தேசிய உயர் கல்விச் சான்றிதழுக்குரிய

கணிதம்

முதலாம் பாகம்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

தேசிய உயர் கல்விச் சான்றிதழ்ப் பரீட்சைக்குரியது MAT 02

~~கணி - 22~~

~~1074~~

கணிதம்

முதலாம் பாகம்

பேராசிரியர் சி. ஆர். குலதிலக
BSc. (இலங்கை), M.A. (கேம்பிறிட்ஜ்)

கலாநிதி சி. யோகச்சந்திரன்
B.Sc. (சிறப்பு, இலங்கை), Ph.D. (லண்டன்)

ஏ. ஜே. குணவர்த்தன
B.A. (இலங்கை), Dip.in Ed. (இலங்கை),
Dip.in Ed. (ஹல்)

எல். ஏ. தேவேந்திர
B.Sc. (இலங்கை), Dip. in Ed. (இலங்கை)

எம். ஜே. பற்றி
B.Sc. (லண்டன்), A.F.I.M.A.

1617

முதற் பதிப்பு 1976

510

தேசிய உயர் கல்விச் சான்றிதழ்ப் பரீட்சையின் விஞ்ஞானப் பாடநெறிக்கும் சமூக விஞ்ஞானப் பாடநெறிக்குமுரிய கணித பாட விதானத்துக்குப் பொருந்தும் வகையில் ஆக்கப்பட்டது.

கல்வி வெளியீ[illegible] திணைக்க[illegible]
கட்டுபெத்[illegible]
அச்சிடு[illegible]

MAT 02

ஆங்கில மூலநூல்

ஆக்கியோர்:	எம். ஜே. பற்றி	(பாடவிதான அபிவிருத்தி நிலையக் கணித ஆலோசகர்)
	அவர்களுடன் ஏ. ஜே. குணவர்த்தன	(பிரதம கல்வி அலுவலர்) அதிகாரம் 1.
	சி. ஆர். குலதிலக	(இலங்கைப் பல்கலைக்கழகத்து வித்தியாலங்கார வளாகத் தலைவரும் கணிதப் பேராசிரியரும்)
	[உதவி: ரி. ருேஹண]	அதிகாரம் 2, 3.
	எல். ஏ. தேவேந்திர	(மஹறகம அரசினர் ஆசிரிய கலாசாலை அதிபர்) அதிகாரம் 4.
	சி. யோகச்சந்திரன்	(இலங்கைப் பல்கலைக்கழகத்துப் பேராதனை வளாகச் சிரேட்ட கணித விரிவுரையாளர்)
	அவர்களுடன் எம். ஜே. பற்றி	அதிகாரம், 5. 6.
பதிப்பாசிரியர்:	எம். ஜே. பற்றி அவர்களுடன் ஜி. ஏ. எஸ். குணசேகர [உதவி: சின்னத்தங்கம் பரமநாதன், டன்ஸ்ரன் ஏ. பெரேரா, எஸ். பாலயோகன், எஸ். மெத்தானந்த, என். ஜே. யோகரத்தினம், பி. சில்வா]	
தமிழ் மொழிபெயர்ப்பு:	திருமதி சி. பரமநாதன் திருமதி ப. செல்வராஜா	
தமிழ்ப் பதிப்பாசிரியர்:	இ. முருகையன்	
சித்திரம்:	எட்கா பெரேரா, பால பீரிஸ்	
சரவைத் திருத்தம்:	கே. விக்கினேஸ்வரர், வே. சங்கரசிகாமணி	

1617

முகவுரை

சிரேட்ட துணைக்கல்வி நிலையில் 10, 11 ஆம் தரங்களிலே கற்பிக்கப்படும் ஈராண்டுப் பயிற்சிநெறி, இன்றைய அரசாங்கம் புகுத்தியுள்ள கல்விச் சீர்திருத்தங்களில், மூன்ருவது படியாக அமைகிறது. இந்நெறியைப் பயின்று முடித்த மாணவர் தேசிய உயர் கல்விச் சான்றிதழ்ப் பரீட்சைக்குத் தோற்றத் தகுதியுடையவராவர்.

இப்பயிற்சிநெறி மூன்று பிரிவுகளைக் கொண்டது. அவையாவன:—

(அ) கட்டாய பாடங்கள்.

(ஆ) விருப்புநெறிப் பாடங்கள்.

(இ) திட்டவேலை.

சிரேட்ட துணைக் கல்வி நிலைக்குரிய புதிய பாடவிதானம் 59 இற்கும் கூடுதலான பாடங்களைக் கொண்டது. இப்பாடங்களைப் பயிலும்போதும் பயிற்றுவிக்கும்போதும், மாணவரும் ஆசிரியரும் எதிர்நோக்கத்தக்க இடர்ப்பாடுகள் சிலவற்றைத் தவிர்க்குமுகமாக, பல்வகைப் பாடத்துறைகளிலும் சிறந்து விளங்கும் அறிஞர்களின் உதவியுடன், பாடநூல்கள் தொகுக்கப்பட்டு வருகின்றன. இந்நூல்களைத் தவணைக்குத் தவணை நியாயமான விலைகளில் மாணவருக்குக் கிடைக்கச் செய்யும் வகையில், முறைமையான திட்டமொன்று மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. இவற்றை விசேட பாடநூல்களாகத் தொகுத்து வெளியிடவும் கருதப்பட்டுள்ளது.

கடந்த காலத்தில் மொழிக்கும் இலக்கியத்துக்குமே பாடநூல்கள் விதிக்கப்பட்டு வந்தன. புதிய பாடவிதானம் பழையதிலிருந்து முற்றும் வேறுபட்டதாக இருப்பதால், மாணவருக்கும் ஆசிரியருக்கும் ஒருங்கே வழிகாட்டிகளாக அமையத்தக்க நூல்களைத் தயாரிக்கவேண்டிய தேவை ஏற்பட்டுளது என்பதை யாவரும் ஒப்புக்கொள்வர்.

சிரேட்ட துணைக்கல்வி நிலைக்கெனக் குறித்த நூல்களை வெளியிடத் தேவையில்லை என்பது பொதுவாக ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. உலகின் மொத்த அறிவானது ஐந்தாறு ஆண்டுகளுக்குள்ளேயே இருமடங்காகிவிடுகிறதென நம்பப்படுகின்றது. எனவே எந்தப் பாடநூலும், அஃது எத்துணை முழுமையாகத் தொகுக்கப்பட்டாலும், சில வருடங்களிலே வழக்கிழந்து போகலாம். உயர்கல்விக்கு ஆயத்தப்படுத்தும் மாணவர் தங்கள் அறிவு வளர்ச்சிக்குத் தனியே, ஒரு நூலை மட்டும் நம்பியிருப்பதைத் தவிர்த்து, நூல் நிலையங்களைப் பயன்படுத்திப் பிற நூல்கள், புதினத்தாள்கள், சஞ்சிகைகள் ஆகியவற்றையும் வாசித்துத் தமது அறிவை விரிவாக்கிக்கொள்ளவேண்டுமெனப் பெரும்பாலான நாடுகளிலுள்ள கல்விமான்கள் எதிர்பார்க்கின்றனர். ஆகவே, மாணவர் தாமாகவே மேற்கொள்ள வேண்டிய விசேட பணியொன்று யாதெனில், நூல்கள், சஞ்சிகைகள் வாயிலாகத் தமது அறிவை விருத்தி செய்து கொள்ளலாகும். எனினும், அவ்வாருன நூல்களையும் சஞ்சிகைகளையும் பெறுவதில் எமது மாணவருக்குள்ள இடர்ப்பாடுகளைக் கருத்திற்கொண்டே இந்நூல்களைத் தயாரிப்பதற்கான நடவடிக்கைகள் எடுக்கப்பட்டன என்பதை ஈண்டு விசேடமாகக் குறிப்பிடவேண்டும்.

குறித்த பாடங்கள் சிலவற்றைப் பொறுத்த மட்டில், விரிவான பாடத் திட்டங்களும் நூற்பட்டியல்களும் பாடசாலைக்கு ஏலவே அனுப்பப்பட்டுள்ளன. பாடசாலை நூல்நிலையங்களை விருத்தி செய்வதற்காக, இந்நிலைக்குரிய கல்விக்குத் தேவையான நூல்கள் இவ்வாண்டிலும் கடந்த ஆண்டிலும் மேற்படி நூல்நிலையங்கட்கு அளிக்கப்பட்டுள்ளன. அத்துடன், ஆசிரியருக்குச் சேவையிடைப் பயிற்சியொன்றும் அளிக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்நூல்கள்பற்றித் தங்கள் ஆலோசனைகளும் விமரிசனங்களும் உவந்து ஏற்றுக்கொள்ளப்படும். இறுதி நூலை வெளியிடுதற்குத் தயாரிக்கும்போது தங்கள் ஆலோசனைகட்கு விசேட கவனம் செலுத்தப்படும். தங்கள் ஆலோசனைகளையும் கருத்துகளையும் கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளருக்கு அனுப்புவீர்களாயின், நாம் நன்றியுடையராவோம்.

பிழை திருத்தம்

பக்கம்	இடம்	பிழை	திருத்தம்
121	உரு 4.8	$P(x, y), x, y$	$P(-x, -y), -x, -y$
125	உரு 4.15	y	$-y$
	உரு 4.16	x, y	$-x, -y$
126	உரு 4.17	y	$-y$
	உரு 4:18	$x, y, 130^\circ$	$-x, -y, -130^\circ$
127	உரு 4.19	(MO இற்கு வரும்) x	$-x$
137	8ஆம் வினா	விரிவாக்குக	விரிவாக்கி அட்டவணை 4.4 எனப் பெயரிடுக.
142	உரு 4.36	θ	α
150	உரு 4,45	(இடது ஓரத்தில்) $-\frac{\pi}{2}$	-2π
164	உரு 4.57	p^2+1	$\sqrt{p^2+1}$
184	உரு 4.66	(கீழ்உள்ள) H	H'
207	உரு 5.14	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
208	உரு 5.15	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
212	உரு 5.81	உரு 5·81	உரு 5.18
216	உரு 5.25	$y = x$	$y = \|x\|$
231	உரு 5.35	$P(-a, b)$	$P'(-a, b)$

பக்கம் 20, பிரிவு 6.3, வரி 8—

'$n-1$' $= \{\ldots -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \ldots\}$ என வருதல் தன்று.

பக்கம் 20, இறுதி வரியில் n^2-n+1 என்பதை 'n^2-2n+1' ஆக்குக.

இந்த நூல் பற்றி......

புதிய பத்தாந்தரக் கணித பாடநூலின் முதல் ஆறு அதிகாரங்களும் இதில் உண்டு. தே.உ.க.சா. பாடவிதானத்தில், தூய கணிதம் பிரயோக கணிதம் என்னும் பாகுபாடு இல்லை. ஆதலால், 10—11 ஆம் தரத்துக் கணிதப் பயிற்சிநெறி தனியொரு பாடமாக அமைகிறது. 10 ஆம் தரத்துக்குரிய இறுதி நூலின் நோக்கம், இத்தரத்து மாணுக்கனுக்கு வேண்டிய கணிதம் முழுவதையும் வழங்குவதேயாம். அத்துடன், மேலதிக பாடப்பகுதிகள் சிலவும் இந்நூலில் உள. இவை பத்தாந் தரத்துப் பயிற்சிநெறியில், இல்லாதனவாயினும், இவற்றை இங்கு சேர்த்துக்கொள்ளுதல் பொருத்தமும் தகுதியுமாகும் என எண்ணுகிறேம். உதாரணமாக, புத்தகத்தின் தொடக்கத்தில், 'தொடர்புகளும் படமாக்கல்களும்' என்னும் அதிகாரம் உள்ளது. இது பத்தாந்தரப் பயிற்சிநெறியில் அடங்காத பகுதி எனினும், மூன்றும் அதிகாரத்தில் வரும் சுட்டிகளையும் மடக்கைகளையும் முழுமையான நல்விளக்கத்தோடு அணுகுதற்கும், ஆறும் அதிகாரத்தில் வரும் வகையீட்டை நன்கு விளங்கிக்கொள்ளுதற்கும் மேற்படி பகுதி இன்றியமையாதது ஆகும். இந்நூலின் முதலாம் அதிகாரமே நூலின் பிற பகுதிகளுக்கு அடித்தளமாக அமைகிறது. தொடர்புகளும் படமாக்கல்களும் என்னும் கருத் திரண்டும் நூல் முழுதும் இழையோடிச் செல்கின்றன. இப்பாடத்தின் ஒன் றிணைந்த புதுநெறியை இவை சுட்டி நிற்கின்றன. இவற்றையும், இவைபோன்ற இணை கருத்துகளையும் பயன்படுத்தி, தனித்தனியானவை என முன்னர் எண்ணப் பட்டுவந்த பாடப்பகுதிகளிடையே உள்ள நெருங்கிய உறவுகளை அழுத்திக்காட்ட முயன்றுள்ளோம். உதாரணமாக, தொடரி என்பது பின்னகமான ஆட்சியொன்றி லிருந்து ஓர் இணை ஆட்சிக்குச் செல்லும் படமாக்கலாம். அதனல் அது பின்னக மான புள்ளித் தொடையொன்றை ஆக்குகிறது ஆனல், வரைபொன்றில் வழமையாக வருவதோ ஒரு தொடர்ச்சியான ஆட்சியாகையால், அங்கு தொடர்ச்சியான வளையி ஒன்று பெறப்படுகிறது.

இந்நூலில் வரும் விடயங்கள் சில, வழமையான பாடவிதானத்துடன் மட்டும் பழக்கப்பட்டவர்களுக்குப் புதியனவாக இருக்கும். ஆசிரியர் தாமே படித்தறிய வேண்டிய பகுதிகள் அவை. நிகழ்தகவும் புள்ளிவிபரவியலும் அத்தகைய விடயங்கள். நவீன தொழினுட்பவியற் சமுதாயத்தில் இவற்றின் முக்கியத்துவம் அதிகரித்து வருகிறது. இவ்விடயங்களின்பாலும் ஏனைய புது விடயங்களின்பாலும் மாணுக்கரும் ஆசிரியரும் தக்க கவனஞ் செலுத்துவர் என நம்புகிறேம்.

ஒவ்வோர் அதிகாரமும் நாம் எதிர்பார்த்ததைவிட நீண்டுவிட்டது. எடுத்துக்கொண்ட பொருளைப் பரிபூரணமாகக் கையாளல் வேண்டும் என்னும் விருப்பமும் ஒன்பதாந் தரத்து முன்னறிவுடன் இணைத்துக் காட்டும் நாட்டமுமே இந் நீட்சிக்குக் காரணமாகும். எனினும், ஆங்காங்கே இடைவெளிகளும் குறைபாடுகளும் இருத்தல் கூடும். நூலைப் பயன்படுத்துவோர் இவற்றை வெளியீட்டாளர்க்குத் தெரிவிப்பர் என நம்புகிறேம். அதிகாரங்கள் நீண்டு போனமைக்கு மற்றெரு காரணம் பயிற்சிகள் பெருந்தொகையில் அமைந்ததாகும். ஆற்றல் மிக்க மாணவர்கள் தெரிந்தெடுத்துச் செய்யக்கூடிய அளவில் அவை தாராளமாக உள்ளன. சமூக விஞ்ஞானம் பயிலும் மாணவர்க்கு ஏற்ற உதாரணங்களும் பயிற்சிகளும் இனி வரும் அதிகாரங்களில் அதிகரிக்கப்படும். இந்நூலில் வரும் ஒவ்வோர் அதிகாரத்துக்கும் ஒவ்வொரு சுருக்கமும் பலவினப் பயிற்சிகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மீட்டலின் பொருட்டும் இவை பயன்படும்.

அதிகாரம் 1

தொடர்புகளும் படமாக்கல்களும்

1. தொடைகள்

1.1 தொடைகள்பற்றிய அடிப்படைக் கருத்துகளை நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். தேவையென நீங்கள் கருதினால், இவ்வதிகாரத்தின் முடிவிலே தந்துள்ள பயிற்சியை மீட்டற் பயிற்சியாகச் செய்யலாம்.

1.2 நாம் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தும் தொடைகள் சில உள. அவற்றைக் குறிக்கும் விசேட எழுத்துகளுடன் அத்தொடைகளின் பட்டியலை இங்கு தருகிறோம்.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 ......\}$ எண்ணும் எண்கள் அல்லது இயற்கையெண்கள்.

$\mathbb{Z} = \{ ......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ = { நிறையெண்கள் }

$\mathbb{Z}^+ = \{ 0, 1, 2, 3 ...\}$ = { மறையல்லாத நிறையெண்கள் }

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ = { விகிதமுறுமெண்கள் அல்லது ஈவுகள் }

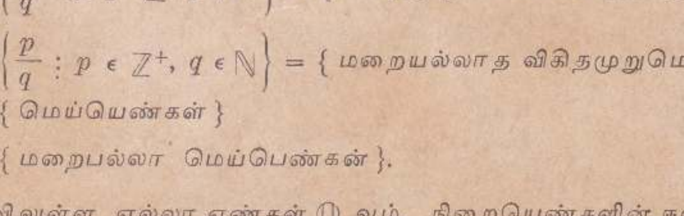
$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}^+, q \in \mathbb{N} \right\}$ = { மறையல்லாத விகிதமுறுமெண்கள் }

$\mathbb{R}$ = { மெய்யெண்கள் }

$\mathbb{R}^+$ = { மறைபல்லா மெய்பெண்கன் }.

பின்ன வடிவிலுள்ள எல்லா எண்கள் $\mathbb{Q}$ வும், நிறையெண்களின் ஈவுகள் அல்லாத எண்களாகிய எல்லா விகிதமுறா எண்களும் சேர்ந்து ஆவனவே $\mathbb{R}$ எனப்படும் மெய்யெண்களாம். $\sqrt{2}$, $4 + 3\sqrt{3}$, π ஆகியன விகிதமுறா எண்களுக்குச் சில உதாரணங்களாகும். இவற்றின் அண்ணளவாக்கப்பட்ட பெறுமானங்களையே நாம் நடைமுறைத் தேவைகளுக்குப் பயன்படுத்துகிறோம். உதாரணமாக, π ஆனது $\frac{22}{7}$ இற்கோ 3.1416 இற்கோ சரியாகச் சமனன்று. இவைபற்றிப் பின்னைய அதிகாரமொன்றிலே விரிவாகக் கற்போம்.

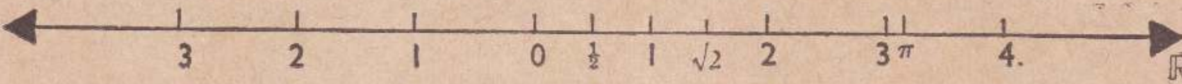
1.3 $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} > \mathbb{N} \supset$ அல்லது $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ என்பதை அவதானியுங்கள். இதனை உரு 1.1 இல் உள்ளவாறு வென் உருவத்திற் காட்டலாம்.



உரு 1.1

உரு 1.2 இல் உள்ளவாறு மெய்யெண்களின் தொடையை எண்கோட்டிலே புள்ளிகள்மூலம் குறித்துக் காட்டலாம். கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் மெய்யெண் ஒன்றைக் குறிக்கும். ஆனால், படத்தில் ஒரு சில புள்ளிகளே குறித்துக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

மெய்யெண் கோடு



உரு 1.2

2. தொடர்புகள்

2.1 மூலகங்களின் தொடைகள் பற்றி மட்டுமன்றி, இம்மூலகங்கள் எவ்வண்ணம் ஒன்றுடனொன்று தொடர்புபட்டுள்ளன என்பது பற்றியும் நாம் அக்கறை கொண்டுள்ளோம். தொடை ஒன்றின் மூலகங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புபட்டால், அவை அத்தொடையினுள் அமைப்பொன்றை ஏற்படுத்துகின்றன. உதாரணமாக இயற்கையெண் தொடை ℕ இல், இரண்டு எண்களை '.........பெரிது.........இலும்' என்னும் தொடர்பாலே தொடர்புறச் செய்யலாம்.

கிராமம் ஒன்றிலுள்ள பிள்ளைகள் பல முறைகளிலே தொடர்புறலாம். இரண்டு ஆண்பிள்ளைகள் ஒரே பாடசாலைக்குச் செல்லக்கூடும் . அல்லது ஒரே வீதியில் வசிக்கக்கூடும்; அல்லது ஒரே கூட்டம் சிநேகிதர்களுடன் விளையாடக் கூடும்.

இங்கு குறிப்பிட்ட தொடர்புகள் யாவும் ''துவிதத் தொடர்புகளாகும்''. அவை ஒரு தொடை S இன் இரண்டு உறுப்புகளைத் தொடர்புபடுத்துகின்றன. அவை S ஐ ஏதோவொரு கோலத்தில் அமைப்பதற்கு உதவுகின்றன. நாம் துவிதத் தொடர்புகளையே பெரும்பாலும் பயன்படுத்துவதால், அவற்றை அடைமொழி சேராது தொடர்புகள் என்றே குறிப்பிடுவோம். தொடர்புகளுக்குரிய உதாரணங்கள் சில கீழே தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு தொடர்புக்கும் தொடை S யாது என்பதையும் குறிப்பிடுதல் அவசியமென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

தொடர்பு	தொடை S
......வேகமாக ஓடுவான்...... இலும்	{கிராமம் ஒன்றிலுள்ள பிள்ளைகள்.}
......வயதில் மூத்தவன்...... இலும்	,, ,,
......படிக்கும் அதே வகுப்பிற் படிப்பது......	{நிறையெண்கள்}
... சமன்......	,,
......பெரிது...... இலும்	,,
......வர்க்கம்...... இன்	,,

2.2 தொடைகள் S இன் இரு மூலகங்கள் a, b ஐ எடுக்கு போது '' a தொடர்புடையதா b இற்கு?'' என்ற வினவை நாம் வினவுதல் வேண்டும். விடை ''ஆம்'' ஆயின், (a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட சோடி தொடர்பின் ஒரு பகுதியாகும். விடை ''இல்லை'' ஆயின் அவ்வரிசைப்பட்ட சோடி தொடர்புக்குரியது அன்று. இதிலிருந்து, தொடர்பென்பது வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையென நாம் அறியலாம். இத் தொடையை R எனப் பெயரிடுவோம்.

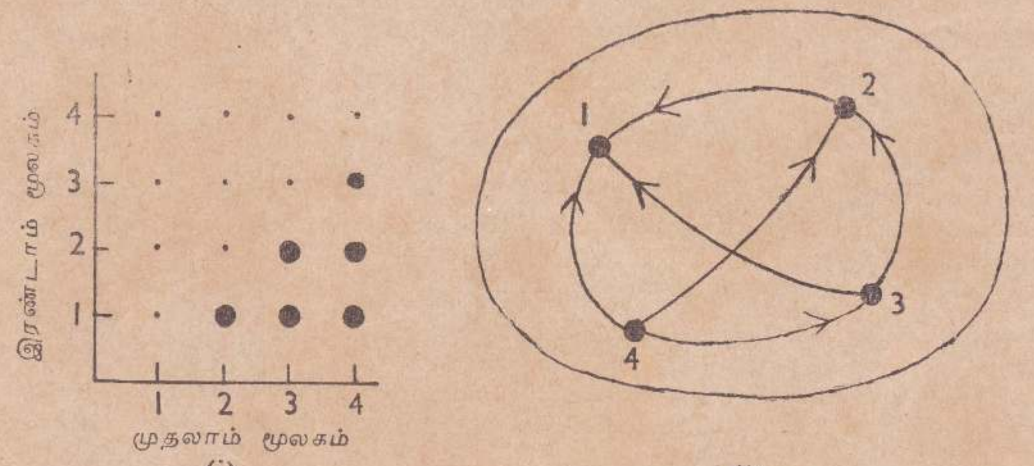
குறி. பு; பக்கம் 1, வரி 12 – '$\mathbb{R}$' = மறையல்லா மெய்யெண்கள்' எனத் திருத்துக.

பக்கம் 8, வரி 8 — 'என்பதை உடனிலையன்று' என்னும் கருத்துடைய குறி $\not\Rightarrow$ ஆகும்' எனத் திருத்துக.

உதாரணம் 1.1 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $a, b \in S$ ஆகவும் தொடர்பு R '' பெரிது...... இலும்'' ஆகவும் இருப்பின், ''a தொடர்புடையதா b இற்கு?'' என்ற வினாவிற்குரிய விடை பின்வரும் வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடை R இற்கு, ''ஆம்'' என்பதாகும். $R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3,2), (4,2), (4,3)\}$. 1,2 இலும் பெரிது அல்லாதபடியால் $(1, 2)$ என்ற வரிசைப்பட்ட சோடி தொடர்புத் தொடைக்குரியதன்று. தொடை R பெரும்பாலும் S இலுள்ள தொடர்பு R இற்கான ''தீர்வுத் தொடை'' எனப்படும்.

2.3 தொடர்பை உரு 1.3 (i) இற்போன்று படமூலங் காட்டலாம். இங்கு, R இன் வரிசைப்பட்ட சோடி ஒவ்வொன்றுக்குரிய ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒவ்வொரு கருங்குற்றினுலே காட்டப்பட்டுள்ளது.

வரிசைப்பட்ட சோடிகள் அனைத்தையும் கொண்ட முழுத்தொடை S ஆனது தன்னைத் தானே பெருக்கவரும் தெக்காட்டின் பெருக்கம் எனப்படும். (அது $S \times S$ என எழுதப்படும்). அப்பெருக்கத்தின் வரைப்பட வகைக்குறிப்பு, புள்ளி வரைப்படம் எனப்படும். தொடர்பு R, $S \times S$ இன் தொடைப் பிரிவாகும். இதனை உரு 1.3 (ii) இற் போன்று அம்புவரைபிலுங் காட்டலாம். தீர்வுத் தொடையிலுள்ள ஒவ்வொரு சோடி (a, b) இற்கும், a இலிருந்து b இற்கு அம்புக்குறி ஒன்று வரைகிறேம். உரு 1.3 (i) இலே புள்ளி வரைப்படமும் உதாரணம் 1.1 இல் வரும் தொடர்பு R இற்கான தீர்வுத்தொடையும் காட்டப்பட்டுள்ளன. இதற்குரிய அம்பு வரைபு உரு 1.3 (ii) இலே காட்டப்பட்டுள்ளது.



(i) (ii)

உரு 1.3

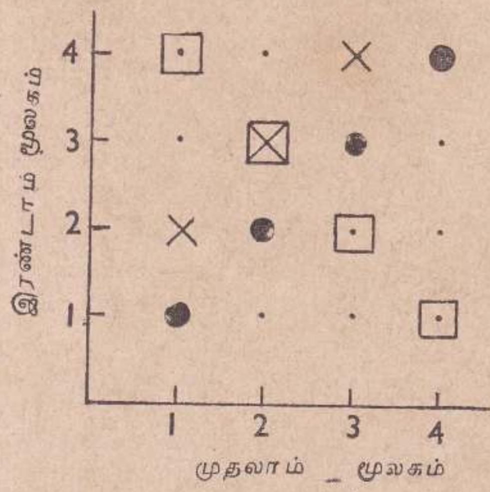
உதாரணம் 1.2 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, என்ற தொடையையும், $a, b \in S$ என்பதையும் பயன்படுத்திப் புள்ளிவரைபொன்று வரைந்து, அவ்வரைபிலே கீழ்த் தந்துள்ள தொடர்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்துக. ஒவ்வொரு தொடர்பையும் வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாக எழுதுக.

(i) ''a சமன் b.''

(ii) a இனதும் b இனதும் கூட்டுத்தொகை 5; அதாவது $a + b = 5$.

(iii) $a + 1 = b$.

புள்ளி வரைபு உரு 1.4 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.



உரு 1.4

தொடர்பு கருமையான குற்றுகளாற் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் தொடை $R_1 = \{ (1, 1), (2, 2), (3,3), (4, 4) \}$ இத்தொடை சமச்சீருடையது.

(ii) $a + b = 5$ என்பதன் தீர்வுத் தொடை சதுரத்தாற் குறிக்கப்பட்டுள்ள தொடையாலே காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்தத் தொடை பின்வருமாறு:

$$R_2 = \{ 1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) \}$$

இத் தொடையும் சமச்சீருடையதாகும்.

(iii) $a + 1 = b$ என்பதன் தீர்வுத்தொடை புள்ளடிகளாற் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்தத் தொடை பின்வருமாறு.

$$R_3 = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$$

இந்தத் தொடை சமச்சீர் அற்றதாகும்.

பிரசினம் 1.1 $x, y \in \mathbb{N}$ எனவும் $(x, y) \in R$ எனவும் தொடர்பு R "... காரணி ஒன்றைப் பொதுவாகக் கொண்டுள்ளது ... உடன்" எனவுங் கொள்க.

(i) $(8, 8)$ வரை புள்ளிவரைபு வரைக.

(ii) தொடர்பு R இற்குரிய தொடைப் பிரிவை அதிலே குறிக்க.

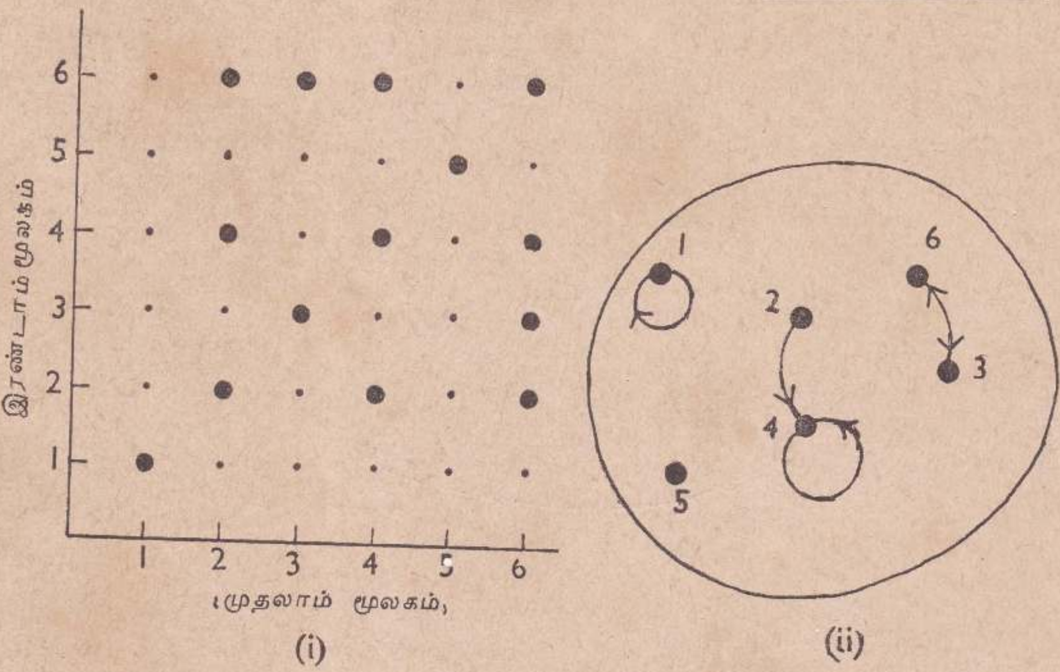
உரு 1.5 (i) இலுள்ள உருவத்தில் இது அரைகுறையாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. 1 ஐப் பொதுக் காரணி என நாம் கொள்ளவில்லை.

(iii) இந்தக் கோலத்திலிருந்து முதன்மை எண்களைத் தெரிந்தெடுப்பது எப்படி? (முதன்மை எண் என்பது, தன்னையும் 1 ஐயும் தவிர வேறு காரணிகள் இல்லாத எண்ணாகும்.)

(iv) ஒரேயொரு முதன்மைக் காரணியைக் கொண்ட 9 போன்ற முதன்மையற்ற எண்களையும், ஒன்றிலும் அதிகமான முதன்மைக் காரணிகளைக் கொண்ட 6 போன்ற எண்களையும் எவ்வாறு வேறுபடுத்துவீர்கள்?

(v) $y = x$ என்ற கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் யாவும் இத்தொடையில் அமையுமா?

(vi) உரு 1.5 (i) இற்குரிய அம்புவரைபை உரு 1.5 (ii) காட்டுகிறது. குறையாகவுள்ள இந்த வரைபை வரைந்து பூரணப்படுத்துக.



உரு 1.5

பயிற்சி 1.1

1. புள்ளி வரைபிற் காட்டுவதன் மூலம் $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ இற்குப் பின்வரும் தொடர்புகளுக்குரிய தீர்வுத் தொடைகளை எழுதுக.

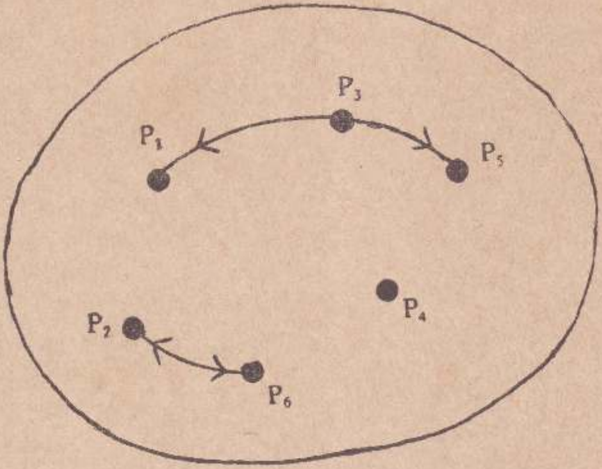
   (i) $y = x$
   (ii) $y + 1 = x$
   (iii) $x = 3$
   (iv) $y = 2$
   (v) $x = 3$ உம் $y = 2$ உம் [இத்தொடை மேலுள்ள பகுதி (iii) இலே தந்துள்ள இரு தொடைகளின் இடைவெட்டாகும்.]

2. பின்வருவனவற்றுள் எவை தொடர்புகளாகும்? இவை எவ்வெத் தொடைகளிலே தொடர்புகளாக இருக்கலாமெனக் கூறுக.

   (i) A வேகமாக ஓடுவான் B இலும்.
   (ii) அது கொள்ளும் 500 பேரை
   (iii) அவர் எங்கள் பாடசாலை அதிபர்
   (iv) $2x + 3y = 12$

3. தொடை $\mathbb{N}$ இற்கு, $3a + b = 17$ என்பதன் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.

4. தளமொன்றிலுள்ள ஆறு கோடுகளின் தொடையை உரு 1.6 காட்டுகிறது. சமாந்தரம் ...... இற்கு '' என்ற தொடர்பு, ... → என்னும் அம்புக்குறியாற் காட்டப்பட்டுள்ளது. உருவம் பூர்த்தியானதா, அவ்வாறு இல்லையாயின், அதனை வரைந்து பூர்த்தியாக்குக.



உரு 1.6

5. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $x, y \in A$ என்ற தொடைக்குப் பின்வரும் தொடர்புகளின் தீர்வுத் தொடையை முழுமையாக எழுதி, ஒவ்வொன்றையும் ஒரு புள்ளி வரைபிலே விளக்கிக் காட்டுக.

(i) $\{(x, y) : x - 1 = 0\}$

(ii) $\{(x, y) : y - 4 = 0\}$

(iii) $\{(x, y) : x + y = 4\}$

(iv) $\{(x, y) : 2y = x + 2\}$

(v) $\{(x, y) : x + y = 4\} \cap \{(x, y) : 2y = x + 2\}$

(vi) $\{(x, y) : x + y < 4]$;

(vii) $\{(x, y) : x + y < 4\} \cap \{(x, y) : y - 2 = 0\}$

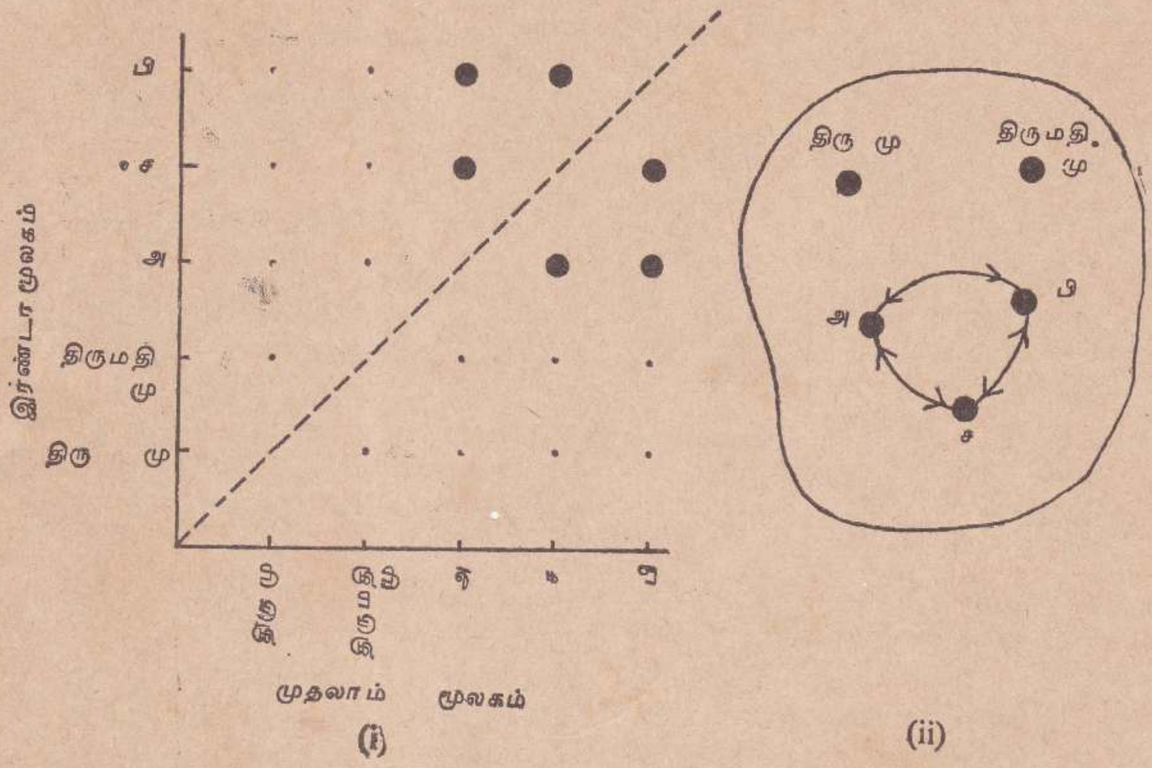
(viii) $\{(x, y) : x - 1 = 0\} \cap \{(x, y) : y - 4 = 0\}$.

6. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ என்ற தொடையில் R என்னும் தொடர்புக்கு அம்பு வரைபொன்று வரைக. இங்கு R ''3 ஆல் வகுத்தால்......... தரும் அதே மீதியை...... தரும்'' என்பதாகும்.

3. தொடர்புகளின் சில வகைகள்

3.1 உதாரணம் 1.3 திரு. கந்தையா, திருமதி கந்தையா, அவர்களின் மூன்று பிள்ளைகள் அசோகன், சந்திரன், பிரபாகரன் ஆகியோரைக்கொண்ட குடும்பத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இத்தொடையை {திரு. க, திருமதி க, அ, ச, பி} என எழுதுவோம். இத்தொடையில் '' ...... சகோதரன் ...... இன் '' என்ற தொடர்பு உரு 1.7 (i) இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்குரிய அம்பு வரைபு உரு 1.7 (ii) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உரு 1.7 (i) இலுள்ள குற்றுகள் படத்திற் காட்டியுள்ள (a, a) என்னும் புள்ளியூடு செல்லும் கோடுபற்றிச் சமச்சீராக அமைந்துள்ளதை அவதானியுங்கள். அக் குடும்பத்திற் பெண்பிள்ளை இல்லாதபடியால், அவ்வாறு சமச்சீராக



உரு 1.7

அமைந்துள்ளது. a சகோதரன் b இன் ஆயின், இதிலிருந்து b சகோதரன் a இன் என அறியலாம். தொடர்பு, (a, b) இற்கு இசைவானதாயின் (b, a) இற்கும் இசைவானதாகும். அவ்வாறாயின் தொடர்பு ''சமச்சீருடையது'' எனக் கூறுவோம். அம்பு வரைபில் இதனை அம்புக்குறிகள் இரு திசைகளிலும் அதாவது a இலிருந்து b இற்கும் , b இலிருந்து a இற்கும் செல்வதன் மூலங் காட்டுவோம். தெளிவின்பொருட்டு a யையும் b யையும் தொடுப்பதற்குச் சில வேளைகளில் இரண்டு அம்புக்குறிகளை நாம் பயன்படுத்துவோம் (உரு 1.12 பார்க்க).

ஒவ்வொரு சமச்சீர்த் தொடர்புக்கும், புள்ளி வரைப்படமொன்று உண்டு; அதில் அத்தொடர்புக்குரிய புள்ளிகள், உரு 1.7 (i) இற் காட்டியுள்ளவாறு (a, a) என்னும் புள்ளிகளுடே செல்லும் கோடுபற்றிச் சமச்சீராக அமைந்திருக்கும்.

பிரசினம் 1.1 இற் சொல்லப்பட்ட தொடர்பு சமச்சீரானதென்பது உரு 1.5 இலிருந்து எளிதில் விளங்கும்.

உதாரணம் 1.2 இற் சொல்லப்பட்ட தொடர்புகளுள் இரண்டு, சமச்சீரானவை. உரு 1.4 ஐப் பார்த்து அவற்றைத் தேர்ந்து எடுப்பீர்களா?

பொதுவாக, தொடை S இன் ஒவ்வொரு a, b இற்கும் (a, b), R இல் உள்ளது என்பதன் உட்கிடை (b, a), R இலுள்ளது என்பதாயின் தொடர்பு R சமச்சீரானது என்று கூறுகிறோம்.

(a, b) தொடர்பிலே இருக்கவேண்டியதில்லை என்பதை அவதானியுங்கள். ஆனால் (a, b) தொடர்பில் இருப்பின், (b, a) யும் இருக்கும்.

3.2 குறியீடு. 'எல்லாவற்றுக்கும்' அல்லது 'ஒவ்வொன்றுக்கும்' என்பதைக் குறிக்க $\forall$ என்னும் குறியைப் பயன்படுத்துகிறோம். உதாரணமாக $\forall x \epsilon S$ என்பது "S இல் அடங்கிய எல்லா x உம்" என வாசிக்கப்படும்.

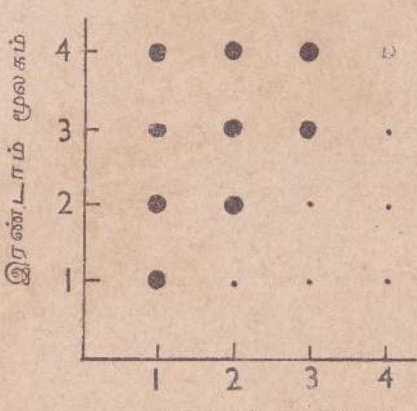
$\Rightarrow$ என்னுங் குறியை "என்பதன் உட்கிடை" என்னும் சொற்களுக்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்துவோம்.

உதாரணமாக 'a ஒரு செவ்வகம்' $\Rightarrow$ 'a ஒரு நாற்பக்கல்' இதன் மறுப்பு ஆகிய "என்பதன் உட்கிடையன்று" என்னும் கருத்துடைய குறி $\not\Rightarrow$ ஆகும். ஆகவே, 'k ஒரு பட்டம்' $\not\Rightarrow$ 'k ஓர் இணைகரம்' என நாம் எழுதலாம்.

இரு கூற்றுகள் ஒன்றுக்கொன்று உட்கிடை எனக் காட்ட விரும்பின், அவற்றிற்கிடையே $\Leftrightarrow$ என எழிதுவோம். உதாரணமாக, முக்கோணி A இரு சம பக்கங்களைக் கொண்டது $\Leftrightarrow$ முக்கோணி A இரு சம கோணங்களைக் கொண்டது.

இந்தக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, தொடர்பு R இன் சமச்சீர் பற்றி மேற்குறிப்பிட்ட கூற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம். $\forall\, a, b \epsilon S, (a, b) \epsilon R \Rightarrow (b a) \epsilon R$ ஆயின் R சமச்சீருடையது.

3.3 உதாரணம் 1.4 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ என்பதிலே தொடர்பு R இன் புள்ளி வரைப்படத்தை உரு 1.8 காட்டுகிறது. இங்கு, ... சிறிது ...... இலும் அல்லது சமன் ...... இற்கு என்பதே R ஆகும்.

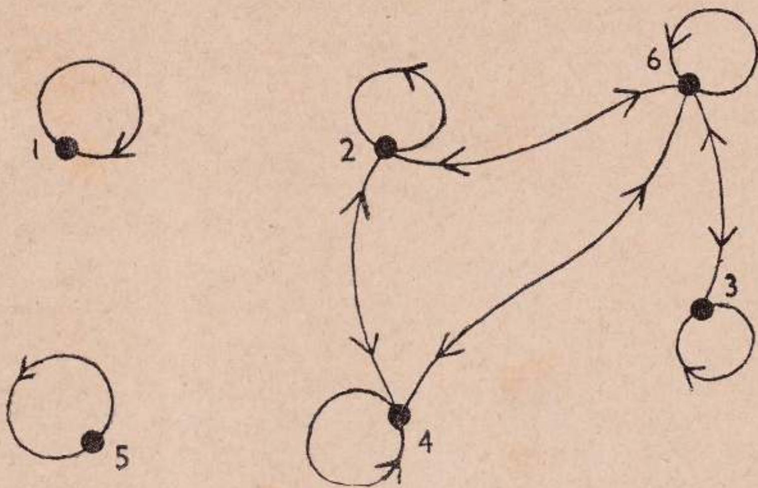


உரு 1.8

இங்கு தொடர்பு சமச்சீர் அற்றது. எனினும், நமது அக்கறைக்குரிய ஓர் இயல்பு அதற்கு உண்டு. தொடையின் ஒவ்வொரு மூலகமும் தன்னுடன்தானே இத்தொடர்பினை உடையது அதாவது $1 \leq 1$. ஆகவே $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ என்பன யாவும் தொடர்பு R இன் மூலகங்களே என்னும் முடிவுக்கு நாம் வரலாம்.

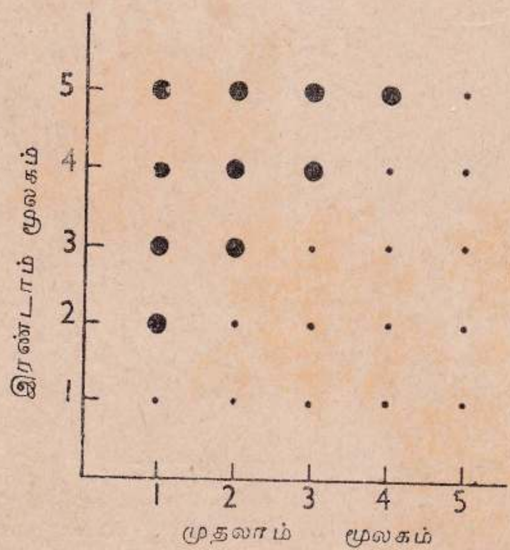
$\forall a \epsilon S\ (a, a) \epsilon R$ ஆக அமையின், அத்தொடர்பு "பின்வளைந்ததாகும்" பிரசினம் 1.1 இல் "......... ஒரு காரணியைப் பொதுவாகக் கொண்டுள்ளது......உடன்" என்ற தொடர்பு, இயற்கை எண்களின் தொடை $\mathbb{N}$ இலே பின்வளைந்தது ஆகும். ஏனெனில், ஒவ்வொரு நிறையெண்ணும் தன்னுடன் ஒரு காரணியைப் பொதுவாகக் கொண்டுள்ளது. (அவ்வெண்ணே அக்காரணியாகும்.)

உரு 1.9 இலே பூர்த்தியாக்கப்பட்டுள்ள அம்பு வரைபில், இப்பின்வளைந்த தொடர்பு காட்டப்பட்டுள்ளது.



உரு 1.9

3.4 **உதாரணம் 5** இயற்கை எண்களின் தொடை $\mathbb{N}$ இல் "............ சிறிது ...... இலும்" என்ற தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வோம். புள்ளி வரைபின் ஒரு பகுதி உரு .1.10 (i) இலே தரப்பட்டுள்ளது. இத்தொடர்பை '...... $<$ ......' என எழுதுவோம். ஆகவே, '$2 < 3$' ஐ '2 சிறிது 3 'இலும்' என வாசிப்போம்.



(i)

உரு 1.10

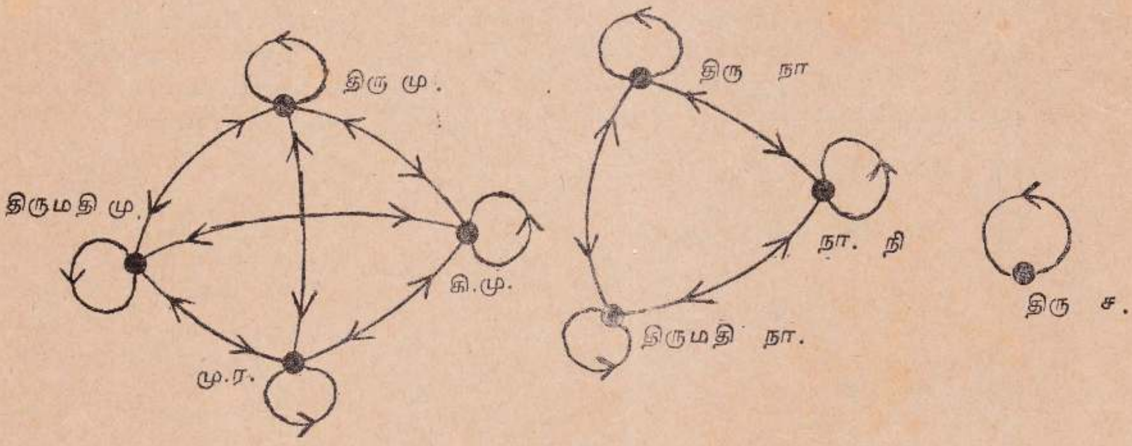
$a < b$ உம், $b < c$ உம் ஆயின், $a < c$ என்பதை அவதானியுங்கள். எண்களைப் பிரதியிட்டால் இது இலகுவாகத் தெரியும். உதாரணமாக, $2 < 4$ உம் $4 < 9$ உம் ஆகும். ஆகவே, $2 < 9$ ஆகும். இந்த இயல்பினால், இத்தொடர்பு கடந்

தேகலுடையது எனப்படும். குறியீட்டிற் கூறின், $\forall a, b, c \in S$, $(a, b) \in R$ உம் $(b, c) \in R$ உம் $\Rightarrow (a, c) \in R$ ஆயின் R கடந்தேகல் இயல்புடையது. தொடை $(1,2,3,4,5)$ இற்கு இத்தொடர்பிற்கான அம்பு வரைபைப் பிரதிபண்ணிப் பூர்த்தியாக்குக.

3.5 முன்னைய உதாரணம் மூன்றிலிருந்தும், முன்பு நாம் நோக்கிய தொடர்புகளிலிருந்தும் ஓர் உண்மை புலனாகும்: மூலகங்களின் ஒரு தொடையிலுள்ள தொடர்பொன்றுக்கு, மேற்சொன்ன இயல்புகள் மூன்றும் இருக்கலாம்; அவற்றுள் ஒன்றேனும் இல்லாமலும் போகலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, உதாரணம் *1.4* இலும் கடந்தேகல் இயல்பு உண்டு. ஆனால், சமச்சீர் இயல்பு இல்லை. அடுத்து வரும் உதாரணம் *1.6* மூன்று இயல்புகளையும் உடையதாகும்.

