $N = \{1, 2, 3, \text{-------}, n, \text{-----}\}$

3.1.1 தொடரி (Sequence)

வரைவிலக்கணம்

ஒவ்வொரு இயற்கைஎண் n இற்கும் ஒரு மெய்யெண் U_n அறியப்படும் என்க. அப்போது $\{U_1, U_2, U_3, \text{-------}, U_n, \text{-----}\}$ என்னும் வடிவில் அமைந்த எண்களின் ஒழுங்கை, மெய்யெண்களின் ஒரு தொடரி என்போம். U_n ஆனது இத்தொடரியின் n ஆவது உறுப்பு எனப்படும்.

உதாரணம்: முடிவற்ற தொடரிகள்

(i) $\{3, 5, 7, 9, 11, \text{--------------}\}$

(ii) $\{1, 4, 9, 16, \text{----------------}\}$

(iii) $\{1, 2, 8, 16, 32, \text{-------------}\}$

மேற்குறிப்பிட்ட தொடரிகள் முடிவற்ற எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளதால் முடிவற்ற தொடரிகள் (Infinite Sequence) எனப்படும்.

உதாரணம்: முடிவுள்ள தொடரிகள் (Finite Sequence)

(i) $\{1, 2, 3, \text{------------}, 100\}$ ஆனது 100 உறுப்புகள் உடைய ஒரு தொடரி.

(ii) $\{1^3, 2^3, 3^3, \text{------------}, 10^3\}$ ஆனது 10 உறுப்புகள் உடைய ஒரு தொடரி.

3.1.2 தொடரியின் எல்லை (Limit of a Sequence)

$\{U_1, U_2, U_3, -------, U_n, -----\}$ ஒரு தொடரி என்க.

இத்தொடரியின் எல்லை ℓ எனின், " $n \to \infty$ ஆக $U_n \to \ell$ " என எழுதப்படும்.

தொடரியொன்றின் எல்லை ℓ எனின் $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \ell$ என எழுதப்படும்.

3.1.3 தொடரின் பகுதிக் கூட்டுத்தொகை (Partial Sums)

$\{U_1, U_2, U_3, -------, U_n, -----\}$ ஒரு தரப்பட்ட தொடரி என்க. இத்தொடரியினால் பிறப்பிக்கப்படும் **தொடர்** $U_1 + U_2 + U_3 + --- + U_n + -$, இனது பகுதிக்கூட்டுத் தொகைகளின் தொடரி $\{S_1, S_2, S_3, ------ S_n, --\}$, பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$S_1 = U_1$

$S_2 = U_1 + U_2$

$S_3 = U_1 + U_2 + U_3$

$S_n = U_1 + U_2 + --------- + U_n$

குறியீட்டுமுறையால்

$S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} U_r$ என எழுதப்படும்.

$S_n = \sum\limits_{r=1}^{n} U_r$ ஆனது தொடர் $U_1 + U_2 + U_3 + ----- + U_n + ----$ இனது n உறுப்புகளின் **பகுதிக்கூட்டுத்தொகை** ஆகும்.

3.1.4 தொடரின் கூட்டுத்தொகை, ஒருங்கல்

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$ ஆனது ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் S எனின் தொடர் $U_1 + U_2 + U_3 + \text{-----} + U_n + \text{----}$ ஆனது ஒரு **ஒருங்கு தொடர் (Convergent Series)** எனப்படும். அத்துடன் முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S ஆகும்.

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r = S$$ என எழுதப்படும்.

தொடரானது ஒருங்கு தொடர் அல்லாவிடின் அத்தொடர் **விரிதொடர் (Divergent Series)** எனப்படும்.

இதுவரை நாம் தொடர் சம்பந்தமான பதங்களை பொதுவான முறையில் வரையறுத்துள்ளோம். இனிமேல் க.பொ.த உயர்தர மாணவர்கட்குரிய தொடர் சம்பந்தமான முக்கியவிடயங்களைக் கவனிப்போம்.

தரப்பட்ட தொடர் $\sum U_r$; $(U_1 + U_2 + U_3 + \text{-----} + U_r + \text{---})$ இன் பகுதிக்கூட்டுத்தொகை $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ எவ்வாறு காண்பது? என்பதே முக்கியமான விடயமாகும்.

இதற்குரிய விடை இலகுவானதல்ல.

* $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐ காண்பதற்கு பொதுவான முறை என்று ஒன்று இல்லை.

சில சிறப்புத்தொடர்கள் $\sum U_r$ இற்கு, $\sum_{r=1}^{n} U_r$ எவ்வாறு துணியப்படலாம் என்பது பற்றிய விடயங்களே இவ்வத்தியாயத்தின் இனிவரும் பகுதிகளாகும்.

3.1.5 கூட்டல் தொடர் (Arithmetic Series)

$\sum U_r = a + (a+d) + (a+2d) + ---- + [a+(n-1)d] + ------$

எனும் தொடர் **கூட்டல் தொடர்** எனப்படும்.

இங்கு a, முதலாம் உறுப்பு எனவும்

d, பொதுவித்தியாசம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

தேற்றம் 1

$$U_r = a + (r-1)d \quad \text{எனின்}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{n}{2}\{a + U_n\}.$$

நிறுவல்:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + --- + [a+(n-1)d] \qquad (1)$$

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + [a+(n-3)d] + ---- + a \qquad (2$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + ------ + [2a+(n-1)d]$$

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + U_n\} \qquad \text{இங்கு} \quad U_n = a + (n-1)d$$

உதாரணம் 1

$2 + 5 + 8 + 11 + - - - - - - -$ என்ற தொடரில் $15^{ம்}$ உறுப்பு, முதல் 8 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை என்பவற்றைக் காண்க.

தீர்வு:

$a = 2, \quad d = 3$

$U_n = a + (n-1)d$

$U_{15} = 2 + (15 - 1)3$

$U_{15} = 44.$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{8}{2}\{2(2) + (8-1)3\}$$

$S_8 = 100.$

உதாரணம் 2

$8.5 + 12 + 15.5 + 19 + - - - - - - - - - - - + 103$ என்ற கூட்டற்தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

$U_n = 103$

$\Rightarrow \quad a + (n-1)d = 103$

$\Rightarrow \quad 8.5 + (n-1)3.5 = 103$

$\Rightarrow \quad n = 28.$

$$S_n = \frac{n}{2}\{a + U_n\}$$

$$S_{28} = \frac{28}{2}\{8.5 + 103\}$$

$S_{28} = 1561.$

உதாரணம் 3

கூட்டல் விருத்தியொன்றின் $10^{ம்}$ உறுப்பு 3 ஆகும். முதல் ஆறு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 76.5 ஆகும். முதலாம் உறுப்பு, பொதுவித்தியாசம் என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க. $S_n = 0$ ஆகுமாறு n இன் நேர்முழு எண்ணைக் காண்க. இதிலிருந்து $S_n < 0$ ஆகுமாறு n இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைத் துணிக.

தீர்வு:

$$a + 9d = 3 \qquad (1)$$

$$6/2\{2a + (6-1)d\} = 76.5$$

$$\Rightarrow \quad 2a + 5d = 25.5 \qquad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow$

$a = 16.5, \quad d = -1.5.$

$$S_n = {}^{n}/2\,\{2(16.5) + (n-1)(-1.5)\}$$

$$= {}^{n}/2\,\{34.5 - 1.5\,n\}.$$

$S_n = 0$ ஆக

$$^{n}/2\,\{34.5 - 1.5\,n\} = 0.$$

$\Rightarrow n = 0$ அல்லது $n = 23.$

$\Rightarrow n = 0$ பொருந்தாது.

$\therefore\ n = 23.$

$S_n < 0$ ஆயின் $\quad {}^{n}/2\,\{34.5 - 1.5n\} < 0$

$$\Rightarrow \quad 34.5 - 1.5n < 0 \qquad [\because\ n > 0]$$

$$\Rightarrow \quad n > 23.$$

$$\Rightarrow \quad n_{\text{இழிவு}} = 24.$$

3.1.6 பெருக்கல் தொடர் (Geometric Series)

$U_n = ar^{n-1}$, இங்கு a, r ஒருமைகள் ஆகும். இவ்வடிவில் n ஆவது உறுப்பு இருப்பின் $\sum U_k = a + ar + ar^2 + \text{------} + ar^{n-1} + \text{-----}$ எனும் தொடர் பெருக்கல் தொடர் எனப்படும்.

இங்கு a - தொடரின் முதலாம் உறுப்பு எனவும்

r - பொதுவிகிதம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

தேற்றம் 2

$$U_k = ar^{k-1} \quad \text{எனின்}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

$$= na \quad , \quad r = 1$$

நிறுவல்:

வகை 1 : $r \neq 1$ என்போம்

$$Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + \text{----} + ar^{n-1} \qquad (1)$$

$$r\,Sn = ar + ar^2 + ar^3 + \text{----} + ar^{n-1} + ar^n \qquad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow (1-r)\,S_n = a - ar^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

வகை 2 : $r = 1$ என்போம்

$S_n = a + a + \text{----------} + a.$ (n தடவைகள்)

$\Rightarrow S_n = na.$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

$$= na \quad , \quad r = 1.$$

தேற்றம் 3

தொடர் $\sum ar^{n-1}$ ஒருங்கும் எனின் எனின் மட்டும் $|r| < 1$ ஆகும். இன்னொரு வகையாகக் கூறின் $-1 < r < 1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ ஒருங்கும். $r > 1$ அல்லது $r < -1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ விரியும்.

நிறுவல்:

$U_k = ar^{k-1}$ என்க. அத்துடன் $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ என்க.

$r = 1$ எனின் $S_n = na$.

$\therefore$ $\lim_{n \to \infty} S_n$ (எல்லை) இற்கு ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் இல்லை.

எனவே $r = 1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ எனும் தொடர் விரியும். (1)

$r \neq 1$ எனின் $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ஆகும்.

$\sum ar^{n-1}$ ஒருங்கும்

$\Leftrightarrow$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} S_n$ ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் எடுக்கும்.

$\Leftrightarrow$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் எடுக்கும்.

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{a}{1-r}$ - எல்லை $\underset{n \to \infty}{} \dfrac{ar^n}{1-r}$ ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் எடுக்கும்.

$\Leftrightarrow$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} \dfrac{ar^n}{1-r}$ ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் எடுக்கும்.

$\Leftrightarrow$ எல்லை $\underset{n \to \infty}{} r^n$ ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் எடுக்கும்.

$\Leftrightarrow \quad -1 < r < 1.$

$\Leftrightarrow \quad |r| < 1.$ (2)

[ஏனெனில் $r > 1$ எனின் $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$ முடிவுள்ள பெறுமானமன்று.

$r \leq -1$ எனின் $\lim_{n \to \infty} r^n$ வரையறுக்கப்படமாட்டாது. ஆகவே முடிவுள்ள பெறுமானம் அன்று.]

(1), (2) $\Rightarrow$ $-1 < r < 1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ ஒருங்கும். அத்துடன் $r \geq 1$ அல்லது $r \leq -1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ விரியும். $-1 < r < 1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ ஒருங்கும் எனக்கண்டோம். இப்போது இத்தொடர் ஒருங்கும் பெறுமானம், அதாவது இதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்போம்.

தேற்றம் 4

$-1 < r < 1$ எனின் $\sum ar^{n-1}$ இன் கூட்டுத்தொகை $\dfrac{a}{1-r}$ ஆகும்.

நிறுவல்:

$-1 < r < 1$ எனின், முன்னைய தேற்றப்படி $\sum ar^{k-1}$ இன் கூட்டுத்தொகை $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = S$ என்க. வரைவிலக்கணப்படி

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \lim_{n \to \infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r}$$ [$\because$ $-1 < r < 1$ எனின் $n \to \infty$ ஆக $r^n = 0$.]

மேற்படி இரு தேற்றங்களையும் தொகுத்து பின்வருமாறு கூறலாம்.

$-1 < r < 1$ எனின் தொடர் $\sum ar^{n-1}$ இன் கூட்டுத்தொகை $\frac{a}{1-r}$ இற்கு ஒருங்கும். $r \leq -1$ அல்லது $r \geq 1$ எனின் தொடர் $\sum ar^{n-1}$ ஒரு முடிவுள்ள கூட்டுத்தொகைக்கு ஒருங்காது, அதாவது விரியும்.

3.1.7 கூட்டல் பெருக்கல் தொடர்

$U_n = [a + (n-1)d]r^{n-1}$, இங்கு a, d ஒருமைகள், எனும் வடிவில் n ஆவது உறுப்பு இருப்பின் $\sum U_k = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + ------$ எனும் தொடர் கூட்டற் பெருக்கற் தொடர் எனப்படும்.

இங்கு $a + (a+d) + (a+2d) ---------$ ஒரு கூட்டற் தொடரும், $1 + r + r^2 + -----------$ ஒரு பெருக்கற் தொடரும் ஆகும்.

தேற்றம் 5

$U_k = [a + (k-1)d]r^{k-1}$ எனின்

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{a}{1-r} + \frac{rd(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \left[\frac{a+(n-1)d}{1-r}\right] r^n$$

நிறுவல்:

$$S_n = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + --- + [a + (n-1)d]r^{n-1} \qquad (1)$$

$$rS_n = \quad ar + (a+d)r^2 + --- + [a + (n-2)d]r^{n-1} + [a+(n-1)d]r^n \qquad (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow$

$$(1-r)S_n = a + [dr + dr^2 + ---- + dr^{n-1}] - [a + (n-1)d]r^n$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{rd(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \left[\frac{a+(n-1)d}{1-r}\right] r^n.$$

உய்த்தறிதல்:

$\dot{a} = a$ ஆக,

தொடர் $a + 2ar + 3ar^2 + \text{- - - - - - - - - - - -} nar^{n-1}$

$$S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{ar(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \left[\frac{a+(n-1)a}{1-r}\right]r^n$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r}.$$

$|r| < 1$ ஆயும் $n \to \infty$ ஆயும் இருப்பின் $r^n \to 0.$

$$\therefore\ S_n \to \frac{a}{(1-r)^2}$$

$|r| < 1$ ஆக இருக்கையில் ஒருங்கு தொடராகும்.

உதாரணம் 1

(i) $1 + \left(\frac{3x+2}{x+10}\right) + \left(\frac{3x+2}{x+10}\right)^2 + \text{- - - - - - - - -}$

(ii) $1 + \left(\frac{3x-9}{x+1}\right) + \left(\frac{3x-9}{x+1}\right)^2 + \text{- - - - - - - - -}$

பெருக்கற் தொடர்கள் (i) உம் (ii) உம் ஒருங்குவதற்கான x இன் பொதுவான வீச்சைக்காண்க. S_1, S_2 என்பன முறையே தொடர் (i), தொடர் (ii) என்பவற்றிற்கான முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை எனின் $2S_1 = 13S_2$ ஆகுமாறு x இற்கு ஒரேயொரு பெறுமானம் மட்டும் உண்டு எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$a + ar + ar^2 + \text{- - - - - -}$ எனும் பெருக்கற் தொடர் ஒருங்குவதற்கான நிபந்தனை $|r| < 1$ ஆகும்.

$1 + \left(\frac{3x+2}{x+10}\right) + \left(\frac{3x+2}{x+10}\right)^2 + \text{---------}$ எனும் தொடரைக் கருதின்

$$r = \frac{3x+2}{x+10}$$

$\left|\frac{3x+2}{x+10}\right| < 1$ எனின் மேற்படி தொடர் ஒருங்கும்.

$$\Rightarrow \left(\frac{3x+2}{x+10}\right)^2 < 1$$

$$\Rightarrow (3x+2)^2 - (x+10)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-4) < 0$$

$\therefore$ x இன் வீச்சு $-3 < x < 4$.

$1 + \left(\frac{3x-9}{x+1}\right) + \left(\frac{3x-9}{x+1}\right)^2 + \text{-----}$ எனும் தொடரைக் கருதின்

$$r = \frac{3x-9}{x+1}$$

$\left|\frac{3x-9}{x+1}\right| < 1$ எனின் மேற்படி தொடர் ஒருங்கும்.

$$\frac{(3x-9)^2}{(x+1)^2} < 1$$

$$\Rightarrow (3x-9)^2 - (x+1)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-5) < 0$$

x இன் வீச்சு $2 < x < 5$ ஆகும்.

$\therefore$ இரண்டு தொடர்களும் ஒருங்குவதற்கான x இன் பொதுவான வீச்சு $2 < x < 4$ ஆகும்.

தொடர் ஒன்றின் முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$ ஆகும்.

$$S_1 = \frac{1}{1-\frac{3x+2}{x+10}} = \frac{x+10}{8-2x} \quad \& \quad S_2 = \frac{1}{1-\frac{3x-9}{x+1}} = \frac{x+1}{10-2x}$$

தரவின் படி $2S_1 = 13S_2$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\frac{x+10}{8-2x}\right] = 13\left[\frac{x+1}{10-2x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 11x^2 - 49x + 48 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)(11x-6) = 0$$

$\Rightarrow \quad x = 3$ அல்லது $x = 6/11$

$2 < x < 4$ என்பதால் $x = 3$ ஆகும். $x = 6/11$ பொருந்தாது.

உதாரணம் 2

$5 + 55 + 555 + 5555 + -----$ என்ற தொடரின் r ஆவது உறுப்பை காண்க. இதிலிருந்து முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

$U_1 = 5$

$U_2 = 5 \times 10 + 5$

$U_3 = (5 \times 10^2) + (5 \times 10) + 5$

$$U_r = (5 \times 10^{r-1}) + (5 \times 10^{r-2}) + -------- + 5$$

$$= 5[1 + 10 + 10^2 + --------------- + 10^{r-1}]$$

$$= 5\left[\frac{1-10^r}{1-10}\right]$$

$$= \frac{5}{9}[10^r - 1]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{5}{9}[10^r - 1]$$

$$S_n = \frac{5}{9}\sum_{r=1}^{n}[10^r - 1]$$

$$= \frac{5}{9}\sum_{r=1}^{n}10^r - \frac{5}{9}\sum_{r=1}^{n}1$$

$$= \frac{5}{9}[10(\frac{1 - 10^n}{1 - 10}) - n]$$

$$= \frac{5}{81}[10(10^n - 1) - 9n]$$

$$= \frac{5}{81}[10^{n+1} - 10 - 9n]$$

உதாரணம் 3

$1 + 2.3 + 3.3^2 + 4.3^3 + \text{-------}$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பை எழுதுக. முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{4}[3^n(2n - 1) + 1]$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$U_n = [a + (n - 1)d] r^{n-1}$ இங்கு $a = 1$, $d = 1$, $r = 3$ ஆகும்.

