

Bright வெளியீடு

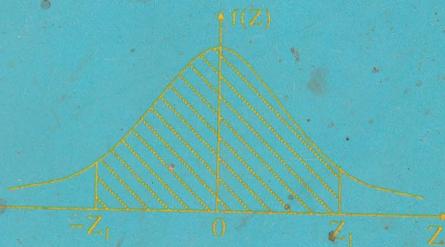
G. C. E. (A/L)

இணைந்து, உயர்கணிதம்

(பிரயோக கணிதக் கூறு)

நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
PROBABILITY & STATISTICS

333, வினாக்களும் அவற்றிற்கான விடைகளும் அடங்கலாக



V. T. மதியழகன்
[B. Sc. (Cey), Dip-in-English]

விலை: 125/-



BRIGHT BOOK CENTRE (PVT) LTD.

S-27, First Floor

P. O. Box - 162

Colombo Central Super Market Complex,

Colombo-11.

T.P: 434770, 074-718592

Bright வெளியீடு

G. C. E. (A/L)

இணைந்து, உயர்கணிதம்

(பிரயோக கணிதக் கூறு)

நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்
PROBABILITY & STATISTICS

333, வினாக்களும் அவற்றிற்கான விடைகளும் அடங்கலாக

விலை: 125/-

V. T. மதியழகன்
[B. Sc. (Cey), Dip-in-English]

தலைப்பு : நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்

ஆக்கம் : V.T. மதியழகன் B. Sc., Dip-in-English

உரிமை : நூலாசிரியருக்கே

பக்கங்கள் : 255

விலை : 125/-

அச்சுப்பதிப்பு : லக்ஷ்மி அச்சகம்

வெளியீடு : Bright Book Centre (Pvt) Ltd.

ISBN - 955 - 9387 - 77

அணிந்துரை

கடந்த காலத்தில் க. பொ. த. (உயர்தரம்) கணிதம் கற்கும் தமிழ் மாணவர்கள் தமது பரீட்சையில் புள்ளிவிபர வினாக்கள் இருக்கும் என்று அறிந்தும் அது பற்றிய எந்த அறிவும் இல்லாமலே பரீட்சை எழுதுவார்கள். இதனால் இலகுவாக உயர்புள்ளிகள் பெற்று பல்கலைக்கழக நுழைவிற்குத் தேவையான புள்ளிகளை பெறத் தவறுகிறார்கள். இந்த நிலைக்கு முக்கிய காரணம் தகுந்த ஆசிரியரோ நூலோ இல்லாமையாகும். திரு. மதியழகனின் “நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்” எனும் இந்நூல் அந்த வெற்றிடத்தை நிரப்பும் என நம்பிக்கை ஊட்டுகிறது. வரும் 2000 ஆண்டுக்கான க. பொ. த. (உயர்தரம்) கணிதப் புதிய பாடவிதானங்கள் இவ்வாண்டு ஆரம்பித்து அமுல்செய்யப்படுகிறது. இதன் பிரகாரம் இணைந்த, உயர்கணிதம் ஆகிய இரண்டு அலகுகள் அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்விரண்டு அலகுகளிலும் நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும் உள்ளடக்கப் பட்டிருக்கின்றன. இவைகளின் பாடத்திட்டங்களை நெருக்கமாகத் தழுவினதாகவே திரு. மதியழகனின் நூல் அமைகிறது. இந்நூலில் பல சிறப்பு அம்சங்கள் காணப்படுகின்றன. எளிய தமிழில் எழுதப் பட்டிருக்கிறது. தெளிவான எழுத்துக்கள். ஏராளமான வினாக்களும் அவைகளுக்கு விடைகளும் இருக்கின்றன. சுயமாகவே படித்து விளங்கி வினாக்களுக்கு விடை எழுதி சரிபார்க்க ஏதுவாக இருக்கிறது.

முக்கியமாக க. பொ. த. (உயர்தரம்) கணித மாணவர்களுக்கென்று இந்நூல் வெளிவருகிறதென்றாலும் புள்ளிவிபரவியலை ஓர் பாடமாகக் கொண்ட கணக்கியல், வணிகம் போன்ற துறைகளுக்கும் இந்நூல் பெரும் துணையாக இருக்கும்.

யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகத்திலே கணித பாடத்தைக் கற்றுப் பட்டம் பெற்ற திரு. மதியழகன் தனது அனுபவத்தைத் துணையாகக் கொண்டு உயர் கல்வி பயிலும் மாணவர்களுக்கு என்று இந்நூலை ஆக்கியிருப்பது கண்டு பெருமகிழ்ச்சியடைகிறேன். மாணவர்கள் இதனைக் கற்பதால் இலகுவில் உயர் புள்ளிகள் எடுக்கமுடியும் என நம்புகிறேன்.

ச. யோகராசா

சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்,
கணித புள்ளிவிபரவியல் துறை,
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம்.

02-11-1998

முன்னுரை

புதிய நூற்றாண்டை எதிர்கொள்ளுமுகமாக கல்வித்திட்டத்தில் மாற்றங்கள் ஏற்படுத்தப்பட்டு வருகின்றன. இதன் ஓர் அங்கமாக உயர்தர வகுப்பு பாடங்களிலும் மாற்றங்கள் செய்யப்பட்டு இணைந்த, உயர்கணிதம் என்னும் இரு பாடப்பரப்புக்கள் அறிமுகம் செய்யப்பட்டுள்ளது. முன்னர் பிரயோக கணிதப் பகுதியில் உள்ளடக்கம் செய்யப்பட்டிருந்த “நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்” என்னும் பகுதி தற்போது இணைந்த, உயர்கணிதம் என்னும் இரு பாடப்பரப்புக்களிலும் உள்ளடக்கப்பட்டுள்ளது. நிகழ்தகவும், விவரணப் புள்ளிவிபரவியலும் இணைந்த கணித பாடத்திலும் உள்ளடக்கப் பட்டுள்ளது.

முன்னைய காலங்களில் இப்பகுதி மேலெழுந்த வாரியாக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டிருந்தாலும் மாணவர்கள் இப்பகுதியினைக் கற்பதற்கு அதிக அக்கறை காட்டவில்லை.

தற்போது காலத்தின் தேவை கருதி “நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும்” என்னும் பகுதிக்கு அதிகளவு முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சகல துறைகளிலும் இதன் ஆதிக்கம் தற்போது நிலவுகின்றது. எனவே நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும் என்னும் பகுதியில் அடிப்படையறிவை ஊட்டும் நோக்கில் மாணவர்கள் இலகுவாகப் படித்து விளங்கிக் கொள்ளுமுகமாக இந்நூல் அமைவதற்கு என்னை இயன்றளவு அர்ப்பணித்துள்ளேன். செயல்முறை களுடன் கூடிய பல கணக்குகள் புகுத்தப்பட்டதுடன் பயிற்சிக் காகவும் ஏராளமான கணக்குகள் விடைகளுடன் தரப்பட்டுள்ளது. பல்கலைக்கழகங்களில் புள்ளிவிபரவியலை ஒரு பாடமாகக் கொள்ளாத கணிதபாடத்தைக் கற்பிக்கும் ஆசிரியர்களுக்கும் இந்நூல் பெரிதும் பயனுள்ளதாக இருக்கும் என்பது என் நம்பிக்கை.

எனது முன்னைய கணித நூல்களுக்கும் ஆதரவு தந்த ஆசிரியர்களும், மாணவர்களும் இதற்கும் நல்ஆதரவு வழங்குவார்கள் என நம்புகின்றேன். இதன் அடிப்படையில் இணைந்த, உயர்கணிதம் பாடங்களுக்கான சகல பகுதிகளும் தொடர்ச்சியாக வெளிவர இருக்கின்றது என்பதனைக் கூறிவைக்க விரும்புகிறேன்.

நூலாக்கத்திற்கு வேண்டிய ஆலோசனைகளையும் அரிய பல கருத்துக்களையும் தந்துதவியதுடன் 'அணிந்துரை' எழுதியும் நூலினைச் சிறப்பித்த எனது விரிவுரையாளரும் யாழ் பல்கலைக்கழக, கணித புள்ளிவிபரவியல் துறையின் சிரேஷ்ட விரிவுரையாளருமான திரு. ச. யோகராசா அவர்களுக்கு மிகவும் கடமைப்பட்டுள்ளேன்.

மேலும் நூலாக்கத்திற்கு பல வழிகளிலும் பல்வேறு உதவிகளையும் புரிந்திட்ட ஆசிரியர்கள், நண்பர்கள், மாணவர்களுக்கும், தமது நிறுவனத்தினூடாக இந்நூலினை வெளியிட முன்வந்த "பிறைட் புத்தக நிறுவன (Bright Book Centre)" இயக்குனர் கலாநிதி பொன். சக்திவேல் அவர்களுக்கும், சிறந்த முறையில் அச்சேற்றி ஆக்கித்தந்த "லக்ஷ்மி அச்சக" ஊழியர்களுக்கும் எனது நன்றிகளைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

இந்நூலில் காணப்படும் தவறுகளைச் சுட்டிக்காட்டி மறுபதிப்பை சிறப்பாக்குவதற்கு வேண்டிய சகல ஆலோசனைகளும் நன்றியுடன் வரவேற்கப்படும்.

நன்றி!

V. T. மதியழகன்

யாழ்ப்பாண விலாசம்:
அம்மன் கோவிலடி,
அல்வாய் வடக்கு,
அல்வாய்.

கொழும்பு விலாசம்:
58, பண்டாரநாயக்கா மாவத்தை,
இரத்தமலாணை.
தொ.பே: 7139699

பொருளடக்கம்

நிகழ்தகவு	பக்கம்
1) மாதிரிவெளிகளும் நிகழ்ச்சிகளும்	01
2) நிகழ்தகவு	08
3) தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்வுகள்	17
4) சாரா நிகழ்வுகள்	24
5) நிபந்தனை நிகழ்தகவு	32
6) பேய்ஸ் தேற்றம்	42
7) முடிவற்ற மாதிரிவெளி	54
வீவரணப் புள்ளிவீபரவியல்	
8) அமைவிடத்தின் அளவைகள்	55
9) விலகலின் அளவைகள்	68
10) பரம்பலின் வடிவங்கள்	82
புள்ளிவீபரவியல்	
11) எழுமாற்று மாறிகள்	86
12) பின்னக நிகழ்தகவு பரம்பல்	87
13) தொடர் நிகழ்தகவு பரம்பல்	112
14) பின்னக சீரான பரம்பல்	131
15) பேணுயிலி பரம்பல்	137
16) ஈருறுப்புப் பரம்பல்	141
17) பொய்சோன் பரம்பல்	158
18) கேத்திரகணிதப் பரம்பல்	176
19) தொடர் சீரான பரம்பல்	181
20) அடுக்குக் குறிப் பரம்பல்	191
21) செவ்வன் பரம்பல்	197
22) ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கம்	217
23) பொய்சோன் பரம்பலுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கம்	221
24) நியம செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணை	242
விடைகள்	243

நிகழ்தகவு (Probability)

மாதிரி வெளிகளும் நிகழ்ச்சிகளும்

அறிமுகம்:-

நமது அன்றாட வாழ்வில் நடைபெறும் சில நிகழ்ச்சிகளைப் பற்றிய பல்வேறு முடிவுகளை எடுப்பதற்காக நாம் பரிசோதனைகளைச் செய்ய வேண்டியுள்ளது. இவ்வாறு நாம் செய்யக்கூடிய பரிசோதனைகளை இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) தீர்மானிக்கக் கூடிய பரிசோதனை:-

பரிசோதனை ஒன்றின் பெறுபேறுகள் (outcomes) பற்றி உறுதியாகக் கூறப்படமுடியுமாயின் அப்பரிசோதனை “தீர்மானிக்கக் கூடிய பரிசோதனை” எனப்படும்.

Eg: (i) 20km/h எனும் சீரான கதியில் செல்லும் வாகனம் 2 மணித்தி யாலங்களில் 40km தூரம் செல்லும்.

(ii) கிழக்கில் உதிக்கும் சூரியன் மேற்கில் மறையும்.

(2) எழுமாற்றுப் பரிசோதனை:- (Random Experiment)

பரிசோதனை ஒன்றின் முடிவுகள் பற்றி உறுதியாகக் கூறப்பட முடியாததாயின் அப்பரிசோதனை ‘எழுமாற்றுப் பரிசோதனை’ எனப்படும்.

Eg: (i) நாணயம் ஒன்றைச் சுண்டும்போது தலை விழுமா அல்லது பூ விழுமா என உறுதியாகக் கூறமுடியாது.

(ii) இன்று மழை பெய்தால் நாளை மழை பெய்யுமா என உறுதியாகக் கூறமுடியாது.

(iii) பிறந்த மனிதன் 5 வருடத்திற்குள் இறப்பானா என உறுதியாகக் கூறமுடியாது.

மாதிரி வெளி (Sample Space)

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின்போது சாத்தியமாகக்கூடிய எல்லாப் பெறுபேறுகளையும் கொண்ட தொடை “மாதிரி வெளி” எனப்படும். இம்மாதிரி வெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு பெறுபேறுகளும் ‘மாதிரிப் புள்ளிகள்’ எனப்படும். மாதிரி வெளி S என்ற எழுத்தினால் குறிக்கப்படும்.

Eg: (i) 1 இலிருந்து 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை ஒருமுறை உருட்டப்படும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுக.

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S ஆனது பின்வருமாறு குறிக்கப்படும்.

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

இங்கு 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்பன மாதிரிப் புள்ளிகள் ஆகும்.

Eg: (ii) கோடாத நாணயம் ஒன்று இருமுறை சுண்டப்படும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையைக் கருதுக.

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S ஆனது பின்வருமாறு குறிக்கப்படும்.

$$S = \{ HT, TH, TT, HH \}$$

H, T என்பன முறையே நாணயத்தின் தலை, பூ என்பவற்றைக் குறிக்கிறது.

இங்கு HT, TH, TT, HH என்பன மாதிரிப் புள்ளிகள் ஆகும்.

குறிப்பு:-

- (i) மாதிரிவெளியிலுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாயின் அம்மாதிரிவெளி முடிவுற்ற மாதிரிவெளி எனப்படும்.
- (ii) மாதிரிவெளியிலுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவிலியாயின் அம்மாதிரிவெளி முடிவுற்ற மாதிரிவெளி எனப்படும்.

நிகழ்ச்சி (Event)

மாதிரிவெளி ஒன்றின் ஒவ்வொரு தொடைப் பிரிவும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி எனப்படும்.

இந்நிகழ்ச்சிகள் A, B, C,..... என்ற எழுத்துக்களினால் குறிக்கப்படும்.

Eg: (i) 1 இலிருந்து 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை ஒன்று ஒருமுறை உருட்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுக.

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ஆகும்.

$\{ 2, 4 \}$ என்பது S இன் ஓர் தொடைப்பிரிவு ஆகும். இதனை A இனால் குறித்தால்

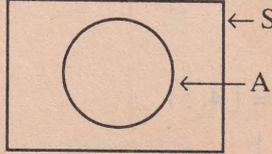
$$A = \{ 2, 4 \}$$

ஆகவே A என்பது ஓர் நிகழ்வு.

இதேபோல் $B = \{ 1, 3, 5 \}$ என்பதும் ஓர் நிகழ்வு ஆகும்.

நிகழ்ச்சி ஒன்றினை வென்வரிப்படத்தில் குறித்தல்.

S என்னும் மாதிரிவெளியில் A என்பது ஓர் நிகழ்ச்சி என்க. இதனை வென்வரிப்படத்தில் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

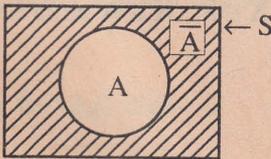


நிகழ்ச்சிகளின் அட்சர கணீகம்

நிகழ்ச்சிகள் என்பது எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் தொடைப் பிரிவுகள் என்பதால், தொடைக் கொள்கைகளிலுள்ள எல்லாவிதமான கணிதச் செய்கைகளும் நிகழ்ச்சிகளையும் திருப்திப்படுத்தும்.

(1) நிரப்பு நிகழ்ச்சி

மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள ஒரு நிகழ்வு A இன் மாதிரிப்புள்ளிகள் தவிர்ந்த ஏனைய மாதிரிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட நிகழ்ச்சி A இன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி எனப்படும். இது \bar{A} இனால் குறிக்கப்படும்.



நிழற்றப்பட்ட பிரதேசம் \bar{A} என்னும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

$$\bar{A} = \{ X \in S; X \notin A \}$$

Eg: $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

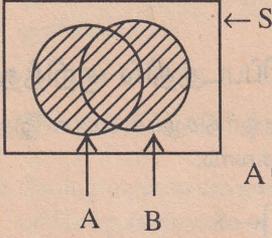
$$A = \{ 2, 3, 5 \}$$

$$\bar{A} = \{ 1, 4 \}$$

(2) இரு நிகழ்ச்சிகளின் ஒன்றிப்பு

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S இல் A, B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. A இலுள்ள அல்லது B இலுள்ள

அல்லது A, B ஆகிய இரண்டிலுமுள்ள எல்லா மாதிரிப்புள்ளிகளையும் கொண்ட நிகழ்ச்சி A, B என்னும் நிகழ்ச்சிகளின் ஒன்றிப்பும் எனப்படும். இது $A \cup B$ இனால் குறிக்கப்படும்.



நிழற்றப்பட்ட பிரதேசம் $A \cup B$ என்னும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

$$A \cup B = \{X \in S; X \in A \text{ அல்லது } X \in B\}$$

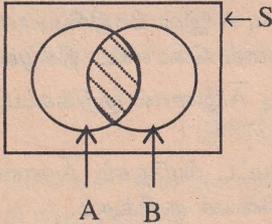
Eg: $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$A = \{ 1, 3, 5 \}$ $B = \{ 4, 5 \}$

$A \cup B = \{ 1, 3, 4, 5 \}$

(3) இரு நிகழ்ச்சிகளின் இடைவெட்டு

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S இல் A, B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொதுவான எல்லா மாதிரிப்புள்ளிகளையும் கொண்ட நிகழ்ச்சியானது இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளினதும் இடைவெட்டு எனப்படும். இது $A \cap B$ இனால் குறிக்கப்படும்.



நிழற்றப்பட்ட பிரதேசம் $A \cap B$ என்னும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

$$A \cap B = \{X \in S; X \in A \text{ உம் } X \in B\}$$

Eg: $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

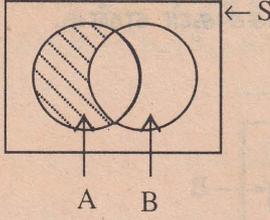
$A = \{ 2, 3, 5 \}$ $B = \{ 4, 5, 2, 7 \}$

$A \cap B = \{ 2, 5 \}$

(4) இரு நிகழ்ச்சிகளின் வித்தியாசம்

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S இல் A, B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. A இலே உள்ளதும் B இலே இல்லாததுமான மாதிரிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட நிகழ்ச்சி இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளினதும் வித்தியாசம் எனப்படும்.

இது A - B இனால் குறிக்கப்படும்.



நிழற்றப்பட்ட பிரதேசம் A - B என்னும் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

$$A - B = \{X \in S; X \in A \text{ உம் } X \notin B\}$$

Eg: $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

$$A = \{ 2, 4, 5, 6 \}$$

$$B = \{ 1, 2, 5 \}$$

$$A - B = \{ 4, 6 \}$$

Note:

$$(i) A - B = A \cap \bar{B}$$

$$(ii) A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$$

நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொருந்தக் கூடிய தொடை விதிகள்

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் மாதிரிவெளி S இல் A, B, C என்பன யாதாயினும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க.

1) பரிவர்த்தனை விதி:- $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$

2) சேர்த்தி விதி:- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3) பரம்பல் விதி:- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

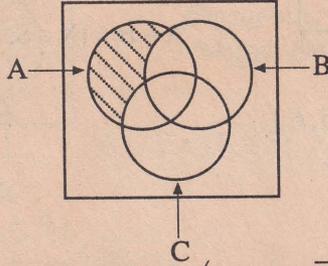
4) தியோகன் விதி (De Morgan's Law) :-

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

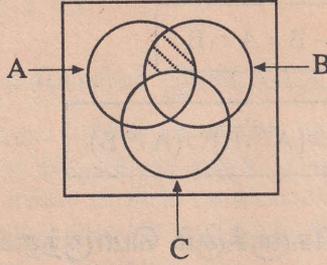
$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

A, B, C என்பன மாதிரிவெளி S இலுள்ள யாதாயினும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க.

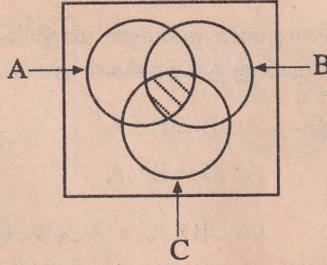
(i) A மாத்திரம் நிகழ்தல் ($A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$)



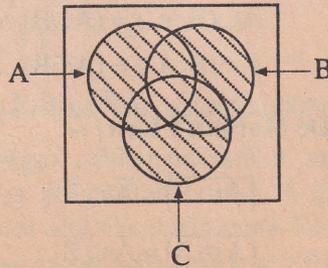
(ii) A யும் B யும் மாத்திரம் நிகழ்தல் ($A \cap B \cap \bar{C}$)



(iii) மூன்று நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்தல் ($A \cap B \cap C$)

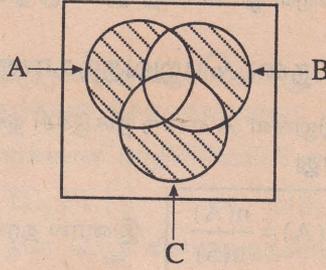


(iv) குறைந்தது ஒரு நிகழ்ச்சியாவது நிகழ்தல் ($A \cup B \cup C$)



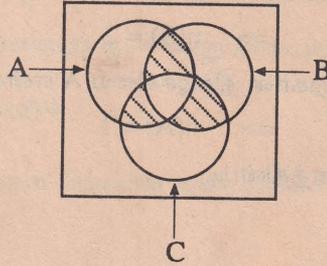
(v) ஒரு நிகழ்ச்சி மட்டும் நிகழ்தல்

$$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$$

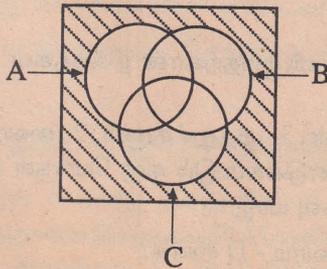


(vi) இரு நிகழ்ச்சிகள் மாத்திரம் நிகழ்தல்

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap C \cap \bar{B}) \cup (B \cap C \cap \bar{A})$$



(vii) எந்த நிகழ்ச்சிகளும் நிகழாதிருத்தல் $\overline{(A \cup B \cup C)}$



குறிப்பு: 1) $n(A)$ என்பது A என்ற நிகழ்ச்சியிலுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

2) $n(S)$ என்பது S என்ற மாதிரிவெளியிலுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

நிகழ்தகவு (Probability)

குறித்த ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான சாத்தியக்கூறினை அண்ணளவாக மதிப்பிடும் ஓர் கணித அளவீடு நிகழ்தகவு எனப்படும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

மாதிரிவெளி S இலுள்ள A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு P(A) ஆனது

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

Eg: 1) கோடாத நாணயம் ஒன்று சுண்டப்படுகிறது. தலை தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S எனில்

$$S = \{ H, T \} \quad \Rightarrow \quad n(S) = 2$$

தலை விழுவதற்கான நிகழ்ச்சியை A என்க.

$$A = \{ H \} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 1$$

வரைவிலக்கணத்தின்படி

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

ஆகவே தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

2) ஒரு பையினுள் 3 முத்துக்களும் 2 வைரங்களும் உள்ளன. எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் ஒரு பொருள் முத்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

முத்து - P, வைரம் - D என்க.

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S எனில்

$$S = \{ P, P, P, D, D \} \quad \Rightarrow \quad n(S) = 5$$

எடுக்கப்படும் பொருள் முத்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை A என்க.

$$A = \{ P, P, P \} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

3) ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டப்படுகிறது. இருமுறையும் ஒரே பேறு கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S என்க.

$$S = \{ HH, HT, TH, TT \} \Rightarrow n(S) = 4$$

இருமுறையும் ஒரே பேறு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியை A என்க.

$$A = \{ HH, TT \} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ஆகவே இருமுறையும் ஒரே பேறு கிடைப்பதற்கான

நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகும்.

குறிப்பு: நிகழ்தகவுக்கான மேலுள்ள வரைவிலக்கணங்களிலிருந்து,

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) பரிசோதனை ஒன்றின் பெறுபேறுகள் சமசந்தர்ப்பங்களாக அமையும்போது மாத்திரம் பாவிக்கப்படலாம்.

(iv) இது பண்டைய நிகழ்தகவுக் கொள்கை எனப்படும்.

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறாததற்கான நிகழ்தகவு

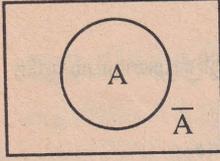
மாதிரிவெளி S இல் A என்ற நிகழ்ச்சியைக் கருதுக. A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு P(A) எனில், A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறாததற்கான நிகழ்தகவு $1 - P(A)$ இனால் தரப்படும். இது $P(\bar{A})$ இனால் குறிக்கப்படும்.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\therefore P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

இங்கு A, \bar{A} என்பன நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

நிறுவல்:-



← S

மாதிரிவெளியில் A என்ற நிகழ்ச்சியைக் கருதுக.

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(S)$$

இருபக்கமும் $n(S)$ இனால் பிரிக்கும்போது

$$\frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(\bar{A})}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Eg: i) $S = \{ a, b, c, d, e \}, A = \{ a, b, c \}$ எனில் $P(\bar{A})$ ஐக் காண்க?

$$n(S) = 5, \quad n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{5}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{5}$$

ii) 1தொடக்கம் 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை ஒன்று உருட்டப்படுகிறது. தோன்றும் எண் 3 இன் பெருக்கமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? தோன்றும் எண் 3 இன் பெருக்கமாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி A என்க.

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, \} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{ 3, 6 \} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

தோன்றும் என 3 இன் பெருக்கமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி \bar{A} ஆகும்.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3}$$

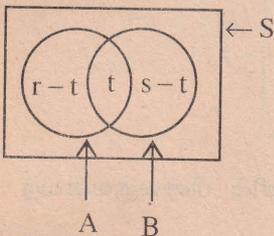
$$P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$$

நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டல் விதி

A, B என்பன மாதிரிவெளி S இலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{ஆகும்.}$$

நிறுவல்:-



$$n(S) = n$$

$$n(A) = r$$

$$n(B) = s$$

$$n(A \cap B) = t$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{r + s - t}{n}$$

$$P(A \cup B) = \frac{r}{n} + \frac{s}{n} - \frac{t}{n}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Eg: 1) $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ எனில் $P(A \cup B)$ ஐக்

காண்க?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20}$$

$$= \frac{9}{20}$$

Eg:2) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{16}$ எனில் $P(\overline{A \cap B})$ ஐக் காண்க?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$$

$$P(A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) = 1$$

$$\frac{9}{16} + P(\overline{A \cup B}) = 1$$

$$P(\overline{A \cup B}) = \frac{7}{16}$$

திமோகன் விதிப்படி, $(\overline{A \cap B}) = (\overline{A \cup B})$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$P(\overline{A \cap B}) = \frac{7}{16}$$

Eg: 3) $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(\overline{A})$ (iii) $P(\overline{B})$

(iv) $P(\overline{A \cap B})$ (v) $P(\overline{A \cup B})$

(vi) $P(A \cap \overline{B})$ (vii) $P(B \cap \overline{A})$

விடை: (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

(ii) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$(iii) P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(iv) \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} \text{ (திமோகன் விதி)}$$

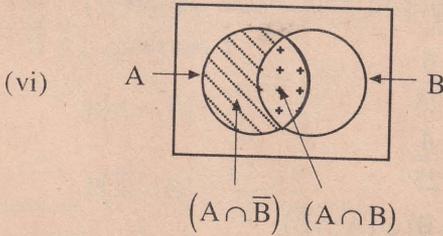
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \\ = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$(v) \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} \text{ (திமோகன் விதி)}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \\ = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$(vii) B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Eg: 4) மண்வள ஆராய்ச்சி நிறுவனம் ஒன்றில் 50 பேர் பணிபுரிகின்றனர். இவர்களில் 40 வயதிற்குட்பட்ட பட்டதாரிகள் 10 பேர். 40 வயதிற்கு மேற்பட்ட பட்டதாரிகள் 12 பேர். 40 வயதிற்குட்பட்ட பட்டதாரி அல்லாதோர் 8 பேர். பட்டதாரிகளின் தொடை A ஆகவும். 40 வயதிற்குட்பட்டோரின் தொடை B ஆகவும் இருந்தால் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

$$(i) P(A) \quad (ii) P(B) \quad (iii) P(A \cap B)$$

$$(iv) P(A \cap \bar{B}) \quad (v) P(B \cap \bar{A}) \quad (vi) P(\overline{A \cup B})$$

$A = \{ \text{பட்டதாரிகள்} \}$

$\bar{A} = \{ \text{பட்டதாரிகள் அல்லாதோர்} \}$

$B = \{ 40 \text{ வயதிற்கு உட்பட்டோர்} \}$

$\bar{B} = \{ 40 \text{ வயதிற்கு மேற்பட்டோர்} \}$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

$$(i) A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}$$

$$(ii) B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25}$$

$$(iii) P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$(iv) P(A \cap \bar{B}) = \frac{6}{25}$$

$$(v) P(B \cap \bar{A}) = \frac{4}{25}$$

$$(vi) P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \left\{ \frac{11}{25} + \frac{9}{25} - \frac{1}{5} \right\} = \frac{2}{5}$$

Eg: 5) தனியார் கல்வி நிலையம் ஒன்றில் உயர்கல்வி பயிலும் 50 மாணவர்களுள் 5 ஆண்கள் தலைமுடியை நீளக் கூந்தலாக வளர்த்துள்ளனர். 10 பெண்களும் 20 ஆண்களும் தலைமுடியை கட்டையாக வெட்டியுள்ளனர். இவர்களுள் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால் இவர் கூந்தல் வளர்த்துள்ள பெண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

A, B என்னும் நிகழ்ச்சிகளைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்க.

A = {கூந்தல் வளர்த்துள்ளோர்}

B = {பெண்கள்}

\overline{A} = {தலைமுடி கட்டையாக வெட்டியுள்ளோர்}

\overline{B} = {ஆண்கள்}

$$P(A \cap \overline{B}) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$(i) P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{1}{10} + P(A \cap B)$$

$$(ii) P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{5} + P(A \cap B)$$

$$(iii) P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$(iv) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{10} + P(A \cap B) + \frac{1}{5} + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

ஆகவே தெரியப்படுபவர் கூந்தல் வளர்த்துள்ள பெண்ணாக

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{10}$ ஆகும்.

பயிற்சி 1

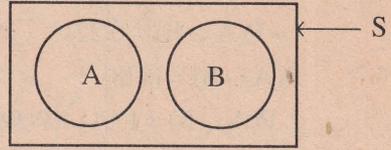
1. $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ எனில் $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap B)$ என்பவற்றைக் காண்க?
2. $P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{7}$, $P(\bar{A} \cap B) = \frac{9}{28}$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{14}$ எனில் $P(A \cap B)$ ஐக் காண்க?
3. ஒரு பாடசாலையில் உயர்தர வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்கள் விஞ்ஞானப்பிரிவிலும் கலைப்பிரிவிலும் கல்வி பயில்கின்றனர். விஞ்ஞானப் பிரிவில் கல்வி கற்பவர்களில் 40 பேர் ஆண்களும் 20 பேர் பெண்களும் ஆவர். கலைப்பிரிவில் கல்வி கற்கின்றவர்களில் 30 பேர் ஆண்களாகும். இவர்களுள் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் இவர் கலைப்பிரிவில் கல்வி கற்கின்ற பெண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
4. பழைய வாகனங்கள் விற்கும் விற்பனை நிலையத்தில் 20% ஆன வாகனங்களுக்கு எஞ்சின் இல்லை. 40% ஆன வாகனங்களில் ரயர்கள் தேய்வடைந்துள்ளது. தேய்வடைந்த ரயர்களைக் கொண்டுள்ள 15% ஆன வாகனங்களுக்கு எஞ்சின் இல்லை. எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு வாகனம் நல்ல ரயரையும் எஞ்சினையும் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
5. ஒரு பாடசாலையில் 26 ஆசிரியர்கள் பணிபுரிகின்றனர். பட்டதாரி ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை 6 உம் பட்டதாரி ஆசிரியைகளின்

எண்ணிக்கை 7 உம் பட்டதாரி அல்லாத ஆசிரியர்களின் எண்ணிக்கை 5 உம் ஆகும். எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்படும் ஒருவர் பட்டதாரி அல்லாத ஆசிரியையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்வுகள் (Mutually Exclusive Events)

மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் பொதுவான மாதிரிப்புள்ளிகள் எதுவும் இல்லையெனில் அவ்விரு நிகழ்ச்சிகளும் தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

அதாவது $A \cap B = \phi$
 $\therefore P(A \cap B) = 0$



ஆனால் $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $P(A \cap B) = 0$ ஆதலால்
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

எனவே A, B என்னும் இரு நிகழ்வுகளும் தம்முள் புறநீங்குவன எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eg:1) A, B என்னும் தம்முள் புறநீங்கும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு

$P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$ எனில் $P(A \cup B)$ ஐக் காண்க?

விடை:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

A, B என்பன தம்முள் புறநீங்குவனவாகையால்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$$

Eg:2) A, B என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள யாதாயினும் இரு நிகழ்வுகள் என்க. $P(\bar{A}) = 0.58$, $P(B) = 0.35$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.22$ எனில் இவ்விரு நிகழ்வுகளும் தம்முள் புறநீங்குவன அல்ல எனக் காட்டுக.

$$P(B) = 0.35$$

$$P(\bar{A}) = 0.58 \Rightarrow P(A) = 0.42$$

$$\therefore P(A) + P(B) = 0.77$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.22$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 0.22 \quad (\text{திமோகன் விதிப்படி})$$

$$1 - P(A \cup B) = 0.22$$

$$P(A \cup B) = 0.78$$

$$\therefore P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$$

எனவே A, B என்பன தம்முள் புறநீங்குவன அல்ல.

Eg:3) 1 இலிருந்து 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கோடாத இரு தாயக்கட்டைகள் ஒன்றாக உருட்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 7 அல்லது 11 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S எனில்

$$S = \{ (1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6) \}$$

$$\therefore n(S) = 36$$

A, B என்னும் நிகழ்வுகளை பின்வருமாறு வரையறுக்க.

$$A = \{ \text{தோன்றும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 7} \}$$

$$B = \{ \text{தோன்றும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 11} \}$$

$$A = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

$$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \{ (5,6), (6,5) \}$$

$$n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{18}$$

இங்கு A, B என்னும் இரு நிகழ்வுகளுக்கும் பொதுவான மாதிரிப்புள்ளிகள் இல்லை. எனவே A, B என்பன தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்வுகள்.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

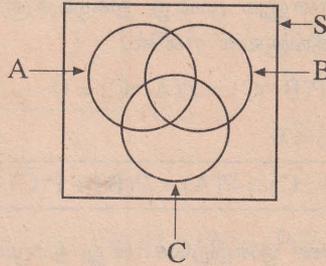
$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$$

மூன்று நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டல் விதி

ஒரு பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி S இல் A, B, C என்பன யாதாயினும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

நிறுவல்:-



$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] \\ = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] \text{-----(i)}$$

$$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ = P[(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \text{-----(ii)}$$

(i), (ii) =>

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Eg:1) கொழும்பிலிருந்து பலாலி விமானநிலையத்திற்கு ஒரு நாளில் மூன்று விமானங்கள் புறப்படுகின்றன. மூன்று விமானங்களும் சரியான நேரத்திற்கு வந்தடைவதற்கான நிகழ்ச்சிகள் முறையே A, B, C ஆகும்.

$$P(A) = 0.93, \quad P(B) = 0.89, \quad P(C) = 0.91, \quad P(A \cap B) = 0.87,$$

$P(B \cap C) = 0.85$, $P(A \cap C) = 0.86$, $P(A \cap B \cap C) = 0.81$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இம் மூன்று விமானங்களுள் ஆகக் குறைந்தது ஒன்றாவது சரியான நேரத்திற்கு வந்தடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: ஆகக்குறைந்தது ஒரு விமானமாவது சரியான நேரத்திற்கு வந்தடையும் நிகழ்ச்சி $A \cup B \cup C$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) \\ &\quad - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0.93 + 0.89 + 0.91 - 0.87 - 0.85 - 0.86 + 0.81 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.96$$

குறிப்பு:- A, B, C என்னும் மூன்று நிகழ்வுகளும் ஒன்றுக்கொன்று தம்முள் புறநீங்குவன எனில்,

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = 0$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

$$\therefore \boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)}$$

Eg:1) A, B, C என்பன ஒன்றிற்கொன்று தம்முள் புறநீங்கும் மூன்று நிகழ்வுகள் ஆகும். $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

$$(i) P(A \cup B \cup C) \quad (ii) P(B \cup C) \quad (iii) P[\bar{A} \cap (B \cup C)]$$

விடை: (i) A, B, C என்பன தம்முள் புறநீங்குவன எனில்,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= 0.2 + 0.3 + 0.2 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B \cup C) = 0.7$$

(ii) $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ (B, C என்பன தம்முள் புறநீங்குவன)

$$P(B \cup C) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$(iii) P[\bar{A} \cap (B \cup C)] = P[(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C)]$$

$$= P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap C)$$

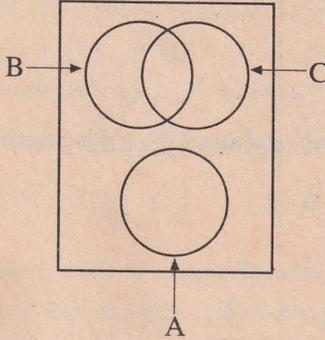
$$= P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$= 0.3 - 0 + 0.2 - 0$$

$$P[\bar{A} \cap (B \cup C)] = 0.5$$

Eg:2) மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள யாதாயினும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளான A, B, C இல் A யும் B யும் தம்முள் புறநீங்குவன. A யும் C யும் தம்முள் புறநீங்குவன. $P(A) = a$, $P(B) = 2a$, $P(C) = 2a$, $P(B \cap C) = b$, $P(A \cup B \cup C) = 1$ எனில் $b = 5a - 1$ எனக்காட்டுக.

அத்துடன் $\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{1}{3}$ எனவும் காட்டுக?



$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cap C) = 0$$

$$P(B \cap C) = b$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$1 = a + 2a + 2a - b$$

$$b = 5a - 1$$

$$B \cap C = 0 \text{ எனில் } b = 0$$

$$5a - 1 = 0$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$B \cap C = B \text{ எனில் } P(B \cap C) = P(B)$$

$$b = 2a$$

$$5a - 1 = 2a$$

$$3a = 1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

ஆகவே

$$\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{1}{3}$$

தம்முள் புறநீங்கும் இயல்பினைப் பாவித்து
நிகழ்தகவு பற்றிய தேற்றங்களை நிறுவுதல்.

(i) $P(\phi) = 0$

நிறுவல்: S, ϕ என்பன தம்முள் புறநீங்கும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$S = S \cup \phi ; S \cap \phi = 0$$

$$P(S) = P(S \cup \phi)$$

$$P(S) = P(S) + P(\phi)$$

$$P(\phi) = 0$$

(ii) $P(\bar{A}) + P(A) = 1$

நிறுவல்: A, \bar{A} என்பன தம்முள் புறநீங்கும் இரு நிகழ்வுகள் ஆகும்.

$$S = A \cup \bar{A} ; A \cap \bar{A} = 0$$

$$P(S) = P(A \cup \bar{A})$$

$$P(S) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\therefore P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(iii) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

நிறுவல்: $A \cap B, A \cap \bar{B}$ என்பன தம்முள் புறநீங்கும் இரு நிகழ்வுகள் ஆகும்.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

(iv) $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$

நிறுவல்: $A \cap \bar{B}, B$ என்பன தம்முள் புறநீங்கும் இரு நிகழ்வுகள் ஆகும்.

$$\therefore (A \cap \bar{B}) \cap B = 0$$

$$(A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap S = (A \cup B)$$

$$\therefore A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$$

$$P(A \cup B) = P[(A \cap \bar{B}) \cup B]$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$$

பயிற்சி 2

1. A, B என்பன தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்வுகளாகவும் $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ ஆகவும் இருப்பின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(\bar{A})$ (iii) $P(\bar{A} \cap B)$

2. A, B, C என்பன தம்முள் புறநீங்கும் மூன்று நிகழ்வுகளாகவும் $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.4$ ஆகவும் இருப்பின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

(i) $P(A \cup B \cup C)$ (ii) $P(A \cap C)$

(iii) $P[\bar{A} \cap (B \cup C)]$ (iv) $P[(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup C]$

3. 1 தொடக்கம் 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட இரு கோடாத தாயக் கட்டைகள் உருட்டப்படுகின்றது. இரு தாயக்கட்டைகளினதும் ஈட்டுக்களின் கூட்டுத்தொகை 6 இலும் குறைவாக அல்லது 10 இலும் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

4. 1 தொடக்கம் 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட இரு கோடாத தாயக் கட்டைகள் ஒருமித்து உருட்டப்படுகின்றது. இரு தாயக்கட்டைகளினதும் ஈட்டுக்களின் கூட்டுத்தொகை 5 இலும் குறைவாக அல்லது 9 இலும் கூடுதலாக அல்லது 7 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

5. A, B, C என்னும்மூன்று நிகழ்வுகளில் A யும் Cயும் தம்முள் புறநீங்கு வனவாகும்.

$$P(A) = P(B) = P(C) = a$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = b$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 \text{ ஆகவும் இருந்தால் } 3a - 2b = 1 \text{ எனக்காட்டுக.}$$

மேலும் $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$ எனவும் $P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$ இன் அதிகூடிய

பெறுமானம் $\frac{1}{3}$ எனவும் காட்டுக?

சாரா நிகழ்வுகள் (Independent Events)

மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள A, B என்னும் இரு நிகழ்வுகள் சாராநிகழ்வுகள் எனில்,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ ஆகும்.}$$

Eg:1) A, B என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள இரு சாராநிகழ்வுகளாகும். $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{5}$ எனில் P(B) ஐக் காண்க?

A, B சாராநிகழ்வுகள் என்பதால்

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{9}{10}$$

Eg:2) A, B என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள இரு சாராநிகழ்வுகள் எனில் $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ஆக இருந்தால் P(B) ஐக் காண்க?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A, B சாராநிகழ்வுகள் எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B)$$

$$\frac{4}{15} = \frac{2}{3}P(B)$$

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

Eg:3) A, B என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள இரு சாராநிகழ்வுகளாகும். $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ எனில் P(A), P(B)

என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

விடை: $P(A) = a$, $P(B) = b$ என்க.

A, B சாராநிகழ்வுகள் ஆதலால்

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{3} = ab \text{ -----(i)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{5}{6} = a + b - \frac{1}{3}$$

$$a + b = \frac{7}{6} \text{ -----(ii)}$$

(i), (ii) \Rightarrow

$$a + \frac{1}{3a} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{3a^2 + 1}{3a} = \frac{7}{6}$$

$$6a^2 + 2 = 7a$$

$$(3a - 2)(2a - 1) = 0$$

$$a = \frac{2}{3} \text{ or } a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{2}{3} \text{ எனில் } b = \frac{1}{2}; \quad a = \frac{1}{2} \text{ எனில் } b = \frac{2}{3}$$

(I) A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகளும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகள் ஆதலால்

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$$

$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)\}$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) [1 - P(A)]$$

$$= [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

எனவே \overline{A} , \overline{B} என்பன சாரா நிகழ்வுகள் ஆகும்.

(II) A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனில் \bar{A} , B என்பனவும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(B)[1 - P(A)]$$

$$= P(B) \cdot P(\bar{A})$$

$$\therefore P(\bar{A} \cap B) = P(B) \cdot P(\bar{A})$$

எனவே \bar{A} , B என்பனவும் சாரா நிகழ்வுகள் ஆகும்.

Eg:1) $P(\bar{A}) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$ எனில் A, B என்பனவும்.

\bar{A} , \bar{B} என்பனவும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனக் காட்டுக?

$$P(\bar{A}) = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{5}{8}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

எனவே \bar{A} , \bar{B} என்பன சாரா நிகழ்வுகள் ஆகும்.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{24}$$

$$\text{ஆனால் } P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

எனவே A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகள் ஆகும்.

Eg:2) கணவன் 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர்வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். மனைவி 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ எனில், பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

- இருவரும் 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர்வாழ்தல்.
- எவருமே 10 வருடங்கள் உயிர்வாழாதிருத்தல்.
- குறைந்தது ஒருவராவது 10 வருடங்கள் உயிர்வாழ்தல்.
- மனைவி மாத்திரம் 10 வருடங்கள் உயிர்வாழ்தல்.
- கணவன் மாத்திரம் 10 வருடங்கள் உயிர்வாழ்தல்.

A, B என்னும் இரு நிகழ்வுகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்க.

A = {கணவன் 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர்வாழ்தல்.}

B = {மனைவி 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர்வாழ்தல்.}

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

\bar{A} = {கணவன் 10 வருடங்கள் உயிர்வாழாதிருத்தல்.}

\bar{B} = {மனைவி 10 வருடங்கள் உயிர்வாழாதிருத்தல்.}

$$P(\bar{A}) = \frac{3}{4}, \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$$

இங்கு A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகளாகும். எனவே \bar{A} , \bar{B} என்பனவும் சாரா நிகழ்வுகளாகும்.

- $A \cap B$ = {இருவரும் 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர்வாழ்தல்.}

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{சாரா நிகழ்வுகள்})$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

- $\bar{A} \cap \bar{B}$ = {இருவரும் 10 வருடங்களுக்கு மேல் உயிர்வாழாதிருத்தல்.}

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \quad (\text{சாரா நிகழ்வுகள்})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

(iii) $A \cup B = \{ \text{குறைந்தது ஒருவராவது 10 வருடங்கள் உயிர்வாழ்தல்.} \}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{சாரா நிகழ்வுகள்})$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

(iv) $\bar{A} \cap B = \{ \text{மனைவி மாத்திரம் 10 வருடங்கள் உயிர்வாழ்தல்.} \}$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \quad (\text{சாரா நிகழ்வுகள்})$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

(v) $A \cap \bar{B} = \{ \text{கணவன் மாத்திரம் 10 வருடங்கள் உயிர்வாழ்தல்.} \}$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \quad (\text{சாரா நிகழ்வுகள்})$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

மூன்று நிகழ்வுகளின் சாராமை

மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள A, B, C என்னும் மூன்று நிகழ்வுகளும் சாரா நிகழ்வுகள் எனில்,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad \text{ஆகும்.}$$

Eg:1) ஒரு நாணயமானது மூன்றுமுறை சுண்டப்படுகிறது. மூன்று முறையும் தலை தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$P(H) = \frac{1}{2} \quad P(T) = \frac{1}{2}$$

மூன்று முறையும் தலை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(H \cap H \cap H)$ ஆகும். இவை சாரா நிகழ்ச்சிகள் ஆதலால்

$$P(H \cap H \cap H) = P(H) \cdot P(H) \cdot P(H)$$

$$P(H \cap H \cap H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Eg:2) ஒரு விமானம் மூன்று இயந்திரங்களைக் கொண்டுள்ளது. முதலாவது இயந்திரம் பழுதடைந்தால் இரண்டாவது இயந்திரம் செயற்படும். இரண்டாவது இயந்திரம் பழுதடைந்தால் மூன்றாவது இயந்திரம் செயற்படும். மூன்று இயந்திரங்களும் தனித்தனியே பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே

0.15, 0.2, 0.25 ஆகும். இம்மூன்று இயந்திரங்களும் பழுதடையாததற்கான நிகழ்தகவு யாது?

A, B, C என்னும் மூன்று நிகழ்தகவுகளையும் பின்வருமாறு வரையறுக்க.

$$A = \{\text{முதலாவது இயந்திரம் பழுதடைதல்}\} \Rightarrow P(A) = 0.15$$

$$B = \{\text{இரண்டாவது இயந்திரம் பழுதடைதல்}\} \Rightarrow P(B) = 0.2$$

$$C = \{\text{மூன்றாவது இயந்திரம் பழுதடைதல்}\} \Rightarrow P(C) = 0.25$$

இம்மூன்று நிகழ்தகவுகளும் ஒன்றிற்கொன்று சாரா நிகழ்வுகளாகும். ஆகவே இம்மூன்று இயந்திரங்களும் பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A \cap B \cap C)$ ஆகும்.

$$\therefore P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0.15 \times 0.2 \times 0.25 = 0.0075$$

எனவே இம்மூன்று இயந்திரங்களும் பழுதடையாததற்கான நிகழ்தகவு $P(\overline{A \cap B \cap C})$ ஆகும்.

$$\therefore P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C)$$

$$P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - 0.0075 = 0.9925$$

தேற்றம்:

A, B, C என்னும் மூன்று நிகழ்வுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சாரா நிகழ்வுகள் எனில்,

(i) A யும் $(B \cap C)$ யும்

(ii) A யும் $(B \cup C)$ யும் சாரா நிகழ்வுகள் ஆகும்.

நிறுவல்:

(i) A, B, C என்பன சாரா நிகழ்வுகளாதலால்

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P[A \cap (B \cap C)] = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \text{ -----(1)}$$

ஆனால் B, C என்பனவும் சாரா நிகழ்வுகளாதலால்

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \text{ -----(2)}$$

(2) ஐ (1) இல் பிரதியிட்டால்,

$$P[A \cap (B \cap C)] = P(A) \cdot P(B \cap C)$$

எனவே A யும் $(B \cap C)$ யும் சாரா நிகழ்வுகளாகும்.

$$\begin{aligned}
(ii) P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
&= P(A) [P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C)] \\
&= P(A) [P(B) + P(C) - P(B \cap C)] \\
&= P(A) \cdot P(B \cup C)
\end{aligned}$$

$$\therefore P[A \cap (B \cup C)] = P(A) \cdot P(B \cup C)$$

எனவே A யும் (B ∪ C)யும் சாரா நிகழ்வுகளாகும்.

குறிப்பு: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ என்பன மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள n சாரா நிகழ்வுகள் எனில்,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

ஆகும்.

Eg:1) கோடாத நாணயம் ஒன்று 5 தடவைகள் சுண்டப்படுகிறது. ஒன்றைவிட்டு ஒரு தடவை தலைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$P(H) = \frac{1}{2} \quad P(T) = \frac{1}{2}$$

இவை ஒவ்வொன்றும் சாரா நிகழ்வுகள் ஆதலால்

$$P(H \cap T \cap H \cap T \cap H) = P(H) \cdot P(T) \cdot P(H) \cdot P(T) \cdot P(H)$$

$$P(H \cap T \cap H \cap T \cap H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32} = 0.03$$

Eg:2) ஒரு பையினுள் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. மீள்வைப்புடன் ஒவ்வொன்றாக 5 பந்துகள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றது. இவை சாரா நிகழ்வுகள் எனக் கொண்டு முதலாவது தடவையும் கடைசித் தடவையும் எடுத்தது சிவப்பாகவும் மற்றைய தடவைகள் எடுக்கப்பட்டது வெள்ளையாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

$$P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(W) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(R \cap W \cap W \cap R) = P(R) \cdot P(W) \cdot P(W) \cdot P(R)$$

$$P(R \cap W \cap W \cap R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0.033$$

பயிற்சி - 3

1. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ எனில் A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகள் எனக் காட்டுக?

2. A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகளாகவும் $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$ ஆகவும் இருந்தால் $P(B)$ ஐக் காண்க?

3. A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகளாகவும் $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.2$ ஆகவும் இருந்தால் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cap \bar{B})$ (iii) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

(iv) $P(\overline{A \cup B})$ (v) $P(\bar{A} \cap B)$

4. $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.9$ எனில் A, B என்பன சாரா நிகழ்வுகளா?

