தொடக்க நுண்கணிதம்

எ. எசு. இராம்சே

1962

தொடக்க நுண்கணிதம்

ஆரம்பிப்போர்க்குரியது

கேம்பிரிட்சு, மோட்டலின் கல்லூரி இணையுரிமையாளர்

ஏ. எசு. இராம்சே, எம்.ஏ.

அவர்கள் எழுதியது

தமிழாக்கம்

கலாநிதி வ. பொன்னையா

அரச கரும மொழித்திணைக்கள வெளியீட்டுப் பிரிவினரால் வழங்கப்பட்டது.

இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்திற் பதிப்பிக்கப்பெற்றது.

ELEMENTARY CALCULUS

A Book for beginners

by

A. S. RAMSEY, M.A.

(Fellow of Magdalene College, Cambridge)

Translated and published in Ceylon

by arrangement with

The Cambridge University Press, Cambridge.

கேம்பிரிட்சுப் பல்கலைக் கழக அச்சகத்தாரின் இசைவுபெற்று இலங்கை அரசாங்கத்தாரால் தமிழில் மொழிபெயர்த்து வெளியிடப்பட்டது.

எல்லா உரிமையும் இலங்கை அரசாங்கத்தார்க்கே.

முதற் பதிப்பு 1962

முன்னுரை

இது இராம்சே என்பார் எழுதிய ஆங்கில மூலநூலின் மொழிபெயர்ப்பாகும். பொதுவாக, நுண்கணிதம் கணக்கியலறிஞனுக்கன்றிச் சாதாரண மாணவனுக்குரிய பாடமொன்றன்று. சாதாரண மாணவன் வகையீடு, தொகையீடு என்பவற்றின் தொடக்கச் செய்முறைகளையாயினும் விளங்கிக் கொள்ளும் வகையில் இந்நூலை ஆக்குவதற்கு இந்நூலாசிரியர் பெரிதும் முயன்றுள்ளார். உயர்நிலைப் பள்ளியிற் பயிலும் மாணவன் மடக்கை அட்டவணைகளை அமைப்பதற்கான அடிப்படையறிவைப் பெறமுயலாது, மடக்கைகளின் முதற்றத்துவங்களைப் பற்றி அறிந்து அவற்றின் பிரயோகங்களிற் பயின்று வருவது போல, விஞ்ஞான பாடங்களைக் கற்கும் மாணவர்கள் அனைவரும், சிறப்பாகப் பல்கலைக் கழகத்திற் பௌதிக வியலையும் இரசாயனவியலையுந் தமது விசேட பாடங்களாகக் கொள்வோர் தொடக்கத்திலேயே நுண் கணிதத்தின் முதற்றத்துவங்களையும் அவற்றின் பிரயோகங்களையும் பற்றி அறிந்திருத்தல் இன்றியமையாததொன்றாகும். தற்பொழுது தமிழ்மொழியில் இப்பாடத்தைக் கற்பதற்கு வேறொரு நூலும் இல்லாமையால், இவ்வெளியீடு தாய் மொழியில் இப்பாடத்தைக் கற்பதற்கு மிகவும் ஊக்கமளிக்குமெனக் கருதப்படுகின்றது.

நந்ததேவ விசயசேகர,
ஆணையாளர்.

அரச கரும மொழித் திணைக்களம்,
(வெளியீட்டுப் பிரிவு)
421, புல்லர் வீதி,
கொழும்பு 7.
1961, செத்தெம்பர் 12.

2—B 8844—1,526 (1/60)

உள்ளுறை

			பக்கம்
நூன்முகம்			vii
அத்தியாயம்	I	முகவுரை	1
	II	வகையீடு	7
	III	பிரயோகங்கள்	30
	IV	வகையீடு (முற்றொடர்ச்சி)	58
	V	தொகையீடு	91
	VI	வரையறுத்த தொகையீடுகள்	126
	VII	பிரயோகங்கள் : பரப்புக்களும் கனவளவுகளும் புவியீர்ப்பு மையங்களும்	150
	VIII	பகுதிகளாக வகையிடுதல்—சிறு மாற்றங்கள்	173
		எளிய பயிற்சிகள்	189
விடைகள்		.. ..	205

நூன்முகம்

இந்நூல் பிரதானமாக நுண்கணிதங் கற்கத் தொடங்குவோரைக் குறித்து எழுதப்பட்டது ; இது குறிப்பாகக் கணிதவறிஞராதலை விழையாது வகையிடுதல், தொகையிடுதல் என்னுஞ் செய்கைகளிற் செவ்விய தொழிற் பாட்டறிவைப் பெற விரும்புவோரைக் குறித்து எழுதப்பட்டது. நூற்பொருள் அட்சரகணித முறைபற்றி விரித்துரைக்கப்பட்டது ; எனினும், வேண்டிய அட்சர கணிதவறிவு சிறிதளவாகும் ; ஈருறுப்புத் தேற்றவறிவு வேண்டியதில்லை.

சிறு முகவுரைக்குப்பின் எல்லைகளைப் பற்றியும் அட்சரகணிதச் சார்புகளை வகையிடுதல்பற்றியும் ஓர் அதிகாரம் உண்டு. இதன்பின் கேத்திரகணித முறைக்கருத்து, எற்றவகையீடுகள், உயர்விழிவுகள், வளைகோட்டு வளைவுகள், சமன்பாடுகளின் பலமூலங்கள், இயக்கவிசையியற் பிரயோகங்கள் என்பனபற்றி ஓர் அதிகாரம் உண்டு. இயக்கவிசையியல் உண்மையாக வேறொரு பாடமாயிருத்தலால், அதுபற்றிய பலவிடயங்கள் இந்நூலில் இல்லை.

அதன்பின் அதிகாரம் iv எழுந்துள்ளது ; அதன் பொருள் அதிபரவளைவுச் சார்புகள் உட்படத் திரிகோணகணிதச் சார்புகள், அடுக்குக் குறிச்சார்புகள், மடக்கைச்சார்புகள் என்பனவாகும் ; அதற்குக் காரணம் இந்நூலின் ஒரு நோக்கு ஆரம்பகணிதச் சாதாரண வகுப்பொன்றில் ஒரு மாணக்கன் சந்திக்கத்தக்க அத்தகைய எளிய சார்புகள் எல்லாவற்றையும் வகையிடும் வழிகளையுந் தொகையிடும் வழிகளையும் இந்நூலிலிருந்து கற்கலாம் என்பதே. மாணக்கர் எத்தகைய குறையறிவுடையவர்களாயினும் x இன் அடுக்குக்களைத் தொகையிடச் செல்லுதற்கு அதிகாரம் iv முழுவதையுமாதல் அதன் பகுதிகளிற் சிலவற்றையாதல் தவிர்த்துச் செல்லுமாறும் இந்நூல் ஒழுங்காக்கப்பட்டுள்ளது. அத்தகைய மாணக்கரின் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்தற்கு இந்நூலில் ஆரம்பப்பகுதிகள் பற்றி ஒரு பெருந்தொகையான எளிய பயிற்சிகள் உண்டு.

அதிகாரம் v வகையிடலின் நேர்மாறுகத் தொகையிடல் பற்றிக்கூறும் ; அதன்கண் இருபடிப் பகுதிகளையும் இருபடி விகிதமுறு மூலப்பகுதிகளையுங் கொண்ட பின்னங்கள், எளிய பிரதியீடுகள், பகுதித் தொகையீட்டு முறை என்பன முற்றுய்க் கூறப்பட்டுள்ளன.

அதிகாரம் vi வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு பரப்பளவின் வகைக் குறிப்பாகக் காட்டும் ; இது அத்தொகையீட்டை ஒரு கூட்டுத் தொகையின் எல்லை என வரையறுக்கும் ; இவ்வரையறுத்தலின் பின் வரையறுத்த தொகையீட்டின் ஆரம்பவுடைமைகளும் முடிவில்லாத எல்லையைக்

கொண்ட தொகையீட்டின் சில எளிய பயிற்சிகளும் உண்டு. சைன் x, கோசை x என்பனவற்றின் அடுக்குக்களின் தொகையீடுகள் முற்றுய்ச் செய்யப்பட்டுள்ளன. பின்னர், பரப்பளவுகள், கனவளவுகள், புவியீர்ப்பு மையங்கள் என்பனவற்றைக்கொண்ட ஓர் அதிகாரம் உண்டு ; இந்நூல் பகுதிமுறை வகையிடலையும் பலமாறிகளின் சிறுமாற்றங்களுக்கு அதன் பிரயோகத்தையுங் கொண்ட ஓர் அதிகாரத்தோடு முடிவடையும்.

இந்நூலின் பருமனை நியாயமான அளவிற்கு வரையறுத்தல் காரணமாக n ஆம் பெறுதிகளைக்காணும் முறைகள், தொடரிற்சார்புகளின் விரிகள், ($\int$ சைன் $^n xdx$ ஐத் தவிர) ஒடுக்கற் சூத்திரங்கள், தளவளைகோடுகளின் தொடுகோடு, செங்கோடுகள் என்பன தவிர்க்கப்பட்டுள்ளன ; எனினும், ஈற்றில் தந்தவைபற்றிய சில செய்கைகள் ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதம் பற்றிய இதன் துணைநூலிற் காணப்படும்.

இந்நூலிலுள்ள விடயக் கொள்கையின் அளவு அதன் நோக்கத்திற்குத் தக்கதாகுமென்பது எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது. சில எடுத்துக்காட்டான நூல்கள் வகையீட்டைப் பயன்படுத்துவதில்லையெனினும் யான் பெறுதிகளுடன் வகையீடுகளையும் புகுத்திவிட்டேன் ; அதற்குக் காரணம் சிறப்பாகத் தொகையிடல்பற்றி வகையீட்டுக்கொள்கை பயன்பாடுடையது என்பதே. தொகையிடல் விடயம் $d\phi/dx$ என்னும் பெறுதியாதலன்றி $d\phi$ என்னும் வகையீடு என நிலைநிறுத்தல் நியாயமானது. வேறு வழிகளிற் பார்த்தால், இந்நூல் தேற்றங்களிலும் செய்கைகளிற் கூடுதலான பாத்தியதையுடையது. தொடர்ச்சியான வளைவுகளுயுடைய வளைகோடுகள் உண்டு என்று மேற்கொள்ளுங் கோட்பாட்டை அடிக்கொண்டு பல நியாயங்கள் இந்நூலின்கண் உள்ளன. எனினும், சிலசமயங்களிற் படுகுழியெச்சரிக்கைகளைத் தவிரத் தொடர்ச்சிவிடயம் பற்றி யாதொரு குறிப்புமில்லை.

சைன் $\infty = 0$, கோசை $\infty = 0$ என்னும் அசாதாரண முடிபுகளின் நிறுவலைக் கொண்ட நூலைக் கற்றுப் பல வயதினராகிய இளைஞரையும் பட்டங்கோரிகளையுங் கற்பிப்பதிலுஞ் சோதிப்பதிலும் பல்லாண்டு காலம் போக்கின எழுத்தாளன் ஒருவனுக்கு ஒரு கணித நூலின் பெறுமானத்தின் சோதனையானது அந்நூற்பொருள் மாணக்கனுக்குக் கற்றற்குதியுள்ளதாயேயன்றி என்றுதல் கற்று மறக்க வேண்டாததாயும் இருத்தல் வேண்டும் என்பதே. அவதானம் இல்லாதாரை மயக்க நெருங்கியிருக்கும் பல பொறிக்கிடங்குகளின் உண்மையாலும் பரந்திருக்கும் பிரதிகூலங்களின் உண்மையாலும் ஆரம்ப நூலொன்றிற்ருனும் இவ்விலட்சியத்தை அடைய எதிர்பார்த்தல் மடமையாயிருக்கலாம் ; எனினும், அவ்விலட்சியத்தைப் பெற எண்ணல் செம்மையானது. இந்நூல் அவ்விலட்சியக் குறைபாடுடைய அளவிற்கு எள்ளற்குரியது.

இச்சிறுநூல்களை யான் எழுதவேண்டுமெனத் தூண்டியதற்கும் கணக்குக்களின்விடைகளை வாய்ப்புப்பார்த்து அச்சுப்பிழை நீக்கியதற்கும் என் மருகனுகிய இரேசாங் கழகத்துத் திரு. எவ். ஏ. பென்சருக்கு என் உளமார்ந்த நன்றி உரியது.

ஏ. எசு. இ.

கேம்பிறிட்சு,
நவம்பர், 1932

மூன்றும் பதிப்பின் முகவுரை

கணிதங் கற்கத் தொடங்குவோரின் தேவைகளை நிறைத்தற்கு இன்னுஞ் சில உதவிகளை வழங்குமாறு இந்நூலின் முடிவில் எளிய கணக்குக்களின் வகுக்கப்பட்ட தொகுதியொன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதிகாரங்களின் முடிவுகளிற் சில கடுமையான கணக்குக்களுஞ் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

ஏ. எசு. இ.

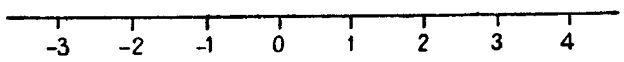
யூலாய், 1946

அத்தியாயம் I

முகவுரை

1.1. வகையீட்டு நுண்கணிதமுந் தொகையீட்டு நுண்கணிதமுந் திட்டமாய்ப் பேசுமிடத்துத் தனி அட்சரகணிதப் பொருள்பற்றியனவாகும்; அவை கேத்திரகணிதக் குறிப்பு யாதுமின்றி விருத்தியாக்கப்படலாம்; எனினும், அவற்றின் பிரதானமான பிரயோகங்களிற் பல கேத்திரகணிதத்திற்கு உரியனவாதலாலும், நுண்கணிதக் கொள்கையில் மிகுதியானவை கேத்திரகணித இயற்கையுணர்வு துணைகொண்டு மிக எளிதாக விளக்கக்கூடியனவாதலாலும், நாம் அட்சரகணிதச் சமன்பாடுகளுக்குங் கேத்திரகணித உருவங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பின் சிறு விளக்கத்தோடு ஆரம்பித்து நூல் செல்லச் செல்ல கேத்திரகணிதக் கருத்துக்களிலிருந்து நாம் பெறக்கூடிய உதவியைப் பெறக் கருதுகின்றோம்.

அட்சரகணிதமானது எண்கணிதத்தின் பொதுமைப்பாடுடைய உரு; அல்லது, எண்ணின் விஞ்ஞானமாகும்; கேத்திரகணிதமானது நிலையையும் இடத் தொடர்புகளையும் பற்றிய விஞ்ஞானம்; இவை இரண்டிற்கும் இடையேயுள்ள மூலத்தொடர்பு ஓரளவு கோலிற் செய்தமாதிரி எண்களை ஒரு கோட்டிற் புள்ளிகளின் நிலைகளாற் குறிக்கலாமென்பதே.



இவ்வாறு ஓரலகைக் குறிப்பதற்கு ஒரு நேர்கோட்டில் யாதுமோர் இசைவான நீளத்தைத் தேர்ந்து, அளவீட்டின் பூச்சியமாக அக்கோட்டின் யாதும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து, பூச்சியத்திலிருந்து தொடங்கிச் சமநீளங்களை அளப்பதால் 1, 2, 3, ... என்னும் எண்களின் கேத்திரகணித வகைக் குறிகளைப் பெறலாம்.

இன்னும், பூச்சியத்தின் ஒரு பக்கத்தில் அளக்கப்படும் நீளங்கள் நேரெண்களையும், எதிர்ப் பக்கத்தில் அளக்கப்படும் நீளங்கள் எதிரெண்களையுங் குறிக்கின்றன என நாம் இசையலாம்; இவ்வண்ணம் ஒரே நேர்கோட்டில் நாம் விரும்புகின்றவாறு எத்தூரத்திற்கும் இரு திசைகளிலும் அளவீடுகளை, விரிப்பதால் எல்லா நேரெதிர் முழுவெண்களினுடைய முழுவகைக் குறிப்பையும் நாம் பெறலாம்.

எனினும், வகைக் குறிப்பு முழுவெண்களுக்கெனக் கட்டுப்படுத்தப்படவில்லை; ஓரளவுகோலிற்போல, 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலுள்ள கோடு பலவேறு விதங்களில், உதாரணமாக எட்டிலொன்றுகளாய், அல்லது பத்திலொன்றுகளாய், அல்லது யாம் விரும்புமாறு யாதுமொரு விதத்திற்

பிரிக்கப்பட்டு, அப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றுஞ் சிறு பிரிவுகளாய்ப் பிரிக்கப்படலாம் ; ஆயின், 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிற் இருக்கின்ற ஒவ்வோர் எண்ணிற்கும் ஒத்ததாய் அக்கோட்டில் ஒரு குறித்த புள்ளி உண்டு எனலாம்.

"2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையில் எத்தனை எண்கள் இருக்கின்றன", என நாம் வினவினால், "2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலேயன்றி குறித்த எச்சோடி எண்களுக்கு இடையினும் முடிவிலித் தொகை எண்கள் உண்டு" என்பதே விடையாகும். அதற்குக் காரணஞ் சிறு பிரிவுகளாக்குஞ் செயலுக்குக் கட்டாயமான நிறுத்தலிடம் இல்லை என்பதே ; அது என்றுந் தொடரப்படலாம் ; அதுபோல, ஒரு கோட்டிற் குறித்த எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையில் முடிவிலித்தொகைப் புள்ளிகள் உண்டு எனலாம்.

"தந்த ஓர் எண்ணுக்கு அடுத்த எண்" என்றுற் கருத்து என்ன ? கூட்டல் விருத்தியைப் போல யாதோரு ஒரு விதியின்படி தேரப்பட்ட எண்களைப்பற்றி, அல்லது முழு வெண்களைப்பற்றி நாம் பேசுமிடத்து $n+1$ என்பதே n இன்பின் அடுத்த எண் என்று விடையிறுத்தல் எளிது. எண்களைப்பற்றிப் பொதுவாகப் பேசுமிடத்து, தந்த ஓர் எண்ணுக்கு அடுத்ததாய் ஓர் எண்ணும் இல்லை. b என்பது a இற்கு வேறுன ஓர் எண்ணுயின் a இற்கும் b இற்கும் இடையில் $\frac{1}{2}(a+b)$ என்னும் ஓர் எண்ணும் உண்டு ; ஆயின், b என்பது a இற்கு அடுத்த எண்ணுகாது ; a இற்கு அடுத்ததாய் யாது ஓர் எண்ணும் இருத்தல் முடியாது.

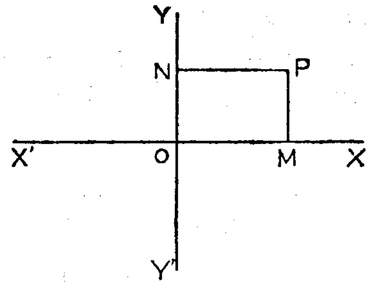
அதுபோல, ஒரு கோட்டிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் நாம் சிந்திக்குமிடத்து, தந்த ஒரு புள்ளிக்கு அடுத்ததாய்ச் சிந்திக்கப்படத்தக்க புள்ளி யாதும் இல்லை ; இரு புள்ளிகள் எவ்வளவிற்கு ஒருங்கு நெருங்கியிருந்தாலும் அவற்றின் இடைத்தூரத்தை மேலுஞ் சிறு பிரிவுகளாகப் பிரித்தல் முடியும் என்பதும் முடிபு ஒருபோதும் பெறப்படாது என்பதுமே அதற்குக் காரணமாகும்.

ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளினுற் குறிக்கப்படும் எண்களுக்கிடையில், முழு வெண்கள், பின்னங்கள், முடிவுள்ள தசமங்கள் என்னும் இவையேயன்றி முடிவுள்ள தசமங்களாற் குறிக்கப்படாத $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$. π என்பன போன்ற **விகிதமுருவெண்களும்** அமைந்துகிடக்கின்றன.

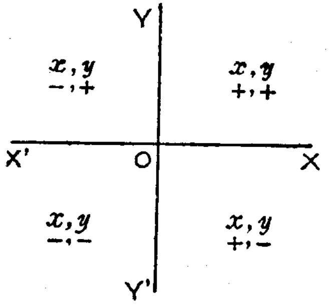
0 என்னும் புள்ளியிலிருந்து $\sqrt{2}$ என்பதைக் குறிக்கின்ற புள்ளியினது தூரம் இரு பக்கங்களும் ஓரலகு நீளமுள்ள செங்கோண முக்கோணம் ஒன்றினுடைய செம்பக்கத்தை எடுப்பதால் எளிதிற் காணப்படலாம். விகிதமுருவெண் கொள்கையை ஆராயாது எண்களுக்கும் ஒரு கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளுக்கும் முழுவொப்பு உண்டு என்று கூறல் எங்கள் நோக்கத்திற்குப் போதியதாகும். ஒவ்வோர் எண்ணுக்கும் ஒத்த புள்ளி ஒன்று உண்டு ; ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்த எண்* உண்டு.

* இங்கே குறிப்பிடப்பட்ட எண்கள் எல்லாம் மெய் எண்கள். **சிக்கலான அல்லது கற்பனையான ($\sqrt{-1}$ ஐ உள்ளடக்கியுள்ள) எண்களுக்கு ஒரு கேத்திரகணித விளக்கம் உண்டு. ஆனல் இங்கே நாம் அவ்வெண்களைப்பற்றி அக்கறைகொள்ளவில்லை.**

1.2. ஆள்கூற்றச்சுக்கள். ஒரு கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலை ஓர் எண்ணுலே துணியப்படும் என்பதைக் கண்டுள்ளோம். அதுபோல, ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலை இரண்டு எண்களாலே துணியப்படும். தந்த தளத்தில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் XOX', YOY', என்னும் இரு கோடுகளை வரைகின்றேம். இக்கோடுகள் **ஆள்கூற்றச்சுக்கள்** எனப்படும். இக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியாகிய 0 என்பது **உற்பத்தித்தானம்** எனப்படும் ; பின்னர், அத்தளத்தில் P என்னும் யாதும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து XOX', YOY', என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாய் PM, PN என்பனவற்றை வரைகிறேம். OX, OY என்னுங் கோடுகளிலுள்ள M, N, என்னும் புள்ளிகளானவை தேர்ந்த அளவுத் திட்டத்தின்படி OM, ON, என்னும் நீளங்களினுடைய எண்ணளவுகளான வரையறையுள்ள எண்களைக் குறிக்கின்றன ; P இனது நிலை இவ்வெண்களால் வரையறுக்கப்படுகின்றதெனப்படும் இவ்வாறு எவையேனும் இரண்டு எண்கள் ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கின்றன ; அவ்வெண்கள் அப்புள்ளியின் **ஆள்கூறுகள்** எனப்படும். $X'OX$ என்பது x அச்சு எனப்படும் ; OM என்பது P என்னும் புள்ளியின் x ஆள் கூறு, அல்லது **கிடைத்தூரம்** எனப்பட்டு x இனுற் குறிக்கப்படும். $Y'OY$ என்பது y அச்சு எனப்படும் ; OX அல்லது MP என்பது P என்னும் புள்ளியின் y ஆள் கூறு, அல்லது **நிலைத்தூரம்** எனப்பட்டு y இனுற் குறிக்கப்படும்.



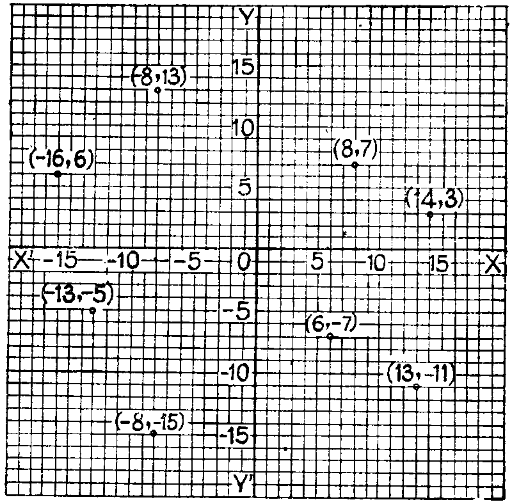
இவ்வண்ணம், P என்னுங் குறித்த புள்ளிக்கு $OM = 2$ ஆயும் $ON = 1{\cdot}7$ ஆயும் இருந்தால், P என்பது $x = 2$, $y = 1{\cdot}7$ ஆகிய புள்ளி என நாம் கூறலாம் ; இதனைச் சுருக்கமாகச் சொல்ல விரும்பின், P என்பது $(2, 1{\cdot}7)$ என்னும் புள்ளி எனலாம். x, y என்னும் இரண்டிற்கும் ஒரேயுளவுத்திட்டத்தை வழங்க வேண்டும் என்பதில்லை.



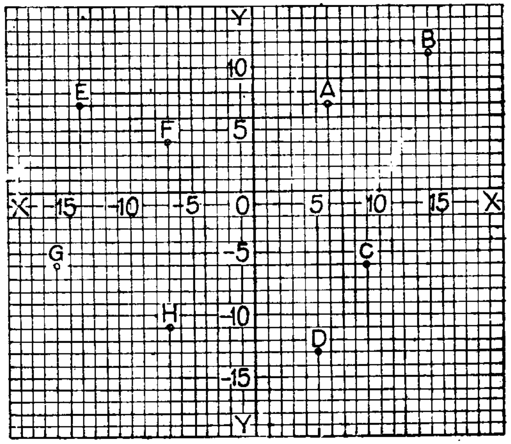
1.3. குறிகளின் பொதுவான குறிவழக்கு உருவத்திலுள்ளவாறு அச்சுக்களைக் கொண்டதாகும் ; நேரெண்கள் OX, OY என்பனவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாற் குறிக்கப்படுகின்றன ; எதிரெண்கள் OX', OY', என்பனவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாற் குறிக்கப்படுகின்றன.

அச்சுக்கள் அத்தளத்தை நான்கு கால்வட்டங்களாகப் பிரிக்கின்றன ; இக்கால்வட்டங்களில் x, y என்னும் ஆள்கூறுகளுக்கு உருவத்திற் காட்டிய வாறு குறிகள் உள.

ஒரு தொகை புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் இதனைச்சேர்ந்த உருவத்திற் (உரு. *A* இற்) குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.



உரு. **A**



உரு. **B**

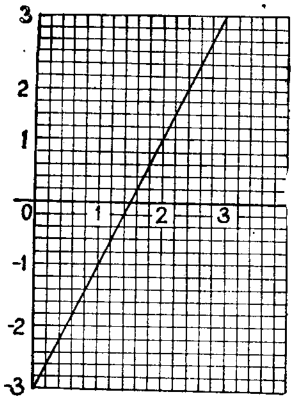
1.4. பயிற்சிகள்.

1. இதனைச் சேர்ந்த உருவத்தில் (உரு. B. இல்) A, B, C, ... என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

2. பின்வரும் புள்ளிகளின் நிலைகளை ஒரு படத்திற் குறிக்க :—

$(1, -1{\cdot}5), (-3,7), (-2, -4{\cdot}5), (3,4), (-3, -2).$

1.5. வரைப்படங்கள். சென்ற பயிற்சிகளில் எழுந்தமானமாய்த் தேரப்பட்ட புள்ளிகளைக் குறிப்பதற்குப் பதிலாக x பற்றி y ஐ உணர்த்துகின்ற ஒரு சமன்பாட்டை எடுத்து அதன்பின் x இனுடைய ஒரு தொகைப் பெறுமானங்களைத் தேர்ந்து y இனுடைய ஒத்தபெறுமானங்களை எடுத்தால், அவ்வாறு பெறப்பட்ட புள்ளிகள் அப்படத்தில் வரையறுத்த ஒரு புள்ளியிற் கிடைப்பதைக் காண்கின்றோம்.



உதாரணமாக, $y = 2x - 3$ எனின், x இற்குச் சில பெறுமானங்களையும் y இற்கு ஒத்த பெறுமானங்களையும் அட்டவணைப்படுத்துகிறோம்: இவ்வண்ணம் பெறும் அட்டவணை பின்வருமாறு :—

$$x = \quad 0, \quad 1, \; 2, \; 3,$$
$$y = -3, \; -1, \; 1, \; 3.$$

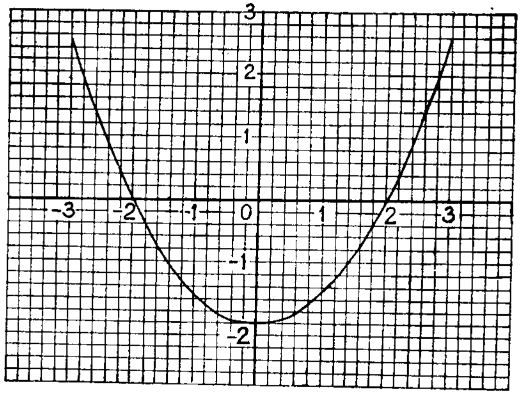
இப்புள்ளிகளை ஒரு படத்திற் குறிக்க ; இவை ஒரு நேர் கோட்டிற் கிடத்தலைக் காண்கின்றோம்.

இனி, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ எனின், நாம் பின்வரும் ஒத்த பெறுமானங்களைப் பெறுகின்றோம் :

$$x = -3, \; -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3,$$
$$y = 2{\cdot}5, \; 0, \; -1{\cdot}5, \; -2, \; -1{\cdot}5., \; 0, \; 2{\cdot}5.$$

ஒத்த புள்ளிகள் படத்திற் காட்டியவாறு ஒரு வளை கோட்டிற் கிடப்பதைக் காண்கின்றோம்.

இந்த இரண்டு பயிற்சிகளிலும் x இன் இடையான பெறுமானங்களையும் y இன் ஒத்த பெறுமானங்களையும் எடுத்தோமாயின், வகைக்கு ஏற்ற வண்ணம் நேர்கோட்டிலாதல் வளைகோட்டிலாதல் கிடக்கின்ற புள்ளிகளைப் பெறுகின்றோம்.



1.6. y, x என்பவற்றைக்கொண்ட ஓர் அட்சரகணிதச் சமன்பாடு வரைப்பட முறையாற் குறிக்கப்படலாம் என்பதற்கும், பொதுவாக அது ஒரு வளைகோட்டைக் குறிக்கும் என்பதற்கும், சென்ற பிரிவின் பயிற்சிகள் எடுத்துக்காட்டுக்களாகும். x, y, என்பனவற்றில் முதற்படியிலுள்ள ஒரு சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்குமென்பது ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணித நூல்களிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. ஏனைய சமன்பாடுகள் எல்லாம் வளைகோடுகளைக் குறிக்கும்.

அவ்வளைகோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் x உம், y உம் தந்த சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் என்பதை உணர்தல் பிரதானமானது. "$y=\frac{1}{2}x^2-2$ என்னும் நிபந்தனையை அத்தளத்திலுள்ள எப்புள்ளிகள் தீர்க்கும் ?", என வினவினுல், "குறித்த ஒரு வளைகோட்டிற் கிடக்கின்ற ஒவ்வொரு புள்ளியுந் தீர்க்கும்," என்பதே அதற்கு விடையாகும். அவ்வளைகோட்டிலுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் குறிப்பதற்கு x, y என்பனவற்றை நாம் வழங்கினுல், அவற்றை "**வழங்கும் ஆள்கூறுகள்**" என்கிறேம்.

அத்தியாயம் II

வகையீடு

2.1. மாறிகள். x என்னுங் குறியீடு ஒரு **கூட்டம்** எண்களுள் யாதும் ஒன்றைக் குறிக்குமாயின் ஒரு **மாறி** எனப்படும் ; அது குறிக்கத்தக்க எண்களின் கூட்டம் அதன் **மாறு தகைமைவீச்சு,** அல்லது **மாறு தகைமை புலம்**" எனப்படும். உதாரணமாக, x என்பது 100 இலுங் குறைந்த நேர் முழு வெண்களுள் யாதும் ஒன்றைக் குறித்தால், அதன் வீச்சு 1, 2, 3, ... 99 ஆகும். அன்றி, x என்பது -2, 5 என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள யாதும் ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறிக்கலாம் ; இவ்வகையில் அவ்வீச்சை நாம் $-2<x<5$ என்னுங் குறியீடுகளால் வரையறுத்து "x ஆனது -2 இற்கும் 5 இற்கும் இடையிற் கிடக்கும்" என வாசிக்கலாம். -2, 5 என்னும் முனைப்புள்ளிகள் இப்போது அவ்வீச்சின் பகுதிகளாகும்; அன்றி x என்பது -2 இலிருந்து 5 வரையுமுள்ள யாதுமொரு மெய் யெண்ணைக் குறித்தல் கூடும் ; இது $-2 \leqq x \leqq 5$, என்னுங் குறியீடுகளாற் காட்டப்படும் -2, 5 என்னும் முனைப்புள்ளிகள் இப்போது அவ்வீச்சின் பகுதிகளாகும் ; ஆனுல் முன்வகையில் அவை அவ்வாறு இருக்கவில்லை. அன்றி, x என்பது யாதும் ஒரு மெய்யெண்ணுயிருக்கலாம் ; எனின், வீச்சு, $-\infty < x < \infty$ என்னுங் குறியீடுகளாற் காட்டப்படும் ; இங்கு $-\infty$, ∞ என்பன இரு திசைகளிலும் x அச்சு முடிவின்றி நீட்டப்பட்ட அதன்கண் அளக்குந் தகைமையின் எல்லைகளுக்கு அப்பாற்பட்ட நிலைகளைக் குறிக்கும். ∞ என்னுங் குறியீட்டை "**முடிவிலி**" எனக் கூறலாம் ; அது ஒருபோதும் அடையப்படாதாகலின் அது ஓரெண்ணுகாது ; ஆனுல் x என்பது ஓர் எண்ணைக் குறிக்கின்றது ; ஆயின், "$x=\infty$" என நாம் ஒருபோதுஞ் சொல்வதில்லை. அது ஓர் எண்ணை எண்ணுகாத ஒன்றுக்குச் சமனுக்குதலாய் முடியும் என்பதே அதற்குக் காரணம். x ஆனது யாம் நியமிக்கக்கூடிய யாதும் ஓர் எண்ணிலும் பெரிதாகும் வரைக்குங் கூடுகின்றது எனக் காட்டவிரும்பினேமாயின், "x என்பதால் அணுகப்படுவது முடிவிலி" எனக் கூறுகின்றேம் ; "இதனை $x \to \infty$" என்னுங் குறியீடுகளால் உணர்த்துகின்றேம்.

2.11. சார்புகள். x என்னும் ஒரு மாறியின் பெறுமானம் அறியப்பட, y என்னும் ஒரு மாறியின் பெறுமானந் துணியப்படுமாறு y ஆனது x ஓடு தொடர்புடையதாயின், y என்பது x இன் சார்பு எனப்படும். x இனுடைய பெறுமானங்கள் விரும்பியபடி தேரப்படலாமாகையால், x என்பது **சாராமாறி** எனப்படும் ; y இனுடைய பெறுமானங்கள் x இனுடைய தேர்ந்த பெறுமானங்களைச் சார்ந்து நிற்கின்றமையால், y என்பது **சார்ந்தமாறி** எனப்படும்.

x ஐக் கொண்ட யாதும் ஓர் அட்சரகணிதக் கோவை x இன் சார்பாகும்; எனினும், சார்பியல்புக் கொள்கை அட்சரகணிதக் கோவைகளென ஒதுக்கப் படவில்லை; சைன்x, தான்x முதலிய திரிகோண கணிதச் சார்புகளும், e^x, $\log x$, e^{x^x} முதலிய அதீதச்சார்புகளும், இவற்றுள் யாதுமொன்றை அட்சரகணித முறையாலோ பிறவாற்றாலோ கையாள்வதாற் பெறுஞ்சார்புகளும் உண்டு.

இங்கு நாம் ஆராயும் சார்பினம் பெரும்பான்மை எளிய இனத்தைச் சேர்ந்த அட்சரகணிதச் சார்புகளாகும்; அவை $y = x^3$, $y = ax^2 + b$, $y = 1/(x+1)$ முதலிய தொடர்புகளாற் குறிக்கப்படும்.

சென்ற அத்தியாயத்தில் நாம் கற்றவற்றிலிருந்து ஆள்கூற்றுக்கேத்திர கணிதமானது அத்தகைச் சார்புகளை வரைப்பட முறையாற் குறிக்கும் ஓர் எளிய வழியைத் தருகின்றது என்பது தெளிவு. x என்னும் மாறி தன் மாறுதகைமைப் புலத்தில் வீசிநிற்ப, அச்சார்பில் என்ன மாற்றங்கள் நடைபெறுகின்றன என அறிதலே எம் நோக்கமாய் இருத்தலால், அச் சார்பின் கேத்திரகணித வகைக்குறி, அல்லது படம் இந்நோக்கத்திற்குப் பெரிதுந் துணைபுரியும்.

$f(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$ முதலிய குறியீடுகள் " x இன் சார்பு " என்னுஞ் சொற்றொடரின் குறுக்கங்களாக வழங்கப்படுகின்றன.

இவ்வண்ணம் $f(x)$ என்பது $x^3 - 3x + 2$ என்பதைக் குறித்தால், $f(a)$ என்பது x ஐ a இற்குச் சமனாக்க அச்சார்பின் பெறுமானமாகும்:

அதாவது $f(a) = a^3 - 3a \times 2$.

அதுபோல, $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$.

$$f(0) = 0 - 0 + 2 = 2,$$

$$f(5) = 125 - 15 + 2 = 112;$$

இவ்வாறே பிறவும்.

2.12. பயிற்சிகள்.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ எனின், $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக;

   $f(x+h) = f(x) + 2h(x+1) + h^2$ எனக் காட்டுக.

2. $f(x) = \dfrac{x-a}{x}$ எனின், $f(a)$, $f(2a)$, $f(-a)$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக;

   $f(x+h) - f(x) = ha/x(x+h)$ என்றுங் காட்டுக.

3. $f(x) = \dfrac{x-a}{x} + \dfrac{x}{x-b}$ எனின்,

   $f(a+b), f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $f(x) = (x-a)^2 (x-b)^2$ எனின் $f(a+b)$ இன் பெறுமானத்தை எழுதுக.

2.2. நோக்குக்கள்.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots,$ என்னும் எண்களின் தொடரை ஆராய்ந்தால், அத்தொடரை மேலும் மேலுந் தொடர அவ்வெண்கள் சிறியனவாக வருதலைக் காண்கின்றோம். அவை நாம் நியமிக்க விரும்பும் யாதும் ஓர் எண்ணிலுஞ் சிறியனவாக ஆக்கப்படலாம்—உதாரணமாக, .000001 இலுஞ் சிறிய அத்தொடரின் உறுப்பொன்றை நாம் தேவைப்பட்டால் $\frac{1}{1000001}$ என்பதை மட்டுமே நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இவ்வாறே பிறவும். ஆயின், அத்தொடரின் உறுப்புக்களின் தொகை கூடக் கூட அவையாதுமொரு நியமித்த பருமனாற் பூச்சியத்தின் அண்மையில் அணுகும் என்று கூறல் நியாயமாகும்; எனினும், பூச்சியமானது ஒருபோதும் அடையப்படாதாகையால் அத்தொடரின் உறுப்பாகாது. இவ்வகையில், பூச்சியமானது " அத்தொடரின் நோக்கு " என்று கூறுகின்றோம்.

முற்கூறிய முடிபைக் குறியீட்டு வடிவத்திற் பின்வருமாறு உணர்த்தலாம்: x ஆனது நேர்முழுவெண் பெறுமானங்களூடாக முடிவிலியை அணுகினால், $\frac{1}{x}$ என்னுஞ் சார்பு பூச்சியத்தை அணுகும்.

அதுபோல, வழியில் எல்லா எண்பெறுமானங்களுக்குமூடாகச் சென்று $x \to \infty$ எனின், $\frac{1}{x} \to 0$ என்பது உண்மையாகும்; n என்பது யாதுமொரு நேர்க்குறிகாட்டியாயின் $\frac{1}{x^n} \to 0$ என்பதும் உண்மையாகும்.

அதுபோல, x என்னும் எண் குறைதலுற $\frac{1}{x}$ என்னும் பின்னங் கூடுதலுறும்; x என்பது சிறிதாகச் சிறிதாக $\frac{1}{x}$ இன் பெறுமானம் பெரிது பெரிதாகும்; ஆயின், x என்பதைப் பூச்சியத்திற்கு அண்மையில் எடுப்பதால், $\frac{1}{x}$ என்பதை எத்துணைப் பெரியதோர் எண்ணிலும் பெரிதாகச் செய்யலாம்; இதனை $x \to 0$ ஆக, $\frac{1}{x} \to \infty$ ஆகும் என்னுங் கூற்றினால் உணர்த்துகின்றோம்.

2.21. $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ என்னுஞ் சார்பை அடுத்ததாக ஆராய்க. x என்பது a இற்குச் சமனாகும்போது, அச்சார்பு $\frac{0}{0}$ என்னும் வடிவத்தை எடுக்கின்றது ; இது பொருளற்றது ; எனினும், x என்பது a என்னும் எண்ணை அணுக அச்சார்பிற்கு யாது நிகழ்கின்றதென நாம் ஆராயும்போது நாம் ஒரு வரையறையுள்ள முடிபைப் பெறுகின்றோம். எனின் $x=a+h$ எனப் பிரதியிடுவோம்; இங்கு h என்பது சிறிதாகுக; பின்னர் h என்பதைப் பூச்சியத்திற்குக் குறைந்து செல்லும்படி செய்க. அச்சார்பு

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{a+h-a}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h \text{ ஆகும்.}$$

ஆயின், $h\to 0$ ஆக, அல்லது $x\to a$ ஆக, சார்பு $\frac{x^2-a^2}{x-a}\to 2a$ ஆகும்.

$2a$ என்பதை $x\to a$ ஆக, $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ இன் நோக்கு எனக் கூறுகின்றோம்.

x என்பது a ஐ அணுக $f(x)$ இன் நோக்கும், $x=a$ ஆக $f(x)$ இன் பெறுமானமும் ஒரே பொருளாய் இருக்கத் தேவையில்லை என்பது குறிப்பாய் அறியப்படவேண்டும். சிறிது முன் ஆராய்ந்த வகையில், அதாவது, $f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a}$ என்னும் வகையில் $f(a)=\frac{0}{0}$; எனினும், $x\to a$ ஆக, $f(x)$ இன்நோக்கு $2a$ ஆகும் ; $\frac{0}{0}$, $2a$ என்பன ஒரே பொருளல்ல.

எனினும், $f(x)=x^2+a^2$ ஆயின், $f(a)=2a^2$; $x\to a$ ஆக $f(x)$ இன் நோக்கும் $2a^2$ ஆகும். ஆயின், $x\to a$ ஆகப் பெறும்நோக்கானது $x=a$ ஆகும்போது அச்சார்பின் பெறுமானமாகலாம் ; அது அவ்வாறு இருக்க வேண்டும் என்னும் நியதி இல்லை என்பதறிக. $L_{x\to a}$ என்னுங் குறியீடு “ x என்பது a ஐ அணுக வரும் எல்லை ” என்பதற்காகப் பெரும்பான்மை வழங்கப்படுகின்றது ; எனின் மேலுள்ள முடிபு

$$L_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=2a \text{ என எழுதப்படும்.}$$

2.22. சென்ற இரு பிரிவுகளிலும் நாம் எடுத்துக்காட்டிய சார்பின் எல்லையைப் பற்றிய கொள்கை பின்வருமாறு ஒரு வரைவிலக்கணத்தில் அடக்கப்படலாம் :

x என்பதை a இற்குப் போதிய அளவு அணித்தாய் எடுப்பதால் $f(x)$, A என்பனவற்றின் வித்தியாசம் எத்துணைச் சிறிதாயினும் யாதுமொரு நியமித்த எண்ணிலுஞ் சிறிதாய் $f(x)$ ஆக்கப்படலாமெனின் x என்பது a என்னும் எண்ணை அணுக $f(x)$ என்னுஞ் சார்பின் எல்லை A ஆகும்.

2.3. இரு சார்புகளின் கூட்டுத்தொகையின், அல்லது வித்தியாசத்தின் எல்லை அச்சார்புகளின் எல்லைகளின் கூட்டுத்தொகை, அல்லது வித்தியாசமாகும்.

$L_{x\to a}f(x)=F$ என்றும் $L_{x\to a}g(x)=G$ என்றுங் கொள்க. x என்பது a இற்குப் போதிய அளவு அணித்தாய் எடுக்கப்பட்டால் $f(x)$, F என்பனவற்றின் வித்தியாசமும் $g(x)$, G என்பனவற்றின் வித்தியாசமும் யாம் நியமிக்க விரும்பும் யாதும் ஓர் எண்ணிலுஞ் சிறியனவாய் ஆக்கப்படலாமென்பதே இக்கூற்றுக்களின் பொருள் ; ஆயின், a இற்கு அண்மையிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு

$$f(x)=F+\alpha \text{ என்றும் } g(x)=G+\beta \text{ என்றும்}$$

நாம் எழுதலாம். இங்கு, x என்பது a ஐ அணுக, α, β என்னும் இரண்டும் பூச்சியத்தை அணுகுஞ் சிற்றெண்கள்.

ஆகவே, $x\to a$, ஆக $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ ஆகும்

இன்னும் $f(x)\pm g(x)-(F\pm G)=\alpha\pm\beta$

எனவே $L_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)-(F\pm G)\}=L_{x\to a}(\alpha\pm\beta)=0$,

$$L_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=F\pm G=L_{x\to a}f(x)\pm L_{x\to a}g(x)$$

அதுபோலப் பின்வருவனவும் நிறுவப்படலாம்.

இரு சார்புகளின் பெருக்கத்தின் எல்லை, அவற்றின் எல்லைகளின் பெருக்கத்திற்குச் சமன்.

பிரிக்குமெண்ணின் எல்லை பூச்சியமன்றெனின் இரு சார்புகளின் ஈவுகளின் எல்லை அவற்றின் எல்லைகளின் ஈவிற்குச் சமன்.

2.31. அடிப்படையான எல்லை $L_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$.

n என்பது முழுவெண் அல்லது பின்னவெண், நேரெண் அல்லது எதிரெண்ணென யாதுமொரு விகிதமுறுமெண்ணாயிருக்கும்போது இம்முடிபை நிறுவல்.

(i) n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணாகுக. நெடுமுறை வகுத்தலால், $\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-1}$ எனக் காட்டலாம் ; ஈவில் n உறுப்புக்கள் உண்டு. $x\to a$ ஆக ஈவிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் a^{n-1} ஆகும். ஆகவே, n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$$L_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

(ii) n என்பது ஒரு நேர்ப் பின்னமாகுக. p, q என்பன நேர்முழு வெண்களாயிருக்க $n=p/q$ ஆகுக. $x = y^q$ ஆகுக ; $a = b^q$ ஆகுக. எனின்.

$$x^n = (y^q)^{\frac{p}{q}} = y^p,\ a^n = (b^q)^{\frac{p}{q}} = b^p.$$

ஆயின், $\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{y^p-b^p}{y^q-b^q} = \frac{y^p-b^p}{y-b}\times\frac{y-b}{y^q-b^q}.$

இனி, $x\to a$ நாம்பெறுவது $y\to b$; (i) ஆம் வகையால், $y\to b$ ஆக

$\frac{y^p-b^p}{y-b}\to pb^{p-1}$, $\frac{y^q-b^q}{y-b}\to qb^{q-1}$ என்பன

ஆகவே, $L_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}} = \frac{p}{q}b^{p-q} = \frac{p}{q}a^{\frac{p-q}{q}} = na^{n-1}.$

(iii) n என்பது எதிரெண்ணுகுக. m என்பது நேராயின், $n= -m$ ஆகுக. ஆயின்,

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a} = \frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a} = -\frac{x^m-a^m}{x-a}\cdot\frac{1}{x^m a^m}$$

இனி, m என்பது நேராயிருத்தலால், (i), (ii) என்னும் வகைகளால், $x\to a$ ஆக, $\frac{x^m-a^m}{x-a}\to ma^{n-1}.$

ஆகவே,

$\frac{x^n-a^n}{x-a}\to -ma^{m-1}\cdot\frac{1}{a^{2m}}$ அல்லது $-ma^{-m-1}$ அல்லது na^{n-1}

இது அவ்விவரணத்தின் நிறுவலை முடிக்கின்றது.

2.32

உதாரணம் 1. $L_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-x+1}=\frac{2}{3}.$

பின்னத்தின் தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2 ஆல் வகுத்தலால் நாம் பெறுவது,

$$\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

ஆயின், $x\to\infty$ ஆக, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ என்னும் இரண்டும் $\to 0$;

எனின், அப்பின்னம் அணுகும் எல்லை $\frac{2}{3}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2. $L_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac12}-x^{\frac12}}{h}=\frac{1}{2x^{\frac12}}$

இது அடிப்படை எல்லையின் ஓர் பயிற்சியாகும்.

$x+h=y$ எனநாம் பிரதியிட்டால், $h\to 0$ ஆக $y\to x$ என்பதை நாம் பெறவேண்டும் ; $L_{y\to x}\frac{y^{\frac12}-x^{\frac12}}{y-x}$ என்பதைக்காண விரும்புகின்றேம். 2.31. இலுள்ள தேற்றத்தால், இது $\frac12 x^{\frac12-1}$ அல்லது $\frac{1}{2x^{\frac12}}$.

உதாரணம் 3. $L_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}$ என்பதைக் காண்க.

நாம் பெறுவன :

$$\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}=\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}\times\frac{\sqrt{(1-x)}+1}{\sqrt{(1-x)}+1}=\frac{-x}{x\{\sqrt{(1-x)}+1\}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}+1}.$$

ஆகவே, $L_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{x}=-\frac12.$

உதாரணம் 4. $L_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^3)}-\sqrt{(1+x)}}$ என்பதைக் காண்க.

x இன் பெரும் பெறுமானங்களுக்கு x, அல்லது x^2 அல்லது x^3 என்பனவற்றேடு ஒத்துப்பார்க்க 1 ஐ நாம் புறக்கணிக்கலாம் ; ஆயின், வேண்டிய எல்லை

$$=L_{x\to\infty}\frac{x-x^{\frac12}}{x^{\frac32}-x^{\frac12}}=L_{x\to\infty}\frac{x^{\frac12}-1}{x-1}$$

$$=L_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac12}+1}=0.$$

உதாரணம் 5. $L_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^3)}-\sqrt{(1+x)}}$ என்பதைக் காண்க.

தொகுதி

$$=\{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1+x)}\}\times\frac{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1+x)}}$$

$$= \frac{x^2 - x}{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}}.$$

அதுபோல, பகுதி :

$$= \frac{x^3 - x}{\sqrt{(1+x^3)} + \sqrt{(1+x)}}.$$

ஆகவே, தந்த பின்னம்

$$= \frac{x^2 - x}{x^3 - x} \times \frac{\sqrt{(1+x^3)} + \sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}}.$$

$$= \frac{1}{x+1} \times \frac{\sqrt{(1+x^3)} + \sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1+x^2)} + \sqrt{(1+x)}}.$$

$x \to 0$ ஆக, இது $\to 1$.

2.33. பயிற்சிகள்.

1. (i) $L_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1}$, (ii) $L_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$, (iii) $L_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$ என்பனவற்றைக்காண்க.

2. (i) $L_{x\to 0} \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$, (ii) $L_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$ என்பனவற்றைக் காண்க.

3. $L_{x\to 1} \frac{x^2-8x+7}{7x^2-6x-1}$ என்பதைக் காண்க.

4. $L_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-27}$ என்பதைக் காண்க.

5. $L_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{(1+x)}-1}$ என்பதைக் காண்க.

6. $L_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{(3x+1)}-\sqrt{(5x-1)}}$ என்பதைக் காண்க.

7. (i) $L_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^5-32}$, (ii) $L_{x\to -3} \frac{x^4-81}{x^3+27}$ என்பனவற்றைக் காண்க.

8. $L_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)}-1}$ என்பதைக் காண்க.

9. $L_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(x^4+1)}-2x^2-1}{x^2}$ என்பதைக் காண்க.

10. $L_{x\to 0} \frac{\sqrt{(x^4+1)}-2x^2-1}{x^2}$ என்பதைக் காண்க.

11. $L_{x\to 0} \frac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}$ என்பதைக் காண்க.

2.4. ஏற்றங்கள். y என்பது x இன் ஒரு சார்பைக் குறிக்க ; $y=f(x)$ என்க ; ஆயின், பொதுவாக x இன்பெறுமானத்தில் யாதும் ஒரு மாற்றம் y இன் பெறுமானத்தில் ஒரு மாற்றத்தை ஆக்கும். வேறு வேறு சார்புகளுக்கு x இல் ஒரு மாற்றத்தால் ஆக்கப்படும் y இன் மாற்றத்தைக் கற்றலே எம் நோக்கம். x இன் பெறுமானத்தில் ஒரு சிற்றதிகரிப்பு, அல்லது குறைவைக் குறித்தற்குப் பொதுக் கருத்தில் x இன் **ஏற்றம்** என்னுஞ் சொல்லே வழங்குகின்றேம் ; இந்த ஏற்றம் δx (தெனுத்தா x), அல்லது ஒரு தனியெழுத்து h என்பதாற் குறிக்கப்படுகின்றது ; இது ஒரு சிறு நேரெண்ணேயாதல் எதிரெண்ணேயாதல் குறிக்கின்றது ; ஆயின், y இன் ஒத்த ஏற்றம் δy (தெனுத்தா y) என்பதாற் குறிக்கப்படுகின்றது ;

இங்கு : $y=f(x)$ ஆகையால்,

$$y+\delta y = f(x+\delta x).$$

$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x).$$

உதாரணமாக :

(i) $y = x^2+2x$ எனின்,

$$y+\delta y = (x+\delta x)^2 + 2(x+\delta x)$$

அல்லது $y+\delta y = x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2 + 2x + 2\delta x.$

ஆயின், $\delta y = 2(x+1)\delta x + (\delta x)^2.$

(ii) $y = \frac{1}{x+1}$ எனின்,

$$y+\delta y = \frac{1}{(x+\delta x)+1}.$$

ஆயின் $\delta y = \frac{1}{x+\delta x+1} - \frac{1}{x+1}$

$$= \frac{-\delta x}{(x+1)(x+\delta x+1)}.$$

(iii) $y = a$ (ஒரு மாறிலி) எனின், $y+\delta y = a$; $\delta y = 0$.

மற்றைப்படி இது தெளிவு ; ஒரு மாறிலி ஒரு மாற்றமும் அடையாது என்பதே அதற்குக் காரணமாகும்.

2.41. பயிற்சிகள். y என்பது முறையே பின்வருஞ் சார்புகளைக் குறித்தால், x, δx என்பனபற்றி $\delta y/\delta x$ என்னும் விகிதத்தைக் காண்க.

1. $x^3+1, \quad 4x^2, \quad (x-1)^2$.

2. $\frac{1}{x}, \quad \frac{2}{x^2}, \quad \frac{1}{x-1}$.

3. $x+\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{(x-1)^2}, \quad ax+\frac{b}{x}$.

2.5. வகையீடு.—ஒரு பொது வரைவிலக்கணங் கொடுக்கமுன்னா ஒரு வரையறுத்த வகையை ஆராய்வோம்.

$y=x^3$ ஆகுக; இங்கு x என்பது முறையே எல்லா எண் பெறுமானங்களையும் எடுக்கலாம்.

ஆயின், x இல் ஒரு சிற்றேற்றம் δx, y இல் δy என்னும் ஒத்த ஏற்றத்தைத் தரும்; இது

$y+\delta y=(x+\delta x)^3$, அல்லது

$\delta y=(x+\delta x)^3-x^3$

அதாவது $\delta y=3x^2\,\delta x+3x\,(\delta x)^2+(\delta x)^3$ .... (1)

என்பதாலே தரப்படும்.

இனி, x இல் நாம் ஒரு மாற்றமுஞ் செய்திலோமாயின், y இல் அது காரணமாக ஒரு மாற்றமும் வராது; அன்றி, $\delta x=0$ எனின் $\delta y=0$ ஆகும்; பூச்சிய வேற்றங்களின் விகிதம் $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{0}{0}$. ஆயினும் சூத்திரம் (1) ஐ δx ஆல் வகுத்தோமாயின், அப்பூச்சிய ஏற்றங்களின் விகிதமாக

$$\frac{\delta y}{\delta x}=3x^2+3x\,\delta x+(\delta x)^2 \quad \text{.......................} \quad (2)$$

என்பதைப் பெறுகின்றோம்.

இச்சூத்திரத்தில் δx ஆனது பூச்சியத்தை அணுகுமாறு செய்வோமாயின்,

$$L_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=3x^2$$

என்பதைப் பெறுகின்றோம்.

ஆயின், சார்பு $y=x^3$ என்பதைப்பற்றி ஒரு புதிய செய்தியைப் பெற்றுள்ளோம்; அதாவது, y, x என்பனவற்றின் ஒத்த சிற்றேற்றங்களின் விகிதமானது அவ்வேற்றங்கள் பூச்சியத்தை அணுக, $3x^2$ என்னும் எல்லையை உடையதாகும்.

இவ்வெல்லைக்கு ஒரு பெயர் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பெயர் x^3 இன் பெறுதி, அல்லது **வகையீட்டுக் குணகம்** ஆகும்.

2.51. வரை விலக்கணம். $f(x)$ என்பது x இன் ஒரு சார்பையும், δx என்பது x இன் (நேர், அல்லது எதிராகிய) ஒரு சிற்றேற்றத்தையுங் குறித்தால், δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக $\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ இன் எல்லை $f(x)$ இன் பெறுதி, அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் எனப்படும்; அது $f'(x)$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

இவ்வண்ணம் $f'(x)=L_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$.

δx என்னும் ஏற்றத்தைக் குறித்தற்கு h என்னுந் தனியெழுத்தை வழங்கிப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$f'(x)=L_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

y என்பதை x இன் சார்பைக் குறித்தற்கு வழங்கினால், அவ்வரைவிலக்கணம் பின்வருமாறு உரைக்கப்படலாம்.

y என்பது x இன் ஒரு சார்பைக் குறிக்க, δy என்பது x இல், δx என்னும் ஒரு சிற்றேற்றங் காரணமாக y இல் விளைந்த ஏற்றமாயிருந்தால், δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக $\frac{\delta y}{\delta x}$ இன் நோக்கு x ஐக் குறித்த y இன் பெறுதி, அல்லது வகையீட்டுக் குணகம் எனப்படும் அது $\frac{dy}{dx}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

இவ்வண்ணம் $\frac{dy}{dx}=L_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$.

இச்சூத்திரத்தில் dy, dx என்பன என்ன பொருளுடையன என்னும் பிரச்சினை உடனே எழுகின்றது. இப்பிரச்சினைக்கு உறழ்ச்சியான இரு விடைகள் உண்டு

(i) $\delta x=0$ ஆகும்பொழுது $\frac{\delta y}{\delta x}$ என்பதற்கு $\frac{0}{0}$ என்னும் பொருளற்ற வடிவம் உண்டெனினும், δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக $\frac{\delta y}{\delta x}$ என்னும் பின்னம் ஒரு வரையறுத்த நோக்கை அணுகுகின்றதென நாம் சொல்லலாம்; $\frac{dy}{dx}$ என்பது இவ்வெல்லையைக் குறிக்கும் ஓர் இசைவான குறி

யீடாகும். அவ்வாறு வழங்கும்போது dy, dx என்பன **வகையீடுகள்** எனப்படும்; அவற்றைத் தனித்தனி எடுக்க, அவை தம் விகிதமே வேண்டிய எல்லையாகவுள்ள எவையேனும் இரண்டு எண்களாகும். எல்லா லாச் சூத்திரங்களையும் ஒருங்கு செய்ய

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = L_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = L_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x) \quad \text{என்று}$$

இட, dy, dx என்னும் வகையீடுகள் $dy = f'(x)\,dx$.
என்னுந் தொடர்பினால் இணைக்கப்பட்டிருப்பதைக் காண்கின்றோம்.

(ii) $\frac{dy}{dx}$ என்னுங் குறியீடுகளுக்கு வேறொரு விளக்கமும் உண்டு. ஒரு வகையீட்டுக் குணகத்தை அல்லது பெறுதியைக் காணும் முறை **வகையிடுதல்** எனப்படும். "x ஐக் குறித்து y ஐ வகையிடும்பொழுது நாம் என்ன செய்கின்றோம்" என வினவின்; குறியீட்டு முறைபற்றி "நாம் dy ஐக் காண்கின்றோம்", அல்லது "$\frac{dy}{dx}$ என்பது விளைவாக வரும் வண்ணம் y இன் மீது $\frac{d}{dx}$ என்னுஞ் செய்கையைச் செய்கின்றோம்," என்பதே விடையாகும். இப்பொருளில் dy, dx என்பன வேறு வேறான பொருள்களல்ல; $\frac{d}{dx}$ என்பது வகையிடுதற்குரிய குறியீடு; y இன்மீது செய்த $\frac{d}{dx}$ என்னுஞ் செய்கை $\frac{dy}{dx}$ ஐத்தரும்; $f(x)$ இன் மீது செய்த செய்கை $f'(x)$ ஐத் தரும்.

2.52. சென்ற பிரிவின் வரைவிலக்கணம் பெறுதிகளைக் கணக்கிடுதற்கு நேராய்ப் பிரயோகிக்கப்படலாம். இவ்வண்ணம்

(i) $y = x^4$ எனின்,

$$y + \delta y = (x + \delta x)^4,$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^4 - x^4}{\delta x} = \frac{4x^3\delta x + 6x^2(\delta x)^2 + 4x(\delta x)^3 + (\delta x)^4}{\delta x}$$

$= 4x^3 + \delta x$ இன் நேரடுக்குக்கள்

ஆகவே, $\frac{dy}{dx} = L_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 4x^3.$

(ii) $y = \frac{3}{x}$ எனின்,

$$y + \delta y = \frac{3}{x + \delta x}.$$

$$\frac{\delta y}{\delta y} = \frac{\frac{3}{x+\delta x} - \frac{3}{x}}{\delta x} = \frac{\frac{-3\,\delta x}{x(x+\delta x)}}{\delta x} = \frac{-3}{x(x+\delta x)}.$$

ஆகவே, $\frac{dy}{dx} = L_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{3}{x^2}.$

2.521. **பயிற்சிகள்.** 2.51 இன் வரைவிலக்கணத்தை வழங்கிப் பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளைக் காண்க:

(i) $2x^2 + 1$; (ii) $\frac{1}{x-1}$; (iii) $x^3 + x$;

(iv) $ax + b$; (v) $\frac{1}{ax+b}$; (vi) $\frac{1}{x^3}$.

2.53. **x^n இன் பெறுதி.** 2.51 இன் வரைவிலக்கணத்தின்படி x^n இன் பெறுதி.

$$L_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x}.$$

இவ்வெல்லையைக் காண்பதற்கு 2.31 இன் அடிப்படை எல்லையொடு அதனை ஒப்பிடுகின்றேம்; அதாவது

$$L_{\delta x \to 0} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

முதலாவதாக வேண்டிய எல்லையை—

$$L_{\delta x \to 0} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதுகின்றோம்.

அவை இரண்டின் பகுதிகளுஞ் சமத்தன்மையை அணுகவேண்டிய இரு குறியீடுகளின் வித்தியாசத்தால் ஆயனவென்றும், அவற்றின் தொகுதிகள் அக்குறியீடுகளின் n ஆம் அடுக்குக்களின் வித்தியாசங்களென்றும், அதனாலே அவ்வடிவங்கள் ஒன்றாயுள்ளவென்றுங் காண்கின்றோம். சென்ற சூத்திரத்தில் x என்பது அடிப்படைச் சூத்திரத்திலுள்ள a இன் இடத்தை எடுக்கின்றமையால், வேண்டிய எல்லை nx^{n-1} ஆகும்.

ஆயின் $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$

குறிகாட்டி n ஆனது முழுவெண்ணாய் அல்லது பின்னமாய், நேரெண் அல்லது எதிரெண்ணாய் இருந்தாலும் அதன் விகிதமுறு பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் இது உண்மையாகும்.

2.52 இற் பெற்ற விளைவுகள் இப்பொதுத் தேற்றத்தின் சிறப்புவகைகள்.

2.54. x இன் எவ்வடுக்குங் குறிகாட்டியாற் பெருக்கி அக்குறிகாட்டியை ஒன்றாற் குறைத்தலால் வகையிடப்படும் என்பது பெறப்படுகின்றது. இவ் வண்ணம் :

$$\frac{d}{dx}x^7 = 7x^6;\quad \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4;\quad \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{d}{dx}x = 1x^0 = 1;\quad \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ \text{அல்லது}\ \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}.$$

அதே விதி x இன் எதிரடுக்குக்களுக்கும் பிரயோகிக்கப்படும்.

இவ்வண்ணம் :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

பொதுவாக

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{d}{dx}x^{-n} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

2.55. **ஒரு மாறிலியின் பெறுதி பூச்சியமாகும்.**

y என்பது மாறாதாயின், δy என்பது பூச்சியமாகும்; ஆகவே, δx இன் பெறுமானம் யாதாயிருந்தாலும் $\delta y/\delta x$ என்பது பூச்சியமாகும்.

2.56. **c என்பது ஒரு மாறிலியாயின், $cf(x)$ இன் பெறுதி $cf'(x)$ ஆகும்.**

$$\frac{d}{dx}\{c\,f(x)\} = L_{\delta x\to 0}\frac{c\,f(x+\delta x) - c\,f(x)}{\delta x}$$

$$= c\,L_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = cf'(x).$$

உதாரணமாக : $\frac{d}{dx}(cx^3) = c\frac{d}{dx}x^3 = 3cx^2.$

2.57. **y, z என்பன x இன் இரு சார்புகளாயின், $y \pm z$ இன் பெறுதி $\frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}$ ஆகும்.**

$$\frac{d}{dx}(y \pm z) = L_{\delta x\to 0}\left\{\frac{\delta y}{\delta x} \pm \frac{\delta z}{\delta x}\right\}$$

$$= L_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} \pm L_{\delta x\to 0}\frac{\delta z}{\delta x}\quad (2.3\ \text{ஆல்})$$

$$= \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}.$$

உதாரணமாக $\frac{d}{dx}(x^3 - x) = 3x^2 - 1.$

2.58. 2.55, 2.57 என்பனவற்றிலிருந்து c ஒரு மாறிலியாயின் $f(x)+c$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆகும்; எனவே, ஒரு சார்பிற்கு ஒரு மாறிலியைக் கூட்டல் அதன் பெறுதியை மாற்றாது.

உதாரணமாக $\frac{d}{dx}(x^4 + 2) = 4x^3.$

2.59. **பயிற்சிகள்.** பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளை எழுதுக :

1. $x^4;\ x^5;\ x^{\frac{3}{4}};\ \frac{1}{\sqrt{x}};\ \frac{1}{x^2};\ \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}.$

2. (i) $2x^3 + 3x^2 + 1$; (ii) $3x^2 - 2x$; (iii) $(x-2)^3$;

(iv) $\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$; (v) $\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$; (vi) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;

(vii) $ax^2 + bx + c$; (viii) $\frac{1}{ax^2} + \frac{1}{bx} + \frac{1}{c}$; (ix) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$;

(x) $ax^n + \frac{b}{x^n}$; (xi) $3x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{4}{3}}$;

(xii) $4x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}}.$

2.6. ஒரு பெருக்கத்தின் வகையீடு.

u, v என்னும் இரண்டும் x இன் சார்புகளாயிருக்க, $y = uv$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\quad \text{என நிறுவுதல்.}$$

x என்பது δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தைப் பெறுக; δu, δv, δy என்பன u, v, y, என்பனவற்றில் அதன் காரணமாக வந்த ஏற்றங்களாகுக.

$$y = uv \quad \text{ஆகையால்,}$$
$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v),$$
$$\therefore \quad \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) - uv$$
$$= u\delta v + v\delta u + \delta u \delta v$$

ஆயின், $$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v$$

இனி, $\delta x \to 0$ ஆகுக ; எனின், $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta v}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta x}$ என்பனவற்றின் எல்லைகள் $\frac{dy}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dx}$ என்பனவாகும். $\frac{\delta u}{\delta x}\delta v$ என்னும் ஈற்றுறுப்புக்கு எல்லை பூச்சியமாகும் ; அதற்குக் காரணம் எடுகோளின்படி $\frac{\delta u}{\delta x}$ என்பதற்கு $\frac{\delta u}{\delta x}$ என்னும் ஒரு முடிவுள்ள நோக்கு இருக்கின்றமையும் மற்றைக்காரணி பூச்சியத்தை அணுகுகின்றமையுமே.

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

உதாரணமாக, $y = (x^2+1)(3x^3-1)$ ஆகுக.

$u = x^2+1$ ஆகுக. $v = 3x^3-1$ ஆகுக.

எனின், $du/dx = 2x, \quad dv/dx = 9x^2$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$= (x^2+1)\,9x^2 + (3x^3-1)\,2x$$
$$= 15x^4 + 9x^2 - 2x.$$

இது பொது வழியால் வகையிடுதற்குமுன் பெருக்குதலால் எளிதாக வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

இவ்விதி எத்தொகையான காரணிகளின் பெருக்கத்தின் வகையீட்டிற்கு எளிதாக விரிக்கப்படலாம். $y = uvw$ எனின், சற்றுமுன் நிறுவப்பட்டதேற்றத்தால்

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + w\frac{duv}{dx}$$

எனவே, $$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + wv\frac{du}{dx}.$$

2.61. பயிற்சிகள். பின்வரும் பெருக்கங்களை வகையிடுதற்குச் சென்ற பிரிவின் சூத்திரத்தை வழங்குக ; விடைகளை வாய்ப்புப் பார்க்க :—

(i) $(3x+1)(2-3x^2)$. (ii) $(5+3x^3)(3-2x^2)$.

(iii) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. (iv) $(x^3+1)^2$.

2.62. ஓர் ஈவின் வகையீடு. $y = u/v$ ஆகுக. இங்கு குறியீடுகள் 2.6 இற் போன்ற பொருளுள்ளனவாகுக.

ஆயின், $$y + \delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v}$$

$$\therefore \quad \delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v+\delta v)}.$$

எனின், $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v+\delta v)}$$

இனி, $\delta x \to 0$ ஆகுக. ஆயின் $\frac{\delta y}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta v}{\delta x}$ என்பன $\frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ என்னும் எல்லைகளை அணுகும் ; $v(v+\delta v)$ என்னும் பகுதி v^2 ஐ அணுகும். ஆகவே,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

இச்சூத்திரஞ் சொல்பற்றிப் பின்வருமாறு உரைக்கப்படலாம் :

ஓர் ஈவின் பெறுதியானது தொகுதியின் பெறுதியைப் பகுதியாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்திலிருந்து பகுதியின் பெறுதியைத் தொகுதியாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்தைக் கழித்தபின் வரும் மீதியைப் பகுதியின் வர்க்கத்தால் வகுக்க வரும் ஈவு ஆகும்.

தொகுதி ஒரு மாறிலியாகும்போது முடிபு ஓர் எளிய வடிவத்தை எடுக்கும் ; உதாரணமாக, $u = 1$ எனின் ; $\frac{du}{dx} = 0$;

ஆயின், $y = \frac{1}{v}$ ஆகும்போது,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

இது x இன் எதிரடுக்கை வகையிடுதற்குரிய சூத்திரத்தின் வாய்ப்புப் பார்த்தலை உடனே தருகின்றது.

$$y = \frac{1}{x^n} \text{ ஆகுக.}$$

எனின், $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^{2n}}\dfrac{dx^n}{dx} = -\dfrac{1}{x^{2n}}nx^{n-1}$

$$= -\frac{n}{x^{n+1}}$$

ஓர் ஈவின் பொதுச் சூத்திரத்திற்கு ஓர் உதாரணமாக:

$$y = \frac{x^2+1}{x^3-x+2} \text{ ஆகுக.}$$

ஆயின், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x^3-x+2)\dfrac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\dfrac{d}{dx}(x^3-x+2)}{(x^3-x+2)^2}$

$$= \frac{(x^3-x+2)\,2x-(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^3-x+2)^2}$$

$$= \frac{-x^4-4x^2+4x+1}{(x^3-x+2)^2}$$

2.621. பயிற்சிகள்.—பின்வருங் கோவைகளை வகையிடுக :—

(i) $\dfrac{x+1}{2x+1}$. (ii) $\dfrac{2x^2-1}{x^3+1}$. (iii) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

(iv) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. (v) $\dfrac{1}{ax+b}$. (vi) $\dfrac{1}{x^3-1}$.

(vii) $\dfrac{ax^2+2bx+c}{ax^2-2bx+c}$. (viii) $\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$. (ix) $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2+1}$.

2.63. ஒரு சார்பினது சார்பின் வகையீடு. y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகுக ; z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகுக. இதன் பொருள் y என்பதும் x இன் ஒரு சார்பாகும் என்பதே. [உதாரணமாக, $y = z^{10}$ ஆயும் $z = x^2+a^2$ ஆயுமிருந்தால், $y = (x^2+a^2)^{10}$ ஆகும்.]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \text{ என நிறுவுவோம்.}$$

x என்பது δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தைப் பெறுக ; δz, δy என்பன z, y என்பனவற்றில் அதன் காரணமாக விளைந்த ஏற்றங்களாகுக. $\delta x \to 0$ எனின், $\delta y \to 0$ ஆயும் $\delta z \to 0$ ஆயும் இவ்வேற்றங்கள் உள.

