ஆரம்ப நுண்கணிதம்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

PR

ுத் தமிழ்ச்

ஆரம்ப நுண்கணிதம்

2—CP 943—2,504 (6/67)

ஆரம்ப நுண்கணிதம்

ஏ. எஸ். ராம்சே, MA

පරිත්‍යාග කරණ ලදී

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினருக்காக
இலங்கை அரசாங்க அச்சகப் பகுதியிற் பதிப்பிக்கப்பெற்றது.

முதற் பதிப்பு : 1962
இரண்டாம் பதிப்பு : 1969

பதிப்புரிமை பெற்றது

ELEMENTARY CALCULUS

by

A. S. RAMSEY

Copyright by

THE CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Translated and Published in Ceylon by

THE EDUCATIONAL PUBLICATIONS DEPARTMENT

by arrangement with

THE CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக்கழக அச்சகத்தாரின் இசைவுடன் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினரால் வெளியிடப்பட்டது.

முதற் பதிப்பின் முன்னுரை

இந்நூல் ஏ. எஸ். ராம்சே என்பார் எழுதிய ஆங்கில மூலநூலின் மொழிபெயர்ப்பாகும். நுண்கணிதம் கற்கத் தொடங்கும் மாணவன் வகையீடு, தொகையீடு என்பவற்றின் தொடக்கச் செய்முறைகளைத் தெளிவாய் விளங்கிக் கொள்ளும் வகையில் இந்நூலை ஆக்குவதற்கு இந்நூலாசிரியர் பெரிதும் முயன்றுள்ளார். விஞ்ஞான பாடங்களைக் கற்கும் மாணவர்கள் அனைவரும் சிறப்பாகப் பல்கலைக்கழகத்திற் பௌதிகவியலையும் இரசாயனவியலையுந் தமது விசேட பாடங்களாகக் கொள்வோர் தொடக்கத்திலேயே நுண்கணிதத்தின் முதற்றத்துவங்களையும் அவற்றின் பிரயோகங்களையும் பற்றி அறிந்திருத்தல் இன்றியமையாததொன்றாகும். தற்பொழுது தமிழ்மொழியில் இப்பாடத்தைக் கற்பதற்கு வேறொரு நூலும் இல்லாமையால், இவ் வெளியீடு தாய்மொழியில் இப்பாடத்தைக் கற்பதற்கு மிகவும் ஊக்கமளிக்கும் எனக் கருதப்படுகின்றது.

நந்ததேவ விஜேசேகர,
ஆணையாளர்.

அரசகரும மொழித் திணைக்களம்,
(வெளியீட்டுப் பிரிவு)
கொழும்பு 7.
1961, செத்தெம்பர் 12.

இரண்டாம் பதிப்பின் முன்னுரை

இது தமிழ் மொழிப்பெயர்ப்பின் இரண்டாவது பதிப்பாகும். திருத்திய கணிதக் கலைச் சொற்கள் இப் பதிப்பில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

இந் நூலின் முதற் பதிப்பு கலாநிதி வ. பொன்னையா அவர்களால் மொழிபெயர்க்கப்பட்டு 1962 ஆம் ஆண்டில் வெளியிடப்பட்டது. இரண்டாம் பதிப்பு இத் திணைக்களத்தினரால் திருத்தி வெளியிடப்படுகிறது.

எம். ஏ. பெரேரா,
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர்.

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
" சிறிமதிபாயா ",
58, சேர் எணெஸ்ற் டீ சில்வா மாவத்தை,
கொழும்பு 3.
1967, ஏப்பிரல் 20.

දෙ වැනි සංස්කරයණය සඳහා පෙරවදන

දෙමළ පරිවර්තනයේ දෙ වැනි මුද්‍රණය වන මෙය සංශෝධිත පාරිභාෂික ශබ්ද මාලාවට අනුකූල ලෙස සංස්කරණය කරන ලද්දෙකි.

ආචාර්ය වී. පොන්නයියා විසින් පරිවර්තනය කරනු ලැබ 1962 දී රාජ්‍ය භාෂා දෙපාර්තමේන්තුවේ ප්‍රකාශන අංශයෙන් පළ කරන ලද මුල් මුද්‍රණය, දෙ වැනි මුද්‍රණය සඳහා සංස්කරණය කරන ලද්දේ දෙපාර්තමේන්තුවේ නිලධාරීන් විසිනි.

එම්. ඒ. පෙරේරා,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස්.

1967 අප්‍රියෙල් මස 20 වැනි ද,
කොළඹ 3,
ශ්‍රීමත් අර්නස්ට් ද සිල්වා මාවතේ, අංක 58හි,
''සිරිමතිපායේ''
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ දී ය.

பொருளடக்கம்

		பக்கம்
நூன்முகம்	.. ..	ix
அதிகாரம்		
I	முகவுரை	1
II	வகையிடல்	7
III	பிரயோகங்கள்	29
IV	வகையிடல் (தொடர்ச்சி)	54
V	தொகையிடல்	84
VI	வரையறுத்த தொகையீடுகள்	117
VII	பிரயோகங்கள் : பரப்பளவுகள், கனவளவுகள், புவியீர்ப்பு மையங்கள்	139
VIII	பகுதி வகையிடல்—சிறு மாற்றங்கள்	159
	இலகுவான பயிற்சி	173
விடைகள்	.. .. ..	188

நூன்முகம்

இந்நூல் பிரதானமாக நுண்கணிதங் கற்கத் தொடங்குவோரைக் குறித்தும், குறிப்பாகக் கணிதவறிஞராதலை விழையாது வகையிடுதலிலும், தொகையிடுதலிலும் செவ்விய தொழிற் பாட்டறிவைப் பெற விரும்புவோரைக் குறித்தும் எழுதப்பட்டது. நூற்பொருள் அட்சரகணித முறையாய் விரித்துரைக்கப்பட்டுள்ளது ; எனினும், வேண்டிய அட்சரகணித அறிவு சிறிதாகும் ; ஈருறுப்புத் தேற்றவறிவு வேண்டியதில்லை.

சிறு முகவுரைக்குப் பின் எல்லைகளைப் பற்றியும் அட்சரகணிதச் சார்புகளை வகையிடுதல்பற்றியும் ஓர் அதிகாரம் உண்டு. இதன்பின் கேத்திரகணித விளக்கம், ஏற்றங்கள், வகையீடுகள், உயர்விழிவுகள், வளையிகளின் விபத்திகள், சமன்பாடுகளின் மடங்கு மூலங்கள் இயக்கவியற் பிரயோகங்கள் என்பனபற்றி ஓர் அதிகாரம் உண்டு. இயக்கவியல் உண்மையாக வேறொரு பாடமாயிருத்தலால், அதுபற்றிய பல விடயங்கள் இந்நூலில் இல்லை.

அதன்பின், அதிபரவளைவுச் சார்புகள் உட்படத் திரிகோணகணிதச் சார்புகள், அடுக்குக் குறிச் சார்புகள், மடக்கைச் சார்புகள் என்பனவற்றைக் கொண்டு அதிகாரம் **iv** உள்ளது. ஏனெனில், ஆரம்பகணிதச் சாதாரணப் பயிற்சி நெறியொன்றில் ஒரு மாணாக்கன் சந்திக்கத்தக்க எளிய சார்புகள் எல்லாவற்றையும் வகையிடும் வழிகளையுந் தொகையிடும் வழிகளையும் இந்நூலிலிருந்து கற்கலாம் என்பது இந்நூலின் குறிக்கோள்களில் ஒன்றாகும். மாணாக்கர் எத்தகைய குறையறிவுடையவர்களாயினும் x இன் வலுக்களைத் தொகையிடச் செல்லுதற்கு அதிகாரம் **iv** முழுவதையுமாதல் அதன் பகுதிகளிற் சிலவற்றையாதல் தவிர்த்துச் செல்லுமாறும் இந்நூல் ஒழுங்காக்கப்பட்டுள்ளது. அத்தகைய மாணாக்கரின் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்தற்கு இந்நூலில், ஆரம்பப் பகுதிகள் பற்றி ஒரு பெருந்தொகையான எளிய பயிற்சிகள் உண்டு.

அதிகாரம் **v**, வகையிடலின் நேர்மாறாகத் தொகையிடல் பற்றிக் கூறும் ; அதன்கண் இருபடிகளையும் இருபடிச் சேடுப் பகுதிக் கணியங்களையும் கொண்ட பின்னங்கள், எளிய பிரதியீடுகள், பகுதித் தொகையீட்டு முறை என்பன முற்றாய்க் கூறப்பட்டுள்ளன.

அதிகாரம் **vi**, வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு பரப்பளவின் வகைக் குறிப்பாகக் காட்டும் ; இது அத்தொகையீட்டை ஒரு கூட்டுத்தொகையின் எல்லை என வரையறுக்கும் ; இவ்வரையறுப்பின் பின் வரையறுத்த தொகையீட்டின் ஆரம்ப இயல்புகளும் முடிவில்லாத எல்லையைக் கொண்ட தொகையீட்டின் சில இலகுவான பயிற்சிகளும் உண்டு. சைன் x கோசை x என்பனவற்றின் வலுக்களினது தொகையீடுகள் முற்றாய்ச் செய்யப்பட்டுள்ளன. பின்னர், பரப்பளவுகள், கனவளவுகள், புவியீர்ப்பு

மையங்கள் என்பனவற்றைக்கொண்ட ஓர் அதிகாரம் உண்டு; இந்நூல் பகுதி வகையிடலையும் பல மாறிகளின் சிறுமாற்றங்களுக்கு அதன் பிரயோகத்தையுங் கொண்ட ஓர் அதிகாரத்தோடு முடிவடையும்.

இந்நூலின் பருமனை ஒரு நியாயமான அளவிற்கு வரையறுத்தல் காரணமாக n ஆம் பெறுதிகளைக் காணும் முறைகள், தொடராயுள்ள சார்புகளின் விரிகள் ($\int$ சைன் $^n x\, dx$ ஐத் தவிர), ஒடுக்கற் சூத்திரங்கள், தளவளையிகளின் தொடலி, செவ்வன்கள் என்பன தவிர்க்கப்பட்டுள்ளன; எனினும், ஈற்றில் தந்தவைபற்றிய சில செய்கைகள் ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதம் பற்றிய இதன் துணைநூலிற் காணப்படும்.

இந்நூலிலுள்ள பாடங்களினது கொள்கையின் அளவு அதன் நோக்கத்திற்குப் போதுமானதென எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது. சில எடுத்துக்காட்டான நூல்கள் வகையீட்டைப் பயன்படுத்துவதில்லையெனினும் யான் பெறுதிகளுடன் வகையீடுகளையும் புகுத்தியுள்ளேன்; அதற்குக் காரணம் சிறப்பாகத் தொகையிடல்பற்றி வகையீட்டுக்கொள்கை பயன்பாடுடையது என்பதே. தொகையிடும் பாடம் $d\phi/dx$ என்னும் பெறுதியன்றி $d\phi$ என்னும் வகையீடு என நிலைநிறுத்தல் நியாயமானது. வேறு வழிகளிற் பார்த்தால், இந்நூல் தேற்றங்களிலும் பார்க்க செய்கைகளிற் கூடுதலான அக்கறை கொண்டுள்ளது. தொடர்ச்சியான வளைவுகளையுடைய வளையிகள் உண்டு என்று எடுகொள்ளுங் கோட்பாட்டை அடிப்படையாகக்கொண்டு பல வாதங்கள் இந்நூலின்கண் உள்ளன. எனினும், சிலசமயங்களில் எச்சரிக்கைகளைத்தவிரப் பாடத்தொடர்ச்சி பற்றி யாதொரு குறிப்புமில்லை.

சைன் $\infty = 0$, கோசை $\infty = 0$ என்னும் அசாதாரண முடிபுகளின் நிறுவலைக் கொண்ட நூலைக் கற்றவரும், பல தரப்பட்ட வயதுடைய இளைஞரையும் பட்டங்கோரிகளையுங் கற்பிப்பதிலுஞ் சோதிப்பதிலும் பல்லாண்டு காலம் போக்கின எழுத்தாளன் ஒருவனது கணித நூல் மாணக்கன் கற்கத்தக்க விடயங்களைக் கொண்டிருத்தல் மட்டுமன்றி, கற்றுமறக்க வேண்டிய விடயங்களை சேர்த்துக்கொள்ளாததாயும் இருத்தல் வேண்டும். விழிப்பற்றோரைச் சுற்றிப் பல பொறிக்கிடங்குகள் இருக்கும் காரணத்தாலும் செல்வழியில் பல இடர்ப்பாடுகள் இருப்பதாலும் ஆரம்ப நூலொன்றிற்றுனும் இவ்விலட்சியத்தை அடைய எதிர்பார்த்தல் மடமையாயிருக்கலாம்; எனினும், அவ்விலட்சியத்தைப் பெற எண்ணல் செம்மையானது. இந்நூல் அவ் விலட்சியக்குறைபாடுடைய அளவிற்கு எள்ளற்குரியது.

இச்சிறு நூல்களை யான் எழுதவேண்டுமெனத் தூண்டியதற்கும் கணக்குகளின் விடைகளை சரிபார்த்து அச்சுப்பிழை நீக்கியதற்கும் என் மருகனுகிய இரேஷாம் பள்ளியைச் சேர்ந்த திரு. F. A. ஸ்பென்சருக்கு என் உளமார்ந்த நன்றி உரியது.

ஏ. எஸ். ரா.

கேம்பிறிட்ஜ்,
நவம்பர், 1932.

மூன்றும் பதிப்பின் முகவுரை

கணிதங் கற்கத் தொடங்குவோரின் தேவைகளை மேலும் பூர்த்தி செய்தற்பொருட்டு இந்நூலின் முடிவில் இலகுவான பயிற்சிகளின் வகுக்கப்பட்ட தொகுதியொன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிகாரங்களின் முடிவுகளிற் சில கடுமையான கணக்குகளுஞ் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

ஏ. எஸ். ரா.

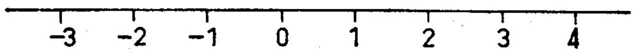
யூலாய், 1946

அதிகாரம் I

முகவுரை

1.1 வகையீட்டு நுண்கணிதமுந் தொகையீட்டு நுண்கணிதமுந் திட்டமாய்ப் பேசுமிடத்துத் தனி அட்சரகணிதப் பொருள்பற்றியனவாகும்; அவை கேத்திரகணிதக் குறிப்பு யாதுமின்றி விருத்தியாக்கப்படலாம். எனினும், அவற்றின் பிரதானமான பிரயோகங்களிற் பல கேத்திரகணிதத்திற்கு உரியனவாதலாலும், நுண்கணிதக் கொள்கையில் மிகுதியானவை கேத்திரகணித இயற்கையுணர்வு துணைகொண்டு மிக எளிதாக விளக்கக்கூடியனவாதலாலும், நாம் அட்சரகணிதச் சமன்பாடுகளுக்குங் கேத்திரகணித உருவங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பின் சிறு விளக்கத்தோடு ஆரம்பித்து நூல் செல்லச் செல்ல கேத்திரகணிதக் கருத்துக்களிலிருந்து நாம் பெறக்கூடிய உதவியைப் பெறக் கருதுகின்றோம்.

அட்சரகணிதமானது எண்கணிதத்தின் பொதுமைப்பாடுடைய ஒரு வடிவம்; அல்லது, எண்ணின் விஞ்ஞானமாகும்; கேத்திரகணிதமானது நிலையையும் இடத் தொடர்புகளையும் பற்றிய விஞ்ஞானம். இவை இரண்டிற்கும் இடையேயுள்ள மூலத்தொடர்பு படிவகுத்த கோலிற் செய்தமாதிரி எண்களை ஒரு கோட்டிற் புள்ளிகளின் நிலைகளாற் குறிக்கலாமென்பதே.



இவ்வாறு ஒரலகைக் குறிப்பதற்கு ஒரு நேர்கோட்டில் யாதுமோர் இசைவான நீளத்தைத் தேர்ந்து, அளவீட்டின் பூச்சியமாக அக்கோட்டின் யாதும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து, பூச்சியத்திலிருந்து தொடங்கிச் சமநீளங்களை அளப்பதால் 1, 2, 3, ... என்னும் எண்களின் கேத்திரகணித வகைக் குறிகளைப் பெறலாம்.

இன்னும், பூச்சியத்தின் ஒரு பக்கத்தில் அளக்கப்படும் நீளங்கள் நேரெண்களையும், எதிர்ப் பக்கத்தில் அளக்கப்படும் நீளங்கள் மறையெண்களையுங் குறிக்கின்றன என நாம் இசையலாம்; இவ்வாறு ஒரே நேர்கோட்டில் நாம் விரும்பும் எத்தூரத்திற்கும் இரு திசைகளிலும் அளவீடுகளை விரிப்பதால் எல்லா நேர்முழுவெண்களினதும் மறைமுழுவெண்களினதும் முழுவகைக்குறிப்பையும் நாம் பெறலாம்.

எனினும் வகைக்குறிப்பு முழுவெண்களுக்கெனக் கட்டுப்படுத்தப்படவில்லை; படிவகுத்த கோலிற்போல, 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலுள்ள கோடு பல்வேறு விதங்களில், உதாரணமாக எட்டிலொன்றுகளாய், அல்லது பத்திலொன்றுகளாய், அல்லது நாம் விரும்புமாறு யாதுமொரு விதத்திற்

பிரிக்கப்பட்டு, அப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றுஞ் சிறு பிரிவுகளாய்ப் பிரிக்கப்படலாம். ஆயின், 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையில் இருக்கின்ற ஒவ்வோர் எண்ணிற்கும் ஒப்ப அக்கோட்டில் ஒரு குறித்த புள்ளி உண்டு எனலாம்.

“2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையில் எத்தனை எண்கள் இருக்கின்றன”, என நாம் வினவினால், “2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலேயன்றிக் குறித்த எச்சோடி எண்களுக்கு இடையிலும் முடிவிலித் தொகை எண்கள் உண்டு” என்பதே விடையாகும். ஏனெனில் சிறு பிரிவுகளாக்கும் செய்கையின் போது கட்டாயமாக நிறுத்தப்பட வேண்டிய ஒரு இடம் இல்லை. அது என்றுந் தொடரப்படலாம்; அதுபோல, ஒரு கோட்டிற் குறித்த எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையில் முடிவிலித் தொகைப் புள்ளிகள் உண்டு எனலாம்.

“தந்த ஓர் எண்ணுக்கு அடுத்த எண்” என்றுற் கருத்து என்ன? கூட்டல் விருத்தியைப் போல யாதோ ஒரு விதியின்படி தேரப்பட்ட எண்களைப்பற்றி, அல்லது முழுவெண்களைப்பற்றி நாம் பேசுமிடத்து $n+1$ என்பதே n இன்பின் அடுத்த எண் என்று விடையிறுத்தல் எளிது. எண்களைப்பற்றிப் பொதுவாகப் பேசுமிடத்து, தந்த ஓர் எண்ணுக்கு அடுத்ததாய் ஓர் எண்ணும் இல்லை. b என்பது a யிற்கு வேறான ஓர் எண்ணாயின் a யிற்கும் b யிற்கும் இடையில் $\frac{1}{2}(a+b)$ என்னும் ஓர் எ்ண்ணும் உண்டு; ஆயின், b என்பது a யிற்கு அடுத்த எண்ணாகாது; a யிற்கு அடுத்ததாய் யாது ஓர் எண்ணும் இருத்தல் முடியாது.

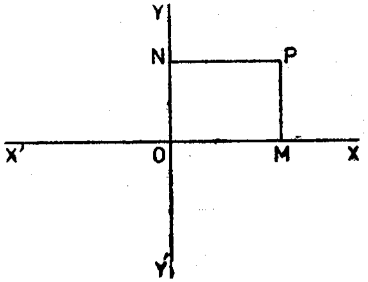
அதுபோல, ஒரு கோட்டிலுள்ள **எல்லாப்** புள்ளிகளையும் நாம் எடுத்து நோக்குமிடத்து, தந்த ஒரு புள்ளிக்கு அடுத்ததாய் நோக்கப்படத்தக்க புள்ளியாதும் இல்லை; இரு புள்ளிகள் எவ்வளவிற்கு ஒருங்கு நெருங்கியிருந்தாலும் அவற்றின் இடைத்தூரத்தை மேலுஞ் சிறு பிரிவுகளாகப் பிரித்தல் முடியும் என்பதும், முடிபு ஒருபோதும் பெறப்படாது என்பதுமே அதற்குக் காரணமாகும்.

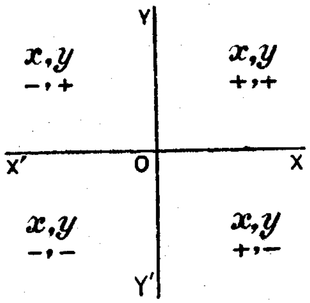
ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளினாற் குறிக்கப்படும் எண்களுக்கிடையில், முழுவெண்கள், பின்னங்கள், முடிவுறு தசமங்கள் என்னும் இவையேயன்றி முடிவுறு தசமங்களாற் குறிக்கப்படாத $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π என்பன போன்ற **விகிதமுரு** எண்களும் அமைந்துகிடக்கின்றன.

0 என்னும் புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{2}$ வைக் குறிக்கின்ற புள்ளியினது தூரம், இரு பக்கங்களும் ஓரலகு நீளமுள்ள செங்கோண முக்கோணி ஒன்றினுடைய செம்பக்கத்தை எடுப்பதால் எளிதிற் காணப்படலாம். விகிதமுருவெண் கொள்கையை ஆராயாது எண்களுக்கும் ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளுக்கும் முழுவொப்புமை உண்டு என்று கூறல் எங்கள் நோக்கத்திற்குப் போதியதாகும். ஒவ்வோர் எண்ணுக்கும் ஒத்த புள்ளி ஒன்று உண்டு; ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்த ஓர் எண்* உண்டு.

*இங்கே குறிப்பிடப்பட்ட எண்கள் எல்லாம் **மெய்** எண்கள். **சிக்கலான** அல்லது **கற்பனையான** ($\sqrt{-1}$ ஐ உள்ளடக்கியுள்ள) எண்களுக்கு ஒரு கேத்திரகணித விளக்கம் உண்டு. ஆனால் இங்கே நாம் அவ்வெண்களைப்பற்றி அக்கறை கொள்ளவில்லை.

1.2 ஆள்கூற்றச்சுக்கள். ஒரு கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலை ஓர் எண்ணாலே துணியப்படும் என்பதைக் கண்டுள்ளோம். அதுபோல, ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலை இரண்டு எண்களாலே துணியப்படும். தந்த தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் XOX', YOY' என்னும் இரு கோடுகளை வரைகின்றோம். இக்கோடுகள் **ஆள்கூற்றச்சுக்கள்** எனப்படும். இக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி O **உற்பத்தி** எனப்படும்; பின்னர் அத்தளத்தில் P என்னும் யாதும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து XOX', YOY' என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாய் PM, PN என்பவற்றை வரைகிறோம். OX, OY என்னுங் கோடுகளிலுள்ள M, N என்னும் புள்ளிகளானவை தேர்ந்த அளவிடையின்படி OM, ON என்னும் நீளங்களினுடைய எண்ணளவுகளான வரையறையுள்ள எண்களைக் குறிக்கின்றன; P யினது நிலை இவ்வெண்களால் வரையறுக்கப்படுகின்றதெனப்படும். இவ்வாறு எவையேனும் இரண்டு எண்கள் ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கின்றன; அவ்வெண்கள் அப்புள்ளியின் **ஆள்கூறுகள்** எனப்படும். $X'OX$ என்பது x – அச்சு எனப்படும்; OM என்பது புள்ளி P யின் x ஆள்கூறு, அல்லது **இடைக்கூறு** எனப்பட்டு x இனாற் குறிக்கப்படும். $Y'OY$ என்பது y – அச்சு எனப்படும்; ON அல்லது MP என்பது புள்ளி P யின் y ஆள்கூறு, அல்லது **நிலைக்கூறு** எனப்பட்டு y யினாற், குறிக்கப்படும்.



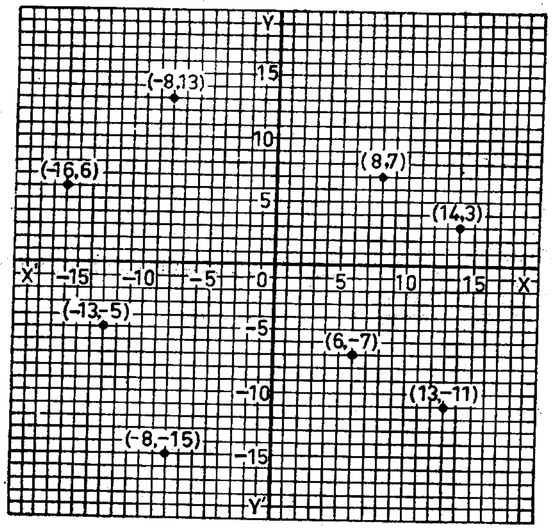


இவ்வாறு, P என்னுங்குறித்த புள்ளிக்கு $OM=2$ ஆயும் $ON=1{\cdot}7$ ஆயும் இருந்தால், P என்பது $x=2$, $y=1{\cdot}7$ ஆகிய புள்ளி என நாம் கூறலாம்; இதனைச் சுருக்கமாகச் சொல்ல விரும்பின், P என்பது $(2, 1{\cdot}7)$ என்னும் புள்ளி எனலாம். x, y என்னும் இரண்டிற்கும் ஒரே அளவிடையை வழங்கவேண்டும் என்பதில்லை.

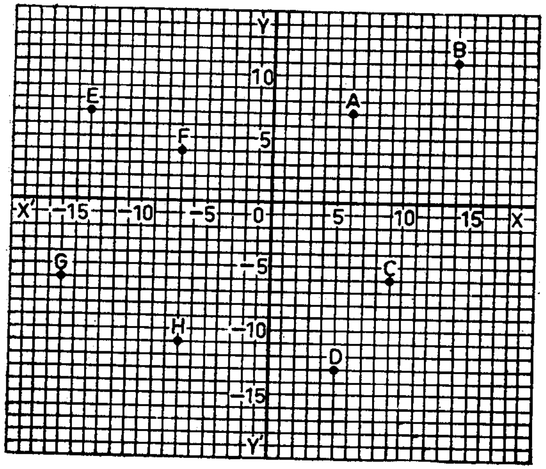
1.3 குறிகளின் பொதுவான வழக்கு படத்திலுள்ளவாறு அச்சுக்களைக் கொண்டதாகும். நேரெண்கள் OX, OY என்பனவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாற் குறிக்கப்படுகின்றன; மறையெண்கள் OX', OY' என்பனவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாற் குறிக்கப்படுகின்றன.

அச்சுக்கள் அத்தளத்தை நான்கு கால்வட்டங்களாகப் பிரிக்கின்றன ; இக்கால்வட்டங்களில் x, y என்னும் ஆள்கூறுகளுக்கு படத்திற் காட்டிய வாறு குறிகள் உள.

ஒரு தொகை புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் இதனைச் சேர்ந்த படத்திற் (படம் A யிற்) குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.



படம் A



படம் B

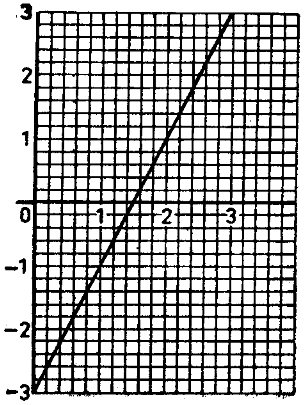
1.4 பயிற்சி.

1. இதனைச் சேர்ந்த படத்தில் (படம் **B** யில்) **A, B, C, . . .** என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

2. பின்வரும் புள்ளிகளின் நிலைகளை ஒரு படத்திற் குறிக்க :—

$(1, -1{\cdot}5), (-3, 7), (-2, -4{\cdot}5), (3, 4), (-3, -2).$

1.5 வரைபுகள். சென்ற பயிற்சிகளில் எழுமாறுய்த் தேர்ப்பட்ட புள்ளிகளைக் குறிப்பதற்குப் பதிலாக x பற்றி y யை உணர்த்துகின்ற ஒரு சமன்பாட்டை எடுத்து அதன்பின் x இனுடைய ஒரு தொகைப் பெறுமானங்களைத் தேர்ந்து y யினுடைய ஒத்த பெறுமானங்களை எடுத்தால், அவ்வாறு பெறப்பட்ட புள்ளிகள் அப்படத்தில் வரையறுத்த ஒரு கோட்டிற் கிடப்பதைக் காண்கின்றோம்.



உதாரணமாக, $y = 2x - 3$ எனின், x இற்குச் சில பெறுமானங்களையும் y யிற்கு ஒத்த பெறுமானங்களையும் அட்டவணைப்படுத்துகிறோம். இவ்வாறு பெறும் அட்டவணை பின் வருமாறு ;—

$$x = \ \ 0, \ 1, \ 2, \ 3,$$
$$y = -3, -1, \ 1, \ 3,$$

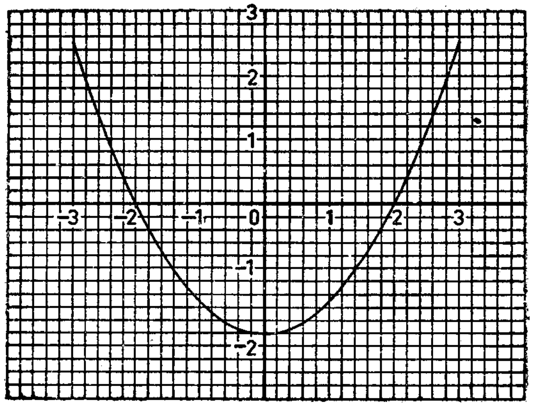
இப்புள்ளிகளை ஒரு படத்திற் குறிக்க ; இவை ஒரு நேர் கோட்டிற் கிடத்தலைக் காண்கின்றோம்.

இனி, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ எனின், நாம் பின்வரும் ஒத்த பெறுமானங்களைப் பெறுகின்றோம்:

$$x = -3, \ -2, \ \ -1, \ \ 0, \ \ \ 1, \ 2, \ \ 3,$$
$$y = 2{\cdot}5, \ \ \ 0, \ -1{\cdot}5, -2, -1{\cdot}5, \ 0, \ 2{\cdot}5,$$

ஒத்த புள்ளிகள் படத்திற் காட்டியவாறு ஒரு வளையியிற் கிடப்பதைக் காண்கின்றோம்.

இந்த இரண்டு பயிற்சிகளிலும் x இன் இடைப்பட்ட பெறுமானங்களையும் y யின் ஒத்த பெறுமானங்களையும் எடுத்தோமாயின், வகைக்கு ஏற்றவாறு நேர்கோட்டிலாதல் வளையியிலாதல் கிடக்கின்ற புள்ளிகளைப் பெறுகின்றோம்.



1.6 y, x என்பனவற்றைக் கொண்ட ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாடு வரைபு முறையாற் குறிக்கப்படலாம் என்பதற்கும், பொதுவாக அது ஒரு வளையியைக் குறிக்கும் என்பதற்கும், சென்ற பிரிவின் பயிற்சிகள் எடுத்துக்காட்டுகளாகும். x, y என்பனவற்றில் முதற் படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்குமென்பது ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணித நூல்களிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. ஏனைய சமன்பாடுகள் எல்லாம் வளையிகளைக் குறிக்கும்.

அவ்வளையியிலுள்ள **ஒவ்வொரு** புள்ளியின் x உம், y யும் தந்த சமன் பாட்டைத் தீர்க்கும் என்பதை உணர்தல் பிரதானமானது. "$y=\frac{1}{2}x^2-2$ என்னும் நிபந்தனையை அத்தளத்திலுள்ள எப்புள்ளிகள் தீர்க்கும் ?", என வினவினுல், "குறித்த ஒரு வளையியிற் கிடக்கின்ற ஒவ்வொரு புள்ளியுந் தீர்க்கும்," என்பதே அதற்கு விடையாகும். அவ்வளையியிலுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் குறிப்பதற்கு x, y என்பன வற்றை நாம் வழங்கினுல், அவற்றை "நடப்பாள்கூறுகள்" என்கிறேம்.

அதிகாரம் II

வகையிடல்

2.1 மாறிகள். x என்னுங் குறியீடு ஒரு கூட்டம் எண்களுள் யாதும் ஒன்றைக் குறிக்குமாயின் அது ஒரு **மாறி** எனப்படும்; அது குறிக்கத்தக்க எண்களின் கூட்டம் அதன் **வீச்சு,** அல்லது **மாறுதகைமைப் புலம்** எனப் படும். உதாரணமாக, x என்பது 100 இலுங் குறைந்த நேர் முழுவெண் களுள் யாதும் ஒன்றைக் குறித்தால், அதன் வீச்சு $1, 2, 3, \ldots .99$ ஆகும். அன்றி, x என்பது -2, 5 என்பனவற்றிற்கு **இடையிலுள்ள** யாதும் ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறிக்கலாம்; இவ்வகையில் அவ்வீச்சை நாம் $-2<x<5$ என்னுங் குறியீடுகளால் வரையறுத்து "x ஆனது -2 இற்கும் 5 இற்கும் இடையிற் கிடக்கும்" என வாசிக்கலாம். அன்றி x என்பது -2 இலிருந்து 5 வரையுமுள்ள யாதுமொரு மெய்யெண்ணைக் குறித்தல் கூடும்; இது $-2 \leqslant x \leqslant 5$, என்னுங் குறியீடுகளாற் காட்டப்படும். -2, 5 என்னும் முனைப்புள்ளிகள் இப்போது அவ்வீச்சின் பகுதிகளாகும்; ஆனல் முன்வகையில் அவை அவ்வாறு இருக்கவில்லை. அன்றி, x என்பது யாதும் ஒரு மெய்யெண்ணுயிருக்கலாம்; எனின், வீச்சு, $-\infty<x<\infty$ என்னுங் குறியீடுகளாற் காட்டப்படும்; இங்கு $-\infty$, ∞ என்பன, இரு திசைகளிலும் x – அச்சு முடிவின்றி நீட்டப்பட, அதன்கண் அளக்குந் தகைமையின் எல்லைகளுக்கு அப்பாற்பட்ட நிலைகளைக் குறிக்கும். ∞ என்னுங் குறியீட்டை "முடிவிலி" எனக் கூறலாம்; அது ஒருபோதும் அடையப் படாதாதலின் அது ஓரெண்ணுகாது; ஆனல் x என்பது ஓர் எண்ணைக் குறிக்கின்றது; ஆயின், "$x=\infty$" என நாம் ஒருபோதுஞ் சொல்வதில்லை. அது ஓர் எண்ணை எண்ணுகாத ஒன்றுக்குச் சமனுக்குதலாய் முடியும் என்பதே அதற்குக் காரணம். x ஆனது நாம் நியமிக்கக்கூடிய யாதும் ஓர் எண்ணிலும் பெரிதாகும் வரைக்குங் கூடுகின்றது எனக் காட்ட விரும்பி ஞேமாயின், "x முடிவிலியை அணுகும்" எனக் கூறுகின்றேம்; "இதனை $x \to \infty$" என்னுங் குறியீடுகளால் உணர்த்துகின்றேம்.

2.11 சார்புகள். x என்னும் ஒரு மாறியின் பெறுமானம் அறியப்பட, y என்னும் ஒரு மாறியின் பெறுமானந் துணியப்படுமாறு y யானது x ஓடு தொடர்புடையதாயின், y என்பது x இன் சார்பு எனப்படும். x இனுடைய பெறுமானங்கள் விரும்பியபடி தேரப்படலாமாகையால், x என்பது **சாரா மாறி** எனப்படும்; y யினுடைய பெறுமானங்கள் x இனுடைய தேர்ந்த பெறுமானங்களைச் சார்ந்து நிற்கின்றமையால், y என்பது **சார் மாறி** எனப்படும்.

x ஐக் கொண்ட யாதும் ஓர் அட்சரகணிதக் கோவை x இன் சார்பாகும்; எனினும், சார்பியல்புக் கொள்கை அட்சரகணிதக் கோவைகளுக்கு கட்டுப்பட்டதொன்றன்று ; சைன் x, தான் x முதலிய திரிகோண கணிதச் சார்புகளும், e^x, மட x, e^{x^x} முதலிய அதீதச் சார்புகளும், இவற்றுள் யாதுமொன்றை அட்சரகணித முறையாலோ பிறவற்றாலோ கையாள்வதாற் பெறுஞ் சார்புகளும் உண்டு.

இங்கு நாம் எடுத்து நோக்கும் சார்புகளில் பெரும்பான்மை எளிய இனத்தைச் சேர்ந்த அட்சரகணிதச் சார்புகளாகும் ; அவை $y=x^3$, $y=ax^2+b$, $y=1/(x+1)$ முதலிய தொடர்புகளாற் குறிக்கப்படும்.

சென்ற அத்தியாயத்தில் நாம் கற்றவற்றிலிருந்து, ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதமானது அத்தகைச் சார்புகளை வரைபு முறையாற் குறிக்கும் ஓர் எளிய வழியைத் தருகின்றது என்பது தெளிவு. x என்னும் மாறி தன் மாறுதகைமைப் புலத்தில் வீசும்போது, அச்சார்பில் என்ன மாற்றங்கள் நடைபெறுகின்றன என அறிதலே எம் நோக்கமாய் இருத்தலால், அச்சார்பின் கேத்திரகணித வகைக்குறி, அல்லது படம் இந்நோக்கத்திற்குப் பெரிதுந் துணைபுரியும்.

$f(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$ முதலிய குறியீடுகள் "x இன் சார்பு" என்னுஞ் சொற்றொடரின் குறுக்கங்களாக வழங்கப்படுகின்றன.

இவ்வாறு $f(x)$ என்பது x^3-3x+2 என்பதைக் குறித்தால், $f(a)$ என்பது x ஐ a யிற்குச் சமனாக்க, அச்சார்பின் பெறுமானமாகும்;

அதாவது $\quad f(a)=a^3-3a+2.$

அதுபோல, $\quad f(-1)=-1+3+2=4.$

$$f(0)=0-0+2=2,$$

$$f(5)=125-15+2=112,$$

இவ்வாறே பிறவும்.

2.12 பயிற்சி.

1. $f(x)=x^2+2x-1$ எனின், $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக ;

$$f(x+h)=f(x)+2h(x+1)+h^2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

2. $f(x)=\dfrac{x-a}{x}$ எனின், $f(a)$, $f(2a)$, $f(-a)$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக ;

$$f(x+h)-f(x)=ha/x(x+h) \text{ என்றுங் காட்டுக.}$$

3. $f(x)=\dfrac{x-a}{x}+\dfrac{x}{x-b}$ எனின்,

$$f(a+b),\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.}$$

4. $f(x)=(x-a)^2(x-b)^2$ எனின் $f(a+b)$ இன் பெறுமானத்தை எழுதுக.

2.2 எல்லைகள். $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$, என்னும் எண்களின் தொடரை ஆராய்ந்தால், அத்தொடரை மேலும் மேலுந் தொடர அவ்வெண்கள் சிறியனவாக வருதலைக் காண்கின்றோம். அவை நாம் நியமிக்க விரும்பும் யாதும் ஓர் எண்ணிலுஞ் சிறியனவாக ஆக்கப்படலாம் — உதாரணமாக, 0·000001 இலுஞ் சிறிய அத்தொடரின் உறுப்பொன்று தேவைப்பட்டால் நாம் $\frac{1}{1000001}$ என்பதை மாத்திரம் எடுத்தாற் போதும். இவ்வாறே பிறவும். ஆயின், அத்தொடரின் உறுப்புகளினது தொகை கூடக் கூட அவை யாதுமொரு நியமித்த பருமனாற் பூச்சியத்தின் அண்மையை அணுகும் என்று கூறல் நியாயமாகும் ; எனினும், பூச்சியமானது ஒருபோதும் அடையப்படாதாகையால் அத்தொடரின் உறுப்பாகாது. இவ்வகையில், பூச்சியமானது " அத்தொடரின் எல்லை " என்று கூறுகின்றோம்.

முற்கூறிய முடிபைக் குறியீட்டு வடிவத்திற் பின்வருமாறு உணர்த்தலாம் ; x ஆனது நேர் முழுவெண் பெறுமானங்களூடாக முடிவிலியை அணுகினால், $\frac{1}{x}$ என்னுஞ் சார்பு பூச்சியத்தை அணுகும்.

அதுபோல, வழியில் எல்லா எண்பெறுமானங்களுக்குமூடாகச் சென்று $x\to\infty$ எனின், $\frac{1}{x}\to 0$ என்பது உண்மையாகும் ; n என்பது யாதுமொரு நேர்ச் சுட்டியாயின் $\frac{1}{x^n}\to 0$ என்பதும் உண்மையாகும்.

அதுபோல, x என்னும் எண் குறைதலுற $\frac{1}{x}$ என்னும் பின்னங் கூடுதலுறும் ; x என்பது சிறிதாகச் சிறிதாக $\frac{1}{x}$ இன் பெறுமானம் மிகப் பெரிதாகும் ; ஆயின், x என்பதைப் பூச்சியத்திற்கு அண்மையில் எடுப்பதால், $\frac{1}{x}$ என்பதை எத்துணைப் பெரியதோர் எண்ணிலும் பெரிதாகச் செய்யலாம் ; இதனை $x\to 0$ ஆக, $\frac{1}{x}\to\infty$ ஆகும் என்னுங் கூற்றினால் உணர்த்துகின்றோம்.

2.21 $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ என்னுஞ் சார்பை அடுத்ததாக ஆராய்க. x என்பது a யிற்குச் சமனாகும்போது, அச்சார்பு $\frac{0}{0}$ என்னும் வடிவத்தை எடுக்கின்றது ; இது பொருளற்றது ; எனினும், x என்பது a என்னும் எண்ணை அணுக அச்சார்பிற்கு யாது நிகழ்கின்றதென நாம் ஆராயும்

போது நாம் ஒரு வரையறையுள்ள முடிபைப் பெறுகின்றோம். எனின் $x=a+h$ எனப் பிரதியிடுவோம்; இங்கு h என்பது சிறிதாகுக; பின்னர் h என்பதைப் பூச்சியத்திற்குக் குறைந்து செல்லும்படி செய்க, அச்சார்பு

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{a+h-a}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h \text{ ஆகும்.}$$

ஆயின், $h\to 0$ ஆக, அல்லது $x\to a$ ஆக, சார்பு $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}\to 2a$ ஆகும்.

$2a$ என்பதை, $x\to a$ ஆக $\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ இன் எல்லை எனக் கூறுகின்றோம்.

x என்பது a யை அணுக $f(x)$ இன் எல்லையும், $x=a$ ஆக $f(x)$ இன் பெறுமானமும் ஒரே பொருளாய் இருக்கத் தேவையில்லை என்பது கவனிக்கப்படவேண்டும். சிறிது முன் ஆராய்ந்த வகையில், அதாவது, $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ என்னும் வகையில் $f(a)=\dfrac{0}{0}$; எனினும், $x\to a$ ஆக, $f(x)$ இன் எல்லை $2a$ ஆகும்; $\dfrac{0}{0}$, $2a$ என்பன ஒரே பொருளல்ல.

எனினும், $f(x)=x^2+a^2$ ஆயின், $f(a)=2a^2$; $x\to a$ ஆக $f(x)$ இன் எல்லையும் $2a^2$ ஆகும். ஆயின், $x\to a$ ஆகப் பெறும் எல்லையானது $x=a$ ஆகும்போது அச்சார்பின் பெறுமானமாகலாம்; ஆனால் அது அவ்வாறு இருக்கவேண்டும் என்னும் நியதி இல்லை. $\underset{x\to a}{\text{எல்}}$ என்னும் குறியீடு "x என்பது a யை அணுக வரும் எல்லை" என்பதற்காகப் பெரும்பாலும் வழங்கப்படுகின்றது; எனின் மேலுள்ள முடிபு

$$\underset{x\to a}{\text{எல்}}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a \text{ என எழுதப்படும்.}$$

2.22 சென்ற இரு பிரிவுகளிலும் நாம் எடுத்துக்காட்டிய சார்பின் எல்லையைப் பற்றிய கொள்கையைப் பின்வருமாறு ஒரு வரைவிலக்கணத்தில் அடக்கலாம்;

x என்பதை a யிற்குப் போதிய அளவு அணித்தாய் எடுப்பதால் $f(x)$, A என்பனவற்றின் வித்தியாசம் எத்துணைச் சிறிதான யாதுமொரு நியமித்த எண்ணிலுஞ் சிறிதாய் ஆக்கப்படலாமெனின், x என்பது a என்னும் எண்ணை அணுக $f(x)$ என்னுஞ் சார்பின் எல்லை A யாகும்.

2.3 **இரு சார்புகளின் கூட்டுத்தொகையின், அல்லது வித்தியாசத்தின் எல்லை அச்சார்புகளின் எல்லைகளினது கூட்டுத்தொகை, அல்லது வித்தியாசமாகும்.**

$\underset{x\to a}{\text{எல்}} f(x)=F$ என்றும் $\underset{x\to a}{\text{எல்}} g(x)=G$ என்றுங் கொள்க. x என்பது a யிற்குப் போதிய அளவு அணித்தாய் எடுக்கப்பட்டால் $f(x)$, F என்பனவற்றின் வித்தியாசமும் $g(x)$, G என்பனவற்றின் வித்தியாசமும் நாம் நியமிக்க விரும்பும் யாதும் ஓர் எண்ணிலுஞ் சிறியனவாய் ஆக்கப்

படலாமென்பதே இக்கூற்றுக்களின் பொருள்; ஆயின், a யிற்கு அண்மையிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு

$$f(x)=F+\alpha \text{ என்றும் } g(x)=G+\beta \text{ என்றும்}$$

நாம் எழுதலாம். இங்கு, x என்பது a யை அணுக, α, β என்னும் இரண்டும் பூச்சியத்தை அணுகுஞ் சிற்றெண்கள்.

ஆகவே, $$f(x)\pm g(x)-(F\pm G)=\alpha\pm\beta$$

இன்னும் $$x\to a, \text{ ஆக } \alpha\to 0,\ \beta\to 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $$\underset{x\to a}{\text{எல்}}\{f(x)\pm g(x)-(F\pm G)\}=\underset{x\to a}{\text{எல்}}(\alpha\pm\beta)=0,$$

$$\underset{x\to a}{\text{எல்}}\{f(x)\pm g(x)\}=F\pm G=\underset{x\to a}{\text{எல்}}f(x)\pm\underset{x\to a}{\text{எல்}}g(x).$$

அதுபோலப் பின்வருவனவும் நிறுவப்படலாம்:

இரு சார்புகளின் பெருக்கத்தினது எல்லை, அவற்றினது எல்லைகளின் பெருக்கத்திற்குச் சமன். பிரிக்குமெண்ணின் எல்லை பூச்சியமன்றெனின் இரு சார்புகளின் ஈவுகளின் எல்லை அவற்றின் எல்லைகளின் ஈவிற்குச் சமன்.

2.31 அடிப்படையான எல்லை $\underset{x\to a}{\text{எல்}}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$.

n என்பது முழுவெண் அல்லது பின்னம், நேரெண் அல்லது மறையெண்ணை யாதுமொரு விகிதமுறும் எண்ணுயிருக்கும்போது இம்முடிபை நிறுவல்.

(i) **n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுகுக.** நெடும்பிரித்தலால்,

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-1}$$

எனக் காட்டலாம்; ஈவில் n உறுப்புகள் உண்டு. $x\to a$ ஆக ஈவிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் a^{n-1} ஆகும். ஆகவே, n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$$\underset{x\to a}{\text{எல்}}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

(ii) **n என்பது ஒரு நேர்ப் பின்னமாகுக.** p, q என்பன நேர் முழுவெண்களாயிருக்க $n=p/q$ ஆகுக. $x=y^q$ ஆகுக; $a=b^q$ ஆகுக. எனின்,

$$x^n=(y^q)^{\frac{p}{q}}=y^p,\ a^n=(b^q)^{\frac{p}{q}}=b^p.$$

ஆயின், $$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{y^p-b^p}{y^q-b^q}=\frac{y^p-b^p}{y-b}\times\frac{y-b}{y^q-b^q}.$$

இனி, $x\to a$ ஆக $y\to b$; (i) ஆம் வகையால், $y\to b$ ஆக

$$\frac{y^p-b^p}{y-b}\to pb^{p-1},\quad \frac{y^q-b^q}{y-b}\to qb^{q-1}.$$

ஆகவே, $$\underset{x\to a}{\text{எல்}}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}}=\frac{p}{q}b^{p-q}=\frac{p}{q}a^{\frac{p-q}{q}}=na^{n-1}.$$

(iii) **n என்பது மறையெண்ணுகுக.** m என்பது நேராயின், $n=-m$ ஆகுக. ஆயின்,

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}=\frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a}=-\frac{x^m-a^m}{x-a}\cdot\frac{1}{x^ma^m}.$$

இனி, m என்பது நேராயிருத்தலால், (i), (ii) என்னும் வகைகளால்,

$$x\to a \text{ ஆக, } \frac{x^m-a^m}{x-a}\to ma^{m-1}.$$

ஆகவே,

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}\to -ma^{m-1}\cdot\frac{1}{a^{2m}} \text{ அல்லது } -ma^{-m-1} \text{ அல்லது } na^{n-1}$$

இது அவ்வெடுப்பின் நிறுவலை முடிக்கின்றது.

2.32 உதாரணங்கள்.

1. $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2-x+1}=\dfrac{2}{3}.$

பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2 ஆல் வகுத்தலால்

$$\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

ஆயின், $x\to\infty$ ஆக, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ என்னும் இரண்டும் $\to 0$;

எனின், அப்பின்னம் அணுகும் எல்லை $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

2. $\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{(x+h)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{h}=\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}.$

இது அடிப்படை எல்லையின் ஓர் பயிற்சியாகும்.

$x+h=y$ எனப் பிரதியிட்டால், $h\to 0$ ஆக $y\to x$ என்பதைப் பெறவேண்டும்; $\underset{y\to x}{\text{எல்}}\dfrac{y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{y-x}$ என்பதைக் காண விரும்புகின்றோம். 2.31 இலுள்ள தேற்றத்தால், இது $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ அல்லது $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$.

3. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}$ என்பதைக் காண்க.

நாம் பெறுவன:

$$\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}=\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}\times\frac{\sqrt{(1-x)}+1}{\sqrt{(1-x)}+1}=\frac{-x}{x\{\sqrt{(1-x)}+1\}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}+1}.$$

ஆகவே, $$\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}=-\tfrac{1}{2}.$$

4. $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^3)}-\sqrt{(1+x)}}$ என்பதைக் காண்க.

x இன் பெரும் பெறுமானங்களுக்கு, x அல்லது x^2 அல்லது x^3 என்பனவற்றோடு ஒத்துப்பார்க்க 1 ஐப் புறக்கணிக்கலாம்; ஆயின், வேண்டிய எல்லை

$$=\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\frac{x-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}=\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x-1}$$
$$=\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+1}=0.$$

5. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^3)}-\sqrt{(1+x)}}$ என்பதைக் காண்க.

தொகுதி

$$=\{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1+x)}\}\times\frac{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}$$
$$=\frac{x^2-x}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}.$$

அதுபோல, பகுதி

$$=\frac{x^3-x}{\sqrt{(1+x^3)}+\sqrt{(1+x)}}.$$

ஆகவே, தந்த பின்னம்

$$=\frac{x^2-x}{x^3-x}\times\frac{\sqrt{(1+x^3)}+\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}.$$

$$=\frac{1}{x+1}\times\frac{\sqrt{(1+x^3)}+\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}.$$

$x\to 0$ ஆக, இது $\to 1$.

2.33 பயிற்சி.

1. (i) $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{2x}{x^2+1}$; (ii) $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{2x^2}{x^2+1}$; (iii) $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ என்பனவற்றைக் காண்க.

2. (i) $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$; (ii) $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{ax^2+bx+a}{cx^2+bx+c}$ என்பனவற்றைக் காண்க.

3. $\underset{x\to 1}{\text{எல்}}\dfrac{x^2-8x+7}{7x^2-6x-1}$ என்பதைக் காண்க.

4. $\underset{x\to 3}{\text{எல்}}\dfrac{x-3}{x^3-27}$ என்பதைக் காண்க.

5. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{x}{\sqrt{(1+x)}-1}$ என்பதைக் காண்க.

6. $\underset{x\to 1}{\text{எல்}}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{(3x+1)}-\sqrt{(5x-1)}}$ என்பதைக் காண்க.

7. (i) $\underset{x\to 2}{\text{எல்}}\dfrac{x^2-4}{x^5-32}$; (ii) $\underset{x\to -3}{\text{எல்}}\dfrac{x^4-81}{x^3+27}$ என்பனவற்றைக் காண்க.

8. $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{x}{\sqrt{(4x^2+1)}-1}$ என்பதைக் காண்க.

9. $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\dfrac{\sqrt{(x^4+1)}-2x^2-1}{x^2}$ என்பதைக் காண்க.

10. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{\sqrt{(x^4+1)}-2x^2-1}{x^2}$ என்பதைக் காண்க.

11. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}$ என்பதைக் காண்க.

2.4. ஏற்றங்கள். y என்பது x இன் ஒரு சார்பைக் குறிக்க ; $y=f(x)$ என்க. ஆயின், பொதுவாக x இன் பெறுமானத்தில் யாதும் ஒரு மாற்றம் y யின் பெறுமானத்தில் ஒரு மாற்றத்தை ஆக்கும். வேறு வேறு சார்பு களுக்கு x இல் ஒரு மாற்றத்தால் ஆக்கப்படும் y யின் மாற்றத்தைக் கற்றலே எம் நோக்கம். x இன் பெறுமானத்தில் ஒரு சிறு **அதிகரிப்பை** அல்லது **குறைவைக்** குறித்தற்குப் பொதுக் கருத்தில் x இன் **ஏற்றம்** என்னுஞ் சொல்லை வழங்குகின்றோம் ; இந்த ஏற்றம் δx (டெல்ற்ரு x), அல்லது ஒரு தனியெழுத்து h என்பதாற் குறிக்கப்படுகின்றது ; இது ஒரு சிறு **நேர்** எண்ணையாதல் **மறை** எண்ணையாதல் குறிக்கின்றது ; ஆயின், y யின் ஒத்த ஏற்றம் δy (டெல்ற்ரு y) என்பதாற் குறிக்கப்படுகின்றது ;

இங்கு , $y=f(x)$ ஆகையால்,

$$y+\delta y=f(x+\delta x).$$

ஆகவே $$\delta y=f(x+\delta x)-f(x).$$

உதாரணமாக :

(i) $y=x^2+2x$ எனின்,

$$y+\delta y=(x+\delta x)^2+2(x+\delta x),$$

அல்லது $$y+\delta y=x^2+2x\delta x+(\delta x)^2+2x+2\delta x.$$

ஆயின், $$\delta y=2(x+1)\delta x+(\delta x)^2.$$

(ii) $y=\dfrac{1}{x+1}$ எனின்,

$$y+\delta y=\frac{1}{x+\delta x+1}.$$

ஆயின் $$\delta y=\frac{1}{x+\delta x+1}-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{-\delta x}{(x+1)(x+\delta x+1)}.$$

(iii) $y=a$ (ஒரு மாறிலி) எனின், $y+\delta y=a$; $\delta y=0$.

ஏனெனின் ஒரு மாறிலியானது ஒரு மாற்றமும் அடையாது என்பது தெளிவு.

2.41 பயிற்சி. y என்பது முறையே பின்வருஞ் சார்புகளைக் குறித் தால், x, δx என்பனபற்றி $\delta y/\delta x$ என்னும் விகிதத்தைக் காண்க.

1. x^3+1, $4x^2$, $(x-1)^2$.
2. $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{1}{x-1}$.
3. $x+\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $ax+\dfrac{b}{x}$.

3—CP 943 (6/67)

2.5 வகையிடல். ஒரு பொது வரைவிலக்கணங் கொடுக்க முன்னர் ஒரு வரையறுத்த வகையை ஆராய்வோம்.

$y = x^3$ ஆகுக; இங்கு x என்பது முறையே எல்லா எண் பெறுமானங்களையும் எடுக்கலாம்.

ஆயின், x இல் ஒரு சிறு ஏற்றம் δx, y யில் δy என்னும் ஒத்த ஏற்றத்தைத் தரும்; இது

$$y + \delta y = (x + \delta x)^3, \quad \text{அல்லது}$$

$$\delta y = (x + \delta x)^3 - x^3,$$

அதாவது

$$\delta y = 3x^2\,\delta x + 3x\,(\delta x)^2 + (\delta x)^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்பதாலே தரப்படும்.

இனி, x இல் நாம் ஒரு மாற்றமுஞ் செய்திலோமாயின், y யில் அது காரணமாக ஒரு மாற்றமும் வராது; அன்றி, $\delta x = 0$ எனின் $\delta y = 0$ ஆகும்; பூச்சிய ஏற்றங்களின் விகிதம் $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{0}{0}$. ஆயினும் சூத்திரம் (1) ஐ δx ஆல் வகுத்தோமாயின், அப்பூச்சிய ஏற்றங்களின் விகிதமாக

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 + 3x\,\delta x + (\delta x)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்பதைப் பெறுகின்றோம்.

இச்சூத்திரத்தில் δx ஆனது பூச்சியத்தை அணுகுமாறு செய்வோமாயின்,

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2$$

என்பதைப் பெறுகின்றோம்.

ஆயின், சார்பு $y = x^3$ என்பதைப்பற்றி ஒரு புதிய உண்மையைப் பெற்றுள்ளோம்; அதாவது, y, x என்பனவற்றின் ஒத்த சிறு ஏற்றங்களின் விகிதமானது அவ்வேற்றங்கள் பூச்சியத்தை அணுக, $3x^2$ என்னும் எல்லையை உடையதாகும்.

இவ் வெல்லைக்கு ஒரு பெயர் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பெயர் x^3 இன் **பெறுதி,** அல்லது **வகையீட்டுக் குணகம்** ஆகும்.

2.51 வரைவிலக்கணம். **$f(x)$ என்பது x இன் ஒரு சார்பையும், δx என்பது x இன் ஒரு சிறு (நேர், அல்லது மறை) ஏற்றத்தையுங் குறித்தால், δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக $\dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ இன் எல்லை, $f(x)$ இன் பெறுதி அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் எனப்படும்; அது $f'(x)$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்.**

இவ்வாறு

$$f'(x) = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}.$$

δx எனும் ஏற்றத்தைக் குறித்தற்கு h என்னுந் தனியெழுத்தை வழங்கிப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{எல்}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

y என்பதை x இன் சார்பைக் குறித்தற்கு வழங்கினுல், அவ்வரைவிலக்கணம் பின்வருமாறு உரைக்கப்படலாம்.

y என்பது x இன் ஒரு சார்பைக் குறிக்க, δy என்பது x இல் δx என்னும் ஒரு சிறு ஏற்றங் காரணமாக y யில் விளைந்த ஏற்றமாயிருந்தால், δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ இன் எல்லை x ஐக் குறித்த y யின் பெறுதி, அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் எனப்படும். அது $\dfrac{dy}{dx}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

இவ்வாறு

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta y}{\delta x}.$$

இச்சூத்திரத்தில் dy, dx என்பன என்ன பொருளுடையன என்னும் பிரச்சினை உடனே எழுகின்றது. இப்பிரச்சினைக்கு இரு மாற்று விடைகள் உண்டு.

(i) $\delta x = 0$ ஆகும்பொழுது $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பதற்கு $\dfrac{0}{0}$ என்னும் பொருளற்ற வடிவம் உண்டெனினும், δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ எனும் பின்னம் ஒரு வரையறுத்த எல்லையை அணுகுகின்றதென நாம் சொல்லலாம்; $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது இவ்வெல்லையைக் குறிக்கும் ஓர் இசைவான குறியீடாகும். அவ்வாறு வழங்கும்போது dy, dx என்பன **வகையீடுகள்** எனப்படும்; அவற்றைத் தனித்தனி எடுக்க, அவை தம் விகிதமே வேண்டிய எல்லையாகவுள்ள எவையேனும் இரண்டு எண்களாகும்.

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x)$$

என்னும் எல்லாச் சூத்திரங்களையும் சேர்க்க dy, dx என்னும் வகையீடுகள் $dy = f'(x)\,dx$ என்னுந் தொடர்பினுல் இணைக்கப்பட்டிருப்பதைக் காண்கின்றோம்.

(ii) $\dfrac{dy}{dx}$ எனுங் குறியீடுகளுக்கு வேருெரு விளக்கமும் உண்டு. ஒரு வகையீட்டுக் குணகத்தை அல்லது பெறுதியைக் காணும் முறை **வகையிடுதல்** எனப்படும். "x ஐக் குறித்து y யை வகையிடும்பொழுது நாம் என்ன செய்கின்றோம்" என்ற கேள்விக்கு குறியீட்டைப் பொறுத்த

அளவில் "நாம் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்கின்றோம்", அல்லது "y மீது $\frac{d}{dx}$ செயலித்து $\frac{dy}{dx}$ ஐப் பெறுகிறோம்" என்பதே விடையாகும். இவ்வகையில் dy, dx என்பன வேறு வேறான பொருள்களல்ல; ஆனால், $\frac{d}{dx}$ என்பது வகையிடுதற்குரிய குறியீடு; அத்துடன் y மீது $\frac{d}{dx}$ செயலிக்க $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $f(x)$ மீது செயலிக்க $f'(x)$ ஐயும் தரும்.

2.52 சென்ற பிரிவின் வரைவிலக்கணம் பெறுதிகளைக் கணக்கிடுதற்கு நேராய்ப் பிரயோகிக்கப்படலாம். இவ்வாறு

(i) $y = x^4$ எனின்,

$$y + \delta y = (x+\delta x)^4,$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^4 - x^4}{\delta x} = \frac{4x^3\delta x + 6x^2(\delta x)^2 + 4x(\delta x)^3 + (\delta x)^4}{\delta x}$$

$$= 4x^3 + \delta x \text{ இன் நேர்வலுக்கள்.}$$

ஆகவே
$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta y}{\delta x} = 4x^3.$$

(ii) $y = \frac{3}{x}$ எனின்,

$$y + \delta y = \frac{3}{x+\delta x},$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\frac{3}{x+\delta x} - \frac{3}{x}}{\delta x} = \frac{\frac{-3\delta x}{x(x+\delta x)}}{\delta x} = \frac{-3}{x(x+\delta x)}.$$

ஆகவே,
$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{3}{x^2}.$$

2.521 பயிற்சி. 2.51 இன் வரைவிலக்கணத்தை வழங்கிப் பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளைக் காண்க:

(i) $2x^2+1$; (ii) $\frac{1}{x-1}$; (iii) x^3+x;

(iv) $ax+b$; (v) $\frac{1}{ax+b}$; (vi) $\frac{1}{x^3}$.

2.53 x^n இன் பெறுதி. 2.51 இன் வரைவிலக்கணத்தின்படி x^n இன் பெறுதி,

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x}.$$

இவ்வெல்லையைக் காண்பதற்கு **2.31** இன் அடிப்படை எல்லையோடு அதனை ஒப்பிடுகின்றோம்; அதாவது

$$\underset{x \to a}{\text{எல்}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

முதலாவதாக வேண்டிய எல்லையை

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{எல்}} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

எனும் வடிவத்தில் எழுதுகின்றோம்.

அவை இரண்டின் பகுதிகளுஞ் சமத்தன்மையை அணுகவேண்டிய இரு குறியீடுகளின் வித்தியாசத்தால் ஆயனவென்றும், அவற்றின் தொகுதிகள் அக்குறியீடுகளின் n ஆம் வலுக்களின் வித்தியாசங்களென்றும், அதனாலே அவ்வடிவங்கள் ஒன்றாயுள்ளனவென்றுங் காண்கின்றோம். சென்ற சூத்திரத்தில் x என்பது அடிப்படைச் சூத்திரத்திலுள்ள a யின் இடத்தை எடுக்கின்றமையால், வேண்டிய எல்லை nx^{n-1} ஆகும்.

ஆயின்
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

சுட்டி n ஆனது முழுவெண்ணாய் அல்லது பின்னமாய், நேரெண்ணாய் அல்லது மறையெண்ணாய் இருந்தாலும் அதன் விகிதமுறு பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் இது உண்மையாகும்.

2.52 இற் பெற்ற விளைவுகள் இப்பொதுத் தேற்றத்தின் சிறப்பு வகைகளாகும்.

2.54 x இன் எவ்வலுவும் அதைச் சுட்டியாற் பெருக்கி அச்சுட்டியை ஒன்றாற் குறைத்தலால் வகையிடப்படும் என்பது பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறு

$$\frac{d}{dx}x^7 = 7x^6; \quad \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4; \quad \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{d}{dx}x = 1x^0 = 1; \quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \text{ அல்லது } \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}.$$

இதே விதி x இன் மறை வலுக்களுக்கும் பிரயோகிக்கப்படும்.

இவ்வாறு

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{d}{dx}x^{-3}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4},$$

பொதுவாக

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=\frac{d}{dx}x^{-n}=-nx^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}}.$$

2.55 **ஒரு மாறிலியின் பெறுதி பூச்சியமாகும்.**

y மாறுதாயின், δy பூச்சியமாகும்; ஆகவே, δx இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும் $\delta y/\delta x$ என்பது பூச்சியமாகும்.

2.56 **c என்பது ஒரு மாறிலியாயின், $cf(x)$ இன் பெறுதி $cf'(x)$ ஆகும்.**

$$\frac{d}{dx}\{cf(x)\}=\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{cf(x+\delta x)-cf(x)}{\delta x}$$

$$=c\ \underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=cf'(x).$$

உதாரணமாக $$\frac{d}{dx}(cx^3)=c\frac{d}{dx}x^3=3cx^2.$$

2.57 **y, z என்பன x இன் இரு சார்புகளாயின், $y\pm z$ இன் பெறுதி $\frac{dy}{dx}\pm\frac{dz}{dx}$ ஆகும்.**

$$\frac{d}{dx}(y\pm z)=\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\left\{\frac{\delta y}{\delta x}\pm\frac{\delta z}{\delta x}\right\}$$

$$=\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\frac{\delta y}{\delta x}\pm\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\frac{\delta z}{\delta x}\quad (2.3 \text{ ஆல்})$$

$$=\frac{dy}{dx}\pm\frac{dz}{dx}.$$

உதாரணமாக $$\frac{d}{dx}(x^3-x)=3x^2-1.$$

2.58 2.55, 2.57 என்பனவற்றிலிருந்து c ஒரு மாறிலியாயின் $f(x)+c$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆகும்; எனவே, ஒரு சார்பிற்கு ஒரு மாறிலியைக் கூட்டல் அதன் பெறுதியை மாற்றாது.

உதாரணமாக $$\frac{d}{dx}(x^4+2)=4x^3.$$

2.59 **பயிற்சி.** பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளை எழுதுக:

1. x^4; x^5; $x^{\frac{3}{4}}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$.

2. (i) $2x^3+3x^2+1$; (ii) $3x^2-2x$; (iii) $(x-2)^3$;

(iv) $\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$; (v) $\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}$; (vi) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

(vii) ax^2+bx+c; (viii) $\frac{1}{ax^2}+\frac{1}{bx}+\frac{1}{c}$; (ix) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$;

(x) $ax^n+\frac{b}{x^n}$; (xi) $3x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-\frac{4}{3}}$;

(xii) $4x^{\frac{1}{4}}-3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{4}{x^{\frac{1}{4}}}$.

2.6 ஒரு பெருக்கத்தின் வகையீடு.

u, v என்னும் இரண்டும் x இன் சார்புகளாயிருக்க, $y=uv$ எனின்

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

என நிறுவுதல்.

x என்பது δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தைப் பெறுக; δu, δv, δy என்பன u, v, y என்பனவற்றில் அதன் காரணமாக வந்த ஏற்றங்களாகுக.

$$y=uv \quad \text{ஆகையால்,}$$

$$y+\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v),$$

$$\therefore\quad \delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)-uv,$$

$$=u\delta v+v\delta u+\delta u\delta v.$$

ஆயின், $$\frac{\delta y}{\delta x}=u\frac{\delta v}{\delta x}+v\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta v}\delta v.$$

இனி, $\delta x\to 0$ ஆகுக; எனின், $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta v}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta x}$ என்பனவற்றின் எல்லைகள் $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ என்பனவாகும். $\frac{\delta u}{\delta x}\delta v$ என்னும் ஈற்றுறுப்புக்கு எல்லை பூச்சியமாகும்; ஏனெனில், எடுகோளின்படி $\frac{\delta u}{\delta x}$ என்பதற்கு $\frac{du}{dx}$ என்னும் ஒரு முடிவுள்ள எல்லையும் மற்றைக் காரணி δv பூச்சியத்தையும் அணுகும்.

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

உதாரணமாக

$$y=(x^2+1)(3x^3-1) \quad \text{ஆகுக.}$$

$$u=x^2+1 \quad \text{ஆகுக.} \quad v=3x^3-1 \quad \text{ஆகுக.}$$

எனின், $du/dx=2x,\ dv/dx=9x^2.$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$=(x^2+1)9x^2+(3x^3-1)2x$$

$$=15x^4+9x^2-2x.$$

இது, பொது வழியால் வகையிடுதற்குமுன் பெருக்குதலால் எளிதாகச் சரி பார்க்கலாம்.

இவ்விதி எத்தொகையான காரணிகளினது பெருக்கத்தின் வகையீட்டிற்கும் எளிதாக விரிக்கப்படலாம். $y=uvw$ எனின், சற்றுமுன் நிறுவப்பட்ட தேற்றத்தால்

$$\frac{dy}{dx}=uv\frac{dw}{dx}+w\frac{duv}{dx}$$

எனவே, $$\frac{dy}{dx}=uv\frac{dw}{dx}+wu\frac{dv}{dx}+wv\frac{du}{dx}.$$

2.61 பயிற்சி. பின்வரும் பெருக்கங்களை வகையிடுதற்குச் சென்ற பிரிவின் சூத்திரத்தை வழங்குக ; விடைகளைச் சரி பார்க்க :

(i) $(3x+1)(2-3x^2)$. (ii) $(5+3x^3)(3-2x^2)$.

(iii) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. (vi) $(x^3+1)^2$.

2.62 ஓர் ஈவின் வகையீடு. $y=u/v$ ஆகுக. இங்கு குறியீடுகள் **2.6** இற் போன்ற பொருளுள்ளனவாகுக.

ஆயின், $$y+\delta y=\frac{u+\delta u}{v+\delta v}$$

$$\therefore \quad \delta y=\frac{u+\delta u}{v+\delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\delta u-u\delta v}{v(v+\delta v)}.$$

எனின், $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{v\dfrac{\delta u}{\delta x}-u\dfrac{\delta v}{\delta x}}{v(v+\delta v)}.$$

இனி, $\delta x\to 0$ ஆகுக. ஆயின் $\dfrac{\delta y}{\delta x}, \dfrac{\delta u}{\delta x}, \dfrac{\delta v}{\delta x}$ என்பன $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \dfrac{dv}{dx}$ என்னும் எல்லைகளை அணுகும் ; $v(v+\delta v)$ என்னும் பகுதி v^2 ஐ அணுகும். ஆகவே,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

இச்சூத்திரஞ் சொற்களில் பின்வருமாறு உரைக்கப்படலாம் :

ஓர் ஈவின் பெறுதியானது தொகுதியின் பெறுதியைப் பகுதியாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்திலிருந்து பகுதியின் பெறுதியைத் தொகுதியாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்தைக் கழித்தபின் வரும் மீதியைப் பகுதியின் வர்க்கத்தால் வகுக்க வரும் ஈவு ஆகும்.

தொகுதி ஒரு மாறிலியாகும்போது முடிபு ஓர் எளிய வடிவத்தை எடுக்கும் ; உதாரணமாக, $u=1$ எனின் ; $\dfrac{du}{dx}=0$;

ஆயின், $y=\dfrac{1}{v}$ ஆகும்போது,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

இது x இன் மறை வலுவை வகையிடுதற்குரிய சூத்திரத்தைச் சரிபார்ப்பதாக அமைகின்றது.

$$y=\frac{1}{x^n} \quad \text{ஆகுக.}$$

எனின், $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^{2n}}\frac{dx^n}{dx}=-\frac{1}{x^{2n}}nx^{n-1}$$

$$=-\frac{n}{x^{n+1}}.$$

ஓர் ஈவின் சூத்திரத்திற்கு ஓர் உதாரணமாக

$$y=\frac{x^2+1}{x^3-x+2} \quad \text{ஆகுக.}$$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^3-x+2)\dfrac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\dfrac{d}{dx}(x^3-x+2)}{(x^3-x+2)^2}$$

$$=\frac{(x^3-x+2)\,2x-(x^2+1)\,(3x^2-1)}{(x^3-x+2)^2}$$

$$=\frac{-x^4-4x^2+4x+1}{(x^3-x+2)^2}.$$

2.621 பயிற்சி. பின்வருங் கோவைகளை வகையிடுக :

(i) $\dfrac{x+1}{2x+1}$. (ii) $\dfrac{2x^2-1}{x^3+1}$. (iii) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

(iv) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. (v) $\dfrac{1}{ax+b}$. (vi) $\dfrac{1}{x^3-1}$.