5. ராஜன் கணித பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ ஆகும். கண்ணன் கணித பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{5}$ ஆகும். இவ்விரு நிகழ்வுகளும் சாரா நிகழ்வுகள் எனக்கொண்டு பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

(i) இருவரும் சித்தியடைதல்.

(ii) ஒருவர் மட்டும் சித்தியடைதல்.

(iii) ஒருவராவது சித்தியடைதல்.

(iv) இருவரும் சித்தியடையாமல் இருத்தல்.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional Probability)

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள இரு நிகழ்ச்சிகள் A, B என்க. B என்னும் நிகழ்ச்சி நிகழ்ந்துவிட்டது எனத் தரப்படி A என்னும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(A/B)$ ஆனது

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

Eg:1) $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$, $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ எனில் $P(A/B)$ ஐக்காண்க?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{1/5} = \frac{1}{2}$$

Eg:2) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{9}$, $P(A/B) = \frac{1}{2}$ எனில் பின் வருவனவற்றைக் காண்க? (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(B/\bar{A})$

$$(i) \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{P(A \cap B)}{2/9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

$$(ii) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$(iii) \quad B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{1}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Eg:3) பெண்கள் கல்லூரி ஒன்றில் உயர்கல்வி பயிலும் மாணவிகளினதும் அவர்களது பெற்றோர்கள் பற்றிய விபரங்களும் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. 15% ஆன மாணவிகளின் பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்திருந்தனர். 25% ஆன மாணவிகள் காதலில் ஈடுபடவில்லை. காதலில் ஈடுபடாத 10% ஆன மாணவிகளின் பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்திருந்தனர். இம்மாணவிகளில் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால்,

- பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்திருந்தால் அவர் காதலில் ஈடுபடாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- இவர் காதலில் ஈடுபடாதவராக இருந்தால் பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்யாதவர்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்யாதவர்களாக இருந்தால் இவர் காதலில் ஈடுபட்டவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: A, B என்னும் நிகழ்வுகளின் வரையறுக்கப்படுகின்றது.

A = {மாணவிகள் காதலில் ஈடுபட்டிருந்தல்.}

B = {பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்திருந்தல்.}

$$P(B) = 0.15 \quad P(\bar{A}) = 0.25 \quad P(\bar{A} \cap B) = 0.1$$

- பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்திருந்தால் அவர் காதலில் ஈடுபடாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(\bar{A}/B)$ ஆகும்.

$$\therefore P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.15} = 0.66$$

- இவர் காதலில் ஈடுபடாதவராக இருந்தால் பெற்றோர் விவாகரத்து செய்யாதவர்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(\bar{B}/\bar{A})$ ஆகும்.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$0.15 = P(A \cap B) + 0.1$$

$$P(A \cap B) = 0.05$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.75 + 0.15 - 0.05 = 0.85$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0.85 = 0.15$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.15$$

$$P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0.15}{0.25} = 0.6$$

$$(iii) P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$0.75 = 0.05 + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.70$$

பெற்றோர் விவாகரத்துச் செய்யாதவர்களாக இருந்தால் இவர் காதலில் ஈடுபட்டவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A / \overline{B})$ ஆகும்.

$$\therefore P(A / \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.70}{0.85} = 0.823$$

நியந்தனை நிகழ்தகவின் இயல்புகள்

$$(i) P(A/B) \geq 0$$

$$(ii) P(B/B) = 1$$

(ii) A_1, A_2, \dots, A_n என்பன தம்முள் புறநீங்கும் நிகழ்வுகள் எனில்,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n / B) = P(A_1 / B) + \dots + P(A_n / B)$$

ஆகும். இதனைப் பின்வருமாறும் குறிப்பிடலாம்.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i / B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i / B)$$

நிறுவல்:-

(i) நியந்தனை நிகழ்தகவின் படி.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) \geq 0$, $P(B) \geq 0$ என்பதால்

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$$

$$\therefore P(A/B) \geq 0$$

(ii) நிபந்தனை நிகழ்தகவின் படி,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A = B$ ஆக

$$P(B/B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)}$$

$$P(B/B) = 1$$

(iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n / B)$

$$= \frac{P[(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B]}{P(B)}$$

$$= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)]}{P(B)}$$

$(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), \dots, (A_n \cap B)$ என்பன தம்முள் புற

நீங்கும் நிகழ்வுகளாதலால்

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1/B) + P(A_2/B) + \dots + P(A_n/B)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i/B)$$

பெருக்கல் விதி (Multiplicative Rule)

- (i) ஒரு பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியில் A, B என்பன இரு நிகழ்வுகளாயின்,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

- (ii) ஒரு பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியில் A, B, C என்பன மூன்று நிகழ்வுகளாயின்,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)$$

- (iii) ஒரு பரிசோதனையின் மாதிரிவெளியில்

A_1, A_2, \dots, A_n என்பன n நிகழ்வுகள் எனில்

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1})$$

இதனைப் பின்வருமாறும் குறிக்கலாம்.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots \dots \dots P\left(A_n / \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

இதனைக் கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையினால் நிறுவலாம்.

n = 1 ஆக, $P(A_1) = P(A_1)$

n = 2 ஆக, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$

n = P ஆக இம்முடிவு உண்மை என்க.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^p A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \dots \dots \dots P\left(A_p / \bigcap_{i=1}^{p-1} A_i\right)$$

n = P + 1 ஆக,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{p+1} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^p A_i \cap A_{p+1}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^p A_i\right) P\left(A_{p+1} / \bigcap_{i=1}^p A_i\right)$$

(∵ இரு நிகழ்வுகளுக்கு உண்மை)

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \dots \dots \dots P\left(A_{p+1} / \bigcap_{i=1}^p A_i\right)$$

ஆகவே $n = p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனில் $n = p+1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்.

ஆனால் $n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மை.

ஆகவே $n = 2$ இற்கு முடிவு உண்மை.

எனவே கணிதத்தொகுத்தறி முறை மூலம் n இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் மேலுள்ள முடிவு உண்மையாகும்.

Eg:1) ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்றாக மூன்று சீட்டுக்கள் மீள்வைப்பின்றி எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகிறது. A_1, A_2, A_3 என்னும் மூன்று நிகழ்வுகளும் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. A_1 என்பது முதலாவதாக எடுக்கப்படும் சீட்டு சிவப்பு 'ஏஸ்', A_2 என்பது இரண்டாவதாக எடுக்கப்படும் சீட்டு 10 எனும் இலக்கம் உடையது அல்லது ஜாக்கி, A_3 என்பது மூன்றாவதாக எடுக்கப்படும் சீட்டு மூன்றிலும் கூடவாக அல்லது 7 இலும் குறைவாக உள்ள இலக்கம் ஆக உள்ளது. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ என்னும் நிகழ்வு நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

A_1 : முதலாவது சிகப்பு ஏஸ்

A_2 : இரண்டாவது 10 அல்லது ஜாக்கி

A_3 : மூன்றாவது 3 ஐ விடக்கூட அல்லது 7 ஐ விடக் குறைவு

$$P(A_1) = \frac{2}{52}$$

$$P(A_2 / A_1) = \frac{8}{51}$$

$$P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$$

பெருக்கல் விதிப்படி,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{12}{50} = \frac{8}{5525}$$

Eg:2) ஒரு பெட்டியினுள் 9 நீலமாபிள்களும் 5 சிவப்பு மாபிள்களும் உள்ளன. ஒன்றன்பின் ஒன்றாக மீள்வைப்பின்றி 5 மாபிள்கள் எடுக்கப்படுகிறது. 5 மாபிள்களும் நீலமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

நீலம் - 9

சிவப்பு - 5

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 என்னும் நிகழ்வுகள் முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது, ஐந்தாவது தடவைகள் எடுக்கப்பட்டது. சிவப்பு மார்பிள்ளைகளாக இருப்பதை குறிக்கின்றது என்க.

$$P(A_1) = \frac{9}{14}, \quad P(A_2/A_1) = \frac{8}{13}$$

$$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{7}{12}, \quad P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{6}{11}$$

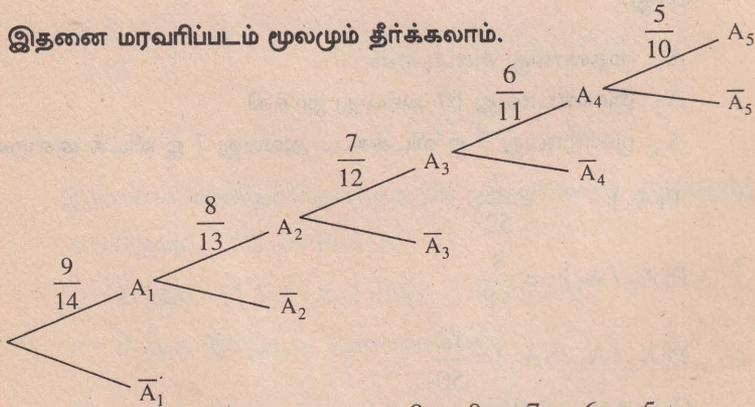
$$P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{5}{10}$$

பெருக்கல் விதிப்படி.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \dots \cdot P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = 0.063$$

இதனை மரவரிப்படம் மூலமும் தீர்க்கலாம்.



$$\therefore P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = 0.063$$

பயிற்சி - 4

1. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ எனில் $P(A/B)$, $P(B/A)$,

$P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{A}/\bar{B})$, $P(\bar{B}/\bar{A})$ என்பவற்றின் பெறுமா

னங்களைக் காண்க?

2. $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?
- $P(A \cap B)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, $P(\bar{A}/\bar{B})$, $P(\bar{B}/\bar{A})$
3. $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ எனில் A, B என்பன தம்முள் புறநீங்குவன அல்ல எனவும் சாராதவை எனவும் காட்டுக?
- $P(A/B)$, $P(\bar{A}/\bar{B})$ இன் பெறுமானங்களையும் காண்க?
4. ஒரு திருமணமான ஆண் தொலைக்காட்சி பார்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். திருமணமான பெண் தொலைக்காட்சி பார்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 ஆகும். மனைவி பார்த்தால் கணவன் பார்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 ஆகும்.
- (i) கணவனும் மனைவியும் பார்ப்பதற்கான
(ii) கணவன் பார்த்தால் மனைவி பார்ப்பதற்கான
(iii) குறைந்தது ஒருவராவது பார்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
5. ஒரு விமானம் சரியான நேரத்தில் புறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.83 ஆகும். அந்த விமானம் சரியான நேரத்திற்கு வந்தடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.82 ஆகும். சரியான நேரத்தில் புறப்பட்டு சரியான நேரத்தில் வந்தடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.78 எனில் பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?
- (i) சரியான நேரத்தில் புறப்பட்டால் சரியான நேரத்திற்கு வந்தடைதல்.
(ii) சரியான நேரத்திற்கு வந்தடைந்தால் சரியான நேரத்திற்குப் புறப்பட்டிருத்தல்.
6. வைத்தியர் ஒருவர் நோயாளியின் இருதய நோயைக் கண்டு பிடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 ஆகும். வைத்தியர் வியாதியை சரியாகக் கண்டுபிடிக்காவிட்டால் நோயாளி சட்ட நடவடிக்கை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.9 ஆகும். வைத்தியர் வியாதியைச் சரியாகக் கண்டு பிடிக்காமலும் நோயாளி சட்ட நடவடிக்கை எடுப்பதற்குமான நிகழ்தகவு 0.27 எனக் காட்டுக?
7. ஒரு நகரத்தில் உள்ளவர்களில் 35% ஆணோர் தொலைக்காட்சியில் உதைபந்தாட்டத்தை அவதானிக்கின்றனர். ஆனால் கிரிக்கெட் விளையாட்டை அவதானிப்பதில்லை. 10% ஆணோர் கிரிக்கெட் விளையாட்டை அவதானிக்கின்றனர். ஆனால் உதைபந்தாட்டத்தை அவதானிப்பதில்லை. 40% ஆணோர் இவ்

விளையாட்டுக்களில் எதனையும் அவதானிப்பதில்லை. இவர்களுள் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால் இவர்

- (i) கிரிக்கெட் விளையாட்டை அவதானிப்பவராக இருந்தால் உதைபந்தாட்டத்தை அவதானிப்பவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- (ii) கிரிக்கெட் விளையாட்டை அவதானிக்காதவராக இருந்தால் உதைபந்தாட்டத்தை அவதானிப்பவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- (iii) அவர் உதைபந்தாட்டத்தை அவதானிப்பவர், கிரிக்கெட் விளையாட்டை அவதானிப்பவர் என்னும் இரு நிகழ்வுகளும் சாரா நிகழ்வுகளா?

8. ஒரு பிரபல பாடசாலையில் 200 பேர் கடமைபுரிகின்றனர். ஆரம்பக்கல்வி, பயிலுநர், பட்டதாரி ஆசிரியர்கள் பற்றி விபரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

ஆசிரியர்	ஆண்	பெண்
ஆரம்பக்கல்வி	38	45
பயிலுநர்	28	50
பட்டதாரி	22	17

இவர்களுள் ஒரு ஆசிரியர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்படுகிறார்.

- (i) இவர் பயிலுநர் ஆசிரியராக இருந்தால் ஆணாக இருப்பதற்கான
- (ii) இவர் பெண்ணாக இருந்தால் பட்டதாரி ஆசிரியர் அல்லாதவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

9. ஒரு குறித்தநாளில் வெய்யில் எறித்தலை A என்ற நிகழ்வு எனவும், மழை பெய்தலை B என்ற நிகழ்வு எனவும் கொள்க. வெய்யில் எறித்தலுக்கான நிகழ்தகவு 0.5 உம் மழை பெய்தலுக்கான நிகழ்தகவு 0.3 உம் ஆகும். வெய்யில் எறித்து மழை பெய்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.1 ஆகும்.

- (i) மழை பெய்தால் வெய்யில் எறிப்பதற்கான
- (ii) வெய்யில் எறித்தால் மழை பெய்வதற்கான
- (iii) வெய்யில் எறித்து மழை பெய்யாமல் இருப்பதற்கான
- (iv) மழை பெய்யாவிட்டால் வெய்யில் எறிப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

(v) A,B என்னும் இரு நிகழ்வுகளும் சாரா நிகழ்வுகளா?

10. ஓர் பட்டதாரி அரச நிறுவனம் ஒன்றிற்கும் தனியார் நிறுவனம் ஒன்றிற்கும் வேலைக்காக மனுக்கொடுக்கிறார். இவருக்கு அரச நிறுவனம் வேலை வழங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 உம் தனியார் நிறுவனம் வேலை வழங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 உம் ஆகும். ஆகக் குறைந்தது ஒரு நிறுவனம் இவருக்கு வேலை வழங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 ஆகும்.
- (i) இரு நிறுவனமும் இவருக்கு வேலை வழங்குவதற்கான
(ii) அரச நிறுவனம் வேலை வழங்கும் அதே நேரம் தனியார் நிறுவனம் வேலை வழங்காததற்கான
(iii) தனியார் நிறுவனம் வேலை வழங்கினால் அரச நிறுவனம் வேலை வழங்காததற்கான நிகழ்தகவு யாது?
11. கோடாத நாணயம் ஒன்று மூன்று தடவைகள் சுண்டப்படுகிறது. இரு தடவைகள் தலை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைப் பெருக்கல் விதிமூலம் காண்க?
12. பெட்டி ஒன்றினுள் 5 நீலநிற மணிகளும் 3 சிவப்புநிற மணிகளும் உள்ளன. பெட்டியினுள் பார்க்காமல் ஒரு மணி எழுமாற்றாக வெளியே எடுக்கப்பட்டு அதன் நிறம் குறிக்கப்படுகிறது. இது பையினுள் இடப்படாமல் இன்னொன்று எடுக்கப்பட்டது. இதுவும் பையினுள் இடப்படாமல் இன்னொன்றும் எடுக்கப்பட்டது. வெளியே எடுக்கப்பட்ட மூன்று மணிகளும் ஒரே நிறமானதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்துக?
13. ஒரு பையினுள் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் 3 மஞ்சள் பந்துகளும் உள்ளன. இன்னொரு பையில் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் 4 மஞ்சள் பந்துகளும் உள்ளன. முதலாவது பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு அது இரண்டாவது பையினுள் போடப்படுகின்றது. பின்னர் இரண்டாவது பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்பட்டு அது முதலாவது பையினுள் இடப்படுகிறது. இப்போது மீண்டும் ஒரு பந்து முதலாவது பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்டால் அது சிவப்பு நிறப்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
14. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரு சீட்டுக்கள் மீள்வைப்பின்றி எடுக்கப்படுகிறது.
- (i) இரு சீட்டுக்களும் சிவப்பாக
(ii) இரு சீட்டுக்களும் 3 ஐ விடக்கூட ஆனால் 8 ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

பேய்ஸ் தேற்றம் (Baye's Theorem)

மாதிரிவெளி பிரிப்பு:

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் மாதிரிவெளி S இல் B_1, B_2, \dots, B_n என்பன n நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க

$$B_i \cap B_j = \phi \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = S \quad \text{ஆகவும் இருந்தால்}$$

$\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ என்பன S இன் பிரிப்புக்கள் எனப்படும்.

Eg: 1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ இம்மாதிரி வெளியிலுள்ள B_1, B_2, B_3, B_4 என்னும் நிகழ்ச்சிகள் பின்வருமாறு தரப்படுகின்றது.

$$B_1 = \{2\}, B_2 = \{1, 3, 5\}, B_3 = \{4, 6, 8\}, B_4 = \{7, 9, 10\} \text{ என்க.}$$

$$B_1 \cap B_2 = \phi, B_1 \cap B_3 = \phi, B_1 \cap B_4 = \phi, B_2 \cap B_3 = \phi$$

$$B_2 \cap B_4 = \phi, B_3 \cap B_4 = \phi, B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = S$$

எனவே $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ என்பன S இன் பிரிப்புக்களாகும்.

Eg: 2) $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$$B_1 = \{a, b\}, B_2 = \{d, e\}, B_3 = \{f, g, h\} \text{ என்க.}$$

$$B_1 \cap B_2 = \phi, B_1 \cap B_3 = \phi, B_2 \cap B_3 = \phi$$

$$\text{ஆனால் } B_1 \cup B_2 \cup B_3 \neq S$$

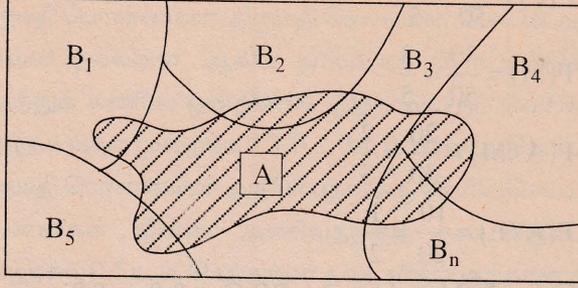
எனவே $\{B_1, B_2, B_3\}$ என்பன S இன் பிரிப்புக்கள் அல்ல.

மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றம் (Total Probability Theorem)

B_1, B_2, \dots, B_n என்பன $P(B_i) \neq 0; (i=1, 2, \dots, n)$ ஆகுமாறு மாதிரிவெளி இன் S பிரிப்புகள் ஆகவும் A என்பது இம் மாதிரி வெளியிலுள்ள யாதுமொரு நிகழ்ச்சியாகவும் இருந்தால்,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i) \quad \text{ஆகும்.}$$

நிறுவல்:



மேலுள்ள வென்வரிப்படத்தில் A என்ற நிகழ்ச்சி நிழற்றப்பட்ட பகுதியால் காட்டப்பட்டுள்ளது. $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ என்னும் நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீங்குவனவாகையால்

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

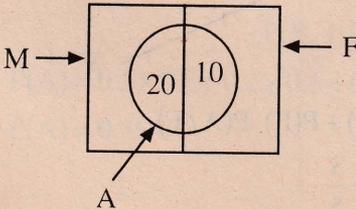
$$P(A) = P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)] \\ = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

பெருக்கல் விதிப்படி

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i)$$

Eg: 1) ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களில் 20 பேர் பெண்கள். 30 பேர் ஆண்கள். 10 பெண்களும் 20 ஆண்களும் கணித பாடத்தில் சித்தியடைந்தனர். இவர்களுள் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால் இவர் கணித பாடம் சித்தியடைந்தவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?



M - ஆண்கள்

F - பெண்கள்

A - கணித பாடத்தில்

சித்தியடைந்தோர்

M - 30, F - 20

$$P(F) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$P(M) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

$$P(A/M) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$P(A/F) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

இங்கு F, M என்பன மாதிரி வெளியின் பிரிப்புகளாகும்.

மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றப்படி

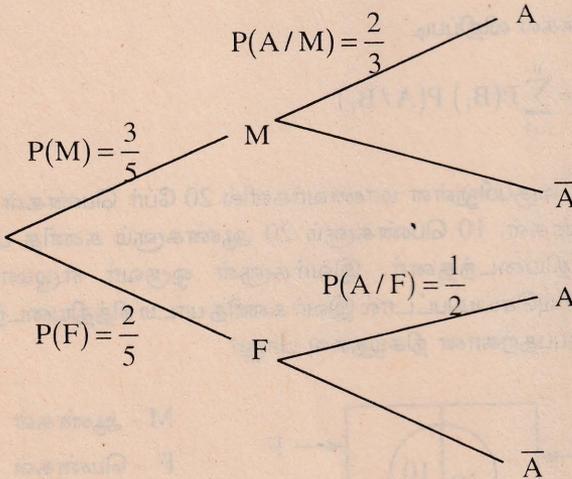
$$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(F) \cdot P(A/F)$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

ஆகவே தெரிவுசெய்யப்படுபவர் கணிதம் சித்தி அடைந்தவராக

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$ ஆகும்.

இதனை மரவரிப்படம் மூலமும் தீர்க்கலாம்.



$$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(F) \cdot P(A/F)$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Eg: 2) பெண்கள் உயர்கல்லூரி ஒன்றின் அதிபர் பதவிக்கு திருமதி பொன்னம்மா, திருமதி செல்லம்மா, செல்வி அன்னம்மா, செல்வி நல்லம்மா ஆகிய நால்வரும் போட்டியிடுகின்றனர். சுருத்துக் கணிப்பு ஒன்றின்படி இந்நால்வரும் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.2, 0.4, 0.1 என அறியப்பட்டுள்ளது. திருமதி பொன்னம்மா அதிபர் பதவிக்கு தெரிவு செய்யப்பட்டால் மாணவிகள் 'ஜீன்ஸ்' அணிவதற்குத் தடைவிதிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 உம், செல்லம்மா தடைவிதிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 உம், அன்னம்மா தடைவிதிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 உம், நல்லம்மா தடைவிதிப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.1 உம் ஆகும். இக்கல்லூரியில் மாணவிகள் 'ஜீன்ஸ்' அணிவதற்குத் தடை விதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: B_1, B_2, B_3, B_4 என்பன முறையே பொன்னம்மா, செல்லம்மா, அன்னம்மா, நல்லம்மா அதிபர் பதவிக்குத் தெரிவு செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்வுகள் என்க.

'ஜீன்ஸ்' அணிவதற்குத் தடை விதிக்கப்படும் நிகழ்வு A என்க. இங்கு B_1, B_2, B_3, B_4 என்பன மாதிரிவெளி S இன் பிரிப்புகளாகும்.

$$P(B_1) = 0.3$$

$$P(B_2) = 0.2$$

$$P(B_3) = 0.4$$

$$P(B_4) = 0.1$$

$$P(A/B_1) = 0.5$$

$$P(A/B_2) = 0.6$$

$$P(A/B_3) = 0.7$$

$$P(A/B_4) = 0.1$$

மொத்த நிகழ்தகவு தேற்றப்படி.

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) + P(B_4) \cdot P(A/B_4)$$

$$P(A) = 0.3 \times 0.5 + 0.2 \times 0.6 + 0.4 \times 0.7 + 0.1 \times 0.1$$

$$P(A) = 0.56$$

பயஸ் தேற்றம் (Baye's Theorem)

B_1, B_2, \dots, B_n என்பன $P(B_i) \neq 0, (i=1,2,\dots,n)$ ஆகமாறு மாதிரிவெளி S இன் பிரிப்புக்கள் ஆகவும் A என்பது இம்மாதிரிவெளி S இலுள்ள யாதும் ஒரு நிகழ்வு எனில்.

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A / B_r)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P(A / B_i)} \quad \text{ஆகும்.}$$

அல்லது

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i \cap A)} \quad \text{ஆகும்.}$$

நிறுவல்:

மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றப்படி

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A / B_i)$$

நிபந்தனை நிகழ்தகவின்படி,

$$\begin{aligned} P(B_r / A) &= \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A / B_i)} \end{aligned}$$

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A / B_r)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

Eg: 1) $P(B_1) = 0.5$, $P(B_2) = 0.3$, $P(B_3) = 0.2$, $P(A/B_1) = 0.1$,
 $P(A/B_2) = 0.8$, $P(A/B_3) = 0.4$ எனில் $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$,
 $P(B_3/A)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

விடை: முதலில் மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றப்படி $P(A)$ ஐக் காண வேண்டும்.

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$$

$$P(A) = 0.5 \times 0.1 + 0.3 \times 0.8 + 0.2 \times 0.4 = 0.37$$

$$\text{அதாவது } \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A/B_i) = 0.37$$

பேய்ஸ் தேற்றப்படி

$$(i) P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A/B_i)} = \frac{0.5 \times 0.1}{0.37} = 0.135$$

$$(ii) P(B_2/A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A/B_i)} = \frac{0.3 \times 0.8}{0.37} = 0.649$$

$$(iii) P(B_3/A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A/B_3)}{\sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A/B_i)} = \frac{0.2 \times 0.4}{0.37} = 0.216$$

Eg: 2) ஒரு கணக்காய்வு நிறுவனம் ஒன்றில் வாடிக்கையாளர்களின் கணக்குகளைச் செப்பனிடுவதற்காக பொன்னையா, சின்னையா, கந்தையா, நல்லையா என்னும் நான்கு கணக்காளர்கள் உள்ளனர். ஒருநாளில் கிடைக்கப்பெறும் மொத்தக் கணக்குகளில் இந்நால்வரும் முறையே 30%, 28%, 20%, 22% ஆன கணக்குகளைச் செப்பனிடிகின்றனர். வாடிக்கையாளர்களின் கணக்குகளைச் செப்பனிடும்போது பொன்னையா, சின்னையா, கந்தையா, நல்லையா என்னும் நால்வரும் பிழைவிடுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.1, 0.24, 0.18, 0.21 ஆகும். ஒருநாள் வாடிக்கையாளர்

ஒருவரிடமிருந்து தமது கணக்காய்வில் பிழை உள்ளதாக முறைப்பாடு ஒன்று கிடைக்கின்றது. இப்பிழை கந்தையா கணக்காய்வைச் செய்யும்போது ஏற்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

பொன்னையா - B_1

சின்னையா - B_2

கந்தையா - B_3

நல்லையா - B_4

A என்பது கணக்காய்வைப் பிழையாகச் செய்யும் நிகழ்வு என்க.

$$P(B_1) = 0.3, P(B_2) = 0.28, P(B_3) = 0.2, P(B_4) = 0.22$$

$$P(A/B_1) = 0.1, P(A/B_2) = 0.24, P(A/B_3) = 0.18,$$

$$P(A/B_4) = 0.21$$

முதலில் மொத்த நிகழ்தகவு தேற்றப்படி, கணக்காய்வைப் பிழையாகச் செய்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(A)$ ஐக் காணுதல் வேண்டும்.

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

$$= 0.3 \times 0.1 + 0.28 \times 0.24 + 0.2 \times 0.18 + 0.22 \times 0.21$$

$$P(A) = 0.1794$$

இப்பிழை கந்தையாவால் ஏற்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(B_3/A)$ ஆகும்.

பேய்ஸ் தேற்றப்படி,

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A/B_3)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i) \cdot P(A/B_i)} = \frac{0.2 \times 0.18}{0.1794} = 0.2$$

Eg: 3) பிரபல தனியார் மருத்துவமனையின் வெளிநோயாளர் பிரிவில் ஒரே நேரத்தில் A, B, C, D, E என்னும் ஐந்து வைத்தியர்கள் கடமையில் ஈடுபட்டுள்ளனர். நோயாளிகளின் நோய்களைச் சரியாகக் கண்டறியாமல் பிழையான மருந்தை இவ் ஐந்து வைத்தியர்களும் கொடுப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.11, 0.09, 0.21, 0.08, 0.12 என நிர்வாகத்தினர் மதிப்பிட்டுள்ளனர். குறித்த ஒருநாள் இப்பிரிவுக்கு 360 நோயாளர்கள் வருகைதந்தனர். A, B, C, D, E என்னும் இவ் ஐந்து வைத்தியர்களும் முறையே 75, 70, 81, 68, 66 நோயாளர்களைப்

பார்வையிட்டனர். இம்மருத்துவமனையின் வெளிநோயாளர் பிரிவில் பிழையான வைத்தியம் செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

அன்றைய தினம் வெளிநோயாளர் பிரிவிற்கு வருகைதந்த 360 நோயாளர்களில் பிழையான மருத்துவத்தால் ஒருவர் இறந்துள்ளார் என நிர்வாகத்திற்குத் தகவல் கிடைக்கின்றது. எந்த வைத்தியரின் பிழையான மருத்துவத்தினால் இது நிகழ்ந்தது என்பதை அறிவதற்கு போதிய ஆவணங்கள் இல்லாவிட்டால் குற்றவாளியான வைத்தியர் எவர் என நிர்வாகத்தினர் ஊகிப்பர்?

விடை: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 என்பன முறையே A, B, C, D, E என்னும் வைத்தியர்கள் நோயாளர்களைப் பார்வையிடுவதற்கான நிகழ்வுகள் என்க.

W என்பது பிழையான வைத்தியம் செய்யப்படும் நிகழ்வு என்க.

$$P(B_1) = \frac{75}{360}, \quad P(B_2) = \frac{70}{360}, \quad P(B_3) = \frac{81}{360},$$

$$P(B_4) = \frac{68}{360}, \quad P(B_5) = \frac{66}{360}$$

$$P(W/B_1) = 0.11, \quad P(W/B_2) = 0.09, \quad P(W/B_3) = 0.21,$$

$$P(W/B_4) = 0.08, \quad P(W/B_5) = 0.12$$

மொத்த நிகழ்தகவு தேற்றப்படி.

$$P(W) = \sum_{i=1}^5 P(B_i) \cdot P(W/B_i)$$

$$P(W) = \frac{75}{360} \times 0.11 + \frac{70}{360} \times 0.09 + \frac{81}{360} \times 0.21 \\ + \frac{68}{360} \times 0.08 + \frac{66}{360} \times 0.12$$

$$P(W) = 0.1248$$

∴ இம்மருத்துவமனையின் வெளிநோயாளர் பிரிவில் பிழையான வைத்தியம் செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.1248 ஆகும்.

பிழையான மருத்துவம் செய்யப்பட்டிருந்தால் அது A என்பவரால் செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(B_1/W)$ ஆகும்.

ஆகவே பேய்ஸ் தேற்றப்படி.

$$P(B_1 / W) = \frac{P(B_1) \cdot P(W / B_1)}{\sum_{i=1}^5 P(B_i) \cdot P(W / B_i)} = \frac{75/360 \times 0.11}{0.1248} = 0.18$$

இதேபோல் பேய்ஸ் தேற்றப்படி.

$$P(B_2 / W) = \frac{70/360 \times 0.09}{0.1248} = 0.14$$

$$P(B_3 / W) = \frac{81/360 \times 0.21}{0.1248} = 0.38$$

$$P(B_4 / W) = \frac{68/360 \times 0.08}{0.1248} = 0.12$$

$$P(B_5 / W) = \frac{66/360 \times 0.12}{0.1248} = 0.17$$

ஆகவே பிழையான வைத்தியம் செய்யப்பட்டிருந்தால் இது C என்ற வைத்தியரால் (B_3 - நிகழ்வு) செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.38 ஆனதுமற்றைய எல்லாவற்றையும்விடக் கூடவாகும். எனவே C என்பவரே குற்றவாளி என நிர்வாகத்தினர் ஊகிப்பர்.

பயிற்சி - 5

1. $P(B_1) = 0.42$, $P(B_2) = 0.58$, $P(A/B_1) = 0.47$, $P(A/B_2) = 0.62$
எனில் மொத்த நிகழ்தகவு தேற்றப்படி $P(A)$ ஐக் காண்க?
2. $P(A) = \frac{6}{21}$, $P(B) = \frac{5}{21}$, $P(C) = \frac{5}{21}$, $P(D) = \frac{2}{21}$, $P(E) = \frac{1}{7}$
ஆகவும் $P(X/A) = 0.3$, $P(X/C) = 0.7$, $P(X/D) = 0.6$, $P(X/B) = 0.8$, $P(X/E) = 0.2$ ஆகவும் இருந்தால் $P(X)$ ஐக் காண்க?
3. ஓர் உயர்கல்வி நிறுவனத்தில் கல்வியிலும் மாணவர்களில் 25 பேர் ஆண்கள். 18 பேர் பெண்கள். ஆண்களில் 5 பேரும் பெண்களில் 15 பேரும் காதில் வளையம் குத்தியுள்ளனர். இவர்களில் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால் இவர் காதில் வளையம் குத்தியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

4. இரவு விடுதி ஒன்றிற்கு வருகைதந்த பெண்களின் தொகை ஆண்களை விட மூன்று மடங்காகும். ஆண்களில் அரைப்பங்கினரும் பெண்களில் மூன்றில் ஒரு பங்கினரும் புகைபிடிப்பவர்கள். இவர்களில் தெரிவுசெய்யப்பட்ட ஒருவர் புகைபிடிப்பவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
5. நாட்டின் ஆட்சியைக் கைப்பற்றுவதற்கான பொதுத்தேர்தலில் முன்னணிக்கட்சி, பின்னணிக்கட்சி, இடதுசாரிக்கட்சி என்னும் பிரதான மூன்று கட்சிகளும் போட்டியிடுகின்றன. கருத்துக்கணிப்பு ஒன்றின்படி இம்மூன்று கட்சிகளும் வெல்வதற்கான வாய்ப்புக்கள் முறையே 0.3, 0.5, 0.2 என அறியப்படுகிறது. முன்னணிக்கட்சி ஆட்சிக்கு வந்தால் இனப்பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.8 ஆகும். பின்னணிக்கட்சி இனப்பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.1 ஆகும். இடதுசாரிக்கட்சி இனப்பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். அந்த நாட்டின் இனப்பிரச்சினை தீர்க்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
6. ஒரு பாடசாலையில் இருந்து கா. பொ. த. (உ/த) பரீட்சைக்கு 80 பேர் தோற்றினர். இவர்களில் 45 பேர் ஆண்கள். 35 பேர் பெண்கள். ஆண்களில் 9 பேரும் பெண்களில் 7 பேரும் பல்கலைக்கழக கல்விக்குத் தெரிவுசெய்யப்பட்டுள்ளனர். இவர்களில் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால் இவர் பல்கலைக்கழக கல்விக்கு தெரிவுசெய்யப்பட்டவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
7. ஓர் அலுவலகத்தில் 100 பேர் வேலை செய்கின்றனர். இவர்களில் 55 ஆண்களும் 45 பெண்களும் உள்ளனர். ஆண்களில் 7 பேர் பட்டதாரிகள். பெண்களில் 35 பேர் பட்டதாரிகள் அல்லாதோர். இவர்களில் ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டால் இவர் பட்டதாரி அல்லாதவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
8. அமெரிக்கா, ஜேர்மனி, ரஷ்யா, ஆபிரிக்கா, சீனா ஆகிய நாட்டைச் சேர்ந்த 5 பேர்கள் ஐக்கியநாடுகள் சபையின் செயலாளர் பதவிக்குப் போட்டியிடுகின்றனர். இந்நாட்டைச் சேர்ந்தவர்கள் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.25, 0.15, 0.25, 0.15, 0.2 ஆகும். இந்நாட்டவர்கள் ஐ. நா. சபையின் செயலாளராகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் வளைகுடாப்பகுதியில் நிரந்தர சமாதானத்தை

ஏற்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3 ஆகும். வளைகுடாப் பகுதியில் நிரந்தர சமாதானம் ஏற்படுத்தப்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

9. பேய்ஸ் தேற்றத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக?

P, T, L என்பன மாதிரிவெளி S இன் பிரிப்புக்களாகவும். X என்பது இம்மாதிரிவெளியில் யாதுமொரு நிகழ்வும் ஆகும். $P(P) = 0.7$, $P(T) = 0.2$, $P(L) = 0.1$, $P(X/P) = 0.75$, $P(X/T) = 0.6$, $P(X/L) = 0.65$ எனில் $P(X)$, $P(P/X)$, $P(T/X)$, $P(L/X)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

10. பேய்ஸ் தேற்றத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக?

A, B, C என்பன மாதிரிவெளி S இன் பிரிப்புக்களாகவும், X என்பது இம்மாதிரிவெளியிலுள்ள யாதுமொரு நிகழ்வும் என்க. $P(C) = 0.2$, $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.45$, $P(X/A) = 0.8$, $P(X/B) = 0.65$, $P(X/C) = 0.3$ எனில் $P(A/X)$, $P(B/X)$, $P(C/X)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

11. இளைஞர் கழகம் ஒன்றின் தலைவர் பதவிக்கு B_1 , B_2 , B_3 என்னும் மூன்று பேர் போட்டியிடுகின்றனர். கருத்துக்கணிப்பு ஒன்றின்படி B_1 , B_2 , B_3 என்பவர்கள் தெரிவுசெய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.5, 0.2 ஆகும். B_1 , B_2 , B_3 என்பவர்கள் முறையே தெரிவுசெய்யப்பட்டால் அங்கத்துவப் பணம் அதிகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.8, 0.1, 0.4 ஆகும். அங்கத்துவப் பணம் அதிகரிக்கப்பட்டிருந்தால்

(i) B_3 என்பவர் தலைவர் பதவிக்குத் தெரிவு செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான

(ii) B_2 என்பவர் தலைவர் பதவிக்குத் தெரிவு செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

12. ஒரு தொழிற்சாலையில் B_1 , B_2 , B_3 , B_4 என்னும் நான்கு இயந்திரங்கள் கையுறைகள் (gloves) தயாரிப்பில் ஈடுபட்டுள்ளன. B_1 , B_2 , B_3 , B_4 என்னும் இயந்திரங்கள் ஒருநாள் மொத்த உற்பத்தியில் முறையே 30%, 25%, 23%, 22% ஆன கையுறைகளை

உற்பத்தி செய்கின்றன. B_1, B_2, B_3, B_4 என்னும் இயந்திரங்கள் குறைபாடுள்ள கையுறைகளைத் தயாரிப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.2, 0.3, 0.1, 0.4 ஆகும். உற்பத்தி செய்யப்பட்டவற்றுள் குறைபாடுள்ள ஒரு கையுறையைத் தெரிவுசெய்தால் அது,

(i) B_2 என்ற இயந்திரத்தால்

(ii) B_4 என்ற இயந்திரத்தால் தயாரிக்கப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

13. ஒரு நகரத்தில் 95% ஆன மோட்டார் சைக்கிள் ஓட்டுநர்கள் தலைக்கவசம் அணிகின்றனர். தலைக்கவசம் அணியாதோர்களில் 64% ஆனோர் விபத்துக்களில் இறக்கின்றனர். தலைக்கவசம் அணிபவர்களில் 12% ஆனோர் விபத்துக்களில் இறக்கின்றனர். இறந்தவர்களில் தலைக்கவசம் அணியாதோரின் சதவீதம் யாது?

14. ஆசிய நாடுகளிலுள்ள மொத்த அணுஆயுதங்களில் 50% ஆனவை சீனாவிடமும், 25% ஆனவை ஜப்பானிடமும், 13% ஆனவை பாகிஸ்தானிடமும், 12% ஆனவை இந்தியாவிடமும் உள்ளன. ஆசிய நாடுகளிடையே அணுஆயுத யுத்தம் ஒன்றை சீனா தொடங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2, ஜப்பான் தொடங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.3, பாகிஸ்தான் தொடங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.11, இந்தியா தொடங்குவதற்கான நிகழ்தகவு 0.18 எனக் கருத்துக்கணிப்பொன்றின் மூலம் அறியப்பட்டது.

(i) ஆசிய நாட்டிலே அணுஆயுத யுத்தம் ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) ஆசிய நாட்டிலே அணுஆயுத யுத்தம் நடைபெற்றால் இது,

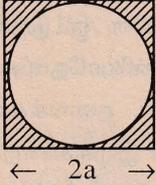
(a) இந்தியாவால் தொடங்கப்பட்டிருப்பதற்கான,

(b) பாகிஸ்தானால் தொடங்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு களைக் காண்க?

முடிவற்ற மாதிரிவெளி

மாதிரிவெளி ஒன்றிலுள்ள மாதிரிப்புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவற்றதாயின் அம்மாதிரிவெளி முடிவற்ற மாதிரிவெளி எனப்படும்.

Eg: a ஆரையுடைய வட்டம் ஒன்று 2a பக்கமுடைய சதுரம் ஒன்றினுள் வரையப்படுகின்றது. சதுரத்திற்குள் ஆனால் வட்டத்திற்கு வெளியே ஒரு புள்ளி எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?



நிழற்றப்பட்ட பகுதியில் ஒரு புள்ளி தெரியப் படுவதற்கான நிகழ்வு E என்க.

$$P(E) = \frac{\text{நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு}}{\text{சதுரத்தின் பரப்பு}}$$

$$P(E) = \frac{4a^2 - \pi a^2}{4a^2} = \frac{4 - \pi}{4}$$

பயிற்சி - 6

- 4cm பக்கமுடைய சதுரவடிவான மாபிள்கற்கள் பதித்த தரை ஒன்றிலே 2cm விட்டமுடைய வட்டவடிவமான தட்டு ஒன்று எறியப்படுகிறது. வட்டத்தட்டு முற்றுமுழுதாக ஒரு மாபிள்கல்லின் மேல் பதிவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ எனக்காட்டுக?
- ABC என்ற கோட்டின் நடுப்புள்ளி B ஆகும். X என்னும் ஒருபுள்ளி நேர்கோடு வழியே எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்படுகிறது. AX, XC, AB என்ற மூன்று நேர்கோட்டுத் துண்டங்களும் ஒரு முக்கோணியை ஆக்குவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனக்காட்டுக?
- 10cm, 10cm, 16cm அளவுகளை உடைய இருசமபக்க முக்கோணி ஒன்றினுள் ஒரு புள்ளி எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்படுகிறது. இப்புள்ளியானது முக்கோணியின் உச்சிகளிலிருந்து 3cm தூரத்திற்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3\pi}{32}$ எனக்காட்டுக?
- நேர்கோடு ஒன்றில் ஒரு புள்ளி எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்பட்டு இக்கோடு இரு துண்டங்களாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. பெரிய நேர்கோட்டுத் துண்டம், சிறிய நேர்கோட்டுத் துண்டத்தின் ஆகக் குறைந்தது இருமடங்கு நீளத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ எனக்காட்டுக?

வீவரணர் புள்ளிவிரவியல்

அமைவிடத்தின் அளவைகள் (Measure of Location)

ஆகாரம் (Mode):

எண்தொடை ஒன்றில் அதிக தடவைகள் காணப்படும் எண் ஆகாரம் எனப்படும்.

Eg: 1) 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7 என்ற எண் தொடையில் 5 என்ற எண் அதிக தடவைகள் காணப்படுவதால் ஆகாரம் 5 ஆகும்.

Eg: 2) 5, 6, 7, 5, 7, 8, 10 என்ற எண் தொடை 5, 7 என்னும் இரு ஆகாரங்களைக் கொண்டுள்ளது.

Eg: 3) 2, 4, 6, 8, 10, 12 என்ற எண் தொடை ஆகாரத்தைக் கொண்டிருக்கவில்லை.

குறிப்பு: (i) எண் தொடையானது ஒரு ஆகாரத்தைக் கொண்டிருந்தால் அது **ஓராகாரமுள்ளது** (unimodal) எனப்படும்.

(ii) எண் தொடையானது இரு ஆகாரங்களைக் கொண்டிருந்தால் அது **ஈராகாரமுள்ளது** (bimodal) எனப்படும்.

ஆகார வகுப்பு:

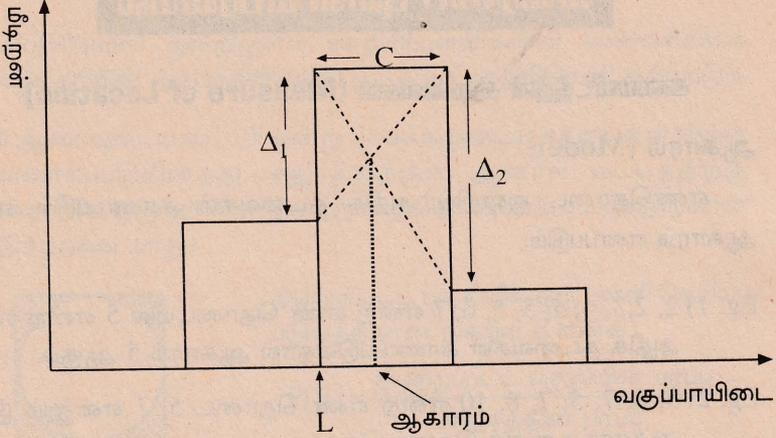
கூட்டத்தரவுகளில் அதிக தடவைகள் காணப்படும் வகுப்பு ஆகார வகுப்பு எனப்படும்.

Eg: 100 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு வகுப்பாக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளது.

புள்ளிகள்	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (மீடறன்)	10	30	15	25	20

அதிகமான மாணவர்கள் (30 பேர்) 20 தொடக்கம் 40 வரைக்குமான புள்ளிகளைப் பெற்றிருப்பதால் ஆகார வகுப்பு 20 - 40 ஆகும்.

கூட்டத் தரவின் ஆகாரம்



கூட்டத் தரவிற்கான ஆகாரம் பின்வரும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும்.

$$\text{ஆகாரம்} = L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C$$

இங்கு,

L = ஆகார வகுப்பின் கீழ் எல்லை

Δ_1 = ஆகார வகுப்பின் மீற்றன் - அடுத்த கீழ்வகுப்பின் மீற்றன்

Δ_2 = ஆகார வகுப்பின் மீற்றன் - அடுத்த உயர் வகுப்பின் மீற்றன்

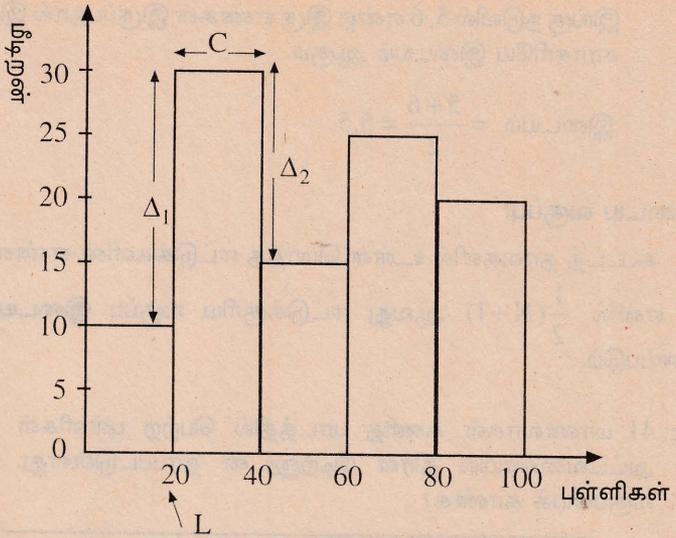
C = ஆகார வகுப்பின் பருமன்

Eg: கீழுள்ள பரம்பலுக்கான ஆகாரத்தைக் காண்க?

புள்ளிகள்	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (மீற்றன்)	10	30	15	25	20

இப்பரம்பலுக்கான வலையுரு வரையம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

ஆகார வகுப்பு 20-40 ஆகும்.



$$L = 20, C = 20, \Delta_1 = 10, \Delta_2 = 30$$

$$\begin{aligned} \text{ஆகாரம்} &= L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C \\ &= 20 + \left(\frac{10}{10 + 30} \right) 20 \\ &= 31.43 \end{aligned}$$

இடையம் (Median) :

பருமன்களுக்கேற்ப ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட எண் தொடையின் நடுப்பெறுமானம் **இடையம்** எனப்படும்.

Eg: (i) 5, 4, 7, 6, 8 என்ற எண்தொடையைக் கருதுக?

ஏறுவரிசைப் படுத்தும் போது

4, 5, **6**, 7, 8 ஆகும்.

எனவே இடையம் = 6 ஆகும்.

Eg: (ii) 6, 8, 4, 3, 5, 7 என்ற எண்தொடையைக் கருதுக?

ஏறுவரிசைப் படுத்தும் போது

3, 4, **5**, **6**, 7, 8 ஆகும்.

இங்கு நடுவில் 5, 6 என்ற இரு எண்கள் இருப்பதால் இவற்றின் சராசரியே இடையம் ஆகும்.

$$\text{இடையம்} = \frac{5+6}{2} = 5.5$$

இடைய வகுப்பு:

கூட்டத் தரவுகளில் உள்ள மொத்த ஈட்டுக்களின் எண்ணிக்கை N எனில் $\frac{1}{2}(N+1)$ ஆவது ஈட்டுக்குரிய வகுப்பு இடைய வகுப்பு எனப்படும்.

Eg: 41 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் கீழுள்ள அட்டவணையில் திரள் மீறனுடன் தரப்பட்டுள்ளது. இடைய வகுப்பைக் காண்க?

புள்ளிகள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (மீறன்)	திரள் மீறன்
0-10	1	1
10-20	2	3
20-30	4	7
30-40	5	12
40-50	7	19
50-60	10	29
60-70	5	34
70-80	3	37
80-90	2	39
90-100	2	41

$$N = 41$$

$$\frac{N+1}{2} = 21$$

21 ஆவது ஈட்டுக்குரிய வகுப்பு 50-60 ஆகும். இடைய வகுப்பு 50-60 ஆகும்.

கூட்டத்தரவிற்கான இடையம்:

கூட்டத் தரவிற்கான இடையம் பின்வரும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும்.

$$\text{இடையம்} = L + \left(\frac{\frac{1}{2}N - (\sum f)_L}{f_{\text{இடையம்}}} \right) C$$

இங்கு,

L = இடைய வகுப்பின் கீழ் எல்லை

N = ஈட்டுக்களின் எண்ணிக்கை (மீடறன்களின் கூட்டுத் தொகை)

$(\sum f)_L$ = இடைய வகுப்பிலும் குறைந்த வகுப்புகளின் மீடறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$f_{\text{இடையம்}}$ = இடைய வகுப்பின் மீடறன்

C = இடைய வகுப்பின் பருமன்

Eg: மேலேயுள்ள உதாரணத்தைக் கருதுக.

இடைய வகுப்பு 50-60 ஆகும்.

$$L = 50$$

$$N = 41$$

$$f_{\text{இடையம்}} = 10$$

$$(\sum f)_L = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 = 19$$

$$C = 10$$

$$\therefore \text{இடையம்} = 50 + \left(\frac{41/2 - 19}{10} \right) 10 = 51.5$$

இடை (Mean):

(i) கூட்டலிடை (Arithmetic Mean):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் n எண்களின் கூட்டலிடை \bar{x} எனில்,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{ஆகும்.}$$

Eg: 2, 4, 6, 8, 10 என்னும் எண்களின் கூட்டலிடை யாது?

$$\text{கூட்டலிடை } \bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$$

குறிப்பு (1):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் எண்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n என்னும் மீடறன்களுடன் காணப்பட்டால் இவற்றின் கூட்டலிடை \bar{x} ஆனது பின்வருமாறு தரப்படும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Eg:

x	8	10	12	14	16
மீடறன்(f)	1	2	4	3	2

$$\text{இடை} = \frac{8 \times 1 + 10 \times 2 + 12 \times 4 + 14 \times 3 + 16 \times 2}{1 + 2 + 4 + 3 + 2} = 12.5$$

குறிப்பு (2):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் எண்களில் A என்பது அனுமானித்த (ஊகித்த) இடை என்க. i ஆவது எண் x_i இற்கும் ஊகித்த இடை A இற்கும் இடையேயான வித்தியாசம் d_i என்க. எனவே கூட்டலிடை \bar{x} ஆனது பின்வருமாறு தரப்படும்.

