G.C.E. [A/L]

12 years
past questions with answers

PURE MATHS

ஜீ.சீ.ஈ [உயர்தரம்]

12 வருட
கடந்த கால வினாக்களும் விடைகளும்

தூய கணிதம்

முக்கிய அறிவித்தல்

சாவகச்சேரி பிரதேச சபை
பொது நூலகம்

நீங்கள் எடுத்துச் செல்லும் புத்தகத்தில் கீறுதல், வெட்டுதல் கிழித்தல், அழித்தல் அழுக்குப்படியவிடல், எழுதுதல், கீறிடுதல். பக்கங்களை மடித்தல்மற்றும் ஊறுபாடுகளைச் செய்ய வேண்டாமெனக் கேட்டுக் கொள்கிறோம். புத்தகங்களை நீங்கள் எடுக்கும் போது இத்தகைய குறைபாடுகளைக் கண்டால் நூலகப் பொறுப்பாளரிற்கு உடன் தெரிவிக்கவும் அல்லாவிடில் நீங்கள் எடுத்துச் செல்லும் புத்தகம் நல்ல நிலையில் இருந்ததெனக் கருதப்படுவதுடன் ஊறுபாடுகளிற்கு நூலகப் பொறுப்பாளரினால் விதிக்கப்படும் தண்டத்தையும் நீங்கள் ஏற்க வேண்டிய நிர்ப்பந்தமும் ஏற்படும்.

குறிப்பிட்ட நாளுக்குப் பிந்தும் ஒவ்வொரு நாளிற்கும் 50 சத வீதம் குற்றப் பணம் அறவிடப்படும். பொது நூலகத்தின் சிறப்பான சேவைக்காகவும், வாசகர்களின் நலனிற்காகவும் தங்களின் ஒத்துழைப்பு மிகவும் அவசியமாகத் தேவைபடுகின்றது.

விசேட ஆணையாளர்,
சாவகச்சேரி பிரதேச சபை

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 1. க.பொ.த.(உயர்தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ற், 1992.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

01. (i) $\frac{4}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\cdots\cdots+\frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. மேலேயுள்ள தொடர் ஒருங்குமெனக் காட்டி, முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ii) எந்த ஒரு நேர் நிறைவெண் n உம் $5m, 5m\pm1, 5m\pm2$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்து உரைக்கப்படலாமெனக் காட்டுக; இங்கு m ஒரு நிறைவெண். இதிலிருந்து, n^2 என்னும் வடிவத்திலுள்ள எந்த ஒரு நிறைவெண்ணும் 5 இனால் வகுக்கப்படும் போது மீதியானது 0, 1, 4 ஆகியவற்றுள் ஒன்றாகும் என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

(i) $U_r \equiv \frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$

$\equiv \frac{-1}{(r+1)}+\frac{5}{(r+2)}+\frac{-4}{(r+3)}$

(Cover-up method)

$\equiv \left(\frac{-1}{r+1}-\frac{-1}{r+2}\right)+\left(\frac{4}{r+2}-\frac{4}{r+3}\right)$

$\equiv \left(\frac{-1}{r+1}+\frac{4}{r+2}\right)-\left(\frac{-1}{r+2}+\frac{4}{r+3}\right)$

$\equiv f(r) - f(r+1)$

$U_1 = f(1) - f(2)$

$U_2 = f(2) - f(3)$

$\vdots$

$U_{(n-1)} = f(n-1) - f(n)$

$U_n = f(n) - f(n+1)$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$

$= \frac{5}{6} - \left(\frac{-1}{n+2}+\frac{4}{n+3}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n} U_r\right) \simeq \frac{5}{6} - \frac{3}{n}$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} = \frac{5}{6}$, i.e. ஒரு முடிவுள்ள பெறுமானம். ∴ தொடர் ஒருங்கும்

(ii) $n = 5q + r$ (எண் கொள்கை)

இங்கு $n \in \mathbb{N}$ $\forall\, r = 0,1,2,3,4$

$r = 0,\ n = 5q$

$r = 1,\ n = 5q + 1$

$r = 2,\ n = 5q + 2$

$r = 3,\ n = 5q + 3 = 5(q+1) - 2$

$r = 4,\ n = 5q + 4 = 5(q+1) - 1$

∴ எந்த ஒரு நிறைவெண் n உம் $5m, 5m\pm1, 5m\pm2$ என்னும் வடிவில் உணர்த்தப்படலாம்.

$n \to 5m \quad 5m\pm1 \quad 5m\pm2$

$\therefore n^2 \to 5m \quad 5m+1 \quad 5m+4$

∴ 5 இனால் வகுக்கப்பட மீதி

0 1 4

02. (a) $x, y \neq 0$ ஆயிருக்க x, y, λ, μ என்னும் மெய்க் கணியங்கள் $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$, $x + y = \lambda$, $\frac{y}{x} = \mu$ என்னும் தொடர்புகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. λ, μ ஆகியவற்றுக்கிடையே ஒரு தொடர்பைப் பெற்று, μ மெய்யாயிருப்பதற்கான λ வினுடைய பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க. இதிலிருந்து $\lambda = 3$ ஆக இருக்கும்போது $\frac{y}{x}$ ஐத் துணிக.

(b) $x, a, b > 0$ ஆகவும் $a > b$ ஆகவும் $x^2 > ab$ ஆகவும் இருக்கும் போது $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} > 0$ எனக் காட்டுக.

(c) $|2x-1| < 3x+5$ ஆக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

விடை

(a) $\frac{y}{x} = \mu \Rightarrow y = x\mu \quad (x \neq 0)$; $x + y = \lambda$; $x(1+\mu) = \lambda$

$\Rightarrow x = \frac{\lambda}{1+\mu}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow \frac{1+\mu}{\lambda} + \frac{1+\mu}{\lambda\mu} = 2$

$\mu^2 - 2(\lambda - 1)\mu + 1 = 0$ ———————— eq^x A

μ இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $\Delta \geq 0$

$4\{(\lambda-1)^2 - 1\} \geq 0$

$\lambda(\lambda - 2) \geq 0 \quad \therefore 0 \geq \lambda \geq 2$

$-$	$-$	$+$	$\lambda - 2$
$-$	$+$	$+$	λ
$\oplus$ 0	$\ominus$ 2	$\oplus$	

$\lambda = 3$ ஆக, eq^x A இலிருந்து $\mu^2 - 4\mu + 1 = 0$

$$\therefore \mu = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = \frac{y}{x}$$

(b) $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$

இருபக்கமும் வர்க்கிக்க,

$\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2}$

$(x+a)^2(x^2+b^2) - (x+b)^2(x^2+a^2) > 0$

எனக் காட்டப்பட்டால் போதுமானது.

$= 2ax(x^2+b^2) - 2bx(x^2+a^2)$

$= 2x^3(a-b) - 2abx(a-b)$

$= 2x(a-b)(x^2-ab) \quad (\because x > 0;\ a > b;\ x^2 > ab)$

$\quad\ \ >0 \quad >0 \quad >0$

(c) $|2x-1| < 3x+5$

வகை I $x > \frac{1}{2}$

$2x - 1 < 3x + 5$

$-6 < x$

$-6 \qquad \frac{1}{2} \qquad x$

வகை II $x < \frac{1}{2}$

$1 - 2x < 3x + 5$

$-\frac{4}{5} < x$

$-\frac{4}{5} \qquad \frac{1}{2} \qquad x$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $x > \frac{-4}{5}$

03.(i) $t = x + \frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க.

(ii) $E = x^4-4x^3+9x^2-10x+7$ ஆக இருக்கட்டும். E என்பது y^2+y+a என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாமெனக் காட்டுக. இங்கு a ஒரு மாறிலி ஆகவும், y ஆனது x^2+bx+c என்னும் வடிவத்திலும் உள்ளன. இங்கு b, c ஆகியன மாறிலிகளாகும். இதிலிருந்து x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $E \geq 3$ எனக் காட்டுக.

(iii)
$$\frac{1}{(x-2)(x-1)^3} = \frac{k}{(x-2)} + \frac{f(x)}{(x-1)^3}$$
ஆகுமாறு k என்னும் ஒரு மாறிலியையும் x இன் ஒரு சார்பு f ஐயும் காண்க. $f(x)$ ஐ $(x-1)$ இல் ஒரு பல்லுறுப்பியாக எடுத்துரைக்க. இதிலிருந்து $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}$ இன் பகுதிப் பின்னங்களைக் காண்க.

விடை

(i) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$, x^2 ஆல் பிரிக்க,

$(x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})+8=0$; $x+\frac{1}{x}=t$; $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

$(t^2-2)-5t+8=0 \Rightarrow t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-2)(t-3)=0$

$\therefore x+\frac{1}{x}=2$; $x^2-2x+1=0$ | $x+\frac{1}{x}=3$; $x^2-3x+1=0$ | $t=2$ or 3

$(x-1)^2=0 \therefore x=1$ | $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $x^4-4x^3+9x^2-10x+7 \equiv (x^2+bx+c)^2+(x^2+bx+c)+a$

$x^3/ \quad -4=2b$; $b=-2$

$x^2/ \quad 9=b^2+2c+1$; $c=2$

எண்/ $7=c^2+c+a$; $a=1$

$E=(x^2-2x+2)^2+(x^2-2x+2)+1$

$= y^2+y+1=(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

$=(x^2-2x+2+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\{\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+\frac{3}{2}\}^2+\frac{3}{4}$

$E \geq \frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$

(iii) $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{k}{(x-2)}+\frac{f(x)}{(x-1)^3}$

$1=k(x-1)^3+(x-2)f(x) \quad x=2$ ஆக $1=k$

$f(x)=\frac{1-(x-1)^3}{(x-2)}$; $\frac{1}{(x-2)(x-1)^3}=\frac{1}{x-2}-\frac{(x-1)^3-1}{(x-2)(x-1)^3}$

$=\frac{1}{x-2}-\frac{\cancel{(x-2)}\{(x-1)^2+(x-1)+1\}}{\cancel{(x-2)}(x-1)^3}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}$

04. நிறைவெண் சுட்டி ஒன்றுக்கு டி மோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக. $z \neq 1$ ஆயின்

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} \equiv \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

எனக் காட்டுக.

$z \neq 0$ ஆயின், மேலேயுள்ள சர்வசமன்பாட்டின் வலக்கைப் பக்கம் $\dfrac{z^{-1}-(n+1)z^{n-1}+nz^n}{z^{-1}+z-2}$ என எழுதப்படலாமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $z =$ கோசை $\theta + i$ சைன் θ என எழுதுவதன் மூலமும் டி மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும்,

$$1 + \sum_{r=2}^{n} r \text{ கோசை } (r-1)\theta = \frac{(n+1)\text{ கோசை }(n-1)\theta - n\text{ கோசை } n\theta - \text{கோசை } \theta}{2(1-\text{கோசை } \theta)}$$

எனக் காட்டுக; இங்கே θ என்பது 2π இன் ஒரு நிறை-வெண் மடங்கு அன்று.

விடை

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ஆகும்.

$$S_n = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$
$$zS_n = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$$

$$(1-z)S_n = (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) - nz^n$$
$$= \frac{1-z^n}{1-z} - nz^n$$

$$S_n = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{1-2z+z^2} = \frac{1/z - (n+1)z^{n-1} + nz^n}{z^{-1}+z-2}$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின்.

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\mathrm{Re}(z^n) = \cos n\theta$$

$$\mathrm{Re}(1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}) = 1 + 2\cos\theta + 3\cos 2\theta + \dots + n\cos(n-1)\theta$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{n} r\cos(r-1)\theta \quad \text{— (A)}$$

$$z^{-1}+z-2 = 2(\cos\theta-1)$$

$$Re\left(\frac{z^{-1}-(n+1)z^{n-1}+nz^{n}}{z^{-1}+z-2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(\cos\theta-1)}\,Re\left(z^{-1}-(n+1)z^{n-1}+nz^{n}\right)$$

$$=\frac{\cos\theta-(n+1)\cos(n-1)\theta+n\cos n\theta}{2(\cos\theta-1)} \quad \text{—— (B)}$$

$$\text{(A)}\ \&\ \text{(B)} \Rightarrow 1+\sum_{r=2}^{n} r\cos(r-1)\theta = \frac{\cos\theta-(n+1)\cos(n-1)\theta+n\cos n\theta}{2(\cos\theta-1)}$$

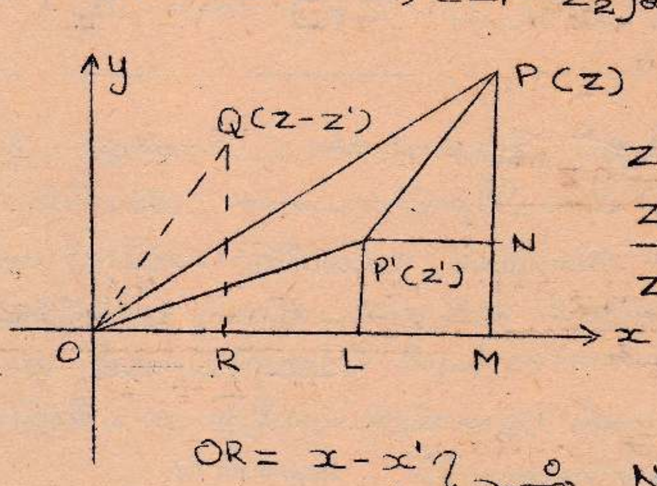
ஆகும்.

---

05. ஆகண் வரிப்படத்திலே z, z' என்பன முறையே P, P' என்பனவற்றாலும் எண் $z-z'$ ஆனது Q இனாலும் வகைகுறிக்கப்படின். OQ ஆனது $P'P$ யிற்குச் சமமும் சமாந்தரமுமாகுமெனக் காட்டுக.

z_1, z_2, z_3 என்னும் எண்கள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் A, B, C என்பவற்றால் முறையே வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. இங்கு B, C ஆகியவற்றில் உள்ள கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{\pi-\alpha}{2}$ ஆகும். $(z_3-z_2)^2 = 4(z_3-z_1)(z_1-z_2)$ சைன்$^2\frac{\alpha}{2}$ ஆகுமெனநிறுவுக.

<u>விடை</u>



$z = x + jy \quad P(x,y)$

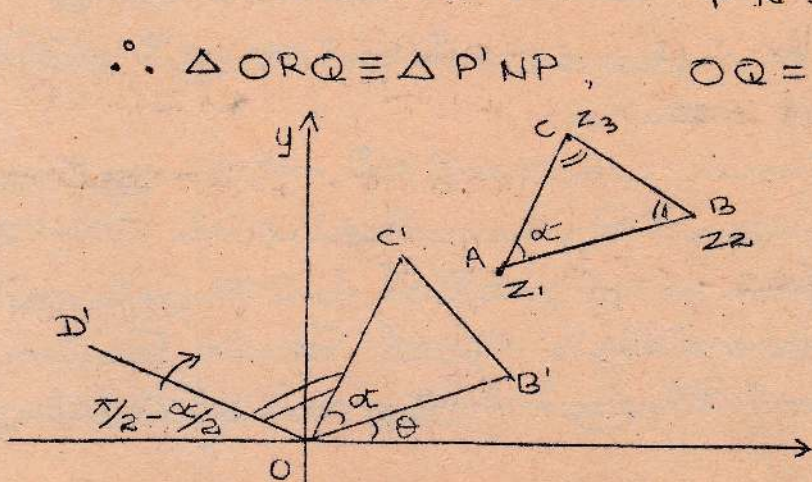
$z' = x' + jy' \quad P'(x',y')$

$z-z' = (x-x') + j(y-y')$

$Q \equiv (x-x', y-y')$

$\left.\begin{array}{l} OR = x-x' \\ RQ = y-y' \end{array}\right\}$ ஆனால் $\begin{array}{l} NP = y-y' \\ P'N = x-x' \end{array}$

$\therefore \Delta ORQ \equiv \Delta P'NP, \quad OQ = \parallel P'P$



B', C', D' என்பன z_2-z_1, z_3-z_1, z_3-z_2 ஐக் குறிக்கும் எனக.

$OB' = \parallel AB \;,\quad OC' = \parallel AC \;,\quad OD' = \parallel BC$

$\arg(z_2 - z_1) = \theta$ எனின் $\arg(z_3 - z_1) = \alpha + \theta$

$\arg(z_3 - z_2) = X\hat{O}D' = \theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$|z_2 - z_1| = OB' = AB \;;\; |z_3 - z_1| = AC = AB$

$$|z_3 - z_2| = OD' = BC$$

$\therefore z_3 - z_2 = BC\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} + \theta\right)\right\}$

$z_3 - z_1 = AB\left\{\cos(\alpha + \theta) + i\sin(\alpha + \theta)\right\}$

$z_2 - z_1 = AB\left\{\cos\theta + i\sin\theta\right\}$

$\therefore (z_3 - z_1)(z_2 - z_1) = AB^2\left\{\cos(\alpha + 2\theta) + i\sin(\alpha + 2\theta)\right\}$ ஆகும்

$(z_3 - z_2)^2 = BC^2\left\{\cos(\pi + \alpha + 2\theta) + i\sin(\pi + \alpha + 2\theta)\right\}$

$$= -BC^2\left\{\cos(\alpha + 2\theta) + i\sin(\alpha + 2\theta)\right\}$$

$(z_3 - z_2)^2 = \frac{-BC^2}{AB^2}(z_3 - z_1)(z_2 - z_1) = \frac{BC^2}{AB^2}(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)$

$BC = 2(AB)\sin\frac{\alpha}{2}$ ஆதலால்

$(z_3 - z_2)^2 = 4(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}$

---

06. வெவ்வேறு புத்தகங்கள் (நான்கு பச்சை நிறமுடையன, நான்கு நீல நிறமுடையன, இரண்டு சிவப்பு நிறமுடையன) தட்டில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளன. பின் வரும் சந்தர்ப்பங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் எல்லாக் கணிப்புப் படிகளையும் தெளிவாகக் காட்டி, புத்தகங்களைத் தட்டில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கும் வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) நிறமும் ஒழுங்கும் புறக்கணிக்கப்படும் போது.

(ii) ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்க வைக்கப்படும் போது.

(iii) அதே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும் வைக்கப்படும் போது.

(iv) பச்சை நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும் ஆனால் சிவப்பு நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் பிரிந்து வைக்கப்படும்போது.

விடை

(i) $10! = 3628800$

(ii) 3 நிறங்கள் வரிசை மாற்றத்தில் இருக்க $3!$

பச்சை (4) புத்தகங்கள் வரிமாற்றத்தில் இருக்க $4!$
நீலம் (4) " " " " $4!$
சிவப்பு (2) " " " " $2!$

∴ மொத்த வரிசைமாற்றங்கள் $3! \times 4! \times 4! \times 2!$

(iii) 3 நிறங்களின் வரிசை மாற்றம் $= 3!$
ஒரே நிறமுடைய புத்தகங்கள் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும் வைக்கப்படும் போது வழிகள் $= 1$

∴ மொத்த வரிசை மாற்றங்கள் $3! \times 1 \times 1 \times 1 = 6$

(iv) பச்சை நிறம் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும் வரிசை மாற்றம் $7!$
பச்சை நிறம் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும்
சிவப்பு " " " " " "
அமைய $2 \times 6!$

∴ பச்சை நிறம் எப்போதும் ஒருமிக்கவும் ஒரே ஒழுங்கிலும் சிவப்பு நிறம் " பிரிந்தும் இருக்கும் வழிகள்
$= 7! - 2 \times 6! = 3600$.

---

07. வழக்கமான குறியீட்டுடன்

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \dots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \dots + x^n$$

எனக் நிறுவுக; இங்கு n ஒரு நேர் நிறை எண்.

$\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ இன் விரியில் x இன் குணகத்தைக் காண்க.

$(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n$ இன் இருபக்கங்களையும் விரித்து,

$$C_0C_r - C_1C_{r-1} + C_2C_{r-2} + \dots + (-1)^r C_rC_0 = 0, \text{ r ஒற்றையெனில்}$$
$$= (-1)^{r/2} C_{\frac{r}{2}}, \text{ r இரட்டையெனின்}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n$$

விடை

$$(a+x)^n = \overbrace{(a+x)(a+x)\ldots\ldots(a+x)}^{n \text{ times}}$$

இதன் விரிப்பில் $a^{n-r}x^r$ எனும் உறுப்பினைக் கருதுக. இவ்வுறுப்பானது n அடைப்புக்களிலிருந்து r அடைப்புக்களில் x ஐயும் மிகுதி r அடைப்புக்களில் a ஐயும் பெருக்குவதால் பெறப்படும்.

n அடைப்புக்களிலிருந்து r அடைப்புக்கள் தெரிவு செய்யப்படுவதற்கான வழிகள் ${}^nC_r$ $\quad 0 \le r \le n$

$\therefore$ $a^{n-r}x^r$ இன் குணகம் ${}^nC_r$ $\quad \therefore (a+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r a^{n-r}x^r$

$$= {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots {}^nC_n x^n$$

இங்கு

${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ $\quad \therefore (a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + \cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r \cdots x^n$

$(\because {}^nC_0 = {}^nC_n = 1)$

x இலுள்ள உறுப்பு u_{r+1} எனக்

$$u_{r+1} = {}^{12}C_r (2x^2)^{12-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^{12}C_r(-1)^r 2^{12-r}x^{24-3r}$$

இங்கே $24-3r = 1$, $3r = 23$, $r \neq 23/3$ ($\because$ r ஒரு நிறை எண்)

$\therefore$ x இன் குணகம் பூச்சியம்.

$(1-x)^n = C_0 - C_1x + C_2x^2 - \cdots + (-1)^rC_rx^r + \cdots (-1)^nC_nx^n$

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_rx^r + \cdots C_nx^n$

$(1-x^2)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகம் $= C_0C_r - C_1C_{r-1} + C_2C_{r-2}$

$\cdots (-1)^rC_rC_0 \neq$

$= (-1)^{r/2}\, C_{r/2}$

r ஒற்றை எனின் $r/2$ ஒரு பின்னமாக முடியாது.

$$\therefore C_0C_r - C_1C_{r-1} + C_2C_{r-2} - \cdots (-1)^rC_rC_0 = 0$$

---

08. (i) f என்பது x இன் வகையிடத்தக்க ஒரு சார்பாகவும் $f(x) > 0$ ஆகவும் இருக்க, x குறித்து $\sqrt{f(x)}$ இன் பெறுதியை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து பெறுக.

(ii) x குறித்துத் தான்^{-1}x இன் பெறுதியைக் காண்க
x = தான் θ என எடுத்தும் x குறித்து தான்^{-1}x இன் பெறுதியைப் பயன்படுத்தியும்
தான்$^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, சைன்$^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ என்பவற்றின் பெறுதி

சைன்$^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ஐக் குறித்து தான்$^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$இன் பெறுதியை உய்த்தறிக.

(iii) $y = \{$சைன்$^{-1}x\}^2$ எனின், $(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$ எனக் காட்டுக.
$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

(i) $y=\sqrt{f(x)}$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}} \quad \text{(உடன்புணரியால் பெருக்கல்)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

(ii) $y = \tan^{-1}x, \ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \ ; \ x = \tan y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1+\tan^2 y = 1+x^2 \ ; \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1+x^2}$$

$y_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, $x = \tan\theta$ என்க ; $y_1 = \tan^{-1}(\tan 2\theta)$
$= n\pi + 2\theta = n\pi + 2\tan^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

$y_2' = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ என்க $\quad x = \tan\theta$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = n\pi + 2\theta = n\pi + 2\tan^{-1}x$

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dx}{dy_2} = \frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dy_2}{dx}} = \frac{2}{(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} = 1$$

(iii) $y = (\sin^{-1}x)^2 \ ; \ \frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(\sin^{-1}x)^2 = 4y \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x$

$2(1-x^2)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) = 4\frac{dy}{dx}$ வகையிடுகையில்

காரணம் $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியமன்று $\therefore (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$

09 (a) $a > 0$ எனின் $\frac{d}{dx}(a^x)$ ஐக் கண்டு $\int_0^c \frac{a^x}{a^x+1}dx$ ஐப் பெறுமானம் கணிக்க. இங்கு c ஒரு மாறிலி.

$0 \le c \le \frac{\pi}{2}$ ஆகவிருக்க $I = \int_{-c}^{c} \frac{\text{கோசை}\,x}{1+a^x}dx$, $J = \int_{-c}^{c} \frac{a^x\,\text{கோசை}\,x}{1+a^x}dx$ எனின்

(i) $t = -x$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தியோ, வேறுவிதமாகவோ $I = J$ எனக் காட்டுக.

(ii) $I + J$ ஐயக் காண்க. இதிலிருந்து, $c = \frac{\pi}{6}$ ஆக இருக்கும் போது J இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2}(2-x)^{3/2}}$ ஐப் பெறுமானம் கணிக்க.

விடை

(a) $a^x = e^{x\ln a}$; $\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d(e^{x\ln a})}{dx} = \ln a . e^{x\ln a} = a^x \ln a$

$$\int_0^c \frac{a^x}{a^x+1}dx = \frac{1}{\ln a}\int_0^c \frac{a^x \ln a}{1+a^x}dx = \frac{1}{\ln a}\left\{\ln(a^x+1)\right\}_0^c$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left\{\ln\left(\frac{a^c+1}{2}\right)\right\}$$

(i) $I = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x}{1+a^x}dx$

$t = -x$ எனின் $dt = -dx$ $\quad I = \int_{+c}^{-c} \frac{\cos t\,(-dt)}{1+a^{-t}} = \int_{-c}^{c} \frac{a^t \cos t\, dt}{1+a^t} = J$

$$\text{(ii)}\ I + J = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x\, dx}{1+a^x} + \int_{-c}^{c} \frac{a^x \cos x}{1+a^x}dx = \int_{-c}^{c} \frac{(1+a^x)\cos x\, dx}{1+a^x}$$

$$= \int_{-c}^{c} \cos x\, dx = \sin x \Big/_{-c}^{c} = 2\sin c \quad (\because 0 \le c \le \tfrac{\pi}{2})$$

$$\therefore I = J = \sin c,\ c = \pi/6,\ J = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(b) $I = \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)^{1/2}(2-x)^{3/2}}$ $\qquad 2 - x = \frac{1}{t}$ எனக.

$$I = \int_{1/2}^{1} \frac{1/t^2 \cdot dt}{(4-1/t)^{1/2}} = \frac{1}{2}\left\{(4t-1)^{1/2}\right\}_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

---

10. (i) $\ln(1+x)$ இற்குரிய மக்லோரினின் விரிவைப் பெறுக; இங்கு $-1 < x < 1$.

$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$ எனக்

காட்டி. $\ln y = 2\left\{\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \cdots\right\}$

ln 2 இற்குரிய தொடரின் முதல் 3 உறுப்புக்களையும் எழுதி, அதன் பெறுமானத்தை 3 பொருளுடை இலக்கங்களுக்கு கணிக்க.

(ii) சிம்சனின் விதியைக் கூறுக.
அதனைப் பயன்படுத்தி, ஐந்து நிலைக்கூறுகளை எடுத்து $\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ இற்குரிய அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

விடை (i) $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}+f^2(0)+-----$

$f(x)=\ln(1+x)$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=1/_{1+x}$ $\qquad f^{(1)}(0)=1$

$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$ $\qquad f^{(2)}(0)=-1$

$f^3(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ $\qquad f^{(3)}(0)=2$

$\vdots$

$f^n(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

∴ மக்லோரினின் தொடர்.

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$x\to -x$ ஆக

$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}----\frac{x^n}{n}+---$

$\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+---+\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}+----.$

$\therefore \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+---+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+---\right\}$ ஆகும்.

$y=\frac{1+x}{1-x}$ எனின் $\Rightarrow x=\frac{y-1}{y+1}$

$\Rightarrow \ln y=2\left\{\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+---\right\}$

$\ln 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+-----\right\}$

$=2(0.3334+0.0123+0.0008)$

$=0.6930=0.693$

(ii) சிம்சனின் விதி

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+---+f(x_{2n})\right\}$$

இங்கு $x_0 = a$, $x_{2n} = b$, $h = \frac{b-a}{2n}$; $h = \frac{2-1}{4} = .25$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{0.25}{3}\left\{f(1) + 4f(5/4) + 2f(3/2) + 4f(7/4) + f(2)\right\}$$

$$= \frac{0.25}{3}\left\{1 + 4(4/5) + 2(2/3) + 4(4/7) + 1/2\right\}$$

$$= \frac{0.25}{3}\left\{1 + 3.2 + 1.338 + 2.286 + 0.5\right\}$$

$$= \frac{0.25}{3}(8.319) = 0.6932 = 0.693.$$

---

1. $x = \frac{at^3}{t-1}$, $y = \frac{a(t^2-3)}{t-1}$, $t \geq 0\ (t \neq 1)$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C தரப்படுகின்றது.

(i) $\frac{3}{2}$ இற்கூடாக t அதிகரிக்கும் போது $\frac{dx}{dt}$ குறி மாறுகின்றதெனவும்

(ii) எல்லா t யிற்கும் $\frac{dy}{dt}$ ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்குமெனவும் காட்டுக.

$t \geq 0\ (t \neq 1)$ இற்கு x எதிர் t, y எதிர் t ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைக. இதிலிருந்து வளையி C யைப் பருமட்டாக வரைக.

<u>விடை</u>

$x = \frac{at^3}{t-1}$, $t \neq 1$, $t \geq 0$

$t = 0 \quad x = 0$

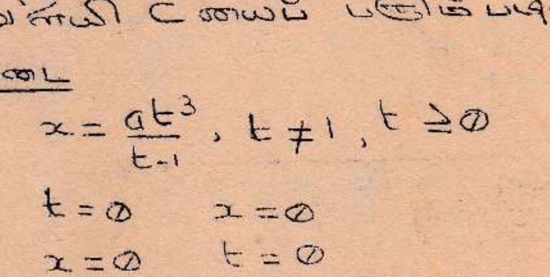
$x = 0 \quad t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3at^2(t-1) - at^3}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{2at^3(t - 3/2)}{(t-1)^2}$$

$\frac{dx}{dt} = 0 \quad t = 0, 3/2$

$\frac{dx}{dt} = \infty$ —

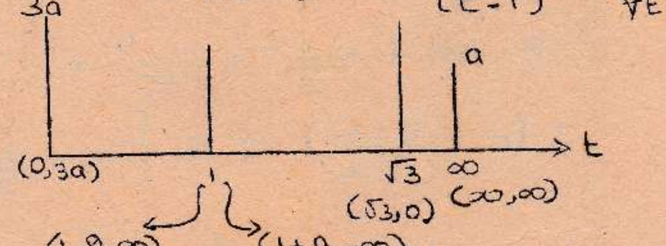


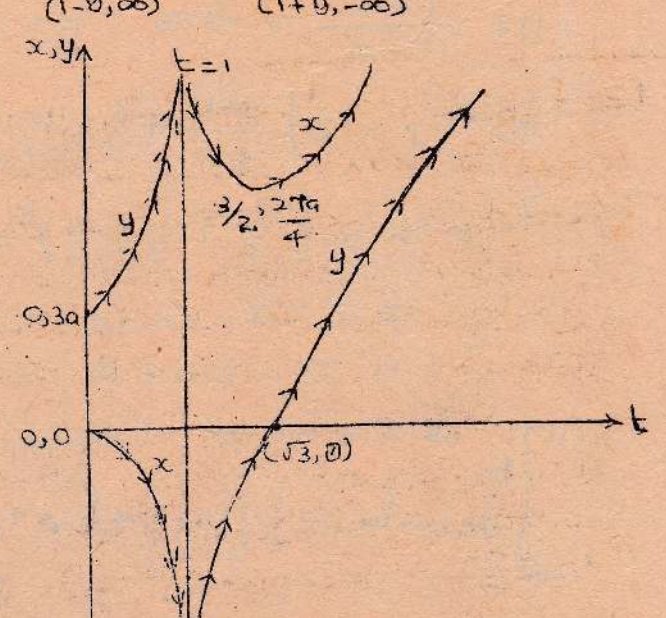
$y = \frac{a(t^2-3)}{t-1}$, $t \neq 1$

$t = 0 \qquad y = 3a$

$$\frac{dy}{dt} = a\frac{2t(t-1) - (t^2-3)}{(t-1)^2}$$

$$= a\frac{t^2 - 2t + 3}{(t-1)^2} = \frac{a\{(t-1)^2 + 2\}}{(t-1)^2} > 0 \quad \forall t$$





$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{dx/dt}$$

$$= \frac{a\{(t-1)^2+2\}}{(t-1)^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{2at^2(t-3/2)}{(t-1)^2}}$$

$$= \frac{(t-1)^2+2}{2t^2(t-3/2)}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ —

$\frac{dy}{dx} = \infty \qquad t=0 \quad t=3/2$

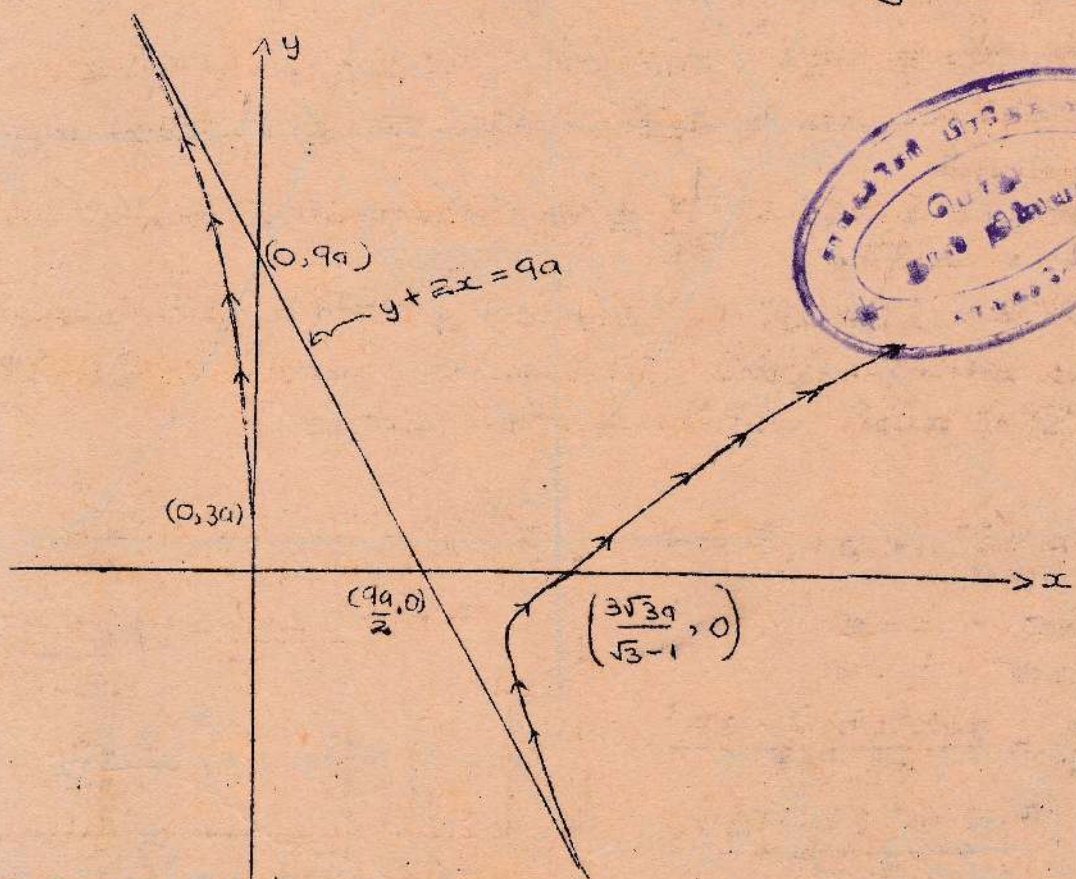
அணுகு கோடு

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{t^2-3}{t^3} = -2$$

$$\lim_{t\to 1}(y+2x) = \frac{t^2-3+2t^3}{t-1}\cdot a$$

$$= 3(t^2+t+1)a = 9a$$

$y+2x=9a$ என்பது அணுகு கோடாகும்.



12. $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ எனின், $y = f(x)$, $y = \frac{1}{f(x)}$ ஆகிய வளைவிகளின் இடை வெட்டுப்புள்ளிகள் எவையேனும் இருப்பின் அவற்றின் ஆள் கூறுகளைத் தந்து வளைவிகளை ஒரே வரிப் படத்தில் பருமட்டாக வரைக.

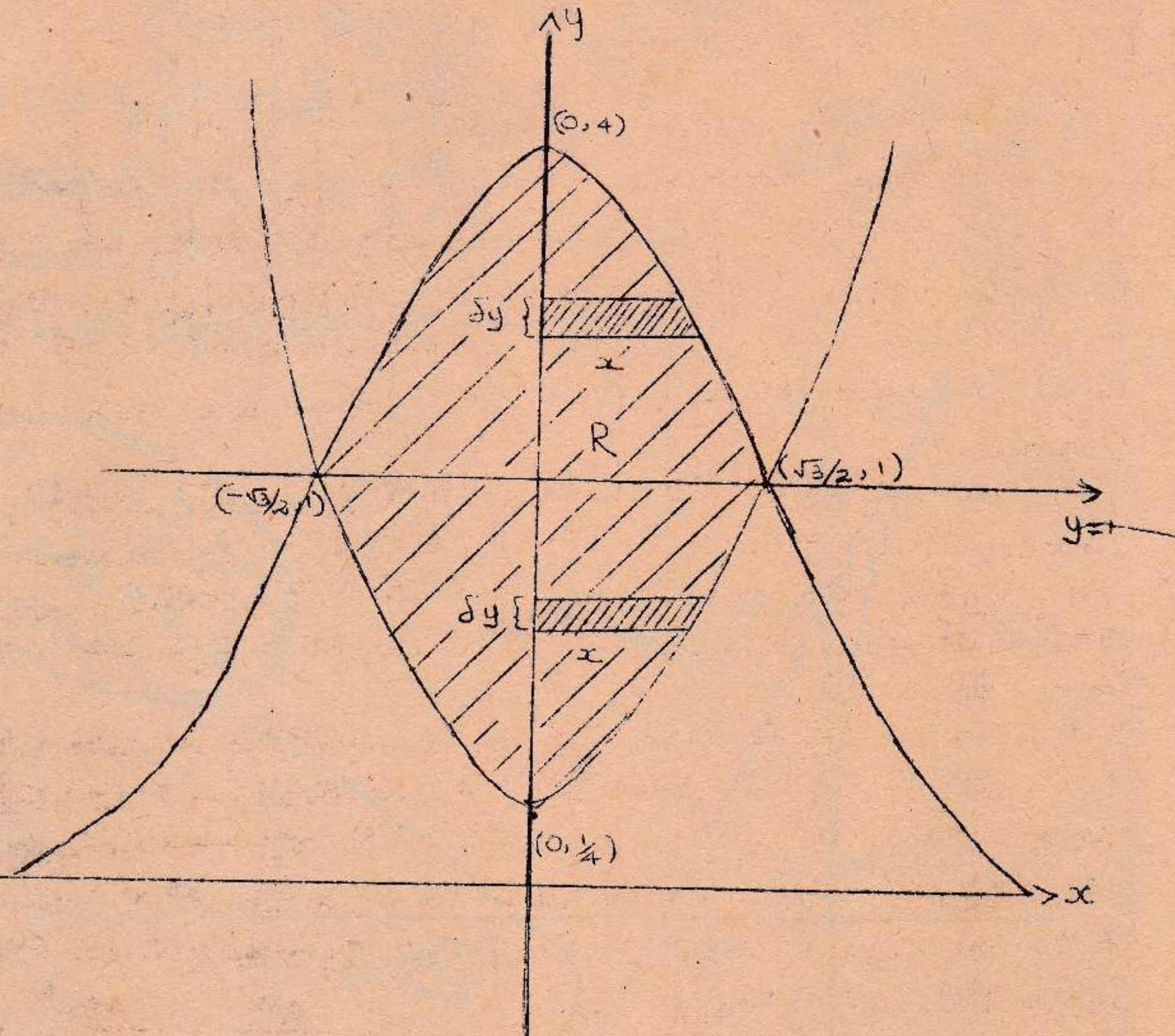
(i) மேலேயுள்ள இரு வளைவிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட முடிவுள்ள பிரதேசம் R இன் பரப்பளவைப் பெறுமானங் கணிக்க.

(ii) பிரதேசம் R ஆனது y - அச்சைப் பற்றி π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் உண்டாகும் சுற்றல் திண்மத்தின் கனவளவைத் துணிக.

விடை $y = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow y - \frac{1}{4} = x^2$ இஃது ஒரு பரவளைவாகும்.

உச்சி $(0, \frac{1}{4})$ பரவளைவின் அச்சு : y அச்சு

$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4x^2)$ குவியம் $\equiv (0, \frac{1}{2})$



நிழற்பரப்பு S என்க

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4}{4x^2+1}\,dx - \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(x^2+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$= 2\tan^{-1}2x\Big|_0^{\sqrt{3}/2} - \left\{\frac{x^3}{3} + \frac{x}{4}\right\}_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S = \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ச. அ}$$

$$V_y = \pi\int_{1/4}^{1} x^2\,dy_1 + \pi\int_1^4 x^2\,dy_2$$

$$= \pi\int_{1/4}^{1}\left(y-\frac{1}{4}\right)dy + \pi\int_1^4\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{4}\right)dy$$

$$= \pi\left\{\frac{(y-\frac{1}{4})^2}{2}\right\}_{1/4}^{1} + \pi\left\{\ln y - \frac{y}{4}\right\}_1^4$$

$$= \frac{9\pi}{32} + \pi\left\{2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}\right\}$$

$$= \left(2\pi\ln 2 - \frac{15\pi}{32}\right) \text{ க. அ.}$$

உரிமை பதிப்பகத்துக்குரியது! 3331

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

தூய கணிதம் 11. க.பொ.த(உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ற், 1992.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

ஏழு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

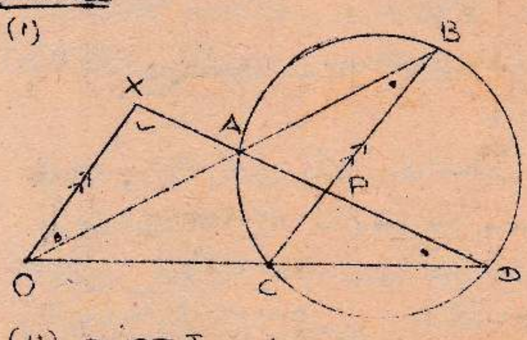
01. (i) இரு நேர் கோடுகள் OAB, OCD ஆகியன வட்டம் ஒன்றை A, B, D, C என்பவற்றில் இடைவெட்டுகின்றன. (O ஒரு வெளிப்புள்ளி). O வினூடாகவும் CB யிற்குச் சமாந்தரமாகவும் நீட்டப்பட்ட DA யை X இல் சந்திக்குமாறும் ஒரு கோடு வரையப்பட்டுள்ளது. $OX^2 = AX \cdot DX$ என நிறுவுக.

(ii) ABC ஒரு முக்கோணி; O என்பது அதன் தளத்திலுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி. AO, BO, CO ஆகியவை BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை முறையே D, E, F என்பனவற்றில் சந்திக்கின்றனவெனின், $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$ என நிறுவுக.

ABC என்பது B யில் செங்கோணமுடைய ஒரு முக்கோணியாகும். B யில் இருந்து AC யிற்குள்ள செங்குத்தின் அடி L உம், L இலிருந்து BC, AB ஆகியவற்றுக்குள்ள செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே M, N உமாகும். AM, CN ஆகியவை O விலும் BO ஆனது AC யை P யிலும் சந்திப்பின் (i) $\frac{AN}{NB} = \frac{AB^2}{BC^2}$ (ii) $\frac{AP}{PC} = \frac{AB^4}{BC^4}$ என நிறுவுக.

விடை

(i)

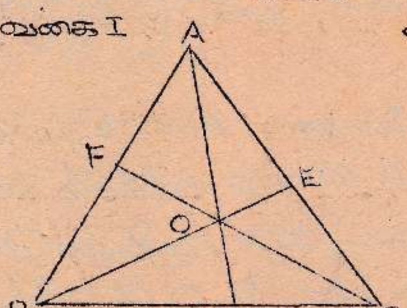


முக்கோணிகள் ODX, AOX இயல்பொத்தவை.

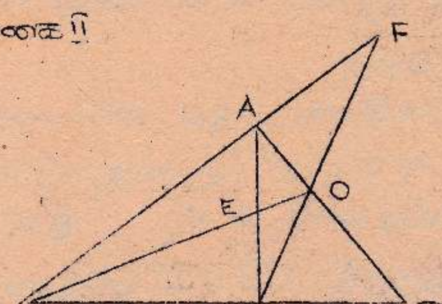
$$\therefore \frac{OX}{AX} = \frac{DX}{OX}$$

$$\therefore OX^2 = AX \cdot DX$$

(ii) வகை I



வகை II



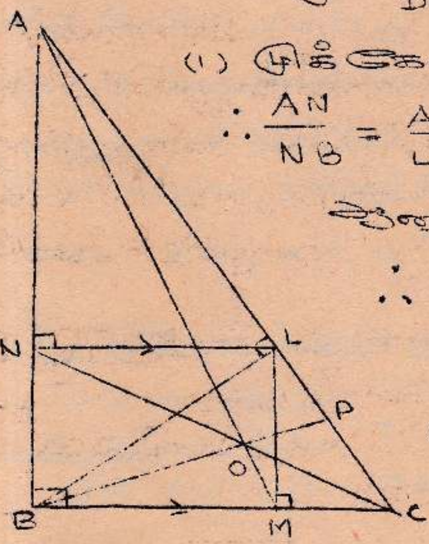
இருவகைகளிலும், $\frac{BD}{DC} = \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD} = \frac{\Delta BOD}{\Delta COD} = \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC}$

இதேபோல் $\frac{CE}{EA} = \frac{\Delta BOC}{\Delta AOB}$, $\frac{AF}{FB} = \frac{\Delta AOC}{\Delta BOC}$

$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} \cdot \frac{\Delta BOC}{\Delta AOB} \cdot \frac{\Delta AOC}{\Delta BOC} = 1$ (பருமனில்)

வகை I இல், $\frac{BD}{DC} = +$; $\frac{CE}{EA} = +$ $\frac{AF}{FB} = +$ வகை II இல் $\frac{BD}{DC} = -$ $\frac{CE}{EA} = +$ $\frac{AF}{FB} = -$

$\therefore$ இரு வகைகளிலும் $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = +1$ $\therefore BD.CE.AF = DC.EA.FB$



(i) முக்கோணிகள் ALN, ABC என்பவை இயல்பொத்தவை

$\therefore \frac{AN}{NB} = \frac{AL}{LC}$ $(\because NL \parallel BC)$ $= \frac{\Delta ABL}{\Delta BCL}$

ஆனால் முக்கோணிகள் ABL ||| BCL

$\therefore \frac{AN}{NB} = \frac{\Delta ABL}{\Delta BCL} = \frac{AB^2}{BC^2}$ $\therefore \frac{AN}{NB} = \frac{AB^2}{BC^2}$

(ii) முக்கோணிகள் CLM ||| CBA

$\therefore \frac{CM}{MB} = \frac{CL}{LA} = \frac{\Delta BCL}{\Delta ABL} = \frac{BC^2}{AB^2}$

$(\because AB \parallel ML$ & ABL ||| BCL$)$

முக்கோணி ABC யில் AO, BO, CO என்பன பக்கங்கள் BC, CA, AB களை முறையே M, P, N களில் சந்திக்கின்றன.

$\therefore AP.CM.BN = PC.MB.NA$

$\frac{AP}{PC} = \frac{MB}{CM} \cdot \frac{NA}{BN} = \frac{AB^2}{BC^2} \cdot \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB^4}{BC^4}$

---

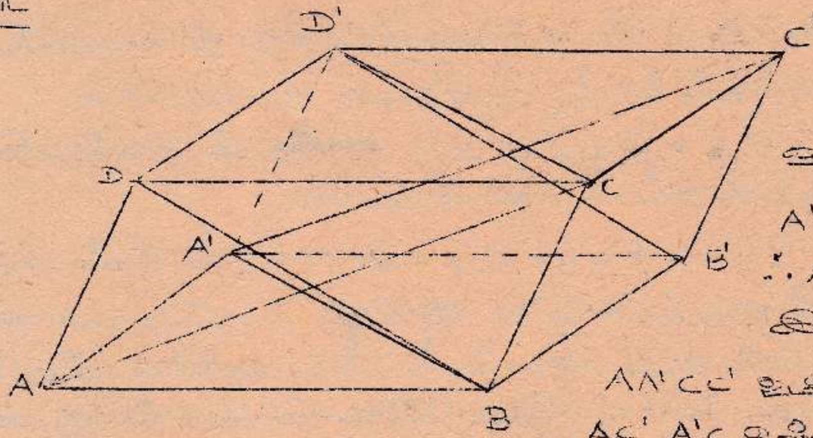
02. (i) இணைகரப்பரவை ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்கும் எனவும் அவை ஒன்றை ஒன்று இரு சமகூறிடும் எனவும் காட்டுக.

(ii) ஒரு நான்முகி OABC யில் விளிம்புகள் OA, OB, OC ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையும் முறையே a, b, c ஆகிய நீளங்களுக்குச் சமமானவையுமாகும். முகம் OAB உடன் முகம் ABC இன் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)$ எனக் காட்டுக.

ஒரு செவ்வக வடிவ இணைகரப்பரவை ABCDD'C'B'A' இல் முகம் A'B'C'D' ஆனது முகம் ABCD யிற்குச் சமாந்தரம்; விளிம்புகள் AA', BB', CC', DD' ஆகியன முகம் ABCD யிற்குச் செங்குத்தானவை. P, Q, R என்பவை முறையே AB, BD', DD' ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். AA' = a, AB = b, AD = c ஆயின் முகம் ABCD உடன்

விடை

(i)



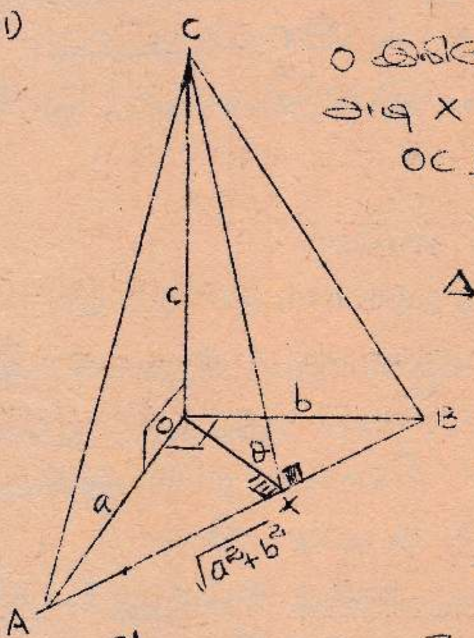
BDD'B' ஓர் இணைகரமாகும்.
∴ BD', B'D இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று இரு கூறிடும்.

A'BCD' ஓர் இணைகரம்.
∴ A'C, BD' இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று இரு கூறிடும்.

AA'CC' உம் ஓர் இணைகரம் ∴
AC', A'C இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று இருகூறிடும்.

⇒ BD', B'D, A'C, AC' என்பன ஒரே புள்ளியில் இரண்டை ஒன்று இருகூறிடும். எனவே இணைகரத்திண்மத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றை ஒன்று இருகூறிடும்.

(ii)



O இலிருந்து AB இற்கு வரையும் செங்குத்தின் அடி X என்க. OC ⊥ தளம் OAB

OC ⊥ AB, OX ⊥ AB ∴ AB ⊥ தளம் OCX

∴ AB ⊥ CX

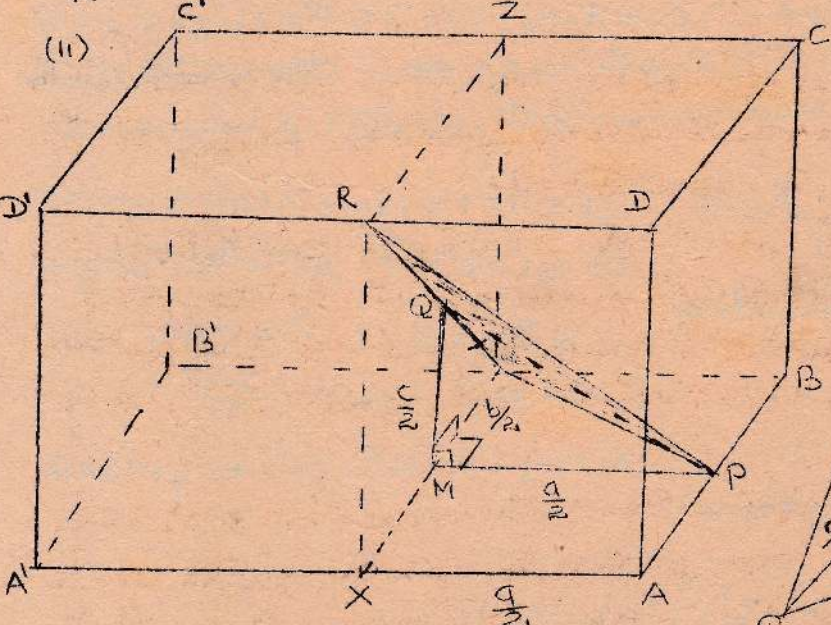
$$\Delta OAB = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}OX\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore OX = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

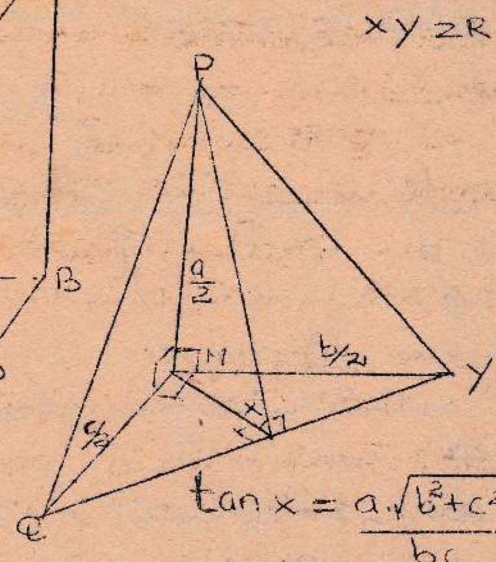
$$\tan\theta = \frac{OC}{OX} = \frac{c.\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{c.\sqrt{a^2+b^2}}{ab.}\right)$$

(iii)



தளம் ABCD || தளம் XYZR



$$\tan x = \frac{a.\sqrt{b^2+c^2}}{bc}$$

$$x = \tan^{-1}\left(\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{bc}\right)$$

03. P என்னும் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்ற இரு நேர் கோடுகள் l_1, l_2 ஆகியன முறையே $ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்படுகின்றன.

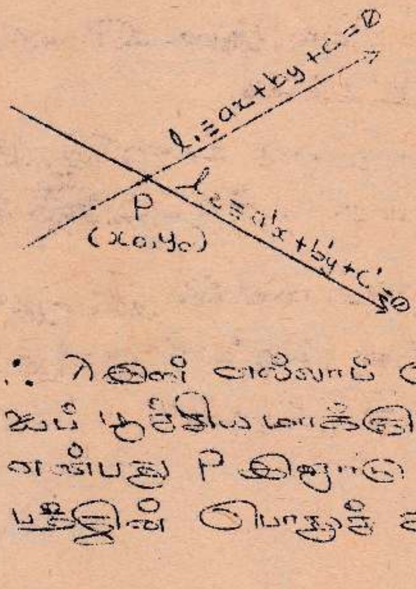
$ax+by+c+\lambda(a'x+b'y+c')=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் கேத்திரகணித விளக்கத்தைத் தருக. இங்கு λ ஒரு பரமானம்.

உற்பத்தி O வினூடாகவும், l_1, l_2 ஆகியவற்றுக்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ள நேர்கோடுகளால் ஆனவை, l_2, l_1 ஆகியவற்றை முறையே Q, R ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன. இணைகரம் OQPR இன் மூலைவிட்டங்கள் OP, QR ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. $(c, c' \neq 0)$

இதிலிருந்து (i) OQPR ஒரு சாய்சதுரமாக இருப்பதற்கு,
(ii) OQPR ஒரு செவ்வகமாக இருப்பதற்கு

மாறிலிகள் a, b, c, a', b', c' ஆகியன திருப்தியாக்க வேண்டிய நிபந்தனைகளைக் காண்க.

விடை



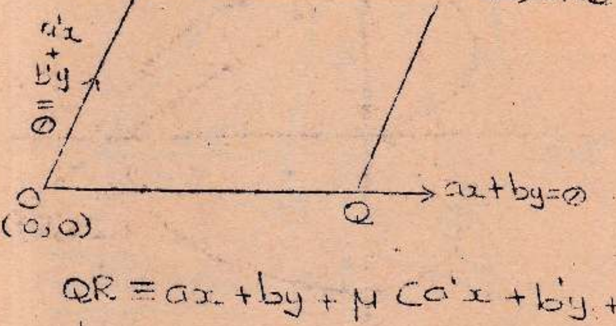
$P \equiv (x_0, y_0)$ என்க.

$(ax+by+c)+\lambda(a'x+b'y+c')=0$

இது x, y இலுள்ள முதலாம் படிச் சமன்பாடு. ∴ நேர் கோட்டை வகைக்குறிக்கும். $P(x_0, y_0)$ ஐப் பிரதியிட,

$0+\lambda.0=0$ ✓

∴ λ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் P ஆனது $l_1+\lambda l_2$ ஐத் திருப்தியாக்கும். ∴ $(ax+by+c)+\lambda(a'x+b'y+c')=0$ ஆனது P இனூடு செல்லும் ஒரு நேர் கோட்டுத் தொகுதியின் பொதுச் சமன்பாடாகும். இங்கு λ பரமானமாகும்.



$OP \equiv ax+by+c+\lambda(a'x+b'y+c')=0$

இது $(0,0)$ இனூடு செல்லும்.

$c+\lambda c'=0$; $\lambda=-c/c'$

∴ OP இன் சமன்பாடு

$ax+by+c-\frac{c}{c'}(a'x+b'y+c')=0$

$QR \equiv ax+by+\mu(a'x+b'y+c')=0$

$\frac{1}{\mu}(ax+by+c)+(a'x+b'y)=\frac{c}{\mu}-c'=0$

$\therefore \mu=\frac{c}{c'}$ $\therefore ax+by+\frac{c}{c'}(a'x+b'y+c')=0$

(i) OQPR சாய்சதுரம் எனின் $M_{OP}.M_{QR} = -1$

$$\frac{\frac{ca'}{c'} - a}{b - \frac{cb'}{c'}} \cdot \frac{a + \frac{a'c}{c'}}{b + \frac{b'c}{c'}} = -1 \; ; \; \frac{a'c - ac'}{bc' - b'c} \cdot \frac{ac' + a'c}{bc' + b'c} = 1$$

$$\Rightarrow (a'c)^2 - (ac')^2 = (bc')^2 - (b'c)^2$$

$$\therefore c^2(a'^2 + b'^2) = c'^2(a^2 + b^2)$$

(ii) OQPR சதுரம் எனின் $c^2(a'^2 + b'^2) = c'^2(a^2+b^2)$ &

$M_{OQ}.M_{OR} = -1$; $\frac{-a}{b} \cdot \frac{-a'}{b'} = -1 \Rightarrow aa' + bb' = 0$

---

04. (a) முனைவாள் ஆள்கூறுகள் (r, θ) இலிருந்து, தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளுக்கு மாற்றுவதன் மூலமாகவோ, வேறுவிதமாகவோ $\frac{2a}{r}$ = கோசைன் θ + 2 சைன் θ $(a > 0)$ ஆனது ஒரு நேர் கோடு l ஐ வகைகுறிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

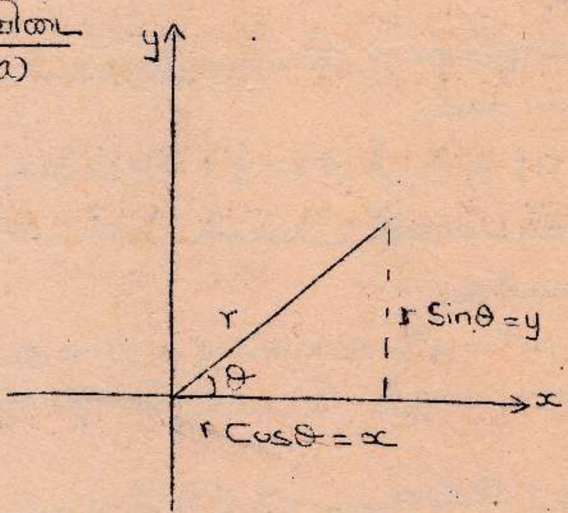
l ஐயும் வளையி $C: r = a(1 +$ கோசைன் $\theta)$ ஐயும் ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைந்து, இடைவெட்டுப் புள்ளிகளின் முனைவாள் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

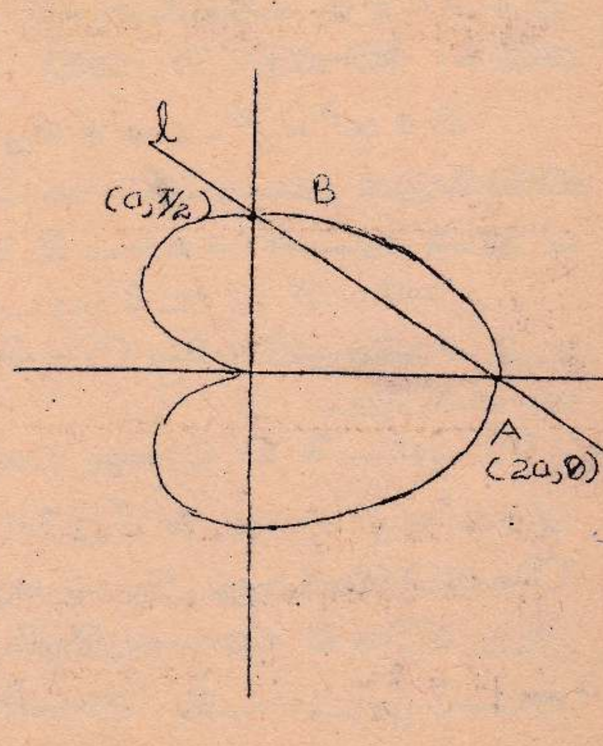
(b) வளையி $y = x^2 - 1$ இன் பரும்படியாக வரைந்து, இதிலிருந்து வளையி $y = |x^2-1|$ ஐ வேறாக வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

$y = |x^2-1|$, $y = |x^2-7|$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைந்து, $|x^2-7| > y > |x^2-1|$ ஆக இருக்கும் பிரதேசத்தை நிழற்றுக.

விடை

(a)

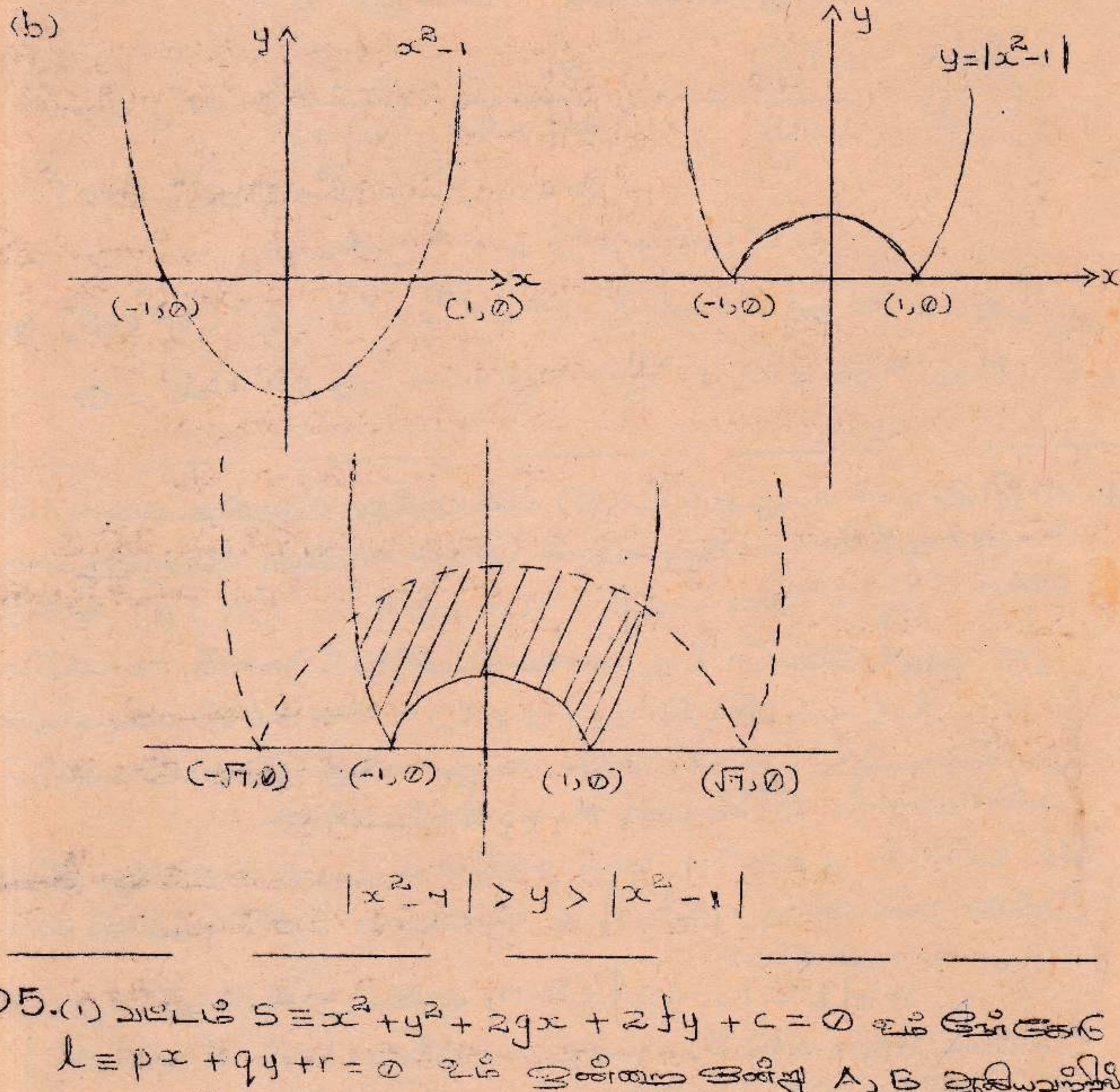




$$\frac{2a}{r} = \cos\theta + 2\sin\theta$$

$(2a = x + 2y)$
நேர் கோடு.

(b)



$$|x^2-4| > y > |x^2-1|$$

05.(i) வட்டம் $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ உம் நேர்கோடு $l \equiv px+qy+r=0$ உம் ஒன்றை ஒன்று A, B ஆகியவற்றில் இடை வெட்டுகின்றன.

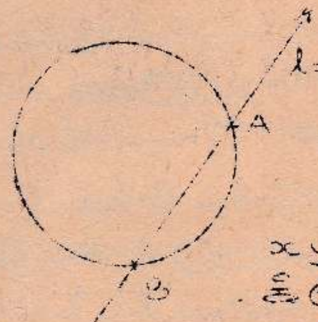
$S+\lambda l=0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கான விளக்கத்தைத் தருக. இங்கு λ ஒரு பரமானம்.

$S \equiv x^2+y^2-6x+2y-17=0$, $l \equiv x-y+2=0$ ஆக இருக்கும் போது AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S' இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வட்டம் S' உம் வட்டம் $x^2+y^2-8x+2y+13=0$ உம் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன எனக் காட்டுக.

(ii) வட்டம் S ஆனது (2, 0) இனூடாகச் சென்று, வட்டம் $S' : x^2+y^2=1$ ஐ S' இன் விட்டமுனைப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. S ஆனது வட்டம் $x^2+y^2-4y-5=0$ ஐச் செங்கோணத்தில் வெட்டுமெனின், S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடை (i)



$S + \lambda l = 0$

$x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(px+qy+r)=0$

இது x, y இலுள்ள ஓர் இரண்டாம் படிச் சமன்.

x^2 இன் குணகம் $=$ y^2 இன் குணகம் $\neq 0$

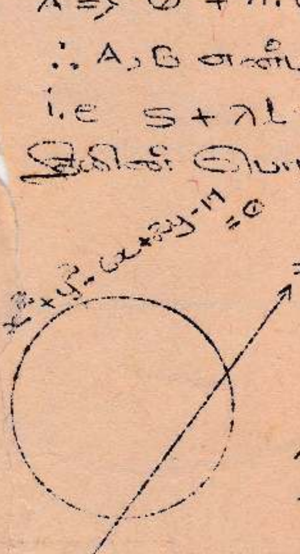
xy இன் குணகம் 0 ∴ இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. A, B எனும் புள்ளிகள் வட்டத்தினதும் நேர்கோட்டினதும் சமன்பாடுகள் S, l ஐத் திருப்தியாக்கின்றன.

$S + \lambda l$ எனும் கோட்டில் இப்புள்ளிகளைப் பிரதியிட

$A \Rightarrow 0 + \lambda.0 = 0$ ✓ $B \Rightarrow 0 + \lambda.0 = 0$ ✓

∴ A, B என்பன $S + \lambda l = 0$ எனும் வட்டத்தில் கிடக்கின்றன.

i.e $S + \lambda l = 0$ என்பது A, B ஊடாகச் செல்லும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு.



A, B ஊடாகச் செல்லும் வட்டம்,

$x^2+y^2-6x+2y-17-2\lambda(x-y+2)=0$

$c' \equiv \{\lambda+3, -(\lambda+1)\}$

AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மையம் $x-y+2=0$ ஐ திருப்தி செய்யும்.

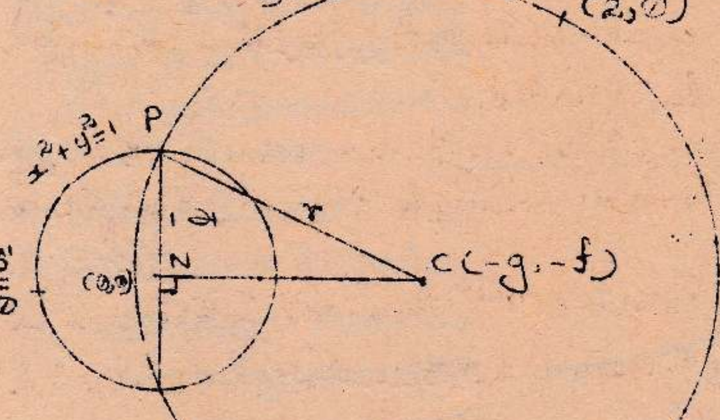
$(\lambda+3)+(+\lambda+1)+2=0$; $\lambda=-3$; $-2\lambda=6$

$S' \equiv x^2+y^2-4y-5=0$ $c' \equiv (0,2)$ $r'=3$

$x^2+y^2-8x+2y+13=0$ $C \equiv (4,-1)$ $r=2$

$CC' = \sqrt{4^2+3^2} = 5 = r+r'$ ∴ இவ் வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றன.

(ii)



$x^2+y^2-4y-5=0$

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

இவ்விரு வட்டங்களும் செங்கோணத்தில் வெட்டுவதால்

$2gg'+2ff'=c+c'$

$2g(0)+2f(-2)=c-5$

$4f+c=5$ —(1)

$CP^2 = CN^2 + NP^2$

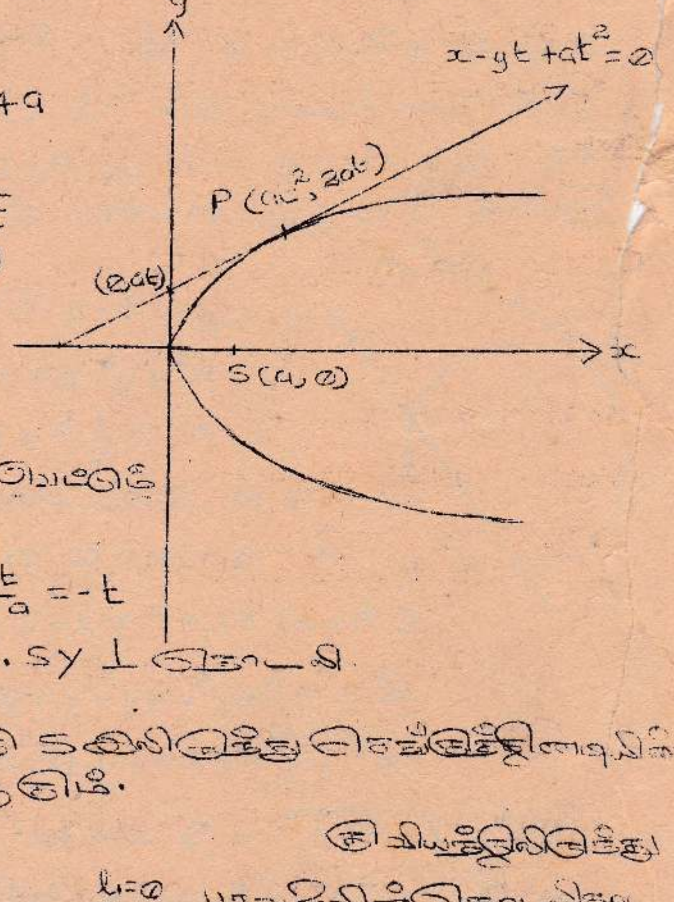
$(g+2)^2+f^2 = g^2+f^2+1 = g^2+f^2-c$; $4g+3=0$ ∴ $g=-\frac{3}{4}$

$c=-1$ ∴ $f=\frac{3}{2}$ ∴ $S \equiv x^2+y^2-\frac{3}{2}x+3y-1$

06. பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இலுள்ள புள்ளி $(at^2, 2at)$ இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் கண்டு, பரவளைவின் குவியத்திலிருந்து தொடலிக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடியானது y- அச்சு மீது கிடக்கும் எனக் காட்டுக.

l_1, l_2, l_3 என்பன ஒரு பரவளைவுக்குள்ள மூன்று தொடலிகளாகும். இவற்றுள் எவையும் இரண்டு சமாந்தரமானவையல்ல, மேலும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்காதவை எனின் l_1, l_2, l_3 ஆகியன அமைக்கும் முக்கோணியின் உச்சிகளினூடாகச் செல்லும் வட்டம் பரவளைவின் குவியத்தினூடாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

விடை



$$y^2 = 4ax \quad ; \quad 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \quad ; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right)_{(at^2, 2at)} = \frac{1}{t}$$

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

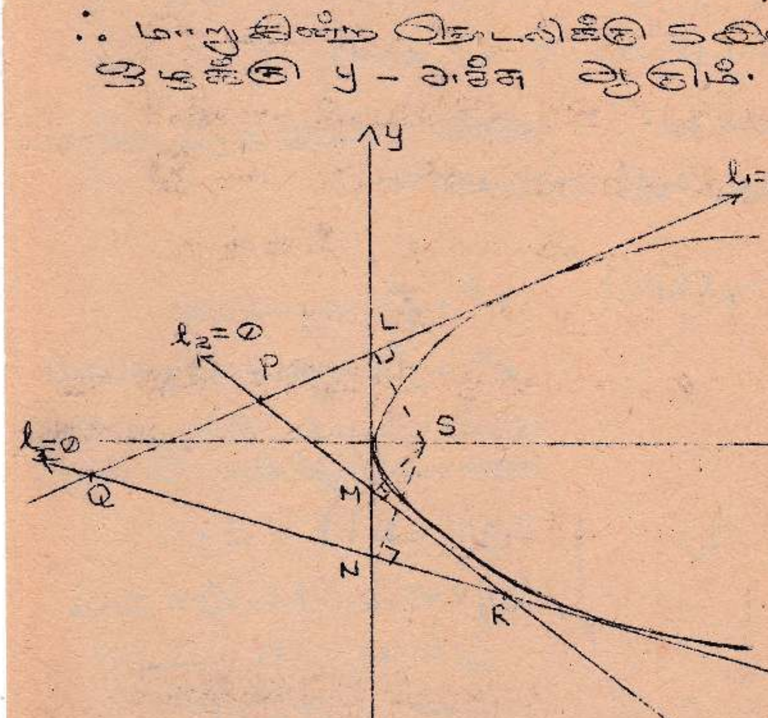
$$x - yt + at^2 = 0$$

மாறுந் தொடலி y- அச்சை வெட்டும் புள்ளி $Y \equiv (0, at)$

$$m_{SY} = \frac{at}{-a} = -t$$

$m_{SY} \cdot m_{PY} = -t \cdot \frac{1}{t} = -1 \quad \therefore SY \perp$ தொடலி

∴ மாறுகின்ற தொடலிக்கு S இலிருந்து செங்குத்தின் அடி y- அச்சில் ஆகும்.



குவியத்திலிருந்து பரவளைவின் தொடலிகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கள் y- அச்சில் கிடக்கும். i.e S என்னும் புள்ளியிலிருந்து முக்கோணி PQR இன் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளன.

∴ PQR இன் சுற்று வட்டம் S இனூடாகச் செல்லும்.

07. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ இன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி (x_1, y_1) இல் அதற்குள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு $a^2y_1x-b^2x_1y+(b^2-a^2)x_1y_1=0$ எனக் காட்டுக.

$(a^2-b^2)^2l^2m^2-(b^2l^2+a^2m^2)n^2=0$ எனின், கோடு $lx+my+n=0$ ஆனது இந் நீள்வளையத்துக்குரிய ஒரு செவ்வனாகுமென நிறுவி, வளையியை இச் செவ்வன் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

முதலாவது நீள்வளையத்தை அதன் மையத்தைப் பற்றி ஒரு செங்கோணத்தினூடாக அதன் தளத்திலேயே சுழற்றுவதன் மூலம் இரண்டாவது நீள்வளையம் பெறப்படுகின்றது. இவ்விரு நீள்வளையங்களுக்குமான பொதுச் செவ்வன்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

விடை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$

செவ்வன் $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \Rightarrow a^2y_1x-b^2x_1y+(b^2-a^2)x_1y_1=0$

$$lx+my+n=0 \quad \text{—— (1)}$$

$a^2y_1x-b^2x_1y+(b^2-a^2)x_1y_1=0$ — (2) இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே கோட்டைக் குறிப்பதால்

$$\frac{a^2y_1}{l}=\frac{-b^2x_1}{m}=\frac{(b^2-a^2)x_1y_1}{n} \Rightarrow x_1=\frac{-a^2n}{(a^2-b^2)l},\ y_1=\frac{b^2n}{(a^2-b^2)m}$$

$lx+my+n=0$ இல் பிரதியிட

$$(a^2-b^2)^2l^2m^2-(b^2l^2+a^2m^2)n^2=0 \quad \text{—— (1)}$$

இரண்டாவது நீள்வளையத்திற்குரிய செவ்வன் எனின்

$$(b^2-a^2)l^2m^2-(a^2l^2+b^2m^2)n^2=0 \quad \text{—— (2)}$$

$(1),(2) \Rightarrow (l^2-m^2)n^2=0 \quad \Rightarrow n=0,\ l=\pm m$

வகை (i) $n=0$ $(1) \Rightarrow l=0$ or $m=0$

(i.e) $n=0,\ l=0$ or $n=0,\ m=0 \Rightarrow$ செவ்வன்கள் $y=0$ or $x=0$

$n\neq 0$ then $l^2=m^2$

$(1) \Rightarrow (a^2-b^2)l^4-(b^2+a^2)l^2n^2=0$

$l\neq 0 \quad (a^2-b^2)^2l^2=(b^2+a^2)n^2$

$\left(\frac{l}{n}\right)^2=\frac{b^2+a^2}{(b^2-a^2)^2}=k^2$ ∴ பொதுச் செவ்வன்கள்

$\frac{l}{n}=\pm k$ $\pm kx\pm ky+1=0$

$\frac{m}{n}=\pm k$ $x\pm y\pm\frac{1}{k}=0$

08. ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து நேர்கோடு $x+y=\sqrt{2}$ இற்குள்ள செங்குத்தின் அடியானது புள்ளி Q ஆகும். S என்பது $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய புள்ளியாகும். $SP^2 = 2QP^2$ ஆகுமாறு P மாறுமெனின், அதன் ஒழுக்கை இனங் காண்க.

அதிபரவளைவு $xy=1$ இற்குப் புள்ளி $(t, \frac{1}{t})$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலியானது x - அச்சை A யிலும் y - அச்சை B யிலும் வெட்டுகின்றது. $AC:CB = a:b$ ஆகுமாறு AB மீதுள்ள புள்ளி C ஆகும். t மாறும் போது C யினது ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

நேர்கோடு $x+y=\sqrt{2}$ ஆனது C யின் ஒழுக்கிற்குத் தொடலியாக இருக்குமாறு $a:b$ என்னும் விகிதத்தின் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க.

<u>விடை</u> $P(\bar{x}, \bar{y})$ என்க.

$x+y=\sqrt{2}$ இல் ஏதாவதொரு புள்ளியையும் $(t, \sqrt{2}-t)$ எனும் வடிவில் எழுதலாம்.

$$\frac{\sqrt{2}-t-\bar{y}}{t-\bar{x}}(-1) = -1$$

$$\Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}+\bar{x}-\bar{y}}{2}$$

$$\therefore Q \equiv \left\{\frac{\sqrt{2}+\bar{x}-\bar{y}}{2}, \frac{\sqrt{2}-\bar{x}+\bar{y}}{2}\right\}$$

$$S = (\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

$$SP^2 = 2QP^2$$

$$(\sqrt{2}-\bar{x})^2 + (\sqrt{2}-\bar{y})^2 = \frac{2}{4}(\sqrt{2}-\bar{x}-\bar{y})^2 + \frac{2}{4}(\sqrt{2}-\bar{x}-\bar{y})^2$$

$$= (\sqrt{2}-\bar{x}-\bar{y})^2$$

$$(\sqrt{2}-\bar{y})^2 = \bar{y}^2 - 2\bar{y}(\sqrt{2}-\bar{x})$$

$$2 - 2\sqrt{2}\,\bar{y} = -2\sqrt{2}\,\bar{y} + 2\bar{x}\bar{y}$$

$$\bar{x}\bar{y} = 1$$

$\therefore$ P இன் ஒழுக்கு $xy = 1$

$$xy = 1$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$(t, \frac{1}{t})$ இல் தொடலி, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{t^2}$

$$\therefore y - \frac{1}{t} = \frac{-1}{t^2}(x-t)$$

$$x + t^2y - 2t = 0$$

$$A \equiv (2t, 0), \quad B \equiv (0, 2/t)$$

$$C \equiv \left\{\underset{\downarrow\, x}{\frac{2bt}{a+b}}, \underset{\downarrow\, y}{\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{1}{t}}\right\}$$

C இன் ஒழுக்கு

$$xy = \frac{4ab}{(a+b)^2} = c^2 \text{ (என்க)}$$

$xy = \frac{4ab}{(a+b)^2} = c^2$ இற்கு $x+y-\sqrt{2}=0$ தொடலியாவதால்

$$ct + \frac{c}{t} - \sqrt{2} = 0$$

$$ct^2 - \sqrt{2}t + c = 0$$

$$2 - 4c^2 = 0; \quad c^2 = 1/2$$

$$\text{(i.e)} \quad \frac{4ab}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = 3 \pm \sqrt{8}$$

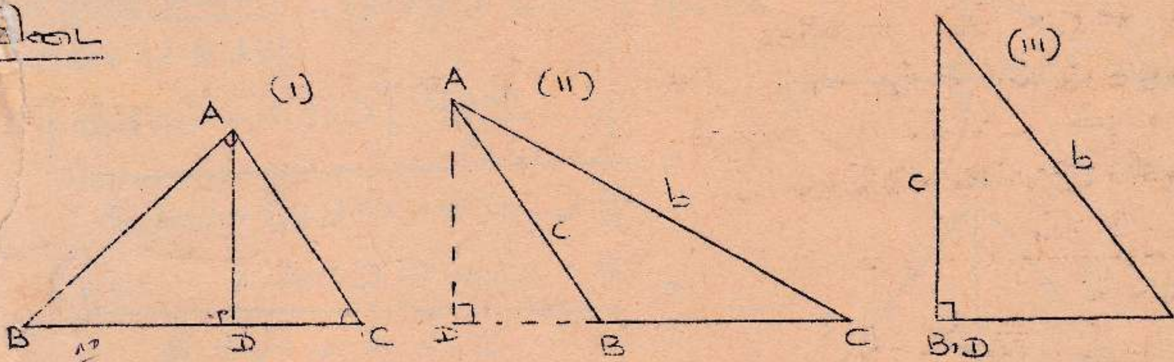
09. வழக்கமான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு $\dfrac{\text{சைன் } A}{a} = \dfrac{\text{சைன் } B}{b} = \dfrac{\text{சைன் } C}{c}$ எனநிறுவுக.

BD : DC = m : n ஆகுமாறு முக்கோணியின் பக்கம் BC இலுள்ள ஒரு புள்ளி P ஆகும். $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$, $\angle CDA = \theta$ எனின் $(m+n)$ கோதா $\theta = m$ கோதா $\alpha - n$ கோதா β
$= n$ கோதா $B - m$ கோதா C என நிறுவுக.

பக்கம் AB இன் நடுப்புள்ளி F உம் உச்சி A யிலிருந்து பக்கம் BC யிற்கான செங்குத்தின் அடி L உம் ஆகும். CF உம் AL உம் P இல் இடைவெட்டுகின்றன.

தான் $\angle APF = \dfrac{2\text{-கோதா } B\,(\text{கோதா } A - \text{கோதா } B)}{\text{கோதா } A + \text{கோதா } B}$ எனக் காட்டுக.

விடை

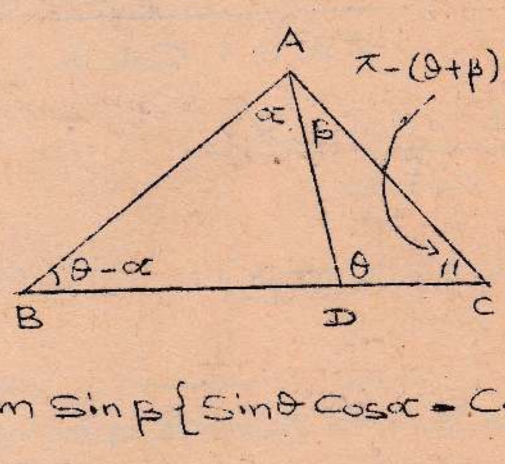


(I) $AD = b \sin C = c \sin B$ (II) $AD = b \sin C = c \sin(\pi - B)$

(III) $AD = b \sin C = c = c \sin B \quad \{\because \hat{B} = \pi/2\}$

$\therefore$ எல்லா வகையிலும் $c \sin B = b \sin C \Rightarrow \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

|||ly $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin A}{a} \quad \therefore \quad \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$



$$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{AD}\cdot\frac{AD}{DC}$$

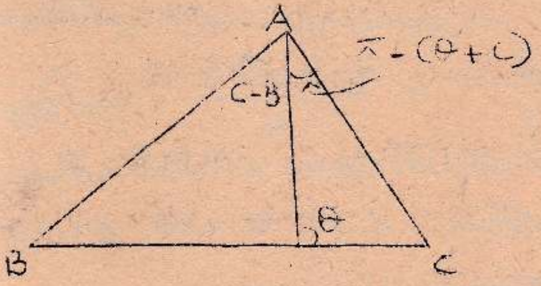
$$= \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}\cdot\frac{\sin\{\pi-(\theta+\beta)\}}{\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin\alpha \sin(\theta+\beta)}{\sin\beta \sin(\theta-\alpha)}$$

$$m \sin\beta\{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha\} = n\sin\alpha\{\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta\}$$

$$\sin\theta\{m\sin\beta\cos\alpha - n\sin\alpha\cos\beta) = \cos\theta\sin\alpha\sin\beta(m+n)$$

$$(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$$



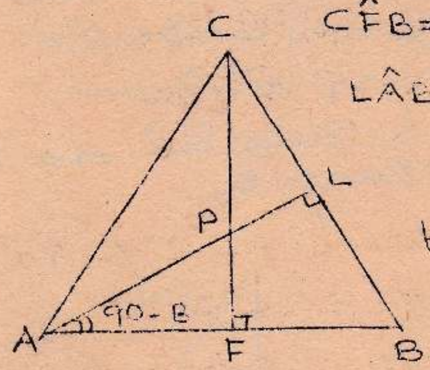
$$\frac{m}{n} = \frac{BD}{DC} = \frac{BD}{AD}\cdot\frac{AD}{DC}$$

$$= \frac{\sin(\theta-B)}{\sin B}\cdot\frac{\sin C}{\sin\{\pi-\theta-C\}}$$

$$= \frac{\sin(\theta-B)\sin C}{\sin B\sin(\theta+C)}$$

$\alpha \to -C$

$\beta \to -B$ $\quad (m+n)\cot\theta = n\cot B - m\cot C$



$C\hat{F}B=\theta, A\hat{P}F=A, \frac{AF}{FB}=1 \therefore 2\cot\theta=\cot A-\cot B$

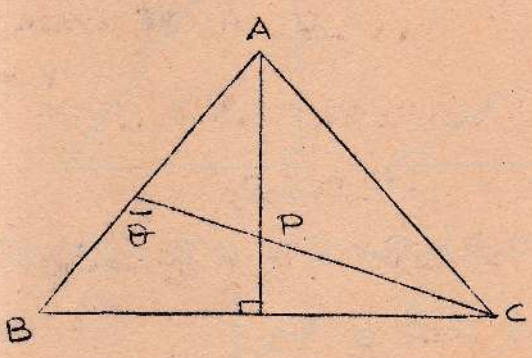
$L\hat{A}B = 90-B \;;\; C\hat{F}B = A\hat{P}F + L\hat{A}B$

$\psi = \theta + B - 90$

$$\tan\phi = -\cot(B+\theta) = \frac{1-\cot B\cot\theta}{\cot\theta+\cot B}$$

$$= \frac{1-\frac{\cot B}{2}\{\cot A-\cot B\}}{\frac{1}{2}(\cot A-\cot B)+\cot B}$$

$$= \frac{2-\cot B(\cot A-\cot B)}{\cot A+\cot B}$$



$$\theta + (\pi - A\hat{P}F) + \pi/2 + B = 2\pi$$

$$\theta = (\pi/2 - B) + A\hat{P}F$$

$$\tan A\hat{P}F = \frac{\tan\theta - \tan(\pi/2-B)}{1+\tan\theta\tan(\pi/2-B)} = \frac{\tan\theta-\cot B}{1+\tan\theta\cot B}$$

$$= \frac{1-\cot B\cot\theta}{\cot\theta+\cot B}$$

ஆனால் $2\cot\theta = (\cot A - \cot B)$

$$\therefore \tan A\hat{P}F = \frac{1-\cot B(\cot A-\cot B)/2}{(\cot A-\cot B)/2+\cot B}$$

$$= \frac{2-\cot B(\cot A-\cot B)}{\cot A+\cot B}$$

---

10. (a) கோசை (A+B) இற்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கோசை $2\theta \equiv 2$ கோசை$^2\theta - 1$ எனக் காட்டுக.

கோசை 2θ தான் θ + சைன் $\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

2 கோசை$^2\theta - 2$ கோசை$^2 2\theta \equiv$ கோசை $2\theta -$ கோசை 4θ
என்னும் சர்வசமன்பாட்டை நிறுவி, இதிலிருந்து
கோசை $\frac{\pi}{5} -$ கோசை $\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.
கோசை $\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ என உய்த்தறிந்து, கோசை $\frac{3\pi}{5}$
இற்கான ஒரு பெறுமானத்தைப் பெறுக.

(b) தான் $(A-B) \equiv \frac{\text{தான் } A - \text{தான் } B}{1+\text{தான் } A \text{ தான் } B}$ என்னும் சர்வசமன்பாட்டை நிறுவுக.

பின் வரும் சமன்பாடுகளின் x இற்கான தீர்வுகளைக் காண்க.

(i) தான் $x -$ தான் $(x-\alpha) =$ தான் α, $\alpha \neq 0$

(ii) தான்$^{-1} x +$ தான்$^{-1}(2x) = \pi/4$

விடை (a) $\cos(\theta+\theta) = \cos\theta.\cos\theta - \sin\theta.\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$\cos 2\theta \tan\theta + \sin\theta = 0$; $\tan\theta=0,\ \cos\theta=\frac{1}{2},\ \cos\theta=-1$

$\tan\theta\{2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\} = 0$; $\theta = n_1\pi,\ \theta = 2n_2\pi \pm \frac{\pi}{3},\ \theta = 2n_3\pi \pm \pi$

$2\tan\theta(\cos\theta - \frac{1}{2})(\cos\theta+1) = 0$; $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$\cos 2\theta - \cos 4\theta \equiv (2\cos^2\theta - 1) - (2\cos^2 2\theta - 1)$

$$\equiv 2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{5} \text{ ஆக}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{4\pi}{5} = 2\left\{\cos^2\frac{\pi}{5} - \cos^2\frac{2\pi}{5}\right\}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} = 2\left\{\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right\}\left\{\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right\}$$

$\therefore \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{\pi}{5} - (2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1) = \frac{1}{2}$

$$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\because 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \therefore \cos\frac{\pi}{5} > 0)$$

$$\cos\frac{3\pi}{5} = -\frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \quad (\because \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi \therefore \cos\frac{3\pi}{5} < 0)$$

(b) $\tan(A-B) \equiv \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} \equiv \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\cos A\cos B + \sin A\sin B}$

$$\equiv \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}$$

(i) $\tan x - \tan(x-\alpha) = \tan\alpha = \tan(x - \overline{x-\alpha})$, $\alpha \neq 0$

$\therefore 1 + \tan x\tan(x-\alpha) = 1$; $\tan x\tan(x-\alpha) = 0$

$\tan x = 0$ or $\tan(x-\alpha) = 0$

$x = n\pi$

(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}2x = \frac{\pi}{4}$

$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$

$\alpha \quad + \quad \beta \quad = \frac{\pi}{4} \qquad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

$\tan(\alpha+\beta) = 1$

$\frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \qquad 0 < \alpha < \pi/4$

$2x^2 + 3x - 1 = 0 \qquad 0 < \tan\alpha < 1$

$0 < x < 1$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$x = \frac{\sqrt{17} - 3}{4}$

$\left(\because \frac{-\sqrt{17} - 3}{4} < 0\right)$

---

11. X, Y என்பவை இரு மாறிகள் $Y = \frac{X - a}{b}$ ஆகுமாறு உள்ளன. இங்கு a, b என்பன மாறிலிகள். $\bar{X} = a + b\bar{Y}$ எனக் காட்டுக. இங்கு (‾) என்பது சராசரியைக் குறிக்கின்றது.

கிராமம் A, கிராமம் B ஆகியவற்றிலிருந்து எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்பட்ட 48 குடும்பங்களின் மாதவருமானத் தரவுகளின் பரம்பலை அட்டவணை காட்டுகின்றது.

100 ரூபாய்களில் மாத வருமானம்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	
	கிராமம் A	கிராமம் B
5 - 10	1	5
10 - 15	10	6
15 - 20	20	15
20 - 25	8	10
25 - 30	6	5
30 - 35	3	4
35 - 40	1	2
40 - 45	0	2

இக் கிராமங்கள் ஒவ்வொன்றிற்குமான இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகியவற்றைக் காண்க. உமது விடைகள் பற்றிக் குறிப்புரை தருக.

விடை $\quad x \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \; - - - - \; x_n$

$f \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \; - - - - - \; f_n$

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ இங்கு $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

$$y = \frac{x - a}{b} \implies x = by + a \quad \text{—} (1)$$

$y_i \; (i = 1, \vec{n})$ என்பது x_i இற்கு ஒத்த பெறுமானங்கள் எனின் $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i y_i \quad \therefore x_i = by_i + a, \; i = 1, 2, \dots n$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (by_i + a) = \frac{b}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i y_i + a$$

$$= b\bar{y} + a$$

$$Y = \frac{X - 17.5}{5}$$

வகுப்பிடைவெளி	நடுப்பெறுமானம்	கிராமம் A f	y	fy	கிராமம் B f	y	fy
5 – 10	7.5	1	-2	-2	5	-2	-10
10 – 15	12.5	10	-1	-10	6	-1	-6
15 – 20	17.5	20	0	0	15	0	0
20 – 25	22.5	8	1	8	10	1	10
25 – 30	27.5	6	2	12	5	2	10
30 – 35	32.5	3	3	9	4	3	12
35 – 40	37.5	1	4	4	2	4	8
40 – 45	42.5	0	5	0	2	5	10
		49		21	49		34

(1) இடை $\bar{X} = 5\bar{Y} + 17.5$

(a) கிராமம் A, $\bar{Y} = 21/49$ (b) கிராமம் B $\bar{Y} = 34/49$

$\therefore \bar{X} = 5(3/7) + 17.5 = 19.64$

$\therefore \bar{X} = 5(34/49) + 17.5 = 20.97$

(ii) இடையம்

கிராமம் A இடையம் $= 15 + \frac{5}{20}(13.5) = 18.4$

கிராமம் B இடையம் $= 15 + \frac{5}{15}(13.5) = 19.5$

(iii) ஆகாரம் $= I_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i = I_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

கிராமம் A $f_0 = 10,\ f_1 = 20,\ f_2 = 8$

ஆகாரம் $= 15 + \frac{8}{10+8} \times 5 = 17.22$

கிராமம் B $f_0 = 6,\ f_1 = 15,\ f_2 = 10$

ஆகாரம் $= 15 + \frac{10}{16} \times 5 = 15 + \frac{25}{8} = 18.12$

<u>குறிப்புரை</u>

இடை கிராமத்தின் சராசரி மாதவருமானத்தையும் இடையம் அந்த சராசரி குடும்பத்தின் வருமானத்தையும், ஆகாரம் சாதாரண குடும்பத்தின் வருமானத்தையும் தரும்.

கிராமம் B ஆனது A யிலும் கூட, இடையம், ஆகாரம் என்பனவற்றில் கூடியதாகும்.

எனவே கிராமம் B யிலும் கிராமத்தில் சராசரி மட்டம் (மாத வருமானம்) உயர்வானதாகும்.

12. டென்னிஸ் விளையாட்டுப் போட்டி ஒன்றிலே பங்குபற்றும் A, B எனும் விளையாட்டு வீரர்களுள் ஒருவர் இரு ஆட்டத்தொகுதிகளை வெல்லும் வரை அவர்கள் விளையாட வேண்டும். ஆட்டத்தொகுதிகளுள் ஏதாவது ஒன்றை A வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.40 ஆகும்.

(a) (i) போட்டியில் A வெல்வதற்கான, (ii) அடுத்து வரும் இரு ஆட்டத்தொகுதிகளிலும் B யைத் தோற்கடிப்பதன் மூலம் போட்டியில் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) போட்டியில் விளையாடப்பட்ட ஆட்டத்தொகுதிகளின் எண்ணிக்கையை எழுமாற்று மாறி X குறிப்பின், X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு, இதிலிருந்து, போட்டியில் அவர்கள் விளையாட வேண்டிய ஆட்டத்தொகுதிகளின் எதிர்பார்த்த பெறுமானத்தை (X இன் இடையை)க் காண்க.

(c) ஒவ்வொரு ஆட்டத்தொகுதிக்கும் ஒன்றரை மணித்தியாலம் எடுக்கின்றது. விளையாட்டுக் கழகம் வழங்குகின்ற வசதிகளுக்காக அவர்கள் ஒரு மணித்தியாலத்திற்கு 1000 ரூபாய் செலுத்த வேண்டியுள்ளது. போட்டிக்கான செலவை (Cost) எழுமாற்று மாறி Y குறிப்பின், Y யின் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு, இதிலிருந்து போட்டிக்கான எதிர்பார்த்த செலவை (Y இன் இடையை)க் காண்க.

விடை மாதிரி வெளி

(a) $x = \{AA, ABA, BAA, BB, BAB, ABB\}$

(i) $P(A) = P(AA) + P(ABA) + P(BAA)$

$= P(A)P(A) + P(A)P(B)P(A) + P(B)P(A)P(A)$

$= 0.4 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4 \times 0.4$

$= (0.16)(2.2) = 0.352$

(ii) $P(AA) + P(BAA) = 0.4 \times 0.4 + 0.6 \times 0.4 \times 0.4 = 0.256$

(b) $X = 2, 3$

$P(x=2) = P(AA) + P(BB) = 0.4 \times 0.4 + 0.6 \times 0.6 = 0.52$

$P(x=3) = 1 - p(x=2) = 1 - 0.52 = 0.48$

$X = x$	2	3
$P(x=x)$	0.52	0.48

$E(x) = \sum_{x=2}^{3} x P(x=x)$

$= (2)(0.52) + 3(0.48)$

$= 1.04 + 1.44 = 2.48$

(c)
$$Y = \begin{cases} 3000/= & x = 2 \\ 4000/= & x = 3 \end{cases}$$

$Y = y$	3000	4500
$P(y=y)$	0.52	0.48

$E(y) = 3000 \times .52 + 4500 \times .48$

$= 1560 + 2160 = 3720$

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 1. க.பொ.த.(உயர்தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ற், 1991.
(விசேட, 1992.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

(1)(i) $\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{4} + \frac{a+7}{8} + \frac{a+15}{16} + \dots$ என்னும் தொடரின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. இங்கு a ஒரு மாறிலி.

(ii) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)(r+3)}$ என்பதன் பெறுமானத்தைத் துணிக.
$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)(r+3)}$ இன் பெறுமானம் கூறுக.

(iii) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு விதமாக $7^{2n} - 48n - 1$ என்பது 2304 என்பதால் வகுபடுமென நிறுவுக.

விடை
(i) பொது உறுப்பு $U_r \equiv \frac{a+2^r-1}{2^r} \equiv \frac{a-1}{2^r} + 1$ ஆகும்.

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{a-1}{2^r}+1\right) = \sum_{r=1}^{n} 1 + (a-1)\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r}$$
$$= n + (a-1)S_n$$

இங்கு $S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r}$, $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots \frac{1}{2^n}$ — ①

$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$ — ②

① − ② $\Rightarrow \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

$\therefore S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

$\therefore \frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{4} + \frac{a+7}{8} + \dots = n + (a-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

(ii) பொது உறுப்பு $U_r \equiv \frac{1}{r(r+2)(r+3)} \equiv \frac{A}{r} + \frac{B}{r+2} + \frac{C}{r+3}$

பகுதிப்பின்னமாக்கல் விதியால் $A = 1/6$ $B = -1/2$ $C = 1/3$

$U_r \equiv \frac{1/6}{r} + \frac{-1/2}{r+2} + \frac{1/3}{r+3}$; $6U_r \equiv \frac{1}{r} - \frac{3}{r+2} + \frac{2}{r+3}$

$$\equiv \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) + \left(\frac{-2}{r+2} - \frac{-2}{r+3}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} - \frac{2}{r+2}\right) - \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} - \frac{2}{r+3}\right)$$

$\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} \equiv f(r)$ எனின்

$6U_r = f_r - f_{(r+1)}$

$6U_1 = f_1 - f_2$

$6U_2 = f(2) - \cancel{f(3)}$

$6U_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(4)}$

$\vdots$

$6U_{(n-1)} = f(n-1) - \cancel{f(n)}$

$6U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$6\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)(r+3)} = \frac{1}{6}\left\{\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right)\right\}$$

$$= \frac{5}{36} - \frac{(3n+5)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$n \to \infty \quad \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+2)(r+3)} \longrightarrow \frac{5}{36}$$

முடிவுள்ள பெறுமானம் ஆகவே ஒருங்கும் தொடர்.

(ii) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \dots x^n$

$x = 48$ ஆக $(48+1)^n = 1 + 48n + \frac{n(n-1)48^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)48^3}{6} \dots + 48^n$

$49^n = 1 + 48n + 48^2 k \qquad k \to$ ஒருமை (முழு எண்)

$49^n - 48n - 1 = 48^2 k \quad \therefore \frac{49^n - 48n - 1}{2304} =$ முழு எண் (k)

$\therefore 49^n - 48n - 1$ ஆனது 2304 இனால் வகுபடும்.

02.(i) $|2x+5| - |x+6| < 2$ ஆக இருக்கும் x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

(ii) $f(x)$ என்னும் சார்பானது $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) எல்லா x இற்கும் $|f(x)| < 1$ எனவும்

(b) $x = f(y)$ எனின் $y = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ எனவும் காட்டுக.

அத்தோடு $y = f(x)$, $y = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ என்பவற்றின் வரைபுகள் இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று உற்பத்தியிலே தொடுகின்றன எனவும் காட்டுக.

விடை (i) $|2x+5| - |x+6| < 2$

	$x < -6$	$-6 < x < -5/2$	$x > -5/2$
$2x+5$	$-$	$-$	$+$
$x+6$	$-$	$+$	$+$

ஆயின் $x < -6$ எனின்

$-(2x+5) - -(x+6) < 2 \; ; \; -x+1 < 2 \; ; \; x > -1 \quad \therefore$ இந்த இடையில் பெறுமானங்கள் இல்லை

வகை 2: $-6 \le x < -5/2$ எனின் $-(2x+5)-(x+6)<2$

$x > -13/3$

$\therefore -5/2 > x > -13/3$

வகை 3: $x \ge -5/2$ எனின் $(2x+5)-(x+6)<2$; $x<3$

$\therefore$ பொதுவாக $-13/3 < x < 3$

(ii)(a) $e^x = \tan t = t$ எனக் $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{-(1-t^2)}{(1+t^2)}$

$= -\cos 2t$

$\therefore |f(x)| = |\cos 2t| < 1 \quad \therefore |f(x)| < 1$

(b) $x = f(y)$; $x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$; $(0<)\ \frac{x+1}{1-x} \quad (e^{2y} > 0)$

$2y = \log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$y = f(x)$	$y = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
$x=0$ ஆக $y = \frac{e^{2\cdot 0}-1}{e^{2\cdot 0}+1} = 0$	$x=0$ ஆக $y = \log_e\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0$
$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x}+1)e^{2x}\cdot 2 - (e^{2x}-1)e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x}+1)^2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right\}$
$= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$	$\frac{dy}{dx}(0,0) = \frac{1}{2}\{1+1\} = 1$
$\frac{dy}{dx}(0,0) = 1$	

எனவே (0,0) இல் இவ்விரு வளையிகளுக்கும் தொடுகோடு $y=x$. இரு வளையிகளும் (0,0) இல் ஒன்றை ஒன்று தொடும்.

03.(i) a, b என்பன மெய் எண்களாக இருக்கும் எனின் $(a^2+b)^2 + (b^2+a)^2 < (a^2+b^2+1)^2$ எனக் காட்டுக.

(ii) x மெய் எனின் $\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2}$ என்னும் பின்னத்திற்கு சார்பின் இடையே கொள்ள முடியாத இரு பெறுமானங்கள் இருக்கின்றன எனக் காட்டி, அப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) $S = 3x^2 - 28x + 60$ எனவும் $S' = 5x^2 - 32x + 56$ எனவும் இருப்பின், $r(x-\alpha)^2$ என்னும் வடிவத்திலே $pS - qS'$ இருப்பதற்கான $\frac{p}{q}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து அவ்வாறு வேறு விதமாக,

$3x^2 - 28x + 60 = l(x-h)^2 + m(x-k)^2$ ஆகவும்

$5x^2 - 32x + 56 = l'(x-h)^2 + m'(x-k)^2$ ஆகவும்

இருக்கத்தக்கதாக l, m, l', m', h, k என்பவற்றைக் காண்க.

விடை

(i) $(a^2+b^2+1)^2 - (a^2+b)^2 - (b^2+a)^2 = 2a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - 2a^2b - 2ab^2$

$= (ab-a-b)^2 + a^2b^2 + 2ab + 1 = \underbrace{(ab-a-b)}_{\geq 0} + \underbrace{(ab+1)^2}_{> 0}, \ \forall a,b$

$\therefore (a^2+b^2+1)^2 > (a^2+b)^2 + (a+b^2)^2$

(ii) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+3x+2} \qquad x \neq -1, -2$

$(y-1)x^2 + (3y-2)x + 2y - 3 = 0, \ y \neq 1$

தன்மைகாட்டி $\Delta x = (3y-2)^2 - 4(y-1)(2y-3)$

$= y^2 + 8y - 8 \geq 0$

$(y-\alpha)(y-\beta) \geq 0, \ \alpha < \beta$

	$y < \alpha$	$\alpha < y < \beta$	$y > \beta$
$y-\beta$	$-$	$-$	$+$
$y-\alpha$	$-$	$+$	$+$
$(y-\alpha)(y-\beta)$	$+$ ✓	$-$	$+$ ✓

$\alpha, \beta = \dfrac{-8 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{6}$

$\alpha = -4 - 2\sqrt{6}, \ \beta = -4 + 2\sqrt{6}$

$y \leq \alpha, \ y \geq \beta$ $\therefore$ தரப்பட்ட சார்பானது (y) α, β இடையில் எப் பெறுமானத்தையும் பெறாது.

(iii) $pS - qS' = r(x-\alpha)^2$; $\dfrac{p}{q}S - S' = \dfrac{r}{q}(x-\alpha)^2$; $\dfrac{p}{q} = k$ என்க

$kS - S' = k(3x^2 - 28x + 60) - (5x^2 - 32x + 56)$

$= (3k-5)x^2 - 4(7k-8)x + 4(15k-14)$

இது ஒரு நிறைவர்க்கமாக இருக்க வேண்டுமெனின்

$\sqrt{4(15k-14)(3k-5)} = 4(7k-8)$

$(15k-14)(3k-5) = (7k-8)^2$; $4k^2 + 5k - 6 = 0$

$(k+2)(4k-3) = 0$; $k = -2$ or $3/4$ $\therefore \dfrac{p}{q} = -2$ or $3/4$

$k = -2$ ஆக

$-2S - S' = -11x^2 + 88x - 176$

$2S + S' = 11(x-4)^2$ — ①

$k = 3/4$ ஆக

$\frac{3}{4}S - S' = \frac{-11}{4}x^2 + 11x - 11$

$3S - 4S' = -11(x-2)^2$ — ②

$4 \times ① + ② \Rightarrow \quad 11S = 11 \cdot 4(x-4)^2 - 11(x-2)^2$

$S = 4(x-4)^2 - (x-2)^2$; $l = 4, m = -1$

$① \times 3 - ② \times 2 \Rightarrow 11S' = 11 \cdot 3(x-4)^2 + 2 \cdot 11(x-2)^2$

$$S' = 3(x-4)^2 + 2(x-2)^2$$

$$l' = 3,\ m' = 2 \ ;\ h = 4 \quad k = 2$$

04.(i) u, v என்பன $uv = 2$, $u^3 + v^3 = 9$ என்பவற்றைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கல் எண்களாகும்.
(i) $u^3 = 1$ அல்லது 8 எனவும் (ii) $z^3 - 6z - 9 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை $z = u + v$ திருப்தி செய்கிறது எனவும் காட்டுக.
இதிலிருந்து $\omega^3 = 1$ ஆகுமாறு ω ஒரு சிக்கல் எண்ணாயிருக்க $3, \omega + 2\omega^2, \omega^2 + 2\omega$ என்பன z இலுள்ள தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும் எனக் காட்டுக.

(ii) z ஒரு சிக்கல் எண் எனின்

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 = \frac{1 - 5z^4 + 4z^5}{(1-z)^2}, \quad z \neq 1$$

எனக் காட்டுக.

$z =$ கோசை $\theta + i$ சைன் θ என இட்டு, த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$1 + 2\text{ கோசை }\theta + 3\text{ கோசை }2\theta + 4\text{ கோசை }3\theta = \frac{5\text{ கோசை }3\theta - 4\text{ கோசை }4\theta - \text{கோசை }\theta}{2(1 - \text{கோசை }\theta)}$$

என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

(i)(i) $uv = 2$; $u^3 + v^3 = 9$; $u^6 - 9u^3 + 8 = 0$; $u^3 = 1 \text{ or } 8$

$v = 2/u \qquad \frac{8}{u^3} + u^3 = 9 \qquad (u^3 - 1)(u^3 - 8) = 0$

(ii) $z^3 - 6z - 9 = 0$ இல் $z = u + v$ என பிரதியிட

$$z^3 - 6z - 9 = (u+v)^3 - 6(u+v) - 9$$
$$= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 6(u+v) - 9$$
$$= 9 + 3 \cdot 2(u+v) - 6(u+v) - 9 = 0$$

$z^3 - 6z - 9 = 0$ ஐ திருப்தி செய்யும்.

u	$v(=2/u)$	$u+v$
1	2	3
ω	$\frac{2}{\omega} = \frac{2\omega^2}{\omega^3} = 2\omega^2$	$\omega + 2\omega^2$
ω^2	$\frac{2}{\omega^2} = \frac{2\omega}{\omega^3} = 2\omega$	$\omega^2 + 2\omega$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $3, \omega + 2\omega^2, \omega^2 + 2\omega$

(ii) $S = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3$ என்க

$zS = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4$

$$(1-z)S = \underbrace{1 + z + z^2 + z^3}_{\text{இது பெருக்கல் விருத்தி}} - 4z^4$$

$$= \frac{(1-z^4)}{1-z} - 4z^4, \; z \neq 1 \quad = \frac{1-5z^4+4z^5}{1-z}$$

$$S = 1+2z+3z^2+4z^3 = \frac{1-5z^4+4z^5}{(1-z)^2}, \quad z \neq 1$$

$$S = \frac{z^{-1}-5z^3+4z^4}{z^{-1}-2+z}\;; \quad z = \cos\theta + i\sin\theta \text{ எனப்பிரதியிட}$$

$$1+2(\cos\theta+i\sin\theta)+3(\cos\theta+i\sin\theta)^2+4(\cos\theta+i\sin\theta)^3 =$$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta} - 5(\cos\theta+i\sin\theta)^3 + 4(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)} - 2 + (\cos\theta+i\sin\theta)}$$

த மோய்வரின் தேற்றத்தினால்

$$1+2(\cos\theta+i\sin\theta)+3(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+4(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) =$$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta} - 5(\cos 3\theta+i\sin 3\theta) + 4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)}{\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta} - 2 + (\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta) - 5(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + 4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)}{(\cos\theta - i\sin\theta) - 2 + (\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta) - 5(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) + 4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)}{2(\cos\theta - 1)}$$

இரு பக்கமும் மெய்ப் பகுதிகளைச் சமப்படுத்த

$$1 + 2\cos\theta + 3\cos 2\theta + 4\cos 3\theta = \frac{\cos\theta - 5\cos 3\theta + 4\cos 4\theta}{2(\cos\theta - 1)}$$

$$= \frac{5\cos 3\theta - 4\cos 4\theta - \cos\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

---

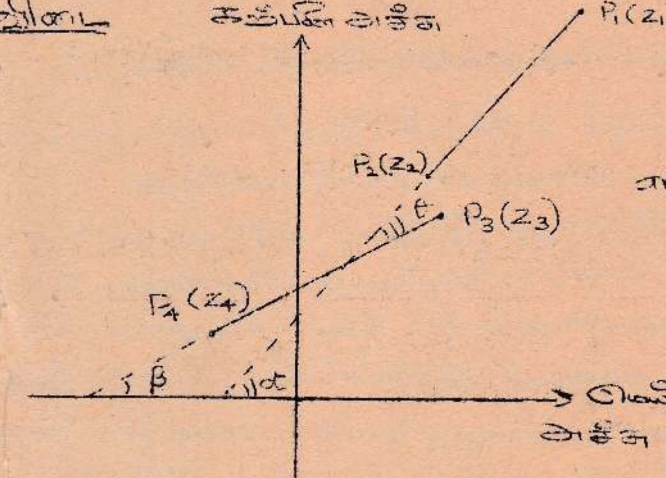
05. ஆகன் வரிப்படத்தில் z_1, z_2, z_3, z_4 என்னும் சிக்கல் எண்கள் முறையே P_1, P_2, P_3, P_4 என்னும் புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. சிக்கல் எண் $\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ இன் மட்டையும் வீச்சையும் கேத்திரகணித முறையாக விளக்குக.

$p^2 < q$ ஆகுமாறு p, q என்பன மெய் எண்களாகும்.

$z^2 - 2z + 2 = 0$, $z^2 - 2pz + q = 0$ என்னும் சமன்பாடுகளின்

மூலங்கள் முறையே A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளால் வகை குறிக்கப்படுகின்றன; O உற்பத்தியாகும்.
பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் p, q ஆகியவற்றினிடையே திருப்தி செய்யப்படும் அட்சர கணிதத் தொடர்பைக் காண்க.
(i) $C\hat{O}D$ ஒரு நேர்க் கோணமாகும் (ii) A, B, C, D ஆகியன O யிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ளன. (iii) A, B, C, D ஆகியன சதுரம் ஒன்றின் உச்சிகளாகும்.

விடை



$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}\right| = \frac{P_2P_1}{P_4P_3} = \frac{|z_1-z_2|}{|z_3-z_4|} \ (\geq 0)$$

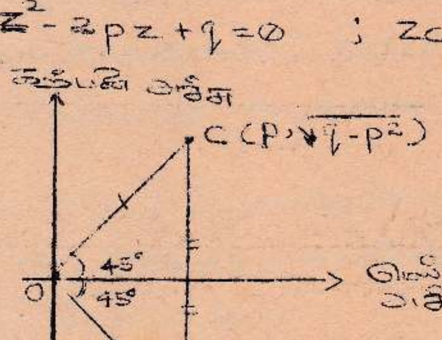
$$\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4} = \theta = \alpha - \beta =$$
$$\arg z_1-z_2 - \arg z_3-z_4$$

இங்கு $-\pi \leq \theta \leq \pi$ என வரையறுக்கப்படுகின்றது

$z^2-2z+2=0$; $z_A, z_B = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm j$

$z^2-2pz+q=0$; $z_C, z_D = \frac{2p\pm\sqrt{4p^2-4q}}{2} = p \pm \sqrt{-(q-p^2)}$
$= p \pm \sqrt{q-p^2}\, j$

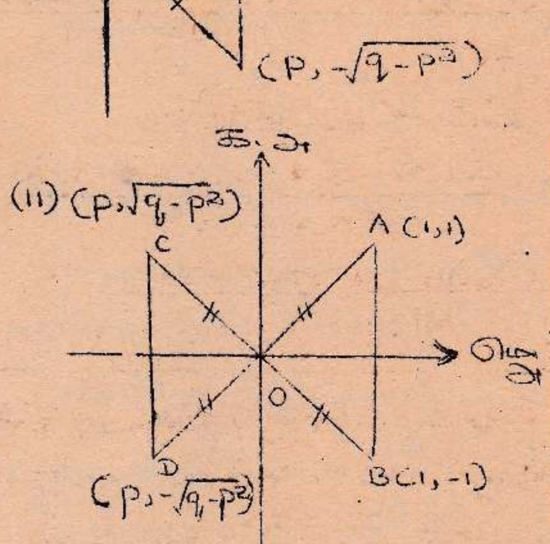
(i)



$$\tan 45 = \frac{\sqrt{q-p^2}}{|p|}$$

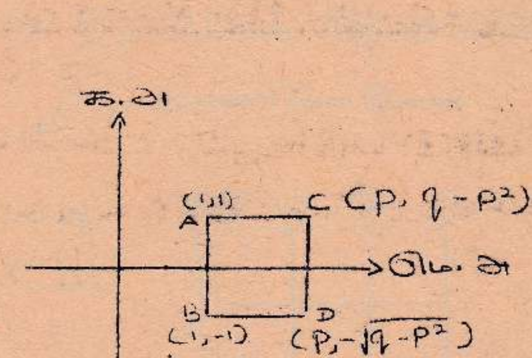
$p^2 = q-p^2$; $q = 2p^2$

(ii)



$OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2$
$1+1 = p^2 + q - p^2$
$q = 2$

(iii)



சதுர மொன்றில் $AB = CD$

$2 = 2\sqrt{q-p^2}$

$\sqrt{q-p^2} = 1$; $q-p^2 = 1$

$AC^2 = AB^2$; $(p-1)^2 = 4$

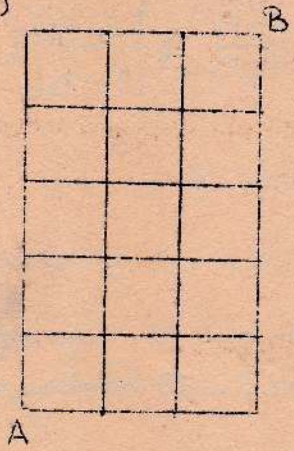
$p = 3$ or -1 $\quad q = 10$ or 2

06.(i) 8 பிரயோகத்தர்களிடமிருந்து வழங்கப் பெற்ற பொருட்களை வழங்கப்படக்கூடிய கட்டளைகளை இருக்கும் கம்பனி ஒன்று 5 வரவழைக்கும் கட்டளைகளை இருக்க விரும்புகின்றது.

(a) வரவழைக்கும் கட்டளைகள் 5 உம் கிடைக்கக் கூடிய வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையையும்,

(b) குறித்த ஒரு பிரயோகத்தர் I (ஒன்று) பெறும் வரவழைக்கும் கட்டளைகளின் எண்ணிக்கை செப்பமாக 2 ஆக இருப்பதற்கான வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(ii)



தரப்பட்டுள்ள உருவில் இடமிருந்து வலப் பாதைகளையும் கீழிருந்து மேல் பாதைகளையும் கொண்ட வலையமைப்பைக் கருதுக.

இங்கு அனுமதிக்கப்படும் இயக்கங்கள் (α) வலப் பக்கத்தை நோக்கிய கிடை இயக்கமாகவும், (β) மேல் நோக்கிய நிலைக்குத்து இயக்கமாகவும் இருப்பின், A யிலிருந்து B இற்கான பாதைகளின் எண்ணிக்கையை காரணங்கள் தந்து துணிக. இவற்றிலே, ஒரு விதமாகவோ எண் 5 ஐ மறையாத நான்கு நிறைவெண்களின் கூட்டுத்தொகையாக அமைக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

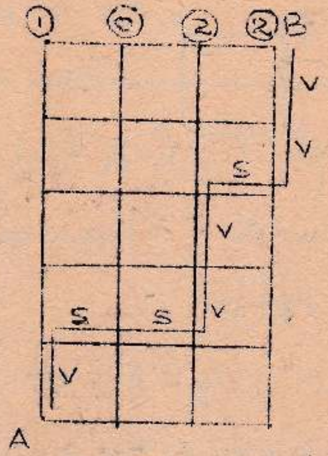
விடை

(i)(a) ஒவ்வொரு கட்டளை 8 வழிகளில் இருக்க முடியும். ∴ 5 கட்டளை இருக்க அமையும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= 8\times8\times8\times8\times8$

$= 32768$

(b) I பெறும் கட்டளைகள் செப்பமாக 2 ஆக அமையும் எண்ணிக்கை $= 5_{C_2}\times7\times7\times7 = 5C_2\times7^3$

(ii)



கிடை இயக்க வகைகள் 3 (SSS) ஆகவும் மேல் நோக்கிய இயக்க வகைகள் 5 (VVVVV) ஆகவும் அமைகின்றன.

SSSVVVVV என்பவற்றின் வரிசை மாற்றங்கள் $= \frac{8!}{5!\,3!} = 56$ (or $8_{C_3} = 8_{C_5}$)

கடைசியொன்றிலும் உள்ள V களின் எண்ணிக்கையின் கூட்டுத்தொகை 5 ஆகும். உ+ம் $1+0+2+2 = 5$

∴ 56 வழிகளில் 5 ஐ மறையாத 4 எண்களாக

07.(i) நேர் முழுவெண் சுட்டி ஒன்றுக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறுக. $(1+x)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகம் C_r எனின், (a) பகுதிப் பின்னங்கள் மூலமாகவோ, வேறு விதமாகவோ,

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{C_r}{(x+r)}$$ எனவும்

(b) $\sum_{r=0}^{n} C_r^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{15}$ இன் விரிவில் (a) x ஐச் சாராத உறுப்பு,
(b) அதியுயர் எண் பெறுமானத்தை உடைய குணகம்
(c) $x = 3/4$ ஆக இருக்கும் போது அதியுயர் எண் பெறுமானத்தை உடைய உறுப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடை (i) $(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, a^{n-r} x^r$

(a) பொது உறுப்பான $U_r \equiv \frac{A}{x+r}$ எனக் கருதுக.

$$A = \frac{n!}{(-r.-(r-1).-(r-2)\ldots-1)(1.2\ldots n-r)}$$
$$= \frac{n!}{(-1)^r r! \times n-r!} = (-1)^r\, {}^nC_r \quad ; \quad U_r \equiv \frac{(-1)^r\, {}^nC_r}{x+r}$$

$$\therefore \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\, {}^nC_r}{x+r}$$

(b) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 \ldots + C_rx^r \ldots + C_nx^n$

$(1+x^n) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} \ldots + C_rx^{n-r} \ldots + C_n$

$(1+x)^{2n}$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகம் $= \sum_{r=0}^{n} C_r^2$

$$\sum_{r=0}^{n} C_r^2 = {}^{2n}C_n = \frac{2n!}{n!.n!} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$

(ii) (a) $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{15}$ இன் விரிவில் U_{r+1} வது உறுப்பு $= {}^{15}C_r (2x)^{15-r} . \left(\frac{-1}{4x^2}\right)^r$

x ஐச் சாராத உறுப்பு எனில் x இன் வலு பூச்சியம்.

$x^{15-r} . x^{-2r} = x^0 \; ; \; 15-3r = 0 \; ; \; r = 5$

x ஐச் சாராத உறுப்பு $U_6 = {}^{15}C_5 . 2^{10} . (-1)^5 . \frac{1}{4^5} = -{}^{15}C_5$

(b) $T_{r+1} \geq T_r$ எனின் ... அதியுயர் உறுப்பின் குணகம் முந்திய உறுப்பின் குணகத்திலும் பெரிதாக

or சமமாக or சிறிதாக இருக்கும்.

${}^{15}C_r\, 2^{15-r}\left(\frac{1}{4}\right)^r \gtreqless {}^{15}C_{r-1}\, 2^{16-r}\left(\frac{1}{4}\right)^{r-1}$; $\frac{\frac{1}{4}}{r} \gtreqless \frac{2}{16-r}$

$16-r \gtreqless 8r$; $16 \gtreqless 9r$; $1+\frac{7}{9} \gtreqless r$

$T_{r+1} > T_r \Rightarrow 1+\frac{7}{9} > r$ மிகப் பெரிய உறுப்பு T_2

$T_2 > T_1$ $\qquad r = 1$

$T_{r+1} \neq T_r \Leftrightarrow 1+\frac{7}{9} \neq r$ அதன் பெறுமதி

$T_{r+1} < T_r \qquad 1+\frac{7}{9} < r \qquad {}^{15}C_1 \times 2^{14} \times \frac{1}{4} = {}^{15}C_1 \times 2^{12}$

$T_{16} \ldots < T_3 < T_2$

$u_{r+1} \gtreqless u_r$ என்பதற்கேற்ப பின்தொடரும் உறுப்பு முந்தியதிலும் பெரிதாக or சமனாக or சிறிதாக இருக்கும்.

${}^{15}C_r (2x)^{15-r}\left(\frac{1}{4x^2}\right)^r \gtreqless {}^{15}C_{r-1}(2x)^{16-r}\left(\frac{1}{4x^2}\right)^{r-1}$; $\frac{\frac{1}{4x^2}}{r} \gtreqless \frac{2x}{16-r}$

$\frac{1}{r\cdot\frac{9}{4}} \gtreqless \frac{2\cdot 3/4}{16-r}$; $8(16-r) \gtreqless 27r$; $128-8r \gtreqless 27r$

$128 \gtreqless 35r$; $3+\frac{23}{35} \gtreqless r$; $u_{r+1} > u_r \quad 3+\frac{23}{35} > r$

$u_4 > u_3 > u_2 > u_1$; $u_{r+1} \neq u_r \Leftrightarrow 3+\frac{23}{35} \neq r$

$u_{r+1} < u_r \qquad 3+\frac{23}{35} < r$

$u_{16} < \ldots u_5 < u_4$ மிகப் பெரிய உறுப்பு u_4

அதன் பெறுமதி $= {}^{15}C_3 \left(2\cdot\frac{3}{4}\right)^{12}\left(\frac{1}{4\cdot\frac{9}{16}}\right)^3 = {}^{15}C_3 \cdot \frac{3^6}{2^6}$

---

08. (i) x ஐக் குறித்து கோசீக x இன் பெறுதியை முதற்கோட்பாடுகளில் இருந்து காண்க.

(ii) x ஐக் குறித்து

$$\frac{1}{3}\log_e \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \text{ ஐ}$$

வகையிடுக.

(iii) $y = \tan(x+y)$ எனின் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ y இல் மாத்திரம் பெறுக.

விடை

$$\frac{d\,\mathrm{Cosec}\,x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Cosec}\,x+h - \mathrm{Cosec}\,x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(\sin x+h - \sin x)}{h \sin x+h \sin x} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\cos x+\frac{h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h \sin x+h \sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cos x+\frac{h}{2}}{\sin x+h/2\,\sin x} \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2} \times \frac{1}{2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x\,\mathrm{Cosec}\,x$$

(ii) $y = \frac{1}{3}\{\ln_e x+1 - \frac{1}{2}\ln_e x^2 - x + 1\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+(2x-1)^2/3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^2-x+1)}\cdot(2x-1-3)$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\,\frac{(x-2)}{(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\frac{(x^2-x+1)}{(x^3+1)} + (-x^2+x+2) = \frac{1}{x^3+1}$$

(iii) $y = \tan x + y \;;\; x + y = \tan^{-1} y$.

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} \;;\; \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx} = -1 \;;\; \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^2)}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{y^2} - 1 \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = -1\frac{-2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{-2(1+y^2)}{y^5}$$

---

03. (i) $\int e^{ax}$ கோசை $bx\,dx$ ஐக் காண்க; இங்கு a, b என்பன மாறிலிகள்.

(ii) $a > b > 0$, $b > a > 0$ என்னும் வகைகளுக்கு

$\int \frac{c \text{ சைன் } x + d}{a + b \text{ கோசை } x}\,dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{3 + 5 \text{ கோசை } 2x}$ என்பதைக் காண்க.

(iii) $I(k) = \int_0^k x^2 e^{-x}\,dx$ என்ற தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க. எல் $\lim_{k\to\infty} I(k)$ உண்டா இதனை வெளிப்படுத்துக

விடை

(i) $$I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \cos bx\,\frac{e^{ax}}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= \cos bx\,\frac{e^{ax}}{a} + \frac{b}{a}\left\{\sin bx\,\frac{e^{ax}}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right\}$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)}(a\cos bx + b\sin bx)$$

(ii) $$\int \frac{c\sin x + d}{a + b\cos x}\,dx = c\int\frac{\sin x}{a+b\cos x}\,dx + \int\frac{d}{a+b\cos x}\,dx$$

$$= \frac{-c}{b}\ln|a + b\cos x| + d\,I \text{ இங்கு } I = \int\frac{d}{a+b\cos x}\,dx$$

$\tan x/2 = t$ எனக் ; $x = 2\tan^{-1} t$; $dx = 2/1+t^2$

$$I = \int \frac{2/1+t^2 \cdot dt}{a + b(1-t^2)/1+t^2} = 2\int\frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2}$$

$a > b > 0 \Rightarrow a+b > 0,\ a-b > 0$

$$\therefore I = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan x/2$$

$$\therefore \int \frac{c\sin x + d}{a+b\cos x}\,dx = \frac{-c}{b}\ln|a+b\cos x| + \frac{2d}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

$b > a > 0 \Rightarrow a+b > 0,\ b-a > 0$; $I = 2\int \frac{dt}{(a+b)-(b-a)t^2}$

$$\therefore I = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{a+b}} \times \frac{1}{\sqrt{b-a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}\tan x/2}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b-a}\tan x/2}\right|$$

$$\int \frac{c\sin x + d}{a+b\cos x}\,dx = \frac{-c}{b}\ln|a+b\cos x| + \frac{d}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b-a}\tan x/2}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b-a}\tan x/2}\right|$$

$\tan x = t$; $x = \tan^{-1} t$; $dx = \frac{1}{1+t^2}\cdot dt$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{3+5\cos 2x} = \int_0^1 \frac{dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)} = \int_0^1 \frac{dt}{8-2t^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{4-t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2.2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|_0^1 = \frac{1}{8}\ln 3$$

(iii) $$I(k) = \int_0^k x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^k + 2\int_0^k x e^{-x}\,dx$$

$$= -k^2 e^{-k} + 2\left\{-xe^{-x}\Big|_0^k + \int_0^k e^{-x}\,dx\right\}$$

$$= -k^2e^{-k} + -2ke^{-k} + -2e^{-k} + 2 = \frac{-(k^2+2k+2)}{e^k} + 2$$

$$= \frac{-(k^2+2k+2)}{1+\frac{k}{1!}+\frac{k^2}{2!}+\frac{k^3}{3!}\cdots\infty} + 2$$

$k \to \infty$ ஆக $I(k) \to 2$ இது முடிவுள்ள பெறுமானம்.

