கேத்திர கணிதம்

இரண்டாம் புத்தகம்

GEOMETRY IN TAMIL

BOOK II

இப் புத்தகம்

இலங்கை வித்தியாபகுதியின் வித்தியாபிரசுர சபையினரால் இலங்கைப் பாடசாலைகளிலும், கல்லூரிகளிலும் உபயோகிக்கத் தகுந்ததென 30-7-53 இல் அங்கீகரிக்கப்பட்டுள்ளது.

தம்பரப்பிள்ளை, B. A., B. Sc. (Lond.)

விலை : ரூ. 2-50

கேத்திர கணிதம்

(இரண்டாம் புத்தகம்)

ஆக்கியோன் :

ச. சிதம்பரப்பிள்ளை, B. A., B. Sc.. (Lond.)

(பரமேஸ்வரக் கல்லூரி)

சுன்னுகம் :

வட — இலங்கைத் தமிழ்நூற் பதிப்பகம்

1954

முதற் பதிப்பு — 1954

திருமகள் அழுத்தகம்,
சுன்னாகம்

பொருளடக்கம்

மூன்றும் பாகம் — முறையான கேத்திர கணிதம்

(ii) பரப்பு

முகவுரை

தமிழிலே கேத்திர கணிதத்தைக் கற்றுக்கொள்ள ஏற்ற பாடப் புத்தகம் இல்லாமையை வித்தியா பகுதியார் உணர்ந்து அக்குறையை நிவர்த்தி செய்ய எடுத்த முயற்சியின் விளைவே இந்நூலாகும். இது கேத்திர கணித பாடத்தை ஆரம்பத்திலிருந்து சிரேஷ்ட பாடசாலை வகுப்புகள் ஈறுகப் படித்தற்கு ஏற்றதாக இயற்றப்பட்டிருக்கிறது.

இந் நூல் மூன்று பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப் பட்டுள்ளது. கேத்திர கணித விஷயங்களைச் செவ்வனே விளங்கிக்கொள்வதற்கு அடிப்படையாகச் சில கருத்துக்கள் தேவை. கோணங்களைப்பற்றிய உண்மைகளைப் படிப்பதற்கு முன், கோணத்தின் தன்மையை மனதிற் கிரகித்துக்கொள்ளுதல் வேண்டும். சமாந்தர வரைகள், செங்குத்து வரைகள், படுக்கை முதலியனவும் இவ்வாறே. இத்தகைய ஆதாரமான கருத்துக்களைப் பெறச் செய்வதே இந்நூலின் முதற் பாகத்தின் நோக்கமாகும்.

இரண்டாம் பாகத்திலே இலகுவான சில கேத்திர கணித உண்மைகள் செய்கை முறையாக அறிவுறுத்தப்படுகின்றன. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று கோணங்களும் சேர்ந்து இரு செங்கோணங்களுக்குச் சமமென்பது பல முக்கோணங்களைக் கீறிக் கோணங்களை அளந்து அறியப்படுகிறது. முக்கோணிகளின் சமத்துவம் துவிசமபுய முக்கோணிகளின் பண்புகள் முதலியனவும் இவ்வாறே செய்கை முறையில் ஆராயப்படுகின்றன.

கேத்திரகணித ரீதியிலே விஷயங்களை முறையாக ஆராய்வது மூன்றும் பாகமாகும். சூத்திரங்களும், உள்ளுறைகளும், சூத்திரங்களைத் தழுவிய ஆக்கங்களும் இப்பாகத்திற் படிமுறையாக வரும்.

முதல் ஆண்டில் முதற்பாகத்தோடு இரண்டாம் பாகத்தில் ஒரு பகுதியும், இரண்டாம் ஆண்டில் இரண்டாம் பாகத்தில் எஞ்சிய பகுதிகளும், மூன்றும் பாகத்திலிருந்து இலகுவான சில சூத்திரங்களும் எடுத்துக்கொள்ளக் கூடியன. மூன்றும், நாலாம், ஐந்தாம் ஆண்டுகளில் முறையான கேத்திர கணிதப் படிப்பைப் பூர்த்தியாக்கலாம். இதற்கிணங்கவே இந்நூல் இரு புத்தகங்களாக வெளியிடப்படுகிறது. ஏறக்குறைய முதலிரண்டு ஆண்டுகளிலும் முடிக்கக் கூடிய விஷயங்கள் முதற் புத்தகமாகவும் எஞ்சியன இரண்டாம் புத்தகமாகவும் வெளியிடப்படுகின்றன.

இந் நூலில் ஆங்காங்கு போதியளவு அப்பியாசங்கள் பயிற்சிக்காகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. விசேஷமாக மூன்றும் பாகத்திலே வரும் அப்பியாசங்கள் கணித்தல், வரைதல், நிறுவுதல் எனப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு பிரிவிலுமுள்ளவை மேலும் மூன்று பிரிவுகளாக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் வருவன வெகு இலகுவானவை; அடுத்துவரும் ஒரு நட்சத்திர (*) அடையாள முடையன சற்றே கடினமானவை; இறுதியாக வரும் இரு நட்சத்திர (* *) அடையாள முடையன கூடிய கடினமானவை. இதை ஆசிரியரும் மாணவரும் பயன்படுத்திக் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

கேத்திர கணித நூலொன்றை முதன் முதலாகத் தமிழில் எழுதும்போது ஏற்ற பரிபாஷைச் சொற்களைத் தொகுத்துக்கொள்வது இலகுவான காரியமன்று.

ஓரளவு சொற்கள் தமிழ் வழக்கில் இருக்கின்றன. ஆயினும் அவை யாவும் அப்படியே உபயோகிக்கக் கூடியனவாகக் காணப்படவில்லை. உதாரணமாக, 'தாட்டாந்தம்' என வழங்கும் சொல் குறிக்கும் பொருளுக்கு 'சூத்திரம்' என்பதே ஏற்ற சொல்லெனக் கொள்ளப்படுகிறது. மூன்று கோணங்களையுடைய வடிவத்துக்கு 'முக்கோணம்' என்பதிலும் பார்க்க முக்கோணி என்பதே பொருத்தமானது. எனவே, கூடியமட்டும் வழக்கிலுள்ள சொற்களையே உபயோகித்து, அவசியமெனக் காணப்பட்ட சிற்சில இடங்களிலே அவை தமிழ் மரபுக்கும் கருத்து அமைவுக்கும் ஏற்பத் திரித்தும் புதுப்பித்தும் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சில இடங்களில் வழக்கிலில்லாத புதிய சொற்கள் தேவைப்பட்டன. அவ்விடங்களிற் 'கலைச்சொற்கள்' என்னும் தென்னிந்திய வெளியீட்டிலிருந்து பொருத்தமான சில எடுக்கப்பட்டன. வேறு சில, உள்ளுறை, படுக்கை முதலியன, புதிதாகவே உபயோகிக்கப்படுகின்றன. இம் மாற்றங்களையும் ஆக்கங்களையும் தமிழுலகு அங்கீகரிக்கும் என நம்பப்படுகிறது.

நெடுநாள் கேத்திர கணிதம் படிப்பித்து அநுபவம் வாய்ந்தவர்களும் எனது நண்பர்களுமாகிய அளவெட்டி ஆங்கில வித்தியாசாலைத் தலைமை ஆசிரியர் திரு. ச. சிதம்பரப்பிள்ளை அவர்களும், பரமேஸ்வரக் கல்லூரி ஆசிரியர் திரு. தி. செல்வத்துரை அவர்களும் தாங்கள் தேடிக் கிரமப்படுத்தி வைத்திருந்த அப்பியாசங்கள் அனைத்தையும் எனக்குக் கொடுத்துதவிய பெரு நன்றிக்கு நான் மிகவும் கடமைப்பட்டுள்ளேன். இந்நூலை எழுதும்போது ஏற்பட்ட பாஷைக் கஷ்டங்களனைத்துக்கும் அருந்துணையாக இருந்த பண்டிதர் இ. காசிநாதர் அவர்களுடைய நன்றி மறக்கற்பால

தன்று. இந்நூலைச் சிறப்பாக அச்சேற்றிய திருமகள் அச்சு நிலையத்து அதிபர் அவர்களுக்கும் எனது நன்றி உரியது.

நூலை உபயோகிப்போர் அதிற் பிழைகளெனக் காண்பனவற்றை எடுத்துக் காட்டின் பெரிதும் பாராட்டப்படும்.

பரமேஸ்வரக் கல்லூரி
யாழ்ப்பாணம்
2-8-49.

ச. சிதம்பரப்பிள்ளை

மூன்றும் பாகம்

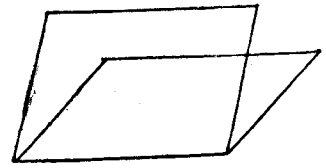
முறையான கேத்திர கணிதம்

(ii) பரப்பு

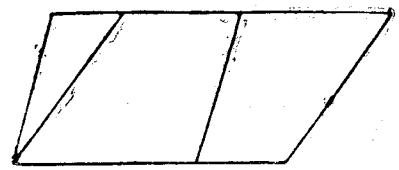
39. பரப்பு

§1.

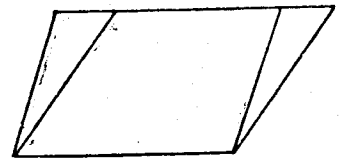
நீள் சதுரமொன்றின் பரப்பு = நீளம் × அகலம் என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். இனி, பிறவடிவங்களின் பரப்புகள் ஆராயப்படும். முதலில் சமாந்தர சதுர்ப்புயங்களின் பரப்பு.



இவை, ஒரே பீடத்திலுள்ள சமாந்தர சதுர்ப்புயங்கள்.



இவை, ஒரே சமாந்தர வரைகளுக்கிடையிலுள்ளன.



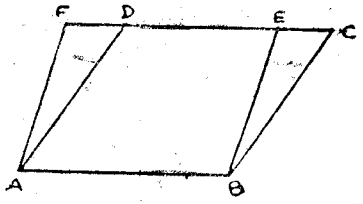
இவை ஒரேபீடத்திலும் ஒரேசமாந்தர வரைகளுக்கிடையிலுமுள்ளன.

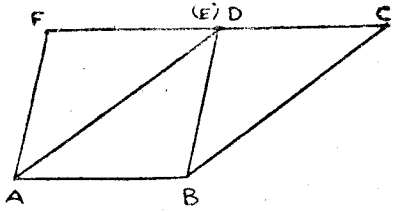
அடுத்த சூத்திரம் ஒரே பீடத்திலும் ஒரே சமாந்தர வரைகளுக்கிடையிலுமுள்ள சமாந்தர சதுர்ப்புயங்களைப் பற்றியது.

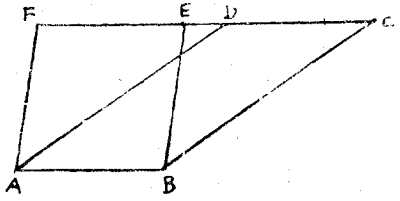
சூத்திரம் 15

§ 2.

பொதுவிலக்கணம் - ஒரே பீடத்திலும் ஒரே சமாந்தர வரைகளுக் கிடையிலுமுள்ள சமாந்தர சதுர்ப்புயங்கள் பரப்பில் சமமாதல் வேண்டும்.







சிறப்பிலக்கணம் – தரவு ABCD, ABEF இரண்டும் ஒரே பீடத்திலும் (AB) ஒரே சமாந்தர வரைகளுக் கிடையிலும் (AB, FC) உள்ள இரு ▱ ள்.

கேள்வி - ▱ ABCD = ▱ ABEF (பரப்பில்) என்பது.

நிரூபணம் - △ள் ADF, BCE இரண்டிலும்

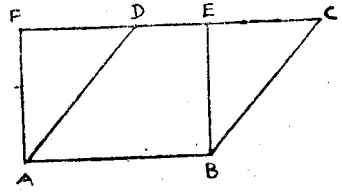
AF = BE (ABEF ▱)
AD = BC (ABCD ▱)
∠ FAD = ∠ EBC
(AF ∥ BE; AD ∥ BC)

∴ △ள் ≡

இனி, வடிவம் ABCF முழுவதிலுமிருந்து
△ ADF எடுபட எஞ்சுவது ▱ ABCD :
△ BCE ,, ,, ▱ ABEF
∴ ▱ ABCD = ▱ ABEF

என்றவாறு.

§ 3. உள்ளுறை - (i) ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயமும், அதன் பீடத்தில் அதன் சமாந்தர வரைகளுக் கிடையிலுள்ள நீள் சதுரமும் பரப்பிற் சமமாகும்.



▱ ABCD = நீள் சதுரம் ABEF
= AB × BE
= பீடம் × உயரம்.

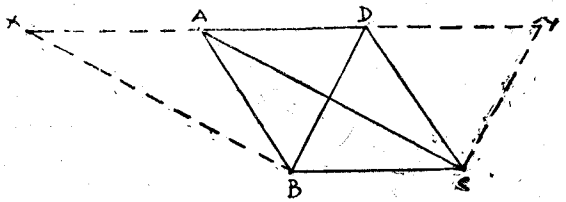
(ii) சம நீளமுள்ள பீடங்களிலே சம உயரமுள்ள சமாந்தர சதுர்ப்புயங்கள் பரப்பில் சமமானவை.

§ 4. இச் சூத்திரத்தின் மறுதலை, அதாவது 'ஒரே பீடத்திலுள்ள இரு சமாந்தர சதுர்ப்புயங்கள் பரப்பிற் சமமாயின் அவையிரண்டும் ஒரே சமாந்தர வரைகளுக் குட்பட்டனவாகும்' என்பதும் உண்மையே. இதை நிரூபியுங்கள்.

சூத்திரம் 16

§5

பொதுவிலக்கணம் - ஒரே பீடத்திலும் ஒரே சாமாந்தர வரைகளுக்கிடையிலுமுள்ள முக்கோணிகள் பரப்பிற் சமமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC, DBC இரண்டு △ள். AD ∥ BC.

கேள்வி - △ABC = △DBC (பரப்பில்) என்பது.

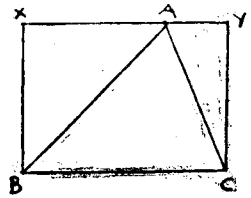
ஆக்கம் - ▱ACBXஐயும் ▱DBCYயையும் கீறுக.

நிரூபணம் - △ ACB = ½ ▱ACBX(ABமூலவரை)
△ DBC = ½ ▱DBCY(DC ")

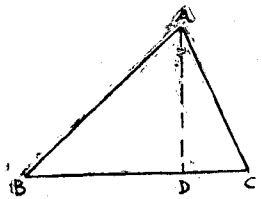
ஆனால், ▱ACBX = ▱DBCY
(ஒரே பீடம்; ஒரே உயரம்)

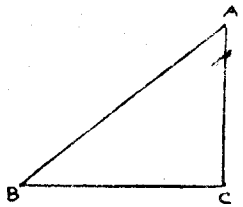
∴ △ ACB = △ DBC
என்றவாறு.

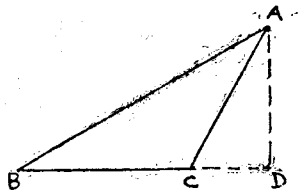
§6. (i) ஒரு முக்கோணி அதே பீடத்தில் அதே சமாந்தர வரைகளுக்கிடையிலுள்ள சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தில் (நீள்சதுரத்திலும்) பாதியாகும்.



△ABC = ½ நீள்சதுரம் BCYX
= ½ × பீடம் × உயரம்.

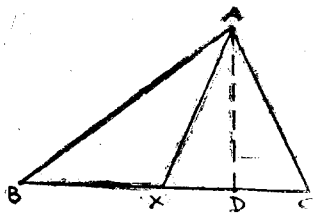






எனவே, △ ABCயின் பரப்பு = ½ × BC × AD.

(ii) சமபீடங்களிலே சமஉயரமுள்ள முக்கோணிகள் பரப்பில் சமமாகும். உதாரணமாக - ABC ஒரு △. AX நடுவரை. △ள் ABX, ACX இரண்டிலும் பீடம் BX = பீடம் CX. உயரம் ADபொது

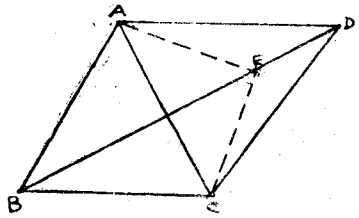


∴ △ ABX = △ ACX.

§7. அடுத்த சூத்திரம் ஷை சூத்திரத்தின் மறுதலை.

சூத்திரம் 17

பொதுவிலக்கணம் - ஒரே பீடத்தில் ஒரே பக்கத்திலுள்ள இரு முக்கோணிகள் பரப்பிற் சமமாயின் அவற்றின் உச்சிகளைத் தொடுக்கும் நேர்வரை பீடத்துக்குச் சமாந்தரமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC, DBC இரு △ள்.
△ ABC = △DBC.
கேள்வி - AD ∥ BC என்பது.

ஆக்கம் - AD, BC இரண்டும் சமாந்தரமில்லையாயின் BCக்குச் சமாந்தரமாக AEயைக் கீறுக. அது BDயை Eயில் வெட்டட்டும். CEஇணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - △ ABC = △ DBC (தரவு)
△ ABC = △ EBC (AE ∥ BC)
∴ △ DBC = △ EBC

முழுவதும் ஒரு பகுதிக்குச் சமமாதல் பொருந்தாது.

∴ E, D இரண்டும் ஒன்றுதல் வேண்டும்.
அதாவது, AD ∥ BC.

என்றவாறு.

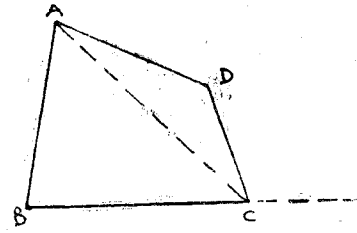
§8. இச்சூத்திரம் நிரூபிக்கப்பட்ட முறையைப் பாருங்கள். AD, BC இரண்டும் சமாந்தரமெனக் காட்டுவதற்கு அவை சமாந்தரமல்லாதிருத்தல் பொருந்தாதென்பது காட்டப்படுகிறது. இவ்வாறு ஒன்றை நேரே நிரூபிப்பதற்குப் பதிலாக, அது ஒழிந்தன (சேடம்) பொருந்தாமை காட்டி அதன் உண்மை நிலை நாட்டப்படும் முறை **பாரிசேட நியாயம்** எனப்படும்.

$x \neq y$ என்பதும், $x < y$ என்பதும் காட்டப்பட்டால் $x > y$ என்பது பாரிசேடத்தால் பெறப்படும்.

இம்முறை பெரும்பாலும் சூத்திரங்களின் மறுதலைகளை நிலைநாட்டுவதற்குப் பயன்படும்.

§ 9. மூன்றுக்கு மேற்பட்ட புயங்களையுடைய வடிவங்களைச் சமபரப்புள்ள முக்கோணிகளாக மாற்றிப் பரப்பை அறியலாம்.

(i) முதலில் ஒரு நாற்புயவடிவத்தை எடுப்போம்.



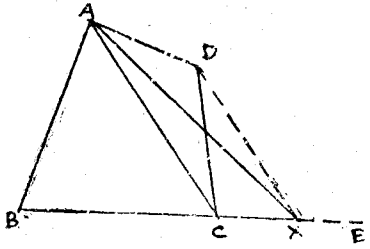
ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம்.

இதைச் சமபரப்புள்ள ஒரு முக்கோணியாக மாற்ற வேண்டும்.

ஒரு முக்கோணியைச் சமபரப்புள்ள வேறொரு முக்கோணியாக மாற்றுதல் கூடும்.

நாற்புய வடிவத்துக்குச் சமமான ஒரு முக்கோணி வரைவதெப்படி?

நாற்புய வடிவத்தை முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கலாம். மூலைவரை யொன்றைக் கீறி இரு முக்கோணிகள்வரும். இவை இரண்டும் சேர்ந்து நாற்புய வடிவமாகின்றன. இவற்றுள் ஒன்றிற்குப் பதிலாக இன்னொன்றை மற்றையதனோடு சேர்க்க முக்கோணி வருமா என்பதைப் பார்ப்போம். △ ADCயை எவ்வாறு மாற்றினால் அது △ ABCயுடன் சேர்ந்து முழுவதும் முக்கோணியாகும்? △ ADCயின் உச்சியாகிய Dயை BCEயில் விழச்செய்தால் இது கைகூடும். அதாவது, அம் முக்கோணி ACX ஆயின்,



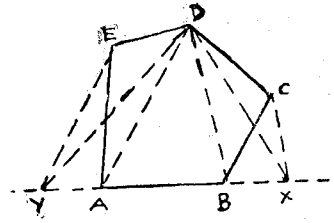
△ ABC + △ ACX = △ ABXஆகும்.

இவ்வாறு செய்யும்போது △ள் ADC, AXC இரண்டையும் சமமாகச் செய்தல் வேண்டும்.

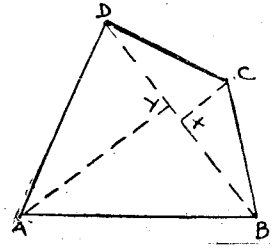
இதெப்படி? DX ∥ AC.

ஆகவே, மூலைவரை கீறவரும் இரு முக்கோணிகளுள் ஒன்றைச் சமபரப்புள்ளதாகவும், மற்றையதனோடு சேர்க்க முக்கோணி வரக்கூடியதாகவும் மாற்றவேண்டும்.

(ii) ஐம்புய வடிவமாயின், முன்போல முதல் அதை நாற்புய வடிவமாக்கிப் பின் முக்கோணியாக்கலாம். இதைப் பின்வரும் படத்திலிருந்து விளங்கிக்கொள்க. ABCDE ஐம்புயவடிவம்; DXY சமபரப்புள்ள முக்கோணி.



§10. முக்கோணி யல்லாத வடிவங்களை முக்கோணிகளாகப் பிரித்தும் பரப்பைக் கணிக்கலாம்.

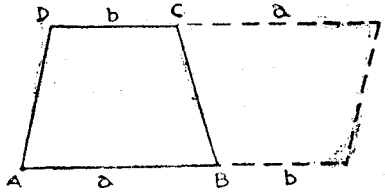


(i) ABCD = △ ABD + △ BDC

$= \frac{1}{2} \times BD \times AY + \frac{1}{2} \times BD \times CX$

$= \frac{1}{2} BD (AY + CX)$

(ii) ஒரு நாற்புய வடிவத்திலே ஒரு சோடி புயங்கள் சமமாயின் பரப்புக் காண்பதற்குச் சிறப்பான ஒரு வழி உண்டு.



ABCD குறித்த வடிவமாயின் அதேயளவான வேறொரு வடிவத்தைத் தலைகீழாகப் பக்கத்தே வைத்தால் ஒருசமாந்தர சதுர்ப்புயம் பிறக்கும். சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் பரப்பு = (a+b) × உயரம்.

∴ ABCDயின் பரப்பு = $\frac{1}{2}$ (a+b) × உயரம். அதாவது, **(சமாந்தரவரைகளின் கூட்டுத் தொகையிற் பாதி)** × (சமாந்தரவரைகளின் இடைத்தூரம்.)

அப்பியாசம் — 46 (i) வரைதல்

சமாந்தர சதுர்ப்புயங்கள்

1. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். AB = 3″ BC = 2″; ∠B = 50°. வடிவத்தை வரைந்து அதன் பரப்பைக் காண்க.

2. இரண்டு புயங்கள் முறையே 2·5″, 3·5″ நீளமுள்ளதும் ஒரு கோணம் 140° உள்ளதுமான ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம் கீறி அதன் பரப்பைக் காண்க.

3. சமபுயங்களையுடைய ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் ஒரு புயம் 30 அடி. அதன் மூலைவரையொன்று 20 அடி. வடிவத்தைக் கீறி அதன் பரப்பை அறிக.

4. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் மூலைவரைகள் முறையே 3″, 4″. மூலைவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமொன்று 55°. வடிவத்தை வரைந்து அதன் பரப்பை அறிக.

* 5. 3″ தூரத்திலுள்ள இரு சமாந்தர வரைகள் 2″ தூரத்திலுள்ள வேறிரு சமாந்தரவரைகளை வெட்டுகின்றன. ஒரு கோணம் 50° நாலு வரைகளாலும் ஆக்கப்படும் வடிவத்தின் பரப்பைக் காண்க.

* 6. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் பரப்பு = 7 ச. அங்.; பீடம் = 3·5 அங்.; ஒருமூலைவரை = 2·8″ சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தைக் கீறி அதன் மற்றைய மூலைவரையின் நீளத்தை அறிக.

* 7. இரண்டு புயங்கள் முறையே $2\frac{1}{2}$″, $1\frac{1}{2}$″ நீளமுள்ளதும், ஒரு கோணம் இன்னொரு கோணத்திலும் மூன்றிலிரண்டுபங்குள்ளதுமான ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம் கீறி, அதே பரப்புள்ளதும் இரண்டு புயங்கள் முறையே $2\frac{1}{2}$″ 3″ நீளமுள்ளதுமான ஒரு முக்கோணி கீறுக.

* 8. இரண்டு புயங்கள் முறையே 2·7″, 4″ நீளமுள்ளதும், சிறிய புயத்திலுள்ள சற்சதுரத்தின் பரப்புக்குச் சமமானதுமான ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம் கீறுக. சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் கூர்ங்கோணம் எத்தனை பாகை?

* 9. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் பீடம் = 2″; பரப்பு = 9 ச. அங். உயரமென்ன? ஒரு கோணம் 50° உடையதாக வடிவத்தைக் கீறுக. அதே பீடத்தில் அதே பரப்புள்ள ஒரு சாய்சதுரம் கீறி அதன் கூர்ங்கோணத்தை அறிக.

10. 8 ச. அங். பரப்புடையதும் புயங்கள் ஒவ்வொன்றும் 3·2″ நீளமுள்ளதுமான ஒரு சாய்சதுரம் கீறி அதன் நீண்ட மூலைவரையின் நீளத்தை அறிக.

முக்கோணிகள்

11. ABC ஒரு முக்கோணி. AB=3″, BC=2·6″, CA=2·2″. உச்சியிலிருந்து பீடத்துக்குச் செங்குத்து வரைக. முக்கோணியின் பரப்பென்ன?

12. முந்திய முக்கோணியைக் கீறுக. பீடத்தின் ஒரு மூலையிலிருந்து எதிர்ப்புயத்துக்குச் செங்குத்துக் கீறுக. முக்கோணியின் பரப்பென்ன?

13. 2″ நீளமுள்ள பீடத்திலே பீடகோணமொன்று 68° உடைய துவிசமபுய முக்கோணி யொன்று கீறுக. அதே பீடத்தில் இருமடங்கு பரப்புள்ள வேறொரு துவிசமபுய முக்கோணி கீறுக. அதன் பீடகோணங்கள் எத்தனை பாகை?

14. இரண்டு புயங்கள் முறையே 6 செ. மீ., 5 செ. மீ. நீளமுள்ளதும் இடைக்கோணம், 100° உடையதுமான ஒரு முக்கோணி கீறுக. அதே பீடத்தில் அதே பரப்புடையதும் பீடகோணமொன்று 60° உடையதுமான முக்கோணி யொன்று கீறுக. முக்கோணியின் குறுகிய புயத்தின் நீளமென்ன?

15. $2\frac{1}{2}$″ நீளமுள்ள பீடத்திலே சமபுயங்கள் 3″ நீளமுள்ள துவிசமபுய முக்கோணி யொன்று கீறுக. அதே பீடத்தில் பீடகோணமொன்று 60° உடையதும் பரப்பு மும்மடங்கானதுமான சமாந்தர சதுர்ப்புயம் கீறுக. மூலைவரைகளின் நீளமென்ன?

* 16. ஒரு முக்கோணியின் பரப்பு = 3·5 ச. அங்; இரண்டு புயங்கள் முறையே 2·5″, 4·5″ முக்கோணியைக் கீறி அதன் மிகப் பெரிய கோணத்தை அளவுங்கள்.

பல்கோணிகள்

* 17. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம் AB=2·2″, BC=1·5″, AD=1″. ∠A=100°, ∠B=64°, நாற்புய வடிவத்துக்குச் சமமான பரப்புள்ள முக்கோணி கீறி அதன் பரப்பைக் காண்க.

* 18. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். BD=3·5″ ∠ADB=65°, ∠DBA=40°, ∠CBD=30°, ∠BDC=80°. சமபரப்புள்ள முக்கோணி கீறி நாற்புய வடிவத்தின் பரப்பைக் காண்க,

* 19. ABCD ஒரு வயல். AB=348 யார்; BC=200 யார்; CD=190 யார்; ∠B=92°; ∠C=110° வயலின் படமொன்று கீறி அதன் பரப்பை (ஏக்கரில்) காண்க.

* 20. 2″ புயங்களையுடைய ஒழுங்கான பல்கோணி யொன்று கீறி அதைச் சமபரப்புள்ள முக்கோணியாக மாற்றுக.

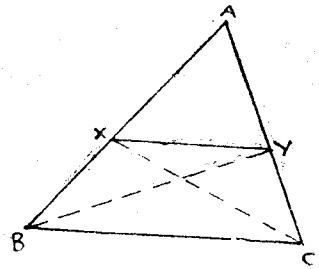
பிற

* 21. புயங்கள் ஒவ்வொன்றும் 2·2″ நீளமுள்ளதும் ஒருகோணம் 60° உடையதுமான ஒரு சாய் சதுரம் கீறி அதன் பரப்பைக் காண்க.

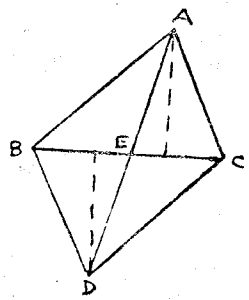
* 22. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். AB ∥ DC. AB=4·8″, DC=3″, AD=BC=2·6″ வடிவத்தைக் கீறி அதன் பரப்பை அறிக.

அப்பியாசம்—46 (ii) நிறுவுதல்

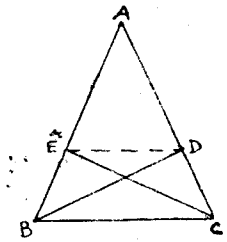
1. ABC ஒரு △ BCக்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர் வரை ABயை Xஇலும் ACயை Yயிலும் வெட்டுகிறது. △ள் XBC, YBC இரண்டும் சமபரப்புடையனஎனக்காட்டுக. △ள் ABY, ACX இரண்டும் சமபரப்புடையன எனவும் காட்டுக.



2. ABC, DBC இரண்டும் ஒரே பாதத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களிலுள்ள சமபரப்புடைய இரு முக்கோணிகள். AD, BC இரண்டும் Eயில் வெட்டினால், AE = ED எனக் காட்டுக.



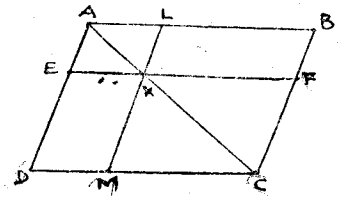
3. ABC ஒரு துவிசமபுய முக்கோணி. AB = AC, BD ⊥ AC; CE ⊥ AB. ED ∥ BC எனக் காட்டுக.



4. ABC ஒரு △. AD நடு வரை. P அந் நடு வரையிலுள்ள ஏதுமொரு புள்ளி. △ள் APB

APC இரண்டும் சமபரப்புடையன எனக் காட்டுக.

5. ABCD ஒரு சற்சதுரம். மூலைவரை BDயில் E ஒரு புள்ளி; BE = $\frac{1}{4}$ BD. △ AEB = $\frac{1}{3}$ △ CED எனக் காட்டுக.

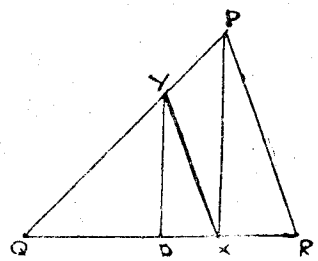


* 6. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். மூலைவரை ACயில் X ஒரு புள்ளி. அப் புள்ளிக் கூடாக ABக்கும் ADக்கும் சமாந்தரவரைகள் கீறப்பட்டுள்ளன. ▱EXMD = ▱LXFB எனக் காட்டுக.

* 7. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். BCயின் நடு E. AE, DC இரண்டும் நீண்டு Fஇல் சந்திக்கின்றன. △ DEF = $\frac{1}{2}$ ▱ABCD எனக் காட்டுக.

* 8. ABC ஒரு △. BCக்குச் சமாந்தரமான ரேகையொன்றை AB, AC இரண்டும் நீண்டு Dயிலும் Eயிலும் சந்திக்கின்றன. △ ACD = △ ABE எனக் காட்டுக.

* 9. ABCD ஒரு சாய்சதுரம். AC, BD அதன் மூலைவரைகள். AC, BD இரண்டும் ஆக்கும் நீள் சதுரம் குறித்த சாய்சதுரத்திலும் இரு மடங்காகும் எனக் காட்டுக.



* 10. PQR ஒரு △. QRஇல் Xஒரு புள்ளி. QRஇன் நடு D. DY ∥ XP. நாற்புயவடிவம் XYPR $= \frac{1}{2}$ △PQR எனக் காட்டுக.

* 11. தரப்பட்ட முக்கோணியொன்றுக்குச் சமமான சாய்சதுர மொன்றை எப்படி வரையலாம்?

* 12. ABCD ஒரு ▱. மூலைவரை ACயில் Eஒரு புள்ளி. △ABE = △ADE எனக் காட்டுக.

* 13. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். Aக் கூடாகச் செல்லும் நேர்வரை யொன்று BCயை Qவிலும், DCயை (நீட்டியபின்) Pயிலும் சந்திக்கிறது. △BPQ = △DCQ எனக் காட்டுக.

* 14. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். அதில் BC நீட்டப்படுகிறது Eவரையும்; CE=BC. AE, CD இரண்டும் வெட்டுமிடம் F.

△ABF = 2 △CFE எனக் காட்டுக.

** 15. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று புயங்களின் நடுப் புள்ளிகளையும் இணைக்கவரும் முக்கோணி தாய் முக்கோணியிலும் பார்க்க நாலிலொன்றெனக் காட்டுக.

** 16. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். AB நீட்டப்படுகிறது Oவரையும். BO=AB. AD, OC இரண்டும் நீண்டு Pயில் சந்திக்கின்றன. △PCD = △ACB எனக் காட்டுக.

** 17. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். AB, AD நீட்டப்பட வரும் வெளிக்கோணங்களின் சமவெட்டிகள் Cக்கூடாக BDக்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் நேர்வரையை Eயிலும் Fஇலும் சந்திக்கின்றன. BDFE சமாந்தர சதுர்ப்புயமெனக் காட்டி அதன் பரப்பு ABCDயின் பரப்புக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

** 18. ABC ஒரு முக்கோணி. முக்கோணிக்குள் P ஒரு புள்ளி. △PAB+△PBC ஒரேயளவாய் இருப்பின் Pயின் படுக்கை யாது?

** 19. ABC ஒரு △. முக்கோணியின் நடுவரைகள் சந்திக்குமிடம் I. △IAB=△IBC=△IAC எனக் காட்டுக.

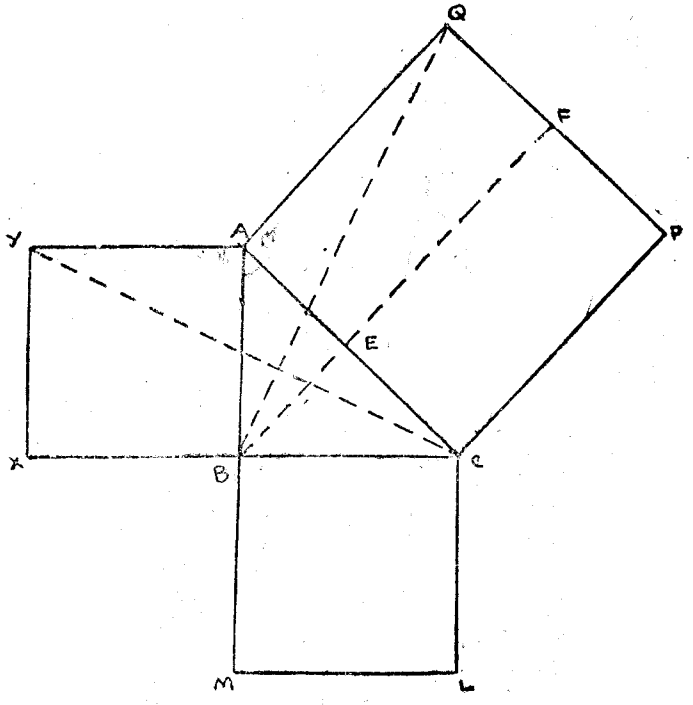
** 20. ஒரு முக்கோணியை ஒரு புயத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நேர்வரைகளால் மூன்று சமபங்குகளாகப் பிரிப்ப தெப்படி?

40. பிதாகரரின் சூத்திரம்

சூத்திரம் 18

§1

பொதுவிலக்கணம் — ஒரு செங்கோண முக்கோணியிலே கன்னத்திலுள்ள சற்சதுரம் மற்றைய இரு புயங்களிலுமுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC ஒரு செங்கோண △; AC கன்னம். ACPQ, BCLM, ABXY புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்கள்.

கேள்வி - ACPQ = BCLM + ABXY — என்பது.

ஆக்கம் - செங்கோணத்திலிருந்து கன்னத்துக்குச் செங்குத்துக் கீறுக. அது ACயை Eயிலும், PQவை Fஇலும் வெட்டட்டும். YC, BQ இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - △ள் BAQ, YAC இரண்டிலும்;

BA = YA (சற்சதுரப் புயங்கள்)
AQ = AC (,, ,,)
∠BAQ = ∠YAC (ஒவ்வொன்றும் = செங்கோணம் + ∠BAC)

∴ △ள் ≡.

ஆனால். △ BAQ = ½ நீள்சதுரம் AEFQ (ஒரே பீடம் AQ; ஒரே ∥ வரைகள் AQ, EF)

△ YAC = ½ சற்சதுரம் YABX (ஒரே பீடம் AY; ஒரே ∥ வரைகள் AY, CX)

∴ AEFQ = ABXY.

இவ்வாறே, CEFP = BCLM.

கூட்ட, ACPQ = ABXY + BCLM என்றவாறு.

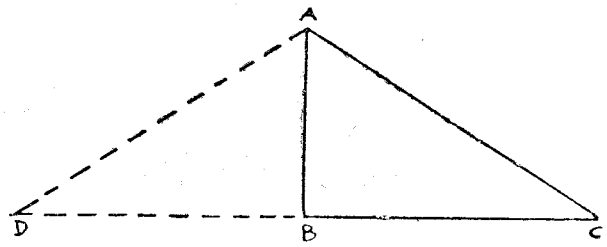
§2. நேர்வரை ABயிலுள்ள சற்சதுரம்; AB . AB அல்லது AB^2 எனக் குறிக்கப்படுவதுண்டு. எனவே, மை சூத்திரம் $AB^2 + BC^2 = AC^2$ என வரும்.

சூத்திரம் 19

§ 3.

பிதாகரரின் சூத்திரமறுதலை

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு முக்கோணியிலே இரு புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை மூன்றும் புயத்திலுள்ள சற்சதுரத்துக்குச் சமமாயின், முதலிரு புயங்களுக்கு மிடையிலுள்ள கோணம் செங்கோணமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC ஒரு △. அதில் $AB^2+BC^2=AC^2$.

கேள்வி - $\angle B$ = செங்கோணம் என்பது.

ஆக்கம் - $BD \perp AB$; $BD=BC$. AD இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - ABD செங்கோண △. (ஆக்கம்)

$\therefore AB^2+BD^2=AD^2$ (பிதாகரம்)

அன்றியும், $AB^2+BC^2=AC^2$ (தரவு)

ஆனால், $BD=BC$ (ஆக்கம்)

$\therefore AD=AC$

இனி, △ள் ABD, ABC இரண்டிலும்,

AB பொது.
BD=BC (ஆக்கம்)
AD=AC (நிரூபிக்கப்பட்டது)

∴ △ள் ≡

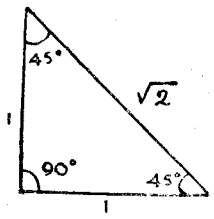
$\therefore \angle ABD=\angle ABC$

ஆனால், $\angle ABD$ = செங்கோணம் (ஆக்கம்)

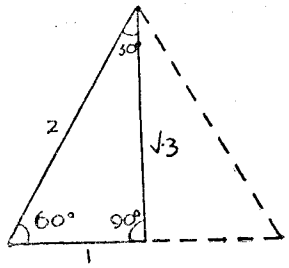
$\therefore \angle ABC$ = செங்கோணம்

என்றவாறு.

§ 4. (i) ஒரு துவிசமபுய செங்கோண முக்கோணியிலே, புயங்களின் நீளங்கள் $1:1:\sqrt{2}$ என்னும் விகிதத்தில் இருப்பதை அவதானித்துக் கொள்க.



(ii) 60° 30° உடைய செங்கோண முக்கோணியிலே புயங்கள் $1:2:\sqrt{3}$ என்னும் விகிதத்தில் இருப்பதை அவதானித்துக் கொள்க.



(குறித்த முக்கோணி ஒரு சமபுய முக்கோணியின் பாதி)

அப்பியாசம்—47 (i) கணித்தல்

1. 15 அடி நீளம் 8 அடி அகலமுள்ள அறையொன்றின் மூலைவரையினது நீளமென்ன?

2. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று புயங்களும் முறையே 8″, 15″, 17″. அம் முக்கோணி செங்கோண முடையதெனக் காட்டுக.

3. $13=2^2+3^2$ என்னும் சமீகரணத்தை உபயோகித்து $\sqrt{13}$ அங்குல நீளமுள்ள நேர்வரையொன்று கீறுக.

4. $7=4^2-3^2$ என்பதை உபயோகித்து $\sqrt{7}$ அங்குல நீளமுள்ள நேர்வரையொன்று கீறுக.

5. 6 அடியும் 11 அடியும் உயரமுள்ள இரு கம்புகள் 12 அடி தூரத்திலே நாட்டப்பட்டுள்ளன. அக் கம்புகளின் அந்தங்களை இணைக்கும் கயிற்றின் நீளமென்ன?

6. A ஒரு வெளிச்சவீடு. B, C இரு கப்பல்கள். B வெளிச்சவீட்டுக்குத் தெற்கிலும், C வெளிச்சவீட்டுக்குத் தென் மேற்கிலும் உண்டு.

கப்பல்கள் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று கிழக்கு மேற்காக 7 மைல் தூரத்தில் உளவாயின், வெளிச்சவீட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு கப்பலின் தூரத்தையும் அறிக.

7. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவரைகள் 3 அங்குலமும் 1·6 அங்குலமுமாயின் சாய்சதுரப் புயங்களின் நீளமென்ன?

8. ABC ஒரு முக்கோணி. AB=7″, BC=8″, CA=9″. நடுவரை ADயின் நீளமென்ன?

* 9. ஒரு செங்கட்டியின் நீளம்=9·5″, அகலம்=4·4″, உயரம்=3·3″. 5·6″ விட்டமுள்ள குழாயொன்றுக்குள் இச் செங்கட்டியை வைத்தல் கூடுமா?

* 10. செங்குத்தான ஒரு சுவரோடு 16 அடி தூரத்திலிருந்து ஒரு ஏணி சார்த்தப்படும்போது 30 அடி உயரத்திற் பொருந்துமாயின், 10 அடி தூரத்திலிருந்து சார்த்தப்படும்போது எவ்வுயரத்தில் ஏணி பொருந்தும்?

* 11. ஒருவன் 3 மைல் கிழக்காகச் சென்று பின் 2·7 மைல் வடக்காகவும், $4\frac{1}{2}$ மைல் மேற்காகவும், 3·3 மைல் தெற்காகவும் நடந்தால், புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து எத் தூரத்தில் நிற்கிறான்?

* 12. 6·5″, 6·5″, 5″ நீளமுள்ள புயங்களையுடைய முக்கோணியின் பரப்பென்ன?

* 13. ஒரு துவிசமபுய செங்கோண முக்கோணியின் சுற்றளவு 2a அங். அதன் பரப்பென்ன?

* 14. 4 அங்குலப் புயத்தையுடைய சமபுய முக்கோணியின் பரப்பென்ன?

** 15. 30 அடி நீளம், 20 அடி அகலம், 12 அடி உயரமுள்ள அறையொன்றிலே ஒரு மூலையிலிருந்து எதிர் மூலைக்குள்ள தூரமென்ன ?

** 16. ஒழுங்கான ஒரு கூம்பின் உயரம் 6", வட்டமான அதன் பீடத்தின் விட்டம் 5". சரிவான பக்கத்தின் நீளமென்ன ?

அப்பியாசம்—47 (ii) நிறுவுதல்

1. ஒரு சற்சதுரத்தின் மூலைவரையிற் கீறப்படும் சற்சதுரம் அச்சற்சதுரத்திலும் பார்க்க இருமடங்கு எனக் காட்டுக.

2. ABC ஒரு △. AB > AC. AD ⊥ BC.
$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$ எனக் காட்டுக.

3. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் கூர்ங்கோணங்களிலிருந்து கீறப்படும் இரு நடுவரைகளிலுமுள்ள சற்சதுரங்களின் நான்மடங்கு கன்னத்திலுள்ள சற்சதுரத்தின் ஐம்மடங்குக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

4. இரண்டு சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமான சற்சதுரமொன்று வரைவதெப்படி ?

5. இரண்டு சற்சதுரங்களின் வித்தியாசத்துக்குச் சமமான சற்சதுரமொன்று வரைவதெப்படி ?

6. ஒரு நாற்புய வடிவத்தின் மூலைவரைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால், ஒரு சோடி எதிர்ப்புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை மற்றைய சோடி எதிர்ப்புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமெனக் காட்டுக

* 7. ABC ஒரு சமபுய முக்கோணி. AD ⊥ BC.
$AD^2 = 3BD^2$ எனக் காட்டுக.

* 8. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி. B செங்கோணம். BC யில் ஒரு புள்ளி X.
$AX^2 + BC^2 = AC^2 + BX^2$ எனக் காட்டுக.

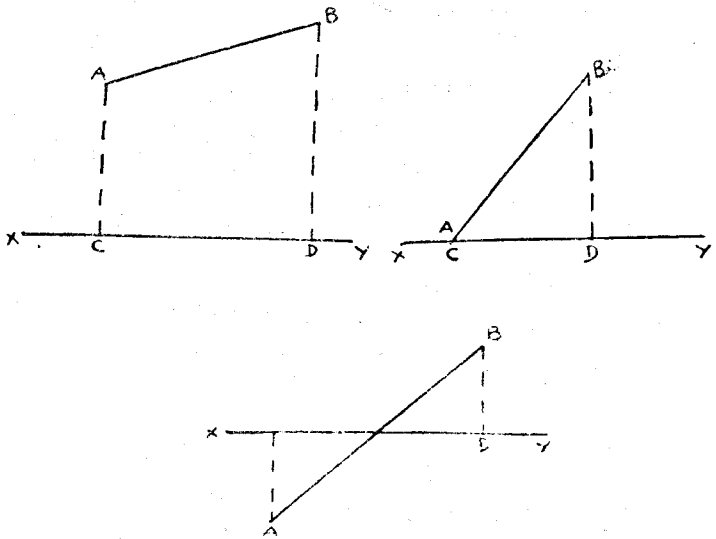
* 9. AB, AC, AD, AE நான்கு வரைகள்.
AB = BC = CD = DE.
∠ABC = ∠ACD = ∠ADE = செங்கோணம்.
AE = 2AB எனக் காட்டுக.

** 10. ABC, DBC இரு சமபுய முக்கோணிகள். அவை பொதுவான பீடத்துக்கு இரு புறத்திலுமுள்ளன. $AD^2 = 3AC^2$ எனக் காட்டுக.

** 11. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி. A செங்கோணம். BC, CA, AB மூன்றின் நடுப்புள்ளிகளும் முறையே P, Q, R.
$CR^2 + BQ^2 = 5QR^2$ எனக் காட்டுக.

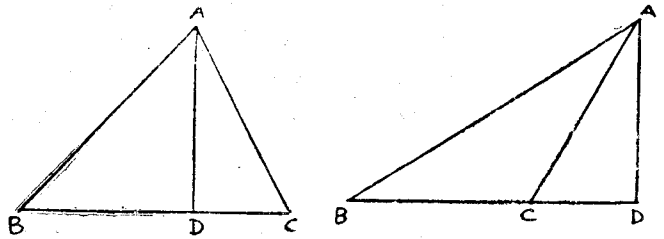
41. பிதாகரரின் சூத்திர விரிவுகள்

§1. ஒரு செங்கோண முக்கோணியிலே மூன்று புயங்கள் மீதுள்ள சற்சதுரங்களும் எவ்வாறு சம்பந்தப்பட்டிருக்கின்றன என்பது (பிதாகரரின் சூத்திரம்) முன் விளக்கப்பட்டது. இனி, பிற முக்கோணிகள் ஆராயப்படும்.



ஒரு நேர்வரையின் இரு அந்தங்களிலுமிருந்து வேறொரு நேர்வரைக்குச் செங்குத்துவரைகள் கீறப்பட்டால், இரண்டாவது வரையிலே செங்குத்து வரைகளுக்கு இடைப்பட்டபகுதி செம்

பாதம் எனப்படும். இப் படங்கள் மூன்றிலும் XYமீது AB வீழ்த்தும் செம்பாதம் CD ஆகும்.

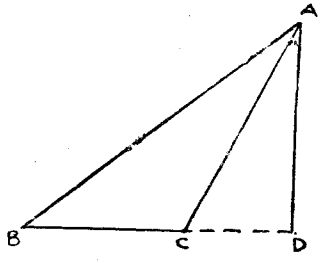


ABC ஒரு △. AD ⊥ BC
BCமீது BA வீழ்த்தும் செம்பாதம் BDஆகும்.
BCமீது CA ,, ,, CDஆகும்

சூத்திரம் 20

§2.

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு விரிகோண முக்கோணியிலே விரிகோணத்தின் எதிர்ப் புயத்திலுள்ள சற்சதுரம், விரிகோணப் புயங்கள் மீதுள்ள இரு சற்சதுரங்களிலும் பார்க்க, விரிகோணப் புயமொன்றும் அதன்மீது மற்றையது வீழ்த்தும் செம்பாதமும் ஆக்கும் நீள்சதுரத்தின் இரு மடங்கு மேலதிகமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC ஒரு விரிகோண △ ∠C விரிகோணம். BCயை நீட்டுக. AD ⊥ BC.

கேள்வி - $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD$ என்பது

நிரூபணம் - △ ABD செங்கோணமுடையது.

$\therefore AB^2 = BD^2 + AD^2$

$= (BC + CD)^2 + AD^2$

$= BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD + AD^2$

$= BC^2 + (CD^2 + AD^2) + 2BC \cdot CD.$

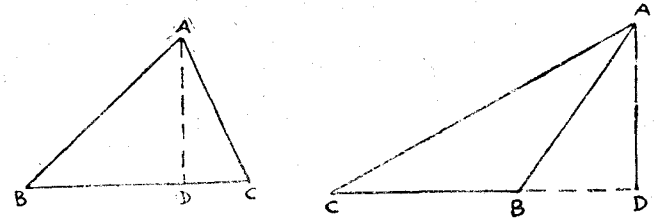
$= BC^2 + CA^2 + 2BC \cdot CD.$

என்றவாறு.

சூத்திரம் 21

§ 3.

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு முக்கோணியிலே கூர்ங்கோண மொன்றின் எதிர்ப் புயத்திலுள்ள சற்சதுரம், அக் கூர்ங்கோணத்தையுடைய இரு புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களிலும் பார்க்க, அக் கூர்ங்கோணத்தையுடைய புயமொன்றும் அதன் மீது மற்றையது வீழ்த்தும் செம்பாதமும் ஆக்கும் நீள்சதுரத்தின் இருமடங்கு குறைதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் -தரவு - ABC ஒரு △. ∠C கூர்ங்கோணம். AD ⊥ BC.

(தேவையாயின் நீட்டி)

கேள்வி - $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$ என்பது.

நிரூபணம் - △ABD செங்கோணமுடையது.

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2.$

$= AD^2 + (BC \sim CD)^2$

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD.$

$= (AD^2 + CD^2) + BC^2 - 2BC.\ CD.$
$= AC + BC^2 - 2BC.\ CD.$

என்றவாறு.

குறிப்பு :-

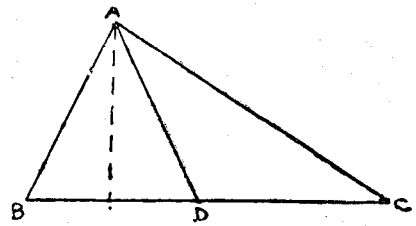
முதல் வடிவத்தில் $BC > CD$; $\therefore BD = BC - CD$.
மற்றையதில் $BC < CD$; $\therefore BD = CD - BC$.

ஆகவே, இரண்டு வடிவங்களிலும் BD என்பது BC, CD இரண்டுக்குமுள்ள வித்தியாசம். இது, $BD = BC \backsim CD$ என்று எழுதப்படும்.

§4. ஷை சூத்திரங்கள் இரண்டையும் சேர்க்க முக்கியமான பிறிதோர் உண்மை பிறக்கும். அது அடுத்த சூத்திரம்.

சூத்திரம் 22

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு முக்கோணியிலே இரு புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத் தொகை மூன்றும் புயத்தின் பாதியிலுள்ள சற்சதுரத்தின் இருமடங்கினதும் அப்புயத்தின் நடுவரையிலுள்ள சற்சதுரத்தின் இருமடங்கினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC ஒரு △. AD ஒரு நடுவரை.

கேள்வி - $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ என்பது.

நிரூபணம் - (i) ∠ள் ADC, ADB இரண்டும் சமமாயின் ∠ ADC = ∠ ADB = செங்கோணம்.

$\therefore AB = AC.$

$\therefore AB^2 + AC^2 = (BD^2 + AD^2) + (CD^2 + AD^2)$
$= 2BD^2 + 2AD^2.$

(ii) ∠ள் ADC, ADB இரண்டும் சமமில்லையாயின், ஒன்று விரிகோணமாதல் வேண்டும்.

∠ ADC விரிகோணமென்க.

$AE \perp BC.$

△ ABDயில், $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot ED$.
△ ACDயில், $AC^2 = CD^2 + AD + 2CD \cdot ED$.
$\therefore AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ (BD = CD)
என்றவாறு.

§ 5. இச் சூத்திரம் **அபாலினியர்** சூத்திரம் எனப்படும். அபாலினியர் (கி. மு. 260—கி. மு. 200) ஒரு எகிப்திய கணித வல்லுநர்.

அப்பியாசம்—48 (i) கணித்தல்

1. ABC ஒரு முக்கோணி. AB = 7″, BC = 8″, CA = 9″. நடுவரை ADயின் நீளமென்ன?

* 2. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் இரு புயங்களின் நீளங்கள் முறையே 13″, 19″. ஒரு மூலை வரையின் நீளம் 24″ ஆயின், மற்றைய மூலை வரையின் நீளமென்ன?

* 3. 5″, 6″, 7″ நீளமுள்ள புயங்களையுடைய முக்கோணியின் மூன்று நடுவரைகளிலுமுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

* 4. ABC ஒரு △. நடுவரைகள் சந்திக்குமிடம் G. AB = 6″, BC = 11″, QA = 7″. AQவின் நீளமென்ன?

அப்பியாசம்—48 (ii) நிறுவுதல்

1. ABC ஒரு துவிசமபுய முக்கோணி; ∠ C விரிகோணம். BCயை நீட்டி அதற்குச் செங்குத்தாக AD கீறப்படுகிறது.
$AB^2 = 2BC \cdot BD$ எனக் காட்டுக.

2. ABC ஒரு துவிசமபுய முக்கோணி. AB = AC. CD நடு வரை.
$BC^2 = 2CD^2 - 2BD^2$ எனக் காட்டுக.

3. ABC ஒரு துவிசமபுய முக்கோணி. பீடம் BC நீட்டப்படுகிறது, D வரையும்; CD = BC.
$AD^2 = AC^2 + 2BC^2$ எனக் காட்டுக.

* 4. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை மூலைவரைகளிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

* 5. ABCD ஒரு நீள் சதுரம். O அதற்குள் ஒரு புள்ளி.
$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ எனக் காட்டுக.

* 6. ஒரு முக்கோணியின் புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் மும்மடங்கு நடுவரைகளிலுள்ள சற்சதுரங்களின் நான்மடங்குக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

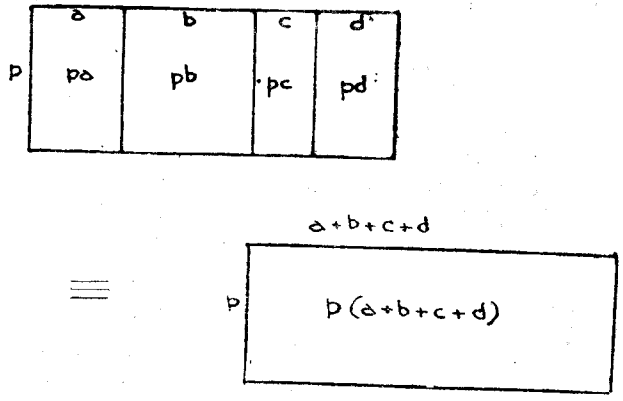
* 7. ABC ஒரு முக்கோணி. நடு வரைகள் வெட்டுமிடம் O.
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ எனக் காட்டுக.

* 8. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். ACயின் நடுப்புள்ளி L; Dயின் நடுப்புள்ளி M.
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4LM^2$ எனக் காட்டுக.

** 9. ஒரு நாற்புய வடிவத்தின் புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை மூலைவரைகளிலுள்ள சற்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாயின் நாற்புயம் சமாந்தர சதுர்ப்புயமாகும் எனக் காட்டுக.

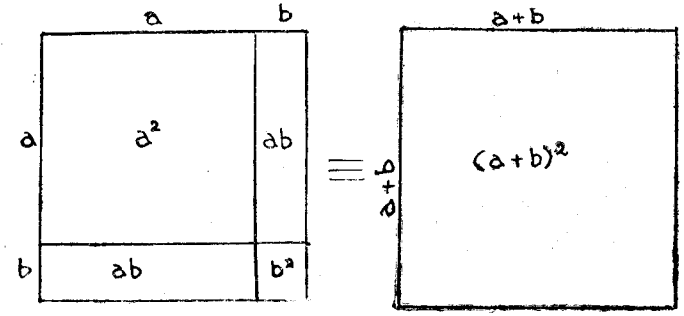
42. நீள்சதுரங்களும் சற்சதுரங்களும்

§ 1. ஒரு நேர்வரை பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருப்பின் அப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றோடும் வேறோர் நேர்வரை தனித்தனி ஆக்கும் நீள்சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகை இருவரைகளும் சேர்ந்து ஆக்கும் நீள்சதுரத்துக்குச் சமமாகும்.



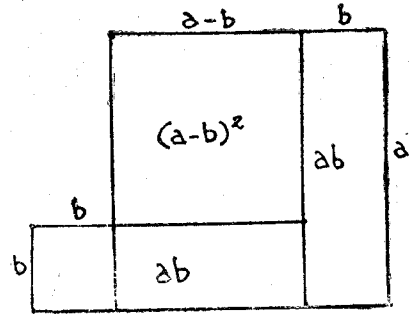
அதாவது. $pa+pb+pc+pd+\equiv p(a+b+c+d)$

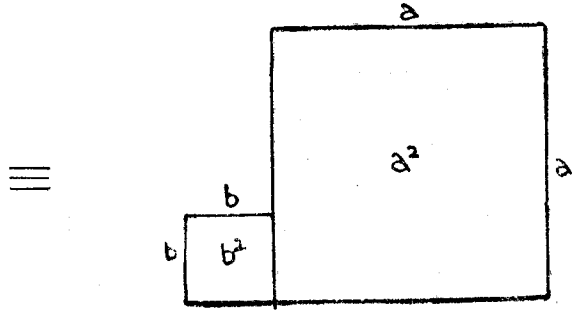
§ 2. ஒரு நேர்வரை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படின், இரு பகுதிகளிலுமுள்ள இரு சற்சதுரங்களும் இரு பகுதிகளும் ஆக்கும் நீள்சதுரத்தின் இருமடங்கும் சேர்ந்து முழுவரையிலுள்ள சற்சதுரத்துக்குச் சமமாகும்.



அதாவது, $a^2+b^2+2ab\equiv(a+b)^2$

§ 3. ஒரு நேர்வரையிலே ஒரு பகுதி ஒழிந்த மிகுதியிலுள்ள சற்சதுரமும், முழு நேர்வரையும் கழிக்கப்பட்ட பகுதியும் ஆக்கும் நீள்சதுரத்தின் இருமடங்கும் சேர்ந்து முழு நேர்வரையிலும் கழிக்கப்பட்ட பகுதியிலும் உள்ள இரு சற்சதுரங்களுக்கும் சமமாகும்.

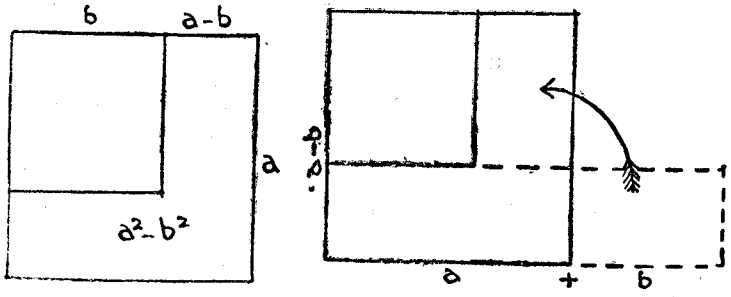




அதாவது, $(a-b)^2+2ab \equiv a^2+b^2$

அல்லது, $(a-b)^2 \equiv a^2+b^2-2ab$.

§4. இரு நேர்வரைகள் சேர்ந்த நீளமும், அவற்றின் வித்தியாசமும் ஆக்கும் நீள்சதுரம், அந் நேர் வரைகளிலுள்ள இரு சற்சதுரங்களின் வித்தியாசத்துக்குச் சமமாகும்.



அதாவது, $a^2-b^2 \equiv (a+b)\ (a-b)$

அப்பியாசம்—49

1. $x(x+y) \equiv x^2+xy$ என்பதை விளக்கும் படங்கள் கீறுக

2. $(a+b)^2 \equiv a(a+b)+b(a+b)$ என்பதை விளக்கும் படங்கள் கீறுக.

3. $(x+y)^2 \equiv (x-y)^2+4xy$ என்பதை விளக்கும் படங்கள் கீறுக.

4. $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ என்பதை விளக்கும் படங்கள் கீறுக.

* 5. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் கன்னத்திலுள்ள சற்சதுரம், மற்றைய இரு புயங்களின் மொத்த நீளத்திலுள்ள சற்சதுரத்திலும் பார்க்க முக்கோணிப் பரப்பின் நாலு மடங்கு குறைவானதெனக் காட்டுக.

* 6. ABC ஒரு நேர்வரை. ABயின் நடுப்புள்ளி D. $AC^2 \equiv BC^2+2AB.CD$ என்பதைப் படங்கீறி விளக்குக.

* 7. AB ஒரு நேர்வரை. C அதில் ஒரு புள்ளி. ACயின் நடு M; BCயின் நடு N. $AN^2+3BN^2 \equiv 3AM^2+BM^2$ என்பதைப் படம் கீறி விளக்குக.

மீட்டல் அப்பியாசங்கள்

XII

1. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். அதில் B செங்கோணம். AB=3″, CD=1″. BCயில் E ஒரு புள்ளி; $BE=\frac{1}{4}BC$. முக்கோணிகள் ABE, CDE இரண்டும் பரப்பிற் சமமானவை எனக் காட்டுக.

2. ABCD ஒரு சற்சதுரம். AB, BC, CD, DA நான்கிலும் E, F, G, H நான்கும் நாலு புள்ளிகள். AE=BF=CG=DH. EFGH ஒரு சற்சதுரமெனக் காட்டுக

3. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். அதில் AD∥BC. CDயின் நடுப்புள்ளி E. முக்கோணி AEB நாற்புயவடிவம் ABCDயின் பாதி எனக் காட்டுக.

4. ABC ஒரு முக்கோணி. அதற்குள் O ஒரு புள்ளி. $OD \perp BC$; $OE \perp CA$; $OF \perp AB$. $BD^2+CE^2+AF^2=DC^2+AE^2+FB^2$ எனக் காட்டுக.

XIII

1. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். அதில் $AB=3''$, $BC=2'$, $AC=3{\cdot}6''$, $\angle A=104^\circ$, $BD=4''$. நாற்புய வடிவத்தை வரைந்து அதன் பரப்பைக் காண்க.

2. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். அதன் மூலை வரைகள் சந்திக்குமிடம் E. CA நீட்டப்படுகிறது P வரையும். $AP=CE$.

   $\triangle BDP = ABCD$ (பரப்பில்) எனக் காட்டுக.

3. $a = 1{\cdot}7''$, $b = 2{\cdot}3''$, $x = 2''$ எனக்கொண்டு $(a+b)x \equiv ax+bx$ என்பதன் உண்மையைப் படம் கீறிக் காட்டுக.

4. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். AB நீட்டப்படுகிறது P வரையும். A க்கூடாக CP க்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் வரையை CB நீண்டு Q விற் சந்திக்கிறது. சமாந்தர சதுர்ப்புயம் PBQR பூரணமாக்கப்படுகிறது.

   ▱PBQR = ▱ABCD (பரப்பில்) எனக் காட்டுக.

XIV

1. ACD, BCD இரண்டும் ஒரே பீடத்தின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ள இரு முக்கோணிகள். AB யின் நடு F.

   $\triangle ACD+\triangle BCD=2\triangle FCD$ (பரப்பில்) எனக் காட்டுக.

2. ஒரே பீடத்திலும் எதிர்ப் பக்கங்களிலும் உள்ள இரு முக்கோணிகள் ACD, BCD சம பரப்புடையனவாயின், CD (தேவையாயின் நீண்டு) AB யை இரு சம கூறுகப் பிரிக்கிறதெனக் காட்டுக.

4. A, B, C, D நான்கும் நேர்வரை யொன்றிலுள்ள நாலு புள்ளிகள். $AB=BC$.

   $AD \cdot CD+BC^2 \equiv BD^2$ என்பதை விளக்கும் படம் கீறுக.

4. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் நாலு புயங்களும் ஒரு மூலைவரையும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையாயின், மூலைவரைகள் இரண்டும் $1 : \sqrt{3}$ என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

XV

1. நேரான பாதையொன்றிலே 20 யார் இடைத்தூரமுள்ள இரு புள்ளிகள் உண்டு. ஒரு மரம் இப் புள்ளிகளிலிருந்து முறையே 40 யார், 20 யார் தூரத்தில் உள்ளது. பாதையிலிருந்து மரத்தின் தூர மென்ன.

2. ABCD ஒரு சற்சதுரம். AD யில் P ஒரு புள்ளி. CP, BA இரண்டும் நீண்டு Q விற் சந்திக்கின்றன. DQ இணைக்கப்படுகிறது.

   $\triangle QPD = \triangle APB$ (பரப்பில்) எனக் காட்டுக.

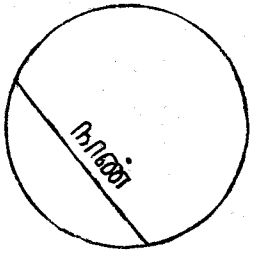
3. ABCDE ஒரு ஐம்புய வடிவம். அதில் AB=5 செ. மீ., BC=4 செ. மீ., CD=3·6 செ. மீ., DE=7·5 செ. மீ., EA=4·5 செ. மீ., ∠ ABC=105°, ∠ EAB=140°. வடிவத்தைக் கீறி அதற்குச் சமமான முக்கோணி DFGவரைக. (FAGB ஒரு நேர்வரையாகட்டும்).

4. PQR ஒரு முக்கோணி. அதில் QR=10 செ. மீ., ∠ Q=∠ R=45°. முக்கோணியை வரைந்து சமபரப்புள்ளதும் XQ=10 செ. மீ. நீளமுள்ளதுமான ஒரு முக்கோணி XQR கீறுக.

(iii) வட்டங்கள்

43. நாண்கள்

§1. ஒரு வட்டத்தின் சுற்றுவரையிலுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்வரை **நாண்** எனப் படும்.



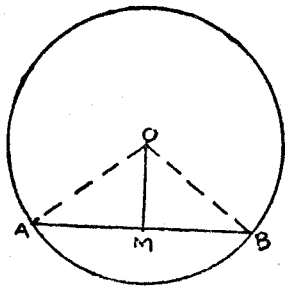
ஒரு வட்டத்தில் எண்ணிறந்த நாண்களை ஆக்கலாம். அவற்றுளெல்லாம். பிரதானமானது விட்டமே. மையத்துக் கூடாகச் செல்லும் நாணுகையால், ஒவ்வொரு விட்டமும் வட்டத்தைச் சமசீருடைய இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும். இந்த ஒரு உண்மையிலிருந்தே மேல் வரும் பல சூத்திர உண்மைகள் (உதாரணமாக அடுத்த சூத்திரம்) அநுமானிக்கப்படலாம். எனினும், அவற்றுக்குரிய முறையான நிரூபணங்கள் அதனதன்கீழ்க் கொடுக்கப்படும்.

§ 2. சூத்திரம் 23

பொதுவிலக்கணம் -(i) ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து (விட்டமல்லாத) நாணொன்றின் நடுவுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்வரை அந் நாணுக்குச் செங்குத்தாதல் வேண்டும்.

(ii) மறுதலையாக, ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாணொன்றுக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் நேர்வரை அந் நாணை இரு சம கூறுகப் பிரித்தல் வேண்டும்.

(i)



சிறப்பிலக்கணம் - **தரவு** - O ஒரு வட்டத்தின் மையம். AB நாண். M நாணின் நடு.

கேள்வி - OM ⊥ AB என்பது.

ஆக்கம் - OA, OB இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - △ள் OAM, OBM இரண்டிலும்,

$$\begin{cases} AM = BM & (M \text{ நாணின் நடு}) \\ OA = OB & (\text{ஆரங்கள்}) \\ OM \text{ பொதுவானது.} \end{cases}$$

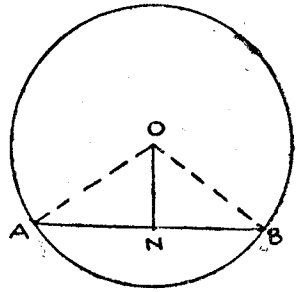
∴ △ள் ≡

∴ ∠OMA = ∠OMB.

இவை அயற் கோணங்கள்

∴ OM ⊥ AB என்றவாறு.

(ii) (மறுதலை)



சிறப்பிலக்கணம் - **தரவு** - O ஒரு வட்டத்தின் மையம். AB ஒரு நாண். ON ⊥ AB.

கேள்வி – AN = BN என்பது.

ஆக்கம் - OA, OB இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - △ள் OAN, OBN இரண்டிலும்,

$$\begin{cases} OA = OB & (\text{ஆரங்கள்}) \\ ON \text{ பொதுவானது} \\ \angle ONA = \angle ONB & (ON \perp AB) \end{cases}$$

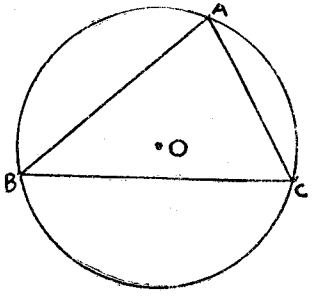
∴ △ள் ≡

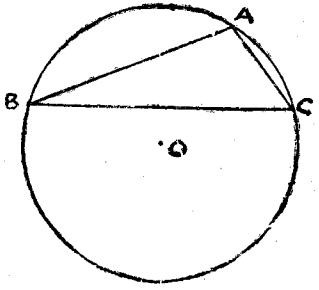
∴ AN = BN, என்றவாறு.

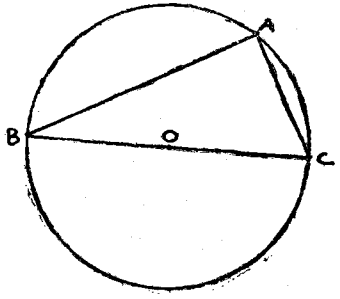
§ 3. **உள்ளுறை:** (i) ஒரு வட்டத்திலே சமாந்தரமான நாண்களது நடுப்புள்ளிகளின் படுக்கை அந் நாண்களுக்குச் செங்குத்தான விட்டமாகும்.

(ii) ஒரு நாணின் நடுச் செங்குத்துவரை வட்ட மையத்துக் கூடாகச் செல்லும்.

§4. முக்கோணி யொன்றைச் சுற்றி வட்டம் வரைதற்கு ஷை சூத்திரம் வழி காட்டும். முக்கோணியின் மூன்று புயங்களும் வட்டத்தின் மூன்று நாண்களாகும். எனவே, மூன்று புயங்களினது நடுச்செங்குத்து வரைகளும் தனித்தனி வட்டமையத்துக்கூடாகச் செல்லுதல் வேண்டும், மையத்தைப் பெறுவதற்கு ஏதுமிரண்டை எடுத்தாற்போதும். இவ் வட்டம் **சுற்றுவட்டம்** எனப்படும்.







கூர்ங்கோண முக்கோணியில் மையம் முக்கோணிக்குள் அமைவதையும், விரிகோண

முக்கோணியில் மையம் முக்கோணிக்கு வெளியில் அமைவதையும், செங்கோண முக்கோணியில் மையம் ஒரு புயத்தில் (எதில்?) அமைவதையும் அவதானித்துக் கொள்க.

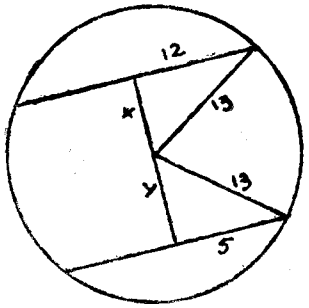
(ஒரே நேரிலில்லாத) மூன்று புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தை வரைதலும் இதைப் போன்றதே. ஏனெனில், குறித்த மூன்று புள்ளிகளில் ஏதுமிரண்டை இணைக்கும் நேர்வரை அவ்வட்டத்தின் நாணாகும். ஒரே நேரிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரே ஒரு வட்டமே வரையலாம் என்பதையும், மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேருக்கு உளவாயின் வட்டம் வரைய முடியா தென்பதையும் விளங்கிக் கொள்க.

§5. நாண்களின் நீளங்கள் சம்பந்தமான கணித்தல்கள் பெரும்பாலும் ஷை சூத்திரத்தையே ஆதாரமாக உடையன.

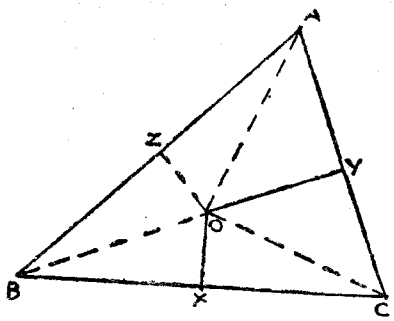
ஒரு உதாரணம்:-

13" ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திலே மையத்துக்கு இரு புறத்திலும் இரு சமாந்தரமான நாண்கள் உண்டு. அவற்றின் நீளம் முறையே 24", 10" ஆகும். நாண்களின் இடைத்தூரம் யாது?

பக்கத்திலுள்ள வடிவத்திலிருந்து $x^2+12^2=13^2$ என்பதையும் $y^2+5^2=13^2$ என்பதையும் அறிந்து கொள்ளலாம். எனவே, $x=5$, $y=12$ என்பன பெறப்படும். $=5+12=17$ அங். ஆகவே, இடைத்தூரம்



§ 6. **ஒரு முக்கோணியின் மூன்று புயங்களினது நடுச் செங்குத்து வரைகளும் ஒன்றுகூடும்** என்பது முக்கியமானது. நிரூபணம் **(சுருக்கமாக)** பின்வருமாறு:—



OX, OY இரு புயங்களின் நடுச் செங்குத்து வரைகள்.

Z மூன்றாவது புயத்தின் நடுப் புள்ளி.

நிரூபிக்கவேண்டியது $OZ \perp AB$ என்பது.

△ள் BXO, CXO இரண்டும் ≡

∴ BO = CO.

அவ்வாறே, CO = AO.

∴ BO = AO.

எனவே, △ள் BZO, AZO இரண்டும் ≡

இவற்றை விரித்தெழுதி மிகுதியை நிரப்புக.

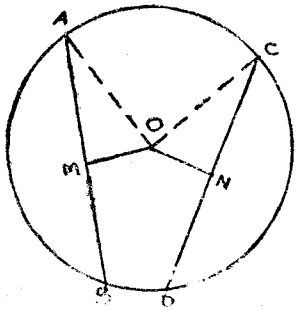
§ 7. 'ஒரு புள்ளியிலிருந்து நேர்வரை யொன்றின் தூரம்' என்பது அப் புள்ளியிலிருந்து அவ்வரைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் தூரத்தையே குறிக்கும் என்பது ஞாபகமிருக்கட்டும்.

சூத்திரம் 24

பொதுவிலக்கணம் - (i) ஒரு வட்டத்திலே சம நீளமுள்ள நாண்கள் மையத்திலிருந்து சம தூரத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) மறுதலையாக, மையத்திலிருந்து சம தூரத்திலுள்ள நாண்கள் சம நீளமுள்ளனவாதல் வேண்டும்.

(i)



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - AB, CD சமநீளமுள்ள இரு நாண்கள். O வட்டத்தின் மையம்.

$OM \perp AB$; $ON \perp CD$

கேள்வி - $OM = ON$ என்பது.

ஆக்கம் - OA, OC இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - $OM \perp AB$

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB$

$ON \perp CD$

$\therefore CN = \frac{1}{2}CD$

ஆனால் $AB = CD$ (தரவு)

$\therefore AM = CN$.

இனி, △ள் AMO, CNO இரண்டிலும்

$OA = OC$ (ஆரங்கள்)

$AM = CN$ (நிறுவப்பட்டது)

$\angle OMA = \angle ONC$ (செங்கோணங்கள்)

$\therefore$ △ள் ≡

$\therefore OM = ON$ என்றவாறு.

(ii) மறுதலை

(அதே வடிவம்)

சிறப்பிலக்கணம்- தரவு - AB, CD இரு நாண்கள். O வட்டத்தின் மையம்.

$OM \perp AB$; $ON \perp CD$. $OM = ON$.

கேள்வி - $AB = CD$ என்பது.

ஆக்கம் - OA, OC இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - △ள் OAM, OCN இரண்டிலும்

$OA = OC$ (ஆரங்கள்)

$OM = ON$ (தரவு)

$\angle OMA = \angle ONC$ (செங்கோணங்கள்)

$\therefore$ △ள் ≡

$\therefore AM = CN$.

ஆனால், $AM = \frac{1}{2}AB$; $CN = \frac{1}{2}CD$.

$\therefore AB = CD$ என்றவாறு

§ 8. **உள்ளுறை.** (i) ஒரே அளவான வட்டங்களில் சம நீளமான நாண்கள் சம தூரத்திலும் சம தூரத்திலுள்ள நாண்கள் சம நீளமாயும் அமையும்.

(ii) ஒரு வட்டத்திலே சம நீளமுள்ள நாண்களினது நடுப்புள்ளிகளின் படுக்கை ஏகமைய வட்ட மொன்றாகும்.

(iii) மையத்துக்கு அண்மையிலுள்ள நாண் சேய்மையிலுள்ள நாணிலும் பார்க்க நீளமானது.

(iv) விட்டமே நாண்களெல்லாவற்றிலும் நீளமானது.

அப்பியாசம்—50 (i) வரைதல்

1. விரிகோண முக்கோணி யொன்று கீறி அதைச் சுற்றி வட்டம் வரைக.

2. கூர்ங்கோண முக்கோணியொன்று கீறி அதைச் சுற்றி வட்டம் வரைக.

3. செங்கோண முக்கோணியொன்று கீறி அதைச் சுற்றி வட்டம் வரைக.

4. ஒரு நேரில்லாத மூன்று புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

5. முக்கோணி வடிவமான ஒரு தோட்டத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நீளங்களும் முறையே 270′, 310′, 380′ ஆகும் தோட்டத்தின் மூன்று மூலைகளிலுமிருந்து சமதூரத்தில் ஒரு மரம் நடவேண்டும். தோட்டப் படத்தை வரைந்து மூலையொன்றிலிருந்து மரத்தின் தூரத்தை அறிக.

6. முக்கோணி வடிவமான ஒரு பூஞ்சோலையில் மூன்று மூலைகளிலும் மூன்று குடிசைகளுண்டு. அம் மூன்று குடிசைகளிலுமிருந்து சமதூரத்தில் நாலாவதோர் குடிசை அமைக்கப்படுகிறது.

சோலையின் மூன்று பக்கங்களும் முறையே 450, 600, 900 யாராயின், நாலாவது குடிசை, சோலைக்குள் இடம்பெறாது என்பதைப் படமூலம் காட்டுக. அதன் தூரம் எவ்வளவு?

* 7. ஏறக்குறைய ஒரு நேருக்கு மூன்று புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

* 8. ABC ஒரு சமபுய முக்கோணி. ஒரு புயம் = 2″. முக்கோணிக்கு வெளியாக BCDE என ஒரு சதுரம் வரைந்து A, B, E மூன்றுக் கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

* 9. 4″ நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்று (AB) வரைக. இவ் வரையிலிருந்து 2″ தூரத்திலும் Bயிலிருந்து 3″ தூரத்திலும் ஒரு புள்ளி (C) காண்க. A, B, C மூன்றுக் கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

* 10. ABC ஒரு முக்கோணி. AB = 2·4″; BC = 2·8″; CA = 3·3″. AP ⊥ BC; BQ ⊥ CA; CR ⊥ AB. P, Q, R மூன்றுக் கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தை வரைக.

** 11. $2\frac{1}{2}$″ ஆரமுள்ள வட்டத்துக்குள் மையத்திலிருந்து $1\frac{1}{2}$″ தூரத்தில் ஒரு புள்ளி (P) இடுக. Pயை நடுவாக உடைய நாணொன்று வரைந்து அதன் நீளத்தை அறிக.

** 12. 2″ ஆரமுள்ள வட்டத்துள் மையத்திலிருந்து 1″ தூரத்திலுள்ள புள்ளியொன்றுக் கூடாகச் செல்லும் நீளம் மிகக் குறைந்த நாணையும் நீளம் மிகக் கூடிய நாணையும் வரைக. நாண்களின் நீளங்களை அளந்தறிக.

*13. ஒரு வட்டத்திலே $1\frac{1}{2}''$ தூரத்திலுள்ள இரு சமாந்தரமான நாண்களின் நீளங்கள் முறையே 5", 8" ஆகும். வட்டத்தின் ஆரத்தைவரைந்தறிக.

**14. ஏதுமொரு முக்கோணி (ABC) கீறுக. AB, AC இரண்டிலும் (வேண்டுமானால் நீட்டலாம்) சம நீளமுள்ள நாண்களை வெட்டும்படியும், B, C இரண்டுக் கூடாகச் செல்லும்படியும் வட்டமொன்று வரைக.

அப்பியாசம்—50 (ii) கணித்தல்

1. 34" விட்டமுள்ள வட்டமொன்றிலே 30" நீளமுள்ள நாணொன்று உண்டு. மையத்திலிருந்து நாணின் தூரம் எவ்வளவு?

2. 13" விட்டமுள்ள வட்டமொன்றிலே மையத்திலிருந்து 2" தூரத்திலே ஒரு நாண் உண்டு. நாணின் நீளம் எவ்வளவு?

3. ஒரு வட்டத்திலே மையத்திலிருந்து 12" தூரத்திலே 32" நீளமுள்ள நாணொன்றுண்டு. வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?

4. 25" ஆரமுள்ள வட்டமொன்றிலே 40", 30" நீளமுள்ள இரு நாண்கள் மையத்தின் ஒரு பக்கத்திலே சமாந்தரமாக வரையப்பட்டுள. அவை ஒவ்வொன்றும் மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளன என்பதைக் கணித்து நாண்களின் இடைத் தூரத்தையும் அறிக.

5. 30' ஆரமுள்ள வட்டத்திலே 50', 20' நீளமுள்ள இரு சமாந்தரமான நாண்கள் மையத்துக்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் உண்டு. அவற்றின் இடைத்தூரம் எவ்வளவு?

*6. 5" ஆரமுள்ள வட்டத்திலே (மையம் O) 6" நீளமுள்ள நாணொன்று (AB) உண்டு. ABO முக்கோணியின் பரப்பு எவ்வளவு?

*7. 50" விட்டமுள்ள வட்டமொன்றிலே இரு சமாந்தரமான நாண்கள் 30" இடைத்தூரத்தில் உண்டு. அவற்றுள் ஒன்றின் நீளம் 25". மற்றையதன் நீளம் எவ்வளவு?