இனி, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\delta y}{\delta z} \times \dfrac{\delta z}{\delta x}$; அதன் காரணம் δz எல்லாம் வெட்டுப்படலாம் என்பதே. ஏற்றங்கள் பூச்சியத்தை அணுக இப்பின்னங்கள் வரையறுத்த எல்லைகளை அணுகுமெனக் கொண்டால், அந்நோக்குக்கள் பெறுதிகளாகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

இரு வேறு எல்லைகளின் பெருக்கத்திற்குச் சமனான ஒரு குறித்த எல்லையை இத்தேற்றம் நிறுவுகின்றது.

2.51. இற்போல dx, dy, dz என்பனவற்றை வகையீடுகளென நாம் கொண்டாலும் ஈற்றுவடிவத்திலுள்ள எல்லாவற்றையும் வெட்டுதலால் இத் தேற்றம் நிறுவமுடியாதெனக் காட்டவேண்டியதில்லை.

இது இவ்வாறு இருக்கின்றதெனக் காண்பதற்கு dx என்பது விரும்பியவாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட $dy : dx$ என்னும் விகிதத்திற்குத் திருத்தமான பெறுமானங் கொடுக்கத் தக்கதாய் dy இற்கு ஒரு பெறுமானத்தை எடுத்தோமாயின், $dy = f'(x)dx$ என்னுந் தொடர்பின்மீது வகையீடுகளை வழங்குதல் அடிக்கொண்டிருக்கின்றதென ஞாபகத்தில் வைக்க வேண்டும்.

ஆயின், $y = F(z)$ ஆயும் $z = G(x)$ ஆயுமிருக்க. z இன் நீக்கல் y ஐ x பற்றி $y = f(x)$ என்னும் வடிவத்திலே தருக. எனின், நிறுவ வேண்டிய தேற்றம்

$$f'(x) = F'(z) \times G'(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

இனி, dx என்னும் வகையீட்டிற்கு ஒரு வரையறுத்த பெறுமானத்தைத் தேர, dz என்னும் ஒத்த வகையீடு வரைவிலக்கணத்தின்படி $dz = G'(x)dx$ ஆகும்படி இருக்கும்; dz இற்கு இப்பெறுமானத்தை எடுக்க, $y = F(z)$ என்பதிலிருந்து எடுத்த dy என்னும் ஒத்தவகையீடு

$$dy = F'(z)dz,$$

$$\text{அல்லது } dy = F'(z)G'(x)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

இனி, $y = f(x)$ என்னுந் தொடர்புடன் மறுபடியுந் தொடங்குவோமாயின் இது

$$dy = f'xdx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

என்பதை வேண்டி நிற்கும்.

(3), (4) என்னும் இரண்டிலும் dx என்னும் வகையீட்டிற்கு ஒரே பெறுமானத்தை நாம் தேரலாமாயினும் $f'(x)=F'(z)G'(x)$ என்று கொண்டாலன்றி (அதாவது நாம் நிறுவ விரும்பிய தொடர்பு (2) ஐக் கொண்டாலன்றி), (3), (4) என்பனவற்றிலுள்ள dy எல்லாம் ஒரே விதமானவையெனக் கூறுகின்றதற்கு நியாயமில்லை. இதற்கு ஒரேயொரு நிறுவல் வழி உண்டு; அவ்வழி இப்பிரிவினது தொடக்கத்திலே தரப்பட்டுள்ளது.

இத்தேற்றம் நாம் வகையிடக்கூடிய சார்பினங்களை மிகக் கூட்டுகின்றமையால், இதுவரை நிறுவப்பட்ட தேற்றங்களுக்குப் பிரதானமான ஒரு கூட்டமாகும்.

2.631. சென்ற முடிபிற்கு ஒரு கிளைத் தேற்றமாகப் பின்வருவதை அறிகின்றோம் : y என்பது x இன் ஒரு சார்பாயிருக்க, y இற்கும் x இற்கும் இடையிலுள்ள தொடர்பும் x ஐ y இன் சார்பாக வரையறுக்கின்றதெனக் கொண்டோமாயின்,

$$\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{dy}=1.$$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

2.632. உதாரணங்கள்

(i) $y=(x^2+a^2)^{10}$ ஆகுக.

இதனை 2.6 இன் முடிபிலுள்ள விதியாற் பத்துக் காரணிகளின் பெருக்கமாக நாம் வகையிடலாம்; ஆனால் $z=(x^2+a^2)$ என இடுவது கூடிய சுலபமானதாகும், ஆயின் $y=z^{10}$.

எனின், $\frac{dy}{dz}=10z^9;\qquad \frac{dz}{dx}=2x.$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=20\,xz^9.$$
$$=20x\,(x^2+a^2)^9.$$

(ii) $y=\frac{1}{(3x+1)^5}$ ஆகுக.

இங்கு மிக எளிதான வழி $y=(3x+1)^{-5}$ என்றும் $z=3x+1$ என்றும் இடுதல், ஆயின், $y=z^{-5}$.

எனின், $\frac{dy}{dz}=-5x^{-6},\ \frac{dz}{dx}=3,$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=-15z^{-6}=-\frac{15}{(3x+1)^6}.$$

இந்நூலைக் கற்கும் மாணுக்கன் விரைவிற் பல சமயங்களிற் பிரதியிடுதலின்றி முடிபை எழுதும் ஆற்றலைப்பெறுவான். இக்கணக்கில் நாம் −5 என்னும் அடுக்குக்கு ஏற்றிய $(3x+1)$ என்னும் ஒரு சார்பை வகையிட வேண்டும். x^{-5}, என்பதை வகையிடும்பொழுது −5 என்னுங் குறிகாட்டியாற் பெருக்கி அக்குறிகாட்டியை 1 ஆற் குறைத்து $-5\,(3x+1)^{-6}$ என்பதைப் பெறுவதுபோல, இது $(3x+1)$ என்னுஞ் சார்பின் பெறுதியால், அதாவது 3 ஆற் பெருக்கப்பட வேண்டும்.

(iii) $y=(x^2+1)^5\,(3x-1)^4$ ஆகுக.

ஒரு பெருக்கத்தின் பெறுதிக்கு 2·6 இன் சூத்திரத்தை வழங்கி நாம் பெறுவன :—

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+1)^5\,\frac{d}{dx}\,\{(3x-1)^4\}+\,(3x-1)^4\frac{d}{dx}\,\{(x^2+1)^5\};$$
$$\frac{d}{dx}\,\{(3x-1)^4\}=4\,(3x-1)^3\,\frac{d}{dx}\,(3x-1)=12\,(3x-1)^3$$
$$\frac{d}{dx}\,\{(x^2+1)^5\}=5\,(x^2+1)^4\,\frac{d}{dx}\,(x^2+1)=10x\,(x^2+1)^4.$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=12\,(x^2+1)^5\,(3x-1)^3+10x\,(3x-1)^4\,(x^2+1)^4.$$
$$=2\,(x^2+1)^4\,(3x-1)^3\,(21x^2-5x+6).$$

(vi) $y=\frac{(2x+1)^2}{(x^2-1)^3}$ ஆகுக.

2.62. என்பதை வழங்கி நாம் பெறுவன :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-1)^3\,\frac{d}{dx}(2x+1)^2-(2x+1)^2\,\frac{d}{dx}\,(x^2-1)^3}{(x^2-1)^6}$$
$$=\frac{(x^2-1)^2.\,4(2x+1)-(2x+1)^2.\,6x\,(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6}.$$

பெருக்குமுன் தொகுதியையும் பகுதியையும் $(x^2-1)^2$ ஆல் வகுக்க.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4(x^2-1)\,(2x+1)-6x(2x+1)^2}{(x^2-1)^4}$$
$$=\frac{-2\,(2x+1)\,(4x^2+3x+2)}{(x^2-1)^4}.$$

ஈவுகள் பெருக்கங்கள் போல வகையிடப்படலாமென்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும். சென்ற பயிற்சி

$$y = (2x+1)^2 \times (x^2-1)^{-3}$$ என்பதனோடு ஒன்றாகும் ;

ஆயின்,
$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^2 \frac{d}{dx}(x^2-1)^{-3} + (x^2-1)^{-3}\frac{d}{dx}(2x+1)^2$$
$$= (2x+1)^2 . -6x(x^2-1)^{-4} + (x^2-1)^{-3} . 4(2x+1)$$
$$= 2(2x+1)(x^2-1)^{-4}\{-3x(2x+1)+2(x^2-1)\}$$
$$= 2(2x+1)(x^2-1)^{-4}\{-6x^2-3x+2x^2-2\}$$
$$= \frac{-2(2x+1)(4x^2+3x+2)}{(x^2-1)^4}.$$

இதனைக் கற்கும் மாணாக்கன் அதிகாரம் iv இலுள்ள மடக்கைகளை வழங்குவதனால், பெருக்கங்களையும் ஈவுகளையும் வகையிடுதற்கு முறையைக் கற்பான் ; பின்வரும் பயிற்சிகள் இங்கு விளக்கிய முறைகளின் நேரான பிரயோகங்களாயிருக்கின்றனவாயினும், அவற்றுட் சில **4.45** என்னும் பிரிவைக் கற்கும் வரைக்கும் வேண்டுமாயின் ஒத்திவைக்கப்படலாம்.

2.633. பயிற்சிகள் :— பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :

(i) $(2x^2+1)^5$; $(4x-1)^3$; $(3x^3+2)^4$.

(ii) $\dfrac{1}{2x+1}$; $\dfrac{1}{(2x+1)^3}$; $\dfrac{1}{(2x+1)^5}$.

(iii) $(3x-2)(5x+1)^3$; $(2x+3)^4(x-1)$.

(iv) $3x^2(x^3+1)^4$; $(x^2+1)^5(x^2-1)^6$.

(v) $\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^3}$; $\dfrac{(x-1)^2}{(2x^2+1)^3}$. (vi) $\dfrac{x^2}{(x+1)^3}$; $\dfrac{(x+1)^3}{(2x-1)^2}$.

(vii) $\sqrt{(x^2+x+1)}$; $\sqrt{(x^4+x^2+1)}$. (viii) $\dfrac{\sqrt{(x^2+1)}}{x}$; $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$.

2.64. பயிற்சிகள் :—

1. பெறுதியின் வரைவிலக்கணத்தை மாத்திரங் கொண்டு, பின்வருவனவற்றின் பெறுதிகளைக் காண்க :

(i) $4x^3-1$; (ii) $\dfrac{1}{x^2+1}$; (iii) $\dfrac{1}{(ax+b)^2}$.

2. x என்பது முடிவிலியை அணுகும்போதும் ஒன்றை அணுகும்போதும் $\dfrac{2x^3-x^2-1}{3x^3-3x^2+2x-2}$ இன் எல்லையைக் காண்க.

3. $L_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{(x^2-1)}+\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x^3-1)}}$ என்பதைக் காண்க.

4. பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க.

(i) ax^2, $a(x+2)^2$, $a(x^2+3)^2$;

(ii) $\dfrac{1}{ax^2}$, $\dfrac{1}{a(x+2)^2}$, $\dfrac{1}{a(x^2+3)^2}$;

(iii) $\dfrac{1}{1+x}$, $\dfrac{1}{(1+x)^4}$, $\dfrac{1}{(1+x)^5}$;

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^3)}}$;

(v) $(2x+1)^3(3x-2)^2$, $(2x+1)^2(3x-2)^3$;

(vi) $\dfrac{(2x+1)^3}{(3x-2)^2}$, $\dfrac{(3x-2)^2}{(2x+1)^3}$; (vii) $\sqrt{\{(x+1)(x+2)\}}$, $\sqrt{\left\{\dfrac{x+1}{x+2}\right\}}$;

(viii) $(x-1)(x-2)(x-3)$; (ix) $(x-1)(x-2)/(x-3)$;

(x) $(x+a)^m.(x+b)^n$; (xi) $(x+a)^m/(x+b)^n$;

(xii) $(x^n+a^n)^m$, $x/(x^n+a^n)^m$.

5. $L_{x\to\infty}\{\sqrt{(x^2-x+1)}-x\} = -\frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

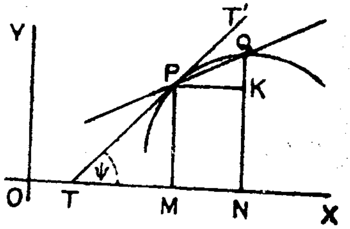
6. $L_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}{x^2} = 1$ என நிறுவுக.

அத்தியாயம் III

பிரயோகங்கள்

3.1. பெறுதியின் கேத்திரகணித விளக்கம். சாய்வுவிகிதம்.

P என்பது தன் சமன்பாடு $y=f(x)$ ஆயுள்ள ஒரு வளைகோட்டிலுள்ள (x, y) என்னும் புள்ளியாகுக ; Q என்பது P இற்கு அண்மையில் $x+\delta x$, $y+\delta y$ என்னும் ஆள்கூறுகளோடு அவ்வளைகோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக ; ஆகவே, PM, QN என்பன x அச்சிற்குச் செங்குத்துக்களாயின்



$$OM = x,\ MP = y\ ;$$
$$ON = x+\delta x,\ NQ = y+\delta y.$$

PK என்பதை OX இற்குச் சமாந்தரமாய் NQ ஐ K இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

ஆயின், $PK = MN = \delta x,\ KQ = NQ - MP = \delta y$

ஆகவே, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{KQ}{PK} =$ தான் QPK.

இனி, Q என்பது அவ்வளைகோட்டினது நீளத்திற்கு P வரைக்கும் அசைக.

எனின், அவ்வளைகோட்டை P, Q என்பனவற்றில் வெட்டுகின்ற PQ என்னும் நேர்கோடு P இலுள்ள தொடுகோடாகும் ; அதாவது TPT' என்னும் கோடாம். **இரு புள்ளிகள் ஒன்றேடொன்று பொருந்தும் வண்ணம் அசையும்போது அவற்றைத் தொடுக்கும் நாணினது எல்லையுறு நிலையே ஒரு வளைகோட்டின் தொடுகோடாகும்** என்பதே அதற்குக் காரணமாகும்.

ஆனால், QPK என்பது x அச்சிற்கும் அந்நாணிற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ; ஆயின், Q என்பது P ஐ அணுக, இது x அச்சிற்கும் P இலுள்ள தொடுகோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள PTX என்னுங் கோணமாகும் ; இக்கோணத்தை ψ என்பதாற் குறிப்போம். அதே நேரத்தில் δx, δy என்னும் இரண்டும் பூச்சியத்தை அணுகும்.

ஆகவே, தான் $\psi = L_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$. **எனின், x இன் யாதும் ஒரு பெறுமானத்திற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி x அச்சோடு $y=f(x)$ என்னும் வளைகோட்டின்மீது ஒத்த புள்ளியிலுள்ள தொடுகோடு ஆக்குங் கோணத்தின் தான்சன் ஆகும்.** இக்கோணத்தின் தான்சன் அப்புள்ளியிலுள்ள அவ்வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் எனப்படும்.

உதாரணமாக, OX, OY என்பன முறையே கிடைக்கோட்டையும் நிலைக்குத்துக்கோட்டையுங் குறிக்க, $y=f(x)$ என்னும் வளைகோடு XOY என்னும் நிலைக்குத்துத் தளத்தால் ஆக்கப்பட்ட ஒரு குன்றின் மேற்பரப்பின் வெட்டுமுகமாயின், $f'(x)$ என்பது (x, y) என்னும் புள்ளியில் அவ்வளைவின் குத்துத்தன்மை, அல்லது சாய்வுவிகிதத்தின் அளவாகும்.

3.11. பயிற்சிகள்.

1. $y = x^3 - x$ எனின், $dy/dx = 3x^2 - 1$. ஆகவே, (x, y) இல் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் $3x^2-1$ ஆகும் ; $(2,6)$ என்னும் புள்ளியில், சாய்வுவிகிதம் 11 ஆகும்.

2. பின்வரும் வளைகோடுகளின் சாய்வுவிகிதங்களைக் காட்டிய புள்ளிகளிற் காண்க.

(i) $y = x^4 - 3x^2$, $(1, -2)$ இல் ; (ii) $y = x^2 - a^2$, $(-a, 0)$ இல் ;

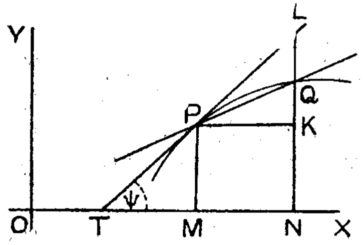
(iii) $y = \dfrac{1}{x+1}$, $(0, 1)$ இல் ; (iv) $y = x + \dfrac{1}{x}$, $(1, 2)$ இல்.

3. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ என்னும் வளைகோடுகள் $(1, 1)$ என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என்றும், அவ்வெட்டும் புள்ளியில் அவ்வளைகோடுகளின் தொடுகோடுகள் 2 என்பது தன் தான்சனாயுள்ள ஒரு கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளன என்றுங் காட்டுக.

3.2. ஏற்றங்களும் வகையீடுகளும்.

பெறுதியின் கேத்திரகணித விளக்கமானது சிற்றேற்றங்களுக்கும் வகையீடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டைத் தெளிவாக்குதற்கு உதவிசெய்கின்றது.

3.1 இன்குறியீட்டை ஏற்போம் ; P இலுள்ள தொடுகோட்டை L இற் சந்திக்கும்படி NQ என்பது நீட்டப்படுக.



ஆயின்,

$$KL = PK \text{ தான் } LPK.$$

ஆனால், $LPK = PTM = \psi$; ஆயின், தான் $LPK = f'(x)$; $PK = \delta x$;

ஆகவே, $KL = f'(x)\,\delta x$.

இனி, dy, dx என்னும் வகையீடுகளானவை தம் விகிதம் $f'(x)$ ஆயுள்ள எவையேனும் ஈரெண்கள் ; ஆயின், dx என்பதை δx இற்குச் சமனாக்க நாம் விரும்பினால் ;

$$dy = f'(x)\delta x = KL$$

ஆனால், தந்த வளைகோட்டினது நீளத்திற்கு x இன் δx என்னும் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த y இன் ஏற்றம்

$$\delta y = KQ$$

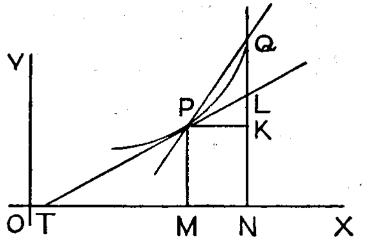
ஆகவே, dy என்னும் வகையீடு δy என்னும் ஏற்றத்திலிருந்து

$$dy - \delta y = QL.$$

என்னுந் தொகையால் வித்தியாசப்படும்.

Q என்பது P ஐ அணுக, இது பூச்சியத்தை அணுகும்.

இரண்டாம் உருவத்தில் அவ்வளைகோடு P இலுள்ள தொடுகோட்டிற்கு மேலாகக் கிடக்கும் ; இவ்வகையில் KQ என்னும் ஏற்றம் KL என்னும் வகையீட்டிலும் LQ என்னும் அளவாற் கூடுகின்றதென ஒத்த நியாயங் காட்டுகின்றது.



ஆயின், $dy = f'(x)dx$ .... (1)

என்பது வகையீடுகளின் வரைவிலக்கணத்திற்குத்தக உண்மையான தொடர்பாயிருக்கின்ற போதிலும் (வளைகோடு நேர்கோடாயிருந்தாலன்றி)

$$\delta y = f'(x)\delta x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

என்னுந் தொடர்பு δx, δy என்பன x, y (அல்லது $f(x)$) என்பனவற்றில் ஒத்த ஏற்றங்களைக் குறிக்கும்போது உண்மையாகாதென்பதைக் காண்கின்றோம் ; நாம் மேலே காட்டியபடி δx, δy என்பனவற்றைச் சமமாக்கும்போது, δy என்பது dy இலும் QL, அல்லது LQ என்பதால் வித்தியாசப்படுகின்றது என்பதே அதற்குக் காரணம்.

அதே நேரத்தில் $\delta x \to 0$ ஆக, வித்தியாசம் $QL \to 0$; ஆயின் δx இன் சிறு பெறுமானங்களுக்குத் தொடர்பு (2) உண்மையான விளைவிற்கு அண்ணளவாயிருத்தல் வேண்டும் ; (2) ஐ உண்மையான விளைவென

வழங்கினால், எவ்வகையான வழுவை ஆக்குவோமென நாம் சிந்திக்க வேண்டும்.

$L_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x} = f'(x)$ ஆதலின், δx என்பது சிறிதாயிருக்கும்போது, $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ என்பது $f'(x)$ இலும் மிக வித்தியாசப்படாது ; δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக ϵ என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் ஒரு சிறிய நேரெண், அல்லது எதிரெண்ணாயிருந்தால், நாம்

$$\frac{\delta y}{\delta x} = f'(x) + \epsilon$$

என எழுதலாம். இதன் பொருள்

$$\delta y = f'(x)\,\delta x + \epsilon\,\delta x \quad \text{என்பதே.}$$

ஆயின், மேலே குறிக்கப்பட்ட வழு $\epsilon\,\delta x$ என்னும் வடிவத்திலுள்ளது இங்கு, ϵ என்பது சிறிது; $\delta x \to 0$ ஆக $\epsilon \to 0$.

3.21. சிறுமை வரிசைகள். பூச்சியமாகிய எல்லையை அணுகும் மாறிகள் **நுண்ணெண்கள்** எனப்படும். $a \to 0$ ஆக $b \to 0$ ஆகுமாறு தொடர்புபட l என்பது பூச்சியமல்லாத ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாயிருக்க

$$L_{a\to 0}\,\frac{b}{a} = l$$

எனின், b என்பது a இன் சிறுமை வரிசையினது எனப்படும்.

ஆனால், l என்பது முன்போலப் பூச்சியமல்லாத ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாயிருக்க, $L_{a\to 0}\dfrac{b}{a^2} = l$ எனின், a ஒடு ஒப்பிட, b என்பது இரண்டாஞ் சிறுமை வரிசையினது எனப்படும்.

இவ்வாறு, $L_{a\to 0}\dfrac{b}{a^r} = l$ எனின், a ஒடு ஒத்துக்பார்க்க, b என்பது r ஆம் வரிசையினதாகும்.

$L_{a\to 0}\dfrac{a^2}{a^2} = 1$ ஆதலால், இவ்வரைவிலக்கணத்தின்படி, a^2 என்பது a ஒடு ஒப்பிட இரண்டாம் வரிசையினதாகும் ; a^3 என்பது மூன்றும் வரிசையினது ; இவ்வாறே பிறவும். ஒரு நுண்ணெண்ணின் சிறுமை வரிசை அதனை ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாற் பெருக்குவதனாலே மாறுபடாது ;

உதாரணமாக $1000a^3$ என்பது a ஓடு ஒப்பிட மூன்றும் வரிசையினது. அதற்குக் காரணம் $L_{a\to 0}\frac{1000a^3}{a^3}$ என்பது ஒரு முடிவுள்ள எண்ணாகிய 1000 இற்குச் சமன் என்பதே.

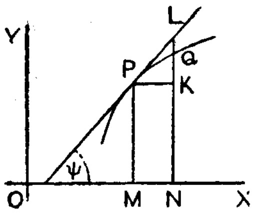
3.22. இனி,

$$\delta y = f'(x)\,\delta x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

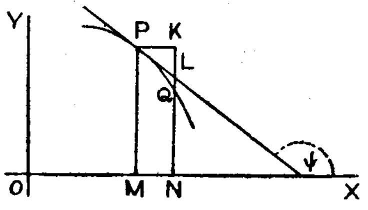
என்னும் அண்ணளவை நாம் வழங்கும்போது நிகழ்கின்ற **3.2** இன் வழுவாகிய $\epsilon\delta x$ என்பதைத் திரும்பிப் பார்க்கும்போது $\delta x \to 0$ ஆக $\epsilon \to 0$ ஆகின்றமையின், ϵ என்பது குறைந்த பட்சம் δx இன் அளவு சிறுமை வரிசையினதென்றும், $\epsilon\delta x$ என்னும் வழு δx இலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையினதென்றும் நாம் சொல்லலாம்.

உதாரணமாக, நாம் தசமங்களில் வேலைசெய்ய δx என்பது 10^{-6}, அல்லது பத்துலட்சத்தின் ஒன்றாயின், சூத்திரம் (1) ஐ வழங்குகையில் ஏற்படும் வழு சில முடிவுள்ள இலட்ச கோடித் தொகையாகிப் பெரும் பான்மை புறக்கணிக்கத்தக்கதாகும்.

3.3. பெறுதியின் குறியின் பொருள்.



உரு. A



உரு. B

தான் $\psi = f'(x)$ ஆதலால், $f'(x)$ நேராயிருக்கும் வரைக்கும் தான் ψ என்பது நேராகும். உரு. A இலிருந்து தான் ψ என்பது நேராயின், வளைகோடு இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கத்திற்கு மேற்புறமாகச் சாய்கின்றதென்பதும் x கூடுதலுற y கூடுதலுறுமென்பதுந் தெளிவு.

எனின், $f'(x)$ என்னும் ஒரு நேர்ப்பெறுதியின் பொருள் x கூடுதலுற $f(x)$, அல்லது y கூடுதலுறும் என்பதே.

அதுபோல, $f'(x)$ என்பது எதிராயின், ψ என்பது ஒரு விரிகோணமாதல் வேண்டும் (உரு. B). இவ்வகையில், வளைகோடு கீழ்ப்புறமாக இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கத்திற்குச் சாய்கின்றது; x கூடுதலுற y குறைகின்றது.

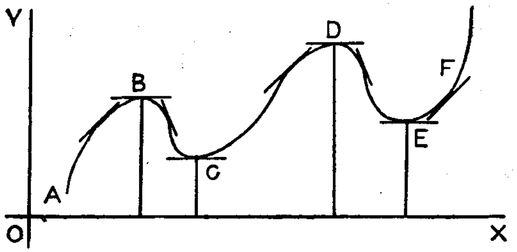
எனின், $f'(x)$ என்னும் ஓர் எதிர்ப் பெறுதியின் பொருள் x கூடுதலுற $f(x)$, அல்லது y குறைகின்றது என்பதே.

அதே முடிபு 3.2 இன் சூத்திரத்திலிருந்து பெறலாம்; அதாவது

$$\frac{\delta y}{\delta x} = f'(x) + \epsilon.$$

இங்கு, δx என்பது பூச்சியத்தை அணுக ϵ என்பது பூச்சியத்தை அணுகுகின்ற ஒரு சிறு நேரெண், அல்லது எதிரெண். எனின், δx என்பதைப் போதிய அளவு சிறிதாய் எடுப்பதால், ϵ என்பது மிகச் சிறிதாகும்; அதுபற்றி ϵ என்பது $f'(x)$ இலும் எண்ணளவிற் சிறிதாயிருப்பதால் $f'(x)$ என்பது பூச்சியமல்லாதுவிடின், $f'(x)+\epsilon$ இன் குறி $f'(x)$ இன் குறியாகும். ஆயின், $f'(x)$ என்பது நேரெனின், δy என்பது δx என்பதனோடு ஒரு குறியினதாகும்; y என்பது x ஓடு கூடுதலுறும்; $f'(x)$ என்பது எதிராயின், δy என்பது δx ஓடு முரண்பட்ட குறியினதாகும்; x கூடுதலுற y குறைதலுறும்.

3.4. திரும்பு புள்ளிகள். உயர்வுகளும் இழிவுகளும்.



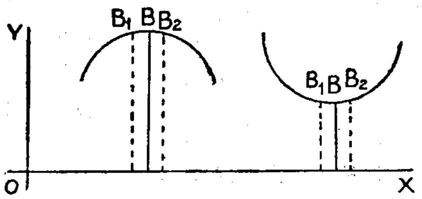
$ABCDEF$ ...... என்னும் வளைகோடானது x இன் ஒரு குறித்த வீச்சிற்கு $y=f(x)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைக் குறிக்க; B, C, D, E என்பனவற்றிலுள்ள தொடுகோடுகள் x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகுக; இப் புள்ளிகள் $x=b$, $x=c$, $x=d$, $x=e$ என்பனவாகுக.

B, C, D, E என்பனவற்றில் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் பூச்சியமாகின்றமையால், $f'(b)=0$, $f'(c)=0$, $f'(d)=0$, $f'(e)=0$

இன்னும், $f'(x)$ என்பது AB, CD, EF என்பனவற்றின் நீளத்திற்கு நேராயும் BC, DE என்பனவற்றின் நீளத்திற்கு எதிராயும் இருத்தலால், $f'(x)$ என்பது வளைகோட்டினது நீளத்திற்கு x கூடுதலுறும் போக்கில் அசைந்து கொண்டு B, D என்பனவற்றிற் கூடாகச் செல்லும்போது நேரிலிருந்து எதிருக்கும், C, E என்பனவற்றிற்கூடாகச் செல்லும்போது எதிரிலிருந்து நேருக்குங் குறிமாறுகின்றது. இப்புள்ளிகள் $f(x)$ என்னுஞ்

சார்பின் திரும்புபுள்ளிகளெனப்படும் ; $f(b), f(c), f(d), f(e)$ என்பன அதன் **திரும்பு பெறுமானங்களாகும்.** நாம் ஒரு திரும்பு பெறுமானத்திற் கூடாகச் செல்ல, சார்பு கூடுதலுறுதலிலிருந்து குறைதலுறுதற்கு, அல்லது குறைதலுறுதலிலிருந்து கூடுதலுறுதலுக்கு மாறும். $x=b$ ஆகிய பெறுமானம் $f(x)$ இற்கு ஒரு திரும்பு பெறுமானத்தைக் கொடுக்கவேண்டிய நிபந்தனை $f'(b)$ என்பது பூச்சியமாதல் வேண்டும் என்பதே.

திரும்புபெறுமானங்களுஞ் சிலவேளை சார்பின் **நிலைப்பெறுமானங்க** ளெனப்படும்.



B இல் ஒரு திரும்பு புள்ளி இருக்க வளைகோட்டில் B இற்கு அண்மையில் யாதும் ஒரு புள்ளி B_1 ஐ நாம் எடுத்தால், அவ்வளைகோட்டில் B_1 இற்கு B இன் எதிர்ப்பக்கத்தில் B_2 என்னும் ஓர் புள்ளி இருக்கும் ; அதுபற்றி அவ்வளைகோட்டிற்கு B_1, B_2, என்பனவற்றிற் சம நிலைத்தூரங்கள் உண்டு. அதன் விளைவாக அவ்வளைகோட்டின்மீது B இன் உடனிலையயலில் $f(x)$ என்பது பெறுமானம்பற்றி நிலையானது.

3.41. இரண்டுவிதமான திரும்புபுள்ளிகள் உளவென உருவங்களி லிருந்து நாம் காண்கின்றோம். x கூடுதலுறுகின்ற திசையிற் செல்ல, மாற்றங்கள் B, D என்பனவற்றிற்போல $f(x)$ கூடுதலுறுதலிலிருந்து $f(x)$ குறைதலுறுதலாகும்; அல்லது C, E என்பனவற்றிற்போல $f(x)$ குறைதலுறுதலிலிருந்து $f(x)$ கூடுதலுறுதலாகும். B இல் $f(x)$ இன் பெறுமானம் வளைகோட்டில் B இற்கு அண்மையில் யாதுமொரு புள்ளியி லுள்ள அதன் பெறுமானத்திலும் பெரிதென்றுங் காண்கின்றோம் ; இது D இலும் உண்மையாகும் ; C இல் $f(x)$ இன்பெறுமானம் வளைகோட்டில் C இற்கு அண்மையில் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள அதன் பெறுமானத்தி லுஞ் சிறிதாகும் ; இது E இலும் உண்மையாகும்.

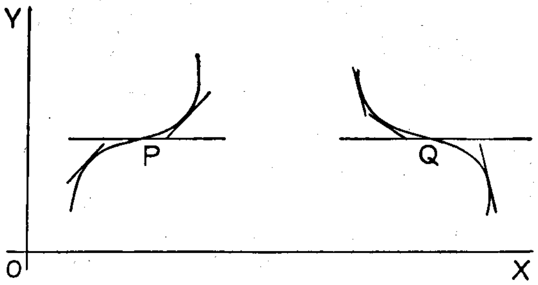
வரைவிலக்கணம். $x=a$ என்னும் ஒரு புள்ளியில், $f(x)$ என்னும் ஒரு சார்பிற்கு a இன் இரு பக்கங்களுக்கும் விரிகின்ற ஒரு சிற்றிடையி லுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள அதன் பெறுமானங்களிலும், பெரிதான ஒரு பெறுமானம் இருந்தால், $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஓர் **உயர்வுப்** பெறுமானமெனப்படும். அதுபோல, $x=a$ என்னும் ஒரு

புள்ளியில், $f(x)$ என்னும் ஒரு சார்பிற்கு ஒத்த ஓரிடையிலுள்ள புள்ளி கள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள அதன் பெறுமானங்களிலுஞ் சிறிதான ஒரு பெறுமானம் இருந்தால், $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் ஓர் **இழிவுப்** பெறு மானமெனப்படும்.

ஓர் உயர்வானது சார்பின் பெறுமானங்களுட் பெரியதாய் இருத்தல்வேண்டு மென்பதில்லை ; ஓர் இழிவானது சார்பின் பெறுமானங்களுட் சிறியதாய் இருத்தல் வேண்டுமென்பதுமில்லை. இவை படத்திலிருந்து தெளிவாகும். உயர்வுகளும் இழிவுகளும் ஒன்றைவிட்டொன்றாக நிகழும் என்பதும் புல னாகும் ; கூடுதலுறுதலிலிருந்து குறைதலுறும் மாற்றத்திற்குப்பின், இவ் வகையான இன்னுமொரு மாற்றத்திற்குமுன், குறைதலுறுதலிலிருந்து கூடுதலுறும் மாற்றம் ஒன்று இருத்தல் வேண்டும் என்பதே அதற்குக் காரணம்.

3.42. உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் காணல். $f(x)$ இன் திரும்பு புள்ளிகள் $f'(x)=0$ ஆகும் புள்ளிகளாதலால், முதற்படி $f(x)$ ஐ வகை யிட்டு $f'(x)$ என்னும் பெறுதியைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனாக்குதலாகும். $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $x=a, x=b$, என்பனவாயின், x இன் இப் பெறுமானங்கள், திரும்புபெறுமானங்கள் எவையேனும் இருந்தால் அவற் றைத் தரும். அதன்பின், $f(a)$ ஓர் உயர்வா, அல்லது ஓர் இழிவா எனச் சோதிப்பதற்கு, x என்பது a இனூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ என்பது நேரிலிருந்து எதிருக்கா, அன்றி எதிரிலிருந்து நேருக்கா மாறுகின்றதென ஆராய்கின்றோம்.

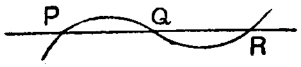
இங்கு நாம் குறிப்பாக அறிய வேண்டியது $f'(x)$ என்பது ஒரு பூச்சியப் பெறுமானத்திற் கூடாகச் செல்லும்போது குறிமாற்றம் அடையத் தேவை யில்லை என்பதே.



ஒரு வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் நேராயிருக்கும்போது அது பூச்சியத்திற் குக் குறைந்து மறுபடியும் P இற்போல கூடுதலுறலாம் ; எதிராயிருக்கும் போது அட்சரகணித முறையாற் பூச்சியத்திற்குக் கூடி, பின்னர் Q இற்போல

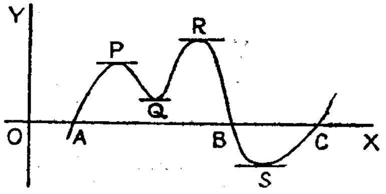
மறுபடியுங் குறைதனுறலாம். வளைகோடு தனது தொடுகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகளே அத்தகைய புள்ளிகள் ; இப்புள்ளிகள் வளைகோட்டின்மீதுள்ள வளைவுமாற்றப் புள்ளிகளெனப்படும்.

உதாரணமாக, Q என்பது ஒரு வளைவு மாற்றப்புள்ளியாயும், P என்பது வளைகோட்டின் மீதுள்ள ஓர் அண்மைப் புள்ளியாயும் இருந்தால், PQ என்னுங் கோடு வளைகோட்டை மறுபடியும் R இற் சந்திக்கும் ; P என்பது வளைகோட்டினது நீளத்திற்கு Q ஐ அணுக, R உம் அவ்வாறு அணுகும் ; வளைகோடு Q இனுள்ள தொடுகோட்டின் எதிர்ப் பக்கங்களிற் கிடக்கும்.



அதுகாரணமாக, $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $f(x)$ இன் திரும்பு புள்ளிகளையும் உள்ளடக்கும் ; எனினும், அவை திரும்பு புள்ளிகளாய் இருக்கத் தேவையில்லை ; அதற்குக் காரணம் அவற்றுள் ஒன்றோ பலவோ வளைவுமாற்றப் புள்ளியாயிருக்கலாம் என்பதே.

3.421. $f(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாயின், அதாவது ax^3+bx^2+cx+d போன்ற x இன் நேரடுக்குக்களை மாத்திரங்கொண்ட ஒரு கோவையாயின், x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் ஒத்ததாய் $f(x)$ இற்கு ஒரு பெறுமானமே உண்டு ; $y=f(x)$ என்னும் வளைகோடு தாளுக்குக் குறுக்கே $-\infty$ தொடங்கி ∞ வரைக்கும் விரிந்து கிடக்கின்ற ஒரு தொடர்ச்சியான முறியாத வளைகோடாகும்.



வளைகோடு x அச்சை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களே $f(x)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இன்னும், $f(x)=0$ என்பதன் அடுத்துவரும் மூலங்களுள் எவையேனும் இரண்டிற்கிடையில் $f'(x)=0$ என்பதற்குக் குறைந்தபட்சம் ஒரு மூலமாதல் இருக்கவேண்டும் என்பது படத்திலிருந்து தெளிவாகும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலம் இருந்தால் மூலங்களினது தொகை ஒற்றையெண்ணுதல் வேண்டும். அதற்குக் காரணம் வளைகோடு x அச்சை நீங்குகையில் மறுபடியும் அதற்குத் திரும்பிவர முன்னர் யாதோ ஓர் இடத்தில் அவ்வச்சிற்குச் சமாந்தரமாதல் வேண்டும் என்பதே. உருவத்தில், A, B, C என்னும் புள்ளிகள் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களையும் P, Q, R, S என்பன $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்களையுங் குறிக்கின்றன.

ஆகவே, $f'(x)=0$ என்பதன் இரண்டு அடுத்துள்ள மூலங்களுக்கிடையில் $f(x)=0$ என்பதற்கு ஒன்றின் மேற்பட்ட மூலம் இருத்தல் முடியாதென்பதும், அதுகாரணமாக $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களை வேறு பிரிக்கின்றன என்பதும் பெறப்படும்.

உதாரணமாக,

$$f(x)=x^3-4x^2+x+6 \quad \text{ஆகுக.}$$

ஆயின்,

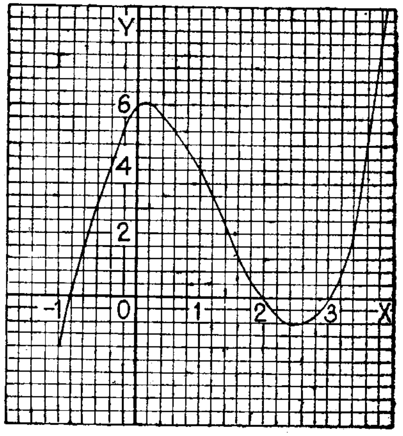
$$f'(x)=3x^2-8x+1$$

$f'(x)=0$ என்பதன்மூலங்கள் $\dfrac{4\pm\sqrt{13}}{3}$ அல்லது $\cdot 13$ உம் $2\cdot 53$ உம் (அண்ணளவாக). பரீட்சையால், $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் -1, 2, 3 என்பனவெனக் காணப்படுகின்றன ; இவ்வெண்கள் ஐந்தையும்

$$-1,\ \cdot 13,\ 2,\ 2\cdot 53,\ 3$$

என வரிசையில் எழுதினேமாயின், $f'(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்களை வேறு பிரிக்கின்றன எனக் காண்கின்றோம்.

$f'(x)=3(x-\cdot 13)(x-2\cdot 53)$ என எழுதுதலால், $f'(x)$ என்பது $x<\cdot 13$ ஆயிருக்கும்பொழுது நேரிலிருந்து $\cdot 13<x<2\cdot 53$ ஆயிருக்கும்பொழுது எதிருக்கு மாறுகின்றதெனக் காண்கின்றோம் ; ஆயின், $x=\cdot 13$ என்பது $f(x)$ இற்கு $6\cdot 06$ என்னும் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது; அதுபோல, $x=2.53$ என்பது $f(x)$ இற்கு $-\cdot 88$ என்னும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது ; அச்சார்பின் வரைப்படம்



வரிப்படத்திற் காட்டியவாறு காண்க ; இங்கு y இன் அலகுநீளம் x இன் அலகின் அரைப்பங்கு.

3.422. ஒரு சமன்பாட்டின் மடங்குமூலங்கள்.—3.421 இன் முதலாம் உருவத்தில், B, C என்னும் புள்ளிகள் $x = b$ என்பதில் (என்க), ஒன்றோடொன்று பொருந்துமாறு அசையின், S என்னும் புள்ளியும் அவற்றோடு பொருந்தும். ஆகவே, $f(x) = 0$ என்பதற்கு b என்னும் இரண்டு சம மூலங்கள் இருந்தால், $f'(x) = 0$ என்பதற்கும் $x = b$ என்பது ஒரு மூலமாகும். $f(x)$ என்பதற்கு ஒவ்வொன்றும் b இற்குச் சமனான இரண்டு மூலங்கள் இருந்தால், நாம் $f(x) = (x-b)^2\, g(x)$ என எழுதலாம் என்பதிலிருந்தும் இது தெளிவாகும்; இங்கு $g(x)$ என்பது வேறொரு பல்லுறுப்புக்கோவை; பின்னர், வகையிட நாம் பெறுவது

$$f'(x) = 2(x-b)\, g(x) + (x-b)^2\, g'(x) \;;$$

இது, $(x-b)$ என்பதால் $f'(x)$ வகுபடுமெனக் காட்டுகின்றது. அதுபோல, $f(x) = (x-b)^r\, g(x)$ ஆகுமாறும்,

$$f'(x) = r(x-b)^{r-1}\, g(x) + (x-b)^r\, g'(x) \quad \text{ஆகுமாறும்}$$

$f(x)$ என்பதற்கு ஒவ்வொன்றும் b இற்குச் சமனான இரு சமமூலங்கள் இருந்தால், $f'(x) = 0$ என்பதற்கு ஒவ்வொன்றும் b இற்குச் சமனான $r-1$ சமமூலங்கள் இருக்குமெனக் காண்கின்றோம்.

அதுபற்றி $f(x) = 0$ என்பதற்கு ஒரு மடங்கு மூலம் உண்டெனில், அது மடங்கின் ஒருபடி குறைந்த $f'(x) = 0$ இன் மூலமுமாகும்.

உதாரணமாக,

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 \quad \text{எனின்}$$

அதுபற்றி
$$f'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$
$$= 4(x-1)\,(x-2)\,(x-3) \quad \text{ஆயின்,}$$

பரீட்சையினால், 1, 3 என்பனவும் $f(x) = 0$ என்பதன் மூலங்களாகுமென நாம் காண்கின்றோம்; ஆகவே $f(x)=0$, $f'(x) = 0$ என்பனவற்றின் பொது மூலங்களாயிருந்தலால், அவை $f(x) = 0$ என்பதன் இரட்டை மூலங்களாயிருத்தல் வேண்டும். எனின், $f(x)$ இன் காரணிகள் $(x-1)^2\,(x-3)^2$ ஆகும்.

3.423. உதாரணங்கள்.

(i) $(x-1)(x-2)^2$ **என்பதன் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களை ஆராய்க.**

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2 \quad \text{ஆதலால்,}$$
$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-1)(x-2)$$
$$= (3x-4)(x-2).$$

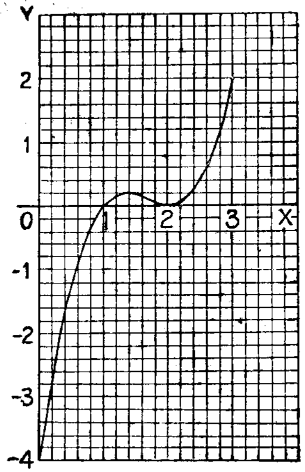
இது $x = \frac{4}{3}$, $x = 2$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும்.

$x < \frac{4}{3}$, எனின், $f'(x)$ இன் காரணிகளின் குறிகள் $(-)(-)$ ஆகும்; எனவே $f'(x)$ என்பது $+$ ஆகும்.

$\frac{4}{3} < x < 2$ எனின், $f'(x)$ இன் காரணிகளின் குறிகள் $(+)(-)$ ஆகும்; எனவே $f'(x)$ என்பது $-$ ஆகும்.

$2 < x$ எனின், $f'(x)$ இன் காரணிகளின் குறிகள் $(+)(+)$ ஆகும்; எனவே $f'(x)$ என்பது $+$ ஆகும்.

x என்பது $\frac{4}{3}$ இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது $+$ இலிருந்து $-$ இற்கு மாறுகின்றமையால், $x = \frac{4}{3}$ என்பது $f(x)$ இற்கு $\frac{4}{27}$ என்னும் ஓர் **உயர்வுப் பெறுமானத்தைக்** கொடுக்கின்றது; x என்பது 2 இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது $-$ இலிருந்து $+$ இற்கு மாறுகின்றமையால், $x = 2$ என்பது $f(x)$ இற்குப் பூச்சியம் என்னும் ஓர் **இழிவுப் பெறுமானத்தைக்** கொடுக்கின்றது.

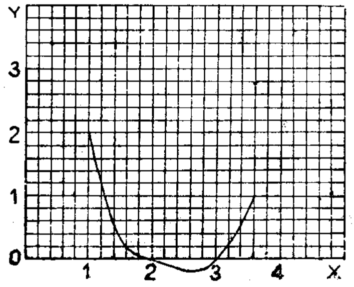


வரிப்படம் 0, 3 என்பனவற்றுக்கிடையில் x இன் பெறுமானங்களுக்கு $y = (x-1)\,(x-2)^2$ என்னும் வளைகோட்டின் பருப்படியான வரைதலாகும். x என்பது கூடுதலுற்று ∞ ஐ அணுக, y உம் ∞ ஐ அணுகும். x ஆனது $-\infty$ ஐ அணுக, y உம் $-\infty$ ஐ அணுகும்.

(ii) $(x-2)^3(x-3)$ **என்பதன் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களை ஆராய்க.**

$$f(x) = (x-2)^3\,(x-3) \quad \text{ஆதலால்,}$$
$$f'(x) = 3(x-2)^2\,(x-3) + (x-2)^3$$
$$= (x-2)^2\,(4x-11)$$

இது $x = 2$, $x = \frac{11}{4}$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும். இனி, x ஆனது 2 இற்கூடாகக் கூடுதலுறக் குறிமாறக்கூடிய $f'(x)$ இன் தனிக்காரணி $x-2$ ஆகும்; எனினும், இது வர்க்கமடைந்து நிகழ்கின்றது; அதுபற்றிக் குறிமாறுது; அதற்குக் காரணம் இது என்றும் நேராயிருக்கும், அல்லது பூச்சியமாயிருக்கும். ஆகவே, x ஆனது 2 இற்கூடாகச் செல்லும்போது $f'(x)$ ஆனது குறிமாறுது; ஆயின், $x = 2$ என்பது அவ்வளைகோட்டின்மீது வளைவுமாற்றப் புள்ளி ஒன்றைத் தருகின்றது.



இனி, x ஆனது $\frac{11}{4}$ இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ என்பது எதிரிலிருந்து நேருக்குக் குறிமாறுகின்றது ; ஆகவே, $x=\frac{11}{4}$ என்பது $f(x)$ இற்கு $-\frac{27}{256}$ என்னும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கின்றது.

அவ்வளைகோட்டின் ஒரு பகுதி வரிப்படத்திற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

(iii) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ என்னும் வளைகோட்டின் உயர் விழிவு நிலைத்தூரங்களைக் கண்டு அவ்வளைகோட்டை வரைக.

$$f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$$ ஆதலால்,

2.62. ஆல்,

$$f'(x)=\frac{(1+x+x^2)(-1+2x)-(1-x+x^2)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$=\frac{-2(1-x^2)}{(1+x+x^2)^2}.$$

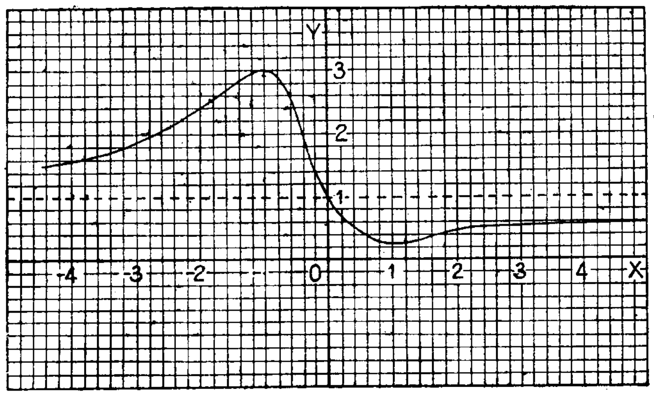
எனின், $f'(x)$ என்பது $x=-1$, $x=1$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும் ; $f'(x)$ இன் குறி $(x+1)\ (x-1)$ என்பதன் குறியாகும்.

$x<-1$ எனின், இருகாரணிகளும் எதிராகும் ; $f'(x)$ என்பது நேராகும் ; $-1<x<1$ எனின், முதற்காரணி நேராயும் இரண்டாங் காரணி எதிராயும் இருக்கும் ; இருக்க, $f'(x)$ என்பது எதிராகும் ; $1<x$ எனின், $f'(x)$ நேராகும். எனின், x ஆனது -1 இற்கூடாகக் கூடுதலுற, $f'(x)$ என்பது நேரிலிருந்து எதிருக்கு மாறும் ; ஆயின், $x=-1$ என்பது 3 என்னும் ஓர் உயர்வு நிலைத்தூரத்தைக் கொடுக்கும் ; x என்பது 1 இற்கூடாகக் கூடுதலுற, $f'(x)$ என்பது எதிரிலிருந்து நேருக்கு மாறும் ; ஆயின், $x=1$ என்பது $\frac{1}{3}$ என்னும் ஓர் இழிவு நிலைத்தூரத்தைக் கொடுக்கும்.

அவ்வளைகோட்டை வரைதற்குத் தந்த சார்பின் தொகுதியாதல் பகுதியாதல் பூச்சியமாகுதற்கு x இன் பெறுமானம் யாதுமில்லை எனக் காண்கின்றோம் ; ஆயின், y ஆனது பூச்சியமாகவாதல் முடிவிலியாகவாதல் வரமாட்டாது. தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2 ஆல் வகுத்து

$$y=\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}$$ என எழுதுதலால்,

$x\to\infty$ ஆக, $y\to1$ என்றும் $x\to-\infty$ ஆக, $y\to1$ என்றுங் காண்கின்றோம். இனி, உற்பத்திக்கு அருகில் உயர்விழிவுகளாகிய நிலைத்தூரங்களுட்பட சில புள்ளிகளைக் குறித்தோமாயின் எவ்வாறு வளைகோடு செல்லுகின்றதெனக் காண்பது எளிதாகும்.



(vi) $y=x-1+\frac{4}{x-2}$ என்னும் வளைகோட்டை வரைதல்.

நாம் பெறுவது $\frac{dy}{dx}=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

இது $x=0$, $x=4$ என்பனவற்றிற்குப் பூச்சியமாகும் ; x ஆனது பூச்சியத்திற் கூடாகக் கூடுதலுற, dy/dx என்பது நேரிலிருந்து எதிருக்கு மாறும் ; ஆயின், $x=4$ என்பது y இற்கு -3 என்னும் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும் ; இன்னும் x ஆனது 4 இற் கூடாகக் கூடுதலுற, dy/dx என்பது எதிரிலிருந்து நேருக்கு மாறும் ; ஆயின், $x=4$ என்பது y இற்கு 5 என்னும் ஓரிழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும்.

இன்னும், x ஆனது இடப்பக்கத்திலிருந்து (அதாவது இரண்டிற் குறைந்த எண்களுக் கூடாக) 2 ஐ அணுக, $\frac{4}{x-2}$ என்னும் பின்னம் $-\infty$ ஐ அணுகும் ; அதுபற்றி $y\to-\infty$; ஆனால், x ஆனது வலப்பக்கத்திலிருந்து (அதாவது 2 இலும் பெரிய எண்களுக்கூடாக) 2 ஐ அணுக, $\frac{4}{x-2}$ என்னும் பின்னம் ∞ ஐ அணுகும் ; அதுபற்றி $y\to\infty$.

முடிவிலித் தூரத்தில் அவ்வளைகோட்டால் அணுகப்படும் $x=2$ என்னுங் கோடு **அவ்வளைகோட்டின் ஓர் அணுகுகோடு** எனப்படும்.

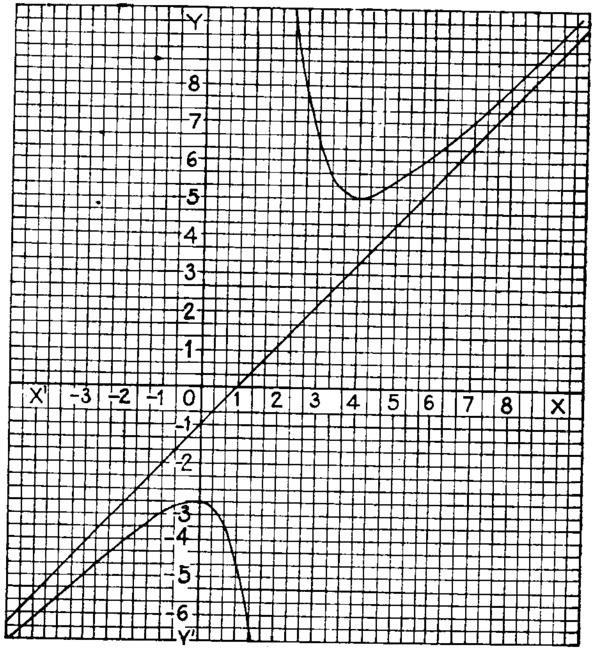
அணுகுகோடுகளின் பொதுக்கொள்கையை ஆராயாது சென்ற பயிற்சியில் $y=1$ என்பது வளைகோட்டின் ஓர் அணுகுகோடு என்றும், இப் பயிற்சியில் x ஆனது பெரிதாகி முடிவிலியை அணுக, அச்சமன்பாட்டின்

வடிவத்தை ஆராய்வதால் வேறோர் அணுகுகோடு காணப்பட்டுள்ளது என்றும் நாம் குறிப்பாக அறிகின்றோம்.

x ஆனது எண்ணளவிற் கூடுதலுற $\frac{4}{x-2}$ என்னும் பின்னங் குறைதலுறும் ; ஆயின், $x \to \pm\infty$ ஆக, வளைகோட்டின் சமன்பாடு ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாடாகிய

$$y = x - 1$$

என்னும் வடிவத்தை அண்ணும் ; இது இரண்டாம் அணுகுகோடாகும்.



இன்னும்,

$$y = x - 1 + \frac{4}{x-2}$$

என்னும் வளைகோட்டின் சமன்பாட்டிற்கும்

$$y = x - 1$$

என்னும் அணுகுகோட்டின் சமன்பாட்டிற்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாட்டை ஆராய்வதால், x ஆனது பெரிதாயும் நேராயுமிருக்க, அவ்வளைகோட்டின் y ஆனது அணுகுகோட்டின் y இலும் பெரிதெனக் காண்கின்றோம் ;

ஆயின், x ஆனது பெரிதாயும் நேராயுமிருக்கும்பொழுது வளைகோடு அணுகுகோட்டிற்கு மேற்புறமாக இருக்கும். இன்னும், x ஆனது ஒரு பெரிய எதிரெண்ணுகும்பொழுது வளைகோட்டின் y ஆனது அணுகுகோட்டின் y இலும் பெரிய எதிரெண்ணுகும் ; ஆயின், x ஆனது பெரிதாயும் எதிராயும் இருக்கும்பொழுது வளைகோடு அணுகுகோட்டிற்குக் கீழ்ப்புறமாக இருக்கும்.

வளைகோட்டை வரைதற்கு அணுகுகோடுகளை வரைதலாலுந் திரும்பு பெறுமானங்களின் நிலைகளைக் குறிப்பதாலுந் தொடங்குகின்றோம். பின்னர் x ஆனது பெரிதாயும் எதிராயுமிருக்க, வளைகோடு சாயணுகுகோட்டிற்குக் கீழ்ப்புறமாக இருக்கின்றதென்றும், பின்னர் $x = 0$ இல் y ஆனது -3 என்னுந் தன் உயர்விற்குக் கூடுதலுறுகின்றதென்றும், அதன்பின் $x \to 2$ ஆக அது $-\infty$ இற்குக் குறைதலுறுகின்றதென்றும் அறிக. x ஆனது 2 இற்கூடாகச் செல்ல, y இன் குறி நேராக மாறும் ; y ஆனது பெரிதாகத் தொடங்குகின்றது ; x ஆனது 4 வரைக்குங் கூடுதலுற, y ஆனது தன் இழிவாகிய 5 வரைக்குங் குறைதலுற்று அதன்பின் மறுபடியுங் கூடுதலுற்று $x \to \infty$ ஆகச் சாயணுகுகோட்டிற்கு மேற்புறமாக முடிவடைகின்றது.

3.424. பயிற்சிகள்.

1. $(x-1)^2(x-2)$ என்பதன் உயர்விழிவுகளாகிய பெறுமானங்களை ஆராய்ந்து அச்சார்பை வரைப்படத்தாற் குறிக்க.

2. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ என்னும் வளைகோட்டின் உயர்விழிவுகளாகிய நிலைத்தூரங்களின் நிலைகளைக் காண்க ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

3. $y = x(x^2 - 3x + 3)$ என்னும் வளைகோட்டின்மீது திரும்புபுள்ளியாதும் இல்லை என நிறுவுக ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

4. $(x-1)^2(x-2)^2$ என்னுஞ் சார்பிற்கு இரண்டு இழிவுகளும் ஓர் உயர்வும் உண்டென நிறுவுக ; அச்சார்பை வரைப்படத்தாற் குறிக்க.

5. $x \to \pm\infty$ ஆக, $(x-1)(x-2)/x^2$ என்னுஞ் சார்பின் நோக்குக்களைக் காண்க. அச்சார்பிற்கு ஓர் இழிவுப் பெறுமானம் உண்டெனக் காட்டுக ; அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

6. x ஆனது கூடுதலுற, $x^3 - 6x^2 + 12x - 2$ என்னுஞ் சார்பு ஒருபோதுங் குறைதலுறாதென நிறுவுக.

7. $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு இரட்டை மூலங்கள் உண்டெனக் காட்டுக.

8. $y=(x+1)^3(x-2)^2$ என்னும் வளைகோட்டின் மீதுள்ள திரும்புபுள்ளிகளைக் காண்க. அவ்வளைகோட்டிற்கு ஒரு வளைவுமாற்றப் புள்ளி உண்டெனக் காட்டுக ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

9. $y=ax^2+2bx+c$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு ஒரு திரும்புபுள்ளி உண்டென்றும் a என்பது எதிர், அல்லது நேர் என்பதற்குத் தக அவ்வளைகோடு ஓர் உயர்வு, அல்லது இழிவாகிய நிலைத்தூரத்தைத் தருமென்றும் நிறுவுக.

10. $y=4x^3+8x^2-11x+3$ என்னும் வளைகோடு x அச்சைத் தொடுமென்று நிறுவுக ; அவ்வளைகோடு அவ்வச்சை எங்கு வெட்டுகின்றதென்றுங் காண்க.

11. $(x+1)^3/(x-1)^2$ என்னுஞ் சார்பிற்கு $\frac{27}{2}$ என்னும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானம் உண்டென்றும் வேறுயாதுந் திரும்புபெறுமானம் இல்லை என்றும் நிறுவுக.

12. $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ என்னும் வளைகோட்டின் மீதுள்ள திரும்புபுள்ளிகளைக் காண்க ; y ஆனது -1, 3 என்பனவற்றிற்கு இடையே கிடவாதென்றுங் காட்டுக.

13. $y=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+x+1}$ என்னும் வளைகோட்டை வரைக.

14. $y=(x-1)(x-2)/(x-3)$ என்னும் வளைகோட்டின்மீதுள்ள உயர்விழிவுகளாகிய நிலைத்தூரங்களைக் காண்க ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

15. $3x^4-28x^3+96x^2-144x+80=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு யாதுமொரு மடங்குமூலம் உண்டோவென ஆராய்க ; இடப்பக்கத்திலுள்ள அச்சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக.

3.5 மாற்ற வீதம். நேர் கோட்டியக்கம் வகையிடுதலின் பொருளுக்கு ஓர் எளிய எடுத்துக்காட்டாகும்.

ஒரு புகைவண்டி இயங்கும்போது ஒரு குறித்த கண நேரத்தில் அதன் வேகத்தை அளக்க நாம் விரும்புகின்றோமெனக் கொள்க. அடுத்த 10 நிமிடங்களில் அது 5 மைல் சென்றது என்று காணுதல் எடுத்துக்கொண்ட கணநேரத்தில் அதன் கதி மணிக்கு 30 மைல் என்று சொல்லுதற்கு நியாயமாகாது ; அதற்குக் காரணம் நோக்கல் நேரமாகிய 10 நிமிடங்களில் அவ்வேகங் கூடியிருக்கலாம், குறைந்திருக்கலாம், அன்றிக் கூடியுங் குறைந்துமிருக்கலாம் என்பதே எனினும், 10 நிமிட இடையை 1 நிமிடத்திற்குச் சுருக்கிச் சென்ற தூரம் $\frac{1}{2}$ மைலெனக் கண்டோமாயின் இன்னுங் கூடுதலாக நோக்கலிடையை 1 செக்கனுக்குச் சுருக்கிச் சென்ற தூரம் 44 அடி எனக் கண்டோமாயின், எடுத்துக்கொண்ட கண நேரத்தில் வேகம் மணிக்கு 30 மைல் என்பது கூடிய உண்மையாகும்.

ஆயின், s அடி என்பது t செக்கனிற் சென்ற தூரமெனின், அந்த t செக்கனிலுஞ் சராசரி வேகஞ் செக்கனுக்கு s/t அடியாகும். எனினும், இது தேர்ந்தெடுத்த யாதுமொரு கணநேரத்திலுள்ள வேகமாகவேண்டியதில்லை. நேரம் t இலுள்ள வேகத்தை அளத்தற்கு, $s+\delta s$ என்பது, $t+\delta t$ என்னும் நேரத்திற் சென்ற தூரத்தைக் குறிக்க ; ஆயின், δs என்பது சிறு நேரம் δt இற் சென்ற மேலதிகமான சிறு தூரமாகும். ஆயின் $\delta s/\delta t$ என்பது δt என்னும் இடையிலுள்ள சராசரி வேகமாகும்; $L_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta s}{\delta t}$ அல்லது $\dfrac{ds}{dt}$ என்பது t என்னும் நேரத்திலுள்ள வேகத்தின் அளவாகும்.

வேகம் என்பது " நிலைமாற்ற வீதம் " எனப் பொருள்படுதலால், t ஐக் குறித்த s இன் பெறுதியானது t ஐக் குறித்த s இன் மாற்றவீதத்தின் அளவாகும் ; பொதுவாக x ஐக் குறித்த y இன் பெறுதியானது x ஐக் குறித்த y இன் மாற்றவீதமாகும்.

3.51. திட்டமாய்க் கூறுமிடத்து, வேகம் என்னுஞ் சொல் ஒரு திசைக் கணியத்தை வரையறுக்கின்றதெனலாம் ; ஒரு பொருள் ஒரு வளைவான வழியினது நீளத்திற்கு அசைந்தால், அதன் வழியினது நீளத்திற்கு அதன் கதி மாறாதிருந்தாலும் அதன் வேகந் திசைமாற்றத்தை அடைகின்றது. இங்கு, இயக்கம் ஒரு நேர்கோட்டில் இருக்கின்றதென்றும் s என்பது நேரம் t இற் சென்றதூரமென்றுங் கொள்வோம் ; ஆயின், v என்பது நேரம் t இலுள்ள வேகமெனில், நாம் பெறுவது $v=ds/dt$.

பயிற்சி. **ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து t செக்கனில் விழுந்தூரம் t^2 இற்கு விகிதசமமெனக் காணப்படுகின்றது. அடைந்த வேகம் t இற்கு விகிதசமமென நிறுவுக.**

k என்பது ஒரு மாறிலியாக $s=kt^2$ ஆகுக ; ஆயின் $ds/dt=2kt$; எனினும், $v=ds/dt$; ஆகவே, $v=2kt$.

3.52. **வேகவளர்ச்சியானது வேகமாற்ற வீதமென** வரையறுக்கப்படும் ; ஆகவே, அது dv/dt என்பதால் அளக்கப்படும். எனினும், $v=ds/dt$; ஆகவே, வேகவளர்ச்சி ds/dt இன் மாற்ற வீதமாகும் இனி, " என்பதன் மாற்றவீதம் " என்னுஞ் சொற்றொடரை d/dt என்னுஞ் செய்கையாற்

குறிக்கப்பட்டதாக (அதாவது, எடுத்துக்கொண்டது நேரவீதமாயின், t ஐக் குறித்த வகையீடு என) நாம் கொண்டால், வேகவளர்ச்சி $\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)$ ஆல் அளக்கப்படும் எனச் சொல்லலாம். இது இரண்டாம் பெறுதி, அல்லது t ஐக் குறித்த s இன் இரண்டாம் வகையீட்டுக் குணகம் எனப்படும்; இது $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்னுங் குறுக்கத்தால் உணர்த்தப்படும்.

இரண்டாம் பெறுதி $\frac{ds^2}{dt^2}$ அன்றென அறிக; $\frac{ds^2}{dt^2}$ என்பது $\frac{ds}{dt}$ இன் வர்க்கமாகும்; ஆனால், $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்பது $\left(\frac{d}{dt}\right)\frac{ds}{dt}$, அல்லது $\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)s$, ஆகும்.

3.521. **வேகவளர்ச்சிக்கு வேறொரு சூத்திரம்.** வேகவளர்ச்சியானது வேகம் v, தூரம் s என்பனபற்றியும் உணர்த்தப்படலாம்.

$$\text{வேகவளர்ச்சி} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} \quad (2.63)$$

$$= v\frac{dv}{ds}.$$

3.522. உதாரணம். **நேரம் t இல் ஒரு நிலையான புள்ளி O இலிருந்து அதற்கூடாக ஓர் நேர் கோட்டில் அசைகின்ற ஒரு புள்ளியினது தூரம்**

$$s = at^2 - 2bt + c$$

என்பதாலே தரப்படுகின்றது; இங்கு a, b, c என்பன நேரெண்கள்; அப்புள்ளியின் இயக்கத்தை ஆராய்தல்.

நாம் பெற்றது $s = at^2 - 2bt + c$ .... (1)

ஆயின், $\frac{ds}{dt} = 2at - 2b$ .... (2)

A என்பது நேரம் $t = 0$ இல் அப்புள்ளியின் நிலையாகுக.

$O \qquad B \qquad A$

(1) இல் $t=0$ என இட $OA = c$ எனக் காண்கின்றோம். (2) இல் $t=0$ என இட, அப்பொழுது வேகம் $-2b$ எனக் காண்கின்றோம்; இங்கு எதிர்க்குறியின் பொருள் s குறைதலுறுகின்றது, அல்லது அப்புள்ளி 0 முகமாக அசைகின்றது எனக் காட்டுகின்றது. t கூடுதலுற வேகம்

அட்சரகணித முறைபற்றிக் கூடுதலுறுகின்றது; $t = b/a$ ஆகும்பொழுது, அது பூச்சியமாகின்றது. இதன்பொருள் $\frac{b}{a}$ என்னும் ஒரு நேரத்திற்கு 0 முகமாக A இலிருந்து அசைந்தபின், அப்புள்ளி கணநிலை ஓய்விற்கு (B இல் என்க) வருகின்றது என்பதே. (1) இல் $t = \frac{b}{a}$ என இட முடிவு OB ஐக் குறிக்கின்றது என்பதால் AB என்னுந் தூரம் பெறப்படுகின்றது; அதாவது

$$OB = \frac{b^2}{a} - \frac{2b^2}{a} + c = -\frac{b^2}{a} + c;$$

எனினும், $OA = c$

ஆகவே, $BA = b^2/a$.

t இன்னுங் கூடுதலுற, வேகம் நேராகி t ஓடு தொடர்ச்சியாகக் கூடுதலுறுகின்றது; ஆயின், அப்புள்ளி BA என்னும் வழியை மீண்டுஞ் சென்று A ஐக் கடக்க, O இலிருந்து அதன் தூரம் என்றுங் கூடுதலுறும்.

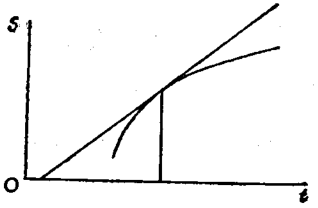
(2) ஐ வகையிடுதலாற் பெறப்படும் வேகவளர்ச்சி

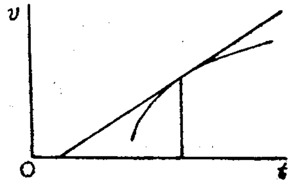
$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2a.$$

இது ஒரு மாறு வேகவளர்ச்சி,

3.53. **வரைப்பட முறை விளக்கம்.** s, t என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை t இடைத்தூரமாயும் s நிலைத்தூரமாயுமுள்ள ஒரு வளைகோட்டாற் குறித்தோமாயின், அவ்வளைகோடு இடநேர வளைகோடு எனப்படலாம். அத்தகை வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் ds/dt ஆகும்; அதாவது, யாதும் ஒரு புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் ஒத்த கண நேரத்திலுள்ள வேகமாகும்.

அதுபோல, v, t, என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை t ஐக் கிடைத்தூரமாயும் v ஐ நிலைத்தூரமாயும் எடுத்து ஒரு வளைகோட்டாற் குறித்தோமாயின், அவ்வளைகோடு வேகநேர வளைகோடு எனப்படும்.





இவ்வகையில் dv/dt என்னுஞ் சாய்வுவிகிதம் வேகவளர்ச்சியின் ஓரளவாம்.

3.531. பயிற்சிகள்.

1. ஒரு புள்ளியானது t செக்கனில் தான் சென்ற தூரம் $(3t-t^3)$ அடி ஆகுமாறு அசைகின்றது. $t=0$ $t=1$, $t=2$ செக்கன் என்னும் நேரங்களில் வேகம் என்ன? அதன் இயக்கத்தின் முதலிரண்டு செக்கன் ஒவ்வொன்றிலும் அது எவ்வளவு தூரஞ் செல்கின்றது ?

2. நேரம் t செக்கனில் ஒரு துணிக்கையினது நிலை

$$s=2t^3-15t^2+36t$$

என்பதாலே தரப்பட்டுள்ளது ; இங்கு, s என்பது ஒரு கோட்டினது நீளத்திற்கு ஒரு நிலையான உற்பத்தியிலிருந்து அடிகளில் அளந்து கண்ட தூரமாகும். அதன் வேகத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுங் காண்க ; முதல் நான்கு செக்கனிலுள்ள அதன் இயக்கத்தை விவரிக்க ; வேகத்தின் பெறுமானங்களுட் சிறியது யாது ?

3. நேரம் t செக்கனில் ஒரு துணிக்கையின் நிலை

$$s=4t-7t^2+2t^3$$

என்பதாலே தரப்பட்டுள்ளது ; இங்கு, s என்பது ஒரு நேர் வழியினது நீளத்திற்கு ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து அடிகளில் அளந்து கண்ட தூரம். வேகத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுந் துணிக ; வேகநேர வளைகோட்டை வரைக.

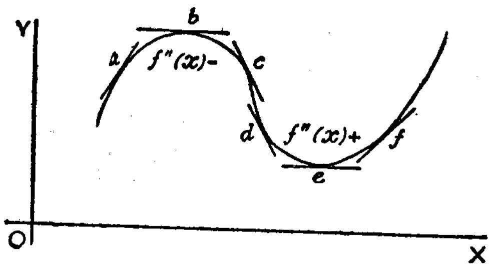
4. பின்வரும் அட்டவணை கூறப்பட்ட நேரங்களில் ஒரு துணிக்கையின் வேகத்தைத் தருகின்றது :

t	0	5	10	15	20	25	செக்கன்
v	25	28	32·5	38	35	26	அடி செக்கனுக்கு.

வேகநேர வளைகோட்டை வரைக ; $t=10$, $t=22$ என்னும் நேரங்களிலுள்ள வேகவளர்ச்சியை உம்மாற் கூடிய அளவிற்கு அண்ணளவாகத் துணிக.

3.6. இரண்டாம் பெறுதிகளை வழங்கல். y, அல்லது $f(x)$ இன் முதற் பெறுதி dy/dx, அல்லது $f'(x)$ ஆற் குறிக்கப்படுவதுபோல, y, அல்லது $f(x)$ இன் இரண்டாம் பெறுதி dy/dx அல்லது $f'(x)$ இன் பெறுதியாதலால், $\frac{d^2y}{dx^2}$, அல்லது $f''(x)$ ஆற் குறிக்கப்படும் ; அதுபோல, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ......அல்லது $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$......என்பன இன்னும் உயர்ந்த வரிசைப் பெறுதிகளைக் குறிக்கும்.