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

இங்கு $d_i = x_i - A$ ஆகும்.

Eg: 180, 195, 203, 205, 217 என்பவற்றின் இடையைக் காண்க?

ஊகித்த இடை $A = 203$ என்க.

$$\sum_{i=1}^5 d_i = \sum_{i=1}^5 (x_i - A) = -23 - 8 + 0 + 2 + 14 = -15$$

$$\bar{x} = 203 - \frac{15}{5} = 200$$

கூட்டத் தரவிற்கான இடை

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும்நடுப்பெறுமானங்களை உடைய வகுப்புக் களுக்கு ஒத்த மீறன்கள் f_1, f_2, \dots, f_n எனில் கூட்டத்தரவிற்கான இடை \bar{x} ஆனது

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^n f_i d_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

இனால் தரப்படும்.

இங்கு $A =$ ஊகித்த இடை

$$d_i = x_i - A$$

$x_i = i$ ஆவது வகுப்பின் நடுப்பெறுமானம்.

Eg:

வகுப்பு	நடுப்பெறு மானம்(x_i)	மீறன் (f_i)	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
3.6 - 4.5	4.05	3	-2	-6
4.6 - 5.5	5.05	4	-1	-4
5.6 - 6.5	6.05	8	0	0
6.6 - 7.5	7.05	2	1	2
7.6 - 8.5	8.05	3	2	6
		20		-2

இங்கு ஊகித்த இடை $A = 6.05$ ஆகும்.

$$\sum_{i=1}^5 f_i d_i = -2$$

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 20$$

$$\text{இடை } \bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^5 f_i d_i}{\sum_{i=1}^5 f_i} = 6.05 - \frac{2}{20} = 5.95$$

குழுக்குறித்தல் முறை (Coding Method):

x_1, x_2, \dots, x_n என்பவற்றை நடுப்பெறுமானங்களாகக் கொண்ட வகுப்புகளுக்கு ஒத்த மீடறன்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n எனில் கூட்டத்தரவிற்கான இடை \bar{x} ஆனது பின்வருமாறு தரப்படும்.

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum_{i=1}^n f_i u_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right) C$$

இங்கு $A =$ ஊகித்த இடை

$C =$ வகுப்பின் பருமன்

$$u_i = \frac{d_i}{C}$$

$$d_i = x_i - A$$

Eg: 100 ஒருநாள் போட்டிகளில் கிறிக்கற் வீரர் ஒருவர் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு வகுப்பாக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளது.

ஓட்டங்கள்	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
போட்டிகளின் எண்ணிக்கை (மீடறன்)	10	24	46	11	9

குழுக்குறித்தல் முறை மூலம் இடையைக் காண்க?

ஊகித்த இடை $A = 57, C = 3$

ஓட்டங்கள்	மீடறன்(f_i)	நடுப்புள்ளி	d_i	$u_i = \frac{d_i}{C}$	$f_i u_i$
50-52	10	51	-6	-2	-20
53-55	24	54	-3	-1	-24
56-58	46	57	0	0	0
59-61	11	60	3	1	11
62-64	9	63	6	2	18
	100				-15

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 100 \quad \sum_{i=1}^5 f_i u_i = -15$$

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) C = 57 + \left(\frac{-15}{100} \right) 3 = 56.55$$

(ii) நிறையேற்றிய இடை (Weighted Mean):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் மாறிகளுக்குத் தரப்பட்ட நிறைகள் முறையே w_1, w_2, \dots, w_n எனில் நிறையேற்றிய இடை \bar{x} ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Eg: கணிதபாடப் பரீட்சை ஒன்றிலே 20% ஆன புள்ளிகள் நிலையியல் பகுதிக்கும், 30% ஆன புள்ளிகள் இயக்கவியல் பகுதிக்கும், 10% ஆன புள்ளிகள் நிகழ்தகவுப் பகுதிக்கும், 40% ஆன புள்ளிகள் புள்ளிவிபரவியல் பகுதிக்கும் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு மாணவன் இந்நான்கு பகுதிகளிலும் முறையே 72, 80, 40, 80 புள்ளிகளைப் பெற்றான். கணித பாடத்தில் அவன் பெற்ற இறுதிப் புள்ளி யாது?

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

$$\bar{x} = \frac{20 \times 72 + 30 \times 80 + 10 \times 40 + 40 \times 80}{20 + 30 + 10 + 40} = 74.4$$

எனவே இறுதிப் புள்ளி 74.4 ஆகும்.

(iii) பெருக்கலிடை (Geometric Mean):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் எண்களின் பெருக்கலிடை G ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n}$$

Eg: 8, 10, 12, 14 என்னும் எண்களின் பெருக்கலிடையைக் காண்க?

$$n = 4$$

$$G = \sqrt[4]{8 \times 10 \times 12 \times 14} = 10.77$$

குறிப்பு :

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் பெறுமானங்களின் மீறன்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n எனில் பெருக்கலிடை G ஆனது பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \dots \times x_n^{f_n}}$$

Eg:

x	1	2	3	4	5
f	2	2	3	2	1

பெருக்கலிடையைக் காண்க?

$$\sum f = 2 + 2 + 3 + 2 + 1 = 10$$

$$G = \sqrt[10]{1^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^2 \times 5^1}$$

$$G = \sqrt[10]{8640} = 2.48$$

(iv) இசையிடை (Harmonic Mean):

x_1, x_2, \dots, x_n என்பவற்றின் இசையிடை H ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Eg: 2, 4, 6, 8 என்ற எண்களின் இசையிடையைக் காண்க?

$$H = \frac{4}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = 3.84$$

குறிப்பு :

x_1, x_2, \dots, x_n என்பவற்றின் மீறன்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n எனில் இசையிடை H ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}$$

Eg:

x	2	3	4	5
f	3	4	5	6

 இசையிடையைக் காண்க?

$$\text{இசையிடை } H = \frac{4}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5}} = 0.76$$

ஆகாரம், இடையம், இடை என்பவற்றிற்கிடையேயான அனுபவத் தொடர்பு.

இடையம் - ஆகாரம் = 3 (இடை-இடையம்)

பயிற்சி - 7

- பின்வரும் எண்தொடைகளின் ஆகாரத்தைக் காண்க?
 - 27, 29, 27, 25, 24, 27, 25, 29
 - 412, 426, 435, 412, 427, 428, 435
 - 4, 6, 4, 8, 9, 2, 4, 2, 6, 7, 8, 6, 5, 5, 4, 6
 - 101, 106, 99, 108, 76, 87, 102, 93
- ஒரு பாடசாலையிலுள்ள 116 மாணவர்கள் கணித பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் வருமாறு:

புள்ளிகள்	14-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-90
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (மீடறன்)	12	14	26	35	23	5	1

ஆகார வகுப்பையும் ஆகாரத்தையும் காண்க?

- வேலையற்ற பட்டதாரிகள் 100 பேரிடம் இதுவரை வேலைக்காக எத்தனை விண்ணப்பப் படிவங்கள் அனுப்பியுள்ளனர் எனக் கேட்டபோது பின்வரும் தரவுகள் பெறப்பட்டது.

விண்ணப்பங்களின் எண்ணிக்கை	0-9	10-19	18-29	30-34	35-44	45-49	50-59	60-70
வேலையற்றபட்டதாரிகளின் எண்ணிக்கை	3	16	36	21	12	9	3	0

ஆகாரத்தைக் காண்க?

4. 52, 61, 78, 49, 47, 79, 54, 58, 62, 73, 72 என்பவற்றின் இடையத்தைக் காண்க?
5. பின்வரும் பரம்பலுக்கான இடைய வகுப்பையும் இடையத்தையும் காண்க?

வகுப்பு	0-2	3-5	6-8	9-11	12-14	15-17	18-20	21-23
மீடறன்	4	9	11	6	2	1	0	1

6. 100 மாணவர்களிடம் அவர்கள் பார்த்த தமிழ்த் திரைப்படங்களின் எண்ணிக்கை யாது எனக் கேட்கப்பட்டபோது பின்வரும் தரவுகள் பெறப்பட்டது.

திரைப்படங்களின் எண்ணிக்கை	95-109	110-124	125-139	140-154	155-169	170-184	185-199	200-214
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	8	17	26	24	16	6	1

இடைய வகுப்பையும் இடையத்தையும் காண்க?

7. பின்வரும் எண்தொடைகளின் கூட்டலிடையைக் காண்க?
- (i) 5, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 13, 14, 17
- (ii) 148, 153, 156, 157, 160
- (iii) 44.5, 47.5, 48.5, 51.5, 52.5, 54.5, 55.5, 56.5
- (iv) 1769, 1771, 1772, 1775, 1778, 1781, 1784
- (v) 0.85, 0.88, 0.89, 0.93, 0.94, 0.96
8. வினா (7) இல் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஊகித்த இடையை உபயோகித்து கூட்டலிடையைக் காண்க?
9. 12, 18, 21, a, 13 என்பவற்றின் கூட்டலிடை 17 எனில் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
10. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களிலும் கூட்டலிடையைக் காண்க?

(i)

x	1	2	3	4	5	6	7
f	4	5	8	10	17	5	1

(ii)	x	27	28	29	30	31	32
	f	30	43	51	49	42	35

(iii)	x	121	122	123	124	125
	f	14	25	32	23	6

11. ஊகித்த இடையைக் கருதுவதன் மூலம் பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களிலும் இடையைக் காண்க?

(i)	வகுப்பு	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
	மீடறன்	4	6	12	10	7	1

(ii)	வகுப்பு	101-104	105-108	109-112	113-116	117-120
	மீடறன்	13	18	21	12	6

12. ஒரு மாணவி தனது காதலனைச் சந்திப்பதற்கு தினமும் மாலை 5 மணிக்கு கடற்கரைக்கு வந்துவிடுவாள். ஆனால் காதலன் தினமும் தாமதமாகத் தான் வருவான். மாணவி ஒரு மாதத்தில் காதலனைச் சந்திப்பதற்காக காத்திருந்த நேரங்கள் நிமிடத்தில் கீழுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

காத்திருந்த நேரம் (நிமிடங்களில்)	1-4	5-8	9-12	13-16	17-20
நாட்களின் எண்ணிக்கை	3	6	10	7	4

குழுக்குறித்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி (Coding method) மாணவி காத்திருந்த சராசரி நேரத்தைக் காண்க?

13. பின்வரும் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பங்களிலும் குழுக்குறித்தல் மூலம் இடையைக் காண்க?

(i)	வகுப்பு	15-21	22-28	29-35	36-42	43-49
	மீடறன்	2	18	23	17	9

(ii)	வகுப்பு	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
	மீடறன்	10	15	23	32	18	2	0

(iii)	வகுப்பு	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14
	மீடறன்	5	8	12	14	13	6	2

விலகலின் அளவைகள் (Measure of Dispersion)

வீச்சு (Range):

எண் தொடை ஒன்றின் வீச்சு என்பது ஆகக்கூடிய பெறுமானத்திற்கும் ஆகக்குறைந்த பெறுமானத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் ஆகும்.

Eg:

x	2	4	6	8	10
f	1	2	4	3	1

$$\text{வீச்சு} = 10 - 2 = 8$$

இடைவிலகல் (Mean Deviation):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் n எண்களின் இடைவிலகல் M. D ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\text{M.D} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

இங்கு \bar{x} என்பது கூட்டலிடையாகும்.

Eg: 3, 5, 7, 9, 11 என்ற எண்தொடையின் இடைவிலகலைக் காண்க?

$$\text{கூட்டலிடை } \bar{x} = \frac{3+5+7+9+11}{5} = 7$$

$$\begin{aligned} \text{M.D} &= \frac{|3-7| + |5-7| + |7-7| + |9-7| + |11-7|}{5} \\ &= \frac{4+2+0+2+4}{5} = 2.4 \end{aligned}$$

குறிப்பு:

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் எண்களின் மீடறன்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n எனில் சராசரி விலகல் M.D ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\text{இங்கு } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Eg: பின்வரும் பரம்பலுக்கான இடை விலகலைக் காண்க?

ஈட்டுக்கள் (x)	5	7	9	11	13
மீடறன் (f)	2	3	5	4	1

$$\text{கூட்டலிடை } \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{10+21+45+44+13}{2+3+5+4+1} = 9$$

x	f_i	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
5	2	-4	4	8
7	3	-2	2	6
9	5	0	0	0
11	4	2	2	8
13	1	4	4	4
	15			26

$$\text{இடைவிலகல்} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^5 f_i} = \frac{26}{15} = 1.73$$

நியமவிலகல் (Standard Deviation):

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் எண்களின் நியமவிலகல் S ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

இங்கு \bar{x} என்பது கூட்டலிடையாகும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \{x_i^2 - 2x_i\bar{x} + (\bar{x})^2\}}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{n} \sum x_i + \frac{1}{n} \sum (\bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \frac{1}{n} \cdot n(\bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2}{n}}$$

என்னும் சூத்திரமே கணித்தல்களில் பயன்படுத்தப்படும்.

Eg: 5, 7, 9, 11, 13 என்னும் 5 எண்களின் நியமவிலகலைக் காண்க?

$$\bar{x} = \frac{5+7+9+11+13}{5} = 9$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2 = 445$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{445}{5} - 9^2} = 2.83$$

குறிப்பு:

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் எண்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n என்னும் மீடறன்களுடன் காணப்பட்டால் நியம விலகல் S ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}}$$

இங்கு \bar{x} என்பது கூட்டலிடையாகும்.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

கணிதத்தல்களை இலகுவாக் குவதற்கு நியமவிலகலானது பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - (\bar{x})^2}$$

Eg: கீழுள்ள பரம்பலுக்கான நியமவிலகலைக் காண்க?

x	4	6	8	10	12	14
f	3	4	7	5	3	3

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
4	3	12	48
6	4	24	144
8	7	56	448
10	5	50	500
12	3	36	432
14	3	42	588
	25	220	2160

$$\sum f_i = 25$$

$$\sum f_i x_i = 220$$

$$\sum f_i x_i^2 = 2160$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{220}{25} = 8.8$$

$$S^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - (\bar{x})^2 = \frac{2160}{25} - (8.8)^2 = 8.96$$

$$S = 2.99 \text{ நியமவிலகல்} = 2.99$$

குறிப்பு:

தரவுகள் வகுப்பாயிடைகளாக இருந்தால் x இன் பெறுமானத் திற்காக வகுப்பின் நடுப்பெறுமானங்கள் பயன்படுத்தப்படும்.

நியமவிலகலுக்கான குழுக்குறித்தல் முறை

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் பெறுமானங்களை நடுப்பெறுமானங்களாகக் கொண்ட வகுப்புக்களின் மீடறன்கள் முறையே f_1, f_2, \dots, f_n எனில் நியமவிலகல் S ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$S = C \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i u_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n f_i u_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right)^2}$$

இங்கு $u_i = \frac{d_i}{C}$

$C \rightarrow$ வகுப்பின் பருமன்

$d_i = x_i - A$

$A \rightarrow$ ஊகித்த இடை

Eg: உலகக் கிண்ண உதைபந்தாட்டப் போட்டியை தொலைக்காட்சி மூலம் அவதானித்துக் கொண்டிருந்த 100 பேர்களின் வயது விபரம் வருமாறு.

வயது (வருடங்களில்)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
மீடறன் (f)	15	16	30	25	14

குழுக்குறித்தல் முறைமூலம் இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க?

ஊகித்த இடை $A = 50$ என்க. $C = 20$

வகுப்பு	நடுப்பெறு மாணம் (x_i)	மீடறன் (f)	d_i	$u_i = \frac{d_i}{C}$	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
0-20	10	16	-40	-2	-32	64
20-40	30	15	-20	-1	-15	15
40-60	50	30	0	0	0	0
60-80	70	25	20	1	25	25
80-100	90	14	40	2	28	56
		100			6	160

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 100 \quad \sum_{i=1}^5 f_i u_i = 6$$

$$\sum_{i=1}^5 f_i u_i^2 = 160$$

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) C = 50 + \left(\frac{6}{100} \right) \times 20 = 51.2$$

$$S^2 = C^2 \left\{ \frac{\sum f_i u_i^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)^2 \right\} = 20^2 \times \left\{ \frac{160}{100} - \left(\frac{6}{100} \right)^2 \right\}$$

$$S^2 = 638.56$$

$$S = 25.27$$

$$\text{நியமவிலகல்} = 25.27$$

இணைந்த தொடையின் இடையும் நியமவிலகலும்

இணைந்த தொடையின் இடை:

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் n அவதானிப்புக்களின் இடை \bar{x} ஆகவும் y_1, y_2, \dots, y_m என்னும் m அவதானிப்புக்களின் இடை \bar{y} ஆகவும் உள்ளது என்க. ஒன்று சேர்ந்த $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ என்னும் $m+n$ அவதானிப்புக்களின் இடை \bar{z} எனில்,

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m}$$

ஆகும்.

நிறுவல்:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m} \Rightarrow \sum_{i=1}^m y_i = m\bar{y}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^m y_i}{n + m}$$

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m}$$

Eg: ஒரு வகுப்பிலுள்ள 20 ஆண்களினதும் சராசரி நிறை 50kg ஆகும். 30 பெண்களினதும் சராசரி நிறை 45kg ஆகும். வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் சராசரி நிறை யாது?

ஆண்களின் எண்ணிக்கை n என்க.

ஆண்களின் சராசரி நிறை \bar{x} என்க.

$$n = 20, \quad \bar{x} = 50\text{kg}$$

பெண்களின் எண்ணிக்கை m என்க.

பெண்களின் சராசரி நிறை \bar{y} என்க.

$$m = 30, \quad \bar{y} = 45\text{kg}$$

மாணவர்களின் சராசரி நிறை \bar{z} என்க.

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m} = \frac{20 \times 50 + 30 \times 45}{20 + 30} = \frac{2350}{50} = 47$$

∴ மாணவர்களின் சராசரி நிறை 47kg ஆகும்.

இணைந்த தொடையின் நியமவிலகல்:

x_1, x_2, \dots, x_n என்னும் n அவதானிப்புக்களின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே \bar{x}, S_x ஆகவும் y_1, y_2, \dots, y_m என்னும் m அவதானிப்புக்களின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே \bar{y}, S_y ஆகவும் உள்ளது என்க. ஒன்றுசேர்ந்த $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$

என்னும் $n + m$ அவதானிப்புக்களின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே \bar{z} , Sz என்க.

$$Sz = \sqrt{\frac{nSx^2 + mSy^2}{n + m} + \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m}}$$

நிறுவல்:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m} = \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m} \\ &= \frac{n(\bar{z}^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{z}\bar{x}) + m(\bar{z}^2 + \bar{y}^2 - 2\bar{z}\bar{y})}{n + m} \\ &= \frac{(n + m)\bar{z}^2 - 2\bar{z}(n\bar{x} + m\bar{y}) + n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} \\ &= \bar{z}^2 - 2\bar{z} \frac{(n\bar{x} + m\bar{y})}{n + m} + \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} \\ &= \bar{z}^2 - 2\bar{z} \cdot \bar{z} + \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} \\ \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} - \bar{z}^2 &= \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m} \text{-----(1)}\end{aligned}$$

$$Sx^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$Sy^2 = \frac{\sum y_i^2}{m} - \bar{y}^2$$

$$\begin{aligned}\frac{nSx^2 + mSy^2}{n + m} &= \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 + \sum y_i^2 - m\bar{y}^2}{n + m} \\ &= \frac{1}{n + m} (\sum x_i^2 + \sum y_i^2) - \frac{1}{n + m} (n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n + m} (\sum x_i^2 + \sum y_i^2) = \frac{nSx^2 + mSy^2}{n + m} + \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} \text{-----(2)}$$

ஒன்று சேர்ந்த தொடையின் நியமவிலகல் Sz எனில்.

$$\begin{aligned}S_z^2 &= \frac{\sum (x_i + y_i)^2}{n + m} - (\bar{z})^2 \\ &= \frac{1}{n + m} (\sum x_i^2 + \sum y_i^2) - \frac{2}{n + m} \sum x_i y_i - \bar{z}^2\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum x_i^2 + \sum y_i^2}{n+m} - \bar{z}^2 \quad (\because \sum x_i y_i = 0)$$

$$= \frac{nSx^2 + mSy^2}{n+m} + \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n+m} - \bar{z}^2 \quad ((2) \text{ இலிருந்து})$$

$$= \frac{nSx^2 + mSy^2}{n+m} + \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n+m} \quad ((1) \text{ இலிருந்து})$$

$$S_z = \sqrt{\frac{nSx^2 + mSy^2}{n+m} + \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n+m}}$$

Eg:1) ஒரு தொடையிலுள்ள 12 எண்களின் இடை. நியமவிலகல் என்பன முறையே 4, 2 ஆகும். இன்னொரு தொடையிலுள்ள 20 எண்களின் இடை. நியமவிலகல் என்பன முறையே 5, 3 ஆகும். ஒன்று சேர்ந்த தொடையிலுள்ள 32 எண்களினதும் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

விடை: முதலாவது தொடையிலுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை. இடை. நியமவிலகல் முறையே n , \bar{x} , S_x இனால் குறிக்கப்படுகின்றது என்க.

$$n = 12, \bar{x} = 4, S_x = 2$$

இரண்டாவது தொடையிலுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை. இடை, நியமவிலகல் முறையே m , \bar{y} , S_y இனால் குறிக்கப்படுகின்றது என்க.

$$m = 20, \bar{y} = 5, S_y = 3$$

ஒன்று சேர்ந்த தொடையிலுள்ள $m + n$ எண்களின் இடை. நியமவிலகல் முறையே \bar{z} , S_z என்க.

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m} = \frac{12 \times 4 + 20 \times 5}{12 + 20} = \frac{37}{8} = 4.6$$

$$S_z^2 = \frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n+m} + \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n+m}$$

$$= \frac{48 + 180}{32} + \frac{12(4.6 - 4)^2 + 20(4.6 - 5)^2}{32}$$

$$= 7.36$$

$$S_z = 2.7$$

Eg:2) முதலாவது தொடையிலுள்ள 12 எண்களினதும் இடை. நியம விலகல் முறையே 15, 2.7 ஆகும். இரண்டாவது தொடையிலுள்ள 15 எண்களினதும் இடை. நியமவிலகல் முறையே 14, 3.1 ஆகும். மூன்றாவது தொடையிலுள்ள 13 எண்களினதும் இடை. நியமவிலகல் என்பன முறையே 12, 2.4 ஆகும். இணைந்த மூன்று தொடைகளிலுமுள்ள 40 எண்களினதும் இடை. நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$n_1 = 12, \quad \bar{x}_1 = 15, \quad S_1 = 2.7$$

$$n_2 = 15, \quad \bar{x}_2 = 14, \quad S_2 = 3.1$$

$$n_3 = 13, \quad \bar{x}_3 = 12, \quad S_3 = 2.4$$

$$\text{இடை } \bar{x}_i = \frac{\sum x_i}{n_i}$$

$$\sum x_i = n_i \bar{x}_i$$

$$\sum x_1 = 12 \times 15 = 180$$

$$\sum x_2 = 15 \times 14 = 210$$

$$\sum x_3 = 13 \times 12 = 156$$

இணைந்த மூன்று தொடைகளினதும் இடை \bar{x} என்க.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_1 + \sum x_2 + \sum x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{180 + 210 + 156}{12 + 15 + 13} = 13.65$$

$$S_i^2 = \frac{\sum x_i^2}{n_i} - (\bar{x}_i)^2$$

$$\sum x_i^2 = n_i (S_i^2 + \bar{x}_i^2)$$

$$\sum x_1^2 = 12(2.7^2 + 15^2) = 2787.48$$

$$\sum x_2^2 = 15(3.1^2 + 14^2) = 3084.15$$

$$\sum x_3^2 = 13(2.4^2 + 12^2) = 1946.88$$

$$\sum x^2 = \sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \sum x_3^2 = 7818.51$$

இணைந்த மூன்று தொடைகளினதும் நியமவிலகல் S என்க.

$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n_1 + n_2 + n_3} - \bar{x}^2 = \frac{7818.51}{40} - (13.65)^2 = 9.14$$

$$S = 3.02$$

பயிற்சி - 8

1. பின்வரும் எண்தொடைகளின் இடைவிலகலைக் காண்க?

(i) 196, 198, 198, 199, 200, 200, 201, 201, 202, 205

(ii) 192, 194, 195, 198, 200, 201, 203, 204, 206, 207

(iii) 3, 7, 8, 21, 35

(iv) 203, 207, 208, 221, 235

(v) 0.6, 1.4, 1.6, 4.2, 7

(vi) 5.03, 5.07, 5.08, 5.21, 5.35

2. பின்வரும் மீடறன் பரம்பலுக்கான இடை விலகலைக் காண்க?

நட்டுக்கள் (x)	10	12	14	16	18	20	22
மீடறன் (f)	2	3	6	5	4	3	2

3. பின்வரும் மீடறன் பரம்பலுக்கான இடை விலகலைக் காண்க?

வகுப்பு	1-30	31-60	61-90	91-120	121-150	151-180
மீடறன்	3	9	20	22	13	8

4. பின்வரும் எண்தொடைகளின் நியமவிலகலைக் காண்க?

(i) 3, 7, 8, 21, 35

(ii) 2, 3, 5, 6, 8

(iii) 2, 4, 5, 6, 8

(iv) 6, 8, 9, 11

(v) 11, 14, 17, 23, 29

(vi) 5, 13, 7, 9, 16, 15

(vii) 4.6, 2.7, 3.1, 0.5, 6.2

(viii) 200, 203, 206, 207, 209

5. 3, 6, 7, a, 14 என்பவற்றின் இடை 8 எனில் நியமவிலகலைக் காண்க?

6. $\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$ இலிருந்து n வரையுள்ள முழு எண்களின் நியமவிலகல் எனக்காட்டுக?

7. பின்வரும் மீடறன் பரம்பலுக்கான நியமவிலகலைக் காண்க?

(i)	x	-2	-1	0	1	2	3
	f	7	19	37	26	15	6

(ii)	ஈட்டுக்கள் (x)	114	115	116	117	118	119
	மீடறன் (f)	7	19	37	26	15	6

(iii)	ஈட்டுக்கள் (x)	254.5	274.5	294.5	314.5	334.5	354.5
	மீடறன் (f)	7	19	37	26	15	6

(iv)	வகுப்பு	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
	மீடறன்	12	34	42	40	24	8

8. "டைட்டானிக்" திரைப்படத்தைப் பார்வையிடுவதற்காக ஒருநாள் சினிமா சாலை ஒன்றிற்கு வந்த 400 பேர்களின் வயது விபரங்கள் கீழுள்ளவாறு வகுப்பாக்கம் செய்யப்பட்டுள்ளது.

வகுப்பு	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-99
மீடறன்	44	56	64	78	60	40	36	18	4

குழுக்குறித்தல் முறை மூலம் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க?

9. கிராமம் ஒன்றில் போதைப் பொருளுக்கு அடிமையான 32 பேரின் வயது விபரம் வருமாறு.

வகுப்பு	20-22	23-25	26-28	29-31	32-34
மீடறன்	3	6	12	9	2

குழுக்குறித்தல் முறையை (Coding Method) உபயோகித்து போதைக்கு அடிமையானவர்களின் சராசரி வயதையும் நியம விலகலையும் காண்க?

10. 200 மாணவர்கள் பரீட்சை ஒன்றில் பெற்ற புள்ளிகள் வருமாறு.

புள்ளிகள்	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	13	24	35	40	36	22	16	9

ஆகார வகுப்பின் நடுப்பெறுமானத்தை ஊகித்த இடையாகக் கொண்டு மாணவர்கள் பெற்ற இடைப் புள்ளியையும் நியம விலகலையும் குழுக்குறித்தல் முறை மூலம் காண்க?

11. பரிசோதனைக் குப்பி ஒன்றின் நிறையை அளக்குமாறு 300 மாணவர்களிடம் கேட்கப்பட்டது. அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் அளந்த நிறையின்படி பின்வரும் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டது. பரிசோதனைக் குப்பியின் நிறையின் இடையையும் நியம விலகலையும் குழுக்குறித்தல் முறை மூலம் காண்க?

குப்பியின் நிறை (கிராமில்)	35.26 - 35.30	35.31 - 35.35	35.36 - 35.40	35.41 - 35.45	35.46 - 35.50	35.51 - 35.55
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	17	44	104	86	35	14

12. n_1 எண்களைக் கொண்ட தொடையின் இடை, நியம விலகல் \bar{x}_1, S_1 ஆகவும் n_2 எண்களைக் கொண்ட தொடையின் இடை, நியமவிலகல் முறையே \bar{x}_2, S_2 ஆகவும் இருந்தால் இணைந்த தொடையிலுள்ள $n_1 + n_2$ எண்ணிகளின் இடை, நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

12 எண்களைக் கொண்ட தொடையின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 6, 2 ஆகவும் 8 எண்களைக் கொண்ட தொடையின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 10, 3 ஆகவும் இருந்தால் இரு தொடையிலுமுள்ள 20 எண்களின் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

13. 60 ஆண்களின் நிறையின் இடை, நியமவிலகல் முறையே 72kg, 5kg ஆகவும் 90 பெண்களின் நிறையின் இடை, நியமவிலகல்

முறையே 58kg, 7kg ஆகவும் உள்ளது. 150 பேரினதும் நிறையின் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

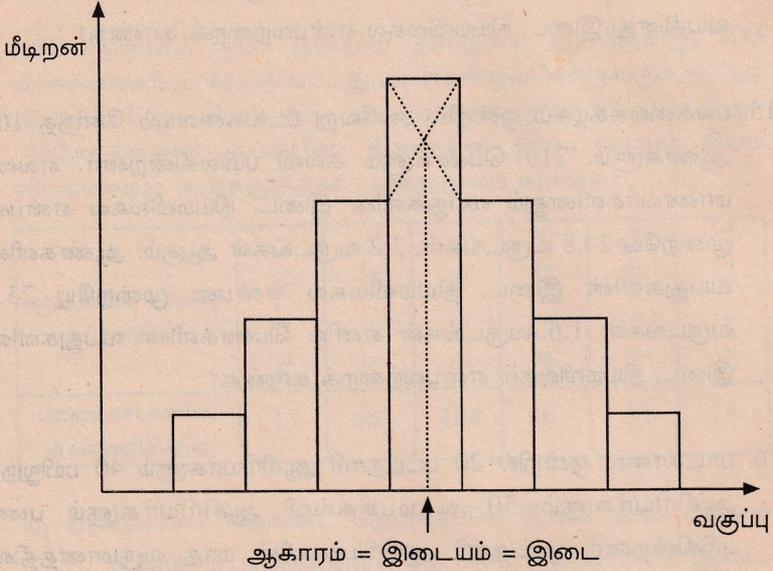
14. சிறுவர் பாடசாலை ஒன்றிலுள்ள 253 சிறுமிகளினதும் வயதுகளின் இடை, நியமவிலகல் முறையே 11.8 வருடங்கள், 1.7 வருடங்கள் ஆகும். இப்பாடசாலையிலுள்ள 312 சிறுவர்களின் வயதுகளின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 12.3 வருடங்கள், 1.9 வருடங்கள் ஆகும். இப்பாடசாலையிலுள்ள மாணவர்களின் வயதினது இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
15. பல்கலைக்கழகம் ஒன்றில் பல்வேறு பீடங்களையும் சேர்ந்த 165 ஆண்களும், 219 பெண்களும் கல்வி பயில்கின்றனர். எல்லா மாணவர்களினதும் வயதுகளின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 24.8 வருடங்கள், 2.2 வருடங்கள் ஆகும். ஆண்களின் வயதுகளின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 23.4 வருடங்கள் 1.6 வருடங்கள் எனில் பெண்களின் வயதுகளின் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
16. பாடசாலை ஒன்றில் 20 பட்டதாரி ஆசிரியர்களும் 40 பயிலுநர் ஆசிரியர்களும் 30 ஆரம்பக்கல்வி ஆசிரியர்களும் பணி புரிகின்றனர். பட்டதாரி ஆசிரியர்களின் மாத வருமானத்தின் இடை, நியம விலகல் முறையே 7200/- ரூபா, 800/- ரூபா ஆகவும் பயிலுநர் ஆசிரியர்களின் மாத வருமானத்தின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 5800/- ரூபா, 500/- ரூபா ஆகவும் ஆரம்பக்கல்வி ஆசிரியர்களின் வருமானத்தின் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே 3900/- ரூபா, 400/- ரூபா ஆகவும் இருந்தால் அப்பாடசாலையிலுள்ள ஆசிரியர்களின் வருமானத்தின் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

பரம்பலின் வடிவங்கள்

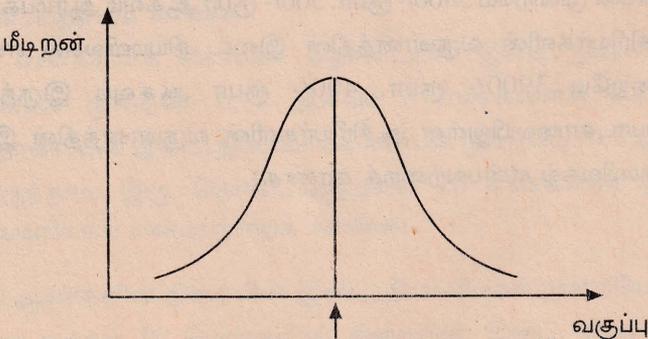
சமச்சீரானவை:

ஒரு பரம்பலின் ஆகாரம், இடையம், இடை எல்லாம் ஒரே பெறுமானத்தைக் கொண்டிருந்தால் அது சமச்சீரான வடிவத்தைக் கொண்டிருக்கும்.

இதற்கான வலையுரு வரையம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



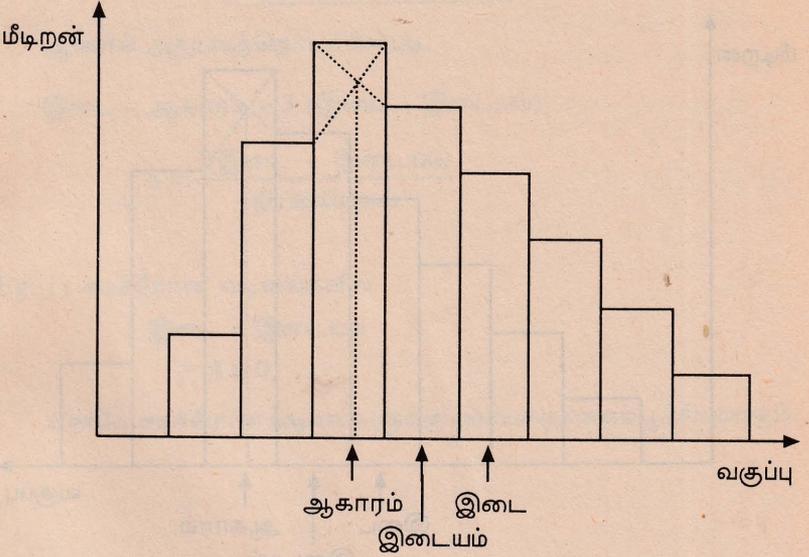
இச்சமச்சீர் பரம்பலுக்கான மீடறன் பல்கோணி பின்வருமாறு அமையும்.



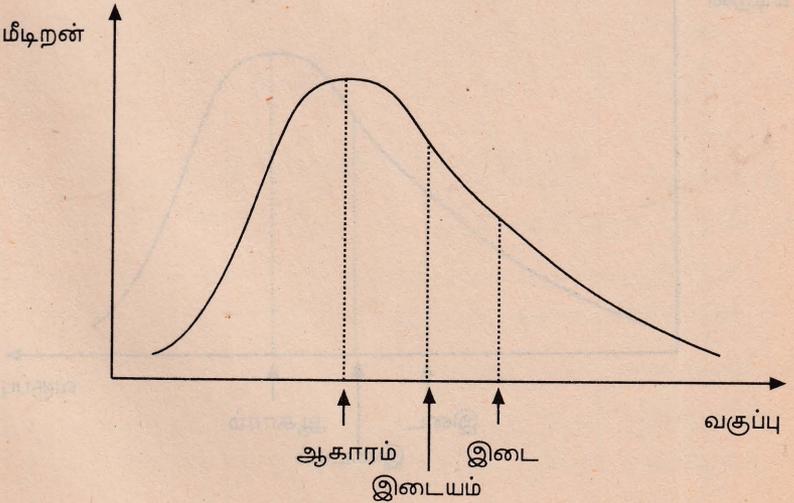
நேர் ஓராயமானவை:

ஒரு பரம்பலின் இடையம், இடை என்பன ஆகாரத்திற்கு வலது பக்கத்தில் அமைந்திருந்தால் அது நேர் ஓராயமான வடிவத்தைக் கொண்டிருக்கும்.

இதற்கான வலையுருவரையம் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



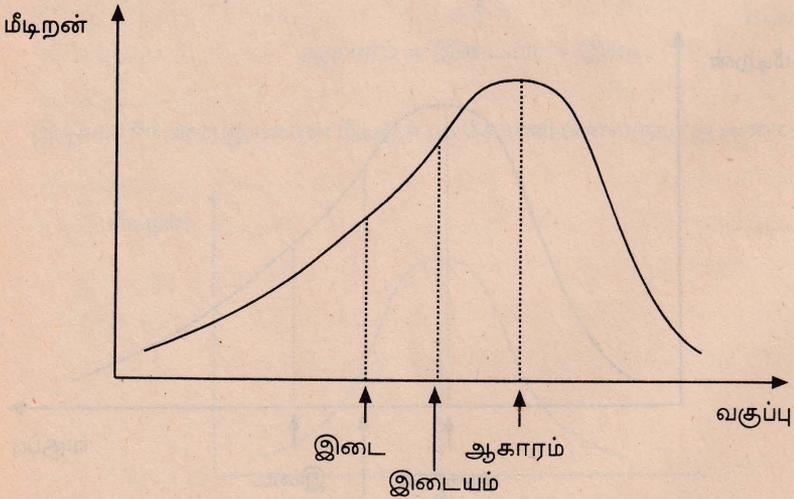
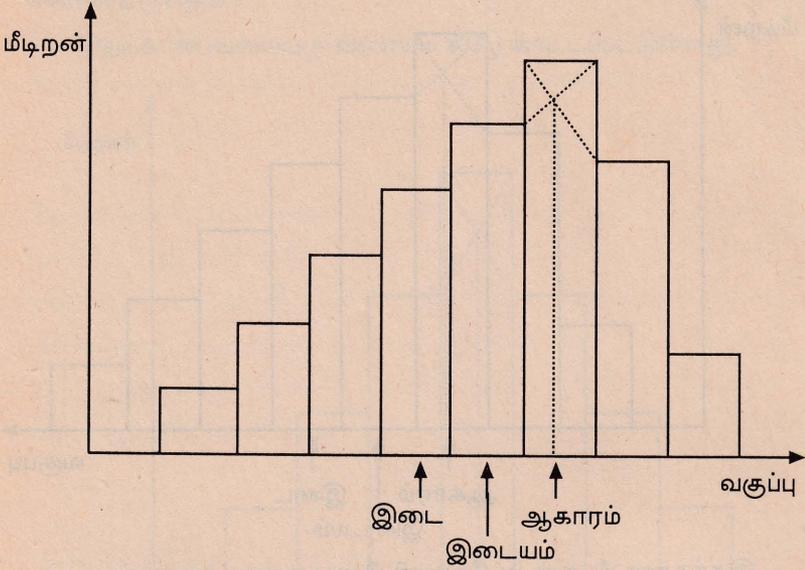
இதற்கான மீடறன் பல்கோணி பின்வருமாறு அமையும்.



மறை ஓராயமானவை:

ஒரு பரம்பலின் இடையம். இடை என்பன ஆகாரத்திற்கு இடது பக்கத்தில் அமைந்திருந்தால் அது மறை ஓராயமான வடிவத்தைக் கொண்டிருக்கும்.

இதற்கான வலையுரு வரையம். மீடறன் பல்கோணி என்பன கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.



பியர்சனின் ஓராயக்குணகம்:

பரம்பல்களின் வடிவத்திற்கான பியர்சனின் ஓராயக்குணகம் S ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$S = \frac{\text{இடை} - \text{ஆகாரம்}}{\text{நியமவிலகல்}}$$

ஆனால் அநுபவத்தொடர்பின்படி,

$$\text{இடை} - \text{ஆகாரம்} = 3 (\text{இடை} - \text{இடையம்})$$

$$\therefore S = \frac{3(\text{இடை} - \text{இடையம்})}{\text{நியமவிலகல்}}$$

Eg: 1) சமச்சீரான வடிவங்களில்

$$\text{இடை} = \text{இடையம்}$$

$$\therefore S = 0$$

எனவே சமச்சீரான வடிவங்களுக்கு ஓராயக்குணகம் பூச்சியமாகும்.

புள்ளிவியல் (Statistics)

எழுமாற்று மாறிகள்:

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் மாதிரிவெளி S இன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட மெய்ப்பெறுமானச்சார்பு எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.

அதாவது மாதிரிவெளி S இலுள்ள ஒவ்வொரு நிகழ்வுகளுக்கும் எழுமாற்று மாறியானது மெய் அச்சில் ஒரு பெறுமானத்தை எடுக்கும்.

எழுமாற்று மாறிகள் X, Y, Z போன்ற எழுத்துக்களால் குறிக்கப்படும்.

Eg: 1) நாணயம் ஒன்று இருமுறை சுண்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுக. இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S ஆனது பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

X என்னும் எழுமாற்று மாறி தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றது என்க. எனவே X எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 2, 1, 0 ஆகும். $X = 0, 1, 2$ ஆகும்.

Eg: 2) 1 தொடக்கம் 6 வரை இலக்கமிடப்பட்ட இரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டைகள் ஒன்றாக சுண்டப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுக. இரு தாயக்கட்டைகளிலும் தோன்றும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையை எழுமாற்று மாறி X என்க.

ஆகவே X எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள்

$$X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \text{ஆகும்.}$$

எழுமாற்று மாறி இருவகைப்படும்

1. பின்னக எழுமாற்று மாறி:-

எழுமாற்று மாறி ஒன்றின் பெறுமானங்கள் எண்ணமுடியுமாயின் அது பின்னக எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.

2. தொடர் எழுமாற்று மாறி:-

எழுமாற்று மாறி ஒன்றின் பெறுமானங்கள் எண்ணப்படமுடியாதாயின் அது தொடர் எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.

பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

பின்னக எழுமாற்று மாறி ஒன்று எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்குமான நிகழ்தகவுகளைக் கொண்ட பட்டியல் அல்லது அட்டவணை எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் எனப்படும்.

எழுமாற்று மாறியின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்குமான நிகழ்தகவு, பின்னக நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனப்படும்.

Eg: 1) கோடாத நாணயம் ஒன்று இருமுறை சுண்டப்படுகிறது என்க.

X என்னும் பின்னக எழுமாற்று மாறி தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றது என்க.

இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S எனில்

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

மாதிரிப்புள்ளி	HH	HT	TH	TT
எழுமாற்று மாறி (X)	2	1	1	0

$$X = 0 \text{ எனில் } P(X = 0) = P(TT) = P(T) P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$X = 2 \text{ எனில் } P(X = 2) = P(HH) = P(H) P(H) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} X = 1 \text{ எனில் } P(X = 1) &= P(HT) + P(TH) \\ &= P(H)P(T) + P(T)P(H) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ஆகவே எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பின்வருமாறு தரப்படும்.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

இங்கு எழுமாற்று மாறி X இன் ஆகாரம் 1.

Eg: 2) ஒரு சீட்டிழுப்பில் \$5 இல் 200 பரிசுகளும் \$25 இல் 20 பரிசுகளும் \$100 இல் 5 பரிசுகளும் உள்ளன. ஒருமுறை 10,000 சீட்டுக்கள் விற்கப்பட்டன.

சீட்டில் வெவ்வுதற்குரிய பணத்தின் தொகையை எழுமாற்று மாறி X எனக்கொண்டு X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் காண்க?
 $\therefore X = 0, 5, 25, 100$

$$P(X = 5) = \frac{200}{10000} = 0.02$$

$$P(X = 25) = \frac{20}{10000} = 0.002$$

$$P(X = 100) = \frac{5}{10000} = 0.0005$$

$$P(X = 0) = \frac{10000 - 225}{10000} = 0.9775$$

X	0	5	25	100
P(X)	0.977	0.02	0.002	0.0005

Eg: 3) ஒரு பையினுள் 6 நீலமணிகளும் 4 சிவப்பு மணிகளும் உள்ளன. மீள்வைப்பிடாமல் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக 3 மணிகள் எடுக்கப்படுகின்றது.

X என்னும் எழுமாற்று மாறி எடுக்கப்படும் சிவப்பு மணிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றது எனில் X இற்கான நிகழ்தகவு பரம்பலைக் காண்க?

$\therefore X = 0, 1, 2, 3$

$$P(X = 0) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 3) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

பின்னக நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
P(X) இன் இயல்புகள்

(i) X இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $P(X) \geq 0$

(ii) $\sum_x P(X = x) = 1$

Eg: 1) மேலுள்ள நிகழ்தகவு பரம்பலைக் கருதுக.

$$\sum P(X = x) = \frac{1}{6} + \frac{13}{30} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1$$

Eg: 2) கீழுள்ள நிகழ்தகவு பரம்லில் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

X	1	2	3	4
P(X)	0.2	0.3	a	0.1

$$\sum_{x=1}^4 P(X = x) = 1$$

$$0.2 + 0.3 + a + 0.1 = 1$$

$$a = 0.4$$

Eg: 3) மாதிரிவெளியின் எழுமாற்று மாறியின் பெறுமானங்களுக்கான

நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \frac{p}{4}$ எனில் p இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{3} + \frac{p}{4} = 1$$

$$\frac{13p}{12} = 1$$

$$p = \frac{12}{13}$$

எதிர்வு (Expectation)

ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறி X இன் எதிர்வு $E(X)$ ஆனது

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x) \quad \text{இனால்தரப்படும்.}$$

$E(X)$ ஆனது X இன் இடைப்பெறுமானம் ஆகும். இது μ இனால்தரப்படும்.

அதாவது $\mu = E(X)$

Eg: 1) பின்னக எழுமாற்று மாறி ஒன்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. எழுமாற்று மாறியின் எதிர்வைக் காண்க?

X	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2$$

எதிர்வின் இயல்புகள்

(i) $E(a) = a$

(ii) $E(ax) = aE(x)$

(iv) $E(ax+b) = aE(x) + b$ a, b என்பன மாறிலிகள்

நிறுவல்:-

(i) $E(a) = \sum a \cdot P(X=x)$ (ii) $E(aX) = \sum aX \cdot P(X=x)$

$= a \sum P(X=x)$

$= a \sum X \cdot P(X=x)$

$= a \times 1$

$E(ax) = aE(X)$

$E(a) = a$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } E(aX+b) &= \sum (aX+b) \cdot P(X=x) \\
 &= \sum aX \cdot P(X=x) + \sum b \cdot P(X=x) \\
 &= a \sum X \cdot P(X=x) + b \sum P(X=x) \\
 &= aE(X) + b \times 1
 \end{aligned}$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

Eg: $E(X) = 2.5$ எனில் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

(i) $E(3)$

(ii) $E(4X)$

(iii) $E(3X+4)$

Ans: (i) $E(3) = 3$

(ii) $E(4X) = 4E(X) = 4 \times 2.5 = 10$

(iii) $E(3X+4) = 3E(X) + 4 = 3 \times 2.5 + 4 = 11.5$

மாற்றத்திறன் (Variance)

மாதிரிவெளி ஒன்றின் பின்னக எழுமாற்று மாறி X இன் மாற்றத்திறன் $\text{Var}(X)$ ஆனது

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[X - \mu]^2 \\
 &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\
 &= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \\
 &= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \\
 &= E(X^2) - \mu^2 \quad \text{Q } E(X) = \mu
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

குறிப்பு:- $\text{Var}(X)$ இன் நேர்வர்க்க மூலப்பெறுமானம் நியமவிலகல் எனப்படும். அதாவது

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Eg: எழுமாற்று மாறி ஒன்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இவ் எழுமாற்று மாறியின் மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

X	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum x \cdot P(X)$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot P(X)$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{4} + 2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Var}(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{Var}(x) = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707$$

மாறத்திறனின் இயல்புகள்

(i) $\text{Var}(a) = 0$

(ii) $\text{Var}(ax) = a^2 \text{Var}(x)$

(iv) $\text{Var}(ax+b) = a^2 \text{Var}(x)$ a, b என்பன மாறிலிகள்

நிறுவல்:-

$$\begin{aligned} \text{(i) } \text{Var}(a) &= E[a - E(a)]^2 \\ &= E[a - a]^2 = E(0) \end{aligned}$$

$$\text{Var}(a) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) Var}(aX) &= E[aX - E(aX)]^2 \\
 &= E[aX - aE(X)]^2 \\
 &= a^2 E[X - E(X)]^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) Var}(aX + b) &= E[aX + b - E(aX + b)]^2 \\
 &= E[aX + b - aE(X) - b]^2 \\
 &= E[aX - aE(X)]^2 \\
 &= a^2 E[X - E(X)]^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

Eg: 1) $E(X) = 2$, $E(X^2) = 6$ எனில் $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(3X)$, $\text{Var}(2X+5)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6 - 4 = 2$$

$$\text{Var}(3X) = 9\text{Var}(X) = 18$$

$$\text{Var}(2X+5) = 4\text{Var}(X) = 4 \times 2 = 8$$

Eg: 2) கோடாத நாணயம் ஒன்று அடுத்தடுத்து மூன்று தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. தலை தென்படும் முறைகளின் எண்ணிக்கை X என்னும் எழுமாற்று மாறியாக வரையறுக்கப்படுகின்றது. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு X இன் இடை, மாறத்திறன், நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$Y = \begin{cases} 0; & X - \text{இரட்டை எண்} \\ 1; & X - \text{ஒற்றை எண்} \end{cases}$$

ஆகுமாறு Y என்னும் எழுமாற்று மாறி வரையறுக்கப்படின Y இன் எதிர்வு, மாறத்திறன், நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

X என்னும் எழுமாற்று மாறி எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள்

$$X = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 0) = P(TTT) = P(T)P(T)P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \sum x \cdot P(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot P(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0.87$$

Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

Y	0	1
P(Y)	$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$	$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$

$$E(Y) = 0 + \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = 0 + \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

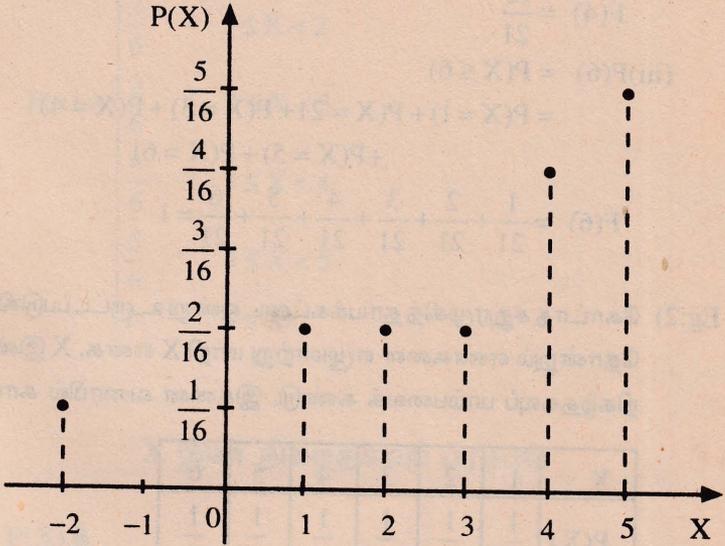
$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \frac{1}{2}$$

பின்னக நிகழ்தகவு பரம்பலை வரைபில் குறித்தல்

கீழேயுள்ள நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கருதுக.

X	-2	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$



திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

ஒரு பின்னக எழுமாற்று X மாறி இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ ஆனது,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

என வரையறுக்கப்படும்.

Eg:1) கீழுள்ள நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கருதுக.