(vii) $\dfrac{ax^2+2bx+c}{ax^2-2bx+c}$. (viii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$. (ix) $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2+1}$.

2.63 ஒரு சார்பினது சார்பின் வகையீடு. y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகுக ; z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகுக. இதன் பொருள் y என்பதும் x இன் ஒரு சார்பாகும் என்பதே. [உதாரணமாக, $y=z^{10}$ ஆயும் $z=x^2+a^2$ ஆயுமிருந்தால், $y=(x^2+a^2)^{10}$ ஆகும்.]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}$$ என நிறுவுவோம்.

x என்பது δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தைப் பெறுக ; δz, δy என்பன z, y என்பனவற்றில் அதன் காரணமாக விளைந்த ஏற்றங்களாகுக. $\delta x\to 0$ எனின், $\delta y\to 0$ ஆயும் $\delta z\to 0$ ஆயும் இவ்வேற்றங்கள் உள.

இனி, δz எல்லாம் வெட்டுப்படலாமாதலால் $\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{\delta y}{\delta z}\times\dfrac{\delta z}{\delta x}$. ஏற்றங்கள் பூச்சியத்தை அணுக இப்பின்னங்கள் வரையறுத்த எல்லைகளை அணுகுமெனக் கொண்டால், அவ்வெல்லைகள் பெறுதிகளாகும்.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

இரு வேறு எல்லைகளின் பெருக்கத்திற்குச் சமனான ஒரு குறித்த எல்லையை இத்தேற்றம் நிறுவுகின்றது.

2.51 இற்போல dx, dy, dz என்பனவற்றை வகையீடுகளென நாம் கொண்டாலும் ஈற்று வடிவத்திலுள்ள எல்லா δz ஐயும் வெட்டுதலால் இத்தேற்றம் நிறுவமுடியாதெனக் காட்டவேண்டியதில்லை.

இது இவ்வாறு இருக்கின்றதெனக் காண்பதற்கு, dx என்பது விரும்பியவாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட $dy : dx$ என்னும் விகிதத்திற்குத் திருத்தமான பெறுமானங் கொடுக்கத்தக்கதாய் dy யிற்கு ஒரு பெறுமானத்தை எடுத்தோமாயின், வகையீடுகளை வழங்குதல் $dy=f'(x)\,dx$ என்னுந் தொடர்பை அடிப்படையாகக் கொண்டிருக்கின்றதென ஞாபகத்தில் வைக்கவேண்டும்.

ஆயின், $y=F(z)$ ஆயும் $z=G(x)$ ஆயுமிருக்க. z இன் நீக்கல் y யை x பற்றி $y=f(x)$ என்னும் வடிவத்திலே தருக. எனின், நிறுவ வேண்டிய தேற்றம்

$$f'(x)=F'(z)\times G'(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

இனி, dx எனும் வகையீட்டிற்கு ஒரு வரையறுத்த பெறுமானத்தைத் தேர, dz என்னும் ஒத்த வகையீடு வரைவிலக்கணத்தின்படி $dz=G'(x)dx$ ஆகும்படி இருக்கும் ; dz இற்கு இப்பெறுமானத்தை எடுக்க, $y=F(z)$ என்பதிலிருந்து எடுத்த dy என்னும் ஒத்த வகையீடு

$$dy=F'(z)dz,$$

அல்லது $$dy=F'(z)G'(x)dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

இனி, $y=f(x)$ என்னுந் தொடர்புடன் மறுபடியுந் தொடங்குவோமாயின் இது

$$dy=f'(x)dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

என்பதை வேண்டி நிற்கும்.

(3), (4) என்னும் இரண்டிலும் dx என்னும் வகையீட்டிற்கு ஒரே பெறுமானத்தை நாம் தேரலாமாயினும் $f'(x)=F'(z)G'(x)$ என்று கொண்டாலன்றி (அதாவது நாம் நிறுவ விரும்பிய தொடர்பு (2) ஐக் கொண்டாலன்றி), (3) (4) என்பனவற்றிலுள்ள dy எல்லாம் ஒரே விதமானவையெனக் கூறுகின்றதற்கு நியாயமில்லை. இதற்கு ஒரேயொரு நிறுவல் வழி உண்டு ; அவ்வழி இப்பிரிவினது தொடக்கத்திலே தரப்பட்டுள்ளது.

இத்தேற்றம் நாம் வகையிடக்கூடிய சார்பினங்களை மிகக் கூட்டுகின்றமையால், இதுவரை நிறுவப்பட்ட தேற்றங்களுக்குப் பிரதானமான ஒரு சேர்க்கையாகும்.

2.631 சென்ற முடிவிஸ்ற்கு ஒரு கிளைத் தேற்றமாகப் பின்வருவதை அறிகின்றோம் : y என்பது x இன் ஒரு சார்பாயிருக்க, y யிற்கும் x இற்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பும் x ஐ y யின் சார்பாக வரையறுக்கின்றதெனக் கொண்டோமாயின்,

$$\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{dy}=1.$$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

2.632 உதாரணங்கள்.

(i) $y=(x^2+a^2)^{10}$ ஆகுக.

இதனை 2.6 இன் முடிபிலுள்ள விதியாற் பத்துக் காரணிகளின் பெருக்கமாக நாம் வகையிடலாம் ; ஆனால் $y=(x^2+a^2)$ என இடுவது கூடிய சுலபமானதாகும், ஆயின் $y=z^{10}$.

எனின், $$\frac{dy}{dz}=10z^9; \quad \frac{dz}{dx}=2x.$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=20\,xz^9.$$
$$=20x\,(x^2+a^2)^9.$$

(ii) $$y=\frac{1}{(3x+1)^5} \text{ ஆகுக.}$$

$y=(3x+1)^{-5}$ என்றும் $z=(3x+1)$ என்றும் இடுதலே, இங்கு மிக எளிதான வழி. ஆயின், $y=z^{-5}$.

எனின், $$\frac{dy}{dz}=-5z^{-6}; \quad \frac{dz}{dx}=3,$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=-15z^{-6}=-\frac{15}{(3x+1)^6}.$$

இந்நூலைக் கற்கும் மாணுக்கன் விரைவிற் பல வகைகளிற் பிரதியிடுதலின்றி முடிபை எழுதும் ஆற்றலைப் பெறுவான். இக்கணக்கில் நாம் -5 என்னும் வலுவுக்கு ஏற்றிய $(3x+1)$ என்னும் ஒரு சார்பை வகையிட வேண்டும். x^{-5} என்பதை வகையிடும்பொழுது -5 என்னுஞ் சுட்டியாற் பெருக்கி அச்சுட்டியை 1 ஆற் குறைத்து $-5(3x+1)^{-6}$ என்பதைப் பெறுவதுபோல, இது $(3x+1)$ என்னுஞ் சார்பின் பெறுதியால், அதாவது 3 ஆற் பெருக்கப்பட வேண்டும்.

(iii) $y=(x^2+1)^5\,(3x-1)^4$ ஆகுக.

ஒரு பெருக்கத்தின் பெறுதிக்கு **2.6** இன் சூத்திரத்தை வழங்க,

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+1)^5\frac{d}{dx}\{(3x-1)^4\}+(3x-1)^4\frac{d}{dx}\{(x^2+1)^5\};$$

$$\frac{d}{dx}\{(3x-1)^4\}=4\,(3x-1)^3\frac{d}{dx}(3x-1)=12(3x-1)^3,$$

$$\frac{d}{dx}\{(x^2+1)^5\}=5\,(x^2+1)^4\frac{d}{dx}(x^2+1)=10x(x^2+1)^4.$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=12\,(x^2+1)^5\,(3x-1)^3+10x\,(3x-1)^4\,(x^2+1)^4$$
$$=2\,(x^2+1)^4(3x-1)^3\,(21x^2-5x+6).$$

(vi) $$y=\frac{(2x+1)^2}{(x^2-1)^3} \text{ ஆகுக.}$$

2.62 என்பதை வழங்க,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-1)^3\frac{d}{dx}(2x+1)^2-(2x+1)^2\frac{d}{dx}(x^2-1)^3}{(x^2-1)^6}$$
$$=\frac{(x^2-1)^3.\,4\,(2x+1)-(2x+1)^2.\,6x\,(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6}.$$

பெருக்குமுன் தொகுதியையும் பகுதியையும் $(x^2-1)^2$ ஆல் வகுக்க.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\,(x^2-1)\,(2x+1)-6x\,(2x+1)^2}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{-2\,(2x+1)\,(4x^2+3x+2)}{(x^2-1)^4}.$$

ஈவுகள் பெருக்கங்கள் போல வகையிடப்படலாமென்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும். சென்ற பயிற்சி

$y=(2x+1)^2\times(x^2-1)^{-3}$ என்பதைப் போன்றதாகும்.

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=(2x+1)^2\frac{d}{dx}(x^2-1)^{-3}+(x^2-1)^{-3}\frac{d}{dx}(2x+1)^2$$
$$=(2x+1)^2.-6x\,(x^2-1)^{-4}+(x^2-1)^{-3}.4(2x+1)$$
$$=2(2x+1)\,(x^2-1)^{-4}\{-3x\,(2x+1)+2\,(x^2-1)\}$$
$$=2(2x+1)\,(x^2-1)^{-4}\{-6x^2-3x+2x^2-2\}$$
$$=\frac{-2(2x+1)\,(4x^2+3x+2)}{(x^2-1)^4}.$$

இதனைக் கற்கும் மாணுக்கன் அதிகாரம் iv இலுள்ள மடக்கைகளை வழங்குவதனுல், பெருக்கங்களையும் ஈவுகளையும் வகையிடுதற்கு ஒரு எளிய முறையைக் கற்பான்; பின்வரும் பயிற்சிகள் இங்கு விளக்கிய முறைகளின் நேரான பிரயோகங்களாய் இருக்கின்றனவாயினும், அவற்றுட் சில **4.45** என்னும் பிரிவைக் கற்கும் வரைக்கும் வேண்டுமாயின் ஒத்திவைக்கப்படலாம்.

2.633 பயிற்சி. பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க:

(i) $(2x^2+1)^5$; $(4x-1)^3$; $(3x^3+2)^4$.

(ii) $\frac{1}{2x+1}$; $\frac{1}{(2x+1)^3}$; $\frac{1}{(2x+1)^5}$.

(iii) $(3x-2)\ (5x+1)^3$; $(2x+3)^4\ (x-1)$.

(iv) $3x^2(x^3+1)^4$; $(x^2+1)^5\ (x^2-1)^6$.

(v) $\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^3}$; $\dfrac{(x-1)^2}{(2x^2+1)^3}$. (vi) $\dfrac{x^2}{(x+1)^3}$; $\dfrac{(x+1)^3}{(2x-1)^2}$.

(vii) $\sqrt{(x^2+x+1)}$; $\sqrt{(x^4+x^2+1)}$. (viii) $\dfrac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$; $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$.

2.64 பயிற்சி.

1. பெறுதியின் வரைவிலக்கணத்தை மாத்திரம் உத்தேசித்து பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளைக் காண்க ;

(i) $4x^3-1$; (ii) $\dfrac{1}{x^2+1}$; (iii) $\dfrac{1}{(ax+b)^2}$.

2. x என்பது முடிவிலியை அணுகும்போதும் ஒன்றை அணுகும்போதும்

$\dfrac{2x^3-x^2-1}{3x^3-3x^2+2x-2}$ இன் எல்லையைக் காண்க.

3. $\underset{x\to 1}{\text{எல்}} \dfrac{\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x^3-1)}}$ என்பதைக் காண்க.

4. பின்வரும் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க.

(i) ax^2, $a(x+2)^2$, $a(x^2+3)^2$;

(ii) $\dfrac{1}{ax^2}$, $\dfrac{1}{a(x+2)^2}$, $\dfrac{1}{a(x^2+3)^2}$;

(iii) $\dfrac{1}{1+x}$, $\dfrac{1}{(1+x)^4}$, $\dfrac{1}{(1+x)^5}$;

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^3)}}$;

(v) $(2x+1)^3\ (3x-2)^2$, $(2x+1)^2\ (3x-2)^3$;

(vi) $\dfrac{(2x+1)^3}{(3x-2)^2}$, $\dfrac{(3x-2)^2}{(2x+1)^3}$; (vii) $\sqrt{\{(x+1)\ (x+2)\}}$, $\sqrt{\left\{\dfrac{x+1}{x+2}\right\}}$;

(viii) $(x-1)\ (x-2)\ (x-3)$; (ix) $(x-1)\ (x-2)/(x-3)$;

(x) $(x+a)^m\ (x+b)^n$; (xi) $(x+a)^m/(x+b)^n$;

(xii) $(x^n+a^n)^m$, $x/(x^n+a^n)^m$.

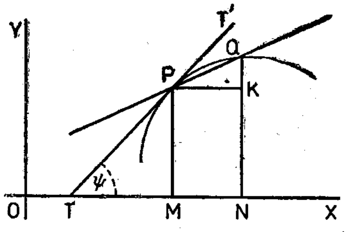
5. $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}} \{\sqrt{(x^2-x+1)}-x\} = -\frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

6. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}} \dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}{x^2} = 1$ என நிறுவுக.

அதிகாரம் III

பிரயோகங்கள்

3.1 பெறுதியின் கேத்திரகணித விளக்கம். படித்திறன்.



P என்பது தன் சமன்பாடு $y=f(x)$ ஆயுள்ள ஒரு வளையியில் $(x,\ y)$ என்னும் புள்ளியாகுக ; Q என்பது P யிற்கு அண்மையில் $x+\delta x$, $y+\delta y$ என்னும் ஆள்கூறுகளோடு அவ்வளையியிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக ; ஆகவே, PM, QN என்பன x–அச்சிற்குச் செங்குத்துக்களாயின்

$$OM=x,\ MP=y\ ;$$
$$ON=x+\delta x,\ NQ=y+\delta y.$$

PK என்பதை OX இற்குச் சமாந்தரமாய் NQ வை K யிற் சந்திக்குமாறு வரைக.

ஆயின், $$PK=MN=\delta x,\ KQ=NQ-MP=\delta y.$$

ஆகவே, $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{KQ}{PK}=\text{தான் } QPK.$$

இனி, Q என்பது அவ்வளையியின் வழியே P வரைக்கும் அசைக.

எனின், அவ்வளையியை P, Q என்பனவற்றில் வெட்டுகின்ற PQ என்னும் நேர்கோடு P யிலுள்ள தொடலியாகும் ; அதாவது TPT' என்னும் கோடாகும். **இரு புள்ளிகள் ஒன்றோடொன்று பொருந்துமாறு அசையும்போது அவற்றைத் தொடுக்கும் நாணினது எல்லையுறு நிலையே ஒரு வளையியின் தொடலியாகும்** என்பதே அதற்குக் காரணமாகும்.

ஆனால், QPK என்பது x–அச்சிற்கும் அந்நாணிற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ; ஆயின், Q என்பது P யை அணுக, இது x அச்சிற்கும் P யிலுள்ள தொடலிக்கும் இடையிலுள்ள PTX என்னுங் கோணமாகும் ; இக்கோணத்தை ψ என்பதாற் குறிப்போம். அதே நேரத்தில் δx, δy என்னும் இரண்டும் பூச்சியத்தை அணுகும்.

ஆகவே, தான் $\psi=\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}} \dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$.

எனின், x இன் யாதும் ஒரு பெறுமானத்திற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி x அச்சோடு $y=f(x)$ என்னும் வளையியின்மீது ஒத்த புள்ளியிலுள்ள தொடலி ஆக்குங் கோணத்தின் தான்சன் ஆகும். இக்கோணத்தின் தான்சன் அப்புள்ளியிலுள்ள அவ்வளையியின் படித்திறன் எனப்படும்.

உதாரணமாக, OX, OY என்பன முறையே கிடைக் கோட்டையும் நிலைக் குத்துக் கோட்டையுங் குறிக்க, $y=f(x)$ என்னும் வளையி XOY என்னும் நிலைக்குத்துத் தளத்தால் ஆக்கப்பட்ட ஒரு குன்றினது பரப்பின் வெட்டா யின் $f'(x)$ என்பது (x, y) என்னும் புள்ளியிலான சரிவினது "குத்துத் தன்மை" அல்லது "படித்திறனின்" அளவாகும்.

3.11 பயிற்சி.

1. $y=x^3-x$ எனின் $dy/dx=3x^2-1$. ஆகவே, (x,y) இல் அவ்வளையியினது படித்திறன் $3x^2-1$ ஆகும் ; (2,6) என்னும் புள்ளியில், படித்திறன் 11 ஆகும்.

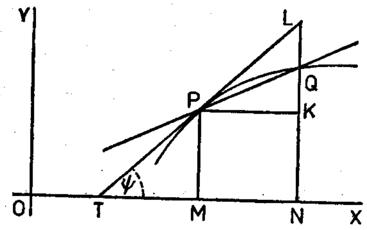
2. பின்வரும் வளையிகளின் படித்திறன்களைக் காட்டிய புள்ளிகளிற் காண்க.

(i) $y=x^4-3x^2$, $(1,-2)$ இல் ; (ii) $y=x^2-a^2$, $(-a, 0)$ இல் ;

(iii) $y=\dfrac{1}{x+1}$, (0,1) இல் ; (iv) $y=x+\dfrac{1}{x}$, (1,2) இல்.

3. $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ என்னும் வளையிகள் (1, 1) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என்றும், அவ்வெட்டும் புள்ளியில் அவ்வளையிகளின் தொடலிகள் 2 என்பது தன் தான்சனுயுள்ள ஒரு கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளன என்றுங் காட்டுக.

3.2 ஏற்றங்களும் வகையீடுகளும். பெறுதியின் கேத்திரகணித விளக்கமானது சிற்றேற்றங்களுக்கும் வகையீடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டைத் தெளிவாக்குதற்கு உதவிசெய்கின்றது.



3.1 இன் குறியீட்டை வழங்கி P யிலுள்ள தொடலியை L இற் சந்திக்கும்படி NQ நீட்டப்படுக. ஆயின்

$$KL=PK \text{ தான் } LPK.$$

ஆனால், $LPK=PTM=\psi$; ஆயின், தான் $LPK=f'(x)$; $PK=\delta x$; ஆகவே, $KL=f'(x)\,\delta x$.

இனி, dy, dx என்னும் வகையீடுகளானவை தம் விகிதம் $f'(x)$ ஆயுள்ள எவையேனும் ஈரெண்கள் ; ஆயின், dx என்பதை δx இற்குச் சமனுக்க நாம் விரும்பினுல் ;

$$dy=f'(x)\,\delta x=KL.$$

ஆனால், தந்த வளையியின் வழியே x இல் δx என்னும் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த y யின் ஏற்றம்

$$\delta y=KQ.$$

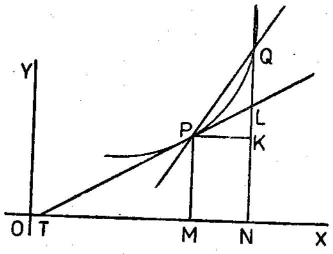
ஆகவே, dy என்னும் வகையீடு δy என்னும் ஏற்றத்திலிருந்து

$$dy-\delta y=QL$$

என்னுந் தொகையால் வித்தியாசப்படும்.

Q என்பது P யை அணுக, இது பூச்சியத்தை அணுகும்.

இரண்டாம் படத்தில் அவ்வளையி P யிலுள்ள தொடலிக்கு மேலாகக் கிடக்கும் ; இவ்வகையில் KQ என்னும் ஏற்றம் KL என்னும் வகையீட்டை LQ என்னும் அளவாற் கூடுகின்றதென முன்கூறிய நியாயங் காட்டுகின்றது.



ஆயின், $dy=f'(x)dx\ldots\ldots(1)$

என்பது வகையீடுகளின் வரைவிலக்கணத்திற்குத்தக உண்மையான தொடர்பாயிருக்கின்ற போதிலும் (வளையி நேர் கோடாயிருந்தாலன்றி)

$$\delta y=f'(x)\,\delta x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னுந் தொடர்பு δx, δy என்பன x, y [அல்லது $f(x)$] என்பனவற்றில் ஒத்த ஏற்றங்களைக் குறிக்கும்போது **உண்மையாகாதென்பதைக்** காண்கின்ருேம் ; நாம் மேலே காட்டியபடி δx, dx என்பனவற்றைச் சமமாக்கும்போது, δy என்பது dy யில் QL, அல்லது LQ என்பதால் வித்தியாசப்படுகின்றது என்பதே அதற்குக் காரணம்.

அதே நேரத்தில் $\delta x\to 0$ ஆக, வித்தியாசம் $QL\to 0$; ஆயின் δx இன் சிறு பெறுமானங்களுக்குத் தொடர்பு (2) உண்மையான விளைவிற்கு அண்ணளவாயிருத்தல் வேண்டும் ; (2) ஐ உண்மையான விளைவென வழங்கினுல், எவ்வகையான வழுவை ஆக்குவோமென நாம் சிந்திக்க வேண்டும்.

எல் $\lim_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}=f'(x)$ ஆதலின், δx என்பது சிறிதாயிருக்கும்போது, $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பது $f'(x)$ இலும் மிக வித்தியாசப்படாது ; δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக ϵ என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் ஒரு சிறிய நேரெண், அல்லது மறையெண்ணுயிருந்தால், நாம்

$$\frac{\delta y}{\delta x}=f'(x)+\epsilon$$

என எழுதலாம். இதன் பொருள்

$$\delta y=f'(x)\,\delta x+\epsilon\,\delta x \quad \text{என்பதே.}$$

ஆயின், மேலே குறிக்கப்பட்ட வழு $\epsilon\,\delta x$ எனும் வடிவத்திலுள்ளது ; இங்கு. ϵ என்பது சிறிது ; $\delta x \to 0$ ஆக $\epsilon \to 0$.

3.21 சிறுமை வரிசைகள். பூச்சிய எல்லையை அணுகும் மாறிகள் **நுண்ணெண்கள்** எனப்படும். a, b என்பன $a \to 0$ ஆக $b \to 0$ ஆகுமாறு தொடர்புள்ள இரு நுண்ணெண்களாயும் l என்பது பூச்சியமல்லாத ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுயுமிருக்க

$$\underset{a\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{b}{a} = l$$

ஆயும் இருப்பின், b என்பது a யின் சிறுமை வரிசையினது எனப்படும்.

ஆனல், l என்பது முன்போலப் பூச்சியமல்லாத ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுயிருக்க, $\underset{a\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{b}{a^2} = l$ எனின், a யோடு ஒப்பிட, b என்பது இரண்டாஞ் சிறுமை வரிசையினது எனப்படும்.

இவ்வாறு, $\underset{a\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{b}{a^r} = l$ எனின், a யோடு ஒத்துப் பார்க்க, b என்பது r ஆம் வரிசையினதாகும்.

$\underset{a\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{a^2}{a^2} = 1$ ஆதலால், இவ்வரைவிலக்கணத்தின்படி, a^2 என்பது a யோடு ஒப்பிட இரண்டாம் வரிசையினதாகும் ; a^3 என்பது மூன்றும் வரிசையினது ; இவ்வாறே பிறவும். ஒரு நுண்ணெண்ணின் சிறுமை வரிசை அதனை ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுற் பெருக்குவதனுலே மாறுபடாது ; உதாரணமாக $1000a^3$ என்பது a யோடு ஒப்பிட மூன்றும் வரிசையினது அதற்குக் காரணம் $\underset{a\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{1000a^3}{a^3}$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எண்ணுகிய 1000 இற்குச் சமன் என்பதே.

3.22 இனி,

$$\delta y = f'(x)\,\delta x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

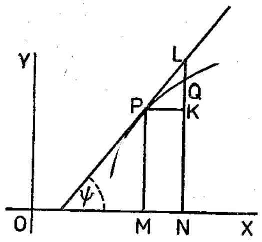
என்னும் அண்ணளவை நாம் வழங்கும்போது நிகழ்கின்ற 3.2 இன் வழுவாகிய $\epsilon\delta x$ என்பதை மீண்டும் பார்க்கும்போது $\delta x \to 0$ ஆக $\epsilon \to 0$ ஆகின்றமையின், ϵ என்பது குறைந்த பட்சம் δx அளவு சிறுமை வரிசையினதென்றும், $\epsilon\delta x$ என்னும் வழு δx இலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையினதென்றும் நாம் சொல்லலாம்.

உதாரணமாக, நாம் தசமங்களைக் கையாளும்போது δx என்பது 10^{-6} அல்லது பத்துலட்சத்தின் ஒன்ருயின், சூத்திரம் (1) ஐ வழங்குகையில் ஏற்படும் வழு சில வரையறையுள்ள இலட்ச கோடித் தொகையாகி அதிக வகைகளில் புறக்கணிக்கத்தக்கதாகும்.

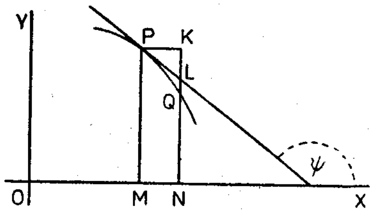
3.3. பெறுதியினது குறியின் பொருள்.

தான் $\psi = f'(x)$ ஆதலால், $f'(x)$ நேராயிருக்கும் வரைக்கும் தான் ψ நேராகும். படம் A யிலிருந்து தான் ψ நேராயின், வளையி இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கத்திற்கு மேற்புறமாகச் சாய்கின்றதென்பதும் x கூடுதலுற y கூடுதலுறுமென்பதுந் தெளிவு.

எனின், $f'(x)$ எனும் ஒரு **நேர்ப்** பெறுதியின் பொருள், x கூடுதலுற $f(x)$ அல்லது y கூடுதலுறும் என்பதே.



உரு A



உரு B

அதுபோல, $f'(x)$ மறையாயின், ψ ஒரு விரிகோணமாதல் வேண்டும் (படம் B). இவ்வகையில், வளையி கீழ்ப்புறமாக இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கத் திற்குச் சாய்கின்றது"; x கூடுதலுற y குறைகின்றது.

எனின், $f'(x)$ ஓர் **மறைப்** பெறுதி என்பதின் பொருள், x கூடுதலுற $f(x)$ அல்லது y குறைகின்றது என்பதே.

அதே முடிபு 3.2 இன் சூத்திரத்திலிருந்து பெறலாம் ; அதாவது

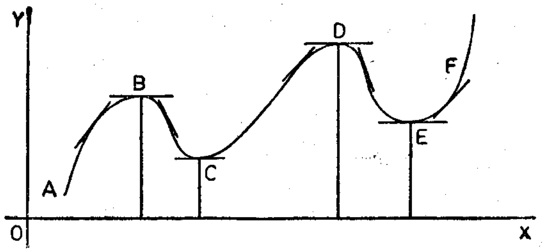
$$\frac{\delta y}{\delta x} = f'(x) + \epsilon.$$

இங்கு, δx பூச்சியத்தை அணுக ϵ பூச்சியத்தை அணுகுகின்ற ஒரு சிறு நேரெண், அல்லது மறையெண் எனின், δx என்பதைப் போதிய அளவு சிறிதாய் எடுப்பதால், ϵ என்பது மிகச் சிறிதாகும். அதுபற்றி ϵ என்பது $f'(x)$ இலும் எண்ணளவிற் சிறிதாயிருப்பதால் $f'(x)$ பூச்சியமல்லாதுவிடின், $f'(x)+\epsilon$ இன் குறி $f'(x)$ இன் குறியாகும். ஆயின், $f'(x)$ நேரெனின், δy என்பது δx என்பதனோடு ஒத்த குறியினதாகும் ; y என்பது x ஒடு கூடுதலுறும் ; $f'(x)$ என்பது மறையாயின், δy என்பது δx ஒடு முரண்பட்ட குறியினதாகும் ; x கூடுதலுற y குறைதலுறும்.

3.4 திரும்பற் புள்ளிகள். உயர்வுகளும் இழிவுகளும்.

$ABCDEF \ldots$ என்னும் வளையியானது x இன் ஒரு குறித்த வீச்சிற்கு $y=f(x)$ எனுஞ் சமன்பாட்டைக் குறிக்க; B, C, D, E என்பனவற்றிலுள்ள தொடலிகள் x-அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகுக; இப்புள்ளிகள் $x=b$, $x=c$, $x=d$, $x=e$ என்பனவாகுக.

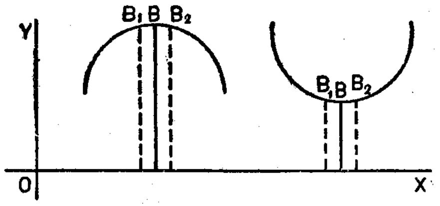
B, C, D, E என்பனவற்றில் வளையியின் படித்திறன் பூச்சியமாகின்றமையால், $f'(b)=0$, $f'(c)=0$, $f'(d)=0$, $f'(e)=0$.



இன்னும், $f'(x)$ என்பது AB, CD, EF என்பனவற்றின் வழியே நேராயும் BC, DE என்பனவற்றின் வழியே மறையாயும் இருத்தலால், $f'(x)$ என்பது வளையியின் வழியே x கூடுதலுறும் போக்கில் அசைந்து கொண்டு B, D என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லும்போது நேரிலிருந்து மறைக்கும், C, E என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லும்போது மறையிலிருந்து நேருக்குங் குறிமாறுகின்றது. இப்புள்ளிகள் $f'(x)$ எனுஞ் சார்பின் திரும்பற் புள்ளிகளெனப்படும்; $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ $f(e)$ என்பன அதன் **திரும்பற் பெறுமானங்களாகும்.** நாம் ஒரு திரும்பற் பெறுமானத்திற் கூடாகச் செல்ல, சார்பு கூடுதலுறுதலிலிருந்து குறைதலுறுதற்கு, அல்லது குறைதலுறுதலிலிருந்து கூடுதலுறுதலுக்கு மாறும். $x=b$ ஆகிய பெறுமானம் $f(x)$ இற்கு ஒரு திரும்பற் பெறுமானத்தைக் கொடுக்க வேண்டிய நிபந்தனை $f'(b)$ பூச்சியமாதல் வேண்டும் என்பதே.

திரும்பற் பெறுமானங்களுஞ் சிலவேளை சார்பின் **நிலையான பெறுமானங்கள்** எனப்படும்.

B யில் ஒரு திரும்பற் புள்ளி இருக்க வளையியில் B யிற்கு **அண்மையில் யாதும்** ஒரு புள்ளி B_1 ஐ நாம் எடுத்தால், அவ்வளையியில் B_1 இற்கு ஒத்ததாக B யின் எதிர்ப்பக்கத்தில் B_1, B_2 என்பனவற்றிற் சம நிலைக்கூறுகள் இருக்குமாறு B_2 என்னும் ஓர் புள்ளி உண்டு. அதன் விளைவாக அவ்வளையியின் மீது B யின் நெருங்கிய அயலில் $f(x)$ பெறுமானத்தில் **நிலையானது.**



3.41. இரண்டு விதமான திரும்பற் புள்ளிகள் உளவென படங்களிலிருந்து நாம் காண்கின்றோம். x கூடுகின்ற திசையிற் செல்ல, மாற்றங்கள் B, D என்பனவற்றிற்போல $f(x)$ கூடுதலுறுதலிலிருந்து $f(x)$ குறைதலுறுதலாகும்; அல்லது C, E என்பனவற்றிற்போல $f(x)$ குறைதலிலிருந்து $f(x)$ கூடுதலாகும். B யில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் வளையியில் B யிற்கு அண்மையில் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள அதன் பெறுமானத்திலும் பெரிதென்றுங் காண்கின்றோம்; இது D யிலும் உண்மையாகும்; C யில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் வளையியில் C யிற்கு அண்மையில் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள அதன் பெறுமானத்திலுஞ் சிறிதாகும்; இது E யிலும் உண்மையாகும்.

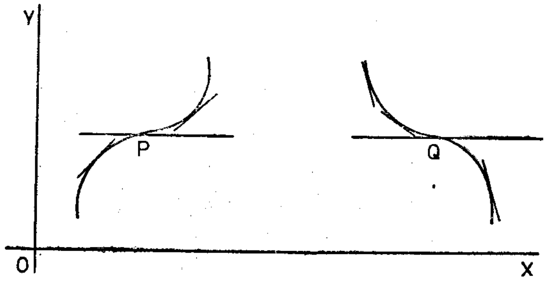
வரைவிலக்கணம். $x=a$ எனும் ஒரு புள்ளியில், $f(x)$ எனும் ஒரு சார்பிற்கு a யின் இரு பக்கங்களுக்கும் விரிகின்ற ஒரு சிறு ஆயிடையிலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள அதன் பெறுமானங்களிலும் பார்க்கப் $f(a)$ என்னும் பெரிதான ஒரு பெறுமானம் இருந்தால், $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஓர் **உயர்வுப்** பெறுமானமெனப்படும். அதுபோல், $x=a$ என்னும் ஒரு புள்ளியில் $f(x)$ என்னும் ஒரு சார்பிற்கு ஒத்த ஓராயிடையிலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள அதன் பெறுமானங்களிலுஞ் சிறிதான ஒரு பெறுமானம் இருந்தால், $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஓர் **இழிவுப்** பெறுமானமெனப்படும்.

ஓர் உயர்வானது சார்பின் பெறுமானங்களுள் மிகப்பெரியதாய் இருத்தல் வேண்டும் என்பதில்லை; அல்லது ஓர் இழிவானது சார்பின் பெறுமானங்களுள் மிகச்சிறியதாய் இருத்தல் வேண்டுமென்பதுமில்லை. இவை படத்திலிருந்து தெளிவாகும். உயர்வுகளும் இழிவுகளும் ஒன்றைவிட்டொன்றாக நிகழும் என்பதும் புலனாகும்; கூடுதலுறுதலிலிருந்து குறைதலுறும் மாற்றத்திற்குப்பின், இதே வகையான இன்னுமொரு மாற்றம் இருக்கவேண்டுமாயின், இம்மாற்றத்திற்குமுன் குறைதலுறுதலிலிருந்து கூடுதலுறும் மாற்றம் ஒன்று இருத்தல் வேண்டும் என்பதே அதற்குக் காரணம்.

3.42 உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் காணல். $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகள் $f'(x)=0$ ஆகும் புள்ளிகளாதலால், முதலாவதாக, $f(x)$ ஐ வகையிட்டு $f'(x)$ என்னும் பெறுதியைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த வேண்டும். $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $x=a$, $x=b$, $\ldots$, என்பனவாயின், x

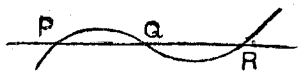
இன் இப்பெறுமானங்கள், திரும்பற் பெறுமானங்கள் எவையேனும் இருந்தால் அவற்றைத் தரும். அதன்பின், $f(a)$ ஓர் உயர்வா, அல்லது ஓர் இழிவா எனச் சோதிப்பதற்கு, x என்பது a யினூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ என்பது நேரிலிருந்து மறைக்கா, அன்றி மறையிலிருந்து நேருக்கா மாறுகின்றதென ஆராய்கின்றோம்.

$f'(x)$ என்பது ஒரு பூச்சியப் பெறுமானத்திற் கூடாகச் செல்லும்போது குறிமாற்றம் அடையத் தேவையில்லை என்பதை இங்கு நாம் கவனிக்க வேண்டும்.



ஒரு வளையியின் படித்திறன் நேராயிருக்கும்போது அது பூச்சியத்திற்குக் குறைந்து மறுபடியும் P யிற்போலக் கூடுதலுறலாம்; மறையாயிருக்கும்போது அட்சரகணித முறையாற் பூச்சியத்திற்குக் கூடி, பின்னர் Q விற்போல மறுபடியுங் குறைதலுறலாம். வளையி தனது தொடலியை வெட்டும் புள்ளிகளே அத்தகைய புள்ளிகள்; இப்புள்ளிகள் வளையியின் மீதுள்ள **விபத்திப் புள்ளிகள்** எனப்படும்.

உதாரணமாக, Q என்பது ஒரு விபத்திப் புள்ளியாயும், P என்பது வளையியின் மீதுள்ள ஓர் அண்மைப் புள்ளியாயும் இருந்தால், PQ என்னுங் கோடு வளையியை மறுபடியும் R இற் சந்திக்கும்; P வளையியின் வழியே Q வை அணுக, R உம் அவ்வாறு அணுகும்;



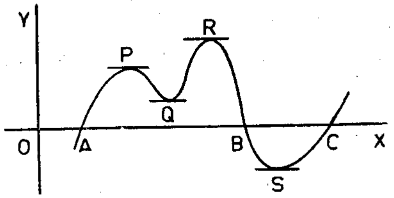
வளையி Q விலுள்ள தொடலியின் எதிர்ப் பக்கங்களிற் கிடக்கும்.

அதுகாரணமாக, $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகளையும் உள்ளடக்கும்; எனினும், அவை திரும்பற் புள்ளிகளாய் இருக்கத் தேவையில்லை; அதற்குக் காரணம் அவற்றுள் ஒன்றோ பலவோ விபத்திப் புள்ளியாயிருக்கலாம் என்பதே.

3.421 $f(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாயின், அதாவது ax^3+bx^2+cx+d போன்ற a யின் நேர் வலுக்களை மாத்திரங்கொண்ட ஒரு கோவையாயின், x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் ஒத்ததாய்

$f(x)$ இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு; $y=f(x)$ என்னும் வளையி தாளுக்குக் குறுக்கே $-\infty$ தொடங்கி ∞ வரைக்கும் விரிந்து கிடக்கின்ற ஒரு தொடர்ச்சியான முறியாத வளையியாகும்.

வளையி x – அச்சை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களே $f(x)=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இன்னும், $f'(x)=0$ என்பதன் அடுத்துவரும் மூலங்களுள் எவையேனும் இரண்டிற்கிடையில் $f'(x)=0$ என்பதற்குக் குறைந்த பட்சம் ஒரு மூலமாதல் இருக்கவேண்டும் என்பது படத்திலிருந்து தெளிவாகும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்டமூலம் இருந்தால் மூலங்களினது தொகை ஒற்றையெண்ணுதல் வேண்டும்.



அதற்குக் காரணம் வளையி x–அச்சை நீங்குகையில் மறுபடியும் அதற்குத் திரும்பிவர முன்னர் யாதோ ஓர் இடத்தில் அவ்வச்சிற்குச் சமாந்தரமாதல் வேண்டும் என்பதே. படத்தில், A, B, C என்னும் புள்ளிகள் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களையும் P, Q, R, S என்பன $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்களையுங் குறிக்கின்றன.

ஆகவே, $f'(x)=0$ என்பதன் அடுத்துள இரு மூலங்களுக்கிடையில் $f(x)=0$ என்பதற்கு ஒன்றின் மேற்பட்ட மூலம் இருத்தல் முடியாதென்பதும், அது காரணமாக $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களை வேறு பிரிக்கின்றன என்பதும் பெறப்படும்.

உதாரணமாக,

$$f(x)=x^3-4x^2+x+6 \quad \text{ஆகுக.}$$

ஆயின்

$$f'(x)=3x^2-8x+1.$$

$f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $\dfrac{4\pm\sqrt{13}}{3}$ அல்லது அண்ணளவாக $\cdot13$ உம் $2\cdot53$ உம் ஆகும்.

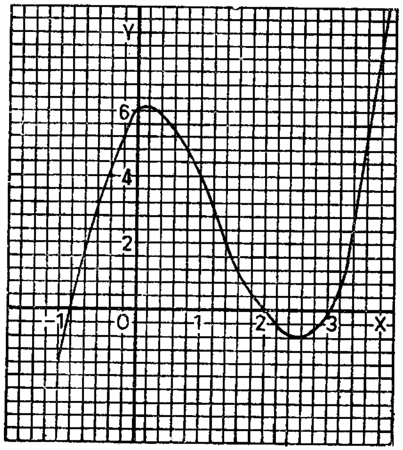
பரீட்சையால், $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $-1,\ 2,\ 3$ எனக் காணப்படுகின்றன; இவ்வெண்கள் ஐந்தையும்

$$-1,\ \cdot13,\ 2,\ 2\cdot53,\ 3$$

என வரிசையில் எழுதினோமாயின், $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களை வேறு பிரிக்கின்றன எனக் காண்கின்றோம்.

$f'(x)=3(x-\cdot13)(x-2\cdot53)$ என எழுதுதலால், $f'(x)$ என்பது $x<\cdot13$ ஆயிருக்கும்பொழுது நேரிலிருந்து $\cdot13<x<2\cdot53$ ஆயிருக்கும்பொழுது மறைக்கு மாறுகின்றதெனக் காண்கின்றோம்; ஆயின், $x=\cdot13$ என்பது

$f(x)$ இற்கு $6{\cdot}06$ என்னும் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது ; அதுபோல, $x = 2{\cdot}53$ என்பது $f(x)$ இற்கு $-{\cdot}88$ என்னும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது ; அச்சார்பின் வரைபு



வரிப்படத்திற் காட்டியது போன்றதாகும் ; இங்கு y யின் அலகு நீளம் x இனது அலகின் அரைப்பங்காகும்.

3.422 ஒரு சமன்பாட்டின் மடங்கு மூலங்கள். 3.421 இன் முதலாம் படத்தில், B, C எனும் புள்ளிகள் $x = b$ யில் (என்க) ஒன்றோ டொன்று பொருந்துமாறு அசையின், S எனும் புள்ளியும் அவற்றோடு பொருந்தும்: ஆகவே, $f(x) = 0$ என்பதற்கு b ஒரு மூலமாகும். $f(x)$ என் பதற்கு ஒவ்வொன்றும் b யிற்குச் சமனான இரண்டு மூலங்கள் இருந்தால், நாம் $f(x) = (x-b)^2\, g(x)$ என எழுதலாம் என்பதிலிருந்தும் இது தெளி வாகும் ; இங்கு $g(x)$ என்பது வேறொரு பல்லுறுப்பி ; பின்னர் வகையிட

$$f'(x) = 2(x-b)\, g(x) + (x-b)^2\, g'(x) \;;$$

இது, $(x-b)$ என்பதால் $f'(x)$ வகுபடுமெனக் காட்டுகின்றது. அதுபோல, $f(x) = (x-b)^r\, g(x)$ ஆகுமாறும்,

$$f'(x) = r(x-b)^{r-1}\, g(x) + (x-b)^r\, g'(x) \quad \text{ஆகுமாறும்}$$

$f(x) = 0$ என்பதற்கு ஒவ்வொன்றும் b யிற்குச் சமனான r சமமூலங்கள் இருந்தால், $f'(x) = 0$ என்பதற்கு ஒவ்வொன்றும் b யிற்குச் சமனான $r-1$ சமமூலங்கள் இருக்குமெனக் காண்கின்றோம்.

இதனால் $f(x) = 0$ என்பதற்கு ஒரு மடங்கு மூலம் உண்டெனில், அது மடங்கின் ஒருபடி குறைந்த $f'(x) = 0$ இன் மூலமுமாகும்.

உதாரணமாக,

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 \quad \text{எனின்}$$

$$f'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$= 4(x-1)(x-2)(x-3) \quad \text{ஆயின்,}$$

பரீட்சையினால், 1, 3 என்பனவும் $f(x) = 0$ என்பதன் மூலங்களாகு மென நாம் காண்கின்றோம் ; ஆகவே இவை $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ என்பன வற்றின் பொது மூலங்களாயிருத்தலால், அவை $f(x) = 0$ என்பதன் இரட்டை மூலங்களாயிருத்தல் வேண்டும். எனின், $f(x)$ இன் காரணிகள் $(x-1)^2\ (x-3)^2$ ஆகும்.

3.423 உதாரணங்கள்.

(i) **$(x-1)(x-2)^2$ என்பதன் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களை ஆராய்க.**

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2 \quad \text{ஆதலால்,}$$

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2)$$

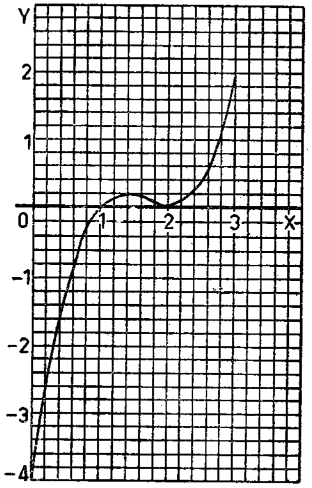
$$= (3x-4)(x-2).$$

இது, $x = \frac{4}{3}$, $x = 2$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும்.

$x < \frac{4}{3}$, எனின், $f'(x)$ இனது காரணிகளின் குறிகள் $(-)\ (-)$ ஆகும்; எனவே $f'(x)$ என்பது $+$ ஆகும்.

$\frac{4}{3} < x < 2$ எனின், $f'(x)$ இனது காரணிகளின் குறிகள் $(+)\ (-)$ ஆகும் ; எனவே $f'(x)$ என்பது $-$ ஆகும்.

$2 < x$ எனின், $f'(x)$ இன் காரணிகளின் குறிகள் $(+)\ (+)$ ஆகும்; எனவே $f'(x)$ என்பது $+$ ஆகும்.



x என்பது $\frac{4}{3}$ இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது $+$ விலிருந்து $-$ விற்கு மாறுகின்றமையால், $x = \frac{4}{3}$ என்பது $f(x)$ இற்கு $\frac{4}{27}$ என்னும் ஓர் **உயர்வுப் பெறுமானத்தைக்** கொடுக்கின்றது ; x என்பது 2 இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது $-$ விலிருந்து $+$ விற்கு மாறுகின்றமையால், $x = 2$ என்பது $f(x)$ இற்குப் பூச்சியம் என்னும் ஓர் **இழிவுப் பெறுமானத்தைக்** கொடுக்கின்றது.

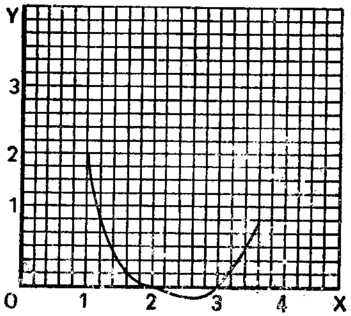
வரிப்படம் 0, 3 என்பனவற்றுக்கிடையில் x இன் பெறுமானங்களுக்கு $y = (x-1)\ (x-2)^2$ என்னும் வளையியின் பரும்படியான வரைதலாகும். x என்பது கூடுதலுற்று ∞ யை அணுக, y யும் ∞ யை அணுகும். x ஆனது $-\infty$ யை அணுக, y உம் $-\infty$ யை அணுகும்.

(ii) $(x-2)^3(x-3)$ என்பதன் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களை ஆராய்க.

$f(x)=(x-2)^3(x-3)$ ஆதலால்,

$$f'(x)=3(x-2)^2(x-3)+(x-2)^3$$
$$=(x-2)^2(4x-11).$$

இது $x=2$, $x=\frac{11}{4}$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும். இனி, x ஆனது 2 இற்கூடாகக் கூடுதலுறக் குறிமாற்றக்கூடிய $f'(x)$ இன் தனிக் காரணி $x-2$ ஆகும்; எனினும், இது வர்க்கமடைந்து இருக்கின்றது; ஆகையால் குறிமாறுது; ஏனெனின் இது என்றும் நேராயிருக்கும், அல்லது பூச்சியமாயிருக்கும். ஆகவே, x ஆனது 2 இற்கூடாகச் செல்லும்போது $f'(x)$ ஆனது குறிமாறுது; ஆயின், $x=2$ என்பது அவ்வளையியின்மீது விபத்திப் புள்ளி ஒன்றைத் தருகின்றது.



இனி, x ஆனது $\frac{11}{4}$ இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ மறையிலிருந்து நேருக்குக் குறிமாறுகின்றது; ஆகவே, $x=\frac{11}{4}$ என்பது $f(x)$ இற்கு $-\frac{27}{256}$ என்னும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது.

அவ்வளையியின் ஒரு பகுதி வரிப்படத்திற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

(iii) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ என்னும் வளையியின் உயர் விழிவு நிலைக்கூறுகளைக் கண்டு அவ்வளையியை வரைக.

$$f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} \quad \text{ஆதலால்,}$$

2.62. ஆல்,

$$f'(x)=\frac{(1+x+x^2)(-1+2x)-(1-x+x^2)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$
$$=\frac{-2(1-x^2)}{(1+x+x^2)^2}.$$

எனின், $f'(x)$ என்பது $x=-1$, $x=1$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும்; $f'(x)$ இன் குறி $(x+1)(x-1)$ என்பதன் குறியாகும்.

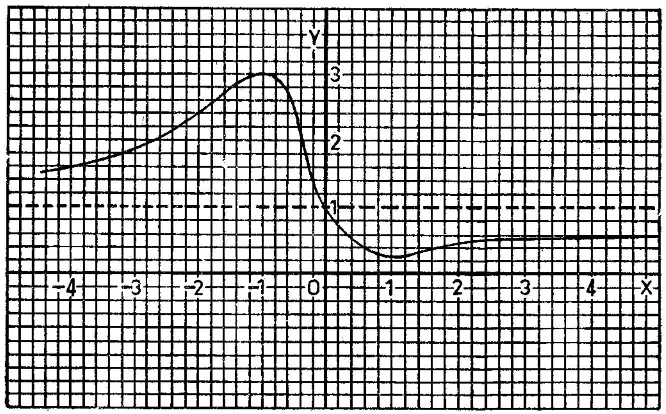
$x<-1$ எனின், இரு காரணிகளும் மறையாவதோடு $f'(x)$ என்பது நேராகும்; $-1<x<1$ எனின், முதற் காரணி நேராயும் இரண்டாங் காரணி மறையாயும் இருக்கும்; இருக்க, $f'(x)$ மறையாகும்; $1<x$ எனின், $f'(x)$ நேராகும். எனின், x ஆனது -1 இற்கூடாகக் கூடுதலுற,

$f'(x)$ நேரிலிருந்து மறைக்கு மாறும்; ஆயின், $x=-1$ என்பது, 3 என்னும் ஓர் உயர்வு நிலைக்கூற்றைக் கொடுக்கும்; x என்பது 1 இற்றூடாகக் கூடுதலுற, $f'(x)$ என்பது மறையிலிருந்து நேருக்கு மாறும்; ஆயின், $x=1$ என்பது $\frac{1}{3}$ என்னும் ஓர் இழிவு நிலைக்கூற்றைக் கொடுக்கும்.

அவ்வளையியை வரைதற்கு, தந்த சார்பின் தொகுதியாதல் பகுதியாதல் பூச்சியமாகுதற்கு x இன் பெறுமானம் யாதுமில்லை எனக் காண்கின்றோம்; ஆயின், y யானது பூச்சியமாகவாதல் முடிவிலியாகவாதல் வரமாட்டாது. தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2 ஆல் வகுத்து

$$y=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} \text{ என எழுதுதலால்,}$$

$x\to\infty$ ஆக, $y\to 1$ என்றும், $x\to-\infty$ ஆக, $y\to 1$ என்றுங் காண்கின்றோம். இனி, உற்பத்திக்கு அருகில் உயர்விழிவுகளாகிய நிலைக்கூறுகளுட்படச் சில புள்ளிகளைக் குறித்தோமாயின் எவ்வாறு வளையி செல்லுகின்றதெனக் காண்பது எளிதாகும்.



(vi) $y=x-1+\dfrac{4}{x-2}$ எனும் வளையியை வரைதல்.

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

இது $x=0$, $x=4$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும்; அத்துடன் x பூச்சியத்திற்கூடாகக் கூடுதலுற, dy/dx நேரிலிருந்து மறைக்கு மாறும்; ஆயின், $x=0$ என்பது y யிற்கு -3 என்னும் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக்

கொடுக்கும் ; இன்னும் x ஆனது 4 இற்கூடாகக் கூடுதலுற, dy/dx என்பது மறையிலிருந்து நேருக்கு மாறும் ; ஆயின், $x=4$ என்பது y யிற்கு 5 எனும் ஓரிழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும்.

இன்னும், x ஆனது இடப்பக்கத்திலிருந்து (அதாவது இரண்டிற் குறைந்த எண்களுக்கூடாக) 2 ஐ அணுக, $\frac{4}{x-2}$ என்னும் பின்னம் $-\infty$ யை அணுகும் ; ஆகையால் $y\to-\infty$; ஆனல், x ஆனது வலப்பக்கத்திலிருந்து (அதாவது 2 இலும் பெரிய எண்களுக்கூடாக) 2 ஐ அணுக, $\frac{4}{x-2}$ என்னும் பின்னம் ∞ யை அணுகும் ; ஆகவே $y\to\infty$.

முடிவிலித் தூரத்தில் அவ்வளையியால் அணுகப்படும் $x=2$ எனுங் கோடு **அவ்வளையியின் ஓர் அணுகுகோடு** எனப்படும்.

அணுகுகோடுகளின் பொதுக் கொள்கையை ஆராயாது சென்ற பயிற்சியில் $y=1$ என்பது வளையியின் ஓர் அணுகுகோடு என்பதையும், இப்பயிற்சியில் x ஆனது பெரிதாகி முடிவிலியை அணுகச், சமன்பாட்டின் வடிவத்தை எடுத்து நோக்குவதால் வேறோர் அணுகுகோடு காணப்பட்டுள்ளது என்பதையும் கவனிக்க வேண்டும்.

x ஆனது எண்ணளவிற் கூடுதலுற $\frac{4}{x-2}$ எனும் பின்னங் குறைதலுறும் ; ஆயின், $x\to\pm\infty$ ஆக, வளையியின் சமன்பாடு ஒரு நேர், கோட்டின் சமன்பாடாகிய

$$y=x-1$$

எனும் வடிவத்திற்கு அண்ணளவுறும் ; இது இரண்டாம் அணுகுகோடாகும்.

இன்னும்,

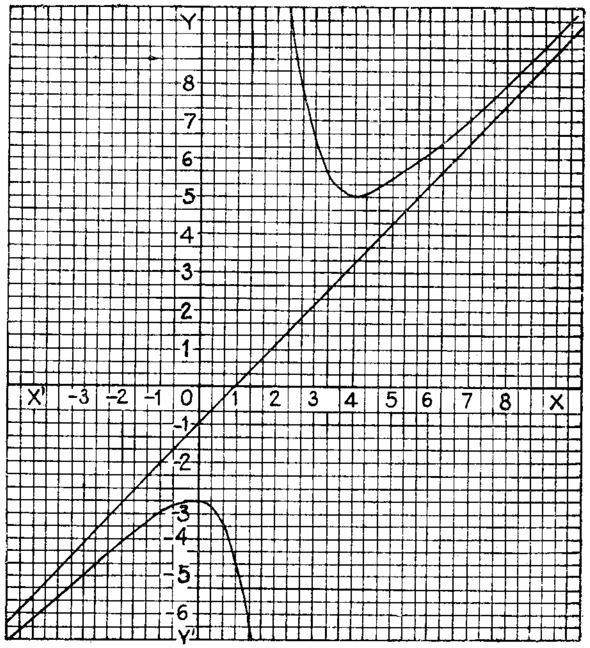
$$y=x-1+\frac{4}{x-2}$$

என்னும் வளையியின் சமன்பாட்டிற்கும்

$$y=x-1$$

எனும் அணுகுகோட்டின் சமன்பாட்டிற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டை ஆராய்வதால், x பெரிதாயும் நேராயுமிருக்க, அவ்வளையியின் y யானது அணுகுகோட்டின் y யிலும் பெரிதெனக் காண்கின்றோம் ; ஆயின், x பெரிதாயும் நேராயுமிருக்கும்பொழுது வளையி அணுகுகோட்டிற்கு மேற்புறமாக இருக்கும். இன்னும், x ஆனது ஒரு பெரிய மறையெண்ணுகும்பொழுது வளையியின் y யானது அணுகுகோட்டின் y யிலும் பெரிய மறையெண்ணுகும் ; ஆயின், x ஆனது பெரிதாயும் மறையாயும் இருக்கும்பொழுது வளையி அணுகுகோட்டிற்குக் கீழ்ப்புறமாக இருக்கும்.

வளையியை வரைதற்கு அணுகுகோடுகளை வரைதலாலுந் திரும்பற் பெறுமானங்களின் நிலைகளைக் குறிப்பதாலுந் தொடங்குகின்றோம். பின்னர் x பெரிதாயும் மறையாயுமிருக்க, வளையி சரிவு அணுகுகோட்டிற்குக் கீழ்ப்புறமாக இருக்கின்றதென்றும், பின்னர் $x=0$ இல் y யானது -3 ஆக என்னுந் தன்உயர்விற்குக் கூடுகின்றதென்றும், அதன்பின் $x\to2$ அது $-\infty$ இற்குக் குறைகின்றதென்றும் அறிக. x ஆனது2 இற்கூடாகச்



செல்ல, y யின் குறி நேராக மாறும் ; y பெரிதாகத் தொடங்குகின்றது ; x ஆனது 4 வரைக்குங் கூடுதலுற, y தன் இழிவாகிய 5 வரைக்குங் குறைதலுற்று அதன்பின் மறுபடியுங் கூடுதலுற்று $x\to\infty$ ஆகச் சரிவு அணுகுகோட்டிற்கு மேற்புறமாக முடிவடைகின்றது.

3.424 பயிற்சி

1. $(x-1)^2(x-2)$ என்பதன் உயிர்விழிவுப் பெறுமானங்களை ஆராய்ந்து அச்சார்பை வரைபாற் குறிக்க.

2. $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ என்னும் வளையியின் உயர்விழிவு நிலைக்கூறுகளின் நிலைகளைக் காண்க ; அவ்வளையியை வரைக.

3. $y=x(x^2-3x+3)$ என்னும் வளையியின்மீது திரும்பற் புள்ளி யாதும் இல்லை என நிறுவுக ; அவ்வளையியை வரைக.

4. $(x-1)^2(x-2)^2$ என்னுஞ் சார்பிற்கு இரண்டு இழிவுகளும் ஓர் உயர்வும் உண்டென நிறுவுக ; அச்சார்பை வரைபாற் குறிக்க.

5. $x \to \pm\infty$ ஆக, $(x-1)\,(x-2)/x^2$ என்னுஞ் சார்பின் எல்லைகளைக் காண்க. அச்சார்பிற்கு ஓர் இழிவுப் பெறுமானம் உண்டெனக் காட்டுக ; அதன் வரைபை வரைக.

6. x ஆனது கூடுதலுற, $x^3-6x^2+12x-2$ என்னுஞ் சார்பு ஒருபோதுங் குறைதலுறுதென நிறுவுக.

7. $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டிற்கு இரட்டை மூலங்கள் உண்டெனக் காட்டுக.

8. $y=(x+1)^3(x-2)^2$ எனும் வளையியின் மீதுள்ள திரும்பற் புள்ளிகளைக் காண்க. அவ்வளையிக்கு ஒரு விபத்திப் புள்ளி உண்டெனக் காட்டுக ; அவ்வளையியை வரைக.

9. $y=ax^2+2bx+c$ எனும் வளையிக்கு ஒரு திரும்பற் புள்ளி உண்டென்றும் a என்பது மறை, அல்லது நேர் என்பதற்குத் தக அவ்வளையி ஓர் உயர்வு, அல்லது இழிவு நிலைக் கூற்றைத் தருமென்றும் நிறுவுக.

10. $y=4x^3+8x^2-11x+3$ எனும் வளையி x – அச்சைத் தொடுமென்று நிறுவுக அவ்வளையி அவ்வச்சை எங்கு வெட்டுகின்றதென்றுங் காண்க.

11. $(x+1)^3/(x-1)^2$ எனுஞ் சார்பிற்கு $\frac{27}{2}$ எனும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானம் உண்டென்றும் வேறுயாதுந் திரும்பற் பெறுமானம் இல்லை என்றும் நிறுவுக.

12. $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ எனும் வளையியின் மீதுள்ள திரும்பற் புள்ளிகளைக் காண்க ; y யானது -1, 3 என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடவாதென்றுங் காட்டுக.

13. $y=\dfrac{(x-1)\,(x+2)}{x^2+x+1}$ எனும் வளையியை வரைக.

14. $y=(x-1)(x-2)/(x-3)$ எனும் வளையியின் மீதுள்ள உயர்விழிவு நிலைக்கூறுகளைக் காண்க ; அவ்வளையியை வரைக.

15. $3x^4-28x^3+96x^2-144x+80=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டிற்கு யாதுமொரு மடங்கு மூலம் உண்டோவென ஆராய்க ; இடப்பக்கத்திலுள்ள அச்சார்பின் வரைபை வரைக.

3.5 மாற்ற வீதம். நேர் கோட்டியக்கம் வகையிடுதலின் பொருளுக்கு ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டாகும்.

ஒரு புகைவண்டி இயங்கும்போது ஒரு குறித்த கண நேரத்தில் அதன் வேகத்தை அளக்க நாம் விரும்புகின்றோமெனக் கொள்க. அடுத்த 10 நிமிடங்களில் அது 5 மைல் சென்றது என்று காணுதல் எடுத்துக்கொண்ட கணநேரத்தில் அதன் கதி மணிக்கு 30 மைல் என்று சொல்லுதற்கு நியாயமாகாது ; அதற்குக் காரணம், நோக்கும் நேரமாகிய 10 நிமிடங்களில் அவ்வேகங் கூடியிருக்கலாம், குறைந்திருக்கலாம், அன்றிக் கூடியுங் குறைந்துமிருக்கலாம் என்பதே. எனினும், 10 நிமிட இடையை 1 நிமிடத்திற்குச் சுருக்கிச் சென்ற தூரம் $\frac{1}{2}$ மைலெனக் கண்டோமாயின், இன்னுங் கூடுதலாக நோக்கலிடையை 1 செக்கனுக்குச் சுருக்கிச் சென்ற தூரம் 44 அடி எனக் கண்டோமாயின், எடுத்துக்கொண்ட கண நேரத்தில் வேகம் மணிக்கு 30 மைல் என்பது கூடிய உண்மையாகும்.

ஆயின், s அடி என்பது t செக்கனிற் சென்ற தூரமெனின், அந்த t செக்கனிலுஞ் **சராசரி** வேகம் செக்கனுக்கு s/t அடியாகும். எனினும், இது தேர்ந்தெடுத்த யாதுமொரு கணநேரத்திலுள்ள வேகமாகவேண்டியதில்லை. நேரம் t யிலுள்ள வேகத்தை அளத்தற்கு, $s+\delta s$ என்பது $t+\delta t$ எனும் நேரத்திற் சென்ற தூரத்தைக் குறிக்க ; ஆயின், δs என்பது சிறு நேரம் δt யிற் சென்ற மேலதிகமான சிறு தூரமாகும். ஆயின் $\delta s/\delta t$ என்பது δt எனும் ஆயிடையிலுள்ள சராசரி வேகமாகும் ; எல் $\lim_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta s}{\delta t}$ அல்லது $\dfrac{ds}{dt}$ என்பது t நேரத்திலுள்ள வேகத்தின்அளவாகும்.

வேகம் என்பது " நிலையின்மாற்ற வீதம் " எனப் பொருள்படுதலால், t யைக் குறித்து s இன் பெறுதியானது t யைக் குறித்து s **இனது மாற்ற வீதத்தின்** அளவாகும் ; பொதுவாக x ஐக் குறித்து y யின் பெறுதியானது x ஐக் குறித்து y யின் மாற்ற வீதமாகும்.

3.51. திட்டமாய்க் கூறுமிடத்து, வேகம் எனுஞ் சொல் ஒரு திசைக் கணியத்தை வரையறுக்கின்றதெனலாம் ; ஒரு பொருள் ஒரு வளைவான பாதை வழியே அசைந்தால், அதன் பாதை வழியே அதன் கதி மாறாதிருந்தாலும் அதன் வேகந் திசைமாற்றம் அடைகின்றது. இங்கு இயக்கம் ஒரு நேர்கோட்டில் இருக்கின்றதென்றும் s என்பது நேரம் t யிற் சென்ற தூரமென்றுங் கொள்வோம் ; ஆயின், v என்பது நேரம் t யிலுள்ள வேகமெனில், $v=ds/dt$ எனப் பெறுவோம்.

பயிற்சி. **ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து t செக்கனில் விழுந் தூரம் t^2 இற்கு விகிதசமமெனக் காணப்படுகின்றது. அடைந்த வேகம் t யிற்கு விகிதசமமென நிறுவுக.**

k ஒரு மாறிலியாக, $s=kt^2$ ஆகுக ; ஆயின் $ds/dt=2kt$; எனினும், $v=ds/dt$; ஆகவே, $v=2kt$.

3.52 **ஆர்முடுகலானது வேகமாற்ற வீதம்** என வரையறுக்கப்படும் ; ஆகவே, அது dv/dt என்பதால் அளக்கப்படும். எனினும், $v=ds/dt$; ஆகவே, ஆர்முடுகல் ds/dt யின் மாற்ற வீதமாகும். இனி, " மாற்றவீதம் " என்னுஞ் சொற்றொடரை d/dt எனுஞ் செயலிப்பு குறிக்குமெனக் (அதாவது, எடுத்துக்கொண்டது நேரவீதமாயின், t யைக்குறித்த வகையீடு எனக்) கருதுவோமாயின், ஆர்முடுகல் $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$ ஆல்அளக்கப்படும் எனச் சொல்லலாம். இது **இரண்டாம் பெறுதி**, அல்லது t யைக் குறித்த s இன் **இரண்டாம் வகையீட்டுக் குணகம்** எனப்படும். இது $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ எனுங் குறுக்கத்தால் உணர்த்தப்படும்.

இரண்டாம் பெறுதி $\frac{ds^2}{dt^2}$ அன்றென அறிக ; $\frac{ds^2}{dt^2}$ என்பது $\frac{ds}{dt}$ இன் வர்க்க மாகும் ; ஆனால், $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்பது $\left(\frac{d}{dt}\right)\frac{ds}{dt}$, அல்லது $\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)s$, ஆகும்.

3.521 ஆர்முடுகலுக்கு வேறொரு சூத்திரம். ஆர்முடுகலானது வேகம் v, தூரம் s என்பனபற்றியும் உணர்த்தப்படலாம்.

$$\text{ஆர்முடுகல்} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \textbf{(2.63)}$$

$$= v\frac{dv}{ds}.$$

3.522 உதாரணம். **நேரம் t யில் ஒரு நிலையான புள்ளி O விலிருந்து அதற் கூடாக ஒரு நேர் கோட்டில் அசைகின்ற ஒரு புள்ளியினது தூரம்**

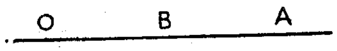
$$s = at^2 - 2bt + c$$

என்பதாலே தரப்படுகின்றது ; இங்கு a, b, c என்பன நேரெண்கள் ; அப்புள்ளியின் இயக்கத்தை ஆராய்தல்.

நாம் பெற்றது $\qquad s = at^2 - 2bt + c. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

ஆயின், $\qquad \frac{ds}{dt} = 2at - 2b. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

A என்பது நேரம் $t=0$ இல் அப்புள்ளியின் நிலையாகுக.



(1) இல் $t=0$ என இட $OA=c$ எனக் காண்கின்ருேம். (2) இல் $t=0$ என இட, வேகம் $-2b$ எனக் காண்கின்ருேம் ; இங்கு மறைக்குறி, குறைதலுறு கின்றது அல்லது அப்புள்ளி O முகமாக அசைகின்றது எனக் காட் டுகின்றது. t கூடுதலுற வேகம் அட்சரகணித முறையாய்க் கூடுதலுறுகின் றது ; $t=b/a$ ஆகும்பொழுது, அது பூச்சியமாகின்றது. இதன் பொருள் $\frac{b}{a}$ எனும் ஒரு நேரத்திற்கு O முகமாக A யிலிருந்து அசைந்தபின், அப்புள்ளி கணநிலை ஓய்விற்கு, (B யில் என்க) வருகின்றது என்பதே. (1) இல் $t=\frac{b}{a}$ என இட முடிவு OB யைக் குறிக்கின்றது என்பதால் AB எனுந் தூரம் பெறப்படுகின்றது ;

அதாவது

$$OB = \frac{b^2}{a} - \frac{2b^2}{a} + c = -\frac{b^2}{a} + c\,;$$

எனினும், $\qquad OA = c$

ஆகவே, $\qquad BA = b^2/a.$

t இன்னுங் கூடுதலுற, வேகம் நேரானதி t ஓடு தொடர்ச்சியாகக் கூடுத லுறுகின்றது ; ஆயின், அப்புள்ளி BA என்னும் பாதையில் மீண்டுஞ் சென்று A யைக் கடக்க, O விலிருந்து அதன் தூரம் என்றுங் கூடுதலுறும்.

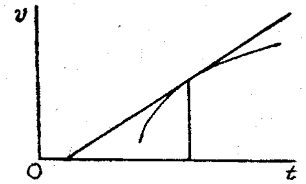
(2) ஐ வகையிடுதலாற் பெறப்படும் ஆர்முடுகல்

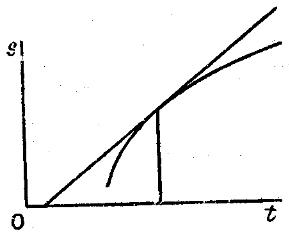
$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2a.$$

இது ஒரு மாறு ஆர்முடுகல்.

3.53 வரைபு வகைக்குறிப்பு. s, t என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை, t கிடைக்கூறும் s நிலைக்கூறுமுள்ள ஒரு வளையியாற் குறித்தோமாயின் அவ்வளையி **வெளி-நேர வளையி** எனப்படலாம். அத் தகைய வளையியின் படித்திறன் ds/dt ஆகும் ; அதாவது, யாதும் ஒரு புள்ளியில் அவ்வளையியின் படித்திறன் ஒத்த கண நேரத்திலுள்ள வேகமாகும்.

அதுபோல், v, t என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை t யைக் கிடைக்கூறும் v யை நிலைக்கூறும் எடுத்து ஒரு வளையியாற் குறித்தோ மாயின் அவ்வளையி **வேக-நேர வளையி** எனப்படும்.





இவ்வகையில் dv/dt எனும் படித்திறன் ஆர்முடுகலின் ஓர் அளவாகும்.

3.531 பயிற்சி.

1. ஒரு புள்ளியானது t செக்கனில் சென்ற தூரம் $(3t-t^3)$ அடி ஆகுமாறு அசைகின்றது. $=0$, $t=1$, $t=2$ செக்கன் என்னும் நேரங்களில் அதன் வேகம் என்ன ? அதன் இயக் கத்தின் முதலிரண்டு செக்கன் ஒவ்வொன்றிலும் அது எவ்வளவு தூரஞ் செல்கின்றது ?

4—CP 943 (6/67)

2. நேரம் t செக்கனில் ஒரு துணிக்கையினது நிலை

$$s = 2t^3 - 15t^2 + 36t$$

என்பதாலே தரப்பட்டுள்ளது ; இங்கு, s என்பது ஒரு கோட்டின் வழியே ஒரு நிலையான உற்பத்தியிலிருந்து அடிகளில் அளந்து கண்ட தூரமாகும். அதன் வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையும் காண்க : முதல் நான்கு செக்கனிலுள்ள அதன் இயக்கத்தை விவரிக்க ; வேகத்தின் பெறுமானங்களுட் சிறியது யாது ?

3. நேரம் t செக்கனில் ஒரு துணிக்கையின் நிலை

$$s = 4t - 7t^2 + 2t^3$$

என்பதாலே தரப்பட்டுள்ளது ; இங்கு, s என்பது ஒரு நேர்ப் பாதையின் வழியே ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து அடிகளில் அளந்து கண்ட தூரம். வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையுந் துணிக ; வேக–நேர வளையியை வரைக.

4. பின்வரும் அட்டவணை கூறப்பட்ட நேரங்களில் ஒரு துணிக்கையின் வேகத்தைத் தருகின்றது :

t	0	5	10	15	20	25	செக்கன்
v	25	28	32·5	38	35	26	அடி செக்கனுக்கு.

வேக–நேர வளையியை வரைக ; $t = 10$, $t = 22$ என்னும் நேரங்களிலுள்ள ஆர்முடுகலை உம்மாற் கூடிய அளவிற்கு அண்ணளவாகத் துணிக.