இது கூட்டல் பெருக்கல் தொடராகும்.

$$S_n = 1 + 2.3 + 3.3^2 + 4.3^3 + \text{-------} + n.3^{n-1} \quad (1)$$

$$3S_n = 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \text{------} + (n-1).3^{n-1} + n.3^n \quad (2)$$

$(1) - (2) \Rightarrow$

$$-2S_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \text{-----} + 3^{n-1} - n.3^n$$

$$-2S_n = \frac{1[1 - 3^n]}{1 - 3} - n3^n$$

$$S_n = \frac{1}{4}[3^n(2n - 1) + 1]$$

உதாரணம் 4

முதலாம் உறுப்பு a, பொதுவிகிதம் r ஆகவுடைய பெருக்கல் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையை S_n குறிக்கின்றது. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

(ii) $r^{m-n} = \dfrac{S_{m+p} - S_m}{S_{n+p} - S_n}$

தீர்வு:

$$S_n = \frac{a[1-r^n]}{1-r} \quad \text{---- (1)} \qquad S_{2n} = \frac{a[1-r^{2n}]}{1-r} \quad \text{---- (2)} \qquad S_{3n} = \frac{a[1-r^{3n}]}{1-r} \quad \text{---- (3)}$$

$$(3) - (2) \Rightarrow S_{3n} - S_{2n} = \frac{a}{1-r}[r^{2n} - r^{3n}] = \frac{ar^{2n}}{1-r}[1 - r^n] \qquad (4)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow S_{2n} - S_n = \frac{a}{1-r}[r^n - r^{2n}] = \frac{ar^n}{1-r}[1 - r^n]$$

$$\therefore S_n(S_{3n} - S_{2n}) = \frac{a^2 r^{2n}}{(1-r)^2}[1 - r^n]^2 \qquad (5)$$

$$(S_{2n} - S_n)^2 = \frac{a^2 r^{2n}}{(1-r)^2}[1 - r^n]^2 \qquad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

$$S_{m+p} - S_m = \frac{a}{1-r}[r^m - r^{m+p}] \qquad (7)$$

$$S_{n+p} - S_n = \frac{a}{1-r}[r^n - r^{n+p}] \qquad (8)$$

$$\frac{(7)}{(8)} \Rightarrow \frac{S_{m+p} - S_m}{S_{n+p} - S_n} = \frac{r^m[1 - r^p]}{r^n[1 - r^p]}$$

$$= \frac{r^m}{r^n} = r^{m-n}.$$

3.1.8 $\sum_{r=1}^{n} r, \quad \sum_{r=2}^{n} r^2, \quad \sum_{r=3}^{n} r^3$ என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகைகளைக் காண்போம். இவற்றைக் காண்பதற்கு பல்வேறு முறைகள் உண்டு.

$\sum_{r=1}^{n} r$ காணல்

முறை 1

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & r^2 & - & (r-1)^2 & \equiv & 2r & - & 1 \\
r=1, & \cancel{1^2} & - & 0^2 & \equiv & 2.1 & - & 1 \\
r=2, & \cancel{2^2} & - & \cancel{1^2} & \equiv & 2.2 & - & 1 \\
r=3, & \cancel{3^2} & - & \cancel{2^2} & \equiv & 2.3 & - & 1 \\
\text{-----} & & & & & & & \\
\text{-----} & & & & & & & \\
r=n-1, & \cancel{(n-1)^2} & - & \cancel{(n-2)^2} & \equiv & 2(n-1) & - & 1 \\
r=n, & n^2 & - & \cancel{(n-1)^2} & \equiv & 2n & - & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$n^2 - 0^2 = 2\sum_{r=1}^{n} r - n$$

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$$

முறை 2

$$\sum_{r=1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \text{----------------} + n$$

$$= \frac{n}{2}(n+1). \qquad [\because \text{கூட்டல் தொடர்}]$$

$\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காணல்.

முறை 1

$(2r+1)^3 - (2r-1)^3 \equiv 24r^2 + 2$ எனும் சர்வசமன்பாட்டை கருதுக.

$$
\begin{array}{lccccccc}
r=1, & \cancel{3^3} & - & 1^3 & = & 24.1^2 & + & 2 \\
r=2, & \cancel{5^3} & - & \cancel{3^3} & = & 24.2^2 & + & 2 \\
r=3, & \cancel{7^3} & - & \cancel{5^3} & = & 24.3^2 & + & 2
\end{array}
$$

- -

- -

$$
\begin{array}{lccccccc}
r=n-1, & \cancel{(2n-1)^3} & - & \cancel{(2n-3)^3} & = & 24(n-1)^2 & + & 2 \\
r=n, & (2n+1)^3 & - & \cancel{(2n-1)^3} & = & 24n^2 & + & 2
\end{array}
$$

$$(2n+1)^3 - 1^3 = 24\sum_{r=1}^{n} r^2 + 2n$$

$$24\sum_{r=1}^{n} r^2 = (2n+1)^3 - 1^3 - 2n$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

முறை 2

$f(r) = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$ எனின் $f(r) - f(r-1) = r^2$ ஆகும்.

$$
\begin{array}{lccccc}
r=1, & \cancel{f(1)} & - & f(0) & = & 1^2 \\
r=2, & \cancel{f(2)} & - & \cancel{f(1)} & = & 2^2 \\
r=3, & \cancel{f(3)} & - & \cancel{f(2)} & = & 3^2
\end{array}
$$

- -

- -

$$r = n-2, \quad \cancel{f(n-2)} - \cancel{f(n-3)} = (n-2)^2$$

$$r = n-1, \quad \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n-2)} = (n-1)^2$$

$$r = n, \quad f(n) - \cancel{f(n-1)} = n^2$$

$$f(n) - f(0) = \sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - 0$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$\sum\limits_{r=1}^{n} r^3$ **இன் பெறுமானத்தைக் காணல்**

முறை 1

$$\left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{r(r-1)}{2}\right]^2 \equiv r^3$$

எனும் சர்வசமன்பாட்டைக் கருதுக.

$$r = 1, \quad \cancel{\left[\frac{1.2}{2}\right]^2} - 0^2 = 1^3$$

$$r = 2, \quad \cancel{\left[\frac{2.3}{2}\right]^2} - \cancel{\left[\frac{2.1}{2}\right]^2} = 2^3$$

$$r = 3, \quad \cancel{\left[\frac{3.4}{2}\right]^2} - \cancel{\left[\frac{3.2}{2}\right]^2} = 3^2$$

$- -$

$- -$

$$r = n-2, \quad \cancel{\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2} - \left[\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right]^2 = (n-2)^3$$

$$r = n-1, \quad \cancel{\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2} - \cancel{\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]^2} = (n-1)^3$$

$$r = n, \quad \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \cancel{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2} = n^3$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \sum_{r=1}^{n} r^3$$

$$\therefore \left[\sum_{r=1}^{n} r\right]^2 = \sum_{r=1}^{n} r^3$$

முறை 2

$(r+1)^4 - r^4 \equiv 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1$ ஐக் கருதுக.

$$r = 1, \quad \cancel{2^4} - 1^4 = 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$

$$r = 2, \quad \cancel{3^4} - \cancel{2^4} = 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$

$$r = 3, \quad \cancel{4^4} - \cancel{3^4} = 4.3^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1$$

$- -$

$- -$

$$r = n-1, \quad \cancel{n^4} - \cancel{(n-1)^4} = 4.(n-1)^3 + 6.(n-1)^2 + 4.(n-1) + 1$$

$$r = n, \quad (n+1)^4 - \cancel{n^4} = 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$$

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\sum_{1}^{n} r^3 + 6\sum_{1}^{n} r^2 + 4\sum_{1}^{n} r + n$$

$$4\sum_{1}^{n} r^3 = (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n} r &= \frac{n}{2}(n+1) \\ \sum_{r=1}^{n} r^2 &= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \\ \sum_{r=1}^{n} r^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\sum_{r=1}^{n} r\right]^2 \end{aligned}}$$

உதாரணம் 1

$\sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \frac{n}{3}(n+1)(n+5)$ எனக்காட்டுக.

மேலும் $\sum r(r+3)$ ஒரு விரிதொடர் எனவும் காட்டுக.

தீர்வு:

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \sum_{r=1}^{n} r^2 + 3\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + 3.\frac{n}{2}(n+1)$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)\ [(2n+1) + 9]$$

இத்தொடரின் $S_n = \frac{n}{3}(n+1)(n+5)$

$\therefore\ n \to \infty$ ஆக $S_n \to \infty$ ஆகும்.

$\therefore$ முடிவில்லாத பெறுமானத்தை எடுப்பதால் விரிதொடராகும்.

உதாரணம் 2

$\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காண்க. ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஆனது $U_r = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \text{--------} + r^2$ ஆகும். இத்தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐக் காண்க.

$n \to \infty$ ஆக $\frac{S_n}{n^4} \to \frac{1}{12}$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$ என முன்பு காட்டியுள்ளோம்.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r, \qquad U_r = 1^2 + 2^2 + \text{-------------} + r^2$$

$$\therefore U_r = \frac{r}{6}(r+1)(2r+1)$$ ஆகும்.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{6}(r+1)(2r+1)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n}(2r^3 + 3r^2 + r)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{r=1}^{n} r^3 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[n(n+1) + (2n+1) + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left(\frac{S_n}{n^4}\right) = \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left[\frac{1}{12}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{எல்லை}}\left[\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\times 1\times 1\times 1$$

$$= \frac{1}{12}.$$

உதாரணம் 3

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \text{-------}$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

$r^{\text{ம்}}$ உறுப்பு $U_r = (2r-1)^2$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(2r-1)^2$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(4r^2 - 4r + 1)$$

$$= 4\sum_{r=1}^{n} r^2 - 4\sum_{r=1}^{n} r + \sum_{r=1}^{n} 1$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n$$

$$= \frac{n}{3}[4n^2 + 4n + 3].$$

பயிற்சி 3.a

1. கூட்டல் தொடர் ஒன்றின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது, உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R எனின் $p(Q-R) + q(R-P) + r(P-Q) = 0$ எனக்காட்டுக.

2. கூட்டல் விருத்தி ஒன்றின் முதலாம் உறுப்பு 2 ஆகும். பொதுவித்தியாசம் 3 ஆகும். முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐக் காண்க. $S_n = 610$ ஆகுமாறு n இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

   $S_n > 1000$ ஆகுமாறு n இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் p ஆவது, q ஆவது, r ஆவது, உறுப்புக்கள் முறையே P, Q, R எனின் $(q-r)\log P + (r-p)\log Q + (p-q)\log R = 0$ எனக்காட்டுக.

4. முதலாம் உறுப்பு a ஆகவும் பொதுவிகிதம் r ஆகவும் உடைய பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக

   (i) $\dfrac{S_{3n} - S_{2n}}{S_n} = r^{2n}$

   (ii) $r = \dfrac{1}{3}$ எனத்தரப்படின் $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{3n} - S_{2n}}{S_n} = \frac{1}{8}$

   எனக்காட்டுக.

5. 4 + 44 + 444 + 4444 + - - - - - - - என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

6. $1.1 + 2.3 + 3.5 + \text{- - - - - - - -} + n.(2n - 1)$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகை $n/_6(n + 1)(4n - 1)$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $1.(2n - 1) + 2.(2n - 3) + \text{- - - - - - - -} + n[2n - (2n - 1)]$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

7. (i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \text{- - - - - - - -} + (2n-1)^2 = n/_3\,(2n-1)(2n+1)$ எனக்காட்டுக.

(ii) $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \text{- - - - - - - - -} + n(n+1)(n+2)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

8. (i) $1.2.4 + 2.3.5 + 3.4.6 + \text{- - - - - -}$ என்ற தொடரின் S_n ஐக் காண்க

(ii) $\sum_{r=1}^{n}(r+1)(2r+1)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

9. $\sum r^2$, $\sum r^3$ ஐப் பிரயோகித்து

(i) $\sum_{r=1}^{n} r^2(r+1) = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+1)$ எனக்காட்டுக.

(ii) ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = 1+2+3+\text{- - -}+r$ ஆகும்.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \text{- - - - - - -} + U_n$ ஆகும்.

$S_n = n/_6\,(n+1)(n+2)$ எனக்காட்டுக.

10. (i) $1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \text{- - - - - - -} + n.1$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் விரிதொடர் எனக்காட்டுக.

(ii) $(1^4 - 2^4) + (3^4 - 4^4) + \text{- - -} + \{(2n-1)^4 - (2n)^4\} + \text{- - - -}$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க.

11. (i) $1.3.4 + 2.4.5 + 3.5.6 + - - - - -$ என்ற தொடரின் S_n ஐக் காண்க இத்தொடர் விரிதொடர் எனக் காட்டுக.

(ii) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + - - - - - - - - - - (2n)^2 + (2n+1)^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

12. (i) $1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + - - - - -$ என்ற தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க.

(ii) கூட்டல் விருத்தியொன்றின் முதல் n_1 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை P ஆகும். முதல் n_2 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை Q ஆகும். முதலாம் உறுப்பு

$$\frac{P n_2 (n_2 - 1) - Q n_1 (n_1 - 1)}{n_1 n_2 (n_2 - n_1)}$$ எனக்காட்டுக.

13. (i) $3 + 12 + 33 + 72 + - - - - - - - - -$ என்ற தொடரின் $n^{ம்}$ உறுப்பு $An^3 + Bn^2 + Cn$ வடிவத்தை உடையது. இங்கு A, B, C ஒருமைகள் A, B, C இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$S_n = n/4\,(n+1)(n^2+n+4)$ எனக்காட்டுக.

(ii) 1, 2, 3, - - - - - - - - - -, n என்னும் எண்களில் எல்லா இருவித்தியாசமான எண்களினதும் பெருக்குத்தொகையின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

14. (i) 1, 3, 5, - - - - - - - -, (2n – 1) என்னும் எண்களில் எல்லா இரு எண்களினதும் பெருக்குத் தொகையின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + - - - - - - - - -$ என்ற தொடரின் முதல் 2n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இங்கு n நேர்முழுவெண்.

15. (i) $(r+1)^3 - r^3 \equiv 3r^2 + 3r + 1$ எனும் சர்வசமன்பாட்டைப் பிரயோகித்து $\sum_{r=1}^{n} r^2$ ஐக் காண்க.

(ii) $2.5 + 3.6 + 4.7 + \text{- - - - - - - - - -}$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

16. $S = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + (a+3d)r^3 + \text{- - -} + [a+(n\text{-}1)d]r^{n-1}$

$(1-r)S = a + dr\left(\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}\right) - [a + (n-1)d]r^n$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \text{- - - - - -}$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

17. $1 + x + x^2 + \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} + x^n$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகையை காண்க. இங்கு $x \neq 1$.

x குறித்து வகையிடுவதால்

$1 + 2x + 3x^2 + \text{- - - - - - - - - - - - -} + nx^{n-1}$ எனும் தொடரின் கூட்டுத்தொகையை காண்க.

இதிலிருந்து $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \text{- - - - - - - - - - - - -} + n.2^n$ இன் பெறுமானத்தை $2 + (n-1)2^{n+1}$ என உய்த்தறிக.

18. $1^2 + 2^2 + \text{- - - - - - - - - -} + n^2 = n/_6(n+1)(2n+1)$ எனக்காட்டுக.

$a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 + \text{- - - - - - - - -} + (a+nd)^2$

$$= 1/_6\,(n+1)[6a(a+nd) + d^2n(2n+1)]$$

எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

(i) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \text{- - - - - -} + \ell^2 = \ell/_6\,(\ell+1)(\ell+2)$ (ℓ இரட்டை)

(ii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \text{- - - - - -} + \ell^2 = \ell/_6\,(\ell+1)(\ell+2)$ (ℓ ஒற்றை)

என உய்த்தறிக.

19. $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \; n \in Z^+$ என நிறுவுக.

$\sum_{r=1}^{2n} r^3$ ஐ கருதுவதன் மூலம் $S_n = \sum_{r=1}^{n}(2r-1)^3$

$T_n = \sum_{r=1}^{n}(2r)^3$ என்பவற்றைக் காண்க.

$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}}\left(\frac{S_n}{T_n}\right)$ ஐக் காண்க.

20. $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \text{-------------} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \text{-------}$

என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n ஆகும்.

முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S ஆகும். $S - S_n < \frac{1}{10^3}$

ஆகுமாறு n இனது மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

3.2 தொடரின் கூட்டுத்தொகையை கண்டு பிடிப்பதற்குரிய வித்தியாச செய்கை முறை.

3.2.1 முறை 1

$U_r = f(r) - f(r-1)$ அல்லது $U_r = f(r+1) - f(r)$ எனும் வடிவத்தில் அமைதல்

தேற்றம் 1

(i) $U_r = f(r) - f(r-1), \quad r \geq 1$ எனின்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0)$$ ஆகும்.

(ii) $U_r = f(r+1) - f(r), \quad r \geq 1$ எனின்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(n+1) - f(1)$$ ஆகும்.

நிறுவல்:

(i) $U_r = f(r) - f(r-1) \quad r \geq 1$ எனின்

$$\begin{array}{llcccc}
r = 1, & U_1 & = & \cancel{f(1)} & - & f(0) \\
r = 2, & U_2 & = & \cancel{f(2)} & - & \cancel{f(1)} \\
r = 3, & U_3 & = & \cancel{f(3)} & - & \cancel{f(2)} \\
\cdots & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
r = n-2, & U_{n-2} & = & \cancel{f(n-2)} & - & \cancel{f(n-3)} \\
r = n-1, & U_{n-1} & = & \cancel{f(n-1)} & - & \cancel{f(n-2)} \\
r = n, & U_{n-2} & = & f(n) & - & \cancel{f(n-1)}
\end{array}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0).$$

(ii) $U_r = f(r+1) - f(r) \qquad r \geq 1$ எனின்

$$
\begin{array}{llcccc}
r = 1, & U_1 & = & \cancel{f(2)} & - & f(1) \\
r = 2, & U_2 & = & \cancel{f(3)} & - & \cancel{f(2)} \\
r = 3, & U_3 & = & \cancel{f(4)} & - & \cancel{f(3)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
r = n-2, & U_{n-2} & = & \cancel{f(n-1)} & - & f(n-2) \\
r = n-1, & U_{n-1} & = & \cancel{f(n)} & - & \cancel{f(n-1)} \\
r = n, & U_n & = & f(n+1) & - & \cancel{f(n)}
\end{array}
$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(n+1) - f(1).$$

இதேபோல்

$U_r = f(r) - f(r-2)$ அல்லது

$U_r = f(r+2) - f(r)$ எனும் வடிவில் உணர்த்தப்பட்டு S_n ஐ இலகுவாகப் பெறலாம்.

தேற்றம் 2

(i) $U_r = f(r) - f(r-2), \qquad r \geq 1$ எனின்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) + f(n-1) - f(0) - f(-1).$$ ஆகும்.