*8. 6" ஆரமுள்ள வட்டத்தில் 8" நீளமுள்ள நாண்களது நடுப்புள்ளிகளின் படுக்கை யாது?

*9. ஒரு வட்டத்தின் கண்டம் 10" நீளமுள்ள நாணை உடையது. கண்டத்தின் உயரம் $1\frac{1}{2}''$. வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?

*10. 12" ஆரமுள்ள வட்டத்திலே 18" நீளமுள்ள நாணை உடைய கண்டத்தின் உயரம் எவ்வளவு? (இரு விடைகள்)

*11. 6" ஆரமுள்ள வட்டத்திலே சமநீளமுள்ள இரு நாண்கள் சமாந்தரமாக உண்டு. அவற்றின் இடைத்தூரம் 2'. நாண்களின் நீளம் எவ்வளவு?

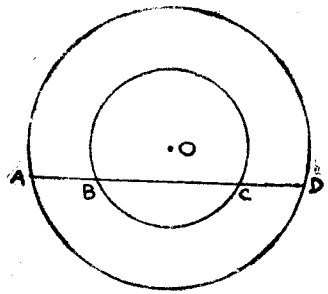
**12. 18" விட்டமுள்ள வட்டமொன்றிலே முறையே 16", 14" நீளமுள்ள இரு நாண்கள் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன. வெட்டுப்புள்ளி வட்ட மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

**13. பூமியின் மேற் பரப்பிலே 200 மைல் இடைத்தூரம் உள்ள இரு இடங்களை நேரான ஒரு சுரங்கப்பாதை இணைக்குமாயின், அப்பாதையின் நடு பூமியின் மேற்பரப்பிலிருந்து எவ்வளவு ஆழத்தில் உண்டு? (பூமியை 4000 மைல் ஆரமுள்ள ஓர் உருண்டையாகக் கொள்க.)

14. ஒரு உருளையின் நீளம் 5′. அதன் இரு முகப்புகளும் 7·5″ ஆரமுள்ள வட்டங்கள். ஒரு முகப்பிலே 9″ நீளமுள்ள நாணொன்று (AB) வரையப்படுகிறது. எதிர் முகப்பிலே அதே நீளமுள்ள இரு நாண்கள் (CD, EF) ABக்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படுகின்றன.

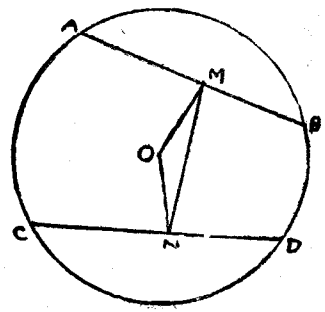
AC, AD, AE, AF ஆகியவற்றின் நீளங்களை அறிக.

அப்பியாசம்—50 (iii) நிறுவுதல்



1. இரண்டு ஏகமைய வட்டங்களை ஒரு நேர்வரை வெட்டுகிறது. AB=CD என நிறுவுக.

2. ஒரு வட்டத்திலே சமநீளமுள்ள இரு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளும் வட்டமையமும் சேர்ந்து வரும் முக்கோணி (OMN) துவிசமபுய முக்கோணி என நிறுவுக.



3. ஒரு வட்டத்திலே AB, AC சம நீளமுள்ள இரு நாண்கள். அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே M, N ஆகும். ∠AMN = ∠ANM என நிறுவுக.

4. O வட்டமொன்றின் மையம். P வட்டத்துக்கு வெளியாக உள்ளதோர் புள்ளி. POவுடன் சமகோணங்களை ஆக்கும் இரு நேர்வரைகள் PAB, PCD வட்டத்தை வெட்டுகின்றன. நாண்கள் AB, CD சம நீளமுள்ளன என நிறுவுக.

5. ஒரு வட்டத்துக்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு நேர் வரைகள் PAB, PCD வட்டத்தை வெட்டுகின்றன. நாண்கள் AB, CD சமமாயின், PA=PC என நிறுவுக.

6. ஒரு வட்டத்திலே AB, AC சம நீளமுள்ள இரு நாண்கள். O வட்டத்தின் மையம். ∠BAO = ∠CAO என நிறுவுக.

7. ஒரு வட்டத்தின் AB, AC இரு நாண்கள்; AD விட்டம். BC, AD இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயின் AB=AC என நிறுவுக.

* 8. ஒரு வட்டத்திலே இரு சமநீளமுள்ள நாண்கள் (AB, CD) ஒன்றையொன்று Pயில் வெட்டுகின்றன. AP, PB இரண்டில் ஒரு துண்டு CPக்குச் சமமென நிறுவுக.

* 9. ஒரு வட்டத்திலே AB ஒரு விட்டம்; CD ஒரு நாண். விட்டத்தின் இரு அந்தங்களிலுமிருந்து நாணுக்கு (வேண்டுமாயின் நீட்டலாம்) செங்குத்தாக AE, BF கீறப்படுகின்றன. CE=DF என நிறுவுக.

* 10. சமாந்தர நாண்களினது நடுப்புள்ளிகளின் படுக்கை செங்குத்தான விட்டமென நிறுவுக.

* 11. இரு வட்டங்கள் X, Yயில் வெட்டுகின்றன. XYக்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்வரை ஒரு வட்டத்தை Aயிலும் Bயிலும், மறுவட்டத்தை Cயிலும் Dயிலும் வெட்டுகிறது. AC = BD என நிறுவுக.

* 12. ஒரு வட்டத்திலே AB, AC சம நீளமுள்ள இரு நாண்கள்; O வட்டமையம். $AO \perp BC$ என நிறுவுக.

* 13. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுள் A ஒன்று. B, C வட்ட மையங்கள். BCயின் நடுப்புள்ளி D. Aக்கூடாக ADக்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்வரை வட்டங்களை மீண்டும் E, F இல் வெட்டுகிறது. AE = AF என நிறுவுக.

* 14. ஒன்றையொன்று வெட்டாத இரு சமமான வட்டங்களின் மையங்கள் A, B ஆகும். ABயின் நடுப்புள்ளியாகிய Cக் கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்வரை ஒரு வட்டத்தை Pயிலும் Qவிலும், மறுவட்டத்தை Rஇலும் Sஇலும் வெட்டும். PQ = RS என நிறுவுக.

* 15. ஒரு நாணின் நடுச் செங்குத்துவரை வட்ட மையத்துக் கூடாகச் செல்லுமென நிறுவுக.

* 16. இரு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியொன்றுக் கூடாக வட்ட மையங்களை இணைக்கும் நேர்வரைக்குச் சமாந்தரமாக வட்டங்களை மீண்டும் சந்திக்குமளவும் கீறப்படும் நேர்வரை வட்ட மையங்களை இணைக்கும் நேர்வரையிலும் இருமடங்கானது என நிறுவுக.

** 17. ஒரு அரைவட்டத்தின் விட்டத்திலே மையத்திலிருந்து சம தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் இரு புள்ளிகளுக் கூடாகக் கீறிய சமாந்தர நேர்வரைகள் சுற்று வரையை முறையே Cயிலும் Dயிலும் சந்திக்கின்றன CD இணைக்கப்பட்டால் $\angle C = \angle D = 90^\circ$ என நிறுவுக.

** 18. ஒரு வட்டத்திலே AB, CD என இரு நாண்கள் வட்டத்துக்குள் செங்குத்தாக Pயில் வெட்டுகின்றன. வட்டமையம் O எனின்,

$AB^2 + CD^2 + 4\,OP^2 = 8\,OA^2$ என நிறுவுக.

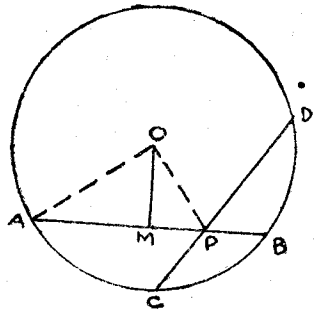
** 19. இரு வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியொன்றுக் கூடாக வட்டங்களை மீண்டும் சந்திக்குமளவும் கீறப்படும் நேர்வரைகளுள் வட்டமையங்களை இணைக்கும் நேர்வரைக்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்படுவதே நீளத்தாற்கூடியது என நிறுவுக.

** 20. ஒரு நாற்புயத்தின் மூலைவரைகளைத் தொடுக்கப் பிறக்கும் நாலு முக்கோணிகளின் சுற்று வட்ட மையங்கள் ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் மூலைகள் என நிறுவுக.

44. நாண்கள் (தொடர்ச்சி)

சூத்திரம் 25

§ 9. பொதுவிலக்கணம் - ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் வெட்டும்போது ஒன்றினது இரு கூறுகளும் ஆக்கும நீள்சதுரம், மற்றையதன் இரு கூறுகளும் ஆக்கும் நீள்சதுரத்துக்குப் பரப்பில் சமமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - O ஒரு வட்டத்தின் மையம். AB, CD இரு நாண்கள். P நாண்கள் வெட்டுமிடம்.

கேள்வி - AP . PB = CP . PD என்பது.

ஆக்கம் - OM ⊥ AB ; OA, OP இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் -

$$\begin{aligned} AP \cdot PB &= (AM+MP)(MB-MP) \\ &= (AM+MP)(AM-MP) \\ &= AM^2-MP^2 \\ &= (OA^2-OM^2)-(OP^2-OM^2) \quad [\text{பிதாகரர்}] \\ &= OA^2-OP^2 \end{aligned}$$

இவ்வாறே,

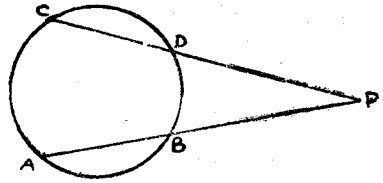
$$CP \cdot PD = OC^2-OP^2$$

ஆனால், $OA^2-OP^2 = OC^2-OP^2 \; [OA=OC]$

$$\therefore \; AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

என்றவாறு.

§ 10.



நாண்களிரண்டும் வட்டத்துக்கு வெளியிலே சந்திக்குமாயினும்

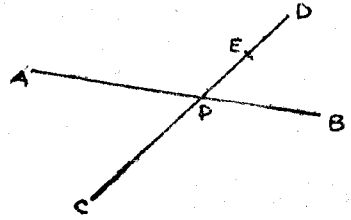
AP . PB = CP . PD ஆகும்.

நிரூபணம் சரியாக முந்தியதைப் போன்றதே. அதை விரிவாக எழுதுவது நல்ல பயிற்சியாகும்.

§ 11. ஷை சூத்திரத்தின் மறுதலையும் உண்மையாமாறு காட்டுதும்:

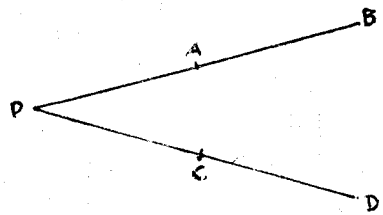
தரவு - AP . PB = CP . PD

கேள்வி - A, C, B, D நான்கும் ஒரே வட்டத்திலுள்ளன என்பது.



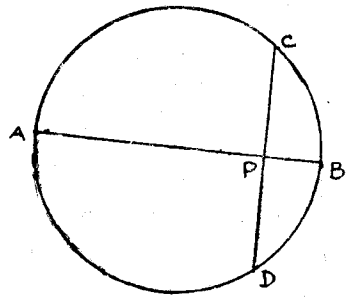
மூன்று புள்ளிகளுக்கூடாக ஒரு வட்டம் கீறமுடியுமாகையால் A, C, B மூன்றுக் கூடாகவும் ஒரு வட்டம் கீறுக. அவ்வட்டம் Dக் கூடாகச் செல்லாவிட்டால், அது C, Dயை Eயில் வெட்டட்டும்.

AP . PB = CP . PD (தரவு)
AP . PB = CP . PE (ACBE வட்டம்)
மிகுதியை உய்த் துணர்ந்து கொள்க.



AP . PB = CP . PD ஆயின், A, B, D, C நான்கும் ஒரே வட்டத்தில் உள்ளன என்பதையும் முன் போலப் பாரிசேட நியாயத்தால் நிரூபித்துக் கொள்க.

§12.

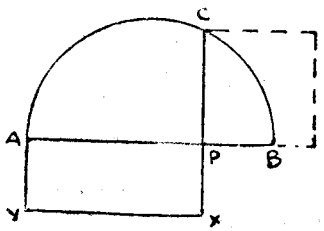


ஒரு விட்டத்துக்குச் செங்குத்தாக ஒரு நாண் அமைந்திருப்பதைக் கவனியுங்கள்.

AP . PB = CP . PD
= CP^2
(CP = PD)

அதாவது, ஒரு நீள் சதுரம் (AP . PB) ஒரு சற்சதுரத்துக்குச் (CP^2) சமமாகிறது.

எனவே, ஒரு நீள்சதுரத்துக்குச் சமமான சற்சதுரம் கீறுவதற்கு வழியாகிறது.



APXY தரப்பட்ட நீள் சதுரம். AP நீட்டப்படுகிறது. PB = PX ABயைவிட்டமாக வட்டம். (அரை வட்டம் போதும்) XP நீட்டப்படட்டும்.

அப்பியாசம்—51 (i) வரைதல்

1. 3″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. வட்டமையத்திலிருந்து 1·5″ தூரத்தில் ஒரு புள்ளி (P) இடுக. அப் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஏதும் நான்கு நாண்கள் AB, CD, EF, GH கீறுக. AP, PB, CP, PD, முதலியவற்றின் நீளங்களை அளந்து AP · PD, CP · PD, EP · PF, GP · PH என்பவற்றின் விலைகளைக் காண்க.

   வரையறையான மறுமொழி என்னவாதல் வேண்டும் ?

2. 3″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. வட்டமையத்திலிருந்து 4″ தூரத்தில் ஒரு புள்ளி (P) இடுக. அப்புள்ளிக்கூடாகச்செல்லும் ஏதும் நான்கு நாண்கள் AB, CD, EF, GH கீறுக. PA, PB, PC, PD முதலியவற்றின் நீளங்களை அளந்து PA · PB, PC · PD, PE · PF, PG · PH என்பவற்றின் விலைகளைக் காண்க.

   வரையறையான மறுமொழி என்னவாதல் வேண்டும் ?

3. 2·5″ நீளமும் 1·5″ அகலமுமுடைய நீள் சதுரமொன்று கீறி அதற்குச் சமமான சற்சதுரத்தை வரைக. சற்சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளத்தை அளவுங்கள்.

4. மூன்று புயங்களும் முறையே 2·6″, 1·8″, 1·5″ நீளமுள்ள முக்கோணியொன்று கீறி அதற்குச் சமமான சற்சதுரத்தை வரைக. ஒரு பக்க நீளத்தை அளவுங்கள்.

5. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். AB = 3″, ∠ABC = 105°, ∠ABD = 40°, ∠BAC = 30°,

∠BAD = 80°. நாற்புயத்தை வரைந்து, அதற்குச் சமமான சற்சதுரத்தை வரைக.

* 6. AB = 4″, AC = 2″ ∠B = 35° உடைய இரு வேறு முக்கோணிகள் கீறி அவற்றின் பரப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமான சற்சதுரத்தை வரைக.

* 7. 2″ நீளமுள்ள நேர் வரையொன்றிற் சற்சதுரம் கீறுக. சமபரப்புள்ளதும் நீளம் 3·2″ உள்ளதுமான நீள்சதுரமொன்று வரைக.

அப்பியாசம்—51 (ii) கணித்தல்

1. இரு நேர் வரைகள் AB, CD ஒன்றையொன்று இரு சரி கூறாக வெட்டுகின்றன. AB = 12″, CD = 24″. A, B, C மூன்றுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் CDயை எங்கே வெட்டும்?

2. AKB, XKZ, இரு நேர் வரைகள். AK = 4 அடி, KB = 5 அடி, KX = 1·5 அடி, KZ = 20 அடி. A, X, B மூன்றுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் KZஐ Yயில் வெட்டுகிறது. ZYயின் நீளமென்ன?

3. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு நாண். AB = 5″. AB நீட்டப்படுகிறது, Cவரையும். BC = 3″. Cயிலிருந்து கீறப்படும் நேர்வரையொன்று வட்டத்தை Dயிலும் Eயிலும் வெட்டுகிறது. CD = 4″. நாண் DEயின் நீளமென்ன?

   Cயிலிருந்து வட்டமையம் 7″ தூரத்திலுள்ளதாயின் வட்டத்தின் ஆரமென்ன?

4. OAB, OCD இரு நேர் வரைகள். OA = 5′. AB = 3′, OC = 4′. A, B, C மூன்றுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் OCDயை எவ்விடத்தில் வெட்டும்?

5. O ஒரு வட்டத்தின் மையம். வட்டத்தின் ஆரம் = 6½″. P ஒரு புள்ளி. OP = 5½″. Pக்கூடாக ஒரு நாண் AB கீறப்படுகிறது. BP = 3AP. நாணின் நீளமென்ன?

* 6. ஒரு வட்டத்திலே AKC, BKD ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நாண்கள். AK = 10″. KC = 18″, AB = 12½″. KB, KD, ஆரம், மூன்றின் நீளங்களையும் அறிக.

* 7. ACB வட்டமொன்றின் சுற்றுவரையில் ஒரு பகுதி (வில்). C நடுப்புள்ளி. நாண் ABயின் நீளம் = 3·2″, நாண் ACயின் நீளம் = 2″. வட்டத்தின் ஆரமென்ன?

* 8. ஒரு வட்டத்தின் மையம் O. ACB ஒரு நாண். AC = 7″; BO = 3″; CO = 2″. வட்டத்தின் ஆரமென்ன? மறுமொழியைக்கொண்டு Oவின், நிலையத்தைப்பற்றி என்ன கூறமுடியும்?

* 9. O ஒரு வட்டத்தின் மையம். ஆரம் = 5″. AOKB ஒரு விட்டம். AK = 7″. Kக்கூடாகக் குறித்த விட்டத்துக்குச் செங்குத்தான வரை வட்டத்தை Cயிலும் Dயிலும் வெட்டுகிறது. KCயின் நீளமென்ன?

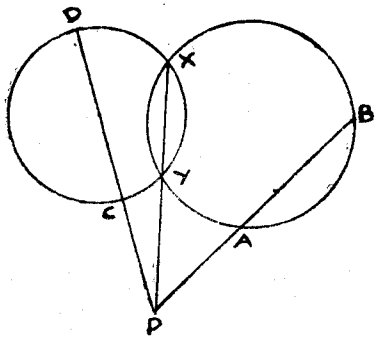
*10. 5″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்றிலே 9·6″ நீளமுள்ள நாண் AB உண்டு. அந்நாணுக்குச் செங்குத்தான விட்டம் வட்டத்தை Cயிலும் Dயிலும் வெட்டுகிறது. AC, AD இரண்டின் நீளங்களையும் அறிக.

*11. ஒரு வட்டத்துக்குள்ளே P ஒரு புள்ளி. Pக்கூடாகச் செல்லும் மிகக் குறுகிய நாணின் நீளம் 6″, Pயிலிருந்து சுற்றுவரைக்குள்ள

மிகக் குறுகிய தூரம் 1″. வட்டத்தின் விட்டமென்ன?

12. ABC ஒரு வட்டச் சுற்றுவரையின் ஒரு பகுதி (வில்). ABCயின் நடு B. நாண் ACயின் நடு M. AM=x; BM=y. வட்டத்தின் ஆரத்தை அறியக்கூடிய வாய்பாடொன்று ஆக்குக.

அப்பியாசம்—51 (iii) நிறுவுதல்



1. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. பொதுநாண் XY நீட்டப்படுகிறது. அதில் ஏதுமொரு புள்ளி Pயிலிருந்து இரு நேர் வரைகள் முறையே இரு வட்டங்களையும் வெட்டுகின்றன. PA · PB=PC · PD எனக் காட்டுக.

2. ஒரு வட்டத்தில் AB ஒரு நாண். M நாணின் நடு. CMD வேறொரு நாண். CDயை விட்டமாக உடைய அரை வட்டம் கீறப்படுகிறது. Mஉக்கூடாக CDக்குச்செங்குத்தானவரை அரை வட்டத்தை Eயில் சந்திக்கிறது. AM=EM எனக் காட்டுக.

3. இரு வட்டங்களின் பொதுநாண் Oவுக்கு நீட்டப்படுகிறது. இரு நேர்வரைகள் OPQ, ORS முறையே ஒரு வட்டத்தை Pயிலும் Qவிலும், இரண்டாம் வட்டத்தை Rஇலும் Sஇலும் வெட்டுகின்றன. P, Q, R, S நான்கும் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

* 4. ABC ஒரு முக்கோணி. BCயின் நடு D. AD முக்கோணியின் சுற்று வட்டத்தை Eயில் சந்திக்கிறது. $AB^2+AC^2=2AD \cdot AE$ எனக் காட்டுக.

* 5. மூன்று வட்டங்களுள் ஒவ்வொன்றும் மற்றைய இரண்டையும் தனித்தனி வெட்டுகின்றன. மூன்று பொது நாண்களும் ஒன்றுகூடுமெனக் காட்டுக.

[பாரிசேட நியாயத்தை உபயோகிக்கலாம்.]

* 6. A நிலையான ஒரு புள்ளி. XY நிலையான ஒரு நேர்வரை. XYயில் P ஏதுமொரு புள்ளி. APயில் O ஒரு புள்ளி. P எங்கிருப்பினும் AO · AP ஒரேயளவாகும். Oவின் படுக்கை ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக.

* 7. ஒரு வட்டத்திலே AB, CD இரு நாண்கள். AB, CD இரண்டும் முறையே E, F ஆகிய புள்ளிகளுக்கு நீட்டப்படுகின்றன. AE · BE = CF · DF. வட்ட மையத்திலிருந்து E, F இரண்டும் ஒரே தூரத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

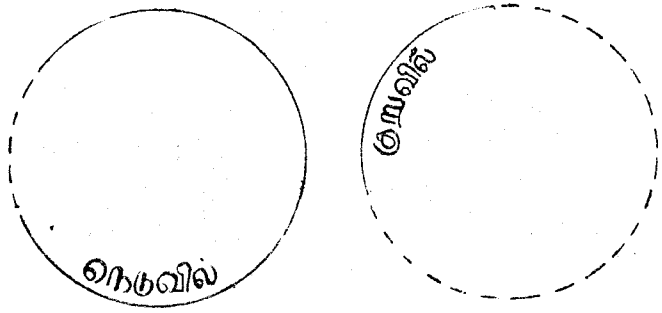
8. இரு நாண்கள் வட்டத்துக்குள் சந்திக்கின்றன. நாண்களிலுள்ள சற்சதுரங்களினது வித்தியாசமும், அவற்றின் கூறுகளது வித்தியாசத்திலுள்ள சற்சதுரங்களின் வித்தியாசமும் சமமானவை எனக் காட்டுக.

** 9. P, Q, R, S நேர்வரை யொன்றிலுள்ள நான்கு புள்ளிகள். $OP \cdot OQ = OR \cdot OS$ என வரும்படி அதே நேர்வரையில் Oவின் நிலையத்தை அறிக.

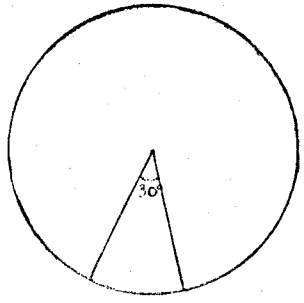
**10. ABC ஒரு முக்கோணி. X, Y, Z மூன்றும் முறையே AB, BC, CA மூன்றிலுமுள்ள புள்ளிகள். $AX \cdot XB = BY \cdot YC = CZ \cdot ZA$. முக்கோணிகள் ABC, XYZ இரண்டின் சுற்றுவட்டங்களும் ஒரே மையத்தை யுடையன எனக் காட்டுக.

45. வில்லேந்தும் கோணங்கள்

§ 1. வட்டச் சுற்றுவரையில் ஏதுமோர் பகுதி **வில்** எனப்படும். அப் பகுதி அரை வட்டத்திலும் நெடியதாயின் **நெடுவில்** என்றும், அரை வட்டத்திற் குறைவாயின் **குறுவில்** என்றும் கூறப்படும்.



ஒரு வட்டத்திலே ஆரமொன்று ஒருதரம் முற்றுகச் சுழன்றுவர (அன்றி, சுற்றுவரையிலுள்ள புள்ளியொன்று ஒருதரம் சுற்றிவர எனினும் ஒக்கும்) 360° ஆகும். எனவே, சுற்றுவரை முழுவதும் மையத்திலே 360° ஏந்தி நிற்கும். அரைவட்டம் 180 பாகையையும், கால்வட்டம் 90 பாகையையும் ஏந்துவது இனிது பெறப்படும். அதாவது, வில்லின் நீளத்துக்குத் தக்கதாகக் கோணம் அமையும். எனவே, வில்லை அதன் நீளத்தாலும் குறிக்கலாம்; அது மையத்தில் ஏந்தும் கோணத்தாலும் குறிக்கலாம். உதாரணமாக 30°வில் என்பது மையத்திலே 30 பாகையை ஆக்கும் இரு ஆரங்களுக்கு இடைப்பட்ட சுற்றுவரைப் பகுதியாகும்.

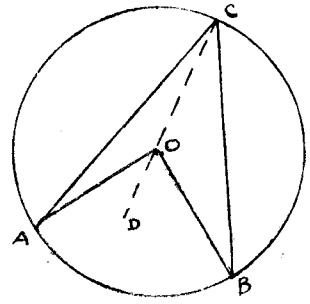


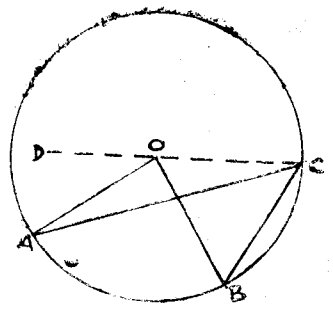
ஒரே வட்டத்திலாயினும் சரி, சமமான வேறு வட்டங்களிலாயினும் சரி மையத்திலே சமமானகோணங்களை ஏந்தும் விற்கள் சமமானமையாதல் வேண்டும்; மறுதலையாக, **சமமான விற்கள் மையத்திலே சமகோணங்களை ஏந்தும்** என்பதும் உண்மை.

வில்லொன்று வட்டத்தின் மையத்திலே ஏந்தும் கோணத்திலும் பார்க்கச் சுற்றுவரையில் ஒரு புள்ளியில் ஏந்தும் கோணமே முக்கியமானது. ஒரே வில் மையத்திலும் சுற்றுவரையில் ஒரு புள்ளியிலும் தனித்தனி ஏந்தும் கோணங்களுக் கிடையேயுள்ள தொடர்பை மேல்வரும் சூத்திரம் விளக்கும்.

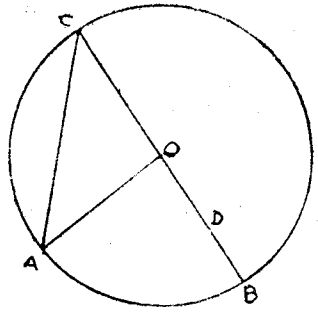
சூத்திரம் 26

§2. பொதுவிலக்கணம் - **வில்லொன்று வட்டத்தின் மையத்தில் ஏந்தும் கோணம் சுற்றுவரையில் ஏதுமோர் புள்ளியில் ஏந்தும் கோணத்திலும் பார்க்க இருமடங்காதல் வேண்டும்.**





சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - O ஒரு வட்டத்தின் மையம். AB ஒரு வில். C சுற்றுவரையிலே AB ஒழிந்தபகுதியில் ஒரு புள்ளி.



கேள்வி - $\angle AOB = 2\angle ACB$ என்பது.

ஆக்கம் - CO இணைக்கப்பட்டுச் சிறிது (D வரையும்) நீட்டப்படட்டும்.

நிரூபணம் - $\triangle$ OAC யில்

வெளி $\angle AOD = \angle CAO + \angle ACO$

ஆனால், $\angle CAO = \angle ACO$ $(OA = OC)$

$\therefore \angle AOD = 2\angle ACO$

(மூன்றும் வடிவத்துக்கு நிரூபணம் இவ்வளவு தான்).

இவ்வாறே, $\angle BOD = 2\angle BCO$.

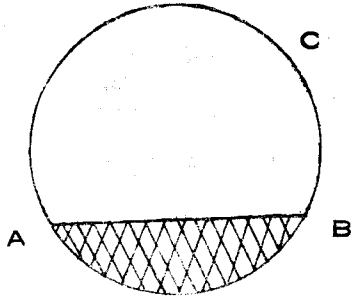
எனவே, (முதல் வடிவத்திற் கூட்டவும், இரண்டாம் வடிவத்திற் கழிக்கவும்)

$\angle AOB = 2 \angle ACB$ என்றவாறு.

§ 3. உள்ளுறை - (i) ஒரு வில் மிகுதிச் சுற்று வரையிலே ஏந்தும் கோணங்கள் யாவும் சமமானவை.

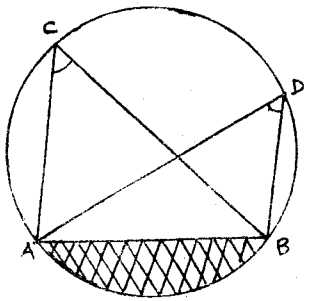
(ii) பாதிச் சுற்றுவரை மிகுதிச் சுற்றுவரையில் ஏந்தும்கோணம் செங்கோணமாகும்.

§ 4. ஒரு வட்டத்திலே ஒரு நாணைத் தொடுத்தால் அவ் வட்டம் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படும். ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒவ்வொரு **கண்டம்** எனப்படும். அதாவது, ஒரு வில்லையும் ஒரு நாணையும் எல்லையாக உடைய பகுதி கண்டம் எனப்படும்.

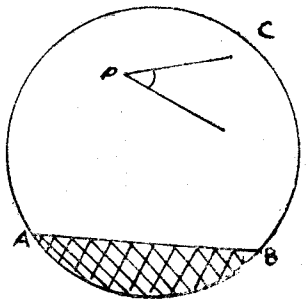


ஒரு கண்டத்தைக் குறிப்பதற்குக் குறைந்தபட்சம் மூன்று அட்சரங்கள் வேண்டும். நாணின் ஒரு நுனியில் ஆரம்பமாகி மறுநுனியில் முடியும் ஒழுங்கில் அட்சரங்களை அமைத்தல் வேண்டும். எதிரேயுள்ள நிறம் தீட்டாத கண்டம் ACB, அல்லது BCA எனப்படும். அட்சரங்களை வேறு ஒழுங்கில் அமைத்துப் பெயரிடுவது பிழையாகும்.

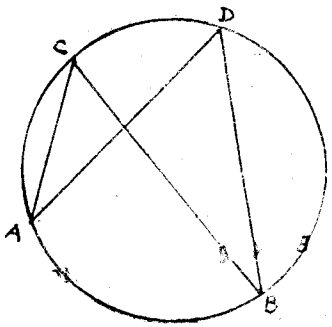
ஒரு கண்டத்தின் நாண், வில்லில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் ஏந்தும் கோணம் அக் கண்டத்திலுள்ள கோணம் எனப்படும். எதிரேயுள்ள படத்தில் $\angle C$, $\angle D$ முதலியன அக் கண்டத்திலுள்ள கோணங்களாகும்.



எதிரேயுள்ள படத்தில் $\angle P$ என்பது ACB ஆகிய கண்டத்துக்குள் இருப்பினும், அது கேத்திரகணிதத்திலே கண்டத்திலுள்ள கோணம் எனப்படாது.



பெரும்பாலும் நாணைக் காட்டாமலே கண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் குறிப்பிடப்படும். எதிரேயுள்ள படத்தில் கோணங்கள் ACB, ADB ஆகியன ACDB ஆகிய கண்டத்திலுள்ளன.



மை சூத்திரத்தின் கீழே தரப்பட்ட உள்ளுறை இரண்டையும் வேறு விதமாகவும் சுருக்கமாகவும் கூறலாம்.

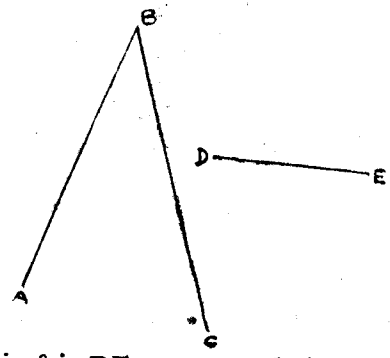
(i) **ஒரே கண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் சமமானவை.**

(ii) **அரை வட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணம்.**

இவை வெகு முக்கியமான உண்மைகள்.

இனி, இவற்றின் மறுதலைகளை ஆராய்வாம்.

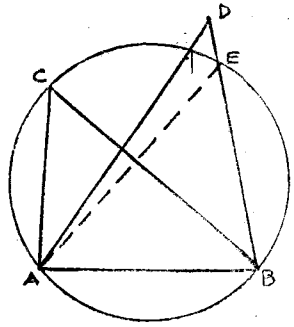
§5. முதலில், 'ஒரே கண்டத்திலுள்ள கோணங்கள் சமமானவை' என்பதன் மறுதலையை எடுப்போம்.

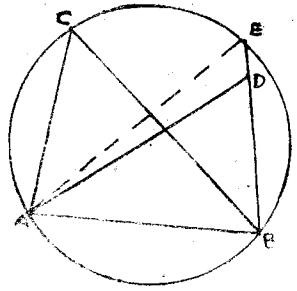


ABC என ஒரு கோணத்தைச் சவ்வுத்தாளில் வரைக. புயங்கள் BA, BC சிறிது நீளமாக இருக்கட்டும். பின்னர் சாதாரண வெண்தாளொன்றில் DE என ஒரு நேர் வரை கீறுக. இனி, வெண்தாளின்மேல் சவ்வுத்தாளை வைத்து Dக்கு ஊடாக BA செல்லும்படியும், Eக்கு ஊடாக BC செல்லும்படியும் பொருத்துக. சவ்வுத்தாளிலுள்ள Bக்கு ஊடாக வெண்தாளிலே ஒரு ஊசியாற் குற்றுக. இவ்வாறுகப் பலதடவை பொருத்திப் பல குற்றுகளைப் பெறுக. வெண்தாளிலுள்ள குற்றுகளின் படுக்கை எவ்வியல்பினதாகத் தெரிகிறது?

சூத்திரம் 27

§6. **பொதுவிலக்கணம் - இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்வரை ஒரே பக்கத்திலுள்ள வேறு இரு புள்ளிகளில் ஒரே அளவான இரு கோணங்களை ஏந்துமாயின், அந்நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தில் அமைதல் வேண்டும்.**





சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - AB ஒரு நேர்வரை.

$\angle ACB = \angle ADE$.

கேள்வி - புள்ளிகள் A, B, C, D, நான்கும் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் என்பது.

ஆக்கம் - புள்ளிகள் A, B, C மூன்றுக்கூடாகவும் ஒரு வட்டம் வரையப்படட்டும். இவ்வட்டத்தில் D அமையாவிட்டால் அவ்வட்டம் BD என்னும் வரையை Eயில் வெட்டட்டும். AE இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் – $\angle ACB = \angle ADB$ (தரவு)

$\angle ACB = \angle AEB$ (ஒரே கண்டத்திலுள்ளன)

$\therefore \angle ADB = \angle AEB$

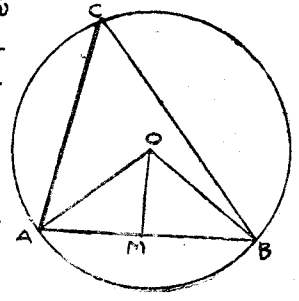
அதாவது, $\triangle ADE$ யில் வெளிக்கோணம் உட்கோணத்துக்குச் சமமாகிறது. இது பொருந்தாது.

$\therefore$ D, E இரண்டும் ஒன்றுதல் வேண்டும்.

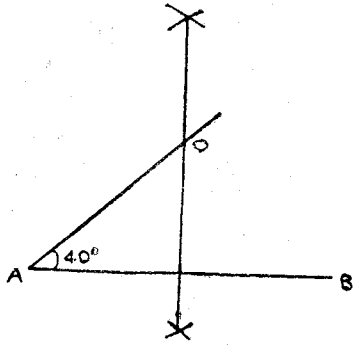
$\therefore$ புள்ளிகள் A, B, C, D நான்கும் ஒரே வட்டத்தில் அமையும், என்றவாறு.

§ 7. **உள்ளுறை.** ஒரு நேர்வரை ஒரே பக்கத்தில் ஒரே அளவான பல கோணங்களை ஏந்துமாயின், அக்கோணப் புள்ளிகளின் படுக்கை ஒரு வட்டத்தின் வில்லாதல் வேண்டும்.

§ 8. தரப்பட்ட நேர்வரையொன்றின்மீது தரப்பட்ட கோணமொன்றைக் கொண்ட வட்டக் கண்டத்தை ஆக்குவதற்கு ஷை சூத்திரம் வழிகாட்டும். உதாரணமாக தரப்பட்ட நேர்வரை AB எனவும், தரப்பட்டகோணம் 50° எனவும் கொள்க வில் (அல்லது முழு வட்டமும்) வரையப்பட்டதாக வைத்துக்கொள்வோம். O மையம் என்க. $\angle ACB = 50°$. எனவே, $\angle AOB = 100°$. $OM \perp AB$ ஆயின், $\angle AOM = 50°$. எனவே, $\angle OAM = 40°$. இப்பொழுது வழி தெரிகிறதல்லவா?

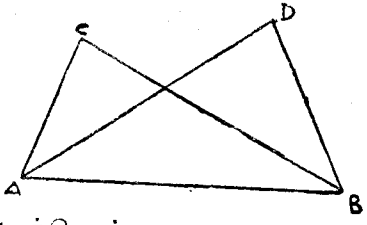


அதாவது, AB யின் ஒரு நுனியில் 40° (= 90° − 50°) கோணம் வரைந்து, AB யின் நடுச் செங்குத்து வரையும் கீறுக. O வட்டத்தின் (அல்லது தேவைப் பட்ட கண்டத்தின்) மையமாகும்.



தரப்பட்ட கோணம் கூர்ங்கோணமாயின் மையம் கண்டத்துக்குள் வரும். அன்றி அது விரிகோணமாயின் மையம் கண்டத்துக்கு வெளியே வரும். இதை, தரப்பட்டகோணம் 120° எனக் கொண்டு செய்தறிக. எதைச் செய்தாலும், முதலிற் பெரும்படியாக ஒரு வடிவம் கீறி அதிற் கோணங்களைக் குறித்து அவ் வடிவத்தைத் துணையாகக்கொண்டு வரையத் தொடங்குவதே புத்தியானது.

§ 9. இனி, 'அரை வட்டத்திலுள்ளது செங்கோணம்' என்பதன் மறுதலையை எடுப்போம். அது: **'ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திலே செங்கோணத்தின் எதிர்ப்புயத்தை விட்டமாகக்கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் செங்கோணப் புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும்'** என்பதாகும். இதுவும், முற் சூத்திரத்தைப்போலவே பாரிசேடியாயத்தால் நிரூபிக்கலாம்.



∠ACB, ∠ADB இரண்டும் தனித்தனி செங்கோணங்களாயின், A, B, C, D நான்கும் ஒரே அரை வட்டத்திலுள்ளன.

அப்பியாசம்—52 (i) வரைதல்

1. 2″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. அதில் AB என ஒரு நாண் அமைத்து வட்டத்தை இரு கண்டங்களாகப் பிரி — ஒரு கண்டம் 70° கோணமுடையதாதல் வேண்டும். நாணின் நீளம் எவ்வளவு?

2. 5 செ. மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறி, 150° கோணமுள்ள கண்டமொன்று பிறக்கும்படி அவ் வட்டத்துள் ஒரு நாண் வரைக. நாணின் நீளம் எவ்வளவு? மறு கண்டத்திலுள்ள கோணம் எவ்வளவு?

3. $2\frac{1}{2}$″ நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்று கீறி அதை நாணாகவைத்து 50° கோணமுள்ள ஒரு கண்டம் வரைக.

4. 7 செ. மீ. நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்றின் மீது 140° கோணத்தைஉடைய கண்டமொன்று வரைக.

* 5. பீடம் 6 செ. மீ., உயரம் $3\frac{1}{2}$ செ. மீ., உச்சிக் கோணம் 55° கொண்ட ஒரு முக்கோணி வரைக. மற்றைய இரு புயங்களுள் நெடிய புயத்தின் நீளம் எவ்வளவு?

* 6. பாதம் 10 செ. மீ., பரப்பு 17 ச. செ. மீ., உச்சிக்கோணம் 100° உடைய முக்கோணியொன்று வரைந்து எஞ்சிய இரு கோணங்களையும் அளந்தறிக.

* 7. ABC ஒரு முக்கோண வயல். AB=930 யார்; BC=770யார்; CA=1490யார் முக்கோணிக்கு வெளியாக P என்னும் இடத்திலிருந்து பார்க்கும்பொழுது AB ஏந்தும் கோணம் 48° எனவும், BC ஏந்தும் கோணம் 46° எனவும் தெரிகிறது. C P எவ்வளவு தூரம் என வரைந்தறிக.

* 8. OA (=3″), OB(=2″) என ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நேர்வரைகள் கீறுக. ∠OPA=130°, ∠OPB=80° பெறத்தக்கதாக Pயின் நிலையத்தை வரைந்தறிக. OP எவ்வளவு நீளம்?

** 9. 10, 11, 12 செ. மீ. நீளமுள்ள புயங்களையுடைய முக்கோணிக்குள்ளே மூன்று புயங்களும் சமகோணங்களை ஏந்தி நிற்கும் புள்ளியின் நிலையத்தை வரைந்தறிக. மூலைகளிலிருந்து புள்ளியின் தூரம் எவ்வளவு?

**10. ஒரு கோணம் 85 பாகையாகவும், மூலைவரைகள் முறையே 3″, 2″ நீளமுள்ளனவாகவும் ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம் வரைக. புயங்களின் நீளம் எவ்வளவு?

அப்பியாசம்—52 (ii) கணித்தல்

1. APB, CPD ஒரு வட்டத்திலேயுள்ள இரு நாண்கள். (அவை வெட்டுமிடம் P). ∠PAC=30°; ∠PCA=40°. ∠PBD, ∠PDB எத்தனை பாகைகள்? O வட்டத்தின் மையமாயின் ∠AOD எத்தனை பாகை?

2. ஒரு வட்டத்திலே AB, BC என இரு சமமான விற்கள் உண்டு. (இரண்டுமாக அரைவட்டத்திற் குறைவு). வட்ட மையம் O. $\angle AOC = 100°$. $\angle ACB$ எத்தனை பாகை?

3. APB, CPD ஒரு வட்டத்திலுள்ள இரு நாண்கள். (அவை வெட்டுமிடம் P). $\angle APC = 70°$; $\angle ADP = 30°$. வட்டத்தின் மையம் O ஆயின் $\angle BOD$ எத்தனை பாகை?