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

$$(i) F(2) = P(X \leq 2)$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$F(2) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$(ii) F(4) = P(X \leq 4)$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$F(4) = \frac{10}{21}$$

$$(iii) F(6) = P(X \leq 6)$$

$$= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$F(6) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = 1$$

Eg:2) கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டடை ஒன்று உருட்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்களை எழுமாற்று மாறி X என்க. X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு, இதனை வரைபில் காட்டுக?

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$F(0) = P(X \leq 0) = 0$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{6}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

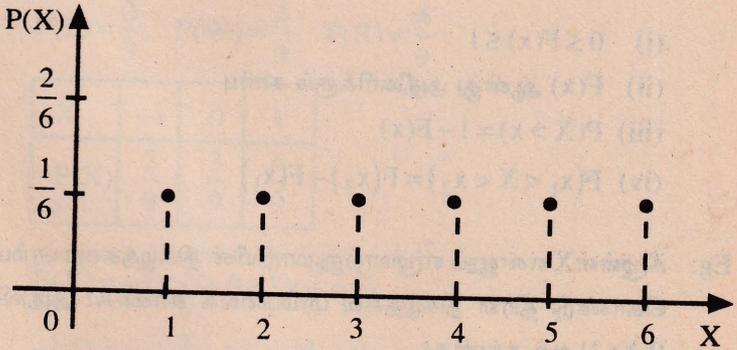
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{5}{6}$$

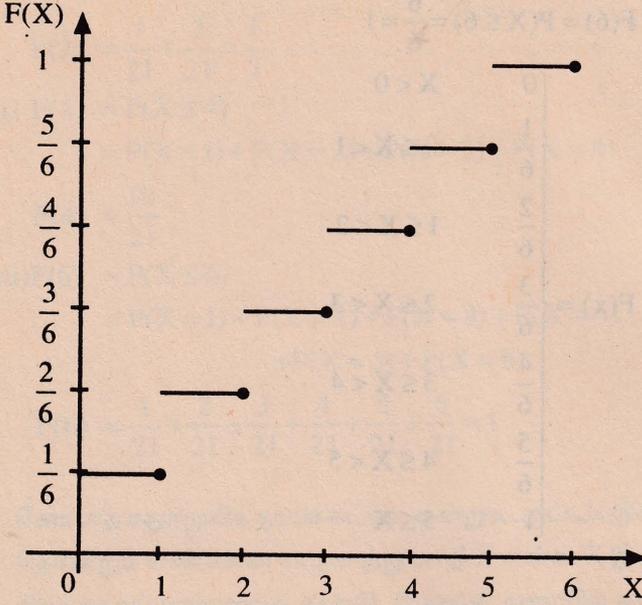
$$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{6}{6} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \leq X < 1 \\ \frac{2}{6} & 1 \leq X < 2 \\ \frac{3}{6} & 2 \leq X < 3 \\ \frac{4}{6} & 3 \leq X < 4 \\ \frac{5}{6} & 4 \leq X < 5 \\ 1 & 5 \leq X \end{cases}$$

X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்



X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு



திரள் நிகழ்தகவு பரம்பல் சார்பின் இயல்புகள்

- (i) $0 \leq F(x) \leq 1$
- (ii) $F(x)$ ஆனது அதிகரிக்கும் சார்பு
- (iii) $P(X > x) = 1 - F(x)$
- (iv) $F(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Eg: கீழுள்ள X என்னும் எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கொண்டு திரள் நிகழ்தகவு பரம்பலைக் காண்க? அதிலிருந்து $P(X > 3)$ ஐக் காண்க?

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ 0.41 & 0 \leq X < 1 \\ 0.78 & 1 \leq X < 2 \\ 0.94 & 2 \leq X < 3 \\ 0.99 & 3 \leq X < 4 \\ 1.00 & 4 \leq X \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - F(3) \\ &= 1 - 0.99 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

Eg:1) ஒரு பெட்டியினுள் 2 - கறுப்பு, 3 - வெள்ளை, 4 - சிவப்பு மார்பிகள் உள்ளன. ஒரு மார்பி எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றது. எடுக்கப்படுவது கறுப்பாக, வெள்ளையாக, சிவப்பாக இருப்பதற்குரிய எழுமாற்று மாறிகள் $X = -1, 0, 1$ ஆகும். X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு X இன் இடை, மாற்றத்தின், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

Y என்னும் எழுமாற்று மாறி $Y = X + 1$ வரையறுக்கப்படுகின்றது. Y இன் இடை, நியமவிலகல், திரள்நிகழ்தகவுப் பரம்பல் என்பவற்றைக் காண்க?

விடை: கறுப்பு - B, வெள்ளை - W, சிவப்பு - R என்க.

$$P(B) = \frac{2}{9}, \quad P(W) = \frac{3}{9}, \quad P(R) = \frac{4}{9}$$

X	-1	0	1
P(X)	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$E(X) = -1 \times \frac{2}{9} + 0 + 1 \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$E(X^2) = 1 \times \frac{2}{9} + 0 + 1 \times \frac{4}{9} = \frac{6}{9}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{6}{9} - \frac{4}{81} = \frac{50}{81}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{\frac{50}{81}} = 0.78$$

Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

Y	0	1	2
P(Y)	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$E(Y) = 1 \times \frac{3}{9} + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{11}{9}$$

$$E(Y^2) = 1 \times \frac{3}{9} + 4 \times \frac{4}{9} = \frac{19}{9}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{19}{9} - \frac{121}{81} = \frac{50}{81}$$

Y இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & Y < 0 \\ \frac{2}{9} & 0 \leq Y < 1 \\ \frac{5}{9} & 1 \leq Y < 2 \\ 1 & 2 \leq Y \end{cases}$$

Eg:2) ஓர் அதிஷ்ட இலாப சீட்டு நிறுவனம் ரூபா 5/- பெறுமதியுள்ள 8000 சீட்டுக்களை விற்பனை செய்கின்றது. இச்சீட்டிற்கு 12,000/- பரிசாக வழங்கப்படுகின்றது. இரு சீட்டுக்கள் வாங்கும் ஒருவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபம் எவ்வளவு?

எதிர்பார்க்கப்படும் இலாபம் எழுமாற்று மாறி X என்க. இரு சீட்டுக்கள் வாங்குவதால் ஒன்றில் ரூபா 10/- இழப்பாக இருக்கும். அல்லது ரூபா 11,990/- இலாபமாக இருக்கும். எனவே எழுமாற்று மாறி X ஆனது -10, 11,990 என்னும் இருபெறுமானங்களை எடுக்கும். 11,990/- ரூபாவை இலாபமாக பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{8000}$ ஆகும். ரூபா 10/- ஐ இழப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{7998}{8000} \text{ ஆகும்.}$$

X	-10	11,990
P(X)	$\frac{7998}{8000}$	$\frac{2}{8000}$

$$E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$$

$$= -10 \times \frac{7998}{8000} + 11,990 \times \frac{2}{8000}$$

$$E(X) = -7$$

எனவே எதிர்பார்க்கப்பட்ட பெறுமானம் 7/- இழப்பாகும்.

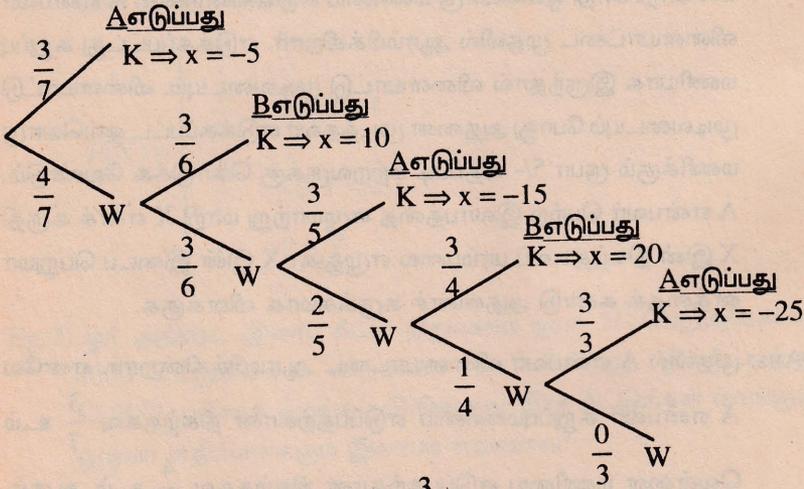
Eg: ஒரு பையினுள் 4 வெள்ளை மணிகளும் 3 கறுத்த மணிகளும் உள்ளன. A, B என்னும் இரு விளையாட்டாளர்கள் மீள்வைப்பிடாமல் மாறி மாறி ஒவ்வொரு மணியை எடுக்கின்றனர். A என்பவர் விளையாட்டை முதலில் ஆரம்பிக்கிறார். எடுக்கப்பட்டது கறுப்பு மணியாக இருந்தால் விளையாட்டு முடிவடையும். விளையாட்டு முடிவடையும் போது அதனை முடித்தவர் எடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு மணிக்கும் ரூபா 5/- வீதப்படி மற்றவருக்கு கொடுக்க வேண்டும். A என்பவர் பெற்ற இலாபத்தை எழுமாற்று மாறி X எனக் கருதி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை எழுதுக? X இன் இடைப் பெறுமாதத்தைக் கண்டு அதனைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

Ans: முதலில் A என்பவர் விளையாட்டை ஆரம்பிக்கின்றார். எனவே A என்பவர் கறுப்புமணியை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{7}$ உம் வெள்ளை மணியை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{7}$ உம் ஆகும். இவர் கறுப்புமணியை எடுத்தால் விளையாட்டு முடிவடைகின்றது. எனவே A என்பவர் தான் எடுத்த ஒரு மணிக்காக ரூபா 5/- ஐ B இற்குச் செலுத்துகின்றார். (இத்தொகை A இற்கு நட்டம் ஆகும்.) A என்பவர் கறுப்பை எடுக்காமல் வெள்ளையை எடுத்தால் B என்பவர் ஆட்டத்தைத் தொடங்குகிறார். எனவே B என்பவர் கறுத்த மணியை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{6}$ உம் வெள்ளை மணியை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{6}$ உம் ஆகும். (ஏனெனில்

A என்பவர் எடுத்தது மீள்வைக்கப்படவில்லை.) ஆகவே B என்பவர் கறுப்பு மணியை எடுத்தால் விளையாட்டு முடிவடைகின்றது. எடுக்கப்பட்ட இரு மணிகளுக்காகவும் இவர் ரூபா 10/- ஐ A இற்குச் செலுத்த வேண்டும். இத்தொகை A இற்கு இலாபம். B என்பவர் கறுப்பு மணியை எடுக்காமல் வெள்ளையை எடுத்திருந்தால் திரும்ப A என்பவர் ஆட்டத்தைத் தொடங்குவார். இவ்வாறு ஆட்டம் தொடர்ந்து நடைபெறும். இதனைக் கீழுள்ள மரவரிப்படம் விளக்குகின்றது.

கறுப்பு மணியை K எனவும், வெள்ளை மணியை W எனவும் கொள்க.

X என்பது எழுமாற்று மாறி (A இன் இலாபம்) என்க.



$$X = -5 \text{ எனில் } P(X = -5) = \frac{3}{7}$$

$$X = 10 \text{ எனில் } P(X = 10) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

$$X = -15 \text{ எனில் } P(X = -15) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

$$P(X = 20) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$$

$$P(X = -25) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$$

X	-25	-15	-5	10	20
P(X)	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{35}$

$$E(X) = \sum x \cdot P(X=x) = \frac{-25}{35} - \frac{90}{35} - \frac{15}{7} + \frac{20}{7} + \frac{60}{35} = \frac{-6}{7} = -0.85$$

எனவே சராசரியாக ஒரு விளையாட்டில் A என்பவர் 85 சதத்தை இழப்பார்.

இரண்டு சாரா எழுமாற்று மாறிகள்

X, Y என்பன இரண்டு சாரா எழுமாற்று மாறிகள் எனில்

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$E(x-y) = E(x) - E(y)$$

$$\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$$

$$\text{Var}(x-y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$$

Eg:1) $E(x) = 8$, $E(y) = 5$, $\text{Var}(x) = 4$, $\text{Var}(y) = 9$ எனில் பின்வரும்

எழுமாற்று மாறிகளின் இடையையும் மாற்றத்திறனையும் காண்க?

(i) $X+Y$ (ii) $X-Y$ (iii) $2X+3Y$ (iv) $X-4Y$

Ans: $E(X) = 8$, $E(Y) = 5$, $\text{Var}(X) = 4$, $\text{Var}(Y) = 9$

(i) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 8 + 5 = 13$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \\ &= 4 + 9 = 13 \end{aligned}$$

(ii) $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 8 - 5 = 3$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X-Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \\ &= 4 + 9 = 13 \end{aligned}$$

(iii) $E(2X+3Y) = E(2X) + E(3Y)$

$$\begin{aligned} &= 2E(X) + 3E(Y) \\ &= 16 + 15 = 31 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(2X+3Y) = \text{Var}(2X) + \text{Var}(3Y)$$

$$\begin{aligned} &= 4\text{Var}(X) + 9\text{Var}(Y) \\ &= 16 + 81 = 97 \end{aligned}$$

(iv) $E(X-4Y) = E(X) - E(4Y)$

$$\begin{aligned} &= E(X) - 4E(Y) \\ &= 8 - 20 = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X-4Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(4Y) \\ &= \text{Var}(X) + 16\text{Var}(Y) \\ &= 4 + 144 = 148\end{aligned}$$

Eg:2) X, Y என்னும் இரண்டு சாரா பின்னக எழுமாற்று மாறிகளின் நிகழ்வுப் பரம்பல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

X	0	1	2
P(X = x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	1	2	3
P(Y = y)	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Z என்னும் எழுமாற்று மாறி X+Y இனால் குறிக்கப்பட்டால் Z இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் காண்க?

Ans: Z = X + Y ஆதலால்

Z என்ற எழுமாற்று மாறி 1, 2, 3, 4, 5 என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

$$P(Z=1) = P(X=0, Y=1) = P(X=0) \cdot P(Y=1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(Z=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

$$P(Z=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15}$$

$$P(Z=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2)$$

$$= P(X=1) \cdot P(Y=3) + P(X=2) \cdot P(Y=2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15}$$

$$P(Z=5) = P(X=2, Y=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

ஆகவே Z இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

Z = X + Y	1	2	3	4	5
P(Z)	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

Eg:3) நான்முகி ஒன்று உருட்டப்படும்போது தோன்றும் எண் X என்ற எழுமாற்று மாறியாகப் பதியப்படுகிறது. இரண்டு நாணயங்கள் சுண்டப்படும்போது தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கை Y என்ற எழுமாற்று மாறியாகப் பதியப்படுகின்றது. $Z=X+Y$ ஆகுமாறு Z என்ற எழுமாற்றுமாறி வரையறுக்கப்பட்டால் Z இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு இதன் எதிர்வையும் மாற்ற்திறனையும் காண்க?

$$P(Z \leq 3) = P(Z > 3) \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

Ans: X, Y என்னும் எழுமாற்று மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$Z=X+Y$ ஆதலால் Z எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்கள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகும்.

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1) \cdot P(Y = 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0)$$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 1) + P(X = 2) \cdot P(Y = 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$P(Z = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0)$$

$$= P(X = 1) \cdot P(Y = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 1)$$

$$+ P(X = 3) \cdot P(Y = 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$

$$P(Z = 4) = P(X = 2, Y = 2) + P(X = 3, Y = 1) + P(X = 4, Y = 0)$$

$$= P(X = 2) \cdot P(Y = 2) + P(X = 3) \cdot P(Y = 1)$$

$$+ P(X = 4) \cdot P(Y = 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$

$$\begin{aligned}
 P(Z = 5) &= P(X = 3, Y = 2) + P(X = 4, Y = 1) \\
 &= P(X = 3) \cdot P(Y = 2) + P(X = 4) \cdot P(Y = 1) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(Z = 6) &= P(X = 4, Y = 2) = P(X = 4) \cdot P(Y = 2) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

ஆகவே Z இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

Z = X + Y	1	2	3	4	5	6
P(Z)	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= \sum_{z=1}^6 Z \cdot P(Z) \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{12}{16} + \frac{16}{16} + \frac{15}{16} + \frac{6}{16} \\
 &= \frac{56}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Z^2) &= \sum_{z=1}^6 Z^2 \cdot P(Z) \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{12}{16} + \frac{36}{16} + \frac{64}{16} + \frac{75}{16} + \frac{36}{16} \\
 &= \frac{224}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z) &= E(Z^2) - [E(Z)]^2 \\
 &= \frac{224}{16} - \left(\frac{56}{16}\right)^2 \\
 &= \frac{448}{256}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(Z \leq 3) &= P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$P(Z > 3) = P(Z = 4) + P(Z = 5) + P(Z = 6)$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(Z \leq 3) = P(Z > 3)$$

பயிற்சி 9

- கோடாத இரு சதுரமுகித் தாயக்கட்டைகள் ஒன்றாகச் சண்டப்படுகின்றது. இரண்டு தாயக்கட்டைகளிலும் தோன்றும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையானது X என்னும் எழுமாற்று மாறியாக வரையறுக்கப்படுகிறது. X எடுக்கக்கூடிய பெறுமானங்களைக் காண்க?
- மேலுள்ள பரிசோதனைக்கான நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு பின்வருவனவற்றைக் காண்க?
 - $P(X \geq 10)$
 - $P(X < 4)$
 - $P(5 < X \leq 9)$
 - $P(2 \leq X < 5)$
- பரிசோதனை ஒன்றிற்கான எழுமாற்று மாறி X ஆனது 0, 1, 2, 3 என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கின்றது. எழுமாற்று மாறியின் இப்பெறுமானங்களுக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.3, $2a$, $2a$ ஆகும். X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு a இன் பெறுமானத்தையும் $P(X \geq 2)$ ஐயும் காண்க?
- கோடாத நாணயம் ஒன்று இருமுறை சண்டப்படுகிறது. X என்னும் பின்னக எழுமாற்று மாறியானது தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கை என வரையறுக்கப்படுகிறது. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு X இன் இடை, மாறத்திறன், நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- ஒரு பரிசோதனைக்கான எழுமாற்று மாறி X எனில் $E(X) = 3.5$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. பின்வருவனவற்றைக் காண்க?
 - $E(3)$
 - $E(4X)$
 - $E(5X+4)$

6. X என்னும் எழுமாற்று மாறியின் மாறத்திறன் 2 எனில்
 (i) $\text{Var}(3)$ (ii) $\text{Var}(4X)$ (iii) $\text{Var}(2X+5)$
 (iv) X இன் நியமவிலகல் (v) $3X+7$ இன் நியமவிலகல்
 என்பவற்றைக் காண்க?

7. கோடாத நாணயம் ஒன்று இரண்டுமுறை சுண்டப்படுகிறது. தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கையை X என்னும் எழுமாற்று மாறி என்க.

X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$Y = \begin{cases} 2X+3 & ; X=0 \\ X+2 & ; X=1, 2 \end{cases}$$

ஆகுமாறு Y என்னும் ஓர் எழுமாற்று மாறி வரையறுக்கப் படுகின்றது. Y இன் எதிர்வு, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

X இனதும் Y இனதும் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை எழுதுக?

8. ஒரு பையினுள் 1, 2, 3 என இலக்கமிடப்பட்ட 3 துண்டுகளும், இன்னொரு பையினுள் 4, 5, 6, 8 என இலக்கமிடப்பட்ட 4 துண்டுகளும் உள்ளன. இரு பைகளிலிருந்தும் ஒவ்வொரு துண்டுகள் எடுக்கப்படுகின்றது. இரு துண்டுகளிலுமுள்ள இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை எழுமாற்று மாறி X ஆகப் பதியப்படுகின்றது. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை எழுதி எதிர்வு, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$Y = \begin{cases} \frac{X+1}{2} & ; X-\text{ஒற்றை எண்} \\ \frac{X-2}{2} & ; X-\text{இரட்டை எண்} \end{cases}$$

ஆகுமாறு Y என்னும் ஓர் எழுமாற்று மாறி வரையறுக்கப் படுகின்றது. Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு எதிர்வு, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

X, Y என்னும் எழுமாற்று மாறிகளின் திரள் நிகழ்தகவு பரம்பலை எழுதுக? இதிலிருந்து $F(X=7) - F(Y=3)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

9. 6 உயர் அதிகாரிகளிலிருந்தும் 4 சிற்றூழியர்களிலிருந்தும் 3 பேர் கொண்ட ஓர் குழு தெரியப்பட உள்ளது. தெரிவு செய்யப்பட்ட சிற்றூழியர்களின் எண்ணிக்கையானது X என்ற எழுமாற்று மாறியாக பதியப்படுகின்றது. X இன் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க? X ஆனது அதன் இடைப் பெறுமானத்திலிருந்து ஒரு நியமவிலகலுக்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

10. விலாசமிடப்பட்ட மூன்று கடித உறைகளுள் மூன்று கடிதங்கள் எழுமாற்றாக இடப்படுகின்றது. சரியான கடித உறைகளுள் இடப்பட்ட கடிதங்களின் எண்ணிக்கையை X என்னும் எழுமாற்று மாறி குறிக்கின்றது. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு எதிர்வு, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$Y = \begin{cases} 3 & ; X < 3 \\ 2 & ; X \geq 3 \end{cases}$$

ஆகுமாறு Y என்னும் எழுமாற்று மாறி வரையறுக்கப்படுகின்றது. Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு எதிர்வு, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

11. நிறையேற்றப்பட்ட நாணயம் ஒன்று சுண்டப்படும்போது தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ ஆகும். இத்தகைய நாணயம் ஒன்று மூன்று தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கையிலிருந்து தோன்றும் பூக்களின் (tail) எண்ணிக்கையைக் கழிக்க வரும் எண் எழுமாற்று மாறி X ஆக பதியப்படுகின்றது. X இன் நிகழ்தகவு பரம்பலை எழுதுக?

X இன் எதிர்வு, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு இதன்மூலம் $P(X > 0)$, $P(-1 \leq X < 3)$ என்பவற்றைக் காண்க?

$$Y = \begin{cases} 2 & ; |X| = 1 \\ 3 & ; |X| = 3 \end{cases}$$

ஆகுமாறு Y என்னும் எழுமாற்று மாறி வரையறுக்கப்படுகின்றது. Y இன் இடை, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

Y இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை எழுதுக?

12. வினா ஒன்றிற்கு விடையளிக்குமாறு n மாணவர்களிடம் கேட்கப்பட்டது. இவர்களில் சரியாக இரு மாணவர்களுக்குத் தான் விடை தெரியும். $n > 5$ எனில் கேட்கப்படும் முதல் நான்கு மாணவர்களுக்கும் விடை தெரியாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} \text{ எனக்காட்டுக?}$$

$1 < r < n$ எனில் சரியான விடையளிக்கும் முதல் மாணவன் r ஆவது மாணவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2(n-r)}{n(n-1)}$ எனக் காட்டுக.

r இன் சாத்தியமாகக் கூடிய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்குமான இந்நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகை 1 எனக் காட்டுக?

சரியான விடையைப் பெறுவதற்கு முன்னர் வினா கேட்கப்பட வேண்டிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையாக எதிர்பார்க்கப்படும்

$$(\text{எதிர்வு}) \text{ பெறுமானம் } \frac{(n+1)}{3} \text{ எனக் காட்டுக?}$$

13. A, B என்பவர்கள் பின்வருமாறு விளையாட்டு ஒன்றை விளையாடுகின்றனர். 3 கோடாத நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன. மூன்று முறையும் தலைகள் தோன்றினால் B என்பவர் A இற்கு ரூபா 30/-ஐக் கொடுக்க வேண்டும். இரண்டு தடவைகள் தலை தோன்றினால் பணம் எதுவும் பரிமாறப்படுவதில்லை. இரண்டு தடவைகளைவிடக் குறைவான தடவைகள் தலை தோன்றினால் A என்பவர் B இற்கு ரூபா 10/- ஐக் கொடுக்கவேண்டும். A என்பவருக்குக் கிடைக்கும் தொகையை X என்ற எழுமாற்று மாறியாகக் கொண்டு X இன் இடை. மாறத்திறன் என்பவற்றைக் காண்க?

இவர்கள் 50 தடவைகள் மேலுள்ளவாறு விளையாடினால் A என்பவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபம் அல்லது நட்டம் எவ்வளவு?

14. ஒரு சாய்தளத்தின் அடியில் 2, 4, 7, 4, 2 என இலக்கமிடப்பட்ட 5 பெட்டிகள் அருகருகே இருக்கின்றன. ஒரு விளையாட்டில் A என்பவர் சாய்தள உச்சியிலிருந்து இரு பந்துகளை உருட்டுகின்றார். பந்துகள் ஒவ்வொரு பெட்டிகளினுள்ளும் விழுவதற்குச் சமவாய்ப்பைக் கொண்டுள்ளன என்க. இரு பந்துகளும் ஒரு பெட்டியினுள் விழலாம். ஒவ்வொரு பந்தும் விழும் பெட்டியின் இலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை A என்பவர் பெறும் புள்ளியாகும்.

A பெறும் புள்ளியை எழுமாற்று மாறி X எனக்கொண்டு X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் காண்க?

ஒவ்வொரு தடவை விளையாடுவதற்கும் A என்பவர் ரூபா 10/- ஐக் கொடுக்கின்றார். ஒவ்வொரு தடவையும் அவர் பெற்ற புள்ளிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமனான ரூபாய்கள் அவருக்குக் கிடைக்கின்றது. இவர் 50 தடவைகள் விளையாடும் போது எதிர்பார்க்கப்பட்ட இலாபம் அல்லது நட்டத்தைக் காண்க?

15. X, Y என்னும் இரண்டு சாரா எழுமாற்று மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

Y	0	1	2
P(Y = y)	0.4	0.2	0.4

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.3	0.2	0.4	0.1

X, Y என்னும் எழுமாற்று மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையானது Z_1 என்னும் எழுமாற்று மாறியினால் குறிக்கப்பட்டால் Z_1 இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு இடை, மாறத்திறன் என்பவற்றைக் காண்க.

X, Y என்னும் எழுமாற்று மாறிகளின் வித்தியாசமானது Z_2 என்னும் எழுமாற்று மாறியினால் குறிக்கப்பட்டால் Z_2 இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை எழுதி இடை, மாறத்திறன் என்பவற்றைக் காண்க?

Z_1, Z_2 என்னும் இரு எழுமாற்று மாறிகளினதும் மாறத்திறன்கள் சமன் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

16. பின்னக எழுமாற்று மாறி x ஆனது 0, 1, 2, 3, 4, 5 என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கின்றது. x இன் நிகழ்தகவு பரம்பல் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$P(x=0) = P(x=1) = P(x=2) = a$$

$$P(x=3) = P(x=4) = P(x=5) = b$$

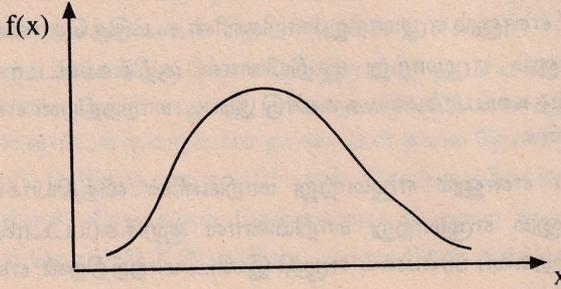
$$P(x \geq 2) = 3P(x < 2)$$

இங்கு a, b என்பன மாறிலிகளாகும்.

- (i) a, b என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- (ii) X இன் இடை, மாற்ற்திறன் என்பவற்றைக் காண்க?
- (iii) மேலுள்ளவாறான இரண்டு எழுமாற்று மாறிகளின் கூட்டுத் தொகை Y என்னும் எழுமாற்று மாறியினால் குறிக்கப்பட்டால் Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு $P(Y>7)$ ஐக் காண்க?

தொடர் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

குறித்த பரிசோதனை ஒன்றின் எழுமாற்று மாறிக்கான பெறுமானங்கள் எண்ணப்பட முடியாததாயின் அது தொடர் எழுமாற்று மாறி எனப்படும். தொடர் எழுமாற்று மாறி ஒன்றிற்கான எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் வரையறுக்கப்படும் சார்பு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனப்படும். இது $f(x)$ இனால் குறிக்கப்படும்.



தொடர் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்கான நிபந்தனை

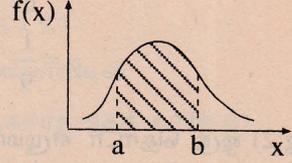
- (1) x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களிற்கும் $f(x) \geq 0$
- (2) இவ்வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் மொத்தப் பரப்பு 1 ஆகும்.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

நிகழ்தகவு கணித்தல்

X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறி a, b என்னும் பெறுமானங்களுக்கிடையில் இருக்கும்போது இப்பெறுமான இடைவெளியில் x இன் நிகழ்தகவு $P(a < x < b)$ ஆனது

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$



இனால் தரப்படும்.

எழுமாற்று மாறியின் குறித்த ஒரு பெறுமானத்திற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியம் ஆகையால்

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

ஆகும்.

குறிப்பு:- தொடர் நிகழ்தகவு பரம்பலில் நிகழ்தகவுகள் எழுமாற்று மாறியின் ஆயிடைப் பெறுமானங்களுக்கே கணிக்கப்படுகின்றது. எழுமாற்று மாறியின் குறித்த ஓர் பெறுமானத்திற்கு அல்ல.

Eg:1) ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & ; -1 < x < 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகிறது.

(i) இவ் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் மொத்தப் பரப்பளவு 1 எனக் காட்டுக?

(ii) $P(0 < x < 1)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

விடை:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} f(x) dx$$

$$= 0 + \int_{-1}^2 \frac{x^2}{3} dx + 0 = \frac{1}{9} [x^3]_{-1}^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } P(0 < x < 1) &= \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} [x^3]_0^1 \\
 &= \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

Eg:2) ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x); & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{ அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகிறது.

(i) k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

(ii) x இன் பெறுமானம் 0.4 இற்கும் 0.6 இற்கும் இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 kx^2(1-x) dx &= 1 \\
 k \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\frac{k}{12} = 1$$

$$k = 12$$

$$(ii) P(0.4 < x < 0.6)$$

$$= \int_{0.4}^{0.6} 12x^2(1-x) dx$$

$$= 12 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{0.4}^{0.6} = 0.296$$

தொடர் எழுமாற்று மாறியின் ஆகாரமும் இடையமும்

ஆகாரம்:-

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத் திற்கான x இன் பெறுமானம் ஆகாரம் எனப்படும்.

அதாவது $f'(x) = 0$ ஆகவுள்ள x இன் உயர்வுப் பெறுமானம்

ஆகும். இங்கு f^1 என்பது x ஐக் குறித்து $f(x)$ இன் வகையீட்டுப் பெறுதி ஆகும்.

Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x); & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{ அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. X இன் ஆகாரத்தைக் காண்க?

$$f(x) = 12x^2(1-x)$$

$$f^1(x) = 12[2x - 3x^2] = 12x(2 - 3x)$$

$$= 0, \text{ உயர்வு, இழிவிற்கு}$$

$$x = 0 \text{ அல்லது } x = \frac{2}{3}$$

$x = 0$ எனில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் இழிவு.

$x = \frac{2}{3}$ எனில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் உயர்வு. எனவே எழுமாற்று

மாறி x இன் ஆகாரம் $\frac{2}{3}$

இடையம்:-

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பினை இருசம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் x இன் பெறுமானம் எழுமாற்று மாறியின் இடையம் எனப்படும்.

$$\text{அதாவது } \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{2}$$

எனில் x ஆனது இடையப் பெறுமானம் ஆகும்.

Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{81}x^3; & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ; \text{ அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. X இன் இடையத்தைக் காண்க?

X இன் இடையம் x என்க.

$$\int_0^x \frac{4}{81} x^3 dx = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{x^4}{81} \right]_0^x = \frac{1}{2}$$

$$x^4 = \frac{81}{2}$$

$$x = 2.523$$

Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & ; 0 < x < 3 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

- (i) C இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
- (ii) $P(2 \leq X \leq 5)$ இன் பெறுமானம் யாது?
- (iii) X இன் ஆகாரம், இடையம் என்பவற்றைக் காண்க?

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^3 Cx^2 dx = 1$$

$$\frac{C}{3} [x^3]_0^3 = 1$$

$$\frac{27C}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{9}$$

$$(ii) P(2 \leq x \leq 5)$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{9} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{27} [x^3]_2^5$$

$$= \frac{1}{27} (27 - 8)$$

$$= \frac{19}{27}$$

$$(iii) f(x) = \frac{1}{9} x^2$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{9} x$$

$$f'(x) = 0, \text{ உயர்வு, இழிவிற்கு}$$

$$x = 0$$

ஆகாரம் 0

இடையம் x என்க.

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^x \frac{x^2}{9} dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{27} x^3 = \frac{1}{2}$$

$$x^3 = \frac{27}{2}$$

$$x = 2.38$$

திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறியின் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ ஆனது

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & ; -1 < x < 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. $F(x)$ ஐக் காண்க?

விடை:

$$(-\infty, -1) \text{என்னும் வீச்சில் } F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{x^2}{3} dx = 0$$

$$(-1, 2) \text{என்னும் வீச்சில் } F(x) = \int_{-1}^x \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} [x^3]_{-1}^x = \frac{1}{9} (x^3 + 1)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq -1 \\ \frac{1}{9}(x^3 + 1) & ; -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & ; 2 \leq x \end{cases}$$

தொடர் திரள் நிகழ்தகவு பரம்பல் சார்பின் இயல்புகள்

- (1) $0 \leq F(x) \leq 1$
- (2) $F(x)$ ஆனது அதிகரிக்கும் சார்பு
- (3) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- (4) $f(x) = F'(x)$

இங்கு $F'(x)$ என்பது $F(x)$ இன் x ஐக்குறித்த வகையீட்டுப் பெறுமதி ஆகும்.

Eg:1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & ; -1 < x < 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

என்பது தொடர் எழுமாற்று மாறி ஒன்றின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும். $F(x)$ ஐக் கண்டு அதன் மூலம் $P(0 \leq X \leq 1)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-1}^x \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{9} [x^3]_{-1}^x = \frac{x^3 + 1}{9}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq -1 \\ \frac{x^3 + 1}{9} & ; -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & ; 2 < x \end{cases}$$

$$P(0 \leq x \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Eg:2)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x & ; 0 < x < 3 \\ 1 & ; x \geq 3 \end{cases}$$

என்பது x என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியின் திரள் நிகழ்தகவுப்

பரம்பல் சார்பாகும். நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஐக் காண்க?

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ; 0 < x < 3 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

எதிர்வும் மாறத்திறனும்

எதிர்வு:-

ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் எதிர்வு $E(x)$ ஆனது

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

இனால் தரப்படும். இங்கு $E(X)$ ஆனது X இன் சராசரிப் பெறுமானம் அல்லது இடைப் பெறுமானம் எனப்படும். இது μ இனால் குறிக்கப்படும்.

$$\text{அதாவது } \mu = E(X)$$

மாறத்திறன்:-

ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் மாறத்திறன் $\text{Var}(X)$ ஆனது.

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2$$

இனால் தரப்படும். கணித்தலில் நாம்

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

என்னும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

Eg: தொடர் எழுமாற்று மாறி ஒன்றின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x(3-x) & ; 0 < x < 3 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. X இன் எதிர்வு, மாறத்திறன் என்பவற்றைக் காண்க?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^3 x \cdot \frac{2x}{9}(3-x)dx = \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{ஆகவே இடை} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^3 x^2 \frac{2x}{9}(3-x)dx = \frac{2}{9} \int_0^3 (3x^3 - x^4)dx$$

$$= \frac{2}{9} \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^3 = \frac{2}{9} \left[\frac{81 \times 3}{4} - \frac{243}{5} \right] = \frac{27}{10}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}$$

$$\therefore \text{மாற்றத்திறன்} = \frac{9}{20}$$

எதிர்வின் இயல்புகள்

X என்பது தொடர் எழுமாற்று மாறியாகவும் a, b என்பன மாறிலிகளாகவும் இருக்க

(i) $E(a) = a$

(ii) $E(aX) = aE(X)$

(iii) $E(aX+b) = aE(X) + b$ ஆகும்.

நிறுவல்:-

(i) $E(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} af(x)dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \times 1 = a$

(ii) $E(aX) = \int_{-\infty}^{+\infty} axf(x)dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = aE(X)$

(iii) $E(aX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b)f(x)dx$
 $= a \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = aE(X) + b \times 1$
 $= aE(X) + b$

மாறத்திறனின் இயல்புகள்

X என்பது தொடர் எழுமாற்று மாறியாகவும் a, b என்பன மாறிலிகளாகவும் இருக்க

(i) $\text{Var}(a) = 0$

(ii) $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

(iii) $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X)$

நிறுவல்:-

(i) $\text{Var}(a) = E[a - E(a)]^2 = E[a - a]^2 = E(0) = 0$

(ii) $\text{Var}(aX) = E[aX - E(aX)]^2$
 $= E[aX - aE(X)]^2 = a^2 E[X - E(X)]^2$
 $= a^2 \text{Var}(X)$

(iii) $\text{Var}(aX + b) = E[aX + b - E(aX + b)]^2$
 $= E[aX + b - aE(X) - b]^2 = E[aX - aE(X)]^2$
 $= a^2 \text{Var}(X)$

Eg: ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறியின் திரள் நிகழ்நிகழ்தகவுப் பரம்பலுக்கான சார்பு $F(x)$ ஆனது

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ mx^n & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகின்றது. இப்பரம்பலுக்கான இடைப் பெறு மாணம் $\frac{2}{3}$ எனில் m, n என்பவற்றைக் காண்க?

$f(x)$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்க.

$$f(x) = F'(x)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} mn x^{n-1} & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^2 x m n x^{n-1} dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^2 m n x^n dx = \frac{2}{3}$$

$$\frac{m n}{n+1} [x^{n+1}]_0^2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{m n}{n+1} \times 2^{n+1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{m n}{n+1} \cdot 2^n = \frac{1}{3}$$

$$m \cdot 2^n = \frac{n+1}{3n} \text{ ----- (1)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^2 m n x^{n-1} dx = 1$$

$$\frac{m n}{n} [x^n]_0^2 = 1$$

$$m \cdot 2^n = 1 \text{ ----- (2)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{n+1}{3n} = 1$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$n = \frac{1}{2}$ ஐ (1) இல் பிரதியிட,

$$m\sqrt{2} = 1$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

பயிற்சி 10

1. தொடர் எழுமாற்று மாறி x ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x^2) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

- (i) k இன் பெறுமானம் யாது?
- (ii) எதிர்வு, மாறத்திறன், நியமவிலகல், இடையம் என்பவற்றைக் காண்க?
2. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி x ஆனது 0 இற்கும் 4 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானங்களை எடுக்கும். இவ் எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x) = \frac{1}{2} - ax$ ஆகும்.
- (i) a இன் பெறுமானம் யாது?
- (ii) எதிர்வு, மாறத்திறன், நியமவிலகல், என்பவற்றைக் காண்க?
- (iii) x இன் பெறுமானம் 1 இற்கும் 2 இற்கும் இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

3. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி x ஆனது 0 இற்கும் 2 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானங்களை மாத்திரம் எடுக்கும். இவ் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x) = k(4x - x^2)$ இனால் தரப்படுகின்றது.

- (i) k இன் பெறுமானம் யாது?
- (ii) x இன் ஆகாரம், இடையம், இடை என்பவற்றைக் காண்க?
- (iii) x இன் மாறத்திறன் நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- (iv) $P(x > 1)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
- (v) x இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பலின் சார்பை எழுதுக?

4. குறித்த ஒரு வகையான மின்சூழியின் ஆயுட்காலம் T என்னும் எழுமாற்று மாறியினால் குறிக்கப்படும். T இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(t)$ ஆனது

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\frac{t}{1200}} & ; 0 \leq t < \infty \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. T இன் இடைப்பெறுமானமும் நியமவிலகலும் ஒன்றிற்கொன்று சமன் எனக் காட்டுக?

5. எழுமாற்று மாறி x இன்றிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x) = \begin{cases} Cx^3 & ; 0 \leq x < 3 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{ஆகும்.}$$

- C இன் பெறுமானம் யாது?
- இடை, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல்; என்பவற்றைக் காண்க?
- x இன் பெறுமானமானது அதன் இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து ஒரு நியமவிலகலுக்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

6. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது $0 \leq x \leq \pi$ என்னும் வீச்சில் $f(x) = \lambda \sin x$ என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டுள்ளது.

- λ இன் பெறுமானம் யாது?
- ஆகாரம், இடையம், இடை என்பவற்றைக் காண்க?
- காலணை இடைவீச்சு யாது?
- மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- எழுமாற்று மாறியானது அதன் இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து ஒரு நியமவிலகலுக்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

7. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{a^3} & ; 0 \leq x < a \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

- இடை $\frac{3a}{4}$ எனவும் நியமவிலகல் $\sqrt{\frac{3}{80}} \cdot a$ எனவும் காட்டுக.
- திரள் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $F(x) = \frac{x^3}{a^3}$ எனக் காட்டுக?

(iii) $Y = 1 - \frac{x}{a}$ எனில், எழுமாற்று மாறி Y இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(y) = 3(1-x)^2$ எனக்காட்டுக?

8. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

(i) இப்பரம்பலுக்கான இடை, மாற்ற்திறன் என்பன முறையே $\frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)^2}{12}$ எனக்காட்டுக?

(ii) இடை, மாற்ற்திறன் என்பன முறையே $1, \frac{4}{3}$ எனில் $P(X < 0) = \frac{1}{4}$ எனக்காட்டுக?

(iii) σ என்பது நியம விலகலாக இருக்க $P(X > y + \sigma) = \frac{1}{4}$ எனில் $y = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3})$ எனக்காட்டுக?

9. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது $2 \leq x \leq 5$ என்னும் வீச்சில் $f(x) = \frac{2}{27}(1+x)$ என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டுள்ளது.

(i) இடை, $P(X < 4), P(3 < X < 4)$ என்பவற்றைக் காண்க?

(ii) திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பலுக்கான சார்பு

$$F(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{27} \text{ எனக் காட்டுக?}$$

இதன் மூலம் $P(3 \leq X < 4)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

10. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X ஆனது $1 \leq x \leq 3$ என்னும் வீச்சில்

$f(x) = \frac{1}{2}$ என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டுள்ளது.

(i) $P(2 < X < 2.5), P(X \leq 1.6)$ என்பவற்றைக் காண்க?

(ii) X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பலுக்கான சார்பு $F(x) = \frac{x-1}{2}$ எனக் காட்டுக? இதிலிருந்து $P(2 < X < 2.5)$ ஐக் காண்க.

11. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு

$$f(x) \text{ ஆனது } f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

(i) k இன் பெறுமானம் $\frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக?

(ii) இடை, மாறத்திறன் என்பன முறையே $\frac{3}{5}, \frac{12}{175}$ எனக் காட்டுக?

(iii) $F(x) = x^{3/2}$ எனக்காட்டி $P(0.3 < X < 0.6)$ இன் பெறுமானம் 0.3004 எனக் காட்டுக?

12. மதுபானக் கம்பனி ஒன்றின் நாளாந்த வருமானம் ஆயிரம் அமெரிக்க டொலர்களில் (\$1000)

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

என்பதாற் கொடுக்கப்படும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஐ உடைய ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறியாகும். a - நேர்மாறிலி. $a = 2$ எனக் காட்டி, இக்கம்பனியின் நாளாந்த சராசரி வருமானம் 333 அமெரிக்க டொலர் எனக்காட்டுக.

13. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு

$$f(x) \text{ ஆனது } f(x) = \begin{cases} C(4-x^2) & ; -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

(i) $C = \frac{3}{32}$

(ii) இடை = 0, மாறத்திறன் = $\frac{4}{5}$

(iii) திரள் நிகழ்தகவு பரம்பல் சார்பு $F(x) = \frac{2}{32} \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) + 2$

எனக்காட்டுக?

14. ஓர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} ax(2-x) & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால்தரப்படுகின்றது. எதிர்வு - μ , நியமவிலகல் - σ எனில் $P(|x - \mu| < \sigma) = 0.626$ எனக்காட்டுக?

உதவி:- $P(|x - \mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$

15. தொழிற்சாலை ஒன்றில் கால்நடைகளுக்கான உணவாக 'பிண்ணாக்கு' தயாரிக்கப்படுகின்றது. மூலப்பொருட்களின் கலப்படங்களில் ஏற்படும் தவறுகளாலும் செய்கை முறைகளிலுள்ள அறிவுக் குறைவினாலும் இதன் போஷாக்கு சுட்டெண் 0 இலிருந்து 1 வரை வேறுபடுகின்றது. தயாரிக்கப்படும் ஒவ்வொரு தொகுதியினதும் போஷாக்கு சுட்டெண் எழுமாற்றுமாறி X ஆகக் கருதப்பட்டு இதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x)^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால்தரப்படுகின்றது.

(i) $k=12$

(ii) $P(x < 0.25) = 0.262$

(iii) $E(X) = \frac{2}{5}$ எனக்காட்டுக?

- (iv) போஷாக்கு சுட்டெண் 0.8 இற்கு மேல் இருந்தால் 10kg பிண்ணாக்கின் விலை 500/- ரூபா ஆகவும், இல்லாவிடின் 350/- ரூபாவாகவும் விற்கப்படுகிறது. 10kg பிண்ணாக்கிற்கான உற்பத்தி விலை 300/- ரூபா எனில், ஒரு கிலோகிராம் பிண்ணாக்கில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட இலாபம் 5 ரூபா 41 சதம் எனக் காட்டுக?

16. தொலைக்காட்சி விற்பனை செய்யும் நிறுவனம் ஒன்று, தங்களிடம் கொள்வனவு செய்யப்படும் தொலைக்காட்சிகளின் 'டிபூப்' பழுதடைந்தால் ஒருவருடத்திற்குள் புதிது மாற்றித் தரப்படும் என உறுதியளிக்கின்றது. இந்த டிபூப்புகளின் வாழ்வுக்காலம் வருடங்களில்

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4} & ; 1 \leq x \leq \infty \\ 0 & ; x < 1 \end{cases}$$

என்பதாற் கொடுக்கப்படும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஐ உடைய ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறியாகும்.

- A இன் பெறுமானம் யாது?
- இடை, இடையம், மாறத்திறன் என்பவற்றைக் காண்க?
- 'டியூப்' 5 வருடங்களுக்குமேல் பாவிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 'டியூப்' ஆனது n வருடங்களுக்குப் பாவித்தால் அதற்கடுத்த வருடத்தில் பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு $1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^3$ எனக்காட்டுக?

17. ஒரு தொடர் எழுமாற்றுமாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)(x-4) & ; 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

- k , இடை, மாறத்திறன் என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- X ஆனது 2 ஐவிடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

18. ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4x^n} & ; x > 1 \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. $n = \frac{9}{7}$ எனக் காட்டுக?

19. ஒரு தொடர் எழுமாற்றுமாறி $f(x) = \begin{cases} ax & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 2a & ; 2 < x \leq 3 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$

என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டுள்ளது.

- a , இடை, இடையம் என்பவற்றைக் காண்க?
- திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x^2}{8} & ; 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{(x-1)}{2} & ; 2 < x \leq 3 \\ 1 & ; x > 3 \end{cases}$$

எனக் காட்டுக?

20. X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறிக்கான திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < -2 \\ k \left(4x - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3} \right) & ; -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

- (i) k இன் பெறுமானம் யாது?
(ii) $P(-1 < X < 1)$ இன் பெறுமானம் யாது?
(iii) X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4-x^2) & ; -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

எனக்காட்டுக?

(iv) X இன் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

21.

$$f(x) = \begin{cases} k & ; 0 \leq x \leq 2 \\ k(3-x) & ; 2 < x \leq 3 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

என்பது தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகும்.

- (i) k இன் பெறுமானம் யாது?
(ii) X இன் இடை, இடையம் என்பவற்றைக் காண்க?
(iii) X இன் நியமவிலகல் யாது?
(iv) இடை μ ஆகவும் நியமவிலகல் σ ஆகவும் இருந்தால் $P(X < \mu - \sigma)$ ஐக் காண்க?

22. X என்பது எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் மாதிரி வெளியில் வரையறுக்கப்படும் தொடர் எழுமாற்று மாறி ஆகும். X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-2x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \text{ இனால் தரப்படுகின்றது.}$$

- (i) $k=2$ எனக் காட்டுக?
- (ii) எதிர்வு, மாற்றத்தின் என்பன முறையே $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ எனக் காட்டுக?
- (iii) இடையம் $\frac{(\ln 2)}{2}$ எனக் காட்டுக?
- (iv) காலணை இடைவீச்சு $\frac{1}{2}(\ln 3)$ எனக் காட்டுக?

23. தொலைக்காட்சி பெட்டியிலுள்ள 'டியூப்' களின் வாழ்வுக்காலம் வருடங்களில்

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & ; 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்ட தொடர் எழுமாற்று மாறியாகும்.

- (i) $A = k$ எனக் காட்டுக?
- (ii) எழுமாற்றாகப் பரிசோதிக்கப்பட்ட 1000 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளுள் 371 பெட்டிகளின் 'டியூப்' முதல் இரு வருடங்களுக்குள் பழுதடைந்தது. $k = 0.232$ எனக்காட்டுக?
- (iii) இரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் வாங்கப்பட்டது. ஒன்றினது 'டியூப்' ஒரு வருடத்திற்குள் பழுதடைவதற்கும் மற்றையதன் டியூப் 6 வருடங்களுக்கு மேல் பாவிப்பதற்குமான நிகழ்தகவு 0.103 எனக்காட்டுக?

24. யுத்தத்தில் ஈடுபட்டுள்ள வீரர்களுக்கு அவர்களது உடம்பில் ஏற்படும் வட்ட சிரங்குப்படையின் (Ringworm) பரப்பளவானது X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியும் இதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x) = kx^2(x-2)^2$ இங்கு $0 \leq x \leq 2$ எனவும் புள்ளிவிபரங்கள் தெரிவிக்கின்றன.

- (i) $K = \frac{15}{16}$ எனக் காட்டுக?
- (ii) இச்சிரங்குப்படையின் சராசரிப் பரப்பும் மாற்றத்திறனும் முறையே $1, \frac{1}{7}$ எனக் காட்டுக?

பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

பின்னக சீரான பரம்பல்:

(Discrete Uniform Distribution)

எழுமாற்றுப்பரிசோதனை ஒன்றின் X என்னும் பின்னக எழுமாற்று மாறியின் x_1, x_2, \dots, x_N என்னும் பெறுமானங்கள் சம வாய்ப்பான நிகழ்தகவைக் கொண்டிருக்குமாயின் இவ் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பின்னக சீரான பரம்பல் எனப்படும்.

இப்பின்னக எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$p(x) \text{ ஆனது } p(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & ; x = x_1, x_2, \dots, x_N \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \text{ இனால் தரப்படும்.}$$

Eg: i) கோடாத சதுர முகித்தாயக்கட்டை ஒன்று சுண்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்களை எழுமாற்று மாறி X என்க. எனவே இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரிவெளி S எனில்

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

தோன்றும் ஒவ்வொரு இலக்கமும் சமவாய்ப்பான நிகழ்தகவைக் கொண்டுள்ளன. அதாவது ஒவ்வொரு இலக்கமும்

தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும். எனவே இது பின்னக சீரான பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும். இவ் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & ; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \text{ இனால் தரப்படும்.}$$

Eg: ii) ஒரு பெட்டியினுள் 40W, 60W, 75W, 100W மின்குமிழ்கள் உள்ளன. ஒரு மின்குமிழ் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் பரிசோதனையைக் கருதுக? இதற்கான மாதிரிவெளி S எனில் $S = \{40, 60, 75, 100\}$ ஆகும். எடுக்கப்படும் எல்லா மின்குமிழ்களும் சமவாய்ப்பான நிகழ்தகவைக் கொண்டுள்ளது. எனவே ஒரு மின்குமிழ் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். எனவே இது பின்னக சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ எனில்

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; x = 40, 60, 75, 100 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

குறிப்பு: பின்னக சீரான எழுமாற்று மாறிக்கு நிகழ்தகவுப்பரம்பலை எழுதி இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காணலாம்.