எனவே $\lim_{k\to\infty} I(k)$ உண்டு.

10.(i) $\log_e\left\{\frac{1-2x}{(1+2x)^2}\right\}$, $|x| < \frac{1}{2}$ என்பதை விரிக்க. x^4 வரைக்குமான x இன் வலுக்களில் தொடர் விரிவினைப் பெறுக. இதனைப் பயன்படுத்தி, $\log_e(5/9)$ இற்கான அண்ணளவுப் பெறுமானம் ஒன்றை 3 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகப் பெறுக.

(ii) $y = x^3+2x+4$ என்னும் வளையியின் பருமட்டான படம் ஒன்றை வரைக. x இன் ஒரு மெய்ப் பெறுமானத்துக்கு மாத்திரம், $x = \alpha$ என்க, y மறைகின்றதெனக் காட்டுக. $x_1 = -1$ என்பதை x இன் ஒரு அண்ணளவாக்கமாகக் கொண்டும்,

∴ $6x_{s+1} = -(x_s^3 - 4x_s + 4)$ என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தியும் α இற்கான மேலும் இரு அண்ணளவாக்கங்களைப் பெறுக. s என்பது > 0 ஆன முழு எண்.

விடை

(i) $f(x) = \ln\left(\frac{1-2x}{(1+2x)^2}\right)$; $|x| < \frac{1}{2}$

$= \ln(1-2x) - 2\ln(1+2x)$ —— ①

$g(x) = \ln(1+x) \Rightarrow g(0) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow g'(0) = 1$; $g''(x) = \frac{-1}{1+x^2} \Rightarrow g''(0) = -1$

|||ey $g'''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow g'''(0) = 2$

$g^{iv}(x) = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow g^{iv}(0) = -6$

$\therefore \ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$

$\therefore f(x) = -2x - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \frac{(-2x)^4}{4}$

$- 2\left[2x - \left(\frac{2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^3 - \cdots\right]$ for $|x|<1$

$= -6x + 2x^2 - 8x^3 + 4x^4 + \cdots$

$f(0.1) = \ln\left(\frac{1-0.2}{1.2^2}\right) = \ln(5/9)$

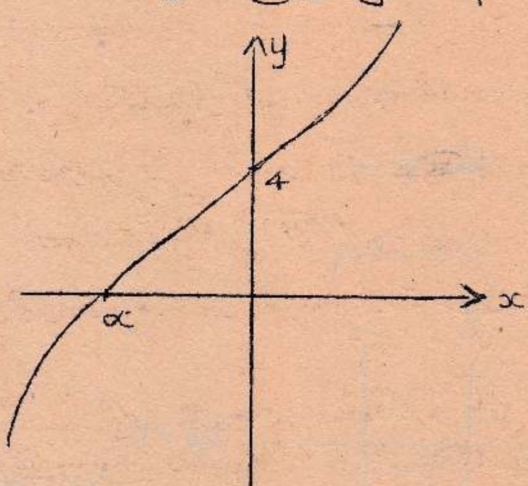
$= -0.6 + 2.(.1)^2 - 8.(.1)^3 + 4.(.1)^4$

$= -0.6 + 0.02 - 0.008 + 0.004 = -0.588$

(ii) $y = x^3 + 2x + 4$; $y \to \infty$ ஆக $x \to \infty$ & $y \to -\infty$ ஆக $x \to -\infty$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2 > 0$ எல்லா x க்கும்.

$x = 0$ ஆக $y = 4$



$6x_{s+1} = -(x_s^2 - 4x_s + 4)$

$6x_2 = -7 \Rightarrow x_2 = -6/7$

& $6x_3 = -\left\{\frac{-216}{343} + \frac{24}{7} + 4\right\}$

$= -1.133$

1. $x = e^{-t}$ சைன் t, $y = e^{-t}$ கோசை t, $0 \le t \le 2\pi$
என்பவற்றினாலே வளையி C தரப்படுகின்றது. $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$
ஆகியவற்றைக் காண்க. உயர்வுகள் இழிவுகள் என்ப
வற்றையும் திரும்பலின் அச்சுகளைக் கொண்டு வளையி
C ஐப் பருமட்டாக வரைக.

இதே வரிப்படத்தில், $x = -e^{-t}$ கோசை t, $y = e^{-t}$ சைன் t
$0 \le t \le 2\pi$ என்பவற்றினாலே தரப்படும் வளையி C' ஐப்
பருமட்டாக வரைக.

விடை $x = e^{-t}\sin t \qquad y = e^{-t}\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$x = 0 \quad t = 0, \pi, 2\pi \qquad y = 0 \quad t = \pi/2, 3\pi/2$

வெட்டுப் புள்ளிகள் பெறப்பட்டது.

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{dx/dt} = -\frac{(\sin t + \cos t)}{\cos t - \sin t}, \quad e^{-t} \neq 0$$

$$= -\frac{(\tan t + 1)}{1 - \tan t} = -\tan \pi/4 + t$$

$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \pi/4 + t = 0, \pi, 2\pi \ldots\ldots; \; t = 3\pi/4, 7\pi/4 \; (\because t \neq -\pi/4)$

$\frac{dy}{dx} = \infty \qquad \pi/4 + t = \pi/2, 3\pi/2 \ldots\ldots; \quad t = \pi/4, 5\pi/4$

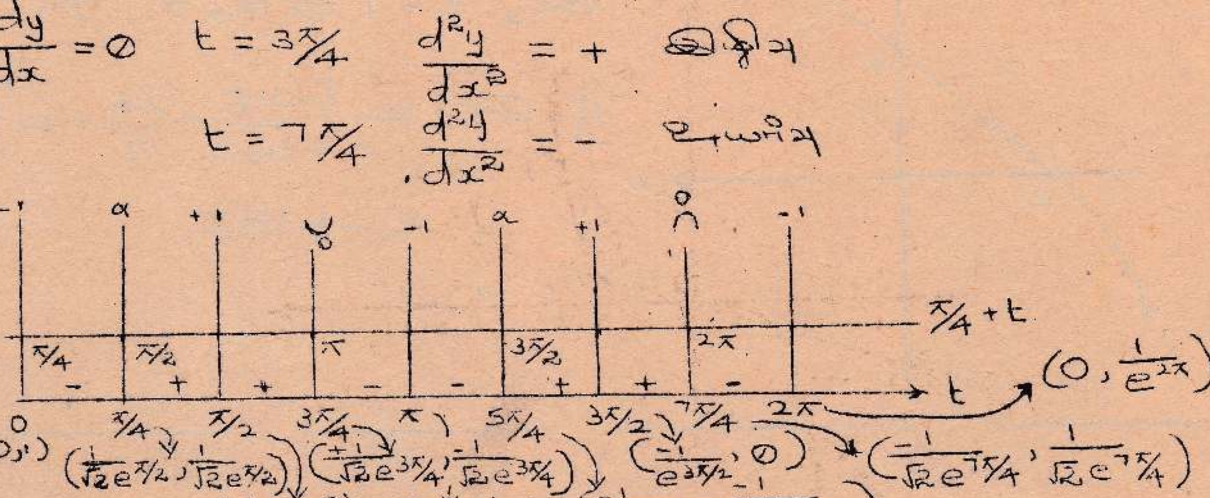
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(dy/dx)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dx}{dt}\cdot\frac{1}{dx/dt}$$

$$= -\sec^2 \pi/4 + t \times \frac{1}{e^{-t}(\cos t - \sin t)} = -\frac{\sec^2 \pi/4 + t}{\sqrt{2}\cos \pi/4 + t}\, e^t$$

$$= \frac{-e^t}{\sqrt{2}\cos^3 \pi/4 + t}$$

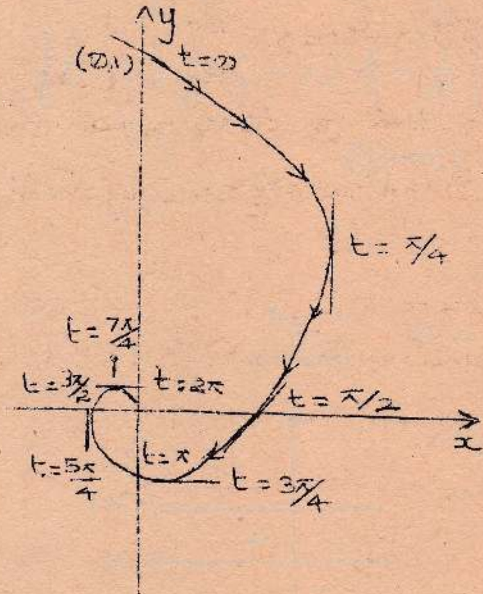
$\frac{dy}{dx} = 0 \quad t = 3\pi/4 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = + \quad$ இழிவு

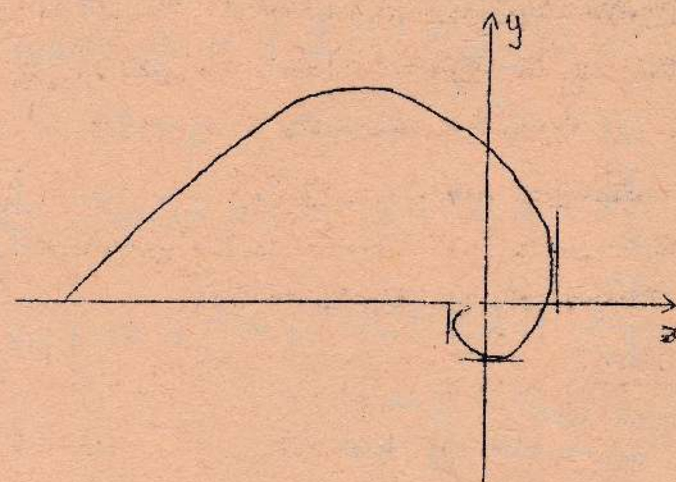
$\qquad t = 7\pi/4 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = - \quad$ உயர்வு



$x = -e^{-t}\cos t$ பின்னை y அச்சு $\to -x$

$x = e^{-t}\sin t$ $\quad x \to y$





---

12. (i) $y = x^3$ என்னும் வளைவியினாலும் $y = 2x$, $y = x$ என்னும் நேர் கோடுகளாலும் வரைப்புறும் உருவத்தின் மொத்தப் பரப்பளவைக் காண்க.

(ii) $y = xe^x$ என்னும் வளைவியினாலும் $y = 1$, $y = 0$, $x = 1$ என்னும் நேர் கோடுகளாலும் வரைப்புறும் பரப்பளவானது $y = 1$ என்னும் நேர் கோடு பற்றிச் சுழற்றப்படுகின்றது. சுற்றப்பட்ட திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

விடை

$y = x^3 \quad y = 0,\ x = 0$ உற்பத்தி பற்றி சமச்சீர்

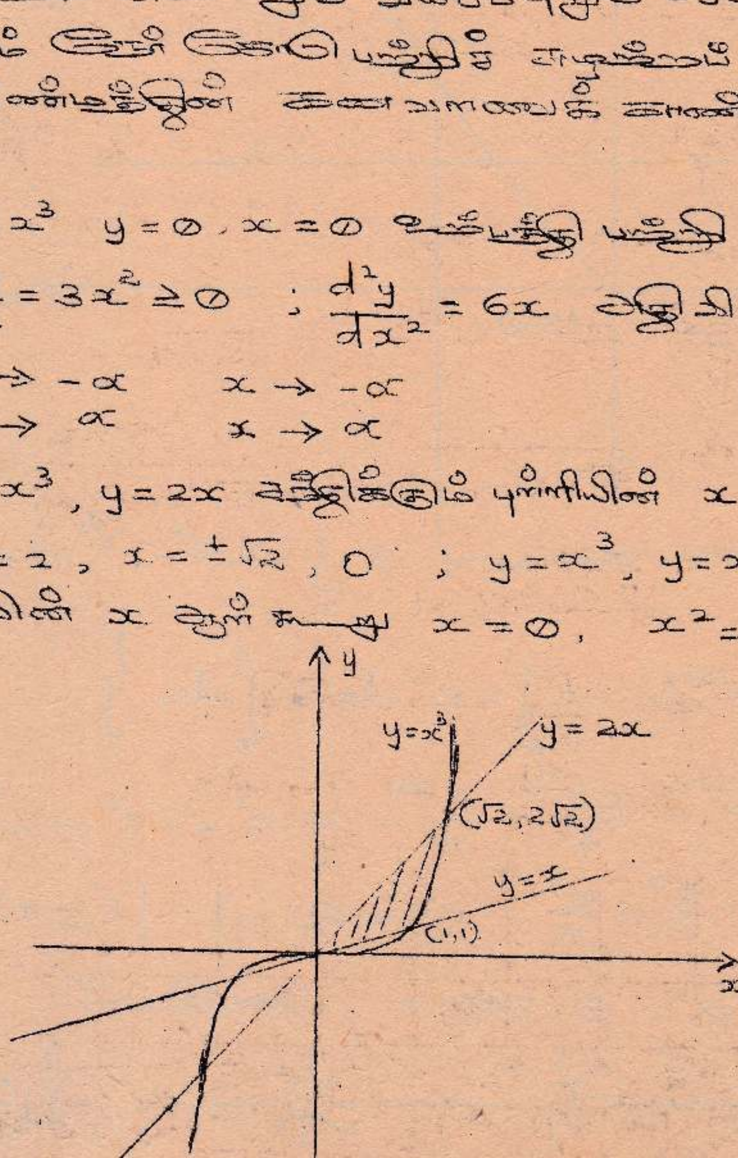
$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \geq 0 \quad ; \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ விபத்திப் புள்ளி $x = 0$

$y \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$y \to \infty \qquad x \to \infty$

$y = x^3$, $y = 2x$ வெட்டும் புள்ளியின் x ஆள்கூறு

$x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}, 0$; $y = x^3$, $y = x$ வெட்டும் புள்ளியின் x ஆள்கூறு $x = 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$



வெட்டும் பரப்பு $= 2\left\{\int_0^1 (2x - x)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} 2x - x^3\,dx\right\}$

$= 2\left\{\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\times 2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^{\sqrt{2}}\right\} = 2\left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}(2-1) - \frac{1}{4}(4-1)\right\}$

$= 2\left\{\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{2}$ சதுர அலகு

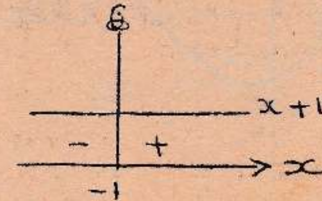
(ii) $y = xe^x \quad x = 0 \quad y = 0$

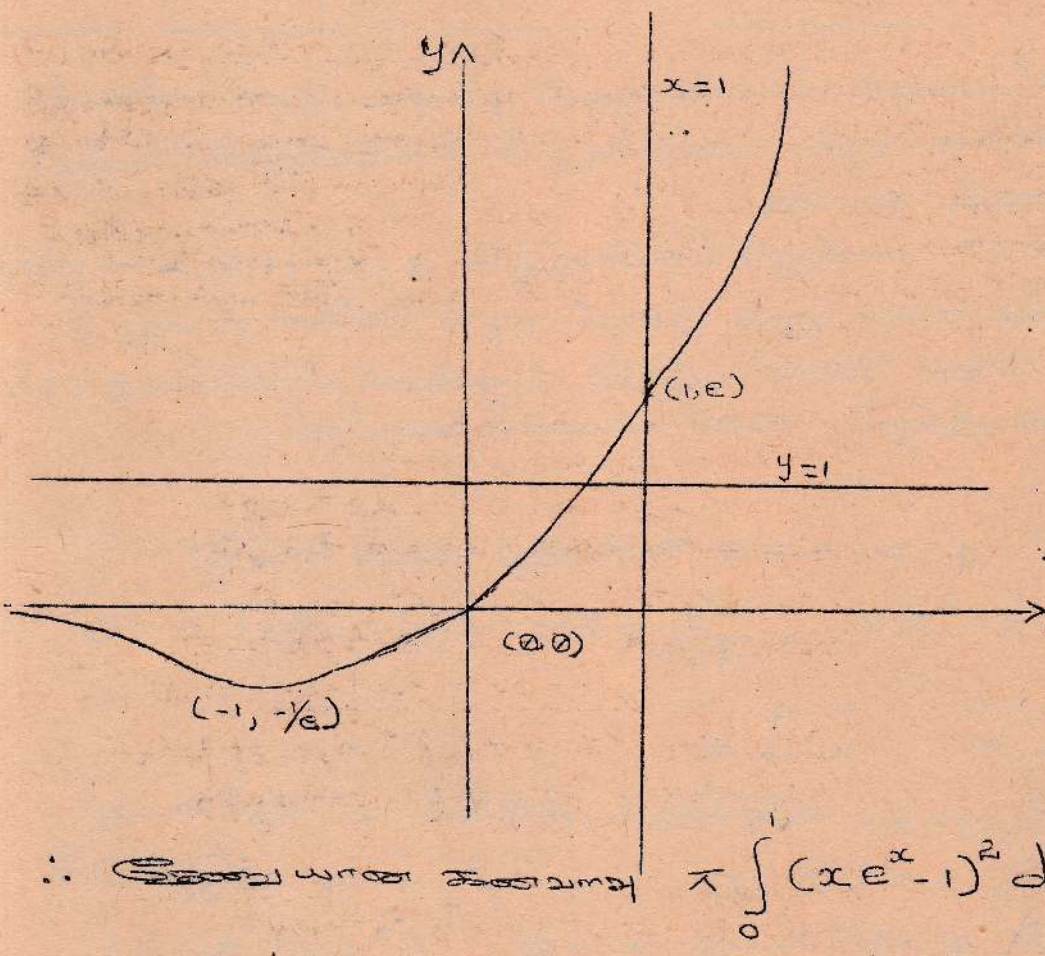
$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = (x+1)e^x \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad x = -1$ இழிவு

$\frac{d^2y}{dx^2} = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$

$x \to \infty \quad y \to \infty$

$x \to -\infty \quad y \to 0$





$\therefore$ தேவையான கனவளவு $\pi\int_0^1 (xe^x - 1)^2\,dx$

$= \pi\left\{\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx - 2\int_0^1 x e^x\,dx + \int_0^1 dx\right\}$

$= \pi\left\{\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} - 2xe^x + 2e^x + x\right\}_0^1$

$= \pi\left[\left\{\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - 2e + 2e + 1\right\} - \left\{\left(\frac{1}{4} + 2\right)\right\}\right]$

$= \left(\frac{e^2 - 5}{4}\right)\pi = 0.597\pi$ அலகுகள்.

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் II க.பொ.த. (உயர்தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ற், 1991.
விசேட, 1992.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

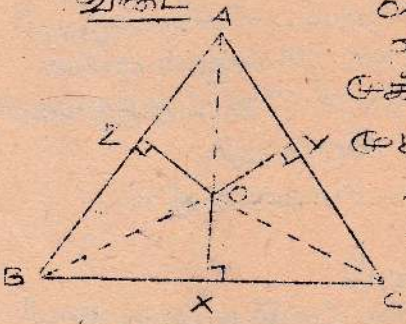
1 (i) ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களான BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துகள் அப் பக்கங்களை முறையே X, Y, Z ஆகியவற்றிற் சந்திக்கின்றன.

$$AZ^2+BX^2+CY^2 = BZ^2+CX^2+AY^2$$ என நிறுவுக.

மறுதலையாக, மேற்போந்த தொடர்பு உண்மையாக இருக்குமாறு X, Y, Z என்பன புள்ளிகள் எனின், செங்குத்துகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென நிறுவுக.

(ii) D, E, F என்பன முறையே ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களான BC, CA, AB என்பன மீதுள்ள புள்ளிகளாகும். கோணங்கள் BAD, D'AC என்பன சமமாகுமாறு D' என்பது BC மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். E', F' என்பன முறையே CA, AB என்பவற்றின் மீது, முன்னர் குறிப்பிட்டவாறு வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளிகளாகும். AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமெனின் AD', BE', CF' என்பனவும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென நிறுவுக.

விடை



OA, OB, OC ஐ இணைக்க

பைதகரசின் தேற்றத்தால்

முக்கோணி AOZ இல் $CA^2 = AZ^2 + OZ^2$

முக்கோணி AOY இல் $OA^2 = AY^2 + OY^2$

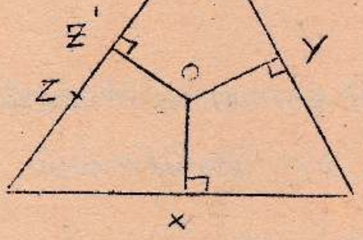
$\therefore AZ^2 + OZ^2 = AY^2 + OY^2$ — ①

இவ்வாறே $BX^2 + OX^2 = BZ^2 + OZ^2$ — ②

$CY^2 + OY^2 = CX^2 + OX^2$ — ③

① + ② + ③ $\Rightarrow AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + BZ^2 + CX^2$

$\therefore AZ^2 + BX^2 + CY^2 = BZ^2 + CX^2 + AY^2$



தேற்றத்தின்படி

$AZ'^2 + BX^2 + CY^2 = BZ' + CX^2 + AY^2$

தரவின் படி

$AZ^2 + BX^2 + CY^2 = BZ^2 + CX^2 + AY^2$

$AZ'^2 - AZ^2 = BZ'^2 - BZ^2$

ஆனால் $AZ' + BZ' = AZ + BZ = AB\ (\neq 0)$

$AZ^2 - BZ^2 = AZ'^2 - BZ'^2$

$\therefore AZ^2 - BZ^2 = AZ'^2 - BZ'^2$

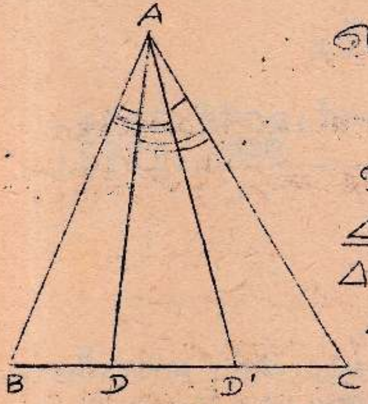
$\therefore AZ - BZ = AZ' - BZ'$

$AZ + BZ = AZ' + BZ'$

$2AZ = 2AZ'$

$AZ = AZ' \Rightarrow Z' \equiv Z$

$\therefore$ செங்குத்துகள் மூன்றும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும்.



ஒத்துக் கோணம் சமமாவதால்

$$\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD'} = \frac{AB \times AD}{AC \times AD'}$$

ஒரே குத்துயரம் என்பதால்

$$\frac{\Delta ABD}{\Delta ACD'} = \frac{BD}{D'C} \Rightarrow \therefore \frac{\Delta ABD}{\Delta ACD'} = \frac{AB \times AD}{AC \times AD'} = \frac{BD}{D'C} \quad \text{———} (1)$$

இவ்வாறே $\frac{\Delta ABD'}{\Delta ACD} = \frac{AB \times AD'}{AC \times AD} = \frac{BD'}{DC}$ ——— (2)

$$(1) \times (2) \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{BD}{DC}\right)\left(\frac{BD'}{D'C}\right)$$

இவ்வாறே $\frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{CE}{EA}\right)\left(\frac{CE'}{E'A}\right)$

$$\frac{AC^2}{BC^2} = \left(\frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{AF'}{F'B}\right)$$

$$1 = \left(\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}\right)$$

(+) (+) (+) = +1 (+) (+) (+)

$\therefore \frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B} = 1 \Rightarrow$ சேவாவின் தேற்றத்தின் மறுதலையின் படி ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்

---

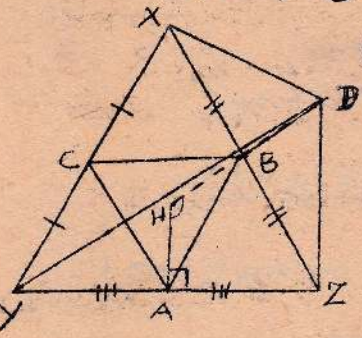
02 ABCD ஒரு நான்முகியாகும். YZ இன் நடுப்புள்ளி A ஆகவும் ZX இன் நடுப்புள்ளி B ஆகவும் XY யின் நடுப்புள்ளி C ஆகவும் இருக்குமாறு XYZ என்ற முக்கோணி, ABC என்னும் அதே தளத்தில் உள்ளது. DA ஆனது BC யிற்குச் செங்குத்தாகவும் DB ஆனது CA யிற்குச் செங்குத்தாகவும் இருப்பின்,

(i) D ஆனது X, Y, Z என்பவற்றிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும் எனவும்

(ii) AB யிற்கு DC செங்குத்தாகும் எனவும்

(iii) D யிலிருந்து தளம் ABC யிற்கான செங்குத்தானது தளம் ABC யை ΔXYZ இன் சுற்றுமையத்திற் சந்திக்கும் எனவும் நிறுவுக

தீர்வு



(i) $BC \parallel YZ$ ஆனால் $DA \perp BC$

$\therefore DA \perp YZ$ எனவே $DY = DZ$

இதேபோல் $DZ = DX$

$\therefore DZ = DY = DX$

$\therefore$ D ஆனது x, y, z இலிருந்து சமதூரத்திலிருக்கும்

(ii) $DX = DY \Rightarrow \Delta$கள் DXC, DYC ஒருங்கிசையும்

$\therefore DC \perp XY$

ஆனால் $AB \parallel XY$ $\therefore DC \perp AB$

(iii) D யிலிருந்து தளம் ABC க்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடி H என்க

$DH \perp YZ$ (தளத்திற்கு செங்குத்து)

$DA \perp YZ$, தளம் $DAH \perp YZ$

$AH \perp YZ$ ஆனால் YZ இன் நடுப்புள்ளி A

இவ்வாறே $BH \perp ZX$

$CH \perp XY$ ஆகும்

∴ H என்பது முக்கோணி XYZ இன் சுற்றுவட்ட மையமாகும்

∴ D யிலிருந்து தளம் ABC யிற்கான செங்குத்தின் அடி H இல் சந்திக்கும்

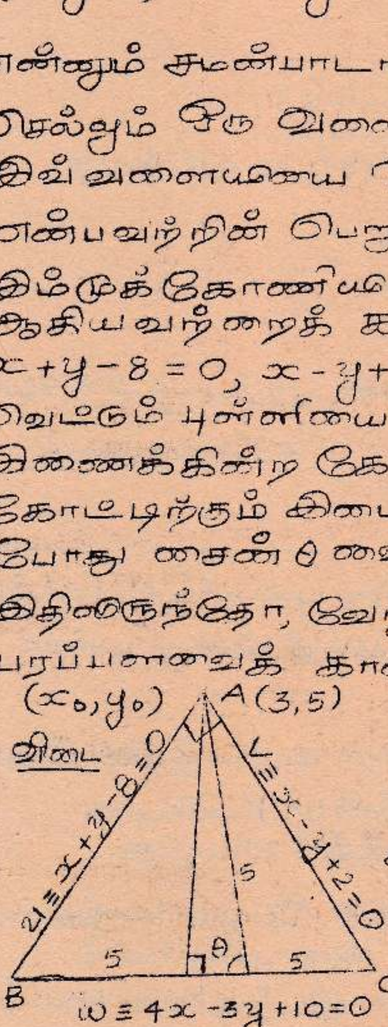
---

03. ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்
$x+y-8=0$, $x-y+2=0$, $4x-3y+10=0$ ஆகும்.
λ, μ என்பவற்றின் எல்லா எண் பெறுமானங்களுக்கும்

$$\lambda(x+y-8)(4x-3y+10)+\mu(x-y+2)(4x-3y+10)=(x+y-8)(x-y+2)$$

என்னும் சமன்பாடானது இம்முக்கோணியின் உச்சிகளூடாகச் செல்லும் ஒரு வளையியை வகைகுறிக்கும் என நிறுவுக.
இவ்வளையியை ஒரு வட்டமாக அமையச் செய்யும் λ, μ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு இதிலிருந்து இம்முக்கோணியினது சுற்றுவட்டத்தின் மையம், ஆரை ஆகியவற்றைக் காண்க.
$x+y-8=0$, $x-y+2=0$ ஆகிய நேர்கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியையும் சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தையும் இணைக்கின்ற கோட்டுக்கும் $4x-3y+10=0$ என்னும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கூர்ங்கோணம் θ ஆகவிருக்கும் போது சைன் θ வைக் காண்க.
இதிலிருந்தோ, வேறுவிதமாகவோ தரப்பட்ட முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க

விடை



தரப்பட்ட சமன்பாடு

$\lambda uw + \mu vw = uv$

இது x, y இலுள்ள தோர் இரண்டாம்படிச் சமன்பாடு ஆதலால் இது ஓர் வளையியை குறிக்கும்

$A(x_0, y_0)$ u, v என்ற கோவைகளை ஒரே நேரத்தில் பூச்சியமாக்கும்

எனவே தரப்பட்ட கோவையை (x_0, y_0) λ, μ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களிற்கும் பூச்சியமாக்கும்

எனவே வளையி A யினூடு செல்லும். இவ்வாறே B, C யினூடும் வளையி செல்லும்

∴ தரப்பட்ட சமன்பாடானது முக்கோணியின் உச்சிகளினூடு செல்லுகின்ற வளையியை வகை குறிக்கும்

தரப்பட்ட வளையி வட்டமாக அமையின்

x^2 இன் குணகம் $=$ y^2 இன் குணகம் $\neq 0$

xy இன் குணகம் பூச்சியம்

தரப்பட்ட சமன்பாட்டில்

x^2 இன் குணகம் $=$ y^2 இன் குணகம்

$4\lambda - 4\mu - 1 = -3\lambda + 3\mu + 1$

$7\lambda + \mu = 2$

xy இன் குணகம் $= 0$ $\qquad \dfrac{\lambda}{7} = \dfrac{\mu}{1} = \dfrac{2}{50}$

$-3\lambda + 4\lambda - 4\mu = 0$

$\lambda = 7\mu \qquad \lambda = \dfrac{7}{25},\ \mu = \dfrac{1}{25}$

$\therefore 7(x+y-8)(4x-3y+10) + (x-y+2)(4x-3y+10)$

$= 25(x+y-8)(x-y+2)$

$7x^2 + 7y^2 + x(-154+18+150) + y(238-16-250) + (-560+20+400) = 0$

$7x^2 + 7y^2 + 14x - 28y - 140 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \qquad$ மையம் $(-1, 2)$

ஆரை $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 20} = 5$ அலகு

$\tan\theta = \left| \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}} \right|$

$= \dfrac{7}{24}$ $\qquad$ முக்கோணி ABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\cdot 5 \sin\theta$

$\sin\theta = \dfrac{7}{25}$ $\qquad = 7$ சதுர அலகு

---

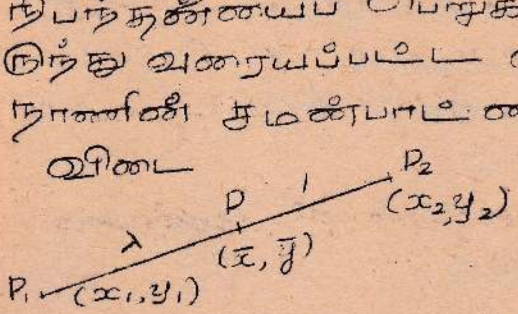
04. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்பன இரு புள்ளிகளெனின், P_1P_2 ஐ $\lambda : 1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்ற புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகள் எழுதுக.

$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 164 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மீது P கிடக்குமெனின், λ திருத்தி செய்கின்ற சமன்பாடு ஒன்றை $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ எனும் வடிவத்திற் பெறுக

(i) $P_1 \equiv (6, 14)$ எனின், λ வின் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் காண்க. P_1P_2 ஆனது வட்டத்தை ஒரு புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டுவதற்கான நிபந்தனையைத் துணிந்து $S = 0$ என்னும் வட்டத்துக்கு P_1 இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக

(ii) $P_1 \equiv (11, 11)$ எனின் $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் பொருந்துவனவாக இருப்பதற்கு x_2, y_2 ஆகியவற்றினாலே திருத்தி செய்யப்பட வேண்டிய நிபந்தனையைப் பெறுக. இதிலிருந்து $S = 0$ இற்கு P_1 இலிருந்து வரையப்பட்ட தொடலிகளின் தொகுதி நாணின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக

விடை



$\bar{x} = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \qquad \bar{y} = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$

இங்கு $P \equiv (\bar{x}, \bar{y})$

தரப்பட்ட வட்டம் $(x-1)^2+(y-2)^2=169$
இதில் $P(\bar{x},\bar{y})$ அமையுமெனில் $(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2=169$

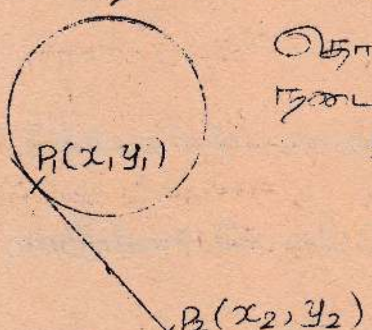
$$[(x_1-1)+\lambda(x_2-1)]^2+[(y_1-2)+\lambda(y_2-2)]^2=169(1+\lambda)^2$$

$$[(x_2-1)^2+(y_2-1)^2-169]\lambda^2+2[(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)-169]\lambda$$
$$+[(x_1-1)^2+(y_1-1)^2-169]=0$$

$A\lambda^2+B\lambda+C=0$ இங்கு $A=(x_2-1)^2+(y_2-1)^2-169$
$B=2[(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)-169]$
$C=(x_1-1)^2+(y_1-1)^2-169$

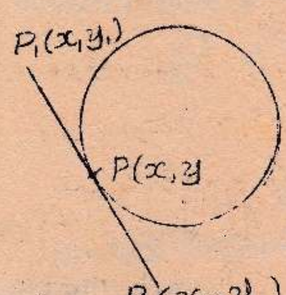
$P_1\equiv(6,14)$ ஆக $C=0$ $A\lambda^2+B\lambda=0$
$\lambda=0$ or $\lambda=-\frac{B}{A}$

ஓரிடத்தில் மட்டும் வெட்டுவதற்கு (தொடலியாக அமைய வேண்டுமெனில்)
$\lambda=0,0\Rightarrow\lambda=-\frac{B}{A}=0\Rightarrow B=0$
$\Rightarrow(6-1)(x_1-1)+12(y_2-2)-169=0$



தொடலியின் சமன்பாடானது (x_2,y_2) இ நடை ஆள்கூறுகளிற்கு மாற்றப்பெறப்படும்
$5(x_1-1)+12(x-2)-169=0$

(ii) பொருந்து பெறுமானத்திற்கு தன்மைகாட்டி $\Delta x=0$
$B^2=4AC$ $P_1(11,11)$ ஆதலால்
இங்கு $C=12$, $A=(x_2-1)^2+(y_2-2)^2-169$,
$B=10x_2+9y_2-197$
பொருந்து பெறுமானம் பெறப்படுவதால் P_1PP_2 P இருசுன்ன தொடலியாக வேண்டும்



$P_2\to P$ ஆக $A=0$ வட்டத்தில் (x_2,y_2) அமைவதால் $B^2=4AC$ இலிருந்து $B^2=0\Rightarrow B=0$
∴ எனவே $(x_2 y_2)$ இலிருந்தான தொடலி $(11,11)$ செல்ல நிபந்தனை $10x_2+9y_2-197=0$
இவ்வாறு (x_3,y_3) இருசுன்ன தொடலி $(11,11)$ செல்ல நிபந்தனை $10x_3+9y_3-197=0$
இது $10x+9y-197=0$ இல் (x_2,y_2), (x_3,y_3) அமைவது போதுமானது
ஆகவே தொடலியின் தொடுகை நாணின் சமன்பாடு
$10x+9y-197=0$

5. (i) $C_1 : r = 2 - \cos\theta, \; -\pi \le \theta \le \pi$

$C_2 : r = 3\cos\theta, \; -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

எனப்படுவனவற்றினாலே தரப்படும் C_1, C_2 என்னும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைக. அத்துடன் C_1, C_2 ஆகியன இடைவெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டு, அவற்றை இணைக்கும் கோட்டுக்கு உற்பத்தியில் இருந்தான செங்குத்துத் தூரத்தைத் துணிக.

(ii) இதே வரிப்படத்தில் (a) $x^2+y^2=1$

(b) $x^2y^2 = x^2-y^2$ என்னும் வளையிகளைப் பருமட்டாக வரைந்து $x^2+y^2-1 \le 0, \; y^2 < \frac{x^2}{1+x^2}$ ஆக இருக்கும் பிரதேசம் R ஐ நிழற்றுக.

தரப்பட்டுள்ள பிரதேசம் R இலே $(y-x)$ இன் மிகப் பெரியதும் மிகச் சிறியதுமான பெறுமானங்களைத் துணிக.

<u>விடை</u>

(i) I $r = 2 - \cos\theta \quad -\pi \le \theta \le \pi$

$\theta \longrightarrow (r, \theta)$

$\pi - \theta \longrightarrow (r', \pi - \theta)$

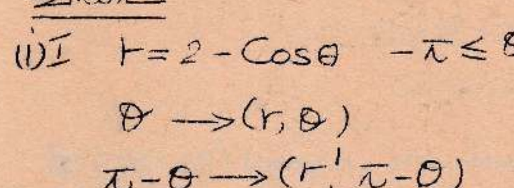
$\left.\begin{array}{l}(-\pi+\theta) \rightarrow (r', -\pi+\theta) \\ -\theta \rightarrow (r, -\theta)\end{array}\right\}$ ஆரம்பக் கோடு பற்றி சமச்சீர்

$\therefore 0 \le \theta \le \pi$ எனும் வீச்சில் ஆராய்ந்தால் சமச்சீராக கீற முடியும்

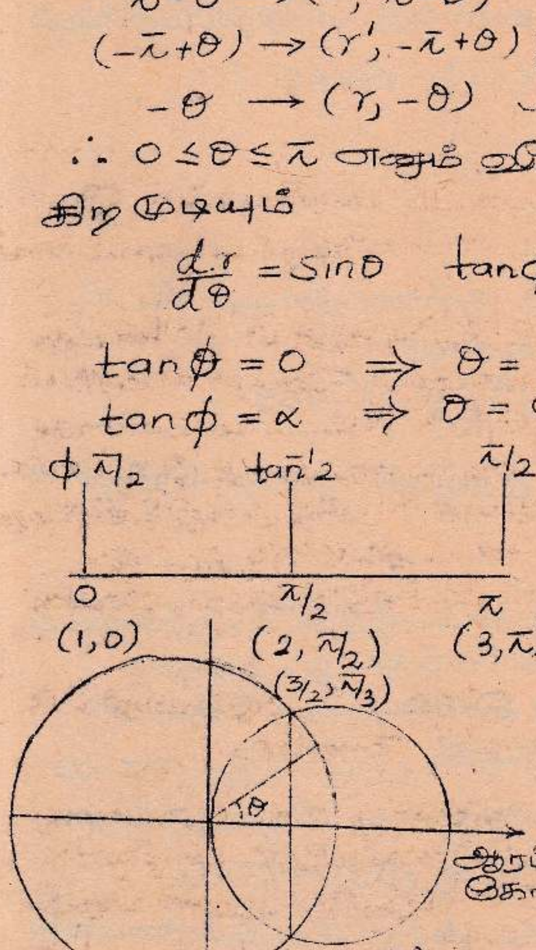
$$\frac{dr}{d\theta} = \sin\theta \qquad \tan\phi = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\tan\phi = 0 \Rightarrow \theta = -$

$\tan\phi = \infty \Rightarrow \theta = 0, \pi$



II $r = 3\cos\theta$ இது ஆரம்பக் கோட்டில் மையத்தையும் $3/2$ ஆரையும் முனையினூடு செல்லுகின்ற வட்டத்தைக் குறிக்கும் இங்கு $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$



இடைவெட்டும் நிலையில்

$r = 2 - \cos\theta = 3\cos\theta$

$\cos\theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \pm\pi/3 \; (\because -\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$

$\Rightarrow r = 2 - \frac{1}{2} = 3/2$

அவற்றை இணைக்கும் கோடு ஆரம்பக் கோட்டிற்கு செங்குத்தானது எனவே முனையிலிருந்து செங்குத்து தூரம் $= \frac{3}{2}\cos\pi/3$

$= 3/4$ அலகு

(ii) $x^2y^2 = x^2 - y^2$

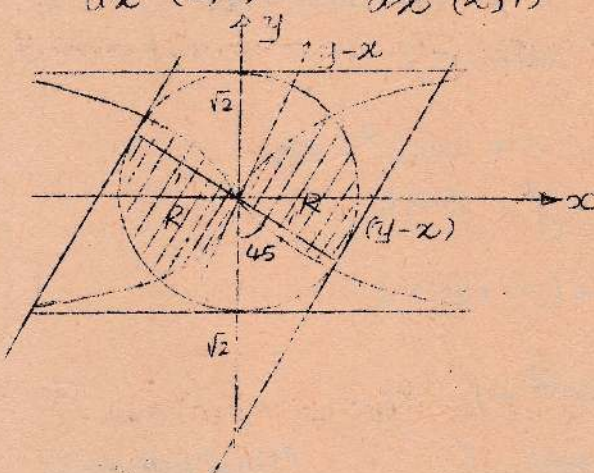
$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$ இது உற்பத்தி பற்றி, x அச்சுபற்றி, y அச்சுபற்றி சமச்சீர் $\therefore 0 \le x < \infty$ என்னும் வீச்சில் ஆராய்ந்தால் சமச்சீராக கிடைக்கும்

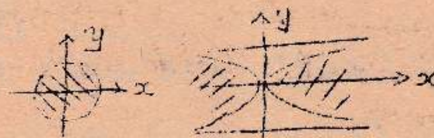
$x = 0 \quad y = 0$

$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

$\frac{dy}{dx} = 0 \quad x = - \quad \frac{dy}{dx} = \infty \quad x = -$

$\frac{dy}{dx}_{(0,0)} = 1 \quad \frac{dy}{dx}_{(\infty,1)} = 0$





$(y-x)_{உயர்வு} = \sqrt{2}$

$(y-x)_{இழிவு} = -\sqrt{2}$

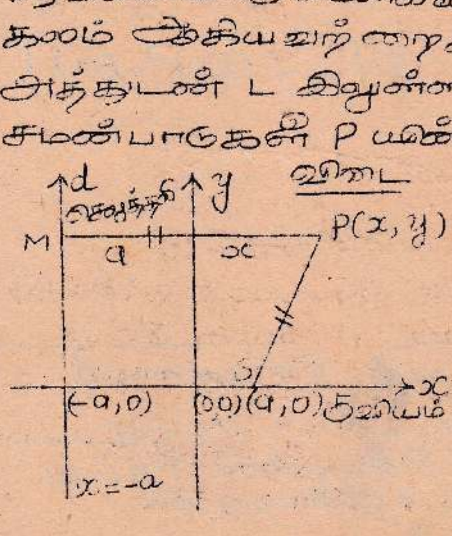
---

6. குவியச் செலுத்தலி உடைமையைப் பயன்படுத்தி ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ என எழுதப்படலாமெனக் காட்டுக

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவின் உச்சி A ஆகும். P என்பது பரவளைவின் மீதுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி ஆகும். PQ = AP ஆகுமாறு AP ஆனது Q இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. AQ இற்குச் செங்குத்தாய் Q இனூடாக வரையப்படும் MQL என்ற நேர்கோடானது x அச்சை M இற் சந்திக்கின்றது. QL ஆனது QM இற்குச் சமமெனின் L இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவாகுமெனக் காட்டி அதன் உச்சி, குவியம், செலுத்தலி ஆகியவற்றைக் காண்க.

அத்துடன் L இலுள்ள தொடலி, செவ்வன் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் P யின் Y-ஆள்கூறிற் காண்க.

விடை



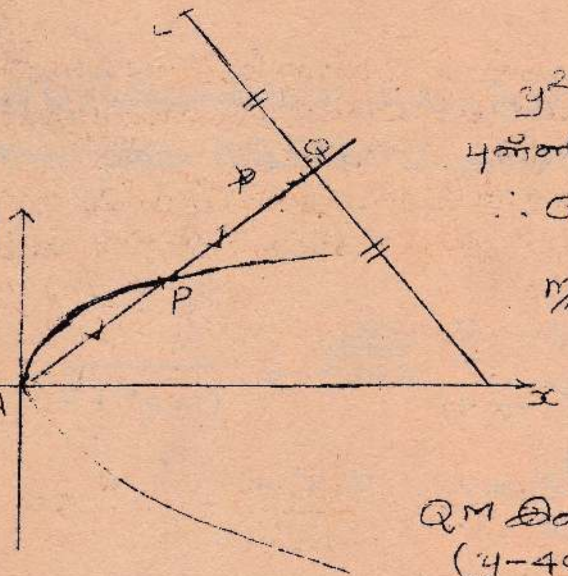
SP = PM ஆகுமாறு புள்ளி P யானது S, d அமைகின்ற தளத்தில் மாறின் புள்ளி P இன் ஒழுக்கு பரவளைவாகும்

$SP^2 = PM^2$

$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

$\therefore$ பரவளைவின் சமன்பாடு

$y^2 = 4ax$



$y^2 = 4ax$ இல் யாதேனும் ஒரு புள்ளி $P \equiv (at^2, 2at)$ என்க

$\therefore Q \equiv (2at^2, 4at)$

$m_{AP} = \dfrac{2at}{at^2} = \dfrac{2}{t}$

$m_{QM} \times m_{AP} = -1$

$m_{QM} = -\dfrac{t}{2}$

QM இன் சமன்பாடு

$(y - 4at) = -\dfrac{t}{2}(x - 2at^2)$

$y = 0 \Rightarrow x = 2at^2 + 8a$

$L \equiv (4at^2 - \overline{2at^2 + 8a}), (2 \cdot 4at - 0)$

$\equiv (2at^2 - 8a), 8at \qquad x = 2at^2 - 8a$

$\quad\;\downarrow \qquad\quad \downarrow$

$\quad\; x \qquad\quad y \qquad y = 8at$

$\dfrac{x + 8a}{2a} = \dfrac{y^2}{64a^2} \Rightarrow y^2 = 32a(x + 8a)$

$\therefore$ L இன் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு

உச்சி $x + 8a = 0 \quad y = 0$ குவியம் $\left(-8a + \dfrac{32a}{4}, 0\right)$ செவ்வகலம் $= 32a$

$x = -8a \quad y = 0 \qquad (0, 0)$

$(-8a, 0)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}, \quad y = 8at \quad x = 2at^2 - 8a$

$= 8a \times \dfrac{1}{4at} = \dfrac{2}{t}$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு $(y - 8at) = \dfrac{2}{t}\left[x - (2at^2 - 8a)\right]$

$2x - ty + 4at^2 + 16a = 0$

P யின் y ஆள்கூறு $2at = \alpha$ என்க

$\therefore 4ax - \alpha y + 2\alpha^2 + 32a^2 = 0$

செவ்வனின் சமன்பாடு $(y - 8at) = -\dfrac{t}{2}\left[x - (2at^2 - 8a)\right]$

$2y - 16at = -tx + 2at^3 - 8at$

$2y + \dfrac{\alpha}{2a}x = 4\alpha + 2a \cdot \dfrac{\alpha^3}{8a^3}$

$8a^2y + 2a\alpha x = 16a^2\alpha + \alpha^3$

---

7. $a > b > 0$ ஆயிருக்க $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்துக்கு $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்ற புள்ளியிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. P இலுள்ள செவ்வனானது x, y அச்சுகளை முறையே Q, R என்பவற்றில்

(i) QR இன் நடுப்புள்ளி M எனின் P மாறும்போது M இன் ஒழுக்கு ஒரு நீள்வளையமாகும் எனக் காட்டி, அதன் மையவகற்சித்திறனைத் துணிக.
(ii) P யிலுள்ள செவ்வனுக்கு உற்பத்தியில் இருந்து வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளத்தைக் காண்க. அதன் மிகப்பெரிய பெறுமானத்தைத் துணிக

விடை

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , a>b>0$$

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\cot\theta$$

$\therefore$ செவ்வனின் படித்திறன் $=\frac{a}{b}\tan\theta$

$\therefore$ செவ்வனின் சமன்பாடு

$$y-b\sin\theta=\frac{a}{b}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-a\cos\theta)$$

$$ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=(a^2-b^2)$$

$$Q\equiv\left\{\frac{(a^2-b^2)}{a}\cos\theta, 0\right\},\ R\equiv\left\{0, \frac{b^2-a^2}{b}\sin\theta\right\},$$

(i) $M\equiv\left\{\frac{a^2-b^2}{2a}\cos\theta, \frac{b^2-a^2}{2b}\sin\theta\right\}$

$\therefore$ M இன் ஒழுக்கு $x^2/A^2+y^2/B^2=1$ இங்கு $A=\frac{a^2-b^2}{2a}$, $B=\frac{a^2-b^2}{2b}$ ஆகும்

மையவகற்சித்திறன் e' எனின்

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=(1-e'^2)\left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right)^2$$

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2 \Rightarrow e'=e \quad (\because b^2=a^2(1-e^2))$$

(ii) செங்குத்து தூரம் $=\left|\frac{(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\right|$

$$=\left|\frac{(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2\sec^2\theta+b^2\operatorname{cosec}^2\theta}}\right|$$

$$=\left|\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)+\left(a^2t^2+\frac{b^2}{t^2}\right)}}\right| \quad (\because t=\tan\theta)$$

$$\left|\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)+\left(at-\frac{b}{t}\right)^2+2ab}}\right|$$

செங்குத்துத்தூரத்தின் உயர்வு $=\left|\frac{a^2-b^2}{a+b}\right|=(a-b)\quad(\because a>b)$

8. $P\left\{\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$ என்னும் புள்ளி $x^2-y^2=a^2$ என்ற அதிபரவளைவின் மீது கிடக்கின்றது எனக் காட்டுக. அணுகு கோடுகளைக் கண்டு, அவை ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தாகுமெனக் காட்டுக.

(i) $(0, -\frac{3}{4}a)$ என்ற புள்ளியினூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு அதிபரவளைவை P யிலே தொடுகின்றது. P யிலே t யின் பெறுமானம் 3 அல்லது $-\frac{1}{3}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(ii) O உற்பத்தியும் $t=1$ இனாலே தரப்படும் புள்ளி A யும் ஆகும். $t>1$ ஆயிருக்க, x - அச்சு நேர்கோடு OP, அதிபரவளைவின் வில் AP ஆகியன உள்ளடைக்கும் பரப்பைக் காண்க.

விடை

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \text{—(1)} \quad \frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \text{—(2)}$$

$$(1)^2-(2)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x^2-y^2=a^2$, இதன் அணுகுகோடு $y=mx+c$ என்க

$\therefore$ $x^2-y^2=a^2$ இல் $y=mx+c$ ஐ பிரதியிட

$$(1-m^2)x^2 - 2mcx - (c^2+a^2) = 0$$

இது முடிவிலித்தீர்வு பெறவேண்டுமெனில் x^2, x இன் குணகம் பூச்சியமாகும்

$$1-m^2=0 \text{ and } 2mc=0$$

$m=\pm 1$ and $2mc=0$, $c=0$ $\therefore$ $y=\pm x$ என்பதே அணுகு கோடுகளாகும்

$\therefore$ அணுகுகோடுகள் ஒன்றிற்கு ஒன்று செங்குத்தாகும்

$x^2-y^2=a^2$

$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\left.\frac{dy}{dx}\right)_P = \frac{x}{y} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$

$\therefore$ P இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - \frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\left(x - \frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)$$

இத்தொடலியானது $(0, -\frac{3a}{4})$ இனூடு செல்வதால்

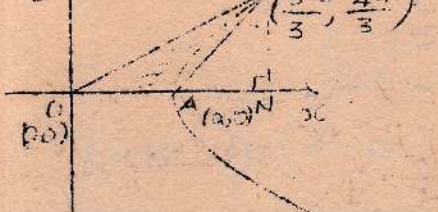
$$-\frac{3a}{4} - \frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\left(-\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right) \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{t^2-1}{t} = \frac{(t^2+1)^2}{t(t^2-1)}$$

$$(t^2+1)^2 = (t^2-1)^2 + \frac{3}{2}t(t^2-1) \Rightarrow 2t^2 = -2t^2 + \frac{3}{2}t(t^2-1), \quad t \neq 0$$

$$4t = \frac{3}{2}(t^2-1) \Rightarrow 3t^2-8t-3=0 \Rightarrow (3t+1)(t-3)=0$$

$$t = 3, \ -\frac{1}{3}$$

$t=3 \Rightarrow P \equiv \left(\frac{5a}{3}, \frac{4a}{3}\right)$



உள்ளடக்கும் பரப்பு $= \Delta OPN - \int_1^3 \left(\frac{a}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5a}{3}\cdot\frac{4a}{3} - \frac{a^2}{4}\left\{\frac{t^2}{2} - 2\ln|t| - \frac{1}{2t^2}\right\}\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{10a^2}{9} - \frac{a^2}{4}\left\{4 - 2\ln 3 - \left(\frac{1}{18}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{10a^2}{9} - \frac{a^2}{4}\left\{\frac{40}{9} - 2\ln 3\right\} = \frac{a^2}{2}\ln 3 \text{ சதுரஅலகு}$$

9. (i) a கோசை$^2\theta + b$ சைன்θ கோசை$\theta + c$ சைன்$^2\theta$ என்பதை A கோசை$(2\theta+B)+C$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இங்கு A, B, C ஆகியவை θ வைச் சாராதவை இதிலிருந்து $E = 8$ கோசை$^2\theta + 9$ சைன்θ கோசை$\theta - 4$ சைன்$^2\theta$ என்னும் கோவையின் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தையும் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும் காண்க. அத்துடன் $E=0$ ஆக இருக்கும் கூர்ங்கோணம் θ வைக் காண்க

(ii) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

(a) 5 சைன் $x - 12$ கோசை $x = -13$ சைன் $3x$

(b) சைன்^{-1}x + தான்$^{-1}\left(\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

விடை

$$a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta$$

$$= \frac{a}{2}(1+\cos 2\theta) + \frac{b}{2}\sin 2\theta + \frac{c}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$= \frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\left\{(c-a)\cos 2\theta - b\sin 2\theta\right\}$$

$$= \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(c-a)^2+b^2}}{2}\left\{\frac{a-c}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}}\cos 2\theta + \frac{b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}\sin 2\theta\right\}$$

$$C = \frac{a+c}{2}\ ; \quad A = \frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}; \quad \cos B = \frac{a-c}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$$

$$\sin B = \frac{-b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$$

$$E = a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta = A\cos(2\theta+B) + C$$

$a=8,\ b=9,\ c=-4$ பிரதியிட $B \to \alpha$

$$E = \frac{8-4}{2} + \frac{15}{2}\cos 2\theta+\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}$$

$$\frac{2(E-2)}{15} = \cos 2\theta+\alpha$$

$$-1 \le \frac{2(E-2)}{15} \le 1$$

$$-11 \le 2E \le 19 \qquad E_{\text{உயர்வு}} = \frac{19}{2}$$

$$-\frac{11}{2} \le E \le \frac{19}{2} \qquad E_{\text{இழிவு}} = \frac{-11}{2}$$

$$E=0 \quad 15\cos 2\theta+\alpha = -4 \Rightarrow \cos 2\theta+\alpha = \frac{-4}{15} = \cos\beta$$

$$2\theta+\alpha = 2n\pi \pm \beta \quad \theta = n\pi \pm \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

கூர்ங்கோணம் $\theta = 180 - 108°49'$

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x = -\sin 3x$$

$$-\sin 3x = \sin x-\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 3x = \sin -(x-\alpha) \qquad \cos\alpha = \frac{5}{13}$$

$$3x = n\pi - (-1)^n(x-\alpha)$$

$n \to$ ஒற்றை $3x = m\pi + x - \alpha$ $\qquad$ $n \to$ இரட்டை $3x = p\pi - x + \alpha$

$$2x = m\pi - \alpha \qquad m = \pm1 \pm3 \ldots \qquad 4x = p\pi + \alpha$$

$$x = \frac{m\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \qquad x = \frac{p\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \qquad p = 0 \pm1 \pm2 \ldots$$

(b) $\sin^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

$\alpha + \beta = \pi/2$

$\tan(\alpha+\beta) = \infty$

$1 - \tan\alpha \tan\beta = 0$

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$

$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2} = 1$

$1-x^2 = 0$ or $4x^2 = 1$

$x = \pm 1$ (or) $x = \pm\frac{1}{2}$ $x = -1$ ஆக $\sin^{-1}(-1) = -\pi/2$

$\therefore -\dfrac{\pi}{2} + 0 \neq \pi/2$

$\therefore x \neq -1$

$x = -\frac{1}{2}$ ஆக $\sin^{-1} -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ $\tan^{-1} -\sqrt{3} = -\pi/3$

$\sin^{-1} -\frac{1}{2} + \tan^{-1} -\sqrt{3} \neq \frac{\pi}{2}$ $\therefore x \neq -\frac{1}{2}$

$\therefore x = 1$, or $\frac{1}{2}$ ஆகும்

---

(10). வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன்

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ கோசைA என்னும் சூத்திரத்தைப் பெறுக.

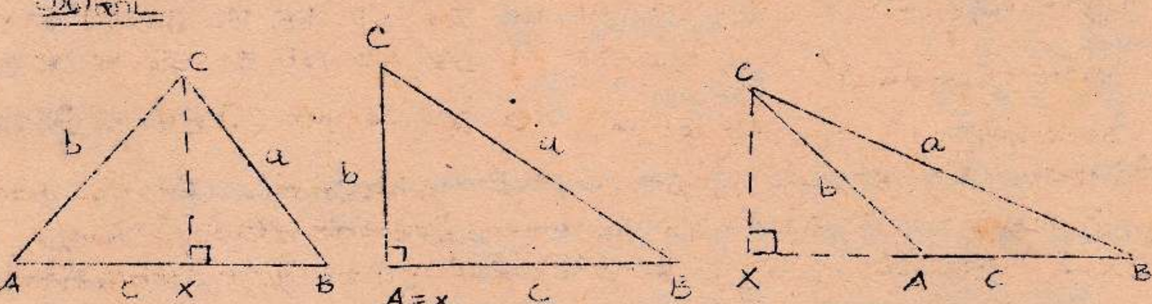
(i) முக்கோணி ABC யினது பக்கம் BC யின் நடுப்புள்ளி D எனின், $4AD^2 = a^2 + 4bc$ கோசை A ஆகுமென நிறுவுக.

(ii) ஒரு முக்கோணி ABC யினது கோணம் BAC யின் உள்ளிருகூறாக்கி AX எனின், $AX = \dfrac{2bc \text{ கோசை} \frac{1}{2}A}{b+c}$ ஆகுமென நிறுவுக

(iii) A, B, C என்பன முக்கோணி ஒன்றின் கோணங்கள் எனின்

கோசை^{2}A + கோசை^{2}B + கோசை^{2}C $= 1 - 2$ கோசைA கோசைB கோசைC ஆகுமென நிறுவுக

விடை



$\measuredangle A < \pi/2$ ஆக $a^2 = BX^2 + CX^2 = (c - b\cos A)^2 + b^2\sin^2 A$

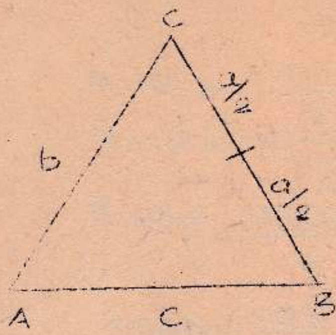
$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\measuredangle A = \frac{\pi}{2}$ ஆக $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{2} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\measuredangle A > \frac{\pi}{2}$ ஆக $a^2 = BX^2 + CX^2 = \{c + b\cos(\pi - A)\}^2 + b^2\sin^2(\pi - A)$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

மூன்று முறைகளிலும் $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ஆகும்.



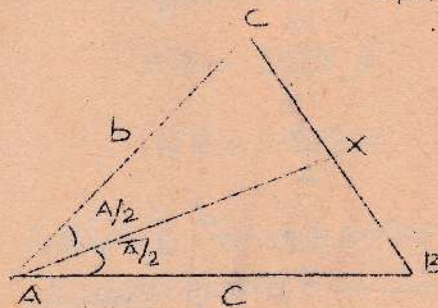
$$c^2 = AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2AD\cdot\frac{a}{2}\cos A\hat{D}B$$

$$b^2 = AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2AD\cdot\frac{a}{2}\cos A\hat{D}C$$

$$b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$a^2 + 2bc\cos A = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$4AD^2 = a^2 + 4bc\cos A$$



$$\frac{BX}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AX}{\sin B} \Rightarrow BX = \frac{AX}{\sin B}\sin\frac{A}{2}$$

இவ்வாறே $CX = \dfrac{AX}{\sin C}\sin\dfrac{A}{2}$

$$a = AX + BX = AX\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$

$$AX = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin A\sin C} = 2a\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin A(\sin B + \sin C)}$$

$$= 2a\cos\frac{A}{2}\,\frac{bc}{a(b+c)} = 2\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{bc}{b+c}$$

(iii) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 A + \frac{1}{2}\left\{1 + \cos 2B + 1 + \cos 2C\right\}$

$$= 1 + \cos^2 A + \cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$= 1 - \cos^2(B+C) + \cos(B+C)\cos(B-C)$$

$$= 1 + \cos(B+C)\left\{\cos(B+C) + \cos(B-C)\right\}$$

$$= 1 + 2\cos(\pi - A)\cos B\cos C$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

(II) (i) பரீட்சை ஒன்றிலே கணித பாடத்துக்கான 3 வினாத்தாள்களுக்கு 12 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு

வினாத்தாள் I	36	56	41	46	54	59	55	51	52	44	37	59
வினாத்தாள் II	58	54	21	51	59	46	65	31	68	41	70	36
வினாத்தாள் III	65	55	26	40	30	74	45	29	85	32	80	39

இவ்வினாத்தாள்கள் ஒவ்வொன்றினதும் இடை, இடையம் ஆகியவற்றைக் கணித்து, மாணவர்களின் அறிவுப் பொது மட்டம் மிக உயர்ந்ததாக இருக்கும் வினாத்தாளைக் காண்க. காரணங்கள் தருக.

(ii) அவர்களது நாளாந்த செலவீட்டிற்கமைய 105 குடும்பங்களின் பரம்பலைப் பின்வரும் அட்டவணை காட்டுகின்றது. ரூ(10-20), ரூ(30-40) ஆகிய செலவீட்டுத் தொகுதிக்கு நேரொத்த குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை இவ்வட்டவணையில் இடம்பெறவில்லை. இப் பரம்பலுக்கான இடையம், ஆகாரம் என்பன முறையே ரூ. 25 ரூ. 24 ஆகும்

செலவீடு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	14	?	27	?	15

தவறிய மீடிறன்களைக் கணித்து, தரவுகளின் இடையைக் காண்க.

விடை

(i) I வினாத்தாள் என்பதன் இடையம் $= \frac{51+52}{2} = 51.5$

II வினாத்தாள் என்பதன் இடையம் $= \frac{51+54}{2} = 52.5$

III ,, ,, ,, $= \frac{40+45}{2} = 42.5$

I வினாத்தாள் என்பதன் இடை $= \frac{590}{12} = 49.17$

II ,, ,, ,, $= \frac{600}{12} = 50$

III ,, ,, ,, $= \frac{600}{12} = 50$

அறிவுப் பொதுமட்டம் உயர்ந்த வினாத்தாள் II ஆகும் ஏனெனில் II இன் இடையம் உயர்ந்ததாகவும், II இன் இடை உயர்ந்ததாகவும் அமைகின்றது இடையும் இடையமும் உயர்ந்த வினாத்தாள் II ஆகும்

(ii)

செலவீடு	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	திரள் மீடிறன்
0—10	14	14
10–20	f_1	$14+f_1$
20–30	27	$41+f_2$
30–40	f_2	$41+f_1+f_2$
40–50	15	$56+f_1+f_2$

ஆகாரம் 25 என்பதால்

$$25 = 20 + \left\{ \frac{56+f_1+f_2}{2} - (f_1+14) \right\} \frac{10}{27}$$

இடை 24 என்பதால்

$$24 = 20 + \frac{27-f_1}{2\times27-f_1-f_2} \times 10$$

$f_1 - f_2 = 1,\ 3f_1 - 2f_2 = 27$

$f_1 = 25,\ f_2 = 24$

கூட்டம்	f	நடுப்பெறுமானம்	$x' = \frac{x-25}{10}$	fx'
0–10	14	5	−2	−28
10–20	25	15	−1	−25
20–30	27	25	0	0
30–40	24	35	1	24
40–50	15	45	2	30
	105			1

$$\text{இடை} = 25 + 10 \times \frac{1}{105}$$

$$= 25 + 0.09$$

$$= 25.09$$

12. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, W_1, W_2, W_3$ எனக்குறிக்கப்பட்ட 5 கறுப்புப் பந்துகளையும் 3 வெள்ளைப் பந்துகளையும் ஒரு பெட்டி கொண்டுள்ளது. பதிலீடு செய்யப்படாமல் பெட்டியிலிருந்து இரு பந்துகள் (அடுத்தடுத்து) எடுக்கப்படுகின்றன.

a) இரு பந்துகளும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டவையாய் இருப்பதற்கான

b) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்து கறுப்பாய் இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவைக் காண்க

இரு பந்துகள் மீதும் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கும் எழுமாற்று மாறியை X எனக் X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு X இன் இடை, மாறற்றிறன் ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க

விடை

a) $\frac{{}^5C_2}{{}^8C_2} + \frac{{}^3C_2}{{}^8C_2} = \frac{10+3}{8\cdot\frac{7}{2}} = \frac{13}{28}$

b) $1 - P_r$ (எல்லாம் வெள்ளை)

$1 - \frac{{}^3C_2}{{}^8C_2} = 1 - \frac{3}{28}$

$= \frac{25}{28}$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

$$\mu = E(x) = \sum x_i f(x_i) = 2\times\frac{1}{28} + 3\cdot\frac{4}{28} + 4\times\frac{5}{28} + 5\cdot\frac{6}{28} + 6\times\frac{5}{28} + 7\times\frac{4}{28} + 8\times\frac{2}{28} + 9\times\frac{1}{28}$$

$$= 5\cdot 25$$

$$Var(X) = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$= 3\cdot 36$$

TEYA

4. (a) (i) I_2/ NaOH (வெப்பம்) சூடாக்கல்

CH_3CHO ⟶ அயடபோம் (CHI_3) மஞ்சள்நிற வீழ்படிவு

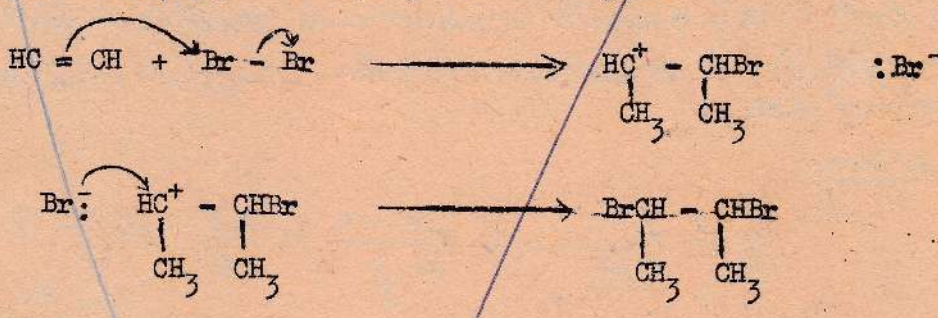
(ii) $NaNO_2$ / HCl உடன்  உருவாக்கும்

விளைவு NaOH இல் கரையும் அல்லது

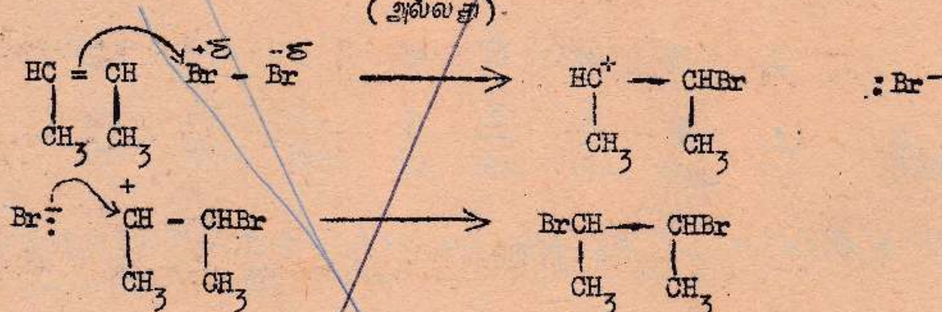
 குளிர் நிலையில் $NaNO_2$ / HCl உடன் உருவாக்கும்

விளைவாகிய டைஏசோனியம் உப்பு NaOH முன்னிலையில் பீனோலுடன் கடும் சிவப்பு நிறச் சாயத்தைக் கொடுக்கும்.

(b) (i)

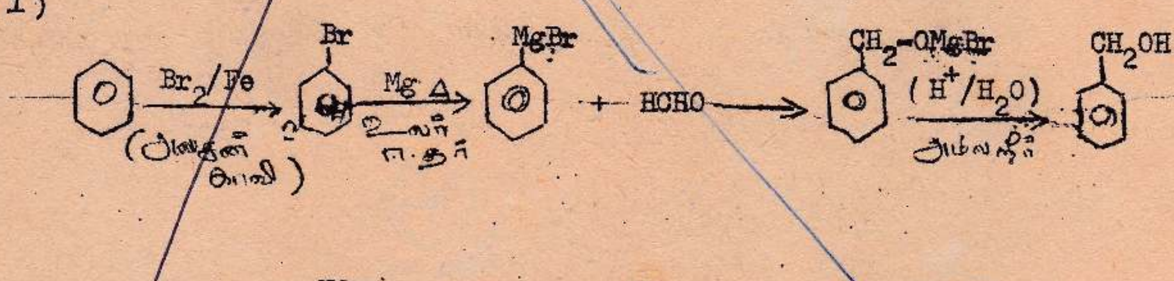


(அல்லது)

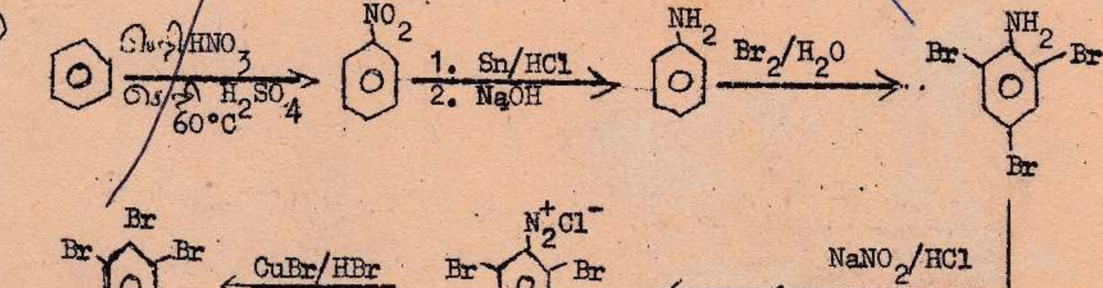


(ii) நீர்க்கரைசலில் NO_3^-/ $NaNO_{3\,(aq)}$ அல்லது Cl^-/ $NaCl_{(aq)}$ முன்னிலையில் நடைபெறும் கூட்டல் தாக்கம், உருவாகும் விளைவில் உள்ள நைதரசனை அல்லது குளோரீனை கொண்டிருப்பதனல் அறியப்படும்.

(c) (i)



(ii)



3331

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 1. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள் ஓகஸ்ட், 1991.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1 (i) $f(r) = 1/r^2 \quad (r \neq 0)$ எனின்

$$f(r+1) - f(r) = -\frac{(2r+1)}{r^2(r+1)^2}$$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து தொடர்

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots$$

இனுடைய முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

மேலே உள்ள தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உங்கள் விடைக்குக் காரணம் காட்டுக.

(ii) $|x| < 1$ இற்கு

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

எனக் கொண்டு

$$\ln 2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \cdots + \tfrac{1}{n}(\tfrac{1}{2})^n + \cdots$$

எனக் காட்டுக.

$\frac{1}{r(r+1)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைப்பதன் மூலம்

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^r = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}(\tfrac{1}{2})^r - \frac{2}{n+1}(\tfrac{1}{2})^{n+1}$$

எனக் காட்டுக.

$n \to \infty$ ஆக இருக்கும் போது $S_n \to 1 - \ln 2$ என்பதை உய்த்தறிக.

விடை:

(i) $$F_{(r+1)} - f_{(r)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - (r+1)^2}{r^2(r+1)^2}$$
$$= \frac{-(2r+1)}{r^2(r+1)^2}$$

∴ தரப்பட்ட தொடரின் r வது உறுப்பு U_r எனின்.

$$U_r = \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2} = f(r) - f(r+1)$$

$U_1 = f_{(1)} - F_{(2)}$

$U_2 = F_{(2)} - F_{(3)}$

$\vdots$

$u_{n-1} = F_{(n-1)} - F_{(n)}$

$U_n = F_{(n)} - F_{(n-1)}$

$\sum_{r=1}^{n} U_r = F_{(1)} - F_{(n+1)} = 1 - 1/(n+1)^2$

$n \longrightarrow \infty$ ஆக $\sum_{r=1}^{n} U_r \longrightarrow 1$ $\left(\because \frac{1}{(n+1)^2} \to 0, n \to \infty\right)$

∴ ஒருங்கும் தொடர்

(ii) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots \frac{x^n}{n} - \cdots$

$x = \frac{1}{2}$ ஆக

$\ln(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 - \cdots - \frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n - \cdots$

(ie) $-\ln 2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 - \cdots$

$\therefore \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 + \cdots + \frac{1}{n}(\frac{1}{2})^n + \cdots$

$\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$

$\therefore S_n = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^r$

$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}(\frac{1}{2})^r - 2\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+1)}(\frac{1}{2})^{r+1}$

$= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}(\frac{1}{2})^r - 2\left\{-\frac{1}{2} + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(r+1)}(\frac{1}{2})^{r+1} + \frac{1}{n+1}(\frac{1}{2})^{n+1}\right\}$

$= -\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}(\frac{1}{2})^r - \frac{2}{(n+1)}(\frac{1}{2})^{n+1}$

$n \to \infty \quad S_n \to 1 - \ln 2$

$\left(\begin{array}{l} \because \frac{1}{n+1}(\frac{1}{2})^{n+1} \longrightarrow 0 \\ \& \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}(\frac{1}{2})^r \longrightarrow \ln 2 \end{array}\right)$

2 (i) $x - 4 < x(x-4) \leq 5$
ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

(ii) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}n(e^x + e^{-x})$
ஆக இருக்கட்டும்; இங்கு n ஒரு மாறிலி. இது ≥ 2 ஆகும்.
$t = e^x$ என இட்டோ, வேறு விதமாகவோ,

(a) y யின் இழிவுப் பெறுமானம் $\sqrt{n^2-1}$ எனக் காட்டுக.

(b) $k > \sqrt{n^2-1}$ எனின், சமன்பாடு $y = k$ ஆனது t யிற்கு 2 மெய்ம் மூலங்களைக் கொண்டிருக்குமெனக் காட்டி, இம் மூலங்களைக் காண்க.

(c) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ ஆக இருக்கும் போது மேலே குறிப்பிட்ட 2 மூலங்களினதும் பெரிது $1 + \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ எனக் காட்டி, சிறிய மூலத்தை தருக.

மேலே தரப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில், $n (\geq 2)$ இன் பெறுமானம் எதுவாயினும், தனியான $y = k$ யைத் திருத்தியாக்கும் x இன் இரு மெய்ப் பெறுமானங்களும் எப்போதும் மட$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$ இற்கும் மட$_e(\sqrt{2}+1)$ இற்குமிடையே இருக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

(i) $(x-4) < x(x-4) \leq 5$

$(x-4) < x(x-4)$ என்பதைக் கருதுக.

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$

(ie) $x < 1$ OR $x > 4$ —— ①

$x(x-4) \leq 5$ என்பதைக் கருதுக.

$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0$

(ie) $-1 \leq x \leq 5$ —— ②

① & ② $\Rightarrow$ $-1 \leq x < 1$ OR $4 < x \leq 5$

(ii) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}n(e^x + e^{-x})$

$t = e^x$ எனக

$y = \left(\frac{1+n}{2}\right)t + \left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{1}{t} > 0 \quad (\because t > 0, n \geq 2)$

$\Rightarrow (1+n)t^2 - 2yt + (n-1) = 0$ —— (A)

(a) t இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு

$y^2 - (1+n)(n-1) \geq 0$

(ie) $y \geq \sqrt{n^2-1} \qquad (y > 0)$

$y_{\text{இழிவு}} = \sqrt{n^2-1} \longleftarrow$ மெய் $(\because n \geq 2)$

(b) $y = k$ ஆக

$(1+n)t^2 - 2kt + (n-1) = 0$

இரு மெய் பெறுமானங்களுக்கு

$k^2 > (n^2-1)$

(ie) $k > \sqrt{n^2-1}$

$\therefore$ தீர்வுகள் $t = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - (n^2-1)}}{(1+n)}$

(c) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ ஆக

$t = \dfrac{k \pm \sqrt{(n+1)^2}}{(1+n)} = \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}} \pm 1$

மூலங்களில் பெரியது $1+\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

〃 சிறியது $-1+\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

∴ $y=k$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்கள்

$x_{larger} = \ln\left(1+\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\right)$

$x_{smaller} = \ln\left(-1+\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\right)$

∴ $n \geq 2$ $x_{larger} < \ln(1+\sqrt{2})$

$x_{smaller} > \ln(-1+2/\sqrt{3})$

எல்லா n இற்கும்.

(3) (i) $(x-y)$ என்பது $f(x,y,z) \equiv x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டி, இதிலிருந்து இக்கோவையை முற்றாகக் காரணிப்படுத்துக.

x, y, z ஆகியன மெய்க் கணியங்களாகவும் இவற்றில் எந்த இரு கணியங்களும் சமமற்றும் இருப்பின், $f(x,y,z)$ பூச்சியமாக இருக்கமாட்டாது என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) ax^3+bx+c என்பது வடிவம் x^2+px+1 ஐ உடைய ஒரு காரணியைக் கொண்டதெனின், $a^2-c^2=ab$ எனக் காட்டுக.

இங்கு ax^3+bx+c உம் cx^3+bx^2+a உம் பொது இருபடிக் காரணி ஒன்றை உடையன என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

(i) $f(x,y,z) \equiv x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

$f(x,y,z)=0$

$\Longrightarrow (x-y)$ ஒரு காரணி.

f என்பது ஏகவினமான 5 படியிலுள்ள வட்ட சமச்சீர்ச் சார்பு.

∴ $(y-z), (z-x)$ என்பனவும் காரணிகளாகும்.

∴ $f(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z)(z-x)\{A(x^2+y^2+z^2)$
$B(xy+yz+zx)\}$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த x^4y / $1=-A$ $A=-1$

x^3y^2 / $0=+A-B$

$B=+A=-1$

$\therefore f(x,y,z) \equiv -(x-y)(y-z)(z-x)\{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\}$

x, y, z மெய்யும், ஏதாவது இரண்டு சமமற்றும் இருப்பதால்

$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

உம் $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx = \frac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\} > 0$

$\therefore f(x,y,z) \neq 0$

(ii) $ax^3+bx+c \equiv (x^2+px+1)(ax+c) \qquad a, c \neq 0$

$ax^3+bx+c = 0$ இன் தீர்வு $x = -c/a$ ஆகும்.

$\Rightarrow a(-c/a)^3 + b(-c/a) + c = 0$

$\Rightarrow -c^3/a^2 - bc/a + c = 0$

$\Rightarrow a^2 - c^2 = ab \qquad (\because a, c \neq 0)$

$x = 1/y$ எனக.

$a/y^3 + b/y + c = \left(1/y^2 + \frac{p}{y} + 1\right)\left(\frac{a}{y} + c\right)$

(ie) $a + by^2 + cy^3 = (1+py+y^2)(a+cy), \quad \because y \neq 0$

$\therefore cx^3+bx^2+a$ என்பதன் இருபடிக்காரணி x^2+px+1 ஆகும்.

$\therefore ax^3+bx+c, \; cx^3+bx^2+a$ என்பன பொது இருபடிக் காரணியைக் கொண்டுள்ளது

4. ஓர் நிறைவெண் சுட்டி ஒன்றுக்குத் தமோய்வரின் தேற்றத்தைக் கருதிக் கொண்டு, அதன் ஒரு மறை நிறைவெண் சுட்டிக்கு நிறுவுக

(i) மேலே குறிப்பிட்ட தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

(a) $(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3 (\cos\theta + i \sin\theta)^2$

(b) $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)(\cos 4\theta - i \sin 4\theta)$

(ii) $(\sqrt{5}+2i)^n$ ஐ $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இங்கு n என்பது நிறைவெண்; θ என்பது $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள ஒரு கூர்ங் கோணம்.

இதிலிருந்து, எல்லா n இற்கும், $(\sqrt{5}+2i)^n + (\sqrt{5}-2i)^n$ மெய்யாகும் என்பதைக் காட்டுக.

$n = 6$ ஆக இருக்கும் போது இக் கோவையின் பெறுமானத்தைக் காண்க

$n \leftarrow$ நேர் நிறை எண் ஆக

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$m \leftarrow$ மறை நிறை எண் எனின்.

$\therefore m = -n$ எனின் $(n>0)$

$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^m = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

$$= \frac{1}{\cos n\theta + i\sin n\theta} = \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta}$$

$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$= \cos(-n)\theta + i\sin(-n)\theta$$

$$= \cos m\theta + i\sin m\theta$$

(ii) (a) $(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3 (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$$= \left\{(\cos\theta + i\sin\theta)^3\right\}^3 (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{11}$$

$$= \cos 11\theta + i\sin 11\theta$$

(b) $(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 (\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-2}$$

$$= \cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

(iii) $(\sqrt{5} + 2i)^n = 3^n\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}i\right)^n$

$$= r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n, \quad \text{இங்கு } r = 3$$

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad \cos\theta = \sqrt{5}/3,\ \sin\theta = 2/3$$

$\sin\theta = 2/3$ ஆகுமாறு θ கூர்ங்கோணமாகும்.

$$(\sqrt{5} - 2i)^n = r^n(\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

$$= r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}$$

$$(\sqrt{5} + 2i)^n + (\sqrt{5} - 2i)^n = r^n\left\{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}\right\}$$

$$= r^n\left\{\cos n\theta + i\sin n\theta + \cos n\theta - i\sin n\theta\right\}$$

$$= r^n \cdot 2\cos n\theta$$

$$= 3^n \cdot 2\cos n\theta$$

$n = 6$ ஆக $3^6 \cdot 2\cos 6\theta$ //

ஆகண் வரிப்படத்தில் z_1, z_2, z_3 என்னும் சிக்கல் எண்கள் முறையே P_1, P_2, P_3 என்னும் புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. சிக்கல் $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ இன் மட்டையும் வீச்சையும் கேத்திரகணித முறையாக விளக்குக.

அதோடு, ஆகண் வரிப்படத்தில் z_1', z_2', z_3' என்னும் சிக்கல் எண்கள் முறையே P_1', P_2', P_3' என்னும் புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன.

$$\frac{z_1'-z_3}{z_2-z_3} = \frac{z_2'-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_3'-z_2}{z_1-z_2} \text{ எனின்}$$

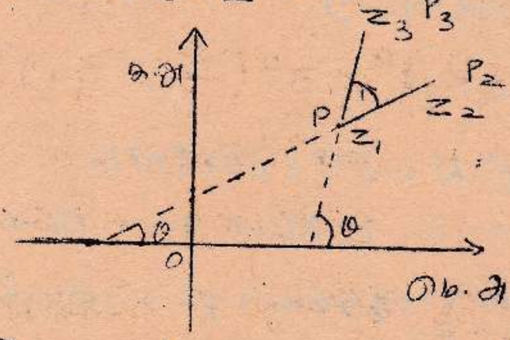
$P_2P_3P_1'$, $P_3P_1P_2'$, $P_1P_2P_3'$ ஆகிய முக்கோணிகள் இயல்பொத்தனவென நிறுவுக.
அதோடு, $P_1P_2P_3$, $P_1'P_2'P_3'$ ஆகிய முக்கோணிகள் ஒரே மையப்போலியை உடையனவெனவும் நிறுவுக.

<u>விடை</u>

$$z = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

$$|z| = \left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right| = \frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|} = \frac{P_1P_3}{P_1P_2}$$

$$\begin{aligned} \text{வீச்}(z) &= \text{வீச்}(z_3-z_1) - \text{வீச்}(z_2-z_1) \\ &= \theta - \phi \\ &= P_3\hat{P_1}P_2 \end{aligned}$$



$$\frac{z_1'-z_3}{z_2-z_3} = \frac{z_2'-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_3'-z_2}{z_1-z_2}$$

(ii) $\dfrac{P_1'P_3}{P_2P_3} = \dfrac{P_2'P_1}{P_3P_1} = \dfrac{P_3'P_2}{P_1P_2} = \lambda$, (என்க)

(iii) $P_1'\hat{P_3}P_2 = P_2'\hat{P_1}P_3 = P_3'\hat{P_2}P_1 = \alpha$ (என்க)

$\Delta^{கள்}$ $P_1'P_3P_2$, $P_2'P_1P_3$, $P_3'P_2P_1$ இயல்பொத்தவை

$$\frac{z_1'-z_3}{z_2-z_3} = \frac{z_2'-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z_3'-z_2}{z_1-z_2} =$$

$$= \underline{(z_1'+z_2'+z_3')-(z_1+z_2+z_3)} \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{z_1' + z_2' + z_3'}{3} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

$\therefore \Delta$ கள் $P_1P_2P_3$, $P_1'P_2'P_3'$ என்பவற்றின் மையப்போலிகள் பொருந்துகின்றன.

6 (i) ENGINEERING என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்திச் செய்யத்தக்க வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
அவற்றுள் எத்தனையில் மூன்று E களும் ஒருமிக்க இருக்கும்? அவை எத்தனை வழிகளில் முதலில் இருக்கும்?

(ii) 32 அட்டைகளைக் கொண்ட தொகுதி ஒன்றில் 8 கறுப்பு நிற அட்டைகளும் 8 சிவப்பு நிற அட்டைகளும் 8 நீல " " 8 பச்சை " " இருக்கின்றன. ஒரே நிறத்தைக் கொண்ட அட்டைகள் யாவும் வித்தியாசமானவை.

(a) தொகுதியிலிருந்து 3 அட்டைகள் எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படக் கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) அதே (a) இல் உள்ள தெரிவுகளின் எந்த எண்ணிக்கையில் அட்டைகள் யாவும் வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிருக்கமாட்டா.

(குறிப்பு: கணிப்புப் படிகள் யாவற்றையும் தெளிவாகக் காட்ட வேண்டும்.)

விடை:

ENGINEERING

(i) $E \leftarrow 3$, $N \rightarrow 3$, $G \rightarrow 2$. $I \rightarrow 2$, $R - 1$

எல்லா எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{11!}{3!\,3!\,2!\,2!} = 277200$$

3E களும் ஒருமிக்கவரும் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{9!}{3!\,2!\,2!} = 15120$$

3E களும் முதலில் வரும் வரிசைகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{8!}{3!\,2!\,2!} = 1680$$

(ii) 8 − கறுப்பு   8 − நீலம்

8 − சிவப்பு   8 − பச்சை

(a) 3 அட்டைகள் தெரிவு செய்யப்படும் வழிகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{32}C_3 = 4960$

(b) (i) தரப்பட்ட தெரிவுகளில் வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிருக்கும் தெரிவு $({}^8C_1 \times {}^8C_1 \times {}^8C_1) \times {}^4C_3$

$$= 8 \times 8 \times 8 \times 4$$
$$= 2048$$

∴ வித்தியாசமான நிறங்களைக் கொண்டிராத வண்ணம் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $= 4960 - 2048$

$$= 2912$$

(7) நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றுக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி, நிறுவுக.

(i) $\sum_{r=1}^{n} r\,{}^nC_r\, x^{r-1} = n(1+x)^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $n(1+x)^{n-1}$, $(1+x)^n$ என்பவற்றின் இரு விரிவுகளினதும் பெருக்கத்தை எடுத்து நோக்குவதன் மூலம் $\sum_{r=1}^{n} r({}^nC_r)^2$ ஆனது $n(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவில் உள்ள x^{n-1} இன் குணகத்திற்குச் சமமெனக் காட்டுக

(iii) $\sum_{r=1}^{n} r({}^nC_r)^{2n-1} = \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$ என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^r \quad , \quad n \leftarrow \text{நேர்நிறை எண்.}$$

இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ ஆகும்

இம்முடிவு $n=1$ ஆக உண்மையாகும்

$n=p$ ஆக இம்முடிவு உண்மை என்க.

(ie) $(1+x)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r\, x^r$

$$\Rightarrow (1+x)^{p+1} = (1+x)\sum_{r=0}^{p} {}^pC_r\, x^r$$

$$= \sum_{r=1}^{p} ({}^pC_r + {}^pC_{r-1})x^r + {}^pC_0 x^0 + {}^pC_p x^{p+1}$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{p} {}^{p+1}C_r\, x^r + {}^{p+1}C_{p+1}\, x^{p+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r\, x^r$$

$n = p+1$ இற்கு இம்முடிவு உண்மையாகும்.

ஆனால் $n=1$ இற்கு இம்முடிவு உண்மையாகும்.

$\therefore$ n இன் எல்லா நேர்முழு எண்களுக்கும் இம்முடிவு கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால் உண்மையாகும்.

(i) $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$$

இருபக்கமும் x குறித்து வகையிட

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, r\, x^{r-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r \cdot {}^nC_r \cdot x^{r-1}$$

(ii) $$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots C_r x^r + \cdots + C_n x^n$$

இருபக்கமும் வகையிட (x குறித்து)

$$n(1+x)^{n-1} = C_1 + 2\cdot C_2 x + \cdots + r\cdot C_r x^r + \cdots + \cdot C_n x^{n-1}$$

$$(x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_r x^{n-r} + \cdots + C_n$$

$$\Rightarrow C_1^2 + 2\cdot C_2^2 + \cdots + n(C_n)^2$$

$= \{n(1+x)^{n-1}\cdot(x+1)^n\}$ இன் விரிவில் x^{n-1} இன் குணகம்

$= n(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவில் x^{n-1} இன் குணகம்.

(ie) $$C_1^2 + 2\cdot C_2^2 + \cdots + n(C_n)^2 = \sum_{r=1}^{n} r({}^nC_r)^2$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{r=1}^{n} r({}^nC_r)^2 = n(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவில் x^{n-1} இன் குணகம்

$$= n \cdot {}^{2n-1}C_{n-1}$$

$$= n\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{\{(n-1)!\}^2}$$

8. (i) u, v என்பன x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளாயின், u, v அவற்றின் பெருக்கம் ஆகியவற்றின் சார்பில் $\frac{d}{dx}(uv)$ இற்குரிய சூத்திரம் ஒன்றை முதல் கோட்பாட்டிலிருந்து பெறுக.

(ii) $y = \frac{u}{v}$ எனின், மடக்கையை எடுத்துப் பின்னர் வகையிடுவதன் மூலம் $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$ எனக் காட்டுக.

(iii) u களும் V களும் x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளாக இருக்கும் போது $y = \dfrac{v_1 v_2 \cdots v_n}{V_1 V_2 \cdots V_n}$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = y \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dx} - \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dx} \right)$$ எனக் காட்டுக

(iv). $\tan^{-1}x$ குறித்து $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ ஐ வகையிடுக.

<u>விடை</u>

(i) $y = vV$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left\{ \frac{(v+\delta v)(V+\delta V) - vV}{\delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left\{ v\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{V\delta v}{\delta x} + \delta v \cdot \frac{\delta V}{\delta x} \right\}$$

$$= v\frac{dV}{dx} + V\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{dV}{dx} + \frac{Vdu}{dx}$$

(ie) $\dfrac{d}{dx}\{vV\} = v\dfrac{dV}{dx} + V\dfrac{du}{dx}$

(ii) $y = v/V$

$\ln y = \ln v - \ln V$

இருபக்கமும் வகையிட

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{V}\frac{dV}{dx}$$

(iii) $y = \dfrac{v_1 v_2 v_3 \cdots v_n}{V_1 V_2 V_3 \cdots V_n}$

$$\ln y = \sum_{i=1}^{n} \ln v_i - \sum_{i=1}^{n} \ln V_i$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i} \cdot \frac{dv_i}{dx} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \sum \left\{ \frac{1}{v_i} \frac{dv_i}{dx} - \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dx} \right\}$$

(iv) $y = \tan^{-1}(2x/_{1-x^2})$ $\qquad$ $x = \tan\theta$ எனின்

$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$ $\qquad$ $\theta = \tan^{-1}x$

$y = n\pi + 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 2$ // (ie) $\frac{dy}{d\tan^{-1}x} = 2$

9 (i) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_0^\pi x \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^n x\,dx$ எனக் காட்டுக;

இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண்.

அத்தோடு, $n \geq 2$ இற்கு,

$n\int_0^\pi \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x\,dx$ எனக் காட்டுக

இதிலிருந்து, $\int_0^\pi x \sin^4 x\,dx$, $\int_0^\pi x \sin^5 x\,dx$ ஆகியவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $\frac{d}{d\theta} \log_e$ (சீக θ + தான் θ) = சீக θ எனக் காட்டி,

அதனைப் பயன்படுத்தி, $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$ ஐக் காண்க.

$y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2}$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி,

$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$ இன் பெறுமானம் காண்க.

விடை:

(i) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 F(a-y)(-dy)$, $x = a - y$ என்க

$= -\int_a^0 F(a-y)\,dy = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$\int_0^\pi x \sin^n x\,dx = \int_0^\pi (\pi - x)\sin^n(\pi - x)\,dx$

$= \int_0^\pi (\pi - x)\sin^n x\,dx$

$= \pi\int_0^\pi \sin^n x\,dx - \int_0^\pi x \sin^n x\,dx$

(ie) $\int_0^\pi x \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin^n x\,dx$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi} \sin^{n-1}x \cdot \frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx$$

$$= \left(-\sin^{n-1}x\cos x\right)\Big|_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi} \cos x \sin^{n-2}x\cos x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx \qquad (n \geq 2)$$

i.e) $n\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi} \sin^{n-2}x\,dx$

$$I = \int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx = \pi/2 \int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

$$= \pi/4\left(\frac{4-1}{4}\right)\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$= \pi/2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1/2 \int_0^{\pi} dx = \frac{3}{16}\pi^2$$

$$J = \int_0^{\pi} x\sin^5 x\,dx$$

$$= \pi/2 \int_0^{\pi} \sin^5 x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \pi \cdot 4/15\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 8/15\,\pi.$$

(ii) $\frac{d}{d\theta}\ln(\sec\theta + \tan\theta) = \frac{1}{(\sec\theta + \tan\theta)}(\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta)$

$$= \sec\theta$$

$y = \sec$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln(\sec\theta + \tan\theta)$$

$$y = \frac{\sqrt{2x^2+6x+5}}{x+2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x^2+6x+5}} - \sqrt{2x^2+6x+5}\cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+1}{x+2}\,\frac{1}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$$

இதில்

$$y^2 - 1 = \frac{2x^2+6x+5-(x+2)^2}{(x+2)^2} = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-1}\;\frac{1}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}}$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+2)\sqrt{2x^2+6x+5}} = \int_{1}^{5/4}\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} \qquad \begin{array}{l} x=-1 \rightarrow y=1 \\ x=2 \rightarrow y=5/4 \end{array}$$

$$= \ln(\sec\theta + \tan\theta)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

இங்கு $\sec\theta_1 = 1$, $\sec\theta_2 = 5/4$ ஆகும்.

$$= \ln(5/4 + 3/4) - \ln(1)$$

$$= \ln 2 \quad //$$

(10) $y = \tan^{-1}x$ எனின் $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ஆகியவற்றை x இன் சார்பிற் காண்க. $\tan^{-1}x$ இற்குரிய மக்லோரினின் விரியை x^3 இலான உறுப்பு வரையும் பெறுக. அதோடு எல்லா மெய் x இற்கும் $y = \tan^{-1}x \; (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ இன் வரைபைப் பருமட்டாக வரைந்து, வரிப்படத்தின் ஆதியூடாகச் சரிவைக் உடைய அதே வரிப்படத்தில் கோடு $y = kx$ ஐ வரைக; இங்கு k ஒரு மெய் மாறிலி. இதிலிருந்து சமன்பாடு $\tan^{-1}x = kx$ ஆனது

(a) வெவ்வேறு 3 மூலங்களை

(b) ஒரேயொரு மூலத்தைக் கொண்டிருக்கும் k யினுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சை எழுதுக.

நீங்கள் $\tan^{-1}x$ இற்குப் பெற்ற மக்லோரினின் விரியைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடு $12\tan^{-1}x = 11x$ ஆனது 0.5 இற்கு அண்ணளவாகச் சமமான மூலம் ஒன்றை உடையதெனக் காட்டுக.

விடை:

$y = \tan^{-1}x$ $x = 0$ ஆக $\Rightarrow 0$

$x = 0$ ஆக $\rightarrow 1$

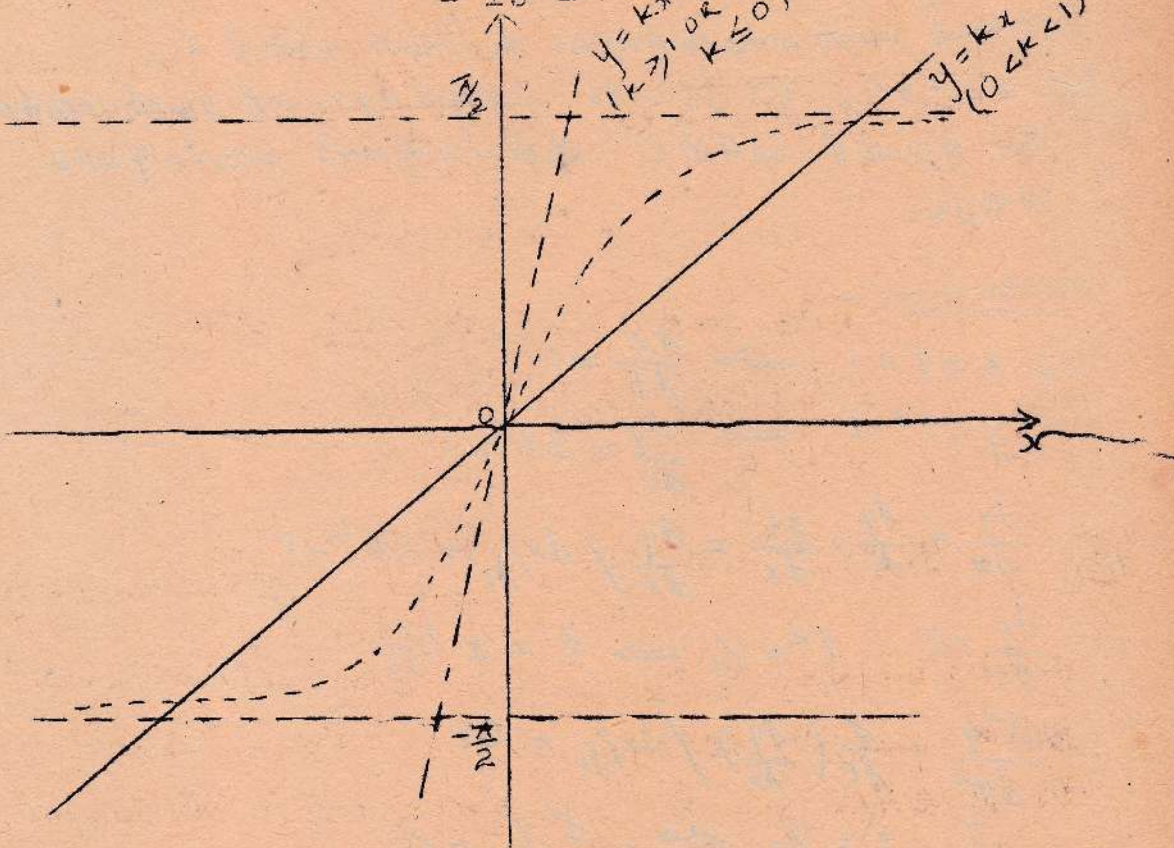
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ $x = 0$ ஆக $\Rightarrow 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2}{(1+x^2)^2} - \frac{2x(-2)\cdot 2x}{(1+x^2)^3}$, $x = 0$ ஆக $\Rightarrow -2$

$\therefore$ மக்லோரினின் விரி

$$\tan^{-1}x = 0 + \frac{x}{1!} + 0\cdot\frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \cdots = x - \frac{x}{3}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{உயர்வு} = 1$$

∴ அதியுயர் சாய்வு = 1

$\tan^{-1}x = kx$ எனும் சமன்பாட்டைக் கருதுக

(a) 3 மெய்மூலங்கள் இருப்பதற்கு $0 < k < 1$

(b) ஒரு மெய்மூலம் மாத்திரம் இருப்பதற்கு $k \geq 1$ or $k \leq 0$

$12\tan^{-1}x = 11x$

$12(x - x^3/3) = 11x$

(ie) $x(1-4x^2) = 0$

$x = 0$ or $x = \pm 0.5$

∴ அண்ணளவான சமமான மூலம் 0.5

(11) $x = t+1$, $y = t^3 - t$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளையி C தரப்படுகின்றது.

(i) C யின் திரும்பற் புள்ளிகளைக் காண்க, அவை ஒவ்வொன்றிலும் அது ஓர் உயர்வையா, இழிவையா, விபத்தியையா நேரொத்தது என்று கூறுக.

(ii) C யைப் பரும்படியாக வரைக.

(iii) இதிலிருந்து, (a) $x = t^3 - t$, $y = t+1$ என்னும்

பரமானச் சமன்பாடுகளினாலே தரப்படும் வளையி C',

(b) $x = t+1$, $y = |t^3 - t|$ எனினும் பரமானச் சமன்பாடுகளினாலே தரப்படும் வளையி C'' ஆகியவற்றைப் பருமட்டாக வரைக.

விடை :-

(i) $x = t+1 \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 1$

$y = t^3 - t \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} = 0$, $t^2 = 1/3 \Longrightarrow t = \pm 1/\sqrt{3}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt} = 6t$

$\therefore$ $t = 1/\sqrt{3}$ ஆக, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

$t = -1/\sqrt{3}$ " $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

$\therefore$ $t = 1/\sqrt{3}$ இல் இழிவு.

$t = -1/\sqrt{3}$ " உயர்வு

திரும்பற் புள்ளிகள்.

(a) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \longleftarrow$ இழிவு.

(b) $\left(1 - 1/\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \longleftarrow$ உயர்வு.

(ii) (c) $\frac{dy}{dx} > 0$, $t > 1/\sqrt{3}$ and $t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

< 0, $-1/\sqrt{3} < t < 1/\sqrt{3}$

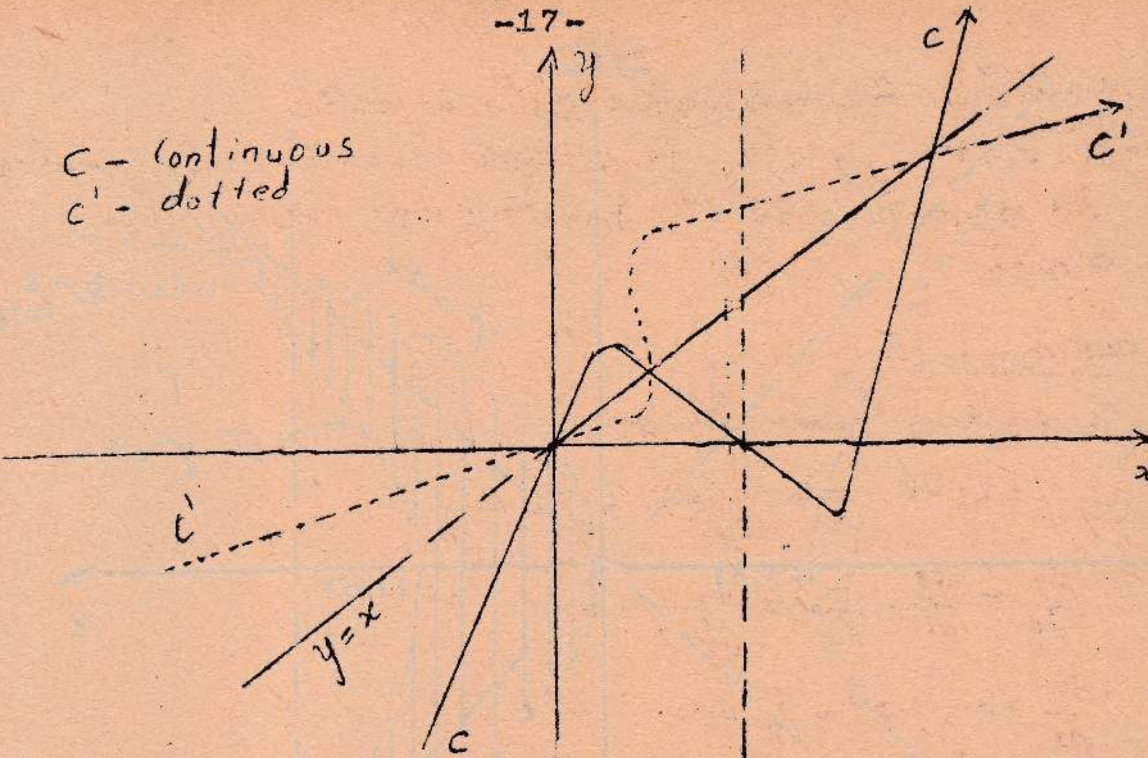
(d) $t = 0$ ஆக $x = 1$, $y = 0$

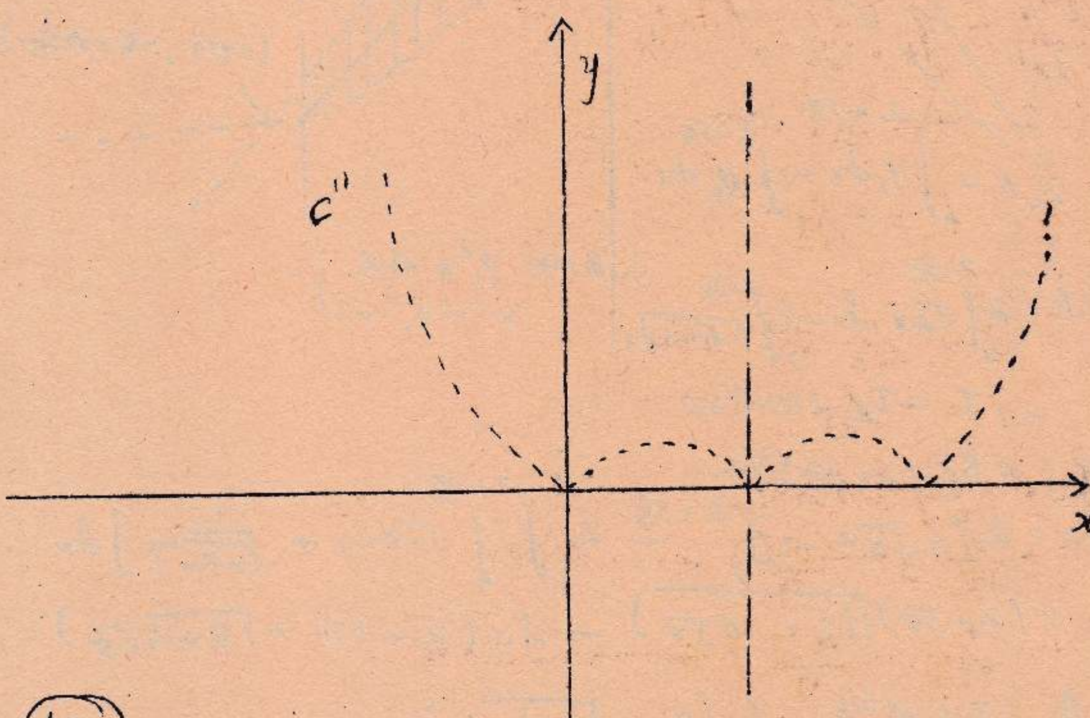
(e) $x = 0$, $t = -1$

$y = 0$ $t = 0 \pm 1$

(f) $(x-1)$ உம் y உம் ஒற்றைச் சார்புகள்.

(g) $t \longrightarrow \infty$ ஆக $x \longrightarrow \infty$, $y \longrightarrow \infty$



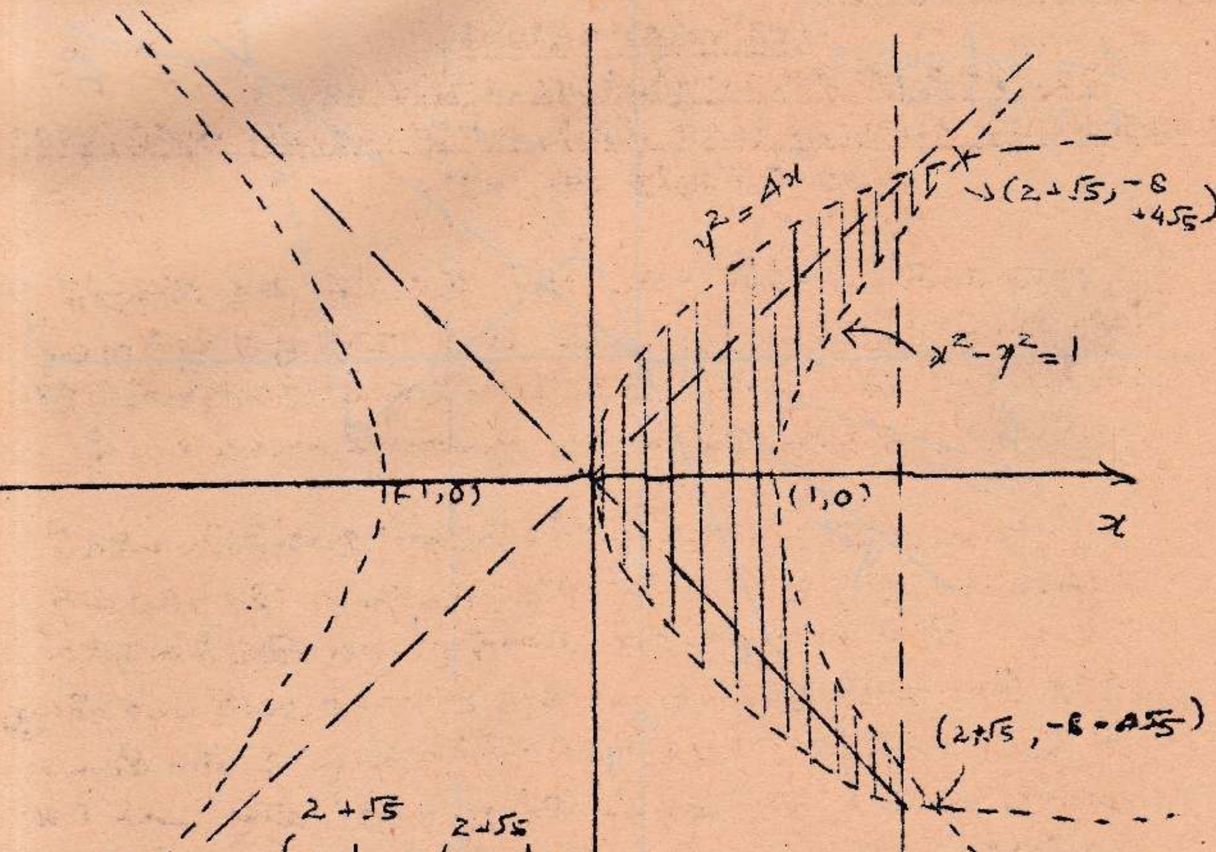


(12)

பரவளைவு $y^2=4x$, அதிபரவளைவு $x^2-y^2=1$, கோடு $x=4$ ஆகியவற்றை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

(i) $x^2-y^2-1 \leq 0$ ஆகவும் $y^2-4x \leq$ ஆகவும் இருக்கும் பிரதேசம் S_1 ஐக் காட்டி, S_1 இனால் வரைப்புற்ற பரப்பளவைக் காண்க.

(iii) பரவளைவு $y^2=4x$ இனாலும் கோடு $x=4$ இனாலும் வரைப்புற்ற பிரதேசம் S_2 ஆகும்.
பரப்பளவு S_2 ஐக் கோடு $x=4$ பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றுவதன் மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.



(i) $\frac{1}{2}A = \int_0^{2+\sqrt5} y_1\,dx - \int_1^{2+\sqrt5} y_2\,dx$ இங்கு $\left.\begin{array}{l} y_1^2 = 4x \\ x^2 - y_2^2 = 1 \end{array}\right\}$

(ie) $A = 2\int_0^{2+\sqrt5} \sqrt{4x}\,dx - 2\int_1^{2+\sqrt5} \sqrt{x^2-1}\,dx$

$= I_1 - I_2$ (என்க)

$I_1 = 8/3\,(2+\sqrt5)^{3/2}$

$I_2 = 2\left[x\sqrt{x^2-1}\right]_1^{2+\sqrt5} - 2\int_1^{2+\sqrt5} \left\{\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right\}dx$

$= (2+\sqrt5)\sqrt{(8+4\sqrt5)} - \ln(2+\sqrt5+\sqrt{8+4\sqrt5})$

$A = 2/3\,\alpha^{3/2} + \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$; இங்கு $\alpha = 2+\sqrt5$

(ii) தேவையான கனவளவு

$V = \pi\int_{-4}^{4} (4-x)^2 dy$, இங்கு $y^2 = 4x$

$= 2\pi\int_0^4 (4 - y^2/4)^2 dy$

$= 2\pi\left\{16y - 2/3\,y^3 + y^5/80\right\}_0^4$

$= \frac{1024\pi}{15}$ அலகு

ஆனால் $(1-z^2)\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{1}{z}\dfrac{dy}{dz} + z^2 y = 0$ ஆவதால்

$$z^2\frac{d^2y}{dx^2} + z^2 y = 0 \qquad 1 - z^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

(9)

(i) $x = \pi - y$ என பிரதியீட்டைக் கொண்டு $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ஐ $0, \pi/2$ என்னும் எல்லைகளுக்கிடையே உள்ள தொகையீடாக உருமாற்றுக.
இதிலிருந்து $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனக் காட்டுக

(ii) m, n என்பன நேர் நிறைவெண்கள் (இரட்டையெண்கள்) எனின்

$$\int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x\,dx = (-1)^m \frac{n}{(2m+1)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\sin(2m+1)x\,dx$$

எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^4 \sin 3x\,dx$ இன் பெறுமானம் காண்க

விடை:-

(i) $$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad \begin{aligned} x &= \pi - y \\ dx &= -dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi - y)\sin(\pi - y)\,dy}{1+\cos^2 y}$$

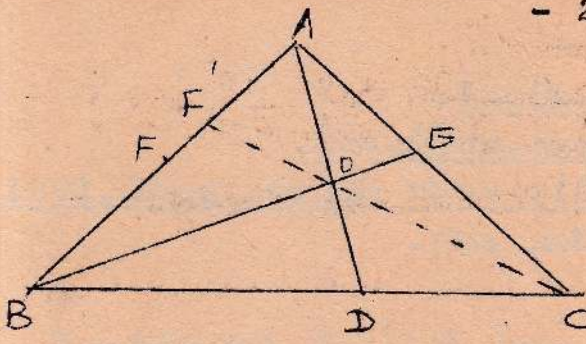
$$= \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y\,dy}{1+\cos^2 y} - \int_0^{\pi/2} \frac{y \sin y\,dy}{1+\cos^2 y}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy$$

$$= -\pi \tan^{-1}\cos y\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$$

(ii) $$I = \int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x\,dm$$

$$= \frac{x^n \cos(2m+1)x}{-(2m+1)}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{n}{2m+1}\int_0^{\pi/2} \cos(2m+1)x\, x^{n-1}\,dx$$



CO ஆனது நீண்டு AB ஐ F' இல் சந்திக்கும் என்க.

$\therefore$ AD, BE, CF' ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

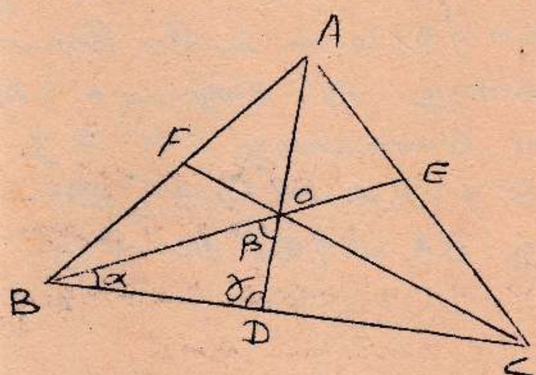
$\therefore$ மேலுள்ள முடிவின்படி

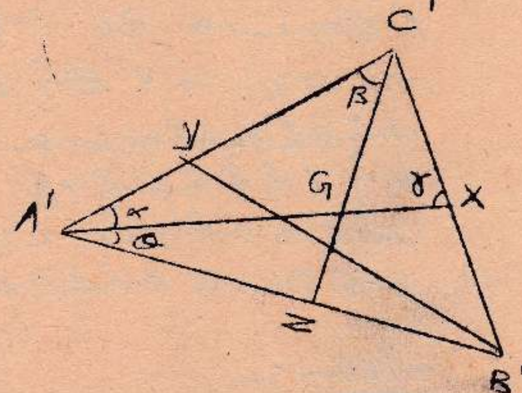
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$$

ஆனால் எனக் கொள்ளப்பட்டது $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

$$\Longrightarrow \frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$$

$\Longrightarrow F'=F$ $\quad\therefore$ AD, BE, CF ஒரு புள்ளி O இல் சந்திக்கின்றன.





அமைப்பு :- $C'Z \parallel AB$ ஆகுமாறு Z என்னும் புள்ளி $A'B'$ இல் உண்டு (என்க).

நிறுவல் :- $BE \parallel A'C'$, $BD \parallel A'X$, $OD \parallel C'X$

$$\Longrightarrow \Delta BOD \,|||\, \Delta A'C'X$$

$$\therefore \frac{BD}{OD}=\frac{A'X}{C'X} \quad \text{—— ①}$$

இதேபோல் $\Delta COD \,|||\, \Delta A'B'X$

$$\Longrightarrow \frac{DC}{OD}=\frac{A'X}{XB'} \quad \text{—— ②}$$

$$① \,\&\, ② \Longrightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{B'X}{XC'} \quad \text{—— ③}$$

$|||^{ly}$ $\frac{CE}{EA}=\frac{C'Y}{YA'}$ —— ④

$$\frac{AF}{FB}=\frac{A'Z}{ZB'} \quad \text{—— ⑤}$$

$$③,④,⑤ \Longrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{B'X}{XC'}\cdot\frac{C'Y}{YA'}\cdot\frac{A'Z}{ZB'}$$

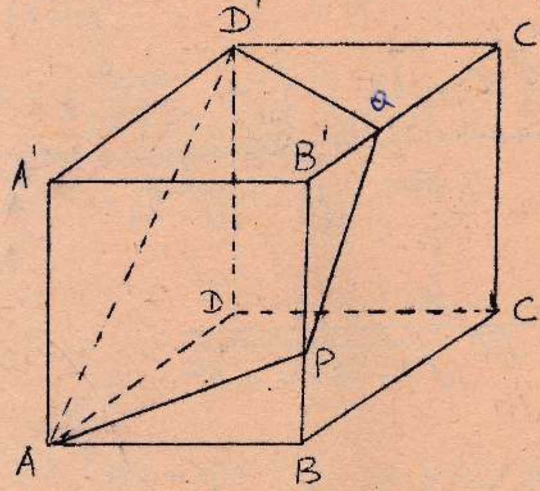
$$\Rightarrow \frac{B'X}{XC'}\cdot\frac{C'Y}{YA'}\cdot\frac{A'Z}{ZB'}=1 \qquad \left\{\because \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\right\}$$

$\therefore$ $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லும்.

(ie) $C'Z$, G இனூடாகச் செல்லும்

(ie) $C'G \parallel AB$ ஆகும்.

(2)



$ABCDA'B'C'D'$ ஒரு சதுரமுகி. இதன் விளிம்புகள் ஒவ்வொன்றும் நீளம் a யை உடையவை. ஒரு புள்ளி P ஆனது விளிம்பு $BB' = \lambda \cdot PB'$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ளது. கோடு AD' ஐயும் புள்ளி P யையும் கொண்ட தளம் விளிம்பு $B'C'$ ஐ Q வில் சந்திக்கின்றது.

$C'Q = \lambda \cdot QB'$ எனக் காட்டுக.

அதோடு a, λ ஆகியவற்றின் சார்பில்

(a) PQ வின் நீளம் (b) $\cos A\hat{P}Q$

(c) $APQD'$ இன் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடை:

தளம் $APQD'$ ஆனது சமாந்தரத் தளங்கள் $ADD'A'$, $BCC'B'$ என்பவற்றை AD', PQ இல் இடைவெட்டுகின்றன.

$\Rightarrow AD' \parallel PQ$

அத்துடன் $AD' \parallel BC'$

$\Rightarrow PQ \parallel BC'$

$$\therefore \lambda = \frac{BP}{PB'} = \frac{C'Q}{QB'}$$

$$\Rightarrow C'Q = \lambda QB'$$

(a) $\frac{PQ}{BC'} = \frac{PB'}{BB'} \Rightarrow PQ = \left(\frac{PB'}{BB'}\right)BC'$

$$= \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)\sqrt{2}\,a$$

(b) $\cos A\hat{P}Q = \dfrac{AP^2 + PQ^2 - AQ^2}{2AP \cdot PQ}$

$$PB = \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad BB' = \frac{\lambda}{1+\lambda}a, \quad QB' = \frac{1}{1+\lambda}a$$

$$\therefore AP^2 = a^2 + \left(\frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)^2$$

$$AQ^2 = AB^2 + BB'^2 + QB'^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{(1+\lambda)^2}$$

$$\cos A\hat{P}Q = \frac{\left\{a^2 + \left(\frac{\lambda a}{1+\lambda}\right)^2\right\} + \frac{2a^2}{(1+\lambda)^2} - 2a^2 - \frac{a^2}{(1+\lambda)^2}}{2a^2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}} \; \frac{\sqrt{2}}{1+\lambda}}$$

$$= \frac{-\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\lambda+2\lambda^2}}$$

(c) $APQD'$ இன் பரப்பு $= \frac{1}{2}(AD' + PQ)\, AP \sin A\hat{P}Q$

$$= \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{1+\lambda}\right) a \left(1 + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\right)^{1/2} \sin A\hat{P}Q$$

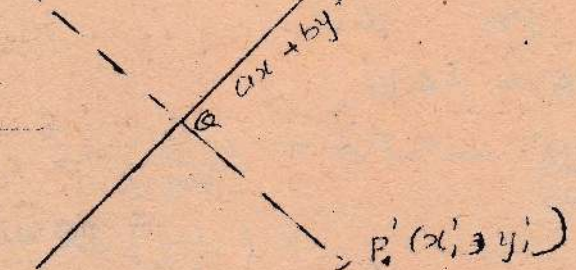
$$\sin A\hat{P}Q = \sqrt{1 - \cos^2 A\hat{P}Q}$$

$$\therefore \text{பரப்பு} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2(\lambda+2)\sqrt{2}}{(1+\lambda)^2}\left\{2\lambda^2 + 2\lambda + 1\right\}^{1/2} \frac{\sqrt{3\lambda^2+4\lambda+2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\lambda+2\lambda^2}}$$

$$= \frac{a^2(\lambda+2)}{(1+\lambda)}\sqrt{3\lambda^2+4\lambda+2}$$

(3) கோடு $ax+by+c=0$ இற்கு புள்ளி (x_1, y_1) இன் விம்பத்தைக் காண்க.
ABCD ஒரு சாய்சதுரம். இங்கு $B \equiv (1, 0)$; AB, AC ஆகிய வரிகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $y - x + 1 = 0$, $y - 3x = 0$ ஆகும். DA, CD, BC ஆகியவரிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அத்தோடு, சாய்சதுரம் ABCD யின் பரப்பளவையும் காண்க.

விடை:



$P_1'(x_1', y_1')$, P_1 இன் விம்பம் என்க

$$\frac{x_1' - x_1}{a} = \frac{y_1' - y_1}{b} = t \text{ (பரமானம்) (என்க)}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + at \\ y_1' &= y_1 + bt \end{aligned}\right\}$$

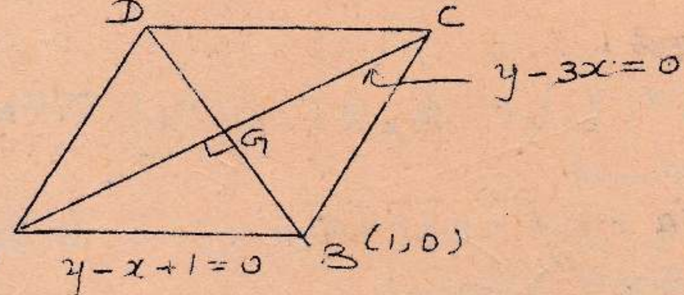
P_1P_1' இன் நடுப்புள்ளி $Q \equiv \left\{ x_1 + \frac{at}{2} , y_1 + \frac{bt}{2} \right\}$

தரப்பட்ட கோடு $ax + by + c = 0$ இல் அமைவதால்

$$a(x_1 + at/2) + b(y_1 + bt/2) + c = 0$$

$$t = \frac{-2(ax_1 + by_1 + c)}{(a^2 + b^2)}$$

$$\therefore P_1' \equiv \left\{ x_1 - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax_1 + by_1 + c) , y_1 - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax_1 + by_1 + c) \right\}$$



$$D \equiv \left\{ 1 - \frac{2(-3)(-3)}{10} , 0 - \frac{2 \cdot 1 \cdot (-3)}{10} \right\}$$

$$\equiv \{-4/5 , 3/5\}$$

$DC \Rightarrow \quad y - x = 3/5 + 4/5$

(ie) $\quad 5y - 5x - 7 = 0$

A இன் ஆள்கூறுகள் $\left.\begin{aligned} y - 3x &= 0 \\ y - x + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow (-1/2 , -3/2)$

$$AD \Rightarrow \frac{y + 3/2}{x + 1/2} = \frac{3/5 + 3/2}{-4/5 + 1/2}$$

(ie) $y + 7x + 5 = 0$

$BC \Rightarrow y + 7x = 0 + 7 = 7$

(ie) $y + 7x - 7 = 0$

BD இன் நடுப்புள்ளி $G \equiv (1/10 , 3/10)$

சாய்சதுரம் ABCD இன் பரப்பு $= 4 \Delta AGB$

$= 2\, AG \cdot GB$

$= 2\sqrt{0.6^2 + 1.8^2} \cdot \sqrt{0.9^2 + 3^2}$

$= 2 \times 2 (0.3^2 + 0.9^2)$

$= 3.6$ அலகு.

④ வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ மீதுள்ள Q_1, Q_2 என்னும் இரு புள்ளிகளிலான தொடலிகள் $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ இற் சந்திக்கின்றன. புள்ளி P_0 இனது தொடுகை நாண் $Q_1 Q_2$ இன் சமன்பாடு $xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$ எனக் காட்டுக.

$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$

என்னும் வட்டங்களின் இருந்தும் புள்ளி $(1, -2)$ இன் தொடுகை நாண்கள் பொருந்துமென நிறுவுக.

அதேபோல, அவ்வட்டங்களின் இருந்து தொடுகை நாண்கள் ஒரே நாண்களாக இருக்கும் வேறொரு புள்ளி இருக்கிறதெனவும் காட்டி, அதன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

<u>விடை:-</u>

$Q_1 \equiv (x_1, y_1)$, $Q_2 \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

Q_1 இல் தொடலி

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

இது P_0 இனூடு செல்வதால்

$x_0 x_1 + y_0 y_1 + g(x_0 + x_1) + f(y_0 + y_1) + c = 0$ —①

||ly $x_0 x_2 + y_0 y_2 + g(x_0 + x_2) + f(y_0 + y_2) + c = 0$ —②

① & ② $\Rightarrow x_0 x + y_0 y + g(x_0 + x) + f(y_0 + y) + c = 0$

இல் $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$ அமைகின்றது.

(ie) $Q_1 Q_2$ இன் சமன்பாடு

$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$

$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ இற்கு $(1, -2)$ இலிருந்தான தொடலிகளின் தொடுகை நாண்

$x - 2y + 3(y - 2) + 5 = 0 \implies x + y - 1 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$ இற்கு தொடுகை நாண்

$x - 2y + (x + 1) + 4(y - 2) + 5 = 0$

$\implies x + y - 1 = 0$

இரு தொடுகை நாண்களும் பொருந்துகின்றன.

(x_0, y_0) இலிருந்தான தொடுகை நாண்கள் ஒன்றுடன் பொருந்துகின்றன என்க

(ie) $xx_0+yy_0+3(y+y_0)+5=0$ உம்
$xx_0+yy_0+(x+x_0)+4(y+y_0)+5=0$ உம் பொருந்தும்
போது

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0x+(y_0+3)y+3y_0+5=0 \\ (x_0+1)x+(y_0+4)y+x_0+4y_0+5=0 \end{array}\right\}$$ என்பன ஒரே கோட்டைக் குறிக்கின்றன

$$\therefore \frac{x_0+1}{x_0}=\frac{y_0+4}{y_0+3}=\frac{x_0+4y_0+5}{3y_0+5}$$

$$\therefore x_0=y_0+3=\frac{3y_0+5}{x_0+y_0}=\frac{3x_0-4}{2x_0-3}$$

$\therefore x_0=1$ OR 2

$$\left.\begin{array}{l} x_0=1 \\ y_0=-2 \end{array}\right\} \text{ OR } \left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ y_0=-1 \end{array}\right\}$$

$\therefore$ (2,-1) இலிருந்தான தொடலிகளின் நாண்கள் பொருந்துகின்றன.

(5) (i) முனைவு O விலிருந்து நடப்பட்ட (O வினூடாகச் செல்லாத) நேர்கோடு l இற்குள்ள செங்குத்தானது தொடக்கக் கோட்டுடன் ஒரு கோணம் α வில் சாய்ந்துள்ளது. இதன் நீளம் d ஆகும். l இன் சமன்பாடு $r=d\sec(\theta-\alpha)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $r\cos\theta=3$, $r\sin\theta=4$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளும் இரு நேர்கோடுகளை வகைகுறிக்கின்றன என்னக் காட்டி,

(a) அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணம்.