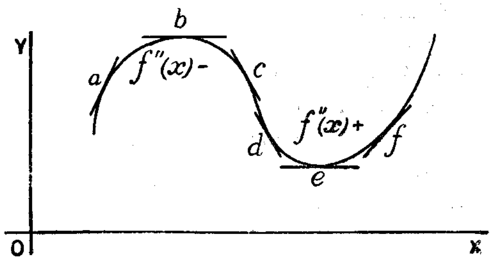
3.6 இரண்டாம் பெறுதிகளின் உபயோகம். y, அல்லது $f(x)$ இன் முதற் பெறுதி dy/dx அல்லது $f'(x)$ ஆற் குறிக்கப்படுவதுபோல, y, அல்லது $f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதி dy/dx அல்லது $f'(x)$ இன் பெறுதியாதலால், $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ அல்லது $f''(x)$ ஆற் குறிக்கப்படும் ; அதுபோல, $\dfrac{d^3y}{dx^3}, \dfrac{d^4y}{dx^4}, \ldots\ldots$ அல்லது $f'''(x)$, $f^{\text{iv}}(x)\ldots\ldots$ என்பன இன்னும் உயர்ந்த வரிசைப் பெறுதிகளைக் குறிக்கும்.

3.3 இல் $f'(x)$ ஆனது நேராயின், $f(x)$ ஆனது x ஓடு கூடுதலுறுமென்றும், $f'(x)$ ஆனது மறையாயின், x கூடுதலுற $f(x)$ குறைதலுறுமென்றுங் கற்றோம். $f''(x)$ ஆனது நேராயின் $f'(x)$ ஆனது x ஓடு கூடுதலுறுமென்றும், $f''(x)$ ஆனது மறையாயின், x கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது குறைதலுறுமென்றும் அதே நியாயங் காட்டும். அன்றியும், $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகள் $f'(x) = 0$ என்பதாலே தரப்படுதல் போல $f'(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளிகள் $f''(x) = 0$ என்பதாலே தரப்படும்.

படத்திற்காட்டிய வளையி வழியே x கூடுதலுற $f'(x)$, $f''(x)$ என்பனவற்றின் மாற்றங்களை ஆராய்க.

a யிலிருந்து b வரைக்குந் தொடலி மேல் முகமாக இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கத்திற்குச் சாய்கின்றது ; $f'(x)$ நேராகிக் குறைதலுறுகின்றது ; ஆகவே, $f''(x)$ மறையாகும் ; b யைக் கடந்து செல்கையில், $f'(x)$ நேரிலிருந்து மறைக்குக் குறைதலுற்றுப் பூச்சியத்திற்கூடாகச் செல்கின்றது ; ஆகவே $f''(x)$ மறையாய்க் கிடக்கின்றது ; bc

என்னும் அவ்வளையி தனது தொடலியை c, d என்பனவற்றிற் கிடையிற் குறுக்காக வெட்டுகின்ற யாதும் ஒரு புள்ளியை நாம் அடையும் வரைக்கும் அவ்வளையி வழியே செல்ல, $f''(x)$ தொடர்ச்சியாய் மறையாகும் ; c, d என்பனவற்றிலுள்ள தொடலிகள் அவ்வளையியின் எதிர்ப் பக்கங்களில் இருப்பதால் அத்தகைப் புள்ளி உண்டு என்பது வெளிப்படை. அவ்வளையியின்மீது இப்புள்ளிக்கூடாக (விபத்திப் புள்ளி) நாம் செல்ல,



$f''(x)$ ஆனது ஓர் மறைப் பெறுமானத்திலிருந்து பூச்சியத்திற்கூடாக ஒரு நேர்ப் பெறுமானத்திற்கு மாறும் ; இன்னும் மறையாயுள்ள $f'(x)$ குறைதலுறுதல் ஒழிந்து அட்சரகணித முறையாய்க் கூடுதலுறத் தொடங்கும் ; அது e யிற் பூச்சியத்தை அடையும் ; அப்புள்ளியைக் கடந்து செல்லும்பொழுது நேராகித் தொடர்ச்சியாய்க் கூடுதலுறும் ; ஆயின் $f''(x)$ என்பது அவ்வளையியின் கீழ் வளைவைச் சுற்றியுள்ள பகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் நேராயிருக்கும்.

இதனைச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு கூறலாம் : $f'(x)$ குறைதலுறும்பொழுதெல்லாம் $f''(x)$ மறையாகும் ; ஆயின், $f(x)$ என்பதற்கு உயர்வு உள்ள புள்ளியுட்பட ஒரு மேல் வளைவு abc யைச் சுற்றியுள்ள பகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் $f''(x)$ மறையாகும் ; $f'(x)$, கூடுதலுறும்பொழுதெல்லாம் $f''(x)$ நேராகும் ; ஆயின், $f(x)$ என்பதற்கு ஓர் இழிவு உள்ள புள்ளியுட்பட ஒரு கீழ் வளைவு def ஐச் சுற்றியுள்ள பகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் $f''(x)$ என்பது நேராகும்.

இது உயர்விழிவுகளை வேறு பிரித்தறிவிக்கின்ற ஒரு மேலதிகமான சாதனத்தைத் தருகின்றது. உதாரணமாக, $x = a$ என்பது $f'(x) = 0$ என்பதன் ஒரு தீர்வாயின், $f''(a)$ யானது மறை அல்லது நேர் என்பதற்குத் தக, $f(a)$ யானது $f(x)$ இன் ஓர் உயர்வு, அல்லது இழிவுப் பெறுமானமாகும். $f''(a) = 0$ என்பது நிகழத்தக்கது என்பதை நாம் நோக்காது தவிர்த்தல் ஆகாது. நாம் முன்னர் கண்டவாறு இது $f'(x)$ இற்கு $x = a$ யில் ஒரு திரும்பற் புள்ளி, அதாவது $y = f(x)$ இல் ஒரு விபத்திப் புள்ளி இருப்பதாலே நிகழலாம். ஆயினும், x ஆனது a யிற்கூடாகச் செல்ல $f''(x)$ என்பது குறிமாறுகின்றதெனக் கண்டாலன்றி, $f''(a) = 0$ ஆகின்ற அத்தகைப் புள்ளி ஒரு விபத்திப் புள்ளியாகுமென நாம் நிச்சய

மாகச் சொல்ல முடியாது. $f''(x)$ என்பது அவ்வாறு குறிமாறுதாயின் $x=a$ யில் $y=f(x)$ என்னும் வளையி மீது அவ்வாறு கூறப்பட்ட **தனிச்சிறப்பு** கூடிய சிக்கலான வகையாகும்.

உதாரணமாக, $y=(x-1)^4$ எனும் வளையியை எடுத்து நோக்குக; இங்கு,

$$f'(x)=4\ (x-1)^3,\ f''(x)=12\ (x-1)^2\ ;$$

ஆயின், அவ்வளையிமீது $x=1$ எனும் புள்ளியில் $f'(x)$, $f''(x)$ எனும் இரண்டும் பூச்சியமாகும்; x ஆனது 1 இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது மறையிலிருந்து நேருக்கு மாறும்; எனினும், $x=1$ என்பது தவிர x இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f''(x)$ ஆனது நேராகும். ஆகவே, $x=1$ என்பது $f(x)$ இற்கு ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும்; அடுத்த பிரிவின் கருத்துப்படி அவ்வளையி எங்கும் மேன்முகமாகக் குழிவுள்ளதாகும்.

3.61 அச்சுக்கள் அசைக்கப்பட்டால் அவற்றினுடைய திசைகள் மாறுதிருக்குமாயின், $f''(x)$ இன் குறிபற்றிய வாதம் வளையியைக் குறித்தெடுக்கப்பட்ட அச்சுக்களின் நிலையைச் சார்வதில்லை என்பது அவதானிக்கப் படவேண்டும். அன்றியும், **மேன்முகம்** என்பதை y கூடுதலுறுகின்ற திசையென வரையறுத்தோமாயின், **வளையி எங்கு ஒரு குழிவை மேல் நோக்கியவாறு கொண்டுள்ளதோ அங்கு $f''(x)$ நேரென்றும், எங்கு ஒரு குழிவை கீழ் நோக்கியவாறு கொண்டுள்ளதோ அங்கு $f''(x)$ மறையென்றும் நாம் சொல்லலாம்.**

3.62 அட்சரகணிதமுறை நியாயங்கள்.

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

எனும் வடிவத்திலுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னம் ஒன்றினுடைய திரும்பற் பெறுமானங்களை எளிய அட்சரகணித முறை ஆராய்வுகளாற் காணலாம். பொதுக் கொள்கையை ஆராயாது அச்செய்கையை ஓர் உதாரணத்தால் எடுத்துக்காட்டுதல் எம் நோக்கத்திற்குப் போதியதாகும்.

$y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ஆகுக; ஆயின், x இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக ஒழுங்குபடுத்த

$$x^2(1-y)-x(1+y)+1-y=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

x இலுள்ள இவ்விருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாக வேண்டுமெனின்,

$$(1+y)^2-4(1-y)^2 \geqslant 0,$$ ஆதல் வேண்டும்.

அல்லது $$\{(1+y)+2(1-y)\}\{(1+y)-2(1-y)\} \geqslant 0$$

அல்லது $$(3-y)(3y-1) \geqslant 0.$$

ஆயின், x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு y யானது 3 இலும் பெரிதாயாதல் $\frac{1}{3}$ இலுஞ் சிறிதாயாதல் இருத்தல் முடியாது; எனினும் $\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3$ ஆய் இருக்கலாம்; ஆயின், $(1-x+x^2)/(1+x+x^2)$ என்பதற்கு 3 ஓர் உயர்வுப் பெறுமானமாயும் $\frac{1}{3}$ ஓர் இழிவுப் பெறுமானமாயும் இருக்கும்; x இன் ஒத்த பெறுமானங்கள் சமன்பாடு (1) இல் y யின் பெறுமானங்களை முறை முறையாகப் பிரதியிடுதலாற் காணப்படும்.

3.63 ஒரு சமன்பாட்டின் மடங்கு மூலங்கள். 3.422 இல் $f(x)=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டிற்கு b யிற்குச் சமனான r மூலங்கள் இருந்தால், $f'(x)=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டிற்கு b யிற்குச் சமனான $r-1$ மூலங்கள் இருக்குமெனக் கண்டோம். இதே நியாயத்தால் $f'(x)=0$ என்பதற்கு b யிற்குச் சமனான $r-1$ மூலங்கள் இருந்தால், $f''(x)=0$ என்பதற்கு b யிற்குச் சமனான $r-2$ மூலங்கள் இருக்குமென்று நிறுவலாம். இவ்வாறே பிறவும்.

3.64 உதாரணங்கள்.

(i) $3x^5-5x^4-10x^3+30x^2-25x+7=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு நான்மடி மூலம் உண்டென நிறுவுக; எல்லா மூலங்களையுங் காண்க.

$$f(x)=3x^5-5x^4-10x^3+30x^2-25x+7,$$

ஆகவே, $$f'(x)=5(3x^4-4x^3-6x^2+12x-5),$$

$$f''(x)=60(x^3-x^2-x+1),$$

$$f'''(x)=60(3x^2-2x-1)=60(3x+1)(x-1).$$

இனி, $f(x)$ இற்கு நான்கு **முறை** வரும் ஒரு காரணி உண்டெனின், அது $f'''(x)$ இன் ஒரு காரணியாய் இருத்தல் வேண்டும்; ஆயின், அது $3x+1$, அல்லது $x-1$ ஆதல் வேண்டும். எனினும், $(3x+1)^4$ என்பது $f(x)$ இல் அடங்கவில்லை என்பது வெளிப்படை; பரீட்சையினால்,

$$f(x)=(x-1)^4(3x+7)$$ எனக் காண்போம்.

ஆயின், $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $1, 1, 1, 1, -\frac{7}{3}$ என்பனவாகும்.

அன்றியும், $$f'(x)=5(x-1)^3(3x+5),$$

$$f''(x)=60(x-1)^2(x+1),$$

$$f'''(x)=60(x-1)(3x+1).$$

இவை 3.63 இனது தேற்றத்தை விளக்குகின்றன.

(ii) $y=2x^3-13x^2+8x+3$ என்னும் வளையியில் உயர்விழிவு நிலைக்கூறுகளையும் விபத்திப் புள்ளியையுங் காண்க.

இங்கு $f(x)=2x^3-13x^2+8x+3$ ஆகும்.

ஆயின் $$f'(x)=2(3x^2-13x+4)=2(3x-1)(x-4),$$

$$f''(x)=2(6x-13).$$

$f'(x)=0$ இன் மூலங்கள் $\frac{1}{3}$, 4 என்பனவாகும். $f''(\frac{1}{3})$ என்பது மறை; ஆயின் $f(\frac{1}{3})=\frac{116}{27}$ என்பது ஓர் உயர்வு நிலைக்கூறு; $f''(4)$ என்பது நேர் ஆயின், $f(4)=-45$ என்பது ஓர் இழிவு. அன்றியும், x ஆனது $\frac{13}{6}$ இற் கூடாகச் செல்ல $f''(x)$ என்பது பூச்சியமாகிக் குறிமாறும்; ஆயின், இது விபத்திப்புள்ளி ஒன்றைத்தரும்.

3·65 பயிற்சி.

1. $y=x^2(x^2+5x-9)$ எனும் வளையியில் விபத்திகளைக் காண்க. அவ்வளையியை வரைக.

2. $y=x^4-6x^2+8x-3$ எனும் வளையியில், திரும்பற் புள்ளியையும் விபத்திகளையுங் காண்க; அவ்வளையியை வரைக.

3. $y=2x^2-x^4$ எனும் வளையியில், திரும்பற் புள்ளிகளையும் விபத்திகளையுங் காண்க; அவ்வளையியை வரைக.

4. $y=(x-1)^2\ (x-3)^2$ எனும் வளையியில், திரும்பற் புள்ளிகளையும் விபத்திகளையுங் காண்க; அவ்வளையியை வரைக.

5. $y=(x^2-1)^2$ எனும் வளையியில், திரும்பற் புள்ளிகளையும் விபத்திகளையுங் காண்க. x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கிடையில் அவ்வளையி கீழ்முகமாகக் குழிவு கொண்டுள்ளது?

6. $y=ax+bx^2+cx^3$ எனும் வளையி $(2, 2)$ எனும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமாறும் அவ்வளையிக்கு $x=1$ இல் ஒரு திரும்பற் புள்ளியும் $x=-3$ இல் ஒரு விபத்திப் புள்ளியும் இருக்குமாறும் a, b, c என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

7. x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு $(x-2)^4\ (x+1)^5$ எனுஞ் சார்பிற்கு உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களும் விபத்திகளும் உண்டு.

8. $f'(x)=(x-1)^2\ (x-2)^3\ (x-3)$ ஆயின், $y=f(x)$ எனும் வளையியிலுள்ள $x=1$, 2, 3 என்னும் புள்ளிகள் எத்தகைய புள்ளிகள்?

9. $f''(x)=(x-2)\ (x+3)$ ஆயின், $y=f(x)$ எனும் வளையியிலுள்ள $x=2$, $x=-3$ எனும் புள்ளிகள் எத்தகைய புள்ளிகள்?

10. $8x^4+12x^3-30x^2+17x-3=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மும்மடிமூலம் உண்டெனக்காட்டி அச்சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

11. $8x^4-20x^3-18x^2+81x-54=0$ எனுஞ் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மும்மடிமூலம் உண்டெனக்காட்டி அச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எல்லாவற்றையுங் காண்க.

12. $y=x+1/x$ எனும் வளையியில் தளத்தின் முடிவுள்ள பிரதேசத்தில் விபத்தி யாதும் இல்லை என நிறுவுக; அவ்வளையியை வரைக.

13. $y=x^3/(1+x^2)$ எனும் வளையியிலுள்ள விபத்திகளைக் காண்க; அவ்வளையியை வரைக.

14. $y=(1+x)/(1+x^2)$ எனும் வளையியிலுள்ள திரும்பற் புள்ளிகளைக் காண்க; அவ் வளையியை வரைக. அதற்கு எத்தனை விபத்திகள் உண்டு?

15. $y=(x^2-1)/(x^2+1)$ எனும் வளையிக்கு ஒரு திரும்பற் புள்ளியும் இரு விபத்திகளும் உண்டெனக் காட்டுக; அவ்வளையியை வரைக.

16. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $x/(1+x+x^2)$ எனுஞ் சார்பு -1, $\frac{1}{3}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடத்தல் வேண்டுமென அட்சரகணித முறையாற் காட்டுக.

$y=x/(1+x+x^2)$ எனும் வளையியிலுள்ள திரும்பற் புள்ளிகளைக் காணுதலாலும் அவ்வளையியை வரைதலாலும் இம்முடிபைச் சரிபார்க்க.

17. $x+\dfrac{4}{x-3}$ எனுஞ் சார்பினது திரும்பற் பெறுமானங்களை அட்சரகணித முறையால் ஆராய்க; அதன் வரைபை வரைக.

18. $y=(x+1)^4\ (x-2)^3$ எனும் வளையிக்கு $x=-1$ இல் ஓர் உயர்வும், $x=\frac{5}{7}$ இல் ஓர் இழிவும் $x=2$ இல் ஒரு விபத்தியும் உண்டென நிறுவுக.

19. y – அச்சின் நேர்த் திசைப் போக்கில், $y=2x^3-3x^2-12x+5$ என்னும் வளையியானது $-\infty$ இலிருந்து $\frac{1}{2}$ வரைக்குமுள்ள x இன் வீச்சிற்கு குவிவுகொண்டும் $\frac{1}{2}$ இலிருந்து ∞ இற்கு உள்ள வீச்சிற்குக் குழிவு கொண்டும் இருக்குமென நிறுவுக.

20. a, b என்பன, நேராயின், $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{a-x}$ எனுஞ் சார்பிற்கு $(a-b)^2/a$ எனும் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானமும் $(a+b)^2/a$ எனும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானமும் உண்டெனக்காட்டுக.

21. $(a, 0)$, $(b, 0)$ என்னும் புள்ளிகள் y – அச்சில் எதிரமைக்கும் கோணங்களுள் மிகப் பெரியதை அமைத்துள புள்ளியினது தூரம் உற்பத்தியிலிருந்து $\sqrt{ab}$ என நிறுவுக.

22. x – அச்சிலிருந்து y – அச்சிற்குத் தந்த ஒரு புள்ளி (a, b) யிற்கூடாகச் செல்கின்ற கோடுகளுட் சிறியதன் நீளம் $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ என நிறுவுக.

23. $x^m(a-x)^n$ எனும் பெருக்கம் அது பெறக்கூடிய உயர்ந்த பெறுமானத்தை அடையுமாறு a எனும் எண் x, $a-x$ எனும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், அப்பெறுமானம் $m^m\,n^n\,a^{m+n}/(m+n)^{m+n}$ எனக் காட்டுக.

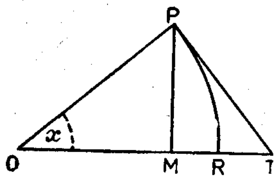
24. $p+q+r$ என்பது மறை, அல்லது நேர் என்பதற்குத் தக $x=(pa+qb+rc)/(p+q+r)$ ஆகும்பொழுது $p(x-a)^2+q(x-b)^2+r(x-c)^2$ எனுஞ் சார்பு ஓர் உயர்வாகும், அல்லது இழிவாகும் என நிறுவுக.

அதிகாரம் IV

வகையிடல் (தொடர்ச்சி)

4.1 திரிகோணகணிதச் சார்புகள். சைன் x, கோசை x, தான் $x, \ldots,$ எனுந் திரிகோணகணிதச் சார்புகளை வகையிடுதற்கு,

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\frac{\text{சைன் } x}{x}$$



என்பதன் பெறுமானத்தை நாம் கணித்தல் வேண்டும்.

ROP என்பது x ஆரையனுள்ள ஒரு கோணமாகுக ; RP என்பது O மையமாகவும் ஓர் அலகை ஆரையாகவுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் வில்லாகுக ; PM என்பது OR இற்குச் செங்குத்து ; P யிலுள்ள தொடலி PT, OR ஐ Tயிற் சந்திக்கின்றது.

படத்திலிருந்து தெளிவாய்த் தோன்றுவதாற் பின்வருவதை எடுத்துக் கொள்ளுகின்றோம் :

பரப்பளவு $OMP <$ பரப்பளவு $ORP <$ பரப்பளவு OTP ; அல்லது,

$$\tfrac{1}{2}OM.MP < \tfrac{1}{2}OR.^2x^* < \tfrac{1}{2}OP.PT.$$

ஆரை $OR = OP = 1$ ஆகையால்,

$$OM = \text{கோசை } x,\ MP = \text{சைன் } x,\ PT = \text{தான் } x.$$

எனின், $\quad$ கோசை x சைன் $x < x <$ தான் x.

சைன் x ஆல் வகுக்க,

$$\text{கோசை } x < \frac{x}{\text{சைன் } x} < \frac{1}{\text{கோசை } x}.$$

இனி, x என்பது குறைதலுற்றுப் பூச்சியத்தை அணுகுக ; ஆயின், கோசை x, $\dfrac{1}{\text{கோசை } x}$ எனும் இரண்டும் 1 ஐ அணுகும் ; ஆகவே கோசை x, $\dfrac{1}{\text{கோசை } x}$ எனும் இரண்டிற்கும் இடையிற் கிடக்கும் $\dfrac{x}{\text{சைன் } x}$ என்பதும் 1 ஐ அணுகும்.

* RP எனும் வில்லை ஒரு பெருந்தொகையான n சமபகுதிகளாகப் பிரித்து, அப் பிரிக்கும் புள்ளிகளை O விற்குத் தொடுக்க. ஆரைச்சிறை ORP யின் பரப்பளவானது $n\to\infty$ ஆகும்போது, பொது உயரம் ஈற்றில் ஆரை OR ஆகவும், அடிகளின் கூட்டுத்தொகை $OR.x$ இற்குச் சமனுன வில் RP யை அணுகுவதாயும் உள்ள n சம முக்கோணிகளின் பரப்பளவினது எல்லையாகும். எனவே பரப்பளவு $ORP = \tfrac{1}{2}OR^2.x$.

ஆகவே, $$\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\frac{\text{சைன் } x}{x} = 1.$$

4.12 சைன் x, கோசை x என்பனவற்றின் பெறுதிகள்.

(i) பெறுதியின் வரைவிலக்கணத்தால் (2.51)

$$y = \text{சைன் } x \text{ ஆயின்,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்}}\frac{\text{சைன் }(x+h) - \text{சைன் } x}{h}.$$

சைன் $A -$ சைன் $B = 2$ சைன் $\tfrac{1}{2}(A-B)$ கோசை $\tfrac{1}{2}(A+B)$ என்னுங் காரணியாக்கற் சூத்திரத்தை வழங்க,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்}}\frac{2\ \text{சைன்}\tfrac{1}{2}h\ \text{கோசை }(x+\tfrac{1}{2}h)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்}}\frac{\text{சைன்}\tfrac{1}{2}h}{\tfrac{1}{2}h}\ \text{கோசை }(x+\tfrac{1}{2}h).$$

இங்கு, கோசைன் காரணியின் எல்லை கோசை x ; மற்றைக் காரணியின் எல்லை 4.1 ஆல் 1.

ஆகவே $$\frac{d}{dx}\text{ சைன் } x = \text{கோசை } x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(ii) $y =$ கோசை x ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்}}\frac{\text{கோசை}(x+h) - \text{கோசை } x}{h}.$$

கோசை $A -$ கோசை $B = 2$ சைன் $\tfrac{1}{2}(B-A)$ சைன் $\tfrac{1}{2}(A+B)$ எனுங் காரணியாக்கற் சூத்திரத்தை வழங்க,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h\to 0}{\text{எல்}}\frac{-2\ \text{சைன் }\tfrac{1}{2}h\ \text{சைன் }(x+\tfrac{1}{2}h)}{h}$$

$$= -\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\frac{\text{சைன் }\tfrac{1}{2}h}{\tfrac{1}{2}h}\ \text{சைன் }(x+\tfrac{1}{2}h)$$

$$= -\text{சைன் } x.$$

ஆகவே, $$\frac{d}{dx}\text{ கோசை } x = -\text{சைன் } x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(iii) $y=\text{தான்}\ x$ ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{தான்}\,(x+h)-\text{தான்}\,x}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சைன்}\,(x+h)\,\text{கோசை}\,x-\text{கோசை}\,(x+h)\,\text{சைன்}\,x}{h\,\text{கோசை}\,(x+h)\,\text{கோசை}\,x}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சைன்}\,h}{h}\ \frac{1}{\text{கோசை}\,(x+h)\,\text{கோசை}\,x}=\frac{1}{\text{கோசை}^2x}.$$

ஆகவே,
$$\frac{d}{dx}\,\textbf{தான்}\ x=\textbf{சீக}^2x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(iv) $y=\text{கோதா}\ x$ ஆயின் ;

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{கோதா}\,(x+h)-\text{கோதா}\,x}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{கோசை}\,(x+h)\,\text{சைன்}\,x-\text{சைன்}(x+h)\,\text{கோசை}\,x}{h\,\text{சைன்}\,(x+h)\,\text{சைன்}\,x}$$

$$=-\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சைன்}\,h}{h}\ \frac{1}{\text{சைன்}\,(x+h)\,\text{சைன்}\,x}$$

$$=-\frac{1}{\text{சைன்}^2x}.$$

ஆகவே,
$$\frac{d}{dx}\,\textbf{கோதா}\ x=-\textbf{கோசீ}^2x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(v) $y=\text{சீக}\,x$ ஆயின் ;

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சீக}\,(x+h)-\text{சீக}\,x}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{கோசை}\,x-\text{கோசை}\,(x+h)}{h\,\text{கோசை}\,(x+h)\,\text{கோசை}\,x}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{2\ \text{சைன்}\ \tfrac{1}{2}h\ \text{சைன்}\ (x+\tfrac{1}{2}h)}{h\,\text{கோசை}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சைன்}\,\tfrac{1}{2}h}{\tfrac{1}{2}h}\ \frac{\text{சைன்}\ (x+\tfrac{1}{2}h)}{\text{கோசை}\,(x+h)\ \text{கோசை}\ x}$$

$$=\frac{\text{சைன்}\,x}{\text{கோசை}^2x}=\text{சீக}\ x\ \text{தான்}\ x.$$

ஆகவே,
$$\frac{d}{dx}\ \textbf{சீக}\ x=\textbf{சீக}\ x\ \textbf{தான்}\ x. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(vi) $y=\text{கோசீ}\ x$ ஆயின் ;

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{கோசீ}\ (x+h)-\text{கோசீ}\ x}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சைன்}\ x-\text{சைன்}\ (x+h)}{h\ \text{சைன்}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}$$

$$=\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{-2\,\text{சைன்}\,\tfrac{1}{2}\,h\,\text{கோசை}\,(x+\tfrac{1}{2}\,h)}{h\,\text{சைன்}\,(x+h)\,\text{சைன்}\,x}$$

$$=-\underset{h\to0}{\text{எல்}}\ \frac{\text{சைன்}\,\tfrac{1}{2}h}{\tfrac{1}{2}h}\ \frac{\text{கோசை}\,(x+\tfrac{1}{2}h)}{\text{சைன்}\,(x+h)\,\text{சைன்}\,x}$$

$$=-\frac{\text{கோசை}\ x}{\text{சைன்}^2x}=-\text{கோசீ}\ x\,\text{கோதா}\ x.$$

ஆகவே,
$$\frac{d}{dx}\,\textbf{கோசீ}\,x=-\textbf{கோசீ}\,x\,\textbf{கோதா}\,x. \quad \ldots\ldots\ldots(6)$$

சயக்குறியைத் தவிர்த்தால், (4), (6) என்னும் முடிபுகளிலுள்ள கோதான்சன் கோசீக்கன் என்பனவற்றிற் கிடையிலுள்ள தொடர்பு (3), (5) என்பனவற்றிலுள்ள தான்சன், சீக்கன் என்பனவற்றிற்கிடையேயுள்ள தைப் போன்றது எனக் காணுதல் மாணுக்கனுக்கு இம்முடிவுகளை ஞாப கத்தில் வைத்திருப்பதற்குத் துணைபுரியலாம்.

4.13 பயிற்சியாக மாணுக்கன் **4.12** இன் (3)...(6) ஆகிய முடிபுகளை சைன் x/கோசை x, கோசை x/சைன் x, 1/கோசை x, 1/சைன் x என்பன வற்றை வகையிடுதலாற் பெறலாம்.

4.14 உதாரணங்கள்.

(i) $\dfrac{1+\text{சைன்}\,x}{1-\text{சைன்}\,x}$ **இன் பெறுதியைக் காண்க.**

$$y=\frac{1+\text{சைன்}\ x}{1-\text{சைன்}\ x}\quad \text{எனின்,}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\text{சைன்}\,x)\dfrac{d}{dx}(1+\text{சைன்}\,x)-(1+\text{சைன்}\,x)\dfrac{d}{dx}(1-\text{சைன்}\,x)}{(1-\text{சைன்}\,x)^2}$$

$$=\frac{(1-\text{சைன்}\,x)\,\text{கோசை}\,x+(1+\text{சைன்}\,x)\,\text{கோசை}\,x}{(1-\text{சைன்}\,x)^2}$$

$$=\frac{2\ \text{கோசை}\ x}{(1-\text{சைன்}\,x)^2}.$$

(ii) **சைன்$^m x$கோசை$^n x$ இன் பெறுதியைக் காண்க.**

$$y = \text{சைன்}^m x \ \text{கோசை}^n x \quad \text{எனின்},$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{சைன்}^m x \frac{d}{dx}\text{கோசை}^n x + \text{கோசை}^n x \frac{d}{dx}\text{சைன்}^m x$$

$$= \text{சைன்}^m x\,(-n\text{கோசை}^{n-1}x \ \text{சைன்}\ x)$$
$$+ \text{கோசை}^n x\,(m\ \text{சைன்}^{m-1}x \ \text{கோசை}\ x)$$

$$= -n\ \text{சைன்}^{m+1}x \ \text{கோசை}^{n-1}x + m\ \text{சைன்}^{m-1}x \ \text{கோசை}^{n+1}x$$

$$= \text{சைன்}^{m-1}x \ \text{கோசை}^{n-1}x\,(m\ \text{கோசை}^2 x - n\ \text{சைன்}^2 x).$$

(iii) $\dfrac{\text{தான்}\ x}{x}$ **இன் பெறுதியைக் காண்க.**

$$y = \frac{\text{தான்}\ x}{x} \quad \text{எனின்},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\dfrac{d}{dx}\text{தான்}\ x - \text{தான்}\ x\dfrac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{x\ \text{சீக}^2 x - \text{தான்}\ x}{x^2}.$$

4.15. பயிற்சிகள். **பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :**

(i) சைன்$^3 x$ கோசை$^3 x$.

(ii) சீகx தான்x.

(iii) $\dfrac{1 - \text{கோசை}\ x}{1 + \text{கோசை}\ x}$.

(iv) சைன் mx கோசை nx.

(v) x^n சைன் mx.

(vi) சீக$^2 x$ + தான்$^2 x$.

(vii) சைன்$(mx+n)$கோசை$(mx-n)$.

(viii) $\frac{1}{3}$ சைன் $3x$ + சைன்$^3 x$.

(ix) கோசீ$^3 x$.

(x) கோசீ $3x$.

(xi) x சீக$^2 x$.

(xii) x^3 தான்$^2 x$.

4.2 நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகள். நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$x =$ சைன்y எனின், $y =$ சைன்^{-1}x, அல்லது $y =$ வில் சைன் x ;

$x =$ கோசை y எனின், $y =$ கோசை^{-1}x, அல்லது $y =$ வில் கோசை x ; இவ்வாறே பிறவும்.

ஆகவே, சைன்^{-1}x ஆனது x **ஐத் தனது சைன் ஆகவுள்ள ஒரு கோணம்** எனப் பொருள்படும். எனினும், α என்பது x ஐத் தனது சைன் ஆகவுள்ள ஒரு கோணமெனின், $\pi - \alpha$ என்பதும் x ஐத் தனது சைன் ஆகவுள்ள கோணமென நாம் அறிவோம் ; α விற்கு, அல்லது $\pi - \alpha$ இற்கு 2π யின் யாதும் ஒரு மடங்கைக் கூட்டுதலாற் பெறப்படுங் கோணங்களுக்கும் இது பொருந்தும்.

ஆகவே, சைன்^{-1}x என்பதை நாம் **பலபெறுமானச் சார்பெனக்** கூறு கின்றோம் ; x ஐத் தம் சைன்களாக உள்ள பல கோணங்கள் உண்டு என்பதே இதன் பொருள்.

சைன் x, கோசை x முதலிய திரிகோணகணிதச் சார்புகள் **ஆவர்த்தனச் சார்புகள்** எனப்படும் ; அதற்குக் காரணம் x இற்கு 2π யையாதல் 2π யின் யாதும் ஒரு மடங்கையாதல் கூட்டுதல் அச்சார்பின் பெறுமானத்தை மாற்றுது என்பதே ; இக் காரணத்தால், 2π என்பது சைன் x கோசை x என்பனவற்றின் **ஆவர்த்தனம்** எனப்படும் ; அதுபோல, π என்பது தான் x இன் **ஆவர்த்தனம்.** திரிகோணகணிதச் சார்புகள் ஆவர்த்தனச் சார்புகளாயிருத்தலால், நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகள் பல பெறுமானமுடையனவாயிருக்கும்.

4.21 சைன்^{-1}x, கோசை^{-1}x முதலியனவற்றின் பெறுதிகள். $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ என்பவை ஒரு சார்பையும் அதன் நேர்மாறுனதை வரையறுக்குந் தொடர்புகளாகக் கொண்டோமாயின், அச்சார்பின் பெறுதி dy/dx ஆயும் நேர்மாறு சார்பின் பெறுதி dx/dy ஆயும் இருக்கும் ; $\dfrac{dx}{dy} \times \dfrac{dy}{dx} = 1$ ஆதலால் **(2.631)**, ஒரு நேர்மாறு சார்பின் பெறுதி அச்சார்பின் பெறுதியிலிருந்து என்றும் உய்த்தறியப்படக்கூடும்.

(i) $y =$ சைன்^{-1}x ஆகுக ; ஆயின் $x =$ சைன் y, $\dfrac{dx}{dy} =$ கோசை y எனின்,

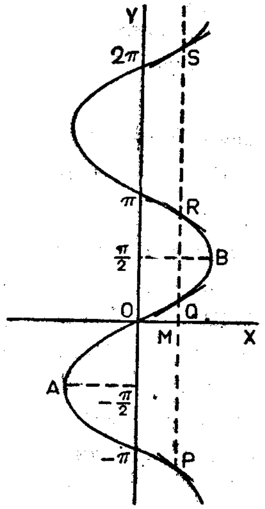
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\text{கோசை}\ y} = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)}},$$

அல்லது
$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}^{-1}x = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)}}.$$

ஈரடியான குறிக்கு விளக்கம் கொடுக்க வேண்டும்.

$y =$ சைன்^{-1}x இன் வரைபு $x =$ சைன்y யின் வரைபாயும் இருக்கின்றது ; அதாவது y – அச்சின் வழியே உள்ள மடிவுகளோடு $x = -1$, $x = 1$ என்பனவற்றிற்கிடையே முழுவதுங் கிடக்கின்ற ஒரு சாதாரண

சைன் வளையி $-1 < x < 1$ ஆயிருக்க, $OM = x$ எனின், $PMQRS\ldots$ என்னும் ஒரு நிலைக்கூறை நாம் வரைந்தால், x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்த y யின் பல பெறுமானங்களிலிருந்து பிறந்த ஒரு தொகையான புள்ளிகளில் அது அவ்வளையியைச் சந்திக்கும்; எனினும், இப்புள்ளிகளிலுள்ள படித்திறன்களுக்கு இரு பெறுமானங்களே உள எனக் காணப்படும்: Q, S, ... என்னுங் கூட்டத்திற்கு உரியன எல்லாம் சமமும் நேருமாகும்; P, R, ... என்னுங் கூட்டத்திற்கு உரியன முன்னையதாகிய கூட்டத்திற்கு உரியனவற்றிற்கு எண்ணளவிற் சமமாகும் ஆனால் குறியில் எதிராகும்.



இனி, நாம் **சைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தை, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடைக்கும் பெறுமானமாக** வரையறுப்பதால் ஈரடி இயல்பை விலக்கலாம். அதாவது சைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானம் A யிலிருந்து B யிற்குள்ள வளையியின் பகுதியினாலே வரைபாற் குறிக்கப்படும்; இதற்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு நேர்ப் படித்திறன் உண்டு; ஆயின், இக்கருதுகோளின்படி, சூத்திரமானது சைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தைக் குறிக்கின்றதென கட்டுப்படுத்த, ஈரடிப்பின்றி

$$\frac{d}{dx}\text{ சைன்}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(ii) $y =$ கோசை^{-1}x ஆகுக; ஆயின் $x =$ கோசை y, $\dfrac{dx}{dy} = -$ சைன் y

ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\text{சைன் } y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{(1-x^2)}},$$

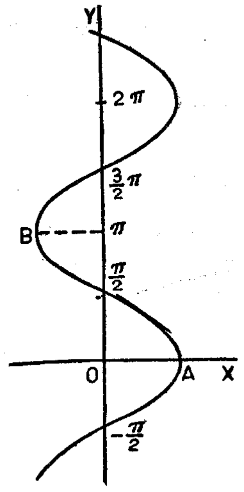
அல்லது

$$\frac{d}{dx}\text{ கோசை}^{-1}x = \frac{1}{\mp\sqrt{(1-x^2)}}.$$

குறியின் ஈரடி மேற்கூறியவாறு விளக்கப்படும்; அது 0, π என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கின்ற கோசை^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தையே சூத்திரங் குறிக்கின்றதென கட்டுப்படுத்துதலால் நீக்கப்படும்; அது வரைபு முறையாக அவ்வளையியின் AB என்னும் பகுதியாற் குறிக்கப்படும்; இதற்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு மறைப்படித்திறன் உண்டு;

ஆயின்,

$$\frac{d}{dx}\text{ கோசை}^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



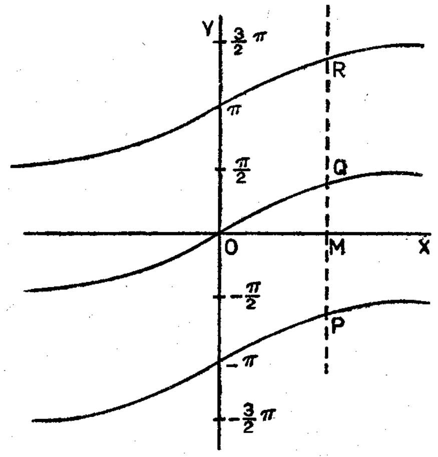
(iii) $y =$ தான்^{-1}x ஆகுக; ஆயின்,

$x =$ தான் y, $\dfrac{dx}{dy} =$ சீக$^2 y$.

எனின், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\text{சீக}^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

ஆகவே $\dfrac{d}{dx}$ தான்$^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$. .... (3)

குறியின் ஈரடி இங்கு உண்டாவதில்லை; ஏனெனில் அச்சுக்கள்பற்றி மாற்றுப் பெற்ற சாதாரணத் தான்சன் வளையியாகிய $y =$ தான்^{-1}x அல்லது $x =$ தான் y என்பதை நாம் வரைந்தால் x-அச்சில் யாதும் ஒரு புள்ளி M இற்கூடாகச் செல்லும் $PMQR\ldots$ என்னும் ஒரு நிலைக்கூறு வேறுபட்ட கிளைகளை எங்கும் நேரான ஒரே படித்திறன் கொண்ட புள்ளிகளிற் சந்திக்கும்.



தான்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தை $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கின்ற பெறுமானமாக வரையறுப்பது வழக்கம்; எனின், வரைபு ஆனது ஒரு தனிக் கிளையாக எல்லைப்படுத்தப்படும்.

(iv) $y=$ கோதா^{-1}x ஆகுக ; ஆயின், $x=$ கோதா y, $\frac{dx}{dy}=-$கோசீ$^2 y$.

எனின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\text{கோசீ}^2 y}=\frac{-1}{1+x^2}.$$

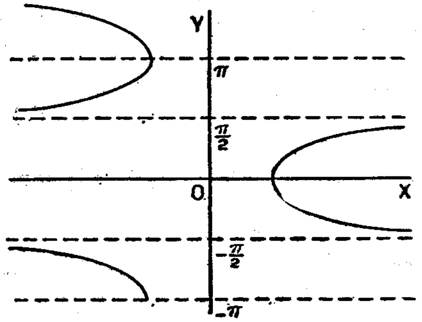
ஆகவே, $$\frac{d}{dx}\,\text{கோதா}^{-1}x=\frac{-1}{1+x^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

கோதா^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானம் $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற் கிடையில் உள்ள பெறுமானமாக வரையறுக்கப்படும்; அவ்வரைபை ஆராய்ந்தால், அது படித்திறன் எங்கும் மறை என்பதைக் காட்டும்.

(v) $y=$ சீக^{-1}x ஆகுக ; ஆயின் $x=$ சீக y, $\frac{dx}{dy}=$ சீக y தான் y.

எனின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{சீக } y \text{ தான் } y}=\frac{1}{\pm x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

ஒரு கோணத்தின் சீக்கன் எண்ணளவில் ஒன்றிலுஞ் சிறிதாகாது. ஆதலால், சீக^{-1}x என்பது $x\leqslant -1$ ஆகும்பொழுதும் $x\geqslant 1$ ஆகும் பொழுதும் மாத்திரமே உண்டு.



$1/x\sqrt{(x^2-1)}$ என்னுஞ் சூத்திரம் x ஓடு குறிமாறும்; சீக^{-1}x என்பது $0, \pi$ என்பனவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்போது சீக^{-1}x இன் படித்திறன் நேராகுமென வரைபிலிருந்து புலனாகும்; ஆயின், சீக^{-1}x என்பது 0, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்பொழுது x ஆனது நேராயிருக்க,

$$\frac{d}{dx}\,\text{சீக}^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(5);$$

சீக^{-1}x என்பது $\frac{1}{2}\pi$, π என்பவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்பொழுது x ஆனது மறையாயிருக்க,

$$\frac{d}{dx}\,\text{சீக}^{-1}x=\frac{-1}{x\sqrt{(x^2-1)}}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(5').$$

(vi) $y=$ கோசீ^{-1}x ஆகுக. $x\leqslant -1$, அல்லது $x\geqslant 1$ ஆயிருக்கும்பொழுது மாத்திரமே கோசீ^{-1}x உண்டு என்பது அதே வழியாற் பெறப்படும்.

$$\frac{d}{dx}\,\text{கோசீ}^{-1}x=\frac{1}{\mp x\sqrt{(x^2-1)}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

என்பதும் பெறப்படும்.

மேற்காட்டியவாறு சூத்திரம் x ஓடு குறிமாறும்; கோசீ^{-1}x ஆனது $-\frac{1}{2}\pi$, 0 என்பவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்போது நேர்க்குறி எடுக்கப்பட வேண்டும் என்பதும் அது 0, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற் கிடையிற் கிடக்கும்போது மறைக்குறி எடுக்கப்படவேண்டும் என்பதும் ஒரு வரைபிலிருந்து புலனாகக் கூடும்.

4.22 உதாரணங்கள்.

(i) $0<x<1$ ஆயின், சைன்$^{-1}(1-x^3)$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

$y=$ சைன்$^{-1}(1-x^3)$ ஆகுக ;

$z=1-x^3$ எனப் பிரதியிடுக,

ஆயின், $y=$ சைன்^{-1}z,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}\times -3x^2=\frac{-3x^2}{\sqrt{(2x^3-x^6)}}=\frac{-3x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2-x^3)}}.$$

(ii) $0<x<1$ ஆயிருக்க, சைன்$^{-1}\{2x\sqrt{(1-x^2)}\}$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

சென்ற பயிற்சியிற் செய்தவாறு செய்யலாம்; அன்றி, மாற்று முறையாக $x=$ சைன் z எனப் பிரதியிடுக.

ஆயின், $\sqrt{(1-x^2)}=$ கோசை z.

பின்னர், சைன்$^{-1}$ {2சைன்z கோசைz}, அல்லது சைன்$^{-1}$ {சைன் $2z$} அல்லது $2z$ அல்லது 2சைன்^{-1}x இன் பெறுதியை நாம் காணல்வேண்டும்.

விடை $\frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ஆகும்.

(iii) $0<x<\frac{1}{2}\pi$ ஆயிருக்க, சைன்$^{-1}$(கோசை x) இன் பெறுதியைக்காண்க.

$y=$ சைன்$^{-1}$ (கோசை x) ஆகுக ;

$z=$ கோசை x எனப் பிரதியிடுக.

எனின், $y=$ சைன்^{-1}z.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}\times -\text{சைன் } x$$

$$=\frac{-\text{சைன் } x}{\sqrt{(1-\text{கோசை}^2 x)}}=-1.$$

மற்றொரு விதமாக,

$$y = \text{சைன்}^{-1}(\text{கோசை}\,x) = \frac{\pi}{2} - \text{கோசை}^{-1}(\text{கோசை}\,x) = \frac{\pi}{2} - x$$ என எழுதலாம்.

எனின்,
$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

4.23 பயிற்சி. **பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :**

(i) $\text{சைன்}^{-1}\sqrt{(1-x^2)}$. (ii) $\text{தான்}^{-1}(\text{கோசை}\,x)$.

(iii) $\text{கோசீ}^{-1}(\text{சீக}\,x)$. (iv) $\text{சீக}^{-1}(x^2-1)$.

(v) $\text{தான்}^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$. (vi) $\text{சைன்}^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

(vii) $\text{கோசை}^{-1}(x^3-1)$. (viii) $\text{கோசை}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

(ix) $(1+x^2)\,\text{தான்}^{-1}x$. (x) $(1-x^2)\,\text{கோசை}^{-1}x$.

(xi) $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\text{சீக}^{-1}x$. (xii) $x\,\text{கோதா}^{-1}x$.

(xiii) $\text{சைன்}^{-1}\dfrac{x}{a}\ (0 < x < a)$. (xiv) $\text{தான்}^{-1}\dfrac{ax}{b}$.

(xv) $\text{கோசை}^{-1}\dfrac{x-a}{a}$. (xvi) $\text{கோசை}^{-1}\dfrac{a+b\,\text{கோசை}\,x}{b+a\,\text{கோசை}\,x}\ (a<b)$.

(xvii) $\text{கோதா}^{-1}\dfrac{2x-1}{3}$. (xviii) $\text{சைன்}^{-1}\dfrac{a+b\,\text{சைன்}\,x}{b+a\,\text{சைன்}\,x}\ (a<b)$.

(xix) $\text{கோசை}^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{a-b}\right)}$. (xx) $\text{தான்}^{-1}\left(\dfrac{ax+b}{\sqrt{(ac-b^2)}}\right)$.

4.3 அடுக்குக்குறிச் சார்பு. அட்சரகணித நூல்களிலும் பகுப்புக்கணித நூல்களிலும் $\displaystyle \text{எல்}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ .... (1)

என்பது காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

இங்கு e என்பது

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots + \ldots\ldots. \quad (2)$$

என்னும் முடிவில் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் குறிக்கின்றது ; அது 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலுள்ள ஒரு வரையறுத்த எண்ணுமன்றி ஒரு முடிவுகொள்ளுந் தசமத்தாலாதல் மடங்கு தசமத்தாலாதல் குறிக்கப்படும் இயல்பினதன்று ; அதாவது அது 2·71828.... என்னும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணுகும்.

$$\text{எல்}_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

என்றும்

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

என்றும், x இன் வலுக்களில் e^x இன் இவ்விரிவு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் உண்மை என்பதுங் காட்டப்பட்டுள்ளன.

தொடர்கள் பற்றிய கொள்கையில், e^x இன் தொடர் சீரான ஒருங்கு தொடரெனக் காட்டப்பட்டுள்ளது ; பின்வருவன அத்தகைத் தொடரின் பண்புகளிற் சில : $f(x)$ என்பது தன் உறுப்புகள் x இன் சார்புகளாயுள்ள ஒரு முடிவில் தொடரின் கூட்டுத்தொகை ஆயின்—உதாரணமாக

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots.,$$

ஆயின்—அவ்வுறுப்புகளை வகையிடுதலாற் பெறப்படுந் தொடர், அதாவது

$$u'_0(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots.$$

என்பது, சீரான ஒருங்கு தொடராயின், அதன் கூட்டுத்தொகை $f'(x)$ ஆகும்.

இனி நாம்,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

எனும் அடுக்குக்குறித் தொடரை உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுவோமாயின்,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\ldots\ldots,$$ எனப் பெறுவோம் ;

அதாவது இது அதே சீரான ஒருங்கு தொடராகும். ஆகவே, சற்று முன்னர் எடுத்தாண்ட தேற்றத்தால் இத்தொடரின் கூட்டுத்தொகை, அதாவது e^x என்பது, e^x இன் பெறுதியாகும் ; அல்லது

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ஆயின், e^x என்பதை அடுக்குக்குறிச் சார்பெனக் கூறுவோமாயின், அடுக்குக்குறிச் சார்பானது தனது சொந்தப் பெறுதியாகுமென்பது பெறப்படும்.

4.31. முடிபு (5) ஐ நிறுவாது நிறுவன்முறை ஒன்றை மாத்திரங் கூறினேம் என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும் ; வேண்டிய கொள்கை ஆரம்ப நூலின் நோக்குக்கு அப்பாற்பட்டதென்பதும் அறிக ; **வேறு ஆராய்புகளின்றி** அடுக்குக்குறித் தொடரை உறுப்புறுப்பாய், வகையிடுதல் முடிபு (5) இன் நிறுவலைத் தருமென்று மாணக்கன் நினைத்தல் ஆகாது. உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுதலால் போலி முடிபுகளுக்கு வரலாம் என்பதற்கு உதாரணமாக, $-\pi < x < \pi$ என்பனவற்றிற்கு உண்மையான

$$\tfrac{1}{2}x = \text{சைன்}\,x - \tfrac{1}{2}\,\text{சைன்}\,2x + \tfrac{1}{3}\,\text{சைன்}\,3x - \ldots.,$$

என்னுஞ் சூத்திரத்தை ஆராய்க.

இங்கு, உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுதல் ஒரு நியாயமான செய்கையெனின், அது

$$\tfrac{1}{2} = \text{கோசை}\, x - \text{கோசை}\, 2x + \text{கோசை}\, 3x - \;\dots\dots\dots\dots,$$

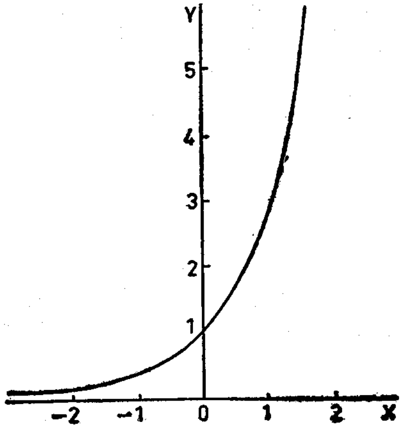
என்பதைத் தரும் : $x=0$ என்பதற்கு, இது

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \;\dots\dots,$$

என்பதாய்ப் பொருளற்று நிற்கும்.

4.32 e^x **எனும் அடுக்குக்குறிச் சார்பின் வரைபு.** தொடர் (4) இலிருந்து $x=0$ என்பதற்கு $e^x=1$ என்பதும், x என்பது நேராயிருக்கும் பொழுது e^x உம் அவ்வாறுக, அதுபற்றி x இன் நேர்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் அதன் படித்திறன் e^x நேராகுமென்பதுந் தெளிவு. e^2 என்பது x ஒடு கூடுமென்பது பெறப்படும் ; x முடிவிலியை அணுக, அவ்வாறே e^x என்பதுங் காணுதற்கு எளிது.

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ ஆதலால், x இன் மறைப் பெறுமானங்களுக்கு அச்சார்பு இன்னும் நேராயிருப்பதுடன் x எண்ணளவிற் கூடுந்தொறும் சார்பு குறைதலுறும் ; அல்லது $x \to -\infty$, ஆக, $e^x \to 0$.



$y=e^x$ என்பதன் வரைபு படத்திற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

4.321. $x \to \infty$ ஆக, e^x உம் அவ்வாறே என்றும், $x \to -\infty$ ஆக $e^x \to 0$ என்றுஞ் சற்றுமுன் கண்டோம்.

பயன்படத்தக்க வேறோர் அடுக்குக்குறி எல்லை

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

அதற்குக் காரணம் e^x இன் விரிவைப் பிரதியிட,

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots$$

$$= 1 + x\left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots\right).$$

x இன் முடிவுள்ள நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு அடைப்புக்குள் இருக்கும் அத்தொடரின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் நேராயும் அடுக்குக்குறித் தொடரிலுள்ள ஒத்த உறுப்பிலுஞ் சிறிதாயுமிருக்கும். எனினும், x இன் முடிவுள்ள பெறுமானங்களுக்கு அவ்வடுக்குக்குறித் தொடருக்கு, ஒரு முடிவுள்ள கூட்டுத்தொகை, அதாவது e^x உண்டு ; ஆகவே, அடைப்புக்குள் உள்ள தொடருக்கு ஒரு முடிவுள்ள கூட்டுத்தொகை உண்டு. ஆகவே,

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்}} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

மறைப் பெறுமானங்களுக்கூடாக $x \to 0$ ஆகும்பொழுது அதே முடிபு உண்மையாகும் என்பது x நேராகும்பொழுது $\underset{x\to 0}{\text{எல்}} \dfrac{e^{-x} - 1}{-x}$ என்பதை ஆராய்வதாற் காணப்படலாம். தொகுதியையும் பகுதியையும் $-e^x$ ஆற் பெருக்க, அக்கோவை

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்}} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{e^x}$$

ஆகும் ; சற்றுமுன் நிறுவப்பட்டதாலும் $e^0 = 1$ என்பதாலும் இம்முடிவு 1 ஆகும்.

4.322 **4.321** இன் எல்லையை உத்தேசித்தலால், e^x இன் பெறுதி e^x என்பதை நாம் உய்த்தறியலாம்.

ஏனெனில் $\dfrac{d}{dx} e^x = \underset{h\to 0}{\text{எல்}} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \underset{h\to 0}{\text{எல்}} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x.$

4.33 அதிபரவளைவுச் சார்புகள்.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \;\dots\dots\dots\dots (1),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \;\dots\dots\dots\dots (2)$$

எனப் பெற்றுள்ளோம்.

ஆகவே $$\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\tfrac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots\dots\dots (4)$$

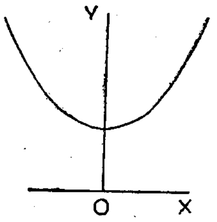
(3), (4) எனுந் தொடர்கள் முறையே x இன் **அதிபரவளைவுக் கோசைன், அதிபரவளைவுச் சைனெனக்** கூறப்படும்; அவை அகோசை x, அசைன் x என எழுதப்படும். அதிபரவளைவுத் தான்சன், கோதான்சன் முதலியன பின்வருந் தொடர்புகளால் வரையறுக்கப்படும்:

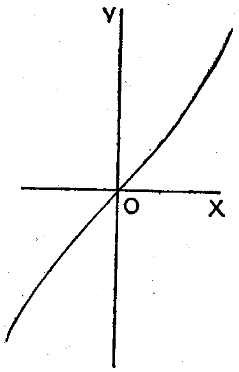
$$\text{அதான் } x=\frac{\text{அசைன் } x}{\text{அகோசை } x},\qquad \text{அகோதா } x=\frac{\text{அகோசை } x}{\text{அசைன் } x},$$

$$\text{அசீக } x=\frac{1}{\text{அகோசை } x},\qquad \text{அகோசீ } x=\frac{1}{\text{அசைன் } x}.$$

அகோசை x என்பது **இரட்டைச் சார்பு**, அதாவது x ஐ $-x$ ஆக மாற்றுவதால் மாறுபடாததொன்றென்றும், அசைன் x என்பது **ஒற்றைச் சார்பு**, அதாவது $-x$ இற்காக x ஐப் பிரதியிட அச்சார்பின் குறிமாற்றப்படுமொழிய அதன் தனிப்பெறுமானம் மாற்றப்படாததொன்றென்றும் நாம் அறிகின்றோம்.

ஆகவே, $y=$ அகோசை x இன் வரைபு y அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீராகும், $y=$ அசைன் x இன் வரைபு எதிர்க் கால் வட்டங்களிற் சமச்சீராகும்.





$y=e^{x}$, $y=e^{-x}$ என்பனவற்றின் வரைபுகளை முதலில் வரைந்து, நிலைக் கூறுகளினது கூட்டுத்தொகையின் அரைப்பங்கையும் வித்தியாசத்தின் அரைப்பங்கையும் எடுப்பதால், இவ்வரைபுகள் வரையப்படலாம்.

4.34. அதிபரவளைவுச் சார்புகள் வட்டச் சார்புகளிலுஞ் சிறிது வேறுபட்டபோதிலும் அவற்றை இணைக்குந் தொடர்புகளைப் போன்ற பலவகைத் தொடர்புகளால் அவை இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

கூட்டல் கழித்தல்களால்

அகோசை $x+$ அசைன் $x=e^{x}$, அகோசை $x-$ அசைன் $x=e^{-x}$ எனப் பெறுவோம்.

ஆகவே, பெருக்கலால்,

$$\text{அகோசை}^2 x-\text{அசைன்}^2 x=1.$$

இத்தொடர்பை முறையே அகோசை^2x, அசைன்^2x என்பனவற்றாலே வகுக்க,

$$1-\text{அதான்}^2 x=\text{அசீக}^2 x,\qquad \text{அகோதா}^2 x-1=\text{அகோசீ}^2 x.$$

இனி, அசைன் $(x+y)=\frac{1}{2}\,(e^{x+y}-e^{-x-y})$

$$=\tfrac{1}{4}\{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}+e^{-y})+(e^{x}+e^{-x})(e^{y}-e^{-y})\}.$$

அல்லது

$$\text{அசைன் }(x+y)=\text{அசைன் } x\ \text{அகோசை } y+\text{அகோசை } x\ \text{அசைன் } y.$$

அதுபோல,

$$\text{அகோசை }(x+y)=\text{அகோசை } x\ \text{அகோசை } y+\text{அசைன் } x\ \text{அசைன் } y$$

சிறப்பு வகைகளாக,

$$\text{அசைன் } 2x=2\ \text{அசைன் } x\ \text{அகோசை } x$$

$$\text{அகோசை } 2x=\text{அகோசை}^2 x+\text{அசைன்}^2 x.$$

4.341 பயிற்சி.

1. **அதிபரவளைவுச் சார்புகளுக்கு இடையேயுள்ள பின்வருந் தொடர்புகளை நிலைநாட்டு:**

(i) $\text{அசைன் } 2x=\dfrac{2\ \text{அதான் } x}{1-\text{அதான்}^2 x}$;

(ii) $\text{அகோசை } 2x=2\text{அகோசை}^2 x-1=1+2\ \text{அசைன்}^2 x$;

(iii) $\text{அதான் } 2x=\dfrac{2\ \text{அதான் } x}{1+\text{அதான்}^2 x}$;

(iv) $\text{அகோசை }(x-y)=\text{அகோசை } x\ \text{அகோசை } y-\text{அசைன் } x\ \text{அசைன் } y$,
$\text{அசைன் }(x-y)=\text{அசைன் } x\ \text{அகோசை } y-\text{அகோசை } x\ \text{அசைன் } y$;

(v) $\text{அசைன் } x+\text{அசைன் } y=2\ \text{அசைன் }\tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{அகோசை }\tfrac{1}{2}(x-y)$,
$\text{அசைன் } x-\text{அசைன் } y=2\ \text{அசைன் }\tfrac{1}{2}(x-y)\ \text{அகோசை }\tfrac{1}{2}(x+y)$,
$\text{அகோசை } x+\text{அகோசை } y=2\ \text{அகோசை }\tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{அகோசை }\tfrac{1}{2}(x-y)$;
$\text{அகோசை } x-\text{அகோசை } y=2\ \text{அசைன் }\tfrac{1}{2}(x+y)\ \text{அசைன் }\tfrac{1}{2}(x-y)$;

(vi) $\text{அதான் }(x\pm y)=\dfrac{\text{அதான் } x\pm\text{அதான் } y}{1\pm\text{அதான் } x\ \text{அதான் } y}$.

2. $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\ \dfrac{e^{mx}-1}{x}=m$ என நிறுவுக.

3. $\underset{x\to\infty}{\text{எல்}}\ \dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=a$ என்றும்

$\underset{x\to-\infty}{\text{எல்}}\ \dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=b$ என்றும் நிறுவுக.

4.35 அதிபரவளைவுச் சார்புகளை வகையிடுதல். $\frac{de^x}{dx}=e^x$ என்பதாலும்

2.63 இன் எளிய பிரயோகமாகிய

$$\frac{de^{-x}}{dx}=-e^{-x} \text{ என்பதாலும்}$$

$$\frac{d}{dx}\,\text{அகோசை}\,x=\frac{d}{dx}\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\text{அசைன்}\,x.\ \ldots\ldots\ldots(1).$$

அதுபோல,

$$\frac{d}{dx}\,\text{அசைன்}\,x=\frac{d}{dx}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\text{அகோசை}\,x.\ \ldots\ldots\ (2)$$

இனி, $y=\text{அதான்}\,x=\text{அசைன்}\,x/\text{அகோசை}\,x$ எனின்,

2.62 ஆல்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{அகோசை}\,x\frac{d}{dx}\text{அசைன்}\,x-\text{அசைன்}\,x\frac{d}{dx}\text{அகோசை}\,x}{\text{அகோசை}^2x}$$

$$=\frac{\text{அகோசை}^2x-\text{அசைன்}^2x}{\text{அகோசை}^2x}=\frac{1}{\text{அகோசை}^2x};$$

அல்லது $$\frac{d}{dx}\text{அதான்}\,x=\text{அசீக}^2x.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

அதுபோல, $$\frac{d}{dx}\text{அகோதா}\,x=-\text{அகோசீ}^2x.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

இனி, $y=\text{அசீக}\,x=\frac{1}{\text{அகோசை}\,x}$ எனின்,

2.62 ஆல்,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\text{அகோசை}^2x}\,\frac{d\,\text{அகோசை}\,x}{dx};$$

$$\text{அல்லது}\ \frac{d}{dx}\,\text{அசீக}\,x=-\frac{\text{அசைன்}\,x}{\text{அகோசை}^2x}=-\text{அதான்}\,x\ \text{அசீக}\,x.\ \ldots\ (5)$$

அதுபோல,

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசீ}\,x=-\frac{\text{அகோசை}\,x}{\text{அசைன்}^2x}=-\text{அகோதா}\,x\,\text{அகோசீ}\,x.\ \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

4.36 பயிற்சி.

பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க.

(i) x^3e^x. (ii) e^x/x^4. (iii) x^5/e^x.

(iv) e^{x^2+1}. (v). $\frac{a+be^x}{a-be^x}$. (vi) $e^{\text{தான்}\,x}$.

(vii) $e^{\text{சைன்}^{-1}x}$. (viii) $e^{ax}\text{சைன்}\,bx$. (ix). $e^{ax}\,\text{கோசை}\ bx$.

(x) $e^{\text{தான்}^2x}$. (xi) அசைன்^2x. (xii) அகோசை^2x.

(xiii) $\frac{1}{3}\text{அசைன்}\ 3x+3\text{அசைன்}\ x$. (xiv) $\text{தான்}^{-1}\ (\text{அதான்}\ x)$.

(xv) $\text{கோசை}^{-1}\ (\text{அசீக}\ x)$. (xvi) $\text{கோதா}^{-1}\ (\text{அசைன்}\ x)$.

4.4 மடக்கை. அட்சரகணித நூல்களிலே மடக்கையின் வரைவிலக்கணம் பின்வருமாறு கூறப்பட்டுள்ளது. **தந்த ஓர் அடிக்கு ஓர் எண்ணின் மடக்கையானது அவ்வெண்ணுக்குச் சமனாகும்படி அவ்வடி உயர்த்தப்பட வேண்டிய வலுவின் சுட்டியாகும்.**

உதாரணமாக, $a^y=n$ எனின், $y=\text{மடீ}_a n$, இங்கு a அடியைக் குறிக்கின்றது.

மடக்கையின் ஆரம்பக் கொள்கை பின்வருந் தேற்றங்களை அடக்கியுள்ளது :

(i) $$\text{மட}_a mn=\text{மட}_a m+\text{மட}_a n.$$

$m=a^x$, $n=a^y$ எனின், $mn=a^{x+y}$.

$$\text{மட}_a mn=x+y=\text{மட}_a m+\text{மட}_a n.$$

(ii) $$\text{மட}_a m/n=\text{மட}_a m-\text{மட}_a n.$$

இது முன்போல நிறுவப்படலாம்.

(iii) $$\text{மட}_a m^k=k\ \text{மட}_a m.$$

இங்கு k ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாகும்.

$m=a^x$ எனின், $m^k=a^{kx}$,

$$\text{மட}_a m^k=kx=k\ \text{மட}_a m.$$

(iv) $$\frac{\text{மட}_a m}{\text{மட}_b m}=\text{மட}_a b.$$

$m=a^x=b^y$ எனின் $a^{\frac{x}{y}}=b$,

$\frac{x}{y}=\text{மட}_a b$ அல்லது $\frac{\text{மட}_a m}{\text{மட}_b m}=\text{மட}_a b.$

அதுபோல, $\frac{\text{மட}_b m}{\text{மட}_a m}=\text{மட}_b a,$

ஆகவே, $\text{மட}_a b\times\text{மட}_b a=1.$

4.41 எண் கணக்கீடுகளிற் பொது வழக்கிலுள்ள மடக்கைகள் 10 என்னும் அடிக்குரிய மடக்கைகளாம். நூல் விருத்தியடையத் தெளிவாகுங் காரணங்கள்பற்றி அறிமுறை வேலையில், **4.3** இல் வரையறுக்கப்பட்டபடி e யை அடியாக வழங்குதல் இசைவாகும். அடி e யிற்கு எடுக்கும் மடக்கை முறையை கண்டுபிடித்த **மேச்சிஸ்றன்** ஊரின் **பரன் நப்பியரின்** பெயராலே **நப்பியர முறை** எனக் கூறப்படும்.

4.42 மடக்கையை வகையிடுதல். $y=\text{மட}_e x$ ஆகுக ; எனின், **4.4** இன் வரைவிலக்கணத்தால், $x=e^y$ ஆகும்.

y யைக் **குறித்து** வகையிடல்,

$$\frac{dx}{dy}=e^y=x$$

என்பதைத் தரும்.

ஆனால் **2.631** இன்படி $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

ஆகவே, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$;

அதாவது $\dfrac{d\,\text{மட}_e x}{dx}=\dfrac{1}{x}$.

4.421 பொது மடக்கைகளை வகையிடல். 4.4 (iv) ஐ வழங்க,

$\text{மட}_{10}x=\text{மட}_e x\times\text{மட}_{10}e$; அட்டவணைகளிலிருந்து

$\text{மட}_{10}e=\cdot 4343\ldots$ எனக் காண்போம் ;

ஆகவே, $\text{மட}_{10}x=\cdot 4343\ \text{மட}_e x$,

ஆகவே, $\dfrac{d}{dx}\ \text{மட}_{10}x=\dfrac{\cdot 4343}{x}$.

$\text{மட}_{10}e$ என்னும் எண் சில வேளைகளில் μ ஆற் குறிக்கப்படும்.

4.43 விகிதமுறாச் சுட்டிகள். ஆரம்ப அட்சரகணிதத்தில் வரைவிலக்கணங் கொடுக்கப்பட்ட சுட்டிகள் விகிதமுறும் எண்கள்மட்டுமேயாகும். அவை நேர்முழு எண்களாயாதல், மறை முழு எண்களாயாதல், பின்னங்களாயாதலிருக்கும். **4.3** இல் ஒரு குறித்த சார்பு e^x என்பதை வழங்கத் தொடங்கி அதனை ஒரு முடிவிலித் தொடராக அதற்கு ஒரு கோவை கொடுத்தோம் ; இன்னும் விகிதமுறும் எண்ணல்லாத சுட்டிக்குப் பொருள் யாதுங் கொடுக்கவில்லையாயினும், அக்கோவை x இன் **எல்லாப்** பெறுமானங்களுக்கும் வலிதான விரியென்று சொல்லப்பட்டது. அக்காரணம்பற்றி, விகிதமுறாச் சுட்டிக்கு ஒரு பொருள் பெறும் வரைக்கும் அடுக்குக்குறித் தொடருக்குப்

பதிலாக $E(x)$ என்பது போன்ற ஒரு குறியீட்டை வழங்கினால், அது தர்க்க முறையாவதோடு ; எளிதாக்குதற்காகவே e^x என்னும் சுட்டி வடிவத்தை வழங்கினோம். எனினும், இனி சுட்டிக்குக் கூடிய பொதுமைப் பாடுடைய வரைவிலக்கணங் கொடுக்கலாம்.

x ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாயின்,

$$\text{மட}_e a^x=x\,\text{மட}_e a,$$

எனக் கண்டோம்.

ஆயின், $$a^x=e^{x\,\text{மட}_e a}=1+x\,\text{மட}_e a+\frac{x}{2!}(\text{மட}_e a)^2+\ldots.$$

நாம் விரும்புமாறு விகிதமுறாச் சுட்டிக்கு வரைவிலக்கணங் கொடுக்கலாம் ; x விகிதமுறா எண்ணாயிருக்கும்போது a^x இன் வரைவிலக்கணம் x விகிதமுறும் எண்ணாயிருக்கும்போதும் பொருந்துமாறு செய்தல் இசைவாகும். ஆகவே, x விகிதமுறா எண்ணாயிருக்கும்போது a^x ஐ $e^{x\,\text{மட}_e a}$ என, அதாவது x இன் வலுக்களினது ஒரு குறித்த தொடரின் கூட்டுத் தொகையென வரையறுக்கின்றோம்.

பின்வருவனவற்றில், மறுதலை கூறப்பட்டாலன்றி மடக்கைகள் e யின் அடிக்கு எடுக்கப்பட்டனவென அறிதல் வேண்டும்.

4.44 a^x இன் பெறுதி. $\text{மட}\,a=c$ ஆகுக ; ஆயின் $a=e^c$, $a^x=e^{cx}$, ஆகவே,

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{cx}=ce^{cx}=a^x\,\text{மட}\,a.$$

4.45 மடக்கை வகையிடல். ஒரு பெருக்கத்தையாதல், ஓர் ஈவையாதல் வகையிடும் முறை, வகையிடுதற்கு முன் மடக்கைகளை எடுத்தலாற் பொதுவாக எளிதாக்கப்படும் ; அதற்குக் காரணம் அச்செய்கையானது ஒரு பெருக்கத்தை ஒரு கூட்டுத்தொகையாகவும் ஓர் ஈவை ஒரு வித்தியாசமாகவும் மாற்றும்.

உதாரணமாக, $y=uvw$ என்க. ....(1)

இங்கு, u, v, w என்பன x இன் சார்புகள்.

ஆயின், $\text{மட}\,y=\text{மட}\,u+\text{மட}\,v+\text{மட}\,w$

ஆகவே, **2.63** ஆல் $\dfrac{d\,\text{மட}\,y}{dx}=\dfrac{d\,\text{மட}\,y}{dy}\times\dfrac{dy}{dx}$,

$=\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$. ....(2)

இதுபோல ஏனைய மடக்கைகளுக்குஞ் செய்யலாம்.

ஆகவே,
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

இரு பக்கங்களையும் y, அல்லது uvw ஆற் பெருக்க **2.6** இன் சூத்திரத்தைப் பெறுகின்றோம் ; அதாவது

$$\frac{dy}{dx}=vw\frac{du}{dx}+wu\frac{dv}{dx}+uv\frac{dw}{dx}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

(1) இலிருந்து (4) இற்குச் செல்லுஞ் செய்கைவழி மடக்கை வகையிடல் எனப்படும். அச்செய்கையை $y=u/v$ என்பதற்கும் பிரயோகப்படுத்தலாம் ; அவ்வாறு செய்ய வருவது,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}-\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$

4.451 உதாரணங்கள். $y=\sqrt{\left\{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right\}}$ போன்ற கோவைகளின் பெறுதிகளைப் பெறுதற்கு மடக்கை வகையிடற் செய்கை சிறப்பாகப் பயன்படும்.