4. O ஒரு வட்டத்தின் மையம். A, B, C சுற்று வரையிலே மூன்று புள்ளிகள். $\angle AOB = 40°$; $\angle OAC = 20°$. A, B, C மூன்றும் அரை வட்டத்துக்குள் அமைந்தால், AO ∥ BC எனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் சுற்று வட்டத்தின் மையம் O. $\angle ABC = 80°$. $\angle OAC$ எத்தனை பாகை?

* 6. O ஒரு வட்டத்தின் மையம். ABCD வட்டத்தில் அமைந்த ஒரு நாற்புயம். E நாற்புயத்தின் மூலை வரைகள் வெட்டுமிடம். $\angle DAC = 30°$; $\angle AED = 100°$; $\angle BDC = 40°$. $\angle ACB$, $\angle ACD$, $\angle AOD$ எத்தனை பாகை?

* 7. ABCD வட்டத்தில் அமைந்த ஒரு நாற்புயம். $\angle CAD = 30°$; $\angle ABD = 25°$; $\angle ADB = 40°$. நாற்புயத்தின் நான்கு கோணங்களையும் அறிக.

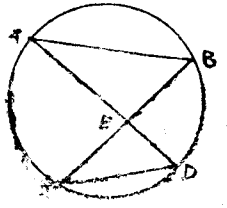
* 8. 6" விட்டமுள்ள வட்டத்திலே ABCD ஒரு நாற்புயம். AB = BC = 3". $\angle ADB$ எத்தனை பாகை? AB, DC வட்டத்துக்கு வெளியே Pயில் சந்திக்கின்றன. $\angle PCB = 80°$ ஆயின், நாற்புயத்தின் மூலைவரைகளுக் கிடையேயுள்ள கோணங்களை அறிக.

* 9. ஒரு வட்டத்திலே O மையம்; AOC ஒரு விட்டம்; ABCD ஒரு நாற்புயம். $\angle BAC = 30°$; $\angle DAC = 50°$; BO, DO இவற்றை இணைத்து வடிவத்தில் எஞ்சியுள்ள கோணங்கள் எல்லாவற்றையும் அறிக.

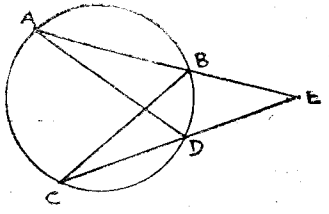
* 10. ABC வட்டத்தில் அமைந்த முக்கோணியொன்று. $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. மூன்றுகோணச் சமவெட்டிகளும் வட்டத்தை முறையே D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. DEF முக்கோணியின் மூன்று கோணங்களையும் அறிக.

அப்பியாசம்—52 (iii) நிறுவுதல்

1. AB, CD ஒரு வட்டத்திலுள்ள இரு நாண்கள். AD, BC இணைக்கப்பட Eயில்வெட்டுகின்றன. முக்கோணிகள் ABE, CDE இரண்டும் சமகோணங்களை யுடையன எனக் காட்டுக.



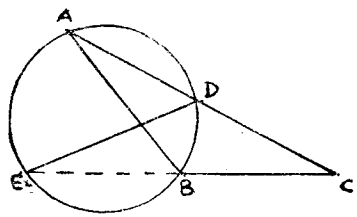
2. AB, CD ஒரு வட்டத்திலுள்ள இரு நாண்கள். அவை வட்டத்துக்கு வெளியே Eயில் வெட்டுகின்றன. முக்கோணிகள் ADE, CBE இரண்டும் சமகோணங்களை யுடையன எனக் காட்டுக



3. A, B இரு வட்டங்கள் வெட்டுமிடங்கள். Aக் கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்வரைகள் ஒரு வட்டத்தை Cயிலும் Eயிலும், மற்றைய வட்டத்தை Dயிலும் Fஇலும் வெட்டுகின்றன. ∠ CBE = ∠ DBF எனக் காட்டுக.

4. AB, CD ஒரு வட்டத்திலுள்ள இரு சமாந்தர நாண்கள். AD, BC வட்டத்துக்குள் Eயில் வெட்டுகின்றன. ABE துவிசமபுய முக்கோணி எனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு முக்கோணி. ∠ B விரி கோணம், AB = BC. ABயை நாணாக வுடைய வட்டமொன்று ACயை Dயிலும் நீட்டிய CBயை Eயிலும் வெட்டுகிறது. DE = DC எனக்காட்டுக.



6. ABC ஒரு முக்கோணி. BD ⊥ AC. CE ⊥ AB. B, E, D, C நான்கும் ஒரு வட்டத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

7. PQR ஒரு முக்கோணி. QL ⊥ PR. RM ⊥ PQ. ∠MRL = ∠MQL எனக் காட்டுக.

8. A, B இரு வட்டங்கள் வெட்டுமிடங்கள். AC, AD இரு விட்டங்கள். B, C, D மூன்றும் ஒரு நேரில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

*9. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி. கன்னம் ACயின் நடு D. AD = BD = CD எனக்காட்டுக.

*10. ABC ஒரு சமபுயமுக்கோணி. O சுற்றுவட்ட மையம். BCக்குச் செங்குத்தான ஆரம் OD.

OBD, OCD இரண்டும் சமபுய முக்கோணிகள் எனக் காட்டுக.

*11. XYZ ஒரு முக்கோணி. XY, XZ இரண்டையும் விட்டங்களாக உள்ள வட்டங்கள் BCயில் ஓரிடத்திற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

*12. ABC ஒரு துவிசமபுய முக்கோணி. AB = AC. சமபுயங்களிரண்டையும் விட்டங்களாகவுடைய வட்டங்கள் பீடத்தின் நடுவில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

*13. நீர்மட்டமான தரையிலே ஒரு ஏணியின் அடியை வைத்து நிறுதிட்டமான சுவரிலே அது சார்த்தப்பட்டிருக்கிறது. ஏணி வழுக்கி விழும் போது அதன் நடுப்புள்ளியின் படுக்கை ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக.

*14. ஒரு அரை வட்டத்தின் ஆரம் AB ; மையம் O. சுற்றுவரையில் P ஏதுமொரு புள்ளி. AP நீட்டப்படுகிறது, T வரையும். PT = ஆரம். ∠POT = ½ ∠TOB எனக் காட்டுக.

*15. ABC ஒரு முக்கோணி. AD ⊥ BC. BE ⊥ AC. AD, BE இரண்டும் Fஇற் சந்திக்கின்றன. AD நீண்டு சுற்றுவட்டத்தை Gயில் சந்திக்கிறது. ∠ GBD = ∠ DBF எனவும், GD = DF எனவும் காட்டுக.

*16. XY ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். O மையம். XRP, YRQ இரு நாண்கள். ∠QOP செங்கோணமாயின் QX = QR எனக் காட்டுக.

**17. இரு வட்டங்கள் வெட்டுமிடங்கள் X, Y. ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஏதுமொரு புள்ளி Pக்கூடாக

இரு நேர்வரைகள் PXA, PYB மற்றைய வட்டத்தை Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. நாண் AB எப்பொழுதும் ஒரே அளவினது எனக் காட்டுக.

**18. ABCD ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஏதுமொரு நாற்புய வடிவம். கோணங்கள் A, C இரண்டின் சமவெட்டிகளும் வட்டத்தை முறையே Xஇலும் Yயிலும் சந்திக்கின்றன. XY வட்டத்தின் விட்டமெனக் காட்டுக.

**19. AB, CD ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நாண்கள். அவை வெட்டுமிடம் E. EF ⊥ AC. FE நீட்டப்பட்டால் அது BDயின் நடுவுக்கூடாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

**20. OP, OQ, OR ஒரு வட்டத்தின் மூன்று ஆரங்கள். O, P, Q மூன்றுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் PRஐ Sஇல் சந்திக்கிறது. OS கோணம் QORஇன் சமவெட்டி எனக் காட்டுக.

**21. ABPQ, ABRS இரு வட்டங்கள். QAS ⊥ AB. QB, SB நீண்டு வட்டங்களை முறையே R, P இரண்டிலும் சந்திக்கின்றன. BA கோணம் RAPயின் சமவெட்டி எனக் காட்டுக.

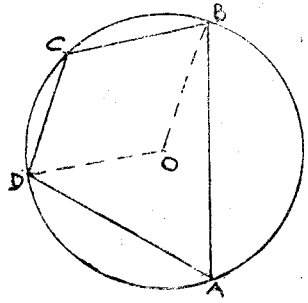
**22. ABC ஒரு முக்கோணி. கோணங்கள் B, C இரண்டின் சமவெட்டிகளும் சுற்றுவட்டத்தை முறையே Dயிலும் Eயிலும் சந்திக்கின்றன. BE ∥ CD ஆயின், ∠A = 60° எனக் காட்டுக.

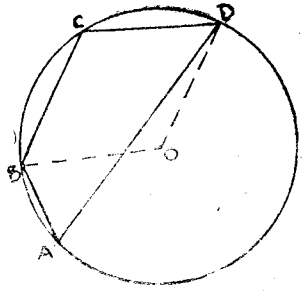
46. வட்ட நாற்புயங்கள்

§ 1. ஒரு நாற்புயத்தின் நான்கு மூலைகளும் ஒரே வட்டச் சுற்றுவரையி லுள்ளனவாயின் அந் நாற்புயம் **வட்ட நாற்புயம்** எனப்படும்.

சூத்திரம் 28

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு வட்ட நாற்புயத்திலே எதிர்க் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை 180 பாகையாதல் வேண்டும்.





சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். O வட்ட மையம்.

கேள்வி - (i) ∠A + ∠C = 180°;
(ii) ∠B + ∠D = 180° என்பது.

ஆக்கம் - BO, DO இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - ∠BOD = 2∠A (மையத்திலுள்ள கோணம் சுற்று வரையிலுள்ளதிலும் இருமடங்கு.)

பிற்கோணம் $\angle BOD = 2 \angle C$ (அதே நியாயம்)

ஆனால், $\angle BOD +$ பின் $\angle BOD = 360°$

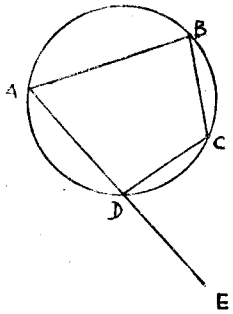
$\therefore \angle A + \angle C = 180°$ ——————— (i)

நாற்புயத்தின் நான்கு கோணங்களும் சேர்ந்து 360°.

$\therefore \angle B + \angle D = 180°$ ——————— (ii)

என்றவாறு.

§2. ஒரு வட்ட நாற்புயத்தில் ஏதுமொரு புயத்தை நீட்டப் பிறக்கும் வெளிக் கோணம் எதிராக உள்ள உட்கோணத்துக்குச் சமமென்பது முக்கியமான தோர் உண்மை.



$\angle ADC + \angle B = 180°$

$\angle ADC + \angle CDE = 180°$

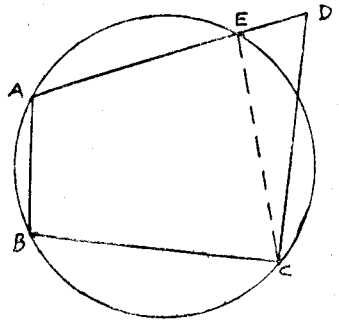
$\therefore \angle CDE = \angle B.$

சமமான இக் கோணங்களைப் படத்திலே குறித்துக் கொள்க.

§3. இனி, ஷை சூத்திரத்தின் மறுதலையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

சூத்திரம் 29

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு நாற்புயத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சேர்ந்து 180° ஆயின் நாலு மூலைகளும் ஒரே வட்டத்தில் அமைதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABCD ஒரு நாற்புயம். $\angle A + \angle C = 180°$.

கேள்வி - A, B, C, D ஆகிய நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் என்பது.

ஆக்கம் - A, B, C மூன்றுக்கூடாகவும் ஒரு வட்டம் வரைக. அவ் வட்டத்தில் D அமையாவிட்டால் வட்டம் ADயை Eயில் வெட்டட்டும். CE இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - $\angle A + \angle BCD = 180°$ (தரவு)

$\angle A + \angle BCE = 180°$ (ABCE வட்ட நாற்புயம்)

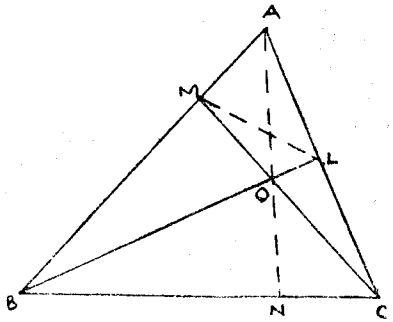
$\therefore \angle BCD = \angle BCE.$ இது பொருந்தாது.

$\therefore$ CD, CE இரண்டும் ஒன்றுதல் வேண்டும்.

அதாவது, A, B, C மூன்றுக் கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் Dக் கூடாகவும் செல்கிறது, என்றவாறு.

§ **4.** ஒரு நாற்புயத்தின் வெளிக்கோண மொன்று எதிராகவுள்ள உட்கோணத்துக்குச் சமமாயின் அந் நாற்புயம் வட்ட நாற்புயமாதல்வேண்டும். இது §2 இல் கூறியதன் மறுதலையாதல் காண்க.

§ **5.** **ஒரு முக்கோணியின் மூலைகளிலிருந்து எதிர்ப் புயங்களுக்குச் செல்லும் செங்குத்துவரைகள் ஒன்று கூடும் என்பது முக்கியமானது.** இதற்கு நிரூபணம் (சுருக்கமாக) பின்வருமாறு.



BL ⊥ AC. CM ⊥ AB. இரு செங்குத்து வரைகளும் சந்திக்குமிடத்தை O என்க. AO இணைக்கப்பட்டு BC வரைக்கும் நீட்டப்படட்டும்.

AN ⊥ BC எனக் காட்டவேண்டும்.

BCLM வட்ட நாற்புயம். (ஏன்?)

∴ ∠ CBL = ∠ CML

AMOL வட்ட நாற்புயம். (ஏன்?)

∴ ∠ OAL = ∠ OML (அதாவது, ∠ CML)

∴ ∠ OAL = ∠ CBL (= ∠OBN)

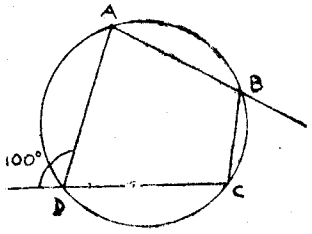
இனி, △ள் OBN, OAL இரண்டும் சம கோணங்களை உடையன. (ஏன்?)

∴ ∠ ONB = ∠ OLA = செங்கோணம்,

மூன்று செங்குத்து வரைகளும் ஒன்றுகூடும் புள்ளி செங்கோட்டுச்சந்தி எனப்படும்.

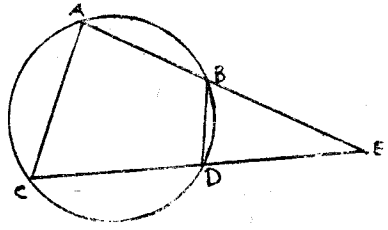
அப்பியாசம்—53 (i) கணித்தல்

1. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். AB, CD இரண்டும் நீட்டப் பட்டுள்ளன. வெளிக்கோணம் D = 100°. வெளிக் கோணம் B எத்தனை பாகை?

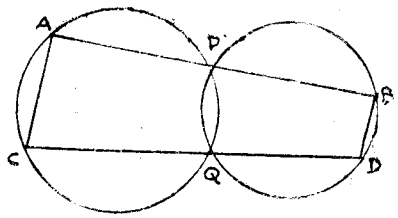


2. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம்; O வட்டமையம். ∠ BOD = 140°. வெளிக்கோணம் A எத்தனை பாகை?

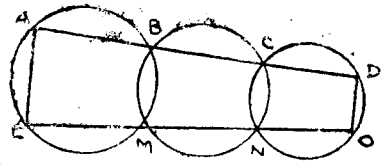
3. ஒரு வட்டத்திலே AB, CD என இரு நாண்கள் வட்டத்துக்கு வெளியே E இல் சந்திக்கின்றன. AC, BD இணைக்கப்படுகின்றன. ∠ A = 80°; ∠ E = 30°. வடிவத்தில் எஞ்சிய கோணங்களை அறிக.



4. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. வெட்டுப் புள்ளிகளுக்கூடாக APB, CQD என இரு வரைகள் மீண்டும் வட்டங்களைச் சந்திக்கின்றன. $\angle ACQ = 85°$. $\angle BDQ$ எத்தனை பாகை?



5. மூன்று வட்டங்கள் படத்திற் காட்டியவாறு வெட்டுகின்றன. ABCD, LMNO இரண்டும் வெட்டுப் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர் வரைகள். $\angle BAL = 95°$. $\angle DON$ எத்தனை பாகை?

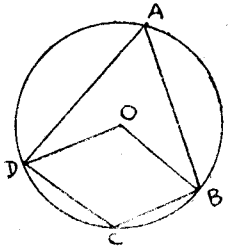


6. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். CB = CD. $\angle A = 70°$ $\angle CBD$ எத்தனை பாகை?

* 7. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம்; O வட்ட மையம். $\angle OAC = 25°$. $\angle D$, $\angle B$ எத்தனை பாகை?

* 8. ஒரு வட்டத்திலே ABC ஒரு குறுவில்; O வட்ட மையம். $\angle AOC = 110°$. $\angle ABC$ எத்தனை பாகை?

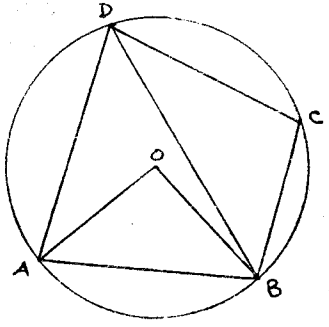
* 9. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம்; O வட்ட மையம், $\angle A = 80°$; $\angle ODA = 20°$; $\angle DBC = 10°$. நாற்புயத்தின் நான்கு கோணங்களையும் அறிக.



*10. ABCDE வட்டத்தில் அமைந்த ஒரு ஐம்புயவடிவம். BA = BC; $\angle BAC = 30°$; $\angle CAD = 35°$, $\angle DAE = 40°$. ஐம்புய வடிவத்தின் ஐந்து கோணங்களையும் அறிக.

*11. ABCDEF வட்டத்தில் அமைந்த ஒரு அறுபுய வடிவம். $\angle A = 130°$; $\angle C = 100°$; $\angle E$ எத்தனை பாகை?

*12. பக்கத்திலுள்ள வடிவத்தில் $\angle O = 140°$; $\angle OBD = 10°$; கோணங்கள் ADB, DAB, C, OAD என்பவற்றைத் தனித் தனி அறிக.



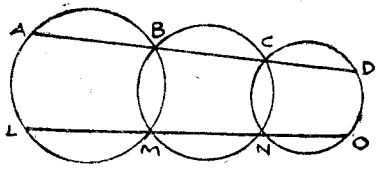
*13. ABC ஒரு வட்டத்திலுள்ள முக்கோணி. $\angle A = 50°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 70°$. முக்கோணிக்கு வெளியாகவுள்ள மூன்று கண்டங்களிலுமுள்ள கோணங்களின் மொத்தம் எவ்வளவு?

அப்பியாசம்—53 (ii) நிறுவுதல்

1. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். புயங்கள் AB, DC இரண்டும் வட்டத்துக்கு வெளியே Eயிற் சந்திக்கின்றன. △ள் AEC, BED இரண்டும் சமகோணமுடையன என நிறுவுக.

2. APQC, BPQD இரண்டும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்கள்; P, Q வெட்டுப் புள்ளிகள். APB, CQD வெட்டுப் புள்ளிகளூக்கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்வரைகள். AB ∥ CD என நிறுவுக.

3. ABML, BCNM, CDON மூன்று வட்டங்கள். ABCD, LMNO வட்டங்களை வெட்டும் இரு நேர்வரைகள். ADOL ஒரு வட்ட நாற்புயமென நிறுவுக,



4. ABCDEF வட்டத்தில் அமைந்த ஏதுமொரு அறுபுய வடிவம். ∠A+∠C+∠E=360° என நிறுவுக.

5. ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தைச் சுற்றி வட்டம் கீற முடியுமாயின் அது நீள் சதுரமாயிருத்தல் வேண்டும் என நிறுவுக.

6. ஒரு வட்டத்தில் அமைந்த முக்கோணிக்கு வெளியான மூன்று கண்டங்களிலுமுள்ள கோணங்களின் மொத்தம் 360° என நிறுவுக.

7. ஒரு வட்டத்திலே AB, CD இரு சமாந்தர நாண்கள். AC, BD இரண்டையும் இணைத்து நீட்ட அவை வெளியே Eயில் சந்திக்கின்றன. EC=ED என நிறுவுக.

* 8. ABCD, ABEF ஒன்றையொன்று வெட்டுமிரு வட்டங்கள்; DAF, CBE இரண்டும் சமாந்தரமான இரு நேர்வரைகள். DFEC சமாந்தர சதுர்ப்புயம் என நிறுவுக.

* 9. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். ∠BAC=∠ADC — ∠ACB என நிறுவுக.

*10. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். AD, BC இரண்டும் நீண்டு வட்டத்துக்கு வெளியே Eயில் சந்திக்கின்றன. EA=EB ஆயின், AB ∥ DC என நிறுவுக.

*11. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். AE என்னும் வரை Aயிலுள்ள கோணத்தை இரு சமகூறாக்கி வட்டத்தை Eயில் சந்திக்கிறது. CE இணைக்கப்பட்டால் அது Cயிலுள்ள வெளிக்கோணத்தை இரு சமகூறாக்கும் என நிறுவுக.

*12. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். AB, DC இரண்டும் வட்டத்துக்கு வெளியே Eயிலும், BC, AD இரண்டும் வெளியே Fஇலும் சந்திக்கின்றன. வட்டங்கள் BCE, DCF இரண்டும் மீண்டும் Gயில் வெட்டுகின்றன. E, F, G மூன்றும் ஒரு நேர்வரையிலுள்ளன என நிறுவுக.

*13. இரு வட்டங்கள் A, B என்னுமிடங்களில் வெட்டுகின்றன. C வட்டங்களுக்கு வெளியான தோர் புள்ளி. நேர்வரைகள் CA, CB ஒரு வட்

டத்தை D, E இரண்டிலும், மறு வட்டத்தை F, G இரண்டிலும் வெட்டுகின்றன. DE ∥ FG என நிறுவுக.

*14. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். DE என்னும் நேர்வரை Dயிலுள்ள வெளிக் கோணத்தை இரு சமகூறாக்கி வட்டத்தை Eயில் சந்திக்கின்றது. AE இணைக்கப்பட்டால் அது Aயிலுள்ள வெளிக்கோணத்தை இரு சம கூறாக்குமென நிறுவுக.

*15. ABC ஒரு முக்கோணி. BCயில் ஏதுமோர் புள்ளியை D என்க. BPE என ஒரு வட்டம் ABயை Fஇலும், CPE என ஒரு வட்டம் ACயை Gஇலும், வெட்டுகின்றன. A, E, F, G என்னும் புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தில் அமைவன என நிறுவுக.

**16. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். மூலைவரை ACயில் E ஒரு புள்ளி. வட்டங்கள் AEB, DEC இரண்டும் எஞ்சிய மூலைவரையை ஓரிடத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

**17. ஒரு வட்ட நாற்புயத்தின் ஒரு கோணத்தையும், எதிராக உள்ள வெளிக் கோணத்தையும் இரு சம கூறாகப் பிரிக்கும் நேர்வரைகள் வட்டத்தில் ஓரிடத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

**18. ABC ஒரு முக்கோணி. D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிலுள்ள ஏதும் மூன்று புள்ளிகள். வட்டங்கள் AEF, BDF, CDE மூன்றும் ஓரிடத்தில் வெட்டுமென நிறுவுக.

**19. A, B இரு வட்டங்களின் மையங்கள்; C, D அவை வெட்டுமிடங்கள். ACயை இணைத்து நீட்ட மறு வட்டத்தை Eயிலும், BCயை இணைத்து நீட்ட மறுவட்டத்தை F இலும் வெட்டும். A, B, D, E, F என்பன ஒரு வட்டத்தில் அமைவன என நிறுவுக.

**20. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். AC ⊥ BD. ADயின் மையம் M. MEயை இணைத்து நீட்ட BCக்குச் செங்குத்தாகுமென நிறுவுக.

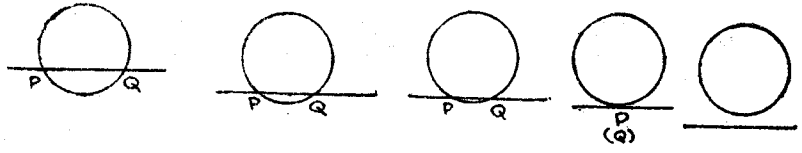
**21. ஏதுமொரு நாற்புய வடிவத்தின் கோணச் சமவெட்டிகள் நான்கும் சேர்ந்து ஆக்கும் நாற்புயம், வட்ட நாற்புயமென நிறுவுக.

**22. ABC ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணி. AD ⊥ BC; BE ⊥ AC; CF ⊥ AB. O செங்கோட்டுச் சந்தி. ∠ODE = ∠ ODF என நிறுவுக.

**23. ABC ஒரு முக்கோணி. AD ⊥ BC; BE ⊥ AC; CF ⊥ AB. O செங்கோட்டுச்சந்தி. D, E, F என்னும் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டம் AO, BO, CO என்னும் வரைகளின் நடுப் புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லுமென நிறுவுக.

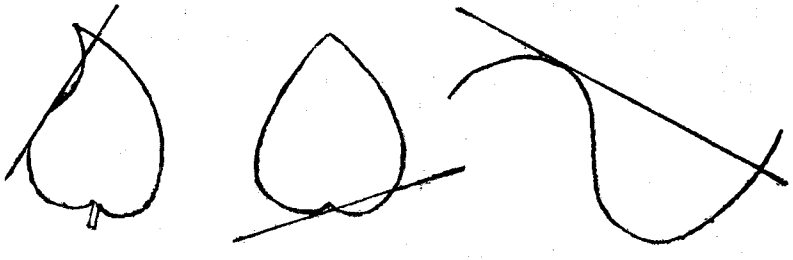
47. தொடுவரைகள்

§1. ஒரு வட்டத்தை நேர்வரையொன்று வெட்டும் போது, வட்டத்துக்குள் அடங்கிய பகுதி நாண் எனப்படுமல்லவா? அவ் வெட்டுவரை வட்டத்தை வெட்டுமிடங்கள் (புள்ளிகள்) இரண்டும் கிட்ட வர வர நாணும் குறுகிக் குறுகி வரும். இறுதியில், வெட்டுப் புள்ளிகளிரண்டும் ஒன்றுபடும்போது நாண் சூன்யமாகும். இதற்கு மேல் அவ்வரை வட்டத்துக்கு வெளியாகிவிடும்.



வெட்டுப் புள்ளிகள் இரண்டும் ஒன்றுபட்டிருக்கும் நிலையில் அந் நேர்வரை வட்டத்தின் **தொடுவரை** எனப்படும். அதாவது, **வெட்டு வரையின் இறுதிநிலை தொடுவரையாகும்.**

வட்டமல்லாத வேறு வடிவங்களிலே தொடுவரைகள் அவ் வடிவத்தை வேறிடங்களில் வெட்டுதலும் கூடும்:

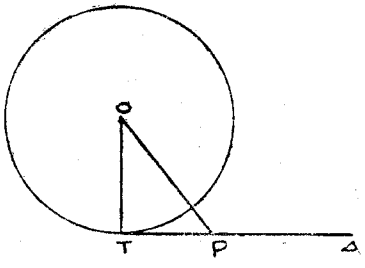


வட்டத்துக்கும் தொடுவரைக்கும் பொதுவான புள்ளி **தொடுபுள்ளி** எனப்படும். தொடுவரையும் தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையென்பது அடுத்த சூத்திரத்தால் விளக்கப்படும்.

சூத்திரம் 30

§2. **பொதுவிலக்கணம் -** (i) ஒரு வட்டத்தின் தொடுவரையொன்றும் தொடுபுள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாதல் வேண்டும். (ii) மறுதலையாக, வட்டச் சுற்றுவரையிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கூடாக ஆரத்துக்குச் செங்குத்தாயுள்ள நேர்வரை தொடுவரையாதல் வேண்டும்.

(i)



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - OT ஒரு வட்டத்தின் ஆரம். TA தொடுவரை.

கேள்வி - ∠OTA=செங்கோணம் என்பது.

ஆக்கம் - OT செங்குத்தல்லவாயின், TAக்குச் செங்குத்தாக OPயைக் கீறுக.

நிரூபணம் - OP ⊥ TA (ஆக்கம்)

∴ Oவிலிருந்து TAக்கு மிகக் கிட்டிய தூரம் OPஆகும்.

அதாவது, OP < OT.

ஆனால், TA தொடுவரை; T தொடுபுள்ளி.

∴ TAயில் T ஒழிந்த புள்ளிகள்யாவும் வட்டத்துக்கு வெளியானவை.

அதாவது, OT < OP.

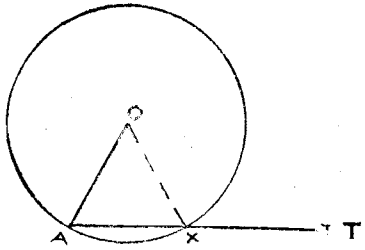
ஆகவே, OP < OT; OT < OP என்பன இரண்டும் பொருந்தா.

அதாவது, P, T இரண்டும் ஒன்றுதல்வேண்டும்.

அதாவது, ∠ OTA=செங்கோணம்

என்றவாறு.

(ii) மறுதலை



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - O வட்ட மையம். OA ஆரம். AT ⊥ OA.

கேள்வி - AT தொடுவரை என்பது.

ஆக்கம் - AT தொடுவரை யல்லவாயின் அது வட்டத்தைப் பின்னும் Xஇல் வெட்டட்டும். OX இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - OA=OX (ஆரங்கள்).

∴ ∠OAX = ∠OXA

ஆனால் ∠OAX = செங்கோணம் (தரவு).

∴ ∠OXA = செங்கோணம்.

இது பொருந்தாது.

ஆகவே, A, X இரண்டும் ஒன்றுதல் வேண்டும்.

அதாவது, AT தொடுவரையாகும்.

§3. ஷை சூத்திரத்திலிருந்து பின்வருவன இலகுவிற் பெறப்படுதல் காண்க.

(i) வட்டச் சுற்றுவரையிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒவ்வொரு தொடுவரை மாத்திரமே கீறலாம்.

(ii) தொடுபுள்ளிக்கூடாகத் தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாகக் கீறப்படும் நேர்வரை வட்ட மையத்துக்கூடாகச் செல்லும்.

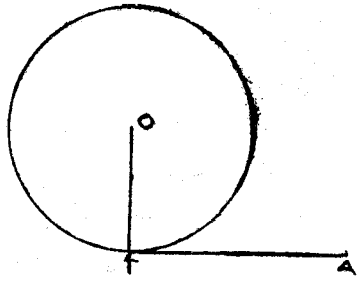
(iii) குறித்த நேர்வரை யொன்றைக் குறித்த புள்ளியொன்றில் தொடும் வட்டங்களின் மையங்களது படுக்கை அப் புள்ளிக்கூடாக அவ்வரைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் நேர்வரையாகும்.

(iv) இரு சமாந்தரமான வரைகளைத் தொடும் வட்டங்களின் மையங்களது படுக்கை அவ் வரைகளுக்குச் சரி நடுவாகச் செல்லும் சமாந்தர வரையாகும்.

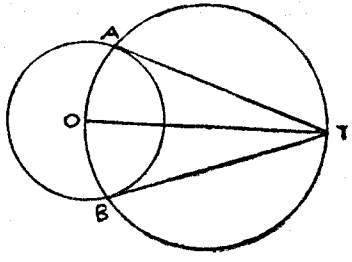
(v) குறித்த நேர்வரை யொன்றைத் தொடும் குறித்த ஆரமுள்ள வட்டங்களின் மையங்களது படுக்கை குறித்த வரையின் இருபக்கத்திலும் குறித்த ஆர தூரத்திலுள்ள இரு நேர் வரைகளாகும்.

§4. ஷி சூத்திரம் வட்டத்துக்குத் தொடுவரையைக் கீறும் வழியைக் காட்டுகிறது.

(i) வட்டச் சுற்று வரையிலுள்ள புள்ளி யொன்றில் (T) வட்டத்துக்குத் தொடுவரை கீற வேண்டும். OT இணைக்கப்படட்டும். TA ⊥ OT.



(ii) வட்டத்துக்கு வெளியாகவுள்ள புள்ளி யொன்றிலிருந்து (T) வட்டத்துக்குத் தொடுவரை கீறவேண்டும்.



TO இணைக்கப்படட்டும்.

TO விட்டமாக உடைய வட்டம்.

TA, TB தொடுவரைகள்.

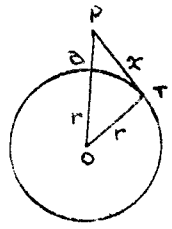
[∠OAT = அரை வட்டத்திலுள்ள கோணம் = செங்கோணம்].

இரு தொடுவரைகள் உண்டென்பதை அவதானித்துக்கொள்க.

§5. பூமியின் மேற்பரப்பிலிருந்து எவ்வளவுக்கு உயரப்போகிறோமோ அவ்வளவுக்கு அதிக

தூரம் (பூமியின் பரப்பிலே) எமது கண்ணுக்குப் புலப்படும்.

வட்டம் பூமியையும் P கண்ணையும் குறிக்கட்டும். பார்வைக்குட்பட்ட மிக எட்டிய இடம் T ஆகும்.



அதாவது, PT தொடுவரை;

எனவே PT ⊥ OT.

$$x^2 + r^2 = (a+r)^2$$
$$= a^2 + r^2 + 2ar$$
$$\therefore x^2 = a^2 + 2ar$$

பூமியின் ஆரத்தோடு (4000 மைல்) ஒப்பிடும் போது a மிக மிக அற்பமானதாகும்; இமயத்தின் உச்சியும் அற்பமானதே.

எனவே, $x^2 = 2ar$ (கிட்டத்தட்ட)

$\therefore x = \sqrt{2ar}$ (,,)

உதாரணம் - 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவர் கடல் மட்டத்திலிருந்து 30 அடி உயரமான ஒரு இடத்தில் நின்று பார்க்கும்பொழுது அடிவானத்தின் தூரம் என்ன?

$$x = \sqrt{2ar}$$

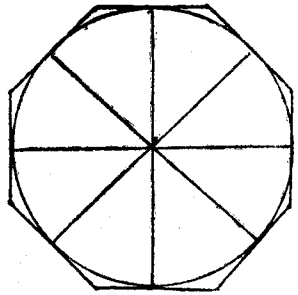
$a = 36$ அடி $= \frac{36}{5280}$ மைல்

$r = 4000$ மைல்

$$\therefore x = \sqrt{2 \times \frac{36}{5280} \times 4000} \text{ மைல்}$$

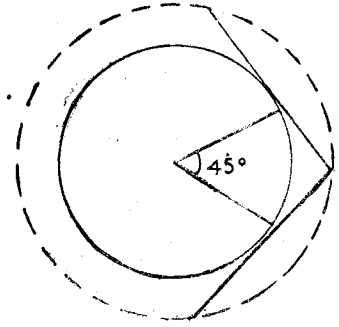
$= 7{\cdot}4$ மைல் (கிட்டத்தட்ட)

§6. வட்டத்துக்குள் ஒழுங்கான பல புயவடிவங்களை அமைப்பது முன் எடுத்துக் காட்டப்பட்டது. இப்பொழுது வட்டத்தைச் சுற்றி ஒழுங்கான பல புயவடிவங்களை அமைக்கும் முறையை அறியும் நிலைக்கு வந்துவிட்டோம். ஒரு உதாரணமூலம் முறையை விளக்குவாம்.



ஒழுங்கான எண்புய வடிவமாயின் எட்டுப் புயங்களும் எட்டுத் தொடுவரைகளாகும். தொடுபுள்ளிகள் எட்டுக்கூடாகவும் செல்லும்ஆரங்கள், வட்டமையத்திலுள்ள 360 பாகைகளையும் சமமாகப் பிரிக்கும். $360 \div 8 = 45°$. எனவே, 45 பாகைகளில் ஆரங்களைக் கீறி, ஆர நுனிகளிற் தொடுவரைகளைக் கீறி. வடிவத்தைப்பெறலாம்.

எல்லா ஆரங்களையும் அவற்றுக்குரிய தொடுவரைகளையும் கீறாது இரு ஆரங்களையும் அவற்றுக்குரிய இரு தொடுவரைகளையும் மாத்திரம் கீறினாற் போதும். ஏனெனில் அவ்வளவோடு எமது எண்புய வடிவத்தை உள்ளடக்கும் வட்டத்தைக் கீறிக்கொள்ளலாம் இனி, இவ் வட்டத்



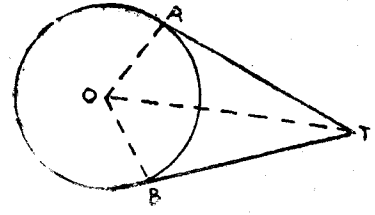
துக்குள் எண்புய வடிவத்தின் எஞ்சிய பகுதியை அமைப்பது இலகுவானது. வட்டமிடு கருவியினால் மூலைகளின் நிலையங்களைக் குறித்துக்கொள்ளலாம்.

ஆரம்பத்திற் கீறப்படும் இரு ஆரங்களும் இரு தொடுவரைகளும் வெகு அவதானமாகக் கீறப்படல் வேண்டும். அல்லாவிட்டால், தொடுவரைகள் தொடர் வரைகளாகவும் கூடும்.

7. வட்டத்துக்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்கு இரு தொடுவரைகள் கீறலாமென்பது முன் காட்டப்பட்டது. அவ்விரு தொடுவரைகளைப்பற்றிய சூத்திரம் பின் வருமாறு.

சூத்திரம் 31

பொதுவிலக்கணம் - ஒரு வட்டத்துக்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியொன்றிலிருந்து அவ் வட்டத்துக்குக் கீறப்படும் இரு தொடுவரைகளும் சமநீளமுள்ளனவாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - O ஒரு வட்டத்தின் மையம். TA, TB தொடுவரைகள்.

கேள்வி - TA = TB என்பது.

ஆக்கம் - OA, OB, OT இணைக்கப்படட்டும்,

நிரூபணம் - செங்கோண △ள் OAT, OBT இரண்டிலும்

$$\begin{cases} OA = OB & (\text{ஆரங்கள்}) \\ \text{கன்னம் } OT & \text{பொது} \end{cases}$$

$\therefore$ △ள் $\equiv$

$\therefore$ TA = TB என்றவாறு.

§8. ஷை சூத்திரத்திலிருந்து

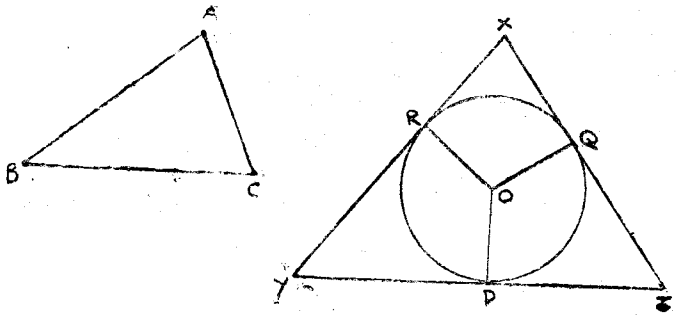
(i) $\angle ATO = \angle BTO$ என்பதும்

(ii) $\angle AOT = \angle BOT$ என்பதும் பெறப்படும்.

அதாவது, மையத்தையும் வெளிப்புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்வரை தொடுவரைகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தையும் ஆரங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தையும் இரு சமகூறாகப் பிரிக்கிறது. இது முக்கியமானது.

அன்றியும், $\angle AOB + \angle ATB = 180^\circ$ என்பதும் அவதானிக்கத்தக்கது.

§9. தொடுவரைகளுக் கிடைப்பட்ட கோணமும் ஆரங்களுக் கிடைப்பட்ட கோணமும் சேர்ந்து இருசெங்கோணங்களாதல் பின்வரும் ஆக்கத்திற் பயன்படுவதைக் காண்க.



ABC ஒரு முக்கோணி. ஒரு வட்டத்தைச் சுற்றி ஒத்த கோணமுள்ள வேறோர் முக்கோணி கீறவேண்டும்.

கீறப்படவேண்டிய முக்கோணி XYZ ஆயின்

$\angle A = \angle X$

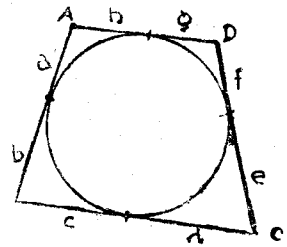
$\angle B = \angle Y$

$\angle C = \angle Z$

$\angle ROP = 180^\circ - \angle Y = \angle 180^\circ - \angle B.$

எனவே, வட்ட மையத்திலுள்ள மூன்று கோணங்களையும் ஆக்கிக்கொள்ளலாம். முக்கோணிப் புயங்கள் ஆரங்களின் நுனியிலுள்ள தொடுவரைகளாகும்.

§10. வட்டத்துக்குள் அமையும் நாற்புயத்தைப் பற்றிய பிரதானமான உண்மையொன்று முன் எடுத்துக் கூறப்பட்டது (சூத். 28). வட்டத்தைச் சுற்றியுள்ள நாற்புயத்தைப்பற்றிய பண்பொன்று பின்வருமாறு;



a = h

b = c

e = d

f = g

$\therefore (a+b)+(e+f) = (h+g) + (c+d)$

அதாவது, AB+CD = AD+BC

அதாவது, எதிர்ப்புய நீளங்களின் கூட்டுத் தொகைகள் சமமானவை.

அப்பியாசம்—54 (i) வரைதல்

1. 1″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. வட்டச் சுற்றுவரையில் 1″ இடைத் தூரத்தில் இரு புள்ளிகள் A, B இடுக. அப் புள்ளிகள் இரண்டிலும் இரு தொடுவரைகள் கீறுக.

   தொடுவரைகளுக் கிடையிலுள்ள கோணம் எத்தனை பாகை?

2. 1·2″ ஆரமுள்ள வட்டம் கீறுக. இடைக் கோணம் 80° உடைய இரு தொடுவரைகள் அவ் வட்டத்துக்குக் கீறுக.

3. 1·3″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்றைச் சுற்றி ஒரு சமபுய முக்கோணி கீறுக.