Eg: i) நான்கு முகங்களைக் கொண்ட கோடாத நான்முகித் தாயக்கட்டை ஒன்று உருட்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்களை எழுமாற்று மாறி X எனக்கொண்டு X இன் நிகழ்தகவு பரம்பலை எழுதுக? இதிலிருந்து X இன் இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$\text{மாதிரிவெளி } S = \{1, 2, 3, 4\}$$

எல்லா இலக்கங்களும் தோன்றுவதற்கு சமவாய்ப்பான நிகழ்தகவைக் கொண்டுள்ளன. எனவே இவ் இலக்கங்கள் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{4}$ ஆகும். எனவே X என்னும் எழுமாற்று மாறி பின்னக சீரான பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும். இவ் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும். இங்கு } N = 4$$

X	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum_{x=1}^4 x \cdot p(x)$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$$

$$E(X) = 2.5$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^4 x^2 \cdot p(x)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = 7.5$$

$$\text{Var}(X) = 7.5 - 2.5^2 = 1.25$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{1.25} = 1.12$$

Eg: ii) ஓர் அலுவலகத்தில் உயர் பதவியில் தொழில்புரியும் 7 பேர்களிலிருந்து திட்டம் ஒன்றிற்கு தலைமை தாங்குவதற்காக ஒருவர் தெரிவு செய்யப்படவுள்ளார். இவர்களுக்கு முறையே 1 இலிருந்து 7 வரை இலக்கங்கள் ஒதுக்கப்பட்டு, பின்னர் சிறு கடதாசித்துண்டுகளில் இவ் இலக்கங்கள் குறிக்கப்பட்டு பெட்டி ஒன்றினுள் போடப்படுகிறது. பின்னர் எழுமாற்றாக ஒரு துண்டு எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்படும் இலக்கம் எழுமாற்று மாறி X எனில் X இன் இடை, மாற்ற்திறன், நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$Y=X+2$ ஆகுமாறு Y என்னும் எழுமாற்று மாறிவரையறுக்கப்படுமாயின் Y இன் இடை, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

X என்பது பின்னக சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & ; x=1,2,3,4,5,6,7 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும். இங்கு } N=7$$

X	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	$\frac{1}{7}$						

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x \cdot p(x) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} + \frac{7}{7} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum x^2 \cdot p(x) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{9}{7} + \frac{16}{7} + \frac{25}{7} + \frac{36}{7} + \frac{49}{7} = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 20 - \left(\frac{28}{7}\right)^2 = 4\end{aligned}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{4} = 2$$

$$Y = X + 2$$

$$\begin{aligned}E(Y) &= E(X) + E(2) \\ &= 4 + 2 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \text{Var}(X + 2) \\ &= \text{Var}(X) = 4\end{aligned}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = 2$$

பின்னக சீரான பரம்பலுக்கான திரள் நிகழ்தகவு பரம்பல் சார்பு

$p(x)$ என்பது X என்னும் எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ ஆனது

$F(x) = P(X \leq x)$ இனால் தரப்படும்.

$$\text{பின்னக சீரான பரம்பலுக்கு } p(x) = \frac{1}{N}$$

$$\begin{aligned}\therefore F(x) &= P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=x) \\ &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}\end{aligned}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{x}{N}} \quad x=1, 2, \dots, N$$

Eg: i) கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை ஒன்று சுண்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண் எழுமாற்றுமாறி X எனில் $F(3)$ ஐக் காண்க?

$$F(x) = \frac{1}{6}; x=1, 2, \dots, 6 \quad N=6$$

$$F(x) = \frac{x}{N}$$

$$F(3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

குறிப்பு: N என்பது மிகவும் பெரிய எண்ணாக இருக்கும்போது கணித்தல் களை இலகுவாக்குவதற்காக கீழுள்ளவாறு சூத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்படும்.

$$\begin{aligned} \text{i) } E(X) &= \sum_{x=1}^N x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^N x \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N x \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{(N+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } E(X^2) &= \sum_{x=1}^N x^2 p(x) = \sum_{x=1}^N x^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N x^2 \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\ &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(N^2 - 1)}{12}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{\frac{N^2 - 1}{12}}$$

Eg: i) 10 முகங்களைக் கொண்ட கோடாத பன்முகித் தாயக்கட்டை ஒன்று சுண்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்களின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X எனக்கொண்டு X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க? X இன் இடை, மாற்றிறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக்காண்க?

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & ; x=1,2,\dots,9,10 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5.5$$

$$\text{Var}(X) = \frac{N^2 - 1}{12} = \frac{100 - 1}{12} = 8.25$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{8.25} = 2.87$$

Eg: ii) 20 இலிருந்து 127 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கடதாசித்துண்டு களைக் கொண்ட பெட்டி ஒன்றிலிருந்து ஒருதுண்டு எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றது. எடுக்கப்படும் இலக்கத்தை எழுமாற்று மாறியாகக் கொண்டு அதன் இடை, மாற்றற்றன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$N = 127 - 20 + 1 = 108$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{108} & ; x = 20, 21, \dots, 127 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{108+1}{2} = 54.5$$

$$V(X) = \frac{N^2 - 1}{12} = \frac{108^2 - 1}{12} = 971.9$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{971.9} = 31.18$$

பயிற்சி - 11

- கோடாத சதுரமுகித் தாயக்கட்டை ஒன்று உருட்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்களை எழுமாற்றுமாறி X எனக்கொண்டு இதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக? X இன் இடை, மாற்றற்றன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- கோடாத எண்முகித் தாயக்கட்டை ஒன்று சுண்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண்கள் X என்னும் எழுமாற்று மாறியாக வரையறுக்கப்படுகின்றது.
 - X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பை எழுதுக?
 - X இன் இடை, மாற்றற்றன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
 - Y என்னும் எழுமாற்று மாறி $Y=X-1$ இனால் வரையறுக்கப்படுமாயின் Y இன் இடை, மாற்றற்றன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

3. 1 இலிருந்து 15 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கடதாசித் துண்டுகள் உள்ள பெட்டியிலிருந்து ஒரு துண்டு எழுமாற்றாக எடுக்கப் படுகின்றது. தோன்றும் எண் எழுமாற்று மாறி X எனில் X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கண்டு இதன் இடை, மாற்றிறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
4. 19 இலிருந்து 63 வரை இலக்கமிடப்பட்ட கடதாசித்துண்டுகளை ஒரு பெட்டி கொண்டுள்ளது. எழுமாற்றாக ஒரு துண்டு எடுக்கப்படுகின்றது. எடுக்கப்படும் இலக்கம் X என்னும் எழுமாற்று மாறியினால் குறிக்கப்பட்டால் இதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதி இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க? எடுக்கப்படும் இலக்கம் 10 இன் மடங்காக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
5. $s < t$ ஆகுமாறு s, t என்பன முழு எண்களாகும். X என்னும் எழுமாற்று மாறி s, t என்னும் எண்கள் உட்பட அவற்றிற்கிடையில் பின்னக சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது.
- ii) X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பை எழுதுக?
- ii) X இன் இடை, மாற்றிறன் என்பன முறையே
- $$\frac{t-s+2}{2}, \frac{(t-s)(t-s+2)}{12}$$
- எனக்காட்டுக?
6. கோடாத சதுரமுகித்தாயக்கட்டை ஒன்று உருட்டப்படுகின்றது. தோன்றும் எண் எழுமாற்று மாறியாக பதியப்படுகின்றது. திரள் நிகழ்தகவு பரம்பல் சார்பு $F(x) = P(X \leq x)$ என வரையறுக்கப் படுகின்றது. $F(3), F(5)$ என்பவற்றைக் காண்க?

பேனூயிவ் பரம்பல் (Bernoulli Distribution)

தம்முள் புறநீங்குவதும் பூரணமானதுமான (Mutually exclusive and exhaustive) இரு நிகழ்வுகளை பெறுபேறுகளாகக் கொண்ட பரிசோதனை பேனூயிலி பரிசோதனை எனப்படும்.

அதாவது வெற்றி அல்லது தோல்வி, ஆண் அல்லது பெண், வாழ்வு அல்லது இறப்பு, குறைபாடுள்ளது அல்லது குறைபாடற்றது போன்ற வகையான பெறுபேறுகளையுடைய பரிசோதனை.

பேனூயிலி பரிசோதனை ஒன்றில் இரு பெறுமானங்களை மாத்திரம் எடுக்கக்கூடிய எழுமாற்றுமாறி பேனூயிலி எழுமாற்றுமாறி எனப்படும்.

பரிசோதனை ஒன்றின் பேனூயிலி எழுமாற்று மாறிக்கான

நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பேணுயிலி பரம்பல் எனப்படும்.

பேணுயிலி பரிசோதனை ஒன்றின் எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & ; x=0,1 \\ 0 & ; x \neq 0,1 \end{cases} \text{ இனால் தரப்படும்.}$$

இங்கு p, q என்பன இரு பெறுபேறுகளினதும் நிகழ்தகவு ஆகும். இவை தம்முள் புறநீங்குவதும் பூரணமானதுமாகையால்.

$$p + q = 1$$

$$q = 1 - p$$

$$\text{எனவே } p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & ; x=0,1 \\ 0 & ; x \neq 0,1 \end{cases} \text{ எனவும் எழுதப்படும்.}$$

Eg: i) கோடாத நாணயம் ஒன்று சுண்டப்படுகின்றது. x என்னும் எழுமாற்று மாறி தலைதோன்றும் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது என்க.

இப்பரிசோதனையில், ஒன்றில் தலைதோன்றும் அல்லது தலை தோன்றாது. எனவே இது இரு நிகழ்வுகளைக் கொண்டிருப்பதால் பேணுயிலி பரிசோதனை ஆகும்.

அதாவது $x=0$ எனில் தலை தோன்றாது
 $x=1$ எனில் தலை தோன்றும்.

$$\text{ஆகவே } x=0 \text{ எனில் } p(x=0) = \frac{1}{2}$$

$$x=1 \text{ எனில் } p(x=1) = \frac{1}{2}$$

எனவே x இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} & ; x=0,1 \\ 0 & ; x \neq 0,1 \end{cases} \text{ இனால் தரப்படும்}$$

Eg: ii) 12 மாணவர்களும் 8 மாணவிகளும் உள்ள வகுப்பு ஒன்றிலிருந்து ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்படவுள்ளார். எழுமாற்று மாறி X ஆனது தெரிவுசெய்யப்படுபவர் மாணவியாக இருப்பதைக் குறிக்கும் என்க.

அதாவது $x=1$ எனில் மாணவி தெரிவுசெய்யப்படுவார்.

$x=0$ எனில் மாணவி தெரிவுசெய்யப்படமாட்டார்.

இரு நிகழ்வுகளை மாத்திரம்கொண்டிருப்பதால் இது பேணுயிலி பரிசோதனை ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } x=1 \text{ எனில் } p(x=1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$x=0 \text{ எனில் } p(x=0) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} & ; x=0,1 \\ 0 & ; x \neq 0,1 \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

பேணுயிலி பரம்பலின் எதிர்வழம் மாறத்திறனும்:

$$\begin{aligned} \text{i) } E(X) &= \sum x \cdot p(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x \cdot p^x \cdot q^{1-x} \\ &= 0 + p \end{aligned}$$

$$E(X) = p$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } E(X^2) &= \sum x^2 \cdot p(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x^2 \cdot p^x \cdot q^{1-x} \\ &= 0 + p = p \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned} &= p - p^2 \\ &= p(1 - p) \\ &= pq \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = pq$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{pq}$$

Eg: i) ஒரு பையினுள் 5 முத்துக்களும் 6 வைரங்களும் உள்ளன. எழுமாற்றாக ஒருபொருள் எடுக்கப்படுகின்றது. X என்னும்

எழுமாற்று மாறி எடுக்கப்படும் வைரங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றது என்க. X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பை எழுதி இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$x=0 \text{ எனில் } p(x=0) = \frac{5}{11}$$

$$x=1 \text{ எனில் } p(x=1) = \frac{6}{11}$$

$$\text{அதாவது } p = \frac{6}{11}, q = \frac{5}{11}$$

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{6}{11}\right)^x \left(\frac{5}{11}\right)^{1-x} & ; x=0,1 \\ 0 & ; x \neq 0,1 \end{cases}$$

$$E(X) = p = \frac{6}{11}$$

$$\text{Var}(X) = pq = \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} = \frac{30}{121}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \frac{\sqrt{30}}{11}$$

பயிற்சி - 12

- ஒரு பையினுள் 7 சிவப்பு பந்துகளும் 11 வெள்ளைப்பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகிறது. X என்னும் எழுமாற்று மாறி எடுக்கப்படும் சிவப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றது என்க. X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பை எழுதி இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- ஒரு நகரத்தில் 'எய்ட்ஸ்' நோயினால் பீடிக்கப்பட்டுள்ளோர் 920 பேர். இவர்களில் 300 பேர் திருமணமானவர்கள். இவர்களிலிருந்து ஒருவர் எழுமாற்றாகத் தெரியப்படுகின்றார். தெரியப்படுபவர் திருமணமாகாதவராக இருப்பதற்கான எண்ணிக்கையானது எழுமாற்றுமாறி X ஆகக் கருதப்படுகின்றது. இவ் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதி இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

ஈருறுப்புப் பரம்பல் (Binomial Distribution)

பேணுயிலி பரிசோதனையானது n தடவைகள் ($n > 1$) செய்யப்படுமாயின் இப்பரிசோதனைக்கான எழுமாற்று மாறி X ஆனது ஈருறுப்பு எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.

இவ் எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவுப் பரம்பல் ஈருறுப்புப் பரம்பல் எனப்படும்.

ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} {}^n C_x p^x q^{n-x} & ; x=0,1,\dots,n \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

இங்கு p, q என்பன இரு பெறுபேறுகளினதும் நிகழ்தகவு ஆகும்.

$${}^n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad \text{ஆகும்.}$$

குறிப்பு: X என்னும் எழுமாற்றுமாறி ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் இது $X \sim \text{Bin}(n, p)$ எனவும் குறிக்கப்படும்.

Eg: i) ஒரு கோடாத நாணயமானது 5 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. தலைதோன்றும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை எழுமாற்றுமாறி X என்க.

$$\begin{aligned} \text{தலைதோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு} \quad p &= \frac{1}{2} \\ n &= 5 \quad \therefore q = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ஆகவே X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $P(X)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} {}^5 C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} & ; x=0,1,2,3,4,5 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

இது $X \sim \text{Bin}\left(5, \frac{1}{2}\right)$ என குறிக்கப்படும்.

Eg: ii) கோடாத நாணயம் ஒன்று 6 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. சரியாக 2 தடவைகள் தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
 $n = 6, p = 1/2$

$$p(x) = {}^6C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}$$

$$x=2 \text{ ஆக, } p(2) = {}^6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$p(2) = \frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= 0.234$$

ஆகவே சரியாக 2 தடவைகள் தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.234 ஆகும்.

குறிப்பு: ஈருறுப்புப்பரம்பலின் எல்லா நிகழ்வுகளினதும் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகை 1 ஆகும்.

$$\text{அதாவது } \boxed{\sum_{x=0}^n {}^nC_x p^x q^{n-x} = 1}$$

நிறுவல்:- ஈருறுப்புத்தேற்றப்படி

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^n {}^nC_x a^x b^{n-x}$$

$a = p, b = q$ எனப்பிரதியிட

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^n {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

$$1 = \sum_{x=0}^n {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

ஈருறுப்புப்பரம்பலின் எதிர்வுவம் மாற்ற்திறனும்:

$$i) \text{ எதிர்வு } E(X) = \sum_{x=0}^n x {}^nC_x p^x q^{n-x}$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^n \frac{x n!}{x(x-1)!(n-x)!} p \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

$$= np \left[\sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} \cdot q^{n-x} \right]$$

$$= np[1]$$

$$= np$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

$$\text{ii) } E(X^2) = \sum_{x=0}^n x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^n \{x(x-1) + x\} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^n \frac{x(x-1)n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=1}^n \frac{x n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^n \frac{x(x-1)n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^x q^{n-x} + np$$

$$= \sum_{x=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

$$= npq$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = npq}$$

Eg: i) X என்னும் எழுமாற்று மாறியானது இடை 12.38 உம் மாற்ற்திறன் 8.64 உம் உடைய ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கொண்டது. n, p இன் பெறுமானங்களைக் காண்க?

$$E(X) = 12.38 \quad \text{Var}(X) = 8.64$$

$$n p = 12.38 \quad \text{--- (1)}$$

$$n p q = 8.64 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{12.38}{8.64}$$

$$q = 0.697$$

$$p = 1 - 0.697 = 0.302$$

$$n = \frac{12.38}{0.302}$$

$$n = 40.97.$$

எனவே n இன் பெறுமானம் 41 ஆகும்.

Eg: ii) ஓர் துப்பாக்கியாளன் ஓர் இலக்கினைச் சரியாக சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு $5/6$ ஆகும். இவன் 9 தடவைகள் சுடுகின்றான்.

- 1) ஆகக்குறைந்தது 7 தடவைகள் இலக்கினை சரியாக அடித்தல்
- 2) 6 தடவைகளுக்கு மேல் சரியாக சுடாதிருத்தல் ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை:

இலக்கினை சரியாக சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = \frac{5}{6}$

ஆகவே $q = \frac{1}{6}$, $n = 9$

- 1) ஆகக்குறைந்தது 7 தடவைகள் இலக்கினை சரியாக அடிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p(x \geq 7)$

$$p(x \geq 7) = p(x = 7) + p(x = 8) + p(x = 9)$$

$$p(x = 7) = {}^9C_7 \left(\frac{5}{6}\right)^7 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{9!}{2!7!} \left(\frac{5}{6}\right)^7 \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= 0.279$$

$$p(x = 8) = \frac{9!}{1!8!} \left(\frac{5}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 0.3488$$

$$p(x=9) = \frac{9! \left(\frac{5}{6}\right)^9 \left(\frac{1}{6}\right)^0}{9! \left(\frac{5}{6}\right)^9 \left(\frac{1}{6}\right)^0}$$

$$= 0.1938$$

$$p(x \geq 7) = 0.279 + 0.3488 + 0.1938 = 0.822$$

2) 6 தடவைகளுக்கு மேல் சரியாக சுடாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 1 - p(x \geq 7)$

$$= 1 - 0.822 = 0.178$$

Eg: iii) குறித்த ஒரு வகையான விளையாட்டு ஒன்றில் ஒருவர் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.3 ஆகும். ஆகக்குறைந்தது ஒருவர் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.96 ஆக இருப்பதற்கு எத்தனை பேர் விளையாடவேண்டும்?

$$p = 0.3$$

$$p(x \geq 1) = 0.96$$

$$1 - p(x=0) = 0.96$$

$$p(x=0) = 0.04$$

$${}^n C_0 (0.3)^0 (0.7)^n = 0.04$$

$$(0.7)^n = 0.04$$

$$n = \frac{\log 0.04}{\log 0.7} = 9.02$$

$$n = 10$$

எனவே ஆகக்குறைந்தது ஒருவர் வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.96 ஆக இருப்பதற்கு 10 பேர் விளையாட வேண்டும்.

Eg: iv) X என்னும் எழுமாற்று மாறி இடை 6 ஆகவும் மாறத்திறன் 3.6 ஆகவும் உடைய ஈருறுப்புப்பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. $p(2 \leq x \leq 4)$ ஐக் காண்க?

$$np = 6$$

$$npq = 3.6$$

$$q = \frac{3.6}{6} = 0.6$$

$$p = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$n = \frac{6}{0.4} = 15$$

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= {}^{15}C_2 (0.4)^2 (0.6)^{13} \\
&= \frac{15!}{13! 2!} (0.4)^2 (0.6)^{13} \\
&= \frac{15 \times 14}{2!} (0.4)^2 (0.6)^{13} \\
&= 0.02
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= {}^{15}C_3 (0.4)^3 (0.6)^{12} \\
&= \frac{15!}{3! 12!} (0.4)^3 (0.6)^{12} \\
&= 0.06
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X=4) &= {}^{15}C_4 (0.4)^4 (0.6)^{11} \\
&= \frac{15!}{4! 11!} (0.4)^4 (0.6)^{11} \\
&= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2} (0.4)^4 (0.6)^{11} \\
&= 0.126
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(2 \leq X \leq 4) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\
&= 0.02 + 0.06 + 0.126 \\
&= 0.206
\end{aligned}$$

Eg: v) குறிக்கப்பட்ட ஓர் விமானசேவை இரு நகரங்களுக்கிடையில் 6 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் சேவையில் ஈடுபடுத்துகின்றது. பறப்பின்போது இயந்திரங்கள் ஒன்றைச் சாராது தனித்து இயங்கும். விமானங்கள் யாவும் ஒரே வகையான இயந்திரங்களைக் கொண்டுள்ளன. பறப்பின்போது இயந்திரம் ஒன்று பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். குறைந்தது அரைவாசி எண்ணிக்கையான இயந்திரங்கள் இயங்கினால் தான் ஒரு விமானத்தினால் பாதுகாப்பான பிரயாணத்தை ஏற்படுத்த முடியும். 6 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானமா அல்லது 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானமா பாதுகாப்பான சேவையை நடத்தமுடியும்?

விடை: 6 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களில் 4 இயந்திரங்கள் அல்லது 5 இயந்திரங்கள் அல்லது 6 இயந்திரங்கள் பழுதடைந்தால் விமானம் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்த முடியாது. (ஏனெனில் பாதுகாப்பான பயணத்திற்கு ஆகக்குறைந்தது அரைவாசி எண்ணிக்கையான இயந்திரங்கள் இயங்க வேண்டும்).

i) எனவே 6 இயந்திரங்கள் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்த முடியாமைக்கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned}
 &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\
 &= {}^6C_4 (0.4)^4 (0.6)^2 + {}^6C_5 (0.4)^5 (0.6)^1 + {}^6C_6 (0.4)^6 (0.6)^0 \\
 &= 15 \times (0.4)^4 (0.6)^2 + 6 (0.4)^5 (0.6) + (0.4)^6 \\
 &= (0.4)^4 [15 \times (0.6)^2 + 6 \times 0.6 \times 0.4 + (0.4)^2] \\
 &= 0.179
 \end{aligned}$$

எனவே 6 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானம் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_1 = 1 - 0.179$$

$$P_1 = 0.821$$

ii) இதேபோல் 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானம் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்த முடியாமைக்கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned}
 &= P(X = 3) + P(X = 4) \\
 &= {}^4C_3 (0.4)^3 (0.6) + {}^4C_4 (0.4)^4 \\
 &= (0.4)^3 [4 \times 0.6 + 0.4] \\
 &= 0.179
 \end{aligned}$$

எனவே 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானம் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்துவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P_2 = 1 - 0.179$$

$$P_2 = 0.821$$

$P_2 > P_1$ ஆக இருப்பதனால் 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானமே பாதுகாப்பான சேவையை நடத்தமுடியும்.

Eg: vi) ஒரு வினாப்பத்திரம் 10 பத்தேர்வு வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வினாவின் கீழும் ஐந்து விடைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் ஒருவிடை மாத்திரமே சரியானது. இப்பரீட்சைக்கு தோற்றிய மாணவர்களில் குறிப்பிட்ட சில மாணவர்கள் இவ்வினாக்களுக்கு எழுமாற்றாக விடையளிக்கின்றனர். இப்பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கு அரைவாசிக்கு மேற்பட்ட வினாக்களுக்கு சரியாக விடையளிக்கவேண்டும். எழுமாற்றாக விடையளிக்கும் ஒரு மாணவன் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு வினாவிற்கு சரியாக விடையளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$p = \frac{1}{5}$ ஆகும். சரியாக விடையளிக்கும் வினாக்களின் எண்ணிக்கை எழுமாற்றுமாறி X எனக்கொண்டால் X ஆனது ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கொண்டது. $X \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{5})$

$$P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}$$

ஐந்து வினாக்களுக்கு மேல் சரியாக விடையளித்தால் மாணவன் சித்தியடையலாம்.

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) \\ &\quad + P(X = 10) \\ &= 0.0064 \end{aligned}$$

ஈருறுப்பு எழுமாற்று மாறியின் ஆகாரம்:

X என்னும் எழுமாற்றுமாறி $\text{Bin}(n, p)$ என்னும் ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கொண்டால் X இன் ஆகாரம் $(n+1)p$ என்ற எண்ணின் முழு எண்பகுதியாகும்.

நிறுவல்:- $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$$P(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x} \quad \text{_____ (1)}$$

$$P(x-1) = {}^nC_{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1} \quad \text{_____ (2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}}{\frac{n!}{(x-1)!(n-x+1)!} p^{x-1} q^{n-x+1}}$$

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{(n-x+1)p}{xq}$$

$$\text{ஆனால் } \frac{P(x)}{P(x-1)} > 1$$

$$\text{ஆகவே } \frac{(n-x+1)p}{xq} > 1$$

$$np - xp + p > xq$$

$$(n+1)p > x(p+q)$$

$$(n+1)p > x \quad (\text{ஏனெனில் } p+q=1)$$

$$\text{ஆகவே } (n+1)p > x \text{ எனில் } p(x) > p(x-1)$$

$$(n+1)p < x \text{ எனில் } p(x) < p(x-1)$$

எனவே ஆகக்கூடிய நிகழ்தகவு $p(x)$ ஆனது x இன் பெறுமானம் $(n+1)p$ இன் பெறுமானத்தைவிட சிறிது குறைவாக இருக்கும்போது பெறப்படும்.

அதாவது $(n+1)p$ இன் முழு எண் பெறுமானமாகும்.

குறிப்பு: $(n+1)p$ என்பது முழுஎண் ஆக இருந்தால் $(n+1)p-1$, $(n+1)p$ என்னும் இரு ஆகாரங்கள் பெறப்படும்.

Eg: i) $X \sim \text{Bin}(20, 0.23)$ என்னும் ஈருறுப்புப்பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க?

$$n = 20, p = 0.23$$

$$(n+1)p = 21 \times 0.23 = 4.83$$

4.83 இன் முழு எண்பகுதி 4 ஆகும். எனவே ஆகாரம் 4 ஆகும்.

Eg: ii) $X \sim \text{Bin}(9, 0.5)$ என்னும் ஈருறுப்புப்பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க?

$$n = 9, p = 0.5$$

$$(n+1)p = 10 \times 0.5 = 5$$

எனவே X இன் ஆகாரம் 4, 5 ஆகும்.

Eg: iii) ஓர் ஈருறுப்புப்பரம்பல் எழுமாற்று மாறி X இன் ஆகாரம் 17, 18 என்னும் இரு பெறுமானங்களைக் கொண்டது. இதன் இடை 17.5 ஆக இருந்தால், X இன் மாற்றற்றின் நியம விலகல் யாது?

விடை: ஆகாரம் 17, 18 என்னும் இருபெறுமானங்களைக் கொண்டிருப்பதால்

$$(n+1)p = 18 \quad \text{_____ (1)}$$

இடை 17.5 ஆக இருப்பதால்

$$np = 17.5 \quad \text{_____ (2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{18}{17.5} = \frac{36}{35}$$

$$35n + 35 = 36n$$

$$n = 35$$

$$np = 17.5$$

$$p = \frac{17.5}{n} = \frac{17.5}{35} = 0.5$$

(i) $n=35, p=0.5, q=0.5$

$$\begin{aligned} \text{மாறத்திறன் } \text{Var}(X) &= npq \\ &= 35 \times 0.5 \times 0.5 = 8.75 \end{aligned}$$

(ii) நியமவிலகல் $= \sqrt{8.75} = 2.95$

ஈருறுப்புப் பரம்பலின் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு:

X என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட ஈருறுப்புப் பரம்பலின் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ என்க.

$F(x) = p(X \leq x)$ ஆதலால்

$$F(x) = \sum_{x=0}^x {}^n C_x p^x q^{n-x} \quad \text{ஆகும்.}$$

Eg: ஒரு கோடாத நாணயம் 8 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கை எழுமாற்று மாறி X ஆக பதியப்படுகின்றது.

இப்பரிசோதனைக்கான நிகழ்தகவுப் பரம்பல் ஈருறுப்புப் பரம்பல் ஆகும். இதன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ ஆனது.

$$F(x) = \sum_{x=0}^x {}^8 C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\begin{aligned}
F(2) &= \sum_{x=0}^2 {}^8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} \\
&= {}^8C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + {}^8C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \frac{56}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^8 \{1+8+28\} \\
&= 0.1445
\end{aligned}$$

குறிப்பு: இப்பெறுமானத்தை ஈருறுப்புப் பரம்பல் அட்டவணையிலிருந்தும் அறியலாம்.

Eg: $X \sim \text{Bin}(7, 0.3)$ எனில் ஈருப்புப் பரம்பல் அட்டவணையிலிருந்து பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

- i) $F(3)$
- ii) $F(6)$
- iii) $f(3 < x \leq 6)$ ஐக் காண்க?

விடை: ஈருறுப்புப் பரம்பல் அட்டவணையைப் பார்க்க.

- i) $n = 7$ ஆகவுள்ள நிரலில்
 $x = 3$ ஆகவுள்ள நிரலுக்கும் $P=0.3$ ஆகவுள்ள நிரைக்குமான பெறுமானத்தை பார்த்தால் $F(3) = 0.8740$
- ii) இதேபோல் $F(6) = 0.9998$
- iii) $p(3 < x \leq 6) = F(6) - F(3)$
 $= 0.1258$

ஈருறுப்புப் பரம்பல்களின் கூட்டுத்தொகை:

X, Y என்பன இரண்டு ஈருறுப்புப் பரம்பல்களின் எழுமாற்று மாறிகள் என்க.

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$Y \sim \text{Bin}(m, p) \text{ எனில்}$$

$$\boxed{X + Y \sim \text{Bin}(n + m, p)} \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு: இரண்டு ஈருறுப்புப்பரம்பல்களினதும் ஒரு பெறுபேறுக்கான நிகழ்தகவு சமனாக இருத்தல் வேண்டும்.

Eg: i) $X \sim \text{Bin}(7, 0.3)$

$Y \sim \text{Bin}(5, 0.3)$ எனில்

$X + Y \sim \text{Bin}(12, 0.3)$ ஆகும்.

Eg: ii) $X \sim \text{Bin}(6, 0.4)$

$Y \sim \text{Bin}(4, 0.4)$ என்க.

Z என்னும் எழுமாற்றுமாறி $Z = X + Y$ என வரையறுக்கப்பட்டால் Z இன் இடை, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல், ஆகாரம் $P(Z = 5)$ என்பவற்றைக் காண்க?

விடை: $X \sim \text{Bin}(6, 0.4)$

$Y \sim \text{Bin}(4, 0.4)$

$X + Y \sim \text{Bin}(10, 0.4)$

$Z \sim \text{Bin}(10, 0.4)$

$n = 10, p = 0.4$

$E(Z) = np = 4$

$\text{Var}(Z) = npq = 10 \times 0.4 \times 0.6 = 2.4$

நியமவிலகல் $= \sqrt{2.4} = 1.55$

ஆகாரம்: $-(n + 1)P = 11 \times 0.4 = 4.4$

எனவே ஆகாரம் 4 ஆகும்.

$P(Z = 5) = {}^{10}C_5 (0.4)^4 (0.6)^5$

$= \frac{10!}{5! 5!} (0.4)^4 (0.6)^5$

$= 0.2$

Eg: iii) உலகப்புக்கழ்பெற்ற சதுரங்க ஆட்ட சாம்பியனான தமிழர் ஒருவர் தான் விளையாடும் ஒவ்வொரு போட்டியிலும் தோற்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 என உணருகின்றார். இவர் முதல் வருடம் 7 போட்டிகளிலும் அடுத்த வருடம் 4 போட்டிகளிலும் கலந்து கொண்டார். இவ்விரு வருடங்களிலும் அவர் சரியாக இரண்டு போட்டிகளில் தோல்வியடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: முதலாம் வருடம் இவர் தோற்கும் விளையாட்டுக்களின் எண்ணிக்கை எழுமாற்றுமாறி X என்க.

$$\therefore X \sim \text{Bin}(7, 0.2)$$

அடுத்தவருடம் இவர் தோற்கும் போட்டிகளின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி Y என்க.

$$\therefore Y \sim \text{Bin}(4, 0.2)$$

எனவே இரண்டு வருடங்களிலும் இவர் தோற்கும் போட்டிகளின் எண்ணிக்கை எழுமாற்றுமாறி Z எனில் $Z=X+Y$ ஆகும்.

$$\therefore Z \sim \text{Bin}(11, 0.2)$$

$$\begin{aligned} P(Z=2) &= {}^{11}C_2 (0.2)^2 (0.8)^9 \\ &= 0.295 \end{aligned}$$

எனவே இருவருடங்களிலும் இவர் சரியாக இரண்டு போட்டிகளில் தோல்விடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.295 ஆகும்.

பயிற்சி - 13

- கோடாத நாணயம் ஒன்று 4 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. சரியாக 3 தடவைகள் தலை தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- $X \sim \text{Bin}(8, 0.3)$ எனில் $P(X=2)$
 - $X \sim \text{Bin}(12, 0.5)$ எனில் $P(X=8)$
 - $X \sim \text{Bin}(6, 0.8)$ எனில் $P(X>4)$
 - $X \sim \text{Bin}(6, 1/3)$ எனில் $P(X \leq 2)$
 - $X \sim \text{Bin}(10, 1/4)$ எனில் $P(X \leq 7)$

என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- $X \sim \text{Bin}(6, 0.5)$ எனில் X இன் இடை. மாற்ற்திறன், நியமவிலகல், ஆகாரம் என்பவற்றைக் காண்க?
- X என்ற ஈருறுப்புப்பரம்பல் எழுமாற்று மாறியின் இடை 6 உம் மாற்ற்திறன் 5 உம் ஆகும். n, p என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- 4 பிள்ளைகள் உள்ள குடும்பத்தில் 3 பெண் பிள்ளைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

6. ஒரு புற்று நோயாளி அந்நோயிலிருந்து குணமடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். குணமடைய முடியாவிட்டால் அவர் இறக்க வேண்டியது தான். ஒரு வைத்தியசாலையில் இந்நோயினால் பீடிக்கப்பட்ட 15 பேர் அனுமதிக்கப்பட்டுள்ளனர்.

- i) ஆகக்குறைந்தது 10 பேர்
- ii) 3 தொடக்கம் 8 பேர்
- iii) சரியாக 5 பேர், உயிருடன் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

7. ஒரு பாடசாலையில் கல்வி பயிலும் 70% ஆன மாணவிகள் 'மூக்குத்தி' அணிகின்றனர். இவர்களில் 16 மாணவிகள் எழுமாற்றாகத் தெரியப்பட்டு அவதானிக்கப்படுகின்றனர். மூக்குத்தி அணிந்துள்ள மாணவிகளின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X என்க. 16 மாணவிகளில்

- i) ஆகக்குறைந்தது 13 பேர்
- ii) ஆகக்கூடியது 11 பேர்
- iii) சரியாக 12 பேர் மூக்குத்தி அணிந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- iv) X இன் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

8. கொழும்பில் வாழும் தமிழர்களில் 70% ஆனோர் தற்பெருமைக்காக ஆங்கிலம் பேசுகின்றனர். ஒருநாள் மீன் கடைக்கு வந்த 15 தமிழர்களில்

- i) எல்லோரும்
- ii) ஆகக்கூடியது 12 பேர்
- iii) ஆகக்குறைந்த 13 பேர்
- iv) சரியாக 8 பேர் தற்பெருமைக்காக ஆங்கிலம் பேசுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தற்பெருமைக்காக ஆங்கிலம் போசாதவர்களின் எண்ணிக்கை எழுமாற்றுமாறி X எனப்பதியப்பட்டால் X இன் இடை, நியமவிலகல், ஆகாரம் என்பவற்றைக் காண்க?

9. சமையல் கலையில் 'தத்துவக் கலாநிதி' படிப்பை மேற்கொள்ளும் மாணவர்களில் 90% ஆனோர் இதனை வெற்றிகரமாக முடிக்கின்

றனர். ஒருமுறை 15 பேர் இப்பட்டப்படிப்பை மேற்கொள்வதற்காக தெரிவு செய்யப்பட்டனர். இவர்களில்

- i) 15 பேரும் சித்தியடைவதற்கான
- ii) 1 மாணவன் மாத்திரம் சித்தியடையாததற்கான
- iii) ஆகக்குறைந்தது இரு மாணவர் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

10. ஒரு சீட்டிழுப்பில் 50,000,000 இன் $\frac{1}{10}$ பங்கு சீட்டுக்கள் வெல்லப்படும் என அறிவிக்கப்பட்டது.

- i) 10 சீட்டுக்கள் வாங்கும்போது ஆகக்குறைந்தது ஒரு சீட்டு வெல்லப்படுவதற்கான
- ii) 15 சீட்டுக்கள் வாங்கும்போது ஆகக்குறைந்தது ஒரு சீட்டு வெல்லப்படுவதற்கான, நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

11. ஒரு சீட்டிழுப்பில் ஒரு மில்லியன் சீட்டுக்களில் $\frac{1}{10}$ பங்கு வெல்லப்படும் என அறிவிக்கப்பட்டது. ஆகக்குறைந்தது ஒரு சீட்டு வெல்லப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 ஆக இருப்பதற்கு எத்தனை சீட்டுக்கள் வாங்கப்பட வேண்டும்?

12. இலங்கை நிர்வாக முகாமைத்துவ தகவல்களின்படி $\frac{1}{3}$ பங்கு தனியார் கம்பனிகள் 12 வருடங்கள் சேவைசெய்த ஊழியர்களுக்கு 5 வார விடுமுறைகளைக் கொடுக்கின்றது. எழுமாற்றாகத் தெரியப்படும் 6 கம்பனிகளில்

- i) 2 தொடக்கம் 5 வரையான கம்பனிகள்
- ii) 3 ஐ விட குறைவான கம்பனிகள் 5 வார விடுமுறைகளை தமது 12 வருடங்கள் சேவைசெய்த ஊழியர்களுக்கு வழங்குவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

13. சோதனைச் சாவடி நிலையம் ஒன்றைக் கடக்கும் 75% ஆன பழைய லொறிகள் நகருக்குள் இருந்தே வருகின்றன. அடுத்தது வரும் 9 லொறிகளுள் 4 ஐ விடக்குறைவான எண்ணிக்கையான பழைய லொறிகள் நகருக்கு வெளியிலிருந்து வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

14. ஒரு தனியார் கம்பனியிடம் 10 தொலைபேசிகள் உள்ளன. எந்த நேரத்திலும் ஏதாவது ஒரு இணைப்பு 'என்கேஜ்' (Engaged) ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்கதவு $\frac{1}{5}$ ஆகும்.

- i) எல்லா இணைப்புகளும் என்கேஜ் ஆக.
- ii) ஆகக்குறைந்தது ஒரு இணைப்பாவது சுயாதீனமாக (Free) இருப்பதற்கான
- iii) சரியாக இரு இணைப்புக்கள் சுயாதீனமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

15. ஒரு குறிப்பிட்ட விமானசேவை இரு நகரங்களுக்கிடையில் 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் 2 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் சேவையில் ஈடுபடுத்துகின்றது. ஒரு இயந்திரம் பறப்பின்போது பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 ஆகும். குறைந்தது ஒரு விமானத்தின் அரைவாசி எண்ணிக்கையான இயந்திரங்கள் இயங்கிக்கொண்டிருந்தால் தான் ஓர் விமானத்தினால் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்த முடியும்.

- i) 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானம்
- ii) 2 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானம் பாதுகாப்பான சேவையை நடாத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?
- iii) எத்தனை இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானத்தின் சேவை மற்றையதைக் காட்டிலும் பாதுகாப்பானது?

16. மேலுள்ள வினாவில் (வினா இல. 15) இயந்திரம் ஒன்று பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 எனில் 2 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானமே பாதுகாப்பான சேவையை வழங்கமுடியும் என நிறுவுக?

17. மேலுள்ள வினாவில் (வினா இல. 15) இயந்திரம் ஒன்று பறப்பின்போது பழுதடைவதற்கான நிகழ்தகவு p எனத் தரப்பட்டுள்ளது. 4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானம் 2 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானத்திலும் பாதுகாப்பானதாக

இருப்பதற்கு $0 < p < \frac{1}{3}$ எனக்காட்டுக?

18. X என்ற ஈருறுப்பு எழுமாற்று மாறியின் இடை 9.6 ஆகவும் மாறத்திறன் 1.92 ஆகவும் உள்ளது. X இன் ஆகாரம் யாது?
19. ஒரு வகுப்பிலிருந்து எழுமாற்றாகத் தெரிவுசெய்யப்படும் ஒரு மாணவன் இடதுகை பழக்கம் உடையவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.24 ஆகும். 40 மாணவர்களிலிருந்து தெரிவு செய்யப்படத்தக்க இடது கைப்பழக்கமுள்ள மாணவர்களின் ஆகக்கூடிய எண்ணிக்கை (ஆகாரம்) யாது?
20. ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் ஆடைகளில் 3.2% ஆனவை குறைபாடு உள்ளதாகும். உற்பத்தி செய்யப்படும் 300 ஆடைகளில் குறைபாடுள்ளவைகளின் இயல்புமிக்க (ஆகாரம்) எண்ணிக்கை யாது?
21. துப்பாக்கியாளர் இலக்கு ஒன்றை சரியாகச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ ஆகும். இவர் 10 தடவைகள் சுடுகின்றார்.
- 8 தடவைகள் சரியாக சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
 - இடை. நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
 - சரியாக இலக்கை நோக்கிச் சுடத்தக்க தடவைகளின் இயல்புமிக்க எண்ணிக்கை யாது?
22. 2000 புள்ளிகள் எழுமாற்றாக ஒரு சதுர அலகு பரப்புடைய $S = \{(a, b); 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\}$ என்னும் சதுரத்தினுள் தெரியப் படுகின்றன. X என்பது $A = \{(a, b); a^2 + b^2 < 1\}$ என்னும் பிரதேசத்திலுள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றது என்க.
- X என்னும் எழுமாற்று மாறி $\text{Bin} \left\{ 2000, \frac{\pi}{4} \right\}$ என்னும் ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது எனக்காட்டுக?
 - X இன் இடை, மாறத்திறன், ஆகாரம் என்பவற்றைக் காண்க?

பொய்சோன் பரம்பல் (Poisson Distribution)

தரப்பட்ட நேர இடைவெளிக்குள் அல்லது ஒரு குறிக்கப்பட்ட பிரதேசத்தில் நிகழும் குறிக்கப்பட்ட எண்ணிக்கையான பெறுபேறுகளைக் கொண்ட பரிசோதனை பொய்சோன் பரிசோதனை எனப்படும்.

Eg: ஒரு மணி நேரத்தில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை, மழை காரணமாக ஒரு வருடத்தில் பாடசாலை மூடப்பட்ட நாட்களின் எண்ணிக்கை, புத்தகம் ஒன்றின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள எழுத்துப் பிழைகளின் எண்ணிக்கை, ஒரு சந்தியை 5 நிமிடங்களில் கடந்த வாகனங்களின் எண்ணிக்கை போன்றன.

பொய்சோன் பரிசோதனை ஒன்றில் நிகழும் பெறுபேறுகளின் எண்ணிக்கை X ஆனது பொய்சோன் எழுமாற்று மாறி எனப்படும்.

பொய்சோன் எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பொய்சோன் பரம்பல் எனப்படும். பொய்சோன் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & ; x=0,1,2,\dots \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படும். இங்கு $\lambda > 0$ என்பது பரமானமாகும். x இன் ஆகக் கூடிய பெறுமானம் பரிசோதனைகளைப் பொறுத்துத் தீர்மானிக்கப்படும்.

இங்கு $e = 2.71828$

குறிப்பு: X என்னும் பின்னக எழுமாற்று மாறிக்கு λ பரமானம் கொண்ட பொய்சோன் பரம்பல் உண்டு என்பது $X \sim \text{Po}(\lambda)$ இனால் குறிக்கப்படும்.

Eg: i) X என்னும் எழுமாற்று மாறிக்கு 3 என்னும் பரமானத்தை உடைய பொய்சோன் பரம்பல் உண்டு என்க. எனவே எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-3} 3^x}{x!} & ; x=0,1,2,\dots \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படும். இது $X \sim \text{Po}(3)$ எனவும் குறிக்கப்படும்.

Eg: ii) ஒரு மணித்தியாலத்தில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை 50 என்க. 5 நிமிட நேரத்தில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை எழுமாற்று மாறி X என்க.

60 நிமிடத்தில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 50

ஆகவே 5 நிமிடத்தில் பெறப்பட்ட சராசரி தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை = $\frac{50}{60} \times 5 = 4.17$

$$\therefore \lambda = 4.17$$

X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு p(x) எனில்

$$p(x) = \begin{cases} e^{-4.17} 4.17^x & ; x=0,1,\dots\dots \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

பொய்சோன் பரம்பலின் அடர்த்திச் சார்புக்கான நிறுவல்:

ஈருறுப்புப்பரம்பலுக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு p(x) எனில்

$$p(X=x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

ஆனால் $\mu = np$

$$\mu = \lambda \text{ எனில் } p = \frac{\lambda}{n}$$

$$p(X=x) = \frac{n(n-1)\dots\dots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right) \frac{n(n-1)\dots\dots(n-x+1)}{n^x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right) \left(1-\frac{1}{n}\right) \left(1-\frac{2}{n}\right) \dots \left(1-\frac{x-1}{n}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$n \rightarrow \infty$ எனில்

$$p(X=x) = \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right) \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$p(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Q } n \rightarrow \infty \text{ எனில்} \\ \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda} \end{array} \right]$$

Eg: i) ஆய்வுகூடப்பரிசோதனை ஒன்றில் குறிக்கப்பட்ட துளை ஒன்றினூடு 1 மில்லி செக்கனில் சென்ற கதிர்த்தொழிற்பாட்டு துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கை 4 ஆகும். இத்துளையினூடு 1 மில்லி செக்கனில் 6 கதிர்த்தொழிற்பாட்டு துணிக்கைகள் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு மில்லி செக்கனில் துளையினூடு சென்ற கதிர்த்தொழிற்பாட்டு துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X என்க.

$$X \sim Po(4) ; \lambda = 4$$

$$p(X=x) = \frac{e^{-4} 4^x}{x!} ; x=0,1,\dots$$

$$p(X=6) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!} = 0.104$$

எனவே 6 கதிர்த்தொழிற்பாட்டு துணிக்கைகள் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.104 ஆகும்.

Eg: ii) ஒரு புத்தகம் 80 பக்கங்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பக்கமும் சராசரியாக 300 சொற்களைக் கொண்டுள்ளன. புத்தகத்திலுள்ள பிழையான சொற்களின் மொத்த எண்ணிக்கை 200 ஆகும். குறித்த ஒரு பக்கம் 4 பிழையான சொற்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு பக்கத்திலுள்ள சராசரி பிழைகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{200}{80} = 2.5$$

$$\lambda = 2.5$$

$$p(X=x) = \frac{e^{-2.5} 2.5^x}{x!}$$

$$p(X=4) = \frac{e^{-2.5} \times 2.5^4}{4!} = 0.134$$

எனவே குறித்த ஒரு பக்கம் 4 பிழையான சொற்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.134 ஆகும்.

Eg: iii) மேலுள்ள உதாரணத்தில் ஒரு பக்கம் 4 இற்கு மேற்பட்ட பிழையான சொற்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$p(X=0) = \frac{e^{-2.5} 2.5^0}{0!} = 0.0821$$

$$p(X=1) = \frac{e^{-2.5} \times 2.5^1}{1!} = 0.2052$$

$$p(X=2) = \frac{e^{-2.5} \times 2.5^2}{2!} = 0.2565$$

$$p(X=3) = \frac{e^{-2.5} \times 2.5^3}{3!} = 0.2138$$

$$p(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) = 0.2424$$

எனவே குறித்த ஒரு பக்கம் 4 இற்கு மேற்பட்ட பிழைகளைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.2424 ஆகும்.

குறிப்பு: (a) $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$

(b) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{\lambda}$

(c) $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = e^{\lambda}$

பொய்சோன் எழுமாற்றுமாரியின் எதிர்வு மாற்ற்திறனும்:

i) எதிர்வு $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x)$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} [e^{\lambda}] = \lambda$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} [x(x-1) + x] \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \lambda^2 e^{-\lambda} \left[\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \right] + \lambda \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{மாறத்திறன் } \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = \lambda}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{\lambda}$$

குறிப்பு: பொய்சோன் பரம்பலின் இடையும் மாறத்திறனும் சமனாகும்.

Eg: i) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி 4 என்னும் இடைப்பெறுமானத்தையுடைய பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டது எனில் $P(2 \leq x \leq 5)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

$$E(X) = 4$$

$$\therefore \lambda = 4$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} = 0.1465$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} = 0.1954$$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} = 0.1953$$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-4} \cdot 4^5}{5!} = 0.1563$$

$$P(2 \leq x \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ = 0.694$$

Eg: ii) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி மாறத்திறன் 3 ஐக்கொண்ட பொய்ச்சோன் பரம்பலைக் கொண்டது. $P(X=2)$ இன் பெறுமானம் யாது?

$$\text{Var}(X) = 3$$

$$\therefore \lambda = 3$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3} 3^2}{2!} \\ = 0.2240$$

பொய்ச்சோன் எழுமாற்றுமாறியின் ஆகாரம்:

X என்னும் எழுமாற்றுமாறி $Po(\lambda)$ என்னும் பொய்ச்சோன் பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் X இன் ஆகாரம் λ இன் பெறுமானத்திற்குக் குறைந்த ஆகக்கூடிய முழு எண் ஆகும்.

நிறுவல்: $X \sim Po(\lambda)$

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P(x-1) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \times \frac{(x-1)!}{e^{-\lambda} \lambda^{x-1}} = \frac{\lambda}{x}$$

$$P(x) = P(x-1) \cdot \frac{\lambda}{x}$$

$x < \lambda$ எனில் $p(x) > p(x-1)$

$x > \lambda$ எனில் $p(x) < p(x-1)$

எனவே ஆகக்கூடிய நிகழ்தகவு $p(x)$ ஆனது x இன் பெறுமானம் λ ஐ விட சிறிது குறைவாக இருக்கும்போதே பெறப்படும். இங்கு X என்பது பின்னக எழுமாற்றுமாறி என்பதால் x இன் பெறுமானம் முழு எண்ணாகும். அதாவது λ ஐ விடக்குறைந்த ஆகக்கூடிய முழு எண்ணாகும்.

குறிப்பு: λ என்பது முழுஎண் ஆக இருந்தால் $\lambda-1, \lambda$ என்னும் இரண்டு ஆகாரங்கள் இருக்கும்.

Eg: i) $X \sim \text{Po}(5.7)$ என்னும் பொய்சோன் பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க?

$$\lambda = 5.7$$

எனவே ஆகாரம் 5 ஆகும்.

Eg: ii) $X \sim \text{Po}(7)$ என்னும் பொய்சோன் பரம்பலின் ஆகாரத்தைக் காண்க?

$$\lambda = 7$$

எனவே ஆகாரம் 6, 7 ஆகும்.

பொய்சோன் பரம்பலின் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு:

X என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட பொய்சோன் பரம்பலின் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ என்க.

$F(x) = P(X \leq x)$ ஆதலால்

$$F(x) = \sum_{x=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{ஆகும்.}$$

Eg: X என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட பொய்சோன் பரம்பலின் மாறத்திறன் 3.5 எனில் F(2) ஐக் காண்க.

$$\lambda = 3.5 \quad (Q \text{ Var}(X) = \lambda)$$

$$\begin{aligned} F(2) &= \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-3.5} 3.5^x}{x!} \\ &= e^{-3.5} + 3.5 \times e^{-3.5} + \frac{1}{2} \times 3.5^2 \times e^{-3.5} \\ &= 0.03 + 0.106 + 0.1849 \\ &= 0.3209 \end{aligned}$$

குறிப்பு: இப்பெறுமானத்தை பொய்சோன் பரம்பல் அட்டவணையிலிருந்தும் அறியலாம்.