முதலாவதாக,

4.45. (2), இன்படி $\frac{d}{dx}\text{ மட } y=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ ஆதலால்,

$$\frac{d}{dx}\text{ மட } f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)};$$

சொற்களில் கூறுமிடத்து, **ஒரு சார்பினது மடக்கையின் பெறுதி அச்சார்பின் பெறுதியை அச்சார்பால் வகுத்தலாற் பெறப்படுவது.**

தந்த பயிற்சியிலிருந்து,

$$\text{மட } y=\tfrac{1}{2}\text{ மட }(x^2-x+1)-\tfrac{1}{2}\text{ மட }(x^2+x+1);$$

பின்னர் வகையிட

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x-1}{2(x^2-x+1)}-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}.$$

ஆகவே, இரு பக்கங்களையும் y யாற் பெருக்க,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

4.46 u, v **என்பன** x **இன் சார்புகளாயிருக்க** $y=u^v$ **யை வகையிடுதல்.**

மடக்கை எடுக்க,

$$\text{மட } y=v\text{ மட } u$$

பின்னர், வகையிடல் தருவது,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}\text{ மட } u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx},$$

ஆகவே,
$$\frac{dy}{dx}=u^v\left\{\frac{dv}{dx}\text{ மட } u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right\}.$$

4.461 உதாரணங்கள்.

(i) $y=x^{x^3}$ ஆகுக,

ஆயின், $\text{மட } y=x^3\text{ மட } x$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=3x^2\text{ மட } x+x^2,$$

ஆகவே
$$\frac{dy}{dx}=x^{x^3+2}(3\text{ மட } x+1).$$

(ii) $y=(x^3+1)^{x^2}$ ஆகுக.

ஆயின், $\text{மட } y=x^2\text{ மட }(x^3+1)$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x\text{ மட }(x^3+1)+\frac{3x^4}{x^3+1},$$

ஆகவே,
$$\frac{dy}{dx}=x\left\{2\text{ மட }(x^3+1)+\frac{3x^3}{x^3+1}\right\}(x^3+1)^{x^2}.$$

4.47 பயிற்சி. **பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க.**

(i) $x\text{ மட } x$.

(ii) $\text{மட தான் } x$.

(iii) $\text{மட சைன்}^2 x$.

(iv) $\text{மட அசீக } x$.

(v) $\text{மட தான்}^{-1}x$.

(vi) $\text{மட }\frac{1+x}{x}$.

(vii) $\text{மட }\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}$.

(viii) $x\text{ மட அகோசை } x$.

(ix) $\text{மட }\frac{x}{x-\sqrt{(1+x^2)}}$.

(x) $\text{மட }\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

(xi) $\text{மட }(\text{மட } x)$.

(xii) $\sqrt{\left(\frac{1-x^4}{1+x^4}\right)}$.

(xiii) $\frac{\sqrt{(x+1)}-\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x+1)}+\sqrt{(x-1)}}$.

(xiv) x^{x^2}.

(xv) $(x^2+1)^x$. (xvi) $(\text{சைன் } x)^{\text{கோசை } x}$.

(xvii) a^{x^2+1}. (xviii) $(\text{சைன்}^{-1} x)^x$.

(xix) $(\text{தான் } x)^{\text{சீக } x}$. (xx) $x^{\text{தான் } x}$.

மடக்கைகளைப் பயன்படுத்தி **2.633** (iii) – (vi) என்னும் பயிற்சிகளையுஞ் செய்க.

4.5 நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகள். நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகள் ஏனைய நேர்மாறு சார்புகளைப்போல வரையறுக்கப்படும் ; உதாரணமாக, $x = \text{அசைன் } y$ எனின், $y = \text{அசைன்}^{-1} x$; அதுபோல $\text{அகோசை}^{-1} x$, $\text{அதான்}^{-1} x$ என்பனவற்றிற்கும் வரைவிலக்கணங்கள் கொடுக்கலாம்.

அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் காலங்கள் கற்பனை எண்கள் ($\sqrt{-1}$ இன் மடங்குகள்) ஆயுள்ளனவாயினும் அச்சார்புகள் ஆவர்த்தனச் சார்புகளெனக் காட்டப்படலாம். ஆதலால், நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகள் பல பெறுமானங் கொண்டுள்ளன (**4.2**) ; எனினும், அவற்றை நாம் பயன்படுத்தும்போது அவற்றின் “ தலைமைப் பெறுமானங்களுக்கே ” எம்மைக் கட்டுப் படுத்துவோம் ; அவற்றை மடக்கைகளில் பெறுவோம்.

(i) $y = \text{அசைன்}^{-1} x$; அல்லது $x = \text{அசைன் } y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ ஆகுக ;

ஆகவே, $$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டை e^y யிற்குத் தீர்க்க,

$$e^y = x \pm \sqrt{(x^2+1)} \text{ ; எனப் பெறுவோம்.}$$

அல்லது $$y = \text{மட } \{x \pm \sqrt{(x^2+1)}\} ;$$

$\text{மட}\{x + \sqrt{(x^2+1)}\}$ ஐ $\text{அசைன்}^{-1} x$ இன் தலைமைப் பெறுமானமாகத் தேர்வோம்.

சயக் குறியானது மெய்ப் பெறுமானமில்லாத ஓர் மறையெண்ணின் மடக்கையைக் கொண்டதெனக் நாம் காண்போம்.

(ii) $y = \text{அகோசை}^{-1} x$ அல்லது $x = \text{அகோசை } y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ ஆகுக ;

ஆயின், $$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க,

$$e^y = x \pm \sqrt{(x^2-1)}, \text{ ஐப் பெறுவோம்.}$$

அல்லது $$y = \text{மட}\{x \pm \sqrt{(x^2-1)}\} ;$$

$\text{மட } \{x + \sqrt{(x^2-1)}\}$ ஐ $\text{அகோசை}^{-1} x$ இன் தலைமைப் பெறுமானமாகத் தேர்வோம்.

4.33 இலிருந்து அதிபரவளைவுக் கோசைன் ஒருபோதும், 1 இலுஞ் சிறிதாகாதென்பதும் அதன் காரணமாக $x < 1$ இற்கு $\text{அகோசை}^{-1} x$ வரையறுக்கப்படுவதில்லை என்பதுந் தெளிவு.

(iii) $y = \text{அதான்}^{-1} x$ ஆகுக ;

அல்லது $$x = \text{அதான் } y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

ஆகவே, $$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} ; \quad y = \tfrac{1}{2} \text{ மட } \frac{1+x}{1-x}.$$

இது $\text{அதான்}^{-1} x$ இன் தலைமைப் பெறுமானமாயினும் ; x எண்ணளவில் 1 இலுஞ் சிறிது என்றாற்றான் அது மெய்யாகும்.

(iv) அதுபோல, x எண்ணளவில் > 1 எனின்

$$\text{அகோதா}^{-1} x = \tfrac{1}{2} \text{ மட } \frac{x+1}{x-1} \text{ என்பது மெய்யென்றும் ;}$$

$$0 < x < 1 \text{ எனின், } \text{அசீக}^{-1} x = \text{மட } \frac{1 + \sqrt{(1-x^2)}}{x} \text{ மெய்யென்றும் ;}$$

$x >$ அல்லது < 0, $\pm$ என்பதற்குத் தக $\text{அகோசீ}^{-1} x = \text{மட } \dfrac{1 \pm \sqrt{(1+x^2)}}{x}$ என்று நாம் காண்கின்றோம்.

4.51 நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் பெறுதிகள். இவை சம மடக்கை வடிவங்களை வகையிடுதலாற் காணப்படலாம் ; அன்றி, அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் பெறுதிகளிலிருந்து நேராகப் பெறப்படலாம். உதாரணமாக,

(i) $y = \text{அசைன்}^{-1} x$ ஆகுக ; ஆயின் $x = \text{அசைன் } y$;

ஆகவே, $$\frac{dx}{dy} = \text{அகோசை } y.$$

எனின், $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{அகோசை } y} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{அசைன்}^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

ஆகவே, $$\frac{d}{dx} \text{அசைன்}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

அகோசை y என்பது என்றும் நேராயிருத்தலால், வர்க்க மூலத்தின் முன் சயக்குறி ஏற்கக்கூடியதன்று.

(ii) $y = \text{அகோசை}^{-1} x$ ஆகுக ; ஆயின், $x = \text{அகோசை } y$;

ஆகவே, $$\frac{dx}{dy} = \text{அசைன் } y.$$

எனின், $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{அசைன் } y} = \frac{1}{\pm\sqrt{(\text{அகோசை}^2 y - 1)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(x^2-1)}},$$

ஆகவே, $$\frac{d}{dx} \text{அகோசை}^{-1} x = \frac{\pm 1}{\sqrt{(x^2-1)}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

4.33 இலுள்ள அகோசைx இன் வரைபை நோக்க, 1 இலும் பெரிதான y யின் யாதும் ஒரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் x இற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் உண்டு என்பதும் அப்புள்ளிகளிலுள்ள படித்திறன்கள் சமனாயுங் குறியில் எதிராயும் இருக்கும் என்பதுந் தெளிவு. x ஐயும் y யையும் இடைமாற்ற, 1 இலும் பெரிதான x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் $\frac{d}{dx}$ அகோசை^{-1}x என்பதற்கு சமமும் எதிருமான பெறுமானங்கள் இரண்டு உண்டு என்பது பெறப்படும்.

(iii) $y = \text{அதான்}^{-1}\, x$ ஆகுக ; ஆயின், $x = \text{அதான்}\, y$;

$$\frac{dx}{dy} = \text{அசீக}^2\, y.$$

எனின்,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{அசீக}^2 y} = \frac{1}{1-x^2};$$

ஆகவே,
$$\frac{d}{dx}\text{அதான்}^{-1}\, x = \frac{1}{1-x^2}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(iv) ஒத்த நோக்கல் பின்வருவனவற்றைக் காட்டும் :

(4.5 இற் போல்) $x^2>1$ எனின், $\frac{d}{dx}$ அகோதா$^{-1}x = -\frac{1}{x^2-1}$ உம்

(4.5 இற் போல்) $0<x<1$ எனின், $\frac{d}{dx}$ அசீக$^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{(1-x^2)}}$

என்பதும் மெய் ;

$x <$ அல்லது > 0 என்பதற்குத் தக, $\frac{d}{dx}$ அகோசீ$^{-1}x = \frac{\pm 1}{x\sqrt{(x^2+1)}}$

என்பது $\pm$.

இவற்றின் நிறுவல்களை மாணுக்கனுக்கு ஒரு பயிற்சியாக விடுகின்றேம்.

4.52 பயிற்சி.

1. அசைன்$^{-1}\frac{x}{a} =$ மட $\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}$ என நிறுவுக ;

அதன் பெறுதியையுங் காண்க.

2. $x^2 < a^2$ எனின், அதான்$^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}$ மட $\frac{a+x}{a-x}$ என நிறுவுக ;

அதன் பெறுதியையுங் காண்க.

3. $x^2 > a^2$ எனின், அகோதா$^{-1}\frac{x}{a} = -\frac{1}{2}$ மட $\frac{x-a}{x+a}$ என நிறுவுக ;

அதன் பெறுதியையுங் காண்க.

4. பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :

(i) x அகோசை$^{-1}\, x$; (ii) (a^2-x^2) அதான்$^{-1}\, (x/a)$;
(iii) (அசைன்$^{-1}\, x)^2$; (iv) அதான்$^{-1}$ (கோசை x) ;
(v) அகோசை$^{-1}$ (சீக x) ; (vi) அசைன்$^{-1}$ (தான் x) ;
(vii) தான் (அகோசை$^{-1}\, x$) ; (viii) சைன் (அதான்$^{-1}\, x$) ;
(ix) அதான்$^{-1}$ (தான் $\frac{1}{2}x$) ; (x) அசீக$^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$.

5. சைன்$^{-1}$ (அதான் x) = தான்$^{-1}$ (அசைன் x) எனக் காட்டுக ; அவற்றின் பெறுதியைக் காண்க.

4.6 பலவின உதாரணங்கள்.

(i) பின்னடும் வகையீடுகள்.

உதாரணம். $y =$ சைன் (m சைன்$^{-1}\, x$) எனின்,

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ என நிறுவு.

நாம் பெறுவது, $\frac{dy}{dx} =$ கோசை (m சைன்$^{-1}\, x) \times \frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

இப்பருவத்தில் இரு பக்கங்களையும் $\sqrt{(1-x^2)}$ என்பதாற் பெருக்கி,

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{(1-x^2)} = m\ \text{கோசை}\ (m\ \text{சைன்}^{-1}\, x)$$

என எழுதலால் வேலையைச் சுருக்கலாம்.

இனி, திரும்பவும் வகையிட,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{(1-x^2)} + \frac{dy}{dx} \times \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -m\ \text{சைன்}\ (m\ \text{சைன்}^{-1}\, x) \times \frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

இரு பக்கங்களையும் மறுபடியும் $\sqrt{(1-x^2)}$ ஆற் பெருக்கி சைன் (m சைன்^{-1}x) இற்குப் பதிலாக y யைப் பிரதியிட,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0.$$

(ii) சமனிலிகளுக்குப் பிரயோகித்தல்.

உதாரணம். $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ எனின்,

$x >$ சைன் $x > x - \frac{1}{6}x^3$ என நிறுவுக.

$f(x) = x -$ சைன் x ஆகுக ; ஆயின், $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 -$ கோசை x ; இது $0<x<\frac{1}{2}\pi$ இற்கு நேராகும் ; பின்னர் $f'(x)$ நேராயிருத்தலால், x கூடுதலுற $f(x)$ உம் கூடுதலுறும் ; எனினும், $f(0) = 0$; ஆகவே, x கூடுதலுற $f(x)$ பூச்சியத்திலிருந்து கூடுதலுறும் ; ஆகவே, $x >$ சைன் x.

5—CP 943 (6/67)

இனி, $f(x) =$ சைன் $x - x + \frac{1}{6}x^3$ ஆகுக,

ஆகவே, $f'(x) =$ கோசை $x - 1 + \frac{1}{2}x^2$,

$f''(x) = -$ சைன் $x + x$.

எனின், மேற்கூறியதிலிருந்து $f''(x)$ நேர்; ஆகவே, $f'(x)$ ஆனது x உடன் கூடுதலுறும்; எனினும்; $f'(0) = 0$; $f'(x)$ பூச்சியத்திலிருந்து கூடுதலுறும்; அதாவது, $f'(x)$ நேராகும். எனின் $f'(x)$ நேராதலால், $f(x)$ என்பது x உடன் கூடுதலுறும்; எனினும், $f(0) = 0$; ஆகவே, $f(x)$ பூச்சியத்திலிருந்து கூடுதலுறும்; அதாவது $f(x)$ நேராகும்; ஆகவே

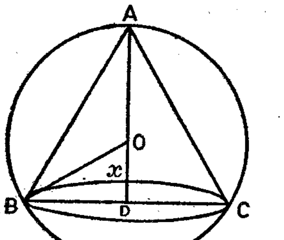
$$\text{சைன் } x > x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

பல சமனிலிகள் இவ்வாறு நிலைநாட்டப்படலாம்.

(iii) உயர்வுகளும் இழிவுகளும்.

தந்த ஒரு கோளத்திற்கு உள்வரையத்தக்க நேர் வட்டக் கூம்புகளுள் மிகப் பெரியதன் கனவளவு அக்கோளக் கனவளவின் $\frac{8}{27}$ என நிறுவுக.

ஒரு கூம்பின் கனவளவு அதனடியை உயரத்தாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்தின் மூன்றிலொன்றாகும்; a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவு $\frac{4}{3}\pi a^3$.



O அக்கோளத்தின் மையமாகுக; அக்கூம்பின் அடி BC, O விலிருந்து x தூரத்தில் இருக்க. உச்சி A, விட்டத்தின் ஒரு முனையாய் அடிக்குச் செங்குத்தாயிருக்கும் போது உயரம் மிகப் பெரியதாகும்; ஆயின் கனவளவு

$$V = \tfrac{1}{3}\pi BD^2.AD,$$

இங்கு D என்பது அடியின் மையம். a அக்கோளத்தின் ஆரையாகும்.

$$BD^2 = a^2 - x^2, \quad AD = a + x;$$

ஆகவே, $V = \frac{1}{3}\pi(a^2 - x^2)(a + x)$ ....(1)

$= \frac{1}{3}\pi(a^3 + a^2x - ax^2 - x^3)$;

$$\frac{dV}{dx} = \tfrac{1}{3}\pi(a^2 - 2ax - 3x^2)$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi(a + x)(a - 3x).$$

எனின் V யின் திரும்பற் பெறுமானங்கள் $x = -a$, $x = \frac{1}{3}a$ என்பனவற்றாற் தரப்படும், எனினும், கணக்கின் இயல்பிலிருந்து x இன் மறைப் பெறுமானம் பொருந்தாதென அறியப்படும். ஆயின் $x = \frac{1}{3}a$; x இன் இப் பெறுமானம் $\frac{d^2V}{dx^2}$ ஐ மறையாக்குமாதலால், அது V யிற்கு

ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும்; (1) இல் $x = \frac{1}{3}a$ எனப் பிரதியிடுதலால், உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{32}{81}\pi a^3$, அல்லது கோளக் கனவளவின் $\frac{8}{27}$ ஆகும்.

4.61 பலவினப் பயிற்சி.

தரவு. (i) நேர் வட்டக் கூம்பு: கனவளவு = அடியின் $\frac{1}{3} \times$ உயரம்; வளைபரப்பளவு = அடியின் அரைப்பரிதி × சாயுயரம்.

(ii) நேருருளை: கனவளவு = அடி × உயரம்; வளைபரப்பளவு = பரிதி × உயரம்.

1. பின்வருஞ் சார்புகளை வகையிடுக:

(i) $\text{தான்}^{-1}\sqrt{\left(\frac{(1-\text{கோசை } x)}{(1+\text{கோசை } x)}\right)}$; (ii) $\text{சைன்}^{-1}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;

(iii) $\text{தான்}^{-1}\frac{\sqrt{(1+x^2)}-1}{x}$; (iv) $\text{தான்}^{-1}x + \text{மட}\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$;

(v) $\text{சைன்}^{-1}\{2ax\sqrt{(1-a^2x^2)}\}$.

2. $\text{மட}\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} - 2\,\text{தான்}^{-1}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ ஐ வகையிடுக.

3. $\frac{d^2}{dx^2}$ (கோசை ax அகோசை bx) ஐக் காண்க.

4. $y(1-x) = x^2$ எனின்,
$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 2 \text{ என நிறுவுக.}$$

5. $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ எனின்;
$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (n+x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

6. $y = a$ கோசை (மட x) $+ b$ சைன் (மட x) எனின்;
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

7. $y\sqrt{x} =$ சைன் x எனின்;
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

8. $y = x\,\text{சைன்}^{-1}x$ எனின்;
$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{(1-x^2)} \text{ என நிறுவுக.}$$

9. $2y = (\text{சைன்}^{-1}x)^2$ எனின்,
$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx} + 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

10. $y = a$ மட தான் x எனின் ;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} \text{ கோதா } 2x = 0$$ என நிறுவுக.

11. $y = x$ மட y எனத் தரப்பட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(y-x)}$$ என நிறுவுக.

12. $ye^y = x$ எனத் தரப்பட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1+y)}$$ என நிறுவுக.

13. ஒரு புள்ளியானது ஒரு நேர்கோட்டிலே உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி O விலிருந்து நேரம் t யில் தனது தூரம் x ஆனது a கோசைωt ஆகுமாறு அக்கோட்டில் அசைகின்றது. அப்புள்ளியின் ஆர்முடுகல் $-\omega^2 x$ என நிறுவுக.

14. ஒரு புள்ளியானது நேரம் t யில், தனது நிலை $x = 3t +$ கோசை$3t$ என்பதாலே தரப்படுமாறு x—அச்சு வழியே அசைகின்றது. அதன் வேகம், ஆர்முடுகல் என்னும் இரண்டும் ஒருங்கே அற்றுப்போகுமென நிறுவுக.

$t = 0$ ஆகும்போது அதன் வேகம் என்ன ? அது ஓய்வுக்கு வருமுன் எத்தூரத்திற்கு அசையும் ?

15. $(x-1)e^x + 1$ என்னுஞ் சார்பு x இன் நேர்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் நேரென நிறுவுக.

16. x நேராயின், $(x-2)e^x + x + 2$ என்பதும் நேரென நிறுவுக.

17. x நேராயின்,

$$x - \text{மட } (1+x) > \frac{\frac{1}{2}x^2}{1+x}$$ என நிறுவுக.

18. x நேராயின்,

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 > \text{ மட } (1+x) > x - \tfrac{1}{2}x^2$$ என நிறுவுக.

19. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ எனின்,

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 > \text{கோசை } x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2$$ என நிறுவுக.

20. x ஆனது பூச்சியத்திலிருந்து முடிவிலிக்குக் கூடுதலுற,

$2x -$ தான்$^{-1} x -$ மட $\{x + \sqrt{(1+x^2)}\}$ தொடர்ச்சியாகக் கூடுதலுறுமென நிறுவுக.

21. a ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தினுள் வரையத்தக்க செவ்வகங்களுட் பெரியதன் பரப்பளவைக் காண்க.

22. ஒரு செவ்வகமானது தன் பக்கமொன்று ஒரு முக்கோணியின் அடியின் வழியே கிடக்குமாறு அம்முக்கோணியினுள் வரையப்படுகின்றது. அச்செவ்வகத்தின் உயரம் அம் முக்கோணியின் உயரத்தின் அரைப்பங்காகும்போது, அச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவு மிகப் பெரியதாகுமென நிறுவுக.

23. தந்த ஒரு வட்டத்திற்குச் சுற்றி வரையத்தக்க இருசமபக்க முக்கோணிகளுள் இழிவுப் பரப்பளவு கொண்டது சமபக்க முக்கோணியாகுமென நிறுவுக.

24. தந்த ஒரு கோளத்திற்குச் சுற்றி வரைந்த இழிவு வளைபரப்புக்கொண்ட நேர்வட்டக் கூம்பிற்கு அரையுச்சிக் கோணம் சைன்$^{-1}$ $(\sqrt{2} - 1)$ எனக் காட்டுக.

25. தந்த ஒரு கோளத்தில் உள்வரையத்தக்க நேர்வட்டக் கூம்புகளுள் மிகப் பெரிய வளைபரப்பைக் கொண்டதைக் காண்க.

26. தந்த ஒரு கோளத்தைச் சுற்றி வரையத்தக்க நேர் வட்டக் கூம்புகளுள் இழிவுக் கனவளவைக் கொண்டதன் கோணத்தைக் காண்க.

27. ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் a, b என்பன. தந்த செவ்வகத்தின் ஒரு மூலைக் கூடாகத் தன் பக்கம் ஒவ்வொன்றுக்கும் செல்லும்படி வரையத்தக்க மிகப்பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

28. a, b ஆள்கூறுகளையுடைய, ஒரு தந்த புள்ளி P யிற் கூடாக, ஆள் கூற்றச்சுக்களை A, B களிற் சந்திக்கும்படி ஒரு நேர்கோடு வரையப்படுகின்றது.

(i) OAB என்னும் பரப்பளவு இழிவாயிருக்கும்பொழுது,

(ii) AB இழிவாயிருக்கும்பொழுது,

(iii) $OA + OB$ இழிவாயிருக்கும்பொழுது.

x—அச்சிற்கு அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

29. தனது அடியின் ஆரை a யாயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பில் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேருருளைகளுள் மிகப்பெரிய கனவளவு கொண்டதைக் காண்க.

30. உயர்வு வளைபரப்பளவைக் கொண்ட ஒரு நேருருளை, a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தில் உள்வரையப்பட்டுள்ளது. அவ்வுருளையின் உயரத்தைக் காண்க.

31. ஒரு யன்னல் ஓர் அரைவட்டம் மேற்பொருத்திய செவ்வக வடிவங்கொண்டதாகும். அதன் சுற்றளவு 30 அடியாயின், இயல்தகுமிகப்பெரிய தொகை ஒளி உட்பிரவேசிக்க விடுதற்கு அதன் பரிமாணங்களைக் காண்க.

32. ஒரு மணிவடிவக் கூடாரம், மேலே ஒரு கூம்புப் பகுதியாலுந் தரைக்கு அண்மையில் ஓர் உருளைப் பகுதியாலும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. தந்த ஒரு கனவளவிற்குந் தந்த ஆரையையுடைய ஒரு வட்டவடிக்கும் வழங்கப்படுங் கூடாரச் சீலையினளவு அக்கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் கோசை$^{-1}$ $(\frac{2}{3})$ ஆகும்பொழுது இழிவாகுமென நிறுவுக.

33. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi$. அதன் முழு பரப்பினது பரப்பளவிற்கும் 2π என்னும் இழிவுப் பெறுமானம் உண்டு எனக் காட்டு.

34. $\frac{1}{8}$ (35 கோசை$^4 x - 30$ கோசை$^2 x + 3$) என்பதன் வீச்சுகள் $1, -\frac{3}{7}$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் இருக்கும் என்றும், அதற்கு உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{3}{8}$ என்றுங் காட்டுக.

35. (மட x)/x என்னுஞ் சார்பிற்கு உயர்வுப் பெறுமானம் $1/e$ என நிறுவுக.

36. a அகோசை $x + b$ அசீக x என்பதன் இழிவுப் பெறுமானம் $2\sqrt{(ab)}$ என நிறுவுக.

37. $y = e^{-kx}$ சைன் nx என்னும் வளையிக்கு x—அச்சு வழியே $\frac{\pi}{n}$ என்னுஞ் சம இடைகளில் ஒரு தொடர் உயர்விழிவு நிலைக்கூறுகள் இருக்கின்றன என்றும், k யின் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்குப் பெருக்கல் விருத்தியிற் குறைதலுறுகின்ற ஒரு தொடரை அவை ஆக்குகின்றன என்றும் நிறுவுக.

அதிகாரம் V

தொகையிடல்

5.1. தொகையிடும் முறை வகையிடும் முறைக்கு நேர்மாறு. இப் பிரிவில் அப்பிரச்சினையை மாத்திரங் கூறிச் குறியீட்டியலை விளக்குவோம்.

சென்ற அத்தியாயங்களில் ஒரு பெருந் தொகையான சார்புகளை எவ் வாறு வகையிட்டு,

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

என்பது போன்ற முடிபுகளைப் பெறலாமெனக் கற்றோம். இப்பொழுது எம்மை எதிர்நோக்கியுள்ள பிரச்சினை, "$dy/dx = g(x)$ எனத் தரப்படின், y யை x இன் சார்பாக உணர்த்துதலே." அவ்வாறு உணர்த்த y யை "$g(x)$ இன் தொகையீடு" எனக் கூறுதல் வழக்கு;

இது

$$y = \int g(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

என்னுங் குறியீட்டாற் குறிக்கப்படும்.

இதனை "y யானது $g(x)\,dx$ இன் தொகையீட்டிற்குச் சமன்" எனச் சொற்களில் கூறுவோம்.

இக்குறியீட்டியலுக்குக் காரணம் பின்வருமாறு: (1) என்பது

$$dy = g(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

என எழுதப்படலாம்; இங்கு dy, dx என்பன வகையீடுகள் (2.51); ஆயின், y யின் வகையீடு $g(x)\ dx$ ஆகும்; ஆகவே, எம் பிரச்சினை தன் வகையீட்டை $g(x)dx$ ஆகக் கொண்ட சார்பு y யைக் காண்பதே. d ஒரு சார்புக்குப் பிரயோகிக்க அது தன் வகையீட்டைத் தரும் ஒரு செயலி யாகுமென்றும், d யானது அட்சரகணிதப் பொது விதிகளுக்கு இணங்கு மென்றுங் கொண்டால், தொடர்பு (3),

$$y = \frac{1}{d}\, g(x)\,dx$$

என எழுதப்படலாம். பின்னர் $\int$ என்பதை $\frac{1}{d}$ இலுங் கூடுதலான இசைவுள்ள குறியீடெனக் கொண்டு எழுதினால், நாம் சூத்திரம் (2) ஐப் பெறுகின்றோம்; அதாவது

$$y = \int g(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

இப்பந்தி, சூத்திரம் (2) இனது நிறுவலெனப் பிழைபடக் கொள்ளப் படாது; ஆனால் எக்காரணத்தால் $\int$ என்னுங் குறியீடு dx ஆலே தொடரப்படும் என்பதை; அதாவது நாம் ஏன் $\int g(x)$ என எழுதாது $\int g(x)\,dx$ என எழுதுகின்றோம் என்பதை மாத்திரம் அறிவிக்கின்றது.

உதாரணமாக,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

என அறிவோம்;

அல்லது, வகையீடுகளாக, $dx^n = nx^{n-1}\,dx$

ஆயின், $x^n = \int nx^{n-1}\,dx.$

எனின், நாம் பின்வரும் வினாக்களுள் ஒன்றை வினவலாம்: (i) எச்சார்பு nx^{n-1} என்பதைத் தன் பெறுதியாக உள்ளது? (ii) எச் சார்பு $nx^{n-1}\,dx$ ஐத் தன் வகையீடாக உள்ளது? இரு வினாக்களுக்கும் விடை x^n ஆகும்.

அதுபோல், $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$;

அல்லது, வகையீடுகளாக, $df(x) = f'(x)\,dx$;

ஆயின்,

$$f(x) = \int f'(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

இதனைச் சொற்களில் "$f(x)$ ஆனது $f'(x)\,dx$ இன் தொகை யீட்டிற்குச் சமன்" எனக் கூறி, $f(x)$ ஆனது $f'(x)\,dx$ என்பதைத் தன் வகையீடாக உள்ள ஒரு சார்பெனவோ, $f(x)$ ஆனது $f'(x)$ என்பதைத் தன் பெறுமதியாக உள்ள ஒரு சார்பெனவோ பொருள் படுமாறு விளக்குகின்றோம்.

தந்த ஒரு பெறுதியையாதல் தந்த ஒரு வகையீட்டையாதல் கொண்ட ஒரு சார்பைக் காணும் புறமாற்றுச் செய்கை **தொகையிடல்** எனப்படும். $\int$ என்னுந் தொகையிடற் குறியீடு வகையீடுகளுக்கே பிரயோகிக்கப் படலாமென்றும் "$f(x)$ என்பதைத் தொகையிடல்" எனக் கூறும் வழக்கு இருக்கின்றபோதிலும் $f(x)\,dx$ ஐத் தன் வகையீடாயுள்ள சார்பைக் காணலே இதன் பொருளாகும் என்றும் ஞாபகத்தில் வைத் திருப்பது பிரதானமாகும்.

$\int f(x)dx$ என்னுஞ் சூத்திரத்தில் $f(x)$ என்பது **தொகையீட்டுச் சார்பு**, அதாவது தொகையிடப்படவேண்டிய பொருளெனப்படும்.

5.11 தொகையீட்டு மாறிலி. ஒரு மாறிலியின் வகையீடு பூச்சியமாய் இருத்தலால்,

$$d\{f(x)+C\}=f'(x)\,dx,$$

இங்கு C என்பது யாதும் ஒரு மாறிலி.

ஆகவே, **5.1 (4)** இற்போல.,

$$f(x)+C=\int f'(x)\ dx\ ;$$

இங்கு C என்பது யாதும் ஒரு மாறிலி ; ஆயின், $f'(x)dx$ இன் தொகையீடு $f(x)$ மாத்திரம் என்பதின்றி $f(x)+C$ ஆகும் ; இங்கு C என்பது யாதும் ஒரு மாறிலி. இம்மாறிலி **தொகையீட்டு மாறிலி** எனப்படும்.

உதாரணமாக, $d(x^3+C)=3x^3dx$ என்பதை அறிவோம் ; ஆயின்.

$$\int 3x^2dx=x^3+C.$$

5.12 x இன் வலுக்களை வகையிடல். $dx^n=nx^{n-1}\,dx$ ஆதலால்,

$$\int x^{n-1}dx=\frac{1}{n}x^n+C.$$

அதுபோல், $$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ ;$$

பின்னதாகிய இச் சூத்திரம் $n=-1$ இற்குத் தவிர n இன் விகிதமுறும் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும்.

எனின், x இன் ஓர் வலுவை வகையிடுதற்குரிய விதி சுட்டியினுற் பெருக்கி அச்சுட்டியை ஒன்றுற் குறைப்பதாயிருக்க, x இன் ஓர் வலுவைத் தொகையிடுதற்குரிய விதி **சுட்டியை ஒன்றுற் கூட்டி அக்கூடுதல் பெற்ற சுட்டியால் வகுத்தலாகும்.**

சிறப்பு வகையாக, x இன் வகையீடு dx ஆயிருத்தலால்,

$$\int dx=x+C.$$

உதாரணமாக,

(i) $\displaystyle\int x^7dx=\frac{1}{8}x^8+C\ ;$ (ii) $\displaystyle\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\ ;$

(iii) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^7}=-\frac{1}{6x^6}+C;$ (iv) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+C.$

நாம் (iii), (iv) என்பனவற்றில், x இன் மறை வலுக்களைத் தொகையிடுகின்றேம் என்றும், ஓர் மறை எண் **1 ஆற் கூடுதலுற்றுல்,** முடிபு எண்ணளவில் 1 இனுஞ் சிறிய ஓர் எண்ணுகும் என்றுங் காண்கின்றேம்.

5.13 பயிற்சி.

1. பின்வருங் கோவைகளினுடைய தொகையீடுகளை எழுதுக.

(i) $4x^3,\ 5x^4,\ x^6,\ x^9,\ x^{100}$; (ii) $x^{-3},\ x^{-4},\ x^{-6},\ x^{-9},\ x^{-100}$,

(iii) $x^{\frac{3}{4}},\ x^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{x},\ x^{\frac{4}{3}},\ x^{\frac{2}{5}}$ (iv) $x^{-\frac{3}{4}},\ x^{-\frac{1}{6}},\ x^{-\frac{1}{2}},\ x^{-\frac{4}{3}},\ x^{-\frac{2}{5}}$.

2. பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக :

(i) $\displaystyle\int(x^3+3x^2+3x+1)\ dx\ ;$ (ii) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+x^2-x^4\right)dx\ ;$

(iii) $\displaystyle\int(x+1)^2\ dx\ ;$ (iv) $\displaystyle\int(ax^2+2\,bx+c)\ dx\ ;$

(v) $\displaystyle\int\left(\frac{a}{x^4}+\frac{2b}{x^2}+c\right)dx.$

5.2 நியம வடிவங்களின் அட்டவணை. மேற்கூறிய அத்தியாயங்களில் ஒரு தொகையான ஆரம்பச் சார்புகளை எவ்வாறு வகையிடலாமெனக் கண்டோம். இம் முடிபு ஒவ்வொன்றுந் தொகையீட்டில் ஒத்த ஒரு முடிவைத் தருகின்றது. வேண்டும் வேளைகளில் ஆளுதற்கு இம் முடிபுகளை இங்கு அட்டவணைப் படுத்துகின்றேம் ; மாணுக்கன் அவற்றுள் பலவற்றைக் கற்றுலன்றி மேலும் உயர்ச்சி அடைதல் முடியாது. தொகையிடுதலின் மாறிலி தவிர்க்கப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1} \qquad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad (1).$$

($n=-1$ என்பதைத் தவிர)

$$\frac{d}{dx}\text{மட}\ x=\frac{1}{x} \qquad \int\frac{dx}{x}=\text{மட}\ x \qquad (2).$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax} \qquad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax} \qquad (3).$$

$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}\ x=\text{கோசை}\ x \qquad \int\text{கோசை}\ x\ dx=\text{சைன்}\ x \qquad (4).$$

$$\frac{d}{dx}\text{கோசை}\ x=-\text{சைன்}\ x \qquad \int\text{சைன்}\ xdx=-\text{கோசை}\ x \qquad (5).$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான்}\ x=\text{சீக}^2x \qquad \int\text{சீக}^2xdx=\text{தான்}\ x \qquad (6).$$

$$\frac{d}{dx}\text{கோதா}\ x=-\text{கோசீ}^2x \qquad \int\text{கோசீ}^2xdx=-\text{கோதா}\ x \qquad (7).$$

$$\frac{d}{dx}\text{சீக } x=\text{சீக } x \text{ தான் } x \qquad \int \text{சீக} x \text{ தான் } x\, dx=\text{சீக } x \qquad (8).$$

$$\frac{d}{dx}\text{கோசீ} x= -\text{கோசீ } x \text{ கோதா } x \qquad \int \text{கோசீ } x \text{ கோதா } x dx= -\text{கோசீ } x \qquad (9).$$

$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\surd(a^2-x^2)}(0<x<a) \qquad \int\frac{dx}{\surd(a^2-x^2)}=\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a} \qquad (10).$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{a}{a^2+x^2} \qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a} \qquad (11).$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான்}^{-1}\sqrt{\frac{B}{A}}x=\frac{\surd(AB)}{A+Bx^2} \qquad \int\frac{dx}{A+Bx^2}=\frac{1}{\surd(AB)}\text{தான்}^{-1}\sqrt{\frac{B}{A}}x \qquad (12).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசைன் } x=\text{அகோசை } x \qquad \int \text{அகோசை } x\, dx=\text{அசைன் } x \qquad (13).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசை } x=\text{அசைன் } x \qquad \int \text{அசைன் } x\, dx=\text{அகோசை } x \qquad (14).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அதான் } x=\text{அசீக}^2 x \qquad \int \text{அசீக}^2 x dx=\text{அதான் } x \qquad (15).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோதா } x= -\text{அகோசீ}^2 x \qquad \int \text{அகோசீ}^2 x\, dx= -\text{அகோதா } x \qquad (16).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசீக } x= -\text{அசீக } x \text{ அதான் } x \qquad \int \text{அசீக } x \text{ அதான் } x\, dx$$
$$= -\text{அசீக} x \qquad (17)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசீ } x= -\text{அகோசீ } x \text{ அகோதா } x$$

$$\int \text{அகோசீ } x \text{ அகோதா } x\, dx= -\text{அகோசீ } x \qquad (18).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\surd(x^2+a^2)} \qquad \int\frac{dx}{\surd(x^2+a^2)}=\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}$$
$$=\text{மட}\left\{\frac{x+\surd(x^2+a^2)}{a}\right\} \quad (a>0) \qquad (19)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\surd(x^2-a^2)} \qquad \int\frac{dx}{\surd(x^2-a^2)}=\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$$
$$=\text{மட}\left\{\frac{x+\surd(x^2-a^2)}{a}\right\}(x>a>0) \qquad (20).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அதான்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{a}{a^2-x^2} \qquad \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\text{அதான்}^{-1}\frac{x}{a}$$
$$=\frac{1}{2a}\text{மட}\frac{a+x}{a-x} \quad (x^2<a^2) \qquad (21).$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோதா}^{-1}\frac{x}{a}= -\frac{a}{x^2-a^2} \qquad \int\frac{dx}{x^2-a^2}= -\frac{1}{a}\text{அகோதா}^{-1}\frac{x}{a}$$
$$=\frac{1}{2a}\text{மட}\frac{x-a}{x+a} \quad (x^2>a^2) \qquad (22).$$

5.21. $x+a$ யின் பெறுதி **1** ஆயிருத்தலால், எந்த நியம வடிவங்களிலும் x இற்குப் பதிலாக நாம் $x+a$ யை எழுதலாம். உதாரணமாக,

$$\frac{d}{dx}(x+a)^n=n(x+a)^{n-1} \qquad \int(x+a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1},$$

$$\frac{d}{dx}\text{மட}(x+a)=\frac{1}{x+a} \qquad \int\frac{dx}{x+a}=\text{மட}(x+a),$$

$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}(x+a)=\text{கோசை}(x+a) \qquad \int\text{கோசை }(x+a)\,dx=\text{சைன் }(x+a),$$

இவ்வாறே பிறவும்.

5.211. இந்த நியம வடிவங்களைப் பற்றிப் பல குறிப்புகள் சொல்லப்பட வேண்டும். மறை எண்ணின் மடக்கை கற்பனையாதலால் ; சூத்திரம் (2) குறித்து கவனஞ் செலுத்தப்பட வேண்டும். $x-a$ நேராகும்படி $x>a$ எனின்,

$$\frac{d}{dx}\text{மட}(x-a)=\frac{1}{x-a}\ ; \quad \text{ஆதலால்,} \quad \int\frac{dx}{x-a}=\text{மட}(x-a)\ ;$$

இங்கு தொல்லை யாதும் இல்லை. எனினும், $x<a$ எனின் ஈற்றுச் சூத்திரம் பயனற்றதாகும் ; ஆயின், $x<a$ ஆகும்பொழுது,

$\int\frac{dx}{x-a}$ இன் பெறுமானம் யாதாகும் ?

இவ்வகையில் $a-x$ என்பது நேர் ; **2.63** ஆல்,

$$\frac{d}{dx}\text{மட}(a-x)=\frac{d\ \text{மட}\ (a-x)}{d\,(a-x)}\times\frac{d\,(a-x)}{dx}=\frac{1}{(a-x)}\times -1=\frac{1}{(x-a)}.$$

ஆகவே, $x<a$ ஆகும்பொழுது,

$$\int\frac{dx}{x-a}=\text{மட}\ (a-x).$$

x நேராயிருந்தாலும் அன்றி மறையாயிருந்தாலும்,

$$\int\frac{dx}{x} = \text{மட}\,|x|\,.$$

இங்கு x என்பதால் நாம் கருதுவது x இன் நேர் எண் பெறுமானம்.

5.212. (11), (12) ஆகிய இரு முடிபுகளும் தான்$^{-1}\,x$ சூத்திரத்தின் இனங்கள் என்றுஞ் சூத்திரம் (12), சூத்திரம் (11) ஐ உள்ளடக்குகின்றது என்றும் அதனாலே அது கற்றற்குச் சிறந்தது என்றும் அறிக.

மாணுக்கன் தானுக முடிபுகள் (19) – (22) ஐச் சென்ற அதிகாரத்தின் துணைக் கொண்டு, குறிப்பாக அவற்றை வலிதாகும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடர்பில் சரிபார்த்துக் கொள்ள வேண்டும். – மட a என்பது ஒரு தொகையிடுதலின் மாறிலியெனக் கொள்ளப்படலாமாதலால், (19), (20) என்பனவற்றில்

$$\text{மட}\{x+\sqrt{(x^2+a^2)}\},\ \text{மட}\ \{x+\sqrt{(x^2-a^2)}\}$$

என்னும் வடிவங்கள் அத்தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களாதற்குப் போதியனவென அறிதல் வேண்டும்.

5.22 தேற்றங்கள்.

(i) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$; இங்கு c என்பது ஒரு மாறிலி,

(ii) $\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

(iii) $\int f'(mx)\,dx = \frac{1}{m}f(mx)$;

இங்கு, தொகையீட்டு மாறிலிகள் தவிர்க்கப்பட்டுள்ளன. சமன்களின் இரு பக்கங்களின் வகையீடுகளை எடுப்பதாலும் (அதாவது செய்கை d ஐ இரு பக்கங்களிலுஞ் செய்தலாலும்),

$d\int f(x)dx = f(x)dx$ என்றும்

$df(mx) = mf'(mx)dx$ என்றும்

ஞாபகப்படுத்தலாலும் இத்தேற்றங்கள் ஒருங்கு சரிபார்க்கப்படுகின்றன.

5.221. $f(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்பியைக் குறித்தால்,

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ (என்க)

$\frac{f(x)}{x-c}$ என்பது தொகையிடப்படக்கூடும் ; அதற்குக் காரணம் வருமாறு :

இப்பின்னத்தின் தொகுதியெண்ணை $x-c$ யால் வகுக்க,

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1} + \frac{b_n}{x-c}$$

என்னும் வடிவத்தின் முடிபைப் பெறுவோம் ; தொகையிடுதலின் முடிபு,

$$\frac{b_0}{n}x^n + \frac{b_1}{n-1}\,x^{n-1} + \dots + \frac{b_{n-2}}{2}x^2 + b_{n-1}x + b_n\,\text{மட}\,(x-c)\ \text{ஆகும்.}$$

5.222 உதாரணங்கள்.

(i) $\frac{x^2}{x-1}$ இன் தொகையீட்டைக் காண்க.

தொகுதியைப் பகுதியால் வகுக்க,

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

ஆகவே $$\int\frac{x^2dx}{x-1} = \frac{1}{2}x^2 + x + \text{மட}\ (x-1).$$

(ii) $\int(x-2)^{\frac{4}{3}}dx$ ஐக் காண்க.

5.21 இல் விளக்கியவாறு x இன் ஓரடுக்குப்போலவே $(x-2)$ இன் ஓர்டுக்கும் தொகையிடப்படுதல் கூடும் ; ஆகவே, முடிபு

$$\frac{1}{\frac{7}{8}}\,(x-2)^{\frac{7}{3}},\ \text{அல்லது}\ \frac{3}{7}\,(x-2)^{\frac{7}{3}}\,.$$

(iii) $\int(2x+1)^5dx = \frac{1}{6}\,(2x+1)^6 \times \frac{1}{2}$,

ஏனெனின், $2x+1$ இன் வகையீடு 2 என்னும் ஒரு காரணியை உட்புகுத்தும். அத்துடன்

$$\frac{d}{dx}(2x+1)^6 = \frac{d(2x+1)^6}{d(2x+1)} \times \frac{d(2x+1)}{dx}$$
$$= 6(2x+1)^5 \times 2.$$

(iv) $\int \text{சைன்}\ mx\,dx = -\frac{1}{m}\,\text{கோசை}\ mx,$

$$\int \text{சைன்}\ (mx+n)\,dx = -\frac{1}{m}\,\text{கோசை}\ (mx+n).$$

(v) $\int \text{சைன்}^2x\,dx = \frac{1}{2}\int(1-\text{கோசை}\ 2x)\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\ \text{சைன்}\ 2x) = \tfrac{1}{2}\ (x - \text{சைன்}\ x\ \text{கோசை}\ x).$$

$$\int கோசை^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1+கோசை\ 2x)\ dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\ (x+\tfrac{1}{2}\ சைன்\ 2x) = \tfrac{1}{2}(x+சைன்\ x\ கோசை\ x).$$

(vi) $\int கோதா^2 x dx = \int (கோசீ^2\ x-1)\,dx = -கோதா\ x - x.$

(vii) $\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{6}\ தான்^{-1}\frac{2x}{3}.$

பின்வரும் பயிற்சிகளைச் செய்யத் தொடங்குமுன் மாணுக்கர் மேற்கூறியன வற்றைச் சரி பார்க்கவேண்டும்.

5.223 பயிற்சி. பின்வருங் கோவைகளைத் தொகையிடுக :

(i) $(x-1)^3$; $\frac{1}{(x-1)^3}$. (ii) $(2x-1)^3$; $\frac{1}{(2x-1)^3}$.

(iii) $\frac{x^2}{x+1}$; $\frac{x+1}{x^3}$. (iv) $\frac{x^3+1}{x-1}$.

(v) $\frac{x+1}{x+2}$; $\frac{x+2}{x+1}$. (vi) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$.

(vii) தான் ${}^2x$. (viii) சைன் ${}^3x$.

(ix) அகோசை${}^2x$; அசைன் ${}^2x$. (x) அதான் ${}^2x$.

5.3 தொகையிடும் முறைகள். முற்கூறிய அத்தியாயங்களில் ஆரம்பச் சார்புகள் எல்லாவற்றையும், யாதும் ஓர் அட்சரகணிதச் செய்கையால் ஆக்கப்பட்ட இச் சார்புகளின் சார்புகளையும் வகையிடும் முறைகளைக் கற்ருேம். எனினும், அத்தகைய சார்புகள் எல்லாவற்றையும் வகையிடுதல் முடியாது ; அதற்குக் காரணம் எழுந்தமானமாய் எழுதப்பட்ட ஒரு சார்பு வேறு ஒரு சார்பின் பெறுதியாய் இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதே. எனினும், சார்புகளின் சில வடிவங்களை வகுத்தலும் அவற்றின் தொகையீடு சில நியம வடிவங்களின் தொகையீடாக ஒடுக்கப்படலாமெனக் காட்டலுமே நாம் செய்யவேண்டியதாகும்.

5.31 இருபடிப் பகுதியெண்களையுடைய பின்னங்கள். $f(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாயிருக்க $\frac{f(x)}{ax^2+2bx+c}$ என்னும் பின்னத்தைக் கருதுக.

$f(x)$ முதற்படியினுங் கூடியதெனின், x இல் முதற் படியினுள்ள ஒரு மீதியைப் பெறும் வரைக்கும் தொகுதியைப் பகுதியால் வகுப்போம் ; உதாரணமாக,

$$\frac{f(x)}{ax^2+2bx+c} = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n + \frac{ex+f}{ax^2+2bx+c}.$$

x இன் நேர் வலுக்கள் சாதாரன வழியாலே தொகையிடப்படலாம். $\frac{ex+f}{ax^2+2bx+c}$ என்னும் முறைமைப் பின்னம் தொகையிடப்படுதற்கு மிகு தியாக உள்ளது.

[முறைமைப் பின்னம் என்பது தொகுதியானது பகுதியிலும் x இற் குறைந்த படியுள்ளது.]

(i) பகுதியெண்ணில் $a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ **என்னும் மெய்க் காரணிகள் இருக் குமாயின்,**

$$\frac{(ex+f)}{a(x-\alpha)\ (x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

இங்கு, A, B என்பன பின்னங்களை நீக்குதலாற் பெறப்படலாம் ; அதாவது

$$ex+f = Aa\ (x-\beta) + Ba\ (x-\alpha)$$

என எழுதி முறையே $x=\alpha$, $x=\beta$ எனப் பிரதியிடுதலாற் பெறப்படலாம்.

எனின்,

$$\int \frac{(ex+f)}{a(x-\alpha)\ (x-\beta)}dx = A\int\frac{dx}{x-\alpha} + B\int\frac{dx}{x-\beta}$$
$$= A\ மட\ (x-\alpha) + B\ மட\ (x-\beta)$$

இங்கு A, B என்பனவற்றிற்கு மேலேகண்ட பெறுமானங்கள் உண்டு.

(ii) பகுதியெண் $a\ (x-\alpha)^2$ **என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்போது.**

இவ்வகையிலே தொகுதி

$$ex+f = e\ (x-\alpha) + e\alpha + f$$

என எழுதப்படும் ;

ஆயின், $$\int\frac{ex+f}{a\ (x-\alpha)^2}dx = \frac{e}{a}\int\frac{dx}{x-\alpha} + \frac{e\alpha+f}{a}\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}$$
$$= \frac{e}{a}மட\ (x-\alpha) - \frac{e\alpha+f}{a(x-\alpha)}.$$

(iii) தொகுதியெண்ணுக்கு மெய்ப் பெறுமானங்கள் இல்லையெனின், அது $a\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}$ எனும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். அவ்வாறு எழுத இவ்வடிவத்தில் தொகுதியெண்ணை உடைய பெறுதிகளைக் கொண்ட இரு சார்புகள் இருக்கின்றன எனக் காண்கின்ருேம் ; அதற்குக் காரணம்

$$\frac{d}{dx}\ மட\ \{(x+\alpha)^2+\beta^2\} = \frac{2\,(x+\alpha)}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \qquad \textbf{(4.451)},$$

$$\frac{d}{dx}\ தான்^{-1}\frac{x+\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$ **(4.21** (iii), **2.63)** என்பனவே.

எனின், $ex+f$ என்னுந் தந்த தொகுதியெண்ணை கடைசி இரு பின்னங்களினது தொகுதிகளின் உறுப்பாக உணர்த்துவோமாயின், வேண்டிய தொகையீட்டை நாம் பெறலாம். இது பின்வருமாறு எளிதாகச் செய்யப்படும்.

$$ex+f=\frac{e}{2}\{2(x+\alpha)\}+f-e\alpha.$$

ஆகவே,

$$\int\frac{(ex+f)\,dx}{a\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}}=\frac{e}{2a}\int\frac{2(x+\alpha)\,dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f-e\alpha}{a\beta}\int\frac{\beta dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\frac{e}{2a}\,\text{மட}\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}+\frac{f-e\alpha}{a\beta}\,\text{தான்}^{-1}\frac{(x+\alpha)}{\beta}.$$

5.32 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ **எனும் வடிவம்.**

$$\frac{d}{dx}\,\text{மட}\,f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\ \text{ஆயிருத்தலால் (4.451),}$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\text{மட}\,f(x).$$

இது மிகப் பிரதானமான ஒரு முடிபு ; இதனைச் சென்ற பிரிவில் வழங்கினோம் ; பின்வரும் பயிற்சிகளிலும் இதனைப் பலகால் வழங்குவோம்.

இத்தேற்றத்தைச் சொற்களில் பின்வருமாறு உணர்த்தலாம் :

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியானது பகுதியின் பெறுதியாயின், அப் பின்னத்தின் தொகையீடு தொகுதியெண்ணின் மடக்கையாகும்.

5.33 உதாரணங்கள்.

(i)
$$\int\frac{2x+5}{(x-1)\,(x+4)}dx.$$

$$\frac{2x+5}{(x-1)\,(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}\ \text{என்க.}$$

பின்னங்களை நீக்க

$$2x+5=A\,(x+4)+B\,(x-1).$$

$x=1$ எனப் பிரதியிட, $A=\frac{7}{5}$ ஆகும் ;

$x=-4$ எனப் பிரதியிட, $B=\frac{3}{5}$ ஆகும்.

ஆகவே,

$$\int\frac{2x+5}{(x-1)\,(x+4)}dx=\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+4}$$

$$=\frac{7}{5}\,\text{மட}\,(x-1)+\frac{3}{5}\,\text{மட}\,(x+4).$$

(ii)
$$\int\frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx.$$

இங்கு, தொகுதியெண் பகுதியெண்ணின் பெறுதியாகும் ; ஆகவே,

தொகையீடு $=\text{மட}\ (2x^2+x+1)$.

(iii)
$$\int\frac{dx}{2x^2+x+1}.$$

இங்கு, பகுதியெண்ணுக்கு மெய்க் காரணிகள் இல்லை ; தொகுதியெண்ணில் x அடக்கப்படவில்லை ; ஆயின், தொகையீடு தான்$^{-1}$ வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

$$2x^2+x+1=2(x^2+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2})$$
$$=2\{(x+\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{16}\}$$

என எழுதலாம்.

ஆகவே,
$$\int\frac{dx}{2x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}.$$

இனி,
$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\,\text{தான்}^{-1}\,\frac{x}{a}.$$

ஆகவே, தந்த தொகையீடு

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{16}}}\,\text{தான்}^{-1}\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{தான்}^{-1}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}.$$

(iv)
$$\int\frac{4x+5}{2x^2+x+1}dx.$$

பகுதியெண்ணில் மெய்க் காரணிகள் இல்லை ; அதன் பெறுதி $4x+1$; ஆயின் தொகுதி $4x+5=(4x+1)+4$ என எழுதுவோம் ; தொகையீடு இரு தொகையீடுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும் ; அதாவது

$$\int\frac{4x+1}{2x^2+x+1}dx+4\int\frac{dx}{2x^2+x+1}.$$

சென்ற இரு பயிற்சிகளின் முடிபுகளைப் பயன்படுத்த இது

$$=\text{மட}\,(2x^2+x+1)+\frac{8}{\sqrt{7}}\,\text{தான்}^{-1}\,\frac{4x+1}{\sqrt{7}}.$$

(v)
$$\int\frac{5x+3}{x^2+4x+13}dx$$

இங்கு, பகுதியெண்ணுக்கு மெய்க் காரணிகள் இல்லை ; அதன் பெறுதி $2x+4$. ஆகவே, தொகுதியெண்ணை $5x+3=\frac{5}{2}(2x+4)-7$ என எழுதுவோம் ;

$$\text{தொகையீடு}=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx-7\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}$$

$$=\frac{5}{2}\,\text{மட}\,(x^2+4x+13)-\frac{7}{3}\,\text{தான்}^{-1}\frac{x+2}{3}.$$

5.34 பயிற்சி. பின்வருங் கோவைகளைத் தொகையிடுக :

(i) $\frac{1}{x^2-1}$. (ii) $\frac{x}{x^2-1}$.

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$. (iv) $\frac{x+1}{x^2+1}$.

(v) $\frac{x}{x^2-3x+2}$. (vi) $\frac{2x+1}{x^2+4x+3}$.

(vii) $\frac{6x+7}{3x^2+4x+1}$. (viii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

(ix) $\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$. (x) $\frac{2x+4}{x^2+4x+5}$.

(xi) $\frac{1}{x^2+4x+5}$. (xii) $\frac{2x+7}{x^2+4x+5}$.

(xiii) $\frac{x+1}{x^2+6x+25}$. (xiv) $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

(xv) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$. (xvi) $\frac{1}{3x^2+12x+13}$.

(xvii) $\frac{x+2}{3x^2+12x+13}$. (xviii) $\frac{x+4}{3x^2+12x+13}$.

(xix) $\frac{2x+3}{x^2+6x+10}$. (xx) $\frac{4x+1}{4x^2+4x+3}$.

5.4 $\int\frac{ex+f}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}dx$ **எனும் வடிவம்.** ஓர் இசைவான வடிவம் பின்வருமாறு பெறப்படும் :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{(ax^2+2bx+c)}=\frac{ax+b}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$$

ஆயின், $$\int\frac{ax+b}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}dx=\sqrt{(ax^2+2bx+c)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

எனின், தந்த தொகையீட்டில்,

$$ex+f=\frac{e}{a}(ax+b)+\frac{af-be}{a}$$

என எழுதுவோம் ; தொகையீடு

$$\frac{e}{a}\int\frac{ax+b}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}dx+\frac{af-be}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}},$$

அதாவது, $\frac{e}{a}\sqrt{(ax^2+2bx+c)}+\frac{af-be}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$ ஆகும்.

ஆயின், $\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$ என்பதை எவ்வாறு தொகையிடலாமென நாம் இனி ஆராயவேண்டும்.

இங்கு, இசைவான வடிவங்கள்

$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}},\quad\text{அல்லது}\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a},\quad\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}},\quad\text{அல்லது}\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\text{மட}\,\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a},\quad\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}},\quad\text{அல்லது}\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\text{மட}\,\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

என்பவையாகும்.

இப்பொழுது பல இயல்தகவுகள் உண்டு.

(i) a நேராதல். ஆயின்,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}=\int\frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{\{(ax+b)^2+ac-b^2\}}}.$$

$ac-b^2$ என்பது நேர், அல்லது மறை என்பதற்குத்தக, இது வடிவம் (3) அல்லது (4) இல் இருக்கின்றது ; ஆயின், தொகையீடு ஒன்றில்.

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\text{அசைன்}^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{(ac-b^2)}},\quad\text{அல்லது}\ \frac{1}{\sqrt{a}}\text{அகோசை}^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{(b^2-ac)}}\ \text{ஆகும்.}$$

(ii) a மறையாதல். இப்பொழுது தொகையீட்டை,

$$\int\frac{\sqrt{-a}\,dx}{\sqrt{\{b^2-ac-(ax+b)^2\}}}\ \text{என எழுதுகின்றோம்.}$$

இது b^2-ac என்பது நேராயிருக்கும்போது வடிவம் (2) இல் இருக்கும் ; நேரன்றெனின் கற்பனையாயிருக்கும். ஆயின், தொகையீடு உண்டெனின் அதன் பெறுமானம்

$$-\frac{1}{\sqrt{-a}}\,\text{சைன்}^{-1}\frac{ax+b}{\sqrt{(b^2-ac)}}\ \text{ஆகும்.}$$

5.41. சென்ற பிரிவிலேயுள்ள செய்கைமுறை எண்ணுதாரணங்களில் எளிதாக விளங்கும் ; உதாரணமாக,

(i) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(2x^2+2x+5)}}=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\{(2x+1)^2+9\}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{அசைன்}^{-1}\frac{2x+1}{3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{மட}\,\frac{2x+1+\sqrt{(4x^2+4x+10)}}{3}.$$

(ii) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(2x^2+2x-4)}}=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\{(2x+1)^2-9\}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{அகோசை}^{-1}\frac{2x+1}{3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{மட}\,\frac{2x+1+\sqrt{(4x^2+4x-8)}}{3}.$$

(iii) $$\int\frac{dx}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\{9-(2x+1)^2\}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{சைன்}^{-1}\frac{2x+1}{3}.$$

(iv) $$\int\frac{(3x+7)\,dx}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}.$$

இங்கு, பகுதியெண்ணிலுள்ள இருபடிக் கோவையின் பெறுதி $-2-4x$ ஆகும் ; ஆயின் தொகுதியெண்ணை,

$$3x+7=-\tfrac{3}{4}(-4x-2)+\frac{11}{2}$$

என எழுதுகின்றோம்.

$$\text{தொகையீடு}=-\frac{3}{4}\int\frac{(-4x-2)}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}dx+\frac{11}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}$$
$$=-\frac{3}{2}\sqrt{(4-2x-2x^2)}+\frac{11}{2\sqrt{2}}\,\text{சைன்}^{-1}\frac{2x+1}{3}.$$

(iii) இன் முடிவை வழங்குதலால் இவ்வாறாகும்.

5.42 பயிற்சி. பின்வருஞ் சார்புகளின் தொகையீடுகளைக் காண்க ;

(i) $\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}$ (ii) $\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x+3)}}$.

(iii) $\frac{1+2x}{\sqrt{(4-x-x^2)}}$. (iv) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

(v) $\frac{2+x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. (vi) $\frac{1}{\sqrt{(-5-6x-x^2)}}$.

(vii) $\frac{3+x}{\sqrt{(-5-6x-x^2)}}$. (viii) $\frac{4x+5}{\sqrt{(-5-6x-x^2)}}$.

(ix) $\frac{1}{\sqrt{(9x^2+6x+2)}}$. (x) $\frac{3x+4}{\sqrt{(9x^2+6x+2)}}$.

(xi) $\frac{1}{\sqrt{(3x^2+2x-1)}}$. (xii) $\frac{3x+2}{\sqrt{(3x^2+2x-1)}}$.

5.5 பிரதியீட்டால், அல்லது மாறியின் மாற்றத்தாலே தொகையிடல்.

$x=\phi(u)$ **எனின்,**

$$\int f(x)\,dx=\int f(x)\frac{dx}{du}du$$ **என நிறுவல்.**

$$y=\int f(x)\,dx\ \text{ஆகுக ;}$$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=f(x).$$

இனி y, x இன் ஒரு சார்பாயும் ; x, u இன் ஒரு சார்பாயுமிருத்தலால்; y, u இன் ஒரு சார்பாகும்.

எனினும், $$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du}=f(x)\frac{dx}{du}\quad(2.63)\ ;$$

ஆகவே, தொகையீட்டின் வரைவிலக்கணத்தால்,

$$y=\int f(x)\frac{dx}{du}du,$$

அல்லது $$\int f(x)\,dx=\int f(x)\frac{dx}{du}du\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

எனவே, x ஆனது u வின் ஒரு சார்பாயிருக்கும் போது, ஒரு தொகையீட்டில் $\int$ என்னுங் குறிக்குப்பின் dx இற்குப் பதிலாக $\frac{dx}{du}du$ என எழுதலால் மாறியை x இலிருந்து u விற்கு நாம் மாற்றலாம்.

உதாரணமாக $\int(x^2+a^2)^n x\,dx$ **என்பதைக் காண்பதற்கு ;**

$$x^2+a^2=u\ \text{என இடுக.}$$

எனவே, $$2x\frac{dx}{du}=1.$$

எனின், $\int (x^2+a^2)^n x dx = \int (x^2+a^2)^n x \frac{dx}{du} du$

$$= \frac{1}{2}\int u^n du = \frac{1}{2(n+1)} u^{n+1}$$

$$= \frac{(x^2+a^2)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

5.51. மாறுநிலையாக, எப்பொழுதாயினும் ஒரு தொகையீடு $\int f(t) \frac{dt}{dx} dx$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படக்கூடுமாயின், அதனை நாம் $\int f(t)\, dt$ என எழுதலாம் ; இது காணுதற்கு மிக எளிதாகலாம்.

இங்கு, உண்மையாக dx, dt என்பன **2.51** இல் வரையறுக்கப்பட்ட படி வகையீடுகளாகவே வழங்கப்பட்டுள்ளது.

5.5 இன் உதாரணத்திற்கு இம்முறையைப் பிரயோகிக்க.

$$d(x^2+a^2) = 2xdx.$$

ஆயின், $\int (x^2+a^2)^n x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^n\, d(x^2+a^2)$

என எழுதலாம் ;

அன்றி $x^2+a^2=t$ என இட,

$$= \frac{1}{2}\int t^n dt$$

$$= \frac{t^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{(x^2+a^2)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

5.52 உதாரணங்கள். சென்ற பிரிவின் முறையைப் பின்பற்ற :

(i) $$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^n},$$

$ax+b=u$ என இட,

$$= \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)au^{n-1}} = -\frac{1}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}}.$$

(ii) $$\int \frac{x^2 dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(1+x^3)}{1+x^3}$$

$1+x^3=u$ என இட,

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{3}\text{ மட } u = \tfrac{1}{3}\text{மட}(1+x^3).$$

இதுவும் **5.32** இன் ஓர் எளிய உதாரணமாகும்.

(iii) $$\int \text{சீக}^4 x\, dx = \int \text{சீக}^2 x\, d\,(\text{தான் } x).$$

தான் $x = u$ என இட,

$$= \int (u^2+1)\, du = \tfrac{1}{3}u^3 + u = \tfrac{1}{3}\text{ தான்}^3 x + \text{தான் } x.$$

(iv) $$\int \frac{\text{கோசை } x\, dx}{a+b\text{ சைன் } x} = \int \frac{d\,(\text{சைன் } x)}{a+b\text{ சைன் } x}$$

சைன் $x=u$ என இட,

$$\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b}\text{ மட }(a+bu) = \frac{1}{b}\text{ மட}(a+b\text{ சைன் } x).$$

இது **5.32** இன் வேறோர் உதாரணம்.

(v) $$\int \frac{\text{மட } x}{x} dx.$$

மட$x=u$ ஆகுக ; ஆயின், $\frac{dx}{x} = du$. அப்பொழுது தொகையீடு

$$= \int u du = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}(\text{மட } x)^2$$

(vi) $\int \text{சைன்}^m x \text{ கோசை}^n x\, dx$ என்பது m, அல்லது n ஓர் ஒற்றை நேர் முழுவெண்ணுயிருக்கும் போதெல்லாந் தொகையிடப்படலாம்.

உதாரணமாக, $\int \text{சைன்}^{\frac{4}{3}} x \text{ கோசை}^5 x\, dx$. சைன் $x=u$ ஆகுக ;

ஆயின், $$\text{கோசை } xdx = du\ ;$$

$$\text{கோசை}^4 x = (1-\text{சைன்}^2 x)^2 = (1-u^2)^2.$$

எனின், தொகையீடு $= \int u^{\frac{4}{3}}(1-u^2)^2 du,$

$$= \int (u^{\frac{4}{3}} - 2u^{\frac{10}{3}} + u^{\frac{16}{3}})\, du$$

$$= \tfrac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \tfrac{6}{13}u^{\frac{13}{3}} + \tfrac{3}{19}u^{\frac{19}{3}}$$

$$= 3\text{ சைன்}^{\frac{7}{3}} x\,(\tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{13}\text{ சைன்}^2 x + \tfrac{1}{19}\text{ சைன்}^4 x).$$

m என்பது ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணுயின் இதேமுறை $\int \text{சைன்}^m xdx$, அல்லது $\int \text{கோசை}^m xdx$ என்பதற்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

(vii) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

இத்தகைய உதாரணங்களில் $x = \frac{1}{u}$ எனும் பிரதியீடு பலகாலும் பயன் படும். அது $\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2}$, அல்லது $dx = -\frac{du}{u^2}$, அல்லது $\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u}$ என்பதைத் தரும் ; இது மட$x = -$மடu எனும் வகையீடுகளை எடுப்பதாலுங் காணப்படலாம்.

எனின், தொகையீடு,

$$= -\int\frac{du}{u\sqrt{\left(\frac{1}{u^2}-a^2\right)}} = -\int\frac{du}{\sqrt{(1-a^2u^2)}} = -\frac{1}{a}\int\frac{d\,(au)}{\sqrt{(1-a^2u^2)}}$$

$$= -\frac{1}{a}\,\text{சைன்}^{-1}(au) = -\frac{1}{a}\,\text{சைன்}^{-1}\frac{a}{x}.$$

(viii) $\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$ எனும் வடிவம் $x-p=\frac{1}{u}$ எனும் பிரதியீட்டாலே தொகையிடப்படலாம். உதாரணமாக,

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{(1-x^2)}}:$$

$x+1=\frac{1}{u}$ ஆகுக ; ஆயின் $dx=-\frac{du}{u^2}$, அல்லது $\frac{dx}{x+1}=-\frac{du}{u}$.

எனின், தொகையீடு

$$= -\int\frac{du}{u\sqrt{\left\{1-\left(\frac{1}{u}-1\right)^2\right\}}} = -\int\frac{du}{u\sqrt{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)}} = -\int\frac{du}{\sqrt{(2u-1)}}$$

$$= -\sqrt{(2u-1)} = -\sqrt{\left(\frac{2}{x+1}-1\right)} = -\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}.$$

5.53 பயிற்சி. பின்வருஞ் சார்புகளின் தொகையீடுகளைப் பிரதியீட்டாற் காண்க ;

(i) $\frac{x^2}{x^3-1}$.

(ii) $\frac{x^2}{x^6+1}$.

(iii) $\frac{x^2}{\sqrt{(x^6+1)}}$.

(iv) $\frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2+4x+3)}}$.

(v) $\frac{3x+1}{(9x^2+6x+2)^5}$.

(vi) $\frac{x^3}{\sqrt{(1-x^8)}}$.

(vii) $\text{சீக}^2 x\ \text{தான்}\ x$.

(viii) $\frac{\text{சைன்}\ x}{a+b\ \text{கோசை}\ x}$.

(ix) $\text{சைன்}^5 x$.

(x) $\text{கோசை}^7 x$.

(xi) $\text{கோசை}^3 x\ \text{சைன்}^{\frac{1}{2}} x$.

(xii) $\frac{1+\text{கோசை}\ x}{x+\text{சைன்}\ x}$.

(xiii) $\frac{1}{x\sqrt{(x^2+a^2)}}$.

(xiv) $\frac{1}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

(xv) $\frac{\text{கோசை}\ x}{4+\text{சைன்}^2 x}$.

(xvi) $\frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-x^2)}}$.

(xvii) $\frac{1}{(x-2)\sqrt{(9x^2-36x+35)}}$.

(xviii) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{(8-2x-x^2)}}$.

(xix) $\frac{(\text{மட}\ x)^n}{x}$.

(xx) $\frac{1}{x\ \text{மட}\ x}$.

5.54 திரிகோணகணிதப் பிரதியீடுகள். தொகையிடப்படவேண்டிய சார்பு $\sqrt{(a^2-x^2)}$ என்ற ஒரு காரணியைக் கொண்டிருந்தால், $x=a\,\text{சைன்}\,\theta$ என்னும் பிரதியீடு தொகையிடல் முறையை எளிதாக்கும் ; இப்பிரதியீடு தருவன

$$dx=a\,\text{கோசை}\,\theta\,d\theta,$$

$$\sqrt{(a^2-x^2)}dx=a^2\,\text{கோசை}^2\theta\,d\theta \quad \text{என்பன.}$$

உதாரணம். $$\int\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx.$$

இது $$=\int a^2\,\text{கோசை}^2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{2}a^2\int(\text{கோசை}\,2\theta+1)\,d\theta$$

$$=\tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{2}\,\text{சைன்}\,2\theta+\theta\right)=\tfrac{1}{2}a^2\left(\text{சைன்}\,\theta\,\text{கோசை}\,\theta+\theta\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}+\tfrac{1}{2}a^2\,\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

அதுபோல, அதே பிரதியீடு $\int x^3\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx$ என்பதை $\int a^5\,\text{சைன்}^3\theta\,\text{கோசை}^2\theta\,d\theta$ ஆக மாற்றும் ; இது **5.52 (vi)** இற்போற் காணப்படலாம்.