(ii) $U_r = f(r+2) - f(r), \qquad r \geq 1$ எனின்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = f(n+2) + f(n+1) - f(1) - f(2).$$ ஆகும்

3.2.2 f(r) இனைக் காண்பதற்கான உபாயங்கள்

வழமையான உபாயங்கள் பின்வரும் உதாரணங்கள் மூலமாகவும் பயிற்சிகள் மூலமாகவும் விளக்கப்படவுள்ளன.

(i) U_r ஆனது r இன் ($1^{ம்}$ படி) காரணிகளின் பெருக்கமாக இருக்கும் போது

உதாரணம் 1

1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + - - - - - - - - - - என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. U_r ஐ $f(r) - f(r+1)$ வடிவில் எழுதி S_n ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = (2r-1)(2r+1)(2r+3)$$

$$f(r) = \frac{(2r-3)(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{-4 \times 2}$$ என்க.

$f(r) - f(r+1) = U_r$ ஆகும்.

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{15}{8} + \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8}$$

குறிப்பு: காரணி அதிகரிப்பும், r இன் குணகமும் சமனாகும். f(r) ஐ எழுதும் போது U_r இன் முன்னுள்ள காரணியை எழுதி, அதை (- காரணிகளின் எண்ணிக்கை × வித்தியாசம்) என்பதால் வகுக்க.

உதாரணம் 2

1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + - - - - - - - - என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. U_r ஐ $f(r) - f(r-1)$ ஆகுமாறு f(r) ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐக் காண்க. இத்தொடர் விரிதொடர் எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$U_r = (2r-1)(2r+1)(2r+3)$

$$f(r) = \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{4 \times 2} \quad \text{என்க.}$$

$\therefore\ U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகும்.

$S_n = f(n) - f(0)$

$$S_n = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8} + \frac{15}{8}.$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to \infty$ ஆகும்.

முடிவற்ற பெறுமானம் கிடைப்பதால் விரிதொடராகும்.

உதாரணம் 3

$1.3.5 + 2.4.6 + 3.5.7 + \text{-------}$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக.

$U_r = f(r) - f(r-2)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐ எழுதுக. S_n ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்குமா? விரியுமா?.

தீர்வு:

$U_r = r(r+2)(r+4)$

$$f(r) = \frac{r(r+2)(r+4)(r+6)}{\text{காரணிகளின் எண்ணிக்கை} \times \text{வித்தியாசம்}}$$

$$f(r) = \frac{r(r+2)(r+4)(r+6)}{4 \times 2}$$

$f(r) - f(r-2) = U_r$ ஆகும்.

$$S_n = \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{8} + \frac{(n-1)(n+1)(n+3)(n+5)}{8} + \frac{15}{8}$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to 15/8$ ஆகும்.

முடிவுள்ள பெறுமானம் கிடைப்பதால் ஒருங்கு தொடராகும்.

உதாரணம் 4

உதாரணம் 3 இல் $U_r = f(r) - f(r+2)$ வடிவில் எழுதி S_n ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = r(r+2)(r+4)$$

$$f(r) = \frac{(r-2)\,r\,(r+2)(r+4)}{-4\times 2}$$

$U_r = f(r) - f(r+2)$ ஆகும்.

$$S_n = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$

$$S_n = \frac{15}{8} + \frac{(n-1)(n+1)(n+3)(n+5)}{8} + \frac{n(n+2)(n+4)(n+6)}{8}$$

குறிப்பு: இங்கு r இன் குணகம் ஒன்று, காரணிகளின் வித்தியாசம் இரண்டு ஆகும்.

(ii) U_r ஆனது r இன் $1^{ம்}$ படிக்காரணிகளின் நேர்மாறாக இருக்கும் போது

உதாரணம் 1

$\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \text{---------}$ என்ற தொடரின் U_r ஐயும் $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐயும் எழுதி முதல் n எண்ணிக்கையான உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இத் தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை மெய்ப்பிக்க.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{1}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)}$$

$$f(r) = \frac{1}{(3r+1)(3r+4)} \times \frac{-1}{\text{காரணிகளின் எண்ணிக்கை} \times \text{வித்தியாசம்}}$$

$$f(r) = \frac{-1}{(3r+1)(3r+4)} \times \frac{1}{2\times 3}$$ என்க

$U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகும்.

$S_n = f(n) - f(0)$

$$S_n = \frac{-1}{6(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{24}$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to 1/24$ ஆகும்.

முடிவுள்ள பெறுமானம் கிடைப்பதால் ஒருங்கு தொடராகும்.

உதாரணம் 2

உதாரணம் 1 இல் U_r ஐ $f(r) - f(r+1)$ வடிவில் எழுதி S_n ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{1}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)}$$

$$f(r) = \frac{1}{(3r-2)(3r+1)} \times \frac{1}{\text{காரணிகளின் எண்ணிக்கை} \times \text{வித்தியாசம்}}$$

$$f(r) = \frac{-1}{(3r-2)(3r+1)} \times \frac{1}{2\times 3}$$ என்க

$U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகும்.

$S_n = f(1) - f(n+1)$

$$S_n = \frac{1}{24} - \frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$$

குறிப்பு: r இன் குணகம் = காரணிகளின் வித்தியாசம்.

உதாரணம் 3

$\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{3.5.7} + \text{-----------------}$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. $U_r = f(r) - f(r+2)$ வடிவில் எழுதி S_n ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா என வாய்ப்புப்பார்க்க.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{1}{r(r+2)(r+4)}$$

$$f(r) = \frac{1}{r(r+2)} \times \frac{1}{\text{காரணிகளின் எண்ணிக்கை} \times \text{வித்தியாசம்}}$$

$$f(r) = \frac{1}{4r(r+2)}$$

$U_r = f(r) - f(r+2)$ ஆகும்.

$S_n = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$

$$S_n = \frac{1}{12} + \frac{1}{32} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to 11/96$ ஆகும்.

முடிவுள்ள பெறுமானம் கிடைப்பதால் ஒருங்கும்.

உதாரணம் 4

உதாரணம் 3 இல் $U_r = f(r) - f(r-2)$ வடிவில் எழுதி S_n ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{1}{r(r+2)(r+4)}$$

$$f(r) = \frac{1}{(r+2)(r+4)} \times \frac{-1}{\text{காரணிகளின் எண்ணிக்கை} \times \text{வித்தியாசம்}}$$

$$f(r) = \frac{-1}{4(r+2)(r+4)}$$

$U_r \ = \ f(r) - f(r-2)$ ஆகும்.

$S_n \ = \ -f(0) - f(-1) + f(n-1) + f(n)$

$$S_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4(n+1)(n+3)} - \frac{1}{4(n+2)(n+4)}$$

(iii) சில விசேட தொடர்களுக்கு வித்தியாச செய்கை முறையை பயன்படுத்தல்.

உதாரணம் 1

$\frac{8}{1.2.3} + \frac{10}{2.3.4} + \frac{12}{3.4.5} + \text{---------}$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக $f(r)$ ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க. ஒருங்கு தொடரா? விரிதொடரா? எனக்காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)}$$

$f(r) = \frac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)}$ என்க. இங்கு λ, μ ஒருமைகள்.

$U_r \ = \ f(r) - f(r-1)$

$$\frac{2r+6}{r(r+1)(r+2)} = \frac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)} - \frac{\lambda(r-1) + \mu}{r(r+1)}$$

$2r + 6 \ = \ (\lambda r + \mu)r - [\lambda(r-1) + \mu](r+2)$

r இன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$2 \ = \ \mu - (\mu - \lambda) - 2\lambda.$

$\lambda \ = \ -2$

ஒருமையை சமப்படுத்த

$6 = -2(\mu - \lambda)$

$6 = -2\lambda - 4$

$\mu = -5$

$$f(r) = \frac{-(2r+5)}{(r+1)(r+2)}$$

$$S_n = f(n) - f(0) = \frac{-(2n+5)}{(n+1)(n+2)} + \frac{5}{2}$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to 5/2$ ஆகும்.

முடிவுள்ள பெறுமானம் கிடைப்பதால் ஒருங்கும்.

உதாரணம் 2

ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $\dfrac{(2r+3)}{r^2\,(r+1)^2\,(r+2)^2\,(r+3)^2}$ ஆகும்.

$U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா?

தீர்வு:

$$f(r) = \frac{\lambda}{(r+1)^2\,(r+2)^2\,(r+3)^2} \quad \text{என்க.}$$

$U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக

$$\frac{(2r+3)}{r^2(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} = \frac{\lambda}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2} - \frac{\lambda}{r^2(r+1)^2(r+2)^2}$$

$\Rightarrow \quad 2r+3 = \lambda[r^2 - (r+3)^2]$

$\Rightarrow \quad 2r+3 = \lambda(-6r-9)$

$\Rightarrow \quad \lambda = -1/3.$

$$S_n = f(n) - f(0)$$

$$S_n = \frac{-1}{3(n+1)^2 (n+2)^2 (n+3)^2} + \frac{1}{108}.$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n \to 1/108$. ஆகும்.

∴ தொடர் ஒருங்கும்.

உதாரணம் 3

$\frac{1}{2} + \frac{1.4}{2.5} + \frac{1.4.7}{2.5.8} + \frac{1.4.7.10}{2.5.8.11} + ----------$ என்ற தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஆகும். U_{r+1} ஐ U_r இல் எடுத்துரைக்க. $f(r) - f(r-1) = U_r$ ஆகவும் $f(r) = (Ar + B)\, U_{r+1}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ என்பது r இல் ஒரு சார்பு ஆகும். மாறிலிகள் A, B ஐக் காண்க.

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2}\left[\frac{4.7.10.----------(3n+1)}{2.\ 5.\ 8.\ ----------(3n-1)} - 1\right]$$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{1.4.7.10.------(3r-2)}{2.5.8.11.------(3r-1)}$$

$$U_{r+1} = \left(\frac{3r+1}{3r+2}\right) U_r$$

$$U_r = f(r) - f(r-1)$$

$$\left(\frac{3r+1}{3r+2}\right)(Ar+B)\, U_r - [A(r-1) + B]\, U_r = U_r$$

$$(3r+1)(Ar+B) - [A(r-1)+B](3r+2) = 3r+2$$

r இன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$$3B + A - 2A - 3(B - A) = 3$$

$$A = 3/2.$$

ஒருமையை சமப்படுத்த

$$B - 2B + 2A = 2$$

$$-B = 2 - 3$$

$$B = 1.$$

$$f(r) = \left(\frac{3r+2}{2}\right) \frac{1.4.7.10.\text{------}(3r+1)}{2.5.8.11.\text{------}(3r+2)}$$

$$S_n = f(n) - f(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1.4.7.\text{----------}(3n+1)}{2.\ 5.\ 8.\ \text{----------}(3n-1)}\right] - \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1.4.7.\text{----------}(3n+1)}{2.\ 5.\ 8.\ \text{----------}(3n-1)} - 1\right]$$

உதாரணம் 4

$\frac{3}{1^2.3^2.5^2} + \frac{4}{3^2.5^2.7^2} + \frac{5}{5^2.7^2.9^2} + \text{---------}$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. $U_r = f(r) - f(r+2)$ ஆக $f(r)$ எழுதுக. S_n ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{r+2}{r^2.(r+2)^2.(r+4)^2}$$

$$f(r) = \frac{\lambda}{r^2.(r+2)^2} \quad \text{என்க.}$$

$f(r) - f(r+2) = U_r$ ஆக.

$$\lambda\left[\frac{1}{r^2.(r+2)^2} - \frac{1}{(r+2)^2.(r+4)^2}\right] = \frac{r+2}{r^2.(r+2)^2.(r+4)^2}$$

$$\lambda\,[(r+4)^2 - r^2] = r+2$$

$$\lambda\,(8r+16) = r+2$$

$$\lambda = 1/8 .$$

$$f(r) = \frac{\frac{1}{8}}{r^2.(r+2)^2}$$

$$S_n = f(1) + f(2) - f(n+1) - f(n+2)$$

$$S_n = \frac{1}{72} + \frac{1}{512} - \frac{\frac{1}{8}}{(n+1)^2.(n+3)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{(n+2)^2.(n+4)^2}$$

$n \to \infty$ ஆக $S_n = \frac{1}{72} + \frac{1}{512} - 0 - 0.$

$= \frac{73}{4608}$, ஒருங்கு தொடராகும்.

உதாரணம் 5

$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)(r+3)}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)(r+3)}$ ஒருங்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$U_r = \frac{1}{r(r+2)(r+3)} = \frac{r+1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$= \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$= \left\{\frac{-1}{2(r+2)(r+3)} - \frac{-1}{2(r+1)(r+2)}\right\}$$

$$+ \left\{\frac{-1}{3(r+1)(r+2)(r+3)} - \frac{-1}{3r(r+1)(r+2)}\right\}$$

$$= \left\{\frac{-1}{2(r+2)(r+3)} + \frac{-1}{3(r+1)(r+2)(r+3)}\right\}$$

$$- \left\{\frac{-1}{2(r+1)(r+2)} + \frac{-1}{3r(r+1)(r+2)}\right\}$$

$\therefore \quad U_r = f(r) - f(r-1).$

இங்கு $\quad f(r) = \dfrac{-1}{2(r+2)(r+3)} + \dfrac{-1}{3(r+1)(r+2)(r+3)}$

$$S_n = f(n) - f(0)$$

$$= \frac{-1}{2(n+2)(n+3)} + \frac{-1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$+ \frac{1}{12} + \frac{1}{18}$$

$n \to \infty$ ஆக $\quad S_n = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{5}{36}$, தொடர் ஒருங்கும்.

உதாரணம் 6

$2 \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}2r\theta = \operatorname{Sin}(2r+1)\theta - \operatorname{Sin}(2r-1)\theta$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $\quad \operatorname{Sin}\theta \sum_{r=1}^{n} \operatorname{Cos} 2r\theta = \operatorname{Sin}(n\theta) \operatorname{Cos}(n+1)\theta$ எனக்காட்டுக.

மேலும் $\quad \sum_{r=1}^{100} \operatorname{Cos}^2 \left(\frac{r\pi}{100}\right) = 50$ எனவும் காட்டுக.

தீர்வு:

$2 \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}2r\theta = \operatorname{Sin}(2r+1)\theta - \operatorname{Sin}(2r-1)\theta.$

$f(r) = \operatorname{Sin}(2r+1)\theta$ என்க

$f(r) = \operatorname{Sin}(2r-1)\theta$ ஆகும்.

$f(r) - f(r-1) = 2 \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}2r\theta$

$\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}2\theta + \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}4\theta + \text{- - - - - -} + \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}2n\theta + \text{- - - - - - -}$ என்ற

தொடரின் $\quad U_r = \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}2r\theta$ ஆகும்.

$$2\sum_{r=1}^{n} U_r = f(n) - f(0).$$

$$2\sum_{r=1}^{n} \text{Cos } 2r\theta \text{ Sin } \theta = \text{Sin } (2n+1)\theta - \text{Sin } \theta$$

$$\text{Sin } \theta \sum_{r=1}^{n} \text{Cos } 2r\theta = \text{Sin } (n\theta) \text{ Cos } (n+1)\theta .$$

$$\sum_{r=1}^{100} \text{Cos}^2 \left(\frac{r\pi}{100}\right) = \sum_{r=1}^{100} \frac{1}{2}[1 + \text{Cos}(\frac{\pi r}{50})]s$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{100} 1 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{100} \text{Cos}(\frac{\pi r}{50})$$

$$= 50 + \frac{1}{2} \frac{\text{Cos } (100+1)\frac{\pi}{100} . \text{Sin} \frac{\pi \times 100}{100}}{\text{Sin } \frac{\pi}{100}}$$

$$= 50 \qquad [\because \text{Sin } \pi = 0].$$

உதாரணம் 7

$\text{Cos } 2\theta + \text{Cos } 4\theta + \text{Cos } 6\theta + \text{-------} + \text{Cos } 2r\theta + \text{-------}$

என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

$U_r = \text{Cos } 2r\theta$

$\text{Cos } 2r\theta \text{ Sin } \theta = \text{Sin } (2r+1)\theta - \text{Sin } (2r-1)\theta$

$$\text{Cos } 2r\theta = \frac{\text{Sin } (2r+1)\theta}{\text{Sin}\theta} - \frac{\text{Sin } (2r-1)\theta}{\text{Sin}\theta}$$

$$f(r) = \frac{\text{Sin } (2r+1)\theta}{\text{Sin}\theta}$$

$$f(r-1) = \frac{\text{Sin } (2r-1)\theta}{\text{Sin}\theta}$$

$$\therefore \quad U_r = f(r) - f(r-1)$$

$$S_n = f(n) - f(0)$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{\operatorname{Sin}(2n+1)\theta}{\operatorname{Sin}\theta} - 1.$$

உதாரணம் 8

$\operatorname{Sin} 2\theta + \operatorname{Sin} 4\theta + \operatorname{Sin} 6\theta + \text{------} + \operatorname{Sin} 2r\theta + \text{------------}$

என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

$$U_r = \operatorname{Sin} 2r\theta$$

$$\operatorname{Sin} 2r\theta \operatorname{Sin}\theta = \operatorname{Cos}(2r-1)\theta - \operatorname{Cos}(2r+1)\theta$$

$$f(r) = \frac{\operatorname{Cos}(2r-1)\theta}{\operatorname{Sin}\theta}$$ என்க.

$$f(r+1) = \frac{\operatorname{Cos}(2r+1)\theta}{\operatorname{Sin}\theta}$$ ஆகும்.

$$\therefore \quad U_r = f(r) - f(r+1)$$ ஆகும்.

$$S_n = f(1) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{\operatorname{Cos}\theta}{\operatorname{Sin}\theta} - \frac{\operatorname{Cos}(2n+1)\theta}{\operatorname{Sin}\theta}$$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.b

1. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \text{-----} + \frac{(2n+1)}{n^2\,(n+1)^2} + \text{-------}$ என்ற தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக. $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

   $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ எனக்காட்டுக.

   இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா?

2. $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$ எனக்காட்டுக.

   $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ ஐக் காண்க.

   இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{2n} [r(r+2)]^{(-1)^r}$ ஐ உய்த்தறிக.

3. ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $\frac{1}{r\,(r+1)}$ ஆகும். S_n ஐக் காண்க.

   இம்முடிவை உபயோகித்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஐக் காண்க.

4. முடிவில் தொடர் ஒன்றின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = \dfrac{2(r+4)}{r(r+1)(r+2)}$,

$U_r = [f(r) - f(r+1)]A$ ஆகுமாறு மாறிலி A ஐயும் சார்பு f(r) ஐயும் காண்க. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க. ஒருங்கு தொடர் எனக்காட்டி, முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

5. $\dfrac{1}{1+(x+1)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} \equiv -\dfrac{(1+2x)}{1+(1+x+x^2)^2}$ ஆகும்.