உதாரணம் 1.6 ஒரு வீதியிலுள்ள வீடுகளில், பின்வரும் தொடை ஆட்கள் வசிக்கின்றனர். (திரு முருகேசு, திருமதி முருகேசு, முருகேசு ரவீந்திரன், கிரிஜா முருகேசு, திரு நாகேந்திரன், திருமதி நாகேந்திரன், நாகேந்திரன் நிமலன், திரு சலீம்). ''வசிக்கும் அதே வீட்டில் வசிப்பது'' என்ற தொடர்பை உரு *1.11* இலுள்ள அம்புவரைபு காட்கிடுறது. இயலுமான சமயங்களிலே, தெளிவின் பொருட்டு இருதலை அம்புக்குறிகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.



உரு *1.11*

ஒவ்வொருவரும் தாம் வசிக்கும் அதே வீட்டில் வசிப்பதால், ஒவ்வொரு வரிலும் இருந்து மீண்டும் அவரவர்க்கே அம்புக் குறி செல்கிறது (திரு சலீமைப் பார்க்க).

இது கடந்தேகல் இயல்பைக் காட்டுகிறது. திரு நாகேந்திரன் வசிக்கும் அதே வீட்டில் நிமலன் வசிப்பதால், இதிலிருந்து நிமலன் வசிக்கும் அதே வீட்டில் நாகேந்திரன் வசிக்கிறார் என்பது தெளிவாகும். எனவே, இவர்கள் இருவரையும் இணைக்கும் அம்புக்குறி இருதலை அம்புக்குறியாகும். வேறுபட்ட இருவரைத் தொடுக்கும் அம்புக்குறிகள் யாவும் இருதலை அம்புக்குறிகள் என்பதை அவதானியுங்கள். இது, தொடர்பு சமச்சீருடையது என்பதைக் காட்டுகிறது. இது ஓர் இருதலைத் தொடர்பாகும். திரு முருகேசு வசிக்கும் அதே வீட்டில், முருகேசு ரவீந்திரன் வசிக்கிறான்; முருகேசு ரவீந்திரன் வசிக்கும் அதே வீட்டில் கிரிஜா

குறிப்பு: பக்கம் 9 இல் வரவேண்டிய உரு 1.10 (i) பக்கம் 48 இல் அச்சிடப்பட்டுள்ளது

முருகேசு வசிக்கிருள். ஆகவே, திரு முருகேசு வசிக்கும் அதே வீட்டில் கிரிஜா முருகேசு வசிக்கிருள். எனவே இத் தொடர்பு கடந்தேகல் இயல்பு உடையது. இது ஒருவரிடமிருந்து இரண்டாமவரின் ஊடாக மூன்ருமவர்க்குக் கொண்டு செல்கிறது.

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் தொடர்புகள் ஒவ்வொன்றும் பின்வளைவு, சமச்சீர் கடந்தேகல் என்னும் மூவியல்புகளுள் எவற்றை உடையது எனத் தீர்மானிக்க. கீழ்த்தந்துள்ள அட்டவணை 1.1 ஐப் பூர்த்தியாக்கி, உங்கள் முடிவுகளை விளக்கிக் காட்ட எளிய அம்பு வரைபு வரைக.

	தொடர்பு	தொடை
(i)	*...... படிக்கும் அதே வகுப்பிற் படிப்பது......*	*(பாடசாலை ஒன்றின் மாணவர்கள்)*
(ii)	*...... நிறை குறைவு ...... இலும்*	*(தள்ளுவண்டி ஒன்றிலுள்ள தேங்காய்கள்)*
(iii)	*...... 10 இற்குங் கூட வேறுபடுகிறது ...... இலும்*	$\mathbb{Z}$
(iv)	*...... சிநேகிதன் ...... இன்*	*(பாடசாலை ஒன்றிலுள்ள மாணவர்கள்)*
(v)	*...... சிறிது ...... இலும் அல்லது சமன் ...... இற்கு*	$\mathbb{R}$
(vi)	*...... சகோதரி ...... இன்*	*(பாடசாலை ஒன்றிலுள்ள பெண்பிள்ளைகள்)*
(vii)	*...... இடைவெட்டுகிறது ...... ஐ*	*(தளமொன்றிலுள்ள நேர்கோடுகள்)*
(viii)	*...... வர்க்கம் ...... இன்*	$\mathbb{R}$
(ix)	*...... வசிக்கிறது ...... வசிக்கும் அதே வீட்டில்.*	*(வீதியொன்றில் வசிப்போர்)*
(x)	*3 ஆல் வகுத்தால் ...... வரும் அதே மீதியைத் தருவது ......*	$\mathbb{Z}$

	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x
பின்வளைந்தது					√					√
சமச்சீரானது			√							√
கடந்தேகலானது						√				√

அட்டவணை 1.1

2. பின்வரும் இயல்புகளையுடைய தொடர்புகளைக் கண்டறிவதுடன், அவை ஒவ்வொன்றும் எத்தொடைக்குரியதெனக் கூறுக.

(i) சமச்சீருடையது ஆனால், பின்வளைவும் கடந்தேகலும் அற்றது.
(ii) சமச்சீருடையதும் பின்வளைந்ததும் ஆனால், கடந்தேகல் அற்றது.
(iii) பின்வளைந்தது ஆனால், சமச்சீரும் கடந்தேகலும் அற்றது.
(iv) கடந்தேகுவதும் பின்விளைந்ததும் ஆனால், சமச்சீர் அற்றது.
(v) கடந்தேகல் உடையது ஆனால், பின்வளைவும் சமச்சீரும் அற்றது.

3. பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் நிறையெண் தொடை $\mathbb{Z}$ இலே ஒவ்வொரு தொடர்பை விவரிக்கின்றது.

ஒவ்வொரு தொடர்பும் பின்வளைந்ததா, சமச்சீர் உடையதா, கடந்தேகல் உடையதா எனக் கூறுக.

(i) $A = \{ (x, y) : x + y < 3 \}$
(ii) $B = \{ (x, y) : x$ வகுக்கிறது y ஐ $\}$
(iii) $C = \{ (x, y) : x$ ஆனது தொடர்பாய் முதன்மையானது y இற்கு$\}$
(iv) $D = \{ (x, y) : x + y$ ஓர் இரட்டையெண் $\}$
(v) $E = \{ (x, y) : y = | x |$ இங்கு $x \geqslant 0$ ஆயின் $| x | = x$
$x \leqslant 0$ ஆயின் $| x | = -x$
(vi) $F = \{ (x, y) : x + y$ இரட்டையெண்ணும் x, y இன் மடங்கும் $\}$
(vii) $G = \{ (x, y) : y = x + 1 \}$

4. உரு 1.11 இலுள்ள புள்ளி வரைப்படத்துக்குரிய அம்பு வரைபை அமைக்க.

4. சமவன்மைத் தொடர்புகள்

4.1 சமவன்மைத் தொடர்பென்பது பின்வளைவு, சமச்சீர், கடந்தேகல் ஆகிய மூன்று இயல்புகளையும் கொண்ட தொடர்பாகும். உதாரணம் 1.6 இலுள்ள தொடர்பு சமவன்மைத் தொடர்புக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

சமவன்மைத் தொடர்புக்கு மேலும் சில உதாரணங்களாவன:—

(அ) எல்லா முக்கோணிகளினதும் தொடையில், ... இயல்பொத்தது .... இற்கு,

(ஆ) தளமொன்றில் உள்ள நேர்கோடுகளின் தொடையில் .... சமாந்தரம் .... இற்கு.

(இ) பாடசாலை ஒன்றிலுள்ள மாணவர் தொடையில்......... அதேவகுப்பைச் சேர்ந்தவர் .... இன்

(ஈ) வகுப்பொன்றில் உள்ள மாணவர் தொடையில் " .... அதே முதலெழுத்தை உடையவர் .... இன்

பயிற்சி 1.3

1. பயிற்சி 1.2 இன் வினா 1 இல், எத் தொடர்புகள் சமவன்மைத் தொடர்புகளாகும் எனக் கூறுக.

2. பின்வரும் தொடர்புகள் செல்லுபடியாகக்கூடிய தொடைகளை எழுதுக. சமவன்மைத் தொடர்புக்கான மூன்று இயல்புகளுள் எவற்றுக்குப் பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் இசைவாகும் எனக் கூறுக.

(i) .... அதே உயரத்தை உடையவன் .... இன்
(ii) .... சமன் .... இற்கு
(iii) .... ஏறத்தாழச் சமன் .... இற்கு
(iv) .... ஒருங்கிசையும் .... உடன்
(v) .... இயல்பொத்தது .... உடன்
(vi) .... நண்பன் .... இன்
(vii) .... சமாந்தரம் .... இற்கு
(viii) .... அடங்கியது .... இனுள்
(ix) .... சிறந்த கிறிக்கற் வீரன் .... இலும்
(x) .... பரப்பளவிற் சமன் .... இற்கு

3. பின்வரும் தொடர்புகள் $a, b \in A$ என்பதற்குத் தொடை $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ இல் வரையறுக்கப்பட்டால், அவற்றைக் குறிப்பதற்கு அம்பு வரைபு வரைக.

(i) $a < b$
(ii) $a \leqslant b$
(iii) 3 ஆல் $|a - b|$ மிச்சமின்றி வகுபடும். இங்கு வரும் $|a - b|$ பயிற்சி 1.2 வினா 3 (v) இல் வரையறுக்கப்பட்டது, ($|a - b| = |b - a|$ என்பதை அவதானிக்க).
(iv) a காரணி b இன்
(v) $a - b$ இரட்டையெண்

4. ஆண்பிள்ளைகளையும், பெண்பிள்ளைகளையும் கொண்டதொரு தொடையில் '......... சகோதரன் .... இன்' (முறிவுற்ற கோடு), '...... சகோதரி ...... இன் ' (முறிவில்லாத கோடு) என்ற தொடர்புகளை உருவம் காட்டுகிறது.

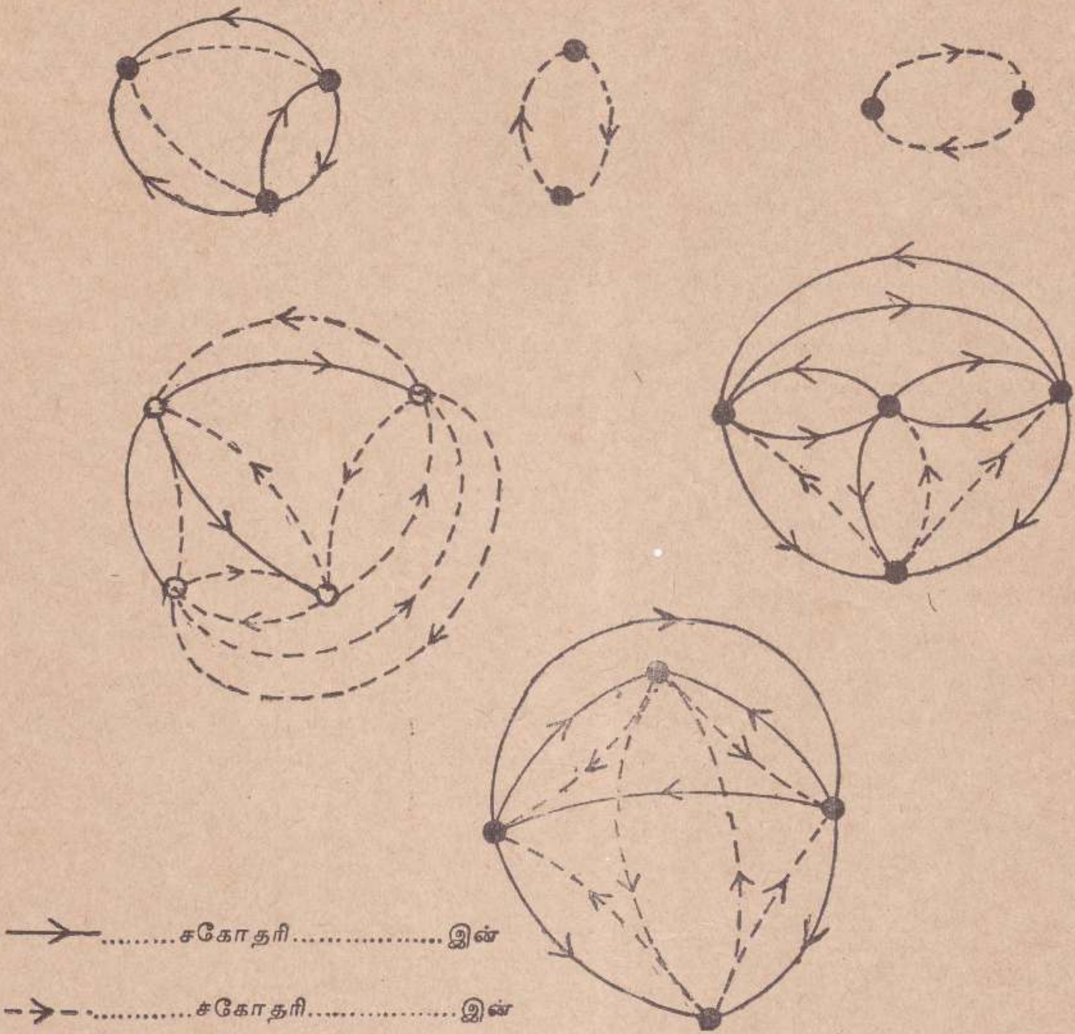
(i) முறிவுற்ற அல்லது முறியாத அம்புக்குறி ஒன்று a இலிருந்து b இற்கு இருப்பின், b இலிருந்து a இற்கு எப்பொழுதும் அம்புக்குறி இருக்கும். ஏன்?

(ii) குற்றுகளுள் எவையேனும், தம்மை நோக்கிச் செல்கின்ற அல்லது தம்மிடமிருந்து செல்கின்ற அம்புக்குறி இல்லாதனவாக அமைந்துள்ளனவா? இவ்வாறுள்ளமையின் உட்கிடை என்ன?

(iii) ஒரே குற்றிலிருந்து செல்லும் அம்புக்குறிகள் யாவும் ஒரே வகையானவை. ஏன் அவ்வாறு இருத்தல் வேண்டும்?

(iv) எத்தனை குடும்பங்கள் உளவென எழுதுக. ஒவ்வொரு குடும்பத்திலும் ஆண் பிள்ளைகள் எத்தனை, பெண் பிள்ளைகள் எத்தனையென எழுதுக.

(v) இத்தொடையில் "......... சகோதரன் .... இன்" என்ற தொடர்பு சமவன்மையானதா? அவ்வாறு இல்லையெனின், எவ்வியல்புகள் அதற்குச் சாதகமில்லையெனக் கூறுக.



உரு 1.12

(vi) இரு தொடர்புகளையும் ஒன்று சேர்த்து "......... சகோதரன் அல்லது சகோதரி .... இன்" என வரையறுத்தோமாயின், இத்தொடர்பு சமவன்மையானதா?

5. பயிற்சி 1.3 வினு 2 இன் பகுதிகள் (i), (vi), (ix) இற்கு அம்புக்குறிப் படங்கள் (அம்பு வரைபுகள்) வரைக. ஒவ்வொன்றுக்கும் தொடையை வரையறுக்க.

5. சமவன்மை வகுப்புகள்

5.1 பின்வரும் ஆட்களின் தொடையில் "......... வசிக்கிறது......... வசிக்கும் அதே வீட்டில்" என்பது சமவன்மைத் தொடர்பென உதாரணம் 1.6 இற் கண்டோம்.

{திரு முருகேசு, திருமதி முருகேசு, முருகேசு ரவீந்திரன், கிரிஜா முருகேசு, திரு நாகேந்திரன், திருமதி நாகேந்திரன், நாகேந்திரன் நிமலன், திரு சலீம்} மேற்கூறிய தொடர்பு இத் தொடையை மூட்டற்ற தொடைப் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கச்செய்கின்றது. ஒவ்வொரு தொடைப் பிரிவும் ஒவ்வொரு புறம்பான வீட்டுக்குரியது. பின்வருவனவற்றை அவதானியுங்கள்:

1. ஒவ்வொருவரும் ஒரு வீட்டில் வசிக்கின்றனர்;
2. ஒரு வீட்டிலும் அதிகமான வீடுகளில் ஒருவரும் வசிப்பதில்லை;
3. ஒரு வீட்டில் உள்ள இருவர் ஒருவருக்கொருவர் தொடர்புடையவர்;
4. ஒரே வீட்டில் இல்லாத இருவர் ஒருவருக்கொருவர் தொடர்புடையவரல்லர்.

ஒவ்வொரு சமவன்மைத் தொடர்பும், தான் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடையை மூட்டற்ற தொடைப்பிரிவுகளாகப் பிரிக்கின்றது. இவை **சமவன்மை வகுப்புகள்** எனப்படும். மேற்கூறிய உதாரணத்தில் அவ்வகுப்புகள் வீடுகளாகும்.

5.2 உதாரணம் 1.7 $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ என்ற நிறையெண்கள் தொடையில் ''3 ஆல் வகுத்தால்..... தரும் அதே மீதியைத் தருவது ......'' என்ற தொடர்பு R ஐ வரையறுக்கிறோம். இத்தொடர்பின்படி 5,8 ஆகிய இரண்டு எண்களும் 2 ஐ மீதியாகத் தருகிறபடியால் அவை தொடர்புடையன. ஆனால், 6 ஐயும் 14 ஐயும் 3 ஆல் வகுக்கும்போது ஒரே மீதியைத் தராதபடியால் அவை தொடர்பற்றவை.

6 ஐ $6 = 3.2 + 0$ என எழுதலாம்.
14 ஐ $14 = 3.4 + 2$ என எழுதலாம்.

உண்மையில், யாதுமோர் எண் m ஐ $m = 3.p + r$ என எழுதலாம். இங்கு p ஒரு நிறையெண்ணாகும்; r என்பது 0 அல்லது 1 அல்லது 2 என்னும் மீதியுமாகும். m, n ஆகிய இரண்டு எண்களும் ஒரே மீதியாகிய r ஐத் தருவதாகக் கொள்வோமாயின்,

$$m = 3p + r$$
$$n = 3q + r \quad \text{என எழுதலாம்,}$$

இங்கு p யும் q வும் நிறையெண்களாகும். $r = 0$, அல்லது 1 அல்லது 2. இந்த இரு கோவைகளையும் கழித்தால்,

$$\begin{aligned} m - n &= 3p - 3q \\ &= 3(p - q) \quad \text{எனப் பெறுவோம்.} \end{aligned}$$

ஆகவே 3, $m - n$ ஐ மிச்சமின்றி வகுக்கும் (ஏன்?). இதனை $3 \mid (m - n)$ எனக் குறிக்கலாம். எனவே, R என்னுந் தொடர்பை இரு முறைகளில் எழுதலாம். அவையாவன:–''3 ஆல் வகுக்கும்போது m உம் n உம் ஒரே மீதியைத் தருகின்றன''

$$\Leftrightarrow \text{``}3 \mid (m - n)\text{''}$$

$\frac{0}{3} = 0$ ஆகையால், $3 \mid 0$ என எழுதலாம். ஆகவே, ஒருமைப்பாட்டின் பொருட்டு 0 என்பது 3 இன் மடங்கெனக் கொள்வோம். $\frac{0}{n} = 0$ ஆதலால் யாதுமோர் எண்ணின் மடங்காக 0 ஐக் கருதலாம் என்பதை அவதானிக்க. இந்த வழக்கின்படி, தொடர்பு R சமவன்மைத் தொடர்பெனக் காட்டலாம்.

1. $3 \mid (la - a)\ \forall a \in \mathbb{Z}$ ஆகையால், R பின் வளைந்தது.

2. $a - b = -(b - a)$ நிறையெண் ஒன்று 3 ஆல் மிச்சமின்றி, வகுபடுமெனின் அதன்கூட்டற்றகவு நேர்மாறும் 3 ஆல் வகுபடும்.

இதன்படி, $3 \mid (a - b) \Rightarrow 3 \mid (b - a)\ \forall a, b \in Z$ என எழுதலாம். ஆகவே R சமச்சீருடையது.

3. இறுதியாக, 3 ஆல் மிச்சமின்றித் தனித்தனி வகுபடும் இரு நிறையெண்களின் கூட்டுத் தொகையும் 3 ஆல் வகுபடுமாகையால் நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$3 \mid (a - b), \quad 3 \mid (b - c)$$
$$\Rightarrow 3 \mid ((a - b) + (b - c))$$
$$\Rightarrow 3 \mid (a - c)$$
$$3 \mid (a - b) \text{ உம் } 3 \mid (b - c) \text{ உம் } \Rightarrow 3 \mid (a - c)$$

என்னும் கூற்று நம் தொடர்பு கடந்தேகலுடையது என்பதைக் காட்டுகிறது.

ஆகவே, இத்தொடர்பு R சமவலுமைத் தொடர்பாகும். 3 ஆல் வகுக்கும்போது a, b ஆகியன ஒரே மீதியைத் தரின் ,(a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட சோடியை நாம் அமைக்கலாம். 3 ஆல் வகுக்கும்போது 5,8 ஆகிய இரண்டும் 2 ஐ மீதியாகத் தருவதால், (5,8) ஒரு வரிசைப்பட்ட சோடியை அமைக்கிறது.

5.3 '3 ஆல் வகுக்கும்போது a, b என்னும் ஒவ்வொன்றும் 1 ஐ மீதியாகத் தரும், என்ற தொடர்பைத் திருப்திப்படுத்தும் வரிசைப்பட்ட சோடிகளாகிய a, b ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகளிற் சில, உரு 1.13 இலே குற்றுகளாற் காட்டப்பட்டுள்ளன. உதாரணம் (1,4). 2 ஐ மீதியாகத் தரும் எண்கள் புள்ளடிகளாற் குறிக்கப் பட்டுள்ளன. உதாரணம் (2,5). 0 ஐ மீதியாகத் தரும் எண்கள் ○ ஆற் குறிக் கப்பட்டுள்ளன. உதாரணம் (3,6).

$$-5 = -6 + 1 = 3(-2) + 1$$
$$-1 = -3 + 2 = 3(-1) + 2$$ என்பவற்றை நினைவுகூர்க.

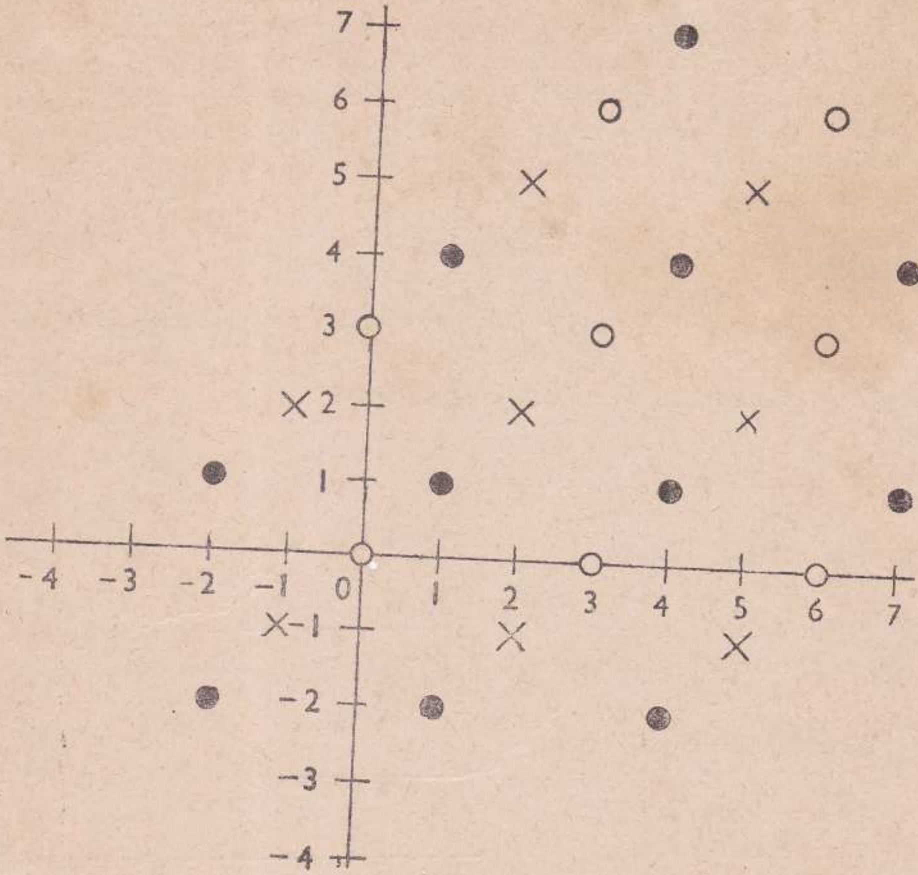
$\{-10, -9, \ldots\ldots, 9, 10\}$ என்ற தொடைக்கு உரு 1.13 இலுள்ள புள்ளிவரைப்படத்தை வரைந்து பூர்த்தியாக்குக. உரு 1.13 இல் எந்தவொரு நிறையெண்ணையும் கொண்டுள்ள நிரலில், ஒரேயொரு வகையானகுறி இருப்பதை அவதானியுங்கள். உதாரணமாக, 4 இன் ஊடான நிரலில் குற்றுகள் மட்டுமே உள்ளன.

பின்வருவனவற்றை அவதானியுங்கள்:—

1. ஒவ்வொரு நிறையெண்ணூடும் செல்லும் நிரலில் ஏதேனும் குறி உள்ளது. (உதாரணமாக 4, குற்றுகளைக் கொண்டது)

2. குறிப்பிட்ட நிறையெண்ணொன்றினூடான நிரலில் உள்ள அடையாளங்கள், வேறு எந்த நிறையெண்கள் இதனோடு தொடர்புடையன என்பதைக் காட்டுகின்றன.

(உதாரணமாக – 2, 1,4,7...... ஆகியவற்றுடன் 4 தொடர்புடையது)



உரு 1.13

3. புள்ளி வரைபிலே குறிப்பிட்டதொரு புள்ளியிற் குறியில்லாமை, அப்புள்ளிக்குரிய இரண்டு நிறையெண்களும் தொடர்பற்றவை என்பதைக் காட்டுகிறது. (2,4) என்னும் புள்ளியில், குறி ஏதுமில்லை. இது 2,4 ஆகிய இரண்டு எண்களும் 3 ஆல் வகுபடும்போது, ஒரே மீதியைக் கொண்டவை அல்ல என்பதைக் காட்டுகிறது.

[நிரல்களுக்குப் பொருந்துவன நிரைகளுக்கும் பொருந்தும் என்பதை நோக்குக.]

தொடை $\mathbb{Z}$ மூன்று மூட்டற்ற தொடைப்பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என நாம் காண்கிறோம். ஒவ்வொரு தொடைப்பிரிவிலும் உள்ள நிறையெண்களை 3 ஆல் வகுத்தால் அவை ஒரே மீதியைத் தருகின்றன. இத் தொடைப் பிரிவுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$'0' = \{ \dots -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots \};$$
$$'1' = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \},$$
$$'2' = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots \}.$$

2—14725

இவை "மட்டு 3 இன் எச்ச வகுப்புகள்" எனப்படும். இவற்றைச் சுருக்கமாக "மட்டு 3" என எழுதுவோம். இவை '0', '1', '2', ஆகியவற்ருற் குறிக்கப்படும். $\mathbb{Z}$ இன் மூலகங்கள் யாவும் 3 ஆல் வகுக்கும்போது 0, 1, அல்லது 2, என்னும் மீதியை அல்லது 'எச்சத்தைத்' தருகின்றன. நாம் என்ன நிறையெண்ணுல் வகுக்கிருேமோ அவ்வெண்ணே மட்டு ஆகும். இங்கு அது 3.

பயிற்சி 1.4

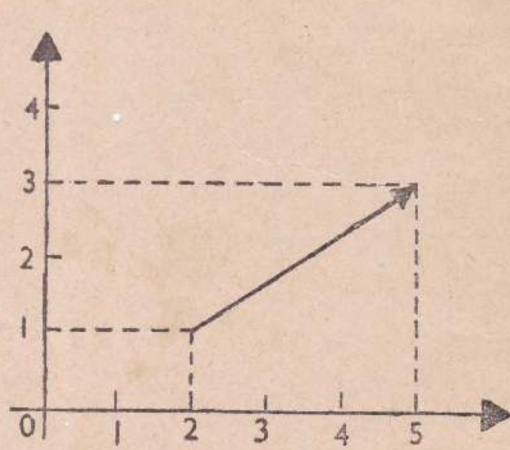
1. மட்டு 2 இன் எச்ச வகுப்புகளை எழுதுக.
2. மட்டு 5 இன் எச்ச வகுப்புகளை எழுதுக.

   இந்த இரு தொடைகளையும் நாம் சாதாரணமாக எவ்வாறு கூறுவோம்?
3. பயிற்சி 1.2, வினு 1 இல், சமவன்மைத் தொடர்புகளாயுள்ள தொடர்புகளுக்குச் சமவன்மை வகுப்புகளைக் கூறுக.
4. (i) உரு 1.14 இற் காட்டப்பட்டுள்ள இடப்பெயர்ச்சிக் காவி யாது?

   (ii) இவ்வுருவைப் பிரதி செய்து அதில் இக்காவியின் பெயர்ச்சி விம்பங்கள் சிலவற்றைக் காட்டுக.

   (iii) இக்காவிகள் எவ்வாறு தொடர்புற்றுள்ளன என்பதைச் சொற்களில் எழுதுக.

   (iv) இது ஒரு சமவன்மைத் தொடர்பா?



உரு 1.14

6. எச்ச வகுப்புகள்

6.1 எச்ச வகுப்புகளுக்குக் 'கூட்டலைப்' பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

'1' வகுப்பிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தையும் '2' வகுப்பிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தையும் எடுத்துக் கூட்டுங்கள். விடை எந்த வகுப்புக்குரியது?

'1', '2' வகுப்புகளிலிருந்து எந்த எண்ணையும் எடுக்கலாம். ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் அவை $3p + 1$, $3q + 2$ என்னும் வகைக்கு உரியனவாகும். இங்கு $p, q \in \mathbb{Z}$ இவை இரண்டையும் கூட்டினுல், நாம் பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்.

$$= (3p + 1) + (3q + 2)$$
$$= 3(p + q) + 3,$$
$$= 3(p + q + 1) + 0$$

விடை '0' வகுப்பின் உறுப்பாகும். உதாரணமாக $4 \in$ '1', $8 \in$ '2' $4 + 8 = 12 \in$ '0'.

இந்த இசைவு உள்ளமையால், எச்ச வகுப்புகளிலே கூட்டலை வரையறுப்பதற்கு இதனை ஒரு கருவியாகப் பயன்படுத்துகின்றோம். மட்டு 3 இன் எச்ச வகுப்புகளின் 'கூட்டல்' அட்டவணை ஒரு பகுதி நிரப்பியவாறு உரு 1.2 இலே தரப்பட்டுள்ளது. இதனைப் பிரதி செய்து பூர்த்தியாக்குங்கள்.

⊕	'0'	'1'	'2'
'0'	'0'		'2'
'1'	'1'	'2'	'0'
'2'			

அட்டவணை 1.2

'கூட்டல்' என்பதை மேற்கோட் குறியினுள்ளே தந்துள்ளோம். ஏனெனில் இது நாம் வழமையாகக் கருதும் கூட்டல் அன்று, இவ்வேறுபாட்டை உறுதிப்படுத்துமுகமாக ⊕ என்னுங் குறியை இக்கூட்டலைக் காட்டும்பொருட்டு எழுதுவோம். இது பற்றிக் குழப்பம் ஏற்படா விட்டால், சாதாரண குறி + ஐப் பயன்படுத்தலாம்.

6.2 அவ்வண்ணமே எச்ச வகுப்புகளின் பெருக்கலை நாம் வரையறுக்கலாம்.

'1' வகுப்பிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு மூலகம் a ஐயும் '2' வகுப்பிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு மூலகம் b ஐயும் எடுங்கள். இவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$a = 3p + 1.$$
$$b = 3q + 2$$

இங்கு $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a \times b &= (3p+1) \times (3q+2) \\ &= 9pq + 6p + 3q + 2 \\ &= 3(3pq + 2p + q) + 2. \end{aligned}$$

இது '2' வகுப்புக்குரியது. இதிலிருந்து, $1 \otimes 2$ = '2' என நாம் எழுதுகிறோம்.

பயிற்சி 1.5

1. மேற்குறிப்பிட்ட அதே முறையைப் பயன்படுத்தித் தேவையான பெருக்கங்களைக் கணித்து அட்டவணை 1.3 ஐப் பூர்த்தியாக்குக.

⊕	'0'	'1'	'2'
'0'	'0'	'0'	
'1'			'2'
'2'	'0'		

அட்டவணை 1.3

2. மட்டு 5 இன் எச்ச வகுப்புகள் '0' ,'1', '2', '3', '4' ஆகியவற்றுக்குக் 'கூட்டல்', 'பெருக்கல்' அட்டவணைகள் தயாரிக்க.

3. மேலே வினா 2 இல் வரும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, மட்டு 5 இன் பெருக்கலுக்கு ஒரு வரைவிலக்கணம் தருக.

4. மட்டு 2 இன் எச்சவகுப்புகளுக்கு ,'கூட்டல்', 'பெருக்கல்' அட்டவணைகள் தயாரிக்க.

6.3 மட்டு n இன் எச்ச வகுப்புகள்

உதாரணம் 1.7 இல் மட்டு 3 இன் எச்ச வகுப்புகளை, தொடை $\mathbb{Z}$ இன் எல்லா மூலகங்களையும் 3 ஆல் வகுப்பதால் வரையறுத்தோம். நாம் ஏதேனும் நேர் நிறையெண் n ஐப் பயன்படுத்தி மட்டு n இன் எச்ச வகுப்புகளைப் பெற்றிருக்கலாம்.

$$'0' = \{\ldots,\ -3n,\ -2n,\ -n,\ 0,\ n,\ 2n, \ldots\},$$
$$'1' = \{\ldots,\ -3n+1,\ -2n+1,\ -n+1,\ 1,\ n+1,\ 2n+1, \ldots\},$$
$$'2' = \{\ldots,\ -3n+2,\ -2n+2,\ -n+2,\ 2,\ n+2,\ 2n+2, \ldots\},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$'n' - 1' = \{\ldots,\ -3n-1,\ -2n-1,\ -n-1,\ -1, n-1\ -2n-1, \ldots\}$$

இவற்றுக்குரிய, 'கூட்டல்' 'பெருக்கல்' அட்டவணைகள் கீழே காட்டப்பட்டுள்ளன.

$\oplus$	'0'	'1'	'2'	...	'$(n-1)$'
'0'	'0'	'1'	'2'	...	'$(n-1)$'
'1'	'1'	'2'	'3'	...	'0'
'2'	'2'	'3'	'4'	...	'1'
...	...	...	...		...
'$(n-1)$'	'$(n-1)$'	'0'	'1'	...	'$(n-2)$'

அட்டவணை 1.4

$\oplus$	'0'	'1'	'1'	...	'$(n-1)$'
'0'	'0'	'0'	'0'	...	'0'
'1'	'0'	'1'	'2'	...	'$(n-1)$'
'2'	'0'	'2'	'4'	...	'$(n-2)$'
...	...	...	...		...
'$(n-1)$'	'0'	'$(n-1)$'	'$(n-2)$'	...	'1'

அட்டவணை 1.5

பின்வருவனவற்றை அவதானியுங்கள்.

'$(n-1)$' $\oplus$ '$(n-1)$' = '$2n-2$'; இது '$n-2$', வகையைச் சேர்ந்தது.
'$(n-1)$' $\otimes$ '$(n-1)$' = n^2-2n+1 இது '1' இற்குச் சமமாகும்.

7. சமவன்மை வகுப்புகள் என்ற வகையிலே பின்னங்கள்

7.1 உதாரணம் 1.8 பின்னங்களின் தொடை $\mathbb{Q}$ வில், நாம் தொடர்பு R ஐப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$a.d = b.c$ ஆயின், $\frac{a}{b} \; R \; \frac{c}{d}$

உதாரணமாக $\frac{3}{8} \; R \; \frac{9}{24}$, ஏனெனில் $3.24 = 8.9$

1. இத் தொடர்பைப் பொறுத்தவரை, எல்லாப் பின்னங்களும் தம்மொடு தாமே தொடர்புடையன. ஏனெனில், $\frac{a}{b} \; R \; \frac{a}{b}$ ஏனெனில், $a.b = b.a$ ஆகவே தொடர்பு R பின்வளைந்தது.

2. $\frac{a}{b}$ தொடர்புடையதாயின் $\frac{c}{d}$ இற்கு, $\frac{a}{b} \; R \; \frac{c}{d}$, $a.d = b.c$ இதன்படி $cb = da$ என நாம் எழுதலாம். அதாவது $\frac{c}{d} R \frac{a}{b}$. இதன் கருத்துத் தொடர்பு R சமச்சீர் உடையது என்பதாகும்.

3. மேலும் $\frac{a}{b}$ தொடர்புடையதாயின் $\frac{c}{d}$ இற்கு, $\frac{c}{d}$ தொடர்புடையதாயின் $\frac{e}{f}$

இற்கு, $a.d = b.c$, $c.f = d.e$ அதாவது, $c = \frac{de}{f}$.

$$\therefore a.d = b \cdot \frac{de}{f}$$

$$\Rightarrow a.f = b.e$$

$\frac{a}{b} \; R \; \frac{e}{f}$ ஆகவே தொடர்பு R கடந்தேகல் உடையது.

மூன்று இயல்புகளும் இசைவானபடியால், இத்தொடர்பு R சமவன்மைத் தொடர்பாகும். இத்தொடர்பால், என்ன பின்னங்கள் $\frac{1}{2}$ இற்குத் தொடர் புடையன? $\frac{x}{y}$, $\frac{1}{2}$ இற்குத் தொடர்புடையது எனக் கொள்வோமாயின், $1.y = 2.x$ என அறிவோம்.

$$\left\{ \dots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots \right\}$$

என்னும் தொடையின் எல்லா மூலகங்களும் இத்தொடர்புக்கு இசைவானவை.

14725—3

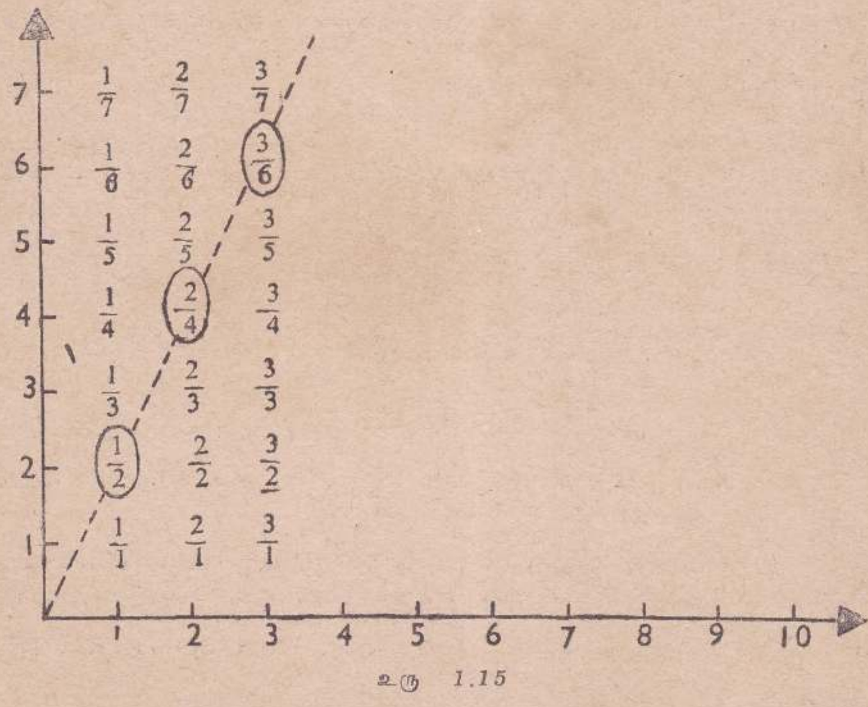
இம்மூலகங்கள் யாவும் $\frac{1}{2}$ ஆகச் 'சுருக்குப்படும்' பின்னங்களே என்பதை அவதானியுங்கள். இது ஒரு சமவன்மை வகுப்பு. இதனை $\frac{1}{2}$ ஆற் குறிக்கலாம். $\frac{1}{2}$ ஆனது இத்தொடையின் தலைமைப் பெறுமானம் எனப்படும். நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\frac{`1'}{2} = \left\{1 \ldots,\ \frac{-3}{-6},\quad \frac{-2}{-4},\ \frac{-1}{-2},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \ldots\right\}$$

7.2 பின்னங்கள் யாவற்றையும் உரு 1.15 இற் காட்டியுள்ளவாறு ஒரு புள்ளி வரைப்படத்திலே காட்டலாம். (இங்கு எளிமையின்பொருட்டு நேர்ப்பின்னங்களை மட்டுமே எடுத்துள்ளோம்.) தொடை '$\frac{1}{2}$' இன் மூலகங்களுக்கு உரிய புள்ளிகளின் ஒழுங்கைக் கவனியுங்கள். அவையெல்லாம் ஒரு கோட்டில் உள்ளன. இவ்வாறே பின்னங்களின் சமவன்மை வகுப்பு ஒவ்வொன்றும், அச்சுகளின் இடை வெட்டினூடே செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள வரைப்படப் புள்ளிகளினாலே குறிக்கப்படும்.

பிரசினம் 1.2

(i) உரு 1.15 ஐப் பிரதி செய்து $\frac{13}{7}$ வரை அதனை விரிவுபடுத்துக.



உரு 1.15

(ii) $\frac{12}{16}$ என்பதைக் கொண்ட சமவன்மை வகுப்பின் மூலகங்கள் சிலவற்றை எழுதுக. அவற்றைக் குறிக்கும் புள்ளிகளூடே செல்லும் நேர்கோட்டை, நீங்கள் பிரதிசெய்த உருவிலே கீறுக.

(iii) $\frac{14}{14}$, $\frac{4}{2}$ என்னும் பின்னங்களுக்கும் (ii) இற் செய்தவாறு செய்க.

(iv) பின்வருவனவற்றில், சமவன்மை வகுப்புப்பற்றிய கருத்து எவ்விடத்தில் உபயோகிக்கப்படுகிறது எனக் கூறுக.

(அ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$= \frac{3}{6}+\frac{2}{6}$

$= \frac{5}{6}$.

(ஆ) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$

$= \frac{4}{6}+\frac{5}{6}$

$= \frac{9}{6}$

$= \frac{3}{2}$

$= 1\frac{1}{2}$.

பயிற்சி 1.6

1. பின்வருவனவற்றுள் எவை சமவன்மைத் தொடர்புகள் எனக் கூறுக. சமவன்மைத் தொடர்பாக அமைவனவற்றுக்குச் சமவன்மை வகுப்புகளை விபரிக்க.

(i) தளமொன்றிலுள்ள காவிகளின் தொடையில் '' .... சமாந்தரமும் நீளத்திற் சமனும் .... இற்கு''

(ii) தரப்பட்ட தளமொன்றிலுள்ள எல்லா நேர் கோடுகளினதும் தொடையில் '' .... செங்குத்து .... இற்கு''

(iii) வெளியிலுள்ள எல்லா நேர்கோடுகளினதும் தொடையில் '' .... செங்குத்து .... இற்கு''

(iv) பாடசாலையிள்ள எல்லா மாணவர்களினதும் தொடையில் '' .... சகோதரி .... இன்''

(v) தொடைகள் எல்லாவற்றினதும் தொடையில் '' .... கொண்டுள்ளது .... கொண்டுள்ள அதே தொகை மூலகங்களை''

(iv) பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்கள் தொடையில் '' .... நிகர்மாற்று .... இன்''

(vii) எல்லா மொழிகளிலுமுள்ள சொற்கள் எல்லாவற்றினதும் தொடையில் '' .... உடையது .... இன் அதே கருத்தை

(viii) $A = \{ (x, y) : x = y; x, y \in \mathbb{R} \}$.

(ix) உயிர் உள்ள பொருள்களின் தொடையில் '' .... உடையது .... இன் அதே தொகை கால்களை''

2. இலங்கையின் இயற்கை அமைப்புப்படம் எவ்வாறு சமவன்மை வகுப்புக்கு ஓர் உதாரணமாக அமைகிறது? இச் சமவன்மை வகுப்புகள் யாவை?

3. பின்வரும் இயல்புகளையுடைய R களுக்கு உரு 1.16 இலுள்ள கீழ்க் காணும் வரிப்படத்தைப் பிரதி செய்து பூர்த்தியாக்குக.

(அ) R பின்வளைந்தது.

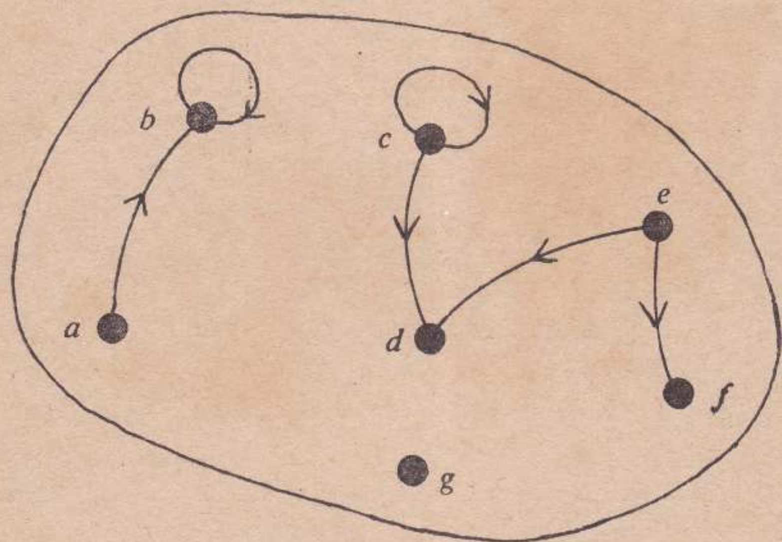
(ஆ) R சமச்சீரானது.

(இ) R கடந்தேகலானது

(ஈ) R சமவன்மையானது.

4. $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ என்னும் வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையில், $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ என்பதனல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பு சமவன்மைத் தொடர்பெனக் காட்டுக. சமவன்மை வகுப்புகளை விபரிக்க.

5. மட்டு 6 இன் எச்ச வகுப்புகள் என்னும் தொடையை எழுதி, அத்தொடைக்குக் கூட்டல், பெருக்கல் அட்டவணைகளைப் பூர்த்தியாக்குக.



உரு 1.16

8. சார்புகளும் படமாக்கல்களும்

8.1 இதுவரை ஒரே தொடையின் மூலகங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளையே நோக்கினேம். உதாரணமாக, நிறையெண் தொடையில் '' .... பெரிது .... இலும்'' என்னும் தொடர்பு, தளமொன்றிலுள்ள நேர்கோடுகளின் தொடையில் '' .... சமாந்தரம் .... இற்கு'' என்னும் தொடர்பு ஆகியன.

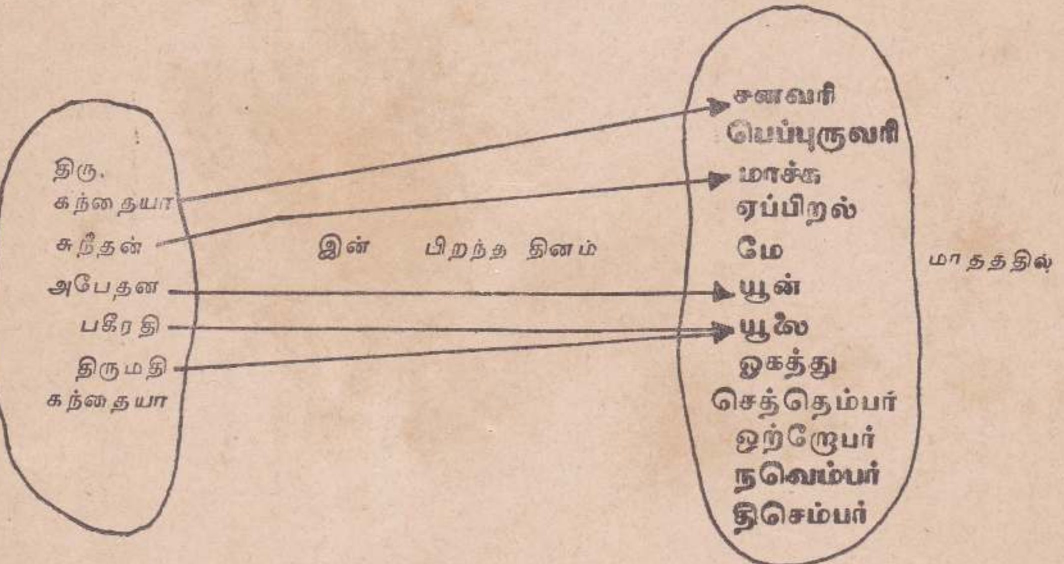
இப்போது இரு வேறு தொடைகளின் மூலகங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளை நோக்குவோம்.

இங்கு ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் வீச்சின் ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தின்மேற் படமாக்கப்படுகிறது.

6—9 ஆம் வகுப்புகளில், இத்தொடர்புகளைப் படமாக்கல்கள் எனக் குறிப்பிட்டோம். இரண்டாம் தொடையிலுள்ள ஒரு மூலகம், முதலாம் தொடையில் ஒத்த மூலகம் ஒன்றைக் கொண்டிராமல் இருக்கும் சந்தர்ப்பங்களை நாம் அங்கு நோக்கவில்லை. பொதுவாக, இரண்டாம் தொடையின் மூலகங்கள் முதலாம் தொடையில் அவற்றுக்கு ஒத்த மூலகங்கள் இல்லாமல் இருக்கலாம்,

உதாரணமாக ஒரு குடும்பத்தின் உறுப்பினருக்கும் வருடத்திலுள்ள மாதங்களுக்கும் இடையே உள்ள பின்வரும் தொடர்பை நோக்குங்கள்." a பிறந்த மாதம் b "

இங்கு a குடும்பத்தில் ஒருவராக இருக்கவேண்டும், b வருடத்திலுள்ள மாதங்களுள் ஒன்முகவிருக்க வேண்டும். இத்தகைய தொடர்பை உரு 1.17 இற் போன்ற உருவத்தாற் காட்டலாம்.



உரு 1.17

இடது பக்கத்திலிருக்கும் தொடை ஆட்சி எனப்படும். வலது பக்கத்திலிருக்கும் தொடை இணை ஆட்சி எனப்படும் . இவ்வுதாரணத்தில் ஆட்சியிலுள்ள குடும்பத்தின் உறுப்பினர் ஒவ்வொருவரும் இணை ஆட்சியிலுள்ள வருடத்தின் மாதங்களுள் ஒன்றே ஒன்றுடன் மட்டும் படமாக்குகின்றனர். இப்படமாக்கலின் வீச்சு {சனவரி, மாச்சு, யூன், யூலை} என்ற தொடையாகும். இது இணை ஆட்சியின் தொடைப் பிரிவாகும். 6—9 ஆம் வகுப்புகளிற் படித்த படமாக்கல்களில் இணை ஆட்சியும் வீச்சும் ஒரே தொடையாக அமைந்தன. ஆனல், அவ்வாறு எப்பொழுதும் இருக்க வேண்டியதில்லை.