(b) அவை இடைவெட்டும் புள்ளியின் முனைவு ஆள்கூறுகள்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) பின்வரும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைக.

(a) $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$ (b) $x^2-4y=0$

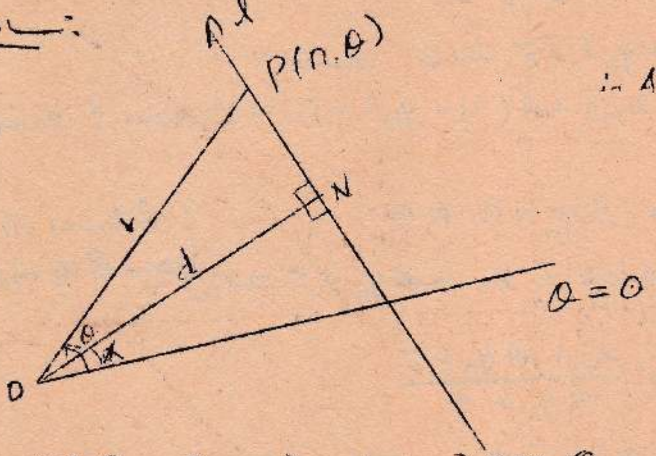
(c) $y-x+1=0$

$\frac{x^2}{4}+y^2-1\leq 0$, $x^2-4y\geq 0$, $y-x+1\geq 0$

ஆகியவற்றைத் திருப்தியாக்கும் $x-y$ தளத்தில் உள்ள பிரதேசம் R ஐக் காட்டுக. R இல் x^2+y^2 இன் அதியுயர் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

விடை:

(i)



$\therefore \Delta OPN$ இல்

$r = d \sec(\theta - \alpha)$

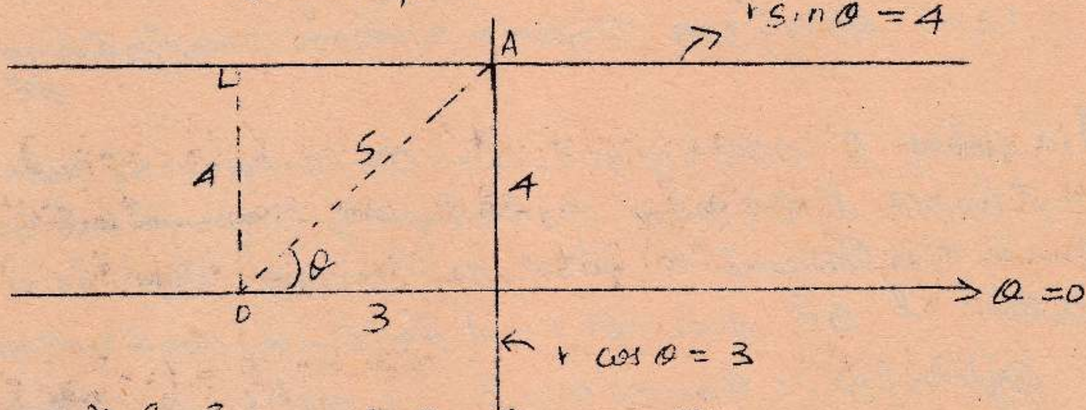
$r \cos\theta = 3 \implies r = 3 \sec\theta$ இங்கு $d = 3, \alpha = 0$

ஒரு நேர் கோடாகும்

$r \sin\theta = 4 \implies r = 4 \sec\{\theta - \pi/2\}$

$d = 4, \quad \alpha = \pi/2$

இது ஒரு நேர் கோடாகும்



(a) அவற்றுக்கிடையிலுள்ள கோணம் $\pi/2$

(b) $(5, \tan^{-1} 4/3)$

(ii) $C_1 : x^2/4 + y^2 - 1 = 0$

அரைப் பேரியச்சு $= 2$
அரைச் சிறியச்சு $= 1$ } உடைய நீள்வளையம்.

$C_2 : x^2 - 4y = 0$

$(0, 0) \leftarrow$ உச்சி
$(0, 1) \leftarrow$ குவியம் } உடைய பரவளைவு

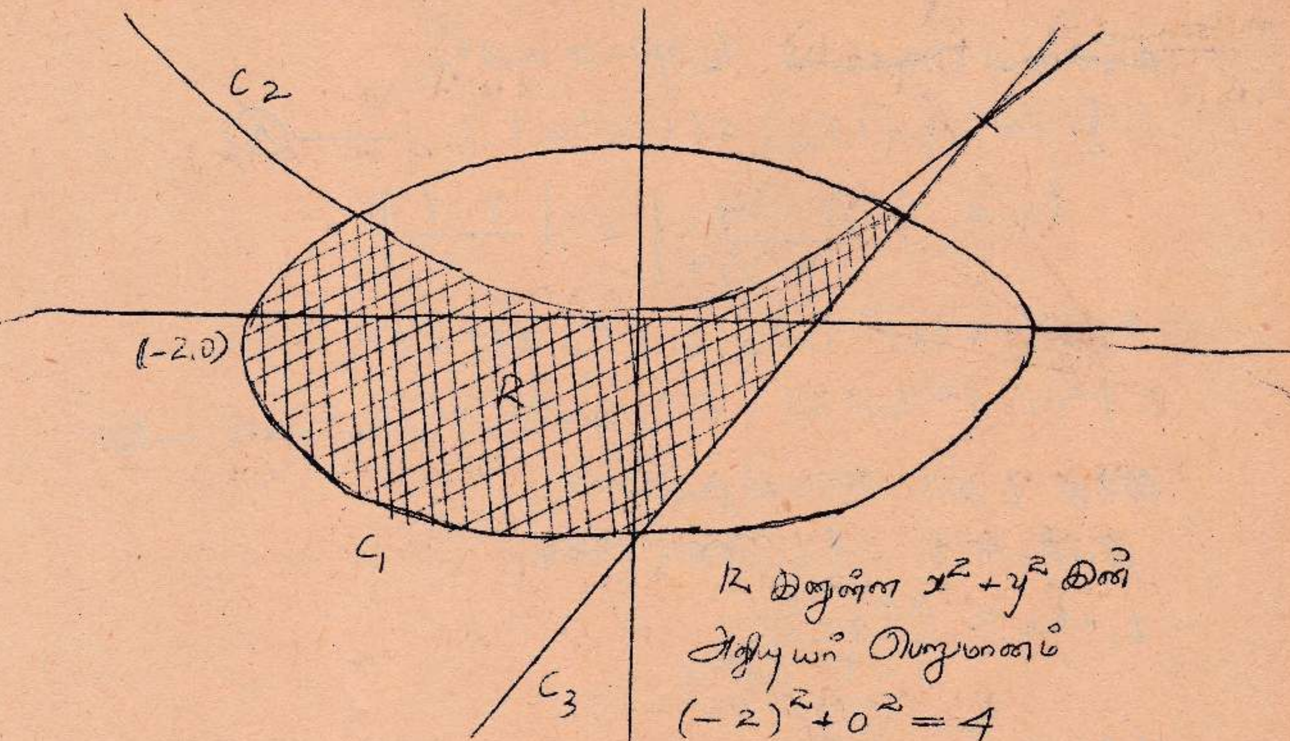
$C_3 : y - x + 1 = 0$

$1 \leftarrow$ படித்திறன்
$-1 \leftarrow$ வெட்டுத்துண்டு } உடைய நேர்கோடு.

C_1, C_2 இடைவெட்டும் புள்ளிகள் $\left(\pm\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$

C_2, C_3 " " " $(2, 1)$

C_3, C_1 " " " $(0, -1), (8/5, 3/8)$



R இனுள்ள x^2+y^2 இன் அதியுயர் பெறுமானம் $(-2)^2+0^2=4$

(6) பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளிலும் உள்ள இரு தொடலிகளும் இடைவெட்டும் புள்ளி $\{at_1t_2, a(t_1+t_2)\}$ எனக் காட்டுக.

$(at^2, 2at)$ இல் உள்ள தொடலியானது $P \equiv (aT^2, 2aT)$ இல் உள்ள தொடலியுடன் ஒரு கோணம் α வை ஆக்குமெனின், t ஆனது சமன்பாடு

$$t^2(1-T^2\,\text{தான்}^2\alpha) - 2Tt\,\text{சீக}^2\alpha + T^2 - \text{தான்}^2\alpha = 0$$

ஐத் திருப்திப்படுமெனக் காட்டுக.

அத்தகைய இரு தொடலிகள் இருக்கின்றன என்பதை உய்த்தறிந்து, அவை இடைவெட்டும் புள்ளி Q வின் ஆள்கூறுகள் T, α ஆகியவற்றின் சார்பிற் காண்க. PQ வின் சமன்பாடு

$$y - 2aT = -\frac{2T}{1-T^2}(x-aT^2)$$

எனவும் பரவளைவு மீது P இயங்கும்போது நிலைத்த புள்ளி ஒன்றினூடாக PQ செல்கின்றதெனவும் காட்டுக.

தீர்வு:—

$P_1(at_1^2, 2at_1)$ இலுள்ள தொடலியின் சாய்வு $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_1} = \frac{2a}{2at_1}$

$= 1/t_1$

P_1 இலுள்ள தொடலி $\Rightarrow y - \frac{1}{t_1}x = 2at_1 - at_1$

(i.e) $t_1y - x = at_1^2$

மற்றைய தொடலி $t_2 y - x = a t_2^2$

$\therefore$ [illegible] $\{a t_1 t_2, \ a(t_1 + t_2)\}$ —— (A)

$$\tan\alpha \ \left|\frac{1/t - 1/T}{1 + 1/tT}\right| = \left|\frac{T-t}{Tt+1}\right|$$

i.e) $(1+Tt)^2 \operatorname{Tan}^2\alpha = T^2 - 2tT + t^2$

$\therefore t^2(1 - T^2 \operatorname{Tan}^2\alpha) - 2Tt\sec^2\alpha + T^2 - \operatorname{Tan}^2\alpha = 0$ —— (B)

இது t இல் இருபடிச்சமன்பாடு.

மூலங்கள் t_1, t_2 ஆகும் என்க.

$$t_1 + t_2 = \frac{2T\sec^2\alpha}{1 - T^2\operatorname{Tan}^2\alpha}$$

$$t_1 t_2 = \frac{T^2 - \operatorname{Tan}^2\alpha}{1 - T^2\tan^2\alpha}$$

$$\therefore Q \equiv \{a t_1 t_2, \ a(t_1 + t_2)\}$$

$$\equiv \left\{a\left(\frac{T^2 - \operatorname{Tan}^2\alpha}{1 - T^2\tan^2\alpha}\right), \ \frac{a \cdot 2T\sec^2\alpha}{1 - T^2\tan^2\alpha}\right\}$$

$$M_{PQ} = \frac{2aT\sec^2\alpha - 2aT(1 - T^2\tan^2\alpha)}{a(T^2 - \tan^2\alpha) - aT^2(1 - T^2\tan^2\alpha)} = \frac{2T}{T^2 - 1}$$

PQ இன் சமன்பாடு

$$\frac{y - 2aT}{x - aT^2} = \frac{2T}{T^2 - 1} = \frac{-2T}{1 - T^2} = \frac{0 - 2aT}{a - aT^2}$$

$\therefore$ PQ $(a, 0)$ என்னும் நிலையான புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்

(7) புள்ளி $P \equiv \left\{\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \ \frac{2bt}{1+t^2}\right\}$ ஆனது நீள்வளையம் $x^2/a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

அத்தோடு, நீள்வளையத்துக்கு P யில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$b(1-t^2)x + 2aty = (1+t^2)ab$ எனவுங்காட்டுக.

நீள்வளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி Q ஆனது $\left\{\frac{-2at}{1+t^2}, \ \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}\right\}$ என்னும் ஆள்கூறுகளை உடையது. Q இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

அதோடு, t மாறும்போது, (a) OP^2+OQ^2,
(b) Δ OPQ வின் பரப்பளவு ஆகியன மாறாமல் இருக்கின்றதெனவும் காட்டுக. இங்கு O என்பது உற்பத்தியாகும். நீள்வளையத்துக்கு P யிலும் Q விலும் உள்ள தொடலிகள் T யில் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன. t மாறும்போது T ஆனது வேறொரு நீள்வளையத்தின் மீது கிடக்கின்றதென நிறுவுக.

<u>விடை.</u>

$$P \equiv \left\{\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2}\right\}$$

$t = \tan \theta/_2$ எனின்

$$P \equiv \{a\cos\theta, b\sin\theta\}$$

இது $x^2/_{a^2} + y^2/_{b^2} = 1$ என்பதைத் திருப்தி செய்யும்.

~~(x_1,y_1) இல் தொடலியின் சாய்வு~~ $= \left.\frac{-b^2x}{a^2y}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{-b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு.

$$(y-y_1)a^2y_1 = -b^2x_1(x-x_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$\Longrightarrow$ P இல் தொடலி

$$x/_a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2ty}{b(1+t^2)} = 1$$

$$\therefore b(1-t^2)x + 2aty = (1+t^2)ab$$

Q இலுள்ள தொடலி

$$\frac{-x}{a}\cdot\frac{2t}{1+t^2} + \frac{y}{b} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 1$$

$$\therefore -2btx + a(1-t^2)y = (1+t^2)ab$$

(a) $OP^2+OQ^2 = a^2\left\{\frac{1-t^2}{1+t^2}\right\}^2 + \frac{4b^2t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4a^2t^2}{(1+t^2)^2} + b^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2$

$= (a^2+b^2) =$ மாறிலி

(b) $P \equiv (x_1,y_1)$; $Q \equiv (x_2,y_2)$

$\Delta\ OPQ = \frac{1}{2}|x_1y_2 - y_1x_2|$

$= \frac{1}{2}\left|ab\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{4abt^2}{(1+t^2)}\right| = \frac{1}{2}ab =$ constant

P இலும் Q இலும் உள்ள தொடலிகள் இடைவெட்டும் புள்ளி $T \equiv (x, y)$ எனின்.

$$x = \frac{a}{1+t^2}(1-t^2-2t)$$

$$y = \frac{b}{1+t^2}(1-t^2-2t)$$

$$\left\{ \frac{x}{a}(t^2+1) \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{b}(t^2+1) \right\}^2 = 2(1-t^2)^2 + 2 \cdot 4t^2$$
$$= 2(1+t^2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$$

இது இன்னுமொரு நீள்வளையமாகும்.

(8)

அதிபரவளைவு $x^2 - y^2 = a^2$ இன் மையவகற்சித் திறனைக் கண்டு S, S' என்னும் குவியங்களின் ஆள்கூறுகள் எழுதுக.
அதோடு S, S' ஆகியவற்றை ஒத்த செலுத்திகளின் சமன்பாடுகளையும் எழுதுக.
தக்க ஆள்கூற்று அச்சுகளின் தொகுதியைத் தெரிந்தெடுத்து, அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $xy = \frac{a^2}{2}$ எனக் காட்டி, இரு குவியங்களினதும் ஆள்கூறுகளையும் ஒத்த செலுத்திகளையும் எழுதுக.

செங்கோண அதிபரவளைவு ஒன்றின் ஒரு குவியம் S இலிருந்து இரு அணுகு கோடுகளுக்கும் உள்ள செங்குத்துக்களின் அடிகள் L, M என்பனவாகும். S ஐ ஒத்த செலுத்தி LM ஆகுமென நிறுவுக.

கோடு SL ஆனது அதிபரவளைவை N இல் சந்திக்குமெனின், அதிபரவளைவுக்கு N இல் உள்ள தொடலியானது M இனூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

விடை

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

மையவகற்சித்திறன் e எனின்

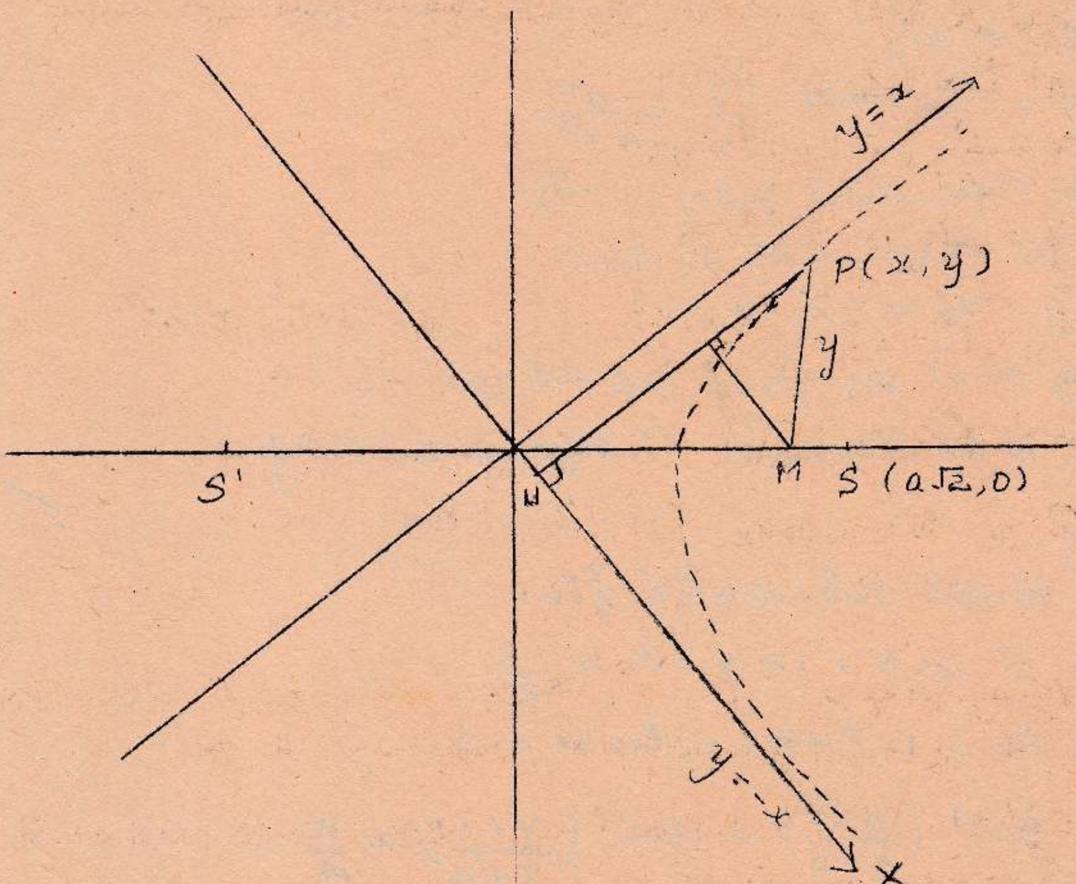
$a^2 = a^2(e^2-1)$ $\qquad S' = (-a\sqrt{2}, 0)$

(ie) $e = \sqrt{2}$

$\therefore S \equiv (a\sqrt{2}, 0)$

S க்கு ஒத்த செலுத்தி $x = a/\sqrt{2}$

S' " " $x = -a/\sqrt{2}$



அணுகு கோடுகள் அச்சுக்களாகத் தெரிவுசெய்ய

$P \equiv (X, Y)$ எனின்

$x = \dfrac{X + Y}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{Y - X}{\sqrt{2}}$ இங்கு $X = ON$ $Y = NP$

$x = OM$, $y = MP$

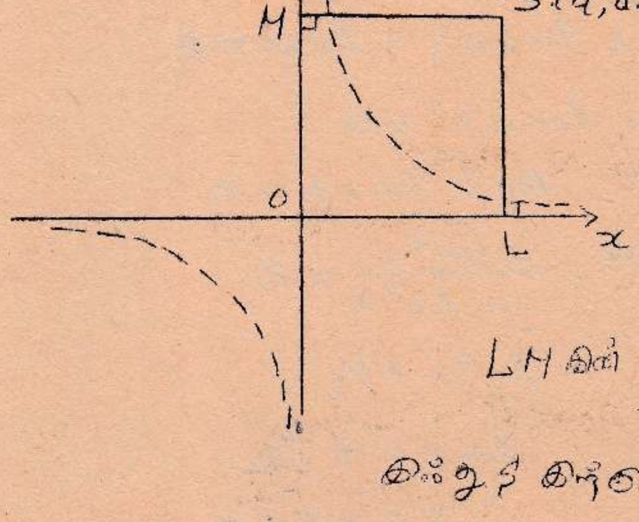
$\Longrightarrow x^2 - y^2 = a^2 \Longrightarrow XY = a^2/2$

$\therefore$ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $xy = a^2/2$ எனலாம்.

இவ்வகையால் $S \equiv (a, a)$, $S' \equiv (-a, -a)$

செலுத்திகள் S இற்கு ஒத்தது $y + x = a$

S' " " $y + x = -a$



$L \equiv (a, 0)$, $M \equiv (0, a)$

LM இன் சமன்பாடு $\dfrac{y - 0}{x - a} = -1$

இஃது S இற்கு ஒத்த செலுத்தியாகும்.

$N \equiv (a, a/2)$

$xy = a^2/2 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-a^2}{2x^2}$

N இல் தொடலியின் படித்திறன் $= -1/2$

N இல் தொடலியின் சமன்பாடு

$y - a/2 = -1/2\,(x - a)$

இது $(0, a)$ ஐத் திருப்தி செய்கின்றது

(c) N இல் தொடலி M இனூடாகச் செல்லும்.

9 பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $5\cos\theta + 12\sin\theta = \dfrac{13}{2}$

(ii) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

(iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{y-1}{y-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{y+1}{y+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

<u>விடை</u> :-

(i) $5\cos\theta + 12\sin\theta = 13/2$

$\dfrac{5}{13}\cos\theta + \dfrac{12}{13}\sin\theta = 1/2$

$\sin(\theta + \alpha) = 1/2$ இங்கு $\cos\alpha = 12/13$

$\theta = n\pi + (-1)^n \pi/6 - \alpha$ $\qquad \sin\alpha = 5/13$

$n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm ---$

(ii) $\tan 3x = \dfrac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}$ என்பதால்

$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

$\Rightarrow \tan 3x\{1 - \tan x \tan 2x\} + \tan 3x = 0$

$\Rightarrow \tan 3x\{2 - \tan x \tan 2x\} = 0$

$\Rightarrow \tan 3x = 0$ OR $\tan x \tan 2x = 2$

$3x = n\pi$ OR $\dfrac{2\tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 2$

$x = n\pi/3$

$n = 0 \pm 1 \pm 2$

$\tan^2 x = 1/2$

$\tan x = \pm 1/\sqrt{2}$

$x = m\pi \pm \alpha$

$\alpha = \tan^{-1}(1/\sqrt{2})$

தீர்வுகள் $x = n\pi/3,\ m\pi \pm \alpha,\ m, n = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{y-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y+1}{y+2}\right) = \pi/4$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y-1}{y-2}\right)$, $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{y+1}{y+2}\right)$ எனின்.

$\Rightarrow \alpha + \beta = \pi/4$

$\Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$

(ie) $$\frac{\frac{y-1}{y-2} + \frac{y+1}{y+2}}{1 - \frac{y-1}{y-2} \cdot \frac{y+1}{y+2}} = 1$$

(ie) $(y-1)(y+2) + (y+1)(y-2) = (y^2-4) - (y^2-1)$

(ie) $y^2 = 1/2 \Longrightarrow y = \pm 1/\sqrt{2}$

(10) (i) வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் ஒரு முக்கோணி ABC யாதிற்கு

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ எனக் காட்டுக.

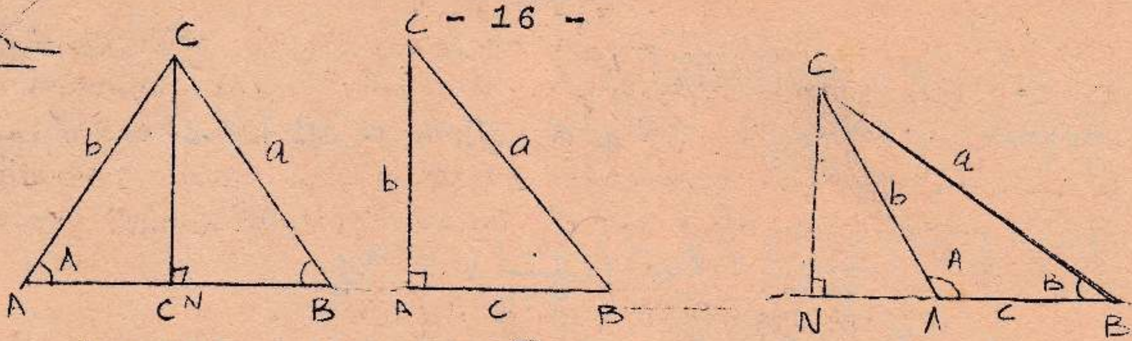
$a - b = kc$ எனின்

$\sin\frac{A-B}{2} = k\cos\frac{C}{2}$ எனவும்.

$\frac{k\sin A}{1 - k\cos B} = \tan\frac{A-B}{2}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) கோணம் $\theta\ (>0)$ என்பது $\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos A/2$ என்னும் தொடர்பினால் தரப்படுகின்றது. இங்கு A, b, c ஆகிய குறியீடுகள் ஒரு முக்கோணி ABC யிற்குப் பிரயோகிக்கப்படுகின்றவாறு அவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்களை உடையன $a = (b+c)\sin\theta$ என நிறுவுக

விடை



$A < \pi/2$ $\qquad$ $A = \pi/2$ $\qquad$ $A > \pi/2$

$a\sin B = b = b\sin A$

$b\sin A = NC = a\sin B$

$$a\sin B = b\sin C\hat{A}N = b\sin(\pi - A) = b\sin A$$

(1e) $b\sin A = a\sin B$ (3 வகைகளிலும்)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{——①}$$

$$a - b = kc$$

$$\Rightarrow \sin A - \sin B = k\sin C \quad (\because ① \text{ இலிருந்து})$$

$$\therefore 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = 2k\sin C/2 \cos C/2$$

$$\therefore \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = k\cos C/2 \quad \because \cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi - C}{2}\right) = \sin C/2$$

$$\frac{k\sin A}{1 - k\cos B} = \frac{\frac{a-b}{c}\sin A}{1 - \frac{a-b}{c}\cos B}$$

$$= \frac{(a-b)\sin A}{c - a\cos B + b\cos B}$$

$$= \frac{(a-b)\sin A}{b\cos A + b\cos B}$$

$$= \frac{\sin A - \sin B}{\sin B} \cdot \frac{\sin A}{\cos A + \cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{2\sin\frac{A-B}{2} \cdot \cos\frac{A+B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}}$$

$$= a/b \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

(ii) $$\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos A/2$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2 A/2$$

$$\therefore (b+c)^2\sin^2\theta = b^2 + c^2 + 2bc - 4bc\cos^2 A/2$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= a^2$$

$$\therefore (b+c)\sin\theta = a$$

(1) கழுத்துப் பட்டிகள் உற்பத்தி செய்பவர் ஒருவர் கல்லூரிகளில் கல்வி கற்கும் நோக்குடன் கழுத்துப்பட்டிகளைப் புதிய பாணியில் உற்பத்தி செய்வதற்கு உத்தேசித்தார். மாணவர்களின் மாதிரி ஒன்றின் அளவீடுகள் அடிப்படையாகக் கொண்டு பெறப்பட்ட கழுத்தின் பரிதி பற்றிய தரவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன

கழுத்துப் பருமானம் (அங்குலம்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.
12.5	4
13.0	19
13.5	30
14.0	63
14.5	66
15.0	29
15.5	18
16.0	1
16.5	1

கழுத்துப் பட்டியினது அளவின் சராசரியையும் நியம விலகலையும் கணிக்க. கழுத்துப்பட்டியின் அளவு அண்ணளவாகச் செவ்வனப் பரம்பலை உடையதெனக் கொண்டு, அவர் தமது வாடிக்கையாளர்களில் 95% ஆனோரின் தேவைகளைப் பூர்த்தி செய்வதற்கு உற்பத்தி செய்ய வேண்டிய கழுத்துப்பட்டிகளின் கூடிய பெரிய அளவையும் ஆகக் குறைந்த அளவையும் கணிக்க.

விடை:-

கழுத்துப் பருமானம் (அங்குலம்)	மாணவர் எண்ணிக்கை				
x	f	$y = x - 14.5$	Fy	y^2	Fy^2
12.5	4	-2	-8.0	4.00	16.00
13.0	19	-1.5	-28.5	2.25	42.7
13.5	30	-1.0	-30.0	1.00	30.00
14.0	63	-0.5	-31.5	0.25	15.75
14.5	66	0.0	0.0	0.00	0.00
15.0	29	0.5	14.5	0.25	7.25
15.5	18	1.0	18.0	1.00	18.00
16.0	1	1.5	1.5	2.25	2.25
16.5	1	2.0	2.0	4.00	4.00
	231		-62.0		136.00

இடை $\bar{y} = \frac{-62.0}{231} = -0.268$

$\bar{x} = 14.5 + \bar{y} = 14.5 - 0.268 = 14.232$

x இன் மாறற்றிறன் $=$ y இன் மாறற்றிறன் $= \frac{1}{231}\left\{136 - \frac{(-62)^2}{231}\right\}$

$= \frac{1}{231}\left\{136 - \frac{3844}{231}\right\}$

$= \frac{1}{231}\left\{136 - 16.641\right\} = \frac{119.359}{231} = 0.517$

நியம விலகல் = $S = \sqrt{0.517} = 0.719$

கீழ்ப் பெறுமானம் $= \bar{x} - 2S = 14.232 - 1.438 = 12.794$

உயர்வுப் " $= \bar{x} + 2S = 14.232 + 1.438 = 15.670$

(12) குறித்த கம்பனி ஒன்று அதற்குத் தேவையான உபகரணப் பொருள்களுக்காக A, B, C என்னும் மூன்று விநியோகத்தர்களிடம் வரவழைத்தற் கட்டளைகள் அனுப்புகின்றது.

(அ) ~~மூன்று விநியோகத்தர்களும் கட்டளை ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவுகள்~~ சமமாக இருப்பின்,

(ஆ) B, C ஆகிய விநியோகத்தர்கள் கட்டளை ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவு சமமாக இருக்கும் அதேவேளை விநியோகத்தர் A கட்டளை ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவு மற்றைய இரு விநியோகத்தர்களில் ~~எவரேனும் ஒருவர் கட்டளை ஒன்றைப்~~ பெறுவதற்கான நேர்தகவைப் போன்று இருமடங்காக இருக்குமெனின்

விநியோகத்தர் A கட்டளை ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

கம்பனி ஒரு மாதிரியான 10 கட்டளைகள் அளிக்க விரும்புகின்றது எனக் கொள்க. கம்பனி எந்த ஒரு விநியோகத்தருக்கும் அளிக்கும் கட்டளைகளின் எண்ணிக்கைக்கு மட்டுப்பாடு எதுவுமில்லையெனக் கொள்க,

(i) ஒவ்வொரு விநியோகத்தரும் கட்டளைகளில் யாதாயினும் ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவு சமமாக இருப்பின்.

(ii) B, C ஆகிய விநியோகத்தர்கள் கட்டளைகளில் யாதாயினும் ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவுகள் சமமாக இருக்கும் அதே வேளை விநியோகத்தர் A கட்டளைகளில் யாதாயினும் ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவு மற்றைய இரு விநியோகத்தர்களில் எவரேனும் ஒருவர் கட்டளைகளில் யாதாயினும் ஒன்றைப் பெறுவதற்கான நேர்தகவைப் போன்று இருமடங்காக இருக்குமெனின்,

விநியோகத்தர் A சரியாக $r\ (\leq 10)$ கட்டளைகளைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் விநியோகத்தர் A பெறும் கட்டளைகளின் சராசரி எண்ணிக்கையைக் காண்க.

விடை

$P(A) = P_r$ [A பெறும் கட்டளைகள்]

$P(B) = P_r$ [B " "]

$P(C) = P_r$ [C " "]

(அ) $P(A) = P(B) = P(C)$

$P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$\Rightarrow P(A) = 1/3$

(ஆ) $P(A) = 2P(B) = 2P(C) = p$ (எனின்)

$P(A) + P(B) + P(C) = p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 1$

$p(A) = 1/2$

θ என்பது A பெறும் கட்டத்தின் நிகழ்தகவு எனின.

X என்பது A பெறும் கட்டத்தின் எண்ணிக்கை எனின

$$P_r(X = x) = {}^{10}C_x\, \theta^x (1-\theta)^{10-x} \; ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) $\theta = 1/3$

$$P_r(X = r) = {}^{10}C_r\, (1/3)^r (2/3)^{10-r}$$

b) $\theta = 1/2$

$$P_r(X = r) = {}^{10}C_r\, (1/2)^{10}$$

A பெறும் சராசரி கட்டங்கள் $= 10\theta = n$ (say)

(a) $\theta = 1/3$, $n = 10 \times 1/3 = 3.33 \simeq 3$

(b) $\theta = 1/2$, $n = 10 \times 1/2 = 5$

end.

12. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, W_1, W_2, W_3$ எனக் குறிக்கப்பட்ட 5 கறுப்புப் பந்துகளையும் 3 வெள்ளைப் பந்துகளையும் ஒரு பெட்டி கொண்டுள்ளது. பதிலீடு செய்யப்படாமல் பெட்டியிலிருந்து இரு பந்துகள் (அடுத்தடுத்து) எடுக்கப்படுகின்றன

a) இரு பந்துகளும் ஒரே நிறத்தைக் கொண்டனவாய் இருப்பதற்கான

b) குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்து கறுப்பாய் இருப்பதற்கான

நிகழ்தகவுகளைக் காண்க

இரு பந்துகள் மீதும் உள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கும் எழுமாற்று மாறியை X என்க. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு X இன் இடை, மாறற்றிறன் ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க

<u>விடை</u>

a) $\frac{5c_2}{8c_2} + \frac{5c_2}{8c_2} = \frac{20+3}{8 \cdot \frac{7}{2}} = \frac{23}{28}$

b) $1 - P_r$ (எல்லாம் வெள்ளை)

$1 - \frac{3c_2}{8c_2} = 1 - \frac{3}{28}$

$= \frac{25}{28}$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

$$\mu = E(x) = \sum x_i f(x_i) = 2\times\frac{1}{28} + 3\cdot\frac{4}{28} + \frac{4\times 5}{28} + 5\cdot\frac{6}{28} + \frac{6\times 5}{28} + 7\times\frac{4}{28} + 8\times\frac{2}{28} + 9\times\frac{1}{28}$$

$$= 5.25$$

$$Var(X) = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$= 3.36$$

TCYA

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 1. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1990. (விசேட 1991).

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1 (i) $$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \equiv n^3$$

$$\tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{3}{8}(n+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(n-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{3}{8}(n-\tfrac{1}{2}) \equiv n^3$$

என்னும் சர்வசமன்பாடுகளை வாய்ப்புப் பார்த்து, அவற்றைப் பயன்படுத்தி

$$\sum_{r=1}^{n} r^3, \quad \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3$$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்பது 54 இன் ஒரு மடங்காகுமென நிறுவுக.

விடை:-

(i) $$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 = \frac{n^2}{4}\left\{(n+1)^2 - (n-1)^2\right\}$$
$$= \frac{n^2}{4}(n+1+n-1)(n+1-\overline{n-1})$$
$$= \frac{n^2}{4}\cdot 2n \cdot 2$$
$$= n^3.$$

$$\tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{3}{8}(n+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(n-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{3}{8}(n-\tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{(n+\tfrac{1}{2})^3 + (n-\tfrac{1}{2})^3\right\} - \tfrac{3}{8}\left\{(n+\tfrac{1}{2}) + (n-\tfrac{1}{2})\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{2n^3 + 3n/2\right\} - \tfrac{3}{8}\cdot 2n$$
$$= n^3$$

$T_r \equiv \left\{\frac{(r-1)r}{2}\right\}^2$ எனின்

$\therefore r^3 \equiv T_{r+1} - T_r$ ஆகும்.

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} r^3 \equiv \sum_{r=1}^{n}(T_{r+1} - T_r) = T_{n+1} - T_1$$
$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - 0$$
$$= \left\{\tfrac{n}{2}(n+1)\right\}^2$$

$\alpha_r = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{2})^3$, $\beta_r = -\frac{3}{8}(r+\frac{1}{2})$ என்க.

$$T_r' = (-1)^{r-1} r^3 = (-1)^{r-1}\alpha_r + (-1)^{r-1}\beta_r + (-1)^{r-1}\alpha_r + (-1)^{r-1}\beta_{r-1}$$

$r = 1, 2, 3, \ldots n$ வரை பிரதியிட

$$T_1' = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_0 + \beta_0$$

$$T_2' = -\alpha_2 - \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1$$

$$\vdots$$

$$T_n' = (-1)^{n-1}\alpha_n + (-1)^{n-1}\beta_n + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} + (-1)^{n-1}\beta_{n-1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} T_r' = (-1)^{n-1}\alpha_n + (-1)^{n-1}\beta_n + \alpha_0 + \beta_0$$

$$= (-1)^{n-1}\tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})^3 + (-1)^{n-1}(-\tfrac{3}{8})(n+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{3}{8}\times\tfrac{1}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3 = (-1)^{n-1}\frac{(2n+1)}{8}(2n^2+4n-1) - \frac{1}{8}$$

(ii) $f(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்க.

$f(1) = 0$ இது 54 ஆல் வகுபடும்.

$f(p) \Rightarrow$ 54 ஆல் வகுபடும் என்க.

(ie) $f(p) = 54N$, இங்கு $N \longrightarrow$ நிறைஎண்.

$$f(p+1) = 4f(p) + 27p(p-1)$$
$$= 4 \times 54N + 54N' \quad \{\because p(p-1), 2 \text{ ஆல் வகுபடும்}\}$$

$\therefore f(p+1)$ உம் 54 ஆல் வகுபடும்.

$\therefore f(n)$ ஆனது n இன் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் 54 ஆல் கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால் வகுபடும்.

2 (i) a, b, c ஆகியன மெய்யெனின்

$$(a^2+b^2)x^2+2(a^2+b^2+c^2)x+b^2+c^2=0$$

என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவையாக இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக.

(ii) $ax^2+bx+c=0$, $a'x^2+b'x+c'=0$ என்னும் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களின் விகிதங்கள் சமனெனின்

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{b'^2}{a'c'}$$ எனக் காட்டுக.

(iii) பின்வரும் சமனிலி வலிதாக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$$

விடை:

(i) $(a^2+b^2)x^2+2(a^2+b^2+c^2)x+(b^2+c^2)=0$

$$\Delta x=4\{(a^2+b^2+c^2)^2-(a^2+b^2)(a^2+c^2)\}$$

$$=4\{a^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\}>0$$

இங்கு a, b, c மெய்யெண்கள்.

(ii) $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள் $\alpha, m\alpha$ என்க.

$$\therefore \alpha+m\alpha=-b/a \implies \alpha(1+m)=-b/a$$

$$\alpha\cdot m\alpha=c/a \implies \alpha^2 m=c/a$$

$$\frac{(1+m)^2}{m}=\frac{b^2}{ac} \quad \text{—} (1)$$

$(1),(2) \implies$ $a'x^2+b'x+c'=0$ இன் மூலங்கள் $\beta, m\beta$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{(1+m)^2}{m}=\frac{b'^2}{a'c'} \quad \text{—} (2) \qquad \frac{b^2}{ac}=\frac{b'^2}{a'c'}$$

(iii) $$E=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}$$

$$=\frac{-(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{-(x-1)^2}{(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$\therefore$ $E>0$ ஆக $-1<x<1$ அல்லது $-3<x<-2$ ஆகும்.

③ (i) $f(x)$, $g(x)$ என்பது x இலான பல்லுறுப்பிகளாகும். $f(x)$ ஆனது $3x^2+x-2$ இனாலும் $g(x)$ ஆனது x^2-1 இனாலும் வகுக்கும் போது மீதிகள் முறையே $2x+1$, $x+2$ ஆகும்.
பல்லுறுப்பி $f(x)+g(x)$ இன் ஏகபரிமாணக் காரணி ஒன்றைக் காண்க. $f(x)$, $g(x)$ ஐ இவ்வேகபரிமாணக் காரணியால் வகுக்கும்போது மீதி -1 எனக் காட்டுக.

(ii) காரணிப்படுத்துக $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

விடை :-

(i) $f(x) = (3x-2)(x+1)\phi_1(x) + (2x+1)$

$g(x) = (x-1)(x+1)\phi_2(x) + (x+2$

$\therefore f(x)+g(x) = (x+1)\psi(x)$

இங்கு $\psi(x) = (3x-2)\phi_1(x) + (x-1)\phi_2(x) + 3$

$\therefore (x+1)$ என்பது $f(x)+g(x)$ இன் காரணி

அத்துடன் $f(x)$ $g(x)$ இன் மீதி $(x+1)$ இனால் வகுக்கும் போது $R = f(-1)\,g(-1) = \{2(-1)+1\}\{-1+2\} = -1$

(ii) $f(x,y,z) = (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ எனக
இது x, y, z இலான ஏகவினமான $5^{ம்}$ படியிலான வட்டச் சமச்சீர் சார்பாகும்.

$f(-y, y, z) = 0$

$\therefore$ மீதித் தேற்றப்படி $(x+y)$ ஒரு காரணி

இதேபோல் $(y+z)$, $(z+x)$ என்பனவும் இதன் காரணியாகும்.

$$f(x,y,z) \equiv (x+y)(y+z)(z+x)\{A(x^2+y^2+z^2) + B(xy+yz+zx)\}$$

குணகங்களை ஒப்பிடுக $x^4y/5 = A$, $x^3y^2/10 = A+B$ $\}$ $A=B=5$

$\therefore f(x,y,z) \equiv 5(x+y)(y+z)(z+x)\{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\}$

(4) ஒரு நேர் நிறைவெண் (முழுவெண்) குறிப்பு n இற்கு த மோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \text{ எனின், } z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

எனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு விதமாகவோ $\cos 5\theta = 16\cos 5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ எனக் காட்டுக.

(a) சமன்பாடு $\cos 5\theta = 0$ இன் மூலங்களை எடுத்து நோக்கி

$4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} = \sqrt{5}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து, $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ எனக் காட்டுக.

(b) சமன்பாடு $\cos 5\theta = 5\cos\theta$ வைத் திருப்தியாக்கும் θ வின் மெய்ப் பெறுமானங்கள் யாவற்றையும் காண்க.

விடை:

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின் n என்பது நேர் நிறை கவதற்கு $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ ஆகும்.

$$z^n + \frac{1}{z^n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \frac{1}{\cos n\theta + i\sin n\theta}.$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$= 2\cos n\theta.$$

$2\cos 5\theta = z^5 + \frac{1}{z^5}$ ஆகும்.

$\therefore 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$

$$= 16\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^5 - 20\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{z+1/z}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^5 - \frac{5}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right) = \cos 5\theta.$$

(a) $\cos 5\theta = 0 \Rightarrow 5\theta = \frac{n\pi}{2}$, $n \to$ ஒற்றை நிறை எண்.

$$\theta = \frac{n\pi}{10}$$

$\cos 5\theta = 0 \Rightarrow 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta = 0$

$= \cos\theta(16\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 5) = 0$

$16\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 5 = 0$ இன் மூலங்கள் $\cos\pi/_{10}, \cos\frac{3\pi}{10},$
$\cos\frac{7\pi}{10}, \cos 9\pi/_{10}$

$16x^2 - 20x + 5 = 0$ இன் தீர்வுகள் $\cos^2\frac{\pi}{10}, \cos^2\frac{3\pi}{10}$ ஆகும்

$\therefore$ மூலங்களின் பெருக்கம் $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10} = 5/_{16}$

$\therefore 4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} = \pm\sqrt{5}$

ஆனால் $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} > 0$

$\therefore 4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} = \sqrt{5}$

$\therefore \cos^2\frac{\pi}{10}, \cos^2\frac{3\pi}{10} = \frac{20 \pm\sqrt{80}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$

ஆனால் $\cos^2\frac{\pi}{10} > \cos^2\frac{3\pi}{10}$

$\Longrightarrow \cos\frac{\pi}{10} = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

ஆனால் $\cos\frac{\pi}{10} > 0$

$\Longrightarrow \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{8}$

(b) $\cos 5\theta = 5\cos\theta \Longrightarrow 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta = 0$

$\Longrightarrow 4\cos^3\theta\,(4\cos^2\theta - 5) = 0$

$4\cos^2\theta - 5 \neq 0$

$\cos^3\theta - 5 \neq 0$

$\cos^3\theta = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = (2n\pi \pm \pi/_2)$, $n \rightarrow$ நிறையெண்.

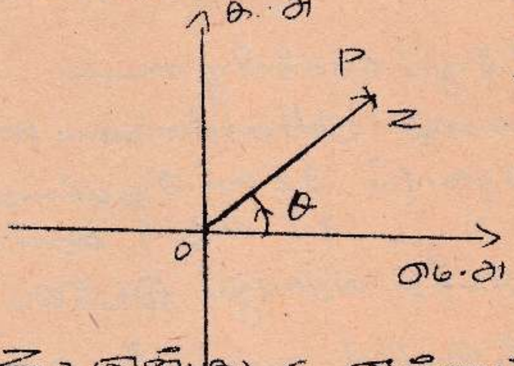
5 சிக்கல் எண் ஒன்றின் மட்டு, வீசல் என்னும் பதங்களை வரையறுக்க.

இடஞ்சுழிப் போக்கில் பெயரிடப்பட்டுள்ள A, B, C என்பன ஆகண் வரிப்படத்திலே முறையே $z_1, z_2, \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)z_2 - \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)z_1$ என்னும் சிக்கல் எண்கள் நேரொத்த புள்ளிகளாகும். கோணம் ABC ஆனது 120° எனவும் AB = BC எனவும் காட்டுக.

ABCDEF என்பது ஒழுங்கான ஒரு அறுகோணி யாகவும் U என்பது அதன் மையமாகவும் இருப்பின், E, U ஆகியவற்றினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்களை z_1, z_2 ஆகியவற்றின் சார்பாக காண்க.

இப்போது அறுகோணியானது அதன் மையம் U பற்றி 45° கோணத்தினூடாக வலஞ்சுழிப் போக்கில் சுழற்றப்படுமெனின், E யின் புதிய தானத்தினால் வகை குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணை z_1, z_2 ஆகியவற்றின் சார்பாகக் காண்க.

விடை :-



P எனும் புள்ளி z எனும் சிக்கலெண்ணைக் குறிப்பின் $\theta = $ வீச்சு(z) எனவும் $OP = |z|$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்

$$-\pi \le \theta \le \pi$$

z_3 என்பது C எனும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்குமெனின்,

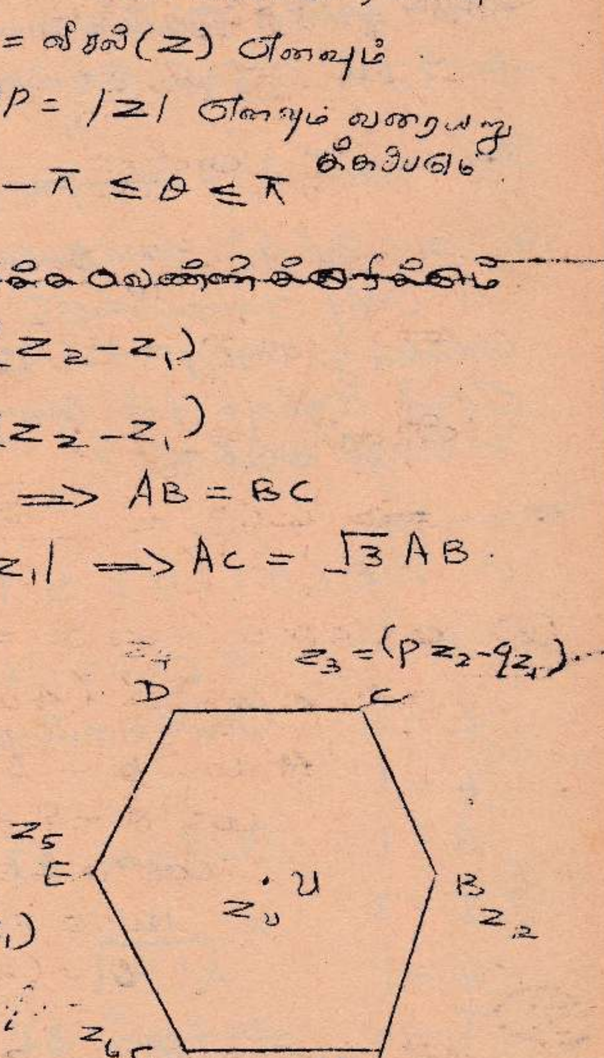
$$z_3 - z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)(z_2 - z_1)$$

$$z_3 - z_1 = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)(z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow |z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| \Rightarrow AB = BC$$

$$|z_3 - z_1| = \sqrt{3}\,|z_2 - z_1| \Rightarrow AC = \sqrt{3}\,AB$$

$$A\hat{B}C = 120^\circ$$



$p = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}, \quad q = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$$z_5 = p z_4 - q z_3$$

$$= p(p z_3 - q z_2) - q(p z_2 - q z_1)$$

$$= p^2(p z_2 - q z_1) - 2pq z_2 + q^2 z_1$$

$$= z_2(p^3 - 2qp) + z_1(q^2 - qp^2)$$

$$z_u = \frac{z_2 + z_5}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{z_2(1 + p^3 - 2pq) + z_1(q^2 - qp^2)\right\}$$

மையம் U பற்றி 45° கோணத்தினூடாக வலஞ்சுழிப் போக்கில் சுழற்றப்படும் எனின் E யின் புதிய z' எனின்

$$(z' - z_u) = (z_5 - z_u)\left\{\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right\}$$

$$z' = z_u + (z_5 - z_u)\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right\}$$

ஒப்பு $p = \sqrt{3}\{\cos \pi/6 + i \sin \pi/6\}$

$q = \cos \pi/3 + i \sin \pi/3$ எனின்

p^3, $2pq$, q^2, qp^2 என்பன கணிக்கப்படலாம்.

(6) (i) "RELATIVISTIC" என்னும் சொல்லினுடைய எழுத்துகளின் ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கையை காண்க. அவற்றுள் எத்தனை ஒழுங்கமைப்புகளில் 3 I கள் ஒருமிக்கவரும்?
" " " " 3 I களுள் இரண்டு ஒருமித்தும் 3வது அவற்றை அடுத்து வராமலும் இருக்கும்?

(ii) பை ஒன்றில் வெவ்வேறான 8 வெள்ளி நாணயங்களும் 4 செப்பு நாணயங்களும் உள்ளன. 7 நாணயங்களின் வெவ்வேறு தெரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றில் எத்தனை தெரிவுகளில் குறைந்தபட்சம் ஒரு வெள்ளி நாணயமேனும் இருக்கும்?

விடை:-

(i) RELATIVISTIC

R - 1,
E - 1
L - 1
A - 1
I - 3
V - 1
T - 1

"RELATIVISTIC" என்னும் சொல்லின் ஒழுங்கமைப்புக்களின் எண்ணிக்கை $= \dfrac{12!}{3!\,2!}$

அவற்றுள் 3 I ஒருமிக்கவரும் ஒழுங்கமைப்பு

$= \dfrac{11!}{2!\,2!}$

அவற்றுள் 3 I களுள் இரண்டு ஒருமித்தும் மூன்றாவது அவற்றை அடுத்து வராமலும் வரும் ஒழுங்கமைப்பு

$= \dfrac{11!}{2!\,2!} - \dfrac{10!}{2!}$

(ii) 7 நாணயங்களின் வெவ்வேறு தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{12}C_7$

இவற்றுள் குறைந்தபட்சம் ஒரு வெள்ளி நாணயம் இருப்பதற்கான தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $= {}^{12}C_7$.

(7) n என்பது ஒரு ~~நேர் நிறையெண் (முழுவெண்)~~ எனின்,
$(a+x)^n$ இன் ஈருறுப்பு விரியைத் தந்து அதனை நிறுவுக.
$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^{15}$ இன் விரியிலே x இல் தங்கியிராத ~~உறுப்பினை~~
யும் $x = \frac{1}{4}$ ஆக இருக்கும் போது அதியுயர் உறுப்பையும்
பெறுக.

$(1+x)^4(1-x^2)^n$, $(1-x)^n(1+x)^{n+4}$ என்பவற்றின் விரிவுகளில்
x^{2r} $(n \geq 2r)$ இன் குணகங்களைக் கண்டு

$$(-1)^r\left[{}^nC_r - 6\,{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}\right] = {}^nC_0\,{}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1\,{}^{n+4}C_{2r-1} + \dots + {}^nC_{2r}\,{}^{n+4}C_0$$

எனக் காட்டுக.

விடை:-

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, a^{n-r} x^r, \quad {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$n = 1$ ஆக இம்முடிவு உண்மை.
$n = p$ ஆக இம்முடிவு உண்மை எனக.

$$(a+x)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r\, a^{p-r} x^r$$

$$(a+x)^{p+1} = (a+x)^p(a+x) = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r\, a^{p-r} x^r (a+x)$$

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r\, a^{p+1-r} x^r \quad \left\{\because {}^pC_{r-1} + {}^pC_r = {}^{p+1}C_r\right\}$$

$\therefore n = p+1$ இற்கு இம்முடிவு உண்மை.
ஆனால் $n = 1$ இற்கு இம்முடிவு உண்மை.
$\therefore$ n இன் எல்லா நேர்முழு எண்களுக்கும் இம்முடிவு உண்மை.

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^5 = \sum_{r=0}^{15} T_r \text{ இங்கு } T_r = {}^{15}C_r (\sqrt{x})^{15-r} \cdot \left(\frac{1}{12x^2}\right)^r$$

$$\text{(i.e.) } T_r = {}^{15}C_r\, x^{\frac{15-r}{2}}\, \frac{1}{12^r} x^{-2r} = \frac{{}^{15}C_r}{12^r} x^{\frac{15-5r}{2}}.$$

x அற்ற உறுப்பு, $\frac{15-5r}{2} = 0 \Rightarrow r = 3$

$$\text{(i.e.) } {}^{15}C_3 \cdot \frac{1}{12^3} = \frac{35 \times 13}{1728}$$

அதியுயர்

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{15-r}{r+1} \cdot \frac{x^{-5/2}}{12} = \frac{15-r}{r+1} \cdot \frac{32}{15} \text{ இங்கு } x = \frac{1}{4}.$$

$\therefore \frac{T_{r+1}}{T_r} \gtrless 1 \iff r \leqq 10\frac{7}{11}$

அதியுயர் உறுப்பு $T_{11} = {}^{15}C_{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot (1/4)^{-20}$

$$(1+x)^4(1-x^2)^n = (1+x)^4 \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p(-x^2)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, {}^nC_p\, x^{2p}\{1+4x+6x^2+4x^3+x^4\}$$

x^{2r} இன் குணகம் $(n \geq 2r) = (-1)^r\, {}^nC_r + (-1)^{r-1}\, {}^nC_{r-1} \cdot 6$

$$+ (-1)^{r-2}\, {}^nC_{r-2}$$

$$= (-1)^r\{{}^nC_r - 6\,{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}\} \text{ — (A)}$$

$$(1-x)^n(1+x)^{n+4} = \left\{\sum_{p=0}^{n} {}^nC_p(-x)^p\right\}\left\{\sum_{s=0}^{n+4} {}^{n+4}C_s\, x^s\right\}$$

x^{2r} இன் குணகம் $(n \geqslant 2r) = {}^nC_0 \cdot {}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1 \cdot {}^{n+4}C_{2r+1}$

$$+ \cdots + {}^nC_{2r} \cdot {}^{n+4}C_0 \text{ — (B)}$$

ஆனால் $(1-x)^n(1+x)^{n+4} = (1-x^2)^n(1+x)^4$

$\therefore$ (A) & (B) $\Rightarrow$

$$(-1)^r\{{}^nC_r - 6\,{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}\} = {}^nC_0 \cdot {}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1\, {}^{n+4}C_{2r-1}$$

$$+ \cdots + {}^nC_{2r} \cdot {}^{n+4}C_0.$$

8. (i) $\sqrt{1-x^2}$ இன் பெறுதியை முதல் கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(ii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$, $z = \sin^{-1} x$ எனின், $\frac{dy}{dz}$ ஐக் காண்க.

(iii) y என்பது x இன் சார்பாகும்; $x = \sqrt{1-z^2}$ ஆகும்.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பாக எடுத்துரைக்க.

$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + z^2y = 0$ எனின்,

$x \neq 0$ இற்கு $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனக் காட்டுக.

$\therefore \frac{T_{r+1}}{T_r} \geq 1 \iff r \leq 10\frac{7}{11}$

அதியுயர் உறுப்பு $T_{11} = {}^{15}C_{11} \cdot \frac{1}{2^{11}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-20}$

$$(1+x)^4(1-x^2)^n = (1+x)^4 \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p(-x^2)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \cdot {}^nC_p\, x^{2p}\{1+4x+6x^2+4x^3+x^4\}$$

x^{2r} இன் குணகம் $(n \geq 2r) = (-1)^r\, {}^nC_r + (-1)^{r-1}\, {}^nC_{r-1}\cdot 6 + (-1)^{r-2}\, {}^nC_{r-2}$

$$= (-1)^r\{{}^nC_r - 6\cdot {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}\} \text{ — (A)}$$

$$(1-x)^n(1+x)^{n+4} = \left[\sum_{p=0}^{n} {}^nC_p(-x)^p\right]\left[\sum_{s=0}^{n+4} {}^{n+4}C_s\, x^s\right]$$

x^{2r} இன் குணகம் $(n \geq 2r) = {}^nC_0 \cdot {}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1 \cdot {}^{n+4}C_{2r+1} + \dots + {}^nC_{2r} \cdot {}^{n+4}C_0$ — (B)

ஆனால் $(1-x)^n(1+x)^{n+4} = (1-x^2)^n(1+x)^4$

$\therefore$ (A) & (B) $\Rightarrow$

$$(-1)^r\{{}^nC_r - 6\cdot {}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2}\} = {}^nC_0 \cdot {}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1\, {}^{n+4}C_{2r-1} + \dots + {}^nC_{2r} \cdot {}^{n+4}C_0.$$

(8) (i) $\sqrt{1-x^2}$ இன் பெறுதியை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(ii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$, $z = \sin^{-1} x$ எனின், $\frac{dy}{dz}$ ஐக் காண்க.

(iii) y என்பது x இன் சார்பாகும்; $x = \sqrt{1-z^2}$ ஆகும்

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பாக எடுத்துரைக்க.

$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + z^2 y = 0$ எனின்,

$x \neq 0$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனக் காட்டுக.

விடை :-

(i) $F(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\{1 - \overline{x+\delta x}^2\}^{1/2} - \{1-x^2\}^{1/2}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{(1 - \overline{x+\delta x}^2) - (1-x^2)}{\delta x[\{1 - \overline{x+\delta x}^2\}^{1/2} + (1-x^2)^{1/2}]}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{-2x\delta x - (\delta x)^2}{\delta x\{1 - \overline{x+\delta x}^2\}^{1/2} + (1-x^2)^{1/2}]}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(ii) $$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{dz/dx}.$$

$$= \frac{1}{1+\{\frac{1}{1-x^2}\}^2} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2x}{1+(1-x^2)^2} \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

$$= \frac{2\sin z}{1+\cos^4 z} \cos z = \frac{\sin 2z}{1+\cos^4 z}$$

(iii) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)$$

ஆனால் $x = \sqrt{1-z^2}$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

$$\therefore \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-d}{dz}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{-1}{z^3}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dz}\left(\frac{-1}{z^3}\right) + \left(\frac{1-z^2}{z^2}\right)\frac{d^2y}{dz^2} \quad \text{—— (1)}$$

$$(1) \Rightarrow (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} = \frac{z^2 d^2y}{dx^2} \quad \text{—— (2)}$$

$$= \frac{n}{2m+1}\left[\left\{\frac{x^{n-1}}{2m+1}\sin(2m+1)x\right\}_0^{\pi/2} - \frac{n-1}{(2m+1)}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\sin(2m+1)x\,dx\right]$$

$$= \frac{n}{2m+1}\left\{\frac{1}{(2m+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}(-1)^m - \frac{n-1}{2m+1}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\sin(2m+1)x\,dx\right\}$$

$$= (-1)^m\frac{n}{(2m+1)^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2}\int_0^{\pi/2} x^{n-2}\sin(2m+1)x\,dx.$$

$n=4,\ m=1$ ஆக.

$$\int_0^{\pi/2} x^4\sin 3x\,dx = (-1)\frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} x^2\sin 3x\,dx$$

$$= \frac{-\pi^3}{18} - \frac{4}{3}\left\{\frac{-\pi}{9} - \frac{2}{9}\int_0^{\pi/2}\sin 3x\,dx\right\}$$

$$= \frac{-\pi^3}{18} + \frac{4\pi}{27} - \frac{8}{81}$$

(10) (i) ஐந்து நிலைக்கூறுகளைப் பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்தி
(அ) சரிவக நெறியை (ஆ) சிம்சனின் நெறியை பிரயோகித்து

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ ஐ 4 தசம தானங்களுக்கு மதிப்பிடுக.

$x = \tan\theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தியோ, வேறு விதமாகவோ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, இதிலிருந்து, நீவிர் மதிப்பிட்ட பெறுமானத்தின் செம்மையைத் துணிக ($\pi = 3.1416$ எனக் கொள்க)

(ii) மக்லோரினின் தேற்றத்தைக் கொண்டு, $|x|<1$ இற்கு $\ln(1+x)$ இன் ஒரு தொடர் விரிவைப் பெறுக. ($\ln = \log_e$ என்பதைக் கவனிக்க)

$\ln\frac{y}{y-1}$ ஐ y^{-4} இலான உறுப்பு வரை y யின் இறங்கு வலுக்களிலான ஒரு தொடராக விரித்து அதனைப் பயன்படுத்தி $\ln 1.25$ ஐ 4 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

விடை:

(i)					
x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$1/(1+x^2)$	1.0000	0.9412	0.8000	0.6420	0.5

(a) சரிவகப் போலி நெறி

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\times h\times\left[f(a)+f(b)+2\{y_2+y_4+y_5\}\right]$$

$$=\frac{0.25}{2}\{1.0000+0.5000+2(0.9412+0.8000+0.6420)\}$$

$$=0.7828$$

(b) சிம்சன் நெறி

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{3}h\{(1^{st}+last)+4(2^{nd}+4^{th}\ldots)$$
$$+2(3^{rd}+5^{th}\ldots)\}$$

$$=\frac{0.25}{3}\{1.500+4(0.9412+0.6420)$$
$$+2\times 0.8000\}$$

$$=0.7854$$

$$x=\tan\theta \quad \int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\pi/4}d\theta=\pi/4=\frac{3.1416}{4}=0.7854$$

(ii) $F(x)=f_{(0)}+\frac{x}{1!}f'_{(0)}+\frac{x^2}{2!}F''_{(0)}+\ldots$

$$\therefore \ln(1+x)=0+x-x^2/2+x^3/3\ldots$$

$$\ln\frac{y}{y-1}=-\ln\frac{(y-1)}{y}=-\ln(1-1/y)$$

$$=-\left\{-1/y-1/2y^2-\frac{1}{3y^3}-\frac{1}{4y^4}-\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{3y^3}+\frac{1}{4y^4}+\ldots$$

$y=5$ ஆக

$$\ln 1.25=1/5+\frac{1}{50}+\frac{1}{375}+\frac{1}{2500}$$

$$=0.2231$$

(11) $x=3t^2+1$

$y=2t^3-1$

என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினாலே தரப்படும் வளையியின் புள்ளி $t=\tan\alpha$ வில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$y=x\tan\alpha-\tan^3\alpha-\tan\alpha-1$ எனக்காட்டி,

வளையியைப் பருமட்டாக வரைக.

$t=1$ இலே வளையிக்குத் தொடலியாய் உள்ள கோட்டுத்துண்டைப் பருமட்டாக வரைக.

(11) விடை

$$x = 3t^2 + 1 \implies \frac{dx}{dt} = 6t$$

$$y = 2t^3 - 1 \implies \frac{dy}{dt} = 6t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{dx/dt} = \frac{6t^2}{6t}, \ (t \neq 0)$$

$$= t$$

$t = \tan\alpha$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு

$$\frac{y - 2\tan^3\alpha + 1}{x - 3\tan^2\alpha - 1} = \tan\alpha$$

(ie) $y = x\tan\alpha - \tan^3\alpha - \tan\alpha - 1$

$t = 0$ ஆக $x = 1, \ y = -1$

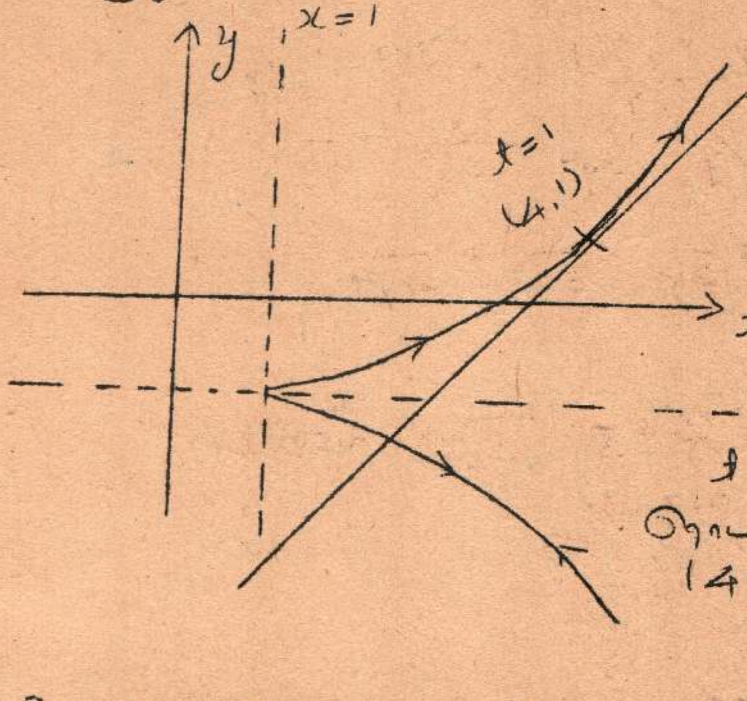
$x \geq 1 \quad \forall t$

$t \to \infty$ ஆக $x \to \infty, y \to \infty, \frac{dy}{dx} \to \infty$

$t \to -\infty$ " $x \to \infty, y \to -\infty, \frac{dy}{dx} \to -\infty$

$y = 0$ ஆக $t^3 = \frac{1}{2} \implies t = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

t உறுதியாக அதிகரிக்க $\frac{dy}{dx}$ உறுதியாக அதிகரிக்கின்றது.



$t = 1$ ஆக $\tan\alpha = 1$

தொடலி $\implies y = x - 3$

$(4,1)$ இல் தொடும்.

(12) $y^2 = 16x$, $3y = 4(4 - x)$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்திற் பருமட்டாக வரைந்து, அவை முதற் கால்வட்டத்தில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி $(1,4)$ ஆகும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

இவ்வளையிகளினாலும் x-அச்சினாலும் வரைப்புற்ற முதற் கால்வட்டத்தில் உள்ள பரப்பளவைக் காண்க.

இப்பரப்பளவானது

(i) x - அச்சுப் பற்றி,

(ii) y - அச்சுப் பற்றிச் சுழற்றப்படுமாயின்,

பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவுகளைக் காண்க.

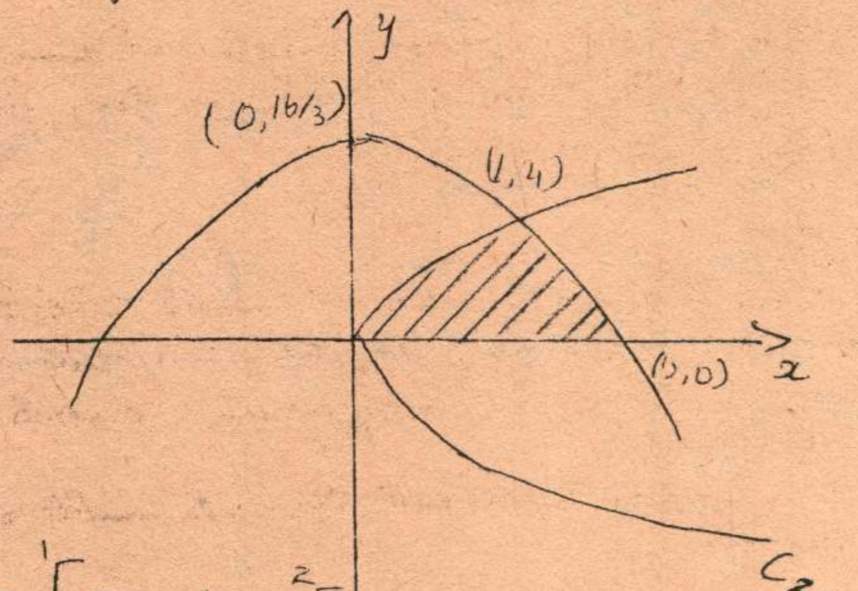
விடை :-

$y^2 = 16x \Rightarrow (0,0)$ உச்சியும், x அச்சு சமச்சீரச்சு, $(4,0)$ ஐ குவியமாகவும் கொண்ட பரவளைவு.

$3y = 4(4-x^2) \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{4}(y - 16/3)$

உச்சி $(0, 16/3)$, y அச்சுப் பற்றிச் சமச்சீர்,

$y \le 16/3, \ \forall x$ (எல்லா x இற்கும்)



பரப்பு $= \int_0^1 \sqrt{16x}\,dx + \int_1^2 \left\{\frac{4}{3}(4-x^2)\right\} dx$

$= \frac{4x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 + \frac{4}{3}\left\{4x - \frac{x^3}{3}\right\}_1^2$

$= 8/3 + 20/9 = 44/9$ அலகு.

(i) $V_x = \pi\int_0^1 16x\,dx + \pi\int_1^2 \left\{\frac{4}{3}(4-x^2)\right\}^2 dx.$

$= 8\pi + \pi \cdot 16/9 \left\{16x - 8x^3/3 + x^5/5\right\}_1^2$

$= \frac{1928}{135}\pi$ அலகு.

(ii) $V_y = -\pi\int_0^4 x_1^2\,dy + \pi\int_0^4 x_2^2\,dy$

இங்கு $x_1 \leftarrow C_1$ இலும், $x_2 \leftarrow C_2$ இலும் அமைந்துள்ளன.

$V_y = -\pi\int_0^4 \left(\frac{y}{16}\right)^2 dy + \pi\int_0^4 \left\{-\frac{3}{4}(y - 16/3)\right\}^2 dy$

$= -\frac{4}{5}\pi + 10\pi = \frac{46}{5}\pi$ அலகு

x ——— x

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.
36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 11. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1990.
(விசேட 1991.)

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1 (i) O என்பது முக்கோணி ABC யின் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். AO, BO, CO ஆகிய கோடுகள் BC, CA, AB ஆகியவற்றை முறையே D, E, F ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன.

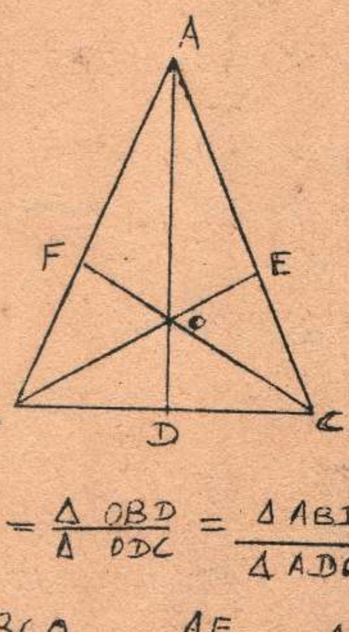
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$ எனக் காட்டுக.

மேலே குறிப்பிட்ட பேறின் மறுதலையைக் கூறி, அதைப் பயன்படுத்தி, முக்கோணி ஒன்றின் இடையங்கள் புள்ளி ஒன்றில் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

(ii) A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் வட்டம் ஒன்றில் கிடக்கின்றன. D யிலிருந்து AB, BC, CA ஆகியவற்றுக்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகளின் அடிகள் முறையே L, H, N ஆகும்.
L, M, N ஆகியன நேர்கோடு ஒன்றில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

விடை:-

(1) (i)

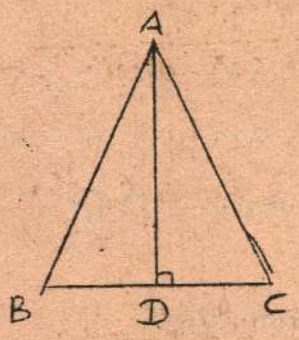


$$\frac{BD}{DC}=\frac{\Delta ABD}{\Delta ADC}=\frac{\Delta OBD}{\Delta ODC}=\frac{\Delta ABD-\Delta OBD}{\Delta ADC-\Delta ODC}=\frac{\Delta ABO}{\Delta AOC}$$

|||ly $$\frac{CE}{EC}=\frac{\Delta BCO}{\Delta BOA},\quad \frac{AF}{FB}=\frac{\Delta COA}{\Delta BOC}$$

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

மறுதலை :- ΔABC யில் D, E, F என்பன BC, CA, AB இல் முறையே $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$ ஆகுமாறு அமையுமாயின் AD, BE, CF ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB\cos B}{AC\cos C}$$

|||ly $$\frac{CE}{EA}=\frac{BC\cos C}{AB\cos B}$$

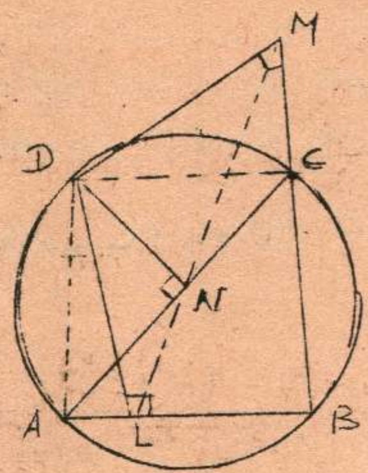
$$\frac{AF}{FB}=\frac{AC\cos A}{BC\cos B}$$

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

∴ தேற்றத்தின் மறுதலையின் படி

AD, BE, CF ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்

(ii)



Proof: $A\hat{N}L=\alpha$ (எனின்)

ALND என்பது வட்ட நாற்பக்கலாவதால்

$A\hat{D}L=\alpha$ ஆகும்.

$\therefore D\hat{A}L=(90-x)$ ஆகும்

ABCD ஓர் வட்ட நாற்பக்கலாவதால்

$D\hat{C}M=90-\alpha$

$\therefore C\hat{D}M=\alpha$

CMDN என்பது ஓர் வட்ட நாற்பக்கலாவதால்

$C\hat{N}M=\alpha$ ஆகும்

$\therefore A\hat{N}L=C\hat{N}M=\alpha$ ஆகும்

∴ LNM ஒரு நேர்கோடு

(உ) ஒரு நான்முகி OABC யான் OA, OB, OC ஆகிய விளிம்புகள் தம்முட் செங்குத்தானவையாகும் $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ எனின்

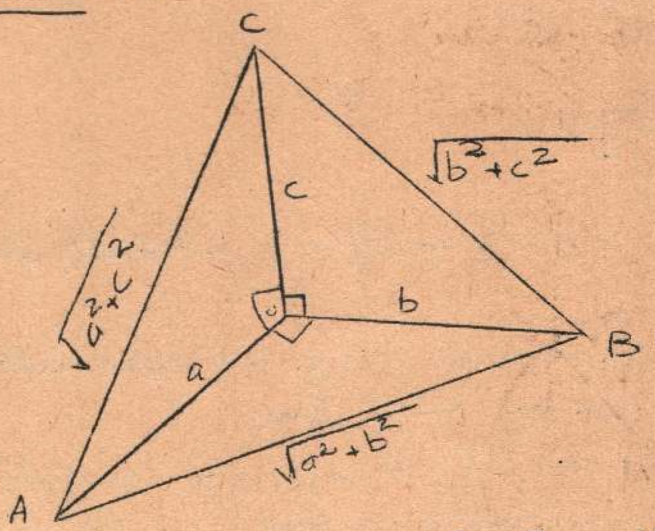
$$\cos B\hat{A}C \cos C\hat{B}A \cos A\hat{B}C = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$$

என நிறுவுக.

θ என்பது நான்முகியின் OBC, ABC, என்னும் முகங்களுக் கிடையே உள்ள கோணமெனின்

$$\cos\theta = \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$ எனக்காட்டுக.

விடை :-

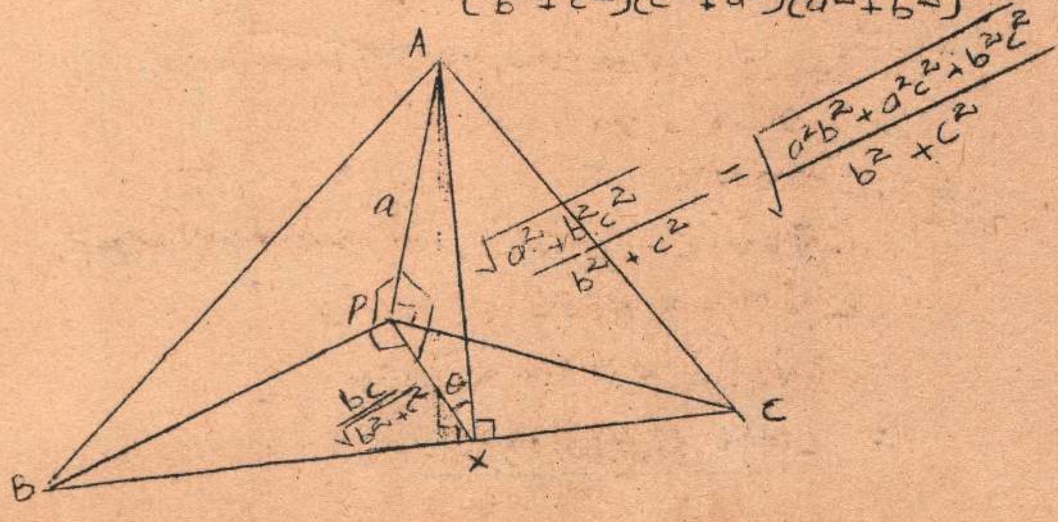


$$\cos A\hat{B}C = \frac{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)-(b^2+c^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$$

இவ்வாறே

$$\cos B\hat{C}A = \frac{c^2}{\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}, \quad \cos C\hat{A}B = \frac{a^2}{\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}}$$

$$\therefore \cos A\hat{B}C \cos B\hat{C}A \cdot \cos C\hat{A}B = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$$



$OX \perp BC$ என்க.

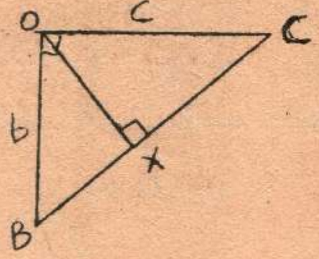
$BC \perp OA$

$BC \perp OX$

$BC \perp$ தளம் AOX

$\therefore BC \perp AX$

$\therefore$ தளங்கள் OBC, ABC என்பவற்றுக்கிடையிலான கோணம் θ என்க.



$$\cos\theta = \frac{OX}{AX}$$

$$= \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

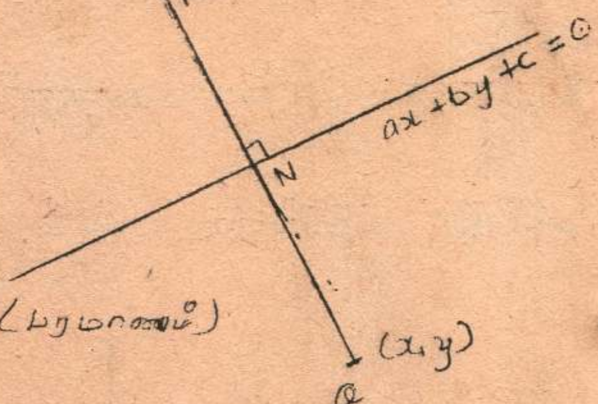
$$\tfrac{1}{2}bc = \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot OX$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2} \cdot OX$$

$$\overline{OX} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

(3) கோடு $ax + by + c = 0$ மீது புள்ளி (x_1, y_1) இன் விம்பத்தைக் காண்க.

சாய்சதுரம் ஒன்றின் கோணங்களில் ஒன்று 2α ஆகும். இக்கோணத்தை இருகூறிடும் மூலைவிட்டம் கோடு $ax + by + c = 0$ $(c \neq 0)$ மீது கிடக்கிறது. உச்சி $(0,0)$ ஆனது உச்சிகளில் ஒன்றெனின், மற்றைய உச்சிகள் நேர்ந்ததும் ஆள்கூறுகள் காண்க.



விடை:-

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = t \text{ (பரமானம்)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{array}\right\} \quad Q = (x_1 + at,\ y + bt)$$

PQ இன் நடுப்புள்ளி N, t ஐத் தீர்மானிக்க.

$ax + by + c$ இல் கிடக்கும்

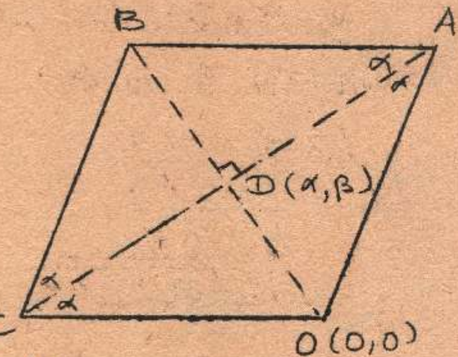
(ie) $a\left(x_1 + \frac{at}{2}\right) + b\left(y_1 + \frac{bt}{2}\right) + c = 0$

$$t = \frac{-2(ax_1 + by_1 + c)}{(a^2 + b^2)}$$

$$\therefore Q \equiv \left\{ x_1 - \frac{2a}{a^2+b^2}(ax_1+by_1+c),\; y_1 - \frac{2b}{a^2+b^2}(ax_1+by_1+c) \right\}$$

$$B \equiv \left\{ \frac{-2ac}{a^2+b^2},\; \frac{-2bc}{a^2+b^2} \right\}$$

$$D \equiv \left\{ \frac{-ac}{a^2+b^2},\; \frac{-bc}{a^2+b^2} \right\}$$



$$OD = \left\{ \frac{a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+b^2)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c^2}{a^2+b^2} \right)^{\frac{1}{2}} = p \text{ என்க.}$$

$$\therefore CD = DA = OD \cot\alpha = p\cot\alpha.$$

AC யின் மீது யாதும் ஒரு புள்ளி (x, y) என்க.

$\frac{x-\alpha}{-b} = \frac{y-\beta}{a} = t$, இங்கு $(a^2+b^2)t^2 = d^2$

இங்கு d என்பது (x, y) இலிருந்து D யிற்குரிய தூரமாகும்.

$\therefore$ C or A இற்கு பொருத்தமான t ஆனது,

$(a^2+b^2)t^2 = p^2\cot^2\alpha$ இனால் தரப்படும்.

$$t^2 = \frac{c^2\cot^2\alpha}{(a^2+b^2)^2} \implies t = \frac{\pm c\cot\alpha}{a^2+b^2} \quad (\because \alpha < \tfrac{\pi}{2})$$

A, C என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள்

$$\left(\frac{-ac}{a^2+b^2} - \frac{bc\cot\alpha}{a^2+b^2},\; \frac{-bc}{a^2+b^2} + \frac{ac\cot\alpha}{a^2+b^2} \right) \text{ உம்.}$$

$$\left(\frac{-ac}{a^2+b^2} + \frac{bc\cot\alpha}{a^2+b^2},\; \frac{-bc}{a^2+b^2} - \frac{ac\cot\alpha}{a^2+b^2} \right).$$

(4)

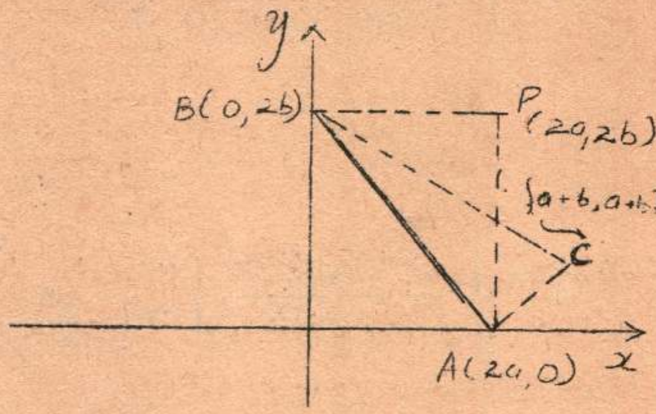
$A(2a, 0)$, $B(0, 2b)$; $C(a+b, a+b)$ என்னும் வெவ்வேறு புள்ளிகளினூடாக செல்லும் S ஆகும். இங்கு a, b ஆகியன நேர் எண்களாகும். S ஆனது $P(2a, 2b)$ இனூடாகச் செல்கிறதெனக் காட்டுக.

வட்டத்திற்கு B யிலும் P யிலும் உள்ள தொடலிகள் Q வில் சந்திக்குமெனின்,

$$PQ = \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

நேர் கோடு $ax+by+c=0$ $(c>0)$ ஐயும் வெளிப்பு
றமாக S ஐயும் தொடும் வட்டத்தினது மையத்தின்
ஒழுக்கானது குவியத்தை (a,b) இலும்
$ax+by+c+a^2+b^2=0$ ஐ செலுத்தலியாகவும்
கொண்ட ஒரு பரவளைவு எனக் காட்டுக

விடை:—



$$M_{AC} = \frac{a+b}{b-a}$$

$$M_{BC} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\Rightarrow M_{AC} \cdot M_{BC} = -1$$

அதனால் $\hat{P} = \pi/2$

$\therefore$ ABC இனூடான வட்டம் P இனூடாகச் செல்லும்.

வட்டம் S இன் சமன்பாடு $(x-a)^2+(y-b)^2 = (a^2+b^2)$

$$x^2+y^2-2ax-2by=0$$

B இல் தொடலி $by - ax - 2b = 0$

P " " $by + ax - 2a^2 - 2b^2 = 0$

$$\Rightarrow Q = \left\{a,\ 2b + \frac{a^2}{b}\right\}$$

$$PQ = \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

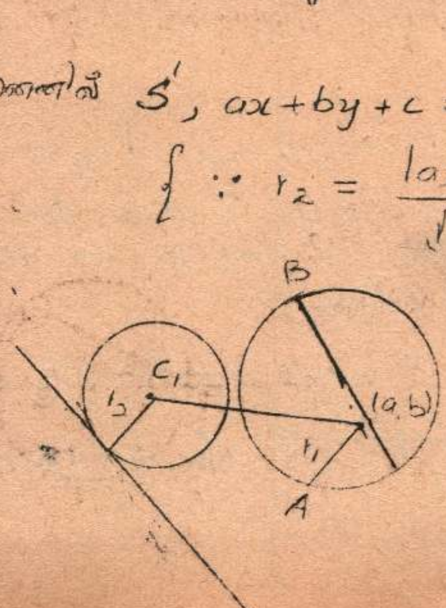
$C'(x, y)$ என்பது S ஐ வெளிப்புறமாக தொடும் வட்டத்தினது மையம் என்க. புதிய வட்டம் S' என்க.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r_1 + r_2$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} + \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

எனவே S', $ax+by+c=0$ ஐத் தொடுகின்றது.

$$\left\{ \because r_2 = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\}$$



$l \equiv ax+by+c=0$

$ax+by+c>0$ ஆனையினால் c', O என்பன l க்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ளன

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}+\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{ax+by+c+(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

$$=\left|\frac{ax+by+c+a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

(ie) (x,y) இன் ஒழுக்கு (a,b) ஐ குவியமாகவும் $ax+by+c+a^2+b^2=0$ என்பதை செலுத்தியாகக் கொண்ட பரவளைவு ஆகும்.

(5)

(i) முனைவுச் சமன்பாடுகள் முறையே $r=2a\cos\theta$, $(-\pi/2 \le \theta \le \pi)$, $r=a(1+\cos\theta)$, $-\pi \le \theta \le \pi$ ஆக உள்ள C_1, C_2 என்னும் வளையிகளைப் பரும்படியாக வரைக.

C_1, C_2 ஆகிய வளையிகளின் பொதுவான புள்ளிகளின் முனைவு ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(ii) $x^2+y^2-8=0$, $y^2-7=0$, $y^2-7x=0$ என்னும் வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து, வளையிகள் இடைவெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

$$(x^2+y^2-8)(y^2-7x)(y^2-7)\le 0$$

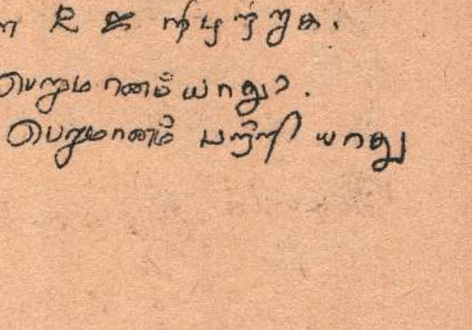
ஆக இருக்கும் xy தளத்தில் உள்ள R ஐ நிழற்றுக.

R இலே x^2+y^2-8 இன் இழிவுப் பெறுமானம் யாது?

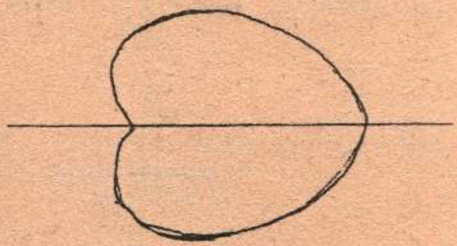
R இலே x^2-y^2-8 " அதியுயர் பெறுமானம் பற்றி யாது கூறலாம்?

விடை :-

(i) $r=2a\cos\theta$ $(-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$ என்பது ஒரு வட்டம், முனைவுப் புள்ளியினூடாகச் செல்லும்.



$r = a(1+\cos\theta)$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi$



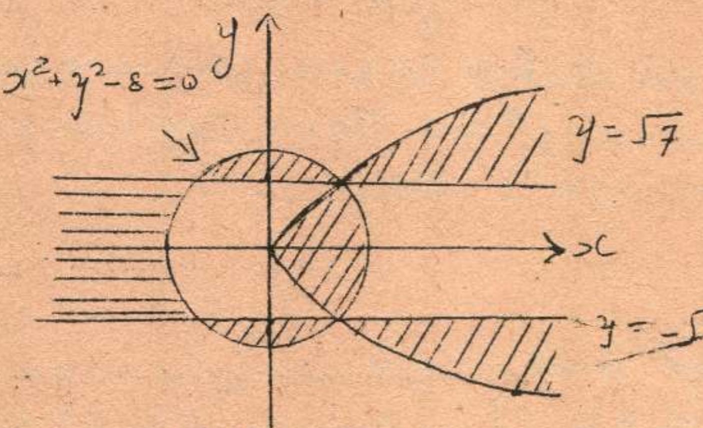
பொதுவான புள்ளிகள்

$$2a\cos\theta = a(1+\cos\theta)$$

$\Longrightarrow \theta = 0$, $r = 2a$.

$(2a, 0)$, அத்துடன் உற்பத்தி இன்னுமொரு பொதுப்புள்ளி யாகும்.

(ii)



நிழற்றப்பட்ட பிரதேசம் R க்குரியதும் $y^2 = 7x$

x^2+y^2-8 இன் இழிவுப் பெறுமானம் $= -8$

அதியுயர் பெறுமானம் வரையறுக்கப்படாது.

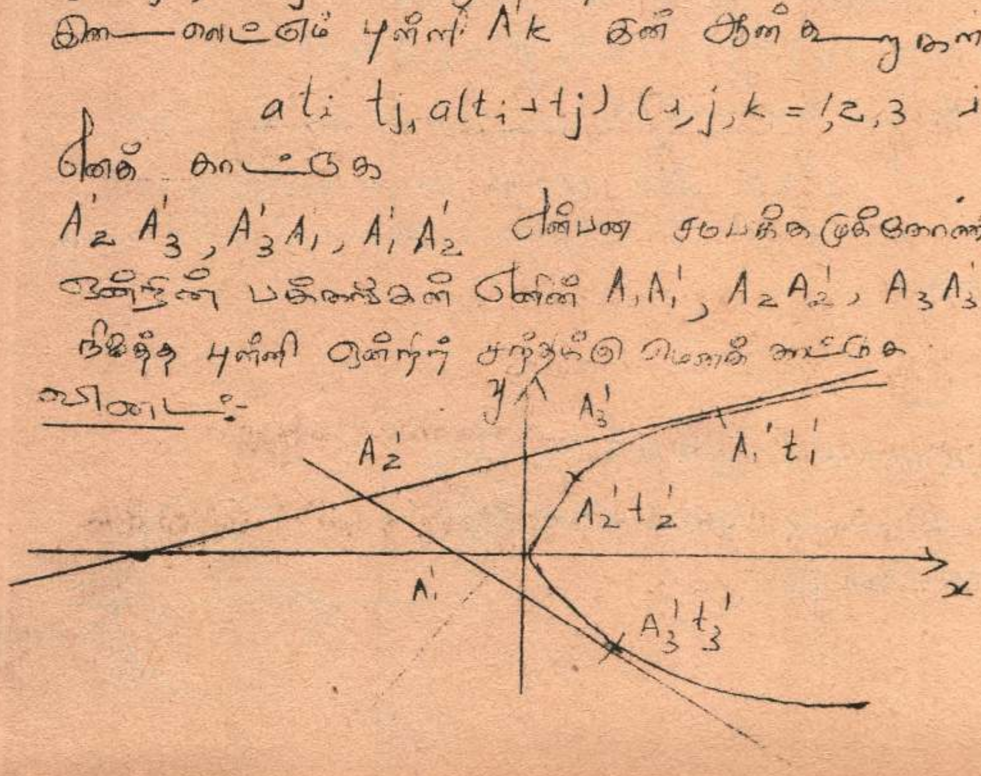
(6) பரவளைவு $y^2 = 4ax$ மீதுள்ள $A_i(at_i^2, 2at_i)$, $A_j(at_j^2, 2at_j)$ என்னும் புள்ளிகளில் இருக்கும் தொடலிகள் இடைவெட்டும் புள்ளி A'_k இன் ஆள்கூறுகள்

$$at_i t_j, a(t_i+t_j) \quad (i,j,k = 1,2,3 \quad i\neq j\neq k)$$

எனக் காட்டுக

$A'_2A'_3$, A'_3A_1, $A'_1A'_2$ என்பன சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் பக்கங்கள் எனின் $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ ஆகியன நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிற் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக

<u>விடை:-</u>



$y^2 = 4ax$

$2y \frac{dy}{dx} = 4a \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(at_1^2,\ 2at)} = 1/t$

$dy/dx = \left(\frac{2a}{y}\right)$

$\therefore A_1(at_1^2, 2at_1)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$y - 2at_1 = 1/t_1 (x - at_1^2)$

$\Longrightarrow \quad x - yt_1 + at_1^2 = 0$ —— (A)

$A_j(at_j^2, 2at_j)$ இலுள்ள தொடலி

$x - yt_j + at_j^2 = 0$ —— (B)

(A),(B) ஐத் தீர்க்க

$$A'_k = \{at_1t_j,\ a(t_1 + t_j)\}$$

"t" இலுள்ள தொடலி "t_3" உள்ள தொடலியுடன் $\pi/3$ கோணம் அமைப்பின் $\left|\frac{1/t_3 - 1/t}{1 + 1/t_3t_1}\right| = \pm \tan \pi/3 = \pm\sqrt{3}$

(ie) $(t - t_3)^2 = 3(1 + t_3t)^2$

$\therefore (3t_3^2 - 1)t^2 + 8t_3t + 3 - t_3^2 = 0$

இவ்விருபடிச் சமன்பாடு t_1, t_2 மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

$t_1 + t_2 = \frac{8t_3}{1 - 3t_3^2}, \quad t_1t_2 = \frac{3 - t_3^2}{3t_3^2 - 1}$

$\therefore A_3'A_3$ இன் சமன்பாடு

$$\frac{y - 2at_3}{x - at_3^2} = \frac{\frac{8at_3}{1-3t_3^2} - 2at_3}{\left(\frac{3-t_3^2}{3t_3^2-1}\right)a - at_3^2} = \frac{2t_3}{t_3^2 - 1}$$

(ie) $y(t_3^2 - 1) - 2t(x - a) = 0$

$\lambda y + \mu v = 0$ வடிவம்.

$\therefore$ நிலையான புள்ளி $(a,0)$ ஊடாகச் செல்லும்.

$\therefore A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'$ என்பன நிலைத்த புள்ளி $(a,0)$ இன் ஊடாகச் செல்லும்.

(7) நீள்வளையம் ஒன்றின் மீதுள்ள புள்ளிகள் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ இனூடு பரமான முறையாக வகைகுறிக்கலாமெனக் காட்டுக.

நீள்வளையம் ஒன்றில் உள்வரையப்பட்ட நாற்பக்கல் ஒன்றின் உச்சிகள் P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ முறையே பரமானம் θ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ஐ உடையன. P_1P_2 ஆனது P_3P_4 இற்குச் சமாந்தரமெனின், $\theta_1 + \theta_2$, $\theta_3 + \theta_4$ ஆகியன சமமாகவோ, 2π யினால் வித்தியாசப்பட்டோ இருக்குமெனக் காட்டுக.

<u>விடை:-</u>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{——} \quad (A)$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \text{——} \quad (B)$$

ஒப்பிட $x/a = \cos\theta$, $y/b = \sin\theta$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$x = a\cos\theta, \; y = b\sin\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

இதால் வளை குறிக்கப்படலாம்.

"θ", "ϕ" என்பவற்றை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{y - b\sin\theta}{x - a\cos\theta} = \frac{b\sin\phi - b\sin\theta}{a\cos\phi - a\cos\theta} = \frac{-b}{a}\cot(\theta + \phi)$$

நாண் P_1P_2 இன் சாய்வு $= -\frac{b}{a}\cot(\theta_1 + \theta_2)$

நாண் P_3P_4 " " $= -b/a \cot(\theta_3 + \theta_4)$

$$P_1P_2 \parallel P_3P_4 \Rightarrow \cot(\theta_1 + \theta_2) = \cot(\theta_3 + \theta_4)$$

$$\text{(ie)} \quad \theta_1 + \theta_2 = \theta_3 + \theta_4$$

$$\text{or} \quad \theta_1 + \theta_2 = 2\pi + (\theta_3 + \theta_4)$$

P_1P_4 இற்குச் சமாந்தரமான தொடலிகள் நீள்வளையத்தைத் தொடும் புள்ளிகள் $A_1(\psi_1)$, $A_4(\psi_4)$ என்க.

இதேபோல் P_2P_3 இற்கு ஒத்த புள்ளி $A_2(\psi_2)$, $A_3(\psi_3)$ என்க.

$$\therefore \; 2\psi_1 + 2\psi_4 = \theta_1 + \theta_4 \text{ or } 2\pi + (\theta_1 + \theta_4)$$

$$\psi_1 = \frac{\theta_1 + \theta_4}{2}, \quad \psi_4 = \pi + \left(\frac{\theta_1 + \theta_4}{2}\right)$$

$\parallel^{ly}$
$$\psi_2 = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2}, \quad \psi_3 = \pi + \left(\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right)$$

$$\psi_3 + \psi_4 = 2\pi + (\psi_1 + \psi_2) \Rightarrow A_3A_4 \parallel A_1A_2$$

அத்துடன் $\psi_1 + \psi_4 = \psi_2 + \psi_3$

$\Rightarrow A_1A_4 \parallel A_2A_3$

(ie) $A_1A_2A_3A_4$ ஒரு இணைகரம் //

8

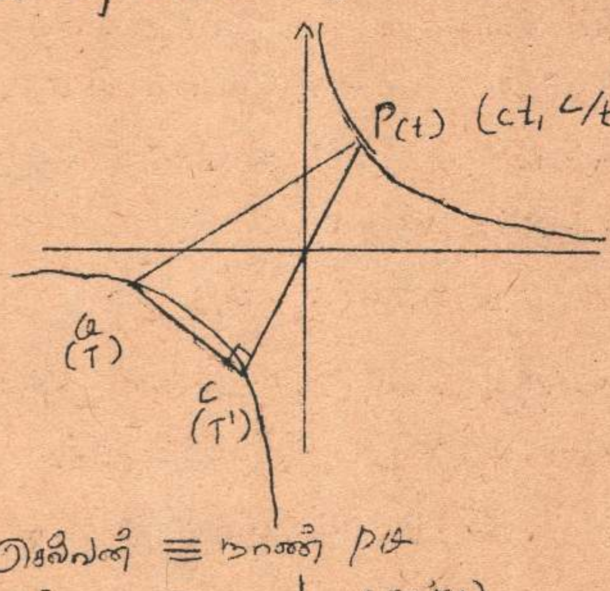
செவ்வகோண அதிபரவளைவு $xy = c^2$ இன்மேல் புள்ளி $P(ct, \frac{c}{t})$ இல் உள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க. P யில் உள்ள செவ்வனானது அதிபரவளைவை மீண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி Q வின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. PQ வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதிபரவளைவை மீண்டும் C யில் சந்திக்கின்றது. PC யின் நடுப்புள்ளி உற்பத்தியானது எனக் காட்டுக.

விடை:-

$$\left.\begin{array}{l} x = ct, \quad y = c/t \\ \dfrac{dx}{dt} = c, \quad \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{c}{t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -1/t^2$$

செவ்வனின் சமன்பாடு $y - c/t = t^2(x - ct)$

(ie) $t^3x - ty = c(t^4 - 1)$



P இல் செவ்வன் ≡ நாண் PQ

$+t^2 = -\frac{1}{tT}$ (சாய்வு)

$\Rightarrow T = -1/t^3$ $\quad Q \equiv (-c/t^3, -ct^3)$

$\hat{C} = \pi/2 \Rightarrow m_{PC} \cdot m_{QC} = -1$

$\frac{-1}{tT'} \cdot \frac{-1}{TT'} = -1$

$C \equiv (-ct, -c/t) \qquad T'^2 = \frac{-1}{tT} = \frac{-1}{t \cdot -1/t^3} = t^2$

PC இன் நடுப்புள்ளி = (0,0) ஆகும்

$$T' = \pm t$$

$$\therefore T' = -t \qquad (T' \neq t)$$

9. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்து, தீர்வுகளைப் பொது வடிவத்திலே தருக

(i) $39 \cos x + 52 \sin x = 60$

(ii) $\sin 3x - 2 \sin x = 4 \cos^2 x - 3$

(iii) $\cos x - \cos 2x = \frac{1}{2}$

விடை :-

(i) $39 \cos x + 52 \sin x = 60$

$3 \cos x + 4 \sin x = 60/13$

$\frac{3}{5} \cos x + \frac{4}{5} \sin x = \frac{12}{13}$

$\cos(x - \alpha) = \frac{12}{13}$ இங்கு $\cos \alpha = 3/5$

$\sin \alpha = 4/5$

$\cos \beta = 12/13 \qquad \cos \beta = 12/13$

(ii)

$\sin 3x - 2 \sin x = 4 \cos^2 x - 3$

$3 \sin x - 4 \sin^3 x - 2 \sin x + 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 0$

$\sin x (1 - 4 \sin^2 x) - (1 - 4 \sin^2 x) = 0$

$(\sin x - 1)(1 - 4 \sin^2 x) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 1 \quad \text{OR} \quad \sin^2 x = 1/4.$

$x = n\pi + (-1)^n \pi/2 \quad \text{OR} \quad \sin x = \pm 1/2$

$x = m\pi \pm (-1)^m \pi/6$

$m, n, = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$

(iii) $\cos x - \cos 2x = 1/2$

$\cos x - (2 \cos^2 x - 1) = 1/2$

$4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1/8 (2 \pm \sqrt{20}) = 1/4 \pm \sqrt{5}/4$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$ என்க.

$\therefore x = 2n\pi \pm \alpha$, $2m\pi \pm \beta$.

இங்கு $m, n = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots$

(10) முக்கோணி ABC யில் வழக்கமான குறியீட்டுடன்
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ என நிறுவுக.

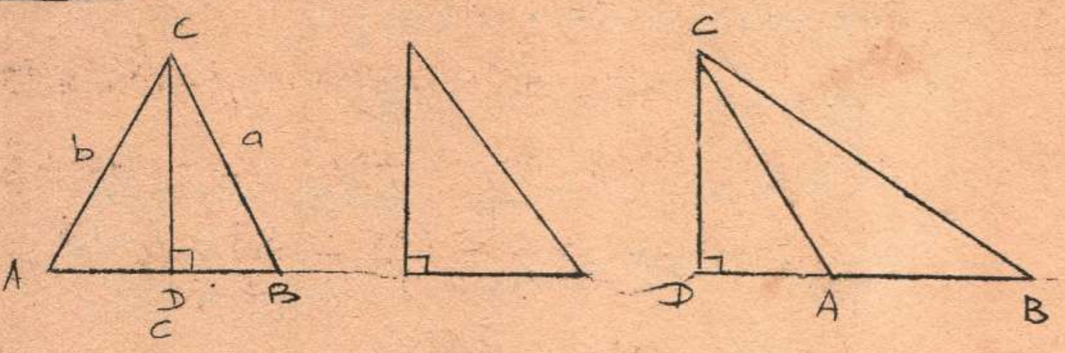
(i) ஒரு முக்கோணி ABC யின் C யிற்கு அப்பால் உள்ள பக்கம் AB மீது ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC_1 வரையப்பட்டுள்ளது. Δ என்பது முக்கோணியின் பரப்பளவெனின்,

$$CC_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\,\Delta$$ எனக் காட்டுக.

(ii) ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியில் $a = 4$, $b = 3$ ஆகும். A, B ஆகியவற்றினூடாக உள்ள இடையங்கள் தம்முள் செங்குத்தானவையாகும்.

$$\cos C = \frac{5}{6}$$ எனக் காட்டுக.

விடை :-



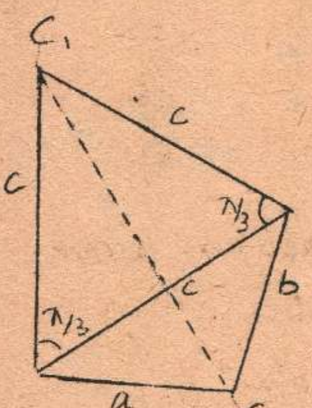
$\cos A = \frac{AD}{AC}$ $\qquad$ $\cos A = 0$ $\qquad$ $\cos A = \frac{-DA}{AC}$

$a^2 = b^2 + c^2$

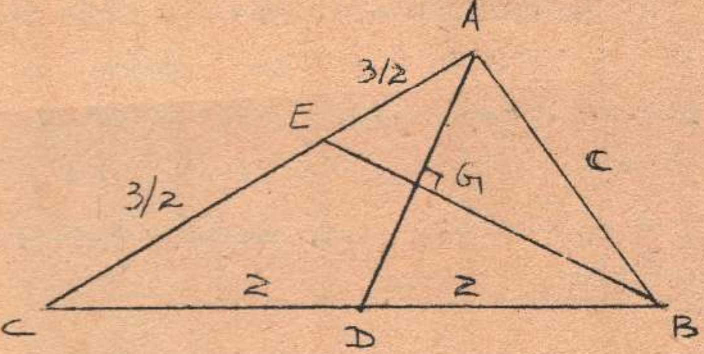
$AD^2 + DC^2 = AC^2$

$BD^2 + DC^2 = BC^2$ $\qquad$ $= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\qquad$ $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$

$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$



$$CC_1^2 = AC_1^2 + AC^2 - 2AC_1 \cdot AC \cos(\pi/3 + A)$$
$$= c^2 + b^2 - 2bc\left\{\frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right\}$$
$$= b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \sqrt{3}\,cb\sin A$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\,\Delta$$
$$\left\{\because \Delta = \frac{1}{2}bc\sin A\right\}$$



Δ ABC இல் $c^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos C$

$$\cos C = \frac{25 - c^2}{24}$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC\cdot CD\cos C$$
$$= 9 + 4 - 12\cos C$$

$$BE^2 = 4^2 + (3/2)^2 - 2\cdot 4\cdot 3/2\cos C$$
$$= 73/4 - 12\cos C$$

$A\hat{G}B = \pi/2$ என்பதால்

$$c^2 = AB^2 = AG^2 + GB^2 = 4/9\,(AD^2 + BE^2)$$
$$= 4/9\left\{13 - 12\cos C + \frac{73}{4} - 12\cos C\right\}$$
$$\therefore 25 - 24\cos C = \frac{125}{9} - \frac{32}{3}\cos C$$
$$\cos C = 5/6$$

10+9 19

(11) (i) A, B என்னும் இரு கிராமங்களின் வருமானம் தொடர்பான தகவல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

	கிராமம் A	கிராமம் B
மக்களின் எண்ணிக்கை	600	500
சராசரி வருமானம்	175	186
மாறற்றிறன்	100	81

(a) இரு கிராமங்களினதும் மொத்த வருமானம் யாது?

(b) இரு " " சராசரி " "?

(c) ஒன்றுசேர்ந்த நியம விலகல் யாது?

(d) எக்கிராமத்தில் வருமானத்தின் மாறல் உயர்வானது?

(ii) மாறி ஒன்றின் 50 வாசிப்புகளின் இடை 7.43 ஆகவும் நியம விலகல் 0.23 ஆகவும் கண்டறிந்த பின்னர் மேலதிக 10 வாசிப்புகள் எடுக்கப்பட்டன. அவையாவன: 6.80, 7.81, 7.58, 7.70, 8.05, 6.98, 7.78, 7.85, 7.21, 7.40

இவை தொடக்க வாசிப்புடன் சேர்க்கப்படுமெனின் 60 வாசிப்புகளினதும்

(a) இடை

(b) நியம விலகல் ஆகியவற்றைக் காண்க.

<u>விடை:</u>

$$\mu = \frac{1}{n}\sum x \ , \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum x^2 - \mu^2$$

<u>கிராமம் A</u>

$$n_A = 600, \ \mu_A = 175, \ \sigma_A^2 = 100$$

<u>கிராமம் B.</u>

$$n_B = 500, \ \mu_B = 186, \ \sigma_B^2 = 81$$

(a) $n_A\mu_A + n_B\mu_B = 600 \times 175 + 500 \times 186$
$= 198000$

(b) சராசரி வருமானம் $\rightarrow \mu = \frac{198000}{1100} = 180$

(c) $\sigma^2 = \frac{1}{1100}\left\{\mu_A^2 + 600\,\sigma_A^2 + \mu_B^2 + 500\,\sigma_B^2\right\} - 180^2$

σ = நியம விலகல்.

(d) $C.V.(A) = \frac{10}{600} \times 100 = 1.67$

$C.V(B) = \frac{9}{500} \times 100 = 1.8$

கிராமம் B இல் வருமான மாறல் உயர்வானதாகும்

(ii) $\sum x = n\mu \ , \ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum x^2 - \mu^2$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 7.43 \times 50 = 371.5,$$

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 50(0.23)^2 + 7.43^2 = 59.12$$

(ie) $\sum_{i=1}^{60} x_i = 371.5 + \underbrace{6.80 + 7.81 + \cdots + 7.40}_{y}$

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 = \sum_{i=1}^{50} x_i^2 + \underbrace{6.60^2 + 7.81^2 + \dots + 7.40^2}_{y}$$

இடை $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} = \dfrac{(y + 371.5)}{60}$

$$V(x_i) = \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i^2}{60} - \mu^2$$

σ_x = நியம விலகல்

(12) (i) கோடாத பூரண சமனான ஐந்து நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன.
(a) செப்பமாக மூன்று தலைகள்
(b) குறைந்தது பட்சம் மூன்று தலைகளேனும்
கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

(ii) கோடாத இரண்டு தாயக்கட்டைகளின் முகங்கள் 2, 3, 4, 6, 8, 12 எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அவை ஒரே தடவையில் எறியப்படுமெனின், ஆகவும் மேலே உள்ள முகங்களில் இருக்கும் எண்களின் பெருக்கம் 24 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(iii) இலக்காளர் ஒருவர் இலக்கு ஒன்றை நோக்கிச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு 5/6 ஆகும். அவர் 20 தடவைகள் சுடுகின்றார். அவர் இலக்கை நோக்கிச் சுடத்தக்க தடவைகளின் இயல்புமிக்க எண்ணிக்கையைத் துணிக.

விடை :-

(i) (a) $^5C_3 (1/2)^3 (1/2)^2 = 5/16$

(b) $\Longrightarrow p(5H) + p(4H) + p(H)$

$= 1/2$

(ii) பெருக்கம் 24 ஆக இருக்கும் மாதிரிவெளி

(2, 12) (3, 8) (4, 6) (6, 4) (8, 3) (12, 2)

(ie) நிகழ்தகவு $= 6/36 = 1/6$

(iii) சரியாகச் சொல்வதற்கான நிகழ்தகவு $= 5/6$

பிழையாகச் " $= 1/6$

r தடவைகளில் சரியாகச் சொல்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$p_r = {}^{20}C_r \left(5/6\right)^r \left(1/6\right)^{20-r}$$

$$= {}^{20}C_r \; 1/6^{20} \cdot 5^r$$

$$\frac{p_{r+1}}{p_r} = {}^{20}C_{r+1} \cdot 5^{r+1} \frac{1}{{}^{20}C_r \cdot 5^r} =$$

$$= \frac{100 - 5r}{r+1}$$

$$\frac{p_{r+1}}{p_r} > 1 \iff r < \frac{33}{2} = 16\tfrac{1}{2}$$

இயல்தகு எண்ணிக்கை 17

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 1. க.பொ.த (உயர் தரம்). மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1990.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

(1) (i) $\frac{1}{3!}, \frac{5}{4!}, \frac{11}{5!}, \frac{19}{6!}, \ldots$

என்னும் தொடரின் n ஆம் உறுப்பு

$$U_n = \frac{\lambda}{n!} + \frac{\mu}{(n+1)!} + \frac{\nu}{(n+2)!}$$ என்னும்

வடிவமுள்ள தொடர்பு ஒன்றை திருப்தி செய்கிறது

$n = 1, 2, 3$ எனப் பிரதியிட்டு λ, μ, ν ஐக் காண்க $n = 4$ இற்கு வாய்ப்புப் பார்க்க

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{(n+1)}{(n+2)!}$$ எனக் காட்டுக.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ என்னும் தொடர் ஒருங்குமா? உமது விடைக்கு தகுந்த காரணம் தருக.

(ii) $x^{p+1} + y^{p+1} = (x+y)(x^p + y^p) - xy(x^{p-1} + y^{p-1})$

என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்து or வேறு வழியாக n நேர் நிறை எண் ஆகும் பொருட்டு,

$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ என்பது, 2^n ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக

$(3+\sqrt{5})^n$ இன் நிறை எண் பகுதியை ஒன்றால் அதிகரிப்பதால் பெறும் எண் 2^n இன் ஒரு முழு எண் மடங்காகும் என உய்த்தறிக.

விடை:-

(i) $U_n = \frac{\lambda}{n!} + \frac{\mu}{(n+1)!} + \frac{\nu}{(n+2)!}$

$$U_n = \frac{1}{(n+2)!}\left\{\lambda(n+2)(n+1) + \mu(n+2) + \nu\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow 1 = 6\lambda + 3\mu + \nu \\ n=2 &\Rightarrow 5 = 12\lambda + 4\mu + \nu \\ n=3 &\Rightarrow 11 = 20\lambda + 3\mu + \nu \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \mu &= -2 \\ \nu &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$n=4 \qquad u_4 = \frac{1}{6!}(30-12+1) = \frac{19}{6!}$

$u_1 = \frac{1}{1} - \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!}$

$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!}$

$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{4!} + \frac{1}{5!}$

$\vdots$

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{n} u_r = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(n+1)}{(n+2)!}$$

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r = \frac{1}{2}$ ∴ ஒருங்கு தொடர்.

(ii) $(x+y)(x^p + y^p) - xy(x^{p-1} + y^{p-1})$

$= x^{p+1} + y^{p+1} + yx^p + xy^p - x^p y - xy^p$

$= x^{p+1} + y^{p+1}$

$f(n) = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$

$f(1) = 6$ ∴ 2^1 இனால் வகுபடும்.

∴ $n=1$ இற்கு இக்கூற்று உண்மை.

$f(p) = (3+\sqrt{5})^p + (3-\sqrt{5})^p$

$= (3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})\{(3+\sqrt{5})^{p-1} + (3-\sqrt{5})^{p-1}\}$

$\quad - (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\{(3+\sqrt{5})^{p-2} + (3-\sqrt{5})^{p-2}\}$

$f(p) = 6f(p-1) - 4f(p-2)$

$f(p-1)$, 2^{p-1} இனாலும் $f(p-2)$, 2^{p-2} இனாலும் வகுபடும் எனக

$f(p) = 3 \times 2 \times 2^{p-1} k_1 - 2^2 \cdot 2^{p-2} k_2$

இங்கு k_1, k_2 நிறையெண்கள்

$= (3k_1 - k_2) 2^p$

∴ $\Rightarrow f(p)$, 2^p இனால் வகுபடும்

∴ கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால் n இன் எல்லா நேர்நிறையெண்களுக்கும் $f(n)$ ஆனது 2^n இனால் வகுபடும்

$(3+\sqrt{5})^n = I + F_1$ $\qquad$ $I \leftarrow$ நிறைவெண் பகுதி

$(3-\sqrt{5})^n = F_2$ $\qquad$ $F_1 \leftarrow$ பின்னப் பகுதி

$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = I + (F_1+F_2) = k \times 2^n$

$\Longrightarrow F_1 + F_2 = 1$ $\qquad$ k - நிறையெண்

$\therefore$ $I + 1$ என்பது 2^n இனால் வகுபடும்.

(2) (i) p, q என்பன $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். இங்கு k ஓர் மாறிலி.

(a) $(p-q)^2 = 4(k^2-k-2)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து மூலங்கள் 4 ஆல் வித்தியாசப்படும்படி உள்ள சமன்பாடுகளை தரப்பட்ட வடிவில் தருக.

(b) $k \neq -2$ எனக் கொண்டு, $\frac{p^2}{q}$ ஐயும், $\frac{q^2}{p}$ ஐயும் மூலங்களாகக் கொண்டுள்ள சமன்பாட்டை அமைக்க. $1+\frac{p^2}{q}$ ஐயும் $1+\frac{q^2}{p}$ ஐயும் மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

(ii) $\frac{(x+2)(3x-1)}{4x^3-3x+1} \geq 0$ என்னும் சமனிலி உண்மையாக இருப்பதற்குரிய x இன் பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

விடை:

(i) $x^2 + 2kx + k + 2 = 0$

$p \qquad q$

$p + q = -2k$

$pq = k + 2$

(a) $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$

$= 4(k^2 - k - 2)$

மூலங்கள் 4 ஆல் வித்தியாசப்படும் போது

$4^2 = 4(k^2 - k - 2)$

$\therefore k = 3$ OR -2

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடுகள்

$k = 3 \Longrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$

$k = -2 \Longrightarrow x^2 - 4x = 0$

(b) $k \neq -2$ எனின்

$$\frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} = \frac{-2k}{k+2}(4k^2 - 3k - 6)$$

$$\frac{p^2}{q} \times \frac{q^2}{p} = k+2$$

∴ சமன்பாடு $x^2 + \frac{2k}{k+2}(4k^2 - 3k - 6)x + (k+2) = 0$

$y = 1 + x \implies x = y - 1$

$$(y-1)^2 + \frac{2k}{(k+2)}(4k^2 - 3k - 6)(y-1) + (k+2) = 0$$

இது $1 + \frac{p^2}{q}$, $1 + \frac{q^2}{p}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடாகும்

(ii) $4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$

$$y = \frac{(x+2)(3x-1)}{4x^3 - 3x + 1} = \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+1)(2x-1)^2}, \quad x \neq -1, \tfrac{1}{2}$$

$x < -2$, $y < 0$

$-2 \leq x < -1$, $y \geq 0$

$-1 < x < \frac{1}{3}$, $y < 0$

$\frac{1}{3} \leq x$, $y \geq 0$

$y \geq 0$ ஆக $-2 \leq x < -1$ உம் $x \geq \frac{1}{3}$ உம் ஆகும்

3 (a) $f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b+1)x + a$

இங்கு a, b என்பன மாறிலிகளாகும்.

(i) $f(x)$ இருபடிக் கோவை ஒன்றின் நிறைவர்க்கம் எனவும் அத்துடன்

(ii) $f(x)$ இன் ஓர் காரணி $x+2$ எனவும் தரப்படின் a, b என்பவற்றை காண்க. அத்துடன் $f(x)$ இன் ஏனைய காரணிகளையும் பெறுக.

(b) காரணிப்படுத்துக

$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

இதிலிருந்து or வேறு விதமாக

$$(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3 = 24bc$$

எனக் காட்டுக

விடை

(a) $f(x) \equiv x^4 - bx^3 - 11x^2 + 4(b+1)x + a$
$\equiv (x+2)^2(x+c)^2$

$f(-2) = 0 \implies a = 36$

$f'(-2)=0$

$\Rightarrow 4(-2)^3 - b(3)(-2)^2 - 11(2)(-2) + 4(b+1) = 0$

$\Rightarrow b = 2$

x^3 இன் குணகத்தை சமப்படுத்த $c = -3$

$\therefore f(x)$ இன் காரணிகள் $(x+2)^2, (x-3)^2$ ஆகும்

(b) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

$= (x+y+z)^3 - x^3 - (y^3+z^3)$

$= (x+y+z-x)\{(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2\}$
$\quad - (y+z)\{y^2 - yz + z^2\}$

$= 3(y+z)(x^2+xy+yz+zx)$

$= 3(y+z)(z+x)(x+y)$

$x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$ எனக் கொள்க

ஆனால்

$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$.

தரப்படுவது

$(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$

$= 3(2c)(2a)(2b)$

$= 24abc$

4. ஒரு நேர் நிறை எண் சுட்டிக்கு தாமோயிவரின் தேற்றத்தைக் கூறுக

இதைப் பாவித்து $\cos\theta \neq 0$ ஆகும் பொழுது

$$\frac{\text{கோசை } 5\theta}{\text{கோசை } \theta} = 16 \text{ சைன்}^4 \theta - 12 \sin^2\theta + 1$$

எனக் காட்டுக

இதிலிருந்து $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் n இன் இயல்தகு ஒரு எண் பெறுமானங்களுக்கு $x = 2$ சைன் $\left(\frac{n\pi}{10}\right)$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம் எனக் காட்டுக

அத்துடன் மூலங்கள் வெவ்வேறாகும் பொழுது உள்ள n இன் நான்கு பெறுமானங்கள் தருக.

4 சைன்$^2 \frac{\pi}{10} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ எனவும் காட்டுக.

சைன் $\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ என்பதையும் உய்த்தறிக

விடை

n ஒரு நேர் நிறை எண்ணாகும் போது

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ ஆகும் $\forall\theta$

$c \equiv \cos\theta$, $s \equiv \sin\theta$ என்க.

$$(c+is)^5 = c^5 + 5c^4(is) + 10c^3(is)^2 + 10c^2(is)^3 + 5c(is)^4 + (is)^5$$

$$\cos 5\theta + i\sin\theta = (c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4) + i(5c^4s - 10c^2s^3 + s^5)$$

மெய்ப்பகுதியை சமப்படுத்த

$$\cos 5\theta = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$$
$$= c\{c^4 - 10c^2s^2 + 5s^4\}$$
$$= c\{(1-s^2)^2 - 10(1-s^2)s^2 + 5s^4\}$$

$$\frac{\cos 5\theta}{\cos\theta} = 16\sin^4\theta - 12\sin^2\theta + 1 \qquad \cos\theta \neq 0$$

$x = 2\sin\theta$ எனின்.

$$\frac{\cos 5\theta}{\cos\theta} = x^4 - 3x^2 + 1$$

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \cos 5\theta = 0,\ \cos\theta \neq 0$$

$$5\theta = \frac{n\pi}{2}, \quad n \not\subset 5 \text{ இன் மடங்கல்லாத ஒற்றை எண்.}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{10}$$

பொருத்தமான n இன் பெறுமானங்கள் $\pm 1 \pm 3$

$\therefore x = 2\sin\theta$

$= 2\sin(n\pi/10)$ மூலங்களாகும் $(n = \pm 1 \pm 3)$

$x^2 = y$ என்க $y^2 - 3y + 1 = 0$ என்பதன் மூலங்கள்.

$4\sin^2\pi/10,\ 4\sin^2 3\pi/10$ ஆகும்

$$y^2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ஆனால் $\sin^2\pi/10 < \sin^2 3\pi/10$

$$\Rightarrow 4\sin^2\pi/10 = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

$$\sin^2\pi/10 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)$$

$$\sin^2\pi/10 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$$
$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4^2}$$

$$\sin\pi/10 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \qquad \{\because \sin\pi/10 > 0\}$$

(5) ஒரு சிக்கல் எண் z இன் "மட்டு" $|z|$, "வீச்சு" $\arg z$ என்னும் பதங்களை வரையறுக்க.
$\arg \bar{z} = -\arg z$ எனவும் $z\bar{z} = |z|^2$ எனவும் காட்டுக. இங்கு $\bar{z}$ என்பது z இன் சிக்கல் உடன் புணரியைக் குறிக்கின்றது.

$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ என எழுதி, ஒரு வேறு விதமாக $|z - z_0| = R$ என்பது ஆகண் வரிப்படத்தில், ஆரை R ஐயும், புள்ளி z_0 இல் மையத்தையும் உடைய, வட்டம் ஒன்றைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

(இடஞ்சுழிப் போக்கில் பெயரிடப்பட்ட) ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF அதனுடைய மையத்தை உற்பத்தி O இலும், உச்சி A ஐ $z = 3$ இலும் கொண்டுள்ளது.

(i) B, C ஆகிய உச்சிகளைக் குறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் காண்க.

(ii) புள்ளிகள் B, O, C என்பவற்றின் ஊடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை $|z - z_0| = R$ என்னும் வடிவில் காண்க.

<u>விடை</u>

ஆகண் வரிப்படத்தில் P என்பது z என்னும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கும் எனக் கொள்க. இங்கு உற்பத்தி "O"

$|z| = OP \quad P \equiv (x, y)$

$= \sqrt{x^2 + y^2}$

$\arg z$ = OP நேர் x அச்சுடன் அமைக்கும் கோணம்.

$\bar{z} = x - iy$

$\therefore z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\bar{z}$ என்னும் சிக்கலெண் P' இனால் குறிக்கப்படின் மெய்யச்சு மீதான P இன் விம்பம் P' ஆகும்.

$\arg \bar{z} = \angle xOP' = -\angle xOP = -\arg z$

$$|z - z_0| = R \Rightarrow |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = R$$

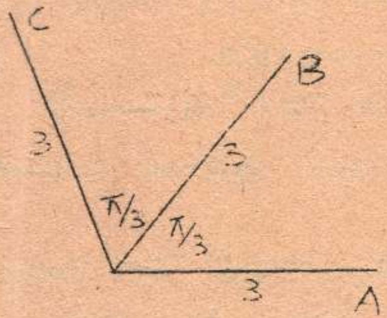
$$\text{(ie) } |(x - x_0) + i(y - y_0)| = R$$

$$\text{(ie) } \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

இது (x_0, y_0) ஐ மையமாகவும் R ஆரையுமுடைய வட்டமாகும்.

(ie) z_0 இல் மையமாகும் R ஆரையுடைய வட்டமாகும்.



(i) $B \equiv (3\cos \pi/3 , 3\sin \pi/3)$

$B \equiv (\cos \pi/3 + i\sin \pi/3)$

$= 3/2 + 3\sqrt{3}/2\, i$

$C \equiv (3\cos 2\pi/3 , 3\sin 2\pi/3)$

$\equiv 3(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3)$

$= -3/2 + 3\sqrt{3}/2\, i$

(ii) ΔBOC ஒரு சமபக்க Δ ஆதலால் அதனூடான வட்டத்தின் மையம் மையப்போலியாகும்.

(ie) $\frac{1}{3}\{3/2 + i 3\sqrt{3}/2) + 0 + (-3/2 + i\, 3\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}\, i$

ஆரை $\sqrt{3}$

$\therefore \Delta BOC$ இனூடான வட்டம் $|z - \sqrt{3}\, i| = \sqrt{3}$

(iii)

$B' \equiv 3\{\cos(\pi/3 - \pi/4) + i\sin(\pi/3 - \pi/4)\}$

$\equiv 3(\cos \pi/12 + i\sin \pi/12)$

$C' \equiv 3\{\cos(2\pi/3 - \pi/4) + i\sin(2\pi/3 - \pi/4)\}$

$\equiv 3(\cos 5\pi/12 + i\sin 5\pi/12)$

6

(a) OBSEQUIOUSNESS இன் எல்லா எழுத்துக்களும் இருக்கும் ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கைகள்

(i) எழுத்துக்களின் ஒழுங்கில் எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாதிருக்கும் பொழுது காண்க.

(ii) Q என்னும் எழுத்தை எப்பொழுதும் U தொடரும் பொழுது காண்க.

(b) 14 ஆண்பிள்ளைகளையும் 12 பெண் பிள்ளைகளையும் உடைய வகுப்பொன்றில் இருந்து 3 ஆண் பிள்ளைகளையும் 3 பெண் பிள்ளைகளையும் கொண்ட குழுவொன்றைத் தெரிந்தெடுக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை காண்

(i) எவ்வித கட்டுப்பாடும் இல்லாத பொழுது காண்க.

(ii) ஒரு குறித்த ஆண்பிள்ளையும் ஒரு குறித்த பெண் பிள்ளையும் ஒருங்கு சேவை செய்ய விரும்பாத பொழுது காண்க.

விடை

6 (a) OBSEQUIOUSNESS

O – 2, B – 1, S – 4, E – 2, Q – 1

U – 2, I – 1, N – 1

(i) $\dfrac{14!}{2!\,4!\,2!\,2!}$ (ii) $\dfrac{13!}{2!\,4!\,2!}$

(b) 14 ஆண்களிலிருந்து 3 ஆண்கள் தேர்வு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை = $^{14}C_3$

12 பெண்களிலிருந்து 3 பெண்கள் தெரிவு செய்யும் வழிகளின் எண்ணிக்கை = $^{12}C_3$

∴ (i) $^{14}C_3 \times {}^{12}C_3$

(ii) $^{14}C_3 \times {}^{12}C_3 - {}^{13}C_2 \times {}^{11}C_2$

(7) ஒரு நேர் நிறை எண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

(i) $x = 4$ ஆக இருக்கும் போது $(10+3x)^{15}$ இன் விரிவிலுள்ள அதியுயர் உறுப்பினைக் காண்க.

(ii) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x}(1+x)^n = -\dfrac{1}{x^2}(1+x)^n + \dfrac{n}{x}(1+x)^{n-1}$ என்னும் முடிபைப் பாவித்து வேறுவிதமாக

$$\sum_{r=1}^{n-1} r\,{}^nC_{r+1} = 1 + (n-2)2^{n-1}$$ எனக் காட்டுக.

விடை:-

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, $n \leftarrow$ நேர் முழு எண்.

இங்கு $^nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$n = 1$ ஆக $LHS = 1 + x$

$RHS = \sum_{r=0}^{1} {}^1C_r x^r = 1 + x$

$n = p$ ஆகும் போது இக்கூற்று உண்மையெனக் கொள்க.

$(1+x)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^r$

$$\therefore (1+x)^{p+1} = (1+x)\sum_{r=0}^{p} {}^{p}C_r x^r$$

$$= \sum_{r=1}^{p}\left({}^{p}C_r + {}^{p}C_{r-1}\right)x^r + {}^{p}C_0 x^0 + {}^{p}C_p x^{p+1}$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{p} {}^{p+1}C_r x^r + {}^{p+1}C_{p+1} x^{p+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r x^r$$

$\therefore n = p+1$ க்கும் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் கூற்று உண்மை.