4. 1″ ஆரமுள்ள வட்டத்தைச் சுற்றி ஒரு சதுரம் கீறுக.

5. 1·5″ ஆரமுள்ளவட்டமொன்றுகீறுக, மையத்திலிருந்து 3″ தூரத்திலுள்ள புள்ளியொன்று P. Pக்கூடாக இரு தொடுவரைகள் கீறுக.

6. 1″ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 2·5″ தூரத்தில் உள்ள புள்ளியொன்று P. Pக் கூடாக ஒரு தொடுவரை கீறி அத் தொடுவரைக்குச் சமாந்தரமான வேறொரு தொடுவரை கீறுக.

7. 1·1″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறி அதைச் சுற்றி ஒழுங்கான அறுகோணியொன்று கீறுக.

8. ABC ஒரு முக்கோணி. AB = 2″, BC = 2·3″, CA = 2·6″. ACயைத் தொடும்படியும் Bக் கூடாகச் செல்லும்படியும் 1″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறுக.

* 9. ABC ஒரு துவிசமபுய முக்கோணி. பீடம் BC = 2″, AB = AC = 3″. ABயை Aயில் தொடும்படியும் Cக்கூடாகச் செல்லும்படியும் ஒரு வட்டம் கீறுக.

*10. AB ஒரு நேர்வரை. AB = 2·5″. Aயை மையமாக உடையதும் Bயிலிருந்து தொடுவரையின் நீளம் 1·5″ உடையதுமான ஒரு வட்டம் கீறுக.

*11. ABC ஒரு முக்கோணி. AB = 3″, BC = 2·6″, ∠B = 65°. புயங்கள் AB, AC இரண்டையும் தொடும்படியும் Cக் கூடாகச் செல்லும்படியும் ஒரு வட்டம் கீறுக.

*12. இரு நேர்வரைகளுக்கு இடையிலுள்ள ஒரு கோணம் 105°. அவ்விரு வரைகளையும் தொடும்படி 1″ ஆரமுள்ள வட்டங்கள் நான்கு கீறுக.

*13. இரு சமாந்தர வரைகளின் இடைத்தூரம் 2″. ஒரு வரையிலிருந்து 0·8″ தூரத்திலுள்ள புள்ளியொன்று P. இரு வரைகளையும் தொட்டு Pக் கூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் கீறுக.

*14. 2″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. மையத்திலிருந்து $3\frac{1}{2}$″ தூரத்திலுள்ள புள்ளியொன்று P. Pக் கூடாக ஒரு வெட்டுவரை PAB கீறுக — AB $1\frac{1}{2}$″ நீளமுடையதாதல் வேண்டும்.

அப்பியாசம்—54 (ii) கணித்தல்

1. O ஒரு வட்டத்தின் மையம். TA, TB இரு தொடுவரைகள். ∠ATB = 70°. ∠AOB, ∠AOT ஒவ்வொன்றும் எத்தனை பாகை?

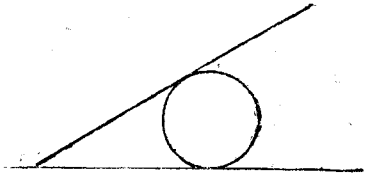
2. முந்திய வடிவத்தில் ∠AOB = 70°: ∠ATB, ∠ATO ஒவ்வொன்றும் எத்தனை பாகை?

3. முந்திய வடிவத்தில் OA = 3″, OT = 5″. தொடு வரையின் நீளமென்ன?

4. 6″ ஆரமுள்ள வட்டத்துக்கு மையத்திலிருந்து 10″ தூரமுள்ள புள்ளியிலிருந்து செல்லும் தொடுவரையின் நீளமென்ன?

5. ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து d″ தூரத்திலுள்ள புள்ளியிலிருந்து தொடுவரையின் நீளம் l″. வட்டத்தின் ஆரத்தை அறியும் வாய்பாட்டைக் காண்க.

6. ஓர் உருளையின் மீது 15 அடி நீளமுள்ள மரமொன்று சார்த்தப் பட்டிருக்கிறது. மரமும் உருளையும் நிலத்திற் பொருந்து மிடங்களுக்குட்பட்ட தூரம் 9 அடி. உருளைக்குமேல் நீண்டிருக்கும் (தடியின்) பகுதி எந்நீளமுடையது?



* 7. ஒரு குதிரை வண்டியின் சில்லுகளின் விட்டங்கள் முறையே $3\frac{1}{2}'$, $2\frac{3}{4}'$. அவை நிலத்தில் முட்டும் இடங்களுக்கு இடைத்தூரம் 60″. சில்லுகளின் மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை அறிக.

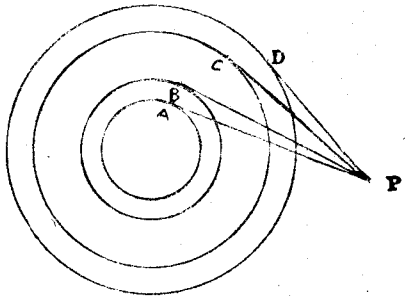
* 8. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று கோணங்களும் முறையே 50°, 60°, 70°. ஒரு வட்டம் மூன்று புயங்களையும் தொடுகிறது. தொடுமிடங்கள் P, Q, R. முக்கோணி PQRஇன் கோணங்களை அறிக.

* 9. நாலு திசையும் 50 மைல் தூரம் பார்க்கவேண்டுமாயின் எவ்வளவு உயரத்துக்குச் செல்ல வேண்டும்.

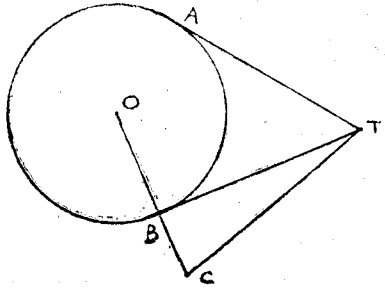
[பூமியின் விட்டம் = 8000 மைல்].

அப்பியாசம்—54 (iii) நிறுவுதல்

1. நான்கு ஏக மைய வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளி Pயிலிருந்து நான்கு தொடு வரைகள் PA, PB, PC, PD கீறப்பட்டிருக்கின்றன. A, B, C, D நான்கும் ஒரு வட்டத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.



2. ஒரு வட்டத்துக்கு TA, TB இரு தொடு வரைகள். ∠TAB = ∠TBA எனக் காட்டுக.



3. ஒரு வட்டத்துக்கு TA, TB இரு தொடுவரைகள். TC ⊥ AT. OB நீண்டு TCயை Cயில் சந்திக்கிறது. OC = TC எனக் காட்டுக.

4. ஒன்றையொன்று வெட்டும் இருநேர்வரைகளைத் தொடும் வட்டமையங்களின் படுக்கை யாது?

* 5. TA, TB இரு தொடுவரைகள். C வட்டமையம். ABயின் நடுச்செங்குத்துவரை TC எனக் காட்டுக.

* 6. O ஒரு வட்டத்தின் மையம். AB, CD சமாந்தரமான இரு தொடுவரைகள். தொடுபுள்ளிகள் A,C· BD மூன்றுவதொரு தொடுவரை. ∠BOD செங்கோணமெனக் காட்டுக.

* 7. ஒரு வட்டத்தைச்சுற்றி ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம் கீறப்பட்டால் அதன் நான்கு புயங்களும் சமநீளமுடையன எனக் காட்டுக.

* 8. ABCD ஒரு நாற்புயம். AB + CD = AD + BC ஆயின், நான்கு புயங்களையும் தொடும்படி ஒரு வட்டம் கீறலாமெனக் காட்டுக.

* 9. இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. AB, CD இரண்டுக்கும் பொதுவான இரு தொடுவரைகள் AC ∥ BD எனக் காட்டுக.

** 10. ஒரு வட்டத்துக்கு TA ஒரு தொடுவரை; TBC ஒரு வெட்டுவரை. O வட்டமையம். OM ⊥ BC. ∠AOT = ∠AMT எனக் காட்டுக.

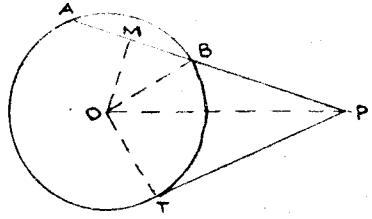
** 11. ஒரு வட்டத்துக்குள்ளேயிருக்கும் புள்ளியொன்றுக்கூடாகக் குறித்த நீளமுள்ள நாணொன்று கீறுவதெங்ஙனம்?

** 12. TA, TB இரு தொடுவரைகள். மூன்றுவதொரு தொடுவரை இவற்றை Xஇலும் Yயிலும் வெட்டுகிறது. மூன்றுவது தொடுவரை எங்கிருப்பினும் முக்கோணி TXYயின் சுற்றளவு ஒரேயளவினதாகும் எனக் காட்டுக.

48. தொடுவரைகளும் வெட்டுவரைகளும்

சூத்திரம் 32

§1. **பொதுவிலக்கணம் -** ஒரு வட்டத்தின் நாணொன்றும் தொடுவரையொன்றும் சந்திக்கும்போது நாணின் இரு கூறுகளும் ஆக்கும் நீள்சதுரம், தொடுவரையிலுள்ள சற்சதுரத்தின் பரப்புக்குச் சமமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - O ஒரு வட்டத்தின் மையம். AB ஒரு நாண்; TP ஒரு தொடுவரை, அவை சந்திக்குமிடம் P.

கேள்வி - $PA \cdot PB = PT^2$ என்பது.

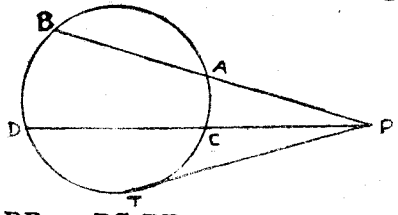
ஆக்கம் - OM ⊥ AB. OB, OP, OT இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் -

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (PM + MA)(PM - MB) \\ &= (PM + MB)(PM - MB) \\ &= PM^2 - MB^2 \\ &= (PO^2 - OM^2) - (OB^2 - OM^2) \\ & \qquad\qquad [\text{பிதாகரம்}] \\ &= PO^2 - OB^2 \\ &= PO^2 - OT^2 \qquad [OB = OT] \\ &= PT^2 \end{aligned}$$

என்றவாறு.

§2. ஷை சூத்திரம் 25ஆம் சூத்திரத்திலிருந்தும் பெறப்படும். PA·PB = PC·PD என்பது சூத்திரம். PCD சுழன்று தொடுவரையாகும்போது C,D இரண்டும் ஒன்றாகும். அந்நிலையில் PC = PD = PT.

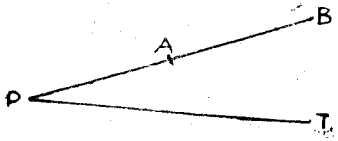


எனவே, PA·PB = PC·PD

= PT·PT

= PT^2

§3. ஷை சூத்திரத்தின் மறுதலையும் முக்கியமானதோர் உண்மை. அதாவது, $PA \cdot PB = PT^2$ ஆயின், A, B, T மூன்றுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டத்துக்கு PT தொடுவரையாகும். இது பாரிசேட நியாயத்தால் நிறுவப்படலாம்.



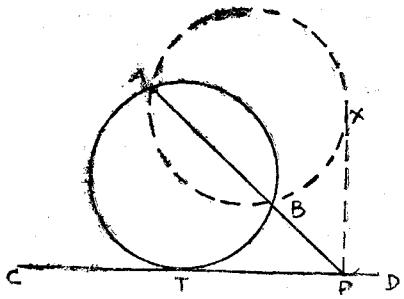
PT தொடுவரையில்லாவிடில் அது வட்டத்தை மீண்டும் Cயில் வெட்டட்டும்.

$PA \cdot PB = PT^2$ (தரவு)

$PA \cdot PC = PT \cdot PC$ (ABTC வட்டம்)

மிகுதியை உய்த்துணர்க.

§4. இரு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும்படியும் ஒரு நேர்வரையைத் தொடும்படியும் வட்டம் கீறுதற்கு இச் சூத்திரம் வழிகாட்டும்.



தரவு - A, B இரு புள்ளிகள்.

CD ஒருநேர்வரை.

கேள்வி - வட்டம்.

விளக்கம் – கீற வேண்டியவட்டத்துக்கு AB நாணாகும்; CD தொடுவரையாகும். தொடுபுள்ளியின் நிலையத்தை அறிவதெப்படி? நாணும் தொடுவரையும் சந்திக்குமிடம் P ஆயின்,

$PA \cdot PB = PT^2$

PTயின் நீளம் அறிவதெப்படி?

A, B இரண்டுக்கூடாகவும் ஏதுமொரு வட்டம் கீறி அதற்கு Pயிலிருந்து தொடுவரை PX கீறினால்,

$PA \cdot PB = PX^2$

$\therefore \quad PT = PX$

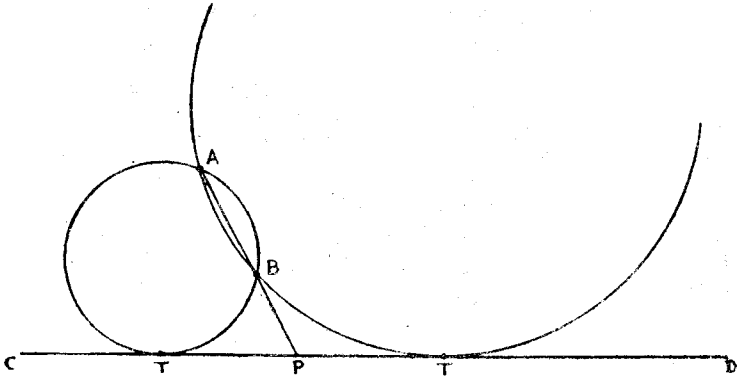
ஆகவே வழி பின்வருமாறு :—

(i) A, B இரண்டுக்கூடாகவும் ஏதுமொரு வட்டம் கீறுக.

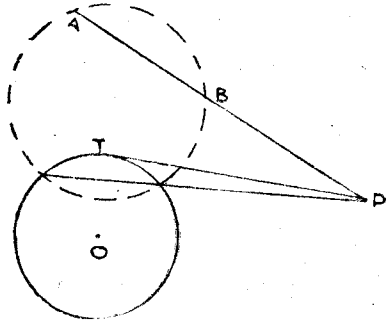
(ii) AB, CD இரண்டும் சந்திக்குமிடத்திலிருந்து (P) வட்டத்துக்குத் தொடுவரை PX கீறுக.

(iii) CDயில் தொடுபுள்ளியைப் பெறுக. PT = PX. வேண்டிய வட்டம் ABT ஆகும்.

Pயின் இரு பக்கத்திலும் T வரலாமாகையால், இருவட்டங்கள் கீறலாம் என்பதை அவதானித்துக்கொள்க.



§5. இரு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும்படியும் வேறொரு வட்டத்தைத் தொடும்படியும் ஒரு வட்டம் கீறுவதற்கும் இச் சூத்திரம் வழி காட்டும்.



தரப்பட்ட புள்ளிகள் A, B.

தரப்பட்ட வட்டம் Oவை மையமாக உடையது.

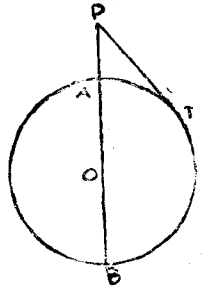
(i) A, B இரண்டுக்கூடாகவும் வட்டத்தை வெட்டும்படி ஏதுமொரு வட்டம் கீறுக.

(ii) நாண் ABயும் பொது நாணும் Pயில் சந்திக்கட்டும்.

(iii) Pயிலிருந்து தரப்பட்ட வட்டத்துக்குத் தொடுவரை PT கீறுக.

வேண்டிய வட்டம் ABT ஆகும்.

Pயிலிருந்து இரு தொடுவரைகள் கீறலாமாகையால் இரு வட்டங்கள் கீறலாமென்பதை அவதானித்துக்கொள்க.



§6. பார்வைக்கெட்டிய அடிவானத் தூரம் இச் சூத்திர முறைப்படியும் கணிக்கலாம்.

$$PT^2 = PA \cdot PB$$
$$= PA(PA + AB)$$
$$= PA(PA + 2r) \quad [r = \text{ஆரம்}]$$
$$= PA^2 + 2r \cdot PA.$$
$$\therefore PT^2 = 2r \cdot PA \quad [\text{ஏன்?}]$$

அப்பியாசம்—55 (i) வரைதல்

1. 2″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறுக. மையத்திலிருந்து 3″ தூரத்தில் ஒரு புள்ளி P இடுக. தொடுவரை PT, வெட்டுவரைகள் PAB, PCD, PEF கீறுக. வேண்டிய நீளங்களை அளந்து PT^2, PA·PB, PC·PD, PE·PF என்பவற்றின் விலைகளை அறிக. சரியான மறுமொழி என்னவாதல் வேண்டும்?

2. XY ஒரு நேர்வரை. நேர்வரையிலிருந்து 1·5″ தூரத்தில் இரு புள்ளிகள் A, B இடுக. AB = 1″. இரு புள்ளிகளுக்கூடாக நேர்வரையைத் தொடும்படி ஒரு வட்டம் கீறுக.

3. XY ஒரு நேர்வரை. XY = 2·5″. A, B இரண்டும் XYயின் ஒரே பக்கத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள். XA = 1·4″, YA = 1·7″, XB = 2″, YB = 0·7″. இரு புள்ளிகளுக்கூடாகச்சென்று நேர்வரையைத் தொடக்கூடிய சிறிய வட்டத்தைக் கீறுக.

4. முந்திய கேள்விப்படி பெரிய வட்டத்தைக் கீறுக.

5. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். AB = 2″, BC = 1·6″, CD = 1″, DA = 1·2″, BD = 2″. வடிவத்தைக்கீறி, D, C இரண்டுக்கூடாகச் சென்று ABயைத் தொடும் இரு வட்டங்களையும் கீறுக.

6. 1·3″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறுக. OA, OBஎன இரு ஆரங்கள் கீறுக ; ∠ AOB = 30°. OA, OB இரண்டும் முறையே C, D வரையும் நீட்டப்படுகிறது; OC = 2″, OD = 2·5″. C, D இரண்டுக் கூடாகச் சென்று வட்டத்தைத் தொடும் சிறிய வட்டத்தைக் கீறுக.

7. முந்திய கேள்விப்படி பெரிய வட்டத்தைக் கீறுக.

8. ஒரு நேர்வரையும் அதன் ஒரு பகுதியும் ஆக்கும் நீள்சதுரம் குறித்த ஒரு சற்சதுரத்துக்குப் பரப்பிற் சமமாகும்படி அந் நேர்வரையை இரு கூறுகளாக எப்படிப் பிரிப்பது?

அப்பியாசம்—55 (ii) கணித்தல்

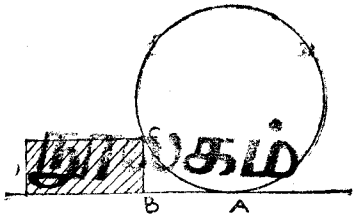
1. நேர்வரை யொன்று ABC ஒரு வட்டத்தை Bயிலும் Cயிலும் வெட்டுகிறது. AB = 4″, BC = 5″. Aயிலிருந்து வட்டத்துக்குக் கீறப்படும் தொடுவரையின் நீளமென்ன?

2. OAB, OC இரு நேர்வரைகள். OA = 2″, AB = 2·5″, OC = 3″. A, B, C மூன்றுக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் OCயை Cயில் தொடுமெனக் காட்டுக.

3. 3″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்றுக்கு ஒரு புள்ளி Pயிலிருந்துசெல்லும்தொடுவரையின்நீளம் = 4″. Pயிலிருந்து வட்டத்தின் மிகக் கிட்டிய தூரமென்ன?

* 4. ஆகாயவிமானி ஒருவன் 5000 அடி உயரத்தில் இருக்கும்போது அடிவானத்தின் தூரமென்ன?

* 5. ஒரு சில்லை உருளாமற்பண்ணுவதற்காக 2″ உயரமுள்ள மரக்குற்றியொன்று உபயோகிக்கப்படுகிறது. சில்லும் நிலமும் சந்திக்குமிடத்திலிருந்து 4″ தூரத்தில் மரக்குற்றியிருந்தால் சில்லின் விட்டமென்ன?



[BC = 2″
AB = 4″.]

அப்பியாசம்—55 (iii) நிறுவுதல்

1. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. AB நீட்டப்படுகிறது C வரையும். CP, CQ இரண்டும் Cயிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் கீறப்படும் தொடுவரைகள். CP = CQ எனக் காட்டுக.

2. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. இரு வட்டங்களுக்கும் பொதுவான தொடுவரையொன்று, ஒரு வட்டத்தை Cயிலும் மற்றைய வட்டத்தை Dயிலும் சந்திக்கிறது AB நீண்டு CDயைச் சந்திக்குமிடம் CDயின் நடுப்புள்ளி யெனக் காட்டுக.

3. ABC ஒரு நேர்வரை. AB = 4″; BC = 5″. B, C இரண்டுக் கூடாகவும் செல்லும் வட்டங்களுக்கு Aயிலிருந்து தொடுவரைகள் கீறப்பட்டாற் தொடுபுள்ளிகளின் படுக்கை யாது?

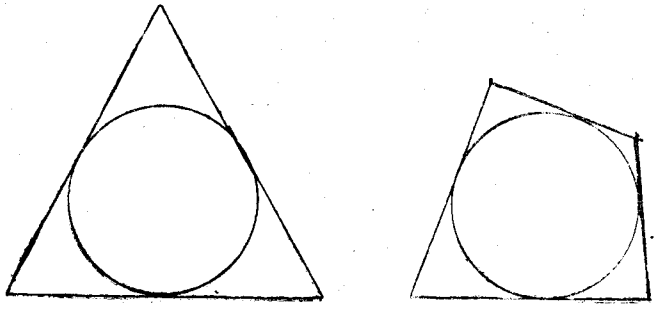
* 4. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. AB நீட்டப்படுகிறது Cவரையும். CX, CY தொடுவரைகள். Bயிலுள்ள இரு தொடுவரைகளும் CX, CY இரண்டையும் முறையே Dயிலும் Eயிலும் சந்திக்கின்றன. △ள் BCD, BCE இரண்டின் சுற்றளவுகளும் சமமானவை எனக் காட்டுக.

49. உள்வட்டங்களும் வெளிவட்டங்களும்

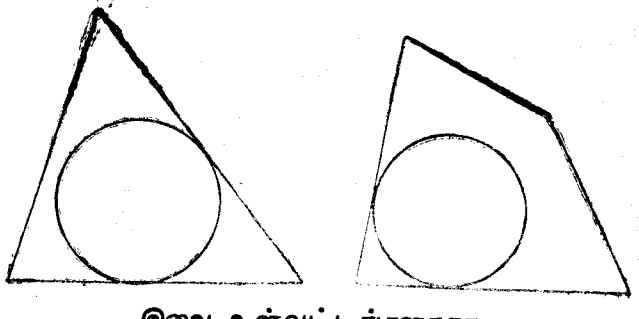
§1. முக்கோணிகளைச் சுற்றி வட்டம் கீற அறிந்திருக்கிறீர்கள். அச் சுற்று வட்டத்துக்கு முக்கோணிப் புயங்கள் நாண்களாகும்.

இனி, முக்கோணிகளுக்குள்ளே வட்டங்கள் அமைக்கும் முறையை ஆராய்வாம். இவ் வட்டங்களுக்கு முக்கோணிப் புயங்கள் தொடுவரைகளாகும்.

புயங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு தொடுவரையாக அமையும் வட்டம் **உள்வட்டம்** எனப்படும்.



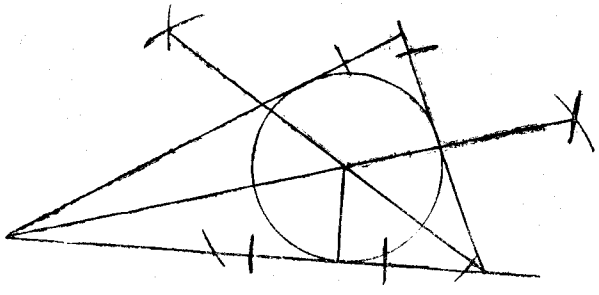
இவை உள்வட்டங்கள்.



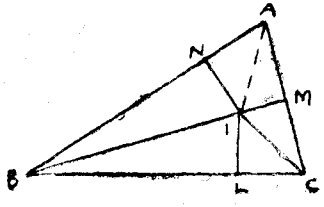
இவை உள்வட்டங்களாகா.

முக்கோணியல்லாத வடிவங்களிலே சிறு பான்மையாகவே உள்வட்டங்கள் கீறமுடியும்.

முக்கோணியின் மூன்று புயங்களும் **உள்வட்டத்தின்** தொடுவரைகளாகையால் முக்கோணியின் ஒவ்வொரு கோணச் சமவெட்டியிலும் வட்ட மையம் இருத்தல் வேண்டும். எனவே, மையம் நிச்சயிக்கப்படுகிறது. மையத்திலிருந்து புயமொன்றுக்குச் செல்லும் செங்குத்துவரை ஆரமாகும்.



§2. முக்கோணியொன்றின் கோணச் சமவெட்டிகள் மூன்றும் ஒன்றுகூடும் என்பது முக்கியமானது. அதை நிரூபிக்கும் முறை சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு :



BI, CI இரண்டும் இரு கோணச் சமவெட்டிகள். IA இணைக்கப்படட்டும். IL, IM, IN செங்குத்து வரைகள்.

△ள் BIN, BIL இரண்டும் ≡. ∴ IN = IL.

△ள் CIL, CIM இரண்டும் ≡. ∴ IL = IM.

∴ IN = IM.

∴ △ள் AIN, AIM இரண்டும் ≡.

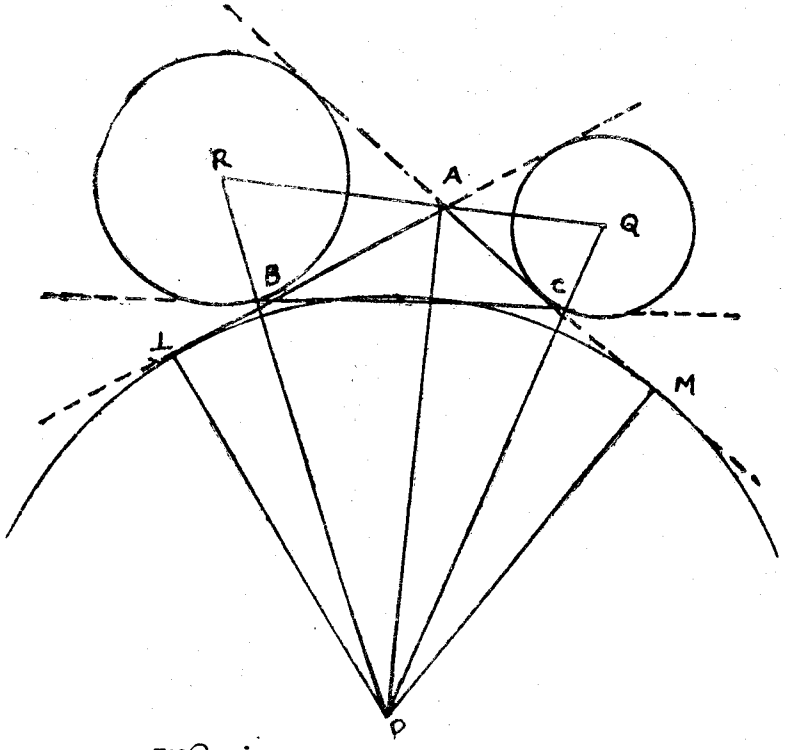
∴ AI கோணச் சமவெட்டி.

ஆகவே, முக்கோணி யொன்றின் உள்வட்ட மையத்தைக் காண்பதற்கு இரண்டு கோணங்களை மாத்திரம் இருசமகூறுகப் பிரித்தல் போதும்.

§3. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று புயங்களையும் முக்கோணிக்கு வெளியாகத் தொடும் வட்டம் **வெளிவட்டம்** எனப்படும். அதாவது, ஒரு புயத்தையும் மற்றைய இரு புயங்களின் நீட்டப்பட்ட பகுதிகளையும் தொடும் வட்டம் வெளிவட்டமாகும். ஒரு முக்கோணிக்கு மூன்று வெளிவட்டங்களுண்டு.

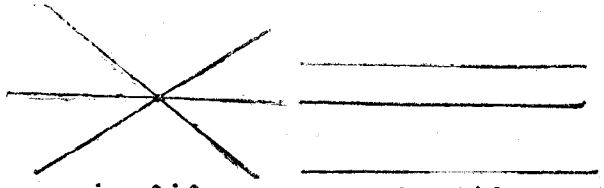
வெளிவட்டமொன்றைக் கீறுவதற்கு அதற்குரிய வெளிக்கோணங்கள் இரண்டினதும் சமவெட்டிகளைக் கீறவேண்டும். ஒரு வெளிக்கோணத்தின் சமவெட்டியை நீட்டினால் அது எதிராயுள்ள வெளிக்கோணத்தையும் (எதிர் உச்சிக்கோணம்) இருசமகூறுக்கும். அதாவது PCQ, QAR, RBP நேர்வரைகளாகும். ஆகவே, மூன்று வெளிவட்டங்களையும் கீறுவதற்கு மூன்று வெளிக் கோணங்களைச் சம கூறுக்குதல் போதும்.

Aயிலுள்ள உட்கோணத்தின் சமவெட்டி Pக்கூடாகச் செல்லும். அதாவது, AP உட்கோணச்

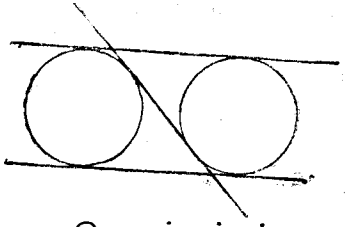


சமவெட்டியுமாம். இது, முக்கோணிகள் API, APM இரண்டும் ≡ என்பதிலிருந்து பெறப்படும்.

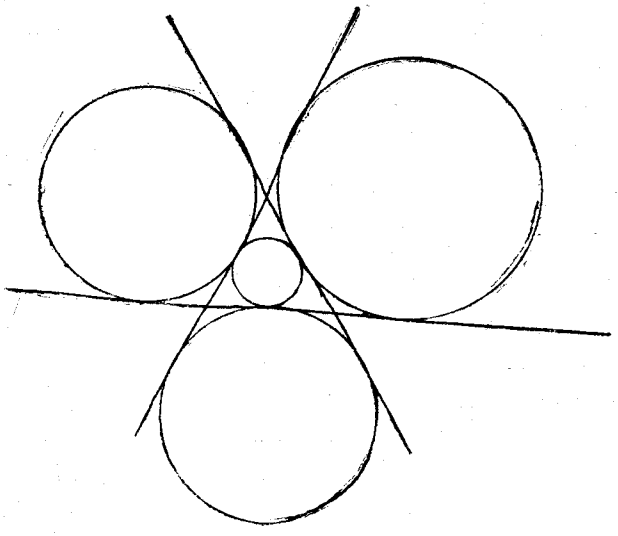
§4. ஏதும் மூன்று நேர்வரைகளைத் தொடும் வட்டம் கீறுவதாலும் இடைப்பட்ட இருகோணங்களின் சமவெட்டிகளைக் கீறுவதே வழியாகும். நேர்வரைகள் அமைந்திருக்கும் ஒழுங்குக்குத் தக்கதாக வட்டங்களின் தொகை கூடிக் குறையும்.



வட்டமில்லை வட்டமில்லை



இரு வட்டங்கள்



நாலு வட்டங்கள்

§5. ஒரு முக்கோணியிற் பலவகையாக வரைகள் ஒன்றுகூடுவதை அறிந்திருக்கிறீர்கள். அவற்றின் சுருக்கம் பின்வருமாறு :

(i) புயங்களின் நடுப்புள்ளிகளை எதிர்மூலைகளுக்குத் தொடுக்கும் வரைகள் (**நடுவரைகள்**) மூன்றும் ஒன்றுகூடும். (அதி. 38, §5 பார்) ஒன்றுகூடும் புள்ளி **கவர்ச்சி மையம்** எனப்படும். மூன்று வரைகளும் ஒன்றையொன்று மூன்றிலொன்றாம்படி வெட்டும்.

(ii) புயங்களின் **நடுச் செங்குத்து வரைகள்** ஒன்றுகூடும் (அதி. 43, §6 பார்). ஒன்றுகூடும் புள்ளி **சுற்றுவட்ட மையம்** எனப்படும். சுற்றுவட்டமையம் மூன்று மூலைகளிலுமிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ளது.

(iii) மூலைகளிலிருந்து எதிர்ப்புயங்களுக்குச்செல்லும் **செங்குத்துவரைகள்** ஒன்றுகூடும் (அதி. 46, §5 பார்). ஒன்றுகூடும் புள்ளி **செங்கோட்டுச்சந்தி** எனப்படும்.

(iv) **கோணச் சமவெட்டிகள்** ஒன்றுகூடும். (அதி. 49, §2 பார்). ஒன்றுகூடும் புள்ளி **உள்வட்டமையம்** எனப்படும். உள்வட்டமையம் மூன்று புயங்களிலுமிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ளது.

[சமபுய முக்கோணியில் இந்நான்கு புள்ளிகளும் ஒன்றாகும்.]

ஒன்றுகூடும் நான்கு வகைகளையும் நிரூபிக்கும் வழிகள் ஒரேமாதிரியானவை. ஏதுமிரண்டு வரைகளை எடுத்து அவை சந்திக்கும் புள்ளியை உரிய வேறொரு புள்ளியோடு இணைக்கும் நேர்வரை, அவ் விருவரைகளையும் ஒத்ததெனக்

காட்டுவதே அந்த நிரூபணங்களின் பொதுவியல்பாகும்.

அப்பியாசம்—56 (i) வரைதல்

1. ஏதுமொரு முக்கோணி கீறி அதில் உள்வட்டத்தைக் கீறுக.

2. புயங்கள் 2″, 2½″, 3″ உடைய முக்கோணி கீறி அதில் உள்வட்டம் கீறுக.

3. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் கன்னம் =3·3″, ஒருபுயம்=1·8″. முக்கோணியைக் கீறி உள்வட்டத்தைக் கீறுக.

4. முக்கோணி வடிவமான ஒரு தகட்டின் மூன்று புயங்களும் முறையே 6 செ. மீ., 7 செ. மீ., 8 செ. மீ. அத் தகட்டிலிருந்து வெட்டியெடுக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய வட்டத்தின் ஆரத்தை வரைந்தறிக.

5. 3″ ஆரமுள்ள ஒரு கால் வட்டம் கீறி அதில் ஒரு உள்வட்டம் கீறுக.

6. ஏதுமொரு முக்கோணி கீறி அதற்குரிய ஒரு வெளிவட்டம் கீறுக.

7. 3½″, 3″, 1″ நீளப் புயங்களையுடைய முக்கோணி கீறி, அதன் குறுகிய புயத்தை வெளிப்புறமாகத் தொடும் வெளி வட்டத்தைக் கீறுக.

8. ஏதுமொரு முக்கோணி கீறி அதற்குரிய மூன்று வெளி வட்டங்களையும் கீறுக.

9. ஒரு முக்கோணியின் பீடம் 2″; பீடகோணங்கள் 72°, 55°. முக்கோணியை வரைந்து மூன்று வெளி வட்டங்களையும் கீறுக.

*10. 2″ நீளமுள்ள பீடத்தில் இரு பக்கங்களிலும் உச்சிக்கோணங்கள் 100°, 70° உடைய இரு துவிசமபுய முக்கோணிகள் கீறுக. பெறப்படும் நாற்புயவடிவத்தில் ஒரு உள்வட்டம் கீறுக.

*11. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். AB=2″, BC=$1\frac{1}{2}$″, CD=$1\frac{1}{4}$″, DA=$1\frac{3}{4}$″, ∠A=60°. நாற்புயவடிவத்துள் உள்வட்டம் கீறமுடியுமா? ஏன்?

உள்வட்டம் கீறி ஆரத்தை அளவுங்கள்.

**12. ஒரு முக்கோணி ABCயின் மூன்று வெளிவட்ட மையங்களையும் உச்சிகளாகவுடைய முக்கோணியின் புயங்கள் முறையே 5, 6, 7 செ. மீ. முக்கோணி ABCயைக் கீறி அதன் புயங்களை அளவுங்கள்.

**13. ஒரு முக்கோணியின் உள்வட்ட மையமும் இரு வெளிவட்டங்களின் மையங்களும் தெரிந்தால் முக்கோணியை எவ்வாறு வரையலாம்?

**14. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று புயங்களிலுமிருந்து சமநீளமுள்ள பகுதிகளை வெட்டக் கூடிய வட்டமொன்று கீறுவதெப்படி?

அப்பியாசம்—56 (ii) நிறுவுதல்

1. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் உள்வட்டம் ABயை Dயிலும் ACயை Eயிலும் தொடுகிறது. BC=BD+CE எனக் காட்டுக.

2. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் உள் வட்டம் AB, AC இரண்டையும் முறையே L, P இரண்டிடங்களிலும் தொடுகிறது. Aக்கு எதிரான வெளிவட்டம் AB, AC இரண்டையும் (நீட்டிய பின்) முறையே M, Q ஆகிய இரண்டிடங்களிலும் தொடுகிறது. LM=PQ எனக் காட்டுக.

3. ABC ஒரு முக்கோணி. வெளி வட்டங்களின் மையங்கள் P, Q, R. முக்கோணி PQRஇல், Aக்கு எதிராக Pஇருந்தால் ∠P=$\frac{1}{2}$∠B+$\frac{1}{2}$∠C எனக் காட்டுக.

4. ஏதுமொரு நாற்புய வடிவத்தின் நான்கு வெளி வட்டங்களின் மையங்களும் ஒரு வட்ட நாற்புயத்தின் மூலைகளாகும் எனக் காட்டுக.

* 5. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் உள் வட்டம் ABயைத் தொடுமிடம் M; Aக்கு எதிரான வெளிவட்டம் ABயை (நீட்டிய பின்) தொடுமிடம் N. MN=BC எனக் காட்டுக.

* 6. ஒரு முக்கோணி ABCயின் உள் வட்டமும் ஒரு வெளி வட்டமும் BCயை (நீட்டாமலே) Pயிலும் Qவிலும் தொடுகின்றன. BQ=CP எனவும், BP=CQ எனவும் காட்டுக.

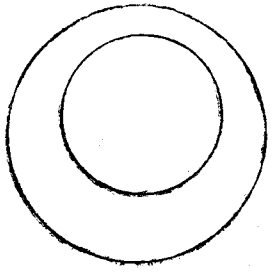
* 7. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் உள் வட்டம் புயங்களைத் தொடுமிடங்கள் P, Q, R. முக்கோணி PQR உடைய கோணங்கள் 50°, 60°, 70° ஆயின், முக்கோணி ABCயின் கோணங்களை அறிக.

** 8. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் கன்னமும் உள் வட்டத்தின் விட்டமும் சேர்ந்து முக்கோணியின் மற்றைய இரு புயங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

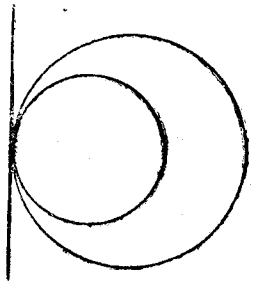
** 9. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் உள் வட்ட மையம் I. Aக்கு எதிரான வெளி வட்ட மையம் E. முக்கோணியின் சுற்றுவட்டத்தை AI நீண்டு Dயில்சந்திக்குமாயின் DB=DE=DI எனக் காட்டுக.

50. பொதுத் தொடுவரைகள்

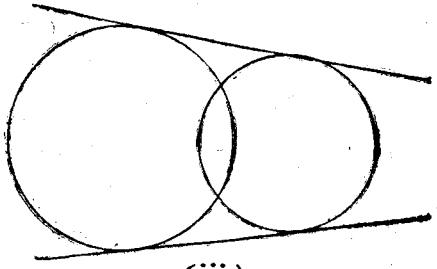
§ 1. இரு வட்டங்களுக்குப் பொதுவாக உள்ள தொடுவரை **பொதுத் தொடுவரை** எனப் படும். வட்டங்களிரண்டும் அமைந்திருக்கும் ஒழுங்குக்குத் தக்கதாகப் பொதுத் தொடுவரை களின் தொகை கூடிக் குறையும்.



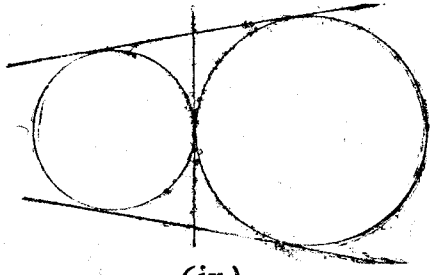
(i)



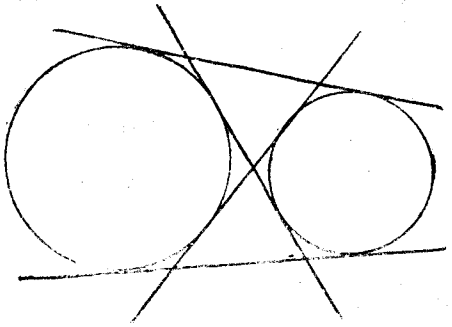
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

பொதுத் தொடுவரைகள் மூன்றுவகைப்படும்:-

(அ) வட்டங்களிரண்டும் தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொதுத் தொடுவரை [படம் (ii), (iv) பார்.]

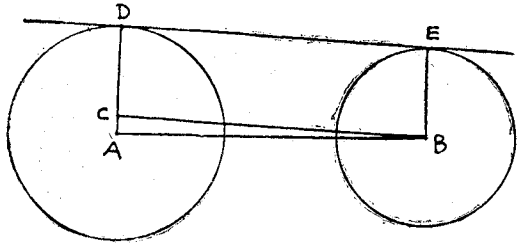
(ஆ) நேர்ப் பொதுத் தொடுவரை [படம் (iii), (iv), (v) பார்.]

(இ) மாறு பொதுத் தொடுவரை [படம் (v) பார்.]

இவற்றுள் வட்டங்கள் தொடும் புள்ளியி லுள்ள பொதுத் தொடுவரைகள் கீறுவது இலகுவானது. நேர்ப் பொதுத் தொடுவரைக ளும் மாறு பொதுத் தொடுவரைகளும் கீறும் முறையே ஈண்டு எடுத்தாராயப்படும். அவை யிரண்டும் ஐந்தாம் படத்தில் உண்டாகையால், ஒன்றுக்கொன்று வெளியாகவுள்ள இரு வட் டங்களை மாத்திரம் அவதானிப்போம்.

§ 2. முதலாவதாக நேர்ப் பொதுத் தொடுவரைகள்.