3.3 இல் $f'(x)$ ஆனது நேராயின், $f(x)$ ஆனது x ஒடு கூடுதலுறுமென்றும், $f'(x)$ ஆனது எதிராயின், x கூடுதலுற $f(x)$ குறைதலுறுமென்றுங் கற்றோம். $f''(x)$ ஆனது நேராயின் $f'(x)$ ஆனது x ஒடு கூடுதலுறுமென்றும், $f''(x)$ ஆனது எதிராயின், x கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது குறைதலுறுமென்றும் அதே நியாயங்காட்டும். அன்றியும், $f(x)$ இன் திரும்பு புள்ளிகள் $f'(x)=0$ என்பதாலே தரப்படுதல்போல $f'(x)$ இன் திரும்புபுள்ளிகள் $f''(x)=0$ என்பதாலே தரப்படும்.



உருவத்திற்காட்டிய வளைகோட்டினது நீளத்திற்கு x கூடுதலுற $f'(x)$, $f''(x)$ என்பனவற்றின் மாற்றங்களை ஆராய்க.

a இலிருந்து b வரைக்குந் தொடுகோடு மேல் முகமாக இடப்பக்கத்திலிருந்து வலப்பக்கத்திற்குச் சாய்கின்றது ; $f'(x)$ ஆனது நேராகிக் குறைதலுறுகின்றது ; ஆகவே, $f''(x)$ ஆனது எதிராகும் ; b ஐக் கடந்துசெல்கையில், $f'(x)$ ஆனது நேரிலிருந்து எதிருக்குக் குறைதலுற்றுப் பூச்சியத்திற்கூடாகச் செல்கின்றது ; ஆகவே $f''(x)$ ஆனது எதிராய்க் கிடக்கின்றது ; bc என்னும் அவ்வளைகோடு தனது தொடுகோட்டை c, d என்பனவற்றிற் கிடையிற் குறுக்காக வெட்டுகின்ற யாதும் ஒரு புள்ளியை நாம் அடையும் வரைக்கும் அவ்வளைகோட்டினது நீளத்திற்குச் செல்ல, $f''(x)$ என்பது தொடர்ச்சியாய் எதிராகும் ; c, d என்பனவற்றிலுள்ள தொடுகோடுகள் அவ்வளை கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் இருப்பதால் அத்தகைப் புள்ளி உண்டு என்பது தேற்றம். அவ்வளைகோட்டின்மீது இப்புள்ளிக் கூடாக (வளைவுமாற்றப் புள்ளி) நாம் செல்ல, $f''(x)$ ஆனது ஓர் எதிர்ப் பெறுமானத்திலிருந்து பூச்சியத்திற்கூடாக ஒரு நேர்ப் பெறுமானத்திற்கு மாறும் ; (இன்னும் எதிராயுள்ள $f'(x)$ என்பது குறைதலுறுதல் ஒழிந்து அட்சரகணித முறைபற்றிக் கூடுதலுறத் தொடங்கும் ; அது e இற் பூச்சியத்தை அடையும் ; அப்புள்ளியைக் கடந்து செல்லும்பொழுது நேராகித் தொடர்ச்சியாய்க் கூடுதலுறும் ; ஆயின் $f''(x)$ என்பது அவ் வளைகோட்டின் கீழ் வளைவைச் சுற்றியுள்ள பகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் நேராயிருக்கும்.

4—B 8844 (1/60)

இதனைச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்; $f'(x)$ என்பது குறைதலுறும்பொழுதெல்லாம் $f''(x)$ என்பது எதிராகும்; ஆயின், $f(x)$ என்பதற்கு உயர்வு உள்ள புள்ளியுட்பட ஒரு மேன்முகவளை abc ஐச் சுற்றியுள்ள பகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் $f''(x)$ என்பது எதிராகும்; $f'(x)$ என்பது கூடுதலுறும்பொழுதெல்லாம் $f'(x)$ என்பது நேராகும்; ஆயின், $f(x)$ என்பதுதற்கு ஓர் இழிவு உள்ள புள்ளியுட்பட ஒரு கீழ்முகவளைவு def ஐச் சுற்றியுள்ள பகுதிகள் எல்லாவற்றிலும் $f''(x)$ என்பது நேராகும்.

இது உயர்விழிவுகளை வேறு பிரித்தறிவிக்கின்ற ஒரு மேலதிகமான சாதனத்தைத் தருகின்றது. உதாரணமாக, $x=a$ என்பது $f'(x)=0$ என்பதன் ஒரு தீர்வாயின், $f''(a)$ ஆனது எதிர் அல்லது நேர் என்பதற்குத் தக, $f(a)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஓர் உயர்வு, அல்லது இழிவுப் பெறுமானமாகும். $f''(a)=0$ என்பது நிகழத்தக்கது என்னுஞ் செய்தியை நாம் மனத்திற்குறியாது வைத்தல் ஆகாது; நாம் முன்னர்க் கண்ட வண்ணம் இது $f'(x)$ இற்கு $x=a$, அதாவது $y=f(x)$ இன்மீது ஒரு வளைவுமாற்றப் புள்ளியில் ஒரு திரும்புபுள்ளி இருப்பதாலே நிகழலாம். ஆயினும், x ஆனது a இற்கூடாகச் செல்ல $f''(x)$ என்பது குறிமாறுகின்றதெனக் கண்டாலன்றி, $f''(a)=0$ ஆகின்ற அத்தகைப் புள்ளி ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளியாகுமென நாம் நிச்சயமாகச் சொல்லல் முடியாது. $f''(x)$ என்பது அவ்வாறு குறிமாறுதாயின் $x=a$ இல் $y=f(x)$ என்னும் வளைகோட்டின்மீது அவ்வாறு கூறப்பட்ட **தனியியல்பு** கூடுதலான சிக்கலினத்ததாகும்.

உதாரணமாக, $y=(x-1)^4$ என்னும் வளைகோட்டை ஆராய்க. இங்கு, நாம் பெறுவன :—

$f'(x)=4(x-1)^3, f''(x)=12(x-1)^2$ என்பன ;

ஆயின், அவ்வளைகோட்டின்மீது $x=1$ என்னும் புள்ளியில் $f'(x)$, $f''(x)$ என்னும் இரண்டும் பூச்சியமாகும்; x ஆனது 1 இற்கூடாகக் கூடுதலுற $f'(x)$ ஆனது எதிரிலிருந்து நேருக்கு மாறும்; எனினும், $x=1$ என்பது தவிர x இன் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $f''(x)$ ஆனது நேராகும். ஆகவே, $x=1$ என்பது $f'(x)$ இற்கு ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும்; அடுத்த பிரிவின் கருத்துப்படி அவ்வளைகோடு எங்கும் மேன்முகமாகக் குழிவுள்ளதாகும்.

3.61. அச்சுக்கள் அசைக்கப்பட்டால் அவற்றினுடைய திசைகள் மாறாதிருக்குமாயின், $f''(x)$ இன் குறிபற்றிய நியாயம் வளைகோட்டைக் குறித்தெடுக்கப்பட்ட அச்சுக்களின் நிலையைச் சார்வதில்லை என்பது அவதானிக்கப்படவேண்டும். அன்றியும், மேன்முகம் என்பதை y கூடுதலுறுகின்ற திசையென வரையறுத்தோமாயின், **வளைகோட்டிற்கு மேன்முகமாகக் குழிவு இருக்கின்ற இடமெல்லாவற்றிலும் $f''(x)$ ஆனது நேரென்றும், கீழ்முகமாகக் குழிவு இருக்கின்ற இடமெல்லாவற்றிலும் $f''(x)$ ஆனது எதிரென்றும் நாம் சொல்லலாம்.**

3.62. அட்சரகணிதமுறை நியாயங்கள்.

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

என்னும் வடிவத்திலுள்ள அட்சரகணிதப் பின்னம் ஒன்றினுடைய திரும்பு பெறுமானங்கள் எளிய அட்சரகணித முறை ஆராய்வுகளாற் காணலாம். பொதுக் கொள்கையை ஆராயாது அச்செய்கையை ஓர் உதாரணத்தால் எடுத்துக்காட்டுதல் எம் நோக்கத்திற்குப் போதியதாகும்.

$y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ஆகுக; ஆயின், x இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக ஒழுங்குபடுத்த நாம் பெறுவது

$$x^2(1-y)-x(1+y)+(1-y)=0 \qquad (1)$$

x இல் இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாகுமெனின், நாம் பெற வேண்டியன

$$(1+y)^2-4(1-y)^2 \geqq 0,$$

அல்லது $$\{(1+y)+2(1-y)\}\{(1+y)-2(1-y)\} \geqq 0$$

அல்லது $$(3-y)(3y-1) \geqq 0.$$

ஆயின், x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு y ஆனது 3 இலும் பெரிதாயாதல் $\frac{1}{3}$ இலுஞ் சிறிதாயாதல் இருத்தல் முடியாது; எனினும், $\frac{1}{3} \leqq y \leqq 3$ ஆய் இருக்கலாம்; ஆயின், $(1-x+x^2)/(1+x+x^2)$ என்பதற்கு 3 ஓர் உயர்வுப் பெறுமானமாயும் $\frac{1}{3}$ ஓர் இழிவுப் பெறுமானமாயும் இருக்கும்; x இன் ஒத்த பெறுமானங்கள் சமன்பாடு (1) இல் y இன் பெறுமானங்களை முறை முறையாகப் பிரதியிடுதலாற் காணப்படும்.

3.63. ஒரு சமன்பாட்டின் மடங்குமூலங்கள். 3.422 இல் $f(x)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு b இற்குச் சமனான r மூலங்கள் இருந்தால், $f'(x)=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு b இற்குச் சமனான $r-1$ மூலங்கள் இருக்குமெனக் கண்டோம். ஒத்த நியாயம்பற்றி $f'(x)=0$ என்பதற்கு b இற்குச் சமனான $r-1$ மூலங்கள் இருந்தால், $f''(x)=0$ என்பதற்கு b இற்குச் சமனான $r-2$ மூலங்கள் இருக்குமென்று நிறுவலாம். இவ்வாறே பிறவும்.

3.64. உதாரணங்கள்.

(i) $3x^5-5x^4-10x^3+30x^2-25x+7=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு நான்மடங்கு மூலம் உண்டென நிறுவுக ; எல்லா மூலங்களையுங் காண்க.

$$f(x)=3x^5-5x^4-10x^3+30x^2-25x+7\ ;$$

ஆகவே, $f'(x)=5(3x^4-4x^3-6x^2+12x-5)$;

ஆகவே, $f''(x)=60(x^3-x^2-x+1)$;

ஆகவே, $f'''(x)=60(3x^2-2x-1)=60(3x+1)(x-1)$.

இனி, $f(x)$ இற்கு நான்கு முறை வரும் ஒரு காரணி உண்டெனின், அது $f'''(x)$ இன் ஒரு காரணியாய் இருத்தல் வேண்டும் ; ஆயின், அது $3x+1$, அல்லது $x-1$ ஆதல் வேண்டும். எனினும், $(3x+1)^4$ என்பது $f(x)$ இல் அடங்கவில்லை என்பது தேற்றம் ; பரீட்சையினால் நாம் காண்பது :—

$$f(x)=(x-1)^4(3x+7)\ ;$$

ஆயின், $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் $1, 1, 1, 1, -\frac{7}{3}$ என்பன.

அன்றியும், $f'(x)=5(x-1)^3(3x+5)$,

$f''(x)=60(x-1)^2(x+1)$,

$f'''(x)=60(x-1)(3x+1)$.

இவை 3.63 இனது தேற்றத்தை விளக்குகின்றன.

(ii) $y=2x^3-13x^2+8x+3$

என்னும் வளைகோட்டில் உயர் விழிவுகளாகிய நிலைத்தூரங்களையும் வளைவு மாற்றத்தையுங் காண்க.

இங்கு நாம் பெறுவது $f(x)=2x^3-13x^2+8x+3$

ஆயின் $f'(x)=2(3x^2-13x+4)=2(3x-1)(x-4)$,

$f'''(x)=2(6x-13)$.

$f'(x)$ இன் மூலங்கள் $\frac{1}{3}$, 4 என்பன ; $f''(\frac{1}{3})$ என்பது எதிர் ; ஆயின் $f(\frac{1}{3})=\frac{116}{27}$ என்பது ஓர் உயர்வு நிலைத்தூரம் ; $f''(4)$ என்பது நேர் ; ஆயின், $f(4)=-45$ என்பது ஓர் இழிவு. அன்றியும், x ஆனது $\frac{13}{6}$ இற் கூடாகச் செல்ல $f''(x)$ என்பது பூச்சியமாகிக் குறிமாறும் ; ஆயின், இது வளைவுமாற்றப் புள்ளி ஒன்றைத் தரும்.

3.65. பயிற்சிகள்.

1. $y=x^2(x^2+5x-9)$

என்னும் வளைகோட்டில் வளைவுமாற்றங்களைக் காண்க. அவ்வளைகோட்டை வரைக.

2. $y=x^4-6x^2+8x-3$

என்னும் வளைகோட்டில், திரும்புபுள்ளியையும் வளைவுமாற்றங்களையுங் காண்க ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

3. $y=2x^2-x^4$

என்னும் வளைகோட்டில், திரும்புபுள்ளிகளையும் வளைவு மாற்றங்களையுங் காண்க ; அவ்வளை கோட்டை வரைக.

4. $y=(x-1)^2(x-3)^2$

என்னும் வளைகோட்டில், திரும்புபுள்ளிகளையும் வளைவுமாற்றங்களையுங் காண்க ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

5. $y=(x^2-1)^2$

என்னும் வளைகோட்டில், திரும்புபுள்ளிகளையும் வளைவுமாற்றங்களையுங் காண்க.

x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கிடையில் அவ்வளைகோடு கீழ்முகமாகக் குழிவு கொண்டுள்ளது ?

6. $y=ax+bx^2+cx^3$

என்னும் வளைகோடு (2, 2) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுமாறும் அவ்வளைகோட்டிற்கு $x=1$ இல் ஒரு திரும்புபுள்ளியும் $x=-3$ இல் ஒரு வளைவுமாற்றப்புள்ளியும் இருக்குமாறும் a, b, c என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

7. x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு

$$(x-2)^4(x+1)^5$$

என்னுஞ் சார்பிற்கு உயர்விழிவுகளாகிய பெறுமானங்களும் வளைவு மாற்றங்களும் உண்டு ;

8. $f'(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)$ ஆயின் ,

$y=f(x)$ என்னும் வளைகோட்டிலுள்ள $x=1$, 2, 3 என்னும் புள்ளிகள் எத்தகைய புள்ளிகள் ?

9. $f''(x)=(x-2)(x+3)$ ஆயின்,

$y=f(x)$ என்னும் வளைகோட்டிலுள்ள $x=2$, $x=-3$ என்னும் புள்ளிகள் எத்தகைய புள்ளிகள் ?

10. $8x^4+12x^3-30x^2+17x-3=0$

என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மும்மடங்குமூலம் உண்டெனக்காட்டி அச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

11. $$8x^4 - 20x^3 - 18x^2 + 81x - 54 = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மும்மடங்குமூலம் உண்டெனக்காட்டி அச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எல்லாவற்றையுங் காண்க.

12. $$y = x + 1/x$$

என்னும் வளைகோட்டிலே தளத்தின் முடிவுள்ள பிரதேசத்தில் வளைவு மாற்றம் யாதும் இல்லை என நிறுவுக ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

13. $$y = x^3/(1 + x^2)$$

என்னும் வளைகோட்டிலுள்ள வளைவுமாற்றங்களைக் காண்க ; அவ்வளை கோட்டை வரைக.

14. $$y = (1 + x)/(1 + x^2)$$

என்னும் வளைகோட்டிலுள்ள திரும்புபுள்ளிகளைக் காண்க ; அவ்வளை கோட்டை வரைக. அதற்கு எத்தனை வளைவு மாற்றங்கள் உண்டு ?

15. $$y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$$

என்னும் வளைகோட்டிற்கு ஒரு திரும்புபுள்ளியும் இரு வளைவுமாற்றங் களும் உண்டெனக் காட்டுக ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

16. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு

$$x/(1 + x + x^2)$$

என்னுஞ் சார்பு -1, $\frac{1}{3}$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடத்தல் வேண்டுமென அட்சர கணித முறையாற் காட்டுக.

$$y = x/(1+x+x^2)$$

என்னும் வளைகோட்டிலுள்ள திரும்புபுள்ளிகளைக் காணுதலாலும் அவ்வளை கோட்டை வரைதலாலும் இம்முடிபை வாய்ப்புப்பார்க்க.

17. $x + \dfrac{4}{x-3}$ என்னுஞ் சார்பினது திரும்புபெறுமானங்களை அட்சர கணிதமுறையால் ஆராய்க ; அதன் வரைப்படத்தை வரைக.

18. $$y = (x + 1)^4 \, (x - 2)^3$$

என்னும் வளைகோட்டிற்கு $x = -1$ இல் ஓர் உயர்வும், $x = \frac{5}{7}$ ஓர் இழிவும், $x = 2$ இல் ஒரு வளைவுமாற்றமும் உண்டென நிறுவுக.

19. y அச்சின் நேர்த்திசைப் போக்கில்,

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

என்னும் வளைகோடானது $-\infty$ இலிருந்து $\frac{1}{2}$ வரைக்குமுள்ள x இன் வீச்சிற்குக் குவிவுகொண்டும் $\frac{1}{2}$ இலிருந்து ∞ இற்கு உள்ள வீச்சிற்குக் குழிவு கொண்டும் இருக்குமென நிறுவுக.

20. a, b என்பன நேராயின், $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$ என்னுஞ் சார்பிற்கு $(a-b)^2/a$ என்னும் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானமும் $(a + b)^2/a$ என்னும் ஓர் இழிவுப் பெறுமானமும் உண்டெனக் காட்டுக.

21. $(a, 0)$, $(b, 0)$ என்னும் புள்ளிகள் y அச்சில் எதிரமைக்கும் கோணங் களுள் மிகப் பெரியதை அமைத்துள புள்ளியினது தூரம் உற்பத்தியிலிருந்து $\sqrt{(ab)}$ என நிறுவுக.

22. x அச்சிலிருந்து y அச்சிற்குத் தந்த ஒரு புள்ளி (a, b) இற் கூடாகச் செல்கின்ற கோடுகளுட் சிறியதன் நீளம் $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ என நிறுவுக.

23. $x^m(a-x)^n$ என்னும் பெருக்கம் பெறத்தக்க பெறுமானங்களுட் பெரியதை அடையும்படி a என்னும் எண் x, $a-x$ என்னும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், அப்பெறுமானம் $m^m n^n a^{m+n}/(m+n)^{m+n}$ எனக் காட்டுக.

24. $p + q + r$ என்பது எதிர், அல்லது நேர் என்பதற்குத் தக

$$x = (pa + qb + rc)/(p + q + r)$$

ஆகும்பொழுது $p(x-a)^2 + q(x-b)^2 + r(x-c)^2$ என்னுஞ் சார்பு ஓர் உயர்வாகும், அல்லது இழிவாகும் என நிறுவுக.

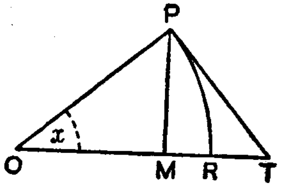
அத்தியாயம் IV

வகையீடு (முற்றொடர்ச்சி)

4. சைன்x, கோசைx, தான்x, ..., என்னுந் திரிகோண கணிதச் சார்புகளை வகையிடுதற்கு,

$$L_{x\to 0}\ \frac{\text{சைன் } x}{x}$$

என்பதன் பெறுமானத்தை நாம் கணித்தல் வேண்டும்.



ROP என்பது x ஆரையனுள்ள ஒரு கோணமாகுக ; RP என்பது O மையமாகவும் ஓரலகு ஆரையாகவுமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் வில்லாகுக ; PM என்பது OR இற்குச் செங்குத்து; P இலுள்ள தொடுகோடு PT என்பது OR ஐ T இற் சந்திக்கின்றது.

உருவத்திலிருந்து தெளிவாய்த் தோன்றுவதாற் பின்வருவதை எடுத்துக் கொள்ளுகின்றோம் :

பரப்பு $OMP <$ பரப்பு $ORP <$ பரப்பு OTP ; **அல்லது,**

$\frac{1}{2}\, OM.\ MP < \frac{1}{2}\, OR^2.\ x$* $< \frac{1}{2}\, OP.PT$

ஆரை $OR = OP = 1$ ஆகையால்,

$OM =$ கோசை x, $MP =$ சைன் x, $PT =$ தான் x.

எனின், கோசை x சைன் $x < x <$ தான் x.

சைன் x ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவன

$$\text{கோசை } x < \frac{x}{\text{சைன் } x} < \frac{1}{\text{கோசை } x}.$$

இனி, x என்பது குறைதலுற்றுப் பூச்சியத்தை அணுகுக; ஆயின், கோசை x, $\frac{1}{\text{கோசை } x}$ என்னும் இரண்டும் 1 ஐ அணுகும் ; ஆகவே கோசை x, $\frac{1}{\text{கோசை } x}$ என்னும் இரண்டிற்கும் இடையிற் கிடக்கும்

$\frac{x}{\text{சைன் } x}$ என்பதும் 1 ஐ அணுகும்.

ஆகவே, $L_{x\to 0}\ \frac{\text{சைன் } x}{x} = 1.$

---

* RP என்னும் வில்லை ஒரு பெருந்தொகையான x சமபகுதிகளாகப் பிரித்து, அப்பிரிக்கும் புள்ளிகளை O இற்குத் தொடுக்க. பரப்பு $ORP = \frac{1}{2} OR^2 x$ ஆகும்படி $OR.x$ இற்குச் சமனான வில் RP ஐத் தம் அடிகளின் கூட்டுத்தொகை அணுகுவதாயும் தம்பொது வுயரம் ஈற்றில் OR என்னும் ஆரையாயும் உள்ள x சமமுக்கோணங்களின் பரப்பை $x \to \infty$ ஆகத் தனது எல்லையாகவுள்ளது ORP என்னும் ஆரைச்சிறையின் பரப்பு.

4.12. சைன் x, கோசை x என்பனவற்றின் பெறுதிகள்.

(i) பெறுதியின் வரைவிலக்கணத்தால் (2.51)

$y =$ சைன் x ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx} = L_{h\to 0}\ \frac{\text{சைன்}(x+h) - \text{சைன் } x}{h}.$$

சைன் A − சைன் B = 2 சைன் $\frac{1}{2}(A-B)$ கோசை $\frac{1}{2}(A+B)$ என்னுங் காரணியாக்கற் சூத்திரத்தை வழங்க,

$$\text{நாம் பெறுவது } \frac{dy}{dx} = L_{h\to 0}\ \frac{2\ \text{சைன்}\frac{1}{2}h\ \text{கோசை}(x+\frac{1}{2}h).}{h}$$

$$= L_{h\to 0}\ \frac{\text{சைன்}\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\ \text{கோசை } (x+\tfrac{1}{2}h).$$

இங்கு, கோசைன் காரணியின் எல்லை கோசைx ; மற்றைக் காரணியின் எல்லை **4.1** ஆல் 1.

ஆகவே, $\frac{d}{dx}$ **சைன்x = கோசைx.** .... (1)

(ii) $y =$ கோசைx ஆயின்.

$$\frac{dy}{dx} = L_{h\to 0}\ \frac{\text{கோசை}(x+h) - \text{கோசை}x}{h}.$$

கோசை A − கோசை B = 2 சைன் $\frac{1}{2}(B-A)$ சைன் $\frac{1}{2}(A+B)$ என்னுங் காரணியாக்கற் சூத்திரத்தை வழங்க,

$$\text{நாம் பெறுவது } \frac{dy}{dx} = L_{h\to 0}\ \frac{-2\ \text{சைன்}\frac{1}{2}h\text{சைன் } (x+\frac{1}{2}h)}{h}$$

$$= -L_{h\to 0}\ \frac{\text{சைன் } \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\ \text{சைன் } (x+\tfrac{1}{2}h)$$

$$= -\text{சைன் } x.$$

ஆகவே, $\frac{d}{dx}$ **கோசை x = − சைன் x** .... (2)

(iii) $y = \text{தான்}\ x$ ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx} = L_{h \to 0} \frac{\text{தான்}\ (x+h) - \text{தான்}\ x}{h}.$$

$$= L_{h \to 0} \frac{\text{சைன்}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x - \text{கோசை}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}{h\ \text{கோசை}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{\text{சைன்}\ h}{h} \frac{1}{\text{கோசை}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x} = \frac{1}{\text{கோசை}^2 x}.$$

ஆகவே, $\dfrac{d}{dx}\ \text{தான்}\ x = \text{சீக}^2 x$ .... (3)

(iv) $y = \text{கோதா}\ x$ ஆயின் ;

$$\frac{dy}{dx} = L_{h \to 0} \frac{\text{கோதா}\ (x+h) - \text{கோதா}\ x}{h}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{\text{கோசை}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x - \text{சைன்}(x+h)\ \text{கோசை}\ x}{h\ \text{சைன்}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}$$

$$= -L_{h \to 0} \frac{\text{சைன்}\ h}{h} \frac{1}{\text{சைன்}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}$$

$$= -\frac{1}{\text{சைன்}^2 x}.$$

ஆகவே, $\dfrac{d}{dx}\ \text{கோதா}\ x = -\text{கோசே}^2 x$ .... (4)

(v) $y = \text{சீக}\ x$ ஆயின் ;

$$\frac{dy}{dx} = L_{h \to 0} \frac{\text{சீக}\ (x+h) - \text{சீக}\ x}{h}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{\text{கோசை}\ x - \text{கோசை}\ (x+h)}{h\ \text{கோசை}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{2\ \text{சைன்}\ \frac{1}{2}h\ \text{சைன்}\ (x+\frac{1}{2}h)}{h\ \text{கோசை}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{\text{சைன்}\ \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \frac{\text{சைன்}\ (x+\frac{1}{2}h)}{\text{கோசை}\ (x+h)\ \text{கோசை}\ x}$$

$$= \frac{\text{சைன்}\ x}{\text{கோசை}^2 x} = \text{சீக}\ x\ \text{தான்}\ x.$$

ஆகவே, $\dfrac{d}{dx}\ \text{சீக}\ x = \text{சீக}\ x\ \text{தான்}\ x$ .... (5)

(vi) $y = \text{கோசே}\ x$ ஆயின் ;

$$\frac{dy}{dx} = L_{h \to 0} \frac{\text{கோசே}(x+h) - \text{கோசே}x}{h}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{\text{சைன்}\ x - \text{சைன்}\ (x+h)}{h\ \text{சைன்}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}$$

$$= L_{h \to 0} \frac{-2\ \text{சைன்}\ \frac{1}{2}h\ \text{கோசை}\ (x+\frac{1}{2}h)}{h\ \text{சைன்}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}$$

$$= -L_{h \to 0} \frac{\text{சைன்}\ \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \frac{\text{கோசை}\ (x+\frac{1}{2}h)}{\text{சைன்}\ (x+h)\ \text{சைன்}\ x}$$

$$= -\frac{\text{கோசை}\ x}{\text{சைன்}^2 x} = -\text{கோசே}\ x\ \text{கோதா}\ x.$$

ஆகவே, $\dfrac{d}{dx}\ \text{கோசே}\ x = -\text{கோசே}\ x\ \text{கோதா}\ x$ .... (6)

சயக்குறியைத் தவிர்த்தால், (4), (6) என்னும் முடிபுகளிலுள்ள கோதான்சன் கோசேக்கன் என்பனவற்றிற் கிடையிலுள்ள தொடர்பு (3), (5) என்பனவற்றிலுள்ள தான்சன், சீக்கன் என்பனவற்றிற்கிடையிலுள்ளதைப் போன்றது எனக் காணுதல் மாணுக்கனுக்கு இம்முடிவுகளை ஞாபகத்தில் வைத்திருப்பதற்குத் துணைபுரியலாம்.

4.13. பயிற்சியாக மாணுக்கன் 4.11 இன் (3)............(6) ஆகிய முடிபுகளை சைன்x/கோசைx, கோசைx/சைன்x, 1/கோசைx, 1/சைன் x என்பனவற்றை வகையிடுதலாற் பெறலாம்.

4.14. உதாரணங்கள்.

(i) $\dfrac{1+\text{சைன்}\ x}{1-\text{சைன்}\ x}$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

$$y = \frac{1+\text{சைன்}\ x}{1-\text{சைன்}\ x} \quad \text{எனின்,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\text{சைன்}\ x)\frac{d}{dx}(1+\text{சைன்}\ x) - (1+\text{சைன்}\ x)\frac{d}{dx}(1-\text{சைன்}\ x)}{(1-\text{சைன்}\ x)^2}$$

$$= \frac{(1-\text{சைன்}\ x)\ \text{கோசை}\ x + (1+\text{சைன்}\ x)\ \text{கோசை}\ x}{(1-\text{சைன்}\ x)^2}$$

$$= \frac{2\ \text{கோசை}\ x}{(1-\text{சைன்}\ x)^2}.$$

(ii) **சைன்$^m x$கோசை$^n x$ இன் பெறுதியைக் காண்க.**

$y =$ சைன்$^m x$ கோசை$^n x$ எனின்,

$$\frac{dy}{dx} = \text{சைன்}^m x \frac{d}{dx}\text{கோசை}^n x + \text{கோசை}^n x \frac{d}{dx}\text{சைன்}^m x$$

$$= \text{சைன்}^m x\,(-n\,\text{கோசை}^{n-1}x\,\text{சைன்}\,x)$$
$$+\,\text{கோசை}^n x\,(m\,\text{சைன்}^{m-1}x\,\text{கோசை}\,x)$$
$$= -n\,\text{சைன்}^{m+1}x\,\text{கோசை}^{n-1}x + m\,\text{சைன்}^{m-1}x\,\text{கோசை}^{n+1}x$$
$$= \text{சைன்}^{m-1}x\,\text{கோசை}^{n-1}x\,(m\,\text{கோசை}^2x - n\,\text{சைன்}^2x).$$

(iii) $\dfrac{\text{தான்}\,x}{x}$ **இன் பெறுதியைக் காண்க.**

$y = \dfrac{\text{தான்}\,x}{x}$ எனின்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\dfrac{d}{dx}\text{தான்}\,x - \text{தான்}\,x\dfrac{dx}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{x\,\text{சீக}^2x - \text{தான்}\,x}{x^2}.$$

4.15. பயிற்சிகள். பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :

(i) சைன்^3x கோசை^3x.

(ii) சீகxதான்x.

(iii) $\dfrac{1-\text{கோசை}\,x}{1+\text{கோசை}\,x}$.

(iv) சைன்mx கோசைnx.

(v) x^n சைன்mx.

(vi) சீக$^2x+$தான்^2x.

(vii) சைன்$(mx+n)$கோசை$(mx-n)$.

(viii) $\frac{1}{3}$ சைன்$3x+$ சைன்^3x.

(ix) கோசே^3x.

(x) கோசே $3x$.

(xi) x சீக^2x.

(xii) x^3 தான்^2x.

4.2. நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகள். நேர்மாறு திரிகோண கணிதச் சார்புகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் :

$x =$ சைன்y எனின், $y =$ சைன்^{-1}x, அல்லது $y =$ வில் சைன் x ;

$x =$ கோசை y எனின், $y =$ கோசை^{-1}x, அல்லது $y =$ வில் கோசை x ; இவ்வாறே பிறவும்.

ஆகவே, சைன்^{-1}x ஆனது x ஐத் தனது சைன் ஆகவுள்ள ஒரு கோண மெனப் பொருள்படும். எனினும், α என்பது x ஐத் தனது சைன் ஆகவுள்ள ஒரு கோணமெனின், $\pi-\alpha$ என்பதும் x ஐத் தனது சைன் ஆகவுள்ள கோணமென நாம் அறிவோம் ; அதேவித α இற்கு, அல்லது $\pi-\alpha$ இற்கு 2π இன் யாதும் ஒரு மடங்கைக் கூட்டுதலாற் பெறப்படுங் கோணங்களுக்கும் பொருந்தும்.

ஆகவே, சைன்^{-1}x என்பதை நாம் **பலபெறுமானச் சார்பெனக்** கூறுகின்றோம் ; x ஐத் தம் சைனகளாக உள்ள பல கோணங்கள் உண்டு என்பதே இதன் பொருள்.

சைன்x, கோசைx முதலிய திரிகோணகணிதச் சார்புகள் **ஆவர்த்தனச் சார்புகளெனப்படும்** ; அதற்குக் காரணம் x இற்கு 2π ஐ யாதல் 2π இன் யாதும் ஒரு மடங்கையாதல் கூட்டுதல் அச்சார்பின் பெறுமானத்தை மாற்றுது என்பதே ; இதுவே ஏதுவாக, 2π என்பது சைன்x கோசைx என்பனவற்றின் காலம் எனப்படும் ; அதுபோல, π என்பது தான் x இன்காலம். திரிகோணகணிதச் சார்புகள் ஆவர்த்தனச் சார்புகளாயிருத்தலால், நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகள் பல் பெறுமானமுடையன வாயிருக்கும்.

4.21. சைன்^{-1}x, கோசை^{-1}x முதலியனவற்றின் பெறுதிகள். $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ என்பனவற்றை ஒரு சார்பையும் அதன் நேர்மாறுனதையும் வரையறுக்குந் தொடர்புகளாகக் கொண்டோமாயின், அச்சார்பின் பெறுதி dy/dx ஆயும் நேர்மாறு சார்பின் பெறுதி dx/dy ஆயும் இருக்கும்; $\dfrac{dx}{dy}\times\dfrac{dy}{dx}=1$ ஆதலால் (2.631), ஒரு நேர்மாறு சார்பின் பெறுதி அச்சார்பின் பெறுதியிலிருந்து என்றும் உய்த்தறியப்படக்கூடும்.

(i) $y =$ சைன்^{-1}x ஆகுக ; ஆயின் $x =$ சைன் y ; $\dfrac{dx}{dy} =$ கோசை y எனின்,

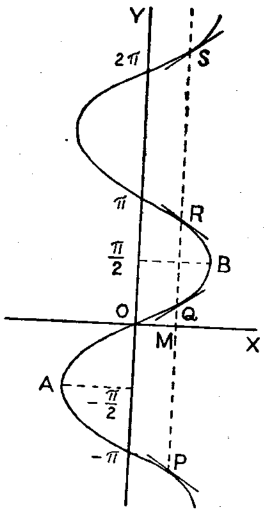
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\text{கோசை}\,y} = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)}},$$

அல்லது $$\frac{d}{dx}\,\text{சைன்}^{-1}x = \frac{1}{\pm\sqrt{(1-x^2)}}.$$

ஈரடியான குறி **விளக்கத்தை** வேண்டி நிற்கின்றது.

$y =$ சைன்^{-1}x இன் வரைப்படம் $x =$ சைன்y இன் வரைப்படமாயும் இருக்கின்றது ; அதாவது y அச்சின் நீளத்திற்கு உள்ள மடிப்புக்களோடு $x=-1$, $x=1$ என்பனவற்றிற்கிடையே முழுவதுங் கிடக்கின்றதே என்பது

ஒழிய ஒரு பொது சைன் வளைகோடு. $-1<x<1$ ஆயிருக்க, $OM=x$ எனின், $PMQRS$...என்னும் ஒரு நிலைத் தூரத்தை நாம் வரைந்தால், x இன் ஒரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்த y இன் பல பெறுமானங்களிலிருந்து பிறந்த ஒரு தொகையான புள்ளிகளில் அது அவ்வளைகோட்டைச் சந்திக்கும்; எனினும், இப்புள்ளிகளிலுள்ள சாய்வுவிகிதங்களுக்கு இரு பெறுமானங்களே உள எனக் காணப்படும்: Q, S, ... என்னுங் கூட்டத்திற்கு உரியன எல்லாம் சமமும் நேருமாகும்; P, R,...என்னுங் கூட்டத்திற்கு உரியன முன்னையதாகிய கூட்டத்திற்கு உரியனவற்றிற்கு எண்ணளவிற் சமமாகும்; குறிபற்றியோ எதிராகும்.



இனி, நாம் சைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தை $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடக்கும் பெறுமானமாக வரையறுப்பதால் ஈரடி இயல்பை விலக்கலாம். அதாவது சைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானம் A இலிருந்து B இற்குள்ள வளைகோட்டுப் பகுதியினாலே வரைப்படமுறையாற் குறிக்கப்படும்; இதற்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு நேர்ச் சாய்வுவிகிதம் உண்டு; ஆயின், இக்கருதுகோளின்படி, சூத்திரமானது சைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தைக் குறிக்கின்றதென வரைவுபடுத்த, ஈரடிப்பயனின்றி நாம் பெறுவது:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,\text{சைன்}^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{\sqrt{(1-\mathbf{x}^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(ii) $y=$ கோசை^{-1}x ஆகுக; ஆயின் $x=$ கோசைy; $\frac{dx}{dy}=-$சைன் y.

ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\text{சைன் } y}=\frac{-1}{\pm\sqrt{(1-x^2)}},$$

அல்லது $$\frac{d}{dx}\,\text{கோசை}^{-1}x=\frac{1}{\mp\sqrt{(1-x^2)}}.$$

குறிபற்றிய ஈரடிப்பயன் மேற்கூறியவாறு விளக்கப்படும்; அது 0, π என்பனவற்றிற்கிடையே கிடக்கின்ற கோசை^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தையே சூத்திரங் குறிக்கின்றதென வரைவுபடுத்துதலால் நீக்கப்

படும்; அது அவ்வளைகோட்டின் AB என்னும் பகுதியால் வரைப்படமுறையாற் குறிக்கப்படும்; இதற்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஓர் எதிர்ச் சாய்வுவிகிதம் உண்டு; ஆயின்,

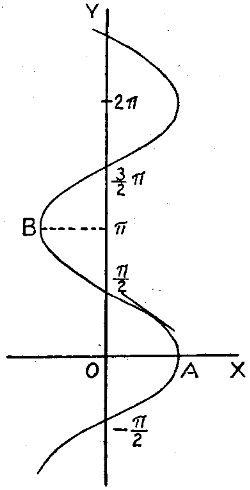
$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,\text{கோசை}^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{(1-\mathbf{x}^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(iii) $y=$ தான்^{-1}x ஆகுக; ஆயின்,

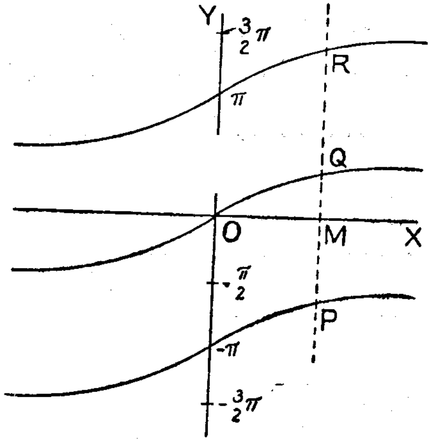
$x=$ தான் y; $\frac{dx}{dy}$ சீக^2y;

எனின், $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{சீக}^2y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

ஆகவே $$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\,\text{தான்}^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{1+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$



குறிபற்றிய ஈரடிப்பயன் இங்கு உண்டாவதில்லை; அச்சுக்கள்பற்றி மாற்றுப் பெற்ற பொதுத் தான்சன் வளைகோடாகிய $y=$ தான்^{-1}x, அல்லது $x=$ தான்y என்பதை நாம் வரைந்தால் x-அச்சில் யாதும் ஒரு புள்ளி M இற்கூடாகச் செல்லும் $PMQR$ . . . என்னும் ஒரு நிலைத் தூரம் வேறுபட்ட கிளைகளை எங்கும் நேரான ஒரே சாய்வுவிகிதங் கொண்ட புள்ளிகளிற் சந்திக்கும்.



தான்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானத்தை **$-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$** என்பன

வற்றிற்கிடையே கிடக்கின்ற பெறுமானமாக வரையறுப்பது வழக்கம்; இங்கு, வரைப்படம் ஒரு தனிக் கிளையாக வரைவுபடுத்தப்பட்டமை காண்க.

(iv) $y=$ கோதா^{-1}x ஆகுக ; ஆயின், $x=$ கோதாy ; $\frac{dx}{dy}=-$ கோசே^{2}y.

எனின், $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\text{கோசை}^{2}y}=\frac{-1}{1+x^{2}}$

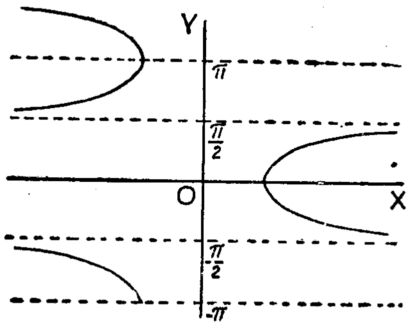
ஆகவே, $\frac{d}{dx}$ கோதா$^{-1}x=\frac{-1}{1+x^{2}}$ .... (4)

கோதா^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானம் $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற் கிடையில் உள்ள பெறுமானமாக வரையறுக்கப்படும் ; அவ்வரைப்படத்தை ஆராய்ந்தால், அது சாய்வுவிகிதம் எங்கும் எதிர் என்பதைக் காட்டும்.

(v) $y=$ சீக^{-1}x ஆகுக ; ஆயின் $x=$ சீகy ; $\frac{dx}{dy}=$ சீகyதான்y.

எனின், $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{சீக}y\ \text{தான்}y}=\frac{1}{\pm x\sqrt{(x^{2}-1)}}$.

ஒரு கோணத்தின் சீக்கன் எண்ணளவில் ஒன்றினுஞ் சிறிதாகாது ஆதலால், சீக^{-1}x என்பது $x<-1$ ஆகும்பொழுதும் $x>1$ ஆகும் பொழுதும் இருப்பைக்கொள்ளும்.



$\frac{1}{x}\sqrt{(x^{2}-1)}$ என்னுஞ் சூத்திரம் x ஓடு குறிமாறும் ; சீக^{-1}x என்பது o, π என்பனவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்பொழுது சீக^{-1}x இன் சாய்வுவிகிதம் நேராகுமென வரைப்படத்திலிருந்து புலனுகும் ; ஆயின்,

சீக^{-1}x என்பது o, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்பொழுது x ஆனது நேராயிருக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{d}{dx}\text{சீக}^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{(x^{2}-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots (5);$$

சீக^{-1}x என்பது $\frac{1}{2}\pi$, π என்பனவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்பொழுது x ஆனது எதிராயிருக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{d}{dx}\text{சீக}^{-1}x=\frac{-1}{x\sqrt{(x^{2}-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots (5').$$

(vi) $y=$ கோசே^{-1}x ஆகுக. $x<-1$, அல்லது $x>1$ ஆயிருக்கும் பொழுதே கோசே^{-1}x என்பது இருப்பைக் கொள்ளும் என்பது அதே வழியாற் பெறப்படும்.

$$\frac{d}{dx}\text{கோசே}^{-1}x=\frac{1}{\mp x\sqrt{(x^{2}-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

என்பதும் பெறப்படும்.

மேற்காட்டியவாறு சூத்திரம் x ஓடு குறிமாறும் ; கோசே^{-1}x ஆனது $-\frac{1}{2}\pi$, 0 என்பனவற்றிற்கிடையிற் கிடக்கும்போது நேர்க்குறி எடுக்கப்பட வேண்டும் என்பதும் அது 0, $\frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற் இடையிற் கிடக்கும்போது எதிர்க்குறி எடுக்கப்படவேண்டும் என்பதும் ஒரு வரைப்படத்திலிருந்து புலனுகக்கூடும்.

4·22. உதாரணங்கள்.

(i) $0<x<1$ ஆயின் சைன்$^{-1}(1-x^{3})$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

$y=$ சைன்$^{-1}(1-x^{3})$ ஆகுக ;

$z=1-x^{3}$ எனப் பிரதியிடுக ,

ஆயின், $y=$ சைன்^{-1}z,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^{2})}}\times -3x^{2}=\frac{-3x^{2}}{\sqrt{(2x^{3}-x^{6})}}=\frac{-3x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2-x^{3})}},$$

(ii) $0<x<1$ ஆயிருக்க, சைன்$^{-1}[2x\sqrt{(1-x^{2})}]$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

சென்ற பயிற்சியிற் செய்தவாறு செய்யலாம் ; அன்றி, மற்றொரு வகையாக $x=$ சைன்z எனப் பிரதியிடுக.

ஆயின், $\sqrt{(1-x^{2})}=$ கோசை z.

பின்னர், சைன்$^{-1}$[2 சைன்z கோசைz], அல்லது சைன்$^{-1}$[சைன் $2z$] அல்லது $2z$, அல்லது 2 சைன்^{-1}x இன் பெறுதியை நாம் காணல் வேண்டும்; விடை $\dfrac{2}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ஆகும்.

(iii) $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ ஆயிருக்க, சைன்$^{-1}$ (கோசைx) இன் பெறுதியைக் காண்க.

$y=$ சைன்$^{-1}$ (கோசை x) ஆகுக;

$z=$ கோசைx எனப் பிரதியிடுக.

எனின், $y=$ சைன்^{-1}z.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}}\times -\text{சைன்}\,x$$

$$=\frac{-\text{சைன்}\,x}{\sqrt{(1-\text{கோசை}^2x)}}=-1$$

மற்றொரு விதமாக,

$y=$ சைன்$^{-1}$(கோசைx)$=\dfrac{\pi}{2}-$ கோசை$^{-1}$(கோசைx)$=\dfrac{\pi}{2}-x$ என எழுதலாம்.

எனின், $\dfrac{dy}{dx}=-1$.

4.23. பயிற்சிகள். பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க:

(i) சைன்$^{-1}\sqrt{(1-x^2)}$.
(ii) தான்$^{-1}$(கோசை x).

(iii) கோசே$^{-1}$(சீக x).
(iv) சீக$^{-1}(x^2-1)$.

(v) தான்$^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.
(vi) சைன்$^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

(vii) கோசை$^{-1}(x^3-1)$.
(viii) கோசை$^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

(ix) $(1+x^2)$ தான்^{-1}x.
(x) $(1-x^2)$கோசை^{-1}x.

(xi) $(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ சீக^{-1}x.
(xii) x கோதா^{-1}x.

(xiii) சைன்$^{-1}\dfrac{x}{a}$ $(0<x<a)$.
(xiv) தான்$^{-1}\dfrac{ax}{b}$.

(xv) கோசை$^{-1}\dfrac{x-a}{a}$.
(xvi) கோசை$^{-1}\dfrac{a+b\,\text{கோசை}\,x}{b+a\,\text{கோசை}\,x}$ $(a<b)$.

(xvii) கோதா$^{-1}\dfrac{2x-1}{3}$.
(xviii) சைன்$^{-1}\dfrac{a+b\,\text{சைன்}\,x}{b+a\,\text{சைன்}\,x}$ $(a<b)$.

(xix) கோசை$^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{a-b}\right)}$.
(xx) தான்$^{-1}\left(\dfrac{ax+b}{\sqrt{(ac-b^2)}}\right)$.

4.3. அடுக்குக்குறிச் சார்பு. அட்சரகணித நூல்களிலும் வகுப்புக்கணித நூல்களிலும் $L_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ .... (1)

என்பது காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

இங்கு e என்பது

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.+\frac{1}{n!}+ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

என்னும் முடிவில் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் குறிக்கின்றது; அது 2 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலுள்ள ஒரு வரையறுத்த எண்ணுகு மன்றி ஒரு முடிவுகொள்ளுந் தசமத்தாலாதல் மடங்கு தசமத்தாலாதல் குறிக்கப்படும் இயல்பினதன்று; அதாவது அது 2·71828 ...... என்னும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணுகும்.

$$L_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

என்பதும்

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots.+\frac{x^n}{n!}+ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

என்பதும் x இன் அடுக்குக்களில் e^x இன் இவ் விரிவு x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் உண்மை என்பதுங் காட்டப்பட்டுள்ளன.

தொடர்க் கொள்கையில், e^x இன் தொடர் ஒருசீரான ஒருங்கு தொடரெனக் காட்டப்பட்டுள்ளது; அத்தகைத் தொடரின் பண்புகளிற் பின்வருவது உண்டு: $f(x)$ என்பது தன் உறுப்புக்கள் x இன் சார்புகளான ஒரு முடிவில்தொடரின் கூட்டுத்தொகை

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots.+u_n(x)+\ldots.$$

ஆயின், அவ்வுறுப்புக்களை வகையிடுதலாற் பெறப்படுந் தொடர் உதாரணமாக,

$$u'_0(x)+u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots.+u_n'(x)+\ldots.$$

என்பது ஒருசீரான ஒருங்கு தொடராயின், அதன் கூட்டுத்தொகை $f'(x)$ ஆகும்.

இனி நாம்,

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

என்னும் அடுக்குக்குறித் தொடரை உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுவோமாயின், நாம் பெறுவது

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dots\dots\dots$$ என்பது ; அதாவது,

அதே ஒருசீரான ஒருங்கு தொடராகும். ஆகவே, சற்று முன்னர் எடுத்தாண்ட தேற்றத்தால் இத்தொடரின் கூட்டுத்தொகை, அதாவது e^x என்பது e^x இன் பெறுதியாகும் ; அல்லது

$$\frac{de^x}{dx}=e^x \dots\dots\dots \quad (5).$$

ஆயின், e^x என்பதை அடுக்குக்குறிச் சார்பெனக் கூறுவோமாயின், அடுக்குக்குறிச் சார்பானது தனது சொந்தப் பெறுதியாகுமென்பது பெறப்படும்.

4.31. முடிபு (5) ஐ நிறுவாது நிறுவன்முறை ஒன்றை மாத்திரங் கூறினேம் என்பது குறிப்பாக அறியப்படல் வேண்டும் ; வேண்டிய கொள்கை ஆரம்ப நூலின் நோக்குக்கு அப்பாற்பட்டதென்பதும் அறிக ; வேறு ஆராய்புகளின்றி அடுக்குக்குறித் தொடரை உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுதல் முடிபு (5) இன் நிறுவலைத் தருமென்று மாணாக்கன் நினைத்தல் ஆகாது. உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுதல் போலி முடிபுகளுக்கு உய்க்கும் என்பதற்கு உதாரணமாக, $-\pi<x<\pi$ என்பனவற்றிற்கு உண்மையான

$\frac{1}{2}x=$ சைன் $x-\frac{1}{2}$சைன் $2x+\frac{1}{3}$ சைன் $3x-\dots,$

என்னுஞ் சூத்திரத்தை ஆராய்க.

இங்கு, உறுப்புறுப்பாய் வகையிடுதல் ஒரு நியாயமான செய்கையெனின், அது

$\frac{1}{2}=$ கோசை $x-$கோசை $2x+$கோசை $3x-\dots\dots\dots$

என்பதைத் தரும் ; $x=0$ என்பதற்கு, இது

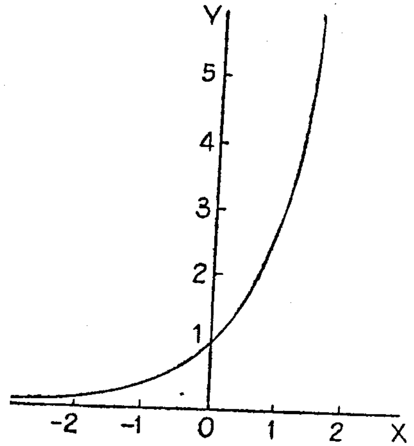
$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\dots\dots\dots$

என்பதாய்ப் பொருளற்று நிற்கும்.

4.32. **e^x என்னும் அடுக்குக்குறிச் சார்பின் வரைப்படம்.** தொடர் (4 இலிருந்து $x=0$ என்பதற்கு $e^x=1$ என்பதும், x என்பது நேராயிருக்கும் பொழுது e^x உம் அவ்வாறாக அதுபற்றி x இன் நேர்ப்பெறுமானங்கள்

எல்லாவற்றிற்கும் அதன் சாய்வுவிகிதமாகிய e^x என்பதும் நேராகுமென்பதுந் தேற்றம். e^x என்பது x ஓடு கூடுதலுறுமென்பது பெறப்படும் ; x என்பது முடிவிலியை அணுக, அவ்வாறே e^x என்பதுங் காணுதற்கு எளிது.

$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ ஆதலால், x இன் எதிர்ப்பெறுமானங்களுக்கு அச்சார்பு இன்னும் நேராயிருந்து x எண்ணளவிற்கூடுதலுறத் தான் குறைதலுறும் ; அல்லது $x\to-\infty$, ஆக, $e^x\to 0$.



$y=e^x$ என்பதன் வரைப்படம் உருவத்திற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

4.321. $x\to\infty$ ஆக, அவ்வாறே e^x என்றும், $x\to-\infty$ ஆக $e^x\to 0$ என்றுஞ் சற்றுமுன் கண்டோம்.

பயன்படத்தக்க வேறோர் அடுக்குக்குறியெல்லை

$$L_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

அதற்குக் காரணம் e^x இன் விரிவைப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots\dots$$

$$=1+x\left(\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots\dots\right)$$

x இன் முடிவுள்ள நேர்ப்பெறுமானங்களுக்கு அடைப்புக்குள் இருக்கும் அத்தொடரின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் நேராய் அடுக்குக்குறித் தொடரிலுள்ள ஒத்த உறுப்பிலுஞ் சிறிதாயிருக்கும். எனினும், x இன் முடி ள்ள

பெறுமானங்களுக்கு அவ்வடுக்குக்குறித் தொடருக்கு ஒரு முடிவுள்ள கூட்டுத்தொகை, அதாவது e^x உண்டு; ஆகவே, அடைப்புக்குள் உள்ள தொடருக்கு ஒரு முடிவுள்ள கூட்டுத்தொகை உண்டு. ஆகவே,

$$L_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

எதிர்ப் பெறுமானங்களுக்கூடாக $x\to 0$ ஆகும்பொழுது அதே முடிபு உண்மையாகும் என்பது x நேராகும்பொழுது $L_{x\to 0}\ \dfrac{e^{-x}-1}{-x}$ என்பதை ஆராய்வதாற் காணப்படலாம். தொகுதியையும் பகுதியையும் $-e^x$ என்பதாற் பெருக்க, அக்கோவை

$$L_{x\to 0}\ \frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}$$

ஆகும்; முடிவு 1 ஆகும்; அதற்குக் காரணஞ் சற்றுமுன் நிறுவப் பட்டதும் $e^0=1$ என்பதுமே.

4.322. 4.321 இன் எல்லையைக் கொள்ளுதலால், e^x இன்பெறுதி e^x என்பதை நாம் உய்த்தறியக்கூடும்.

அதற்குக் காரணம் $\dfrac{d}{dx}e^x=L_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\ L_{h\to 0}\ \dfrac{e^h-1}{h}=e^x$

4.33. அதிபரவளைவுச் சார்புகள்.

நாம் பெற்றன $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots\dots\dots\dots(1)$

$e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dots\dots\dots\dots(2)$ என்பன

ஆகவே $\frac{1}{2}\ (e^x+e^{-x})=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots\dots\dots\dots\ (3),$

$\frac{1}{2}\ (e^x-e^{-x})=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots\dots\dots\dots\ (4)$

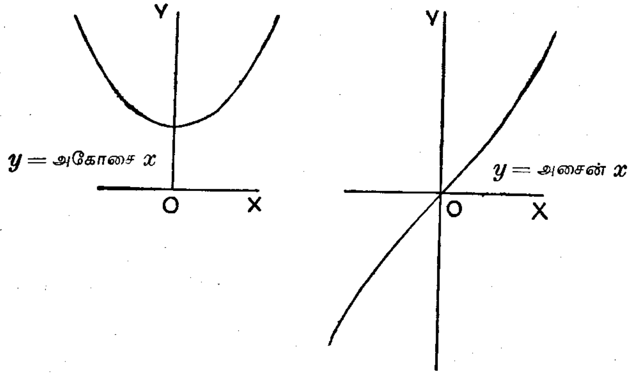
(3),(4) என்னுந் தொடர்கள் முறையே x இன் **அதிபரவளைவுக் கோசைன், அதிபரவளைவுச் சைனெனக்** கூறப்படும்; அவை அகோசைx, அசைன்x என எழுதப்படும். அதிபரவளைவுத் தான்சன், கோதான் சன் முதலியன பின்வருந் தொடர்புகளால் வரையறுக்கப்படும்:

அதான் $x=\dfrac{\text{அசைன் } x}{\text{அகோசை } x}$, அகோதா $x=\dfrac{\text{அகோசை } x}{\text{அசைன் } x}$,

அசீக $x=\dfrac{1}{\text{அகோசை } x}$, அகோ[illegible]$x=\dfrac{1}{\text{அசைன் } x}$.

அகோசைx என்பது இரட்டைச் சார்பு, அதாவது x ஐ $-x$ ஆக மாற்றுவதால் மாறுபடாத தொன்றென்றும், அசைன் x என்பது ஒற்றைச் சார்பு, அதாவது $-x$ இற்காக x ஐப் பிரதியிட அச்சார்பின் குறி மாற்றப்படுமொழிய அதன் தனிப்பெறுமானம் மாற்றப்படாத தொன்றென்றும் நாம் அறிகின்றோம்.

ஆகவே, $y=$ அகோசைx இன் வரைப்படம் y-அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீராகும்; $y=$ அசைன்x இன் வரைப்படம் எதிர்க்கால் வட்டங்களிற் சமச்சீராகும்.



$y=e^x$, $y=e^{-x}$ என்பனவற்றின் வரைப்படங்கள் முதல் வரைந்து, நிலைத்தூரங்களின் கூட்டுத்தொகையின் அரைப் பங்கையும் வித்தியாசத்தின் அரைப்பங்கையும் எடுப்பதால், இவ்வரைப்படங்கள் வரையப்படக் கூடும்.

4.34. அதிபரவளைவுச் சார்புகள் வட்டச் சார்புகளிலுஞ் சிறிது வேறுபட்ட போதிலும் அவற்றை இணைக்குந் தொடர்புகளைப் போன்ற பலவகைத் தொடர்புகளால் அவை இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

கூட்டல் கழித்தல்களால் நாம் பெறுவன

அகோசைx + அசைன்$x=e^x$, அகோசைx − அசைன்$x=e^{-x}$ என்பன;

ஆகவே, பெருக்கலால்,

அகோசை^2x − அசைன்$^2x=1$.

இத்தொடர்பை அகோசை^2x, அசைன்^2x என்பனவற்றாலே முறையே வகுக்க, நாம் பெறுவன:

$1-$ அதான்$^2x=$ அசீக^2x, அகோசை$^2x-1=$ அகோசை^2x என்பன,

இனி, அசைன் $(x+y)=\frac{1}{2}\ (e^{x+y}-e^{-x-y})$.

$$=\tfrac{1}{4}\{(e^{x}-e^{-x})\ (e^{y}+e^{-y})+(e^{x}+e^{-x})\ (e^{y}-e^{-y})\}.$$

அல்லது

அசைன்$(x+y)$ = அசைன்xஅகோசைy + அகோசைxஅசைன்y.

அதுபோல,

அகோசை$(x+y)$ = அகோசைx அகோசை y + அசைன்xஅசைன்y.

சிறப்புவகைகளாக,

அசைன்$2x = 2$ அசைன்x அகோசை x,

அகோசை$2x$ = அகோசை^2x + அசைன்^2x.

4.341. பயிற்சிகள்.

1. அதிபரவளைவுச் சார்புகளுக்கு இடையேயுள்ள பின்வருந் தொடர்புகளை நிலைநிறுத்துக:

(i) அசைன் $2x = \dfrac{2\ \text{அதான்}\ x}{1-\text{அதான்}^2x}$;

(ii) அகோசை$2x = 2$அகோசை$^2x - 1 = 1 + 2$ அசைன்^2x ;

(iii) அதான் $2x = \dfrac{2\ \text{அதான்}\ x}{1+\text{அதான்}^2x}$;

(iv) அகோசை$(x-y)$ = அகோசைxஅகோசைy − அசைன் x அசைன் y,
அசைன்$(x-y)$ = அசைன்xஅகோசைy − அகோசை xஅசைன்y ;

(v) அசைன் x + அசைன் $y = 2$அசைன் $\frac{1}{2}(x+y)$அகோசை $\frac{1}{2}(x-y)$,
அசைன்x − அசைன்$y = 2$அசைன்$\frac{1}{2}\ (x-y)$அகோசை$\frac{1}{2}\ (x+y)$,
அகோசைx + அகோசை $y = 2$அகோசை$\frac{1}{2}(x+y)$அகோசை $\frac{1}{2}(x-y)$,

அகோசைx − அகோசை$y = 2$அசைன்$\frac{1}{2}(x+y)$ அசைன்$\frac{1}{2}(x-y)$;

(vi) அதான் $(x\pm y) = \dfrac{\text{அதான்}x \pm \text{அதான்}y}{1\pm\text{அதான்}\ x\text{அதான்}y}$.

2. $L_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{x}=m$ என நிறுவுக.

3. $L_{x\to\infty}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=a$ என்றும்

$L_{x\to-\infty}\dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=b$ என்றும் நிறுவுக.

4.35. அதிபரவளைவுச் சார்புகளை வகையிடுதல். $\dfrac{de^x}{dx}=e^x$ என்பதாலும்

2.63 இன் எளிய பிரயோகமாகிய

$$\frac{de^{-x}}{dx}=-e^{-x} \text{ என்பதாலும்}$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசை } x=\frac{d}{dx}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\text{அசைன்}x \quad\ldots\ldots\quad (1)$$

அதுபோல,

$$\frac{d}{dx}\text{அசைன் } x=\frac{d}{dx}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\text{அகோசை } x \quad\ldots\ldots\quad (2)$$

இனி, y = அதான்x = அசைன் x/அகோசைx எனின்,

2.62 ஆல்,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{அகோசை } x\dfrac{d}{dx}\text{ அசைன் } x-\text{அசைன்}x\dfrac{d}{dx}\text{ அகோசை}x}{\text{அகோசை}^2x}$$

$$=\frac{\text{அகோசை}^2x-\text{அசைன்}^2x}{\text{அகோசை}^2x}=\frac{1}{\text{அகோசை}^2x};$$

$$\text{அல்லது } \frac{d}{dx}\text{ அதான்}x=\text{அசீக}^2x \quad\ldots\ldots\quad (3)$$

$$\text{அதுபோல, } \frac{d}{dx}\text{ அகோதா}x=-\text{அகோசை}^2x \quad\ldots\ldots\quad (4)$$

இனி, y = அசீகx = $\dfrac{1}{\text{அகோசை}x}$ எனின்,

2.62 ஆல்,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\text{அகோசை}^2x}\ \frac{d\ \text{அகோசை}x}{dx};$$

$$\text{அல்லது } \frac{d}{dx}\text{ அசீக}x=-\frac{\text{அசைன் } x}{\text{அகோசை}^2x}=-\text{அதான்}x\text{அசீக } x\ldots\quad (5)$$

அது போல,

$$\frac{d}{dx}\text{ அகோசை}x=-\frac{\text{அ கோசை}x}{\text{அ சைன்}^2x}=-\text{அகோதா }x\text{ அகோசே }x\ldots\quad (6)$$

4.36. பயிற்சிகள் .

பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :

(i) x^3e^x. (ii) e^x/x^4. (iii) x^5/e^x.

(iv) e^{x^2+1}. (v) $\dfrac{a+be^x}{a-be^x}$. (vi) $e^{\text{தான்}\, x}$.

(vii) $e^{\text{சைன்}^{-1}x}$. (viii) e^{ax} சைன்bx. (ix) e^{ax}கோசைbx.

(x) $e^{\text{தான்}^2 x}$. (xi) அசைன்^2x. (xii) அகோசை^2x.

(xiii) $\frac{1}{3}$அசைன்$3x$ + 3அசைன்x. (xiv) தான்$^{-1}$ (அதான்x).

(xv) கோசை$^{-1}$ (அசீகx). (xvi) கோதா$^{-1}$ (அசைன்x).

4.4 மடக்கை. அட்சரகணித நூல்களிலே மடக்கையின் வரைவிலக்கணம் பின்வருமாறு கூறப்பட்டுள்ளது. **தந்த ஓர் அடிக்கு ஓர் எண்ணின் மடக்கை அவ்வெண்ணுக்குச் சமனுகும்படி அவ்வடி உயர்த்தப்பட வேண்டிய அடுக்கின் குறியாகும்.**

உதாரணமாக, $a^y = n$ எனின், $y = log_a n$; இங்கு a என்பது அடியைக் குறிக்கின்றது.

மடக்கையின் ஆரம்பக் கொள்கை பின்வருந் தேற்றங்களை அடக்கியுள்ளது :

(i) $log_a mn = log_a m + log_a n$.
$m = a^x$, $n = a^y$ எனின், $mn = a^{x+y}$.
$\therefore\ log_a mn = x + y = log_a m + log_a n$.

(ii) $log_a m/n = log_a m - log_a n$.
இது முன்போல் நிறுவப்படலாம்.

(iii) $log_a m^k = k\ log_a m$.
இங்கு k என்பது ஒரு விகிதமுறும் எண்.
$m = a^x$ எனின், $m^k = a^{kx}$.
$\therefore\ log_a m^k = kx = k\ log_a m$.

(iv) $\dfrac{log_a m}{log_b m} = log_a b$.

$m = a^x = b^y$ எனின் $a^{\frac{x}{y}} = b$

$\therefore\ \dfrac{x}{y} = log_a b$, அல்லது $\dfrac{log_a m}{log_b m} = log_a b$.

அதுபோல, $\dfrac{log_b m}{log_a m} = log_b a$;

ஆகவே, $log_a b + log_b a = 1$.

4.41. எண் கணக்கீடுகளிற் பொது வழக்கிலுள்ள மடக்கைகள் 10 என்னும் அடிக்குரிய மடக்கைகளாம். அறிமுறைவேலையில், நூல் விருத்தியடையத் தெளிவாகுங் காரணங்கள்பற்றி 4.3 இல் வரையறுக்கப்பட்டபடி e ஐ அடியாக வழங்குதல் இசைவாகும். அடி e இற்கு எடுக்கும் மடக்கை முறை மடக்கையைக் கண்டுபிடித்த **மேச்சித்தன் ஜுரின் பரன் நேப்பியரின்** பெயராலே **நேப்பியர்** முறை எனக் கூறப்படும்.

4.42. மடக்கை வகையிடுதல். $y = log_e x$ ஆகுக ; எனின், 4.4 இன் வரைவிலக்கணத்தால், நாம் பெறுவது $x = e^y$.

y ஐக் குறித்து வகையிடல்,

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x$$

என்பதைத் தரும்.

எனினும், 2.631. ஆல் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

ஆகவே, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$;

அதாவது $\dfrac{d\ log\ e^x}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

4.421. பொது மடக்கைகளை வகையிடுதல். 4.4 ஐ வழங்க (iv) நாம் பெறுவது

$log_{10}x = log_e x \times log_{10}e$; அட்டவணைகளிலிருந்து

$log_{10}e = \cdot 4343\ldots$ எனக் காண்கின்றோம் ;

ஆகவே, $log_{10}x = \cdot 4343\ \ log_e x$;

ஆகவே, $\dfrac{d}{dx}\ log_{10}x = \dfrac{\cdot 4343}{x}$.

$log_{10}e$ என்னும் எண் சில வேளைகளில் u என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

4.43. விகிதமுறுக் குறிகாட்டிகள். ஆரம்ப அட்சரகணிதத்தில் வரைவிலக்கணங் கொடுக்கப்பட்ட குறிகாட்டிகள் விகிதமுறும் எண்களாகும். அவை நேர்முழு வெண்களாயாதல், எதிர் முழு வெண்களாயாதல், பின்னங்களாயாதலிருக்கும். 4.3 இல் ஒரு நியதியான சார்பு e^x என்பதை வழங்கத் தொடங்கி அதனை ஒரு முடிவிலித் தொடராக அதற்கு ஒரு கோவை கொடுத்தோம் ; இன்னும் விகிதமுறும் எண்ணல்லாத குறி

காட்டிக்குப் பொருள் யாதுங் கொடுக்க வில்லையாயினும், அக்கோவை x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் நியாயமான விரிவென்று சொல்லப் பட்டது. அக்காரணம்பற்றி, விகிதமுறாக் குறிகாட்டிக்கு ஒரு பொருள் பெறும் வரைக்கும் அடுக்குக்குறித் தொடருக்குப் பதிலாக $E\ (x)$ என்பது போன்ற ஒரு குறியீட்டை வழங்கினால், அது தார்க்கிக முறையாகும்; எளிதாக்குதற்காகவே e^x என்னும் குறிகாட்டி வடிவத்தை வழங்கினோம். எனினும், இனிக் குறிகாட்டிக்குக் கூடிய பொதுமைப்பாடுடைய வரைவிலக்கணங் கொடுக்கலாம்.

x என்பது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாயின்,

$$\log_e a^x = x \log_e a$$

எனக் கண்டோம்.

ஆயின், $a^x = e^{x \log_e a} = 1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \ldots$

நாம் விரும்புமாறு விகிதமுறாக் குறிகாட்டிக்கு வரைவிலக்கணங் கொடுக்கலாம்; x விகிதமுறா வெண்ணாயிருக்கும்போது a^x இன் வரைவிலக்கணம் x விகிதமுறுமெண்ணாயிருக்கும்போதும் பொருந்துமாறு செய்தல் இசைவாகும். ஆகவே, x விகிதமுறாவெண்ணாயிருக்கும்போது a^x என்பதை $e^{x \log_e a}$ என, அதாவது x இன் அடுக்குக்களின் ஒரு நியதியான தொடரின் கூட்டுத் தொகையென வரையறுக்கின்றோம்.

பின்வருவனவற்றில், மறுதலை கூறப்பட்டாலன்றி மடக்கைகள் e என்னும் அடிக்கு எடுக்கப்பட்டனவென அறிதல் வேண்டும்.

4.44. a^x **இன் பெறுதி.** $\log a = c$ ஆகுக; ஆயின் $a = e^c$, $a^x = e^{cx}$, ஆகவே,

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{cx} = ce^{cx} = a^x \log a.$$

4.45. **மடக்கைமுறை வகையிடுதல்.** ஒரு பெருக்கத்தையாதல், ஓர் ஈவையாதல் வகையிடும் முறை வகையிடுதற்கு முன் மடக்கைகளை எடுத்தலாற் பொதுவாக எளிதாக்கப்படும்; அதற்குக் காரணம் அச்செய்கை ஒரு பெருக்கத்தை ஒரு கூட்டுத்தொகையாகவும் ஓர் ஈவை ஒரு வித்தியாசமாகவும் மாற்றும்.

உதாரணமாக, $y = uvw$ ஆகுக. .... (1)

இங்கு, u, v, w என்பன x இன் சார்புகள்.

ஆயின், $\log y = \log u + \log v + \log w$

ஆகவே, $\frac{d \log y}{dx} = \frac{d \log y}{dy} \times \frac{dy}{dx}$ **2.63** ஆல்

$$= \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

இதுபோல ஏனைமடக்கைகளுக்குஞ் செய்யலாம்.

ஆகவே, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \frac{dw}{dx}$ .... (3).

இரு பக்கங்களையும் y, அல்லது uvw என்பதாற் பெருக்க 2.6 இன் சூத்திரத்தைப் பெறுகின்றோம்; அதாவது

$$\frac{dy}{dx} = vw \frac{du}{dx} + wu \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

(1) இலிருந்து (4) இற்குச் செல்லுஞ் செய்கை வழி மடக்கைமுறை வகையிடுதலெனப்படும். அச்செய்கையை $y = u/v$ என்பதற்கும் பிரயோகப்படுத்தலாம்; அவ்வாறு செய்ய வருவது

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}.$$

4.451. **உதாரணங்கள்.** $y = \sqrt{\left\{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right\}}$ என்பது போன்ற கோவைகளின் பெறுதிகளைப் பெறுதற்கண்ணே மடக்கைமுறை வகையிடுதலாகிய செய்கை சிறப்பாகப் பயன்படும்.

முதலாவதாக,

$$\frac{d}{dx} \log y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$ ஆதலால், (4.45. (2)),

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

சொல்பற்றிக் கூறுமிடத்து, **ஒரு சார்பின் மடக்கையின் பெறுதி அச்சார்பின் பெறுதியை அச்சார்பால் வகுத்தலாற் பெறப்படுவது.**

தந்த பயிற்சியிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\log y = \tfrac{1}{2} \log (x^2 - x + 1) - \tfrac{1}{2} \log (x^2 + x + 1);$$

பின்னர் வகையிட நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{2(x^2 - x + 1)} - \frac{2x + 1}{2(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}.$$

ஆகவே, இரு பக்கங்களையும் y ஆற் பெருக்க,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

4.46. **u, v என்பன x இன் சார்புகளாயிருக்க $y=u^v$ என்பதை வகையிடுதல்.**

மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது,

$$\log y = v \log u$$

பின்னர் வகையிடுதல் தருவது,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}\log u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx};$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=u^v\left\{\frac{dv}{dx}\log u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right\}$$

4.461. **உதாரணங்கள்.**

(i) $y=x^{x^3}$ ஆகுக.

ஆயின், $\log y = x^3 \log x$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=3x^2\log x+x^2.$$

ஆகவே $$\frac{dy}{dx}=x^{x^3+2}\,(3\log x+1).$$

(ii) $y=(x^3+1)^{x^2}$ ஆகுக.