(i) $(10+3x)^{15} = \sum_{r=1}^{16} T_r$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{16-r}{r-1}\,\frac{12}{10} \quad ; \quad x = 4$$

$\therefore T_{r+1} \gtrless T_r \iff r \lesseqgtr 8\ 8/11$

$\therefore T_{r+1} > T_r \ , \ r \leq 8$

மிகப் பெரிய உறுப்பு $= T_9 = {}^{15}C_8\, 10^7\, 12^8$

(ii) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x}(1+x)^n = -1/x^2(1+x)^n + \frac{n}{x}(1+x)^{n-1}$ —— (A)

LHS of (A) $= \frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r x^{r-1}$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r (r-1) \quad \text{—— (B)}$$

(A), (B) இலிருந்து $x = 1$ ஆக

$$-1 + \sum_{r=2}^{n} {}^{n}C_r (r-1) = -2^n + n.2^{n-1}$$

(ie) $\sum_{r=1}^{n-1} r\, {}^{n}C_{r+1} = 1 + (n-2)\, 2^{n-1}$

8 (i) தொடர் கோவைகளிலிருந்து $\frac{\tan x}{x}$ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(ii) a, b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்கும்போது தான்$^{-1}\left(\frac{a - b\sin x}{b + a\sin x}\right)$ ஐ x குறித்து வகையிடுக. விடையை இயலும் எளிய வடிவத்திலே தருக.

(iii) y என்பது x இன் ஒரு சார்பாகும்

$x = \sin\theta$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ky = 0 \text{ எனின்}$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + ky = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

விடை:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}, \text{ இங்கு } y = f(x)$$

(i) $$\frac{d}{dx}\frac{\tan x}{x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\frac{\tan(x+\delta x)}{x+\delta x} - \frac{\tan x}{x}}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x\{\tan(x+\delta x) - \tan x\} - \delta x \tan x}{x(x+\delta x)\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{x}{x(x+\delta x)\delta x} \cdot \frac{\sin(x+\delta x)\cos x - \cos(x+\delta x)\sin x}{\cos x \cos(x+\delta x)} - \frac{\tan x}{x(x+\delta x)}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{1}{(x+\delta x)} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x+\delta x)} \cdot \frac{\sin \delta x}{\delta x} - \frac{\tan x}{x(x+\delta x)}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 1 - \frac{\tan x}{x^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{x} - \frac{\tan x}{x^2}$$

(ii) $$y = \tan^{-1}\left(\frac{a - b\sin x}{b + a\sin x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{a-b\sin x}{b+a\sin x}\right)^2} \cdot \frac{(b+a\sin x)(-b\cos x) - (a-b\sin x)(a\cos x)}{(b+a\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)(1+\sin^2 x)}\left\{-(a^2+b^2)\cos x\right\} = \frac{-\cos x}{1+\sin^2 x}$$

(iii) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{dy}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{d^2y}{d\theta^2}\right)\frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left\{\tan\theta\frac{dy}{d\theta} + \frac{d^2y}{d\theta^2}\right\}$$

$$(1-x)^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{d\theta} + \frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$$-\frac{x\,dy}{dx} = -\sin\theta\times\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{dy}{d\theta}$$

$$ky = ky$$

கூட்ட $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x\,dy}{dx} + ky = 0$

(9)

(i) $x(1-x)^2 = (1+x^2)(x-2)+2$ என்பதையும்

$x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)-4$

என்பதையும் வாய்ப்புப் பார்க்க.

மேற்தரப்பட்ட முடிபுகளைப் பாவித்து

$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}dx$ இனதும் $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$ இனதும்

பெறுமானங்களைக் காண்க.

$3 < \pi < \frac{22}{7}$ என உய்த்தறிக.

(ii) n என்பது ஒர் நேர் நிறை எண்ணாகும்பொழுது....

$$\int சைன்^3\theta\ கோசை^n\theta\, d\theta = \frac{2}{3+n}\int \sin\theta\cos^n\theta\, d\theta - \frac{\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{3+n}$$

என நிறுவுக

இதிலிருந்து $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^3\theta\, d\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

உமது விடையை $\int_0^1 x^3(1-x^2)\,dx$ இனது தொகையீட்டைக் கருதி சரிபார்க்க.

விடை:-

(i) $x(1-x)^2 = (1+x^2)(x-2)+2$

$x^4(1-x)^4 = (1+x^2)(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)-4$

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2} = \int_0^1\left(x-2+\frac{2}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{(x-2)^2}{2}\Big|_0^1 + 2\tan^{-1}x\Big|_0^1 = \pi/2 - 3/2$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{(1+x^2)} = \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)\,dx - \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + \frac{5x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x\Big|_0^1 - 4\tan^{-1}x\Big|_0^1$$

$$= \frac{22}{7} - \pi$$

$\frac{x(1-x)^2}{1+x^2}, \frac{x^4(1-x)^4}{(1+x^2)}$ என்பவை $(0,1)$ ஆயிடையில் நேராகும்.

$\therefore \pi/2 - 3/2 > 0, \quad \frac{22}{7} - \pi > 0$

$\Rightarrow 3 < \pi < 22/7$

(ii) $I = \int \sin^3\theta \cos^n\theta\, d\theta = \int \sin^2\theta \frac{d}{d\theta}\left(\frac{-\cos^{n+1}\theta}{n+1}\right) d\theta$

$$= -\frac{\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta}{n+1} + \frac{2}{n+1}\int \cos^{n+1}\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$(n+1) I = -\sin^2\theta \cos^{n+1}\theta + 2\int \sin\theta(1-\sin^2\theta)\cos^n\theta\, d\theta$$

$$I = \frac{2}{n+3}\int \sin\theta\cos^n\theta\, d\theta - \frac{\sin^2\theta\cos^{n+1}\theta}{(n+3)}$$

$n=3$ எனின் $I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^3\theta\, d\theta = 2/6\left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]^{\pi/2} = 1/12$

$x = \sin\theta, \quad dx = \cos\theta\, d\theta$

$\therefore I_3 = \int_0^1 x^3(1-x^2)\,dx = \left[x^4/4 - x^6/6\right]_0^1 = 1/12$

(10) (i) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$ எனின்

$f^{(n)}(x) = f\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ எனவும்

$g^{(n)}(x) = g\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ எனவும் காட்டுக.

இங்கு $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ என்பன முறையே $f(x)$ இனதும் $g(x)$ இனதும் n ஆவது பெறுதியாகும்.

பூச்சியமல்லாத முதல் 5 உறுப்புகள் வரை, $\sin x$ இனதும் $\cos x$ இனதும் மக்லோரின் விரிவுகளை பெறுக.

அண்ணளவாக $\sin 20^\circ = \pi/9 - \pi^3/4374$ எனக்காட்டுக.

(ii) [illegible] உரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை பாவித்து x^4 இயான உறுப்பு வரை விரிக்க. -

$\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^{2/3}, |x|<1$

விடை:

$f(x) = \sin x$

$f^{(1)}_{(x)} = \cos x = \sin(x + \pi/2)$

$f^{(2)}_{(x)} = \cos(x + \pi/2) = \sin(x + 2\pi/2)$

$\vdots$

$F^{(n)}_{(x)} = \sin(x + n\pi/2) = f(x + n\pi/2)$

$g(x) = \cos x$

$g^{(1)}_{(x)} = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$

$g^{(2)}_{(x)} = -\cos x = \cos(x + 2\pi/2)$

$g^{n}(x) = \cos(x + n\pi/2)$
$= g(x + n\pi/2)$

$f^{(n)}_{(0)} = f(0 + n\pi/2) = \sin \frac{n\pi}{2}$

$g^{(n)}(0) = g(0 + n\pi/2) = \cos n\pi/2$

$f(x) = f(0) + x f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \cdots\cdots$

$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots\cdots$

$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \cdots$

$20^\circ = \pi/9$

$\sin 20 = \sin \pi/9 = \pi/9 - 1/3!\,(\pi/9)^3$
$= \frac{\pi}{9} - \frac{7^3}{4374}$

(ii) $\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^{2/3} = (1+x^2)^{2/3}(1-x)^{-2/3}$
$= \left(1 + 2/3\, x^2 + \frac{2/3(2/3-1)x^4}{2!} + \cdots\right)(\cdots\cdots)$

$\left(1 + \frac{(-2/3)(-x)}{1!} + \frac{(-2/3)(-5/3)(-x)^2}{2!} + \cdots\cdots\right)$

$= 1 + 2/3\, x + 11x^2/3 + 76/81\, x^3 + \frac{173}{243}x^4 \cdots\cdots$

(11) $x = 2t^2 - t^4$

$y = 3t^2 + 2t^3, \quad -\infty < t < \infty$

எனும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.
பரமானம் t ஐ உள்ள புள்ளியில், வளையியின் தொடலிகளினதும் செவ்வன்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
குறிப்பாக $t = -1, 0, 1$ எனும் பெறுமானங்களுக்கு இவற்றின் சமன்பாடுகளைத் தருக.
$t \geq 0$, $t \leq 0$ என்பவற்றுக்கு ஒத்த வளையியின் இரு கிளைகளை வெவ்வேறான படங்களில் பருமட்டாக வரைக.

$$x = 2t^2 - t^4 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 4t(1-t^2) = 4t(1-t)(1+t)$$

$$y = 3t^2 + 2t^3 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 6t(1+t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{6t(1+t)}{4t(1+t)(1-t)}; \ (t \neq 0, -1, 1)$$

$$= \frac{3}{2(1-t)}, \ t \neq 0, -1, 1$$

't' இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு,

$$y - (3t^2 + 2t^3) = \frac{3}{2(1-t)} \{x - (2t^2 - t^4)\}, \ t = 0, -1, 1$$

செவ்வனின் சமன்பாடு

$$y - (3t^2 + 2t^3) = \frac{2(t-1)}{3} \{x - (2t^2 - t^4)\}, \ t \neq 0, -1, 1$$

$t \to -1, \ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$

தொடலியின் சமன்பாடு $y - 1 = \frac{3}{4}(x-1)$

செவ்வனின் சமன்பாடு $y - 1 = -\frac{4}{3}(x-1)$

$t \to 0, \ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$

தொடலி — $y = \frac{3}{2}x$

செவ்வன் — $y = -\frac{2}{3}x$

$t \to 1$ ஆக $\frac{dy}{dx} \to \infty$

∴ தொடலி $x - 1 = 0$

செவ்வன் $y - 5 = 0$

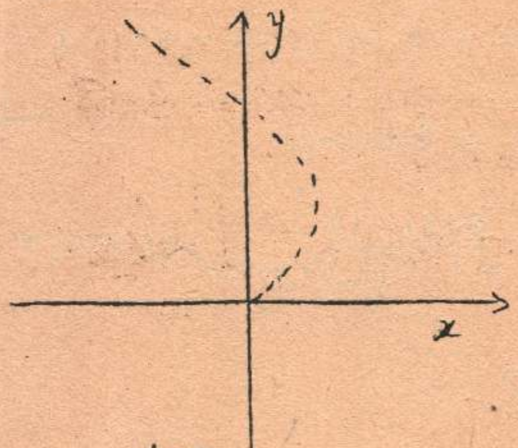
t	$-\infty$	$-3/2$	0	1	$\sqrt{2}$	2	∞
x	$-\infty$	$-9/16$	0	1	0	-8	$-\infty$
y	$-\infty$	0	0	5	$2(3+2\sqrt{2})$	20	∞

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2(1-t)}$, $\frac{dy}{dx} > 0$, $t < 1$

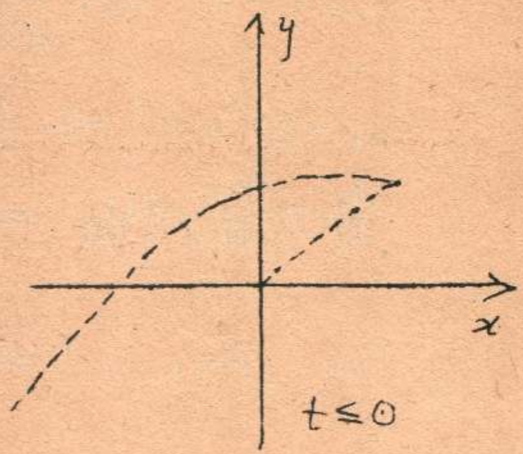
$\frac{dy}{dx} < 0$, $t > 1$

$\therefore$ $t<1$ ஆக x அதிகரிக்க y அதிகரிக்கும்.

$t>1$ " x " y குறைவடையும்.



$t \geq 0$



(12) (i) $y = x/4 + 1/x^2$ என்ற சமன்பாட்டையுடைய [illegible] வளையியை பருமட்டாக வரைக.

வளையியாலும், கோடுகள் $x = 1$, $x = a (>1)$,

$y = \frac{x}{4}$ என்பனவற்றாலும் வரைப்புற்ற பரப்பைக் காண்க.

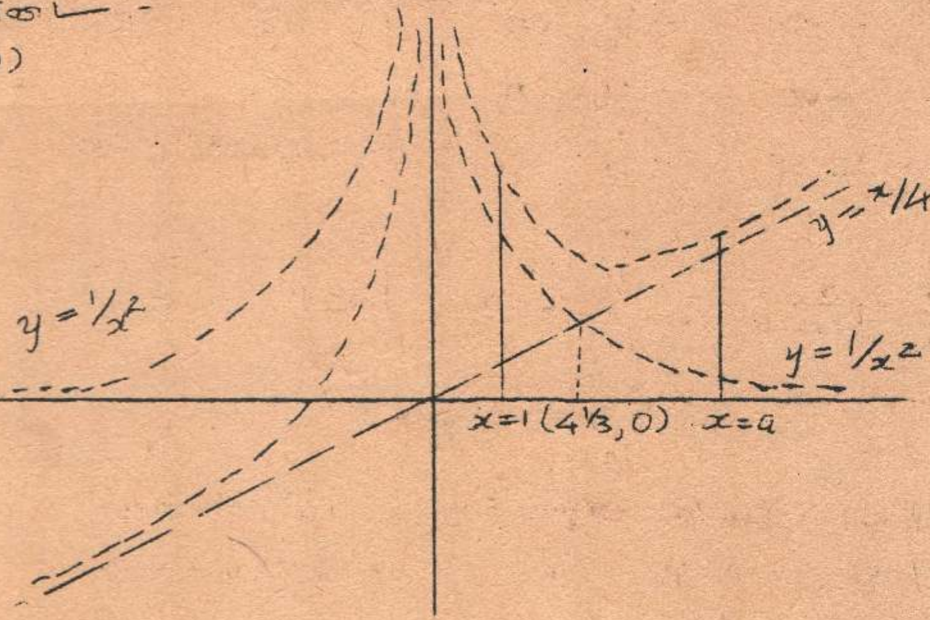
a முடிவிலியை நாட இப்பரப்பைப் பற்றி உங்களால் என்ன கூறமுடியும்?

(ii) வளையி $y = 2x - x^2$ ஆலும் அச்சினாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பளவு y அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களால் சுழற்றப்படுகின்றது.

பெறப்படும் கனஅளவு $\frac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக.

விடை -

(i)



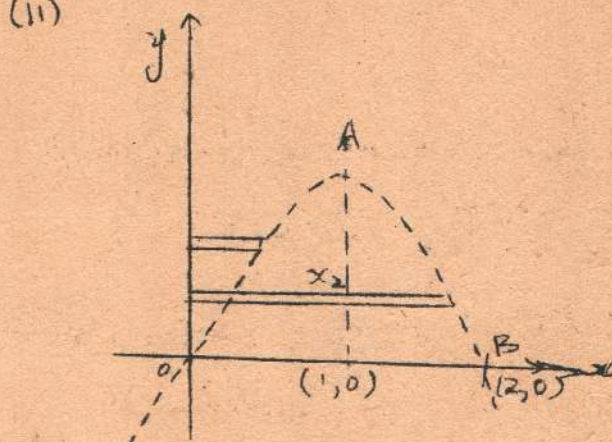
$x = 1,\ x = a,\ y = x/4$, வளையி என்பவற்றால் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பு

$$A = \int_1^a \left(x/4 + 1/x^2 - x/4\right) dx = \int_1^a dx/x^2$$

$= 1 - 1/a$ அலகு

$a \to \infty,\ A \to 1$

(ii)



தேவையான கனவளவு

$$V = \pi \int_0^1 x_2^2\, dy - \pi \int_0^1 x_1^2\, dy$$

$$= \pi \int_2^1 x^2(2-2x)\, dx - \pi \int_0^1 x^2(2-2x)\, dx$$

$$= \pi \left[\tfrac{2}{3} x^3 - x^4/2 \right]_2^1 - \pi \left[\tfrac{2}{3} x^3 - x^4/2 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[17/6 - 1/6 \right]$$

$= 8\pi/3$ அலகு //

உரிமை பதிப்பகத்தாருக்குரியது!

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் II. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1990.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1. ABC ஒரு முக்கோணி. DEF என்பது ஒரு நேர் கோடு. முக்கோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றை முறையே D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது.

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} = -1$$ என்னும் மெனிலோசின் தேற்றத்தை நிறுவுக. மேற்கூறப்பட்ட தேற்றத்தின் மாறுதலையும் கூறுக.

PQR, P'Q'R' என்பன இரு தளமான முக்கோணிகளாகும்.
QR, Q'R' என்னும் கோடுகள் X இற் சந்திக்கின்றன.
RP, R'P' " " Y " ".
PQ, P'Q' " " Z இல் இடைவெட்டுகின்றன.
PP', QQ' " " O " " ".
X, Y, Z " புள்ளிகள் ஒரே கோட்டுப்புள்ளிகளென எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மெனிலோசின் தேற்றத்தை தனித்தனியாக கீழ் வருவனவற்றிற்குப் பயன்படுத்தி

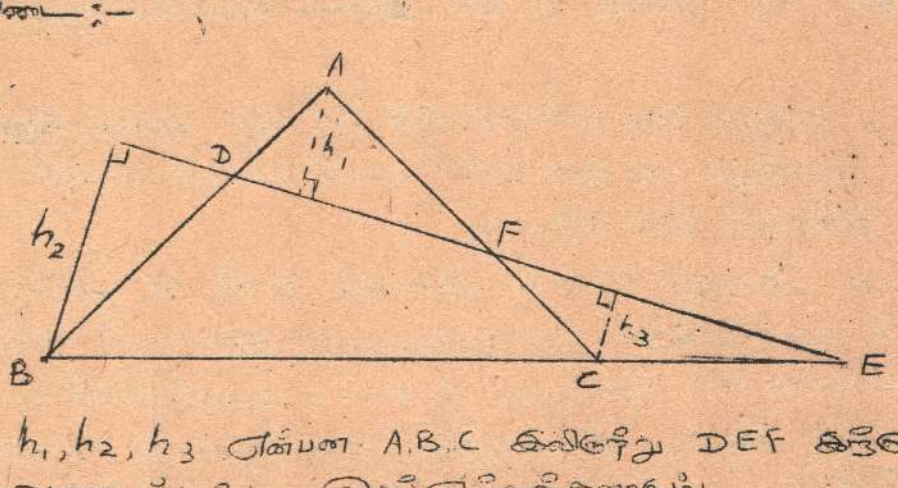
(a) $\Delta ZPP'$ உம் கோடு QQ' உம்.

(b) ΔZYP " " $Q'R'$ "

(c) ΔZPY " " QR "

$$\frac{PR}{RY}\cdot\frac{YR'}{R'P'}\cdot\frac{P'O}{OP} = -1$$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து PP', QQ', RR' என்பன O வில் இடைவெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

விடை :-



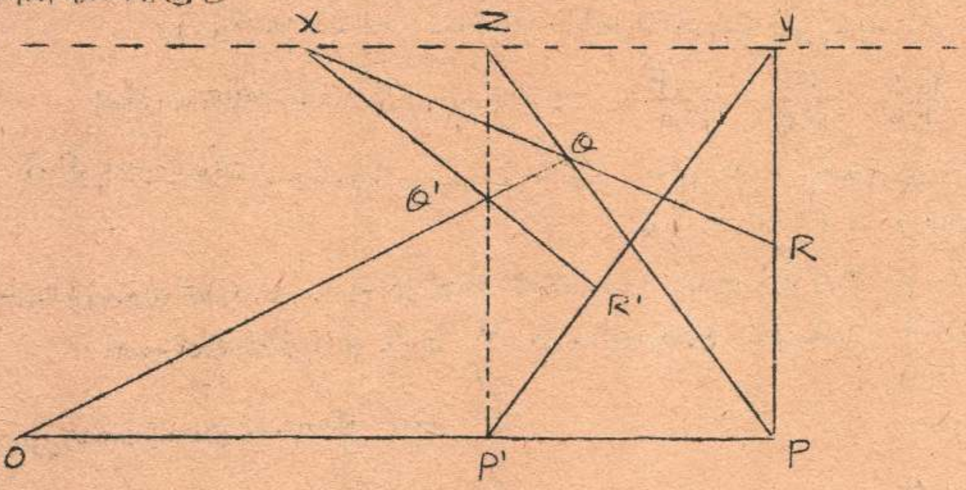
h_1, h_2, h_3 என்பன A, B, C இலிருந்து DEF இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளாகும்.

எனவே இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து

$$\frac{AD}{DB} = \frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{BE}{EC} = -\frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{CF}{FA} = \frac{h_3}{h_1}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA} = -1$$

<u>மறுதலை</u> D, E, F என்பன ΔABC இன் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றில் $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$ ஆகுமாறு அமையும் புள்ளிகளாகும். எனவே D, E, F ஒரு நேர் கோட்டிலே புள்ளிகளாகும்.



(a) $\frac{XQ}{QZ} \cdot \frac{ZQ'}{Q'P'} \cdot \frac{P'O}{OP} = -1$

(b) $\frac{YR'}{R'P'} \cdot \frac{P'Q'}{Q'Z} \cdot \frac{ZX}{XY} = -1$

(c) $\frac{PR}{RY} \cdot \frac{YX}{XZ} \cdot \frac{ZQ}{QP} = -1$

பெருக்க

$$\frac{PR}{RY} \cdot \frac{YR'}{R'P'} \cdot \frac{P'O}{OP} = -1$$

மெனிலோசின் தேற்றத்தின் மறுதலைப்படி O, R, R' ஒரே நேர் கோட்டிலே புள்ளிகளாகும்.

∴ PP', QQ', RR' என்பன O இல் இடைவெட்டுகின்றன.

(2) ABCD என்னும் ஒரு நான்முகியின் BC, AD ஆகிய இரண்டிற்கும் சமாந்தரமான தளத்தினால் உண்டாகும் வெட்டு ஒரு இணைகரம் என நிறுவுக.

BC = a ஆகவும் AD = b ஆகவும் தளம் AC ஐ c : 1 − c என்னும் விகிதத்தில் பிரிப்பதாகவும் இருந்தால் இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை a, b, c உறுப்புகளில் காண்க. BC, AD ஆகிய இரண்டிற்கும் சமாந்தரமான வெட்டுகள் அனைத்திலும் உயர் பரப்புடைய வெட்டு நான்முகியின் ஒவ்வொரு ஒரும் ஏனைய ஒருவிளிம்பின் இடைப்புள்ளியில் இருக்கின்றது எனவும் காட்டுக.

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.
36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூயகணிதம் II. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1990.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

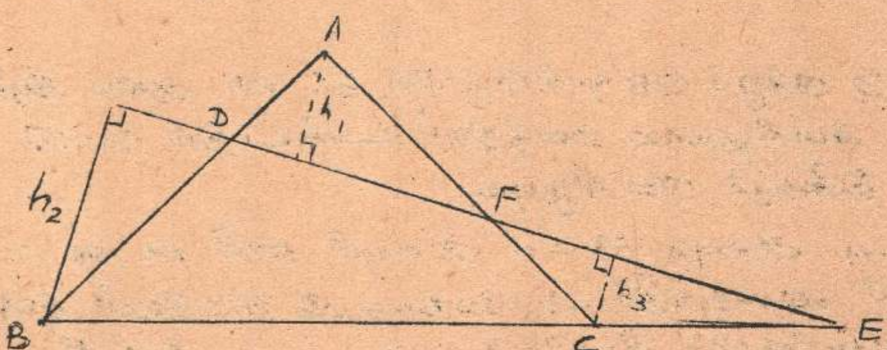
1. ABC ஒரு முக்கோணி. DEF என்பது ஒரு நேர்கோடு. முக்கோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றை முறையே D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது.

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1$$ என்னும் மெனிலோசின் தேற்றத்தை நிறுவுக. மேற்கூறப்பட்ட தேற்றத்தின் மறுதலையையும் எழுதுக.

PQR, P'Q'R' என்பன இரு ஒருதளமான முக்கோணிகளாகும்.
QR, Q'R' என்னும் கோடுகள் X இற் சந்திக்கின்றன.
RP, R'P' " " Y " " .
PQ, P'Q' " " Z இல் இடைவெட்டுகின்றன
PP', QQ' " " O " " " .
X, Y, Z " புள்ளிகள் ஒரே கோட்டுப்புள்ளிகள் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மெனிலோசின் தேற்றத்தை தனித்தனியாக கீழ்வருவனவற்றிற்குப் பயன்படுத்தி
(a) $\Delta ZPP'$ உம் கோடு QQ' உம்.
(b) ΔZYP " " $Q'R'$ "
(c) ΔZFY " " QR "

$$\frac{PR}{RY}\cdot\frac{YR'}{R'P'}\cdot\frac{P'O}{OP}=-1$$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து PP', QQ', RR' என்பன O வில் இடைவெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

விடை :-



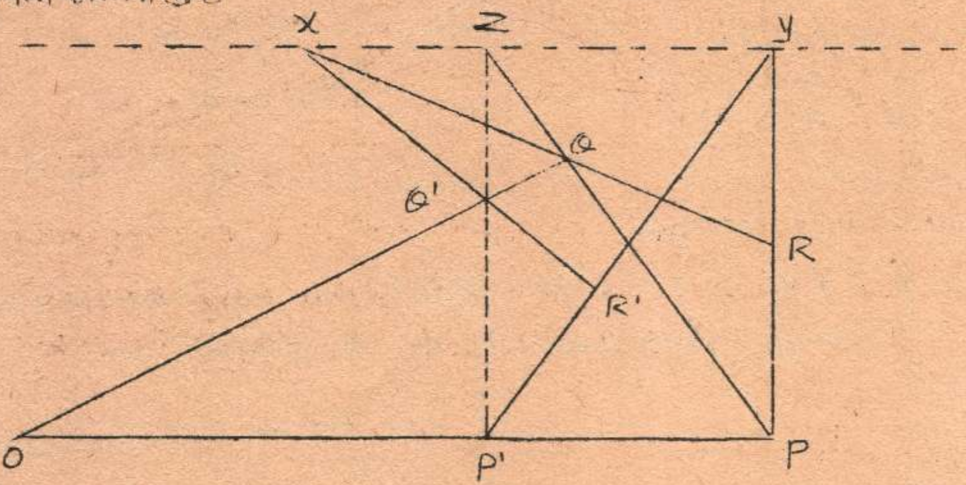
h_1, h_2, h_3 என்பன A, B, C இலிருந்து DEF இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளாகும்.

எனவே இயல்பொத்த முக்கோணிகளிலிருந்து

$$\frac{AD}{DB}=\frac{h_1}{h_2}, \quad \frac{BE}{EC}=-\frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{CF}{FA}=\frac{h_3}{h_1}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1$$

<u>மறுதலை</u>: D, E, F என்பன ΔABC இன் பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பவற்றில் $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$ ஆகுமாறு அமையும் புள்ளிகளாகும் எனின் D, E, F ஒரு நேர் கோட்டுப் புள்ளிகளாகும்.



(a) $\frac{AQ}{QZ} \cdot \frac{ZQ'}{Q'P'} \cdot \frac{P'O}{OP} = -1$

(b) $\frac{yR'}{R'P'} \cdot \frac{P'Q'}{Q'Z} \cdot \frac{ZX}{Xy} = -1$

(c) $\frac{PR}{Ry} \cdot \frac{yX}{XZ} \cdot \frac{ZQ}{QP} = -1$

பெருக்க

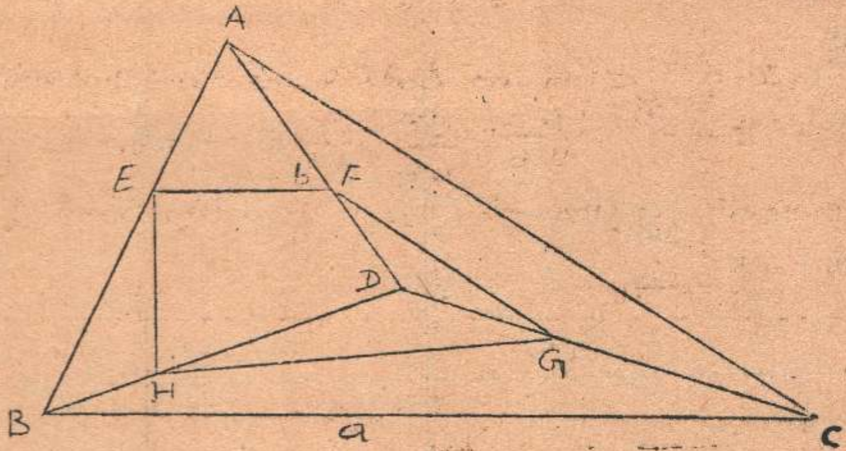
$$\frac{PR}{Ry} \cdot \frac{yR'}{R'P'} \cdot \frac{P'O}{OP} = -1$$

மெனிலோசின் தேற்றத்தின் மறுதலைப்படி O, R, R' ஒரு நேர் கோட்டுப் புள்ளிகளாகும்.

∴ PP', QQ', RR' என்பன O இல் இடைவெட்டுகின்றன.

(2) $ABCD$ என்னும் ஒரு நான்முகியின் BC, AD ஆகிய இரண்டிற்கும் சமாந்தரமான தளத்தினால் உண்டாகும் வெட்டு ஒரு இணைகரம் என நிறுவுக.

$BC = a$ ஆகவும் $AD = b$ ஆகவும் தளம் AC ஐ $c : 1-c$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிப்பதாகவும் இருந்தால் இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களை a, b, c உறுப்புகளில் காண்க. BC, AD ஆகிய இரண்டிற்கும் சமாந்தரமான வெட்டுகளுள் அதிகூடிய உயர்பரப்பைக் கொண்ட வெட்டு நான்முகியின் ஒவ்வொரு ஓரமும் ஏனைய ஓரங்களை இருகூறிடும் தளத்தில் இருக்கின்றது எனவும் காட்டுக.



EFGH என்னும் தளம் BC, AD என்பவற்றுக்குச் சமாந்தரமாகும்

(i) EF வழியே தளம் ABC ஐ. (iii) EH வழியே தளம் BAD ஐ

(ii) GH " " BCD " (iv) FG " " ACD ஐ.

வெட்டுகின்றது.

$BC \parallel EF$, $BC \parallel GH$

$\Rightarrow EF \parallel GH$

$|||^{ly}$ $FG \parallel EH$ $\quad \therefore$ EFGH ஓர் இணைகரம் $\frac{AF}{FC} = \frac{c}{1-c}$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{c}{1} \quad \text{——} ①$$

$$\frac{FG}{AD} = \frac{CF}{CA} = \frac{1-c}{1} \quad \text{——} ②$$

① & ② $\Rightarrow EF = ac$, $FG = b(1-c)$

EFGH இன் பரப்பு $= EF \cdot FG \cdot \sin E\hat{F}G$

$= acb(1-c)\sin\theta$, இங்கு $\theta = E\hat{F}G$

$= ab\sin\theta\left\{-(c-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}\right\}$

உயர்பரப்பு $= \dfrac{ab\sin\theta}{4}$ இது $c = \tfrac{1}{2}$ ஆகும் போது பெறப்படும்

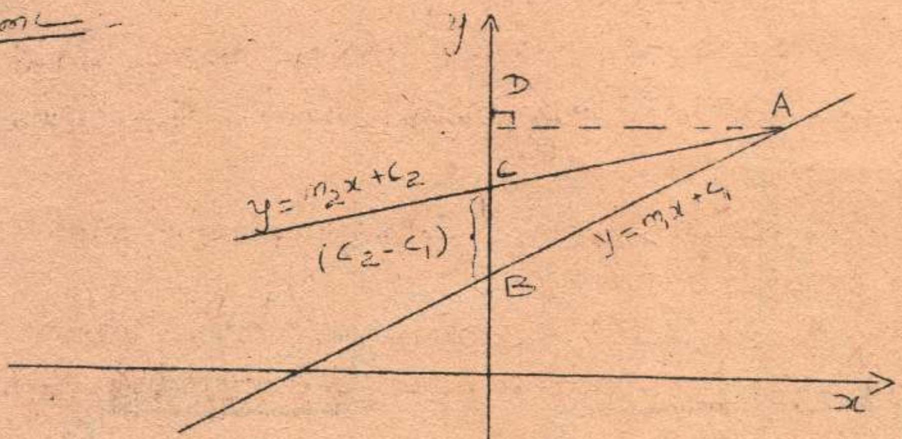
அதாவது AB, BC, CD என்பவற்றையும் EFGH தளம் இருகூறிடும்

③ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$; $x = 0$ என்னும் சமன்பாடு களைக் கொண்ட மூன்று கோடுகளால் உருவாகும் முக்கோணியின் பரப்பு

$$\frac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$$ ஆகுமெனக் காட்டுக

இதிலிருந்து $y = 2x+3$, $y = -2x+7$, $y = 6x+2$ என்னும் கோடுகளால் உருவாகும் முக்கோணியின் பரப்பைக் காண்க

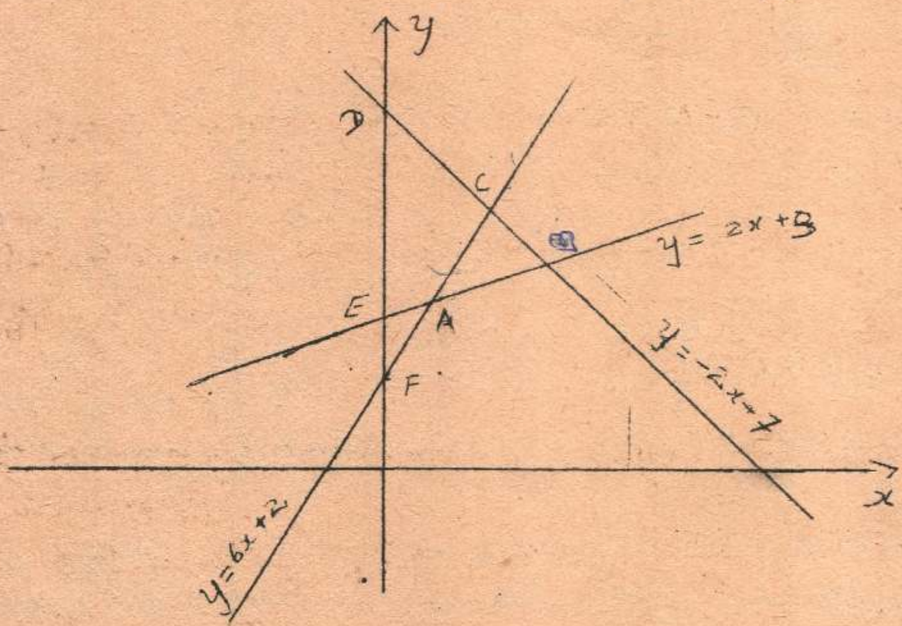
விடை -



$$y = m_1 x + c_1$$
$$y = m_2 x + c_2$$
$$c_2 - c_1 = (m_1 - m_2)x$$
$$x = \frac{c_2 c_1}{m_1 - m_2}$$

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)\cdot AD$$
$= \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)$ A இன் x ஆள்கூறு
$$= \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)\cdot\frac{(c_2 - c_1)}{m_1 - m_2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\frac{(c_1 - c_2)^2}{(m_1 - m_2)}$$

∴ பரப்பளவு $\Delta ABC = \tfrac{1}{2}\dfrac{(c_1 - c_2)^2}{|m_1 - m_2|}$



$$\Delta ABC = \Delta DBE + \Delta AEF - \Delta CDF$$
$$= \frac{(7-3)^2}{2|-2-2|} + \frac{(2-3)^2}{2|6-2|} - \frac{(7-2)^2}{2(-2-6)}$$
$$= 16/8 + 1/8 - \frac{25}{16}$$
$$= \underline{\underline{9/16}}$$

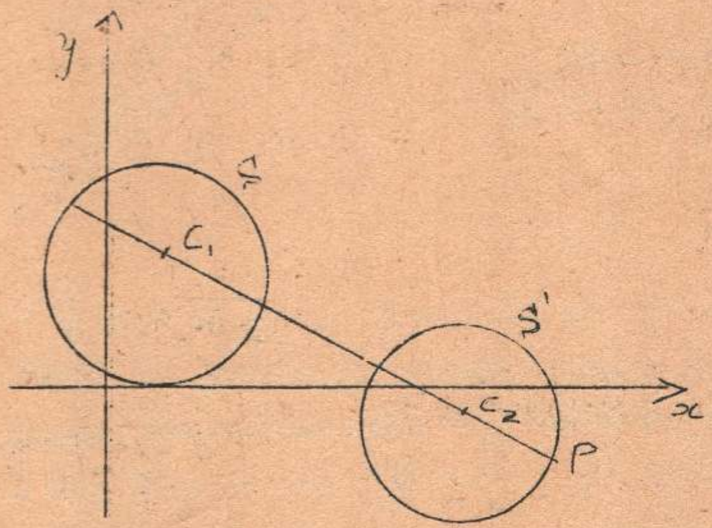
4

(4) $S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$

$S' \equiv 3x^2 + y^2 - 21x + 2y + 35 = 0$ என்னும் வட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும் வெளிப்புறமாக இருக்கின்றன என நிறுவுக.

S இலிருந்து அதிதூரத்தில் S' இலுள்ள புள்ளி P இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

P யிலிருந்து S இற்கான தொடலிகளில் ஒன்றின் சமன்பாடு $x = 4$ எனக் காட்டி, மற்றையதின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.



$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$, மையம் $C_1 \equiv (1, 3)$

ஆரை $r_1 = 3$

$S' \equiv 3x^2 + 3y^2 - 21x + 2y - 35 = 0$, மையம் $C_2 = (7/2, -1/3)$

ஆரை $r_2 = 5/6$

$C_1C_2 = 25/6 \quad \therefore r_1 + r_2 = 3\frac{5}{6}$

$\therefore C_1C_2 > (r_1 + r_2)$ ∴ ஒன்றுக்கொன்று முற்றிலும் வெளியே அமையும்

$C_1C_2 = \frac{25}{6}$, $C_2P = r_2 = 5/6$, $\frac{C_1C_2}{C_2P} = \frac{5}{1}$

அதனுடன் C_2, C_1 இற்கும் P இற்கும் இடையில் அமையும் ∴ $P \equiv (\alpha, \beta)$ எனின்

$$\frac{5\alpha + 1}{6} = 7/2 \Rightarrow \alpha = 4$$

$$P \equiv (4, -1)$$

$$\frac{5\beta + 3}{6} = -1/3 \Rightarrow \beta = -1$$

$C_1 \equiv (1, 3)$, $r_1 = 3$

∴ $x = 4$ என்னும் கோடு S இற்கு ஒரு தொடலி அதனுடன் இக்கோடு P இனூடாகச் செல்லும்.

(iv) $x=4$, $S=0$ இரண்டு தொடலியாகும்
P யூடாக

$$m_{C_1P} = \frac{3+1}{1-4} = \frac{-4}{3} = \tan(\pi/2+\alpha)$$

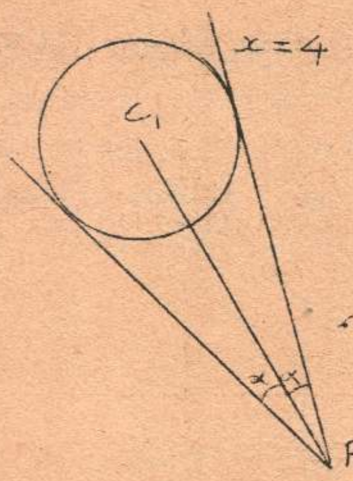
$\therefore \tan\alpha = 3/4$

$\therefore$ மற்றையதின் சாய்வு

$$= \tan(\pi/2 + 2\alpha)$$
$$= -7/24$$

$\therefore$ மற்றைய சமன்பாடு

$$24y + 7x = 4$$



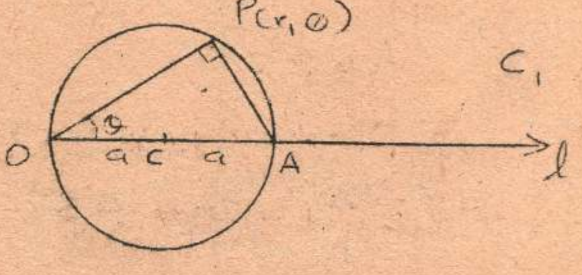
(5)

(i) வளையி C_1 ஆனது $r = 2a\cos\theta$, $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$ என்னும் முனைவுச் சமன்பாட்டினால் தரப்பட்டுள்ளது. C_1 என்பது உற்பத்தியூடாகச் செல்லும் ஒரு வட்டம் எனக் காட்டுக.
இன்னொரு வளையி C_2, $r = \frac{3a}{2}\sec\theta$, $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ இனால் தரப்படுகின்றது. C_2 ஒரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக.
C_1, C_2 ஆகியவற்றிற்கு பொதுவாக உள்ள புள்ளிகளின் முனைவு ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

(ii) (a) $x^2+y^2-5=0$ (b) $y^2-4x=0$ (c) $y+x-1=0$
என்னும் வளையிகளை ஒரு வரிப்படத்தில் வரைக.

$x-y$ தளத்திலுள்ள பிரதேசம் R இலுள்ள புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள், $x^2+y^2 \le 5$, $y^2 \le 4x$, $y+x \le 1$ என்பவற்றை திருப்தி செய்கின்றன. பிரதேசம் R ஐ வரைந்து நிழற்றுக.
இதில் மூன்று வளையிகளும் ஒன்றை ஒன்று இடைவெட்டும் புள்ளிகளையும் காட்டுக.
R இலுள்ள $|y-2x|$ இன் மிகக் கூடிய பெறுமானத்தையும் காண்க.

விடை :-

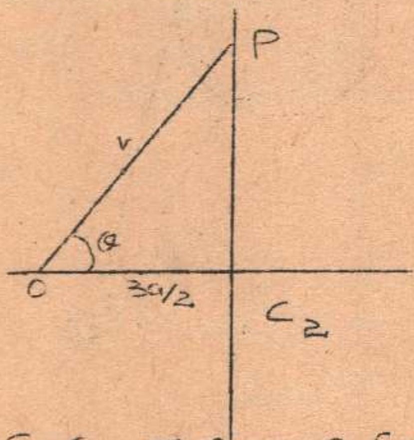


O என்பது முனைவுப்புள்ளியாகவும் l என்பது ஆரம்பக் கோடாகவும் கருதுக எனக

$A \equiv (2a, 0) \implies r = 2a\cos\theta$ என்பதால்

$P \equiv (r, \theta)$ $\quad O\hat{P}A = \pi/2$ ஆகும்

$\therefore$ P இன் ஒழுக்கு OA ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்



$r = \frac{3a}{2}\sec\theta$

$r\cos\theta = 3a/2$

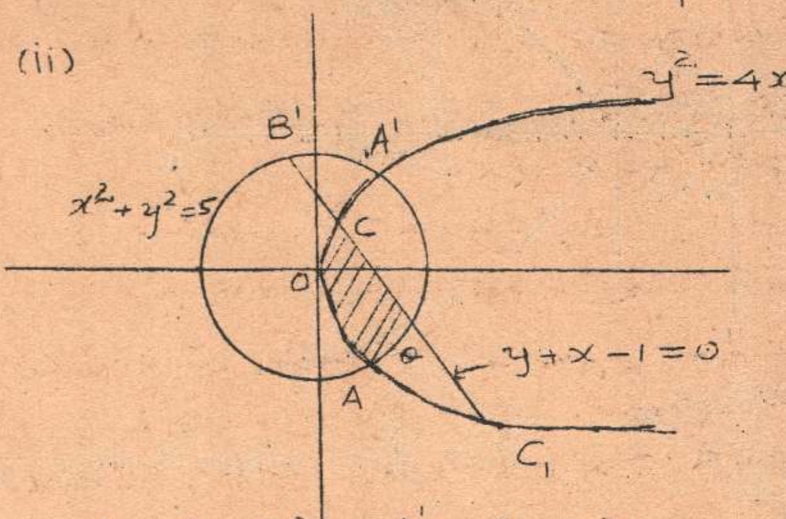
P இன் ஒழுக்கு உற்பத்தி O இலிருந்து $3a/2$ தூரத்தில் உள்ள நேர்கோடாகும்.

C_1, C_2 என்பவற்றிற்கான பொதுவான புள்ளிகள்

$$\left.\begin{array}{l} r = 2a\cos\theta \\ r = 3a/2\,\sec\theta \end{array}\right\} \implies \theta = \pm\frac{\pi}{6} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi/2\right)$$

$\therefore$ இடைவெட்டும் புள்ளி $(a\sqrt{3}, \pm\pi/6)$

(ii)



$A \equiv (1, -2)$, $A' \equiv (1, 2)$

$B \equiv (2, -1)$, $B' \equiv (-1, 2)$

$C \equiv (3-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$, $C' \equiv (3+2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$

$y - 2x = \lambda$ என்னும் நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தைக் கருதுக. இது வட்டத்தைத் தொடும்போது $|\lambda|$ உயர்வாகும்.

$2x - y + \lambda = 0$ $\qquad \lambda = \pm 5$

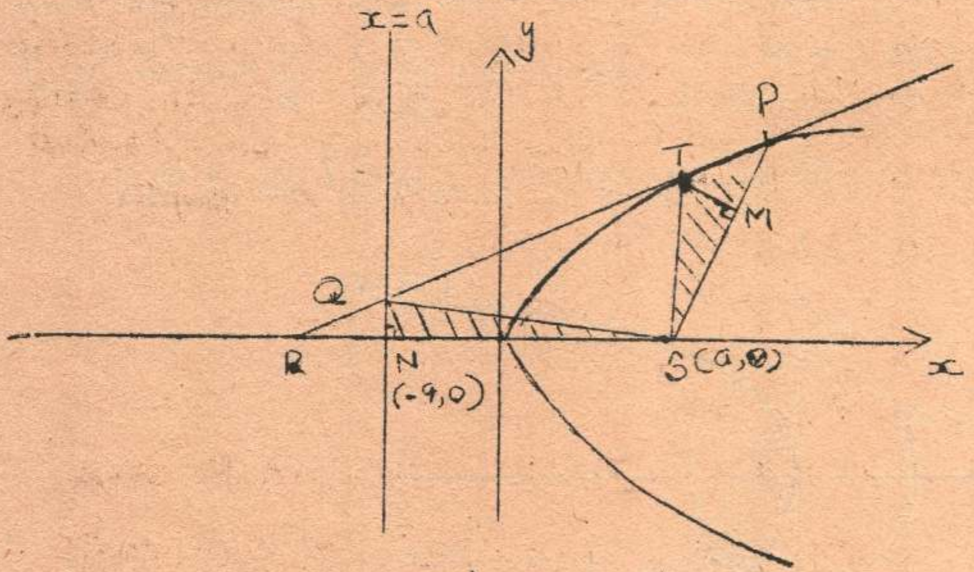
$\frac{|\lambda|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ $\qquad \therefore |y - 2x| = |\lambda| = 5$

$|y - 2x|$ உயர்வு $= 5$

(6) பரவளைவு $y^2 = 4ax$ க்கு புள்ளி $(at^2, 2at)$ இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
இப் பரவளைவிற்கு புள்ளி P யிலுள்ள தொடலி, அதன் செலுத்தியை Q வில் இடைவெட்டுகின்றது. பரவளைவின் குவியம் S ஐ தனது மையமாகவும் SQ ஐ தனது ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் மீண்டும் தொடலியை T இல் வெட்டுகின்றது. T இலிருந்து SP க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி M ஆகும். SM ஆனது செவ்வகலத்தின் அரைவாசி எனக் காட்டுக.

விடை:-
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = 1/t$$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு
$$y - 2at = 1/t\,(x - at^2)$$
$$x - yt + at^2 = 0$$



$Q \equiv (-a, a/t\,(t^2-1))$

$T \equiv \left\{\lambda, \frac{\lambda + at^2}{t}\right)$ λ – தீர்மானிக்க வேண்டியது.

$SQ = ST$

$4a^2 + a^2/t^2\,(t^2-1)^2 = \left(\frac{\lambda + at^2}{t}\right) + (\lambda - a)^2$

$\Longrightarrow \lambda \pm a$

$\therefore T \equiv (a, a/t\,(1+t^2))$

$\therefore ST \perp x$ அச்சு

(ie) $R\hat{S}T = \pi/2$

அத்துடன் $M_{SP} \times M_{SQ} = -1$

(ie) $Q\hat{S}P = \pi/2$

$\therefore \Delta SGN \equiv \Delta STM$

$\Rightarrow SM = SN = 2a =$ அரைச் செவ்வகலம்.

(7) $y = mx + c$ என்னும் கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள்வளையத்தை $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது.

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{-b^2}{ma^2}$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $y = mx$ என்னும் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான நாண்களின் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு $y = m'x$ என்னும் கோடு என உய்த்தறிக.

இங்கு $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ ஆகும்.

நீள்வளையத்திற்கு P_1, P_2 இலுள்ள தொடலிகள் $y = m'x$ இல் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக. நீள்வளையத்திற்கு A, A' என்பன உச்சிகளாகவும் C என்பது மையமாகவும் உள்ளன. Q என்பது நீள்வளையத்தின் மீதுள்ள வேறொரு புள்ளியாகும். A யிலும் Q இலும் உள்ள தொடலிகள் R இல் சந்திக்கின்றன. CR ஆனது $A'Q$ இற்குச் சமாந்தரம் எனக் காட்டுக.

விடை:-

x_1, x_2 என்பன

$\frac{x^2}{a^2} + (mx + c)^2/b^2 = 1$ என்பதன் மூலங்கள்

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 + \frac{2mc}{b^2}x + \frac{c^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2mc}{b^2} \Big/ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

$$y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) + 2c$$

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = m - \frac{b^2}{m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = \frac{-b^2}{ma^2}$$

$y = mx$ இற்குச் சமாந்தரக் கோடு $y = mx + c$ ஆகுக. அக்கோட்டின் நடுப்புள்ளி (X, Y) எனின்

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{-b^2}{ma^2} = \text{மாறிலி } (m')$$

$\therefore (X, Y)$ இன் ஒழுக்கு $y = m'x$ ஆகும்.

$\therefore mm' = -b^2/a^2$

$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ இலுள்ள தொடலிகள்

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, $\frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} = 1$ இவை இடைவெட்டும் புள்ளி

(x', y') எனின் $x'/_{a^2}(x_1 - x_2) + y'/_{b^2}(y_1 - y_2) = 0$

$$m_{P_1P_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$$

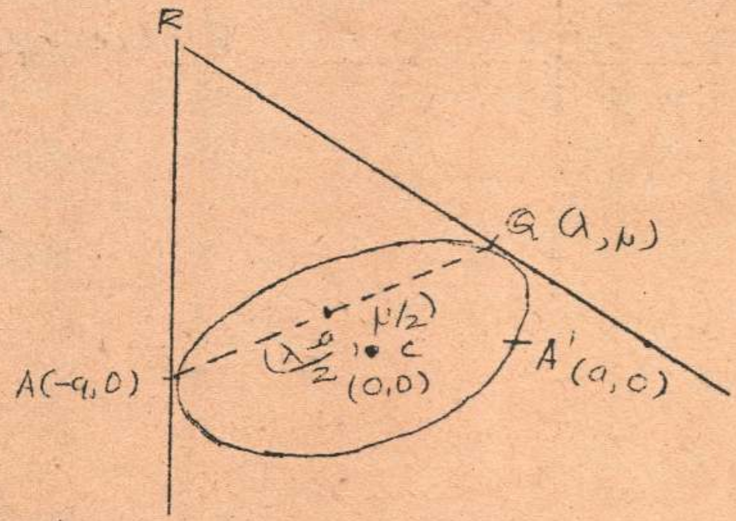
P_1P_2 இன் சமன்பாடு $y = mx + c$

$\therefore \; x'/_{a^2} + y'/_{b^2}\, m = 0$

$\therefore (x', y')$ என்பது $x/_{a^2} + y/_{b^2}\, m = 0$ இல் அமையும்.

(ie) $y = -b^2/_{ma^2}\, x$

$\Longrightarrow$ $y = m'x$ என்பது (x', y') என்பதைக் கொண்டு செல்லும்



$m_{CR} = \frac{\mu/2 - 0}{\frac{\lambda - a}{2} - 0} = \mu/_{\lambda - a}$

$\Longrightarrow A'Q \,//\, CR$

$m_{A'Q} = \frac{\mu - 0}{\lambda - a} = \mu/_{\lambda - a}$

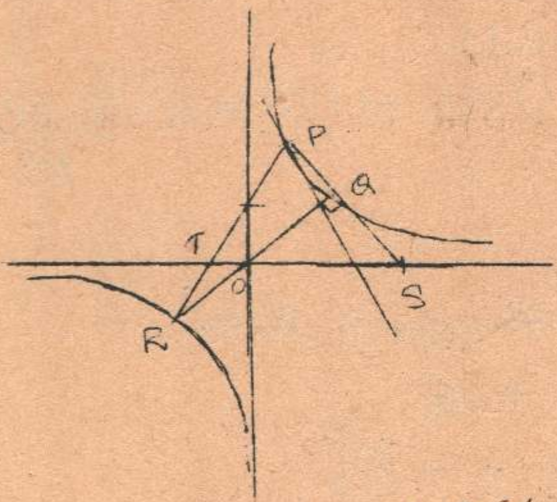
(8) P, P' என்பன செவ்வகப் அதிபரவளைவு $xy = c^2$ இலுள்ள இரண்டு புள்ளிகளாகும். நாண் PP' இன் சமன்பாட்டை காண்க. இவ்வழியே, அதிபரவளைவிற்கு புள்ளி P யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

(i) உற்பத்தி O வினூடு P யிலுள்ள தொடலிக்கு வரையப்படும் செங்குத்து, அதிபரவளைவை Q, R என்னும் புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. PQ, PR என்பன x அச்சை முறையே S, T எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. ST இன் நடுப்புள்ளி, P யிலிருந்து x அச்சுக்கு வரையப் செங்குத்தின் அடியென நிறுவுக.

(ii) P யிலுள்ள தொடலி, $x - y = 0$, $x + y = 0$ என்னும் கோடுகளை முறையே A, B களில் சந்திக்கிறது. அதே வளைவுக்கு P யிலுள்ள செவ்வன் x அச்சை, y அச்சுக்களை முறையே C, D களில் சந்திக்கின்றது. $\Delta^2 \Delta_1 = 8c^6$ என நிறுவுக. இங்கு Δ என்பது முக்கோணம் OAB இனது பரப்பையும், Δ_1 என்பது முக்கோணம் OCD இனது பரப்பையும் குறிக்கின்றன.

விடை

(i)



$P \equiv (ct, c/t)$,
$P' \equiv (ct', c/t')$

$$PP' \Rightarrow y - c/t = (x - ct)\left(\frac{c/t - c/t'}{ct - ct'}\right)$$

$$\Rightarrow tt'y + x = c(t + t_1)$$

$$t' \longrightarrow t \Rightarrow t^2 y + x = 2ct.$$

இஃது P இல் தொடலியாகும். O இனூடாக செங்குத்துக் கோடு $y = t^2 x$

$\therefore Q \equiv (c/t, ct)$, $R \equiv (-c/t, -ct)$

PQ இன் சமன்பாடு $y + x = c(t + 1/t)$

$\therefore S \equiv [ct + c/t, 0]$

$T \equiv (ct - c/t, 0)$

ST இன் நடுப்புள்ளி $\equiv (ct, 0)$

$\therefore$ P இலிருந்து x அச்சிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடி ST இன் நடுப்புள்ளியாகும்

(ii) $\left.\begin{aligned} t^2 y + x &= 2ct \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\quad A \equiv \left\{\frac{2ct}{1+t^2}, \frac{2ct}{1+t^2}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} t^2 y + x &= 2ct \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad A \equiv \left(\frac{2ct}{1-t^2}, \frac{-2ct}{1+t^2} \right)$$

$$\therefore \Delta \ \tfrac{1}{2}\left| \left(\frac{2ct}{1+t^2}\right)\left(\frac{-2ct}{1-t^2}\right) - \left(\frac{2ct}{1+t^2}\right)\left(\frac{2ct}{1-t^2}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{4c^2t^2}{1-t^4} \right|$$

$$\Delta^2 = \frac{16c^4t^4}{(1-t^4)^2}$$

F இல் செவன் $y - c/t = t^2(x - ct)$

$$\therefore C \equiv (ct - c/t^3, 0)$$

$$D \equiv (0, c/t - ct^3)$$

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}\left|(ct - c/t^3)(c/t - ct^3)\right| = \tfrac{1}{2}c^2\frac{(1+t^4)^2}{t^4}$$

$$\Delta^2 \Delta_1 = 8c^6$$

(9) கீழ்வரும் சமன்பாடுகள் தீர்க்க.

(i) $\sin\theta - \cos\theta = 1/\sqrt{2}$

(ii) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \pi/6$

(iii) $\sin x \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0$

விடை:-

(i) $\sin\theta - \cos\theta = 1/\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta - \pi/4) = \sin \pi/6$$

$$\theta - \pi/4 = n\pi + (-1)^n \pi/6, \quad n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

$$\theta = (n\pi + \pi/4) + (-1)^n \pi/6, \quad n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

(ii) $\cos^{-1}x - \sin^{-1}x = \pi/6$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos^{-1}x \\ \beta &= \sin^{-1}x \end{aligned}\right\} \text{எனின்} \Rightarrow \beta = \pi/2 - \alpha$$

$$\therefore \alpha - \beta = \pi/6, \quad \alpha + \beta = \pi/2$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 2\pi/3$$

$$\therefore \alpha = \pi/3$$

$$\therefore x = 1/2$$

(iii) $\sin x \cos x + 6 = 6(\sin x - \cos x)$

வர்க்கிக்க

$\Longrightarrow \sin^2 x \cos^2 x + 12 \sin x \cos x + 36 = 36(1 - 2\sin x \cos x)$

$\Longrightarrow \sin x \cos x(\sin x \cos x + 84) = 0$

$\Longrightarrow \sin x \cos x = 0$

$\sin x = 0$ OR $\cos x = 0$

$x = m\pi$ OR $x = (2n\pi + \pi/2)$

m, n என்பன நேர்நிறை எண்கள்.

(10)

முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் a, b, c ம் அரைச் சுற்றளவு s ம் குத்துயரங்கள் h_1, h_2, h_3 ம் உள்ள வட்டத்தின் ஆரை p ம் கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக:

(i) $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 = 1/p$

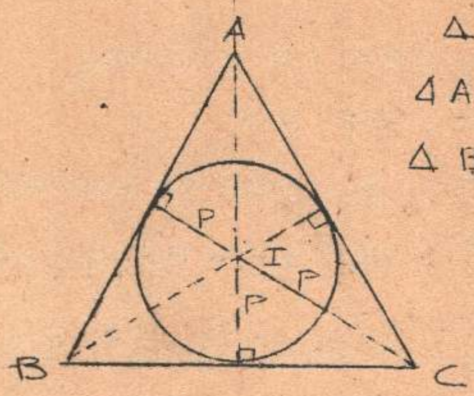
(ii) கோணங்கள் A, B, C என்பன 1 : 2 : 4 என்னும் விகிதத்தில் இருந்தால் $1/a = 1/b + 1/c$

(iii) $2(PA + PB + PC)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}$

இங்கு P என்பது, அதில் (P இல்) முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எதிர் அமைக்கின்ற முக்கோணத்துள் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

விடை:-

(i)



$\Delta ABC = \Delta BIC + \Delta CIA + \Delta AIB$

$\Delta ABC = \frac{1}{2}h_1 a = \frac{1}{2}h_2 b = \frac{1}{2}h_3 c$

$\Delta BI = \frac{1}{2}pa$, $\Delta CIA = \frac{1}{2}pb$,

$\Delta AIB = \frac{1}{2}pc$

$$1 = \frac{\Delta BIC}{\Delta ABC} + \frac{\Delta CIB}{\Delta ABC} + \frac{\Delta AIB}{\Delta ABC}$$

$$\therefore \frac{p}{h_1} + \frac{p}{h_2} + \frac{p}{h_3} = 1 \Longrightarrow 1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 = 1/p$$

(ii) $A = \pi/7$, $B = \frac{2\pi}{7}$, $C = \frac{4\pi}{7}$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \lambda$ என்க.

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\lambda\left(\frac{1}{\sin 4\pi/7}+\frac{1}{\sin 2\pi/7}\right)$$

$$=\lambda\,\frac{2\sin 3\pi/7\,\cos \pi/7}{2\sin 4\pi/7\,\sin \pi/7\,\cos\pi/7}$$

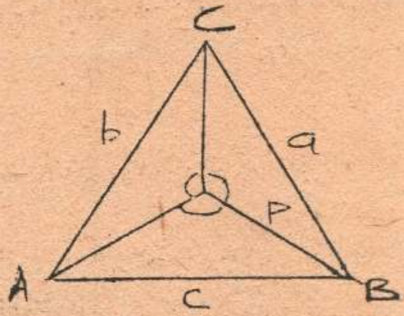
$$=\lambda\,\frac{1}{\sin\pi/7}\cdot\frac{\sin 3\pi/7}{\sin 4\pi/7}$$

$$=\frac{\lambda}{\sin A}$$

$$=1/a$$

$$\Rightarrow (\text{ie}) = 1/b + 1/c = 1/a$$

(iii)



$$A\hat{P}C = C\hat{P}B = B\hat{P}A = 2\pi/3$$

$$\Delta ABC = \Delta APB + \Delta PBC + \Delta CPA$$

$$= 1/2\,(AP\cdot PB + PB\cdot PC + PC\cdot PA)\sin 2\pi/3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(AP\cdot BP + BP\cdot CP + CP\,AP) \text{ --- (A)}$$

அதேபோல் $a^2 = BP^2 + CP^2 - 2BP\cdot CP\cdot\cos 2\pi/3$

$$= BP^2 + CP^2 + BP\cdot CP$$

$$a^2+b^2+c^2 = 2(AP^2+BP^2+CP^2) + BP\cdot CP + CP\cdot AP + AP\cdot BP$$

$$= 2(AP+BP+CP)^2 - 3(AP\cdot BP + BP\cdot CP + CP\cdot AP) \text{ --- (B)}$$

$$48s(s-a)(s-b)(s-c) = 3\cdot 2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)$$

$$= 3(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$= 3\times 2bc(1+\cos A)\,2bc(1-\cos A)$$

$$= 3\times(2bc)^2\sin^2 A = 48\Delta^2 \text{ --- (C)}$$

(A) & (B) & (C)

$$\Rightarrow 2(AP+BP+CP)^2 = a^2+b^2+c^2+\sqrt{48s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

//

(11) ஒரு பாடசாலை A யிலுள்ள 5 மாணவர்களுக்கு ஒரு பரீட்சை பேப்பர் கொடுக்கப்பட்டது. அவர்களால் பெறப்பட்ட புள்ளிகள் 44, 39, 53, 24, 30 ஆகப் பதியப்பட்டது.

அதே பரீட்சைப் பேப்பர் இன்னொரு பாடசாலை B இலுள்ள 10 மாணவர்களுக்கு கொடுக்கப்பட்டு, அவர்களால் பெறப்பட்ட புள்ளிகள் 50, 43, 42, 49, 49, 52, 27, 33, 42, 23 ஆகப் பதியப்பட்டது.

(i) (a) பாடசாலை A (b) பாடசாலை B இலுள்ள மாணவர்களால் பெறப்பட்ட புள்ளிகளின் இடை மாற்றத்திறன் ஆகியவற்றை காண்க.

(ii) இந்தப் பரீட்சைப் பேப்பருக்கு மாணவர்களால் பெறப்பட்ட புள்ளிகளின் இடை, மாறற்றிறன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(a) மூன்று இடைகளுக்கு.

(b) மூன்று மாறற்றிறன்களுக்கு, இடையிலான தொடர்பை கூறுக.

[இந்தக் கேள்வியின் பகுதிக்குரிய எல்லா கணிப்புகளும் காட்டப்பட வேண்டும்]

விடை:-

(i) (a) School A

$$x = 44, 39, 53, 24, 30$$

$$\sum x = 190$$

$$\mu_1 = \frac{190}{5} = 38$$

$$x - \mu_1 = 6, 1, 15, -14, -8$$

$$(x-\mu_1)^2 = 36, 1, 225, 196, 64$$

$$\sum (x-\mu_1)^2 = 522$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum (x-\mu)^2 = \frac{522}{5} = 104.4$$

(b) School B

$$x = 50, 43, 42, 49.52, 27, 36, 42, 23$$

$$\sum x = 410$$

$$\mu_2 = \frac{410}{10} = 41$$

$$x - \mu_2 = 9, 2, 1, 8, 8, 11, -14, -8, 1, -18$$

$$(x-\mu_2)^2 = 81, 4, 1, 64, 121, 196, 64, 1, 324$$

$$\sum (x-\mu_2)^2 = 920 \quad \therefore \sigma_2^2 = 92$$

(ii) A, B இலிருந்து

$$\sum x = 190 + 410 = 600, \quad \mu_3 = \frac{600}{15} = 40$$

$$\therefore x - \mu_3 = 4, -1, 13, -16, -10, 10, 3, 2, 9, 9, 12, -13, -7, 2, -17$$

$$(x-\mu_3)^2 = 16, 1, 169, 256, 100, 100, 9, 4, 81, 81, 144, 169, 49, 4, 289$$

$$\sum (x-\mu_3)^2 = 1472$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1472}{15} = 98.13$$

(a) $$\mu_3 = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}$$

(b) $$\sigma_3^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1(\mu_3-\mu_1)^2 + n_2(\mu_3-\mu_2)^2}{n_1+n_2}$$

//

(12)

(a) மூன்று சாதாரண (கோடாத) காசுகள் ஒன்றாக எறியப்படுகின்றன. நிகழ்ச்சிகள் A, B, C பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

A = { மூன்று காசும் மேலே தலைகளுடன் விழுவது }

B = { சரியாக இரண்டு தலைகள் நிகழ்வது }

C = { இரண்டு தலைகளுக்குக் குறைபடாது பெறுவது நிகழ்வது }

X என்னும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு P(X) எனக் குறிக்கப்பட்டால்

(i) P(A) (ii) P(B) (iii) P(C) (iv) P(A∪B)

ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) 1 இலிருந்து 12 வரையுள்ள முழுவெண்கள் ஒவ்வொன்றும் தனித்தனி மட்டைகளில் எழுதப்பட்டுள்ளன. இரண்டு மட்டைகள் எழுமாறாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இவற்றிலுள்ள முழுவெண்களின் கூட்டல் 12 பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

விடை:

(a) 3 நாணயங்கள் சுண்டப்படும் போது மாதிரி வெளி

$U = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$

$\therefore A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

(i) $p(A) = 4/8 = 1/2$

(ii) $p(B) = 3/8$

(iii) $p(C) = 7/8$

(iv) $P(A \cup B) = 5/8$

(b) 12 கூட்டுத்தொகை அமைவதற்கான மாதிரி வெளி

(1, 11) (2, 10) (3, 9) (4, 8) (5, 7)

(11, 1) (10, 2) (9, 3) (8, 4) (7, 5)

∴ தேவையான நிகழ்தகவு

$$= \left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{15}\right) \times 10$$

$$= \frac{1}{24}$$

பதிப்பகத்துக்குரியது

ஊர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்

தூய கணிதம் 1, க.பொ.த (உயர்தரம்), மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட், 1989.

(ஆறு வினாக்களுக்கு மட்டும் விடை தருக.)

1 (i) $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 4}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8} + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11} + \cdots$ என்ற தொடரின் r ஆவது உறுப்பு U_r ஆகும். U_{r+1} ஐ U_r இன் சார்பில் எடுத்துரைக்க?

$f(r) - f(r-1) = U_r$ ஆகவும், $F(r) = (Ar + B)U_{r+1}$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ என்பது r இன் ஒரு சார்பாகும். இங்கு A, B ஆகியன மாறிலிகள்.

A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, இதிலிருந்து

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2}\left\{\frac{4\cdot 7\cdot 10 \cdots (3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 \cdots (3n-1)} - 1\right\}$$ எனக் காட்டுக?

(ii) எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் $3\cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ஆனது 17 இனால் வகுபடுந் தகைமையைக் கணிதத் தொகுத்தறிவினால் நிறுவுக. அதோடு, இப்பேறு சாராத முறையினாலும் நிறுவுக.

(i) விடை

$$U_r = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10 \cdots (3r-2)}{2\cdot 5\cdot 11 \cdots (3r-1)}$$ ஆகும்.

$$U_{r+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10 \cdots (3r-2)(3r+1)}{2\cdot 5\cdot 11 \cdots (3r-1)(3r+2)}$$ ஆகும்.

$$\therefore U_{r+1} = \left(\frac{3r+1}{3r+2}\right)U_r$$ ஆகும்.

$$f(r) - f(r-1) = (Ar+B)U_r - \{A(r-1)+B\}U_r = U_r$$

$$\Rightarrow (Ar+B)(3r+1) \equiv (Ar+B-A+1)(3r-2)$$

$r = -\frac{1}{3}$ எனின் $4A + 3B = -3$

$r = \frac{2}{3}$ எனின் $-2A + 3B = 0$

$\therefore A = \frac{2}{3}, \quad B = 1$

$f(r) = \frac{1}{2}(3r+2)U_{r+1}$

$U_1 = f(1) - f(0)$

$U_2 = f(2) - f(1)$

$\cdots\cdots\cdots$

$U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$U_n = f(n) - f(n-1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = F(n) - f(0)$$

$$= \frac{1}{2}(3n+2)U_{n+1} - U_r$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1\cdot 4\cdot 7 \cdots (3n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 \cdots (3n-1)}\right.$$

(ii) $f(n) = 3\cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$

$f(1) = 17$

$\Rightarrow n = 1$ இற்கு முடிவு உண்மையாகும்

$n = p$ " " உண்மை எனக.

அ.து $f(p)$ ஆனது 17 ஆல் பிரிபடும்

$\Rightarrow f(p+1) = 3\cdot 5^{2p+3} + 2^{3p+4}$

$f(p+1) = 8[3\cdot 5^{2p+1} + 2^{3p+1}] + 3\cdot 5^{2p+1}\cdot 17$

$f(p+1) = 8f(p) + 17\cdot 35^{2p+1}$

$\Rightarrow f(p+1)$ ஆனது 17 ஆல் பிரிபடும் எண் எனின் $f(p)$ ஆனது 17 ஆல் பிரிபடும்.

$\therefore n = p+1$ முடிவு உண்மையாகும்.

n-இன் எல்லா நேர்முழுவெண் பெறுமானங்களுக்கும் $f(n)$ ஆனது 17 ஆல் பிரிபடும்.

<u>மாற்றுமுறை</u>

$$3\cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 15\cdot 25^n - 2\cdot 8^n$$
$$= 15(25^n - 8^n) + 17\cdot 8^n$$
$$= 15(25-8)(25^{n-1} + 25^{n-2}\cdot 8 + \cdots 8^{n-1}] + 17\cdot 8^n$$
$$= 15\cdot 17[25^{n-1} + 25^{n-2} \ldots 8^{n-1}] + 17\cdot 8^n$$

$\therefore 3\cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ஆனது 17 ஆல் பிரிபடும்.

(2) இரு நேர் எண்களின் கூட்டலிடையானது அவ்வெண்களின் பெருக்கலிடையிலும் பெரியது OR பெருக்கலிடைக்கு சமன் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து OR வேறுவிதமாக ; $n > r \geq 0$ எனின்

$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$ என நிறுவுக

யாதாயினும் ஒரு நிறைவெண் $n \geq 1$ இற்கு

$(n+1)^n \geq 2^n n!$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $acx^2 - b(c+a)x + (c+a)^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் α, β என்னும் மூலங்களின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. இங்கு a, b, c ஆகியன மாறிலிகள்.

(iii) $\dfrac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq 1$ என்னும் சமனிலி உண்மையாக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

விடை (2)

(i) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

$a - 2\sqrt{ab}+b \geq 0$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a = n-r;\quad b = r+1$

$\frac{(n-r)(r+1)}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r-1)}$

$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$

$r=0 \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq \sqrt{(n-1)}$

$r=2 \Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right) \geq \sqrt{(n-1)\cdot 2}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$r = n-2 \Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right) \geq \sqrt{2(n-1)}$

$r = n-1 \Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right) \geq \sqrt{1\cdot n}$

$\Rightarrow$ பெருக்க $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq 2^n n!$

(ii) $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = c/a$ (தரவின்படி)

$cax^2 - b(c+a)x + (c+a)^2 = 0$

a^2 ஆல் பிரிக்க $c/a\, x^2 - b/a(c/a+1) + (c/a+1)^2 = 0$

$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)x + (\alpha\beta+1)^2 = 0$

$\alpha\beta\left\{x^2 + (\alpha + 1/\beta + \beta + 1/\alpha)x + \alpha\beta + 2 + 1/\alpha\beta\right\} = 0$

$x^2 + (\alpha+1/\beta)(\beta+1/\alpha)x + (\alpha + 1/\beta)(\beta + 1/\alpha) = 0$

இதன் தீர்வுகள் $-(\alpha + 1/\beta)$; $-(\beta + 1/\alpha)$ ஆகும்.

(iii) $y = \frac{x^2-9x+10}{x^2-11x+30}+1$ என்க.

$y = \frac{2x^2-2x+10}{x^2-11x+30}$

$y = \frac{2(x-1/2)^2+19}{(x-5)(x-6)} \Rightarrow y>0$ என்பதால்

$(x-5)(x-6)>0$ ஆகும். $x<5$; $x>6$ ஆகும்.

③ (i) x^2-k என்பது $f(x) = 2x^4+(3k+4)x^3+(2k^2-5k-5)x^2 + (2k^3-2k^2-3k-6)x+6$ கனி வகுதியாக இருக்கத் தக்கதாக k யின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

k யின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் பிரதியிட்டு $f(x)$ இன் ஏனைய காரணிகளை எழுதுக.

(iii) $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy = \frac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2 + (x-y)^2\}$

எனக் காட்டுக. $x = b+c-a$; $y = c+a-b$; $z = a+b-c$

எனின் $x^3+y^3+z^3-3xyz = 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

என்பதை உய்த்தறிக.

<u>விடை</u>

(ii) $(x^2-k) = (x-k)(x+k)$ ஆல் $f(x)$ பிரிபடுவதால்

$f(x) \equiv (x^2-k)(2x^2+Ax+B)$ என உணர்த்தலாம்.

x^3 இன் குணகத்தை சமப்படுத்த

$3k-4 = A \longrightarrow ①$

$x^2 \Longrightarrow 2k^2-5k-5 = B-2k \quad — ②$

$x \Longrightarrow 2k^3-2k^2-3k-6 = -Ak \quad — ③$

மாறிலியை சமப்படுத்த $6 = -kB \quad — ④$

$① \times k + ③ \Longrightarrow 2k^3+k^2-7k-6 = 0 \quad — ⑤$

$② \times k + ④ \Longrightarrow 2k^3-3k^2-5k+6 = 0 \quad — ⑥$

$(5) \Longrightarrow (k+1)(2k^2-k-6) = 0$

$(k+1)(2k+3)(k-2) = 0 \quad — ⑦$

$⑥ \Longrightarrow (k-1)(2k^2-k-6) = 0$

$(k-1)(2k+3)(k-2) = 0 \quad — ⑧$

$⑦, ⑧ \Longrightarrow k = -3/2$; $k = 2$ ஆகும்.

$k = -3/2 \Longrightarrow A = -17/2$; $B = 4$

$\Longrightarrow f(x) \equiv (x+3/2)(2x^2-\frac{17}{2}x+4)$

$f(x) = (x+3/2)(x-\alpha)(x-\beta)$ ஆகும்.

இங்கு $\alpha = \dfrac{17+\sqrt{161}}{8}$

$\beta = \dfrac{17-\sqrt{161}}{8}$ ஆகும்.

$k = 2$ எனின் $\Longrightarrow A = 2$; $B = -3$

$\Longrightarrow f(x) \equiv (x-2)(2x^2+2x-3)$

$f(x) = (x-2)(x-\gamma)(x-\delta)$ ஆகும்.

இங்கு $\gamma = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\delta = \dfrac{-(1+\sqrt{17})}{2}$ ஆகும்.

(iii) $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy = \frac{1}{2}\{(y^2-2yz+z^2) + (z^2-2zx+x^2)+(x^2-2xy+y^2)\}$

$= \frac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$ ஆகும்.

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = \tfrac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(a+b+c)\{4(c-b)^2+4(a-c)^2+4(b-a)^2\}$$
$$= 2(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
$$= 4a^3+b^3+c^3-3abc$$

(4) ஓர் நேர் நிறைவெண் சுட்டிக்கு டி மோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறுக.
$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின், ஒரு நேர் நிறைவெண் n இற்கு $z^n + 1/z^n = 2\cos n\theta$ எனவும்
$z^n - 1/z^n = 2i\sin n\theta$ எனவும் காட்டுக.
$(z+1/z)^8$, $(z-1/z)^8$ ஆகியவற்றின் விரிகள் எழுதி நோக்குவதன் மூலம்
(a) $64(\cos^8\theta + \sin^8\theta) = \cos 8\theta + 28\cos 4\theta + 35$ எனவும்
(b) $8(\cos^8\theta - \sin^8\theta) = \cos 6\theta + 7\cos 2\theta$ எனவும்
காட்டுக.
$\cos 6\theta = -7\cos 2\theta$ எனும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

விடை

டி மோய்வரின் தேற்றம்

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
இங்கு n நேர் முழு எண்.
$z = \cos\theta + i\sin\theta$
$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$; $z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$ ஆகும்.
$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, $z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta$ ஆகும்.

$$(z+1/z)^8 = (z^8+1/z^8) + 8(z^6+1/z^6) + 28(z^4+1/z^4) + 56(z^2+1/z^2) + 70 \text{ ஆகும்.}$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனப் பிரதியிட

$$2^8\cos^8\theta = 2\cos 8\theta + 16\cos 6\theta + 56\cos 4\theta + 112\cos 2\theta + 70$$
$$2^7\cos^8\theta = \cos 8\theta + 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta + 56\cos 2\theta + 35 \quad \text{— (3)}$$
$$(z-1/z)^8 = (z^8-1/z^8) - 8(z^6+1/z^6) + 28(z^4+1/z^4) - 56(z^2-1/z^2) + 70 \text{ ஆகும்.}$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனப் பிரதியிட

$$2^7\sin^8\theta = \cos 8\theta - 8\cos 6\theta + 28\cos 4\theta - 56\cos 2\theta + 35 \quad \text{— (4)}$$

(3)+(4) $64(\cos^8\theta + \sin^8\theta) = \cos 8\theta + 28\cos 4\theta + 35$ ஆகும்
(3)−(4) $8(\cos^8\theta - \sin^8\theta) = \cos 6\theta + 7\cos 2\theta$ ஆகும்.

$\therefore \quad \cos 6\theta + 7\cos 2\theta = 0$

$\Rightarrow \cos^8\theta - \sin^8\theta = 0$

$(\cos^4\theta - \sin^4\theta)(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0$

$\cos^4\theta + \sin^4\theta \neq 0 \Rightarrow \cos^4\theta - \sin^4\theta = 0$ ஆகும்.

$\cos 2\theta = 0$; $2\theta = 2n\pi \pm \pi/2$

$\theta = n\pi + \pi/4$

இங்கு $n = 0, \pm 1, \pm 2$

முறை II $\cos 6\theta + 7\cos 2\theta = 0$

$\cos^8\theta - \sin^8\theta = 0$ $\quad \cos\theta \neq 0 \Rightarrow \tan^8\theta = 1$

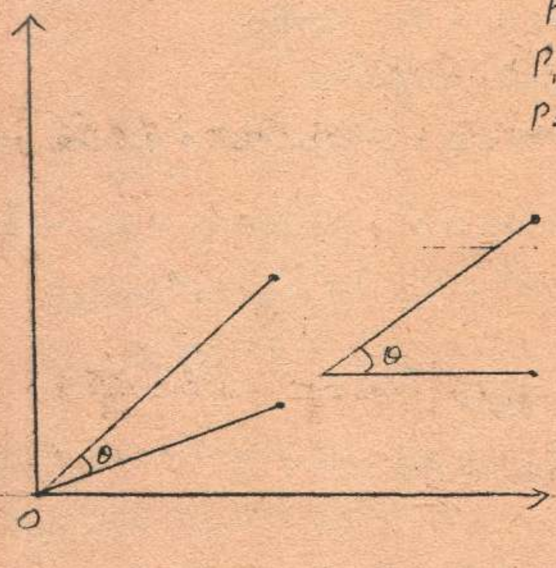
$\Rightarrow \tan\theta = \pm 1$; $\theta = n\pi \pm \pi/4$ ஆகும்.

(5) P_0, P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகள் முறையே z_0, z_1, z_2 என்னும் சிக்கல் எண்களை வகைகுறிக்கின்றன. $\frac{P_0P_2}{P_0P_1} = \lambda > 0$ ஆகவும் θ ஆனது இடஞ்சுழிப் போக்கில் அளக்கப்படும்போது $\angle P_1P_0P_2 = \theta$ ஆகவும் இருக்குமெனின் $(z_2 - z_0), (z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் சிக்கல் எண்கள் வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கு கேத்திரகணித அமைப்புகளைத் தந்து,

$z_2 = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்பதை உய்த்தறிக.

A, B, C, D, E, F ஆகிய உச்சிகள் இடஞ்சுழிப் போக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் ஒழுங்கான ஒர் அறுகோணி ABCDEF இலே A, B ஆகிய உச்சிகள் முறையே $2+2i$, $3+3i$ என்னும் சிக்கல் எண்களை வகைகுறிக்கின்றன. மேலுள்ள பேற்றைப் பயன்படுத்தி E, F ஆகிய உச்சிகள் வகைகுறிக்கும் சிக்கல் எண்களைக் காண்க.

விடை



P_0 குறிக்கும் சிக்கலெண் $x_0 + iy_0$ $[x_0, y_0]$

P_1 " " $x_1 + iy_1$ $[x_1, y_1]$

P_2 " " $x_2 + iy_2$ $[x_2, y_2]$

என்க.

$OP_2' \parallel P_0P_2$; $OP_1' \parallel P_0P_1$

ஆக வரையப்பட்டுள்ளது.

$P_1\hat{P_0}P_2 = \theta$

$\therefore P_1'OP_2' = \theta$ ஆகும்.

$P_2' P_2 P_0$ ஒர் இணைகரமாகும்

மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும்

புள்ளியின் ஆள்கூறு

$\frac{x_2}{2} \; ; \; \frac{x_0 + x_2'}{2}$

$\therefore \frac{x_2}{2} = \frac{x_0 + x_2'}{2} \; ; \; x_2' = x_2 - x_0$

இவ்வாறே $y_2' = y_2 - y_0$

P_2' குறிக்கும் சிக்கலெண் $(x_2 - x_0) + i\,(y_2 - y_0)$

$\Longrightarrow x_2 + i y_2 - (x_0 - i\, y_0)$

$\Longrightarrow z_2 - z_0$ ஆகும்.

இவ்வாறே P_1' குறிக்கும் சிக்கலெண் $z_1 - z_0$ ஆகும்.

$OP_1' = OP_1''$ ஆக OP_2' இல் P_1'' தெரிக.

$\therefore$ P_1'' குறிக்கும் சிக்கலெண் $= (z_1 - z_0)(\cos\theta + i \sin\theta)$

ஆனால் $\frac{P_0P_2}{P_0P_1} = \lambda \; ; \; \frac{OP_2'}{O_1P_1'} = \lambda$

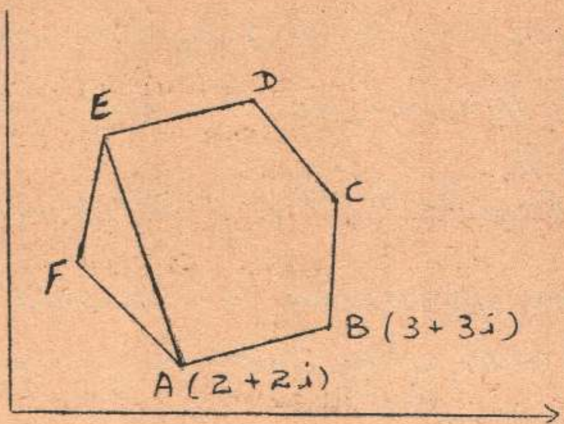
$OP_2' = \lambda\, OP_1'$, $\therefore$ P_2 குறிக்கும் சிக்கலெண்

$= \lambda [z_1 - z_0][\cos\theta + i \sin\theta]$

ஆனால் P_2' குறிக்கும் சிக்கலெண் $z_2 - z_0$

$z_2 - z_0 = \lambda [z_1 - z_0][\cos\theta + i \sin\theta]$

$z_2 = z_0 + \lambda (z_1 - z_0)(\cos\theta + i \sin\theta)$



$AB = a$ எனின்

$AE = \sqrt{3}\, a$

$\frac{AE}{AB} = \sqrt{3}$

$\measuredangle EAB = 90^\circ$

தேர்ந்தெடுப்பு E குறிக்கும் சிக்கலெண்

$2 + 2i + \sqrt{3}\,[(3 + 3i) - (2 - 2i)(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2]$

$= (2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})\, i$

$\measuredangle BAF = 2\pi/3 \; ; \; \frac{AF}{AB} = 1$

$\therefore$ F குறிக்கும் சிக்கலெண்

$(2 + 2i) + 1\{(3 + 3i) - (2 - 2i)\}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)\, i\right]$

⑥ (i) ஓர் அலுமாரியிலே வெவ்வேறு வகையான 16 பாடநூல்கள் உள்ளன. இவற்றில் 3 அட்சர கணித நூல்களும் 4 நுண் கணித நூல்களும் 3 கேத்திர கணித நூல்களும் ஏனையவை திரிகோண கணித நூல்களும் ஆகும். இந்நூல்கள் எத்தனை வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தி வைக்கலாம்? அதோடு, ஒவ்வொரு பாடத் துறையும் பற்றிய நூல்கள் ஒருமிக்க இருக்க வேண்டிய போது உள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(ii) $(5\sqrt{2}+7)^{1/3}-(5\sqrt{2}-7)^{1/3}$ ஆனது 2 இற்குச் சமனெனக் காட்டுக.

<u>விடை</u>

அட்சர கணிதம் — 3 ; கேத்திர கணிதம் 3
நுண் கணிதம் — 4 , திரிகோண கணிதம் 6

1ம் புத்தகத்தை 16 முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம்.
2ம் " 15 " " " "
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
15ம் 2 " " " " "
16ம் " 1 முறையில் மாத்திரம் தெரிவு செய்யலாம்.

ஆகவே இப்புத்தகங்கள் $= 16 \times 15 \times 14 \times \cdots 2 \times 1 = 16!$ வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம்.

பாட அடிப்படையில் புத்தகங்கள் 4! வழிமுறைகளில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்.

<u>அதற்குள்</u> அட்சரகணித புத்தகங்கள் 3! வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம் நுண் கணித புத்தகங்கள் 4! வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம்
கேத்திரகணித புத்தகங்கள் 3! வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம்.
திரிகோண கணித " 6! " "

ஆகவே ஒவ்வொரு பாடத் துறையும் ஒருமித்து இருக்க கூடியவாறு தரப்பட்ட புத்தகங்கள் $(4!)(3!)(4!)(3!)(6!)$ எண்ணிக்கையான வழிகளில் ஒழுங்கு படுத்தலாம்.

(ii) $(5\sqrt{2}+7)^{1/3}-(5\sqrt{2}-7)^{1/3}$

$= \left\{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})\right\}^{1/3} - \left\{(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})\right\}^{1/3}$

$= \left\{(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2})^2\right\}^{1/3} - \left\{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^2\right\}^{1/3}$

$= (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$ //

மாற்றுமுறை: $(5\sqrt{2}+7)^{1/3} - (5\sqrt{2}-7)^{1/3} = p$ என்க.

$$\Longrightarrow p^3 = (5\sqrt{2}+7) - 3[5\sqrt{2}+7]^{2/3}(5(\sqrt{2}-7)^{1/3} + 3(5\sqrt{2}+7)^{1/3}(5\sqrt{2}-7)^{2/3} - (5\sqrt{2}-7)$$

$$p^3 = 14 - 3\{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)\}^{1/3}\{(5\sqrt{2}+7)^{1/3} - (5\sqrt{2}-7)^{1/3}\}$$

$$p^3 = 14 - 3\{1\}^{1/3}\ p = 14 - 3p$$

$$p^3 + 3p - 14 = 0$$

$$(p-2)(p^2+2p+7) = 0$$

$$p = 2 \quad \text{OR} \quad p^2+2p+7 = 0$$

$p = 2$ $\qquad\qquad$ $\because p$ கற்பனை ஆகும்.

$\Longrightarrow p = 2$ என்பதே மெய்மூலம் ஆகும்.

$\therefore (5\sqrt{2}+7)^{1/3} - (5\sqrt{2}-7)^{1/3} = 2$ ஆகும்.

(7) ஒரு நேர் நிறைவெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(a) $x = 1/3$ ஆக இருக்கும் போது x இன் ஏறுவலுக்களில் $(\frac{1}{2}+x)$ இன் விரிவில் உள்ள அதியுயர் உறுப்புகளின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots\dots C_nx^n$ எனின்,

$\frac{C_r}{C_{r-1}}$ $r(C_r + C_{r-1}) = (n+1)C_{r-1}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \dots + (2n+1)C_n$

$= 2^n(n+1)$ என நிறுவுக.

விடை

(a) $(\frac{1}{2}+x)^9$ இன் விரிவின் r ஆம் உறுப்பு T_r என்க.

$$\Longrightarrow \frac{T_{r+1}}{T_r} = {}^9C_r(\tfrac{1}{2})^{9-r}x^r / {}^9C_{r-1}(\tfrac{1}{2})^{9-r+1}$$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{(10-r)}{r}2x$$

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2(10-r)}{3r} \quad [r = 1/3]$$

$\frac{T_{r+1}}{T_r} \geq 1$ எனின் $\quad 20 - 2r \geq 3r$

$\frac{T_{r+1}}{T_r} \geq 1$ எனின் $r \leq 4$ ஆகும்.

$r = 4 \Longrightarrow T_{r+1} = T_r$ ஆகும்.

அது $T_5 = T_4$ ஆகும்.

அத்துடன் $T_5 = T_4 > T_3 > T_2 > T_1$ ஆகும்.

இவற்றிலான் பெரிய உறுப்பு $= T_4 = T_5$ ஆகும்.

மிகப் பெரிய உறுப்பு $= T_4$

$$= {}^9C_3 (1/2)^6 (1/3)^3 = \frac{9!}{6!\,3!} \times \frac{1}{2^6} \times \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{7}{144}$$ ஆகும்

(b) $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots C_n x^n = \sum_{r=1}^{n} C_{r-1} x^{r-1}$ ஆகும்

இங்கு $C_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor r}$ ஆகும்.

$$\frac{C_r}{C_{r-1}} = \frac{\lfloor n \cdot \lfloor (r-1) \lfloor (n-r+1)}{\lfloor n-r \lfloor r \; n!} = \frac{n-r+1}{r}$$

$$\Longrightarrow r C_r = (n-r+1) C_{r-1}$$

$r(C_r + C_{r-1}$ ஆகும்.

$r[C_r + C_{r-1}] = (n+1) C_{r-1}$ நிறுவப்பட்டது

$$\sum_{r=1}^{n} r[C_r + C_{r-1}] = \sum_{r=1}^{n} (n+1) C_{r-1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r C_r + \sum_{r=1}^{n} r C_{r-1} = (n+1) \sum_{r=1}^{n} C_{r-1}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r C_r + \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) C_r = (n+1) \sum_{r=1}^{n} C_{r-1}$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} (2r+1) C_r + C_0 + n C_n = (n+1) \sum_{r=1}^{n} C_{r-1}$$

$$\sum_{r=0}^{n} (2r+1) C_r = (n-1) \sum_{r=1}^{n+1} C_{r-1} \quad \text{— (k)}$$

$(1+x)^n = \sum_{r=1}^{n+1} C_{r-1} x^{r-1}$ இல் $x = 1$ ஐ பிரதியிட

$$\sum_{r=1}^{n+1} C_{r-1} = 2^n$$ ஆகும்.

$\therefore$ (k) $\Longrightarrow C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \ldots\ldots (2n+1) C_n$

$= (n+1) 2^n$ ஆகும்

8

(i) முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து $\frac{\sin x}{x}$ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(ii) a, b ஆகியன மாறிலியாக இருக்கும் போது

$\cos^{-1}\left(\frac{a \cos x + b}{b \cos x + a}\right)$ ஐ x குறித்து வகையிடுக,

உமது விடையை ஆனவும் எளிய வடிவத்தில் தருக.

(iii) y என்பது x இன் ஒரு சாரபாகும் $x = \tan\theta$ ஆகும்.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐ $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ ஆகியவற்றின் உறுப்பில் உணர்த்துக.

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=0 \text{ எனின்,}$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+y=0 \text{ என நிறுவுக}$$

<u>விடை</u> $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ எனின்.

$$\frac{d[f(x)]}{dx}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{(x+\delta x)-x}$$

$$=\lim\frac{1}{\delta x}\left[\frac{\sin(x+\delta x)}{(x+\delta x)}-\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\delta x}\left[\frac{x\{\sin(x+\delta x)-\sin x\}-\delta x\sin x}{x(x+\delta x)\delta x}\right]$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{x(x+\delta x)\delta x}-\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin x}{x(x+\delta x)}$$

$$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{(x+\delta x)\frac{\delta x}{2}}-\frac{\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

(ii)

$$\frac{d\left[\cos^{-1}\left(\frac{a\cos x+b}{b\cos x+a}\right)\right]}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a\cos x+b}{b\cos x+a}\right)^2}}\left[\frac{-a\sin x(b\cos x+a)+b\sin x(a\cos x+b)}{(b\cos x+a)^2}\right]$$

$$=\frac{-(b\cos x+a)(b^2-a^2)\sin x}{\sqrt{(a+b)(1+\cos x)(a-b)(1-\cos x)}(b\cos x+a)}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)\sin x}{\sqrt{a^2-b^2}\sin x(b\cos x+a)}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(b\cos x+a)}$$ //

(iii) $x=\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta=1+x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=\cos^2\theta\frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{\cos^2\theta\frac{dy}{d\theta}\right\}-\frac{d}{d\theta}\left\{\cos^2\theta\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}\right\}$$

$$= -\left\{-2\sin\theta\cos\theta\frac{dy}{d\theta} + \cos^2\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}\right\}\frac{d\theta}{dx}$$

$$= -2\sin 2\theta\cos^2\theta\frac{dy}{d\theta} + \cos^4\theta\frac{d^2y}{d\theta^2} \;//$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y}{d\theta^2} \longrightarrow ①$$

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x\,dy}{d\theta} + \frac{d^2y}{d\theta^2} \longrightarrow ②$$

ஆனால் $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}$ ஆகும் $\longrightarrow ③$

② + ③ × 2x

$\Longrightarrow (1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{d\theta^2}$ ஆகும்.

$\therefore (1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + y = \frac{d^2y}{d\theta^2} + y$

$\Longrightarrow \frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0$ ஆகும். //

(9) பகுதிகளாகத் தொகையிடல் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int \sin(\log x)\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
r ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் போது,
$I = \int x^r \sin(\log x)\,dx$ ஆகவும்
$J = \int x^r \cos(\log x)\,dx$ ஆகவும் இருக்குமெனின்,
$(1 + r/2)I - r/2\,J = \frac{x^{r+1}}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$ + மாறிலி எனக் காட்டுக.
$x^{r+1}\sin(\log x)$ ஐ வகையிட்டோ, வேறுவிதமாகவோ I யிற்கும் J யிற்குமிடையே வேறொரு தொடர்புடைமையைப் பெற்று, $I = \frac{x^{r+1}}{r^2+2r+2}\{(r+1)\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$ + மாறிலி எனவும் உய்த்தறிக.
இதிலிருந்து $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகள்

<u>விடை</u>

$$\frac{d[x\sin(\log x)]}{dx} = x\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} + \sin(\log x)$$
$$= \cos(\log x) + \sin(\log x)$$

$\Longrightarrow x\sin(\log x) = \int\cos(\log x)\,dx + \int\sin(\log x)\,dx$ — ①

$|||^{ly}$ $x\cos(\log x) = -\int \sin(\log x)dx + \int \cos(\log x)dx$ — ②

① - ② $\int x \sin(\log x)\, dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)]$ ஆகும்

$$\frac{d[x^{r+1}\sin(\log x)]}{dx} = x^{r+1}\cos(\log x)\frac{1}{x} + (r+1)x^r \sin(\log x)$$

$$= x^r\cos(\log x) + (r+1)x^r\sin(\log x) \text{ — ③}$$

$$\frac{d[x^{r+1}\cos(\log x)]}{dx} = -x^r\sin(\log x)]$$

$$= (r+2)x^r\sin(\log x) - rx^r\cos(\log x)$$

$$= 2[(1+r/2)x^r\sin(\log x) - r/2\, x^r\cos(\log x)$$

$\Rightarrow$ தொகையிட்டு ( ) ④

$$x^{r+1}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] - 2\{(1+r/2)\int x^r\sin(\log x)dx$$
$$- r/2\int x^r\cos(\log x)\,dx\}$$

$$\Rightarrow (1+r/2)I - r/2\, J = \frac{x^{r+1}}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] \text{ — ⑤}$$

③ $\Rightarrow [x^{r+1}\sin(\log x) = \int x^r\cos(\log x)dx + r+1\int x^r\sin(\log x)dx$

$$= J + (r+1)I \text{ — ⑥}$$

⑥ $\times r/2$ + ⑤

$$[(1+r/2) + r/2(r+1)]I = \frac{x^{r+1}}{2}(r+1)\sin(\log x) - $$
$$-\frac{x}{2}^{r+1}\cos(\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{r}{2} + r + 2 + r\right]I = \frac{x^{r+1}}{2}\{(r+1)\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$$

$$I = \frac{x^{r+1}}{(r^2+2r+2)}[(r+1)\sin(\log x) - \cos(\log x)]$$

$$k = \int e^{ax}\sin bx\, dx$$

$bx = \log y$ என்க.

$\Rightarrow y = e^{bx}$ ஆகும். $\frac{dy}{dx} = be^{bx}$ ஆகும்.

$$e^{ax} = (e^{bx})^{a/b} = y^{a/b}$$

$$k = \int y^{a/b}\sin(\log y)\frac{1}{by}\,dy$$

$$= 1/b\int y^{(a/b-1)}\sin(\log y)\cdot dy$$

$$\Rightarrow k = \frac{y^{a/b}}{(a^2+b^2)/b^2}\left\{a/b\,\sin(\log y) - \cos(\log y)\right\}$$

இங்கு $r^2 + 2r + 2 = \frac{(a-b)^2}{b^2} + \frac{2(a-b)}{b} + 2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}$

$bx = \log y$

$$\Longrightarrow k = \frac{b^2}{a^2+b^2} e^{ax}\left\{\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right\}$$ //

(10) (i) $\int_a^b f(x)\,dx$ என்னும் வரையறுத்த தொகையீட்டை மதிப்பிடுவதற்குரிய சிம்சனின் நெறியைக் கூறுக. பின்வரும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, சிம்சனின் நெறியினால் $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\,dx$ என்னும் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் காண்க

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$\sqrt{x}$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

(ii) $f(x) = மட(1+x+x^2)$ எனின் $(1+x+x^2)f'(x) = 1+2x$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $n = 2, 3, 4, 5$ இற்கு $x = 0$ இலே $f(x)$ இனது n ஆவது பெறுதியின் பெறுமானம் $f^{(n)}(0)$ ஐக் காண்க. x^5 இலான உறுப்பு வரை $f(x)$ இன் மக்குளோரின் விரிவைப் பெறுக.

விடை

(i) சிம்சனின் நெறி

$f_i = f(x_i)$ இங்கு $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots 2n$

அத்துடன் $h = \frac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[S_0 + 4S_1 + 2S_2\right]$$ ஆகும்.

இங்கு $S_0 = f_0 + f_{2n}$

$S_1 = f_1 + f_3 + \cdots\cdots + f_{2n-1}$

$S_2 = f_2 + f_4 + \cdots\cdots + f_{2n-2}$

$a = 1.00,\ b = 1.30;\ h = 0.05$

$2n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.30}{0.05} = 6$

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
f_i	1.0000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

$S_0 = 2.14017$

$S_1 = 3.21511$

$S_2 = 2.14425$

$\Longrightarrow \frac{h}{3}\left[S_0 + 4S_1 + 2S_2\right] = 0.32149$

$$\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\,dx = 0.32149$$

(iii) $f(x) = \log(1+x+x^2)$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} \times (1+2x)$

$(1+x+x^2)\, f'(x) = 1+2x$ —— ①

மீண்டும் x குறித்து வகையிட

$(1+x+x^2)\, f''(x) + (1+2x)\, f'(x) = 2$ —— ②

மீண்டும் x குறித்து வகையிட

$(1+x+x^2)\, f^{3}(x) + 2(1+2x) + f^{(2)}(x) + 2f'(x) = 0$ —— ③

மீண்டும் x குறித்து வகையிட

$(1+x+x^2) f^{(4)}(x) + 3(1+2x) f^{(3)}(x) + 6F^{(2)}(x) = 0$ —— ④

மீண்டும் x குறித்து வகையிட

$(1+x+x^2) f^{(5)}(x) + 4(1+2x) f^{(4)}(x) + 12 F^{(3)}(x) = 0$ —— ⑤

$x = 0$ ஐ ①, ②, ③, ④, ⑤ இல் பிரதியிட

$F'(0) = 1$, $F^{(2)}(0) = 1$, $F^{(3)}(0) = -4$

$f^{(4)}(0) = 6$, $F^{(5)}(0) = 24$ ஆகும்.

$\Longrightarrow f(x)$ இன் மக்லோரினின் விரிவு.

$\Longrightarrow \log(1+x+x^2) = x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{4x^3}{3!} + \dfrac{6x^4}{4!} + \dfrac{24x^5}{5!} \cdots$ ஆகும்.

(11) $x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$,

$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \,;\; 0 \leq \theta \leq \pi$

என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகள் தரும் வளையியைச் சுவடுவரைக. மேலே தந்த இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து θ வை நீக்கி, x இற்கும் y இற்குமிடையே ஒரு தொடர்புடைமையைப் பெறுக. இத்தொடர்பு வகைகுறிக்கும் வளையியானது பரமானச் சமன்பாடுகள் வகைகுறிக்கும் வளையியிலிருந்து ஏன் வேறுபடுகின்றது?

விடை

$x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta$

$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \; (0 \leq \theta \leq \pi)$

$\dfrac{dx}{d\theta} = 2a\sin 2\theta - 2a\sin\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$

$\dfrac{dy}{d\theta} = 2a\cos\theta - 2a\cos 2\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$

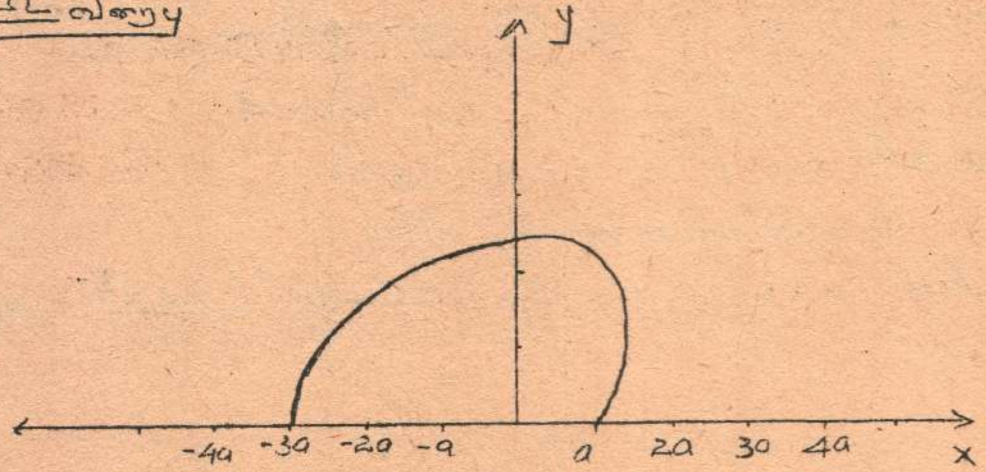
$\Longrightarrow \dfrac{dy}{d\theta} = \tan\frac{3\theta}{2} \;\; (\theta \neq 0, \frac{\pi}{3}, \pi)$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
x	1	1.23	1.41	1.5	1	-0.5	-1.4	-2.23	-3
y	0	0.13	0.41	0.86	2	2.6	2.41	1.87	0

	$\theta=0$	$0<\theta<\pi/3$	$\theta=\pi/3$	$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$	$\theta=2\pi/3$	$\frac{2\pi}{3}<\theta<\pi$	$\theta=\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	(+)	0	(−)	(−)	(−)	0
$\frac{dy}{d\theta}$	0	(+)	(+)	(+)	(+)	(−)	0
$\frac{dy}{dx}$	0	(+)	$\pm\alpha$	(−)	(+)	(+)	0

$\theta = 0$ ஆகும் போது வளையியின் தொடலி X அச்சுக்கு // மாகும்
$\theta = \pi/3$ " " " " y " // ஆகும்.
$\theta = 2\pi/3$ " " " " X " // ஆகும்.
$\theta = \pi$ " " " " y " // ஆகும்.
$\theta = \frac{2\pi}{3}$ ஆகும் போது பொருப்பம் புள்ளி $[-1/2, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$
உயர்வு ஆகும்.

உ வரைபு



$x^2+y^2-a^2 = \mu^2$ ஆகும்
இங்கு $\mu^2 = 4a^2(1-\cos\theta)$
ஆனால் $y = 2a\sin\theta(1-\cos\theta)$ ஆகும்
$\cos\theta = 1 - \frac{\mu^2}{4a^2}$ ஆகும்
$\sin\theta = \frac{2ay}{\mu^2}$

$\Longrightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ஆகும்
$\therefore y^2 = a^2\left[\frac{\mu^2}{2a^2}\right]^3\left[1 - \mu^2/3a^2\right]$ ஆகும்

இங்கு $\mu^2 = x^2+y^2-a^2$ ஆகும்.
இத்தொடர்பு குறிக்கும் வளையி ஆனது X அச்சுப்பற்றி சமச்சீர் ஆகும். ஆனால் பரமானச் சமன்பாடு குறிக்கும் வளையி X அச்சைப் பற்றி சமச்சீர் அல்ல.

12. $x^2 = 4y$, $x^2 = y^3$ என்னும் இரு வளையிகளினதும் பரும்படிப்படம் ஒன்றை ஒரே உருவில் வரைக. முதற்காற்பகுதியில் இவ்விரு வளையிகளும் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு S ஐக் காண்க.

S ஆனது (a) x – அச்சுப்பற்றி, (b) y - அச்சுப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

விடை

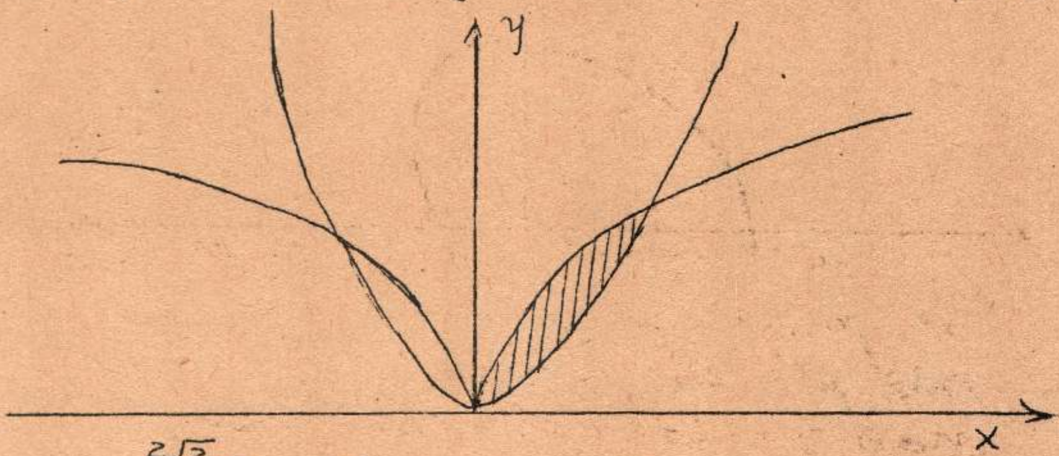
$x^2 = 4y$ ஆனது பரவளைவு ஆகும். உச்சி (0,0) சமச்சீர் அச்சு y அச்சு ஆகும்.

$x^2 = y^3$ என்ற வளையியைக் கருதுக. இவ்வளையி (0,0) ஊடாகச் செல்லும். அத்துடன் இவ்வளையி y அச்சுப்பற்றி சமச்சீர் ஆகும். மேலும் x இன் எல்லா பெறுமானத்திற்கும் $y > 0$ ஆகும். $y = x^{2/3}$ ஆகும்.

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{1/3}} \quad ; \quad x > 0$$

$x \to 0^+$ ஆக $\frac{dy}{dx} \to \infty$ ஆகும். $x > 0$ ஆக $\frac{dy}{dx} > 0$ ஆகும். ஆகவே y ஆனது x உடன் அதிகரிக்கும்.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4y \quad \text{—(1)} \\ x^2 = y^3 \quad \text{—(2)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} y^3 = 4y \Rightarrow y = 0, +2 \text{ ஆகும்.} \\ y = 2 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \text{ ஆகும்.} \end{array}$$



$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x^{2/3} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

S ஐ x அச்சுப்பற்றி சுழற்றும் போது உண்டாகும் திண்மத்தின் கனஅளவு V_1 எனின்

$$V_1 = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} (y_1^2 - y_2^2)\, dx \text{ இங்கு } y_1 = x^{2/3},\ y_2 = \frac{x^2}{4} \text{ ஆகும்.}$$

$$V_1 = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(x^{4/3} - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi \left[\frac{x^{7/3}}{7/3} - \frac{x^5}{80}\right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= \pi \left[\frac{24}{7} 2^{5/6} - \frac{8\sqrt{2}}{5}\right] \text{ ஆகும்.}$$

S ஐ y அச்சுப்பற்றி சுழற்றப்படும் போது உண்டாகும் திண்மத்தின் கனஅளவு V_2 எனின்

$$V_2 = \pi \int_1^2 (4y - y^3)\, dy = \pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \frac{16\pi}{3} \text{ கனஅலகு}$$

2

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

ஞானயகலிங்கம் 11. க.பொ.த(உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட், 1989.

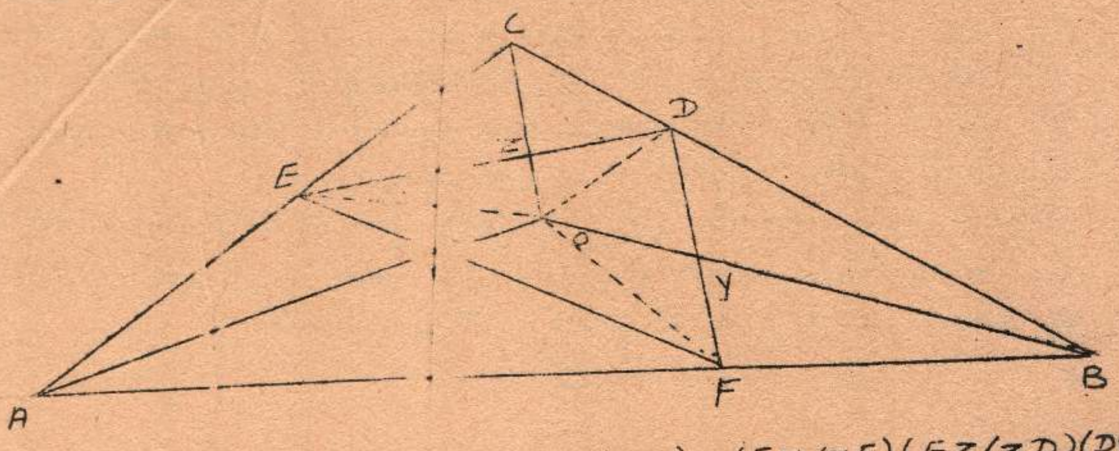
ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1. ABC ஒரு முக்கோணி. D, E, F என்னும் புள்ளிகள் முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் பக்கங்களின் மீது உள்ளன. O என்னும் புள்ளியானது முக்கோணி DEF இனுள்ளே இருக்கின்றது. AO ஆனது EF ஐ X இல் சந்திக்கின்றது. BO ஆனது FD ஐ Y யில் சந்திக்கின்றது. CO ஆனது DE யை Z இல் சந்திக்கின்றது.

$$\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{DC \cdot EA \cdot FB} = \frac{FX \cdot EZ \cdot DY}{XE \cdot ZD \cdot YF}$$ என நிறுவுக.

DX, EY, FZ ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பனவாக இருந்தால் மட்டுமே AD, BE, CF ஆகியன ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனவும் உய்த்தறிக.

விடை



நி.வே:- $(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB) = (FX/XE)(EZ/ZD)(DY/YF)$ — (1)

நிறுவல்:- $BD/DC = \Delta BOD/\Delta DOC$

$CE/EA = \Delta COE/\Delta EOA$

$AF/FB = \Delta AOF/\Delta FOB$

(1) இன் L.H.S $= (\Delta BOD/\Delta DOC)(\Delta COE/\Delta EOA)(\Delta AOF/\Delta FOB)$ — (2)

அத்துடன் $FX/XE = \Delta AFX/\Delta AXE$

$= \Delta FOX/\Delta OXE$

$= (\Delta AFX + \Delta XOF)/(\Delta AXE + \Delta XOE)$

$= \Delta AOF/\Delta EOA$

இவ்வாறே $EZ/ZD = \Delta COE/\Delta DOC$

$DY/YF = \Delta BOD/\Delta FOB$

ஆகவே (1) இன் R.H.S $= (\Delta AOF/\Delta EOA)(\Delta COE/\Delta DOC)(\Delta BOD/\Delta FOB)$

= ஆன் (1) இன் L.H.S (2 இலிருந்து)

(ii) சேவாவின் (தேற்றப்)படி DX, EY, FZ are concurrent

$(FX/XE)(EZ/ZD)(DY/YF) = 1$

அ-து ① இலிருந்து $(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB)=1$

சேவாவின் (தேற்றம்) இதிலிருந்து AD, BE, CF are concurrent.

(ii) AD, BE, CF are concurrent சேவாவின் தேற்றப்படி.

$(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB) = 1$

எனவே DX, EY, FZ are concurrent (i), II இலிருந்து DX, EY, FZ are concurrent எனின், எனின் மட்டுமே AD, BE, CF are concurrent.

② இரு தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் என்பதை வரையறுக்க.
தளம் α இல் உள்ள m, n என்னும் இரு நேர்கோடுகள் புள்ளி O விலே ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுகின்றன.
O வினூடாக உள்ளதும் m, n ஆகிய இரண்டிற்கும் செவ்வனானதுமான நேர்கோடானது α விற்குச் செங்குத்தாகும் எனக் காட்டுக.
ஒரு நான்முகி OABC யிலே தளம் AOC ஆனது தளம் BOC யிற்குச் செங்குத்தாகும், $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ஆகும்.
BC ஆனது OC யிற்குச் செங்குத்தாகவும் CA ஆனது OA யிற்குச் செங்குத்தாகவும் இருக்குமெனின், தளம் AOC யிற்கும் தளம் AOB யிற்குமிடையே உள்ள கோணமானது கோணம் BAC யிற்குச் சமமெனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து தளம் AOC யிற்கும், தளம் AOB யிற்குமிடையே உள்ள கோணத்தை a, b, c ஆகியவற்றின் சார்பிற் காண்க. $\angle AOC = \angle COB = \pi/4$ எனின்,
$\angle AOB = \pi/3$ எனக் காட்டுக.

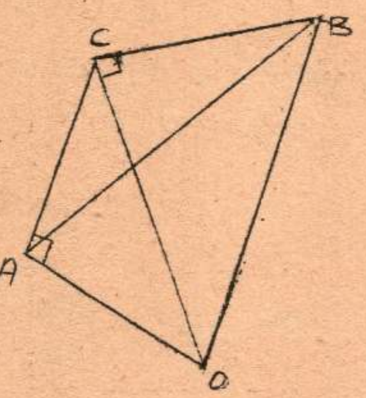
<u>விடை</u>

இரு தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம்

(1) இரு தளங்களும் இடைவெட்டாவிடின் கோணம் 0

(2) இடைவெட்டின்

தேற்றம் ($\perp$ அச்சு) நிறுவல்.



தரவின் படி (i) தளம் AOC $\perp$ தளம் BOC

(ii) $BC \perp OC$

(iii) $CA \perp OA$

<u>நிறுவல்</u>: இரு செங்குத்து தளங்களும் நேர்கோடு OC இல் இடைவெட்டும்.

$BC \perp OC$

$BC \perp$ தளம் AOC

$BC \perp AC$ — ①

$BC \perp AO$ — ②

(iii) ம் தரவிலிருந்து $CA \perp OA$ — ③

②, ③ $\Longrightarrow$ $OA \perp$ தளம் BCA

$OA \perp AB$ — ④

தளங்கள் AOC, AOB ஐ கருதின்
AO இவை இரண்டின் இடைவெட்டும் நேர்கோடாகும்.
(4). (iii) இலிருந்து $AB, AC \perp OA$
(வ.ம்) படி இரு தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்.
AB, AC க்கு இடைப்பட்ட கோணமான $B\hat{A}C$ ஆகும்.

$$\tan B\hat{A}C = BC/AC \quad (\because BC \perp AC)$$
$$= (b^2 - c^2)^{1/2} / (c^2 - a^2)^{1/2}$$

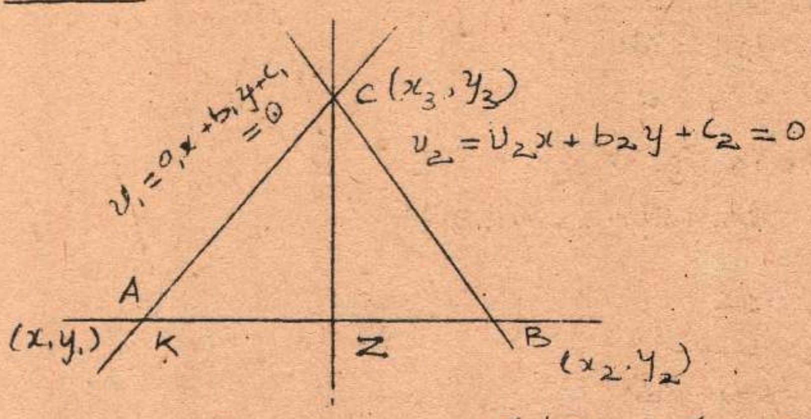
$$A\hat{O}C = \pi/4 \Rightarrow c = \sqrt{2}a \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{c}$$

$$B\hat{O}C = \pi/4 \Rightarrow b = \sqrt{2}c$$
$$= b = 2a$$
$$a/b = 1/2 = \frac{OA}{OB}$$
$$A\hat{O}B = \pi/3$$

(3) நேர்கோடு $ax + by + c = 0$ ஆனது சமாந்தரமல்லாத இரு நேர்கோடுகள் $v_i = 0, (i = 1, 2)$ ஐ முறையே A, B ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுகின்றது. இங்கு $v_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1$ ஆகும். $AZ = kZB$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக AB மீது Z என்னும் புள்ளி இருக்கின்றது. $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ ஆகியன இடைவெட்டும் புள்ளியுடன் Z ஐத் தொடுக்கும் கோடு $v_1 + \dfrac{k(a_1b - ab_1)}{a_2b - ab_2} v_2 = 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஆகியன முறையே கோடுகள் $x - 4y + 6 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $x - y + 3 = 0$ ஆகியவற்றின் வழியே உள்ளன. $2BX = XC$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக BC மீது புள்ளி X உம் $2AY = 3YC$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக AC மீது புள்ளி Y உம் உள்ளன. AX, BY ஆகியன இடைவெட்டும் புள்ளியுடன் C ஐத் தொடுக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடை



$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{k}{1} \Rightarrow Z \equiv \left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \right)$$

$$CZ \equiv v_1 + \mu v_2 = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

இது Z ஊடாகச் செல்வதால்

$$k(a_1x_2+b_1y_2+c_1)+\mu(a_2x_2+b_2y_1+c_2)$$
$$+(a_1x_1+b_1y_1+c_1)+\mu k(a_2x_2+b_2y_2+c_2)=0$$

ஆனால் $a_1x+b_1y_1+c_1=0\ ;\ a_2x_2+b_2y_2+c_2=0$

$$\Longrightarrow k(a_1x_2+b_1y_2+c_1)+\mu(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$$

$$k\{a_1(x_2-x_1)+b_1(y_2-y_1)\}+\mu\{a_2(x_1-x_2)+b_2(y_1-y_2)\}=0$$

$$AB\equiv(ax+by+c)=0$$

$$A,B\Longrightarrow ax_1+by_1+c=0\ ;\ ax_2+by_2+c=0$$

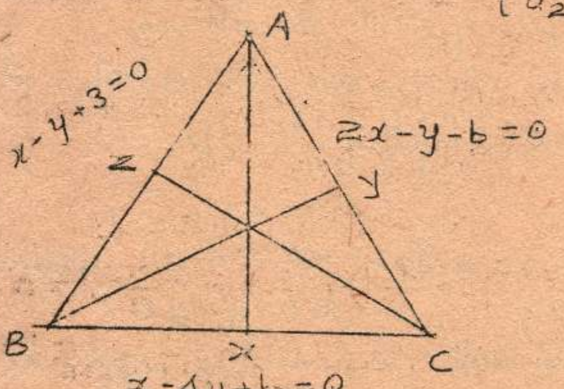
$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$$

$$\frac{x_1-x_2}{b}=\frac{y_1-y_2}{-a}$$

$$k\{-a_1b+b_1a\}+\mu\{a_2b-ab_2\}=0$$

$$\mu=\frac{k(a_1b-ab_1)}{(a_2b-ab_2)}$$

$$CZ=(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{k(a_1b-ab_1)}{(a_2b-ab_2)}(a_2x+b_2y+c_2)=0$$



6

சேவாவின் (தேற்றம்) படி

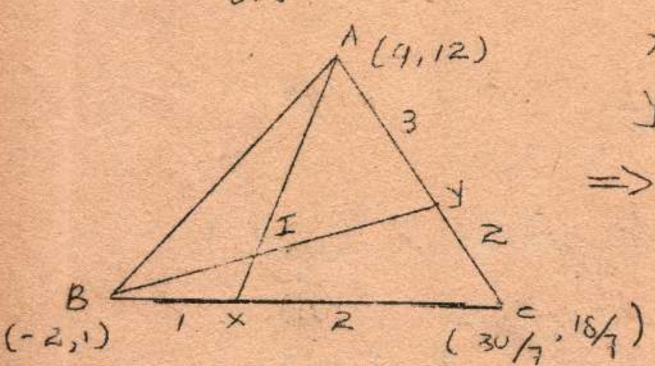
$$\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1\quad ;\quad \frac{AZ}{ZB}=3$$

(ii) B பகுதியிலிருந்து

$$(2x-y-6)+3\frac{[2(-1)-1(-1)]}{-(-1)-1(-4)}$$

$$\Longrightarrow x+3y-12=0$$

OR



$$X\equiv(2/21,\ 18/7)$$

$$Y\equiv\left(\frac{216}{35},\ \frac{222}{35}\right)$$

$$\Longrightarrow AX=20x-17y+24=0$$

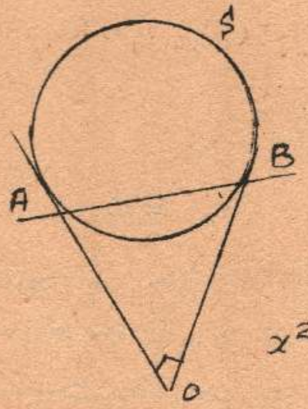
$$BY=17x-26y+60=0$$

$Ax, By \Longrightarrow I \equiv (12/7, 24/7)$

$CI \equiv x + 3y - 12 = 0$

④ $lx+my+n=0$ வழியே இருக்கும் வட்டம் $S \equiv x^2+y^2+2gx+2Fy+c=0$ இன் நாண் ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்க கூடியதாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. இதிலிருந்து வட்டம் $S=0$ இன் ஒரு மாறும் நாண் PQ ஆனது உற்பத்தியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கும் எனின், உற்பத்தியிலிருந்து PQ விற்கான செங்குத்தினது அடியின் ஒழுக்கானது வட்டம் $x^2+y^2+gx+Fy+c/2=0$ எனக் காட்டுக.

<u>விடை</u>.



~~A, B ஊடு செல்லும் வட்டம்~~

$S + ku = 0$

இங்கு k பரமானம். O ஊடு செல்வதால் $k = -c/n$

A, B, O ஊடு செல்லும் வட்டம்

$x^2+y^2+x(2g-\frac{lc}{n})+y(2F-\frac{mc}{n})=0$ — ①

① இன் மையம் AB யில் இருப்பதால்

$l(-g+\frac{lc}{n})+m(-f+\frac{mc}{2n})+n=0$

அ-து $2n(lg+mf)=2n^2+(l^2+m^2)c$

OR

$A \equiv (x_1, y_1)$; $B \equiv (x_2, y_2)$

$m^2x^2+(lx+n)^2+2gm^2x-2fm(lx+n)+m^2c=0$

$(l^2+m^2)x^2+2x(ln+gm^2-lmf)+n^2+m^2x-2mnf=0$

இன் மூலங்களின் பெ. தொ $x_1x_2=\frac{m^2+m^2c-2mnF}{l^2+m^2}$

$y_1y_2=\frac{m^2+l^2c-2lng}{l^2+m^2}$ ($m=l$, $F=g$ ஆக)

$A\hat{O}B=\pi/2$

$M_{OA}\cdot M_{OB}=-1$; $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1$

$2n(lg+mf)=2n^2+(l^2+m^2)c$ (A)

$PQ \equiv lx + my + n = 0$

இது (A) ஐ திருப்தி செய்யும்.

O இலிருந்து PQ யிற்கான $\perp$ இன் அடி $N(x, y)$ எனுக.

$$\frac{y}{x}\left(\frac{-l}{m}\right) = -1$$

$$mx - ly = 0 \quad (i)$$

N, PQ இல் இருப்பதால் $lx + my + n = 0$ (ii)

$$(ii) \Longrightarrow \frac{l}{n}x + \frac{m}{n}y = -1 \quad (iii)$$

$$(i) \longrightarrow \frac{l}{n}y = \frac{m}{n}x$$

$\frac{l/n}{x} = \frac{m/n}{y} = k$ எனுக

$$\frac{l/n}{x} = \frac{l/n \cdot x}{x^2} = \frac{m/n \cdot y}{y^2} = \frac{l/n \cdot x + m/n \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{x^2 + y^2} \quad (iii)$$

$$l/n = \frac{-x}{x^2+y^2}\ ; \ \frac{m}{n} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$(ii) \Longrightarrow 2(x^2+y^2) + 0 + 2(gx + fy) = 0$$

$$x^2 + y^2 - gx + fy + c/2 = 0$$

5 (i) $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

என்னும் இரு வட்டங்களும் நிமிர் கோண வட்டங்களாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ ஆகிய நிமிர் கோண வட்டங்களாகும் எனவும் அவை P, Q என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன எனவும் கொள்க. இரு வட்டங்களினதும் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டமானது P, Q ஆகியவற்றினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டி, அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) (p, α) ஐ மையமாகவும் a யை ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் முனைவுச் சமன்பாடு

$r^2 - 2pr\cos(\theta - \alpha) = a^2 - p^2$ என நிறுவுக.

இவ்வட்டம் முனைவினூடாகச் செல்லுமெனின், அப்போது சமன்பாடானது $r = 2p\cos(\theta - \alpha)$ ஆக அமையும் என்பதை உய்த்தறிக.

வட்டம் $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ வின் மையத்தைக் காண்க.

விடை:

படித்திறன்களின் பெருக்கம் = −1 (செங்குத்தால்)

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ (தரவு) நிறுவலி.

C_1C_2 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்.

$$\left\{x-\left(-g_1-g_2\right)/2\right\}^2+\left\{y-\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)\right\}^2=\frac{1}{4}\left[\left(-g_2+g_1\right)^2+\left(f_1+f_2\right)^2\right]$$

$$x^2+y^2+x(g_1+g_2)+y(f_1+f_2)+\frac{c_1+c_2}{2}=0$$

$$(x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1)+(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2)=0$$

இவ்வட்டமானது $S_1=0$, $S_2=0$ என்பன இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும்.

OR
$$\frac{y+f_1}{x+g_1}\times\frac{y+f_2}{x+g_2}=-1$$

$$x^2+y^2+(g_1+g_2)x+(f_1+f_2)y+\frac{c_1+c_2}{2}=0$$

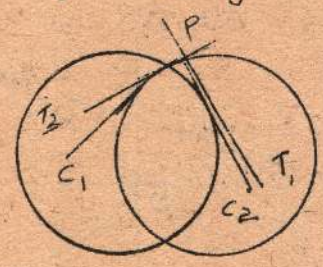
$$S_1+S_2=0$$

இது, $S_1=0$, $S_2=0$ என்பன இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் வட்டம்.

OR
வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் இடைவெட்டுவதால் இப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலிகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 90

$PT_1 \perp PT_2$ எனவே PT_1, C_2 இனூடு செல்லும்.

///ly PT_2, C_1 இனூடு செல்லும்.



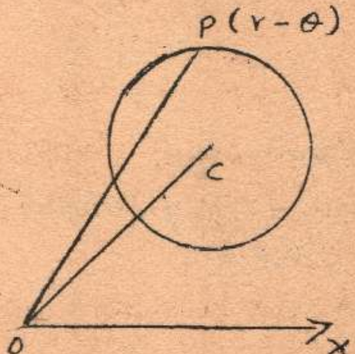
எனவே $C_1\hat{P}C_2 = \pi/2$

$PC_1^2 + PC_2^2 = C_1C_2^2$

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

$C_1\hat{P}C_2 = \pi/2$ ஆக இருப்பதால்

C_1C_2 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் P இனூடு செல்லும். இதேபோல் Q இனூடு செல்லும்.



$C(p,\alpha)$ $CP^2 = OC^2+OP^2-2OC\cdot OP\cos C\hat{O}P$

$a^2 = p^2+r^2-2pr\cos(\theta-\alpha)$

வட்டம் முனைவு (0) இனூடு செல்வதால் மேற்படி சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும்.