$x \geq 0$ ஆக $\tan^{-1}(x+1) - \tan^{-1}(x) \equiv \cot^{-1}(1+x+x^2)$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $S_n = \sum_{r=1}^{n} \dfrac{1+2r}{1+(1+r+r^2)^2}$ ஐக் காண்க. $T_n = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{Cot}^{-1}(1+r+r^2)$ ஐக் காண்க. $n \to \infty$ ஆக S_n, T_n ஐக் காண்க.

6. 1.4.6 + 2.5.7 + 3.6.8 + - - - - - - - - என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா?.

*7. (i) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1+2}{1.2} + \dfrac{1+2+3}{1.2.3} + \dfrac{1+2+3+4}{1.2.3.4} + \text{--------}$ இன் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $\dfrac{3}{1.2} - \dfrac{5}{2.3} + \dfrac{7}{3.4} - \text{----------} + (-)^{n-1}\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)}$ என்ற தொடரின் U_r ஐ $f(r) - f(r-1)$ இல் எழுதி

$S_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)}$ எனக்காட்டுக.

8. $n^3 \equiv \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{8}(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{8}(n-\frac{1}{2})$

$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \equiv n^3$ எனும் சர்வசமன்பாடுகளை பிரயோகித்து $\sum_{r=1}^{n} r^3$, $\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. $\frac{1+2+3}{1.2.3} + \frac{2+3+4}{2.3.4} + \frac{3+4+5}{3.4.5} + ----------$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. U_r ஐ $f(r) - f(r-1)$ இல் தருக. இதிலிருந்து S_n ஐத் தருக. இத்தொடர் விரிதொடரா? அல்லது ஒருங்கு தொடரா?.

10. (i) $\frac{1}{1.3} + \frac{2}{1.3.5} + \frac{3}{1.3.5.7} + ----------$ என்ற தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து Sn ஐக் காண்க.

(ii) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ------------$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $(-1)^{n-1} \frac{n}{2}(n+1)$ எனக்காட்டுக.

11. $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + ---------- + n^k$ ஆயின்

$$S_1 + S_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ எனவும்

$$S_3 + 3S_2 + 2S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$ எனவும் நிறுவுக.

இதிலிருந்து S_3 ஐக் காண்க.

12. $\dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஐ $f(r) - f(r+1)$ வடிவில் தருக. இதிலிருந்து பின்வரும் உறுப்புகளை $r^{ம்}$ உறுப்புகளாகக் கொண்ட முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(i) $\dfrac{1}{r(r+1)(r+2)}$ (ii) $\dfrac{2r+3}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$

13. (i) $2.3.4 + 3.5.7 + 4.7.10 + \cdots\cdots$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. இதிலிருந்து S_n ஐக் காண்க.

(ii) $2.4 + 4.7 + 6.10 + \cdots\cdots$ என்ற தொடரின் S_n யாது?.

14. ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = \dfrac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ ஆகும்.

$f(r) = \dfrac{\lambda r+\mu}{(r+1)(r+2)}$ எனின் $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக

ஒருமைகள் λ, μ ஐக்காண்க. $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐப் பெறுமானம் காண்க.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ எனும் தொடர் ஒருங்குமெனக்காட்டி பெறுமானத்தைக் காண்க.

15. $\dfrac{3}{1.2.4} + \dfrac{4}{2.3.5} + \dfrac{5}{3.4.6} + \cdots\cdots$ என்ற தொடரின் U_r ஐ எழுதுக. $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆதமாறு $f(r)$ ஐக் கண்டு $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்குமா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

16.✳ ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஆனது $U_r = \dfrac{r^4 + r^2 + 1}{r^4 + r}$ ஆகும்.

S_n ஐக் காண்க.

17. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $\dfrac{1}{1.2.3 + 2.3.4 + \cdots\cdots + r.(r+1).(r+2)}$

ஐ $r^{ம்}$ உறுப்பாக உடைய தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின்

கூட்டுத்தொகை $\dfrac{2}{9} - \dfrac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$ எனக்காட்டுக.

18. $\dfrac{2}{1.3}\left(\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{3}{3.5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{4}{5.7}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \cdots\cdots$ என்ற தொடரின்

உறுப்பு U_r எழுதுக. U_r ஐ $f(r-1) - f(r)$ வடிவில் எடுத்துரைக்க.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\frac{(\frac{1}{3})^n}{(2n+1)}$ எனக்காட்டுக. இத் தொடர் ஒருங்குமா?

காரணம் தருக.

19. $\dfrac{3}{1^2.2^2} + \dfrac{5}{2^2.3^2} + \dfrac{7}{3^2.4^2} + \cdots\cdots$ என்ற தொடரின்

உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக. $U_r = f(r) - f(r+1)$ ஆகுமாறு $f(r)$ ஐ

எழுதுக. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ எனக்காட்டுக.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ உண்டு என உய்த்தறிக.

20.✳ ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = \dfrac{2r+3}{(2r+1)^2(2r+3)^2(2r+5)^2}$ ஆகும்.

$U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக $f(r)$ ஐக் காண்க. $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா? காரணம் தருக.

21.✳ $\text{Sin}2A \ \text{Cosec}(r+1)A \ \text{Cosec}\ (r-1)A = \text{Cot}(r-1)A - \text{Cot}(r+1)A$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

Cosec A Cosec 3A + Cosec 3A Cosec 5A + Cosec 5A Cosec 7A + - - - - - - - - - - - + Cosec (2n-1)A Cosec (2n+1)A எனும் தொடரின் கூட்டுத்தொகை

[Cot A + Cot 2A – Cot 2nA – Cot (2n+1)A]Cosec 2A எனக்காட்டுக.

22. $\text{Tan}\,\theta \ \text{Sec}\,2\theta = \text{Tan}\,2\theta - \text{Tan}\,\theta$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

$\text{Tan}\dfrac{\theta}{2}\ \text{Sec}\,\theta + \text{Tan}\dfrac{\theta}{4}\ \text{Sec}\dfrac{\theta}{2} + \text{Tan}\dfrac{\theta}{8}\ \text{Sec}\dfrac{\theta}{4} + \text{----}$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

23. $\tan^{-1}(r+1) - \tan^{-1}(r) = \cot^{-1}(1+r+r^2)$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து

$\text{Cot}^{-1}(3) + \text{Cot}^{-1}(7) + \text{Cot}^{-1}(13) + \text{- - - - - - -} + \text{Cot}^{-1}(1+n+n^2)$ இன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

24. $\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து

$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2} + \tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2} + \tan^{-1}\frac{1}{1+3+3^2} + ---$ என்ற

தொடரை முதல் n உறுப்புக்கள் வரை கூட்டுக.

25 $\tan(n+1)\theta - \tan n\theta = \tan\theta\,[1 + \tan n\theta \ \tan(n+1)\theta]$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \tan r\theta \tan(r+1)\theta$ இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

26. (i) $\text{Cos}\,\theta\ \text{Sin}\,2\theta + \text{Cos}\,2\theta\ \text{Sin}\,3\theta + \text{Cos}\,3\theta\ \text{Sin}\,4\theta + ----$ என்ற

தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $\text{Cos}^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}\,2\theta)$ ஐப் பயன்படுத்தி

$\text{Cos}^2\theta + \text{Cos}^2 2\theta + \text{Cos}^2 3\theta + ------$ என்ற தொடரின் n

உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

3.3 தொடரின் கூட்டுத்தொகை காண்பதற்கான விசேடமுறைகள்.

3.3.1 கணிதத் தொகுத்தறிவு முறை மூலம் தொடரின் கூட்டுத்தொகை காணல்.

கணிதத் தொகுத்தறிவு முறை
(Mathematical Induction Method)

கணித தொகுத்தறிவு முறை நேர்நிறை எண்களுக்கு நிறுவும் போது பயன்படுத்தப்படும். $n = 1$ ஆக முடிபு உண்மை என நிறுவுதல் வேண்டும். p ஆனது நேர்நிறைவெண்ணாக இருக்க $n = p$ இற்கு முடிபு உண்மை என எடுத்துக்கொண்டு $n = p + 1$ இற்கு உண்மை என நிறுவுதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 1

n ஒரு நேர்நிறையெண்ணாக $3^{2n+2} - 8n - 9$, ஆனது 64 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$ என்க.

$n = 1$ ஆக $f(1) = 3^4 - 8 - 9 = 64.$

$\therefore f(1)$ ஐ 64 பிரிக்கும்.

$\therefore n = 1$ இற்கு முடிபு உண்மை.

$n = p$ ஆக முடிபு உண்மை என்போம்

$f(p) = 64k,$ இங்கு k ஒரு முழுவெண்

$n = p+1$ ஆக

$f(p+1) = 3^{2p+4} - 8(p+1) - 9$

$= 3^2 . 3^{2p+2} - 8p - 17$

$= 9(3^{2p+2} - 8p - 9) + 64(p+1)$

$= 9f(p) + 64(p+1)$

ஆனால் 64 ஆனது $f(p)$ ஐ பிரிக்கும்.

64 ஆனது $64(p+1)$ ஐ பிரிக்கும்.

$\therefore$ 64 ஆனது $f(p+1)$ ஐ பிரிக்கும்.

$n = p$ ஆகும் போது முடிவு உண்மை எனின் $n = p+1$ ஆக முடிவு உண்மையாகும். $n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை. எனவே கணித தொகுத்தறிவு கோட்பாட்டினால் n இன் எல்லா நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கட்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

உதாரணம் 2

$U_1, U_2, \text{--------} U_n$ ஒரு தொடரியாகும்.

$U_1 = 1, \quad U_{r+1} = \dfrac{2U_r - 1}{3}$ ஆகும்.

கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையால் $U_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$

எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$n = 1$ ஆக $U_1 = 3(2/3)^1 - 1$

$= 2 - 1$

$= 1$

$\therefore n = 1$ இற்கு முடிபு உண்மை ஆகும்.

$n = p$ ஆக முடிபு உண்மை என்போம்

$\therefore U_p = 3(2/3)^p - 1$

$n = p+1$ ஆக $U_{p+1} = \dfrac{2U_p - 1}{3}$ ஆகும்.

$$= \frac{2[3(2/3)^p - 1] - 1}{3}$$

$$= 3(2/3)^{p+1} - 1$$

$\therefore$ $n = p + 1$ ஆக முடிவு உண்மையாகும். $n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின் $n = p + 1$ ஆக முடிவு உண்மையாகும். $n = 1$ ஆக முடிவு உண்மை. எனவே கணித தொகுத்தறிவு கோட்பாட்டினால் n இன் எல்லா நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கட்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

உதாரணம் 3

$$\frac{12}{1.3.4} + \frac{18}{2.4.5} + \frac{24}{3.5.6} + \text{---------} + \frac{6(n+1)}{n(n+2)(n+3)}$$

$= \dfrac{17}{6} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{4}{n+3}$ என n இன் எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானங்கட்கும் கணித தொகுத்தறிவு முறையால் காட்டுக.

தீர்வு:

$n = p$ ஆக முடிவு உண்மை என்போம்

$\displaystyle\sum_{r=1}^{p} \frac{6(r+1)}{r(r+2)(r+3)} = \frac{17}{6} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \frac{4}{p+3}$ என்போம்.

$n = p+1$ ஆக

$$\text{L.H.S} = \sum_{r=1}^{p+1} \frac{6(r+1)}{r(r+2)(r+3)}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} \frac{6(r+1)}{r(r+2)(r+3)} + \frac{6(p+2)}{(p+1)(p+3)(p+4)}$$

$$= \frac{17}{6} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \frac{4}{p+3} + \left[\frac{1}{p+1} + \frac{3}{p+3} + \frac{-4}{p+4}\right]$$

$$= \frac{17}{6} - \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} - \frac{4}{p+4}$$

$$= \text{R.H.S.}$$

$n = 1$ ஆக $\quad \text{L.H.S} = \frac{12}{1.3.4} = 1.$

$$\text{R.H.S} = \frac{17}{6} - \frac{5}{6} - 1 = 1.$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S.}$$

$n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின் $n = p + 1$ ஆக முடிவு உண்மையாகும். $n = 1$ ஆக முடிவு உண்மை. எனவே கணித தொகுத்தறிவு கோட்பாட்டினால் n இன் எல்லா நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கட்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

3.3.2 பகுதிப்பின்ன முறை மூலம் கூட்டுத்தொகை காணல்

உதாரணம் 1

ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $\quad U_r = \frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$ ஆகும்.

$U_r = \frac{A}{r+2} + \frac{B}{r+3} + \frac{C}{r+4}$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் A, B, C ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்கும் என உய்த்தறிந்து முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)} = \frac{A}{r+2} + \frac{B}{r+3} + \frac{C}{r+4}$$

$$\frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)} = \frac{-3/2}{r+2} + \frac{5}{r+3} + \frac{-7/2}{r+4}$$

$$r=1, \quad \frac{3}{3.4.5} = \frac{-3/2}{3} + \frac{5}{4} + \cancel{\frac{-7/2}{5}}$$

$$r=2, \quad \frac{5}{4.5.6} = \frac{-3/2}{4} + \cancel{\frac{5}{5}} + \cancel{\frac{-7/2}{6}}$$

$$r=3, \quad \frac{7}{5.6.7} = \cancel{\frac{-3/2}{5}} + \cancel{\frac{5}{6}} + \cancel{\frac{-7/2}{7}}$$

$$r=n-1, \quad \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \cancel{\frac{-3/2}{n+1}} + \cancel{\frac{5}{n+2}} + \frac{-7/2}{n+3}$$

$$r=n, \quad \frac{2n+1}{(n+2)(n+3)(n+4)} = \cancel{\frac{-3/2}{n+2}} + \frac{5}{n+3} + \frac{-7/2}{n+4}$$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{3}{8} - \frac{7}{2(n+3)} + \frac{5}{n+3} - \frac{7}{2(n+4)}$$

$$\underset{n\to\infty}{Lt} S_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{3}{8}$$

$= \frac{3}{8}$, தொடர் ஒருங்கும். $S_\infty = \frac{3}{8}$

குறிப்பு: மாறிலிகள் $A+B+C=0$ ஆயின் மட்டும் இம்முறை பொருத்தமானது.

உதாரணம்

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ எனும் தொடர் விரிதொடர் எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

$$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + --- + \frac{1}{16}) + ---$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ------------$$

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rightarrow \infty$ ஆகும்.

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ விரிதொடராகும்.

பிரபல்யமான தொடர்கள் (Popular Series)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \text{-------} + \frac{x^r}{r!} + \text{-------} \quad \forall x$$

$$\text{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{---} + (-1)^r \frac{x^{2r}}{2r!} + \text{---} \quad \forall x$$

$$\text{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{---} + (-1)^{r-1} \frac{x^{2r-1}}{2r-1!} + \text{----} \quad \forall x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{---} + (-1)^{r-1} \frac{x^r}{r} + \text{------}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{---} + (-1)^{r-1} \frac{x^{2r-1}}{2r-1} + \text{------}, \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \text{-----} + (-1)^r x^r + \text{---}, \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \text{-----------}, \quad -1 < x < 1$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{--------} + x^r + \text{-----}, \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \text{--------} \frac{x^r}{r} - \text{-------}, \quad -1 \leq x < 1$$

பயிற்சி 3.c

1. கணித தொகுத்தறிவு முறையால் யாதுமொரு நேர்நிறையெண் n இற்கு

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{-------------} - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \text{---------------} + \frac{1}{2n}$$

எனக்காட்டுக.

2. கணித தொகுத்தறிவு முறையால் நேர்நிறையெண் n இற்கு $1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 + 3.4.5.6.7 + \text{-------}$ என்ற தொடரின் S_n ஆனது $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$ எனக்காட்டுக.

3. ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஆகும்.

கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும்

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$$ எனக்காட்டுக.

4. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும்

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)^2(r+2) = \frac{n}{10}(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

எனக்காட்டுக.

5. யாதுமொரு நேர்நிறையெண் n இற்கும் கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால்

$$U_n = 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + --- + n.1 = {}^{n}/_{6}(n+1)(n+2)$$

எனக்காட்டுக.

6. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் n இன் எல்லா நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கட்கும்

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ------ (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\,{}^{n}/_{2}(n+1)$$

எனக்காட்டுக.

7. $f(r) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ---------------- + \frac{1}{r}$ எனின்

கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கு

$$\sum_{r=1}^{n}(2r+1)f(r) = (n+1)^2 f(n) - \frac{n(n+1)}{2}$$ எனக்காட்டுக.

8. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் யாதுமொரு நேர்நிறையெண் n இற்கு $1 . 1! + 2 . 2! + 3 . 3! + ---- + n . n! = (n+1)! - 1$ எனக்காட்டுக.

9. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$,

$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ என எல்லா நேர்முழுவெண் பெறுமானங்கட்கும் நிறுவுக.

$\sum_{r=1}^{51}(98+2r)^2 = 1191700$ என உய்த்தறிக.

10. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும்

(i) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ ஆனது 7 ஆல் பிரிபடும் எனவும்

(ii) $n^3 - n$ ஆனது 6 ஆல் பிரிபடும் எனவும்

(iii) $9^n - 1$ ஆனது 8 ஆல் பிரிபடும் எனவும்

காட்டுக.

11. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

(i) $7^{2n} - 5 . 7^n - 2$ என்பது 6 ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டுக.

(ii) $f(r) = \ln(1 + 1/r)$ எனின் $f(1) + f(2) + ----- + f(n) = f(1/n)$

எனக்காட்டுக.

12. எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும் கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால்

(i) $\sum_{r=2}^{n}(r-1)\,r\,(r+2) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+10)}{12}$ எனவும்

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r\,2^{r-1} = 1 + (n-1)2^n$ எனவும்

(iii) $2 . 1! + 5 . 2! + 10 . 3! + ---- + (n^2+1) . n! = n . (n+1)!$

எனவும் காட்டுக.

13. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும்

(i) $1^5 + 2^5 + 3^5 + ------ + n^5 = n^2/12\,(n+1)^2\,(2n^2 + 2n - 1)$

எனக்காட்டுக.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$ எனக்காட்டுக.

14. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

(i) $$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

என நிறுவுக.

(ii) $$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ எனக்காட்டுக.

15. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

(i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = {}^{n}\!/_{3}\,(2n-1)(2n+1)$

(ii) $$\sum_{r=1}^{n} (2r+1)(r-2) = \frac{n}{6}(4n^2 - 3n - 19)$$

எனக்காட்டுக.

16. எல்லா நேர்முழுவெண் n இற்கும் கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால்

$$\sum_{r=1}^{n} ap^r = \frac{a(1-p^n)}{1-p}$$ எனக்காட்டுக.

17. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

(i) $$1.2.3 + 2.3.5 + 3.4.7 + \cdots + n.(n+1).(2n+1) = \frac{n}{2}(n+1)^2(n+2)$$

எனக்காட்டுக.

(ii) $$\sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \frac{n}{3}(n+1)(n+5)$$ எனக்காட்டுக.

18.✳ கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கும்

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \text{-----} + \frac{1.3.5\text{-----}.(2n+1)}{2.4.6\text{-----}.(2n)}$$

$$= \frac{1.3.5\text{-----}.(2n+1)}{2.4.6\text{-----}.(2n)} - 1$$

எனக்காட்டுக.

19. ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ஆகும்.

$U_r = \dfrac{A}{(r+1)} + \dfrac{B}{(r+2)} + \dfrac{C}{(r+3)}$ ஆகுமாறு ஒருமைகள்

A, B, C ஐக் காண்க. இதிலிருந்து

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$$ எனக்காட்டுக.

இத்தொடர் ஒருங்குமெனக்காட்டி முடிவிலி வரைக்கும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

20. $\dfrac{3r+1}{(r-1)r(r+1)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக்குக. இதிலிருந்து

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{3r+1}{(r-1)r(r+1)} = \frac{5}{2} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$$ எனக்காட்டுக.

இத்தொடர் ஒருங்குமெனக்காட்டி, முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

21. ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு $U_r = \dfrac{4r}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ஆகும். பகுதிப்பின்னங்களாக்குவதன் மூலம் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐ மேலேயுள்ள தொடருக்கு $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4n+3}{2(2n+1)(2n+3)}$ எனக்காட்டுக. இத்தொடர் ஒருங்குமெனக்காட்டி முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

22. பின்வரும் தொடர்களின் r ஆவது உறுப்பை எழுதி அதை பகுதிப்பின்னமாக்குவதன் மூலம் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐக் கண்டு, அத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா? விரிதொடரா? எனத்தீர்மானிக்க.

(i) $\dfrac{1}{2.3.5} + \dfrac{2}{3.4.6} + \dfrac{3}{4.5.7} + \dfrac{4}{5.6.8} + \text{------}$

(ii) $\dfrac{1}{4.8} + \dfrac{1}{6.10} + \dfrac{1}{8.12} + \dfrac{1}{10.14} + \text{----------}$

(iii) $\dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{4.12} + \dfrac{1}{5.21} + \dfrac{1}{6.32} + \text{----------}$

பலவினப் பயிற்சிகள் 3.d

1. $\frac{1}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{3}{4.5.6} + \text{-----------------}$ என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S ஆகும். முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஆகும். $|S_n - S| < 10^{-2}$ ஆகுமாறு n இன் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. $\frac{x^2+11x+5}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$ ஆகுமாறு A, B, C, D ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{r^2+11r+5}{r^2(r+1)^2}$$ ஐக் காண்க. இத் தொடரின் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

3.✳ $\frac{3}{4} + \frac{3.7}{4.8} + \frac{3.7.11}{4.8.12} + \text{-----------------------}$ என்ற தொடரின் முதல் n எண்ணிக்கையான உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

4. $f(r) = Ar^5 + Br^3 + Cr$ ஆகவும் $f(r) - f(r-1) = (2r-1)^4$ ஆகவும் இருப்பின் A, B, C ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து $1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + \text{----------------}$ என்ற தொடரின் முதல் n எண்ணிக்கையான உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

5. $n(n + 1) \equiv (n - 1)(n - 2) + 4(n - 1) + 2$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $n \geq 3$ ஆக $\dfrac{n(n+1)}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-3)!} + \dfrac{4}{(n-2)!} + \dfrac{2}{(n-1)!}$

எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $1.2 + \dfrac{2.3}{1!} + \dfrac{3.4}{2!} + ---- + \dfrac{n(n+1)}{(n-1)!} + ----$

என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை யாது?

6.✳ $\dfrac{3}{2!} + \dfrac{7}{3!} + ----- + \dfrac{n^2 - n + 1}{n!} + -----$ என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

7.✳ $3 + \dfrac{5}{2!} + \dfrac{7}{3!} + ----- + \dfrac{2n+1}{n!} + -----$ என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

8.✳ ஒரு தொடரியின் n ஆவது உறுப்பு U_n எனின்

$U_n = \dfrac{An^2 + Bn + C}{n!}$ ஆகும்.

$U_1 = 4$, $U_2 = 13$, $U_3 = 26$, $U_4 = 43$ ஆயின் A, B, C இன் பெறுமானங்கள் யாவை?

$\dfrac{4}{1!} + \dfrac{13}{2!} + \dfrac{26}{3!} + \dfrac{43}{4!} ----- + \dfrac{An^2 + Bn + C}{n!} + -----$ என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை யாது?.

9. பின்வரும் முடிவிலித் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு U_r ஆனது

$$U_r = \frac{2^{2r+1}}{2r!} - \frac{2^{2r+2}}{(2r+1)!}$$ எனும் வடிவில் எழுதலாம் எனக்காட்டுக.

$$\frac{1.2^3}{3!} + \frac{3.2^5}{5!} + \text{-----} + \frac{(2r-1)2^{r+1}}{(2r+1)!} + \text{-----}$$ முடிவிலி

உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

10.✳ ஒரு தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஆனது $U_r = \frac{(-1)^{r+1}(2r+1)}{r(r+1)}$

ஆகும். பகுதிப்பின்னமாக்குவதன் மூலம் $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக்

காண்க. $S_n S_{n+1} = 1$ எனக்காட்டுக. இங்கு n ஒற்றை எண்.

11. கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நேர்நிறையெண் n இற்கு

(i) $1.(2n-1) + 2.(2n-3) + --- + n[2n - (2n-1)] = (n+1)(2n+1)/6$

எனக்காட்டுக.

(ii) $3 \, . \, 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ஆனது 17 இனால் வகுபடும்

எனக்காட்டுக.

12. எல்லா $n \geq 1$ இற்கும் $S_1 > \sqrt{3}$; $S_{n+1} = \frac{3(1+S_n)}{3+S_n}$ என

அமையும் வண்ணம் $S_1, S_2, \text{--------}, S_n$ என்பது நேர்

எண்களின் தொடரி ஆகும். $S_{n+1}^2 - 3$ என்பதை S_n இல் தருக.

கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையால் எல்லா நிறையெண் n இற்கும்

$S_n > \sqrt{3}$ எனக்காட்டுக. மேலும் $S_{n+1} < S_n$ என உய்த்தறிக.

13. $\tan(x/2) = \cot(x/2) - 2\cot x \quad (0 < x < \pi)$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x$ எனக்காட்டுக.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x$ என்பதை உய்த்தறிக.

14. அடுத்து வரும் நான்கு நிறையெண்களின் பெருக்கம் 24 ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டுக.

$n \geq 2$ எனின் கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையைப் பயன்படுத்தி $n^5 - 5n^3 + 60n^2 - 56n$ ஆனது 120 ஆல் வகுபடும் எனக்காட்டுக.

15. $\frac{3}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{2.3}\left(\frac{1}{2^2}\right) + \frac{5}{3.4}\left(\frac{1}{2^3}\right) + \text{---------------}$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n எனின் கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டினால் எல்லா நேர்முழு எண் n இற்கும் $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)\,2^n}$ எனக்காட்டுக.

16. $\frac{1}{3!}, \frac{5}{4!}, \frac{11}{5!}, \frac{19}{6!}, \text{------------}$ என்னும் தொடரியின் n ஆவது உறுப்பு $U_n = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n+1)!} + \frac{C}{(n+2)!}$ எனும் தொடர்பை திருப்த்தி செய்கிறது. n = 1, 2, 3 எனப்பிரதியிட்டு A, B, C ஐக் காண்க. n = 4 இற்கு வாய்ப்புப்பார்க்க இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)}{(n+2)!}$ எனக்காட்டுக. $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குமா? காரணம் தருக.

17. கணிதத்தொகுத்தறிவு கோட்பாட்டைப்பயன்படுத்தி n இன் எல்லா நேர்முழு எண் பெறுமானங்கட்கும்

(i) $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்பது 54 இன் மடங்காகும் எனக்காட்டுக.

(ii) $2^{2n+1} - 6n - 2$ ஆனது 18 ஆல் வகுபடும் எனக்காடுக.

18.✳ எந்த ஒரு மறையில்லா நிறையெண் n இற்கும் $n^7 - n$ ஆனது 7 இனால் வகுபடும் என கணிதத்தொகுத்தறிவை பயன்படுத்திக் காண்க. மறையான நிறையெண்களுக்கு இம்முடிபை உய்த்தறிக. எந்த ஒற்றை நிறையெண் $n^7 - n$ என்பது 168 ஆல் வகுபடும் என உய்த்தறிக.

19. (i) n நேர் நிறையெண் ஆயின் $4.6^n + 5^{n+1}$ ஆனது 20 இனால் வகுபடும் போது மீதி 9 ஆகுமென கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால் காட்டுக.

(ii) n நேர் நிறையெண்ணாக கணிதத்தொகுத்திறிவு முறையால் $2^{2n+2} + 3^{2n}$ ஆனது 120 ஆல் வகுபட மீதி 25 ஆகும் எனக்காட்டுக.

20. 6 + 66 + 666 + 6666 + - - - - - - - - - என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

21. $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ என எடுத்து

(i) $\sum_{r=1}^{2n} r^2$ ஐக் காண்க.

(ii) முதல் n எண்ணிக்கையான இரட்டை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணக.

(iii) இதிலிருந்து $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

22.✳ $1 + 3(\frac{1}{2}) + 5(\frac{1}{2})^2 + ---------- + (2n-1)(\frac{1}{2})^{n-1}$ என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகை $6 - R_n$ எனக்காட்டுக.

இங்கு $R_n = \dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$ ஆகும். $n \geq 4$ எனின்

$\dfrac{R_{n+1}}{R_n} \leq \dfrac{13}{22}$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $n \geq 4$ எனின்

$R_n \leq \dfrac{11}{8}\left(\dfrac{13}{22}\right)^{n-4}$ எனக்காட்டுக.

23. (i) $\sum_{r=0}^{\infty}(x^2 - 2x - 2)^r$ எனும் தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இன் வீச்சங்களைக் காண்க.

(ii) $U_r = (2r-1)3^r$ எனின் $\sum_{r=1}^{n} u_r$ ஐக் காண்க.

24. $f(r) = Ar^4 + Br^3 + Cr^2 + Dr$ எனக்கொண்டு

$f(r) - f(r-1) \equiv r^3$ ஆகுமாறு A, B, C, D எனும் ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ---- + n^3 = n^2(n+1)^2/4$ எனக்காட்டுக.

$1.2.3 + 3.4.5 + 5.6.7 + ------ + (2n-1)\,2n\,(2n+1)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

25. $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \dfrac{1}{3.4.5} + ------$ என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S ஐக் காண்க. இத்தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்கும் S இற்கும் இடையேயான வித்தியாசம் 10^{-3} இலும் குறைவாக இருக்குமெனக்காட்டுக.

26. ஒரு தொடரின் r ஆவது உறுப்பு U_r ஆகும்.

(i) $U_r = \dfrac{1}{2r(2r+2)}$

(ii) $U_r = \dfrac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ ஆன இரு தொடர்களினதும் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

27. ஒரு பொருத்தமான λ இற்கு $f(r) = \dfrac{\lambda(4r+1)}{r(r+1)}$ என எடுத்து

$\sum_{r=1}^{n} \dfrac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ ஐக் காண்க.

28. $\sum_{r=1}^{n} r(3r+5)$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் விரிதொடர் எனக்காட்டுக.

29. $U_r = \dfrac{r+4}{r(r+1)(r+2)}$ எனின் $U_r = 2V_r - V_{r+1}$ ஆகுமாறு ஒருமை k ஐக் காண்க. இங்கு $V_r = \dfrac{k}{r(r+1)}$ ஆகும் இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \dfrac{U_r}{2^{r+1}}$ ஐக் காண்க.

30.✳ $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2.5}{3.6} + \dfrac{2.5.8}{3.6.9} + \text{-----------}$ என்ற தொடரின் $r^{ம்}$ உறுப்பு U_r ஐ எழுதுக. U_{r+1} ஐ U_r சார்பில் எடுத்துரைக்க.

$f(r) = (Ar + B)U_{r+1}$ ஆகவும் $U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆகவும் இருக்குமாறு மாறிலிகள் A, B ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} U_r$ ஐக் காண்க.

31.✳ $\frac{r^3}{(r-1)!} = \frac{A}{(r-4)!} + \frac{B}{(r-3)!} + \frac{C}{(r-2)!} + \frac{D}{(r-1)!}$ ஆகுமாறு A, B, C, D என்னும் ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து

$1^3 + 2^3 + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots$ என்ற தொடரின் முடிவிலி உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $15\,e$ எனக்காட்டுக.

32.✳ ஒரு தொடரி $x_1 = 0, x_2 = 1,\ n \in \mathbf{N}$ இற்கு

$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ இனால் தரப்படுகின்றது.

$n \in \mathbf{N}$ இற்கு $x_{n+2} - x_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$ எனக்காட்டுக.

அதோடு $n \in \mathbf{N}$ இற்கு $x_{n+1} - x_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$ என கணிதத்தொகுத்தறிவின் மூலம் காட்டி x_{n+1} ஆனது பெருக்கல் தொடர் ஒன்றின் n உறுப்புக்களுக்கான கூட்டுத்தொகையாக எழுதப்படலாம் என உய்த்தறிக.

33 $2\operatorname{cosec}2\theta \cot 2\theta + 4\operatorname{cosec}4\theta \cot 4\theta + 8\operatorname{cosec}8\theta \cot 8\theta + \cdots$

என்ற தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$\operatorname{cosec}^2\theta - 2^n \operatorname{cosec}^2(2^n\theta)$ எனக் காட்டுக.

34. $\cos\theta \sec\theta + \cos 2\theta \sec^2\theta + \cos 3\theta \sec^3\theta + \cdots + \cos(n\theta)\sec^n\theta$

என்ற தொடரின் கூட்டுத்தொகை $\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta \cos^n\theta} - 1$ எனக்காட்டுக.

35. $\sec\theta \sec 2\theta + \sec 2\theta \sec 3\theta + \cdots\cdots$ என்ற தொடரின் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$2\operatorname{cosec}2\theta \sin(n\theta) \sec(n+1)\theta$ எனக் காட்டுக.

எண்ணும் முறைகள் (Counting Methods)

அறிமுகம்

எண்ணும் விடயங்கள் தொடர்பாக நம் அன்றாட வாழ்வில் பல்வேறு முடிவுகளை எடுக்க வேண்டியவர்களாக உள்ளோம். அப்படியான முடிவுகள் நல்ல திட்டமிடப்பட்ட முறையில், பொருத்தமான எல்லா நிகழ்வுகளையும் நிரைப்படுத்தி எண்ணுவதன் மூலம் அறியப்படலாம். வரிசைமாற்றம், சேர்மானம் எனும் தலைப்புகளின் கீழ் பலவிதமான அடிப்படை முறைகளும் பயிற்சிகளும் இவ்வத்தியாயத்தில் வழங்கப்படுகின்றன.

வரிசைமாற்றம் (Permutation)

a , b , c எனும் 3 எழுத்துக்களை ஒரு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தும் வழிகளைப் பார்ப்போம்.

a b c

a c b

b c a

b a c

c a b

c b a

வேறுவேறான வழிகளின் எண்ணிக்கை 6 ஆகும். இதில் ஒவ்வொரு ஒழுங்கும் ஒரு வரிசை மாற்றம் எனப்படும். எனவே 3 வேறுவேறான எழுத்துக்களைக் கொண்டு செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்கள் 6 ஆகும்.

a , b , c , d எனும் 4 வேறுவேறான எழுத்துகளில் தடவைக்கு 3 ஆக எடுத்து செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்களைப் பார்ப்போம்.

a , b , c யைக் கொண்டு 6 வரிசை மாற்றங்கள்
a , b , d யைக் கொண்டு 6 வரிசை மாற்றங்கள்
a , c , d யைக் கொண்டு 6 வரிசை மாற்றங்கள்
b , c , d யைக் கொண்டு 6 வரிசை மாற்றங்கள்
மொத்தமாக 24 வரிசை மாற்றங்கள் உண்டு.

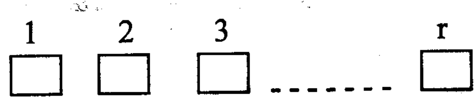
குறியீடு :

n வேறுவேறான பொருள்களில் தடவைக்கு r ஆக எடுத்துச் செய்யப்படும் வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ^nP_r ஆல் குறிக்கப்படும்.

மேலே தரப்பட்ட உதாரணங்களில் இருந்து $^3P_3 = 6$ எனவும் $^4P_3 = 24$ எனவும் காணலாம்.

^nP_r இற்குச் சூத்திரம் காண்போம்.

$a_1 , a_2 , a_3 ,\ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ என்னும் n வேறுவேறான எழுத்துக்களில் தடவைக்கு r ஆக எடுத்து ஒரு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காணவேண்டும்.



படத்தில் உள்ளது போல் r வெறுமையான கூடுகளைக் கருதுக.

முதலாவது கூட்டில் எந்த எழுத்தும் இடம் பெறலாம் அதாவது முதலாவது கூடு n வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். முதலாவது கூடு நிரப்பப்பட்ட பின் இரண்டாவது கூடு $n-1$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். முதல் இரண்டு கூடுகளும் நிரப்பப்பட்ட பின் மூன்றாவது கூடு $n-2$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம். இவ்வாறே இறுதிக்கூடு $n-(r-1)$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

$$\therefore \ {}^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(n-r+1)(n-r)\ldots\ldots\ldots.2\times1}{(n-r)\ldots\ldots\ldots.2\times1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

எல்லா n எழுத்துக்களையும் கொண்டு செய்யக்கூடிய வரிசை மாற்றத் தொகை

$${}^{n}P_{n} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..2\times1$$

$$= n!$$

${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ இல் $r = n$ ஆக

$${}^{n}P_{n} = \frac{n!}{0!}$$

எனவே $0! = 1$ என வரையறுப்போம்.