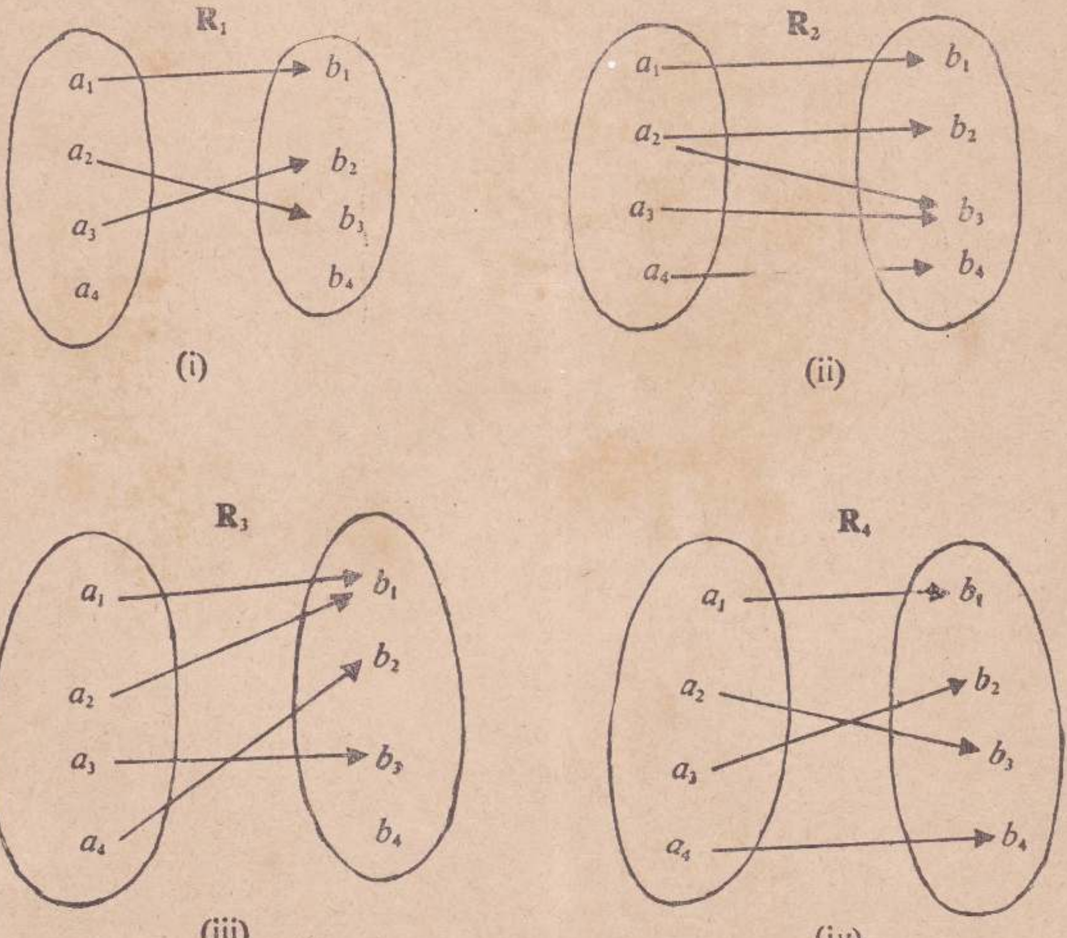
வரைவிலக்கணம்: தொடர்பு ஒன்றின் ஆட்சியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும், அதன் இணை ஆட்சியின் ஒரேயோர் உறுப்புடன் மட்டும் தொடர்புற்றால் அத்தொடர்பு சார்பு அல்லது படமாக்கல் ஆக அமையும்.

8.2 வேறுபட்ட தொடைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகள் எல்லாம் இவ்வியல்பைக் கொண்டிரா.

உதாரணம் 1.9 $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$ எனவும்
$B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$ எனவுங் கொள்வோம்.

A, B ஆகியவற்றுக்கு இடையேயுள்ள நான்கு தொடர்புகளையும் உரு 1.18 இலுள்ள வரிப்படங்களால் வரையறுக்கிறோம்.

தொடர்பு $R_1 = \{ (a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2) \}$ சார்பு அன்று. ஏனெனில் a_4 உடன் ஒரு மூலகமும் தொடர்புறவில்லை. ஆகவே, ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் பயன்படுத்தப்பெறவில்லை.



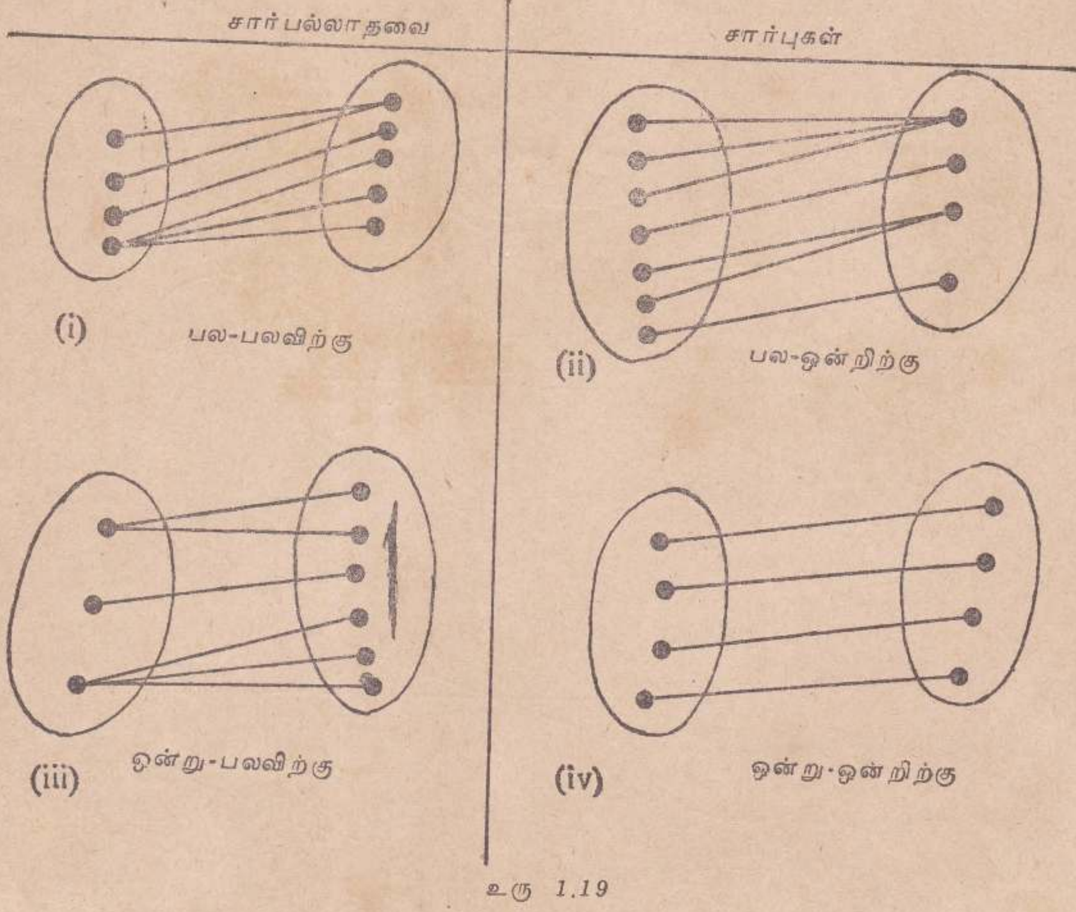
உரு 1.18

தொடர்பு $R_2 = \{ (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_4, b_4) \}$ என்பது சார்பன்று. ஏனெனில், a_2 இணை ஆட்சியின் ஒன்றுக்கும் அதிகமான மூலகங்களுடன் (b_2 உடனும் b_3 உடனும்) தொடர்புடையது.

தொடர்பு $R_3 = \{ (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_2) \}$ சார்பாகும். ஏனெனில், ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும், இணை ஆட்சியில் ஒரேயொரு மூலகத்துடன் மட்டும் தொடர்புடையது.

தொடர்பு $R_4 = \{ (a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2), (a_4, b_4) \}$

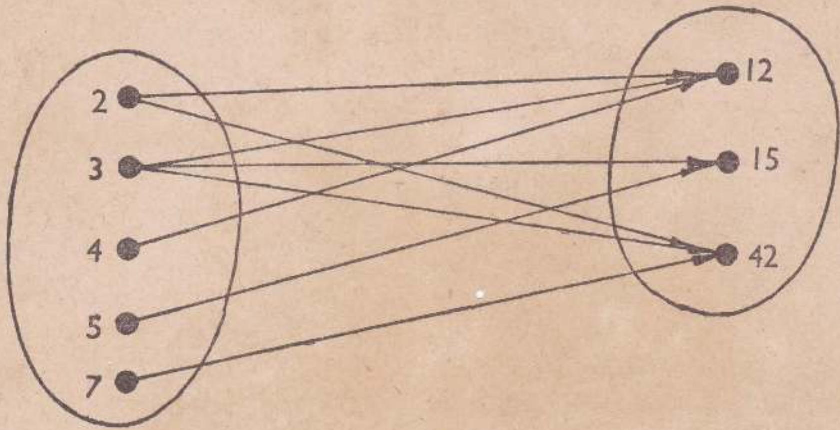
சார்பாகும். இங்கு இணை ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் ஆட்சியின் ஒரு தனி மூலகத்தைத் தனக்கு முன்னர் கொண்டுள்ளது. இச் சந்தர்ப்பத்திலே சார்பானது ''ஒன்று : ஒன்றுக்கு'' சார்பு அல்லது ''ஒன்று - ஒன்று'' சார்பு எனப்படும். இணை ஆட்சியின் மூலகம் ஒன்று R_3 இற் போன்று ஒன்றிலும் அதிகமான மூலகங்களைத் தனக்கு முன்னர் கொண்டிருந்தால், சார்பானது ''பல-ஒன்றிற்கு'' அல்லது ''பல - ஒன்று'' சார்பு எனப்படும். சார்பானது R_4 இற் போன்று இணை ஆட்சி ''இன்மேல்'' ஆகவும், R_3 இற் போன்று இணை ஆட்சி ''இன் உள்'' ஆகவும் அமையலாம்.



உரு 1.19

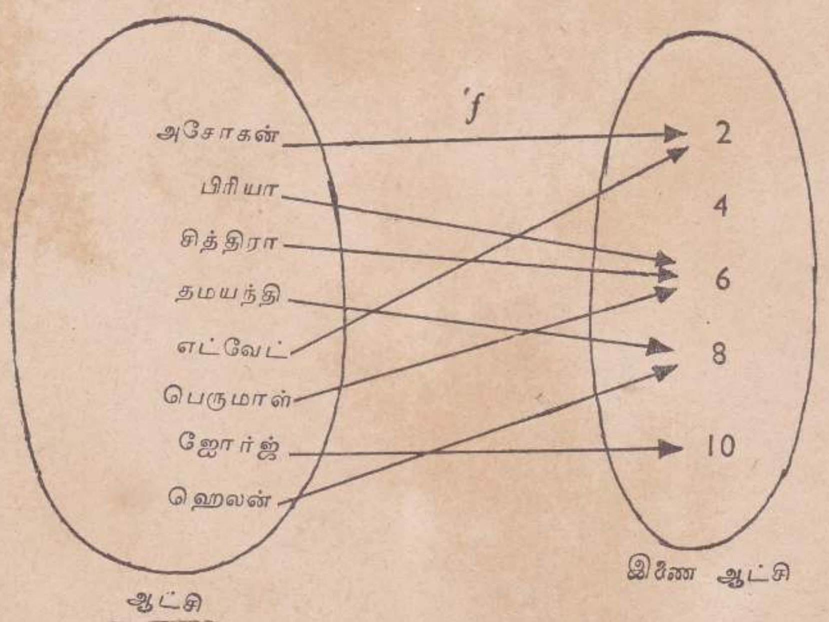
நான்கு வகையான தொடர்புகளுள் இரு வகையே சார்புகளாகும் . மற்ற இரு வகைத் தொடர்புகள் ''ஒன்று - பலவிற்கு'', ''பல - பலவிற்கு'' ஆகியனவாகும். இவை எல்லாம் உரு 1.19 இற் காட்டப்பட்டுள்ளன.

பிரசினம் 1.3 உரு 1.19 இலே தந்துள்ள தொடர்புகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஓர் உதாரணம் தருக. உரு 1.20 இல் முதலாவதைச் செய்து காட்டியுள்ளோம்.



உரு 1.20

இங்கு 2 என்பது 12, 42 ஆகியவற்றின் காரணியாகும். ஆனால், 12 ஆனது 2,3,4 ஆகியவற்றைக் காரணிகளாகக் கொண்டுள்ளது. ஆகவே, இது பல-பலவிற்கான தொடர்பாகும்.



உரு 1.21

உதாரணம் 1.10 வகுப்பு ஒன்றிலுள்ள மாணவர் ஆட்சியாகவும், அவர்கள் பரீட்சை ஒன்றிலே 10 இற்குப் பெற்ற புள்ளிகள் இணை ஆட்சியாகவும் உரு 1.21 இற் காட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரு மாணவன் ஒரேயொரு புள்ளியையே பெறமுடியுமாதலால், ஒரேயோர் அம்புக்குறி மட்டும் ஒவ்வொரு பெயரிலுமிருந்து செல்கின்றது. இணை ஆட்சியின் எல்லா மூலகங்களையும் பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை என்பதை அவதானியுங்கள். 4 என்னும் புள்ளியை மாணவர் ஒருவரேனும் பெறவில்லை.

சார்பைக் குறிப்பதற்கு f, g போன்ற சிறிய ஆங்கில எழுத்துகளையே வழக்கமாகப் பயன்படுத்துவோம். சிறப்பான சார்புகள் சில தமக்கேயுரிய பெயர்களைக் கொண்டுள்ளன. உதாரணம் சைன், கோசைன் என்பன. கோசைன் என்பது 'கோசை' எனச் சுருக்கி எழுதப்படும். 6—9 ஆம் வகுப்புகளில் நீங்கள் கற்ற கேத்திரகணித உருமாற்றங்கள் பெரிய ஆங்கில எழுத்துகள் 'M','R','T' என்பவற்றுற் குறிக்கப்பட்டன. இவையும் தனிச் சிறப்பான சார்புகளாகும்.

ஆட்சியின் மூலகம் ஒன்றாகிய a இணை ஆட்சியின் மூலகம் ஒன்றாகிய b இற்கு f என்னும் சார்பினுலே தொடர்புடையதாயின், f படமாக்குகிறது a ஐ b இற்கு என்று கூறுவோம். b ஆனது a இன் விம்பம் எனப்படும். அதாவது, a ஐ b இற்கு f படமாக்குகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, உதாரணம் 1.10 இல் சார்பு f அசோகனை 2 இற்குப் படமாக்குகிறது. பூமி மேற்பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் உலகப்படத்துடன் தொடர்புறுவதால் "படமாக்கல்" என்ற சொல் வந்திருக்கலாம். இங்கு தேசம் ஒன்றின் ஒவ்வொரு மூலகமும், தேசப்படத்தில் ஒரு தனியான புள்ளியொன்றுடன் தொடர்புபடுத்தப் பெறுகிறது. அவ்வண்ணமே தேசப்படத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியும், தேசத்தின் ஒருதனியான மூலகமொன்றுடன் தொடர்புபடுத்தப் பெறுகிறது. இது ஒன்று - ஒன்று சார்புக்கான உதாரணமாகும். இப்படமாக்கலை

$$f : a \longrightarrow b$$

அல்லது $a \xrightarrow{f} b$ என எழுதுவோம்.

மேற்கூறிய உதாரணத்தில்.

$$f : \text{அசோகன்} \rightarrow 2$$

இணை ஆட்சியின் a இற்கு ஒத்த மூலகத்தைப் பெரும்பாலும் $f(a)$ என எழுதுவோம். எனவே

$$a \rightarrow f(a)$$

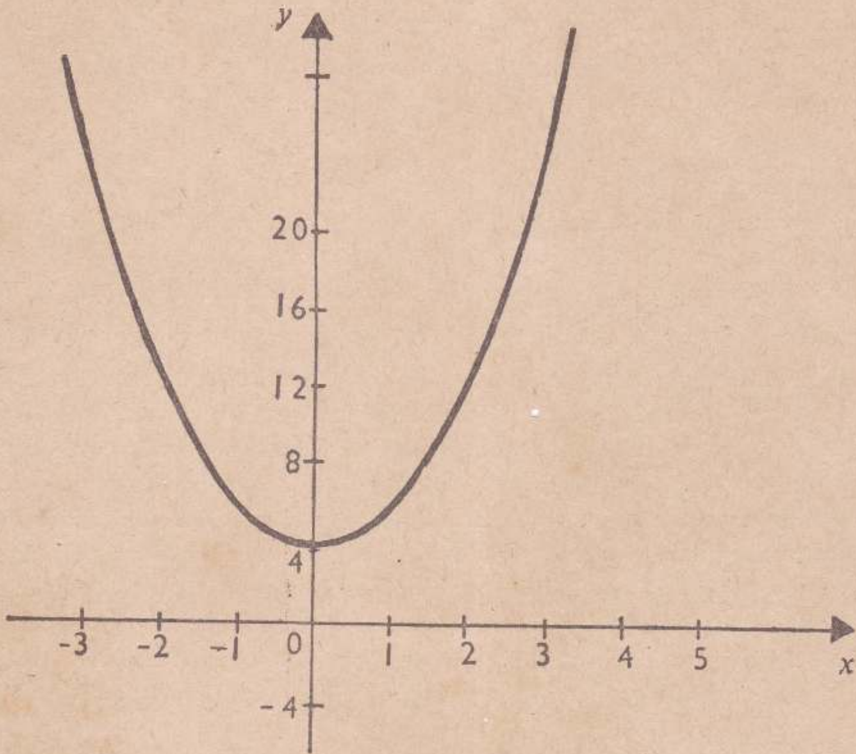
$$\text{அல்லது } b = f(a)$$

மேலேயுள்ள உதாரணத்தில்

$$f\ (\text{அசோகன்}) = 2$$

$x \rightarrow 3x^2 + 4$ என்னும் சார்பின் கீழ் x இன் விம்பம் y ஆயின் உரு 1.22 இலுள்ள வளையி (x,y) என்னும் புள்ளிகளையும் அது போன்றவற்றையும் மட்டுமே கொண்டிருக்கக் காணலாம். $y = 3x^2 + 4$ என்னும் தொடர்பு வரையின் சமன்பாடு எனப்படும். மேலும் வரையிலுள்ள எப்புள்ளியினதும் ஆள்கூறுகள் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யுமென்பதை உணர்தல் அவசியம்.

x இன் குறிப்பிட்ட பெறுமானங்களுக்கு x இலான ஒரு கோவையின் பெறுமானத்தைக் காணமுற்படும்போதும். சார்புகளின் வரைபுகளை வரையும் போதும் இக்கருத்துகளைப் பயன்படுத்துவோம்.



உரு 1.22

$x = 2, 3, -1$ ஆக இருக்கையில் $3x^2 + 4$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு $P(x) = 3x^2 + 4$ என்று எழுதி, வீச்சினுள் $P(x)$ இன் பெறுமானங்களைக் கணிப்போம்.

$P(2) = 16, P(3) = 31, P(-1) = 7$ என்று பெறுவோம். இதிலிருந்து $(2,16)$, $(3,31)$ $(-1,7)$ என்பனவும் $y = 3x^2 + 4$ என்னும் வரைபிலுள்ள புள்ளிகள் என்று காண்போம்.

பின்னைய அதிகாரங்களில் இக்கருத்துகள்பற்றிய பிரயோகங்களை அடிக்கடி சந்திப்போம்.

பிரசினம் 1.4

உதாரணம் 1.9இல், (ii), (iv) ஆகிய பகுதிகளிற் குறிப்பிட்ட சார்புகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் வீச்சை எழுதுக. $x \longrightarrow x^2$ போன்ற படமாக்கல்களில் x போன்ற ஓர் எழுத்தைப் பயன்படுத்தும்போது, நாம் என்ன எழுத்தையும் பயன்படுத்தியிருக்கலாம் என்பதை நீங்கள் அவதானிக்கவேண்டும். ஏதேனும்

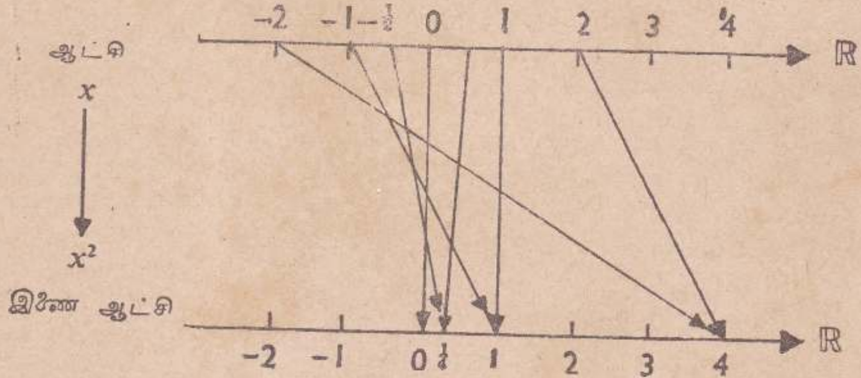
எண் தரப்பட்டால் அவ்வெண் அதன் வர்க்கத்தின்மேற் படமாக்கப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுவதே நோக்கமாகும். உதாரணமாக மேற்கூறிய படமாக்கல்கள் தொடை $\mathbb{N}$ மீதுள்ளதாயின், இயலத்தக்க படமாக்கல்களாகிய

$$1 \longrightarrow 1^2$$
$$2 \longrightarrow 2^2$$
$$3 \longrightarrow 3^2$$

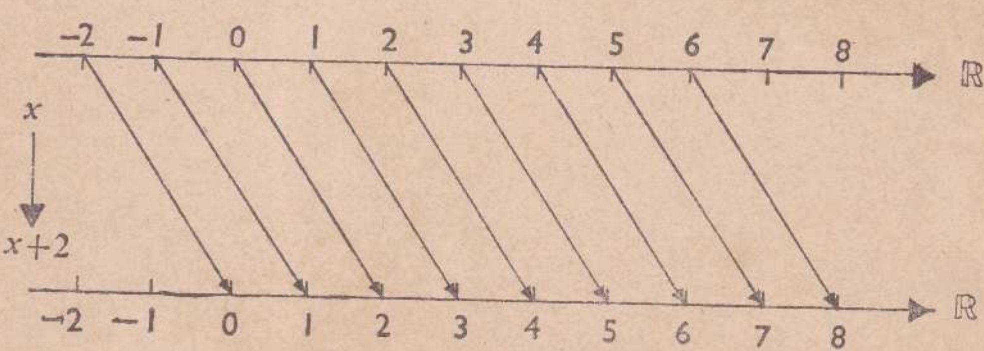
என்பவை யாவற்றையும் எழுதுவதற்குப் பதிலாகக் கையாளப்படும் ஒரு சுருக்கக் குறியீடே அது. எந்த எழுத்தைத் தெரிந்தெடுப்பதென்பது அவ்வளவு முக்கியமன்று. x, t போன்ற எழுத்துகளைப் பயன்படுத்துவது வெறும் மரபேயாகும்.

9. சார்பு ஒன்றை வரைபு மூலங் குறித்துக் காட்டல்

9.1 சார்பு ஒன்றைப் பல்வேறு முறைகளிலே குறித்துக் காட்டலாம். உரு 1.21இற் காட்டியிருப்பது, ஒரு முறையாகும். இன்னொரு முறை உரு 1.22இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு $f: x \longrightarrow x^2$, $x \in \mathbb{R}$. அத்துடன் ஆட்சியும் இணை ஆட்சியும் எண்கோடு ஒன்றின் மூலகங்களாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன. எந்தத் தொடைகளுக்கும் இந்த முறையைப் பயன்படுத்தலாம். மெய்யெண் தொடை $\mathbb{R}$ இன் தொடைப் பிரிவுகளாக ஆட்சியும், இணை ஆட்சியும் அமையும்போது, இம்முறை சிறப்பாகப் பயனுடையது. பிற வகைக் குறிப்பீடுகளில் வெளித்தோன்றாத் தொடர்புகளை இதில் விளக்கமாகக் காட்ட முடியும்.



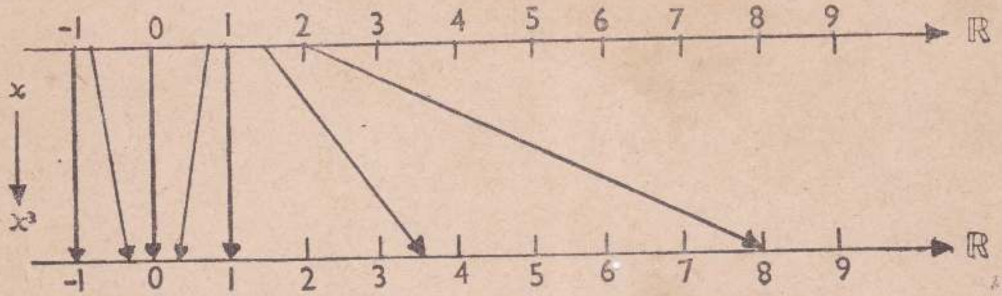
உரு 1.23



உரு 1.24

உதாரணமாக, உரு 1.24இல் இரு தொடைகளுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பு நூக்குத் தொடர்பு என்பது தெளிவு. ஒவ்வொரு மூலகமும் 2ஆல் அதிகரிக்கப் படுகிறது.

$x \longrightarrow x^3$ என்பது தரும் மெய்யெண் கோட்டின் படமாக்கலைக் காட்டும் உரு 1.25 இல், படமாக்கலின் 3 நிலையான புள்ளிகளான $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ஆகியன தெளிவாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன. $\{x : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ என்ற தொடையிலே படமாக்கல் நெருக்கல் இயல்பை உடையது.



உரு 1.25

இந்த ஆயிடைக்கு அப்பால், படமாக்கலானது தரப்பட்ட யாதுமோர் ஆயிடையை உருப்பெருக்குகிறது. இந்த உருப்பெருக்கல் அல்லது அளவிடைக் காரணி, உற்பத்தியிலிருந்து அப்பாற் செல்லச்செல்ல அதிகரிக்கிறது. இம்முக்கிய கருத்துப் பற்றி இனிவரும் பாடங்களிலும் காண்போம்.

சார்பு ஒன்றை வரைபுமூலங் குறித்துக் காட்டல் மிக முக்கியமானதாகும். நீங்கள் கூறவிரும்பும் கருத்துகளை விளக்கிக் காட்டுதற்கு எந்த வகை வரைபு சிறந்ததெனச் சீர்தூக்கிப் பார்த்துத் தெரிதல் வேண்டும். பின்னைய பாடங்களில் வரைபுகள் பற்றி மேலும் பல பயிற்சிகளைச் செய்வோம்.

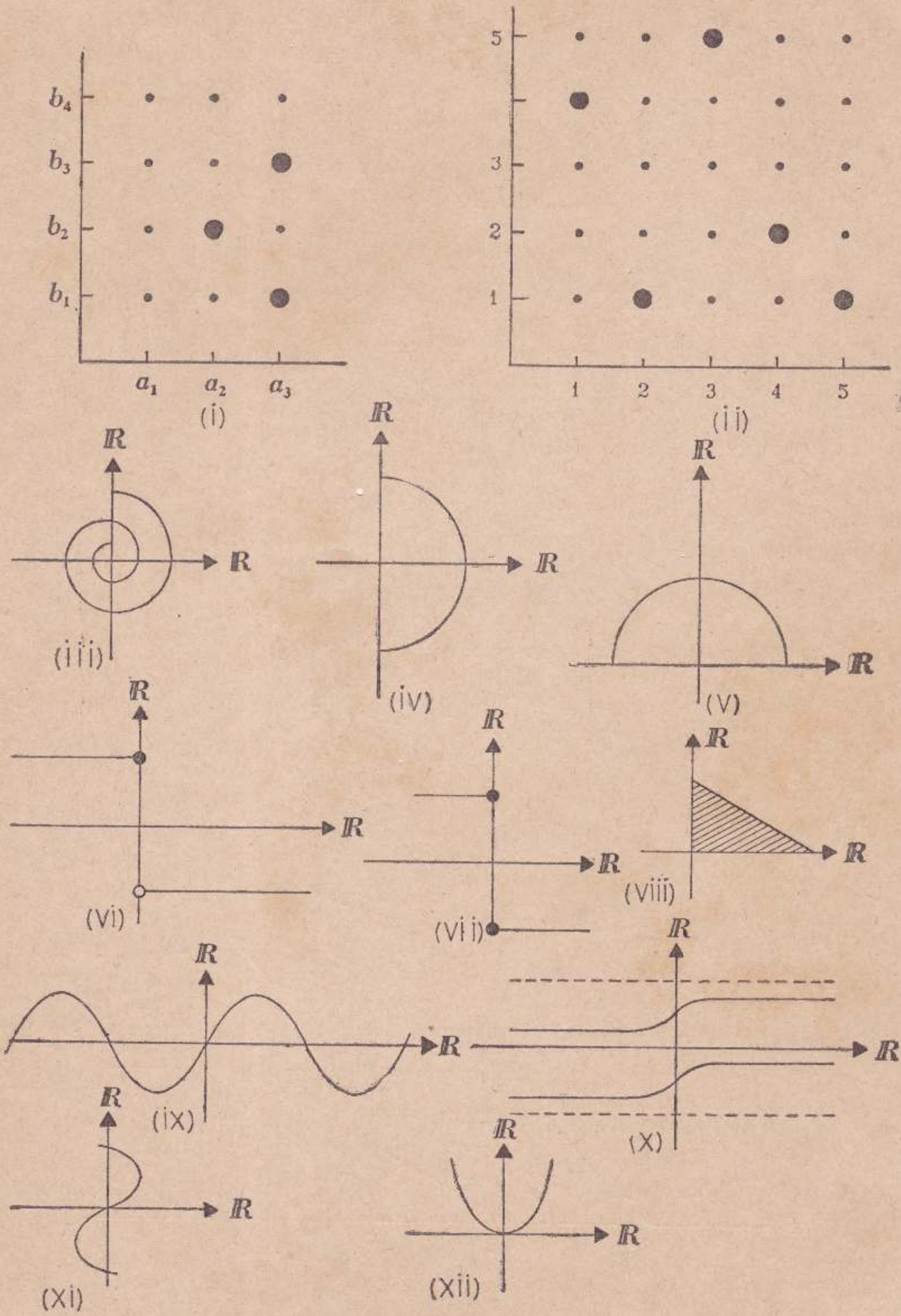
பயிற்சி 1.7

1. $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ ஆயின், பின்வரும் வரிசைப்பட்ட சோடித் தொடைகளில் எவை சார்புகளாகும்? சார்புகளாக அமையும் ஒவ்வொன்றுக்கும் புள்ளிவரைபு வரைக.

(i) $\{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1)\}$;
(ii) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$;
(iii) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}$;
(iv) $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$;
(v) $\{(1, 3), (1, 4), (1, 2), (1, 1)\}$.

2. $x, y \in \mathbb{R}$ எனின் பின்வருவனவற்றுள் எவை சார்புகளாகும்? ஒவ்வொரு சார்புக்கும் வரைபு வரைக.

(i) $\{(x, y) : x = y\}$;
(ii) $\{(x, y) : y < x\}$;
(iii) $\{(x, y) : y^2 = 4x\}$;



உரு 1.26

14725—5

(iv) $\{(x, y) : 4y = x^2\}$;
(v) $\{(x, y) : 3x + y = 1\}$;
(vi) $\{(x, y) : y = x^3\}$;
(vii) $\{(x, y) : y = x^4\}$;
(viii) $\{(x, y) : y = x^n, n \in \mathbb{Z}\}$;
(ix) $\{(x, y) : y = \text{சைன்}\ x\}$,
(x) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$. *(அட்டவணைகளைப் பார்த்துச் செய்க.)*

3. பின்வரும் வரைபுகள் *(உரு 1.26)* சார்புகளைக் குறிக்கின்றனவா எனக் காண்க.

4. பின்வருவனவற்றில் $x, y \in \mathbb{R}$. படமாக்கல் ஒன்று ஒன்றிற்காவெனக் காண்க. சாத்தியமான சில ஆட்சிகளையும் அவற்றுக்கொத்த வீச்சுகளையும் தருக.

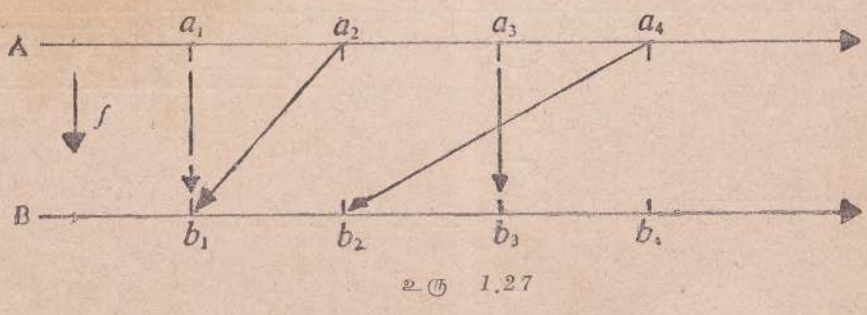
(i) $\{(x, y) : y = x^2\}$;
(ii) $\{(x, y) : y = 4x + 2\}$;
(iii) $\{(x, y) : y = x^3\}$;
(iv) $\{(x, y) : y = 4\}$;
(v) $\{(x, y) : y = +\sqrt{1 - x^2}\}$.

5. பின்வரும் சார்புகளை அமைக்க.

(i) $\mathbb{N}$ ஆனது இரட்டை எண்தொடையாகிய $2\mathbb{N}$ உடன் $1 - 1$ ஒத்திருக்கையிலே படமாக்கல்.

(ii) $0 \leqslant x \leqslant 2$ என்ற ஆட்சி $-2 \leqslant x \leqslant 2$ என்ற வீச்சுடன் $1 - 1$ ஒத்திருக்கையிலே படமாக்கல்.

6. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $f(x) = x$ இன் காரணிகளின் (1 உம் x உம் உட்பட) எண்ணிக்கை. 6 இற்கு 1, 2, 3, 6 எனும் நான்கு காரணிகள் இருப்பதால் f இன் வரிசைப்பட்ட சோடிகளுள் ஒன்று (6, 4). 4 வேறு சோடிகள் எழுதுக. உரு 1.27 இற் போன்ற ஒரு வரைபிற் குறித்துக் காட்டுக.



உரு 1.27

7. பின்வருவன சார்புகளாக அமைதற்குப் பொருத்தமான ஆட்சியையும் இணை ஆட்சியையும் வரையறுக்க. அவ்வாறு வரையறுத்தல் முடியாதாயின் அதற்குரிய காரணங்களைக் கூறுக.

(i) $f : x \to y$ இங்கு $x = y^2$.

(ii) மாணவன் $\to$ அவன் படிக்கும் வகுப்பு.

(iii) $A \to A'$; இங்கு A, அகிலத் தொடையாகிய U இன் தொடைப் பிரிவாகும்.

(iv) $(x, y) \to x + y$;

(v) தளமொன்றிலுள்ள புள்ளி $(x, y) \to$ காவி (x/y)

(vi) எண் $a \to a$ இலுள்ள காரணிகளின் தொகை

(vii) $x \to$ தான் x ;

(viii) $x \to$ கோசைன் x ;

(ix) ஒருவர் $\to$ அவர் வசிக்கும் வீடு.

(x) ஒருவர் $\to$ அவர் பாடசாலைக்கு நடந்து செல்லும் வீதிகள்.

(xi) ஒரு சொல் $a \to$ அதிலுள்ள எழுத்துகளின் தொகை b.

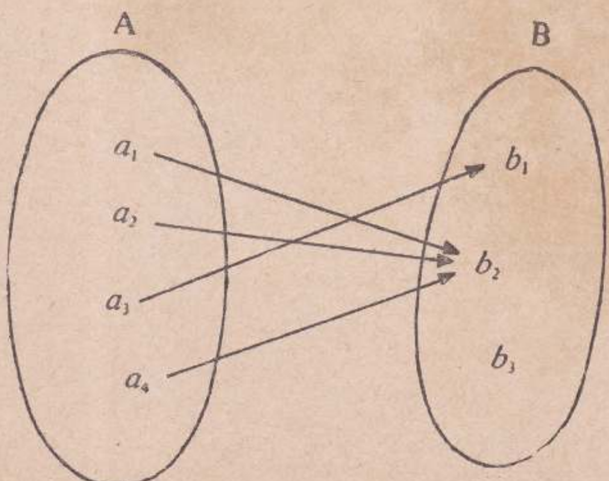
10. சார்பு ஒன்றின் நேர்மாறு

10.1 தொடர்பொன்று சார்பாக அமைதற்குப் பின்வரும் இரு நிபந்தனைகளைக் கூறினோம். அவையாவன :—

(i) ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் பயன்படுத்துதல் வேண்டும்.

(ii) ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் ஒருதனியான விம்பம் ஒவ்வொன்றைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

சார்பு ஒன்றைப் புறமாற்றுக நோக்கினல், இவ்விரு நிபந்தனைகளும் எப்பொழுதும் இசைவாகா. $f : A \to B$ என்பது உரு 1.28 ஆல் வரையறுக்கப்படுகிறது.

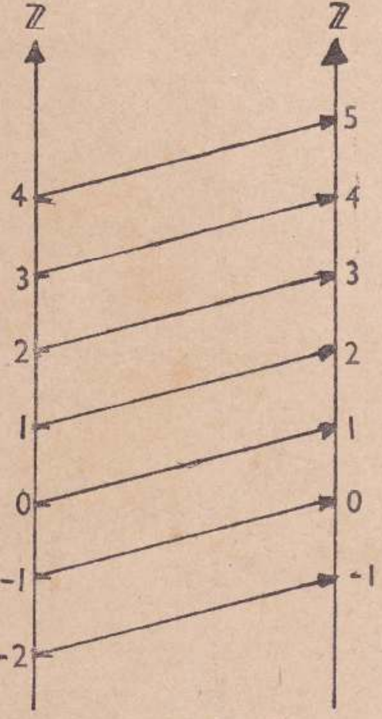


உரு 1.28

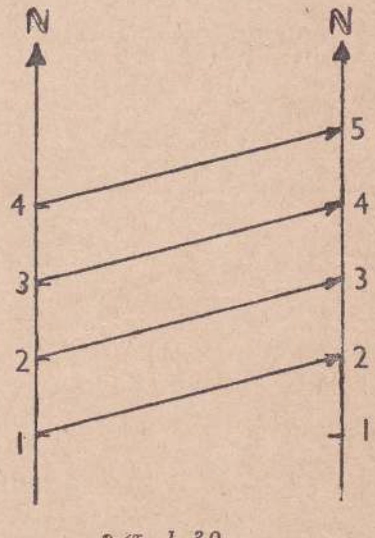
ஆட்சித் தொடை $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$ ஆகும். இணை ஆட்சித்தொடை $B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$. வீச்சு $= \{b_1, b_2\}$ ஆகும். $f (a_3) = b_1$ ஆகவே, b_1 ஆனது a_3 ஐ அதன் நேர்மாற்று விம்பமாகக் கொண்டுள்ளது எனக் கூறுவோம். மேலும் $f (a_1) = b_2$, $f (a_2) = b_2$, $f (a_4) = b_2$ ஆகும். எனவே b_2 ஆனது $\{ a_1, a_2, a_4 \}$ என்னுந் தொடையை அதன் நேர்மாற்று விம்பத் தொடையாகக் கொண்டுள்ளது.

சார்பு f இன் புறமாற்றுத் தொடர்பு சார்பன்று. ஏனெனில், முன்னர் குறிப்பிட்ட சார்புக்கு வேண்டிய நிபந்தனைகள் இதற்கு இசைவானவையல்ல. ஆட்சியிலிருந்து இணை ஆட்சிக்கான படமாக்கல் எப்பொழுதும் புறமாற்றுச் சார்பை வரையறுப்பதில்லை.

உதாரணம் 1.11 தொடை $\mathbb{Z}$ இல் ஆட்சியும், இணை ஆட்சியும் (உரு. 1.29) அமைய, சார்பு $f : x \to x + 1$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இது ஓர் ஒன்று – ஒன்று சார்பாகும். இப்படமாக்கலைப் புறமாற்றலாம். இணை ஆட்சியில் ஏதேனும் மூலகமொன்று (3 எனக் கொள்க) தரப்படின், நேர்மாற்று மூலகத்தை எப்பொழுதும் காணமுடியும் (இங்கு அது 2 ஆகும்).



உரு 1.29



உரு 1.30

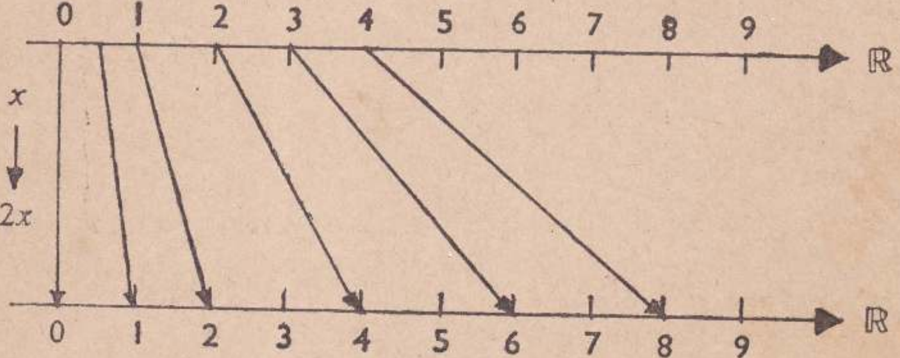
உதாரணம் 1.12 சார்பு $f : x \to x + 1$ ஆட்சியும், இணை ஆட்சியும் தொடை $\mathbb{N}$ இல் அமைய வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது (உரு 1.30). இது ஒன்று–ஒன்று சார்பாகும். இணை ஆட்சியிலுள்ள 1இற்கு முன்னர் ஓர் எண்ணும் இல்லை. ஆகவே இத்தொடையிற் புறமாற்றுப் படமாக்கல் இல்லை. ஏனெனில், 1 ஓர் இயற்கை எண்ணுடனும் படமாக்கப்படவில்லை.

f^{-1} என்ற நேர்மாற்றுப் படமாக்கல் இருப்பதற்கு f இற்குப் பின்வரும் நிபந்தனைகள் இரண்டும் இசைவாகவிருக்கவேண்டும்.

1. இணை ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும், ஆட்சியின் ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தின் விம்பமாக அமைய வேண்டும். இணை ஆட்சியானது வீச்சுடன் சர்வசமனாகும். அதேசமயம் f ஆனது, இணை ஆட்சி 1இன் மேல் அமையும்.

2. இணை ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும், ஆட்சியிலிருந்து ஒரேயொரு மூலகத்துடன் மட்டும் படமாக்கப்பட வேண்டும். அத்துடன் ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும், இணை ஆட்சியின் ஒரேயொரு மூலகத்துடன் மட்டும் படமாக்கப் படுவதனால், f ஆனது ஓர் ஒன்று - ஒன்று படமாக்கலாகும்.

உதாரணம் 1.13 உரு 1.31 இற் காட்டப்பட்டுள்ள படமாக்கல் $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ஒன்று- ஒன்று படமாக்கல் ஆகும். இதில் இணை ஆட்சியின் எல்லா மூலகங்களும் பயன்படுகின்றன. இதனை $x \to 2x$ என எழுதலாம். அது மேற் குறிப்பிட்ட இரு நிபந்தனைகளையும் திருப்தியாக்குகிறது. இதன் நேர்மாற்றுப் படமாக்கல் $x \to \frac{1}{2}x$ ஆகும்.



உரு 1.31

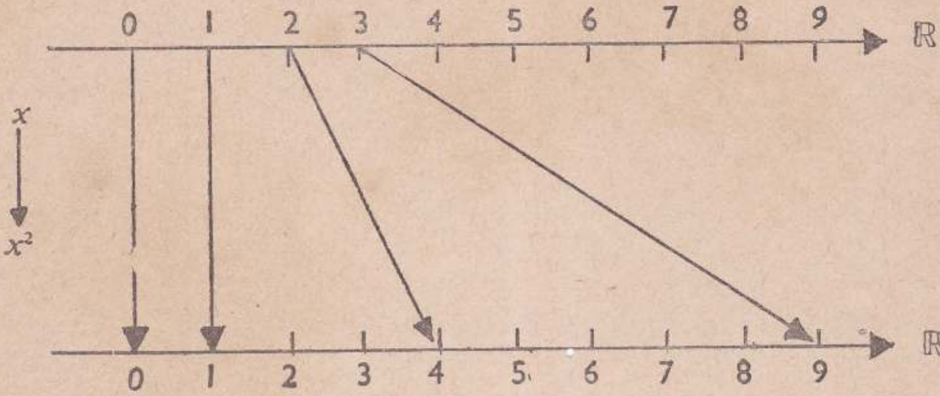
எல்லாத் தொடர்புகளும் நேர்மாற்றுத் தொடர்புகளைக் கொண்டிருப்பினும், எல்லாச் சார்புகளும் நேர்மாற்றுச் சார்புகளைக் கொண்டிருப்பதில்லை. நேர் மாற்றுச் சார்பைக் குறிப்பதற்கு f^{-1} என்னுங் குறியைப் பயன்படுத்துகிறோம். இதனைச் சுட்டியென மயங்கவேண்டாம்.

f^{-1} என்பது $\dfrac{1}{f}$ ஐக் கருதமாட்டாது.

11. தலைமைப் பெறுமானம்

11.1 $g : x \to x^2$ போன்ற பல சார்புகளுக்கு நேர்மாறுகள் இல்லை, (4இன் நேர்மாற்று விம்பத் தொடை $\{2 - 2\}$ ஆகும். எனவும் கவனிக்க.) இத்தகைய சார்புகளைப் புறமாற்றுதல் பெரும்பாலும் எமக்கு அவசியமாகலாம். இவ்வாறுதான், நாம் விம்ப மூலகம் ஒன்றின் 'தாய்' மூலகத்தைக் கண்டு கொள்ளல் கூடும். ஆரம்பப் படமாக்கலின் ஆட்சியைக் கட்டுப்படுத்துவது ஒரு

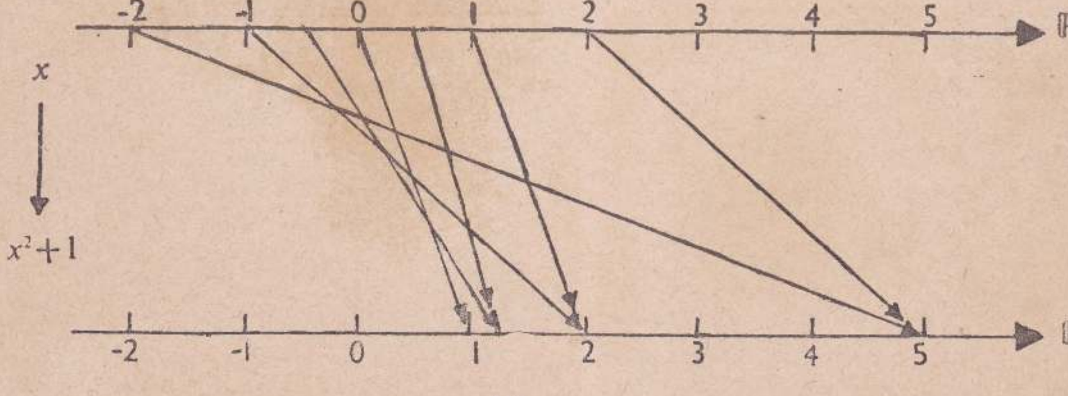
வழியாகும். உதாரணமாக, முன்னர் குறிப்பிட்ட படமாக்கலில், அதன் ஆட்சியை மறையல்லாத மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}'$ என்பவற்றுக்குக் கட்டுப்படுத்தினுல், புறமாற்றத்தக்க சார்பு ஒன்றைப் பெறுவோம். இவ்வித்தியாசத்தைக் காண்பதற்கு உரு 1.23 உடன் உரு 1.32ஐ ஒப்பிடுக. இது இப்போது நேர்மாறு ஒன்றைக் கொண்ட சார்பாகும்.



உரு. 1.32

இந்த நேர்மாறு $\sqrt{}$ என்னுங் குறியாற் குறிக்கப்படும். எனவே 4இன் ஒருதனியான தாயெண் $2 = \sqrt{4}$ ஆகும்.

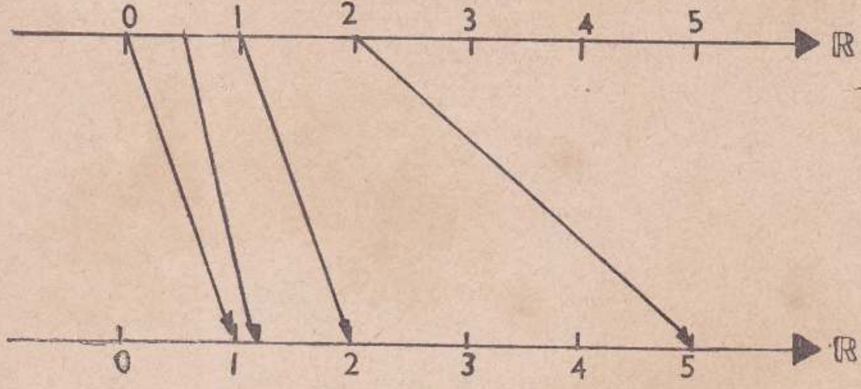
வேறு வழியிலும் இதனை நாம் செய்யலாம். வழக்கமாக இது ஒரு மரபு பற்றிய விடயமேயாம். கட்டுப்பாட்டை மேற்கொண்டவுடன் தொடக்க இணையாட்சியின் மூலகமொன்றின் நேர்மாற்று விம்பம் ஒருதனி ஆகும்; அது கட்டுப்படுத்தாத சார்பின் நேர்மாற்று விம்பத் தொடையினது ஒரு மூலகம் ஆகும். இந்த மூலகம் நேர்மாற்று விம்பத் தொடையின் தலைமைப் பெறுமானம் எனப்படும். மேற்குறிப்பிட்ட உதாரணத்தில் நேர்மாற்று விம்பத் தொடை $\{2, -2\}$ இன் தலைமைப் பெறுமானம் 2 ஆகும்.



(i)

உரு 1.33

உதாரணம் 1.14 $h : x \to x^2 + 1$ (உரு 1.33) என்னும் படமாக்கல், நேர் மாற்றைக் கொண்டுள்ளதாக அமைதற்கு என்ன ஆட்சியைப் பயன்படுத்தலாம் ?