ஆயின், $\log y = x^2\log(x^3+1)$,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\,x\log(x^3+1)+\frac{3x^4}{x^3+1}.$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx}=x\left\{2\log(x^3+1)+\frac{3x^3}{x^3+1}\right\}(x^3+1)^{x^2}.$$

4.47. **பயிற்சிகள்.** பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க.

(i) $x\log x$. (ii) $\log$ தான்x.

(iii) $\log$ சைன்^2x. (iv) $\log$ அசீகx.

(v) $\log$ தான்^{-1}x. (vi) $\log\dfrac{1+x}{x}$.

(vii) $\log\sqrt{\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)}$. (viii) $x\log$ அகோசை x.

(ix) $\log\dfrac{x}{x-\sqrt{(1+x^2)}}$. (x) $\log\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

(xi) $\log(\log x)$. (xii) $\sqrt{\left(\dfrac{1-x^4}{1+x^4}\right)}$.

(xiii) $\dfrac{\sqrt{(x+1)}-\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x+1)}+\sqrt{(x-1)}}$. (xiv) x^{x^2}

(xv) $(x^2+1)^x$. (xvi) (சைன்x)$^{\text{கோசை}\,x}$.

(xvii) a^{x^2+1}. (xviii) (சைன்^{-1}x)^x.

(xix) (தான் x)$^{\text{சீக}\,x}$. (xx) $x^{\text{தான்}\,x}$.

மடக்கைகளைப் பயன்படுத்தி 2.633 (iii)–(vi) என்னும் பயிற்சிகளையுஞ் செய்க.

4.5. **நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகள்.** நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகள் ஏனைய நேர்மாறு சார்புகளைப்போல வரையறுக்கப்படும்; உதாரணமாக, $x=$அசைன்y எனின், $y=$அசைன்^{-1}x ; அதுபோல அகோசை^{-1}x; அதான்^{-1}x என்பனவற்றிற்கும் வரைவிலக்கணங்கள் கொடுக்கலாம்.

அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் காலங்கள் கற்பனை எண்கள் ($\sqrt{-1}$ இன் மடங்குகள்) ஆயுள்ளனவாயினும் அச்சார்புகள் ஆவர்த்தனச் சார்புகளெனக் காட்டப்படலாம். ஆதலால், நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகள் பல பெறுமானங்கொண்டுள்ளன (4.2); எனினும், அவற்றை நாம் பயன்படுத்தும்போது அவற்றின் "தலைமைப் பெறுமானங்களுக்கே" எம்மைக் கட்டுப் படுத்துவோம்; அவற்றை மடக்கைபற்றிப் பெறுவோம்.

(i) $y=$ அசைன்^{-1}x அல்லது $x=$ அசைன்$y=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ ஆகுக.

ஆகவே, $e^{2y}-2xe^y-1=0$.

இந்த இருபடிச் சமன்பாட்டை e^y இற்குத் தீர்க்க நாம் பெறுவது,

$$e^y=x\pm\sqrt{(x^2+1)};$$

அல்லது $y=\log\{x\pm\sqrt{(x^2+1)}\}$;

$\log\{x+\sqrt{(x^2+1)}\}$ என்பதை அசைன்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானமாகத் தேர்வோம்.

சகக் குறியானது மெய்ப் பெறுமானமில்லாத ஓர் எதிரெண்ணின் மடக்கையை அகப்படுத்துமென நாம் காண்போம்.

(ii) $y=$ அகோசை^{-1}x அல்லது $x=$ அகோசை$y=\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})$ ஆகுக;

$$e^{2y}-2xe^{y}+1=0$$

என்னும் இரு படிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க நாம் பெறுவது,

$$e^{y}=x\pm\sqrt{(x^2-1)}$$

அல்லது

$$y=\log\{x\pm\sqrt{(x^2-1)}\};$$

$\log\{x+\sqrt{(x^2-1)}\}$ என்பதை அகோசை^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானமாகத் தேர்வோம்.

4.33 இலிருந்து அதிபரவளைவுக் கோசைன் ஒருபோதும், 1 இலுஞ் சிறிதாகாதென்பதும் அது பற்றி $x<1$ என்பதற்கு அகோசை^{-1}x என்பது வரையறுக்கப்படுவதில்லை என்பதுந் தேற்றம்.

(iii) $y=$ அதான்^{-1}x ஆகுக. ;

அல்லது $x=$ அதான்$y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}}=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

ஆகவே, $e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}$; $\quad y=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$.

இது அதான்^{-1}x இன் தலைமைப் பெறுமானம்; x என்பது எண்ணளவில் 1 இலுஞ் சிறிது என்றாற்றான் அது மெய்யாகும்.

(iv) அதுபோல, x என்பது எண்ணளவில் 1 இலும் பெரிதெனின்,

அகோதா$^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ என்பது மெய்யென்றும்;

$0<x<1$ எனின், அசீக$^{-1}x=\log\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}$ என்பது மெய்யென்றும்,

$x>$ அல்லது <0 என்பதற்குத் தக அகோசை$^{-1}x=\log\frac{1\pm\sqrt{(1+x^2)}}{x}$

என்றும் நாம் காண்கின்றோம்.

4.51. நேர்மாறு அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் பெறுதிகள். இவை சமமடக்கை வடிவங்களை வகையிடுதலாற் காணப்படலாம்; அன்றி, அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் பெறுதிகளிலிருந்து நேராகப் பெறப்படலாம். உதாரணமாக,

(i) $y=$ அசைன்^{-1}x ஆகுக; ஆயின் $x=$ அசைன்y;

ஆகவே, $\frac{dx}{dy}=$ அகோசை y.

எனின், $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{அகோசை } y}=\frac{1}{\sqrt{(1+\text{அசைன்}^2y)}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$;

ஆகவே, $\frac{d}{dx}$ அசைன்$^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ ......(1)

அகோசைy என்பது என்றும் நேராயிருத்தலால், வர்க்க மூலத்தின் முன் சயக்குறி ஏற்கக்கூடியதன்று.

(ii) $y=$ அகோசை^{-1}x ஆகுக; ஆயின், $x=$ அகோசைy;

ஆகவே, $\frac{dx}{dy}=$ அசைன் y.

எனின், $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{அசைன்} y}=\pm\frac{1}{\sqrt{(\text{அகோசை}^2y-1)}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{(x^2-1)}}$,

ஆகவே, $\frac{d}{dx}$ அகோசை$^{-1}x=\frac{\pm 1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ ......(2)

4.33 இலுள்ள அகோசைx இன் வரைப்படத்தை நோக்க, 1 இலும் பெரிதான y இன் யாதும் ஒரு பெறுமானத்திற்கு ஒத்ததாய் x இற்கு இரண்டு பெறுமானங்கள் உண்டு என்பதும் அப்புள்ளிகளிலுள்ள சாய்வு விகிதங்கள் குறிபற்றி எதிராயிருப்பதிலுஞ் சமம் என்பதுந் தேற்றம். x ஐயும் y ஐயும் ஒன்று இருந்த இடத்து ஒன்றை இட, 1 இலும் பெரிதான x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் $\frac{d}{dx}$ அகோசை^{-1}x என்பதற்கு சமமும் எதிருமான பெறுமானங்கள் இரண்டு உண்டு என்பது பெறப்படும்.

(iii) $y=$ அதான்^{-1}x ஆகுக; ஆயின், $x=$ அதான்y;

ஆகவே, $\frac{dx}{dy}=$ அசீக$^2 y$

எனின், $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{அசீக}^2y}=\frac{1}{1-x^2}$;

ஆகவே, $\frac{d}{dx}$ அதான்$^{-1}x=\frac{1}{1-x^2}$. ....(3)

(iv) ஒத்த ஆராய்வுகள் பின்வருவனவற்றைக் காட்டும் :

(4.5 இற் போல) $x^2 > 1$ எனின், $\frac{d}{dx}\text{அகோதா}^{-1}x = -\frac{1}{x^2-1}$;

(4.5 இற் போல) $0 < x < 1$ எனின், $\frac{d}{dx}\text{அசீக}^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{(1-x^2)}}$

என்பது மெய் ;

$x <$ அல்லது > 0 என்பதற்குத் தக, $\frac{d}{dx}\text{அகோசே}^{-1}x = \frac{\pm 1}{x\sqrt{(x^2+1)}}$

என்பது $\pm$.

இவற்றின் நிறுவல்கள் மாணுக்கனுக்கு ஒரு பயிற்சியாக விடுகின்ருேம்.

4.52. பயிற்சிகள்.

1. $\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a} = \log\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}$ என நிறுவுக ;
அதன் பெறுதியையுங் காண்க.

2. $x^2 < a^2$ எனின், $\text{அதான்}^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\log\frac{a+x}{a-x}$ என நிறுவுக;
அதன் பெறுதியையுங் காண்க.

3. $x^2 > a^2$ எனின், $\text{அகோதா}^{-1}\frac{x}{a} = -\frac{1}{2}\log\frac{x-a}{x+a}$ என நிறுவுக;
அதன் பெறுதியையுங் காண்க.

4. பின்வருஞ் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க :

(i) $x\ \text{அகோசை}^{-1}x$; (ii) $(a^2 - x^2)\ \text{அதான்}^{-1}(x/a)$;

(iii) $(\text{அசைன்}^{-1}x)^2$; (iv) $\text{அதான்}^{-1}(\text{கோசை}\ x)$;

(v) $\text{அகோசை}^{-1}(\text{சீக}\ x)$; (vi) $\text{அசைன்}^{-1}(\text{தான்}\ x)$;

(vii) $\text{தான்}\ (\text{அகோசை}^{-1}x)$; (viii) $\text{சைன்}(\text{அதான்}^{-1}x)$;

(ix) $\text{அதான்}^{-1}(\text{தான்}\frac{1}{2}x)$; (x) $\text{அசீக}^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$.

5. $\text{சைன்}^{-1}(\text{அதான்}\ x) = \text{தான்}^{-1}(\text{அசைன்}\ x)$ எனக்காட்டுக ;
அவற்றின் பெறுதியைக் காண்க.

4.6. கலப்பின உதாரணங்கள்

(i) அடுத்தடுத்து வகையிடுதல்.

உதாரணம். $y = \text{சைன்}(m\ \text{சைன்}^{-1}x)$ எனின் ,

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ என நிறுவுக.

நாம் பெறுவது $\frac{dy}{dx} = \text{கோசை}(m\ \text{சைன்}^{-1}x) \times \frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

இப்பருவத்தில் இருபக்கங்களையும் $\sqrt{(1-x^2)}$ என்பதாற் பெருக்கி,

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{(1-x^2)} = m\ \text{கோசை}(m\ \text{சைன்}^{-1}x)$$

என எழுதினல் வேலை சுருக்கப்படும் ;

இனி, வகையிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{(1-x^2)} + \frac{dy}{dx} \times \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -m\ \text{சைன்}(m\ \text{சைன்}^{-1}x) \times \frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

இருபக்கங்களையும் மறுபடியும் $\sqrt{(1-x^2)}$ ஆற் பெருக்கி $\text{சைன்}(m\ \text{சைன்}^{-1}x)$ இற்குப் பதிலாக y ஐப் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0.$$

(ii) சமனிலிகளுக்குப் பிரயோகித்தல்.

உதாரணம். $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ எனின்,

$x < \text{சைன்}\ x > x - \frac{1}{6}x^3$ என நிறுவுக.

$f(x) = x - \text{சைன்}x$ ஆகுக ; ஆயின், $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 - \text{கோசை}\ x$; இது $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ என்பனவற்றிற்கு நேராகும் ; பின்னர் $f'(x)$ என்பது நேராயிருத்தலால், x கூடுதலுற $f\ (x)$ உங் கூடுதலுறும் ; எனினும், $f(0) = 0$; ஆகவே, x கூடுதலுற $f(x)$ என்பது பூச்சியத்திலிருந்து கூடுதலுறும் ; ஆகவே, $x > \text{சைன்}x$.

இனி, $f(x) = \text{சைன்}x - x + \frac{1}{6}x^3$ ஆகுக ;

ஆகவே, $f'(x) = \text{கோசை}x - 1 + \frac{1}{2}x^2$;

$f''(x) = -\text{சைன்}\ x + x$.

எனின், மேற்கூறியதிலிருந்து $f''(x)$ என்பது நேர் ; ஆகவே, $f'(x)$ ஆனது x ஒடு கூடுதலுறும் ; எனினும், $f'(0) = 0$; ஆகவே, $f'(x)$ என்பது பூச்சியத்திலிருந்து கூடுதலுறும் ; அதாவது, $f'(x)$ என்பது நேராகும்.

பின்னர், $f'(x)$ என்பது நேராதலால், $f(x)$ என்பது x ஒடு கூடுதலுறும்; எனினும், $f(0)=0$; ஆகவே, $f(x)$ என்பது பூச்சியத்திலிருந்து கூடுதலுறும்; அதாவது $f(x)$ என்பது நேராகும்; அதுபற்றி

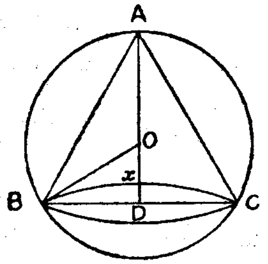
$\text{சைன்}\ x > x-\frac{1}{6}x^3.$

பல சமனிலைகள் இவ்வாறு நிலைநிறுத்தப்படலாம்.

(iii) உயர்வுகளும் இழிவுகளும்.

தந்த ஒரு கோளத்திற்கு உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேர்வட்டக் கூம்புகளுள்மிகப் பெரிய கனவளவு கொண்டதன் கனவளவு அக்கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{8}{27}$ என நிறுவுக.

ஒரு கூம்பின் கனவளவு அதனடியை அதன் உயரத்தாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்தின் மூன்றிலொன்றுகும்; a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவு $\frac{4}{3}\pi a^3$.



O என்பது அக்கோளத்தின் மையமாகுக; அக்கூம்பின் அடியாகிய BC என்பது O இலிருந்து x என்னுந் தூரத்தில் இருக்க. உச்சி A என்பது விட்டத்தின் ஒரு முனையாய் அடிக்குச் செங்குத்தாயிருக்கும்போது உயரம் மிகப் பெரியதாகும்; ஆயின் கனவளவு

$$V=\tfrac{1}{3}\pi BD^2.AD.$$

இங்கு D என்பது அடியின் மையம். a என்பது அக்கோளத்தின் ஆரையாயின்,

$$BD^2=a^2-x^2,\quad AD=a+x;$$

ஆகவே, $V=\frac{1}{3}\pi(a^2-x^2)(a+x)$ .... (1)

$$=\tfrac{1}{3}\pi(a^3+a^2x-ax^2-x^3);$$

$$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{3}\pi(a^2-2ax-3x^2)$$

$$=\tfrac{1}{3}\pi(a+x)(a-3x).$$

எனின், V இன் திரும்பு பெறுமானங்கள் $x=-a,\ x=\frac{1}{3}a$ என்பனவற்றுற் பெறப்படும், எனினும், கணக்கின் இயல்பிலிருந்து x இன் எதிர்ப் பெறுமானம் பொருந்தாதென அறியப்படும். ஆயின் $x=\frac{1}{3}a$; a இன் இப் பெறுமானம் $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ என்பதை எதிராக்குமாதலால், அது V இற்கு ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொடுக்கும்; (1) இல் $x=\frac{1}{3}a$ எனப் பிரதியிடுதலால், உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{32}{81}\pi a^3$, அல்லது கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{8}{27}$ ஆகும்.

4.61. கலப்பினப் பயிற்சிகள்.

தரவு. (i) நேர் வட்டக் கூம்பு: கனவளவு = அடியின் $\frac{1}{3}\times$ உயரம்; வளைவு மேற்பரப்பு = அடியின் அரைப்பரிதி $\times$ சாயுயரம்.

(ii) நேருருளை: கனவளவு = அடி $\times$ உயரம்; வளைவு மேற்பரப்பு = பரிதி $\times$ உயரம்.

1. பின்வருஞ் சார்புகளை வகையிடுக:

(i) $\text{தான்}^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{1-\text{கோசை}x}{1+\text{கோசை}x}\right)}$; (ii) $\text{சைன்}^{-1}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;

(iii) $\text{தான்}^{-1}\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-1}{x}$; (iv) $\text{தான்}^{-1}x+\log\sqrt{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}$;

(v) $\text{சைன்}^{-1}\{2ax\sqrt{(1-a^2x^2)}\}$.

2. $\log\dfrac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}-2\text{தான்}^{-1}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ என்பதை வகையிடுக.

3. $\dfrac{d^2}{dx^2}(\text{கோசை}ax\,\text{அகோசை}bx)$ என்பதைக் காண்க.

4. $y(1-x)=x^2$ எனின்,

$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=2 \text{ என நிறுவுக.}$$

5. $y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$ எனின்;

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-(n+x)\frac{dy}{dx}+ny=0 \text{ என நிறுவுக.}$$

6. $y=a\ \text{கோசை}\ (\log x)+b\ \text{சைன்}\ (\log x)$ எனின்;

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0 \text{ என நிறுவுக.}$$

7. $y\sqrt{x}=\text{சைன்}x$ எனின்;

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\tfrac{1}{4})y=0 \text{ என நிறுவுக.}$$

8. $y=x\ \text{சைன்}^{-1}x$ எனின்;

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{(1-x^2)} \text{ என நிறுவுக.}$$

9. $2y=(\text{சைன்}^{-1}x)^2$ எனின்,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{dy}{dx}+1 \text{ என நிறுவுக.}$$

10. $y = a$ logதான்x எனின் ;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} \text{ கோதா} 2x = 0$$ என நிறுவுக.

11. $y = x \log y$ எனத் தரப்பட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(y-x)}$$ என நிறுவுக.

12. $ye^y = x$ எனத் தரப்பட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1+y)}$$ என நிறுவுக.

13. ஒரு புள்ளியானது ஒரு நேர்கோட்டிலே உள்ள ஒருநிலையான புள்ளி 0 இலிருந்து நேரம் t இல் தனது தூரம் x ஆனது a கோசைωt ஆகுமாறு அக்கோட்டில் அசைகின்றது. அப்புள்ளியின் வேகவளர்ச்சி $-\omega^2 x$ என நிறுவுக.

14. ஒரு புள்ளியானது நேரம் t இல், தனது நிலை $x = 3t +$ கோசை $3t$ என்பதாலே தரப்படுமாறு $x-$அச்சினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது. அதன் வேகம், வேகவளர்ச்சி என்னும் இரண்டும் ஒருங்கு பூச்சியமாகுமென நிறுவுக.

$t = 0$ ஆகும்போது அதன் வேகம் என்ன ? அது ஓய்வுக்கு வருமுன் எத்தூரத்திற்கு அசையும் ?

15. $(x-1)e^x + 1$ என்னுஞ் சார்பு x இன் நேர்ப்பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் நேரென நிறுவுக.

16. x என்பது நேராயின், $(x-2)e^x + x + 2$ என்பதும் நேரென நிறுவுக.

17. x என்பது நேராயின்,

$$x - \log(1+x) > \frac{\frac{1}{2}x^2}{1+x}$$ எனநிறுவுக.

18. x என்பது நேராயின்,

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 > \log(1+x) > x - \tfrac{1}{2}x^2$$ என நிறுவுக.

19. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ எனின்,

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 > \text{கோசை}\,x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2$$ என நிறுவுக.

20. x ஆனது பூச்சியத்திலிருந்து முடிவிலிக்குக் கூடுதலுற, $2x -$ தான்$^{-1}x - \log\{x + \sqrt{(1+x^2)}\}$ என்பது தொடர்ச்சியாகக் கூடுதலுறுமென நிறுவுக.

21. a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க செவ்வகங்களுட் பெரியதன் பரப்பளவைக் காண்க.

22. ஒரு செவ்வகமானது தன் பக்கமொன்று ஒரு முக்கோணத்தின் அடியினது நீளத்திற்குக் கிடக்குமாறு அம்முக்கோணத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்படுகின்றது. அச்செவ்வகத்தின் உயரம் அம் முக்கோணத்தின் உயரத்தின் அரைப்பங்காகும்போது, அச்செவ்வகத்தின் பரப்பளவு மிகப் பெரியதாகுமென நிறுவுக.

23. தந்த ஒரு வட்டத்திற்குச் சுற்றுருவமாக வரையத்தக்க இரு சமபக்க முக்கோணங்களுள் இழிவுப் பரப்பளவு கொண்டது சமபக்க முக்கோணமாமென நிறுவுக.

24. தந்த ஒரு கோளத்திற்குச் சுற்றுருவாக வரைந்த இழிவு வளைபரப்புக்கொண்ட நேர்வட்டக் கூம்பிற்கு அரையுச்சிக் கோணம் சைன்$^{-1}(\sqrt{2}-1)$ எனக் காட்டுக.

25. தந்த ஒரு கோளத்தில் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேர்வட்டக் கூம்புகளுள் மிகப் பெரிய வளைபரப்பைக் கொண்டதைக் காண்க.

26. தந்த ஒரு கோளத்திற்குச் சுற்றுருவகமாக வரையத்தக்க நேர் வட்டக் கூம்புகளுள் இழிவுக் கனவளவைக் கொண்டதன் கோணத்தைக் காண்க.

27. ஒரு செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் a, b என்பன : தந்த செவ்வகத்தின் ஒரு மூலைக்கூடாகத் தன் பக்கம் ஒவ்வொன்றுஞ் செல்லும்படி வரையத்தக்க மிகப்பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

28. a, b என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய P என்னுந் தந்த ஒரு புள்ளிக் கூடாக ஆள்கூற்றச்சுக்களை A, B என்பனவற்றிற் சந்திக்கும்படி ஒரு நேர்கோடு வரையப்படுகின்றது.

(i) OAB என்னும் பரப்பு இழிவாயிருக்கும்பொழுது,

(ii) AB என்பது இழிவாயிருக்கும்பொழுது,

(iii) $OA + OB$ என்பது இழிவாயிருக்கும்பொழுது,

$x-$அச்சிற்கு அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

29. தனது அடியின் ஆரை a ஆயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு நேர் வட்டக்கூம்பில் உள்ளுருவமாக வரையத்தக்க நேருருளைகளுள் மிகப்பெரிய கனவளவு கொண்டதைக் காண்க.

30. உயர்வு வளைபரப்பைக் கொண்ட ஒரு நேருருளை a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டுள்ளது. அவ்வுருளையின் உயரத்தைக் காண்க.

31. ஒரு யன்னலானது ஓர் அரைவட்டம் ஏறிய செவ்வக வடிவங் கொண்டிருக்கின்றது. அதன் சுற்றளவு 30 அடியாயின், இயலுமளவு

மிகப் பெரிய தொகை ஒளி உட்பிரவேசிக்க விடுதற்கு அதன் பரிமாணங்களைக் காண்க.

32. ஒரு மணிவடிவக் கூடாரம் மேலே ஒரு கூம்புப் பகுதியாலுந் தரைக்கு அண்மையில் ஓர் உருளைப் பகுதியாலும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. தந்த ஒரு கனவளவிற்குந் தந்த ஆரையையுடைய ஒரு வட்டவடிக்கும் வழங்கப்படுங் கூடாரச் சீலையானது அக்கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் கோசை$^{-1}(\frac{2}{3})$ ஆகும்பொழுது இழிவாகுமென நிறுவுக.

33. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi$. அதன் முழுமேற்பரப்பிற்கும் 2π என்னும் இழிவுப் பரப்பளவு உண்டு எனக் காட்டுக.

34. $\frac{1}{8}$ (35கோசை^4x – 30கோசை$^2x + 3$) என்பதன் வீச்சு 1, $-\frac{3}{7}$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் இருக்கும் என்றும், அதற்கு உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{3}{8}$ என்றுங் காட்டுக.

35. $(\log x)/x$ என்னுஞ் சார்பிற்கு உயர்வுப் பெறுமானம் $1/e$ என நிறுவுக.

36. aஅகோசைx + bஅசீகx என்பதன் இழிவுப் பெறுமானம் $2\sqrt{(ab)}$ என நிறுவுக.

37. $y = e^{-kx}$சைன்nx என்னும் வளைகோட்டிற்கு xஅச்சினது நீளத்திற்கு $\dfrac{\pi}{n}$ என்னுஞ் சம இடைகளில் ஒரு தொடர் உயர்விழிவு நிலைத் தூரங்கள் இருக்கின்றன என்றும், k இன் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்குப் பெருக்கல் விருத்தியிற் குறைதலுறுகின்ற ஒரு தொடரை அவை ஆக்குகின்றன என்றும் நிறுவுக.

அத்தியாயம் V

தொகையீடு

5.1. தொகையிடுதலாகிய செய்கை வகையிடுதலாகிய செய்கைக்கு நேர் மாறு. இப்பிரிவில் அப்பிரச்சினையை மாத்திரங் கூறிக் குறியீட்டாட்சியை விளக்குவோம்.

சென்ற அத்தியாயங்களில் ஒரு பெருந் தொகையான சார்புகளை எவ்வாறு வகையிட்டு

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

என்பது போன்ற முடிபுகளைப் பெறலாமெனக் கற்றேம். இப்பொழுது எம்முன்னர் நிற்கும் பிரச்சினை; $dy/dx = g(x)$ எனத் தரப்படின், y ஐ x இன் சார்பாக உணர்த்துதலே. அவ்வாறு உணர்த்த ஐ "$g(x)$ இன் தொகையீடு" எனக் கூறுதல் வழக்கு;

$$\text{இது} \quad y = \int g(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

என்னுங் குறியீட்டாற் குறிக்கப்படும்.

இதனை "y ஆனது $g(x)\,dx$ இன் தொகையீட்டிற்குச் சமன்" எனச் சொல்பற்றிக் கூறுவோம்.

இக்குறியீட்டாட்சிக்குக் காரணம் பின்வருமாறு: (1) என்பது

$$dy = g(x)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

என எழுதப்படலாம்; இங்கு dy, dx என்பன வகையீடுகள் (2.51); ஆயின், y இன் வகையீடு $g(x)dx$ ஆகும்; ஆகவே, எம் பிரச்சினை தன் வகையீடு $g(x)dx$ ஆகிய சார்பு y ஐக் காண்பதே. d என்பதை ஒரு சார்புக்குப் பிரயோகிக்க அது தன் வகையீட்டைத் தரும் ஒரு செய்கருவியாகுமென்றும், d ஆனது அட்சரகணிதப் பொது விதிகளுக்கு இணங்குமென்றுங் கொண்டால், தொடர்பு (3) ஆனது

$$y = \frac{1}{d}\, g(x)\, dx$$

என எழுதப்படலாம். பின்னர் $\int$ என்பதை $\frac{1}{d}$ இலுங் கூடுதலான இசைவுள்ள குறியீடெனக் கொண்டு எழுதினல், நாம் சூத்திரம் (2) ஐப் பெறுகின்றேம்; அதாவது $y = \int g(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

இப்பந்தி சூத்திரம் (2) இனது நிறுவலெனப் பிழைபடக் கொள்ளப் படாது ; இதுவோவெனின் எக்காரணத்தால் $\int$ என்னுங் குறியீடு dx ஆலே தொடரப்படும் என்பதை மாத்திரம் அறிவிக்கின்றது ; அதாவது நாம் ஏன் $\int g(x)$ என எழுதாது $\int g(x)\, dx$ என எழுதுகின்றேம் என்பதே.

உதாரணமாக,

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

என அறிவோம் ;

அல்லது, வகையீடுகளாக, $dx^n = nx^{n-1}dx$;

$$\text{ஆயின்,} \quad x^n = \int nx^{n-1}dx \, .$$

எனின், நாம் பின்வரும் வினுக்களுள் ஒன்றை வினவலாம் : (i) எச்சார்பு nx^{n-1} என்பதைத் தன் பெறுதியாக உள்ளது ? (ii) எச்சார்பு $nx^{n-1}dx$ ஐத் தன் வகையீடாக உள்ளது ? இரு வினுக்களுக்கும் விடை x^n ஆகும்.

அதுபோல், $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$;

அல்லது, வகையீடுகளாக, $df(x) = f'(x)dx$;

$$\text{ஆயின்,} \quad f(x) = \int f'(x)\, dx \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(4)}$$

இதனைச் சொல்பற்றி "$f(x)$ ஆனது $f'(x)dx$ இன் தொகையீட்டிற்குச் சமன்" எனக் கூறி, $f(x)$ ஆனது $f'(x)\, dx$ என்பதைத் தன்வகையீடாக உள்ள ஒரு சார்பென்றுதல், $f(x)$ ஆனது $f'(x)$ என்பதைத் தன் பெறுமதியாக உள்ள ஒரு சார்பென்றுதல் பொருள் படுமாறு விளக்குகின்றேம்.

தந்த ஒரு பெறுதியையாதல், தந்த ஒரு வகையீட்டையாதல் கொண்ட ஒரு சார்பைக் காணும் நேர்மாறு செய்கை தொகையிடுதல் எனப்படும். $\int$ என்னுந் தொகையிடுதற் குறியீடு வகையீடுகளுக்கே பிரயோகிக்கப் படலாமென்றும் "$f(x)$ என்பதைத் தொகையிடுதல்" எனக் கூறும் வழக்கு இருக்கின்றபோதிலும் $f(x)dx$ ஐத் தன் வகையீடாயுள்ள சார்பைக் காணலே இதன் பொருளாகும் என்றும் ஞாபகத்தில் வைத் திருப்பது பிரதானமாகும்.

$\int f(x)dx$ என்னுஞ் சூத்திரத்தில் $f(x)$ என்பது தொகையீட்டுச் சார்பு, அதாவது தொகையிடப்படவேண்டிய பொருளெனப்படும்.

5.11 தொகையீட்டு மாறிலி. ஒரு மாறிலியின் வகையீடு பூச்சியமாய் இருத்தலால், $d\{f(x)+C\} = f'(x)dx$;
இங்கு C என்பது யாதும் ஒரு மாறிலி.
ஆகவே, 5.1 (4) இற்போல,

$$f(x) + C = \int f'(x)\, dx;$$

இங்கு C என்பது யாதும் ஒரு மாறிலி ; ஆயின், $f'(x)dx$ இன் தொகையீடு $f(x)$ மாத்திரம் என்பதின்றி $f(x)+C$ ஆகும் ; இங்கு C என்பது யாதும் ஒரு மாறிலி. இம்மாறிலி **தொகையீட்டு மாறிலி** எனப் படும்.

உதாரணமாக, $d(x^3+C) = 3x^2dx$ என்பதை அறிவோம் ; ஆயின்,

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

5.12 x இன் அடுக்குக்களை வகையிடுதல். $dx^n = nx^{n-1}\, dx$ ஆதலால்,

$$\int x^{n-1}dx = \frac{1}{n}x^n + C.$$

$$\text{அதுபோல,} \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C;$$

பின்னதாகிய இச் சூத்திரம் $n=-1$ என்பதற்குத் தவிர n இன் விகிதமுறும் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும்.

எனின், x இன் ஓர் அடுக்கை வகையிடுதற்குரிய விதி குறிகாட்டியினுற் பெருக்கி அக்குறிகாட்டியை ஒன்றுற் குறைப்பதாயிருக்க, x இன் ஓர் அடுக்கைத் தொகையிடுதற்குரிய விதி **குறிகாட்டியை ஒன்றுற் கூட்டி அக்கூடுதல் பெற்ற குறிகாட்டியால் வகுத்தலாகும்.**

சிறப்பு வகையாக, x இன் வகையீடு dx ஆயிருத்தலால்,

$$\int dx = x + C \, .$$

உதாரணமாக,

(i) $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C$; (ii) $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;

(iii) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^7}=-\frac{1}{6x^6}+C$; (iv) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}+C$.

நாம் (iii), (iv) என்பனவற்றில், x இன் எதிரடுக்குகளைத் தொகையிடுகின்றோம் என்றும், ஓர் எதிரெண் 1 ஆற் கூடுதலுற்றால், முடிபு எண்ணளவில் 1 இலுஞ் சிறிய ஓர் எண்ணாகும் என்றுங் காண்கின்றோம்.

5.13. பயிற்சிகள்.

1. பின்வருங் கோவைகளினுடைய தொகையீடுகளை எழுதுக :

√(i) $4x^3,\ 5x^4,\ x^6,\ x^9,\ x^{100}$; √(ii) $x^{-3},\ x^{-4},\ x^{-6},\ x^{-9},\ x^{-100}$;

(iii) $x^{\frac{3}{4}},\ x^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{x},\ x^{\frac{4}{3}},\ x^{\frac{2}{5}}$; (iv) $x^{-\frac{3}{4}},\ x^{-\frac{1}{6}},\ x^{-\frac{1}{2}},\ x^{-\frac{4}{3}},\ x^{-\frac{2}{5}}$.

2. பின்வருவனவற்றைத் தொகையிடுக :

(i)√ $\displaystyle\int(x^3+3x^2+3x+1)\,dx$; (ii)√ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+x^3-x^4\right)dx$;

(iii)√ $\displaystyle\int(x+1)^2dx$; (iv)√ $\displaystyle\int(ax^2+2\,bx+c)\,dx$;

(v)√ $\displaystyle\int\left(\frac{a}{x^4}+\frac{2b}{x^2}+c\right)dx$.

5.2. நியம வடிவங்களின் அட்டவணை.

மேற்கூறிய அத்தியாயங்களில் ஒரு தொகையான ஆரம்பச் சார்புகளை எவ்வாறு வகையிடலாமெனக் கண்டோம். இம் முடிபு ஒவ்வொன்றுந் தொகையீட்டில் ஒத்த ஒரு முடிவைத் தருகின்றது. வேண்டும் வேளைகளில் ஆளுதற்கு இம் முடிபுகளை இங்கு அட்டவணைப் படுத்துகின்றோம் ; மாணாக்கன் அவற்றுள் ஒரு தொகையைக் கற்றாலன்றி உயர்ச்சி பெரிதும் அடைதல் முடியாது. தொகையிடுதலின் மாறிலி தவிர்க்கப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1} \qquad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x} \qquad \int\frac{dx}{x}=\log x\ (n=-1\ \text{என்பதுதவிர}) \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax} \qquad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax} \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dx}\text{சைன் }x=\text{கோசை }x \qquad \int\text{கோசை }x\,dx=\text{சைன் }x \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dx}\text{கோசை }x=-\text{சைன் }x \qquad \int\text{சைன் }x\,dx=-\text{கோசை }x \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான் }x=\text{சீக}^2x \qquad \int\text{சீக}^2x\,dx=\text{தான் }x \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\text{கோதா }x=-\text{கோசே}^2x \qquad \int\text{கோசே}^2x\,dx=-\text{கோதா }x \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dx}\text{சீக }x=\text{சீக }x\text{ தான் }x \qquad \int\text{சீக}x\text{தான் }x\,dx=\text{சீக }x \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dx}\text{கோசே }x=-\text{கோசே }x\text{ கோதா }x \qquad \int\text{கோசே }x\text{ கோதா }x\,dx=-\text{கோசே }x \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\ (o<x<a) \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a} \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{a}{a^2+x^2} \qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a} \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான்}^{-1}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x=\frac{\sqrt{(AB)}}{A+Bx^2} \qquad \int\frac{dx}{A+\mathrm{B}x^2}=\frac{1}{\sqrt{(AB)}}\text{தான்}^{-1}\sqrt{\frac{B}{A}}\,x \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசைன் }x=\text{அகோசை }x \qquad \int\text{அகோசை }x\,dx=\text{அசைன் }x \qquad (13)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசை }x=\text{அசைன் }x \qquad \int\text{அசைன் }x\,dx=\text{அகோசை }x \qquad (14)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அதான் }x=\text{அசீக}^2x \qquad \int\text{அசீக}^2x\,dx=\text{அதான் }x \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோதா }x=-\text{அகோசே}^2x \qquad \int\text{அகோசே}^2x\,dx=-\text{அகோதா }x \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசீக }x=-\text{அசீக }x\text{ அதான் }x \qquad \int\text{அசீக }x\text{ அதான் }x\,dx=-\text{அசீக }x \qquad (17)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசே }x=-\text{அகோசே }x\text{ அகோதா }x$$

$$\int\text{அகோசே }x\text{ அகோதா }x\,dx=-\text{அகோசே }x \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\log\left\{\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}\right\}\ (a>0) \qquad (19)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=\text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\log\left\{\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right\} \quad (x>a>0) \quad (20)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அதான்}^{-1}\frac{x}{a}=\frac{a}{a^2-x^2} \qquad \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\text{அதான்}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} \quad (x^2<a^2) \quad (21)$$

$$\frac{d}{dx}\text{அகோதா}^{-1}\frac{x}{a}=-\frac{a}{x^2-a^2} \qquad \int\frac{dx}{x^2-a^2}=-\frac{1}{a}\text{அகோதா}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} \quad (x^2>a^2) \quad (22)$$

5.21. $x+a$ இன் பெறுதி 1 ஆயிருத்தலால், எந்த நியம வடிவத்திலும் x இற்குப் பதிலாக நாம் $x+a$ என்பதை எழுதலாம். உதாரணமாக,

$$\frac{d}{dx}(x+a)^n=n\,(x+a)^{n-1} \qquad \int(x+a)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1},$$

$$\frac{d}{dx}\log(x+a)=\frac{1}{x+a} \qquad \int\frac{dx}{x+a}=\log(x+a),$$

$$\frac{d}{dx}\text{சைன்}(x+a)=\text{கோசை}(x+a) \qquad \int\text{கோசை}\,(x+a)dx=\text{சைன்}\,(x+a),$$

இவ்வாறே பிறவும்.

5.211 இந்த நியம வடிவங்களைப் பற்றிப் பல குறிப்புக்கள் சொல்லப்படவேண்டும். சூத்திரம் (2) ஐப்பற்றி, ஓரெண்ணின் மடக்கை கற்பனையானது ; அதனைப் பற்றிக் கவனஞ் செலுத்தப்படவேண்டும். $x-a$ என்பது நேராகும்படி $x>a$ எனின், நாம் பெறுவது

$$\frac{d}{dx}\log(x-a)=\frac{1}{x-a}; \quad \text{ஆதலால்,} \quad \int\frac{dx}{x-a}=\log(x-a);$$

இங்கு தொல்லையாதும் இல்லை. எனினும், $x<a$ எனின் ஈற்றுச் சூத்திரம் பயனற்றதாகும் ; ஆயின், $x<a$ ஆகும்பொழுது,

$\int\frac{dx}{x-a}$ இன் பெறுமானம் யாதாகும் ?

இவ்வகையில் $a-x$ என்பது நேர் ; 2.63 ஆல்,

$$\frac{d}{dx}\log(a-x)=\frac{d\log(a-x)}{d(a-x)}\times\frac{d(a-x)}{dx}=\frac{1}{(a-x)}\times-1=\frac{1}{x-a}.$$

ஆகவே, $x<a$ ஆகும்பொழுது,

$$\int\frac{dx}{x-a}=\log(a-x)$$

x என்பது நேராயிருந்தாலும் அன்றி எதிராயிருந்தாலும்,

$$\int\frac{dx}{x}=\log|x|.$$

இங்கு $|x|$ என்பதால் நாம் கருதுவது x இன் நேர் எண் பெறுமானம்.

5.212. (11), (12) என்னும் இரு முடிபுகளும் தான்^{-1}x சூத்திரத்தின் இனங்கள் என்றுஞ் சூத்திரம் (12) ஆனது சூத்திரம் (11) ஐ உள்ளடக்குகின்றது என்றும் அதனாலே அது கற்றற்குச் சிறந்தது என்றும் அறிக.

மாணுக்கன் தானாக முடிபுகள் (19)—(22) ஐச் சென்ற அதிகாரத்தைத் துணைக் கொண்டு, அவை நியாயமாகும் x இன் பெறுமானங்களின் தொடர்பில் வாய்ப்புப் பார்த்து, $-\log a$ என்பது ஒரு தொகையிடுதலின் மாறிலியெனக் கொள்ளப்படலாமாதலால், (19), (20) என்பனவற்றில்

$$\log\{x+\sqrt{(x^2+a^2)}\},\ \log\{x+\sqrt{(x^2-a^2)}\}$$

என்னும் வடிவங்கள் அத்தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களாதற்குப் போதியனவென அறிதல் வேண்டும்.

5.22. **தேற்றங்கள்.**

(i) $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$; இங்கு c என்பது ஒரு மாறிலி,

(ii) $\int\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$;

(iii) $\int f'(mx)\,dx=\frac{1}{m}f(mx)$;

இங்கு, தொகையீட்டு மாறிலிகள் தவிர்க்கப்பட்டுள்ளன. சமங்களின் இருபக்கங்களின் வகையீடுகளை எடுப்பதாலும் (அதாவது செய்கை d ஐ இரு பக்கங்களிலுஞ் செய்தலாலும்) ,

$$d\int f(x)dx=f(x)dx \ \text{என்றும்}$$

$$df(mx)=mf'(mx)dx \ \text{என்றும்}$$

ஞாபகப்படுத்தலாலும் இத்தேற்றங்கள் ஒருங்கு வாய்ப்புப் பாக்கப்படுகின்றன.

5.221. $f(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் குறித்தால்,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n \quad (\text{என்க})$$

$\dfrac{f(x)}{x-c}$ என்பது தொகையிடப்படக்கூடும்; அதற்குக் காரணம் பின்வருமாறு:

இப்பின்னத்தின் தொகுதியை $x-c$ ஆல் வகுக்க

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-2}x + b_{n-1} + \frac{bn}{x-c}$$

என்னும் வடிவ முடிவைப் பெறுவோம்; தொகையிடுதலின் முடிபு

$$\frac{b_0}{n}x^n + \frac{b_1}{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + \frac{b_{n-2}}{2}x^2 + b_{n-1}x + b_n \log(x-c) \text{ என்பது.}$$

5.222. **உதாரணங்கள்.**

(i) $\dfrac{x^2}{x-1}$ இன் தொகையீட்டைக் காண்க.

தொகுதியைப் பகுதியால் வகுக்க நாம் பெறுவது

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

ஆகவே $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x-1} = \frac{1}{2}x^2 + x + \log(x-1).$

(ii) $\displaystyle\int (x-2)^{\frac{4}{3}}dx$ என்பதைக் காண்க.

5.21 இல் விளக்கியது போல $x-2$ இன் ஓரடுக்கு x இன் ஓரடுக்குப் போலத் தொகையிடப்படுதல் கூடும்; ஆகவே, முடிபு

$$\frac{1}{\frac{7}{3}}(x-2)^{\frac{7}{3}}, \text{ அல்லது } \frac{3}{7}(x-2)^{\frac{7}{3}}.$$

(iii) $\displaystyle\int (2x+1)^5dx = \frac{1}{6}(2x+1)^6 \times \tfrac{1}{2};$

இதற்குக் காரணம்

$2x+1$ ஐ வகையிடுதல் 2 என்னும் ஒரு காரணியைக் கொண்டுவரும் என்பதும்.

$$\frac{d}{dx}(2x+1)^6 = \frac{d(2x+1)^6}{d(2x+1)} \times \frac{d(2x+1)}{dx}$$
$$= 6(2x+1)^5 \times 2 \quad \text{என்பதுமே.}$$

(iv) $\displaystyle\int \text{சைன் } mxdx = -\frac{1}{m}\text{கோசை } mx,$

$\displaystyle\int \text{சைன் } (mx+n)\,dx = -\frac{1}{m}\text{கோசை } (mx+n).$

(v) $\displaystyle\int \text{சைன்}^2xdx = \frac{1}{2}\int(1 - \text{கோசை } 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\text{ சைன் } 2x) = \frac{1}{2}(x - \text{சைன் } x \text{கோசை } x)$

$\displaystyle\int \text{கோசை}^2xdx = \frac{1}{2}\int(1 + \text{கோசை } 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\text{ சைன் } 2x) = \frac{1}{2}(x + \text{சைன் } x \text{ கோசை } x).$

(vi) $\displaystyle\int \text{கோதா}^2xdx = \int(\text{கோசே}^2x - 1)\,dx = -\text{கோதா } x - x.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{6}\text{தான்}^{-1}\frac{2x}{3}.$

பின்வரும் பயிற்சிகளைச் செய்யத் தொடங்குமுன் மாணுக்கர் மேற் கூறியனவற்றை வாய்ப்புப் பார்க்கவேண்டும்.

5.223. பயிற்சிகள். பின்வருங் கோவைகளைத் தொகையிடுக:

(i) $(x-1)^3;\ \dfrac{1}{(x-1)^3}.$ (ii) $(2x-1)^3;\ \dfrac{1}{(2x-1)^3}.$

(iii) $\dfrac{x^2}{x+1};\ \dfrac{x+1}{x^2}.$ (iv) $\dfrac{x^3+1}{x-1}.$

(v) $\dfrac{x+1}{x+2};\ \dfrac{x+2}{x+1}.$ (vi) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3.$

(vii) தான்^2x. (viii) சைன்^3x.

(ix) அகோசை^2x; அசைன்^2x. (x) அதான்^2x

5.3 தொகையிடும் முறைகள். முற்கூறிய அத்தியாயங்களில் ஆரம்பச் சார்புகள் எல்லாவற்றையும் யாதும் ஓர் அட்சரகணிதச் செய்கையால் ஆக்கப்பட்ட இச் சார்புகளின் சார்புகளையும் வகையிடும் முறைகளைக் கற்றோம். எனினும், அத்தகைய சார்புகள் எல்லாவற்றையும் வகையிடுதல் முடியாது; அதற்குக் காரணம் எழுந்தமானமாய் எழுதப்பட்ட ஒரு சார்பு வேறு ஒரு சார்பின் பெறுதியாய் இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதே. எனினும், செய்ய வேண்டியது சார்புகளின் சில வடிவங்களை வகுத்து அவற்றைத் தொகையிடுதல் சில நியம வடிவங்களைத் தொகையிடுதற்கு இனமாற்றஞ் செய்யக்கூடுமெனக் காட்டுவதே.

5.31 இருபடிப் பகுதிகளையுடைய பின்னங்கள். $f(x)$ என்பது x இல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாயிருக்க $\dfrac{f(x)}{ax^2+2bx+c}$ என்னும் பின்னத்தை ஆராய்க.

$f(x)$ என்பது முதற்படியினுங் கூடியதெனின், x இல்முதற் படியி லுள்ள ஒரு மீதியைப் பெறும் வரைக்கும் தொகுதியைப் பகுதியால் வகுப் போம் ; உதாரணமாக,

$$\frac{f(x)}{ax^2+2bx+c}=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n+\frac{ex+f}{ax^2+2bx+c}$$

x இன் நேரடுக்குகள் பொது வழியாலே தொகையிடப்படக் கூடும். $\dfrac{ex+f}{ax^2+2bx+c}$ என்னுந் தகுபின்னந் தொகையிடப்படுதற்கு மீந்து நிற்கும். [தகு பின்னம் என்பது தொகுதியானது பகுதியிலும் x இற் குறைந்த படியுள்ளது.]

(i) **பகுதிக்கு $a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ என்னும் மெய்க்காரணிகள் இருக்க.** ஆயின்,

$$\frac{ex+f}{a(x-\alpha)\ (x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$$

இங்கு, A, B என்பன பின்னங்களை நீக்குதலாற் பெறப்படலாம் ; அதாவது $ex+f=Aa\,(x-\beta)+Ba\,(x-\alpha)$

என எழுதி முறையே $x=\alpha$, $x=\beta$ எனப் பிரதியிடுதலாற் பெறப்படலாம்.

எனின்,

$$\int\frac{ex+f}{a(x-\alpha)\ (x-\beta)}dx=A\int\frac{dx}{x-\alpha}+B\int\frac{dx}{x-\beta}$$

$$=A\log(x-\alpha)+B\log(x-\beta);$$

இங்கு A, B என்பனவற்றிற்கு முன்கண்ட பெறுமானங்கள் உள.

(ii) **பகுதியானது $a\,(x-\alpha)^2$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்போது.** இவ்வகையிலே தொகுதி

$$ex+f=e\,(x-\alpha)+e\alpha+f$$

என எழுதப்படும் ;

ஆயின், $$\int\frac{ex+f}{a\,(x-\alpha)^2}\,dx=\frac{e}{a}\int\frac{dx}{x-\alpha}+\frac{e\alpha+f}{a}\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}$$

$$=\frac{e}{a}\log(x-\alpha)-\frac{e\alpha+f}{a(x-\alpha)}.$$

(iii) தொகுதிக்கு மெய்ப் பெறுமானங்கள் இல்லையெனின், அது $a\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். அவ்வாறு எழுதத் தம் பெறுதிகள் இவ்வடிவத் தொகுதி உள்ளவையாக இரு சார்புகள் இருக்கின்றன எனக் காண்கின்றோம் ; அதற்குக் காரணம்

$$\frac{d}{dx}\log\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}=\frac{2\,(x+\alpha)}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\qquad(4.451),$$

$$\frac{d}{dx}\text{தான்}^{-1}\frac{x+\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$ (4.21 (iii), 2.63) என்பனவே.

எனின், $ex+f$ என்னுந் தந்த தொகுதியை சென்ற இரு பின்னங்களின் தொகுதிகள் பற்றி உணர்த்துவோமாயின், வேண்டிய தொகையீட்டை நாம் பெறலாம். இது பின்வருமாறு எளிதாகச் செய்யப்படும்.

$$ex+f=\frac{e}{2}\{2(x+\alpha)\}+f-e\alpha.$$

ஆகவே,

$$\int\frac{(ex+f)\,dx}{a\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}}=\frac{e}{2a}\int\frac{2\,(x+\alpha)\,dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{f-e\alpha}{a\beta}\int\frac{\beta dx}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\frac{e}{2a}\log\{(x+\alpha)^2+\beta^2\}+\frac{f-e\alpha}{a\beta}\text{தான்}^{-1}\frac{(x+\alpha)}{\beta}.$$

5.32 $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ **என்னும் வடிவம்.**

$$\frac{d}{dx}\log f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$ ஆயிருத்தலால் (4.451),

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log f(x).$$

இது மிகப் பிரதானமான ஒரு முடிபு ; இதனைச் சென்ற பிரிவில் வழங்கினோம் ; பின்வரும் பயிற்சிகளிலும் இதனைப் பலகால் வழங்கு வோம்.

இத்தேற்றத்தைச் சொல்பற்றிப் பின்வருமாறு உணர்த்தலாம் :

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியானது பகுதியின் பெறுதியாயின், அப் பின்னத்தின் தொகையீடு தொகுதியின் மடக்கையாகும்.

5.33 உதாரணங்கள்.

(i)
$$\int \frac{2x+5}{(x-1)(x+4)}\,dx.$$

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} \quad \text{ஆகுக.}$$

பின்னங்களை நீக்க

$$2x+5 = A(x+4) + B(x-1).$$

$x=1$ எனப் பிரதியிடுக ; நாம் பெறுவது $A=\frac{7}{5}$;

$x=-4$ எனப் பிரதியிடுக ; நாம் பெறுவது $B=\frac{3}{5}$.

ஆகவே,

$$\int \frac{2x+5}{(x-1)(x+4)}\,dx = \frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+4}$$
$$= \frac{7}{5}\log(x-1) + \frac{3}{5}\log(x+4).$$

(ii)
$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx.$$

இங்கு, தொகுதி பகுதியின் பெறுதியாகும் ; ஆகவே,
தொகையீடு $= \log(2x^2+x+1)$.

(iii)
$$\int \frac{dx}{2x^2+x+1}.$$

இங்கு, பகுதிக்கு மெய்க்காரணிகள் இல்லை ; தொகுதியில் x அடக்கப்படவில்லை ; ஆயின், தொகையீடு தான்$^{-1}$ வடிவத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

$$2x^2+x+1 = 2(x^2+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2})$$
$$= 2\{(x+\tfrac{1}{4})^2+\tfrac{7}{16}\}$$

என நாம் எழுதலாம்.

ஆகவே, $\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}$.

இனி, $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}$ தான்$^{-1}\frac{x}{a}$.

ஆகவே, தந்த தொகையீடு

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{16}}}\text{ தான்}^{-1}\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\text{ தான்}^{-1}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}.$$

(iv)
$$\int \frac{4x+5}{2x^2+x+1}\,dx.$$

பகுதிக்கு மெய்க்காரணிகள் இல்லை ; அதன் பெறுதி $4x+1$; ஆயின் தொகுதி $4x+5=(4x+1)+4$ என எழுதுவோம் ; தொகையீடு இரு தொகையீடுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும் ; அதாவது

$$\int\frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx + 4\int\frac{dx}{2x^2+x+1}.$$

சென்ற இரு பயிற்சிகளின் முடிபுகளை வழங்க, இது.

$$\log(2x^2+x+1) + \frac{8}{\sqrt{7}}\text{ தான்}^{-1}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}.$$ என்பதற்குச் சமம்

(v)
$$\int \frac{5x+3}{x^2+4x+13}\,dx$$

இங்கு, பகுதிக்கு மெய்க்காரணிகள் இல்லை ; அதன் பெறுதி $2x+4$. ஆகவே, தொகுதி $5x+3=\frac{5}{2}(2x+4)-7$ என எழுதுவோம் ;

$$\text{தொகையீடு} = \frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13}\,dx - 7\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}$$
$$= \frac{5}{2}\log(x^2+4x+13) - \frac{7}{3}\text{ தான்}^{-1}\frac{x+2}{3}.$$

5.34 பயிற்சிகள். பின்வருங் கோவைகளைத் தொகையிடுக:

(i) $\frac{1}{x^2-1}$. (ii) $\frac{x}{x^2-1}$.

(iii) $\frac{x}{x^2+1}$. (iv) $\frac{x+1}{x^2+1}$.

(v) $\frac{x}{x^2-3x+2}$. (vi) $\frac{2x+1}{x^2+4x+3}$.

(vii) $\frac{6x+7}{3x^2+4x+1}$. (viii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

(ix) $\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$. (x) $\frac{2x+4}{x^2+4x+5}$.

(xi) $\frac{1}{x^2+4x+5}$. (xii) $\frac{2x+7}{x^2+4x+5}$.

(xiii) $\frac{x+1}{x^2+6x+25}$. (xiv) $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

(xv) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$. (xvi) $\dfrac{1}{3x^2+12x+13}$.

(xvii) $\dfrac{x+2}{3x^2+12x+13}$. (xviii) $\dfrac{x+4}{3x^2+12x+13}$.

(xix) $\dfrac{2x+3}{x^2+6x+10}$. (xx) $\dfrac{4x+1}{4x^2+4x+3}$.

5.4. $\int\dfrac{ex+f}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}\,dx$ **என்னும் வடிவம்.** ஓர் இசைவான வடிவம் பின்வருமாறு பெறப்படும் :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{(ax^2+2bx+c)}=\frac{ax+b}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$$

ஆயின், $\displaystyle\int\frac{ax+b}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}\,dx=\sqrt{(ax^2+2bx+c)}$ ....(1)

எனின்; தந்த தொகையீட்டில்,

$$ex+f=\frac{e}{a}(ax+b)+\frac{af-be}{a}$$

என எழுதுவோம் ; தொகையீடு

$$\frac{e}{a}\int\frac{ax+b}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}\,dx+\frac{af-be}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}},$$

அதாவது, $\dfrac{e}{a}\sqrt{(ax^2+2bx+c)}+\dfrac{af-be}{a}\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$ ஆகும்.

ஆயின், $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$ என்பதை எவ்வாறு தொகையிடலாமென நாம் இனி ஆராயவேண்டும்.

இங்கு, இசைவான வடிவங்கள்

$\dfrac{d}{dx}$ சைன் $^{-1}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, அல்லது $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=$ சைன் $^{-1}\dfrac{x}{a}$....(2)

$\dfrac{d}{dx}$ அசைன் $^{-1}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$, அல்லது $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=$ அசைன் $^{-1}\dfrac{x}{a}$

$$=\log\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}\ \ldots\ldots\ldots(3)$$

$\dfrac{d}{dx}$ அகோசை $^{-1}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, அல்லது $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=$ அகோசை $^{-1}\dfrac{x}{a}$

$=\log\dfrac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$ .... (4) என்பன.

இப்பொழுது நிகழக்கூடியன பல உண்டு.

(i) a **நேராதல்.** ஆயின்,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}=\int\frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{\{(ax+b)^2+ac-b^2\}}}.$$

$ac-b^2$ என்பது நேர், அல்லது எதிர் என்பதற்குத்தக, இது வடிவம் (3) அல்லது (4) இல் இருக்கின்றது ; ஆயின், தொகையீடு

$\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ அசைன் $^{-1}\dfrac{ax+b}{\sqrt{(ac-b^2)}}$, அல்லது $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ அகோசை $^{-1}\dfrac{ax+b}{\sqrt{(b^2-ac)}}$ ஆகும்.

(ii) a **எதிராதல்.** இப்பொழுது தொகையீட்டை.

$\displaystyle\int\frac{\sqrt{-a}\,dx}{\sqrt{\{b^2-ac-(ax+b)^2\}}}$ என எழுதுகின்றோம்.

இது b^2-ac என்பது நேராயிருக்கும்போது வடிவம் (2) இல் இருக்கும் ; நேரன்றெனின் கற்பனையாயிருக்கும். ஆயின், தொகையீட்டிற்கு இருப்பு உண்டெனின் அதன் பெறுமானம்

$-\dfrac{1}{\sqrt{-a}}$ சைன் $^{-1}\dfrac{ax+b}{\sqrt{(b^2-ac)}}$ ஆகும்.

5.41. சென்ற பிரிவிலேயுள்ள செய்கைமுறை எண்ணுதாரணங்களில் எளிதாக விளங்கும் ; உதாரணமாக,

(i) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(2x^2+2x+5)}}=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{\{(2x+1)^2+9\}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ அசைன் $^{-1}\dfrac{2x+1}{3}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{2x+1+\sqrt{(4x^2+4x+10)}}{3}.$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(2x^2+2x-4)}}=\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{\{(2x+1)^2-9\}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ அகோசை $^{-1}\dfrac{2x+1}{3}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{2x+1+\sqrt{(4x^2+4x-8)}}{3}.$$

(iii) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}=\int\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\{9-(2x+1)^2\}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ சைன் $^{-1}\dfrac{2x+1}{3}$.

(iv) $\int \frac{(3x+7)dx}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}$.

இங்கு, பகுதியிலுள்ள இருபடிக் கோவையின் பெறுதி $-2-4x$ ஆகும்; ஆயின் தொகுதி,

$$3x+7 = -\tfrac{3}{4}(-4x-2)+\frac{11}{2}$$

என எழுதுகின்றோம்.

$$\text{தொகையீடு} = -\frac{3}{4}\int\frac{(-4x-2)}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}dx + \frac{11}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(4-2x-2x^2)}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{(4-2x-2x^2)} + \frac{11}{2\sqrt{2}}\text{சைன்}^{-1}\frac{2x+1}{3},$$

(iii) இன் முடிவை வழங்குதலால்.

5.42 பயிற்சிகள் பின்வருஞ் சார்புகளின் தொகையீடுகளைக் காண்க:

(i) $\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}$. (ii) $\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+2x+3)}}$.

(iii) $\frac{1+2x}{\sqrt{(4-x-x^2)}}$. (iv) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

(v) $\frac{2+x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. (vi) $\frac{1}{\sqrt{(-5-6x-x^2)}}$.

(vii) $\frac{3+x}{\sqrt{(-5-6x-x^2)}}$. (viii) $\frac{4x+5}{\sqrt{(-5-6x-x^2)}}$.

(ix) $\frac{1}{\sqrt{(9x^2+6x+2)}}$. (x) $\frac{3x+4}{\sqrt{(9x^2+6x+2)}}$.

(xi) $\frac{1}{\sqrt{(3x^2+2x-1)}}$. (xii) $\frac{3x+2}{\sqrt{(3x^2+2x-1)}}$.

5.5. **பிரதியீட்டால், அல்லது மாறியின் மாற்றத்தாலே தொகையிடுதல்.** $x=\phi(u)$ எனின்,

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{du}du \text{ என நிறுவல்.}$$

$y = \int f(x)dx$ ஆகுக;

ஆயின், $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

இனி, y என்பது x இன் ஒரு சார்பாயும், x என்பது u இன் ஒரு சார்பாயுமிருத்தலால், y என்பது u இன் ஒரு சார்பாகும்.

எனினும், $\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = f(x)\frac{dx}{du}$ (2.63);

ஆகவே, தொகையீட்டின் வரைவிலக்கணத்தால்,

$$y = \int f(x)\frac{dx}{du}du,$$

அல்லது $\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{du}du$ ....(1)

எனின், x ஆனது u இன் ஒரு சார்பாயிருக்கும் போது, ஒரு தொகையீட்டில் $\int$ என்னுங் குறிக்குப்பின் dx இற்குப் பதிலாக $\frac{dx}{du}du$ என எழுதுதலால் மாறியை x இலிருந்த u இற்கு நாம் மாற்றலாம்.

உதாரணமாக $\int(x^2+a^2)^n x dx$ என்பதைக் காண்பதற்கு:

$x^2+a^2=u$ என இடுக.

ஆயின், $2x\frac{dx}{du}=1$.

$$\text{எனின், } \int(x^2+a^2)^n x dx = \int(x^2+a^2)^n x\frac{dx}{du}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^n du$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}u^{n+1}$$

$$= \frac{(x^2+a^2)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

5.51. மறுதலையாக, எப்பொழுதாயினும் ஒரு தொகையீடு $\int f(t)\frac{dt}{dx}dx$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படக்கூடுமாயின், அதனை நாம் $\int f(t)\,dt$ என எழுதலாம்; இது காணுதற்கு மிக எளிதாகலாம்.

இங்கு, உண்மையாக dx, dt என்பன 2.51 இல் வரையறுக்கப்பட்டபடி வகையீடுகளாக வழங்கப்படுகின்றன.

5.5 இன் உதாரணத்திற்கு இம்முறையைப் பிரயோகிக்க,

$$d(x^2+a^2) = 2xdx.$$

ஆயின், $\int (x^2+a^2)^n x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^n d\,(x^2+a^2)$

என நாம் எழுதலாம் ;

அன்றி $x^2+a^2=t$ என இட வருவது $\frac{1}{2}\int t^n dt$

$$= \frac{t^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{(x^2+a^2)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

5.52 உதாரணங்கள். சென்ற பிரிவின் முறையைப் பின்பற்றி வருவன :

(i) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^n}$,

$ax+b=u$ என இட வருவது $\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^n}$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,au^{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}}.$$

(ii) $\int\frac{x^2dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int\frac{d(1+x^3)}{1+x^3}$

$1+x^3=u$ என இட வருவது $\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}$

$$= \tfrac{1}{3}\log u.$$

$$= \tfrac{1}{3}\log(1+x^3).$$

இதுவும் 5.32 இன் ஓர் எளிய உதாரணமாகும்.

(iii) $\int \text{சீக}^4 x\,dx = \int \text{சீக}^2 x\,d(\text{தான் } x)$.

தான் $x=u$ என இட வருவது $\int(u^2+1)\,du$

$$= \tfrac{1}{3}u^3+u$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\text{தான்}^3 x + \text{தான் } x.$$

(iv) $\int \frac{\text{கோசை } x\,dx}{a+b\,\text{சைன் } x} = \int\frac{d\,(\text{சைன் } x)}{a+b\,\text{சைன் } x}$

சைன் $x=u$ என இட வருவது $\int\frac{du}{a+bu}$.

$$= \frac{1}{b}\log(a+bu)$$

$$= \frac{1}{b}\log(a+b\,\text{சைன் } x).$$

இது 5.32 இன் வேறோர் உதாரணம்.

(v) $\int\frac{\log x}{x}dx$.

$\log x=u$ ஆகுக ; ஆயின், $\frac{dx}{x}=du$. எனின், தொகையீடு

$$= \int u\,du = \tfrac{1}{2}u^2 = \tfrac{1}{2}(\log x)^2.$$

(vi) $\int \text{சைன்}^m x\ \text{கோசை}^n x\,dx$ என்பது m, அல்லது n ஓர் ஒற்றை நேர் முழுவெண்ணாயிருக்கும் போதெல்லாந் தொகையிடப்படலாம்.

உதாரணமாக, $\int \text{சைன்}^{\frac{4}{3}} x\ \text{கோசை}^5 x\,dx$.

சைன் $x=u$ ஆகுக ;

ஆயின், கோசை $x\,dx=du$;

$\text{கோசை}^4 x = (1-\text{சைன்}^2 x)^2 = (1-u^2)^2$.

எனின், தொகையீடு $= \int u^{\frac{4}{3}}(1-u^2)^2\,du$

$$= \left(\int u^{\frac{4}{3}} - 2u^{\frac{10}{3}} + u^{\frac{16}{3}}\right)du$$

$$= \tfrac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \tfrac{6}{13}u^{\frac{13}{3}} + \tfrac{3}{19}u^{\frac{19}{3}}$$

$$= 3\,\text{சைன்}^{\frac{7}{3}} x\left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{13}\,\text{சைன்}^2 x + \tfrac{1}{19}\,\text{சைன்}^4 x\right).$$

m என்பது ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணாயின் இம்முறை $\int \text{சைன்}^m x\,dx$, அல்லது $\int \text{கோசை}^m x\,dx$ என்பதற்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

(vii) $\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

இத்தகைய உதாரணங்களில் $x=\frac{1}{u}$ என்னும் பிரதியீடு பலகாலும் பயன்படும். அது $\frac{dx}{du}=-\frac{1}{u^2}$, அல்லது $dx=-\frac{du}{u^2}$, அல்லது $\frac{dx}{x}=-\frac{du}{u}$ என்பதைத் தரும் ; இது $\log x=-\log u$ என்னும் வகையீடுகளை எடுப்பதாலுங் காணப்படும்.

எனின், தொகையீடு,

$$= -\int\frac{du}{u\sqrt{(\frac{1}{u^2}-a^2)}} = -\int\frac{du}{\sqrt{(1-a^2u^2)}} = -\frac{1}{a}\int\frac{d(au)}{\sqrt{(1-a^2u^2)}}$$

$$= -\frac{1}{a}\,\text{சைன்}^{-1}(au) = -\frac{1}{a}\,\text{சைன்}^{-1}\frac{a}{x}.$$

(viii) $\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$ என்னும் வடிவம் $x-p=\frac{1}{u}$ என்னும் பிரதியீட்டாலே தொகையிடப்படலாம். உதாரணமாக,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(1-x^2)}}.$$

$x+1=\frac{1}{u}$ ஆகுக ; ஆயின் $dx=-\frac{du}{u^2}$, அல்லது $\frac{dx}{x+1}=-\frac{du}{u}$.

எனின், தொகையீடு

$$=-\int \frac{du}{u\sqrt{\left\{1-\left(\frac{1}{u}-1\right)^2\right\}}}=-\int \frac{du}{u\sqrt{\left(\frac{2}{u}-\frac{1}{u^2}\right)}}=-\int \frac{du}{\sqrt{(2u-1)}}$$

$$=-\sqrt{(2u-1)}=-\sqrt{\left(\frac{2}{x+1}-1\right)}=-\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}.$$

5.53 பயிற்சிகள். பின்வருஞ் சார்புகளின் தொகையீடுகளைப் பிரதியீட்டாற் காண்க :

(i) $\frac{x^2}{x^3-1}$. (ii) $\frac{x^2}{x^6+1}$.

(iii) $\frac{x^2}{\sqrt{(x^6+1)}}$. (iv) $\frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2+4x+3)}}$.

(v) $\frac{3x+1}{(9x^2+6x+2)^5}$. (vi) $\frac{x^3}{\sqrt{(1-x^8)}}$.

(vii) $\text{சீக}^2 x \, \text{தான்} \, x$. (viii) $\frac{\text{சைன்} \, x}{a+b \, \text{கோசை} \, x}$.

(ix) $\text{சைன்}^5 x$. (x) $\text{கோசை}^7 x$.

(xi) $\text{கோசை}^3 x \, \text{சைன்}^{\frac{1}{2}} x$. (xii) $\frac{1+\text{கோசை} \, x}{x+\text{சைன்} \, x}$.

(xiii) $\frac{1}{x\sqrt{(x^2+a^2)}}$. (xiv) $\frac{1}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

(xv) $\frac{\text{கோசை} \, x}{4+\text{சைன்}^2 x}$. (xvi) $\frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-x^2)}}$.

(xvii) $\frac{1}{(x-2)\sqrt{(9x^2-36x+35)}}$. (xviii) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{(8-2x-x^2)}}$.

(xix) $\frac{(\log x)^n}{x}$. (xx) $\frac{1}{x \log x}$.

5.54 திரிகோணகணிதப் பிரதியீடுகள். தொகையிடப்படவேண்டிய சார்பில் $\sqrt{(a^2-x^2)}$ என்பது ஒரு காரணியாயிருந்தால், தொகையிடுதல் $x=a \, \text{சைன்}\theta$ என்னும் பிரதியீட்டாற் பலகால் எளிதாக்கப்படும் ; இப்பிரதியீடு தருவன

$$dx=a\,\text{கோசை}\theta \, d\theta,$$

$$\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx=a^2 \, \text{கோசை}^2 \theta \, d\theta \text{ என்பன.}$$

உதாரணம். $\int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx$.

இது சமன் $\int a^2 \, \text{கோசை}^2 \theta \, d\theta=\frac{1}{2}a^2 \int (\text{கோசை} \, 2\theta+1)\,d\theta$

$$=\tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{2}\text{சைன்} \, 2\theta+\theta\right)=\tfrac{1}{2}a^2(\text{சைன்} \, \theta \, \text{கோசை} \, \theta+\theta)$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}+\tfrac{1}{2}a^2 \, \text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

அதுபோல, அதே பிரதியீடு $\int x^3\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx$ என்பது $\int a^5 \, \text{சைன்}^3\theta \, \text{கோசை}^2\theta d\theta$ என்பதாக மாற்றும் ; இது 5.52 (vi) இற்போற் காணப்படலாம்.

$\sqrt{(x^2+a^2)}\,dx$ என்னும் வடிவத்திற்கு வேறு பயன்படு பிரதியீடுகள்.

(i) $x=a \, \text{அசைன்} \, \theta$; இது $a^2 \, \text{அகோசை}^2 \theta \, d\theta$ ஐத் தரும்,

அல்லது (ii) $x=a\,\text{தான்}\theta$; இது $a^2 \, \text{சீக}^3 \theta \, d\theta$ ஐத் தரும்.

$\sqrt{(x^2-a^2)}\,dx$ என்னும் வடிவத்திற்குரிய பிரதியீடுகள்.

(i) $x=a\,\text{அகோசை}\theta$; இது $a^2 \, \text{அசைன்}^2\theta \, d\theta$ ஐத் தரும்,

(ii) $x=a\,\text{சீக}\theta$; இது $\text{சீக}\theta \, \text{தான்}^2 \theta \, d\theta$ ஐத் தரும்.

உதாரணம். $\int \sqrt{(x^2+a^2)}\,dx$.

மேற்காட்டியவாறு $x=a\,\text{அசைன்}\theta$ எனப் பிரதியிட, தொகையீடு

$$=\int a^2 \, \text{அகோசை}^2 \theta \, d\theta=\tfrac{1}{2}a^2\int (\text{அகோசை} \, 2\theta+1)\,d\theta$$

$$=\tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{2}\text{அசைன்} \, 2\theta+\theta\right)=\tfrac{1}{2}a^2(\text{அசைன்} \, \theta \, \text{அகோசை}\theta+\theta)$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(x^2+a^2)}+\tfrac{1}{2}a^2 \, \text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a},$$

அல்லது $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}a^2\log\frac{x+\sqrt{(x^2+a^2)}}{a}$ ......(2).

அதுபோல, $\int \sqrt{(x^2-a^2)}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)}+\frac{1}{2}a^2 \, \text{அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$

அல்லது $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)}+\frac{1}{2}a^2\log\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$ ......(3).

(1), (2), (3) என்னும் முடிபுகள் பிரதானமானவை; மாணாக்கர் அவற்றை ஞாபகத்தில் வைத்திருத்தல் நன்று.

5.55. $\int \frac{dx}{\text{சைன்}\, x}$; $\int \frac{dx}{\text{கோசை}\, x}$; $\int \frac{dx}{a + b\,\text{கோசை}\, x}$.

இத்தொகையீடுகள் எல்லாம் $\text{தான்}\,\frac{x}{2} = t$ என்னும் பிரதியீட்டால் எளியனவாக்கப்படும்; இப்பிரதியீடு தருவது $\frac{1}{2}\text{சீக}^2\frac{x}{2}\,dx = dt$

உதாரணமாக, $\int \frac{dx}{\text{சைன்}\, x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\text{சைன்}\frac{x}{2}\,\text{கோசை}\frac{x}{2}}$

தொகுதியையும் பகுதியையும் $\text{சீக}^2\frac{x}{2}$ ஆற் பெருக்க, இதற்குச் சமன்

$$\frac{1}{2}\int \frac{\text{சீக}^2\frac{x}{2}\,dx}{\text{தான்}\frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log \text{தான்}\,\frac{x}{2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

எனின்,

$\int \frac{dx}{\text{கோசை}\,x}$ என்பது x ஐ $\frac{\pi}{2} + x$ ஆக மாற்றுவதாற் சென்ற முடிபிலிருந்து உய்த்துணரப்படலாம்; அதற்குக் காரணம்

$$\text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{கோசை}\,x,$$

$$d\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = dx \text{ என்பன.}$$

ஆயின், $$\int \frac{dx}{\text{கோசை}\,x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\text{சைன்}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \log \text{தான்}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \ldots\ldots (2)$$

இதற்குச் சமனான பயன்படு வடிவம்

$$\int \text{சீக}\,x\,dx = \log(\text{தான்}\,x + \text{சீக}\,x) \quad \ldots\ldots (3)$$

இது (2) இலிருந்து பெறப்படும், அல்லது வகையிடுதலால் வாய்ப்புப் பார்க்கப்படும்.