உதாரணக் கணக்குகள்

1. 4 பிள்ளைகள் ஒரு வரிசையில் நிற்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= 4!$$

2. 5 வேறுவேறான எழுத்துக்களில் தடவைக்கு 3 ஆக எடுத்துச் செய்யப்படும் வரிசை மாற்றத் தொகை

$$= {}^{5}P_{3}$$

$$= \frac{5!}{2!}$$

$$= 60$$

3. ஒரு ஓட்டப் போட்டியில் 6 பேர் பங்குபற்றுகின்றனர். முதல் 3 இடங்களுக்கு பரிசுகள் வழங்கப்படுமாயின் அவை வழங்கப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{6}P_{3}$$

$$= \frac{6!}{3!}$$

$$= 120$$

4. ஒரு விளையாட்டுப் பயிற்சியின் போது 7 பேர் ஒரு வரிசையில் நிற்க வேண்டி உள்ளனர்.

   i) அவர்கள் நிற்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

   விடை = 7 !

   ii) அவர்களில் குறித்த A , B என்னும் இருவர், எப்போதும் A இற்கு அடுத்து B நிற்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

   விடை = 6 !

iii) A , B இருவரும் அருகருகே நிற்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

விடை $= 6! \times 2$

iv) A , B இருவரும் அருகருகே நிற்க மறுத்தால் அவர்கள் நிற்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை என்ன?

$$\text{விடை} = 7! - 6! \times 2$$
$$= 3600$$

5. 1000 , 10000 என்பவற்றுக்கிடையில் வெவ்வேறான இலக்கங்களை உடைய எத்தனை எண்கள் உண்டு?

விடை :

0, 1, 2,................., 9 என்னும் 10 இலக்கங்களில் இருந்து தடவைக்கு 4 இலக்கங்களை எடுத்து ஒரு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்த வேண்டும்.

இவ்வாறு செய்யக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{10}P_4$

இவற்றுள் 0514 போன்ற எண்களும் உண்டு.

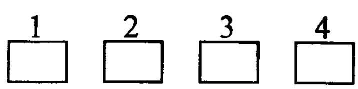
இவை உண்மையில் 3 இலக்க எண்களாகும்.

இவ்வாறான எண்களின் எண்ணிக்கை $= {}^{9}P_3$

$\therefore$ வேண்டிய எண்களின் எண்ணிக்கை $= {}^{10}P_4 - {}^{9}P_3$

$= 4536$

வேறு முறை :



படத்தில் உள்ளது போல் 4 வெறுமையான கூடுகளைக் கருதுக.

1 ஆவது கூடு 9 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம் (0 வராது)

2 ஆவது கூடு 9 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்

3 ஆவது கூடு 8 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்

4 ஆவது கூடு 7 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

$\therefore$ வேண்டிய எண்களின் தொகை $= 9 \times 9 \times 8 \times 7$

$= 4536$

6. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ எனும் இலக்கங்களில் இருந்து

i) 5 இலக்கங்களை உடைய எத்தனை எண்கள் ஆக்கப்படலாம்?
(ஓர் இலக்கத்தை எத்தனை முறையும் பயன்படுத்தலாம்.)

விடை $= 7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$

$= 26872$

ii) 5 வெவ்வேறான இலக்கங்களை உடைய எத்தனை எண்கள் ஆக்கப்படலாம்?

விடை $= 7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

$= 5880$

iii) இவற்றுள் ஒற்றை எண்கள் எத்தனை?

1	2	3	4	5

5வது கூடு 4 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

பின் $1, 2, 3, 4$ ஆவது கூடுகள் முறையே $6, 6, 5, 4$ வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

$\therefore$ வேண்டிய எண்களின் தொகை $= 6 \times 6 \times 5 \times 4 \times 4$

$= 2880$

v) இவற்றுள் இரட்டை எண்கள் எத்தனை?

விடை $= 5880 - 2880$

3000

7. வெவ்வேறான 10 புத்தகங்கள் (4 பச்சை, 4 நீலம், 2 சிவப்பு) தட்டு ஒன்றில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளன. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும், புத்தகங்களைத் தட்டில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) நிறமும் ஒழுங்கும் புறக்கணிக்கப்படும் போது

விடை $= 10!$

(ii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஓரே ஒழுங்கிலும் வைக்கப்படும் போது

விடை :

ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்களை ஒன்றாகக் கட்டுக.
கட்டுக்குள் புத்தகங்களின் ஒழுங்கு மாறாது.
$\therefore$ வேண்டிய எண்ணிக்கை $= 3!$

(iii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்க வைக்கப்படும் போது

விடை :

கட்டுகளுக்குள் புத்தகங்கள் மாறலாம்.
$\therefore$ வேண்டிய எண்ணிக்கை $= 3! \times 4! \times 4! \times 2!$

(iv) பச்சை நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஓரே ஒழுங்கிலும் ஆனால் சிவப்பு நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் பிரித்தும் வைக்கப்படும் போது

விடை :

4 பச்சை நிறமுடைய புத்தகங்களை ஒரு புத்தகமாகக் கருத வேண்டும்.

$\therefore$ மொத்தம் 7 புத்தகங்களில் சிவப்பு நிறப் புத்தகங்கள் எவ்வாறாயினும் இருக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 7!$

2 சிவப்பு நிறப் புத்தகங்களும் அருகருகே இருக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 6! \times 2$

$\therefore$ வேண்டிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 3600$

$= 7! - 6! \times 2$

பயிற்சிகள்

1. ஓர் அலுமாரியில் 5 வெவ்வேறான புத்தகங்களை எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

2. ஒருவருக்கு ஒரு பரிசு மட்டும் கிடைக்கக் கூடியதாக 3 வேறு பரிசுகளை 10 பிள்ளைகளுக்கிடையே எத்தனை வழிகளில் வழங்கலாம்?

3. KOUSIHAN என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?
இவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்களில் O , A என்பன பிரிந்திருக்கும்?

4. ஓர் இலக்கம் ஒரு முறை மட்டும் பயன்படுத்தப்படலாமாயின் 1 , 3 , 5 , 7 , 9 எனும் இலக்கங்களைக் கொண்டு 4000 இலும் பெரிதான எத்தனை எண்கள் ஆக்கப்படலாம்?

5. 0 , 1 , 3 , 4 , 6 , 8 , 9 எனும் இலக்கங்களைக் கொண்டு 5 வெவ்வேறு இலக்கங்கள் உடைய எத்தனை எண்கள் ஆக்கப்படலாம்?
இவற்றுள் இரட்டை எண்கள் எத்தனை?

6. ஓர் அலுமாரியில் வெவ்வேறு வகையான 16 பாடநூல்கள் உள்ளன. இவற்றுள் 2 அட்சர கணித நூல்களும் 3 நுண்கணித நூல்களும் 5 கேத்திர கணித நூல்களும் ஏனையவை திரிகோண கணித நூல்களும் ஆகும்.
   i) இந்நூல்களை எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?
   ii) இவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்குகளில் ஒவ்வொரு பாடத்துறை பற்றிய நூல்கள் ஒருமிக்க இருக்கும்?

7. n பெட்டிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டு 1 தொடக்கம் n வரை இலக்கமிடப்பட்டுள்ளன.

i) குறிக்கப்பட்ட பொருள் A ஆனது பெட்டி 2 இனுள் இருக்குமாறும் ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் ஒரு பொருள் இருக்குமாறும் n வேறுவேறு பொருள்களை ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

விடை : $(n-1)!$

ii) A ஆனது பெட்டி 1 அல்லது 2 இல் இல்லாதவாறும் B ஆனது பெட்டி 2 இல் இல்லாதவாறும் n வேறுவேறு பொருள்களை எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

விடை : $(n-2)^2(n-2)!$

iii) A ஆனது பெட்டி 1 இல் இல்லாதவாறும் B ஆனது பெட்டி 2 இல் இல்லாதவாறும் பொருள்களை ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை உய்த்தறிக.

விடை : $(n^2-3n+3)(n-2)!$

8. 75000 இலும் பெரிதான எத்தனை நிறைவெண்கள் பின்வரும் நிபந்தனைகள் இரண்டையும் திருப்தி செய்யும்?

(a) நிறைணெண்ணின் இலக்கங்கள் யாவும் வெறு வேறானவை.

(b) 0 , 1 ஆகிய இலக்கங்கள் அவ்வெண்ணிலே தோன்றுவதில்லை.

9. 0 , 1 , 2 , 4 , 7 , 8 என்னும் இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொன்றும் 6000 இலும் கூடியனவும் மறிதந்த இலக்கங்களைக் கொண்டிராதனவுமாகிய எத்தனை வெவ்வேறு எண்களை உருவாக்கலாம்?

10. CHEMISTRY என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?
இவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புக்களில் S , R என்பன அருகருகே இருக்கும்?

எல்லாம் வேறுவேறான பொருள்களின் ஒழுங்கு

n எழுத்துக்களில் p எண்ணிக்கையானவை ஒரே மாதிரியானவை எனவும் எல்லா n எழுத்துக்களையும் கொண்டு செய்யக்கூடிய வரிசை மாற்றத் தொகை x எனவும் கொள்வோம்.

இவ்வரிசை மாற்றங்களுள் ஒன்றில் p எழுத்துக்களும் வேறுவேறானவையாயின் அவை p! வழிகளில் தமக்குள் மாறும்.

$$\therefore\ x \times p! = n!$$

$$\therefore\ x = \frac{n!}{p!}$$

மேலும் n எழுத்துக்களை ஒழுங்குபடுத்தும் போது, அவற்றுள் p எண்ணிக்கையானவை ஒரே மாதிரியானவையாகவும் q எண்ணிக்கையானவை வேறு ஒரே மாதிரியானவையாகவும் இருப்பின்,

$$\text{வரிசை மாற்றத் தொகை} = \frac{n!}{p!q!}$$

உதாரணக் கணக்குகள்

1. SCHOOL என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின்

$$\text{ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை} = \frac{6!}{2!}$$

$$= 360$$

2. PARALLEL என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

மொத்தம் – 8

L – 3

A – 2

$$\text{விடை} = \frac{8!}{3!\ 2!}$$

$$= 3360$$

). OBSIQVIOUSNESS என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துக்களும் இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையை

(i) எழுத்துக்களின் ஒழுங்குகளில் எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாத போது காண்க?

மொத்தம் – 14

O – 2

S – 4

I – 2

$$\text{விடை} = \frac{14!}{2!\ 4!\ 2!}$$

(ii) Q என்னும் எழுத்தை எப்போதும் U தொடரும் போது காண்க?

விடை :

(QU) வை ஒரே எழுத்தாகக் கருத வேண்டும்

$$\therefore \text{ வேண்டிய ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{13!}{2!\ 4!\ 2!}$$

4. ADDING என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கையை இரண்டு D களும் பிரிந்திருக்கும் போது காண்க.

கட்டுப்பாடு இல்லாத போது ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{6!}{2!} = 360$$

இரண்டு D களும் ஒருமித்து இருக்கும் போது ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை

$$= 5! = 120$$

∴ இரண்டு D களும் பிரிந்திருக்கும் போது ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை

$$= 360 - 120$$

$$= 240$$

5. சைகையாளர் ஒருவரிடம் 6 கொடிகள் உள்ளன. அவற்றில் 1 நீலம், 2 வெள்ளை ஏனையவை கறுப்பு நிறமானவை. அவர் கொடிக்கம்பம் ஒன்றிலே கொடிகளை உயர்த்தி செய்திகளை அனுப்புகிறார். இங்கு கொடிகள் அமைந்திருக்கும் வரிசைக்கிரமத்தின் மூலம் செய்திகள் அனுப்பப்படுகின்றன.

i) எல்லா 6 கொடிகளையும் பயன்படுத்தி

ii) சரியாக 5 கொடிகளையும் பயன்படுத்தி

அனுப்பத்தக்க வெவ்வேறு செய்திகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

விடை :

(i) மொத்தம் – 6

வெள்ளை – 2, கறுப்பு – 3

அனுப்பத்தக்க செய்திகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{6!}{2!\,3!}$

$$= 60$$

(ii) 5 கொடிகள் செய்திகளின் எண்ணிக்கை

1B , 2W , 2R $\qquad \frac{5!}{2!\,2!} = 30$

1B , 1W , 3R $\qquad \frac{5!}{3!} = 20$

2W , 3R $\qquad \frac{5!}{2!\,3!} = 10$

மொத்தம் $= 30 + 20 + 10$

$= 60$

பயிற்சிகள்

1. STATISTICS என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றங்களைக் காண்க?

2. COMMUNITY என்னும் சொல்லிலுள்ள உயிரெழுத்துக்களின் வரிசை பேணப்படின், அச்சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் வரிசை மாற்றங்களைக் காண்க?

3. CHAVAKACHCHERI என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்பைக் காண்க?
   i) இவற்றுள் எத்தனைகளில் 3A களும் ஒருமித்து இருக்கும்?
   ii) இவற்றுள் எத்தனைகளில் V யும் E யும் பிரிந்திருக்கும்?
   iii) இவற்றுள் எத்தனைகளில் 3A கள் ஒருமித்தும் ஆனால் V யும் E யும் பிரிந்தும் இருக்கும்?

4. ENGINEERING என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்திச் செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

    i) அவற்றுள் எத்தனைகளில் 3E களும் ஒருமிக்க இருக்கும்?

    ii) அவை எத்தனை வழிகளில் முதலில் இருக்கும்?

5. RELATIVISTIC என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துக்களின் ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

    i) அவற்றுள் எத்தனைகளில் 3I கள் ஒருமிக்க இருக்கும்?

    ii) அவற்றுள் எத்தனைகளில் 3I களுள் இரண்டு ஒருமித்தும் மூன்றாவது அவற்றை அடுத்து வராமலும் இருக்கும்?

6. நிலைக்குத்தான கம்பம் ஒன்றிலே 8 கொடிகளைப் பறக்கவிடுவதன் மூலம் "8 – கொடிச்சைகை" ஒன்று ஆக்கப்படுகிறது. கம்பத்தின் மீது 8 கொடிகளையும் ஒழுங்குபடுத்தும் விதத்தின் மூலம் சைகை துணியப்படுகின்றது.

    i) எல்லாம் வெவ்வேறான 8 கொடிகளின் மூலம்

    ii) எல்லாம் வெவ்வேறான 9 கொடிகளின் மூலம்

    iii) 4 சர்வசமச் செங்கொடிகள், 2 சர்வசம நீலக் கொடிகள், 2 சர்வசம பச்சைக் கொடிகள் ஆகியவற்றின் மூலம் ஒன்றிலிருந்தொன்று வேறுபட்ட எத்தனை "8 – கொடிச்சைகைகளை" உண்டாக்கலாம்?

7. நிறைவெண் ஒன்றில் இலக்கங்கள் 1 அல்லது 2 ஆக மாத்திரமே இருக்கலாம். அத்துடன் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை பத்தாகும். அத்தகைய நிறைவெண்கள் எத்தனை உள்ளன?

8. HOMOGENEOUS என்னும் சொல்லின் எழுத்துக்களை (முறைக்கு எல்லாவற்றையும் எடுத்து) 3326400 வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தப்படலாமெனக் காட்டுக.
இவற்றுள் எத்தனை மெய்யெழுத்துக்களுடன் ஆரம்பித்து அவற்றுடன் முடிகின்றன? (மெய்யெழுத்து என்பது A , E , I , O , U தவிர்ந்த வேறெந்த எழுத்துமாகும்)

9. IRROTATIONAL என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களை எத்தனை வித்தியாசமான முறைகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?
   i) இவற்றில் எத்தனை ஒழுங்குகளில் இரண்டு T களும் அடுத்தடுத்து வருகின்றன?
   ii) மெய்யெழுத்துகள் எல்லாம் ஒருங்கே வரும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

10. நேர்கோடொன்றில் p சிவப்பு நிற ஒரே மாதிரியான மாபிள்களையும் q ஒரே மாதிரியான வெள்ளை நிற மாபிள்களையும் எத்தனை வெவ்வேறு முறைகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?
$p \geq 2$ எனின் இரு அந்தங்களில் உள்ள மாபிள்கள் சிவப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}$$ எனக் காட்டுக.

11. நிறைவெண் ஒன்றின் இலக்கங்கள் 1 அல்லது 2 ஆக மாத்திரமே இருக்கலாம். அத்துடன் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை பத்தாகும். அத்தகைய நிறைவெண்கள் எத்தனை உள்ளன?

வட்ட ஒழுங்குகள்

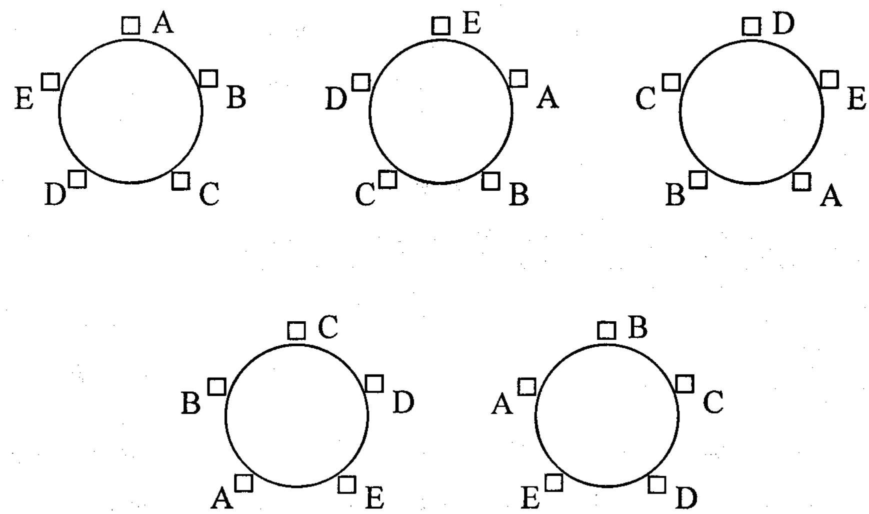
1. ஒரு வட்ட மேசையைச் சுற்றி 5 பேர் எத்தனை வழிகளில் அமரலாம் என்று பார்ப்போம்.

இங்கு ஒருவர் 1 ஆம் இடத்தில் அல்லது இறுதி இடத்தில் இருக்கிறார் என்று கொள்ள முடியாது. ஆசனங்களுக்கிடையில் வேறுபாடு இல்லாவிடின், ஒருவர் மற்றவருக்குச் சார்பாக எங்கு அமர்ந்துள்ளார் என்பதைத்தான் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

ஆசனங்களுக்கு 1 , 2 , 3 , 4 , 5 என இலக்கமிட்டால், அவை முறையே 5 , 4 , 3 , 2 , 1 வழிகளில் நிரப்பப்படலாம்.

ஆகவே $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$ ஒழுங்குகள் உண்டு.

ஆனால் இவை கீழே உள்ள ஒழுங்குகளையும் கொண்டுள்ளன.



இங்கு 5 பேரும் வலஞ்சுழியாக மாறிய போதும் ஒருவருக்கு இடது புறத்திலும் வலது புறத்திலும் அதே ஆள்கள் உள்ளனர். வட்ட மேசையைப் பொறுத்தளவில் இந்த 5 ஒழுங்குகளும் ஒரு ஒழுங்காகவே கணிக்கப்படும்.