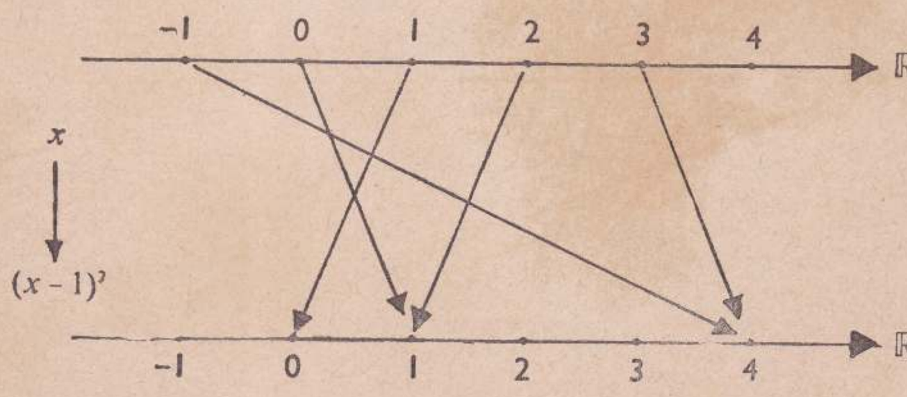


(ii)

உரு 1.33

$x \longrightarrow x^2$ என்பது $\mathbb{R}$ இன் எல்லா மூலகங்களையும் மறையல்லா மெய்யெண் $\mathbb{R}^+$ இன் மேற் படமாக்குவதால், உரு 1.33 (i) இற் காட்டியவாறு $x \to x^2 + 1$ என்பது அதன் மூலகங்கள் எல்லாவற்றையும் 1 இலும் பெரிய அல்லது 1 இற்குச் சமமான மெய்யெண்களின்மேற் படமாக்கும். இப்படமாக்கலில் $\mathbb{R}^+$ என்னும் இணையாட்சியின் 1 இலும் பெரிய ஒவ்வொரு மூலகமும் ஆட்சி $\mathbb{R}$ இன் இரண்டு ஒருதனியான மூலங்களின் விம்பமாகும் என்பதைக் காண்பீர்கள். உரு 1.33 (ii) இற் காட்டியவாறு ஆட்சியை $\{x : x \geqslant 0\}$ ஆகக் கட்டுப்படுத்தினல் $\{x : x \geqslant 1\}$ என்னும் தொடையின் எந்தவொரு மூலகமும் $\{x : x \geqslant 0\}$ என்ற தொடையின் ஒருதனி மூலகமொன்றின் விம்பமாகும். ஆகவே $h : x \to x^2 + 1$ என்னும் படமாக்கலுக்கு ஒரு நேர்மாறு இருக்கும்.

உதாரணம் 1.15 $h : x \to (x - 1)^2$ என்னும் படமாக்கலுக்கு நேர்மாறு இருக்க வேண்டுமாயின் என்ன ஆட்சியைப் பயன்படுத்தலாம் ?



உரு 1.34

உரு 1.34 ஐ நோக்க, $\{x : x \geqslant 1\}$ என்ற தொடைக்கு ஆட்சியைக் கட்டுப்படுத்த வேண்டும் என்பது விளங்கும். இவ்வாறு 1 - 1 படமாக்கலைப் பெறுகிறேம். இதற்கு நேர்மாறு உண்டு.

உதாரணம் 1.16 'பாடசாலை ஒன்றின் பிள்ளைகள் தொடை அவர்களின் தந்தைக்கு' என்ற படமாக்கலான 'பிள்ளைகள் ⟶ தந்தை' பல - ஒன்றுக்கான சார்பாகும். இதன் புறமாற்று, தொடர்பாக அமையுமேயன்றிச் சார்பாக அமையாது. இந்தத் தொடர்பை மூத்த பிள்ளைக்குக் கட்டுப்படுத்தினோமானல், நேர்மாற்றுப் படமாக்கலைப் பெறுவோம். (மூத்த பிள்ளைகள் இரட்டைப் பிள்ளைகளாயிருக்கலாமென்னும் வகையை இங்கு புறக்கணிக்கிறோம்.) பரம்பரை அடிகொடிகளைத் தேடியறிவதில், பெரும்பாலும் இத்தகைய பிரச்சினை தோன்றும்.

பயிற்சி 1.8

1. $A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

   $f = \{ (a, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 2) \}$ ஆயின்,

   f தோன்றுமா ?

2. நிறையெண் தொடையில் f_1, f_2, f_3, f_4 என்னும் சார்புகள் பின்வருவனவற்றால் வரையறுக்கப்படும்.

$f_1 ; x \to 6 \to x$, $f_2 : x \to x - x^2$, $f_3 : x \to 4x - 1$,

$f_4 ; x \to x^3$

(i) 1 - 1 ஆன சார்புகள் எவை ?

(ii) தொடையின் மேல் ஆக அமைந்த சார்புகள் எவை ?

(iii) நேர்மாற்றைக் கொண்ட சார்புகள் எவை ?

3. $x \to 2 - 3x$,

$x \to 2 - 3x + x^2$,

$x \to 2 - 3x + x^3$ ஆகிய படமாக்கல்களின் கீழ் 0 வின் நேர்மாற்று விம்பங்கள் என்ன ?

4. $[x]$ என்னும் குறி 'மிகப்பெரிய ஆனல் x இலும் அதிகரிக்காத' நிறையெண்ணைக் குறிக்கிறது. $[2.5]$, $[0.4433]$, $[- 1.1]$, $[3.4]$, $[- 3.4]$, $[4]$, $[0]$, $[\sqrt{3}]$ என்னும் படமாக்கலுக்கு அம்புக்குறி வரைபு வரைக.

[4] என்பதன் நேர்மாற்று விம்பம் என்ன ?

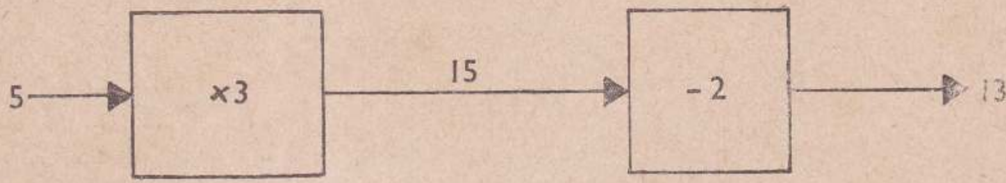
5. f ஆனது மறையல்லாத மெய்யெண்களின் தொடைப்பிரிவொன்றிலே $f (x) = \sqrt{(x - 1)}$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்ட படமாக்கலாகும்.

f^{-1} வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா, இல்லையாவெனக் கூறுக. f இன் ஆட்சி என்ன ? $\sqrt{x}$ என்பது x இன் நேர் வர்க்க மூலமாகும்.

6. $A = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ ஆகுமாறு $f : A \to B$ என்பது $f (x) = \dfrac{x + 2}{2x - 1}$ என்பதால் வரையறுக்கப்படுகிறது. $f^{-1} : B \to A$ உள்ளதாயின், தொடை B பற்றி யாது கூறலாம். f^{-1} இற்கும் f இற்கும் ஒரே வரையறுப்புச் சூத்திரம் உண்டென நிறுவுக. இதிலிருந்து நீர் பெறும் முடிபு யாது ?

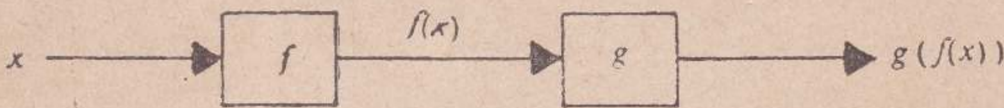
12. சார்புகளின் சேர்க்கை

12.1 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ இனது $x \to 3x - 2$ என்ற படமாக்கலை $h(x)$ குறிக்கட்டும். இப்படமாக்கலின் கீழ் $5 \longrightarrow 13$. இம்முடிவைப் பெறுவதற்கு நாம் முதலில் 5ஐ 3ஆற் பெருக்கி வரும் முடிவிலிருந்து 2 ஐக் கழிப்போம் (உரு 1.35).



உரு 1.35

இது உண்மையிலேயே ''3ஆற் பெருக்க'', ''2ஐக் கழிக்க'' என்னும் இரு படமாக்கல்களையும் சேர்க்க வரும் சேர்மானமாகும். நாம் இவ்விரு படமாக்கல்களையும் முறையே f, g என்பவற்றாற் குறிப்பின், h ஆனது f இன்பின் g நிகழ்வதாற் பெறப்படும் முடிவு என்று கூறலாம். இதனை நாம் உரு 1.36 இல் உள்ளவாறு காட்டலாம்.



உரு 1.36

இச்சேர்மானச் சார்பை அடைப்புக்குறியின்றி $h(x) = gf(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $h = gf$ என்று எழுதலாம்.

f முதலிற் பிரயோகிக்கப்படுவதால் அது x இற்கு அடுத்ததாக எழுதப்பட, அடுத்துவரும் சார்பு g ஆனது f இற்கு இடதுபக்கத்தில் எழுதப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்க. அப்போது நாம் வலமிருந்து இடமாகச் செயற்படும் ஒழுங்கில் f, g என்னும் சார்புகளைப் பிரயோகிக்கலாம். f இன் கருத்து a என்னும் மூலகத்தை 3ஆற் பெருக்கி $3a$ ஐப் பெறுவதாகும்.

$$f(a) = 3a$$

பின்னர் $3a - 2$ ஐப் பெறுவதற்கு இதனை ''2ஐக் கழிக்க'' என்னும் சார்பின் கீழ்ப் படமாக்குவோம்.

$$g(f(a)) = g(3a) = 3a - 2$$

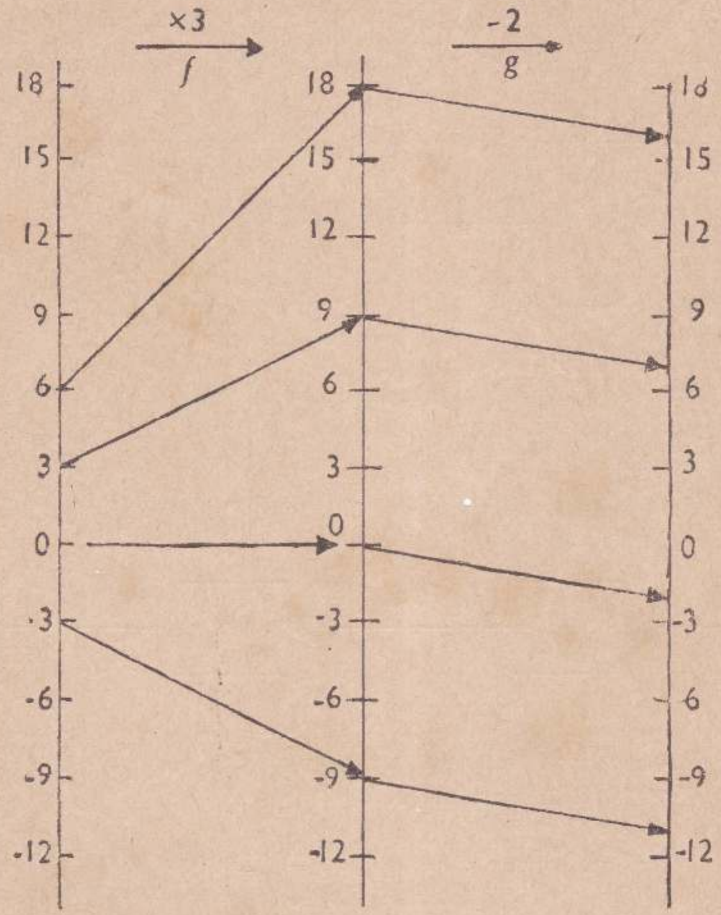
இக்கூற்றின் இடதுபக்கத்தை நாம் வெறுமனே $g\,f(a)$ என்று எழுதுவோம்.

$$\text{எனவே } h(a) = g\,f(a).$$

இச்சார்புகள் பெருக்கப்படுகின்றன எனக் கருதக்கூடாது. உண்மையில் ஒரு சார்பிற்குப் பின்னராக மற்றையதைப் பிரயோகிப்பதே இதன் கருத்து.

14725—6

12.2 இச்சார்புகளின் சேர்க்கையை நாம் உரு1.37இல் உள்ளவாறு விளக்கிக் காட்டலாம்.



உரு 1.37

இரண்டாவது சார்பின் ஆட்சியானது முதலாம் சார்பினது வீச்சு என்பதைக் கவனிக்க. சேர்க்கையானது ஒரு சார்பாவதை உறுதிப்படுத்துமுகமாக, சார்புகளுள் ஒன்றினது ஆட்சியை வரையறுப்பது சிலசமயம் அவசியமாகலாம்.

உதாரணம் 1.17 $x = 0$ என்பது தவிர்ந்த எல்லா $\mathbb{R}$ இற்கும் மட்டுமே $f : x \to \dfrac{x-1}{x}$ ஆனது வரையறுக்கப்படும். எனினும், ff என்னும் சேர்த்திப் படமாக்கல் இருப்பின், $x = 1$ என்னும் புள்ளியையும் நாம் புறக்கணித்தால் மட்டுமே இச்சார்பு வரையறுக்கப்படும். ff இன் கீழாக $x = 0$ ஒரு விம்பத்தையும் கொண்டிராமையே இதற்குக் காரணமாகும்.

இரு சார்புகளும் பிரயோகிக்கப்படும் ஒழுங்கு முக்கியமானதென்பதை நோக்குக. gf என்னும் சார்பு x இற்குப் பிரயோகிக்கப்பட

$$x \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{3x} \boxed{g} \longrightarrow 3x - 2$$ ஆகும்.

fg என்னும் சார்பு x இற்குப் பிரயோகிக்கப்பட

$$x \longrightarrow \boxed{\;g\;} \xrightarrow{\;x-2\;} \boxed{\;f\;} \longrightarrow 3\,(x-2)$$ ஆகும்.

இவ்விரண்டும் வெவ்வேறு சார்புகளாம். பொதுவில் $fg \neq gf$

உதாரணம் 1.18 $p : x \to x^2$ உம் $q : x \to x + 1$ உம் ஆயின், gf, fg என்பவற்றைக் கணிக்க. நாம் பாய்ச்சல் வரிப்படங்களைப் பயன்படுத்தி $qp(x)$ ஐ உரு 1.38 இற் காட்டலாம்.

$$x \longrightarrow \boxed{\;p\;} \xrightarrow{\;x^2\;} \boxed{\;q\;} \longrightarrow x^2 + 1.$$

உரு 1.38

முதலில் q என்னும் சார்பையும், பின்னர் p என்னும் சார்பையும் நாம் பிரயோகிக்க வேண்டியிருப்பதை $pq\,(x)$ எடுத்துரைக்கின்றது. இது உரு 1.39 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$x \longrightarrow \boxed{\;q\;} \xrightarrow{\;x+1\;} \boxed{\;p\;} \longrightarrow (x + 1)^2$$

உரு 1.39

எனவே $pq\,(x) = x^2 + 1,$

$qp\,(x) = (x + 1)^2.$

பயிற்சி 1.9

1. $f : x \to x^2 + 1$ உம் $g : x \to 3x - 2$ உம் ஆகுமாறு f, g என்பன மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$ இனது படமாக்கல்களாயின் பின்வருவனவற்றைக் காண்க:

   (i) $gf\,(1)$, (ii) $fg\,(1)$, (iii) $fg\,(-3)$, (iv) $gf\,(-3)$,
   (v) $ff\,(-2)$. (vi) $gg\,(-2)$

2. $f : x \to \dfrac{2x}{x-1}$ உம் $g : x \to x^2$ உம் ஆகுமாறு f, g என்பன மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}$ இனது படமாக்கல்களாயின்

   (i) $gf\,(x)$ என்பது என்ன ?
   (ii) $fg\,(x)$ என்பது என்ன ?
   (iii) எந்த ஆட்சியில்
   (a) f வரையறுக்கப்படும் ?
   (b) g வரையறுக்கப்படும் ?
   (c) gf வரையறுக்கப்படும் ?
   (d) fg வரையறுக்கப்படும் ?
   (iv) பின்வருவனவற்றைக் காண்க (a) $f\,(-2)$, (b) $g\,(-2)$, (c) $gf\,(-2)$ (d) $fg\,(-2)$,

3. $f : x \to x^2 + 1$, $g : x \leftarrow \frac{1}{x}$ என்னும் சார்புகளுக்கு 2ஆம் வினவை மீளச் செய்க.

4. $p : x \to x^2$ உம் $q : x \to x + 1$ உம் ஆயின், பின்வருவனவற்றை p, q என்பனவற்றில் எடுத்துரைக்க.

(i) $x \to x^2 + 1$, (ii) $x \to (x + 1)^2$;
(iii) $x \to (x^2 + 1)^2$; (iv) $x \to x + 2$;
(v) $x \to (x + 2)^2$; (vi) $x \to x^4$;
(vii) $x \to x^2 + 2x - 1$.

5. $x^2 + 6x + 9$ என்னும் இருபடியத்தை, காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க. அதிலிருந்து $h : x \to x^2 + 6x + 9$ என்னும் படமாக்கலைச் சேர்த்தியாகத் தரக்கூடிய இரு படமாக்கல்களைக் குறிப்பிடுக.

6. பின்வருவனவற்றிற்கு 5ஆம் வினவை மீளச் செய்க :

(i) $x^2 - 2x + 1$; (ii) $x^2 + 8x + 16$;
(iii) $x^2 - 14x + 49$; (iv) $x^2 - 22x + 121$;
(v) $4x^2 - 4x + 1$.

பலவினப் பயிற்சி 1

1. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ ஆயின், பின்வரும் தொடர்புகளுக்குப் புள்ளி வரைபுகள் வரைக :

(i) $\{(a, p), (a, q), (b, r), (c, s)\}$;
(ii) $\{(a, s), (b, s), (c, s)\}$;
(iii) $\{(b, p), (b, q), (b, r), (c, s)\}$;
(iv) $\{(a, p), (b, r), (c, s)\}$.

2. மேலுள்ள வினா 1இற் குறிப்பிட்ட தொடர்புகளுள் எவை சார்புகளாகுமெனக் கூறுக.

3. $x, y \in \mathbb{R}$ ஆயின், பின்வரும் தொடர்புகள் ஒவ்வொன்றினது வரைபையும் வரைக. அவற்றுள் எவை சார்பு எனக் கூறுக :

(i) $\{(x, y) : x + y = 3\}$;
(ii) $\{(x, y) : x = 4\}$;
(iii) $\{(x, y) : x < y\}$;
(iv) $\{(x, y) : y^2 = 4x\}$;
(v) $\{(x, y) : y = 4x^2\}$;
(vi) $\{(x, y) : x + 3y < 2\}$;
(vii) $\{(x, y) : y = |x|\}$.

இங்கு $|x|$ என்பது குறியில்லாத எண் x ஐக் கருதும்.

4. பின்வருவனவற்றுள், சமவன்மைத் தொடர்புகளுக்குரிய உதாரணங்கள் எவை? அவற்றுள் ஒவ்வொரு தொடர்பும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள, தொடையொன்றைக் கூறுக.

(i) ". . . . . சிறிது . . . . இலும் அல்லது சமன் . . . . இற்கு.
(ii) ". . . . . . . ஒருங்கிசைகிறது . . . . . . உடன்".
(iii) ". . . . . இன் தந்தையே . . . . . . இற்கும்.
(iv) ". . . . . . . உள்ளடங்கியுள்ளது . . . . . இல்.
(v) ". . . . . . . கொண்டுள்ளது . . . . . . கொண்டுள்ள அதே எண்ணிக்கையுள்ள முதன்மைக் காரணிகளை".

5. தொடர்பு ஒன்று பின்வளைந்ததா, சமச்சீருடையதா, கடந்தேகலுடையதா என எவ்வண்ணம் அம்புக் குறிப்படத்திலிருந்து அறியலாம்?

6. "மட்டு 4இன் எச்ச வகுப்புகள்" என்பன என்ன? இத்தொடைக்கு 'கூட்டல்' 'பெருக்கல்' அட்டவணைகள் தயாரிக்க.

7. 'மட்டு 7இன் எச்ச வகுப்புகள்' என்பன என்ன? இத் தொடைக்கு, 'கூட்டல்' 'பெருக்கல்' அட்டவணைகள் தயாரிக்க.

8. பின்வரும் கூற்று ஒவ்வொன்றிலும் வரும் x இற்கு இருக்கக்கூடிய பெறுமானம் என்ன?

(i) x உரியது மட்டு 7 இன் எச்ச வகுப்பு '5' இற்கு
(ii) $2 + x$ உரியது மட்டு 7 இன் எச்ச வகுப்பு '4' இற்கு
(iii) $5 + x$ உரியது மட்டு 7 இன் எச்ச வகுப்பு '5' இற்கு
(iv) $2x$ உரியது மட்டு 7 இன் எச்ச வகுப்பு '4' இற்கு
(v) $2x$ உரியது மட்டு 7 இன் எச்ச வகுப்பு '3' இற்கு
(vi) $3x$ உரியது மட்டு 7 இன் எச்ச வகுப்பு '2' இற்கு

9. வினா 8 (i), 8 (ii) ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$x \in \text{'5'} \ (\text{மட்டு } 7)$$
$$2 + x \in \text{'4'} \ (\text{மட்டு } 7)$$

வினா 8 (iii) - 8 (iv) வரையான கூற்றுகளை இவ்வடிவத்தில் எழுதுக.

10. பின்வருவன ஒவ்வொன்றையும் திருப்திப்படுத்தும் ஆகக் குறைந்த நேர் நிறையெண் யாது?

(i) $3 + x \equiv 5 \ (\text{மட்டு } 7)$
(ii) $4 + x \equiv 2 \ (\text{மட்டு } 7)$
(iii) $3 - x \equiv 5 \ (\text{மட்டு } 7)$
(iv) $2 - x \equiv 6 \ (\text{மட்டு } 7)$
(v) $3x \equiv 6 \ (\text{மட்டு } 7)$

(vi) $5x \equiv 7$ (மட்டு 7)
(vii) $4x + 1 \equiv 6$ (மட்டு 7)
(viii) $6x + 1 \equiv 6$ (மட்டு 7)
(ix) $3x + 2 \equiv 4$ (மட்டு 7)
(x) $2x + 1 \equiv 0$ (மட்டு 7)

11. $x, y \in \mathbb{R}$ எனக் கொண்டு பின்வரும் தொடைகள் சார்புகளாவெனக் கூறுக :

(i) $\{ (x, y) : x + y = 4 \}$;
(ii) $\{ (x, y) : x + y < 4 \}$;
(iii) $\{ (x, y) : x + y \geqslant 4 \}$;
(iv) $\{ (x, y) : x = 3 \}$;
(v) $\{ (x, y) : y + 4 = 0 \}$;
(vi) $\{ (x, y) : y \leqslant 3 \}$;
(vii) $\{ (x, y) : y = 3x^2 \}$;
(viii) $\{ (x, y) : y, 3x^2$ ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் ஒருமை (மாறிலி)$\}$
(ix) $\{ (x, y) : y^2 = x \}$.
(x) $\{ (x, y) : x, y$ இன் முதன்மைக் காரணி $\}$.

12. பின்வரும் சார்புகளுக்குப் பொருத்தமான ஆட்சியையும் இணை ஆட்சியையும் தருக. சார்பின் வீச்சையுங் கூறுக :

(i) $x \to x + 3$;
(ii) $x \to \dfrac{1}{x - 1}$;
(iii) $x \to \dfrac{1}{x + 2}$:
(iv) $x \to \dfrac{x - 1}{x + 2}$;
(v) $x \to 1 + x^2$
(vi) $x \to \dfrac{1}{1 + x^2}$.

13. $\{ x : 0 \leqslant x \leqslant 2 \}$ என்ற தொடைக்கு $f : x \to \dfrac{1}{x - 2}$ என்னும் படமாக்கலின் கீழ் வரும் விம்பத் தொடையைக் கூறுக.

14. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ இல் $f : x \to x - 2$ ஆகும் வண்ணம் f படமாக்கலாகும். இப்படமாக்கலைப் பாய்ச்சற் கோட்டுப் படமாகத் தருக. இதிலிருந்து நேர்மாற்றுச் சார்பை உய்த்தறிக.

1, 0, p ஆகியவற்றின் நேர்மாற்று விம்பங்களைத் தருக.

தொடைகள் பற்றிய பயிற்சி

1. $\epsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ஆயின், பின்வருவனவற்றைத் திருப்திப்படுத்தும் தொடைப் பிரிவுகளை நிரைப்படுத்தி எழுதுக :

(i) x ஒற்றையெண்

(ii) $2x + 1 = 5$;

(iii) $4 + x < 8$;

(iv) $x + 5 = 16$;

(v) $3x + 1 = 10$.

2. பின்வருந் தொடைகளின் மூலகங்களை நிரைப்படுத்த முடியுமா ?

(i) உங்கள் பாடசாலை மாணவரினது பெயர்கள்.

(ii) இலங்கையிலுள்ள எல்லா ஆட்களினதும் பெயர்கள்.

(iii) 1 மீற்றருக்கும் 2 மீற்றருக்கும் இடையிலுள்ள தூரங்கள் எல்லாம்.

(iv) 1 சதம், 50 சதம், 1 ரூபா என்னும் நாணயங்களின் தொடையில் வரும் மூலகங்களிற் சிலவற்றை அல்லது எல்லாவற்றையும் பயன்படுத்திப் பெறும் பணத் தொகைகள் எல்லாம்.

(v) ரூபாக்களையும் சதங்களையும் பயன்படுத்திப் பெறும் பணத் தொகைகள் எல்லாம்.

அதிகாரம் 1 இன் சுருக்கம்

$\forall$	'அனைத்திற்கும் அல்லது ஒவ்வொன்றுக்கும்'
$a \Rightarrow b$	'a என்பதன் உட்கிடை b'
$a \Leftrightarrow b$	'a என்பதன் உட்கிடை b யும் b என்பதன் உட்கிடை a யும்' அல்லது 'a யும் b யும் ஒரே கருத்துடையன'
$\|x\|$	'x இன் தனிப்பெறுமானம்'
	a^1 b a வகுக்கிறது b ஐ'
$a, b \in \mathbb{Z}$	'a b' நிறையெண்கள்'
$a \, R \, b$	'a தொடர்புடையது b உடன்'
$f : a \rightarrow b$	'f படமாக்குகிறது a ஐ b இற்கு'
f^{-1}	f இன் நேர்மாற்றுச் சார்பு'
$a \equiv b$ (மட்டு 7)	'a, b என்பன மட்டு 7 இன் ஒரே எச்ச வகுப்பைச் சேர்ந்தவை'.

வரைவிலக்கணங்கள்

இரு தொடைகள் A, B ஆகியவற்றினது தெக்காட்டின் பெருக்கம் $A \times B$ வரிசைப்பட்ட சோடிகள் (a, b) அனைத்தினதும் தொடையாகும். இங்கு $a \in A$; $b \in B$. A, B ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள துவிதத் தொடர்பு $A \times B$ இன் தொடைப் பிரிவாகும்.

தீர்வுத் தொடை என்பது தரப்பட்ட தொடர்பைத் திருப்தியாக்கும் வரிசைப் பட்ட சோடிகள் அனைத்தினதும் தொடையாகும்.

$a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$ ஆகும்போது, சமச்சீர்த் தொடர்பாகும்.

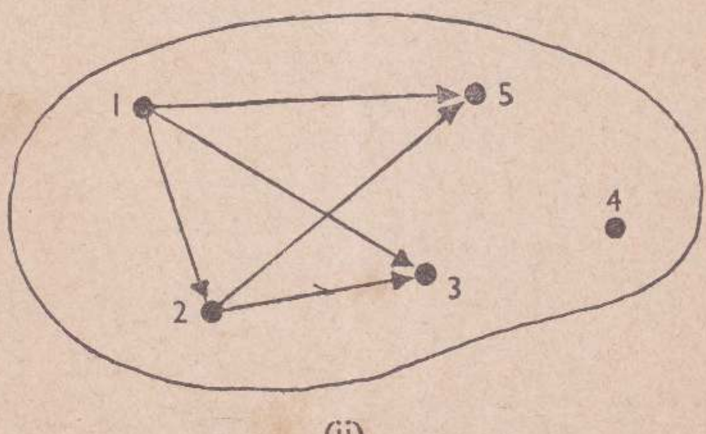
$a\,R\,a$ ஆகும்போது, R பின்வளைந்த தொடர்பாகும்.

$a\,R\,b,\ b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$ அகும்போது, தொடர்பு R கடந்தேகும் தொடர்பாகும். பின்வளைந்ததும் சமச்சீரானதும் கடந்தேகலுடையதுமான தொடர்பு சம வன்மைத் தொடர்பாகும். சமவன்மைத் தொடர்பால் வரையறுக்கப்பட்ட மூட்டற்ற தொடைப் பிரிவுகள் சமவன்மை வகுப்புகள் ஆகும்.

மட்டு n இன் எச்ச வகுப்புகள். நிறையெண் தொடை $\mathbb{Z}$ ஐ n ஆல் வகுக்கும்போது, தொடை $\mathbb{Z}$ ஆனது ஒரு தொடை சமவன்மை வகுப்புகளாகப் பிரிபடும். இவையே மட்டு n இன் எச்ச வகுப்புகள்; ஒரே மீதியைக் கொண்ட நிறையெண்கள் எல்லாம் ஒரே எச்ச வகுப்பைச் சேர்ந்தவை.

ஆட்சி A, இணை ஆட்சி B எனப்படுகின்ற இரு தொடைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு, ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகமும் இணை ஆட்சியின் ஒருதனி யான மூலகத்துடன் (அதாவது ஒரேயொரு மூலகத்துடன் மட்டும்) தொடர் புற்றால், அது சார்பு எனப்படும். சார்பு ஒன்றின் வீச்சு அதன் ஆட்சியினது விம்பங்களின் தொடையாகும்.

வீச்சு R இன் ஒவ்வொரு மூலகமும் ஆட்சி D இன் ஒருதனியான மூலகத் தின் விம்பமாகச் சார்பு f இல் அமையின், நேர்மாற்றுப் படமாக்கல் f^{-1} வரை யறுக்கப்படும். இது வீச்சை ஆட்சிக்குப் படமாக்குகிறது.



(ii)

உரு 1.10

அதிகாரம் 2

அட்சரகணிதம்

1. அட்சரகணிதக் கோவைகளைக் கூட்டல்

1.1 நாம் ஏற்கெனவே பல்வேறு வகை அட்சரகணிதக் கோவைகளைக் கையாண்டுள்ளோம். உதாரணங்கள் பின்வருமாறு:

(i) $2x + 3$

(ii) $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

(iii) $3x^2 + 2x = 6.$

இவற்றுள் முதலாவது x இன் முதல் வலுவையும் ஒரு மாறிலியையும் (ஒருமையையும்) மட்டுமே கொண்டுள்ளது. இது x இன் ஓர் ஏகபரிமாணச் சார்பு எனப்படும். இரண்டாவது ஒரு சர்வசமன்பாடாகும். கோவையில் a யினதும் b யினதும் எப்பெறுமானங்களைப் பிரதியிடினும் இக்கோவை உண்மையானதாகும். மூன்றுவது ஒரு சமன்பாடாகும். இது x இன் ஒரு வரையறுத்த எண்ணிக்கைப் பெறுமானங்களுக்கு மட்டுமே உண்மையாகும். உதாரணமாக $x = 2$ சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் அதேசமயம் $x = 1$ அதைத் திருப்தி செய்யாது.

x இலான பின்வரும் உறுப்புகளின் தொடையைக் கருதுக.

(i) $\{-2x, 3x\}$, (ii) $\{2x^2, 7x^2\}$; (iii) $\left\{\frac{7}{2}x^5, 8x^5, -x^5\right\}$.

ஒவ்வொரு தொடையிலுமுள்ள உறுப்புகளுக்கு x இன் வலுக்கள் சமமாகும். அவை நிகர்த்த உறுப்புகள் எனப்படும். அத்துடன், அவற்றைக் கூட்டி ஒரு தனி உறுப்பைப் பெறலாம். மேலுள்ள உதாரணங்களில் நாம் பெறுவன:

(i) $-2x + 3x = x$;

(ii) $2x^2 + 7x^2 = 9x^2$;

(iii) $\frac{7}{2}x^5 + 8x^5 - x^5 = \frac{21}{2}x^5$

நிகர்த்த உறுப்புகளை மட்டுமே நாம் கூட்டலாம்.

1.2 9 இலிருந்து 6 ஐக் கழிப்போமாயின் நாம் அதனை

$9 - 6 = 3$ என்று எழுதுவோம்.

அதற்குப் பதிலாக நாம் 9 உடன் 6 இன் நேர்மாற்றைக் கூட்டி, பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$9 + (-6) = 3.$$

முன்னைய முடிவையே பெறுகிறோம்.

அட்சரகணிதக் கோவைகளுக்கும் இது உண்மையாகும். $3x - 4$ இன் கூட்டற்றகவு நேர்மாறு $-(3x - 4)$ அ-து. $-3x + 4$ ஆகும். எனவே $6x + 9$ இலிருந்து $3x - 4$ ஐக் கழிப்பதற்குப் பதில் $-3x + 4$ ஐ $6x + 9$ உடன் கூட்டலாம்.

$$
\begin{aligned}
6x + 9 - (3x - 4) &= 6x + 9 + (-3x + 4) \\
&= 6x + 9 - 3x + 4 \\
&= 3x + 13.
\end{aligned}
$$

பிரசினம் 2.1

பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக.

(i) $2x + 5x^2 - 3x - 9x^2$ (ii) $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{y^2}{x^3} + 7x^2 y^{-3} + 9y^2 x^{-3}$.

(i) $2x + 5x^2 - 3x - 9x^2$
$= 2x - 3x + 5x^2 - 9x^2$
$= -x - 4x^2$.

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \frac{x^2}{y^3} - \frac{y^2}{x^3} + 7x^2 y^{-3} + 9y^2 x^{-3} &= \frac{x^2}{y^3} - \frac{y^2}{x^3} + 7\frac{x^2}{y^3} + 9\frac{y^2}{x^3} \\
&= \frac{x^2}{y^3} + 7\frac{x^2}{y^3} - \frac{y^2}{x^3} + 9\frac{y^2}{x^3} \\
&= 8\frac{x^2}{y^3} + 8\frac{y^2}{x^3} \\
&= 8\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{x^3}\right).
\end{aligned}
$$

பிரசினம் 2.2

பின்வரும் கோவைகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(i) $(a - 3b + 2c)$, $(7a + 5b - 3c)$, $-(8a + 2b + 2c)$;

(ii) $(3x^2 - 3xy + 5y^2)$, $(5x^2 + 5xy)$, $-(7x^2 + y^2)$.

(i) $(a - 3b + 2c) + (7a + 5b - 3c) - (8a + 2b + 2c)$
$= a - 3b + 2c + 7a + 5b - 3c - 8a - 2b - 2c$
$= a + 7a - 8a - 3b + 5b - 2b + 2c - 3c - 2c$
$= -3c$.

(ii) $(3x^2 - 3xy + 5y^2) + (5x^2 + 5xy) - (7x^2 + y^2)$
$= 3x^2 - 3xy + 5y^2 + 5x^2 + 5xy - 7x^2 - y^2$
$= 3x^2 + 5x^2 - 7x^2 - 3xy + 5xy + 5y^2 - y^2$
$= x^2 + 2xy + 4y^2$.

பயிற்சி 2.1

1. பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக.

(i) $3x + 2x - 6x + 8x.$

(ii) $-7x^2 + 5x^2 + 13x^2 - 6x^2$

(iii) $4a^2 - 3a^2b + 7a^2 - a^2 b$

(vi) $2xa + 7xa - 3x^2 a + 4x^2 a$

(v) $3xyz - 9xyz + 8xyz + 4x^2y - 2x^2y + 5x^2y$

2. பின்வரும் கோவைகளைக் கூட்டுக.

(i) $2a + 3b$; $-7a + 4b$; $8a - 9b$; $a + b$

(ii) $13xy - 6xy^2 + 3x^2y$; $5xy^2 - 3x^2y + xy$; $5xy - 2xy^2 + x^2 y$

(iii) $5a^2 - 7ab - b^2$; $3a^2 + 5ab - 3b^2$; $-2a^2 - 3ab + 5b^2$

(iv) $ab - bc + 2cd + 3de$; $5ab + bc - 2cd + 7de$; $-3ab + 3bc + 2cd + 2de.$

(v) $3x^2 y^{-2} - 5x^2 y^2 + 3x^{-2} y^2$; $\frac{5y^2}{x^2} + 3x^2 y^2 - \frac{5x^2}{y^2}$; $-2x^2 y^{-2} + 2x^{-2} y^2$

3. பின்வருவனவற்றின் கூட்டற்றகவு நேர்மாறுகளை எழுதுக.

(i) -7 (ii) $3x$ (iii) $-5z$ (iv) $x - 3y$ (v) $-(x + 3y)$

(vi) $i + 2j + 4k$ (vii) $-3i - j + 2k$ (viii) $3(p - 4q - 2r)$

(ix) $-6x(x - 2y)$ (x) $2a(b - c)$ (xi) $-x(a + b - c)$

(xii) $a^2 - b^2$

2. அட்சரகணிதக் கோவைகளைப் பெருக்கல்

2.1 ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும், மற்றைய கோவையிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பாலும் பெருக்கி, பெறப்படும் உறுப்புகளைக் கூட்டுதலே அட்சரகணிதக் கோவைகளைப் பெருக்கும் முறையாகும்.

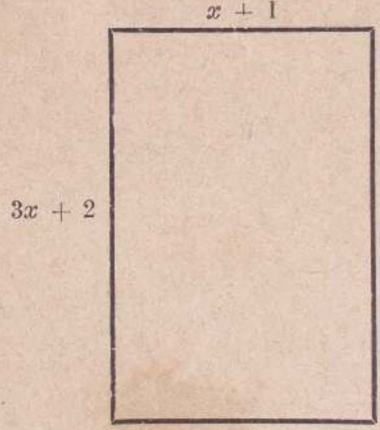
பிரசினம் 2.3

1. $x(x + 2) = x^2 + 2x$

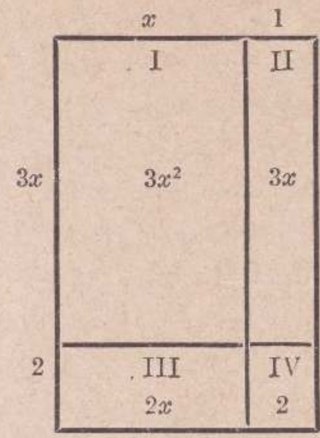
2.
$$\begin{aligned}(x + 1)(3x + 2) &= (x + 1)3x + (x + 1)2 \\ &= 3x^2 + 3x + 2x + 2 \\ &= 3x^2 + 5x + 2\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}(2x + y)(x - 2y) &= (2x + y)x + (2x + y)(-2y) \\ &= 2x^2 + xy - 4xy - 2y^2 \\ &= 2x^2 - 3xy - 2y^2\end{aligned}$$

பின்வரும் உருவங்களிற் போன்று $(x + 1)$ அலகுகளையும், $(3x + 2)$ அலகுகளையும் பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகமொன்றை வரைந்து $(x + 1)$, $(3x + 2)$ என்பவற்றின் பெருக்கத்தை எடுத்துக்காட்டலாம்.



(i)



(ii)

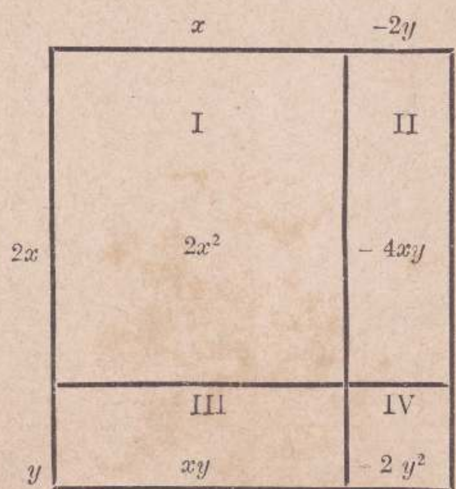
உரு 2.1

$$(x + 1) (3x + 2) = \overset{\overset{\mathrm{I}}{\downarrow}}{3x^2} + \overset{\overset{\mathrm{II}}{\downarrow}}{3x} + \overset{\overset{\mathrm{III}}{\downarrow}}{2x} + \overset{\overset{\mathrm{IV}}{\downarrow}}{2} = 3x^2 + 5x + 2$$

இச் செவ்வகத்தை அளவிடைப்படி திருத்தமாக வரையாது பருமட்டாக வரையினும், அடைப்புக் குறிகளுக்குள் உள்ள இரு கோவைகளைப் பெருக்குவதற்கு இதனைப் பயன்படுத்தலாம். செவ்வகத்தைச் சுற்றி எப்போதும் ஒரே அமைவான கோலத்திற் செல்லுதல் நன்று. இவ்வாறு பழகினால், காலக்கிரமத்தில், செவ்வகத்தை வரையாது மனக்கணிதமாகவே பெருக்கிக் கொள்ளலாம்.

பிரசினம் 2.4

$$\begin{aligned} & (2x + y) (x - 2y) \\ & \quad = 2x^2 - 4xy + xy - 2y^2 \\ & \quad = 2x^2 - 3xy - 2y^2 \end{aligned}$$



உரு 2.2

பயிற்சி 2.2

1. பின்வரும் சோடிக் கோவைகளின் பெருக்கத்தைக் காண்க.

(i) $2x \; ; \; 3x + 2$

(ii) $-2x - 3 \; ; \; 7x + 2 \; ;$

(iii) $3a + b \; ; \; -2a - b$

(iv) $x - y + z \; ; \; 2x + y$

(v) $5a - 3b \; ; \; 5a + 3b$

(vi) $3p + 2q \; ; \; 3p + 2q$

(vii) $2a + 3b \; ; \; 5a - 3b$

(viii) $x^2 + 2 \; ; \; 4x - 3$

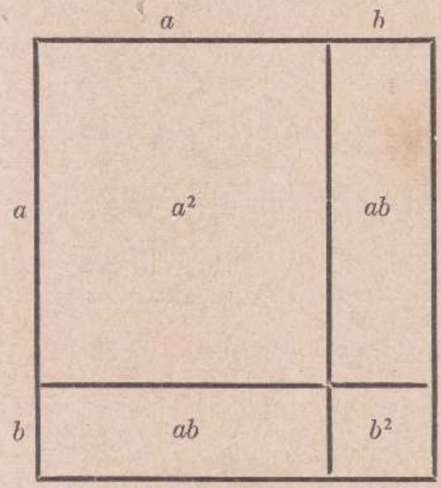
(ix) $a + b \; ; \; a^2 - ab + b^2$

(x) $x + 2y - z \; ; \; x + 2y + z.$

2.2 9 ஆம் தரத்திற் படித்துள்ளவற்றை (நினைவுகூருமுகமாகப்) பின்வரும் முக்கிய சர்வ சமன்பாடுகளைத் தந்துள்ளோம்.

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$$

முதலிரண்டு பெருக்கங்கள் முற்றிய வர்க்கங்களாகும். உரு 2.3 $(a + b)^2$ ஐக் காட்டுகிறது. முதல் இரண்டு பெருக்கங்களையும் கணிப்பதற்குச் செவ்வகங்களைத் திருத்தமாக வரைந்தால், ஒவ்வொரு செவ்வகமும் சமமான பக்கங்களைக் கொண்டிருக்கும்.



உரு 2.3

பயிற்சி 2.3

பின்வரும் வர்க்கங்கள் ஒவ்வான்றையும் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகைகளாக எடுத்துரைக்க.

(i) $(a + 2)^2$

(ii) $(2 + h)^2$

(iii) $(1 + t)^2$

(iv) $(1 - x)^2$

(v) $(h - 3)^2$

(vi) $(x + 9)^2$

(vii) $(10 + h)^2$

(viii) $(2a - 5)^2$

(ix) $(l - 3m)^2$

(x) $(3b^2 + 2m^2)^2$

2. பின்வருவனவற்றை அட்சிடுகையில் அச்சகத்திலே சில எண்களும், எழுத்துகளும், போதாமற் போயின. வெற்றிடங்களை நிரப்ப முயல்க.

(i) $(x + \quad)^2 \quad = \quad + \quad + \; 16.$

(ii) $(a - \quad)^2 \quad = \quad - \quad + \; 25.$

(iii) $(p + \quad)^2 \quad = \quad + \; 6p \; +$

(iv) $(2a - \quad)^2 \quad = \quad - \; 12a \; +$

(v) $(\quad - 7)^2 \quad = \quad - \; 42x \; +$

(vi) $(\quad + 6)^2 \quad = \quad + \; 72x \; +$

(vii) $(\quad - 1)^2 \quad = 25a^2$

(viii) $(4)^2 \quad = \quad + \quad + 9m^2$

(ix) $(2x + \quad)^2 \quad = \quad + \; 16x$

(x) $(l - \quad)^2 \quad = \quad - \; 2l$

பிரசினம் 2.5 $(1 \cdot 002)^2$ ஐ நான்கு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணிக்க.

$1 \cdot 002$ என்னும் எண்ணை நாம் $(1 + 0 \cdot 002)$ என்று எழுதலாம்.

எனவே
$$
\begin{aligned}
(1{\cdot}002)^2 &= (1 + 0{\cdot}002)^2 \\
&= 1 + 0{\cdot}004 + 0{\cdot}00004 \\
&= 1{\cdot}004004 \\
&= 1{\cdot}004 \text{ நான்கு தசம தானங்களுக்கு.}
\end{aligned}
$$

b யானது a யுடன் ஒப்பிடுகையிற் சிறிதாயின், அதன் வர்க்கத்தைப் புறக்கணித்து $(a + b)^2$ ஐ $a^2 + 2ab$ க்கு அண்ணளவாக்கலாம் என்பது கவனிக்கத்தக்கது. கீழ்வருவன போன்ற பிரசினங்களில் இது பெரும்பாலும் பயன்படும்.

பயிற்சி 2.1

பின்வருவன ஒவ்வொன்றையும் 4 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் கணிக்க.

(i) $(4{\cdot}003)^2$ (ii) $(10{\cdot}0015)^2$ (iii) $(0{\cdot}995)^2$,
[$(0{\cdot}995) = (1 - 0{\cdot}005)$ என்பதைக் கவனிக்க].

(iv) $(3{\cdot}989)^2$ (v) $(16{\cdot}003)^2$ (vi) $(0{\cdot}998)^2$ (vii) $(5{\cdot}999)^2$.

3. அட்சரகணிதக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல்

3.1 2.1 ஆம் பிரிவின்படி பின்வருவன பெறப்படும்.

(i) $x^2 + 2x = x (x + 2)$

(ii) $3x^2 + 5x + 2 = (x + 1) (3x + 2)$

(iii) $2x^2 - 3xy - 2y^2 = (2x + y) (x - 2y)$

இவற்றுள், இடது பக்கத்தேயுள்ள கோவைகள் ஒவ்வொன்றும் இரு காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்கப்பட்டுள்ளதைக் காணலாம். சில சமயங்களில், தரப்பட்ட ஓர் அட்சரகணிதக் கோவையை இரண்டு அல்லது மேலதிகமான காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்கலாம்.

இச் செய்கை காரணிப்படுத்தல் எனப்படும். மேலும் பெருக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு கோவையும் தரப்பட்ட கோவையின் காரணி எனப்படும்.

$ax + ay, a^2 - b^2, a^2 + 2ab + b^2$ என்ற வடிவிலுள்ள கோவைகளைப் பின்வருமாறு காரணிப்படுத்தும் முறையை நீர் முன்பே அறிந்திருப்பீர்.

$$ax + ay = a(x + y)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

3.2 கூட்டமாக்கும் முறை. ஒரு தரப்பட்ட அட்சரகணிதக் கோவையிலுள்ள உறுப்புகளை, ஒரு பொதுக் காரணியைக் கொண்டுள்ள இரண்டு அல்லது மேலதிகமான கோவைகளாகப் பிரிக்கக்கூடுமாயின் தரப்பட்ட கோவையைப் பின்வருமாறு காரணிப்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 2.6.

1. $ax + ay - bx - by = a(x + y) - b(x + y)$
$= (x + y)(a - b)$

2. $x^2 - 3x + ax - 3a = x(x - 3) + a(x - 3)$
$= (x - 3)(x + a)$

3. $mx - my - nx + ny = mx - my - (nx - ny)$
$= m(x - y) - n(x - y)$
$= (x - y)(m - n)$

4. $y^2 - by + 3y - 3b = y(y - b) + 3(y - b)$
$= (y - b)(y + 3)$

5. $a^2x + abx + ac + aby + b^2y + bc$
$= (a^2x + abx) + (ac + bc) + (aby + b^2y)$
$= ax(a + b) + c(a + b) + by(a + b)$
$= (a + b)(ax + c + by)$

6. $a^2 - b^2 - ac + bc = (a^2 - b^2) - (ac - bc)$
$= (a - b)(a + b) - c(a - b)$
$= (a - b)(a + b - c).$

உமது காரணிகளுள் எவையும் மேலும் காரணிப்படுத்தக்கூடியனவாய் இருத்தலாகாது என்பதை நிச்சயப்படுத்துக.

7. $x^3 - 1 - x + x^2 = (x^3 + x^2) + (-x - 1)$
$= x^2(x + 1) - (x + 1)$
$= (x + 1)(x^2 - 1)$
$= (x + 1)(x + 1)(x - 1)$
$= (x + 1)^2(x - 1)$

மேற்காட்டியவாறு காரணிப்படுத்தும் முறை, கூட்டமாக்கல் முறை எனப்படும்.

பயிற்சி 2.4

பின்வரும் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $px + 2py - qx - 2qy$

(ii) $3lm - 6ln - km + 2kn$

(iii) $x^2 - xy - 3x + 3y$

(iv) $x^2 - y^2 + x - y$

(v) $2am + 20n - 8am - 5m$

(vi) $x^4 + 2 + x^3 + 2x$

(vii) $px - qx + qy + ry - rx - py$

(viii) $ax - ay + 2bx - 2by - cx + cy$

3.3 இருபடிக் கோவைகள். $x^2 + 2ax + a^2$ என்ற வடிவிலான கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல் பற்றி ஏற்கெனவே படித்துளோம். அடுத்ததாக $x^2 + (a + b)x + ab$ என்ற வடிவிலான கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல்பற்றி ஆராய்வோம்.

முதலாவதாக $ab > 0$ என்ற வகையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 2.3$$
$$= x^2 + (2 + 3)x + 2.3$$

$\therefore\ x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ என்று அறிவோம்.

நடுவுறுப்பு $5 = 2 + 3$ என்பதையும், கடைசியுறுப்பு $6 = 2 \times 3$ என்பதையும் கவனிக்க. ஒவ்வொரு வகையிலும் (1) x இனது குணகத்தைத் தமது கூட்டுத் தொகையாகக் கொண்டனவும், (2) மாறிலியுறுப்பைத் தமது பெருக்கமாகக் கொண்டனவுமான எண்களிரண்டை நாம் தெரிவோம்.

உதாரணம் 2.7.

1. $x^2 + 8x + 15$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.
$$x^2 + 8x + 15 = x^2 + (5 + 3)x + 5.3$$
$$= (x + 5)(x + 3)$$

2. $x^2 - 8x + 15$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.
$$x^2 - 8x + 15 = x^2 + (-5 - 3)x + (-5)(-3)$$
$$= (x - 5)(x - 3)$$

3. $x^2 + 7x + 12$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.
$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + (4 + 3)x + 4.3$$
$$= (x + 4)(x + 3)$$

4. $x^2 - 7x + 12$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.
$$x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-4 - 3)x + (-4)(-3).$$
$$= (x - 4)(x - 3)$$

பயிற்சி 2.5.

1. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $x^2 + 6x + 8$

(iii) $x^2 - 7x + 12$ (iv) $t^2 + 7t + 10$

(v) $x^2 - 16x + 15$ (vi) $x^2 - 13x + 42$

(vii) $s^2 + 5s + 4$ (viii) $x^2 - 9x + 20$

(ix) $a^2 + 11a + 18$ (x) $t^2 + 4t + 3$

3.4. இப்போது $ab < 0$ ஆகும் வகையை எடுத்து நோக்குக. $ab < 0$ உண்மையாக ஆவதற்கு a, b ஆகியவற்றுள் ஒன்று மறையாகவேண்டும். ஆகவே இங்கு நாம் x இன் குணகத்திற்குச் சமனன கூட்டுத்தொகையைக் கொண்டுள்ள ஒன்று மறையானதும் மற்றது நேரானதுமாகிய 2 எண்களைக் கண்டுகொள்ளல் வேண்டும்.

உதாரணம் 2.8 $x^2 + 2x - 3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

(a) -3 இனது காரணிச் சோடிகள் $(-3, 1)$ உம் $(-1, 3)$ உம் மட்டுமேயாகும்.

இப்போது x இன் குணகத்தை அதாவது 2 ஐத் தருமாறு ஒன்று சேரும் சோடி எதுவென்று பார்ப்போம். இது இரண்டாவது சோடியாகும்.

அ-து $-3 = (-1)(3)$; $2 = -1 + 3$

$$\therefore \; x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

உதாரணம் 2.9 $x^2 + 3x - 10$ ஐக் காரணிப்படுத்துக. -10 ஆனது $(-10, 1)$ $(-1, 10)$, $(-5, 2)$, $(-2, 5)$ என்னும் காரணிகளைக் கொண்டுள்ளது. $(-2, 5)$ என்னும் சோடி எண்களின் கூட்டுத்தொகை மட்டுமே 3 ஆகும்.

$$\therefore \; x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

உதாரணம் 2.10 $x^2 - 5x - 14$ ஐக் காரணிப்படுத்துக. -14 ஆனது. $(-14, 1)$, $(-1, 14)$, $(-7, 2)$, $(-2, 7)$ என்னும் காரணிகளைக் கொண்டுள்ளது $-7 + 2 = -5$ ஆதலால்

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$$

உதாரணம் 2.11 $x^2 - 7x - 18$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தமது பெருக்கத்தை -18 ஆகவும், தமது கூட்டுத்தொகையை -7 ஆகவும் கொண்டுள்ள சோடி எண்கள் $(-9, 2)$ ஆகும்.

$$\therefore \; x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2)$$

பயிற்சி 2.6

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக :

(i) $x^2 - 3x - 10$ (ii) $x^2 - 2x - 3$

(iii) $y^2 + 6y - 16$ (iv) $d^2 - 8d - 20$

(v) $s^2 - 4s - 12$ (vi) $v^2 + 7v - 18$

(vii) $k^2 - 2k + 24$

14725—8

3.5 நாம் இதுவரை x^2 இனது குணகங்களை 1 ஆகக் கொண்டுள்ள இருபடிக் கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல் பற்றி ஆராய்ந்தோம். இப்போது x^2 இனது குணகத்தை 1 இற்குச் சமனகக் கொண்டிராத வகைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

உதாரணம் 2.12 $4x^2 + 16x + 15$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $60x^2$ ஐத் தருமாறு வெளியுறுப்புகள் இரண்டையும் பெருக்குக.

(ii) $60x^2$ ஐப் பெருக்கமாகவும் $16x$ ஐக் கூட்டுத்தொகையாகவும் கொண்டுள்ள உறுப்புகளிரண்டைக் காண்க. அவை $10x$ உம் $6x$ உம் ஆகும்.

(iii) நடுவுறுப்பை இவற்றிற்குப் பிரிக்க.

அ-து $4x^2 + 10x + 6x + 15$

(iv) காரணிப்படுத்துவதற்குப் பரம்பல் விதியைப் பயன்படுத்துக.

$$\text{அ} - \text{து}, \quad 2x(2x+5) + 3(2x+5)$$
$$= (2x+3)(2x+5)$$

உதாரணம் 2.13 $6x^2 - 19x + 10$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$60x^2$ ஐப் பெருக்கமாகவும், $-19x$ ஐக் கூட்டுத்தொகையாகவும் கொண்டுள்ள இரண்டு உறுப்புகள் $-15x$ உம் $-4x$ உமாகும். அவற்றைச் சரியான ஒழுங்கில் எழுதிக்கொள்ளின் நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 19x + 10 \\ &= 6x^2 - 15x - 4x + 10 \\ &= 3x(2x-5) - 2(2x-5) \\ &= (3x-2)(2x-5). \end{aligned}$$

உதாரணம் 2.14 $6x^2 + 11x - 10$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

இங்கு $11x$ என்னும் கூட்டுத்தொகையைத் தரும் $-60x^2$ இன் இரு காரணிகள் $15x$ உம் $-4x$ உமாகும்.

$$\begin{aligned} \therefore\ & 6x^2 + 11x - 10 \\ &= 6x^2 + 15x - 4x - 10 \\ &= 3x(2x+5) - 2(2x+5) \\ &= (3x-2)(2x+5). \end{aligned}$$

உதாரணம் 2.15 $8x^2 - 13x - 6$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$-48x^2$ ஐப் பெருக்கமாகவும், $13x$ ஐக் கூட்டுத்தொகையாகவும் கொண்டுள்ள இரண்டு உறுப்புகள் $-16x$ உம் $3x$ உமாகும்.

$$\begin{aligned} \therefore\ & 8x^2 - 13x - 6 \\ &= 8x^2 - 16x + 3x - 6 \\ &= 8x(x-2) + 3(x-2) \\ &= (8x+3)(x-2). \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.7

காரணிப்படுத்துக.

(i) $2a^2 - 9a + 4$;
(ii) $6x^2 + 5xy - 6y^2$;
(iii) $8y^2 - 6y - 5$;
(iv) $3 - m - 10\ m^2$;
(v) $6x^2 - 19x + 3$;
(vi) $9a^2 + 15ab + 4b^2$;
(vii) $3x^2 + 2xy - 8y^2$;
(viii) $6m^2 - 29mn + 13n^2$;
(ix) $3p^2 - 14pq - 17q^2$;
(x) 2 கோசை ^2x − 9 கோசை $x + 9$.

3.6 இரு கனங்களின் கூட்டுத்தொகையும் வித்தியாசமும்

$a + b$ ஐ $a^2 - ab + b^2$ ஆலும் $a - b$ ஐ $a^2 + ab + b^2$ ஆலும் பெருக்குவதால் நாம் பெறுவன,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

$a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$ போன்ற வடிவிலான கோவைகளைக் காரணிப் படுத்து வதற்கு இம்முடிபுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 2.16

$8x^3 + y^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$\begin{aligned} 8x^3 + y^3 &= (2x)^3 + y^3 \\ &= (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) \end{aligned}$$

உதாரணம் 2.17

$27p^3 - 1$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$\begin{aligned} 27p^3 - 1 &= (3p)^3 - 1^3 \\ &= (3p - 1)(9p^2 + 3p + 1) \end{aligned}$$

உதாரணம் 2.18

$(a + b)^3 - c^3$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$(a + b)^3 - c^3 = (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2].$$

பயிற்சி 2.8

காரணிப்படுத்துக.

(i) $8x^3 + y^3$;
(ii) $8x^3 - 27$;
(iii) $a^6 + b^6$;
(iv) $(x + y)^3 - x^3$;
(v) $x^3 - (x + y)^3$;
(vi) $8(x - y)^3 - x^3$;
(vii) $64(x + y)^3 + y^3$;
(viii) $a^6 b^6 + 8$;
(ix) $p^3 q^3 - r^3$
(x) $27x^3 y^3 + 8z^3$.

3.7 வேறு அட்சரகணிதக் கோவைகள்

பின்வரும் உதாரணங்கள் நான்கு அல்லது கூடுதலான உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ள கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தல் எவ்வாறென விளக்குகின்றன. நாம் முன்னுள்ள பகுதிகளில் ஆராய்ந்தது போன்ற ஒரு வடிவிற்குக் கோவைகளைச் சுருக்கும் வண்ணம், இங்கு உறுப்புகளைக் கூட்டமாகப் பிரிப்போம்.

உதாரணம் 2.19 $x^2 - 4x + 4 - 9y^2$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - 9y^2 &= (x^2 - 4x + 4) - 9y^2 ; \\ &= (x - 2)^2 - 9y^2 \\ &= (x - 2 + 3y)(x - 2 - 3y). \end{aligned}$$

உதாரணம் 2.20 $x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + 6y$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

$$\begin{aligned} x^x + 3xy + 2y^2 + 3x + 6y &= (x^2 + 3xy + 2y^2) + 3(x + 2y) \\ &= (x + 2y)(x + y) + 3(x + 2y) \\ &= (x + 2y)(x + y + 3). \end{aligned}$$

உதாரணம் 2.21 $(x - y)^2 + 5(x - y) + 6 + 2(x - y + 3)$ ஐக் காரணிப் படுத்துக. $x - y = \mathrm{t}$ என்று எழுதுக. அப்போது

$$\begin{aligned} &(x - y)^2 - 5(x - y) + 6 + 2(x - y + 3) \\ &= \mathrm{t}^2 + 5\mathrm{t} + 6 + 2(\mathrm{t} + 3). \\ &= (\mathrm{t} + 3)(\mathrm{t} + 2) + 2(\mathrm{t} + 3) \\ &= (\mathrm{t} + 3)(\mathrm{t} + 2 + 2). \\ &= (x - y + 3)(x - y + 4). \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.9

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^2 + 4x + 4 - y^2$;

(ii) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 49$;

(iii) $a^2 - b^2 + a^2 + ab$;

(iv) $5x^2 + 14xy - 3y^2 - 10x + 2y$;

(v) $(x + y)^2 + 6(x + y) + 9 - 4y^2$;

(vi) $a^2 - 2ab - 3b^2 + 4a - 12b$;

(vii) $a^4 + 2a^2b^2 - 3b^4 + 4a^2b^2(a^2 - b^2)$;

(viii) $a^3 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2$;

(ix) $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2$;

(x) $3p^2 + 14p - 5 - pa - 5a$.

4. அட்சரகணிதக் கோவைகளைச் சுருக்கல்

4.1 $\frac{12}{16}$ என்னும் பின்னத்தைப் பின்வருமாறு காரணிப்படுத்தலாற் சுருக்கலாம்.

$$\frac{12}{16} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3}{4}$$

இதனையொத்த முறையில் வேறு அட்சரகணிதக் கோவைகளையும் சுருக்கலாம்.

உதாரணம் 2.22.

$$\frac{3x}{6xy + 9xz} \text{ ஐச் சுருக்குக.}$$

$$\frac{3x}{6xy + 9xz} = \frac{3x}{3x(2y + 3z)}$$

$$= \frac{1}{2y + 3z}.$$

உதாரணம் 2.23.

பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக:

$$\frac{xy + 5y}{x^2 + 5x + 15} \text{ ஐச் சுருக்குக.}$$

$$\frac{xy + 5y}{x^2 + 8x + 15} = \frac{(x + 5)y}{(x + 3)(x + 5)}$$

$$= \frac{y}{(x + 3)}.$$

பயிற்சி 2.10

பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக:

(i) $\frac{6a + 8b}{2}$ (ii) $\frac{3}{6a + 9b}$

(iii) $\frac{ac}{abc + bcd}$ (iv) $\frac{4x^2 - 8xy}{x - 2y}$

(v) $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - ax - x + a}$ (vi) $\frac{y^2 - y}{y - 1}$

(vii) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ (viii) $\frac{a + 1}{a^2 + 5a + 6} \times \frac{a + 2}{a^2 + 5a + 4}$

(ix) $\frac{x^3 + y^3}{(x^2 - y^2)} \times \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2}$ (x) $\frac{x^2 + 3xy - 10y^2}{x^2 + 10y + 25y^2} \times \frac{x + 5y}{x^2 - 4y^2}$

4.2 இரு பின்னங்களின் கூட்டுத்தொகையை ஒரு தனிப் பின்னமாக எடுத்துரைப்பதனால் அதனைப் பெரும்பாலும் சுருக்கிக்கொள்ளலாம். பின்னங்கள் இரண்டினதும் பகுதியெண்களின் பொது மடங்குகளுட் சிறியதைக் காணுவதே நாம் முதலிற் செய்ய வேண்டியதாகும்.

உதாரணம் 2.24

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \text{ ஐச் சுருக்குக.}$$

இப்போது bd ஆனது b,d ஆகிய இரண்டினாலும் பிரிபடும். எனவே.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}$$

$$= \frac{ad + cb}{bd}$$

உதாரணம் 2.25.

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} \text{ ஐச் சுருக்குக.}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{(x+1)(x+2) - 2(x)(x+2) + x(x+1}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2 + x}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{2}{x(x+1)(x+2)}$$

உதாரணம் 2.26

$$\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} \text{ ஐச் சுருக்குக.}$$

$$\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{(x+3)+(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2}{(x+1)(x+3)}.$$

பயிற்சி 2.11

பின்வரும் ஒவ்வொன்றையும் ஒரு தனிப் பின்னமாக எடுத்துரைக்க.

(i) $a + \frac{1}{b}$; (ii) $a + \frac{1}{a}$; (iii) $1 + \frac{1}{a}$;

(iv) $2 - \frac{3}{x}$; (v) $\frac{1}{c} - 1$; (vi) $a - \frac{1}{a}$;

(vii) $x + \frac{1}{2x}$; (viii) $2x - \frac{1}{x}$; (ix) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x}$;

(x) $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$; (xi) $p + q + \frac{1}{p}$; (xii) $\frac{1}{x^2} - x - \frac{1}{x}$

2. பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக.

(i) $\frac{2}{3x} + \frac{3}{4x}$; (ii) $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x^2 - 1)}$;

(iii) $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{3}{x^2 - 7x - 8}$;

(iv) $\frac{2}{(2 - x)^2} - \frac{4}{4 - x^2}$; (v) $1 + \frac{1}{x(x + 2)}$;

(vi) $\frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - c)(b - a)}$;

(vii) $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x}$; (viii) $\frac{x + 1}{x^2 - 4} - \frac{5}{x + 2}$;

(ix) $\frac{2 - 3a}{2 + 3a} + \frac{3a + 2}{3a - 2} + \frac{12}{9a^2 - 4}$;

(x) $\frac{a + b}{a - b} + \frac{a - 2b}{a + b} + \frac{a^2 + 3b^2}{b^2 - a^2}$;

(xi) $\frac{p}{p^2 + pq} + \frac{p + q}{pq - q^2} - \frac{q}{p^2 - q^2}$;

(xii) $\frac{x}{3(x - y)} + \frac{y}{2(x - y)} - \frac{x + 4y}{6(x - y)}$.

5. சமன்பாடுகள்

5.1 6–9 ஆம் வகுப்புப் பாடநூல் களில் $3x + 2 = 3$ போன்ற கோவை களைக் கையாண்டுள்ளோம்.

இவை சமன்பாடுகள் என்று கூறப்பட்டன. ஒரு சமன்பாடு இரு கணியங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனென்பதை எமக்குணர்த்தும். சமன்பாட்டைத் திருப்திசெய்யக்கூடிய அறியப்படாத கணியம் x இற்கு ஒரு வரையறுத்த தொடைப் பெறுமானங்களை நாம் பொதுவாகக் கண்டுகொள்ளலாம். $3x + 2 = 3$

போன்ற ஒரு சமன்பாடு ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு எனப்படும். $3x^2 + 2x + 1 = 0$ போன்ற சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடு அல்லது இரண்டாம் படியிலுள்ள சமன்பாடு எனப்படும். $7x^3 + 3x = 4$ போன்ற சமன்பாடு ஒரு முப்படிச் சமன்பாடு அல்லது மூன்றும் படியிலுள்ள சமன்பாடு எனப்படும். இவ்வாறே பிற சமன்பாடுகளும் வழங்கப்படும்.

பாய்ச்சல் வரிப்படங்கள் மூலம் $3x + 2 = 3$ போன்ற ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கக் கற்றுள்ளோம். இப்போது இருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். இவை சற்றுச் சிக்கல் கூடியவையாதலால் இவற்றைத் தீர்ப்பதற்கு வேருரு முறையைக் கையாளுவோம்.

5.2 காரணிகளால் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்.

பொதுவாக ஒன்றுக்கொன்று சமனுன அல்லது சமனற்ற இரு பெறுமானங்களால் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு திருப்தியாக்கப்படும்.

உதாரணம் 2.27 $x^2 + 3x - 10 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுத் தொடையைக் காண்க.

$f(x) = x^2 + 3x - 10$ என்று நாம் எழுதினுல், இவ்விருபடிக் கோவையைக் காரணிப்படுத்த நாம் பெறுவது

$$f(x) = (x + 5)(x - 2)$$

$(x + 5) = 0$ ஆயின் அல்லது $(x - 2) = 0$ ஆயின் இச்சமன்பாட்டின் இடதுகைப் பக்கம் பூச்சியமாகும். $\{-5, 2\}$ என்னும் இரு பெறுமானங்களுள் ஒவ்வொன்றும் x இற்குக் கொடுக்கப்பட, தந்த சமன்பாட்டின் இடதுகைப்பக்கம் பூச்சியமாவதனுல், தீர்வுத் தொடை $\{-5. 2\}$ ஆகும், $(x = 2)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகில் $x = 2$ சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகுமென்பதை நாம் காண்கிறேம். $f(x)$ இன் காரணிகளுக்கும், $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்குமிடையே நெருங்கிய தொடர்புகள் இருக்கின்றன. பொதுவாக, காரணிகளைக் கண்டுகொண்டால் மூலங்களைக் கண்டுகொள்ளலாம். அவ்வாறே மூலங்களைக் கண்டுகொண்டால், காரணிகளைக் காணலாம்.

உதாரணம் 2.28 $x(x - 3) = 4$ ஐத் தீர்க்க.

$x(x - 3) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$,

$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 = 0$ அல்லது $x + 1 = 0.$

$\Leftrightarrow x = 4$ அல்லது $x = -1$

எனவே தீர்வுத் தொடை $\{4, -1\}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2.29 $x + \frac{3}{x} = \frac{3 - 2x}{x}$ ஐத் தீர்க்க.

இப்போது $$x + \frac{3}{x} = \frac{3 - 2x}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 3 - 2x$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ அல்லது } x = -2.$$

தொடக்கச் சமன்பாட்டில் $x = 0$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது $0 + \frac{3}{0} = \frac{3}{0}$ ஆகும். இது அர்த்தமற்றது. எனவே சாத்தியமான இரு தீர்வுகளுள் ஒன்று மட்டுமே முன்னைய சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமாகிறது. செய்முறையில் வரும் முதற் படியிலேயே இது நேருகின்றது. தரப்பட்ட சமன்பாட்டிலுள்ள இரு கூற்றுகளும், முதற் படியும் சமவன்மையானவை அல்ல. எனவே நாம் ஓர் எளிய உட்கிடையையே பெறுகிறோம்.

பயிற்சி 2.12

பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றினதும் தீர்வுத் தொடையைக் காண்க.

(i) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (ii) $p^2 - 10p + 9 = 0$;

(iii) $2t^2 - 6t = 0$ (iv) $x(2x + 1) = 10$;

(v) $m^2 = 15 - 2m$ (vi) $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{5}{2}$, $x \neq 0$;

(vii) $\frac{3(3x-1)}{x-2} = 5 + \frac{15}{x-2}$; (viii) $\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} = \frac{3}{2}$;

(ix) $\frac{3}{z+1} + \frac{1}{z-1} = 2$ (x) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a+15}{a+3} = 4$.

5.3 வர்க்க நிறைவாக்கலினாலும் சூத்திரத்தினாலும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்.

(a) வர்க்க நிறைவாக்கலினால்.

உதாரணம் 2.30 $3x^2 - 18x - 5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. x இலும் x^2 இலுமான எல்லா உறுப்புகளையும் இடது பக்கத்தில் வைத்து ஒழுங்குசெய்க. அப்போது நாம் பெறுவது

$$3x^2 - 18x = 5.$$

முழுவதையும் (x^2 இனது குணகமான) 3 இனாற் பிரிக்க.

$$x^2 - 6x = \frac{5}{3}$$

ஒவ்வொரு பக்கத்திற்கும் ($\frac{1}{2} \times x$ இன் குணகம்)^2 ஐக் கூட்ட

$$x^2 - 6x + 9 = \frac{5}{3} + 9.$$

14725—9

காரணிப்படுத்த. $(x-3)^2 = \frac{32}{3}.$

இரு பக்கங்களினதும் வர்க்க மூலத்தை எடுக்க.

$$x - 3 = \pm\sqrt{\frac{32}{3}} = \pm\ 3{\cdot}266.$$

எனவே. $x = 3 \pm 3{\cdot}266$;

அ—து, $x = 6{\cdot}266$ அல்லது $-0{\cdot}266$

(b) சூத்திரத்தினுல்

எந்த இருபடிச் சமன்பாடும் $ax^2 + bx + c$ என்னும் வடிவில் எழுதப் படலாம்.

உதாரணமாக, $-5x^2 - 6x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாடானது $a = -5$ $b = -6,\ c = 2$ ஆகும்போது மேலுள்ள வடிவில் எழுதப்படலாம். $a \neq 0$ எனக் கொள்க.

$$ax^2 + bx + c = 0\ ;$$

$$\Leftrightarrow\ ax^2 + bx = -c$$ என ஒழுங்குசெய்க.

இரு பக்கங்களையும் a இஞற் பிரிக்க.

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

ஒவ்வொரு பக்கத்திற்கும் ($\frac{1}{2} \times x$ இன் குணகம்)^2 ஐக் கூட்ட.

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\ ;$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

வர்க்க மூலத்தை எடுக்க.

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\ \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

இரு பக்கங்களிலுமிருந்து $\frac{b}{2a}$ ஐக் கழிக்க.

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ;$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ;$$

இது $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கான இருபடிச் சூத்திரம் எனப்படும். இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கு, முதலிலே சமன்பாட்டை நியம வடிவில் எழுதி, பின்னர் சூத்திரத்திற் பொருத்தமான பெறுமானங்களைப் பிரதியிட வேண்டும். இச்சூத்திரத்தை மனனம் செய்ய வேண்டும்.

உதாரணம் 2.31 $V + \frac{1}{2V} = 4$ என்பதைத் தீர்க்க. முதலாவதாக இதனை நியம வடிவில் ஒழுங்கு செய்க.

$$V + \frac{1}{2V} = 4$$

$$\Rightarrow 2V^2 + 1 = 8V$$

$$\Rightarrow 2V^2 - 8V + 1 = 0.$$

நியம வடிவுடன் ஒப்பிட நாம் பெறுவது.

$$a = 2, \quad b = -8, \quad c = 1$$

சூத்திரத்திற் பிரதியிட.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 8}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{56}}{4}$$

$$= \frac{8 \pm 7{\cdot}48}{4}$$

$$= \frac{8 + 7{\cdot}48}{4} \text{ அல்லது } \frac{8 - 7{\cdot}48}{4}$$

$$= \frac{15{\cdot}48}{4} \text{ அல்லது } \frac{{\cdot}52}{4}$$

$$= 3{\cdot}87 \text{ அல்லது } {\cdot}13$$

உதாரணம் 2.32 $3x^2 - 4x + 2 = 0$ ஐத் தீர்க்க இங்கு $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$. சூத்திரத்திற் பிரதியிட

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

ஆனல் $\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$. எனவே, இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வும் இல்லை. தீர்வுத் தொடை Φ.

ஒரு தீர்வைப் பெறுவதற்கு, வர்க்க மூலக் குறியினுள் உள்ள எண் நேராக வேண்டுமென்பதைக் குறித்துக் கொள்க. மெய்யான தீர்வுகளுக்கு $b^2 - 4ac \geqslant 0$ ஆதல் வேண்டும்.

பயிற்சி 2.13

1. *வர்க்க நிறைவாக்கல் முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க.*

(i) $x^2 + 4x - 2 = 0$;	(ii) $x^2 - 3x + 1 = 0$;
(iii) $a^2 - 3a = 1$;	(iv) $x^2 + 7x = -7$;
(v) $y^2 - 5y + 3 = 0$;	(vi) $m^2 + 2m = 1$;
(vii) $l^2 = 6l - 2$;	(viii) $p(p - 4) = -1$;
(ix) $k(k - 3) = 5$;	(x) $x^2 = 2y(x - y)$;
(xi) $p^2 + 4pq - q^2 = 0$;	(xii) $x^2 + 3xy - 5y^2 = 0$.

2. *சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.*
விடையை இரு தசம தானங்களுக்குத் தருக.

(i) $x^2 + 4x + 3 = 0$;	(ii) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
(iii) $2q^2 + 5q + 2 = 0$;	(iv) $l^2 + 4l = 5$;
(v) $t^2 - 9t + 4 = 0$;	(vi) $a^2 + 6a + 4 = 0$;
(vii) $3x^2 - x - 1 = 0$;	(viii) $4z^2 + 13z + 2 = 0$;
(ix) $n + \frac{1}{n} = 3$;	(x) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{2}{3}$;
(xi) $(x - 1)(2x + 4) = 9$;	(xii) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x-4}{3x-2}$.

5.4 இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதிலுள்ள பிரச்சினைகள்

தம் கூட்டுத்தொகையை 7 ஆகவும், பெருக்கத்தை 12 ஆகவும் கொண்டுள்ள இரண்டு எண்களைக் காணவேண்டும் என்று கொள்க. ஓர் எண் x ஆகவிருக்கட்டும். அப்போது மற்றைய எண் $7 - x$ ஆகும்.
எனவே $x(7 - x) = 12$

$$\therefore x^2 - 7x + 12 = 0$$

அ-து, $(x - 4)(x - 3) = 0.$

மேலுள்ள சமன்பாட்டினது இடதுகைப் பக்கக் கோவையில் $x = 3$ என இட்டால் $(-1)(0)$ என்பதைப் பெறுவோம். இது பூச்சியமாகும். அ-து $x = 3$ என்ற பெறுமானம் மேலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்குகிறது. நாம் ஏற்கெனவே கண்டுகொண்டவாறு ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் இத்தகைய ஒரு பெறுமானம் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு அல்லது மூலம் எனப்படும்.

$x = 4$ என்பதும் மேலுள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் என்பது தெளிவாகும். எனவே மேலுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுத் தொடையாக $\{3.4\}$ ஐப் பெறுவோம்.

எனவே எமது பிரசினத்துக்கான விடைகள் 3 உம் $7 - 3 = 4$ உம், அல்லது 4 உம் $7 - 4 = 3$ உமாகும். ஆதலால் எமது பிரசினத்துக்கு ஒரு தீர்வு மட்டுமே (அதாவது 3, 4 ஆகிய எண்கள்) உண்டு என்பதைக் காண்கிறோம்.

உதாரணம் 2.33 இரண்டு எண்கள் 3 இனால் வேறுபடுகின்றன. அவற்றினது நிகர்மாற்றுகளின் கூட்டுத்தொகை $\frac{11}{28}$ ஆயின் அவ்வெண்களைக் காண்க.

இரண்டு எண்களுள்ளும் சிறியது x எனக் கொள்க. அப்போது மற்றைய எண் $x + 3$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{11}{28}.$$

$$\frac{(x+3)+x}{x(x+3)} = \frac{11}{28}$$

$$\Rightarrow 11x^2 + 3x = 56x + 84$$

$$\Rightarrow 11x^2 - 23x - 84 = 0$$

$$\Rightarrow (11x + 21)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ அல்லது } -\frac{21}{11}$$

$\therefore$ தேவையான இரண்டு எண்களும் 4 உம் 7 உம், அல்லது $-\frac{21}{11}$ உம் $\frac{12}{11}$ உமாகும்.

14725—10

உதாரணம் 2.34 ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் அதன் அகலத்திலும் பார்க்க 2 cm கூடியது. செவ்வகத்தின் பரப்பு 48 cm^2. ஆகும். செவ்வகத்தின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் காண்க.

செவ்வகத்தின் அகலம் x cm எனக் கொள்க. அப்போது அதன் நீளம் $(x+2)cm$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x(x+2) = 48$$
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$
$$(x+8)(x-6) = 0$$
$$\therefore x = 6 \text{ அல்லது } -8$$

அகலம் நேராக இருக்கவேண்டுமாதலால் $x = -8$ என்னும் பெறுமானம் தவிர்க்கப் படும்.

$\therefore$ செவ்வகத்தின் அகலம் 6 cm, அதன் நீளம் $6 + 2 = 8$ cm ஆகும்.

பயிற்சி 2.14

1. 56 cm நீளமான கம்பித் துண்டொன்று 25 cm நீளமான செம்பக்கத்தை யுடைய ஒரு செம்முக்கோணி வடிவைப்பெறுமாறு வளைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணியினது மற்றைய இரு பக்கங்களினதும் நீளங்களைக் காண்க.

2. 56 அங் நீளமான கம்பித் துண்டொன்று, 12 சதுர அங்குலப் பரப்பளவை உள்ளடக்கும் ஒரு செவ்வக வடிவைப் பெறுமாறு வளைக்கப் பட்டுள்ளது. செவ்வகத்தினது பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க.

3. 30 ஐ இரு பகுதிகள் ஆக்குக: அப்பகுதிகளின் பெருக்கம் 224 ஆக வர வேண்டும்.

4. எண்கள் இரண்டுள் ஒன்று மற்றையதன் இரு மடங்காகும். சிறிய எண் ஒன்றாலும் மற்றைய எண் மூன்றாலும் அதிகரிக்கப்படின், அவற்றின் நிகர் மாற்றுகளின் கூட்டுத்தொகை $\frac{10}{21}$. இரண்டு எண்களையும் காண்க.

5. ஒரு வட்ட வடிவான குளம் 3 அடி அகலமான ஒரு பாதையாற் சூழப் பட்டுள்ளது. குளத்தினது பரப்பளவு பாதையினது பரப்பளவின் 3 மடங் காகும். குளத்தினது விட்டத்தைக் காண்க.

6. $h = 120t - 16t^2$ என்னும் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்டுள்ளவாறு நிலத்திற்கு மேல் h அடி உயரத்தை t செக்கன்களில் அடையுமாறு ஒரு கல் நிலைக் குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. அது 216 அடி உயரத்தை அடை வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

7. 30 m நீளமும், 24 m^2 அகலமுமான செவ்வகப் பூந்தோட்டமொன்றைச் சுற்றி ஒருசீரான அகலமுடைய பாதையொன்று உண்டு. பாதையின் பரப் பளவு 112 m^2 ஆயின் அதன் அகலத்தைக் காண்க.

8. ஒரு செம்முக்கோணியினது செம்பக்கத்தின் நீளம் $7x + 1$ ஆகும். மற்றைய இரு பக்கங்களினதும் நீளங்கள் முறையே $4x + 1$ உம் $5x + 2$ உம் ஆயின், முக்கோணியின் பரப்பளவைக் காண்க.

9. 12 அங் நீளமும் 9 அங் அகலமுமான செவ்வகத் தகரத்துண்டொன்றின் நான்கு மூலைகளிலுமிருந்து சமமான சதுரங்களை வெட்டியெடுத்து, பின்னர் அதன் ஓரங்களை மடிப்பதனால், 60 சதுர அங்குல அடியையுடைய திறந்த பெட்டியொன்று அமைக்கப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு மூலையிலுமிருந்து வெட்டப்படும் சதுரத்தின் பக்கமொன்றினது நீளத்தை ஓர் அங்குலத்தின் கிட்டிய பத்திலொரு பங்குக்குக் கண்டறிக.

10. முதல் n நேர் நிறையெண்களினதும் கூட்டுத்தொகை $S = \frac{1}{2}n(n+1)$ ஆலே தரப்படும். ஒன்றிலே தொடங்கி அடுத்துவரும் எத்தனை எண்களின் கூட்டுத்தொகை 231 ஐத் தரும்?

6. சூத்திரப் பொருளை மாற்றல்

6.1 ஒரு பொருள் செல்லும் தூரம் S ஐ, அவ்வாறு செல்வதற்கு ஆகும் நேரம் t யுடன் தொடுக்கும் $S = 16t^2$ என்ற சூத்திரத்தில் S ஆனது 'சூத்திரப் பொருள்' எனப்படும். ஏனெனில் இச் சூத்திரமானது S = ... என்று எழுதப்பட்டுள்ளமையால், பொருள் பிரயாணம் சென்றுள்ள தூரமாகிய S ஐ t யின் கோவையாக இச்சூத்திரம் எமக்குத் தெரிவிக்கின்றது. உதாரணமாக இச்சூத்திரம் மீற்றர்களில் அளக்கப்பட்ட தூரத்திற்கும், செக்கன்களில் அளக்கப்பட்ட நேரத்திற்கும் வலிதாகுமாயின், 3 செக்கன்களின் பின்னர் கடக்கப்பட்ட தூரமானது

$S = 16(3)^2 = 144$ மீற்றர் என வரும்.

சில சமயங்களில், பொருள் எவ்வளவு தூரம் பிரயாணஞ் செய்துள்ளது என்று கூறி, அத்தூரத்தைக் கடக்க ஆகும் நேரம் எவ்வளவு என்று வினவப்படுகிறது. உதாரணமாக $S = 64$ என்று தரப்பட்டு t ஐக் காணுமாறு கோரப்படுகிறதெனக் கொள்க. t யைச் சூத்திரப் பொருளாக்க வேண்டுமென்பதே இதன் கருத்தாகும். நாம் முதலிலே சூத்திரத்தின் இரு பக்கங்களையும் 16 ஆற் பிரித்து, பின்னர் இரு பக்கங்களினதும் வர்க்க மூலத்தை எடுப்போம்.

$$S = 16t^2$$

$$\Rightarrow \frac{S}{16} = t^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{S}{16}} = t.$$

இப்பொழுது t சூத்திரப் பொருளாகும். $S = 64$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$t = \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2 \text{ செக்கன்.}$$

உதாரணம் 2.35 x ஐச் சூத்திரப் பொருளாக்குக. $\dfrac{x + a}{x + b} = \dfrac{x + c}{x + d}$

இரு பக்கங்களையும் $(x + b)$ ஆலும் $(x + d)$ ஆலும் பெருக்க,

$$(x + a)(x + d) = (x + c)(x + b)$$

இவற்றைப் பெருக்க நாம் பெறுவது,

$$x^2 + x(a + d) + ad = x^2 + x(c + b) + cb.$$

$$\therefore \; x(a + d) + ad = x(c + b) + cb$$

$$x(a + d - c - b) = cb - ad.$$

$$\therefore \; x = \frac{cb - ad}{(a + d - c - b)}.$$

உதாரணம் 2.36 μ ஐ $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\, a^{3/2}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக. சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் வர்க்கிக்க நாம் பெறுவது.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$$

இச்சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் μ இனைற் பெருக்க.

$$\mu T^2 = 4\pi^2 a^3.$$

இச்சமன்பாட்டை T^2 இனைற் பிரிக்க.

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

உதாரணம் 2.37 t யை $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

$$s = ut + \tfrac{1}{2} ft^2 ;$$

$$\therefore \; ft^2 + 2ut = 2s ;$$

$$\therefore \; f^2 t^2 + 2uft = 2fs ;$$

$$\therefore \; (ft + u)^2 - u^2 = 2fs ;$$

$$\therefore \; (ft + u)^2 = u^2 + 2fs ;$$

$$\therefore \; ft + u = \pm \sqrt{u^2 + 2fs} ;$$

$$\therefore \; ft = -u \pm \sqrt{u^2 + 2fs} ;$$

$$\therefore \; t = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 + 2fs}}{f}$$

பயிற்சி 2.15

1. g யை $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

2. W ஐ $\rho = \frac{Ws}{W - Q}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

3. ρ ஐ $f = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

4. u ஐ $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

5. H ஐ $T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MH}}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

6. P யை $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$ கோசை θ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

7. p_1 ஐ $V = \frac{\pi(p_1 - p_2) r^4}{8l\eta}$ என்னும் சூத்திரத்தின் பொருளாக்குக.

8. (i) $v = u + ft$ உம் $s = (u + v)\frac{t}{2}$ உம் ஆயின் f ஐ u, v, s ஆகியவற்றின் கோவையாகக் காண்க.

(ii) $u = 13$, $v = 5$, $s = 12$ ஆயின் f இன் பெறுமானங்கள் எவை?

9. $y = x - \sqrt{a^2 - b^2}$ ஆயின் b ஐ x, y, a ஆகியவற்றின் கோவையாகக் காண்க.

10. $\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$ ஆயின் s ஐ μ, r, f ஆகியவற்றின் கோவையாகக் காண்க.

11. $pv = \frac{1}{3} nm\bar{c}^2$ ஆயின் $\bar{c}$ ஐச் சூத்திரப் பொருளாக்குக.

12. $K_h = K_c^{nr}$ ஆயின் K_c ஐச் சூத்திரப் பொருளாக்குக.

7. அட்சரகணிதச் சர்வசமன்பாடுகள்

7.1 x இலுள்ள சமன்பாடொன்றை x இன் சில பெறுமானங்கள் மட்டுமே திருப்திப் படுத்தும். உதாரணமாக, $x^2 - 3x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை x இன் இரு பெறுமானங்களே திருப்திப்படுத்தும்: $x = 1, 2$ என்பனவே அவை. ஆனால் x இலுள்ள சர்வசமன்பாடொன்றை x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களும் திருப்திப்படுத்தும். ஏனெனில், சர்வசமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களும் ஒரே கோவையின் இரு வேறு வடிவங்களேயாம். சர்வசமன்பாட்டைக் குறிக்க $\equiv$ என்னும் குறியீடு பயன்படும்.

உதாரணம் 2.38

நிறுவுக: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\equiv 4.$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{1}{a}\right)\equiv a^2+2+\frac{1}{a^2}-\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$\equiv a^2+2+\frac{1}{a^2}-a^2+2-\frac{1}{a^2}$$

$$\equiv 4.$$

உதாரணம் 2.39

நிறுவுக: $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$\equiv -(b-c)(c-a)(a-b)$$

வ.கை.ப. $\equiv -(b-c)(c-a)(a-b)$

$$\equiv -(b-c)(ca-cb-a^2+ab)$$

$$\equiv -(abc-b^2c-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2+a^2c-abc)$$

$$\equiv b^2c+a^2b-ab^2+ac^2-bc^2-a^2c$$

$$\equiv a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

உதாரணம் 2.40

நிறுவுக: $x^4+y^4\equiv(x^2+\sqrt{2xy}+y^2)(x^2-\sqrt{2xy}+y^2)$

$$x^4+y^4\equiv(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$

$$\equiv(x^2+y^2+\sqrt{2xy})(x^2+y^2-\sqrt{2xy})$$

$$\equiv(x^2+\sqrt{2xy}+y^2)(x^2-\sqrt{2xy}+y^2)$$

பயிற்சி 2.16

பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக:

(i) $(x-y)^3+(x+y)^3\equiv 2x(x^3+3y^2)$

(ii) $(x+y)^3-(x^3+y^3)\equiv 3xy(x+y)$

(iii) $(x+y)^2\equiv(x-y)^2+4xy$

(iv) $(a-b)(c-b)+(b-c)(a-c)\equiv(b-c)^2$

(v) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)\equiv a^2-c^2$

(vi) $(x^2+y^2+z^2)^2-(x^2+y^2-z^2)^2\equiv 4z^2(x^2+y^2)$

(vii) $(px+qy)^2+(qx-py)^2\equiv(p^2+q^2)(x^2+y^2)$

(viii) $x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

(ix) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\equiv\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

(x) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\equiv-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$

பலவினப் பயிற்சிகள் III

1. பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்குக:

(i) $3xyz - 9xyz + 8x^2y - 2x^2y + 8xyz + 5x^2y$.

(ii) $\frac{x^2 z}{y} - 3x^2 y^{-1} z + \frac{2z}{x^2 y} + \frac{7}{x^{-2} yz^{-1}}$.

2. பின்வரும் கோவைகளைக் கூட்டுக:

(i) $3x - y + z - t$; $5x + 3y - z$; $- 8x - y + t$.

(ii) $3ab - 2bc + 3ac$; $5bc - 7ac$; $- 8bc + 2ac$.

(iii) $4 (3i + 2j - k)$; $3i - 6 (2j + k)$; $6i + 4k$.

(iv) $2x^2 - 3xy - 3y^2$; $7x^2 + 4xy + 3y^2$; $x^2 - y^2$.

3. பின்வரும் கோவைச் சோடிகளின் பெருக்கங்களைக் காண்க:

(i) $x + 2$; $2x - 3$.

(ii) $2x - 3y$; $3x - 2y$.

(iii) $2a - b$; $- a + 3b$.

(iv) $x - y$; $x + y$.

(v) $3x - 2$; $7x + 4$.

(vi) $x^2 + 2$; $x - 3$.

(vii) $3x + 10y$; $- x - y$.

(viii) $a - b$; $a^2 + ab + b^2$.

4. பின்வருவனவற்றை விரிக்க:

(i) $(2a + d)^2$ (ii) $(4p - 7t)^2$ (iii) $(3p + 2q)^2$

(iv) $\left(a + \frac{1}{a} \right)^2$ (v) $(2x^2 - 3y^2)^2$.

5. பின்வருவனவற்றின் காரணி காண்க:

(i) $x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$

(ii) $ax + ay - az + bx + by - bz - cz - cy + cz$

(iii) $ax + ay$

(iv) $pq - qr$

(v) $15x - 21y$

(vi) $ab + bc - b$

(vii) $px^2 + 3px$

(viii) $a^2b + ab^2 + a^2 b^2$

(ix) $x^2 y^2 + x^3 y^2 - ax^2 y^3$

(x) $5a - 10b + 15c$

6. பின்வருவனவற்றின் காரணி காண்க:

(i) $l(b+c)+(m+n)(b+c)$ (ii) $ax - 2ay + 2by - bx$

(iii) $(p+q)(x+y)-(x+y)^2$ (iv) $3ab + 3abc + 2c + 2c^2$

(v) $a^2 - b^2 - a + b$. (vi) $x^2 - (y - 5)x - 5y$

(vii) $(x + y)(z + t) - x - y$ (viii) $a(b - 1) - b + 1$.

(ix) $l^2 - l(2m - n) - 2mn$ (x) $x - 1 - (x - 1)^2$.

7. பின்வருவனவற்றுள் எவை உண்மை, எவை பொய் ?

(i) $a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2$

(ii) $12xy - 9x = 3x(4y - 3)$

(iii) $\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3} = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$

(iv) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{24x^3} = -(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{12x^2})$

(v) $1 - p^2 - p^4 = -p^4\left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}\right)$

8. பின்வருவனவற்றை 4 தசம தானங்களுக்குக் காண்க:

(i) $(3{\cdot}009)^2$; (ii) $(2{\cdot}001)^2$.

9. x சிறிதாயிருக்கையில் $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$ என்பதற்கு ஒரு வரிப்படங் கீறுக. $(1 + x)^2$ ஐ $1 + 2x$ என அண்ணளவாக்கஞ் செய்கையில் எழும் வழுவை, வரிப்படத்தில் நிழற்கூறிட்டுக் காட்டுக.

10. வினு 9 இல் வரும் அண்ணளவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி (i) $(1{\cdot}005)^2$; (ii) $({\cdot}998)^2$. என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க [குறிப்பு: ${\cdot}998 = (1 - {\cdot}002)$]

11. (i) b ஆனது a யிலும் மிகச்சிறிதாயின், $(a + b)^2$ என்னும் கோவைக்கு, வினு 9 இல் உள்ளதுபோன்ற அண்ணளவாக்கத்தைக் காண்க. (ii) அதைப் பயன்படுத்தி $(2{\cdot}003)^2$; $(4{\cdot}997)^2$; $(6{\cdot}001)^2$ என்பவற்றின் அண்ணளவுப் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

12. பின்வருவனவற்றின் காரணி காண்க:

(i) $x^2 + 9x + 18$; (ii) $x^2 - 9x + 8$; (iii) $p^2 + 10p + 24$;
(iv) $l^2 - 5l + 6$; (v) $t^2 + 17t + 72$; (vi) $x^2 + 6x + 8$;
(vii) $2x^2 - xy - 6y^2$; (viii) $x^2 + 6xy + 5y^2$; (ix) $4 + 5x + x^2$;
(x) $12 - x - x^2$; (xi) $12y^2 + 11y + 2$; (xii) $r^2 - 5r - 6$;
(xiii) $x^2 + 5x - 14$; (xiv) $x^2 + 7x - 18$; (xv) $y^2 - 6y - 16$;
(xvi) $y^2 - y - 6$; (xvii) $u^2 + 5u - 6$; (xviii) $j^2 - 4j - 21$;
(ixx) $x^2 - 36$; (xx) $a^2 + 17a - 200$.

13. காரணி காண்க:

(i) $6x^2 - 5x + 1$; (ii) $3x^2 + 15x + 18$;
(iii) $x(x+1) + (x+2)(x+3) - 42$. (iv) $x(2x+1) - 10$;
(v) $2x^2 + 35 - 19x$; (vi) $(k+1)(2k+1) - 15$;
(vii) $3x^2 - 13x - 10$; (viii) $6p^2 - 17p + 12$;
(ix) (4 தான் ^2x + 13 தான் $x - 12$.
[இங்கு தான் $^2 x$ என்பது (தான் $x)^2$ என்பதைக் குறிக்கும்.]
(x) $4 - 4$ சைன் $x - 3$ சைன் ^2x; (xi) $6a^2 - 19a + 10$;
(xii) $2 + 11a^2 + 12a^4$; (xiii) $12p^2 - 17pq + 6q^2$; (xiv) $7x^2 - 19x - 6$
(xv) $15 + x - 2x^2$; (xvi) $x^2 + 10xy + 9y^2$; (xvii) $10 - 7t - 12t^2$;
(xviii) $15 + a - 2a^2$ (ixx) $2x^2 + 11x + 15$; (xx) $12 + x - 6x^2$.

14. காரணி காண்க:

(i) $a^2 - b^2$; (ii) $x^2 - 16$; (iii) $25x^2 - y^2$; (iv) $9x^2 - 4(y-z)^2$
(v) $(a-b)^2 - (c-d)^2$; (vi) $x^8 - 16$; (vii) $36 - 49a^2$;
(viii) $16(l-m)^2 - 36(p-q)^2$; (ix) $(a-b)^2 - 4(2b-c)^2$;
(x) $x^2 - 121y^4$.

15. பின்வருவனவற்றின் வர்க்க மூலம் காண்க:

$(a^2 - 6a + 9)(b^2 + 2bc + c^2)$

16. காரணி காண்க: $(a+b)^2 - (ab+1)^2$

17. காரணி காண்க: (i) $p^3 + 64$; (ii) $a^3b^3 + c^3$; (iii) $8a^6 - b^6$;
(iv) $a^3 - 27b^3c^3$; (v) $(x+y)^3 + (x-y)^3$;
(vi) $(x+y)^3 - (x-y)^3$; (vii) $64h^3 - 27$; (viii) $8 - 125a^3$;
(ix) $z^3 + 1$; (x) $125a^3 - 1$.

18. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக:

(i) $\dfrac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 4x + 3)}{(x^2 - 9)(x + 1).}$

(ii) $\dfrac{(a^2 - 16)(a + 2)}{(a^2 - 2a - 8)(a^2 + 5a + 4)}$

(iii) $\dfrac{ax + 5a}{x^2 + 8x + 15}$ (iv) $\dfrac{a+1}{a^2 + 5a + 6} \times \dfrac{a+2}{a^2 + 5a + 4}$

(v) $\dfrac{p^2 - 5p - 24}{p^2 - 5p + 6} \times \dfrac{p^2 - 2p - 8}{p^2 - 4p - 21} \times \dfrac{p^2 - 9p + 14}{p^2 - 6p - 16.}$

14725—12

19. இயலுமான தருணங்களில், பின்வருஞ் சமன்பாடுகளின் தீர்வுத் தொடையை எழுதுக.

(i) $x^2 - 4x + 3 = 0$; (ii) $x^2 - 2x - 8 = 0$;

(iii) $x^2 - 10x + 9 = 0$; (iv) $3x^2 + 14x + 8 = 0$;

(v) $x(2x + 1) = 0$; (vi) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{9}{20}$;

(vii) $\frac{a+3}{a+2} = \frac{a+4}{a+1}$; (viii) $\frac{a+2}{a+3} = \frac{2a-3}{3a-7}$;

(ix) $\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{4}{t-1}$; (x) $(h-1)(h+1) + (2h-1)(h+2) = 6$;

(xi) $x + 1 + \frac{1}{x+1} = 3$; (xii) $x(x+1) + (x+2)(x+3) = 4$;

(xiii) $\frac{2x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{5x}{x^2-4}$;

(xiv) $\frac{x-5}{12} + \frac{x}{x-5} = \frac{3}{2}$;

20. முதல் n இரட்டை எண்களின் கூட்டுத்தொகை S ஆனது $S = n(n+1)$ என்னும் சூத்திரத்தாலே தரப்படும். 2 இலே தொடங்கி அடுத்தடுத்து வரும் எத்தனை இரட்டை எண்களின் கூட்டுத்தொகை 156 ஆகும்?

21. ஒரு செவ்வக வயலின் பரப்பளவு 2 400 m^2; அதன் சுற்றளவு 200 m. வயலின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் காண்க.

22. $P = \frac{22}{7} mf^2r + k$ ஆயின் (அ) r, (ஆ) f என்பவை ஒவ்வொன்றையும் ஏனைய உறுப்புகளின் கோவையாக எழுதுக.

23. நிறுவுக: $a^3 b^3 + b^3 c^3 + c^3 a^3 - 3a^2 b^2 c^2$

$\equiv (ab + bc + ca)\{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 - abc(a + b + c)\}$

24. நிறுவுக: $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz \equiv (x - y + z)(x + y - z)$.

25. நிறுவுக: $\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3x-1} \equiv \frac{x}{(2x-1)(3x-1)}$

அதிகாரம் 2. இன் சுருக்கம்

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம்.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

அதன் தீர்வு :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

அதிகாரம் 3

சுட்டிகளும் மடக்கைகளும்

1. சுட்டிகள்

1.1 எண்களின் வலுக்களைப் பெருக்குவதற்கு விரைவான முறைகள் உண்டென்பதை ஏற்கெனவே 6 – 9 ஆம் வகுப்புகளிற் கற்றுள்ளோம். உதாரணங்கள்:

(a) $2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$= 2^5$;

எனவே $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3}$.

(b) $(4^3)^2 = (4 \times 4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$

$= 4^6$;

எனவே $(4^3)^2 = 4^{3\times2}$

(c) $5^6 \div 5^2 = \dfrac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5}$

$= 5^4$;

எனவே $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$.

(d) $(2.3)^4 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

பரிவர்த்தனை விதியைப் பயன்படுத்தி

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$;

எனவே $(2.3)^4 = 2^4.3^4$.

இப்பேறுகளை நாம் பின்வரும் நான்கு கூற்றுகளாகச் சுருக்கி எழுதலாம்.

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$;

(iii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(m > n)$

(iv) $(a.b)^m = a^m.b^m$.

மேலும் $m = n \Leftrightarrow a^m = a^n$ என்பதையும் நாம் காணலாம். a^m என்னும் கோவையில் a அடியும் m சுட்டி அல்லது அடுக்குக்குறி அல்லது வலுவும் ஆகும்.

a ஆனது m என்னும் வலுவிற்கு உயர்த்தப்பட்டுள்ளது என்போம். மேலுள்ள உதாரணங்களில் m எப்போதும் ஓர் இயற்கை எண்ணுகவே இருந்துள்ளது. மேலுள்ள நெறிகளைப் பரிசயமாக்குமுகமாகச் சில உதாரணங்களையும் பயிற்சிகளையும் தருவோம்.