$r=0 \Rightarrow a^2=p^2$

$r = 2p[\cos(\theta-\alpha)]$ —— ①

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta\right)$$

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos(\theta-\alpha)$ சமன்பாடு ① உடன்

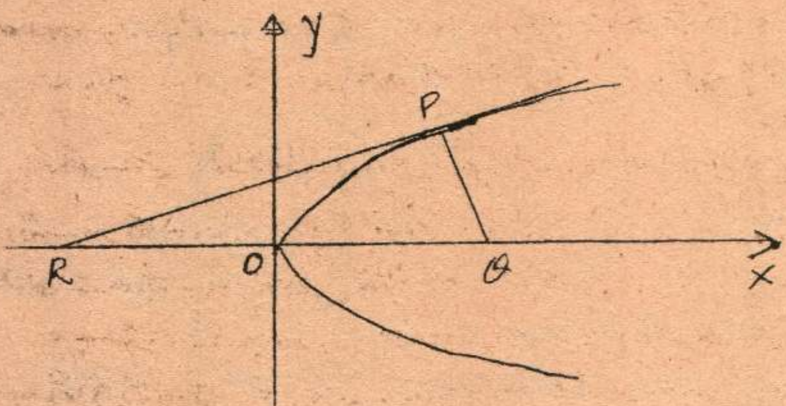
ஒப்பிடும் போது மையம்

$$\equiv \left(\sqrt{a^2+b^2}, \alpha\right) \text{ OR } \left(\sqrt{a^2+b^2}, \cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

இங்கு $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(6) பரவளைவு $y^2 = 4ax$ இற்கு புள்ளி $P(at^2, 2at)$ இல் உள்ள தொடலியினதும் செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

P இல் உள்ள செவ்வனானது பரவளைவின் அச்சை Q இலே சந்திக்கின்றது. O என்பது பரவளைவின் உச்சியாகும். O, P, Q ஆகியவற்றினூடாக செல்லும் வட்டத்தினது மையத்தின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவாகுமெனக் காட்டி, அதன் உச்சியையும், செவ்வகலத்தையும் காண்க. மேலும், P யில் உள்ள தொடலியானது பரவளைவின் அச்சை R இல் சந்திக்குமெனின் P, Q, R ஆகியவற்றினூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையமானது நிலைத்த ஒரு புள்ளியாகுமெனவும் கோணம் PQR ஆனது $\tan^{-1}|t|$ ஆகுமெனவும் காட்டுக.



$dy/dx = 1/t$

தொடலி சமன்பாடு —①

செவ்வனின் " —②

சமன்பாடு ② இல் $Q(h, 0)$ ஐ பிரதியிடுக.

O, P, Q இனூடான வட்டத்தின் மையம் $C(x, y)$ எனின்.

C, OQ இன் $\perp$ இரு கூறாக்கியில் இருக்கும்.

$x = h/2 = a + at^2/2$ —③

C, OP இன் $\perp$ இரு கூறாக்கியில் இருப்பதால்

$x^2 + y^2 = (x - at^2)^2 + (y - 2at)^2$ —④

③, ④ $\Rightarrow y = at/2$ —⑤

③. ⑤ $\Longrightarrow$ $y^2 = a/2\,(x-a)$

இச் சமன்பாடு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

குவியம் $\left(\frac{9a}{2}, 0\right)$

செலுத்தி $x = a - a/8 = 7a/8$

① $\Longrightarrow R = (-at^2, 0)$

P, Q, R ஊடான வட்டத்தின் மையம் RQ இன் நடுப்புள்ளி ஆகும்.

$D = \left(\frac{-at^2 + h}{2}, 0\right) = (a, 0)$ இது நிலைத்த புள்ளி.

P பரவளைவின் மேல் அரைப்பாகத்தில் இருப்பின் $(t > 0)$

$M_{PQ} = \tan(\pi - P\hat{Q}R) = -\tan P\hat{Q}R$

ie) $\tan P\hat{Q}R = t = |t|$

$t < 0$, $\tan P\hat{Q}R = M_{PQ} = -t = |t|$

$t = 0$, $\tan P\hat{Q}R = 0$

t இன் எல்லா பெறுமானங்களுக்கும் $\tan P\hat{Q}R = |t|$

⑦ நீள்வளையம் ஒன்றின் குவியத்திலிருந்தும் செலுத்தியிலிருந்தும் நீள்வளையத்தின் மீது இருக்கும் ஒரு புள்ளிக்கு உள்ள தூரங்களுக்கிடையேயான தொடர்பினைப் பயன்படுத்தி அந் நீள்வளையத்தின் சமன்பாட்டை நியம வடிவில் பெறுக.

நீள்வளையம் ஒன்றின் யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடலியானது பேரச்சின் முனைப்புள்ளிகளில் உள்ள தொடலிகளை R, R' ஆகியவற்றில் இடைவெட்டுமெனின் RR' ஐ விட்டமாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட வட்டமானது குவியங்களினூடாகச் செல்கின்றதென நிறுவுக.

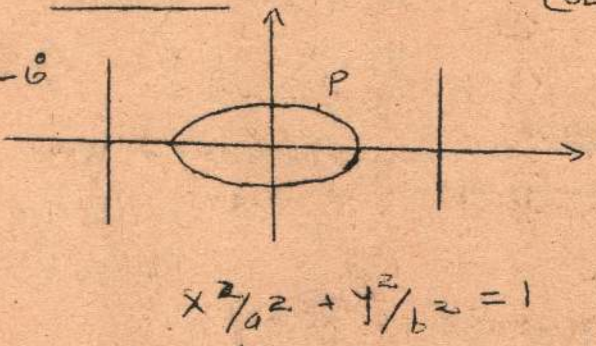
விடை

(வ+ம்) எழுதல் — 5

$e < 1$ — 5

படம் — 5

படம்



$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ நிறுவல் — 35

$P \equiv (\alpha, \beta)$

$\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 = 1$

P இலுள்ள தொடலி $\frac{x\alpha}{a^2} + \frac{y\beta}{b^2} = 1$ —(1)

$R = (-a, y_1)$ $R' = (a, y_2)$

$y_1\beta/b^2 = (1 + \alpha/a)$; $y_2\beta/b^2 = (1 - \alpha/a)$ —(2)

$S(ae, 0)$

$$M_{SR} \cdot M_{SR'} = \frac{y_1}{(-a-ae)} \cdot \frac{y_2}{(a-ae)}$$

$$= -y_1y_2/b^2 = -1 \quad (1, 2)$$

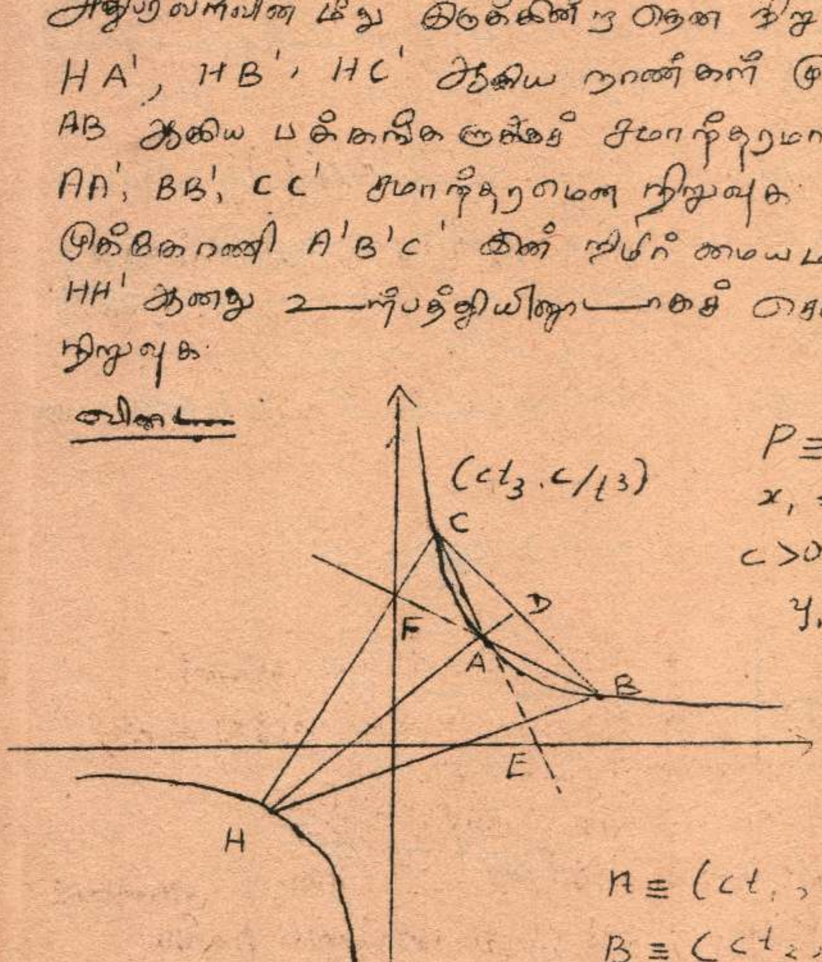
$SR \perp SR'$

|||ly $S'R \perp S'R'$ ($\because$ S' மற்றைய குவியம்)

RR' ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் நீள்வளையத்தின் குவியத்தினூடு செல்லும்.

(8) செவ்வகோண அதிபரவளைவு $xy = c^2$ மீதுள்ள எந்தவொரு புள்ளியும் $(ct, c/t)$ எனும் வகை குறிக்கலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு t ஒரு பரமானம். A, B, C என்பன வேறு வேறுபட்ட அதிபரவளைவின் மீதுள்ள வெவ்வேறு மூன்று புள்ளிகளாகும். முக்கோணி ABC யின் நிமிர்மையம் H உம் அதிபரவளைவின் மீது இருக்கின்றது எனக் காட்டுக.
HA', HB', HC' ஆகிய நாண்கள் முறையே BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படுமாயின், AA', BB', CC' சமாந்தரமென நிறுவுக.
முக்கோணி A'B'C' இன் நிமிர்மையம் H' எனின், HH' ஆனது உற்பத்தியினூடாகச் செல்லுமாறு நிறுவுக.

விடை



$P \equiv (x, y_1)$ என்க. $xy = c^2$

$x_1 = ct$ என கொள்க.

$c > 0,\ t \neq 0,\ x_1y_1 = c^2$

$$y_1 = \frac{c^2}{x_1} = \frac{c^2}{ct} = \frac{c}{t}$$

எனவே $P(x_1, y_1) = (ct, c/t)$ என எழுதலாம்.

$A \equiv (ct_1, c/t_1)$

$B \equiv (ct_2, c/t_2)$

$M_{BC} = -1/t_2t_3$

AD சமன்பாடு $y - c/t_1 = t_2t_3(x - ct_1)$

(ie) $y + \frac{ct_1t_2t_3}{t_2t_3} = x + c/t_1t_2t_3$

(ie) $y - (-ct_1t_2t_3) = t_2t_3\{x - (\frac{-c}{t_1t_2t_3})\}$

எனவே AD, $(-c/t_1t_2t_3, -ct_1t_2t_3)$ இனூடு செல்லும்.

||ly BE, CF உம் எனவே நிமிர்மையம் $H(cT, c/T)$

இங்கு $T = \frac{-1}{t_1t_2t_3}$ அதிபரவளைவில் இருக்கும்.

OR $M_{BC} = -1/t_2t_3$

சமன் AD $\equiv y - c/t_1 = t_2t_3(x - ct_1)$

சமன் BE $\equiv y - c/t_2 = t_3t_1(x - ct_2)$

தீர்த்தல் $H \equiv (-c/t_1t_2t_3, -ct_1t_2t_3)$

$\equiv (cT, c/T)$

எனவே நிமிர்மையம் அதிபரவளைவில் இருக்கும்.

$A'(ct_1', c/t_1')$ $HA' \parallel BC$

$M_{HA'} = \frac{-1}{Tt_1'} = M_{BC} = \frac{-1}{t_2t_3}$

$t_1' = \frac{-1}{t_1(t_2t_3)^2}$

$M_{AA'} = \frac{-1}{t_1t_1'} = \left(\frac{1}{t_1t_2t_3}\right)^2$

இதே போல் $M_{BB'} = M_{CC'} = M_{AA'}$

எனவே $AA' \parallel BB' \parallel CC'$

$B' \equiv (ct_2', c/t_2')$ $C' \equiv (ct_3', c/t_3')$

Δ $A'B'C'$ இன் நி. மை. $H' \equiv (-c/t_1't_2't_3', -ct_1't_2't_3')$

$t_1't_2't_3' = \frac{-1}{(t_1t_2t_3)}$

$M_{OH} = \frac{c/T}{cT} = \frac{1}{T^2} - (t_1t_2t_3)^2$

$M_{OH'} = (t_1't_2't_3')^2 = \frac{1}{(t_1t_2t_3)}$

எனவே OH # OH'

9. (i) $\tan(\theta + \alpha) - (3 + 2\sqrt{2})\tan\theta = 0$ எனின்
$\sin(2\theta + \alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$ எனக் காட்டுக. இங்கு θ விற்குரிய மெய்த் தீர்வுகள் சாத்தியமாகும்.
$\sin\alpha$ இன் வீச்சைக் கூறுக. இதிலிருந்து
$\tan(\theta + \pi/6) - (3 - 2\sqrt{2})\tan\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் θ வின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) ஒரு முக்கோணியின் கோணங்கள் A, B, C எனின் θ வின் எந்த பெறுமானங்களுக்கும்

$\tan A + \tan(B+\theta) + \tan(C-\theta) = \tan A \tan(B+\theta)$
$\tan(C-\theta)$ என

நிறுவுக

(iii) $\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\cot^{-1} 1/2)$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

விடை

$$\tan(\theta+\alpha) - (3+2\sqrt{2})\tan\theta = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$(1) \times 2\cos(\theta+\alpha)\cos\theta$$

$$2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta - 2(3+2\sqrt{2})\sin\theta\cos(\theta+\alpha) = 0$$

$$\sin(2\theta+\alpha) + \sin\alpha - (2-2\sqrt{2})\sin(2\theta+\alpha) + (3+2\sqrt{2})\sin\alpha = 0$$

$$(2+2\sqrt{2})\sin(2\theta+\alpha) = (4+2\sqrt{2})\sin\alpha$$

$$\sin(2\theta+\alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$$

$$-1 \le \sin(2\theta+\alpha) \le 1$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \le \sin\alpha \le 1/\sqrt{2}$$

$$\alpha = \pi/6 \quad \sin\pi/6 = 1/2 \quad 0 < 1/2 < 1/\sqrt{2}$$

$$\sin(2\theta + \pi/6) = \sqrt{2}(1/2) = \sin\pi/4$$

$$2\theta + \pi/6 = n\pi \pm (-1)^n \pi/4$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \pm (-1)^n \pi/4$$

(ii) $$\tan(x+y+z) = \frac{\tan x + \tan(y+z)}{1 - \tan x \tan(y+z)}$$

$$\frac{\tan x + \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan y \tan z}}{1 - \tan x \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan y \tan z}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan z \tan x}$$

$$x = A;\ y = B,\ z = C \Rightarrow x + y + z = A + B + C = \pi$$

$$0 = \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C$$

$$x = A;\quad y = B + \theta;\quad z = C - \theta$$

$$\tan A + \tan(B+\theta) + \tan(C-\theta) = \tan A \tan(B+\theta)\tan(C-\theta)$$

OR $A + B + C = \pi \quad \tan(B+C) = \tan(\pi - A)$

$$\tan(B + \theta + C - \theta) = -\tan A$$

$$\frac{\tan(B+\theta) + \tan(C-\theta)}{1 - \tan(B+\theta)\tan(C-\theta)} = -\tan A.$$

$$\tan(B+\theta) + \tan(C-\theta) = -\tan A + \tan A \tan(B+\theta)\tan(C-\theta)$$

$$\tan A + \tan(B+\theta) + \tan(C-\theta) = \tan A \tan(B+\theta)\tan(C-\theta)$$

(iii) $$\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\cot^{-1} 1/2)$$

$$\cot^{-1} 1/2 = \alpha. \qquad 0 < \alpha < \pi/2$$

$\cot\alpha = 1/2 \quad \operatorname{cosec}^2\alpha = 5/4$

$\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$

$\tan(\cos^{-1}x) = 2/\sqrt{5}\ ; \ \cos^{-1}x = \beta,\ \tan\beta = 2/\sqrt{5}$

$\cot^2\beta = 9/5 \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = x$

(10) வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

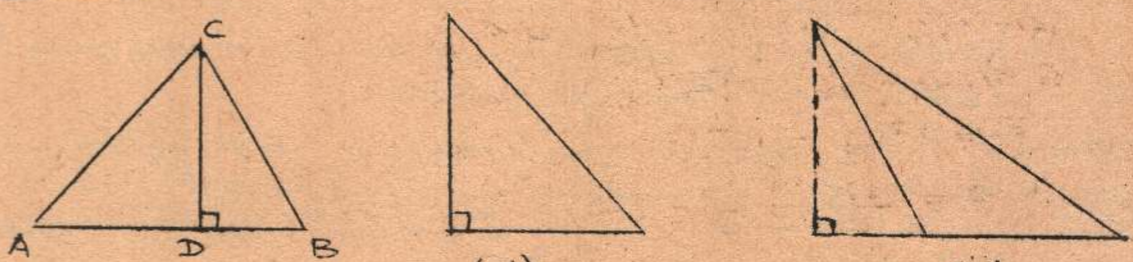
என நிறுவுக.

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ என்பதை உய்த்தறிக.

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ எனின் (a) $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{2}{\sin B}$ எனவும்

(b) $= \dfrac{1}{\sin^2 A/2} + \dfrac{1}{\sin^2 C/2} = \dfrac{2}{\sin^2 B/2}$ எனவும் காட்டுக.

<u>விடை</u>



(ii) (iii)

Case (i), (ii), (iii) இல் காணலாம்.

$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$2\cos^2 A/2 = 1 + \cos A = \dfrac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$

$2\sin^2 A/2 = 1 - \cos A = \dfrac{(b-c+a)(a+c-b)}{2bc}$

$0 \le A \le \pi \Rightarrow \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{1}{2abc}\{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)\}$

$= \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

<u>OR</u> $\quad \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\dfrac{a^2}{\sin^2 A} = \dfrac{4a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{1}{k}\ ; \quad \sin A = ka$

$\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{1}{k}\left(1/a + 1/c\right) = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{2}{b} = \dfrac{2}{\sin B}$

$\dfrac{1}{\sin^2 A/2} + \dfrac{1}{\sin^2 C/2} = \dfrac{bc}{(a+b-c)(c+a-b)} + \dfrac{ab}{(c+a-b)(b+c-a)}$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b} \Rightarrow b(c+a) = 2ac \quad — (1)$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 A/2} + \frac{1}{\sin^2 C/2} = \frac{b}{\frac{2ac}{b} - b} \cdot \frac{\frac{4a^2c^2}{b^2} - 2ac}{(b+c-a)(a+b-c)}$$

$$= \frac{2ac}{(a+b-c)(b+c-a)}$$

$$= \frac{2}{\sin^2 B/2} //$$

(11) (i) குறித்த நகரம் ஒன்றிலே விபத்துக்கள் நிகழ்தல் பற்றி ஆராய்வதற்கு மதிப்பீடு ஒன்று மேற்கொள்ளப்பட்டது. கடந்த 200 நாட்களாக அந்நகரத்தில் நிகழ்ந்த விபத்துக்களின் எண்ணிக்கைகள் பின்வரும் அட்டவணையிலே தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு நாளில் நிகழ்ந்த விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
நாட்களின் எண்ணிக்கை	48	75	36	26	10	5

ஒரு நாளில் நிகழ்ந்த விபத்துக்களின் இடை எண்ணிக்கையும் விபத்துக்களின் மாறற்றிறனையும் கணிக்க.

(ii) குறித்த பரீட்சை ஒன்றிலே 20 மாணவர்கள் கணிதத்தில் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டலிடையும் நியம விலகலும் முறையே 45, 15 எனக் கணிக்கப்பட்டன. இவற்றைக் கணிக்கும் போது ஒரு மாணவனின் புள்ளிகள் 80 எனத் தவறாக வாசிக்கப்பட்டன. இம்மாணவனின் உண்மையான புள்ளிகள் 60 எனின், திருத்தமான கூட்டலிடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

விடை.

(i) $\sum_{x=0}^{5} x f(x) = 0(48) + (75) + 2(36) + 3(26) + 4(10) + 5(5)$

$$\sum_{x=0}^{5} x f(x) = 290$$

இடை (the mean) $\dfrac{\sum_{x=0}^{5} x f(x)}{\sum_{x=0}^{5} f(x)} = \dfrac{290}{200} = 1.45$

$$\sum_{x=0}^{5} x^2 f x = 0(48) + 1(75) + 4(36) + 9(26) + 16(10) + 25(5)$$

$$\sum_{x=0}^{5} x^2 f(x) = 736$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{x=0}^{5} x^2 f(x)}{\sum_{x=0}^{5} f x} - (\text{இடை})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{736}{200} - 1.45^2 = 1.59$$

(ii) $X = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} x t}{N}$ $\quad 45 = \dfrac{\sum_{t=1}^{20} x t}{20}$ $\quad \sum_{t=1}^{20} x t = 900$

உண்மையான $\sum_{t=1}^{n} x t = 900 - 80 + 60 = 880$

உண்மை இடை $= \dfrac{880}{20} = 44$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \frac{1}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow 225 = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 \frac{1}{20} - (45)^2$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 45000$$

உண்மை $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 45000 - 6400 + 3600 = 42200$

$\therefore$ உண்மை $b^2 = \frac{42200}{20} - (44)^2 = 174$

$$b = \sqrt{174} = \underline{13.2}$$

(12) ஆண் பெண் பாலாரின் பரம்பல் சமமாம் நிகழ்தகவு எனக் கொண்டு, 4 பிள்ளைகள் உள்ள குடும்பம் ஒன்று
(a) சரியாக இரு பெண் பிள்ளைகள் உடையதாக
(b) குறைந்தபட்சம் ஒரு பெண் பிள்ளையை யேனும் உடையதாக
இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

குறித்த கிராமம் ஒன்றிலே ஒவ்வொன்றும் 4 பிள்ளைகள் உடைய 64 குடும்பங்கள் உள்ளன. இந்த 64 குடும்பங்களில் ஒவ்வொன்றும் (a) சரியாக 2 பிள்ளைகள் உடையதாக இருக்கும்.
(b) குறைந்தபட்சம் ஒரு பெண் பிள்ளையை யேனும் உடையதாக இருக்கும் r குடும்பங்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
64 குடும்பங்களில்
(a) ஒவ்வொன்றும் சரியாக 2 பெண்பிள்ளைகள் உடையதாக இருக்கும்
(b) " குறைந்தபட்சம் 1 பெண் பிள்ளையை யேனும் உடையதாக இருக்கும் என்று நீங்கள் எதிர்பார்க்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

[$E(x) = np$ என நீங்கள் கொள்ளலாம்; இங்கு $P_r(X = x) = {}^nC_x\, p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0, 1, \ldots, n$ இனால் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் தரப்படும் ஈருறுப்புப் பரம்பல் ஒருமாறி X உடையது.]

விடை

(a) P_r [சரியாக இரு பெண்கள்] $= {}^4C_2 (1/2)^2 (1/2)^2 = 3/8$

(b) P_r [ஆகக் குறைந்தது ஒரு பெண்] $= 1 - {}^4C_4 (1/2)^4 = \frac{15}{16}$

(c) P_r [r குடும்பங்களில் சரியாக 2 பெண்கள்]
$= {}^{64}C_r (3/8)^r (5/8)^{(64-r)}$

(d) P_r [r குடும்பங்களில் ஆகக் குறைந்தது ஒரு பெண்]
$= {}^{64}C_r (15/16)^r (1/16)^{(64-r)}$

சரியாக இரு பெண்கள் உள்ள குடும்பங்களில் அண்ணளவான எண்ணிக்கை $= 64 \times 3/8 = \underline{24}$

குறைந்தது ஒரு பெண் ஆகுதல் உள்ள குடும்பங்களின் அண்ணளவான எண்ணிக்கை $= 64 \cdot \frac{15}{16} = 60$ //

உரிமை பதிப்பகத்தருக்குரியது:

உயர் கல்விப்-பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

பிரயோகம் 1 க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி வினாக்கள், ஒகஸ்ட், 1988.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

(1) (i) $\frac{3}{1.2.4} + \frac{4}{2.3.5} + \frac{5}{3.4.6} + - - - -$

எனும் தொடரின் r ஆம் உறுப்பு u_r ஐ எழுதுக

$f(r)$ என்பது r இன் ஒரு சார்பெனின், u_r ஐ

$f(r) - f(r-1)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க?

இதிலிருந்தோ, வேறுவிதமாகவோ

$\sum_{r=1}^{n} u_r$ ஐக் காண்க?

இத்தொடர் ஒருங்கும் தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக?

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி n ஒரு நேர் நிறை எண்ணாக இருக்கும் போது $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ ஆனது 54 இனால் வகுபடத்தக்கது என்று நிறுவுக?

(1) r ஆம் உறுப்பு $u_r = \frac{r+2}{r(r+1)(r+3)}$

$$= \frac{(r+2)^2}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$f(r) = \frac{Ar^2+Br+C}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ எனக் கொள்க இங்கு A, B, C மாறிலிகள்

$$f(r) - f(r-1) = \frac{Ar^2+Br+C}{(r+1)(r+2)(r+3)} - \frac{A(r-1)^2+B(r-1)+C}{r(r+1)(r+2)}$$

$$\therefore (r+2)^2 = r(Ar^2+Br+C) - (r+3)\left[A(r-1)^2+B(r-1)+C\right]$$

$$r^2+4r+4 = -Ar^2 + r(-2B+5A) + 3(B-C-A)$$

குணகங்கள் சமப்படுத்த

$A = -1 \quad B = -9/2 \quad C = -29/6$

$$f(r) = \frac{-6r^2+27r+29}{6(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$u_1 = f(1) - f(0)$

$u_2 = f(2) - f(1)$

$- - - - - -$

$- - - - - -$

$u_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$u_n = f(n) - f(n-1)$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) - f(0) = \frac{-6n^2+27n+29}{6(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{29}{36}.$$

$$= \frac{-6/n + 7/n^2 + 29/n^3}{6(1+1/n)(1+2/n)(1+3/n)} + \frac{29}{36}$$

இது ஒரு ஒருங்கு தொடராகும்.

$$\lim \sum_{r=1}^{n} u_r = 29/36$$

$n \to \infty$ ஆக $\sum_{r=1}^{n} u_r \longrightarrow$ ஒரு முடிவுள்ள எல்லை

∴ இது ஒரு ஒருங்கு தொடராகும்.

(ii) $f(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ என்க

$n=1$ ஆக $f(1) = 8 - 9 + 3 - 2 = 0$

∴ $f(1)$ ஆனது 0 இனால் வகுபடும்

∴ $n=1$ ஆகும் போது முடிவு உண்மையாகும்.

$n=p$ ஆக முடிவு உண்மை எனக் கொள்க.

$$f(p+1) = 2^{2p+3} - 9(p+1)^2 + 3(p+1) - 2$$
$$= 4 \cdot 2^{2p+1} - 9p^2 - 15p - 8$$
$$= 4f(p) + 27p(p-1)$$

$f(p)$ ஆனது 54 இனால் வகுபடும்.

$p(p-1)$ ஆனது இரட்டையாதலால் $27p(p-1)$ உம் 54 இனால் வகுபடும்

∴ $f(p+1)$ ஆனது 54 இனால் வகுபடும்

∴ $n=p$ ஆகும்போது முடிவு உண்மையெனின் $n=p+1$ ஆகும் போது முடிவு உண்மையாகும்.

∴ கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டினால் n இன் எல்லா நேர் முழு எண் பெறுமானங்களுக்கும் முடிவு உண்மையாகும்.

(ஆ) (i) இருபடிச்சமன்பாடு ஒன்றின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும், பெருக்கத்திற்குமுரிய கோவைகளை அதன் குணகங்களின் சார்பிற் பெறுக.
$(a+x)(b+x) - c(a+x) - d(b+x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்
$(\alpha-\beta)^2 = (a-b+c-d)^2 + 4cd$ எனக்காட்டுக.

a, b, c, d ஆகியன மெய்யானவும் c, d ஆகிய இரண்டும் நேரானவும் அல்லது மறையானவும் இருக்குமாயின் α, β ஆகியன மெய்யானவை எனவும் உய்த்தறிக.

(ii) $a>0$ ஆகவும் $b^2 < 4ac$ ஆகவும் இருக்குமாயின் ax^2+bx+c என்னும் கோவையானது x இன் மெய்ப் பெறுமானங்கள் யாவற்றிற்கும் நேரானது எனக்காட்டுக.

$(x^2-x-2)(x^2+x+1)(x-3)$ என்பதும் மறை
ஆக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின்
வீச்சைக் காண்க.

(2) (i) $ax^2+bx+c=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டை
எந்த இரு மூலங்கள் α, β ஆகுக.
மீதித் தேற்றப்படி $(x-\alpha),(x-\beta)$ என்பன
ax^2+bx+c இன் காரணிகள்.

$$ax^2+bx+c \equiv a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}\right)$$

$$\equiv a(x-\alpha)(x-\beta) \equiv a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)$$

குணகங்களை ஒப்பிடுக.

$$\alpha+\beta = -\tfrac{b}{a} \qquad \alpha\beta = \tfrac{c}{a}.$$

(ii) $(a+x)(b+x)-c(a+x)-d(b+x)=0$

$x^2+(a+b-c-d)x+ab-ca-bd=0$

இதன் மூலங்கள் α,β எனின்.

$\alpha+\beta = c+d-a-b \qquad \alpha\beta = ab-ca-bd$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta$$
$$= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta.$$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(c+d-a-b)^2-4(ab-ca-bd).$$
$$=(c+d)^2+(a+b)^2-2(a+b)(c+d)-4(ab-ca-bd)$$
$$=(c-d)^2+4cd+(a-b)^2+4ab+2(c-d)(a-b)$$
$$-2(c-d)(a-b)-2(c+d)(a+b)-4(ab-ca-bd)$$
$$=\left[(c-d)+(a-b)\right]^2+4cd+4ab-2ac+2bc$$
$$+2ad-2bd-2ac-2bc-2ad-2bd$$
$$-4ab+4ac+4bd$$
$$=(a-b+c-d)^2+4cd$$

$(a-b+c-d)^2 \geq 0$ அத்துடன் c, d ஆகிய இரண்டும்
நேராகவும் அல்லது மறையாகவும் இருப்பின்.

$4cd>0 \qquad \therefore (\alpha-\beta)^2>0$

எனவே $(\alpha-\beta)$ மெய், $(\alpha+\beta)$ உம் மெய் ஆகவே
α, β ஆகியன மெய்யானவை

(ii) $ax^2+bx+c \equiv a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}\right) \quad (\because c\neq 0)$

$$\equiv a\left\{\left[x^2+\tfrac{b}{a}x+\left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right]+\tfrac{c}{a}-\tfrac{b^2}{4a^2}\right\}$$
$$\equiv a\left\{\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{1}{4a^2}(b^2-4ac)\right\}$$

$a>0$, $b^2<4ac$ எனின், ax^2+bx+c என்பது
x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களிற்கும்
நேரானது ஆகும்.
$(x^2-x-2)(x^2+x+1)(x-3)$ இல்
முற்பகுதியிலிருந்து
$x^2+x+1>0$ x இன் எல்லா மெய்ப்
பெறுமானங்களிற்கும்.
$\therefore (x^2-x-2)(x-3)$ ஐக் கருதின்.

$(x^2-x-2)(x-3) = (x+1)(x-2)(x-3)$

$(x+1)(x-2)(x-3)>0$ எனின்.

$(x+1)(x-2)>0$ உம் $(x-3)>0$ உம்
அல்லது
$(x+1)(x-2)<0$ உம் $(x-3)<0$ உம்.

(அ-து) $x<-1,\ x>2$ & $x>3$
அல்லது $-1<x<2$ & $x<3$.
$x>3$
அல்லது $-1<x<2$
$\therefore$ தரப்பட்ட கோவை நேராயிருக்கும் x இன்
பெறுமான வீச்சு $-1<x<2$ அல்லது $x>3$.

(3) ஒரு நேர் நிறையெண் சுட்டி n இற்குத்
தமோயிவரின் தேற்றத்தை (நிறுவலின்றிக்)
கூறுக. $z+1/z=2\cos\theta$ எனின்.
$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ என்று காட்டுக.
$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$
என்பதை உய்த்தறிக.
$\cos 7\theta = 1$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து
நோக்கியோ வேறுவிதமாகவோ

$$64x^7-112x^5+56x^3-7x-1 \equiv 64(x-1)$$
$$(x-\cos\tfrac{2\pi}{7})(x-\cos\tfrac{4\pi}{7})(x-\cos\tfrac{6\pi}{7})(x-\cos\tfrac{8\pi}{7})$$
$$-----(x-\cos\tfrac{12\pi}{7})$$ என்று காட்டுக.

இதிலிருந்தோ வேறுவிதமாகவோ
$\cos\pi/7\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -1/8$ எனவும்
$\cos\pi/7+\cos 3\pi/7+\cos 5\pi/7 = 1/2$ எனவும் காட்டுக.

(3) தமோயிவரின் தேற்றம் - ஒருநேர் நிறை
யெண் n இற்கு
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$z+\frac{1}{z} = 2\cos\theta \text{ எனின்.}$$

$$z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$$

$$z = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{or} \quad \cos\theta - i\sin\theta$$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின் $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta + \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$= 2\cos n\theta$$

$$2\cos 7\theta = z^7 + \frac{1}{z^7}$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^7 = {}^7c_0 z^7 + {}^7c_1 z^6 \times \frac{1}{z} + {}^7c_2 z^5 \frac{1}{z^2} + {}^7c_3 z^4 \times \frac{1}{z^3}$$

$$+ {}^7c_4 z^3 \times \frac{1}{z^4} + {}^7c_3 z^2 \times \frac{1}{z^5} + {}^7c_6 z \frac{1}{z^6} + {}^7c_7 \frac{1}{z^7}$$

$$= \left(z^7 + \frac{1}{z^7}\right) + 7\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 21\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 35\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^5 = {}^5c_0 z^5 + {}^5c_1 z^4 \cdot \frac{1}{z} + {}^5c_2 z^3 \cdot \frac{1}{z^2} + {}^5c_3 z^2 \times \frac{1}{z^3}$$

$$+ {}^5c_4 z \frac{1}{z^4} + {}^5c_5 \frac{1}{z^5}$$

$$= \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = {}^3c_0 z^3 + {}^3c_1 z^2 \times \frac{1}{z} + {}^3c_2 z \frac{1}{z^2} + {}^3c_3 \frac{1}{z^3}$$

$$= \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

மேல் பெறப்பட்டவற்றிலிருந்து

$$\cos 7\theta = \frac{1}{2}\left(z^7 + \frac{1}{z^7}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)^7 - 7\left(z+\frac{1}{z}\right)^5 + 14\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 7\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\cos 7\theta = \frac{1}{2}\left[2^7\cos^7\theta - 7 \times 2^5\cos^5\theta + 14 \cdot 2^3\cos^3\theta - 7 \cdot 2\cos\theta\right]$$

$$= 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

$\cos 7\theta = 1$ எனின்

$$\cos 7\theta - 1 = 0 \quad \text{——— (1)}$$

$$\Leftrightarrow 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta - 1 = 0 \quad \text{——— (2)}$$

$\cos\theta = x$ எனக்க

$$(2) \Rightarrow 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 = 0 \quad \text{——— (3)}$$

சமன்பாடு (3) இன் தீர்வுகள் (2), (1) இற்கு ஒத்த தீர்வுகளையாகும்

$$(1) \Rightarrow \cos 7\theta = 1 = \cos 0$$

$7\theta = 2k\pi \pm 0$ இங்கு k முழுவெண்

$\therefore \theta = \frac{2k\pi}{7}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ என்பன ஏழு வெவ்வேறான பெறுமானங்களாகும். k யின் வேறு பெறுமானங்கள் இவற்றிற்கு ஒத்த பெறுமானங்களையே தரும்

$\therefore$ சமன்பாடு ③ இன் தீர்வுகள்

$\therefore \cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}, \cos\frac{8\pi}{7}, \cos\frac{10\pi}{7}, \cos\frac{12\pi}{7}$ இருக்கும்

$(x-1), (x-\cos\frac{2\pi}{7})\ (x-\cos\frac{4\pi}{7})\ (x-\cos\frac{6\pi}{7})$
$(x-\cos\frac{8\pi}{7})\ (x-\cos\frac{10\pi}{7})\ (x-\cos 12\pi/7)$ என்பன ③ இன் வ.கை.ப இன் காரணிகளாகும்.

$$\therefore 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 \equiv 64(x-1)(x-\cos 2\pi/7)$$
$$(x-\cos\tfrac{4\pi}{7}) - - - - - - (x-\cos 12\pi/7) \quad —④$$

சமன்பாடு ④ இன் மாறிலி உறுப்புகளை சமன்படுத்துக.

$$-1 = -64\cos\tfrac{2\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7}\cos\tfrac{6\pi}{7}\cos\tfrac{8\pi}{7}\cos\tfrac{10\pi}{7}\cos\tfrac{12\pi}{7}$$
$$= -64\cos(\pi-\tfrac{5\pi}{7})\cos(\pi-\tfrac{3\pi}{7})\cos(\pi-\pi/7)$$
$$\cos(\pi+\pi/7)\cos(\pi+\tfrac{3\pi}{7})\cos(\pi+5\pi/7)$$
$$= -64\,(\cos\pi/7\cos 3\pi/7\cos 5\pi/7)^2$$

$\therefore \cos\pi/7 \cos 3\pi/7 \cos 5\pi/7 = -1/8$ $\left(\because \cos\pi/7 > 0, \cos 3\pi/7 > 0, \cos\frac{5\pi}{7} < 0\right)$.

$$\cos\pi/7\,(2\cos 3\pi/7\cos 5\pi/7) = -1/4$$
$$\cos\pi/7\,(\cos 8\pi/7 + \cos 2\pi/7) = -1/4$$
$$2\cos\pi/7\cos 8\pi/7 + 2\cos\pi/7\cos 2\pi/7 = -1/2$$
$$(\cos 9\pi/7 + \cos\pi) + (\cos 3\pi/7 + \cos\pi/7) = -1/2$$
$$\cos(2\pi - \tfrac{5\pi}{7}) + \cos\tfrac{3\pi}{7} + \cos\pi/7 = -1/2 + 1$$
$$\cos\pi/7 + \cos 3\pi/7 + \cos 5\pi/7 = 1/2$$

(4) z_1, z_2, z_3 என்னும் சிக்கல் எண்கள் ஆகண் வரிப்படத்தில் முறையே P_1, P_2, P_3 என்னும் புள்ளிகளினால் வகை குறிக்கப்படுகின்றன.
ω என்பது 1 இன் ஒரு கற்பனைக் கனமூலமாக இருக்கும் போது $(z_3 - z_1) = \omega(z_2 - z_3)$ எனின் P_1, P_2, P_3 ஒரு சமபக்க Δ த்தை அமைக்கும் என்று நிறுவுக.
ஒரு Δ Q_1, Q_2, Q_3 இன் பக்கங்களின் மீது வெளிப்புறம் பார்த்தபடி சமபக்க Δ கள் வரையப்படுகின்றன. இவ்வாறு வரையப்பட்ட சமபக்க Δ களின் ஒவ்வொன்றினதும் மையப் புள்ளிகளை நேரொத்த சிக்கல்

எண்களைக் காண்க. மூன்று பகுதியை பயன் படுத்தி மையப் போலிகள் சமபக்க Δ த்தின் உச்சிகளாக அமையும் எனக் காட்டுக

(4) ω என்பது 1 இன் ஓர் சிக்கல் கனமூலம் எனின் $\omega^3=1 \Rightarrow |\omega^3|=1 \Rightarrow |\omega|^3=1 \Rightarrow |\omega|=1$

$\omega^3=1 \Rightarrow \omega^3=\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi, \; n=0,\pm1,\pm2 \dots$

$\Rightarrow \omega=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}; \; n=0,\pm1,\pm2 \dots$

$\omega=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3} \quad n=0,1,2$ (3 வேறுபடும்)

$\therefore \omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ or $\omega=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ வீச்சம்$(\omega)=2\pi/3$ or $4\pi/3 = \pm 2\pi/3$

$(z_3-z_1)=\omega(z_2-z_3)$ எனின்.

$|z_3-z_1|=|\omega||z_2-z_3|$

$\Rightarrow |z_3-z_1|=|z_2-z_3| \quad (\because |\omega|=1)$

ie $P_3P_1=P_2P_3 \quad (P_1\equiv z_1, \; P_2\equiv z_2 \; P_3\equiv z_3)$

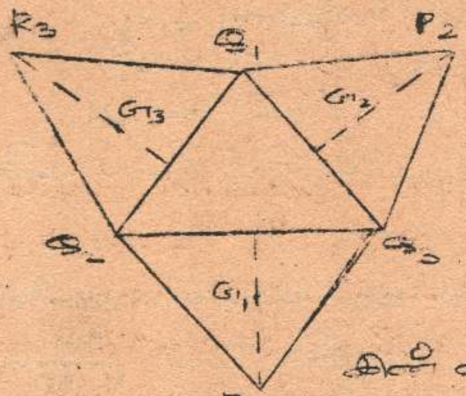
அத்துடன் $(z_3-z_1)=\omega(z_2-z_3) \Rightarrow \omega=\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}\right)$

$\Rightarrow$ வீச்சம் $\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}\right)=$ வீச்சம் $(\omega)=\pm 2\pi/3$.

$\therefore P_3P_1, P_2P_3$ என்பவற்றின் இடையிலான உள் சார்பு கோணம் $\pm\pi/3$ ஆகும்.

(அ-கு) $\Delta P_1P_2P_3$ இல் $P_1P_3=P_2P_3$ உம் $P_1\hat{P_3}P_2=\pm\pi/3$

$\therefore \Delta P_1P_2P_3$ ஒரு சமபக்க Δ ஆகும்.



$R_1R_2R_3$ என்பன $\Delta Q_1Q_2Q_3$ இன் பக்கங்களின் மீது புறத்தே வரையப்பட்ட சமபக்க Δ ங்களின் உச்சிகள் என்க. G_1, G_2, G_3 என்பன முறையே $\Delta R_1Q_2Q_3$, $R_2Q_1Q_3$, $R_3Q_1Q_2$ இன் மையப் போலிகள்.

$Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3$ இன் சிக்கல் எண்கள் முறையே $z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3'$ என்க.

$R_1Q_2Q_3$ ஒரு சமபக்க Δ ஆதலால்.

$z_2-z_1'=\omega(z_3-z_2)$

$z_1'=z_2(1+\omega)-\omega z_3=-\omega^2 z_2-\omega z_3$.

G_1 $\Delta R_1Q_2Q_3$ யின் மையப் போலியாதலால்.

$$z_1'' = \frac{1}{3}(z_1'+z_2'+z_3') = \frac{1}{3}\{(1-\omega^2)z_2+(1-\omega)z_3\}$$

$$\therefore z_1'' = \frac{1}{3}\{(2+\omega)z_2+(1-\omega)z_3\} \quad (\because 1+\omega+\omega^2=0)$$

இவ்வாறே

$$z_2'' = \frac{1}{3}\{(2+\omega)z_3+(1-\omega)z_1\}$$

$$z_3'' = \frac{1}{3}\{(2+\omega)z_1+(1-\omega)z_2\}$$

$$z_1''-z_2'' = \frac{1}{3}\{(2+\omega)z_2+(-1-2\omega)z_3-(1-\omega)z_1\}$$

$$= -\left(\frac{1-\omega}{3}\right)\{z_1+\omega^2 z_2+\omega z_3\} \quad (\because 1+\omega+\omega^2=0)$$

$$z_2''-z_3'' = -\left(\frac{1-\omega}{3}\right)\{z_2+\omega^2 z_3+\omega z_1\}$$

$$\therefore z_1''-z_2'' = \omega(z_2''-z_3'')$$

$$z_3''-z_1'' = \omega(z_3''-z_2'')$$

∴ முதற்பகுதியிலிருந்து $\Delta Q_1Q_2Q_3$ சமபக்க Δ ஆகும்.

(5) (i) நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றிற்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.
$(x^{1/2}+x^{-3/4})^n$ இன் விரிவில் உள்ள முதல் மூன்று உறுப்புகளின் குணகங்கள் கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்துள்ளது. n இன் பெறுமானத்தையும் x^4 இன் குணகத்தையும் காண்க.

(ii) ஒருவரிடம் 4 சோடி காலுறைகள் இருக்கின்றன. அவற்றில் ஒரு சோடி நீல நிறமானது. ஏனைய சோடிகள் வெள்ளை நிறமானவை. ஒவ்வொரு காலுறையும் எழுமாற்றாகத் தெரிவு செய்யப்படுகின்றது. ... தெரிவுகள் சமவாய்ப்புடையன எனின்
(அ) இரு சோடிகளும் பயன்படுத்தி
(ஆ) சரியாக ஒரு சோடி பயன்படுத்தி
பெறப்படக் கூடிய தெரிவுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க?

(5) ஈருறுப்புத் தேற்றம்:- n ஒரு நேர் நிறையெண் எனின்
$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r a^{n-r} x^r$ இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

நிறுவல்:- n=1 எனின் R.H.S = ${}^1C_0 a^1 x^0 + {}^1C_1 a^0 x^1$
$= a+x = L.H.S$

n=1 இற்கு முடிவு உண்மை

n=p இற்கு முடிவு உண்மை எனக் கொள்க.

அ-து $(a+x)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r a^{p-r} x^r$

இருபக்கமும் $(a+x)$ ஆல் பெருக்குக.

$$(a+x)^{p+1} = \left(\sum_{r=0}^{p} {}^{p}C_r\, a^{p-r} x^r\right)(a+x)$$

$$= {}^{p}C_0\, a^{p+1} + \sum_{r=1}^{p}\left({}^{p}C_{r-1} + {}^{p}C_r\right) a^{p-r+1}\, x^r$$

$$= {}^{p+1}C_0\, a^{p+1} + \sum_{r=1}^{p} {}^{p+1}C_r\, a^{p+1-r}\cdot x^r + {}^{p+1}C_{p+1}\, x^{p+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r\, a^{p+1-r}\, x^r$$

$n=p$ இற்கு முடிவு உண்மை எனின் $n=p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மை. எனவே கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கொள்கையின் படி எல்லா நேர் முழுவெண் n இற்கும் முடிவு உண்மை.

$$(x^{1/2} + x^{-3/4})^n = x^{-3n/4}(1+x^{5/4})^n$$

$$= x^{3n/4} \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, x^{5r/4}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r\, x^{(5r-3n)/4} \quad \text{———(1)}$$

அதியுயர் குணகமானது 9வது உறுப்பில் மட்டும் இருப்பதால் ${}^{n}C_7 < {}^{n}C_8 > {}^{n}C_9$ 9வது உறுப்பு நடு உறுப்பு.

8ம் உறுப்பின் குணகம் = 10ம் உறுப்பின் குணகம்.

$$\therefore {}^{n}C_7 = {}^{n}C_9 = {}^{n}C_{n-7}$$

$$n-7 = 9 \qquad \therefore n = 16.$$

$${}^{16}C_r\, x^{(5r-48)/4} = {}^{16}C_r \cdot x^4$$

$\frac{5r-48}{4} = 4 \Rightarrow r = 64/5$ இது r ஒரு முழு எண் என்ற உண்மைக்கு முரணானது.

$\therefore x^4$ இன் குணகம் $=0$

(ii) 1 – நீலம், 2 – வெள்ளை, 3 – சிவப்பு.

(a) எல்லா 6 கொடிகளையும் பயன்படுத்தி அனுப்பக்கூடிய வெவ்வேறு செய்திகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{6!}{2!\,3!} = 60$$

(b) 5 கொடிகளின் தெரிவுகள் பின்வரும் வகைகளில் அமையலாம்.

வகை I — 1 நீலம், 2 வெள்ளை, 2 சிவப்பு

வகை II – 1 நீலம் 1 வெள்ளை 3 சிவப்பு

வகை III. – 2 வெள்ளை, 3 சிவப்பு.

அனுப்பக்கூடிய செய்திகளின் எண்ணிக்கை.

வகை I – $\frac{5!}{2!\,2!} = 30$ வகை II – $\frac{5!}{3!} = 20$

வகை III – $5!/2!\,3! = 10$

$\therefore$ 5 கொடிகளை மட்டும் பயன்படுத்தி அனுப்பக் கூடிய செய்திகளின் எண்ணிக்கை $= 30+20+10 = 60$//

(6) (i) பெறுமானங்களைக் காண்க.

(அ) எல்லை $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin 3x}{x-\sin 3x}$ (ஆ) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4}(1-\tan x)\sec 2x$

(ii) பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

(அ) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}$ இங்கு α ஒரு மாறிலி

(ஆ) $\tan(2\tan^{-1} x/2)$ (இ) $\sqrt{1+\sin^2(\sqrt{x})}$

(iii) $y = e^x \sin 2x$ எனின் $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \lambda\dfrac{dy}{dx} + \mu y = 0$ ஆக இருக்கக் கூடியதாக λ, μ ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

(6) (i) (a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 3x}{x-\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+3\frac{\sin 3x}{3x}}{1-3\frac{\sin 3x}{3x}} \quad (\because x\neq 0)$$

$$= \frac{1+3}{1-3} = -2. \quad \left[\because \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\to 1\right]$$

(b) $$\lim_{x\to\pi/4}(1-\tan x)\sec 2x = \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\sin x/\cos x}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x(\cos x+\sin x)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\right)} = 1 //$$

(ii) (a) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}\right] = \frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})^2}\times\frac{d}{dx}\{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\}$$

$$= \frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})^2}\times\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 2x}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\right]$$

$$= \frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

(b) $$\frac{d}{dx}\{\tan(2\tan^{-1}x/2)\} = \sec^2(2+\tan^{-1}x/2)\cdot\frac{d}{dx}(2+\tan^{-1}x/2)$$

$$= \sec^2(2+\tan^{-1}x/2)\times\frac{2}{1+(x/2)^2}\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{x^2+4}\sec^2(2\tan^{-1}x/2)$$

(c) $$\frac{d}{dx}\sqrt{1+\sin^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\sqrt{x})}}\times\frac{d}{dx}\{1+\sin^2(\sqrt{x})\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\sqrt{x})}}\times 2\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sin\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x(1+\sin^2\sqrt{x})}} //$$

(iii) $y = e^x\sin 2x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x + 2e^x \cos 2x - 4e^x \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^x \cos 2x - 3e^x \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda \frac{dy}{dx} + \mu y = e^x \{(4+2\lambda)\cos 2x + (\mu+\lambda-3)\sin 2x\} \equiv 0$$

$\therefore 4+2\lambda = 0$ & $\lambda+\mu-3=0$

$\therefore \lambda = -2 \qquad \mu = 5$

(7) (i) $f(x)$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைக்க. இங்கு $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}$

பெறுமானம் கணிக்க $\int_0^k f(x)\,dx \quad (k>0)$

$\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^k f(x)\,dx$ முடிவுள்ளது என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்தோ வேறுவிதமாகவோ

$\int_0^{\pi/2} \dfrac{d\theta}{(1+\tan\theta)^2}$ இன் பெறுமானம் கணிக்க.

(ii) $I = \int_\alpha^\beta \sin(\omega - x)\,dx \qquad J = \int_\alpha^\beta \cos(\omega - x)\,dx$

இங்கு $\alpha < x < \beta$ $\quad I+J = \beta\sin(\omega-\beta) - \alpha\sin(\omega-\alpha)$ எனக் காட்டுக

இதனைப் பயன்படுத்தியும் I, J ஆகியவற்றின் வேறோர் ஏகபரிமாணச் சேர்மானத்தை நோக்கியும், I, J ஆகியவற்றின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க

(7) (i) $$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2 \equiv A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2$$

$$2 \equiv (A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D$$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

$A+C=0 \quad \text{---(1)} \qquad A+C+2D=0 \quad \text{---(3)}$

$A+B+2C+D=0 \quad \text{---(2)} \qquad A+B+D=2 \quad \text{---(4)}$

தீர்க்க $A=1,\ B=1,\ C=-1,\ D=0$

$$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^k \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int_0^k \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \Big[\log|x+1|\Big]_0^k + \Big[\frac{-1}{x+1}\Big]_0^k - \frac{1}{2}\Big[\log|x^2+1|\Big]_0^k$$

$$= \log|k+1| - \frac{1}{k+1} + 1 - \frac{1}{2}\log|k^2+1|$$

$$= \log\frac{k+1}{\sqrt{k^2+1}} - \frac{1}{k+1} + 1$$

$$= \log\frac{1+1/k}{\sqrt{1+1/k^2}} - \frac{1}{k+1} + 1$$

$\int_0^k f(x)\,dx \longrightarrow 1, \quad k \longrightarrow \infty$ ஆகும் போது

$\lim_{k\to\infty}\int_0^k f(x)\,dx = 1 \quad \therefore \lim_{k\to\infty}\int_0^k f(x)\,dx$ முடிவுள்ளது

$x = \tan\theta$ என்க $dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$\theta = 0$ ஆகும் போது $x = 0$ $\theta \to \pi/2$ ஆக $x \to \infty$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+\tan\theta)^2} = \int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\int_0^k F(x)\,dx$$

$= \frac{1}{2}\times 1$ ([illegible]) $= \frac{1}{2}$.

(ii) $I = \int_\alpha^\beta \sin(\log x)\,dx = \left[x\sin(\log x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \cos(\log x)\,dx.$

$\therefore I + J = \beta\sin(\log\beta) - \alpha\sin(\log\alpha)$ ——— (5).

$J = \int_\alpha^\beta \cos(\log x)\,dx$

$J = \left[x\cos(\log x)\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \sin(\log x)\,dx$

$J - I = \beta\cos(\log\beta) - \alpha\cos(\log\alpha)$ ——— (6).

(5)+(6) $I = \frac{1}{2}\{\beta[\sin(\log\beta) - \cos(\log\beta)] - \alpha[\sin(\log\alpha) - \cos(\log\alpha)]\}$.

$J = \frac{1}{2}\{\beta[\sin(\log\beta) + \cos(\log\beta) - \alpha[\sin(\log\alpha) + \cos(\log\alpha)]$.

(8) (i)(அ) சரிவகப் போலி நெறியை,
(ஆ) சிம்சனின் நெறியைப் பயன்படுத்தியும்
தொகையீட்டு ஆயிடையை 8 சமபகுதிகளாக
மீண்டும் வகுத்தும் $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$ இன் பெறுமானத்தைக்
கணிக்க

(ii) $\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}$ இற்கு x^3 வரை உறுப்பு வரைக்கும்
விரிவு
$1 + 2x\cos\theta + 2x^2\cos 2\theta + 2x^3\cos 3\theta$ என்று
காட்டுக

(8) (1, 3) என்னும் ஆயிடை 8 சமபகுதிகளாக
வகுக்கப் படுவதால் $h = 1/4$

$x_i = 1 + i/4 \qquad f_i = \frac{1}{1+x_i}$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
$f_i = \frac{1}{1+x_i}$	0.5000	0.4444	0.4000	0.3636	0.3333	0.3076	0.2857	0.2666	0.2500

(a) சரிவகப் போலி நெறியால்.

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{2}\left\{f_0 + 2(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7)+f_8\right\}$$

$$= \frac{0.25}{2}\{0.5 + 2(0.444 + 0.4000 + 0.3636 + 0.3333 + 0.3076 + 0.2857 + 0.2666 + 0.2500\}$$

$$= 0.6941$$

(b) சிம்சனின் நெறியால்.

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\{f_0 + 4(f_1+f_3+f_5+f_7) + 2(f_2+f_4+f_6)+f_8\}$$

$$= \frac{0.25}{3}\{0.5000 + 4(0.444 + 0.3636 + 0.3076\ 0.2666) + 2(0.4 + 0.3333 + 0.2857) + 0.25\}$$

$$= 0.6928$$

(11) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$ என்க

$$f'(x) = \frac{(1-2x\cos\theta+x^2)(-2x) - (1-x^2)(-2\cos\theta+2x)}{(1-2x\cos\theta+x^2)^2}$$

$$= \frac{2\cos\theta - 4x + 2x^2\cos\theta}{(1-2x\cos\theta+x^2)^2} \quad //$$

$$f''(x) = \frac{(1-2x\cos\theta+x^2)^2(-4+4x\cos\theta) - (2\cos\theta-4x+2x^2\cos\theta) \times 2(1-2x\cos\theta+x^2)(-2\cos\theta+2x)}{((1-2x\cos\theta+x^2)^4}$$

$$= \frac{4(-x^3\cos\theta + 3x^2 - 3x\cos\theta + \cos 2\theta)}{(1-2x\cos\theta+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{\{(1-2x\cos\theta+x^2)^3 \cdot 4(-3x^2\cos\theta+6x-3\cos\theta)\} - \{4(x^3\cos\theta+3x^2-3x\cos\theta+\cos 2\theta)\, 3(1-2x\cos\theta+x^2)^2 (-2\cos\theta+2x)\}}{(1-2x\cos\theta+x^2)^6}$$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 2\cos\theta$, $f''(0) = 4\cos 2\theta$

$f'''(0) = 12\cos\theta(2\cos 2\theta - 1) = 12\cos\theta(4\cos^2\theta - 1)$

$= 12\cos 3\theta$

∴ $f(x)$ இன் x^3 உறுப்பு வரைக்கும் மக்குளோரினின் விரிவு

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0)$$

$$= 1 + 2x\cos\theta + 2x^2\cos 2\theta + 2x^3\cos 3\theta$$

(9) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi/2$ ஆக உள்ள $x = \cos 2\theta$ $y = \sin 3\theta$ என்பவற்றால் தரப்படும் சமன்பாடுகள் தரும் வளையியின் கோலம் வரைக

மேற்போந்த இடைச்சமன்பாடுகளிலிருந்து: θ வை நீக்க இவ்வாறு பெறப்படக் கொள்ளப்பட்ட சமன் பாட்டினூடு வரை தீர்க்கப்பட்ட வளையி, தனி வளையி மேலிருந்து வேறுபடுகின்றது

(9) $x = \cos 2\theta \qquad y = \sin 3\theta \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$

$\frac{dx}{d\theta} = -2\sin 2\theta \qquad \frac{dy}{dx} = 3\cos 3\theta$

$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(3-4\cos^2\theta)}{4\sin\theta} \qquad [\cos\theta \ne 0 \text{ இங்கு}]$

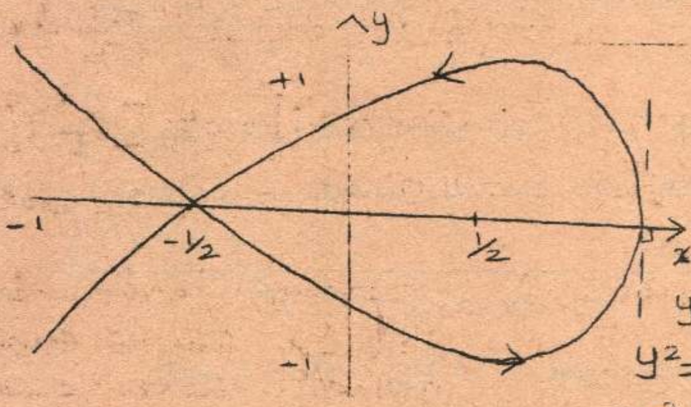
நிலையான புள்ளிகளில் $\cos^2\theta = 3/4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \cos^2 \pi/6$

$\theta = n\pi \pm \pi/6$ இங்கு $n=0$ $(\because -\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$

$\therefore \theta = \pm \pi/6$

$\theta \to 0$ ஆக $\sin\theta \to 0 \quad \frac{dy}{dx} \to \infty$

θ இன் வீச்சு	x	y	dy/dx இன் குறி
$-\pi/2 \le \theta \le -\pi/6$	-1 இலிருந்து ½ அதிகரிக்கின்றது	1 இலிருந்து -1 இற்கு குறைகின்றது	$(+)/(-) = -$
$\theta = -\pi/6$	$1/2$	-1	0 இழிவு
$-\pi/6 < \theta < 0$	½ இலிருந்து 1 இற்கு அதிகரிக்கிறது	-1 இலிருந்து 0 இற்கு அதிகரிக்கிறது	$(-)/(-) = +$
$\theta = 0$	1	0	[illegible]
$0 < \theta < \pi/6$	1 இலிருந்து ½ இற்கு குறைகின்றது	0 இலிருந்து 1 இற்கு கூடுகின்றது	$(-)/(+) = -$
$\theta = \pi/6$	$1/2$	1	0 உயர்வு
$\pi/6 < \theta \le \pi/2$	½ → -1 குறையும்	1 → -1 இற்கு குறையும்	$(+)/(-) = (+)$



$x = 1 - 2\sin^2\theta$

$y = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= \sin\theta(3 - 4\sin^2\theta)$

$y^2 = \sin^2\theta(3 - 4\sin^2\theta)^2$

$y^2 = \frac{1-x}{2}[3 + 2(x-1)]^2$

$2y^2 = (1-x)(1+2x)^2$

இச்சமன்பாட்டின் வரைபு இதிலிருந்து வளையி ஆனது எல்லா $x<1$ இற்கும் வரையப்படுகிறது அத்துடன் $\infty \le y \le \infty$ ஆனால் மேலும் $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$x = \cos 2\theta \Rightarrow -1 \le x \le 1$

$y = \sin 3\theta \Rightarrow -1 \le y \le 1$

மேலும் $x < -1$ இற்கு வரையறுக்கப்படவில்லை

அத்துடன் $-1 \le y \le 1$

∴ இரு வளையிகளும் ஒன்றல்ல

(10) சமன்பாடுகள் முறையே $y^2=8x$, $x^2=3\sqrt{3}y$ ஆகவுள்ள C_1, C_2 என்னும் வளையிகளை ஒரே உருவில் பருமட்டாக வரைக. $C_1 C_2$ என்னும் வளையிகள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் காண்க. பரப்பளவு S ஆனது
(அ) x-அச்சைப்பற்றி (ஆ) y-அச்சைப்பற்றி
ஒரு செங்கோணத்தினூடாகச் சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

(10) $C_1 \equiv y^2=8x$ இது x அச்சை சமச்சீரச்சாகவும் உற்பத்தியை $(0,0)$ ஐ உச்சியாகவும் உடைய பரவளைவு

$C_2 \equiv x^2-3\sqrt{3}y=0$ இது y-அச்சை சமச்சீரச்சாகவும் உற்பத்தியை உச்சியாகவும் உடைய பரவளைவு

இடைவெட்டு புள்ளிக்கு

$$8x = \frac{x^4}{27}$$
$$x(x^3-216)=0$$
$$x(x-6)(x^2+6x+36)=0$$

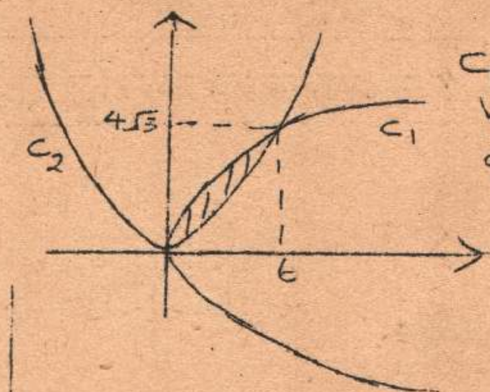
$x=0\ ,\ x=6$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=6 \Rightarrow y=4\sqrt{3}$

$x^2+6x+36=0$ க்கு மெய்த்தீர்வில்லை

∴ வெட்டுப் புள்ளிகள் $(0,0)$, $(6,4\sqrt{3})$ ஆகும்.



$C_1 C_2$ ஆகியன உள்ளடக்கும் பரப்பளவானது S

$$S = \int_0^6 \sqrt{8x}\,dx - \int_0^6 \frac{x^2}{3\sqrt{3}}\,dx$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^6 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6$$
$$= 16\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ சதுர அலகுகள்}$$

S ஆனது x-அச்சுபற்றி ஒரு செங்கோணத்தினூடாக சுழற்றப்படும் போது

$$V_1 = \frac{\pi}{4}\int_0^6 y_1^2\,dx - \frac{\pi}{4}\int_0^6 y_2^2\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_0^6 8x\,dx - \frac{\pi}{4}\int_0^6 \frac{x^4}{27}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[4x^2\right]_0^6 - \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^5}{27\times 5}\right]_0^6$$
$$V_1 = \frac{108\pi}{5} \text{ கனவலகுகள்}$$

S ஆனது y அச்சுபற்றி 1 செங்கோணத்தினூடாக சுழற்றப்படும் போது உண்டாகும் கனவளவு

$$V_2 = \frac{\pi}{4}\int_0^{4\sqrt{3}} x_2^2\,dy - \frac{\pi}{4}\int_0^{4\sqrt{3}} x_1^2\,dy$$
$$V_2 = \frac{\pi}{4}\left\{\int_0^{4\sqrt{3}} 3\sqrt{3}y\,dy - \int_0^{4\sqrt{3}} \frac{y^4}{64}\,dy\right\}$$
$$V_2 = \frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{3}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{4\sqrt{3}} - \frac{1}{64}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{4\sqrt{3}}\right\}$$
$$V_2 = \frac{54\sqrt{3}\pi}{5} \text{ கனவலகுகள்.}$$

உரிமை பதிப்பகத்துக்குரியது!

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

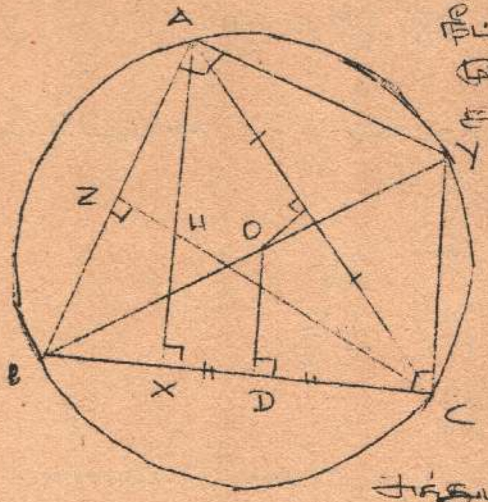
36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூயகணிதம் 11. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட், 1988.

ஏழு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

(1) (i) ஒரு முக்கோணி ABC யிலே H ஆனது நிமிர்மையமும் O ஆனது சுற்றுமையமும் D ஆனது BC யின் நடுப் புள்ளியும் ஆகும். $AH = 2OD$ என்று நிறுவுக. HD, AO ஆகியன இடைவெட்டும் புள்ளி M எனின் முக்கோணி AHM இன் மையப்போலியானது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியில் இருக்கிறது என்று நிறுவுக.

(ii) சேவாவின் தேற்றத்தையும் மெனிலோசின் தேற்றத்தையும் கூறுக. O என்பது ஒரு முக்கோணி ABC யினுள்ளே இருக்கின்ற ஒரு புள்ளியாகும். AO, BO, CO ஆகியன பக்கங்கள் BC, CA, AB ஆகியவை நிறையே D, E, F ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன $\frac{OE}{OF} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BE}{CF}$ என்று நிறுவுக.



நீட்டப்பட்ட AH CH என்பன முறையே BC, AB ஐ X, Y இல் சந்திக்கின்றன எனக.
நீட்டப்பட்ட BO ஆனது வட்டத்தை Y இல் வெட்டுகிறது
BY விட்டமாகும்.

$B\hat{A}Y = B\hat{C}Y = 90°$

$B\hat{A}Y = 90 = C\hat{Z}A$

$\therefore AY // ZC$

அத்துடன் $A\hat{X}C = 90° = Y\hat{C}X$

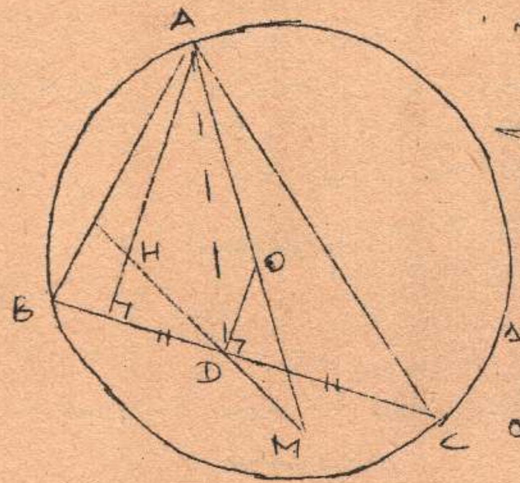
$\therefore AX // YC$

$\therefore$ AHCY ஒரு இணைகரம்

ஆகவே $AH = CY$

ஆனால் ΔBCY யில் $BD = DC$, $OD // YC$ $\therefore 2OD = CY$

$\therefore AH = 2OD$



$AH // OD$

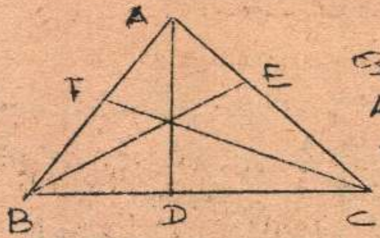
ஆகவே $HD = DM$

D ஆனது HM இன் நடுப்புள்ளி

$\therefore$ AD ஆனது ΔAHM இன் இடையம் அத்துடன் ΔABC இன் இடையம்

$\therefore$ இரு Δங்களின் மையப்போலிகளும் பொருந்தும்.

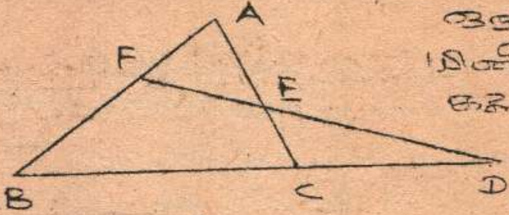
(ii) சேவாவின் தேற்றம்



O என்பது ABC யின் தளத்திலுள்ள ஒருபுள்ளியாகவும் நீட்டப்பட்ட AO, BO, CO என்பன BC, CA, AB என்பவற்றை முறையே D, E, F இல் சந்திக்கின்றனவாயும் இருப்பின்

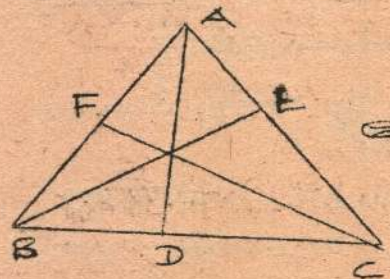
$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 .$$

மெனிலோசின் தேற்றம்



ஒரு நேர்கோடானது △ABC யின் BC, CA, AB எனும் பக்கங்களை முறையே D, E, F இல் சந்திப்பின்

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$



△ABC க்கும் புள்ளி O க்கும் சேவாவின் தேற்றப்படி.

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = -1$$

△OBC க்கும் புள்ளி A யிற்கும் சேவாவின் தேற்றப்படி.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FO} \cdot \frac{OE}{EB} = 1$$

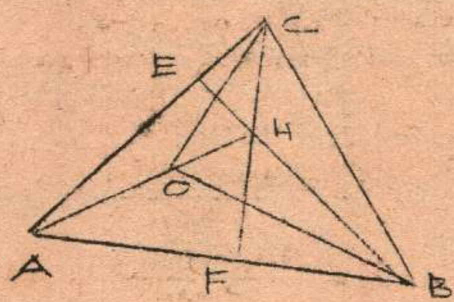
$$\therefore \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FO} \cdot \frac{OE}{EB} .$$

$$AF/FB \cdot CE/EA = \frac{CF}{FO} \cdot \frac{OE}{EB}$$

$$\frac{OE}{OF} = \frac{CE}{EA} \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BE}{CF}$$

(2) (i) OA, OB, OC என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகளாகும். OH ஆனது தளம் ABC யிற்கு செங்குத்தாக இருக்கத் தக்கதாக H என்பது தளம் ABC யிலுள்ள ஒருபுள்ளியாகும். H ஆனது △ABC யின் நிமிர்மையமாகும்.

(ii) ABCD ஒரு நான்முகி. இதில் AB = AC = AD; BCD ஒரு சமபக்க △ ஆகும். AB யிற்கும் AC யிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் α ஆகும். AB ஆனது தளம் BCD யுடன் கோணம் β யை அமைக்கின்றது. $4\cos\alpha + 3\cos 2\beta = 1$ என நிறுவுக.



$OC \perp OA$
$OC \perp OB$ } தரவு

$\therefore OC \perp$ தளம் OAB

$\therefore OC \perp AB.$

$OH \perp$ தளம் ABC (தரவு)

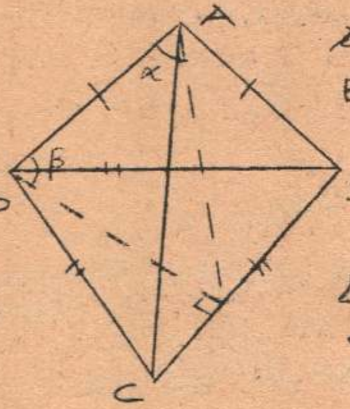
$\therefore OH \perp AB.$

$AB \perp OC$, $AB \perp OH \Rightarrow AB \perp$ தளம் COH

$\therefore AB \perp CH$

இவ்வாறே $AC \perp BH$ எனக் காட்டலாம்

$\therefore H$ ஆனது ΔABC யின் நிமிர்மையமாகும்



$\left.\begin{array}{l} AB = AC = AD = a \\ BC = CD = DB = b \end{array}\right\}$ என்க.

CD யின் நடுப்புள்ளி E என்க.

$\therefore BE \perp DC$.

$AE \perp DC$

ΔABC யில்

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2a^2 - b^2}{2a^2}.$$

$$BE = BC\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

$$AE^2 = AD^2 - ED^2 \qquad \therefore AE = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}.$$

ΔABE யில் $\cos\beta = \dfrac{AB^2 + BE^2 - AE^2}{2AB \cdot BE}$

$$= \frac{a^2 + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}(4a^2 - b^2)}{2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b} = \frac{b}{\sqrt{3}a}$$

$$4\cos\alpha + 3\cos 2\beta = 4\cos\alpha + 3(2\cos^2\beta - 1)$$

$$= 4\left(\frac{2a^2 - b^2}{2a^2}\right) + 3\left(2 \cdot \frac{b^2}{3a^2} - 1\right).$$

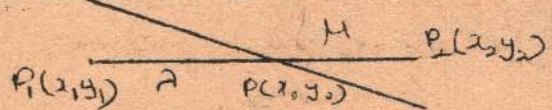
$$4\cos\alpha + 3\cos 2\beta = 1$$

(3) கோடு $ax + by + c = 0$ ஆனது $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டினை $-\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

ஒரு ΔABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB ஆகியவை முறையே $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ என்னும் நேர்கோடுகள் வழியே இருக்கின்றன. இங்கு $u_r = a_r x + b_r y + c_r$ $r = 1, 2, 3$ ஆகும். k என்பது ஒருமாறிலியாக இருக்க கோடு $u_3 - k u_2 = 0$ ஆனது A யினூடாகச் செல்கிறது எனவும் BC யை $\dfrac{k(a_1b_2 - a_2b_1)}{(a_3b_1 - a_1b_3)}$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனவும் காட்டுக.

$(a_2a_3 + b_2b_3)(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_1 - a_1b_3)$ ஆனது நேராக அல்லது மறையாக இருப்பதற்கேற்ப முக்கோணியின் கோணம் A விரிகோணமாக அல்லது கூர்ங்கோணமாக இருக்கும் என்று காட்டுக.

விடை: $ax + by + c = 0$



$\dfrac{P_1O}{OP_2} = \dfrac{\lambda}{\mu}$ என்க.

$$\therefore x_0 = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}$$

$$y_0 = \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}.$$

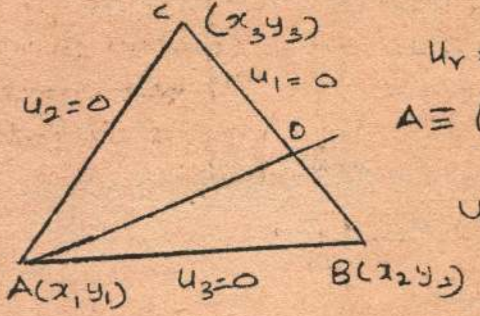
$\therefore (x_0, y_0)$ ஆனது $ax+by+c=0$ இல் கிடப்பதால்

$$a\left(\frac{\lambda x_2+\mu x_1}{\lambda+\mu}\right)+b\left(\frac{\lambda y_2+\mu y_1}{\lambda+\mu}\right)+c=0$$

$$a(\lambda x_2+\mu x_1)+b(\lambda y_2+\mu y_1)+c(\lambda+\mu)=0$$

$$\lambda(ax_2+by_2+c)+\mu(ax_1+by_1+c)=0$$

$$\therefore \lambda/\mu=-\frac{(ax_1+by_1+c)}{(ax_2+by_2+c)}$$



$u_r=a_r x+b_r y+c_r$

$A\equiv(x_1 y_1)$, $B\equiv(x_2 y_2)$ $C\equiv(x_3 y_3)$ எனக.

$$u_3-ku_2=a_3x+b_3y+c_3-k(a_2x+b_2y+c_2)$$
$$=(a_3-ka_2)x+(b_3-kb_2)y+(c_3-kc_2)$$

இது ஒரு நேர்வரையை குறிக்கின்றது

சந்தியின் A ஆனது $u_2=0$, $u_3=0$ இல் கிடப்பதால்.

$a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$, $a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$

$\therefore a_3x_1+b_3y_1+c_3-k(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$

$A(x_1,y_1)$ ஆனது $u_3-ku_2=0$ ஐ திருப்தி செய்கிறது

$u_3-ku_2=0$ ஆனது A இனூடே செல்லும் நேர்வரையை குறிக்கின்றது.

B ஆனது $u_1=0$, $u_3=0$ இல் கிடப்பதால்

$$\left.\begin{aligned}a_1x_2+b_1y_2+c_1=0\\ a_3x_2+b_3y_2+c_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_2=\left(\frac{b_1c_3-b_3c_1}{b_3a_1-b_1a_3}\right);\ y_2=\left(\frac{a_1c_3-a_3c_1}{a_3b_1-b_3a_1}\right)$$

இவ்வாறே. $x_3=\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_2a_1-b_1a_2}\right)$, $y_3=\left(\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_2b_1-b_2a_1}\right)$

முதற்பகுதியிலிருந்து

$$\frac{BD}{DC}=-\frac{(a_3-ka_2)x_2+(b_3-kb_2)y_2+(c_3-kc_2)}{(a_3-ka_2)x_3+(b_3-kb_2)y_3+(c_3-kc_2)}$$

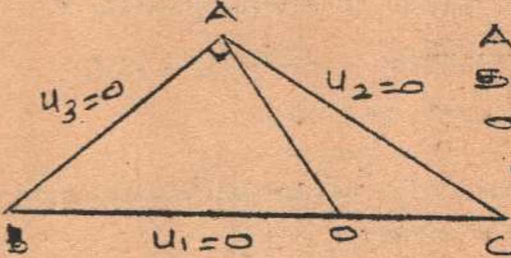
$$=k\frac{(a_2x_2+b_2y_2+c_2)}{(a_3x_3+b_3y_3+c_3)}$$ [$\because$ B, $u_3=0$ இலும் C, $u_2=0$ இலும் உள்ளன]

பகுதியைச் சுருக்குக.

$$a_2x_2+b_2y_2+c_2=\frac{-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+b_2a_1c_3-b_2a_3c_1+c_2a_3b_1-c_2b_3a_1}{(a_3b_1-a_1b_3)}$$

$$\frac{a_2x_2+b_2y_2+c_2}{a_3x_3+b_3y_3+c_3} = \left(\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_3b_1-a_1b_3}\right)$$

$$BD/DC = k\frac{(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_3b_1-a_1b_3)}$$



A யினூடாக AB யிற்குச் செங்குத்தான நேர்வரை AD எனக. ∴ AD யானது k யின் பொருத்தமான பெறுமானத்திற்கு $u_3-ku_2=0$ இனால் தரப்படும்.

AD யின் படித்திறன் $= -\frac{(a_3-ka_2)}{(b_3-kb_2)}$.

AB " " $= -a_3/b_3$

$$-\left(\frac{a_3-ka_2}{b_3-kb_2}\right)\left(\frac{-a_3}{b_3}\right) = -1 \quad [\because AD \perp AB]$$

$$k = \frac{(a_3^2+b_3^2)}{(a_2a_3+b_2b_3)}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{(a_3^2+b_3^2)}{(a_2a_3+b_2b_3)} \cdot \frac{(a_1b_2-a_2b_1)}{(a_3b_1-a_1b_3)}$$

$$= \frac{(a_3^2+b_3^2)\,(a_1b_2-a_2b_1)(a_3b_1-a_1b_3)(a_2a_3+b_2b_3)}{(a_2a_3+b_2b_3)^2(a_3b_1-a_1b_3)^2}$$

∵ $(a_1b_2-a_2b_1)(a_3b_1-a_1b_3)(a_2a_3+b_2b_3)$ நேர் அல்லது மறை என்பதற்கேற்ப BD/DC நேர் அல்லது மறையாக இருக்கும்.

(அ-து) D யானது BC க்கு உட்புறமாக அல்லது வெளிப்புறமாக இருக்கும் இதற்கு ஏற்ப. $B\hat{A}C$ ஆனது விரிகோணமாக அல்லது கூர்ங் கோணமாக இருக்கும்.

(4) (i) பரிதி மீதுள்ள ஒரு புள்ளியை மையமாகவும் உற்பத்தியூடாகச் செல்கின்ற விட்டத்தை நாணாகவும் கொண்டு வரையப்படும் வட்டம் ஒன்றின் முனைவுச் சமன்பாட்டைக் கண்டு, புள்ளி $(2a\cos\alpha, \alpha)$ ஆனது இவ்வட்டத்தின் மீது இருக்கின்றது என்று காட்டுக. இப்புள்ளியாகலை வட்டத்திற்குரிய தொடலியின் சமன்பாடு $r\cos(\theta-2\alpha) = 2a\cos^2\alpha$ எனவும் காட்டுக.

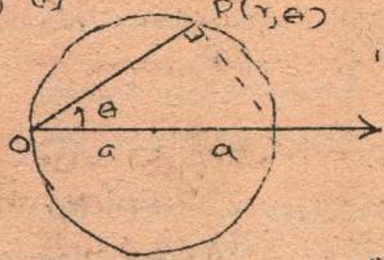
(ii) வட்டம் $15x^2+15y^2-48x+64y=0$ மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்தும்.

$$5x^2+5y^2-24x+32y+75=0$$

$$5x^2+5y^2-48x+64y+300=0$$

அச்சிய வட்டங்களுக்குள்ள தொடலிகளின் நீளங்கள் இவ்வட்டங்களினதும் ஆரைகளின் விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

(4) (i)



$OP = 2a\cos\theta$

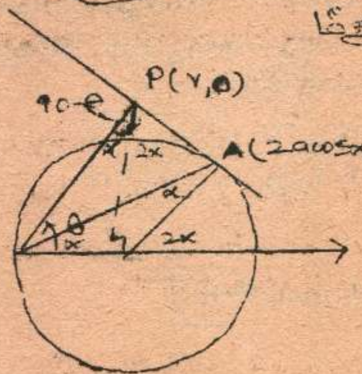
∴ வட்டத்தின் முனைவுச்சமன்பாடு

$r = 2a\cos\theta \,, \; -\pi/2 < \theta < \pi/2$

$\theta = \alpha$ ஆகும் போது

$r = 2a\cos\alpha$

∴ $(2a\cos\alpha, \alpha)$ ஆனது வட்டத்தின் மீது இருக்கின்றது



ΔOAP யில் சைன் விதிப்படி

$$\frac{OP}{\sin(90-\alpha)} = \frac{OA}{\sin(90-\theta+2\alpha)}$$

$$\frac{r}{\cos\alpha} = \frac{2a\cos\alpha}{\cos(\theta-2\alpha)}$$

$$r\cos(\theta-2\alpha) = 2a\cos^2\alpha \,//$$

(ii) $S \equiv 15x^2+15y^2-48x+64y=0$

$S_1 \equiv 5x^2+5y^2-24x+32y+75=0$

$S_2 \equiv 5x^2+5y^2-48x+64y+300=0$

S_1 இன் மையம் $\equiv (12/5, -16/5)$, ஆரை $= 1$

S_2 இன் மையம் $\equiv (24/5, -32/5)$, ஆரை $= 2$

(x_1, y_1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ இற்கு வரையப்படும் தொடலியின் நீளம்

$$= \sqrt{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c)}$$

$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$$

S இலுள்ள ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ இலிருந்து S_1, S_2 என்பவற்றிற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் நீளங்களின் விகிதம்

$$= \sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2-\frac{24}{5}x_1+\frac{32}{5}y_1+15}{x_1^2+y_1^2-\frac{48}{5}x_1+\frac{64}{5}y_1+60}}$$

$$= \sqrt{\frac{15x_1^2+5y_1^2-24x_1+32y_1+75}{5x_1^2+5y_1^2-48x_1+64y_1+300}}$$

$$= \sqrt{\frac{-24x+32y_1+225}{-96x_1+128y_1+900}} \quad \left[\begin{array}{l}\because (x_1,y_1) \text{ ஆனது } S=0 \text{ இல் இருப்பதால்} \\ 15x_1^2+15y_1^2 = 48x_1-64y_1\end{array}\right]$$

$$= \sqrt{1/4} = \frac{1}{2} = \frac{S_1 \text{ இன் ஆரை}}{S_2 \text{ இன் ஆரை}}$$

(5) புள்ளி $P \equiv (at^2, 2at)$ இலே பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாட்டை கண்டு பொதுவாக குறிப்பிட்ட புள்ளி $Q \equiv (x_0 y_0)$ இனூடாக செல்கின்ற பரவளைவின் மூன்று செவ்வன்கள் இருக்கும் ~~எனவும்~~ உய்த்தறிக.

$P_1P_2P_3$ என்பன புள்ளி ஒன்றிலிருந்து பரவளைவு $y^2=4ax$ இற்கு வரையப்பட்ட செவ்வன்களின் அடிகளாகும். முக்கோணி $P_1P_2P_3$ இன் மையப்போலி இவ்வாறு பரவளைவின் அச்சு மீது இருக்கிறது எனக் காட்டுக.
புள்ளி ஒன்றானது வட்டம் $(x-\frac{4a}{5})^2+y^2=b^2$ ஐ வரையும் போது அதன் நடுப்புள்ளியானது $5b/6, b/2$ என்பவற்றை அரையாகக் கொண்ட நீள்வளையம் ஒன்றை வரையும் எனக் காட்டுக.

(5) $y^2=4ax \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}=1/t$, $P(at^2, 2at)$ யில்
∴ P யில் செவ்வனின் படி $=-t$
∴ P யிலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு

$$\frac{y-2at}{x-at^2}=-t$$

$$tx+y-2at-at^3=0$$

$(x_0 y_0)$ இனூடாக செல்லின்

$$tx_0+y_0-2at-at^3=0$$

$$at^3+(2a-x_0)t-y_0=0$$

இது t யில் 3ம் படிச்சமன்பாடு ஆகவே பொதுவாக 3 தீர்வுகள் இருக்கும் அவை t_1, t_2, t_3 எனக
∴ t_1, t_2, t_3 இற்கு ஒத்த புள்ளிகளிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் செவ்வன்கள் $(x_0 y_0)$ இனூடு செல்லும்
∴ $Q(x_0 y_0)$ இனூடு செல்லுகின்ற பரவளைவின் மூன்று செவ்வன்கள் உண்டு
t_1, t_2, t_3 என்பன $at^3+(2a-x_0)t-y_0=0$ இன் மூலங்கள்

$$\therefore t_1+t_2+t_3=\frac{-t^2 \text{ இன் குணகம்}}{t^3 \text{ இன் குணகம்}}=0$$

$$G \equiv \left\{\frac{a}{3}(t_1^2+t_2^2+t_3^2), \frac{2a}{3}(t_1+t_2+t_3)\right\} = \left\{\frac{a}{3}(t_1^2+t_2^2+t_3^2), 0\right\}$$

∴ மையப்போலி பரவளைவின் அச்சாகிய x அச்சின் மீது இருக்கின்றது.

$$G \equiv \left\{\frac{a}{3}\left[(t_1+t_2+t_3)^2-2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)\right], 0\right\}$$

ஆனால்

$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{t \text{ யின் குணகம்}}{t^3 \text{ இன் குணகம்}}=\frac{2a-x_0}{a}$$

$$\therefore G \equiv \left\{\frac{a}{3}\left[-2\left(\frac{2a-x_0}{a}\right)\right], 0\right\} = \left\{\frac{2}{3}(x_0-2a), 0\right\}$$

$Q \equiv (x_0, y_0)$

QR யின் நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{5x_0-4a}{6}, \frac{y_0}{2}\right) \equiv (x, y)$ என்க

$x = \frac{5}{6}\left(x_0 - \frac{4a}{5}\right)$, $y = y_0/2$

$Q(x_0, y_0)$ ஆனது $(x - 4a/5)^2 + y^2 = b^2$ ஐ வரைவதால்

$$\left(x_0 - \frac{4a}{5}\right)^2 + y_0^2 = b^2$$

$$\left(\frac{6}{5}x\right)^2 + (2y)^2 = b^2$$

$$\frac{x^2}{(5/6\, b)^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1$$

∴ QR இன் நடுப்புள்ளியானது $5b/6$, $b/2$ ஐ அரையச்சுக்களாகக் கொண்ட நீள்வளையம் ஒன்றை வரைகின்றது

(6) t ஒரு பரமானமான யாதாயினும் ஒருபுள்ளி $P \equiv \left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2bt}{1+t^2}\right)$ ஆனது நீள்வளையம் $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ மீது இருக்கின்றது எனவும் $t = t_1$ ஆகவும் $t = t_2$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகளில் நீள்வளையத்துக்கு வரையப்பட்ட தொடலிகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{a(1-t_1t_2)}{1+t_1t_2}, \frac{b(t_1+t_2)}{1+t_1t_2}\right)$ இனால் தரப்படும் எனவும் நிறுவுக.

ABCD யாதாயினும் ஒரு நாற்பக்கல். இதன் பக்கங்கள் CA, AB, BC, CD ஆகியன பரமானங்கள் முறையே t_1, t_2, t_3, t_4 ஆகவுள்ள புள்ளிகளில் $S=0$ ஐத் தொடுகின்றன. மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளும் $S=0$ இன் மையமும் ஒரே கோட்டில் இருக்கும் என்று காட்டுக.

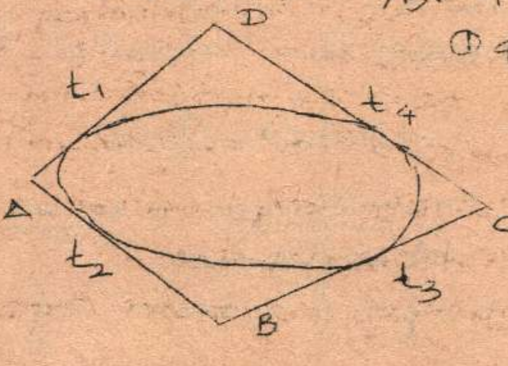
(b) $$\frac{a^2(1-t^2)^2}{a^2(1+t^2)^2} + \frac{4b^2t^2}{b^2(1+t^2)^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

∴ P ஆனது $S=0$ மீது இருக்கின்றது

$t = $ "t_1" இல் தொடலியின் சமன்பாடு

$$\frac{x(1-t_1^2)}{a(1+t_1^2)} + \frac{2yt_1}{b(1+t_1^2)} = 1$$

$$x/a(1-t_1^2) + y/b(2t_1) = 1 + t_1^2 \quad \text{——— (1)}$$



(1) & (2) $\Rightarrow x = \frac{a(1-t_1t_2)}{(1+t_1t_2)}$

$y = \frac{b(t_1+t_2)}{(1+t_1t_2)}$

அத்தியாயத்தில் இருந்து

$$A \equiv \left\{ \frac{a(1-t_1t_2)}{1+t_1t_2}, \frac{b(t_1+t_2)}{1+t_1t_2} \right\} \qquad B \equiv \left\{ \frac{a(1-t_2t_3)}{1+t_2t_3}, \frac{b(t_2+t_3)}{1+t_2t_3} \right\}$$

$$C \equiv \left\{ \frac{a(1-t_3t_4)}{1+t_3t_4}, \frac{b(t_3+t_4)}{1+t_3t_4} \right\} \qquad D \equiv \left\{ \frac{a(1-t_4t_1)}{1+t_4t_1}, \frac{b(t_4+t_1)}{1+t_4t_1} \right\}$$

மூலைவிட்டம் AC யின் நடுப்புள்ளி M ஆகின்.

$$M \equiv \left\{ \frac{a}{2}\left(\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2} + \frac{1-t_3t_4}{1+t_3t_4} \right), \frac{b}{2}\left(\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2} + \frac{t_3+t_4}{1+t_3t_4} \right) \right\}$$

மூலைவிட்டம் BD யின் நடு N ஆகுக

$$N \equiv \left\{ \frac{a}{2}\left(\frac{1-t_2t_3}{1+t_2t_3} + \frac{1-t_4t_1}{1+t_4t_1} \right), \frac{b}{2}\left(\frac{t_2+t_3}{1+t_2t_3} + \frac{t_4+t_1}{1+t_4t_1} \right) \right\}$$

S=0 இன் மையம் $O \equiv (0,0)$

$$OM \text{ இன் படித்திறன்} = \frac{\frac{b}{2}\left\{ \frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2} + \frac{t_3+t_4}{1+t_3t_4} \right\} - 0}{\frac{a}{2}\left\{ \frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2} + \frac{1-t_3t_4}{1+t_3t_4} \right\} - 0}$$

$$= \frac{b}{a} \frac{(t_1+t_2)(1+t_3t_4) + (t_3+t_4)(1+t_1t_2)}{(1-t_1t_2)(1+t_3t_4) + (1-t_3t_4)(1+t_1t_2)}$$

$$= \frac{b}{a} \frac{t_1+t_2+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4+t_3+t_4+t_1t_2t_3+t_1t_2t_4}{1+t_3t_4-t_1t_2-t_1t_2t_3t_4+1+t_1t_2-t_3t_4-t_1t_2t_3t_4}$$

$$= \frac{b}{a} \frac{(t_1+t_3)(1+t_2t_4) + (t_2+t_4)(1+t_1t_3)}{(1-t_1t_3)(1+t_2t_4) + (1-t_2t_4)(1+t_1t_3)}$$

$$= \frac{\frac{b}{2}\left\{ \frac{t_1+t_3}{1+t_1t_3} + \frac{t_2+t_4}{1+t_2t_4} \right\}}{\frac{a}{2}\left\{ \frac{1-t_1t_3}{1+t_1t_3} + \frac{1-t_2t_4}{1+t_2t_4} \right\}}$$

= ON இன் படித்திறன்

∴ O, M, N என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்கும்.

(ஈ) கோடு $y = mx + c$ என்பது அதிபரவளைவு $S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ இற்கு வரையப்பட்ட ஒரு தொடலியாகும். தொடுகைப்புள்ளியின் ஒரு நிலைக்கூறு $a^2m^2 - b^2 = c^2$ ஆகும் சமன்பாடு $c^2x^2 + 2a^2mcx + a^2c^2 + a^2b^2 = 0$ இனது சமமான மூலங்களை இலிருந்து பெறப்படும் வளையியாக S=0

மீது புள்ளி (h,k) இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டையும் $S=0$ இனுடைய அணுகு கோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.
$P\equiv(at, bt)$, $Q\equiv(at', -bt')$ என்னும் புள்ளிகள் $S=0$ இனுடைய அணுகு கோடுகளின் மீது இருக்கின்றன. M என்பது PQ வின் நடுப் புள்ளியாகும்.
(i) M ஆனது $S=0$ இன் மீது இருப்பின். $tt'=1$ எனவும் PQ ஆனது M இலே $S=0$ இற்கு உரு தொடலியெனவும் $S=0$ இன் மையம் C எனக் கொண்டால் $CP.CQ=a^2+b^2$ எனவும் காட்டுக.
(ii) $S=0$ இன் மையவகற்சித் திறன் e ஆனது $\sqrt{2}$ இலும் குறைவானதெனவும் PQ ஆனது நிலைத்த நீளத்தைக் கொண்டுள்ள இருந்தாலின் M இன் ஒழுக்கானது மையவகற்சித் திறன் $=\sqrt{2-e^2}$ ஐ உடைய ஒரு நீள்வளையமாகும் என்று நிறுவுக.

(7) $y=mx+c$ —(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ —(2)

(1)&(2) $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow (b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mcx-a^2c^2-a^2b^2=0$ —(3)

$y=mx+c$ ஆனது தொடலியாதலால் (3) இன் தீர்வுகள் சமனாகும்

$$a^4m^2c^2+(b^2-a^2m^2)(a^2c^2+a^2b^2)=0$$
$$(b^2-a^2m^2)a^2b^2+a^2b^2c^2=0$$
$$\therefore b^2-a^2m^2=-c^2$$

(3) $\Rightarrow c^2x^2+2a^2mcx+a^2c^2+a^2b^2=0$ —(4)

(h,k) என்பது தொடுபுள்ளி எனின்

$$h=\frac{-a^2mc}{c^2} \qquad m=-\frac{hc}{a^2}$$

ஆகவே $k=-\frac{h^2c}{a^2}+c \Rightarrow k=c\left(1-h^2/a^2\right)$

$\therefore k=c(-k^2/b^2) \quad \therefore c=-b^2/k$

$\therefore y=mx+c \Rightarrow y=\left(-\frac{hc}{a^2}\right)x+c$

$$y=-\left(\frac{hx}{a^2}+1\right)c=\left(\frac{hx}{a^2}+1\right)\left(b^2/k\right)$$

$\frac{hx}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$ இதுவே (h,k) யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடாகும்.

$y=mx+c$ ஆனது அணுகு கோடாக இருப்பின் (4) இன் இருமூலங்களும் முடிவிலியாகும்

$c^2=0 \quad a^2mc=0$

$\therefore m=\pm b/a$ ஆயும் பெறுகை $(\because c^2=a^2m^2-b^2)$

அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$x/a + y/b = 0 \qquad \frac{x}{a} - y/b = 0$ ஆகும்

$P \equiv (at, bt) \qquad Q \equiv (at', -bt')$

PQ இன் நடுப்புள்ளி $M \equiv \left[\frac{a}{2}(t+t'), \frac{b}{2}(t-t')\right]$

(i) M ஆனது $S=0$ இல் கிடக்குமாயின்

$$\frac{a^2(t+t')^2}{4a^2} - \frac{b^2(t-t')^2}{4b^2} = 1$$

$$(t+t')^2 - (t-t')^2 = 4 \qquad \therefore tt' = 1$$

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

M இல் $S=0$ இற்கு வரைந்த தொடலியின்

$$\text{ப.சி} = \frac{b^2 \cdot \frac{a}{2}(t+t')}{a^2 \cdot \frac{b}{2}(t-t')}$$

$\therefore$ PQ இன் படித்திறன் $= \frac{b}{a}\frac{(t+t')}{(t-t')}$

PQ ஆனது M இல் $S=0$ இற்கு வரைந்த தொடலியாகும்

$S=0$ இன் மையம் $C \equiv (0,0)$

$$CP \cdot CQ = \sqrt{(at)^2+(bt)^2} \cdot \sqrt{(at')^2+(-bt')^2}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(t) \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,(t') = (a^2+b^2)tt'$$

$$= a^2+b^2 \quad (\because tt'=1)$$

(ii) $PQ = \sqrt{(at-at')^2+(bt+bt')^2} = \sqrt{a^2(t-t')^2+b^2(t+t')^2}$

$= d$ என்க

$$M = \left[\frac{a}{2}(t+t'), \frac{b}{2}(t-t')\right] = (x, y)$$

$\therefore$ M இன் ஒழுக்கு

$$a^2\left(\frac{2y}{b}\right)^2 + b^2\left(\frac{2x}{a}\right)^2 = d^2$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ad}{2b}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bd}{2a}\right)^2} = 1$$

இது ஓர் நீள்வளையமாகும் இதன் மையவகற்சித் திறன் e_1 எனின்

$$\frac{b^2d^2}{4a^2} = \frac{a^2d^2}{4b^2}(1-e_1^2)$$

$$(1-e_1^2) = \frac{b^4}{a^4} = (1-e^2)^2 \qquad [\because b^2 = a^2(1-e^2)]$$

$$1-e_1^2 = 1-2e^2-e^4$$

$$e_1^2 = e^2(2-e^2)$$

$$\therefore e_1 = e\sqrt{2-e^2}$$

$e<\sqrt{2}$ ஆகையால் e_1 மெய்யானது

(6) (i) $a^2+b^2>c^2$ எனின் சமன்பாடு $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ யைத் திருப்தியாக்குகின்ற 0 க்கும் 2π க்கும் இடையே உள்ள α,β என்னும் வேறு வேறான இரு பெறுமானங்கள் இருக்கும் என்று காட்டுக.

$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=c^2/a^2+b^2$ என்று நிறுவுக.

(ii) $x=\sin\alpha$ என்பது சமன்பாடு $4x^3-3x+\sin 3\alpha=0$ இன் ஒரு மூலமெனக் காட்டி அதன் மற்றைய மூலங்களிரண்டையும் கோணங்களின் சைன்களாக எடுத்துரைக்க.

$\alpha=10^\circ$ எனக் கொண்டோ, வேறுவிதமாகவோ, $\mathrm{cosec}\,10^\circ+\mathrm{cosec}\,130^\circ+\mathrm{cosec}\,250^\circ=6$ என்று காட்டுக [சமன்பாடு $ax^3+bx^2+cx+d=0$ இனுடைய மூலங்களின் கூட்டுத் தொகை $-b/a$ ஆகும் எனக் கொள்ளலாம்]

(6) (i) $a\cos\theta+b\sin\theta=c$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{—(1)}$$

$\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனவும் $\sin\phi=b/\sqrt{a^2+b^2}$ எனவும்

$(1)\Rightarrow \cos(\theta-\phi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad a^2+b^2>c^2$ எனின்

$$-1<\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$$

$\therefore \cos\psi=c/\sqrt{a^2+b^2}$ ஆகுமாறு ψ கிடைக்கும்.

$\cos(\theta-\phi)=\cos\psi$

$\theta-\phi=2n\pi\pm\psi$

$\therefore \theta=2n\pi\pm\psi+\phi$ இங்கு $n=---\,-1,0,1\,---$

$\alpha=2n_1\pi+\psi+\phi \quad , \beta=2n_2\pi-\psi+\phi$

$0<\alpha,\ \beta<2\pi$ ஆகுமாறு சுடுக $n_1,n_2=0\pm1$

$\alpha=\beta$ எனின் $\cos(\alpha-\beta)=\cos 2\psi$

$$=2\cos^2\psi-1$$

$$=\frac{2c^2}{a^2+b^2}-1$$

$\Rightarrow \therefore c^2=a^2+b^2$ ஆனால் $a^2+b^2>c^2$ இற்கு முரணானது.

$\therefore \alpha\neq\beta$

$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\left[(n_1-n_2)\pi+\psi\right]=\pm\cos\psi$

$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos^2\psi=\frac{c^2}{a^2+b^2}$

(ii) $4x^3-3x+\sin3\alpha=0$ —(1)

$x=\sin\alpha$ ஐ பிரதியிட

$4\sin^3\alpha-3\sin\alpha+\sin3\alpha=-\sin3\alpha+\sin3\alpha=0$

$\therefore x = \sin\alpha$ என்பது ① இன் ஒரு மூலம்

$① \Rightarrow (x - \sin\alpha)[4x^2 + (4\sin\alpha)x - 3 + 4\sin^2\alpha] = 0$

$4x^2 + (4\sin\alpha)x + 4\sin^2\alpha - 3 = 0$

$x = \dfrac{-4\sin\alpha \pm \sqrt{16\sin^2\alpha - 16(4\sin^2\alpha - 3)}}{8} = \dfrac{-\sin\alpha \pm \sqrt{3(1-\sin^2\alpha)}}{2}$.

மற்றைய மூலங்கள் $x_1 = \frac{1}{2}(-\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha)$

$x_2 = \frac{1}{2}(-\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)$

$x_1 = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{2\pi}{3}\sin\alpha = \sin(2\pi/3 + \alpha)$

$x_2 = \sin 4\pi/3 \cos\alpha + \cos 4\pi/3 \sin\alpha = \sin(4\pi/3 + \alpha)$

இதன் மறுதலையான $\frac{1}{\sin\alpha}, \frac{1}{\sin(2\pi/3 + \alpha)}, \frac{1}{\sin(\frac{4\pi}{3} + \alpha)}$

~~என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு~~

$4\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x}\right) + \sin 3\alpha = 0$

$(\sin 3\alpha)x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ ——— (2)

$\alpha = 10^\circ$ எனின் $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8 = 0$ இன் மூலங்கள்.

$\frac{1}{\sin 10}, \frac{1}{\sin 130}, \frac{1}{\sin 250}$

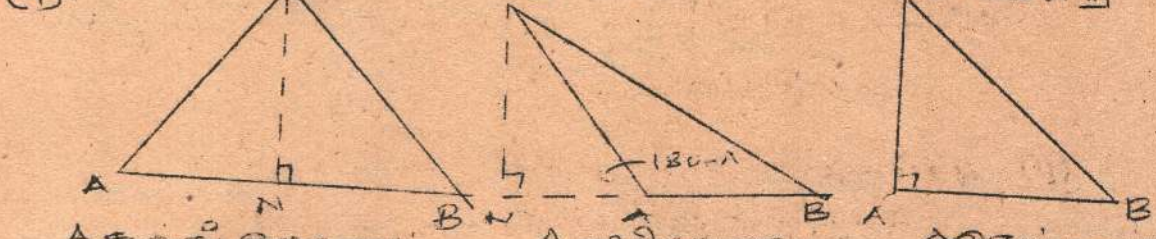
என்பன

$\therefore \frac{1}{\sin 10} + \frac{1}{\sin 130} + \frac{1}{\sin 250} = \frac{-x^2 \text{ இன் குணகம்}}{x^3 \text{ இன் குணகம்}} = 6$

$\therefore \operatorname{cosec} 10^\circ + \operatorname{cosec} 130^\circ + \operatorname{cosec} 250^\circ = 6$.

(a) Δ என்பது ஒரு முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் குறிக்கட்டும்.
$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$ என நிறுவுக.
ஒரு முக்கோணி ABC யினுடைய கோணங்கள் A, B, C யின் இருகூறாக்கிகள்
எதிர்ப் பக்கங்களை முறையே D, E, F ஆகிய
புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. ΔABC யின் உள்
வரைந்த வட்டத்தின் மையம் O எனின்
$AO = \frac{2\Delta}{a+b+c}\operatorname{cosec} A/2$ எனக் காட்டுக
ΔDEF இன் பரப்பளவு $\dfrac{2abc\Delta}{(b+c)(c+a)(a+b)}$ எனவும் காட்டுக.

(a)

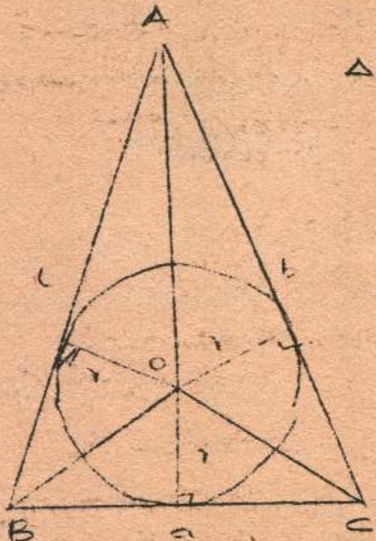


A கூர்ங் கோணம் A விரிகோணம் A செங்கோணம்

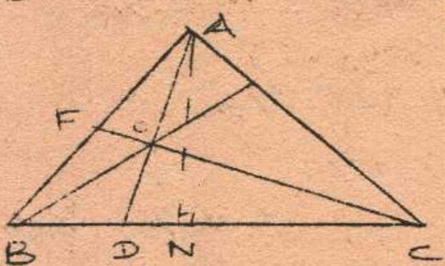
C யில் இருந்து AB யிற்கு ⊥ CN வரைக.

வகை I	வகை II	வகை III
$\Delta = \frac{1}{2} AB . CN$	$\Delta = \frac{1}{2} AB . CN$	$\Delta = \frac{1}{2} AB . AC$
$= \frac{1}{2} c . AC \sin A$	$= \frac{1}{2} AB . AC \sin(180 - A)$	$= \frac{1}{2} c . b \sin A$
$= \frac{1}{2} bc \sin A$	$= \frac{1}{2} c . b \sin A$	$(\because \sin A = 1)$
	$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$	

$\therefore$ எல்லா வகையிலும் $\Delta = \frac{1}{2} . b . c \sin A$



$$\Delta ABC = \Delta AOC + \Delta AOB + \Delta BOC$$
$$= \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} ar$$
$$\Delta = \frac{r}{2}(a+b+c)$$
$$r = OA \sin A/2$$
$$\therefore OA = \frac{2\Delta}{a+b+c} \operatorname{cosec} A/2$$



$$\frac{\Delta ABD}{\Delta ADC} = \frac{\frac{1}{2} AB . AD \sin A/2}{\frac{1}{2} AC . AD \sin A/2} = c/b$$
$$= \frac{\frac{1}{2} BD . AN}{\frac{1}{2} DC . AN}$$
$$\therefore BD/DC = c/b$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = c/a+b \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}$$

இதேபோல $\frac{AF}{FB} = b/a \Rightarrow BF = ca/a+b$

$\therefore$ ΔBFD யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} BF . BD \sin B$

$$= \frac{1}{2} \frac{ac}{a+b} . \frac{ac}{b+c} \sin B$$
$$= \frac{ac\Delta}{(a+b)(b+c)} \quad [\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B]$$

இவ்வாறே ΔAFE இன் பரப்பளவு $= \frac{ab\Delta}{(a+c)(b+c)}$

ΔDEF இன் பரப்பளவு $= \Delta ABC - (\Delta BFD + \Delta AFE + \Delta DEC)$

$$= \Delta - \Delta\left[\frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc}{(b+a)(c+a)} + \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right]$$
$$= 2abc\Delta / (a+b)(b+c)(c+a)$$

(10) AB என்ற இரு கோட்டுப்புள்ளிகளின் ஊடாக சட்டம் ஒன்றை விரிவாக்கும் போது A லிருந்து நீக்கத்தை 1/3 ஆலும் B லிருந்தும் இருந்தது 1/2 அளவு பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சட்டம் வெளி

தோல்வியின்றி முடிவதற்கான நிகழ்தகவை காண்க
அவர்கள் மூன்று கட்டங்களையும்
விளையாடுவதாகக் கொள்கின்றனர்
(1) எல்லா கட்டங்களிலும் B வெல்லுதல்
(2) இரு கட்டங்களும் வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவடைதல்
(3) A யும் B யும் மாறி மாறி வெல்லுதல்
(4) குறைந்தது ஒரு கட்டத்திலாவது A வெல்லுதல் ஆகியவற்றுக்கான நிகழ்தகவை காண்க

மூன்று கட்டங்களில் A வெல்லும் கட்டங்களின் எண்ணிக்கை X எனில், X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் காண்க. இதிலிருந்து X இன் இடையையும் மாறற்றிறனையும் காண்க.

(10) P(கட்டம் ஒன்றில் A வெல்லுதல்) $= 1/3$

P(" " B ") $= 1/2$

P(கட்டம் ஒன்று வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவடைதல்)
$= 1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = 1/6$

(i) P(3 கட்டங்களிலும் B வெல்லுதல்) $= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 1/8$

(ii) P(2 கட்டங்கள் வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவடைதல்)
$= 1/6\cdot 1/6\cdot 5/6 + 1/6\cdot 5/6\cdot 1/6 + 5/6\cdot 1/6\cdot 1/6 = 5/12$

(iii) P(A யும் B யும் மாறி மாறி வெல்லுதல்)
$= 1/3\cdot \frac{1}{2}\cdot 1/3 + 1/2\cdot 1/3\cdot 1/2 = 5/36$

(iv) P(A தோல்வியடைதல்) $= 1-1/3 = 2/3$

(v) P(3 இலும் A தோல்வியடைதல்) $= 2/3\cdot 2/3\cdot 2/3 = 8/27$

$\therefore$ P(குறைந்தது 1 கட்டத்திலாவது A வெற்றியடைதல்)
$= 1-2/3\cdot 2/3\cdot 2/3 = 1-8/27 = 19/27$.

$X=x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	$8/27$	$4/9$	$2/9$	$1/27$

X – A வெல்லும் கட்டங்களின் எண்ணிக்கை

$X - 0, 1, 2, 3$.

$P(x=0) = 2/3\cdot 2/3\cdot 2/3 = 8/27$

$P(x=1) = 3(1/3\cdot 2/3\cdot 1/3) = 4/9$

$P(x=2) = 3(1/3\cdot 1/3\cdot 2/3) = 2/9$

$P(x=3) = 1/3\cdot 1/3\cdot 1/3 = 1/27$

$E(x) = 0\cdot 8/27 + 1\times 4/9 + 2\times 2/9 + 3\times 1/27 = 1$.

$E(x^2) = 0^2\times 8/27 + 1^2\times 4/9 + 2^2\times 2/9 + 3^2\times 1/27 = 5/3$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 5/3 - 1 = 2/3$

$\cdot\circ O \bigcirc O \circ\cdot$

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூயகணிதம் 1. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1987.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக:

1 (i) $u_r = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ $f(r) = \frac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)}$ ஆயின்,

$f(r) - f(r-1) = u_r$ ஆகுமாறு λ, μ எனும் மாறிலிகளைக் காண்க?

$\sum_{r=1}^{n} u_r$ ஐ பெறுமானம் காண்க?

தொடரானது ஒருங்குமெனக் காட்டி, அதன் முடிவில் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க?

(ii) நான்கு நேரான அடுத்து வரும் முழுவெண்களின் பெருக்கமானது 24 ஆல் பிரிக்கப்படுமெனக் காட்டுக. $n \geq 2$ ஆயின் கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையைப் பயன்படுத்தி $n^5 - 5n^3 + 60n^2 - 56n$ ஆனது 120 ஆல் பிரிக்கப்படுமென நிறுவுக?

விடை :-

$$u_r = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)} \qquad f(r) = \frac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)}$$

$$f(r) - f(r-1) = u_r \quad (\text{தரவு})$$

$$\frac{\lambda r + \mu}{(r+1)(r+2)} - \frac{\lambda(r-1)+\mu}{r(r+1)} = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$$

$$\frac{\lambda r^2 + \mu r - [\lambda(r-1)+\mu](r+2)}{r(r+1)(r+2)} = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$$

$$\frac{-\lambda r + 2(\lambda - \mu)}{r(r+1)(r+2)} = \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$$

$$\therefore -\lambda r + 2(\lambda-\mu) = 2r+1$$

$$\therefore \lambda = -2 \qquad 2(\lambda - \mu) = 1, \quad \lambda - \mu = \tfrac{1}{2}$$

$$\mu = -2 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{5}{2}$$

$$u_r = f(r) - f(r-1)$$

$r=1$ ஆக $u_1 = \cancel{f(1)} - f(0)$

$r=2$ ஆக $u_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)}$

$r=3$ ஆக $u_3 = \cancel{f(3)} - \cancel{f(2)}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad = \qquad \vdots$

$r=(n-1)$ ஆக $u_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - f(n-2)$

$r=n$ ஆக $u_n = f(n) - \cancel{f(n-1)}$

கூட்டும் போது $\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) - f(0)$

∴ $r = n$ ஆக $f(n) = \frac{\lambda_n + \mu}{(n+1)(n+2)} = \frac{-2n + (-5/2)}{(n+1)(n+2)}$

$$f(n) = \frac{-4n-5}{2(n+1)(n+2)} = \frac{-4(n+5/4)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+5/4)}{(n+1)(n+2)}$$

$r = 0$ ஆக, $F(0) = \frac{-5/2}{1\times 2} = -5/4$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = f(n) - f(0) = \frac{-2n}{(n+1)(n+2)} - \frac{5/2}{(n+1)(n+2)} + 5/4$$

$$= 5/4 - \frac{2n}{(n+1)(n+2)} - \frac{5}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= 5/4 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)}$$

$$= 5/4 - \frac{1/n}{2(1+1/n)} - \frac{3/n}{2(1+2/n)}$$

n ஆனது $+\infty$ ஐ அணுக $1/n \longrightarrow 0$
$n \longrightarrow +\infty$

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r \longrightarrow 5/4$ ஐ அணுகும்

∴ $\sum_{r=1}^{n} u_r$ ஆனது ஓர் முடிவுள்ள பெறுமானத்தை அணுகுகிறது.
n ஆனது ∞ ஐ அணுகும் போது இத்தொடர் ஒருங்குகிறது.
∴ இது ஒருங்கு தொடராகும்.
முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகை $= 5/4$ ஆகும்.

(iii) நான்கு அடுத்து வரும் நேரெண்களின் பெருக்கத்தை $n(n+1)(n+2)(n+3)$ எனக் கொள்க. இங்கு n ஆனது ஒரு நேர் முழுஎண்ணாகும்.

$n = 1$ ஆக $1\times 2\times 3\times 4 = 24$ ∴ $n=1$ ஆக 24 ஆல் வகுபடும்.
$n = 2$ " $2\times 3\times 4\times 5 = 24\times 5$ ∴ $n=2$ " " " "
⋮

$n = p$ ஆக, இம்முடிவு உண்மை எனின்
$p(p+1)(p+2)(p+3)$, 24 ஆல் பிரிபடும்.

$n = (p+1)$ ஆக $(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$
$= p(p+1)(p+2)(p+3) + 4(p+1)(p+2)(p+3)$

ஆனால் $(p+1)(p+2)(p+3)$, 2 or 3 ஆல் பிரிபடும்.
எனவே $4(p+1)(p+2)(p+3)$ ஆனது 24 ஆல் பிரிபடும்
∴ $n = (p+1)$ ஆனாலும் 24 ஆல் பிரிபடும்

$n=1$ ஆக முடிவு உண்மை
$n=2$ " "
$n=p$ " "
$n=(p+1)$ ஆக "

எனவே n இன் எந்த நேர் முழுஎண் பெறுமானத்துக்கும் $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ஆனது 24 ஆல் பிரிபடும்

OR

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ அதாவது ஒரு பெருக்கம் 3 ஆல் பிரிபடும்

எனவே $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ஆனது 3 ஆல் வகுபடும்.

n or $(n+1)$ ஆனது இரட்டை எண்ணாகும்.

$\therefore n(n+1)$ ஆனது 2 ஆல் வகுபடும்.

இதுபோல் $(n+2)(n+3)$ இரண்டால் பிரிபடும்.

$n(n+1)$ ஐ 4 பிரிக்காது ஆகவே $n(n+1)$ ஐ $4k+2$ என எழுதலாம். k இன் மறையில்லா எண் தவிர்ந்த பெறுமானங்களுக்கு

$(n+2)(n+3) = n(n+1) + 4n + 6$

$= 4k + 4n + 8$

அப்போது $(n+2)(n+3)$ ஐ 4 பிரிக்கும்

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ ஐ 8 பிரிக்கும். எனவே

$n(n+1)(n+2)(n+3)$ ஐ 24 பிரிக்கும்.

$f_{(n)} = n^5 - 5n^3 + 60n^2 - 56n$

$n \geq 2$ $n=2$ ஆக $F_{(2)} = 3^2 - 40 - 240 - 112 = 120$

$F_{(2)}$ ஆனது 120 இனால் வகுபடும்.

$n=p$ இற்கு $F_{(p)} = p^5 - 5p^3 + 60p^3 - 56p$ ஆனது 120 இனால் பிரிபடும் என்க.

$n=(p+1)$ ஆக $F_{(p+1)} = (p+1)^5 - 5(p+1)^3 + 60(p+1)^2 - 56(p+1)$

$= (p^5 - 5p^3 + 60p^2 - 56p) + 5p^4 + 10p^3 - 5p^2 - 10p + 120p$

$= F_{(p)} + 5(p+2)(p+1)p(p-1) + 120p$

$F(p)$ ஆனது 120 ஆல் பிரிபடும்.

முதற்பகுதியின் படி

$(p-1)p(p+1)(p+2)$ ஆனது 120 ஆல் பிரிபடும்.

$(5 \times 24 = 120)$

எனவே $n = (p+1)$ ஆக முடிவு உண்மை

$n = 2$ " " "

$n = p$ " " "

$n = p+1$ " " "

$\therefore n$ இன் $(n \geq 2)$ நேர் முழு எண் பெறுமானங்களுக்கு முடிவு உண்மை.

2 (i) ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை, பெருக்கம் ஆகியவற்றிற்கான கோவைகள் அதன் குணகங்களில் பெறுக.

α, β என்பன $x^2 + px + = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆயின் $\alpha+\lambda, \beta+\lambda$ எனும் மூலங்களையுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கே λ ஆனது ஒரு ஒருமையாகும். மேலும் γ, δ என்பன $x^2 + qx + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின்

$(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta) = q^2 - p^2$ ஆகுமென நிறுவுக

(ii) NARRAGGANSETT எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து முறைக்கு நான்கு எழுத்துக்கள் தேர்ந்தெடுத்து எத்தனை வெவ்வேறு வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம் என்பதை ஆராய்க.

விடை

α_1, α_2 என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனின்

$\therefore a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}] \equiv a[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)]$

என எழுதலாம்

$\therefore x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2$

குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதால்

$\alpha_1+\alpha_2 = -b/c \quad , \quad \alpha_1\alpha_2 = c/a$

மூலங்களின் கூ. தொகை $= (-b/a)$

" பெருக்கம் $= (c/a)$

α, β என்பன $x^2+px+1=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின்

$\alpha+\beta = -p \qquad \alpha\beta = 1$

$(\alpha+\lambda), (\beta+\lambda)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$x^2 - x$(மூலங்களின் கூ. தொ) + மூலங்களின் பெருக்கம் $= 0$

மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை: $\alpha+\lambda+\beta+\lambda$
$= \alpha+\beta+2\lambda = (-p+2\lambda)$

மூலங்களின் பெருக்கம் $= (\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)$
$= \alpha\beta+\lambda(\alpha+\beta)+\lambda^2$
$= (1+\lambda^2-p\lambda)$

$\therefore$ சமன்பாடு

$x^2+(p-2\lambda)x+(\lambda^2-p\lambda+1)=0$ ஆகும்.

OR

$t = (x+\lambda)$ ஆகவே $x = (t-\lambda)$

t ஐ பரமாணம்

$x^2+px+1=0$ இச் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$(t-\lambda)^2+p(t-\lambda)+1=0$

$t^2+(p-2\lambda)t+(\lambda^2-p\lambda+1)=0$

$\therefore (\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு t க்கு x ஐப் பிரதியிட —

$x^2+(p-2\lambda)x+(\lambda^2-p\lambda+1)=0$, γ, δ என்பன $x^2+qx+1=0$ இன் மூலங்களாயின்

$\gamma - \delta = -q \quad , \quad \gamma \cdot \delta = 1$

$(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta-\delta) = q^2 - p^2$

$L.H.S = (\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$

$= [\alpha\beta + \gamma\beta + \gamma\alpha + \gamma^2][\alpha\beta - \gamma\beta + \delta^2 - \alpha\delta]$

$= [1 + \gamma(-p) + \gamma^2][1 + \delta q + \delta^2]$

$= [1 - p\gamma + \gamma^2][1 + \delta q + \delta^2]$

$= [1 + \gamma^2 + q\gamma - q\gamma - p\gamma][1 + \delta^2 + \delta q - \delta q + \delta p]$

$= [-\gamma(q+p)][-\delta(q-p)]$

$= (q^2 - p^2) \qquad [\because \gamma\delta = 1]$

காரணம் γ, δ என்பன $x^2 + qx + 1 = 0$ என்பதன் மூலங்களாதலால் $\gamma^2 + q\gamma + 1 = 0$

$\delta^2 + q\delta + 1 = 0$

(ii)

NARRAGGANSETT

$= N_2 A_3 R_2 G_2 S_1 E_1 T_2$

முறைக்கு 4 எழுத்துக்கள் தெரிந்தெடுத்து வெவ்வேறு வரிசைமாற்றங்களின் பின்வரும் வகைகளாகச் செய்யலாம்.

(a) 3 எழுத்துக்கள் ஒரே இனமாகவும், மற்றைய எழுத்தொன்றும்.

(b) 2 " " " , 2 எழுத்துக்கள் வித்தியாசமாகவும்

(c) 2 " " " , 2 " வேறொன்றாகவும்

(d) 4 எழுத்துக்களும் வித்தியாசமாக இருத்தல்

(a) $1 \times {}^6C_1 = 6$ முதல் வகையில் தெரிந்தெடுத்தல்

3 எழுத்துக்கள் ஒன்றாயிருத்தல்.

3 எழுத்துக்கள் ஒரு வகையும், மற்றையது வேறொன்றாகவும்

$= 6 \times \frac{4!}{3!} = 24$

(b) இரண்டாம் வகைக்குரிய தெரிவு ${}^5C_2 = 10$

2 எழுத்துக்கள் ஒரே இனமாகவும் மற்றையது வேறு ஒன்றாகவும் இருக்க

$10 \times \frac{4!}{2!\,2!} = 60$

(c) 3 ஆம் வகைக்கு தெரிவு செய்யும் முறை

$= {}^5C_1 \times {}^6C_2 = 75$

2 எழுத்துக்கள் ஒரே இனமாகவும் மற்றையது வித்தியாசமாகவும் இருக்க $75 \times \frac{4!}{2!} = 900$

(d) தனித்தனியாக தேர்ந்தெடுக்கும் வழி $^7C_4 = 35$

4 எழுத்துகளும் வித்தியாசமாக இருக்க $= 35 \times 4! = 840$

மொத்தமாக தேர்ந்தெடுக்கும் வித்தியாசமான தெரிவுகள்
$$= (24 + 60 + 900 + 840)$$
$$= 1824$$

(3) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனின், $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$, $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கே n ஆனது ஒரு நேர் முழுவெண் ஆகும்.

இதிலிருந்தோ or வேறு வழியாகவோ.

(அ) $3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 2(\cos^6\theta + \sin^6\theta) = 1$ ஆகுமெனக் காட்டுக

(ஆ) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$ ஐ முற்றாகத் தீர்க்க

விடை :-

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ - n - ஆனது நேர் முழுவெண்ணாகும்.

தமோய்வரின் தேற்றத்தால்

$$z^n = [\cos n\theta + i\sin n\theta] \quad \text{—— ①}$$

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \times \frac{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta - i^2\sin^2 n\theta} = \frac{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}{(\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta)}$$

$$\frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad \text{—— ②}$$

$$① + ② \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

$$① - ② \Rightarrow z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^4 = 2^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

$$(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = \frac{1}{16}\left[z^4 + \frac{1}{z^4} + 6 + 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + z^4 + \frac{1}{z^4} + 6 - 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\right.$$

$$(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = \frac{1}{8}\left[z^4 + \frac{1}{z^4} + 6\right] \quad \text{—— ①}$$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^6 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^6 = [\cos^6\theta + \sin^6\theta]$$

$$\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{64}\left[12\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 40\right] \quad \text{—— ②}$$

$$3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 2(\cos^6\theta + \sin^6\theta)$$
$$= \tfrac{3}{8}\left[z^4 + \frac{1}{z^4} + 6\right] - \frac{2}{64}\left[12\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 40\right]$$
$$= \tfrac{3}{8}\left[z^4 + \frac{1}{z^4} + 6\right] - \tfrac{1}{8}\left[3\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 10\right]$$
$$= \frac{18}{8} - \frac{10}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

OR

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta \quad \text{— (1)}$$
$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3 = \cos^6\theta + \sin^6\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\sin^4\theta$$
$$= \cos^6\theta + \sin^6\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta \quad \text{— (2)}$$

$(1) \times 3 - (2) \times 2 \Rightarrow 3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - 2(\cos^6\theta + \sin^6\theta) = 1$

(ஆ) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$ $\qquad x^2 \neq 0$

இருபுறமும் x^2 ஆல் பிரிக்க

$$5x^2 - 10x + 16 - \frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} = 0$$
$$5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0$$

ஆனால், $x^2 + \frac{1}{y^2} = 2\cos 2\theta$ $\qquad \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\cos\theta$

$$5\cos 2\theta - 11\cos\theta + 8 = 0$$
$$10\cos 2\theta - 11\cos\theta + 3 = 0$$
$$(5\cos\theta - 3)(2\cos\theta - 1) = 0$$

ஆகவே $(x + 1/x) = 6/5$ $\qquad \because 2\cos\theta = (x + 1/x)$

$$x^2 + 1 = 6/5\, x$$

$5x^2 - 6x + 5 = 0$ $\qquad x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10} = \dfrac{3 \pm 4i}{5}$

$\cos\theta = 1/2$ $\quad \therefore (x + 1/x) = 2 \times 1/2 = 1$

$$x^2 + 1 = x \Rightarrow x^2 - x \pm 1 = 0$$
$$x = \left(1/2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$\therefore$ நான்கு மூலங்களும்

$$\left(\frac{3 + 4i}{5}\right) \text{ OR } \left(\frac{3 - 4i}{5}\right) \text{ OR } \left(\frac{1 + \sqrt{3}\, i}{2}\right) \text{ OR } \left(\frac{1 - \sqrt{3}\, i}{2}\right)$$

OR x^2 ஆல் சமன்பாட்டை பிரிக்க நாம் பெறுவது

$$5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0$$

(அ-து) $5\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

$5y^2 - 11y + 6 = 0$ $\qquad$ இங்கு $y = (x + 1/x)$

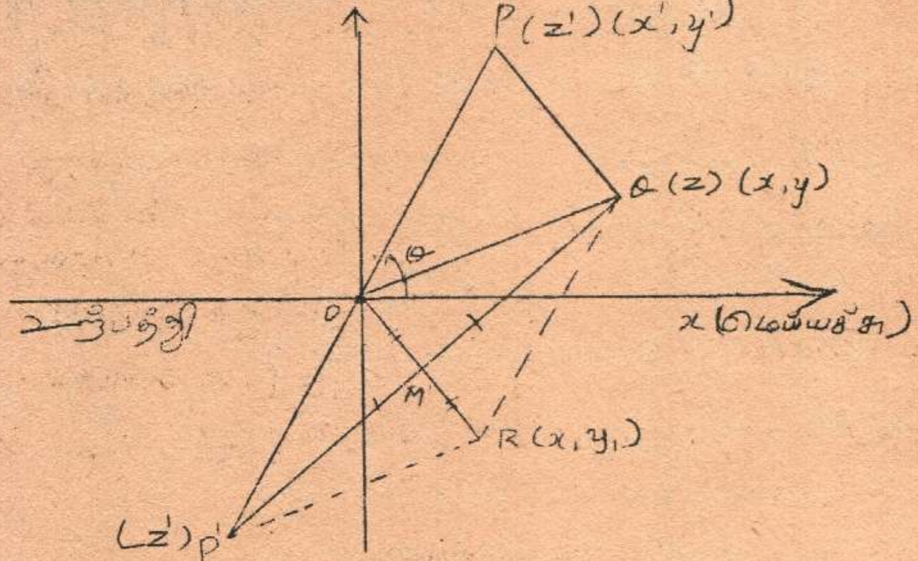
$(5y - 6)(y - 1) = 0$ $\qquad \therefore y = 6/5$ OR 1

$\therefore x + 1/x = 6/5$ OR $x + 1/x = 1$

$$x = \left(\frac{3 \pm 4i}{5}\right) \text{ OR } x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}\right)$$

(4) z, z' எனும் சிக்கலெண்களை முறையே ஆகண் வரிப்படத்திலுள்ள P, P' எனும் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. $z-z'$, zz' ஆகிய சிக்கலெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கான கேத்திரகணித அமைப்பைத் தருக.

P_1, P_2, P_3 எனும் புள்ளிகள் முறையே z_1, z_2, z_3 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. Q_1, Q_2, Q_3 எனும் புள்ளிகள் முறையே zz_1, zz_2, zz_3 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. இங்கே z ஆனது பூச்சியமற்ற ஒரு சிக்கலெண். $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$ என்பன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் எனக் காட்டுக.