ஆகவே இலக்கமிடப்பட்ட ஆசனங்களின் ஒழுங்குகளானது வட்ட மேசை ஒழுங்குகளின் 5 மடங்காகும்.

$$\therefore \text{ வேண்டிய வழிகளின் எண்ணிக்கை } = \frac{5!}{5}$$

$$= 4!$$

இம் முடிபைப் பொதுமையாக்கினால், n ஆள்கள் ஒரு வட்ட மேசையைச் சுற்றி அமரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{n!}{n}$

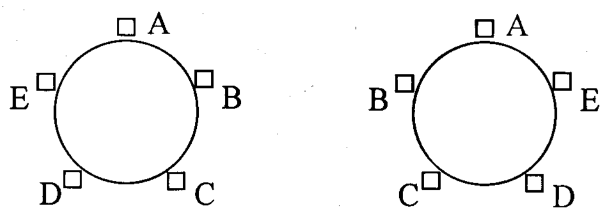
$$= (n-1)!$$

குறிப்பு:

ஒருவர் நிலையாக இருக்க மற்றவர்கள் தமக்குள் மாறுவதாகவும் கருதலாம். ஆகவே ஒருவர் நிலையாக இருக்க மிகுதி $n-1$ ஆள்கள் தமக்குள் மாறும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= (n-1)!$

2. வெவ்வேறு நிறமுடைய 5 மணிகளைக் கொண்டு எத்தனை மாலைகள் ஆக்கலாம்?

உதாரணம் 1 இல் உள்ள 4! ஒழுங்குகளில் கீழே உள்ள ஒழுங்குகளும் உள்ளன.



முதலாவது மாலையானது பின்புறமிருந்து பார்க்கும் போது மற்ற மாலையைப் போல் தோன்றும்.

வேறு வழியில் சொன்னால் முதலாவது மாலையை A ஊடான அச்சுப்பற்றி 180° யினூடு சுழற்றினால் மற்றைய மாலை பெறப்படும்.

ஆகவே இந்த இரு ஒழுங்குகளும் ஒரே மாலையாகும்.

$\therefore$ வேண்டிய மாலைகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{4!}{2}$

n வெவ்வேறு நிற மணிகளைக் கொண்டு ஆக்கக்கூடிய மாலைகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{1}{2}(n-1)!$

3. 8 வெவ்வேறு நிற மணிகளில் இருந்து தடவைக்கு 5 ஆக எடுத்து எத்தனை மாலைகள் ஆக்கலாம்?

விடை
$$= \frac{1}{2} \times \frac{{}^8P_5}{5}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4}{5}$$
$$= 672$$

பயிற்சிகள்

1. ஒரு வட்ட மேசையைச் சுற்றி 10 பேர் அமரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

2. வெவ்வேறு நிறமுடைய 10 மணிகளில் இருந்து தடவைக்கு 6 ஆக எடுத்து எத்தனை மாலைகள் ஆக்கலாம்?

3. எந்த இரு பெண்பிள்ளைகளும் ஒருவரை ஒருவர் அடுத்து இராதவாறு ஆறு ஆண்பிள்ளைகளையும் நான்கு பெண்பிள்ளைகளையும் வட்டமொன்று வழியே எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்?

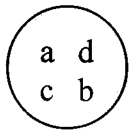
4. n ஆண்களும் n பெண்களும் ஒரு வட்ட மேசையைச் சுற்றி இருத்தப்பட வேண்டியவர் ஆகின்றனர். குறிக்கப்பட்ட ஆண் ஒருவனும் பெண் ஒருத்தியும் ஒருங்கு இருக்காதவாறும், எவரேனும் இரு பெண்கள் ஒருங்கு இருக்காதவாறும் அவர்கள் அமரக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை

$$(n-2)\left[(n-1)!\right]^2$$ எனக் காட்டுக?

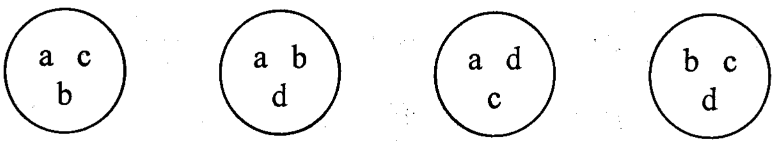
5. 8 பிள்ளைகள் ஒரு வட்டத்தில் உட்புறமாக நோக்கிய வண்ணம் எத்தனை விதமாக அமரலாம்?
கௌசிகன் என்னும் பிள்ளை அவனின் சகோதரர்களான லவனிற்கும் ஆரூரனிற்கும் இடையில் இருக்க எத்தனை விதங்கள் உண்டு?

சேர்மானம் (Combination)

a , b , c , d என்னும் 4 எழுத்துக்களையும் கொண்ட கூட்டங்கள் 1 ஆகும்.



a , b , c , d என்னும் 4 எழுத்துக்களையும் கொண்டு ஆக்கக்கூடிய வெவ்வேறான 3 எழுத்துக்களைக் கொண்ட கூட்டங்களைக் காண்போம்.



விடை 4 ஆகும்.

இங்கு ஒவ்வொரு கூட்டமும் ஒரு சேர்மானம் எனப்படும்.

குறியீடு :

n வேறுவேறான பொருள்களில் இருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுத்து ஆக்கப்படும் சேர்மானத் தொகை (கூட்டங்களின் எண்ணிக்கை) ^nC_r ஆல் குறிக்கப்படும்.

மேலே தரப்பட்ட உதாரணங்களில் இருந்து $^4C_4 = 1$ எனவும் $^4C_3 = 4$ எனவும் காணலாம்.

$^{n}C_{r}$ இற்குச் சூத்திரம் காண்போம்

n வேறுவேறான பொருள்களில் இருந்து தடவைக்கு r ஆக எடுத்துச் செய்யப்படும் வரிசைமாற்றத் தொகை $^{n}P_{r}$ என அறிவோம்.

இனி இவ் வரிசை மாற்றங்களை வேறு முறையில் காண்போம்.

$^{n}C_{r}$ கூட்டங்களில், ஒவ்வொரு கூட்டத்திலுள்ள r பொருள்களைக் கொண்டு r ! வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்.

$\therefore$ $^{n}C_{r}$ கூட்டங்களைக் கொண்டு $^{n}C_{r} \times r!$ வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்.

$$\therefore \; ^{n}C_{r} \times r! = \; ^{n}P_{r}$$

$$\therefore \; ^{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

உதாரணக் கணக்குகள்

1. 10 வெவ்வேறான எழுத்துக்களில் 4 எழுத்துக்களைக் கொண்ட கூட்டங்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

   விடை : $^{10}C_{4} = \frac{10!}{6!\,4!} = 210$

2. 12 ஆள்களில் இருந்து 4 பேர் கொண்ட குழுக்கள் தெரியப்பட வேண்டும்.

   i) எத்தனை வேறு வேறான குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?

   விடை : $^{12}C_{4} = \frac{12!}{8!\,4!} = 495$

ii) குறிப்பிட்ட ஒருவர் எத்தனை குழுக்களில் இடம் பெறுவார்?

விடை :

குறிப்பிட்ட ஒருவருடன் இன்னும் 3 பேர் சேர வேண்டும். அந்த 3 பேரும் மிகுதி 11 பேர்களில் இருந்து தெரியப்பட வேண்டும்.

$$\therefore \text{ வேண்டிய குழுக்களின் எண்ணிக்கை } = {}^{11}C_3 = 165$$

3. 10 ஆண்களில் இருந்தும் 7 பெண்களில் இருந்தும் 5 பேர் கொண்ட அலுவற்குழு தெரியப்பட வேண்டும்.

i) எத்தனை குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?

விடை $= {}^{17}C_5$

ii) தனியே ஆண்களைக் கொண்ட குழுக்கள் எத்தனை?

விடை $= {}^{10}C_5$

iii) தனியே பெண்களைக் கொண்ட குழுக்கள் எத்தனை?

விடை $= {}^{7}C_5$

iv) இருபாலாரையும் கொண்ட குழுக்கள் எத்தனை?

விடை $= {}^{17}C_5 - {}^{10}C_5 - {}^{7}C_5$

v) 3 ஆண்களையும் 2 பெண்களையும் கொண்ட குழுக்கள் எத்தனை?

விடை $= {}^{10}C_3 \times {}^{7}C_2 = 2520$

vi) குறிப்பிட்ட ஆணும் குறிப்பிட்ட பெண்ணும் ஒரே குழுவில் இடம்பெறும் குழுக்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

விடை $= {}^{15}C_3$

vii) குறிப்பிட்ட **ஆணும்** குறிப்பிட்ட பெண்ணும் ஒரே குழுவில் இடம்பெற மறுத்தால் ஆக்கக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கை என்ன?

விடை $= {}^{17}C_5 - {}^{15}C_3$

viii) சரியாக ஒரு பெண் குழுவில் இடம்பெறும் குழுக்கள் எத்தனை?

விடை $= {}^{7}C_1 \times {}^{10}C_4$

ix) குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இடம்பெறும் குழுக்கள் எத்தனை?

விடை $= {}^{17}C_5 - {}^{10}C_5$

4. A , B , C , D , E , F , G , H என்னும் 8 புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் உள்ளன. B , C , D என்பவற்றைத் தவிர வேறு எந்த 3 புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லை. E , F , G , H என்பவற்றைத் தவிர வேறு எந்த 4 புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தில் இல்லை.

இந்த 8 புள்ளிகளையும் கொண்டு

i) எத்தனை நேர்கோடுகள் அமைக்கலாம்?

விடை :

எந்த 3 புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாவிடின், அமைக்கக்கூடிய நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

$= {}^{8}C_2 = 28$

B, C, D என்பவற்றைக் கொண்டு அமைக்கக்கூடிய நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

$= {}^{3}C_2 = 3$

ஆனால் B , C , D என்பவற்றுக்கூடாக ஒரு நேர்கோடு மட்டும் உண்டு.

$\therefore$ வேண்டிய நேர்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

$= 28 - 3 + 1 = 26$

ii) எத்தனை வட்டங்கள் அமைக்கலாம்?

3 புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரே ஒரு வட்டம் உண்டு.

∴ வேண்டிய வட்டங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{8}C_3 - {}^{4}C_3 + 1$$

$$= 53$$

5. 15 துடுப்பாட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஊர் சுற்றும் குழு, 7 துடுப்படிப்போரையும் (Batsman) 6 பந்து எறிவோர்களையும் (Bowlers) 2 விக்கற் காவலர்களையும் (Wicket Keepers) கொண்டது. 11 ஆட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும் குறைந்தது 5 துடுப்படிப்போரும் 4 பந்து எறிவோரும் 1 விக்கற் காவலனும் இருத்தல் வேண்டும்.

i) துடுப்படிப்பவன் ஒருவனும் விக்கற் காவலன் ஒருவனும் காயமடைந்தனரெனின் தெரியப்படக்கூடிய வேறுபட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

விடை :

	Batsman	Bowlers	W.Keepers
	6	6	1

பின்வரும் வகைகளில் 11 பேர் இருக்கலாம்.

(i)	6	4	1
(ii)	5	5	1

வகை (i) இல் தெரியப்படக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^{6}c_6 \times {}^{6}c_4 \times {}^{1}c_1$$
$$= 15$$

வகை (ii) இல் தெரியப்படக்கூடிய குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^6c_5 \times {}^6c_5 \times {}^1c_1$$
$$= 36$$

மொத்தம் $= 15 + 36 = 51$

c) எல்லா ஆட்டக்காரரும் உள்ளனரெனின் எத்தனை வேறுபட்ட குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?

விடை :

கிடைக்கும்

	Batsman	Bowlers	W.Keepers
	7	6	2
11 பேர் இருக்கக்கூடிய வகைகள்			
(i)	6	4	1
(ii)	5	5	1
(iii)	5	4	2

∴ வேண்டிய குழுக்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^7C_6 \times {}^6C_4 \times {}^2C_1 + {}^7C_5 \times {}^6C_5 \times {}^2C_1 + {}^7C_5 \times {}^6C_4 \times {}^2C_2$$

$$= 210 + 252 + 315$$
$$= 777$$

பயிற்சிகள்

1. 20 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில் இருந்து ஒரு போட்டிக்கு அனுப்புவதற்கு 4 மாணவர் கொண்ட குழு ஒன்று தெரியப்பட வேண்டும்.
   - i) எத்தனை வேறு வேறான குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?
   - ii) ஒரு குறிப்பிட்ட மாணவன் இடம்பெறும் குழுக்கள் எத்தனை உண்டு?

2. 10 வெவ்வேறு வகையான பழங்களில் இருந்து ஒருவர் 3 பழங்களைப் பின்வருமாறு எத்தனை வழிகளில் தெரியலாம்?
   - i) 3 உம் வெவ்வேறு வகை
   - ii) ஒரே வகையில் 2, வேறு வகையில் 1

3. 10 மாணவர்களைக் கொண்ட வகுப்பு ஒன்றில் 7 பேர் ஆண்கள், 3 பேர் பெண்கள்
   - i) வகுப்பில் இருந்து 4 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவைத் தெரிவு செய்யக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?
   - ii) அவற்றுள் எத்தனை குழுக்களில் குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இடம் பெறுவாள்?
   - iii) எத்தனை குழுக்களில் சரியாக ஒரு பெண் இடம் பெறுவாள்?
   - iv) குறிப்பிட்ட ஒரு ஆணும் குறிப்பிட்ட ஒரு பெண்ணும் ஒரே குழுவில் இடம்பெற மறுத்தால் எத்தனை குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?

4. 7 ஆண்களில் இருந்தும் 5 பெண்களில் இருந்தும் 5 பேரைக் கொண்ட குழுவொன்றை இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்து-முகமாக, ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆணையும் ஒரு குறிப்பிட்ட பெண்ணையும் ஒரே குழுவில் வைத்திருக்காதவண்ணம் எத்தனை முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

5. பை ஒன்றில் வெவ்வேறு வகையான 8 வெள்ளி நாணயங்களும் 4 செப்பு நாணயங்களும் உள்ளன. 7 நாணயங்களின் வெவ்வேறு தெரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?
இவற்றில் எத்தனை தெரிவுகளில் குறைந்த பட்சம் ஒரு செப்பு நாணயமேனும் இருக்கும்?

6. ஒரு வினாத்தாள் 10 வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் ஒரு பரீட்சார்த்தி வெவ்வேறான எத்தனை முறைகளில் வினாக்களைத் தெரிவு செய்யலாம் எனக் காண்க?
   i) ஏதாவது 7 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டியவிடத்து
   ii) முதல் 3 வினாக்கள் உட்பட 7 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டியவிடத்து
   iii) முதல் 4 வினாக்களில் குறைந்தது 3 உட்பட 7 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டியவிடத்து

7. 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , என்னும் ஏழு நிறைவெண்களில் இருந்து ஒரு தடவைக்கு மூன்று நிறைவெண்களை எடுப்பதன் மூலம் செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
இவ் வரிசை மாற்றங்களில் எத்தனை
   i) நிறைவெண் 2 ஐக் கொண்டிருக்கும்?
   ii) 1 , 4 என்னும் நிறைவெண்களைக் கொண்டிருக்கும்?
   iii) 3 , 5 என்னும் நிறைவெண்களைக் கொண்டிருப்பதில்லை?

8. முதலாம் பையில் செப்பமாக 8 பந்துகளைக் கொண்டிருக்கத் தக்கதாக வெவ்வேறான 10 பந்துகளை 5 பைகளிலே எத்தனை விதங்களில் இடலாம்?

9. குறித்த வகுப்பு ஒன்றிலே 7 ஆண் பிள்ளைகளும் 6 பெண் பிள்ளைகளும் இருக்கின்றனர். ஒவ்வொரு குழுவிலும் குறைந்த பட்சம் 3 ஆண் பிள்ளைகளேனும் இருக்குமாறு செப்பமாக 5 பேர்களைக் கொண்ட குழுவை எத்தனை வழிகளில் அமைக்கலாம்?

10. பல்தேர்வு வினா ஒவ்வொன்றும் ஒரு சரியான விடையையும் நான்கு பிழையான விடைகளையும் கொண்டுள்ளது. சரியான விடைக்கு ஒரு புள்ளியும் பிழையான விடைக்குப் பூச்சியமும் வழங்கப்படுகிறது. இவ்வாறான நான்கு வினாக்களுக்கு விடையளிக்கும் ஒருவர் புள்ளிகள்

(i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3

என்பவற்றை எத்தனை வழிகளில் பெற்றுக் கொள்ளலாம்?

11. விஞ்ஞான மாநாடு ஒன்றிலே 20 பல்கலைக்கழகங்கள் பங்கு பற்றுகின்றன. ஒவ்வொரு பல்கலைக்கழகமும் தாவரவியலறிஞர் ஒருவரையும் இரசாயன அறிஞர் ஒருவரையும் கணிதர் ஒருவரையும் பௌதிகர் ஒருவரையும் ஆதரித்து அனுப்புகின்றது. 10 உறுப்பினர்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும்

i) ஒவ்வொரு பாடத்துறையிலும் இருவர் வீதமும்

ii) குழுவின் ஒவ்வொரு உறுப்பினரும் வெவ்வேறு பல்கலைக் கழகத்திலிருந்து வருமாறு ஒவ்வொரு பாடத்துறையிலும் இருவர் வீதமும்

iii) மூன்று பல்கலைக்கழகங்களிலுமிருந்து மூவர் வீதமும் வேறொரு பல்கலைக்கழகத்திலிருந்து ஒருவர் வீதமும்

இருக்குமாறு குழுக்களை எத்தனை விதங்களில் அமைத்துக் கொள்ளலாம்?

12. 8 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 6 கறுப்புப் பந்துகளையும் பை A கொண்டிருக்க 6 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 3 கறுப்புப் பந்துகளையும் பை B கொண்டுள்ளது. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் 4 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 2 கறுப்புப் பந்துகளையும் கொண்டிருக்குமாறு 6 பந்துகள் உள்ள எத்தனை தொடைகள் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

i) 6 பந்துகளும் ஒரே பையிலிருந்து எடுக்கப்படும் போது

ii) கறுப்புப் பந்துகள் இரண்டு பைகளில் ஏதாவது ஒன்றிலிருந்தும் வெள்ளைப் பந்துகள் மற்றப் பையிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் போது

iii) பந்துகள் எடுக்கப்படும் பைகள் தொடர்பாக எந்தவொரு நிபந்தனையும் இல்லாத போது

13. வேறு வேறான 10 வெள்ளி நாணயங்களையும் வேறு வேறான 5 செப்பு நாணயங்களையும் கொண்டுள்ள பை ஒன்றிலிருந்து 8 நாணயங்களைக் கொண்டு செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையை

i) தெரிவுகளில் எவ்விதமான கட்டுப்பாடும் இல்லாதிருக்கும் போது

ii) தெரிவு செய்யப்படும் நாணயங்களில் குறைந்த பட்சம் இரு செப்பு நாணயங்களேனும் இருக்க வேண்டிய போது

காண்க.