இனி, அதே பிரதியீட்டோடு*

$$\int \frac{dx}{a + b\,\text{கோசை}\,x} = \int \frac{dx}{a + b\left(\text{கோசை}^2\frac{x}{2} - \text{சைன்}^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{\text{சீக}^2\frac{x}{2}\,dx}{a\left(1 + \text{தான்}^2\frac{x}{2}\right) + b\left(1 - \text{தான்}^2\frac{x}{2}\right)} = 2\int \frac{dt}{a+b+(a-b)t^2}.$$

$$= 2\int \frac{dt}{a + b + (a-b)t^2}.$$

$a + b$ என்பது நேரெனக் கொள்ள மூன்று வகைகள் வரும்:

(i) $a - b > 0$ எனின்,

$$\int \frac{dx}{a + b\,\text{கோசை}\,x} = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\,\text{தான்}^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\,\text{தான்}\,\frac{x}{2}\right\}.$$

(ii) $a - b = 0$ எனின், தொகையீடு,

$$= \int \frac{dx}{a + a\,\text{கோசை}\,x} = 2\int \frac{dt}{2a} = \frac{1}{a}\,\text{தான்}\,\frac{1}{2}x.$$

(iii) $a - b < 0$ எனின்,

$$\int \frac{dx}{a + b\,\text{கோசை}\,x} = 2\int \frac{dt}{a + b - (b-a)t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a+b)}}\int\left\{\frac{1}{\sqrt{(a+b)} + \sqrt{(b-a)}\,t} + \frac{1}{\sqrt{(a+b)} - \sqrt{(b-a)}\,t}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}\log\frac{\sqrt{(a+b)} + \sqrt{(b-a)}\,\text{தான்}\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{(a+b)} - \sqrt{(b-a)}\,\text{தான்}\,\frac{1}{2}x}.$$

5.56 பயிற்சிகள். பின்வருஞ் சார்புகளின் தொகையீடுகளைக் காண்க;

(i) $\frac{x + a}{\sqrt{(x^2 + a^2)}}$. (ii) $\sqrt{\left(\frac{a + x}{a - x}\right)}$.

(iii) $\frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$. (iv) $x\sqrt{(x^2 - a^2)}$.

(v) $(a + x)\sqrt{(a^2 - x^2)}$. (vi) $(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

(vii) $(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$. (viii) $x^2\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

*வேறொரு முறை பக்கம் 125 பயிற்சி 22 இலே தரப்பட்டிருக்கின்றது.

(ix) $x^2\sqrt{(x^2-a^2)}$. (x) $\dfrac{1}{5+3\text{ கோசை } x}$.

(xi) $\dfrac{1}{3+5\text{ கோசை } x}$. (xii) $\dfrac{1}{1+\text{கோசை } a \text{ கோசை } x}$.

(xiii) $\dfrac{1}{1-\text{சைன் } x}$. (xiv) $\dfrac{1}{2\text{சைன்}x+\text{கோசை } x+3}$.

(xv) $\dfrac{1}{4\text{கோசை}x+3\text{சைன்}x+5}$.

5.6. பகுதிகளாகத் தொகையிடுதல். இது இரு காரணிகளின் பெருக்கத்தைத் தொகையிடுதலை, தொகையிடுதற்கு எளிதான வேறொரு பெருக்கத்தைத் தொகையிடுதலாக மாற்றும் முறையாகும்.

u, v, என்பன x இன் சார்புகளாயின், நாம் அறிவது

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \quad \text{......(1)},$$

அல்லது வகையீடுகளாக எழுத

$$d(uv) = udv+vdu \quad \text{......(2)}.$$

இரு பக்கங்களேயுந் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$uv = \int udv + \int vdu;$$

ஆகவே, இடமாற்றஞ் செய்வதால்,

$$\int udv = uv - \int vdu \quad \text{.....(3)}.$$

இது **பகுதிகளாகத் தொகையிடுதற்குரிய சூத்திரம்** எனப்படும்; இது udv ஐத் தொகையிடுதலிலும் vdu ஐத் தொகையிடுதல் எளிதாயின்றுன் நயம்பட வழங்கப்படும்.

உதாரணமாக $\int x$ கோசை xdx என்னுந் தொகையீட்டை ஆராய்க.

x ஐ u ஆகவும் கோசைxdx, அல்லது d (சைன் x) என்பதை dv ஆகவும் எடுப்பதாலாதல், கோசைx ஐ u ஆகவும் xdx அல்லது $d(\frac{1}{2}x^2)$ ஐ dv ஆகவும் எடுப்பதாலாதல், இது $\int udv$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். முன்னதாகிய தேர்வின்படி நாம் எழுதுவது

$$\int x\text{கோசை } xdx = \int xd(\text{சைன் } x)$$

(3) ஆல்
$$= x\text{ சைன் } x - \int \text{சைன் } xdx$$
$$= x\text{ சைன் } x + \text{கோசை } x$$

மற்று இரண்டாம் உறழ்ச்சியை எடுப்போமாயின், நாம் எழுதுவது

$$\int x\text{கோசை } xdx = \int \text{கோசை } xd(\tfrac{1}{2}x^2)$$

(3) ஆல்
$$= \text{கோசை } x\tfrac{1}{2}x^2 - \int \tfrac{1}{2}x^2 d\,(\text{கோசை } x)$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\text{ கோசை } x + \tfrac{1}{2}\int x^2\text{ சைன் } xdx;$$

இது தொகையிடுதற்கு நாம் தொடங்கியதிலுங் கூடிய கடுமையான வடிவத்தைத் தருகின்றது. இதனுலே, பகுதிகளாய்த் தொகையிடுதல் தொகையிடுதலை எளிதாக்க வேண்டியதில்லை எனக் காண்கின்றேம்; சூத்திரம் (3) ஐப் பிரயோகிக்கும் போது எக்காரணிகள் முறையே u, v ஆகவேண்டுமெனத் தேர்தல் மிகப் பிரதானம்.

5.61. சிறப்புவகையாக $v = x$ எனக் கொள்ளலாம்; 5.6 (3) இலுள்ள சூத்திரம்

$$\int udx = ux - \int xdu$$

உதாரணம்.
$$\int \log xdx = x\log x - \int xd\,(\log x)$$
$$= x\log x - \int x.\frac{1}{x}dx$$
$$= x\log x - \int dx$$
$$= x\log x - x.$$

5.62 உதாரணங்கள்.

(i)
$$\int x\log xdx = \int \log x.\ d\,(\tfrac{1}{2}x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\log x - \int \tfrac{1}{2}x^2 d\,(\log x)$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\log x - \tfrac{1}{2}\int x^2.\frac{1}{x}dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\log x - \tfrac{1}{2}\int xdx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2\log x - \tfrac{1}{4}x^2.$$

(ii)
$$\int xe^x dx = \int xd\,(e^x) = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x.$$

(iii)
$$\int x^2\text{ சைன்} xdx = -\int x^2 d\,(\text{கோசை } x)$$
$$= -x^2\text{ கோசை } x + \int \text{கோசை } xd(x^2)$$
$$= -x^2\text{ கோசை } x + 2\int x\text{ கோசை } xdx;$$

எனின், $\int x$ கோசை $xdx = \int xd$ (சைன் x) $= x$ சைன் $x - \int$ சைன் xdx
$$= x\text{ சைன் } x + \text{கோசை } x;$$

ஆகவே, $\int x^2$ சைன் $xdx = -x^2$ கோசை $x + 2x$ சைன் $x + 2$ கோசை x.

(iv) சில வேளைகளில், தொகையீட்டை ஒரு நியம வடிவத்திற்கு இன மாற்றம் செய்ய ஒரு தந்திரம் வேண்டும்.

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx = x\sqrt{(a^2-x^2)} - \int x d\{\sqrt{(a^2-x^2)}\}$$

$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} + \int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx$$

$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}dx$$

$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} - \int \sqrt{(a^2-x^2)}dx + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

ஆகவே,

$$2\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx = x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$= x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a};$$

ஆகவே, $\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}a^2 \text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}$.

இது **5.54** இற் பிரதியீட்டால் முன்னரே பெறப்பட்ட முடிபு.

5.63. பகுதிகளாகத் தொடர்ந்து தொகையிடுதல். 5.62 (iii) இலுள்ள பயிற்சியில், தொகையிடுதலாகிய செய்கையை முடித்தற்கு ஒரு முறைக்கு மேற் பகுதிகளாகத் தொகையிட வேண்டிய தேவையைக் கண்டோம். அவ்வகைகளில், பின்வரும் முறையை அனுசரித்தால், வேலை சுருக்கப் படலாம்.

பகுதிகளாகத் தொகையிடுதற்குரிய பொதுச் சூத்திரத் தோற்றத்திற் சிறிது வேறுயிருந்தாலும் **5.6** (3) இற்குச் சமனான ஒரு வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாம் என முதல் அறிகின்றோம். உதாரணமாக, **5.6 (1)** இன் இரு பக்கங்களையுந் தொகையிட்டால், முடிபைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx;$$

ஆயின், $$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx \qquad \text{........(1)}.$$

இனி, கீறுகள் தொடர்ந்து வகையிடுதலின் முடிபுகளையும் கீழ்க்குறிகள் தொடர்ந்து தொகையிடுதலின் முடிபுகளையுங் குறிக்க ; உதாரணமாக, u''' என்பதன் பொருள் u ஐ மூன்று முறை வகையிடுதலின் முடிபாகும் ; v_4 என்பதன் பொருள் v ஐ நான்கு முறை தொகையிடுதலின் முடிபாகும் ; இவ்வாறே பிறவும்.

எனின், மேலேயுள்ள சூத்திரம் (1) பின்வருவதற்குச் சமம்.

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

அதுபோல, $\int u'vdx = u'v_1 + \int u''v_1dx$;

ஆயின், $\int uv'dx = uv - u'v_1 + \int u''v_1dx.$

அதுபோல, $\int u''v_1dx = u''v_2 - \int u'''v_2dx$;

ஆயின், $\int uv'dx = uv - u'v_1 + u''v_2 - \int u'''v_2dx.$

வேறொருபடி தருவது

$$\int uv'dx = uv - u'v_1 + u''v_2 - u'''v_3 + \int u^{iv}v_3dx \qquad (2);$$

வேண்டிய அளவிற்கு இச்செய்கை தொடரப்படலாம்.

உதாரணமாக, $\int x^3 \text{ கோசை} x dx$.

இங்கு, x^3 ஐ u ஆகவும் கோசைx ஐ v' ஆகவுங் கொள்வோம் ; ஆயின், v என்பது சைன் x ஆகும் ; தொடர்ந்து வகையிடுதலாலுந் தொகையிடுதலாலும் நாம் பெறுவன

$u = x^3$,	$v = \text{சைன்}x$;
$u' = 3x^2$,	$v_1 = -\text{கோசை}x$;
$u'' = 6x$,	$v_2 = -\text{சைன்}x$;
$u''' = 6$,	$v_3 = \text{கோசை}x$;
$u^{iv} = 0$,	$v_4 = \text{சைன்}x$;

u இன் ஏனைய பெறுதிகள் எல்லாம் பூச்சியமாயிருத்தலால், சூத்திரம் (2) தருவது

$$\int x^3 \text{ கோசை } xdx = x^3 \text{ சைன் } x + 3x^2 \text{ கோசை } x - 6x \text{ சைன் } x - 6 \text{ கோசை } x.$$

5.64. $\int e^{ax}$ சைன் bxdx, $\int e^{ax}$ கோசை bxdx என்பன.

இந்த இரு தொகையீடுகளையும் P, Q என்பனவற்றாற் குறிக்க. பகுதிகளாகத் தொகையிட நாம் பெறுவது

$$\int e^{ax} \text{ சைன் } bxdx = \frac{1}{a}e^{ax} \text{ சைன் } bx - \frac{b}{a}\int e^{ax} \text{ கோசை } bxdx,$$

அல்லது $$aP = e^{ax} \text{ சைன் } bx - bQ \qquad \text{......(1)}$$

அதுபோல,

$$\int e^{ax} \text{ கோசை } bxdx = \frac{1}{a}e^{ax} \text{ கோசை } bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \text{ சைன் } bxdx,$$

அல்லது $aQ = e^{ax}$ கோசை $bx + bP$.(2).

எனின், $aP + bQ = e^{ax}$ சைன் bx,

$-bP + aQ = e^{ax}$ கோசை bx.

ஆகவே, P அல்லது $\int e^{ax}$ சைன் $bxdx = \frac{e^{ax}(a \text{ சைன் } bx - b \text{ கோசை } bx)}{a^2+b^2}$ ..(3),

Q அல்லது $\int e^{ax}$ கோசை $bxdx = \frac{e^{ax}(b \text{ சைன் } bx + a \text{ கோசை } bx)}{a^2+b^2}$ ..(4).

5.65. தொடர்ந்து ஒடுக்குதலாலே தொகையிடுதல். சைன்x, அல்லது கோசைx இன் யாதும் ஓர் ஒற்றை அடுக்கு தொகையிடப் படலாமெனக் கண்டோம் (5.52 (vi)) ; எனினும், அங்கு தந்த முறை இரட்டை அடுக்குக்களுக்குப் பொருந்தாது. பின்வரும் முறை சைன்x, அல்லது கோசைx இன் யாதுமோர் அடுக்கினது தொகையீட்டினுள்ள குறிகாட்டியை ஒடுக்குதற்குப் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

$$d(\text{கோசை } x) = -\text{சைன் } xdx \text{ ஆதலால்,}$$

$$\int \text{சைன்}^n\, xdx = -\int \text{சைன்}^{n-1} xd\,(\text{கோசை } x)$$

பகுதிகளாகத் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$\int \text{சைன்}^n\, xdx = -\text{சைன்}^{n-1}x \text{ கோசை } x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2}x \text{ கோசை}^2 xdx$$

$$= -\text{சைன்}^{n-1}x \text{ கோசை } x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2}x(1-\text{சைன்}^2x)dx$$

$$= -\text{சைன்}^{n-1}x \text{ கோசை } x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2}xdx - (n-1)\int \text{சைன்}^n xdx.$$

ஆகவே,

$$n\int \text{சைன்}^n xdx = -\text{சைன்}^{n-1}x \text{ கோசை } x + (n-1)\int \text{சைன்}^{n-2}xdx.$$

அல்லது, $\int \text{சைன்}^n xdx = -\frac{1}{n}\text{சைன்}^{n-1}x \text{ கோசை } x + \frac{n-1}{n}\int \text{சைன்}^{n-2}xdx$ ...... (1).

இது காணப்படவேண்டிய தொகையீட்டில் **சைன்x** இன் அடுக்கின் குறிகாட்டியை ஒடுக்குதலால் **ஓர் ஒடுக்கற் சூத்திரம்** எனப்படும். அடுத்த அத்தியாயத்தில் இதனைப்பற்றி எடுத்துக் கூறச் சமயம் வரும்.

5.66 பயிற்சிகள்.

1. பின்வரும் சார்புகளின் தொகையீடுகளைப் பகுதிகளாகத் தொகையிடுதலாற் காண்க :

(i) xe^{-2x} ; (ii) x^4e^x ; (iii) x சைன் $2x$;

(iv) x^2 கோசை $3x$; (v) $x^3 \log x$; (vi) x சைன் x கோசை x ;

(vii) சைன்$^{-1} x$; (viii) தான்^{-1}x ; (ix) x^4 சைன் x ;

(x) x^5e^{-x} ; (xi) x சீக^2x ; (xii) அகோசை x கோசை x ;

(xiii) அசைன் x சைன் x ; (xiv) $x(\log x)^2$;

(xv) சைன் mx கோசை nx ; (xvi) கோசை mx கோசை nx .

2. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $\int \text{கோசை}^n xdx = \frac{1}{n}\text{கோசை}^{n-1}x \text{ சைன் } x + \frac{n-1}{n}\int \text{கோசை}^{n-2}xdx$;

(ii) $\int \text{சீக}^n xdx = \frac{1}{n-1}\text{சீக}^{n-2}x \text{ தான் } x + \frac{n-2}{n-1}\int \text{சீக}^{n-2}xdx$.

5.7 இயக்கவிசையியலுக்குப் பிரயோகங்கள். தொகையிடுதலைத் துணைக்கொண்டு வேகவளர்ச்சி, அல்லது வேகம் நேரத்தின், அல்லது தூரத்தின் ஒரு தந்த சார்பாயிருக்கின்ற இயக்க விசையியற் கணக்குக்களை நாம் தீர்க்கலாம்.

உதாரணங்கள்.

(i) **மாறுவேகவளர்ச்சி f ஒடு கூடிய இயக்கச் சூத்திரத்தை நிறுவல்.** u என்பது நேரம் $t=0$ இலுள்ள வேகமாகுக ; v என்பது அடைந்த வேகமாயும் s என்பது நேரம் t இற் சென்ற தூரமாயும் இருக்க. 3.52 ஆல் வேகவளர்ச்சி dv/dt ; ஆகவே,

$$\frac{dv}{dt} = f.$$

இங்கு f என்பது மாறுவேகவளர்ச்சி.

தொகையிடுதல் தருவது $v = ft + C$.

இங்கு, C என்பது தொகையிடுதலின் மாறிலி.

இனி, $t=0$ ஆகும்பொழுது $v=u$; ஆகவே, இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதலால், $C=u$ எனக் காண்கின்றோம் ; ஆயின்,

$$v = u + ft \qquad ......(1).$$

இனி, 3.5 இலிருந்து வேகம் v ஆனது ds/dt ; ஆகவே,

$$\frac{ds}{dt} = u + ft ;$$

தொகையிடுதலால், $s = ut + \frac{1}{2}ft^2 + C'$.

இங்கு C' என்பது தொகையிடுதலின் மாறிலி.

எனினும், $t=0$ ஆகும்பொழுது $s=0$ என அறிவோம் ; ஆகவே $C'=0$,

$$\therefore s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2 \qquad ......(2).$$

(1), (2) என்பனவற்றிலிருந்து t ஐ நீக்கல் செய்யப் பெறுவது

$$v^2 = u^2 + 2fs.$$

அல்லது 3.521 ஆல் வேகவளர்ச்சிக்கு $v\,dv/ds$ என்னுஞ் சூத்திரத்தை வழங்கி

$$v\frac{dv}{ds}=f$$

என எழுதலாம் ; இதிலிருந்து தொகையிடுதலால்,

$$\tfrac{1}{2}v^2=fs+C''.$$

இங்கு, C'' என்பது தொகையிடுதலின் மாறிலி.

எனினும், $s=0$ ஆகும்பொழுது, $v=u$; ஆகவே, இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதலால், நாம் பெறுவது

$$\tfrac{1}{2}u^2=C''.$$

ஆகவே,

$$v^2=u^2+2fs \qquad \ldots\ldots(3).$$

(ii) ஒரு துணிக்கையானது செக்கனுக்கு 7 அடி என்னும் வேகத்தோடு புறப்பட்டு, இயங்கத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் $2(3-t)$ அடி செக்கன் அலகு என்னும் வேகவளர்ச்சியோடு அசைகின்றது. (i) அத் துணிக்கை தன்வழியை மீண்டு வரத் தொடங்குமுன்னர் எவ்வளவு தூரஞ் செல்லும் என்றும், (ii) புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பி வரமுன்னர் எவ்வளவு நேரங் கழியும் என்றும், (iii) அந்நேரத்தில் அது அடையும் மிக்க கூடிய வேகம் இன்னது என்றுங் காண்க.

இங்கு, வேகவளர்ச்சி $\dfrac{d^2s}{dt^2}=6-2t$ ......(1).

ஆயின், தொகையீட்டால், $\dfrac{ds}{dt}=6t-t^2+C$;

இங்கு, C என்பது தொகையீட்டின் மாறிலி. எனினும், $t=0$ ஆகும் பொழுது, வேகம் ds/dt என்பது 7 ; ஆயின், இப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடுதலால், $C=7$ எனக் காண்கின்றேம் ;

ஆயின்,

$$\frac{ds}{dt}=7+6t-t^2 \qquad \ldots\ldots(2).$$

இன்னொரு தொகையிடுதல் தருவது

$$s=7t+3t^2-\tfrac{1}{3}t^3+C'$$

இங்கு, C' என்பது தொகையிடுதலின் மாறிலி ; s என்பதைப் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து அளந்தோமாயின், $t=0$ ஆகும்பொழுது $s=0$ எனப் பெறுவோம் ; ஆகவே, $C'=0$; ஆயின்,

$$s=7t+3t^2-\tfrac{1}{3}t^3 \qquad \ldots\ldots\ldots(3).$$

$\dfrac{ds}{dt}=0$ ஆகும்பொழுது, அதாவது $t=-1$, அல்லது 7 ஆகும்பொழுது அத்துணிக்கை ஓய்வுக்குவரும் ; முன்னதாகிய மூலங் கணக்குக்குப் பொருந்தாது ; ஆயின், (3) இல் $t=7$ எனப் பிரதியிட $s=81\tfrac{2}{3}$ எனப் பெறுவோம். இது ஓய்வுக்கு வரமுன் சென்ற தூரமாகும். (1) இலிருந்து $t=7$ ஆகும்பொழுது வேகவளர்ச்சி -8 எனக் காண்கின்றேம் ; ஆயின், அத்துணிக்கை தன்வழியால் மீண்டுவரத் தொடங்குகின்றது ; 7 இலுங் கூடிய t இன் பெறுமானங்களுக்கு (2) இலிருந்து பெறப்படும் $(1+t)(7-t)$ என்னும் வேகம் என்றும் எதிராகும் ; ஆயின், அத்துணிக்கை தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவந்து இதே திசையிலே தொடர்ந்து அசையும். புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எடுக்கும் நேரம் (3) இல் $s=0$ எனப் பிரதியிடுதலாற் காணப்படும் ; இது தருவது

$$t=\frac{9+\sqrt{165}}{2}.$$

வேகவளர்ச்சி பூச்சியமாகிக் குறிமாறும்பொழுது, அதாவது $t=3$ ஆகும் பொழுது வெளிப் பிரயாணத்தில் மிகப் பெரிய வேகம் நிகழும் ; அப் போது $\dfrac{ds}{dt}$ என்னும் வேகம் செக்கனுக்கு 16 அடியாகும். எனினும், திரும்பிவரும் பிரயாணத்தில், வேகவளர்ச்சியும் வேகமும் நேரத்தோடு எண்ணளவிற் கூடுதலுறும் ; கூறப்பட்ட நேரவிடையில் அடைந்த மிகப் பெரிய வேகம் அந்நேரவிடையின் முடிவில் உள்ளதாகும். இப்பெறு மானத்தை (2) இற் பிரதியிட வருவது

$$\frac{ds}{dt}=-\tfrac{1}{2}(55+3\sqrt{165})=-46{\cdot}77 \text{ அடி செக்கனுக்கு.}$$

(iii) ஒரு துணிக்கையானது தூரத்தோடு ஒருசீராய்க் குறைகின்ற வேகவளர்ச்சியோடு 100 அடி தூரத்திற்கு அசைந்தது. அதன் வேக வளர்ச்சி புறப்படும்பொழுது 10 அடி செக்கன் அலகாயும் 100 அடி தூரத்திற் பூச்சியமாயும் இருந்தது. அதன் ஆரம்ப வேகம் செக்கனுக்கு 45 அடியாயின், அதன் ஈற்று வேகம் என்ன ?

அதன் வேகவளர்ச்சி தூரம் s ஓடு ஒருசீராய்க் குறைகின்றமையால், a, b என்பன மாறிலிகளாயுள்ள $a-bs$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள ஒரு கோவையால், அது குறிக்கப்பட வேண்டும்.

இங்கு, தரவுகள் நேரத்தை யன்றித் தூரத்தையே உள்ளடக்குகின்றன ; ஆதலால், வேகவளர்ச்சியைத் தூரமாற்றவீதம் என உணர்த்துஞ் சூத்திரத்தை வழங்கிப் பின்வருமாறு எழுதுவோம் :

$$v\frac{dv}{ds}=a-bs.$$

எனினும், $s=0$ ஆகும்பொழுது, வேகவளர்ச்சி $v\dfrac{dv}{ds}=10$; ஆகவே, $a=10$; $s=100$ ஆகும்பொழுது, $v\dfrac{dv}{ds}=0$; ஆகவே, $a-100\,b=0$; ஆயின், $b=\frac{1}{10}$; எனின்,

$$v\frac{dv}{ds}=10-\frac{s}{10}.$$

தொகையிடுதலால், நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{2}v^2=10\,s-\frac{1}{20}s^2+C.$$

இங்கு, C என்பது தொகையிடுதலின் மாறிலி எனினும் $s=0$ ஆகும்பொழுது $v=45$; ஆகவே,

$$C=\frac{1}{2}\times 45^2=\frac{2025}{2};$$

$$\text{ஆயின்,}\quad v^2=20\,s-\frac{1}{10}s^2+2025.$$

எனின், $s=100$ ஆகும்பொழுது, $v=55$; ஆகவே, ஈற்றுவேகஞ் செக்கனுக்கு 55 அடி.

5.71. பயிற்சிகள்.

1. ஒரு துணிக்கை நேரம் $t=t_0$ இற்புறப்பட்டு $\dfrac{ds}{dt}=u-g(t-t_0)$ ஆலே தரப்பட்ட வேகத்தோடு அசைகின்றது. அது ஓய்வடையுமுன் எவ்வளவு தூரஞ் செல்லுமெனக் காண்க.

2. ஒரு துணிக்கை நேரம் $t=0$ இல் வேகம் u ஓடு புறப்பட்டு

$$\frac{d^2s}{dt^2}=a+bt$$

என்பதாலே தரப்பட்ட வேக வளர்ச்சியோடு அசைகின்றது. நேரம் t இற் செல்லுந் தூரத்தைக் காண்க.

3. ஒரு துணிக்கைக்கு நேரம் t இல் அளந்து கண்ட வேகவளர்ச்சி $6(1+2t)$ ஆகும்; 6 நேர அலகுகளில் 552 நீள அலகுகள் செல்லுமாயின், அது என்ன வேகத்தோடு அசையத் தொடங்கல் வேண்டும்?

4. a, b என்பன மாறிலிகளாயிருப்ப, ஒரு துணிக்கைக்கு நேரம் t இல் அளந்து கண்ட வேகவளர்ச்சி $a-2\,bt$ அடி செக்கனலகு. அது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அதன் இயக்கத்தின் முதலிரண்டு செக்கன்களில் முறையே 12 அடி, 14 அடி செல்லுமாயின், a, b என்னும் மாறிலிகளைக் காண்க.

5. ஒரு துணிக்கை $2(a-s)$ என்னும் வேகவளர்ச்சியோடு அசைகின்றது; இங்கு s என்பது புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம். u என்பது ஆரம்ப வேகமெனின், தூரம் s சென்றபின் அதன் வேகம் என்ன?

6. ஒரு துணிக்கை $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{s+1}$ என்பதாலே தரப்பட்ட வேகத்தோடு அசைகின்றது; இங்கு s என்பது புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரத்தை அடிகளிலே தருகின்றது; நேரவலகு ஒரு செக்கன். 12 அடி செல்ல அது எத்தனை செக்கன் எடுக்கும்?

7. a, b என்பன மாறிலிகளாயிருப்ப, ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டுத் தான் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து தூரம் s இல் இருக்கும்போது தன் வேகவளர்ச்சி $a-bs$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. அதன் உயர்வு வேகத்தைக் காண்க; அது ஓய்வுக்கு வருமுன் எவ்வளவு தூரம் அசையும்?

8. ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டுத் தான் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து s என்னுந் தூரத்தில் இருக்கும்போது தன் வேகவளர்ச்சி $2(a-s)^3$ ஆகுமாறு அசைகின்றது; இங்கு a என்பது ஒரு மாறிலி. அதன் உயர்வு வேகத்தையும் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து அதன் மிகப் பெரிய தூரத்தையுங் காண்க.

5.8 தொகையிடுதலின் கலப்பினப் பயிற்சிகள்.

பின்வருஞ் சார்புகளைத் தொகையிடுக.

1. $\dfrac{9}{(3x-1)^3}$, $\dfrac{x^3}{x-1}$, $\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

2. $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{2x+1}{x^2+2x-3}$, $\dfrac{x-1}{2x^2+3x-2}$.

3. $\dfrac{2x+1}{x^2+1}$, $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

4. $\dfrac{2x}{\sqrt{(x^2-1)}}$, $\dfrac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)}}$, $\dfrac{2x-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

5. $\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$, $\sqrt{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}$, $\dfrac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

6. $\dfrac{x+1}{2x^2+3x+2}$, $\dfrac{x-1}{2x^2+3x+1}$, $\dfrac{2x+7}{4x^2+4x+3}$.

7. $\dfrac{2x+1}{\sqrt{(9x^2+6x+2)}}$, $\dfrac{3x+4}{\sqrt{(4x^2+4x-1)}}$, $\dfrac{2x-1}{\sqrt{(x^2-2x+2)}}$.

8. $\dfrac{\text{கோசை}x}{a+b\ \text{சைன்}x}$, $\dfrac{\text{சைன்}x}{\text{கோசை}^6x}$, $\dfrac{\text{சைன்}^{-1}x}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

9. $\dfrac{x^2}{x^6+x^3-2}$, $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x(1+x)^{\frac{1}{3}}$.

10. தான்^3x, சைன்^4x, $\text{சைன்}^3x\text{கோசை}^3x$.

11. $\dfrac{1}{a^2\text{கோசை}^2x+b^2\text{சைன்}^2x}$, $\dfrac{1}{\text{சைன்}^2x\ \text{கோசை}^2x}$.

12. $x^2\sqrt{(a^2-x^2)}$, $\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $x^3\sqrt{(x^2+a^2)}$.

13. $\dfrac{\text{தான்}\ x}{a+b\ \text{தான்}^2x}$, $\dfrac{b+a\ \text{கோசை}\ x}{a+b\ \text{கோசை}\ x}$.

14. x^2e^x, $x^2\log x$.

15. $\text{சீக}^{-1}x$, $x\ \text{சீக}^{-1}x$, $x\ \text{தான்}^2x$.

16. $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$, $\dfrac{\text{சைன்}(\log x)}{x}$.

17. ஒரு துணிக்கை உற்பத்தியிலிருந்து μa என்னும் வேகத்தோடு புறப்பட்டு x என்னுந் தூரஞ் சென்றபோது தன் வேகம் $\mu\sqrt{(a^2-x^2)}$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. அது ஓய்வடையுமுன் கழியும் நேரத்தைக் காண்க.

18. v_0, k என்பன மாறிலிகளாயிருப்ப ஒரு துணிக்கையானது, தன் வேகம் $v=v_0e^{-ks}$ ஆலே தரப்படுமாறு அசைந்தால், அதன் வேக வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமான ஒரு வேகத்தேய்வு அதற்கு இருக்குமெனக் காட்டுக ; உற்பத்தியிலிருந்து s என்னுந் தூரத்தை அடைய எடுத்த நேரத்தையுங் காண்க.

19. a, n என்பன மாறிலிகளாயிருப்ப, ஒரு துணிக்கை $t=0$ ஆகும் பொழுது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு நேரம் t இல் தன் வேகவளர்ச்சி $n^2a\text{கோசை}nt$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. $\dfrac{\pi}{n}$ என்னும் நேர விடைகளில் அதன் வேகம் பூச்சியமாகும் என்றும் அதன் முனை நிலைகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் $2a$ என்றும் நிறுவுக.

20. f, k என்பன மாறிலிகளாயிருப்ப, ஒரு துணிக்கை $t=0$ ஆகும் பொழுது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு வேகவளர்ச்சி fe^{-kt} ஒடு அசைகின்றது. அதன் வேகம் ஒருபோதும் f/k என்பதிலுங் கூடுதலுறாதென நிறுவுக ; நேரம் t இற் செல்லுந் தூரத்திற்கு ஒரு சூத்திரங் காண்க.

21. ஒரு துணிக்கையானது நேரம் t இல் தன் வேகம் $e^{-at}\text{சைன்}bt$ ஆகுமாறு அசைகின்றது. நேரம் t இல் அது செல்லுந்தூரம் $\{b(1-e^{-at}\text{கோசை}\ bt)-ae^{-at}\text{சைன்}\ bt\}/(a^2+b^2)$ என நிறுவுக.

22. $a>b$ ஆகும்பொழுது

$$\int\frac{dx}{a+b\ \text{கோசை}\ x}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\text{கோசை}^{-1}\frac{a\ \text{கோசை}\ x+b}{a+b\ \text{கோசை}\ x}$$

எனக் காட்டுதற்கு $(a\ \text{கோசை}\ x+b)/(a+b\ \text{கோசை}\ x)=\text{கோசை}\ \theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன் படுத்துக.

23. $a<b$ ஆகும்பொழுது

$$\int\frac{dx}{a+b\ \text{கோசை}\ x}=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\ \text{அகோசை}^{-1}\frac{a\ \text{கோசை}\ x+b}{a+b\ \text{கோசை}\ x}$$

எனக் காட்டுதற்கு $(a\text{கோசை}x+b)/(a+b\text{கோசை}x)=\text{அகோசை}\ \theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துக.

24. $a>b$ ஆகும்பொழுது

$$\int\frac{dx}{a+b\ \text{சைன்}\ x}=\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{சைன்}^{-1}\frac{a\ \text{சைன்}\ x+b}{a+b\ \text{சைன்}\ x}$$ என்றும்,

$b>a$ ஆகும்பொழுது

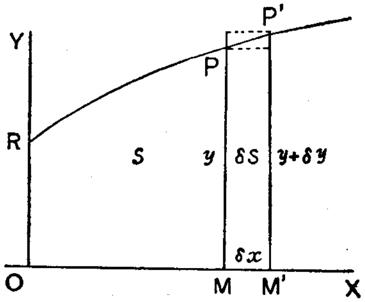
$$\int\frac{dx}{a+b\ \text{சைன்}\ x}=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\ \text{அகோசை}^{-1}\frac{a\ \text{சைன்}\ x+b}{a+b\ \text{சைன்}\ x}$$ என்றும்

நிறுவுக.

அத்தியாயம் VI

வரையறுத்த தொகையீடுகள்

6.1. பரப்புக்கள். RP என்பது y அச்சை R இல் வெட்டுகின்ற $y=f(x)$ என்னுஞ்சமன்பாடுடைய ஒரு வளைகோடாகுக. அவ்வளைகோட்டாலும், ஒரு நிலைத்தூரம் PM ஆலும், அச்சுக்களின் பகுதிகள் OM, OR என்பன வற்றாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக்காணும் பிரச்சினையை ஆராய்க. இப்பரப்பு $ORPM$ என்பதை S ஆற் குறிக்க.



P என்பது (x, y) என்னும் புள்ளியாயும், P' என்பது அவ்வளைகோட்டில் $(x+\delta x,\ y+\delta y)$ என்னும் ஓர் அண்மைப் புள்ளியாயும் இருக்க. எனின், $P'M'$ என்னும் நிலைத்தூரம் $y+\delta y$ ஆகும்; MM' என்பது δx ஆகும். அன்றியும், வளைவான எல்லை PP' ஓடுகூடிய $MPP'M'$ என்னும் பரப்பு x இல் δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்திற்கு ஒத்த S இன் ஏற்றமாகும்; ஆகவே, அது δS என்பதாற் குறிக்கப்படும். இனி, இவ்வுருவம் $MPP'M'$ என்பதற்கு அடி MM' ஆயும் உயரம் MP ஆயுமுள்ள செவ்வகப் பரப்பிற்கும் அடி MM' ஆயும் உயரம் MP' ஆயுமுள்ள செவ்வகப்பரப்பிற்கும் இடையான ஒரு பரப்பு உண்டு; ஆயின்,

δS என்பது $y\delta x$ இற்கும் $(y+\delta y)\ \delta x$ இற்கும் இடையிற் கிடக்கும். அல்லது, $\delta s/\delta x$ என்பது y இற்கும் $y+\delta y$ இற்கும் இடையிற் கிடக்கும்;

இனி, δx என்பது பூச்சியத்தை அணுகுக; எனின், δy என்பதும் பூச்சியத்தை அணுகும்; $\delta s/\delta x$ என்பது y இற்கும் $y+\delta y$ இற்கும் இடையிற் கிடப்பதால்,

$$L_{\delta x\to 0}\frac{\delta S}{\delta x}=y, \text{ அல்லது } \frac{dS}{dx}=y=f(x).$$

தொகையிடுதலின் குறியீட்டிற் சமமான கூற்று.

$$S=\int f(x)dx+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

இங்கு, C என்பது தொகையிடுதலின் மாறிலி.

எனின், $F'(x)=f(x)$, அல்லது $F(x)=\int f(x)dx$ ஆகுமாறு $F(x)$ என்பது ஒரு சார்பாயின்,

$$S=F(x)+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

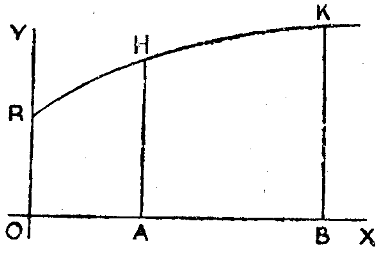
மாறிலி C என்பது x (அல்லது OM)$=0$ ஆகும்போது $S=0$ என்பதிலிருந்து இப்போது காணப்படலாம்; ஆயின், (2) இல் $x=0$ எனப் பிரதியிட வருவது

$$0=F(0)+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

(2) இலிருந்து (3) ஐக் கழிக்க வருவது

$$S=F(x)-F(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

இனி, AH, BK என்பன தம் இடைத்தூரங்கள் $OA=a$, $OB=b$ ஆகவுள்ள புள்ளிகளில் அதே வளைகோட்டிற்கு எவையேனும் இரு நிலைத்தூரங்களாகுக.



எனின், (4) இலிருந்து,

பரப்பு $ORKB=F(b)-F(0)$,

பரப்பு $ORHA=F(a)-F(0)$;

ஆகவே, கழித்தலால்,

$$\text{பரப்பு } AHKB=F(b)-F(a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

ஆகவே, x-அச்சினாலும், $y=f(x)$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $x=a$, $x=b$ என்பனவற்றிலுள்ள இரு நிலைத்தூரங்களாலும் எல்லையுற்ற பரப்பானது $F(x)$ என்னும் வடிவத்தில் $\int f(x)dx$ என்பதைக் கண்டு முறையே a, b என்னும் பெறுமானங்களைப் பிரதியீடு செய்து $F(b)$ இலிருந்து $F(a)$ ஐக் கழிப்பதாற் பெறப்படும். இது a, b **என்னும் எல்லைகளுக்கிடையே** தொகையீட்டை எடுத்தலெனப்படும்; வழக்கமான குறியீடு,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

$$\text{இங்கு } F'(x)=f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

இவ்வழியால் எல்லைகளுக்கிடையில் எடுக்கப்படுந் தொகையீடு **வரையறுத்த தொகையீடு** எனப்படும்; b, a என்பன முறையே **மேலெல்லை, கீழெல்லை** எனப்படும்.

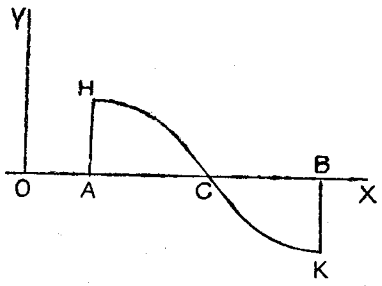
6.11. ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டின் பெறுமானக் கணிப்பில் செய்கையைப் பின்வருமாறு எழுதுதல் வழக்கம்:

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

இங்கு $\Big[\quad\Big]_a^b$ என்பதன் பொருள் பகரவடைப்புக்களிலுள்ள சார்பில் x இற்காக முறையே b, a என்னும் பெறுமானங்கள் பிரதியிடப்பட்டுப் பின்னதாகிய பெறுமானம் முன்னதிலிருந்து கழிக்கப்படவேண்டும் என்பதே. உதாரணமாக,

$$\int_a^b x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4).$$

6.12. 6.1 இல் விளக்கப்பட்டதுபோல ஒரு பரப்பைக் கணிப்பதற்கு $\int_a^b ydx$, அல்லது $\int_a^b f(x)dx$ என்னுஞ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகையில், வளைகோடு x – அச்சை $x = a$, $x = b$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் வெட்டினல், தொகையீடு அச்சுக்கு மேலுங் கீழுமுள்ள பரப்புக்களின் வித்தியாசத்தைக் குறிக்குமென்பது அறிதல் பிரதானமானது. உதாரணமாக, வளைகோடு அச்சை C இல் வெட்டுகின்ற அடுத்துள உருவத்தில், $OA = a$ ஆயும் $OB = b$ ஆயுமிருந்தால்,

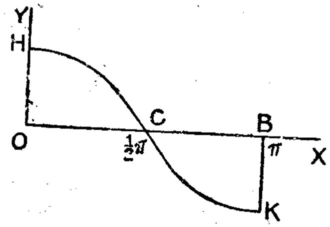


$$\int_a^b f(x)dx = \text{பரப்பு } AHC - \text{பரப்பு } CBK.$$

அதற்குக் காரணம் C இலிருந்து B வரைக்குமுள்ள அவ்வளைகோட்டின் நிலைத்தூரங்கள் எதிர் என்பதே.

உதாரணம்.

$$\int_0^{\pi} \text{கோசை}x dx = \Big[\text{சைன்}x\Big]_0^{\pi} = 0;$$

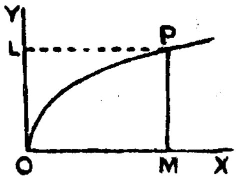


இதன்பொருள் HCK என்பது 0, π என்பனவற்றிற்கு இடையில் C இல் அச்சை வெட்டுகின்ற கோசைன் வளைகோடெனின்,

$$\text{பரப்பு } OHC - \text{பரப்பு } CBK = 0.$$

6.13. உதாரணம். நேர்க்கால் வட்டத்தில் $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவாலும் $x = h$ என்னும் நிலைத்தூரத்தாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

வேண்டிய பரப்பு வரிப்படத்திலுள்ள OMP என்னும் பரப்பு ; இங்கு $OM = h$. நிலைத்தூரம் $y = 2\sqrt{(ax)}$



ஆயிருத்தலால்

$$\text{பரப்பு} = \int_0^h 2\sqrt{(ax)}dx = \left[\tfrac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^h$$

$$= \tfrac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}h\sqrt{(4ah)}$$

$$= \tfrac{2}{3}OM.\,MP$$

$$= OMPL \text{ என்னுஞ் செவ்வகத்தின் } \tfrac{2}{3}.$$

6.14. பயிற்சிகள்.

1. பின்வரும் வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\int_1^2 (x^2 - 1)dx$; (ii) $\int_0^a (a^2 - x^2)dx$;

(iii) $\int_2^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$; (iv) $\int_0^1 (ax + b)^n dx$;

(v) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^3}$; (vi) $\int_0^8 \left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)^2 dx$;

(vii) $\int_0^1 e^{3x}dx$; (viii) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$;

(ix) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$; (x) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)}}$;

(xi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^2 x dx$; (xii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^3 x dx$.

2. நேர்க்கால் வட்டத்தில் $y = x^3$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $x = 3$ இலுள்ள நிலைத்தூரத்தாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

3. x – அச்சினாலும் $y = \text{சைன்}\, x$ என்னும் வளைகோட்டின் ஒரு முறுக்காலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

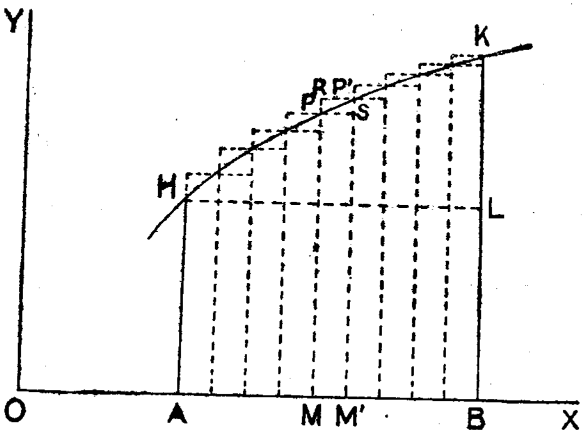
4. நேர்க்கால் வட்டத்தில் $y = x^{\frac{3}{2}}$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $x = 4$, $x = 9$ என்னும் நிலைத்தூரங்களாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

5. நேர்க்கால் வட்டத்தில் $xy = c^2$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $x = a$, $x = b$ என்னும் நிலைத்தூரங்களாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

6.2. வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாக.

6.1 என்பதைத் திரும்பிப் பார்க்க HK என்பது $y = f(x)$ என்னும் வளைகோடாயும், AH, BK என்பன $x = a$, $x = b$ என்பனவற்றிலுள்ள நிலைத்தூரங்களாயுமிருந்தால், பரப்பு $AHKB$ என்பது $\int_a^b f(x)dx$ எனக் காண்போம்.

இனி, எவ்வாறு பரப்பை ஒரு குறிப்பிட்ட கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் குறிக்கலாமென்றும் அதுபற்றி எவ்வாறு ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டிற்கு வேறொரு கருத்துப் பெறலாம் என்றுங் காட்டுவோம். AB இன் நீளம் $b - a$. AB ஆனது ஒவ்வொன்றும் h நீளமான n என்னும் ஒரு பெருந்தொகையான சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுக ; ஆயின், $nh = b - a$. வளைகோடு HK ஐச் சந்திக்கும்படி AB இன் பிரிவுப் புள்ளிகளிலிருந்து நிலைத்தூரங்கள் வரைக. நிலைத்தூரங்களும் வளைகோடும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகள் எல்லாவற்றிற்கு மூடாக OX இற்குச் சமாந்தரங்கள் வரைதலால், உருவத்திற் காட்டியவாறு செவ்வகத் தொகுதிகள் வரைக. MM' என்பது AB பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகளுள் யாதொன்றுயும், MP, $M'P'$ என்பன அவ்வளைகோட்டிற்கு நிலைத்தூரங்களாயும், OX இற்குச் சமாந்தரமான PS, $P'R$ என்பன, $M'P'$ MP என்பனவற்றை முறையே S, R என்பனவற்றிற் சந்திக்குங் கொடுகளாயுமிருந்தால், காணவேண்டிய பரப்பின் $MPP'M'$ என்னுந் துண்டம் PM' என்னுஞ் செவ்வகத்திலும் பெரிதாயும் $P'M$ என்னுஞ் செவ்வகத்தாலுஞ் சிறிதாயுமிருக்கும். பரப்பு



$AHKB$ என்பது பிரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு துண்டத்திற்கும் ஒத்த ஓர் கூற்று உண்மையாகும் ; ஆகவே, கூட்டலால், $AHKB$ என்னும் முழுப் பரப்பும் PM' போன்ற செவ்வகத் தொகுதி ஒன்றின் கூட்டுத் தொகைக்கும் $P'M$ போன்ற செவ்வகத் தொகுதி ஒன்றின் கூட்டுத் தொகைக்கும் இடையிற் கிடக்கும் ; இவற்றை உட்டொகுதி வெளித்தொகுதிகளெனக் கூறுவோம்.

இனி $nh = b - a$, ஆகவே, n கூடுதலுற h குறைதலுறும் ; அதாவது AB ஆனது பிரிக்கப்பட்ட பகுதிகளின் தொகையை நாம் கூடுதலுறச் செய்தால், நாம் செவ்வகங்களின் அகலங்களைக் குறைதலுறும்படியுஞ் செய்கின்றோம், உருவத்தைப் பார்ப்பதால், செவ்வகவுட்டொகுதிக்கும் வெளித்தொகுதிக்கும் உள்ள முழுப்பரப்பு வித்தியாசமும் உயரம் LK ஆயும் அகலம் h ஆயுமுள்ள ஒரு செவ்வகமெனக் கொள்கின்றோம் ; இங்கு L என்பது H இற்கூடாக BK ஐச் சந்திக்குமாறு OX இற்கு ஒரு சமாந்தரம் வரைவதாற் காணப்படும். ஆயின், $n \to \infty$ எனின், $h \to o$; செவ்வகவுட்டொகுதிக்கும் வெளித்தொகுதிக்குமுள்ள பரப்புவித்தியாசம் பூச்சியத்தை அணுகும் ; அதற்குக் காரணம் அதன் அளவு $LK \times h$ என்பதும் LK மாறிலி என்பதுமே, எனினும், $h \to o$. ஆயின், வளைவான எல்லையொடு கூடிய $AHKB$ என்னும் பரப்பு, வரையறையின்றிச் செவ்வகங்களினுடைய தொகை கூடுதலுறவும் அகலங் குறைதலுறவும், அவற்றின் உட்டொகுதியினுடைய, அல்லது வெளித்தொகுதியினுடைய பரப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகும்.

MM' என்பது முனை A இலிருந்து எண்ண, AB இன் r ஆம் பகுதியாகுக.

ஆயின்,

$$OM = a + (r-1)h \; ; \; MP = f(a + \overline{r-1}\,h).$$

அதுபோல, $OM' = a + rh$; $M'P' = f(a + rh)$.

ஆகவே, பரப்பு $PM' = hf(a + \overline{r-1}\,h)$;

பரப்பு $P'M = hf(a + rh)$.

எனின், செவ்வகவுட்டொகுதியின் முழுப்பரப்பும்,

$$h\{f(a) + f(a+h) + \dots + f(a + \overline{r-1}\,h) + \dots + f(a + \overline{n-1}h)\};$$

வெளித் தொகுதியின் முழுப் பரப்பும்

$$h\{f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+rh) + \dots + f(a+nh)\}.$$

பரப்பு $AHKB$ இன் அளவாகிய $\int_a^b f(x)\,dx$ என்பது $h \to 0$ ஆயிருப்ப, அல்லது $n \to \infty$ ஆயிருப்ப $nh = b - a$ ஆயின், மேற்கூறிய கூட்டுத்தொகை ஒவ்வொன்றின் எல்லையுமாகும்.

இரு கூட்டுத்தொகைகளும் ஒரே எல்லையை அணுகுகின்றன எனக் கேத்திரகணித முறையாற் கண்டோம்; இதனை வேறொரு முறையாகக் காணுதலும் எளிது: அவ்விரு கூட்டுத்தொகைகளின் வித்தியாசம்

$$h\{f(a+nh)-f(a)\}\ ;\ a+nh=b\ ;$$

ஆயின், வித்தியாசம் $h\{f(b)-f(a)\}$; $h \to o$, காரணி $f(b)-f(a)$ என்பது மாறாதிருக்கும்; ஆயின், பெருக்கம் $h\{f(b)-f(a)\}$ பூச்சியத்தை அணுகும்.

6.3. கூடிய பொதுமைப்பாடுடைய வரைவிலக்கணம். $\int_a^b f(x)dx$ என்னும்

வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு குறித்த தொகையின் எல்லை என்றும், அக்கூட்டுத் தொகையிலுள்ள அறிகுறியான உறுப்பு MM' என்னும் அடியையும் MP, அல்லது $M'P'$ என்னும் உயரத்தையும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு என்றும், அறிகுறியான செவ்வகத்தின் உயரத்தை MP என்றுதல் $M'P'$ என்றுதல் எடுத்தால் முடிபுபற்றி வேற்றுமை யாதும் இல்லை என்றுஞ் சற்றுமுன் கண்டோம். ஆகவே, அக்கூட்டுத்தொகை அணுகும் எல்லையைத் தாக்காது MP இற்கும் $M'P'$ இற்கும் இடையான யாதுமொரு நிலைத் தூரத்தை அச்செவ்வகத்தின் உயரமாக நாம் எடுக்கலாம்.

நிலைத்தூரமானது $f(x)$ இன் பெறுமானத்திற்காக நிற்கின்றதென ஞாபகத்தில் வைக்கப் பின்வருமாறு $\int_a^b f(x)dx$ இற்குக் கூடியபொதுமைப் பாடுடைய வரைவிலக்கணங் கூறுமாறு செலுத்தப்படுகின்றோம்.

x – அச்சின்மீது a இலிருந்து b இற்கு உள்ள தூரத்தை யாதுமொரு தொகைப் பகுதிகளாகப் (n பகுதிகள் என்க) பிரிக்க; அவற்றை

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots.\ \delta_r,\ \ldots.\ \delta_n$$ என்பனவற்றாற் குறிக்க.

இப்பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்து அவ்வாறு தேர்ந்த ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f(x)$ இன் பெறுமானங்களை எடுக்க. δ_1 இலே தேர்ந்தெடுத்த புள்ளியில் $f(x)$ இன் பெறுமானம் f_1 ஆயும் δ_2 இல் உள்ளதில் f_2 ஆயும் இவ்வாறே பிறவும் இருக்க. f_r என்பது δ_r இலே தேர்ந்தெடுத்த புள்ளியில் $f(x)$ இன் பெறுமானத்தைக் குறிக்கும். பின்னர்க் கூட்டுத்தொகை

$$f_1\delta_1+f_2\delta_2+\ldots.+f_r\delta_r+\ldots.+f_n\delta_n$$

என்பதை ஆக்குக.

இனி, n என்பது முடிவிலியை அணுகுக; ஆயின், பகுதிகளினது தொகை கூடுதலுறும்; அவற்றினுடைய நீளங்கள் வரையறையின்றிக் குறைதலுறும்; அப்போது மேற்கூறிய கணக்கின் எல்லை $\int_a^b f(x)dx$ என்னும் வரையறுத்த தொகையீடு என வரையறுக்கப்படும்.

6.2 இற் செய்ததுபோல $b-a$ என்னும் இடையை நாம் பிரிக்கும் பகுதிகள் δ_1, δ_2, . . δ_n என்பன சமபகுதிகளென நாம் சொல்லவில்லை என்பதை மாணுக்கன் குறிப்பாக அறிவான்; அச்செவ்வகங்கள் எல்லாம் ஒரே அகலங் கொண்டனவாயிருந்தாலுங் கொள்ளாதனவாயிருந்தாலும் அச்செவ்வகவுட்டொகுதி வெளித்தொகுதிகள் என்று கூறப்படுவனவற்றின் பரப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரே எல்லையை அணுகுமென ஒரு சிற்றுராய்வு காட்டும். உண்மையாக, **6.2** இன் உருவத்தைத் திரும்பிப்பார்க்க, அகலங்கள் சமமல்லாதபொழுது, கூட்டுத்தொகைகளின் வித்தியாசம் அச்செவ்வகங்களுள் அகலம் மிகக் கூடியதன் அகலத்தையும் LK என்னும் உயரத்தையுங் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்திலுங் குறைந்ததாய் இருக்கும். பின் n ஆனது கூடுதலுற எல்லாச் செவ்வகங்களினுடைய அகலங்களும் பூச்சியத்தை அணுகும்; ஆயின் வித்தியாசம் பூச்சியமாகும்.

எனினும், $n \to \infty$ ஆக, கூட்டுத்தொகை

$$f_1\delta_1+f_2\delta_2+\ldots.+f_n\delta_n$$

என்பது ஓர் எல்லையை அணுகுமென நாம் நிறுவவில்லை என்பதைக் கவனித்தல் மிகப் பிரதானமானது. அது ஓரெல்லையை அணுகும், அல்லது அணுகாது என்பது $f(x)$ என்னுஞ் சார்பின் வடிவத்தைச் சாரும்; அவ்வெல்லை உண்டு என்பதை நிச்சயப்படுத்துதற்குப் போதிய நிபந்தனைகளை ஆராய்தல் இந்நூலின் இலக்குக்கு அப்பாற்பட்டது. எனினும், $f(x)$ என்னுந் தொகையீட்டுச் சார்பு **6.2** இற் காட்டப்பட்ட வடிவத்திலுள்ள ஓர் எளிய தொடர்ச்சியான வளைகோட்டாற் குறிக்கப்படும்பொழுது, அவ்வெல்லை உண்டு; அது வளைகோட்டிற்குக் கீழுள்ள பரப்பின் அளவாகும்.

6.4. வரையறுத்த தொகையீடுகளைப் பற்றிய தேற்றங்கள்.

(i) $$\int_b^a \mathbf{f(x)dx} = -\int_a^b \mathbf{f(x)dx}.$$

அதற்குக் காரணம் $\int f(x)dx = F(x)$ எனின்,

$$\int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b)$$ என்பதும்,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$ என்பதுமே,

அன்றி, **6.3** இற் போலத் தொகையீடுகளைக் குறித்த கூட்டுத்தொகைகளின் எல்லைகளாகக் கொள்ள, a என்பது x – அச்சில் b இன் இடப்பக்கத்தில் இருந்தால், a இலிருந்து b வரைக்கும் உள்ள இடை ஒரு நேர் நீளமாகும்; அதனை நாம் பிரிக்கும் δ என்பன எல்லாம் தன்

னெல்லை $\int_a^b f(x)dx$ ஆன கூட்டுத்தொகையில் நேராகும். எனினும், அந்த a, b என்பனவற்றோடு கூடிய $\int_b^a f(x)dx$ இல் b இலிருந்து a வரைக்குமுள்ள இடை ஓர் எதிர் நீளமாகும்; அதற்குக் காரணம் b என்பது a இன் வலப்பக்கத்தில் இருப்பதே; இரு வகைகளிலும் முற்கூறிய சிறு பிரிவுப் புள்ளிகளையே எடுத்தால், இவ்வகையிலுள்ள δ என்பன எதிர் நீளங்களாகக் கொள்ளப்படவேண்டும்; இருவகைகளிலும் $f(x)$ இன் ஒத்த பெறுமானங்கள் சமமாகும்; ஆகவே, தம்மெல்லைகள் தொகையீடுகளைக் குறிக்கின்ற கூட்டுத்தொகைகள் எதிர்க்குறியோடு பொருந்தினுஞ் சமமாகும்; அதுபற்றித் தேற்றம் பெறப்படும்.

(ii) $$\int_a^c \mathbf{f(x)dx} + \int_c^b \mathbf{f(x)\,dx} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx}.$$

அதற்குக் காரணம் மேற்கூறியவாறு

$$\int f(x)dx = F(x) \text{ எனின்,}$$

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) \text{ என்பதும்,}$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c) \text{ என்பதுமே.}$$

ஆயின், $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$

a இலிருந்து c வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையொடு c இலிருந்து b வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையைக் கூட்ட வருவது a இலிருந்து b வரைக்குமுள்ள கூட்டுத்தொகையைத் தருதலால், ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டை ஒரு கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் கொள்ளுங் கொள்கையிலிருந்து இத்தேற்றமும் எளிதாகப் பெறப்படும். தொகையீடுகள் உண்டெனின், c என்பது a, b என்பனவற்றிற்கு இடையில் இருந்தாலும் இராவிட்டாலும் இத்தேற்றம் உண்மையாகும்.

(iii) $$\int_o^a \mathbf{f(a-x)dx} = \int_o^a \mathbf{f(x)dx}.$$

இத்தேற்றத்தை நிறுவுதற்கு $a - x = u$ ஆகுக; ஆயின் $-dx = du$;

$$\text{எனின், } \int f(a-x)dx = -\int f(u)du\,.$$

ஆயின், எல்லைகளைப்பற்றி, x ஆனது தன் கீழெல்லையாகிய o இற்குச் சமனாகும்பொழுது $u = a$; x ஆனது தன் மேலெல்லையாகிய a இற்குச் சமனாகும்பொழுது $u = o$; ஆகவே,

$$\int_o^a f(a-x)\,dx = -\int_a^o f(u)du = \int_o^a f(u)du \quad (i) \text{ ஆல்;}$$

பின்னர், ஒரு வரையறுத்த தொகையீடு அதன் எல்லைகளின் ஒரு சார்பாயிருத்தலால், நாம் u என்பதையாதல், x என்பதையாதல் மாறியாகக் கொண்டால் அதனால் ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டின் பெறுமானம் வேறுபடாது; முடிபைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்;

$$\int_o^a f(a-x)dx = \int_o^a f(x)dx.$$

உதாரணமாக,

$$\int_o^{\frac{1}{2}\pi} f(\text{சைன் } x)dx = \int_o^{\frac{1}{2}\pi} f\left(\text{சைன்}(\frac{\pi}{2} - x)\right)dx = \int_o^{\frac{1}{2}\pi} f(\text{கோசை } x)dx.$$

$\int_o^{\frac{1}{2}\pi} f(\text{சைன் } x)dx$ ஆனது 0, $\frac{1}{2}\pi$, என்பனவற்றிற்கிடையே எடுக்கப்பட்ட சைன்x இன் பெறுமானங்களைக் கொண்ட உறுப்புக்களையுடைய ஒரு குறித்த கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகும் என்னும் ஆராய்வினாலும் இத்தேற்றந் தெளிவாகும்; $\int_o^{\frac{1}{2}\pi} f(\text{கோசை } x)dx$ ஆனது தன் உறுப்புக்கள் சைன்x இன் பெறுமானங்களுக்குப் பதிலாக கோசைx இன் பெறுமானங்களைக் கொண்ட ஓர் ஒத்த கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகும்; 0 இற்கும் $\frac{1}{2}\pi$ இற்கும் இடையில் கோசைx இன் பெறுமானங்கள் வரிசை முன்பின்னாக்கப்பட்ட சைன்x இன் பெறுமானங்களுக்குச் சமம்; ஆயின் இரு கூட்டுத்தொகைகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

6.5. ஒற்றைச் சார்புகளும் இரட்டைச் சார்புகளும். x இன் ஒரு சார்பில் x இன் குறியை மாற்றினால், அது வேறொருவாறும் மாறாது அச்சார்பின் குறியை மாத்திரம் மாற்றுமாயின், அச்சார்பு x இன் **ஒற்றைச் சார்பு** எனப்படும்; உதாரணமாக, $f(-x) = -f(x)$ எனின், $f(x)$ என்பது ஒற்றையாகும்; இவ்வாறு $(-x)^3 = -x^3$ ஆதலால், x^3 என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு; எனினும் $(-x)^3 + 1$ என்பது $-(x^3+1)$ என்பதனோடு ஒன்றாகாத $-x^3+1$ என்பதற்குச் சமமாதலால், x^3+1 என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாகாது.

x இன் ஒரு சார்பில் x இன் குறியை மாற்றினால், அது அச்சார்பை மாறாது விடுமாயின், அச்சார்பு x இன் **இரட்டைச் சார்பு** எனப்படும்;

உதாரணமாக, $f(-x)=f(x)$ எனின், $f(x)$ என்பது இரட்டையாகும். $(-x)^2=x^2$ ஆதலால், இரட்டை அடுக்குக்களை மாத்திரம் உள்ள x இன் யாதுமொரு சார்பு ஓர் இரட்டைச் சார்பாகும்.

சைன்$(-x)=-$சைன்x ஆதலால், சைன்x என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு. கோசை$(-x)=$ கோசைx ஆதலால், கோசைx என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பு.

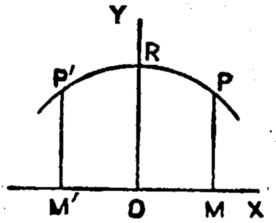
ஓர் இரட்டைச் சார்பின் வரைப்படம் $y-$அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீராகும்.

இது ஓர் உருவத்திலிருந்து தெளிவாகும்;

அதற்குக் காரணம் $OM=x$ ஆயும் $OM'=-x$ ஆயும் இருந்தால், நிலைத்தூரம்

$M'P'=f(-x)=f(x)$

$=$ நிலைத்தூரம் MP.



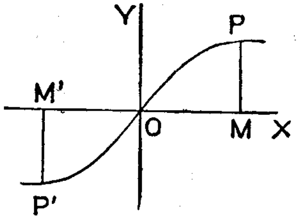
ஓர் ஒற்றைச் சார்பின் வரைப்படம் எதிர்க்கால் வட்டங்களிற் சமச்சீராகும்.

இங்கு, $OM=x$ ஆயும் $OM'=-x$ ஆயுமிருந்தால், நிலைத்தூரம்

$M'P'=f(-x)=-f(x)$

$=-$ நிலைத்தூரம் MP.

6.51. இப்போது நாம் பின்வருந் தேற்றங்களை நிறுவலாம்:



$f(x)$ என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பாயின்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx;$$

$f(x)$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயின், $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$

$OM=a$ ஆயும் $OM'=-a$ ஆயுமிருந்தால் முடிபுகள் சென்ற பிரிவின் உருவங்களிலிருந்து உடனே பெறப்படும்.

அதற்குக் காரணம், $f(x)$ ஆனது இரட்டையாயிருக்கும்பொழுது, $OM=a$ எனக்கொள்ள,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \text{பரப்பு } M'P'PM$$

$$= 2\times \text{பரப்பு } ORPM$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx;$$

$f(x)$ ஆனது ஒற்றையாயிருக்கும்பொழுது,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\text{பரப்பு } OM'P' + \text{பரப்பு } OMP$$

$$=0.$$

6.511. அம்முடிபுகள் பின்வருமாறு வகுத்தன் முறையாலும் நிறுவப்படலாம்:

6.4 (ii) இலிருந்து

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{o} f(x)\,dx+\int_o^a f(x)\,dx.$$

வலப்பக்கத்திலுள்ள இரு தொகையீடுகளுள்ளே முதலில் $x=-u$ என்னும் பிரதியீட்டால் மாறியாய் மாற்றுக; ஆயின் $dx=-du$;

$$\int f(x)\,dx=-\int f(-u)\,du;$$

எல்லைகளுக்கு $x=-a$ ஆகும்போது, $u=a$; $x=o$ ஆகும்போது $u=o$;

ஆகவே, எவ்வெழுத்து மாறியாக வழங்கப்படுகின்றதென்பது பாதகமானதன்று என்பதால்

$$\int_{-a}^{o} f(x)\,dx=-\int_a^o f(-u)\,du=\int_o^a f(-u)\,du \quad 6.4\ \text{(i) ஆல்}$$

$$=\int_o^a f(-x)\,dx.$$

ஆகவே, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_o^a f(-x)\,dx+\int_o^a f(x)\,dx;$

ஆகவே, $f(x)$ என்பது இரட்டையாயின், முடிபு $2\int_o^a f(x)\,dx$ ஆகும்;

$f(x)$ என்பது ஒற்றையாயின், முடிபு பூச்சியமாகும்.

6.52. சென்ற பிரிவின் தேற்றங்களுக்கு உதாரணங்களாகப் பின்வருவனவற்றை அறிக :

$\text{சைன்}^2 x$ என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\text{சைன்}^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac12\pi}\text{சைன்}^2 x\,dx;$$

$\text{சைன்}^3 x$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\text{சைன்}^3 x\,dx = 0;$$

$\text{கோசை}^3 x$ என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\text{கோசை}^3 x\,dx = 2\int_0^{\frac12\pi}\text{கோசை}^3 x\,dx;$$

$\text{கோசை}^3 x\,\text{சைன்}\,x$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பாயிருத்தலால்,

$$\int_{-\frac12\pi}^{\frac12\pi}\text{கோசை}^3 x\,\text{சைன்}\,x\,dx = 0.$$

6.53. முடிவில்லாத எல்லைகள். எல்லைகளுள் ஒன்று முடிவில்லாததாயுள்ள ஒரு தொகையீடு இருத்தல் கூடும் ; உதாரணம் $\int_a^\infty f(x)\,dx$; அன்றித் தொகையீட்டு வீச்சு இரு திசைகளினும் முடிவிலியாய் இருக்கலாம் ; உதாரணம் $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ என்பதற்குக் கொடுக்க வேண்டிய பொருள் b ஆனது முடிவிலியை அணுக அது $\int_a^b f(x)\,dx$ என்பதன் எல்லையைக் குறிக்கும் என்பதே.

உதாரணங்கள்.

(i) $\int_0^\infty \dfrac{dx}{a^2+x^2}$. நாம் பெறுவன

$$\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac1a\,\text{தான்}^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^b = \frac1a\left\{\text{தான்}^{-1}\frac{b}{a} - \text{தான்}^{-1}0\right\}.$$

$\text{தான்}^{-1}\dfrac{x}{a}$ என்பது பல பெறுமானமுள்ள ஒரு சார்பு (**4.21 iii** ஐப் பார்க்க).

$\text{தான்}^{-1}0$ இன் பெறுமானங்கள் $0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,$ முதலியன ; $b\to\infty$

ஆக $\text{தான்}^{-1}\dfrac{b}{a}$ இன் பெறுமானங்கள் $\frac12\pi,\ \pi+\frac12\pi,\ 2\pi+\frac12\pi,\ 3\pi+\frac12\pi$ முதலியன. இப்பெறுமானங்களுள் எத்தேர்வைச் செய்யவேண்டுமெனத் துணிதற்கண், $\text{தான்}^{-1}\dfrac{x}{a}$ என்பது ஒரு கோணம் எனக் காண்கின்றோம் ; "எல்லைகளுக்கிடையில்" எடுத்தல் என்பதன் பொருள் கீழெல்லைப் பெறுமானத்திலிருந்து மேலெல்லைப் பெறுமானத்திற்கு (பாய்ச்சலின்றி)த் தொடர்ச்சியாக அக்கோணம் மாறுமெனக் கொள்ளுதலே. இதற்கு வேண்டியது $r\pi$ என்பதை $\text{தான்}^{-1}0$ இன் பெறுமானமாக நாம் தேர்ந்தால் $r\pi+\frac12\pi$ என்பதை $L_{b\to\infty}\,\text{தான்}^{-1}\dfrac{b}{a}$ இன் பெறுமானமாக நாம் எடுக்க வேண்டும் என்பதே ; அதற்குக் காரணம் அவ்வாறு எடுக்காது விட்டால், எல்லைகளுக்கிடையில் யாதோ ஓர் புள்ளியில் அக்கோணத்தின் பெறுமானத்தில் ஒரு பாய்ச்சல் வரலாம்.

எனின்,
$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \pi/2a.$$

(ii) $\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx$ தொடர்ந்து பகுதிகளாகத் தொகையிடுதலால் (**5.63**)

$$\int_0^b x^2e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}(x^2+2x+2)\Big]_0^b$$

எனக் காண்கின்றோம்.

$b\to\infty$ ஆக, மேலெல்லை b இற் பெறுமானத்தைக் காணுதற்கு, சார்பு

$$-\frac{x^2+2x+2}{e^x} = -\frac{x^2+2x+2}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots}$$

என நாம் எழுதுகின்றோம்.

பகுதியானது நாம் விரும்புமளவு பெரியனவாகிய x இன் அடுக்குகளை உடையது ஆகையாலும், தொகுதி இரண்டின் அடுக்கொன்றையுங் கொள்ளவில்லை ஆகையாலும், x (அல்லது b) $\to\infty$ ஆக, எல்லை பூச்சியமாகும். அன்றியும் $x=0$ ஆக,

$$e^{-x}(x^2+2x+2) = 2\,;$$

ஆகவே, $\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 2.$

(iii) $\int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. இங்கு $x = a\text{சைன்}\theta$ என்னும் பிரதியீட்டை நாம் வழங்கலாம் ; இது $dx = a\text{கோசை}\ \theta\, d\theta$ என்பதைத் தரும் ; பின்னர் $\int a^2\text{சைன்}^2\theta d\theta$, அல்லது $\frac{1}{2}a^2\int(1-\text{கோசை}2\theta)d\theta$ என்பதை நாம் தொகையிட வேண்டும் ; அது $\frac{1}{2}a^2\ (\theta-\frac{1}{2}\text{சைன்}\ 2\theta)$ ஆகும். இவ்விடத்து, x இற்குத் தந்த எல்லைகளுக்கு ஒத்த எல்லைகளை θ இற்குக் கண்டு நாம் வழங்கினோமாயின், மாறிகளை θ இலிருந்து x இற்கு மறுபடியும் மாற்றவேண்டுமென்னுந் தேவையில்லை ; உதாரணமாக,

$x=0$ எனின், $\theta=0$;

$x=a$ எனின், $\theta=\frac{1}{2}\pi$;

ஆயின்,

$$\int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} a^2\text{சைன்}^2\theta d\theta = \frac{1}{2}a^2\left[\theta-\frac{1}{2}\text{சைன்}\,2\theta\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}\pi a^2.$$

6.54. பயிற்சிகள். பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\int_0^\infty e^{-ax}dx\,(a>o)$.

(ii) $\int_0^2 \frac{dx}{9-x^2}$.

(iii) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

(iv) $\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$.

(v) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x^2)}}$.

(vi) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

(vii) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)}}$

(viii) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

(ix) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+2x+5}$.

(x) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

(xi) $\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx$.

(xii) $\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \text{சீக}^2x\,dx$.

(xiii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\,\text{கோசை}\,x\,dx$.

(xiv) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\,\text{சைன்}\,x\,dx$.

(xv) $\int_0^\infty e^{-x}\,\text{சைன்}\,x\,dx$.