Eg: X ~ Po (3) எனில் பொய்சோன் பரம்பல் அட்டவணையிலிருந்து பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

- i) F(5) ii) F(2) iii) P(3 ≤ x ≤ 5)

விடை: பொய்சோன் பரம்பல் அட்டவணையப் பார்க்க.

- i) x = 5 என்ற நிரலுக்கும் λ=3 என்ற நிரையிலுமுள்ள பெறுமானத்தை அறிக.

$$F(5) = 0.9161$$

- ii) இதேபோல் F(2) = 0.4232

- iii) P(3 ≤ x ≤ 5) = F(5) - F(2)

$$= 0.9161 - 0.4232 = 0.4929$$

பல்வேறு உதாரணங்கள்

Eg: 1) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி 3p (X = 1) = p (X = 2) ஆகுமாறு பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டிருந்ததால்

- i) X இன் இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- ii) X இன் ஆகாரம் யாது?
- iii) P(X=4) இன் பெறுமானம் யாது?
- iv) P(2 ≤ x ≤ 5) இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

v) $F(X)$ என்பது X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு எனில் $F(5)$, $F(1)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?

vi) மேலே (v) இல் பெறப்பட்ட விடையிலிருந்து $P(2 \leq X \leq 5)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

விடை:

i) X என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட பொய்சோன் பரம்பலின் பரமானம் λ என்க.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P(X = 1) = e^{-\lambda} \cdot \lambda$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^2}{2}$$

$$\text{ஆனால் } 3P(X = 1) = P(X = 2)$$

$$3\lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

$$\lambda = 6$$

$$\text{இடை } E(X) = 6$$

$$\text{மாறத்திறன் } \text{Var}(X) = 6$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{6}$$

ii) $\lambda = 6$ எனில் ஆகாரம் 5, 6 ஆகும்.

$$\text{iii) } P(X = 4) = \frac{e^{-6} 6^4}{4!} = 0.1338$$

$$\text{iv) } P(X = 2) = \frac{e^{-6} 6^2}{2!} = 0.0446$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-6} 6^3}{3!} = 0.0892$$

$$P(X = 4) = 0.1338$$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-6} 6^5}{5!} = 0.1606$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0.0446 + 0.0892 + 0.1338 + 0.1606 = 0.4282$$

v) பொய்சோன் அட்டவணையிலிருந்து

$$F(5) = 0.4457$$

$$F(1) = 0.0174$$

iv) $P(2 \leq x \leq 5) = F(5) - F(1)$

$$= 0.4457 - 0.0174$$

$$= 0.4283$$

Eg: 2) 1000 பேரில் சராசரியாக ஒருவர் நீரிழிவு நோயினால் பீடிக்கப் பட்டுள்ளனர் என இலங்கை சுகாதார அமைச்சு அண்மையில் வெளியிட்ட அறிக்கை ஒன்றில் குறிப்பிட்டுள்ளது. 10000 பேரைக்கொண்ட ஒரு கிராமத்தில் 6, 7 அல்லது 8 பேர் இவ்வியா தியினால் பீடிக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: 1000 பேரில் ஒருவர் நீரிழிவு நோய்க்கு உட்பட்டிருந்தால் 10000 பேரில் சராசரியாக 10 பேர் இவ்வியாதிக்கு உட்பட்டிருப்பர்.

$$\therefore \lambda = 10$$

ஆகவே 6 அல்லது 7 அல்லது 8 பேர் இவ்வியாதியினால் பீடிக்கப் பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$= \frac{e^{-10} \times 10^6}{6!} + \frac{e^{-10} \times 10^7}{7!} + \frac{e^{-10} \times 10^8}{8!}$$

$$= 0.2657$$

Eg: 3) உலக அழகுராணியாகத் தெரிவு செய்யப்பட்ட இலங்கைப் பெண்மணி கிழமை நாட்களில் (சனி, ஞாயிறுதவிர) இரவு மணி 7.20 தொடக்கம் மணி 8.20 வரை தொலைபேசியில் தொடர்பு கொண்டு உரையாடுவதற்கு தனது ரசிகர்களுக்கு அனுமதி யளிக்கிறார். இந்த ஒரு மணிநேரத்தில் இவர் சராசரியாக 6 தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுகின்றார்.

i) ஒருநளில் அவர் இரவு மணி 7.20 தொடக்கம் 8.20 வரை 3 இற்கு மேற்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவதற் கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) இரவு மணி 7.20 தொடக்கம் மணி 7.30 வரை சரியாக 3 தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iii) ஒரு கிழமையில் சரியாக 3 நாட்களில் அவர் இரவு மணி 7.20 தொடக்கம் மணி 7.30 வரை சரியாக மூன்று தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iv) ஒரு கிழமையில் சரியாக 4 நாட்கள் இரவு மணி 7.15 தொடக்கம் மணி 7.35 வரை எதுவிதமான தொலைபேசி அழைப்புக் களையும் அவர் பெறாததற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை:

i) 1 மணி நேர (60 நிமிடம்) இடைவெளியில் சராசரியாக பெறும் தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 6

$$\therefore \lambda = 6$$

ஆகவே 3 இற்கு மேற்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(X \geq 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - e^{-6} - e^{-6} \times 6 - \frac{e^{-6} \times 6^2}{2!}$$

$$= 1 - 25e^{-6}$$

$$= 0.938$$

ii) 1 மணித்தியாலத்தில் பெறப்படும் சராசரி தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை = 6

ஆகவே 10 நிமிட நேர இடைவெளியில் (மணி 7.20 மணி 7.30 வரை) பெறப்படும் சராசரி தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும்.

$$\therefore \lambda = 1$$

எனவே 3 தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $P(X=3)$ ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } P(X=3) = \frac{e^{-1} \times 1^3}{3!} = 0.0613$$

iii) இரவு மணி 7.20 தொடக்கம் மணி 7.30 வரை சரியாக 3 தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$P=0.0613$ ஆகவே இரவு மணி 7.20 தொடக்கம் மணி 7.30 வரை சரியாக 3 தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறாததற் கான நிகழ்தகவு

$$q = 1-p = 1-0.0613 = 0.9387$$

எனவே 5 நாட்களில் 3 நாட்கள் சரியாக 3 தொலைபேசி அழைப்புக்களை இந்நேர இடைவெளியில் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு ஈருறுப்புப் பரம்பலைப் பாவிக்க வேண்டும்.

$$\therefore n=5, p=0.0613, q=0.9387$$

$$P(X = x) = {}^5C_x (0.0613)^x (0.9387)^{5-x}$$

$$P(X = 3) = {}^5C_3 (0.0613)^3 (0.9387)^2 \\ = 0.002$$

iv) மணி 7.15 தொடக்கம் மணி 7.35 வரையுள்ள 20 நிமிட நேர இடைவெளியில் இவர் சராசரியாக 2 தொலைபேசி அழைப்புக்களைப் பெறுவார்.

$$\therefore \lambda = 2$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

ஆகவே இந்நேர இடைவெளியில் எதுவிதமான தொலைபேசி அழைப்புக்களையும் பெறாததற்கான நிகழ்தகவு $P(X=0)$ ஆகும்.

$$P(X = 0) = e^{-2} = 0.1353$$

$$p = 0.1353$$

$$q = 0.8647$$

எனவே 5 நாட்களில் 4 நாட்கள் இந்நேர இடைவெளியில் எதுவிதமான தொலைபேசி அழைப்புக்களையும் பெறாததற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = 4) = {}^5C_4 (0.1353)^4 (0.8647)^1 \\ = 0.0025$$

இரண்டு சாரா பொய்சோன் பரம்பல்களின் கூட்டுத்தொகை:

X, Y என்பன இரண்டு பொய்சோன் பரம்பல்களின் எழுமாற்று மாறிகள் என்க.

$$X \sim \text{Po}(\lambda)$$

$$Y \sim \text{Po}(\mu) \text{ எனில்}$$

$$X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$$

அதாவது இரண்டு சாரா பொய்சோன் எழுமாற்று மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையும் பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

குறிப்பு: * இதற்கான நிறுவல் பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது.

Eg: 1) $X \sim \text{Po}(3)$, $Y \sim \text{Po}(4)$ என்பன இரண்டு பொய்சோன் பரம்பல்கள் என்க. Z என்னும் எழுமாற்று மாறி $Z=X+Y$ என வரையறுக்கப்பட்டால் Z உம் பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும். இதன் பரமானம் $3+4=7$ ஆகும்.

$$\therefore Z \sim \text{Po}(7)$$

Eg: 2) ஒரு குறிப்பிட்ட சந்தியை ஒரு நிமிடத்தில் நகரை நோக்கிச் செல்லும் 8 வாகனங்களும் நகரிலிருந்து வெளிவரும் 6 வாகனங்களும் கடக்கின்றது. ஒரு நிமிடத்தில் அச்சந்தியை 12 வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: நகரை நோக்கி ஒரு நிமிடத்தில் செல்லும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X என்க. இங்கு பரமானம் 8 ஆகும். $X \sim \text{Po}(8)$

நகரிலிருந்து ஒரு நிமிடத்தில் வெளிவரும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்று மாறி Y என்க. இங்கு பரமானம் 6 ஆகும். $Y \sim \text{Po}(6)$

ஒரு நிமிடத்தில் சந்தியை கடக்கும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி Z என்க. ஆகவே $Z=X+Y$

$$Z \sim \text{Po}(14)$$

$$P(Z) = \frac{e^{-14} 14^Z}{Z!}$$

$$P(Z=12) = \frac{e^{-14} 14^{12}}{12!}$$

$$= 0.0984$$

எனவே ஒரு நிமிடத்தில் சந்தியைக் கடக்கும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கை 12 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.0984 ஆகும்.

பயிற்சி - 14

- 1) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி $\lambda=5$ உடனான பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. $P(X \leq 6)$, $P(X > 5)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- 2) பொய்சோன் பரம்பலுக்கான எழுமாற்று மாறி X இன் நியமவிலகல் 2 ஆகும். $P(X \geq 3)$, $P(X \leq 3)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- 3) பொய்சோன் பரம்பலுக்கான எழுமாற்று மாறி X இன் ஆகாரம் 2, 3 ஆகும். $P(X=2)$ இன் பெறுமானம் யாது?
- 4) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது எனத்தரப்பட்டுள்ளது. $P(X=2)=3P(X=4)$ எனில்
i) $P(X=0)$, ii) $P(X \leq 4)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- 5) $X \sim Po(4.5)$ எனில் $F(X=9)$, $F(X=2)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
- 6) X என்னும் எழுமாற்றுமாரியைக் கொண்ட பொய்சோன் பரம்பலின் இடை μ ஆகவும் நியமவிலகல் σ ஆகவும் உள்ளது. X ஆனது 8, 9 என்னும் இரு ஆகாரங்களைக் கொண்டுள்ளது.
 $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
- 7) பிரயாண முகவர் நிலையம் ஒன்றிற்கு வருகைதரும் பயணிகளின் எண்ணிக்கை மணித்தியாலம் ஒன்றிற்கு சராசரியாக 11 ஆகும். குறித்த ஒரு மணித்தியாலத்தில் 10 இற்குமேற்பட்ட பயணிகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 8) 25 நிமிட நேர இடைவெளியில் கல்லூரி ஒன்றிலுள்ள நூல் நிலையத்திற்கு வருகைதந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை X ஆனது 7 என்னும் பெறுமானத்தை மாற்ற்திறனாகவுடைய

பொய்சோன் பரம்பலைக்கொண்டது.

i) 15 நிமிட நேர இடைவெளியில் 2 ஐ விடக்கூட ஆனால் 6 ஐ விடக் குறைவான

ii) 15 நிமிட நேர இடைவெளியில் 4 ஐ விடக்கூடவான. எண்ணிக்கையான மாணவர்கள் வருகைதந்ததற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

9) யுத்தப்பிரதேசம் ஒன்றில் எதிரிகளின் குண்டுவிச்சு விமானங்கள் 5 நிமிடங்களில் சராசரியாக 15 குண்டுகளை வீசும். குறித்த ஒரு நிமிடத்தில்

i) சரியாக 5 குண்டுகளை வீசுவதற்கான

ii) 3 இற்குக் குறைவான குண்டுகளை வீசுவதற்கான

iii) ஆகக்குறைந்தது 2 குண்டுகளை வீசுவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

10) ஒரு சுருக்கெழுத்தாளர் ஒரு பக்கத்திற்கு சராசரியாக 2 பிழைகளை விடுகின்றார். இவர் 10 பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு கடிதத்தை தயாரிக்கின்றார்.

i) ஒரு பக்கத்தில் 4 அல்லது அதனை விடக்கூடவான பிழைகளை விடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) ஒரு பக்கத்தில் 3 பிழைகளை விடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iii) ஒரு பக்கத்தில் பிழைகள் ஏதும் விடாதிருத்தலுக்கான நிகழ்தகவு யாது?

iv) இக்கடிதத்தில் ஏதாவது 5 பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் 3 பிழைகள் விடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

v) இக்கடிதத்தில் 3 அல்லது அதற்குக் கூடவான பக்கங்களில் 4 அல்லது அதனை விடக்கூடுதலான பிழைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

11) ஒரு வருடத்தில் பூமியை சராசரியாக 6 விண்கற்கள் தாக்குகின்றன. குறித்த ஒரு வருடத்தில்

i) 4 இற்குக் குறைவான விண்கற்கள்

ii) 6 தொடக்கம் 8 வரையான விண்கற்கள் பூமியை தாக்குவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 12) ஆணிகள் உற்பத்தி செய்யப்படும் தொழிற்சாலையில் 0.5% குறைபாடுள்ளவையாகும். ஒரு மாதிரியில் 200 ஆணிகள் பரிசோதிக்கப்பட்டது.
- எல்லா ஆணிகளும் நல்லவையாக
 - ஒரு ஆணி குறைபாடுள்ளதாக
 - 2ஆணிகள் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 13) தனியார் வங்கி ஒன்றிற்கு ஒரு மணித்தியாலத்தில் சராசரியாக 24 வாடிக்கையாளர்கள் வருகை தருகின்றனர்.
- குறித்த ஓர் 5 நிமிடத்தில் எவருமே வருகை தராததற்கான
 - குறித்த ஓர் 5 நிமிடத்தில் 4 இற்குக் கூடவான வாடிக்கையாளர்கள் வருகை தருவதற்கான
 - ஒரு மணித்தியாலம் 30 நிமிடத்தில் 50 இற்குக் கூடவான வாடிக்கையாளர்கள் வருகை தருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 14) இரண்டு சாரா பொய்ச்சோன் எழுமாற்று மாறிகளின் கூட்டுத் தொகையும் ஓர் பொய்ச்சோன் எழுமாற்று மாறியாகும் என காட்டுக? கொழும்பு நகரின் பிரதான ஒரு பஸ்தரிப்பு நிலையத்தை பகல்பொழுதில் 5 செக்கன்களில் நகரை நோக்கிவரும் 2 வாகனங்களும், 10 செக்கன்களில் நகரிலிருந்து விலகிச் செல்லும் 2 வாகனங்களும் கடந்து செல்கின்றன. குறித்த ஓர் 2 செக்கன்களில் 2 இற்கு மேற்பட்ட வாகனங்கள் பஸ்தரிப்பு நிலையத்தைக் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.121 எனக்காட்டுக?
- 15) இரு சாரா பொய்ச்சோன் எழுமாற்று மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையும் ஓர் பொய்ச்சோன் எழுமாற்று மாறியாகும் எனக்காட்டுக? பல்கலைக்கழக மருத்துவ பீடத்தின் குறித்த ஓர் கல்வியாண்டில் ஒரு கிழமையில் 4 ஆண்களும் 3 பெண்களும் விரிவுரைகளுக்கு சமூகமளிப்பதில்லை.
- குறித்த ஓர் நாளில் 2 ஆண்களும் 2 பெண்களும் சமூகமளிக்காததற்கான
 - குறித்த ஓர் நாளில் 4 மாணவர்கள் வருகை தராததற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 16) ஒரு கிராமத்தில் ஒரு கிழமையில் சராசரியாக இருவர் இறக்கின்றனர்.
- குறித்த ஓர் நாளில் எவருமே இறக்காததற்கான நிகழ்தகவு யாது?
 - வார இறுதி நாட்களில் (சனி, ஞாயிறு) இரண்டிற்கு மேற்பட்டவர்கள் இறப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 17) குறித்த ஓர் சந்தியில் இரு நாட்களுக்கு சராசரியாக ஒரு விபத்து நிகழ்கின்றது.
- குறித்த ஒரு நாளில் ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட விபத்துக்கள் நடைபெறுவதற்கான
 - குறித்த ஓர் கிழமையில் 3 இற்குக் குறைவான விபத்துக்கள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 18) கதோட்டுக் குழாய்ப் பரிசோதனை ஒன்றில் ஒரு செக்கனில் சராசரியாக 4.2×10^9 இலத்திரன்கள் வெளிவிடப்படுகின்றன. ஒரு நனோ செக்கனில் (10^{-9} செக்கன்) இரண்டிற்குக் குறைவான இலத்திரன்கள் வெளிவிடப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 19) ஒரு வீதியின் குறித்த ஓர் கடவையை ஓர் நிமிடத்தில் சராசரியாக இரண்டு வாகனங்கள் கடக்கின்றன.
- மூன்று நிமிடங்களில் சரியாக 6 வாகனங்கள் இக்கடவையைக் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
 - t நிமிட நேர இடைவெளியில் சராசரியாக எத்தனை வாகனங்கள் இக்கடவையைக் கடந்து செல்லும்?
 - இந்த t நிமிட நேர இடைவெளியில் ஆகக்குறைந்தது ஒரு வாகனம் இக்கடவையைக் கடந்து செல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.99 எனில் t=2.3 நிமிடங்கள் எனக் காட்டுக?
- 20) மருத்துவர்களின் கவனக்குறைவால், நோயாளிக்கு ஏற்றப்படும் தடுப்பூசி மருந்தின் 1ml கனவளவிலுள்ள வைரசு கிருமிகளின் எண்ணிக்கை 2 ஐ இடைபெறுமானமாகவுடைய ஓர் பொய்சோன் எழுமாற்று மாறி என அறியப்பட்டது. நோயாளியின் உடம்பில்

புதிய ஓர் வியாதியை உண்டாக்குவதற்கு இவ்வகையான வைரசுக் கிருமிகளின் ஆகக்குறைந்த எண்ணிக்கை 3 ஆகும். 1ml கனவளவுடைய தடுப்பூசி மருந்து நோயாளியின் உடலில் புதிய ஓர் வியாதியை உருவாக்குவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 21) ஒரு சிறிய கலத்திலுள்ள வெண்குருதித் துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கை 3.2 என்னும் இடைப்பெறுமானத்தையுடைய பொய்சோன் எழுமாற்று மாறியாகும். இக்கலத்திலுள்ள வெண்குருதித் துணிக்கைகளின் ஆகவும் கூடிய (ஆகாரம்) எண்ணிக்கை யாது? இக்கலம் இப்பெறுமானத்தைக் (ஆகாரம்) கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

இவ்வாறான இரு கலங்கள் எடுக்கப்பட்டது. இவ்விரு கலங்களிலும் ஆகக்குறைந்தது இரண்டு வெண்குருதித் துணிக்கைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 22) தொலைக் காட்சிப் பெட்டிகளை வாடகைக்குவிடும் நிறுவனம் ஒன்றில் 10 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள் வாடகைக்கு விடப்படுகின்றன. ஒரு தொலைக்காட்சிப்பெட்டி ஒரு நாளைக்கு மேல்வாடகைக்கு கொடுக்கப்படமாட்டாது. ஒரு நாளுக்கு வாடகைக்கு விடப்படும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை 6.5 ஐ இடைப்பெறுமானமாகவுடைய பொய்சோன் பரம்பலைக் கொண்டது என அறியப்படுகின்றது.

- குறித்த ஒரு நாளில் எதுவித தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளும் வாடகைக்கு விடப்படாததற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- ஒரு நாளைக்கு வாடகைக்கு விடப்படும் பெட்டிகளின் இயல்பு மிக்க எண்ணிக்கை யாது?
- ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டிக்கு ஒருநாள் வாடகை ரூபா 200 எனில் இந்நிறுவனம் ஒரு வருடத்தில் (365 நாட்கள்) எதிர்பார்க்கும் வாடகைப்பணம் யாது?
- குறித்த ஒரு நாளில் எதுவித தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளும் வாடகைக்கு விடப்படாததற்கான நிகழ்தகவு 0.05 ஐ விட கூடாமல் இருப்பதற்கு எத்தனை தொலைக்காட்சிப்பெட்டிகள் வேண்டும்?

கேத்திரகணிதப் பரம்பல் (Geometric Distribution)

தம்முள் புறநீங்குவதும் பூரணமானதுமான இரு பெறுபேறுகளைக் கொண்ட பரிசோதனை ஒன்றில் குறிக்கப்பட்ட ஒரு பெறுபேறு கிடைக்கும்வரை பரிசோதனை செய்யப்பட்ட தடவைகளின் எண்ணிக்கை X ஆனது கேத்திரகணித எழுமாற்று மாறி எனப்படும். கேத்திரகணித எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவுப்பரம்பல் கேத்திர கணிதப் பரம்பல் எனப்படும்.

வெற்றி அல்லது தோல்வி என்னும் இரு பெறுபேறுகளைக் கொண்ட ஒரு பரிசோதனையில் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு p என்க. முதலாவது வெற்றியைப் பெறுவதற்கு பரிசோதனையானது x தடவைகள் செய்யப்பட்டது என்க. வெற்றி - S எனவும் தோல்வி - F எனவும் கொண்டால் இதற்கான மாதிரிவெளி S ஆனது

$S = \{S, FS, FFS, FFFS, \dots\}$ இனால் தரப்படும்.

இதில் X என்ற ஓர் நிகழ்வைக் கருதுக?

$$P(S) = p; P(F) = q$$

$$X = \{FF\overset{1}{F}\overset{2}{F}\overset{3}{F}\dots\overset{x}{F}S\}$$

x தடவைகள்

$$P(X=x) = P\{F \cap F \cap \dots \cap F \cap S\}$$

$$= P(F) \cdot P(F) \dots P(F) \cdot P(S)$$

$$= q \cdot q \dots q \cdot p$$

$$P(X=x) = q^{x-1} \cdot p$$

எனவே கேத்திரகணிதப் பரம்பலின் எழுமாற்று மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ ஆனது

$$p(x) = \begin{cases} pq^{x-1} & ; x = 1, 2, \dots \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

இங்கு p, q என்பன இரு பெறுபேறுகளும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளாகும். இவை தம்முள் புறநீங்குவதும் பூரணமானதுமான நிகழ்வுகள் ஆதலால்

$$p + q = 1$$

$$q = 1 - p$$

குறிப்பு: X என்னும் எழுமாற்று மாறி p என்னும் பரமானத்தைக் கொண்ட கேத்திரகணித பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் $X \sim \text{Geo}(p)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

Eg: i) கோடாத நாணயம் ஒன்று தலை பெறப்படும்வரை சுண்டப்படுகின்றது. ஐந்தாவது தடவை சுண்டும் போதே முதலாவது தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = pq^{x-1}$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= 0.0313$$

Eg: ii) குண்டுசி தயாரிக்கும் தொழிற்சாலை ஒன்றில் ஒவ்வொரு 100 குண்டுசிகளுக்கும் ஒரு குண்டுசி குறைபாடுள்ளது ஆகும். 100 குண்டுசிகளைப் பரிசோதிக்கும்போது முதலாவது குறைபாடுள்ள குண்டுசி 25 ஆவதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு குண்டுசி குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$p = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(x) = (0.01)(0.99)^{x-1}$$

$$P(X = 25) = (0.01)(0.99)^{24}$$

$$= 0.0078$$

கேத்திரகணிதப் பரம்பலின் இடையும் மாறத்திறனும்:

$$i) \text{ இடை } E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot P(X = x)$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x pq^{x-1}$$

$$= p + 2pq + 3pq^2 + \dots$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \dots)$$

$$= \frac{p}{(1-q)(1-q)}$$

$$E(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } E(X^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 pq^{x-1} \\
 &= p + 4pq + 9pq^2 + \dots \\
 &= p \left(\frac{1+q}{p^3} \right) \\
 &= \frac{1+q}{p^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}}$$

$$\text{iii) நியமவிலகல்} = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Eg: i) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி $\frac{1}{4}$ என்னும் பரமானத்தைக் கொண்ட

கேத்திரகணிதப் பரம்பலை உடையது எனில் X இன் எதிர்வு, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$X \sim \text{Geo} \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$\therefore p = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{4}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = 4$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 12$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{12} = 3.464$$

Eg: ii) 'ஆகஸ்ட்' மாதத்தில் பிறந்த மாணவர்கள் யார் என அறிவதற்கு ஒருதொகுதி மாணவர்களிடம் அவர்கள் பிறந்த மாதம் எதுவெனக் கேட்கப்பட்டது. கேட்கப்பட்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X என்க.

- i) X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கூறி அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக?
- ii) X இன் இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- iii) கேட்கப்பட்ட மாணவர்களில் 'ஆகஸ்ட்' மாதத்தில் பிறந்தவர் என முதலாவதாக பதிலளித்த மாணவன் 8 ஆவது மாணவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- விடை: i) 12 மாதங்களும் சமவாய்ப்பைக் கொண்டிருப்பதால் $p = \frac{1}{12}$ எனவே இது $\frac{1}{12}$ என்னும் பரமானத்தை உடைய கேத்திர கணிதப் பரம்பல் ஆகும்.

$$X \sim \text{Geo} \left(\frac{1}{12} \right)$$

$$\text{ii) } p(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{11}{12} \right)^{x-1} & ; x=1, 2, \dots \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

$$\text{iii) } E(X) = \frac{1}{p} = 12$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2} = 132$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{132} = 11.489$$

$$\text{iv) } P(X=8) = \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{11}{12} \right)^7 = 0.045$$

திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்:

கேத்திரகணிதப் பரம்பலின் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ ஆனது

$$F(x) = 1 - q^x \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

$$\text{நிறுவல்: } p(x) = pq^{x-1}$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= P(X=1) + P(X=2) + \dots$$

$$F(x) = p + pq + pq^2 + \dots$$

$$q(F(x)) = pq + pq^2 + pq^3 + \dots$$

$$F(x) - qF(x) = P(1-q) + pq(1-q) + \dots$$

$$(1-q)F(x) = (1-q)\{p + pq + pq^2 + \dots\}$$

$$pF(x) = p(1-q)\{1 + q + q^2 + \dots\}$$

$$pF(x) = p(1-q)\left\{\frac{(1-q^x)}{(1-q)}\right\}$$

$$F(x) = 1 - q^x$$

$$F(X) = 1 - q^x \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

பயிற்சி - 15

- 1) கோடாத சதுரமுகித்தாயக்கட்டை ஒன்று சுண்டப்படுகின்றது. 5 ஆவது தடவை சுண்டும் போதே முதலாவது தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 2) ஆணிகள் தயாரிக்கும் தொழிற்சாலையில் 50 ஆணிகள் தயாரிக்கப்படும்போது இரண்டு ஆணிகள் குறைபாடுள்ளதாக இருக்கின்றது. இவ்வாறான 50 ஆணிகள் கொண்ட ஒரு தொகுதி பரிசோதிக்கப்படும் போது 45 ஆவது ஆணியே முதலாவது குறைபாடுள்ள ஆணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 3) ஒரு பிரபலமான நகர்ப்புற பாடசாலையில் கல்வி பயிலும் மாணவர்கள் 10000 ரூபாவிற்கு மேல் மாத வருமானத்தைக் கொண்ட குடும்பத்தைச் சேர்ந்தவர்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 ஆகும். ஓர் ஆய்விற்காக ஓர் வகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு மாணவரிடமும் அவர்களது குடும்ப வருமானம் பற்றி கேட்கப்பட்டது. கேட்கப்பட்டவர்களில் நான்காவது மாணவனே ரூபா 10000 இற்கு மேல் வருமானத்தையுடைய குடும்பத்தைச் சேர்ந்த முதலாவது மாணவனாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 4) உண்மை-பொய் விடைகளைக் கொண்ட பரீட்சை ஒன்றிலுள்ள வினாக்களுக்கு ஒரு மாணவன் எழுமாற்றாக விடையளிக்கின்றான். அவன் முதலாவதாக சரியான விடையளிப்பது மூன்றாவது வினாவுக்கேயாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 5) ஒரு பஸ்தேர்வு வினாப்பத்திரம் ஒன்றின் ஒவ்வொரு வினாவும் சரியான ஒரு விடையையும் தவறான நான்கு விடைகளையும் கொண்டுள்ளது.

இவ்வினாப்பத்திரத்தின் பாடம் சம்பந்தமாக எதுவித அறிவும் இல்லாத மாணவன் இதிலுள்ள 25 வினாக்களுக்கும் எழுமாற்றாக விடையளிக்கின்றான். 5 ஆவது வினாவிற்கே முதலாவதாக சரியான விடையளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 6) ஒரு மாணவன் பரீட்சை ஒன்றிலே சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 ஆகும். சித்தியடைவதற்காக இப்பரீட்சையானது எத்தனை தடவைகள் வேண்டுமானாலும் எடுக்கலாம். இவன் தனது முன்றாவது முயற்சியில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தொடர் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

தொடர் சீரான பரம்பல் (Continuous Uniform Distribution)

ஒரு பரிசோதனையின் எழுமாற்றுமாறி X ஆனது $a \leq x \leq b$ என்னும் பெறுமான வீச்சில் (a, b மாறிலிகள்) சீராகப் பரவியிருந்தால் இவ் எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் தொடர் சீரான பரம்பல் எனப்படும்.

இவ் எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \dots\dots\dots \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

குறிப்பு: X என்னும் எழுமாற்றுமாறி $[a, b]$ என்னும் பெறுமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட வீச்சில் தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது என்பது

$X \sim U[a, b]$ இனால் குறிக்கப்படும்.

Eg: i) ஒரு பரிசோதனையின் எழுமாற்றுமாறி X ஆனது $-1 \leq x \leq 2$ என்னும் வீச்சில் சீராகப் பரம்பியுள்ளது என்க.

$$\text{இங்கு } a = -1, b = 2$$

$$\therefore b - a = 3$$

எனவே எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு f(x) ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ; -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

இது $X \sim U[-1, 2]$ எனவும் குறிக்கப்படும்.

Eg: ii) X என்னும் எழுமாற்று மாறியின் பெறுமானங்கள் $-4 \leq x \leq 8$ என்னும் வீச்சில் சீராக பரம்பியுள்ளது.

- X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக?
- $P(5 \leq X \leq 7)$ இன் பெறுமானம் யாது?
- $P(X \geq -2)$ இன் பெறுமானம் யாது?

விடை: a = -4; b = 8

$$b - a = 12$$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & ; -4 \leq x \leq 8 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

$$b) P(5 \leq x \leq 7) = \int_5^7 \frac{1}{12} dx = \left[\frac{x}{12} \right]_5^7 = \frac{1}{6}$$

$$c) P(X \geq -2) = \int_{-2}^8 \frac{1}{12} dx = \left[\frac{x}{12} \right]_{-2}^8 = \frac{5}{6}$$

தொடர்சீரான பரம்பலின் இடையும் மாறத்திறனும்:

$$i) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \left(\frac{1}{b-a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2(b-a)} \left[x^2 \right]_a^b$$

$$E(X) = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \left(\frac{1}{b-a} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3(b-a)} \left[x^3 \right]_a^b \\
 &= \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} \\
 &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
 &= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} \\
 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \frac{a-b}{\sqrt{12}}$$

Eg: i) X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியானது $-2.5 \leq x \leq 3.5$ என்னும் வீச்சில் சீராகப் பரம்பியுள்ளது. X இன் இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$a = -2.5, b = 3.5 \Rightarrow b - a = 6$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & ; -2.5 \leq x \leq 3.5 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

$$\text{எதிர்வு } E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{3.5 - 2.5}{2} = 0.5$$

$$\text{மாறத்திறன் } \text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{6^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \sqrt{3}$$

Eg: ii) கணிப்பொறி ஒன்றில் பயன்படுத்தப்படும் இலிதியம் மின்கலத்தின் ஆயுட்காலம் 3500 மணித்தியாலங்களிற்கும் 3700 மணித்தியாலங்களிற்கும் இடையில் சீரான பரம்பலைக் கொண்ட X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியினால் குறிக்கப்படுகின்றது என்க.

- X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக?
- மின்கலத்தின் ஆயுட்காலம் 3600 மணித்தியாலங்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- X இன் இடை, மாற்ற்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

விடை: $a = 3500$, $b = 3700$

$$b - a = 200$$

- நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில்

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200} & ; 3500 \leq x \leq 3700 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x = 3600) &= \int_{3599.5}^{3600.5} \frac{1}{200} dx \\ &= \left[\frac{x}{200} \right]_{3599.5}^{3600.5} = 0.005 \end{aligned}$$

$$\text{c) } E(X) = \frac{3500 + 3700}{2} = 3600$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(200)^2}{12} = 3333.3$$

$$\text{நியமவிலகல்} = 57.73$$

Eg: iii) O ஐ மையமாகவும் a ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட அரைவட்டத்தின் விட்டம் AB ஆகும். இந்த அரைவட்ட வில்லின் மேல் $B\hat{O}Q = \theta$ ஆகுமாறு Q என்ற புள்ளி எழுமாற்றாகத் தெரியப்படுகின்றது. θ என்னும் தொடர் எழுமாற்றுமாறி $0 \leq \theta \leq \pi$ என்னும் வீச்சில் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. புள்ளி Q இலிருந்து AB இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி N ஆகும்.

- θ இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக?

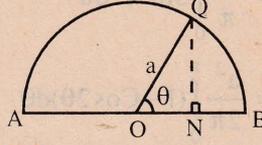
b) $QN=X$ எனக்கொண்டு X இன் இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

விடை:

$$OQ = a$$

$$QN = X$$

$$\widehat{BOQ} = \theta$$



$\theta \sim U(0, \pi)$ என்பதால் θ இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(\theta)$ ஆனது

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & ; 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases} \quad \text{இனால் தரப்படும்.}$$

θ ஆனது 0 இலிருந்து π வரைக்கும் உள்ள பெறுமானங்களை எடுக்கும்போது X ஆனது 0 இலிருந்து a வரை அதிகரித்து பின்னர் a இலிருந்து 0 வரை குறைவடைகின்றது.

θ என்னும் எழுமாற்று மாறி $(0, \pi)$ என்னும் ஆயிடை யில் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. ஆனால் X என்னும் எழுமாற்று மாறி சீரான பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும் எனக்கூற முடியாது.

எனவே X இன் இடை, மாறத்திறன் என்பவற்றைக் காண்பதற்கு அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருந்து தொகையீடு செய்வதன் மூலமே காணல் வேண்டும்.

$$X = a \sin \theta$$

$$E(X) = E(a \sin \theta)$$

$$= a E(\sin \theta)$$

$$= a \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot f(\theta) d\theta$$

$$= a \int_0^{\pi} \sin \theta \frac{1}{\pi} d\theta$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{a}{\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= E(a^2 \sin^2 \theta) \\
&= \frac{a^2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot d\theta \\
&= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2\pi} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi = \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{\pi^2}$$

$$\text{Var}(X) = a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \right)$$

$$\text{நியமவிலகல்} = a \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}}$$

திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} [x]_a^x$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} ; a \leq x \leq b$$

எனவே தொடர் சீரான பரம்பலின் திரள்நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ எனில்

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ ஆகும்.}$$

Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியானது $-2.5 \leq x \leq 3.5$ என்னும் வீச்சில் சீரான பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் X இன் திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பைக் காண்க?

$$a = -2.5, b = 3.5$$

திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ எனில்

$$F(x) = \frac{x+2.5}{3.5+2.5}$$

$$F(x) = \frac{x+2.5}{6}$$

தொடர் சீரான பரம்பலின் இடையம்:

தொடர் சீரான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பினை இருசம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் x இன் பெறுமானம் இடையம் ஆகும்.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$

இடையம் x என்க.

$$\int_{-\infty}^x f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{b-a} [x]_a^x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$2x - 2a = b - a$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{இடையம்} = \frac{a+b}{2}$$

Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியானது $2 \leq x \leq 5$ என்னும் வீச்சில் சீரான பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் X இன் இடையத்தைக் காண்க.

$$\begin{aligned} \text{இடையம்} &= \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{2+5}{2} = 3.5 \end{aligned}$$

பயிற்சி - 16

- 1) X என்னும் தொடர் எழுமாற்றுமாறியானது $-1.5 \leq x \leq 3.5$ என்னும் வீச்சில் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது.
- X இன் இடை, நியமவிலகல்
 - X இன் இடையம்
 - $P(-0.5 \leq x < 2)$ என்பவற்றைக் காண்க?

- 2) மின்சார சபையின் கருமபீடம் ஒன்றிற்கு வாடிக்கையாளர்கள் எழுமாற்றாக வருகின்றனர். ஒரு வாடிக்கையாளர் குறிக்கப்பட்ட ஒரு 10 நிமிட நேர இடைவெளிக்குள் வருகின்றார், எனத்தரப் பட்டால், இந்நேர இடைவெளிக்குள் வந்த நேரம் X ஆனது தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதி பின்வருவனவற்றைக் காண்க?
- $p(x \geq 8)$
 - $p(2 \leq x \leq 8)$
 - இடை, இடையம், மாற்றத்தின்

- 3) தொடர் சீரான பரம்பலைக்கொண்ட X என்னும் எழுமாற்றுமாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a < x < b \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. $a = 2$, $b = 3$ எனக்கொண்டு பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

- $p(x \geq 4)$
- $p(3 < x < 5.5)$

- 4) ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலைசெய்யும் ஊழியர்களுக்குத் தினமும் தேவையான மென்பானத்தின் அளவு X ஆனது தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்ட எழுமாற்றுமாறியாகும். X இன் பெறுமானங்கள் $7 \leq x \leq 10$ என்னும் வீச்சிலுள்ளது எனத்தரப்பட்டுள்ளது. குறித்த ஒரு நாளில் தேவைப்படும் மென்பானத்தின் அளவு

- ஆகக்கூடியது 8.8 லீற்றர்
- 7.5 லீற்றர் ஐ விடக்கூட ஆனால் 9.5 லீற்றரை விடக்குறைவு
- ஆகக் குறைந்தது 8.5 லீற்றர் ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 5) ஒரு வட்டத்தின் ஆரை X ஆனது 0 இற்கும் a இற்கும் இடையே தொடர் எழுமாற்றுமாதிரியைக் கொண்ட சீரான பரம்பலை உடையது. X என்னும் ஆரையுடைய வட்டத்தின் பரப்பின் இடை.

நியமவிலகல் என்பன முறையே $\frac{\pi a^2}{3}$, $\frac{2\pi a^2}{3\sqrt{5}}$ எனக்காட்டுக?

- 6) ABC என்ற முக்கோணத்தில் AB = 5cm, AC = 8cm, $\hat{A}C = \theta$ ஆகும். எழுமாற்றுமாதிரி θ ஆனது 0 இற்கும் π இற்கும் இடையில் தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்டது. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு X என்னும் எழுமாற்றுமாதிரியினால் குறிக்கப்படுகின்றது என்க.

a) X இன் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே $\frac{40}{\pi}$, 6.16 எனக்காட்டுக?

b) ΔABC இன் பரப்பு 10cm^2 ஐ விடக்கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 7) குறிக்கப்பட்ட எண்ணிக்கையான மாணவர்களிடம் 8cm ஆரையுடைய வட்டத்தை கவராயம் கொண்டு வரையுமாறு கேட்கப்பட்டது. இவ்வட்டங்களின் ஆரை X ஆனது 7.9cm இற்கும் 8.1cm இற்கும் இடையில் தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இவ்வட்டத்தின் பரப்பு A என்னும் எழுமாற்று மாதிரியினால் குறிக்கப்பட்டால் A இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(a)$ ஆனது

$$f(a) = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{\pi a}} & ; 62.41\pi \leq a \leq 65.61\pi \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படும் எனக்காட்டுக? 200cm^2 இற்கு குறைவான பரப்பளவு கொண்ட வட்டங்களை வரையும் மாணவர்களின் வீதம் 0.4 எனவும் காட்டுக?

- 8) r ஆரையுடைய வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து எழுமாற்றான திசை ஒன்றில் ஒரு நாண் வரையப்படுகின்றது. இந்த நாணிற்ும் P என்ற புள்ளியினூடான விட்டத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் α ஆகும். அத்துடன் α ஆனது $\frac{-\pi}{2}$ இற்கும் $\frac{\pi}{2}$ இற்கும் இடையில் சீராகப் பரவியுள்ளது என்க. இந்த

நாணின் நீளம் L எனில் L இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(l)$ ஆனது

$$f(l) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{4r^2 - l^2}} & ; 0 \leq l \leq 2r \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படும் எனக்காட்டுக?

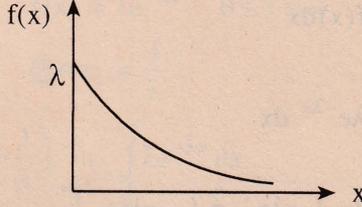
- 9) கோளம் (Sphere) ஒன்றின் ஆரையானது 6cm இற்கும் 10cm இற்கும் இடையில் தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இக்கோளத்தின் மேற்பரப்பானது 620cm^2 ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 10) 10cm நீளமுள்ள AB என்னும் நேரிய சீரான கோலின் வழியே P என்ற புள்ளி எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டு இப்புள்ளியில் கோல் இரண்டு துண்டாக உடைக்கப்படுகின்றது. உடைக்கப்பட்ட இவ்விரு துண்டுகளையும் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட செவ்வகத்தின் பரப்பின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க?
- 11) R ஐ ஆரையாகவுடைய வட்டத்தில் AB என்பது நிலையான ஓர் விட்டமாகும். $\hat{PAB} = \theta$ ஆகுமாறு AP என்ற நாண் புள்ளி A இனூடு வரையப்படுகின்றது. θ ஆனது $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ என்ற பெறுமானங்களுக்கிடையில் தொடர்சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. $AP=L$ எனில் $L=2R \cos \theta$ எனக்காட்டுக? இதிலிருந்து
- நாணின் சராசரி நீளம்
 - நாணின் நீளம் $\sqrt{2}R$ ஐ விடக்கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு
 - நாணின் நீளத்தின் இடையம், என்பவற்றைக் காண்க?
- 12) ஒருவர் தினமும் உடற்பயிற்சிக்காக 600m தூரம் நடக்கின்றார். இந்த நடைப்பயிற்சிக்கான நேரம் T ஆனது 6 நிமிடத்திற்கும் 10 நிமிடத்திற்கும் இடையில் தொடர் சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது.
- T இன் இடை, இடையம், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
 - அவரது வேகம் V எனில் $VT=10$ எனக்காட்டுக?
 - V இன் இடை, இடையம், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

அடுக்குக் குறிப்பரம்பல் (Exponential Distribution)

ஒரு தொடர் எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுமாயின் X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் அடுக்குக் குறிப்பரம்பல் எனப்படும். இங்கு $\lambda > 0$ என்பது பரமானமாகும்.



Eg: X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட அடுக்குக் குறிப்பரம்பலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & ; 0 < x < \infty \\ 0 & ; \text{அல்லாவிடின்} \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது. $P(2 \leq x \leq 5)$ ஐக் காண்க?

$$\begin{aligned} P(2 \leq x \leq 5) &= \int_2^5 2e^{-2x} dx = 2 \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_2^5 \\ &= -[e^{-10} - e^{-4}] = 0.0183 \end{aligned}$$

அடுக்குக் குறிப்பரம்பலின் இடையும் மாறந்திறனும்:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$\text{i) எதிர்வு } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[x \left(\frac{-1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} - \int \left(\frac{-1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} dx \right]_0^{\infty}$$

$$= \lambda \left[\frac{-x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty}$$

$$= \lambda \left[0 - 0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\text{ii) } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda} \int x e^{-\lambda x} dx \right]_0^{\infty}$$

$$= \lambda [0] + \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$\text{நியமவிலகல்} = \frac{1}{\lambda}$$

Eg: i) X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட அடுக்குக் குறிப்பரம்பலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x} & ; 0 < x < \infty \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

X இன் இடை, மாறத்திறன், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

$$\lambda = 0.2$$

$$\text{இடை } E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.2} = 5$$

$$\text{மாறத்திறன் } \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0.04} = 25$$

$$\text{நியமவிலகல்} = 5$$

Eg: ii) அடுக்குக் குறிப்பரம்பலைக் கொண்ட ஒரு தொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் பெறுமானமானது அதன் இடைப்பெறுமானத்தை விடக்கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தவு யாது?

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$\text{இடை} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} P\left(X > \frac{1}{\lambda}\right) &= \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \\ &= -[e^{\infty} - e^{-1}] = e^{-1} \\ &= 0.3679 \end{aligned}$$

அடுக்குக் குறிப்பரம்பலின் இடையம்:

அடுக்குக் குறிப்பரம்பலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பினை இருசம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் X இன் பெறுமானம் எழுமாற்று மாறியின் இடையம் எனப்படும்.

$$P(X \geq x) = \frac{1}{2}$$

$$\int_x^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2}$$

$$\lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_x^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\left[-e^{-\lambda x}\right]_x^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$0 + e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$$

$$e^{\lambda x} = 2$$

$$\lambda x = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\boxed{\text{இடையம்} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Eg: i) 3 என்னும் பரமானத்தைக்கொண்ட அடுக்குக் குறிப்பரம்பலின் இடையத்தைக் காண்க?

$$\lambda = 3$$

$$\text{இடையம்} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0.23$$

Eg: ii) அடுக்குக் குறிப்பரம்பலைக் கொண்ட ஒருதொடர் எழுமாற்று மாறி X இன் பெறுமானமானது அதன் இடைப்பெறுமானத்தை விடக் கூடுதலாகவும் இடையப் பெறுமானத்தைவிடக் குறைவாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்கதவு யாது?

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$\text{இடை} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{இடையம்} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{\lambda} \leq x \leq \frac{\ln 2}{\lambda}\right) &= \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{\ln 2}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{\ln 2}{\lambda}} \\ &= -\left[e^{-\ln 2} - e^{-1} \right] = \frac{1}{e} - e^{-\ln 2} \end{aligned}$$

திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

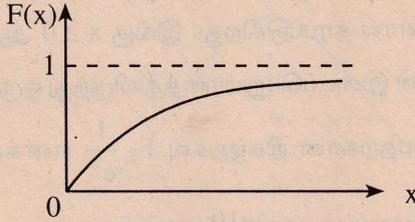
திரள் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு $F(x)$ எனில்

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -[e^{-\lambda x}]_0^x$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$



பயிற்சி - 17

- 1) 0.3 என்னும் பரமானத்தைக்கொண்ட அடுக்குக் குறிப்பரம்பல் சார்பின் இடை, இடையம், நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- 2) அடுக்குக்குறிப்பரம்பலுக்கான தொடர் எழுமாற்றுமாறி X இன் இடையம் 2.5 எனில் $P(2 \leq x \leq 5)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
- 3) புகைப்பட நிலையம் ஒன்றில் ஒருவரை புகைப்படம் பிடிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரமானது 4 நிமிடத்தை இடைப்பெறுமானமாகக் கொண்ட அடுக்குக் குறிப்பரம்பலுடைய எழுமாற்று மாறியாகும். அடுத்துவரும் 6 நாட்களில் ஆகக்குறைந்தது 4 நாட்கள் ஒருவரைப்படம் பிடிப்பதற்கு தேவையான நேரம் 3 நிமிடங்களை விடக்குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

4) உலக ரீதியாக பூமியதிர்ச்சி எழுமாற்றாக சராசரியாக 437 நாட்களுக்கு ஒருதடவை நடைபெறும் என மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. இந்த கால அளவு அடுக்குக் குறிப்பரம்பலுக்கான எழுமாற்று மாறியாகும். 2001 ஆம் ஆண்டிற்கும் 2003 ஆம் ஆண்டிற்கும் இடையே எதுவித பூமியதிர்ச்சியும் ஏற்படாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

அடுத்தடுத்து நிகழும் இரு பூமியதிர்ச்சிகளுக்கிடையேயான நேரத்தின் இடையம் யாது?

5) அடுக்குக் குறிப்பரம்பலைக் கொண்ட X என்னும் தொடர் எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ இனால் தரப்படுகிறது. இங்கு $x \geq 0$ ஆகும்.

i) X ஆனது அதன் இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து ஒரு நியமவிலகலுக்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $1 - \frac{1}{e^2}$ எனக்காட்டுக?

ii) $P(X > a) = 0.1$ எனில் $a = \frac{\ln 10}{\lambda}$ எனக்காட்டுக?

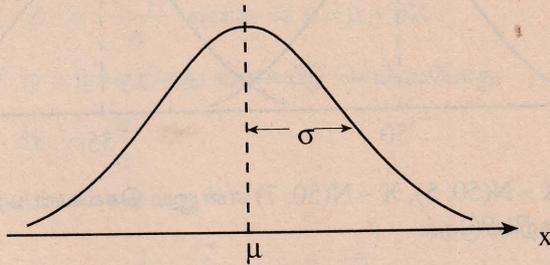
6) இடி-மின்னல் காலத்தின்போது இரண்டு அடுத்தடுத்த மின்னல்களுக்கிடையேயான நேரம் X (நிமிடங்களில்) இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆனது $f(x) = e^{-x}$; $x \geq 0$

இனால் தரப்படுகின்றது.

இரண்டு அடுத்தடுத்த மின்னல்களுக்கிடையேயான நேரம் 2 நிமிடங்களை விடக்கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.1353 எனக்காட்டுக?

செவ்வன் பரம்பல் (Normal Distribution)

புள்ளிவிபரவியல் பகுதியில் மிகவும் முக்கியமான தொடர் எழுமாற்றுப்பரம்பல் செவ்வன் பரம்பல் ஆகும். இப்பரம்பலுக்கான வளையி செவ்வன் வளையி ஆகும். இது மணி வடிவத்தில் காணப்படும். இப்பரம்பலினால் இயற்கை, கைத்தொழில், ஆராய்ச்சி என்பவற்றில் நிகழும் இயற்கைத் தோற்றப்பாடுகளை அண்ணளவாக விபரிக்கின்றது. வானிலை ஆராய்ச்சிப் பரிசோதனைகள், மழைவீழ்ச்சி பற்றிய படிப்புக்கள், உற்பத்திப் பொருட்களின் அளவீடுகள் போன்ற பகுதியிலுள்ள பெளதீக அளவீடுகள் செவ்வன் பரம்பலினால் விளங்கப்படுத்தப்படுகின்றது. மேலும் விஞ்ஞான அளவீடுகளிலுள்ள வழக்கள் செவ்வன் பரம்பலினால் அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படுகின்றது.



மேலுள்ள படத்தில் உள்ளவாறான நிகழ்தகவுப் பரம்பல் வடிவத்தைக் கொண்டுள்ள தொடர் எழுமாற்றுமாறி X ஆனது செவ்வன் எழுமாற்றுமாறி எனப்படும்.

செவ்வன் எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு $f(x)$ ஆனது

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

இனால் தரப்படும்.

இங்கு $-\infty \leq x \leq \infty$

μ - இடை

σ^2 - மாறத்திறன்

$\pi = 3.14159$

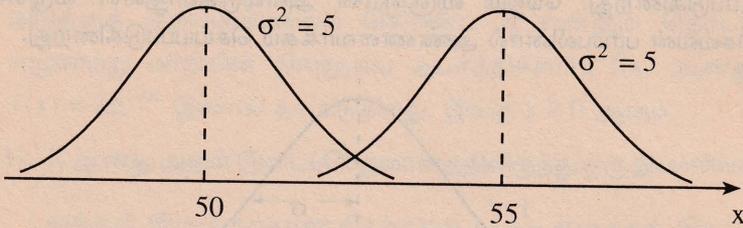
$e = 2.71828$

குறிப்பு: X என்னும் தொடர் எழுமாற்றுமாறி μ, σ^2 என்னும் பரமானங்களுடைய செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது என்பது $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ இனால் குறிக்கப்படும்.