14. 32 அட்டைகளைக் கொண்ட தொகுதி ஒன்றில் 8 கறுப்பு நிற அட்டைகளும் 8 சிவப்பு நிற அட்டைகளும் 8 நீல நிற அட்டைகளும் 8 பச்சை நிற அட்டைகளும் உள்ளன. ஒரே நிறத்தைக் கொண்ட அட்டைகள் யாவும் வித்தியாசமானவை.

i) தொகுதியில் இருந்து 3 அட்டைகள் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

ii) அதோடு (i) இல் உள்ள தெரிவுகளில் எந்த எண்ணிக்கையில் அட்டைகள் யாவும் வித்தியாசமான நிறத்தைக் கொண்டிருக்கமாட்டா

15. ஆறு வெவ்வேறு பரிசுகளை மூன்று பிள்ளைகளுக்கிடையே, ஒவ்வொரு பிள்ளைக்கும் ஒரு பரிசாவது கிடைக்கக்கூடியதாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாமெனக் காண்க.

எல்லாம் வேறுபடாத பொருள்களின் சேர்மானமும் வரிசை மாற்றமும்

1. MATHEMATICS என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து முறைக்கு 4 ஆக எடுத்து எத்தனை சேர்மானம் ஆக்கலாம் என்று காண்போம்.

எழுத்துக்கள்	எண்ணிக்கை
M	2
A	2
T	2
H	1
E	1
I	1
C	1
S	1

4 எழுத்துக் கூட்டமொன்றில் இருக்கக் கூடியவை	சேர்மானம்
i) 2 ஓரினம், 2 வேறு ஓர் இனம்	${}^{3}C_{2} = 3$
ii) 2 ஓரினம், 2 வெவ்வேறு இனம்	${}^{3}C_{1} \times {}^{7}C_{2} = 63$
iii) 4 உம் வெவ்வேறு இனம்	${}^{8}C_{4} = 70$

∴ வேண்டிய சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 3 + 63 + 70$$

$$= 136$$

2. parallel என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து முறைக்கு 5 ஆக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் ஆக்கலாம்?

எழுத்துக்கள்	எண்ணிக்கை
l	3
a	2
p	1
r	1
e	1

	கூட்டமொன்றில் இருக்கக் கூடியவை	சேர்மானம்	வரிசை மாற்றம்
(i)	3 ஓரினம், 2 வேறு ஓர் இனம்	1	$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$
(ii)	3 ஓரினம், 2 வெவ்வேறு இனம்	${}^1C_1\ {}^4C_2 = 6$	$6 \times \frac{5!}{3!} = 120$
(iii)	2 ஓரினம், 2 வேறு ஓர் இனம், வேறு 1	${}^2C_2\ {}^3C_1 = 3$	$3 \times \frac{5!}{2!\,2!} = 90$
(iv)	2 ஓரினம், 3 வெவ்வேறு இனம்	${}^2C_1 \times {}^4C_3 = 63$	$8 \times \frac{5!}{2!} = 480$
(v)	5 உம் வெவ்வேறு இனம்	1	$5! = 120$

∴ மொத்த வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 10 + 120 + 90 + 480 + 120$$

$$= 820$$

பயிற்சிகள்

1. COEFFICIENT என்னும் சொல்லின் 11 எழுத்துக்களிலிருந்தும் செய்யத்தக்க 4 எழுத்துக்களின் வேறுவேறான தேர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. KANAKARAYANKULAM என்னும் சொல்லின் உயிர் எழுத்துக்கள் (A உம் U உம்) தவிர்ந்த ஏனைய எழுத்துக்களைக் கொண்டு தடவைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுக்கும் போது செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை 41 எனக் காட்டுக.

3. TISSAMAHARAMA என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் முறைக்கு 4 ஆக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்?

4. NARRAGGANSETT என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து முறைக்கு நான்கு எழுத்துக்களைத் தேர்ந்தெடுத்து எத்தனை வெவ்வேறான வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் என்பதை ஆராய்க.

5. CHUMANAN என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து தடவைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுக்கும் போது செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

6. 1 ஐந்து ரூபா நாணயத்தையும் 2 இரண்டு ரூபா நாணயங்களையும் 3 ஒரு ரூபா நாணயங்களையும் 4 ஐம்பது சத நாணயங்களையும் ஒரு பை கொண்டுள்ளது. வெவ்வேறான வகையான 3 நாணயங்கள் எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யப்படலாம்?

7. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் 0 , 1 , 4 , 5 , 6 , 7 ஆகியவற்றிலிருந்து எத்தனை நான்கு இலக்க எண்கள் (பூச்சியத்துடன் தொடங்கும் எண்கள் கருதப்படாதவிடத்து) ஆக்கப்படலாம்?
   (i) இலக்கங்கள் மீளவருவது அனுமதிக்கப்பட்டால்
   (ii) இலக்கங்கள் இரு முறைக்கு மேல் மீள வருவது அனுமதிக்கப்படா விட்டால்

8. GONAPINUWALA என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து முறைக்கு 5 ஆக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்?

9. KANKESANTURAI என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து முறைக்கு ஐந்து எழுத்துக்களை எடுக்கும் போது செய்யத்தக்க சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

10. KAHATAGASDIGILIYA என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் இருந்து முறைக்கு மூன்றாக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் என்பதைக் காண்க?

விடைகள்

பயிற்சி 1.a

(1) $6x + 2$

(2) $a = 1, \ b = 0$

(3) $a = 1, \ b = 2$

(4) $a = 3, \ b = 2, \ c = -8$

(5) $a = -4$

(6) மீதி $= 8$

(7) (i) $a = 1, \ b = 15$

(ii) $\ell = 1, \ m = -1, \ n = 2$

(13) மீதி பூச்சியம், $(x+1)(x^2 + x - 1)$

(14) $a = 2, \ b = -3, \ c = 3, \ d = 1$

(16) $a = 3, \ b = 5$

பயிற்சி 1.b

(1) $(a + b + c)[-(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)]$

(2) $-(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

(3) $-(a - b)(b - c)(c - a)$

(4) $(xy + yz + zx)(x - y)(y - z)(z - x)$

(5) $-(a - b)(b - c)(c - a)$

(6) $5(x + y)(y + z)(z + x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$

(7) $(a + b + c)(ab + bc + ca)$

(8) $(a + b)(b + c)(c + a)$

(9) $5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)$

(10) $12xyz(x + y + z)$

(11) $3abc(a + b)(b + c)(c + a)$

(12) $3(a - b)(b - c)(c - a)$

(13) $-2(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$

(14) $(a + 2b + 3c)[a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2ab - 6bc - 3ac]$

(15) $(x + y + z)(xy + yz + zx)$

(16) $3(x - a)(x - 1)(a - 1)$

பயிற்சி 1.c

(1) $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2)$

(2) $k = 2, -3/2,$

$k = 2$ ஆக $(x^2-2)(2x^2+2x-3)$

$k = -3/2$ ஆக $(x^2+3/2(2x^2-17/2\,x+4)$

(7) $a = 36,\ b = 2$

(11) $f(x, b, c) = -(b+c-x)(c+x-b)(x+b-c)(x+b+c)$

மூலங்கள்: $b+c,\ b-c,\ c-b,\ -(b+c)$

பயிற்சி 2.a

(4) $x^2 - \dfrac{2b(3c-4b^2)}{c}x + c = 0$

(6) $k = 1, 2$

(8) $-2 \le t \le 2$

(12) $-\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right),\quad -\left(\beta + \dfrac{1}{\alpha}\right)$

(16) (i) $x^2+6x+5 = 0,\ x^2-4x = 0$

(ii) $(k+2)x^2 + 2k(4k^2-3k-6)x + (k+2)^2 = 0$

(iii) $(k+2)x^2 + [8k^3-6k^2-14k-4]x - [8k^3-7k^2-11k+6] = 0$

(17) $-1 + \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2} + \dfrac{(\alpha+\beta)}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4}$,

$-1 + \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2} - \dfrac{(\alpha+\beta)}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4}$

(19) $b^2 - ac = a$

பயிற்சி 2.b

(1) $0 \leq p \leq 4/9$

(2) $-4 \leq x \leq -1, \ 3 \leq x \leq 4$

(3) $-4 \leq k \leq 0$

(4) $-3/2 < p < 1/2$

(8) $x^2 - 10x + 16, \ x^2 + 2x - 8$

(10) $-1 < x < 2, \ x > 3$

(12) $k = \pm 7$

(13) $k < -5 - 2\sqrt{10}, \ k > -5 + 2\sqrt{10}$,

(18) (i) தொடை $= \{ x / -4 < x < 2 \}, \ a = 3$

(ii) $f(x) = -50x^2 + 40x + 10, \ g(x) = -2x^2 - 8x + 10$

(19) $2 < k < 8$

பயிற்சி 3.a

(2) $S_n = n/_2(1 + 3n), \ n = 20$, n இன் இழிவுப்பெறுமானம் = 26

(5) $4/_{81}\,(10^{n+1} - 9n - 10)$

(6) $n/_6(n + 1)(2n + 1)$

(7) (ii) $n/_4(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

(8) (i) $n/_{12}(n + 1)(3n^2 + 19n + 26)$

(ii) $n/_6(4n^2 + 15n + 17)$

(10) (i) $n/_6(n + 1)(n + 2)$

(ii) $U_r = (2r - 1)^4 - 2r^4$, $S_n = n - 8n^3(n + 1)$

(12) (i) $U_r = r.2^{r-1}$, $S_n = (n - 1)2^n + 1$

(13) (ii) $n/_{24}(n + 1)(n - 1(3n + 2)$

(14) (i) $n/6(3n^3 - 4n^2 + 1)$

(ii) $-32n(n^2 - 1) - 26n$

(15) (i) $n/6(n + 1)(2n + 1)$

(ii) $n/3(n^2 + 9n + 20)$

(16) $S_n = (n - 1)\, 2^n + 1$

(17) (i) $\dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \dfrac{-(n+1)\, x^n (1 - x) - x^{n+1} + 1}{(1 - x)^2}$

(19) $S_n = n^2(2n^2 - 1)$, $T_n = 2n^2(n + 1)^2$, எல்லை $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{T_n} = 1$

(20) $n = 11$

பயிற்சிகள் 3.b

(1) $U_r = \dfrac{2r + 1}{r^2 (r + 1)^2}$, $f(r) = \dfrac{1}{r^2}$, ஒருங்கும்.

(2) (i) $\dfrac{n}{2n + 1}$

(ii) $\dfrac{n}{2n + 1} + \dfrac{4n}{3}(n + 1)(n + 2)$

(3) (i) $1 - \dfrac{1}{n + 1}$

(ii) $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{(n + 2)(n + 3)}$

(4) $A = 2$, $f(r) = \dfrac{r + 2}{r(r + 1)}$

(5) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + (n + 1)^2}$, $\tan^{-1}(n + 1) - \pi/4$, ½, $\pi/4$

(6) $n/6(n + 1)(3n^2 + 35n + 106)$

(7) $3e/2$

(8) (i) $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(ii) $\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3 = \frac{1}{8} + (-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2}(n+½)^3 - \frac{3}{8}(n+½)\right]$

(9) $f(r) = \frac{-3(2r+3)}{2(r+1)(r+2)}$, $S_n = \frac{9}{4} - \frac{3(2n+3)}{2(n+1)(n+2)}$, ஒருங்குதொடர்.

(10) $U_r = \frac{r}{1.3.5.7 \text{-----------} (2r+1)}$,

$S_n = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1.3.5.7 \text{-----------} (2n+1)}$

(11) $S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(12) (i) $f(r) = \frac{1}{2r(r+1)}$, $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

(ii) $f(r) = \frac{1}{r(r+2)}$, $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

(13) (i) $U_r = (r+1)(2r+1)(3r+1)$

$S_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} - 6$

(ii) $S_n = 2n(n+1)^2$

(14) $\lambda = -2, \mu = -5/2$, $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{5}{4} - \frac{(2n+5/2)}{(n+1)(n+2)}$, $\sum_{r=1}^{\infty} U_r = \frac{5}{4}$

(15) $U_r = \frac{r+2}{r(r+1)(r+3)}$, $f(r) = \frac{-6r^2+27r+29}{6(r+1)(r+2)(r+3)}$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{-6n^2+27n+29}{6(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{29}{36}$, $S = \frac{29}{36}$, ஒருங்கும்.

(16) $S_n = \dfrac{n(n+2)}{n+1}$

(18) $f(r) = -\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^r}{4(2r+1)}$, $U_r = \dfrac{(r+1)}{(2r-1)(2r+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^r$, $S = 1/4$, ஒருங்கும்.

(19) $U_r = \dfrac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$, $f(r) = \dfrac{1}{r^2}$, $S = 1$

(20) $f(r) = \dfrac{-1}{8(2r+3)^2(2r+5)^2}$

$S_n = \dfrac{1}{1800} - \dfrac{1}{8(2n+3)^2(2n+5)^2}$, $S = 1/1800$, ஒருங்கும்

(22) $S_n = \tan\theta - \dfrac{1}{2^n}\tan\theta$

(23) $S_n = \tan^{-1}(n+1) - \pi/4$

(24) $S_n = \tan^{-1}(n+1) - \pi/4$

(25) $S_n = \dfrac{\tan(n+1)\theta}{\tan\theta} - (n+1)$

(26) (i) $n/2 \sin\theta + 1/2 \sin(n+2)\theta \sin(n\theta) \operatorname{cosec}\theta$

(ii) $\dfrac{n-1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\right)$

பயிற்சி 3.c

(19) 1/4

(20) 5/2

(21) 1/2

(22) (i) $U_r = \dfrac{r}{(r+1)(r+2)(r+4)}$,

$$S_n = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3} + \frac{2}{n+4}\right]$$

$S = 2/9$

(ii) $U_r = \dfrac{1}{2r(2r+4)}$, $S_n = \dfrac{5}{48} - \dfrac{(2n+3)}{8(n+1)(n+2)}$, $S = 5/48$

(iii) $U_r = \dfrac{1}{r(r+2)(r+4)}$, $S_n = \dfrac{1}{8}\left[\dfrac{11}{12} - \dfrac{(4n^2+4n-2)}{n(n+2)(n^2-1)}\right]$,

$S = 11/96$

பலவினப் பயிற்சி 3.d

(1) $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{(2n+3)}{2(n+2)(n+3)}$, $S = 1/4$, n இன் இழிவு $= 97$

(2) $A = 1$, $B = 5$, $C = -1$, $D = -5$, $S_n = 6 - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{5}{(n+1)^2}$, $S = 6$

(3) $\dfrac{7.11.15.\text{---------}.(4n+3)}{4.8.12.\text{---------------}.4n} - 1$

(4) $A = 16/5$, $B = -8/3$, $C = 7/15$, $S_n = 16/5\, n^5 - 3/8\, n^3 + 7/15\, n$

(5) $S = 7e$

(6) $S = 2e - 2$

(7) $S = 3e - 1$

(8) $A = 2$, $B = 3$, $C = -1$, $S = 6e + 1$

(9) $S = 2(1 + e^{-2})$

(10) $S_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

(16) $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $S = ½$, ஒருங்குதொடர்

(20) $6/81(10^{n+1} - 9n - 10)$

(21) (i) $n/3\,(2n+1)(4n+1)$

(ii) $2n/3\,(n+1)(2n+1)$

(iii) $n/3\,(2n+1)(2n-1)$

(23) (i) $-1 < x < 1-\sqrt{2}, \quad 1+\sqrt{2} < x < 3$

(ii) $3 + (n-1)3^{n+1}$

(24) $S_n = n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)$

(25) $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$, $S = ¼$, $n = 21$

(26) (i) $\frac{n}{4n+1}$

(ii) $\frac{n}{2n+1}$

(iii) $\frac{n(6n+5)}{(2n+1)(4n+1)}$

(27) $\lambda = ½$, $S_n = \frac{5}{4} - \frac{(4n+5)}{2(n+1)(n+2)}$, $S = 5/4$, ஒருங்கும்

(28) $n(n+1)(n+3)$, $S \to \infty$, விரிதொடர்

(29) $k = 1$, $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

(30) $U_{r+1} = U_r\left(\frac{3r+2}{3r+3}\right)$, $A = B = 3/2$,

$$S_n = \frac{5.8.11.\text{--------------}(3n+2)}{3.6.9.\text{------------------}.3n} - 1$$

(31) $A = 1$, $B = 6$, $C = 7$, $D = 1$

பயிற்சி 4.a

(1) 120

(2) 720

(3) 40320, 30240

(4) 192

(5) 2160, 1200

(6) 16!, 24883200

(7) $(n-1)!$, $(n-2)^2.(n-2)!$, $(n^2 - 3n + 3).(n-2)!$

(8) 102960

(9) 1320

(10) 362880, 80640

பயிற்சி 4.b

(1) 50400

(2) 360

(3) 403603200

(i) 13305600

(ii) 345945600

(iii) 11088000

(4) 277200, 15120

(5) 39916800, 1814400, 8164800

(6) (i) 40320

(ii) 362880

(iii) 420

(iv) 1260

(7) 89

(8) 756000

(9) 14968800, 2494800, 113400

பயிற்சி 4.c

(1) 362880

(2) 12600

(3) 43200

(5) 5040, 240

பயிற்சி 4.d

(1) (i) 4845

(ii) 969

(2) 120, 90

(3) (i) 210

(ii) 175

(iii) 105

(iv) 182

(4) 650

(5) 792, 792

(6) (i) 120

(ii) 35

(iii) 80

(7) 210

(i) 90

(ii) 30

(iii) 60

(8) 720

(9) 756

(10) (i) 256

(ii) 256

(iii) 96

(iv) 16

(11) (i) 190^5

(ii) ${}^{20}C_2 \times {}^{18}C_2 \times {}^{16}C_2 \times {}^{14}C_2 \times {}^{12}C_2$

(iii) $({}^{20}C_3)({}^{5}C_3)^3({}^{17}C_1)({}^{5}C_1)$

(12) (i) 1095

(ii) 435

(iii) 36036

(13) (i) 6435

(ii) 5790

(14) (i) 4960

(ii) 2912

(15) 540

பயிற்சி 4.e

(1) 101

(3) 1423

(4) 1824

(5) 36

(6) 15

(7) (i) 1080

(ii) 975

(8) 10524

(9) 345

(10) 803