எவ்வகையான ஆக்கத்திலும் ஆக்கம் முடிந்த தாகக் கருதிப் பின்னிருந்து முன்னாக நியாயித் தாற் பெரும்பாலும் ஆக்கத்துக்குரிய வழியைப் பெறுதல்கூடும்.



DE நேர்ப்பொதுத் தொடுவரை என்க.

எனவே, AD, BE இரண்டும் தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

BE யிலும் AD பெரிதென்க,

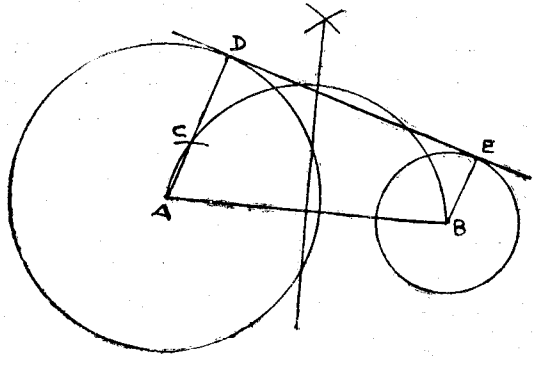
BC ∥ ED.

∴ ∠ACB = செங்கோணம்;

AC = AD—BE.

எனவே, Cயின் நிலையத்தை அறிந்தால் D, E இரண்டின் நிலையங்களும் பெறப்படும்.

∠ACB = 90°; AC = ஆரங்களின் வித்தியாசம்



ஆகவே,

(i) மையங்களை இணைக்கும் நேர்வரையை விட்டமாக ஒரு அரை வட்டம் கீறுக.

(ii) பெரிய வட்டத்தின் மையத்தை மையமாகவும், ஆரங்களின் வித்தியாசத்தை ஆரமாகவும் கொண்டு அரைவட்டத்தை வெட்டும்படி ஒரு வில் கீற C பிறக்கும்.

(iii) AC இணைக்கப்பட்டு நீட்டப்பட D பிறக்கும்.

(iv) BE ∥ AD. E பிறக்கும்.

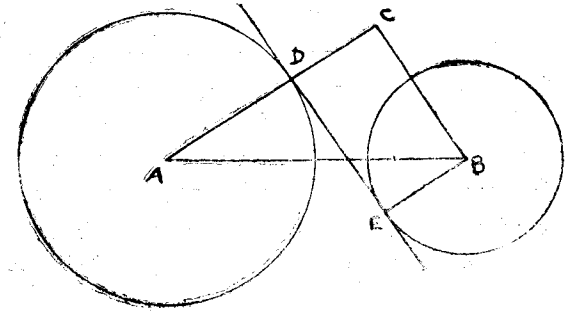
D, E இரண்டும் இணைக்கப்பட நேர்ப்பொதுத் தொடுவரையாகும்.

ஆக்க வழியை அறிவதற்கு நேர்வரை BC உதவியதேயன்றி, தொடுவரையைக் கீறுவதற்கு அது தேவையில்லை—கீறவேண்டியதில்லை.

அரை வட்டத்துக்குப் பதிலாக முழுவட்டத்தைக் கீறினால் இரு நேர்ப்பொதுத் தொடுவரைகளையும் பெறலாம்.

§3. இனி, மாறு பொதுத் தொடுவரைகள்.

முன்போல நியாயித்து ஆக்கவழியைப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.



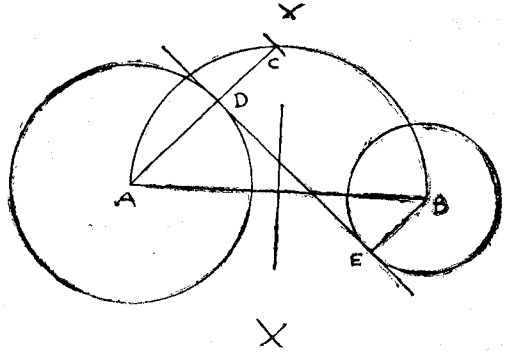
DE தொடுவரை என்க.

$\therefore AD \perp DE$; $BE \perp DE$.

ADயை நீட்டி BCயைத் தொடுவரைக்குச் சமாந்தரமாகக் கீறினால்,

$\angle C = 90^\circ$; $AC = AD + BE$.

எனவே ஆக்கவழி பின்வருமாறு :-



(i) AB யை விட்டமாக அரைவட்டம்.

(ii) ஆரங்களின் கூட்டுத்தொகை கொண்டு அரைவட்டத்தை வெட்ட ஒரு வில் (C.)

(iii) AC யை இணைக்க D வரும்.

(vi) BE ∥ CA.

நேர்ப்பொதுத் தொடுவரையாயினும்சரி, மாறு பொதுத் தொடுவரையாயினும்சரி, இரண்டுக்கும் ஆக்கவழி ஏறக்குறைய ஒரு மாதிரியானதே. ஒரு வித்தியாசம் மாத்திரம் உண்டு. **நேர்ப்பொதுத் தொடுவரையாயின் ஆரங்களின் வித்தியாசம். மாறு பொதுத் தொடுவரையாயின் ஆரங்களின் கூட்டுத்தொகை.**

§4. மாறு பொதுத் தொடுவரைகளிரண்டும் மையவரையும் ஒன்றுகூடும். அவ்வாறே, நேர்ப் பொதுத் தொடுவரைகள் இரண்டும் (நீண்டு) மையவரையும் (நீண்டு) ஒன்றுகூடும்.

வடிவம் சமச்சீருடையதாகையால் இவ்வுண்மைகள் இனிது பெறப்படும். அன்றி, வேறுவகையாகவும் நிரூபிக்கலாம்.

§5. பொதுத் தொடுவரைகளின் நீளங்களைப் பிதாகரரின் சூத்திரப்படி இலேசாகக் கணித்துக் கொள்ளலாம்.

(i) நேர்ப் பொதுத் தொடுவரை (§2 பார்.)

$DE = BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

$= \sqrt{(\text{மையவரை})^2 - (\text{ஆரவித்தியாசம்})^2}$

(ii) மாறு பொதுத் தொடுவரை (§3 பார்.)

$DE = BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$

$= \sqrt{(\text{மையவரை})^2 - (\text{ஆரக் கூட்டுத்தொகை})^2}$

இவற்றை வாய்பாடாகக்கொள்ளாது, ஒவ்வொரு முறையும் பெரும்படியான படம் கீறி அதைக்கொண்டு கணித்துக்கொள்க.

அப்பியாசம்—57 (i) வரைதல்

1. இரு வட்டங்களின் ஆரங்களும் அவற்றின் மையங்களது இடைத்தூரமும் முறையே 2″, 1·5″, 2·5″. வட்டங்களைக் கீறி அவற்றுக்கு நேர்ப் பொதுத் தொடுவரையொன்று கீறுக. அதன் நீளமென்ன?

2. இரு வட்டங்களின் ஆரங்களும் அவற்றின் மையங்களது இடைத்தூரமும் முறையே 1·5″,

0·9″, 2·5″ வட்டங்களைக் கீறி அவற்றுக்கு மாறு பொதுத் தொடுவரையொன்று கீறுக. அதன் நீளமென்ன?

3. மையங்கள் 3″ தூரத்திலுள்ள இரு சமமான வட்டங்கள் (ஆரம் = 1·1″) கீறி அவற்றுக்குப் பொதுத் தொடுவரைகள் கீறுக.

4. இரு வட்டங்களின் ஆரங்களும் அவற்றின் மையங்களது இடைத்தூரமும் முறையே 1·3″, 0·8″, 2·7″. வட்டங்களைக் கீறி அவற்றின் பொதுத் தொடுவரைகள் எல்லாவற்றையும் கீறுக.

* 5. A, B இரண்டும் 2·8″ தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள். அவற்றிலிருந்து செங்குத்தான தூரங்கள் முறையே 0·8″, 1·2″ உள்ள நேர் வரையொன்று கீறுக. எத்தனை நேர்வரைகள் கீறலாம்?

** 6. ஒரு △ ABCயின் உள்வட்டத்தின் ஆரம் = 0·7″. BCயைத் தொடும் வெளிவட்டத்தின் ஆரம் = 1·5″. இரு வட்டங்களின் மையங்களும் 2·5″ தூரத்திலுள்ளனவாயின், முககோணி ABCயை வரைக.

அப்பியாசம்—57 (ii) கணித்தல்

1. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. அவற்றின் ஆரங்கள் முறையே 8″, 2″. வட்டங்களின் நேர்ப் பொதுத் தொடுவரை யொன்றின் நீளமென்ன?

2. இரு வட்டங்களின் ஆரங்களும் அவற்றின் மையங்களது இடைத்தூரமும் முறையே 7″, 4″, 6″. அவற்றின் நேர்ப் பொதுத் தொடுவரை யொன்றின் நீளமென்ன?

3. 3″, 4″ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்களின் மையங்கள் 8″ தூரத்திலுள்ளன. வட்டங்களின் மாறு பொதுத் தொடுவரை யொன்றின் நீளமென்ன?

4. 0·8″, 1·2″ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்களின் மையங்கள் 2·8″ தூரத்திலுள்ளன. வட்டங்களின் பொதுத் தொடுவரைகளது நீளங்களை அறிக.

* 5. ஒரு 'சைக்கிள்' வண்டியிலே யுள்ள சங்கிலி இறுக்கமாக இருந்தால், சங்கிலியில் நேராயுள்ள பகுதியின் நீளமென்ன? சிறியசில்லின் விட்டம் = 2·8″; பெரியசில்லின் விட்டம் = 6·8″. இரு சில்லுகளின் மையங்களும் 20·8″ தூரத்திலுள்ளன.

* 6. ஒரு யந்திரத்திலே இரு உருளைகளைச்சுற்றி ஒரு வார் '8' என்ற இலக்கத்தைப்போலப் பூட்டப்பட்டிருக்கிறது. உருளைகளின் ஆரங்கள் முறையே a, b. உருளைகளது மையங்களின் இடைத்தூரம் c. உருளைகளில் முட்டாத வாரின் நீளத்தை அறிக.

* 7. இரு சமமான வட்டங்கள் (ஆரம் = 3″) ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. அவையிரண்டையும் சுற்றி இணைக்கும் கயிற்றின் நீளமென்ன?

** 8. 2″, 3″ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்களின் மையங்கள் 6″ தூரத்திலுள்ளன. அவற்றைச் சுற்றி இணைக்கும் கயிற்றின் நீளமென்ன?

** 9. 3″, 4″ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்களின் மையங்கள் 8″ தூரத்திலுள்ளன. அவ்வட்டங்களை '8' என்ற இலக்கத்தைப்போலச் சுற்றிவரும் கயிற்றின் நீளமென்ன?

அப்பியாசம்—57 (iii) நிறுவுதல்

1. இரு வட்டங்களின் நேர்ப் பொதுத் தொடுவரைகள் சமநீளமுள்ளன எனக் காட்டுக.

2. இரு வட்டங்களின் மாறு பொதுத் தொடுவரைகள் சமநீளமுள்ளன வெனக் காட்டுக.

3. இரு வட்டங்களின் நேர்ப் பொதுத்தொடுவரை, மையங்களை இணைக்கும் வரையிலும் பார்க்க நீளத்திற் கூடாதெனக் காட்டுக.

4. இரு வட்டங்களின் மாறு பொதுத் தொடுவரை மையங்களை இணைக்கும் வரையிலும் பார்க்க நீளத்திற் கூடாதெனக் காட்டுக.

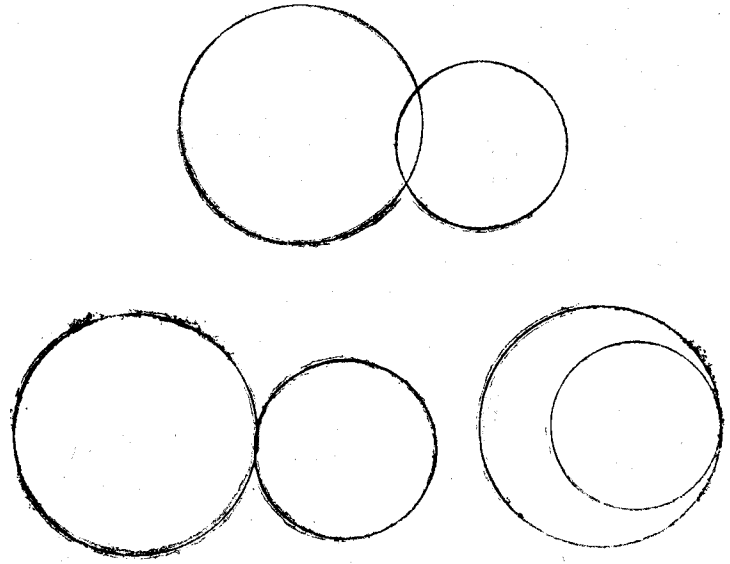
5. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன, தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் பொதுத் தொடுவரை நேர்ப் பொதுத் தொடுவரையை இரு சமகூறாகப் பிரிக்கும் எனக் காட்டுக.

6. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடும் போது, தொடுபுள்ளியிலே நேர்ப் பொதுத் தொடுவரை யொன்று ஏந்துவது செங்கோணமெனக் காட்டுக.

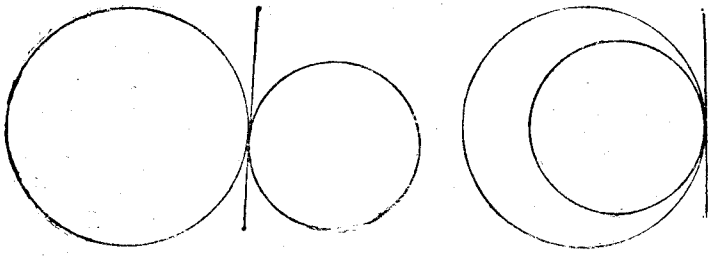
7. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. CD அவ் வட்டங்களுக்கு ஒரு பொதுத் தொடுவரை. Aயிலும் Bயிலும் CD ஏந்தும் கோணங்கள் சேர்ந்து 180° எனக் காட்டுக.

51. தொடு வட்டங்கள்

§1. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் போது வெட்டுப் புள்ளிகள் இரண்டுண்டு. அவ் வெட்டுப் புள்ளிகள் இரண்டும் ஒன்றுகூடுமாயின் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும். இவ்வாறு இரு வட்டங்கள் தொடும்போது அவை வெளிப்புறமாகவும் தொடலாம், உட்புறமாகவும் தொடலாம்.

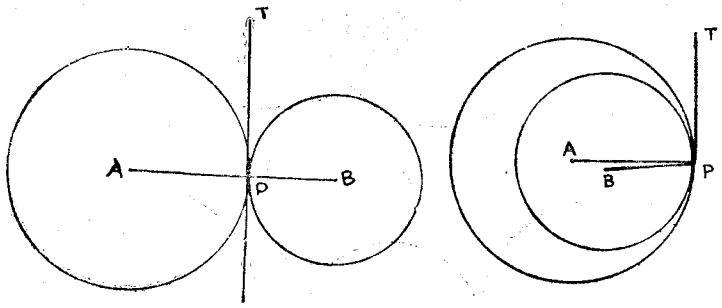


இரு வட்டங்கள் (எவ்வகையாகவேனும்) தொடும்போது தொடுபுள்ளியில் இரு வட்டங்களுக்கும் பொதுவான தொடுவரை ஒன்றுண்டு என்பது வெளிப்படை.



சூத்திரம் 33

§2. **பொதுவிலக்கணம் -** இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடும்போது வட்டமையங்களும் தொடு புள்ளியும் ஒரு நேரில் இருத்தல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - A, B இரண்டும் இரு தொடு வட்டங்களின் மையங்கள்.

P தொடுபுள்ளி.

கேள்வி - A, B, P மூன்றும் ஒரே நேரில் உள்ளன என்பது.

ஆக்கம் - தொடு புள்ளியில் பொதுத் தொடுவரை PT கீறப்படட்டும். AP, BP இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - ஒரு வட்டத்தில் AP ஆரம்; PT தொடுவரை.

$$\therefore AP \perp PT$$

இவ்வாறே, $BP \perp PT$.

அதாவது, AP, BP இரண்டும் ஒரே வரைக்கு (PT) ஒரேயிடத்திற் (P) செங்குத்தாக உள்ளன.

∴ AP, BP இரண்டும் ஒரு நேர் வரையில் இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, A, B, P மூன்றும் ஒரு நேரில் உள்ளன என்றவாறு.

§3. ஷை சூத்திரத்திலிருந்து பின்வருவன இலகுவிற் பெறப்படும்.

(அ) இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடும் போது, மையங்களின் இடைத்தூரம் = ஆரங்களின் கூட்டுத்தொகை.

(ஆ) இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடும்போது மையங்களின் இடைத்தூரம் = ஆரங்களின் வித்தியாசம்.

(இ) ஒரு வட்டத்தை (மையம் O) ஓரிடத்தில் (P) தொடும் வட்டங்கள் எல்லாவற்றின் மையங்களும் O, P இரண்டுக் கூடாகவும் செல்லும் நேர்வரையிலுள்ளன.

(ஈ) ஒரு வட்டத்தை (மையம் O, ஆரம் R) வெளிப்புறமாகத் தொடும் ஒரே யளவான ஆரமுள்ள (r) பல வட்ட மையங்களின் படுக்கை R+r ஆரமாகவுள்ள ஏக மைய (O) வட்டமாகும்.

(உ) ஒரு வட்டத்தை (மையம் O, ஆரம் R) உட்புறமாகத் தொடும் ஒரேயளவான ஆரமுள்ள (r) பல வட்ட மையங்களின் படுக்கை R − r ஆரமாகவுள்ள ஏக மைய (O) வட்டமாகும்.

இவை, பலவகையாக வட்டங்களை அமைப்பதிற் பயன்படும்.

அப்பியாசம் — 58 (i) வரைதல்

1. 2·3″ தூரத்தில் இரண்டு புள்ளிகள் A, B குறித்து, Aயை மையமாக 1·1″ ஆரமுடைய வட்ட மொன்று கீறுக. இவ் வட்டத்தை **வெளிப்புறமாகத்** தொடும்படியும் Bக் கூடாகச் செல்லும்படியும் 1·8″ ஆரமுள்ள வட்ட மொன்று கீறுக. எத்தனை வட்டங்கள் கீற முடியும்?

2. 2″ தூரத்தில் இரண்டு புள்ளிகள் A,B குறித்து, Aயை மையமாக 1″ ஆரமுடைய வட்ட மொன்று கீறுக. இவ் வட்டத்தை **உட்புறமாகத்** தொடும்படியும் Bக் கூடாகச் செல்லும்படியும் 1·7″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறுக. எத்தனை வட்டங்கள் கீறமுடியும்?

3. இரண்டு வட்டங்களது மையங்களின் இடைத் தூரம் 2″; வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 1·3″, 0·8″. இவ் விரு வட்டங்களையும் கீறி அவற்றை **வெளிப்புறமாகத்** தொடும்படி 1″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. எத்தனை வட்டங்கள் கீறலாம்?

4. இரண்டு வட்டங்களது மையங்களின் இடைத் தூரம் 1·8″; வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 1·2″, 0·9″. இவ் விரு வட்டங்களையும் கீறி அவற்றை **உட்புறமாகத்** தொடும்படி 2·3″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. எத்தனை வட்டங்கள் கீறலாம்?

5. இரண்டு வட்டங்களது மையங்களின் இடைத் தூரம் = 2·5″; வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 1″, 0·8″. இவ் வட்டங்களைக் கீறி, இவற்றுட் பெரிய வட்டத்தை வெளிப்புறமாகவும் சிறிய வட்டத்தை உட்புறமாகவும் தொடும்படி 1·5″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறுக. எத்தனை கீறலாம்?

6. 1·2″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறி அதற்கு ஒரு தொடுவரை கீறுக. அவ் வட்டத்தையும் தொடுவரையையும் தொடும்படி 0·8″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறுக. எத்தனை கீறலாம்?

* 7. இரண்டு வட்டங்களது மையங்களின் இடைத் தூரம் 2·4″; வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 0·6″, 0·8″. இவ் வட்டங்களைக் கீறி அவற்றைத் தொடக்கூடிய 1·2″ ஆரமுள்ள வட்டங்கள் எல்லாவற்றையும் கீறுக.

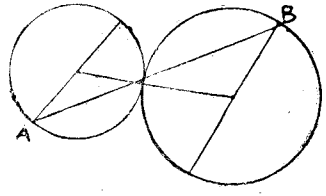
* 8. 1″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திலே ஒரு விட்டம் கீறி நீட்டுக. வட்டத்தையும் விட்டத்தையும் தொடக்கூடிய 0·7″ ஆரமுள்ள வட்டங்கள் எல்லாவற்றையும் கீறுக.

* 9. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி. ∠B = செங்கோணம். AB = 2″, BC = $2\frac{1}{2}$″. Aயை மையமாக 1″ ஆரமுள்ள வட்ட மொன்று கீறுக. இவ் வட்டத்தைத் தொடும்படியும் BCயை Cயில் தொடும்படியும் இரு வட்டங்கள் கீறுக. வட்டங்களின் ஆரமென்ன?

** 10. குறித்த ஒரு வட்டத்தையும், குறித்த ஒரு நேர்வரையிற் குறித்த ஒரு இடத்தையும் தொடும்படி எவ்வாறு ஒரு வட்டம் கீறலாம்?

அப்பியாசம்—58 (ii) நிறுவுதல்

1. இரு வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. தொடு புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் நேர்வரை யொன்று வட்டங்களை Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றது. A, B இரண்டுக் கூடாகவும் செல்லும் விட்டங்கள் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.



2. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடுகின்றன. தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் நேர்வரை யொன்று ஒரு வட்டத்தை Aயிலும் மற்றைய வட்டத்தை Bயிலும் சந்திக்கின்றது. A, B இரண்டுக்கூடாகவும் செல்லும் விட்டங்கள் சமாந்தரமானவை எனக் காட்டுக.

3. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாக Aயிற் தொடுகின்றன. BC ஒரு பொதுத் தொடு வரை — தொடுபுள்ளிகள் Bயும் Cயும். ∠BAC செங்கோணமெனக் காட்டுக.

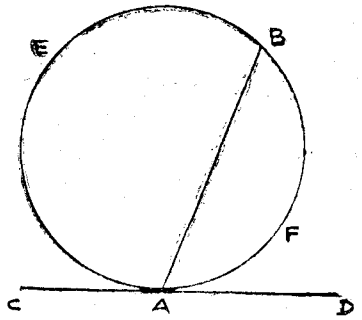
4. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாக Aயிற் தொடுகின்றன வட்டங்களின் மையங்கள் X, Y. ஒரு பொதுத் தொடுவரை முதல் வட்டத்தை Bயிலும் இரண்டாம் வட்டத்தை Cயிலும் தொடுகின்றது. இப் பொதுத் தொடுவரையும் Aயிலுள்ள பொதுத் தொடுவரையும் Dயில் சந்திக்கின்றன. ∠XDY செங்கோணமெனக் காட்டுக.

* 5. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக Aயிற் தொடுகின்றன. ஒன்றின் விட்டம் மற்றையதன் விட்டத்திலும் இரு மடங்கு. Aக் கூடாகச் செல்லும் நாணொன்று வட்டங்களை Bயிலும் Cயிலும் சந்திக்கிறது. AB = BC எனக் காட்டுக.

* 6. வெளிப்புறமாகத் தொடும் இரு வட்டங்கள், ஒவ்வொன்றும் வேறொரு வட்டத்தை உட்புறமாகத் தொடுகின்றன. மூன்று மையங்களையும் இணைக்கப் பிறக்கும் முக்கோணியின் சுற்றளவு பெரிய வட்டத்தின் விட்டத்துக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

52. அயற் கண்டங்கள்

§1. வட்டத்தின் நாணொன்று அவ் வட்டத்தை இரு கண்டங்களாகப் பிரிக்கும். நாணின் ஒரு நுனியிற் தொடுவரை யொன்று கீறினால் இரண்டு கோணங்கள் பிறக்கும். ஆகவே, நாணின் ஒரு பக்கத்தில் ஒரு கண்டமும் ஒரு கோணமும், மற்றைப் பக்கத்தில் இரண்டாம் கண்டமும் இரண்டாம் கோணமும் வரும். ஒரு பக்கத்திலுள்ள கோணமும் மற்றைப் பக்கத்திலுள்ள கண்டமும் மிக நெருங்கிய தொடர்புடையன. ஆகையால் அவை தொடர்புபடுத்தி அழைக்கப்படும்.



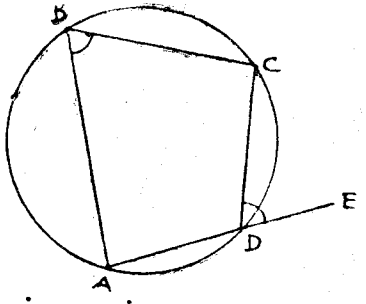
கண்டம் AEB கோணம் BADயின் **அயற் கண்டம்** எனப்படும்.

கண்டம் AFB கோணம் BACயின் **அயற் கண்டம்** எனப்படும்.

தொடுவரைக்கும், தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் நாணுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் அயற்கண்டத்திலுள்ள கோணத்துக்குச் சமமாகும் என்பது அடுத்த சூத்திரம்.

அதாவது, (i) $\angle BAD = \angle AEB$
(ii) $\angle BAC = \angle AFB$

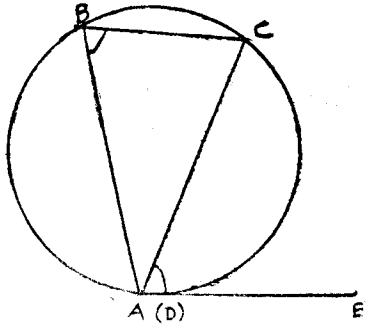
§2. இவ் வுண்மையை இலகுவில் உணரக்கூடிய வழியொன்றுண்டு. வட்ட நாற்புயமொன்றின் வெளிக்கோணம், எதிராக உள்ள உட்கோணத்துக்குச் சமமென்பது உங்களுக்குத் தெரியும். அதாவது, $\angle CDE = \angle A$. புள்ளிகள் A, D இரண்டும் ஒன்றாகும் போது நாற்புயம் முக்கோணியாகவும், ஒரு புயம் தொடுவரையாகவும் மாறும்.



அதாவது, $\angle CAE = \angle B$.

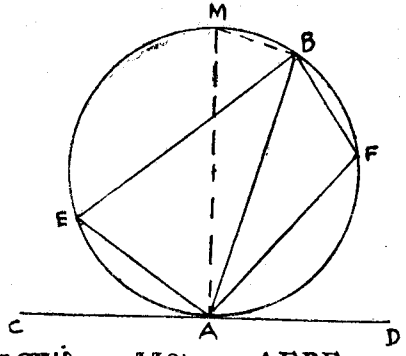
இங்கு, AE தொடுவரை; AC நாண்.

அடுத்த சூத்திரத்தில் இதே உண்மை வேறு விதமாக நிரூபிக்கப்படும்.



சூத்திரம் 34

§3. **பொதுவிலக்கணம் -** ஒரு வட்டத்திலே ஒரு தொடுவரைக்கும், தொடுபுள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் நாணுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் அயற்கண்டத்திலுள்ள கோணத்துக்குச் சமமாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - AEBF ஒரு வட்டம். CAD ஒரு தொடுவரை. AB ஒரு நாண்.

கேள்வி - (i) $\angle BAD = \angle AEB$
(ii) $\angle BAC = \angle AFB$ என்பது.

ஆக்கம் - விட்டம் AM கீறப்பட்டு, MB இணைக்கப்படட்டும்.

நிருபணம் - $\angle DAB + \angle BAM = 90^\circ$ (MA ⊥ AD)
$\angle BMA + \angle BAM = 90^\circ$ (△ BMA செங்கோணமுடையது)

$\therefore \angle DAB = \angle BMA.$

ஆனால், $\angle BMA = \angle BEA$ (ஒரேகண்டத்திலுள்ளன)

$\therefore \angle DAB = \angle BEA.$ — — — (i)

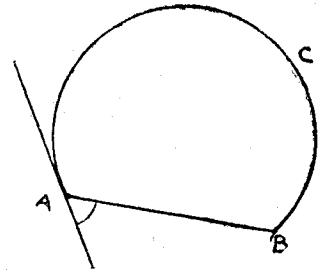
$\angle DAB + \angle BAC = 180^\circ$ (அயற்கோணங்கள்)

$\angle AMB + \angle AFB = 180^\circ$ (AMBF வட்ட நாற்புயம்)
இவற்றில்

$\angle DAB = \angle AMB$ (நிரூபிக்கப்பட்டது)

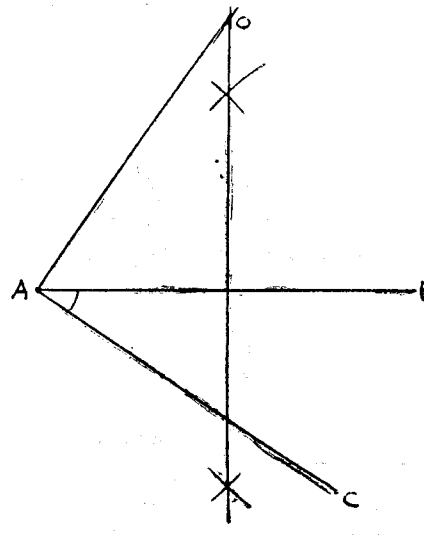
$\therefore \angle BAC = \angle AFB$ — — — — (ii)
என்றவாறு.

§4. குறித்த ஒரு நேர்வரையின்மீது குறித்த ஒரு கோணத்தை உடைய கண்டத்தை ஆக்கும் முறை முன் விளக்கப்பட்டது. (அதி. 45, § 8 பார்).



ஈண்டு வேறொருவழி விளக்கப்படும்.

தேவைப்பட்ட கண்டம் ACB என்க. இது ஒரு வட்டப் பகுதி யாகையால், இதை வரைதற்கு வட்டத்தின் மையமும் ஆரமும் அறியவேண்டும்.



கண்டத்திலுள்ள கோணம் நாணுக்கும் தொடுவரைக்குமிடையிலுள்ள கோணத்துக்குச் சமமாகும். ஆகவே தொடுவரை தெரிந்த வாறுகண்டுகொள்க தொடுவரையின் செங்குத்தில் மையமுண்டு.

இனி, நாணின் நடுச் செங்குத்து வரையிலும் மையம் இருத்தல் வேண்டும்.

எனவே, ஆக்கவழி பின் வருமாறு :-

(i) ABயின் ஒரு நுனியிற் குறித்த கோணத்தை வரைக. (∠BAC).

(ii) ACக்கு Aயிற் செங்குத்துக் கீறுக.

(iii) ABயின் நடுச் செங்குத்து வரையைக் கீறுக.

வட்ட மையம் O; ஆரம் OA.

அப்பியாசம் — 59 (i) வரைதல்

1. 2″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறி அதில் 70° கோணமுள்ள ஒரு கண்டம் பிறக்கும்படி ஒரு நாண் வரைக. நாணின் நீளமென்ன?

2. 2·3″ ஆரமுள்ள வட்டமொன்று கீறி அதில் 120° கோணமுள்ள ஒரு கண்டம் பிறக்கும் படி ஒரு நாண் வரைக. நாணின் நீளமென்ன?

3. 2·5″ நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்று கீறி அதை நாணாக உடையதும் 50° கோணமுடையதுமான ஒரு கண்டம் கீறுக.

* 4. பீடம் 6 செ. மீ., உயரம் $3\frac{1}{2}$ செ. மீ., உச்சிக் கோணம் 55° கொண்ட முக்கோணி யொன்று வரைக. முக்கோணியின் மிகப் பெரிய கோணம் எத்தனை பாகை?

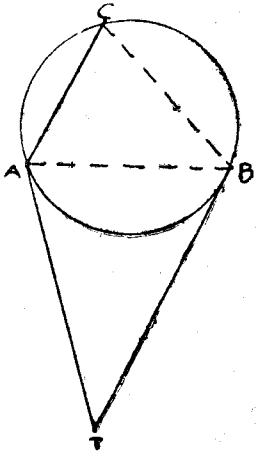
* 5. OA (=3″), OB (=2″) இரண்டும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான இரு நேர்வரைகள். OA 130° கோணத்தையும், OB 80° கோணத்தையும் ஏந்தும் புள்ளி (P) யின் நிலையத்தை அறிக. OPயின் நீளமென்ன?

** 6. 10, 11, 12 செ. மீ. நீளமுள்ள புயங்களை யுடைய முக்கோணிக்குள்ளே மூன்று புயங்களும் சமகோணங்களை ஏந்தி நிற்கும் புள்ளியின் நிலையத்தை வரைந்தறிக.

** 7. ஒரு கோணம் 85 பாகையாகவும் மூலைவரைகள் முறையே 3″, 2″ நீளமுள்ளனவாகவும் ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம் வரைக. புயங்களின் நீளத்தை அளந்தறிக.

அப்பியாசம் — 59 (ii) கணித்தல்

1. TA, TB ஒரு வட்டத்துக்குள்ள இரு தொடு வரைகள். AC ஒரு நாண்; AC∥TB. ∠T = 44°. △ABCயின் கோணங்களை அறிக.



2. ABC ஒரு △. ∠A=50°, ∠B=60°, ∠C=70°. முக்கோணியின் சுற்று வட்டத்துக்கு A,B,C மூன்றிடங்களிலும் தொடுவரைகள் கீறப் பிறக்கும் பெரிய முக்கோணியின் மூன்றுகோணங்களையும் அறிக.

3. ஒரு வட்டத்திலே TA, TB இரு தொடு வரைகள். ∠ATB=20°. வட்டத்தில் Tக்கு எதிரான பக்கத்திலே P ஒரு புள்ளி. ∠APB எத்தனை பாகை?

4. ABC ஒரு △. XAY சுற்று வட்டத்திலே Aயிலுள்ள தொடுவரை. ∠CAYயின் சம வெட்டி வட்டத்தை Kயில் சந்திக்கிறது

$\angle CAY = 70°$. AC, BK இரண்டும் 80 பாகையில் வெட்டுகின்றன. $\angle CAB$, $\angle CBK$, $\angle AKB$ ஒவ்வொன்றும் எத்தனை பாகை?

* 5. ஒரு வட்டத்திலே AB ஒரு நாண், AT ஒரு தொடுவரை. $\angle BAT = 30°$. நாணின் நீளம் 1″ ஆயின் வட்டத்தின் ஆரம் எவ்வளவு?

* 6. ஒரு வட்டத்தைச்சுற்றி PQRS என ஒரு நாற்புயவடிவமுண்டு. புயங்கள் PQ, QR, RS, SP வட்டத்தைத் தொடுமிடங்கள் முறையே A, B, C, D ஆகும். $\angle P = 100°$; $\angle R = 120°$. AB, DC இரண்டும் நீண்டு Eயில் சந்திக்குமாயின் $\angle E$ எத்தனை பாகை?

* 7. ABCDE வட்டமொன்றில் அமைந்த ஒழுங்கான ஐம்புய வடிவம். Aயிலுள்ள தொடுவரையும் CBயும் F இல் சந்திக்குமாயின் AF = BC எனக் காட்டுக.

அப்பியாசம் — 59 (iii) நிறுவுதல்

1. ABC ஒரு △. சுற்றுவட்டத்துக்கு Cயிலுள்ள தொடுவரை AB க்குச் சமாந்தரமாயின் AC = BC எனக் காட்டுக.

2. ஒரு வட்டத்திலே, AB ஒரு நாண்; C சுற்றுவரையில் ஒரு புள்ளி. C யிலுள்ள தொடுவரையும் AB யும் சமாந்தரமாயின், வில் AC = வில் BC எனக் காட்டுக.

3. ABC ஒரு △; AB = BC. A க் கூடாகவும், BC யை B யில் தொடும்படியும் செல்லும் வட்டத்தை CA, (தேவையாயின் நீண்டு) D யில் சந்திக்கிறது. BD = BC எனக் காட்டுக.

4. ஒரு வட்டத்திலே TC ஒரு தொடுவரை; TAB ஒரு வெட்டுவரை. $\angle BCT = \angle CAT$ எனக் காட்டுக.

5. ஒரு வட்டத்திலே BC ஒரு நாண்; BA ஒரு தொடுவரை. கோணம் ABC யின் சமவெட்டி வட்டத்தை D யில் சந்தித்தால், CD = DB எனக் காட்டுக.

6. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக A யிற் தொடுகின்றன. A க் கூடாகச் செல்லும் இரு நேர்வரைகள் ஒரு வட்டத்தை P, R ஆகிய இரண்டிடங்களிலும் மறு வட்டத்தை Q, S ஆகிய இரண்டிடங்களிலும் சந்திக்கின்றன. PR ∥ QS எனக் காட்டுக.

7. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக A யிற் தொடுகின்றன. A க் கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்வரை வட்டங்களை P யிலும் Q விலும் சந்திக்கின்றன. PM, QM ஆகிய இரு நேர்வரைகள் வட்டங்களை முறையே X இலும் Y யிலும் சந்திக்கிறன. M, X, A, Y நான்கும் ஒரே வட்டத்தில் அமைவன எனக் காட்டுக.

8. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக A யிற் தொடுகின்றன. ஒரு நேர்வரை பெரிய வட்டத்தை P யிலும் Q விலும், சிறிய வட்டத்தை R இலும் S இலும் சந்திக்கின்றது. $\angle PAR = \angle QAS$ எனக் காட்டுக.

9. ஒரு வட்டத்திலே TA ஒரு தொடுவரை; TBC ஒரு வெட்டுவரை. கோணம் BACயின் சமவெட்டி BCயை Qவில் சந்திக்கிறது. TA = TQ எனக் காட்டுக.

*10. O ஒரு வட்டத்தின் மையம்; AOB ஒரு விட்டம். வட்டத்திலே C ஒரு புள்ளி. CN தொடுவரை. AN ⊥ CN. ∠NAC = ∠BAC எனக் காட்டுக.

*11. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாக Aயிற் தொடுகின்றன. பெரிய வட்டத்தின் நாண் (BC) ஒன்று சிறிய வட்டத்துக்குத் தொடுவரையாகிறது (Dயில்). ∠BAD = ∠CAD எனக்காட்டுக.

*12. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. PQ பொதுத் தொடுவரை. ∠PAQ + ∠PBQ = 180° எனக் காட்டுக.

*13. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. Aக்கூடாகச் செல்லும் நேர்வரையொன்று ஒரு வட்டத்தை Pயிலும் மறு வட்டத்தை Qவிலும் சந்திக்கிறது. P, Q இரண்டிலுமுள்ள தொடுவரைகள் Tயில் சந்திக்கின்றன. T, P, B, Q நான்கும் ஒரே வட்டத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

*14. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். மூலை வரைகள் Eயில் சந்திக்கின்றன. △ABEயின் சுற்று வட்டத்துக்கு Eயிலுள்ள தொடுவரை CDக்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

*15. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. P ஒரு வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. PA, PB இரண்டும் நீண்டு மறு வட்டத்தை முறையே Cயிலும் Dயிலும் சந்திக்கின்றன. Pயிலுள்ள தொடுவரையும் CDயும் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

*16. ஒரு வட்டத்திலே PQ ஒரு தொடுவரை; PAB ஒரு விட்டம். PABயை Bயில் தொடும்படி Qவுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டம் PQவை மீண்டும் Rஇல் சந்திக்கின்றது. BR, AQ இரண்டும் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

*17. ஒரு வட்டத்திலே AB, AC இரு நாண்கள். Aயிலுள்ள தொடுவரைக்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் நேர்வரையொன்று ABயை Xஇலும், ACயை Yயிலும் சந்திக்கின்றது. B, C, X, Y நான்கும் ஒரே வட்டத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

**18. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். மூலைவரைகள் Eயில் சந்திக்கின்றன. முக்கோணிகள் ABE, CDE இரண்டின் சுற்றுவட்டங்களும் Xஇல் தொடுவன எனக் காட்டுக.

**19. ABC ஒரு △; O உள்வட்ட மையம். AB, AC இரண்டும் உள்வட்டத்தை முறையே Dயிலும் Eயிலும் தொடுகின்றன. AO உள்வட்டத்தை Iயில் சந்திக்கிறது. △ADEயின் உள்வட்ட மையம் I எனக் காட்டுக.

**20. ஒரு வட்ட நாற்புயத்தில் ஒரு வட்டம் அமைக்கக் கூடுமாயின் எதிரான தொடு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்வரைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாதல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

**21. ABC ஒரு △. TAS முக்கோணியின் சுற்று வட்டத்துக்குத் தொடுவரை. கோணங்கள் TAB, SAC இரண்டின் சமவெட்டிகளும் Cயிலுள்ள உட்கோண வெளிக்கோணச் சமவெட்டிகளும் சுற்றுவட்டத்தின் விட்டமொன்றின் அந்தங்களிலே சந்தித்தல் வேண்டும் எனக் காட்டுக.

**22. TA, TB ஒரு வட்டத்தில் இரு தொடுவரைகள். AC ஒருவிட்டம். ∠T = 2∠CABஎனக்காட்டுக.

**23. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாக Aயிற் தொடுகின்றன. ஒரு வட்டத்தின் நாணொன்று (PQ) நீண்டு மறு வட்டத்துக்குத் தொடுவரையாகிறது (Rஇல்). Tயிலுள்ள வெளிக்கோணத்தை RTஇரு சமகூறுக்குகிறதெனக் காட்டுக.

மீட்டல் அப்பியாசங்கள்

XVII

1. இரு வட்டங்கள் ABP, ABQ ஒன்றையொன்று Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. C வட்டமையங்களுக்கு நடுவிலுள்ள புள்ளி. CBக்குச் செங்குத்தாக PBQ கீறப்பட்டால் PB=BQ எனக்காட்டுக.

2. ABC ஒரு முக்கோணி. BC=6 செ. மீ., AC=4·2 செ. மீ., AB=5·4 செ. மீ. முக்கோணியைக் கீறி A, B, C மூன்றிலுமிருந்து எதிர்ப் புயங்களுக்குச் செங்குத்துகள் கீறுக. செங்குத்துகள் ஒவ்வொன்றையும் அவ்வளவு நீட்டுக. முறையே X, Y, Z வரையும். வட்டங்கள் ABZ, BCX, CAY மூன்றின் மையங்களையும் கண்டு அவற்றின் இடைத்தூரங்களை அளந்தறிக.

3. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் சுற்று வட்டத்துக்கு BTஒரு தொடுவரை. ADEF இரண்டாவதொரு வட்டம்; இது முதல் வட்டத்தை உட்புறமாக Aயிலும், நாண் BCயை Dயிலும் தொடுவதோடு, AB, AC இரண்டையும் முறையே Eயிலும் Fஇலும் வெட்டுகிறது. DE, DF இணைக்கப்படுகின்றன.