உதாரணம் 3.1

சுருக்குக :

$$\text{(i)}\ \frac{a^4 \times (b^2)^3}{(ab)^3}; \qquad \text{(ii)}\ \frac{15^2 \times 3^6 \times 12^4}{4^3 \times 9^3};$$

$$\text{(i)}\ \frac{a^4 \times (b^2)^3}{(ab^3)} \qquad \text{(ii)}\ \frac{15^2 \times 3^6 \times 12^4}{4^3 \times 9^3}$$ [முதன்மைக் காரணிகளின் வலுக்களில் எடுத்துரைக்க.]

$$= \frac{a^4 \times b^6}{a^3 \times b^3} \qquad = \frac{(3^2 \times 5^2) \times 3^6 \times [3^4 \times (2^2)^4]}{(2^2)^3 \times (3^2)^3}$$

$$= a^{4-3} \times b^{6-3} \qquad = \frac{(3^2 \times 3^6 \times 3^4) \times 5^2 \times 2^8}{2^6 \times 3^6}$$

$$= ab^3. \qquad = \frac{3^{12} \times 5^2 \times 2^8}{2^6 \times 3^6}.$$

$$= 3^6 \times 5^2 \times 2^2.$$

உதாரணம் 3.2 தீர்க்க (i) $2^m = 64$ (ii) $x \,.\, a^4 = a^6$.

(i) $2^m = 64$; (ii) $x \,.\, a^4 = a^6$.

$\Rightarrow 2^m = 2^6$. $\Rightarrow x \,.\, a^4 = a^2 \,.\, a^4$.

$\Rightarrow m = 6$. $\Rightarrow x = a^2$.

உதாரணம் 3.3 $6^2 \times 10^3$ ஐ முதன்மை எண்களை அடிகளாகக் கொண்டுள்ள சுட்டி வடிவில் எடுத்துரைக்க:

$$6^2 \times 10^3 = (2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^3 = 2^5 \,.\, 3^2 \,.\, 5^3.$$

பயிற்சி 3.1

1. பின்வருவனவற்றை, முதன்மை எண்களை அடிகளாகக் கொண்டுள்ள சுட்டி வடிவில், எடுத்துரைக்க.

(i) $2^2 \times 2^3$; (ii) $6^2 \times 9^3$; (iii) 1024;

(iv) $2^3 + 2^4$; (v) $(3^4)^6$; (vi) $10^2 - 8^2$.

2. பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்திப்படுத்துமாறு m ஐயும் n ஐயும் காண்க.

(i) $2^m \times 3^n = 144$, (ii) $6^m \times 2^n = 2592$,

(iii) $3^m \times 5^n = 10125$, (iv) $2^m \times 3^n = 6^4 \times 3^m$,

(v) $10^m \times 5^n = 2^4 \cdot 5^7$.

3. தீர்க்க :

(i) $(2^m)^3 = 8^4$; (ii) $(3^2)^m = 9^4$;

(iii) $(3^m)^2 = 81$; (iv) $(2^3)^m \times 2^2 = (2^m)^2 \times 2^4$;

(v) $(2^m)^m = 2^{2m-1}$.

4. பின்வரும் நிபந்தனைகளைத் திருப்தி செய்யுமாறு m ஐயும் n ஐயும் காண்க:

(i) $(2^m)^2 (3^n)^3 = 8^2 . 9^3$;

(ii) $(2^2)^m \times 2^n \times (3^3)^n = 8^6 \times 9^3$.

5. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக:

(i) $\dfrac{2^3 \times 2^4 \times 2^5}{2^4 \times 2^2}$; (ii) $\dfrac{x^3 \times x^2}{x^4}$; (iii) $\dfrac{a^2 \times (b^3)^4}{(ab)^2}$;

(iv) $\dfrac{(4x)^2}{4x^2}$; (v) $(4x^2)^3$; (vi) $(a^3)^4$;

(vii) $(ab^2)^3$; (viii) $(-2)^3$; (ix) $(-1)^4$

(x) $(-a)^2$; (xi) $(-3a)^3$

1.2 மறைச்சுட்டிகளும் பின்னச் சுட்டிகளும்

பிரசினம் 3.1

(i) *3.1 ஆம் அட்டவணையிலுள்ள A வரியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு இடது பக்கத்தேயுள்ள உறுப்பின் அடுக்குக் குறியிலிருந்து 1 ஐக் கழிக்க வரும் எண்ணாகும். இவ்வட்டவணையைப் பிரதிபண்ணி A வரியில் அடுத்த நான்கு வெற்றிடங்களையும் நிரப்புக.*

(ii) *B வரியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு இடது பக்கத்தேயுள்ள உறுப்பை 2 ஆற் பிரித்துப் பெறப்படும், வெற்றிடங்களை நிரப்புக.*

A	2^4	2^3	2^2	2^1				
B	16	8	4	2	1			

அட்டவணை 3.1

(iii) நாம் $\frac{1}{2}$ ஐ $\frac{1}{2^1}$ என எழுதலாம். அதே விதமாக $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ ஆகியவற்றை எவ்வாறு எழுதலாம் ?

(iv) அட்டவணையைப் பார்க்க. பின்வருவனவற்றை நேர்ச் சுட்டிகளுடன் எடுத்துரைக்க இயலுமா ? 2^{-5}, 10^{-4}, a^{-3}, $\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{125}$.

மேலுள்ளதைப் பயன்படுத்தி வலுக்கள் பற்றிய விளக்கத்தை நாம் விரிவாக்கிக் கொள்ளலாம். m ஆனது ஓர் இயற்கை எண்ணாக மட்டுமே இல்லாதவிடத்தும் a^m இற்கு ஒரு விளக்கத்தைக் கொடுப்பதே எமது நோக்கமாகும்.

பூச்சியச் சுட்டி

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ என்பது, m உம் n உம் விகிதமுறுமெண்களாகும்போதுகூட உண்மை என எடுகொள்வோம். $n = 0$ என்று போட நாம் பெறுவது :

$$a^m \times a^0 = a^m$$

ஆகவே a^0 இற்குக் கொடுக்கத்தக்க ஒரேயொரு விளக்கம் 1 ஆகும்.

மறைச் சுட்டி

மீண்டும் m, n என்னும் எல்லா விகிதமுறுமெண்களுக்கும் $a^m \times a^n = a^{m+n}$ என நாம் எடுகொண்டால், $n = -m$ என்று போட

$$a^m \times a^{-m} = a^0 = 1 \quad \text{என வரும்.}$$

எனவே $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ எனக் காணலாம். இது இன் a^m பெருக்கல் நேர்மாறு ஆகும்.

விகிதமுறுஞ் சுட்டி

மீண்டும் m, n என்னும் விகிதமுறுமெண்களுக்கு $a^m \times a^n = a^{m+n}$ உண்மையென்று கொண்டால் $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^1$ என்று பெறுவோம்.

மேலும் $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^1$.

இதிலிருந்து $a^{\frac{1}{2}}$ என்பது, வர்க்கிக்கப்படும்போது a ஐத் தரும் எண் என்பதை உய்த்தறியலாம். அதாவது : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

அதே விதமாக $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a$ ஆதலால் a யின் முப்படி மூலம் $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$. ஆகும் என்பதை உய்த்தறியலாம். பொதுவாக ஒரு நேர் நிறையெண் n இற்கு $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. என எழுதுவோம். உதாரணமாக : $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

[$\sqrt{a}$ என்பது a ஐ வர்க்கமாகக் கொண்ட நேரெண்ணையே குறிக்கின்றது என்பதைக் கவனத்திற் கொள்க.]

$\sqrt[n]{a}$ ஆனது a யின் n ஆவது மூலம் என்ற இந்த வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $a^{\frac{m}{n}}$ இற்கு ஒரு விளக்கத்தை நாம் காணலாம். இங்கு m ஒரு நிறையெண்ணும், n ஒரு நேர் நிறையெண்ணுமாகும்.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

அல்லது $$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

உதாரணம் 3.2

சுருக்குக : (i) $16^{\frac{3}{4}}$; (ii) $8^{\frac{2}{3}}$ (iii) $\sqrt[4]{(x+y)^6} \times (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

(i) $16^{\frac{3}{4}}$	(ii) $8^{-\frac{2}{3}}$	(iii) $\sqrt[4]{(x+y)^6} \times (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= (16^{\frac{1}{4}})^3$	$= \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}}$	$= (x+y)^{\frac{6}{4}} \dfrac{1}{(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$
$= (2)^3$	$= \dfrac{1}{(8^{\frac{1}{3}})^2}$	$= \dfrac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{[(x+y)(x-y)]^{\frac{1}{2}}}$
$= 8.$	$= \dfrac{1}{2^2}$	$= \dfrac{(x+y)(x+y)^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}(x-y)^{\frac{1}{2}}}$
	$= \frac{1}{4}$	$= \dfrac{x+y}{(x-y)^{\frac{1}{2}}}$

பொதுவாக ஓர் எண்ணின் மூலத்தை எடுத்து, பின்னர் வலுவைக் காண்பது எளிதாகும் என்பதைக் கவனிக்க. உதாரணம் 3.4 இன் (ii) ஆம் பகுதியில் 8இன் முப்படி மூலத்தை முதலிற் கண்டு பின்னரே அதை வர்க்கித்தோம்.

பயிற்சி 3.2

1. சுருக்குக.

(i) $64^{\frac{1}{3}}$ (ii) $256^{\frac{1}{4}}$ (iii) $\sqrt[3]{81^3}$ (iv) $\sqrt{121}$ (v) $(t^{\frac{1}{2}})^4$;

(vi) $49^{\frac{1}{2}}$ (vii) $\dfrac{1}{a^{-2}}$ (viii) $3x^{-\frac{1}{3}}$ (ix) $27^{-\frac{2}{3}}$ (x) $9^{-\frac{1}{2}}$.

2. பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்கி, விடைகளை நேர்ச் சுட்டிகளுடன் எழுதுக.

(i) $\dfrac{(3^2)^{\frac{1}{3}} \times (2^{-5})^{\frac{1}{2}}}{(3^{\frac{1}{4}})^3}$ (ii) $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}}$

(iii) $c^{\frac{4}{3}} \div c^{\frac{1}{3}}$ (iv) $4y^{\frac{3}{2}} \div 2y^{\frac{1}{2}}$;

(v) $\dfrac{(36^2)^{\frac{3}{4}} \times (16^{\frac{1}{3}})^5}{(81^{\frac{1}{4}})^3 \times (9^{-3})^{\frac{1}{4}}}$ (vi) $\left(\dfrac{a^3}{b^4}\right)^3 \div \left(\dfrac{b^{-3}}{a^2}\right)^{-4}$

(vii) $(p^{\frac{1}{3}})^2 \times (p^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{5}} \times \sqrt{p^{\frac{4}{5}}}$ (viii) $\left(\dfrac{x^{-2}y}{x^3y^{-4}}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{xy^{-1}}{x^{-3}y^2}\right)$

(ix) $x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})$; (x) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}})$.

2. விகிதமுறும் எண்களும் சேடுகளும்

2.1 $q \neq 0$ ஆகவும் p, q நிறையெண்களாகவும் இருக்குமிடத்து $\frac{p}{q}$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கப்படக்கூடிய ஏதேனும் ஓர் எண் ஒரு விகித முறுமெண் எனப்படுமென ஏற்கெனவே கூறியுள்ளோம். இவ்வடிவில் எடுத்துரைக் கப்பட இயலாத π, $\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$ முதலியனபோன்ற மெய்யெண்கள் விகிதமுரு எண்கள் எனப்படும்.

2.2 a யானது ஒரு விகிதமுறுமெண்ணின் நிறைவான n ஆம் வலுவாகா விடத்து $\sqrt[n]{a}$ போன்றவற்றைக் கொண்டுள்ள கோவைகளைக் குறிப்பிடு வதற்குச் சேடுகள் என்ற பதத்தைப் பயன்படுத்துவோம். இவ்வண்ணமாக $\sqrt{5}, 2 + \sqrt{3},\ 5 + 3\sqrt{7},\ \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ என்பன யாவும் சேடுகளாகும். மறுபுறத்தே $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ முதலியன போன்றவற்றை விகிதமுறுமெண்களாகச் சுருக்கலா மாதலால் அவை பொதுவாகச் சேடுகள் எனப்படுவதில்லை. சேடுகள் கணிதத்திற் பெருவாரியாகத் தோன்றுகின்றன. இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது இவற்றுட் சிலவற்றைச் சந்தித்துள்ளோம். ஓர் எடுத்துக்காட்டாக $x^2 - 4x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாடு $2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$ என்னும் இரு மூலகங்களைக் கொண்டுள்ளது. இவை இரண்டும் சேடுகளாகும். இது காரணமாக இவற்றின் பயன்பாடு பற்றி நன்கு பரிசயமாக இருக்கவேண்டும். இதற்கு உதவுமுகமாகச் சில உதாரணங்களையும் பயிற்சிகளையும் தந்துள்ளோம். ''பகுதியெண்ணை விகிதமுறச் செய்தல்'' என்பது மிகவும் பயனுள்ள ஒரு செய்கையாகும். இயலுமானபோதெல் லாம் பிரசினங்களுக்கான விடைகளை ''விகிதமுறும் பகுதியெண்களுடன்'' அதாவது பகுதியெண்ணிலே சேடுகள் இல்லாது எடுத்துரைக்க முயற்சி செய்யவேண்டும். இவ்விதமாக $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ஐப் பொதுவாக $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ என்று எடுத்துரைப்போம். இதற்குச் சில விதிவிலக்குகள் உள. சைன் $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ என்னும் திரிகோணகணித விகிதம் இதற்கு ஓர் உதாரணமாகும். வேறு உதாரணங்களைக் கூற முடியுமா ?

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ஒரு சேடு ஆயின், $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ அதன் உடன்புணரிச் சேடு எனப்படும். இரண்டினதும் பெருக்கமான $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ ஒரு விகிதமுறுமெண்ணாகும். ஒரு பின்னத்தின் பகுதியெண்ணை விகிதமுறச் செய்வதற்கு மேற்கொள்ளும் வழக்கமான முறை தொகுதியெண்ணையும், பகுதியெண்ணையும் பகுதியெண்ணின் உடன்புணரிச் சேட்டினாற் பெருக்குவதாகும் இச்செய்முறையின் ஒரு பிரயோகத்தை உதாரணம் 3.5 (iii) இற் காணலாம்.

உதாரணம் 3.5

சுருக்குக (i) $6 + 2\sqrt{2} - 3 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$;

(ii) $(1 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{3}) + \sqrt{6}(2 + \sqrt{2})$;

(iii) $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

14725—13

(i) $6 + 2\sqrt{2} - 3 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= 6 - 3 + (2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2})$

$= 3 + 4\sqrt{2}.$

(ii) $(1 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{3}) + \sqrt{6}(2 + \sqrt{2})$

$= 3 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + \sqrt{6}.\sqrt{2}$

$= 3 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}.$ ($\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ என்பதைக் கவனிக்க)

$= 3 + 3\sqrt{2}.$

$= 3(1 + \sqrt{2}).$

(ii) $\dfrac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

$$= \frac{3}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3}$$

$= -3(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ அல்லது $3(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$

உதாரணம் 3.6

சுருக்குக :— $\dfrac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} + \dfrac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2}$

$$\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} + \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2} = \frac{(\sqrt{3} - 2)^2 + (\sqrt{3} + 2)^2}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)}$$

$$= \frac{3 - 4\sqrt{3} + 4 + 3 - 4\sqrt{3} + 4}{3 - 4}$$

$$= 14$$

உதாரணம் 3.7

$\dfrac{2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ ஐ விகிதமுறும் பகுதியெண்ணுடன் எடுத்துரைக்க.

$$\frac{2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{[2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})]} \cdot \frac{[2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})]}{[2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})]}$$

$$= \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 4 + \sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 3}{4 - (2 + 3 + 2\sqrt{6})}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{6}}{-(1 + 2\sqrt{6})}$$

$$= \frac{(3 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{6})(1 - 2\sqrt{6})}{-(1 + 2\sqrt{6})(1 - 2\sqrt{6})}$$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{6} - 6\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 24\sqrt{2} + 12}{-(1 - 24)}$$

$$= \frac{15 - 26\sqrt{2} + 12\sqrt{3} - 7\sqrt{6}}{23}$$

பயிற்சி 3.3

1. கூடியளவு எளிய சேடுகளில் எடுத்துரைக்க:

(i) $\sqrt{8}$; (ii) $\sqrt{50}$; (iii) $\sqrt{75}$; (iv) $\sqrt{768}$; . (v) $\sqrt{98}$.

2. பின்வருவனவற்றின் பகுதியெண்களை விகிதமுறச் செய்க.

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (ii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; (iii) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; (iv) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

(v) $\frac{3}{-2\sqrt{3}}$; (vi) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; (viii) $\frac{3}{2-\sqrt{5}}$; (viii) $\frac{3}{4+\sqrt{10}}$;

(ix) $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$; (x) $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

3. $a + b\sqrt{c}$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(i) $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$; (ii) $(2 + \sqrt{5})^2$; (iii) $(\sqrt{3} - 2)^2$; (iv) $\frac{(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3} + 2)}$;

(v) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$.

2.3 விகிதமுரு எண்கள். ஒரு தசமத்தை ஒரு விகிதமுறுமெண்ணுக அதாவது ஒரு பின்னமாக எடுத்துரைப்பது பற்றி ஏற்கெனவே கற்றுள்ளோம். உதாரணமாக $0{\cdot}35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ என்று அறிவோம். தசமம் எதுவாக இருப்பினும் நாம் எப்போதும் இதனைச் செய்யலாம். இப்போது இதற்குப் புறமாற்ருன செய்கையைக் கருதுவோம். அதாவது ஒரு விகிதமுறுமெண்ணை ஒரு தசமமாக

எடுத்துரைப்பது. தொகுதியெண்ணைப் பகுதியெண்ணாற் பிரிக்க வேண்டுமென்பதை மனத்திற் கொள்க. உதாரணங்கள்:

$$\frac{2}{5} = 0{\cdot}4,$$

$$\frac{7}{50} = \frac{14}{100} = 0{\cdot}14,$$

$$\frac{17}{25} = \frac{68}{100} = 0{\cdot}68,$$

$$\frac{3}{8} = 0{\cdot}375.$$

ஆயினும் இதே நெறியை $\frac{2}{3}$ என்னும் இலக்கத்திற்கு அல்லது மறிதரும் பின்னத்திற்குப் பிரயோகிக்க நாம் பெறுவது

$$\frac{2}{3} = 0{\cdot}6666\ldots\ldots\ldots\ldots$$

இது ஒரு தசமமாயினும், இதற்கு முடிவு இல்லை. இது மடங்கு தசமத்துக்கு ஓர் உதாரணமாகும். இதேவிதமாக $\frac{3}{7}$ ஐ ஒரு தசமமாக எடுத்துரைக்க நாம் பெறுவது

$$\frac{3}{7} = 0{\cdot}42857142857142\ldots\ldots\ldots$$

மீண்டும் இது ஒரு முடிவிலா அல்லது முடிவுறுத் தசமமாகும். ஆயினும் இங்கு, ஓர் இலக்கம் மறிதருவதற்குப் பதிலாக 428571 என்னும் தொடை இலக்கங்கள் மறிதருகின்றன (மீண்டும் மீண்டும் வருகின்றன). ஒரு மடங்கு தசமத்தைக குறிப்பதற்கு மறிதரும் தொடையின் முதலாம் இலக்கத்துக்கும் கடைசி இலக்கத்துக்கும் மேல் ஒவ்வொரு குற்றை இடுவோம். உதாரணமாக,

$$\frac{2}{3} = 0{\cdot}\dot{6}\,,\ \frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}\,,\quad \frac{71}{14} = 5{\cdot}0\dot{7}1428\dot{5}.$$

பிரசினம் 3.2

(i) பின்வரும் விகிதமுறுமெண்களைத் தசமங்களாக எடுத்துரைத்து அவற்றுள் எவை மடங்கு தசமங்களாகுமெனத் தெளிவாகக் காட்டுக.

$$\frac{4}{5},\quad \frac{2}{7},\quad \frac{14}{25},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{1}{11},\quad \frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{11},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{4}{13},\quad \frac{11}{15},\quad \frac{7}{9},\quad \frac{9}{20},\quad \frac{1}{7}$$

q ஆனது 2இன் வலுக்களினதும் 5இன் வலுக்களினதும் ஒரு பெருக்கமாக இருப்பின் மட்டுமே p/q என்னும் விகிதமுறுமெண் ஒரு முடிவுறும் தசமமாக எடுத்துரைக்கப்படலாமென்னும் சுவையான செய்தியை நீங்கள் கவனித்திருக்கக்கூடும். பகுதி (i) இற்கான விடைகளைத் திரும்பப் பார்க்க.

(ii) $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ என்பவற்றுக்கான தசமச் சமன்களை அந்த ஒழுங்கில் எழுதுக. $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ என்பவற்றுக்கான தசமக் கோவைகள் எவையென்று கூற முடியுமா ? விடைகளைச் சரி பார்க்க.

(iii) $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$ என்பவற்றுக்கான தசமச் சமன்களை எழுதுக. $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{11}$ என்பவற்றின் தசமச் சமன்களைக் கூற முடியுமா ?

(iv) $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$ முதலிய பின்னங்களை ஆராய்க.

2.4 மடங்கும் தசமத்தை விகிதமுறுமெண்ணாக எடுத்துரைப்பதற்கு ஒரு முறை.

ஒரு மடங்கும் தசமத்தை ஒரு பின்னமாக எடுத்துரைக்கத் தெரிந்திருப்பதும் பயனுள்ளதாகும். பின்வருவனவற்றைக் கவனித்தால் இது மிகவும் எளிதென்பது விளங்கும்.

உதாரணம் 3.8

$0{\cdot}\dot{3}$ஐ ஒரு விகிதமுறுமெண்ணாக எடுத்துரைக்க.

$S = 0{\cdot}\dot{3}$ ஆயின்,

$$S = 0{\cdot}333 \;\ldots\ldots \qquad -- \qquad (1)$$

$$10S = 3{\cdot}333 \;\ldots\ldots \qquad -- \qquad (2)$$

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க நாம் பெறுவது

$$9S = 3 :$$

$$\therefore\ S = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

எனவே $0{\cdot}\dot{3} = \frac{1}{3}$.

உதாரணம் 3.9

$3.\dot{7}\dot{2}$ ஐ ஒரு விகிதமுறுமெண்ணாக எடுத்துரைக்க.

$$S = 3.7272 \;\ldots\ldots \qquad -- \qquad (1)$$

அப்போது $100S = 372.72 \;\ldots\ldots \qquad -- \qquad (2)$

14725—14

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க நாம் பெறுவது $99S = 369$;

$$\therefore \quad S = \frac{369}{99} = \frac{41}{11} = 3\frac{8}{11}.$$

பயிற்சி 3.4

மேலுள்ள முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றை விகிதமுறுமெண்களாக எடுத்துரைக்க.

(i) $1\cdot\dot{6}$ (ii) $0\cdot\dot{7}$ (iii) $1\cdot\dot{9}$ (iv) $3\cdot\dot{2}\dot{5}$ (v) $4\cdot\dot{9}$ (vi) $0\cdot08\dot{3}$
(vii) $1\cdot\dot{4}2857\dot{1}$

எல்லா மடங்கு தசமங்களையும் விகிதமுறுமெண்களாக எடுத்துரைக்கலாமெனவும், எல்லா விகிதமுறுமெண்களையும் முடிவுறும் தசமங்களாக அல்லது மடங்கு தசமங்களாக எடுத்துரைக்கலாமெனவும் நாம் கண்டுள்ளோம். ஆயினும் முடிவுறும் தசமங்களாக அல்லது மடங்கு தசமங்களாக எடுத்துரைக்க இயலாத சில எண்களும் உள. இவற்றுட் சிலவற்றை நாம் ஏற்கெனவே சந்தித்துள்ளோம். $\sqrt{2}$ ஓர் உதாரணமாகும். நாம் $\sqrt{2} = 1.4142135$ . . . என்று எழுதலாம். இது ஒரு மறிதரும் இலக்கத்தை அல்லது இலக்கங்களின் தொடையைக் கொண்டிராத ஒரு முடிவில் தசமமாகும். இத்தகைய எண்களை நாம் **விகிதமுரு எண்கள்** என்போம்.

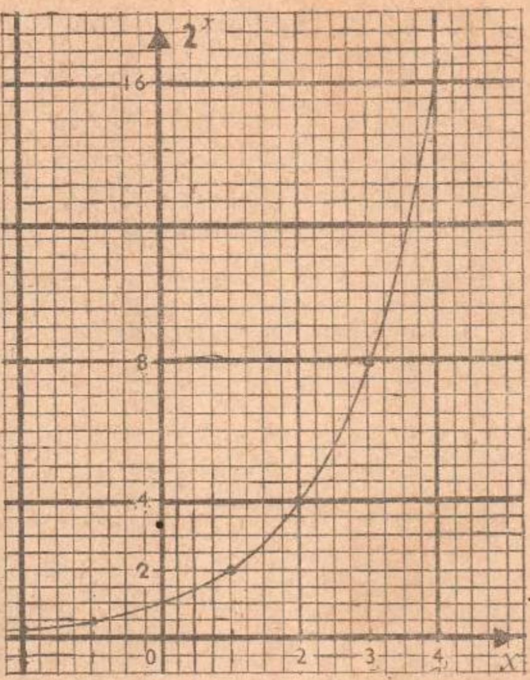
$\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π முதலியன வேறு உதாரணங்களாகும். இதுவரை ஒரு வட்டத்தின் பரிதியைக் கணிக்கையில் π ஐ $\frac{22}{7}$ அல்லது $3\cdot14$ என்று அண்ணளவாக்கியுள்ளோம். நாம் எவ்வளவு திருத்தமாகச் செய்ய விரும்புகிறோம் என்பதற்குத் தக்கதாக அவ்வளவு தசம தானங்களுக்கு π ஐ எடுத்துரைக்கலாமென 6–9 ஆம் வகுப்புகளிற் கண்டுள்ளோம்.

3. $x \to a^x$ என்னும் அடுக்குக் குறிச் சார்பு

8 ஆம் வகுப்புக் கணிதப் படிப்பில் $f : x \to 2^x$ என்ற சார்பைச் சந்தித்துள்ளோம். முதலாவதாக அட்டவணை 3.2 அமைக்கப்பட்டு, புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டன. இப்புள்ளிகளுக்கூடாக உரு 3.1 இலுள்ளது போன்ற ஓர் ஒப்பரவான வளையி வரையப்படலாம். x இன் விகிதமுறும் பெறுமானங்களுக்கு

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

அட்டவணை 3·2



உரு 3·1

2^x இன் பெறுமானங்களைத் தரும் ஒரு விரிவான அட்டவணையையும் நாம் அமைத்துக்கொள்ளலாம். 3.3 ஆம் அட்டவணையில் x இன் விகிதமுறும் பெறுமானங்களுக்கான 2^x இன் சில பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

x	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$
2^x	$\cdot 25$		$-\frac{1}{2}$	$\simeq \cdot 71$	1	$\simeq 1 \cdot 41$	2		4	

அட்டவணை 3.3

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1 \cdot 41$ என்று எமக்குத் தெரிந்துள்ளதால் $2^{-\frac{1}{2}}$ இன் பெறுமானத்தை எளிதிற் கணிக்கலாம். ஏனெனில், $2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}-1} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-1} \simeq 1 \cdot 41 \times \frac{1}{2} \simeq \cdot 71$.

பிரசினம் 3.3

(i) அதேவிதமாக அட்டவணை 3.3இலே தரப்படாத பெறுமானங்களுக்கு 2^x ஐக் கணித்து அட்டவணையைப் பூர்த்தி செய்து பிரதி செய்க.

(ii) ஒரு பொருத்தமான அளவிடையைத் தெரிந்தெடுத்து அச்சுகளைக் கீறி, நீர் (i) இற் கணித்த பெறுமானங்களுக் ஒத்த புள்ளிகளைக் குறிக்க.

(iii) $2^{\frac{1}{4}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ என்னும் கூற்றைப் பயன்படுத்தி $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}$ என்பவற்றுக்கான புள்ளிகளைக் குறிக்க.

(iv) மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கூடாகவும் ஓர் ஒப்பரவான வளையியை வரைக.

மேலுள்ள பிரசினத்தில் $2^{\frac{m}{n}}$ என்ற வகையிலான வரையறையில்லா எண்ணிக்கைப் புள்ளிகளைக் கணிப்பது இயலுமானது. ஆயினும் வளையியை ஒருபோதும் முற்றுக நிரப்ப இயலாதிருந்திருக்கும். இதனைச் செய்வதற்கு x இன் ஒவ்வொரு விகிதமுறுப் பெறுமானத்துக்கும் 2^x இன் பெறுமானத்தைப் பெற வேண்டும். ஆயினும் இப்புள்ளிகள் யாவும் ஓர் ஒப்பரவான வளையியில் அமைவன போலத் தோன்றுவதால் x இன் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணுடனும் 2^x ஐத் தொடர்புபடுத்தலாம் என நாம் எடுகொள்ளுவோம். $f : x \to 2^x, x \in \mathbb{R}$ என்னும் வளையியிலிருந்து இப்பெறுமானத்தை அண்ணளவாகக் கண்டுகொள்ளலாம் எனவும் எடுகொள்ளுவோம்.

உதாரணமாக $2^{\sqrt{3}} \simeq 2^{1.43} \simeq 3.3$ உமது வரைபிலிருந்து $2^{\sqrt{2}}$, 2^{π} என்பவற்றின் பெறுமானத்தை எவ்வளவென மதிப்பிடுகிறீர் ?

பொதுவாக, a நேராகவுள்ள சார்பு $x \to a^x$ என்பதற்கு $x \in \mathbb{R}$ என எடுகொள்ளுவோம் ;- அதாவது, மெய்யான எல்லா x களுக்கும் சார்பு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 3.5

முதலில் x இன் தரப்பட்ட பெறுமானங்களுக்கு அட்டவணை 3.4ஐப் பூர்த்தி செய்வதன்மூலம் $y = 2^x, y = 3^x, y = 4^x, y = (\frac{1}{2})^x, y = (\frac{1}{3})^x, y = (\frac{1}{4})^x$ என்பவற்றுக்கான வரைபுகளைக் கீறுக.

x	-2	-1	0	1	2
2^x					
$(\frac{1}{2})^x$					
3^x					
$(\frac{1}{3})^x$					
4^x					
$(\frac{1}{4})^x$					

அட்டவணை 3.4

(i) 2^x இன் வரைபு எவ்வண்ணமாக $(\frac{1}{2})^x$ இன் வரைபுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது ?

(ii) $x = 0$ மீது ஒன்றின் தெறிப்பாக மற்றது உள்ளதற்கான காரணம் யாது ?

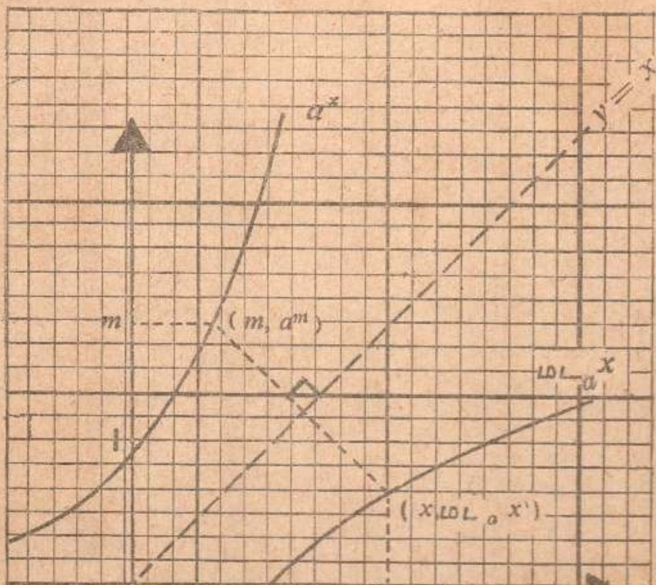
$f^{-1}: x \to$ மட $_2 x$ இனுற் குறிக்கப்படும். இதன் பெறுமானங்கள் அட்டவணை 3·6 இலே தரப்பட்டுள்ளன. அத்துடன் வரிசைப்படுத்திய சோடிகளுக்கு ஒத்த தொடை உரு 3.2 இற் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வரைபைப் பிரதி செய்து $x \to$ மட $_2 x$ இன் ஓர் ஒப்பரவான வளையியைப் பெறுவதற்கு அதனைப் பயன்படுத்துக.

மேலுள்ளதிலிருந்து பின்வரும் தொடர்புகளைப் பெறுவோம்.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} &= 2^{-2} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, \tfrac{1}{4} = -2,\\
\tfrac{1}{2} &= 2^{-1} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, \tfrac{1}{2} = -1,\\
1 &= 2^{0} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, 1 = 0,\\
2 &= 2^{1} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, 2 = 1,\\
4 &= 2^{2} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, 4 = 2,\\
8 &= 2^{3} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, 8 = 3,\\
x &= 2^{m} \Leftrightarrow \text{மட}_2\, x = m.
\end{aligned}$$

பொதுவகையில் $f : x \to a^x$ என்னும் அடுக்குக்குறிப் படமாக்கல் எமக்குக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து $f : x \to$ மட $_a x$ என்னும் பொது மடக்கைப் படமாக்கலை நாம் பெறலாம். இதை நாம் அடி a இலான மடக்கைக்கு x படமாக்குகிறது என்று கூறுகிறோம்.

நீர் உரு 3.2 இலிருந்து பெற்றதன் வடிவையொத்த வரைபு ஒன்று உரு 3.3 இல் வரையப்பட்டுள்ளது. இது $f : x \to$ மட $_a x$ இனது படமாக்கலின்



உரு. 3.3

வரைபாகும். இங்கு மடக்கைப் படமாக்கலின் அடி a யாகும். அதே அச்சுகளில் $f^{-1} : x \rightarrow a^x$ இன் வரைபையும் வரைந்துள்ளோம். $y = x$ என்னும் கோட்டின் மீது ஒன்று, மற்றையதன் தெறிப்பாகும் என்பதைக் காணலாம். இவ்வுரு மாற்றத்தின் கீழ் $(x, y) \rightarrow (y, x)$ என்று பெறுவோம்: எனவே $y =$ மட$_a x$ இல் ஒரு பொதுப் புள்ளி $(x,$ மட$_a x)$ உம் $y = a^m$ இல் ஒரு பொதுப் புள்ளி (m, a^m) உம் இருப்பின் அப்போது $x = a^m$ உம் $m =$ மட$_a x$ உம் ஆயின் இப் புள்ளிகள் படமாக்கலின் கீழ் ஒன்றுக்கொன்று படமாகின்றன. (1) என்னும் உருமாற்றத்தின் நிபந்தனைப்படி இவ்விரு தேவைகளும் நிறைவாக வேண்டும்.

5. மடக்கைகளின் சேர்மானம்

5.1 $x = a^m \Leftrightarrow m$ மட$_a x$ என்னும் தொடர்பு நாம் அடிக்கடி பயன் படுத்தும் ஒரு முக்கிய முடிவாகும். இவ்வதிகாரத்தின் ஆரம்பத்தில் நாம் தொகுத்தளித்த சுட்டிகளுக்கான தொடர்புகளை ஒத்த ஒரு தொடை தொடர்புகளைப் பெறுவதற்கு நாம் இதனைப் பயன்படுத்துவோம்.

a நேரானதும் 1இற்குச் சமனற்றதும், m உம் n உம் மெய்யெண்களுமாயின் அப்போது

$$x = a^m \Leftrightarrow m \text{ மட}_a x$$

$$\text{அத்துடன் } y = a^n \Leftrightarrow n = \text{மட}_a y;$$

(i) இப்போது $x \times y = a^m \times a^n = a^{m+n}$;

எனவே மட$_a (x \times y) = m + n =$ மட$_a x +$ மட$_a y$;

$\therefore$ மட$_a (xy) =$ மட$_a x +$ மட$_a y$.

(ii) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

$\therefore$ மட$_a \dfrac{x}{y} = m - n =$ மட$_a x -$ மட$_a y$;

$\therefore$ மட$_a \dfrac{x}{y} =$ மட$_a x -$ மட$_a y$

(iii) $x^k = (a^m)^k = a^{mk}, k \in \mathbb{R}$

மட$_a x^k = mk = k$ மட$_a x$

மட$_a x^k = k$ மட$_a x$

(iv) $(\sqrt[p]{x}) = x^{\frac{1}{p}} = a^{m\frac{1}{p}}\ p \in \mathbb{Z}, a > 0$

$\therefore$ மட$_a (\sqrt[p]{x}) = m\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p}$ மட$_a x$

இவற்றை ஒன்ருகச் சேர்க்க நாம் பெறுவது

(i) $மட_a\ xy = மட_a\ x + மட_a\ y$

(ii) $மட_a \dfrac{x}{y} = மட_a x - மட_a y$

(iii) $மட_a x^k = k\ மட_a x\ ;\ k \in \mathbb{R}$

(iv) $மட_a (\sqrt[p]{x}) = \dfrac{1}{p}\ மட_a x, \quad k \in \mathbb{Z}.$

உதாரணம் 3.10

(i) மடக்கை வடிவில் எடுத்துரைக்க (i) $81 = 3^4$;

(ii) $\dfrac{1}{64} = 4^{-3}$

(i) $81 = 3^4 \Leftrightarrow மட_3\ 81 = 4.$

(ii) $\dfrac{1}{64} = 4^{-3} \Leftrightarrow மட_4 \dfrac{1}{64} = -3.$

2. அடுக்குக்குறி வடிவில் எடுத்துரைக்க: (i) $மட_5\ 625 = 4$
(ii) $மட_a\ p = q$
(iii) $மட_t\ 1 = 0.$

(i) $மட_5\ 625 = 4 \Leftrightarrow 625 = 5^4.$

(ii) $மட_a\ p = q \Leftrightarrow p = a^q.$

(iii) $மட_t\ 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = t^0$

3. (i) $மட_2\ 2$ (ii) $மட_{16}\ 4$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $மட_2\ 2 = x$ என்க.

அப்போது $மட_2\ 2 = x \Leftrightarrow 2 = 2^x.$

$\Rightarrow x = 1$;

$\therefore மட_2\ 2 = 1.$

(ii) $மட_{16}\ 4 = y$

அப்போது $மட_{16}\ 4 = y \Leftrightarrow 4 = 16^y.$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}.$

$\therefore மட_{16} 4 = \frac{1}{2}$

4. $மட_4\ 18$ இன் பெறுமதியை மதிப்பிடுக.

$மட_4\ 18 = y$ ஆகட்டும்

அப்போது $மட_4\ 18 = y \Leftrightarrow 18 = 4^y.$

14727—15

இப்போது
$$4^3 = 64,$$
$$4^{5/2} = 32,$$
$$4^{9/4} = 16\sqrt{2} = 22{\cdot}6,$$
$$4^2 = 16.$$

இவற்றிலிருந்து y ($=$ மட$_4$ 18) ஆனது 2இற்கும் 2·25 இற்கும் இடையில் உள்ளது என நாம் ஊகிக்கிறோம்.

உண்மையில், வாய்ப்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினல், மட$_4$ $8 \simeq 2{\cdot}1$ எனப் பெறுவோம்.

5. மட$_{10}$ a, மட$_{10}$ b, மட$_{10}$ c என்பவற்றில் எடுத்துரைக்க.

(i) மட$_{10}\,\frac{1}{b}$ (ii) மட$_{10}\,a^2\,b^{1/3}$ (iii) மட$_{10}\,\sqrt{\left(\frac{10a}{b^3c^2}\right)}$

(i) மட$_{10}\frac{1}{b}$ $=$ மட$_{10}\,1 -$ மட$_{10}\,b = -$ மட$_{10}\,b$,

(ii) மட$_{10}\,a^2\,b^{1/3}$ $=$ மட$_{10}\,a^2 +$ மட$_{10}\,b^{1/3} = 2$ மட$_{10}\,a + \frac{1}{3}$ மட$_{10}\,b$,

(iii) மட$_{10}\sqrt{\left(\frac{10a}{b^3\,c^2}\right)}$ $=$ மட$_{10}\left(\frac{10a}{b^3\,c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=$ மட$_{10}\;\frac{(\,10a\,)^{\frac{1}{2}}}{(\,b^3\,c^2\,)^{\frac{1}{2}}}$

$=$ மட$_{10}\,(\,10\,a\,)^{\frac{1}{2}}$ $-$ மட$_{10}\,(\,b^3\,c^2\,)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$ மட$_{10}\,10 + \frac{1}{2}$ மட$_{10}\,a - \frac{3}{2}$ மட$_{10}\,b$ $-$ மட$_{10}\,c$

$\therefore$ மட $\sqrt{\left(\frac{10a}{b^3\,c^2}\right)}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ மட$_{10}\,a - \frac{3}{2}$ மட$_{10}\,b$ $-$ மட$_{10}\,c$.

6. மட$_{10}\,2 = 0{\cdot}301$ உம் மட$_{10}3 = 0{\cdot}477$ உம் ஆயின்

(i) மட$_{10}\,6$ (ii) மட$_{10}\,36$ (iii) மட$_{10}\,5$ என்பவற்றைக் கணிக்க.

(i) மட$_{10}\,6$ $=$ மட$_{10}\,(\,2 \times 3\,)$ $=$ மட$_{10}\,2$ $+$ மட$_{10}\,3$

$= 0{\cdot}301 + 0{\cdot}477$

$= 0{\cdot}778.$

(ii) மட$_{10}\,36$ $=$ மட$_{10}\,(2^2 \times 3^2) = 2 \times (0{\cdot}301) + 2\,(0{\cdot}477)$

$= 0{\cdot}602 + 0{\cdot}954$

$= 1{\cdot}556.$

(iii) $\text{மட}_{10} 5 = \text{மட}_{10} \frac{10}{2} = \text{மட}_{10} 10 - \text{மட}_{10} 2$

$= 1 - 0{\cdot}301$

$= 0{\cdot}699.$

பயிற்சி 3.6

1. மடக்கை வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(i) $64 = 4^3$; (ii) $125 = 5^3$; (iii) $S = \times 4^t$.

2. அடுக்குக்குறி வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(i) $\text{மட}_2 16 = 4$; (ii) $\text{மட}_4 8 = \frac{3}{2}$; (iii) $\text{மட}_a m = b$.

3. பின்வருவனவற்றில் x இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(i) $\text{மட}_3 9 = x$, (ii) $\text{மட}_5 625 = x$, (iii) $\text{மட}_5 x = 3$,

(iv) $\text{மட}_x 16 = 2$, (v) $\text{மட}_x 8 = \frac{1}{2}$.

4. இயலுமளவு திருத்தமாகப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை மதிப்பிடுக.

(i) $\text{மட}_2 5$, (ii) $\text{மட}_2 12$, (iii) $\text{மட}_3 30$;

(iv) $\text{மட}_5 50$, (v) $\text{மட}_7 3$, (vi) $\text{மட}_{10} 5$,

5. பின்வருவனவற்றுள் எல்லா மடக்கைகளும் 10 என்னும் அடிக்கு உள்ளன. ஒவ்வொன்றையும் ஒரு தனிக் கணியத்தின் மடக்கையாக எடுத்துரைக்க.

(i) $\text{மட}\ 2 + \text{மட}\ 3$; (ii) $\text{மட}\ 5 + \text{மட}\ 15 - \text{மட}\ 3$;

(iii) $\text{மட}\ x - \text{மட}\ y$; (iv) $1 + \text{மட}\ a$;

(v) $\frac{1}{2}\,\text{மட}\ a - 3 - \text{மட}\ 5b$.

6. பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க.

(i) $\text{மட}\ x = \text{மட}\ 9$; (ii) $\text{மட}\ 2x = \text{மட}\ 24$; (iii) $\text{மட}\ x + \text{மட}\ 3 = \text{மட}\ 15$;

(iv) $\text{மட}\ 3 + 2\,\text{மட}\ x = \text{மட}\ 12$ (v) $3\,\text{மட}\ y + \text{மட}\ 4 = \text{மட}\ 108$.

7. 6ஆம் வினவில் மடக்கைகளுக்கு ஓர் அடியும் குறிக்கப்படாதிருப்பதை அவதானிக்க. இதனல் ஏதாயினும் பாதிப்பு உண்டா ?

8. பின்வரும் படமாக்கல் ஒரு மடக்கைச் சார்பைக் காட்டுகிறது.

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 0 \\ p &\longrightarrow 1 \\ q &\longrightarrow 2 \\ r &\longrightarrow 3 \\ s &\longrightarrow 4 \\ &\dots \end{aligned}$$

(i) மட p, மட q என்பவற்றை எழுதுக.

(ii) மட $p^2 = 2$ மட p என்பதை மனதிற் கொண்டு மட p^2 இற்கு ஒரு பெறுமதியை எழுதுக.

(iii) p இற்கும் q இற்கும் இடையேயான ஒரு தொடர்பை எடுத்துரைக்க.

(iv) r ஐயும் s ஐயும் p யில் எடுத்துரைக்க.

(v) இம் மடக்கைகளின் அடி யாது ?

(vi) $k^2 = r$ ஆயின், மட k இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(vii) $xs = 1$ ஆயின் மட x இன் பெறுமதியைக் காண்க.

9. பின்வரும் படமாக்கல் ஒரு மடக்கைச் சார்பைக் காட்டுகிறது.

$$\begin{aligned} 1 &\dashrightarrow 0 \\ 3 &\dashrightarrow 1 \\ a &\dashrightarrow 2 \\ 27 &\dashrightarrow b \\ c &\dashrightarrow 5 \end{aligned}$$

a, b, c என்பவற்றுக்குப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

10. $a = \text{மட}_{10}\left(\frac{10}{9}\right)$, $b = \text{மட}_{10}\left(\frac{25}{24}\right)$, $c = \text{மட}_{10}\left(\frac{81}{80}\right)$

ஆயின்,

(i) மட $_{10}2 = 7a - 2b + 3c$ என்று நிறுவுக.

(ii) மட $_{10}3$, மட $_{10}5$ என்பவற்றுக்கு இதேமாதிரி கோவைகளைக் காண்க.

6. பொது மடக்கைகளின் பிரயோகம்

6.1 இனிமேல் அடி 10இற்கான மடக்கைகளைப் பிரயோகிக்கையில், கீழ் வரியைத் தவிர்ப்போம். எனவே மட$_{10}$ 6·4ஐ வெறுமனே மட 6·4 என்று எழுதுவோம். மடக்கைக்கு வேறு யாதுமோர் அடியைப் பிரயோகித்தால் அவ் வடியைக் குறிப்பிடுவோம்.

231 என்னும் எண்ணை நியம வடிவில் எழுதுகையில்

$2{\cdot}31 \times 10^2$ என எழுதுவோம்.

பொதுவாக $N \ne 1$ என்னும் எந்தவோர் எண்ணையும்

$N = N' \times 10^c$ என்று எழுதலாம்.

இங்கு $1 < N' < 10$ உம் c ஒரு நிறையெண்ணுமாகும்.

N இன் மடக்கையை எடுக்க.

(ii) மட $_{10}2 = 0{\cdot}30103$ என்று தரப்பட அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தாது, மட $_{8}5$ இன் பெறுமானத்தை 4 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

3. மட $_a b \times$ மட $_b c \times$ மட $_c a = 1$ என்று நிறுவுக.

8. மடக்கைகளின் பிரயோகம்

8.1 அறியப்படாத கணியத்தை அடுக்குக்குறியிற் கொண்டுள்ள ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் மடக்கைகளின் பிரயோகத்திற்கு ஓர் எளிய உதாரணமாகும்.

உதாரணம் 3.12 $5^x = 0{\cdot}5$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$5^{\circ} = 1$ உம் $5^{-1} = 0{\cdot}2$ உம் ஆதலால் விடை 0 இற்கும் -1 இற்கும் இடையே அமையுமென எதிர் பார்ப்போம்.

இப்போது $5^x = 0{\cdot}5$

$\Rightarrow x$ மட $_{10}5 =$ மட $_{10}0.5$

$$\Rightarrow x = \frac{\text{மட}_{10}0{\cdot}5}{\text{மட}_{10}5}$$

$$= \frac{\bar{1}{\cdot}6990}{0{\cdot}6990}$$

தொகுதியெண்ணை $-1 + {\cdot}6990 = -0{\cdot}3010$ என்று எழுத

நாம் பெறுவது $x = \dfrac{-0{\cdot}3010}{{\cdot}6990}$

$\simeq -0{\cdot}42$, மூன்று பொருளுடைத் தானங்களுக்கு.

உதாரணம் 3.13

$4^x - 6 . 2^x - 7 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

இச் சமன்பாட்டை $2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 7 = 0$ என்று எழுதலாம்.

2^x ஐ y ஆற் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$y^2 - 6y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 7)(y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2^x = y = 7 \text{ அல்லது } -1.$$

இப்போது $x \to 2^x$ ஆனது மறையல்லா மெய்யெண்கள் $\mathbb{R}^+$ இன் மேலான ஒரு படமாக்கல் என்று அறிவோம். எனவே $-1 = 2^x$ இற்குத் தீர்வு யாதுமில்லை.

ஆகவே $7 = 2^x$

அடி 10 இற்கு மடக்கைகள் எடுக்க,

$மட\ 7 = x\ மட\ 2$

$$\therefore\ x = \frac{மட\ 7}{மட\ 2}$$

$$= \frac{0{\cdot}845}{0{\cdot}301}$$

$\therefore\ x \simeq 2{\cdot}81$, மூன்று பொருளுடைத் தானங்களுக்கு.

பயிற்சி 3.9

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

   (i) $3^x = 4$

   (ii) $2^x = 3$

   (iii) $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$,

   (iv) $4^x - 3 \times 2^{x+1} - 16 = 0$.

3.2 அடுக்குக்குறி வளர்ச்சி—பரிசோதனைகளுடன் தொடர்பான மடக்கைகள்

பெரும்பாலான உயிர்கள் (மிருகங்கள், தாவரங்கள் உட்பட) தம் உடலினது அளவுக்கு விகிதசமமான வீதத்தில் வளர்வது ஒரு விந்தை மிக்க நிகழ்ச்சியாகும்.