P எனும் புள்ளி (z') எனும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கிறது. அதன் ஆள்கூறுகள் (x', y')

$(-z')$ எனும் சிக்கலெண்ணை அமைக்க

$z' = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(-z)' = r[-\cos\theta - i\sin\theta]$

$= r[\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)]$

$(-z') = r[\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)]$

சிக்கலெண் P (அ-து) OP ஐ π மடங்கினூடாகத் திருப்பின் $(-z')$ பெறப்படும்.

$OP'RQ$ என்பது ஓர் இணைகரம் ஆகும் வண்ணம் $PR' \parallel OQ$ ஆகவும் $OP' \parallel QR$ ஆகவும் வரையப்படுகின்றன. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று இருசமகூறிடுவதால் நடுப்புள்ளி M இன் ஆள்கூறுகள்

(i) P' & $Q \Rightarrow \left(\frac{x+(-x')}{2}\right) \quad \left(\frac{y+(-y')}{2}\right)$

$= \left(\frac{x-x'}{2}\right), \left(\frac{0+y'}{2}\right)$

(ii) O & $R \Rightarrow \left(\frac{0+x_1}{2}\right), \left(\frac{0+y_1}{2}\right)$

$= (x_1/2), (y_1/2)$

$\frac{x-x'}{2} \pm \frac{x_1}{2}$ $\quad x_1 = x - x' = (x - x')$

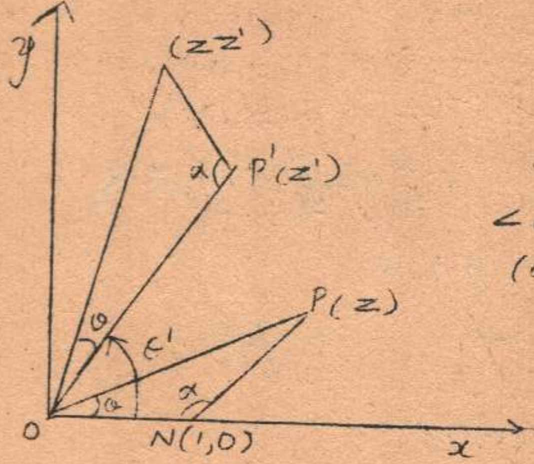
$y_1 = y - y_1 = (y - y')$ //

x_1, y_1 க்கு ஆள்கூறுகளைக் கொண்ட புள்ளியின்

சிக்கலெண் $= (x - x') + i(y - y')$

$= (x + iy) - (x' + iy')$

$zz' = (z - z')$



OP' உடன் θ கோணம் அமைக்கும் வண்ணம் OQ வரையப்படுகிறது.

$\angle ONP \equiv \angle OP'Q$ ஆகுமாறு

(ON = ஓர் அலகுள்ள நீளமாக கருதுக)

$P'Q$ வரையப்படுகிறது.

OQ உம் $P'Q$ உம் வெட்டிச் சந்திக்கின்றன Q என்பது எனவே zz' ஐக் குறிக்கும்

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left.\begin{array}{l} r \to \text{மட்டு} \\ \theta \to \text{வீச்சம்} \end{array}\right\}$ z இற்குரிய.

$z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ $\left.\begin{array}{l} r' \to \text{மட்டு} \\ \theta' \to \text{வீச்சம்} \end{array}\right\}$ z' " "

ON = 1 அலகு

$\Delta OP'Q = ONP$ க்கு சமகோணமானவை

$O\hat{P'}Q = O\hat{N}P$ (அமைப்பு)

$Q\hat{O}P = P\hat{O}N$ (")

$O\hat{P}N = O\hat{Q}P'$

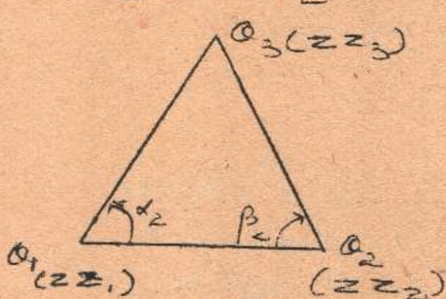
Δங்கள் இயல்பொத்தமை $\therefore \frac{OP'}{ON} = \frac{OQ}{OP}$

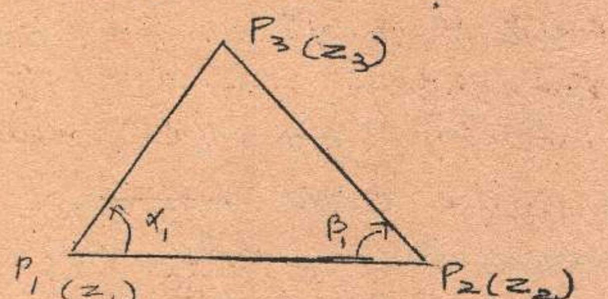
$OQ = \frac{|OP'||OP|}{ON} = rr'$ $\quad \because |OP'| = r'$, $|OP| = r$

$\therefore$ Q க்குரிய சிக்கலெண்ணின் மட்டு (rr')

வீச்சம் $(\theta + \theta')$

$\therefore zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$





z பூச்சியமற்ற ஒரு சிக்கலெண்.

$\Delta Q_3Q_1Q_2$ இல் சுழற்சி தேற்றத்தால்

$$\frac{(zz_3 - zz_1)}{(zz_2 - zz_1)} = \frac{Q_1Q_3}{Q_1Q_2}(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

$\Delta P_3P_1P_2$ வில் சுழற்சி தேற்றத்தால்

$$\frac{(z_3-z_1)}{(z_2-z_1)} = \frac{P_3P_1}{P_2P_1}\,(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$$

$z \neq 0$ எனின்

$$\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right) = \frac{Q_1Q_3}{Q_1Q_2}\,(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

$$\therefore \frac{Q_1Q_3}{Q_1Q_2}(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) = \frac{P_3P_1}{P_2P_1}(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$$

$\alpha_2 = \alpha_1$ ஆயின், $\dfrac{Q_1Q_3}{Q_1Q_2} = \dfrac{P_3P_1}{P_2P_1}$

$$\left(\frac{zz_3 - zz_1}{zz_2 - zz_1}\right) = \pm\alpha_2, \quad \left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right) = \pm\alpha$$

$\Delta Q_3, Q_1, Q_2$ வின் சுழற்சித் தேற்றத்தால்,

$$\left(\frac{zz_1 - zz_2}{zz_3 - zz_2}\right) = \frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_2}(\cos\beta_2 + i\sin\beta_2)$$

$\Delta P_3P_2P_1$ வின் சுழற்சித் தேற்றத்தால்,

$$\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right) = \frac{P_1P_2}{P_3P_2}(\cos\beta_1 + i\sin\beta_1)$$

$z \neq 0$ எனின் $\dfrac{(z_1-z_2)}{(z_3-z_1)} = \dfrac{Q_1Q_2}{Q_3Q_2}(\cos\beta_2 + i\sin\beta_2)$

$$\therefore \frac{P_1P_2}{P_3P_2}(\cos\beta_1 + i\sin\beta_1) = \frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_2}(\cos\beta_2 + i\sin\beta_2)$$

$\beta_2 = \beta_2$ ஆயின் $\dfrac{P_1P_2}{P_3P_2} = \dfrac{Q_1Q_2}{Q_3Q_2}$ ஆகும்

$$\therefore \text{amp}\left(\frac{zz_1 - zz_2}{zz_3 - zz_2}\right) = \pm\beta_2, \ \text{amp}\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right) = \pm\beta_1$$

ஆகவே Δ கள் இயல்பொத்தன

காரணம் $\dfrac{Q_1Q_2}{P_1P_2} = \dfrac{Q_3Q_2}{P_3P_2} = \dfrac{Q_1Q_3}{P_1P_3}$

(5) n என்பது ஓர் நேர் முழு எண் ஆயின்
$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r x^r$ ஆகுமென நிறுவுக.

இங்கு ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ஆகும்

n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்க $(5+2\sqrt{5})^n$ இன் முழு
வெண்ணும் முறையே P, f என்பவற்றால் குறிக்கப்படுமாயின்
$f + (5-2\sqrt{5})^n = 1$ ஆகுமென நிறுவி, அதிலிருந்து
P ஆனது ஓர் ஒற்றை எண் என உய்த்தறிக. மேலும் இதிலிருந்து
$(1-f)(P+f) = 5^n$ எனவும்
$(5+2\sqrt{5})^n = \dfrac{P+1}{5} + \sqrt{\left(\dfrac{P+1}{2}\right)^2 - 5^n}$ எனவும் காட்டுக

விடை

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r x^r$$

$n=1$ ஆக $L.H.S = (1+x)^1 = (1+x)$

$R.H.S = (1+x) \quad \therefore {}^1C_1 = 1$

$n=1$ ஆக முடிவு உண்மை

$n=p$ " " " எனில்

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{r=1}^{n} {}^pC_r x^r$$

இரு பக்கத்தையும் $(1+x)$ ஆல் பெருக்க,

$$(1+x)^{p+1} = \left\{1 + \sum_{r=1}^{p} {}^pC_r x^r\right\}(1+x)$$

$$(1+x)^{p+1} = 1 + \sum_{r=1}^{p} \left({}^pC_{r-1} + {}^pC_r\right) x^r + x^{p+1}$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{p} {}^{p+1}C_r x^r + x^{p+1}$$

$$= \left[1 + \sum_{r=1}^{p+1} {}^{p+1}C_r x^r\right]$$

$n=p+1$ ஆக முடிவு உண்மை

எனவே $n=1$ இற்கு முடிவுண்மை $n=2$ க்கும் முடிவுண்மை

$n=p$ " " " $n=(p+1)$ " " "

எனவே n இன் நேர் முழு எண் பெறுமானங்களுக்கு கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையால் முடிவு உண்மை

$$(5+2\sqrt{5})^n = (P+f)$$

$$f + (5-2\sqrt{5})^n = (5+2\sqrt{5})^n + (5-2\sqrt{5})^n$$

$$= 2\left[5^n + {}^nC_2\, 5^{n-2}\, 4.5 + {}^nC_4\, 5^{n-4}.2^4.5^2 + \dots\right]$$

$(P+F) + (5-2\sqrt{5})^n =$ இரட்டை எண்

$$5 > 2\sqrt{5} > 4$$

$(5-2\sqrt{5})$ இது 1 இலும் சிறிது, நேர் பின்னம்

$(5-2\sqrt{5})^n$ இதுவும் 1 இலும் சிறியது நேர் பின்னம்

6 (i) n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்க

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$$ எனக் காட்டுக

n ஆனது ஒரு மறையெண் ஆகும் பொழுது இம்முடிவு சரியென அதிலிருந்து உய்த்தறிக

$n\ (\neq 0)$ என்பது யாதேனும் ஒரு முழுவெண் ஆயின்,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$ என அதிலிருந்து காட்டுக

(ii) முதற் கோட்பாட்டிலிருந்து $\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$ எனத் தருக

$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x$ ஐக் காண்க. x குறித்து $\{\log(\tan^{-1} x)\}^2$ ஐ வகையிடுக

(iii) $y = x \log \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ எனின்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$ எனக் காட்டுக.

விடை:-

(i) n ஓர் நேர்முழு எண் ஆயின்

$$\frac{(x^n - a^n)}{(x-a)} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots\cdots + a^{n-1}$$

இதன் எல்லை $x = a$ ஆகும் போது

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{x^n - a^n}{x-a}\right] = Lt\,(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$
$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots\cdots + a^{n-1}$$
$$= n a^{n-1} \qquad n - \text{உறுப்புகள்.}$$

n என்பது மறையாய் இருக்கும் போது $n = -m$ இங்கு m நேர் முழுஎண்

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a} = \frac{-(x^m - a^m)}{(x-a)} \times \frac{1}{x^m . a^m}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = -\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{(x-a)},\ \lim_{x\to a} \frac{1}{a^m . x^m}$$

$$= -m . a^{m-1} \times \frac{1}{a^{2m}} = (-m)\, a^{(-m)-1} = n a^{n-1}$$

$$y = x^n \quad — ①$$

x இல் ஏற்படும் சிறிய மாற்றம் δx காரணமாக y இல் ஏற்படும் மாற்றம் δy

$$y + \delta y = (x + \delta x)^n \quad — ②$$

② − ① $\quad \delta y = (x + \delta x)^n - x^n$

$$\delta x \neq 0 \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(x + \delta x)^n - x^n}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x\to 0} \frac{(x + \delta x)^n - x^n}{(x + \delta x) - x}$$
$$= \lim_{z\to x} \frac{(z^n - x^n)}{(z - x)} \qquad \text{எனின் } z = (x + \delta x)$$

$$\frac{d\,(x^n)}{dx} = n x^{n-1}$$ (முதற் பகுதியின்படி)

(ii) $y = \tan x \quad — ①$

x இல் ஏற்படும் சிறிய மாற்றம் δx காரணமாக y இல் ஏற்பட்ட மாற்றம் δy

$$\therefore y + \delta y = \tan(x + \delta x) \quad — ②$$

② − ① $\quad \delta y = \tan(x + \delta x) - \tan x$

$$\delta x \neq 0, \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\tan(x + \delta x) - \tan x}{\delta x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin(x+\delta x)\cos x - \sin x\cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x\,(\delta x)}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin\delta x}{\delta x} \cdot \lim_{\delta x\to 0} \frac{1}{\cos(x+\delta x)}\frac{1}{\cos x}$$

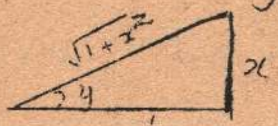
$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$$

$y = \tan^{-1}x \qquad \tan y = x$

x ஐக் குறித்து வகையிட, $\sec^2 y = \frac{dy}{dx} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$



$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$y = \{\log|\tan^{-1}x|\}^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\log|\tan^{-1}x| \cdot \frac{1}{\tan^{-1}x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{2\log|\tan^{-1}x|}{\tan^{-1}x\,(1+x^2)}$$

(iii) $y = x\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$$y = x\log|1+x| - x\log|1-x|$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{(1+x)} + \log|1+x| + x \times \frac{1}{(1-x)} - \log|1-x|$$

$$= \frac{x}{(1+x)} + \frac{x}{(1-x)} + \log|1+x| - \log|1-x|$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

(7) $\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin p - p\cos p)$ எனக் காட்டுக.
இங்கே p ஆனது ஓர் ஒருமை ஆகும்.

$I = \int_0^p \phi(x)\,dx$, $J = \int_0^p \phi(p-x)\,dx$ எனின்

இங்கே $\phi(x)$ ஆனது x இன் தொடர்ச்சியான சார்பாகவும் p ஆனது ஓர் ஒருமையாகவும் உள்ளன. $I = J$ எனக்காட்டுக.
x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும்
$f(x) + f(p-x) = q$ ஆகுமாறு $f(x)$ என்பது x இன் தொடர்ச்சியான சார்பாகும். இங்கே $p(>0)$, q என்பன ஒருமைகள் ஆகும்.

(i) $\int_0^p f(x)\,dx = \frac{1}{2}pq$ எனவும்

(ii) $\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x) f(x)\,dx = \frac{1}{4}q(\sin p - p\cos p)$
எனவும் காட்டுக

விடை :-

$$\int^{p} \sin x \cdot \sin(p-x)\, dx$$

ஆனால், $\sin x \; \sin(p-x) = \frac{1}{2}[\cos(2x-p) - \cos p]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^p \{\cos(2x-p) - \cos p\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin(2x-p)}{2}\right]_0^p - \cos p\,[x]_0^p\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2\sin p}{2} - \cos p\,(p-0)\right\}$$

$$\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x)\,dx = \frac{1}{2}\{\sin p - p\cos p\}$$

$$I = \int_0^p \phi(x)\,dx \qquad J = \int_0^p \phi(p-x)\,dx$$

$\phi(x)$ ஆனது x இன் தொடர்ச்சியான சார்பு p ஒரு நேர் எண்

$t = (p-x)$ எனின்

x குறித்து வகையிட $\frac{dt}{dx} = \frac{-dx}{dx} = -1 \quad \therefore dt = dx$

$$J = -\int_p^0 \phi(t)\,dt = \int_0^p \phi(t)\,dt$$

t க்கு x ஐப் பிரதியிட $J = \int_0^p \phi(x)\,dx = I$

ஆகவே $I = J$

x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

$f(x) + f(p-x) = q \quad (p>0)$ q = மாறிலி

$$\int_0^p f(x)\,dx + \int_0^p f(p-x)\,dx = \int_0^p q\,dx = q\,[x]_0^p$$

முதற் பகுதியின் படி

$I + J = [pq] \quad \therefore I = \frac{1}{2}pq$

$$\therefore \int_0^p f(x)\,dx = \frac{1}{2}pq$$

(ii) $\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x)\, f(x)\, dx = \frac{1}{4}q(\sin p - p\cos p)$

$f(x) + f(p-x) = q$ இருபுறமும் $\sin x \; \sin(p-x)$ ஆல் பெருக்க,

$$\sin x \cdot \sin(p-x) f(x) + \sin x \cdot \sin(p-x) f(p-x) = q \sin x \sin(p-x)$$

$$\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x) f(x)\,dx + \int_0 \sin x \cdot \sin(p-x) f(p-x)\,dx = q\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x)\,dx$$

பகுதி (i) இன் படி

$$\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x) f(x)\,dx = \frac{q}{4}(\sin p - p\cos p)$$

காரணம் $t = p - x$ என பிரதியிட

$$\int \sin x \cdot \sin(p-x) f(p-x)\,dx = -\int_p^0 \sin(p-t) \cdot \sin t \cdot f(t)\,dt$$

t க்கு x ஐப் பிரதியிட $= \int_0^p \sin t \cdot \sin(p-t) \cdot f(t)\,dt$

$$= \int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x) f(x)\,dx$$

t இற்கு x ஐ பிரதியிட

$$2\int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x)\, f(x)\, dx = \frac{q}{2}(\sin p \cdot p\cos p)$$

$$\therefore \int_0^p \sin x \cdot \sin(p-x)\, f(x)\, dx = \frac{q}{4}(\sin p - p\cos p)$$

(3) (i) x^4 ஐயும் அதற்கு மேற்பட்ட வலுக்களையும் கொண்ட உறுப்புகளைப் புறக்கணித்து

$$\frac{1}{(1+2x)^{3/2}} - \frac{1}{(2+x)^{1/2}}$$ இன் விரிவைப் பெறுக.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ எனும் வரையறுத்த தொகையீட்டை மதிப்பிடுவதற்கான சிம்சனின் நெறியைக் கூறுக.

[0,1] ஐ நான்கு சம ஆயிடைகளாகப் பகிர்ந்து, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$ ஐ பெறுமானம் கணிக்க.

(iii) x^4 உறுப்பு வரை $\sec x$ இற்குரிய மக்லோரினின் விரிவைப் பெறுக.

விடை :-

(i) $$\frac{1}{(1+2x)^{3/2}} - \frac{1}{(2+x)^{1/2}} = (1+2x)^{-3/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2}$$

$$= \left\{1 + (-3/2)(2x) + \frac{(-3/2)(-3/2-1)(2x)^2}{2!} + \frac{(-3/2)(-3/2-1)(-3/2-2)(2x)^3}{3!}\right.$$

$$\left.+ \cdots\right\} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{1 + (-1/2)(x/2) + (-1/2)\left(\tfrac{1}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{-1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots\cdots\right]$$

$$= \left(1 - 3x + \frac{15}{2}x^3 - \frac{35}{2}x^3 + \cdots\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{3x^3}{32} - \frac{5x^3}{128} + \cdots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - 3\right)x + 3/2\left(5 - \frac{1}{16\sqrt{2}}\right)x^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{64\sqrt{2}} - 7\right)x^3 \,//$$

(ii) (a,b) எனும் ஆயிடையை ஒவ்வொன்றும் h பருமனுள்ள 2n எண்ணிக்கையான சிறிய ஆயிடைகளாகப் பகுக்க.

இங்கு $h = \frac{b-a}{2n}$ சிம்சனின் நெறிப்படி வேண்டிய தொகையீட்டுப் பெறுதி (I) பின்வரும் கோவையால் தரப்படும்.

$$I = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \cdots\cdots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right]$$

(0,1) எனும் ஆயிடையை 0.00, 0.50, 0.75, 1.00 எனும் புள்ளிகள் 4 சம ஆயிடைகளாகப் பகிர்கின்றன.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right]$$ இங்கே $h = 0.25$

சிம்சனின் சூத்திரப்படி.

i	0	1	2	3	4
x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f_i = 1/(1+x^3)$	1.00	0.9846	0.8899	0.7033	0.50

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{0.25}{3}\left[1.0 + 4\times 0.9846 + 2\times 0.8889 + 4\times 0.7033 + 0.50\right]$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{0.25}{3} \times 10.0294 = 0.8358 \,//$$

(iii) $\sec x = f(x)$ எனக் கொள்க

$f'(x) = \sec x \tan x$

$f''(x) = \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x$
$= 2\sec^3 x - \sec x$

$f'''(x) = 6\sec^3 x \tan x - \sec x \tan x$

$f^{iv}(x) = 6[3\sec^3 x \tan^2 x + \sec^5 x] - [\sec x \tan^2 x + \sec^3 x]$

$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 1,\ f'''(0) = 0,\ f^{iv}(0) = 0\cdot 5$

x^4 வரை $f(x)$ இன் மக்லோரின் விரிவு

$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2} f''(0) + \frac{x^3}{\lfloor 3} f'''(0) + \frac{x^4}{\lfloor 4} f^{iv}(0)$ ஆல் தரப்படும்.

$\therefore \sec x = 1 + \frac{x^2}{\lfloor 3} + \frac{5}{\lfloor 4} x^4$

(9) C எனும் ஒரு தள வளையியின் பொதுவான ஒரு புள்ளி P இன் ஆள்கூறுகள் $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ என்பவற்றினால் தரப்படுகின்றன. இங்கே $\theta\ [0 \le \theta \le 2\pi]$ ஒரு பரமானமாகவும் a ஒரு நேர் ஒருமையாகவும் உள்ளன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) வளையியானது உற்பத்தியுடன் x-, y- அச்சுகள் பற்றியும் சமச்சீர் உடையது.

(ii) எந்த அச்சுகளிலும் அமையாத புள்ளி P யிலுள்ள வளையியின் சாய்வானது $-\tan\theta$ ஆகும்.

(iii) வளையி C ஆனது x- அச்சை $(a, 0), (-a, 0)$ எனும் புள்ளிகளிலும் y- அச்சை $(0, a), (0, -a)$ எனும் புள்ளிகளிலும் தொட்டுக் கொண்டுள்ளது.

$0 \le \theta \le \pi/2$ யிற்குரிய C இன் பகுதியை வரைக. சமச்சீர் உடைமைகளைப் பயன்படுத்தியோ or வேறு வழியாகவோ பிரும்பான வரைபட மொன்றில் C ஐ முற்றாக வரைக.

தீர்வு —:

(i) வளையி C இல் $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ என்பது $1^{ம்}$ கால் வட்டத்தில் உள்ள புள்ளியாகும்

வளையியில் யாதுமோர் புள்ளி P_0 ஆக அதற்குரிய பரமானம் $\theta = \theta_0$ என்க

$\pi - \theta_0, \pi + \theta_0, 2\pi - \theta_0$ என்னும் பெறுமானங்களின் அடுத்த இவை மூன்றும் θ_0 இனை பிரதியீடு செய்யவை.

$\therefore$ இதே பரமானங்களுக்குரிய புள்ளிகளும் வளையி C இல் உள்ளன.

$x = a\cos^3(\pi - \theta_0) = -a\cos^3\theta_0 = -x_0$

$y = a\sin^3(\pi - \theta_0) = a\sin^3\theta_0 = y_0$

அ-து (x_0, y_0) எனும் புள்ளி வளையி C இல் உள்ளது.

∴ வளையி y அச்சு பற்றி சமச்சீர்.

$x = a\cos^3(\pi - \theta_0) = -a\cos^3\theta_0 = -x_0$

$y = a\sin^3(\pi + \theta_0) = -a\sin^3\theta_0 = -y_0$

∴ $(-x_0, -y_0)$ எனும் புள்ளி வளையி C இல் இருக்கும்.

∴ வளையி உற்பத்தி பற்றியும் சமச்சீரானது.

$x = a\cos^3(2\pi - \theta_0) = a\cos^3\theta_0 = x_0$

$y = a\sin^3(2\pi - \theta_0) = -a\sin^3\theta_0 = -y_0$

∴ $(x_0, -y_0)$ என்னும் புள்ளி வளையி C இல் உள்ளது.

∴ வளையி x அச்சுப் பற்றி சமச்சீரானது.

(ii) $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$; $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

∴ புள்ளி P இல் வளையி C இன் படித்திறன் $= -\tan\theta$

$\frac{dy}{dx} = -\tan\theta$

$\theta = 0, 2\pi$ ஆகும் போது $(a, 0)$ என்னும் புள்ளி x அச்சில் உள்ளது.

$\lim_{\theta \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2\pi} \frac{dy}{dx} = x$ அச்சின் படித்திறன்.

∴ வளையி $(a, 0)$ என்னும் புள்ளியில் x அச்சைத் தொடுகிறது.

இவ்வாறே $(-a, 0)$ க்கும் உண்மையானது.

$\theta = \pi/2$ ஆக $(0, a)$ என்னும் புள்ளி y அச்சில் உள்ளது.

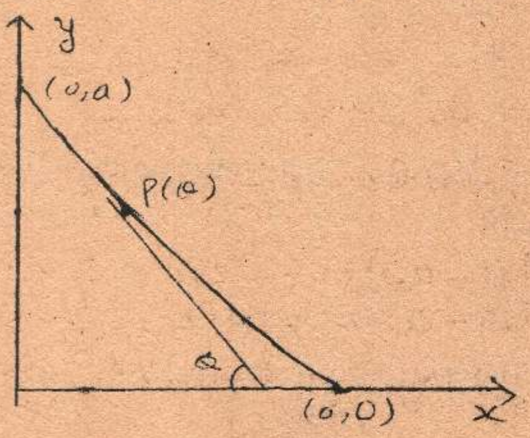
$\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{dy}{dx} = y$ அச்சின் படித்திறன். !

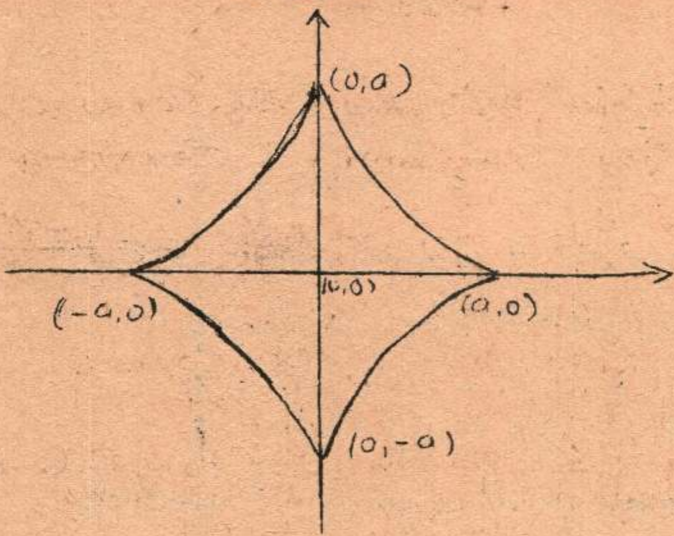
∴ $(0, a)$ என்னும் புள்ளியில் வளையி y அச்சைத் தொடுகிறது.

இவ்வாறே $(0, -a)$ க்கும் உண்மையானது.

$\frac{dy}{dx} = -\tan\theta$

∴ θ ஆனது 0 இலிருந்து $\pi/2$ ஆக அதிகரிக்க −x அச்சுடன் வளையிக்குரிய தொடலி அமைக்கும் கோணமும் 0 இலிருந்து $\pi/2$ ஆக அதிகரிக்கின்றது.





(10) முறையே, $y=1-\frac{3}{x+3}$, $y=\frac{x}{x^2+1}$ என்பவற்றினால் தரப்பட்ட C_1, C_2 எனும் வளையிகளின் இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

ஒரே வரிப்படத்தில் இவ் விருவளையிகளையும் வரைந்து, அவற்றின் அணுகு கோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டுக.

முதலாம் கால்வட்டத்தில் C_1, C_2 என்பவற்றினால் வரைப்புற்று முடிவுள்ள பிரதேசத்தின் S பரப்பளவானது

$$\frac{7}{2}\log 5 - 3\log 3 - 2$$ எனக் காட்டுக.

C_2, கோடுகள் $y=0$, $x=2$ என்பவற்றினால் வரைப்புற்ற பரப்பளவானது x - அச்சுப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களுக்கூடாக சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

விடை:-

வளையிகள் C_1, C_2 இன் இடைவெட்டும் புள்ளிகள்

$$1-\frac{3}{x+3}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$x\left[\frac{x^2+1-x-3}{(x+3)(1+x^2)}\right]=0$$

$$\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+3)(1+x^2)}=0$$

$\therefore x = 0$ OR 2 OR -1

$\therefore$ வளையிகள் C_1, C_2 இன் இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $(-1, -\frac{1}{2})$, $(0,0)$, $(2, 2/5)$ ஆகும்.

$$y=1-\frac{3}{x+3}$$

$$(1-y)(x+3)=3$$

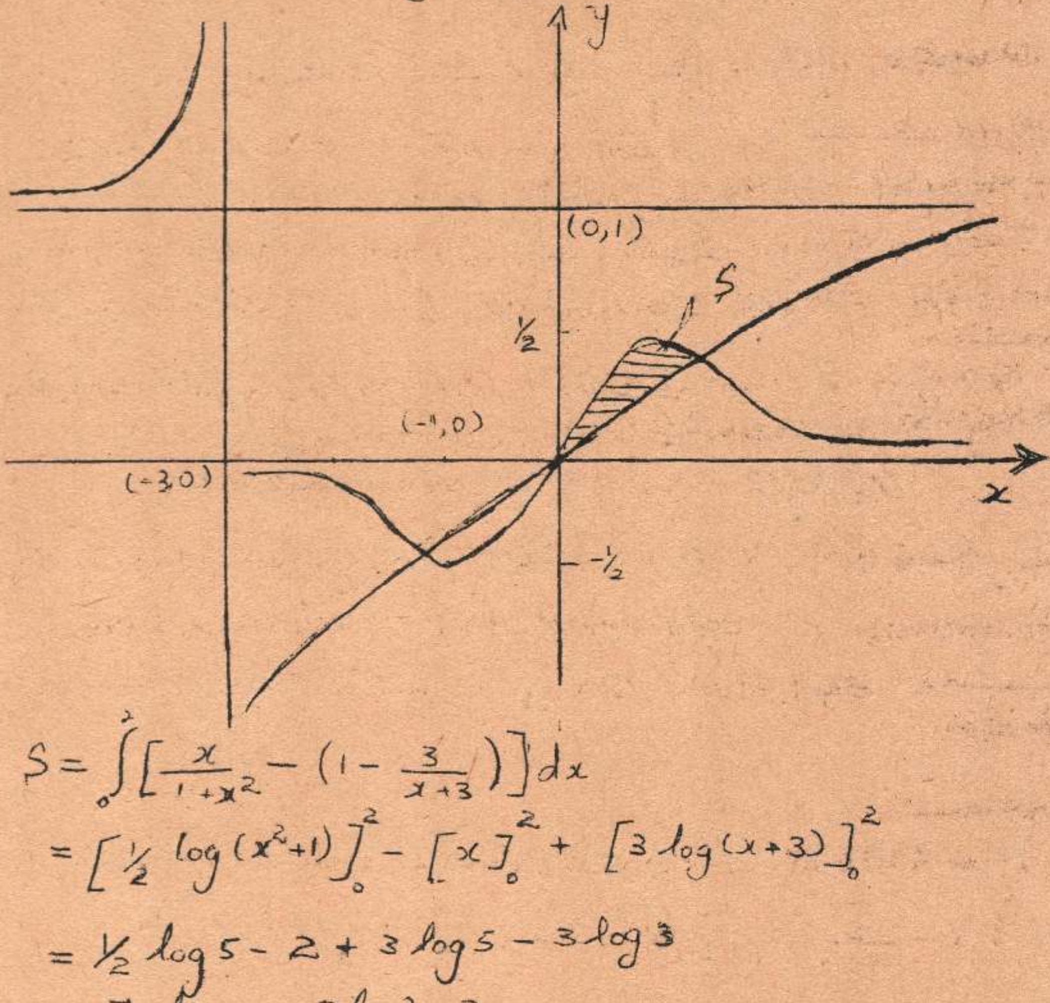
∴ C_1 ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவு . இது $(x+3)=0$, $y-1=0$ எனும் கோடுகளாகக் கொண்டது.

$$y = \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore x = -1 \text{ OR } 1 \text{ ஆக } \frac{dy}{dx} = 0$$

∴ $(-1, -\frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2})$ என்பன திரும்பற் புள்ளிகளாகும்.

$x \longrightarrow \pm\alpha \qquad y \longrightarrow 0$



$$S = \int_0^2 \left[\frac{x}{1+x^2} - \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)\right] dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^2 - \left[x\right]_0^2 + \left[3\log(x+3)\right]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\log 5 - 2 + 3\log 5 - 3\log 3$$

$$= \tfrac{7}{2}\log 5 - 3\log 3 - 2$$

$$V = \pi\int_0^2 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \qquad x = \tan\theta \text{ எனின்}$$

$$V = \pi\int_0^{\tan^{-1}2} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\sec^2\theta\, d\theta = \pi\int_0^{\tan^{-1}2} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\tan^{-1}2} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\tan^{-1}(2)}$$

$$V = \pi\left(\tfrac{1}{2}\tan^{-1}2 - \tfrac{1}{5}\right)$$

——————

உரிமை பதிப்பகத்தாருக்குரியது

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் 11 க.பொ.த. (உயர்தரம்) மாதிரிவிடைகள் ஓகஸ்ட் 1987.

(ஆறு வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக)

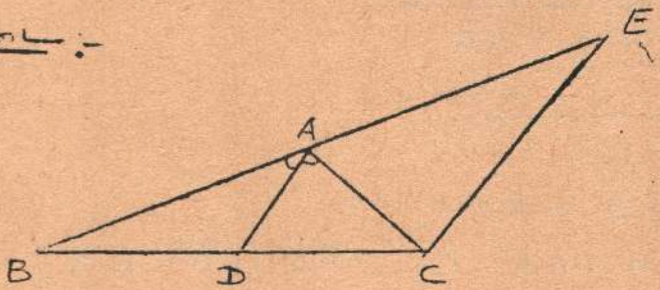
1 (i) முக்கோணியொன்றின் ஒரு கோணத்தின் உள்ளிருகூறாக்கி அதன் எதிர்ப்பக்கத்தை மற்றைய இரு பக்கங்களினதும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

(ii) மூன்று புள்ளிகள், முக்கோணியொன்றின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் (OR நீட்டிய பக்கத்திலும்) ஒரு புள்ளி அமையும் வண்ணம், ஒரே கோட்டில் இருப்பதற்கான மெனிலோசின் தேற்றத்தை நிறுவுக.

முக்கோணியொன்றின் உச்சிகளான A, B, C என்பவற்றிலுள்ள உள்கோணங்களின் இருகூறாக்கிகள், எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே D, E, F இல் சந்திக்கின்றன. FE உம் BC உம் D' இல் சந்திக் ~~கின்றன AD' ஆனது AD இற்குச் செங்குத்தாக~~ அமையுமென நிறுவுக.

விடை:-

(i)

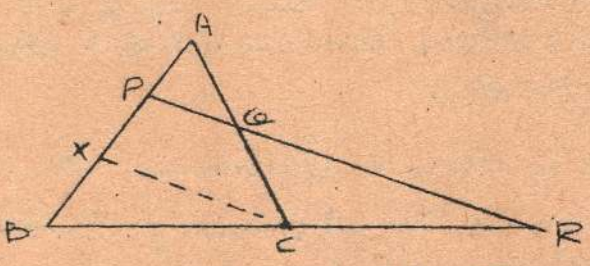


$B\hat{A}C$ ஐ AD ஆனது உட்புறமாக இருசமகூறிடுகின்றது. C இனூடாக DA இற்குச் // ஆக வரையப்படும் கோடு நீட்டிய BA ஐ E இல் சந்திக்கிறது.

$$B\hat{A}D = A\hat{E}C$$
$$D\hat{A}C = A\hat{C}E$$
$$A\hat{C}E = A\hat{E}C \quad [\because B\hat{A}D = D\hat{A}C]$$
$$\therefore AE = AC$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} = \frac{BA}{AC} \quad [\because AD // CE]$$

(ii)

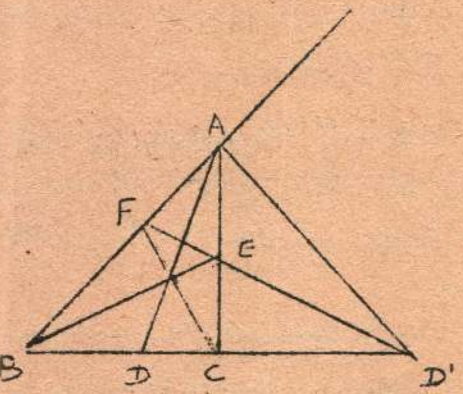


C இனூடாக PR இற்குச் // ஆக வரையப்பட்ட CX ஆனது BA ஐ X இல் சந்திக்கிறது.

$\frac{BR}{RC} = \frac{BP}{PX}$, $\frac{CG}{GA} = \frac{XP}{PA}$

$\therefore \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CG}{GA} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BP}{PX} \cdot \frac{XP}{PA}$

$\therefore \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$



மெனிலோசின் தேற்றப்படி

$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

$\therefore \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{BC}{AB} = 1$

$\left[\because \frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}\right]$

$\left[\because \frac{CE}{EF} = \frac{BC}{AB}\right]$

அ-து. $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$ அத்துடன் $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB \cdot \sin B\hat{A}D'}{AC \cdot \sin C\hat{A}D'}$

$\therefore \frac{BD'}{CD'} = \frac{AB \sin(\pi - X\hat{A}D')}{AC \sin C\hat{A}D}$

$= \frac{AB \sin X\hat{A}D'}{AC \cdot \sin C\hat{A}D'}$

$\therefore \sin X\hat{A}D' = \sin C\hat{A}D'$

$\therefore X\hat{A}D' = C\hat{A}D' \quad [\because X\hat{A}D' + C\hat{A}D' < \pi]$

$\therefore$ AD' ஆனது $X\hat{A}C$ இன் இருசமகூறாக்கி

$\therefore AD \perp AD'$

$\therefore$ AD ஆனது $B\hat{A}C$ இன் இருசமவெட்டி.

(2)

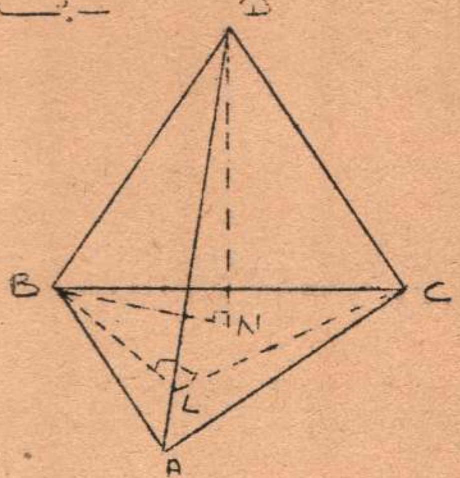
(i) கூம்பகமொன்று, அதன் அடியானது a நீளமுடைய சமமான பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணியாகவும், அதன் ஏனைய விளிம்புகள் ஒவ்வொன்றும் $l\ (> a/\sqrt{3})$ நீளமுடையதாகவும் அமைந்துள்ளது. கூம்பகத்தின் கனவளவையும் எதிர் இரு சாய்வு முகங்களுக்கிடையிலான கோணத்தையும் காண்க.

(ii) முறையே a, b, c எனும் நீளமுடைய OA, OB, OC எனும் மூன்று நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன. முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவானது $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

O இற்கும் ABC க்கும் இடையிலான செங்குத்துத் தூரத்தையும் காண்க.

தீர்வு:-

(i)



கூம்பகத்தின் அடி ABC

$AB = BC = CA = s$

$BD = AD = CD = l$

$DN \perp ABC$ என்க

கூம்பகத்தின் கனவளவு $V = \frac{1}{3}\, \Delta ABC \cdot ND$

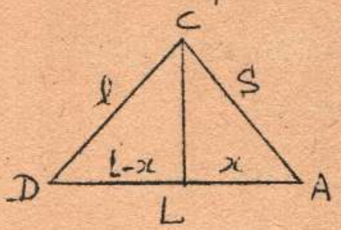
$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$DN^2 = BD^2 - BN^2 = l^2 - \left(\tfrac{2}{3} \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= l^2 - \tfrac{1}{3} s^2$$

$$\therefore V = \tfrac{1}{12} s^2 \sqrt{3l^2 - s^2}$$

இரு சாய்ந்த முகங்களுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தைக் கணிப்பதற்கு.



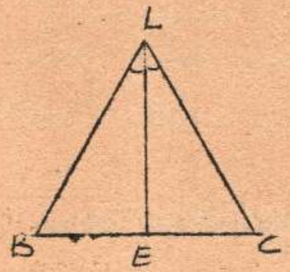
$BL \perp AD$

$LC \perp AD$ என்க

$$\therefore CL^2 = s^2 - x^2 = l^2 - (l - x)^2$$

$$2lx = s^2$$

$$x = \frac{s^2}{2l}$$



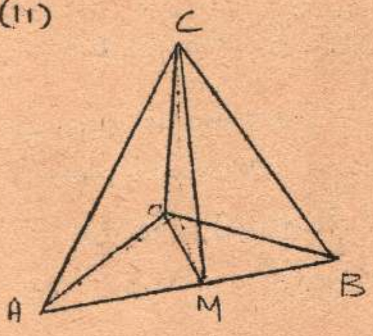
$$CL = s^2 - \frac{s^4}{4l} = s^2\left(1 - \frac{s^2}{4l^2}\right)$$

$$\therefore BL = CL = s\sqrt{1 - s^2/4l^2}$$

$B\hat{L}C = \theta$ எனின்

$$\sin\theta/2 = \frac{s/2}{CL} = \frac{1}{2\sqrt{1 - s^2/4l^2}}$$

(ii)



$OB = b$, $OC = c$

$OA = a$, $OM = x$ என்க.

C யிலிருந்து AB க்கான செங்குத்தின் அடி M என்க. $OM \perp AB$

$$AB^2 = a^2 + b^2$$

$$AM^2 = a^2 - x^2$$

$$BM^2 = b^2 - x^2$$

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2} = AB = AM + MB$$
$$= \sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{b^2-x^2}$$
$$\therefore x^2 = \sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$$
$$\therefore x^4 = a^2b^2 - x^2(a^2+b^2) + x^4$$
$$x^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$
$$CM^2 = c^2 + x^2 = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{(a^2+b^2)}$$
$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CM$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

நான்முகி OABC இன் கனவளவு $= \frac{1}{3}\cdot \Delta AOB \cdot OC$
$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot abc$$
$$= \tfrac{1}{3}\ \Delta ABC \cdot ON$$

[இங்கு ON என்பது O இலிருந்து ABC இன் செங்குத்து தூரமாகும்]

$$\therefore ON = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

(3) $ax+by+c=0$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு புள்ளி (x_1, y_1) இலிருந்தான செங்குத்துத் தூரம்
$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

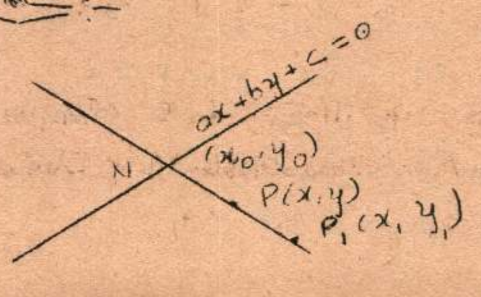
$A\equiv(2,5)$, $B\equiv(11,2)$, $C\equiv(8,7)$ எனும் உச்சிகளைக் கொண்ட ABC எனும் முக்கோணியின் பக்கங்கள் AB, AC என்பவற்றில் முறையே $\frac{4}{\sqrt{10}}$, $\frac{2}{\sqrt{10}}$ தூரங்களிலுள்ள நான்கு புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) இந்நான்கு புள்ளிகளில் எது முக்கோணியின் உள் பிரதேசத்தில் உள்ளது என்பதைக் காண்க.

(ii) இந் நான்கு புள்ளிகளாலும் அமைக்கப்படும் இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

விடை:-

$ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டிற்கு P_1 இலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்தில் $P(x,y)$ என்பது யாதுமோர் புள்ளி.



$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \lambda$$

$$\therefore x = x_1 + a\lambda \qquad y = y_1 + b\lambda$$

புள்ளி N க்குரிய பரமானம் λ இன் பெறுமானம் λ_0 என்க.

$$a(x_1 + a\lambda_0) + b(y_1 + b\lambda_0) + c = 0$$

$$ax_1 + by_1 + c + \lambda_0(a^2 + b^2) = 0$$

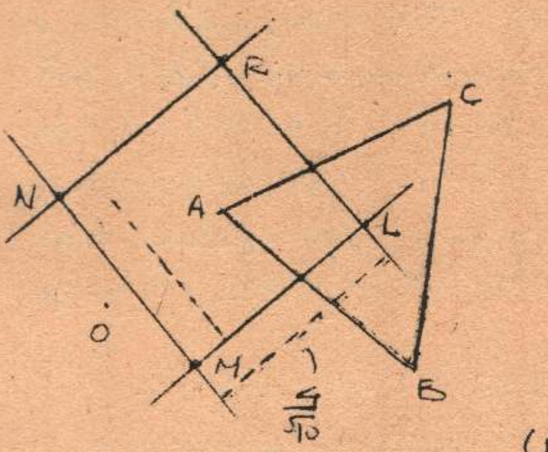
$P_1N = d$ என்க

$$d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2$$

$$= a^2\lambda_0^2 + b^2\lambda_0^2$$

$$\therefore d^2 = \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$A \equiv (2, 5)$

$B \equiv (11, 2)$

$C \equiv (6, 7)$

AB இன் சமன்பாடு

$$x + 3y - 17 = 0 \quad —①$$

AC இன் சமன்பாடு

$$x - 3y + 13 = 0 \quad —②$$

(h,k) என்பது AB யிலிருந்து $\frac{4}{\sqrt{10}}$ அலகு தூரத்திலும் AC யிலிருந்து $2/\sqrt{10}$ அலகு தூரத்திலும் உள்ள புள்ளி என்க

$$\frac{|h + 3k - 17|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{|h - 3k + 13|}{\sqrt{10}} = 2/\sqrt{10}$$

$$\therefore h + 3k - 17 = \pm 4 \quad —①$$

$$h - 3k + 13 = \pm 2 \quad —②$$

① இல் +, ② இல் + எடுப்பின் $(h,k) = (5, 16/3)$

① " +, ② " − " " $(h,k) = (3, 6)$

① " −, ② " + " " $(h,k) = (1, 4)$

① " −, ② " − " " $(h,k) = (-1, 14/3)$

L என்பது Δ இனுள் அமைந்துள்ளது எனின், L, B என்பன AC இன் ஒரே பக்கத்தில் இருக்க வேண்டும். L, C என்பனவும் AB " " " " " .

R ஐக் கருதின், $x - 3y + 13 = 11 - 6 + 13 > 0$

L ஐக் " , $x + 3y - 17 = 5 + 21 - 17 > 0$

∴ L என்பது சமன்பாடுகள் (1),(2) இரண்டிலும் (+) குறியை அடையும் போது எடுக்கும் பெறுமானத்தைத் தருகிறது

$$\therefore L \equiv (5, 16/3)$$

(ii) இந்நாற்கரத்தின் பரப்பளவானது $= RL \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}}$

$$R \equiv (3,6) \quad , \quad L \equiv (5, 16/3)$$

$$\therefore \text{பரப்பு} = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} = 16/3$$

(4) (i) இரு பரிமாண செவ்வகத் தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளுக்கும் தள முனைவாள்கூறுகளுக்கும் இடையிலான தொடர்புடைமையை எளிதாக்கிய வடிவத்தில் தருக.

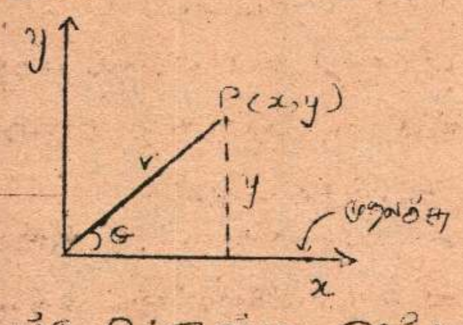
a ஆரையும் செவ்வகோண ஆள்கூறுகளில் ($p \cos\alpha$, $p \sin\alpha$) என்னும் மையமும் கொண்ட வட்டத்தின் முனைவுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கே p, α என்பன ஒருமைகளாகும். $(0,0)$ $(c,0)$ $(2c, \pi/3)$ எனும் முனைவாள்கூறுகளைக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகளுடாக ஒரு வட்டம் செல்கிறது. வட்டத்தின் சமன்பாட்டை முனைவாள்கூறுகளில் காண்க.

(ii) $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 5^2 \leq 0$,

$3x - 4y + 8 \leq 0$ எனும் சமன்பாடுகளைத் திருப்தியாக்கும் $(x-y)$ தளத்திலுள்ள பிரதேசம் R ஐ நிழற்றிக் காட்டுக.

λ ஒரு பரமானமாக இருக்க, $x + y = \lambda$ எனும் வடிவத்திலுள்ள கோட்டுக் குடும்பத்தைக் கருதி R இலுள்ள $x+y$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

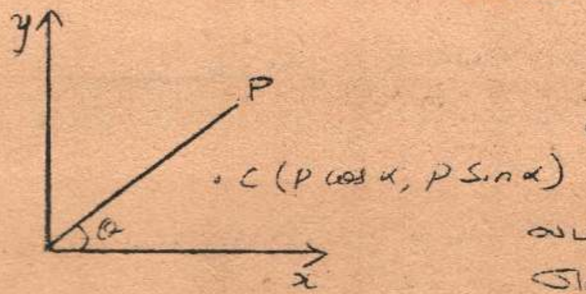
விடை



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta.$$

இங்கே O என்பது தெக்காட்டின் அச்சின் உற்பத்தி அத்துடன் முனைவாள்கூற்றின் உற்பத்தியும் ஆகும்.

x அச்சானது முனைக்கோடாக எடுக்கப்பட்டது



$C \equiv (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$

$P \equiv (r, \theta)$ என்பது தரப்பட்ட வட்டத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி எனின்.

$$(p\cos\alpha - r\cos\theta)^2 + (p\sin\alpha - r\sin\theta)^2 = a^2$$

$$\therefore r^2 - 2rp\cos(\theta - \alpha) + p^2 - a^2 = 0$$

தரப்பட்ட 3 புள்ளிகளூடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$r^2 - 2rp\cos(\theta - \alpha) + p^2 - a^2 = 0$ என்க.

$(0,0)$ ஊடாகச் செல்வதால் $p^2 = a^2$

$(c, 0)$ " " $c^2 - 2cp\cos\alpha = 0$

$(2c, \pi/3)$ " " $c^2 - 2p\cos(\pi/3 - \alpha) = 0$

$$\therefore 2\cos\alpha = \cos(\pi/3 - \alpha)$$

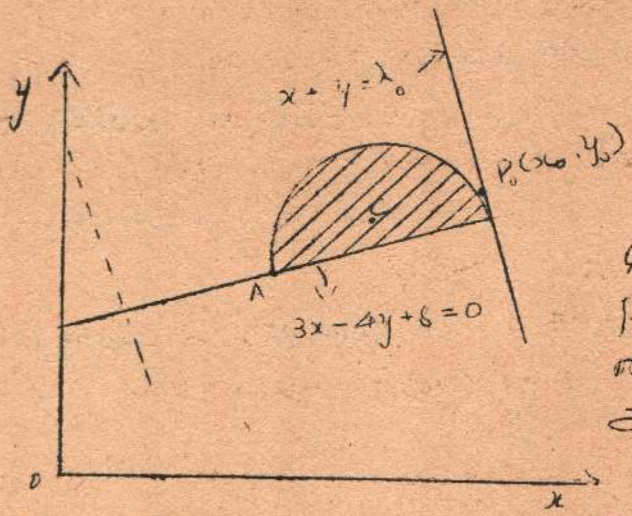
$$\therefore \tan\alpha = \sqrt{3} \qquad \alpha = \pi/3 \text{ or } 4\pi/3$$

ஆனால் $\alpha \neq \frac{4\pi}{3}$ $\therefore \alpha = \pi/3$ $\therefore p = c,\ a = c$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $r^2 - 2cr\cos(\theta - \pi/3) = 0$

$$r = 2c\cos(\theta - \pi/3)$$

(ii)



$f(x,y) = x^2 + y^2 - 10x - 12y + 52$

$\phi(x,y) = 3x - 4y + 8$ என்க.

$f(x,y) = 0$ என்பது $(5, 6)$ ஐ மையமாகவும் 3 அலகை ஆரையாகவும் உடைய வட்டமாகும்.

$f(x,y) \leq 0$ என்பது வட்டத்தின் உட்பகுதியாகும்

$\phi(x,y) = 0$ " $3/4$ ஐ படித்திறனாகவும் 2 ஐ வெட்டுத்துண்டாகவும் கொண்ட நேர்கோடாகும்.

$\phi(0,0) > 0$ என்பதால் $\phi(x,y) \leq 0$ என்னும் பகுதி (x,y) தளத்தில் உற்பத்தியை கொண்டிராத $3x - 4y + 8 = 0$ எனும் கோட்டால் அடைக்கப்பட்ட பிரதேசமாகும்.

அந்நேர்கோட்டிற்கு வட்டமையம் c இன் தூரம் d எனின் $d = \frac{|15 - 24 + 8|}{5} < 3$ (ஆரையிலும் சிறியது)

$\therefore$ நேர்கோடு வட்டத்தை A, B என்னும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

$\therefore$ R என்னும் பிரதேசம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

B என்பது $x + y = \lambda_0$ என்னும் தொடலியின் தொடுகைப் புள்ளி எனின்,

P_0 என்பது R இன் உள்ளே வெளியே அமைந்துள்ளது என்பதற்கேற்ப $x+y$ இன் உயர் பெறுமானம் P_0 OR B க்குரிய x, y இன் பெறுமானங்களால் தரப்படும்.

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$

$\therefore x_0 + y_0 = \lambda_0$

$x_0^2 + y_0^2 - 10x_0 - 12y_0 + 52 = 0$

$\therefore x_0^2 + (\lambda_0 - x_0)^2 - 10x_0 - 12(\lambda_0 - x_0) + 52 = 0$

$\therefore 2x_0^2 + 2x_0(1-\lambda_0) + \lambda_0^2 - 12\lambda_0 + 52 = 0$

இரு மூலங்களும் சமமாக

$(1-\lambda_0)^2 = 2(\lambda_0^2 - 12\lambda_0 + 52)$

$\therefore \lambda_0^2 - 22\lambda_0 + 103 = 0 \qquad \lambda_0 = 11 \pm \sqrt{18}$

(+) இனி P_0 இருப்பது $\therefore \lambda_0 = 11 + \sqrt{18}$

$x_0 = -\frac{2(1-\lambda_0)}{4} = 5 + \frac{\sqrt{18}}{2} = 5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$y_0 = 6 + \frac{\sqrt{18}}{2} = 6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 3x_0 - 4y_0 + 8 = -1 - \frac{\sqrt{18}}{2} < 0$

$\therefore P_0$ ஆனது R இனுள் உள்ளது

$\therefore x+y$ இன் உயர் பெறுமானம் $= 11 + \sqrt{18} = 11 + 3\sqrt{2}$ //

aliter $\quad x_0 + y_0 = \lambda_0 \qquad$ [∵ வட்டத்தில் P_0 உள்ளது]

$y_0 - x_0 = 6 - 5 = 1$

$\frac{|5+6-\lambda_0|}{\sqrt{2}} = 3$ [∵ செங்குத்துத் தூரம் = ஆரை]

$\lambda_0 = 11 + 3\sqrt{2} \qquad y_0 = 6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$x_0 = 5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 3x_0 - 4y_0 + 8 < 0$

$\therefore P_0$ ஆனது R இல் உள்ளது.

$\therefore x+y$ இன் உயர் பெறுமானம் $11 + 3\sqrt{2}$ //

(5) $y^2 = 4ax$ என்பதால் தரப்பட்ட S எனும் பரவளைவுக்கு $P(at^2, 2at)$ எனும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

S இன் $A(ap^2, 2ap)$, $B(aq^2, 2aq)$ என்பவற்றிலுள்ள தொடலிகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$P_1(at_1^2, 2at_1)$, $P_2(at_2^2, 2at_2)$, $P_3(at_3^2, 2at_3)$ என்பன S இலுள்ள 3 வெவ்வேறு புள்ளிகளாகும். S இன் P_1, P_2, P_3 என்பவற்றிலுள்ள தொடலிகள் Q_1, Q_2, Q_3 இல் இடைவெட்டுகின்றன.

Q_1, Q_2, Q_3 என்பவற்றினூடு [illegible] Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 ஆகிய [illegible] செங்குத்துகள் [illegible] ஒரு புள்ளியில் இடைவெட்டுமெனக் காட்டுக.

விடை —

$x = at^2 \qquad y = 2at$

$\frac{dx}{dt} = 2at \qquad \frac{dy}{dt} = 2a$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = 1/t$

∴ P யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$\frac{y - 2at}{x - at^2} = 1/t \quad \therefore yt - x - at^2 = 0$

A இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $yp - x - ap^2 = 0$

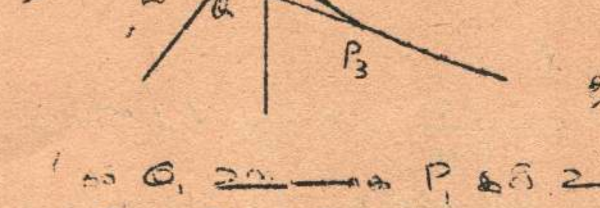
B " " " $yq - x - aq^2 = 0$

இடைவெட்டில் $y(p-q) = a(p^2 - q^2) = 0$

$\therefore y = a(p+q) \qquad (p \neq q)$

$x = apq$

∴ A, B இலுள்ள தொடலிகளின் இடைவெட்டும் புள்ளி $[apq, a(p+q)]$ ஆகும்.



$Q_1 \equiv [at_2t_3, a(t_2 + t_3)]$

$Q_2 \equiv [at_1t_3, a(t_1 + t_3)]$

$Q_3 \equiv [at_1t_2, a(t_1 + t_2)]$

P_1 இலுள்ள தொடலிக்குச் செங்குத்தான கோட்டின் படித்திறன் $= -t_1$

∴ Q_1 ஊடாக P_1 இல் உள்ள தொடலிக்கு செங்குத்தாக வரையும் நேர்கோடு l_1 இன் சமன்பாடு

$$\frac{y - a(t_2 + t_3)}{x - at_2t_3} = -t_1$$

$y - a(t_2 + t_3) = -t_1(x - at_2t_3)$

இவ்வாறு Q_2 ஊடாக Q_1Q_3 க்குச் செங்குத்தான கோடு l_2 இன் சமன்பாடு

$y - a(t_1 + t_3) = -t_2(x - at_1t_3)$

∴ $a(t_1 - t_2) = -(t_1 - t_2)x$

∴ $x = -a \qquad [\because t_1 \neq t_2]$

∴ l_1, l_2 இன் இடைவெட்டு H ஆனது $(x+a)=0$ [S இன் செலுத்தி] இல் உள்ளது. $x=-a$ என மாற்றி—

$y = a(t_1+t_2+t_3) + a t_1 t_2 t_3$

∴ $H \equiv [-a,\ a(t_1+t_2+t_3) + a t_1 t_2 t_3]$

Q_3 ஊடான Q_1Q_2 க்குச் செங்குத்தான கோடு l_1 இன் சமன்பாடு,

$$y - a(t_1+t_2) = -t_3(x - a t_1 t_2)$$

இது H இன் ஆள்கூறுகளை திருப்தி செய்யும்.

∴ l_1, l_2, l_3 என்பன ஒன்றை ஒன்று பரவளைவின் செலுத்தியில் சந்திக்கின்றன.

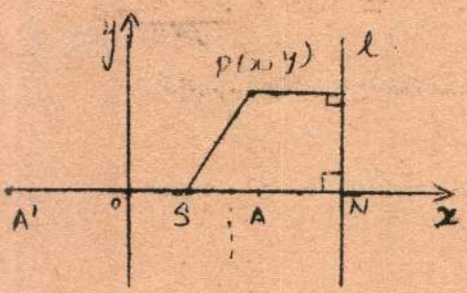
(6) குவியச் செலுத்திப் பண்பைப் பயன்படுத்தி நீள்வளையத்துக்குரிய $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனும் நியம சமன்பாட்டைப் பெறுக.

S இலுள்ள $P_1(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$, $P_2(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$ எனும் இரு வெவ்வேறான புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$F_1(ae,0)$, $F_2(-ae,0)$ என்பன நீள்வளையம் S இன் குவியங்களாகும். F_1P_1, F_2P_2 என்பன நீள்வளையத்தில் இடைவெட்டுமாயின் $\tan\frac{\theta_1}{2} : \tan\frac{\theta_2}{2}$ என்பது ஒருமையாகும் எனக் காட்டுக.

விடை —

நீள்வளையம் என்பது ஒரு நிலையான புள்ளி S (குவியம்) இலிருந்து அதன் தூரத்திற்கும் ஒரு நிலையான கோடு l (செலுத்தி) இலிருந்து அதன் தூரத்திற்கும் இடையேயான விகிதம் 1 இலும் குறைந்த மாறிலி ஆக உள்ள அசையும் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஆகும்.



$SN \perp l$

$\frac{SA}{AN} = e = \frac{SA'}{A'N}$ ஆகுமாறு A, A' என்பன SN இல் இரு புள்ளிகள். AA' இன் நடுப்புள்ளி O. $AA' = 2a$ எனின் $OA = a$

$\frac{SA}{AN} = e$ ∴ $a - OS = e(ON - a)$

$\frac{SA'}{A'N} = e$ $a + OS = e(a + ON)$

∴ $OS = ae$, $ON = a/e$ ∴ $S \equiv (ae, 0)$

$P \equiv (x,y)$ என்பது நீள்வளையத்தில் ஒரு புள்ளி.

∴ $SP/PM = e$

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e(a/e - x)$$

$\therefore (x-ae)^2 + y^2 = (a-ex)^2$

$x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

$\therefore x^2/a^2 + y^2/a^2(1-e^2) = 1 \qquad b^2 = a^2(1-e^2)$ எனின்,

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

P_1P_2 இன் படித்திறன் $= \dfrac{b(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)}{a(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)} = \dfrac{-b}{a}\dfrac{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$

$\therefore P_1P_2$ இன் சமன்பாடு

$$y - b\sin\theta_1 = \frac{-b}{a}\frac{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}(x - a\cos\theta_1)$$

$$\therefore \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$= \sin\theta_1\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \cos\theta_1\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \;//$$

F_1P_1, F_2P_2 என்பன $P \equiv (a\cos\theta, b\sin\theta)$ என்னும் நீள்வளையப் புள்ளியில் இடைவெட்டுகி

ஆகவே PP_1 இன் சமன்பாடு

$$\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right) + \frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)$$

PP_1 என்பது $F_1(ae, 0)$ ஊடாகச் செல்வதால்

$$e\cos\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)$$

$$e = \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta_1}{2}\right)}$$

ஆகவே PP_2 இன் சமன்பாடு

$$\frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta+\theta_2}{2}\right) + \frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\theta_2}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)$$

PP_2 என்பது $F_2(-ae, 0)$ ஊடாகச் செல்வதால்

$$\frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta_2}{2}\right)} = -e$$

$$\frac{1 + \tan\theta/2 \cdot \tan\theta_1/2}{1 - \tan\theta/2 \cdot \tan\theta_1/2} = e$$

$$\therefore \tan\theta/2 \cdot \tan\theta_1/2 = \frac{e-1}{e+1}$$

இவ்வாறே $\tan\theta/2 \cdot \tan\theta_2/2 = \dfrac{-e-1}{-e+1}$

$$\therefore \frac{\tan\theta_1/2}{\tan\theta_2/2} = \frac{(e-1)(e-1)}{(e+1)(e+1)} = \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^2$$

$$\frac{\tan\theta_1/2}{\tan\theta_2/2} = \text{ஒரு மாறிலி}$$

//

(7) P(a Sec θ, b tan θ) எனும் புள்ளி $S = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் அதிபரவளைவிலுள்ள ஒரு புள்ளி எனவும் S இலுள்ள எல்லா புள்ளிகளும் புள்ளிகளையும் இவ்வடிவத்தில் எழுதமுடியுமெனவும் காட்டுக.

P இலான தொடலியின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. தொடலியானது x - அச்சை T இல் சந்திக்கின்றது. O என்பது உற்பத்தியாயின் OT · ON = a² ஆகுமெனக் N என்பது x - அச்சிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும் N உம் T யும் O இன் ஒரே பக்கத்திலுள்ளன. PN ஆனது x - அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ளதெனக் காட்டுக.

தொடலியானது S இன் அணுகுகோடுகளை Q, R இல் சந்திக்குமாயின் P ஆனது அதிபரவளைவில் இயங்கும் பொழுது முக்கோணி OQR இன் மையப்போலி ஆனது இன்னொரு அதிபரவளைவை வரையுமெனக் காட்டுக.

விடை :-

$P \equiv (a \sec\theta,\ b \tan\theta)$ என்னும் புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் அதிபரவளைவில் இருக்கும் ஏனெனில் θ இன் எப்பெறுமானத்துக்கும்

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

P(x, y) என்பது அதிபரவளைவு மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளி என்க.

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + y^2/b^2 \geq 1 \quad \therefore \left|\frac{x}{a}\right| \geq 1$$

∴ $x = a \sec\theta$ என நாம் குறிப்பிடலாம் இங்கு θ மெய்யானது. $y^2/b^2 = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$$\therefore y = \pm b \tan\theta$$

$\theta \leq 2\pi$ என்ன (−) குறியை புறக்கணிப்பின் $y = b \tan\theta$

∴ அதிபரவளைவின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளியும் P(a sec θ, b tan θ) எனக்குறிப்பிடலாம்.

$$x = a \sec\theta, \qquad y = b \tan\theta$$

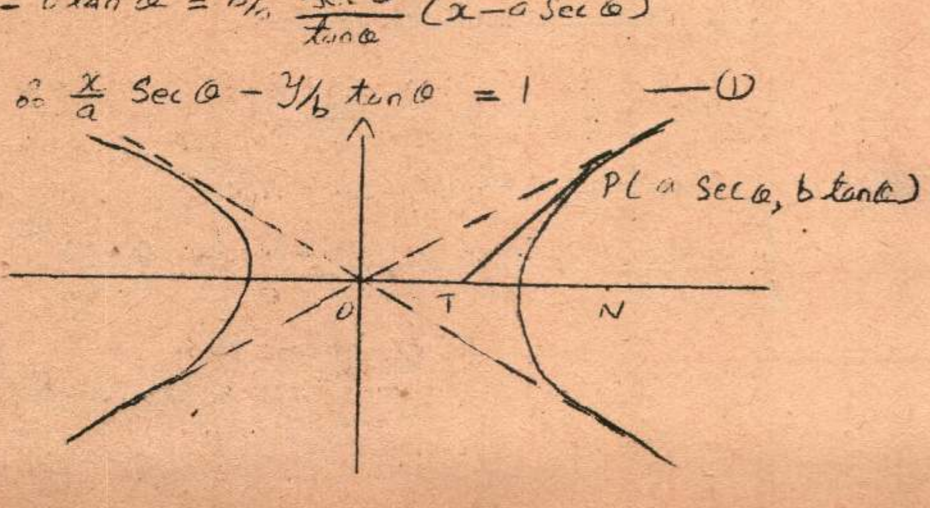
$$\frac{dx}{d\theta} = a \sec\theta \cdot \tan\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = b \sec^2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\frac{\sec\theta}{\tan\theta}$$

∴ தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - b\tan\theta = b/a\ \frac{\sec\theta}{\tan\theta}(x - a\sec\theta)$$

$$\therefore \frac{x}{a}\sec\theta - y/b\ \tan\theta = 1 \quad \text{—(1)}$$



$T \equiv (x_0, 0)$ எனின் $x_0 = \frac{a}{\sec\theta} = a\cos\theta$

$\therefore N \equiv (a\sec\theta, 0)$ $[\because OT \cdot ON = a^2]$

P.N என்பது OX x அச்சுக்குச் செங்கோணமானது

$\therefore$ PN, y அச்சுக்குச் சமாந்தரம்.

$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ — (2) என்பன அணுகு கோடுகளாகும்.

$\therefore$ Q, R என்பன (1), (2) இன் தீர்வுகளாகும்.

$Q \equiv (x_1, y_1) \quad R \equiv (x_2, y_2)$

$x_1 = \frac{a}{\sec\theta - \tan\theta}, \quad y_1 = \frac{b}{\sec\theta - \tan\theta}$

$x_2 = \frac{a}{\sec\theta + \tan\theta}, \quad y_2 = \frac{-b}{\sec\theta + \tan\theta}$

$\triangle OQR$ இன் மையப்போலியின் ஆள்கூறு $G(x, y)$ எனின்

$x = \frac{1}{3}(0 + x_1 + x_2) = \frac{2a}{3}\sec\theta$

$y = \frac{1}{3}(0 + y_1 + y_2) = \frac{2b}{3}\tan\theta$

θ ஐ நீக்கின் $\frac{x^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2b}{3}\right)^2} = 1$ என்னும் அதிபரவளைவு ஆகும்.

(8)

(i) $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3$ என்பதை விரிவுபடுத்தியோ, வேறு முறையாலோ, $\cos^6\theta + \sin^6\theta$ என்பதை $\cos 4\theta$ ஆகிய உறுப்பில் பெறுக, அதிலிருந்து

(அ) $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{5}{4}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

(ii) $\tan 2\alpha + \tan 2\beta = 0$ ஆயின் $\alpha + \beta$ ஆனது $\pi/2$ இன் மடங்கு எனக் காட்டுக

$\tan\theta + \tan\phi + 3 = 0$, $\tan 2\theta + \tan 2\phi = 0$ எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியைத் திருப்தியாக்கும், ஆனால் 0° க்கும் 180° க்கும் இடையில் கிடக்கும், அமையும் எல்லாக் கோணச் சோடிகள் θ, ϕ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}x/2 + \tan^{-1}x/3 = \pi/2$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

விடை:-

$1 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3$

$1 = \cos^6\theta + 3\cos^4\theta\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\sin^4\theta + \sin^6\theta$

$1 = \cos^6\theta + \sin^6\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta$

$1 = \cos^6\theta + \sin^6\theta + \frac{3}{4}\sin^2 2\theta$

$\therefore \cos^6\theta - \sin^6\theta = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right)$

$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\theta$

$\therefore \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{5}{4}$

$\therefore 3\cos 4\theta - 4\sin 4\theta = 5$

$\therefore \cos(4\theta + \alpha) = 1 \quad [\because \cos\alpha = 3/5;\ \sin\alpha = 4/5]$

$4\theta + \alpha = 2n\pi$ (n முழுவெண்)

$\theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$

(ii) $\tan 2\theta + \tan 2\phi = 0$

$\tan 2\theta = -\tan 2\phi = \tan(-2\phi)$

$2\theta = n\pi - 2\phi$

$\theta + \phi = \frac{n\pi}{2}$

$\tan\theta + \tan\phi + 3 = 0$ —— (1)

$\tan 2\theta + \tan 2\phi = 0$ —— (2)

(2) $\Rightarrow \quad \theta + \phi = \frac{n\pi}{2}$

$\theta, \phi \leq \pi$ என்பதால் $n = 1, 2, 3$ ஆகிய பெறுமானங்கள் மட்டுமே பொருந்தும்.

$n = 1$ எனின் $\tan(\theta + \phi) = \infty$

$\Rightarrow \tan\theta \tan\phi = 1$

$\tan\theta(3 + \tan\theta) = -1$

$\tan^2\theta + 3\tan\theta + 1 = 0$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5}) < 0$

$0 < \theta < \pi/2$ என்பதால் $\tan\theta > 0$

$\therefore n = 1$ என்பது θ, ϕ க்கு ஒரு தீர்வையும் வழங்காது.

$n = 2$ எனின் $\tan\theta = -\tan\phi$

$\Rightarrow$ (1) $3 = 0$ இது பொருந்தியமாகாது.

$\therefore n = 2$ உம் ஒரு தீர்வையும் தராது.

$n = 3$ எனின் $\phi = \frac{3\pi}{2} - \theta$

$\tan\phi = \cot\theta$

$\Rightarrow \tan\theta + \cot\theta + 3 = 0$

$\tan^2\theta + 3\tan\theta + 1 = 0$

$\tan\theta = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$

$\therefore \theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2$ என்னும் இருமெய் தீர்வுகளை பெறுவேயும். இங்கு $\pi/2 < \theta_1$

$\theta_2 < \pi$

$\tan\theta = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ எனின், $\theta = \theta_1$, $\phi = \frac{3\pi}{2} - \theta_1$

$\tan\theta = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ " , $\theta = \theta_2$, $\phi = \frac{3\pi}{2} - \theta_2$

(i.) $\tan^{-1}x = \alpha$, $\tan^{-1}x/2 = \beta$, $\tan^{-1}x/3 = \gamma$ எனின்,

$\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$

$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\pi/2 - \gamma) = \frac{1}{\tan\gamma}$

$$\frac{x + x/2}{1 - x \cdot x/2} = 3/x$$

$$\frac{3x}{2-x^2} = 3/x \implies x^2 = 1 , \ x = \pm 1$$

$\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ என்பதால் $x \neq -1$ $\therefore x = +1$

(9) முக்கோணி ABC இற்குரிய வழக்கமான குறியீடுகளைக் கொண்டு,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ என்பதை நிறுவுக.

முக்கோணி ABC ~~இன் கோணம் A இன் உள்ளிருகூறாக்கி~~யானது BC ஐ D இல் சந்திக்கிறது.

$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos A/2$ ஆகுமென நிறுவுக.

$c>b$ ஆயின், கோணம் A இன் வெளியிருகூறாக்கி ஆனது BC ஐ E இல் சந்திக்குமாயின் AE யிற்குரிய இயல்பொத்த கோவையொன்றைப் பெறுக

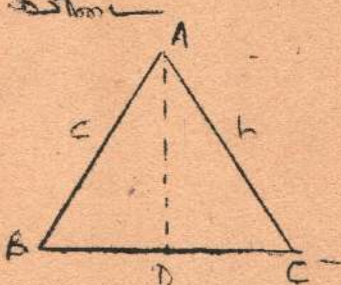
கோணம் DAE இன் உள்ளிருகூறாக்கியானது DE ஐ X இல் சந்திக்குமாயின்

$$AX = \frac{\sqrt{2}\, bc \sin A}{c(\cos A/2 + \sin A/2) + b(\sin A/2 - \cos A/2)}$$

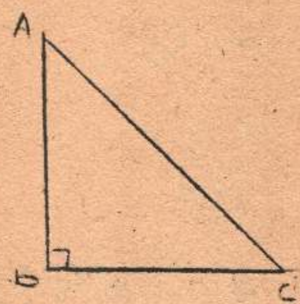
ஆகுமெனக் காட்டுக

$b = c$ ஆயின் AE, AX ஆகியவை பற்றி நீர் என்ன கூறுவீர்

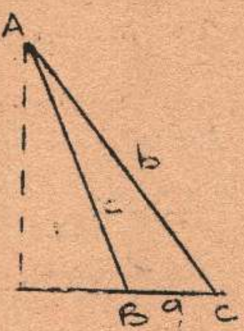
விடை



$AD = AB \sin B$



$AD = AB = AB\sin\pi/2$
$= AB \sin B$



$AD = AB\sin(\pi - B)$
$= AB \sin B$

மூன்று வகையிலும்

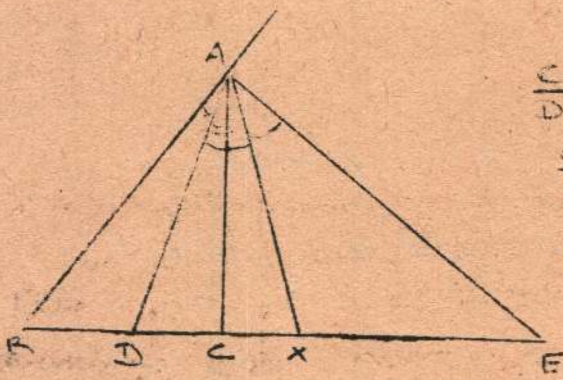
$AD = AB \sin B$
$= AC \sin C$

$\therefore c \sin B = b \sin C$

$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

இவ்வாறே $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{CD}{a} = \frac{b}{b+c}$$

$$\therefore CD = \frac{ab}{b+c}$$

ΔADC இல் $\dfrac{AD}{\sin C} = \dfrac{DC}{\sin A/2}$

$$AD = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{\sin C}{\sin A/2}$$

$$= \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{\sin A}{\sin A/2}$$

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos A/2 \; //$$

மேலும் $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{c}{b}$ $\quad (c > b)$

$$\therefore \frac{a}{CE} = \frac{c-b}{b}$$

$$\therefore CE = \frac{ab}{(c-b)}$$

$\therefore \Delta ACE$ இல், $\dfrac{AE}{\sin C} = \dfrac{CE}{\sin(\pi/2 - A/2)}$

$$AE = \frac{ab}{(c-b)} \frac{\sin C}{\cos A/2}$$

$$= \frac{2bc}{c-b} \sin A/2$$

ΔADE க்கு வழமை போல.

$$AX = \frac{2 AD \cdot AE}{AD + AE} \cos \frac{D\hat{A}E}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2bc}{b+c} \cos A/2 \cdot \frac{2bc}{c-b} \sin A/2 \cdot \cos \pi/4}{2bc\left[\frac{\cos A/2}{c+b} + \frac{\sin A/2}{c-b}\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, bc \sin A}{(b+c)\sin A/2 + (c-b)\cos A/2}$$

$$AX = \frac{\sqrt{2}\, bc \sin A}{c(\cos A/2 + \sin A/2) + b(\sin A/2 - \cos A/2)}$$

$b = c$ எனின் $AD \perp BC$

$AE \parallel BC$

ஆகவே AE அகவரி நிலையானது..

$$AX = \frac{AD}{\cos 45^\circ} = b \cos A/_2 \cdot \sqrt{2}$$

$$AX = \sqrt{2}\, b \cos A/_2$$

(10) ஆண், பெண் இரு பாலருக்குமான பாடசாலையொன்றில் உயிரியல் (B) பௌதிக (P) விஞ்ஞானம் பயிலும் 100 மாணவர்கள் இவ்வெண்ணிக்கையில் T_1, T_2 எனும் இரு வகைப் பரீட்சை வினாத்தாள்களில் ஒன்று வழங்கப்படுகிறது. பொருத்தமான பகுப்பாக்க மாணவர் பங்கீடு அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

பரீட்சை வினாத் தாள் வகை	பால்	உயிரியல்(B) விஞ்ஞானம்	பௌதிக(P) விஞ்ஞானம்
T_1	பெண்(F)	30	10
	ஆண்(M)	15	5
T_2	பெண்(F)	20	5
	ஆண்(M)	10	5

மாணவர் ஒருவர் எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்படுகின்றார்.

(i) (a) மாணவர் ஒரு பெண்ணாக.

(b) " உயிரியல் விஞ்ஞானத்தைப் பயில்கின்றார்.

(c) அவர் T_1 ஆன பரீட்சை வினாத்தாள் பெற்ற மாணவர்

(d) மாணவர் பெண் என தெரிந்து கொண்டு அம்மாணவி உயிரியல் விஞ்ஞானத்தை பயில்கின்றார்.

ஆகியவற்றுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(ii) தெரிவுசெய்யப்பட்ட மாணவரின் வினாத்தாள், பால், விஞ்ஞானப் பிரிவு ஆகியவற்றுக்கு ஏற்ப X எனும் எழுமாற்று மாறியின் பெறுமானங்கள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. எழுமாற்று மாறி X இன் பெறுமானங்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

தாள்	T_1	T_1	T_1	T_1	T_2	T_2	T_2	T_2
பால்	F	M	F	M	F	M	F	M
விஞ்ஞானம்	B	B	P	P	B	B	P	P
X இன் பெறுமானம்	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4

X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு அதிலிருந்து அதன் இ—யையும், மாறற்றிறனையும் காண்க.

<u>விடை</u>

(a) மாணவர்களின் மொத்தத் தொகை = 100

பெண்களின் தொகை = 30 + 10 + 20 + 15 = 65

P. (தெரிவு செய்யப்படுபவர் பெண்) $= \frac{65}{100} = 0{\cdot}65$

b) உ—யிரியல் கற்கும் மொத்த மாணவர் = 30 + 15 + 20 + 10
= 75

∴ P. (தெரிவு செய்யப்படுபவர் உ—யிரியல் கற்பவர்) $= \frac{75}{100}$
$= 0{\cdot}75$ //

(C) T_1 விருத்தாளிப் பெற்ற மாணவர் தொகை
= 30 + 15 + 10 + 5 = 60

∴ P. (தெரிவு செய்யப்படுபவர் T_1 விருத்தாளிப் பெறுபவர்)
$= 60/100 = 0{\cdot}60$

d) உயிரியல் விஞ்ஞானம் கற்கும் பெண்களின் தொகை = 30 + 20
= 50

∴ P. (தெரிவு செய்யப்படுபவர் உயிரியல் பயிலும் பெண்ணாக இருத்தல்) $= \frac{50}{65}$

$X = x \quad -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2 \quad 3 \quad 4$

$P.(X=x) \quad 0 3,\ 0 15,\ 0{\cdot}1 \quad 0 05 \quad 0{\cdot}2,\ 0{\cdot}1 \quad 0{\cdot}05 \quad 0{\cdot}05$

இ— $= E(x) = \sum x_2 \; P_{(x = x_2)}$

$= (-4)(0{,}3) + (-3)(0\ 15) + (-2)(0{\cdot}1) + (-1)(0{\cdot}05)$

$+ 1(0\ 2) + 2(0{\cdot}1) + 3(0{\cdot}05) + 4(0{\cdot}05)$

$= -1{\cdot}2 - 0{\cdot}45 - 0{\cdot}2 - 0{\cdot}05 + 0{\cdot}2 + 0{\cdot}2$

$= -1{\cdot}15$ //

$E(x^2) = 16(0{\cdot}3) + 9(0{\cdot}15) + 4(0{\cdot}1) + 1(0{\cdot}05) + 1(0{\cdot}2)$
$+ 4(0{\cdot}1) + 9(0{\cdot}05) + 16(0\ 05)$

$= 16(0{\cdot}35) + 9(0\ 2) + 4(0{\cdot}2) + 0\ 25$

$= 8{\cdot}45$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 7{\cdot}1275$

உரிமை பதிப்பகத்துக்குரியது!

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

கணிதம் 1. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1986.

ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக.

1 (i) $k > 0$ ஆக இருக்க, $x^2 - x - k = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் நேரான, மறையான மூலங்கள் $\alpha, -\beta$ ஆகும். எல்லா $n \geq 1$ இற்கும் $s_1 > \alpha$, $s_{n+1} = \sqrt{(k + s_n)}$ ஆகுமாறு $s_1, s_2, s_3, \dots s_n \dots$ என்பது நேர் எண்களின் தொடரியொன்றாகும். $s_{n+2}^2 - s_{n+1}^2 = s_{n+1} - s_n$ எனக் காட்டுக?

கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, n எனும் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் $s_{n+1} < s_n$ எனவும் $s_n > \alpha$ எனவும் காட்டுக?

(ii) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots$ எனும் தொடரின் n ஆம் உறுப்பு U_n ஐ எழுதுக?

$U_n \equiv V_n - V_{n+1}$ எனும் வடிவத்தில் எழுதக்கூடியதாக V_n என்பதை காண்க.

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$ எனக் காட்டுக?

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} U_k$$ உள்ளதென உய்த்தறிக?

விடை:

(i) $s_{n+2}^2 - s_{n+1}^2 = k + s_{n+1} - k - s_n = s_{n+1} - s_n$ — ①

$s_1 > \alpha$ உம் $\alpha, -\beta$, $x^2 - x - k$ மூலங்களாகும் (தரவு)

$\therefore s_1^2 - s_1 - k = (s_1 - \alpha)(s_1 + \beta) > 0$

ஆனால் $s_2^2 = s_1 + k < s_1^2$ — ②

$\Rightarrow s_2 < s_1 \quad (\because s_1, s_2 > 0)$

① $\Rightarrow (s_{n+2} + s_{n+1})(s_{n+2} - s_{n+1}) = s_{n+1} - s_n$ — ③

$\because s_n > 0$,

③ $\Rightarrow s_{n+2} < s_{n+1} \iff s_{n+1} < s_n$

$\therefore s_{n+1} < s_n$ என்பது $n = p$ க்கு உண்மை என்றால் $n = p + 1$ இற்கும் உண்மையாகும். ஆனால் $n = 1$ இற்கு இக்கூற்று உண்மையாகும். ∴ கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால் n இன் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் இக்கூற்று ($s_{n+1} < s_n$) உண்மையாகும்.

$s_{n+1}^2 = s_n + k < s_n^2$ ($\because s_{n+1} < s_n$)

$\Rightarrow s_n^2 - s_n - k = (s_n - \alpha)(s_n + \beta) > 0$

$\Rightarrow s_n > \alpha$ or $s_n < -\beta$ இது பொருந்ாது.

[$\because s_n > 0$]

$\Rightarrow s_n > \alpha$

(ii) $u_n = \dfrac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = V_n - V_{n+1}$

$\therefore V_n = 1/n^2$

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} (V_k - V_{k+1}) = V_1 - V_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim \sum_{k=1}^{n} U_k = \lim_{n \to \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\}$$

$$= 1 - \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = 1$$

∴ ஒருங்கு தொடர்

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 எனும் சிக்கல் எண்கள் முறையே ஆகண் வரிப்படத்திலுள்ள A_1, A_2, A_3, A_4 எனும் வெவ்வேறு புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. z_1, z_2 என்பன $az^2 - 2bz + c = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயிருக்க z_3, z_4 என்பன $a'z^2 + 2b'z + c' = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$ac' + a'c - 2bb' = 0$ எனின்

$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) = 2(z_1 z_2 + z_3 z_4)$$

ஆகும் எனக் காட்டுக. மேற்கூறப்பட்ட முடிவை

$$\left\{ z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3 + z_4) \right\} \left\{ z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3 + z_4) \right\} = \left\{ \tfrac{1}{2}(z_3 - z_4) \right\}^2$$

எனும் வடிவத்தில் எழுதி $A_3 A_4$ யின் நடுப்புள்ளி E ஆயின் EA_1, EA_2 என்பன $A_3 A_4$ உடன் சமனான சாய்வு கோணங்களில் அமைந்திருக்கும் எனக் காட்டுக.

விடை:-

z_1, z_2 என்பன $az^2 + 2bz + c = 0$ இன் மூலங்கள்.

$\therefore z_1 + z_2 = \dfrac{-2b}{a}$, $z_1 z_2 = c/a$ —①

z_3, z_4 என்பன $a'z^2 + 2b'z + c' = 0$ இன் மூலங்கள்

$z_3 + z_4 = -\dfrac{2b'}{a'}$, $z_3 z_4 = c'/a'$ —②

① + ② $\Longrightarrow c/a + c'/a' = \dfrac{ca' + ac'}{aa'}$

$= z_1 z_2 + z_3 z_4$

and $\dfrac{2bb'}{aa'} = \dfrac{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)}{2}$

$ac' + a'c - 2bb' = 0$ எனின்

$$(z_1+z_2)(z_3+z_4) = 2(z_1z_2+z_3z_4)$$

$$\left\{z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}\left\{z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\} = z_1z_2 + \tfrac{1}{4}(z_3+z_4)^2 - \tfrac{1}{2}(z_1+z_2)(z_3+z_4)$$

$$= z_1z_2 + \tfrac{1}{4}(z_3+z_4)^2 - (z_1z_2+z_3z_4)$$

$$\left\{z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}\left\{z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\} = \tfrac{1}{4}(z_3-z_4)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left\{z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}}{\tfrac{1}{2}(z_3-z_4)} = \frac{\tfrac{1}{2}(z_3-z_4)}{\left\{z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}}$$

$$\text{வீச்சம்} \frac{\left\{z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}}{\tfrac{1}{2}(z_3-z_4)} = \text{வீச்சம்} \frac{\tfrac{1}{2}(z_3-z_4)}{\left\{z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}}$$

$$\Rightarrow \text{வீச்சம}\left\{z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\} - \text{வீச்சம்}\ {-\tfrac{1}{2}}(z_3-z_4)$$
$$= \text{வீச்சம்}\ \tfrac{1}{2}(z_3-z_4) - \text{வீச்சம்}\left\{z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}$$

$$\Rightarrow \text{வீச்சம்}\left\{z_1 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\} - \text{வீச்சம்}\left\{z_3 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}$$
$$= \text{வீச்சம்}\left\{z_3 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\} - \text{வீச்சம்}\left\{z_2 - \tfrac{1}{2}(z_3+z_4)\right\}$$

$\Rightarrow A_1E, A_3E$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம்
$= A_3E, A_2E$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம்.

$\therefore A_1E, A_2E$ என்பன A_3A_4 உடன் சமமான கோணங்களில் சாய்ந்துள்ளன

(3) (i) a, b என்பன 1 இலும் பெரிதாயிருப்பின்
$2(ab+1) > (a+1)(b+1)$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து c உம் d உம் 1 இலும் பெரிதாயிருப்பின்
$8(abcd+1) > (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x,y,z) \equiv x(y^4-z^4) + y(z^4-x^4) + z(x^4-y^4)$ எனின்
$(x-y), (y-z), (z-x)$ என்பன $f(x,y,z)$ இன் காரணி எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து
$x(y^4-z^4) + y(z^4-x^4) + z(x^4-y^4)$ என்பதை காரணிப்படுத்துக.

<u>விடை</u> :-

(i) $a, b > 1$

$\therefore (a-1) > 0, \ (b-1) > 0$

$(a-1)(b-1) > 0$

$\Rightarrow ab - a - b + 1 > 0$

$\Rightarrow (ab+1) > a+b$

$2(ab+1) > a+b+ab+1 = (a+1)(b+1)$ —— ①

///ly $c, d > 1 \Rightarrow 2(cd+1) > (c+1)(d+1)$ —— ②

$\therefore 4(ab+1)(cd+1) > (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ —— ③

$2(abcd) > (ab+1)(cd+1)$ — ④ $\{\because ab, cd > 1\}$

③ and ④ $\Rightarrow 8(abcd+1) > (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$

(ii) $f(x,y,z) \equiv x(y^4-z^4)+y(z^4-x^4)+z(x^4-y^4)$

இது 5ம் படியிலுள்ள ஒருமையான சமச்சீர்ச் சார்பு.

$f(x,y,z)=0 \Longrightarrow (x-y)$ ஒரு காரணி.

இதே போல் $(y-z)$, $(z-x)$ என்பனவும் ஒரு காரணி

$\therefore f(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z)(z-x)\{\lambda(x^2+y^2+z^2)$
$+\mu(xy+yz+zx)\}$

குணகங்களைச் சமப்படுத்த

x^4y இன் குணகம் $\lambda = 1$ —— ①

x^3y " " $-\mu+\lambda = 0$ —— ②

① & ② $\Longrightarrow \lambda = \mu = 1$

$\therefore x(y^4-z^4)+y(z^4-x^4)+z(x^4-y^4)$

$\equiv (x-y)(y-z)(z-x)\{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\}$

④ நேர்மறையான முழுவெண்ணுக்குரிய தாமோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

$\tan 5\theta$ ஐ $\tan\theta$ இன் உறுப்புகளில் பெறுக.

$\tan 5\theta = 0$ எனும் சமன்பாட்டைக் கருதி,

$x^2-10x+5=0$ எனும் சமன்பாட்டின்

மூலங்கள் $\tan^2(\pi/5)$ உம், $\tan^2(2\pi/5)$ உம் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sec^4(\pi/5)+\sec^4(2\pi/5)$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

விடை:-

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$

$= \{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta\}$

$+ i\{5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\}$

டிமோய்வரின், தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \quad — ①$$

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^5\theta \quad — ②$$

$$\frac{②}{①} \quad \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} = \frac{5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\tan^5\theta - 10\tan^3\theta + 5\tan\theta}{1 - 10\tan^3\theta + 5\tan^4\theta}$$

$$\tan 5\theta = 0 \quad \therefore 5\theta = n\pi, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \tan 5\theta(\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 5) = 0 \quad \text{இங்கு } \theta = 0$$

$$\therefore \tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 5 = 0$$

இங்கு $\theta = \frac{r\pi}{5}$, $r \neq 0$ OR 5 இன் மூலங்கள்

$$x \equiv \tan^2\theta$$

$$= x^2 - 10x + 5 = 0 \quad —— ①$$

$$\therefore x = \tan^2\pi/5, \ \tan^2\frac{2\pi}{5}, \ \tan^2\frac{3\pi}{5}, \ldots\ldots$$

ஆனால் $\tan\frac{3\pi}{5} = \tan(\pi - 2\pi/5) = -\tan(2\pi/5)$

and $\tan\frac{4\pi}{5} = -\tan\pi/5$, etc.

$\therefore \tan^2\pi/5$, $\tan^2\frac{2\pi}{5}$ என்பன ① இன் மூலங்கள் ஆகும்.

$$p = \tan^2\pi/5, \ q = \tan^2\frac{2\pi}{5} \quad = p + q = 10, \ pq = 5$$

$$(1+p)^2 + (1+q)^2 = 1 + 2p + p^2 + 1 + 2q + q^2$$

$$= 2 + 2(p+q) + (p+q)^2 - 2pq$$

$$(1+p)^2(1+q)^2 = 2 + 2\cdot 10 + 10^2 - 10$$

$$= 112$$

$$(1 - \tan^2\pi/5)^2 + (1 + \tan^2(2\pi/5))^2 = 112$$

$$\therefore \sec^4(\pi/5) + \sec^4(2\pi/5) = 112$$

⑤

(i) நேர் முழுவெண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை கூறி அதனை நிறுவுக.

$(3\sqrt{2}x - \frac{5}{\sqrt{2}})^6$ எனும் பல்லுறுப்பியின் குணகங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. உமது விடையை இயன்றளவு சுருக்கமான வடிவில் தருக.

(ii) KAHATAGASDIGILIYA எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாமென்பதைக் காண்க.

விடை :

(i) $(1+x)^7 = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$ இங்கு ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$n=1$ ஆகில் $L.H.S = 1+x$, $R.H.S = 1+x$

$n=1$ இற்கு கூற்று உண்மை என்க

$$(1+x)^p = \sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^r$$

$$(1+x)^{p+1} = \left(\sum_{r=0}^{p} {}^pC_r x^r\right)(1+x)$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{p} \left({}^pC_{r-1} + {}^pC_r\right)x^r + x^{p+1}$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{p} {}^{p+1}C_r x^r + x^{p+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{p+1} {}^{p+1}C_r x^r$$

∴ கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் எல்லா நேர் முழு எண் பெறுமானங்களுக்கும் இக் கூற்று உண்மை.

$(3\sqrt{2}x - 5/\sqrt{2})^8$ இதில் $x = 1$ எனப் பிரதியிடுக

∴ விரிவின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (3\sqrt{2} - 5/\sqrt{2})^8$$

$$= \left(\frac{6-5}{\sqrt{2}}\right)^8 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

(ii) K A H T G S P I L Y

1 5 1 1 2 1 1 3 1 1

வகைகள் (a) 4 எழுத்துக்களும் ஒரே வகை

(b) 3 எழுத்துக்கள் ஒரே வகை மற்றையது வேறொன்று

(c) 2 " " " மற்றையது 2 வேறு.

(d) 2 " " " 2 எழுத்துக்கள் வேறு வேறானவை.

(e) நான்கும் வித்தியாசமானவை.

1ஆம் வகையில் வரிசை மாற்றங்கள் $= 1$

2ஆம் " " " $= \{{}^2C_1 \times {}^9C_1\} \times \frac{4!}{3!} = 72$

3ஆம் வகையில் வரிசை மாற்றங்கள் $= [3] \times \frac{4!}{2!\,2!} = 18$

4ஆம் " " " $= \{{}^3C_1 \times {}^9C_2\} \times \frac{4!}{2!} = 1296$

5ஆம் " " " $= {}^{10}C_4 \times 4! = 5040$

∴ மொத்த வரிசை மாற்றங்கள் $= 1+72+18+1296+5040 = 6427$

6) $0 < x < \pi/2$ என்க. கேத்திர கணித முறைப்படி $\sin x < x < \tan x$ என நிறுவுக.

x ஆனது நேர் பெறுமானங்களுக்கூடாக 0 ஐ நாடும் போது $\frac{\sin x}{x}$ இன் எல்லையை உய்த்தறிக.

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x + \tan 7x}{6x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - \cos x}{\sin x}$

(ii) $y_n = \sin^n x$ என்க. இங்கே n யாதாயினும் ஒரு முழுவெண் ஆகும்.

$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = n(n-1)y_{n-2} - n^2 y_n$ எனக் காட்டுக.

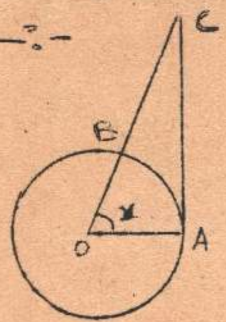
$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} y_n \, dx \quad (n > 1)$ என்க.

$I_n = \int_0^{\pi} e^{-x} \frac{d^2 y_n}{dx^2} \cdot dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

I_4 இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

விடை:-



x - ஆரையன்

ஓரலகு வட்டம் $(OA = 1)$

$AC = \tan x$

ΔOAB இன் பரப்பு < ஆரைச்சிறை OAB யின் பரப்பு < ΔOAC யின் பரப்பு.

$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$

$(0 < x < \pi/2) \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \sec x$

$x \to 0$ ஆக $\sec x \to 1$

$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \tan 7x}{6x} = \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin 5x}{6x} + \dfrac{\tan 7x}{6x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\frac{5x}{6x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{6\cos x}$$

$$= 5/6 \times \frac{7}{6} = 2$$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x} + \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x/2}{2\sin x/2\cdot\cos x/2} + 1$$

$$= \lim_{x\to 0}\tan x/2 + 1$$

$$= 0 + 1 = 1$$

(ii)

$$y_n = \sin^n x$$

$$\frac{dy_n}{dx} = n\sin^{n-1}x\cdot\cos x$$

$$\frac{d^2y_n}{dx^2} = n(n-1)\sin^{n-2}x - n^2\sin^n x$$

$$= n(n-1)y_{n-2} - n^2 y_n \quad \text{--- (1)}$$

$$I_n = \int_0^\pi e^{-x}y_n\,dx$$

$$I_n = \int_0^\pi -y_n\frac{d(e^{-x})}{dx}\cdot dx$$ [பகுதிகளாகத் தொகையிடல்]

$$= \left[-e^{-x}y_n\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\frac{dy_n}{dx}\cdot dx$$

$$= 0 + \int_0^\pi e^{-x}\frac{dy_n}{dx}\cdot dx$$

$$= -\int_0^\pi \frac{dy_n}{dx}\,\frac{d(e^{-x})}{dx}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\frac{dy_n}{dx}\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x}\frac{d^2y_n}{dx^2}\,dx$$

$$= \int_0^\pi e^{-x}\frac{d^2y_n}{dx}\cdot dx$$

(1) $\Rightarrow I_n = \displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\left\{n(n+1)y_{n-2} - n^2y_n\right\}dx$

(ie) $(n^2+1)I_n = n(n+1)\int_0^{\pi} e^{-x}\, y_{n-2}\, dx$

$= n(n-1)\, I_{n-2}$

(ie) $I_n = \dfrac{n(n+1)}{(n^2+1)} I_{n-2}$

$n=4$ ஆக $I_4 = \dfrac{4\cdot 3}{(16+1)} I_2 = \dfrac{12}{17} I_2$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-x}\cos 2x$$

$$= {}^2/_5 \int_0^{\pi} e^{-x}dx = {}^2/_5\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi}$$

$$= {}^2/_5\,(1-e^{-\pi})$$

$$\therefore I_4 = \frac{12}{17}\times\frac{2}{5}\;(1-e^{-\pi})$$

$$I_4 = \frac{24}{85}(1-e^{-\pi})$$

7 (i) $I = \int_0^{a}\dfrac{x^2}{x^2+(x-a)^2}dx$, $J = \int_0^{a}\dfrac{(x-a)^2}{x^2(x-a)^2}dx$

எனின் $I = J = a/2$ எனக் காட்டுக.

(ii) $y = e^{-x}$ எனும் பிரதியீட்டினை பயன்படுத்தி

$\int_1^{2}\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$ எனும் தொகையீட்டினை காண்க.

விடை :-

(i) $I = \int_0^{a}\dfrac{x^2}{x^2+(x-a)^2}dx$ and

$J = \int_0^{a}\dfrac{(x-a)^2}{x^2+(x-a)^2}dx$

$-y = x-a$ என J இல் பிரதியிடுக.

$$J = -\int_a^{0}\frac{y^2}{(a-y)^2+y^2}dy = \int_0^{a}\frac{y^2}{(y-a)^2+y^2}dy$$

$$I = \int_0^{a}\frac{x^2}{x^2+(x-a)^2}dx$$

$$I+J = \int_0^{a}\frac{x^2+(x-a)^2}{x^2+(x-a)^2}dx = \int_0^{a}dx = a$$

$$\Longrightarrow\quad I = J = a/2$$

(ii) $y = e^{-x}$ எனப் பிரதியீடு செய்க

$$I = \int_1^2 \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_{e^{-1}}^{e^{-2}} \frac{-y}{1-y}\,dy$$

$$= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{y}{1+y}\,dy = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= \Big[y - \log(1+y) \Big]_{e^{-2}}^{e^{-1}}$$

$$= (e^{-1} - e^{-2}) - \log(1 + 1/e) + \log(1 + 1/e^2)$$

$$= 1/e - 1/e^2 + \log\left[\frac{1 + 1/e^2}{1 + 1/e}\right]$$

$$= 1/e - 1/e^{z} + \log\left\{\frac{1+e^2}{e(1+e)}\right\}$$

6. (i) $\tan(x + \pi/4)$ என்னும் சார்பின் மக்லோரின் விரிவை x^5 எனும் உறுப்பு வரை காண்க.

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3(1+x)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதுக.

$|x|<1$ எனின், x இன் ஏறுவலுக்களில் உள்ள $f(x)$ இன் விரிவில் x^{2n}, x^{2n+1} என்பவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

விடை:-

$$f(x) = \tan(x + \pi/4)$$
$$z = x + \pi/4 \text{ எனப் பிரதியிடுக.}$$

$$\therefore f(x) = \tan z$$
$$f'(x) = \sec^2 z$$
$$f''(x) = 2\sec^2 z \tan z$$
$$f'''(x) = 2\sec^4 z + 4\sec^2 z \tan^2 z$$
$$f^{iv}(x) = 16\sec^4 z \tan z + 8\sec^2 z \tan^3 z$$
$$f^{v}(x) = 64\sec^4 z \tan z + 16\sec^6 z + 16\sec^2 z \tan^4 z + 24\sec^4 z \tan^2 z$$

and

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 4, \quad f'''(0) = 16$$
$$f^{iv}(0) = 64 + 16 = 80$$
$$f^{v}(0) = 512$$

ஃ மக்லோரின் விரிவு

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^3}{3!}+\frac{80x^4}{4!}+\frac{512x^5}{5!}+\cdots$$

(ii)
$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)} = \frac{1}{(1-x)^2}\left\{\frac{1}{(1-x)(1+x)}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)}+\frac{1}{(1+x)}\right]$$

$$= \frac{1}{2(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{1}{8(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{r=0}^{\infty}(-x)^r,\ |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty}x^r,\ |x|<1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} r x^{r-1},\ |x|<1$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{r(r+1)}{2}x^{r-1},\ |x|<1$$

$f(x)$ இன் விரிவில்

x^{2n} இன் குணகம் $= \frac{1}{4}(2n+1)(2n+2)+\frac{1}{4}(2n+1)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$= (n+1)^2$

x^{2n+1} இன் குணகம் $= \frac{1}{4}(2n+2)(2n+3)+\frac{1}{4}(2n+2)+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}$

$= (n+1)(n+2)$

9. வகையிடத்தக்க $f(x)$ எனும் சார்பு, $x=x_0$ இல்

(i) இழிவுப் பெறுமானத்தை

(ii) உயர்வு " "

உடையதாக இருப்பதற்கு, வேண்டியதும் போதுமானதுமான நிபந்தனைகளைக் கொண்ட ஒரு தொடரை முதல் வகையீட்டுக் குணகத்தில் கூறுக?

$x = 3at^2,\ y = a(t-3t^3)$ எனும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கே t என்பது ஒரு பரமானமாகும். a என்பது நேரான ஒருமையாகும். வளையியில் "t எனும் புள்ளியில்" dy/dx ஐ காண்க.

இதிலிருந்து வளையியிலுள்ள நிலையான புள்ளிகளைக் கண்டு வளையியின் பருமட்டான வரைபொன்று வரைக

விடை:-

(i) $f'(x_0)=0$ உம் $f'(x_0-\delta)<0$ and

$f'(x_0+\delta)>0$, $\delta>0$, δ சிறியது

(ii) $f'(x_0)=0$ உம் $f'(x_0-\delta)>0$ and

$f'(x_0+\delta)<0$. $\delta>0$, δ சிறியது.

வளையியின் பரமானச் சமன்பாடுகள்

$x=3at^2$, $y=a(t-3t^3)$

$\frac{dx}{dt}=6at$, $\frac{dy}{dx}=a(1-9t^2)$

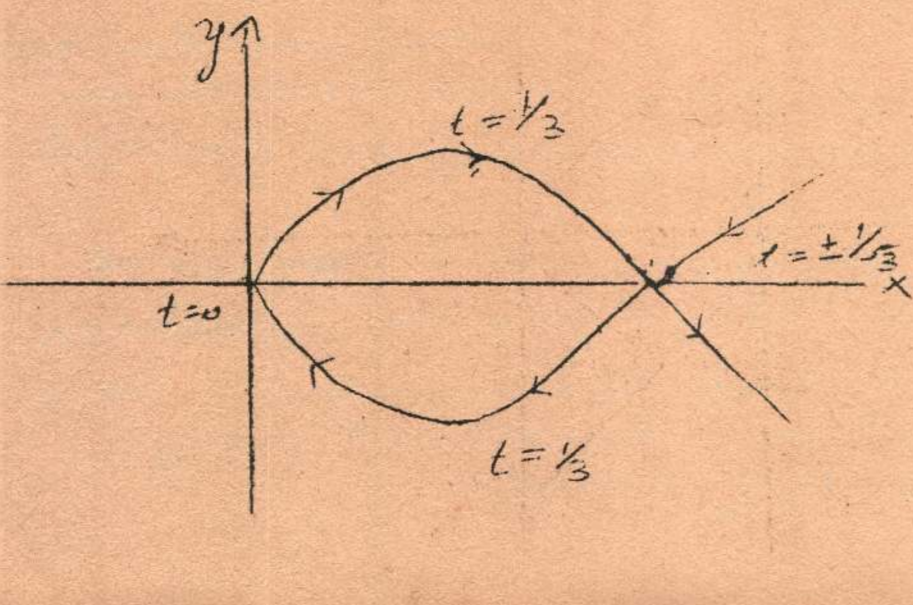
$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{(1-9t^2)}{6t}$

திரும்பற் புள்ளிகளுக்கு $1-9t^2=0$

$t=\pm\frac{1}{3}$

திரும்பற் புள்ளிகளின் இயல்பு -

t	x	y	dy/dx	இயல்பு
$-\infty<t<-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\infty\to a$	$\infty\to 0$	$\infty\to\frac{1}{\sqrt{3}}$	இழிவு
$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{3}$	$\infty\to\frac{a}{3}$	$0\to-\frac{2a}{9}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\to 0$	
$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<0$	$\frac{a}{3}\to 0$	$-\frac{2a}{9}\to 0$	$0\to-\infty$	
$0<t<\frac{1}{3}$	$0\to\frac{a}{3}$	$0\to\frac{2a}{9}$	$-\infty\to 0$	
$\frac{1}{3}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{3}\to a$	$\frac{2a}{9}\to 0$	$0-\frac{1}{\sqrt{3}}$	உயர்வு
$\frac{1}{\sqrt{3}}<t<+\infty$	$a\to\infty$	$0\to-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\to\infty$	



(10) ஒரே வரைபடத்தில் $y^2(2-x) = 4x$, $y^2 = 4(2-x)$ என்னும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் வளையிகளை வரைக. இவ் வளையிகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

இப்பிரதேசம் y அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணத்தினூடாக சுழற்றப்படுகிறது. அவ்வாறு உண்டாக்கப்படும் கனவளவைத் துணிவதற்கான வரையறுத்த தொகையீடுகளில் காண்க.
[தொகையீடுகள் கணிக்கப்பட தேவையில்லை]

விடை:-

$y^2 = \frac{4x}{(2-x)}$ என்பது x அச்சு பற்றிச் சமச்சீரானது. அத்துடன் $x = 0$ இற்கும் $x = 2$ இற்கும் இடையில் அமையும்.

$y \to \infty$ ஆக $x \to 2-0$

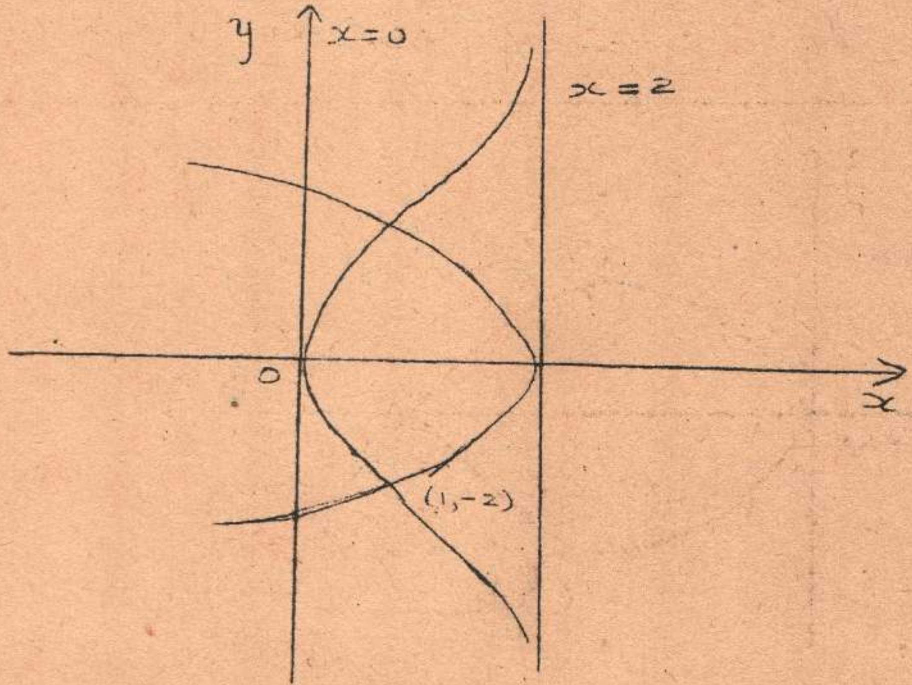
$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{8}{(2-x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{\sqrt{x}\,(2-x)^{3/2}}$$

$\therefore x \to 0$ ஆக $\frac{dy}{dx} \to \infty$

$x \to 2-0$ " $\frac{dy}{dx} \to \infty$.

$y^2 = 4(2-x)$ என்பது பரவளைவு. இரு வளையிகளும் இடைவெட்டும் புள்ளிகள் $(1,2)$ உம் $(1,-2)$ உம் ஆகும்.



இடைப்பட்ட பரப்பு $S = 2\left\{\int_0^1 \sqrt{\frac{4x}{(2-x)}}\,dx + \int_1^2 2\sqrt{2-x}\,dx\right\}$

பிரதியிடுக $x = 2\sin^2\theta;\ dx = 4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$S = 2\left\{\int_0^{\pi/4} 8\sin^2\theta\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\sqrt{2}\cos^2\theta\sin\theta\cdot d\theta\right\}$$

$$= 2\left\{\int_0^{\pi/4} 4(1-\cos 2\theta)\,d\theta + 8\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d(-\cos\theta)\right\}$$

$$= 2\left\{4\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} + 8\sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} z^2\,dz\right\}$$

(இங்கு $z = \cos\theta$)

$$= 2\left\{4\left[\pi/4 - 1/2\right] + 8\sqrt{2}\left[z^3/3\right]_0^{1/\sqrt{2}}\right\}$$

$$= 2\left\{\pi - 2 + \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}\right\}$$

$$= 2\left\{\pi - 2 + 4/3\right\}$$

$$= 2(\pi - 2/3)$$

y அச்சுப் பற்றி 2 ஆரை 90° ஊடாக சுழற்றும் பொழுது பெறப்படும் கனவளவு

$$= 2\left\{2\pi - \int_0^1 \pi x^2\,dy_1(x) + \int_1^2 \pi x^2\,dy_2(x)\right\}$$

இங்கு $y_1(x) = \sqrt{\frac{4x}{(2-x)}}$ உம்

$y_2(x) = 2\sqrt{2-x}$

கனவளவு $= 2\left\{\pi\int_0^2 \left(\frac{8-y^2}{4}\right)^2 dy - \pi\int_0^2 \left(\frac{2y^2}{4+y^2}\right) dy\right\}$

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் II, க.பொ.த (உயர்தரம்), மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட், 1986.

எவையேனும் ஆறு வினாக்களுக்கு விடை தருக

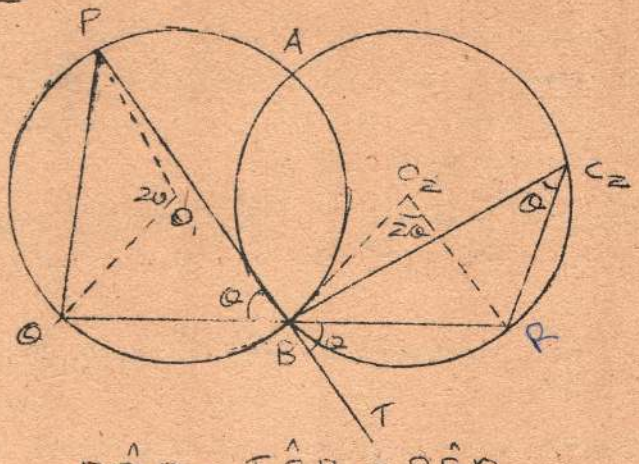
1. (i) C_1, C_2 எனும் சமமான வட்டங்கள் A, B இல் வெட்டுகின்றன. C_2 இன் B இல் உள்ள தொடலி C_1 ஐ P இல் வெட்டுகிறது. Q, R எனும் புள்ளிகள் B யுடன் ஒரு கோட்டில் அமையுமாறு, முறையே C_1, C_2 இல் உள்ளன. PQ = BR எனக் காட்டுக.

(ii) ABC எனும் முக்கோணியின் பக்கங்களான BC, CA யின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே M, N ஆகும். AM, BN என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் இருப்பின், முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவானது $\frac{2}{3}$ AM·BN இற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

(iii) நேர்கோடொன்று ABCD எனும் நாற்பக்கலொன்றின் பக்கங்களான AB, BC, CD, DA என்பவற்றை முறையே P, Q, R, S எனும் புள்ளியில் இடைவெட்டுகிறது. மெனிலோசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேறு வழியாகவோ

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA} = 1$$ என நிறுவுக.

விடை.

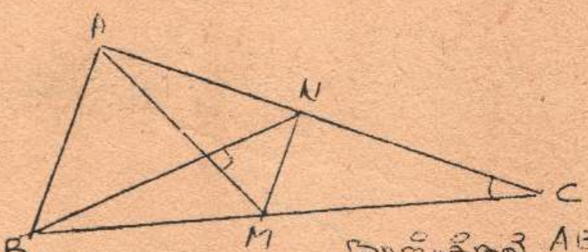


$$B\hat{D}R = T\hat{B}R = P\hat{B}Q$$

Δ கள் O_1PQ O_2BR என்பன ஒருங்கிசையும்.

$\Longrightarrow PQ = BR$.

(ii)



நாற்பக்கல் ABMN இன் பரப்பு

$= \Delta$ ABN இன் பரப்பு + Δ BMN இன் பரப்பு

$= \frac{1}{2} AG / BN + \frac{1}{2} MG \cdot BN$

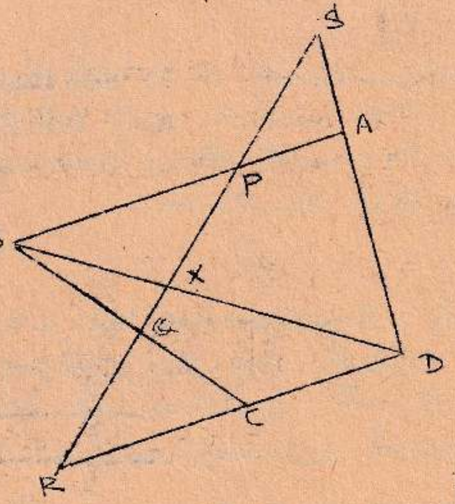
$= \frac{1}{2}(AG + MG) BN$

$= \frac{1}{2} AM BN$

நாற்பக்கல் $= \frac{3}{4} \times \triangle ABC$ யின் பரப்பு

$\Rightarrow \triangle ABC$ யின் பரப்பு $= \frac{2}{3} AM \cdot BN$

(iii)



மெனிலோசின் தேற்றப்படி

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BX}{XD}\cdot\frac{DS}{SA} = -1 \quad \text{—①}$$

and

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DX}{XB} = -1 \quad \text{—②}$$

① & ② ⇒

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA} = 1$$

(2) (i) OABC எனும் நான்முகியொன்றில் A_1, B_1, C_1 எனும் புள்ளிகள் முறையே OA, OB, OC எனும் விளிம்புகளில் அமைந்துள்ளன. B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 எனும் கோடுகள் முறையே BC, CA, AB எனும் விளிம்புகளை L, M, N இல் சந்திக்கின்றன. L, M, N ஒரே கோட்டுப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

(ii) VABCD எனும் கூம்பகமொன்றின் அடி ABCD ஆனது a ஐ பக்கமாகக் கொண்ட சதுரமாகும். சாய்விளிம்புகள் ஒவ்வொன்றும் b நீளமுடையது. VAB, VAD எனும் தளங்களுக்கு இடையிலான இருமுகக் கோணம் θ ஆனது

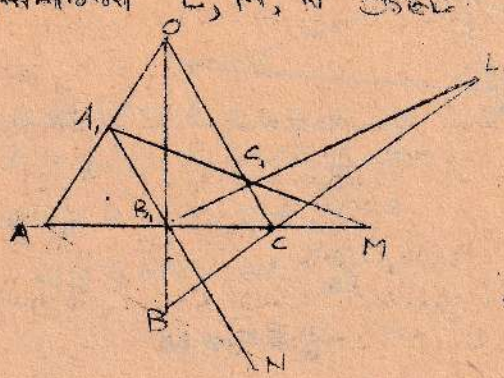
$$\sqrt{2}\sin(\theta/2) = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

(iii) மேற்குறிப்பிட்ட கூம்பகத்தின் கனவளவு V ஆகவும் பக்க முகங்களில் ஒன்றின் பரப்பளவு S ஆகவும் உள்ளன. VBC எனும் பக்கமுகம் அமைந்துள்ள தளத்திலிருந்து A இன் தூரம் d ஆனது $\frac{3V}{2S}$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

$$d = \frac{2a\sqrt{(b^2-2a^2)}}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

விடை:-

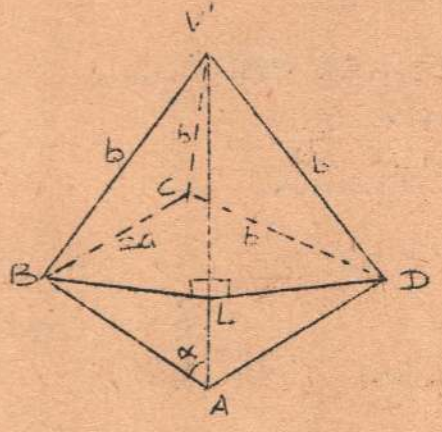
தளங்கள் $A_1B_1C_1$, ABC என்பவற்றிற்கான பொதுப்புள்ளிகள் L, M, N ஆகும்.



தளங்கள் $A_1B_1C_1$, ABC என்பன வேறுவேறான தளங்கள்.

∴ அத்தளங்கள் ஒரு கோட்டில் சந்திக்க வேண்டும்

∴ L, M, N என்பவை கன்கோட்டில் உள்ளன.
∴ L, M, N 〃 〃 ஒரே நேர் கோட்டுப் புள்ளிகள்

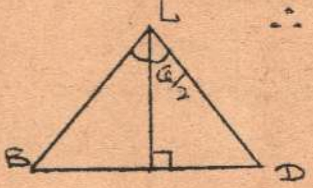


BL உம் DL உம் ⊥ VA
தளங்கள் VAB, VAD என்பவற்றுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $B\hat{L}D$.

$\Delta B\hat{L}D$ யில்,

$$BD = 2\sqrt{2}a$$
$$BL = 2a\sin\alpha$$
$$= \frac{2a\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$

சமச்சீரின்படி $BL = DL$



$$\therefore \sin\theta/2 = \frac{a\sqrt{2}\,b}{2a\sqrt{b^2-a^2}}$$
$$\sqrt{2}\sin\theta/2 = \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

(iii) $VABCD = VABC + VADC$
$$= \tfrac{1}{3}Sd + \tfrac{1}{3}Sd = \tfrac{2}{3}Sd$$
$$\therefore \tfrac{2}{3}Sd = v \quad \therefore d = \frac{3v}{2s} \text{ — (1)}$$

கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \tfrac{1}{3}(2a)^2\sqrt{b^2-2a^2}$.
பக்க முகத்தின் பரப்பளவு $= S = a\sqrt{b^2-a^2}$

$$d = \frac{4a^2\sqrt{(b^2-2a)}}{2a\sqrt{(b^2-a^2)}} = \frac{2a\sqrt{(b^2-2a^2)}}{\sqrt{(b^2-a^2)}}$$

(3) $A(-6,10)$, $B(1,2)$, $C(1,11)$ என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து $A'B'C'$ என்னும் முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களான $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ என்பவற்றிற்கு வரைந்த செங்குத்துகள் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ என்பன முறையே $3x-y-5=0$, $x-2y=0$, $x+y-15=0$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்பட்ட கோடுகளாகவுள்ளன. இங்கே λ ஆனது ஒர் ஒருமையாகும். λ ஐக் காண்க.

A', B', C' யிலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரைந்த செங்குத்துகளும் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

விடை:-

$3x-y-5=0$ இற்குச் செங்குத்தான நேர்கோடு,

A யினூடாக $A\equiv(-8,10)$

$x+3y-a=0$ இங்கு $-8+30-a=0$

$x-2y=0$ இற்கு ⊥ ஆக $B\equiv(1,2)$ இலிருந்து,

$2x+y-b=0$ இங்கு $2+2-b=0$

இவ்விரு செங்குத்துகளின் சந்திப்புப் புள்ளி

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-22=0 \\ 2x+y-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,8)$$

$x+y-15=0$ இற்குச் செங்குத்தான $C(1,11)$ இனூடான நேர்கோடு $\lambda x-y-c=0$ இங்கு $\lambda-11-c=0$

$C\equiv(1,11)$ இலிருந்து $x+\lambda y-15=0$ இற்கு வரையும் செங்குத்து $(-2,8)$ இனூடு செல்லவே

$-2\lambda-8-\lambda+11=0 \Rightarrow \lambda=1$

$$\left.\begin{array}{lll} B'C' \text{ இன் சமன்பாடு} & & 3x-y-5=0 \\ C'A' \quad " & " & x-2y=0 \\ A'B' \quad " & " & x+y=0 \end{array}\right\}$$

மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க

$A'\equiv(10,5)$, $B'\equiv(5,10)$, $C'\equiv(2,1)$

BC இன் சமன்பாடு		$x-1=0$
CB	"	$x-9y+98=0$
AB	"	$8x+9y-26=0$

A' இனூடான BC இற்கு ⊥ ஆன கோட்டின் சமன்பாடு $y=5$

B' " CA " " " " $9x+y-55=0$

C' " AB " " " " $9x-8y-10=0$

இவற்றின் பொதுப் புள்ளி காண இரு சமன்பாடுகளை யோசித்து

$$\left.\begin{array}{l} 9x+y-55=0 \\ 9x-8y-10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (10,5)$$

இப்புள்ளி $y=5$ ஐ திருப்தி செய்வதால் A', B', C' இலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரைந்த ⊥ கள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(4) தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளைப் பயன்படுத்தி $x^2+y^2-10x-8y+31=0$ எனும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரையையும் காண்க. x அச்சிலுள்ள புள்ளியொன்றிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் அமைந்துள்ளன. அவ்வாறான புள்ளிகள் இரண்டு உண்டெனக் காட்டி, மேலும் அவையிரண்டும் தொடலியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

எந்தவொரு வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும் $p^2 - 2ap\cos(\theta-\alpha) + b = 0$ எனும் வடிவத்தில் எழுதலாமெனக் காட்டுக. இங்கே (p, θ) என்பன முனைவான ஆள்கூறுகளாகவும் a, b, α மாறிலிகளாகவும் உள்ளன. வட்டத்தின் முனைவான ஆள்கூறையும் அதன் ஆரையையும் காண்க.

விடை

(i) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = -31 + 25 + 16 = (\sqrt{10})^2$

மையம் $\equiv (5, 4)$, ஆரை $= \sqrt{10}$

$(c, 0)$ இனூடு செல்லும் எந்த நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு $y = m(x-c)$ எனும் வடிவத்தில் அமையும்.

இது வட்டத்தை தொட்டால்

$$\left| \frac{5m - 4 - mc}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \sqrt{10}$$

$$m^2\{(5-c)^2 - 10\} - 8m(5-c) + 6 = 0$$

இரண்டு தொடலிகளும் செங்குத்தாயின்.

$$\frac{6}{(5-c)^2 - 10} = -1$$

(ie) $\Longrightarrow 5 - c = \pm 2 \quad \therefore c = 3$ or 7

$c = 3$ இற்கு ஒத்த m இன் பெறுமானம்

$-6m^2 - 16m + 6 = 0$, $3m^2 + 8m - 3 = 0$

$\Longrightarrow (3m-1)(m+3) = 0$

$c = 3$ ஆக ஒத்த தொடலியின் சமன்பாடு

$y = \frac{1}{3}(x-3)$, $y = -3(x-3)$ ஆகும்.

$c = 7$ ஆக ஒத்த m இன் பெறுமானம்.

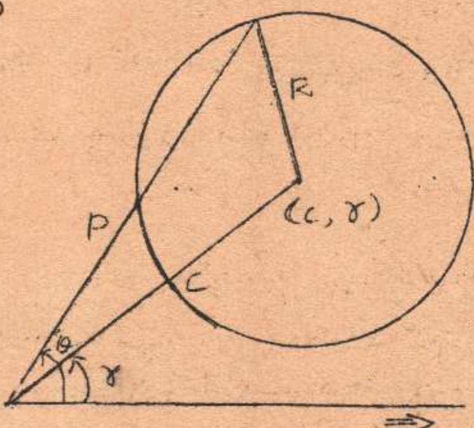
$m^2(-6) - 8m(-2) + 6 = 0$

$(3m+1)(m-3) = 0$

$\therefore c = 7$ ஆக சமன்பாடுகள்

$y = -\frac{1}{3}(x-7)$, $y = 3(x-7)$

(ii)



மையம் $\equiv (c, \gamma)$
ஆரை $= R$

$p^2 + c^2 - 2cp\cos(\theta - \gamma) = R^2$

$p^2 - 2cp\cos(\theta-\gamma) + c^2 - R^2 = 0$

இங்கு

$c = a$, $\gamma = \alpha$, $c^2 - R^2 = b$

$p^2 - 2ap\cos(\theta - \alpha) + b = 0$

$\Longrightarrow$

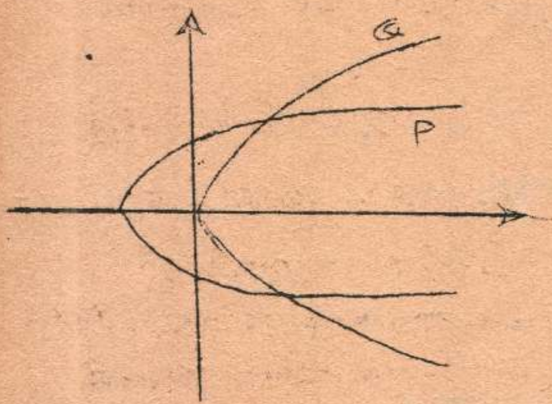
$\therefore$ மையம் $\equiv (a, \alpha)$, $R = \sqrt{a^2 - b}$

(5) $y^2 = 4bx$, $y^2 = 4a(c+x)$ என்னும் பரவளைவுகளுக்குரிய பரமானச் சமன்பாடுகளை இரு தொடைகளில் காண்க. $a > b > 0$ ஆகவும், $c > 2(a-b)$ ஆகவும் இருப்பின் $y^2 = 4bx$, $y^2 = 4a(c+x)$ என்னும் இரண்டு பரவளைவுக்கும் பொதுவான அச்சுக்குச் சாய்ந்த பொதுச் செவ்வன்கள் ஒரு சோடி உண்டெனக் காட்டுக.

பொதுச் செவ்வன்களில் ஒன்றின் இரு பரவளைவுகளாலும் அடைக்கப்பட்ட துண்டத்தின் நீளம் d ஆனால்

$$d^2 = 4(a-b)(c-a+b)$$ எனத் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

<u>விடை</u>



$y^2 = 4bx$ ன் பரமானச் சமன்பாடுகள் $(b\lambda^2, 2b\lambda)$

$y^2 = 4a(c+x)$ ன் பரமானச் சமன்பாடுகள் $(-c+a\mu^2, 2a\mu)$

$P \equiv (-c+a\mu^2, 2a\mu)$

$Q \equiv (b\lambda^2, 2b\lambda)$ என்க.

$$PQ \text{ ன் சாய்வு} = \frac{2(b\lambda - a\mu)}{(b\lambda^2 + c - a\mu^2)}$$

PQ என்பது பொதுச் செவ்வன்

$$\frac{2(b\lambda - a\mu)}{b\lambda^2 + c - a\mu^2} = -\lambda = -\mu$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \qquad \pm\sqrt{\frac{c - 2(a-b)}{(a-b)}}$$

$\lambda = \mu = 0$ என்பது வெளிப்படையான பொதுச் செவ்வன் அது x அச்சு.

மற்றைய இரண்டு பெறுமானங்களும், பொதுவான அச்சுக்குச் சாய்ந்த பொதுச் செவ்வன் சோடிகள் ஆகும்.