$\sqrt{(x^2+a^2)}\,dx$ எனும் வடிவத்திற்கு வேறு பயன்படு பிரதியீடுகள்

$$x=a\,\text{அசைன்}\,\theta;\ \text{இது}\ a^2\,\text{அகோசை}^2\theta\,d\theta\ \text{வைத் தரும்,}$$

அல்லது $$x=a\,\text{தான்}\,\theta;\ \text{இது}\ a^2\,\text{சீக}^3\theta\,d\theta\ \text{வைத் தரும்.}$$

$\sqrt{(x^2-a^2)}\,dx$ எனும் வடிவத்திற்குரிய பிரதியீடுகள்,

$$x=a\,\text{அகோசை}\,\theta;\ \text{இது}\ a^2\ \text{அசைன்}^2\theta\,d\theta\ \text{வைத் தரும்,}$$

அல்லது $x=a\,\text{சீக}\,\theta$; இது $a^2\ \text{சீக}\,\theta\,\text{தான்}^2\theta\,d\theta$ வைத் தரும்.

உதாரணம். $$\int\sqrt{(x^2+a^2)}\,dx.$$

மேற்காட்டியவாறு $x=a\,\text{அசைன்}\,\theta$ எனப் பிரதியிட, தொகையீடு

$$=\int a^2\,\text{அகோசை}^2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{2}a^2\int(\text{அகோசை}\,2\theta+1)d\theta$$

$$=\tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{2}\,\text{அசைன்}\,2\theta+\theta\right)=\tfrac{1}{2}a^2\left(\text{அசைன்}\,\theta\,\text{அகோசை}\theta+\theta\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(x^2+a^2)}+\tfrac{1}{2}a^2\,\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a},$$

அல்லது $$\tfrac{1}{2}x\sqrt{(x^2+a^2)}+\tfrac{1}{2}a^2\,\text{மட}\,\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

அதுபோல, $\int \sqrt{(x^2-a^2)}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}a^2\ \text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$

அல்லது $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}a^2\ \text{மட}\ \frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. . . . . (3)

(1), (2), (3) எனும் முடிபுகள் பிரதானமானவை ; மாணுக்கன் அவற்றை ஞாபகத்தில் வைத்திருத்தல் நன்று.

5.55. $\int\frac{dx}{\text{சைன்}\,x}$; $\int\frac{dx}{\text{கோசை}\,x}$; $\int\frac{dx}{a+b\,\text{கோசை}\,x}$.

இத்தொகையீடுகள் எல்லாம் $\text{தான்}\,\frac{x}{2}=t$ எனும் பிரதியீட்டால் எளிதாக்கப்படும் ; இப்பிரதியீடு $\frac{1}{2}\,\text{சீக}^2\frac{x}{2}\,dx = dt$ யைத் தரும்.

உதாரணமாக, $\int\frac{dx}{\text{சைன்}\,x} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\text{சைன்}\,\frac{x}{2}\,\text{கோசை}\,\frac{x}{2}}$,

தொகுதியையும் பகுதியையும் $\text{சீக}^2\frac{x}{2}$ ஆற் பெருக்க, இது

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\text{சீக}^2\frac{x}{2}\,dx}{\text{தான்}\,\frac{x}{2}} = \int\frac{dt}{t} = \text{மட}\,t = \text{மட}\ \text{தான்}\,\frac{x}{2}. \quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

எனின்,

சென்ற முடிவிலிருந்து x ஐ $\frac{\pi}{2}+x$ ஆக மாற்றுவதால் $\int\frac{dx}{\text{கோசை}\,x}$ உய்த்தறியப்படலாம் ; அதற்குக் காரணம்

$$\text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \text{கோசை}\,x \quad \text{என்பதும்},$$

$$d\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = dx \quad \text{என்பதுமாகும்}.$$

எனவே, $\int\frac{dx}{\text{கோசை}\,x} = \int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\text{சைன்}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \text{மட}\ \text{தான்}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ . . . . (2)

இதற்குச் சமனான பயன்படு வடிவம்

$$\int\text{சீக}\,x\,dx = \text{மட}\,(\text{தான்}\,x + \text{சீக}\,x). \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

இது (2) இலிருந்து பெறப்படும், அல்லது வகையிடுதலால் வாய்ப்புப் பார்க்கப்படும்.

இனி, அதே பிரதியீட்டோடு*

$$\int\frac{dx}{a+b\,\text{கோசை}\,x} = \int\frac{dx}{a+b\left(\text{கோசை}^2\frac{x}{2}-\text{சைன்}^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{\text{சீக}^2\frac{x}{2}\,dx}{a\left(1+\text{தான்}^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\text{தான்}^2\frac{x}{2}\right)} = 2\int\frac{dt}{a+b+(a-b)t^2}.$$

$x+b$ என்பது நேரெனக் கொள்ள மூன்று வகைகள் வரும் :

(i) $a-b>0$ எனின்,

$$\int\frac{dx}{a+b\,\text{கோசை}\,x} = \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\,\text{தான்}^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\,\text{தான்}\,\frac{x}{2}\right\}.$$

(ii) $a-b=0$ எனின், தொகையீடு,

$$=\int\frac{dx}{a+a\,\text{கோசை}\,x} = 2\int\frac{dt}{2a} = \frac{1}{a}\text{தான்}\,\frac{1}{2}x.$$

(iii) $a-b<0$ எனின்,

$$\int\frac{dx}{a+b\,\text{கோசை}\,x} = 2\int\frac{dt}{a+b-(b-a)t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a+b)}}\int\left\{\frac{1}{\sqrt{(a+b)}+\sqrt{(b-a)}t}+\frac{1}{\sqrt{(a+b)}-\sqrt{(b-a)}t}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\,\text{மட}\,\frac{\sqrt{(a+b)}+\sqrt{(b-a)}\ \text{தான்}\frac{1}{2}x}{\sqrt{(a+b)}-\sqrt{(b-a)}\ \text{தான்}\frac{1}{2}x}.$$

5.56 பயிற்சி. பின்வருஞ் சார்புகளின் தொகையீடுகளைக் காண்க ;

(i) $\frac{x+a}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$. (ii) $\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}$.

(iii) $\frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$. (iv) $x\sqrt{(x^2-a^2)}$.

(v) $(a+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$. (vi) $(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

(vii) $(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$. (viii) $x^2\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(ix) $x^2\sqrt{(x^2-a^2)}$. (x) $\frac{1}{5+3\,\text{கோசை}\,x}$.

* வேறொரு முறை பக்கம் 116 பயிற்சி 22 இலே தரப்பட்டிருக்கின்றது.

(xi) $\dfrac{1}{3+5\,\text{கோசை}\,x}$. (xii) $\dfrac{1}{1+\text{கோசை}\,\alpha\;\text{கோசை}\,x}$.

(xiii) $\dfrac{1}{1-\text{சைன்}\,x}$. (xiv) $\dfrac{1}{2\text{சைன்}\,x+\text{கோசை}\,x+3}$.

(xv) $\dfrac{1}{4\,\text{கோசை}\,x+3\,\text{சைன்}\,x+5}$.

5.6 பகுதிகளாகத் தொகையிடுதல். இது இரு காரணிகளின் பெருக்கத்தைத் தொகையிடுதலை, தொகையிடுதற்கு எளிதான வேறொரு பெருக்கத்தைத் தொகையிடுதலாக மாற்றும் முறையாகும்.

u, v என்பன x இன் சார்புகளாயின்,

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

அல்லது வகையீடுகளாக எழுத

$$d(uv) = udv + vdu. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

இரு பக்கங்களையுந் தொகையிட,

$$uv = \int udv + \int vdu;$$

ஆகவே, இடமாற்றஞ் செய்வதால்,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

இது **பகுதிகளாகத் தொகையிடுதற்குரிய சூத்திரம்** எனப்படும்; udv யைத் தொகையிடுதலிலும் vdu வைத் தொகையிடுதல் எளிதாயிற்றான் நயத்துடன் பயன்படுத்தப்படும்.

உதாரணமாக $\int x\,\text{கோசை}x\,dx$ எனுந் தொகையீட்டை ஆராய்க.

x ஐ u ஆகவும் கோசை $x\,dx$, அல்லது $d(\text{சைன்}\,x)$ ஐ dv ஆகவும் எடுப்பதாலாதல், கோசை x ஐ u ஆகவும் xdx அல்லது $d\,(\frac{1}{2}x^2)$ ஐ dv ஆகவும் எடுப்பதாலாதல், இது $\int udv$ எனும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். முன்னைய தேர்வின்படி

$$\int x\,\text{கோசை}\,x\,dx = \int xd\,(\text{சைன்}\,x),$$
$$= x\,\text{சைன்}\,x - \int \text{சைன்}\,xdx$$

(3) ஆல் $$= x\,\text{சைன்}\,x + \text{கோசை}\,x.$$

மற்று இரண்டாம் மாற்றுவழியை எடுப்போமாயின்,

$$\int x\,\text{கோசை}\,x\,dx = \int \text{கோசை}\,x\,d\,(\tfrac{1}{2}x^2),$$

(3) ஆல் $$= \text{கோசை}\,x.\,\tfrac{1}{2}x^2 - \int \tfrac{1}{2}x^2\,d\,(\text{கோசை}\,x)$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{கோசை}\,x + \tfrac{1}{2}\int x^2\,\text{சைன்}\,x\,dx;$$

தொகையிடுதற்கு நாம் தொடங்கியதிலும் பார்க்க கூடிய கடுமையான வடிவத்தை இது தருகின்றது. இதனாலே, பகுதிகளாய்த் தொகையிடுதல்தான் தொகையிடுதலை எளிதாக்கும் என்பதில்லை எனக் காண்கின்றோம்;

சூத்திரம் (3) ஐப் பிரயோகிக்கும் போது எக்காரணிகள் முறையே u, v ஆகவேண்டுமெனத் தேர்தல் மிகப் பிரதானமாகும்.

5.61. சிறப்பு வகையாக $v = x$ எனக் கொள்ளலாம்; அப்பொழுது 5.6 (3) இலுள்ள சூத்திரம்

$$\int u\,dx = ux - \int x\,du$$

உதாரணம்.

$$\int \text{மட}\,x\,dx = x\,\text{மட}\,x - \int x\,d\,(\text{மட}\,x)$$
$$= x\,\text{மட}\,x - \int x.\frac{1}{x}dx$$
$$= x\,\text{மட}\,x - \int dx$$
$$= x\,\text{மட}\,x - x.$$

5.62 உதாரணங்கள்.

(i)
$$\int x\,\text{மட}\,x\,dx = \int \text{மட}\,x.d\,(\tfrac{1}{2}x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{மட}\,x - \int \tfrac{1}{2}x^2 d\,(\text{மட}x)$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{மட}\,x - \tfrac{1}{2}\int x^2.\frac{1}{x}dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{மட}\,x - \tfrac{1}{2}\int xdx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\,\text{மட}\,x - \tfrac{1}{4}x^2.$$

(ii)
$$\int xe^x dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x.$$

(iii)
$$\int x^2\,\text{சைன்}\,x\,dx = -\int x^2\,d\,(\text{கோசை}\,x)$$
$$= -x^2\,\text{கோசை}\,x + \int \text{கோசை}\,x\,d(x^2)$$
$$= -x^2\,\text{கோசை}\,x + 2\int x\,\text{கோசை}\,x\,dx;$$

எனின், $$\int x\,\text{கோசை}\,x\,dx = \int x\,d\,(\text{சைன்}\,x) = x\,\text{சைன்}\,x - \int \text{சைன்}\,x\,dx$$
$$= x\,\text{சைன்}\,x + \text{கோசை}\,x;$$

ஆகவே, $$\int x^2\,\text{சைன்}\,x\,dx = -x^2\,\text{கோசை}\,x + 2x\,\text{சைன்}\,x + 2\,\text{கோசை}\,x.$$

(iv) சில வேளைகளில், தொகையீட்டை ஒரு நியம வடிவத்திற்கு ஒடுக்குவதற்கு ஒரு தந்திரம் வேண்டும்.

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx = x\sqrt{(a^2-x^2)} - \int x\,d\{\sqrt{(a^2-x^2)}\}$$
$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} + \int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx$$
$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx$$
$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} - \int \sqrt{(a^2-x^2)}dx + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

ஆகவே,

$$2\int\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2\,\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}.$$

ஆகவே, $$\int\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2\,\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}.$$

இது பிரதியீட்டால் முன்னரே 5.54 இற் பெறப்பட்ட முடிபு.

5.63 பகுதிகளாகத் தொடர்ந்து தொகையிடல். 5.62 (iii) இலுள்ள பயிற்சியில், தொகையிடற் செய்கையை முடித்தற்கு ஒரு முறைக்கும் மேல், பகுதிகளாகத் தொகையிட வேண்டிய தேவையைக் கண்டோம். அவ்வகைகளில், பின்வரும் முறையை அனுசரித்தால், வேலை சுருக்கப் படலாம்.

பகுதிகளாகத் தொகையிடுதற்குரிய பொதுச் சூத்திரம் தோற்றத்திற் சிறிது வேறுயிருந்தாலும் 5.6 (3) இற்குச் சமானமான ஒரு வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாம் என்பதை முதலில் அவதானிப்போம் உதாரணமாக, 5.6 (1) இன் இரு பக்கங்களையுந் தொகையிட்டால், முடிபைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx;$$

ஆயின், $$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

இனி, தொடர்ந்து வகையிடுதலின் முடிபுகளை கீறுகளும் தொடர்ந்து தொகையிடுதலின் முடிபுகளை பிற்குறிகளும் குறிக்க ; உதாரணமாக, u''' என்பதன் பொருள் u வை மூன்று முறை வகையிடுதலின் முடிபும் ; v_4 என்பதன் பொருள் v யை நான்கு முறை தொகையிடுதலின் முடிபுமாகும் ; இவ்வாறே பிறவும்.

எனின், மேலேயுள்ள சூத்திரம் (1),

$\int uv'dx = uv - \int u'vdx.$ இற்குச் சமானமாகும்.

அதுபோல $\int u'vdx = u'v_1 - \int u''v_1dx;$

ஆயின், $\int uv'dx = uv - u'v_1 + \int u''v_1dx.$

அதுபோல, $\int u''v_1dx = u''v_2 - \int u'''v_2dx;$

எனவே, $\int uv'dx = uv - u'v_1 + u'''v_2 - \int u'''v_2dx$

இன்னுமொரு செய்கைப்படியின் பின்

$$\int uv'dx = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \int u^{iv}v_3dx \qquad (2)\ ;$$

வேண்டிய அளவிற்கு இச்செய்கை தொடரப்படலாம்.

உதாரணமாக, $\int x^3$ கோசை $x\,dx.$

இங்கு, x^3 ஐ u ஆகவும் கோசை x ஐ v' ஆகவுங் கொள்வோம் ஆயின், v என்பது சைன் x ஆகும் ; தொடர்ந்து வகையிடுதலாலும் தொகையிடுதலாலும்,

$u = x^3,$ $\quad v =$ சைன் x ;
$u' = 3x^2,$ $\quad v_1 = -$கோசை x ;
$u'' = 6x,$ $\quad v_2 = -$சைன் x ;
$u''' = 6,$ $\quad v_3 =$ கோசை x ;
$u^{vi} = 0,$ $\quad v_4 =$ சைன் x ;

u இன் ஏனைய பெறுமதிகள் எல்லாம் பூச்சியமாயிருத்தலால், சூத்திரம் (2)

$\int x^3$ கோசை $x\ dx = x^3$ சைன் $x + 3x^2$ கோசை $x - 6x$ சைன் $x - 6$ கோசை x ஐத் தரும்.

5.64 $\int e^{ax}$ சைன் $bxdx$, $\int e^{ax}$ கோசை $bxdx$ என்பன. இந்த இரு தொகையீடுகளையும் P, Q என்பனவற்றுற் குறித்து, பகுதிகளாகத் தொகையிட,

$$\int e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\,\text{கோசை}\,bx\,dx,$$

அல்லது $$aP = e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx - bQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

அதுபோல,

$$\int e^{ax}\,\text{கோசை}\,bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\,\text{கோசை}\,bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx\,dx,$$

அல்லது $$aQ = e^{ax}\,\text{கோசை}\,bx + bP \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

எனவே, $$aP + bQ = e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx,$$
$$-bP + aQ = e^{ax}\,\text{கோசை}\,bx.$$

ஆகவே, P அல்லது $$\int e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,\text{சைன்}\,bx - b\,\text{கோசை}\,bx)}{a^2+b^2} \ldots\ldots(3),$$

Q அல்லது $$\int e^{ax}\,\text{கோசை}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\,\text{சைன்}\,bx + a\,\text{கோசை}\,bx)}{a^2+b^2} \ldots\ldots(4).$$

5.65 தொடர்ந்து ஒடுக்குதலாலே தொகையிடல். சைன் x, அல்லது கோசை x இன் யாதும் ஓர் ஒற்றை வலு தொகையிடப்படலாமெனக் கண்டோம் (5.52 (vi) ; எனினும், அங்கு தந்த முறை இரட்டை வலுக்களுக்குப் பிரயோகமாகாது. பின்வரும் முறை சைன் x, அல்லது கோசை x இன் யாதுமோர் வலுவினது தொகையீட்டிலுள்ள சுட்டியை ஒடுக்குதற்குப் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

$$\int \text{சைன்}^n x\, dx = -\int \text{சைன்}^{n-1} x\, d\,(\text{கோசை}\, x).$$

$$d\,(\text{கோசை}\, x) = -\text{சைன்}\, x\, dx \text{ ஆதலால்,}$$

பகுதிகளாகத் தொகையிட,

$$\int \text{சைன்}^n x\, dx = -\text{சைன்}^{n-1} x\, \text{கோசை}\, x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2} x\, \text{கோசை}^2 x\, dx$$

$$= -\text{சைன்}^{n-1} x\, \text{கோசை}\, x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2} x (1 - \text{சைன்}^2 x) dx$$

$$= -\text{சைன்}^{n-1} x\, \text{கோசை}\, x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \text{சைன்}^n x\, dx.$$

ஆகவே,

$$n\int \text{சைன்}^n x\, dx = -\text{சைன்}^{n-1} x\, \text{கோசை}\, x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2} x\, dx,$$

அல்லது, $$\int \text{சைன்}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\, \text{சைன்}^{n-1} x\, \text{கோசை}\, x + \frac{n-1}{n}\int \text{சைன்}^{n-2} x\, dx \qquad \ldots\ldots(1).$$

இது காணப்படவேண்டிய தொகையீட்டில் சைன் x இனது வலுவின் சுட்டியை ஒடுக்குதலால் **ஓர் ஒடுக்கற் சூத்திரம்** எனப்படும். அடுத்த அத்தியாயத்தில் இதனைப்பற்றி எடுத்துக் கூறச் சமயம் வரும்.

5.66 பயிற்சி.

1. பின்வரும் சார்புகளின் தொகையீடுகளைப் பகுதிகளாகத் தொகையிடுதலாற் காண்க.

(i) xe^{-2x} ; (ii) $x^4 e^x$; (iii) x சைன் $2x$;

(iv) x^2 கோசை $3x$; (v) x^3 மட x ; (vi) x சைன் x கோசை x;

(vii) சைன் $^{-1} x$; (viii) தான் $^{-1} x$; (ix) x^4 சைன் x ;

(x) $x^5 e^{-x}$; (xi) x சீக $^2 x$; (xii) அகோசை x கோசை x;

(xiii) அசைன் x சைன் x ; (xiv) x (மட $x)^2$;

(xv) சைன் mx கோசை nx ; (xvi) கோசை mx கோசை nx.

2. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $$\int \text{கோசை}^n x\, dx = \frac{1}{n}\, \text{கோசை}^{n-1} x\, \text{சைன்}\, x + \frac{n-1}{n}\int \text{கோசை}^{n-2} x\, dx\ ;$$

(ii) $$\int \text{சீக}^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\, \text{சீக}^{n-2} x\, \text{தான்}\, x + \frac{n-2}{n-1}\int \text{சீக}^{n-2} x\, dx.$$

5.7 இயக்கவியலுக்கான பிரயோகங்கள். தொகையிடுதலின் துணைகொண்டு ஆர்முடுகல் அல்லது வேகம், நேரத்தின் அல்லது தூரத்தின் ஒரு தந்த சார்பாயிருக்கின்ற இயக்கவியற் கணக்குகளைத் தீர்க்கலாம்.

உதாரணம்.

(i) சீரான ஆர்முடுகல் f ஒடு கூடிய இயக்கச் சூத்திரத்தை நிறுவல்.

u, நேரம் $t=0$ இலுள்ள வேகமாகுக ; v அடைந்த வேகமாயும் s, நேரம் t யிற் சென்ற தூரமாயும் இருக்க. **3.52** ஆல் ஆர்முடுகல் dv/dt ; ஆகவே,

$$\frac{dv}{dt} = f.$$

இங்கு f என்பது மாறா ஆர்முடுகல்.

தொகையிடல் தருவது $v = ft + C.$ ஐ தரும்.

இங்கு, C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

இனி, $t=0$ ஆகும்பொழுது $v=u$; ஆகவே, இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதலால், $C=u$ எனக் காண்கின்றேம் ; ஆயின்,

$$v = u + ft \qquad \ldots\ldots(1).$$

இனி, **3.5** இலிருந்து வேகம் v ஆனது ds/dt ; ஆகவே,

$$\frac{ds}{dt} = u + ft\ ;$$

தொகையீட்டால், $s = ut + \frac{1}{2}ft^2 + C'$.

இங்கு C' என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

எனினும், $t=0$ ஆகும்பொழுது $s=0$ என அறிவோம் ; ஆகவே $C'=0$

$$s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2 \qquad \ldots\ldots(2)$$

(1), (2) என்பனவற்றிலிருந்து t யை நீக்க,

$$v^2 = u^2 + 2fs.$$

அல்லது **3.521** ஆல் ஆர்முடுகலுக்கு, $v\,dv/ds$ என்னுஞ் சூத்திரத்தை வழங்க

$$v\frac{dv}{ds} = f$$

இதிலிருந்து தொகையீட்டால்,

$$\tfrac{1}{2}v^2 = fs + C''.$$

இங்கு, C'' என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

எனினும், $s=0$ ஆகும்பொழுது, $v=u$; ஆகவே, இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதலால்,

$$\tfrac{1}{2}u^2 = C''$$

ஆகவே $$v^2 = u^2 + 2fs \qquad .(3).$$

(ii) செக்கனுக்கு 7 அடி வேகத்தோடு ஒரு துணிக்கை புறப்பட்டு, இயங்கத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் $2(3-t)$ அடி செக்கன் அலகு ஆர்முடுகலோடு அசைகின்றது. (i) அத் துணிக்கை தன் பாதையில் திரும்பிவரத் தொடங்குமுன்னர் எவ்வளவு தூரஞ் செல்லும் என்றும், (ii) புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பி வரமுன்னர் எவ்வளவு நேரங் கழியும் என்றும், (iii) அந்நேரத்தில் அது அடையும் மிகக் கூடிய வேகம் இன்னது என்றுங் காண்க.

இங்கு, ஆர்முடுகல் $\dfrac{d^2s}{dt^2}=6-2t$ ......(1).

எனின், தொகையீட்டால், $\dfrac{ds}{dt}=6t-t^2+C$;

இங்கு C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி. எனினும், $t=0$ ஆகும் பொழுது, வேகம் ds/dt என்பது 7 ; ஆயின், இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதலால், $C=7$ எனக் காண்கின்றேம் ;

ஆயின், $\dfrac{ds}{dt}=7+6t-t^2$ ......(2).

இன்னொரு தொகையீடு

$s=7t+3t^2-\frac{1}{3}t^3+C'$ ஐத் தரும்

இங்கு, C' என்பது தொகையீட்டு மாறிலி ; s ஐப் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து அளந்தோமாயின், $t=0$ ஆகும்பொழுது $s=0$ எனப் பெறுவோம் ; ஆகவே, $C'=0$; ஆயின்,

$$s=7t+3t^2-\tfrac{1}{3}t^3 \quad ......(3).$$

$\dfrac{ds}{dt}=0$ ஆகும்பொழுது, அதாவது (2) இலிருந்து $t=-1$, அல்லது 7 ஆகும்பொழுது அத்துணிக்கை ஓய்வுக்கு வரும் ; முதல் மூலங் கணக்குக்கு ஏற்றதாகாது ; ஆயின், (3) இல் $t=7$ எனப் பிரதியிட, $s=81\frac{2}{3}$ எனப் பெறுவோம். இது ஓய்வுக்கு வரமுன் சென்ற தூரமாகும். (1) இலிருந்து $t=7$ ஆகும்பொழுது ஆர்முடுகல் -8 எனக் காண்கின்றேம் ; ஆயின், அத் துணிக்கை தன் பாதையை மீண்டும் வரையத் தொடங்குகின்றது ; 7 இலுங் கூடிய t இன் பெறுமானங்களுக்கு (2) இலிருந்து பெறப்படும் $(1+t)(7-t)$ ஆகிய வேகம் என்றும் மறையாகும் ; ஆயின், அத்துணிக்கை தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவந்து இதே திசையிலே தொடர்ந்தும் அசையும். புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எடுக்கும் நேரம் (3) இல் $s=0$ எனப் பிரதியிடுதலாற் காணப்படும் ; இது

$$t=\frac{9+\sqrt{165}}{2}$$ ஐத் தரும்.

ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகிக் குறிமாறும்பொழுது, அதாவது $t=3$ ஆகும் பொழுது வெளிப்புறப் பயணத்தில் மிகப் பெரிய வேகம் நிகழும் ; அப்போது வேகம் $\dfrac{ds}{dt}$ செக்கனுக்கு 16 அடியாகும். எனினும், திரும்பிவரும்

பயணத்தில், ஆர்முடுகலும் வேகமும் நேரத்தோடு எண்ணளவிற் கூடுதலுறும் ; கூறப்பட்ட நேரவிடையில் அடைந்த மிகப் பெரிய வேகம் அந் நேரவிடையின் முடிவில் உள்ளதாகும். இப்பெறுமானத்தை (2) இற் பிரதியிட,

$$\frac{ds}{dt}=-\tfrac{1}{2}(55+3\sqrt{165})=-46\cdot77 \text{ அடி/செக்.}$$

(iii) ஒரு துணிக்கையானது தூரத்தோடு ஒருசீராய்க் குறைகின்ற ஆர்முடுகலோடு 100 அடி தூரத்திற்கு அசைந்தது. அதன் ஆர்முடுகல் புறப்படும்பொழுது 10 அடி செக்கன் அலகாயும் 100 அடி தூரத்திற் பூச்சியமாயும் இருந்தது. அதன் ஆரம்ப வேகம் செக்கனுக்கு 45 அடியாயின், அதன் ஈற்று வேகம் என்ன ?

அதன் ஆர்முடுகல் தூரம் s உடன் சீராய்க் குறைகின்றமையால், a, b என்பன மாறிலிகளாயுள்ள $a-bs$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு கோவையால், அது குறிக்கப்பட வேண்டும்.

இங்கு, தரவுகள் நேரத்தையன்றித் தூரத்தையே உள்ளடக்குகின்றன ; ஆதலால், ஆர்முடுகலைத் தூர மாற்ற வீதம் என உணர்த்துஞ் சூத்திரத்தை (3.521) வழங்கிப் பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$v\frac{dv}{ds}=a-bs.$$

எனினும், $s=0$ ஆகும்பொழுது, ஆர்முடுகல் $v\dfrac{dv}{ds}=10$; ஆகவே $a=10$; அதோடு $s=100$ ஆகும்பொழுது, $v\dfrac{dv}{ds}=0$; ஆகவே, $a-100\,b=0$; ஆயின், $b=\frac{1}{10}$; அதோடு

$$v\frac{dv}{ds}=10-\frac{s}{10}.$$

தொகையீட்டால்,

$$\frac{1}{2}v^2=10\,s-\frac{1}{20}s^2+C.$$

இங்கு, C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி. எனினும் $s=0$ ஆகும் பொழுது $v=45$; ஆகவே,

$$C=\frac{1}{2}\times45^2=\frac{2025}{2} ;$$

ஆகவே, $$v^2=20\,s-\frac{1}{10}s^2+2025.$$

எனின், $s=100$ ஆகும்பொழுது, $v=55$; ஆகவே, ஈற்று வேகஞ் செக் 55 அடி ஆகும்.

5.71 பயிற்சி.

1. ஒரு துணிக்கை நேரம் $t=t_0$ இற் புறப்பட்டு $\frac{ds}{dt}=u-g\,(t-t_0)$ ஆலே தரப்பட்ட வேகத்தோடு அசைகின்றது. அது ஓய்வடையுமுன் எவ்வளவு தூரஞ் செல்லுமெனக் காண்க.

2. ஒரு துணிக்கை நேரம் $t=0$ இல் வேகம் u வோடு புறப்பட்டு $\frac{d^2s}{dt^2}=a+bt$ ஆல் தரப்படும் ஆர்முடுகலோடு அசைகின்றது. நேரம் t இற் செல்லுந் தூரத்தைக் காண்க.

3. ஒரு துணிக்கைக்கு நேரம் t இல் அளந்து கண்ட ஆர்முடுகல் $6(1+2t)$ ஆகும்; 6 நேர அலகுகளில் **552** நீள அலகுகள் செல்லுமாயின், அது என்ன வேகத்தோடு அசையத் தொடங்கல் வேண்டும்?

4. a, b மாறிலிகளாயிருக்க, ஒரு துணிக்கைக்கு நேரம் t இல் அளந்து கண்ட ஆர்முடுகல் $a-2bt$ அடி—செக்கனலகு. அது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அதன் இயக்கத்தின் முதலிரண்டு செக்கன்களில் முறையே 12 அடி, 14 அடி செல்லுமாயின், a, b என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க.

5. ஒரு துணிக்கை $2\,(a-s)$ எனும் ஆர்முடுகலோடு அசைகின்றது; இங்கு s என்பது புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம். u என்பது ஆரம்ப வேகமெனின், தூரம் s சென்றபின் அதன் வேகம் என்ன?

6. ஒரு துணிக்கை $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{s+1}$ என்பதாலே தரப்பட்ட வேகத்தோடு அசைகின்றது; இங்கு s என்பது புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரத்தை அடிகளிலே தருகின்றது; நேரவலகு ஒரு செக்கன். 12 அடி செல்ல அது எத்தனை செக்கன் எடுக்கும்?

7. a, b மாறிலிகளாயின், ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டுத் தான் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து தூரம் s இல் இருக்கும் போது அதன் ஆர்முடுகல் $a-bs$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. அதன் உயர்வு வேகத்தைக் காண்க; அது ஓய்வுக்கு வருமுன் எவ்வளவு தூரம் அசையும்?

8. ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு, புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து s தூரத்தில் இருக்கும்போது தன் ஆர்முடுகல் $2\,(a-s)^3$ ஆகுமாறு அசைகின்றது; இங்கு a என்பது ஒரு மாறிலியாகும். துணிக்கையின் உயர்வு வேகத்தையும் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து அதன் மிகப் பெரிய தூரத்தையுங் காண்க.

5.8 தொகையிடலின் பலவினப் பயிற்சி.

பின்வருஞ் சார்புகளைத் தொகையிடுக.

1. $\frac{9}{(3x-1)^3},\ \frac{x^3}{x-1},\ \frac{x^2+1}{x+1}.$

2. $\frac{x+1}{x^2-3x+2},\ \frac{2x+1}{x^2+2x-3},\ \frac{x-1}{2x^2+3x-2}.$

3. $\frac{2x+1}{x^2+1},\ \frac{x^2-1}{x^2+1},\ \frac{x^3}{x^2+1}.$

4. $\frac{2x}{\sqrt{(x^2-1)}},\ \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)}},\ \frac{2x-1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$

5. $\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)},\ \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)},\ \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}.$

6. $\frac{x+1}{2x^2+3x+2},\ \frac{x-1}{2x^2+3x+1},\ \frac{2x+7}{4x^2+4x+3}.$

7. $\frac{2x+1}{\sqrt{(9^2+6x+2)}},\ \frac{3x+4}{\sqrt{(4x^2+4x-1)}},\ \frac{2x-1}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}.$

8. $\frac{\text{கோசை}\,x}{a+b\,\text{சைன்}\,x},\ \frac{\text{சைன்}\,x}{\text{கோசை}^6\,x},\ \frac{\text{சைன்}^{-1}\,x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$

9. $\frac{x^2}{x^6+x^3-2},\ \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},\ x\,(1+x)^{\frac{1}{3}}.$

10. $\text{தான்}^3\,x,\ \text{சைன்}^4\,x,\ \text{சைன்}^3\,x\ \text{கோசை}^3\,x.$

11. $\frac{1}{a^2\,\text{கோசை}^2\,x+b^2\,\text{சைன்}^2\,x},\ \frac{1}{\text{சைன்}^2\,x\ \text{கோசை}^2\,x}.$

12. $x^2\sqrt{(a^2-x^2)},\ \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}},\ x^3\sqrt{(x^2+a^2)}.$

13. $\frac{\text{தான்}\,x}{a+b\,\text{தான்}^2\,x},\ \frac{b+a\,\text{கோசை}\,x}{a+b\,\text{கோசை}\,x}.$

14. $x^2e^x,\ x^2\ \text{மட}\ x.$

15. $\text{சீக}^{-1}x,\ x\ \text{சீக}^{-1}\,x,\ x\ \text{தான்}^2\,x.$

16. $\frac{1}{x\,(x^n+1)},\ \frac{\text{சைன்}\ (\text{மட}\ x)}{x}.$

17. ஒரு துணிக்கை உற்பத்தியிலிருந்து μa வேகத்தோடு புறப்பட்டு ax தூரஞ் சென்றபோது தன் வேகம் $\mu\sqrt{(a^2-x^2)}$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. அது ஓய்வடையுமுன் கழியும் நேரத்தைக் காண்க.

18. v_0, k என்பன மாறிலிகளாயின் ஒரு துணிக்கையானது, தன்வேகம் $v=v_0e^{-ks}$ ஆலே தரப்படுமாறு அசைந்தால், அதன் வேக வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமான ஒரு அமர்முடுகல் அதற்கு இருக்குமெனக் காட்டுக; உற்பத்தியிலிருந்து s தூரத்தை அடைய எடுத்த நேரத்தையுங் காண்க.

19. a, n என்பன மாறிலிகளாயின் ஒரு துணிக்கை $t=0$ ஆகும்பொழுது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு நேரம் t இல் தன் ஆர்முடுகல் $n^2\,a\,\text{கோசை}\,nt$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. $\frac{\pi}{n}$ என்னும் நேர இடைகளில் அதன் வேகம் அற்றுப்போகும் என்றும் அதன் அந்தலை நிலைகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் $2a$ என்றும் நிறுவுக.

20. f, k என்பன மாறிலிகளாயின், ஒரு துணிக்கை $t=0$ ஆகும்பொழுது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஆர்முடுகல் fe^{-kt} யோடு அசைகின்றது. அதன் வேகம் ஒருபோதும் f/k யிலுங் கூடுதலுறாதென நிறுவுக; நேரம் t இற் செல்லுந் தூரத்திற்கு ஒரு சூத்திரங் காண்க.

21. ஒரு துணிக்கை நேரம் t யில் தன் வேகம் $e^{-at}\,\text{சைன்}\,bt$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. நேரம் t யில் அது செல்லுந் தூரம் $\{b\,(1-e^{-at}\,\text{கோசை}\,bt)-ae^{-at}\,\text{சைன்}\,bt\}/(a^2+b^2)$ என நிறுவுக.

22. $a>b$ ஆகும்பொழுது

$$\int \frac{dx}{a+b\,\text{கோசை}\,x} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\,\text{கோசை}^{-1}\frac{a\,\text{கோசை}\,x+b}{a+b\,\text{கோசை}\,x}$$

எனக் காட்டுதற்கு $(a\,\text{கோசை}\,x+b)/(a+b\,\text{கோசை}\,x)=\text{கோசை}\,\theta$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

23. $a<b$ ஆகும்பொழுது

$$\int \frac{dx}{a+b\,\text{கோசை}\,x} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\,\text{அகோசை}^{-1}\frac{a\,\text{கோசை}\,x+b}{a+b\,\text{கோசை}\,x}$$

எனக் காட்டுதற்கு $(a\,\text{கோசை}\,x+b)/(a+b\,\text{கோசை}\,x)=\text{அகோசை}\,\theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

24.

$$\int \frac{dx}{a+b\,\text{சைன்}\,x} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\,\text{சைன்}^{-1}\frac{a\,\text{சைன்}\,x+b}{a+b\,\text{சைன்}\,x}\quad (a>b)$$

அல்லது

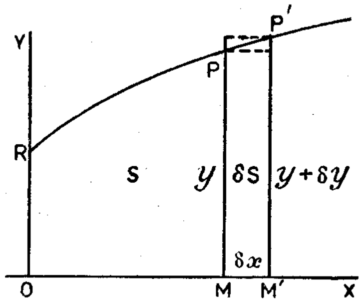
$$= \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\,\text{அகோசை}^{-1}\frac{a\,\text{சைன்}\,x+b}{a+b\,\text{சைன்}\,x}\quad (b>a)$$

என நிறுவுக.

அதிகாரம் VI

வரையறுத்த தொகையீடுகள்

6.1 பரப்பளவுகள். RP என்பது y–அச்சை R இல் வெட்டுகின்ற, சமன்பாடு $y=f(x)$ உடைய ஒரு வளையியாகுக. அவ்வளையியாலும், ஒரு நிலைக்கூறு PM ஆலும், அச் சுக்களின் பகுதிகள் OM, OR என் பவற்றாலும் வரைப்புற்ற பரப்பள வைக்காணும் பிரச்சினையை ஆராய்க. $ORPM$ என்னும் இப்பரப்பளவை S ஆற் குறிக்க.



P என்பது $(x,\ y)$ எனும் புள்ளி யாயும், P' என்பது அவ்வளையியில் $(x+\delta x,\ y+\delta y)$ என்னும் ஓர் அண் மைப் புள்ளியாயும் இருக்க. எனின், $P'M'$ எனும் நிலைக்கூறு $y+\delta y$ ஆகும்; MM' என்பது δx ஆகும்.

அன்றியும், வளைவான வரைப்பாடு PP' ஒடுகூடிய $MPP'M'$ எனும் பரப்பளவு, x இல் δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த S இன் ஏற்ற மாகும்; ஆகவே, அது δS என்பதாற் குறிக்கப்படும். இனி, இப்படம் $MPP'M'$ இற்கு, அடி MM' ஆயும் உயரம் MP ஆயுமுள்ள செவ்வகப் பரப்பளவிற்கும் அடி MM' ஆயும் உயரம் MP' ஆயுமுள்ள செவ்வகப் பரப் பளவிற்கும் இடையான ஒரு பரப்பளவு உண்டு ; ஆயின்,

δS என்பது $y\,\delta x$ இற்கும் $(y+\delta y)\,\delta x$ இற்கும் இடையில் இருக்கும். அல்லது, $\delta S/\delta x$ என்பது y யிற்கும் $y+\delta y$ யிற்கும் இடையில் இருக்கும் ;

இனி, δx பூச்சியத்தை நாட ; எனின், δy என்பதும் பூச்சியத்தை அணுகும் ; $\delta S/\delta x$ என்பது y யிற்கும் $y+\delta y$ யிற்கும் இடையில் இருப்பதால், δy யும் பூச்சியத்தை நாடும்.

$$\underset{\delta x\to 0}{\text{எல்}}\frac{\delta S}{\delta x}=y,\quad \text{அல்லது}\quad \frac{dS}{dx}=y=f(x).$$

தொகையிடுதலின் குறிப்பீட்டிற் சமமான கூற்று

$$S=\int f(x)\,dx+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

இங்கு, C என்பது தொகையீட்டு மாறிலி.

எனின், $F'(x)=f(x)$, அல்லது $F(x)=\int f(x)\,dx$ ஆகுமாறு $F(x)$ ஒரு சார்பாயின்,

$$S=F(x)+C. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

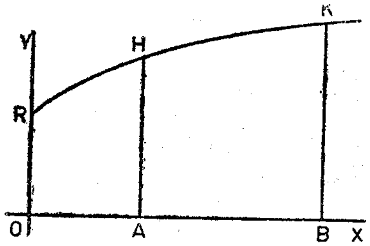
x (அல்லது OM)$=0$ ஆகும்போது $S=0$ என்பதிலிருந்து மாறிலி C இப்போது காணப்படலாம்; ஆயின், (2) இல் $x=0$ எனப்பிரதியிட,

$$0=F(0)+C. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

(2) இலிருந்து (3) ஐக் கழிக்க,

$$S=F(x)-F(0). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

இனி, AH, BK என்பன தம் இடைக்கூறுகள் $OA=a$, $OB=b$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளில் அதே வளையிக்கு எவையேனும் இரு நிலைக்கூறுகளாகுக.



எனின், (4) இலிருந்து,

பரப்பளவு $ORKB=F(b)-F(0)$,

பரப்பளவு $ORHA=F(a)-F(0)$;

ஆகவே, கழிக்க,

பரப்பளவு $AHKB=F(b)-F(a)$..(5).

ஆகவே, x–அச்சினாலும், $y=f(x)$ எனும் வளையியாலும் $x=a$, $x=b$ என்பனவற்றிலுள்ள இரு நிலைக்கூறுகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவானது $F(x)$ எனும் வடிவத்தில் $\int f(x)\,dx$ என்பதைக் கண்டு முறையே a, b எனும் பெறுமானங்களைப் பிரதியீடு செய்து $F(b)$ யிலிருந்து $F(a)$ யைக் கழிப்பதாற் பெறப்படும். இது "a, b எனும் எல்லைகளுக்கிடையே" தொகையீட்டை எடுத்தலெனப்படும்; வழக்கமான குறியீட்டியலின்படி

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

இங்கு $$F'(x)=f(x). \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

இவ்வழியால் எல்லைகளுக்கிடையில் எடுக்கப்படுந் தொகையீடு **வரையறுத்த தொகையீடு** எனப்படும்; b, a என்பன முறையே **மேலெல்லை, கீழெல்லை** எனப்படும்.

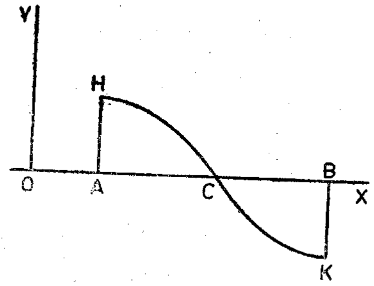
6.11 ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டின் பெறுமானக் கணிப்பில் செய்கையைப் பின்வருமாறு எழுதுதல் வழக்கம்;

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

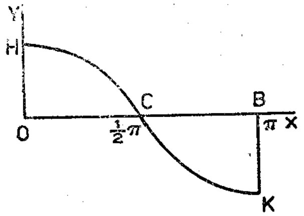
இங்கு $\Big[\ \ \Big]_a^b$ என்பதன் பொருள் சதுர அடைப்புக்களினுள்ள சார்பில் x இற்காக முறையே b, a எனும் பெறுமானங்கள் பிரதியிடப்பட்டுப் பின்னதாகிய பெறுமானம் முன்னதிலிருந்து கழிபடவேண்டும் என்பதே. உதாரணமாக,

$$\int_a^b x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^b=\frac{1}{4}(b^4-a^4).$$

6.12. 6.1 இல் விளக்கப்பட்டதுபோல ஒரு பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கு, $\int_a^b ydx$ அல்லது $\int_a^b f(x)\,dx$ எனுஞ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகையில், வளையி x–அச்சை $x=a$, $x=b$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் வெட்டினால், தொகையீடு அச்சுக்கு மேலுங் கீழுமுள்ள பரப்பளவுகளின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்குமென்பதை அறிதல் பிரதானமானது. உதாரணமாக, வளையி அச்சை C யில் வெட்டுகின்ற அடுத்துள்ள படத்தில், $OA=a$ யாயும் $OB=b$ யாயுமிருந்தால்,



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{பரப்பளவு } AHC - \text{பரப்பளவு } CBK,$$



C யிலிருந்து B வரைக்குமுள்ள அவ்வளையியின் நிலைக்கூறுகள் மறை என்பதே இதற்குக் காரணமாகும்.

உதாரணம்.

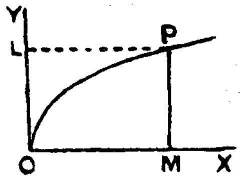
$$\int_0^\pi \text{கோசை } x\,dx=\Big[\text{சைன் } x\Big]_0^\pi=0;$$

இதன் பொருள் HCK என்பது 0, π என்பனவற்றிற்கு இடையில் அச்சை C யில்வெட்டுகின்ற கோசைன் வளையியாயின்,

$$\text{பரப்பளவு } OHC - \text{பரப்பளவு } CBK=0.$$

6.13 உதாரணம். நேர்க் கால்வட்டத்தில் $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவாலும் $x=h$ இலான நிலைக்கூறுலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

வேண்டிய பரப்பளவு, வரிப்படத்திலுள்ள OMP எனும் பரப்பளவு; இங்கு $OM=h$. நிலைக்கூறு $y=2\sqrt{(ax)}$ ஆயிருத்தலால்



$$\text{பரப்பளவு} = \int_0^h 2\sqrt{(ax)}\,dx = \left[\tfrac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^h$$
$$= \tfrac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}h\sqrt{(4ah)}$$
$$= \tfrac{2}{3}OM.MP$$
$= OMPL$ எனுஞ் செவ்வகத்தின் $\frac{2}{3}$ பங்கு.

6.14 பயிற்சி.

1. பின்வரும் வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

(i) $\int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$; (ii) $\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx$;

(iii) $\int_2^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$; (iv) $\int_0^1 (ax+b)^n\,dx$;

(v) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^3}$; (vi) $\int_0^8 (x^{\frac{1}{3}} + 1)^2\,dx$;

(vii) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$; (viii) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$;

(ix) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; (x) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}}$;

(xi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}$ சைன்$^2 x\,dx$; (xii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}$ கோசை$^3 x\,dx$.

2. நேர்க் கால்வட்டத்தில் $y = x^3$ எனும் வளையியாலும் $x = 3$ இலுள்ள நிலைக்கூருலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

3. x – அச்சினுலும் $y =$ சைன் x என்னும் வளையியின் ஒரு மடிவாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

4. நேர்க் கால்வட்டத்தில் $y = x^{\frac{3}{2}}$ என்னும் வளையியாலும் $x = 4$, $x = 9$ ஆகியவற்றிலான நிலைக்கூறுகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

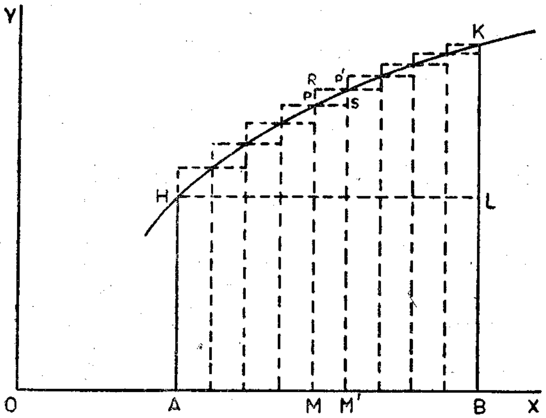
5. நேர்க் கால்வட்டத்தில் $xy = c^2$ என்னும் வளையியாலும் $x = a$, $x = b$ ஆகியவற்றிலான நிலைக்கூறுகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

6.2 ஒரு கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாக, வரையறுத்த தொகையீடு

6.1 ஐத் திரும்பிப் பார்க்க HK என்பது $y = f(x)$ என்னும் வளையியாயும், AH, BK என்பன $x = a$, $x = b$ என்பனவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகளாயுமிருந்தால், பரப்பளவு $AHKB$ என்பது $\int_a^b f(x)\,dx$ எனக் காண்போம்.

இனி, எவ்வாறு பரப்பளவை ஒரு குறிப்பிட்ட கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் குறிக்கலாமென்றும் அதுபற்றி எவ்வாறு ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டிற்கு வேறொரு கருத்துப் பெறலாம் என்றும் காட்டுவோம். AB யின்

நீளம் $b - a$. AB யானது ஒவ்வொன்றும் h நீளமுடைய பெருந்தொகையான n சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுமாயின், $nh = b - a$. வளையி HK யைச் சந்திக்கும்படி AB யின் பிரி புள்ளிகளிலிருந்து நிலைக்கூறுகளை வரைக. படத்திற் காட்டியவாறு நிலைக்கூறுகளும் வளையியும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகள் எல்லாவற்றிற்கும் ஊடாக OX இற்குச் சமாந்தரங்கள் வரைதலால், செவ்வகத் தொடைகள் வரைக. MM' என்பது AB பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகளுள் யாதொன்றுயும், MP, $M'P'$ என்பன அவ்வளையிக்கு நிலைக்கூறுகளாயும், OX இற்குச் சமாந்தரமான PS, $P'R$ என்பன, $M'P'$, MP என்பவற்றை முறையே S, R இல் சந்திக்குங் கோடுகளாயுமிருந்தால், காணவேண்டிய பரப்பளவின் $MPP'M'$ எனுந் துண்டம் PM' எனுஞ் செவ்வகத்திலும் பெரிதாயும் $P'M$ என்னுஞ் செவ்வகத்திலுஞ்



சிறிதாயுமிருக்கும். இது போன்ற ஒரு கூற்று, பரப்பளவு $AHKB$ பிரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு துண்டத்திற்கும் உண்மையாகும் ; ஆகவே கூட்டலால், $AHKB$ எனும் முழுப் பரப்பளவு PM' போன்ற செவ்வகத் தொடை ஒன்றின் கூட்டுத்தொகைக்கும் $P'M$ போன்ற செவ்வகத் தொடை ஒன்றின் கூட்டுத்தொகைக்கும் இடையிற் கிடக்கும் ; இவற்றை உட்தொடை வெளித் தொடைகளெனக் கூறுவோம்.

இனி $nh = b - a$, ஆகவே, n கூடுதலுற h குறைதலுறும் ; அதாவது AB பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகளின் எண்ணிக்கையை நாம் கூடுதலுறச் செய்தால், நாம் செவ்வகங்களின் அகலங்களைக் குறைதலும்படியுஞ் செய்கின்றோம், படத்தைப் பார்ப்பதால், செவ்வகவுட் தொடைக்கும் வெளித் தொடைக்கும் பரப்பளவில் உள்ள முழு வித்தியாசமும், உயரம் LK ஆயும் அகலம் h ஆயுமுள்ள ஒரு செவ்வகமெனக் காண்போம் ; இங்கு L என்பது H இற்கூடாக BK யைச் சந்திக்குமாறு OX இற்கு ஒரு சமாந்தரம் வரைவதாற் காணப்படும். ஆயின், $n \to \infty$ எனின் $h \to 0$; செவ்வகவுட்

தொடைக்கும் வெளித் தொடைக்கும் பரப்பளவினுள்ள வித்தியாசம், பூச்சியத்தை அணுகும் ; அதற்குக் காரணம் அதன் அளவு $LK \times h$ எண் பதும் LK மாறிலி என்பதுமே, எனினும், $h \to 0$. ஆயின், வளைவான வரைப்பாடோடு கூடிய $AHKB$ என்னும் பரப்பளவு, வரையறையின்றிச் செவ்வகங்களினுடைய எண்ணிக்கை கூடுதலுறவும் அகலங் குறைதலுறவும், அவற்றின் உட்தொடையினுடைய, அல்லது வெளித்தொடையினுடைய பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகும்.

MM' என்பது முனை A யிலிருந்து எண்ண, AB யின் r ஆம் பகுதி யாகுக.

ஆயின், $OM = a + (r-1)h$; $MP = f(a + \overline{r-1}h)$.

அதுபோல, $OM' = a + rh$; $M'P' = f(a + rh)$.

ஆகவே, பரப்பளவு $PM' = hf(a + \overline{r-1}h)$;

பரப்பளவு $P'M = hf(a + rh)$.

எனின், செவ்வகவுட்தொடையின் முழுப்பரப்பளவு.

$$h\{f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + \overline{r-1}h) + \ldots + f(a + \overline{n-1}h)\} ;$$

வெளித் தொடையின் முழுப் பரப்பளவும்

$$h\{f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+rh) + \ldots + f(a+nh)\}.$$

பரப்பளவு $AHKB$ யியை அளவிடும் $\int_a^b f(x)\,dx$ ஆனது $nh = b - a$ ஆயின் $h \to 0$ ஆக அல்லது $n \to \infty$ ஆக மேற்கூறிய கூட்டுத்தொகை ஒவ்வொன் றினதும் எல்லையாகும்.

இரு கூட்டுத்தொகைகளும் ஒரே எல்லையை அணுகுகின்றன எனக் கேத்திரகணித முறையாற் கண்டோம் ; இதனை வேறொரு முறையாகக் காணுதலும் எளிது : அவ்விரு கூட்டுத்தொகைகளின் வித்தியாசம்.

$$h\{f(a+nh) - f(a)\} ; \quad a + nh = b \text{ ஆகும்.}$$

ஆயின், வித்தியாசம் $h\{f(b) - f(a)\}$; $h \to 0$, ஆக $f(b) - f(a)$ எனும் காரணி மாறாதிருக்கும் ; ஆயின், பெருக்கம் $h\{f(b) - f(a)\}$ பூச்சியத்தை அணுகும்.

6.3 கூடிய பொதுமைப்பாடுடைய வரைவிலக்கணம். $\int_a^b f(x)dx$ எனும் வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு குறித்த தொகையின் எல்லை என்றும் அக்கூட்டுத் தொகையினுள்ள வகையுரியான உறுப்பு MM' என்னும் அடியையும் MP, அல்லது $M'P'$ என்னும் உயரத்தையும் உடைய ஒரு செவ் வகத்தின் பரப்பளவு என்றும், வகையுரியான செவ்வகத்தின் உயரத்தை MP என்றுதல் $M'P'$ என்றுதல் எடுத்தலால் முடிபுக்கு மாறுபாடு யாதும் இல்லை

என்றுஞ் சற்றுமுன் கண்டோம். ஆகவே, அக்கூட்டுத்தொகை அணுகும் எல்லையைத் தாக்காது MP யிற்கும் $M'P'$ யிற்கும் இடையான யாதுமொரு நிலைக்கூறை அச்செவ்வகத்தின் உயரமாக நாம் எடுக்கலாம்.

நிலைக்கூறனது $f(x)$ இன் பெறுமானத்திற்காக உளதென்பதை ஞாபகத்தில் வைக்கப், பின்வருமாறு, $\int_a^b f(x)\,dx$ இற்குக் கூடியபொதுமைப் பாடுடைய வரைவிலக்கணம் ஒன்றிற்கு இட்டுச் செல்லப்படுகின்றோம்.

x – அச்சின்மீது a யிலிருந்து b யிற்கு உள்ள தூரத்தை யாதுமொரு தொகைப் பாகங்களாகப் (n பாகங்கள் என்க) பிரித்து ; அவற்றை

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_r, \ldots \delta_n \text{ என்பனவற்றாற் குறிக்க.}$$

இப்பாகங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்து அவ்வாறு தேர்ந்த ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f(x)$ இன் பெறுமானங்களை எடுக்க. δ_1 இலே தேர்ந்தெடுத்த புள்ளியில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் f_1 ஆயும், δ_2 இல் உள்ளதில் f_2 ஆயும் இவ்வாறே பிறவும் இருக்க f_r என்பது δ_r இலே தேர்ந்தெடுத்த புள்ளியில் $f(x)$ இன் பெறுமானத்தைக் குறிக்கும். பின்னர் கூட்டுத்தொகை

$$f_1\delta_1 + f_2\delta_2 + \ldots + f_r\delta_r + \ldots + f_n\delta_n$$

என்பதை ஆக்குக.

இனி, n என்பது முடிவிலியை அணுகுக ; ஆயின், பாகங்களினது எண்ணிக்கை கூடுதலுற ; அவற்றினுடைய நீளங்கள் வரையறையின்றிக் குறைதலுறும் ; அப்போது மேற்கூறிய கூட்டுத்தொயின் எல்லையே $\int_a^b f(x)\,dx$ எனும் வரையறுத்த தொகையீடு என வரையறுக்கப்படும்.

6.2 இற் செய்ததுபோல $b - a$ எனும் இடையை பிரிப்பதாலாகும் பாகங்கள் $\delta_1 \ \delta_2 \ldots \delta_n$ என்பன சமபாகங்களென நாம் சொல்லவில்லை என்பதை மாணுக்கன் குறிப்பாக அறிவான் ; அச்செவ்வகங்கள் எல்லாம் ஒரே அகலங் கொண்டனவாயிருந்தாலுங் கொள்ளாதனவாயிருந்தாலும் அச் செவ்வக உட்டொடை வெளித் தொடைகள் என்று கூறப்படுவனவற் றின் பரபளவுகளின் கூட்டுத்தொகை ஒரே எல்லையை அணுகுமென ஒரு சிற் றாராய்வு காட்டும். உண்மையாக, 6.2 இன் படத்தைத் திரும்பிப் பார்க்க, அகலங்கள் சமமல்லாதபொழுது, கூட்டுத்தொகைகளின் வித்தியாசம் அச் செவ்வகங்களுள் அகலம் மிகக் கூடியதன் அகலத்தையும் LK என்னும் உயரத்தையுங் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்திலுங் குறைந்ததாய் இருக்கும். பின் n ஆனது கூடுதலுற எல்லாச் செவ்வகங்களினுடைய அகலங்களும் பூச்சியத்தை அணுகும் ; ஆயின் வித்தியாசம் பூச்சியமாகும்.

எனினும், $n\to\infty$ ஆக, கூட்டுத்தொகை

$$f_1\delta_1+f_2\delta_2+\dots+f_n\delta_n$$

ஓர் எல்லையை அணுகுமென நாம் நிறுவவில்லை என்பதைக் கவனித்தல் மிகப் பிரதானமானது. அது ஓர் எல்லையை அணுகும், அல்லது அணுகாது என்பது $f(x)$ என்னுஞ் சார்பின் வடிவத்தைச் சாரும்; அவ்வெல்லை உண்டு என்பதை நிச்சயப்படுத்துதற்குப் போதிய நிபந்தனைகளை ஆராய்தல் இந்நூலின் இலக்குக்கு அப்பாற்பட்டது. எனினும், $f(x)$ எனுந் தொகையீட்டுச் சார்பு 6.2 இற் காட்டப்பட்ட வடிவத்திலுள்ள ஓர் எளிய தொடர்ச்சியான வளையியாற் குறிக்கப்படும்பொழுது, அவ்வெல்லை உண்டு; என்பதோடு அது வளையிக்குக் கீழுள்ள பரப்பளவின் அளவாகும்.

6.4 வரையறுத்த தொகையீடுகள் பற்றிய தேற்றங்கள்.

(i) $$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

அதற்குக் காரணம் $\int f(x)\,dx=F(x)$ எனின்,

$$\int_b^a f(x)\,dx=F(a)-F(b) \quad \text{என்பதும்,}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \quad \text{என்பதுமே.}$$

அன்றி, 6.3 இற் போலத் தொகையீடுகளைக் குறித்த கூட்டுத்தொகைகளின் எல்லைகளாகக் கொள்ள, a என்பது x–அச்சில் b யின் இடப் பக்கத்தில் இருந்தால், a யிலிருந்து b வரைக்கும் உள்ள இடை ஒரு நேர் நீளமாகும்; அதனை நாம் பிரிக்கும்போது δ என்பன எல்லாம் தன்னெல்லை $\int_a^b f(x)\,dx$ ஆன கூட்டுத்தொகையில் நேராகும். எனினும், அந்த a, b என்பனவற்றோடு கூடிய $\int_b^a f(x)\,dx$ இல் b யிலிருந்து a வரைக்குமுள்ள இடை ஒரு மறை நீளமாகும்; அதற்குக் காரணம் b என்பது a யின் வலப்பக்கத்தில் இருப்பதே; இரு வகைகளிலும் முற்கூறிய சிறு பிரிவுப் புள்ளிகளையே எடுத்தால், இவ்வகையிலுள்ள δ என்பன மறை நீளங்களாகக் கொள்ளப்படவேண்டும்; இரு வகைகளிலும் $f(x)$ இன் ஒத்த பெறுமானங்கள் சமமாகும்; எனவே, தம்மெல்லைகள் தொகையீடுகளைக் குறிக்கின்ற கூட்டுத்தொகைகள் சமமும் குறியில் எதிருமாகும்; எனவே தேற்றம் பெறப்படும்.

(ii) $$\int_a^c f(x)\,d(x)+\int_c^b f(x)\,d(x)=\int_a^b f(x)\,d(x).$$

ஏனெனில், மேற்கூறியவாறு

$$\int f(x)\,dx=F(x) \quad \text{எனின்,}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=F(c)-F(a) \quad \text{என்பதும்,}$$

$$\int_c^b f(x)\,dx=F(b)-F(c) \quad \text{என்பதுமே.}$$

எனவே $$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

a யிலிருந்து c வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையோடு c யிலிருந்து b வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையைக் கூட்ட வருவது a யிலிருந்து b வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையைத் தருதலால், ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் கொள்ளுங் கொள்கையிலிருந்தும் இத்தேற்றம் எளிதாகப் பெறப்படும். தொகையீடுகள் உண்டெனின், c என்பது a, b என்பனவற்றிற்கு இடையில் இருந்தாலும் இராவிட்டாலும் இத்தேற்றம் உண்மையாகும்.

(iii) $$\int_0^a f(a-x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx.$$

இத்தேற்றத்தை நிறுவுதற்கு $a-x=u$ ஆகுக; எனின் $-dx=du$;

அப்பொழுது $$\int f(a-x)\,dx=-\int f(u)\,du.$$

ஆயின், எல்லைகளைப் பொறுத்த அளவில், x ஆனது தன் கீழெல்லையாகிய 0 இற்குச் சமனாகும்பொழுது $u=a$; x ஆனது தன் மேலெல்லையாகிய a யிற்குச் சமனாகும்பொழுது $u=0$; ஆகவே, (i) ஆல்;

$$\int_0^a f(a-x)\,dx=-\int_a^0 f(u)\,du=\int_0^a f(u)\,du,$$

பின்னர், ஒரு வரையறுத்த தொகையீடு அதன் எல்லைகளின் ஒரு சார்பாயிருத்தலால், நாம் u வையாதல், x ஐயாதல் மாறியாகக் கொண்டால் அதனால் ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டின் பெறுமானம் வேறுபடாது; முடிபைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\int_0^a f(a-x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx.$$

உதாரணமாக,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\text{சைன் } x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f\left(\text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\text{கோசை } x)\,dx.$$

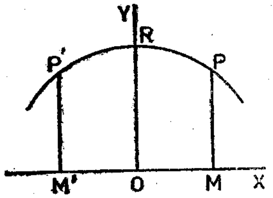
0, $\frac{1}{2}\pi$, என்பனவற்றிற்கிடையே சைன் x எடுக்கும் பெறுமானங்களுடன் கூடிய உறுப்புகளையுடைய ஒரு குறித்த கூட்டுத்தொகையின் எல்லையே $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f$ (சைன் x) dx என்பதைக் கருதுவதாலும் இத்தேற்றந் தெளிவாகும் ; $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f$ (கோசை x) dx ஆனது தன் உறுப்புகள் சைன் x இன் பெறுமானங்களுக்குப் பதிலாக கோசை x இன் பெறுமானங்களைக் கொண்ட ஓர் ஒத்த கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகும்; 0 இற்கும் $\frac{1}{2}\pi$ இற்கும் இடையில் கோசை x இன் பெறுமானங்கள் வரிசை முன்பின்னுக்கப்பட்ட சைன் x இன் பெறுமானங்களுக்குச் சமம்; ஆயின் இரு கூட்டுத்தொகைகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

6.5 ஒற்றைச் சார்புகளும் இரட்டைச் சார்புகளும். x இன் ஒரு சார்பில் x இன் குறியை மாற்றினால், அச்சார்பை வேறொருவாறும் மாற்றாது அதன் குறியை மாத்திரம் மாற்றுமாயின், அச்சார்பு x இன் **ஒற்றைச் சார்பு** எனப்படும் ; அதாவது, $f(-x) = -f(x)$ எனின், $f(x)$ என்பது ஒற்றையாகும் ; இவ்வாறு $(-x)^3 = -x^3$ ஆதலால், x^3 என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு ; எனினும் $(-x)^3+1 = -x^3+1$ ஆனது $-(x^3+1)$ ஆகாதெனவே, x^3+1 என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாகாது.

x இன் ஒரு சார்பில் x இன் குறியை மாற்றினால், அது அச்சார்பை மாற்றாது விடுமாயின், அச்சார்பு x இன் **இரட்டைச் சார்பு** எனப்படும் ; அதாவது, $f(-x)=f(x)$ எனின், $f(x)$, இரட்டையாகும். $(-x)^2 = x^2$ ஆதலால், இரட்டை வலுக்களை மாத்திரம் கொண்ட x இன் யாதுமொரு சார்பு ஓர் இரட்டைச் சார்பாகும்.

சைன் $(-x) = -$சைன் x ஆதலால், சைன் x என்பது ஓர் ஒற்றைச்சார்பு. கோசை $(-x) =$ கோசை x ஆதலால், கோசை x என்பது ஓர் இரட்டைச்சார்பு.

ஓர் இரட்டைச் சார்பின் வரைபு y – அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீராகும்.



இது ஒரு படத்திலிருந்து தெளிவாகும் ;

அதற்குக் காரணம் $OM = x$ ஆயும் $OM' = -x$ ஆயும் இருந்தால், நிலைக்கூறு

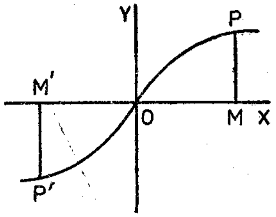
$$M'P' = f(-x) = f(x)$$
$$= \text{நிலைக்கூறு } MP.$$

ஓர் ஒற்றைச் சார்பின் வரைபு எதிர்க் கால்வட்டங்களிற் சமச்சீராகும்.

இங்கு, $OM = x$ ஆயும் $OM' = -x$ ஆயுமிருந்தால், நிலைக்கூறு

$$M'P' = f(-x) = -f(x)$$
$$= -\text{நிலைக்கூறு } MP.$$

6.51. இப்போது நாம் பின்வருந் தேற்றங்களை நிறுவலாம் :



$f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பாயின்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\ ;$$

$f(x)$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயின்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

$OM = a$ ஆயும் $OM' = -a$ ஆயுமிருந்தால் முடிபுகள் சென்ற பிரிவின் படங்களிலிருந்து உடனே பெறப்படும்.

ஏனெனில் $f(x)$ இரட்டையாயிருக்கும்பொழுது, $OM = a$ எனக் கொள்ள,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \text{பரப்பளவு } M'P'PM$$
$$= 2\times\text{பரப்பளவு } ORPM$$
$$= 2\int_0^a f(x)\,dx\ ;$$

$f(x)$ ஒற்றையாயிருக்கும்பொழுது,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\text{பரப்பளவு } OM'P' + \text{பரப்பளவு } OMP$$
$$= 0.$$

6.511 இம்முடிபுகள் பின்வருமாறு பகுப்பு முறையாலும் நிறுவப்படலாம் :

6.4 (ii) இலிருந்து

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

வலப்பக்கத்திலுள்ள இரு தொகையீடுகளுள்ளே முதலுள்ளதில் $x = -u$ என்னும் பிரதியிட்டு மாறியை மாற்றுக ; ஆயின் $dx = -du$;

$$\int f(x)\,dx = -\int f(-u)\,du\ ;$$

எல்லைகளுக்கு $x = -a$ யாகும்போது, $u = a$; $x = 0$ ஆகும்போது $u = 0$;

ஆகவே, எவ்வெழுத்து மாறியாக வழங்கப்படுகின்றதென்பது பற்றிப் பரவாயில்லையாதலால், **6.4 (i)** இன்படி

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-u)\,du = \int_0^a f(-u)\,du$$
$$= \int_0^a f(-x)\,dx.$$

ஆகவே, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$;

எனவே, $f(x)$ இரட்டையாயின், முடிபு $2\int_0^a f(x)\,dx$ உம்

$f(x)$ ஒற்றையாயின், முடிபு பூச்சியமுமாகும்.

6.52. சென்ற பிரிவின் தேற்றங்களுக்கு உதாரணங்களாகப் பின்வருவனவற்றை அறிக :

சைன்^2x என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^2 x\,dx \;;$$

சைன்^3x என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^3 x\,dx = 0 \;;$$

கோசை^3x என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^3 x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^3 x\,dx \;;$$

கோசை^3x சைன் x என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^3 x \;\text{சைன்}\; x\,dx = 0.$$

6.53 முடிவில் எல்லைகள். எல்லைகளுள் ஒன்று முடிவில்லாததாக, ஒரு தொகையீடு இருத்தல் கூடும் ; உதாரணம் $\int_a^\infty f(x)\,dx$; அன்றித் தொகையீட்டு வீச்சு இரு திசைகளிலும் முடிவிலியாய் இருக்கலாம் ; உதாரணம் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ என்பதற்குக் கொடுக்க வேண்டிய பொருள் b முடிவிலியை அணுக, அது $\int_a^b f(x)\,dx$ என்பதன் எல்லையைக் குறிக்கும் என்பதேயாம்.

உதாரணங்கள்.

(i) $\int_0^\infty \dfrac{dx}{a^2+x^2}$.

$$\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^b = \frac{1}{a}\left\{\text{தான்}^{-1}\frac{b}{a} - \text{தான்}^{-1}0\right\}.$$

இப்பொழுது தான்$^{-1}\dfrac{x}{a}$ என்பது பல பெறுமானமுள்ள ஒரு சார்பு (4.21 (iii) ஐப்பார்க்க). தான்$^{-1}$ 0 இன் பெறுமானங்கள் $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ ஆகும் ; $b\to\infty$ ஆக தான்$^{-1}\dfrac{b}{a}$ யின் பெறுமானங்கள் $\frac{1}{2}\pi,\; \pi+\frac{1}{2}\pi,\; 2\pi+\frac{1}{2}\pi,\; 3\pi+\frac{1}{2}\pi, \ldots$ முதலியன. இப்பெறுமானங்களுள் ஏத்தேர்வைச் செய்ய வேண்டுமெனத் துணிதற்கண், தான்$^{-1}\dfrac{x}{a}$ என்பது ஒரு கோணம் எனக் காண்கின்றேம் ; அத்துடன் " எல்லைகளுக்கிடையில் " எடுத்தல் என்பதன் பொருள் கீழெல்லைப் பெறுமானத்திலிருந்து மேலெல்லைப் பெறுமானத்திற்கு (பாய்ச்சலின்றி) தொடர்ச்சியாக அக்கோணம் மாறுமெனக் கொள்ளுதலே. இதற்கு வேண்டியது, தான்$^{-1}$ 0 இன் பெறுமானமாக $r\pi$ ஐ நாம் தேர்ந்தால் $\lim_{b\to\infty}$ தான்$^{-1}\dfrac{b}{a}$ யின் பெறுமானமாக $r\pi+\frac{1}{2}\pi$ யை நாம் எடுக்க வேண்டும் என்பதே ; ஏனெனில் அவ்வாறு எடுக்காது விட்டால், எல்லைகளுக்கிடையில் யாதேனும் ஒரு புள்ளியில் அக்கோணத்தின் பெறுமானத்தில் ஒரு பாய்ச்சல் வரலாம்.

எனின், $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \pi/2a.$$

(ii) $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$. தொடர்ந்து பகுதிகளாகத் தொகையிடுதலால் (5.63)

$$\int_0^b x^2e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}(x^2+2x+2)\Big]_0^b$$

எனக் காண்கின்றேம்.

$b\to\infty$ ஆக, மேலெல்லை b யிற் பெறுமானத்தைக் காணுதற்கு, சார்பு

$$-\frac{x^2+2x+2}{e^x} = -\frac{x^2+2x+2}{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots}$$

என நாம் எழுதுகின்றேம்.