இலங்கையிலுள்ள பல வாவிகளிலும் வளரும் சல்வீனியாக் (Salvinia) கொடி இதற்கு ஓர் உதாரணம். இப்பிரச்சினை பற்றி ஆராய்ந்த தாவர வியல் அறிஞர்கள் இக்கொடி கிட்டத்தட்ட ஒரு மாதத்தில் அதன் இரட்டிப்பு மடங்கு அளவை அடைகின்றதென மதிப்பிட்டுள்ளனர். அளவானது பரப்பிற்கு விகிதசமனாகையால் ஒவ்வொரு மாதமும் இக்கொடியினால் நிரப்பப்படும் வாவி யின் பரப்பு இரு மடங்காகும். 777,760,000 சதுரமீற்றர் பரப்பளவைக் கொண்ட சேனநாயக சமுத்திர வாவியினுள் ஒரு சதுர மீற்றர் (உமது மேசையின் மேற்பக்க அளவுக்குச் சமனான) சல்வீனியா புகுத்தப்பட்டது எனக் கருதுக. முழு வாவியும் இக்கொடியினால் நிரப்பப்பட எவ்வளவு காலம் எடுக்கும் என்று அறிந்துகொள்ள, தாவரவியல் அறிஞர் விரும்புகிறார். மேலே வாசித்துக் கொண்டு போகுமுன் இதற்கான விடையைக் கூற முயல்க.

t மாதங்களின் பின்னர் வாவியில் உள்ள சல்வீனியாவின் அளவு S எனக் கொள்க. அப்போது ஒரு மாதத்தின் பின் சல்வீனியாவின் அளவு $2S$ ஆக இரட்டிக்கும். இரு மாதங்களின் பின்னர் இது $2 \times 2S$ இற்கு இரட்டிக்கும். இவ்வாறாகத் தொடர நாம் பின்வருமாறு பெறுவோம்.

ஆரம்பத்தில் $S = 1$ சதுர மீற்றர்.

1 மாதத்தின் பின் — $2S\ m^2$ சல்வீனியா

2 மாதங்களின் பின் — $4S\ m^2 = 2^2\ S\ m^2$ சல்வீனியா

3 மாதங்களின் பின் — $8S\ m^2 = 2^3\ S\ m^2$ சல்வீனியா

4 மாதங்களின் பின் — $16S\ m^2 = 2^4\ S\ m^2$ சல்வீனியா

இவை, மாதங்களின் எண்ணிக்கை x ஐச் சதுர மீற்றர்களின் எண்ணிக்கை S உடன் இணைக்கும் ஒரு தொடர்பு உண்டென்பதை நமக்குச் சுட்டிக் காட்டுகின்றன.

$$x \to 2^x\ S.$$

இச்சார்பின் பெறுமானங்களை x இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு அட்டவணைப்படுத்தி, தொடக்கத்தில் ஒரு சதுர மீற்றர் சல்வீனியா இருந்ததென்னும் கூற்றையும் பயன்படுத்தினால் நாம் பின்வரும் அட்டவணையைப் பெறுவோம்.

x	0	1	2	3	4	5
2^x	1	2	4	8	16	32

அட்டவணை 3.7

கிடைக்கப்பெறும் புள்ளிகள் ஒரு வரைபிற் குறிக்கப்பட்டு உரு 3.4 இல் உள்ளவாறு அவற்றிற்கூடாக ஓர் ஒப்பரவான வளையியை வரையலாம். இப்போது சல்வீனியா வாவியை நிரப்புவதற்கு எடுக்கும் காலத்தை அறிய விரும்பின் வரைபை நீட்டலாம், அல்லது இன்னும் எளிதாக $7{\cdot}776 \times 10^7 = 2^x$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கலாம். மடக்கைகள் எடுக்க,

$$\text{மட}\ (7{\cdot}776 \times 10^7) = x\ \text{மட}\ 2$$

$$\text{மட}\ 7{\cdot}776 + 7\ \text{மட}\ 10 = x\ \text{மட}\ 2$$

$$0{\cdot}890 + 7 = x \times 0{\cdot}301.$$

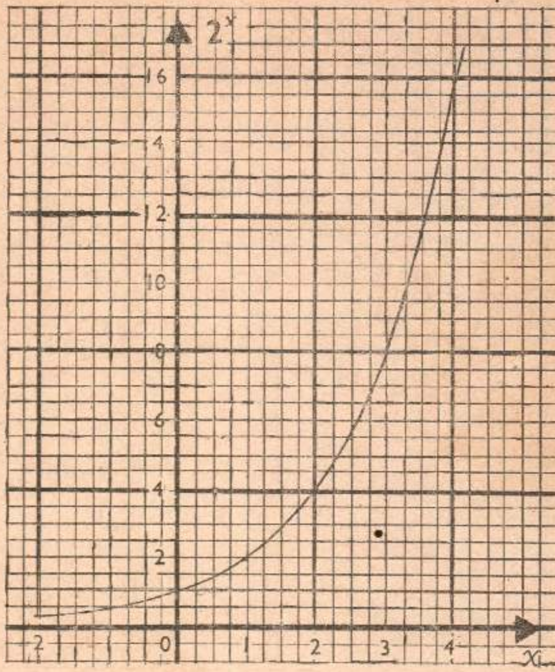
$$\frac{7{\cdot}890}{0{\cdot}301} = x$$

$$x \simeq 26{\cdot}2$$

எண்	மடக்கை
7·890	0·897
0·301	$\bar{1}$·479
26·2	1·418

எனவே 26 மாதங்களிலும் (2 வருடங்களும் 2 மாதங்களும்) சிறிது அதிகமான காலத்தில் வாவியானது சல்வீனியாவினால் முற்றாக நிரப்பப்படும். ஒரு மாதத்திற்கு முன்னராக வாவியின் அரைப்பகுதியே நிரப்பப்பட்டிருக்கும் என்பதைக் கவனிப்பது ஆச்சரியமானதாகும்.

14725—16



உரு 3.4

உள்ள அளவுக்கு விகிதசமனுன ஒரு வீதத்திலே தேய்வுறும் யுரேனியம் (Uranium) போன்ற கதிர்த் தொழிற்பாட்டுப் பதார்த்தங்களில், மாற்ற வீதம் பதார்த்தத்தின்அளவுக்கு விகிதசமனுகும் இன்னேர் உதாரணத்தைக் காணலாம்.

உதாரணம் 3.14

$S = S_0\, e^{-\frac{1}{4}t}$ எனும் தொடர்பில் ஒரு கதிர்த் தொழிற்பாட்டுப் பதார்த்தம் தேய்வுறுகிறது, இங்கு S_0 ஆரம்பக் கணியமும், e ஆனது 2·72 என்னும் மாறிலியும், S ஆனது t வருடங்களுக்குப் பின் மிஞ்சியுள்ள கணியமுமாகும்.

(i) ஆரம்பத் திணிவு 200 கிராம் ஆயின், 6 வருடங்களுக்குப் பின் எஞ்சியுள்ளது என்ன ?

(ii) பதார்த்தத்தின் அரை ஆயுட் காலத்தை அதாவது பதார்த்தம் அதன் ஆரம்பக் கணியத்தின் அரைப் பங்காவதற்கு எடுக்கும் காலத்தைக் காண்க.

(i) இவ்வகையில், தொடர்பானது பின்வருமாறுகும்.

$$S = 200\, e^{-\frac{1}{4}t} = 2{\cdot}10^2.\quad e^{-\frac{1}{4}}t$$

$t = 6$ எனப் பிரதியிட்டு மடக்கைகள் எடுக்க நாம் பெறுவது,

$$\text{மட } S = \text{மட } 2 + 2 - 3 \text{ மட } e$$
$$= 0{\cdot}301 + 2 - 3 \times {\cdot}435$$
$$= 2{\cdot}301 - 1{\cdot}305$$
$$\Rightarrow \text{மட } S = 0{\cdot}996$$
$$\Rightarrow \quad S = 9{\cdot}96 \text{ கிராம்}$$

ஆகவே 6 வருடங்களின் பின் பதார்த்தத்தில் 9·9 கிராம் மட்டுமே எஞ்சியிருக்கும்.

(ii) பதார்த்தத்தின் அரை ஆயுளைக் காண்பதற்கு அது 200 கிராமிலிருந்து 100 கிராமாகத் தேய்வுறுவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தை அறிந்திருக்க வேண்டும். இதற்கு நாம் $S = 100$ என்று போட, பின்வரும் சமன்பாட்டைப் பெறுவோம்.

$$100 = 200e^{-\frac{1}{2}t}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-\frac{1}{2}t}$$

மடக்கைகளை எடுக்க

$$\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}t \text{ மட } e;$$
$$\bar{1}{\cdot}6990 = -\tfrac{1}{2}t \times 0{\cdot}435;$$
$$-1 + 0{\cdot}6990 = -t \times 0{\cdot}218;$$

$$\frac{-0{\cdot}3010}{-0{\cdot}218} = t;$$

எண்	மடக்கை
0·3010	$\bar{1}$·479
0·218	$\bar{1}$·338
1·38	0·141

$$t = 1{\cdot}38$$

ஆகவே 1·38 வருடங்களின் பின் அதாவது 16 மாதங்கள் 17 நாள்களின் பின் பதார்த்தமானது அதன் அளவின் அரைப்பங்கிற்குத் தேய்வுறுகிறது.

8.3 தரவுகளிலிருந்து $y = A\,x^m$ என்னும் வகைச் சமன்பாடுகள்

கடைசி இரண்டு உதாரணங்களிலும் சார்பின் சமன்பாடு $y = 2^x S$, $S = S_0\, e^{-\frac{1}{2}t}$ என்னும் அடுக்குக்குறி வகையிலானது. இவை இரண்டிலும் மாறி அடுக்குக்குறியிலே தோன்றுகிறது. முன்னரே கூறப்பட்டதுபோல் உண்மை வாழ்விலுள்ள பல தொடர்புகள் இவ்வகையைச் சேர்ந்தனவாகும். $y = A\,x^m$ போன்ற ஓர் அடுக்குக்குறித் தொடர்பு உண்டென ஐயமுறும்போது இரு கணியங்களுக்கிடையேயான தொடர்பைக் கண்டுபிடித்து நிச்சயிக்க முயல்வதே விஞ்ஞானியின் பிரச்சினையாகும். இவ்வாறுயின் மடக்கைகளை எடுக்க நாம் பெறுவது,

$$\text{மட } y = \text{மட } A\,x^m = \text{மட } A + \text{மட } x^m$$
$$\text{அல்லது மட } y = \text{மட } A + m \text{ மட } x$$

$Y =$ மட y, $X =$ மட x, $C =$ மட A என்று எழுதினல் நாம் பெறுவது, $Y = mX + C$. இது ஒரு நேர் கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

எனவே இச்சமன்பாட்டுக்கு ஒத்த X, Y களின் பெறுமானங்களை ஒரு வரைபிற் குறித்தால், படித்திறன் m ஐ நாம் அளக்கலாம். மேலும் $X = 0$ ஆகும் போது Y இன் பெறுமானத்தைக் கவனித்து மட A ஐயும், அதிலிருந்து A ஐயும் காணலாம். எனவே, $y = Ax^m$ பற்றி நாம் அறியவேண்டியவை யாவற்றையும் இது வெளியிடுகிறது.

உதாரணம் 3.15

சூரியனிலிருந்து கிரகங்களின் சராசரித் தூரங்கள் x உம், வருடங்களிலான அவற்றின் சுற்றற் காலங்கள் T யும் அட்டவணை 3.8 இலே தரப்பட்டுள்ளன. சூரியனிலிருந்து பூமியின் தூரம் ஓர் அலகாக எடுக்கப்பட்டுள்ளது. $T = A\,x^m$ என்ற வகையிலான ஒரு தொடர்பை எடுகொண்டு ஓர் அண்ணளவான விதியைக் கண்டுபிடிக்க.

x	0·387	0·723	1·00	1·52	5·20	9·54	19·2	30·1	41·3
T	0·241	0·615	1·00	1·88	11·9	29·5	84	165	265

அட்டவணை 3.8

மேலேயுள்ள அட்டவணையிலே தரப்பட்டுள்ள பெறுமானங்களின் மடக்கைகளை எடுக்க நாம் அட்டவணை 3.9 ஐப் பெறுவோம்.

[$\bar{1}\cdot5877 = -0\cdot4123$, $\bar{1}\cdot3820 = -0\cdot6180$ முதலியன என்பதைக் கவனிக்க.]

மட x	$\bar{1}\cdot5877$	$\bar{1}\cdot8591$	0·0	0·1818	0·7160	0·9795	1·2833	1·4786	1·6160
மட T	$\bar{1}\cdot3820$	$\bar{1}\cdot7889$	0·0	0·2742	$\bar{1}\cdot0755$	1·4698	1·9243	2·2175	2·4232

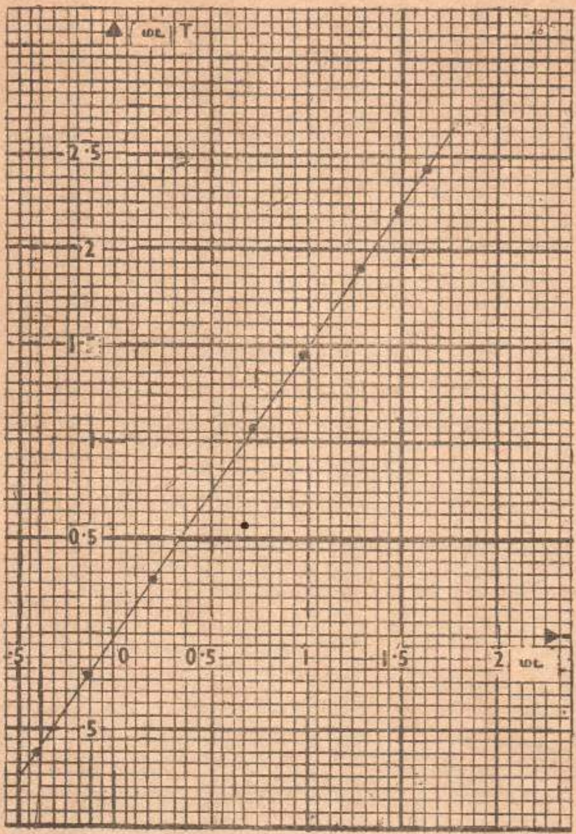
அட்டவணை 3.9

இவ்வட்டவணைக்கு உரிய வரைபு உரு 3.5 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு புள்ளிகள் நேர்கோட்டிற்கு மிகச் சமீபமாக அல்லது அதன் மேலாக அமையக் காணப்படும். எனவே, இது பின்வரும் வடிவில் அமையும்.

$$Y = m\,X + C$$

$$\text{அல்லது}\quad \text{மட}\ T = m\,\text{மட}\ x + \text{மட}\ A.$$

கோடானது உற்பத்திக்கூடாகச் செல்வதனுல் மட $A = 0$. எனவே, $A = 1$. மேலும் அமைப்பிலிருந்து $m = 1\cdot5$ அல்லது $3/2$ எனக் காணலாம். எனவே நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.



உரு 3·5

$$\text{மட } T = \frac{3}{2} \text{ மட } x$$

$$\Rightarrow T = x^{3/2}$$

$$\text{அல்லது } T^2 = x^3.$$

சூரியனைச் சுற்றி இயங்கும் ஒவ்வொரு கிரகத்திற்கும், சூரியனைச் சுற்றி ஒரு தடவை செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம், சூரியனிலிருந்து அதற்குள்ள இடைத் தூரத்தின் முப்படிக்குச் சமனாகும் என்று இது தெரியப்படுத்துகிறது. இது கெப்லர் (Kapler) என்பவரால் 1619 இற் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட ஒரு விதியாகும்.

சேமிப்பு வங்கிக் கணக்கில் விடப்பட்டுள்ள பணம் அடுக்குக்குறி வளர்ச்சிக்கான இன்னோர் உதாரணமாகும். P ரூபாய்களைக் கொண்டுள்ள முதல், $r\%$ வீதத்தில் வங்கியில் முதலீடு செய்யப்பட்டால் n வருடங்களின் பின்னுள்ள மொத்தம் A (ரூபாய்கள்)

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

அல்லது $A = PR^n$ என்பதனுலே தரப்படுமென ஏற்கெனவே 9 ஆம் வகுப்பிற் படித்துள்ளோம்.

$$\text{இங்கு } R = \left(1 + \frac{r}{100}\right),$$

இதுவும் $Y = Ax^m$ என்ற வடிவிலானதாகும்.

உதாரணம் 3.16

ஒரு மனிதன் 40,000 ரூபாயை வருடத்திற்கு 9% வட்டியில் முதலீடு செய்கின்றன். மொத்தம் இரு மடங்காவதற்கு எவ்வளவு காலம் எடுக்கும்?

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \text{ என்பதைப் பயன்படுத்த,}$$

$$80,000 = 40,000 \times \left(1 \times \frac{9}{100}\right)^n.$$

$$\text{அ–து, } 8 \times 10^4 = 4 \times 10^4 \times \left(\frac{109}{100}\right)^n;$$

மடக்கைகள் எடுக்க,

$$4 + \text{மட } 8 = \text{மட } 4 + 4 + n\ (\text{மட } 109 - \text{மட } 100)$$

அதாவது $4 + 0{\cdot}903 = 0{\cdot}602 + 4 + n\,(0{\cdot}037)$;

$\therefore 0{\cdot}301 = n \times 0{\cdot}037$;

ஆகவே $\frac{0{\cdot}301}{0{\cdot}037} = n$;

$\therefore n = 8{\cdot}15.$

எண்	மடக்கை
·301	$\bar{1}$ .479
.037	$\bar{2}$ ·568
	9·11

எனவே கிட்டத்தட்ட 8·2 வருடங்களின் பின் வங்கியிலுள்ள மொத்தம் இரு மடங்காகும்.

பயிற்சி 3.10

1. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் t யில் ஒரு வளர்ப்பில் (Culture) உள்ள பற்றீரியங்களின் எண்ணிக்கை B, $B = B_0e^{5t}$ என்பதாலே தரப்படும். இங்கு $e = 2{\cdot}718$. $t = 0$ ஆகும்போது இருந்த எண்ணிக்கை யாது? எப்போது எண்ணிக்கை இவ்வளவின் இரு மடங்காக இருந்தது?

2. மேலே உதாரணம் 3.16 இலே தரப்பட்ட சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தி, 40,000 ரூபா 15 வருடங்களுக்கு 15% வட்டிக்கு முதலீடு செய்யப் பட்டால்,

(i) வங்கிக் கணக்கிலுள்ள மொத்தத்தைக் கணிக்க.

(ii) மொத்தம் இரு மடங்காவதற்கு எடுக்கும் காலத்தைக் கணிக்க.

(iii) முதலீடு செய்யும் மனிதன் 60,000 ரூபா பெறுமதியான ஒரு வீட்டை வாங்குவதற்குச் சேமிக்கிறன். வீட்டை வாங்குவதற்கு அவன் எவ்வளவு காலம் காத்திருக்க வேண்டும் ?

3. அட்டவணை 3·10 இற், பெறுமானங்கள் தரப்பட்டுள்ள x, y என்பன $y = ax^n$ என்ற வடிவிலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கருதப்படுகிறது. இங்கு a யும் n உம் மாறிலிகளாகும். மடக்கை x இற்கு எதிராக மடக்கை y ஐக் குறிக்கப் பெறப்படும் வரைபு கிட்டத்தட்ட நேர்கோடாகுமெனக் காட்டி இதனை உறுதி செய்க. அதிலிருந்து a இற்கும் n இற்கும் அண்ணளவுப் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

x	0	1.6	2·65	3·8	4·7	5·7
y	0	6	12	16·5	23·5	26·5

அட்டவணை 3.10

பலவினப் பயிற்சிகள் III

1. முதன்மை எண்ணென்றை அடியாகக் கொண்ட சுட்டி வடிவிற் பின்வருவனவற்றை எடுத்துரைக்க.

(i) $3^3 \times 3^4$ (ii) 256 ; (iii) $4^5 \div 4^3$ (iv) $6^2 + 8^2$.

2. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்க :

(i) $\dfrac{x^3 \times (x^2)^3}{(x^2)^2}$; (ii) $(a^2 \times b^3) \times (a^3 \times a)$; (iii) $4x^3 \times 6x^2$;

(iv) $4^3 \times 7^3$; (v) $4a^5 \div 2a^2$; (vi) $(6a^2 b^3)^3$;

(vii) $(-2)^2$; (viii) $(-3)^3$; (ix) $(-1)^3$; (x) $(-a)^5$

3. சுருக்குக

(i) $81^{\frac{3}{4}}$ · (ii) $\sqrt[3]{27^2}$ · (iii) $x^{-\frac{1}{2}}$ · (iv) a^{-2} : (v) $2x^{-1}$:

(vi) $(2y)^{-2}$; (vii) a^0 ; (viii) $8^{\frac{1}{3}}$; (ix) $\dfrac{2}{2^{-2}}$; (x) $\dfrac{4^{-3}}{4^{-4}}$;

4. பின்வரும் கோவைகளைச் சுருக்கி விடைகளை நேர்ச் சுட்டிகளுடன் எழுதுக.

(i) $\dfrac{(6^{\frac{1}{4}})^4 \times (5^{-3})^2}{(3^2)^3 \times (5^{-\frac{1}{2}})^{11}}$; (ii) $(6^{\frac{1}{3}})^4$;

(iii) $(x^5)^0$; (iv) $16t^{\frac{3}{4}} \div 4t^{-\frac{1}{4}}$;

(v) $\dfrac{(144)^{\frac{1}{4}} \times (25)^{\frac{3}{4}}}{(9^2)^{\frac{1}{3}} \times (15)^{\frac{1}{4}}}$; (vi) $\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\dfrac{y^3}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

(vii) $\sqrt[3]{(x+y)^5} \times (x+y)^{-\frac{2}{3}}$; (viii) $\sqrt[4]{(x^2-y^2)^3} \times \dfrac{(x-y)^{-\frac{1}{4}}}{(x+y)^{\frac{1}{4}}}$

(ix) $(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$ (x) $(e^x - e^{-x})^2$.

5. பின்வருவனவற்றின் பகுதியெண்களை விகிதமுறச் செய்க.

(i) $\dfrac{1}{-\sqrt{13}}$ (ii) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ (iii) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}$ (iv) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (v) $\dfrac{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

6. $a + b\sqrt{c}$ என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(i) $(3+\sqrt{2})(3-3\sqrt{2})$; (ii) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}-1}$; (iii) $\sqrt{a} + b + \dfrac{1}{\sqrt{a}-b}$

7. $a = 1\frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$ என்பவற்றுக்கு $x \to a^x$ என்னும் படமாக்கல்களை வரைக. $x = -1, 0, 1$ என்னும் பெறுமானங்களுக்கு உரிய மூன்று புள்ளிகளைத் தெளிவாகக் குறிக்க.

8. $a > 0$ என்பதற்கு $a \to a^x$ என்னும் பொதுப்படமாக்கலை வரைக.

9. மடக்கை வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(i) $\dfrac{1}{32} = 2^{-5}$; (ii) $81^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$;

10. அடுக்குக்குறி வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(i) மட $_5 5 = 1$; (ii) மட $_7 1 = 0$; (iii) மட $_{10} 1000 = 3$.

11. பின்வருவனவற்றுள் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) மட $_4 64 = x$, (ii) மட $_3 x = -1$, (iii) மட $_7 x = -3$'

(iv) மட $_x 8 = 1\frac{1}{2}$, (v) மட $_{10} x = 0{\cdot}699$.

12. மட $_{10} x$, மட $_{10} y$, மட $_{10} z$ என்பவற்றில் எடுத்துரைக்க.

(i) மட $_{10} xy$; (ii) மட $_{10} \dfrac{x^2 y}{z}$; (iii) மட $_{10} \dfrac{1}{y^3}$

(iv) மட $_{10} \sqrt{x}$; (v) மட $_{10} \dfrac{\sqrt{xy}}{z^2}$; (vi) மட $_{10} \sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

(vii) மட $_{10}$ 10 ; (viii) மட $_{10} \dfrac{1}{100}$; (ix) மட $_{10} \dfrac{\sqrt{x\,z}}{y^3 \; x^{3/2}}$;

(x) $\dfrac{\sqrt{10x}}{100\,xyz}$;

13. *பின்வருவனவற்றில் எல்லா மடக்கைகளும் 10 என்னும் அடிக்கான வை. ஒவ்வொன்றையும் தனியொரு கணியத்தின் மடக்கையாக எடுத்துரைக்க.*

(i) மட 27 − மட 9 ; (ii) 3 மட 4 + 2 மட 3 − 2 மட 12 ;

(iii) 2 மட a + 3 மட b − $\frac{1}{3}$ மட c ; (iv) 2 + $\frac{1}{2}$ மட x ;

(v) $\frac{1}{2}$ மட x − 2 மட $3y$ + 1.

14. மட$_{10}$2 = 0·301 *என்றும்* மட$_{10}$3 = 0·477 *என்றும் தரப்பட, பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க;*

(i) மட $_{10}$ 12 ; (ii) மட $_{10}$ $3\frac{1}{3}$; (iii) மட $_{10}$ 0·36

(iv) மட $_{10}$ 0·9 (v) மட $_{10}$ $\sqrt{60}$; (vi) மட $_{10}$ $1\frac{1}{3}$; (vii) மட $_{10}$ $\sqrt[3]{3}$;

(viii) மட $_{10}$ $\sqrt[3]{8}$, (ix) மட $_{10}$ $\sqrt[4]{36}$; (x) மட$_{10}$ $\dfrac{1}{96^{\frac{2}{3}}}$;

15. *பின்வரும் சமன்பாடுகளைத்தீர்க்க.*

(i) $2^x \cdot 2^{x+1} = 0$,

(ii) $4^{x+3} = 7^{x-1}$.

16. *பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.*

(i) $5^{2x} - 5^{x+1} + 6 = 0$,

(ii) $2 \times 3^{2x+3} - 7 \times 3^{x+1} - 68 = 0$.

17. *கடல் மட்டத்திற்கு மேல்* h *km* *உயரத்தில் உள்ள வளிமண்டல அமுக்கம்* P, $P = 760\, e^{-0{\cdot}144h}$ *என்பதனாலே தரப்படும்.*

(i) $e = 2{\cdot}718$ *என்று எடுத்து அமுக்கமானது கடல் மட்டத்திலுள்ளதன் அரைப் பங்காகும் உயரத்தைக் காண்க.*

(ii) *8850 மீற்றர் உயரமான எவறெஸ்ற் மலையுச்சியில் உள்ள அமுக்கத்தைக் காண்க.*

18. *ஒரு தேசத்தின் சனத்தொகை 120 இலட்சமாகும் (12 மில்லியன்). சனத்தொகை வளர்ச்சி அடுக்குக்குறி வகையிலானது என எடுத்துக்கொள்ள,* t *வருடங்களின் பின் சனத்தொகை* P *ஆனது*

$P = 12 \times 2{\cdot}4^{0.2t}$ *என்பதாலே தரப்படும்.*

(i) *20 வருட காலத்தின் பின்,* (ii) *40 வருட காலத்தின் பின், சனத்தொகையைக் கணிக்க. சனத்தொகை* (iii) *இரு மடங்காவதற்கு* (iv) *மும் மடங்காவதற்கு எடுக்கும் காலத்தைக் கணிக்க.*

14725—17

19. கதிர்த்தொழிற்பாட்டுத் தேய்வைப் பாவனைசெய்யும் ஓர் எளிய பரிசோதனையை, வரைதல் ஊசிகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு செய்யலாம். 100 வரைதல் ஊசிகளை ஒரு பெட்டியினுள் எண்ணிப் போடுக. பின் அவற்றை மேசையின் மேற் கொட்டி, நுனிகள் மேசையைத் தொடும்வண்ணம் விழுபவற்றை அகற்றுக. எஞ்சியுள்ள எண்ணிக்கையைப் பதிவுசெய்க. எஞ்சியுள்ளவற்றுடன் பரிசோதனையைப் பலதடவை மீண்டும் செய்க. மட N ஐ T இற்கெதிராகக் குறித்து வரைபை வரைக. இங்கு N ஆனது எஞ்சியுள்ள எண்ணிக்கையும், T ஆனது எறிகைகளின் எண்ணிக்கையும் ஆகும். வரைபிலிருந்து நீர் பெறும் முடிவு யாது? விளையாட்டின் அரை ஆயுளைக் (அ–து 50 அல்லது குறைவான வரைதல் ஊசிகள் இருக்கும் நேரத்தை) கணிக்க.

20. I_0 அம்பியர் மின்னோட்டமானது t செக்கன்களின் பின் I அம்பியராகக் குறைகிறது; இங்கு $I = I_0 e^{-kt}$. 10 அம்பியர் மின்னோட்டம் 0·01 செக்கனின் பின் 1 அம்பியராக வீழ்ச்சியடையின், k என்னும் மாறிலியைக் காண்க ($e = 3{\cdot}718$).

21. ஓர் ஏரியிலிருந்து ஒரு செக்கனுக்கு M கன மீற்றர் வீதத்தில் நீர் வெளியேறுகிறது. ஏரியிலுள்ள நீரின் வெவ்வேறு உயரங்களுக்கு இது அளவிடப்பட்டு விளைவுகள் அட்டவணை 3.11 இற் பதிவு செய்யப்பட்டன.

M உம் h உம் $M = ah^n$ போன்ற வடிவிலான ஒரு சமன்பாட்டாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன என ஒரு வரைபு மூலம் காட்டி, a இற்கும் n இற்கும் அண்ணளவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

h	1·2	1·4	1·6	1·8	2·0
M	6·3	9·2	12·8	17·3	22·4

அட்டவணை 3.11

22. கொழும்பிலுள்ள பேரா வாவியின் (Beira Lake) பரப்பளவு ஏறத்தாழ 712800 m^2 ஆகும். இவ்வாவியில் வளரும் நீராம்பல்கள் (Water Hyacinths) ஒவ்வொரு மாதமும் தாம் நிரப்பும் பரப்பை இரு மடங்காக்குகின்றன என்று அறியப்பட்டது. 1975ஆம் ஆண்டு ஜனவரி மாதம் 1ஆந் திகதி 1 m^2 நீராம்பல் இருந்தது. வாவியின் மூன்றிலொரு பங்கு நிரப்பப்பட்டதும், வாவியைச் சுத்தம் செய்யத் தொடங்குவதாக நகரசபை உத்தியோகத்தர்கள் கூறினர்.

(i) அவர்கள் எப்போது சுத்தம் செய்ய ஆரம்பித்திருப்பர்?

(ii) பெப்ரவரி, ஏப்ரல், ஜூன், டிசெம்பர் மாதங்களின் இறுதியில் எவ்வளவு நிரப்பப்பட்டிருக்கும்?

அதிகாரம் 3 இன் சுருக்கம்

சுட்டி விதிகள்

$m, n \in \mathbb{R}$ என்பவற்றுக்கு பின்வரும் விதிகள் உண்மையென்று எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
4. $(ab)^m = a^m b^m$

குறிப்பாக $a^0 = 1$,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

பின்வரும் தொடர்பினல், சுட்டிகளும் மடக்கைகளும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

$$x = a^m \Leftrightarrow m = \text{மட}_a x$$

ஒத்த மடக்கை விதிகள் பின்வருமாறுகும்.

1. $\text{மட}_a (x \times y) = \text{மட}_a x + \text{மட}_a y$;
2. $\text{மட}_a \frac{x}{y} = \text{மட}_a x - \text{மட}_a y$;
3. $\text{மட}_a x^k = k \text{ மட}_a x, k \in \mathbb{R}$
4. $\text{மட}_a \sqrt[p]{x} = \frac{1}{p} \text{மட}_a x, p \in \mathbb{Z}$

மடக்கைகளின் அடியை மாற்றல்

$$\text{மட}_a x = \frac{\text{மட}_b x}{\text{மட}_b a}$$

சேடு $\sqrt[n]{a}$ என்பது a என்னும் எண்ணின் n ஆவது மூலமாகும். இங்கு a ஒரு விகிதமுறுமெண்ணின் நிறைவான n ஆம் வலுவாக இல்லை.

உடன்புணரிச் சேடுகள்

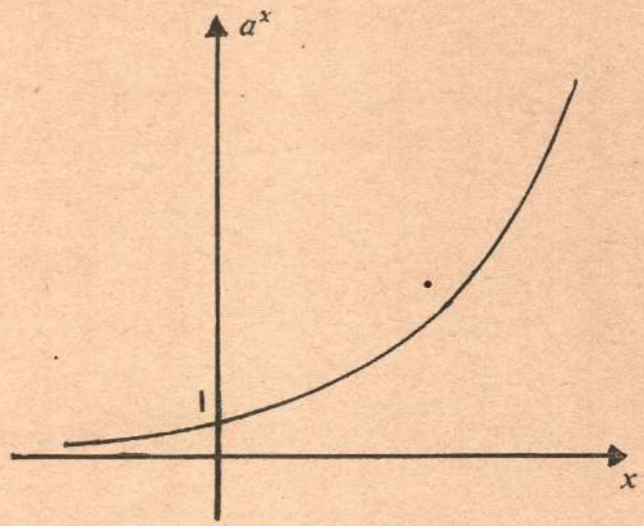
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ உம் $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ உம் உடன்புணரிச் சேடுகள்.

ஒரு விகிதமுரு எண் ஆனது ஒரு முடிவான அல்லது மீளவராத முடிவில் தசமமாக எடுத்துரைக்க இயலாத ஒரு மெய்யெண்ணுகும்.

$Y = a^x$ இன் வரைபு. இது உரு 3.6 போலவே உள்ளது. இது y அச்சை $y = 1$ இல் வெட்டும். x அச்சை அணுகுகோடாகக் கொண்டுள்ளது.

பரிசோதனைகளின் தரவு

$Y = ax^n \Leftrightarrow$ மட $y =$ மட $A + m$ மட x



உரு. 3.6

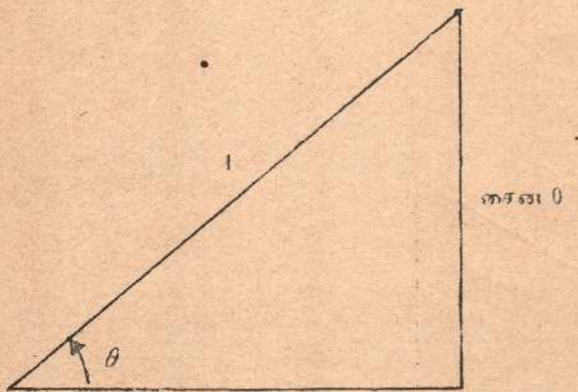
மட y ஐ மட x இற்கொதிராகக் குறிக்க. y அச்சுடனான இடைவெட்டு மட A ஐத் தரும். கோட்டின் படித்திறன் m ஐத் தரும்.

அதிகாரம் 4

திரிகோணகணிதம் — I

1. முகவுரை

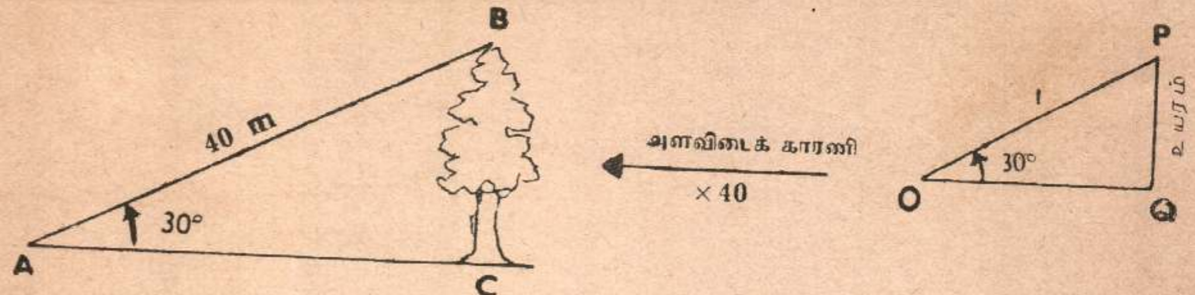
1.1 x^n, $n \in \mathbb{N}$ என்ற வலுச்சார்புகளை ஏற்கெனவே நாம் அறிவோம். இவற்றை அடுத்து மிகப் பிரயோசனமான சார்புகள் திரிகோணகணிதச் சார்புகளாகும். சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகியவற்றை 6 — 9 ஆம் வகுப்புகளிற் சந்தித்துள்ளீர்கள். இப்போது இச்சார்புகளையும் வேறு திரிகோண கணிதச் சார்புகளையும் விபரமாக நோக்குவோம்.



உரு 4.1

ஒரு கோணத்தின் சைன் என்பது, ஓரலகுச் செம்பக்கங் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் உயரமென விபரிக்கப்படுவதை நாம் முன்பே அறிந்துள்ளோம் (உரு 4.1 பார்க்க). இனி இக்கருத்தை விரிவுபடுத்தி, இச்சார்புக்கும் பிற திரிகோணகணிதச் சார்புகளுக்கும் உரிய பிரதான இயல்புகளை நோக்குவோம். அத்தகைய பிரதான இயல்புகளுள் ஒன்று, இவற்றின் ஆவர்த்தனத் தன்மையாகும். அதாவது இவை ஒரு குறிப்பிட்ட தொடை பெறுமானங்களை, ஒழுங்கான ஆயிடைகளிலே, மீட்டும் மீட்டும் பெறுகின்றன என்பதாம். எனவே தான், அலைவு இயக்கங்களை இச்சார்புகளிற் சிலவற்றால் எடுத்துக்கூறலாம். உதாரணமாக, சமுத்திரத்தின் வற்றுப்பெருக்குகளையும், இலங்கை வானொலி ஒலிபரப்பின் இரேடியோ அலைகளையும் சைன் சார்புகளில் எடுத்துக்கூறலாம்.

1.2 6—9 ஆம் வகுப்புகளில், திரிகோணகணிதத்திலே குறிப்பிட்ட சில அளவிடைக் காரணிகளையே நோக்கினோம். உதாரணமாக மரத்தின் உயரத்தைக் காண விரும்பின், உரு 4.2 இற் காட்டிவண்ணம் இயல்பொத்த முக்கோணி ஒன்றை வரைவோம். அதிலிருந்து பின்வருமாறு உயரத்தைக் கணிப்போம்:



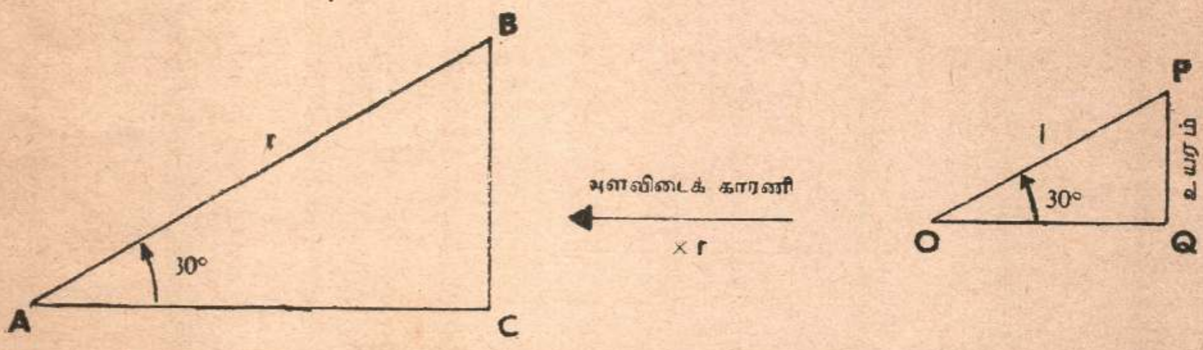
உரு 4.2

OP யிலிருந்து AB யிற்கு அளவிடைக் காரணி $= 40$,

உயரம் $PQ =$ சைன் $30° = \frac{1}{2}$,

மரத்தின் உயரம் $= 40 \times \frac{1}{2} = 20\ m$ ஆகும்.

1.3 அளவிடைக் காரணி ஏதேனும் எண் r ஆக இருப்பின், உரு 4.3 இற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு பெறுவோம்.



உரு 4.3

இச்சந்தர்ப்பத்தில், OP யிலிருந்து AB யிற்கு அளவிடைக் காரணி r; உயரம் $PQ =$ சைன் $30°$; BC இன் உயரம் $= r \times \frac{1}{2}$ ஆகும்.

உரு 4.4 இற் போன்று இவ்விரு முக்கோணிகளையும் ஒன்றின்மேல் ஒன்றாக வைக்கலாம்.

$PQ =$ சைன் $30°$

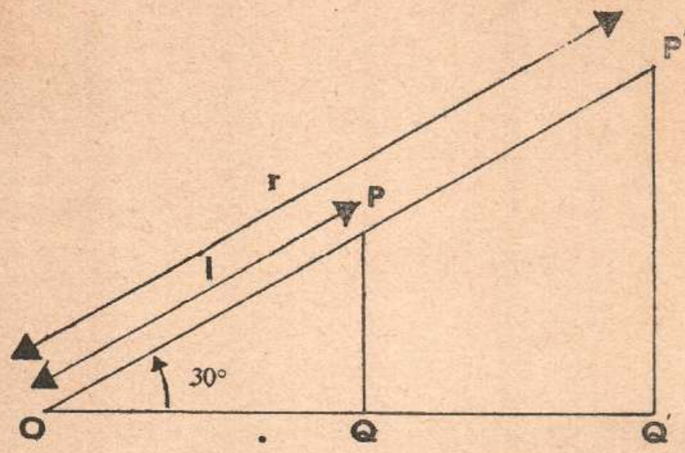
$P'Q' = r \times$ சைன் $30°$.

1.4 உரு 4.5 இற் காட்டிய சந்தர்ப்பத்தில், $\theta°$ என்ற பொதுவான கோணத்தைக் கொண்டுள்ளோம்.

இங்கு $PQ =$ சைன் $\theta°$

$\therefore\ P'Q' = r \times$ சைன் $\theta°$

OPQ, $OP'Q'$ என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை, OP இலிருந்து OP' இற்கு அளவிடைக் காரணி தெரியுமாதலின்,

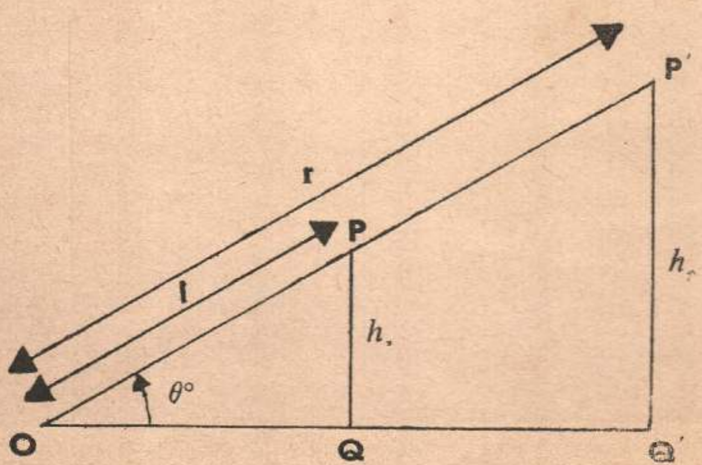


உரு 4.4

$PQ : P'Q' = 1 : r = OP : OP'$: என்ற விகிதத்தை நாம் எழுதலாம்.

அதாவது, $\dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{P'Q'}{OP'}$

எனவே, சைன் $\theta^\circ = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{O\ Q'}{O'\ P'}$

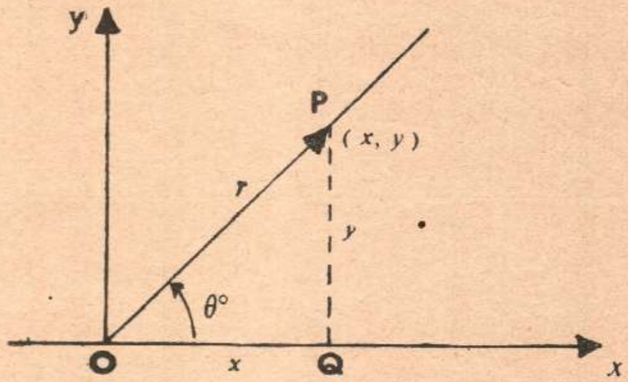


உரு 4.5

கோசைன் θ° ஐயும் இவ்வண்ணமே பெறலாம். இவ்வாறு

$$\text{கோசை } \theta^\circ = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} \text{ என்ற விகிதத்தைப் பெறுவோம்.}$$

1.5 O, ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி எனவும், OP என்னுங் காவி Ox உடன் கோணம் θ° ஐ அமைப்பதாகவுங் கொண்டால், பொதுவான முக்கோணி OPQ வைப் பெறுவோம். (உரு 4.6).



உரு 4.6

கோணம் θ° ஆனது 90° இலுங் குறைந்ததாகவுள்ள முக்கோணியையே இதுவரை நோக்கினேம். சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகியவற்றைப் பின்வருமாறு வரையறுத்தோம் :—

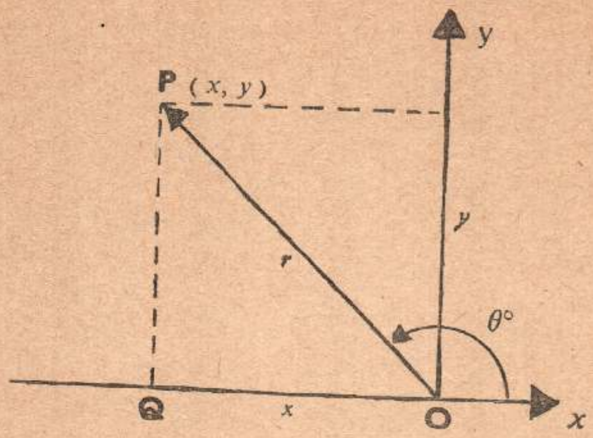
$$\text{சைன் } \theta^\circ = \frac{y}{r},$$

$$\text{கோசை } \theta^\circ = \frac{x}{r},$$

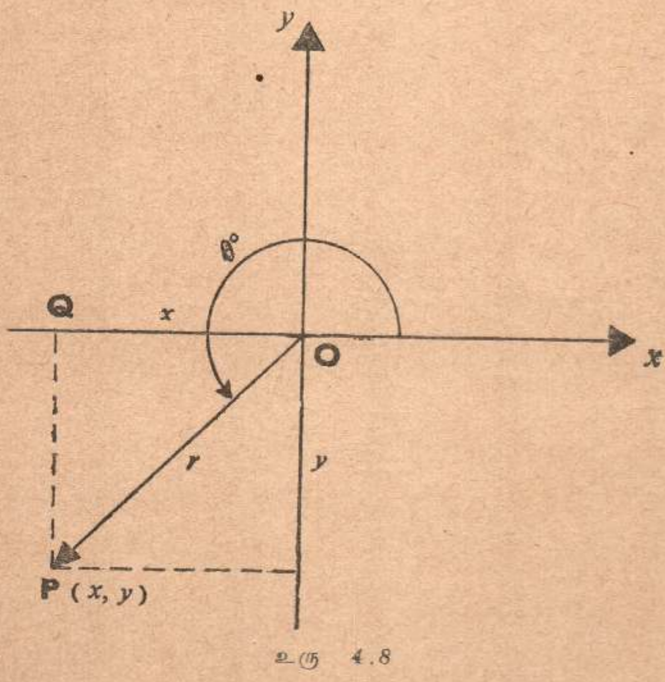
$$\text{தான் } \theta^\circ = \frac{y}{x}.$$

2. பொதுக் கோணத்திற்குத் திரிகோணகணிதச் சார்புகள்

2.1 காவி OP ஆனது O பற்றிச் சுற்றுவதால் மாறும் கோணம் θ° உண்டாகிறதென நாம் கொள்ளலாம். Ox உடன் காவி OP அமைக்குங் கோணம் எல்லாப் பெறுமானங்கயுளைம் எடுக்கும். உரு 4.7 இல் θ° விரிகோணமாகும் $(90^\circ \leqslant \theta^\circ \leqslant 180^\circ)$. உரு 4.8 இல் கோணம் θ°, பின்வளை கோணமாகும் $(180^\circ \leqslant \theta^\circ \leqslant 270^\circ)$.



உரு 4.7



உரு 4.8

பிரசினம் 4.1

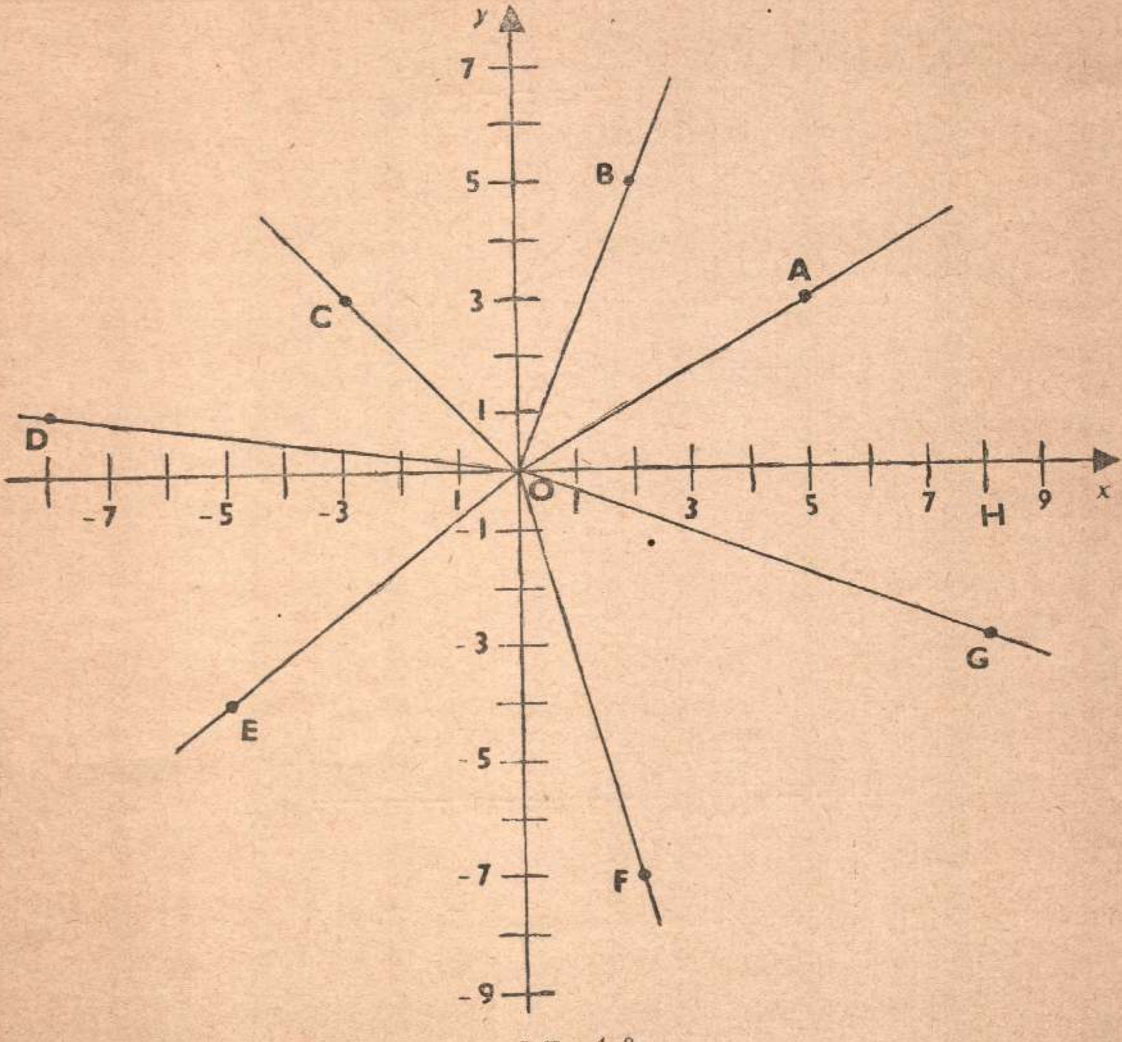
மேல்வந்த ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் செங்கோண முக்கோணி OPQ வை நாம் வரையலாம். காவி OP இன் எல்லா நிலைகளுக்கும் சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகியவற்றின் வரையறுப்புகளைப் பின்வருமாறு கொள்வோம்.

$$\text{சைன் } \theta° = \frac{y}{r}$$

$$\text{கோசை } \theta° = \frac{x}{r},$$

$$\text{தான் } \theta° = \frac{y}{x},$$

14725—18



உரு 4.9

(i) உரு 4.9 ஐப் பயன்படுத்தி A இன் ஆள்கூறுகள், OA இன் நீளம், கோசை $H\hat{O}A$, சைன் $H\hat{O}A$, தான் $H\hat{O}A$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

[x, y ஆகியவற்றின் ஒன்று அல்லது இரண்டும் மறையாக அமையலாம் : இதனல் உங்கள் விடைகள் சில மறையாகவிருக்கலாம் என்பதைக் கவனித்துக் கொள்க.]