6.6. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n xdx$, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{கோசை}^n xdx$ **என்பன.** 5.65 இல் ஒடுக்கற் சூத்திரம் ஒன்றை நிறுவினோம் ; அதாவது

$$\int \text{சைன்}^n xdx = -\frac{1}{n}\,\text{சைன்}^{n-1}x\ \text{கோசை}\ x + \frac{n-1}{n}\int \text{சைன்}^{n-2}xdx.$$

$x=\frac{1}{2}\pi$ ஆகும்போது, வலப்பக்கத்திலே தொகையிடப்பட்ட உறுப்பு பூச்சியமாகும் ; அதற்குக் காரணம் அது கோசைx என்பதை ஒரு காரணியாக அடக்குவதும் அது சைன்x என்பதை ஒரு காரணியாக அடக்கி அதுபற்றி $x=o$ ஆகும்பொழுது அது பூச்சியமாக வருவதுமே ; ஆகவே,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n xdx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-2}xdx.$$

அதுபோல, $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-2}xdx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-4}xdx;$$

ஆயின், $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^{n-4}xdx.$$

ஒவ்வொரு படியிலும் சைன்x இன் அடுக்கின் குறிகாட்டியை 2 ஆற் சுருக்கி அச்செய்கை தெளிவாக விரிக்கப்படலாம் ; ஆராய்தற்கு இரண்டு வகைகள் உண்டு.

(i) n என்பது ஓர் இரட்டை முழுவெண்ணாயின்,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n xdx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^0 xdx$$

என்பதை அடையும் வரைக்கும் நாம் படிப்படியாகச் செல்லலாம்;

$\text{சைன்}^0x=1$;

ஆயின், $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^0xdx = \frac{1}{2}\pi;$$

ஆகவே, n என்பது **இரட்டையாயிருக்கும்பொழுது,**

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n xdx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n} \qquad ....(1).$$

(ii) n என்பது ஓர் ஒற்றை முழுவெண்ணாயின், தொடர்ந்து ஒடுக்குதலால் நாம் பெறுவது

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}^n xdx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}\ xdx;$$

இனி, $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\text{சைன்}xdx = [-\text{கோசை}\,x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1.$$

ஆகவே, n என்பது **ஒற்றையாயிருக்கும்பொழுது,**

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^n x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{n-1}{n} \qquad \ldots\ldots(2).$$

சைன்x இன் இரட்டை அடுக்குக்களுக்கே அப்பின்னத் தொகுதியானது நாம் n என்னும் எண்ணை அடையும் வரைக்கும் இரட்டைப் பகுதிகளாலே தொடரப்பட்ட தொடர்ச்சியான பின்னங்களாலே பின்பற்றப் பட்ட $\frac{\pi}{2}$ ஓடு தொடங்குகின்றதென்றும், சைன்x இன் ஒற்றை அடுக்குகளுக்கு நாம் n என்னும் எண்ணை அடையும் வரைக்கும் ஒற்றைப் பகுதிகளோடு கூடிய தொடர்ச்சியான பின்னங்களாற் பின்பற்றப்பட்ட $\frac{2}{3}$ என்னும் பின்னத்தோடு நாம் தொடங்குகின்றேமென்றும் மனத்திற் கொள்வோமாயின், இச்சூத்திரங்கள் மிக்க பயன் தருவதோடு ஞாபகத்தில் வைத்திருப்பதற்கும் எளிதாகும்.

இன்னும் **6.4 (iii)** இலிருந்து,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^n x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^n x\,dx;$$

ஆயின், அதே சூத்திரம் $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^n x\,dx$ என்பதற்கும் பொருந்தும்.

உதாரணங்கள். $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^6 x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5\pi}{32};$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^7 x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} = \frac{16}{35}.$$

தொகையிடுதல் இரு கால்வட்டங்களுக் கூடாகச் செய்யப்படும்பொழுது சைன்x, கோசைx என்பனவற்றின் குறிகள் சிலவேளை வேற்றுமைப் பட்டாலும் அவற்றின் எண்பெறுமானத்தொகுதிகள் அவ்வேறுபட்ட கால் வட்டங்களிலே திரும்பவும் வரும் என்பதை மாத்திரம் நாம் ஞாபகத்தில் வைத்தல் வேண்டும் ; ஆகவே, வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு குறித்த தொகையின் எல்லையாகுமென ஞாபகத்தில் வைக்க, n என்பது இரட்டையாயின், ஒரு கால்வட்டத்திற்கூடாக எடுத்த

$$\int \text{சைன்}^n x\,dx, \qquad \text{அல்லது} \qquad \int \text{கோசை}^n x\,dx$$

என்பது எடுத்த கால்வட்டம் எதுவாயிருந்தாலும் ஒரே பெறுமானமுடையதாகும். எனினும், n ஆனது ஒற்றையெனின், தொகையீடு எல்லாக் கால்வட்டங்களுக்கும் ஒரே எண் பெறுமானமுடையதாகும் ; எனினும் அதன் குறி நாம் எடுத்த கால் வட்டத்தில் சைன்$^n x$ அல்லது கோசை$^n x$ ஆனது நேரோ அல்லது எதிரோ என்பதைச் சாரும்.

உதாரணங்கள்.

$$\int_0^{\pi} \text{கோசை}^6 x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^6 x\,dx = 2.\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5\pi}{16};$$

எனினும், $\int_0^{\pi} \text{கோசை}^7 x\,dx = 0$; அதற்குக் காரணம் தொகையீடு முதலாம் இரண்டாங் கால்வட்டங்களுக்கூடாய் எடுக்கப்பட்டமையும், அவ் விருகூறுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதலுமே.

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^4 x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^4 x\,dx = 2.\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{8};$$

எனினும், $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^3 x\,dx = 0$; அதற்குக் காரணம்தொகையீடு முதலாம் நாலாங் கால்வட்டங்களுக்கூடாய் எடுக்கப்பட்டமையும், அவ்விரு கூறுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டுதலுமே.

$$\int_{-\pi}^{0} \text{சைன்}^5 x\,dx = -\int_0^{\pi} \text{சைன்}^5 x\,dx = -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^5 x\,dx = -2.\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{16}{15};$$

அதற்குக் காரணம் இங்கு, தொகையிடல் மூன்றும் நாலாங் கால்வட்டங் களுக்கூடாக எடுக்கப்பட அவை இரண்டிலும் சைன்$^5 x$ என்பது எதிரா யிருத்தலே.

6.61. பயிற்சிகள். பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^7 x\,dx.$ (ii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^4 x\,dx.$

(iii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^5 x\,dx.$ (iv) $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \text{சைன்}^4 x\,dx.$

(v) $\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \text{கோசை}^5 x\,dx.$ (vi) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^5 x\,dx.$

(vii) $\int_0^{\pi} \text{கோசை}^7 x\,dx.$ (viii) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \text{சைன்}^5 x\,dx.$

(ix) $\int_0^{2\pi} \text{சைன்}^4 x\,dx.$ (x) $\int_0^{\pi} \text{சைன்}^5 x\,dx.$

(xi) $\int_0^{\pi}$ சைன்^3x கோசை^2xdx. (xii) $\int_0^{\pi}$ சைன்^2x கோசை^2xdx.

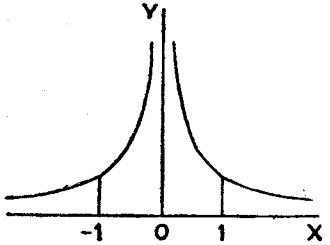
(xiii) $\int_0^{\pi}$ சைன் x கோசை^4xdx. (xiv) $\int_{-\pi}^{\pi}$ சைன்^4x கோசைxdx.

(xv) $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}$ சைன்^2x கோசை^4xdx.

6.7. முடிவில்லாத தொகையீட்டுச் சார்புகள். $\int_a^b f(x)dx$ என்னும் ஒரு வரையறுத்த குறியீடுள்ள $f(x)$ என்னுந் தொகையீட்டுச் சார்பைப் பற்றிச் சிறிதே கூறியுள்ளோம்.

6.3 இன் முடிவில், $f(x)$ ஆனது ஓர் எளிய தொடர்ச்சியான வளைகோட்டாற் குறிக்கப்படுமாயின், அவ்வளைகோட்டிற்குக் கீழேயுள்ள பரப்பைக் குறிக்கும் ஒரு தொகையீடு இருக்குமென நாம் கூறினோம்.

தொகையிடுதலின் வீச்சிற்குள் $f(x)$ என்பது முடிவிலியாகும் வகைகளில் மேற்கூறிய முறைகள் உறுதியானவை எனக் கொள்வதில் எச்சரிக்கை இருப்பது பிரதானம். இவ்வாறு, பொதுச் செய்கையால் $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க முயன்றோமாயின், நாம் பெறுவது $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1-1 = -2$; இது பிழை என்பது தெளிவு; அதற்குக் காரணம் தொகையீடு எல்லையாயுள்ள கூட்டுத்தொகையில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் நேர் என்பதே. $x=0$ என்பது தொகையிடுதலின் வீச்சிற்குள் அமைக்கப்படுகின்றது என்பதிலிருந்தும் $x=0$ இற்கு $\frac{1}{x^2}$ என்பது முடிவிலியாகின்றது என்பதிலிருந்தும் போலிபிறக்கின்றது. உண்மையாக, $y=\frac{1}{x^2}$ என்பதன் வரைப்படம் உருவத்திற் காட்டியவாறு இருக்கின்றது; -1, 1 என்பனவற்றிற் கிடையில் வளைகோட்டிற்குக் கீழுள்ள பரப்பு இரு சமபரப்புக்களால் ஆகும்;



அவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்; இதனை $L_{h\to o}\int_h^1\frac{dx}{x^2} = L_{h\to o}\left[-\frac{1}{x}\right]_h^1 = L_{h\to o}\left(-1+\frac{1}{h}\right)$ எனப் பொருள்படுமாறு கொண்டால், பரப்பு முடிவிலியாகுமெனக் காண்போம்.

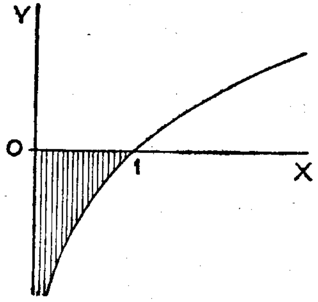
6.71. $\int_0^1$ **log xdx.** இது வகையீட்டுச் சார்பு $\log x$ என்பது முடிவிலியாதற்கு வேறோர் உதாரணம், குறிப்பாக $x=o$ என்னுங் கீழெல்லையில்; இதற்குக் காரணம் $x\to o$ ஆக, $\log x\to-\infty$ என நாம் காட்டலாம் என்பதே.

$e^o=1$ ஆதலால், $\log_e 1=o$; 1 இலுங் குறைந்த எண்களின் மடக்கைகள் எதிராகும். 1 இலுங் குறைந்த எவ்வெண்ணும் $\frac{1}{n}$ என எழுதப்படலாம்; இங்கு n என்பது 1 இலும் பெரிது; $\log\frac{1}{n}=-\log n$; ஆகவே, $\frac{1}{n}$ என்னும் எண் n ஐக் கூடுதலுறுச் செய்தலால், பூச்சியத்தை நோக்கிக் குறையுமாறு செய்யப்பட, அதன் மடக்கை $-\log n$ என்பது கூடுதலுறுகின்ற ஒரு பெரிய எதிரெண்ணாகும்; அதாவது அது $-\infty$ என்பதை அணுகும்.

மற்றைப்படி $x=e^y$ ஆகுமாறு $y=\log x$ எனப்பிரதியிட்டோமாயின், $x\to o$ ஆக, இச்சார்பின் வரைப்படம் y ஆனது $-\infty$ என்பதை நோக்கிக் குறைதலுறுகின்றதெனக் காட்டும். (**4.32** ஐ ஒப்பிடுக.)

எனினும், $x\to o$ ஆக, $\log x\to-\infty$ ஆதலால், தொகையீடு $\int_o^1\log xdx$ என்பதும் முடிவிலியாகுமென நாம் முடிபு கொள்ளல் ஆகாது.

இதனைப் போன்ற வகையில் $\int_o^1\log xdx$ என்பதன் பொருள் $h\to o$ ஆக $\int_h^1\log xdx$ இன் எல்லையாகும் என நாம் கூறலாம்.



இனி, பகுதிகளாகத் தொகையிடுதலால்,

$$\int log\, xdx = x\, log\, x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\, log\, x - x\,;$$

ஆகவே, $\int_h^1 log\, xdx = \Big[x\, log\, x - x\Big]_h^1$

$$= -1 - h\, log\, h + h$$

ஆயின், $L_{h\to o} h\, log\, h$ என்பதைக் காண இப்போது விரும்புகின்றேம். h என்பது சிறிதாயிருக்கும்போது, நாம் $log\, h = -u$ எனப் பிரதியிடலாம் ; u என்பது (1 இலுங் குறைந்த எண்களின் மடக்கைகள் எதிராயிருத்தலால்) ஒரு நேரெண். இதன் பொருள் $h = e^{-u} = \frac{1}{e^u}$ என்பதே ; ஆயின், $u \to \infty$ ஆக, $h \to o$.

எனின்,

$$L_{h\to o} h\, log\, h = L_{u\to\infty} \frac{-u}{e^u} = 0\,;$$

அதற்குக் காரணம் u என்பது நேராயிருத்தலுந் தொகுதியிலும் பகுதியில் u இன் உயர்ந்த அடுக்குக்கள் இருத்தலுமே.

ஆகவே,

$$L_{h\to o}\int_h^1 log\, xdx = L_{h\to o}(-1 - h\, log\, h + h)$$

$$= -1.$$

எனின், $\int_o^1 log\, xdx = 1$ என்பது பெறப்படும்.

இத்தொகையீடு $y = log\, x$ இன் வரைப்படத்தின் உருவத்தில் நிழலூட்டிய பரப்பைக் குறிக்கின்றது ; விடையிலுள்ள எதிர்க் குறி x அச்சிற்குக் கீழே அப்பரப்பு இருக்கின்றது என்பதிலிருந்து பெறப்படுகின்றது.

இம்முடிவைச் சென்ற பிரிவின் முடிபோடு நாம் ஒப்பிட்டோமாயின், $\int_o^1 \frac{dx}{x^2}$ இலும் $\int_o^1 log\, xdx$ இலும் அத்தொகையீடுகள் குறிக்கின்ற பரப்புக்கள் இரண்டும் y அச்சினது திசையில் முடிவிலிக்கு விரிகின்றன என்றும், $\int_o^1 \frac{dx}{x^2}$ என்னும் பரப்பு முடிவிலியாயிருக்க, $\int_o^1 log\, xdx$ என்னும் பரப்பு முடிவுள்ளதாயும் எண்ணளவில் 1 இற்குச் சமமாயும் இருக்கின்றது என்றுங் காண்கின்றேம்.

தொகையிடுதற்குரிய விடயம் தொகையிடுதலின் வீச்சிற்குள் முடிவிலியாய் வரும்பொழுது, அத்தொகையீட்டிற்கு ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம் இருக்கலாம், அல்லது இல்லாமல் விடலாம் என்பதை இவ்வுதாரணங்கள் எடுத்துக்காட்ட உதவுகின்றன ; ஒவ்வொரு சிறப்பு வகையையும் ஆராயாது நாம் முடிபுகொள்ளல் ஆகாது.

6.72. சென்ற விரிவில்,

$$L_{x\to o} x\, log\, x = o$$

என ஒரு நிறுவலைக் கொண்டுள்ளதென நாம் அறிவோம். அவ்வாறே $L_{x\to o} x^n\, log\, x = 0$ என்பது நிறுவப்படலாம் ; இங்கு, n என்பது யாதும் ஒரு நேரெண் ; மாணுக்கனுக்கு ஒரு பயிற்சியாக இதனை விடுகின்றேம்.

6.8. கலப்பினப் பயிற்சிகள்.

1. பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க :

(i) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \text{சீக}\; xdx\,;$ (ii) $\int_o^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\,;$

(iii) $\int_o^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}\,;$ (iv) $\int_o^\infty \frac{dx}{a^2x^2+b^2}\,;$

(v) $\int_0^{2a} \frac{xdx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ ($x = 2a\,\text{சைன்}^2\theta$ ஆகுக) ;

(vi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{சைன்}\; xdx}{1+\text{கோசை}^2 x}\,;$ (vii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}\,;$

(viii) $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,;$ (ix) $\int_o^{\frac{1}{4}\pi} \text{தான்}\; xdx\,;$

(x) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{(x^2+1)}}\,;$ (xi) $\int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{a^2\text{கோசை}^2x + b^2\text{சைன்}^2x}\,;$

(xii) $\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{சைன்}\; bxdx\;\; (a > o);$ (xiii) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\{(x-a)(b-x)\}}}\,;$

(xiv) $\int_a^b \sqrt{\{(x-a)(b-x)\}}dx;$ (xv) $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{x-a}{b-x}\right)}dx\,;$

[(xiii), (xiv), (xv) என்பனவற்றில் $x = a\;\text{கோசை}^2\theta$

(xvi) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2\,\text{கோசை}2xdx\,;$ (xvii) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\;\text{சீக}^2\; xdx\,;$

(xviii) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\,\text{கோசை}\,\alpha+x^2}$; (xix) $\int_0^1 x^2 \log x\,dx$;

(xx) $\int_0^1 \text{தான்}^{-1} x\,dx$.

2. x – அச்சினாலும், பின்வரும் வளைகோடுகளாலும், கூறப்பட்ட நிலைத் தூரங்களாலும் எல்லையுற்ற பரப்புக்களைக் காண்க :

(i) $y=x^2-1$ என்பது $x=0$ இலிருந்து $x=1$ வரைக்கும் ;

(ii) $y=\text{சைன்}\,2x$ என்பது $x=\frac{1}{2}\pi$ இலிருந்து $x=\pi$ வரைக்கும் ;

(iii) $y=\text{சைன்}^2 x$ என்பது $x=0$ இலிருந்து $x=\pi$ வரைக்கும் ;

(iv) $y=e^{ax}\,\text{சைன்}\,bx$ என்பது $x=o$ இலிருந்து $x=\pi/b$ வரைக்கும்.

3. $y=x^2-3x+2$

என்னும் வளைகோட்டைக் குறித்து அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

4. $x-x^3$ என்பதன் உயர்விழிவுகளாகிய பெறுமானங்களைக் காண்க ;

$y=x-x^3$ என்னும் வளைகோட்டை வரைக ; $\int_0^2 (x-x^3)\,dx$ என்பது

எப்பரப்பைக் குறிக்கின்றது?

5. xe^{-x} இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க ; x இன் நேர்ப் பெறுமானங்களுக்கு அச்சார்பு ஒருபோதும் எதிராகாதெனை நிறுவுக.

(i) $x=0$ இலிருந்து $x=1$ வரைக்கும் ;

(ii) $x=1$ இலிருந்து அப்புறம் ∞ இற்கும்.

அச்சார்பின் வரைப்படத்திற்கும் x – அச்சிற்கும் இடையி லுள்ள பரப்பைக் காண்க.

6. $y=x^2(x^2-1)$ என்னும் வளைகோட்டைக் குறிக்க ; அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

7. $\int_0^1 (x-1)(x-2)^2 dx$, $\int_0^2 (x-1)\,(x-2)^2 dx$ என்பனவற்றால் எப்பரப்புக்கள் குறிக்கப்படும் ? அவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (3.423 என்பதைப் பார்க்க.)

8. $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ என்னும் வளைகோட்டைக் குறிக்க ; அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற இரண்டு உருவங்களின் பரப்புக்களையுங் காண்க.

9. $y=x-\frac{2}{x^2+1}$ என்னும் வளைகோடு அச்சுக்களை எங்கு குறுக்கிடுகின்றது எனக் காண்க ; அவ்விரண்டு அச்சுக்களாலும் அவ்வளைகோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

10. $y=4x^3+8x^2-11x+3$ என்னும் வளைகோடு x – அச்சைத் தொடுமெனக் காட்டி அது அதனை வெட்டும் புள்ளியையுங் காண்க. அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

11. $y=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ என்னும் வளைகோடு x – அச்சை இரு புள்ளிகளிலே தொடுமெனக் காட்டுக ; அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

12. $y=3\,\text{சைன்}\,x+4\,\text{கோசை}\,x$ என்னும் வளைகோட்டின் ஒரு முறுக்கின் பரப்பைக காண்க.

13. $\int_0^1 x\,\log\,(1+ax)\,dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\,\log\,(1+a)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{a}\right)$ என நிறுவுக.

14. (i) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{5+3\,\text{கோசை}\,x}=\frac{1}{2}\,\text{தான்}^{-1}\frac{1}{2}$; என்றும்

(ii) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{3+5\,\text{கோசை}\,x}=\frac{1}{4}\log 3$ என்றும் நிறுவுக.

15. a என்பது நேராயும் 1 இலுஞ் சிறிதாயுமிருந்தால்,

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)}}$ என்பதற்கு 2 என்னும் பெறுமானமும்,

a என்பது நேராயும், 1 இலும் பெரிதாயுமிருந்தால் அதற்கு $2/a$ என்னும் பெறுமானமும் உண்டெனக் காட்டுக.

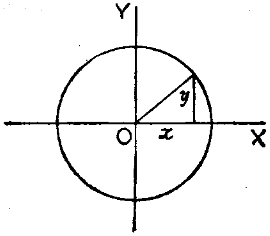
16. $\int^{\text{கோசை}^{-1}\frac{3}{5}} \text{சீக}\;x\;\log\,(\text{சீக}\,x+\text{தான்}\,x)\,dx=\frac{1}{2}\,(\log 3)^2$ என நிறுவுக.

அத்தியாயம் VII

பிரயோகங்கள் ; பரப்புக்களுங் கனவளவுகளும் புவியீர்ப்புமையங்களும்

7.1. வட்டத்தின் பரப்பு. a என்பது ஒரு வட்டத்தின் ஆரையாகுக ; ஆயின், அதன் மையத்தூடாகச் செல்லும் செவ்வக அச்சுப்பற்றிய அதன் சமன்பாடு.

$$x^2+y^2=a^2,$$



இது தருவது

$$y=\pm\sqrt{(a^2-x^2)}\,;$$

நேர்க்கால் வட்டத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு நாம் எடுப்பது

$$y=+\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

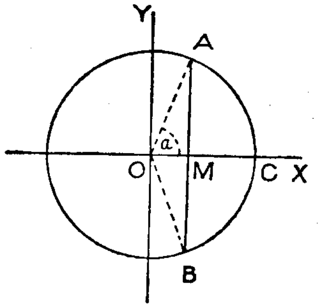
சமச்சீரால், பரப்பு நேர்க்கால் வட்டத்திலுள்ள பரப்பின் நாலு மடங்காகும்

அதாவது $$4\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx.$$

இதன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு $x=a$சைன்θ எனப் பிரதியிடுக ஆயின், $dx=a$ கோசை $\theta d\theta$; $x=0$ ஆகும்பொழுது $\theta=0$; $x=a$ ஆகும்பொழுது $\theta=\frac{1}{2}\pi$; ஆகவே பரப்பு

$$=4a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^2\theta d\theta=\pi a^2 \qquad (6.6).$$

7.11. வட்டத்துண்டுப் பரப்பு. 7.1 இன் குறியீட்டோடு OY இற்குச் சமாந்தரமான AB என்னும் ஒருநாண் வேண்டிய பரப்புக்கொண்ட ACB என்னும் ஒரு துண்டை வெட்டுக ; AB என்னும் நாண் மையம் O இல் 2α என்னும் ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்க.



AB ஆனது OX ஆல் M இல் செங்கோணங்களில் இருசமக் கூறிடப்பட்டால், **7.1** இற்போலப் பரப்பு

$$ACB=2\int_{OM}^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx;$$

இங்கு, $OM=a$கோசைα.

இங்கு $x=a$கோசைθ எனப் பிரதியிடல் இசைவாகும் ; ஆயின், $dx=-a$ சைன் $\theta d\theta$. புதிய கீழெல்லை

$$a\text{கோசை}\theta=OM=a\text{கோசை}\alpha, \quad \text{அல்லது} \quad \theta=\alpha,$$

என்பதாலே தரப்படும் ; மேலெல்லை

$$a\text{கோசை}\theta=a, \quad \text{அல்லது} \quad \theta=0$$

என்பதாலே தரப்படும்.

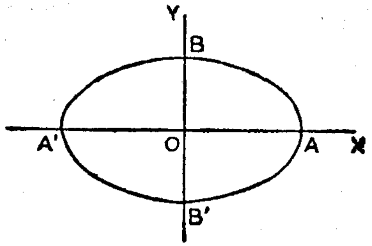
$$\text{ஆகவே, பரப்பு } ACB=-2a^2\int_\alpha^0 \text{சைன்}^2\theta d\theta$$
$$=-\;a^2\int_\alpha^0 (1-\text{கோசை}2\;\theta)\;d\theta$$
$$=-\;a^2\Big[\theta-\text{சைன்}\,\theta\,\text{கோசை}\,\theta\Big]_\alpha^0$$
$$=\quad a^2\;(\alpha-\text{சைன்}\alpha\;\text{கோசை}\alpha).$$

கி.தே. $AB=2a$சைன்α ஆயும், $OM=a$கோசைα ஆயும் இருத்தலால், முக்கோணம் OAB இன் பரப்பு a^2சைன்αகோசைαஆகும் ; அம்முக்கோணத்தை அத்துண்டோடு கூட்டுதலால் ஆரைச்சிறை $OACB$ இன் பரப்பு $a^2\alpha$ ஆகும் ; அதாவது ஆரையின் வர்க்கத்தை ஆரையனில் அளந்த ஆரைச் சிறைக்கோணத்தின் அரையாற் பெருக்க வருவதாகும். (பக்கம் 52 இலுள்ள அடிக் குறிப்பைப் பார்க்க.)

7.12. நீள்வளையப் பரப்பு. ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதத்திலிருந்து ஒரு நீள்வளையமானது இரு சமச்சீரச்சுக்களோடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைக்கொண்ட ஒரு முட்டையுரு வளைகோடாகுமெனக் கற்றோம்.



அவ்வளைகோடு $x-$ அச்சை A' , A என்பனவற்றில்

$$A'O=OA=a$$

ஆகுமாறு வெட்டும் ; அது $y-$ அச்சை B' , B என்பனவற்றில்

$$B'O=OB=b.$$

ஆகுமாறு வெட்டும்.

அச்சமன்பாட்டை $y-$ இற்குத் தீர்த்தல் தருவது $y=\pm b\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})}$; நேர்க்கால் வட்டத்தில் y இற்கு நேர்க்குறியைக் கொள்ளுவோம் ; ஆயின், நேர்க்கால் வட்டத்திற் கிடக்கும் நீள்வளையப் பகுதியின் பரப்பு

$$\int_0^a b\sqrt{\left((1-\frac{x^2}{a^2}\right)}dx.$$

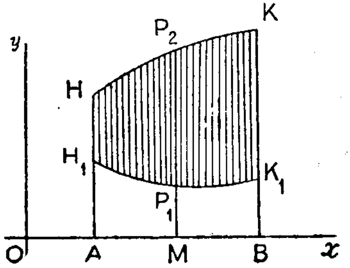
இதன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு $x = a$சைன்θ எனப் பிரதியிடுக ; ஆயின், $dx = a$கோசை$\theta d\theta$; 7.1 இற்போல θ இற்கு எல்லைகள் $0, \frac{1}{2}\pi$ என்பன ;

ஆகவே, கால்வட்டப் பரப்பு

$$= ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \text{கோசை}^2\, \theta d\theta = \tfrac{1}{4}\pi ab \qquad (6\cdot 6).$$

எனின், முழுநீள்வளையத்தின் பரப்பு $= \pi ab$.

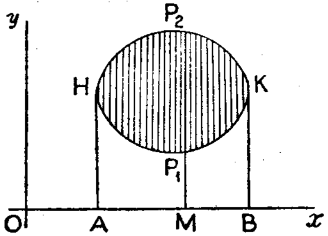
7.2. சில வேளைகளிற் காண வேண்டிய பரப்பு ஒரு வளைகோட்டிற்கும் x – அச்சிற்கும் இடையிற் கிடப்பதற்குப் பதிலாக இரு வளைகோடுகளுக்கிடையிற் கிடக்கும் ; உதாரணம் உருவத்திலுள்ள HH_1K_1K என்னும் நிழலூட்டிய பரப்பு. இது AH_1K_1B என்னும் பரப்பை $AHKB$ என்னும் பரப்பிலிருந்து கழிப்பதாற் காணப்படலால் ; அப்பரப்பு ஒரு தனித்தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படக்கூடும் ; அதற்குக் காரணம் A, B என்பனவற்றிற் கிடையில் யாதும் ஒரு புள்ளி M இலிருந்து எடுத்த நிலைத்தூரம் அவ்வளைகோடுகளை P_1, P_2 என்பனவற்றிற் சந்திக்க MP_1, MP_2 என்பனவற்றை y_1, y_2 என்பனவற்றுற் குறித்தோமாயின், வேண்டிய



பரப்பு $\displaystyle\int_a^b (y_2 - y_1)\, dx.$

இங்கு, y என்பன அவ்விரு வளைகோடுகளின் சமன்பாடுகளாலே தரப்பட்ட x இன் சார்புகளாகும் ; $OA = a$, $OB = b$.

சிலவேளைகளில், ஒரு சமன்பாடு உருவத்திலுள்ள $H P_2 K P_1$ என்பதைப் போன்ற ஒரு மூடிய முட்டையுருவளைகோட்டைக் குறிக்கும். y இற்கு x பற்றி எடுத்த ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு OA, OB என்பனவற்றிற்கு இடையில் x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் y இன் இரு பெறுமானங்கள் இருக்க, x இன் வேறு யாதும் பெறுமானத்திற்கு y இன் மெய்ப் பெறுமானம் யாதும் இல்லையாயின், அது அத்தகைய வளைகோட்டைக் குறிக்கும். பின்னர், $OM\ (=x)$ என்பது



OA, OB என்பனவற்றிற்கு இடையிற் கிடப்ப, y_1, y_2 என்பன M இலுள்ள MP_1, MP_2 என்னும் நிலைத்தூரங்களைக் குறித்தால், அம்முட்டையுருவின் பரப்பு $\displaystyle\int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$ ஆகும். a, b என்பன y இல் மெய் மூலங்களைத் தருகின்ற x இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானமும் மிகப் பெரிய பெறுமானமும் ஆகுமென நாம் அறிகிறோம்.

7.21 உதாரணங்கள்.

(i) பின்வரும் வளைகோடுகளை வரைக :

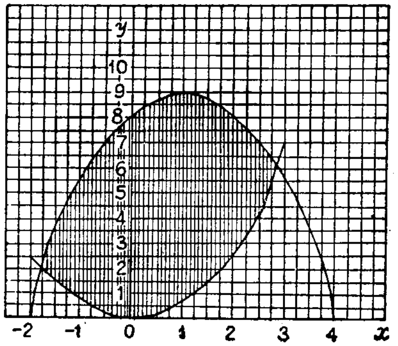
(i) $y = (x + 2)(4 - x)$,
(ii) $8y = 7x^2$.

அவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளையும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள பரப்பையுங் காண்க.

y ஐ நீக்க நாம் பெறுவது

$$8(8 + 2x - x^2) = 7x^2,$$

அல்லது $(3x - 8)(5x + 8) = 0$.



ஆகவே, $x = -\frac{8}{5}$, $x = \frac{8}{3}$ என்னும் புள்ளிகளில், அவ்வளைகோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும். வேண்டிய பரப்பு உருவத்தில் நிழலூட்டிய பரப்பு.

அவ்வளைகோடுகள் இரண்டு பரவளைவுகளாகும். அப்பரப்பின் மேலெல்லை முதலாம் வளைகோடு ; ஆயின், பரப்பு

$$= \int_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{3}} \{(x + 2)(4 - x) - \tfrac{7}{8}x^2\}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{3}} \{8 + 2x - \tfrac{15}{8}x^2\}\, dx = \Big[8x + x^2 - \tfrac{5}{8}x^3\Big]_{-\frac{8}{5}}^{\frac{8}{3}}$$

$$= 24\tfrac{184}{675}.$$

(ii) $5x^2 - 4xy + y^2 + 15x - 10y + 29 = 0$

என்னும் வளைகோட்டின் முழுப் பரப்பையுங் காண்க.

அச்சமன்பாட்டை x பற்றி y இற்கு ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக எழுத நாம் பெறுவது

$$y^2 - 2y(2x + 5) + 5x^2 + 15x + 29 = 0.$$

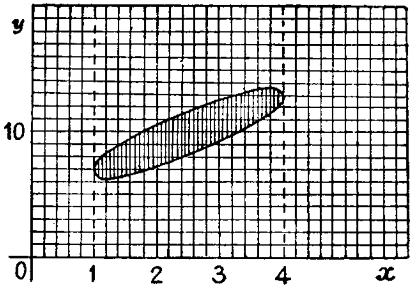
ஆகவே, $y = (2x + 5) \pm \sqrt{\{(x - 1)(4 - x)\}}$.

எனின், $1 \leq x \leq 4$ ஆயினேற்றான், y மெய்யாகும்.

$x=1$, $x=4$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் y-அச்சிற்கு வரையும் யாது ஒரு சமாந்தரமும் அவ்வளைகோட்டைத் தம் நிலைத்தூரங்கள் y_1, y_2 என்பனவாயுள்ள இரு புள்ளிகளிற் சந்திக்கும் ; இங்கு,

$$y_1 = 2x + 5 - \sqrt{\{(x-1)(4-x)\}},$$

$$y_2 = 2x + 5 + \sqrt{\{(x-1)(4-x)\}}.$$



அன்றியும், $x=1$ ஆகும்பொழுது y இல் இரு மூலங்களும் 7 இற்குச் சமமாகும் ; $x=4$ ஆகும்பொழுது மூலங்கள் இரண்டும் 13 இற்குச் சமமாகும் ; ஆகவே, வளைகோடு உருவத்திலுள்ளது போன்றிருக்கும்.

$$\text{பரப்பு} = \int_1^4 (y_2 - y_1)\, dx$$

$$= 2\int_1^4 \sqrt{\{(x-1)(4-x)\}}\, dx.$$

இதன் பெறுமானத்தைக் கணித்தற்கு $x = \text{கோசை}^2\theta + 4\text{சைன்}^2\theta$ எனப் பிரதியிடுக (**6.8** (xiv) ஐப் பார்க்க.) ; ஆயின், $dx = 6\text{சைன்}\,\theta\,\text{கோசை}\,\theta\, d\theta$, $x - 1 = 3\text{சைன்}^2\theta$; $4 - x = 3\text{கோசை}^2\theta$.

அன்றியும் எல்லைகளுக்கு,

(i) $x = 1$ ஆகும்பொழுது நாம் பெறுவது $\text{சைன்}^2\theta = 0$; ஆகவே $\theta = 0$.

(ii) $x = 4$ ஆகும்பொழுது நாம் பெறுவது $\text{கோசை}^2\theta = 0$; ஆகவே $\theta = \frac{1}{2}\pi$

எனின்,

$$\text{பரப்பு} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 18\ \text{சைன்}^2\theta\ \text{கோசை}^2\theta\, d\theta = 36\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\text{சைன்}^2\theta - \text{சைன்}^4\theta)\, d\theta$$

$$= 36\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4}\pi.$$

7.22. பயிற்சிகள்.

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ என்னும் வளைகோட்டின் பரப்பைக் காண்க.

2. $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ என்னும் பரவளைகளுக்கு இடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

3. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவாலும் $y = x$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

4. $x = 0$, $x = \pi$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் $y = 2\text{சைன்}x$, $y = \text{சைன்}^2 2x$ என்னும் வளைகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

5. $x^2 + y^2 = 2x$ என்னும் வட்டமானது $x = y$ என்னுங் கோட்டாற் பிரிக்கப்பட்ட பரப்புக்களைக் காண்க.

6. $12x^2 + 4xy + y^2 = 20x$ என்னும் வளைகோட்டின் பரப்பைக் காண்க.

7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ என்னும் வளைகோட்டின் பரப்பைக் காண்க.

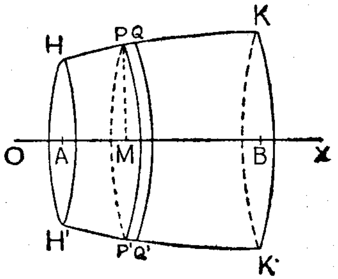
8. $13x^2 - 4xy + y^2 - 27x - 90 = 0$ என்னும் வளைகோட்டின் பரப்பைக் காண்க.

7.3. ஒரு வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு குறித்த கூட்டுத்தொகையின் எல்லையென 6.3 இற் கண்டோம் ; அதாவது

$$\int_b^a f(x)\, dx = \underset{n\to\infty}{L} \sum_{r=1}^{n} f_r \delta_r ;$$

இங்கு, δ_r என்பது $b - a$ பிரிபட்ட n பகுதிகளுள் யாதுமொன்றைக் குறிக்கின்றது ; f_r என்பது δ_r இன் யாதோ ஒரு புள்ளியிலுள்ள $f(x)$ இன் பெறுமானம். ஒரு பரப்பானது அத்தகைக் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையாகக் குறிக்கப்படலாம் என்றும், அதுபற்றி ஒரு பரப்பு ஒரு வரையறுத்த தொகையீட்டாற் குறிக்கப்படலாம் என்றுங் கண்டோம். எனினும், பரப்புக்களேயன்றி, கனவளவுகள், திணிவுகள், புவியீர்ப்பு மையங்களைக் காணுதற்கு வேண்டிய திருப்பு திறன்கள், சடத்துவத் திருப்பு திறன்கள் என்பனவும் அவ்வாறு கணிக்கப்படலாம் ; உண்மையாக, இம்முறை பருமனுள்ள யாதொன்றுக்கும் பிரயோகிக்கப்படலாம் ; அது அளக்கப்படத்தக்க ஒரு பெருந்தொகையான பகுதிகளாகச் சந்தர்ப்பப்பட மேலும் பிரிக்கப்படலாம்.

7.31 சுற்றுத் திண்மக் கனவளவு. சுற்றுத் திண்மமானது தனது அச்சிற்குச் செங்கோணங்களில் ஒரு தளத்தால் வெட்டப்படும் ஒவ்வொரு வெட்டு முகமும் வட்டமாயுள்ள ஒரு பொருள்.



$HKK'H'$ என்பது அத்தகைத் திண்மத்தைக் குறிக்க ; அச்சு OX ஐ அதன் அச்சாகக் கொள்க. அத்திண்மத்திற்குத் தள முனைகள் உண்டெனக் கொள்வோம் ; அவை A, B என்னும் மையங்களையுடைய HH', KK' என்னும் வட்டங்களாகுக ; இங்கு $OA = a$, $OB = b$. அத்திண்மம் அச்சிற்குச் செங்கோணங்களில் வெட்டுகின்ற தளங்களால் வட்டச் சீவல்

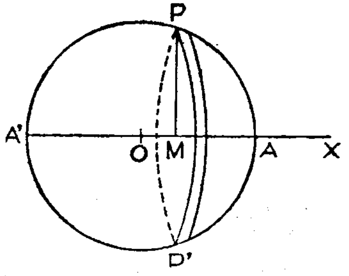
களாக வெட்டப்படலாம். $PP'Q'Q$ என்பது இச்சீவல்களுள் ஒன்றைக் குறிக்கும் ; M என்பது PP' என்னும் வட்டத்தின் மையம் ; OM ஐ x ஆலும், MP ஐ y ஆலும் அச்சீவலினது தடிப்பை δx ஆலும் நாம் குறிக்கலாம். வட்ட வெட்டுமுகத்தின் பரப்பு πy^2 ; அச்சீவலின் கனவளவு போதிய செம்மையோடு $\pi y^2\delta x$ என்பதாற் குறிக்கப்படும் ; A, B என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள சீவல்களினது தொகை வரையறையின்றிக் கூடுதலுறும்படி செய்யப்பட அத்திண்மத்தின் கனவளவு கூட்டுத்தொகை $\Sigma\pi y^2\delta x$ இன் எல்லையாகும் ; எனினும், இது $\int_a^b \pi y^2 dx$.

மேலுஞ் செல்லுதற்கு y இன் வடிவத்தை x இன் ஒரு சார்பாக அறிதல் வேண்டும் ; அதாவது திண்ம மேற்பரப்பின் **நெடுங் கோட்டு வளைகோடு** எனப்படும் HK என்னும் வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை அறிதல்.

அத்திண்மத்தின் மேற்பரப்பானது உருவத்தின் அச்சுப்பற்றி நெடுங் கோட்டு வளைகோடு HK என்பதைச் சுற்றுவதாற் பெறப்படும் என்பது தெளிவு.

7.311. கோளக்கனவளவு. a என்பது ஆரையாகுக. தாளினது தளம் அக்கோளத்தை $APA'P'$ என்னும் ஒரு வட்டத்தில் வெட்டுக. ஒரு விட்டம் $A'OA$ என்பதை x – அச்சாகக் கொள்க.

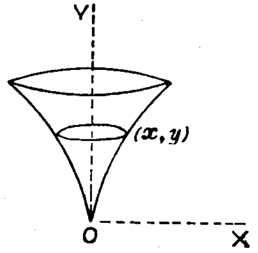
OX இற்குச் செங்கோணங்களில் தளங்களால் வெட்டப்படும் வெட்டுமுகங்கள் வட்டங்களாகும். $MP(=y)$ அத்தகை வட்டத்தின் ஆரையாகுக ; இங்கு $OM=x$. எனின், $x^2+y^2=a^2$; அக்கோளத்தின் கனவளவு



$$=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[a^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

7.312. உதாரணங்கள். y நேராயிருக்க, $x=o$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்குமுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் வளைகோடு y – அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; வளைபரப்பாலும் ஒரு தளமுனையாலும் அமைந்த கனவளவைக் காண்க.



y – அச்சானது உருவத்தின் அச்சாயிருக்கின்றமையால், ஒரு வட்டவெட்டு முகத்தின் பரப்பு πx^2 ஆகும். ஒரு சீவலினது தடிப்பு δy ஆகும் ;

ஆகவே, கனவளவு $=\int_0^{2a}\pi x^2dy$;

மேலெல்லை $x=a$ ஆகும்பொழுது y இன் பெறுமானமாகும்.

ஆகவே, கனவளவு $=\pi\int_0^{2a}\frac{y^4}{16a^2}dy=\frac{\pi}{80a^2}\times 32a^5=\frac{2}{5}\pi a^3$.

7.313. பயிற்சிகள்.

1. $y=a$சைன்bx என்னும் வளைகோட்டின் ஒரு மடிப்பு x– அச்சைப் பற்றிச் சுற்றும்பொழுது அடைக்கப்பட்ட கனவளவைக் காண்க.

2. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பை ஒரு சுற்றுத் திண்மமெனக் கொண்டு அதன் கனவளவைக் காண்க.

3. ஓர் உருவமானது ஒரு வட்டத்தின் கால்வட்ட வில்லாலும் அதன் முனைகளிலுள்ள தொடு கோடுகளாலும் அமைக்கப்படுகின்றது. அவ்வுருவத்தைத் தொடுகோடுகளுள் ஒன்றுபற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைக் காண்க.

4. $ay^2=x^3$ ($x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்கும்) என்னும் வளைகோட்டை y – அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற ஓர் இரட்டைக் கிண்ணம் ஆக்கப்படுகின்றது ; அதன் கனவளவைக் காண்க.

5. x – அச்சிற்கும் $y=(x-1)(x+2)$ என்னும் பரவளைவிற்கும் இடையில் அமைந்த பரப்பை அவ்வச்சுப் பற்றிச் சுற்ற அமையுங் கனவளவைக் காண்க.

6. ஒரு வட்டத்துண்டு தனது நாண்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. ஆரை a பற்றியும் அவ்வட்ட மையத்தில் அத்துண்டின் வில் எதிரமைக்கின்ற கோணம் 2α பற்றியும் அங்குப் பிறந்த கனவளவைக் காண்க.

7. $y^2=4(x-3)$ என்னும் வளைகோட்டாலும், y – அச்சாலும், $y=\pm 4$ என்னுங் கோடுகளாலும் எல்லையுற்ற உருவம் y – அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; பிறந்த கனவளவைக் காண்க.

8. $x=0$ இலிருந்து $x=c$ வரைக்குமுள்ள $y=c$அகோசை(x/c) என்னும் வளைகோடு y – அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட கிண்ணத்தின் கனவளவைக் காண்க.

7·4. புவியீர்ப்பு மையங்கள். m_1, m_2, m_3........என்னுந் திணிவுகளையுடைய துணிக்கைகளின் ஒரு தொகுதி A_1, A_2, A_3........என்னும் ஒரு தளப் புள்ளிகளில் இருக்க, அப்புள்ளிகள் அத்தளத்து யாதுமொரு நேர்க்கோட்டிலிருந்து x_1, x_2, x_3,........என்னுந் தூரங்களில் இருந்

தால், அத்திணிவுகளின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது அதே நேர் கோட்டிலிருந்து தூரம்

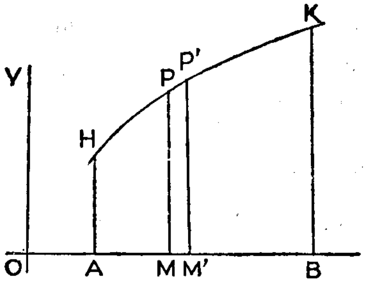
$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+\ldots\ldots}{m_1+m_2+m_3+\ldots\ldots}=\frac{\Sigma(mx)}{\Sigma m}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

என்பதில் இருக்குமென்பது நிலையியல் நூல்களிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. அன்றியும், A_1, A_2, A_3........என்பன வேறு வேறு பொருள்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களாயின், m_1, m_2, m_3........என்னுந் திணிவுகளையுடைய பொருள்களின் ஒரு தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் அதே சூத்திரம் பொருந்தும். அன்றியும், A_1, A_2, A_3........என்பன ஒரு தளப் புள்ளிகளல்ல எனினும், x என்பன ஒரு தளத்திலிருந்து அளந்த தூரங்களைக் குறிக்குமாயின், அதே சூத்திரம் பொருந்தும்.

அன்றியும், திணிவுப் பிரச்சினையாகாது பரப்புக்கள், அல்லது கனவளவுகள் போன்றனவற்றின் பிரச்சினையாயிருக்கும் போதும், m_1, m_2, m_3 என்பனவற்றிற்குப் பதிலாகத் தம் இடையான மையங்கள் A_1, A_2, A_3 ....என்பனவற்றிலுள்ள பரப்பு மூலகங்களையாதல் கனவளவு மூலகங்களையாதல் பிரதியிடுவோமாயின், அதே சூத்திரம் **இடை மையத்தை**, அல்லது **திணிவு மையத்தைத்** துணிதற்கு உதவும்.

இது பின்வரும் பிரிவில் எடுத்துக்காட்டப்படும்.

7.41. பரப்புத் திணிவுமையம். ஒரு பரப்பு HK என்னும் ஒரு வளைகோட்டாலும் x – அச்சினாலும், AH, BK என்னும் இரு நிலைத் தூரங்களாலும் எல்லையுறுக ; இங்கு $OA=a$, $OB=b$ ஆகுக ; $y=f(x)$ என்பது அவ்வளைகோட்டின் சமன்பாடாகுக.



அப்பரப்பை OY இற்குச் சமாந்தரமான $MPP'M'$ போன்ற ஒரு தொகையான ஒடுக்கக் கீலங்களாக அப்பரப்பை நாம் பிரிக்க, $OM=x$ ஆயும் $MM'=\delta x$ ஆயும், $MP=y$ ஆயும் இருந்தால், இக்கீலத்தின் பரப்பு எம் நோக்கிற்குத் தகப் போதிய செம்மையோடு $y\delta x$ ஆகும்.

இது ஒரு மாதிரியுருவான பரப்பு மூலகம் ; இதனை $\bar{x}$ இற்கு உரிய சூத்திரத்தின் " m " ஆக நாம் வழங்கலாம். அக்கீலத்தின் இடை மையத்தின் ஆள் கூறுகள் அண்ணளவாக $x, \frac{1}{2}y$ என்பன. எனின்,

$AHKB$ என்னும் பரப்பினது திணிவு மையத்தின் ஆள் கூறுகள்

$$\bar{x}=\frac{\Sigma(x.y\delta x)}{\Sigma(y\delta x)},\quad \bar{y}=\frac{\Sigma(\frac{1}{2}y.y\delta x)}{\Sigma y\delta x}\quad \text{ஆகும்.}$$

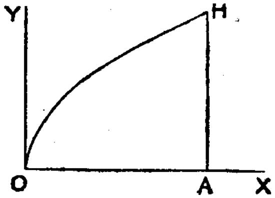
இங்கு, AH, BK என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கீலத்தொகை வரையறையின்றிக் கூடுதலுறும்பொழுது இக்கூட்டுத் தொகைகள் அணுகும் எல்லைப் பெறுமானங்களை நாம் எடுத்தல் வேண்டும்.

$$\text{ஆகவே,}\quad \bar{x}=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad \bar{y}=\frac{\int_a^b \frac{1}{2}y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

7.411. உதாரணங்கள்.

(i) x – அச்சிற்கும், நேர்க்கால் வட்டத்திலுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் $x=h$ இலுள்ள நிலைத் தூரத்திற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பினது திணிவுமையத்தைக் காண்க.

இவ்வகையில்,



$$\bar{x}=\frac{\int_0^h xydx}{\int_0^h ydx}=\frac{\int_0^h 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\int_0^h 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{5}h\,;$$

$$\bar{y}=\frac{\int_0^h \frac{1}{2}y^2dx}{\int_0^h ydx}=\frac{\int_0^h 2axdx}{\int_0^h 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}h^2}{\frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}a^{1}h^{\frac{1}{2}}.$$

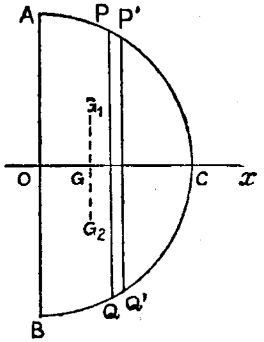
ஆகவே, OAH என்பது அப்பரப்பெனின், திணிவுமையம் $(\frac{3}{5}OA, \frac{3}{4}AH)$ என்னும் புள்ளியாகும்.

(ii) ஒருசீரான அரைவட்டத் தகடு ஒன்றின் புவியீர்ப்புமையத்தைக் காண்க.

O என்பது அரைவட்டம் ACB இன் மையமாயும் A என்பது அதன் ஆரையாயும் இருக்க. அத்தகட்டை விட்டம் AOB இற்குச் சமாந்தரமான

$PQQ'P'$ என்பது போன்ற ஒடுக்கக் கீலங்களாகப் பிரித்தோமாயின் அத்தகைய கீலங்கள் எல்லாம் ஆரை OC ஆல் AB இற்குச் செங்கோணங் களில் இரு சமக் கூறிடப்படும்.

OC, OA என்பனவற்றை x-அச்சாயும் y-அச்சாயும் எடுக்க. ஆயின், P என்பது (x, y) என்னும் புள்ளியெனின், $x^2+y^2=a^2$; எல்லாக் கீலங்களினுடைய புவியீர்ப்பு மையங் களும் Ox இற் கிடக்கும்; அத்தகட்டுக்கீலம் ஒன்றினது திணிவு அதன் பரப்பு $2y\delta x$ இற்கு விகித சமமெனக் கொண்டால், நாம் பெறுவது



$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x.2y\,dx}{\int_0^a 2y\,dx} = \frac{\int_0^a 2x\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}{\text{அரைவட்டப்பரப்பு}}$$

$$= \frac{\left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$$

கி.தே. G_1, G_2 என்பன OAC, OCB என்னும் இரண்டு கால்வட்டத் தகடுகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களாயின், G_1G_2 என்னுங் கோடு சமச்சீரால் AB இற்குச் சமாந்தரமாய் அம்முழுத் தகட்டின் புவியீர்ப்பு மையமாகிய G இனூடாகச் செல்ல வேண்டும். ஆகவே, OA இலிருந்து G_1 இனது தூரம் $4a/3\pi$; சமச்சீரால், அது அக்கால் வட்டத்தின் மற்றை எல்லையாரையாகிய OC இலிருந்து அதே தூரத்தில் இருத்தல் வேண்டும்.

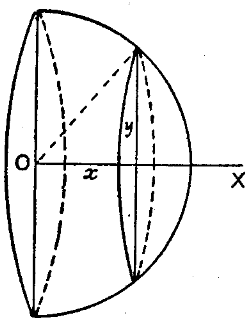
7.42 சுற்றுக் கனவளவினது திணிவுமையம். 7.31 இன் உருவத்தைப் பார்க்க, கனவளவின் மாதிரி மூலகம் தன் மையம் உற்பத்தியிலிருந்து x-அச்சில் x என்னுந் தூரத்தில் இருக்கின்ற $\pi y^2\delta x$ என்னும் அளவுள்ள ஒரு வட்டச் சீவல் எனக் காண்கின்றோம்; ஆயின்,

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \pi x y^2\,dx}{\int_a^b \pi y^2\,dx} = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}.$$

7.421. உதாரணம். ஒருசீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

x-அச்சைத் தளவடிக்குச் செங்கோணங்களில் எடுத்துத் தம் மையங் கள் அவ்வச்சில் இருக்கின்ற சீவல்கள் அடிக்குச் சமாந்தரமாய் எடுக்கப்

படுகின்றன. a என்பது அவ்வரைக் கோளத்தின் ஆரையாயும், y என்பது O இலிருந்து x என்னுந் தூரத்திலுள்ள வட்டவெட்டு முகத்தின் ஆரையாயும் இருந்தால் நாம் பெறுவது $x^2+y^2=a^2$. எனின்

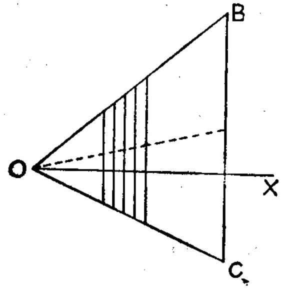


$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi x y^2\,dx}{\int_0^a \pi y^2\,dx} = \frac{\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx}{\int_0^a (a^2-x^2)\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{4}a^4}{a^3 - \frac{1}{3}a^3} = \frac{3}{8}a.$$

7.43. புவியீர்ப்பு மையங்கள் பற்றிய மேலதிகமான உதாரணங்கள். பின் வரும் முடிபுகள் தொகையிடாமல் எளிதாகப் பெறப்படும்; எனினும், ஒரு முறையின் உதாரணங்களாக அத்தேற்றங்களை வழங்குகின்றோம்.

(i) **ஒருசீரான முக்கோணத் தகடு.** OBC என்பது அத்தகட்டைக் குறிக்க. BC இற்குச் செங்கோணங்களில் OX என்னும் ஓர் அச்சை எடுக்க; அத்தகட்டை BC இற்குச் சமாந்தரமான கோடுகளாற் கீலங்களாகப் பிரிக்க.

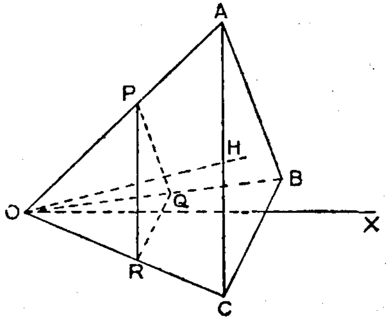


$BC=a$ ஆயும் h என்பது O இலிருந்து BC இனது தூரமாயும் இருந்தால், வடிவொத்த முக்கோணங்களால் O இலிருந்து x என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஒரு கீலத்தினது நீளம் $\frac{x}{h}a$ ஆகும். δx என்பதை ஒரு கீலத்தின் அகலமாயும் $\frac{a}{h}x\delta x$ என்பதை அதன் பரப்பாயும் எடுக்கின்றோம். வடிவொத்த முக்கோணங்களால், எல்லா ஒடுக்கக் கீலங் களின் மையங்களும் O இனூடாகவும் (மையக்கோடு) BC இன் மையத்திற் கூடாகவுஞ் செல்கின்ற ஒரு கோட்டிற் கிடக்குமென்பது எளிதாகக் காட்டப் படும். அன்றியும், ஒரு கீலத்தினது திணிவு அதன் பரப்பிற்கு விகித சமமாயிருத்தலால்,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x\frac{a}{h}x\,dx}{\int_0^h \frac{a}{h}x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}h^3}{\frac{1}{2}h^2} = \frac{2}{3}h;$$

ஆகவே, அப்புவியீர்ப்பு மையம் ஒரு மூலையிலிருந்து எதிர்ப்பக்கத்திற்குச் செல்கின்ற மையக் கோட்டினது நீளத்திற்கு அதன் $\frac{2}{3}$ பங்கு தூரமாகும்.

(ii) **ஒரு சீர்த்திண்ம நான்முகத்திண்மம்.** $OABC$ என்பது ஒரு சீர்த்திண்ம நான்முகத் திண்மம் ஒன்றுருக ; OX ஆனது ABC இற்குச் செங்கோணங்களிலுள்ள ஓர் அச்சாகுக. வடிவொத்த முக்கோணங்களால் H என்பது ABC இன் திணிவு மையமாயின், ABC இற்குச் சமாந்தரமான யாதும் ஒரு தளவெட்டு முகத்தினது திணிவு மையம் OH இன்மீது கிடக்குமெனக் காட்டலாம். எனின், ABC இற்குச் சமாந்தரமாய் மெல்லிய சீவல்களை எடுப்பதால், அந் நான்முகத் திண்ம மையத்தின் புவியீர்ப்புமையம் OH இன் மீது கிடக்கும் என்பது பெறப்படும்.



இனி, S என்பது பரப்பு ABC ஐயும் h என்பது O இலிருந்து அதன் தூரத்தையுங் குறித்தால், O இலிருந்து x என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஒரு சமாந்தரமான வெட்டுமுகத்தின் பரப்பு

$$\triangle PQR : \triangle ABC = PR^2 : AC^2$$
$$= OP^2 : OA^2 = x^2 : h^2$$

என்பதாலே தரப்படும்.

ஆகவே, $\frac{x^2}{h^2}S$ என்பதை ஒரு சீவலின் பரப்பாயும் δx என்பதை அதனுடைய தடிப்பாயும் $\frac{S}{h^2}x^2\,\delta x$ என்பதை அதன் கனவளவாயும் நாம் எடுக்கலாம்.

$$\text{எனின்,}\quad \bar{x} = \frac{\int_0^h x.\frac{S}{h^2}x^2dx}{\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx} = \frac{\frac{1}{4}h^4}{\frac{1}{3}h^3} = \frac{3}{4}h.$$

ஆகவே, அந்நான்முகத்திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் O இலிருந்து H இற்குச் செல்லும் வழியில் முக்காற் பங்கில் இருக்கும்.

கி.தே. அதுபோல, ஒரு சீர்த்திண்மக் கூம்பகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து அடியினது திணிவு மையத்திற்குச் செல்லும் வழியில் முக்காற் பங்கில் இருக்குமெனக் காட்டலாம்.

தளவடியையுடைய யாதும் ஒரு வடிவத்தைக் கொண்ட ஒருகூம்புக்கும் அதே முடிபு உண்மையாகும் ; அதற்குக் காரணங் கூம்பானது வரையறையின்றிய பல ஒடுக்க முகங்களோடு கூடிய ஒரு கூம்பகத்தின் எல்லையுறு வடிவமெனக் கொள்ளப்படலாம் என்பதே.

7.44. சடத்துவத் திருப்புதிறன்கள். m என்பது ஒரு பொருளின் ஒரு மூலகத்தினது திணிவாயும் r என்பது ஓர் அச்சிலிருந்து அம்மூலகத்தினது திணிவாயும் இருந்தால், அவ்வச்சுப்பற்றி அப்பொருளின் சடத்துவத் திருப்புதிறன் $\Sigma(mr^2)$ என வரையறுக்கப்படும் ; அதாவது ஒவ்வொரு மூலகத்தினது திணிவையும் அவ்வச்சிலிருந்து அதன் தூரத்தின் வர்க்கத்தாற் பெருக்க வருவனவற்றின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

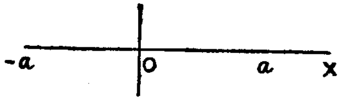
M என்பது ஒரு பொருளின் முழுத் திணிவையுங் குறிக்க, Mk^2 என்பது ஒரு குறித்த அச்சுப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பு திறனுயிருந்தால், k என்பது அவ்வச்சுப்பற்றி அப்பொருளின் **சுழியாரை** எனப்படும். இவ்வாறு $k^2 = \Sigma(mr^2)/M$.

அப்பொருள் தகடுபோன்ற தளப்பொருளாயின், அதன் கண்ணேயேயுள்ள ஒரு புள்ளியைப்பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திறனைப்பற்றி நாம் பேசலாம் ; அதன் கருத்து அத்தளத்திற்குச் செங்கோணங்களில் அப்புள்ளிக் கூடாகச் செல்லும் ஓர் அச்சுப்பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திருப்புதிறன் என்பதே.

7.441. உதாரணங்கள்.

(i) திணிவு M உம் ஆரை a உம் உள்ள ஒரு மெல்லிய வட்டவளையத்தினது தளத்திற்குச் செங்கோணங்களில் அதன் மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் ஓர் அச்சுப் பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திருப்புதிறனனது, ஒவ்வொரு திணிவு மூலகமும் மையத்திலிருந்து ஒரே தூரம் a இல் இருப்பதாகக் கொண்டால், Ma^2 ஆகும்.

(ii) **ஒருசீர் நேர்க்கோல் ஒன்றினது நீளத்திற்குச் செங்கோணங்களில் அதன் மையத்திற் கூடாகச் செல்லும் ஓர் அச்சுப் பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திருப்புதிறன்.**



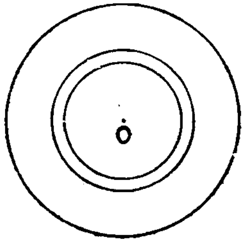
M என்பது அதன் திணிவாயும் $2a$ என்பது அதன் நீளமாயும் இருக்க உற்பத்தியை அக்கோலினது மையத்திலும் x-அச்சை அக்கோலினது நீளத்திற்கும் எடுக்க.

0 இலிருந்து x என்னுந் தூரத்திலுள்ள δx என்னும் ஒரு நீள மூலகத்தினது திணிவு $M\frac{\delta x}{2a}$ ஆகும். எனின், சடத்துவத் திருப்புதிறன் $-a$ இலிருந்து a வரைக்கும் x இன் பெறுமானங்களுக்குக் கூட்டப்பட்ட $\Sigma\left(M\frac{\delta x}{2a}x^2\right)$ ஆகும்; அதாவது

$$\frac{M}{2a}\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{M}{2a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{3}Ma^3$$ ஆகும்.

சுழியாரை $k^2=\frac{1}{3}a^2$ என்பதாலே தரப்படும்.

(iii) ஒரு வட்டத் தட்டின் மையம்பற்றியுள்ள அதன் சடத்துவத் திருப்புதிறன்.



M என்பது அத்தட்டினது திணிவாயும் a என்பது அதன் ஆரையாயும் இருக்க.

ஒரு மைய வட்டங்கள் வரைவதால், அத்தட்டு ஒடுக்க வட்ட வளையங்களின் ஒரு தொகுதியாகப் பிரிக்கப்படலாம். r என்பது அத்தகை வளையத்தின் ஆரையாயும், δr என்பது அதன் அகலமாயும் இருந்தால், அதன் பரப்பு $2\pi r\delta r$ ஆகும்; அத்தட்டின் முழுப்பரப்பும் πa^2 ஆகும். ஆகவே, அவ்வளையத்தினது திணிவு $\frac{2\pi r\delta r}{\pi a^2}$, அல்லது $\frac{2M}{a^2}r\delta r$ ஆகும்; இவ் வளையத்தின் ஒவ்வொரு மூலகமும் மையம் O இலிருந்து r என்னுந் தூரத்திலிருக்கும்; ஆகவே, அத்தட்டின் சடத்துவத் திருப்பு திறனானது 0 இற்கும் a இற்கும் இடையிலுள்ள r இன் பெறுமானங்களுக்குக் கூட்டப் பட்ட $\Sigma\left(\frac{2M}{a^2}r^3\delta r\right)$, அல்லது $\frac{2M}{a^2}\int_0^a r^3dr=\frac{1}{2}Ma^2$ ஆகும்.

(iv) ஒரு சுற்றுத் திண்மத்தின் அச்சுப்பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பு திறன்.

7.31 இன் உருவத்தை நோக்க, அத்திண்மம் $PP'Q'Q$ போன்ற வட்டத் தட்டுக்களின் ஓர் அடுக்கின் எல்லையுறும் வடிவமாகக் கொள்ளப்படலாம். இத்தட்டின் கனவளவு $\pi y^2\delta x$ ஆகும்; அதனுடைய திணிவு $m\pi y^2\delta x$ ஆகும்; இங்கு, m என்பது அத்திண்மத்தின் ஓரலகு கனவளவினது திணிவு. அன்றியும், சென்ற பயிற்சியால், அத்தட்டின் அச்சுப்பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்புதிறன்

$$\frac{1}{2}m\pi y^2\delta x.y^2=\frac{1}{2}m\pi y^4\delta x.$$

எனின், அச்சுப்பற்றி அம்முழுத் திண்மத்தின் சடத்துவத் திருப்புதிறன் $\frac{1}{2}\pi m\int_a^b y^4dx$ ஆகும்; இங்கு, நெடுங்கோட்டு வளைகோட்டின் சமன்பாட்டால், y என்பது x பற்றித் தரப்படும்.

7.442. பயிற்சிகள்.

1. பின்வருவனவற்றின் திணிவு மையங்களின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க:

(i) $y=a$ சைன் $\frac{x}{b}$ என்னும் வளைகோட்டின் ஒரு மடிப்பு;

(ii) $y=(x+1)(x-3)$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் x-அச்சிற்கும் இடையில் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு;

(iii) $y=x^2(x-1)$ என்னும் வளைகோட்டாலும், x-அச்சாலும் அடைக்கப் பட்ட பரப்பு;

(iv) $y^2=x^2(1-x^2)$ என்னும் வளைகோட்டின் ஒரு வளையத்தின்பரப்பு;

(v) ஒரு சுற்றின் கனவளவாகக் கொள்ளப்பட்ட ஒரு நேர் வட்டக்கூம்பு;

(vi) a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளம் மையத்திலிருந்து c என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஒரு தளத்தாற் பிரிக்கப்பட்ட துண்டுகள்;

(vii) தன் முனைகள் a, b என்னும் ஆரைகளையுடைய வட்டங்களாகவும் தன் அச்சு h என்னும் நீளமுள்ளதாயும் இருக்கின்ற நுனியில் நேர்வட்டக் கூம்பு ஒன்று;

(viii) தன் முனைகள் 5, 1 என்னும் ஆரைகளையுடைய வட்டங்களாயும் தன் நெடுங்கோட்டு வளைகோடு $4(y-1)=x^2$ என்பதாயுமுள்ள x- அச்சுப் பற்றிச் சுற்றிய ஒரு சுற்றின் கனவளவு.

2. பின்வருவனவற்றின் சடத்துவத் திருப்புதிறன்களைக் காண்க:

(i) ஒருசீர்ச் சதுரத் தகடு அதன் பக்கங்களுள் ஒன்று பற்றி;

(ii) ஒரு நேர்க்கோல் அதன் ஒரு முனைபற்றி, அக்கோலின் அடர்த்தி அம்முனையிலிருந்து உள்ள தூரத்தோடு மாறுகின்றபொழுது,

(iii) ஒருசீர் முக்கோணத் தகடு ஒன்று அதன் பக்கங்களுள் ஒன்று பற்றி;

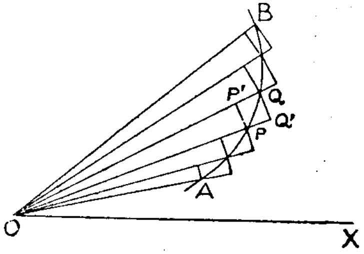
(iv) ஒருசீர் வட்டத் தகடு ஒன்று ஒரு விட்டம் பற்றி;

(v) ஒருநேர் வட்டக் கூம்பு அதன் அச்சுப்பற்றி;

(vi) x-அச்சினாலும், $x=h$ என்னுங் கோட்டினாலும், $y=\sqrt{(kx)}$ என்னும் வளைகோட்டாலும் உருவத்தை x-அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பெறப்படுந் திண்மம், அவ்வுருவத்தின் அச்சுப்பற்றித் திருப்புதிறன் எடுக்கப்படும்பொழுது;

(vii) தனது எல்லை $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ஆயுள்ள ஒரு சீர்த்தகடு ஒன்று, முறையே x – அச்சுப்பற்றியும் y – அச்சுப் பற்றியும்.

7.5. முனைவாள் கூறுகளிற் பரப்புக்கள். தன் சமன்பாடு $r=f(\theta)$ ஆயுள்ள வளைகோடு AB ஆலும் இரண்டு ஆரைக் காவிகள் OA, OB என்பன வற்றாலும் எல்லையுற்ற ஆரைச் சிறைப் பரப்பைக் காணல்.



$AOX=\alpha$ ஆகுக ; $BOX=\beta$ ஆகுக.

O இனூடாக அவ்வளைகோட்டின் ஆரைகளை வரைதலால், கோணம் AOB ஐ ஒரு தொகையான பகுதிகளாகப் பிரிக்க.

பின்னர் இவ்வாரைகளின் முனைகளுக்கூடாக வட்ட விற்கள் வரைதலால், வட்டவாரைச் சிறைகளின் இரு தொகுதிகளை அமைக்கின்றோம். OPP' என்பது மாதிரியுருவான ஆரைச்சிறைகளின் ஒரு தொகுதியின் கூட்டுத் தொகைக்குரிய பரப்பு வேண்டிய பரப்பு OAB இனுஞ் சிறிது ; OQQ' என்பது மாதிரியுருவான ஆரைச்சிறைகளின் மற்றைத் தொகுதியின் கூட்டுத்தொகைக்குரிய பரப்பு OAB என்னும் பரப்பிலும் பெரிது. எனினும், ஆரைச்சிறைகளினுடைய தொகை கூடுதலுற, அவ்வீர் ஆரைச் சிறைகளின் பரப்புக்கள் சமத்தை அணுகும் ; அவை கோணவகலத்திற் குறைதலுறும்.

இனி, P என்பது புள்ளி (r,θ) ஆயும், Q என்பது புள்ளி $(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ ஆயுமிருந்தால், POQ என்னுங் கோணம் $\delta\theta$ ஆகும் ; POP' என்னும் வட்ட ஆரைச் சிறையின் பரப்பு $\frac{1}{2}r^2\delta\theta$ ஆகும் (7.11 கி.தே.). எனின், சிறு பிரிவுகளினது தொகை முடிவிலியை அணுக, OAB என்னும் பரப்பு $\frac{1}{2}\ \Sigma r^2\delta\theta$ இன் எல்லையாகும் ;

அதாவது பரப்பு $OAB=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$.

7.51. உதாரணங்கள்.

(i) **மையத்தில் முனைவுள்ள ஒரு நீள்வளையத்தின் முனைவுச் சமன்பாடு**

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\text{கோசை}^2\theta}{a^2}+\frac{\text{சைன்}^2\theta}{b^2},$$

பரப்பைக் காண்க.

ஒவ்வொரு கால்வட்டத்திலும் உள்ள பரப்புச் சமன் ; ஆகவே,

$$\text{பரப்பு}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^2 d\theta=2a^2b^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{b^2\text{கோசை}^2\theta+a^2\text{சைன்}^2\theta}$$

$$=2a^2b^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\text{சீக}^2\theta d\theta}{b^2+a^2\text{தான்}^2\theta}.$$

$$=2a^2b^2\left[\frac{1}{ab}\text{தான்}^{-1}\left(\frac{a\ \text{தான்}\ \theta}{b}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$=2ab.\tfrac{1}{2}\pi$$

$$=\pi ab,$$

7.12 இற்போல.

(ii) **$r^2=a^2$ கோசை 2θஎன்னும் வளைகோட்டின் ஒரு வளையத்தின் பரப்பைக் காண்க.**

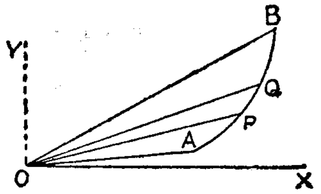
இச்சமன்பாட்டிலிருந்து $\theta=-\frac{1}{4}\pi$ ஆகும்பொழுதும் $\theta=+\frac{1}{4}\pi$ ஆகும் பொழுதும் r பூச்சியமாகும் என்றும், θ இன் இடையான பெறுமானங்கள் r இற்கு யாதொன்றும் பூச்சியமல்லாத முடிவுள்ள பெறுமானங்களைத் தரும் என்றும், அதுபற்றி இவையே ஒரு வளையத்தின் பரப்பிற்கு எடுக்கப்பட வேண்டிய எல்லைகள் என்றும் நாம் காண்கின்றோம்.

$$\text{எனின், பரப்பு}=\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} a^2\ \text{கோசை}\ 2\theta d\theta$$

$$=\tfrac{1}{4}a^2\left[\text{சைன்}\ 2\theta\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$=\tfrac{1}{2}a^2.$$

7.52. ஆரைச்சிறைப் பரப்புக்களின் திணிவுமையங்கள். பரப்பின் மாதிரியுரு மூலகம் மிக்க அண்ணளவாக $\frac{1}{2}r^2\delta\theta$ என்னும் பரப்புடைய OPQ என்னும் ஓர் ஒடுக்கமான ஆரைச்சிறை.