பொதுச் செவ்வன் ஒன்றின் இரு பரவளைவுகளாலும் அடைக்கப்பட்ட துண்டத்தின் நீளம் d ஆயின்

$$d^2 = \left\{(b\lambda^2 - a\lambda^2 - c)^2 + 4(b-a)^2\lambda^2\right\}$$

$$= (b-a)^2\lambda^4 + 2c(b-a)\lambda^2 + c^2 + 4(b-a)^2\lambda^2$$

$$= \{c - 2(a-b)\}^2 + \frac{2c(b-a)}{(a-b)}\{c - 2(a-b)\} + c^2 + 4\{c - 2(a-b)\}(a-b)$$

$$= \{c - 2(a-b)\}^2 - 2c\{c - 2(a-b)\} + c^2 + 4(a-b)\{c - 2(a-b)\}$$

$$d^2 = 4(a-b)(c-a+b)$$

(6) $0<e<1$ ஆகவும் a என்பது ஓர் நேர்மையாகவும் கொண்ட $A(ae,0)$, $B(-ae,0)$ என்பன x-அச்சின் மீதுள்ள நிலைத்த புள்ளிகளாகும். $AP+BP=2a$ ஆகுமாறு P என்பது தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியாயின், P ஆனது

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$ எனும் நீள்வளையத்தின் சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக.

இங்கே $b^2=a^2(1-e^2)$ ஆகும்.

$S=0$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு புள்ளி $P(x_1,y_1)$ இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P_0(x_0,y_0)$ இலிருந்து $S=0$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலிகளின் தொடுகை நாணின் சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

P_0 என்பது $\frac{x^2}{(a/e)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b^2}{ae}\right)^2}=1$ எனும் நீள்வளையத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். இங்கே $a<\sqrt{2}\,b$ ஆகும். P_0 இலிருந்து $S=0$ எனும் நீள்வளையத்திற்கு வரைந்த தொடலிகளின் தொடுகை நாண் ஆனது $x^2+y^2=a^2e^2$ எனும் வட்டத்திற்குத் தொடலியாக அமையுமெனக் காட்டுக.

<u>விடை:</u>

$$P\equiv(x,y)$$
$$AP+BP=2a$$
$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}+\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=2a$$
$$(x-ae)^2+y^2+(x+ae)^2+y^2+2\sqrt{(x-ae)^2+y^2}\times\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=a^2$$
$$\therefore\ [x^2+y^2+a^2e^2]^2=\{(x-ae)^2+y^2\}\{(x+ae)^2+y^2\}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{இங்கு } b^2=a^2(1-e^2)$$

$S=0$ இன் (x_1,y_1) இல் தொடலியின் படித்திறன் $=\frac{-b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$

$\therefore$ தொடலியின் சமன்பாடு (x_1,y_1) இல்

$$y-y_1=\frac{-b^2}{a^2}(x-x_1)$$
$$\therefore\ \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0$$

$P_0 \equiv (x_0, y_0)$ இலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகள் நீள்வளையத்தைத் தொடும் புள்ளிகள் $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ என்க.

P_1 இல் தொடலி $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0$

P_2 " " $\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}-1=0$

இவை (x_0, y_0) இனூடு செல்வதால்

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}-1=0 \quad \text{—①}$$

$$\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}-1=0 \quad \text{—②}$$

① & ② $\Rightarrow$ P_1P_2 இன் சமன்பாடு $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0$

$$\frac{x^2}{(a/e)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b^2}{ae}\right)^2}=1 \quad \text{—③}$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=a^2e^2 \quad \text{—④}$$

இஃது $(0,0)$ ஐ மையமாகவும் ae ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தின் நீளம் (மையத்திலிருந்து).

$\therefore \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ என்பது $x^2+y^2=a^2e^2$ என்பதற்கு தொடலியாகும்.

(7) $xy=c^2$ எனும் செங்கோண அதிபரவளைவிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியை $x=ct$, $y=\frac{c}{t}$ என்பவற்றால் பரமான வடிவத்தில் குறிப்பிடலாமெனக் காட்டுக. இங்கே t ஆனது பரமானம். செங்கோண அதிபரவளைவு யாதாயினுமொரு வட்டத்தினால் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டப்படுகிறது. அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து இந் நான்கு புள்ளிகளின் தூரங்களின் வர்க்கங்களினது கூட்டுத்தொகையானது வட்டத்தினது விட்டத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமன் எனக் காட்டுக.

வட்டத்தையும் அதிபரவளைவையும் பொதுவான நாண்களில் ஒன்று அதிபரவளைவின் விட்டமாயின், பொது நாண்களில் வேறொன்றானது வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகுமெனக் காட்டுக.

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α β γ, δ ஆயின்

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-b/a$,

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=c/a$

$\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta=-d/a$,

$\alpha\beta\gamma\delta=e/a$ எனக்கொள்க.

விடை:-

$$x=ct, \quad y=c/t$$

யாதும் ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$S=x^2+y^2+2gx+2fy+c'=0$$

இவ்வட்டம் $xy=c^2$ என்பதை நான்கு புள்ளிகள் P_1, P_2, P_3, P_4 இல் வெட்டுகின்றன.

$$\Rightarrow c^2t^2+\frac{c^2}{t^2}+2gct+2f\frac{c}{t}+c'=0$$

$$c^2t^4+2gct^3+2fct+c't^2+c^2=0$$

$$\sum t_i=-2g/c, \ \sum t_it_j=\frac{c'}{c^2}, \sum t_it_jt_k=\frac{-2f}{c}$$

$$\text{and } t_1t_2t_3t_4=1$$

அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து நான்கு புள்ளிகளின் தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$=\left\{\sum (ct_i)^2+(c/t_i)^2\right\}$$

$$=c^2\sum t_i^2+c^2\sum(1/t_i)^2$$

வட்டத்தின் வர்க்கம் $=4(g^2+f^2-c')$

$$=c^2(\sum t_i)^2+c^2(\sum t_it_jt_k)^2-4c^2\sum t_it_j$$

வட்டத்தின் வர்க்கம் $=c^2\left\{(\sum t_i)^2-2\sum t_it_j+\sum(1/t_i)^2-2\sum\frac{1}{t_it_j}\right\}$

$$=c^2\left\{\sum t_i^2+\sum(1/t_i)^2\right\}$$

$$=\sum OP_i^2$$

$P_1 P_2$ என்பது அதிபரவளைவின் விட்டமாயின் $P_1 P_2$ உற்பத்தியினூடு செல்லுதல் வேண்டும்.

$t_1 + t_2 = 0$ and $t_1^{-1} + t_2^{-1} = 0$

ஆனால் $\sum t_i = \frac{-2g}{c}$ $\therefore t_3 + t_4 = \frac{-2g}{c}$

(ie) $\frac{c}{2}(t_3 + t_4) = -g$

ஆனால் $\sum t_i t_j t_k = \frac{-2f}{c} \Rightarrow \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = -\frac{2f}{c}$

(ie) $\frac{c}{2}\left(\frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4}\right) = -f$

$\therefore$ P_3P_4 என்பது வட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்கிறது.

$\therefore$ P_3P_4 என்பது $S = 0$ இன் விட்டம்.

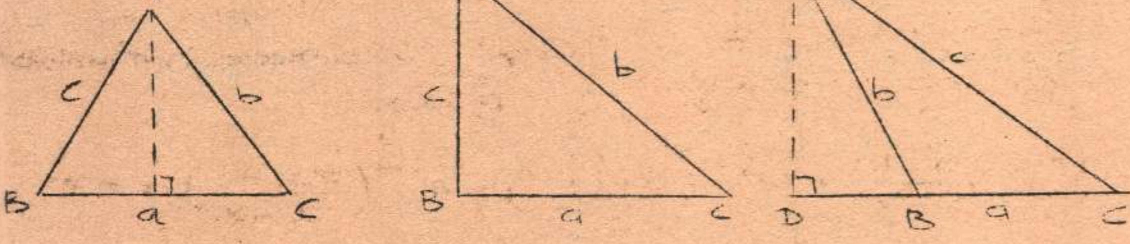
(8) வழமையான குறியீடுகளைக் கொண்டு, யாதுமொரு முக்கோணி ABC யில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ எனக் காட்டுக.

(i) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$ எனவும்

(ii) $a^2 + c^2 = 2b^2$ எனின் $\cot A + \cot C = 2\cot B$ எனவும் காட்டுக.

விடை



$AD = AB = AB\sin\pi/2 = AB\sin B$,

$AD = AB\sin B = AC\sin C$

$c\sin B = b\sin C$

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; $AD = AB\sin(\pi - B)$

$= AB\sin B$

இதேபோல் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

(i) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \lambda$ என்க

$(b^2 - c^2)\cot A = \lambda^2(\sin^2 B - \sin^2 C)\cot A$

$= \lambda^2(\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C)\cot A$

$$= \lambda^2\, 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\cot A$$

$$= \lambda^2 \sin(B+C)\sin(B-C)\cot A$$

$$= -\lambda^2 \sin(B-C)\cos(B+C) \quad [\because A = \pi-(B+C)]$$

$$= -\frac{\lambda}{2}\{\sin 2B - \sin 2C\} \text{ —— } (1)$$

இதேபோல்,

$$(c^2-a^2)\cot B = \frac{-\lambda^2}{2}\{\sin 2C - \sin 2A\} \text{ —— } (2)$$

$$\text{and } (a^2-b^2)\cot C = -\frac{\lambda^2}{2}\{\sin 2A - \sin 2B\} \text{ —— } (3)$$

(1) (2) and (3) $\Rightarrow$

$$(b^2-a^2)\cot A + (c^2+a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$$

(ii) $a^2 + c^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = b^2 - c^2$

மேற் பகுதியிலிருந்து

$$(a^2-b^2)(\cot A + \cot C) = (a^2-c^2)\cot B$$
$$= (a^2 - 2b^2 + a^2)\cot B$$
$$= 2(a^2-b^2)\cot B$$

$$\therefore \cot A + \cot C = 2\cot B \quad (\because a \neq b)$$

(9)

(i) $\left.\begin{aligned}\sin x + \cos y &= 1\\ \cos 2x - \cos 2y &= 1\end{aligned}\right\}$ எனும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(ii) $\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right) = n\pi$

எனக் காட்டுக. இங்கு n ஆனது ஒரு முழுவெண் ஆகும்.

விடை:-

(i) $\sin x + \cos y = 1$ —— (1)

$\cos 2x - \cos 2y = 1$ —— (2)

(2) $\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x - (2\cos^2 y - 1) = 1$

(ie) $2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 1$ —— (3)

(1) & (3) $\Rightarrow 2\sin^2 x + 2(1-\sin x)^2 = 1$

$\Rightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$

$(2\sin x - 1)^2 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ உம் $\cos y = \frac{1}{2}$

$\therefore x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}, \quad y = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$

இங்கு n, m என்பன ஏதாவது முழுவெண்.

(ii) $\alpha = \cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right)$, $\beta = \cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right)$

$$\gamma = \cot^{-1}\left(\frac{xz+1}{z-x}\right)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{x-y}{1+xy} + \frac{y-z}{1+yz}}{1-\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\left(\frac{y-z}{1+yz}\right)}$$

$$= \frac{(x-y)(1+yz)+(y-z)(1+xy)}{(1+xy)(1+yz)-(x-y)(y-z)}$$

$$= \left(\frac{x-z}{1+xz}\right) = \tan(-\gamma)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma$$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma = n\pi$ இங்கு $n = 0 \pm 1, \pm 2 \dots$

(iv) ஓர் முடிவுள்ள மாதிரி வெளி S என்பது சம நிகழ்தகவு உள்ள n அரும்ப நிகழ்ச்சிகள் மட்டும் கொண்டுள்ளது. S இல் E என்பது n' அரும்ப நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே கொண்டுள்ள யாதாயினும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனின் நிகழ்ச்சி E இன் நிகழ்தகவு P(E) என்பது $P(E) = \frac{n'}{n}$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ் வரைவிலக்கணத்தைப் பாவித்தோ or வேறு முறையாலோ, S இல் உள்ள யாதாயினும் இரு நிகழ்ச்சிகள் A, B என்பவற்றிற்கு

(i) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

(ii) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ என நிறுவுக.

40 மனிதர்களைக் கொண்ட ஒரு கூட்டத்தில்,
20 பேர் 35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர்கள்,
10 பேர் 35 " கூடிய " "
4 " 35 " குறைந்த பொறியியலாளர் அல்லாதவர்கள்.
6 " 35 " " கூடிய " "

இக்கூட்டத்திலிருந்து ஒருவர் எழுமாறாக தெரியப்பட்டுள்ளார். மேற்படி முடிவுகளைப் பாவித்து தெரியப்பட்டவர்

(i) 35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர் ஒருவர்

(ii) பொறியியலாளர் or 35 வயதிலும் கூடிய ஒருவர்

என்பவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளைப் பெறுக. உமது விடைகளை வேறொரு முறையைப் பாவித்துச் சரிபார்க்க.

விடை:—

$n_A \longrightarrow$ A யிலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை
$n_B \longrightarrow$ B " "

$n_{A\cap B} \longrightarrow A\cap B$ யிலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை எனின்.

$\therefore\ n_{A-B} = n_A - n_{A\cap B}$

$$P_{(A-B)} = \frac{n_A - n_{A\cap B}}{n} = \frac{n_A}{n} - \frac{n_{A\cap B}}{n}$$

$$P(A-B) = P_{(A)} - P(A\cap B)$$

இதேபோல்

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B}$$

$$P(A\cup B) = (n_A + n_B - n_{A\cap B})/n$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

(i) $A \equiv \{$ 35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர் $\}$

$$n_a = 20 \Longrightarrow P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

(ii) $A \equiv \{$ பொறியியலாளர் $\}$ $B \equiv \{$ 35 வயதிலும் கூடியவர் $\}$

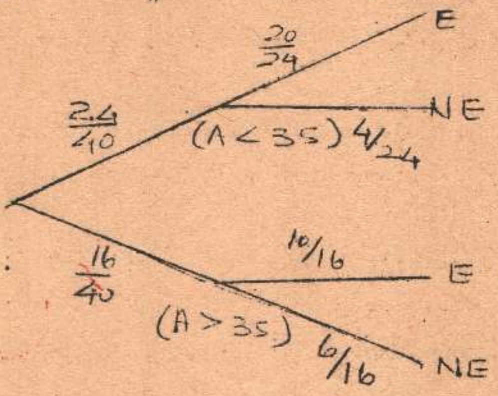
$n_A = 30$ $n_B = 10$, $n_{A\cap B} = 10$

= 35 வயதிலும் கூடிய பொறியியலாளர்.

$$\therefore\ P(A\cup B) = P_{(A)} + P_{(B)} - P(A\cap B)$$

$$= \frac{30}{40} + \frac{16}{40} - \frac{10}{40} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$$

A – வயது
E – பொறியியலாளர்
NE – " " அல்ல } எனின்.



(i) P_r (35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர்)

$$= \frac{24}{40} \times \frac{20}{24} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

(ii) P_r (35 வயதிலும் கூடிய ஒருவர் or பொறியியலாளர்

$$= \frac{24}{40} \times \frac{20}{24} + \frac{16}{40} \times \frac{10}{16} + \frac{16}{40} \times \frac{6}{16}$$

$$= \frac{20}{40} + \frac{10}{40} + \frac{6}{40} = \frac{9}{40}$$

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

பயன்கணிதம் 1, க.பொ.த (உயர்தரம்), மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட், 1985.

எவையேனும் ஆறு வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(1) எல்லா $n \geq 1$ என அமையும் போது

$$S_1 > \sqrt{3} \; ; \; S_{n+1} = \frac{3(1+S_n)}{(3+S_n)}$$ என்று அமை

யும் வண்ணம் $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n \ldots$ என்பது நேர் எண்களின் தொடரியாகும்.

$(S_{n+1}^2 - 3)$ என்பதை S_n இல் தருக. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி n இனதும் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் $S_n > \sqrt{3}$ எனக்காட்டுக. n இனதும் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் $S_{n+1} < S_n$ என உய்த்தறிக.

$\tan x/2 = \cot x/2 - 2\cot x \; (0 < x < \pi)$ என்னும் தொடர்பை பயன்படுத்தி

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x$$ எனக்காட்டுக.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} \cot x$$ என்பதை உய்த்தறிக.

விடை

(1)
$$S_{n+1}^2 - 3 = \frac{9(1+S_n)^2}{(3+S_n)^2} - 3 = \frac{9+9S_n^2+18S_n}{9+6S_n+S_n^2} - 3$$

$$= \frac{9+9S_n^2+18S_n-27-18S_n-3S_n^2}{(3+S_n)^2}$$

$$= \frac{6(S_n^2-3)}{(3+S_n)^2} \quad \text{—— ①}$$

$S_p > \sqrt{3}$ ஆகும் போது ① இன்படி $S_{p+1} > \sqrt{3}$ ஆகும்.
ஆனால் $S_1 > \sqrt{3}$

$\therefore$ n இன் எல்லா நேர் முழு எண் பெறுமானங்களுக்கும், கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால் $S_n > \sqrt{3}$ ஆகும்.

$$S_{n+1} - S_n = \frac{3+3S_n}{3+S_n} - S_n = \frac{3-S_n^2}{(3+S_n)}$$

< 0 (எல்லா n இன் நேர் முழு எண் பெறுமானங்களுக்கும்)
எனவே $S_{n+1} < S_n$ (எல்லா நேர் முழு " ")

(ii) $\tan x/2 = \cot x/2 - 2\cot x \;,\; 0 < x < \pi$ இது
பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்.

$$\tfrac{1}{2} \tan x/2 = \tfrac{1}{2} \cot x/2 - \cot x$$

x இன் $x/2^{n-1}$ இனால் பிரதியிட்டு பின் $1/2^{n-1}$ இனால் பெருக்கும் போது

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}$$

ஆகு — $$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \cot x$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2} = \frac{1}{2^2}\cot\frac{x}{2^2} - \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{x}{2^{n-2}}$$

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}$$

ஆகவே கூட்டும் போது

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\cos x/2^n}{\sin x/2^n} - \cot x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cos x/2^n}{\left(\frac{\sin x/2^n}{x/2^n}\right)}\frac{1}{x} - \cot x$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x$$

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 ஆகிய சிக்கல் எண்கள் முறையே A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகிய தெளிவான புள்ளிகள் ஆகண் வரிப்படத்தில் குறிப்பிடுகின்றன. $\frac{(z_1-z_2)}{(z_3-z_4)}$ என்பது தூய கற்பனையாக இருப்பதற்கு உரிய நிபந்தனையைத் தேர்ந்து கண்டு முறையிடுக.

$Rl(z_1-z_2)\,Rl(z_3-z_4) + Im(z_1-z_2)\,Im(z_3-z_4) = 0$ எனின், அப்போது A_1A_2 என்பது A_3A_4 க்குச் செங்குத்தாகும் என நிறுவுக. இங்கே $Rl(w)$, $Im(w)$ என்பன w இன் மெய்ப்பகுதியையும் கற்பனைப் பகுதியையும் குறிக்கும்.

தீர்வு மையம் உண்டு என்பதைக் கொள்ளாது $A_1A_2A_3$ என்னும் முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் இருந்து எதிர் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துகளும்

$$Rl\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_3}\right) = Rl\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_1}\right) = Rl\left(\frac{z-z_3}{z_1-z_2}\right) = 0$$

என்பதைத் திருப்திப்படுத்தும் z என்பதால் குறிப்பிடப்படும் புள்ளியில் சந்திக்கும் என்று காட்டுக.

<u>விடை</u>

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{a - ib}{c + id}$$ இங்கு a, b, c, d என்பன மெய்

பகுதியையும், தொகுதியையும் $c - id$ ஆல் பெருக்கும்போது

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c^2+d^2)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

எனவே $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ என்பது தூய கற்பனையாயிருந்தால் $ac+bd=0$

அதாவது $Re(z_1-z_2)\,Re(z_3-z_4)+Im(z_1-z_2)\,Im(z_3-z_4)=0$

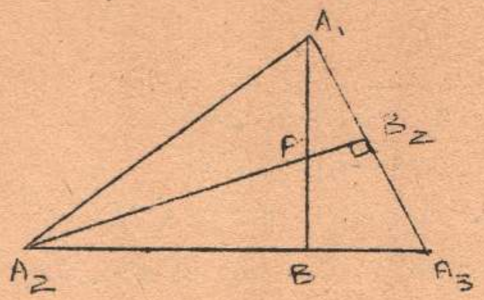
ஆகும் போது தூய கற்பனையாகும்.

$\therefore Re(z_1-z_2)\,Re(z_3-z_4)-Im(z_1-z_2)\,Im(z_3-z_4)=0$

ஆகும் போது வீச்சம் $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\pi}{2}$

அ-து, கோடு A_1A_2 இற்கும் A_3A_4 இற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 90

அ-து. A_1A_2 என்பது A_3A_4 இற்குச் செங்குத்து



P என்னும் புள்ளி z என்னும் சிக்கல் எண்ணைக் குறிக்கும் என்க.

எனவே

$$Re\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_3}\right) = 0 = Re\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_1}\right)$$

அ-து $Re(z-z_1)\,Re(z_2-z_3)+Im(z-z_1)\,Im(z_2-z_3)=0$ — ①

$Re(z-z_2)\,Re(z_3-z_1)+Im(z-z_2)\,Im(z_3-z_1)=0$ — ②

ஆனால் $Re(z-z_1)\,Re(z_2-z_3)+Re(z-z_2)\,Re(z_3-z_1)$
$+Re(z-z_3)\,Re(z_1-z_2)=0$ — ③

$Im(z-z_1)\,Im(z_2-z_3)+Im(z-z_2)\,Im(z_3-z_1)$
$+Im(z-z_3)\,Im(z_1-z_2)=0$ — ④

① ஐயும் ② ஐயும் கூட்டி ③ ஐயும் ④ ஐயும்
உபயோகிக்க வருவது.

$Re(z-z_3)\,Re(z_1-z_2)+Im(z-z_3)\cdot Im(z_1-z_2)=0$

அ-து $Re\left(\frac{z-z_3}{z_1-z_2}\right)=0$

$\Longrightarrow A_3P$ நீட்டப்படும் போது A_1A_2 க்கு செங்குத்தாக வெட்டும்.

A_1, A_2, A_3 என்னும் Δ இன் உச்சிகளில் இருந்து எதிர்ப் பக்கங்களிற்கு வரையப்படும் மூன்று செங்குத்துகளும்

$$Rl\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_3}\right) = Rl\left(\frac{z-z_2}{z_3-z_1}\right) = Rl\left(\frac{z-z_3}{z_1-z_2}\right) = 0$$

என்பதைத் திருப்தி செய்யும் Z என்பதாற் குறிப்பிடப் படும் புள்ளியின் ஒழுக்கைக் காண்க

(3) (i) $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ எனக் கொள்வோம்.
$(x+y), (y+z), (z+x)$ என்பன $f(x,y,z)$ என்பதன் காரணிகள் எனக்காட்டுக.

(ii) x^2+px+1 என்பது ax^5+bx^2+c என்பதன் காரணி எனின் $(a^2-c^2)(a^2-c^2+bc) = a^2b^2$ என நிறுவுக.
இந்நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்பட்டால் x^2+px+1 என்பதும் cx^2+bx^3+a என்பதன் ஒரு காரணியாகும் என்று காட்டுக.

<u>விடை</u>

(i) $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ எனக
x இற்குப் பதிலாக $-y$ ஐப் பிரதியிடும் போது
$f(-y,y,z) = (-y+y+z)^5 + y^5 - y^5 - z^5$
$\therefore (x+y)$ ஒரு காரணி.

$f(x+y+z)$ என்பது சமச்சீர் சார்பு என்பதால் $(y+z), (z+x)$ என்பனவும் காரணிகளாகும்.
$f(x,y,z)$ என்பது 5 ஆம் படியிலுள்ள ஏகவினமான சமச்சீர் சார்பு ஆனதால் $f(x,y,z)$ இன் மிகுதிக் காரணி
$\{\lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu(xy+yz+zx)\}$
என்னும் வடிவத்தில் அமையும்

அ-து
$$f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)\{\lambda(x^2+y^2+z^2) + \mu(xy+yz+zx)\} \quad \text{—(A)}$$

$x=1, y=1, z=0$ என (A) இல் பிரதியிடும் போது
$$15 = 2\lambda + \mu \quad \text{—(1)}$$
$x = y = z = 1$ என (A) இல் பிரதியிடும் போது
$$10 = \lambda + \mu \quad \text{—(2)}$$
$$(1) \times (2) \Longrightarrow \lambda = \mu = 5$$

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z = 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

(ii) $x^2 + px^2 + c = (x^2+px+1)(ax^3 - pax^2 + ax - c)$
x, x, x_3 இன் குணகங்களை சமப்படுத்த
$$a - ap^2 + q = 0 \quad \text{—(1)}$$
$$c + pq + pa = b \quad \text{—(2)}$$

② & ③ $c - cp^2 - pa = b$ —— ④

① & ③ $a - ap^2 - pc = 0$ ⑤

④ & ⑤ $\Rightarrow \dfrac{p^2}{c(b-c)+a^2} = \dfrac{p}{-ac-a(b-c)} = \dfrac{1}{a^2-c^2}$

மேலேயுள்ள தொடர்புகளிலிருந்து p ஐ நீக்க

வருவது $(a^2-c^2)(a^2-c^2-bc) = a^2b^2$

$(cx^5 + bx^3 + a) = x^5(a/x^5 + b/x^2 + c)$

$= x^5(a/x^3 - pa/x^2 + a/x + c)(1/x^2 + p/x + 1)$

$\therefore (x^2+px+1)$ என்பது cx^5+bx^3+a யின் காரணியாகும்.

④ தாமோய்வரின் நேர்மறை எண்ணுக்குரிய சுட்டித் தேற்றத்தைத் தருக.

$-1/2,\ -1/2(1 \pm i \cot \frac{k\pi}{2n}),\ k=1,2,\ldots\ldots n-1$, என்பன

$(z+1)^{2n} - z^{2n} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்து

$(z+1)^6 - z^6 = \frac{3}{16}(2z+1)\{4z^2+4z+\text{கோசீ}^2\pi/6\}\times$
$\{4z^2+4z+\text{கோசீ}^2\pi/3\}$

எனக் காட்டுக

$16(\text{கோசை}^{12}\theta - \sin^{12}\theta) = 3\,\text{கோசை}\,2\theta\{\cos^2 2\theta + \cot^2\pi/6\}$
$\times\{\cos^2 2\theta + \text{கோதா}^2\pi/3\}$

என்பதை உய்த்தறிக.

விடை:-

தமோய்வரின் நேர்மறை எண்ணுக்குரிய தேற்றம்

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ எனக் கூறப்படும்.

$(-1/2+1)^{2n} - (1/2)^{2n} = 0$, $-1/2$ என்பது $(z+1)^{2n} - z^{2n} = 0$ இன்
ஒரு தீர்வாகும்.

$\{-1/2(1 + i\cot\frac{k\pi}{2n})+1\}^{2n} - \{1/2(1+i\cot\frac{k\pi}{2n}\}^{2n}$

$\{1/2(1-i\cot\frac{k\pi}{2n})\}^{2n} - \{1/2(1+i\cot\frac{k\pi}{2n}\}^{2n}$

$= \dfrac{(-2)^{2n}}{2^{2n}}\ \dfrac{1}{\sin^{2n}(\frac{k\pi}{2n})}\left[(\cos k\pi + i\sin k\pi)\cdot(\cos k\pi - i\sin k\pi)\right]$

$= \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}}\ \dfrac{1}{\sin^{2n}(\frac{k\pi}{2n})}\quad 2i\sin k\pi = 0$

இதேபோல் $\{-\frac{1}{2}(1-i\omega+\frac{k\pi}{2n})+1\}^{2n} - \{\frac{1}{2}(1-i\cot\frac{k\pi}{2n})\}^{2n} = 0$

அ-து $-\frac{1}{2}(1\mp i\cot\frac{k\pi}{2n})$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$

என்பன $(z+1)^{2n} - z^{2n} = 0$ இன் தீர்வுகளாகும்.

$n = 3$ ஆகும் போது மேலே காட்டப்பட்டதிலிருந்து

$$(z+1)^6 - z^6 = \frac{3}{16}(2z+1)\{4z^2+4z+\operatorname{cosec}^2 \pi/6\}\times\{4z^2+4z+\operatorname{cosec}^2\pi/3\}$$

$z = (\frac{\cos 2\theta - 1}{2})$ எனப் பிரதியிட

$$16(\cos^{12}\theta - \sin^{12}\theta) = 3\cos 2\theta\{\cos^2 2\theta + \cot^2\pi/6\}\cdot\{\cos^2 2\theta + \cot^2\pi/3\}$$

(5)

(i) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r$ என்க. இங்கு $c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

அப்போது

$$\sum_{r=0}^{n}(r+1)c_r x^r = \{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}$$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து

$$\sum_{r=0}^{n}(r+1)c_r^2 = \{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1}$$ என்பதின்

விரிவில் x^n என்பதன் குணகம் $= \frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$

(ii) TISSAMAHARAMA என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் முறைகளை நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம்.

விடை

(i) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r$, இங்கே $c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

இருபக்கமும் x ஆல் பெருக்கி பின் வகையிட

$$\frac{d}{dx}\{x(1+x)^n\} = \frac{d}{dx}\{\sum_{r=0}^{n} c_r x^{r+1}\}$$

அ-து $(1+x)^n + n(1+x)^{n-1}x = \sum_{r=0}^{n}(r+1)c_r x^r$

அ-து $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n}(r+1)c_r x^r$

$\{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகத்தை காணுக.

(ஈ) $\{1+(n+1)x\}\{1+x\}^{2n-1} = \{1+\overline{n+1}\cdot x\}(1+x)^{n-1}(1+x)^{n}$

$$= \left\{\sum_{r=0}^{n}(r+1)C_r x^r\right\}\left\{\sum_{r=0}^{n} C_r x^r\right\}$$

$$= \left\{\sum_{r=0}^{n}(r+1)C_r x^r\right\}\left\{\sum_{r=0}^{n} C_r x^{n-r}\right\}$$

எனவே $\sum_{r=0}^{n}(r+1)C_r^2 = \{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1}$ இன் விரிவில் x^n இன் குணகம்

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} + \frac{(2n-1)!\,(n+1)!}{n!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$$

(ii) $T_1\ I_1\ S_2\ A_5\ M_2\ H_1\ R_1$

நான்கு எழுத்துக்களின் தெரிவுகள் யாவற்றையும் 5 தனித்தனியான வகுப்புகளாக வரிசைப்படுத்தலாம்.

(a) ஒரே இனத்தின் 4 எழுத்துகள்.

(b) ஒரே " 3 " மற்றையது வேறு.

(c) ஒரே " 2 " " இரண்டும் இன்னொரு இனம்.

(d) ஒரே " 2 2ம் வெவ்வேறு எழுத்துக்கள் இரண்டும்.

(e) நான்கு வெவ்வேறு எழுத்துக்கள்.

(a): 1ஆம் வகுப்பில் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை 1

∴ 1ம் வகுப்பில், ஒரு முறையாக அமையலாம்

(b) 2ஆம் வகுப்பில் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $1 \times 6C_1$

∴ 2ம் வகுப்பில் $6C_1 \times \frac{4!}{3!} = 24$ முறையாக அமையலாம்.

(c) 3ம் வகுப்பில் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $3C_2$

∴ 3ம் வகுப்பில், $3C_2 \times \frac{4!}{2!\,2!} = 18$ முறையாக அமையலாம்

(d) 4ஆம் வகுப்பில் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை. $3C_2 \cdot 6C_2$

∴ 4ம் வகுப்பில், $3C_1 \times 6C_2 \cdot \frac{4!}{2!} = 540$ முறையாக

(e) 5ம் வகுப்பில் தெரிவுகளின் எண்ணிக்கை $= 7C_4$

∴ 5ம் வகுப்பில், $7C_4 \cdot 4! = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\times 2\times 1}\cdot 4! = 840$ முறையாக அமையும்.

எனவே மொத்த வரிசை மாற்றம் $= 1+24+18+540+840$
$= 1423$ //

⑥ (அ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ எனின் $\sin x < x < \tan x$ என்று கேத்திர கணித முறையில் நிறுவுக. இதிலிருந்து நேர் பெறுமானங்களுக்கூடாக $x \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$ எனக் காட்டுக.

எல் $x \to 0$ $\frac{1 - \cos 3x}{x^2}$ ஐக் காண்க.

(ஆ) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

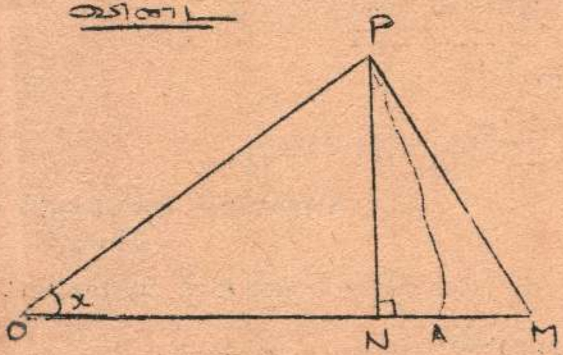
(i) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (ii) $\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $x \neq 1$

(இ) $y_n =$ சீக் $x \tan^n x$ எனின்

$$\frac{dy_n}{dx} = n y_{n-1} + (n+1) y_{n+1}$$ எனக் காட்டுக.

n இற்கு பொருத்தமான பெறுமானத்தைத் தெரிவதன் மூலம் $\int$ சீக் x தான் $x\, dx$ என்பதைக் காண்க.

விடை



AP அலகு ஆரையுடைய வட்ட வில்

PN ⊥ OA,

PM ஆனது P யில் தொடலியாகும்.

x என்பது ஆரையனில் அளக்கப்பட்ட கோணம்.

Δ OPN இன் பரப்பு < ஆரைச்சிறை AOP யின் பரப்பு < ΔOPM இன் பரப்பு.

எனவே
$$\tfrac{1}{2}\sin x < \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}\tan x$$

$\sin x$ நேர்,
$$\therefore 1 < x/\sin x < 1/\cos x$$

$x \to 0$ ஆக $\cos x \to 1$ $\therefore \sec x \to 1$

எனவே $x \to 0$ ஆக $\frac{x}{\sin x} \to 1$

$\therefore$ x ஆனது நேர் பெறுமானங்களுக்கூடாக $x \to 0$ ஆக $\frac{\sin x}{x} \to 1$ ஆகும்.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 3x/2}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} 2\left(\frac{\sin 3x/2}{3x/2}\right)^2 \cdot 9/4$$
$$= 9/2 \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin 3x/2}{3x/2}\right)^2$$
$$= 9/2$$

(ஆ)(i) $$\frac{d\cos^{-1}}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{-(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= -\frac{(1+x^2)}{2x}\left\{\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= 2/(1+x^2)$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right\} = \frac{1}{1-x^2}\left\{\sqrt{1-x^2}\,(1+3x^2)-(x+x^3)\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right.$$

$$= \frac{(1-x^2)(1+3x^2)+(x^2+x^4)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1+2x^2-3x^4+x^2+x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$$

(இ) $y_n = \sec x \cdot \tan^n x$

இருபக்கமும் வகையிட

$$\frac{dy_n}{dx} = \sec x \cdot n\tan^{n-1}x \cdot \sec^2 x + \tan^n x \cdot \sec x \tan x$$

$$= n\sec x \tan^{n-1}x\,(1+\tan^2 x) + \sec x \tan^{n+1}x$$

$$= n y_{n-1} + (n+1)\, y_{n+1}$$

$n = 0$ ஆகும் போது

$$\frac{d\sec x}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$$

(7) $\int_0^k \frac{1}{a^2+b^2t^2}\,dt$ என்பதன் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தை காண்க. இங்கே a, b, k என்பன நேர் ஒருமைகள்.

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{1}{a^2+b^2t^2}\,dt = \frac{\pi}{2ab}$$ என்பதை உய்த்தறிக.

$t = \tan x$ என்று பிரதியிடுவதன் மூலம்

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2ab}$$ எனக் காட்டுக

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx \qquad J = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x}\,dx$$

எனக் கொண்டு, $a^2I + b^2J = \pi/2$ எனக் காட்டுக.
இதையும் I, J என்னும் இன்னுமோர் தொடர்பினைச் சேர்மானம் ஒன்றையும் பயன்படுத்தி I ஐயும் J ஐயும் a, b ஆகியவற்றில் வெளியாக்கிதமாகக் காண்க.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx$$ என்னும் தொகையீட்டின்

பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

<u>விடை</u>

$$\int_0^k \frac{1}{a^2+b^2t^2}\, dt = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}k\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{1}{a^2+b^2t^2}\, dt = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}k\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\,\pi/2 = \frac{\pi}{2ab}$$

$t = \tan x$ ஐப் பயன்படுத்த

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\tan^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx$$

$$a^2I + b^2J = a^2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx + b^2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \pi/2$$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

$$a^2I + b^2J = \pi/2, \quad I + J = \frac{\pi}{2ab}$$

$$(a^2 - b^2)I = \pi/2 - \frac{\pi}{2ab}, \quad b^2 = \pi/2\,(1 - b/a)$$

$$= \frac{\pi(a+b)}{2a}$$

$I = \dfrac{\pi}{2a(a+b)}$ உம் $J = \dfrac{\pi}{2b(a+b)}$ உம் ஆகும்.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}\, dx = a^2I - b^2J$$

$$= \pi/2\,\frac{(a-b)}{(a+b)}$$

8 (i) $\frac{d^2}{dx^2} f(x) + ax\frac{d}{dx} f(x) + bf(x) = 0$

$f(0) = 1/b$, $f'(0) = 1/a$ என்னும் வகையில், இங்கு a உம், b உம் பூச்சியம் அல்லாதவை, ஒருவகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் $f(x)$ என்னும் சார்பு உண்டு. $f(x)$ இன் மக்லோரினின் விரிவில் x^5 இல் உள்ள உறுப்பு வரையும் காண்க.

(ii) x இன் ஏறுகின்ற வலுக்களில் உள்ள
$\frac{(1+ax)}{(1+x/3)^3} + b(1-2x)^{1/2}$ என்னும் விரிவில் உறுப்புகள் x இனதும் x^2 இனதும் குணகங்கள் பூச்சியமாக இருப்பின் a இனதும் b இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதில் x^3 இனதும் x^4 இனதும் குணகங்களைக் காண்க.

விடை

(i) வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் சார்பு $f(x)$ உண்டெனில்,

$$f''(x) = +ax\,f'(x) + bf(x) = 0 \quad \text{—} ①$$

① இல் $x = 0$ ஆக $f''(0) = -1$

①' தருவது $f^3(x) + ax\,f^2(x) + (a+b)\,f'(x) = 0$ — ②

(2) இல் $x = 0$ ஆக $f^3(0) = -\frac{(a+b)}{a}$

②' தருவது $f^4(x) + ax\,f^3(x) + (2a+b)\,f^2(x) = 0$ — ③

(3) இல் $x = 0$ ஆக $f^4(0) = (2a+b)$

③' தருவது $f^5(x) + (3a+b)f^3(x) + ax\,f^4(x) = 0$ — ④

④ இல் $x = 0$ ஆக $f^5(0) = \frac{(3a+b)(a+b)}{a}$

எனவே $f(x) = \frac{1}{b} + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2!} - \frac{(a+b)x^3}{a\,3!} + \frac{(2a+b)x^4}{4!}$

$$+ \frac{(3a+b)(a+b)}{5!}x^5 \ldots\ldots$$

(ii) $\frac{(1+ax)}{(1+x/3)} + b(1-2x)^{1/2}$

$$= (1+ax)\left\{1 + {}^{-3}C_1\cdot x/3 + {}^{-3}C_2\,x^2/9 + {}^{-3}C_3\cdot x^3/27 + {}^{-3}C_4\cdot\frac{x^4}{81}\right\}$$

$$+ b\left\{1 + \tfrac{1}{2}C_1(-2x) + \tfrac{1}{2}C_2(-2x)^2 + \tfrac{1}{2}C_3(-2x)^3 \ldots\ldots\right\}$$

$$= (1+ax)\left\{1 - x + \tfrac{2}{3}x^2 - 10/27\,x^3 + 5x^4/27 + \ldots\right\}$$

$$+ b\left\{1 - x - x/2 - x^3/3 - \frac{5x^4}{8} \ldots\right\}$$

$$= 1 + (a-1)x + (2/3 - a)x^2 + (2/3\,a - 10/27)x^3 + (5/27 - 10a/27)x^4$$

$$+ \ldots\ldots + b - bx - bx^2/2 - bx^3/2 - 5bx^4/8$$

$$= (1+b) + (a-b-1)x + (2/3 - a - b/2)x^2 + \left(2/3\,a - \frac{10}{27} - b/2\right)x^3 + (5/27 - 10a/27 - 5b/8)x^4 + \ldots\ldots$$

x, x^2 இன் குணகங்களைப் பூச்சியமாக்குவதால் பெறப்படுவது,

$$\left.\begin{array}{l} a-b-1=0 \\ 2/3 - a - b/2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = 7/9,\ b = -2/9$$

$$x^3 \text{ இன் குணகம்} = (2/3\,a - 10/27 - b/2) = 14/27 - 10/27 - 3/27 = 1/27$$

$$= 5/27 - 10a/27 - \frac{5b}{8} = \frac{5}{27} - \frac{70}{243} + \frac{5}{36}$$

$$= \frac{35}{27 \times 36}$$

(9)

இருமுறை வகையிடத்தக்க சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = x_0$ இல் இழிவுப் பெறுமானத்தை உடையதாக இருப்பதற்குப் போதுமான நிபந்தனை தருக.
$f(x)$ என்பது $x = x_0$ இல் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கு $f''(x_0) > 0$ எனும் நிபந்தனை தேவையானதுமல்ல போதுமானதுமல்ல என்பதை உதாரணங்கள் உதவியுடன் காட்டுக.
$x = a(1-3t^2)$, $y = a(t-3t^3)$ எனும் பரமானச் சமன்பாடுகள் ஒரு வளையியை வரையறுக்கின்றன. இங்கு t என்பது ஒரு பரமானமாகும். a என்பது நேர் மாறிலியாகும். வளையியில் "t" எனும் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் காண்க.

விடை

இருமுறை வகையிடத்தக்க சார்பு $f(x)$ ஆனது $x = x_0$ இல் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான போதுமான நிபந்தனை
(i) $f'(x_0) = 0$ (ii) $f''(x_0) > 0$

$f''(x_0) > 0$ எனும் நிபந்தனை தேவையானது அல்ல.

(உ+ம்) $f(x) = x^4$ என்பது $x = 0$ இல் இழிவைக் கொண்டிருக்கும். ஆனால் $f''(0) = 0$. $f''(x_0) > 0$ எனும் நிபந்தனை போதுமானதல்ல.

(உ+ம்) $f(x) = x^4$ என்பது $x = 1$ இல் இழிவைக் கொண்டிராது.

$x = a(1-3t)^2$, $y = a(t-3t^3)$, $a>0$

ஆனால் $f''(a) > 0$

$$\frac{dx}{dt} = a \times 6t^2 = -6at \text{ உம் } \frac{dy}{dt} = a(1-9t^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(9t^2-1)}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{(9t^2-1)}{6t}\right\}\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{6t \cdot 18t - (9t^2-1) \cdot 6}{\ldots} \cdot (-1)/6at$$

$$= \frac{-(9t^2-1)}{36at^3}$$

நிலையான புள்ளிகளுக்கு $9t^2-1=0$ ஆதல் வேண்டும்.

$\therefore t = \pm 1/3 \quad \therefore x = 2a/3, \quad y = \pm \frac{2a}{9}$

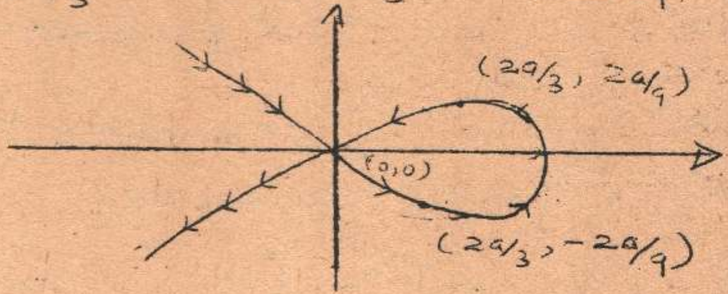
நிலையான புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் $(2/3\, a, 2/9\, a)$ உம்
$(2/3\, a, -2/9\, a)$ உம் ஆகும்.

t	x	y	dy/dx
$-\infty < t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\infty$ to 0 இல் அதிகரிக்கும்	∞ to 0 வரை குறையும்.	$-\infty$ to $-1/\sqrt{3}$ வரை அதிகரிக்கும்
$-1/\sqrt{3} < t < -\frac{1}{3}$	0 to $\frac{2a}{3}$ வரை "	0 to $-\frac{2a}{9}$ " "	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ to 0 " "
$-\frac{1}{3} < t < 0$	$\frac{2a}{3}$ to 0 " "	$-\frac{2a}{9}$ to 0 " அதிகரிக்கும்	0 to ∞ " " "
$0 < t < 1/3$	a to $\frac{2a}{3}$ " குறையும்	0 to $\frac{2a}{9}$ " "	∞ to 0 வரை குறையும்
$1/3 < t < 1/\sqrt{3}$	$\frac{2a}{3}$ to 0 " "	$\frac{2a}{9}$ to 0 " "	0 to $\frac{1}{\sqrt{3}}$ " அதிகரிக்கும்
$\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \infty$	0 to $-\infty$ " "	0 to $-\infty$ வரை குறையும்	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ to ∞ " "

மேலேயுள்ள அட்டவணையிலிருந்து

$-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < -\frac{1}{3} \longrightarrow t = -1/3$ இல் இழிவு

$0 < t < 1/3 \longrightarrow t = 1/3$ " உயர்வு



(10) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi/2$ என்னும் இடைவெளியில் $y = \sin^2 x$, $y = 1 + \cos^2 x$ ஆகிய சார்புகளுக்கான வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.
இவ்வரைபுகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட S என்னும் பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.
(i) y - அச்சு பற்றியும் (ii) x - அச்சு பற்றியும்
S என்பது இரு செங்கோணங்களினூடு சுழற்றப்படுகிறது. இந்த இருவகைகளிலும் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க

விடை :

$$y = \sin^2 x \qquad 0 \le x \le \pi/2$$

இச்சார்பு y அச்சுப்பற்றி சமச்சீர்

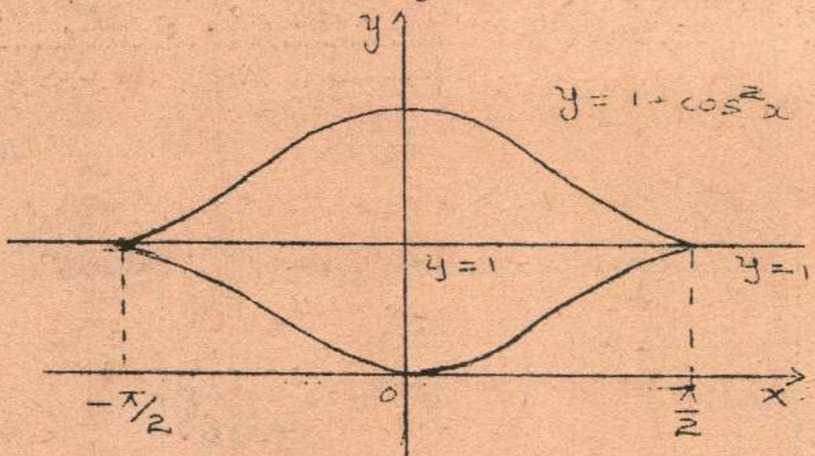
$y = \sin^2 x$, $dy/dx = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

∴ படித்திறன் 0 இலிருந்து 1 வரை அதிகரிக்கும் (x ஆனது 0 இலிருந்து $\pi/4$ வரை அதிகரிக்கும்போது).

அத்துடன் படித்திறன் 1 இலிருந்து 0 வரை குறைவடையும் (x ஆனது $\pi/4$ இலிருந்து 0 வரை அதிகரிக்கும்போது)

ஆனால் $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$\therefore$ $y = \sin^2 x$ உம் $y = 1 + \cos^2 x$ உம் $y = 1$ பற்றி சமச்சீரானவை



வரைபுகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பு

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = 4\int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = 4\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2$$

(i) S ஆனது y-அச்சைப் பற்றி இரு செங்கோணங்களினூடாக சுழற்றப்படும் போது

$$= 4\pi \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{1} x^2 dy = 4\pi \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 \cdot 2\sin x \cos x\, dx$$

$$= 4\pi \cdot \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x \cdot dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= 2\pi\left[-\frac{x^2}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos 2x \cdot dx$$

$$= 2\pi\left\{\left[\frac{\pi^2}{8}\right] + \int_0^{\pi/2} x \cdot \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right) dx\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2x \cdot dx\right\}$$

$$= 2\pi\left[\frac{\pi^2}{8} + \left[\tfrac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}\right]$$

$$= 2\pi\left\{\frac{\pi^2}{8} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right\}$$

$$V = \left(\frac{\pi^2}{8} - \tfrac{1}{2}\right) 2\pi$$

(ii) S ஆனது x-அச்சைப் பற்றி உள்ள செங்கோணங்களினூடாக சுழற்றப்படும் போது

$$= 2\int_0^{\pi/2} \pi\left\{(1+\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2\right\} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} (1+\cos^2 x + \sin^2 x)(1+\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x)\, dx$$

$$= 2\pi \cdot 2\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\pi \cdot 2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$V = 2\pi^2$$

உரிமை பதிப்பகத்தாருக்குரியது.

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூயகணிதம் 11. க.பொ.த (உயர் தரம்), மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1985.

எவையேனும் ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை தருக.

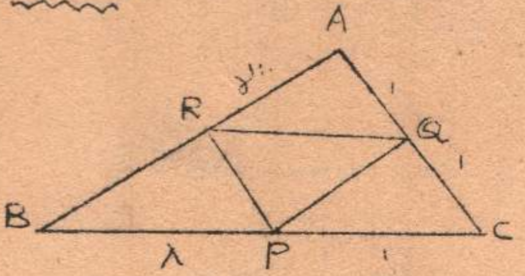
1. $\frac{BP}{PC} = \lambda$, $\frac{CQ}{QA} = \mu$, $\frac{AR}{RB} = \nu$ என்னும் வண்ணம் P, Q, R ஆன புள்ளிகள் முறையே முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களான BC, CA, AB யில் அமைந்துள்ளன.

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \frac{(1+\lambda\mu\nu)}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவகையிலோ மெனிலாஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையை நிறுவுக.

L, M, N ஆகியன ஒரு வட்டத்திலே உள்ள மூன்று வேறான புள்ளிகளாகும். L, M, N ஆகியவற்றில் உள்ள வட்டத்தின் தொடலிகள் MN, NL, LM ஆகிய கோடுகளை முறையே X, Y, Z இல் சந்திக்கின்றன. X, Y, Z ஆகியன ஒரே கோட்டுப் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

விடை



$$\frac{\Delta ARQ}{\Delta ABC} = \frac{AR \cdot AQ}{AB \cdot AC} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}$$

இதே போல்

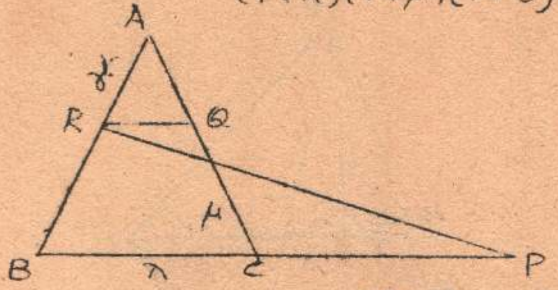
$$\frac{\Delta BPR}{\Delta ABC} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu)}$$

$$\frac{\Delta PCQ}{\Delta ABC} = \frac{\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = 1 - \frac{\Delta ARQ + \Delta BPR + \Delta PCQ}{\Delta ABC}$$

$$= 1 - \frac{\nu(1+\lambda) + \lambda(1+\mu) + \mu(1+\nu)}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$$

$$= \frac{1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$$



$$\Delta ABC = \Delta AQR + \Delta BPR + \Delta PQR - \Delta CPQ$$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = 1 - \frac{\Delta AQR}{\Delta ABC} - \frac{\Delta BPR}{\Delta ABC} + \frac{\Delta CPQ}{\Delta ABC}$$

ஆனால் $\frac{\Delta AQR}{\Delta ABC} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}$, $\frac{\Delta BPR}{\Delta ABC} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\nu)}$

$$\frac{\Delta CPQ}{\Delta ABC} = \frac{\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = 1 - \frac{\nu}{(1+\mu)(1+\nu)} - \frac{\lambda}{(1-\lambda)(1+\nu)} - \frac{\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}$$

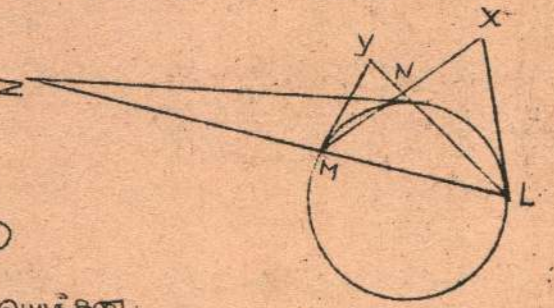
$$= \frac{1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$$

//

Δ ABC இல்,
P, Q, R என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றில் உள்ள புள்ளிகள் $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB} = -1$ ஆகுமாறு உள்ளது. ஆனால் (ம்)
பகுதியிலிருந்து $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB} = \lambda\mu\nu$ $\therefore \lambda\mu\nu = -1$

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \frac{1-1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)} = 0$$

$\Delta PQR = 0$ ∴ P, Q, R என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன.



Δ கள் LMX, LNX இயல்பொத்தன.

$$\therefore \frac{ML}{LN} = \frac{LX}{NX} = \frac{MX}{LX}$$

$$\frac{MX}{XN} = -\left(\frac{ML}{LN}\right)^2 \quad \text{—— (1)}$$

Δ கள் LNZ, MNZ இயல்பொத்தன,

$$\therefore \frac{LN}{NM} = \frac{NZ}{MZ} = \frac{LZ}{NZ} \qquad \therefore \frac{LZ}{ZM} = -\left(\frac{LN}{NM}\right)^2 \quad \text{—— (2)}$$

Δ கள் LMY உம் MNY உம் இயல்பொத்தன,

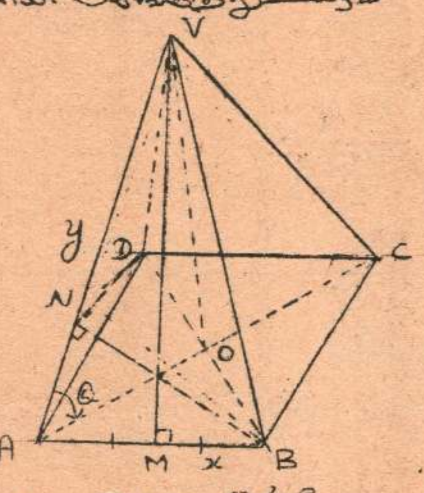
$$\therefore \frac{MN}{LM} = \frac{NY}{MY} = \frac{MY}{LY} \qquad \frac{NY}{YL} = -\left(\frac{MN}{LM}\right)^2 \quad \text{—— (3)}$$

$$(1)\times(2)\times(3) \quad \frac{MX}{XN}\cdot\frac{NY}{YL}\cdot\frac{LZ}{ZM} = -1$$

∴ மெனிலோசின் தேற்றப்படி X, Y, Z என்பவை ஒரே நேர் கோட்டுப் புள்ளிகள்.

(ஆ) VABCD எனும் கூம்பகத்தின் அடியான ABCD ஒரு சதுரமாகவும், V ஆனது, அடியின் மையம் O இனூடாக வரையப்பட்ட செங்குத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகவும் உள்ளன. AB = x, VA = y
பின்வருவனவற்றைத் துணிக.
(i) VA க்கும் அடி ABCD உக்கும் இடையிலுள்ள கோணம்.
(ii) முகங்கள் VAB க்கும் VAD க்கும் இடையிலுள்ள கோணம்.
(iii) A யிலிருந்து முகம் VBC இற்கான செங்குத்துயரம்

விடை



(i) VA இற்கும் அடி ABCD யிற்கும் இடையில் உள்ள கோணம் 'θ' என்க

$AO = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{AO}{VA} = \frac{x}{\sqrt{2}\,y}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\,y}\right)$ //

VA யிற்குச் செங்குத்தாக BN ஐ வரைக. DN ஐ இணைக்க
DN ⊥ VA (சமச்சீரின்படி)
$B\hat{N}D = \alpha$ என்க
முகங்கள் VAB யிற்கும் VAD யிற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் α
ஆகும். $V\hat{A}B = \beta$ என்க.

$$\sin\beta = \frac{VM}{AV} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{4y^2-x^2}}{y}$$

$$BN = AB\sin\beta = \frac{x\sqrt{4y^2-x^2}}{2y} = DN$$ (சமச்சீரின் படி)

$$\cos\alpha = \frac{-BD^2+BN^2+DN^2}{2\,BN\,DN} = \frac{2x^2 - x^2(4y^2-x^2)/2y^2}{x^2(4y^2-x^2)/2y^2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left[x^2/4y^2-x^2\right]$$ //

(iii) h என்பது A இலிருந்து முகம் VAB யின் செங்குத்துயரம் என்க.

∴ கூம்பகம் VABCD இன் கனவளவு $= \frac{1}{3}(VO) \times$ ABCD இன் பரப்பு

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2y^2-x^2}{2}}\cdot x^2$$

VABC இன் கனவளவு $= \frac{1}{3}h \times$ முகம் BCV யின் பரப்பு

$$= \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{4y^2-x^2}{2}}$$

∴ கூம்பகம் VABCD யின் கனவளவு

$= 2 \times$ VABC இன் கனவளவு

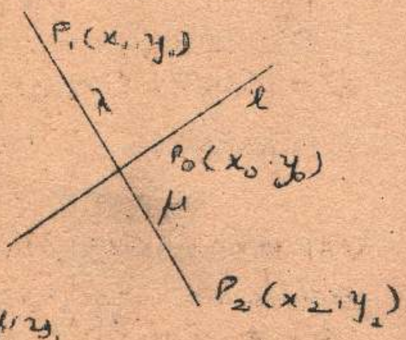
$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2y^2-x^2}{2}}\cdot x^2 = \frac{2h}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{\frac{4y^2-x^2}{2}}$$

$$h = x\sqrt{\frac{2(2y^2-x^2)}{4y^2-x^2}}$$ //

(3) $ax+by+c=0$ என்பது l என்னும் கோட்டுக்குரிய சமன்பாடு ஆகும். $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ஆகியவை l இல் இல்லாத வெவ்வேறு புள்ளிகளாகும். P_1P_2 ஐ l வகுக்கும் விகிதத்தைக் காண்க. l எனும் கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் P_1 உம் P_2 உம் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனையை உய்த்தறிக.

புள்ளிகள் $A \equiv (-1,-1)$ உம் $C \equiv (7,15)$ உம் ABCD எனும் இணைகரத்தின் எதிர் முனைகளாகும். இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் BD இன் நீளம் $2\sqrt{17}$. இது x அச்சின் நேர்த்திசையோடு $\tan^{-1}(4)$ எனும் கோணத்தை அமைக்கிறது. B உம் D உம் ஆகிய உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இணைகரத்தின் ABC, ADC ஆகிய கோணங்களின் உள்ளிரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

விடை



$P_0(x_0, y_0)$ என்பது l எனும் கோடும் P_1P_2 உம் வெட்டும் புள்ளி என்க.

$\frac{P_1P_0}{P_0P_2} = \frac{\lambda}{\mu}$ என்க

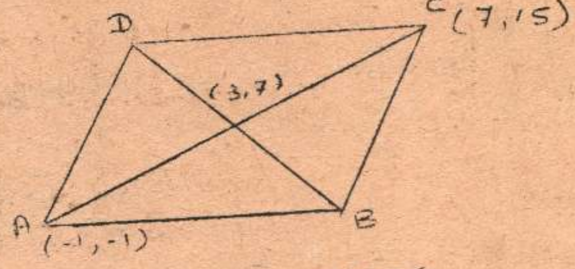
எனவே $x_0 = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}$, $y_0 = \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}$

$$ax_0 + by_0 + c = a\left(\frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}\right) + b\left(\frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}\right) + c = 0$$

$$\lambda(ax_2+by_2+c)-\mu(ax_1+by_1+c)=0$$

$$\lambda/\mu = \mp\frac{(ax_1+by_1)}{(ax_2+by_2+c)}$$

P_1, P_2 என்பவை எதிர்ப்பக்கங்களில் இருந்தால் $\lambda/\mu>0$
இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை
$\therefore P_1, P_2$ எதிர்ப்பக்கங்களில் (ax_2+by_2+c) உம் எதிர்க்குறியை
(ax_1+by_1+c) உம் (ax_2+by_2+c) இருத்தல் வேண்டும்
உடையவையாய்



BD யின் சமன்பாடு $y = 4x + c$
BD யானது (3, 7) இனூடாகச் செல்வதினால்
$c = -5$

$\therefore$ BD யின் சமன்பாடு $y = 4x - 5$
BD இல் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் $(t, 4t-5)$
(இங்கே "t" பரமானம்) என குறிக்கலாம்)

$$(t-3)^2+(4t-5-7)^2 = 17$$
$$(t-3)^2 = 1$$
$$t = 2 \text{ or } 4$$

$B = (4, 11)$ $\quad D = (2, 3)$

AB யின் சமன்பாடு $y+1 = 12/5\,(x+1)$
$$12x - 5y + 7 = 0$$
BC யின் சமன்பாடு, $y - 1 = 4/3\,(x-4)$
$$4x - 3y + 17 = 0$$
ABC என்னும் கோணத்தின் உள் இருகூறாக்கியின்
சமன்பாடு, $\dfrac{12x-5y+7}{\sqrt{144+24}} = \pm\dfrac{4x-3y+17}{\sqrt{16+9}}$

(+) குறியை தீர்மானிக்கும்.
$$5(12x-5y+7) = +13(4x-3y+17)$$
$$4x+7y-93 = 0 \,//$$

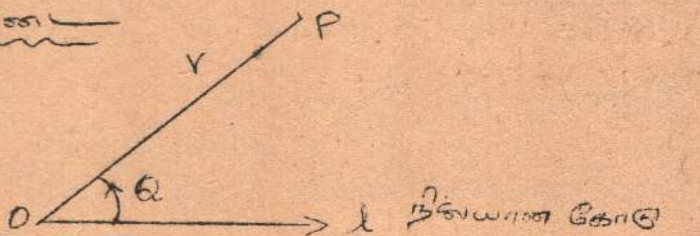
AD என்னும் கோட்டின் சமன்பாடு
$y+1 = 4/3\,(x+1) \Longrightarrow 4x-3y+1 = 0$
DC என்னும் கோட்டின் சமன்பாடு
$y-3 = 12/5\,(x-2) \Longrightarrow 12x-5y-9 = 0$
ADC என்னும் கோணத்தின் உள்ளிருகூறாக்கியின்
சமன்பாடு $\dfrac{4x-3y+1}{5} = \dfrac{12x-5y-9}{13}$

(+) குறியை தீர்மானிக்க
$$13(4x-3y+1) = +5(12x-5y-9)$$
$$\Longrightarrow 4x+7y-29 = 0 \,//$$

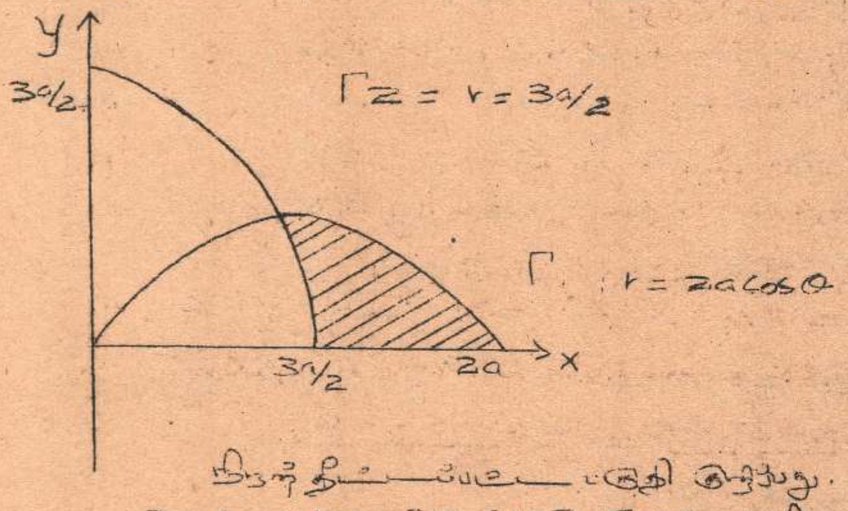
(4) (i) போலர் ஆள்கூறுகள் உபயோகித்து எவ்வாறு ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்துக்காட்டலாம் என்பதை விளக்குக.
இந்த வரிப்படத்தில் $r = 2a\cos\theta$, $r = \frac{3a}{2}$,
இங்கே $a>0$, $0 \le \theta \le \pi/2$
ஆகிய போலர் ஆள்கூறுகளில் உள்ள சமன்பாடுகளைக் குறிக்கும் வளையிகளைப் பருமட்டாக வரைக.
$3a/2 \le r \le 2a\cos\theta$ என்பது வரையறுக்கும் பிரதேசத்தை உங்கள் வரிப்படத்தில் குறித்துக்காட்டுக.

(ii) $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2 \le 0$
$x+y-2a \le 0$ ஆகிய சமனிலிகள் இரண்டையும் திருப்தி பண்ணும் $x-y$ தளத்தில் D பிரதேசத்தைக் குறித்துக் காட்டவும். இங்கே $a>0$ ஆகும். இதிலிருந்து, மேலேயுள்ள நிபந்தனைகளுக்கமைய x^2+y^2 என்பதன் அதிகூடிய பெறுமானத்தையும் அதிகுறைந்த பெறுமானத்தையும் காண்க.

விடை



O என்பது நிலையான புள்ளியாகவும், l என்பது O க்கூடான நிலையான கோடாகவும் இருக்க, OP = r ஆகவும் OP யானது l உடன் இடஞ்சுழியாக அமைக்கின்ற கோணம் θ ஆகவும் இருக்கும் போது, மாறுகின்ற புள்ளி P யின் போலர் ஆள்கூறுகள் (r, θ) இனால் குறிக்கலாம்.
$r = 2a\cos\theta$
θ ஆனது 0 இலிருந்து $\pi/2$ வரை அதிகரிக்க, r ஆனது $2a$ இலிருந்து a வரை குறைவடையும்
$r = 3a/2$, $0 \le \theta \le \pi/2$ ஆனது 1ஆம் கால்வட்டத்தில் $3a/2$ ஆரையுடைய கால்வட்டத்தைக் குறிக்கும்.



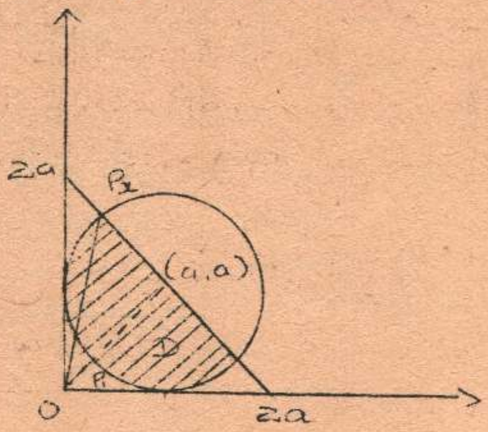
நிழற்றிடப்பட்ட பகுதி குறிப்பது
$3a/2 \le r \le 2a\cos\theta$ எனும் பகுதியை.

(ii) $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2 = (x-a)^2+(y-a)^2-a^2$

(x-y) தளத்தில், $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2 \le 0$ என்பது (a,a) ஐ மையமாகவும் a ஆரையுடைய வட்டத்தினுள் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பைக் குறிக்கும்.

(x-y) தளத்தில் $x+y-2a \le 0$ என்பது, $x+y-2a \le 0$ என்னும் கோட்டிற்கு கீழ்ப்புறம் இருக்கும் பிரதேசத்தைக் குறிக்கும்.

∴ D என்னும் பிரதேசம்



x^2+y^2 இன் அதிகூடிய பெறுமானம் =

$$= OP_2^2 = 2a^2+a^2 = 3a^2$$

x^2+y^2 இன் ஆகக்குறைந்த பெறுமானம் $= OP_1^2 = (\sqrt{2}a-a)^2$

$$= (3-2\sqrt{2})a^2$$

//

(5) y-அச்சைச் செலுத்தியாகவும் (2a,0) ஐ குவியமாகவும் கொண்ட S எனும் பரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

L என்பது $y = mx \quad (m \neq 0)$ எனும் நேர்கோடாக அமையட்டும். P இல் உள்ள தொடலி l க்கு சமாந்தரமாகவும் Q இல் உள்ள தொடலி l க்கு செங்குத்தாகவும் இருக்கும் வண்ணம் P உம், Q உம் S எனும் பரவளைவின் இரு புள்ளிகளாகும். m வேறுபடும் போது

(i) PQ, புள்ளி (2a,0) இன் ஊடாகச் செல்கின்றது எனவும்

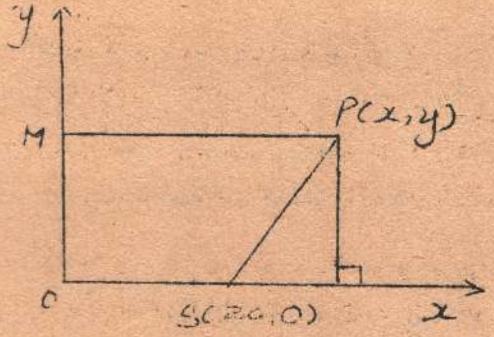
(ii) P இலும் Q இலும் உள்ள S இன் தொடலிகள் y-அச்சில் ஒன்றை ஒன்று வெட்டுகின்றன எனவும்,

(iii) PQ இன் நடுப்புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு பரவளைவு எனவும் காட்டுக

<u>விடை</u>

P என்பது (P = (x, y)) பரவளைவில் யாதுமொரு புள்ளி $PM = x, \quad PN = y$

$SN = x - 2a$



P யினது பரவளைவின் அச்சினூடு y-அச்சானது பரவளைவின் செலுத்தியாகவும் கொள்ளப்படுகிறது.

$$PM^2 = PS^2$$
$$\Rightarrow \therefore x^2 = y^2 + (x - 2a)^2$$
$$y^2 = 4a(x-a)$$

இது கேட்கப்பட்ட பரவளைவின் சமன்பாடாகும்
இப்பரவளைவில் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும்
$\{a(t^2+1), 2at\}$ என்னும் பரமான வடிவத்தில் எழுதலாம்.
இங்கு t - பரமானம்

$$\therefore dy/dx = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2a}{2at} = 1/t$$

$y=mx$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமான தொடலியின் சாய்வு $\frac{dy}{dx} = 1/t = m$

$$\therefore P = \{a(1/m^2+1), 2a/m\}$$

$dy/dx = 1/t = -1/m$ என்பது $y=mx$ என்னும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தான ஒரு தொடலியின் சாய்வு

$$\therefore Q = \{a(m^2+1), -2am\}$$

$\therefore$ PQ இன் சமன்பாடு

$$\frac{y+2am}{x-a(m^2+1)} = \frac{2a/m + 2am}{a(1/m^2+1) - a(m^2+1)}$$
$$= 2m/1-m^2$$

(2a, 0) என்னும் புள்ளி இச்சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்தும்.

(ii) P யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு
$$y - 2a/m = m\{x - a(1/m^2+1)\}$$
$$\text{அ-து} \rightarrow y = mx + a/m - a/m \quad \text{— (1)}$$

Q விலான தொடலியின் சமன்பாடு
$$y + 2am = -1/m\{x - a(m^2+1)\}$$
$$\text{அ-து} \rightarrow y = -x/m + a/m - am \quad \text{— (2)}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow x = 0$$

அ-து → P யிலுள்ள தொடலியும் Q விலுள்ள தொடலியும் y அச்சில் ஒன்றை ஒன்று வெட்டுகின்றன.

(iii) $R = (x_0, y_0)$ என்பது PQ இன் நடுப்புள்ளி என்க.
$$\therefore x_0 = 1/2\{a(1/m^2+1) + a(m^2+1)\} = a/2(1/m+m)^2$$
$$y_0 = 1/2(2a/m - 2am) = a(1/m - m)$$
$$y_0^2 = a^2(1/m-m)^2$$

$$y_0^2 = a^2\left\{\left(1/m + m^2\right) - 4\right\}$$
$$= a^2\left(2x_0/a - 4\right) = 2a(x_0 - 2a)$$

∴ R இன் ஒழுக்கு $y^2 = 2a(x - 2a)$ என்னும் சமன்பாட்டைக் கொண்ட பரவளைவாகும்.

(6) $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ என்பதால் தரப்படும் l என்னும் நேர்கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் S என்ற நீள்வளையத்தின் தொடலி என்று நிறுவுக.

P, Q என்பன S நீள்வளையத்தின் குவியங்களிலிருந்து L க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துகளின் அடிப்புள்ளிகளாகும்.

m இனது எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் புள்ளிகள் P உம் Q உம் $x^2 + y^2 = a^2$ எனும் வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

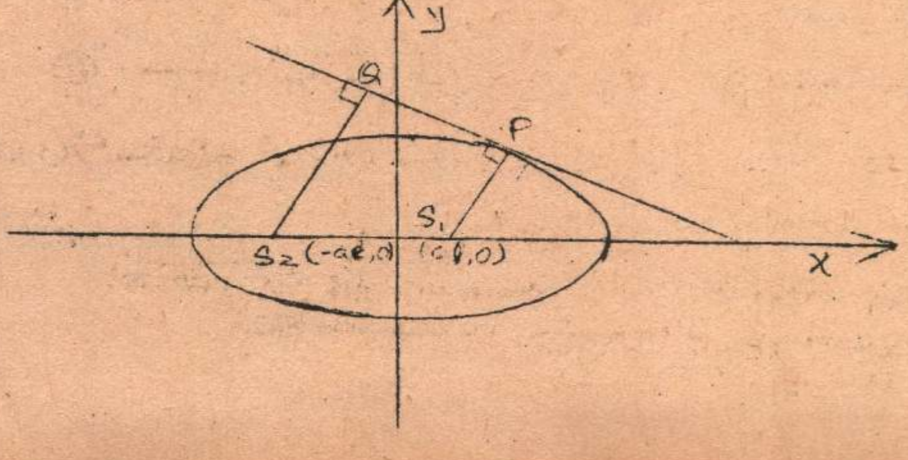
l' என்பது L உக்குச் செங்கோணத்தில் அமைந்துள்ள நீள்வட்டத்தின் தொடலியாகும். L உம் M உம் l' இனதும் $x^2 + y^2 = a^2$ எனும் வட்டத்தினதும் இடைவெட்டுப் புள்ளிகளாகும் எனின் $PQ^2 + LM^2 =$ ஒருமை என்று காட்டுக. N என்பது l' இனதும் l இனதும் இடைவெட்டுப் புள்ளி எனின் m மாறும் போது N இனது ஒழுக்கைக் காண்க.

<u>விடை</u>

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \text{——} (1)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{——} (2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \left\{mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}\right\}^2 / b^2 - 1 = 0$$
$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mx\sqrt{a^2m^2 + b^2} + a^4m^2 = 0 \quad \text{——} (A)$$
$$\left\{\sqrt{a^2m^2 + b^2}\cdot x + a^2m\right\}^2 = 0$$

∴ x இற்கு இரண்டு பொருந்தும் மூலங்கள் உண்டு. எனவே (1) $\Longrightarrow$ இரண்டு பொருந்து மூலங்கள் y இற்கு உண்டு. எனவே கோடு l உம் நீள்வளையம் S உம் இடைவெட்டும் புள்ளி, இரு பொருந்து புள்ளிகளாகும்.

∴ l என்பது நீள்வளையத்திற்கான தொடலியாகும்.



l என்னும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $x + my = c$ ஆகும்

இது $(ae, 0)$ இனூடாகச் செல்வதால் $c = ae$

$\therefore$ SP இன் சமன்பாடு $x + my = ae$

$\therefore$ P ஆனது பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும்:

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \text{---} \; (1)$$

$$x + my = ae \quad \text{---} \; (2)$$

$$(1) \Rightarrow (y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2 \quad \text{---} \; A$$

$$(2) \Rightarrow (x + my)^2 = a^2e^2 \quad \text{---} \; B$$

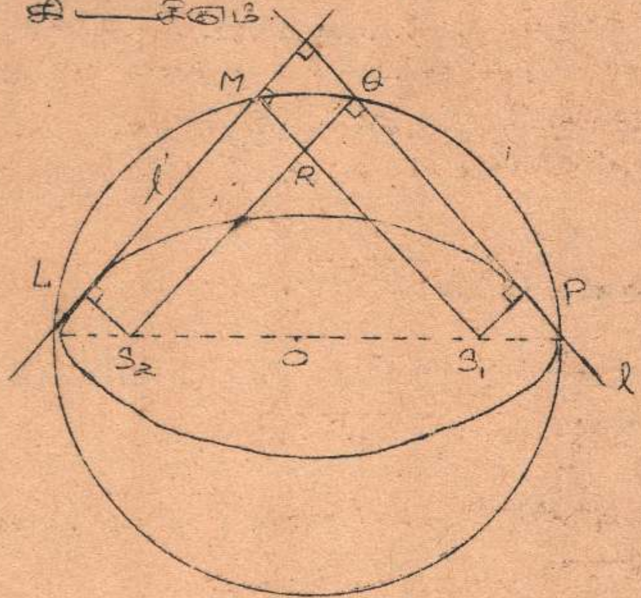
$$(A) + (B) \Longrightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

$$\left[\because b^2 = a^2(1 - e^2)\right]$$

இதே போல் S_2Q இன் சமன்பாடு $x + my = -ae$

$$\Longrightarrow (x + my)^2 = a^2e^2$$

எனவே P யும் Q யும் $x^2 + y^2 = a^2$ என்னும் வட்டத்தில் கிடக்கும்.



L, M என்பன S எனும் நீள்வளையத்தின் குவியங்களிலிருந்து l' க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடிகளாகும் (முதற்பகுதியிலிருந்து)

$$\therefore LM = S_2R, \quad PQ = S_1R$$

$$\Longrightarrow LM^2 + PQ^2 = S_1R^2 + S_2R^2 = S_1S_2^2$$

$$LM^2 + PQ^2 = \text{மாறிலி}$$

l இன் சமன்பாடு $\quad y - mx = \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \text{---} \; (1)$

l' இன் சமன்பாடு $\quad my + x = \sqrt{a^2 + b^2m^2} \quad \text{---} \; (2)$

$$(1)^2 + (2)^2 \Longrightarrow (1 + m^2)x^2 + (1 + m^2)y^2 = (a^2 + b^2)(1 + m^2)$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$\therefore$ N இன் ஒழுக்கு $(0, 0)$ மையமாகவும் $\sqrt{a^2 + b^2}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டமாகும்.

(7) $xy - c^2 = 0$ ஆகிய S என்னும் செவ்வக அதிபரவளைவில் உள்ள புள்ளிகளான $P_1 \equiv (ct_1, c/t_1)$, $P_2 \equiv (ct_2, c/t_2)$ என்பவற்றை இணைக்கும் நாணின் சமன்பாட்டைப் பெறுக. P_1P_2 ஐ விட்டமாக கொண்ட வட்டம், S எனும் அதிபரவளைவில் மீண்டும் $T^2t_1t_2 + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் பரமானங்களைக் கொண்ட Q உம் R உம் ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் காட்டுக.

P_3P_4 என்பது P_1P_2 க்கு சமாந்தரமாக அமையும் வண்ணம் P_3, P_4 ஆகியவை அதிபரவளைவில் அமைந்துள்ள வேறும் இரு புள்ளிகளாகும். P_3P_4 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் Q, R ஆகியவற்றினூடாகவும் செல்கிறது என்று காட்டுக.

விடை

P_1P_2 இன் சமன்பாடு

$$y - c/t_1 = \frac{(c/t_2 - c/t_1)}{(ct_2 - ct_1)}(x - ct_1)$$

$$y - c/t_1 = \frac{1}{t_1t_2}(x - ct_1) \quad [\because t_1 \neq t_1]$$

அ-து $\quad x + t_1t_2y = c(t_1 + t_2)$

$P \equiv (x, y)$ என்பது P_1P_2 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் யாதும் ஒரு புள்ளி

∴ இவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x - ct_1)(x - ct_2) + (y - c/t_1)(y - c/t_2) = 0$$

இவ்வட்டம் S என்னும் அதிபரவளைவை $(cT, c/T)$ இல் வெட்டுகின்றது.

$$(cT - ct_1)(cT - ct_2) + (c/T - c/t_1)(c/T - c/t_2) = 0$$

அ-து $\quad (T - t_1)(T - t_2) + \frac{1}{T^2t_1t_2}(T - t_1)(T - t_2) = 0$

$$T^2t_1t_2 + 1 = 0$$

$$\because (T - t_1)(T - t_2) \neq 0$$

S எனும் அதிபரவளைவை வட்டம் $T^2t_1t_2 + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாடு தரும் பரமானங்களையுடைய புள்ளிகள் Q, R இல் வெட்டுகின்றது.

P_1P_2 இன் படித்திறன் $= -1/t_1t_2$

P_3P_4 இன் படித்திறன் $= -1/t_3t_4$

$P_1P_2 \parallel P_3P_4 \Longrightarrow t_1t_2 = t_3t_4$

∴ P_3P_4 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் S என்னும் அதிபரவளைவை மீண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளின் பரமானங்கள் $T^2t_3t_4 + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும்.

அதாவது $\quad T^2t_3t_4 + 1 = 0$

$$\Longrightarrow T^2t_1t_2 + 1 = 0 \quad [\because t_1t_2 = t_3t_4]$$

∴ வட்டம் (P_3P_4 ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்) Q, R இனூடாகச் செல்லும்.

(8) கோசை^{-1}x + கோசை^{-1}y + கோசை$^{-1}z = \pi$ எனில்
$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ ஆகும் என்று காட்டுக.
பொருத்தமான வகையில் x, y, z ஆகியவற்றின் தெரிவு செய்து $A+B+C=\pi$ எனில்,

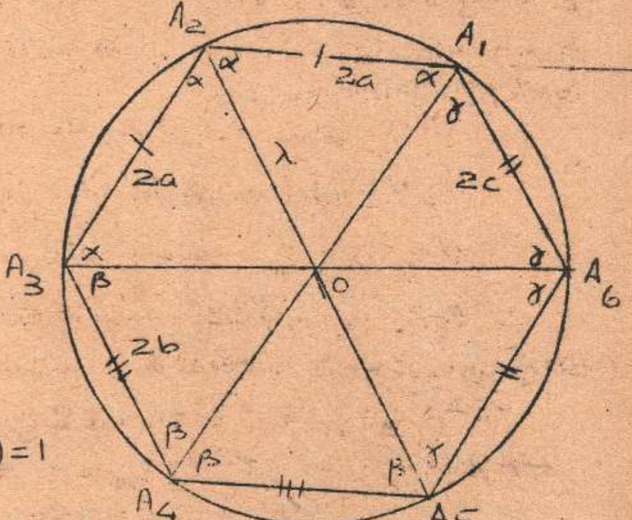
$\sin^2 A/2 + \sin^2 B/2 + \sin^2 C/2 + 2\sin A/2 \sin B/2 \sin C/2 = 1$
என்று உய்த்தறிக.
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ என்பது ஒரு வட்டத்தில் அமைந்துள்ளதும்
$A_1A_2 = A_2A_3 = 2a$, $A_3A_4 = A_4A_5 = 2b$, $A_5A_6 = A_6A_1 = 2c$
எனும் வகையில் அமைந்துள்ளதுமான அறுகோணி ஆகும்.
இவ்வட்டத்தின் ஆரை λ என்பது
$$\lambda^3 - (a^2+b^2+c^2)\lambda - 2abc = 0$$ என்பதால்
தரப்படுகிறது என்று காட்டுக.

விடை -

$\alpha = \cos^{-1}x$, $\beta = \cos^{-1}y$, $\gamma = \cos^{-1}z$ என்க.
எனவே $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$ அத்துடன்
$$\alpha+\beta+\gamma = \pi$$
$$x^2+y^2+z^2+2xyz =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cdot\cos\gamma$$
$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cdot\cos\gamma$$
$$= 1 - \cos\gamma\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$$
$$= 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cdot\cos\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 1$$

$\alpha = \pi/2 - A/2$, $\beta = \pi/2 - B/2$, $\gamma = \pi/2 - C/2$ என்க.
$$x = \cos(\pi/2 - A/2) = \sin A/2$$
$$y = \cos(\pi/2 - B/2) = \sin B/2$$
$$z = \cos(\pi/2 - C/2) = \sin C/2$$
1ம் பகுதியிலிருந்து
$$\sin^2 A/2 + \sin^2 B/2 + \sin^2 C/2 + 2\sin A/2\,\sin B/2\cdot\sin C/2 = 1$$

$$4(\alpha+\beta+\gamma) = 6\pi - 2\pi$$
$$\alpha+\beta+\gamma = \pi$$
$\cos\alpha = a/\lambda$, $\cos\beta = b/\lambda$
$\cos\gamma = c/\lambda$
$x = a/\lambda$, $y = b/\lambda$
$z = c/\lambda$
எனின் 1ம் பகுதியிலிருந்து
$$(a/\lambda)^2 + (b/\lambda)^2 + (c/\lambda)^2 + 2(a/\lambda)\cdot(b/\lambda)\cdot(c/\lambda) = 1$$



$\lambda^3 - \lambda(a^2+b^2+c^2) - 2ab$ என்பதால் λ தரப்படும்.

௨

x இன் எல்லா மெய்யான பெறுமானங்களுக்கும்
$a\cos^2x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2x$ ஆனது கோணவயாவது
$\frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$ என்பதற்கும்
$\frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$ என்பதற்கும்
இடையில் அமைகிறது எனக் காட்டுக.
மெய்யான தீர்வுகள் இருக்குமெனின்,
$F(x) = 9\cos^2x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2x - k = 0$
என்பதில் k இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

$9\cos^2x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2x$ என்பதின் மிகப்
பெரிய, மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.
$9\cos^2x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2x - 25/4 = 0$
என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

விடை :-

$$E = a\cos^2x + 2b\sin x\cos x + c\sin^2x$$
$$= a/_2(1+\cos 2x) + b\sin 2x + c/_2(1-\cos 2x)$$
$$= a+c/_2 + \left[\frac{a-c}{2}\cos 2x + b\sin 2x\right]$$
$$= \frac{a+c}{2} + \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4}+b^2}\,\sin(2x+\alpha)$$

இங்கே $\sin\alpha = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}$

$$\cos\alpha = \frac{2b}{\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}$$

எல்லா x இன் மெய் பெறுமானங்களுக்கும்
$$-1 \le \sin(2x+x) \le 1$$
$$\Rightarrow \frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2} \le E \le \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$$
$$f(x) = 0$$
$$\Rightarrow k = 9\cos^2x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2x$$
$$a = 9,\ b = 12,\ c = 16$$
$$\frac{a+c}{2} = 25/_2$$

$$\sqrt{\frac{(a-c)^2+4b^2}{2}} = \sqrt{\frac{49+576}{2}} = 25/_2.$$

1ம் பகுதியிலிருந்து $0 \le k \le 25$
k உயர்வு $= 25$ k இழிவு $= 0$
$9\cos^2x + 24\sin x\cos\alpha + 16\sin^2x$
$= 25/_2 + 25/_2\sin(2x+\alpha)$
இங்கே $\sin\alpha = -7/_{25}$
$\cos\alpha = 24/_{25}$

$\therefore 9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x$ இன் அதியுயர் பெறுமானம் $= 25$

அதிகுறைந்த பெறுமானம் $= 0$

$$9\cos^2 x + 24\sin x\cos x + 16\sin^2 x - 25/4 = 0$$

$$25/2 + 25/2\,\sin(2x+\alpha) - 25/4 = 0$$

$$\sin(2x+\alpha) = -1/2$$

$$2x+\alpha = n\pi + (-1)(-\pi/6)$$

இங்கே n நிறையெண்.

(10) ஒரு குறிப்பிட்ட விமானச் சேவை இரு நகரங்களுக்கு இடையில் நான்கு இயந்திரங்களும் இரு இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் சேவையில் ஈடுபடுத்துகிறது. விமானங்கள் ஒரே வகையான இயந்திரங்களைக் கொண்டுள்ளன. பறக்கும் போது இயந்திரங்கள் ஒன்றை ஒன்று சாராது தனித்து இயங்குகின்றது. பிரயாணம் ஒன்றின் போது இயந்திரம் ஒன்று பழுதடையும் தன்மையின் நிகழ்தகவு θ ஆகும். இங்கே $0<\theta<1$ குறைந்தது அரைவாசி எண்ணிக்கையான இயந்திரங்கள் இயங்கிக் கொண்டிருந்தால் ஒரு விமானம் ஒரு பிரயாணத்தை பாதுகாப்பாக முடிக்கும். ஒரு விமானம் பறப்பின் போது அடைய வேண்டிய இடத்தை அடைய முடியாமைக்குரிய நிகழ்தகவை பின்வருவனவற்றில் காண்க.

(i) நான்கு இயந்திரமுள்ள விமானம் ஒன்றிற்கு

(ii) இரு இயந்திரமுள்ள விமானம் ஒன்றிற்கு θ இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு நான்கு இயந்திர விமானம் இரு இயந்திர விமானத்தைப் பார்க்கிலும் பாதுகாப்பானது?

விடை.

Pr {பிரயாணத்தின் போது எஞ்சின் ஒன்று பழுதடைவது} $= \theta$

$X =$ பிரயாணத்தின் போது, நான்கு இயந்திரம் உள்ள விமானத்தில் பழுதடையும் இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கை

$\therefore X = 0, 1, 2, 3, 4$ என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

P { ஒரு விமானம் பறப்பின் போது அடைய வேண்டிய இடத்தை அடைய முடியாது }

$= P\{x > 2\}$

$= P\{x = 3\} + P(x = 4)$

$= {}^4C_3\, \theta^3(1-\theta) + \theta^4$

$= \theta^3[4(1-\theta) + \theta]$

$= (4 - 3\theta)\theta^3$

y - பிரயாணத்தின் போது இரண்டு இயந்திரம் உள்ள விமானத்தில் பழுதடையும் இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கை.

எனவே $y = 0, 1, 2$ எனும் பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

P { ஒரு விமானம் பறப்பின் போது அடைய வேண்டிய இடத்தை அடைய முடியாது }.

$= P\{y = 2\} = \theta^2$

நான்கு இயந்திரம் கொண்ட விமானம் இரண்டு இயந்திரம் கொண்ட விமானத்திலும் பாதுகாப்பாக இருக்க.

$P(x > 2) < P(y = 2)$

$\theta^3(4 - 3\theta) < \theta^2$

$\theta[4 - 3\theta] < 1 \quad [\because \theta > 0]$

$3\theta^2 - 4\theta + 1 > 0$

$(3\theta - 1)(\theta - 1) > 0$

$\therefore 0 < \theta < 1/3$

உரிமை பதிப்பகத்தாருக்குரியது. உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

கணிதம் 1, க.பொ.த (உயர்தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட், 1984.

---

1 (i) $n \geq 1$ என்பதற்கு

தான் θ_{n+1} = தான் θ_n சீக θ_1 + சீக θ_n தான் θ_1 என்று அமைய கூர்ங்கோணங்களின் தொடரியாகும்.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ---- என்பது

$n \geq 1$ என்பதற்கு சீக θ_{n+1} = சீக θ_n சீக θ_1 + தான் θ_n தான் θ_1 எனக் காட்டுக

$n \geq 1$ என்பதற்கு தான் θ_n + சீக θ_n = (தான் θ_1 + சீக $\theta_1)^n$ என்பதைக் கணிதத் தொகுத்தறிவு கோட்பாட்டைக் கையாண்டு காண்க

(ii) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ எனும் பெருக்கல் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க

$-1 < r < 1$ எனின் $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k$ உண்டு என உய்த்தறிக

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k}$ $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ எனக் கொண்டு

$(S - S_n) < 10^{-2}$ என்பதற்கு n இனது மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

1 (i) $\tan\theta_{n+1} = \tan\theta_n \sec\theta_1 + \sec\theta_n \tan\theta_1$ ——— (1)

$$(1) \Rightarrow \sec^2\theta_{n+1} = 1 + \tan^2\theta_n \sec^2\theta_1 + \sec^2\theta_n \tan^2\theta_1 + 2\tan\theta_n \sec\theta_n \tan\theta_1 \sec\theta_1$$

$$= (\sec^2\theta_n - \tan^2\theta_n) + \tan^2\theta_n \sec^2\theta_1 + \sec^2\theta_n \tan^2\theta_1 + 2\tan\theta_n \sec\theta_n \tan\theta_1 \sec\theta_1$$

$$= \sec^2\theta_n(1 + \tan^2\theta_1) + \tan^2\theta_n(\sec^2\theta_1 - 1) + 2\tan\theta_n \sec\theta_n \tan\theta_1 \sec\theta_1$$

$$= \sec^2\theta_n \sec^2\theta_1 + \tan^2\theta_n \tan^2\theta_1 + 2\tan\theta_n \sec\theta_n \tan\theta_1 \sec\theta_1$$

$$\sec^2\theta_{n+1} = (\sec\theta_n \sec\theta_1 + \tan\theta_n \tan\theta_1)^2$$

$$\therefore \sec\theta_{n+1} = \sec\theta_n \sec\theta_1 + \tan\theta_n \tan\theta_1$$

$\tan\theta_n + \sec\theta_n = (\tan\theta_1 + \sec\theta_1)^n$ என நிறுவுவோம்

$n = 1$ எனின் $\tan\theta_1 + \sec\theta_1 = (\tan\theta_1 + \sec\theta_1)^1$

L.H.S = R.H.S

$n = 1$ க்கு முடிவு உண்மை ஆகும்

$n = p$ க்கு முடிவு உண்மையெனின்

$\tan\theta_p + \sec\theta_p = (\tan\theta_1 + \sec\theta_1)^p$ ஆகும்

இருபக்கமும் $(\tan\theta_1 + \sec\theta_1)$ ஆல் பெருக்குக.

$(\tan\theta_p + \sec\theta_p)(\tan\theta_1 + \sec\theta_1) = (\tan\theta_1 + \sec\theta_1)^{p+1}$

$$(\tan\theta_p \tan\theta_1 + \sec\theta_p \sec\theta_1) + (\tan\theta_p \sec\theta_1 + \sec\theta_p \tan\theta_1) = (\tan\theta_1 + \sec\theta_1)^{p+1}$$

$$\sec\theta_{p+1} + \tan\theta_{p+1} = (\tan\theta_1 + \sec\theta_1)^{p+1}$$

(மேல் நிறுவப்பட்ட முடிவின்படி)

$\therefore$ $n = p+1$ உண்மையாகும்

$\therefore$ n எல்லா நேர்முழு எண்களுக்கும் முடிவு உண்மையாகும்)

(ஆ) $S_n = 1 + r + r^2, \cdots \cdots r^{n-2} + r^{n-1}$ ——(1) என்க

$\therefore rS_n = r + r^2 + r^3 + \cdots \cdots r^{n-1} + r^n$ ——(2)

(1) − (2) $(1-r)S_n = 1 - r^n$

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$r = 1$ எனின் $S_n = 1 + 1 \cdots \cdots + 1 = n$

$-1 < r < 1$ ஆகும் போது

$n \to \infty$ ஆக $r^n/_{1-r} \longrightarrow 0$ ஆகும்

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$ ஆகும்

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} r^k$ இந்த பெறுமானம் உண்டு

$$S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} - \sum_{k=0}^{n-1} 1/10^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^n}\left[\frac{1}{1 - 1/10}\right]$$

$$= 10/9 \cdot \frac{1}{10^n} = 1/9 \cdot 10^{n-1}$$

$$\frac{1}{9 \cdot 10^{n-1}} < 10^{-20} \Rightarrow 9 \cdot 10^{n-1} > 10^{20}$$

$\log_{10} 9 + n - 1 > 20 \Rightarrow n - 1 > 20 - \log_{10} 9$

$n > 21 - \log_{10} 9$ ஆகும். ஆனால் $0 < \log_{10} 9 < 1$

$\therefore$ n இன் மிகச்சிறிய பெறுமானம் 21.

(2) z உம் w உம் சிக்கலெண்களாகும். $\bar{z}$ உம் $\bar{w}$ உம் இவற்றின் சிக்கலெண் உடன் புணரிகளைக் குறிக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $z\bar{w} - \bar{z}w = 2Re(z\bar{w})$

(2) $(z+w)(\overline{z+w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + 2Re(z\bar{w})$

(3) $2|Re z||Im z| \leq |z|^2$.

(4) $|z| \leq |Re z| + |Im z| \leq \sqrt{2}\,|z|$

(5) $|z+w| \leq |z| + |w|$

இங்கே $Re z$ உம் $Im z$ உம் z இன் மெய்ப்பகுதியையும் கற்பனைப் பகுதியையும் முறையே குறிக்கின்றன. கேத்திர கணித நிறுவல்கள் ஏற்றுக் கொள்ளப்படமாட்டா.

(3) (1) α யாதும் ஒரு சிக்கல் எண் என்க.

$\therefore \alpha = x + iy$ எனலாம்

$\bar{\alpha} = x - iy$ ஆகும்

$\alpha + \bar{\alpha} = 2x = 2Re\,\alpha$

$\alpha = z\bar{w}$ என்க

$\bar{\alpha} = (\overline{z\bar{w}}) = \bar{z}w$

$\therefore z\bar{w} + \bar{z}w = 2Re(z\bar{w})$.

(2) $(z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$

$= z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}$

$= z\bar{z} + w\bar{w} + 2Re(z\bar{w})$

[(1) இன்படி.]

(3) $z = x + iy$ என்க $\therefore x = Re(z)$, $y = Im(z)$ ஆகும்

$\therefore |x|, |y|$ என்பன மெய்யெண்கள் ஆகும்.

$\therefore (|x| - |y|)^2 \geq 0$

$|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \geq 0$

$2|x||y| \leq |x|^2 + |y|^2$

$2|Re z||Im z| \leq |Re z|^2 + |Im z|^2$

$2|Re z||Im z| \leq |z|^2$

(4) $\left(|Re z| + |Im z|\right)^2 = \left(|x| + |y|\right)^2$

$$= |x|^2+|y|^2 + 2|x||y|$$

$$\leq |x|^2+|y|^2 + |x|^2+|y|^2 \quad (3 \text{ இன்படி})$$

$$\leq 2(|x|^2+|y|^2)$$

$$\leq 2|z|^2$$

$$\left(|Re z| + |Im z|\right)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$\geq |x|^2+|y|^2$$

$$\geq |z|^2$$

①, ② $\Rightarrow |z| \leq \left(|Re z| + |Im z|\right) \leq \sqrt{2}|z|$

(5) (2)ல் இருந்து.

$$(z+w)(\overline{z+w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + 2Re(z\bar{w})$$

$$\leq z\bar{z} + w\bar{w} + 2|z\bar{w}|$$

$$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$$

$$\leq (|z|+|w|)^2$$

~~ஆனால்~~ $(z+w)(z+w) = (z+w)^2$ ஆகும்

$$|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$$

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

(3) (1) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 \equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)$ $(b-c)(b^2+2bc+c^2) + (c-a)(c^2$

எனக் காட்டுக.

$x+y+z=0$, $ax+by+cz=0$,

$x^3+y^3+z^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$ என்னவும் உண்மை x, y, z ஆகியன மெய்மாறிகள் எனின், மெய் a, b, c ஆகியவற்றுக்கு $a \neq b \neq c$ என அமையின் $x/_{b-c} = y/_{c-a} = z/_{a-b} = 1$ எனக் காட்டுக.

(2) $f(x) = px^4+qx^3+rx^2+sx+t$

$f(x)$ என்பது x^2+a ஆல் வகுக்கப்பட்டால் மீதி $(s-qa)x + pa^2 - ra + t$ எனக்காட்டுக.

α உம், $-\alpha$ உம் $f(x)=0$ என்பதன் மூலங்கள் எனின் $ps^2+qrs+q^2t=0$ தொடர்பை p, q, r, s, t என்பன திருப்தியாக்கும் என நிறுவுக.

(3) (1) $E = (b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

E ஆனது a, b, c என்ற மூன்று மாறி கொண்ட சமச்சீரான 3ம் படியில் உள்ள கோவையாகும்.

a மாறியாகவும் b, c மாறிலியாகவும் கருதுக

$f(a) = (b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ எனின் இது மாறி a இல் உள்ள ஒரு சார்பு ஆகும்

$f(b)=0$

$(a-b)$ ஆனது E இன் ஒரு காரணியாகும். $(b-c),(c-a)$ என்பன E இன் மற்றைய காரணிகள் ஆகும்

$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 = \lambda(b-c)(c-a)(a-b)$ என எழுதலாம்

a^2b இன் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம் $\lambda=3$ ஆகும் or $\{a=1, b=0, c=-1$ ஐப் பிரதியிட $\lambda=3\}$

$\therefore (b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$ ஆகும்

$x+y+z=0 \quad \text{—(1)}$

$ax+by+cz=0 \quad \text{—(2)}$

$x^3+y^3+z^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b) \quad \text{—(3)}$

$(1)\times a \Rightarrow \quad ax+ay+az=0 \quad \text{—(4)}$

$(2) \Rightarrow \quad ax+by+cz=0$

$(4)-(2) \Rightarrow \quad -y(b-a)+z(a-c)=0$

$$y(b-a) = z(a-c)$$

$$y/_{a-c} = z/_{b-a} \text{ ஆகும்}$$

இதேபோல் $y/_{a-c} = x/_{c-b}$ எனக்காட்டலாம்

$\therefore x/_{c-b} = y/_{a-c} = z/_{b-a} = k$ என்க —(5)

(5) ஐ (3) இல் பிரதியிட

$$k^3\{(c-b)^3+(a-c)^3+(b-a)^3\} = 3(b-c)(c-a)(a-b)$$

(1) பகுதியில் இருந்து

$$k^3\times(-)3\{(b-c)(c-a)(a-b)\} = 3(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$-k^3=-1 \quad \therefore k=1$$

$$x/_{b-c} = y/_{c-a} = z/_{a-b} = 1 \text{ ஆகும்}$$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & px^2+qx+(r-pa) \\ \hline x^2+a & px^4+qx^3+rx^2+sx+t \\ & px^4+pax^2 \\ \hline & qx^3-pax^2+rx^2+sx+t \\ & qx^3-qax \\ \hline & (r-pa)x^2+(s-qa)x+t \\ & (r-pa)x^2+a(r-pa) \\ \hline & (s-qa)x+t-a(r-pa) \end{array}$$

மீதி $(s-qa)x+t+pa^2-ra$ ஆகும்

$\alpha, -\alpha$ என்பன $f(x)$ இன் மூலங்கள் ஆதலால்

$(x-\alpha)(x+\alpha)$ என்பன $f(x)$ ஐ பிரிக்கும்.

$(x^2 - \alpha^2)$ ஆனது $f(x)$ ஐ வகுக்கும் போது மீதி பூச்சியம் ஆகும்

$[s - q(-\alpha^2)]x + p(-\alpha^2)^2 - r(-\alpha^2) + t = 0$ [இருபடிக்கோவையாக இருந்து]

x இன் குணகங்களை சமப்படுத்த

$s + q\alpha^2 = 0$ ——(1)

$p\alpha^4 + r\alpha^2 + t = 0$ ——(2)

~~$q \neq 0$ ஆகும்போது (1) ஐ (2) இல் பிரதியிட~~

$$p(-s/q)^2 + r(-s/q) + t = 0$$

$\Rightarrow ps^2 - qrs + q^2t = 0$ ஆகும்

$q = 0$ எனின் $s = 0$ ஆகும்

இப்போதும் $ps^2 - qrs + q^2t = 0$

$0 - 0 + 0 = 0$

$0 = 0$

முடிவு உண்மை ஆகும்.

(4) $x^3 - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை $\omega = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$ என்பது திருப்திப்படுத்தும் எனக் காட்டி பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக

(i) ω^r உம் ω^{2r} உம் $x^3 - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை r ஆனது 3 இன் மடங்கல்லாத முழுவெண்ணுக்கும்

(ii) $1 + \omega^r + \omega^{2r} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை r ஆனது 3 இன் மடங்கல்லாத நேர் முழு எண்ணுக்கும் திருப்தி செய்யும் எனக்காட்டுக.

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ எனின்

$f(1), f(\omega), f(\omega^2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$\{f(x)\}^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{3n}x^{3n}$ என்று தரப்படின் $c_0 + c_3 + c_6 + \cdots + c_{3n} = \frac{1}{3}(4^n + 2)$

$c_1 + c_4 + c_7 + \cdots + c_{3n-2} = \frac{1}{3}(4^n - 1) = c_2 + c_5 + c_8 + \cdots + c_{3n-1}$ எனக்காட்டுக

(4) $\omega^3 = (\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3)^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$

$\Rightarrow \omega$ ஆனது $x^3 - 1 = 0$ என்பதை திருப்தி செய்யும்

(i) r ஒரு நேர் முழுவெண் எனின்

$\omega^r = \cos \frac{2r\pi}{3} + i \sin \frac{2r\pi}{3}$

$\omega^{2r} = \cos 4r\pi/3 + i \sin 4r\pi/3$

$(\omega^{2r})^3 = \omega^{6r} = (\omega^3)^{2r} = 1$

$(\omega^r)^3 = \omega^{3r} = (\omega^3)^r = 1$

$\therefore \omega^r, \omega^{2r}$ என்பன 1 இன் சிக்கல் கனமூலங்கள் ஆகும்

$\therefore \omega^r = \omega \quad \omega^{2r} = \omega^2$ ஆக கிடைக்க வேண்டும்

or $\omega^r = \omega^2 \quad \omega^{2r} = \omega$ ஆகக் கிடைக்க வேண்டும்

$1 + \omega^r + \omega^{2r} = 1 + \omega + \omega^2 = 1 + \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3 + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin 4\pi/3$

$1+\omega^r+\omega^{2r} = 1+2\cos 2\pi/3$

(ii) $f(x) = 1+x+x^2+x^3$ எனக் (கருது)

$f(1) = 4$, $f(\omega) = 1+\omega+\omega^2+\omega^3 = \omega^3 = 1$

$f(\omega)^2 = \omega^6 = (\omega^3)^2 = 1$

$\{f(x)\}^n = c_0+c_1x+c_2x^2+ \cdots c_{3n}x^{3n}$ —— (A) (கருது)

(A) இல் $x=1$ ஐ பிரதியிட

$4^n = c_0+c_1+c_2+ \cdots + c_{3n}$ —— (B)

(A) இல் $x=\omega$ ஐ பிரதியிட

$1 = c_0+c_1\omega+c_2\omega^2+ \cdots + c_{3n}\omega^{3n}$ —— (C)

(A) இல் $x=\omega^2$ ஐ பிரதியிட

$1 = c_0+c_1\omega^2+c_2\omega^4+ \cdots c_{3n}\omega^{6n}$ —— (D)

$(B)+(C)+(D) \Rightarrow 4^n+2 = 3c_0+c_1(1+\omega+\omega^2)+c_2(1+\omega^2+\omega^4)+$
$+c_3(1+\omega^3+\omega^6) \cdots + c_{3n}(1+\omega^{3n}+\omega^{6n})$

(i), (ii) முடிவுகளை பிரயோகிக்க

$4^n+2 = 3c_0+3c_3 \cdots 3c_{3n}$

$c_0+c_3+ \cdots c_{3n} = \frac{1}{3}(4^n+2)$

$(B)+\omega^2(C)+\omega(D) \Rightarrow c_0(1+\omega^2+\omega)+c_1(1+\omega^3+\omega^6)+\cdots$

(i), (ii) முடிவுகளை பிரயோகிக்க

$c_1+c_4+ \cdots c_{3n-2} = \frac{1}{3}(4^n-1)$

$B+\omega(C)+\omega^2(D) \Rightarrow 4^n+\omega+\omega^2 = 3(c_2+c_5+\cdots+c_{3n-1})$

$\therefore c_2+c_5+ \cdots + c_{3n-1} = \frac{1}{3}(4^n-1)$

(E) (i) நேர் முழு எண்களுக்குரிய தொகுப்புத்தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக. p உம் n உம் நேர் முழு ~~எண்களின்~~

p^n என்பது $(1+p)^{p^{n-1}}-1$ என்பதை வகுக்கும் என நிறுவுக

[$(1+p)^{p^n} = (1+p)^{p^{n-1}} \cdot (1+p)^{p^{n-1}} \cdots (1+p)^{p^{n-1}}$; p காரணிகள் என்பதை உதவியாகக் கொள்ளலாம்)

(ii) PREFOSSESSED என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் ஒரேமுறைக்கு நான்கு எழுத்துக்கள் கொண்டு எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் அமைக்கலாம்.

(5) (i) தொகுத்தறிவின் தேற்றம் கூறவும் நிறுவவும்

p உம், n உம் நேர் முழுஎண்கள் எனின்

p^n என்பது $(1+p)^{p^{n-1}}-1$ என்பதை வகுக்கும் என நிறுவுக

$n=1$ எனக்க $(1+p)^{p^{n-1}}-1 = (1+p)-1 = p$

$\therefore$ $n=1$ க்கு முடிவு உண்மையாகும்

$n = m$ இற்கு முடிபு உண்மை எனக் கொள்க.

அ-து $(1+p)^{p^{m-1}} - 1$ ஆனது p^m ஆல் பிரிபடும் எனக.

$\therefore (1+p)^{p^{m-1}} = 1 + kp^m$ ஆகும். இங்கு k ஒரு நேர்முழு எண்

தரப்பட்ட உதவியின்படி

$$(1+p)^{p^m} = (1+kp^m)(1+kp^m)\cdots\cdots(1+kp^m) = (1+kp^m)^p$$

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி

$$(1+p)^{p^m} = 1 + pkp^m + {}^pC_2 k^2 p^{2m} + \cdots\cdots + k^p p^{mp}$$

${}^pC_2, {}^pC_3, \cdots\cdots$ நேர்முழு எண்கள் ஆகும்.

$(1+p)^{p^m} - 1$ ஆனது p^{m+1} ஆல் பிரிபடும்

$\therefore n = m+1$ இற்கு மேற்படி தேற்றம் உண்மையாகும்

n இன் எல்லா நேர்முழு எண்களுக்கும் முடிபு உண்மையாகும்

(11) P-2, R-1, E-3, O-1, S-4, D-1
எழுத்துக்கள் உண்டு
இவற்றில் இருந்து ஒரு தடவையில் 4 எழுத்துக்கள் கூட
தொகுதியில் இருக்கக் கூடியவை

(1) 4 எழுத்துக்களும் ஒரே இனம்
(2) 3 ஒரே இன எழுத்துக்களும் ஒரு வேறு இன எழுத்தும்
(3) இனத்தில் 2 எழுத்துக்களும் வேறு ஒரு இனத்தில் 2 எழுத்துக்களும்
(4) 2 ஒன்றான எழுத்துக்களும் 2 வேறான எழுத்துக்களும்.
(5) எல்லாம் வேறுபட்ட எழுத்துக்கள்

(1)ம் முறையில் 1 கூட்டம் வரும்
(2)ம் முறையில் ${}^2C_1 \times {}^5C_1 = 10$ கூட்டங்கள் வரும்
(3)ம் முறையில் ${}^3C_2 = 3$ கூட்டங்கள் வரும்
(4)ம் முறையில் ${}^3C_1 \times {}^5C_2 = 30$ கூட்டங்கள் வரும்
(5)ம் முறையில் ${}^6C_4 = 15$ கூட்டங்கள் வரும்

இனி வரிசைகளின் தொகையைக் கணிப்போம்
(1)ம் முறையில் மொத்த வரிசைகளின் தொகை = 1
(2)ம் முறையில் வரும் மொத்த வரிசைகளின் தொகை $= 10 \times \frac{4!}{3!} = 40$
(3)ம் முறையில் மொத்த வரிசைகளின் தொகை $= \frac{3 \times 4!}{2! \times 2!} = 18$
(4)ம் முறையில் மொத்த வரிசைகளின் தொகை $= 30 \times \frac{4!}{2!} = 360$
(5)ம் முறையில் மொத்த வரிசைகளின் தொகை $= 15 \times 4! = 360$

$\therefore$ தரப்பட்ட சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் ஒரு முறைக்கு நான்கு எழுத்துக்கள் எடுக்கும் வரிசை மாற்றங்களின் மொத்த

எண்ணிக்கை $= 1 + 40 + 18 + 360 + 360$

$= 779$ ஆகும்.

(6) (i) f உம் g உம் x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளாயின்.

$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$ எனக் காட்டுக.

x குறித்து வகையிடுக

(அ) $e^{x^2}\sin 2x$ (ஆ) $\sqrt{x}\sin^{-1}(2x-1)$

(இ) $\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}\right)\log|\sec x + \tan x|$

(ii) α உம் β உம் ஒருமைகளாக இருக்கும் போது

$(\alpha+\beta x)e^{y/x} = x$ ஆயின்

$x^3 d^2y/dx^2 = (x\, dy/dx - y)^2$ எனக் காட்டுக.

(6) x இல் ஒரு சிறிய அதிகரிப்பு δx ஏற்பட்டதன் காரணமாக f, g இல் ஏற்பட்ட சிறிய அதிகரிப்புகள் $\delta f, \delta g$ என்க.

$$\frac{d(fg)}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Limit}} \frac{(f+\delta f)(g+\delta g) - fg}{\delta x}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{Limit}} \left\{ f\frac{\delta g}{\delta x} + g\frac{\delta f}{\delta x} + \delta f\frac{\delta g}{\delta x} \right\}$$

$$= f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx} \text{ ஏனெனில் } \left(\underset{\delta x \to 0}{\delta f\frac{\delta g}{\delta x}} \to 0 \;\; \because \frac{dg}{dx} \neq 0\right)$$

(அ) $\frac{d}{dx}\{e^{x^2}\sin 2x\} = \sin 2x\frac{d(e^{x^2})}{dx} + e^{x^2}\frac{d}{dx}(\sin 2x)$

$$= 2xe^{x^2}\sin 2x + 2e^{x^2}\cos 2x$$

$$= 2e^{x^2}(x\sin 2x + \cos 2x)$$

(ஆ) $\frac{d}{dx}\{\sqrt{x}\sin^{-1}(2x-1)\}$

$$= \sqrt{x}\frac{d\{\sin^{-1}(2x-1)\}}{dx} + \sin^{-1}(2x-1)\frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$= \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 + \frac{\sin^{-1}(2x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sin^{-1}(2x-1)}{2\sqrt{x}}$$

(இ) $y = \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}\right)\log|\sec x + \tan x|$ எனின்.

$$y = (\sec x + \tan x)^2 \log|\sec x + \tan x|$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sec x + \tan x)^2\frac{d}{dx}\{\log|\sec x + \tan x|\} + \log|\sec x + \tan x|\frac{d}{dx}\{(\sec x + \tan x)^2\}$$

$$= (\sec x + \tan x)^2 \sec x + 2(\sec x + \tan x)^2 \sec x \cdot \log|\sec x + \tan x|$$

(ii) $(\alpha+\beta x)^{y/x} = x$

$\therefore e^{y/x} = x/(\alpha+\beta x)$ ஆகும்

$\Rightarrow y = x\{\log x - \log(\alpha+\beta x)\}$ ———(1)

(1) ஐ இடைக்கல் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \log x - \log(\alpha+\beta x) + x\left\{\frac{1}{x} - \frac{\beta}{\alpha+\beta x}\right\}$$

$$= \log x - \log(\alpha+\beta x) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta x}$$

$$= \frac{y}{x} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta x}$$

மீண்டும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta x)^2}$$

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{dy}{dx} - xy - \frac{\alpha x^2}{\alpha+\beta x}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta x}\right)$$

$$= x^2\frac{dy}{dx} - xy - x^2\left(\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{y}{x}+\frac{dy}{dx}\right)^2$$

(7) (i) மதிப்பிடுக $\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$

(ii) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ என்பதைப் பகுதிப் பின்னங்களில் தருக.

$$\frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2}$$

எனக் காட்டுக.

மதிப்பிடுக $\displaystyle\int_2^k \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2}\,dx \quad (k>2)$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2}\,dx$ என்பது ஒருங்குவது என உய்த்தறிக.

(7) (i) $$\int_0^1 x\tan^{-1}x = \int_0^1 (\tan^{-1}x)\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \tan^{-1}x\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(ii) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ எனக் கொள்வோம்

$$1 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$x=1$ ஐ பிரதியிட $A = 1/2$

குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம் $A+B=0$, $C-B=0$

$\therefore B = C = -1/2$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right\}$$

$$\therefore \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{x+1}{2(x-1)(x^2+1)} + \frac{1}{4}\,\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\,\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\,\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\,\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_2^k \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = \left[-\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}\log|1+x^2| - \frac{1}{4(x^2+1)}\right]_2^k$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{k^2+1}{k^2-2k+1}\right) - \frac{1}{4(k-1)} + \frac{1}{4}\tan^{-1}k - \frac{1}{4(k^2+1)}$$

$$- \frac{1}{4}\log\frac{5}{(2-1)^2} + \frac{1}{4(2-1)} - \frac{1}{4}\tan^{-1}(2) + \frac{1}{20}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{dx}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = 0 - 0 + \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{4}\log 5 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tan^{-1}2 + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{6}{20} - \frac{1}{4}\log 5 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\tan^{-1}(2)$$

(8) (i) $y = \frac{b}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}}{x+b}\right)$ எனின்

$(b^3 - 8x^3)\frac{dy}{dx} = b^2(b-2x)$ என நிறுவுக.
x இன் வலு நான்கிற்கு மேற்பட்டவற்றைக் கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்தால் $b \neq 0$ எனக் கொண்டு $\frac{b}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(x\sqrt{3}/x+b\right)$ என்பதன் மக்கிலோரின் விரிவு $x - \frac{1}{b}x^2 + \frac{2}{b^3}x^4$ எனக் காட்டுக.

(ii) விகிதமுறுகின்ற சுட்டிகளுக்கு உரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை உபயோகித்து 1003 இன் கனமூலத்தை ஐந்து தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(iii) $y = 1+2x+x^3$ என்னும் வளையியில் $x = 1, 2, 3, 4, 5$ ஆகியவற்றிலுள்ள நிலைக்குத்துக் கோடுகளைக் கொண்டு சிம்சனின் நெறியை உபயோகித்தும் $\int_1^5 (1+2x+x^3)\,dx$ என்பதை மதிப்பிடுக.
இப்பெறுமானம் தொகையீட்டின் பெறுமானத்துக்குச் சமன் எனக் காட்டுக

(இ) $y = \frac{b}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(x\sqrt{3}/x+b \right)$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{\sqrt{3}} \frac{1}{1+3x^2/(x+b)^2} \times \sqrt{3} \left\{ \frac{(x+b)-x}{(x+b)^2} \right\}$$

$$= \frac{b^2}{4x^2+2bx+b^2}$$

அ-து $(b^2+2bx+4x^2)\frac{dy}{dx} = b^2$

$(b-2x)$ ஆல் இருபக்கமும் பெருக்க.

$(b^3-8x^3)\,dy/dx = b^2(b-2x)$ —— (A)

மீண்டும் இருபக்கமும் x ஐக் குறித்து வகையிட

$24x^2\, dy/dx + (b^3-8x^3)\, d^2y/dx^2 = -2b^2$ —— (B)

மீண்டும் x ஐக் குறித்து இருபக்கமும் வகையிட

$-48x\frac{dy}{dx} - 24x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (b^3-8x^3)\frac{d^3y}{dx^3} - 24x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ —(C).

x ஐக் குறித்து வகையிட.

$-48x\cdot dy/dx - 48x\, d^2y/dx^2 - 48x\, d^2y/dx^2 - 24x^2 d^3y/dx^3$
$+(b^3-8x^3)\,d^4y/dx^4 - 24x^3\, d^3y/dx^3 - 48\, d^2y/dx^2$
$- 24x^2\, d^3y/dx^3 = 0$

A, B, C, D சமன்பாடுகளில் x=0 ஆக்குக

$\left[dy/dx \right]_{x=0} = 1 \quad \left[d^2y/dx^2 \right]_{x=0} = -2/b$

$\left\{ d^3y/dx^3 \right\}_{x=0} = 0 \qquad \left[d^4y/dx^4 \right]_{x=0} = 48/b^3$

$\therefore y = \frac{b}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(x\sqrt{3}/x+b \right)$ மக்லோரின் படி தொடரின் விரிவு

$$= 0 + x\cdot 1 + \frac{x^2}{2!}(-2/b) + \frac{x^3}{3!}\cdot 0 + \frac{x^4}{4!}(48/b^3)$$

$$= x - \frac{1}{b}x^2 + \frac{2}{b^3}x^4$$

(ii) $1003 = 1000 + 3 = 1000(1 + 3/1000)$

$(1003)^{1/3} = \{1000(1+3/1000)\}^{1/3}$

$= 10(1+3/1000)^{1/3}$

$= 10(1+3/10^3)^{1/3}$

$= 10\left[(1 + (1/3)\, 3/10^3 + (1/3)(9/10^6) - - - \right]$

$= 10\{1 + 1/10^3 + 1/3(1/3-1)\, 1/2\ 9/10^6 - - - \}$

$= 10(1 + 0.001 - 0.000001 + - - - \}$

$= 10(1 + 0.000999 = 10.00999$ //

(iii) $y_i = y(i)$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$

இங்கு $y(x) = 1 + 2x + x^3$

$y_1 = 4$, $y_2 = 13$, $y_3 = 34$, $y_4 = 73$, $y_5 = 136$

சிம்சனின் விதிப்படி

$$\int_0^1 (1+2x+x^3)\,dx = \frac{1}{3}\{y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_5\}$$

$$= \frac{1}{3}(4 + 52 + 68 + 292 + 136)$$

$$= 184$$

$$\int_1^5 (1+2x+x^3)\,dx = \left[x + x^2 + \frac{x^4}{4}\right]_1^5$$

$$= \left(5 + 25 + \frac{625}{4}\right) - \frac{9}{4}$$

$$= 184$$

சிம்சனின் தொகையீட்டுப் பெறுமானம்.

(9) வகையிடத்தக்க சார்பொன்றின் உயர்வுப் பெறுமானத்தையும் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் (இருப்பின்) அதன் முதற் பெறுதியைக் கொண்டு தீர்மானிக்கும் வகையை விளக்குக.

$x^3/1+x^4$ என்பதன் பெறுதியை மாத்திரம் கொண்டு இதன் உயர்வு, இழிவு பெறுமானங்களைக் காண்க. இந்த வளைவின் தெளிவான வரைபடம் வரைக.

(ii) $x = e^\theta \cos\theta$, $y = e^\theta \sin\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளைவி குறிக்கப்படுகின்றது. P என்னும் புள்ளியில் பரமானம் θ ஆகவுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

வளைவின் ஊடாக ஒரு மாறும் கோடு OP இற்கும் P இலுள்ள தொடலிக்கும் இடையில் உள்ள கோணம் மாறிலியாக அமையும் எனக் காட்டுக.
(O என்பது உற்பத்தி, [illegible]).

(9) (i) $y = x^3/1+x^4$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^2(x^4-3)}{(1+x^4)^2}$

உயர்வு இழிவுப் புள்ளிகளில் $dy/dx = 0$ ஆகும்

$dy/dx = 0 \Rightarrow x = 0, \sqrt[4]{3}, -\sqrt[4]{3}$ ஆகும்

$\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} x = \sqrt[4]{3} \\ y = 3^{3/4}/4 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} x = -\sqrt[4]{3} \\ y = -3^{3/4}/4 \end{matrix}\right\}$.

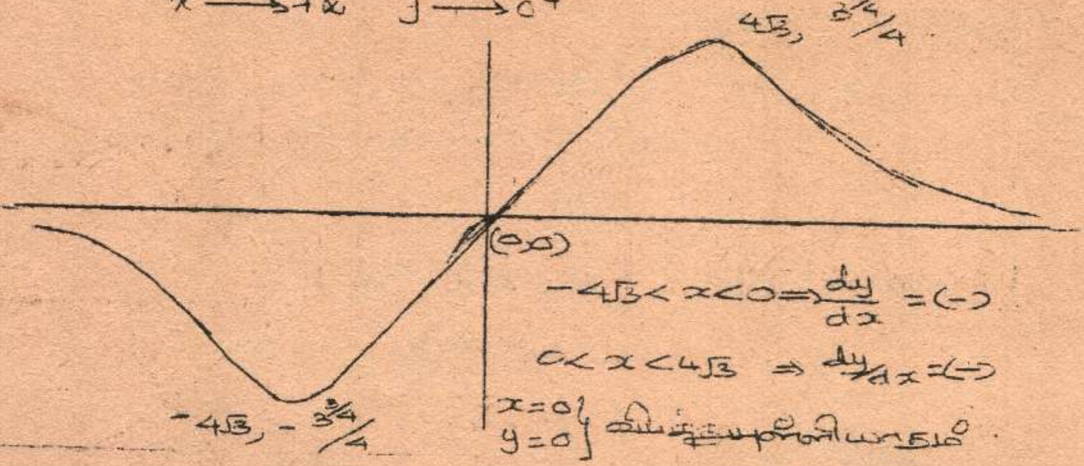
என்னும் புள்ளிகள் திரும்பற் புள்ளிகள் ஆகும்

$-\infty < x < -\sqrt[4]{3}$ $dy/dx = (-)$

$-\sqrt[4]{3} < x < 0$ $dy/dx = (+)$ } இழிவுப் புள்ளி

$0 < x < 4\sqrt{3}$ $\quad dy/dx = (+)$
$4\sqrt{3} < x < +\infty$ $\quad dy/dx = (-)$ } உயர்வுப்புள்ளி

$x \longrightarrow -\infty \quad y \longrightarrow 0^-$
$x \longrightarrow +\infty \quad y \longrightarrow 0^+$



$-4\sqrt{3} < x < 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (-)$

$0 < x < 4\sqrt{3} \Rightarrow dy/dx = (-)$

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ விபத்திப்புள்ளியாகும்.

(11) $x = e^{\theta}\cos\theta \quad y = e^{\theta}\sin\theta \quad \frac{dx}{d\theta} = e^{\theta}(-\sin\theta + \cos\theta)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \qquad dy/d\theta = e^{\theta}(\cos\theta + \sin\theta)$

$= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \tan(\pi/4 + \theta)$

P இலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$y - e^{\theta}\sin\theta = \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\right)(x - e^{\theta}\cos\theta)$

~~P யிலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் = tan(π/4+θ)~~

P யிலுள்ள தொடலி OX அச்சுடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனவும் OP ஆனது OX அச்சுடன் ஆக்கும் கோணம் ϕ எனவும் கொள்க

$\tan\phi = \tan(\pi/4 + \theta) \Rightarrow \phi = n\pi + \pi/4 + \theta$

இங்கு $n = 0, \pm 1, \pm 2 ---$

$\tan\phi = \frac{e^{\theta}\sin\theta}{e^{\theta}\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \tan\phi = \tan\theta$

$\therefore \phi = m\pi + \theta$ இங்கு $m = 0, \pm 1, \pm 2 ----$

$\therefore \phi \sim \theta = (n-m)\pi + \pi/4 \Rightarrow \phi \sim \theta = \pi/4$.

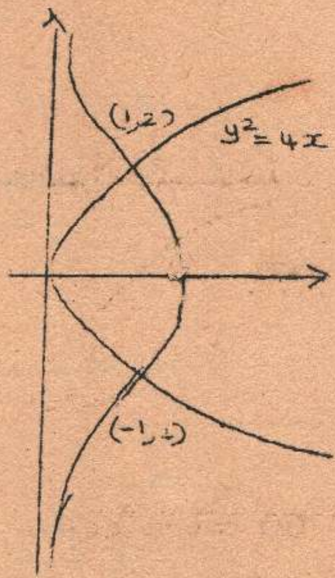
∴ P இல் தொடலிக்கும் OP க்குமிடைப்பட்ட கோணம் ஒரு மாறிலியாகும்.

(10) $y^2 = 4x$, $\quad y^2 = 8/x - 4$ என்னும் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைக. இந்த வளையிகளுடைய வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
வளையிகள் இரண்டும் வெட்டுப்புள்ளியில் செங்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

V என்னும் கனவளவு $128\pi\int_0^2 \frac{dy}{(y^2+4)^2} - \frac{4\pi}{5}$. என்னும் கோவையால் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக
$y = 2\tan\theta$ பிரதியீடு செய்து $V = \frac{2\pi}{5}(8+5\pi)$ எனக் காட்டுக.

(10) $y^2 = 4x$, $y^2 = 8/x - 4$

$4x = 8/x - 4 \Rightarrow x = 1 \text{ or } -2.$



$y^2 = 8/x - 4$ இனை முதலில் வரைபுபடுத்துவோம்.

$2y\,dy/dx = -8/x^2 \qquad x = 2,\ y = 0$

$x \to 0^+ \quad y \to \pm\infty \quad \text{and } \frac{dy}{dx} = \infty$

வரைபு படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது போன்று அமையும்

$$S = 2\left\{\int_0^2 \frac{8}{y^2+4}dy - \int_0^2 \frac{y^2}{4}dy\right\}$$

$$= 2\left\{\left[4\tan^{-1}(y/2)\right]_0^2 - \left[y^3/12\right]_0^2\right\}$$

$= 2(\pi - 2/3)$ சதுர அலகுகள்

$$V = 2\left\{\pi\int_0^2 (8/y^2+4)^2 dy - \pi\int_0^2 (y^2/4)^2 dy\right\}$$

$$= 128\pi\int_0^2 \frac{1}{(y^2+4)^2}dy - \frac{2\pi}{5}\left[\frac{y^5}{8}\right]_0^2$$

$$V = 128\pi\int_0^2 \frac{dy}{(y^2+4)^2} - \frac{4\pi}{5}$$

$y = 2\tan\theta \Rightarrow dy = 2\sec^2\theta\, d\theta$

$y = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$y = 2 \Rightarrow \theta = \pi/4$

$$V = 128\pi\int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{16(\tan^2\theta+1)^2} - \frac{4\pi}{5}$$

$$= 16\pi\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, d\theta - 4\pi/5$$

$$= 8\pi\int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\, d\theta - 4\pi/5$$

$$= 8\pi\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]_0^{\pi/4} - 4\pi/5$$

$V = 2\pi/5\,[8 + 5\pi]$ க. அலகுகள்.

$$\sin\beta = \frac{VM}{AV} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4y^2-x^2}}{y}$$

$$BN = AB\sin\beta = \frac{x\sqrt{4y^2-x^2}}{2y} = DN$$

(சமச்சீரின் படி)

$$\cos\alpha = \frac{-BD^2+BN^2+DN^2}{2\,BN\,DN} = \frac{-2x^2 - x^2(4y^2-x^2)/2y^2}{x^2(4y^2-x^2)/2y^2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left[x^2/4y^2-x^2\right] //$$

(iii) h என்பது A இலிருந்து முகம் VAB யின் செங்குத்துயரம் என்க.

∴ கூம்பகம் VABCD இன் கனவளவு $= \frac{1}{3}(VO) \times ABCD$ இன் பரப்பு

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2y^2-x^2}{2}}\cdot x^2$$

VABC இன் கனவளவு $= \frac{1}{3}h \times$ முகம் BCV யின் பரப்பு

$$= \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{4y^2-x^2}{2}}$$

∴ கூம்பகம் VABCD யின் கனவளவு

$= 2 \times$ VABC இன் கனவளவு.