பகுதியெண்ணனது நாம் விரும்புமளவு பெரிய x இன் வலுக்களை உடையது ஆகையாலும், தொகுதியெண்ணில் இரண்டாம் வலு எதும் இல்லை ஆகையாலும், x (அல்லது b)$\to\infty$ ஆக, எல்லை பூச்சியமாகும். அன்றியும் $x=0$ ஆக,

$$e^{-x}(x^2+2x+2) = 2 \;;$$

ஆகவே, $$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 2.$$

(iii) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. இங்கு $x=a\,\text{சைன்}\,\theta$ எனும் பிரதியீட்டை நாம் வழங்கலாம் ; இது $dx=a\,\text{கோசை}\,\theta\,d\theta$ வைத் தரும் ; பின்னர் $\int a^2\,\text{சைன்}^2\theta\,d\theta$, அல்லது $\frac{1}{2}a^2\int(1-\text{கோசை}\;2\theta)\;d\theta$ என்பதை நாம் தொகையிட வேண்டும் ; அது $\frac{1}{2}a^2(\theta-\frac{1}{2}\,\text{சைன்}\,2\theta)$ ஆகும். இவ்விடத்து, x இற்குத் தந்த எல்லைகளுக்கு ஒத்த எல்லைகளை θ விற்குக் கண்டு நாம் வழங்கினேமாயின், மாறிகளை θ விலிருந்து x இற்கு மறுபடியும் மாற்றவேண்டுமெனுந் தேவையில்லை ; உதாரணமாக,

$$x=0\ \text{எனின்},\ \theta=0\,;$$

$$x=a\ \text{எனின்},\ \theta=\tfrac{1}{2}\pi\,;$$

எனவே

$$\int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} a^2\,\text{சைன்}^2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{2}a^2\Big[\theta-\tfrac{1}{2}\,\text{சைன்}\,2\theta\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{1}{4}\pi a^2.$$

6.54 பயிற்சி. பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\ (a>0)$.

(ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{9-x^2}$.

(iii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$.

(v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)}}$.

(vi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

(vii) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}}$.

(viii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

(ix) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}$.

(x) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

(xi) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx$.

(xii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \text{சீக}^2x\,dx$.

(xiii) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\,\text{கோசை}\,x\,dx$.

(xiv) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\,\text{சைன்}\,x\,dx$.

(xv) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\text{சைன்}x\,dx$.

6.6 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{கோசை}^n x\,dx$ என்பன.

5.65 இல்

$$\int \text{சைன்}^n x\,dx=-\frac{1}{n}\,\text{சைன்}^{n-1}x\,\text{கோசை}\,x+\frac{n-1}{n}\int\text{சைன்}^{n-2}x\,dx.$$

எனப்படும் ஒடுக்கற் சூத்திரமொன்றை நிறுவினேம்.

$x=\frac{1}{2}\pi$ ஆகும்போது, வலப்பக்கத்திலே தொகையிடப்பட்ட உறுப்பு பூச்சியமாகும் ; அதற்குக் காரணம் அது கோசை x ஐ ஒரு காரணியாக அடக்குவதும், அது சைன் x ஐ ஒரு காரணியாகக் கொண்டுள்ளமையால் $x=0$ ஆகும்பொழுது அது பூச்சியமாக வருவதுமே ; ஆகவே,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-2}x\,dx.$$

அதுபோல,
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-2}x\,dx=\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-4}x\,dx\,;$$

ஆயின்,
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-4}x\,dx.$$

ஒவ்வொரு படியிலும், சைன் x இனது வலுவின் சுட்டியை 2 ஆல் ஒடுக்கி அச்செய்கை தெளிவாக விரிக்கப்படலாம் ; ஆராய்தற்கு இரண்டு வகைகள் உண்டு.

(i) n என்பது ஓர் இரட்டை முழுவெண்ணுயின்,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^0 x\,dx$$

ஐ அடையும் வரைக்கும் நாம் படிப்படியாகச் செல்லலாம் ; $\text{சைன்}^0x=1$;

ஆயின்,
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^0 x\,dx=\tfrac{1}{2}\pi\,;$$

ஆகவே, n **இரட்டையாயிருக்கும்பொழுது,**

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

(ii) n ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணுயின், பின்னடுத்து ஒடுக்குதலால்

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}\,x\,dx\,;$$

இனி,
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}\,x\,dx=\Big[-\text{கோசை}\;x\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi}=1.$$

ஆகவே, n **ஒற்றையாயிருக்கும்பொழுது,**

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

சைன் x இன் **இரட்டை** வலுக்களுக்கே அப்பின்னத் தொடையானது ι n எனும் எண்ணை அடையும் வரைக்கும் இரட்டைப் பகுதிகளாலே ıடரப்பட்ட தொடர்ச்சியான பின்னங்களாலே பின்பற்றப்பட்ட $\frac{\pi}{2}$ ஒடு

தொடங்குகின்றதென்றும், சைன் x இன் ஒற்றை வலுக்களுக்கு நாம் n எனும் எண்ணை அடையும் வரைக்கும் ஒற்றைப் பகுதிகளோடு கூடிய பின்னடும் பின்னங்களாற் பின்பற்றப்பட்ட $\frac{2}{3}$ என்னும் பின்னத்தோடு நாம் தொடங்குகின்ருேமென்றும் மனத்திற் கொள்வோமாயின், இச் சூத்திரங்கள் மிக்க பயன் தருவதோடு ஞாபகத்தில் வைத்திருப்பதற்கும் எளிதாகும்.

மேலும் **6.4** (iii) இலிருந்து,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^n\, x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^n\, x\, dx\,;$$

எனவே அதே சூத்திரம் $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^n\, x\, dx$ இற்கும் பொருந்தும்.

உதாரணங்கள். $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^6\, x\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5\pi}{32};$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^7\, x\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} = \frac{16}{35}.$$

தொகையிடுதல் இரு கால்வட்டங்களுக்கூடாகச் செய்யப்படும்பொழுது சைன் x, கோசை x என்பனவற்றின் குறிகள் சிலவேளை வேற்றுமைப் பட்டாலும் அவற்றின் எண்பெறுமானத் தொடைகள் அவ்வேறுபட்ட கால் வட்டங்களிலே திரும்பவும் வரும் என்பதை மாத்திரம் நாம் ஞாபகத்தில் வைத்தல் வேண்டும் ; ஆகவே, வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு குறித்த தொகையின் எல்லையாகுமென ஞாபகத்தில் வைக்க. n இரட்டையாயின், ஒரு கால்வட்டத்திற்கூடாக எடுத்த

$$\int \text{சைன்}^n\, x\, dx, \quad \text{அல்லது} \quad \int \text{கோசை}^n\, x\, dx$$

என்பது எடுத்த கால்வட்டம் எதுவாயிருந்தாலும் ஒரே பெறுமானமுடைய தாகும். எனினும், n **ஒற்றையெனின்,** தொகையீடு எல்லாக் கால்வட்டங் களுக்கும் ஒரே எண் பெறுமானமுடையதாகும் ; எனினும் அதன் குறி நாம் எடுத்த கால் வட்டத்தில் சைன்$^n\, x$ அல்லது கோசை$^n\, x$ நேரோ அல்லது மறையோ என்பதைச் சார்ந்திருக்கும்.

உதாரணங்கள்.

$$\int_0^{\pi} \text{கோசை}^6\, x\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^6\, x\, dx = 2.\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5\pi}{16}\,;$$

ஆனுல் $\int_0^{\pi} \text{கோசை}^7\, x\, dx = 0$; அதற்குக் காரணம் தொகையீடு முதலாம் இரண்டாங் கால்வட்டங்களுக்கூடாய் எடுக்கப்பட்டமையும், அவ்விரு கூறு களும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதலுமே.

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^4\, x\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^4\, x\, dx = 2.\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{8};$$

ஆனுல், $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^3\, x\, dx = 0$; அதற்குக் காரணம் தொகையீடு முதலாம் நாலாங் கால்வட்டங்களுக்கூடாய் எடுக்கப்பட்டமையும், அவ்விரு, கூறுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதலுமே.

$$\int_{-\pi}^{0} \text{சைன்}^5\, x\, dx = -\int_0^{\pi} \text{சைன்}^5\, x\, dx = -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^5\, x\, dx = -2.\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{16}{15};$$

அதற்குக் காரணம் இங்கு, தொகையிடல் மூன்ரும் நாலாங் கால்வட்டங் களுக்கூடாக எடுக்கப்பட, அவை இரண்டிலும் சைன்$^5\, x$ மறையாயிருத்தலே.

6.61 பயிற்சி. பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^7\, x\, dx.$ (ii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^4\, x\, dx.$

(iii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^5\, x\, dx.$ (iv) $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \text{சைன்}^4\, x\, dx.$

(v) $\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \text{கோசை}^5\, x\, dx.$ (vi) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^5\, x\, dx.$

(vii) $\int_0^{\pi} \text{கோசை}^7\, x\, dx.$ (viii) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^5\, x\, dx.$

(ix) $\int_0^{2\pi} \text{சைன்}^4\, x\, dx.$ (x) $\int_0^{2\pi} \text{சைன்}^5\, x\, dx.$

(xi) $\int_0^{\pi} \text{சைன்}^3\, x\, \text{கோசை}^2\, x\, dx.$ (xii) $\int_0^{\pi} \text{சைன்}^2\, x\, \text{கோசை}^2\, x\, dx.$

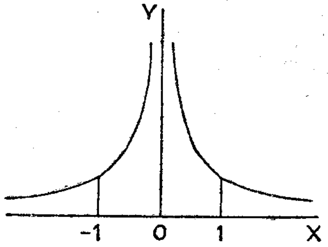
(xiii) $\int_0^{\pi} \text{சைன்}\, x\, \text{கோசை}^4\, x\, dx.$ (xiv) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{சைன்}^4\, x\, \text{கோசை}\, x\, dx.$

(xv) $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{3\pi} \text{சைன்}^2\, x\, \text{கோசை}^4\, x\, dx.$

6.7 முடிவில் தொகையுறுக்கள். ஒரு வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x)\, dx$ ஐக் கொண்டிருக்கும் தொகையுறு $f(x)$ இன்வடிவம் பற்றி இதுவரையில் ஒரு சிறிதே கூறியுள்ளோம்.

6.3 இன் முடிவில், $f(x)$, ஓர் எளிய **தொடர்ச்சியான** வளையியாற் குறிக்கப்படுமாயின், அவ்வளையிக்குக் கீழேயுள்ள பரப்பளவைக் குறிக்கும் ஒரு தொகையீடு இருக்குமென நாம் கூறினேம்.

தொகையிடுதலின் வீச்சிற்குள் $f(x)$ முடிவிலியாகும் வகைகளில் மேற்கூறிய முறைகள் வலிதானவை என எடுகொள்வதில் எச்சரிக்கையாய் இருப்பது பிரதானம். இவ்வாறு, பொதுச் செய்கையால் $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க முயல்வோமாயின், $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1-1=-2$ எனப் பெறுவோம் ; இது பிழை என்பது தெளிவு ; ஏனெனின் தொகையீடு எல்லையாயுள்ள கூட்டுத்தொகையில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் நேர் என்பதே. $x=0$ என்பது தொகையிடலின் வீச்சிற்குள் அமைக்கப் படுகின்றது என்பதிலிருந்தும், $x=0$ இற்கு $\frac{1}{x^2}$ என்பது முடிவிலியாகின்றது என்பதிலிருந்தும் வாதப்போலி பிறக்கின்றது.



உண்மையாக, $y=\frac{1}{x^2}$ இன் வரைபு படத்திற் காட்டியவாறு இருக்கின்றது என்பதோடு ; -1, 1 என்பவற்றிற் கிடையில் வளையிக்குக் கீழுள்ள பரப்பளவு இரு சமபரப்பளவுகளால் ஆகும் ; அவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ ஆற் குறிக்கப்படும் ; இதனை

$$\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\int_{h}^{1}\frac{dx}{x^2}=\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\left[-\frac{1}{x}\right]_{h}^{1}=\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\left(-1+\frac{1}{h}\right)$$

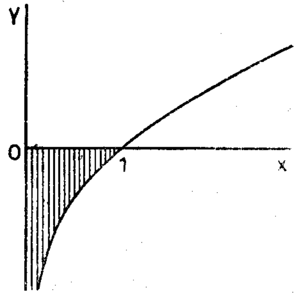
எனப் பொருள்படுமாறு கொண்டால், பரப்பளவு முடிவிலியாகுமெனக் காண்போம்.

6.71 $\int_{0}^{1}\text{மட}\,x\,dx$. இது தொகையுறு மட x, குறிப்பாக $x=0$ எனுங் கீழெல்லையில் முடிவிலியாக வரும் வேறோர் உதாரணம் ; இதற்குக் காரணம் $x\to 0$ ஆக, மட $x\to -\infty$ என நாம் காட்டலாம் என்பதே.

$e^0=1$ ஆதலால், $\text{மட}_e\ 1=0$; 1 இலுங் குறைந்த எண்களின் மடக்கைகள் மறையாகும். 1 இலுங் குறைந்த எவ்வெண்ணும் n, ஒன்றிலும் பெரிதாக $\frac{1}{n}$ என எழுதப்படலாம் ; மட $\frac{1}{n}=-$மட n ; ஆகவே, $\frac{1}{n}$ என்னும் எண்ணை n ஆல் கூட்டுவதன் மூலம் பூச்சியத்தை நோக்கிக் குறையுமாறு செய்யப்பட, அதன் மடக்கை $-$மட n என்பது கூடுதலுறுகின்ற ஒரு பெரிய மறையெண்ணுகும் ; அதாவது அது $-\infty$ யை நாடும்.

மற்றைப்படி $x=e^y$ ஆகுமாறு $y=$மட x எனப் பிரதியிட்டோமாயின், $x\to 0$ ஆக, இச்சார்பின் வரைபு ; y, $-\infty$ யை நோக்கிக் குறைதலுறுவதைக் காட்டும். (4.32 ஐ ஒப்பிடுக.)

எனினும், $x\to 0$ ஆக, மட $x\to -\infty$ ஆதலால், தொகையீடு $\int_{0}^{1}\text{மட}\,x\,dx$ முடிவிலியாகுமென நாம் முடிபு கொள்ளல் ஆகாது.



இதனைப் போன்ற வகையில் $\int_{0}^{1}\text{மட}\,x\,dx$, $h\to 0$ ஆக $\int_{h}^{1}\text{மட}\,x\,dx$ இன் எல்லையைக் கருதுகிறது என நாம் கூறலாம்.

இனி, பகுதிகளாகத் தொகையிடுதலால்,

$$\int\text{மட}\,x\,dx=x\,\text{மட}\,x-\int x.\frac{1}{x}dx$$
$$=x\,\text{மட}\,x-x\,;$$

ஆகவே,
$$\int_{h}^{1}\text{மட}\,x\,dx=\Big[x\,\text{மட}\,x-x\Big]_{h}^{1}$$
$$=-1-h\,\text{மட}\,h+h.$$

ஆயின், இப்பொழுது $\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\ h\,\text{மட}\,h$ ஐக் காண விரும்புகின்றோம். h சிறிதாயிருக்கும்போது, நாம் மட $h=-u$ எனப் பிரதியிடலாம் ; u என்பது (1 இலுங் குறைந்த எண்களின் மடக்கைகள் மறையாயிருத்தலால்) ஒரு நேரெண். இதன் பொருள் $h=e^{-u}=\frac{1}{e^u}$ என்பதே ;

ஆயின், $u\to\infty$ ஆக, $h\to 0$.

எனின், $\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\ h\,\text{மட}\,h=\underset{u\to\infty}{\text{எல்}}\frac{-u}{e^u}=0\,;$

அதற்குக் காரணம் u நேராயித்தலும், தொகுதியியெண்ணிலும் பார்க்கக் கூடிய எண்ணிக்கை u வின் உயர்வலுக்கள் பகுதியெண்ணில் இருத்தலுமே.

ஆகவே,
$$\underset{h\to 0}{\text{எல்}}\int_{h}^{1}\text{மட}\,x\,dx=\underset{h\to 0}{\text{மட}}(-1-h\,\text{மட}\,h+h)$$
$$=-1.$$

எனின், $\int_{0}^{1}\text{மட}\,x\,dx=-1$ என்பது பெறப்படும்.

$y=\text{மட}\,x$ இனது வரைபின் படத்தில் நிழலூட்டிய பரப்பளவு இத்தொகையீட்டைக் குறிக்கின்றது ; விடையிலுள்ள மறைக் குறியானது x – அச்சிற்குக் கீழே அப்பரப்பளவு இருக்கின்றது என்பதிலிருந்து பெறப்படுகின்றது.

இம்முடிவைச் சென்ற பிரிவின் முடிபோடு நாம் ஒப்பிட்டோமாயின் $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ இலும் $\int_0^1 \text{மட}\, xdx$ இலும் அத்தொகையீடுகள் குறிக்கின்ற பரப்பளவுகள் இரண்டும் y – அச்சினது திசையில் முடிவிலிக்கு விரிகின்றன என்றும், $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ எனும் பரப்பளவு முடிவிலியாயிருக்க, $\int_0^1 \text{மட}\, x\, dx$ எனும் பரப்பளவு முடிவுள்ளதாயும் எண்ணளவில் 1 இற்குச் சமமாயும் இருக்கின்றது என்றுங் காண்கிறோம்.

தொகையிடுதற்குரிய விடயம் தொகையிடுதலின் வீச்சிற்குள் முடிவிலியாய் வரும்பொழுது, அத்தொகையீட்டிற்கு ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் இருக்கலாம், அல்லது இல்லாமலும் விடலாம் என்பதை எடுத்துக் காட்ட இவ்வுதாரணங்கள் உதவுகின்றன ; ஒவ்வொரு சிறப்பு வகையையும் ஆராயாது நாம் முடிபுக்கு முந்துதல் ஆகாது.

6.72 சென்ற விரிவில்,

$$\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\, x\,\text{மட}\, x=0.$$

என ஒரு நிறுவலைக் கொண்டுள்ளதென நாம் அறிவோம். அவ்வாறே $\underset{x\to 0}{\text{எல்}}\, x^n\,\text{மட}\; x=0$ என்பது நிறுவப்படலாம் ; இங்கு, n என்பது யாதும் ஒரு நேரெண் ; மாணாக்கனுக்கு ஒரு பயிற்சியாக இதனை விடுகின்றோம்.

6.8 பலவினப் பயிற்சி.

1. பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \text{சீக}\, x\, dx$; (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$;

(iii) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$; (iv) $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2x^2+b^2}$;

(v) $\int_0^{2a} \frac{x\, dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ ($x=2a\,\text{சைன்}^2\theta$ ஆகுக) ;

(vi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{சைன்}\, x\, dx}{1+\text{கோசை}^2 x}$; (vii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

(viii) $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$; (ix) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \text{தான்}\, x\, dx$;

(x) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{(x^2+1)}}$; (xi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2\text{கோசை}^2 x+b^2\text{சைன்}^2 x}$;

(xii) $\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{சைன்}\, bx\, dx\ (a>0)$; (xiii) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\{(x-a)(b-x)\}}}$;

(xiv) $\int_a^b \sqrt{\{(x-a)(b-x)\}}\, dx$; (xv) $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{x-a}{b-x}\right)}dx$;

[(xiii), (xiv), (xv) என்பனவற்றில் $x=a\,\text{கோசை}^2\theta+b\,\text{சைன்}^2\theta$ ஆகுக]

(xvi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\,\text{கோசை}\, 2x\, dx$; (xvii) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\,\text{சீக}^2 x\, dx$;

(xviii) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\,\text{கோசை}\,\alpha+x^2}$; (xix) $\int_0^1 x^2\,\text{மட}\, x\, dx$;

(xx) $\int_0^1 \text{தான்}^{-1} x\, dx$.

2. x – அச்சினாலும், பின்வரும் வளையிகளாலும், கூறப்பட்ட நிலைக்கூறுகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவுகளைக் காண்க :

(i) $x=0$ இலிருந்து $x=1$ வரைக்கும் $y=x^2-1$;

(ii) $x=\frac{1}{2}\pi$ இலிருந்து $x=\pi$ வரைக்கும் $y=\text{சைன்}\, 2x$;

(iii) $x=0$ இலிருந்து $x=\pi$ வரைக்கும் $y=\text{சைன்}^2 x$;

(iv) $x=o$ இலிருந்து $x=\pi/b$ வரைக்கும் $y=e^{ax}\,\text{சைன்}\, bx$.

3. $y=x^2-3x+2$ எனும் வளையியைக் குறித்து அவ்வளையியாலும் x – அச்சாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க.

4. $x-x^3$ என்பதன் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் கண்டு ; $y=x-x^3$ எனும் வளையியை வரைக ; $\int_0^2 (x-x^3)\, dx$, எப்பரப்பளவைக் குறிக்கின்றது.

5. xe^{-x} இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க ; x இன் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு அச்சார்பு ஒருபோதும் மறையாகாதென நிறுவுக.

(i) $x=0$ இலிருந்து $x=1$ வரைக்கும் ;

(ii) $x=1$ இலிருந்து அப்புறம் ∞ இற்கும்.

அச்சார்பின் வரைபிற்கும் x – அச்சிற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

6. $y=x^2(x^2-1)$ எனும் வளையியைக் குறிக்க ; அவ்வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

7. $\int_0^1 (x-1)(x^2-2)^2\, dx$, $\int_0^2 (x-1)\,(x-2)^2\, dx$ என்பனவற்றால் எப்பரப்பளவுகள் குறிக்கப்படும்? அவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (3.423 என்பதைப் பார்க்க).

8. $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ எனும் வளையியைக் குறிக்க ; அவ்வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புற்ற இரண்டு உருவங்களினதும் பரப்பளவைக் காண்க.

9. $y=x-\dfrac{2}{x^2+1}$ எனும் வளையி, அச்சுக்களை எங்கு குறுக்கிடுகின்றது எனக் காண்க. அவ்விரண்டு அச்சுக்களாலும் அவ்வளையியாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

10. $y = 4x^3 + 8x^2 - 11x + 3$ எனும் வளையி x – அச்சசைத் தொடுமெனக் காட்டி அது அதனை வெட்டும் புள்ளியையுங் காண்க. அவ்வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

11. $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$ எனும் வளையி x – அச்சை இரு புள்ளிகளிலே தொடுமெனக் காட்டுக ; அவ்வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

12. $y = 3\,\text{சைன்}\, x + 4\,\text{கோசை}\, x$ எனும் வளையியின் ஒரு மடிவின் பரப்பளவைக் காண்க.

13. $\int_0^1 x\,\text{மட}\,(1 + ax)\,dx = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\text{மட}\,(1 + a) - \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{a}\right)$ என நிறுவுக.

14. (i) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{5 + 3\,\text{கோசை}\, x} = \tfrac{1}{2}\,\text{தான்}^{-1}\,\tfrac{1}{2}$; என்றும்

(ii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{3 + 5\,\text{கோசை}\, x} = \tfrac{1}{4}\,\text{மட}\, 3$ என்றும் நிறுவுக.

15. a நேராயின்

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)}}$$ இன் பெறுமானம்,

$a < 1$ ஆயின் 2 ஆகவும் $a > 1$ ஆயின் $2/a$ ஆகவும் இருக்குமென நிறுவுக.

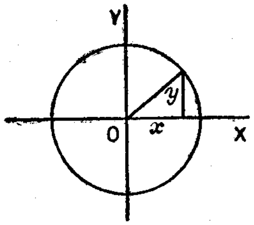
√**16.** $\int_0^{\text{கோசை}^{-1}\frac{3}{5}} \text{சீக}\, x\,\text{மட}\,(\text{சீக}x + \text{தான்}x)\,dx = \tfrac{1}{2}(\text{மட}\, 3)^2$ என நிறுவுக.

அதிகாரம் VII

பிரயோகங்கள் : பரப்பளவுகள், கனவளவுகள், புவியீர்ப்பு மையங்கள்

7.1 வட்டமொன்றின் பரப்பளவு. a ஒரு வட்டத்தின் ஆரையாகுக, ஆயின், அதன் மையத்தூடாகச் செல்லும் செவ்வக அச்சுப்பற்றிய அதன் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2.$$



இது

$$y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$$ ஐத் தரும்.

நேர்க் கால்வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு

$$y = +\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

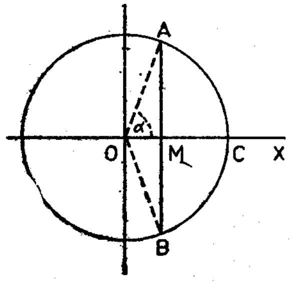
என எடுப்போம். சமச்சீரால், பரப்பளவானது நேர்க் கால்வட்டத்திலுள்ள பரப்பளவின் நாலு மடங்காகும்

அதாவது $$4\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx.$$

இதன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு $x = a\,\text{சைன்}\,\theta$ எனப் பிரதியிட, $dx = a\,\text{கோசை}\,\theta\,d\theta$; $x = 0$ ஆகும்பொழுது $\theta = 0$; $x = a$ ஆகும்பொழுது $\theta = \frac{1}{2}\pi$; ஆகவே பரப்பளவு,

$$\doteq 4a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^2\theta\,d\theta = \pi a^2 \qquad (6.6).$$

7.11 வட்டத் துண்டமொன்றின் பரப்பளவு. 7.1 இன் குறியீட்டோடு OY யிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நாண் AB, வேண்டிய பரப்பளவைக்கொண்ட துண்டம் ACB யை வெட்டுகிறதென்க ; நாண் AB மையம் O வில் 2α கோணத்தை எதிரமைக்கிறதென்க.



AB யானது OX ஆல் M இல் செங்கோணங்களில் இரு கூறிடப்பட்டால், **7.1** இற்போலப் பரப்பளவு

$$ACB = 2\int_{OM}^{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx .$$

இங்கு, $OM = a\,\text{கோசை}\,\alpha$.

இங்கு $x = a\,\text{கோசை}\,\theta$ எனப் பிரதியிடல் இசைவாகும்; ஆயின்,

$$dx = -a\,\text{சைன்}\,\theta\,d\theta.$$

புதிய கிழெல்லே

a கோசை $\theta = OM = a$ கோசை α, அல்லது $\theta = \alpha$, ஆலும்

a கோசை $\theta = a$, அல்லது $\theta = 0$ ஆலும் தரப்படும்.

ஆகவே, பரப்பளவு $ACB = -2a^2\int_\alpha^0$ சைன்$^2\theta \, d\theta$

$$= -a^2\int_\alpha^0 (1 - \text{கோசை } 2\theta)\, d\theta$$

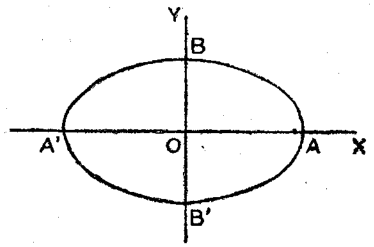
$$= -a^2\Big[\theta - \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta\Big]_\alpha^0$$

$$= a^2 (\alpha - \text{சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha).$$

இ.தே. $AB = 2a$ சைன் α வாயும், $OM = a$ கோசை α வாயும் இருத்தலால், முக்கோணி OAB யின் பரப்பளவு a^2 சைன் α கோசை α ஆகும்; அம்முக்கோணியை அத்துண்டத்தோடு கூட்டுதலால் ஆரைச்சிறை $OACB$ இன் பரப்பளவு $a^2\alpha$ ஆகும்; அதாவது ஆரையின் வர்க்கத்தை ஆரையனில் அளந்த ஆரைச்சிறைக்கோணத்தின் அரையாற் பெருக்க வருவதாகும். (பக்கம் 52 இலுள்ள அடிக் குறிப்பைப் பார்க்க.)

7.12 நீள்வளையத்தின் பரப்பளவு. ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதத்திலிருந்து ஒரு நீள்வளையமானது இரு சமச்சீரச்சுக்களோடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$$



என்னுஞ் சமன்பாட்டைக் கொண்ட ஒரு முட்டையுருவுடைய வளையியாகுமெனக் கற்றோம்.

அவ்வளையி x-அச்சை A', A என்பனவற்றில்

$$A'O = OA = a$$

ஆகுமாறும் y-அச்சை B', B என்பனவற்றில்

$$B'O = OB = b.$$

ஆகுமாறும் வெட்டும்.

அச்சமன்பாட்டை y யிற்குத் தீர்த்தால் $y = \pm b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ ஆகும்; அதோடு நேர்க் கால்வட்டத்தில் y யிற்கு நேர்க் குறியைக் கொள்ளுவோம் ஆயின், நேர்க் கால்வட்டத்திற் கிடக்கும் நீள்வளையப் பகுதியின் பரப்பளவு

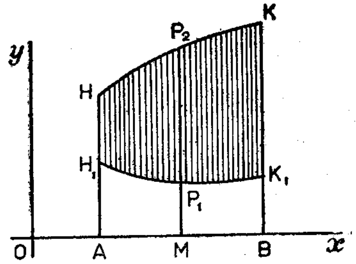
$$\int_0^a b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} dx.$$

இதன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு $x = a$ சைன் θ எனப் பிரதியிடுக; ஆயின், $dx = a$ கோசை $\theta\, d\theta$; 7.1 இற்போல் 0, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவே θ விற்கு எல்லைகள். ஆகவே, காற்பகுதிப் பரப்பளவு

$$= ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^2\, \theta\, d\theta = \tfrac{1}{4}\pi ab \ (6.6)$$

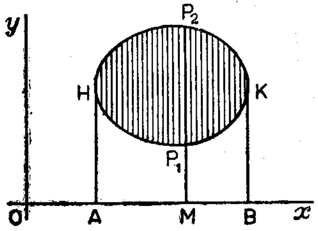
எனின், முழு நீள்வளையத்தின் பரப்புளவு $= \pi ab$.

7.2 சில வேளைகளிற் காண வேண்டிய பரப்பளவு ஒரு வளையிக்கும் x—அச்சிற்கும் இடையிற் இருப்பதற்குப் பதிலாக இரு வளையிகளுக் கிடையில் இருக்கும்; உதாரணம் படத்திலுள்ள HH_1K_1K என்னும் நிழலூட்டிய பரப்பளவு. இது AH_1K_1B எனும் பரப்பளவை $AHKB$ எனும் பரப்பளவிலிருந்து கழிப்பதாற் காணப்படலாம்; அப்பரப்பளவு ஒரு தனித் தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படக்கூடும்; அதற்குக் காரணம் A, B என்பனவற்றிற்கிடையில் யாதும் ஒரு புள்ளி M இலிருந்து எடுத்த நிலைக்கூறு அவ்வளையிகளை P_1, P_2 ஆகியவற்றிற் சந்திக்க; MP_1, MP_2 என்பனவற்றை y_1, y_2 என்பனவற்றுற் குறித்தோமாயின், வேண்டிய பரப்பளவு



$$\int_a^b (y_2 - y_1)\, dx.$$

இங்கு, y கள் அவ்விரு வளையிகளின் சமன்பாடுகளாலே தரப்பட்ட x இன் சார்புகளாகும்; $OA = a$, $OB = b$.



சிலவேளைகளில், ஒரு சமன்பாடு படத்திலுள்ள HP_2KP_1 என்பதைப் போன்ற ஒரு மூடிய முட்டையுரு வளையியைக் குறிக்கும். y யிற்கு x பற்றி எடுத்த ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு OA, OB என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் y யின் இரு பெறுமானங்கள் இருக்க, y யின் வேறு யாதும் பெறுமானத்திற்கு y யின் மெய்ப் பெறுமானம் ஏதும் இல்லையாயின், y அத்தகைய வளையியைக் குறிக்கும். பின்னர், $OM(=x)$ என்பது OA, OB என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடப்ப, y_1, y_2 என்பன M இலுள்ள MP_1, MP_2 எனும் நிலைக்கூறுகளைக் குறித்தால், அம்முட்டையுருவின்

பரப்பளவு $\int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$ ஆகும். a, b என்பன y யில் மெய்மூலங்களைத் தருகின்ற x இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானமும் மிகப் பெரிய பெறுமானமும் ஆகுமென நாம் அறிகிறோம்.

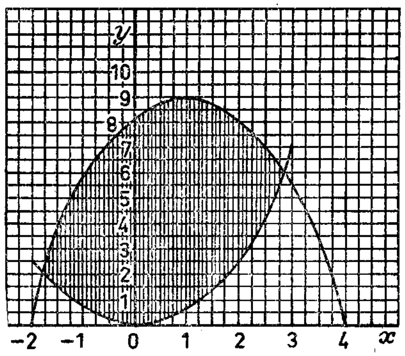
7.21 உதாரணங்கள்.

(i) பின்வரும் வளையிடுகளை வரைக :

(i) $y = (x+2)(4-x)$,

(ii) $8y = 7x^2$.

அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளையும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பரப்பளவையுங் காண்க.



y யை நீக்க,

$$8(8+2x-x^2) = 7x^2,$$

அல்லது $(3x-8)(5x+8) = 0$.

ஆகவே, $x = -\frac{8}{5}$, $x = \frac{8}{3}$ ஆகிய புள்ளிகளில், அவ்வளையிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும். வேண்டிய பரப்பளவு படத்தில் நிழற்றிய பரப்பளவாகும்.

அவ்வளையிகள் இரண்டு பரவளைவுகளாகும். அப்பரப்பளவின் மேல் வரைப்பாடே முதலாம் வளையி; ஆயின், பரப்பளவு

$$= \int_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{3}} \{(x+2)(4-x) - \tfrac{7}{8}x^2\}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{3}} \{8 + 2x - \tfrac{15}{8}x^2\}\, dx = \left[8x + x^2 - \tfrac{5}{8}x^3\right]_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{3}}$$

$$= 24\tfrac{184}{675}.$$

(ii) $5x^2 - 4xy + y^2 + 15x - 10y + 29 = 0$ என்னும் வளையியின் முழுப் பரப்பளவையுங் காண்க.

அச்சமன்பாட்டை x இலே y யிற்கு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக எழுத,

$$y^2 - 2y(2x+5) + 5x^2 + 15x + 29 = 0 \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

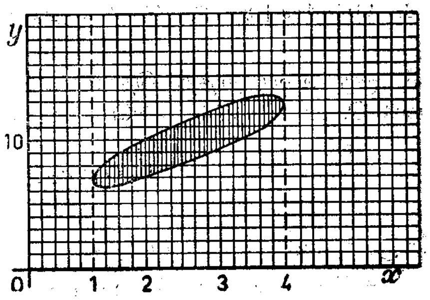
ஆகவே, $y = (2x+5) \pm \sqrt{\{(x-1)(4-x)\}}$.

எனின், $1 \leqslant x \leqslant 4$ ஆயிற்றுன், y மெய்யாகும்.

$x = 1$, $x = 4$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் y - அச்சிற்கு வரையும் எந்த ஒரு சமாந்தரமும் அவ்வளையியைத் தம் நிலைக்கூறுகள் y_1, y_2 என்பனவாயுள்ள இரு புள்ளிகளிற் சந்திக்கும் ; இங்கு,

$$y_1 = 2x + 5 - \sqrt{\{(x-1\ (4-x)\}},$$

$$y_2 = 2x + 5 + \sqrt{\{(x-1)(4-x)\}}.$$



அன்றியும், $x = 1$ ஆகையில் y யில் இரு மூலங்களும் 7 இற்குச் சமமாகும்; $x = 4$ ஆகும்பொழுது மூலங்கள் இரண்டும் 13 இற்குச் சமமாகும் ; ஆகவே, வளையி படத்தில் உள்ளது போன்றிருக்கும்.

$$\text{பரப்பளவு} = \int_1^4 (y_2 - y_1)\, dx$$

$$= 2\int_1^4 \sqrt{\{(x-1)(4-x)\}}\, dx.$$

இதன் பெறுமானத்தைக் கணித்தற்கு $x =$ கோசை$^2\theta + 4$ சைன்$^2\theta$ எனப் பிரதியிடுக (**6.8 (xiv)** ஐப் பார்க்க.) ; ஆயின், $dx = 6$ சைன்θ கோசை$\theta\, d\theta$, $x - 1 = 3$ சைன்$^2\theta$; $4 - x = 3$ கோசை$^2\theta$.

அன்றியும் எல்லைகளுக்கு,

(i) $x = 1$ ஆகும்பொழுது சைன்$^2\theta = 0$ ஆகும் ; ஆகவே $\theta = 0$.

(ii) $x = 4$ ஆகும்பொழுது கோசை$^2\theta = 0$ ஆகும் ; ஆகவே $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

எனவே,

$$\text{பரப்பளவு} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 18 \text{ சைன்}^2\theta \text{ கோசை}^2\theta\, d\theta = 36\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\text{சைன்}^2\theta - \text{சைன்}^4\theta)\, d\theta$$

$$= 36\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}\pi.$$

7.22 பயிற்சி

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ எனும் வளையியின் பரப்பளவைக் காண்க.

2. $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ எனும் பரவளைகளுக்கு இடையிலுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

3. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவாலும் $y = x$ என்னுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

4. $x = 0$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் $y = 2$சைன் x, $y =$ சைன்^{2} $2x$ எனும் வளையிகளுக்கு இடையிலுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

5. $x^2 + y^2 = 2x$ என்னும் வட்டமானது $x = y$ எனுங் கோட்டாற் பிரிக்கப்பட்ட பரப்பளவுகளைக் காண்க.

7—CP 943 (6/67)

6. $12x^2+4xy+y^2=20x$ எனும் வளையியின் பரப்பளவைக் காண்க.

7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ எனும் வளையியின் பரப்பளவைக் காண்க.

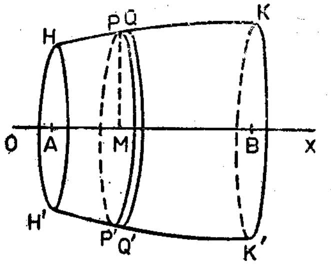
8. $13x^2-4xy+y^2-27x-90=0$ எனும் வளையியின் பரப்பளவைக் காண்க.

7.3 ஒரு வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு குறித்த கூட்டுத்தொகையின் எல்லையென **6.3** இற் கண்டோம்; அதாவது

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{எல்}_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f_r\delta_r\,;$$

இங்கு, δ_r என்பது பிரிபட்ட $(b-a)$ யினது n பகுதிகளுள் யாதுமொன்றைக் குறிக்கின்றது; f_r என்பது δ_r இன் யாதோ ஒரு புள்ளியிலுள்ள $f(x)$ இன் பெறுமானம். ஒரு பரப்பளவானது அத்தகைய கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் குறிக்கப்படலாம் என்றும், அதுபற்றி ஒரு பரப்பளவு ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படலாம் என்றும் கண்டோம். எனினும், பரப்பளவுகளேயன்றி, கனவளவுகள், திணிவுகள், புவியீர்ப்பு மையங்களைக் காணுதற்கு வேண்டிய திருப்பங்கள், சடத்துவத் திருப்பங்கள் என்பனவும் அவ்வாறு கணிக்கப்படலாம்; உண்மையில், இம்முறை பருமனுள்ள யாதொன்றுக்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம்; அது அளக்கப்படத்தக்க ஒரு பெருந்தொகையான பகுதிகளாக வசதிபோல் மேலும் பிரிக்கப்படலாம்.

7.31 சுற்றற்றிண்மம் ஒன்றின் கனவளவு. சுற்றற்றிண்மமானது தனது அச்சிற்குச் செங்கோணங்களில் உள்ள தளத்தாலாகும் ஒவ்வொரு வெட்டும் வட்டமாயுள்ள ஒரு பொருள்.



$HKK'H'$ என்பது அத்தகைத் திண்மத்தைக் குறிக்க; அச்சு OX ஐ அதன் அச்சாகக் கொள்க. அத்திண்மத்திற்குத் தளமுனைகள் உண்டெனக் கொள்வோம்; அவை A, B என்னும் மையங்களையுடைய HH', KK' என்னும் வட்டங்களாகுக; இங்கு $OA=a$, $OB=b$.

அத்திண்மம் அச்சிற்குச் செங்கோணங்களில் வெட்டுகின்ற தளங்களால் வட்டச் சீவல்களாக வெட்டப்படலாம். $PP'Q'Q$ என்பது இச்சீவல்களுள் ஒன்றைக் குறிக்கும்; M என்பது PP' எனும் வட்டத்தின் மையம்; OM ஐ x ஆலும், MP யை y ஆலும் அச்சீவலினது தடிப்பை δx ஆலும் குறிக்கலாம். வட்ட வெட்டின் பரப்பளவு πy^2; அச்சீவலின் கனவளவு போதிய செம்மையோடு $\pi y^2\delta x$ ஆற் குறிக்கப்படும்; A, B என்பன

வற்றிற்கு இடையிலுள்ள சீவல்களினது தொகை வரையறையின்றிக் கூடுதலுறும்படி செய்யப்பட அத்திண்மத்தின் கனவளவு $\Sigma\pi y^2\delta x$ என்னும் கூட்டுத் தொகையின் எல்லையாகும்; எனினும், இது $\int_a^b \pi y^2 dx$.

மேலுஞ் செல்லுதற்கு, y யின் வடிவத்தை x இன் ஒரு சார்பாக அறிதல் வேண்டும்; அதாவது, திண்மத்தினுடைய பரப்பின் **நள்வான் வளையி** எனப்படும் வளையி HK யின் சமன்பாட்டை அறிதல்.

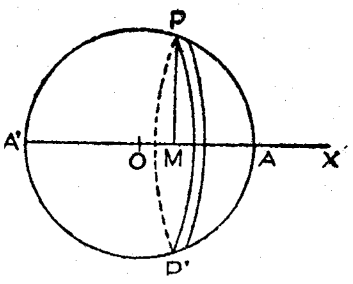
அத்திண்மத்தின் பரப்பானது உருவத்தின் அச்சுப்பற்றி நள்வான் வளையி HK யைச் சுற்றுவதாற் பெறப்படும் என்பது தெளிவு.

7.311 கோளமொன்றின் கனவளவு. a என்பது ஆரையாகும். தாளினது தளம் அக்கோளத்தை $APA'P'$ எனும் ஒரு வட்டத்தில் வெட்டுக. ஒரு விட்டம் $A'OA$ ஐ x-அச்சாகக் கொள்க.

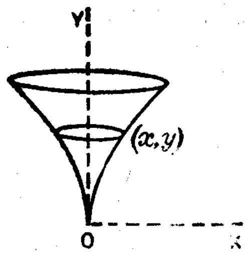
OX இற்குச் செங்கோணங்களில் தளங்களால் வெட்டப்படும் வெட்டுகள் வட்டங்களாகும். MP $(=y)$ அத்தகை வட்டத்தின் ஆரையாகுக; இங்கு $OM=x$. எனின், $x^2+y^2=a^2$; அக்கோளத்தின் கனவளவு

$$=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=\Big[a^2x-\tfrac{1}{3}x^3\Big]_{-a}^{a}=\tfrac{4}{3}\pi a^3.$$



7.312 உதாரணங்கள். **y நேராயிருக்க, $x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்குமுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் வளையி y-அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது; வளைபரப்பாலும் ஒரு தளமுனையாலும் அடக்கப்பட்ட கனவளவைக் காண்க.**



y-அச்சானது உருவத்தின் அச்சாயிருக்கின்றமையால், ஒரு வட்டவெட்டின் பரப்பளவு πx^2 ஆகும். ஒரு சீவலினது தடிப்பு δy ஆகும்.

ஆகவே, கனவளவு $=\int_0^{2a}\pi x^2 dy$;

மேலெல்லை $x=a$ ஆகும்பொழுது y யின் பெறுமானமாகும்.

ஆகவே, கனவளவு $=\pi\int_0^{2a}\frac{y^4}{16a^2}dy=\frac{\pi}{80a^2}\times 32a^5=\frac{2}{5}\pi a^3.$

7.313 பயிற்சி.

1. $y=a$ சைன் bx என்னும் வளையியின் ஒரு மடிவு x – அச்சைச் சுற்றும்பொழுது அடைக்கப்பட்ட கனவளவைக் காண்க.

2. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பை ஒரு சுற்றுத் திண்மமெனக் கொண்டு அதன் கனவளவைக் காண்க.

3. ஓர் உருவமானது ஒரு வட்டத்தின் காற்பகுதி வில்லாலும் அதன் முனைகளிலுள்ள தொடலிகளாலும் அமைக்கப்படுகின்றது. அவ்வுருவத்தைத் தொடலிகளுள் ஒன்றுபற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைக் காண்க.

4. $ay^2=x^3$ ($x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்கும்) எனும் வளையியை y – அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற ஓர் இரட்டைக் கிண்ணம் ஆக்கப்படுகின்றது ; அதன் கனவளவைக் காண்க.

5. x – அச்சிற்கும் $y=(x-1)(x+2)$ எனும் பரவளைவிற்கும் இடையில் அடக்கப்படும் பரப்பளவை அவ்வச்சுப் பற்றிச் சுற்ற அமையுங் கனவளவைக் காண்க.

6. ஒரு வட்டத்தின் துண்டம் தனது நாண்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. ஆரை a, அவ்வட்டத்தின் மையத்தில் துண்டத்தின் வில் எதிரமைக்கின்றகோணம் 2α ஆகியவற்றின் உறுப்பாக அங்கு பிறப்பித்த கனவளவைக் காண்க.

7. $y^2=4(x-3)$ என்னும் வளையியாலும், y – அச்சாலும், $y=\pm 4$ என்னுங் கோடுகளாலும் வரைப்புற்ற உருவம் y – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; பிறப்பித்த கனவளவைக் காண்க.

8. $x=0$ இலிருந்து $x=c$ வரைக்குமுள்ள $y=c$ அகோசை (x/c) என்னும் வளையி y – அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட கிண்ணத்தின் கனவளவைக் காண்க.

7.4 ஈர்ப்பு மையங்கள். m_1, m_2, m_3, ... எனுந் திணிவுகளையுடைய துணிக்கைகளின் ஒரு தொகுதி A_1, A_2, A_3, ... எனும் ஒரு தளப் புள்ளிகளில் இருக்க, அப்புள்ளிகள் அத்தளத்து யாதுமொரு நேர்க் கோட்டிலிருந்து x_1, x_2, x_3, ... என்னுந் தூரங்களில் இருந்தால், அத்திணிவுகளின் ஈர்ப்பு மையம் G ஆனது அதே நேர் கோட்டிலிருந்து தூரம்

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\ldots\ldots}{m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots}=\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

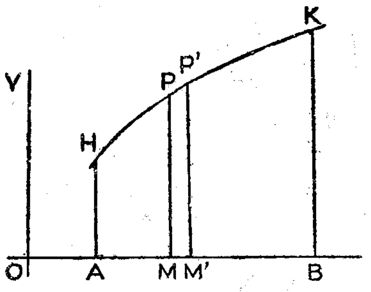
இல் இருக்குமென்பது நிலையியல் நூல்களிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. அன்றியும், A_1, A_2, A_3, ... என்பன வேறு வேறு பொருள்களின் ஈர்ப்பு மையங்களாயின், m_1, m_2, m_3, ... என்னுந் திணிவுகளையுடைய **ஒரு பொருட் தொடையின்** புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் அதே சூத்திரம் பொருந்தும். அன்றியும், A_1, A_2, A_3 . . . . என்பன ஒரு தளப் புள்ளிகளில்லாவிடினும், x என்பன ஒரு தளத்திலிருந்து அளந்த தூரங்களைக் குறிக்குமாயின், அதே சூத்திரம் பொருந்தும்.

அன்றியும், திணிவுகளைப் பற்றிய பிரச்சினையாகாது, பரப்புகள் அல்லது கனவளவுகள் போன்றனவற்றின் பிரச்சினையாயிருக்கும் போதும், ... m_1, m_2, m_3 என்பனவற்றிற்குப் பதிலாகத் தம் இடை மையங்கள் A_1, A_2, A_3,

. . . . என்பனவற்றிலுள்ள பரப்பளவு மூலகங்களையாதல் கனவளவு மூலகங்களையாதல் பிரதியிடுவோமாயின், அதே சூத்திரம் **இடை மையத்தை**, அல்லது **மையப்போலியைத்** துணிதற்கு உதவும்.

இது பின்வரும் பிரிவில் எடுத்துக் காட்டப்படும்.

7.41 பரப்பளவின் மையப்போலி. பரப்பளவானது HK எனும் ஒரு வளையியாலும் x – அச்சினாலும், AH, BK எனுமிரு நிலைக்கூறுகளாலும் வரைப்புறுகிறதென்க ; இங்கு $OA=a$, $OB=b$ ஆகுக ; $y=f(x)$ என்பது அவ்வளையியின் சமன்பாடென்க.



அப்பரப்பளவை **OY** யிற்குச் சமாந்தரமாக $MPP'M'$ போன்ற ஒரு தொகையான ஒடுங்கிய கீலங்களாக அப்பரப்பளவை நாம் பிரிக்க, $OM=x$ ஆயும் $MM'=\delta x$ ஆயும், $MP=y$ ஆயும் இருந்தால், இக்கீலத்தின் பரப்பளவு எம் நோக்கிற்குத் தகப் போதிய செம்மையோடு $y\delta x$ ஆகும்.

இது ஒரு வகையுரியான பரப்பளவு மூலகம் ; இதனை $\bar{x}$ இற்கு உரிய சூத்திரத்தின் "m" ஆக நாம் வழங்கலாம். அக்கீலத்தினுடைய இடை மையத்தின் ஆள்கூறுகள் அண்ணளவாக x, $\frac{1}{2}y$ என்பன. எனின், $AHKB$ என்னும் பரப்பளவினது மையப்போலியின் ஆள்கூறுகள்

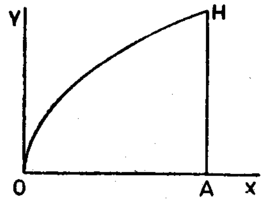
$$\bar{x}=\frac{\Sigma(x.y\delta x)}{\Sigma(y\delta x)}, \quad \bar{y}=\frac{\Sigma(\frac{1}{2}y.y\delta x)}{\Sigma(y\delta x)} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு, AH, BK என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கீலத்தொகை வரையறையின்றிக் கூடுதலுறும்பொழுது இக்கூட்டுத்தொகைகள் அணுகும் எல்லைப் பெறுமானங்களை நாம் எடுத்தோம்.

$$\text{ஆகவே,} \quad \bar{x}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \quad \bar{y}=\frac{\int_a^b \frac{1}{2}y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

7.411 உதாரணங்கள்.

(i) **x — அச்சிற்கும், நேர்க் கால்வட்டத்திலுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் வளையிக்கும் $x=h$ இலுள்ள நிலைக்கூறுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவினது மையப்போலியைக்காண்க.**



இவ்வகையில்,

$$\bar{x}=\frac{\int_0^h xy\,dx}{\int_0^h y\,dx}=\frac{\int_0^h 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\int_0^h 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}=\frac{\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{5}h\ ;$$

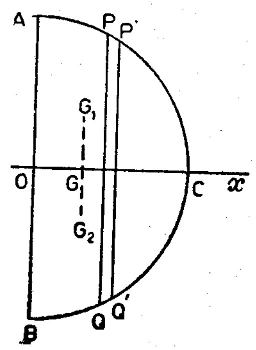
$$\bar{y}=\frac{\int_0^h \frac{1}{2}y^2\,dx}{\int_0^h y\,dx}=\frac{\int_0^h 2ax\,dx}{\int_0^h 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\,dx}=\frac{a^{\frac{1}{2}}h^2}{\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}.$$

ஆகவே, அப்பரப்பளவு OAH எனின், மையப்போலி $(\frac{3}{5}OA,\ \frac{3}{4}AH)$ என்னும் புள்ளியாகும்.

(ii) **ஒருசீரான அரைவட்டத் தகடொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.**

அரைவட்டம் ACB யின் மையம் O ஆகவும் a அதன் ஆரையாயும் இருக்க. அத்தகட்டை விட்டம் AOB யிற்குச் சமாந்தரமான $PQQ'P'$ என்பது போன்ற ஒடுக்கமான கீலங்களாகப் பிரித்தோமாயின் அத்தகைய கீலங்கள் எல்லாம் ஆரை OC யால் AB யிற்குச் செங்கோணங்களில் இரு கூறிடப்படும்.

OC, OA என்பனவற்றை x – அச்சாயும் y – அச்சாயும் எடுக்க. ஆயின், P என்பது $(x,\ y)$ என்னும் புள்ளியெனின், $x^2+y^2=a^2$; எல்லாக் கீலங்களினுடைய ஈர்ப்பு மையங்களும் Ox இல் இருக்கும் ; கீலம் ஒன்றினது திணிவு அதன் பரப்பளவு $2y\delta x$ இற்கு விகிதசமமெனக் கொண்டால்,



$$\bar{x}=\frac{\int_0^a x.2y\,dx}{\int_0^a 2y\,dx}=\frac{\int_0^a 2x\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}{\text{அரைவட்டத்தின் பரப்பளவு}}$$

$$=\frac{\left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$$

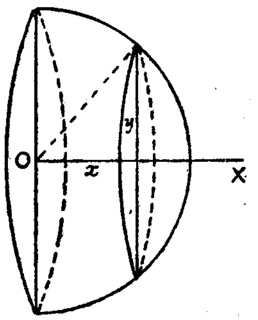
கி.தே. G_1, G_2 என்பன OAC, OCB என்னும் இரண்டு கால்வட்டத் தகடுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களாயின், கோடு G_1G_2 சமச்சீரால் AB யிற்குச் சமாந்தரமாய் அம்முழுத் தகட்டின் ஈர்ப்பு மையமாகிய G யினூடாகச் செல்ல வேண்டும். ஆகவே, OA யிலிருந்து G_1 இனது தூரம் $4a/3\pi$; சமச்சீரால், அது அக்கால்வட்டத்தின் மற்ற வரைப்புற்ற ஆரையாகிய OC யிலிருந்து அதே தூரத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

7.42 சுற்றற் கனவளவினது மையப்போலி. 7.31 இன் படத்தைப் பார்க்க, கனவளவின் வகையுரி மூலகம் தன் மையம் x – அச்சில் உற்பத்தியிலிருந்து x தூரத்தில் இருக்கின்ற $\pi y^2\delta x$ என்னும் அளவுள்ள ஒரு வட்டச் சீவல் எனக் காண்கின்றோம் ; ஆயின்,

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b \pi xy^2\,dx}{\int_a^b \pi y^2\,dx}=\frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}.$$

7.421 உதாரணம். ஒருசீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

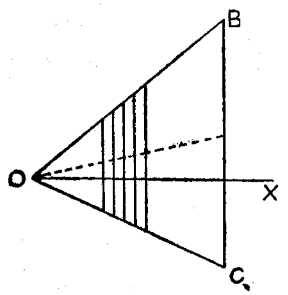
x – அச்சைத் தளவடிக்குச் செங்கோணங்களில் எடுத்து அடிக்குச் சமாந்தரமாய் சீவல்கள் எடுக்கப்பட அவற்றின் மையங்கள் அவ்வச்சிற் கிடக்கும். அவ்வரைக் கோளத்தின் ஆரை a யாயும், O விலிருந்து x தூரத்திலுள்ள வட்டவெட்டின் ஆரை y யாயும் இருந்தால் $x^2+y^2=a^2$ எனப் பெறுவோம். எனின்,



$$\bar{x}=\frac{\int_0^a \pi xy^2\,dx}{\int_0^a \pi y^2\,dx}=\frac{\int_0^a x(a^2-x^2)dx}{\int_0^a (a^2-x^2)dx}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^4}{a^3-\frac{1}{3}a^3}=\frac{3}{8}a.$$

7.43 ஈர்ப்பு மையங்கள் பற்றிய மேலதிக உதாரணங்கள். பின்வரும் முடிபுகள் தொகையிடாமல் எளிதாகப் பெறப்படும் ; எனினும் ஒரு முறையின் உதாரணங்களாக அத்தேற்றங்களை வழங்குகின்றோம்.



(i) **ஒருசீரான முக்கோணித் தகடு.** OBC என்பது அத்தகட்டைக் குறிக்க. BC யிற்குச் செங்கோணங்களில் OX என்னும் ஓர் அச்சை எடுக்க ; அத்தகட்டை BC யிற்குச் சமாந்தரமான கோடுகளாற் கீலங்களாகப் பிரிக்க.

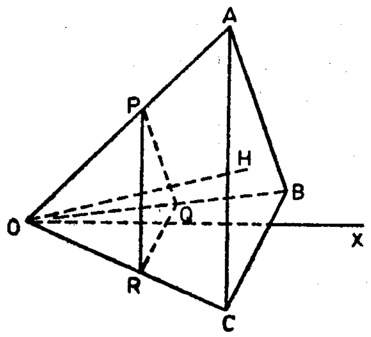
$BC=a$ யாயும், h என்பது O இலிருந்து BC யினது தூரமாயும் இருந்தால், இயல்பொத்த முக்கோணிகளால் O விலிருந்து x தூரத்திலுள்ள ஒரு கீலத்தினது நீளம் $\frac{x}{h}\ a$ ஆகும். δx ஒரு கீலத்தின் அகலமாயும் $\frac{a}{h}\ x\delta x$ அதன்

பரப்பளவாயும் எடுக்கின்றேம். இயல்பொத்த முக்கோணிகளாதலால், எல்லா ஒடுக்கமான கீலங்களின் மையங்களும் O வினூடாகவும் (இடையம்) BC யின் மையத்திற் கூடாகவுஞ் செல்கின்ற ஒரு கோட்டிற் கிடக்குமென்பது எளிதாகக் காட்டப்படும். அன்றியும், ஒரு கீலத்தினது திணிவு அதன் பரப்பளவிற்கு விகித சமமாயிருத்தலால்,

$$\bar{x}=\frac{\int_0^h x\frac{a}{h}x\,dx}{\int_0^h \frac{a}{h}x\,dx}=\frac{\frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}h^2}=\frac{2}{3}h\,;$$

ஆகவே, அவ்வீர்ப்பு மையம் ஒரு மூலையிலிருந்து எதிர்ப்பக்கத்திற்குச் செல்கின்ற இடையத்தின் வழியே அதன் $\frac{2}{3}$ பங்கு தூரமாகும்.

(ii) **ஒருசீரான திண்ம நான்முகி.** $OABC$ என்பது திண்ம நான்முகியாகுக; OX ஆனது ABC இற்குச் செங்கோணங்களிலுள்ள ஓர் அச்சாகுக. H என்பது ABC யின் மையப்போலியாயின், ABC யிற்குச் சமாந்தரமான யாதும் ஒரு தளவெட்டின் மையப்போலி OH இன்மீது கிடக்குமென இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து காட்டலாம். எனின், ABC யிற்குச் சமாந்தரமாய் மெல்லிய சீவல்களை எடுப்பதால், அந் நான்முகியின் ஈர்ப்பு மையம் OH இன்மீது கிடக்கும் என்பது பெறப்படும்.



இனி, பரப்பளவு ABC யை S உம் O விலிருந்து அதன் தூரத்தை h உம் குறித்தால், O விலிருந்து x தூரத்திலுள்ள ஒரு சமாந்தர வெட்டின் பரப்பளவு

$$\triangle PQR : \triangle ABC = PR^2 : AC^2$$
$$= OP^2 : OA^2 = x^2 : h^2$$

என்பதாலே தரப்படும்.

ஆகவே, $\frac{x^2}{h^2}S$ என்பதை ஒரு சீவலின் பரப்பளவாயும் δx என்பதை அதனுடைய தடிப்பாயும் $\frac{S}{h^2}x^2\delta x$ என்பதை அதன் கனவளவாயும் நாம் எடுக்கலாம்.

எனின், $$\bar{x}=\frac{\int_0^h x.\frac{S}{h^2}x^2\,dx}{\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2\,dx}=\frac{\frac{1}{4}h^4}{\frac{1}{3}h^3}=\frac{3}{4}h.$$

ஆகவே, அந்நான்முகியின் ஈர்ப்பு மையம் O விலிருந்து H இற்குச் செல்லும் வழியில் முக்காற் பங்கில் இருக்கும்.

கி.தே. அதுபோல, ஒருசீரான திண்மக் கூம்பகத்தின் ஈர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து அடியினது மையப்போலிக்குச் செல்லும் வழியில் முக்காற் பங்கில் இருக்குமெனக் காட்டலாம்.

தளவடியையுடைய யாதும் ஒரு வடிவக் கூம்புக்கும் அதே முடிபு உண்மையாகும்; அதற்குக் காரணங் கூம்பானது வரையறையின்றிய பல ஒடுக்கமான முகங்களோடு கூடிய ஒரு கூம்பகத்தின் எல்லை வடிவமெனக் கொள்ளப்படலாம் என்பதே.

7.44 சடத்துவத் திருப்பங்கள். m ஒரு பொருளின் ஒரு மூலகத்தினது திணிவாயும், r ஓர் அச்சிலிருந்து அம்மூலகத்தினது தூரமாயும் இருந்தால், அவ்வச்சுப்பற்றி அப்பொருளின் **சடத்துவத் திருப்பம்** $\Sigma\,(mr^2)$ என வரையறுக்கப்படும்; அதாவது ஒவ்வொரு மூலகத்தினது திணிவையும் அவ்வச்சிலிருந்தான அதன் தூரத்தின் வர்க்கத்தாற் பெருக்க வருவனவற்றின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

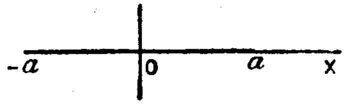
M ஒரு பொருளின் முழுத் திணிவைக் குறிக்க, Mk^2, ஒரு குறித்த அச்சுப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பமாயிருந்தால், k என்பது அவ்வச்சுப்பற்றி அப்பொருளின் **சுழிப்பாரை** எனப்படும். இவ்வாறு $k^2=\Sigma\,(mr^2)\,/\,M$.

அப்பொருள் தகடுபோன்ற தளப்பொருளாயின், அதன் கண்ணேயேயுள்ள ஒரு புள்ளிபற்றிய அதன் சடத்துவத் திருப்பம்பற்றி நாம் பேசலாம்; அதன் கருத்து அத்தளத்திற்குச் செங்கோணங்களில் அப்புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் ஓர் அச்சுப்பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திருப்பம் என்பதே.

7.441 உதாரணங்கள்.

(i) திணிவு M உம் ஆரை a யும் உள்ள ஒரு மெல்லிய வட்டவளையத்தினது தளத்திற்குச் செங்கோணங்களில் அதன் மையத்திற்கூடாகச் செல்லும் ஓர் அச்சுப் பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திருப்பமானது, ஒவ்வொரு திணிவு மூலகமும் மையத்திலிருந்து ஒரே தூரம் a யில் இருப்பதாகக் கொண்டால், Ma^2 ஆகும்.

(ii) ஒருசீரான நேர்க்கோல் ஒன்றினது நீளத்திற்குச் செங்கோணத்தில் அதன் மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் ஓர் அச்சுப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.



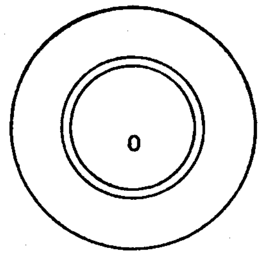
M அதன் திணிவாயும், $2a$ அதன் நீளமாயும் இருக்க ; உற்பத்தியை அக்கோலினது மையத்திலும் x – அச்சை அக்கோலின் வழியேயும் எடுக்க.

0 விலிருந்து x தூரத்திலுள்ளதும் δx நீளமுமான மூலகத்தின் திணிவு $M\frac{\delta x}{2a}$ ஆகும். எனின் சடத்துவத் திருப்பம் $-a$ யிலிருந்து a வரைக்கும் x இன் பெறுமானங்களுக்குக் கூட்டப்பட $\Sigma\left(M\frac{\delta x}{2a}x^2\right)$ ஆகும் ; அதாவது

$$\frac{M}{2a}\int_{-a}^{a} x^2\,dx=\frac{M}{2a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\tfrac{1}{3}\,Ma^2 \quad \text{ஆகும்.}$$

சுழிப்பாரை $k^2=\frac{1}{3}a^2$ என்பதாலே தரப்படும்.

(iii) ஒரு வட்டத் தட்டின் மையம்பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.



M அத்தட்டினது திணிவும் a அதன் ஆரையும் ஆகுக.

ஒருமைய வட்டங்கள் வரைவதால், அத்தட்டு ஒடுக்கமான வட்ட வளையங்கள் கொண்ட ஒரு தொடையாகப் பிரிக்கப்படலாம். அத்தகைய வளையத்தின் ஆரை r ஆகவும், δr அதன் அகலமாயும் இருந்தால்,அதன்பரப்பளவு $2\pi r\delta r$ ஆகும் ; அத்தட்டின் முழுப்பரப்பளவு πa^2 ஆகும். ஆகவே, அவ்வளையத்தின் திணிவு $\frac{2\pi r\delta r}{\pi a^2}M$, அல்லது $\frac{2M}{a^2}\,r\delta r$ ஆகும் ; இவ் வளையத்தின் ஒவ்வொரு மூலகமும் மையம் O விலிருந்து r தூரத்திலிருக்கும் ; ஆகவே அத்தட்டின் சடத்துவத் திருப்பமானது O விற்கும் a யிற்கும் இடையிலுள்ள r இன் பெறுமானங்களுக்குக் கூட்டப்பட $\Sigma\left(\frac{2M}{a^2}\,r^3\delta r\right)$, அல்லது $\frac{2M}{a^2}\int_0^a r^3dr=\frac{1}{2}Ma^2$ ஆகும்.

(iv) ஒரு சுற்றற்றிண்மத்தின் அச்சுப்பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

7.31 இன் படத்தை நோக்க, அத்திண்மம் $PP'Q'Q$ போன்ற வட்டத் தட்டுக்களின் ஓர் அடுக்கின் எல்லை வடிவமாகக் கொள்ளப்படலாம். இத் தட்டின் கனவளவு $\pi y^2\delta x$ ஆகும் ; அதனுடைய திணிவு $m\pi y^2\delta x$

ஆகும் ; இங்கு, m, அத்திண்மத்தின் ஓரலகு கனவளவினது திணிவு. அன்றியும், சென்ற பயிற்சியால், அத்தட்டின் அச்சுப்பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

$$\tfrac{1}{2}\,m\pi y^2\delta x.y^2=\tfrac{1}{2}\,m\pi y^4\delta x.$$

எனின், அச்சுப்பற்றி அம்முழுத் திண்மத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{1}{2}\,\pi m\int_a^b y^4\,dx$ ஆகும் ; இங்கு, நள்வான் வளையியின் சமன்பாட்டால், y என்பது x இன் உறுப்புகளால் தரப்படும்.

7.442 பயிற்சி.

1. பின்வருவனவற்றின் மையப்போலிகளினது ஆள்கூறுகளைக் காண்க :

(i) $y=a$ சைன் $\frac{x}{b}$ எனும் வளையியின் ஒரு மடிவு ;

(ii) $y=(x+1)(x-3)$ என்னும் வளையிக்கும் x – அச்சிற்கும் இடையில் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு ;

(iii) $y=x^2\ (x-1)$ எனும் வளையியாலும், x – அச்சாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு ;

(iv) $y^2=x^2(1-x^2)$ எனும் வளையியினது ஒரு தடத்தின் பரப்பளவு ;

(v) ஒரு சுற்றற் கனவளவாகக் கொள்ளப்பட்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பு ;

(vi) a ஆரையையுடைய ஒரு கோளம் மையத்திலிருந்து c தூரத்திலுள்ள ஒரு தளத்தாற் பிரிக்கப்பட்ட துண்டங்கள் ;

(vii) தன் முனைகள் a, b எனும், ஆரைகளையுடைய வட்டங்களாகவும் தன் அச்சு h நீளமுள்ளதாயும் இருக்கின்ற முண்டித்த நேர்வட்டக் கூம்பு ஒன்று ;

(viii) தன் முனைகள் 5, 1 என்னும் ஆரைகளையுடைய வட்டங்களாயும் தன் நள்வான் வளையி $4(y-1)=x^2$ என்பதாயுமுள்ள x – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றிய ஒரு சுற்றற் கனவளவு.

2. பின்வருவனவற்றின் சடத்துவத் திருப்பங்களைக் காண்க :

(i) ஒருசீரான சதுரத் தகடு, அதன் பக்கங்களுள் ஒன்று பற்றி ;

(ii) ஒரு நேர்க்கோல் அதன் ஒரு முனைபற்றி, அக்கோலின் அடர்த்தி அம்முனையிலிருந்து உள்ள தூரத்தோடு மாறுகின்றபொழுது ;

(iii) ஒருசீரான முக்கோணித் தகடு ஒன்று, அதன் பக்கங்களுள் ஒன்று பற்றி ;

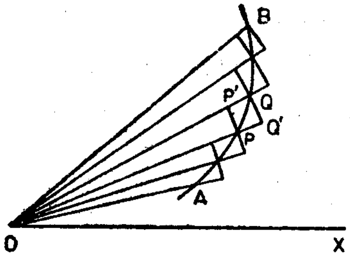
(iv) ஒருசீரான வட்டத் தகடு ஒன்று, ஒரு விட்டம் பற்றி ;

(v) ஒருநேர் வட்டக் கூம்பு அதன் அச்சுப்பற்றி ;

(vi) x – அச்சினாலும், $x=h$ என்னுங் கோட்டினாலும், $y=\sqrt{(kx)}$ என்னும் வளையியாலும் உருவத்தை x – அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பெறப்படுந் திண்மம், அவ்வுருவத்தின் அச்சுப் பற்றித் திருப்பம் எடுக்கப்படும்பொழுது ;

(vii) தனது வரைப்பாடு $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ஆயுள்ள ஒருசீரானதகடு ஒன்று, முறையே x – அச்சுப்பற்றியும் y – அச்சுப் பற்றியும்.

7.5 முனைவாள்கூறுகளிற் பரப்பளவுகள். தன் சமன்பாடு $r=f(\theta)$ ஆயுள்ள வளையி AB யாலும் OA, OB எனுமிரு ஆரைக்காவிகளாலும் வரைப்புற்ற ஆரைச் சிறைப் பரப்பளவைக் காணல்.



$AOX=\alpha$ வும்; $BOX=\beta$ வும் ஆகுக. O வினூடக அவ்வளையியின் ஆரைகளை வரைதலால், கோணம் AOB யை ஒரு தொகையான பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

பின்னர் இவ்வாரைகளின் முனைகளுக் கூடாக வட்ட விற்கள் வரைதலால், வட்ட ஆரைச் சிறைகளின் இரு தொடைகளை அமைக்கின்றேம். OPP' போன்ற ஆரைச் சிறைத் தொடை ஒன்றின் கூட்டுத் தொகையினது பரப்பளவு வேண்டிய பரப்பளவு OAB யிலுஞ் சிறிது; OQQ' போன்ற மற்றைய ஆரைச்சிறைத் தொடையின் கூட்டுத்தொகையினது பரப்பளவு OAB என்னும் பரப்பளவிலும் பெரிது. எனினும், ஆரைச்சிறைகளினுடைய தொகை கூடுதலுற, அவ்விருவகை ஆரைச் சிறைகளின் பரப்பளவுகள் சமத்தை அணுகுவதுடன்; அவை கோணவகலத்திற் குறைதலுறும்.

இனி, புள்ளி $P\,(r,\theta)$ ஆயும், புள்ளி, Q, $(r+\delta r,\ \theta+\delta\theta)$ ஆயுமிருந்தால், POQ எனுங் கோணம் $\delta\theta$ ஆகும்; POP' எனும் வட்ட ஆரைச் சிறையின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}r^2\delta\theta$ ஆகும் (7.11 கி. தே.) எனின், சிறு பிரிவுகளினது தொகை முடிவிலியை அணுக, OAB எனும் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\Sigma r^2\delta\theta$ வின் எல்லையாகும்;

$$\text{அதாவது பரப்பளவு } OAB=\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta.$$

7.51 உதாரணங்கள்.

(i) மையத்தில் முனைவுள்ள ஒரு நீள்வளையத்தின் முனைவுச் சமன்பாடு

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\text{கோசை}^2\theta}{a^2}+\frac{\text{சைன்}^2\theta}{b^2},$$

பரப்பளவைக் காண்க.

ஒவ்வொரு கால்வட்டத்திலும் உள்ள பரப்பளவு சமமாகும்; ஆகவே,

$$\text{பரப்பளவு}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}r^2d\theta=2a^2b^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{b^2\,\text{கோசை}^2\theta+a^2\,\text{சைன்}^2\theta}$$

$$=2a^2b^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{சீக}^2\theta\,d\theta}{b^2+a^2\,\text{தான்}^2\theta}=2a^2b^2\left[\frac{1}{ab}\,\text{தான்}^{-1}\left(\frac{a\,\text{தான்}\,\theta}{b}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

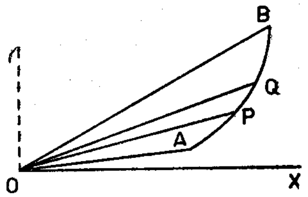
$$=2ab.\tfrac{1}{2}\pi=\pi ab,$$ 7.12 இற்போல.