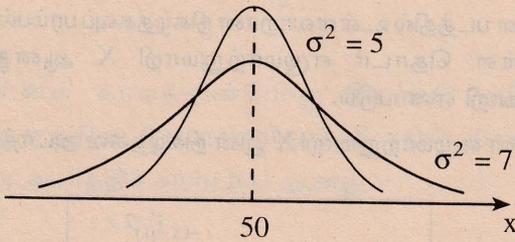
Eg: i) $X \sim N(50, 5)$ என்பது இடைப்பெறுமானம் 50 ஆகவும் மாற்ற்திறன் 5 ஆகவும் உள்ள செவ்வன் பரம்பலைக் குறிக்கும்.

$$\mu = 50, \sigma^2 = 5$$

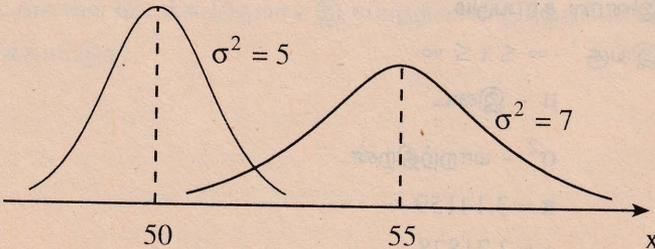
Eg: ii) $X \sim N(50, 5), X \sim N(55, 5)$ என்னும் இரு செவ்வன் பரம்பல்களைக் குறிப்பிடுதல்.



Eg: iii) $X \sim N(50, 5), X \sim N(50, 7)$ என்னும் செவ்வன் பரம்பல்களைக் குறிப்பிடுதல்.



Eg: iv) $X \sim N(50, 5), X \sim N(55, 7)$ என்னும் செவ்வன் பரம்பல்களைக் குறிப்பிடுதல்.



செவ்வன் பரம்பலின் இடை, மாறத்திறன் என்பன முறையே μ , σ^2 எனக்காட்டுதல்.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ என்க } \Rightarrow x = \mu + \sigma Z$$

Z ஐ x ஐக்குறித்து வகையீடு செய்யும்போது

$$dz = \frac{dx}{\sigma}$$

$$dx = \sigma dz$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma Z) e^{-\frac{Z^2}{2}} \cdot \sigma dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma Z) e^{-\frac{Z^2}{2}} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma Z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz$$

$$= \mu + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} d\left(\frac{Z^2}{2}\right)$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{Z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \mu + 0$$

$$= \mu$$

$$E(X) = \mu$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ என்க}$$

$$x = \mu + \sigma y$$

$$dx = \sigma dy$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mu + \sigma y)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (dy)$$

$$= \mu^2 + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \mu^2 + 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\frac{y^2}{2} = z \text{ என்க}$$

$$y = \sqrt{2z}$$

$$dy = \frac{dz}{\sqrt{2z}}$$

$$E(X^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2z e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{2z}}$$

$$= \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{z} e^{-z} dz = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \mu^2 + \sigma^2$$

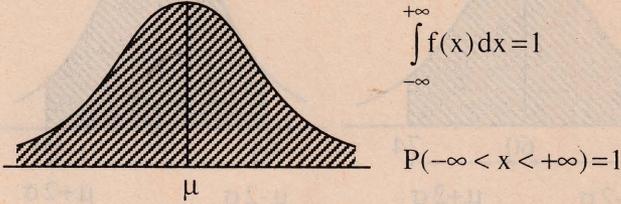
$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

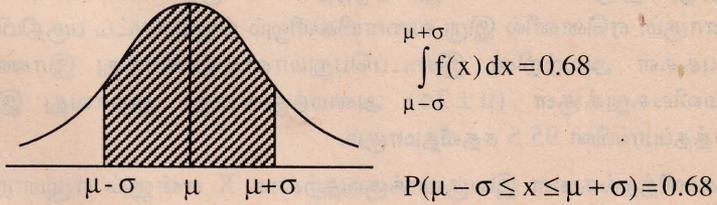
நியமவிலகல் = σ

செவ்வன் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பு:

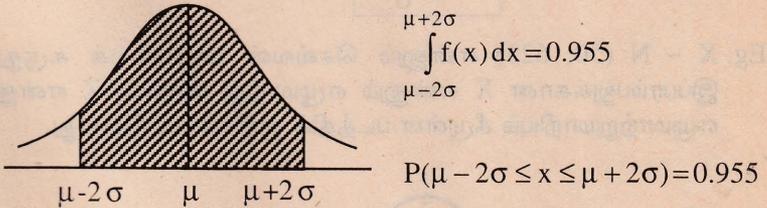
- i) செவ்வன் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் மொத்தப்பரப்பளவு 1 ஆகும்.



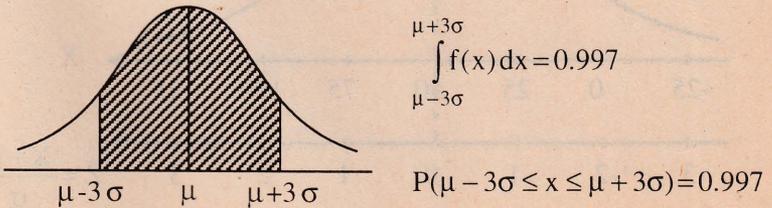
- ii) செவ்வன் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் மொத்தப்பரப்பில் 68% ஆன பரப்பு இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து 1 நியம விலகலுக்குள் இருக்கும்.



- iii) செவ்வன் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் மொத்தப்பரப்பில் 95.5% ஆன பரப்பு இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து 2 நியம விலகலுக்குள் இருக்கும்.



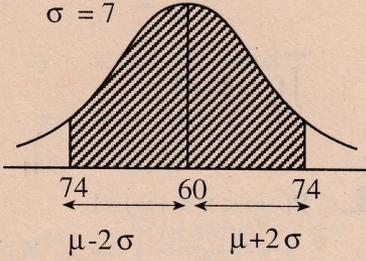
- iv) செவ்வன் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் மொத்தப்பரப்பில் 99.7% ஆன பரப்பு இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து 3 நியம விலகலுக்குள் இருக்கும்.



குறிப்பு: 1) $X \sim N(60, 49)$, $X \sim N(80, 64)$ என்னும் இரு செவ்வன் பரம்பல்களைக் கருதுக?

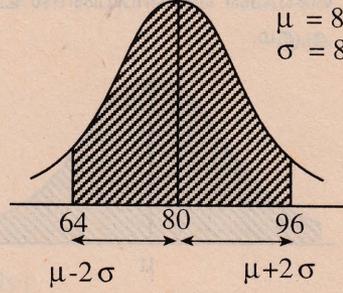
$$\mu = 60$$

$$\sigma = 7$$



$$\mu = 80$$

$$\sigma = 8$$

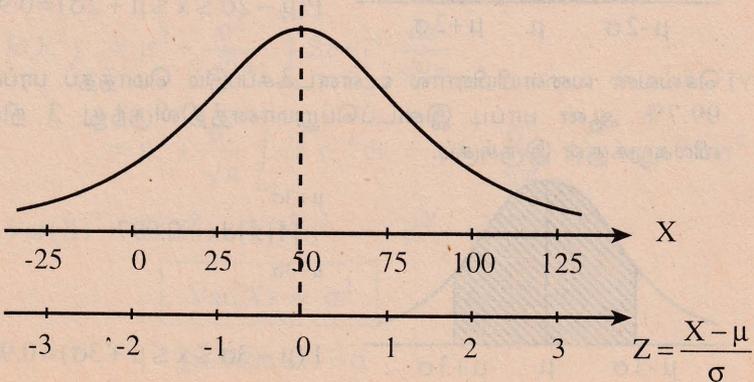


மேலுள்ள இரு வளையிகளும் வித்தியாசமான இடைப்பெறுமானத்தையும் வித்தியாசமான நியமவிலகலையும் கொண்டிருந்த போதிலும் இரு வளையிகளிலும் நிழற்றப்பட்ட பகுதிகளின் பரப்புக்கள் சமனாகும். ஏனெனில் இரு வளையிகளிலும் நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்புக்கள் அவற்றின் இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து இரண்டு நியமவிலகலுக்குள் ($\mu \pm 2\sigma$) அமைந்துள்ளது. அதாவது இது மொத்தப்பரப்பின் 95.5 சதவீதமாகும்.

2) கணித்தல்களை இலகுவாக்குவதற்காக X என்னும் எழுமாற்று மாறியானது Z என்னும் எழுமாற்றுமாறியாக பின்வரும் சமன்பாட்டினால் உருமாற்றம் செய்யப்படும்.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Eg: $X \sim N(50, 625)$ என்னும் செவ்வன் பரம்பலைக் கருதுக. இப்பரம்பலுக்கான X என்னும் எழுமாற்று மாறியும் Z என்னும் எழுமாற்றுமாறியும் கீழுள்ள படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.



- i) X என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலின் இடை - 50; மாறத்திறன் - 625 $X \sim N(50, 625)$
- ii) Z என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலின் இடை - 0; மாறத்திறன் - 1 $Z \sim N(0, 1)$

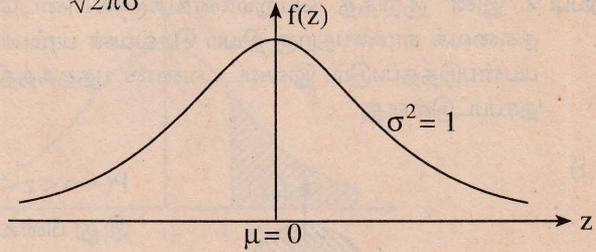
நியம செவ்வன் பரம்பல்: (Standard Normal Distribution)

செவ்வன் பரம்பலினது எழுமாற்று மாறியின் இடை 0 ஆகவும் மாறத்திறன் 1 ஆகவும் இருத்தால் இப்பரம்பல் நியம செவ்வன் பரம்பல் எனப்படும்.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

இல் $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ எனப்பிரதியிட

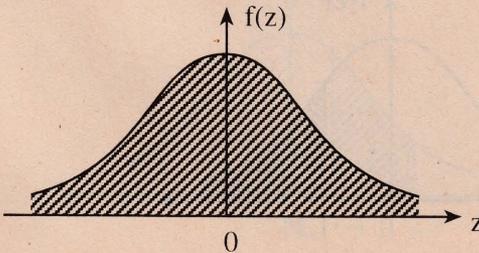
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



$$Z \sim N(0, 1)$$

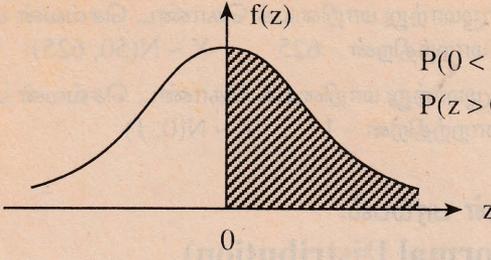
$z = z_1, z = z_2$ என்னும் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பு (z_1, z_2) என்னும் பெறுமானங்களுக்கிடையேயான நிகழ்தகவு எனப்படும். இது $P(z_1 < z < z_2)$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

i)



$$P(-\infty < z < \infty) = 1$$

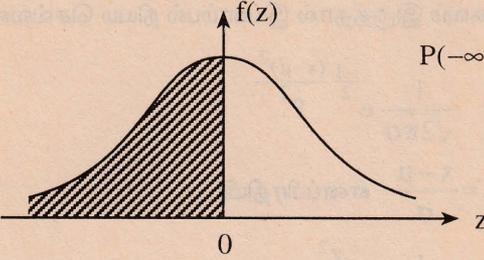
ii)



$$P(0 < z < \infty) = 0.5$$

$$P(z > 0) = 0.5$$

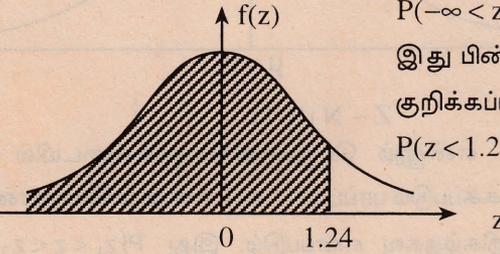
iii)



$$P(-\infty < z < 0) = 0.5$$

குறிப்பு: Z இன் குறித்த பெறுமானங்களுக்கிடையேயான நிகழ்தகவைக் காண்பதற்கு நியம செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணை பயன்படுத்தப்படும். இவ்வட்டவணை புத்தகத்தின் இறுதியில் தரப்பட்டுள்ளது.

Eg: i)



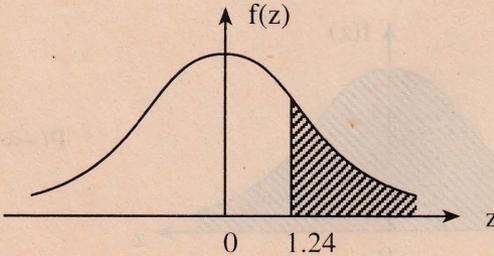
$$P(-\infty < z < 1.24) = 0.8925$$

இது பின்வருமாறு

குறிக்கப்படும்.

$$P(z < 1.24) = 0.8925$$

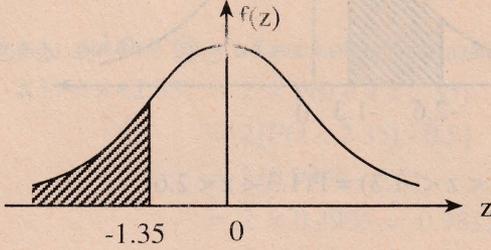
Eg: ii)



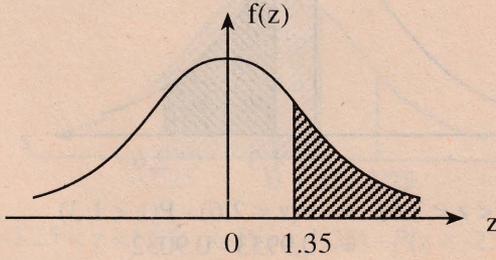
நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு $P(z > 1.24)$ ஆகும். இதனை நேரடியாக அட்டவணையிலிருந்து கணிக்கமுடியாது. இதனைக் கணிப்பதற்கு மொத்தப் பரப்பளவான 1 அலகிலிருந்து $P(z < 1.24)$ இற்கான பரப்பளவைக் கழித்தல்வேண்டும்.

$$\begin{aligned} P(z > 1.24) &= 1 - P(z < 1.24) \\ &= 1 - 0.8925 \\ &= 0.1075 \end{aligned}$$

Eg: iii)

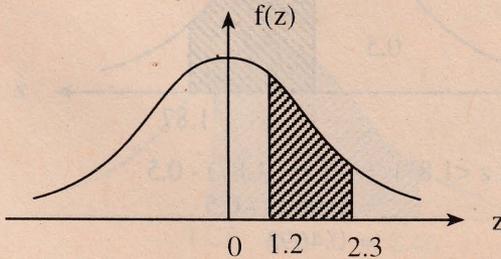


$$P(z < -1.35) = P(z > 1.35)$$



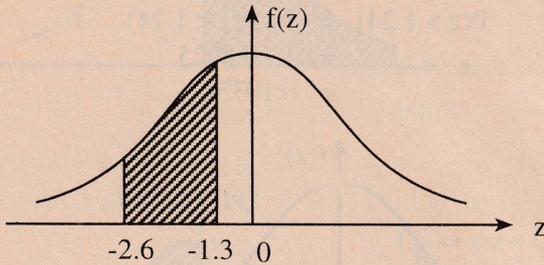
$$\begin{aligned} \therefore P(z > 1.35) &= 1 - P(z < 1.35) \\ &= 1 - 0.9115 \\ &= 0.0885 \\ \therefore P(z < -1.35) &= 0.0885 \end{aligned}$$

Eg: iv)

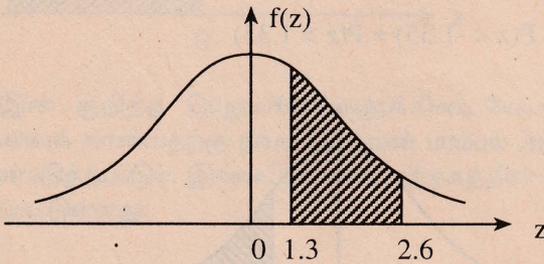


$$\begin{aligned}
 P(1.2 < z < 2.3) &= P(z < 2.3) - P(z < 1.2) \\
 &= 0.9893 - 0.8849 \\
 &= 0.1044
 \end{aligned}$$

Eg: v)

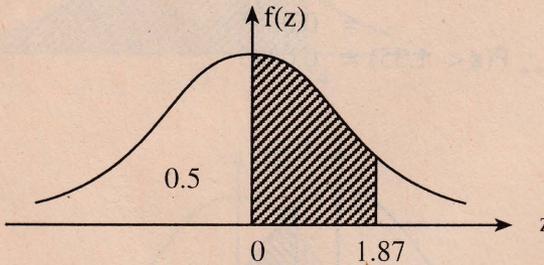


$$P(-2.6 < z < -1.3) = P(1.3 < z < 2.6)$$



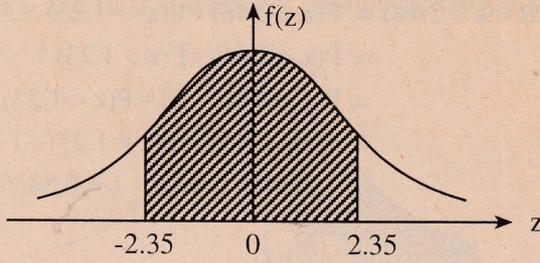
$$\begin{aligned}
 P(1.3 < z < 2.6) &= P(z < 2.6) - P(z < 1.3) \\
 &= 0.9953 - 0.9032 \\
 &= 0.0921
 \end{aligned}$$

Eg: vi)



$$\begin{aligned}
 P(0 < z < 1.87) &= P(z < 1.87) - 0.5 \\
 &= 0.9693 - 0.5 \\
 &= 0.4693
 \end{aligned}$$

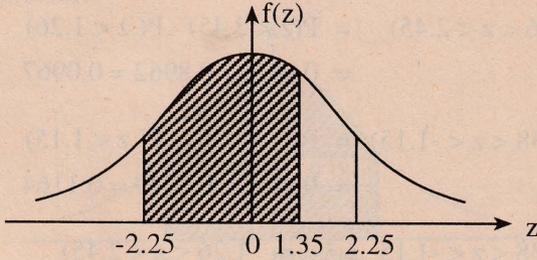
Eg: vii)



நிலைக்குத்து அச்சின் இரு பக்கங்களிலும் பரப்புக்கள் சமன்.

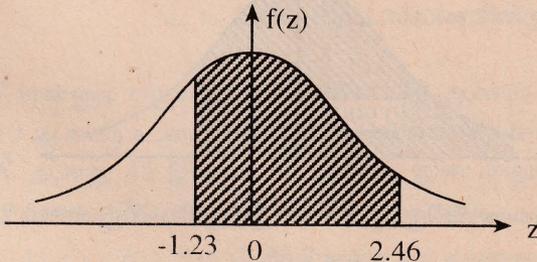
$$\begin{aligned}P(-2.35 < z < 2.35) &= 2 \times P(0 < z < 2.35) \\ &= 2\{P(z < 2.35) - 0.5\} \\ &= 2\{0.9906 - 0.5\} \\ &= 2 \times 0.4906 = 0.9812\end{aligned}$$

Eg: viii)



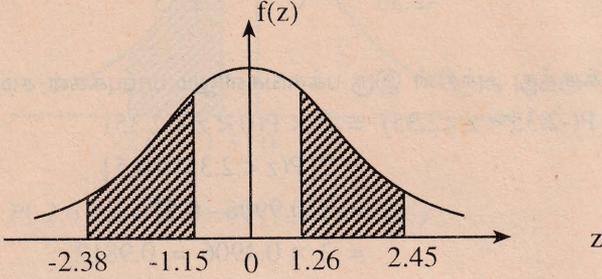
$$\begin{aligned}P(-2.25 < z < 1.35) &= P(z < 1.35) - P(z < -2.25) \\ &= P(z < 1.35) - P(z > 2.25) \\ &= P(z < 1.35) - \{1 - P(z < 2.25)\} \\ &= P(z < 1.35) + P(z < 2.25) - 1 \\ &= 0.9115 + 0.9878 - 1 = 0.8993\end{aligned}$$

Eg: ix)



$$\begin{aligned}
 P(-1.23 < z < 2.46) &= P(z < 2.46) - P(z < -1.23) \\
 &= P(z < 2.46) - P(z > 1.23) \\
 &= P(z < 2.46) - \{1 - P(z < 1.23)\} \\
 &= P(z < 2.46) + P(z < 1.23) - 1 \\
 &= 0.9931 + 0.8907 - 1 = 0.8838
 \end{aligned}$$

Eg: x)

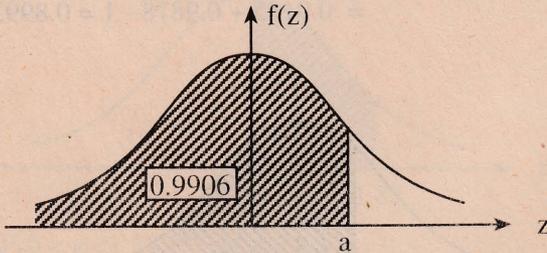


$$\begin{aligned}
 P(1.26 < z < 2.45) &= P(z < 2.45) - P(z < 1.26) \\
 &= 0.9929 - 0.8962 = 0.0967
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(-2.38 < z < -1.15) &= P(z < 2.38) - P(z < 1.15) \\
 &= 0.9913 - 0.8749 = 0.1164
 \end{aligned}$$

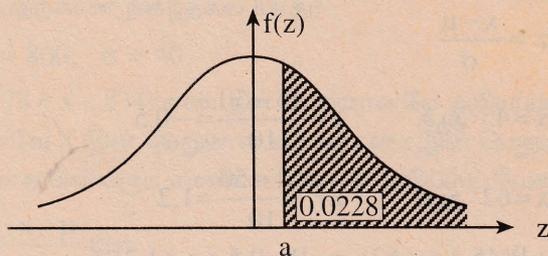
$$\begin{aligned}
 P(-2.38 < z < -1.15) \text{ அல்லது } 1.26 < z < 2.45) \\
 &= P(-2.38 < z < -1.15) + P(1.26 < z < 2.45) \\
 &= 0.1164 + 0.0967 = 0.2131
 \end{aligned}$$

Eg: xi) $P(z < a) = 0.9906$ எனில் a இன்பெறுமானத்தைக் காண்க?



அட்டவணையிலிருந்து 0.9906 இற்குரிய பெறுமானம் 2.35 ஆகும்.
 $a = 2.35$

Eg: xii) $P(z > a) = 0.0228$ எனில் a இன்பெறுமானத்தைக் காண்க?

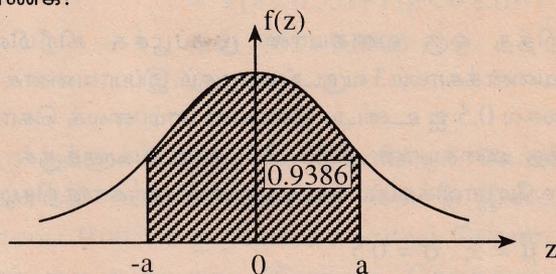


$$P(z > a) = 0.0228$$

$$P(z < a) = 1 - 0.0228 = 0.9772$$

$$a = 2 \quad (\text{அட்டவணையிலிருந்து})$$

Eg: xiii) $P(-a < z < a) = 0.9386$ எனில் a இன்பெறுமானத்தைக் காண்க?



$$P(-a < z < a) = 0.9386$$

$$P(0 < z < a) = \frac{0.9386}{2} = 0.4693$$

$$P(z < a) = P(-\infty < z < 0) + P(0 < z < a)$$

$$= 0.5 + 0.4693 = 0.9693$$

$$a = 1.87 \quad (\text{அட்டவணையிலிருந்து})$$

Eg: xiv) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி இடை 50 ஆகவும் நியமவிலகல் 10 ஆகவும் உடைய செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. X ஆனது 45 இற்கும் 62 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானத்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$P(45 < x < 62)$ இன் பெறுமானத்தைக் காணுதல் வேண்டும்.

$$\mu = 50; \quad \sigma = 10$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = 45 \text{ ஆக} \quad z = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

$$x = 62 \text{ ஆக} \quad z = \frac{62 - 50}{10} = 1.2$$

$$\begin{aligned} \therefore P(45 < x < 62) &= P(-0.5 < z < 1.2) \\ &= P(z < 0.5) + P(z < 1.2) - 1 \\ &= 0.6915 + 0.8849 - 1 \\ &= 0.5764 \end{aligned}$$

செவ்வன் பரம்பலுக்கான பிரயோகங்கள்:

Eg: i) குறித்த ஒரு வகையான முகப்பூச்சு கிரீமின் சராசரி பாவனைக்காலம் 3 வருடங்களாகும். இப்பாவனைக்காலம் நியம விலகல் 0.5 ஐ உடைய செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இந்த வகையான கிரீம் 2.3 வருடங்களுக்குக் குறைவான காலமே பாவிக்கப்படக்கூடியது என்பதற்கான நிகழ்கதவு யாது?

விடை: $\mu = 3; \quad \sigma = 0.5$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ இல்}$$

$$x = 2.3 \text{ எனில்} \quad z = \frac{2.3 - 3}{0.5} = -1.4$$

$$\begin{aligned} P(x < 2.3) &= P(z < -1.4) \\ &= 1 - P(z < 1.4) \\ &= 1 - 0.9192 \\ &= 0.0808 \end{aligned}$$

Eg: ii) மின்னியல் சாதன உற்பத்தி நிறுவனம் ஒன்று உற்பத்தி செய்யும் மின்குமிழின் சராசரி பாவனைக்காலம் 800 மணித்தியாலங்களாகும். இப்பாவனைக்காலம் 40 மணித்தியாலங்களை நியமவிலகலாகக் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலாகும். இந்த வகை மின்குமிழானது 778 மணித்தியாலங்களுக்கும் 834 மணித்தியா

லங்களுக்கும் இடையிலான பாவனைக் காலத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: $\mu = 800$; $\sigma = 40$

$P(778 < x < 834)$ என்பதன் பெறுமானமே அறியப்படவேண்டும். எனவே X இன் பெறுமான வீச்சுக்கள் Z இன் பெறுமான வீச்சுக்களாக பின்வரும் சமன்பாட்டினால் அறியப்படவேண்டும்.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ இல்}$$

$$x = 778 \text{ எனில் } z = \frac{778 - 800}{40} = -0.55$$

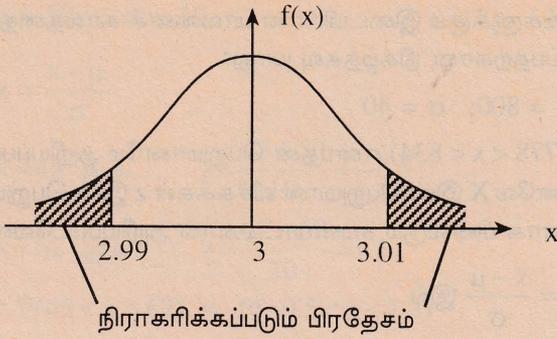
$$x = 834 \text{ எனில் } z = \frac{834 - 800}{40} = 0.85$$

$$\begin{aligned} P(778 < x < 834) &= P(-0.55 < z < 0.85) \\ &= P(z < 0.55) + P(z < 0.85) - 1 \\ &= 0.7088 + 0.8023 - 1 \\ &= 0.5111 \end{aligned}$$

Eg: iii) ஒரு துப்பாக்கி நிறுவனம் தயாரிக்கும் கோளவடிவமான துப்பாக்கி ரவைகளின் விட்டம் 3cm ஐ இடைப்பெறுமானமாகவும் 0.005cm ஐ நியமவிலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலை உடையது. இதனைக் கொள்வனவு செய்யும் வாடிக்கை நிறுவனங்கள் 3 ± 0.01 cm விட்ட அளவுள்ள குண்டுகளையே கொள்வனவு செய்ய விரும்புகின்றது. இந்த அளவிற்கு மீறி தயாரிக்கப்படும் ரவைகள் நிராகரிக்கப்படுகிறது. உற்பத்தி செய்யப்படுபவற்றில் எத்தனை வீதமான ரவைகள் நிராகரிக்கப்படும்?

விடை: தயாரிக்கப்படும் ரவைகளின் விட்டம் X என்னும் எழுமாற்று மாறியைக் கொண்ட செவ்வன் பரம்பல் என்க. $X \sim N(3, 0.005)$ தயாரிக்கப்படும் ரவைகளில் 2.99cm இற்கும் 3.01cm அளவிற்கும் இடைப்பட்ட விட்டத்தைக் கொண்டவை கொள்வனவு செய்யப்படும். 2.99cm ஐ விடக் குறைந்த அளவுள்ளவையும் 3.001cm ஐ விடக்கூடிய அளவுள்ளவையும் நிராகரிக்கப்படும்.

$$\mu = 3; \sigma = 0.005$$

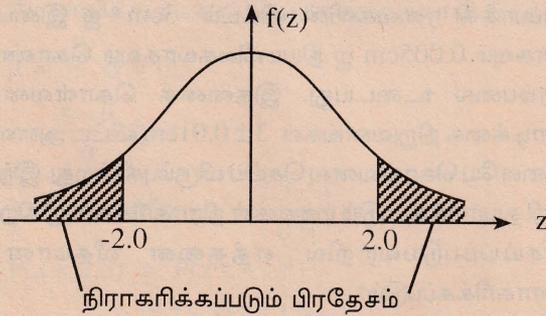


நிராகரிக்கப்படும் பிரதேசத்தின் அளவைக்காண்பதற்கு X இன் பெறுமானங்கள் z இன் பெறுமானங்களிற்கு மாற்றம் செய்யப்படவேண்டும்.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ இல்}$$

$$x = 2.99 \text{ எனில் } z = \frac{2.99 - 3}{0.005} = -2.0$$

$$x = 3.01 \text{ எனில் } z = \frac{3.01 - 3}{0.005} = 2.0$$



$$\begin{aligned} P(z > 2) &= 1 - P(z < 2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

ஆகவே நிராகரிக்கப்படும் பிரதேசம் $= 2 \times 0.0228 = 0.0456$
எனவே உற்பத்தி செய்யப்படுவதில் 4.56% ஆன ரவைகள் நிராகரிக்கப்படும்.

Eg: iv) குறித்த ஒரு வகையான மின்குமிழின் ஆயுட்காலம் 2100 மணித்தியாலங்களை சராசரியாகவும் 200 மணித்தியாலங்களை நியம விலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலை உடையது.

- ஒரு மின்குமிழின் ஆயுட்காலம் 2400 மணித்தியாலங்களை விடக்கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்கதவு யாது?
- எத்தனை வீதமான மின்குமிழ்கள் 1700 மணித்தியாலங்களுக்கும் 2200 மணித்தியாலங்களுக்கும் இடையில் பாவனைக் காலத்தைக் கொண்டிருக்கும் என எதிர் பார்க்கப்படும்?
- எத்தனை வருட பாவனைக் காலத்தின் பின்னர் 3% ஆன மின்குமிழ்கள் பழுதடையும்?

விடை: மின்குமிழ்களின் வாழ்வுக்காலம் எழுமாற்றுமாறி X எனில்

$$X \sim N(2100, 200^2)$$

- Z என்பது நியம செவ்வன் பரம்பலின் எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ இல்}$$

$$x = 2400 \text{ எனில் } z = \frac{2400 - 2100}{200} = 1.5$$

$$\begin{aligned} \therefore P(x > 2400) &= P(z > 1.5) \\ &= 1 - P(z < 1.5) \\ &= 1 - 0.9332 \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

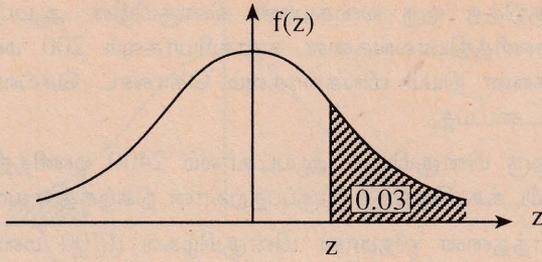
$$\text{b) } x = 1700 \text{ எனில் } z = \frac{1700 - 2100}{200} = -2.0$$

$$x = 2200 \text{ எனில் } z = \frac{2200 - 2100}{200} = 0.5$$

$$\begin{aligned} \therefore P(1700 < x < 2200) &= P(-2 < z < 0.5) \\ &= P(z < 0.5) + P(z < -2) \\ &= 0.6915 + 0.0540 \\ &= 0.7455 \end{aligned}$$

எனவே 66.87% ஆன மின் குமிழ்கள் 1700 மணித்தியாலங்களுக்கும் 2200 மணித்தியாலங்களுக்கும் இடையில் பாவனைக் காலத்தைக் கொண்டிருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம்.

c)



அட்டவணையிலிருந்து 0.03 இற்குரிய z இன் பெறுமானம் 1.881 ஆகும்.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ இல்}$$

$$1.881 = \frac{x - 2100}{200}$$

$$x = 2476.2$$

ஆகவே 2476.2 மணித்தியாலங்கள் பாவனைக்காலத்தின் பின்னர் 3% ஆன மின்குமிழ்கள் பழுதடையும்.

Eg: v) பிரதான போக்குவரத்துசாலை ஒன்றினுள் செல்லும் வாகனங்களின் கதி செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இதில் 87% ஆன வாகனங்கள் 90km/h இலும் கூடிய கதியுடனும் 9% ஆன வாகனங்கள் 120km/h இலும் கூடிய கதியுடனும் செல்வதாக அறியப்பட்டது.

- இப்பரம்பலின் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?
- எத்தனை வீதமான வாகனங்கள் 112km/h இலும் கூடுதலான கதியுடன் செல்கின்றது?

விடை: வாகனங்களின் கதி X என்னும் எழுமாற்றுமாறி என்க. இதன் இடை, நியமவிலகல் என்பன முறையே μ, σ என்க.

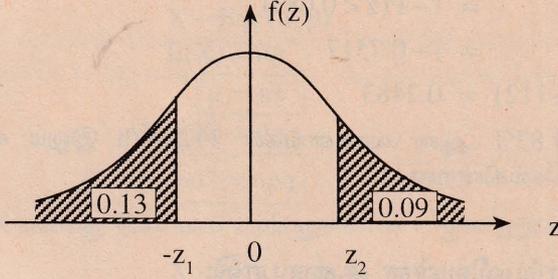
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

87% ஆன வாகனங்கள் 90km/h இலும் கூடிய கதியுடன் செல்கின்றன. எனவே 13% ஆன வாகனங்கள் 90km/h இலும் குறைவான கதியுடன் செல்லும்.

X என்னும் செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியை z என்னும் நியம செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாக மாற்றும்போது

$$x = 90 \text{ எனில் } z_1 = \frac{90 - \mu}{\sigma} \quad \text{_____ (1)}$$

$$x = 120 \text{ எனில் } z_2 = \frac{120 - \mu}{\sigma} \quad \text{_____ (2)}$$



$$P(z > z_2) = 0.09$$

$$1 - P(z < z_2) = 0.09$$

$$P(z < z_2) = 0.91$$

$$z_2 = 1.341 \quad (\text{அட்டவணையிலிருந்து})$$

$$P(z < -z_1) = 0.13$$

$$P(z > z_1) = 0.13$$

$$1 - P(z < z_1) = 0.13$$

$$P(z < z_1) = 1 - 0.13 = 0.87$$

$$z_1 = 1.126$$

$$\therefore -1.126 = \frac{90 - \mu}{\sigma} \quad [(1) \text{ இலிருந்து}]$$

$$\mu - 1.126\sigma = 90 \quad \text{_____ (3)}$$

$$1.341 = \frac{120 - \mu}{\sigma} \quad [(2) \text{ இலிருந்து}]$$

$$\mu + 1.341\sigma = 120 \quad \text{_____ (4)}$$

(3), (4) என்பவற்றை தீர்க்கும்போது

$$\mu = 103.69; \quad \sigma = 12.16$$

எனவே வாகனங்களின் கதிகளின் இடை = 103.69 km/h

நியமவிலகல் = 12.16 km/h

$$x = 112 \text{ எனில் } z = \frac{112 - 103.69}{12.16}$$

$$z = 0.6833$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X > 112) &= P(z > 0.683) \\ &= 1 - P(z < 0.683) \\ &= 1 - 0.7517 \end{aligned}$$

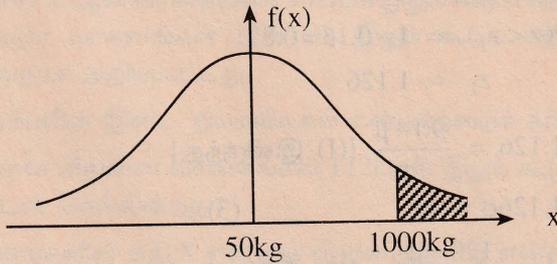
$$P(X > 112) = 0.2483$$

எனவே 24.83% ஆன வாகனங்கள் 112km/h இலும் கூடிய கதியுடன் செல்கின்றன.

செவ்வன் பரம்பலிலுள்ள குறைபாடு:

செவ்வன் வளையியானது அதன் இரு முடிவுப் பகுதியிலும் கிடையச்சை ஒருபோதும் தொடாதவாறு அணுகுகின்றது எனக்கருதப்படுகின்றது. அதாவது செவ்வன் எழுமாற்றுமாரியின் மிகப்பெரிய பெறுமானத்திற்கும் சிறியளவிலான நிகழ்தகவு உண்டு என்பதையே இது சுட்டுகின்றது.

உதாரணமாக வயது வந்தவர்களின் நிறையானது செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது என்க. வயது வந்தவர்களின் சராசரி நிறை 50kg என்க.



மேலுள்ள செவ்வன் வளையியிலிருந்து வயது வந்த ஒருவரின் நிறையானது 1000kg இலும் கூடுதலாக இருப்பதற்கும் சிறிதளவிலான நிகழ்தகவு உண்டு என்பதை அறிய முடிகின்றது.

ஆனால் இது முற்றிலும் பொய்யானது. எனவே செவ்வன் பரம்பலானது நடைபெற இயலாத நிகழ்ச்சி ஒன்றிற்கும் சிறிதளவு நிகழ்தகவு உண்டு என்பதைச் சுட்டுகின்றது.

இதுவே செவ்வன் பரம்பலிலுள்ள ஓர் குறைபாடாகும்.

ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கம்:

ஓர் ஈருறுப்புப் பரம்பலில் n இன் பெறுமானம் மிகவும் கூடுதலாக இருக்கும்போது செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படுகின்றது.

X என்பது ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$E(X) = np$$

$$\mu = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

$$\sigma^2 = npq$$

X என்பது செவ்வன் பரம்பலுக்கான எழுமாற்றுமாறி எனில்

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

எனவே ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படும்போது

$$X \sim N(np, npq) \quad \text{ஆகும்.}$$

$X \sim \text{Bin}(10, 1/2)$ என்னும் ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கருதுக.

$$n = 10; \quad p = \frac{1}{2}$$

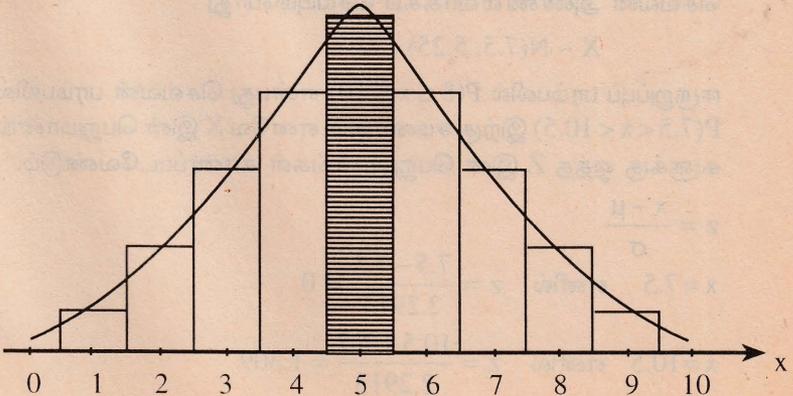
$$\mu = np = 5$$

$$\sigma^2 = npq = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2.5$$

$$\sigma = 1.58$$

எனவே செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யும்போது $X \sim N(5, 2.5)$

கீழுள்ள படத்தில் $\text{Bin}(10, 1/2)$ என்னும் ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான வலையுரு வரையறும் $N(5, 2.5)$ என்னும் செவ்வன் பரம்பலுக்கான வளையியும் ஒன்றாக வரையப்பட்டுள்ளது.



ஈருறுப்புப் பரம்பலில் $X=5$ என்னும் பெறுமானத்திற்கான நிகழ்தகவு நிழற்றப்பட்ட செவ்வகத்தின் பரப்பு ஆகும்.

இது செவ்வன் வளையியினால் உள்ளடக்கப்படும் $x = 4.5, x = 5.5$ என்னும் இரு பெறுமானங்களுக்கிடைப்பட்ட பகுதியின் பரப்பளவிற்கு சமனாகும்.

ஈருறுப்புப் பரம்பலை செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யும்போது பின்வருவனவற்றை கவனிக்கவும். இது Continuity Correction எனப்படும்.

	ஈருறுப்புப்பரம்பல்	செவ்வன் பரம்பல்
i)	$X = 8$	$7.5 < x < 8.5$
ii)	$8 \leq x$	$7.5 < x$
iii)	$8 < x$	$8.5 < x$
iv)	$4 \leq x \leq 8$	$3.5 < x < 8.5$
v)	$4 < x < 8$	$4.5 < x < 7.5$

Eg: i) X என்னும் ஈருறுப்பு எழுமாற்று மாறியின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் $X \sim \text{Bin}(25, 0.3)$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி $P(8 \leq x \leq 10)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

$$X \sim \text{Bin}(25, 0.3)$$

$$n = 25, P = 0.3$$

$$\mu = np = 25 \times 0.3 = 7.5$$

$$\sigma^2 = npq = 25 \times 0.3 \times 0.7 = 5.25$$

$$\sigma = 2.2913$$

செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யும்போது

$$X \sim N(7.5, 5.25)$$

ஈருறுப்புப் பரம்பலில் $P(8 \leq x \leq 10)$ என்பது செவ்வன் பரம்பலில் $P(7.5 < x < 10.5)$ இற்கு சமனாகும். எனவே X இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த Z இன் பெறுமானங்கள் காணப்படவேண்டும்.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = 7.5 \quad \text{எனில்} \quad z = \frac{7.5 - 7.5}{2.2913} = 0$$

$$x = 10.5 \quad \text{எனில்} \quad z = \frac{10.5 - 7.5}{2.2913} = 1.309$$

$$\begin{aligned}
 P(7.5 \leq x \leq 10.5) &= P(0 < z < 1.309) \\
 &= P(z < 1.309) - P(z < 0) \\
 &= 0.9177 - 0.5 \\
 &= 0.4177 \\
 \therefore P(8 \leq x < 10) &= 0.4177
 \end{aligned}$$

Eg: ii) புற்றுநோயாளி ஒருவர் தனது வியாதியிலிருந்து குணமடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். ஒரு நகரத்தில் 100 பேர் இந்நோயினால் பீடிக்கப்பட்டுள்ளனர் எனில் 30 பேருக்குக் குறைவானோர் உயிர் பிழைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: உயிர் பிழைப்பவர்களின் எண்ணிக்கை X ஆனது ஈருறுப்பு எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$X \sim \text{Bin}(100, 0.4)$$

$$n = 100, p = 0.4$$

$$\mu = np = 100 \times 0.4 = 40$$

$$\sigma^2 = npq = 100 \times 0.4 \times 0.6 = 24$$

$$\sigma = 4.899$$

செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யும்போது

$$X \sim N(40, 24)$$

30 பேருக்கு குறைவானோர் உயிர் பிழைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(x < 30)$ ஆகும்.

எனவே செவ்வன் பரம்பலில் $P(x < 29.5)$ இன் பெறுமானம் காணப்படல் வேண்டும்.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = 29.5 \quad \text{எனில்} \quad z = \frac{29.5 - 40}{4.899} = -2.14$$

$$\begin{aligned}
 P(x < 29.5) &= P(z < -2.14) \\
 &= 1 - P(z < 2.14) \\
 &= 1 - 0.9838 \\
 &= 0.0162
 \end{aligned}$$

ஆகவே 30 பேருக்குக் குறைவானோர் உயிர் பிழைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.0162 ஆகும்.

Eg: iii) வாகன அனுமதிப்பத்திரம் பெறுவதற்காக திணைக்களத்திற்கு தினமும் 75 பேர் பரீட்சைக்காக வருகின்றனர். ஒருவர் பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். எத்தனை எண்ணிக்கைக்கு கூடுதலான பரீட்சார்த்திகள் ஆகக்குறைந்தது 85% ஆன நாட்களில் சித்தியடைவர்?

சித்தியடையும் பரீட்சார்த்திகளின் எண்ணிக்கை ஈருறுப்பு எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$X \sim \text{Bin}(75, 0.4)$$

$$\mu = 75 \times 0.4 = 30$$

$$\sigma^2 = 75 \times 0.4 \times 0.6 = 18$$

$$\sigma = 4.24$$

செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யும்போது

$$X \sim N(30, 18)$$

$$P(x > k) = 0.85 \text{ ஆகுமாறு}$$

k இன் பெறுமானம் காணப்படுதல் வேண்டும். ஈருறுப்புப் பரம்பலில் $P(x > k)$ என்பது செவ்வன் பரம்பலில் $P(x > k + 0.5)$ இற்கு சமனாகும்.

$$P(x > k) = 0.85 \quad (\text{ஈருறுப்புப் பரம்பல்})$$

$$P(x > k + 0.5) = 0.85 \quad (\text{செவ்வன் பரம்பல்})$$

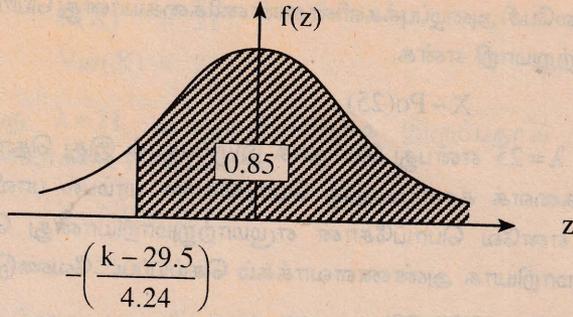
$k + 0.5$ இன் பெறுமானத்தை செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணையிலிருந்து பார்ப்பதற்கு z இன் பெறுமானத்திற்கு மாற்றவேண்டும்.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = k + 0.5 \quad \text{எனில்} \quad z = \frac{k + 0.5 - 30}{4.24}$$

$$z = \frac{k - 29.5}{4.24}$$

$$P\left(z > \frac{k - 29.5}{4.24}\right) = 0.85$$



$$\therefore \frac{k-29.5}{4.24} = 1.04$$

$$k = 33.91$$

எனவே k இன் பெறுமானம் 33 ஆகும். எனவே 33 இற்கு மேற்பட்டோர் ஆகக்குறைந்தது 85% ஆன நாட்களில் சித்தியடைவர்.

பொய்சோன் பரம்பலுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கம்:

பொய்சோன் பரம்பலின் பரமானம் λ ஆனது பெரிதாக இருக்கும் போது ($\lambda > 20$) இது செவ்வன் பரம்பலுக்கு அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படுகின்றது.

X என்பது பொய்சோன் எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$X \sim \text{Po}(\lambda)$$

$$E(X) = \mu = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

இது செவ்வன் பரம்பலுக்கு அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படும்போது

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

ஆகவே $X \sim N(\lambda, \lambda)$ ஆகும்.

Eg: புதிதாக ஆரம்பிக்கப்பட்ட வானொலி ஒலிபரப்பு சேவை ஒன்றிற்கு ஒவ்வொரு நாளும் சராசரியாக 25 தொலைபேசி அழைப்புகள் கிடைக்கின்றது என்க. இங்கு ஒரு நாளுக்கு கிடைக்கும்

தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கையானது பொய்சோன் எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$X \sim \text{Po}(25)$$

இங்கு $\lambda = 25$ என்பது பெரிதாக இருப்பதால் இது தொடர்பான நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பதற்கு பொய்சோன் பரம்பல் பாவிக்கப்பட முடியாது. எனவே பொய்சோன் எழுமாற்றுமாறியானது செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாக அண்ணளவாக்கம் செய்யப்பட வேண்டும்.

அதாவது $X \sim N(20, 70)$
 $\mu = 20, \sigma^2 = 70$

குறிப்பு: பொய்சோன் பரம்பலானது பின்னகப் பரம்பலாக இருப்பதால், பொய்சோன் எழுமாற்று மாறியை செவ்வன் எழுமாற்று மாறியாக மாற்றுவதற்கு Continuity Correction உபயோகம் படுத்தப்படும்.

பொய்சோன் பரம்பல்	செவ்வன் பரம்பல்
$X = 14$	$13.5 < x < 14.5$
$X \geq 14$	$X > 13.5$
$X > 14$	$X > 14.5$
$5 \leq x \leq 14$	$4.5 < x < 14.5$
$5 < x < 14$	$5.5 < x < 13.5$
$5 \leq x < 14$	$4.5 < x < 13.5$

Eg: i) குறித்த ஒரு சந்தியில் (Junction) ஒரு நாளுக்கு சராசரியாக 3 விபத்துக்கள் நிகழ்கின்றன. ஒரு கிழமையில் 22 இற்கு மேற்பட்ட விபத்துக்கள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

விடை: ஒரு நாளில் 3 விபத்துக்கள் நிகழ்ந்தால் ஒரு கிழமையில் சராசரியாக 21 விபத்துக்கள் நிகழும்.

எனவே ஒரு கிழமையில் நடைபெறும் விபத்துக்களின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X என்க.

$$X \sim \text{Po}(21)$$

$$\lambda = 21$$

$$E(X) = 21$$

$$\text{Var}(X) = 21$$

இங்கு $\lambda = 21$ ஆனது பெரிதாக இருப்பதால் செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படும்.

$$X \sim N(21, 21)$$

$$\mu = 21, \sigma^2 = 21$$

பொய்சோன் பரம்பலில் $P(X > 22)$ இன் பெறுமானம் காணப்படுதல் வேண்டும். Continuity Correction இன்படி செவ்வன் பரம்பலில் $P(X > 22.5)$ இன் பெறுமானம் காணப்படுதல் வேண்டும்.

இதன் பெறுமானம் காண்பதற்கு X என்னும் எழுமாற்று மாறியானது Z என்ற எழுமாற்று மாறியாக நியமப்படுத்தப்பட வேண்டும்.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$X = 22.5 \text{ எனில்}$$

$$Z = \frac{22.5 - 21}{\sqrt{21}}$$

$$= 0.327$$

$$\therefore P(X > 22.5) = P(Z > 0.327)$$

$$= 1 - P(Z < 0.327)$$

$$= 1 - 0.6293$$

$$= 0.3707$$

ஆகவே ஒரு கிழமையில் 22 இற்கு மேற்பட்ட விபத்துக்கள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.3707 ஆகும்.