∠CBT=∠EDB+∠FDC எனக் காட்டுக.

[வட்டம் AEDFஉம் புள்ளி Tயும் BCயின் எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ளன.]

4. ஒரு முக்கோணி ABCயின் சுற்றுவட்டத்துக்கு Bயிலும் Cயிலுமுள்ள தொடுவரைகள் Oவில் சந்திக்கின்றன. O மையமாகவும் OB அல்லது OC ஆரமாகவுமுடைய வட்டம் ACயை (நீட்டியபின்) Qவில் சந்திக்கிறது. QO இணைக்கப்பட அது ABயை Rஇல் சந்திக்கிறது. புள்ளி R வட்டம் BCQவிலுள்ளதெனக் காட்டுக.

5. 1·5" ஆரமுள்ள ஒருவட்டம் கீறி அதன் மையத்திலிருந்து 3" தூரத்தில் ஒரு நேர்வரை கீறுக. இவ் வட்டத்தையும் நேர்வரையையும் தொடும்படி 1" ஆரமுள்ள வட்டமொன்று வரைக.

XVIII

1. ஒரு வட்டத்துக்கு வெளியாகவுள்ள புள்ளியொன்றிலிருந்து இரு நேர்வரைகள் OAB, OCD கீறப்படுகின்றன. அவை வட்டத்தை வெட்டுமிடங்கள் A, B, C, D ஆகும்.

∠OAD=∠OCB எனக் காட்டுக.

2. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. பொதுவான நாண் ABயிலுள்ள ஏதுமொரு புள்ளிக்கூடாக இரு நேர்வரைகள் கீறப்படுகின்றன. ஒன்று முதல் வட்டத்தை Pயிலும் Qவிலும் மற்றையது இரண்டாம் வட்டத்தை Rஇலும் Sஇலும் வெட்டுகிறது. PQR ஆகிய வட்டத்தில் S உள்ளதெனக் காட்டுக.

3. 4 செ. மீ. ஆரமுள்ள வட்டமொன்றுகீறி அதற்குள் ஓழுங்கான அறுகோணியொன்று வரைக. இந்த அறுகோணியின் ஆறு மூலைகளும் A, B,

C, D, E, F ஆகட்டும். AD, BF இரண்டும் வெட்டுமிடம் O. அறுகோணியின் பரப்பு= FB, OD எனக் காட்டுக.

4. ABC ஒரு முக்கோணி. BCயில் D ஒரு புள்ளி. முக்கோணிக்குள் O ஒரு புள்ளி. ODB ஆகிய வட்டம் ABயை வெட்டுமிடம் L; ODC ஆகிய வட்டம் ACயை வெட்டுமிடம் M. A, L, O, M ஒரு வட்டத்திலுள்ளனவெனக் காட்டுக.

5. 4″ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8″ தூரத்திலுள்ள புள்ளியொன்று T. இப் புள்ளியிலிருந்து வட்டத்துக்குக் கீறப்படும் தொடுவரைகள் TA, TB ஆகும். ABயின் நீளத்தைக் கணித்தறிக.

XIX

1. ஒரு வட்டத்தில் APB ஒரு பருவில்; AB ஒரு நாண். இவ் வட்டத்தின் மையத்துக் கூடாக வேறொரு வட்டத்தின் வில் AQB செல்கிறது. AQBயிலுள்ள ஏதுமொரு புள்ளியில் AB ஏந்தும் கோணம் APBயிலுள்ள ஏதுமொரு புள்ளியில் AB ஏந்தும் கோணத்திலும் இருமடங்கெனக் காட்டுக.

2. 7·8 செ. மீ., 9·6 செ. மீ., 11 செ. மீ., நீளப் புயங்களையுடைய முக்கோணியொன்று கீறுக. அதன் உள்வட்ட மையத்தை வரைந்தறிக. முக்கோணியின் ஒவ்வொருபுயத்திலும் 4 செ.மீ. நீளமுள்ள நாணை வெட்டக்கூடிய ஒரு வட்டம் வரைக. அவ் வட்டத்தின் ஆரமென்ன?

3. 3·6 செ. மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறுக. வட்ட மையத்திலிருந்து 6 செ. மீ. தூரத்தி

லுள்ள ஒரு புள்ளி Pயிலிருந்து ஒரு தொடு வரை கீறுக. தொடுவரையின் நீளத்தைக் கணித்தறிக.

4. 30° அளவுள்ள கோணமொன்று AOB கீறுக. OAயில் இரு புள்ளிகள் P, Q குறிக்கவேண்டும். OP=4 செ. மீ., OQ=9 செ. மீ., P, Q இரண்டுக் கூடாக, OBயைத் தொடும்படி வட்டம் வரைக. அவ் வட்டம் OBயை Tயில் தொடுமாயின், முக்கோணிகள் OPT, OTQ இரண்டும் சமகோணங்களையுடையன எனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு முக்கோணி. அதன் சுற்று வட்ட மையம் O. ACயின் நடுப்புள்ளி E; ABயின் நடுப்புள்ளி F. EO, FO இரண்டும் AB, AC இரண்டையும் சந்திக்குமிடங்கள் முறையே X, Y ஆகும். B, C, X, Y நான்கும் ஒரே வட்டத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

XX

1. ஒன்றுக்கொன்று சமமில்லாத இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன. ஒரு நேர் வரை ஒரு வட்டத்தை Aயிலும் மற்றையதை Bயிலும் தொடுகிறது. இரு வட்டங்களும் தொடுமிடத்திலுள்ள பொதுத் தொடுவரை ABயை இரு சமகூறாகப் பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

2. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். Aயிலிருந்து செல்லும் இரு நேர்வரைகள் ACD, AEF வட்டத்தை Cயிலும் Eயிலும், Bயிலுள்ள தொடு வரையை Dயிலும் Fஇலும் வெட்டுகின்றன. C, D, F, E நான்கும் ஒரே வட்டத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

3. ABC ஒரு முக்கோணி. AB = 3″, BC = 2·5″, CA = 1·8″. முக்கோணியை வரைக.

அடிமட்டத்தையும் வட்டமிடு கருவியையும் மாத்திரம் உபயோகித்து பின்வரும் அளவுகளுக்கிணங்க ஒரு முக்கோணி ABD வரைக:—

∠ABD = ∠BAC ; ∠BAD = ∠ABC ; D, C இரண்டும் ABயின் ஒரே பக்கத்திலிருத்தல் வேண்டும்.

ஆக்கம் சரியென்பதற்கு நியாயம் காட்டுக.

முக்கோணி ABCயின் சுற்று வட்டத்தையும் கீறுக.

4. ABC ஒரு வட்டத்திலுள்ள முக்கோணி. Aயிலுள்ள வெளிக்கோணச் சமவெட்டி வட்டத்தை மீண்டும் Dயில் சந்திக்குமாயின், DB = DC எனக் காட்டுக.

5. OAB, OCD இரு நேர்வரைகள்; இடைக்கோணம் 60°. OA = 4 செ. மீ. AB = 5 செ. மீ. CDயில் AB 35° கோணத்தை ஏந்தக்கூடிய புள்ளிகளை அறிக.

XXI

1. ABCD ஒரு வட்டத்தில் அமைந்த நாற்புயம். முக்கோணிகள் ABC, ABD இரண்டும் பரப்பில் சமமாயின், அவை சர்வசமமெனக் காட்டுக.

2. ABC வட்டமொன்றிலுள்ள சமபுயமுக்கோணி. O வட்ட மையம். முக்கோணி OBCயின் சுற்று வட்டமும் முதல் வட்டமும் சமமானவையெனக் காட்டுக.

3. ABC ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணி. A, B இரண்டிலுமிருந்து எதிர்ப் புயங்களுக்குச் செல்லும் செங்குத்து வரைகள் சந்திக்குமிடம் H ஆயின், ∠AHB, ∠C இரண்டும் நீட்டுங் கோணங்கள் எனக் காட்டுக.

4. ABCD ஒரு நீள்சதுரம். ABயில் X ஏதுமொரு புள்ளி. DAக்குச் செங்குத்தாக DY கீறப்பட, அதை BC நீண்டு Yயில் சந்திக்கிறது. XYயின் நடுப்புள்ளி Vஆயின், VB = VD எனக் காட்டுக. ABயிலுள்ள புள்ளியின் நிலையம் மாற, Vயின் படுக்கை எதுவாகும்?

5. AB ஒரு நேர்வரை; நீளம் 10 செ. மீ. வேறொரு நேர்வரைக்கு Aயிலிருந்து செங்குத்துவரை 3 செ. மீ. நீளமும் Bயிலிருந்து செங்குத்துவரை 4 செ. மீ. நீளமுமாயின், அந் நேர்வரையைக் கீறுக.

XXII

1. ஒரு வட்டத்தின் மையம் A. வட்டத்துக்குள் P ஒரு புள்ளி. Pக்கூடாகச் செல்லும் நாண்கள் எல்லாவற்றினது நடுப்புள்ளிகளின் படுக்கை APயை விட்டமாகவுடைய வட்டமெனக் காட்டுக.

2. 35° அளவுள்ள கோணமொன்று AOB கீறுக. புயம் OAயில் OX = 2 செ. மீ., OY = 7 செ. மீ. நீளங்களை வெட்டுக, OBயில் XY 60° கோணத்தை ஏந்தும் புள்ளிகளைப் பெறுக.

3. இரு வட்டங்கள் ABC, ADE உட்புறமாக Aயில் தொடுகின்றன. Aக்கூடாக இரு நேர்வரைகள் ABD, ACE கீறப்படுகின்றன. அவை வட்டங்களைச் சந்திக்குமிடங்கள் B, D, C, E ஆகும். BC ∥ DE எனக் காட்டுக.

4. ABC ஒரு முக்கோணி. ABயை Bயில் தொடும் வட்டமொன்று BCயை Xஇலும் முக்கோணியின் சுற்றுவட்டத்தை Pயிலும் வெட்டுகிறது. C, X, P மூன்றுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டம் ACயை Cயில் தொடுமெனக் காட்டுக.

5. X ஒரு வட்டத்தின் மையம்; A, B சுற்றுவரையிலுள்ள இரு புள்ளிகள். Aக்கூடாகச் செல்லும் நேர்வரை யொன்று மீண்டும் அவ் வட்டத்தை Pயிலும், A, X, B மூன்றுக் கூடாகச் செல்லும் வட்டத்தை Qவிலும் சந்திக்கிறது.

QB=QP எனக் காட்டுக.

XXIII

1. ABC ஒரு முக்கோணி. அதில் AB=6 செ. மீ., BC=7 செ. மீ., ∠A=55°. முக்கோணியைக் கீறி அதன் சுற்றுவட்டத்தையும் கீறுக. வட்டவிட்டத்தின் நீளமென்ன?

2. ஒன்றின் மையம் மற்றையதின் சுற்றுவரையிலுள்ளதாக இரு வட்டங்கள் அமைந்துள்ளன. இரு மையங்களையும் இணைக்கும் நேர்வரை வட்டங்களை மீண்டும் சந்திக்குமிடங்கள் A, B ஆகும். வட்டங்கள் வெட்டுமிடங்கள் C, D ஆகும். நாற்புய வடிவம் ABCDயி லுள்ள கோணங்களைக் கணித்தறிக.

3. இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் வெட்டுகின்றன. ஒரு வட்டத்தில் ஏதுமொரு புள்ளி Pயிலுள்ள தொடுவரையை AB நீண்டு Oவில் சந்திக்கிறது. Oவிலிருந்து செல்லும் ஏதுமொரு நேர்வரை மற்றைய வட்டத்தை Qவிலும் Rஇலும் வெட்டுகிறது. வட்டம் PQR நேர்வரை OPயை Pயில் தொடுகிறதெனக் காட்டுக.

4. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். CD நீட்டப்படுகிறது Eவரையும். கோணங்கள் ABC, ADE இரண்டின் சமவெட்டிகளும் வட்டத்தை ஓரிடத்திற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

5. ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும் வெளியான இரு வட்டங்களின் மையங்கள் A, B ஆகும். அவற்றின் ஆரங்கள் a, b ஆகும். ABயில் N ஒரு புள்ளி. NP ⊥ AB.

$AN^2 - NB^2 = a^2 - b^2$ ஆயின், Pயிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கும் கீறப்படும் தொடுவரைகள் சமநீளமுள்ளன எனக் காட்டுக.

நான்காம் பாகம்

வடிவொத்த முக்கோணிகள்

53. வீதமும் வீதப்பொருத்தமும்

§1. இரு பொருள்களை நாம் சாதாரணமாக ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடுதல் வழக்கம். ஒன்று இன்னொன்றிலும் பார்க்க இரு மடங்கு பெரிதென்றோ ஒன்றின் விலை வேறொன்றின் விலையிலும் மும்மடங்கென்றோ வேறுவிதமாகவோ கூறப்படுவதுண்டு. இவ்வாறு ஒப்பிடப்படுவன ஒரே இனப் பொருள்களேயாம். ஒரு பொருளின் பருப்பத்தை இன்னொன்றின் விலையோடு ஒப்பிடுவாரில்லை, ஒப்பிடவும் முடியாது.

ஒரே இனமான இரு அளவுகள் ஒப்பிடப்படும் போது வருந் தொடர்பு விகிதம் எனப்படும். a, b ஆகிய இரு அளவுகளுக்கிடையிலுள்ள விகிதம் a : b என்றோ $\frac{a}{b}$ என்றோ குறிக்கப்படும். a : b என்னும் விகிதத்திலே a, விகித முற்கூறு எனப்படும். b, பிற்கூறு எனப்படும். $a^2 : b^2$ என்பது a : b என்பதன் வர்க்க விகிதமாகும்; $a^3 : b^3$ என்பது கனவிகிதமாகும்.

§2. இரு பொருள்களுக்கிடையிலே உள்ள விகிதம் வேறிரு பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள விகிதத்துக்குச் சமமாதல்கூடும். உதாரணமாக 8 அடி : 4 அடி = 10 ரூபா : 5 ரூபா இவ்வாறு இரு விகிதங்கள் சமமாயின் அந் நான்கு அளவைகளுக்கு மிடையில் வீதப் பொருத்தமுமுண்டு எனப்படும். அது a : b = c : d அல்லது $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ என எழுதப்படும். a : b : : c : d என எழுதுவது வழக்காற்றில் அருகி வருகிறது. d (சுருக்கமாக) பொருத்த நான்காம்

கூறு எனப்படும். வீதப்பொருத்தம் $a : b = b : c$ என வரின், அதாவது மூன்று அளவுகள் வீதப் பொருத்தத்தில் வரின், மூன்றாவது அளவு (c) பொருத்த மூன்றும் கூறு எனப்படும். b பொருத்த இடை எனப்படும்.

நாலுக்கு மேற்பட்ட (ஆனால் இரட்டையான) அளவுகளும் வீதப்பொருத்தத்தில் இருத்தல் கூடும். உதாரணமாக:

$$x : y : z = p : q : r$$
$$a : b : c : d = e : f : g : h.$$

§3. a, b, c, d நான்கும் வீதப் பொருத்தத்தில் உளவாயின் பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் உண்மையாதல் காண்க:—

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ அல்லது $a : b = c : d$

2. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ அல்லது $b : a = d : c$ (கவிழ் பொருத்தம்)

3. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ அல்லது $a : c = b : d$ (மாறு பொருத்தம்)

4. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ அல்லது $(a+b) : b = (c+d) : d$ (கூட்டுப் பொருத்தம்)

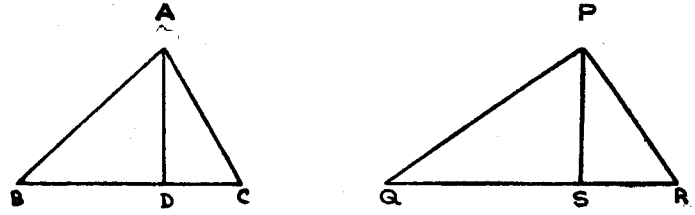
5. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ அல்லது $(a-b) : b = (c-d) : d$ (கழிவுப் பொருத்தம்)

6. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ அல்லது $(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$ (கூட்டுக் கழிவுப் பொருத்தம்)

7. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d+b} = \frac{a-c}{b-d}$

8. $ad = bc$.

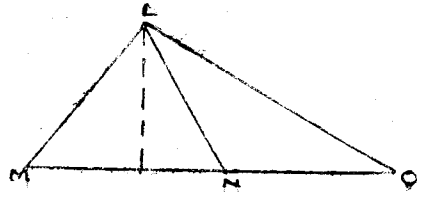
§4. இனி, கேத்திரகணிதத்திலுள்ள முக்கியமான சில வீதப்பொருத்தங்களை ஆராய்வாம்.



$\triangle ABC$யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} BC \cdot AD$

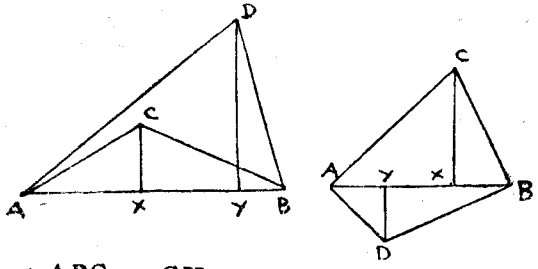
$\triangle PQR$,, $= \frac{1}{2} QR \cdot PS$

இரு முக்கோணிகளின் உயரங்களும் (AD, PS) சமமாயின், $\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \frac{BC}{QR}$. அதாவது, சம உயரங்களையுடைய முக்கோணிகளின் பரப்புகளும் பீடங்களும் வீதப்பொருத்தத்திலுள்ளன. அதேபோல பீடங்கள் சமமாயுள்ள முக்கோணிகளின் பரப்புகளும் அவற்றின் உயரங்களும் வீதப் பொருத்தமுடையன. உதாரணமாக,



$$\frac{\triangle LMN}{\triangle LNO} = \frac{MN}{NO}$$

(உயரங்கள் சமமாகையால்)



$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD} = \frac{CX}{DY}$$ (பீடங்கள் சமமாகையால்)

அப்பியாசம் — 60 (i) கணித்தல்

1. பின்வரும் வீதப் பொருத்தங்களில் விடப்பட்ட எண்களை அறிக :–

   (அ) $3 : 7 = 15 : —$

   (ஆ) $2{\cdot}5 : — = 10 : 2$

   (இ) $— : ac^2 = bc : bc^3$

   (ஈ) $4 : x = x : 9$

2. 9·6″ நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்று 5 : 7 என்னும் விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டால் ஒவ்வொரு பகுதியின் நீளமுமென்ன ?

3. 4·5″ நீளமுள்ள நேர்வரையொன்று 11 : 8 என்னும் விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கப்பட்டால் ஒவ்வொரு பகுதியின் நீளமுமென்ன ?

4. $a : b = x : y$; $b : c = y : z$. $a : c$ என்னும் விகிதத்தின் விலையை அறிக.

5. ஒரே உயரமுள்ள இரு முக்கோணிகளின் பீடங்கள் முறையே 6·3″, 5·4″. முதலாவதின் பரப்பு $12\frac{1}{4}$ சதுர அங்குலமாயின், இரண்டாவதின் பரப்பென்ன ?

6. AB, CD இரு நேர்வரைகள். அவை முறையே X இலும் Y யிலும் உட்புறமாக ஒரே விகிதத்திற் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

   (i) $AB : XB = CD : YD$ எனவும்

   (ii) $AB : AX = CD : CY$ எனவும் காட்டுக.

* 7. ABC ஒரு △. புயங்கள் AB, AC இரண்டிலும் முறையே D, E இரு புள்ளிகள். $AD : DB = AE : EC$.

   $AD : AB = AE : AC$ எனக் காட்டுக.

* 8. ABC ஒரு △. BCயில் X ஒரு புள்ளி. AXஇல் Y ஒரு புள்ளி.

   $BX : XC = 2 : 3$; $XY : YA = 3 : 4$.

   (i) $\frac{\triangle YBX}{\triangle YAB}$ (ii) $\frac{\triangle YBC}{\triangle ABC}$ (iii) $\frac{\triangle YBX}{\triangle YBC}$

   (iv) $\frac{\triangle YBC}{\triangle YAB}$ (v) $\frac{\triangle YBC}{\triangle YCA}$ என்பனவற்றின் விலையை அறிக.

** 9. ABC ஒரு △. AX ஒரு நடுவரை. AXஇல் P ஒரு புள்ளி. AB = 8″, BC = 17″, CA = 15″, AP = 1·5″. △ APCயின் பரப்பை அறிக.

அப்பியாசம் — 60 (ii) நிறுவுதல்

1. ABC ஒரு △. ACயில் X ஒரு புள்ளி ; $AX = \frac{1}{3}AC$. ABயில் Y ஒரு புள்ளி ; $BY = \frac{1}{3}AB$. $\triangle ABX = \triangle CBY$ எனக் காட்டுக.

2. ABC ஒரு △. BCயின் நடு X. ABயின் நடு Y. $\triangle BXY = \frac{1}{4} \triangle ABC$ எனக் காட்டுக,

3. ABCD ஒரு ▭. மூலைவரை BDயில் X ஒரு புள்ளி. BX : XD = 2 : 3. △ ABX = △ CBX எனக் காட்டுக.

BX, CY இரண்டும் வெட்டுமிடம் Z ஆயின், △BZY = △CZX எனவும் காட்டுக.

4. ABC ஒரு △. BX, CY இரு நடுவரைகள்; அவை வெட்டுமிடம் Z. நாற்புயம் AXZY = △BZC (பரப்பில்) எனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு △. BCயில் X ஒரு புள்ளி — BX : XC = 2 : 3. ABயில் Yஒரு புள்ளி — AY : YB = 3 : 5. △AXY = $\frac{3}{20}$ △ABC எனக் காட்டுக.

* 6. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று நடுவரைகளும் அம் முக்கோணியைச் சமபரப்புள்ள ஆறு முக் கோணிகளாகப் பிரிக்குமெனக் காட்டுக.

* 7. ABCD ஒரு நாற்புயவடிவம், AB ∥ CD. BCயில் Xஒரு புள்ளி — BC = n . CX. ADயில் Y ஒரு புள்ளி — AD = n . DY. XY ∥ AB எனக் காட்டுக.

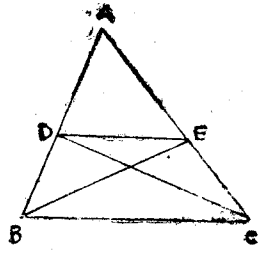
* 8. ABC ஒரு △. O முக்கோணிக்குள் ஒரு புள்ளி. △AOB = △AOC ஆயின், AOவை நீட்ட அது BCயின் நடுவுக்கூடாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

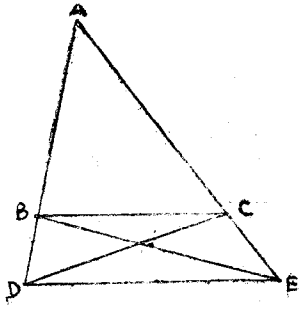
**9. ABC ஒரு △. D, E, F மூன்றும் முறையே BC, CA, AB மூன்றிலுமுள்ள புள்ளிகள். AD, BE, CF மூன்றும் ஒன்றுகூடுமாயின், $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$ எனக் காட்டுக. Pஒன்று கூடும் புள்ளி.

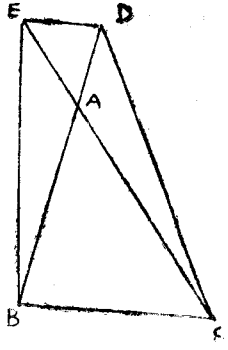
54. முக்கோணிகளில் வீதப் பொருத்தமுள்ள பகுதிகள்

§1. சூத்திரம் 35

பொதுவிலக்கணம் - (i) முக்கோணியொன்றில் ஒரு புயத்திற்குச் சமாந்தரமாக உள்ள நேர்வரை எஞ்சிய இரு புயங்களில் வெட்டும் பகுதிகள் வீதப்பொருத்தமுடையன வாதல் வேண்டும். (ii) மறுதலையாக, ஒரு நேர்வரை முக்கோணி யொன்றினது இரு புயங்களை வீதப் பொருத் தத்தில் வெட்டுமாயின் அந்நேர்வரை மூன்று வது புயத்திற்குச் சமாந்தரமாதல் வேண்டும்.







i

சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC ஒரு △. DE∥BC

கேள்வி - AD : DB = AE : EC என்பது.

ஆக்கம் - BE, CD இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - AD : DB = △ ADE : △ DBE (ஒரே உயரம்)

AE : EC = △ ADE : △ CDE (ஒரே உயரம்)

ஆனால், △ DBE = △ CDE (ஒரே பீடம் ஒரே உயரம்)

∴ △ ADE : △ DBE = △ ADE : △ CDE

∴ AD : DB = AE : EC என்றவாறு.

ii

மறுதலை (அதே வடிவம்)

சிறப்பிலக்கணம் -

தரவு - ABC ஒரு △. AD : DB = AE : EC.

கேள்வி - DE ∥ BC என்பது.

ஆக்கம் - BE, CD இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - △ ADE : △ DBE = AD : DB (ஒரே உயரம்)

△ ADE : △ CDE = AE : EC (,,)

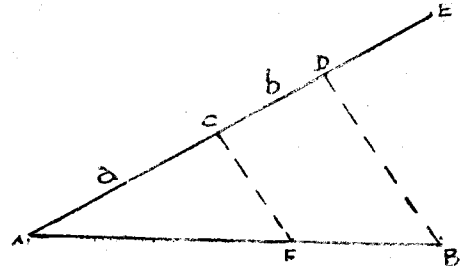
ஆனால், AD : DB = AE : EC (தரவு)

∴ △ ADE : △ DBE = △ ADE : △ CDE

∴ △ DBE = △ CDE

∴ DE ∥ BC என்றவாறு.

§2. நேர்வரை ஒன்றைக் குறித்த விகிதத்தில் இரண்டாகப் பிரிப்பதற்கு ஷை சூத்திரம் வழிகாட்டும்.



தரப்பட்ட வரை ABஎன்க; விகிதம் a:b என்க

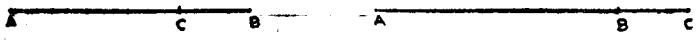
வேறு ஏதுமொரு நேர்வரை AE கீறுக. அதில் AC = a, CD = b வெட்டுக.

DB இணைக்கப்படட்டும். CF ∥ DB

AF : FB = AC : CD

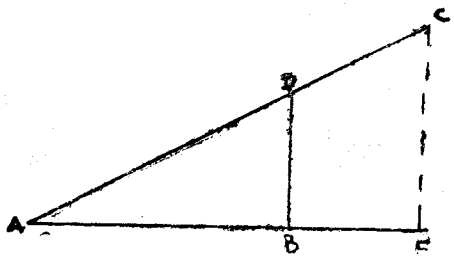
= a : b

சாதாரணமாக ஒரு நேர்வரையைக் குறித்த ஒரு விகிதத்தில் இரண்டாக்கும்பொழுது பிரிக்கும் புள்ளி அந் நேர்வரையின் நீளத்துக்குள் அமையும். இது **உட்புறமாகப் பிரித்தல்** எனப்படும். இவ்வாறின்றி, ஒரு நேர்வரையை **வெளிப்புறமாகப் பிரித்தலும்** கூடும். அப்பொழுது பிரிக்கும் புள்ளி வரையின் நீட்டப்பட்ட பகுதியில் அமையும். உதாரணமாக, AB யை நேர்வரையெனக் கொண்டு படங்களிலிருந்து வித்தியாசத்தை அறிந்து கொள்க.



(உட்புறமாக) AC, CB துண்டுகள்.

(வெளிப்புறமாக) AC, CB துண்டுகள்.



நேர்வரை AB வெளிப்புறமாப் பிரிக்கப்பட வேண்டிய விகிதம் a : b.

AC = a, CD = b.

DB இணைத்து, CF ∥ DB.

AF : FB = AC : CD = a : b.

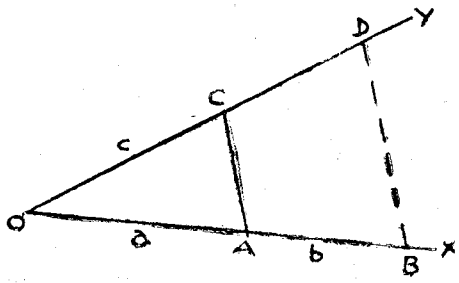
§3. தரப்பட்ட மூன்று நீளங்களுக்குப் பொருத்த நான்காம் கூற்றைப் பெறுவதற்கு இதேமாதிரியான ஆக்கம் உதவும்.

a _____

b _____

c _____

மூன்று நீளங்களையும் a, b, c என்க.
OX, OY என இரு நேர்வரைகள் கீறுக.

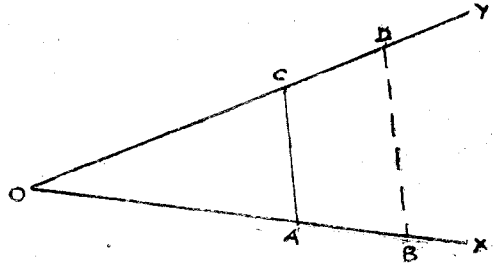


ஒன்றிலிருந்து OA = a, AB = b வெட்டுக.

மற்றதிலிருந்து OC = c வெட்டுக.

AC இணைக்கப்பட்டு BD சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டால் CD நான்காம் பொருத்தக் கூறாகும்.

தரப்பட்ட மூன்று நீளங்களும் பெரிதாயின் இவ்வாறு வரையும்பொழுது வடிவம் மிகப் பெரிதாக அதிக இடத்தை வேண்டி நிற்கும். நீளங்கள் எல்லாவற்றையும் Oவிலிருந்து அளந்தால் வடிவத்தை அடக்கமாகக் குறைந்த இடத்துக்குள் வரைந்துவிடலாம்.



OA = a, OB = b, OC = c.

AC இணைக்கப்பட்டு BD சமாந்தரமாக வரையப்பட்டால் OD நான்காம் பொருத்தக்கூறாகும்

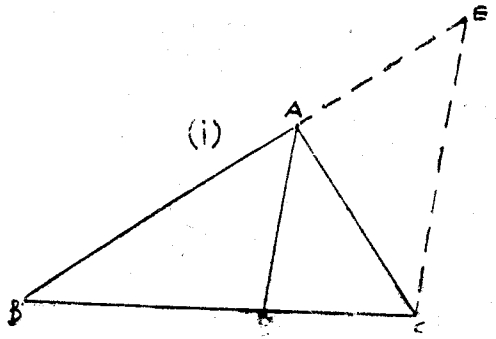
§4. மூன்றும் பொருத்தக் கூற்றை அறிவது நான்காம் பொருத்தக் கூற்றை அறிவதுபோன்றதே. ஏனென்றால் இரண்டாவது நீளம் இருமுறை வரும். a : b=b . c.

சூத்திரம் 36

§5. பொதுவிலக்கணம் - (i) ஒரு முக்கோணியில் ஒரு உட்கோணத்தின் சமவெட்டி, எதிர்ப் புயத்தை எஞ்சிய இரு புயங்களின் விகிதத்தில்

உட்புறமாகப் பிரித்தல்வேண்டும். (ii) வெளிக் கோணச் சமவெட்டியும் அவ்வாறே வெளிப்புறமாகப் பிரித்தல்வேண்டும்.

(i)



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC △. AD உட் கோணச் சமவெட்டி.

கேள்வி - BD : DC = AB : AC என்பது.

ஆக்கம் - CE ∥ DA. CE, BA இரண்டும் Eயில் சந்திக்கட்டும்.

நிரூபணம் - ∠ BAD = ∠ E (CE ∥ DA)

∠ DAC = ∠ ACE (,,)

ஆனால், ∠ BAD = ∠ DAC (தரவு)

∴ ∠ ACE = ∠ E

∴ AC = AE.

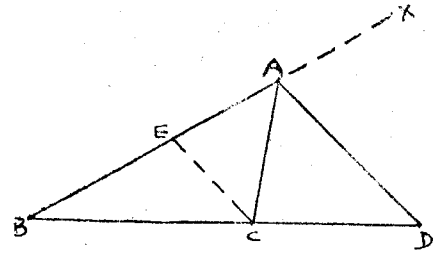
△ BECயில்,

DA ∥ CE (ஆக்கம்)

∴ BD : DC = BA : AE

∴ BD : DC = BA : AC என்றவாறு.

(ii)



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC △. AD வெளிக் கோணச் சமவெட்டி.

கேள்வி - BD : DC = BA : AC என்பது.

ஆக்கம் - CE ∥ DA. CE, BA இரண்டும் Eயில் சந்திக்கட்டும்.

நிரூபணம் - △ ABDயில், EC ∥ AD (தரவு)

∴ BD : DC = BA : AE.

இனி, ∠ XAD = ∠ AEC (AD ∥ EC)

∠ DAC = ∠ ACE (,,)

ஆனால். ∠ XAD = ∠DAC (தரவு)

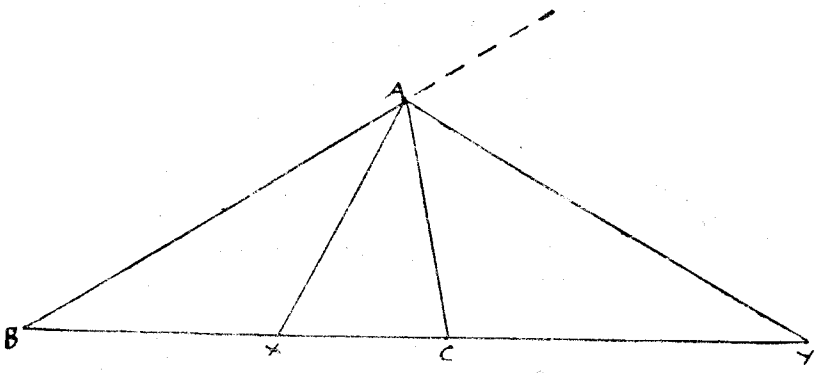
∴ ∠ AEC = ∠ ACE

∴ AE = AC.

∴ BD : DC = BA : AC என்றவாறு.

§6. இச் சூத்திரத்தின் மறுதலையும் உண்மையானதே. அதை, பாரிசேட நியாயத்தால் நிரூபிக்கலாம்; அல்லது, ஷை சூத்திரத்துக்குரிய முறைபோல, ஆனால் பின்னிருந்து முன்னாக, நிரூபிக்கலாம்.

§7. குறித்த பீடமொன்றிலே, மற்றைய இரு புயங்களும் குறித்த விகிதத்திலுள்ளதொரு முக்கோணியை ஆக்குதற்கு வழி பின்வருமாறு.



△ ABC (பீடம் BC) ஆக்கப்பட்டதாக வைத்து ஆக்கும் வழியை ஆராய்வாம்.

AX உட்கோணச் சமவெட்டியாயின்,
AB : AC = BX : CX.

AY வெளிக் கோணச் சமவெட்டியாயின்
AB : AC = BY : CY.

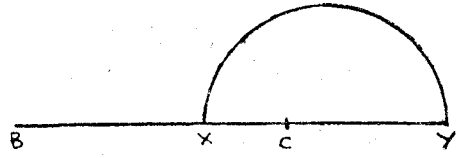
∠XAY = செங்கோணம்.

ஆகவே, XYயை விட்டமாகவுள்ள வட்டத்திலே முக்கோணியின் உச்சி A உண்டு.

எனவே, தரப்பட்ட பீடத்தை (BC)க் குறித்த விகிதத்தில் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரித்தல் வேண்டும்.

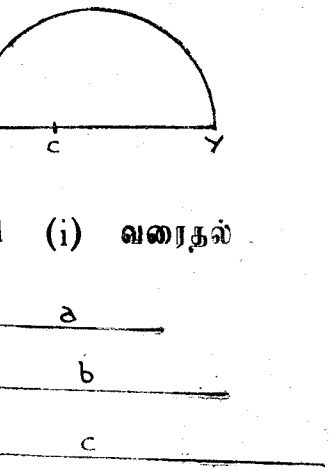
XY விட்டமாகவுள்ள வட்டம் (அரை வட்டம்) A யின் படுக்கையாகும்.

எனவே பல முக்கோணிகளை அமைத்தல்கூடும் முக்கோணியின் உயரம், அல்லது உச்சிக் கோணம், அல்லது வேறொன்று தரப்படுமாயின், முக்கோணியை நிச்சயித்தல் கூடும்.



அப்பியாசம் — 61 (i) வரைதல்

1. 3·6″ நீளமுள்ள நேர்வரையொன்று கீறி அதை a : b என்னும் விகிதத்திற் பிரியுங்கள்.



2. 4″ நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்று கீறி a : b : c என்னும் விகிதத்திற் பிரியுங்கள்.

3. a, b, c மூன்றினதும் நான்காம் பொருத்தக் கூற்றை வரைந்தறிக.

4. b, c இரண்டினதும் இடைப்பொருத்தக்கூற்றை வரைந்தறிக.

5. 2·9″ நீளமுள்ள நேர்வரை யொன்று கீறி அதை மூன்று சமகூறுகளாகப் பிரியுங்கள்.

6. 3″ நீளமுள்ள நேர்வரை கீறி அதை 3 : 2 என்னும் விகிதத்தில் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் பிரியுங்கள்.

7. BC = 2·5″, AB : AC = 3 : 2, நடுவரை AX = 1·4″ உடைய முக்கோணி ABC வரைக.

8. BC = 2″, 3 AB = 2 AC, பரப்பு = 1 சதுர அங்குலம் உடைய முக்கோணி ABC வரைக.

* 9. சுற்றளவு 6·3″, புயங்கள் 3 : 4 : 5 என்னும் விகிதமுடைய முக்கோணி வரைக.

* 10. $\frac{2{\cdot}3 \times 5{\cdot}2}{4{\cdot}7}$ அங்குலம் எவ்வளவு என்பதை வரைந்தறிக.

* 11. $\frac{(3{\cdot}5)^2}{4{\cdot}2}$ அங்குலம் எவ்வளவு என்பதை வரைந்தறிக.

* 12. நீளம் = 3·2″, அகலம் = 2·3″ உடைய நீள்சதுரம் கீறி அதற்குச் சமமானதும் 3″ நீளமுடையதுமான வேறொரு நீள்சதுரம் கீறுக.

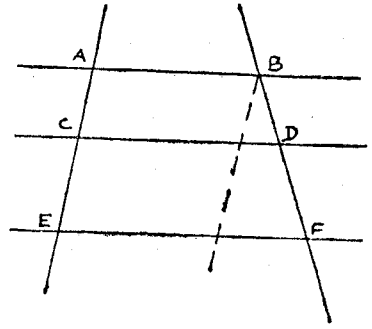
* 13. 2·2 அங்குலச் சற்சதுரத்துக்குச் சமமானதும் 2·8″ நீளமுள்ளதுமான நீள்சதுர மொன்று வரைக.

** 14. BC = 2·3″, AB : AC = 5 : 4, ∠A = 60° உடைய முக்கோணி ABC வரைக.

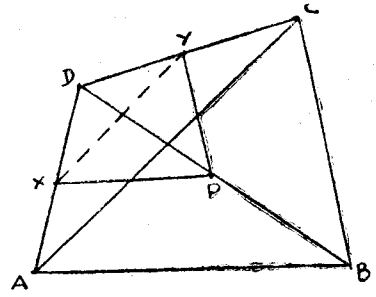
** 15. புயங்கள் 3″, 2″ உடையதும் மூலைவரைகள் 1 : 2 என்னும் விகிதமுடையதுமான சமாந்தர சதுர்ப்புயம் கீறுக.

அப்பியாசம் — 61 (ii) நிறுவுதல்

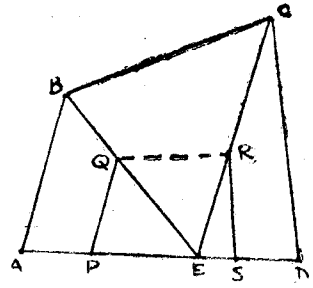
1. AB, CD, EF 3 சமாந்தர வரைகள். ACE, BDF இரு வெட்டு வரைகள். AC : CE = BD : DF எனக் காட்டுக.



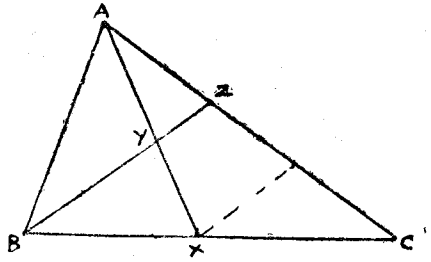
2. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். BDயில் P ஒரு புள்ளி. PX∥BA; PY∥BC. XY∥AC எனக் காட்டுக.



3. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். ADயில் E ஒரு புள்ளி. AE, ED இரண்டும் சம விகிதத்திற் பிரிக்கப் படுகின்றன; அதாவது, AP : PE = DS : SE. BE, CE இணைக்கப் படுகின்றன. PQ∥AB; SR∥DC. QR∥BC எனக் காட்டுக.

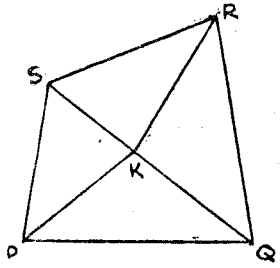


4. ABC ஒரு △. AX நடுவரை. AX இன் நடு Y. BY இணைக்கப்பட்டு நீட்டப்பட்டால் AC மூன்றிலொன்றாக வெட்டப்படுமெனக் காட்டுக. அதாவது AZ = ⅓AC எனக்காட்டுக.



5. ABC ஒரு △. BCயின் நடு D. ACயில் E ஒரு புள்ளி — CE = 2 EA. ADயை BE இரு சம கூறாக வெட்டுமெனக் காட்டுக.

6. PQRS ஒரு நாற்புய வடிவம். கோணங்கள் P, R இரண்டின் சம வெட்டிகளும் SQ வை Kயில் சந்திக்கின்றன. PQ : PS = RQ : RS எனக் காட்டுக



7. ABC ஒரு △. AD கோணச் சமவெட்டி. கோணங்கள் ADB, ADC இரண்டின் சம வெட்டிகளும் AB, AC இரண்டையும் முறையே E, F இரண்டிடங்களிலும் சந்திக்கின்றன. EF∥BC எனக் காட்டுக.

8. ABC ஒரு △. CF கோணச் சமவெட்டி. கோணம் Bயின் சமவெட்டி CF ஐ சந்திக்குமிடம் I. AF : AC = FI : IC எனக் காட்டுக.

9. PQRS ஒரு ▱. மூலைவரைகள் வெட்டுமிடம் O. கோணங்கள் POQ, POS இரண்டின் சமவெட்டிகளும் PQ, PS இரண்டையும் முறையே X, Y இரண்டிலும் சந்திக்கின்றன. XY∥QS எனக் காட்டுக.