(ii) $r^2=a^2$ கோசை 2θ என்னும் வளையியினது ஒரு தடத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $\theta=-\frac{1}{4}\pi$ ஆகும்பொழுதும் $\theta=+\frac{1}{4}\pi$ ஆகும் பொழுதும் r பூச்சியமாகும் என்றும், θ வின் இடையான பெறுமானங்கள் r இற்கு யாதொன்றும் பூச்சியமல்லாத முடிவுள்ள பெறுமானங்களைத் தரும் என்றும், எனவே, இவையே ஒரு தடத்தின் பரப்பளவிற்கு எடுக்கப்பட வேண்டிய எல்லைகள் என்றும் நாம் காண்கின்றேம்.

$$\text{எனின், பரப்பளவு}=\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}a^2\,\text{கோசை}\,2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{4}a^2\Big[\text{சைன்}\,2\theta\Big]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}=\tfrac{1}{2}a^2.$$

7.52 ஆரைச்சிறைப் பரப்பளவுகளின் மையப்போலிகள். பரப்பளவின் ஒரு வகையுரி மூலகம் மிக்க அண்ணளவாக $\frac{1}{2}r^2\delta\theta$ என்னும் பரப்பளவுடைய OPQ என்னும் ஓர் ஒடுக்கமான ஆரைச் சிறையாகும்.



ஒரு முக்கோணியின் மையப்போலி ஒரு இடையத்தின் வழியே அதன் நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ பங்கில் இருத்தலால், OPQ என்னும் ஆரைச்சிறையின் அகலம் வரையறையின்றிக் குறைதலுற, அதன் மையப்போலியின் ஆள்கூறுகள் $\frac{2}{3}r$ கோசை θ, $\frac{2}{3}r$ சைன் θ என்பனவாகும்.

$$\text{ஆகவே,}\quad \bar{x}=\frac{\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}r\,\text{கோசை}\,\theta.\frac{1}{2}r^2d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\,d\theta}=\frac{2}{3}\frac{\int_\alpha^\beta r^3\,\text{கோசை}\,\theta\,d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}$$

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}r\,\text{சைன்}\,\theta.\frac{1}{2}r^2\,d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\,d\theta}=\frac{2}{3}\frac{\int_\alpha^\beta r^3\,\text{சைன்}\,\theta\,d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}.$$

7.521 உதாரணம். **$r=a\,(1+$ கோசை $\theta)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும் மூடிய வளையியின் (இதயவுருவின்) மையப்போலியைக் காண்க.**

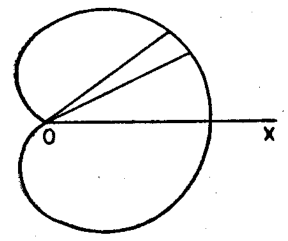
θ வின் குறியை மாற்றுவதால் அச்சமன்பாடு மாறாது; ஆயின் அவ் வளையி x – அச்சுப் பற்றிச் சமச்சீராகும்; சமச்சீரால் அதன் மையப்போலி OX இன் மீது கிடக்கும்.

அவ்வளையியின் மேற்பாதிக்கு θ வின் எல்லைகள் O விலிருந்து π வரைக்குமாகும்.

ஆகவே,

$$\bar{x} = \tfrac{2}{3}\frac{\int_0^{\pi} a^3(1+\text{கோசை}\,\theta)^3\,\text{கோசை}\,\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi} a^2(1+\text{கோசை}\,\theta)^2\,d\theta}$$

$$= \tfrac{2}{3}a\frac{\int_0^{\pi}(\text{கோசை}\,\theta + 3\,\text{கோசை}^2\,\theta + 3\,\text{கோசை}^3\,\theta + \text{கோசை}^4\,\theta)\,d\theta}{\int_0^{\pi}(1+2\,\text{கோசை}\,\theta + \text{கோசை}^2\,\theta)\,d\theta}$$



இப்போது 6.6 ஐப் பயன்படுத்திக் கொண்டு, O இலிருந்து π வரைக்குந் தொகையிட்ட கோசை θ வின் ஓர் ஒற்றை வலு பூச்சிய முடிபைக் கொடுக்குமென்பதையும் ஞாபகத்தில் வைத்துக் கொள்ள

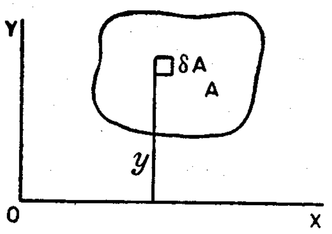
$$\bar{x} = \tfrac{2}{3}a\cdot\frac{6\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\pi + 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{5}{6}a.$$

7.6 பப்பசின் தேற்றம்.

ஒரு தளப் பரப்பளவு தனது தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சுப்பற்றி, அதனை வெட்டாது சுற்றினுற், பிறக்குங் கனவளவு அப்பரப்பளவை அதன் மையப்போலியினது பாதையின் நீளத்தாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்திற்குச் சமன்.

அப்பரப்பளவு எந்த அச்சைப் பற்றிச்சுற்றுகிறதோ அந்த அச்சை x – அச்சாக எடுக்க. A பரப்பளவையும் δA என்பது OX இலிருந்து y தூரத்திலுள்ள அதன் சிறு மூலகம் ஒன்றையுங் குறிக்க. அவ்வுருவம் OX பற்றிச் சுற்ற, மூலகம் δA, $2\pi y$ என்னும் நீளத்தையும் δA எனுங் குறுக்கு வெட்டையும், அதுபற்றி $2\pi y\delta A$ என்னுங் கனவளவையும் உடைய ஓர் ஒடுக்கமான குழாயை வரையும். எனின், பரப்பளவு A யாற் பிறப்பிக்கப்படும் முழுக் கனவளவும், பரப்பளவின் மூலகத் தொகை முடிவிலியை அணுக, $2\pi\Sigma(y\delta A)$ யின் எல்லையாகும். எனினும், $\bar{y}$ என்பது OX இலிருந்து பரப்பளவு A யின் மையப்போலிக்குள்ள தூரமாயின்,



$$\bar{y}A = \text{எல்}\ \Sigma(y\delta A).$$

எனவே, வேண்டிய கனவளவு

$$= 2\pi\bar{y}A$$

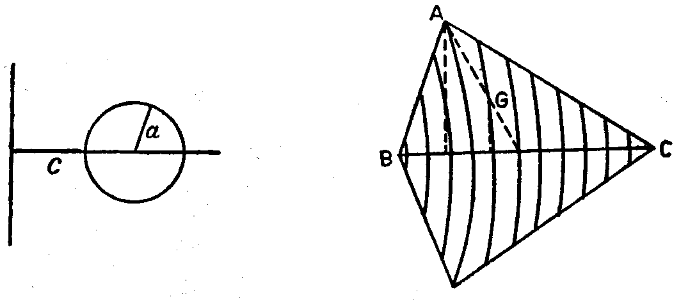
$$= A \times \text{அதன் மையப்போலியினது பாதையின் நீளம்.}$$

7.61 உதாரணங்கள்.

(i) a ஆரையையுடைய ஒரு வட்டம் தன் மையத்திலிருந்து $c\,(>a)$ தூரத்திலே தனது தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது.

அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட திண்ம வளையத்தின் கனவளவு

$$\pi a^2 \times 2\pi c = 2\pi^2 a^2 c.$$



(ii) அடி a யாயும், உயரம் h ஆகவுமுள்ள ஒரு முக்கோணி தனது அடிபற்றிச் சுற்றுகிறது. பிறப்பிக்கப்பட்ட திண்மத்தின் கனவளவு என்ன ?

பரப்பளவு $= \frac{1}{2}ah$; மையப்போலி G, $\frac{1}{3}h$ ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தை வரையும்.

ஆகவே, கனவளவு $= \frac{1}{2}ah \times \frac{2\pi}{3}h$

$$= \tfrac{1}{3}\pi ah^2.$$

அத்திண்மம் πh^2 எனும் பரப்பளவையுடைய ஒரு பொது அடியையும் a எனும் மொத்த உயரத்தையுங் கொண்ட இரு கூம்புகளாலாயது என்பதிலிருந்து இது தெளிவாகும்.

7.62 பயிற்சி.

1. பின்வரும் வளையிகளாலுங் கூறப்பட்ட ஆரைக் காவிகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவுகளைக் காண்க :

(i) சுருளி $r = a\theta$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$;

(ii) சுருளி $r = ae^{k\theta}$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

2. பின்வரும் வளையிகள் ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு தடத்தின் பரப்பளவைக் காண்க :

(i) $r = a$ சைன் 2θ ; (ii) $r = a$ சைன் $n\theta$.

3. $\theta=0,\ \theta=\alpha$ என்பனவற்றிற்கு இடையே $r=a$ சீக$^2\frac{1}{2}\theta$ எனும் வளையியினது ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு

$$a^2\,(\text{தான்}\ \tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{3}\ \text{தான்}^3\ \tfrac{1}{2}\alpha)$$

எனக் காட்டுக.

4. $r=2+$ கோசை θ எனும் வளையியைப் பருமபடியாக வரைந்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

5. $r=a$ கோசை 2θ என்னும் வளையியினது ஒரு தடத்தின் பரப்பளவினது மையப் போலியைக் காண்க ; இவ்வளையத்தை y—அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைத் துணிக.

6. $r=a+b$ கோசை θ $(a>b)$ என்னும் வளையியினது பரப்பளவின் மையப்போலியைக் காண்க.

7. $\theta=0$ இலிருந்து $\theta=\pi$ வரைக்குமுள்ள $r=a\,(1-$கோசை $\theta)$ என்னும் வளையியின் ஆரைச்சிறைப் பரப்பளவினது மையப்போலியைக் காண்க ; இப்பரப்பளவை x—அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவையும் உய்த்தறிக.

8. ஒரு திண்ம வளையத்தின் உட்பரப்பு, a ஆரையையும் h உயரத்தையுமுடைய ஒரு வட்டவுருளை ; அவ்வளையத்தின் குறுக்கு வெட்டு (h பக்கத்தையுடைய) சமபக்க முக்கோணி. அவ்வளையத்தின் கனவளவு $\frac{1}{2}\sqrt{3}\pi h^2\,(a+h/2\sqrt{3})$ என நிறுவுக.

9. ஓர் உருவம், ஒரு வட்டத்தின் கால்வட்ட வில் ஒன்றுலும் அதன் முனைகளிலுள்ள ஆரைகளாலும் வரைப்புறுகின்றது. அவ்வில்லின் முனைகளுள் ஒன்றிலுள்ள தொடலி பற்றி அவ்வுருவத்தைச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைக் காண்க.

10. a ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட உருளையைச் சுற்றி ஒரு தவாளிப்பு வெட்டப்படுகின்றது, அத்தவாளிப்பின் குறுக்கு வெட்டு b என்னும் பக்கத்தையுடைய சமபக்க முக்கோணியாயின், வெட்டப்பட்ட கனவளவைக் காண்க.

11. ஓர் அரைவட்டப்பரப்பளவினது மையப்போலியைத் துணிதற்குப் பப்பசினது தேற்றத்தையும் ஒரு கோளத்தினது கனவளவுக்குரிய கோவையையும் பயன்படுத்துக.

12. $r=a$ கோசை 2θ என்னும் வளையியின் தடம் ஒன்று $r=\frac{1}{2}a$ என்னும் வட்டத்தாற் பிரிக்கப்படும் இரு பகுதிகளின் பரப்பளவுகளையுங் காண்க.

13. $y=a\,($சைன் $x+\frac{1}{3}$ சைன் $3x)$ எனும் வளையிக்கும் x— அச்சிற்கும் இடையே $0,\ \pi$ எனும் எல்லைகளுக்குட் கிடக்கின்ற பரப்பளவு A, $20a/9$ என்று காட்டுக ; இப்பரப்பளவை x—அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பெறப்படுங் கனவளவு V, $4V=\pi^2 aA$ என்பதாலே தரப்படும் என்றுங் காட்டுக.

14. $x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்குமுள்ள $y=b$ சைன்$^2\,(\pi x/a)$ எனும் வளையியை x—அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பெறப்படுங் கனவளவு $\frac{3}{8}\pi ab^2$ எனக் காட்டுக. சுற்றப்பட்ட பரப்பளவையுங் காண்க ; அதனுடைய மையப்போலியின் ஆள்கூறுகள் $(\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{8}b)$ என உய்த்தறிக.

15. $x=0,\ x=a$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $ay^2=x^2\,(a-x)$ எனும் வளையியின் பகுதி x—அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறப்பிக்கப்பட்ட கனவளவு a விட்டத்தையுடைய ஒரு கோளத்தினது கனவளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

16. $\theta=0$ இலிருந்து $\theta=\frac{1}{3}\pi$ வரைக்குமுள்ள $r=a\,(1+$கோசை $\theta)$ என்னும் வளையியின் ஆரைச்சிறை ஆரம்பக் கோடுபற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறப்பிக்கப்பட்ட கனவளவு $\frac{175}{96}\pi a^3$ என நிறுவுக.

17. $r=a$ சைன் 3θ என்னும் வளையிக்கு ஒவ்வொன்றும் $\pi a^2/12$ பரப்பளவு கொண்ட ஆறு வளையங்கள் உண்டு என்றும், உற்பத்தியிலிருந்து ஒரு வளையத்தினது மையப்போலியினுடைய தூரம் $81\sqrt{3}a/80\pi$ என்றுங் காட்டுக.

அதிகாரம் VIII

பகுதி வகையிடல்.

சிறு மாற்றங்கள்

8.1 $u=f(x,y,z)$ என்பது $x,\ y,\ z$ என்னுஞ் சாரா மாறிகளின் ஒரு சார்பாகுக. இதன் பொருள், x இலாதல் y யிலாதல் z இலாதல் யாதும் ஒரு மாற்றம் u வில் மாற்றத்தைத் தரும் என்பதும்; x இல் ஒரு மாற்றமெனின் $x,\ y,\ z$ என்பன ஒன்றையொன்று சாராதிருக்கின்றமையால் y யிலாதல் z இலாதல் ஒரு மாற்றத்தையுந் தராதென்பதுமே.

$y,\ z$ என்பன மாறுதிருக்க x, δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தைப் பெறுகின்றதெனக் கொள்க ; ஆயின் u ஒரு பின்னுறு ஏற்றம் δu வைப் பெறும் ; ஆகவே

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\delta x}$$

$\delta x\to 0$ ஆக, இவ்விகிதத்தின் எல்லை $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும். இது **x ஐக் குறித்த u வின் பகுதி வகையீட்டுக் குணகம்,** அல்லது **x ஐக் குறித்த u வின் பகுதிப் பெறுதி** எனப்படும்.

அதுபோல, u வின் பகுதிப் பெறுதிகளை y யைக் குறித்தும் z ஐக் குறித்தும்

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\underset{\delta y\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{f(x,y+\delta y,z)-f(x,y,z)}{\delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\underset{\delta z\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{f(x,y,z+\delta z)-f(x,y,z)}{\delta z}$$

என்னுஞ் சூத்திரங்களால் நாம் வரையறுக்கலாம்.

இவ்வாறு, பகுதியாய் வகையிடும் செய்கை பல சாராமாறிகளின் சார்பொன்றிற்குப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு செய்கையாகும் ; அம்மாறிகளுள், ஒன்றை விட ஏனையவெல்லாம் வகையிடுதற் செய்கையின்போது மாறிலிகளாகக் கொள்ளப்படும் ; மற்றைப்படி அச்செய்கை பொதுவான வகையிடுதலைப் போலச் செய்யப்படும்.

8.11 உதாரணங்கள்.

(i) $u=x^2y^3z^4$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3z^4,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2z^4,\ \frac{\partial u}{\partial z}=4x^2y^3z^3.$$

(ii) $u = e^{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}.$$

(iii) $u =$ சைன் (ax^2+by^2).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax \text{ கோசை } (ax^2+by^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by \text{ கோசை } (ax^2+by^2).$$

8.12 குறிப்பீடு. $f'(x)$ என்பது $f(x)$ இன் பெறுதியைக் குறிப்பதுபோல $f_x'(x,y)$, $f'_y(x, y)$ என்பன x, y என்பனவற்றைக் குறித்த $f(x, y)$ இன் பகுதிப் பெறுதிகளைக் குறிப்பனவாக வழங்கப்படும்; சிலவேளை களிற் கீறு தவிர்க்கப்படும்; ஆயின், $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ என்பன அப்பகுதிப் பெறுதிகளையே குறித்தற்கு வழங்கப்படும்.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ என்பது x குறித்துப் பகுதியாக வகையிடப்பட்டால் முடிபு $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்; அதுபோல, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ என்பதன் பொருள் y யைக் குறித்த $\partial u/\partial y$ இன் பகுதிப் பெறுதி என்பதே.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ என்பதன் பொருள் x குறித்த $\partial u/\partial y$ இன் பகுதிப் பெறுதி என்பதே; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதன் பொருள் y குறித்த $\partial u/\partial x$ இன் பகுதிப் பெறுதி என்பதே. பெருந் தொகையான சார்புகளுக்கு வகையிடும் வரிசை பற்றி நியமம் யாதும் இல்லை என்பது உண்மை;

அதாவது
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

எனினும் இவ்விதிக்கு விலக்கு உண்டு.

8.2 முப்பரிமாண ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம். ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களிலுள்ள OX, OY, OZ எனும் மூன்று அச்சுக்களை எடுக்க; அதாவது OZ ஆனது XOY என்னுந் தளத்திற்கு செங் கோணங்களில் இருக்குமாறும் அவ்வாறே பிறவும் இருக்குமாறும் எடுக்க.

யாதும் ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து தளம் XOY யிற்குச் செங்கோணங் களில் அதனை M இற் சந்திக்குமாறு, PM ஐ வரைய L என்பது OX அச்சின்மீது M இன் எறியமாயின், OL, LM, MP என்பன YOZ, ZOX, XOY ஆகிய தளங்களிலிருந்து P யினது தூரங்களாகும்; அவை P யின் ஆள்கூறுகளெனப்பட்டு x, y, z என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும்.

P யானது ஒரு பரப்பிற் கிடக்கின்றதெனக் கொள்க; ஆயின், அதன் z – ஆள்கூறு MP பொதுவாக XOY என்னுந் தளத்தில் M இனது நிலையைச் சார்ந்து இருக்கும்; அதுபற்றி அது x, y என்பன வற்றின் ஒரு சார்பாகும்; எனின், அப்பரப்பின் சமன்பாடு

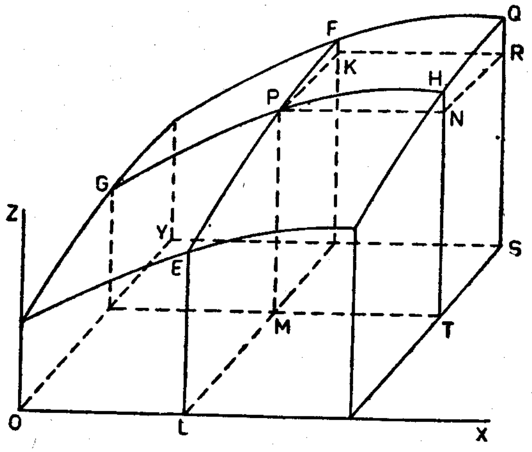
$$z = f(x, y)$$

என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

இப்போது y மாறுத புள்ளிகளில் எல்லாம் ZOX இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்தில் இருக்கும்; அத்தகைத் தளம் அப்பரப்பை GPH எனும் ஒரு வளையியில் வெட்டும்.

எனின், y மாறுதிருக்க x ஐக் குறித்த z இன் பெறுதியாகிய $\partial z/\partial x$ என்பது P யில் வளையி GPH இன் படித்திறனுகும்; அல்லது, அது GPH என்னும் வளையிக்கு P யிலுள்ள தொடலி OX இற்குச் சமாந்தர மான ஒரு கோட்டோடு ஆக்குங் கோணத்தினது தான்சன் ஆகும்.

அதுபோல, P யினூடாக YOZ இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளம் அப்பரப்பை EPF என்னும் வளையியில் வெட்டும்; $\partial z/\partial y$ என்பது P யிலுள்ள இவ்வளையியின் படித்திறனுகும்.



இனி, Q என்பது $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ என்னும் ஆள்கூறுகளை யுடைய அயற் புள்ளியாகுக. P யிற்கூடாக ஆள்கூற்றுத் தளங்களுக்குச் சமாந்தரமான தளங்களும், Q விற்கூடாக ZOX, ZOY என்பனவற்றிற் குச் சமாந்தரமான தளங்களும் வரைவதால், $PN = \delta x$ ஆயும் $NR = \delta y$ ஆயும் $\delta z = QS - PM = QR$ ஆயும் இருக்கும் $PNRK$ என்னும் ஒரு செவ்வகத்தைப் படத்தில் பெறுகிறேம்.

δz என்பதை δx, δy என்பனவற்றில் உணர்த்த விரும்புகிறேம். அப்பரப்பில் P யிலிருந்து Q விற்கு இரண்டு படிகளிற் செல்வோம். முதலாவதாக y மாருதிருக்கச் PH இன் வழியேயும் இரண்டாவதாக x மாருதிருக்கச் HQ வின் வழியேயுஞ் செல்வோம்.

y யானது PH இன் வழியே மாருதிருக்க, x ஆனது δx என்னும் ஒரு தொகையாற் கூடுதலுறுகின்றமையின் z, அல்லது $f(x, y)$ இலுள்ள ஏற்றம்

$$f(x+\delta x, y)-f(x, y),$$

y மாருதிருக்கின்றமையால், **3.2** ஆல் இது

$$\{f_x'(x, y)+\epsilon\}\,\delta x \quad \text{இற்குச் சமன்.}$$

இங்கு $\delta x \to 0$ ஆக, ϵ என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் ஒரு சிறு கணியம்.

எனின், $$HT-PM=\{f_x'(x, y)+\epsilon\}\delta x \qquad \ldots\ldots(1).$$

இனி, HQ வின் வழியே y யானது δy எனும் ஒரு தொகையாற் கூடுதலுறுகின்றது ; எனினும், x ஆனது H இலுள்ள பெறுமானம், அதாவது $x+\delta x$ என்பதை வைத்திருக்கும் ; ஆகவே, z இல் ஏற்றம்

$$QS-HT=f(x+\delta x, y+\delta y)-f(x+\delta x, y).$$

இங்கு, $x+\delta x$ ஒரு மாறிலி எனக் கொள்ளப்பட வேண்டும் ; வலப்பக்கத்திலுள்ள இரண்டு சார்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள ஒரேயொரு வித்தியாசமானது ஒன்று $y+\delta y$ இன் ஒரு சார்பாயிருக்க மற்றையது y யின் அதே சார்பாயிருத்தலே ; ஆகவே, **3.2** இற்போல இவ்வித்தியாசம்

$$=\{f_y'(x+\delta x, y)+\epsilon_1\}\,\delta y$$

இங்கு, $\delta y \to 0$ ஆக, ϵ_1 என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் ஒரு சிறு கணியம்.

எனின், $$QS-HT=\{f_y'(x+\delta x, y)+\epsilon_1\}\,\delta y \qquad \ldots\ldots(2).$$

(1) ஐயும் (2) ஐயுங் கூட்ட.,

$$\delta z=QS-PM=f_x'(x, y)\,\delta x+f_y'(x+\delta x, y)\,\delta y+\epsilon\delta x+\epsilon_1\delta y.$$

இங்போது $f_y'(x+\delta x, y)$ என்பது H இல் HQ எனும் வளையியின் படித்திறன் ; அது $f_y'(x, y)$ இலிருந்து அல்லது P யிலுள்ள PF எனும் வளையியின் படித்திறனிலிருந்து (பரப்பைப் பற்றி யாதோ ஒரு தனிச்சிறப்பு இருந்தாலன்றி) δx உடன் ஒரு முடிவுள்ள விகிதத்தைக் கொள்ளும் ஒரு சிறு ($\epsilon_2\,\delta x$ ஆல் என்க) வித்தியாசப்படும்.

எனின், $$\delta z=f_x'(x, y)\,\delta x+f_y'(x, y)\,\delta y+\eta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

இங்கு η என்பது δx, அல்லது δy யிலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையுடைய ஒரு கணியம்.

இம்முடிபு பின்வருமாறும் எழுதப்படலாம்.

$$\delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\delta y+\eta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

η என்னுஞ் சிறு கணியத்தைப் புறக்கணிக்கும்போது **அண்ணளவாக** இது

$$\delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\delta y. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

என்ருகும்.

8.3. பல மாறிகளின் சார்பொன்றினது பகுதி வகையீடுகளும் மொத்த வகையீடுகளும். $z=f(x, y)$ என்பது x, y என்னும் இரு சாரா மாறிகளின் ஒரு சார்பாகுக ; z இன் பகுதி வகையீடுகள் $\frac{\partial z}{\partial x}dx$, $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ என வரையறுக்கப்படும் ; z இன் மொத்த வகையீடு அதன் பகுதி வகையீடுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும் ; அதாவது

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

இங்கு dx, dy என்பன எதேச்சையாகத் தேரப்படுகின்றன ; எனின், இச்சூத்திரம் வகையீடு dz ஐ வரையறுக்கின்றது.

3.2. இற்போல நாம் வகையீடுகளேயும் ஏற்றங்களேயும் வேறு பிரித்தறிய வேண்டும். மேலேயுள்ள சூத்திரம் (1), dz இன் வரைவிலக்கணமாதலின், ஒரு செம்மையான தொடர்பாகும்; எனினும் வகையீடுகளுக்குப் பதிலாக **ஏற்றங்களே** வழங்கும்பொழுது x, y களிலான தந்த ஏற்றங்களுக்கு ஒத்த z இன் ஏற்றம், சென்ற பிரிவின் (4) ஆலே தரப்படும் என்றும், அப்பிரிவினது தொடர்பு (5) ஆனது ஓர் அண்ணளவான முடிபேயாகும் என்றும் நாம் ஞாபகத்தில் வைத்தல் வேண்டும்.

z என்பது $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ எனும் ஒரு தொகையான சாரா மாறிகளின் ஒரு சார்பாயிருக்கும்பொழுது, z இன் மொத்த வகையீடு

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

என்னுந் தொடர்பால் வரையறுக்கப்படும் ; $x_1, x_2, \ldots x_n$ எனும் ஏற்றங்களுக்கு ஒத்த z இன் ஏற்றம் δz ஆனது

$$\delta z=\frac{\partial z}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}\delta x_2+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\delta x_n+\eta \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

என்பதாலே தரப்படுமெனக் காட்டப்படலாம் ; இங்கு $\delta x_1, \delta x_2, \ldots \delta x_n$ என்பனவற்றிலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையைக் கொண்ட ஒரு சிறு கணியமே η ஆகும்.

8.4. z **என்பது** x, y **என்பனவற்றின் ஒரு சார்பாயும்,** x, y **என்னும் இரண்டும் வேறொரு மாறி** t **யின் சார்புகளாயும் இருக்க, அதுபற்றி** z **உம்** t **யின் ஒரு சார்பாயிருந்தால்** dz/dt **யைக் காணல்.**

t ஓர் ஏற்றம் δt யைப் பெறுக ; $\delta x, \delta y, \delta z$ என்பன அதன் பயனாய் x, y, z என்பனவற்றில் வரும் ஏற்றங்களாகுக. எனின், **8.2** (4) இலிருந்து

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y + \eta,$$

ஆயின், δt ஆல் பிரிக்க,

$$\frac{\delta z}{\delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\eta}{\delta t}.$$

இனி, $\delta t \to 0$ ஆகுக ; எனின்,

$$\underset{\delta t\to 0}{\text{எல்}}\frac{\delta z}{\delta t} = \frac{dz}{dt}, \quad \underset{\delta t\to 0}{\text{எல்}}\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad \underset{\delta t\to 0}{\text{எல்}}\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt};$$

η என்பது δx, அல்லது δy, அல்லது δt இலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையுடையதாகையால், $\underset{\delta t\to 0}{\text{எல்}}\dfrac{\eta}{\delta t} = 0$,

எனவே,
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

இச்சூத்திரத்தில் t யே ஒரேயொரு தனிச் சாராமாறி என்றும் t யைக் குறித்த பெறுதிகள் பொதுப் பெறுதிகள் என்றும் ஏனைய பெறுதிகள் பகுதிப் பெறுதிகள் என்றும் அறிக.

கி. தே. z என்பது x, y என்பனவற்றின் ஒரு சார்பாயிருக்க, y என்பது x இன் ஒரு சார்பாயின், இது மேற்கூறிய நியாயத்தில் $t = x$ எனப் பிரதியிடுவதை ஒக்கும், ; ஆயின் இவ்வகையில்.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

இச்சூத்திரத்தில் dz/dx இற்கும் $\partial z/\partial x$ இற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசத்தை எடுத்துக் காட்டுதற்கு, $y = f(x)$ ஆயுள்ள

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

எனும் உதாரணத்தை ஆராய்க.

இங்கு,
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy, \quad \frac{dy}{dx} = f'(x);$$

ஆகவே,
$$\frac{dz}{dx} = 2\{ax + by + (bx + cy)f'(x)\}.$$

8.5 உள்ளார் சார்புகள். $f(x,y) = 0$ எனுஞ் சமன்பாடு y யை x இன் ஒரு சார்பாக வரையறுப்பதாகக் கொள்ளப்படலாமெனின், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து y யை x பற்றி விளக்கமாக உணர்த்தக் கூடுமாயினும் உணர்த்தக் கூடாதாயினும், அத்தகைச் சமன்பாடு y யை x இன் ஒரு சார்பாக உள்ளார்ந்து வரையறுக்கின்ற தெனப்படும்.

$f(x,y) = 0$ **எனுந் தொடர்பால்** x **இன் ஒரு சார்பாய்** y **யானது உள்ளார்பாக வரையறுக்கப்படுகின்றதெனக் கொண்டு** dy/dx **ஐக் காண்பதற்கு**

$$z = f(x,y)$$

எனப் பிரதியிடுக.

எனின், **8.4** கி. தே. இலிருந்து

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

இங்கு, $z = 0$ எனப் பிரதியிட, சமன்பாடு $f(x,y) = 0$ என்பது

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

என்பதற்கு இட்டுச் செல்லும்.

ஆயின்,
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}.$$

உதாரணமாக :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ஆக, dy/dx **என்பதைக் காணல்.**

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(ax + hy + g)$ ஆயும் $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(hx + by + f)$ ஆயும் இருத்தலால்,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}.$$

மேலேயுள்ள தொடர்பு (1) ஐ

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \quad \dots.(2)$$

வடிவத்திலும் வகையீடுகளின் சார்பாய் எடுத்துரைக்கப்படலாமென நாம் அறிகிறோம் ; சற்று முன்னர் தந்த உதாரணத்திற்கு இவ்வடிவத்தைப் பிரயோகித்தால் நாம்

$$2(ax + hy + g)\,dx + 2(hx + by + f)\,dy = 0$$

என எழுதி, அதிலிருந்து dy/dx ஐ வகையீடுகளின் விகிதமாகப் பெறுகின்றோம்.

இது செய்கை முழுவதிலுஞ் சமச்சீரைப் பேணுகின்றது ; உண்மையாக, f இன் மொத்த வகையீடு $= 0$, அல்லது f இன் பகுதி வகையீடுகளின் கூட்டுத்தொகை $= 0$ என்பதை (2) குறிக்கின்றது.

உதாரணமாக :

$x^m y^n = a^{m+n}$ ஆகும்பொழுது dy/dx ஐக் காணல்.

இதனை

m மட $x + n$ மட $y = (m+n)$ மட a என எழுதல் வசதியாகும். பின்னர், வகையீடுகளை எடுக்க,

$$m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y} = 0\ ;$$

எனவே
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{my}{nx}.$$

8.51 பயிற்சி.

1. (x, y) என்னும் புள்ளியிற் பின்வருஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்பட்ட வளையிகளின் படித்திறன்களைக் காண்க :

(i) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; (ii) $x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$;

(iii) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$; (iv) $(x/a)^{\frac{1}{2}} + (y/b)^{\frac{1}{2}} = 1$;

(v) $x^5 + y^5 - 5\,ax^2y^2 = 0$; (vi) $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$

2. $z =$ தான்$^{-1}(y/x)$ எனின்,

$dz = (xdy - ydx)/(x^2+y^2)$ என நிறுவுக.

3. $r^2 = x^2 + y^2$ எனின்,

$rdr = xdx + ydy$ என நிறுவுக.

8.6 சிறு மாற்றங்கள். பின்வரும் விதமான பிரசினங்களுக்கு நுண் கணிதம் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

ஒரு முடிபு, குறித்த அளவீடுகளிலிருந்து கணிக்கப்படுகின்றது ; இவ்வளவீடுகளுள் ஒன்றோ பலவோ தரப்பட்ட ஓரளவு வழுவுக்கு உட்படுமென்பது தெரிந்ததே : கணித்த முடிவில் அதன் பின்னுறும் வழுவைக் காணல்.

ஒன்றைத் தவிர்த்து மற்றத் தரவுகள் எல்லாம் வழுநீங்கி நிற்கும்போது, அவ்வளவீட்டை x ஆலும் அது உட்படும் வழுவை δx ஆலும் நாம் குறிப்போம் ; எனின், கணிக்கப்படவேண்டிய முடிபு y ஆயின், ஏனையவெல்லாம் நிலையாய் இருக்க y மாறி x இன் ஒரு சார்பாகும் ; $y = f(x)$ என்க. எனின், x இல் δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தால் y யில் விளையும் ஏற்றம் அண்ணளவாக **(3.2)**

$$\delta y = f'(x)\,\delta x$$

என்பதாலே தரப்படும் ;

இதுவே வேண்டிய வழுவின் அளவாகும்.

8.61 உதாரணங்கள்.

(i) மட$_e$ $5 = 1{\cdot}609$ எனத் தரப்படின், மட$_e$ $5{\cdot}02$ இற்கு ஓர் அண்ணளவான பெறுமானங் காண்க.

$$y = \text{மட}_e\ x \text{ ஆகுக ; ஆயின், அண்ணளவாக } \delta y = \frac{\delta x}{x},$$

எனின், அண்ணளவாக, மட$_e$ $(x + \delta x) = y + \delta y =$ மட$_e$ $x + \dfrac{\delta x}{x}$

அல்லது
$$\text{மட}_e\ 5{\cdot}02 = \text{மட}_e\ 5 + \frac{{\cdot}02}{5}$$
$$= 1{\cdot}609 + {\cdot}004$$
$$= 1{\cdot}613.$$

(ii) ஒரு கோணம் தன் மட சைன் இலிருந்து காணப்பட வேண்டும். அக்கோணம் $60°$ இன் அயலில் இருக்கக், கணித்த மட சைன் இல் ${\cdot}0001$ என்னும் வழுக்காரணமாக அக் கோணத்திலுள்ள வழுவைச் செக்கனிற் காண்க.

$y =$ மட$_{10}$ சைன் $x =$ மட$_{10}e \times$ மட$_e$ சைன் $x = {\cdot}4343$ மட$_e$ சைன் x ஆகுக. **(4.421)**

ஆகவே, $\delta y = {\cdot}4343$ கோதா $x\ \delta x$.

இவ்வகையில் $\delta y = {\cdot}0001$; ஆயின்,

$\delta x = \dfrac{{\cdot}0001}{{\cdot}4343}$ தான்$60°$ என்பது அக்கோணத்திலுள்ள வழுவை ஆரையன் அளவையிலே தருகின்றது ; செக்கனில் அளக்க, வழு

$$= \frac{180 \times 60 \times 60}{4343\pi} \text{ தான் } 60°$$
$$= 82{\cdot}2.$$

(iii) ஒரு கோபுரம் பார்வையாளனின் கண் மட்டத்திற்கு மேலே 145அடி உயரத்திற்கு எழுகின்றது ; அக்கோபுர நுனியின் ஏற்றக் கோணம் $15°$ என அளக்கப்படுகின்றது. இவ்வளவீடு $\pm\,10'$ வழுவிற்கு உட்படுமாயின், அக்கோபுரத்தின் கணிக்கப்பட்ட தூரத்தில் இவ்வழு எவ்விளைவைக் கொடுக்கும் ?

y தூரத்தையும் x ஏற்றக் கோணத்தையுங் குறித்தால்,

$$y = 145 \text{ கோதா } x\ ;$$

ஆயின், அண்ணளவாக $\delta y = -145$ கோசீ$^2 x\ \delta x$,

இங்கு, கோசீ$^2 x =$ கோசீ^{2} $15°$; δx என்பது $\pm\,10'$ இன் ஆரையன் அளவு ;

அதாவது
$$\delta x = \pm\frac{\pi}{1080}.$$

ஆயின், $\delta y = \mp\dfrac{145\pi}{1080}$ கோசீ$^2 15° = \mp\ 6{\cdot}3$ அடி (வாய்பாடுகளை வழங்குதலால்).

(iv) ஒரு தான்சன் கல்வனோமானியில் ஓட்டமானது ஊசியினது திரும்பலின் தான்சனுக்கு விகிதசமமாய் இருக்கின்றது. பார்வையாளன் ஒருவன் அத்திரும்பலை அளவிடும்போது என்றும் ஒரே வழுவை விட்டானுயின், அளவீடு 45° ஆயிருக்கும்போது, ஓட்டத்தில் சதவீத வழு மிகச் சிறிதாகுமெனக் காட்டுக.

$$y = a \text{ தான் } x \text{ ஆகுக.}$$

இங்கு, x திரும்பலாயும், y ஓட்டமாயும், a ஒரு மாறிலியாயும் இருக்கின்றன. எனின், δx திரும்பலில் உள்ள வழுவாயின், ஓட்டத்தில் வழு

$$\delta y = a \text{ சீக}^2\, x\, \delta x$$

என்பதாலே தரப்படும்.

ஆகவே, ஓட்டத்திற் சதவீத வழு

$$\frac{100\, \delta y}{y} = \frac{100\, a \text{ சீக}^2 x \delta x}{a \text{ தான் } x} = \frac{100\, \delta x}{\text{சைன்} x \text{ கோசை } x} = \frac{200 \delta x}{\text{சைன் } 2x}.$$

δx என்பது ஒரு மாருத் தொகையான வழுவாய் இருத்தலால், சைன் $2x$ மிகப் பெரிதாகும்போது, அதாவது $x = 45°$ ஆகும்பொழுது முடிபு மிகச் சிறிதாகும்.

8.62 ஒரு முக்கோணியோடு தொடர்புள்ள சூத்திரங்கள்.

(i) ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு சூத்திரம் $S = \frac{1}{2}ab$ சைன்C என்பதாலே துணியப்படும். C யின் அளவீட்டில் 1′ வழுவிலிருந்து என்ன வழு தோன்றும் ?

$$S = \tfrac{1}{2}\, ab \text{ சைன் } C$$

ஆயும், a, b என்பன மாறிலிகளாயும் இருத்தலால்,

$$\delta S = \tfrac{1}{2} ab \text{ கோசை } C\, \delta C \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு, $\delta C = 1'$ இன் ஆரையனளவு $= \pi/10800$.

எனின், வேண்டிய வழு $\dfrac{\pi}{21600}\, ab$ கோசை C .

(ii) a, b, C என்பன தரப்பட்டால், C யின் அளவீட்டில் 1′ வழுவிலிருந்து பக்கம் c யைத் துணியும்போது என்ன சதவீத வழு தோன்றும்.

இங்கு, $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ கோசை } C\ ;$$

இங்கு, a, b என்பன மாறிலிகள் ; ஆகவே,

$$2c\, \delta c = 2\, ab \text{ சைன்} C\, \delta C\ ;$$

முன்போல, $$\delta C = \pi/10800\ ;$$

ஆகவே,

$$\frac{100\, \delta c}{c} = \frac{\pi}{108}\, \frac{ab \text{ சைன் } C}{c^2} = \frac{\pi}{108}\, \frac{ab.\text{ சைன் } C}{a^2 + b^2 - 2ab \text{ கோசை } C}\ ;$$

இது சதவீத வழுவை c யிலே தருகின்றது.

8.63 பயிற்சி.

1. ஒரு கோளத்தின் ஆரையின் அளவீட்டில் n சதவீதச் சிறு வழு ஒன்று அதன் கனவளவில் அண்ணளவாக $3n$ சதவீத வழுவைப் உண்டாக்குமென நிறுவுக.

2. இயற்கைச் சைன் அட்டவணை ஒன்றில் 60° இற்கு அண்மையில் 1′ இற்குரிய வித்தியாசம் ·000145 என நிறுவுக.

3. மட$_{10}$ கோசீ x இன் அட்டவணை ஒன்றில் 45° இற்கு அண்மையில் 1′ இற்குரிய வித்தியாசம் ·000126 என நிறுவுக.

4. மாரு வெப்பநிலையில் ஒரு திணிவுள்ள வாயுவின் அமுக்கம் p யும் கனவளவு v யும் $pv =$ மாறிலி எனுந் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. கனவளவில் யாதும் ஒரு சிறு பின்ன இறக்கம், அமுக்கத்தில் அதற்குச் சமனுன பின்ன ஏற்றத்தாலே தொடரப்படுமென நிறுவுக.

5. $a = 54$, $b = 40$, $C = 60°$ என்னுந் தரவுகளிலிருந்து ஒரு முக்கோணி தீர்க்கப்படுகின்றது. C யின் அளவீட்டில் 1′ வழுவிலிருந்து உண்டாகின்ற பரப்பளவு வழுவைக் காண்க. a யில் என்ன வழு பரப்பளவிற் சம வழுவை ஆக்கும் ?

6. a நீளமுள்ள ஒரு நாண் தந்த ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் A பாகையுள்ள ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது. கோணம் A யானது $\pm 5'$ என்னும் நிகழத்தக்க வழுவோடு கூடியவிடத்து 55° ஆயின், a யில் என்ன சதவீத வழு நிகழக்கூடும் ?

7. $a = 35$, $b = 20$, $C = 60°$ என்னுந் தரவுகளிலிருந்து ஒரு முக்கோணியின் பக்கம் c கணிக்கப்படுகின்றது. C யில் 5′ என்னும் வழுவிலிருந்து c யில் என்ன சதவீத வழு விளையலாம் ?

8. l நீளமுள்ள ஓர் ஊசலின் ஆடற்காலம் $\pi\sqrt{(l/g)}$ செக்கன் ; l அடிகளில் நீளமும் g புவியீர்ப்பாலாய ஆர்முடுகலும் ஆகும். நீளஞ் சிறிது வேறுபடுத்தப்பட்டால், காலத்தில் ஏற்படும் பின்ன மாறல், நீளத்தில் ஏற்படும் பின்ன மாறலின் அரைப்பங்கென்றும், செக்கனூசலினது நீளத்தில் ஒரு சதவீத வழு அண்ணளவாக மணிக்கு 18 செக்கன் வழுவை உண்டாக்கும் என்றும் நிறுவுக.

9. ஓர் ஆற்றுக்குக் குறுக்கேயுள்ள தூரம், 50 அடி உயரத்திலிருந்து எதிர்க்கரையின் இறக்கக் கோணம் 10° என நோக்குதலாற் கணிக்கப்படுகின்றது.

(i) இறக்கக் கோணத்தில் ஒரு கலை வழுவிலிருந்து,

(ii) கருவியின் உயரத்தில் ஓர் அங்குல வழுவிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட தூரத்தில் என்ன வழு விளையும் ?

10. மட தான்சன்களின் ஓர் அட்டவணையில் ஒரு கலைக்குரிய வித்தியாசம் ·00025 கோசீ $2x$ எனக் காட்டுக.

11. ஒரு வட்டத்தின் நாணென்று அவ்வட்ட மையத்தில் α ஆரையனுள்ள ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது. அக்கோணத்தில் $\delta\alpha$ என்னுமொரு மாற்றம், அந்நாணுல் வெட்டப்பட்ட சிறு துண்டின் பரப்பளவை $l^2\delta\alpha$ ஆற் கூடுகின்றதெனக் காட்டுக ; இங்கு, $2l$ என்பது அந்நாணினது நீளம்.

12. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் சாய் பரப்பின் பரப்பளவு πh^2 தான் α சீக α என்னுஞ் சூத்திரத்தாலே தரப்படும் ; இங்கு h அக்கூம்பின் உயரமாயும் 2α அதன் கோணமாயும் உள்ளன. α வில் $\delta\alpha$ என்னும் ஒரு சிற்றேற்றத்திற்கு பரப்பளவில் ஒத்த பின்ன ஏற்றம் $(1 + \text{சைன்}^2\alpha)\, \delta\alpha\ /$ சைன் α கோசை α என நிறுவுக ; தந்த ஒரு $\delta\alpha$ விற்கு சைன் $\alpha = 1/\sqrt{3}$ ஆகும்பொழுது இது மிகச் சிறிதாகுமெனக் காட்டுக.

8.7 சிறு மாற்றங்கள்—தொடர்ச்சி. எல்லாஞ் சிறு மாற்றங்கள் அடையத்தக்க பல சாராமாறிகளின் சார்பு ஒன்றை நாம் ஆராயும்பொழுது, அச்சார்பை u வாற் குறித்து, x, y, z என்பனவற்றைச் சாராமாறிகளெனக் கொண்டு

$$u=f(x, y, z)$$

என எழுதுவோமாயின், **8.3** இன் சூத்திரம் (3) ஐ நாம் வழங்கிப் போதுமளவு கிட்டிய அண்ணளவாக

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

எனக் கொள்ளலாம்.

இச்சூத்திரத்தின் உட்பொருள் u வின் மொத்த மாற்றமானது மாறிகளுள் ஒவ்வொன்றும் மாறப்பட, ஏனைய மாறிகள் மாறுதிருக்க u அடையும் வேறு வேறுன மாற்றங்களின் கூட்டுத்தொகை என்பதே.

8.71 உதாரணங்கள்.

(i) ஒரு முக்கோணியின் பக்கம் c,

$$c^2=a^2+b^2-2ab \text{ கோசை } C$$

எனும் சூத்திரத்தாலே துணியப்படுகின்றது. a, b, C என்பனவற்றின் அளவீடுகளில் δa, δb, δC என்னுஞ் சிறு வழுக்களிலிருந்து பிறக்கின்ற c யின் வழுவைக் துணிக.

$$c^2=a^2+b^2-2ab \text{ கோசை } C \quad \text{ஆயிருத்தலால்,}$$

$$\delta(c^2)=\frac{\partial(c^2)}{\partial a}\delta a+\frac{\partial(c^2)}{\partial b}\delta b+\frac{\partial(c^2)}{\partial C}\delta C.$$

இனி, $\quad \dfrac{\partial(c^2)}{\partial a}=2a-2b$ கோசை C, $\quad \dfrac{\partial(c^2)}{\partial b}=2b-2a$ கோசை C,

$$\frac{\partial(c^2)}{\partial C}=2ab\text{சைன் } C,\ \delta c^2=2c\,\delta c\ ;$$

ஆகவே,

$c\,\delta c=(a-b$ கோசை $C)\delta a+(b-a$ கோசை $C)\delta b+ab$ சைன் $C\,\delta C$; இது பின்வருமாறும் எழுதப்படலாம் ;

$$\delta c=\text{கோசை } B\,\delta a+\text{கோசை } A\,\delta b+a \text{ சைன் } B\,\delta C.$$

(ii) ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு S, சூத்திரம் $\frac{1}{2}ab$ சைன் C என்பதாலே துணியப்படும் ; a, b, C என்பனவற்றின் அளவீடுகளிற் சிறு வழுக்கள் காரணமாகக் கணிக்கப்பட்ட பரப்பளவில் உள்ள சதவீத வழுவைக் காணல்.

$$S=\tfrac{1}{2}ab \text{ சைன் } C \quad \text{எனப் பெறுவோம்.}$$

இங்கு, வகையிடுதற்குமுன் மடக்கைகளை எடுப்பது வசதியாகும். எனின்,

$$\text{மட } S=\text{மட } \tfrac{1}{2}+\text{மட } a+\text{மட } b+\text{மட சைன் } C.$$

பின்னர், இரு பக்கங்களினுமுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் ஏற்றங்களை எடுக்க,

$$\frac{\delta S}{S}=\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}+\text{கோதா } C\,\delta C \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணமாக $C=50°$ எனின், a, b என்பன ·1 சதவீத வழுவிற்கு உட்படும் ; C என்பது 10″ வழுவிற்கு உட்படும் ; அப்பரப்பளவிற் சதவீத வழு

$$\frac{100\delta S}{S}=\cdot1+\cdot1+100\times\cdot8391\times\frac{\pi}{180\times60\times6}$$
$$=\cdot1+\cdot1+\cdot0041$$
$$=\cdot2041.$$

(iii) ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 450 அடி தூரத்தில் அதன் நுனியின் ஏற்றக் கோணம் 37° 20′. அத்தூரம் 6 அங்குல வழுவிற்கும் அக்கோணம் 1 கலை வழுவிற்கும் உட்படுமாயின் கணிக்கப்பட்ட உயரத்தில் மிகப் பெரிய வழு என்ன ?

z அவ்வுயரத்தையும் x அத்தூரத்தையும் y அக்கோணத்தையுங் குறித்தால் $z=x$தான் y

$$\text{ஆகவே,}\ \delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\delta y\ ;$$

$$\text{அல்லது}\quad \delta z=\text{தான்}y\,\delta x+x\text{ சீக}^2 y\,\delta y$$

$$=(\text{தான் } 37°20')\times\cdot5+(450 \text{ சீக}^2\ 37°20')\times\frac{\pi}{10800}$$

$$=\cdot3814+\cdot2070=\cdot5884 \text{ அடி.}$$

8.72 பயிற்சி.

1. அடி a யும் உயரம் h உம் ஆய ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு S ஆயின்,

$$\frac{\delta S}{S}=\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta h}{h} \quad \text{என நிறுவுக.}$$

2. $2a$, $2b$ அச்சுக்களையுடைய ஒரு நீள்வளையத்தின் பரப்பளவு S ஆயின்,

$$\frac{\delta S}{S}=\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b} \quad \text{என நிறுவுக.}$$

3. சமபக்க முக்கோணி ஒன்றினது கோணங்களின் அளவீடுகள் 1″ வழுவுக்கு உட்படுமாயின், அதன் பக்கங்களின் நீளங்களிற் சதவீத வழு ·00042 என நிறுவுக.

4. ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவு $b=125$ அடி, $c=160$ அடி, $A=57°\ 35'$ என்னும் அளவீடுகளாலே துணியப்படுகின்றது. வேறோர் அளவீட்டுத் தொடை $b=125{\cdot}5$ அடி, $c=161$ அடி, $A=57°\ 25'$ என்பனவற்றைத் தருகின்றது. முதலாம் அளவீட்டிற்கும் இரண்டாம் அளவீட்டிற்கும் இடையேயுள்ள சதவீத வித்தியாசத்தைக் காண்க.

5. ABC எனும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களில் $\delta a, \delta b, \delta c$ என்னுஞ் சிறுமாற்றங்கள் செய்யப்பட்டால்,

$$\delta A = a(\delta a - \delta b \text{ கோசை } C - \delta c \text{ கோசை } B)/2S$$

எனக் காட்டுக; இங்கு S என்பது பரப்பளவு.

$\delta A + \delta B + \delta C = 0$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

6. சென்ற பயிற்சியில் அப்பக்கங்களில் மாற்றங்கள் ஆகக்கூடிய அளவிற்கு $\pm n$ சதவீதமெனின் அதன் விளைவாக A யில் உளதாகும் மிகப் பெரிய மாற்றம் $\pm\, na^2/50bc$ சைன் A எனக்காட்டுக.

7. ABC எனும் ஒரு முக்கோணி நிலையான ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டிருக்கின்றது. பக்கம் a யானது நிலையாயிருக்க b யும் c யும் மாறினால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\delta B + \delta C = 0$;

(ii) சீக $B\ \delta b +$ சீக $C\ \delta c = 0$;

(iii) $a\ \delta C =$ சைன்$B\ \delta c -$ சைன்$C\ \delta b$.

8. ABC எனும் ஒரு முக்கோணி நிலைத்த ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட அதன் பக்கங்கள் எல்லாம் மாறும்படி விடப்பட்டால்

சீக $A\ \delta a +$ சீக$B\ \delta b +$ சீக $C\ \delta c = 0$ என நிறுவுக.

9. ஒரு வட்டவுருளை h உயரத்தையும் r ஆரையையும் உடையது. அவ்வுருளையினது பரப்பின் முழுப்பரப்பளவும் அதன் கனவளவோடு கொள்ளும் விகிதம் மாறாதிருக்குமாறு h, r என்பன சிறு மாற்றங்களை அடைந்தால்,

$$\delta r = -\frac{r^2}{h^2}\delta h \text{ எனக் காட்டுக.}$$

10. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் முழுப் பரப்பின் பரப்பளவு

$$\pi h^2 \text{தான்}\alpha\ (\text{தான்}\alpha + \text{சீக}\alpha)$$

எனுஞ் சூத்திரத்தாலே தரப்படுகின்றது; இங்கு h உயரமாயும் α அரையுச்சிக் கோணமாயும் உள்ளன. α வானது $\frac{1}{6}\pi$ ஆயிருக்கும்பொழுது உயரத்தில் 1 சதவீத ஏற்றஞ் செய்யப்பட்டால், பரப்பளவில் யாதொரு மாற்றமும் ஏற்படாதிருக்க α வில் என்ன மாற்றஞ் செய்யப்பட வேண்டும்.

11. தரையில் ஒரு கோபுரத்தின் அடியுடன் உள்ள ஒரு கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று a தூரத்தில் இருக்கின்ற இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து அக்கோபுர நுனியின் ஏற்றக் கோணங்கள் α, β ஆகும். α, β என்பனவற்றில் $\delta\alpha, \delta\beta$ என்னுஞ் சிற்றேற்றங்கள் காரணமாக உயரத்திலுள்ள ஏற்றம்

$$a(\text{சைன்}^2\beta\,\delta\alpha - \text{சைன்}^2\alpha\,\delta\beta)/\text{சைன்}^2(\beta-\alpha) \text{ என நிறுவுக.}$$

12. எறி புள்ளிக்கூடாக ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது, ஒரு எறிபொருளின் வீச்சு V^2 சைன் $2\alpha/g$; இங்கு, V எறிவு வேகமாயும் α, அதனுடைய திசையின் கோணவேற்றமாயும் இருக்கின்றன. $\alpha = \frac{1}{8}\pi$ ஆயிருக்கும்பொழுது V இல் ஒரு சின்ன ஏற்றத்திற்கு எண்ணளவிற் சமனான α வின் இறக்கம் அவ்வீச்சை மாறாதிருக்கச் செய்யுமென நிறுவுக.

இலகுவான பயிற்சி

9.1 பெறுதிகளுந் தொகையீடுகளும்.

பின்வருங் கோவைகளினுடைய பெறுதிகளையுந் தொகையீடுகளையுங் காண்க.

1. $ax^2 + 2bx + c$.
2. $(x-a)^3$.
3. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$.
4. $\left(2x + \frac{3}{x^2}\right)^3$.
5. $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$.
6. $(2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$.
7. $(x-2)^2(x+1)^2$.
8. $(x-1)^2(x-3)^3$.
9. $x^4 - 3x^3 + 8x - 10$.
10. $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} + 1$.
11. $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{x^2} + c$.
12. $ax^n + b + \frac{c}{x^n}$.
13. $\frac{1}{4x^2} + 1 + 4x^2$.
14. $\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^2$.
15. $3x^2 - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^5}$.
16. $(x-2)^3$.
17. $\frac{1}{(x-a)^n}$.
18. $x(x^2-1)^2$.
19. $x^2(x^3-1)^2$.
20. $x^3(x^4-1)^2$.

9.2. படித்திறன்கள், தொடலிகள், உயர்விழிவுகள்.

1. $y = 3x^2 - 5x + 1$ எனும் வளையியின் படித்திறனை (x', y') எனும் புள்ளியிற் காண்க. அவ்வளையியிற் படித்திறன் 7 ஆயுள்ள புள்ளியைத் துணிக. இப்புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு என்ன?

2. $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ என்னும் வளையியின் படித்திறனையும் அவ்வளையியிற் படித்திறன் பூச்சியமாகும் புள்ளிகளையுங் காண்க. இப்புள்ளிகளில் அவ்வளையிக்கு உயர்வு நிலைக்கூறுகளோ இழிவு நிலைக்கூறுகளோ உண்டு என்றுந் துணிக. அவ்வளையியை வரைக.

3. $y = 2x^3 + x^2 + 2$ எனும் வளையியின் படித்திறனை $(1, 5)$ எனும் புள்ளியிற் காண்க. வேறு எந்தப் புள்ளியில் அவ்வளையிக்கு அதே படித்திறன் உண்டு?

4. $y = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ எனும் வளையியினது தொடலியை $(-1, -2)$ புள்ளியிற் காண்க. அவ்வளையியில் வேறு எந்தப் புள்ளியில் அதற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தொடலி உண்டு?

5. (x', y') புள்ளியில் $y = 5x^3 - 6x^2 + 5x$ எனும் வளையியின் படித்திறனைக் காண்க. அவ்வளையியின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் படித்திறன் நேரென நிறுவுக.

6. $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(1, 0)$ எனும் புள்ளிகளில் $y = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 1$ எனும் வளையியின் படித்திறனைக் காண்க; இப்புள்ளிகளின் அயலில் அவ்வளையியை வரைக.

7. x ஆனது $-\infty$ இலிருந்து ∞ இக்குக் கூடுதலுற $3x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ என்னுஞ் சார்பு உறுதியாகக் கூடுதலுறுமென நிறுவுக.

8. x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு $4y = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ எனும் வளையியின் படித்திறன் பூச்சியமாகும்? இப்புள்ளிகளில் நிலைக்கூறு உயர்வோ இழிவோ எனத் துணிக. $(-3, 1)$, $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையில் வளையியை வரைக.

9. $2y = 2x^3 - 4x^2 - 7x + 5$ எனும் வளையி $y-$அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் அவ்வளையியினது தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அன்றியும், அவ்வளையியில் எப்புள்ளிகளில் $2y + 9x = 0$ எனுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகத் தொடலி உண்டெனக் காண்க.

10. $y = (x-1)^3(3x-7)$ என்னும் வளையியின் படித்திறன் பூச்சியமாகும் புள்ளிகளைக் காண்க; இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் y யின் பெறுமானம் உயர்வோ இழிவோ என்றுந் துணிக. அன்றியும் $(0, 7)$, $(\frac{7}{3}, 0)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள படித்திறன்களையுங் காண்க; அவ்வளையியை வரைக.

11. $\frac{1}{3}(4x^3 - 3x)$ எனுஞ் சார்பின் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்கள் $\frac{1}{3}$ உம் $-\frac{1}{3}$ உம் என நிறுவுக. அச்சார்பின் வரைபை $x = -1\frac{1}{2}$, $x = 1\frac{1}{2}$ எனும் பெறுமானங்களுக்கிடையிற் பரும்படியாக வரைக; இவ்வெல்லைகளுக்குள் அச்சார்பின் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்கள் 3, -3 எனக் காட்டுக.

12. புள்ளி, $(-2, 0)$ இல் $2y = 4x - x^3$ எனும் வளையியினது தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க; இத்தொடலி $(4, -24)$ என்னும் இப்புள்ளியில் அவ்வளையியை மறுபடியும் வெட்டுமெனக் காட்டுக. அன்றியும் y யின் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களையுங் காண்க; அவ்வளையியை வரைக.

13. x கூடுதலுற $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ எனுஞ் சார்பு x இன் எப்பெறுமான வீச்சிற்குள்ளே குறைதலுறுமெனக் காண்க; அன்றியும், x கூடுதலுற அச்சார்பு எவ்வீச்சிற்குள்ளே கூடுதலுறும் என்றுங் காண்க.

14. $y = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 36x - 27$ என்னும் வளையி $x-$அச்சை $x = 3$ எனும் புள்ளியிலே தொடுமென நிறுவுக. இப்புள்ளிகளிலுள்ள படித்திறன்களையும் $x-$அச்சை அது வெட்டும் புள்ளிகளையுங் காண்க.

15. $y = (x-2)^2(x+3)^2$ எனும் வளையியில் யாதும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள படித்திறனைக் காண்க. y யின் உயர்வுப் பெறுமானத்தையும் இழிவுப் பெறுமானத்தையுந் துணிக.

16. $y = (x-2)^2 \; (x^2 + 2x + 4)$ எனும் வளையியில் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள படித்திறனைக் காண்க. அவ்வளையியின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் y நேரென்றுஞ் படித்திறன் ஒரு புள்ளியிலேயே பூச்சியமென்றும் நிறுவுக. இப்புள்ளி y யின் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தையா அன்றி ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தையா தரும்?

17. $4y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$ என்னும் வளையிக்கு ஓர் உயர்வு நிலைக்கூறும் இரு இழிவு நிலைக்கூறும் உண்டு என நிறுவுக; y ஒரு கூடுதலுறுஞ் சார்பாகும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சுக்களையும், y ஒரு குறைதலுறுஞ் சார்பாகும் ஒத்த வீச்சுக்களையுந் துணிக.

18. $(0,3)$, $(2,9)$ என்னும் புள்ளிகள் $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ எனும் வளையியிற் இருக்க, இப்புள்ளிகளில் படித்திறன் பூச்சியமானால், a, b, c, d என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இப்புள்ளிகள் y யின் உயர்வுப் பெறுமானங்களையா அன்றி இழிவுப் பெறுமானங்களையா தரும்?

19. a யாதல் b யாதல் c யாதல் பூச்சியமல்லாதிருக்கும் போது $y = ax + bx^2 + cx^3$ என்பது தன் படித்திறன் $(2, 4)$ எனும் புள்ளியிலேயேயன்றி வேறோரிடத்தும் பூச்சியமாகாத ஒரு வளையியைக் குறித்தால், a, b, c என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

20. $(1, 1)$, $(-2, -2)$ என்னும் புள்ளிகள் $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ எனும் வளையியிற் இருக்க இப்புள்ளிகளிலுள்ள படித்திறன்கள் முறையே 1, 3 ஆயின், a, b, c, d என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், x அதிகரிக்குந் தோறும் x அதிகரிக்கின்றதெனக் காட்டு.

9.3 வேகமும் ஆர்முடுகலும்.

1. ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து அசைந்து t செக்கனில் பெயர்ந்த தூரம் $15t + 15t^2 + 5t^3$ ஆயின், வேகம் அடி செக்கன் அலகுகளில் v யும் ஆர்முடுகல் f உம் $f^2 = 60v$ எனுந் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன என நிறுவுக.

2. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோடு வழியே அசைகின்றது; t செக்கனின் முடிவில் நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து அடிகளில் அதனுடைய தூரம்

$$s = 2t^3 - 33t^2 + 108t - 15$$

என்பதாலே தரப்படுகின்றது. t யின் எப்பெறுமானங்களுக்கு (i) வேகம், (ii) ஆர்முடுகல் அற்றுப்போகுமெனக் காண்க.

அன்றியும், ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும்பொழுதுள்ள வேகத்தையும், வேகம் பூச்சியமாகும் பொழுதுள்ள ஆர்முடுகலின் இரு பெறுமானங்களையுங் காண்க.

8—CP 943 (6/67)

3. ஒரு நேர்கோடு வழியே அசைகின்ற ஒரு புள்ளியினது நிலை $s = t^3 - 12t^2 + 36t + 5$ என்பதாலே தரப்படுகின்றது ; இங்கு s இயங்கத் தொடங்கி 6 செக்கனுக்குப்பின் அக்கோட்டில் நிலைத்த புள்ளியொன்றிலிருந்து அடிகளில் எடுத்த தூரம் $t = 4$ ஆகும்பொழுது வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையுங் காண்க ; ஒரு வேக – நேர வளையி வரைக.

4. ஒரு புள்ளியானது ஓய்விலிருந்து t செக்கனில் அடையும் வேகஞ் செக்கனுக்கு $(4t - t^2)$ அடி ஆகுமாறு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது. நேரம் t யில் உள்ள ஆர்முடுகலையும் t செக்கனிற் செல்லுந் தூரத்தையுங் காண்க. அதன் இயக்கத்தின் முதல் 6 செக்கனையும் விவரிக்க.

5. ஒரு புள்ளியானது இயங்கத் தொடங்கி 6 செக்கனுக்குப் பின் ஒரு நேர்கோட்டில் நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிலிருந்து அடிகளிலே தனது தூரம் $s = 72t - 3t^2 - 2t^3$ ஆகுமாறு அக்கோட்டில் அசைகின்றது. அதன் வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையுங் காண்க. அப்புள்ளி ஓய்வடையுமுன் எவ்வளவு தூரம் அசையும் ? தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எத்தனை செக்கன் எடுக்கும் ?

6. புள்ளியொன்று இயங்கத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் உற்பத்தியிலிருந்து தனது தூரம் $x = 28 + 27t - t^3$ என்பதாலே தரப்படுமாறு x – அச்சின் வழியே அசைகின்றது ; இங்கு x அடிகளில் அளக்கப்படுகின்றது. வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையுங் காண்க. அதன் இயக்கத்திசை புறமாற்றப்படுமுன் அப்புள்ளி எவ்வளவு தூரம் அசையும்? அப்புள்ளி தான் புறப்பட்ட நிலைக்குத் திரும்பிவரும் வேகம் என்ன ?

7. ஒரு புள்ளியானது தான் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து t செக்கனில் $(2t^2 - t^4)$ அடி செல்லுமாறு ஒரு நேர்கோடு வழியே அசைகின்றது. அதன் வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையுங் காண்க. அன்றியும், வேக – நேர வளையியையும் வெளி – நேர வளையியையும் வரைக.

8. ஒரு புள்ளி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு t செக்கனுக்குப் பின்னர் செக்கனுக்கு $(7t - t^2)$ அடி பெறுமானமாகும் ஒரு வேகத்தோடு ஒரு நேர்கோடு வழியே அசைகின்றது. ஆர்முடுகல் அற்றுப்போகும்பொழுது அதன் வேகம் என்ன ? $t = 2$ இலிருந்து $t = 5$ வரைக்குமுள்ள இடையில் செல்லும் தூரம் யாது? எத்தனை செக்கனுக்குப் பின் அப்புள்ளிதான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிச் செல்லும்? அப்போது அது சென்ற முழுத்தூரமும் என்ன ?

9. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு நேர்கோட்டில் அசையும் ஒரு புள்ளியினது ஆர்முடுகல், இயங்கத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் அடி செக்கன் அலகுகளில் $3 - t$ ஆகும். அப்புள்ளி ஓய்வடையுமுன் எவ்வளவு தூரம் அசையுமெனக் காண்க ; புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும் ? அப்போது அதன் வேகம் என்ன ?

10. ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்ற ஒரு புள்ளியின் வேகம் இயக்கந் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் செக்கனுக்கு $(5t - 3t^2)$ அடி. t செக்கனிற் செல்லுந் தூரத்திற்கும் ஆர்முடுகலுக்கும் உரிய கோவைகளைக் காண்க. ஒரு வேக – நேர வளையி வரைக ; வேகத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அதன் வேகம் அற்றுப்போகு முன்னர் அப் புள்ளி எவ்வளவு தூரம் அசையும் ?

11. ஒரு புள்ளி நேரம் $t = 0$ இல் உற்பத்தியிலிருந்து தொடங்கி t செக்கனிற் செல்லுந் தூரம்

$$x = 9t - 6t^2 + t^3$$

என்பதாலே தரப்படுமாறு x – அச்சு வழியே அசைகின்றது. அதன் வேகத்திற்கும் ஆர்முடுகலுக்குங் கோவைகள் காண்க. x இன் பெறுமானங்களையும் $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ என்பனவற்றிற்கு வேகத்தையும் அட்டவணைப்படுத்துக ; அதன் இயக்கத்தின் முதல் 4 செக்கனையும் விவரிக்க.

12. ஒரு புள்ளியானது நேரம் t யில் $6(1 + t)$ என அடி செக்கன் அலகுகளில் அளக்கப்பட்ட ஆர்முடுகலோடு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது. அப்புள்ளி தன் இயக்கத்தின் முதல் 3 செக்கனில் 243 அடி செல்லுமாயின், $t = 0$ ஆகும்பொழுது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

13. ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்ற ஒரு புள்ளியின் வேகம், அசையத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின், செக்கனுக்கு $(18t - 3t^2)$ அடி. t செக்கனில் அது செல்லுந் தூரத்தையும் ஆர்முடுகலையுங் காண்க. அதன் வேகத்திற்கு ஓர் உயர்வுப் பெறுமானம் உண்டு என்று காட்டி அதனைக் காண்க. அதன் இயக்கத் திசை புறமாற்றப்படுமுன் கழியும் நேரத்தையுஞ் செல்லுந் தூரத்தையும் காண்க. அன்றியும் அது புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எடுக்கும் நேரத்தையும் அந்நேர இடையில் அதன் வேகத்தின் மிகப் பெரிய எண்பெறுமானத்தையுங் காண்க.

14. ஒரு புள்ளி ஓய்விலிருந்து ஒரு நேர்கோடு வழியே அசைகின்றது ; t செக்கனுக்குப் பின்னர் அதன் வேகஞ் செக்கனுக்கு $(at - bt^2)$ அடி. அதன் இயக்கத்தின் முதல் இரண்டு செக்கன்களிலும் அது முறையே 12 அடி, 18 அடி தூரங்கள் செல்லுமாயின், a யையும் b யையும் உயர்வு வேகத்தையுங் காண்க.

15. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தனது தூரம் $s = at + bt^2 - ct^3$ என்பதாலே தரப்படுமாறு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது ; இங்கு, a, b, c என்பன நேரெண்கள் ; t உற்பத்தியைக் கடந்து சென்றபின்னுள்ள நேரத்தைக் குறிக்கும் ஆரம்ப வேகம் 6 ஆகும் ; உயர்வு வேகம் 12 ; ஆர்முடுகலின் மிகப் பெரிய பெறுமானம் 12. a, b, c என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

16. ஒரு புள்ளியானது $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் உற்பத்தியிலிருந்து தொடங்கி $(6 - 4t)$ அடி செக்கனலகு ஆர்முடுகலோடு x – அச்சு வழியே அசைகின்றது. t செக்கனிற் சென்ற தூரத்தையும் வேகத்தையுங் காண்க. அன்றியும், அதன் இயக்கத்திசை புறமாற்றப்படுமுன் அது எவ்வளவு தூரம் அசையுமென்றும், அது புறப்பட்ட புள்ளிக்கு எவ்வேகத்தோடு திரும்பி வருமென்றுங் காண்க.

17. ஒரு புள்ளி உற்பத்தியிலிருந்து x – அச்சு வழியே நேரம் $t = 0$ இற் செக்கனுக்கு $4\frac{1}{2}$ அடி வேகத்தோடு அசையத் தொடங்குகின்றது ; அது புறப்பட்டு t செக்கனுக்குப் பின் அதன் ஆர்முடுகல் அடி செக்கனலகுகளில் $4 - t$. t செக்கனில் அது செல்லுந் தூரங்களையும் அடைந்த வேகத்தையுங் காண்க. உயர்வு வேகம் யாது ? அதுதான் மிகப்பெரிய வேகமா ? ஒரு வேக – நேர வளையி வரைக.

18. ஒரு புள்ளி நிலையான ஓரிடத்திலிருந்து செக்கனுக்கு 48 அடி வேகத்தோடு புறப்பட்டு t செக்கனுக்குப்பின் தன் வேகம் செக்கனுக்கு $(48 + t^2 - t^3)$ அடி ஆகுமாறு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது. ஆர்முடுகலையும் வேகத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தையுங் காண்க. அன்றியும், இயக்கத் திசை புறமாற்றப்படுமுன் செல்லுந் தூரத்தையுங் காண்க.

19. ஒரு புள்ளி நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிலிருந்து புறப்பட்டுச் செக்கனுக்கு 18 அடி வேகத்தோடு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது ; t செக்கனுக்குப் பின் அதன் ஆர்முடுகல் $(8 - t)$ அடி செக்கனலகுகள். அதன் இயக்கத்திசை புறமாற்றப்படுமுன் அப்புள்ளி எவ்வளவு தூரஞ் செல்லுமெனக் காண்க ; புறப்பட்டு 28 செக்கனுக்குப் பின் அப்புள்ளி தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்கு அப்பாலுள்ள ஒரு நிலைக்குத் திரும்பிவருமெனக் காட்டுக.

20. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின்னர் $(a - bt)$ அடி செக்கனலகு ஆர்முடுகலோடு அசைகின்றது. ஆரம்ப வேகஞ் செக்கனுக்கு 8 அடி ஆயும், உயர்வு வேகஞ் செக்கனுக்கு 12·5 அடியாயும் $t = 2\frac{2}{3}$ ஆகும்பொழுது இயக்கத் திசை புறமாற்றப்பட்டு இருந்தால் a, b என்பனவற்றைக் காண்க.