Eg: ii) குறித்த ஓர் சந்தியை காலை வேளைகளில் ஒரு நிமிடத்தில் நகரை நோக்கி 12 வாகனங்களும் நகரிலிருந்து விலகி 10 வாகனங்களும் கடக்கின்றன.

a) 30 செக்கன் இடைவெளியில் நகரை நோக்கி 7 வாகனங்கள் செல்வதற்கான

b) சந்தியை ஒரு நிமிடத்தில் 21 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான

c) சந்தியை 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் 100 இற்கும் 115

இற்கும் இடையிலான எண்ணிக்கையான வாகனங்கள்
கடப்பதற்கான

- d) ஒரு கிழமையில் சரியாக 3 நாட்கள் காலை மணி 8.30 இற்கும்
மணி 8.35 இற்கும் இடையில் 100 இற்கும் 115 இற்கும்
இடையிலான எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் சந்தியைக்
கடப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

விடை:

- a) ஒரு நிமிடத்தில் நகரை நோக்கி செல்லும் வாகனங்களின் சராசரி
எண்ணிக்கை = 12

எனவே 30 செக்கனில் ($1/2$ நிமிடம்) நகரை நோக்கி செல்லும்
வாகனங்களின் சராசரி எண்ணிக்கை = 6

வாகனங்களின் எண்ணிக்கையானது X என்னும் பொய்சோன்
எழுமாற்றுமாறி என்க.

$$X \sim \text{Po}(6)$$

இங்கு $\lambda = 6$

எனவே இதற்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ எனில்

$$p(x) = \frac{e^{-6} 6^x}{x!} ; x=0,1,\dots$$

ஆகவே 30 செக்கன்களில் நகரை நோக்கி 7 வாகனங்கள்
செல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(X=7)$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} P(X=7) &= \frac{e^{-6} 6^7}{7!} \\ &= 0.1377 \end{aligned}$$

- b) நகரை நோக்கி ஒரு நிமிடத்தில் செல்லும் வாகனங்களின்
எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X_1 என்க.

$$X_1 \sim \text{Po}(12)$$

இங்கு $\lambda_1 = 12$

நகரிலிருந்து விலகி ஒரு நிமிடத்தில் செல்லும் வாகனங்களின்
எண்ணிக்கையை எழுமாற்றுமாறி X_2 என்க.

$$X_2 \sim \text{Po}(10)$$

இங்கு $\lambda_2 = 10$

எனவே சந்தியை ஒரு நிமிடத்தில் கடக்கும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கையானது எழுமாற்றுமாறி X எனில்

$$X = X_1 + X_2$$

இரண்டு சாரா பொய்சோன் எழுமாற்றுமாறிகளினது கூட்டுத் தொகையும் ஓர் பொய்சோன் எழுமாற்றுமாறி என்பதால்

$$X \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$X \sim \text{Po}(12 + 10)$$

$$X \sim \text{Po}(22)$$

$$E(X) = 22, \text{Var}(X) = 22$$

இங்கு பரமானத்தின் பெறுமானம் பெரிதாக ($\lambda = 22$) இருப்பதால் செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யப்படும்.

$$\mu = 22, \sigma^2 = 22$$

$$X \sim N(22, 22)$$

சந்தியை ஒரு நிமிடத்தில் 21 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(X \geq 21)$ ஆகும்.

Continuity Correction இன்படி செவ்வன் பரம்பலில் இப்பெறுமானம் $P(X \geq 20.5)$ ஆகும்.

X ஐ நியமப்படுத்தும்போது

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$X = 20.5 \text{ எனில் } Z = \frac{20.5 - 22}{\sqrt{22}}$$

$$= -0.32$$

$$P(X \geq 20.5) = P(Z > -0.32)$$

$$= P(Z < 0.32)$$

$$= 0.6255$$

ஆகவே சந்தியை ஒரு நிமிடத்தில் 21 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6255 ஆகும்.

c) 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் நகரை நோக்கி சராசரியாக 50 வாகனங்களும் நகரிலிருந்து விலகி சராசரியாக 50 வாகனங்களும் சந்தியை கடக்கின்றது.

எனவே 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் சந்தியை கடக்கும் வாகனங்களின் எண்ணிக்கையானது எழுமாற்றுமாறி X இனால் குறிக்கப்பட்டால்

$$X \sim \text{Po}(60 + 50)$$

$$X \sim \text{Po}(110)$$

இங்கு $\lambda = 110$

செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் செய்யும்போது

$$X \sim N(110, 110) \text{ ஆகும்.}$$

$$\mu = 110, \sigma^2 = 110$$

ஆகவே 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் 100 இற்கும் 115 இற்கும் இடையிலான எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(100 < X < 115)$ ஆகும்.

Continuity Correction இன்படி செவ்வன் பரம்பலில் இப்பெறுமானம் $P(100.5 < X < 114.5)$ ஆகும்.

X என்ற எழுமாற்று மாறியானது Z என்ற எழுமாற்றுமாறியாக நியமப்படுத்தும்போது

$$P(100.5 < X < 114.5)$$

$$= P\left(\frac{100.5 - 110}{\sqrt{110}} < Z < \frac{114.5 - 110}{\sqrt{110}}\right)$$

$$= P(-0.906 < Z < 0.429)$$

$$= P(-0.91 < Z < 0.43)$$

$$= P(Z < 0.91) + P(Z < 0.43) - 1$$

$$= 0.8186 + 0.6664 - 1$$

$$= 0.485$$

ஆகவே சந்தியை 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் 100 இற்கும் 115 இற்கும் இடையிலான எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.485 ஆகும்.

- d) மணி 8.30 இற்கும் மணி 8.35 இற்கும் இடைப்பட்ட 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் சந்தியை 100 இற்கும் 115 இற்கும் இடையிலான எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு $p=0.485$ (பகுதி (iii) இலிருந்து)

எனவே 7 நாட்களில் (1 கிழமை) சரியாக 3 நாட்கள் மணி 8.30 இற்கும் மணி 8.35 இற்கும் இடைப்பட்ட 5 நிமிட நேர இடைவெளியில் சந்தியை 100 இற்கும் 115 இற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணிக்கையான வாகனங்கள் கடப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\begin{aligned}
 &= {}^7C_3 p^3 q^{7-3} \\
 &= \frac{7!}{3! 4!} (0.485)^3 (1-0.485)^4 \\
 &= 0.2808
 \end{aligned}$$

பயிற்சி - 18

- 1) z என்பது நியம செவ்வன் பரம்பலுக்கான எழுமாற்றுமாறி எனில் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க?
 - i) $P(0 < z < 1.63)$
 - ii) $P(-0.5 < z < 1.0)$
 - iii) $P(z > 0.86)$
 - iv) $P(-1.18 < z < -0.5)$
 - v) $P(-1.55 < z < -0.44)$
- 2) $P(z < k) = 0.9265$ ஆகுமாறு k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
- 3) $P(z > k) = 0.3015$ ஆகுமாறு k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
- 4) $P(k < z < -0.18) = 0.4197$ எனில் k இன் பெறுமானம் யாது?
- 5) பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?
 - i) $P(z < a) = 0.0427$
 - ii) $P(z > a) = 0.2946$
 - iii) $P(-0.93 < z < a) = 0.7235$
- 6) பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் நியம செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணையைப் பாவித்து a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

- i) $P(z < a) = 0.893$ ii) $P(z < a) = 0.369$
 iii) $P(-a < z < a) = 0.95$ iv) $P(-a < z < a) = 0.99$

7) z என்பது நியம செவ்வன் பரம்பலுக்கான எழுமாற்றுமாறி எனில் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

- i) $P(z < 1.287)$ ii) $P(z > 0.6)$
 iii) $P(z > -0.6)$ iv) $P(2.3 < z < 2.6)$
 v) $P(-1.35 < z < -1.05)$ vi) $P(-0.5 < z < 1.3)$
 vii) $P(-1.823 < z < 1.823)$ viii) $P(-2.008 < z < -0.426)$

8) பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் நியம செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணையைப் பாவித்து a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

- i) $P(z < a) = 0.9$ ii) $P(z < a) = 0.02$
 iii) $P(z > a) = 0.65$ iv) $P(-a < z < a) = 0.7$
 v) $P(-a < z < a) = 0.98$ vi) $P(0 < z < a) = 0.32$

9) $X \sim N(30, 36)$ என்பது ஓர் செவ்வன் பரம்பலைக் குறிக்கும் எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க?

- i) $P(X > 17)$ ii) $P(X < 22)$ iii) $P(32 < x < 41)$

10) $X \sim N(30, 36)$ என்பது ஓர் செவ்வன் பரம்பலைக் குறிக்குமாயின் பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

- i) $P(X < a) = 0.8$ ii) $P(-a < x < a) = 0.75$

11) X என்னும் எழுமாற்றுமாறி இடை 18 ஆகவும் நியமவிலகல் 2.5 ஆகவும் உடைய செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது.

- i) $P(X < 15)$ இன் பெறுமானம் யாது?
 ii) $P(X < k) = 0.2236$ எனில் k இன் பெறுமானம் யாது?
 iii) $P(X > a) = 0.1814$ எனில் a இன் பெறுமானம் யாது?
 iv) $P(17 < x < 21)$ இன் பெறுமானம் யாது?

12) X என்னும் செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியானது அதன் இடைப்பெறுமானத்திலிருந்து இரண்டு நியம விலகலுக்குள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.9544 எனக்காட்டுக?

- 13) 5 வயது நிரம்பிய குதிரைகளின் நிறை 250kg ஐ இடையாகவும் 40kg ஐ நியமவிலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்று மாறியாகும். இவ்வகையான ஒரு குதிரையின் நிறையானது
- 260kg இற்கும் 270kg இற்கும் இடையில்
 - 300kg ஐ விடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 14) குறித்த ஓர் இனக் காட்டுப்பூனையின் சராசரி வாழ்வுக்காலம் 40 மாதங்களாகும். இவ்வாழ்வுக் காலம் 6.3 மாதங்களை நியம விலகலாகவுடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறி என்க. இந்த இனப்பூனை ஒன்று
- 32 மாதங்களுக்கு மேல்
 - 28 மாதங்களுக்கு கீழ் உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 15) 1000 போர் வீரர்களின் உயரங்கள் 174.5cm ஐ இடையாகவும் 6.9cm ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்று மாறியாகும்.
- எத்தனை வீரர்களின் உயரங்கள் 160cm இலும் குறைவாக இருக்கும்?
 - எத்தனை வீரர்களின் உயரங்கள் 175cm ஆக இருக்கும்?
 - எத்தனை வீரர்களின் உயரங்கள் 188cm அல்லது அதற்குக் கூடவாக இருக்கும்?
- 16) மின்னியல் உபகரணங்கள் தயாரிக்கப்படும் தொழிற்சாலை ஒன்றில் ஓர் இயந்திரம் உற்பத்தி செய்யும் மின் தடையின் தடைப்பெறுமானம் 40Ω ஐ இடையாகவும் 2Ω ஐ நியமவிலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும். உற்பத்தி செய்யப்படுவதற்கில் எத்தனை வீதமான மின் தடைகளின் தடைப்பெறுமானம் 43Ω ஐ விடக்கூடவாகும்?
- 17) மென்பானங்கள் தயாரிக்கும் கம்பனியானது குறித்த ஒரு வகையான மென்பானத்தை 200ml பைக்கற்றுக்களாக அடைத்து விற்கின்றது. இது 15ml நியமவிலகலுடன் செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது எனக்கொள்க. எழுமாற்றாகத் தெரியப்படும் ஒரு பைக்கற்று ஆனது
- 224ml இலும் கூடிய அளவைக் கொண்டிருப்பதற்கான

ii) 191ml இற்கும் 209ml இற்கும் இடையிலான அளவைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்கதவு யாது?

18) கணிப்பொறிகளில் பயன்படுத்தப்படும் இலிதியம் மின்கலங்களின் வாழ்வுக்காலம் (பாவனைக்காலம்) 500 மணித்தியாலங்களை இடைப்பெறுமானமாகவும் 100 மணித்திலாயங்களை நியம விலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்றுமாரியாகும். எழுமாற்றாகத் தெரியப்படும் ஒரு மின்கலமானது

i) 500 மணித்தியாலங்களுக்குக் கூடுதலான

ii) 500 மணித்தியாலங்களுக்கும் 650 மணித்தியாலங்களுக்கும் இடையிலான

iii) 700 மணித்தியாலங்களுக்கும் கூடுதலான

iv) 550 மணித்தியாலங்களுக்கும் 650 மணித்தியாலங்களுக்கும் இடையிலான

v) 580 மணித்தியாலங்களுக்கும் குறைவான

vi) 420 மணித்தியாலங்களுக்கும் 570 மணித்தியாலங்களுக்கும் இடையிலான பாவனைக் காலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்கதவு யாது?

19) ஒரு நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின்மோட்டரின் நிறையானது 18.5kg ஐ இடைப்பெறுமானமாகவும் 1.5kg ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்று மாரியாகும். எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு மின் மோட்டரானது 21.5kg இலும் கூடிய நிறையைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்கதவு யாது?

20) செவ்வன் பரம்பல் ஒன்றின் எழுமாற்றுமாரி X ஆனது μ என்னும் இடைப்பெறுமானத்தையும் 1.8 ஐ நியம விலகலாகவும் கொண்டது. X இன் பெறுமானம் 14.4 ஐ விடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்கதவு 0.3015 எனில் μ இன் பெறுமானம் யாது?

21) செவ்வன் பரம்பல் ஒன்றினது செவ்வன் எழுமாற்றுமாரியின் பெறுமானம் 4 ஐ விடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்கதவு 0.9772 ஆகவும் 5 ஐ விடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்கதவு

0.9332 ஆகவும் உள்ளது. செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியின் இடை-
நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

- 22) விவசாயப்பண்ணை ஒன்றில் யூரியா பையினுள் அடைக்கப்படும் செத்தல் மிளகாய்களின் நிறையானது செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. அடைக்கப்படும் பொதிகளுள் 10.75% ஆனவை 25kg இற்கு கூடுதலான நிறைகளையும் 4.99% ஆனவை 15kg இற்கு குறைவான நிறைகளையும் கொண்டுள்ளது. செத்தல் மிளகாய்ப் பொதியின் சராசரி நிறையையும் நியம விலகலையும் காண்க?
- 23) சிறிய ரக ஆணிகள் உற்பத்தி செய்யும் தொழிற்சாலை ஒன்று சராசரி நிறை 3.5g ஆகவுள்ள ஆணிகளை உற்பத்தி செய்கின்றது. இவ் ஆணிகளின் நிறை 0.15g ஐ நியமவிலகலாக உடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும். உற்பத்தி செய்யப்படும் ஆணிகளில் சராசரி நிறையிலிருந்து 0.25g கூடவான அல்லது குறைவான ஆணிகள் நிராகரிக்கப்படும். எனவே உற்பத்தி செய்யப்படும் ஆணிகளில் எத்தனை வீதமானவை நிராகரிக்கப்படும்?
- 24) தொழிற்சாலை ஒன்றில் தயாரிக்கப்படும் குண்டுசிகளின் நீளமானது 4.47cm ஐ இடையாகவும் 0.03cm ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும். உற்பத்தி செய்யப்படுவற்றில் 4.7cm இற்கும் 4.8cm இற்கும் இடையேயான நீளங்களைக் கொண்டுள்ள குண்டுசிகள் மாத்திரம் விற்பனைக்கு விடப்படும். ஏனையவை நிராகரிக்கப்படும். ஒரு நாளில் 16800 குண்டுசிகள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றது.
- i) மிகவும் நீளம் கூடியவை என எத்தனை குண்டுசிகள் நிராகரிப்படும்?
- ii) மிகவும் நீளம் குறைந்தவை என எத்தனை குண்டுசிகள் நிராகரிக்கப்படும்?
- 25) அரசாங்க உயர் அதிகாரி ஒருவர் தனது வீட்டிலிருந்து காரியாலயத்திற்கு செல்வதற்கு எடுக்கும்நேரம் 24 நிமிடத்தை இடைப் பெறுமானமாகவும் 3.8 நிமிடத்தை நியமவிலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்றுமாறி எனக் கருதுகின்றார்கள்.

- i) அவர் தனது காரியாலயத்தை அடைவதற்கு எடுக்கும் நேரம் ஆகக்குறைந்தது $1/2$ மணித்தியாலமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- ii) காரியாலயம் காலை 8.00 மணிக்கு திறக்கப்படுகின்றது என்க. அதிகாரி தனது வீட்டிலிருந்து காலை மணி 7.45 இற்குப் புறப்பட்டால் அவர் தாமதமாகச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- iii) காலை மணி 7.50 இலிருந்து 8.00 மணிவரை ஊழியர்களுக்கு இலவசமாக தேநீர் வழங்கப்படும் நேரமாகும். இவர் வீட்டிலிருந்து காலை மணி 7.35 இற்கு புறப்பட்டால் இலவசமாக வழங்கப்படும் தேநீரைக் குடிக்க முடியாததற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- iv) ஒரு கிழமையில் அவர் 3 நாட்கள் தாமதமாகச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- v) ஒரு கிழமையில் இரண்டு நாட்கள் இலவச தேநீர் குடிக்க முடியாததற்கான நிகழ்தகவு யாது?

26) இயந்திரம் ஒன்றின் ஒரு உதிரிப்பாகத்தின் நீளமானது 4.81cm இற்கும் 5.20cm இற்கும் இடையில் இருத்தல்வேண்டும். ஒரு நாளில் உற்பத்தி செய்யப்படும் இவ்வகையான உதிரிப்பாகங்களில் 0.8% ஆனவை மிகவும் கட்டையாகவும் (4.81cm ஐ விட குறைவு) 3% ஆனவை மிகவும் நீளமானவையாகவும் (5.20cm ஐ விட கூட) காணப்பட்டது. இந்த உதிரிப்பாகத்தின் நீளமானது செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டிருந்தால் இதன் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க?

ஒரு உதிரிப்பாகத்தை உருவாக்குவதற்கு ரூபா 4/- செலவாகின்றது. ஆகக்கூடிய நீளமுள்ளவையின் நீளத்தைக் குறைப்பதற்கு மேலதிகமாக ரூபா 2/- செலவாகின்றது. மிகவும் கட்டையாக உள்ளவை நிராகரிக்கப்பட்டு வீசப்படுகின்றது. 100 உதிரிப்பாகங்களை உருவாக்குவதற்கு செலவாகும் தொகை எவ்வளவு என எதிர்பார்க்கப்படும்?

27) தொலைத்தொடர்பு விண்கலம் (Satellite) ஒன்றின் செயற்பாட்டுக் காலம் 4.2 வருடங்களை இடையாகவும் 1.2 வருடங்களை நியம விலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும்.

i) இக்கலம் 6 வருடங்களுக்கு மேல் செயற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) இத்தகைய இரு விண்கலங்கள் ஏவப்பட்டால்

a) இரண்டும் 6 வருடங்களுக்கு மேல் செயற்படுவதற்கான

b) ஆகக்குறைந்தது ஒரு விண்கலம் 6 வருடங்களுக்கு மேல் செயற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

28) வளர்ந்த ஆண்களின் உயரமானது 176cm ஐ இடைப்பெறுமானமாகவும் 10cm ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும். வளர்ந்த ஆண்களில் 5 பேர் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால்

i) எல்லோரும் 170cm ஐ விட கூடுதலான உயரத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான

ii) மூன்று பேர்களின் உயரம் 170cm ஐ விடக்கூடுதலாகவும் இரண்டு பேர்களின் உயரம் 170cm ஐ விடக் குறைவாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

29) யுத்தத்தினால் அநாதையான ஓர் சிறுமி தினமும் நிவாரண உணவு பெறுவதற்காக கூட்டுறவுக் கடைக்குச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரமானது செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. 65% ஆன நாட்களில் இச்சிறுமி 20 நிமிடத்திற்கு கூடுதலான நேரத்தையும் 8% ஆன நாட்களில் 30 நிமிடத்திற்குக் கூடுதலான நேரத்தையும் எடுக்கிறாள்.

i) இச்சிறுமி கடைக்கு செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தின் இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க?

ii) இச்சிறுமி 25 நிமிடத்திற்கு கூடுதலான நேரம் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iii) இச்சிறுமி கடைக்குச் செல்வதற்கு, எவ்வளவு நேரம் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.02 ஆகும்?

30) யாழ் குடாநாட்டின் ஒரு காணியிலுள்ள 640 பனை மரங்களின் உயரங்கள் செவ்வன் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது. இவற்றில் 25 பனைமரங்கள் 18m ஐ விடக்குறைவான உயரத்தையும் 110 பனை மரங்கள் 24m ஐ விடக் கூடுதலான உயரத்தையும் கொண்டுள்ளது.

- i) பனை மரங்களின் உயரங்களினது இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க?
- ii) எத்தனை மரங்கள் 16m இற்கும் 20m இற்கும் இடையிலான உயரத்தைக் கொண்டிருக்கும்?
- 31) குறித்த ஓர் வகையான மின்னுபகரணம் ஒன்றின் நீளமானது 120.1mm ஐ இடையாகவும் 0.25mm ஐ நியமவிலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும். 119.8mm இற்கும் 120.2mm இற்கும் இடையேயான நீளத்தைக் கொண்டவை ரூபா 25/- இற்கு விற்கப்படுகின்றது. 119.5mm இற்கும் 119.8mm இற்கும் இடையில் அல்லது 120.2mm இற்கும் 120.5mm இற்கும் இடையிலான நீளத்தைக் கொண்டவை ரூபா 20/- இற்கு விற்கப்படுகின்றது. 119.5mm இற்குக் குறைவான அல்லது 120.5mm இற்குக் கூடுதலான நீளங்களைக் கொண்டவை ரூபா 2/- இற்கு விற்கப்படுகின்றது. இந்த மின்னுபகரணமானது ரூபா 25/- இற்கு, ரூபா 20/- இற்கு, ரூபா 2/- இற்கு விற்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது? இம் மின்னுபகரணத்தின் சராசரி விற்பனை விலையைக் காண்க?
- 32) சாரா செவ்வன் எழுமாற்றுமாறிகளின் கூட்டுத்தொகையும் செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும். வறிய மக்களுக்கு அரிசியை நிவாரணமாகக் கொடுப்பதற்கு சிவத்த அரிசியும் வெள்ளை அரிசியும் கலக்கப்பட்டு பொதி செய்யப்படுகின்றது. சிவத்த அரிசியின் நிறையானது 7kg ஐ இடைப்பெறுமானமாகவும் 1.2kg ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் பரம்பலையும், வெள்ளை அரிசியின் நிறையானது 5kg ஐ இடைப்பெறுமானமாகவும் 0.9kg ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் பரம்பலையும் கொண்டுள்ளது. இரண்டு செவ்வன் பரம்பல்களின் எழுமாற்றுமாறியும் ஒன்றையொன்று சாராதவை எனக்கொள்ளப்படுகின்றது. ஒரு நிவாரணப் பொதியானது எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால்
- i) அரிசிகளின் மொத்த நிறையானது 9.5kg ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான
- ii) சிவத்த அரிசியின் நிறையானது வெள்ளை அரிசியின் நிறையை விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான
- iii) சிவத்த அரிசியின் நிறையானது வெள்ளை அரிசியின் நிறையைவிட இருமடங்கு கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

33) வளர்ந்த ஆணின் நிறையானது 78kg ஐ இடையாகவும் 12kg ஐ நியம விலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்றமாறியாகும். வளர்ந்த பெண்ணின் நிறையானது 70kg ஐ இடையாகவும் 8kg ஐ நியமவிலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும்.

i) ஓர் ஆணும் ஓர் பெண்ணும் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் இருவரினதும் மொத்த நிறையின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க?

a) இருவரினதும் மொத்த நிறை 120kg ஐ விடக் கூடுதலாக

b) இருவரினதும் சராசரி நிறை 72kg ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) ஓர் ஆணும் ஓர் பெண்ணும் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் இருவரினதும் நிறைகளின் வித்தியாசத்தின் இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க?

a) ஆணின் நிறையானது பெண்ணின் நிறையைவிட 5kg இலும் கூடுதலாக இருப்பதற்கான

b) பெண்ணின் நிறையானது ஆணின் நிறையைவிடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iii) 5 ஆண்களும் 3 பெண்களும் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் இவர்களின் மொத்த நிறையானது 560kg இலும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

34) X என்னும் எழுமாற்றுமாறியானது Bin(25, 0.2) என்னும் ஈருறுப்புப் பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது.

i) X இன் இடை, நியமவிலகல் என்பவற்றைக் காண்க?

ii) $P(X = 2)$ ஐ ஈருறுப்புப் பரம்பல் மூலம் காண்க?

iii) $P(X = 2)$ ஐ செவ்வன் அண்ணளவாக்கத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க?

iv) செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் மூலம் $P(X \geq 7)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

35) ஒரு சதுர முகித்தாயக்கட்டையானது 120 தடவைகள் சுண்டப் படுகின்றது.

i) கோடாத தாயக்கட்டை எனில் 15 இற்கு குறைந்த தடவைகள் 6 என்ற இலக்கம் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) 6 என்ற இலக்கம் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{10}$ ஆக இருக்குமாறு நிறையேற்றப்பட்ட தாயக்கட்டை எனில் 15 இற்கு குறைந்த தடவைகள் 6 என்ற இலக்கம் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

36) ஓர் பஸ்தேர்வு வினாப்பத்திரம் 45 வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வினாவும் நான்கு விடைகளைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு மாணவன் எல்லா வினாக்களுக்கும் எழுமாற்றாக விடையளிக்கின்றான். இம்மாணவன்

i) ஆகக்குறைந்தது 16 வினாக்களுக்கு சரியாக விடையளிப்பதற்கான

ii) 10 ஐ விடக்குறைந்த வினாக்களுக்கு சரியாக விடையளிப்பதற்கான

iii) 8 தொடக்கம் 12 வரையிலான வினாக்களுக்கு சரியாக விடையளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

37) ஒரு பஸ்தேர்வு வினாப்பத்திரம் 200 வினாக்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வினாவும் நான்கு சாத்தியமான விடைகளைக் கொண்டுள்ளது. இதில் ஒன்று மட்டுமே சரியானது. ஒரு மாணவன் 80 வினாக்களுக்கு எழுமாற்றாக விடையளிக்கின்றான். அதாவது இந்த 80 வினாக்களிலுள்ள விடயங்கள் பற்றி அவனுக்கு பூரண அறிவில்லை. இந்த 80 வினாக்களில் 25 தொடக்கம் 30 வரையிலான வினாக்களுக்கு சரியாக விடையளிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

38) ஒரு நாணயமானது 400 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. செவ்வன் அண்ணளவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி

i) 185 இற்கும் 210 இற்கும் இடையிலான தலைகள் தோன்றுவதற்கான

ii) சரியாக 205 தலைகள் தோன்றுவதற்கான

iii) 176 ஐ விடக் குறைவான அல்லது 227 ஐ விடக் கூடுதலான தலைகள் தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

- 39) ஓர் தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒரு வகையான பொருட்களில் 10% குறைபாடுள்ளவை ஆகும். 100 பொருட்கள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்டு பரிசோதிக்கப்பட்டது.
- குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கை 13 ஐ விடக் கூடுதலாக இருப்பதற்கான
 - குறைபாடுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கை 8 ஐ விடக்குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 40) ஒரு நோயாளி புற்று நோயிலிருந்து குணமடைதற்கான நிகழ்தகவு 0.9 ஆகும். ஒரு வைத்தியசாலையில் அனுமதிக்கப்பட்டுள்ள 100 பேர்களுள்
- 84 இற்கும் 95 இற்கும் இடையானோர்
 - 86 ஐ விடக் குறைவானோர் குணமடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 41) ஒரு நகரத்தில் ஒவ்வொரு நாளும் 50 பேர் வாகன அனுமதிப் பத்திரத்திற்கான பரீட்சைக்குத் தோற்றுக்கின்றனர். ஒருவர் இப்பரீட்சையில் சித்தியடைவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆகும். ஆகக்குறைந்தது 95% ஆன நாட்களில் ஆகக்கூடியது எத்தனை பேர் சித்தியடைவர்?
- 42) யாழ்குடா நாட்டின் ஒரு தொழிற்சாலையில் ஒரு நாளில் தயாரிக்கப்படும் மட்பாண்டங்களில் 15% ஆனவை பாவனைக்கு தவறு என நிராகரிக்கப்படுகின்றது. ஒருநாள் தயாரிக்கப்பட்ட மட்பாண்டங்களில் 200 எழுமாற்றாகத் தெரியப்பட்டு பரிசோதிக்கப்பட்டது. இவற்றில் 20 இற்கு மேற்பட்ட மட்பாண்டங்கள் நிராகரிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- 43) i) கோடாத நாணயம் ஒன்று 500 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. 290 இற்கு மேற்பட்ட தடவைகள் தலை தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- நிறையேற்றப்பட்ட நாணயம் ஒன்ற சுண்டப்படும்போது தலை தோன்றுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.58 ஆகும். a என்பது ஓர் முழு எண் என்க. 500 தடவைகளில் a தடவைகளுக்கு கூடுதலான

தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.001 எனில் a இன் ஆகக்குறைந்த பெறுமானம் யாது?

44) நெருங்கிய உறவில் திருமணம் புரிவோருக்கு பிறக்கும் குழந்தைகள் குறைபாடுள்ளதாகவே பிறக்கும் என 75% ஆன மக்கள் நம்புகின்றனர் என ஆய்வு ஒன்று குறிப்பிடுகின்றது. குறிப்பிட்ட ஓர் இடத்திலுள்ள 80 பேர்களிடம் இந்த நம்பிக்கை பற்றி கேட்கப்பட்டது.

i) ஆகக்குறைந்தது 50 பேர் இதனை நம்புவதற்கான

ii) ஆகக்கூடியது 56 பேர் இதனை நம்புவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

45) கொழும்பு நகருக்குள் இரவில் காரை செலுத்திக் கொண்டு வரும் சாரதிகளில் 10 பேர்களில் ஒருவர் மதுபானம் அருந்துகின்றார் என புள்ளிவிபரவியல் குறிப்பிடுகின்றது. குறித்த ஓர் நாள் இரவு நகருக்குள் வரும் 400 வாகனங்களின் சாரதிகள் மது அருந்தியுள்ளனரா என பரிசோதிக்கப்பட்டது.

i) 32 ஐ விடக் குறைவானோர்

ii) 49 ஐ விடக் கூடவானோர்

iii) ஆகக் குறைந்தது 35 பேர் ஆனால் 47 பேரை விடக் குறைவானோர் மது அருந்தியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

46) i) கோடாத நாணயம் ஒன்று 500 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றது. 270 அல்லது அதற்குக் கூடிய தடவைகள் தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) நிறையேற்றப்பட்ட நாணயம் ஒன்று சுண்டப்படும்போது தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.54 ஆகும். a என்பது ஓர் முழு எண் என்க. 500 தடவைகளில் a தடவைகளுக்கு கூடுதலான தலை பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.001 எனில் a இன் ஆகக்குறைந்த பெறுமானம் யாது?

47) கலவன் பாடசாலை ஒன்றில் கல்வியியிலும் மாணவர்களில் 42% ஆன ஆண்களும் 18% ஆன பெண்களும் காரில் வருகின்றனர்.

ஆண்களில் 350 பேரும் பெண்களில் 150 பேரும் தெரிவு செய்யப் பட்டால் 180 இற்கு கூடுதலான மாணவர்கள் காரில் வருவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

48) உள்ளூர் தொழிற்சாலை ஒன்றில் நாள் ஒன்றில் தயாரிக்கப்படும் 'பனஞ்சாராயங்களின்' எண்ணிக்கையானது 600 போத்தல்களை இடைப்பெறுமானமாகவும் 18 போத்தல்களை நியம விலகலாகவும் உடைய செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும்.

i) ஒருநாளில் தயாரிக்கப்படும் சாராயப் போத்தல்களின் எண்ணிக்கையானது 540 இற்கும் 640 இற்கும் இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) ஒருநாளில் தயாரிக்கப்படும் சாராயப் போத்தல்களின் எண்ணிக்கையானது 580 ஐ விடக்குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iii) ஞாயிற்றுக்கிழமைகளில் இத்தொழிற்சாலை மூடப்பட்டுள்ளது எனில் ஒரு கிழமையில் சரியாக 3 நாட்கள் 580 ஐ விடக் குறைவான எண்ணிக்கையான சாராயப்போத்தல்கள் தயாரிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

iv) ஒரு கிழமையில் 4 அல்லது அதற்குக் கூடவான நாட்கள் 620ஐ விடக் கூடுதலான போத்தல்கள் சாராயம் தயாரிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

49) ஓர் விளையாட்டுக்கழகத்தை சேர்ந்த A என்பவர் 'பரிதிவட்டம்' வீசும் தூரமானது 41m ஐ இடையாகவும் 2m ஐ நியம விலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்றுமாறி ஆகும்.

i) இவர் எறியும் தூரமானது 40m இற்கும் 46m இற்கும் இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ii) இவரது 60% ஆன வீசல்கள் எத்தனை மீற்றரை விடக் கூடவாகும்?

iii) இவ்விளையாட்டுக் கழகத்தைச் சேர்ந்த B என்பவரும் 'பரிதிவட்டம்' வீசும் போட்டியில் ஈடுபடுகின்றார். இவரது 85% ஆன வீசல்கள் 35m ஐ விடக் கூடவாகவும் 70% ஆன வீசல்கள் 37.5m ஐ விடக் கூடவாகவும் உள்ளது. இவரது வீசல்களின்

தூரமானது செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியைக் கொண்டிருந்தால் இதன் இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க?

- iv) இருவரும் ஒரு போட்டியில் பங்குபற்றும்போது B என்பவர் தோற்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- v) தேசிய போட்டி ஒன்றில் பங்குபற்றுவதற்காக இக்கழகத்தின் சார்பில் ஒருவர் தெரிவு செய்யப்பட வேண்டியுள்ளார். ஆகக் குறைந்தது 48m தூரம் 'பரிதி வட்டம்' வீசுபவரே தெரிவு செய்யப்படுவார் எனில் தேசியப் போட்டிக்கு யார் தெரிவு செய்யப்படுவார்? இதற்கான காரணத்தை விளக்குக?

50) இலங்கை இராணுவத்தின் நிர்வாகப்பிரிவில் பணியாற்றும் ஆண்கள் திருமணம் முடித்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 ஆகும். பெண்கள் திருமணம் முடித்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.15 ஆகும். நிர்வாகப்பிரிவிலிருந்து எழுமாற்றாக 300 ஆண்களும் 200 பெண்களும் தெரிவு செய்யப்படுகின்றனர். திருமணமான இராணுவத்தினரின் மொத்த எண்ணிக்கையானது செவ்வன் எழுமாற்று மாறி எனக்கருதப்பட்டால் இதன் இடையையும் நியமவிலகலையும் காண்க? இந்த இராணுவத்தினரில் 100 இற்கு மேற்பட்டோர் திருமணம் முடித்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

51) பூமியை நோக்கி வந்து கொண்டிருக்கும் பாரிய விண்கல்லை அதன் பாதையிலிருந்து சிறிய கோணத்தினூடாக திசை திருப்புவதற்காக ஏவுகணைகள் பொருத்தப்பட்ட விண்வெளிக் கலங்களை அனுப்ப விஞ்ஞானிகள் திட்டமிட்டுள்ளனர். அனுப்பப்படும் விண்வெளிக் கலங்களின் செயற்பாட்டுக் காலமானது (Life time) 7 வருடங்களை இடைப்பெறுமானமாகவும் 2 வருடங்களை நியம விலகலாகவும் கொண்ட செவ்வன் எழுமாற்றுமாறியாகும்.

- i) இரு விண்வெளிக் கலங்கள் ஏவப்பட்டால் ஒன்று 5 வருடங்களுக்குக் குறைவான காலமும் மற்றையது 10 வருடங்களுக்கு கூடுதலான காலமும் செயற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
- ii) 8 விண்வெளிக் கலங்கள் ஏவப்பட்டால் சரியாக 3 விண்வெளிக் கலங்கள் 5 வருடங்களுக்குக் குறைவான காலம் செயற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

52) $X \sim Po(25)$ எனில் செவ்வன் அண்ணளவாக்கல் மூலம் $P(23 < X \leq 27)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க?

53) X என்னும் பொய்சோன் எழுமாற்று மாறியின் நியமவிலகல் $\sqrt{10}$ ஆகும். செவ்வன் அண்ணளவாக்கல் மூலம்

(i) $P(X = 8)$ (ii) $P(8 \leq X \leq 11)$ என்பவற்றைக் காண்க?

54) கிழமையில் 5 வேலை நாட்களைக் கொண்ட தனியார் வங்கி ஒன்றிற்கு அதன் வாடிக்கையாளர்களிடமிருந்து தினமும் 54 தொலைபேசி அழைப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

i) குறித்த ஒரு வேலை நாளில் 60 இற்கு மேற்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்கள்

ii) குறித்த ஒரு கிழமையில் 300 இற்கு மேற்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

55) இலங்கையில் வீதி விபத்துக்களினால் ஒரு கிழமையில் சராசரியாக 10 பேர் இறக்கின்றனர். ஒரு மாதத்தில் ஆகக்குறைந்தது 55 பேர் வீதி விபத்துக்களினால் இறப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க? (ஒரு மாதத்தில் 4 கிழமைகள் உண்டு என்க)

56) பாரிய ஆடைத்தொழிற்சாலை ஒன்றில் பணிபுரிவோரில் தினமும் வருகைதராத ஆண்களின் எண்ணிக்கையானது 13 ஐ இடைப் பெறுமானமாகவுடைய பொய்சோன் எழுமாற்று மாறியாகும். தினமும் வருகைதராத பெண்களின் எண்ணிக்கையானது 11 ஐ இடைப் பெறுமானமாகவுடைய பொய்சோன் எழுமாற்று மாறியாகும்.

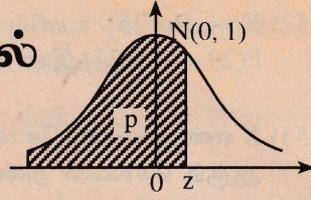
i) குறித்த ஓர் நாளில் 25 ஊழியர்கள் வருகை தராததற்கான

ii) குறித்த ஓர் நாளில் 20 அல்லது அதற்குக் கூட ஆனால் 27 இற்குக் குறைவான ஊழியர்கள் வருகை தராததற்கான

iii) 6 வேலை நாட்களைக் கொண்ட ஓர் கிழமையில் சரியாக 3 நாட்கள் 25 ஊழியர்கள் வருகை தராததற்கான

iv) ஒரு கிழமையில் 2 அல்லது அதற்குக் குறைவான நாட்களில் 20 அல்லது அதற்குக்கூட ஆனால் 27 இற்குக் குறைவான ஊழியர்கள் வருகை தராததற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க?

நியம செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணை



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	.5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	.5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	.6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	.6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	.6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	.7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	.7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	.7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	.8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	.8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	.8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	.8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	.9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	.9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	.9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	.9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	.9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	.9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	.9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	.9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	.9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	.9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	.9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	.9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	.9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	.9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	.9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	.9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	.9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	.9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3.1	.9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	.9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3.3	.9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3.4	.9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

விடைகள்

பயிற்சி - 01

பக்கம் 16

- 1) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}$ 2) $\frac{5}{28}$ 3) $\frac{1}{10}$ 4) $\frac{11}{20}$ 5) $\frac{4}{13}$

பயிற்சி - 02

பக்கம் 23

- 1) i) 0.8 ii) 0.7 iii) 0.5
 2) i) 0.9 ii) 0.6 iii) 0.7 iv) 0.5
 3) $\frac{13}{36}$ 4) $\frac{17}{36}$

பயிற்சி - 03

பக்கம் 31

- 2) $\frac{2}{3}$
 3) i) $\frac{1}{6}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{4}$ iv) $\frac{1}{4}$ v) $\frac{1}{2}$
 5) i) $\frac{8}{15}$ ii) $\frac{7}{15}$ iii) $\frac{13}{15}$ iv) $\frac{7}{15}$

பயிற்சி - 04

பக்கம் 38

- 1) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}$
 4) i) 0.35 ii) 0.875 iii) 0.55
 5) i) 0.94 ii) 0.95
 7) i) 0.6 ii) 0.467 iii) சாராநிகழ்வுகள் அல்ல
 8) i) $\frac{14}{39}$ ii) $\frac{95}{112}$
 9) i) $\frac{1}{3}$ ii) 0.2 iii) 0.4 iv) $\frac{4}{7}$
 10) i) 0.4 ii) 0.1 iii) 0.25
 11) $\frac{3}{8}$ 12) $\frac{45}{56}$ 13) $\frac{31}{56}$ 14) i) $\frac{25}{102}$ ii) $\frac{20}{221}$

பயிற்சி - 05

பக்கம் 50

- 1) 0.56 2) 0.529 3) 0.465 4) $\frac{5}{24}$
5) 0.37 6) 0.2 7) 0.83 8) 0.51
9) 0.71, 0.74, 0.17, 0.09
10) 0.44, 0.46, 0.09
11) 0.216, 0.135
12) i) 0.30 ii) 0.36
13) 21.9%
14) i) 0.2109 ii) a) 0.1024 b) 0.068

பயிற்சி - 07

பக்கம் 65

- 1) i) 27 ii) 412, 435 iii) 4, 6 iv) இல்லை
2) ஆகார வகுப்பு = 41-50, ஆகாரம் = 45
3) 32 4) 61
5) 6-8, 6.6 6) 140-154, 153
7) i) 9.7 ii) 154.8 iii) 51.375 iv) 1775 v) 0.908
9) 21
10) i) 4 ii) 29.54 iii) 122.82
11) i) 18.625 ii) 109.4
12) 10.9 நிமிடங்கள்
13) i) 33.3 ii) 28.9 iii) 7.1

பயிற்சி - 08

பக்கம் 78

- 1) i) 1.8 ii) 4.2 iii) 10.56 iv) 10.56
v) 2.112 vi) 0.1056
2) 2.74 3) 31.5
4) i) 11.77 ii) 2.14 iii) 2 iv) 1.8
v) 6.46 vi) 4.1 vii) 1.91 viii) 3.16
5) 3.74

- 7) i) 1.249 ii) 1.249 iii) 24.98 iv) 6.52
 8) 35.9, 20.2 9) 27.09, 3.14 10) 46.1, 19.2
 11) 35.40, 0.0589 12) 7.6, 3.14 13) 63.6kg, 9.3kg
 14) 12.1, 1.83 15) 25.9, 1.99 16) 5478/-, 1356/-

பயிற்சி - 09

பக்கம் 107

- 1) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
 2) i) $\frac{1}{6}$ ii) $\frac{1}{12}$ iii) $\frac{11}{18}$ iv) $\frac{1}{6}$
 3) 0.1, 0.4 4) 1.0, 0.5, 0.707
 5) i) 3 ii) 14 iii) 21.5
 6) i) 0 ii) 32 iii) 8 iv) 1.41 iv) 4.24
 7) 1.0, 0.5, 0.707, 3.25, 0.187, 0.433
 8) i) 7.75, 2.85, 1.69 ii) 3.75, 1.35, 1.16 iii) 0.08
 9) 1.2, 0.748, 0.5
 10) X இனது:- 1, 1, 1

Y இனது:- 2.83, 0.14, 0.37

- 11) X இனது:- 1, 2.67, 1.63

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < -3 \\ \frac{1}{27} & ; & -3 \leq x < -1 \\ \frac{7}{27} & ; & -1 \leq x < 1 \\ \frac{19}{27} & ; & 1 \leq x < 3 \\ 1 & ; & 3 \leq x \end{cases}$$

$$P(X > 0) = \frac{20}{27}, \quad P(-1 \leq x < 3) = \frac{2}{3}$$

Y இனது:- 2.3, 0.22, 0.47

- 13) $\frac{-5}{4}$, 160.94 A எதிர்பார்ப்பது ரூபா 62.50 நட்டம்
 14) ரூபா 7.60 நட்டம்

15)	Z_1	0	1	2	3	4	5
	$P(Z_1)$	0.12	0.14	0.32	0.2	0.18	0.04

	Z_2	-2	-1	0	1	2	3
	$P(Z_2)$	0.12	0.14	0.32	0.2	0.18	0.04

$$E(Z_1) = 2.3 \quad \text{Var}(Z_1) = 1.81$$

$$E(Z_2) = 0.3 \quad \text{Var}(Z_2) = 1.81$$

16) i) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{5}{24}$ ii) $\frac{23}{8}, 2.78$ iii) 0.26

பயிற்சி - 10

பக்கம் 123

1) 4, 0.53, 0.05, 0.2, 0.541

2) 0.125, 1.33, 0.88, 0.94, 0.31

3) i) 0.1875 ii) 2, 2, 1.25 iii) 0.238, 0.487 iv) 0.688

5) i) $\frac{4}{81}$ ii) 2.4, 0.24, 0.49 iii) 0.697

6) i) 0.5 ii) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ iii) $\frac{\pi}{3}$ iv) $\frac{\pi^2}{4} - 2, \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}$

v) $\text{Cos}^{-1}\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$

9) i) $\frac{11}{3}, \frac{16}{27}, \frac{1}{3}$ ii) $\frac{1}{3}$

10) i) 0.25, 0.3 ii) 0.25

16) i) 3 ii) 1.5, 0.94, 0.75 iii) 0.008

17) i) 0.22, 2.5, 0.45 ii) 0.74 19) i) $\frac{1}{4}, \frac{23}{12}, 2$

20) i) $\frac{3}{32}$ ii) $\frac{11}{16}$ iv) 0, 0.89

21) i) $\frac{2}{5}$ ii) $\frac{19}{15}, \frac{5}{4}$ iii) 0.75 iv) 0.207

பயிற்சி - 11

பக்கம் 136

- 1) 3.5, 2.92, 1.70 2) ii) 4.5, 5.25, 2.29 iii) 3.5, 5.25, 2.29
 3) 8, 18.67, 4.32 4) 13, 12.98, 0.11 6) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$

பயிற்சி - 12

பக்கம் 140

- 1) 0.38, 0.24, 0.49 2) 0.67, 0.22, 0.47

பயிற்சி - 13

பக்கம் 153

- 1) $\frac{1}{4}$ 2) i) 0.296 ii) 0.121 iii) 0.655 iv) 0.68 v) 0.99
 3) 3, 1.5, 1.22, 3 4) 8, 0.8
 5) 0.25 6) 0.034, 0.878, 0.186
 7) i) 0.246 ii) 0.55 iii) 0.204 iv) 11.2, 1.83
 8) i) 0.005 ii) 0.8732 iii) 0.1268 iv) 0.081

இடை = 4.5 நியமவிலகல் = 1.775 ஆகாரம் = 4

- 9) i) 0.206 ii) 0.343 iii) 0.451
 10) i) 0.6513 ii) 0.7941 11) 7கீட்டுக்கள்
 12) i) 0.647 ii) 0.68 13) 0.834
 14) $1 \times 10^{-7}, 1.0, 7.4 \times 10^{-5}$
 15) i) 0.9728 ii) 0.96

4 இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானமே பாதுகாப்பானது

- 18) 10 19) 9 20) 9
 21) i) 0.195 ii) 6.67, 1.49 iii) 7
 22) i) 1570.8, 337.1, 1572

பயிற்சி - 14

பக்கம் 171

- 1) 0.762, 0.384 2) 0.762, 0.433 3) 0.224
 4) 0.135, 0.947 5) 0.9829, 0.1736 6) 0.938
 7) 0.54 8) i) 0.543 ii) 0.41

- 9) i) 0.1 ii) 0.4 iii) 0.8
 10) i) 0.1429 ii) 0.1804 iii) 0.1353 iv) 0.0178 v) 0.1618
 11) i) 0.1512 ii) 0.4015 12) i) 0.37 ii) 0.37 iii) 0.18
 13) i) 0.135 ii) 0.053 iii) 0.008
 15) i) 0.014 ii) 0.039 16) i) 0.7515 ii) 0.0204
 17) i) 0.0902 ii) 0.3208 18) 0.078
 19) i) 0.1606 ii) 2t 20) 0.143 21) 3, 0.223, 0.988
 22) i) 0.0015 ii) 6 iii) 474500/-

iv) 11 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள்

பயிற்சி - 15

பக்கம் 180

- 1) 0.031 2) 0.0066 3) 0.0189
 4) 0.125 5) 0.0819 6) 0.063

பயிற்சி - 16

பக்கம் 188

- 1) i) 1.0 ii) 1.44 iii) 1.0 iv) 0.5
 2) i) 0.2 ii) 0.6 iii) 5, 5, $\frac{25}{3}$
 3) i) $\frac{3}{5}$ ii) $\frac{1}{2}$
 4) i) 0.6 ii) 0.7 iii) 0.5
 6) ii) $\frac{2}{3}$ 9) 0.256
 10) $\frac{50}{3}, \frac{10\sqrt{5}}{3}$
 11) i) $\frac{4R}{\pi}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\sqrt{2}R$
 12) i) 8, 8, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ iii) 1.277, 1.25, 0.189

பயிற்சி - 17

பக்கம் 195

- 1) 3.3, 2.31, 3.3 2) 0.0007 3) 0.3968 4) 0.0814, 303 நாட்கள்

பயிற்சி - 18

பக்கம் 227

- 1) i) 0.448 ii) 0.533 iii) 0.196 iv) 0.273
 v) 0.269 2) 1.45 3) 0.52 4) 2.37
- 5) i) -1.72 ii) 0.54 iii) 1.28
- 6) i) 1.243 ii) -0.3345 iii) 1.96 iv) 2.576
- 7) i) 0.9010 ii) 0.2743 iii) 0.7257 iv) 0.0060
 v) 0.0584 vi) 0.5947 vii) 0.9316 viii) 0.3126
- 8) i) 1.282 ii) -2.054 iii) -0.3853 iv) 1.036
 v) 2.326 vi) 0.9154 9) i) 0.9850 ii) 0.0918
 iii) 0.3371 10) i) 35.04 ii) 23.01
- 11) i) 0.1151 ii) 16.1 iii) 20.275 iv) 0.5403
- 13) i) 0.0928 ii) 0.1056 14) i) 0.898 ii) 0.0287
- 15) i) 16 ii) 28 iii) 27 16) 6.68%
- 17) i) 0.0548 ii) 0.4514 18) i) 0.5 ii) 0.4332
 iii) 0.0228 iv) 0.2417 v) 0.7881 vi) 0.5461
- 19) 0.0227 20) 13.46 21) 8, 2 22) 20.7, 3.47
- 23) 9.5%
- 24) 383, 1534
- 25) i) 0.0571 ii) 0.991 iii) 0.3974 iv) 0.0008 v) 0.3456
- 26) 5.03, 0.09, ரூபா 409.27
- 27) i) 0.0668 ii) a) 0.0045 iii) b) 0.1291
- 28) i) 0.2013 ii) 0.2876
- 29) i) 22.15, 5.59 ii) 0.3050 iii) 33.6 நிமிடங்கள்
- 30) i) 21.9, 2.22 ii) 123
- 31) 0.5403, 0.3967, 0.0630, ரூபா 21.57
- 32) i) 0.0478 ii) 0.0913 iii) 0.0827
- 33) i) 148, 14.42 a) 0.2027 b) 0.3909
 i) 8, 14.42 a) 0.5824 b) 0.2895 iii) 0.0926
- 34) i) 5, 2 ii) 0.0708 iii) 0.0655 iv) 0.2266
- 35) i) 0.0890 ii) 0.7767
- 36) i) 0.0717 ii) 0.2737 iii) 0.5681 37) 0.1196

- 38) i) 0.7925 ii) 0.0352 iii) 0.0101
 39) i) 0.1210 ii) 0.2033
 40) i) 0.9514 ii) 0.0668
 41) 10 பேர்
 42) 0.9699
 43) i) 0.00022 ii) 324
 44) i) 0.9966 ii) 0.1841
 45) i) 0.0778 ii) 0.0571 iii) 0.6811
 46) i) 0.0404 ii) 305
 47) 0.2655
 48) i) 0.9863 ii) 0.1335 iii) 0.0309 iv) 0.0038
 49) i) 0.685 ii) 40.5m iii) 40m, 4.8m iv) 0.575

v) B என்பவர் தெரிவு செய்யப்படுவார். ஏனெனில் 48m ஐ விடக் கூடுதலான தூரத்தை B என்பவர் வீசுவதற்கான நிகழ்தகவு கூடவாகும்.

- 50) 90, 8.573, 0.1103
 51) i) 0.0212 ii) 0.0943
 52) 0.3094
 53) 0.1033, 0.4677
 54) i) 0.1880 ii) 0.0318
 55) 0.0109
 56) i) 0.0819 ii) 0.2348 iii) 0.0085 iv) 0.8538

G. C. E. (A/L)

COMBINED AND HIGHER MATHEMATICS
(APPLIED MATHEMATICS COMPONENT)

PROBABILITY AND STATISTICS

(With 333 Questions and Answers)

V. T. Mathiyalagan
[B.Sc (cey), Dip-in-English]

ISBN - 955 - 9387 - 77

இந்தநூல் Bright Book Centre இன் இயக்குனர் பெரன். சக்திவேல் அவர்களால்
195, ஆட்டுப்பட்டத்தெரு, கொழும்பு-13 இலுள்ள லக்ஷ்மி அச்சகத்தில் அச்சிட்டு வெளியிடப்பட்டது.