ஒரு முக்கோணத்தின் திணிவுமையம் ஒரு மையக்கோட்டினது நீளத்திற்கு அந்நீளத்தின் $\frac{2}{3}$ பங்கில் இருத்தலால், OPQ என்னும் ஆரைச் சிறையின் அகலம் வரையறையின்றிக் குறைதலுற, அதன் திணிவுமையத்தின் ஆள் கூறுகள் $\frac{2}{3}r$கோசைθ, $\frac{2}{3}r$சைன்θ என்பனவாகும்.

$$\text{ஆகவே, } \bar{x} = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}r\text{கோசை}\theta\frac{1}{2}r^2d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta} = \frac{2}{3}\frac{\int_\alpha^\beta r^3\text{கோசை}\theta d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2d\theta};$$

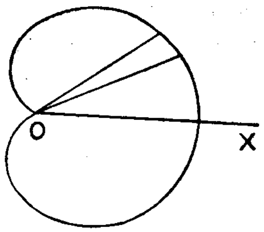
$$y = \frac{\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}r\text{சைன்}\theta.\frac{1}{2}r^2d\theta}{\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta} = \frac{2}{3}\frac{\int_\alpha^\beta r^3\text{சைன்}\theta d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2d\theta};$$

7.521. உதாரணங்கள். $r = a(1+\text{கோசை}\theta)$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்ட மூடிய வளைகோட்டின் (இருதய வுருவின்) திணிவு மையத்தைக் காண்க.

θ இன் குறியை மாற்றுவதால் அச்சமன்பாடு மாருது ; ஆயின் அவ்வளைகோடு x – அச்சுப் பற்றிச் சமச்சீராகும் ; சமச்சீரால் அதன் திணிவு மையம் OX இன் மீது கிடக்கும்.

அவ்வளைகோட்டின் மேற்பாதிக்கு θ இன் எல்லைகள் 0 இலிருந்து π வரைக்குமாகும். ஆகவே,



$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{\int_0^\pi a^3(1+\text{கோசை}\theta)^3\text{கோசை}\theta d\theta}{\int_0^\pi a^2(1+\text{கோசை}\theta)^2d\theta}$$

$$= \frac{2}{3}a\frac{\int_0^\pi (\text{கோசை}\theta+3\text{கோசை}^2\theta+3\text{கோசை}^3\theta+\text{கோசை}^4\theta)d\theta}{\int_0^\pi (1+2\text{கோசை}\theta+\text{கோசை}^2\theta)d\theta}.$$

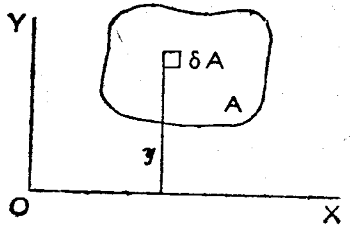
*இப்போது **6.6** ஐப் பயன்படுத்திக் கொண்டு, 0 இலிருந்து π வரைக்குந் தொகையிட்ட கோசைθ இன் ஓர் ஒற்றை அடுக்கு பூச்சிய முடிபைக் கொடுக்குமென ஞாபகத்தில் வைத்துக்கொள்ள நாம் பெறுவது*

$$\bar{x} = \frac{2}{3}a.\frac{6.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}+2.\frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}}{\pi+\frac{2.\pi.1}{2.2}}$$

$$= \frac{5}{6}a.$$

7.6. பப்பசினது தேற்றம்.

ஒரு தளப்பரப்பு தனது தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சுப்பற்றி அதனை வெட்டாது சுற்றிஞற், பிறக்குங் கனவளவு அப்பரப்பை அதன் திணிவு மையத்தின் வழியினது நீளத்தாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்திற்குச் சமன்.



அப்பரப்புச் சுற்றறும் அச்சை x – அச்சாக எடுக்க. A என்பது பரப்பையும் δA என்பது OX இலிருந்து Y என்னுந் தூரத்திலுள்ள அதன் சிறு மூலகம் ஒன்றையுங் குறிக்க. அவ்வுருவம் OX பற்றிச் சுற்ற, மூலகம் δA என்பது $2\pi y$ என்னும் நீளத்தையும் δA என்னுங்குறுக்குவெட்டு முகத்தையும் அதுபற்றி $2\pi y\delta A$ என்னுங் கனவளவையும் உடைய ஓர் ஒடுக்கமான குழாயை வரையும். எனின், பரப்பு A ஆற்பிறப்பிக்கப்படும் முழுக் கனவளவும், பரப்பு மூலகத் தொகை முடிவிலியை அணுக, $2\pi\Sigma(y\delta A)$ இன் எல்லையாகும். எனினும், $\bar{y}$ என்பது OX இலிருந்து பரப்பு A இன் திணிவு மையத்திற்குள்ள தூரமாயின், நாம் பெறுவது

$$\bar{y}A = \text{எல்லை}\,\Sigma(y\delta A).$$

எனின், வேண்டிய கனவளவு

$$= 2\pi\bar{y}A$$

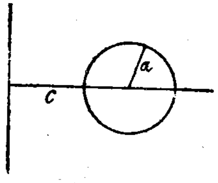
$$= A\times \text{ அதன் திணிவு மையத்தின் வழியினது நீளம்.}$$

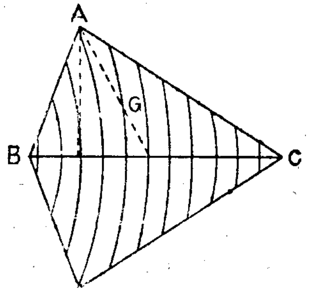
7·61. பயிற்சிகள்

(i) a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்டம் தன் மையத்திலிருந்து $c\,(>a)$ என்னுந் தூரத்திலே தனது தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது.

அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட திண்ம வளையத்தின் கனவளவு

$$\pi a^2\times 2\pi c = 2\pi^2a^2c.$$





(ii) அடி a ஆயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு முக்கோணம் தனது அடிபற்றிச் சுற்றுகிறது. பிறக்குந் திண்மத்தின் கனவளவு என்ன ?

பரப்பு$=\frac{1}{2}ah$; திணிவு மையம் G ஆனது $\frac{1}{3}h$ என்னும் ஆரையை யுடைய ஒரு வட்டத்தை வரையும்.

ஆகவே, கனவளவு

$$=\frac{1}{2}ah\times\frac{2\pi}{3}h$$
$$=\frac{1}{3}\pi a h^2.$$

அத்திண்மம் πh^2 என்னும் பரப்பையுடைய ஒரு பொது வடிவையும் a என்னும் மொத்த உயரத்தையுங் கொண்ட இரு கூம்புகளாலாயது என்பதிலிருந்து இது தெளிவாகும்.

7.62. பயிற்சிகள்.

1. பின்வரும் வளைகோடுகளாலுங் கூறப்பட்ட ஆரைக் காவிகளாலும் எல்லையுற்ற பரப்புக்களைக் காண்க:

(i) சுருளி $r=a\theta,\quad \theta=0,\quad \theta=2\pi$;

(ii) சுருளி $r=ae^{k\theta},\quad \theta=0,\quad \theta=2\pi$.

2. பின்வரும் வளைகோடுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு வளையத்தின் பரப்பைக் காண்க:

(i) $r=a$சைன்2θ ; (ii) $r=a$சைன்$n\theta$.

3. $\theta=0,\ \theta=\alpha$ என்பனவற்றிற்கு இடையே $r=a$ சீக$^2\frac{1}{2}\theta$ என்னும் வளைகோட்டின் ஆரைச்சிறையின் பரப்பு

$$a^2(\text{தான் }\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{3}\text{தான்}^3\,\tfrac{1}{2}\alpha)$$

எனக் காட்டுக.

4. $r=2+$கோசைθ என்னும் வளைகோட்டைப் பருமபடியாக வரைந்து அதன் பரப்பைக் காண்க.

5. $r=a$கோசை2θ என்னும் வளைகோட்டின் ஒரு வளையத்தின் பரப்பினது திணிவுமையத்தைக் காண்க ; இவ்வளையத்தை $y-$அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைத் துணிக.

6. $r=a+b$கோசைθ $(a>b)$ என்னும் வளைகோட்டுப் பரப்பினது திணிவு மையத்தைக் காண்க.

7. $\theta=0$ இலிருந்து $\theta=\pi$ வரைக்குமுள்ள $r=a(1-$கோசை$\theta)$ என்னும் வளைகோட்டின் ஆரைச்சிறைப் பரப்பினது திணிவுமையத்தைக் காண்க ; இப்பரப்பை $x-$அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவை உய்த்தறிக.

8. ஒரு திண்ம வளையத்தின் உண்மேற்பரப்பு a என்னும் ஆரையையும் h என்னும் உயரத்தையுமுடைய ஒரு வட்டவுருளை; அவ்வளையத்தின் குறுக்கு வெட்டுமுகம் (h என்னும் பக்கத்தையுடைய) சமபக்க முக் கோணம். அவ்வளையத்தின் கனவளவு $\frac{1}{2}\sqrt{3}\pi h^2(a+h/2\sqrt{3})$ என நிறுவுக.

9. ஓர் உருவம் ஒரு வட்டத்தின் கால்வட்ட வில் ஒன்றாலும் அதன் முனைகளிலுள்ள ஆரைகளாலும் எல்லையுறுகின்றது. அவ்வில்லின் முனை களுள் ஒன்றிலுள்ள தொடுகோடு பற்றி அவ்வுருவத்தைச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைக் காண்க.

10. a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட வுருளையைச் சுற்றி ஒரு தவாளிப்பு வெட்டப்படுகின்றது. அத்தவாளிப்பின் குறுக்கு வெட்டுமுகம் b என்னும் பக்கத்தையுடைய சமபக்க முக்கோணமாயின், வெட்டப்பட்ட கனவளவைக் காண்க.

11. ஓர் அரைவட்டத்தின் பரப்பினது திணிவு மையத்தைத் துணிதற்குப் பப்பசினது தேற்றத்தையும் கோளக் கனவளவுக்குரிய கோவையையும் பயன்படுத்துக.

12. $r=a$கோசை2θ என்னும் வளைகோட்டின் வளையம் ஒன்று $r=\frac{1}{2}a$ என்னும் வட்டத்தாற் பிரிக்கப்படும் இரு பகுதிகளின் பரப்புக் களையுங் காண்க.

13. $y=a($சைன்$x+\frac{1}{3}$சைன்$3x)$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் $x-$அச்சிற்கும் இடையே $0,\ \pi$ என்னும் எல்லைகளுக்குட் கிடக்கின்ற பரப்பு A என்பது $20a/9$ என்று காட்டுக ; இப்பரப்பை $x-$அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பெறப்படுங் கனவளவு V என்பது $4V=\pi^2aA$ என்பதாலே தரப்படும் என்றுங் காட்டுக.

14. $x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்குமுள்ள $y=b$சைன்$^2(\pi x/a)$ என்னும் வளைகோட்டை $x-$அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப் பெறப்படுங் கனவளவு $\frac{3}{8}\pi ab^2$ எனக் காட்டுக. சுற்றப்பட்ட பரப்பையுங் காண்க ; அதனுடைய திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகள் $(\frac{1}{2}a,\frac{3}{8}b)$ என உய்த்தறிக.

15. $x=0$, $x=a$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $ay^2=x^2(a-x)$ என்னும் வளைகோட்டின் பகுதி x - அச்சுப் பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறப்பிக்கப்பட்ட கனவளவு a என்னும் விட்டத்தையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

16. $\theta=0$ இலிருந்து $\theta=\frac{1}{3}\pi$ வரைக்குமுள்ள $r=a(1+$ கோசை$\theta)$ என்னும் வளைகோட்டின் ஆரைச்சிறை ஆரம்பக் கோடுபற்றிச் சுற்றப் படுகின்றது. பிறப்பிக்கப்பட்ட கனவளவு $\frac{175}{96}\pi a^3$ என நிறுவுக.

17. $r=a$சைன்3θ என்னும் வளைகோட்டிற்கு ஒவ்வொன்றும் $\pi a^2/12$ என்னும் பரப்புக்கொண்ட ஆறு வளையங்கள் உண்டு என்றும், உற்பத்தியிலிருந்து ஒரு வளையத்தினது திணிவு மையத்தினுடைய தூரம் $81/\sqrt{3}a/80\,\pi$ என்றுங் காட்டுக.

அத்தியாயம் VII

பகுதிகளாக வகையிடுதல்.

சிறு மாற்றங்கள்

8.1. $u=f(x, y, z)$ என்பது x, y, z என்னுஞ் சாராமாறிகளின் ஒரு சார்பாகுக. இதன் பொருள் x இலாதல் y இலாதல் z இலாதல் யாதும் ஒரு மாற்றம் u இல் ஒரு மாற்றத்தைத் தரும் என்பதும் x இல் ஒரு மாற்றமேவெனின் x, y, z என்பன ஒன்றையொன்று சாரா திருக்கின்றமையால் y இலாதல் z இலாதல் ஒரு மாற்றத்தையுந் தரா தென்பதுமே.

y, z என்பன மாறாதிருக்க x ஆனது δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தைப் பெறுகின்றதெனக் கொள்க; ஆயின் u என்பது ஒரு விளைவேற்றம் δu என்பதைப் பெறும்; ஆகவே

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{f(x+\delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\delta x}$$

$\delta x\to 0$ ஆக, இவ்விகிதத்தின் எல்லை $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும். இது x ஐக் குறித்த u இன் **பகுதி வகையீட்டுக் குணகம்**, அல்லது x ஐக் குறித்த u இன் **பகுதிப் பெறுதி** எனப்படும்.

அதுபோல, u இன் பகுதிப் பெறுதிகளை y ஐக் குறித்தும் z ஐக் குறித்தும்

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\underset{\delta y\to 0}{L}\frac{f(x,y+\delta y,z)-f(x,y,z)}{\delta y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\underset{\delta z\to 0}{L}\frac{f(x,y,z+\delta z)-f(x,y,z)}{\delta z}$$

என்னுஞ் சூத்திரங்களால் நாம் வரையறுக்கலாம்.

இவ்வாறு, பகுதிகளாக வகையிடுதல் என்னுஞ் செய்கை பல சாரா மாறிகளின் ஒரு சார்பிற்குப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு செய்கையாகும்; அம்மாறிகளுள் ஒன்றை விட ஏனைய வெல்லாம் வகையிடுதற் செய்கை நடைபெறும்பொழுது மாறிலிகளாகக் கொள்ளப்படும்; மற்றைப்படி அச் செய்கை பொதுவான வகையிடுதலைப் போலச் செய்யப்படும்.

8.11. பயிற்சிகள்.

(i) $u=x^2y^3z^4$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3z^4,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2z^4,\ \frac{\partial u}{\partial z}=4x^2y^3z^3.$$

(ii) $u = e^{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}.$$

(iii) $u =$ சைன் $(ax^2 + by^2)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax \text{ கோசை } (ax^2 + by^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2by \text{ கோசை } (ax^2 + by^2).$$

8.12. குறியீடு. $f'(x)$ என்பது $f(x)$ இன் பெறுதியைக் குறிப்பதுபோல $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ என்பன x, y என்பனவற்றைக் குறித்த $f(x, y)$ இன் பகுதிப் பெறுதிகளைக் குறிப்பனவாக வழங்கப்படும்; சிலவேளை களிற் கீறு தவிர்க்கப்படும்; ஆயின், $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ என்பன அப்பகுதிப் பெறுதிகளையே குறித்தற்கு வழங்கப்படும்.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ என்பது x ஐக் குறித்துப் பகுதியாக வகையிடப்பட்டால் முடிபு $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும்; அதுபோல, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ என்பதன் பொருள் y ஐக் குறித்த $\partial u/\partial y$ இன் பகுதிப் பெறுதி என்பதே. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ என்பதன் பொருள் x ஐக் குறித்த $\partial u/\partial y$ இன் பகுதிப் பெறுதி என்பதே; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதன் பொருள் y ஐக் குறித்த $\partial u/\partial x$ இன் பகுதிப் பெறுதி என்பதே. பெருந் தொகையான சார்புகளுக்கு வகையிடும் வரிசைபற்றி நியமம் யாதும் இல்லை என்பது உண்மை; அதாவது

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

எனினும் இவ்விதிக்கு விலக்கு உண்டு.

8.2. **முப்பரிமாண ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்.** ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களிலுள்ள OX, OY, OZ என்னும் மூன்று அச்சுக்களை எடுக்க; அதாவது OZ ஆனது XOY என்னுந் தளத்திற்குச் செங் கோணங்களில் இருக்குமாறும் அவ்வாறே பிறவும் இருக்குமாறும்.

யாதும் ஒரு புள்ளி P இலிருந்து தளம் XOY இற்குச் செங்கோணங் களில் அதனை M இற் சந்திக்குமாறு PM என்பதை வரைய L என்பது OX என்னும் அச்சின்மீது M இன் எறியமாயின், OL, LM, MP

என்பன YOZ, ZOX, XOY என்னுந் தளங்களிலிருந்து P இனது தூரங்களாகும்; அவை P இன் ஆள்கூறுகளெனப்பட்டு x, y, z என்பன வற்றாற் குறிக்கப்படும்.

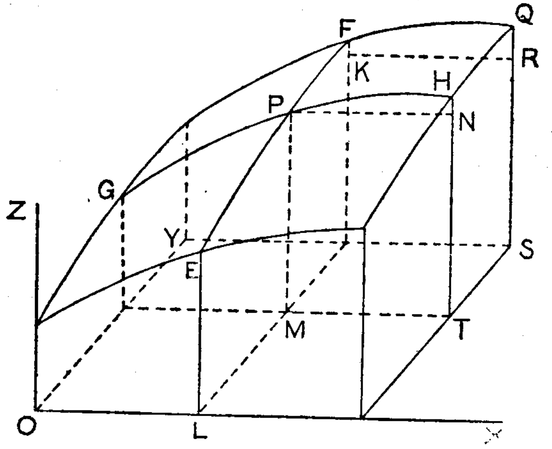
P ஆனது ஒரு மேற்பரப்பிற் கிடக்கின்றதெனக் கொள்க; ஆயின், அதன் z-ஆள் கூறு MP என்பது பொதுவாக XOY என்னுந் தளத்தில் M இனது நிலையைச் சார்ந்து நிற்கும்; அதுபற்றி அது x, y என்பனவற்றின் ஒரு சார்பாகும்; எனின், அம்மேற்பரப்பின் சமன்பாடு

$$z = f(x, y)$$

என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

இப்போது y மாறாத புள்ளிகள் எல்லாம் ZOX இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்திற் கிடக்கும்; அத்தகைத் தளம் அம்மேற்பரப்பை GPH என்னும் ஒரு வளைகோட்டில் வெட்டும்.

எனின், y மாறாதிருக்க x ஐக் குறித்த z இன் பெறுதியாகிய $\partial z/\partial x$ என்பது P இல் வளைகோடு GPH இன் சாய்வுவிகிதமாகும்; அல்லது, அது GPH என்னும் வளைகோட்டிற்கு P இலுள்ள தொடுகோடு OX இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டோடு ஆக்குங் கோணத்தினது தான்சன் ஆகும்.



அதுபோல, P இனூடாக YOZ இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளம் அம் மேற்பரப்பை EPF என்னும் வளைகோட்டில் வெட்டும்; $\partial z/\partial y$ என்பது P இலுள்ள இவ்வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதமாகும்.

இனி, Q என்பது $x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z$ என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய அயற்புள்ளியாகுக. P இற்கூடாக ஆள்கூற்றுத் தளங்களுக்குச் சமாந்தரமான தளங்களும் Q இற்கூடாக ZOX, ZOY என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமான தளங்களும் வரைவதால், $\delta z = QS - PM = QR$ ஆயிருக்க, $PN = \delta x$ ஆயும் $NR = \delta y$ ஆயும் இருக்கும் உருவத்தில் $PNRK$ என்னும் ஒரு செவ்வகத்தைப் பெறுகிறோம்.

δz என்பதை $\delta x, \delta y$ என்பனபற்றி உணர்த்த விரும்புகிறோம். அம்மேற்பரப்பில் P இலிருந்து Q இற்கு இரண்டு படிகளிற் செல்வோம். முதலாவதாக y ஐ மாறாதிருக்கச் செய்து PH இனது நீளத்திற்கும் இரண்டாவதாக x ஐ மாறாதிருக்கச் செய்து HQ இனது நீளத்திற்குஞ் செல்வோம்.

y ஆனது PH இனது நீளத்திற்கு மாறாதிருக்க, x ஆனது δx என்னும் ஒரு தொகையாற் கூடுதலுறுகின்றமையின் z, அல்லது $f\ (x, y)$ இலுள்ள ஏற்றம்

$$f(x+\delta x,\ y) - f(x,\ y).$$

y ஆனது மாறாதிருக்கின்றமையால், **3.2** ஆல், இதற்குச் சமன்

$$\{f_x'\ (x,\ y) + \epsilon\}\ \delta x.$$

இங்கு $\delta x \to 0$ ஆக, ϵ என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் ஒரு சிறு கணியம்,

எனின், $HT - PM = \{f_x'(x,y) + \epsilon\}\ \delta x$ .... (1).

இனி, HQ இனது நீளத்திற்கு y ஆனது δy என்னும் ஒரு தொகையாற் கூடுதலுறுகின்றது ; எனினும், x ஆனது H இலுள்ள பெறுமானம், அதாவது $x+\delta x$ என்பதை வைத்திருக்கும் ; ஆகவே, z இல் ஏற்றம்

$$QS - HT = f(x+\delta x,\ y+\delta y) - f(x+\delta x,\ y).$$

இங்கு, $x+\delta x$ என்பது ஒரு மாறிலி எனக் கொள்ளப்பட வேண்டும்; வலப்பக்கத்திலுள்ள இரண்டு சார்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள தனி வித்தியாசம் யாதோவெனின் ஒன்று $y+\delta y$ இன் ஒரு சார்பாயிருக்க மற்றையது y இன் அதே சார்பாயிருக்கின்றது என்பதே ; ஆகவே, **3.2** இற்போல இவ்வித்தியாசம்

$$= \{f_y'(x+\delta x,\ y) + \epsilon_1\}\ \delta y.$$

இங்கு, $\delta y \to 0$ ஆக, ϵ_1 என்பது பூச்சியத்தை அணுகும் ஒரு சிறுகணியம்.

எனின், $QS - HT = \{f_y'(x+\delta x,\ y) + \epsilon_1\}\delta y$ .... (2)

(1) ஐயும் (2) ஐயுங் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$\delta z = QS - PM = f_x'(x,\ y)\ \delta x + f_y'(x+\delta x,\ y)\delta y + \epsilon\delta x + \epsilon_1\delta y.$$

இப்போது $f_y'(x+\delta x,\ y)$ என்பது H இல் HQ என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் ; அது $f_y'(x,\ y)$ இலிருந்து அல்லது P இலுள்ள PF என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதத்திலிருந்து (மேற்பரப்பைப் பற்றி யாதோ ஒரு தனிப் பண்பாடு இருந்தாலன்றி) δx ஒடு ஒரு முடிவுள்ள விகிதத்தைக் கொள்ளும் ஒரு சிறு கணியத்தால் ($\epsilon_2\ \delta x$ ஆல் என்க) வித்தியாசப்படும்.

எனின், $\delta z = f_x'(x,\ y)\delta x + f_y'(x,y)\,\delta y + \eta$ ....(3)

இங்கு η என்பது δx, அல்லது δy இலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையுடைய ஒரு கணியம்.

இம்முடிபு பின்வருமாறும் எழுதப்படலாம்.

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y + \eta \qquad ....(4)$$

η என்னுஞ் சிறு கணியத்தைப் புறக்கணிக்க அண்ணளவாக இது

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y \qquad ......(5)$$

என்பதாகும்.

8.3. பல மாறிகளின் சார்பொன்றின் பகுதி வகையீடுகளும் மொத்த வகையீடுகளும். $z = f(x,\ y)$ என்பது x, y என்னும் இரு சாராமாறிகளின் ஒரு சார்பாகுக ; z இன் பகுதி வகையீடுகள் $\frac{\partial z}{\partial x}dx$, $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ என்பன என வரையறுக்கப்படும் ; z இன் மொத்த வகையீடு அதன் பகுதி வகையீடுகளின் கூட்டுத்தொகையாகும் ; அதாவது

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad ......(1).$$

இங்கு dx, dy என்பன எழுந்தமானமாகத் தேரப்படுகின்றன ; எனின், அச்சூத்திரம் வகையீடு dz என்பதை வரையறுக்கின்றது.

3.2 இற்போல நாம் வகையீடுகளையும் ஏற்றங்களையும் வேறு பிரித்தறிய வேண்டும். மேலேயுள்ள சூத்திரம் (1) dz இன் வரைவிலக்கணமாதலின், ஒரு செம்மையான தொடர்பாகும் ; எனினும், வகையீடுகளுக்குப் பதிலாக ஏற்றங்களை வழங்கும்பொழுது x, y என்பனவற்றிற்குத் தந்த ஏற்றங்களுக்கு ஒத்த z இன் ஏற்றஞ் சென்ற பிரிவின் (4) ஆலே தரப்படும் என்றும் அப்பிரிவினது தொடர்பு (5) ஆனது ஓர் அண்ணளவான முடிபேயாகும் என்றும் நாம் ஞாபகத்தில் வைத்தல் வேண்டும்

z என்பது x_1, x_2, x_3, ...x_n என்னும் ஒரு தொகையான சாராமாறிகளின் ஒரு சார்பாயிருக்கும்பொழுது, z இன் மொத்த வகையீடு

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ . \ . \ . + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \qquad . \ . \ . (2)$$

என்னுந் தொடர்பால் வரையறுக்கப்படும்; x_1, x_2, ...x_n என்னும் ஏற்றங்களுக்கு ஒத்த z இன் ஏற்றம் δz ஆனது

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \delta x_2 + \ . \ . \ . + \frac{\partial z}{\partial x_n} \delta x_n + \eta \ . \ . \ . \qquad (3)$$

என்பதாலே தரப்படுமெனக் காட்டப்படலாம்; இங்கு η என்பது δx_1, δx_2, ...δx_n என்பனவற்றிலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையைக் கொண்ட ஒரு சிறு கணியம்.

8.4. **z என்பது x, y என்பனவற்றின் ஒரு சார்பாயும், x, y என்னும் இரண்டும் வேறொரு மாறி t இன்சார்புகளாயும் இருக்க, அதுபற்றி z உம் t இன் ஒரு சார்பாயிருந்தால் dz/dt என்பதைக் காணல்.**

t என்பது ஓர் ஏற்றம் δt என்பதைப் பெறுக; δx, δy, δz என்பன அதுபற்றி x, y, z என்பனவற்றில் வரும் ஏற்றங்களாகுக. எனின், 8.2 (4) இலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y + \eta .$$

ஆயின், δt ஆல் வகுக்க

$$\frac{\delta z}{\delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\eta}{\delta t} .$$

இனி, $\delta t \to 0$ ஆகுக; எனின்,

$$\underset{\delta t \to o}{L} \frac{\delta z}{\delta t} = \frac{dz}{dt}, \quad \underset{\delta t \to o}{L} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}, \quad \underset{\delta t \to o}{L} \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt};$$

η என்பது δx, அல்லது δy, அல்லது δt இலும் உயர்ந்த சிறுமை வரிசையுடையதாகையால், $\underset{\delta t \to o}{L} \frac{\eta}{\delta t} = 0$,

எனின், $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \ . \qquad (1)$$

இச்சூத்திரத்தில் t என்பது ஒரு தனிச் சாராமாறி என்றும் t ஐக் குறித்த பெறுதிகள் பொதுப் பெறுதிகள் என்றும் ஏனைய பெறுதிகள் பகுதிப் பெறுதிகள் என்றும் அறிக.

கி. தே. z என்பது x, y என்பனவற்றின் ஒரு சார்பாயிருக்க, y என்பது x இன் ஒரு சார்பாயின், இது மேற்கூறிய நியாயத்தில் $t = x$ எனப் பிரதியிடுதற்கு ஒக்கும்; ஆயின், இவ்வகையில்

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} .$$

இச்சூத்திரத்தில் dz/dx இற்கும் $\partial z/\partial x$ இற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசத்தை எடுத்துக் காட்டுதற்கு, $y = f(x)$ ஆயுள்ள

$$z = ax^2 + 2\ bxy + cy^2$$

என்னும் பயிற்சியை ஆராய்க.

இங்கு,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy, \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) ;$$

$$\text{ஆகவே, } \frac{dz}{dx} = 2 \{ ax + by + (bx + cy) f' \ (x) \} .$$

8.5. **மறைவுச்சார்புகள்** சமன்பாடு $f(x,y) = 0$ என்பது y ஐ x இன் ஒரு சார்பாக வரையறுப்பதாகக் கொள்ளப்படலாமெனின், அச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்து y ஐ விளக்கமாக x பற்றி உணர்த்தக் கூடுமாயினும் உணர்த்தக் கூடாதாயினும், அத்தகைச் சமன்பாடு **மறைவாக** y ஐ x இன் ஒரு சார்பாக வரையறுக்கின்றதெனப்படும்.

dy/dx என்பதைக் காண்பதற்கு $f(x,y) = 0$ என்னுந் தொடர்பால் x இன் ஒரு சார்பாக y ஆனது மறைவாக வரையறுக்கப்படுகின்றதெனக் கொண்டு

$$z = f(x,y)$$

எனப் பிரதியிடுக.

எனின், **8.4** கி.தே. இலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} .$$

இங்கு, $z = 0$ எனப் பிரதியிட சமன்பாடு $f(x,y) = 0$ என்பது

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad . \ . \ . (1)$$

என்பதற்கு உய்க்குமென்பது பெறப்படும்.

ஆயின், $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

உதாரணமாக.

$$ax^2 + 2\,hxy + by^2 + 2\,gx + 2\,by + c = 0$$

ஆக, dy/dx **என்பதைக் காணல்.**

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\,(ax + hy + g)$ ஆயும் $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\,(hx + by + f)$ ஆயும் இருத்தலால்,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}.$$

மேலேயுள்ள தொடர்பு (1) பின்வரும் வடிவத்திலும் **வகையீடுகள்** பற்றி உணர்த்தப்படலாமென நாம் அறிகிறோம் ;

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad (2)$$

சற்று முன்னர் தந்த உதாரணத்திற்கு இவ்வடிவத்தைப் பிரயோகித்தால் நாம்

$$2\,(ax + hy + g)\,dx + 2\,(hx + by + f)\,dy = 0$$

என எழுதி அதிலிருந்து dy/dx என்பதை வகையீடுகளின் விகிதமாகப் பெறுகின்றோம்.

இது செய்கை முழுவதிலுஞ் சமச்சீரைக் காக்கின்றது; உண்மையாக, f இன் மொத்த வகையீடு $= 0$ என்று, அல்லது f இன் பகுதி **வகை** யீடுகளின் கூட்டுத்தொகை $=0$ என்று (2) குறிக்கின்றது.

உதாரணமாக:

$x^m y^n = a^{m+n}$ **ஆகும்பொழுது** dy/dx **ஐக் காணல்.**

இதனை

$m \log x + n \log y = (m+n) \log a$ என எழுதுதல் இசைவாகும். பின்னர், வகையீடுகளை எடுக்க

$$m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y} = 0\ ;$$

ஆயின், $$\frac{dy}{dx} = -\frac{my}{nx}.$$

8.51. பயிற்சிகள்.

1. (x, y) என்னும் புள்ளியிற் பின்வருஞ் சமன்பாடுகளாலே தரப்பட்ட வளைகோடுகளின் சாய்வுவிகிதங்களைக் காண்க :

(i) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; (ii) $x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$;

(iii) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$; (iv) $(x/a)^{\frac{1}{2}} + (y/b)^{\frac{1}{2}} = 1$;

(v) $x^5 + y^5 - 5\,ax^2y^2 = 0$; (vi) $(x^2 + y^2)^2 - a^2\,(x^2 - y^2) = 0$.

2. $z =$ தான் $^{-1}(y/x)$ எனின்,

$$dz = (xdy - ydx)\,/\,(x^2 + y^2) \text{ என நிறுவுக.}$$

3. $r^2 = x^2 + y^2$ எனின்,

$rdr = xdx + ydy$ என நிறுவுக.

8.6. சிறு மாற்றங்கள்.

பின்வரும் விதமான உத்திக் கணக்குக்களுக்கு நுண்கணிதம் பிரயோகிக்கப்படலாம்.

ஒரு முடிபு நியதியான அளவீடுகளிலிருந்து கணிக்கப்படுகின்றது ; இவ் வளவீடுகளுள் ஒன்றோ பலவோ தந்த ஒரு தொகை வழுவுக்கு உட்படு மென்பது அறியப்படுகின்றது : கணித்த முடிவில் அதன் விளைவான வழு வைக் காணல்.

ஒன்றொழிந்த தரவுகள் எல்லாம் வழுநீங்கி நிற்கும்போது, அவ் வளவீட்டை x ஆலும் அது உட்படும் வழுவை δx ஆலும் நாம் குறிப்போம் ; எனின், y என்பது கணிக்கப் படவேண்டிய முடிபாயின், ஏனையவெல்லாம் நிலையாய் இருக்க y என்பது மாறி x இன் ஒரு சார்பாகும் ; $y = f(x)$ என்க. எனின், x இல் δx என்னும் ஓர் ஏற்றத்தால் y இல் விளையும் ஏற்றம் அண்ணளவாக (3.2)

$$\delta y = f'(x)\,\delta x$$

என்பதாலே தரப்படும் ;

இதுவே வேண்டிய வழுவின் அளவாகும்.

8.61 உதாரணங்கள்.

(*i*) $\log_e 5 = 1{\cdot}609$ **எனத் தரப்படின்,** $\log_e 5{\cdot}02$ **இற்கு ஓர் அண்ணள வான பெறுமானங் காண்க.**

$y = \log_e x$ ஆகுக ; ஆயின், $\delta y = \dfrac{\delta x}{x}$ அண்ணளவாக,

எனின், $\log_e(x + \delta x) = y + \delta y = \log_e x + \dfrac{\delta x}{x}$ அண்ணளவாக,

அல்லது $log_e 5{\cdot}02 = log_e 5 + \frac{.02}{5}$

$$= 1{\cdot}609 + {\cdot}004$$
$$= 1{\cdot}613.$$

(ii) ஒரு கோணம் தன் log சைன் இலிருந்து காணப்பட வேண்டும். அக்கோணம் 60° இன் அயலில் இருக்கக் கணித்த log சைன் இல் ·0001 என்னும் வழுக்காரணமாக அக்கோணத்திலுள்ள வழுவைச் செக்கனிற் காண்க.

$y = log_{10}$ சைன்$x = log_{10}e \times log_e$ சைன்$x = {\cdot}4343\ log_e$சைன்x ஆகுக **(4.421)**

ஆகவே, $\delta y = {\cdot}4343$கோதா $x\delta x$.

இவ்வகையில் $\delta y = {\cdot}0001$; ஆயின்,

$\delta x = \frac{{\cdot}0001}{{\cdot}4343}$ தான்60° என்பது அக்கோணத்திலுள்ள வழுவை ஆரையன் அளவையிலே தருகின்றது ; செக்கனில் அளக்க, வழு

$$= \frac{180 \times 60 \times 60}{4343\pi} \text{ தான் } 60^\circ$$
$$= 82{\cdot}2.$$

(iii) ஒரு கோபுரம் நோக்குவோன் கண்ணின் மட்டத்திற்கு மேலே 145 அடி உயரத்தில் இருகின்றது ; அக்கோபுர நுனியின் ஏற்றக்கோணம் 15° என அளக்கப்படுகின்றது. இவ்வளவீடு $\pm 10'$ என்னும் வழுவிற்கு உட்படுமாயின், அக்கோபுரத்தின் கணிக்கப்பட்ட தூரத்தில் இவ்வழு எவ் விளைவைக் கொடுக்கும் ?

y என்பது தூரத்தையும் x என்பது ஏற்றக் கோணத்தையுங் குறித்தால்,

$y = 145$கோதாx ;

ஆயின், $\delta y = -145$ கோசே$^2 x\delta x$ அண்ணளவாக ;

இங்கு, கோசே$^2 x =$ கோசே$^2 15^\circ$; δx என்பது $\pm 10'$ இன் ஆரையன் அளவு ;

$$\text{அதாவது } \delta x = \pm \frac{x}{1080}.$$

ஆயின், $\delta y = \mp \frac{145\pi}{1080}$ கோசே$^2 15^\circ = \mp 6{\cdot}3$ அடி (அட்டவணைகளை வழங்குதலால்).

(iv) ஒரு தான்சன் கல்வனோமானியில் ஓட்டம் ஊசியானது திரும்பலின் தான்சனுக்கு விகிதசமமாய் இருக்கின்றது. நோக்குவோன் ஒருவன் அத்திரும்பலை அளவிடுதற்கண் என்றும் ஒரே வழுவைப் புணர்த்தி விட்டானாயின், அளவீடு 45° ஆயிருக்கும்போது, சதவீத வழு மிகச் சிறிதாகுமெனக் காட்டுக.

$$y = a \text{ தான்}x \text{ ஆகுக.}$$

இங்கு, x என்பது திரும்பலாயும், y என்பது ஓட்டமாயும், a என்பது ஒரு மாறிலியாயும் இருக்கின்றன. எனின், δx என்பது திரும்பலில் உள்ள வழுவாயின், ஓட்டத்தில் வழு

$$\delta y = a \text{ சீக}^2 x\delta x$$

என்பதாலே தரப்படும்.

ஆகவே, ஓட்டத்திற் சதவீத வழு

$$\frac{100\,\delta y}{y} = \frac{100a \text{ சீக}^2 x\delta x}{a\text{தான்}x} = \frac{100\,\delta x}{\text{சைன்}x\text{கோசை } x} = \frac{200\delta x}{\text{சைன் } 2x}.$$

δx என்பது ஒரு நிலையான வழுத்தொகையாயிருத்தலால், சைன்$2x$ ஆனது மிகப் பெரிதாகும்போது, அதாவது $x = 45^\circ$ ஆகும்பொழுது முடிபு மிகச் சிறிதாகும்.

8.62. முக்கோணத் தொடர்புள்ள சூத்திரங்கள்.

(i) ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு சூத்திரம் S = $\frac{1}{2}ab$சைன்C என்பதாலே துணியப்படும். C இன் அளவீட்டில் 1′ வழுவிலிருந்து என்ன வழு தோன்றும் ?

$$S = \tfrac{1}{2}ab\text{சைன்}C$$

ஆயும், a, b என்பன மாறிலிகளாயும் இருத்தலால்,

$$\delta S = \tfrac{1}{2}ab\text{கோசை}C\delta C \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு, $\delta C = 1'$ இன் ஆரையனளவு $= \pi/10800$.

எனின், வேண்டிய வழு $\frac{\pi}{21600} ab$ கோசை C .

(ii) a, b, C என்பன தரப்பட்டால், C இன் அளவீட்டில் 1′ வழுவிலிருந்து பக்கம் c ஐத் துணிதற்கண் என்ன சதவீத வழு தோன்றும்

இங்கு, நாம் பெறுவது $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab$கோசைC;

இங்கு, a, b என்பன மாறிலிகள் ; ஆகவே,

$$2c\delta c = 2\ ab\text{சைன்}C\delta C \ ;$$

$$\text{முன்போல, } \delta C = \pi/10800 \ ;$$

ஆகவே,

$$\frac{100\ \delta c}{c}=\frac{\pi}{108}\frac{ab\ \text{சைன்}\ C}{c^2}=\frac{\pi}{108}\quad\frac{ab\ \text{சைன்}\ C}{a^2+b^2-2ab\ \text{கோசை}\ C};$$

இது சதவீத வழுவை c இலே தருகின்றது.

8.63. பயிற்சிகள்.

1. ஒரு கோளத்தின் ஆரையின் அளவீட்டில் n சதவீதச் சிறுவழு ஒன்று அதன் கனவளவில் அண்ணளவாக $3n$ சதவீத வழுவைப் புணர்த்துமென நிறுவுக.

2. இயற்கைச் சைன் அட்டவணை ஒன்றில் $60°$ இற்கு அண்மையில் $1'$ இற்குரிய வித்தியாசம் $\cdot 000145$ என நிறுவுக.

3. log_{10}கோசேx இன் அட்டவணை ஒன்றில் $45°$ இற்கு அண்மையில் $1'$ இற்குரிய வித்தியாசம் $\cdot 000126$ என நிறுவுக.

4. மாறு வெப்பநிலையில் வாயுத்திணிவொன்றின் அமுக்கம் p உம் கனவளவு v உம் $pv=$ மாறிலி என்னுந் தொடர்பால் இணைக்கப் பட்டிருக்கின்றது. கனவளவில் யாதும் ஒரு சிறு பின்ன விறக்கம் அமுக் கத்தில் அதற்குச் சமனுன பின்ன வேற்றத்தாலே தொடரப்படுமென நிறுவுக.

5. $a=54$, $b=40$, $C=60°$ என்னுந் தரவுகளிலிருந்து ஒரு முக் கோணந் தீர்க்கப்படுகின்றது. C இன் அளவீட்டில் $1'$ வழுவிலிருந்து உண்டாகின்ற பரப்பு வழுவைக் காண்க. a இல் என்னவழு பரப்பிற் சம வழுவை ஆக்கும் ?

6. நீளம் a உள்ள ஒரு நாண் தந்த ஆரையையுடைய ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் A பாகை என்னும் ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது. கோணம் A ஆனது $\pm 5'$ என்னும் நிகழத்தக்க வழுவோடு கூடிய விடத்து $55°$ ஆயின், a இல் என்ன சதவீத வழு நிகழக்கூடும் ?

7. $a=35$, $b=20$, $C=60°$ என்னுந் தரவுகளிலிருந்து ஒரு முக் கோணத்தின் பக்கம் c ஆனது கணிக்கப்படுகின்றது. C இல் $5'$ என்னும் வழுவிலிருந்து c இல் என்ன சதவீத வழு விளையலாம் ?

8. l நீளமுள்ள ஓர் ஊசலின் ஆடற்காலம் $\pi\sqrt{(l/g)}$ செக்கன் ; l என்பது அடிகளில் நீளமாயும் g என்பது புவியீர்ப்புக் காரணமாயுள்ள வேகவளர்ச்சியாயும் இருக்கின்றன. நீளஞ் சிறிது வேறுபடுத்தப்பட்டால், காலத்திற்பின்ன மாறல் நீளத்திற் பின்னமாறலின் அரைப்பங்கென்றும், செக்கனுசலினது நீளத்தில் ஒரு சதவீத வழு அண்ணளவாக மணிக்கு 18 செக்கன் வழுவைப் புணர்த்தும் என்றும் நிறுவுக.

9. ஓர் ஆற்றுக்குக் குறுக்கேயுள்ள தூரம், 50 அடி உயரத்திலிருந்து நோக்கப்பட்ட எதிர்க்கரையின் இறக்கக் கோணம் $10°$ என நோக்குதலாற் கணிக்கப்படுகின்றது.

(i) இறக்கக் கோணத்தில் ஒரு கலை வழுவிலிருந்து,

(ii) கருவியின் உயரத்தில் ஓர் அங்குல வழுவிலிருந்து கணிக்கப்பட்ட தூரத்தில் என்ன வழு விளையும் ?

10. logதான்சன்களின் ஓர் அட்டவணையில் ஒரு கலைக்குரிய வித்தி யாசம் $\cdot 00025$கோசே$2x$ எனக் காட்டுக.

11. ஒரு வட்டத்தின் நாணொன்று அவ்வட்ட மையத்தில் α ஆரையன் என்னும் ஒரு கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது. அக்கோணத்தில் $\delta\alpha$ என்னும் ஒரு மாற்றம் அந்நாணுல் வெட்டப்பட்ட சிறு துண்டின் பரப்பை $l^2\delta\alpha$ ஆற் கூட்டுகின்றதெனக் காட்டுக ; இங்கு, $2l$ என்பது அந்நாணி னது நீளம்.

12. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் சாய் மேற்பரப்பின் பரப்பு πh^2 தான்αசீகα என்னுஞ் சூத்திரத்தாலே தரப்படும் ; இங்கு, h என்பது அக்கூம்பின் உயரமாயும் 2α என்பது அதன் கோணமாயும் உள்ளன. α இல் $\delta\alpha$ என்னும் ஒரு சிற்றேற்றத்திற்கு ஒத்த பரப்பின் பின்ன வேற்றம் $(1+\text{சைன்}^2\alpha)\delta\alpha/$ சைன்αகோசைα என நிறுவுக ; தந்த ஒரு $\delta\alpha$ இற்கு சைன்$\alpha=1/\sqrt{3}$ ஆகும்பொழுது இது மிகச் சிறிதாகுமெனக் காட்டுக.

8.7. சிறு மாற்றங்கள்—தொடர்ச்சி.

எல்லாஞ் சிறு மாற்றங்கள் அடையத் தக்க பல சாராமாறிகளின் சார்பு ஒன்றை நாம் ஆராயும்பொழுது, அச்சார்பை u ஆற் குறித்து, x, y, z என்பனவற்றைச் சாராமாறி களெனக் கொண்டு

$$u=f(x,y,z)$$

என எழுதுவோமாயின், 8.3 இன் சூத்திரம் (3) ஐ நாம் வழங்கிக் கூடிய போதிய அண்ணளவாக

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

எனக் கொள்ளலாம்.

இச்சூத்திரத்தின் உட்பொருள் u இன் மொத்த மாற்றமானது மாறிகளுள் ஒவ்வொன்றும் மாற்றப்பட ஏனைமாறிகள் மாருதிருக்க u அடையும் வேறு வேருன மாற்றங்களின் கூட்டுத்தொகை என்பதே.

8.71. உதாரணங்கள்.

(i) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கம் c ஆனது சூத்திரம்

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \text{கோசை}C$$

என்பதாலே துணியப்படுகின்றது. a, b, c என்பனவற்றின் அளவீடுகளில் δa, δb, δC என்னுஞ் சிறு வழுக்களிலிருந்து பிறக்கின்ற c இன் வழுவைத் துணிக.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\text{கோசை}C \quad \text{ஆயிருத்தலால்,}$$

$$\delta(c^2) = \frac{\partial(c^2)}{\partial a}\delta a + \frac{\partial(c^2)}{\partial b}\delta b + \frac{\partial(c^2)}{\partial C}\delta C.$$

இனி, $\frac{\partial(c^2)}{\partial a} = 2a - 2b\text{கோசை}\,C$, $\frac{\partial(c^2)}{\partial b} = 2b - 2a\text{ கோசை }C$,

$$\frac{\partial(c^2)}{\partial C} = 2ab\text{சைன் }C,\ \delta c^2 = 2c\delta c\ ;$$

ஆகவே,

$c\delta c = (a - b\text{கோசை}C)\delta a + (b - a\text{கோசை}C)\delta b + ab\text{ சைன் }C\delta C$; இது பின்வருமாறும் எழுதப்படலாம் ;

$\delta c = \text{கோசை}B\delta a + \text{கோசை}A\delta b + a\text{ சைன்}B\delta C.$

(ii) **ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு S ஆனது சூத்திரம் $\frac{1}{2}ab$சைன் C என்பதாலே துணியப்படும் ; a, b, C என்பனவற்றின் அளவீடுகளிற் சிறு வழுக்கள் காரணமாகக் கணிக்கப்பட்ட பரப்பில் உள்ள சதவீத வழுவைக் காணல்.**

நாம் பெறுவது $S = \frac{1}{2}ab\text{சைன்}C$.

இங்கு, வகையிடுதற்குமுன் மடக்கைகளை எடுப்பது இசைவாகும். நாம் பெறுவது

$$\log\ S = \log\ \tfrac{1}{2} + \log\ a + \log\ b + \log\text{ சைன் }C.$$

பின்னர், இரு பக்கங்களிலுமுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் ஏற்றங்களை எடுக்க நாம் பெறுவது

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \text{கோதா }C\delta C.$$

உதாரணமாக $C = 50°$ எனின், a, b என்பன. ·1 சதவீத வழுவிற்கு உட்படும் ; C என்பது $10''$ வழுவிற்கு உட்படும் ; அப்பரப்பிற் சதவீத வழு

$$\frac{100\delta S}{S} = \cdot 1 + \cdot 1 + 100 \times \cdot 8391 \times \frac{\pi}{180 \times 60 \times 6}$$

$$= \cdot 1 + \cdot 1 + \cdot 0041$$

$$= \cdot 2041.$$

(iii) **ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 450 அடி தூரத்தில் அதன் நுனியின் ஏற்றக்கோணம் 37° 20′. அத்தூரம் 6 அங்குல வழுவிற்கும் அக்கோணம் 1 கலை வழுவிற்கும் உட்படுமாயின் கணிக்கப்பட்ட உயரத்தில் மிகப் பெரிய வழு என்ன ?**

z என்பது அவ்வுயரத்தையும் x என்பது அத்தூரத்தையும் y என்பது அக்கோணத்தையுங் குறித்தால் $z = x\text{தான்}y$

$$\text{ஆகவே,}\quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y\ ;$$

அல்லது $\delta z = \text{தான்}y\delta x + x\text{ சீக}^2y\delta y$

$$= (\text{தான் }37°20') \times \cdot 5 + (450\text{ சீக}^2 37°20') \times \frac{\pi}{10800}$$

$$= \cdot 3814 + \cdot 2070 = \cdot 5884\text{ அடி.}$$

8.72. பயிற்சிகள்.

1. S என்பது, அடி a உம் உயரம் h உம் ஆய ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பாயின்,

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta h}{h}\text{ என நிறுவுக.}$$

2. $2a$, $2b$ என்னும் அச்சுக்களையுடைய ஒரு நீள்வளையத்தின் பரப்பு S ஆயின்,

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}\text{ என நிறுவுக.}$$

3. சமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் கோணங்களின் அளவீடுகள் $1''$ வழுவுக்கு உட்படுமாயின், அதன் பக்கங்களின் நீளங்களிற் சதவீத வழு ·00042 என நிறுவுக.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு $b = 125$ அடி, $c = 160$ அடி, $A = 57°\ 35'$ என்னும் அளவீடுகளாலே துணியப்படுகின்றது. வேறோர் அளவீட்டுத் தொகுதி $b = 125{\cdot}5$ அடி, $c = 161$ அடி, $A = 57°\ 25'$ என்பனவற்றைத் தருகின்றது. முதலாம் அளவீட்டிற்கும் இரண்டாம் அளவீட்டிற்கும் இடையேயுள்ள சதவீத வித்தியாசத்தைக் காண்க.

5. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் δa, δb, δc என்னுஞ் சிறுமாற்றங்கள் செய்யப்பட்டால்,

$$\delta A = a(\delta a - \delta b\text{கோசை}C - \delta c\text{கோசை}B)/\ 2S$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு S என்பது பரப்பு.

$\delta A + \delta B + \delta C = 0$ என வாய்ப்புப் பார்க்க.

6. சென்ற பயிற்சியில் அப்பக்கங்களில் மாற்றங்கள் கூடியவளவிற்கு $\pm n$ சதவீதமெனின், அதன் விளைவாக A இல் உளதாகும் மிகப் பெரிய மாற்றம் $\pm\ na^2/50bc$சைன்A எனக் காட்டுக.

7. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணம் நிலையான ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட்டிருக்கின்றது. பக்கம் a ஆனது நிலையாயிருக்க b உம் c உம் மாறினால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\delta B+\delta C=O$;

(ii) சீக $B\delta b+$ சீக $C\delta c=O$;

(iii) $a\delta C=$ சைன்$B\delta c-$சைன்$C\delta b$.

8. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணம் நிலையான ஒரு வட்டத்தில் உள்ளுருவமாக வரையப்பட அதன் பக்கங்கள் எல்லாம் மாறும்படி விடப்பட்டால்

சீக $A\delta a+$ சீக$B\delta b+$ சீக$C\delta c=O$ என நிறுவுக.

9. ஒரு வட்டவுருளை h என்னும் உயரத்தையும் r என்னும் ஆரையையும் உடையது. அவ்வுருளையின் மேற்பரப்பின் முழுப்பரப்பும் அதன் கனவளவோடு கொள்ளும் விகிதம் மாறாதிருக்குமாறு h, r என்பன சிறு மாற்றங்களை அடைந்தால்,

$$\delta r=-\frac{r^2}{h^2}\delta h$$ எனக் காட்டுக.

10. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் முழு மேற்பரப்பின் பரப்பு

πh^2தான்α (தான்$\alpha+$சீகα)

என்னுஞ் சூத்திரத்தாலே தரப்படுகின்றது; இங்கு h என்பது உயரமாயும் α என்பது அரையுச்சிக் கோணமாயும் உள்ளன. α ஆனது $\frac{1}{6}\pi$ ஆயிருக்கும்பொழுது உயரத்தில் 1 சதவீதவேற்றஞ் செய்யப்பட்டால், பரப்பில் யாதொரு மாற்றமுஞ் செய்யப்படாதவாறு α இல் என்ன மாற்றஞ் செய்யப்பட வேண்டும்.

11. தரையில் ஒரு கோபுரத்தின் அடியோடு ஒரு கோட்டில் ஒன்றுக் கொன்று a என்னுந் தூரத்தில் இருக்கின்ற இரண்டு புள்ளிகளிலிருந்து அக்கோபுர நுனியின் ஏற்றக் கோணங்கள் α, β என்பனவாகும். α, β என்பனவற்றில் $\delta\alpha$, $\delta\beta$ என்னுஞ் சிற்றேற்றங்கள் காரணமாக உயரத்திலுள்ள ஏற்றம்

a(சைன்$^2\beta\delta\alpha-$சைன்$^2\alpha\delta\beta$)/சைன்$^2(\beta-\alpha)$ என நிறுவுக.

12. எறி புள்ளிக்கூடாக ஒரு கிடைத்தளத்தின்மீது ஓர் எறிபொருளின் வீச்சு V^2சைன்$2\alpha/g$; இங்கு, V என்பது எறியும் வேகமாயும் α என்பது அதனுடைய திசையின் கோணவேற்றமாயும் இருக்கின்றன. $\alpha=\frac{1}{8}\pi$ ஆயிருக்கும்பொழுது V இல் ஒரு சின்ன வேற்றத்திற்கு எண்ணளவிற் சமனான α இன் இறக்கம் அவ்வீச்சை மாறாதிருக்கச் செய்யுமென நிறுவுக.

எளிய பயிற்சிகள்

9.1. பெறுதிகளுந் தொகையீடுகளும்.

பின்வருங் கோவைகளினுடைய பெறுதிகளையுந் தொகையீடுகளையுங் காண்க:

1. $ax^2+2bx+c$.
2. $(x-a)^3$.
3. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4$.
4. $\left(2x+\dfrac{3}{x^2}\right)^3$.
5. $2x^3-3x^2-36x+10$.
6. $(2x^2+x+1)\ (2x^2-x+1)$.
7. $(x-2)^2(x+1)^2$.
8. $(x-1)^2(x-3)^3$.
9. $x^4-3x^3+8x-10$.
10. $\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}+1$.
11. $\dfrac{a}{x^3}+\dfrac{b}{x^2}+c$.
12. $ax^n+b+\dfrac{c}{x^n}$.
13. $\dfrac{1}{4x^2}+1+4x^2$
14. $\left(x^2+\dfrac{2}{x^2}\right)^2$.
15. $3x^2-\dfrac{1}{4x^3}+\dfrac{1}{x^5}$
16. $(x-2)^3$.
17. $\dfrac{1}{(x-a)^n}$.
18. $x(x^2-1)^2$.
19. $x^2(x^3-1)^2$.
20. $x^3(x^4-1)^2$.

9.2. சாய்வுவிகிதங்கள், தொடுகோடுகள், உயர்விழிவுகள்.

1. $y=3x^2-5x+1$ என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதத்தை (x',y') என்னும் புள்ளியிற் காண்க. அவ்வளைகோட்டிற் சாய்வுவிகிதம் 7 ஆகிய புள்ளியைத் துணிக. இப்புள்ளியிலுள்ள தொடுகோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

2. $y=x^3-2x^2+x+3$ என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதத்தையும் அவ்வளைகோட்டிற் சாய்வுவிகிதம் பூச்சியமாகும் புள்ளிகளையுங் காண்க. இப்புள்ளிகளில் அவ்வளைகோட்டிற்கு உயர்வு நிலைத்தூரங்களோ இழிவு நிலைத் தூரங்களோ உண்டு என்றுந் துணிக. அவ்வளைகோட்டை வரைக.

3. $y=2x^3+x^2+2$ என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதத்தை $(1,\ 5)$ என்னும் புள்ளியிற் காண்க. வேறு எந்தப் புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டிற்கு அதே சாய்வுவிகிதம் உண்டு ?

4. $y = 2 + 3x + 4x^2 + 5x^3$ என்னும் வளைகோட்டினது தொடுகோட்டை $(-1, -2)$ என்னும் புள்ளியிற் காண்க. அவ்வளைகோட்டில் வேறு எந்தப் புள்ளியில் அதற்குச் சமாந்தரமான தொடுகோடு ஒன்று உண்டு ?

5. (x', y') என்னும் புள்ளியில் $y = 5x^3 - 6x^2 + 5x$ என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதத்தைக் காண்க. அவ்வளைகோட்டின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் சாய்வுவிகிதம் நேரென நிறுவுக.

6. $(0, 1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (1, 0)$ என்னும் புள்ளிகளில் $y = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 1$ என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதத்தைக் காண்க ; இப்புள்ளிகளின் அயலில் அவ்வளைகோட்டை வரைக.

7. x ஆனது $-\infty$ இலிருந்து ∞ இற்குக் கூடுதலுற $3x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ என்னுஞ் சார்பு உறுதியாகக் கூடுதலுறுமென நிறுவுக.

8. x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு

$$4y = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$$

என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் பூச்சியமாகும் ? இப்புள்ளிகளில் நிலைத்தூரம் உயர்வோ இழிவோ எனத் துணிக. $(-3, 1)$, $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையில் வளைகோட்டை வரைக.

$$9.\quad 2y = 2x^3 - 4x^2 - 7x + 5$$

என்னும் வளைகோடு y – அச்சை வெட்டும் புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டினது தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. அன்றியும், $2y + 9x = 0$ என்னுங் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான தொடுகோடு அவ்வளைகோட்டில் எப் புள்ளிகளில் உண்டு என்றுங் காண்க.

$$10.\quad y = (x-1)^3(3x-7)$$

என்னும் வளைகோட்டின் சாய்வுவிகிதம் பூச்சியமாகும் புள்ளிகளைக் காண்க ; இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் y இன் பெறுமானம் உயர்வோ இழிவோ என்றுந் துணிக. அன்றியும் $(0, 7)$, $(\frac{7}{3}, 0)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள சாய்வுவிகிதங்களையுங் காண்க ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

11. $\frac{1}{3}(4x^3 - 3x)$ என்னுஞ் சார்பின் உயர்விழிவுகளாகிய பெறுமானங்கள் $\frac{1}{3}$ உம் $-\frac{1}{3}$ உம் என நிறுவுக. அச்சார்பின் வரைப்படத்தை $x = -1\frac{1}{2}$, $x = 1\frac{1}{2}$ என்னும் பெறுமானங்களுக் கிடையிற் பரும்படியாக வரைக ; இவ்வெல்லைகளுக்குள் அச்சார்பின் உயர்விழிகளாகிய பெறுமானங் கள் 3, -3 என்பன எனக் காட்டுக.

12. $(-2, 0)$ என்னும் புள்ளியில் $2y = 4x - x^3$ என்னும் வளை கோட்டினது தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க ; இத்தொடுகோடு $(4, -24)$ என்னும் இப்புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டை மறுபடியும் வெட்டு மெனக் காட்டுக. அன்றியும், y இன் உயர்விழிவுகளாகிய பெறுமானங் களையுங் காண்க ; அவ்வளைகோட்டை வரைக.

13. x ஆனது கூடுதலுற $2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$ என்னுஞ் சார்பு x இன் எப்பெறுமான வீச்சிற்குள்ளே குறைதலுறுமெனக் காண்க ; அன்றி யும், x ஆனது கூடுதலுற அச்சார்பு எவ்வீச்சிற்குள்ளே கூடுதலுறும் என்றுங் காண்க.

14. $y = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 36x - 27$ என்னும் வளைகோடு x – அச்சை $x = 3$ என்னும் புள்ளியிலே தொடுமென நிறுவுக. இப்புள்ளிகளிலுள்ள சாய்வுவிகிதங்களையும் x – அச்சை அது வெட்டும் புள்ளிகளையுங் காண்க.

15. $y = (x-2)^2(x+3)^2$ என்னும் வளைகோட்டில் யாதும் ஒரு புள்ளி யிலுள்ள சாய்வுவிகிதத்தைக் காண்க. y இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தை யும் இழிவுப் பெறுமானத்தையுந் துணிக.

$$16.\quad y = (x-2)^2(x^2 + 2x + 4)$$

என்னும் வளைகோட்டில் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள சாய்வுவிகிதத்தைக் காண்க. அவ்வளைகோட்டின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் y ஆனது நேரென் றுஞ் சாய்வுவிகிதம் ஒரு புள்ளியிலேயே பூச்சியமென்றும் நிறுவுக. இப்புள்ளி y இன் ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தையா அன்றி ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தையா தரும் ?

17. $4y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு ஓர் உயர்வு நிலைத்தூரமும் ஈர் இழிவு நிலைத்தூரமும் உண்டு என நிறுவுக ; y ஆனது ஒரு கூடுதலுறுஞ் சார்பாகும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சுக்களையும் y ஆனது ஒரு குறைதலுறுஞ் சார்பாகும் ஒத்த வீச்சுக் களையுந் துணிக.

18. $(0,3)$, $(2,9)$ என்னும் புள்ளிகள் $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ என்னும் வளைகோட்டிற் கிடக்க, இப்புள்ளிகளிற் சாய்வுவிகிதம் பூச்சியமானால், a, b, c, d என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இப்புள்ளிகள் y இன் உயர்வுப் பெறுமானங்களையா அன்றி இழிவுப் பெறுமானங்களையா தரும் ?

19. a ஆதல் b ஆதல் c ஆதல் பூச்சியமல்லாதிருக்கும்போது $y = ax + bx^2 + cx^3$ என்பது தன் சாய்வுவிகிதம் $(2,4)$ என்னும் புள்ளியிலேயேயன்றி வேறோரிடத்தும் பூச்சியமாகாத ஒரு வளைகோட்டைக் குறித்தால், a, b, c என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

20. (1, 1), (−2, −2) என்னும் புள்ளிகள் $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ என்னும் வளைகோட்டிற் கிடக்க இப்புள்ளிகளிலுள்ள சாய்வு விகிதங்கள் முறையே 1, 3 என்பனவாயின், a, b, c, d என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9.3. வேகமும் வேகவளர்ச்சியும்.

1. ஒரு துணிக்கையானது ஓய்விலிருந்து அசைந்து t செக்கனில் வரைந்த தூரம் $15t + 15t^2 + 5t^3$ ஆயின், வேகம் v உம் வேக வளர்ச்சி f உம் அடி செக்கன் அலகுகளில் $f^2 = 60v$ என்னுந் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன என நிறுவுக.

2. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது; t செக்கன் முடிவில் நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து அடிகளில் அதனுடைய தூரம்

$$s = 2t^3 - 33t^2 + 108t - 15$$

என்பதாலே தரப்படுகின்றது. t இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு (i) வேகம், (ii) வேகவளர்ச்சி பூச்சியமாகுமெனக் காண்க.

அன்றியும், வேகவளர்ச்சி பூச்சியமாகும்பொழுதுள்ள வேகத்தையும், வேகம் பூச்சியமாகும் பொழுதுள்ள வேகவளர்ச்சியின் இரு பெறுமானங்களையுங் காண்க.

3. ஒரு நேர்கோட்டினது நீளத்திற்கு அசைகின்ற ஒரு புள்ளியினது நிலை $s = t^3 - 12t^2 + 36t + 5$ என்பதாலே தரப்படுகின்றது; இங்கு s என்பது இயக்கந் தொடங்கி 6 செக்கனுக்குப்பின் அக்கோட்டில் நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து அடிகளில் எடுத்த தூரம். $t = 4$ ஆகும்பொழுது வேகத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுங் காண்க; ஒரு வேகநேர வளைகோடு வரைக.

4. ஒரு புள்ளியானது தான் ஓய்விலிருந்து t செக்கனில் அடையும் வேகஞ் செக்கனுக்கு $(4t - t^2)$ அடி ஆகுமாறு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது. நேரம் t இல் உள்ள வேகவளர்ச்சியையும் t செக்கனிற் செல்லுந் தூரத்தையுங் காண்க. அதன் இயக்கத்தின் முதல் 6 செக்கனையும் விவரிக்க.

5. ஒரு புள்ளியானது இயக்கந் தொடங்கி 6 செக்கனுக்குப் பின் ஒரு நேர்கோட்டில் நிலையான புள்ளி ஒன்றிலிருந்து அடிகளிலே தனது தூரம் $s = 72t - 3t^2 - 2t^3$ ஆகுமாறு அக்கோட்டில் அசைகின்றது. அதன் வேகத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுங் காண்க. அப்புள்ளி ஓய்வடையுமுன் எவ்வளவு தூரம் அசையும்? தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எத்தனை செக்கன் எடுக்கும்?

6. ஒரு புள்ளியானது இயக்கத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் உற்பத்தியிலிருந்து தனது தூரம் $x = 28 + 27t - t^3$ என்பதாலே தரப்படுமாறு x – அச்சினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது; இங்கு x என்பது அடிகளில் அளக்கப்படுகின்றது. வேகத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுங் காண்க. அதன் இயக்கத்திசை நேர்மாறாக்கப்படுமுன் அப்புள்ளி எவ்வளவு தூரம் அசையும்? அப்புள்ளி தான் புறப்பட்ட நிலைக்குத் திரும்பிவரும் வேகம் என்ன?

7. ஒரு புள்ளியானது தான் புறப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து t செக்கனில் $(2t^2 - t^4)$ அடி செல்லுமாறு ஒரு நேர்கோட்டினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது. அதன் வேகத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுங் காண்க. அன்றியும், வேகநேர வளைகோட்டையும் இடநேர வளைகோட்டையும் வரைக.

8. ஒரு புள்ளி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு t செக்கனுக்குப் பின்னர் செக்கனுக்கு $(7t - t^2)$ அடியே தன் பெறுமானமாகும் ஒரு வேகத்தோடு ஒரு நேர்கோட்டினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது. வேகவளர்ச்சி பூச்சிய மாகும்பொழுது அதன் வேகம் என்ன? $t = 2$ இலிருந்து $t = 5$ வரைக்குமுள்ள இடையில் எத்தூரஞ் செல்லப்படும்? எத்தனை செக்கனுக்குப் பின் அப்புள்ளி தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிச் செல்லும்? அப்போது அது செல்லும் முழுத்தூரமும் என்ன?

9. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு நேர்கோட்டில் அசையும் ஒரு புள்ளியினது வேகவளர்ச்சி இயக்கந் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் அடி செக்கன் அலகுகளில் $3 - t$ ஆகும். அப்புள்ளி ஓய்வடையுமுன் எவ்வளவு தூரம் அசையுமெனக் காட்டுக; தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும்? அப்போது அதன் வேகம் என்ன?

10. ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்ற ஒரு புள்ளியின் வேகம் இயக்கந் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின் செக்கனுக்கு $(5t - 3t^2)$ அடி. t செக்கனிற் செல்லுந் தூரத்திற்கும் வேகவளர்ச்சிக்கும் உரிய கோவைகளைக் காண்க. ஒரு வேகநேர வளைகோடு வரைக; வேகத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அதன் வேகம் பூச்சியமாகு முன்னர் அப் புள்ளி எவ்வளவு தூரம் அசையும்?

11. ஒரு புள்ளி நேரம் $t = 0$ இல் உற்பத்தியிலிருந்து தொடங்கி t செக்கனிற் செல்லுந் தூரம்

$$x = 9t - 6t^2 + t^3$$

என்பதாலே தரப்படுமாறு x – அச்சினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது. அதன் வேகத்திற்கும் வேகவளர்ச்சிக்குங் கோவைகள் காண்க. x இன் பெறுமானங்களையும் $t = 0, 1, 2, 3, 4$ என்பனவற்றிற்கு வேகத்தையும் அட்டவணைப்படுத்துக; அதன் இயக்கத்தின் முதல் 4 செக்கனையும் விவரிக்க.

12. ஒரு புள்ளியானது நேரம் t இல் $6(1+t)$ என்பதால் அடி செக்கன் அலகுகளில் அளக்கப்பட்ட வேகவளர்ச்சியோடு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது. அப்புள்ளி 243 அடியை தன் இயக்கத்தின் முதல் 3 செக்கனிற் செல்லுமாயின், $t=0$ ஆகும்பொழுது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

13. ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்ற ஒரு புள்ளியின் வேகம், அசையத் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின், செக்கனுக்கு $(18t-3t^2)$ அடி. t செக்கனில் அது செல்லுந் தூரத்தையும் வேகவளர்ச்சியையுங் காண்க. அதன் வேகத்திற்கு ஓர் உயர்வுப் பெறுமானம் உண்டு என்று காட்டி அதனைக் காண்க. அதன் இயக்கத் திசைபற்றி நேர்மாறுக்கப்படுமுன் கழியும் நேரத்தையுஞ் செல்லுந் தூரத்தையும் காண்க. அன்றியும் அது புறப்பட்ட புள்ளிக்குத் திரும்பிவர எடுக்கும் நேரத்தையும் அந்நேர விடையில் அதன் வேகத்தின் மிகப் பெரிய எண் பெறுமானத்தையுங் காண்க.

14. ஒரு புள்ளி ஓய்விலிருந்து ஒரு நேர்கோட்டினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது ; t செக்கனுக்குப் பின்னர் அதன் வேகஞ் செக்கனுக்கு $(at-bt^2)$ அடி. அதன் இயக்கத்தின் முதல் இரண்டு செக்கன்களிலும் அது முறையே 12 அடி, 18 அடி என்னுந் தூரங்கள் செல்லுமாயின், a ஐயும் b ஐயும் உயர்வுப் பெறுமானத்தையுங் காண்க.

15. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து தனது தூரம் $s=at+bt^2-ct^3$ என்பதாலே தரப்படுமாறு ஒரு நேர் கோட்டில் அசைகின்றது ; இங்கு, a, b, c என்பன நேரெண்கள் ; t என்பது உற்பத்தியைக் கடந்து சென்றபின்னுள்ள நேரத்தைக் குறிப்பது. ஆரம்பவேகம் 6 ஆகும் ; உயர்வு வேகம் 12 ; வேகவளர்ச்சியின் மிகப் பெரிய பெறுமானம் 12. a, b, c என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

16. ஒரு புள்ளியானது $t=0$ என்னும் நேரத்தில் உற்பத்தியிலிருந்து தொடங்கி $(6-4t)$ அடி செக்கனலகு வேகவளர்ச்சியோடு x – அச்சினது நீளத்திற்கு அசைகின்றது. t செக்கனிற் சென்ற தூரத்தையும் வேகத்தையுங் காண்க. அன்றியும், அதன் இயக்கத் திசை நேர்மாறுகுமுன் அது எவ்வளவு தூரம் அசையுமென்றும், அது தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்கு எவ்வேகத்தோடு திரும்பி வருமென்றுங் காண்க.

17. ஒரு புள்ளி உற்பத்தியிலிருந்து x – அச்சினது நீளத்திற்கு நேரம் $t=0$ இற் செக்கனுக்கு $4\frac{1}{2}$ அடி வேகத்தோடு அசையத் தொடங்குகின்றது ; அது புறப்பட்டு t செக்கனுக்குப் பின் அதன் வேகவளர்ச்சி அடி செக்கனலகுகளில் $4-t$. t செக்கனில் அது செல்லுந் தூரங்களையும் அடைந்த வேகத்தையுங் காண்க. உயர்வு வேகம் யாது ? அதுதான் மிகப்பெரிய வேகமா ? ஒரு வேகநேர வளைகோடு வரைக.

18. ஒரு புள்ளி நிலையான ஓரிடத்திலிருந்து செக்கனுக்கு 48 அடி வேகத்தோடு புறப்பட்டு t செக்கனுக்குப்பின் தன் வேகம் செக்கனுக்கு $(48+t^2-t^3)$ அடி ஆகுமாறு ஒரு நேர் கோட்டில் அசைகின்றது. வேகவளர்ச்சியையும் வேகத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தையுங் காண்க. அன்றியும், இயக்கத்திசை நேர்மாறுகு முன்னர் செல்லுந் தூரத்தையுங் காண்க.

19. ஒரு புள்ளி நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டுச் செக்கனுக்கு 18 அடி வேகத்தோடு ஒரு நேர்கோட்டில் அசைகின்றது ; t செக்கனுக்குப் பின் அதன் வேகவளர்ச்சி $8-t$ அடி செக்கனலகுகள். அதன் இயக்கத்தினது நேர்மாறுகுமுன் அப்புள்ளி எவ்வளவு தூரஞ் செல்லுமெனக் காண்க ; புறப்பட்டு 28 செக்கனுக்குப் பின் அப்புள்ளி தான் புறப்பட்ட புள்ளிக்கு அப்பாலுள்ள ஒரு நிலைக்குத் திரும்பிவருமெனக் காட்டுக.

20. ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டில் இயக்கந் தொடங்கி t செக்கனுக்குப் பின்னர் $(a-bt)$ அடி செக்கனலகு வேகவளர்ச்சியோடு அசைகின்றது. ஆரம்பவேகஞ் செக்கனுக்கு 8 அடி ஆயும், உயர்வு வேகஞ் செக்கனுக்கு 12·5 அடியாயும் $t=2\frac{2}{3}$ ஆகும்பொழுது இயக்கத் திசை நேர்மாறுயும் இருந்தால் a, b என்பனவற்றைக் காண்க.

9.4. பரப்புக்கள்.

1. x அச்சாலும் பின்வரும் வளைகோடுகள் ஒவ்வொன்றாலும் அடைக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க :

(i) $y=x^2-4x+3$; (ii) $y=2x^2-5x+2$;

(iii) $y=x^2+x-12$; (iv) $y=3x^2-x-2$;

(v) $y=x^2-3x+2$; (vi) $y=x^2(4-x^2)$.

2. $y=x^3-9x+6$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் x அச்சிற்கும் $x=-3$, $x=3$ என்னும் நிலைத்தூரங்களுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

3. பின்வருந் தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணித்து $y=4x-x^3$ என்னும் வளைகோட்டை நோக்க அவை குறிக்கும் பரப்புக்களைக் கூறுக :

$$(i)\int_0^2 (4x-x^3)\,dx\ ;\ (ii)\int_{-2}^2 (4x-x^3)\,dx\ ;\ (iii)\int_0^3 (4x-x^3)\,dx.$$

4. x அச்சிற்கும $y=cx^n$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் யாதுமொரு நியமித்த நிலைத்தூரத்திற்கும் இடையில் உள்ளமைக்கப்படும் பரப்பு அந்

நியமித்த நிலைத்தூரத்தையும் அதன் கிடைத்தூரத்தையும் பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பின் $1/(n+1)$ என்னும் பின்னமெனா நிறுவுக.

5. $y^m = cx^n$ என்னும் வளைகோட்டிலுள்ள யாதும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாய்க் கோடுகள் வரைந்தால், அவ்வச்சுக்களோடு அவை ஆக்குஞ் செவ்வகத்தின் பரப்பு, தம் பரப்புக்கள் $m : n$ என்னும் விகிதங் கொண்ட பகுதிகளாக, அவ்வளைகோட்டாற் பிரிக்கப்படுமென நிறுவுக.

6. $y = x(x-1)(x-2)$ என்னும் வளைகோட்டை வரைக ; அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற உருவங்கள் இரண்டினுடைய பரப்புக்களுஞ் சமமென நிறுவுக.

7. $y = 5x^3 - 3x$ என்னும் வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுறும் இரண்டு சமபரப்புக்கள் உள எனக்காட்டி அவற்றைக் கணிக்க.

8. $\int_{-2}^{4} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$ என்னுந் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க ; $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ என்னும் வளைகோடு x – அச்சை மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றதெனக் காட்டியும், $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$ என்னும் xஇன் எல்லைச் சோடிகளுக்கு இடையிற் குறிக்கப்பட்ட பரப்புக்களைக் கண்டும் முடிபை அத்தொகையீடு குறிக்கும் பரப்புக்கள் பற்றி விளக்குக.

9. ஒரு வளைகோட்டிற்கும், x – அச்சிற்கும், $x = 0, x = h$ என்பனவற்றிலுள்ள நிலைத்தூரங்களுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பு $ah + bh^2 + ch^3$ ஆயின், அவ்வளைகோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

10. $y = 4 - x^2$ என்னும் வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க. a இன் எப்பெறுமானத்திற்கு $\int_{0}^{a} (4 - x^2)\,dx$ என்னுந் தொகையீடு பூச்சியமாகும் ?

11. $y = 3 - 4x + x^2$ என்னும் வளைகோட்டை வரைக ; x – அச்சிலுள்ள 0,1; 1,3; 3,4 என்னும் புள்ளிகளுக்கு இடையே x – அச்சிற்கும் அவ்வளைகோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள பரப்புக்கள் எண்ணளவிற் சமமென நிறுவுக.

12. $y = 3 - 4x - 2x^2 + 4x^3 - x^4$ என்னும் வளைகோடு x – அச்சை $x = 1$ என்னும் புள்ளியிலே தொடுமெனக் காட்டுக ; அது x – அச்சை வெட்டும் ஏனைய புள்ளிகளையுங் காண்க. அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் எல்லையுற்ற இரு பிரதேசங்களின் பரப்புக்களுஞ் சமமென நிறுவுக

13. $y = (x-2)^2(x+3)^2$ என்னும் வளைகோட்டாலும் x – அச்சாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

14. $y = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 36x - 27$ என்னும் வளைகோடு x – அச்சை $x = 3$ இலே தொட்டு $x = 1$, $x = -3$ என்பனவற்றில் வெட்டுகின்றது. அவ்வளைகோட்டை வரைந்து அதனாலும் x – அச்சாலும் அடைக்கப்படும் இரு பரப்புக்களையுங் காண்க.

15. $8y = (x-2)\ (x-4)^2$ என்னும் வளைகோடு y – அச்சை A இலும் x – அச்சை B இலும் வெட்டி x அச்சை C இலே தொடுகின்றது. வில் AB ஆலும் அச்சுக்களாலும் எல்லையுறும் பரப்பு அவ்வளைகோட்டாலும் x – அச்சின் BC என்னும் பகுதியாலும் எல்லையுறும் பரப்பின் 17 மடங்கு என நிறுவுக.

16. $y = 2x - x^2$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் $y = x$ என்னுங் கோட்டிற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க.

17. $y = x(4-x)$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $y=3$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுறும் பரப்பைக் காண்க.

18. $y = x^3 - 13x$ என்னும் வளைகோடு $y = 12$ என்னுங் கோட்டினால் வெட்டப்படும் புள்ளிகளுள் ஒன்று $(-1, 12)$ என்பது. ஏனைய இரண்டு புள்ளிகளையுங் காண்க. அவ்வளைகோட்டாலும் $y=12$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுறும் இரு பரப்புக்களின் விகிதம் 32 : 375 என நிறுவுக.

19. $y = x^2 - 7x + 6$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $x + 3y = 6$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

20. $y + 4 = 5x - x^2$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $2y = x - 4$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பைக் காண்க.

9.5. கனவளவுகள்.

1. $y^2 = x^2 - a^2$ என்னும் வளைகோடு x அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்பட்டால், அவ்வளைகோட்டாலும், x அச்சாலும், $x = 2a$ என்னும் நிலையத் தூரத்தாலும் எல்லையுற்ற பரப்பு a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்திற்குச் சமனான ஒரு கனவளவைப் பிறப்பிக்குமென நிறுவுக.

2. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ என்னும் வளைகோட்டின் வளையம் x அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. அடைக்கப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

3. $x = 0$ இலிருந்து $x = 2$ வரைக்குமுள்ள வளைகோடு $y = 4x - x^3$ என்பது x அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. சுற்று மேற்பரப்பாலும், $x=2$ இலுள்ள தளமுனையாலும் எல்லையுறுங் கனவளவைக் காண்க.

4. மூன்றாங் கணக்கிலுள்ள வளைகோடு $x=0$ இலிருந்து $x=2$ வரைக்குமுள்ள $y^2=x^2(2-x)$ என்னும் வளைகோடாயின், கனவளவு யாதாயிருக்கலாம் ?

5. ஒரு பூந்தொட்டியின் உயரம் உட்பக்கமாக அதன் அச்சினது நீளத்திற்கு அளக்கப்பட h ஆயும் அதன் அச்சிற்கூடாக ஒரு நிலைக்குத்தான பிரிவு $ay^2=x^3$ என்னும் வளைகோடாயும் இருந்தால், அத்தொட்டி கொள்ளுங் கனவளவு என்ன ?

6. OP என்னும் ஒரு நாண் ஒரு பரவளைவின் உச்சி O இற்கூடாக வரையப்படுகின்றது ; OP ஆலும் அவ்வளைகோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பு அப்பரவளைவின் அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அக்கூம்பிற்கும் அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட பரவளைவுத் திண்மத்திற்கும் இடையிலுள்ள கனவளவு $\frac{1}{6}\pi ON.PN^2$ என நிறுவுக ; இங்கு PN என்பது P இலிருந்து x – அச்சிற்கு உள்ள நிலைத்தூரம்.

7. $y^2=(x-2)(3-x)$ என்னும் வளைகோடு x அச்சை A, B என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. அவ்வளைகோட்டை AB என்னுங் கோடுபற்றிச் சுற்றப் பிறக்குங் கனவளவைக் காண்க.

8. a என்னும் பக்கத்தையுடைய $ABCDEF$ என்னும் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம் விட்டம் AD பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அவ்வாறு ஆக்கப்படுங் கனவளவு a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோணத்தின் கனவளவின் $\frac{3}{4}$ என நிறுவுக.

9. சுற்றுப் பரவளைவுத் திண்மம் ஒன்றின் கனவளவு சமவட்டவடிவையும் சமவச்சு நீளத்தையுங் கொண்ட நேர்வட்டவுருளையின் கனவளவின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

10. $x=0, x=a$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $ay^2=x^2(a-x)$ என்னும் வளைகோட்டின் பகுதி x – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறப்பிக்கப்பட்ட கனவளவு a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோணத்தின் கனவளவின் 16 இல் 1 என நிறுவுக.

11. $x=0$, $x=b$ என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள $ay^2=x^2(x+a)$ என்னும் வளைகோட்டின் பகுதி x – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அவ்வாறு பெறப்பட்ட கனவளவு b என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவிற்குச் சமமாயின், $b=4a$ என நிறுவுக.

12. $4y=x^3-4x$ என்னும் வளைகோட்டை x அச்சுப்பற்றி $x=0, x=2$ என்னும் எல்லைகளுக்கிடையிற் சுற்றுவதாற் பிறப்பிக்கப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

13. $y^2=x(4-x)^2$ என்னும் வளைகோடு $x=0, x=4$ என்பனவற்றிற்கு இடையில் x – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படும்பொழுது பிறப்பிக்கப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

14. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினது நுனியில்லாத் துண்டம் ஒன்றிற்கு A, B என்னும் பரப்புக்களுள்ள தளவட்டமுனைகள் உள ; அத்துண்டத்தின் உயரம் h. அதன் கனவளவு $\frac{1}{3}h\{A+B+\sqrt{(AB)}\}$ என நிறுவுக.

15. (1, 3), (4, 5) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு (i) x – அச்சுப்பற்றியும் (ii) y அச்சுப் பற்றியுஞ் சுற்றப்படுகின்றது. பெறப்படும் கூம்புத் துண்டங்களின் கனவளவுகளைக் காண்க.

16. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவாலும் $x=a$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பு y – அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. பிறந்த திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

17. a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் மையத்திலிருந்து c என்னுந் தூரத்தில் ஒரு தளத்தால் வெட்டப்பட்ட அக்கோளத்தின் துண்டுகளுட் சிறியதன் கனவளவைக் காண்க.

18. c என்னும் ஆரையையுடைய ஓர் உருளை வடிவான துளை a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்திற்கூடாகத் துளைக்கப்படுகின்றது ; அவ்வுருளையின் அச்சு அக்கோளத்தின் மையத்திற் கூடாகச் செல்கின்றது. அக்கோளத்தில் என்ன கனவளவு மீந்திருக்கும் ?

19. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ என்னுஞ் சமன்பாடு தன் புள்ளிகள் அச்சுக்களிலுள்ள ஒரு நான்முனை உரு ஒன்றைக் குறிக்கின்றது. அவ்வுருவத்தை ஆள்கூற்றச்சுக்களுள் யாதுமொன்றைப் பற்றிச் சுற்றுதலாற் பெறப்படுங் கனவளவு a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவின் $\frac{8}{35}$ எனக் காட்டுக.

20. $(h, 0)$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2=a^2$ என்னும் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகள் வரையப்படுகின்றன. அத்தொடுகோடுகளாலும் அவ்வட்டம் பிரிக்கப்படும் பெருவில்லாலும் எல்லையுற்ற பரப்பு x அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படப் பெறப்படுங் கனவளவைக் காண்க.

21. $x=h$ என்னுஞ் சமன்பாடுடைய ஓர் இரட்டை நிலைத்தூரத்தால் வெட்டப்பட்ட $y^2=4ax$ என்னும் ஒரு பரவளைவின் ஒரு துண்டு அந்நிலைத்தூரம்பற்றிச் சுற்றுகின்றது. பிறந்த கனவளவு h என்னும் ஆரையையும் இரட்டை நிலைத்தூரத்திற்குச் சமமான நீளத்தையுங்கொண்ட ஓர் உருளையின் கனவளவின் $\frac{8}{15}$ என நிறுவுக.

22. ஒரு நிலைத்தூரம் PN ஆல் வெட்டப்பட்ட $y^2=4ax$ என்னும் ஒரு பரவளைவின் பகுதி x-அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது. P இல் அப்பரவளைவிற்கு வரைந்த தொடுகோடு அவ்வச்சை T இற் சந்தித்தால், பெறப்படும் பரவளைவுத்திண்மக் கனவளவு T ஐத் தன்னுச்சியாயும் அப்பரவளைவுத்திண்ம வடியைத் தன்னடியாயுமுள்ள நேர்வட்டக் கூம்பின் கனவளவின் முக்காற்பங்கென நிறுவுக.

9.6. திணிவு மையங்கள்.

1. அச்சுக்களாலும் (i) $3x+4y=12$ என்னுங் கோட்டாலும் (ii) $x=4$, $y=2x+5$ என்னுங் கோடுகளாலும் எல்லையுற்ற பரப்பினது திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைத் தொகையிடுதலாற் காண்க.

2. $2x+y=4$ என்னுங் கோடு x அச்சை A இல் வெட்டுகின்றது ; $x+2y=4$ என்னுங் கோடு y அச்சை B இல் வெட்டுகின்றது ; அக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று C இல் வெட்டுகின்றன. O என்பது உற்பத்தியெனின், $OACB$ என்னும் பரப்பினது திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைத் தொகையிடுதலாற் காண்க.

3. $y=2x-4$ என்னுங் கோடு x அச்சை A இல் வெட்டுகின்றது ; $2y=x+4$ என்னுங் கோடு y அச்சை C இல் வெட்டுகின்றது ; அக் கோடுகள் B இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. O என்பது உற்பத்தியாயின், $OABC$ என்னும் பரப்பினது திணிவு மையத்தின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

4. y அச்சிற்கும் $y=a$ என்னுங் கோட்டிற்கும் $a^2y=x^3$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் இடையில் உள்ளடைக்கப்பட்ட பரப்பினது திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

5. x அச்சிற்கும் $ay^2=x^3$ என்னும் வளைகோட்டிற்கும் $x=a$ இலுள்ள நிலைத் தூரத்திற்கும் இடையிலுள்ள பரப்பினது திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

6. x அச்சாலும் $x^3y=c^4$ என்னும் வளைகோட்டாலும் $x=a$, $x=b$ என்னுங் கோடுகளாலும் எல்லையுற்ற பரப்பினது திணிவு மையத்தைக் காண்க.

7. y அச்சாலும், $y^m=cx^n$ என்னும் வளைகோட்டாலும் (h, k) என்பது அவ்வளைகோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாயிருக்க $y=k$ என்னுங் கோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பினது திணிவு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ ஆயின்,

$$2(2m+n)\bar{x}/h=(m+2n)\bar{y}/k=m+n$$

என நிறுவுக.

8. $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$ என்னுங் கோடுகளால் எல்லையுற்ற சதுரம் $y^2=2x$ என்னும் வளைகோட்டால் இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கப் படுகின்றது. ஒவ்வொரு பகுதியினது திணிவு மையத்தையுங் காண்க.

9. x அச்சாலும் $y=1-x^2$ என்னும் வளைகோட்டாலும் எல்லையுற்ற பரப்பினது திணிவுமையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

10. ஒரு சுற்றுத் திண்மம் $x=a$ இலிருந்து $x=2a$ வரைக்குமுள்ள $y^2=x^2-a^2$ என்னும் வளைகோட்டை x அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுதலால் ஆக்கப்படுகின்றது. அத்திண்மத்தினது திணிவுமையத்தின் தூரத்தை உற்பத்தியிலிருந்து காண்க.

11. $x=0$, $x=3$ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள $3y^2=(3-x)x^2$ என்னும் வளைகோட்டின் பகுதி x அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. அச்சுற்றுக்கனவளவினது திணிவுமையத்தினது தூரத்தை உற்பத்தி யிலிருந்து காண்க.

12. a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளம் மையத்திலிருந்து c என்னுந் தூரத்திலுள்ள ஒரு தளத்தால் இருதுண்டுகளாகப் பிரிக்கப் படுகின்றது. அத்துண்டுகளினுடைய திணிவு மையங்களின் தூரங்களை மையத்திலிருந்து காண்க.

13. ஒரு பரவளைவின் ஒரு பகுதியை அதன் அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுதலாற் பெறப்படும் ஒரு பரவளைவுக் கிண்ணத்தின் கனவளவினது திணிவு மையம் அதன் அச்சை $2:1$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்குமென நிறுவுக.

14. உற்பத்தியிலிருந்து (h, k) என்னும் புள்ளிவரைக்குமுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் பரவளைவின் வில்லொன்று y அச்சுப்பற்றிச் சுற்றப்படுகின்றது. h என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட வடியோடு அவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட வளைமேற்பரப்பு $\frac{1}{5}\pi h^2k$ என்னும் ஒரு கனவளவை அடைக்குமென்றும் இக்கனவளவினது திணிவுமையம் உற்பத்தியிலிருந்து $\frac{5}{6}k$ என்னுந் தூரத்தில் இருக்குமென்றும் நிறுவுக.

15. உற்பத்தியிலிருந்து (h, k) என்னும் புள்ளிவரைக்குமுள்ள $y^2=4ax$ என்னும் ஒரு பரவளைவின் வில்லொன்று (h, k) என்னும் புள்ளியிலுள்ள நிலைத்தூரம்பற்றிச் சுற்றுகின்றது ; இவ்வாறு சுற்ற h என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட வடியோடு கூடிய ஒரு வளை மேற்பரப்பை ஆக்குகின்றது. அடைக்கப்பட்ட கனவளவு $\frac{8}{15}\pi h^2k$ என்றும், அவ்வட்ட வடிவின் மையத்திலிருந்து அக்கனவளவினது திணிவு மையத்தினுடைய தூரம் $\frac{5}{16}k$ என்றும் நிறுவுக.

16. $x=0$ இலிருந்து $x=a$ வரைக்குமுள்ள $ay^2=x^2(a-x)$ என்னும் வளைகோட்டை x அச்சுப்பற்றிச் சுற்றுதலால் ஒரு சுற்றுத் திண்ம

ஆக்கப்படுகின்றது. அக்கனவளவினது திணிவு மையத்தின் x ஆள்கூற்றைக் காண்க.

9.7. சிறு மாற்றங்கள்.

1. r என்னும் ஆரையையும் h என்னும் உயரத்தையுங் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டவுருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பு $2\pi rh$; அதன் கனவளவு πr^2h ஆகும். r, h என்னும் இரண்டின் அளவீடுகளும் 2 சதவீத வழுவிற்கு உட்படுமாயின், அதன் விளைவாகப் பரப்பளவீட்டிலுங் கனவளவீட்டிலும் என்ன சதவீத வழுக்கள் இருக்கும் ?

2. அடியின் ஆரை r ஆயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi r^2h$. அடியின் ஆரை 2 சதவீதத்தாற் குறைக்கப்படின், கனவளவை மாற்றுது விடுதற்கு உயரம் எவ்வளவு சதவீதத்தாற் கூட்டப்படவேண்டும் ?

3. ஒரு நேர்வட்டவுருளையின் ஆரை நிகழத்தக்க $\pm$ 2 சதவீத வழுவோடு 15 சதம மீற்றராக அளக்கப்படுகின்றது ; அதனீளம் நிகழத்தக்க ± 3 சதவீத வழுவோடு 42 சதம மீற்றராக அளக்கப்படுகின்றது. கணிக்கப்பட்ட கனவளவு எவ்வளவு சதவீதத்தால் வழுப்படலாம் ?

4. ABC என்பது A இற் செங்கோணமுள்ள ஒரு செங்கோண முக்கோணம். AB, AC என்பனவற்றில் x சதவீதம் y சதவீதம் என்னுஞ் சிறு வழுக்கள் விடப்படின், BC என்னும் நீளத்தில் விளையும் வழு $\frac{1}{2}(x+y)$ சதவீதம் எனக் காட்டுக.

5. ஒரு செவ்வகப் பெட்டியடியின் உள்ளளவீடுகள் a அங். நீளமும் b அங். அகலமுமாகும் ; தந்த அளவு நீர் அப்பெட்டியை h என்னும் ஆழத்திற்கு நிரப்புகின்றது. a, b என்பனவற்றின் அளவீடுகளில் 1 சதவீத வழுவும் -2 சதவீத வழுவும் புணர்த்தப்பட்டால், h இன் அளவீட்டில் என்ன சதவீதத் திருத்தஞ் செய்யப்படவேண்டும் ?

6. ஆரை r ஆயும் உயரம் h ஆயுமுள்ள ஒரு நேர்வட்டவுருளையின் வட்ட முனைகள் ஆரை R ஆகவுள்ள ஒரு நிலையான கோளத்திற் கிடக்கின்றன. r இல் 1 சதவீதச் சிற்றேற்றஞ் செய்யப்படின், அதன் விளைவாக h இல் ஆகுஞ் சதவீத விறக்கம் $r^2/(R^2-r^2)$ எனக் காட்டுக.

7. ஒரு குழிவான ஆடியின் மேற்பரப்பிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் x என்னுந் தூரமும் அதன் விம்பத்தின் x' என்னுந் தூரமும் $\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=$ ஒரு மாறிலி என்னுந் தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அப்புள்ளி அதன் விம்பம் என்னும் இவற்றின் ஒத்த சிற்றிடப் பெயர்ச்சிகள் $-(x/x')^2$ என்னும் விகிதத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

8. W, W' என்பன முறையே ஒரு பொருள் காற்றிலிருக்கும் போதுள்ள நிறையையும் அப்பொருள் நீரிலிருக்கும் போதுள்ள நிறையையுங் குறித்தால், அப்பொருளின் தற்புவியீர்ப்பு $s=W/(W-W')$ என்னுஞ் சூத்திரத்தாலே துணியப்படும். நிறுக்கும்போது ஒவ்வொரு முறையும் 1 சதவீத வழு புணர்த்தப்படின், s என்பது தாக்கப்படாதெனக் காட்டுக ; W இல் 1 சதவீத வழுவும் W' இல் 2 சதவீத வழுவும் புணர்த்தப்படின், s இற் சதவீத வழு $W'/(W-W')$ புணர்த்தப்படுமென்றுங் காட்டுக.

9. தந்த ஒரு வாயுத்திணிவின் நிலைமாற்றம் வெப்ப நயநட்டங்களின்றி நடைபெறுமாயின், அமுக்கம் p உம் கனவளவு v உம் $pv^{\gamma}=$ ஒரு மாறிலி என்றும் ஒரு தொடர்பால் இணைக்கப்படும் ; இங்கு γ என்பது ஒரு வரையறுத்த மாறிலி. கனவளவு ஒரு சிறு சதவீதம் x இனுற் குறைக்கப்பட்டால், அமுக்கம் γx சதவீதத்தாற் கூட்டப்படும் என நிறுவுக.

10. உலோகக் கோல் ஒன்றின் குறுக்கு வெட்டுமுகம் a^2 என்னும் பரப்புள்ள ஒரு சதுரம் ; அதன் நீளம் l. அந்நீளம் x சதவீதம் என்னும் ஒரு சிற்றளவால் விரிக்கப்படுகின்றது. உலோகத்தின் கனவளவில் யாதொரு மாற்றமும் இல்லையெனக் கொண்டு a இலுள்ள சதவீத விறக்கத்தைக் காண்க. அதே நிலைமையில், அக்கோலின் முழு மேற்பரப்பிலுஞ் சதவீத மாற்றம் யாது ?

11. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செம்பக்கமும் வேறொரு பக்கமும் அளக்கப்பட, அவை முறையே 18 அங்குலமும் 10 அங்குலமுமெனக் காணப்பட்டன. ஒவ்வோர் அளவீடும் ± 3 சதவீத வழுவிற்கு உட்படுகின்றது. இவ்வளவீடுகளிலிருந்து கணிக்கப்பட்டபடி மீந்திருக்கும் பக்கத்தின் நீளம் ஏறத்தாழ 5·7 சதவீத வழுவிற்கு உட்படுமென நிறுவுக.

12. ஒரு கூம்பகத்தின் கனவளவு அதன் அடியின் பரப்பை அதன் உயரத்தாற் பெருக்க வருவதன் மூன்றிலொரு பங்கு. ஒரு நான்முகியின் நான்கு முகங்களும் பக்கம் a ஆயுள்ள சமபக்க முக்கோணங்களாயின் நீளம் a இல் x சதவீதம் என்னும் ஒரு சிற்றேற்றம் அந்நான்முகியின் கனவளவில் $3x$ சதவீதம் என்னும் ஓர் ஏற்றத்தையும் அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பில் $2x$ சதவீதம் என்னும் ஓர் ஏற்றத்தையும் விளைவிக்குமெனக் காட்டுக.

13. ஓர் உலோகத்தினது தந்த ஒரு கனவளவு வெளியாரை 2 அடியாயுந் தடிப்பு 3 அங்குலமாயுமுள்ள ஒரு குழிக்கோளமாக ஆக்கப்படுகின்றது. ஆரையின் அளவீட்டில் ± 1 சதவீத வழு புணர்த்தப்படின், அதன் விளைவாகத் தடிப்பின் பெறுமானக் கணிப்பில் என்ன சதவீத வழு புணர்த்தப்படும் ?

14. மெல்லிய ஒரு வில்லையின் தலைமைக் குவியங்களிலிருந்து ஒரு புள்ளியினது தூரம் x உம் அதன் பிம்பத்தினது தூரம் x' உம் $xx' =$ மாறிலி என்னுந் தொடர்பாலே இணைக்கப்படுகின்றன. x ஆனது ஒரு சிற்றேற்றத்தைப் பெற, x' ஆனது சம சதவீதத்தாற் குறைக்கப் படுமெனக் காட்டுக.

15. தன் விளிம்புகள் a, b, c என்னும் நீளங்களுள்ள ஒரு செவ்வகத் திண்மத்தின் மூலைகள் R என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு நிலையான கோளத்திற் கிடக்கின்றது. விளிம்புகள் a, b என்னும் இரண்டும் 1 சதவீத ஏற்றங்களைப் பெற்றால், அதன் விளைவாகச் c இல் வருங் குறைவு $(a^2+b^2)/c^2$ சதவீத மென்றும், அத்திண்மத்தின் கனவளவில் வரும் ஒத்த ஏற்றம் $(3-4R^2/c^2)$ சதவீதமென்றும் நிறுவுக.

16. ஒரு திறந்த பெட்டியின் அடிப் பக்கம் a உம் ஆழம் c உம் உள்ள ஒரு சதுரம். தடுப்புப் புறக்கணிக்கத்தக்கது ; எனினும் அப்பெட்டியை ஆக்குதற்கு வழங்கிய திரவியத்தின் முழுப் பரப்பும் ஒரு தந்த அளவு கொண்டது. அளவீடு a ஆனது x சதவீதச் சிறுவழுவிற்கு உட்பட்டதாயின், c என்பது $-x(1+a/2c)$ சதவீத வழுவிற்கு உட்பட்டதாகுமென நிறுவுக.

17. ஒருசீர் உலோகக் கோளம் ஒன்றின் வெப்பநிலை 3 பாகையால் உயர்த்தப்பட அதன் விட்டம் x சதவீதத்தாற் கூடுதலுறுகின்றதென்பது காணப்படுகின்றது. அக்கோளத்தின் கனவளவும் மேற்பரப்பும் ஒவ்வொரு பாகை வெப்பநிலை ஏற்றத்தாலும் எச்சதவீதங்களாற் கூடுதலுறும் ?

18. ஓர் உலோகத்தின் தந்த ஓர் அளவு ஒரு முனையிலே திறந்ததாயுள்ள ஒரு வட்டவுருளையாக ஆக்கப்படுகின்றது. வெளியளவீடுகள் உயரம் 12 அங்குலமும் அடியாரை 6 அங்குலமுமாகும் ; அவ்வுருளை 1 அங்குல ஒரு சீர்த்தடிப்புள்ளது. அவ்வுருளையின் உயரம் ஓர் அங்குலத்தின் x என்னும் ஒரு சிறு பின்னத்தாற் கூட்டப்பட ஆரை மாறாதிருந்தால் தடிப்பு $11x/135$ அங்குலத்தாற் குறைக்கப்பட வேண்டுமென நிறுவுக.

19. செவ்வகவுலோகக்கட்டி ஒன்றின் விளிம்புகள் பிழையாக a, b, c அங். என அளக்கப்பட்டுள்ளன ; அவ்வளவீடுகளில் 1, 2, 1·5 என்னுஞ் சதவீத வழுக்கள் புணர்த்தப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவின் அளவீட்டில் என்ன சதவீத வழு உண்டு ?

20. வெளி விளிம்பு 12 அங்குலமும் ஒரு சீர்த்தடிப்பு 2 அங்குலமும் உள்ள ஒரு கனவடிவப் பெட்டி தந்த ஓர் உலோகக் கனவளவிலிருந்து ஆக்கப்பட வேண்டும். அதன் விளிம்பினது நீளத்தில் x சத வீதச் சிறு வழு புணர்த்தப்படின், அதன் விளைவாகத் தடிப்பில் என்ன சதவீத வழு ஆக்கப்படும்?

விடைகள்

2.12 1. $-1, ; -1 ; 7.$ 2. $0 ; \frac{1}{2} ; 2.$
3. $(a^2+3ab+b^2)/a(a+b) ; 4ab/(a^2-b^2).$ 4. $a^2b^2.$

2.33 1. (i) 0 ; (ii) 2 ; (iii) ∞. 2. (i) c/a; (ii) a/c.
3. $-\frac{3}{4}$. 4. $\frac{1}{27}$. 5. 2. 6. -4. 7. (i) $\frac{1}{20}$; (ii) -4.
8. $\frac{1}{2}$. 9. -1. 10. -2. 11. ∞.

2.41 1. $3x^2+3x\delta x+(\delta x)^2 ; 8x+4\delta x ; 2(x-1)+\delta x.$
2. $-1/x(x+\delta x) ; -(4x+2\delta x)/x^2(x+\delta x)^2 ; -1/(x-1)(x+\delta x-1).$
3. $$1-\frac{1}{x(x+\delta x)} ; \frac{-2(x-1)-\delta x}{(x-1)^2(x+\delta x-1)^2} ; a-\frac{b}{x(x+\delta x)}.$$

2.521 (i) $4x$. (ii) $-1/(x-1)^2$. (iii) $3x^2+1$. (iv)
(v) $-a/(ax+b)^2$. (vi) $-3/x^4$.

2.59 1. $$4x^3 ; 5x^4 ; \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} ; -\frac{2}{x^3} ; -\frac{4}{3x^{\frac{7}{3}}}.$$
2. (i) $6x^2+6x$; (ii) $6x-2$; (iii) $3(x-2)^2$;
(iv) $-\frac{9}{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}$; (v) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}$; (vi) $1-\frac{1}{x^2}$;
(vii) $2ax+b$; (viii) $-\frac{2}{ax^3}-\frac{1}{bx^2}$;
(ix) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}-\frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}$; (x) $nax^{n-1}-\frac{nb}{x^{n+1}}$;
(xi) $4x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}+4x^{-\frac{7}{3}}$;
(xii) $\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}.$

2.61 (i) $6-6x-27x^2$. (ii) $-20x+27x^7-30x^4$.
(iii) $4x^3+2x$. (iv) $6(x^5+x^2)$.

2.621 (i) $-1/(2x+1)^2$. (ii) $-(2x^4-3x^2-4x)/(x^3+1)^2$.
(iii) $2(x^2-1)/(x^2+x+1)^2$. (iv) $(ad-bc)/(cx+d)^2$.

(v) $-a/(ax+b)^2$. (vi) $-3x^2/(x^3-1)^2$.

(vii) $-4b(ax^2-c)/(ax^2-2bx+c)^2$.

(viii) $x(x^3+3x+2)/(x^2+1)^2$.

(ix) $2x(x^2-1)(x^2+3)/(x^2+1)^2$.

2.633 (i) $20x(2x^2+1)^4$; $12(4x-1)^2$; $36x^2(3x^3+2)^3$.

(ii) $\dfrac{-2}{(2x+1)^2}$; $\dfrac{-6}{(2x+1)^4}$; $\dfrac{-10}{(2x+1)^6}$.

(iii) $3(20x-9)(5x+1)^2$; $5(2x-1)(2x+3)^3$.

(iv) $6x(x^3+1)^3(7x^3+1)$; $2x(x^4-1)^4(x^2-1)(11x^2+1)$.

(v) $\dfrac{-(2x^2+4x+3)}{(x-1)^4}$; $\dfrac{-2(x-1)(4x^2-6x-1)}{(2x^2+1)^4}$.

(vi) $\dfrac{-x(x-2)}{(x+1)^4}$; $\dfrac{(x+1)^2(2x-7)}{(2x-1)^3}$.

(vii) $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{(x^2+x+1)}}$; $\dfrac{2x^3+x}{\sqrt{(x^4+x^2+1)}}$.

(viii) $\dfrac{-1}{x^2\sqrt{(x^2+1)}}$; $\dfrac{-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

2.64 1. (i) $12x^2$; (ii) $-2x/(x^2+1)^2$;
(iii) $-2a/(ax+b)^3$.

2. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$. 3. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$.

4. (i) $2ax$, $2a(x+2)$, $4ax(x^2+3)$;

(ii) $\dfrac{-2}{ax^3}$, $\dfrac{-2}{a(x+2)^3}$, $\dfrac{-4x}{a(x^2+3)^3}$;

(iii) $\dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $\dfrac{-4}{(1+x)^5}$, $\dfrac{-5}{(1+x)^6}$;

(iv) $\dfrac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{3x^2}{2(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}$;

(v) $6(2x+1)^2(3x-2)(5x-1)$, $(2x+1)(3x-2)^2(30x+1)$;

(vi) $6(2x+1)^2(x-3)/(3x-2)^3$,
$-6(3x-2)(x-3)/(2x+1)^4$;

(vii) $(2x+3)/2\sqrt{\{(x+1)(x+2)\}}$,
$1/2\sqrt{\{(x+1)(x+2)^3\}}$;

(viii) $3x^2-12x+11$; (ix) $(x^2-6x+7)/(x-3)^2$;

(x) $\{(m+n)x+na+mb\}(x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}$;

(xi) $\{(m-n)x-na+mb\}(x+a)^{m-1}/(x+b)^{n+1}$;

(xii) $mnx^{n-1}(x^n+a^n)^{m-1}$,
$\{x^n(1-mn)+a^n\}/(x^n+a^n)^{m+1}$.

3.11

2. (i) -2 ; (ii) $-2a$; (iii) -1 (iv) 0.

3.424

1. உயர்வு 0, இழிவு $-\frac{4}{27}$.

2. உயர்வு $x=2-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, இழிவு $x=2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. 1 ; 1 ; இழிவு $x=\frac{4}{3}$இல். 7. -1 ஓர் இரட்டைமூலம்.

8. $x=\frac{4}{5}$, $x=2$என்பன திரும்பற்புள்ளிகள் ; $x=-1$ என்பது வளைவு மாற்றப் புள்ளி.

10. $x=\cdot 5$ இலேதொடும் ; $x=-3$ இல்வெட்டும்.

12. $x=0$ இல் உயர்வு, $x=2$ இல் இழிவு.

14. உயர்வு $3-2\sqrt{2}$, இழிவு $3+2\sqrt{2}$.

15. 2,2,2,10/3 என்பன மூலங்கள்.

3.531

1. 3,0, செக்கனுக்கு -9 அடி, 2 அடியும் 4 அடியும் எதிர்த்திசையில் ; $-6t$.

2. $6(t^2-5t+6)$, $6(2t-5)$. முதலிரண்டு செக்கனில் 28 அடி சென்று மூன்றாஞ் செக்கனில் 1 அடி திரும்பி வந்து நாலாஞ் செக்கனில் 5 அடி முன்செல்கின்றது. ; செக்கனுக்கு $-1\cdot 5$ அடி.

3. $2(2-7t+3t^2)$; $-2(7-6t)$.

4. செக்.^{2}இற்கு 1 அடி ; செக்.^{2} $-1\cdot 8$ அடி.

3.65

1. $x=\frac{1}{2}$, -3. 2. இழிவு $x=-2$; வளைவுமாற்றப் புள்ளி $x=\pm 1$.

3. இழிவு $x=0$, உயர்வு $x=\pm 1$; வளைவுமாற்றப் புள்ளி $x=\pm 1/\sqrt{3}$.

4. உயர்வு $x=2$, இழிவு $x=1,3$; வளைவுமாற்றப் புள்ளி $x=2\pm 1/\sqrt{3}$.

5. உயர்வு $x=0$ இழிவு$x=\pm 1$; வளைவுமாற்றப் புள்ளி $x=\pm 1/\sqrt{3}$; $\pm 1/\sqrt{3}$ என்பனவற்றிற்கிடையில்

6. $a=-21$, $b=9$ $c=1$.

7. உயர்வு $x=\frac{2}{3}$, இழிவு $x=2$; வளைவுமாற்றப் புள்ளி $x=-1$, $(4\pm\sqrt{10})/6$.

8. 1 வளைவுமாற்றப் புள்ளி, 2 உயர்வு, 3 இழிவு.

9. வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள்.

10. $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-3$. 11. $\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2$. 13. $x=0,\pm\sqrt{3}$.

14. உயர்வு $x=-1+\sqrt{2}$, இழிவு $x=-1-\sqrt{2}$; மூன்று.

15. இழிவு $x=0$, வளைவுமாற்றப்புள்ளி $x=\pm 1/\sqrt{3}$.

16. உயர்வு $x=1$, இழிவு $x=-1$. 17. $-1, 7$.

4.15. (i) 3 சைன் ^2xகோசை ^2xகோசை $2x$.

(ii) சீக x (சீக $^2x+$ தான் ^2x).

(iii) 2 சைன் $x/(1+$கோசை$x)^2$.

(iv) m கோசை mxகோசை $nx-n$ சைன் mxசைன் nx.

(v) nx^{n-1} சைன் $mx+mx^n$ கோசை mx.

(vi) 4 சீக^2x தான் x. (vii) m கோசை $2\,mx$. (viii) கோசை^3x.

(ix) -3 கோசே ^3xகோதா x. (x) -3 கோதா $3x$ கோசே $3x$.

(xi) சீக^2x $(1+2x$ தான் $x)$.

(xii) x^2 தான்$x(3$ தான் $x+2x$ சீக $^2x)$.

4.23. (i) $-1/\sqrt{(1-x^2)}$. (ii) $-$சைன் $x/(1+$கோசை$^2x)$.

(iii) -1. (iv) $2/(x^2-1)\sqrt{(x^2-2)}$.

(v) $2/(1+x^2)$. (vi) $-2/(1+x^2)$.

(vii) $-3\sqrt{x}/\sqrt{(2-x^3)}$. (viii) $1/(1+x^2)$.

(ix) $2x$ தான் $^{-1}x+1$. (x) $-2x$ கோசை $^{-1}x-\sqrt{(1-x^2)}$.

(xi) $\dfrac{x \text{ சீக}^{-1}x}{\sqrt{(x^2-1)}}+\dfrac{1}{x}$. (xii) கோதா $^{-1}x-\dfrac{x}{1+x^2}$.

(xiii) $1/\sqrt{(a^2-x^2)}$. (xiv) $ab/(a^2x^2+b^2)$.

(xv) $-1/\sqrt{(2\,ax-x^2)}$. (xvi) $\sqrt{(b^2-a^2)}/(b+a$ கோசை $x)$.

(xvii) $-3/(2x^2-2x+5)$. (xviii) $\sqrt{(b^2-a^2)}/(b+a$ சைன் $x)$

(xix) $1/2\sqrt{\{(a-x)(x-b)\}}$. (xx) $\sqrt{(ac-b^2)}/(ax^2+2\,bx+c)$.

4.36. (i) $e^x(x^3+3x^2)$. (ii) $e^x\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{x^5}\right)$.

(iii) $\dfrac{1}{e^x}(-x^5+5x^4)$. (iv) $2xe^{x^2+1}$

(v) $2\,ab\,e^x/(a-be^x)^2$. (vi) $e^{\text{தான்}x}$ சீக ^2x.

(vii) $e^{\text{சைன்}^{-1}x}/\sqrt{(1-x^2)}$. (viii) e^{ax} (a சைன் $bx+b$ கோசை bx).

(ix) e^{ax}(aகோசை$bx-b$சைன்bx). (x) $2e^{\text{தான்}^2x}$ தான் x சீக ^2x.

(xi) அசைன் $2x$. (xii) அசைன் $2\,x$.

(xiii) 4 அகோசை ^3x. (xiv) அசீக $2x$.

(xv) அசீக x. (xvi) $-$அசீக x.

4.47. (i) $1+\log x$. (ii) 2 கோசே $2x$.

(iii) 2 கோதா x. (iv) $-$அதான் x.

(v) $1/(1+x^2)$தான் ^{-1}x. (vi) $-1/x(x+1)$.

(vii) $-2\,x/(1-x^4)$. (viii) $\log$ அகோசை $x+x$ அதான் x.

(ix) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$ (x) $2(x^2-1)/(x^4+x^2+1)$.

(xi) $1/x\log x$. (xii) $-4\,x^3/(1-x^4)^{\frac{1}{2}}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}$.

(xiii) $1-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$. (xiv) $x^{x^2+1}(1+2\log x)$.

(xv) $(x^2+1)^x\{\log(x^2+1)+\dfrac{2\,x^2}{x^2+1}\}$.

(xvi) (சைன்x) $^{\text{கோசை } x}$ {கோசைx கோதா$x-$சைன்x $\log$ சைன்x}.

(xvii) $2x\,a^{x^2+1}\log a$.

(xviii) (சைன் $^{-1}x)^x$ {$\log$ சைன் $^{-1}x+x/$சைன் $^{-1}x\sqrt{(1-x^2)}$}.

(xix) (தான்x) $^{\text{சீக}x-1}$ சீகx {தான் ^2x $\log$ தான்$x+$ சீக^2x}.

(xx) $x^{\text{தான்}x}$ {சீக$^2x\log x+$(தான்$x)/x$}.

4.52. 1. $1/\sqrt{(x^2+a^2)}$. 2. $a/(a^2-x^2)$. 3. $-a/(x^2-a^2)$

4. (i) அகோசை $^{-1}x\pm\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$; (ii) $-2x$ அதான் $^{-1}\dfrac{x}{a}+a$;

(iii) $\dfrac{2\,\text{அசைன்}^{-1}x}{\sqrt{(1+x^2)}}$; (iv) $-$ கோசேx;

(v) $\pm$ சீகx; (vi) சீகx;

(vii) $\pm\dfrac{\text{சீக}^2(\text{அகோசை}^{-1}x)}{\sqrt{(x^2-1)}}$; (viii) $\dfrac{\text{கோசை}(\text{அதான்}^{-1}x)}{1-x^2}$;

(ix) $\frac{1}{2}$ சீகx; (x) $-1/x$;

5. அசீக x.

4.61. 1. (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $2nx^{n-1}/(x^{2n}+1)$; (iii) $1/2(1+x^2)$;

(iv) $2x^2/(x^4-1)$; (v) $2a/\sqrt{(1-a^2x^2)}$.

2. $-4\sqrt{2}/(1+x^4)$.

3. (b^2-a^2) கோசை ax அகோசை $bx-2ab$ சைன் ax அசைன் bx.

14. $3, \frac{1}{2}\pi$. **21.** $2a^2$. **25.** உயரம் $= \frac{4}{3}$ ஆரை.

26. 2 சைன்$^{-1}\frac{1}{3}$. **27.** $\frac{1}{2}(a+b)^2$.

28. (i) தான்$^{-1}\dfrac{b}{a}$; (ii) தான்$^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$; (iii) தான்$^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

29. உயரம் $= \frac{1}{3}h$. **30.** $\sqrt{2}\,a$.

31. செவ்வகவுயரம் $=$ ஆரை $= 30/(\pi+4)$ அடி.

5.13. 1. (i) $x^4,\ x^5,\ \frac{1}{7}x^7,\ \frac{1}{10}x^{10},\ \frac{1}{101}x^{101}$;

(ii) $-\frac{1}{2}x^{-2},\ -\frac{1}{3}x^{-3},\ -\frac{1}{5}x^{-5},\ -\frac{1}{8}x^{-8},\ -\frac{1}{99}x^{-99}$;

(iii) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}},\ \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}},\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}},\ \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}$;

(iv) $4x^{\frac{1}{4}},\ \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}},\ 2x^{\frac{1}{2}},\ -3x^{-\frac{1}{3}},\ \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}}$.

2. (i) $\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+x$;

(ii) $-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5$; (iii) $\frac{1}{3}x^3+x^2+x$;

(iv) $\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx$; (v) $-\dfrac{a}{3x^3}-\dfrac{2b}{x}+cx$.

5.223. (i) $\frac{1}{4}(x-1)^4$; $-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$. (ii) $\frac{1}{8}(2x-1)^4$; $-\dfrac{1}{4(2x-1)^2}$.

(iii) $\frac{1}{2}x^2-x+\log(x+1)$; $\log x-\dfrac{1}{x}$.

(iv) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2\log(x-1)$.

(v) $x-\log(x+2)$; $x+\log(x+1)$.

(vi) $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+3\log x-\dfrac{1}{2x^2}$.

(vii) தான் $x-x$ (viii) $-\frac{3}{4}$ கோசை $x+\frac{1}{12}$ கோசை $3x$.

(ix) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ அசைன் $2x$; $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ அசைன் $2x$. (x) $x-$ அதான் x.

5.34. (i) $\frac{1}{2}\log\{(x-1)/(x+1)\}$. (ii) $\frac{1}{2}\log(x^2-1)$

(iii) $\frac{1}{2}\log(x^2+1)$. (iv) $\frac{1}{2}\log(x^2+1)+$ தான்^{-1}x.

(v) $\log\{(x-2)^2/(x-1)\}$. (vi) $\frac{1}{2}\log\{(x+3)^5/(x+1)\}$.

(vii) $\frac{1}{2}\log\{(3x+1)^5/(x+1)\}$ (viii) $x+\log\{(x-1)/(x+1)\}$.

(ix) $(x^2+x-3)/(x+1)-3\log(x+1)$.

(x) $\log(x^2+4x+5)$. (xi) தான்$^{-1}(x+2)$.

(xii) $\log(x^2+4x+5)+3$ தான்$^{-1}(x+2)$.

(xiii) $\frac{1}{2}\log(x^2+6x+25)-\frac{1}{2}$ தான்$^{-1}\dfrac{x+3}{4}$.

(xiv) $\log(x^2+x+1)$.

(xv) $\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ தான்$^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

(xvi) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ தான்$^{-1}\sqrt{3}(x+2)$. (xvii) $\frac{1}{6}\log(3x^2+12x+13)$.

(xviii) $\frac{1}{6}\log(3x^2+12x+13)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ தான்$^{-1}\sqrt{3}(x+2)$.

(xix) $\log(x^2+6x+10)-3$ தான்$^{-1}(x+3)$.

(xx) $\frac{1}{2}\log(4x^2+4x+3)-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ தான்$^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}$.

5.42. (i) $\sqrt{(x^2+1)}$. (ii) $\sqrt{(x^2+2x+3)}$.

(iii) $-2\sqrt{(4-x-x^2)}$. (iv) $-\sqrt{(1-x^2)}$.

(v) 2 சைன்$^{-1}x-\sqrt{(1-x^2)}$. (vi) சைன்$^{-1}\dfrac{x+3}{2}$

(vii) $-\sqrt{(-5-6x-x^2)}$.

(viii) $-4\sqrt{(-5-6x-x^2)}-7$ சைன்$^{-1}\dfrac{x+3}{2}$.

(ix) $\frac{1}{3}$ அசைன்$^{-1}(3x+1)$.

(x) அசைன்$^{-1}(3x+1)+\frac{1}{3}\sqrt{(9x^2+6x+2)}$.

(xi) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ அகோசை$^{-1}\dfrac{3x+1}{2}$.

(xii) $\sqrt{(3x^2+2x-1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{அகோசை}^{-1}\frac{3x+1}{2}$.

5.53 (i) $\frac{1}{3}\log(x^3-1)$. (ii) $\frac{1}{3}\text{தான்}^{-1}x^3$.

(iii) $\frac{1}{3}\text{அசைன்}^{-1}x^3$. (iv) $\frac{1}{2}\sqrt{(4x^2+4x+3)}$.

(v) $-\frac{1}{24(9x^2+6x+2)^4}$. (vi) $\frac{1}{4}\text{சைன்}^{-1}x^4$.

(vii) $\frac{1}{2}\text{தான்}^2x$. (viii) $-\frac{1}{b}\log(a+b\text{ கோசை }x)$.

(ix) $-\text{கோசை }x+\frac{2}{3}\text{ கோசை}^3x-\frac{1}{5}\text{ கோசை}^5x$.

(x) $\text{சைன் }x-\text{சைன்}^3x+\frac{3}{5}\text{ சைன்}^5x-\frac{1}{7}\text{ சைன்}^7x$.

(xi) $\frac{2}{3}\text{ சைன்}^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\text{ சைன்}^{\frac{7}{2}}x$. (xii) $\log(x+\text{சைன் }x)$.

(xiii) $-\frac{1}{a}\text{ அசைன்}^{-1}\frac{a}{x}$. (xiv) $-\frac{1}{a}\text{ அகோசை}^{-1}\frac{a}{x}$.

(xv) $\frac{1}{2}\text{ தான்}^{-1}(\frac{1}{2}\text{ சைன் }x)$. (xvi) $\sqrt{\{(1+x)/(1-x)\}}$.

(xvii) $-\text{சைன்}^{-1}1/3\,(x-2)$. (xviii) $-\frac{1}{3}\text{ அகோசை}^{-1}3/(x+1)$.

(xix) $\frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}$. (xx) $\log\log x$.

5.56 (i) $\sqrt{(x^2+a^2)}+a\text{அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}$. (ii) $a\text{சைன்}^{-1}\frac{x}{a}-\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(iii) $\sqrt{(x^2-a^2)}$. (iv) $\frac{1}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$.

(v) $\frac{1}{2}a^3\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{6}(2x^2+3ax-2a^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(vi) $\frac{3}{8}a^4\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{8}x(5a^2-2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(vii) $\frac{3}{8}a^4\text{ அசைன்}^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{8}x(5a^2+2x^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$.

(viii) $\frac{1}{8}a^4\text{ சைன்}^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}x(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

(ix) $\frac{1}{8}x(2x^2-a^2)\sqrt{(x^2-a^2)}-\frac{1}{8}a^4\text{ அகோசை}^{-1}\frac{x}{a}$.

(x) $\frac{1}{2}\text{ தான்}^{-1}(\frac{1}{2}\text{ தான் }\frac{1}{2}x)$. (xi) $\frac{1}{4}\log\frac{2+\text{தான் }\frac{1}{2}x}{2-\text{தான் }\frac{1}{2}x}$.

(xii) $\frac{2}{\text{சைன்}\alpha}\text{ தான்}^{-1}(\text{தான் }\frac{1}{2}\alpha\text{ தான் }\frac{1}{2}x)$.

(xiii) $\text{தான்}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ (xiv) $\text{தான்}^{-1}(1+\text{தான் }\frac{1}{2}x)$.

(xv) $-2/(3+\text{தான் }\frac{1}{2}x)$.

5.66. 1. (i) $-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)$. (ii) $e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)$.

(iii) $-\frac{1}{2}x\text{ கோசை }2x+\frac{1}{4}\text{ சைன் }2x$.

(iv) $\frac{1}{3}x^2\text{ சைன் }3x+\frac{2}{9}x\text{ கோசை }3x-\frac{2}{27}\text{ சைன் }3x$.

(v) $\frac{1}{4}x^4(\log x-\frac{1}{4})$. (vi) $-\frac{1}{4}x\text{ கோசை }2x+\frac{1}{8}\text{ சைன் }2x$.

(vii) $x\text{ சைன்}^{-1}x+\sqrt{(1-x^2)}$.

(viii) $x\text{ தான்}^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

(ix) $-x^4\text{ கோசை }x+4x^3\text{ சைன் }x+12x^2\text{ கோசை }x$
$-24x\text{ சைன் }x-24\text{ கோசை }x$.

(x) $-e^{-x}(x^5+5x^4+20x^3+60x^2+120x+120)$.

(xi) $x\text{ தான் }x-\log\text{ சீக }x$.

(xii) $\frac{1}{2}(\text{அசைன் }x\text{ கோசை }x+\text{அகோசை }x\text{ சைன் }x)$.

(xiii) $\frac{1}{2}(\text{அகோசை }x\text{ சைன் }x-\text{அசைன் }x\text{ கோசை }x)$.

(xiv) $\frac{1}{2}x^2\{(\log x)^2-(\log x)+\frac{1}{2}\}$.

(xv) $(n\text{ சைன் }mx\text{ சைன் }nx+m\text{ கோசை }mx\text{ கோசை }nx)/(n^2-m^2)$.

(xvi) $(n\text{ கோசை }mx\text{ சைன் }nx-m\text{ சைன் }mx\text{ கோசை }nx)/(n^2-m^2)$

5.71. 1. $u^2/2g$. 2. $ut+\frac{1}{2}at^2+\frac{1}{6}bt^3$. 3. 2.
4. $a=35$, $b=16{\cdot}5$. 5. $\sqrt{(u^2+4as-2s^2)}$. 6. 84.
7. $a/\sqrt{b}$, $2a/b$. 8. a^2, $2a$.

5.8. 1. $-\frac{3}{2(3x-1)^2}$; $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\log(x-1)$; $\frac{1}{2}x^2-x+2\log(x+1)$.

2. $\log\frac{(x-2)^3}{(x-1)^2}$; $\frac{1}{4}\log\{(x+3)^5(x-1)^3\}$; $\frac{1}{10}\log\frac{(x+2)^6}{2x-1}$.

3. $\log(x^2+1)+\text{தான்}^{-1}x$; $x-2\text{தான்}^{-1}x$; $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$.

4. $2\sqrt{(x^2-1)}$; $\sqrt{(x^2+1)}+\text{அசைன்}^{-1}x$; $-2\sqrt{(1-x^2)}-\text{சைன்}^{-1}x$.

5. $\sqrt{(x^2-1)}+\text{அகோசை}^{-1}x$; $\text{சைன்}^{-1}x+\sqrt{(1-x^2)}$;
$\text{சைன்}^{-1}(1-x)$.

6. $\frac{1}{4}\log(2x^2+3x+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}$ தான் $^{-1}\frac{4x+3}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{2}\log\frac{(x+1)^4}{(2x+1)^3}$;

$\frac{1}{4}\log(4x^2+4x+3)+\frac{3}{\sqrt{2}}$ தான் $^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}$.

7. $\frac{2}{9}\sqrt{(9x^2+6x+2)}+\frac{1}{9}$ அசைன் $^{-1}(3x+1)$;

$\frac{3}{4}\sqrt{(4x^2+4x-1)}+\frac{5}{4}$ அகோசை $^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{2}}$;

$2\sqrt{(x^2-2x+2)}+$ அசைன் $^{-1}(x-1)$.

8. $\frac{1}{b}\log(a+b$ சைன் $x)$; $\frac{1}{5}$சீக^5x ; $\frac{1}{2}$(சைன் $^{-1}x)^2$.

9. $\frac{1}{9}\log\frac{x^3-1}{x^3+2}$; $\sqrt{(1+x^2)}+\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$;

$\frac{3}{28}(4x-3)(1+x)^{\frac{4}{3}}$

10. $\frac{1}{2}$ தான்$^2x-\log$ சீக x ; $\frac{1}{8}(3x-2$சைன் $2x+\frac{1}{4}$சைன் $4x)$;

$\frac{1}{4}$சைன்$^4x-\frac{1}{6}$சைன்^6x

11. $\frac{1}{ab}$ தான் $^{-1}\left(\frac{b}{a}\right.$தான் $\left.x\right)$; தான் x – கோதா x.

12. $\frac{1}{8}\{a^4$சைன்$^{1}\frac{x}{a}-x(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}\}$;

$\frac{1}{2}a^2$ சைன் $^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}$; $\frac{1}{15}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2a^2)$.

13. $\frac{1}{2(b-a)}\log(a$ கோசை^2x+b சைன்$^2x)$;

$\frac{ax}{b}-\frac{2\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}$ தான் $^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right.}\right.$ தான் $\left.\left.\frac{x}{2}\right)\right\}$;

14. $e^x(x^2-2x+2)$; $\frac{1}{9}x^3(3\log x-1)$.

15. x சீக ^{-1}x – அகோசை ^{-1}x; $\frac{1}{2}\{x^2$சீக $^{-1}x-\sqrt{(x^2-1)}\}$;

x தான் $x-\frac{1}{2}x^2-\log$ சீக x.

16. $\frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n+1}$; – கோசை $\log x$. 17. $\pi/2\mu$.

18. $(e^{ks}-1)/kv_\circ$. 20. $\frac{ft}{k}-\frac{f}{k^2}(1-e^{-kt})$.

6.14. 1. (i) $\frac{4}{3}$; (ii) $\frac{2}{3}a^3$; (iii) $8\frac{1}{2}$;

(iv) $\frac{(a+b)^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)a}$ (v) $\frac{3}{8}$; (vi) $51{\cdot}2$;

(vii) $\frac{1}{3}(e^3-1)$; (viii) $\frac{1}{2}\pi$; (ix) $\frac{1}{4}\pi$;

(x) $\log_e(1+\sqrt{2})$; (xi) $\frac{1}{4}\pi$; (xii) $\frac{2}{3}$.

2. $20\frac{1}{4}$. 3. 2. 4. 84·4. 5. $e^2\log(b/a)$

6.54. (i) $1/a$. (ii) $\frac{1}{6}\log_e 5={\cdot}2682$. (iii) $\frac{1}{8}\pi$.

(iv) $\frac{1}{4}\pi$. (v) $\frac{1}{4}\pi$. (vi) $\sqrt{2}-1$

(vii) $\log_e(3+2\sqrt{2})$. (viii) $\log_e\frac{4}{3}={\cdot}2877$.

(ix) $\frac{1}{2}\log_e\frac{8}{5}-\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}$ தான் $^{-1}\frac{1}{2}$. (x) $\pi/2ab(a+b)$.

(xi) $\frac{1}{4}\pi a^2$. (xii) $\sqrt{3}$. (xiii) $\frac{1}{2}\pi-1$.

(xiv) $\pi-2$. (xv) $\frac{1}{2}$.

6·61. (i) $\frac{16}{35}$. (ii) $\frac{3\pi}{16}$. (iii) $\frac{8}{15}$ (iv) $\frac{3\pi}{16}$

(v) $-\frac{8}{15}$. (vi) $\frac{16}{15}$. (vii) 0. (viii) 0.

(ix) $\frac{3\pi}{4}$. (x) 0. (xi) $\frac{4}{15}$ (xii) $\frac{\pi}{8}$

(xiii) $\frac{2}{5}$ (xiv) 0. (xv) $\frac{\pi}{16}$

6.8. 1. (i) $\log_e(1+\sqrt{2})$; (ii) $\frac{1}{2}\pi$; (iii) $2\sqrt{a}$;

(iv) $\pi/2ab$; (v) πa ; (vi) $\frac{1}{4}\pi$;

(vii) π ; (viii) $\pi/2(a+b)$; (ix) $\frac{1}{2}\log_e 2$; $={\cdot}3466$;

(x) $\log_e(1+\sqrt{2})$; (xi) $\pi/2ab$; (xii) $b/(a^2+b^2)$;

(xiii) π ; (xiv) $\frac{1}{8}\pi(a-b)^2$; (xv) $\frac{1}{2}\pi(b-a)$;

(xvi) $-\frac{1}{4}\pi$; (xvii) $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\log_e 2$; (xviii) $\alpha/$சைன் α;

(xix) $-\frac{1}{9}$; (xx) $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\log_e 2$.

2. (i) $\frac{2}{3}$; (ii) 1 ; (iii) $\frac{1}{2}\pi$; (iv) $b(e^{\frac{a\pi}{b}}+1)/(a^2+b^2)$.

3. $\frac{1}{6}$.

4. உயர்வு $2/3\sqrt{3}$, இழிவு $-2/3\sqrt{3}$, கூறப்பட்ட எல்லைகளுக்கு இடையில் x – அச்சிற்கு மேலுள்ள பரப்பிற்கும் கீழுள்ள பரப்பிற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம்.

5. e^{-1} ; (i) $1-2e^{-1}$; (ii) $2e^{-1}$. 6. $4/15$.

7. அவ்வளைகோட்டிற்கும் அச்சுக்களுக்கும் இடையிலுள்ள பரப்பும், x அச்சிற்கு மேலுங் கீழும் எல்லையுற்றபரப்புக்களின் வித்தியாசமும்; அவையாவன 17/12 உம் 4/3 உம்.

8. 1/4, 1/4.

9. $x=0$, $y=-2$; $y=0$, $x=1$; $\frac{1}{2}(\pi-1)$

10. $x=\frac{1}{2}$ என்பதிலே தொடும் ; $x=-3$ என்பதிலே வெட்டும் ; $50\frac{1}{48}$.

11. $x=-1$, $x=2$ என்பனவற்றிலே தொடும் ; $8\frac{1}{10}$. 12. 10.

7.22 1. 9π. 2. $16a^2/3$. 3. $8a^2/3$.
4. $4-\frac{1}{2}\pi$. 5. $(\pi-2)/4$ உம் $(3\pi+2)/4$ உம்.
6. $25\pi/4\sqrt{2}$. 7. $3\pi/8$. 8. $147\pi/4$.

7.313 1. $\pi^2a^2/2b$. 3. $\pi a^3(10-3\pi)/6$. 4. $6\pi a^3/7$.
5. $81\pi/10$. 6. $2\pi a^3$ {சைன் $\alpha(1-\frac{1}{3}$ சைன் $^2\alpha)-\alpha$ கோசை α}.
7. $808\pi/5$. 8. $\frac{1}{2}\pi c^3(e-4+5e^{-1})$.

7.442 1. (i) $\frac{1}{2}\pi b, \frac{1}{8}\pi a$; (ii) $1, -1{\cdot}6$;
(iii) $\frac{3}{5}, -\frac{2}{35}$; (iv) $\frac{3}{16}\pi, 0$;
(v) உச்சியிலிருந்து உயரத்தின் $\frac{3}{4}$.
(vi) மையத்திலிருந்து $\frac{3}{4}(a\pm c)^2/(2a\pm c)$.
(vii) அச்சை $3a^2+2ab+b^2 : a^2+2ab+3b^2$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும்.
(viii) அச்சை 51 : 155 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும்.

2. பின்வரும் விடைகளில் M என்பது பொருளினது திணிவைக் குறிக்கின்றது.
(i) a என்பது சதுரத்தின் பக்கமாயின், $\frac{1}{3}Ma^2$.
(ii) a என்பது கோலினது நீளமாயின், $\frac{1}{2}Ma^2$.
(iii) h என்பது பக்கத்திலிருந்து எதிருச்சியினது தூரமாயின், $\frac{1}{6}Mh^2$
(iv) a என்பது ஆரையாயின், $\frac{1}{4}Ma^2$.
(v) a என்பது அடியின் ஆரையாயின், $\frac{3}{10}Ma^2$.
(vi) $\frac{1}{3}Mhk$; (vii) $\frac{1}{4}Mb^2$, $\frac{1}{4}Ma^2$.

7.62 1. (i) $\frac{4}{3}\pi^3a^2$; (ii) $a^2(e^{4k\pi}-1)/4k$.
2. (i) $\frac{1}{8}\pi a^2$; (ii) $\pi a^2/4n$. 4. $\frac{3}{2}\pi$.
5. $\bar{x}=128\sqrt{2}\,a/105\pi$; $32\sqrt{2}\pi a^3/105$.

6. $\bar{x}=b(4a^2+b^2)/2(2a^2+b^2)$.
7. $\bar{x}=-5a/6$; $\bar{y}=16a/9\pi$; $\frac{8}{3}\pi a^3$.
9. $\frac{1}{6}\pi(3\pi-4)a^3$ 10. $\frac{1}{4}\pi b^2(2\sqrt{3}a-b)$.
12. $a^2(2\pi+3\sqrt{3})/48$; $a^2(4\pi-3\sqrt{3})/48$.

8.51. 1. (i) $-b^2x/a^2y$; (ii) $-(x^2-ay)/(y^2-ax)$;
(iii) $-(x-a)/(y-b)$; (iv) $-\sqrt{(by/ax)}$;
(v) $-x(x^3-2ay^2)/y(y^3-2ax^2)$;
(vi) $a(a^2-2x^2-2y^2)/y(a^2+2x^2+2y^2)$.

8.63. 5. ·157 ; ·0091. 6. $\pm$·1018.
7. ·095. 9. ·4823 அடி ; ·4726 அடி.

8.72. 4. ·84 10. $\frac{1}{100\sqrt{3}}$ ஆரையனிறக்கம்.

9.1. 1. $2ax+b$; $\frac{1}{3}ax^3+bx^2+cx$. 2. $3(x-a)^2$, $\frac{1}{4}(x-a)^4$.
3. $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$; $\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+6x+\frac{4}{x}-\frac{1}{3x^3}$.
4. $3(2x+\frac{3}{x^2})^2(2-\frac{6}{x^3})$; $2x^4+36x-\frac{27}{x^2}-\frac{27}{5x^5}$.
5. $6x^2-6x-36$; $\frac{1}{2}x^4-x^3-18x^2+10x$.
6. $16x^3+6x$; $\frac{4}{5}x^5+x^3+x$.
7. $2(x-2)(x+1)(2x-1)$; $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+4x$.
8. $(x-1)(x-3)^2(5x-9)$; $\frac{1}{6}x^6-\frac{11}{5}x^5+\frac{23}{2}x^4-30x^3+\frac{81}{2}x^2-27x$.
9. $4x^3-9x^2+8$; $\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+4x^2-10x$.
10. $-\frac{6}{x^4}+\frac{6}{x^3}$; $-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+x$.
11. $-\frac{3a}{x^4}-\frac{2b}{x^3}$; $-\frac{a}{2x^2}-\frac{b}{x}+cx$.
12. $nax^{n-1}-\frac{nc}{x^{n+1}}$; $\frac{ax^{n+1}}{n+1}+bx-\frac{c}{(n-1)x^{n-1}}$.
13. $-\frac{1}{2x^3}+8x$; $-\frac{1}{4x}+x+\frac{4}{3}x^3$.
14. $\frac{4}{x}(x^4-\frac{4}{x^4})$; $\frac{1}{5}x^5+4x-\frac{4}{3x^3}$

15. $6x+\frac{3}{4x^4}-\frac{5}{x^6}$; $x^3+\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{4x^4}$.

16. $3(x-2)^2$; $\frac{1}{4}(x-2)^4$.

17. $\frac{-n}{(x-a)^{n+1}}$; $\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$.

18. $(x^2-1)(5x^2-1)$; $\frac{1}{6}(x^2-1)^3$.

19. $8x^7-10x^4+2x$; $\frac{1}{9}(x^3-1)^3$.

20. $11x^{10}-14x^6+3x^2$; $\frac{1}{12}(x^4-1)^3$.

9.2. 1. $6x'-5$, $(2, 3)$, $y=7x-11$.

2. $3x^2-4x+1$, உயர்வு $x=\frac{1}{3}$, இழிவு $x=1$.

3 $8, (-\frac{4}{3}, -\frac{26}{27})$. 4. $y=10x+8, \left(\frac{7}{15}, \frac{3226}{675}\right)$.

5. $15x'^2-12x'+5$. 6. 3,0,3,.

8. உயர்வு $x=-2$, இழிவு $x=\frac{1}{3}$

9. $2y+7x=5$; $(1,-2), (\frac{1}{3}, \frac{31}{27})$.

10. $(1,0)$ வளைவுமாற்றப்புள்ளி, $(2,-1)$ இழிவு, $-24, \frac{64}{9}$.

12. $4x+y+8=0$; உயர்வு $\frac{8}{9}\sqrt{3}$, இழிவு $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$.

13. இறக்கம், $-2<x<3$; ஏற்றம் $-\infty<x<-2$ உம் $3<x$ உம்.

14. $-3, 1$; $-144, 16$.

15. $2(2x^3+3x^2-11x-6)$, உயர்வு $\frac{625}{16}$, இழிவு 0, 0.

16. $4x^3-6x^2-8$; இழிவு $(2,0)$ இல்.

17. உயர்வு $(2,\frac{1}{4})$, இழிவு $(1,0)$, $(3,0)$; கூடுதல் $1<x<2$ உம் $3<x$ உம், குறைதல் $x<1$ உம் $2<x<3$ உம்.

18. $a, b, c, d=3, 0, \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$; இழிவு $(0, 3)$, உயர்வு $(2, 9)$.

19. $a, b, c=6, -3, \frac{1}{2}$. 20. $a, b, c, d=\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{9}$.

9.3. 2. (i) 2, 9; (ii) 5·5; −73·5; ±42. 3. −12, 0.

4. $4-2t$; $2t^2-\frac{1}{3}t^3$.

5. $72-6t-6t^2$; $-6-12t$; 135 அடி, 5·3.

6. $27-3t^2$; $-6t$; 54 அடி; 54.

7. $4(t-t^3)$; $4(1-3t^2)$.

8. 12·25 அடி செக்கன்; 34·5 அடி; 10·5 செக்கன்; $114\frac{1}{3}$ அடி.

9. 18 அடி; 9 செக்கன்; 13·5 அடி செக்கன்.

10. $5-6t$; $\frac{5}{2}t^2-t^3$; $2\frac{1}{12}$; $2\frac{17}{54}$ அடி.

11. $9-12t+3t^2$; $-12+6t$. 12. 63 அடி செக்கன்.

13. $18-6t$; $9t^2-t^3$; 27 அடி செக்கன்; 6 செக்கன், 108 அடி 9 செக்கன்; 81 அடி செக்கன்.

14. 33, 13·5; $20\frac{1}{6}$ அடி செக்கன். 15. $a, b, c=6, 6, 2$.

16. $6t-2t^2$; $3t^2-\frac{2}{3}t^3$; 9 அடி; $13\frac{1}{2}$ அடி செக்கன்.

17. $\frac{9}{2}+4t-\frac{1}{2}t^2$; $\frac{9t}{2}+2t^2-\frac{1}{6}t^3$; $12\frac{1}{2}$ அடி செக்கன்.

18. $2t-3t^2$; $48\frac{4}{27}$ அடி செக்கன்; $149\frac{1}{3}$ அடி.

19. 648 அடி. 20. $a=b=9$.

9.4. 1. (i) $1\frac{1}{3}$; (ii) $1\frac{1}{8}$; (iii) $57\frac{1}{6}$;
(iv) $2\frac{17}{54}$; (v) $\frac{1}{6}$; (vi) $8\frac{8}{15}$.

2. 36. 3. $4, 0, -2\frac{1}{4}$. 7. $\frac{9}{20}$.

8. $0; 6\frac{1}{4}, 4, 4, 6\frac{1}{4}$. 9. $y=a+2bx+3cx^2$.

10. $10\frac{2}{3}$; $2\sqrt{3}$. 12. $-1, 3$; $4\frac{4}{15}$.

13. $104\frac{1}{6}$. 14. $179\frac{1}{5}$, $6\frac{2}{5}$. 16. $\frac{1}{6}$.

17. $1\frac{1}{3}$. 19. $25\frac{23}{81}$. 20. $7\frac{7}{48}$.

9.5. 2. $\frac{2}{15}\pi a^3$. 3. $\frac{1024}{105}\pi$. 4. $\frac{4}{3}\pi$.

5. $\pi h^4/4a$. 7. $\frac{1}{6}\pi$. 12. $\frac{64}{105}\pi$.

13. $\frac{64}{3}\pi$. 15. (i) 49π; (ii) 14π. 16. $\frac{16}{5}\pi a^3$.

17. $\frac{1}{3}\pi(2a^3-3a^2c+c^3)$. 18. $\frac{4}{3}\pi(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}$

20. $\pi a^2(a+h)^2/3h$.

96. 1. (i) $(\frac{4}{3}, 1)$, (ii) $(\frac{62}{27}, \frac{259}{54})$. 2. $(\frac{7}{9}, \frac{7}{9})$. 3. $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

4 $(\frac{2}{5}a, \frac{4}{7}a)$. 5. $(\frac{5}{7}a, \frac{5}{16}a)$.

6. $\left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{c^4}{5a^3b^3} \cdot \frac{a^5-b^5}{a^2-b^2}\right)$. 8. $(\frac{6}{5}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{5}, \frac{3}{2})$.

9. $(0, \frac{2}{5})$. 10. $27a/16$.

11. $9a/5$. 12. $\frac{3}{4}(a\pm c)^2/(2a\pm c)$

16. $3a/5$.

9.7. **1.** 4, 6. **2.** 4. **3.** ± 7. **5.** 1.

10. $\frac{1}{2}x$, $x(l-a)/(2l+a)$. **13.** $\mp 2\cdot 45$. **17.** x, $\frac{2}{3}x$.

19. $4\cdot 5$ **20.** $15x/4$.