9.4 பரப்பளவுகள்.

1. x – அச்சாலும் பின்வரும் வளையிகள் ஒவ்வொன்றாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.

(i) $y = x^2 - 4x + 3$; (ii) $y = 4x^4 - 5x + 2$;

(iii) $y = x^2 + x - 12$; (iv) $y = 3x^2 - x - 2$;

(v) $y = x^2 - 3x + 2$; (vi) $y = x^2(4 - x^2)$.

2. $y = x^3 - 9x + 6$ என்னும் வளையிக்கும், x – அச்சிற்கும் $x = -3$, $x = 3$ எனும் நிலைக்கூறுகளுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவைக் காண்க

3. பின்வரும் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணித்து $y = 4x - x^3$ எனும் வளையியின் தொடர்பாக அவை குறிக்கும் பரப்பளவுகளைக் கூறுக.

$$\text{(i)} \int_0^2 (4x - x^3)\, dx \;;\; \text{(ii)} \int_{-2}^2 (4x - x^3)\, dx \;;\; \text{(iii)} \int_0^3 (4x - x^3)\, dx.$$

4. x – அச்சிற்கும் $y = cx^n$ எனும் வளையிக்கும் யாதுமொரு நியமித்த நிலைக்கூறிற்கும் இடையில் உள்ளடைக்கப்படும் பரப்பளவு அந்நியமித்த நிலைக்கூறையும் அதன் கிடைக்கூறையும் பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தினது பரப்பளவின் $1/(n+1)$ என்னும் பின்னமென நிறுவுக.

5. $y^m = cx^n$ எனும் வளையியிலுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாய்க் கோடுகள் வரைந்தால், அவ்வச்சுக்களோடு அவை ஆக்குஞ் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு, தம் பரப்பளவுகள் $m : n$ என்னும் விகிதங் கொண்ட பகுதிகளாக, அவ்வளையியாற் பிரிக்கப்படுமென நிறுவுக.

6. $y = x(x-1)(x-2)$ எனும் வளையியை வரைக ; அவ்வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புற்ற உருவங்கள் இரண்டினுடைய பரப்பளவுகளுஞ் சமமென நிறுவுக.

7. $y = 5x^3 - 3x$ என்னும் வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புறும் சமபரப்பளவுகள் இரண்டு உளதெனக் காட்டி அவற்றைக் கணிக்க.

8. $\int_{-2}^{4} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx$ என்னுந் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க ; $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ எனும் வளையி x – அச்சை மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றதெனக் காட்டியும், $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ $(3, 4)$ எனும் x இன் எல்லைச் சோடிகளுக்கு இடையிற் குறிக்கப்பட்ட பரப்பளவுகளைக் கண்டும் முடிபை அத்தொகையீடு குறிக்கும் பரப்பளவுகளினால் விளக்குக.

9. ஒரு வளையிக்கும், x – அச்சிற்கும், $x = 0$, $x = h$ என்பனவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகளுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பளவு $ah + bh^2 + ch^3$ ஆயின், அவ்வளையியின் சமன்பாடு என்ன ?

10. $y = 4 - x^2$ என்னும் வளையியாலும் x – அச்சாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க. a யின் எப்பெறுமானத்திற்கு $\int_0^a (4 - x^2)\, dx$ என்னுந் தொகையீடு அற்றுப் போகும் ?

11. $y = 3 - 4x + x^2$ எனும் வளையியை வரைக ; x – அச்சிலுள்ள 0, 1 ; 1, 3 ; 3, 4 எனும் புள்ளிகளுக்கு இடையே x – அச்சிற்கும் அவ்வளையிக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவுகள் எண்ணளவிற் சமமென நிறுவுக.

12. $y=3-4x-2x^2+4x^3-x^4$ எனும் வளையி x–அச்சை $x=1$ என்னும் புள்ளியிலே தொடுமெனக் காட்டுக ; அது x–அச்சை வெட்டும் ஏனைய புள்ளிகளையுங் காண்க. அவ்வளையியாலும் x–அச்சாலும் வரைப்புற்ற இரு பிரதேசங்களின் பரப்பளவுகளுஞ் சமமென நிறுவுக.

13. $y=(x-2)^2(x+3)^2$ என்னும் வளையியாலும் x–அச்சாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க.

14. $y=x^4-4x^3-6x^2+36x-27$ என்னும் வளையி x–அச்சை $x=3$ இலே தொட்டு $x=1$, $x=-3$ என்பனவற்றில் வெட்டுகின்றது. அவ்வளையியை வரைந்து அதனாலும் x–அச்சாலும் உள்ளடைக்கப்படும் இரு பரப்பளவுகளையுங் காண்க.

15. $8y=(x-2)(x-4)^2$ என்னும் வளையி y–அச்சை A யிலும் x–அச்சை B யிலும் வெட்டி x–அச்சை C யிலே தொடுகின்றது. வில் AB யாலும் அச்சுக்களாலும் வரைப்புறும் பரப்பளவு அவ்வளையியாலும் x–அச்சின் BC எனும் பகுதியாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவின் 17 மடங்கு என நிறுவுக.

16. $y=2x-x^2$ என்னும் வளையிக்கும் $y=x$ என்னுங் கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

17. $y=x(4-x)$ என்னும் வளையியாலும் $y=3$ என்னுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

18. $y=x^3-13x$ எனும் வளையி $y=12$ எனுங் கோட்டினால் வெட்டப்படும் புள்ளிகளுள் ஒன்று $(-1, 12)$ ஆகும். ஏனைய இரண்டு புள்ளிகளையுங் காண்க. அவ்வளையியாலும் $y=12$ எனுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற இரு பரப்பளவுகளின் விகிதம் 32 : 375 என நிறுவுக.

19. $y=x^2-7x+6$ என்னும் வளையியாலும் $x+3y=6$ எனுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

20. $y+4=5x-x^2$ எனும் வளையியாலும் $2y=x-4$ எனுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

9.5 கனவளவுகள்.

1. $y^2=x^2-a^2$ எனும் வளையி x–அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்பட்டால், அவ்வளையியாலும், x–அச்சாலும், $x=2a$ யிலுள்ள நிலைக்கூறுனாலும் வரைப்புற்ற பரப்பு a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்திற்குச் சமனான ஒரு கனவளவைப் பிறப்பிக்குமென நிறுவுக.

2. $a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$ எனும் வளையியின் தடம் x–அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. உள்ளடைக்கப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

3. $x=0$ இலிருந்து $x=2$ வரைக்குமுள்ள $y=4x-x^3$ எனும் வளையி x–அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. சுற்றற் பரப்பாலும் $x=2$ இலுள்ள தளமுனையாலும் வரைப்புறுங் கனவளவைக் காண்க.

4. மூன்றாங் கணக்கிலுள்ள வளையி $x=0$ இலிருந்து $x=2$ வரைக்குமுள்ள $y^2=x^2(2-x)$ என்னும் வளையியாயின், கனவளவு யாதாயிருக்கலாம் ?

5. ஒரு பூந்தொட்டியின் உயரம் உட்பக்கமாக அதன் அச்சினது நீளத்திற்கு அளக்கப்பட h ஆயும், அதன் அச்சிற்கூடாக ஒரு நிலைக்குத்தான வெட்டு $ay^2=x^3$ என்னும் வளையியாயும் இருந்தால், அத்தொட்டி கொள்ளுங் கனவளவு என்ன ?

6. ஒரு நாண் OP, ஒரு பரவளைவின் உச்சி O விற்கூடாக வரையப்படுகின்றது ; OP யாலும் அவ்வளையியாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவு அப்பரவளைவின் அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அக்கூம்பிற்கும் அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட பரவளைவுத் திண்மத்திற்கும் இடையிலுள்ள கனவளவு $\frac{1}{6}\pi ON.PN^2$ என நிறுவுக , இங்கு PN என்பது P யிலிருந்து அச்சிற்கு உள்ள நிலைக்கூறு.

7. $y^2=(x-2)(3-x)$ என்னும் வளையி x–அச்சை A, B எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. அவ்வளையியை AB எனுங் கோடுபற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைக் காண்க.

8. a பக்கத்தையுடைய $ABCDEF$ எனும் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி விட்டம் AD பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அவ்வாறு ஆக்கப்படுங் கனவளவு a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தினது கனவளவின் $\frac{3}{4}$ என நிறுவுக.

9. சுற்றற் பரவளைவுரு ஒன்றின் கனவளவு ஒரே வட்ட அடியையும் ஒரே அச்சு நீளத்தையுங் கொண்ட செவ்வட்டவுருளையினது கனவளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

10. $x=0$, $x=a$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $ay^2=x^2(a-x)$ என்னும் வளையியின் பகுதி x–அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறப்பிக்கப்பட்ட கனவளவு a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தினது கனவளவின் 16 இல் 1 என நிறுவுக.

11. $x=0$, $x=b$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $ay^2=x^2(x+a)$ என்னும் வளையியின் பகுதி x–அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அவ்வாறு பெறப்பட்ட கனவளவு b ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவிற்குச் சமமாயின், $b=4a$ என நிறுவுக.

12. $4y=x^3-4x$ என்னும் வளையியை x–அச்சுப்பற்றி $x=0$, $x=2$ என்னும் எல்லைகளுக்கிடையிற் சுற்றுவதாற் பிறப்பிக்கப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

13. $y^2=x(4-x)^2$ எனும் வளையி $x=0$, $x=4$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x–அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படும்பொழுது பிறப்பிக்கப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

14. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினடித்துண்டு ஒன்றிற்கு A, B என்னும் பரப்பளவுகளுள்ள தளவட்டமுனைகள் உள; அவ்வடித்துண்டின் உயரம் h. அதன் கனவளவு $\frac{1}{3}h\{A+B+\sqrt{(AB)}\}$ என நிறுவுக.

15. (1, 3), (4, 5) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு (i) x – அச்சுப்பற்றியும் (ii) y – அச்சுப்பற்றியுஞ் சுற்றப்படுகின்றது. பெறப்படும் கூம்படித் துண்டுகளின் கனவளவுகளைக் காண்க.

16. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவாலும் $x=a$ என்னுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவு y – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறந்த திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

17. a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் மையத்திலிருந்து c தூரத்தில் ஒரு தளத்தால் வெட்டப்பட்ட அக்கோளத்தின் துண்டங்களுட் சிறியதன் கனவளவைக் காண்க.

18. c ஆரையையுடைய ஓர் உருளை வடிவான துளை a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்திற்கூடாகத் துளைக்கப்படுகின்றது; அவ்வுருளையின் அச்சு அக்கோளத்தின் மையத்திற் கூடாகச் செல்கின்றது. அக்கோளத்தில் என்ன கனவளவு மீந்திருக்கும்?

19. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ எனும் சமன்பாடு தன் புள்ளிகள் அச்சுக்களிலுள்ள ஒரு நான்முனை உடு ஒன்றைக் குறிக்கின்றது. அவ்வுடுவை ஆள்கூற்றச்சுக்களுள் யாதுமொன்றைப் பற்றிச் சுற்றுதலாற் பெறப்படுங் கனவளவு a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{8}{35}$ எனக் காட்டுக.

20. $(h, 0)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்திற்குத் தொடலிகள் வரையப்படுகின்றன. அத்தொடலிகளாலும் அவ்வட்டம் பிரிக்கப்படும் பெருவில்லாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவு x – அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப்படப் பெறப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

21. $x=h$ எனுஞ் சமன்பாடுடைய ஓர் இரட்டை நிலைக்கூறுால் வெட்டப்பட்ட $y^2=4ax$ எனும் ஒரு பரவளைவின் ஒரு துண்டம் அந்நிலைக்கூறுபற்றிச் சுற்றுகின்றது. பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவு h ஆரையையும் இரட்டை நிலைக்கூறிற்குச் சமமான நீளத்தையுங் கொண்ட ஓர் உருளையினது கனவளவின் $\frac{8}{15}$ என நிறுவுக.

22. ஒரு நிலைக்கூறு PN ஆல் வெட்டப்பட்ட $y^2=4\,ax$ என்னும் ஒரு பரவளைவின் பகுதி x – அச்சு பற்றிச் சுற்றுகின்றது. P யில் அப்பரவளைவிற்கு வரைந்த தொடலி அவ்வச்சை T யிற் சந்தித்தால், பெறப்படும் பரவளைவுருவிற்குரிய கனவளவு T யை தன்னுச்சியாயும் அப்பரவளைவுருவின் அடியைத் தன்னடியாயுமுள்ள நேர்வட்டக் கூம்பின் கனவளவினது முக்காற்பங்கென நிறுவுக.

9.6 மையப்போலிகள்.

1. அச்சுக்களாலும் (i) $3x+4y=12$ எனுங் கோட்டாலும் (ii) $x=4$, $y=2x+5$ எனுங் கோடுகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவினது மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளை, தொகையிடுதலாற் காண்க.

2. $2x+y=4$ எனுங் கோடு x – அச்சை A யில் வெட்டுகின்றது; $x+2y=4$ எனுங் கோடு y – அச்சை B யில் வெட்டுகின்றது; அக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று C யில் வெட்டுகின்றன. O உற்பத்தியெனின், $OACB$ எனும் பரப்பளவினது மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளை, தொகையிடுதலாற் காண்க.

3. $y=2x-4$ எனுங் கோடு x – அச்சை A யில் வெட்டுகின்றது; $2y=x+4$ என்னுங் கோடு y – அச்சை C யில் வெட்டுகின்றது; அக்கோடுகள் B யில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. O உற்பத்தியாயின், $OABC$ என்னும் பரப்பளவினது மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

4. y – அச்சிற்கும் $y=a$ எனுங் கோட்டிற்கும் $a^2y=x^3$ என்னும் வளையிக்கும் இடையில் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பளவினது திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

5. x – அச்சிற்கும் $ay^2=x^3$ எனும் வளையிக்கும் $x=a$ யிலுள்ள நிலைக்கூறிற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவினது மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. x – அச்சாலும் $x^3y=c^4$ என்னும் வளையியாலும் $x=a$, $x=b$ எனுங் கோடுகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவினது மையப்போலியியைக் காண்க.

7. y – அச்சாலும், $y^m=cx^n$ என்னும் வளையியாலும் $y=k$ என்னுங் கோட்டாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவினது மையப்போலி $(\bar{x}, \bar{y})$ ஆயின்,

$$2(2m+n)\bar{x}/h=(m+2n)\bar{y}/k=m+n$$

என நிறுவுக. இங்கு (h, k) என்பது வளையியிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

8. $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$ எனுங் கோடுகளால் வரைப்புற்ற சதுரம் $y^2=2x$ என்னும் வளையியால் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு பகுதியினதும் மையப்போலியைக் காண்க.

9. x – அச்சாலும் $y=1-x^2$ என்னும் வளையியாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவினது மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

10. ஒரு சுற்றற்றிண்மம் $x=a$ யிலிருந்து $x=2a$ வரைக்குமுள்ள $y^2=x^2-a^2$ எனும் வளையியை x – அச்சு பற்றிச் சுற்றுதலால் ஆக்கப்படுகின்றது. அத்திண்மத்தினது மையப்போலியின் தூரத்தை உற்பத்தியிலிருந்து காண்க.

11. $x=0$, $x=3$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள $3y^2=(3-x)x^2$ எனும் வளையியின் பகுதி x–அச்சு பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அச் சுற்றற் கனவளவினது மையப்போலியின் தூரத்தை உற்பத்தியிலிருந்து காண்க.

12. a ஆரையையுடைய ஒரு கோளம் மையத்திலிருந்து c தூரத்திலுள்ள ஒரு தளத்தால் இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. அத் துண்டுகளினுடைய மையப்போலியின் தூரங்களை மையத்திலிருந்து காண்க.

13. ஒரு பரவளைவின் ஒரு பகுதியை அதன் அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுதலாற் பெறப்படும் ஒரு பரவளைவுக் கிண்ணத்தின் கனவளவினது மையப்போலி அதன் அச்சை 2 : 1 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்குமென நிறுவுக.

14. உற்பத்தியிலிருந்து (h, k) புள்ளிவரைக்குமுள்ள $y^2=4ax$ எனும் பரவளைவின் வில்லொன்று y–அச்சைச் சுற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. h ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட அடியோடு அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட வளைபரப்பு $\frac{1}{5}\pi h^2k$ என்னும் ஒரு கனவளவை உள்ளடைக்குமென்றும் இக்கனவளவினது மையப்போலி உற்பத்தியிலிருந்து $\frac{5}{6}k$ தூரத்தில் இருக்குமென்றும் நிறுவுக.

15. உற்பத்தியிலிருந்து (h, k) புள்ளிவரைக்குமுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் ஒரு பரவளைவின் வில்லொன்று (h, k) புள்ளியிலுள்ள நிலைக்கூறு பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; இவ்வாறு சுற்ற h ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட அடியோடு கூடிய ஒரு வளைபரப்பை ஆக்குகின்றது. உள்ளடைக்கப்பட்ட கனவளவு $\frac{8}{15}\pi h^2k$ என்றும், அவ்வட்ட அடியின் மையத்திலிருந்து அக்கனவளவினது மையப்போலியின் தூரம் $\frac{5}{16}k$ என்றும் நிறுவுக.

16. $x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்குமுள்ள $ay^2=x^2(a-x)$ எனும் வளையியை x–அச்சு பற்றிச் சுற்றுதலால் ஒரு சுற்றற்றிண்மம் ஆக்கப்படுகின்றது. அக்கனவளவினது மையப்போலியின் x ஆள்கூற்றைக் காண்க.

9.7 சிறு மாற்றங்கள்.

1. r ஆரையையும் h உயரத்தையுங் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையினது பரப்பின் பரப்பளவு $2\pi rh$; அதன் கனவளவு πr^2h ஆகும். r, h என்னும் இரண்டின் அளவீடுகளும் 2 சதவீத வழுவிற்கு உட்படுமாயின், அதன் விளைவாகப் பரப்பளவீட்டிலுங் கனவளவீட்டிலும் என்ன சதவீத வழுக்கள் இருக்கும்?

2. அடி ஆரை r ஆயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi r^2h$. அடியாரை 2 சதவீதத்தாற் குறைக்கப்படின், கனவளவை மாற்றுது விடுதற்கு உயரம் எவ்வளவு சத வீதத்தாற் கூட்டப்படவேண்டும்.

3. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரை நிகழ்தகு $\pm$ 2 சதவீத வழுவோடு 15 சதம மீற்றரென அளக்கப்படுகின்றது ; அதன் நீளம் நிகழ்தகு ± 3 சதவீத வழுவோடு 42 சதம மீற்றரென அளக்கப்படுகின்றது. கணிக்கப்பட்ட கனவளவு எவ்வளவு சதவீதத்தால் வழுப்படலாம்?

4. ABC என்பது A யிற் செங்கோணமுள்ள ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணி. AB, AC என்பனவற்றில் முறையே x, y சதவீதங்களில் சிறு வழுக்கள் விடப்படின், நீளம் BC யில் விளையும் வழு $\frac{1}{2}(x+y)$ சதவீதம் எனக் காட்டுக.

5. ஒரு செவ்வகப் பெட்டியினுடைய அடியின் உள்ளளவீடுகள் a அங். நீளமும் b அங். அகலமுமாகும் ; தந்த அளவு நீர் அப்பெட்டியை h ஆழத்திற்கு நிரப்புகின்றது. a, b என்பனவற்றின் அளவீடுகளில் 1 சதவீத வழுவும் -2 சதவீத வழுவும் புணர்த்தப்பட்டால், h இன் அளவீட்டில் என்ன சதவீதத் திருத்தஞ் செய்யப்படவேண்டும்?

6. r ஆரையும் h உயரமுமுள்ள ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வட்ட முனைகள் ஆரை R உடைய ஒரு நிலைத்த கோளத்திற் கிடக்கின்றன. r இல் 1 சதவீதச் சிற்றேற்றஞ் செய்யப்படின், அதன் விளைவாக h இல் ஆகுஞ் சதவீத இறக்கம் $r^2/(R^2-r^2)$ எனக் காட்டுக.

7. ஒரு குழிவான ஆடியின் பரப்பிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் x எனுந் தூரமும் அதன் விம்பத்தின் x' எனுந் தூரமும் $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x'}=$ ஒரு மாறிலி எனுந் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அப்புள்ளி அதன் விம்பம் என்னும் இவற்றின் ஒத்த சிற்றிடப் பெயர்ச்சிகள் $-(x/x')^2$ எனும் விகிதத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

8. W, W' என்பன முறையே ஒரு பொருள் காற்றிலும், நீரிலும் இருக்கும் போதுள்ள நிறைகளைக் குறித்தால், அப்பொருளின் தன்னீர்ப்பு $s=W/(W-W')$ எனுஞ் சூத்திரத்தாலே துணியப்படும். நிறுக்கும்போது ஒவ்வொரு முறையும் 1 சதவீத வழு புணர்த்தப்படின், s தாக்கப்படாதெனக் காட்டுக ; W இல் 1 சதவீத வழுவும் W' இல் 2 சதவீத வழுவும் புணர்த்தப்படின், s இல் $W'/(W-W')$ சதவீத வழு புணர்தப்படுமென்றுங் காட்டுக.

9. தந்த ஒரு திணிவுள்ள வாயுவின் நிலைமாற்றம் எதுவித வெப்ப நயநட்டங்களின்றி நடைபெறுமாயின், அமுக்கம் p யும் கனவளவு v யும் $pv^{\gamma}=$ ஒரு மாறிலி எனும் ஒரு தொடர்பால் இணைக்கப்படும் ; இங்கு γ என்பது ஒரு வரையறுத்த மாறிலி. கனவளவு ஒரு சிறு சதவீதம் x இற் குறைக்கப்பட்டால், அமுக்கம் γx சதவீதத்தாற் கூட்டப்படும் என நிறுவுக.

10. உலோகக் கோல் ஒன்றின் குறுக்கு வெட்டு a^2 பரப்பளவுள்ள ஒரு சதுரம் ; அதன் நீளம் l. x சதவீதச் சிற்றளவால் அந்நீளம் விரிவாக்கப்படுகின்றது. உலோகத்தின் கனவளவில் யாதொரு மாற்றமும்

இல்லையெனக் கொண்டு a யிலுள்ள சதவீத இறக்கத்தைக் காண்க. அதே நிலைமையில், அக்கோலின் முழுப் பரப்பிலுஞ் சதவீத மாற்றம் யாது?

11. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கமும் வேறொரு பக்கமும் அளக்கப்பட, அவை முறையே 18 அங்குலமும் 10 அங்குலமுமெனக் காணப்பட்டன. ஒவ்வோர் அளவீடும் ± 3 சதவீத வழுவிற்கு உட்படுகின்றது. இவ்வளவீடுகளிலிருந்து கணிக்கப்பட்டபடி மீந்திருக்கும் பக்கத்தின் நீளம் ஏறத்தாள 5·7 சதவீத வழுவிற்கு உட்படுமென நிறுவுக.

12. ஒரு கூம்பகத்தின் கனவளவு அதன் அடியின் பரப்பளவை அதன் உயரத்தாற் பெருக்க வருவதன் மூன்றிலொரு பங்கு. ஒரு நான்முகியின் நான்கு முகங்களும் பக்கம் a யாயுள்ள சமபக்க முக்கோணிகளாயின் நீளம் a யில் x சதவீதச் சிற்றேற்றம் அந்நான்முகியின் கனவளவில் $3x$ சதவீத ஏற்றத்தையும் அதன் பரப்பின் பரப்பளவில் $2x$ சதவீத ஏற்றத்தையும் விளைவிக்குமெனக் காட்டுக.

13. தரப்பட்ட ஓர் உலோகக் கனவளவானது, வெளியாரை 2 அடியாயுந் தடிப்பு 3 அங்குலமாயுமுள்ள ஒரு பொட்கோளமாக ஆக்கப்படுகின்றது. ஆரையின் அளவீட்டில் ± 1 சதவீத வழு புணர்த்தப்படின், அதன் விளைவாகத் தடிப்பின் பெறுமானக் கணிப்பில் என்ன சதவீத வழு புணர்த்தப்படும்?

14. மெல்லிய ஒரு வில்லையின் தலைமைக் குவியங்களிலிருந்து ஒரு புள்ளியினது தூரம் x உம் அதன் விம்பத்தினது தூரம் x' உம் $xx' =$ மாறிலி என்னுந் தொடர்பாலே இணைக்கப்படுகின்றன. x ஒரு சிற்றேற்றத்தைப் பெற, x' சம சதவீதத்தாற் குறைக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

15. தன் விளிம்புகள் a, b, c நீளங்களுள்ள ஒரு செவ்வகத் திண்மத்தின் மூலைகள் R ஆரையையுடைய ஒரு நிலைத்த கோளத்திற் கிடக்கின்றது. a, b விளிம்புகள் இரண்டும் 1 சதவீத ஏற்றங்களைப் பெற்றால், அதன் விளைவாகச் c யில் வருங் குறைவு $(a^2+b^2)/c^2$ சதவீத மென்றும், அத்திண்மத்தின் கனவளவில் வரும் ஒத்த ஏற்றம் $(3-4R^2/c^2)$ சதவீதமென்றும் நிறுவுக.

16. ஒரு திறந்த பெட்டியின் அடி, a பக்கச் சதுரமும் ஆழம் c யும் ஆகும். தடிப்புப் புறக்கணிக்கத்தக்கது ; எனினும் அப்பெட்டியை ஆக்குதற்கு வழங்கிய செய்பொருளின் முழுப் பரப்பளவு தந்ததோர் அளவு கொண்டது. அளவீடு a யானது x சதவீதச் சிறுவழுவிற்கு உட்பட்டதாயின், c என்பது $-x(1+a/2c)$ சதவீத வழுவிற்கு உட்படுமென நிறுவுக.

17. சீரான உலோகக் கோளம் ஒன்றின் வெப்பநிலை 3 பாகையால் உயர்த்தப்பட அதன் விட்டம் x சதவீதத்தாற் கூடுதலுறுகின்றதெனக் காணப்படுகின்றது. அக்கோளத்தின் கனவளவும் பரப்பும் ஒவ்வொரு பாகை வெப்பநிலை ஏற்றத்தாலும் எச்சதவீதங்களாற் கூடுதலுறும்?

18. தரப்பட்ட ஓர் உலோகக் கணியம் ஒரு முனையிலே திறந்துள்ள ஒரு வட்டவுருளையாக ஆக்கப்படுகின்றது. வெளியளவீடுகள், உயரம் 12 அங்குலமும் அடியாரை 6 அங்குலமுமாகும் ; அவ்வுருளை 1 அங்குல சீரான தடிப்புள்ளது. அவ்வுருளையின் உயரம் ஓர் அங்குலத்தின் x எனும் ஒரு சிறு பின்னத்தாற் கூட்டப்பட, ஆரை மாறாதிருந்தால், தடிப்பு $11x/135$ அங்குலத்தாற் குறைக்கப்பட வேண்டுமென நிறுவுக.

19. செவ்வக உலோகக் கட்டி ஒன்றின் விளிம்புகள் பிழையாக a, b, c அங். என அளக்கப்பட்டுள்ளன ; அவ்வளவீடுகளில் முறையே 1, 2, 1·5 சதவீத வழுக்கள் புணர்த்தப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவின் அளவீட்டில் என்ன சதவீத வழு உண்டு?

20. வெளி விளிம்பு 12 அங்குலமும் 2 அங்குலச் சீரான தடிப்புமுள்ள ஒரு கனவடிவப் பெட்டி தந்த ஓர் உலோகக் கனவளவிலிருந்து ஆக்கப்பட வேண்டும். அதன் விளிம்பினது நீளத்தில் x சதவீதச் சிறு வழு புணர்த்தப்படின், அதன் விளைவாகத் தடிப்பில் என்ன சதவீதவழு ஆக்கப்படும்?

விடைகள்

2.12. **1.** $-1, ; -1 ; 7.$ **2.** $0 ; \frac{1}{2} ; 2.$

3. $(a^2+3ab+b^2)/a(a+b) ; 4ab/(a^2-b^2).$ **4.** $a^2b^2.$

2.33. **1.** (i) 0 ; (ii) 2 ; (iii) ∞. **2.** (i) c/a; (ii) a/c.

3. $-\frac{3}{4}$. **4.** $\frac{1}{27}$. **5.** 2. **6.** -4. **7.** (i) $\frac{1}{20}$; (ii) -4.

8. $\frac{1}{2}$. **9.** -1. **10.** -2. **11.** ∞.

2.41. **1.** $3x^2+3x\delta x+(\delta x)^2$; $8x+4\delta x$; $2(x-1)+\delta x$.

2. $-1/x(x+\delta x)$; $-(4x+2\delta x)/x^2(x+\delta x)^2$; $-1/(x-1)(x+\delta x-1)$.

3. $1-\dfrac{1}{x(x+\delta x)}$; $\dfrac{-2(x-1)-\delta x}{(x-1)^2(x+\delta x-1)^2}$; $a-\dfrac{b}{x(x+\delta x)}$.

2.521. (i) $4x$. (ii) $-1/(x-1)^2$. (iii) $3x^2+1$. (iv) a.

(v) $-a/(ax+b)^2$. (vi) $-3/x^4$.

2.59. **1.** $4x^3$; $5x^4$; $\dfrac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$; $-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$; $-\dfrac{2}{x^3}$; $-\dfrac{4}{3x^{\frac{7}{3}}}$.

2. (i) $6x^2+6x$; (ii) $6x-2$; (iii) $3(x-2)^2$;

(iv) $-\dfrac{9}{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$; (v) $-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$; (vi) $1-\dfrac{1}{x^2}$;

(vii) $2ax+b$; (viii) $-\dfrac{2}{ax^3}-\dfrac{1}{bx^2}$;

(ix) $\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}$; (x) $nax^{n-1}-\dfrac{nb}{x^{n+1}}$;

(xi) $4x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}+4x^{-\frac{7}{3}}$;

(xii) $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}+\dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$.

2.61. (i) $6-6x-27x^2$. (ii) $-20x+27x^2-30x^4$.

(iii) $4x^3+2x$. (iv) $6(x^5+x^2)$.

2.621. (i) $-1/(2x+1)^2$,. (ii) $-(2x^4-3x^2-4x)/(x^3+1)^2$.

(iii) $2(x^2-1)/(x^2+x+1)^2$. (iv) $(ad-bc)/(cx+d)^2$.

(v) $-a/(ax+b)^2$. (vi) $-3x^2/(x^3-1)^2$.

(vii) $-4b(ax^2-c)/(ax^2-2bx+c)^2$.

(viii) $x(x^3+3x+2)/(x^2+1)^2$.

(ix) $2x(x^2-1)(x^2+3)/(x^2+1)^2$.

2.633. (i) $20x(2x^2+1)^4$; $12(4x-1)^2$; $36x^2(3x^3+2)^3$.

(ii) $\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$; $\dfrac{-6}{(2x+1)^4}$; $\dfrac{-10}{(2x+1)^6}$.

(iii) $3(20x-9)(5x+1)^2$; $5(2x-1)(2x+3)^3$.

(iv) $6x(x^3+1)^3(7x^3+1)$; $2x(x^4-1)^4(x^2-1)(11x^2+1)$.

(v) $\dfrac{-(2x^2+4x+3)}{(x-1)^4}$; $\dfrac{-2(x-1)(4x^2-6x-1)}{(2x^2+1)^4}$.

(vi) $\dfrac{-x(x-2)}{(x+1)^4}$; $\dfrac{(x+1)^2(2x-7)}{(2x-1)^3}$.

(vii) $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x+1)}}$; $\dfrac{2x^3+x}{\sqrt{(x^4+x^2+1)}}$.

(viii) $\dfrac{-1}{x^2\sqrt{(x^2+1)}}$; $\dfrac{-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

2.64. **1.** (i) $12x^2$; (ii) $-2x/(x^2+1)^2$; (iii) $-2a/(ax+b)^3$.

2. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$. **3.** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$.

4. (i) $2ax$, $2a(x+2)$, $4ax(x^2+3)$;

(ii) $\dfrac{-2}{ax^3}$, $\dfrac{-2}{a(x+2)^3}$, $\dfrac{-4x}{a(x^2+3)^3}$;

(iii) $\dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $\dfrac{-4}{(1+x)^5}$, $\dfrac{-5}{(1+x)^6}$;

(iv) $\dfrac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{3x^2}{2(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}$;

(v) $6(2x+1)^2(3x-2)(5x-1)$, $(2x+1)(3x-2)^2(30x+1)$;

(vi) $6(2x+1)^2(x-3)/(3x-2)^3$, $-6(3x-2)(x-3)/(2x+1)^4$;

(vii) $(2x+3)/2\sqrt{\{(x+1)(x+2)\}}$, $1/2\sqrt{\{(x+1)(x+2)^3\}}$;

(viii) $3x^2-12x+11$; (ix) $(x^2-6x+7)/(x-3)^2$;

(x) $\{(m+n)x+na+mb\}(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}$;

(xi) $\{(m-n)x-na+mb\}(x+a)^{m-1}/(x+b)^{n+1}$;

(xii) $mnx^{n-1}(x^n+a^n)^{m-1}$, $\{x^n(1-mn)+a^n\}/(x^n+a^n)^{m+1}$.

3.11. 2. (i) -2 ; (ii) $-2a$; (iii) -1 ; (iv) 0.

3.424. 1. உயர்வு 0, இழிவு $-\frac{4}{27}$.

2. உயர்வு $x=2-\frac{1}{\sqrt{3}}$, இழிவு $x=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. 1 ; 1 ; இழிவு $x=\frac{4}{3}$ இல். 7. -1 ஓர் இரட்டை மூலம்.

8. $x=\frac{4}{5}$, $x=2$ என்பன திரும்பற் புள்ளிகள் ; $x=-1$ என்பது விபத்திப் புள்ளி.

10. $x=\cdot 5$ இலே தொடும் ; $x=-3$ இல் வெட்டும்.

12. $x=0$ இல் உயர்வு, $x=2$ இல் இழிவு.

14. உயர்வு $3-2\sqrt{2}$, இழிவு $3+2\sqrt{2}$.

15. 2, 2, 2, 10/3 என்பன மூலங்கள்.

3.531. 1. 3, 0, செக்கனுக்கு -9 அடி, 2 அடியும் 4 அடியும் எதிர்த் திசையில் ; $-6t$.

2. $6(t^2-5t+6)$, $6(2t-5)$. முதலிரண்டு செக்கனில் 28 அடி சென்று மூன்றுஞ் செக்கனில் 1 அடி திரும்பி வந்து நாலாஞ் செக்கனில் 5 அடி முன் செல்கின்றது. ; செக்கனுக்கு $-1\cdot 5$ அடி.

3. $2(2-7t+3t^2)$; $-2(7-6t)$.

4. செக்.^{2} இற்கு 1 அடி ; செக்.^{2} இற்கு $-1\cdot 8$ அடி.

3.65. 1. $x=\frac{1}{2}, -3$. 2. இழிவு $x=-2$; விபத்திப் புள்ளி $x=\pm 1$.

3. இழிவு $x=0$, உயர்வு $x=\pm 1$; விபத்திப் புள்ளி $x=\pm 1/\sqrt{3}$.

4. உயர்வு $x=2$, இழிவு $x=1, 3$; விபத்திப் புள்ளி $x=2\pm 1/\sqrt{3}$.

5. உயர்வு $x=0$ இழிவு $x=\pm 1$; விபத்திப்புள்ளி $x=\pm 1/\sqrt{3}$; $\pm 1/\sqrt{3}$ என்பனவற்றிற்கிடையில்.

6. $a=-21$, $b=9$, $c=1$.

7. உயர்வு $x=\frac{2}{3}$, இழிவு $x=2$; விபத்திப் புள்ளி $x=-1$, $(4\pm\sqrt{10})/6$.

8. 1 விபத்திப் புள்ளி, 2 உயர்வு, 3 இழிவு.

9. விபத்திப் புள்ளிகள்.

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3$. 11. $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -2$. 13. $x=0, \pm\sqrt{3}$.

14. உயர்வு $x=-1+\sqrt{2}$, இழிவு $x=-1-\sqrt{2}$; மூன்று.

15. இழிவு $x=0$, விபத்திப் புள்ளி $x=\pm 1/\sqrt{3}$.

16. உயர்வு $x=1$, இழிவு $x=-1$. 17. $-1, 7$.

4.15. (i) 3 சைன்^2x கோசை^2x கோசை $2x$

(ii) சீகx (சீக^2x + தான்^2x).

(iii) 2 சைன் x / (1 + கோசை x)^2.

(iv) m கோசை mx கோசை $nx - n$ சைன் mx சைன் nx.

(v) nx^{n-1} சைன் $mx + mx^n$ கோசை mx.

(vi) 4 சீக^2x தான் x. (vii) m கோசை $2mx$. (viii) கோசை^3x.

(ix) -3 கோசீ^3x கோதா x. (x) -3 கோதா $3x$ கோசீ $3x$.

(xi) சீக^2x ($1+2x$ தான் x).

(xii) x^2 தான் x (3 தான் $x+2x$ சீக^2x).

4.23. (i) $-1/\sqrt{(1-x^2)}$. (ii) $-$சைன் $x/(1+$கோசை$^2x)$.

(iii) -1. (iv) [illegible]$2/(x^2-1)\sqrt{(x^2-2)}$.

(v) $2/(1+x^2)$. (vi) $-2/(1+x^2)$.

(vii) $-3\sqrt{x}/\sqrt{(2-x^3)}$. (viii) $1/(1+x^2)$.

(ix) $2x$ தான்$^{-1}x+1$. (x) $-2x$ கோசை$^{-1}x-\sqrt{(1-x^2)}$.

(xi) $\dfrac{x\ \text{சீக}^{-1}x}{\sqrt{(x^2-1)}}+\dfrac{1}{x}$. (xii) கோதா$^{-1}x-\dfrac{x}{1+x^2}$.

(xiii) $1/\sqrt{(a^2-x^2)}$. (xiv) $ab/(a^2x^2+b^2)$.

(xv) $-1/\sqrt{(2ax-x^2)}$. (xvi) $\sqrt{(b^2-a^2)}/(b+a$ கோசை $x)$.

(xvii) $-3/(2x^2-2x+5)$. (xviii) $\sqrt{(b^2-a^2)}/(b+a$ சைன் $x)$.

(xix) $1/2\sqrt{\{(a-x)(x-b)\}}$. (xx) $\sqrt{(ac-b^2)}/(ax^2+2bx+c)$.

4.36. (i) $e^x(x^3+3x^2)$. (ii) $e^x\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{x^5}\right)$.

(iii) $\dfrac{1}{e^x}(-x^5+5x^4)$. (iv) $2xe^{x^2+1}$.

(v) $2ab\,e^x/(a-be^x)^2$. (vi) $e^{\text{தான்}\,x}$ சீக^2x.

(vii) $e^{\text{சைன்}^{-1}x}/\sqrt{(1-x^2)}$. (viii) e^{ax} (a சைன் $bx+b$ கோசை bx).

(ix) e^{ax}(a கோசை $bx-b$ சைன் bx). (x) $2e^{\text{தான்}^2 x}$ தான் x சீக^2x.

(xi) அசைன் $2x$. (xii) அசைன் $2x$.

(xiii) 4 அகோசை^{3} x. (xiv) அசீக $2x$.

(xv) அசீக x. (xvi) $-$அசீக x.

4.47. (i) $1+$ மட x. (ii) 2 கோசீ $2x$.

(iii) 2 கோதா x. (iv) $-$அதான் x.

(v) $1/(1+x^2)$ தான்^{-1}x. (vi) $-1/x(x+1)$.

(vii) $-2x/(1-x^4)$. (viii) மட அகோசை $x+x$ அதான் x.

(ix) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$. (x) $2(x^2-1)/(x^4+x^2+1)$.

(xi) $1/x$ மட x. (xii) $-4\,x^3/(1-x^4)^{\frac{1}{2}}\,(1+x^4)^{\frac{3}{2}}$.

(xiii) $1-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$. (xiv) $x^{x^2+1}(1+2$ மட $x)$.

(xv) $(x^2+1)^x\left\{(\text{மட}\,(x^2+1)+\dfrac{2\,x^2}{x^2+1}\right\}$.

(xvi) $(\text{சைன்}x)^{\text{கோசை}\,x}\{\text{கோசை}\,x\,\text{கோதா}\,x-\text{சைன்}\,x\,\text{மட}\,\text{சைன்}\,x\}$.

(xvii) $2x\,a^{x^2+1}$ மட a.

(xviii) $(\text{சைன்}^{-1}x)^x\{\text{மட சைன்}^{-1}x+x/\text{சைன்}^{-1}x\sqrt{(1-x^2)}\}$.

(xix) $(\text{தான்}\,x)^{\text{சீக}\,x-1}\,\text{சீக}\,x\{\text{தான்}^2x\ \text{மட}\ \text{தான்}\,x+\text{சீக}^2x\}$.

(xx) $x^{\text{தான்}x}\{\text{சீக}^2x\ \text{மட}\ x+(\text{தான்}\,x)/x\}$.

4.52. 1. $1/\sqrt{(x^2+a^2)}$. 2. $a/(a^2-x^2)$. 3. $-a/(x^2-a^2)$.

4. (i) அகோசை$^{-1}x\pm\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$; (ii) $-2x$ அதான்$^{-1}\dfrac{x}{a}+a$;

(iii) $\dfrac{2\ \text{அசைன்}^{-1}x}{\sqrt{(1+x^2)}}$; (iv) $-$கோசீ x ;

(v) $\pm$ சீக x ; (vi) சீக x ;

(vii) $\pm\dfrac{\text{சீக}^2(\text{அகோசை}^{-1}x)}{\sqrt{(x^2-1)}}$; (viii) $\dfrac{\text{கோசை}\,(\text{அதான்}^{-1}x)}{1-x^2}$;

(ix) $\frac{1}{2}$ சீக x ; (x) -1^1x.

5. அசீக x.

4.61. 1. (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $2\,nx^{n-1}/(x^{2n}+1)$; (iii) $1/2(1+x^2)$;

(iv) $2x^2/(x^4-1)$; (v) $2a/\sqrt{(1-a^2x^2)}$.

2. $-4\sqrt{2}/(1+x^4)$.

3. (b^2-a^2) கோசை ax அகோசை $bx-2ab$ சைன் ax அசைன் bx.

14. $3,\ \frac{1}{2}\pi$. 21. $2a^2$. 25. உயரம் $=\frac{4}{3}$ ஆரை.

26. 2 சைன்$^{-1}$ $\frac{1}{3}$. 27. $\frac{1}{2}\,(a+b)^2$.

28. (i) தான்$^{-1}\dfrac{b}{a}$; (ii) தான்$^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$; (iii) தான்$^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

29. உயரம் $=\frac{1}{3}\,h$. 30. $\sqrt{2}a$.

31. செவ்வகவுயரம் $=$ ஆரை $=30/(\pi+4)$ அடி.

5.13. 1. (i) $x^4,\ x^5,\ \frac{1}{7}x^7,\ \frac{1}{10}x^{10},\ \frac{1}{101}x^{101}$;

(ii) $-\frac{1}{2}x^{-2},\ -\frac{1}{3}x^{-3},\ -\frac{1}{5}x^{-5},\ -\frac{1}{8}x^{-8},\ -\frac{1}{99}x^{-99}$;

(iii) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}},\ \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}},\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}},\ \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}$;

(iv) $4x^{\frac{1}{4}},\ \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}},\ 2x^{\frac{1}{2}},\ -3x^{\frac{1}{3}},\ \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}}$.

2. (i) $\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x$;

(ii) $-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5$; (iii) $\frac{1}{3}x^3+x^2+x$;

(iv) $\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx$; (v) $-\dfrac{a}{3x^3}-\dfrac{2b}{x}+cx$.

5.223. (i) $\frac{1}{4}(x-1)^4$; $-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$. (ii) $\frac{1}{8}(2x-1)^4$; $-\dfrac{1}{4(2x-1)^2}$.

(iii) $\frac{1}{2}x^2-x+$ மட $(x+1)$; மட $x-\dfrac{1}{x}$.

(iv) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2$ மட $(x-1)$.

(v) $x-$ மட $(x+2)$; $x+$ மட $(x+1)$.

(vi) $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+3$ மட $x-\dfrac{1}{2x^2}$.

(vii) தான் $x-x$ (viii) $-\frac{3}{4}$ கோசை $x+\frac{1}{12}$ கோசை $3x$.

(ix) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ அசைன் $2x$; $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ அசைன் $2x$. (x) $x-$ அதான் x.

5.34. (i) $\frac{1}{2}$ மட $\{(x-1)/(x+1)\}$. (ii) $\frac{1}{2}$ மட (x^2-1).

(iii) $\frac{1}{2}$ மட (x^2+1). (iv) $\frac{1}{2}$ மட $(x^2+1)+$ தான்^{-1}x.

(v) மட $\{(x-2)^2/(x-1)\}$. (vi) $\frac{1}{2}$ மட $\{(x+3)^5/(x+1)\}$.

(vii) $\frac{1}{2}\text{ மட }\{(3x+1)^5/(x+1)\}$. (viii) $x+\text{மட }\{(x-1)/(x+1)\}$.

(ix) $(x^2+x-3)/(x+1)-3\text{ மட }(x+1)$.

(x) $\text{மட }(x^2+4x+5)$. (xi) $\text{தான்}^{-1}(x+2)$.

(xii) $\text{மட }(x^2+4x+5)+3\text{ தான்}^{-1}(x+2)$.

(xiii) $\frac{1}{2}\text{ மட }(x^2+6x+25)-\frac{1}{2}\text{ தான்}^{-1}\frac{x+3}{4}$.

(xiv) $\text{மட }(x^2+x+1)$.

(xv) $\frac{1}{2}\text{ மட }(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ தான்}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

(xvi) $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ தான்}^{-1}\sqrt{3}(x+2)$. (xvii) $\frac{1}{6}\text{ மட }(3x^2+12x+13)$.

(xviii) $\frac{1}{6}\text{ மட }(3x^2+12x+13)+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{ தான்}^{-1}\sqrt{3}\,(x+1)$.

(xix) $\text{மட }(x^2+6x+10)-3\text{ தான்}^{-1}(x+3)$.

(xx) $\frac{1}{2}\text{ மட }(4x^2+4x+3)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{ தான்}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}$.

5.42. (i) $\sqrt{(x^2+1)}$. (ii) $\sqrt{(x^2+2x+3)}$.

(iii) $-2\sqrt{(4-x-x^2)}$. (iv) $-\sqrt{(1-x^2)}$.

(v) $2\text{ சைன்}^{-1}x-\sqrt{(1-x^2)}$. (vi) $\text{சைன்}^{-1}\frac{x+3}{2}$.

(vii) $-\sqrt{(-5-6x-x^2)}$.

(viii) $-4\sqrt{(-5-6x-x^2)}-7\text{ சைன்}^{-1}\frac{x+3}{2}$.

(ix) $\frac{1}{3}\text{ அசைன்}^{-1}(3x+1)$.

(x) $\text{அசைன்}^{-1}(3x+1)+\frac{1}{3}\sqrt{(9x^2+6x+2)}$.

(xi) $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ அகோசை}^{-1}\frac{3x+1}{2}$.

(xii) $\sqrt{(3x^2+2x-1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ அகோசை}^{-1}\frac{3x+1}{2}$.

5.53. (i) $\frac{1}{3}\text{ மட }(x^3-1)$. (ii) $\frac{1}{3}\text{ தான்}^{-1}x^3$.

(iii) $\frac{1}{3}\text{ அசைன்}^{-1}x^3$. (iv) $\frac{1}{2}\sqrt{(4x^2+4x+3)}$.

(v) $-\frac{1}{24(9x^2+6x+2)^4}$. (vi) $\frac{1}{4}\text{ சைன்}^{-1}x^4$.

(vii) $\frac{1}{2}\text{ தான்}^2 x$. (viii) $-\frac{1}{b}\text{ மட }(a+b\text{ கோசை }x)$.

(ix) $-\text{கோசை }x+\frac{2}{3}\text{ கோசை}^3x-\frac{1}{5}\text{ கோசை}^5x$.

(x) $\text{சைன் }x-\text{சைன்}^3x+\frac{3}{5}\text{ சைன்}^5x-\frac{1}{7}\text{ சைன்}^7x$.

(xi) $\frac{2}{3}\text{ சைன்}^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\text{ சைன்}^{\frac{7}{2}}x$. (xii) $\text{மட }(x+\text{சைன் }x)$.

(xiii) $-\frac{1}{a}\text{ அசைன்}^{-1}\frac{a}{x}$. (xiv) $-\frac{1}{a}\text{ அகோசை}^{-1}\frac{a}{x}$.

(xv) $\frac{1}{2}\text{ தான்}^{-1}(\frac{1}{2}\text{ சைன் }x)$. (xvi) $\sqrt{\{(1+x)/(1-x)\}}$.

(xvii) $-\text{சைன்}^{-1}1/3\,(x-2)$. (xviii) $-\frac{1}{3}\text{ அகோசை}^{-1}3/(x+1)$.

(xix) $\frac{1}{n+1}(\text{மட }x)^{n+1}$. (xx) $\text{மட மட }x$.

5.56. (i) $\sqrt{(x^2+a^2)}+a\text{ அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}$. (ii) $a\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}-\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(iii) $\sqrt{(x^2-a^2)}$. (iv) $\frac{1}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$.

(v) $\frac{1}{2}a^3\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{6}(2x^2+3ax-2a^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(vi) $\frac{3}{8}a^4\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{8}x\,(5a^2-2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(vii) $\frac{3}{8}a^4\text{ அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{8}x\,(5a^2+2x^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$.

(viii) $\frac{1}{8}a^4\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}x(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(ix) $\frac{1}{8}x(2x^2-a^2)\sqrt{(x^2-a^2)}-\frac{1}{8}a^4\text{ அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$.

(x) $\frac{1}{2}\text{ தான்}^{-1}(\frac{1}{2}\text{ தான் }\frac{1}{2}x)$. (xi) $\frac{1}{4}\text{ மட }\frac{2+\text{தான் }\frac{1}{2}x}{2-\text{தான் }\frac{1}{2}x}$.

(xii) $\frac{2}{\text{சைன்}\alpha}\text{ தான்}^{-1}(\text{தான் }\frac{1}{2}\alpha\text{ தான் }\frac{1}{2}x)$.

(xiii) $\text{தான்}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. (xiv) $\text{தான்}^{-1}(1+\text{தான் }\frac{1}{2}x)$.

(xv) $-2/(3+\text{தான் }\frac{1}{2}x)$.

5.66 1.(i) $-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)$; (ii) $e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)$;

(iii) $-\frac{1}{2}x$ கோசை $2x+\frac{1}{4}$ சைன் $2x$;

(iv) $\frac{1}{3}x^2$ சைன் $3x+\frac{2}{9}x$ கோசை $3x-\frac{2}{27}$ சைன் $3x$;

(v) $\frac{1}{4}x^4($மட $x-\frac{1}{4})$; (vi) $-\frac{1}{4}x$ கோசை $2x+\frac{1}{8}$ சைன் $2x$;

(vii) x சைன்$^{-1}$ $x+\sqrt{(1-x^2)}$;

(viii) x தான்$^{-1}$ $x-\frac{1}{2}$ மட $(1+x^2)$;

(ix) $-x^4$ கோசை $x+4x^3$ சைன் $x+12x^2$ கோசை x
$-24x$ சைன் $x-24$ கோசை x ;

(x) $-e^{-x}(x^5+5x^4+20x^3+60x^2+120x+120)$;

(xi) x தான் $x-$ மட சீக x.

(xii) $\frac{1}{2}$ (அசைன் x கோசை $x+$ அகோசை x சைன் x).

(xiii) $\frac{1}{2}$ (அகோசை x சைன் $x-$ அசைன் x கோசை x).

(xiv) $\frac{1}{2}x^2\left\{(\text{மட } x)^2-(\text{மட } x)+\frac{1}{2}\right\}$;

(xv) (n சைன் mx சைன் $nx+m$ கோசை mx கோசை nx)$/(n^2-m^2)$;

(xvi) (n கோசை mx சைன் $nx-m$ சைன் mx கோசை nx)$/(n^2-m^2)$.

5.71. 1. $u^2/2g$. 2. $ut+\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{6}bt^3$. 3. 2.
4. $a=35,\ b=16{\cdot}5$. 5. $\sqrt{(u^2+4as-2s^2)}$. 6. 84.
7. $a/\sqrt{b},\ 2a/b$. 8. $a^2,\ 2a$.

5.8. 1. $-\frac{3}{2(3x-1)^2}$; $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+$ மட $(x-1)$; $\frac{1}{2}x^2-x+2$ மட $(x+1)$.

2. மட $\frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$; $\frac{1}{4}$ மட $\left\{(x+3)^5(x-1)^3\right\}$; $\frac{1}{10}$ மட $\frac{(x+2)^6}{2x-1}$.

3. மட $(x^2+1)+$ தான்^{-1}x ; $x-2$ தான்^{-1}x ; $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ மட (x^2+1).

4. $2\sqrt{(x^2-1)}$; $\sqrt{(x^2+1)}+$ அசைன்^{-1}x ;
$-2\sqrt{(1-x^2)}-$ சைன்^{-1}x.

5. $\sqrt{(x^2-1)}+$ அகோசை^{-1}x ; சைன்$^{-1}x+\sqrt{(1-x^2)}$;
$-$ சைன்$^{-1}(1-x)$.

6. $\frac{1}{4}$ மட $(2x^2+3x+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}$ தான்$^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{2}$ மட $\frac{(x+1)^4}{(2x+1)^3}$;
$\frac{1}{4}$ மட $(4x^2+4x+3)+\frac{3}{\sqrt{2}}$ தான்$^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}$.

7. $\frac{2}{9}\sqrt{(9x^2+6x+2)}+\frac{1}{9}$ அசைன்$^{-1}(3x+1)$;
$\frac{3}{4}\sqrt{(4x^2+4x-1)}+\frac{5}{4}$ அகோசை$^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}$;
$2\sqrt{(x^2-2x+2)}+$ அசைன்$^{-1}(x-1)$.

8. $\frac{1}{b}$ மட $(a+b$ சைன் $x)$; $\frac{1}{5}$ சீக^5x ; $\frac{1}{2}$(சைன்$^{-1}x)^2$.

9. $\frac{1}{9}$ மட $\frac{x^3-1}{x^3+2}$; $\sqrt{(1+x^2)}+\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$;
$\frac{3}{28}(4x-3)(1+x)^{\frac{4}{3}}$.

10. $\frac{1}{2}$ தான்$^2x-$ மட சீக x ; $\frac{1}{8}(3x-2$சைன் $2x+\frac{1}{4}$சைன் $4x)$;
$\frac{1}{4}$சைன்$^4x-\frac{1}{6}$சைன்^6x.

11. $\frac{1}{ab}$ தான்$^{-1}\left(\frac{b}{a}\right.$ தான் $\left.x\right)$; தான் $x-$ கோதா x.

12. $\frac{1}{8}\left\{a^4\right.$சைன்$^{-1}\frac{x}{a}-x(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}\left.\right\}$;
$\frac{1}{2}a^2$சைன்$^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}$; $\frac{1}{15}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2a^2)$.

13. $\frac{1}{2(b-a)}$ மட (a கோசை^2x+b சைன்^2x) ;
$\frac{ax}{b}-\frac{2\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}$ தான்$^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right.}\right.$ தான் $\left.\left.\frac{x}{2}\right)\right\}$

14. $e^x(x^2-2x+2)$; $\frac{1}{9}x^3(3$ மட $x-1)$.

15. x சீக$^{-1}x-$ அகோசை^{-1}x ; $\frac{1}{2}\left\{x^2\right.$சீக$^{-1}x-\sqrt{(x^2-1)}\left.\right\}$;
x தான் $x-\frac{1}{2}x^2-$ மட சீக x.

16. $\frac{1}{n}$ மட $\frac{x^n}{x^n+1}$; $-$ கோசை மட x. 17. $\pi/2\mu$.

18. $(e^{ks}-1)/kv_0$. 20. $\frac{ft}{k}-\frac{f}{k^2}(1-e^{-kt})$.

6.14. 1. (i) $\frac{4}{3}$; (ii) $\frac{2}{3}a^3$; (iii) $8\frac{1}{2}$;
(iv) $\frac{(a+b)^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)a}$; (v) $\frac{3}{8}$; (vi) $51{\cdot}2$;
(vii) $\frac{1}{3}(e^3-1)$; (viii) $\frac{1}{2}\pi$; (ix) $\frac{1}{4}\pi$;
(x) மட$_e(1+\sqrt{2})$; (xi) $\frac{1}{4}\pi$; (xii) $\frac{2}{3}$.
2. $20\frac{1}{4}$. 3. 2. 4. $84{\cdot}4$. 5. c^2 மட (b/a).

6.54. (i) $1/a$. (ii) $\frac{1}{6}$ மட$_e 5 = \cdot 2682$. (iii) $\frac{1}{8}\pi$.
(iv) $\frac{1}{4}\pi$. (v) $\frac{1}{4}\pi$. (vi) $\sqrt{2}-1$.
(vii) மட$_e (3+2\sqrt{2})$. (viii) மட$_e \frac{4}{3} = \cdot 2877$.
(ix) $\frac{1}{2}$ மட$_e \frac{8}{5} - \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}$ தான்$^{-1} \frac{1}{2}$. (x) $\pi/2ab\,(a+b)$.
(xi) $\frac{1}{4}\pi a^2$. (xii) $\sqrt{3}$. (xiii) $\frac{1}{2}\pi - 1$.
(xiv) $\pi - 2$. (xv) $\frac{1}{2}$.

6.61. (i) $\frac{16}{35}$. (ii) $\frac{3\pi}{16}$. (iii) $\frac{8}{15}$. (iv) $\frac{3\pi}{16}$.
(v) $-\frac{8}{15}$. (vi) $\frac{16}{15}$. (vii) 0. (viii) 0.
(ix) $\frac{3\pi}{4}$. (x) 0. (xi) $\frac{4}{15}$. (xii) $\frac{\pi}{8}$.
(xiii) $\frac{2}{5}$. (xiv) 0. (xv) $\frac{\pi}{16}$.

6.8. **1.** (i) மட$_e(1+\sqrt{2})$; (ii) $\frac{1}{2}\pi$; (iii) $2\sqrt{a}$;
(iv) $\pi/2ab$; (v) πa ; (vi) $\frac{1}{4}\pi$;
(vii) π ; (viii) $\pi/2\,(a+b)$; (ix) $\frac{1}{2}$ மட$_e 2 = \cdot 3466$;
(x) மட$_e(1+\sqrt{2})$; (xi) $\pi/2ab$; (xii) $b/(a^2+b^2)$;
(xiii) π ; (xiv) $\frac{1}{8}\pi\,(a-b)^2$; (xv) $\frac{1}{2}\pi\,(b-a)$;
(xvi) $-\frac{1}{4}\pi$; (xvii) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$ மட$_e 2$; (xviii) $\alpha/$சைன் α ;
(xix) $-\frac{1}{9}$; (xx) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$ மட$_e 2$.

2. (i) $\frac{2}{3}$; (ii) 1 ; (iii) $\frac{1}{2}\pi$; (iv) $b\,(e^{\frac{a\pi}{b}}+1)/(a^2+b^2)$.

4. $\frac{1}{6}$.

4. உயர்வு $2/3\sqrt{3}$, இழிவு $-2/3\sqrt{3}$, கூறப்பட்ட எல்லைகளுக்கு இடையில் x – அச்சிற்கு மேலுள்ள பரப்பளவிற்கும் கீழுள்ள பரப்பளவிற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம்.

5. e^{-1} ; (i) $1-2e^{-1}$; (ii) $2e^{-1}$. **6.** $4/15$.

7. அவ்வளையிக்கும் அச்சுக்களுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பளவும், x – அச்சிற்கும் மேலுங் கீழும் வரைப்புற்ற பரப்பளவுகளின் வித்தியாசமும் ; அவையாவன $17/12$ உம் $4/3$ உம்.

8. $1/4$, $1/4$.

9. $x=0$, $y=-2$; $y=0$, $x=1$; $\frac{1}{2}(\pi-1)$.

10. $x=\frac{1}{2}$ யிலே தொடும் ; $x=-3$ யிலே வெட்டும் ; $50\frac{1}{48}$.

11. $x=-1$, $x=2$ என்பனவற்றிலே தொடும் ; $8\frac{1}{10}$. **12.** 10.

7.22. **1.** 9π. **2.** $16a^2/3$. **3.** $8a^2/3$.
4. $4-\frac{1}{2}\pi$. **5.** $(\pi-2)/4$ உம் $(3\pi+2)/4$ உம்.
6. $25\pi/4\sqrt{2}$. **7.** $3\pi/8$. **8.** $147\pi/4$.

7.313. **1.** $\pi^2a^2/2\,b$. **3.** $\pi a^3(10-3\pi)/6$. **4.** $6\pi a^3/7$.
5. $81\pi/10$. **6.** $2\pi a^3\{$சைன் $\alpha(1-\frac{1}{3}$ சைன்$^2\alpha) - \alpha$ கோசை $\alpha\}$.
7. $808\pi/5$. **8.** $\frac{1}{2}\pi c^3(e-4+5e^{-1})$.

7.442. **1.** (i) $\frac{1}{2}\pi b$, $\frac{1}{8}\pi a$; (ii) $1, -1{\cdot}6$;
(iii) $\frac{3}{5}, -\frac{2}{35}$; (iv) $\frac{3}{16}\pi$, 0 ;
(v) உச்சியிலிருந்து உயரத்தின் $\frac{3}{4}$;
(vi) மையத்திலிருந்து $\frac{3}{4}(a\pm c)^2/(2a\pm c)$;
(vii) அச்சை $3a^2+2ab+b^2 : a^2+2ab+3b^2$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும் ;
(viii) அச்சை $51:155$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும்.

2. பின்வரும் விடைகளில் M பொருளினது திணிவைக் குறிக்கின்றது.
(i) a சதுரத்தின் பக்கமாயின், $\frac{1}{3}Ma^2$;
(ii) a கோலினது நீளமாயின், $\frac{1}{2}Ma^2$;
(iii) h, பக்கத்திலிருந்து எதிருச்சியினது தூரமாயின், $\frac{1}{6}Mh^2$;
(iv) a ஆரையாயின், $\frac{1}{4}Ma^2$;
(v) a அடியின் ஆரையாயின், $\frac{3}{10}Ma^2$;
(vi) $\frac{1}{3}Mhk$, (vii) $\frac{1}{4}Mb^2$, $\frac{1}{4}Ma^2$.

7.62. **1.** (i) $\frac{4}{3}\pi^3a^2$; (ii) $a^2(e^{4kh}-1)/4k$.
2. (i) $\frac{1}{8}\pi a^2$; (ii) $\pi a^2/4n$. **4.** $\frac{9}{2}\pi$.
5. $\bar{x}=128\sqrt{2}\,a/105\pi$; $32\sqrt{2}\pi a^3/105$.
6. $\bar{x}=b(4a^2+b^2)/2(2a^2+b^2)$.
7. $\bar{x}=-5a/6$; $\bar{y}=16a/9\pi$; $\frac{8}{3}\pi a^3$.
9. $\frac{1}{6}\pi\,(3\pi-4)a^3$. **10.** $\frac{1}{4}\pi b^2(2\sqrt{3}a-b)$.
12. $a^2(2\pi+3\sqrt{3})/48$; $a^2(4\pi-3\sqrt{3})/48$.

8.51. **1.** (i) $-b^2x/a^2y$; (ii) $-(x^2-ay)/(y^2-ax)$;

(iii) $-(x-a)/(y-b)$; (iv) $-\sqrt{(by/ax)}$;

(v) $-x(x^3-2ay^2)/y(y^3-2ax^2)$;

(vi) $a(a^2-2x^2-2y^2)/y(a^2+2x^2+2y^2)$.

8.63. **5.** ·157 ; ·0091. **6.** $\pm$·1018.

7. ·095. **9.** ·4823 அடி ; ·4726 அடி.

8.72. **4.** ·84. **10.** $\dfrac{1}{100\sqrt{3}}$ ஆரையனிறக்கம்.

9.1. **1.** $2ax+b$; $\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx$. **2.** $3(x-a)^2$, $\frac{1}{4}(x-a)^4$.

3. $4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$; $\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+6x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{3x^3}$.

4. $3\left(2x+\dfrac{3}{x^2}\right)^2\left(2-\dfrac{6}{x^3}\right)$; $2x^4+36x-\dfrac{27}{x^2}-\dfrac{27}{5x^5}$.

5. $6x^2-6x-36$; $\frac{1}{2}x^4-x^3-18x^2+10x$.

6. $16x^3+6x$; $\frac{4}{5}x^5+x^3+x$.

7. $2(x-2)(x+1)(2x-1)$; $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+4x$.

8. $(x-1)(x-3)^2(5x-9)$; $\frac{1}{6}x^6-\frac{11}{5}x^5+\frac{23}{2}x^4-30x^3+\frac{81}{2}x^2-27x$.

9. $4x^3-9x^2+8$; $\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+4x^2-10x$.

10. $-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{6}{x^3}$; $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}+x$.

11, $-\dfrac{3a}{x^4}-\dfrac{2b}{x^3}$; $-\dfrac{a}{2x^2}-\dfrac{b}{x}+cx$.

12. $nax^{n-1}-\dfrac{nc}{x^{n+1}}$; $\dfrac{ax^{n+1}}{n+1}+bx-\dfrac{c}{(n-1)x^{n-1}}$.

13. $-\dfrac{1}{2x^3}+8x$; $-\dfrac{1}{4x}+x+\frac{4}{3}x^3$.

14. $\dfrac{4}{x}\left(x^4-\dfrac{4}{x^4}\right)$; $\frac{1}{5}x^5+4x-\dfrac{4}{3x^3}$.

15. $6x+\dfrac{3}{4x^4}-\dfrac{5}{x^6}$; $x^3+\dfrac{1}{8x^2}-\dfrac{1}{4x^4}$.

16. $3(x-2)^2$; $\frac{1}{4}(x-2)^4$.

17. $\dfrac{-n}{(x-a)^{n+1}}$; $\dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$.

18. $(x^2-1)(5x^2-1)$; $\frac{1}{6}(x^2-1)^3$.

19. $8x^7-10x^4+2x$; $\frac{1}{9}(x^3-1)^3$.

20. $11x^{10}-14x^6+3x^2$; $\frac{1}{12}(x^4-1)^3$.

9.2. **1.** $6x'-5$, $(2, 3)$, $y=7x-11$.

2. $3x^2-4x+1$, உயர்வு $x=\frac{1}{3}$, இழிவு $x=1$.

3. 8, $(-\frac{4}{3}, -\frac{26}{27})$. **4.** $y=10x+8$, $\left(\dfrac{7}{15}, \dfrac{3226}{675}\right)$.

5. $15x'^2-12x'+5$. **6.** 3,0,3.

8. உயர்வு $x=-2$, இழிவு $x=\frac{1}{3}$.

9. $2y+7x=5$; $(1, -2)$, $(\frac{1}{3}, \frac{31}{27})$.

10. (1,0) விபத்திப் புள்ளி, $(2, -1)$ இழிவு, -24, $\frac{64}{9}$.

12. $4x+y+8=0$; உயர்வு $\frac{8}{9}\sqrt{3}$, இழிவு $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$.

13. இறக்கம், $-2<x<3$; ஏற்றம் $-\infty<x<-2$ உம் $3<x$ உம்.

14. $-3, 1$; $-144, 16$.

15. $2(2x^3+3x^2-11x-6)$, உயர்வு $\dfrac{625}{16}$, இழிவு 0, 0.

16. $4x^3-6x^2-8$; இழிவு (2, 0) இல்.

17. உயர்வு $(2, \frac{1}{4})$, இழிவு (1,0), (3,0) ; கூடுதல் $1<x<2$ உம் $3<x$ உம், குறைதல் $x<1$ உம் $2<x<3$ உம்.

18. $a, b, c, d=3, 0, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$; இழிவு (0, 3), உயர்வு (2, 9).

19. $a, b, c=6, -3, \frac{1}{2}$. **20.** $a, b, c, d=\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{9}$.

9.3. **2.** (i) 2, 9 ; (ii) 5·5 ; $-$73·5 ; $\pm$42. **3.** -12, 0.

4. $4-2t$; $2t^2-\frac{1}{3}t^3$.

5. $72-6t-6t^2$; $-6-12t$; 135 அடி, 5·3.

6. $27-3t^2$; $-6t$; 54 அடி ; 54.

7. $4(t-t^3)$; $4(1-3t^2)$.

8. 12·25 அடி செக்கன் ; 34·5 அடி ; 10·5 செக்கன் ; 114 $\frac{1}{3}$ அடி.

9. 18 அடி ; 9 செக்கன் ; 13·5 அடி செக்கன்.

10. $5-6t$; $\frac{5}{2}t^2-t^3$; $2\frac{1}{12}$; $2\frac{17}{54}$ அடி.

11. $9-12t+3t^2$; $-12+6t$. **12.** 63 அடி செக்கன்.

13. $18-6t$; $9t^2-t^3$; 27 அடி செக்கன் ; 6 செக்கன், 108 அடி ; 9 செக்கன் ; 81 அடி செக்கன்.

14. 33, 13·5 ; $20\frac{1}{6}$ அடி செக்கன். 15. $a, b, c = 6, 6, 2$.

16. $6t - 2t^2$; $3t^2 - \frac{2}{3}t^3$; 9 அடி ; $13\frac{1}{2}$ அடி செக்கன்.

17. $\frac{9}{2} + 4t - \frac{1}{2}t^2$; $\dfrac{9t}{2} + 2t^2 - \frac{1}{6}t^3$; $12\frac{1}{2}$ அடி செக்கன்.

18. $2t - 3t^2$; $48\frac{4}{27}$ அடி செக்கன் ; $149\frac{1}{3}$ அடி.

19. 648 அடி. 20. $a = b = 9$.

9.4. 1. (i) $1\frac{1}{3}$; (ii) $1\frac{1}{8}$; (iii) $57\frac{1}{6}$;
(v) $2\frac{17}{54}$; (v) $\frac{1}{6}$; (vi) $8\frac{8}{15}$.

2. 36. 3. $4, 0, -2\frac{1}{4}$. 7. $\frac{9}{20}$.

8. $0 ; 6\frac{1}{4}, 4, 4, 6\frac{1}{4}$. 9. $y = a + 2bx + 3cx^2$.

10. $10\frac{2}{3}$; $2\sqrt{3}$. 12. $-1, 3$; $4\frac{4}{15}$.

13. $104\frac{1}{6}$. 14. $179\frac{1}{5}$, $6\frac{2}{5}$. 16. $\frac{1}{6}$.

17. $1\frac{1}{3}$. 19. $25\frac{23}{81}$. 20. $7\frac{7}{48}$.

9.5. 2. $\frac{2}{15}\pi a^3$. 3. $\frac{1024}{105}\pi$. 4. $\frac{4}{3}\pi$.

5. $\pi h^4/4a$. 7. $\frac{1}{6}\pi$. 12. $\frac{64}{105}\pi$.

13. $\frac{64}{3}\pi$. 15. (i) 49π ; (ii) 14π. 16. $\frac{16}{5}\pi a^3$.

17. $\frac{1}{3}\pi(2a^3 - 3a^2c + c^3)$. 18. $\frac{4}{3}\pi(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}$.

20. $\pi a^2(a+h)^2/3h$.

9.6. 1. (i) $(\frac{4}{3}, 1)$, (ii) $(\frac{62}{27}, \frac{259}{54})$. 2. $(\frac{7}{9}, \frac{7}{9})$. 3. $(\frac{5}{3}, \frac{5}{8})$.

4. $(\frac{2}{5}a, \frac{4}{7}a)$. 5. $(\frac{5}{7}a, \frac{5}{16}a)$.

6. $\left(\dfrac{2ab}{a+b}, \dfrac{c^4}{5a^3b^3}, \dfrac{a^5 - b^5}{a^2 - b^2}\right)$. 8. $(\frac{6}{5}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{5}, \frac{3}{2})$.

9. $(0, \frac{2}{5})$. 10. $27a/16$.

11. $9a/5$. 12. $\frac{3}{4}(a \pm c)^2/(2a \pm c)$.

16. $3a/5$.

9.7. 1. 4, 6. 2. 4. 3. ± 7. 5. 1.

10. $\frac{1}{2}x$, $x(l-a)/(2l+a)$. 13. $\mp 2{\cdot}45$. 17. x, $\frac{2}{3}x$.

19. 4·5. 20. $15x/4$.