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2y^2-x^2}{2}}\cdot x^2 = \frac{2h}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{\frac{4y^2-x^2}{2}}$$

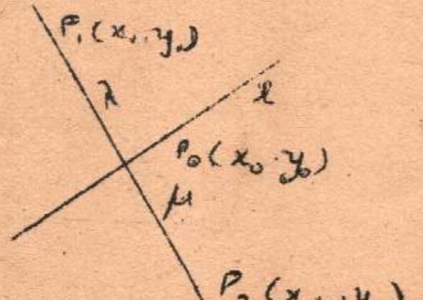
$$h = x\sqrt{\frac{2(2y^2-x^2)}{4y^2-x^2}} //$$

(3)

$ax+by+c=0$ என்பது l என்னும் கோட்டுக்குரிய சமன்பாடு ஆகும். $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ஆகியவை l இல் இல்லாத வெவ்வேறு புள்ளிகளாகும். P_1P_2 ஐ l பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க. l எனும் கோட்டின் எதிர்ப்பக்கங்களில் P_1 உம் P_2 உம் இருப்பதற்குரிய நிபந்தனையை உய்த்தறிக.

புள்ளிகள் $A \equiv (-1,-1)$ உம் $C \equiv (7,15)$ உம் ABCD எனும் இணைகரத்தின் எதிர் உச்சிகளாகும். இணைகரத்தின் மூலைவிட்டம் ஒன்றின் நீளம் $2\sqrt{17}$. இது x அச்சின் நேர்த்திசையுடன் $\tan^{-1}(4)$ எனும் கோணத்தை அமைக்கிறது. B உம் D உம் ஆகிய உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இணைகரத்தின் ABC, ADC ஆகிய கோணங்களின் உள்ளிரு கூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

விடை



$P_0(x_0, y_0)$ என்பது l எனும் கோடும் P_1P_2 உம் வெட்டும் புள்ளி என்க.

$\frac{P_1P_0}{P_0P_2} = \frac{\lambda}{\mu}$ என்க

எனவே $x_0 = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda+\mu}$, $y_0 = \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda+\mu}$

$$ax_0 + by_0 + c = a\left(\frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda+\mu}\right) + b\left(\frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda+\mu}\right) + c = 0$$

உரிமை பதிப்பகத்தாருக்குரியது.

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

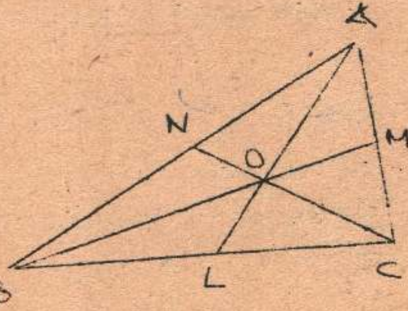
36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூயகணிதம் 2, க.பொ.த (உயர்தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட் 1984.

---

(1) (i) O என்பது முக்கோணி ABC இனுள் அமைந்துள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி எனில் AO, BO, CO என்பன BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை முறையே L, M, N ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன. $AO/AL + BO/BM + CO/CN = 2$ என்று நிறுவுக.

(ii) மாறுகின்ற இருபுள்ளிகளான B உம் C உம் முறையே இரு வெவ்வேறான கோடுகளான Ax இலும் Ay இலும் AB+AC மாறிலியாக அமையும் வண்ணம் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. A, B, C இனூடான வட்டம் எப்போதும் கோணம் xAy இனது இருகூறாக்கியில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.



$$\frac{AO}{AL} = \frac{AL-OL}{AL} = 1-\frac{OL}{AL}$$

இவ்வாறு $\dfrac{BO}{BM} = 1-\dfrac{OM}{BM}$

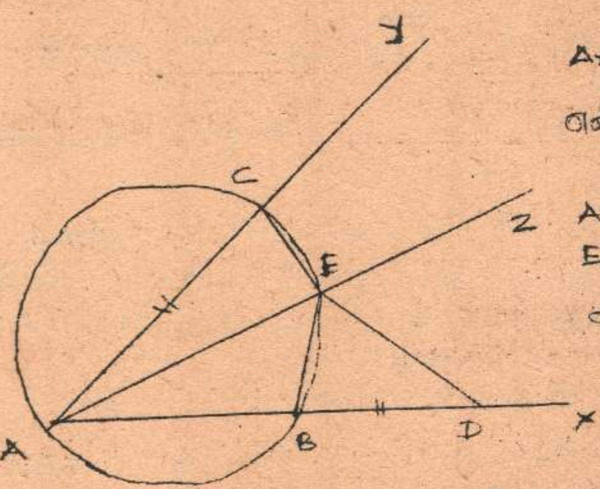
$CO/CN = 1 - ON/CN$

$$\therefore \frac{AO}{AL}+\frac{BO}{BM}+\frac{CO}{CN} = 3-\left(\frac{OL}{AL}+\frac{OM}{BM}+\frac{ON}{CN}\right)$$

ஆனால் $\dfrac{OL}{AL} = \dfrac{\Delta BOC}{\Delta ABC}$, $\dfrac{OM}{BM} = \dfrac{\Delta COA}{\Delta ABC}$, $\dfrac{ON}{CN} = \dfrac{\Delta AOB}{\Delta ABC}$

$$\therefore \frac{AO}{AL}+\frac{BO}{BM}+\frac{CO}{CN} = 3-\frac{\Delta BOC+\Delta COA+\Delta AOB}{\Delta ABC}.$$

$$= 3-\frac{\Delta ABC}{\Delta ABC} = 3-1 = 2$$



Ax மீது D ஒரு நிலையான புள்ளி. எவ்வாறு எனில் $AD = AB+AC$

$\therefore BD = AC$

Az இருகூறாக்கி மீது E ஒரு நிலையான புள்ளி எவ்வாறு எனில்

$B\hat{D}E = E\hat{A}B$

$\therefore EA = ED$

$x\hat{A}y$ ஐ Az இருகூறாக்குவதால்.

$E\hat{A}B = C\hat{A}E$ $\quad\therefore B\hat{D}E = C\hat{A}E$

Δங்கள் BDE, CAE இல் $\quad AC = BD$

$B\hat{T}E = \angle C\hat{A}E$ (நிறுவியது)

$DE = AE$

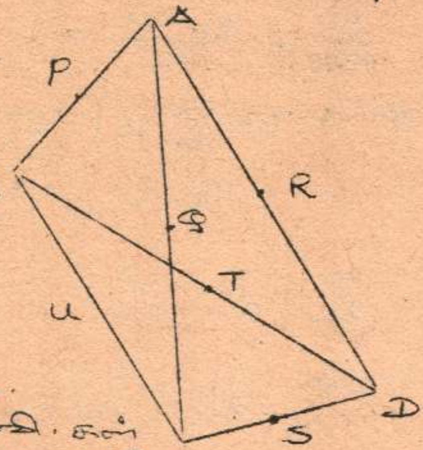
$\triangle BDE \equiv \triangle CDE$

∴ நாற்கரம் ABEC யின் புறக்கோணம் $\angle EBD$ = எதிர்க்கோணம் $\angle ECA$

∴ A, B, E, C என்பன ஒரு வட்டப்புள்ளிகள்

∴ A, B, C இனூடான வட்டம் A இலுள்ள நிலைத்த புள்ளி E இனூடாகச் செல்லும்.

(2) ABCD என்னும் நான்முகியின் எதிர் விளிம்புகளின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என்றும் அவை ஒன்றை ஒன்று இருகூறாக்கும் என்றும் நிறுவுக.
CA என்பது BC இற்குச் செங்குத்து ஆகவும் DB என்பது CA இற்குச் செங்குத்தாகவும் இருந்தால் DC என்பது AB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் என்றும்
$DA^2 + BC^2 = DB^2 + CA^2 = DC^2 + AB^2$ என்றும் நிறுவுக.



P, Q, R, S, T, U என்பன முறையே AB, AC, AD, DC, DB, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகுக. $PR \parallel BD$, $US \parallel BD$

∴ $PR \parallel US$

$PU \parallel RS$

∴ PUSR ஒரு இணைகரம்

PS இன் நடுப்புள்ளி O ஆகுக.

∴ இணைகரம் PUSR இன் மூ. வி. கள் PS, UR என்பன O இல் இடைவெட்டும்

∴ PS, UR, QT என்பன O இல் சந்திக்கின்றன அத்துடன் ஒன்றையொன்று இருகூறாக்கின்றன

$AC \perp BD$ (தரவு) ஆதலால் $PU \parallel AC$ & $US \parallel BD$

∴ $PU \perp US$

∴ இணைகரம் PUSR ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.

$OP = OU = OS = OR$ —— (1)

இவ்வாறு இணைகரம் PUST ஒரு செவ்வகம் ஆகும்

$OP = OQ = OS = OT$ —— (2)

(1), (2) இலிருந்து $OQ = OU = OT$ அத்துடன் O ஆனது QT இன் நடுப்புள்ளி

∴ QT ஆனது Q, T, U ஊடாகச் செல்லும் வட்டத்தின் விட்டமாகும்.

∴ QUT ஒரு செங்கோணம்

ie $QU \perp UT$ ஆதலால் $QU \parallel AB$, $UT \parallel CD$ ∴ $AB \perp CD$

$DA^2 + BC^2 = \frac{1}{4} PT^2 + \frac{1}{4} TS^2 => \frac{1}{4} PS^2$

(∵ PQST ஒரு இணைகரம்)

இவ்வாறே $DB^2 + CA^2 = \frac{1}{4} PS^2$

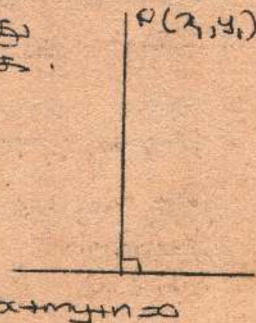
$DC^2 + AB^2 = \frac{1}{4} TQ^2$

ஆகவே $TQ = 2GT = 2CS = PS$

$\therefore DC^2 + AB^2 = \frac{1}{4} PS^2$

$\therefore DA^2 + BC^2 = DB^2 + CA^2 = DC^2 + AB^2$

(3) (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியில் இருந்து $lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டுக்குச் செல்லும் செங்குத்தின் அடியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
OAPB என்பது செவ்வகத்தின் உச்சிகள் ஆகும். இதில் $A \equiv (\lambda a, \lambda b)$, $B \equiv (\mu b, -\mu a)$ இங்கே $a^2+b^2=1$ எனவும் c ஒருமையாக இருக்க $\lambda^3+\mu^3 = c(\lambda^2+\mu^2)$ எனவுமாயின் வண்ணம் Aஐயும் Bஐயும் மாற்றுவதால் Pயில் இருந்து ABக்குச் செல்லும் செங்குத்தின் அடியின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடு என நிறுவுக.



$lx+my+n=0$ என்னும் கோட்டுக்கு P இலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடி Q எனக.
$lx+my+n=0$ என்னும் நேர் கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -l/m$

$\therefore$ PQ இன் சா.வி $= m/l$

$\therefore PQ \Rightarrow y - y_1 = \frac{m}{l}(x - x_1)$

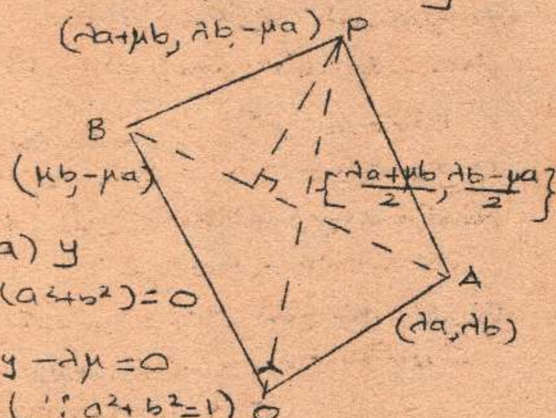
ie $ly - mx = ly_1 - mx_1$ —(1)

$my + lx = -n$ —(2)

$① \times l + ② \times m \Rightarrow y = l^2y_1 - lmx_1 - mn / l^2+m^2$

$② \times l - ① \times m \Rightarrow x = m^2x_1 - lmy_1 - nl / l^2+m^2$

$\therefore Q \equiv \left\{ \frac{m^2x_1 - lmy_1 - nl}{l^2+m^2}, \frac{l^2y_1 - lmx_1 - mn}{l^2+m^2} \right\}$



AB இன் சா.வி $= \left(\frac{\lambda b+\mu a}{\lambda a - \mu b}\right)$.

$\therefore AB = y - \lambda b = \frac{\lambda b+\mu b}{\lambda a - \mu b}(x - \lambda a)$

ie $AB = (\lambda b+\mu a)x + (\mu b - \lambda a)y - \lambda\mu(a^2+b^2) = 0$

ie $AB = (\lambda b+\mu a)x + (\mu b - \lambda a)y - \lambda\mu = 0$ $(\because a^2+b^2=1)$

$S \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ எனக. எனின் S ஆனது O இலிருந்து AB இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தின் அடியாகும்.

$\therefore \bar{x} = \lambda a + \mu b + (\lambda b + \mu a)t$

$\bar{y} = \lambda b - \mu a + (\mu b - \lambda a)t$

இங்கு $t = \frac{-(\lambda b+\mu a)(\lambda a+\mu b) + (\mu b - \lambda a)(\lambda b - \mu a) - \lambda\mu}{(\lambda b+\mu a)^2 + (\mu b - \lambda a)^2}$

$= -\lambda\mu / \lambda^2+\mu^2$.

$$\therefore \bar{x} = \lambda a + \mu b - \frac{\lambda\mu(\lambda b + \mu a)}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\lambda^3 a + \mu^3 b}{\lambda^2+\mu^2} \quad \text{------} (1)$$

$$\bar{y} = \lambda b - \mu a - \frac{(\mu b - \lambda a)\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} = \frac{\mu^3 a + \lambda^3 b}{\lambda^2+\mu^2} \quad \text{---} (2)$$

$$(1)\times a + (2)\times b \Rightarrow a\bar{x} + b\bar{y} = \lambda^3/\lambda^2+\mu^2 \quad \text{———} (3)$$

$$(1)\times b - (2)\times a \Rightarrow b\bar{x} - a\bar{y} = \mu^3/\lambda^2+\mu^2 \quad \text{———} (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow (a+b)\bar{x} + (b-a)\bar{y} = \frac{\lambda^3+\mu^2}{\lambda^2+\mu^2} = c$$

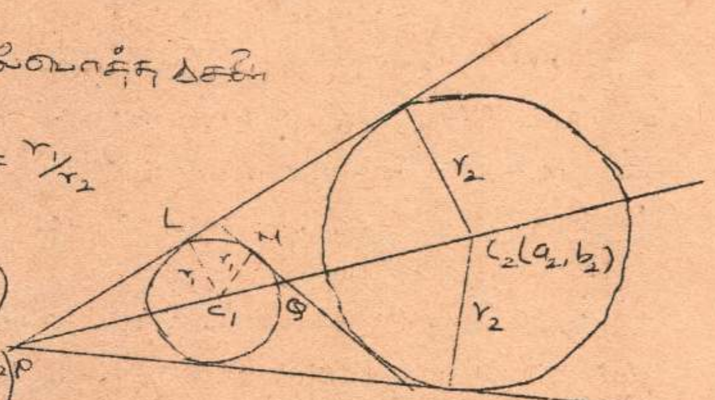
S இன் ஒழுக்கு $(a+b)x + (b-a)y = c$

இது x,y இல் முதற்படியிலுள்ள சமன்பாடாகும்.

(4) $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2 = r_1^2$, $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2 = r_2^2$ ஆகிய இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடலிகள் $\left(\frac{a_1r_2+a_2r_1}{r_2+r_1}, \frac{b_1r_2+b_2r_1}{r_2+r_1}\right)$ உம் $\left(\frac{a_1r_2-a_2r_1}{r_2-r_1}, \frac{b_1r_2-b_2r_1}{r_2-r_1}\right)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒன்றின் அல்லது மற்றையதின் ஊடாக செல்லும் என நிறுவுக.

$x^2+y^2-3x-4y+4=0$, $x^2+y^2-12x-16y+64=0$ ஆகிய வட்டங்களின் பொதுத்தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

படத்தில் இருந்து இயல்பொத்த Δகளைக் கருதுவதால்.



$$\frac{C_1P}{PC_2} = -\frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{C_1Q}{QC_2} = r_1/r_2$$

எனவே

$$P \equiv \left(\frac{r_2a_1 - r_1a_2}{r_2-r_1}, \frac{r_2b_1 - r_1b_2}{r_2-r_1}\right)$$

$$Q \equiv \left(\frac{r_2a_1 + r_1a_2}{r_2+r_1}, \frac{r_2b_1 + r_1b_2}{r_2+r_1}\right)$$

<u>Alter</u>:- $lx+my+n=0$ என்பது இருவட்டங்களுக்குமான பொதுத் தொடலி என்க.

$C_1(a_1, b_1)$ ஆரை r_1 $\quad C_2 = (a_2, b_2)$ ஆரை r_2

$$\therefore \frac{|la_1+mb_1+n|}{\sqrt{l^2+m^2}} = r_1 \quad \frac{|la_2+mb_2+n|}{\sqrt{l^2+m^2}} = r_2.$$

$$\Rightarrow r_2|la_1+mb_1+n| = r_1|la_2+mb_2+n|$$

$$\text{ie } r_2[la_1+mb_1+n] = r_1[la_2+mb_2+n].$$

$$\text{or } r_2(la_1+mb_1+n) = -r_1(la_2+mb_2+n)$$

$$\text{ie. } l\frac{(a_1r_2-a_2r_1)}{r_2-r_1} + m\frac{(b_1r_2-b_2r_1)}{r_2-r_1} + n = 0$$

or

$$l\frac{(a_1r_2+a_2r_1)}{r_1+r_2} + m\frac{(b_1r_2+b_2r_1)}{r_1+r_2} + n = 0$$

$\therefore$ பொதுத்தொடலிகள் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டும் புள்ளிகள்.

$$\left[\frac{a_1 r_2 \pm a_2 r_1}{r_2 \pm r_1}, \frac{b_1 r_2 \pm b_2 r_1}{r_2 \pm r_1} \right]$$

இருகூறிடப்பட்ட வட்டங்களுக்கும்.

$(x-\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=(\frac{3}{2})^2$ $\quad C_1 \equiv (\frac{3}{2}, 2)$; $r_1=\frac{3}{2}$

$(x-6)^2+(y-8)^2=6^2$ $\quad C_2 \equiv (6,8)$; $r_2=6$

$$P \equiv \left(\frac{6\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times 6}{6+\frac{3}{2}}, \frac{6\times 2+\frac{3}{2}\times 8}{6+\frac{3}{2}} \right) \equiv \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

PL இன் சமன்பாடு $lx+my+n=0$ என்க —(1)

P இனூடு செல்வதால் $n=0$ $\quad \because P \equiv (0,0)$

C_1 இருந்து (1) இற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து தூரம் $= r_1$

ie $\frac{|l\times\frac{3}{2}+m\times 2|}{\sqrt{l^2+m^2}} = \frac{3}{2}$ ie $(3l+4m)^2 = 9(l^2+m^2)$

ie $24lm+7m^2=0 \Rightarrow m=0$ or $\frac{l}{7}=\frac{m}{-24}$

$\therefore$ P க்கூடான இரு பொதுத் தொடலிகளினதும் சமன்பாடு

$x=0 \qquad 7x-24y=0$

QM இன் சமன்பாடு $l'x+m'y+n'=0$ என்க.

$\therefore l'\times\frac{12}{5}+m'\times\frac{16}{5}+n'=0$

$\therefore QM \equiv l'x+m'y = l'(\frac{12}{5})+m'(\frac{16}{5})$

ie $\Rightarrow 5l'x+5m'y-12l'-16m'=0$

C_1 இலிருந்து QM இற்கான செங்குத்துத் தூரம் = ஆரை (r_1)

$$\frac{|5l'(\frac{3}{2})+5m'(2)-12l'-16m'|}{\sqrt{(5l')^2+(5m')^2}} = \frac{3}{2}.$$

$|-9l'-12m'| = 15\sqrt{l'^2+m'^2}$

ie $81l'^2+216l'm'+144m'^2 = 225l'^2+225m'^2$

ie $144l'^2-216l'm'+81m'^2=0$

$16l'^2-24l'm'+9m'^2=0$

ie $(4l'-3m')^2=0$

$\therefore l'/m'$ ஒரு பெறுமானத்தையே கொண்டிருக்கின்றது!

ஒரு பொதுத்தொடலியே இதனூடாக உண்டு

$\therefore$ இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன

$\therefore$ பொதுத் தொடலி (இதனூடாக) $3x+4y=20$

(5) $P(at^2, 2at)$ எனும் புள்ளியில் $S \equiv y^2-4ax=0$ எனும் பரவளைவின் செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
$t^2+tt_1+2=0$ எனின், எனின் மட்டுமே P இல் $S=0$ என்பதன் செவ்வன் $S=0$ என்பதை மீண்டும் $Q(at_1^2, 2at_1)$ இல் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.
P எனும் புள்ளிக்கும் $S(-2a,0)$ எனும் புள்ளிக்கும் ஊடாகச் செல்லும் நேர்கோடு $S=0$ என்பதை $P_2(at_2^2, 2at_2)$ இல் சந்திக்கிறது. $S=0$ என்பதற்கு P_2 இலுள்ள செவ்வன் P_1 ஊடாகச் செல்லுகிறது எனக் காட்டுக.
$t+t_1+t_2=0$ என்பதை உய்த்தறிக.

PP_2 இன் நடுப்புள்ளி R எனின் P ஆனது $S=0$ என்பதனுடன் நகர்ந்தால் R ஆனது ஒரு பரவளைவை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

இதன் உச்சியையும் செவ்வகலத்தையும் காண்க.

(5) P இலுள்ள தொடலியின் சாய்வு $= \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{2a}{2at} = 1/t$

$\therefore$ செவ்வனின் சாய்வு $= -t$

$\therefore$ செவ்வனின் சமன்பாடு P இல் $y - 2at = -t(x - at^2)$

ie $y + tx = 2at + at^3$.

P இலுள்ள செவ்வன் P_1 இனூடாக செல்லின்.

$2at_1 + at t_1^2 = 2at + at^3$

ie $(t - t_1)(t^2 + tt_1 + 2) = 0 \quad \therefore t^2 + tt_1 + 2 = 0$ —(1)

$\because t_1 \neq t$.

Aliter: - $t^2 + tt_1 + 2 = 0$ எனின்

$a(t - t_1)(t^2 + tt_1 + 2) = 0$

ie $2at_1 + (at_1^2)t = 2at + at^3$

ie $y + xt = 2at + at^3$ என்பதை P_1 இன் ஆள்கூறுகள் திருப்திப்படுத்துவதால் P இலுள்ள செவ்வனது

$\therefore$ P இலுள்ள செவ்வன் P_1 ஊடாக செல்கிறது.

$PQ \equiv y - 0 = \dfrac{2at - 0}{at^2 + 2a}(x + 2a)$

$= \dfrac{2t}{t^2+2}(x+2a) = \dfrac{-2}{t_1}(x+2a)$

ie $yt_1 + 2x + 4a = 0$ PQ, P_2 இனூடாக செல்வதால்.

$2at_1t_2 + 2at_2^2 + 4a = 0$

ie $t_2^2 + t_2t_1 + 2 = 0$ —(2)

$\therefore$ P_2 இலுள்ள செவ்வன் P_1 ஊடாக செல்கிறது

(1)−(2) $t^2 - t_2^2 + t_1(t - t_2) = 0$

$(t - t_2)(t + t_1 + t_2) = 0 \quad \therefore t_1 + t_2 + t = 0 \quad \because t \neq t_2$

$R = \{ \frac{a}{2}(t^2 + t_2^2),\ a(t + t_2) \}$

$R = (\bar{x}, \bar{y})$

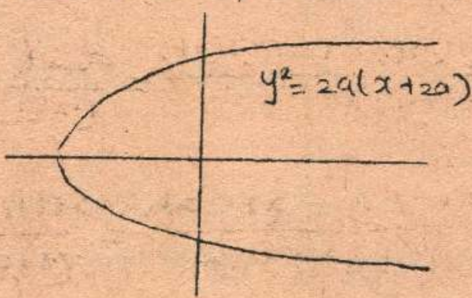
$t + t_2 = -t_1$ & $t^2 + t_2^2 = -4 - t_1(t + t_2)$

$= -4 - t_1^2$ (1),(2) இனால்

$\therefore \bar{x} = \frac{a}{2}(t_1^2 - 4)$ & $\bar{y} = -at_1$

$\bar{x} = \frac{a}{2}\left(\frac{\bar{y}^2}{a^2} - 4\right) \Rightarrow \bar{y}^2 = 2a(\bar{x} + 2a)$

$\therefore$ R, $y^2 = 2a(x + 2a)$ எனும் வளையியில் உள்ளது. இது ஒரு பரவளைவு ஆகும். $\therefore$ R ஒரு பரவளைவில் அமைகிறது.



பரவளைவு அச்சு x அச்சாகும்

உச்சி $= (-2a, 0)$

செவ்வகலம் $= 2a$

குவியம் : $\frac{1}{4} \times 2a = a/2$

$\therefore$ குவியம் $= (-2a+a/2, 0) \equiv (-3a/2, 0)$

Aliter :-

புதிய உற்பத்தியை (h,k) ஆக மாற்றீடு செய்த புதிய ஆள்கூறுகளான (X,Y) ஐ தெரிவு செய்யின்

$$x = X+h \quad , \quad y = Y+k$$

$$(Y+k)^2 = 2a\{X+h+2a\}$$

$h+2a=0 \quad k=0$ ஆக தெரிக.

$\therefore X, Y$ இல் சமன்பாடு $Y^2 = 2aX$ இது ஒரு பரவளைவு உச்சி $(0,0)$ குவியம் $(a/2, 0)$ இனிமேல் பழைய அச்சுகளுக்கு மாற்றீடு செய்யின்

$$x = X+h \quad \& \quad y = Y+k$$

உச்சி $(-2a, 0)$, குவியம் $(-2a+a/2, 0)$

(6) a உம் b உம் ஒருமைகளாகவும் t மாறும் பரமானமாகவும் இருக்க அமைய $\{a(1-t^2)/(1+t^2), 2bt/(1+t^2)\}$ ஆகிய பரமான ஆள்கூறுகளையுடைய P எனும் புள்ளி $S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ எனும் நீள்வளையத்தின் மீதுள்ளது எனக் காட்டுக.

$S=0$ எனும் நீள்வளையத்தின் P எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இத்தொடலி $x=a$ எனும் கோட்டை சந்திக்கும் Q எனும் புள்ளியைக் காண்க.

t_1, t_2 ஆகிய பரமானங்களையுடைய புள்ளிகளில் உள்ள தொடலிகள் $x=a$ எனும் கோட்டை முறையே Q_1 இலும் Q_2 இலும் சந்திக்கின்றன. $Q_1Q_2 = 2b$ எனின் $|t_1-t_2| = 2$ எனக் காட்டுக. அத்தொடலிகளின் இடைவெட்டும் புள்ளி $ay^2 = 2b^2(x+a)$ எனும் பரவளைவின் மேல் அமையும் எனக் காட்டுக.

(6) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{1}{(1+t^2)^2}\{1-2t^2+t^4+4t^2\} - 1$$

$$= 1-1 = 0$$

ie P இன் ஆள்கூறுகள் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஐ திருப்தி செய்கிறது

$\therefore$ புள்ளி P, $S \equiv 0$ எனும் நீள்வளையத்தில் உள்ளது.

$$x = a\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{a(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}$$

$$y = \frac{2bt}{1+t^2} \qquad \frac{dy}{dt} = b\,\frac{(1+t^2)2 - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$\therefore dy/dx = b/a \; \frac{t^2-1}{2t}$

$\therefore$ P யிலுள்ள தொடலியின் சாய்வு $= b/a \; \frac{t^2-1}{2t}$.

$\therefore$ P யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - \frac{2bt}{1+t^2} = \frac{b}{a} \times \frac{t^2-1}{2t}\left\{x - \frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)}\right\}$$

ie $y + b/a \frac{(1-t^2)}{2t} x = \frac{2bt}{1+t^2} + \frac{b(1-t^2)^2}{2t(1+t^2)}$

$$= b\;\frac{1+t^2}{2t}$$

ie $y/b \times 2t + \frac{x}{a}(1-t^2) = 1+t^2$ —— I.

(I) இல் $x=a$ ஐ பிரதியிட்டு பெறுக $y=bt$.

$\therefore Q \equiv (a, bt)$.

$Q_1 \equiv (a, bt_1)$ & $Q_2 \equiv (a, bt_2)$

$Q_1Q_2 \Rightarrow b|t_1-t_2| = 2b \quad \therefore |t_1-t_2| = 2$

Q_1 இலுள்ள தொடலி $y/b \times 2t_1 + x/a(1-t_1^2) = 1+t_1^2$ —①

Q_2 இலுள்ள தொடலி $y/b \times 2t_2 + x/a(1-t_2^2) = 1+t_2^2$ —②

$① \times t_2 - ② \times t_1 \Rightarrow \frac{x}{a}\left[t_2(1-t_1^2) - t_1(1-t_2^2)\right] = t_2(1+t_1)^2 - t_1(1+t_2^2)$

$$x/a(t_2-t_1)(1+t_1t_2) = (t_2-t_1)(1-t_1t_2)$$

$$x/a(1+t_1t_2) = 1-t_1t_2 \quad —③ \quad (\because t_1 \neq t_2)$$

$① \times (1-t_2^2) - ② \times (1-t_1^2)$

$$2y/b\left[t_1(1-t_2^2) - t_2(1-t_1^2)\right] = (1+t_1^2)(1-t_2^2) - (1+t_2^2)(1-t_1^2)$$

$$2y/b\,(t_1-t_2)(1+t_1t_2) = 2(t_1^2-t_2^2)$$

$$y/b\,(1+t_1t_2) = t_1+t_2 \qquad \because t_1 \neq t_2.$$

$$y^2/b^2 = \left(\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2}\right)^2 = \frac{t_1^2+2t_1t_2+t_2^2}{(1+t_1t_2)^2}$$

$$= \frac{(t_1-t_2)^2+4t_1t_2}{(1+t_1t_2)^2} = \frac{4}{1+t_1t_2}$$

$$= \left[\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2} + 1\right] = 2\frac{(x+a)}{a}$$ ③ இனால்.

ie $y^2a = 2b^2(x+a)$

$\therefore$ இடைவெட்டும் புள்ளி $ay^2 = 2b^2(x+a)$ எனும் பரவளைவில் கிடக்கும்.

(7) $xy = c^2$ எனும் பரவளைவுக்கு $(ct, c/t)$ எனும் புள்ளியில் உள்ள செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $P_1(ct_1, c/t_1)$, $P_2(ct_2, c/t_2)$, $P_3(ct_3, c/t_3)$ ஆகிய உச்சிகளை உடைய முக்கோணியின் H எனும் நிமிர் மையம் (உச்சிகளில் இருந்து எதிர் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துகளின் சந்திக்கும் புள்ளி) $(-c/t_1t_2t_3, ct_1t_2t_3)$ என்பதால் தரப்படும் என்று காட்டுக. $xy = c^2$ எனும் அதிபரவளைவுக்கு P_1, P_2, P_3 ஆகியவற்றில் உள்ள செவ்வன்கள் அதிபரவளைவை மீண்டும் முறையே Q_1, Q_2, Q_3 இல் சந்திக்கின்றன. $xy = c^2$ எனும் அதிபரவளைவை H இல் உள்ள செவ்வன் Q_1, Q_2, Q_3 எனும் முக்கோணியின் நிமிர் மையத்தினூடாக செல்கிறது எனக் காட்டுக.

(7) புள்ளி $(ct, c/t)$ இல் $xy = c^2$ க்கான தொடலியின் சா.வி $= dy/dx$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-c/t^2}{c} = -1/t^2$$

$\therefore$ செவ்வனின் சா.வி $= t^2$

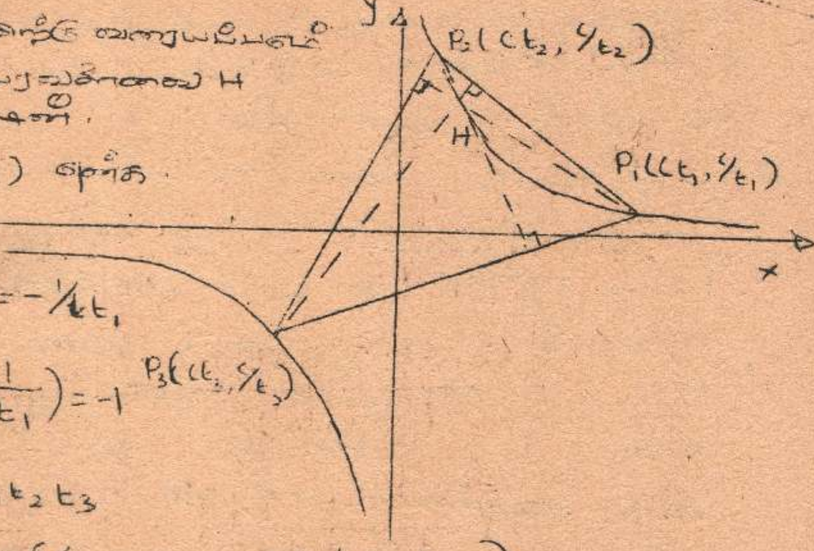
$\therefore$ செவ்வனின் சமன்பாடு $y - c/t = t^2(x - ct)$

$$t^3x - ty = c(t^2 - 1)$$

$$\therefore P_2P_3 \text{ இன் சாய்வு.வி} = \frac{c/t_2 - c/t_3}{ct_2 - ct_3} = -1/t_2t_3$$

P_1 இலிருந்து P_2P_3 க்கு வரையப்படும் செங்குத்து அதிபரவளைவை H இல் வெட்டட்டும்.

$H \equiv (ct, c/t)$ என்க.



$\therefore P_1H$ இன் சா.வி $= -1/tt_1$

$$\therefore \left(\frac{-1}{t_2t_3}\right) \times \left(\frac{-1}{tt_1}\right) = -1$$

$$t = -1/t_1t_2t_3$$

$$\therefore H \equiv (-c/t_1t_2t_3, -ct_1t_2t_3)$$

$\therefore$ இது $P_1P_2P_3$ எனும் முக்கோணம் சார்பாக நிமிர்மையான புள்ளியாகும்

∴ P_1P_2 இலிருந்து வரையப்படும் ⊥ ஆனது H இனூடாக செல்லும் ∴ H நிமிர்மையமாகும்

P_1 இலுள்ள தொடலியின் சா.வி = $-1/t_1$

$Q_1 \equiv (ct_1', c/t_1')$ $Q_2 \equiv (ct_2', c/t_2')$ $Q_3 \equiv (ct_3', c/t_3')$ என்க.

P_1Q_1 இன் சா.வி = $-1/t_1t_1'$

P_1Q_1 செங்குத்தாயிருப்பதற்கான நிபந்தனையானது

$(-1/t_1^2) \times (-1/t_1t_1') = -1$

∴ $t_1' = -1/t_3$ ∴ $Q_1 \equiv (c/t_1^3, -ct_1^3)$

இவ்வாறே $Q_2 \equiv \left(-\frac{c}{t_2^3}, ct_2^3\right)$ $Q_3 \equiv \left(-c/t_3^3, ct_3^3\right)$

∴ $Q_1Q_2Q_3$ இன் நிமிர்மையம் $H' \equiv \left(\frac{-c}{t_1't_2't_3'}, ct_1't_2't_3'\right)$

HH' இன் சா.வி $= -(-t_1t_2t_3)(-t_1't_2't_3') = m'$ என்க.

~~H இலுள்ள தொடலியின் சா.வி = $(-t_1t_2t_3)^2 = m$ என்க~~

$mm' = (t_1t_2t_3)^3(t_1't_2't_3')$

$= (t_1t_2t_3)^3\{(-t_1^3)^{-1}(-t_2^3)^{-1}(-t_3^3)^{-1}\} = -1$

∴ HH' ஆனது H இலுள்ள தொடலிக்கு ⊥ ஆகும்.

∴ H இலுள்ள செவ்வன் H' ஊடாக செல்லுகிறது

(8) (i) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ என நிறுவுக. $\theta = 18°$ எனின் $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ என்றும் $\sin 18°$ என்பது $4x^2+2x-1=0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் என்றும் நிறுவுக. இதிலிருந்து $\sin 18°$, $\cos 36°$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(ii) $t = \tan\theta/2$ எனவாயின் $\cos\theta = 1-t^2/1+t^2$ என்றும் $\sin\theta = 2t/1+t^2$ என்றும் நிறுவுக. $|c| \le \sqrt{a^2+b^2}$ என அமைந்துள்ள $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ என்னும் சமன்பாட்டை மேலேயுள்ள பிரதியீட்டை கொண்டு எவ்வாறு தீர்க்கலாம் என காட்டுக. $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ஆகியன இந்த சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் எனின்

$\tan\alpha/2 \tan\beta/2 = \frac{c-a}{c+a}$ எனக் காட்டு

$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} / \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = c/a$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(8) (i) $\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta . \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos(3\times 18^\circ) = \cos 54^\circ = \sin(90-54) = \sin(2\times 18^\circ)$

ie $\cos 3\theta = \sin 2\theta$

$\therefore \theta = 18^\circ$ ஆயின் $\sin 2\theta = \cos 3\theta$

ie $2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos\theta(4\cos^2\theta - 2\sin\theta - 3) = 0$

$\cos\theta(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0 \quad \because \cos\theta \neq 0 \; (\theta = 18^\circ)$

ie $\sin 18^\circ$ ஆனது $4x^2+2x-1=0$ இன் மூலம் ஆகும்.

எனவே $\sin 18^\circ = x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}$

$\sin 18^\circ > 0$ ஆகையால் $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt5}{4}$

(− மூலம் தள்ளப்படும்.)

(ii) $\cos\theta = \cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2 = \dfrac{\cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2}{\cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2}$

$= \dfrac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ இங்கு $t = \tan\theta/2$

$\sin\theta = 2\sin\theta/2 \cos\theta/2 = \dfrac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{\sin^2\theta/2 + \cos^2\theta/2}$

$= \dfrac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ இங்கு $t = \tan\theta/2$.

$a\cos\theta + b\sin\theta = c$.

ie $a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + b\dfrac{2t}{1+t^2} = c$ ie $(c+a)t^2 - 2bt + c - a = 0$ — ①

Case I $c+a \neq 0$ ஆயின் $t = \dfrac{b\pm\sqrt{b^2-(c^2-a^2)}}{c+a}$ — ②

$|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ ஆகையால் $a^2+b^2 > c$

$\Rightarrow t$ உண்மைப் பெறுமானங்களைக் கொண்டிருக்கும்

$\tan\theta/2 = \dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c} = \tan\alpha/2$ எனக

$= \dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a+c} = \tan\beta/2$ எனக

$\theta/2 = n\pi + \alpha/2$ or $m\pi + \beta/2$ இங்கு n, m என்பன முழு எண்கள் $\therefore \theta = 2n\pi + \alpha$ or $\theta = 2m\pi + \beta$

Case II $c+a=0$ ஆயின் ① தருவது $-2bt + c - a = 0$

ie $t = \dfrac{c-a}{2b}$ or ∞ (முடிவிலி)

$\theta = \alpha, \theta = \beta$ தீர்வுகள் $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ இன்.

அத் தீர்வுகளாகவின்
$\tan\alpha/2$, $\tan\beta/2$ என்பன $(c+a)t^2 - 2bt + c - a = 0$
இன் தீர்வுகளாகும்.

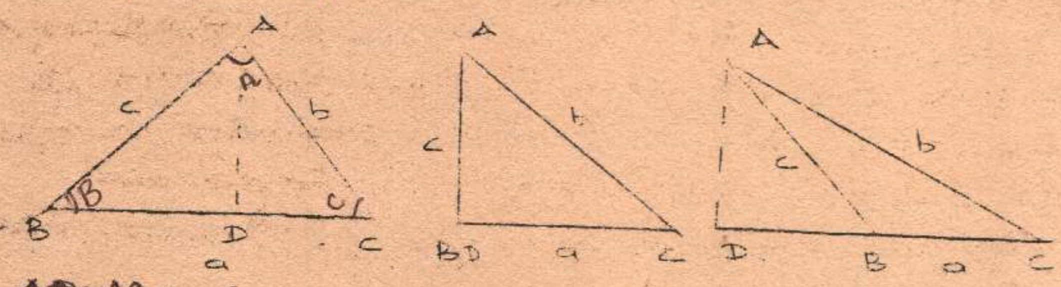
$$\therefore \tan\alpha/2 \tan\beta/2 = {c-a}/{c+a}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1+\tan\alpha/2 \tan\beta/2}{1-\tan\alpha/2 \tan\beta/2} = \frac{\cos\alpha/2 \cos\beta/2 + \sin\alpha/2 \sin\beta/2}{\cos\alpha/2 \cos\beta/2 - \sin\alpha/2 \sin\beta/2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\cos(\alpha-\beta/2)}{\cos(\alpha+\beta/2)}$$

(9) வழமையான குறியீடுகளுடன் ஒரு முக்கோணி ABC யில் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ என்பதை
(i) கூர்ங்கோண முக்கோணி (ii) செங்கோண முக்கோணி
(iii) விரிகோண முக்கோணி என்பவற்றிற்கு
நிறுவுக.
எந்த ஒரு முக்கோணி ABC யிலும்
(i) $b\sin(B/2 + C) = (c+a)\sin B/2$ எனவும்
(ii) $\frac{\cot C/2 + \cot A/2}{\cot B/2} = \frac{2b}{c+a-b}$ எனவும்
(iii) a, b, c என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமையின் $\cot A/2$, $\cot B/2$, $\cot C/2$ என்பனவும் அமையும் எனக் காட்டுக.

(9).



$\cancel{AD=AB}\sin B$ $\quad$ $AD = AB = AB\sin\pi/2$ $\quad$ $AD = AB\sin(\pi - B)$

$= AC\sin C$ $\quad$ $= AB\sin B = AC\sin C$ $\quad$ $= AB\sin B = AC\sin C$

$AD = AB\sin B = AC\sin C$ $\quad$ ie $c\sin B = b\sin C$ $\quad$ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

இவ்வாறே $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ $\quad$ $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} = \frac{\sin\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A-C}{2}}{\sin B/2 \cos B/2}$$

$$= \frac{\sin(\pi/2 - B/2)\cos[\pi/2 - (B/2 + C)]}{\sin B/2 \cos B/2} \Rightarrow \frac{\sin B/2 + C}{\sin B/2}$$

ie $b\sin(B/2 + C) = (c+a)\sin B/2$

(ii) $$\frac{\cot C/2 + \cot A/2}{\cot B/2} = \frac{\cos C/2/\sin C/2 + \cos A/2/\sin A/2}{\cos B/2 / \sin B/2}$$

$$\frac{\cot C/2 + \cot A/2}{\cot B/2} = \frac{(\sin A/2 \cos C/2 + \cos A/2 \sin C/2)\sin B/2}{\cos B/2 \cdot \sin C/2 \cdot \sin A/2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+C}{2}\sin B/2}{\cos B/2\left\{\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2}\right\}}$$

$$= \frac{2\sin(\pi/2 - B/2)\sin B/2}{\cos B/2\left\{\cos\left[\pi/2 - (B/2 + C)\right] - \cos(\pi/2 - B/2)\right\}}$$

$$= \frac{2}{\sin(B/2 + C)/\sin B/2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\frac{c+a}{b} - 1} = \frac{2b}{c+a-b}.$$

(iii) a, b, c என்பன கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்து இருப்பின் $b = \frac{a+c}{2}$

(ii) ஆம் பகுதியினால் $\frac{\cot C/2 + \cot A/2}{\cot B/2} = 2$

$$\cot B/2 = \frac{\cot A/2 + \cot C/2}{2}.$$

$\therefore$ $\cot A/2$, $\cot B/2$, $\cot C/2$ என்பன கூட்டல் விருத்தியில் உள்ளன.

(10) A உம் B உம் ஒவ்வொன்றும் மூன்று தொடர் சதுரங்க ஆட்டங்களை விளையாடுகின்றனர். A ஒரு ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறும் நிகழ்தகவு $1/2$, B ஒரு ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறும் நிகழ்தகவு $1/3$. A யோ அல்லது B யோ வெற்றி தோல்வி பெறாது முடியும் ஆட்டத்தின் நிகழ்தகவைக் காண்க. பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவைக் காண்க.

(i) எல்லா ஆட்டங்களிலும் A வெற்றி பெறுவது.

(ii) இரண்டு ஆட்டங்களில் வெற்றி தோல்வி இன்றி முடிவது

(iii) A யும் B யும் ஒன்று விட்டு ஒன்றில் வெற்றி பெறுவது.

(iv) தொடர்ந்து இரு ஆட்டத்தில் ஆவது B வெற்றி பெறுவது

வெற்றி பெறும் ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால், X இன் இடையையும் மாற்றிறனையும் காண்க

(10) A = {விளையாட்டில் A வெற்றி பெறுதல்}

B = {விளையாட்டில் B வெற்றி பெறுதல்}

D = {விளையாட்டு வெற்றி தோல்வி இன்றி முடிதல்}

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{D}$ என்பன முறையே A, B, D என்பவற்றின் Complementary நிகழ்ச்சிகளைக் குறிப்பன.

$$Pr(D) = 1 - [Pr(A) + Pr(B)] = 1 - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{6}$$

(i) Pr{ A எல்லா விளையாட்டுகளிலும் வெற்றி பெறுதல் }

$$= Pr(A) \cdot Pr(A) \cdot Pr(A) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}$$

(ii) $Pr(\bar{D}) = 1 - Pr(D) = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6}$

Pr (இரு விளையாட்டுகள் வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவுறுதல்)

$$= Pr(D) \cdot Pr(D) \cdot Pr(\bar{D}) + Pr(D) Pr(\bar{D}) Pr(D) + Pr(\bar{D}) Pr(D) Pr(D)$$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6}$$

$$= \tfrac{5}{72}$$

(iii) Pr [A யும் B யும் ஒன்று விட்டு ஒன்று வெற்றி பெறுதல்]

$$= Pr(A) \cdot Pr(B) \cdot Pr(A) + Pr(B) \, Pr(A) \cdot Pr(B)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{36}$$

(iv) $Pr(\bar{B}) = 1 - Pr(B) = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$

Pr [எல்லா விளையாட்டிலும் B தோற்பது]

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{27}$$

Pr (B குறைந்தது 1 விளையாட்டில் வெற்றிபெறுதல்)

$$= 1 - \tfrac{8}{27} = \tfrac{19}{27}$$

X = B வெற்றி பெறும் ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை

$= 0, 1, 2, 3$

$$Pr(x=0) = (\tfrac{2}{3})^3 = \tfrac{8}{27}$$

$$Pr(x=1) = {}^3C_1 \cdot \tfrac{1}{3} (\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{4}{9}$$

$$Pr(x=2) = {}^3C_2 (\tfrac{1}{3})^2 \cdot (\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{9}$$

$$Pr(x=3) = (\tfrac{1}{3})^3 = \tfrac{1}{27}$$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{3} x \, Pr(X=x) = 0 \cdot \tfrac{8}{27} + 1 \cdot \tfrac{4}{9} + 2 \cdot \tfrac{2}{9} + 3 \cdot \tfrac{1}{27}$$

$$= 1$$

$$E(x)^2 = \sum_{x=0}^{3} x^2 \, Pr(X=x) = 0^2 \tfrac{8}{27} + 1^2 \tfrac{4}{9} + 2^2 \cdot \tfrac{2}{9} + 3^2 \tfrac{1}{27}$$

$$= \tfrac{5}{3}$$

$$Var\, x = E(x)^2 - \{E(x)\}^2$$

$$= \tfrac{5}{3} - 1 = \tfrac{2}{3}$$

$\therefore$ Var x = $\tfrac{2}{3}$ //

உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூயகணிதம் 1. க.பொ.த (உயர் தரம்) மாதிரி விடைகள். ஓகஸ்ட், 1983.

01. (1) u_n உம் v_n உம்

$$u_n = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{4n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இங்கு n ஒரு நேர் நிறைவெண். கணிதத்தொகுத்தறி தத்துவ மூலம் $u_n = v_n$ என நிறுவுக.

(2) $r\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^k$ எனும் பெருக்கல் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. $-1<r<1$ எனின் எல்லை $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k$ உண்டு என உய்த்தறிக. $r<-2$ எனின் அல்லது $r \geq 0$ எனின் எல்லை $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r/(1+r)^k$ உண்டு எனக் காட்டுக.

01 (1) $u_n = \sum_{k=2n}^{4n-1} 1/k$, $v_n = \sum_{k=1}^{4n-1} (-1)^{k-1}/k$ ஆகும்

$n=1$ ஆக $u_1 = \sum_{k=2}^{3} 1/k = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = 5/6$

$$v_1 = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1}/k = 1 - 1/2 + 1/3 = 5/6$$

$\therefore u_1 = v_1$ எனவே $n=1$ இற்கு முடிவு உண்மை

$\therefore$ $n=p$ ஆக முடிவு உண்மை என்க

$$u_p = \sum_{k=2p}^{4p-1} 1/k = v_p = \sum_{k=1}^{4p-1} (-1)^{k-1}/k \text{ ஆகும்}$$

$n = p+1$ ஆக

$$u_{p+1} = \sum_{k=2p+2}^{4p+3} (1/k)$$

$$= \sum_{k=2p}^{4p-1} 1/k + 1/4p + 1/4p+1 + 1/4p+2 + 1/4p+3 - 1/2p - 1/2p-1$$

$$= u_p - 1/4p + 1/4p+1 - 1/4p+2 + 1/4p+3$$

$$= v_p - 1/4p + 1/4p+1 - 1/4p+2 + 1/4p+3$$

$$= \sum_{k=1}^{4p+3} (-1)^{k-1}/k = v_{p+1}$$

$\therefore n = p+1$ இற்கும் முடிவு உண்மை

$\therefore$ n இன் எல்லா நேர் முழு எண்ணுக்கும் முடிவு உண்மை

(௨) $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ எனக.

$\therefore S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + - - - - - - - - r^n$

$(r \neq 1)$ $rS_n = r + r^2 + r^3 + r^4 - - - - - - - r^n + r^{n-1}$

$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$

$S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1-r}$

$S_n = \dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$

$\therefore -1 < r < 1$ எனின் $r^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$

$n \longrightarrow \infty$ ஆகவும் $-1 < r < 1$ எனவும் இருப்பின்

$S_n \longrightarrow 1/_{1-r}$

எல் $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} r^k = 1/_{1-r}$ இங்கு $-1 < r < 1$

$\sum_{k=0}^{n} \dfrac{r}{(1+r)^k} = r \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{1+r}\right)^k$

$r = 0$ எனின் எல் $\lim_{n \to \infty} r \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{1+r}\right)^k = 0$

$r \neq 0$ எனின், $-1 < \frac{1}{1+r} < 1$ ஆயும் இருப்பின்

எல் $\lim_{n \to \infty} r \sum_{k=0} \left(\dfrac{1}{1+r}\right)^k = r \dfrac{1}{1 - \frac{1}{r+1}}$

$= r + 1$

$\therefore \dfrac{1}{(r+1)^2} < 1$ ஆக எல் $\lim_{n \to \infty} r \sum \left(\dfrac{1}{1+r}\right)^k \longrightarrow r+1$

$r(r+2) > 0$ " "

$r > 0$ or $r < -2$ " "

$\therefore r < -2$ or $r \geq 0$ எனின் எல் $\lim_{n \to \infty} r \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{1+r}\right)^k$ ஒருங்கும்

(௨) (i) x இன் மெய்ப் பெறுமதிகளுக்கு $0 < p < 1$ எனின் $\dfrac{x-p}{x^2-2x+p}$ எனும் சார்பு எல்லா மெய்ப் பெறுமதிகளையும் கொள்ள முடியும் எனக் காட்டுக. உமது விடையை $p = 3/4$ ஆகும் போது ஒரு வரைபால் விளக்குக.

(ii) x^2+1 ஆல் வகுக்கப்படக்கூடிய ஆனால் $(x-1)^2(x+1)$ ஆல் வகுக்கும் போது $-10x+6$ ஐ மீதியாக விடக்கூடிய x இலுள்ள நாலாம்படி மெய்ப் பல்லுறுப்பியொன்றைக் காண்க.

(௨) (i) $y = \dfrac{x-p}{x^2-2x+p}$ எனக.

$yx^2 - 2xy + py = x - p$

$yx^2-(2y+1)x+p(y+1)=0$

x இன் மெய் பெறுமானங்களுக்கு

$(-(2y+1))^2-4p(y+1)y \geq 0$ ஆகும்

$4y^2+4y+1-4py^2-4py \geq 0$

$4y^2(1-p)+4y(1-p)+1 \geq 0$

$4(y^2+y)(1-p)+1 \geq 0$

$4(y^2+y+\frac{1}{4})(1-p)+1-(1-p) \geq 0$

$4(1-p)(y+\frac{1}{2})^2+p \geq 0$

$\therefore$ y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $p<1, p>0$ ஆக வேண்டும்

$p=\frac{3}{4}$ ஆக $y=\frac{4x-3}{(2x-1)(2x-3)}$

$x=\frac{1}{2}$ and $x=\frac{3}{2}$ அணுகுகோடுகள்

$x \to -\infty$ ஆக $y \to -0$

$x \to +\infty$ ஆக $y \to +0$

$$y=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{x^2}}{(2-\frac{1}{x})(2-\frac{3}{x})}$$

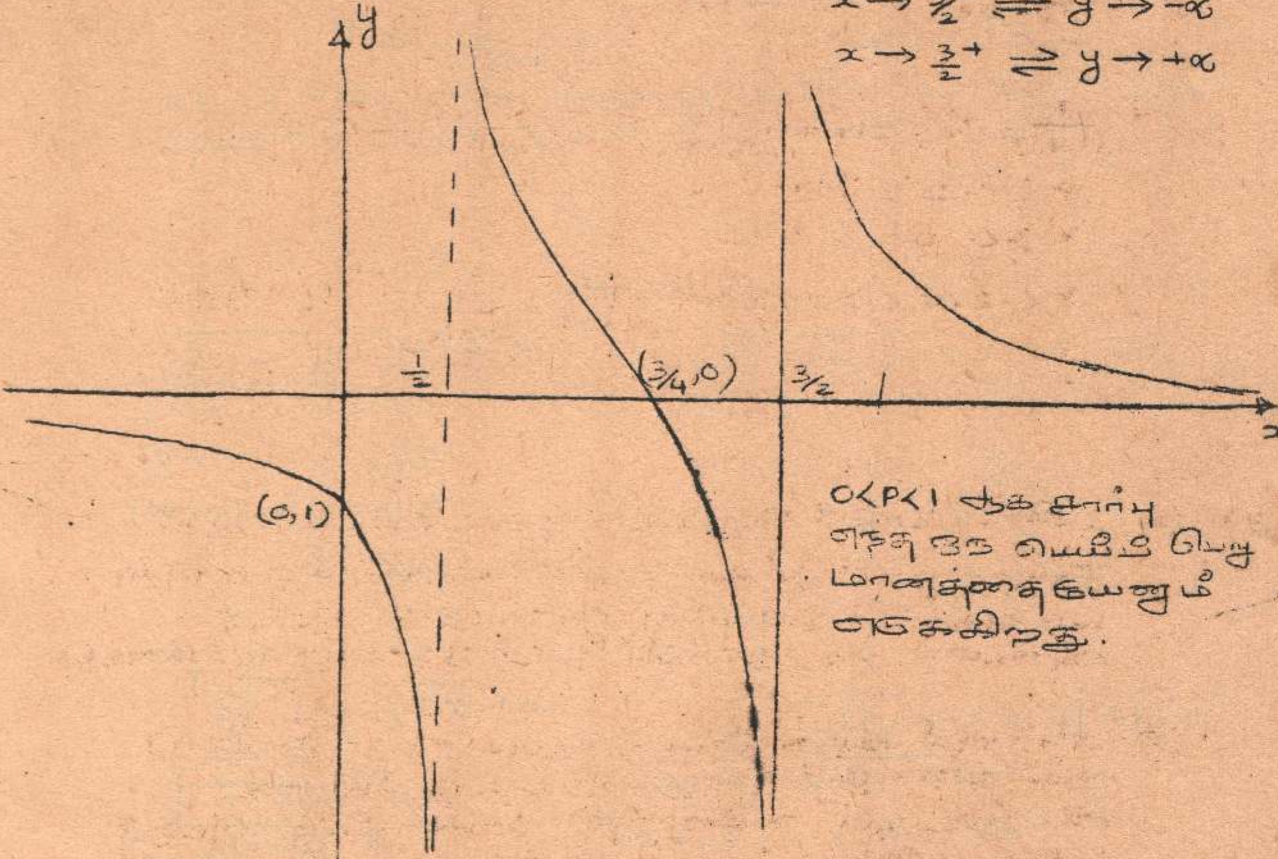
$$\left\{\begin{matrix} x=\frac{3}{4} & y=0 \\ x=0 & y=1 \end{matrix}\right\}$$

$x \to \frac{1}{2}^- \rightleftharpoons y \to -\infty$

$x \to \frac{1}{2}^+ \rightleftharpoons y \to +\infty$

$x \to \frac{3}{2}^- \rightleftharpoons y \to -\infty$

$x \to \frac{3}{2}^+ \rightleftharpoons y \to +\infty$



$0<p<1$ ஆக சார்பு எந்த ஒரு மெய்ப் பெறுமானத்தையும் எடுக்கிறது.

(11) $f(x)=(x-1)^2(x+1)(ax+b)-10x+6$ எனக் கிடைக்க a, b மாறிலிகள்

$f(x)=(x^2-2x+1)[ax^2+ax+bx+b]-10x+6$

$=(x^2+1)[ax^2+(a+b)x+b]-2x[ax^2+(a+b)x+b]-10x+6$

$$f(x) = (x^2+1)\left[ax^2+(a+b)x+b\right] - 2\left[a(x+1)x - ax + (a+b)(x^2+1) - (a+b) + bx\right] - 10x + 6$$

$$= (x^2+1)\,\phi(x) + 2ax + 2(a+b) - 2bx - 10x + 6$$

$\phi(x)$, x இல் உள்ள இருபடிச் சார்பு $f(x)$ (x^2+1) இனால் பூரணமாகப் பிரிபடுவதால்

$$2a - 2b - 10 = 0$$
$$2a + 2b + 6 = 0$$
$$4a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -4$$
$$\therefore f(x) = (x-1)^2(x+1)(x-4) - 10x + 6$$

3 $z = x + iy$ என்னும் சிக்கலெண்ணொன்றின் உடன்புணரி $\bar{z}$ என்பது $\bar{z} = x - iy$ இனால் தரப்படும் எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $(\overline{\alpha+\beta}) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ (iii) $(\overline{\alpha\beta}) = \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$

(ii) $(\overline{\alpha-\beta}) = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ (iv) $(\overline{\alpha^{-1}}) = (\bar{\alpha})^{-1}$

(v) $(\overline{\alpha^n}) = (\bar{\alpha})^n$

இங்கு α, β என்பன சிக்கலெண்களும் n ஒரு நேர் நிறை எண்ணும் ஆகும்.

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

எனும் மெய்க் குணகங்களைக் கொண்டதொரு பல்லுறுப்பி $z = z_0$ இல் பூச்சியம் எனின் அது $z = \bar{z}_0$ இலும் பூச்சியமாகும் எனக் காட்டுக.

3 $\alpha = a + bi$ $\beta = c + di$ எனக.

(i) $(\overline{\alpha+\beta}) = (\overline{a+bi+c+di})$
$= (a+c) - i(b+d)$
$= (a - ib) + (c - id)$
$= \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

(ii) $(\overline{\alpha-\beta}) = (\overline{a+bi-c-di})$
$= \overline{(a-c)+i(b-d)}$
$= (a-c) - i(b-d)$
$= (a-ib) - (c-id)$
$= \bar{\alpha} - \bar{\beta}$

(iii) $(\overline{\alpha\beta}) = (\overline{(a+ib)(c+id)})$
$= \overline{(ac-bd)+i(cb+ad)}$
$= (ac-bd) - i(cb+ad)$
$= ac - adi - bd - cbi$
$= a(c-id) - ib(c-id)$
$= (a-ib)(c-id)$
$= \bar{\alpha}\,\bar{\beta}$

(iv) $(\overline{\alpha^{-1}}) = (\overline{a+ib})^{-1}$
$= \left(\overline{\dfrac{1}{a+ib}}\right)$
$= \left[\overline{\dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}}\right]$
$= \overline{\dfrac{a-ib}{a^2-b^2}} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$
$= \dfrac{\alpha}{\alpha\bar{\alpha}} = \dfrac{1}{\bar{\alpha}} = (\bar{\alpha})^{-1}$

(v) $\overline{(\alpha^{n})} = \overline{(\alpha\cdot\alpha^{n-1})}$

$= \bar{\alpha}\cdot\overline{(\alpha^{n-1})}$ [ஏனெனில் (iii) இன் படி]

$= \bar{\alpha}\;\bar{\alpha}\;\overline{(\alpha^{n-2})}$

$= \bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}\;-----\;\bar{\alpha}$

$= (\bar{\alpha})^{n}$

$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ----\, a_{n-1}z + a_n$ என்க.

$F(z_0) = 0$

$\therefore P z_0 = a_0z_0^n + a_1z_0^{n-1} + ----\, a_{n-1}z_0 + a_n = 0$

சிக்கலெண் பூச்சியமாயின் அதன் உடன் புணரியும் பூச்சியமாகும்

$\therefore \overline{P(z_0)} = 0$

அதாவது $\overline{(a_0z_0^n + a_1z_0^{n-1} ----\, a_{n-1}z_0 + a_n)} = 0$

(i) இன்படி $\overline{a_0z_0^n} + \overline{a_1z_0^{n-1}} + ---\,\overline{a_{n-1}z_0} + \bar{a}_n = 0$

$a_0, a_1 ---\, a_n$ மெய் எண்கள்

(v) ஐயும் பயன்படுத்தின்

$a_0(\bar{z}_0)^n + a_1(\bar{z}_0)^{n-1} ---\, a_{n-1}\bar{z}_0 + a_n = 0$

$\therefore P(\bar{z}_0) = 0$

$\therefore z = z_0$ ஆக மறையும் இப்பல்லுறுப்பி $z = \bar{z}_0$ ஆகவும் மறையும்

(4) z_1, z_2, z_3 எனும் சிக்கலெண்கள் ஆகண் வரிப்படத்தில் நேர் கோட்டிலில்லாத $A_1A_2A_3$ யினால் முறையே குறிக்கப்பட்டுள்ளன $\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ என்பது முக்கோணி $A_1A_2A_3$ இன் மையப் போலியினைக் குறிக்கும் எனக் காட்டுக

$(z_1+z_2+z_3)(z_1+z_2\omega+z_3\omega^2)(z_1+z_2\omega^2+z_3\omega) = z_1^3+z_2^3+z_3^3 - 3z_1z_2z_3$ எனவும் காட்டுக இங்கு $\omega = \left(\text{கோசை}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{சைன்}\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3 = 0$ எனின் பின்வரும் வகைகள் நிகழக்கூடும் என உய்த்தறிக

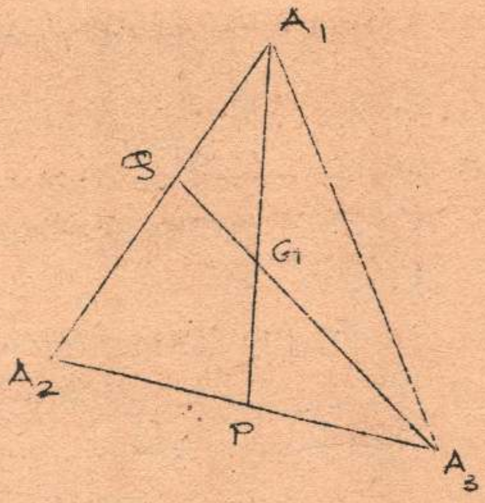
(1) முக்கோணி $A_1A_2A_3$ ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆனால் அதன் மையப் போலி உற்பத்தியில் இல்லை

(2) முக்கோணி $A_1A_2A_3$ சமபக்க முக்கோணியன்று ஆனால் அதன் மையப்போலி உற்பத்தியிலாகும்

(3) முக்கோணி $A_1A_2A_3$ சமபக்க முக்கோணியும் அதன் மையப் போலி உற்பத்தியில் உள்ளதும் ஆகும்

(முக்கோணியினது மையப் போலியானது மூன்று இடையங்களை இடைவெட்டும் பொதுப் புள்ளியாகும்)

(4) P யினைக் குறிக்கும் சிக்கலெண் $\frac{z_2+z_3}{2}$ எனில்
A_2A_3 யின் நடுப்புள்ளி P



$\frac{A_1G}{GP} = \frac{2}{1}$ ஆகும்

∴ G யினைக் குறிக்கும் சிக்கலெண்

$$\frac{z_1 + 2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)}{2+1}$$

$$= \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\omega^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$\omega^3 - 1 = 0$

$\omega \neq 0 \quad \therefore \omega^2+\omega+1=0$

$$(z_1+z_2+z_3)(z_1+z_2\omega+z_3\omega^2)(z_1+z_2\omega^2+z_3\omega)$$

$$=(z_1+z_2+z_3)\left[z_1^2+z_1z_2\omega^2+z_1z_3\omega+z_1z_2\omega+z_1\omega^3+ z_2z_3\omega^2+z_3z_1\omega^2+z_3z_2\omega^4+z_3^2\omega^3\right]$$

$$=(z_1+z_2+z_3)\left[z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_1z_2(\omega^2+\omega)+z_2z_3(\omega^2+\omega) +z_3z_1(\omega^2+\omega)\right]$$

$$=(z_1+z_2+z_3)\left[z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1\right]$$

$$=z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3]$$

$z_1^3+z_2^3+z_3^3-3z_1z_2z_3=0$ எனின்

$(z_1+z_2+z_3)(z_1+z_2\omega+z_3\omega^2)(z_1+z_2\omega^2+z_3\omega)=0$

$(z_1+z_2+z_3)(z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1)=0$

(i) $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0 \qquad z_1+z_2+z_3\neq 0$ எனக்

$\therefore (z_1+z_2\omega+z_3\omega^2)(z_1+z_2\omega^2+z_3\omega)=0$

$(z_1+z_2\omega+z_3\omega^2+z_3\omega)=0 \qquad z_1+z_2\omega+z_3\omega^2=0$ எனக்

$z_1+z_2\omega+z_3(-1-\omega)=0$

$\omega = \frac{z_3-z_1}{z_1-z_3} \qquad |\omega|=1$

$\therefore \left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}\right|=1 \Rightarrow |z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

$A_3A_1 = A_2A_3$

இவ்வாறே $A_3A_1=A_2A_1$ என நிறுவலாம்

$A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3$

∴ $\triangle A_1A_2A_3$ சமபக்க முக்கோணம் ஆனால் $z_1+z_2+z_3\neq 0$
∴ மையப்போலி உற்பத்தியில் இல்லை

(ii) $(z_1+z_2\omega+z_3\omega^2)(z_1+z_2\omega^2+z_3\omega)\neq 0 \quad z_1+z_2+z_3=0$ எனில்
முக்கோணம் சமனற்ற பக்கங்களை உடையது
அத்துடன் மையப்போலி உற்பத்தியில் இருக்கும்

(iii) $(z_1+z_2\omega+z_3\omega^2)(z_1+z_2\omega^2+z_3\omega)=0$ $z_1+z_2+z_3=0$ எனில் முக்கோணம் மையப்போலியை உச்சிகளில் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம்

5 (i) a_r என்பது $(1+x+x^2)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகத்தைக் குறிக்கின்றது. இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண். $a_3 = 2a_2$ எனின் $n=5$ என நிறுவுக

(ii) 7 மனிதர்களிலிருந்தும் 5 சீமாட்டிகளிலிருந்தும் 5 பேரைக் கொண்ட குழுவொன்று இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துமாறாக அதுவும் ஒரு குறிப்பிட்ட மனிதனையும் ஒரு குறிப்பிட்ட சீமாட்டியையும் ஒன்றாக குழுவில் வைத்திருக்காவண்ணம் எத்தனை முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம் எனக்காண்க?

5 (i) $(1+x+x^2)^n = [1+x(1+x)]^n$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1 x(1+x) + {}^nC_2 x^2(1+x)^2 + {}^nC_3 x^3(1+x)^3 - - ---- {}^nC_n x^n(1+x)^n$$

$$= 1 + ({}^nC_1)x + [{}^nC_1 + {}^nC_2]x^2 + [2\,{}^nC_2 + {}^nC_3]x^3 + --$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ----$$

$a_3 = 2a_2$ எனின்

$$2\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} + \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} = 2\left(n + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}\right)$$

$$\frac{n!}{(n-3)!\,6} = 2n$$

$$n(n-1)(n-2) - 12n = 0$$

$$n[n^2-3n-10] = 0$$

$$n(n-5)(n+2) = 0$$

$$n = 0 \text{ or } 5 \text{ or } -2$$

$n=5$ மட்டுமே பொருந்தும்

(ii) 7 மனிதரிலும் 5 சீமாட்டிகளில் இருந்தும் 5 பேரை இருபாலாரும் இருக்கத் தெரிவு செய்யக்கூடிய முறைகள்

M	W	வழிகளின் எண்ணிக்கை
4	1	$= {}^7C_4 \times {}^5C_1 = 35\times 5 = 175$
3	2	$= {}^7C_3 \times {}^5C_2 = 35\times 10 = 350$
2	3	$= {}^7C_2 \times {}^5C_3 = 21\times 10 = 210$
1	4	$= {}^7C_1 \times {}^5C_4 = 7\times 5 = 35$
		770

இரு பாலரையும் கொண்டு 5 பேர் தெரியக்கூடிய வழிகள் 770 ஆகும்

குறிப்பிட்ட ஆணும் பெண்ணும் ஒன்றாக வரும் வழிகளை நீக்குவோம்

குறிப்பிட்ட ஆணையும் பெண்ணையும் விலக்கிக் கொண்டு மீதி உள்ளவர்களில் எவரேனும் மூவரை தெரிவு செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கையாகும்

M	W	வழிகளின் எண்ணிக்கை
3	0	$= {}^6C_3 \times {}^4C_0 = 20 \times 1 = 20$
2	1	$= {}^6C_2 \times {}^4C_1 = 15 \times 4 = 60$
1	2	$= {}^6C_1 \times {}^4C_2 = 6 \times 6 = 36$
0	3	$= {}^6C_0 \times {}^4C_3 = 1 \times 4 = 4$
		$\underline{\underline{120}}$

பொருத்தமான வழிகள் $= 770 - 120$

$= 650$ //

6 (i) முதற்றத்துவங்களில் இருந்து $\frac{d}{dx}$ தான் $x =$ சீக$^2 x$ என நிறுவி $\frac{d}{dx}$ தான்$^{-1}x = 1/1+x^2$ என உய்த்தறிக

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிட்டு உமது விடைகளை சுருக்குக.

(அ) தான்$^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ (ஆ) மட $\left|\frac{1+\text{தான்}\,x}{1-\text{தான்}\,x}\right|$

(ii) $y = e^{m\,\text{தான்}^{-1}x^2}$ எனின் (இங்கு m ஓர் ஒருமை)

$(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mxy$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2x^2-m)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$ எனக் காட்டுக

(6) (i) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\tan(x+\delta x) - \tan x}{\delta x}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x} \right\} \Big/ \delta x$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\cos x \sin(x+\delta x) - \sin x \cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x} \right\} \Big/ \delta x$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \sin(x+\delta x - x) \Big/ \cos x \cos(x+\delta x).\delta x$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\sin \delta x}{\delta x} \Big/ \cos(x+\delta x)\cos x$$

$$= \sec^2 x$$

$y = \tan^{-1}x$ எனின்

$x = \tan y$

$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$

$= \frac{1}{1+x^2}$

(அ) $y = \tan^{-1}(2x/_{1-x^2})$

$y = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 2\theta)$

$= 2\theta$

$x = \tan\theta$ எனின்

$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$

$= 2 \times \frac{1}{\sec^2\theta} = 2/_{1+x^2}$

மாற்று $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \times \frac{(1-x^2)^2 - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$= \frac{1}{(1+x^2)^2} \times 2[1-x^2+2x^2]$

$= 2/_{1+x^2}$

(ஆ) $y = \log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan x/_{1-\tan x}} \times \frac{(1-\tan x)\sec^2 x - (1+\tan x)(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)}$

$= \frac{1-\tan x}{1+\tan x} \times \frac{\sec^2 x[1-\tan x + 1 + \tan x]}{(1-\tan x)^2}$

$= \frac{2\sec^2 x}{1-\tan^2 x} = 2(1+\tan^2 x)/_{(1-\tan^2 x)}$

$= 2\frac{1}{\cos 2x} = 2\sec 2x$

(ii) $y = e^{m\tan^{-1}x^2}$

$\frac{dy}{dx} = e^{m\tan^{-1}x^2} \cdot m\frac{1}{1+x^4} \times 2x$

$(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mx \cdot e^{m\tan^{-1}x^2}$

$(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mx\,(e^{m\tan^{-1}x^2})$

$(1+x^4)\frac{dy}{dx} = 2mxy$

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 4x^3\frac{dy}{dx^2} = 2mx\frac{dy}{dx} + 2my$

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + (4x^3 - 2mx)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$

$(1+x^4)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x(2x^2 - m)\frac{dy}{dx} - 2my = 0$

(7) (i) $Q(x) \equiv (x-\alpha)^2(x-\beta)$ இங்கு α வும் β வும் மெய்யும் வேறானவையும்

(ii) $P(x)$ என்பது படி மூன்றிலும் குறைவானதாயும்

(iii) $\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)} + \frac{B_1}{(x-\beta)}$ ஆயும் இருப்பின்

$A_1 = \frac{P(\alpha)}{\alpha-\beta}$, $A_2 = \frac{P'(\alpha)}{(\alpha-\beta)} - \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$, $B_1 = \frac{P(\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$

எனக் காட்டுக. இங்கு $P'(x) = \frac{d}{dx}P(x)$

$\alpha>0$, $\beta>0$ ஆகவும் $k>\gamma>$ ஆயின் (α,β) ஆகும் அமைந்திருப்பின்

$\int_\gamma^k \frac{x}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}dx$ ஐ மதிப்பிடுக. $\lim_{k\to\infty}\int_\gamma^k \frac{x}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}dx$

ஒருங்குகின்றது என உய்த்தறிக

7 $P(x) = A_1(x-\beta) + A_2(x-\alpha)(x-\beta) + B_1(x-\alpha)^2$ எனவாம்

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)} + \frac{B_1}{(x-\beta)}$$

$x=\beta$ ஆக $P(\beta) = 0+0+B_1(\beta-\alpha)^2$

$$\therefore B_1 = \frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)^2}$$

$x=\alpha$ ஆக $P(\alpha) = A_1(\alpha-\beta)$ $\quad \therefore A_1 = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)}$

$$P'(x) = A_1 + 2A_2x - (\alpha+\beta)A_2 + 2B_1(x-\alpha)$$

$$= A_1 + A_2[2x-\alpha-\beta] + 2B_1(x-\alpha)$$

$x=\alpha$ ஆக

$$P'(\alpha) = A_1 + A_2(\alpha-\beta)$$

$$A_2 = \left\{P'(\alpha) - \frac{P(\alpha)}{\alpha-\beta}\right\}\Big/(\alpha-\beta)$$

$$A_2 = \frac{P'(\alpha)}{\alpha-\beta} - \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\frac{x}{(x-\alpha)^2(x-\beta)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha)} + \frac{B_1}{(x-\beta)}$$

$$A_1 = \frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)} = \alpha/(\alpha-\beta)$$

$$A_2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)^2} = -\beta/(\alpha-\beta)^2$$

$$B_1 = \beta/(\alpha-\beta)^2$$

A_1, A_2, B_1 ஒருமைகள்

$$\int_\gamma^k \frac{x}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}dx = A_1\int_\gamma^k \frac{dx}{(x-\alpha)^2} + A_2\int_\gamma^k \frac{dx}{x-\alpha} + B_1\int_\gamma^k \frac{dx}{x-\beta}$$

$$= A_1\left[-(x-\alpha)^{-1}\right]_\gamma^k + A_2\left[\log|x-\alpha|\right]_\gamma^k + B_1\left[\log|x-\beta|\right]_\gamma^k$$

$$= A_1\left[\frac{1}{\gamma-\alpha} - \frac{1}{k-\alpha}\right] + A_2\left[\log\frac{k-\alpha}{\gamma-\alpha}\right]$$

$$+ B_1\left[\log\frac{k-\beta}{\gamma-\beta}\right]$$

$$\int_{\gamma}^{k} \frac{x \, dx}{(x-\alpha)^2(x-\beta)} = A_1 \frac{(k-\gamma)}{(k-\alpha)(\gamma-\alpha)} + A_2 \log\left|\frac{k-\alpha}{\gamma-\alpha}\right| + B_1 \log\left|\frac{k-\beta}{\gamma-\beta}\right|$$

$$= \frac{\alpha(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(k-\alpha)(\gamma-\alpha)} - \frac{\beta \log\left|\frac{k-\alpha}{\gamma-\alpha}\right|}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{\beta}{(\alpha-\beta)^2} \log\left|\frac{k-\beta}{\gamma-\beta}\right|$$

$$= \frac{\alpha(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(k-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{\beta}{(\alpha-\beta)^2} \log\left[\frac{(k-\beta)(\gamma-\alpha)}{(\gamma-\beta)(k-\alpha)}\right]$$

$$\underset{k \to \infty}{\text{எல்லை}} \int_{8}^{k} \frac{x}{(x-2)^2(x-6)} = \underset{k \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\frac{2(k-8)}{-4 \cdot (k-2)6} + \frac{6}{16} \log \frac{(k-6)6}{2(k-2)}\right]$$

$$= \underset{k \to \infty}{\text{எல்லை}} \left\{-\frac{1}{12} \frac{k-8}{k-2} + \frac{3}{8} \log\left[\left|\frac{k-6}{k-2}\right| \cdot 3\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{8} \log(3)$$

8 (i) $y = \text{சைன்}^{-1}x + (\text{சைன்}^{-1}x)^2$ எனின் $(1-x^2)\, d^2y/dx^2 - x\, dy/dx$ என்பது x ஐச் சாராதது என நிறுவுக. இதிலிருந்து $x = 0$ ஆகும் புள்ளியில் $n = 2, 3, 4$ இற்கு $d^n y/dx^n$ இன் பெறுமதிகளைக் காண்க. $\text{சைன்}^{-1}x + (\text{சைன்}^{-1}x)^2$ இன் x^4 இல் உள்ள உறுப்பு வரையிலான மகலோரினது விரிவு $x + x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3}$ எனக் காட்டுக.

(ii) ஈருறுப்பு விரியின் மறைச் சுட்டியொன்றிற்கான விதியை எடுத்துக் கொண்டு $(1-x)^2/(1+x+x^2)^2$ இன் விரிவில் $x^{3r}, x^{3r+1}, x^{3r+2}$ என்பவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

8 (i) $y = \sin^{-1}x + (\sin^{-1}x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 + 2\sin^{-1}x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\, \frac{dy}{dx} = 1 + 2\sin^{-1}x$$

$$\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-x\frac{dy}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$\therefore (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$ x ஐச் சாராதது

$x = 0$ ஆக $\frac{dy}{dx} = 1 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

$(1-x^2)\, d^2y/dx^2 - x\, dy/dx = 2$

$(1-x^2)\, d^3y/dx^3 - 2x\, d^2y/dx^2 - x\, d^2y/dx^2 - dy/dx = 0$

$x=0$ ஆக $d^3y/dx^3 = 1$

$$(1-x^2)\frac{d^4y}{dx^4} - 2x\frac{d^3y}{dx^3} - 3x\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$x=0$ ஆக $d^4y/dx^4 = 8$

$f(x) = \sin^{-1}x + (\sin^{-1}x)^2$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{iv}(0) + \cdots$$

$$= 0 + x\cdot 1 + \frac{x^2}{2}\cdot 2 + \frac{x^3}{3!}\cdot 1 + \frac{x^4}{4!}8$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3}$$

(ii) $$\frac{(1-x)^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1-x)^2(1-x)^2}{[(1+x+x^2)(1-x)]^2}$$

$$= \frac{(1-x)^4}{(1-x^3)^2}$$

$(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$

$$(1-x)^n = 1 + nx + \frac{n}{2}(n-1)x^2 + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} - - - - - - - - + \frac{n(n-1)---(n-r+1)x^r}{r!}$$

$$(1-x^3)^{-2} = 1 + 2x^3 + \frac{(-2)(-3)}{2}x^6 - - - + \frac{(-2)(-3)(-4)----(-2-r+1)(x^3)^r}{r!}$$

$$= 1 + 2x^3 + 3x^6 + - - - \frac{(-1)^r(-1)^r\cdot 2\cdot 3\cdot 4 --- r(r+1)\, x^{3r}}{r!}$$

$$= 1 + 2x^3 + 3x^6 + ----(-1)^{2r}(r+1)x^{3r} + ---$$

$$= 1 + 2x^3 + 3x^6 ----(r+1)x^{3r} + (r+2)x^{3r+3} + --$$

$$\therefore \frac{(1-x)^2}{(1+x+x^2)^2} = (1-4x+6x^2-4x^3+x^4)\{1+2x^3+3x^6--(r+1)x^{3r}+--\}$$

x^{3r} இன் குணகம் $= (r+1) - 4(r)$

$= 1 - 3r$

x^{3r+1} இன் குணகம் $= -4(r+1) + r$

$= -(3r+4)$

x^{3r+2} இன் குணகம் $= 6(r+1)$

(ii) இரண்டாவது பெறுமதியை மட்டும் கருதிக்கொண்டு.
இழிவு: உயர்வுப் பெறுமதிகளை $f(x) = \frac{(x-5)^3(4x+1)}{(x+1)}$
என்னும் சார்பில் காண்க. $y = f(x)$ இன் வரைபை
பருமட்டாக வரைக.
(5,0) என்னும் புள்ளிபற்றி யாது கூறுவீர்?

(ii) $ay^2 = x^3$ என்னும் வளையியிலுள்ள புள்ளி $P(at^2, at^3)$
யில் வரையப்பட்ட தொடலி வளையியை மீண்டும்
Q இல் சந்திக்கின்றது. Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
C வெட்டுப்புள்ளியும் N, P யிலிருந்து x அச்சுக்கான
செங்குத்தின் அடியும் R, PQ வினதும் y அச்சி
னதும் இடைவெட்டுப் புள்ளியும் எனின்
CRN x அச்சுக்குச் சமாந்தரமாக அமைந்
துள்ளது என நிறுவுக.

9. (i) $y = f(x) = (x-5)^3(4x+1)/(x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\left[3(x-5)^2(4x+1) + (x-5)^3 \cdot 4\right] - (x-5)^3(4x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-5)^2}{(x+1)^2}\left[3(x+1)(4x+1) + 4(x+1)(x-5) - (x-5)(4x+1)\right]$$

$$= (x-5)^2\left[12x^2+18x-12\right]/(x+1)^2$$

$$= 6(x-5)^2(2x^2+3x-2)/(x+1)^2$$

$$= 6(x-5)^2(2x-1)(x+2)/(x+1)^2$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக $x = 5, \frac{1}{2}, -2$ இல் வளையிக்கு
திரும்பற்புள்ளிகளாகும்
அணுகு கோடு $x = -1$

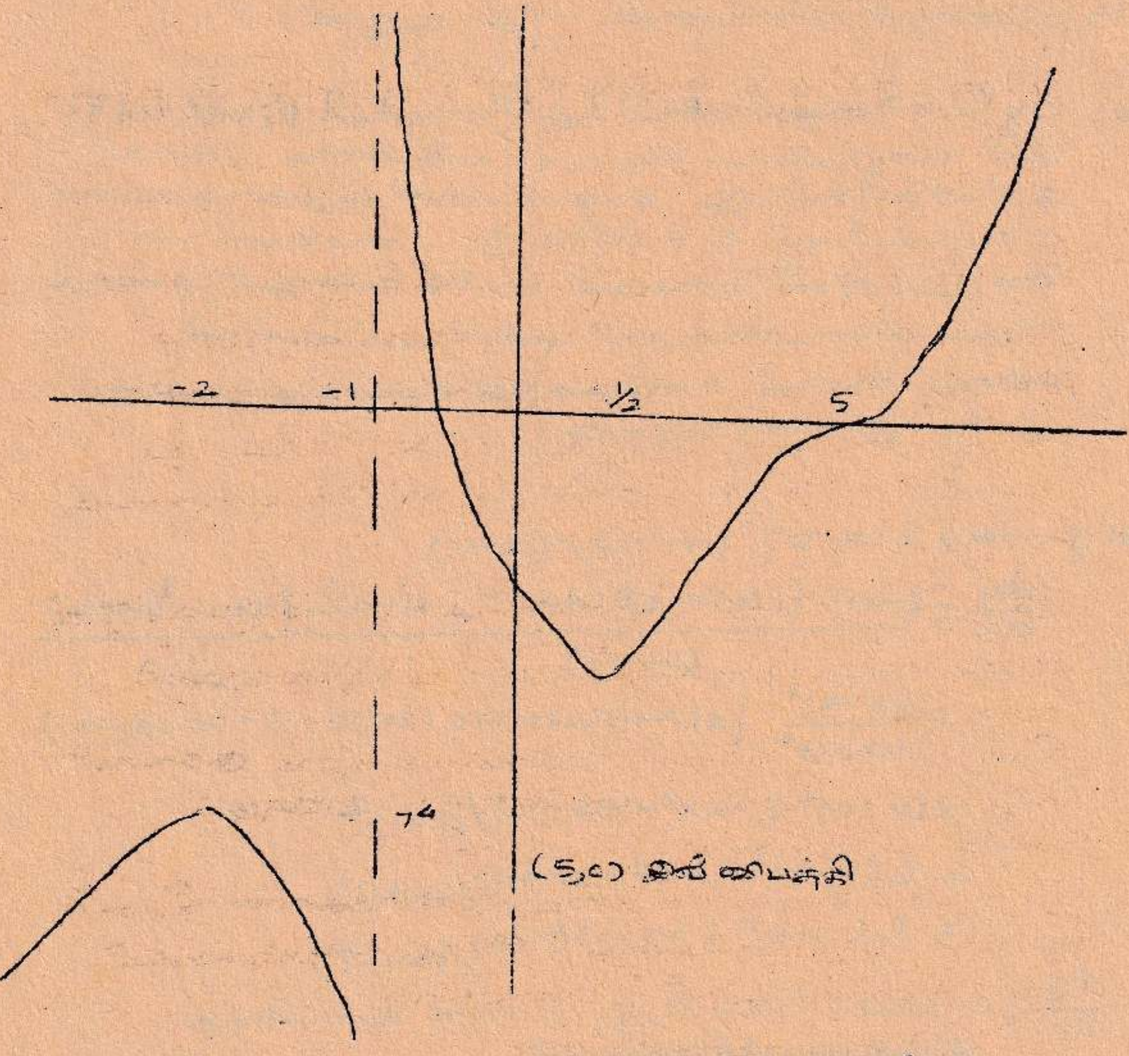
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6(x-5)^2(2x-1)(x+2)}{(x+1)^2} \qquad x = -2, -1, \frac{1}{2}, 5$$

x இன் வீச்சு	f(x) இன் குறி	x	fx	புள்ளியின் இயல்பு
$-\infty < x < -2$	$- \ - = +$	-2	-7^4	$x = -2$ இல் உயர்வு
$-2 < x < -1$	$- \ + = -$			
$-1 < x < \frac{1}{2}$	$- \ + = -$	$\frac{1}{2}$	$-9\frac{3}{4}$	$x = \frac{1}{2}$ இல் இழிவு
$\frac{1}{2} < x < 5$	$+ \ + = +$			
$5 < x < \infty$	$+ \ + = +$	5	0	$x = 5$ இல் விபத்தி

$$f(x) = \frac{(x-5)^3(4x+1)}{x+1} = \frac{(1-5/x)^3(4+1/x)}{1/x^3 + 1/x^4}$$

$x \to \infty^+$, $y \to \infty^+$ $\qquad x = 0 \Rightarrow y = (-5)^3$

$x \to \infty^-$ $\quad y \to \infty^-$



(ii) $ay^2 = x^3$

$2ay\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$dy/dx = \frac{3x^2}{2ay}$

P யில் தொடலியின் சாய்வு

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = \frac{3a^2t^4}{2a.at^3} = \frac{3t}{2}$

PQ வளையியில் P யில் உள்ள தொடலி, புள்ளி Q வளையியில் சந்திப்பதால் $Q = (aT^2, aT^3)$ எனக

PQ இன் சாய்வு $= \frac{aT^3 - at^3}{aT^2 - at^2} = \frac{3t}{2}$

$2[T^2 + (T + t^2)] = 3t(T+t)$

$2T^2 - tT - t^2 = 0$

$(T-t)(2T+t) = 0$.

$T = t$ or $-t/2$

$\therefore Q \equiv \left[\frac{at^2}{4}, -\frac{at^3}{8}\right] \qquad N \equiv [at^2, 0]$

$$PQ \Rightarrow \frac{y-at^3}{x-at^2} = \frac{3t}{2}$$

$$2y - 2at^3 = 3xt - 3at^3$$

$$2y - 3xt + at^3 = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore R \equiv \left[0, -\frac{at^3}{2}\right]$$

∴ ஆகும் RN உம், X அச்சுடன் சமமாக சாய்ந்துள்ளது

(10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தினால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பளவு πab எனக்காட்டுக. மேற்படி நீள்வளையம் y அச்சுப்பற்றி இரண்டு செங்கோணங்களுடாக சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப் படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தையும் $(y-b)^2 = \frac{b^2}{a}x$ எனும் பரவளைவையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

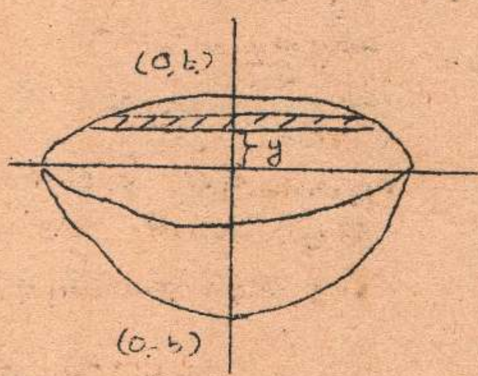
நீள்வளையத்தாலும் பரவளைவாலும் முதலாம் கால்வட்டத்தில் வரையறுக்கப்படும் பிரதேசம் S இன் பரப்பளவைக் காண்க.

S, y அச்சுப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடே சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப் படும் திண்மத்தின் கனவளவு

$\frac{7}{15}\pi a^2 b$ எனக்காட்டுக.

(10) $S = \int_{-b}^{b} 2x\,dy$

$$= 2\int_{-b}^{b} \left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} a\,dy$$



$y = b\sin\theta$ எனின்

$dy = b\cos\theta\,d\theta$

$$S = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} b\cos\theta\,d\theta$$

$$= ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2\theta + 1)\,d\theta = ab\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$S = ab\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi ab$$

$$V = \pi\int_{-b}^{b} x^2\,dy = \pi\int_{-b}^{b}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)a^2\,dy$$

$$= \pi a^2\left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_{-b}^{b}$$

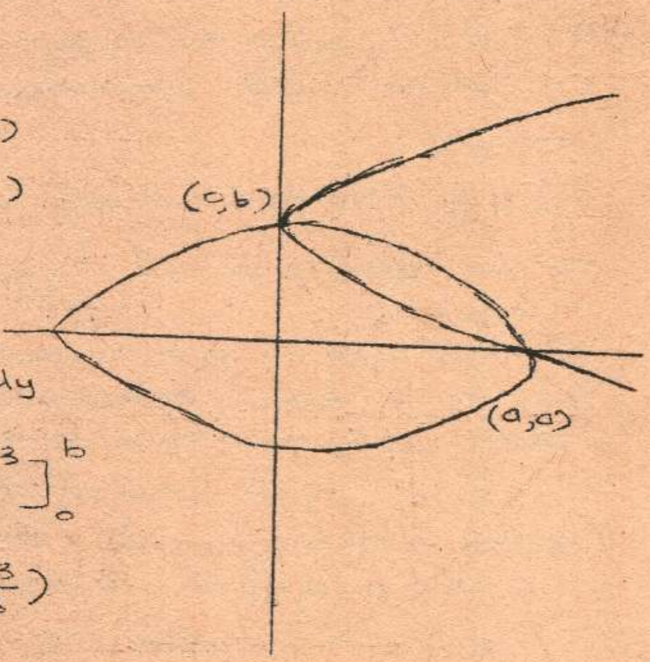
$$= \pi a^2\left[\left(b - \frac{b}{3}\right) - \left(-b + \frac{b}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

$$(y-b)^2 = \frac{b^2}{a}x$$

$y=b$ ஆக $x=0$ $(0,b)$

$x=a$ ஆக $y=0$ $(a,0)$



$$S = \frac{\pi ab}{4} - \int_0^b x\,dy$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{a}{b^2}\int_0^b (y-b)^2\,dy$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{a}{b^2}\left[\frac{(y-b)^3}{3}\right]_0^b$$

$$= \frac{\pi ab}{4} - \frac{a}{b^2}\left(+\frac{b^3}{3}\right)$$

$$= \frac{ab}{12}\left[3\pi - 4\right]$$

கனவளவு $V = \frac{2}{3}\pi a^2 b - \pi\int x^2\,dy$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2 b - \frac{\pi a^2}{b^4}\int_0^b (y-b)^4\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2 b - \frac{\pi a^2}{b^4}\left[\frac{(y-b)^4}{5}\right]_0^b$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2 b - \frac{\pi a^2}{b^4}\cdot\frac{b^5}{5}$$

$$= \pi a^2 b\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \frac{7}{15}\pi a^2 b$$

உரிமை பதிப்பகத்தாருக்குரியது.

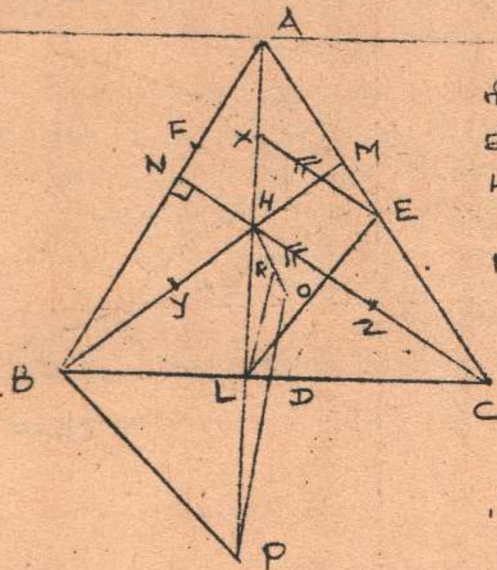
உயர் கல்விப் பதிப்பகம்.

36, சுவாமியார் வீதி, கொழும்புத்துறை, யாழ்ப்பாணம்.

தூய கணிதம் (2) க.பொ.த (உயர்தரம்) மாதிரி விடைகள், ஓகஸ்ட் 1983.

(1) முக்கோணி ABC யில் குத்துக்கோடுகள் AH, BH, CH, என்பன முறையே BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை L, M, N இல் இடைவெட்டுகின்றன. இங்கு H நிமிர்மையம். D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். DX ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டம் E, F, L ஊடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.

இதிலிருந்தோ வேறு வழியாகவோ D, E, F, L, M, N, X, Y, Z என்னும் ஒன்பது புள்ளிகளினூடாகவும் ஒரு வட்டம் வரையலாம் எனவும் அதன் மையம் OH ஐ இருகூறிடும் எனவும் நிறுவுக. இங்கு O, முக்கோணி ABC இன் சுற்றுமையம் ஆகும்.



$\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்டத்தை நீட்டப்பட்ட AL, P யில் சந்திக்கின்றது எனவும் OH இன் நடுப்புள்ளி R எனவும் கொள்க.

நிறுவல் :- $\left.\begin{array}{l} DE \parallel AB \\ CN \parallel XE \end{array}\right\}$ முக்கோண நடுப்புள்ளித் தேற்றம்

$D\hat{E}X = B\hat{N}C = \frac{\pi}{2}$

$D\hat{L}X = \pi/2$.

∴ DX ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் E யும் L உம் இருக்கும்

இவ்வாறே அவ்வட்டத்தில் F உம் உண்டு

∴ இவ்வட்டம் D, E, F X, L ஊடு செல்வதால் இவ்வாறு Y, M உம் Z, N உம் இவ்வட்டத்தில் இருக்கும்

ஒரு வட்டம் D, E, F, L, M, N, X, Y, Z எனும் ஒன்பது புள்ளிகளினூடு வரையலாம்

$B\hat{P}A = B\hat{C}A$ (வட்டம் CABயின் சுற்றுவட்டம்)

$B\hat{H}L = B\hat{C}A$ (வட்டம் MCLH ன் சுற்றுவட்டம்)

∴ $B\hat{P}A = B\hat{H}L$

∴ $BP = BH$, $PL = HL$

∴ $RL = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2} \times$ ($\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட ஆரை)

இவ்வாறே

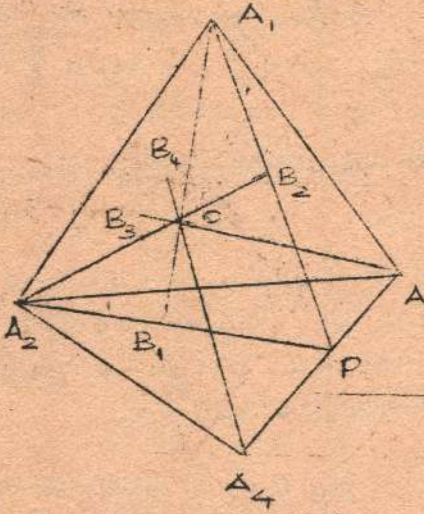
$RM = RN = \frac{1}{2} \times$ ($\triangle ABC$ யின் சுற்றுவட்ட ஆரை)

∴ $RL = RM = RN$

R என்பது மேற்கூறிய ஒன்பது புள்ளி வட்டத்தின் மையம் ஆகும்.

(2) A_1, A_2, A_3, A_4 என்னும் நான்முகியினுள் O யாதுமொரு புள்ளியாகும். கோடுகள் OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 என்பன முறையே முகங்கள் $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ என்பவற்றை B_1, B_2, B_3, B_4 இற் சந்திக்கின்றன. கோடுகள் A_1B_2, A_2B_1 என்பன A_3A_4 என்னும் விளிம்பில் P எனுமொரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனவும் கோடுகள் A_3B_4, A_4B_3 என்பன A_1A_2 என்னும் விளிம்பில் Q எனுமொரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனவும் நிறுவுக. O, P, Q பற்றி யாது கூறுவீர்? காரணங்கள் தருக.

(2)



கோடுகள் A_1B_1, A_2B_2 என்பன O வில் சந்திப்பதால் A_1A_2, B_1B_2 ஒரே தளத்தில் உள்ளன
∴ A_1B_2 வும் A_2B_1 உம் ஒரு புள்ளி P யில் இடைவெட்டும்
எனவே P ஆனது தளம் $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ இரண்டிலும் இருக்க வேண்டும். இவ்வாறே Q ஆனது A_1A_2 இல் இருக்க வேண்டும். P ஆனது A_3A_4 இல் இருக்க வேண்டும்

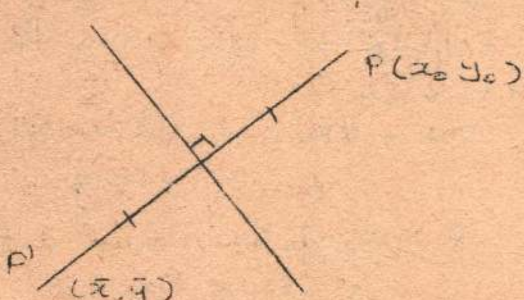
O, P, Q ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்கும்
தளங்கள் A_1A_2P யிலும் A_3A_4Q விலும் O, P, Q இருக்கின்றன
ஆகவே O, P, Q என்பன தளங்களுக்கான பொதுக் கோட்டில் இருக்கும்.

(3) $ax+by+c=0$ என்னும் கோட்டில் (x_0, y_0) என்னும் புள்ளியின் விம்பம் (x_0+at, y_0+bt) என நிறுவுக
இங்கு $t = -2(ax_0+by_0+c)/a^2+b^2$
$l_2 \equiv 3x-4y+5=0$ என்னும் கோட்டில் $l_1 \equiv 2x-y+5=0$ என்னும் கோட்டின் விம்பம் l ஐக் காண்க?
25 சதுர அலகுகளைப் பரப்பளவாகவுடைய சாய்சதுரமொன்று அதன் அயற்பக்கங்கள் l_1 இலும் l இலும் கிடக்குமாறு வரையப்படுகிறது. நான்கு இயல்தகு சாய்சதுரங்கள் உள்ளன எனக் காட்டுக.
l_2 வை ஒரு மூலைவிட்டமாகவுடைய சாய்சதுரங்களின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க?

(3) PP' இன் சாய்வு $= \dfrac{\bar{y}-y_0}{\bar{x}-x_0}$

$\therefore -\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{\bar{y}-y_0}{\bar{x}-x_0} = -1$

$\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{x-x_0}{a} = t$



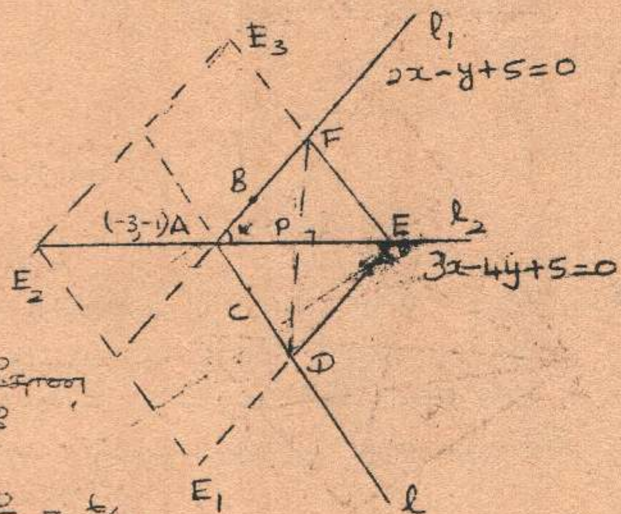
$\bar{y} = y_0 + bt \qquad \bar{x} = x_0 + at$

PP' இன் நடுப்புள்ளி $ax+by+c=0$ இல் இருப்பதால்

$$\frac{a}{2}(x_0+x_0+at)+\frac{b}{2}(y_0+y_0+bt)+c=0$$

$$(a^2+b^2)t = -2[ax_0+by_0+c]$$

$$\therefore\ t = -2[ax_0+by_0+c]/(a^2+b^2)$$



l_1, l_2 வெட்டும் புள்ளி A

$2x-y+5=0$

$\frac{3}{4}x+y+\frac{5}{4}=0$

$\frac{5}{4}x+\frac{15}{4}=0$

$x=-3 \quad y=-1 \qquad A=(-3,-1)$

l_1 இல் ஒருபுள்ளி $B(0,5)$

இதனைக் கருதின் இதன் l_2 மீதான விம்பம் l இல் கிடக்கும்

$$t = -2(3.0-4.5+5) = \frac{30}{25} = 6/5$$

$$C \equiv (0+3t,\ 5-4t) = (18/5,\ 1/5)$$

$\therefore$ AC யின் சமன்பாடு $\quad \dfrac{-1-1/5}{-3-18/5} = \dfrac{y+1}{x+3}$

$$\frac{2}{11} = y+1/x+3$$

$$11y+11 = 2x+6 \qquad 2x-11y-5=0$$

ADEF இன் பரப்பு 25 அலகுகள்

$$\therefore\ 25 = \frac{1}{2}(AE.FP)\,2$$

$$25 = 2AP.PF \qquad \text{ஆனால் } \tan\alpha = \frac{PF}{AP}$$

l_1, l_2 இற்கு இடையேயான கோணம் $\tan\alpha = \dfrac{2-3/4}{1+2.3/4} = 5/10 = 1/2$

$$\frac{1}{2} = PF/AP$$

$$\therefore\ 25 = 2.(2PF).PF$$

$$\therefore\ PF = 5/2 \qquad \therefore\ FD = 5$$

$$\therefore\ AF = 10$$

$E \equiv (e, \frac{3e+5}{4})$ எனின். E, l_2 இல் இருப்பதால்

$$\therefore\ AE \Rightarrow (e+3)^2 + \left(\frac{3e+5}{4}+1\right)^2 = 10^2$$

$$(e+3)^2 + (3e+9)^2/16 = 100$$

$$(e+3)^2\,(25/16) = 100$$

$$e+3 = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \qquad \therefore\ E \equiv [5,5] \quad E_2 \equiv [-11,-7]$$

இவ்வாறு E_1, E_2 ஐயும் காணிக்கலாம். ∴ படத்தில் உள்ள முறையால் 4 சாய்சதுரங்களை வரையலாம்

l_2 ஐ மூலைவிட்டமாக உடைய சாய்சதுரம் $EE_1E_2E_3$ ஆகும்

$EE_1 \Rightarrow 2x-y+\lambda_1=0$

$(5,5)$ $\qquad \lambda_1=-5 \qquad EE_1 \Rightarrow 2x-y=5$

$E_2E_3 \Rightarrow 2x-y+\lambda_2=0$

$(-11,-7)$ $\qquad \lambda_2=15 \qquad E_2E_3 \Rightarrow 2x-y+15=0$

$E_1E_2 \Rightarrow 2x-11y+\mu_1=0$

$(-11,-7)$ $\qquad \mu_1=-55 \qquad E_1E_2 \Rightarrow 2x-11y-55=0$

$E_3E_1 \Rightarrow 2x-11y+\mu_2=0$

$(5,5)$ $\qquad \mu_2=45 \qquad E_3E_1 \Rightarrow 2x-11y+45=0$

(4). $2gg'+2ff'=c+c'$ எனின் மட்டுமே $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$ எனும் வட்டங்கள் நிமிர் கோணங்களில் இடைவெட்டும் என நிறுவுக.

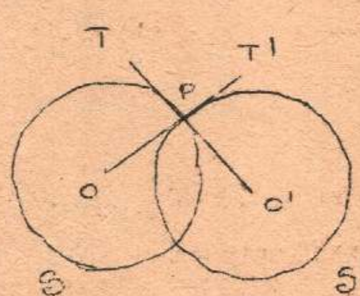
சோடிகளாக எடுக்கும் போது $x^2+y^2-4y-1=0$

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

$x^2+y^2+6x-4y-21=0$

எனும் வட்டங்களின் மூன்று பொதுநாண்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இவற்றின் இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்பதன் மூலம் இவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக. தரப்பட்ட மூன்று வட்டங்களையும் ஒவ்வொன்றாக நிமிர்கோணங்களில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைத் துணிந்து அதன் மையம் மேலேயுள்ள சந்திக்கும் புள்ளியுடன் பொருந்தும் என வாய்ப்பு பார்க்க.

$2gg'+2ff'=c+c'$ எனின்



$[-g-(-g')]^2+[-f-(-f')]^2$

$=(g^2+f^2-c)+(g'^2+f'^2-c')$

$\therefore OO'^2 = OP^2+O'P^2$

$\therefore O\hat{P}O' = \pi/2$ ஆகும்

$O'P$ வட்டம் S இல் புள்ளி P யில் தொடலி.

OP வட்டம் S' இல் புள்ளி P யில் தொடலி

$\therefore$ S, S' நிமிர்கோணங்களில் வெட்டுகின்றன.

மறுதலையாக

நிமிர் கோணத்தில் வெட்டுமெனின்.

$PT' \perp S$ இற்கு P யிலுள்ள தொடலி PT இற்கு

$PT \perp S'$ இற்கு P யில் உள்ள தொடலி PT' இற்கு

∴ S இன் மையம் O ஊடாக PT' உம் S' இன் மையம் O' ஊடாக PT யும் செல்லும்

$$OO'^2 = OP^2 + O'P^2$$

$$(-g+g')^2 + (-f+f')^2 = g^2+f^2-c+g'^2+f'^2-c'$$

$$(-2gg') + (-2ff') = -c-c'$$

$$2gg' + 2ff' = c+c'$$

$$x^2+y^2-6y-1=0 \quad \text{——} (1)$$

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0 \quad \text{——} (2)$$

$$x^2+y^2+6x-4y-21=0 \quad \text{——} (3)$$

பொது நாண்கள் $(S-S'=0)$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow 2x-4y-2=0 \quad \text{——} (4)$$

$$(2)\cap(3) \Rightarrow -8x+2y+22=0 \quad \text{——} (5)$$

$$(1)\cap(3) \Rightarrow -6x-2y+20=0 \quad \text{——} (6)$$

$$(4) \Rightarrow x-2y-1=0$$

$$(5) \Rightarrow 4x-y-11=0$$

$$(6) \Rightarrow 3x+y-10=0$$

$(5)\cap(6) \Rightarrow (3,1)$ $\quad$ $(4)\cap(6) \Rightarrow (3,1)$ $\quad$ $(5)\cap(4) \Rightarrow (3,1)$

∴ மூன்று பொதுநாண்களும் $(3,1)$ இல் சந்திக்கும்

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \text{————} (\alpha)$$

$$2gg'+2ff' = c+c'$$

$$(\alpha)\cap(1) \Rightarrow 0-2\cdot 3f = c-1 \longrightarrow (7) \Rightarrow 6f = 1-c$$

$$(\alpha)\cap(2) \Rightarrow -2g-2f = c+1 \longrightarrow (8) \Rightarrow 2g+2f = -c-1$$

$$(\alpha)\cap(3) \Rightarrow 6g-4f = c-21 \longrightarrow (9) \Rightarrow 6g-4f = c-21$$

$$\left.\begin{aligned}(8)\cap(7) &\Rightarrow 2g-4f=-2\\ (7)\cap(9) &\Rightarrow 6g+2f=-20\end{aligned}\right\}$$

$$14g = -42$$

$$g = -3$$

$$f = -1 \qquad c = 7$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-6x-2y+7=0$

இதன் மையம் $(3,1)$

நாண்கள் சந்திக்கும் புள்ளியும் இதன் மையமும் ஒரே புள்ளியாகும்.

(5) $lx+my+n=0$ எனும் நேர்கோடு $\alpha m^2+\beta l^2+ln=0$ ஆயின் மட்டுமே $y^2=4\alpha(\beta-x)$ எனும் பரவளைவைத் தொடும் என நிறுவுக. இங்கு α,β என்பன தனிமைகள்

புள்ளிகள் $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$ என்பன PQ ஆனது
இயக்கிய புள்ளி $(a, 0)$ ஊடாக செல்லுமாறு பரவளைவு
$S \equiv y^2 - 4ax = 0$ மீதுள்ள மாறும் புள்ளிகளாகும்.
P யிலும் Q விலுமுள்ள செவ்வன்கள் $S = 0$ ஐ
மீண்டும் முறையே $R(ar^2, 2ar)$, $T(at^2, 2at)$ யில்
சந்திக்கின்றன

(i) $pq = -1$

(ii) $p + q = r + t$

(iii) $2(r+t)^2 + rt + 9 = 0$ எனக்காட்டுக

RT என்பது பரவளைவு $y^2 = 32a(9a - x)$ ஐத்
தொடும் என உய்த்தறிக

(5) $lx + my + n = 0$ ஆனது
$y^2 = 4\alpha(\beta - x)$ இன் தொடலியின்
$\Longleftrightarrow ly^2 = 4\alpha(l\beta + my + n)$ இன் தன்மைகாட்டி
பூச்சியமாகும்.

$\Longleftrightarrow ly^2 - mxy - 4\alpha(l\beta + n) = 0$

$\Longleftrightarrow (-4m\alpha)^2 + 4 \cdot l \cdot 4\alpha(l\beta + n) = 0$

$\Longleftrightarrow m^2\alpha + l(l\beta + n) = 0$

$\Longleftrightarrow m^2\alpha + l^2\beta + ln = 0$

(i) PQ இன் சமன்பாடு $\dfrac{y - 2ap}{x - ap^2} = \dfrac{2ap - 2aq}{ap^2 - aq^2} = \dfrac{2}{p+q}$

$(a, 0)$ இனூடு செல்லுமாயின்

$$\frac{0 - 2ap}{a - ap^2} = \frac{2}{p+q}$$

$$-2ap^2 - 2apq = 2a - 2ap^2$$

$$pq = -1$$

(ii) P யில் தொடலியின் சாய்வு $= \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_P = \dfrac{2a}{2ap} = \dfrac{1}{p}$

P யில் செவ்வனின் சாய்வு $= -p$

P யிலுள்ள செவ்வனின் சாய்வு = PR இன் சாய்வு

$$-p = \frac{2}{p+r} \qquad \Rightarrow \quad p + r = -2/p$$

இவ்வாறு, $-q = \dfrac{2}{q+t} \qquad \Rightarrow \quad q + t = -2/q$

$$p + q + r + t = -2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$= \frac{-2}{pq}(p+q)$$

$$\therefore\ p+q+r+t = \frac{-2}{-1}(p+q)$$

$$r+t = p+q \ //$$

(iii) $$p+r = -2/p$$

$$r = -\frac{(2+p^2)}{p}$$

$$r.t = \left[-2\frac{(2+p^2)}{p}\right] \times \left[-\frac{(2+q^2)}{q}\right]$$

$$= \frac{(2+p^2)(2+q^2)}{pq}$$

$$= \frac{4+2p^2+2q^2+p^2q^2}{-1}$$

$$-r.t = 4+2(p^2+q^2)+1$$

$$= 5+2[(p+q)^2-2pq]$$

$$= 5+2[(r+t)^2+2]$$

$$= 9+2(r+t)^2$$

$$rt+2(\cancel{r}+t)^2+9=0$$

RT தொடுகோடாயின் $\alpha m^2+\beta l^2+ln=0$ ஆக வேண்டும்

$$\alpha m^2+\beta l^2+ln = 8a(r+t)^2+9a\cdot4+2\cdot2art$$

$$= 4a[2(r+t)^2+9+rt]$$

$$= 4a\cdot0 = 0$$

$\therefore$ RT $y^2=32(9a-x)$ இன் தொடலி

(6) $S \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $(a>b)$ எனும் நீள்வளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளி P(a கோசை θ, b சைன் θ) யிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
$S=0$ இற்கு P_1(a கோசை θ_1, b சைன் θ_1), P_2(a கோசை θ_2, b சைன் θ_2). எனும் புள்ளிகளிலுள்ள தொடலிகளின் இடைவெட்டும் புள்ளி Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(1) $\theta_1+\theta_2 =$ ஒருமையாகுமாறு புள்ளிகள் P_1 உம் P_2 உம் $S=0$ மீது மாறும் எனின் Q வின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடு எனக் காட்டுக

(2) $x^2+y^2=b^2$ எனும் வட்டத்தை P_1P_2 தொடுமாறு புள்ளிகள் P_1 உம் P_2 உம் $S=0$ மீது மாறும் எனின் Q வின் ஒழுக்கு
$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{b^2}$ எனும் நீள்வளையம் எனக் காட்டுக

(6.) $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ இல் தொடலி

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

$$y - b\sin\theta = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x - a\cos\theta)$$

$$x/a\cos\theta + y/b\sin\theta = 1$$

$P_1 \Rightarrow$ தொடலி $\quad x/a\cos\theta_1 + y/b\sin\theta_1 = 1$ ——— (1)

$P_2 \Rightarrow$ " $\quad x/a\cos\theta_2 + y/b\sin\theta_2 = 1$ ——— (2)

$$\frac{x}{\frac{\sin\theta_1}{b} - \frac{\sin\theta_2}{b}} = \frac{-y}{\frac{\cos\theta_2}{a} - \frac{\cos\theta_1}{b}} = \frac{1}{\frac{1}{ab}\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

$$x = \frac{b\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}, \quad y = \frac{b\sin(\theta_1+\theta_2)/2}{\cos(\theta_1-\theta_2)/2}.$$

$$Q \equiv \left[\frac{a\cos(\theta_1+\theta_2)/2}{\cos(\theta_1-\theta_2)/2}, \frac{b\sin(\theta_1+\theta_2)/2}{\cos(\theta_1-\theta_2)/2}\right]$$

$Q \equiv (x_0, y_0)$ எனக.

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{a[\cos(\theta_1+\theta_2)/2]}{b[\sin(\theta_1+\theta_2)/2]}$$

$$y_0 = b/a \tan\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) x_0$$

அதாவது $\theta_1+\theta_2 =$ மாறிலி

$\therefore y_0 = x_0 m$ இங்கு m மாறிலி

$$m = \frac{b}{a}\tan\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

Q இன் ஒழுக்கு $y = mx$ எனும் நேர்கோடு ஆகும்

P_1P_2 இன் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \cos\theta_1-\theta_2$ ——— (1)

P_1P_2 $x^2+y^2=b^2$ இன் (x_1, y_1) இல் தொடலி எனக.

$\therefore P_1P_2 \Rightarrow xx_1 + yy_1 = b^2$ ——— (2)

(1), (2) ஒரே நேர்கோட்டை குறிக்கும்.

$$\frac{x_1}{\frac{1}{a}\cos(\theta_1+\theta_2)/2} = \frac{y_1}{\frac{1}{b}\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} = \frac{b^2}{\cos(\theta_1+\theta_2)/2}$$

$$x_1 = \frac{b^2}{a}\,\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)/2}{\cos(\theta_1-\theta_2)/2} \qquad y_1 = \frac{b\sin(\theta_1+\theta_2)/2}{\cos(\theta_1-\theta_2)/2}$$

$$x_1 = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{x_0}{a} = \frac{b^2}{a^2}x_0 \qquad y_1 = y_0$$

$$x_1^2 + y_1^2 = b^2 \Rightarrow \frac{b^4}{a^4}x_0^2 + y_0^2 = b^2$$

Q இன் ஒழுக்கு $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{b^2}$ எனும் நீள்வளையம்

(7) ஒரு $lx+my+n=0$ செவ்வக அதிபரவளைவு $xy=c^2$ ஐ A,B யில் இடைவெட்டுகின்றது. AB ஐ விட்டமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+\frac{n}{l}x+\frac{n}{m}y+c^2\left(\frac{l}{m}+\frac{m}{l}\right)=0$ எனக்காட்டுக.

இவ்வட்டம் அதிபரவளைவை மீண்டும் C, D யில் சந்திப்பின் CD யின் சமன்பாட்டைக் காண்க. AB ஒரு நிலையான புள்ளி (h,k) யினூடாகச் செல்லுமெனின் AB யினதும் CD யினதும் இடைவெட்டும் புள்ளி $x^2-y^2=hx-ky$ எனும் அதிபரவளைவின் மீது கிடக்குமெனக் காட்டுக.

[$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ என்பன $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ இன் மூலங்கள் எனின் $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a}$ எனவும் $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=\frac{e}{a}$ எனவும் நீர் எடுத்துக் கொள்ளலாம்]

[7] $lx+my+n=0$ $\qquad xy=c^2$

$A\equiv(ct_1, c/t_1)$ $\qquad B\equiv(ct_2, c/t_2)$ என்க

$$lct_1+m\,c/t_1+n=0$$

$$lct_1^2+nt_1+mc=0$$

$$t_1+t_2=-n/lc \qquad t_1t_2=\frac{mc}{lc}=m/l$$

AB ஐ விட்டமாக உடைய வட்டம்

$$\frac{y-c/t_1}{x-ct_1}\times\frac{y-c/t_2}{x-ct_2}=-1$$

$$\left[y^2-y\left(\frac{c}{t_1}+\frac{c}{t_2}\right)+\frac{c^2}{t_1t_2}\right]-\left[x^2-xc(t_1+t_2)+c^2t_1t_2\right]=0$$

$$x^2+y^2+\frac{n}{l}x+y\frac{n}{l}\cdot\frac{l}{m}+\frac{c^2}{m/l}+c^2\frac{m}{l}=0$$

$$x^2+y^2+\frac{n}{l}x+\frac{n}{m}y+c^2\left[\frac{l}{m}+\frac{m}{l}\right]=0$$

$xy=c^2$ உடன் வட்டம் இடைவெட்டும் புள்ளிகள் C, D ஐ முறையே $(t_3)C$, $(t_4)D$ என்க

$$(ct)^2+\left(\frac{c}{t}\right)^2+\frac{nct}{l}+\frac{n}{m}\frac{c}{t}+c^2\frac{(l^2+m^2)}{lm}=0$$

$$ct^4+\frac{nt^3}{l}+\frac{(l^2+m^2)}{lm}ct^2+\frac{n}{m}t+c^2=0$$

$$t_1+t_2+t_3+t_4=\frac{-n}{lc} \qquad t_1t_2t_3t_4=1$$

$$t_3+t_4=\frac{-n}{lc}+\frac{n}{lc}=0 \Rightarrow t_3=-t_4$$

$$t_3t_4=l/m$$

$$CD \Rightarrow \frac{y - c/t_3}{x - ct_3} = \frac{c\left(\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_3}\right)}{c\left(\frac{1}{t_3} - t_3\right)}$$

$$\left(y - c/t_3\right) / \left(x - ct_3\right) = \frac{-1}{t_3 t_4}$$

$$t_3 t_4 y - c/t_3 \; t_3 \cdot t_4 + x - ct_3 = 0$$

$$x + \frac{l}{M} y - (t_3 + t_4) c = 0$$

$$\Rightarrow CD \Rightarrow ly + mx = 0$$

AB நிலையான புள்ளி (h,k) இனூடு செல்வதால்

$$lh + mk + n = 0$$

AB, CD இடைவெட்டும் புள்ளி (x_0, y_0) என்க.

$$lx_0 + my_0 + n = 0 \quad \text{——— (1)}$$

$$mx_0 + ly_0 = 0 \quad \text{——— (2)}$$

$$(1) \times x_0 \Rightarrow lx_0^2 + my_0 x_0 + nx_0 = 0$$

$$(2) \times y_0 \Rightarrow mx_0 y_0 + ly_0^2 + 0 = 0$$

$$l = \frac{-nx_0}{x_0^2 - y_0^2} \qquad m = \frac{ny_0}{x_0^2 - y_0^2}$$

$$-nx_0 h / (x_0^2 - y_0^2) + kny_0 / (x_0^2 - y_0^2) + n = 0$$

$$x_0^2 - y_0^2 - x_0 h + ky_0 = 0$$

∴ புள்ளியின் ஒழுக்கு $x^2 - y^2 = xh - yk$

(8) (1) 6 தான் $2\theta - 3$ தான் $\theta - 5$ கோதா $\theta = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

(2) சைன் $2x = 2t/(1+t^2)$, கோசை $2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ என நிறுவுக. இங்கு $t =$ தான் x

சைன் $\theta +$ சைன் $\phi = a$, கோசை $\theta +$ கோசை $\phi = b$ எனின் கோசை$(\theta+\phi)$ கோசை$(\theta-\phi)$ என்பவற்றின் பெறுமதிகளை a, b யின் உறுப்புக்களிற் காண்க.

$$\text{தான் } \theta + \text{தான் } \phi = \frac{8ab}{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2} \text{ எனக் காட்டுக}$$

(8) $6 \tan 2\theta - 3 \tan \theta - 5 \cot \theta = 0$

$$6 \; \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} - 3 \tan \theta - \frac{5}{\tan \theta} = 0$$

$$12 \tan^2 \theta - 3 \tan^2 \theta + 3 \tan^4 \theta - 5 + 5 \tan^2 \theta = 0$$

$3\tan^4\theta - 14\tan^2\theta - 5 = 0$

$(3\tan^2\theta - 1)(\tan^2\theta + 5) = 0$

$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$ $\qquad\qquad$ $\tan^2\theta = -5$

$\tan\theta = \pm 1/\sqrt{3}$ $\qquad\qquad$ பொருந்தாது

$\tan\theta = \pm\tan 30$

$\theta = \pm\tan n\pi \pm \pi/6$

$\sin 2x = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\tan x}{\tan^2 x + 1}$

$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

$\sin\theta + \sin\phi = a$ ——— (1)

$\cos\theta + \cos\phi = b$ ——— (2)

$(1) \Rightarrow 2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} = a$

$(2) \Rightarrow -2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2} = b$

$\tan\frac{\theta+\phi}{2} = a/b$

$\sin\theta+\phi = \frac{2a/b}{1 + a^2/b^2}$ $\qquad$ $\cos\theta+\phi = \frac{1 - a^2/b^2}{1 + a^2/b^2}$

$\sin\theta+\phi = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ $\qquad$ $\cos\theta+\phi = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$

$(1)^2 \Rightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta\sin\phi + \sin^2\phi = a^2$

$(2)^2 \Rightarrow \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos\phi + \cos^2\phi = b^2$

$1 + 2[\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi] + 1 = a^2 + b^2$

$\cos(\theta - \phi) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$

$\tan\theta + \tan\phi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$

$= 2[\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi]/2\cos\theta\cos\phi$

$= 2\sin(\theta+\phi)/\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)$

$= \frac{4ab/a^2+b^2}{\left[\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2-2}{2}\right]}$

$= 8ab/2(b^2-a^2) + (a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)$

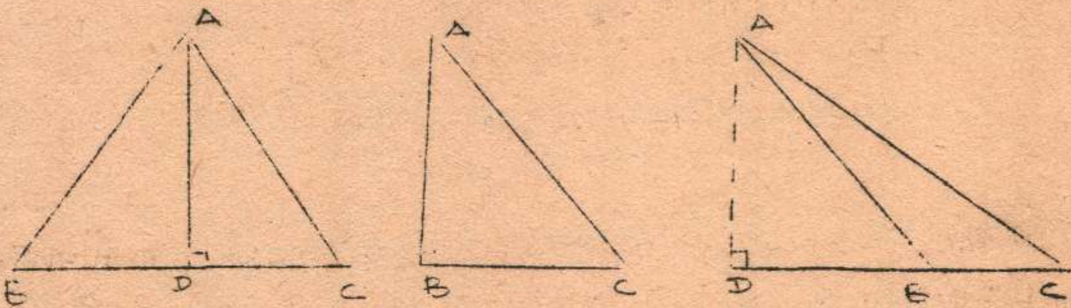
$= 8ab/(a^2+b^2)^2 - 4a^2$

7(a) வழமையான குறியீடுகளுடன் முக்கோணி ABC யில் $\frac{a}{\text{சைன்} A} = \frac{b}{\text{சைன்} B} = \frac{c}{\text{சைன்} C}$ என நிறுவுக

(1) $a = (b-c)$ கோசை $\frac{A}{2}$ கோசீக $\frac{B-C}{2}$

(2) கோதா $\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{b-c}$ தான் $\frac{A}{2}$ எனப்பெறுக

(a)



$$AD = AB \sin B = AC \sin C$$

$$c \sin B = b \sin C$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

இவ்வாறே $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

(i) $a = (b-c) \cos A/2 \operatorname{cosec} \frac{B-C}{2}$

$$\frac{a}{b-c} = \frac{k \sin A}{k \sin B - k \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B - \sin C}$$

$$= 2 \sin A/2 \cos A/2 \Big/ 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos A/2 \Big/ 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= \cos A/2 \operatorname{cosec} \frac{B-C}{2}$$

$$a = (b-c) \cos A/2 \operatorname{cosec} \frac{B-C}{2}$$

(ii) $\frac{b+c}{b-c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}$

$$= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \Big/ 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}$$

$$= \tan \frac{B+C}{2} \cdot \cot \frac{B-C}{2}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \cot A/2 \cdot \cot \frac{B-C}{2}$$

$$\cot \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{b-c} \tan A/2$$

$$a^2 = (b-c)^2 \cos^2 \tfrac{A}{2} \operatorname{cosec}^2 \tfrac{B-C}{2}$$
$$= (b-c)^2 \cos^2 \tfrac{A}{2}\left[1+\left(\tfrac{b+c}{b-c}\right)^2 + \tan^2 \tfrac{A}{2}\right]$$
$$= (b-c)^2 \cos^2 \tfrac{A}{2} + (b+c)^2 \sin^2 \tfrac{A}{2}$$
$$= b^2+c^2-2bc\left[\cos^2 \tfrac{A}{2} - \sin^2 \tfrac{A}{2}\right]$$
$$= b^2+c^2-2bc\cos A.$$

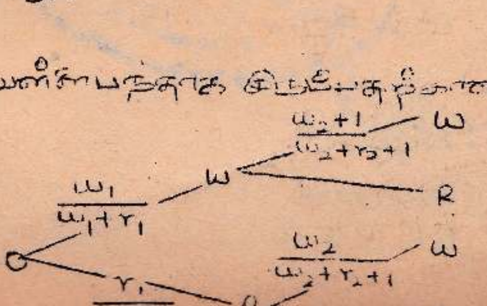
(10) (1) ஒரு கூடை w வெள்ளைப் பந்துகளையும் r சிவப்புப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. கூடையில் இருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அப்பந்து வெள்ளையாகவிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு கூடை w_1 வெள்ளைப்பந்துகளையும் r_1 சிவப்புப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. இரண்டாவது கூடை w_2 வெள்ளைப் பந்துகளையும் r_2 சிவப்புப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. முதலாம் கூடையிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாகத் தெரியப்பட்டு இரண்டாம் கூடையில் வைக்கப்படுகிறது. அப்பொழுது இரண்டாம் கூடையில் இருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் எனின் அப்பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{w_1 + w_2(w_1+r_1)}{(w_1+r_1)(w_2+r_2+1)}$$ எனக் காட்டுக.

(2) ஒரு மனிதனிடமுள்ள ஐந்து வெவ்வேறு சாவிகளில் ஒன்று மட்டுமே ஒரு கதவைத் திறக்கும். அவன் கதவைத் திறக்கச் சாவிகளை எழுமாற்றாக எடுக்கிறான், திருப்பியிடாது திறப்புகளை அவன் நீக்குகிறான் எனின் அவனது எத்தனிப்புக்களின் எண்ணிக்கையின் சராசரியையும் மாற்றிறனையும் காண்க.

(11) (1) {வெள்ளைபந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு} $= \frac{w}{w+r}$



P {இரண்டாம் பையில் இருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்து எடுத்தல்]

$$= \frac{w_1}{w_1+r_1} \cdot \frac{w_2+1}{w_2+r_2+1} + \frac{r_1}{w_1+r_1} \cdot \frac{w_2}{w_2+r_2+1}$$

$$= \frac{w_1w_2 + w_1 + r_1w_2}{(w_1+r_1)(w_2+r_2+1)} = \frac{w_1 + w_2(r_1+w_1)}{(w_1+r_1)(w_2+r_2+1)}$$

(ii) முயற்சி செய்யும் முறைகளின் எண்ணிக்கையை X என்க

∴ X இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் $X = 1, 2, 3, 4, 5$

$P(x=1) = 1/5$ [∵ பிரதியீடுகள் நீக்கப்படுகின்றன

$P(x=2) = 4/5 \cdot 1/4 = 1/5$

$P(x=3) = 4/5 \cdot 3/4 \cdot 1/3 = 1/5$

$P(x=4) = 4/5 \cdot 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/5$

$P(x=5) = 4/5 \cdot 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 \cdot 1/1 = 1/5$

$$Ex(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i \quad P(x=x_i)$$

$$= 1 \times 1/5 + 2 \cdot 1/5 + 3 \cdot 1/5 + 4 \cdot 1/5 + 5 \cdot 1/5$$

$$= \frac{1}{5}(1+2+3+4+5)$$

$$= 3$$

$$V_{(x)} = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x)^2 = \sum_{i=1}^{5} x^2 \quad P(X=x)$$

$$= \frac{1}{5}[1+4+9+16+25]$$

$$= \frac{1}{5} \times 55$$

$$= 11$$

$$\therefore V_{(x)} = 11 - 9$$

$$= 2 //$$

JE YA

xxxxxxxxx

* END *