*10. ABCD ஒரு நாற்புயவடிவம். அதில் AB · CD = AC · BD. கோணங்கள் ABD, ACD இரண்டின் சமவெட்டிகளும் ADயை ஓரிடத்திற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

* 11. ABCD ஒரு ▱. மூலைவரை BDக்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் நேர்வரை PQ ஒன்று, AB, AD இரண்டையும் (தேவையானால் நீட்டி) முறையே P யிலும் Q விலும் சந்திக்கிறது. △ BCP = △ CDQ எனக் காட்டுக.

* 12. PQR, SQR இரு △ள். QR இல் X ஒரு புள்ளி. X க்கூடாக QP, QS இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் நேர்வரைகள் PR, SR இரண்டையும் முறையே Y யிலும் Z இலும் சந்திக்கின்றன, YZ ∥ PS எனக் காட்டுக.

* 13. ஒரு முக்கோணியின் பீடமும் மற்றைய இரு புயங்களின் விகிதமும் தரப்பட்டால் உச்சியின் படுக்கை யாது?

* 14. ABC ஒரு △. I உள்வட்ட மையம். AI நீண்டு BC யை P யில் சந்திக்கிறது. AI : IP = (AB+AC) : BC எனக் காட்டுக.

* 15. ABC ஒரு △. BCயின் நடு D. BCயில் ஏதுமொரு புள்ளி Pக் கூடாக AC, AB இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் வரைகள்

ADயை முறையே X,Y இரண்டிலும் சந்திக்கின்றன. XYயின் நடு D எனக் காட்டுக.

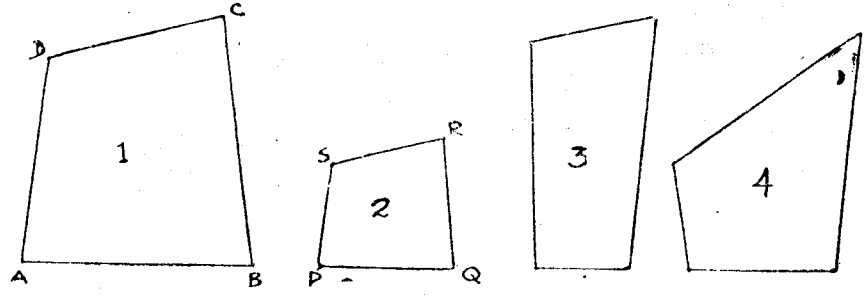
**16. ABC ஒரு △. பீடம் BCயில் P ஏதுமொரு புள்ளி. Pக் கூடாக மற்றைய இரு புயங்களுக்கும் சமாந்தரங்கள் கீறப் பிறக்கும் சமாந்தர சதுர்ப்புயத்தின் மூலைவரைகள் வெட்டுமிடத்தின் படுக்கையை அறிக.

**17. PQRS ஒரு நாற்புயவடிவம். கோணங்கள் P, R இரண்டின் சமவெட்டிகளும் மூலைவரை QSஐ ஓரிடத்திற் சந்திக்குமாயின், கோணங்கள் Q, S இரண்டின் சமவெட்டிகளும் மூலைவரை PRஐ ஓரிடத்திற் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

**18. ABC ஒரு △. AD கோணச் சமவெட்டி. △ BADயின் சுற்று வட்டம் CAயை மீண்டும் Eயில் சந்திக்கிறது; △ CADயின் சுற்று வட்டம் BAயை மீண்டும் Fஇல் சந்திக்கிறது. BF = CE எனக் காட்டுக.

55. வடிவொத்த முக்கோணிகள்

§1. வட்டங்கள் யாவும் ஒரே வடிவமானவை. ஒரு வட்டம் சிறியதாகலாம், வேறொன்று பெரியதாகலாம். ஆனால் அவை ஒத்தவடிவமுடையன. நேர்வரைகளால் ஆக்கப்பட்ட வடிவங்கள் அப்படியன்று.



இவ் வடிவங்கள் ஒவ்வொன்றும் நான்கு புயங்களால் ஆக்கப்பட்டன வாயினும் அவையாவும் ஒரேமாதிரியானவை யன்று. இவற்றுள் முதலிரண்டும் மாத்திரம் வடிவத்தில் ஒத்தன. முதலாவது பெரிது, இரண்டாவது சிறிதாக இருப்பினும் அவை ஒரேமாதிரியானவை. இவ்வாறு இரு வடிவங்கள் ஒத்த வடிவுள்ளனவாய் அமைதற்கு அவையிரண்டிலும்

(i) ஒரேநிலையான கோணங்கள் சமமாதல் வேண்டும்.

(ii) ஒரேநிலையான புயங்கள் ஒரேவிகிதத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

முதலிரு வடிவங்களிலும் :

(i) $\angle A = \angle P$; $\angle B = \angle Q$; $\angle C = \angle R$; $\angle D = \angle S$.

(ii) $AB : PQ = BC : QR = CD : RS = DA : SP$.

முதல் வடிவத்திலும் மூன்றும் வடிவத்திலும் ஒரேநிலையான கோணங்கள் சமமானவையாயினும் ஒரேநிலையான புயங்கள் வீதப் பொருத்தமற்றன.

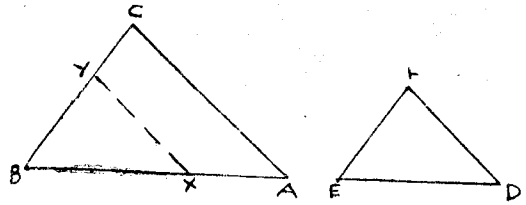
முதல் வடிவத்திலும் நான்காம் வடிவத்திலும் ஒரேநிலையான புயங்கள் வீதப் பொருத்தமுடையனவாயினும் ஒரேநிலையான கோணங்கள் சமமற்றன.

ஆகவே, இரு பல் கோணிகளில் ஒரே நிலையான கோணங்கள் சமமாகவும், ஒரே நிலையான புயங்கள் வீதப் பொருத்தமுடையனவாகவும் அமைந்தால் அவை வடிவொத்த பல்கோணிகள் எனப்படும்.

முக்கோணிகள் வடிவொத்திருப்பதற்கு இவையிரண்டில் ஒன்று போதுமானது. அதாவது, ஒன்று மற்றையதில் அடங்கும். அடுத்து வரும் மூன்று சூத்திரங்களும் இதைப்பற்றியன. 'வடிவொத்தன' என்பது '|||' என்னும் குறியீட்டாற் குறிக்கப்படும்.

§2. சூத்திரம் 37

பொதுவிலக்கணம் - இரு முக்கோணிகள் சமகோணமுடையனவாயின் அவற்றின் புயங்கள் வீதப் பொருத்தமுடையனவாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு ABC, DEF இரு △ள். $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$.

கேள்வி - $AB : DE = BC : EF = CA : FD$ என்பது.

ஆக்கம் - BAயிலிருந்து BX (= ED), BC ,, BY (= EF) வெட்டப்படட்டும். XY இணைக்கப்படட்டும். [ும்.

நிரூபணம் - △ள் XBY, DEF இரண்டிலும்

$$\begin{cases} BX = ED & \text{(ஆக்கம்)} \\ BY = EF & \text{(ஆக்கம்)} \\ \angle B = \angle E & \text{(தரவு)} \end{cases}$$

$\therefore$ △ள் ≡

$\therefore \angle BXY = \angle D$

ஆனால் $\angle D = \angle A$ (தரவு)

$\therefore \angle BXY = \angle A$

$\therefore XY \parallel AC$

$\therefore AB : BX = BC : BY$

ஆனால், XB = DE ; BY = EF

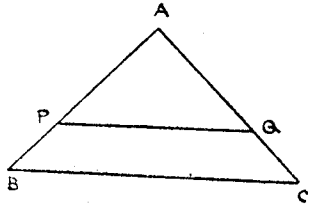
∴ AB : DE = BC : EF

இவ்வாறே, BC : EF = CA : FD எனவும் நிறுவலாம்.

ஆகவே, AB : DE = BC : EF = CA : FD என்றவாறு

§3. உள்ளுறை - சமகோண முக்கோணிகள் வடிவொத்தன.

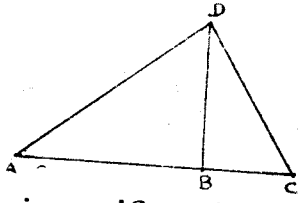
§4.



ABC ஒரு △. PQ ∥ BCஆயின், AP : AB = AQ : AC என்பது முந்திய அதிகாரத்தில்நிறுவப்பட்டது. (சூத். 35 பார்)

இப்பொழுது AP : AB = PQ : BC என்பது பெறப்படுகிறது. (△ கள் APQ, ABC இரண்டும் சமகோண முடையனவாகையால்). இது முக்கியமானது.

§5.



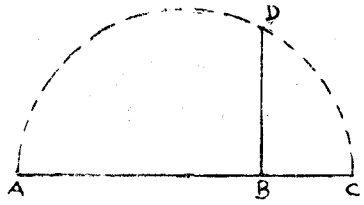
ADC ஒரு செங்கோண △. ∠ Dசெங்கோணம். BD⊥AC.

மூன்று முக்கோணிகள் உண்டல்லவா? பெரிது ஒன்று (ADC); சிறியன இரண்டு (ABD, DBC). இவை மூன்றும் சமகோண △ ள்.

(i) △ ள் ABD, DBC இரண்டும் (சிறிய இரண்டும்) ||| .

$\therefore \frac{AB}{DB} = \frac{DB}{BC}$ (அதாவது, $AB \cdot BC = BD^2$)

ஆகவே AB, BC இரண்டின் பொருத்த நடுக்கூறு BD ஆகும். எனவே இரு நேர்வரைகளின் பொருத்த நடுக்கூற்றை அறிவதற்கு வழியாகிறது.



AB, BC தரப்பட்ட இரு நேர்வரைகள் (ஒரு நேரில்). AC விட்டமாக அரை வட்டம். BD⊥AC.

BA, BC இரண்டின் பொருத்த நடுக்கூறு BD ஆகும்.

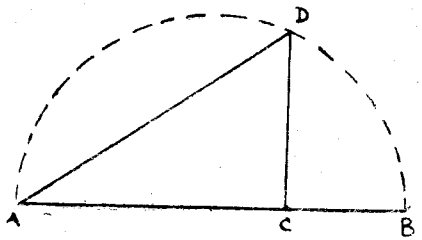
நீள்சதுர மொன்றுக்குச் சமமான சற்சதுரம் ஒன்றை ஆக்குவதற்கும் இதுவே வழியாகிறது.

(ii) △ள் ADC, ABD இரண்டும் (பெரியதும் சிறியது ஒன்றும்) ||| .

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB}$ (அதாவது $AC \cdot AB = AD^2$)

அதாவது, AC, AB இரண்டின் பொருத்த நடுக்கூறு AD ஆகும்.

எனவே, இரு நேர்வரைகளின் பொருத்த நடுக்கூற்றை அறிவதற்கு வேறொருவழி ஆகிறது.



AB , AC தரப்பட்ட இரு நேர் வரைகள் (ஒரு நேரில்).AB(பெரியது) விட்டமாக அரைவட்டம் CD ⊥ AB.

AB, AC இரண்டின் பொருத்த நடுக்கூறு AD ஆகும்.

தரப்பட்ட வரைகள் நெடியனவாயின் இம்முறை வசதி ஆனது, அடக்கமானதாகையால்.

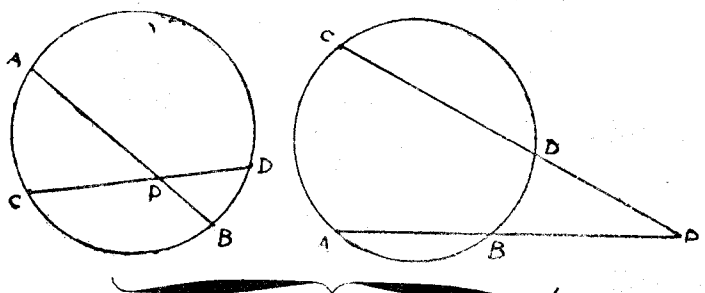
(iii) △ள் ADC, ABD இரண்டும் (பெரியதும் சிறியது ஒன்றும்) |||.

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD}$ அதாவது, $AD^2 = AB.\ AC$.

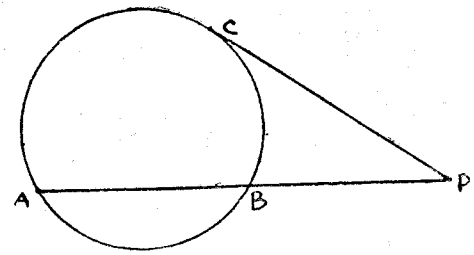
△கள் ADC, DBC இரண்டும் (பெரியதும் மற்றைச் சிறியதும்) |||.

$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{CA}{CD}$ அதாவது, $CD^2 = CA \cdot CB$.

§6.



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

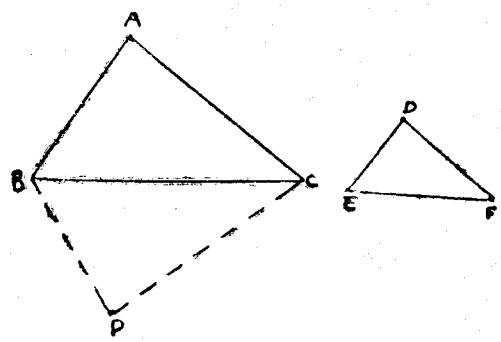


$PA \cdot PB = PC^2$

△ள் APC, BPD இரண்டும் ||| என்பதிலிருந்து இவ் வுண்மைகள் இலகுவிற் பெறப்படுதல் காண்க.

§7. சூத்திரம் 38

பொதுவிலக்கணம் — இரு முக்கோணிகளின் புயங்கள் வீதப்பொருத்த முடையனவாயின், முக்கோணிகள் சமகோண முடையனவாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் — தரவு — ABC, DEF இரு △கள்.
AB : DE = BC : EF = CA : FD.

கேள்வி - $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$.

ஆக்கம் - $\angle CBP = \angle E$

$\angle BCP = \angle F$ முக்கோணிக்கு வெளியாக அமைக்கப்பட்டும்.

நிரூபணம் - $\triangle$ள் PBC, DEF இரண்டிலும்

$\angle B = \angle E$ (ஆக்கம்)

$\angle C = \angle F$ (,,)

$\therefore \angle P = \angle D$

$\therefore$ $\triangle$ள் சமகோணமுடையன.

$\therefore PB : DE = BC : EF$

ஆனால் $AB : DE = BC : EF$ (தரவு)

$\therefore PB = AB$

இவ்வாறே $PC = AC$

எனவே $\triangle$ள் PBC, ABC இரண்டும் $\equiv$

ஆனால் $\triangle$ள் PBC, DEF இரண்டும் சமகோணமுடையன (நிறுவப்பட்டது)

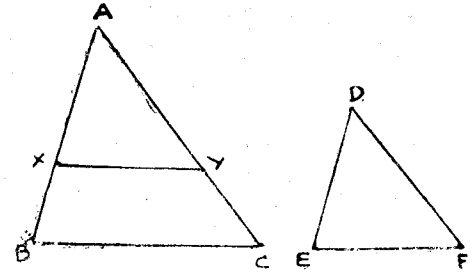
$\therefore$ $\triangle$ள் ABC, DEF இரண்டும் சமகோணமுடையன.

அதாவது, $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$ என்றவாறு.

§8. **உள்ளுறை -** வீதப் பொருத்தமுள்ள புயங்களையுடைய முக்கோணிகள் வடிவொத்தன.

§9. சூத்திரம் 39

பொதுவிலக்கணம் - இரு முக்கோணிகளிலே ஒன்றிலுள்ள ஒரு கோணம் மற்றையதிலுள்ள ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், இச் சமகோணங்களை அடக்கும் புயங்கள் வீதப் பொருத்தமுடையனவாகவும் இருந்தால் முக்கோணிகள் வடிவொத்தனவாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் - தரவு - ABC, DEF இரு $\triangle$ள். $\angle A = \angle D$. $AB : AC = DE : DF$.

கேள்வி - $\triangle$ள் ABC, DEF இரண்டும் வடிவொத்தன என்பது.

ஆக்கம் - ABயிலிருந்து AX (=DE), ACயிலிருந்து AY (=DF) வெட்டப்பட்டு, XY இணைக்கப்படட்டும்.

நிரூபணம் - $\triangle$ள் AXY, DEF இரண்டும் $\equiv$ (இரு புயங்களும் இடைப்பட்ட கோணமும்)

இனி, $AB : AC = DE : DF$ (தரவு)

$DE = AX$; $DF = AY$ (ஆக்கம்)

$\therefore AB : AC = AX : AY$

$\therefore XY \parallel BC$.

$\therefore \angle B = \angle AXY = \angle E;$

$\angle C = \angle AYX = \angle F$

அதாவது, △ள் ABC, DEF இரண்டும் சம கோண முடையன.

எனவே, △ள் வடிவொத்தன, என்றவாறு.

அப்பியாசம் — 62 (i) வரைதல்

1. 2·8″, 1·9″ ஆகிய இரு நீளங்களின் பொருத்த நடுக்கூற்றை வரைக.
2. 2·8″, 3·5″ ஆகிய இரு நீளங்களின் பொருத்த நடுக்கூற்றை வரைக.
3. 3·8″, 4·2″ ஆகிய இரு நீளங்களின் பொருத்த நடுக்கூற்றை வரைக.
4. x″ : 3·2″ = 4·3″ : x″ என்பதில் x இன் விலையை வரைந்தறிக.
5. $\sqrt{10}$ என்பதன் விலையை வரைந்தறிக.

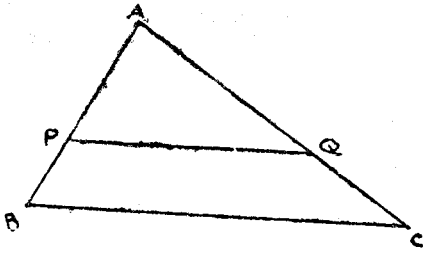
* 6. கிட்டாத தூரத்தில் மையத்தையுடையதும் மிக நீண்ட ஆரத்தையுடையதுமான ஒரு வட்டத்தின் வில்லொன்றுக்கு, வட்டத்துக்கு வெளியாகவுள்ள புள்ளியொன்றிலிருந்து தொடு வரை கீறுவதெப்படி?

* 7. தரப்பட்ட இரு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும்படியும், தரப்பட்ட நேர்வரை யொன்றைத் தொடும்படியும் ஒரு வட்டம் கீறுவதெப்படி?

* 8. தரப்பட்ட புள்ளியொன்று (P)க் கூடாகச் செல்லும்படியும், தரப்பட்ட இரு நேர்வரைகளை (AB, AC)த் தொடும்படியும் ஒரு வட்டம் கீறுவதெப்படி?

அப்பியாசம் — 62 (ii) கணித்தல்

1. ABC ஒரு △. PQ ∥ BC.



(i) AB = 2·5″
AC = 2·0″
AP = 1·5″;
AQ வின் நீளமென்ன?

(ii) AB = 3·5″, AC = 2·1″, AQ = 1·2″; APயின் நீளமென்ன?

(iii) AB = 4·4″, AP = 3·6″, AQ = 6·4″; AC, QCயின் நீளங்களென்ன?

(iv) BC = 7·5″, PQ = 5·7″, AP = 4·5″; ABயின் நீளமென்ன?

2. முக்கோணி வடிவமான வயலொன்றின் மூன்று பக்கங்களும் முறையே 900 யார், 600 யார், 500 யார் நீளமுடையன. அவ் வயலின் பட மொன்றிலே மிக நீண்ட புயத்தின் நீளம் = 5·4″. மற்றைய புயங்களின் நீளங்களென்ன?

3. ஆறு அடி உயரமுள்ள மனிதனின் நிழல் 10′ 3″ நீளமுடையதாயின், 40′ நீளமுள்ள நிழலைத் தரும் மரத்தின் உயரமென்ன?

4. ஒரு மரத்தின் உயரத்தை அறியும்பொருட்டு ஒரு பையன் அம் மரத்திலிருந்து 25′, தூரத்தில் 12′ உயரமுள்ள ஒரு தடியை நிறுத்துகிறான். 4′ தூரம் மேலும் நடந்தபின், மரநுனியும் தடிநுனியும் கண்ணும் ஒரு நேருக்கிருக்கக் காண்

கிறான். பையனின் (கண்ணின்) உயரம் 5′ ஆயின், மரத்தின் உயரமென்ன?

5. ABC ஒரு △. ∠C செங்கோணம். PQ ∥ AC. AC = $1\frac{1}{4}''$, BC = 3″, PQ = $\frac{1}{2}''$; BQ, BP, AP மூன்றின் நீளங்களையும் அறிக.

* 6. ABCD ஒரு நாற்புயவடிவம். AB ∥ DC; AB = $\frac{5}{7}$ DC. BD = 18″; CD = 35″. மூலை வரைகள் வெட்டுமிடம் O வாயின் OBயின் நீளமென்ன?

* 7. ABC ஒரு △; ∠C செங்கோணம். CD ⊥ AB. CD = 3″, AB = 10″. BD, DA இரண்டின் நீளங்களையும் அறிக.

* 8. ABC ஒரு △; ∠A செங்கோணம். AD ⊥ BC.

(i) AB = 6″, AC = 8″; BD, DC, DA மூன்றின் நீளங்களையு மறிக.

(ii) BD = 9″, DC = 4″; AD, AB, AC மூன்றின் நீளங்களையு மறிக.

(iii) AD = 8″, AB = 17″; AC, BC இரண்டின் நீளங்களையுமறிக.

** 9. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவரைகள் சந்திக்குமிடத்திலிருந்து ஒரு புயத்துக்குக் கீறப்படும் செங்குத்து வரை அப்புயத்தை முறையே 1″, 4″ நீளமுள்ள இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கிறது. சாய்சதுரத்தின் பரப்பென்ன?

** 10. ஒரு புள்ளி Oவிலிருந்து ஒரு வட்டத்துக்குக் கீறப்படும் தொடுவரை OT ஆகும். வட்டத்தின் ஆரம் = 3″; OT = 4″. வட்டமையம் P. TM ⊥ OP. TMஇன் நீளமென்ன?

அப்பியாசம் — 62 (iii) நிறுவுதல்

1. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி; ∠B செங்கோணம். BD ⊥ AC △ள் ABD, DBC, ABC மூன்றும் சமகோணங்களையுடையன எனக் காட்டுக.

2. ஒரு வட்டத்திலே இரு நாண்கள் AB, CD வட்டத்துக்குள் Eயில் வெட்டுகின்றன. AE · EB = CE · ED எனக் காட்டுக.

3. ஒரு வட்டத்திலே இரு நாண்கள் AB, CD வட்டத்துக்கு வெளியாக Eயில் வெட்டுகின்றன. AE · EB = CE · ED எனக் காட்டுக.

4. ஒரு வட்டத்திலே TA ஒரு தொடுவரை; TBC ஒரு வெட்டுவரை. TB · TC = TA^2 எனக் காட்டுக.

5. ABCD ஒரு நாற்புயவடிவம்; AB ∥ CD. மூலை வரைகள் வெட்டுமிடம் O. OA : OC = OB : OD எனக் காட்டுக.

6. ABCD ஒரு வட்ட நாற்புயம். BA, CD இரண்டும் Tயில் சந்திக்கின்றன. △ள் TAD, TBC இரண்டும் வடிவொத்தன எனக் காட்டுக.

7. ABCD ஒருசமாந்தர சதுர்ப்புயம். ADயின்நடு E. EB, AC இரண்டும் Kயில் சந்திக்கின்றன. AK = $\frac{1}{3}$ AC எனக் காட்டுக.

8. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி; ∠A செங்கோணம். AD ⊥ BC.

(i) BD · DC = AD^2 எனவும்

(ii) BD · BC = AB^2 எனவும் காட்டுக.

9. ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணி; $\angle A$ செங்கோணம். $AD \perp BC$; $DE \perp AC$; $DF \perp AB$.

(i) $AD \cdot AE = DE \cdot DB$ எனவும்

(ii) $AC \cdot AE = AB \cdot AF$ எனவும் காட்டுக.

*10. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். Aக் கூடாகச் செல்லும் நேர்வரையொன்று வட்டத்தை Cயிலும், Bயிலுள்ள தொடுவரையை Dயிலும் சந்திக்கிறது.

(i) △ள் CAB, BAD இரண்டும் ||| எனக் காட்டுக.

(ii) AC, AB, AD மூன்றும் வீதப் பொருத்த முடையனவெனக் காட்டுக.

(iii) $AC \cdot AD$ எப்பொழுதும் ஒரேயளவினதெனக் காட்டுக.

11. AB, CD இரு சமாந்தர வரைகள். CDயின் நடு E. AC, BE இரண்டும் Fஇல் சந்திக்கின்றன; AE, BD இரண்டும் Gயில் சந்திக்கின்றன. $FG \parallel AB$ எனக் காட்டுக.

*12. AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். Cவட்டச் சுற்றுவரையில் ஒரு புள்ளி. Bயிலுள்ள தொடுவரைக்கு Cயிலிருந்து செங்குத்துவரை CD கீறப்படுகிறது. CD, CB இரண்டுக்கும் விட்டம், பொருத்த மூன்றும் கூறு எனக் காட்டுக.

*13. ஒரு வட்டத்திலே PQ, PR சமநீளமுள்ள இரு நாண்கள். S, வில் PRஇல் ஒரு புள்ளி. PS, QR இரண்டும் நீண்டு Tயில் சந்திக்கின்றன. △ள் STR, SQP இரண்டும் வடிவொத்தன வெனக் காட்டுக.

*14. PQ ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். XY விட்டத்துக்குச் செங்குத்தான நாண். Pக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு நாண் PR, நாண் XYயை Sஇல் சந்திக்கிறது. $PS \cdot PR = PY^2$ எனக் காட்டுக.

*15. ABCD ஒரு நீள்சதுரம்; $AB = 2BC$. CB நீண்டு Eவரையும் செல்கின்றது; $CE = 2AB$. AC, DE இரண்டும் Xஇல் சந்திக்கின்றன.

(i) $\angle AXD$ செங்கோண மெனவும்,

(ii) $DX = \frac{1}{4}XE$ எனவும் காட்டுக.

*16. குறித்த இரு நேர்வரைகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் குறித்த ஒரு விகிதத்தில் இருக்குமாயின் அப் புள்ளியின் படுக்கை யாது?

**17. ABC ஒரு △. BCயின் நடுப்புள்ளி Mஊக் கூடாகச் செல்லும் நேர்வரையொன்று AB, AC இரண்டையும் முறையே Dயிலும் Eயிலும், Aக்கூடாக BCக்குச் சமாந்தரமாகவுள்ள நேர்வரையை Fஇலும் சந்திக்கிறது. $MD : ME = FD : FE$ எனக் காட்டுக.

**18. A, B, C, D நேர்வரை யொன்றிலுள்ள நாலு புள்ளிகள். AXD ஒரு △. BY, CY இரண்டும் முறையே DX, AX இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளன. XY இணைக்கப்பட்டு ADயை Oவில் சந்திக்கிறது. $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ எனக் காட்டுக.

**19. A, B, C, D நேர்வரை யொன்றிலுள்ள நாலு புள்ளிகள். ACX ஒரு △. BY, DY இரண்டும் முறையே AX, CX இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகக் கீறப்பட்டுள்ளன. XY இணைக்கப்பட்டு ADயை Oவில் சந்திக்கிறது. $OA \cdot OB = OC : OD$ எனக் காட்டுக.

**20 ABC ஒரு துவிசமபுய செங்கோண முக்கோணி; ∠ A செங்கோணம். BDEC முக்கோணியின் கன்னத்தில் முக்கோணிக்கு வெளியாகக் கீறப்பட்டுள்ள நீள்சதுரம்; BC = 2BD. ABயின் நடு F. ∠DFC செங்கோணமெனக் காட்டுக.

**21. ஒரு நாற்புயவடிவத்தில் ஒரு சோடி புயங்கள் சமாந்தரமானவை. மூலைவரைகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்வரை சமாந்தரவரைகளின் வித்தியாசத்திற் பாதி எனக் காட்டுக.

**22. ABC ஒரு △. BCயின் நடு D. ACயில் E ஒரு புள்ளி; $AE = \frac{1}{6}AC$. AD, BE இரண்டும் Fஇல் சந்திக்குமாயின், $BF = \frac{6}{7}BE$ எனக் காட்டுக.

**23. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக Aயிற் தொடுகின்றன. பொதுத் தொடுவரை யொன்றாகிய PQ மையங்களை இணைக்கும் வரையை Sஇல் சந்திக்கிறது. $SA^2 = SP \cdot SQ$ எனக் காட்டுக.

**24. AB ஒரு அரை வட்டத்தின் விட்டம். AP, AQ இரு நாண்கள். $PM \perp AB$; $QN \perp AB$. $AM : AN = AP^2 : AQ^2$ எனக் காட்டுக.

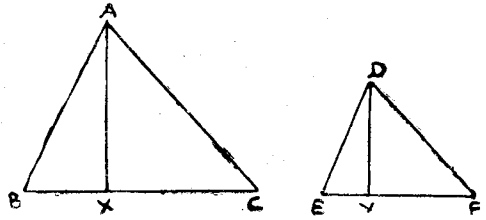
**25. ABC ஒரு △; $AD \perp BC$. BD, CD இரண்டுக்கும் பொருத்த நடுக்கூறு ADயாயின் ∠BAC செங்கோணமெனக் காட்டுக.

**26. OAB, OCD வடிவொத்த இரு △ள். AC : BD = OA : OB எனக் காட்டுக. AC, BD இரண்டுக்குமிடையிலுள்ள கோணம் = ∠ AOB எனவும் காட்டுக.

56. வடிவொத்த முக்கோணிகளின் பரப்பு

§1. சூத்திரம் 40

பொதுவிலக்கணம் – வடிவொத்த இரு முக்கோணிகளின் பரப்பும், அவற்றிலே இனமான புயங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களும் வீதப் பொருத்தமுடையனவாதல் வேண்டும்.



சிறப்பிலக்கணம் – தரவு – ABC, DEF வடிவொத்த இரு △ள்.

கேள்வி – $\triangle ABC : \triangle DEF = AB^2 : DE^2$.

ஆக்கம் – $AX \perp BC$; $DY \perp EF$.

நிரூபணம் –

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AX}{\frac{1}{2}EF \cdot DY}$$

$$= \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AX}{DY}$$

ஆனால், $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ (தரவு)

$\frac{AX}{DY} = \frac{AB}{DE}$ (△ள் ABX, DEF இரண்டும் III)

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$$

$$= \frac{AB^2}{DE^2}$$ என்றவாறு.

§2. இச் சூத்திரம் வடிவொத்த பல்கோணிகளுக்கும் பொருந்துமாறு காண்க. எவ்வாறெனில், அவற்றை வடிவொத்த பல முக்கோணிளாகப் பிரித்தல் கூடுமல்லவா?

அப்பியாசம் — 63 (i) கணித்தல்

1. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணிகளிலே பொருத்தமான இரு புயங்களின் நீளங்கள் முறையே 1·2″, 1·8″. முதல் முக்கோணியின் பரப்பு 3·2 சதுர அங். இரண்டாம் முக்கோணியின் பரப்பென்ன?

2. வடிவொத்த இரு முக்கோணிகளின் பரப்புகள் முறையே 120 ச. அங். 270 ச. அங். முதல் முக்கோணியின் ஒரு புயம் 3·2″. மற்றைய முக்கோணியிற் பொருத்தமான புயத்தின் நீளமென்ன?

3. ஒரு முக்கோணியின் மூன்று புயங்களும் முறையே 2″, 3″, 4″. பரப்பிற் பதினாறுமடங்கு பெரிய வடிவொத்த முக்கோணி யொன்றின் மூன்று புயங்களின் நீளங்களையும் அறிக.

4. ABC ஒரு △. XY ∥ BC. AX : XB = 5 : 3. △ ABCயின் பரப்பு = 20 ச. அங்குலமாயின் △ AXYயின் பரப்பென்ன?

5. ABC ஒரு △; ∠ B=செங்கோணம். BD ⊥ AC. AD=4DC. AB : AC என்னவிகிதமென அறிக.

அப்பியாசம் — 63 (ii) நிறுவுதல்

1. ABC ஒரு △. ABயின் நடு D; ACயின் நடு E. BCED = 3△ADE எனக் காட்டுக.

2. ABC ஒரு △; ∠ B செங்கோணம். BD ⊥ AC. 3AD=5DC. $3AB^2=5BC^2$ எனக் காட்டுக.

3. வடிவொத்த முக்கோணிகளின் பரப்பும், அவற்றின் பொருத்தமான உயரங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் பரப்பும் ஒரே விகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

4. வடிவொத்த முக்கோணிகளின் பரப்பும், அவற்றின் பொருத்தமான நடுவரைகளிலுள்ள சற்சதுரங்களின் பரப்பும் ஒரே விகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

* 5. ABC ஒரு △. BCயின் நடு D. BCயில் F வேறொரு புள்ளி; CD, CB இரண்டின் பொருத்த நடுக்கூறு CF. Fஉக் கூடாக BAக்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் நேர்வரை முக்கோணியை இரு சம கூறுக்கும் எனக் காட்டுக.

* 6. ஒரு வட்டத்திலே TA, TB இரு தொடுவரைகள். O வட்டத்தின் மையம். △ATB : △OAB $= AT^2 : AO^2$ எனக் காட்டுக.

* 7. ABC ஒரு △. BE ⊥ AC; CF ⊥ AB. BCEF : △AEF $= BE^2 : AE^2$ எனக் காட்டுக.

* 8. ABCD ஒரு சற்சதுரம். ADயின் நடு X; CDயின் நடு Y. CX, DYஇரண்டும் Zஇல் சந்திக்கின்றன. △CYZ, சற்சதுரத்தின் என்னபகுதி என அறிக.

* 9. வடிவொத்த முக்கோணிகளின் பரப்பும், அவற்றின் உள்வட்ட ஆரங்களிலுள்ள சற்சதுரங்

களின் பரப்பும் ஒரேவிகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

*10. வடிவொத்த முக்கோணிகளின் பரப்பும், அவற்றின் சுற்றுவட்ட ஆரங்களிலுள்ள சற்சதுரங்களின் பரப்பும் ஒரே விகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

**11. ABC ஒரு △. ∠A செங்கோணம். BXC, CYA, AZB மூன்று சமபுய முக்கோணிகள். AD ⊥ BC. △CYA = △CDX எனவும், △AZB = △BDX எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து, சமபுய முக்கோணிகள் இரண்டினது பரப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமான பரப்பையுடைய சமபுய முக்கோணியொன்றை ஆக்கும் வழியைப் பெறுக.

**12. ABC ஒரு △. ABDE, CAFG இரண்டும் முக்கோணிக்கு வெளியாக உள்ள சற்சதுரங்கள், △ ADF = △ AEG எனக் காட்டுக.

**13. ABC ஒரு △. ABயில் Dஒரு புள்ளி; DB = $\frac{2}{3}$AD. DE ∥ BC. D,E இரண்டுக்கூடாகவும் முறையே AC, AB இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் நேர்வரைகள் BCயை Fஇலும் Gயிலும் சந்திக்கின்றன. △ABC : DFGE என்ன விகிதம் என்பதை அறிக.

மீட்டல் அப்பியாசங்கள்

XXIV

1. ஒரு புயம் 5 செ. மீ. நீளமுள்ள சமபுய முக்கோணியொன்று கீறி சம பரப்புள்ள ஒரு சற்சதுரம் வரைக.

சற்சதுரப் புயமொன்றின் நீளத்தை அளந்து 100 சதுர செ. மீ. பரப்புள்ள சமபுய முக்கோணி யொன்றின் புய நீளத்தைக் கணித்தறிக.

2. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். O அதற்குள் ஒரு புள்ளி. Oவுக் கூடாக CB, CD இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் நேர் வரைகள் AB, AD இரண்டையும் முறையே X இலும், Y யிலும் சந்திக்கின்றன. XY∥BD ஆயின், புள்ளி O மூலைவரை AC யிலுள்ள தெனக் காட்டுக.

3. AOB, COD இரு நேர்வரைகள். AO = 5 OB; CO = 5 OD. முக்கோணிகள் AOD, BOC இரண்டும் சம பரப்புடையன எனக் காட்டுக.

4. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம்; அதில் AB∥CD. AC, BD இரண்டும் O விற் சந்திக்கின்றன; AB யின் நடுப்புள்ளியை O வுக்கிணைக்கும் நேர் வரை CDயை இரு சம கூறுகப் பிரிக்கிறதெனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு முக்கோணி. அதில் BC = 10 செ. மீ.; AB : AC = 3 : 2. கோணம் A = 60°. முக்கோணியைக் கீறி அதன் பரப்பைக் காண்க. ஒத்த வடிவுடையதும் 20 சதுர செ. மீ. பரப்புடையதுமான முக்கோணி யொன்று A′ B′ C′ ஆயின், B′ C′ ஆகிய புயத்தின் நீளத்தைக் கணித்தறிக.

XXV

1. ஒரு வட்டத்தில் TA, TC இரு தொடுவரைகள்; TBD ஒரு வெட்டுவரை. நாற்புய வடிவம் ABCD யின் கோணங்கள் A, C இரண்டின்

சம வெட்டிகளும் மூலைவரை BD யில் ஓரிடத்தில் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

2. PQR ஒரு முக்கோணி. அதில் PN ⊥ QR. PN : PQ = PR : QR ஆயின், ∠QPR செங்கோணமெனக் காட்டுக.

3. ABCD ஒரு நாற்புய வடிவம். அதில் AB = 7 செ. மீ., BC = 6 செ. மீ., CD = 4 செ. மீ., AD = 5 செ. மீ., ∠B = 70°. நாற்புய வடிவத்தை வரைக.

மிக நீண்ட புயம் 4" நீளமுடைய வடிவொத்த நாற்புய மொன்று வரைக. செய்கையை விளக்குக.

4. (i) AB ஒரு வட்டத்தின் விட்டம்; C சுற்று வரையிலுள்ள ஒரு புள்ளி. C யிலுள்ள தொடு வரைக்கு B யிலிருந்து கீறப்படும் செங்குத்து BF ஆகும். முக்கோணிகள் BFC, BCA இரண்டும் வடிவொத்தன எனக் காட்டுக.

(ii) ஒரு வட்ட நாற்புயத்தின் மூலைவரைகள் AC, BD இரண்டும் சந்திக்குமிடம் O.

$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD} = \frac{OB}{OC}$ எனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு முக்கோணி. Aக்கூடாக BCக்குச் சமாந்தரமாகவுள்ள நேர்வரையில் இரு புள்ளிகள் Y, Z குறிக்கப்படுகின்றன. ∠AYB = ∠AZC = ∠BAC ஆயின்

$YA : AZ = AB^2 : AC^2$ எனக் காட்டுக,

XXVI

1. ABC ஒரு முக்கோணி; அதில் BC = 10 செ. மீ., ∠B = 50°, ∠C = 70°. முக்கோணியை வரைக.

BCயின் நடுப்புள்ளி (X)க்கூடாக CAயை Yயிலும், ABயின் நீட்டிய பகுதியை Zஇலும் YX : XZ = 3 : 7 ஆகும்படி வெட்டக்கூடிய நேர்வரை யொன்று கீறுக. ZYயின் நீளத்தை அளந்தறிக.

2. ABC ஒரு முக்கோணி. BCயின் நடு D. ADயில் O ஒரு புள்ளி. BO, CO இரண்டும் நீண்டு AC, AB இரண்டையும் முறையே Eயிலும் Fஇலும் சந்திக்கின்றன. AD நீட்டப்படுகிறது Xவரையும்; XOவின் நடுப்புள்ளி D.

AO : AX = AF : AB எனவும்,

EF ∥ BC எனவும் காட்டுக.

3. ABC ஒருமுக்கோணி; அதில் BC = 10 செ. மீ., ∠A = 67°, AB : AC = 5 : 6. முக்கோணியை வரைந்து கோணம் Cயை அளந்தறிக.

4. ABCD ஒரு நீள்சதுரம்; அதில் BC = 2BA. CD நீட்டப்படுகிறது E வரையும்; CE = 2BC. AC ⊥ BE எனக் காட்டுக.

5. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். மூலைவரை ACயில் ஏதுமொரு புள்ளி Eக்கூடாக BCக்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்வரை ABயை Hஇலும், CDயை Kயிலும் வெட்டுகிறது. அதே புள்ளிக்கூடாக BAக்குச் சமாந்தரமாகக் கீறப்படும் நேர்வரை BCயை Mஇலும், ADயை Nஇலும் வெட்டுகிறது.

NE : EM = HE : EK எனவும்,

NH ∥ KM எனவும் காட்டுக.

XXVII

1. 2″ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் கீறி அதற்குள் BC : CA : AB = 5 : 6 : 7 ஆகும்படி ஒரு முக்கோணி ABC வரைக.

2. ABC ஒரு முக்கோணி. Aயிலிருந்து ஒரு நேர் வரை AP (=AB) கீறுக — ∠ PAB = 45°. Pயிலிருந்து ABக்குச் செங்குத்து PQ கீறுக. Qவிலிருந்து BCக்குச் சமாந்தரமான வரை ACயை Rஇல் சந்திக்கட்டும்.

   △ AQR = ½ △ ABC (பரப்பில்) எனக் காட்டுக.

3. ABCD ஒரு சமாந்தர சதுர்ப்புயம். ADயின் நடுப்புள்ளி M. BM இணைக்கப்பட்டு ACயை Rஇலும், CDயின் நீட்டிய பகுதியை Qவிலும் சந்திக்கிறது. QR = 2RB எனக் காட்டுக.

4. ABC ஒரு முக்கோணி; அதில் BC = 10 செ. மீ., ∠ A = 90°, AB + AC = 13 செ. மீ. முக்கோணியை வரைக.

5. ABC ஒரு முக்கோணி. BCயில் X ஒரு புள்ளி. Xக்கூடாக BA, CA இரண்டுக்கும் சமாந்தரமாகவுள்ள வரைகள் CA, BA இரண்டையும் முறையே M, N ஆகிய இரண்டிடங்களிலும் சந்திக்கின்றன. BC நீண்டு MNஐ Tயில் சந்திக்கிறது.

   $TX^2 = TB \cdot TC$ எனக் காட்டுக.

North - Ceylon Tamil Works Publishing House
CHUNNAKAM

Printed at the Thirumakal Press, Chunnakam