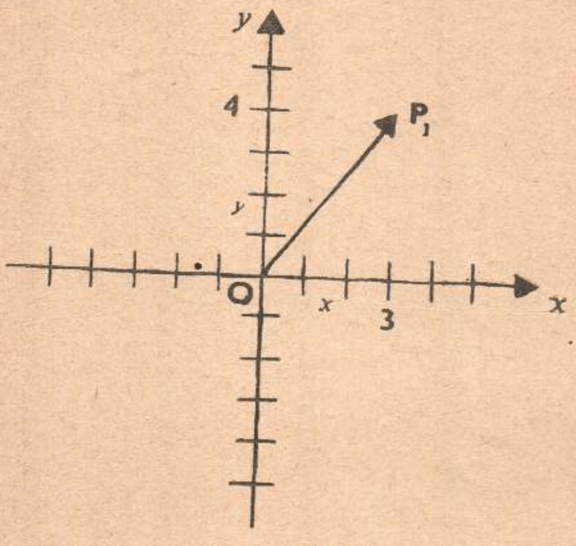
பின்வரும் புள்ளிகளைப் பொறுத்தவரை பகுதி (i) இற் குறிப்பிட்ட வினக் களுக்கு விடை தருக.

(ii) புள்ளி B (iii) புள்ளி C (iv) புள்ளி D (v) புள்ளி E (vi) புள்ளி F (vii) புள்ளி G)iv) H

பிரசினம் 4.2

பின்வரும் காவிகளுள் ஒவ்வொன்றும் Ox உடன் அமைக்குங் கோணங்களின் சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகியவற்றின் குறிகளைக் காண்க. அட்டவணை 4.1 ஐப் பிரதிசெய்து பூர்த்தியாக்குக.

(i) $P_1\ (3,4)$, (ii) $P_2\ (-3,2)$, (iii) $P_3\ (-3,-1)$, (iv) $P_4\ (4,-2)$. முதலாவதை உங்களுக்காகச் செய்துள்ளோம். [உரு 4.10 ஐயும் பார்க்க]



உரு 4.10

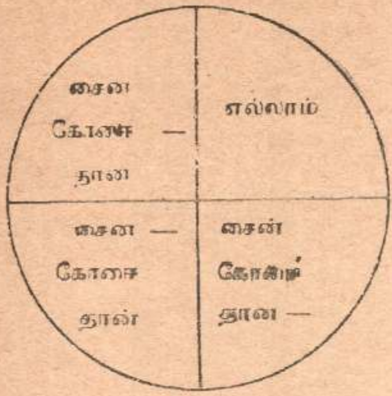
	சைன்	கோசை	தான்
(i)	+	+	+
(ii)			
(iii)			
(iv)			

அட்டவணை 4.1

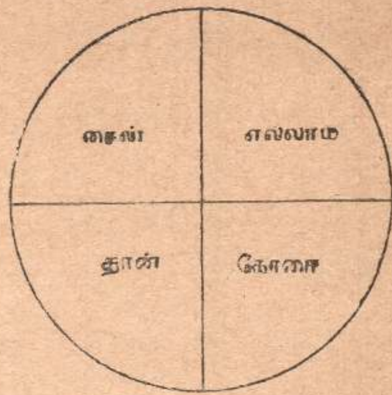
பிரசினம் 4.3

உரு 4.11 இலே தரப்பட்டுள்ள உருவத்தைப் பூர்த்தியாக்குக. வெவ்வேறு காற்பகுதிகளில் சைன், கோசை, தான் ஆகியவற்றின் குறிகளை அது காட்டுகிறது.

உரு 4.12 இற் போன்று ஒவ்வொரு காற்பகுதியிலும் நேர்ப்பெறுமானங்களைக் கொண்ட விகிதங்களை மாத்திரம் எழுதுவதன் மூலம், வெவ்வேறு காற்பகுதிகளில் இவ்விகிதங்களின் குறிகளைச் சுருக்கமாகத் தரலாம். இந்த விகிதங்களின் குறிகளை மனத்தில் வைத்திருப்பதற்குப் பயன்படும் பல முறைகள் உள.



உரு 4.11



உரு 4.12

அத்தகைய ஒன்று ''எசைதாகோ'' என்னும் சொல்லாகும்.

எ — என்பது எல்லாம் நேர் என்றும்

சை — என்பது சைன் நேர் (கோசையும் தானும் மறை) என்றும்

தா — என்பது தான் நேர் (சைனும் கோசையும் மறை) என்றும் பொருள்படும்.

இங்கு, கோ — என்பது கோசை நேர் (சைனும் தானும் மறை) என்றும்

[இந்த முறையில் நாம் முதலாங் காற்பகுதியிலே தொடங்கி இடஞ்சுழியாகச் செல்கிறோம் என்பதைக் கவனத்திற் கொள்க.]

2.2 மறைக் கோணங்கள்

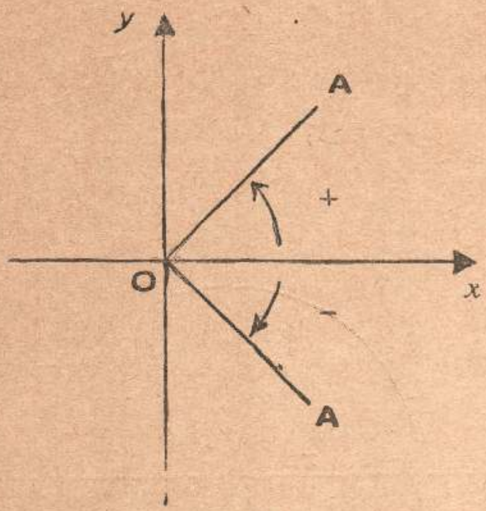
கோணம் xOA, Ox இலிருந்து இடஞ்சுழியாக அளக்கப்பட்டால் அது நேர்ப்பெறுமானத்தை உடையது எனப்படும். Ox இலிருந்து வலஞ்சுழியாக அளக்கப்பட்டால், அது மறைப் பெறுமானத்தை உடையது எனப்படும் (உரு 4.13 ஐப் பாருங்கள்). ஆகவே, -40° உம் 230° உம் காவியின் ஒரே நிலையைக் குறிக்கின்றன. எனவே, அவற்றின் திரிகோணகணித விகிதங்கள் சமமாகும்.

உரு 4.14 இல்,

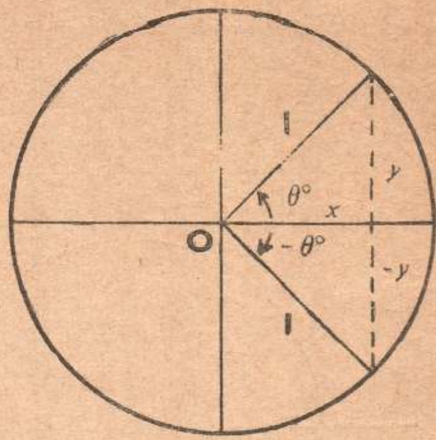
$$\begin{aligned}
\text{கோசை } (-\theta^\circ) &= \text{கோசை } \theta^\circ = x\,; \\
\text{சைன் } (-\theta^\circ) &= -\text{ சைன் } \theta^\circ = -y\,; \\
\text{தான் } (-\theta^\circ) &= -y/x = -\text{ தான் } \theta^\circ
\end{aligned}$$

கோணம் 90° இலுங் கூடியதாகவிருப்பினும் மேற்குறிப்பிட்ட கூற்றுகள் உண்மையாகும். θ° இனதும், $-\theta^\circ$ இனதும் கோசைன்கள் ஒரே குறியைக் கொண்டன. θ° இனதும், $-\theta^\circ$ இனதும் சைன்கள் எதிர்க் குறிகளைக் கொண்டன.

குறிப்பு— உரு 4.11 இல் 'எல்லாம' என உள்ளதை 'எல்லாம் +' எனத் திருத்துக.



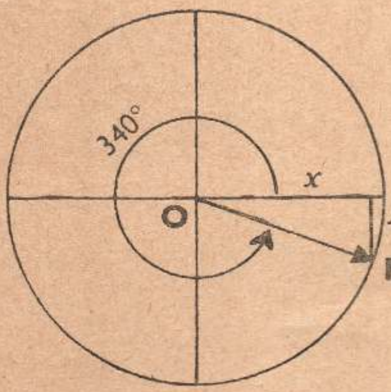
உரு 4.13



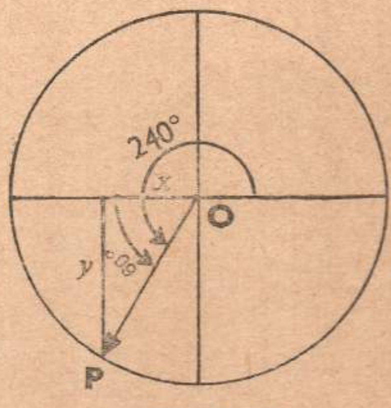
உரு 4.14

உதாரணம் 4.1 கோசை 340°, சைன் 340°, தான் 340° ஆகியவற்றின் குறிகளை எழுதுக.

உரு 4.15 இல் 340° குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கோணத்தால் வரையறுக்கப்படும் காவி நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ளது. ஆகவே, கோசை 340° நேர்ப் பெறுமானமுடையது; சைன் 340°, தான் 340° ஆகியன மறைப் பெறுமானங்களை உடையன.



உரு 4.15



உரு 4.16

உதாரணம் 4.2 அட்டவணையிலிருந்து தான் 240° இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

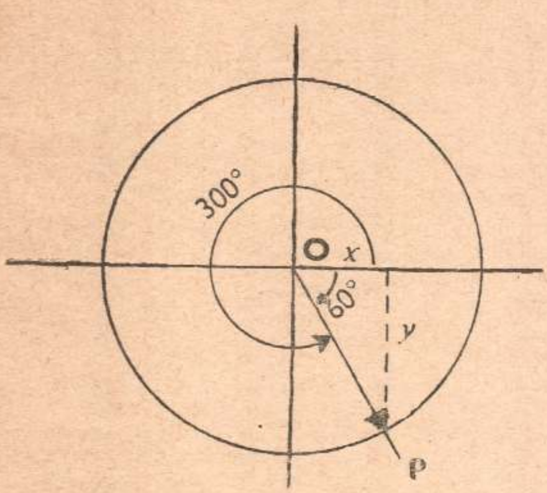
முதலாவதாக அதன் குறியைக் காண்போம். 240° ஆல் வரையறுக்கப்படும் காவி காற்பகுதியிலுள்ளது. ஆகேவ தான் 240° நேர்க் குறியை உடையது. OP ஆனது x − அச்சுடன் 60° அமைக்கின்றபடியால், தான் 240° என்ற விகிதம் தான் 60° என்ற விகிதத்திற்குச் சமன்.

அதாவது, தான் 240° = + தான் 60° = 1·7321.

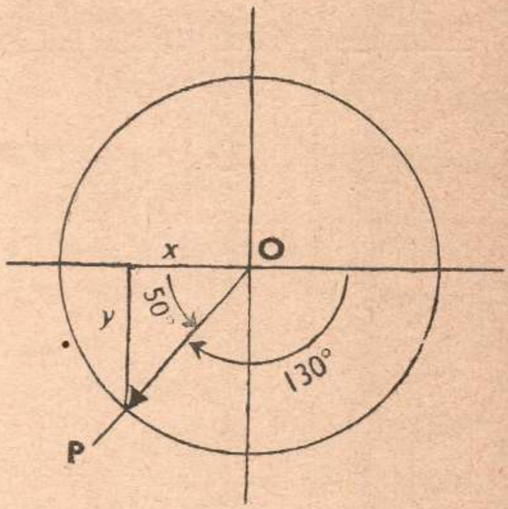
உதாரணம் 4.3 சைன் 300° இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

முதலாவதாக அதன் குறியைக் காண்போம். இந்தக் கோணத்தை வரையறுக்கும் காவி நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ளது.

ஆகவே, சைன் 300° = − சைன் 60° = $-0{\cdot}866$.



உரு 4.17



உரு 4.18

உதாரணம் 4.4 கோசை (-130°) இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

முதலில் அதன் குறியைக் காண்போம். -130° ஆல் வரையறுக்கப்படும் காவி மூன்றும் காற் பகுதியிலுள்ளது. இங்கு கோசைன் மறைக்குறியை உடையது. ஆகவே, கோசை (-130°) = கோசை 130°

= − கோசை 50°

= $-0{\cdot}6428$

பயிற்சி 4.1

1. பின்வருவனவற்றின் குறிகளை எழுதுக.

(i) கோசை 170°	(ii) சைன் 250°
(iii) தான் 130°	(iv) சைன் (-60°)
(v) தான் 320°	(vi) கோசை (-110°)
(vii) தான் 200°	(viii) கோசை 340°
(ix) தான் (-100°)	(x) சைன் 170°
(xi) சைன் (-190°)	(xii) கோசை (-10°).

2. வினா 1 இன் பகுதி (i) — (iv) வரையுள்ள கோணங்களின் பெறுமானங்களை அட்டவணையிலிருந்து காண்க.

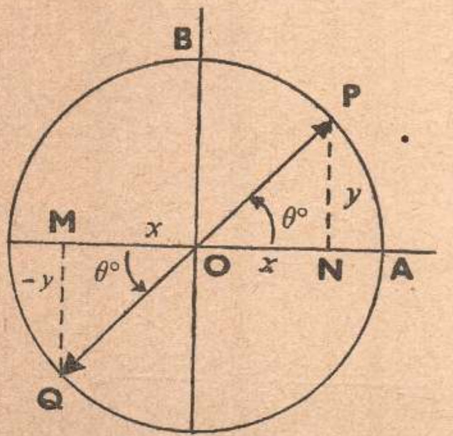
2.3 $180^\circ + \theta^\circ$

ஓரலகு ஆரையுடைய வட்டம் ஒன்றில் OQ, OA உடன் $(180^\circ + \theta^\circ)$ கோணம் அமைப்பது உரு 4.19 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதாவது OP, 180° ஆற் சுற்றப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து நாம் பின் வருவனவற்றை அறியலாம்.

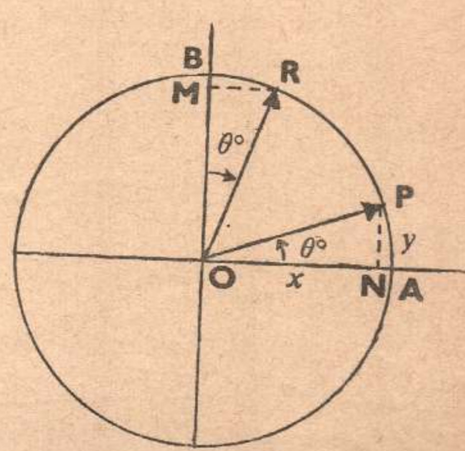
$$\text{கோசை } (180^\circ + \theta^\circ) = -x = -\text{கோசை } \theta^\circ$$

$$\text{சைன் } (180^\circ + \theta^\circ) = -y = -\text{சைன் } \theta^\circ$$

$$\text{தான் } (180^\circ + \theta^\circ) = \frac{\text{சைன் } (180^\circ + \theta^\circ)}{\text{கோசை } (180 + \theta)} = \text{தான் } \theta^\circ$$



உரு 4.19



உரு 4.20

பிரசினம் 4.4 சைன் $(-\theta^\circ) = -$ சைன் θ°, கோசை $(-\theta^\circ) =$ கோசை θ° என்பவற்றைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றுக்கு அவைபோன்ற கூற்றுகள் பெறுக.

(i) கோசை $(180^\circ - \theta^\circ)$, (ii) சைன் $(180^\circ - \theta^\circ)$,

(iii) தான் $(180^\circ - \theta^\circ)$

2.4 கோணம் $(90^\circ - \theta^\circ)$.

உரு 4.20 இல் OP, OA உடன் கோணம் θ° உம் OR, OB உடன் கோணம் θ° உம் அமைக்கின்றன. (OR ஆனது $y = x$ என்ற கோட்டின் OP இன் தெறிப்பாகும்.)

$$\text{கோணம் } ROA = (90 - \theta^\circ)$$

$$\therefore \quad ON = x = OM ;$$

$$PN = y = MR.$$

எனவே, $கோசை\ (90^\circ - \theta^\circ) = சைன்\ \theta^\circ,$

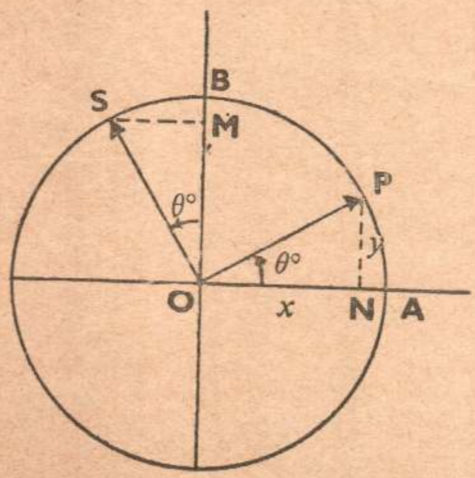
$$சைன்\ (90^\circ - \theta^\circ) = கோசை\ \theta^\circ;$$

$$தான்\ (90^\circ - \theta^\circ) = \frac{சைன்\ (90^\circ - \theta^\circ)}{கோசை\ (90^\circ - \theta^\circ)}$$

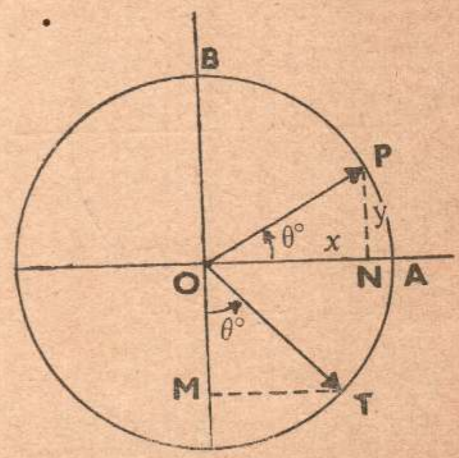
$$= \frac{கோசை\ \theta^\circ}{சைன்\ \theta^\circ}$$

$$= \frac{1}{தான்\ \theta^\circ}$$

பிரசினம் 4.5 உரு 4.20 இன் OP, 90° ஊடாக OS என்ற நிலைக்குச் சுற்றப்படுகிறது (உரு 4.21).



உரு 4.21



உரு 4.22

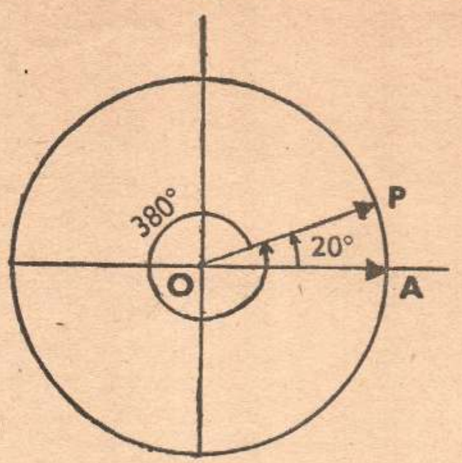
(i) x, y ஆகியவற்றில் S இன் ஆள்கூறுகளை எழுதுக.

(ii) $கோசை\ (90^\circ + \theta^\circ)$, $சைன்\ (90^\circ + \theta^\circ)$, $தான்\ (90^\circ + \theta^\circ)$ என்பவற்றைக் கோசை θ°, சைன் θ°, தான் θ° ஆகியவற்றிலே தருக.

2.5 கோணம் ($270^\circ + \theta^\circ$)

பிரசினம் 4.6 இப்பொழுது உரு 4.20 இன் OP யை 270° ஊடாக OT என்ற நிலைக்குச் சுழற்றினுல் (உரு 4.22),

(i) T இன் ஆள்கூறுகளை x, y ஆகியவற்றில் எழுதுக.



உரு 4.23

(ii) கோசை $(270^\circ + \theta^\circ,)$ சைன் $(270^\circ + \theta^\circ)$, தான் $(270^\circ + \theta^\circ)$ என்பவற்றைக் கோசை θ°, சைன் θ°, தான் θ° ஆகியவற்றிற் கூறுக.

(iii) தேவைப்படின் வேறு உருவம் வரைந்து, கோசை $(270^\circ - \theta^\circ)$, சைன் $(270^\circ - \theta^\circ)$, தான் $(270^\circ - A^\circ)$ என்பவற்றுக்குக் கோவைகள் பெறுக.

பிரசினம் 4.7 பின்வருவனவற்றைக் கூர்ங்கோணச் சார்புகளாய்க் கூறுக.

(i) தான் 145°; (ii) கோசை 200°; (iii) தான் 300°;
(iv) சைன் 250°; (v) கோசை 142°; (vi) சைன் 320°;
(vii) கோசை 355°; (viii) தான் 210°; (ix) சைன் 135°;
(x) சைன் 355°.

2.6 360° இலுங் கூடிய கோணங்கள்

உரு 4.23 இன் OA ஐ 360° ஊடாகச் சுற்றினல், அது மீண்டும் முன்னைய கோடான OA ஐ வந்து அடைகின்றது (உரு 4.23). 380° ஊடாகச் சுற்றினல், அது 20° ஊடாகச் சுற்றும் அதே நிலையை வந்து அடைகின்றது. எனவே, 380° இன் திரிகோணகணித விகிதங்கள், 20° இன் திரிகோணகணித விகிதங்களேயாகும்.

$$\text{அதாவது கோசை } 380^\circ = \text{கோசை } (360^\circ + 20^\circ)$$
$$= \text{கோசை } 20^\circ$$

360° இலுங் கூடிய கோணமொன்றின் திரிகோணகணித விகிதங்களைக் காண்பதற்கு, 0° இற்கும் 360° இற்குமிடையே கோணம் அமையும்வரை 360° இன் மடங்குகளைக் கழியுங்கள். பின்னர் பிரசினம் 4.6 இற் போன்று செய்க.

19—14725

உதாரணம் 4.5 சைன் 420° ஐக் கூர்ங்கோணம் ஒன்றிற் கூறுக.

சைன் 420° = சைன் $(360^\circ + 60^\circ)$

இக்கோணம் வரையறுக்கும் காவி முதலாம் காற்பகுதியிலுள்ளது. ஆகவே, சைன் 420° ஆனது சைன் 60° இன் பெறுமானத்தையே கொண்டுள்ளது.

உதாரணம் 4.6 சைன் 658° ஐக் கூர்ங்கோணமொன்றின் சார்பாய்க் கூறுக.
சைன் 658° = சைன் $(360^\circ + 298^\circ)$

இக்கோணம் வரையறுக்கும் காவி நான்காம் காற்பகுதியிலுள்ளது. ஆகவே சைன் 658° ஆனது சைன் 298° இன் பெறுமானத்தையே உடையது.

சைன் 298° = சைன் $(270^\circ + 28^\circ)$

= − கோசை 28°.

என 2.5 ஆம் பகுதியிற் கற்றுள்ளீர்கள்.

இதனைப் பின்வருமாறும் காணலாம்.

சைன் 658° = சைன் $(2 \times 360^\circ - 62^\circ)$.

இது சைன் (-62°), அதாவது − சைன் 62° இற்குச் சமமாகும்.

$\therefore$ சைன் 658° = − சைன் 62°.

சைன் $(90^\circ - \theta^\circ)$ = கோசை θ° ஆதலால் − சைன் -62° = − கோசை 28°

பயிற்சி 4.2

1. பின்வருவனவற்றைக் கூர்ங்கோணச் சார்புகளாய்க் கூறும்போது வரும் குறிகளைக் குறிப்பிடுக.

(i) சைன் 240° (ii) கோசை 300° (iii) தான் 576° (iv) சைன் 1000°
(v) கோசை 954° (vi) தான் 690° (vii) கோசை (2001°)
(viii) சைன் $(720^\circ+10^\circ)$ (ix) தான் $(720^\circ+210^\circ)$ (x) கோசை $(1180^\circ-160^\circ)$

2. 330° கோணமொன்று 3 சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

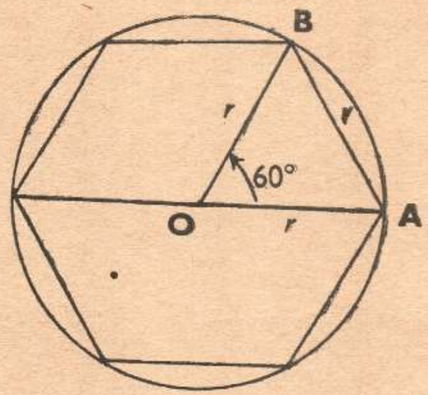
(i) முழுக் கோணம் (ii) கோணத்தின் மூன்றிலொரு பங்கு (iii) கோணத்தின் மூன்றில் இரு பங்கு ஆகியவற்றின் கோசைனின் குறிகளைக் காண்க.

3. சைன் θ° மறைப்பெறுமானம் உடையதாயின், θ இனது பெறுமானங்களின் ஆட்சியாகப் பெறக்கூடியது என்ன ?

4. தான் α° நேராகவும், சைன் α° மறையாகவும் அமையின், α இன் ஆட்சி என்ன ?

3. ஆரையன் அளவு

பல்லாயிரம் ஆண்டுகளாகக் கோண அளவைக்குப் பாகை அளவுத்திட்டமே பயன்பட்டு வருகிறது. மத்திய கிழக்கில் வசித்த பபிலோனியர் நாலாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்னரே அதனைப் பயன்படுத்தினர் என அறிகிறோம். ஓர் ஆண்டென்பது 360 நாட்களைக் கொண்டதென மதிப்பிட்டபடியால், வட்டத்தை 360 பகுதிகளாகப் பிரித்தார்கள் என நம்பப்படுகிறது. ஒரு வட்டத்தின் பரிதியைச் சுற்றி அதன் ஆரையை வைத்து அளந்து சென்றால், அவ்வட்டத்தினை ஆறு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாமெனவும் அறிந்திருந்தனர் (உரு 4.24).



உரு 4.24

அவர்களின் எண்குறியீடு 60 ஐ ஆடியாகக் கொண்டமையால் ஒவ்வொரு பகுதியையும் 60 சம பகுதிகளாகப் பிரித்தனர். இது இன்னொரு விளக்கமாகும்.

3.2 இக்காலத்தில் வேறோர் அலகு அறிமுகஞ் செய்யப்பட்டுள்ளது. வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சம நீளமான வில்லைப் பரிதியிற் குறித்தால், அப்பகுதி வட்டத்தின் மையத்தில் அமைக்குங் கோணம் 1 ஆரையன் எனப்படும் (இது 1^c எனக் குறிக்கப்படும்).

பல சந்தர்ப்பங்களில், கோணங்களை ஆரையன்களில் அளப்பது வசதியாகும். இது ஒரு தனி அளவையாகும். இது வட்டத்தின் பருமனைச் சார்ந்ததன்று (உரு. 4.25).

$A\hat{O}B$ இலுள்ள ஆரையன்களின் எண்ணிக்கை, ஆரை OA ஐ ஓரலாகக் கொண்ட அளவிடையில் வில் AB இன் நீளத்தை அளக்கும் எண்ணுக்குச் சமனாகும். இந்த எண் சமன்

$$\frac{\text{வில் } AB \text{ இன் நீளம்}}{\text{ஆரை } OA \text{ இன் நீளம்}}$$

உரு 4.24 இற்போன்று நாண் AB ஐக் குறிக்கும்போது, வில் AB இன் நீளம் r இலுங் கூடவாகும். வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்குங் கோணம் ஓர் ஆரையனிலுங் கூடவாக அமையும். இச்சந்தர்ப்பத்தில் கோணம் 60° ஆதலால், ஓர் ஆரையன் 60° இலும் சிறிது குறைவு என அறிவோம். எவ்வளவு குறைவு ?

ஆரை r உடைய வட்டம் ஒன்றின் பரிதி $2\pi r$ ஆதலால், 360° இன் வட்ட ஆரையனளவை அளக்கும் எண் $\frac{2\pi r}{r}$ ஆகும். ஆகவே 360° அளவுள்ள கோணம் 2π ஆரையனுகும். இவற்றைப் பின்வரும் படமாக்கல் மூலம் தொடர்பு படுத்தலாம்.

$$180^\circ \longrightarrow \pi^c ;$$

ஆகவே, $1^\circ \longrightarrow \frac{\pi^c}{180} \cong 0{\cdot}018$; ஆரையன் என நாம் உய்த்தறியலாம்.

அத்துடன் $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right) \simeq 57{\cdot}3^\circ$.

திரிகோணகணிதத்திற் பெரிதும் பயிலும் கோணங்கள் π இன் பின்னமாக எடுத்துரைக்கப்படும். அவற்றை அட்டவணை 4.2 இற் கண்டுகொள்க.

பாகை	30	45	60	90	120	180	360
ஆரையன்	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π

அட்டவணை 4.2

இனிமேல், θ ஆரையன்களைக் கருதுவதற்கு θ வை மாத்திரம் எழுதுவோம். பாகைகளை எழுதவிரும்பின் θ° என எழுதுவோம்.

உதாரணம் 4.7 $\frac{5\pi^c}{6}$ ஐப் பாகையிற் கூறுக.

$$\pi^c = 180^\circ$$
$$\therefore \tfrac{5}{6}\pi^c = \tfrac{5}{6}.180^\circ$$
$$\therefore \tfrac{5}{6}\pi^c = 150^\circ$$

உதாரணம் 4.8 10° ஐ ஆரையன்களிற் கூறுக.

$$180^\circ = \pi^c$$
$$\therefore \frac{180^\circ}{18} = \frac{\pi^c}{18}$$
$$\therefore 10^\circ = \frac{\pi^c}{18}$$

பயிற்சி 4.3

1. பின்வரும் கோணங்களின் அளவுகளை ஆரையன்களிற் கூறுக.

(i) 140° (ii) 40° (iii) 70° (iv) 5° (v) 290° (vi) 315° (vii))600° (viii) n°

2. ஆரையன்களிலுள்ள பின்வரும் கோணங்களின் அளவுகளைப் பாகையிற் கூறுக.

(i) $\frac{3}{2}\pi$; (ii) $\frac{\pi}{9}$; (iii) $1{\cdot}5$; (iv) $3\frac{1}{7}$; (v) $0{\cdot}5$;

(vi) 2 ; (vii) 77 ; (viii) $\frac{5}{3}\pi$; (ix) 3π ; (x) $2n\pi$.

3. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(i) சைன் $\frac{\pi}{8}$, (ii) கோசை $\frac{3}{10}\pi$, (iii) தான் $\frac{2}{3}\pi$,

(iv) கோசை $\frac{9}{4}\pi$, (v) சைன் $\frac{2}{5}\pi$ (vi) தான் $\frac{3}{4}\pi$

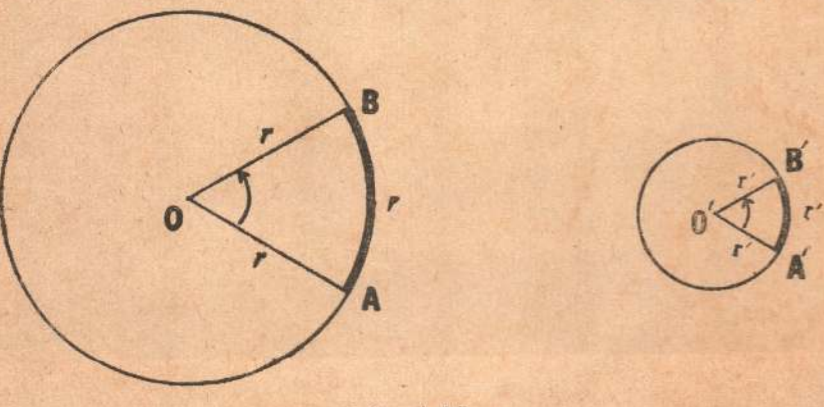
3.3 விற்களின் நீளங்கள்

ஆரை r ஐக் கொண்ட வட்டத்தின் வில்லினது நீளம் s ஆகும். இந்த வில் வட்டத்தின் மையத்தில் θ என்னுங் கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது (உரு 4.26). விற்கள் கோணங்களுக்கு விகிதசமம் ஆதலால் 3.2 ஆம் பகுதியிலிருந்து

$$\frac{s}{r} = \theta$$

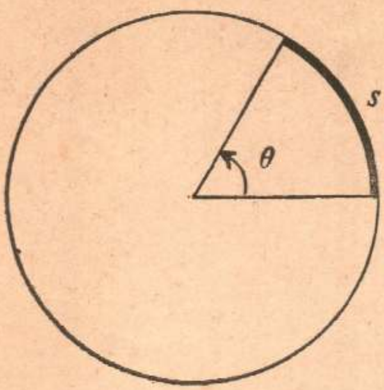
$\therefore s = r\theta$ எனப் பெறுகிறோம்.

வில்லின் நீளம் = ஆரை × ஆரையன்களிலே கோணத்தின் அளவு.

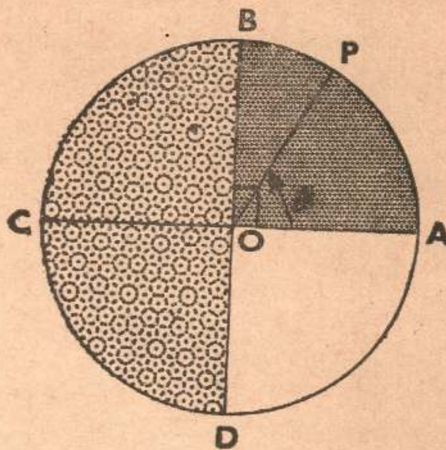


உரு 4.25

·14725—10



உரு 4.26



உரு 4.27

3.4 ஆரைச்சிறைகளின் பரப்பளவு

BCD என்ற அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு முழுவட்டத்தின் பரப்பளவில் அரைப்பங்கு என. உரு 4.27 இற் காணலாம். மேலும் *BCD* என்னும் வில் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் (180°), *BCDAB* என்ற முழு வில்லும் மையத்தில் எதிரமைக்குங் கோணத்திலும் (360°) அரைப் பங்காகும்.

இவ்வண்ணமே *AOB*, முழுவட்டத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{4}$ பங்கும் அரைவட்டம் *BCD* இன் பரப்பளவின் $\frac{1}{2}$ பங்கும் ஆகும். $A\hat{O}B = 90^\circ$. $A\hat{O}B$ முழுச் சுற்றிலும் $\frac{1}{4}$ பங்கும், *BCD* எதிரமைக்குங் கோணத்திலும் $\frac{1}{2}$ பங்குமாகும்.

பொதுவாக, ஆரைச்சிறைகளின் பரப்பளவுகள், அதன் எல்லைகளாக அமைந்த ஆரைகள் உள்ளடக்கும் கோணங்களுக்கு விகிதசமமாகும்.

$$\therefore \frac{\text{ஆரைச்சிறை } AOP \text{ இன் பரப்பளவு}}{\text{வட்டத்தின் பரப்பளவு}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$ ஆதலால்

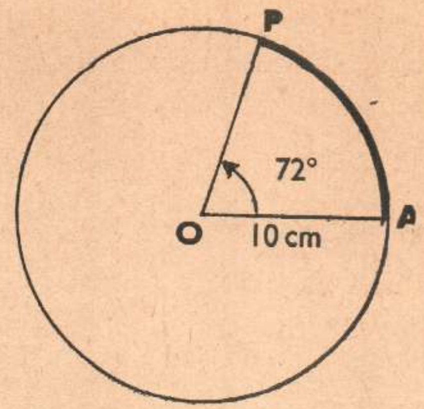
$$\frac{\text{ஆரைச்சிறை } AOP \text{ இன் பரப்பளவு}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$\therefore$ ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

அல்லது $\frac{1}{2} rs$.

உதாரணம் 4.9

உரு 4.28, 10 *cm* ஆரையுள்ள வட்டமொன்றைக் காட்டுகிறது. (i) வில் *AP* இன் நீளம் (ii) ஆரைச் சிறை *AOP* இன் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.



உரு 4.28

(i) $180^\circ = \pi^c$

72° ஐ ஆரையன்களாக மாற்றினல், பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்:

$$72 \,.\, \frac{180^c}{180} = \frac{72\pi^c}{180} = \frac{2}{5}\pi^c$$

எனவே, ஆரையனளவு $= \dfrac{2}{5}\pi$

வில் நீளம் s பின்வருவதாலே தரப்படும்.

$$s = r\theta = 10 \times \frac{2}{5}\pi \ cm = 4\pi \ cm$$

ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு A ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta = \tfrac{1}{2} \times 100 \times \tfrac{2}{5} \pi \ cm^2$$
$$= 20\pi \ cm^2$$

உதாரணம் 4.10

சில்லு ஒன்றின் கோணவேகம் நிமிடத்திற்கு 180 சுற்றுகள். இதனை ஒரு செக்கனுக்கு எத்தனை ஆரையன்கள் எனக் கூறுக.

180 சுற்றுகள், 1 நிமிடத்தில்
180 சுற்றுகள், 60 செக்கனில்
3 சுற்றுகள், 1 செக்கனில்
1 சுற்று $= 2\pi$ ஆரையன்
$\therefore$ 3 சுற்று $= 6\pi$ ஆரையன்

$\therefore$ சில்லு செக்கனுக்கு $6\pi^c$ வீதம் சுற்றுகிறது.

பயிற்சி 4.4

1. பின்வரும் கதிகள் நிமிடத்திற்கு எத்தனை சுற்றுகள் என்றவாறு தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றைச் செக்கனுக்கு எத்தனை ஆரையன்கள் எனத் தருக.

(i) 120 ; (ii) 1500 ; (iii) 5,000 ; (iv) x.

2. 12 cm ஆரையையுடைய வட்டம் ஒன்றின் விற்கள் அதன் மையத்திலே பின்வரும் கோணங்களை எதிரமைக்கின்றன. அவ்விற்களின் நீளங்களை ஆரையன்களிலே π யின் சார்பாகத் தருக.

(i) $\frac{\pi^c}{6}$; (ii) 345° ; (iii) $p\pi^c$.

3. 4cm ஆரைகளால் அமைந்த ஆரைச்சிறைகள் பின்வரும் கோணங்களை மையத்தில் எதிரமைக்கின்றன. ஆரைச்சிறைகளின் பரப்பளவுகளை ஆரையன்களிற் π யின் சார்பாகக் காண்க

(i) $\frac{2}{3}\pi^c$; (ii) 105° ; (iii) $\frac{\pi^c}{n}$.

4. (i) 2 cm (ii) 18 cm நீளமுள்ள விற்கள் 6 cm ஆரையுடைய வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்குங் கோணங்களை ஆரையன்களிற் காண்க.

5. $f(\theta) = \theta + \frac{\text{கோசை } 2\theta}{2}$ ஆயின்,

$f(\pi) - f(0)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. r ஆரையுடைய வட்டமொன்றின் வில்லினது நீளம் s ஆகும். வில்லின் இரு அந்தலைகளையும் இணைக்கும் நாணின் நீளம் $2r$ சைன் $\left(\frac{s}{2r}\right)$ என நிறுவுக.

சைன் $(90^\circ - \theta^\circ)$	சைன் $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	...	சைன் $(\pi - \alpha)$	சைன் $(270^\circ - \theta^\circ)$	...
...	சைன் $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$	சைன் $(180^\circ + \theta^\circ)$	...	...	சைன் $\left(3\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
கோசை $(90^\circ - \theta^\circ)$	...	...	கோசை $(\pi - \alpha)$	கோசை $(270^\circ - \theta^\circ)$	...
...	கோசை $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$	கோசை $(180^\circ + \theta^\circ)$	...	...	கோசை $\left(3\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
தான் $(90^\circ - \theta^\circ)$	...	...	தான் $(\pi - \alpha)$	தான் $(270^\circ - \theta^\circ)$	...
...	தான் $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$	தான் $(180^\circ + \theta^\circ)$	...	...	தான் $\left(3\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

அட்டவணை 4.3

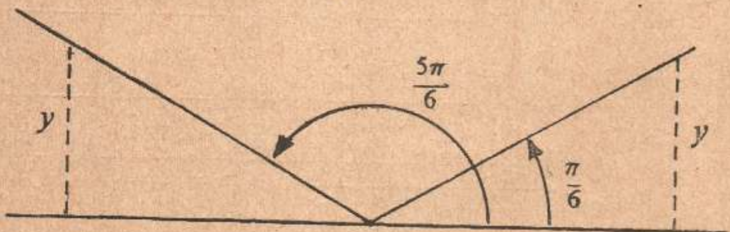
7. 4·3, 4·4, 4·5 ஆகிய பகுதிகளில், சைன் θ°, கோசை θ°, தான் θ° ஆகியவற்றின் கோவைகளாக, அட்டவணை 4·3 இலுள்ள திரிகோணகணித விகிதங்களை உய்த்தறிந்தோம். $\alpha^\circ = \theta^c$ ஆயின், அட்டவணை 4·3 ஐப் பிரதிசெய்து, அதிலுள்ள இடைவெளிகளில் உரிய விகிதங்களை எழுதிப் பூர்த்தியாக்குக.

8. அட்டவணை 4.3 ஐ, தான் $(360^\circ + \theta^\circ)$ வரை விரிவாக்குக.

4. சைன், கோசைன், தான் ஆகியவற்றின் வரைபுகள்

4.1 6—9 ஆம் வகுப்புகளில் அட்டவணை 4.5 போன்ற அட்டவணையைத் தயாரித்திருக்கிறீர்கள். இந்த அட்டவணை $\left\{x : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ என்னும் ஆட்சிக்கு $x \rightarrow$ சைன் x என்னும் படமாக்கலின் அட்டவணையாகும். $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$ என்ற ஆட்சிக்கு x இன் பெறுமானங்கள் அமையும் வகையில் இவ்வட்டவணையை விரிவாக்கலாம்.

உதாரணமாக, சைன் $\frac{5\pi}{6}$ = சைன் $\frac{\pi}{6}$ = 0·5000.



உரு 4.29

பிரசினம் 4.8

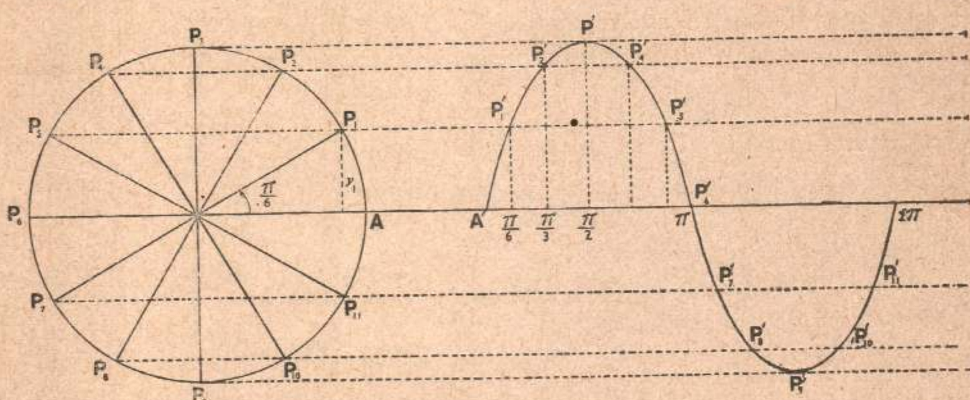
(1) $x \rightarrow$ சைன் x என்ற படமாக்கலுக்குக் கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணை 4.5 ஐப் பிரதிசெய்து பூர்த்தியாக்குக.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
சைன் x	0	0·5000	0·866	1		0·5000							

அட்டவணை 4.5

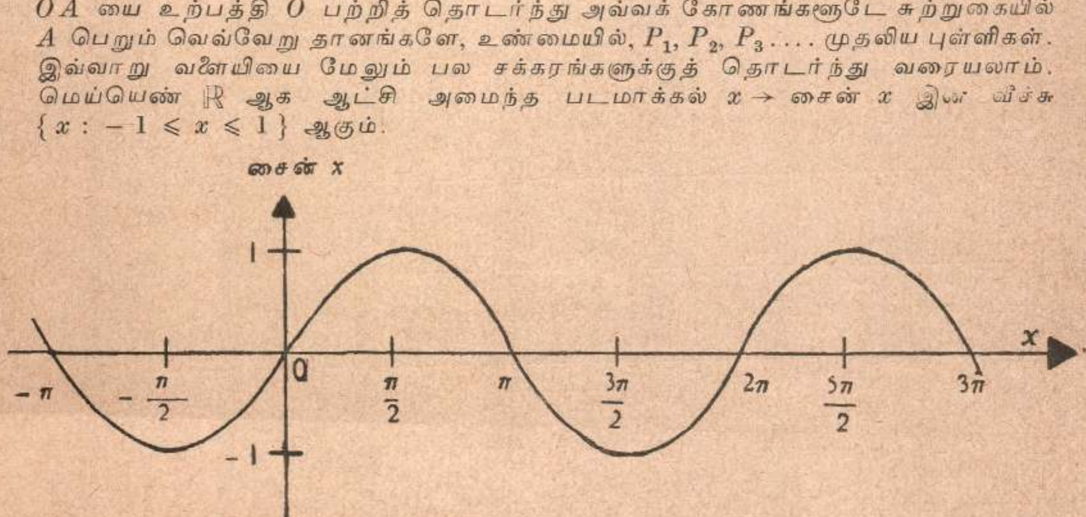
உரு 4.30 இலே தரப்பட்டுள்ள வட்டத்தை ஓர் அலகு ஆரையுடைய வட்டமாகவும், கோணம் $AOP_1 = \frac{\pi}{6}$, கோணம் $AOP_2 = \frac{\pi}{3}$ எனவுங் கொண்டால், $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ முதலிய புள்ளிகளின் y – ஆள்கூறுகள் கோணங்களின் சைன்

பெறுமானங்களைத் தருகின்றன. ஏனெனில் சைன் $A\hat{C}P_1 = \frac{y_1}{r} = y_1, \ldots\ldots$ ஆதியன. இதனைச் சைன் x இன் வரைபைப் பின்வரும் முறையில் அமைத்தற்குப் பயன்படுத்துகிறோம். $2 \cdot 5$ cm ஆரையுள்ள வட்டமொன்று வரைந்து, அதில் $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ……… ஆதிய கோணங்களை அமைக்குமாறு, $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ முதலியவற்றைக் குறியுங்கள். $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \ldots\ldots, 2\pi$ ஆகியவற்றைக் குறிப்பதற்கு, கிட்டிய கிடையான விட்டத்திற் புள்ளிகள் குறியுங்கள். இப்புள்ளிகளூடாக நிலைக்குத்துக் கோடுகள் வரையுங்கள், $P_1', P'_2 \ldots\ldots$ ஆதிய புள்ளிகளைப் பெறுதற் பொருட்டு $P_1, P_2 \ldots\ldots$ ஆகிய புள்ளிகளூடாகக் கிடைக் கோடுகள் வரையுங்கள். இப்புள்ளிகளூடாக ஒப்பரவான வளையியை வரையுங்கள். இதுவே சைன் x இன் வரைபாகும்.



உரு 4.30

OA யை உற்பத்தி O பற்றித் தொடர்ந்து அவ்வக் கோணங்களூடே சுற்றுகையில் A பெறும் வெவ்வேறு தானங்களே, உண்மையில், $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ முதலிய புள்ளிகள். இவ்வாறு வளையியை மேலும் பல சக்கரங்களுக்குத் தொடர்ந்து வரையலாம். மெய்யெண் $\mathbb{R}$ ஆக ஆட்சி அமைந்த படமாக்கல் $x \rightarrow$ சைன் x இன் வீச்சு $\{x : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ ஆகும்.



உரு 4.31

உரு 4.31 இல், பல சக்கரங்களைக் காட்டியுள்ளோம். கிடை அச்சினதும், நிலைக்குத்து அச்சினதும் அளவிடைகள் சிறிது வேறுபட்டவை என்பதை அவதானியுங்கள். இதனால் வரைபிலே சிறிதளவு திரிபு உண்டு.

இச்சார்பு x– அச்சுப்பற்றி அலைகின்றது. குறிப்பிட்ட பெறுமானங்களின் தொடையையே மீண்டும் மீண்டும் இச்சார்பு எடுக்கின்றது. கோணமானது 0 தொடக்கம் 2π ஆரையன்வரை மாறும்போது, சார்பு -1 இற்கும் 1 இற்கும் இடையேயுள்ள பெறுமானங்களை எடுக்கின்றது. $0, -1, 1$ தவிர்ந்த ஏனைய பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றையும் இரு முறை வீதமும், 0 ஐ மூன்று முறையும், $-1, 1$ ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் ஒரு முறை வீதமும் இச்சார்பு எடுக்கின்றது. $360°$ (அல்லது 2π ஆரையன்) கொண்ட சக்கரம் ஒவ்வொன்றுக் கூடாகச் செல்லும் போதும், அதே பெறுமானங்களையே மீண்டும் சார்பு பெறுகின்றது. $x \longrightarrow$ சைன் x போன்று மீண்டும் மீண்டும் ஓர் ஒழுங்குப்படி வரும் சார்பு **ஆவர்த்தனச்** சார்பு எனப்படும். அதன் சக்கரம் **ஆவர்த்தனம்** எனப்படும். $x \rightarrow$ சைன் x என்னும் சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம் $+1$ இற்கும் இழிவுப் பெறுமானம் -1 இற்குமிடையே வளையி ஏறி இறங்குகின்றது. இந்த ஏற்றவிறக்கத்தின் அளவையாகச் சார்பின் வீச்சம் என்பது விளங்குகிறது. வீச்சம், $\frac{1}{2}$ (உயர்வுப் பெறுமானம் – இழிவுப் பெறுமானம்) என்பதற்குச் சமனாகும். $x \longrightarrow$ சைன் x இற்கு வீச்சம் $\frac{1}{2}[1-(-1)] = 1$. ஆகவே, சைன் சார்பானது ஆவர்த்தனம் 2π யும், வீச்சம் 1 உம் கொண்ட ஆவர்த்தனச் சார்பாகும்.

பிரசினம் 4.9

(i) பிரசினம் 4.8 இல் $x \longrightarrow$ சைன் x இற்குச் செய்தது போன்று $x \longrightarrow$ கோசை x என்ற படமாக்கலுக்குப் பெறுமானங்களின் அட்டவணை ஒன்று அமைக்க.

(ii) இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $x \longrightarrow$ கோசை x என்பதன் வரைபை வரைக. இந்த வரைபை $\{x : -360° \leqslant x \leqslant 720°\}$ என்ற ஆட்சிக்கு விரிவாக்குக.

(iii) இப்படமாக்கலின் வீச்சையும் அவ்வீச்சு இப்படமாக்கலின் வீச்சத்துடன் கொண்டுள்ள தொடர்பையும் கூறுக.

பிரசினம் 4.10

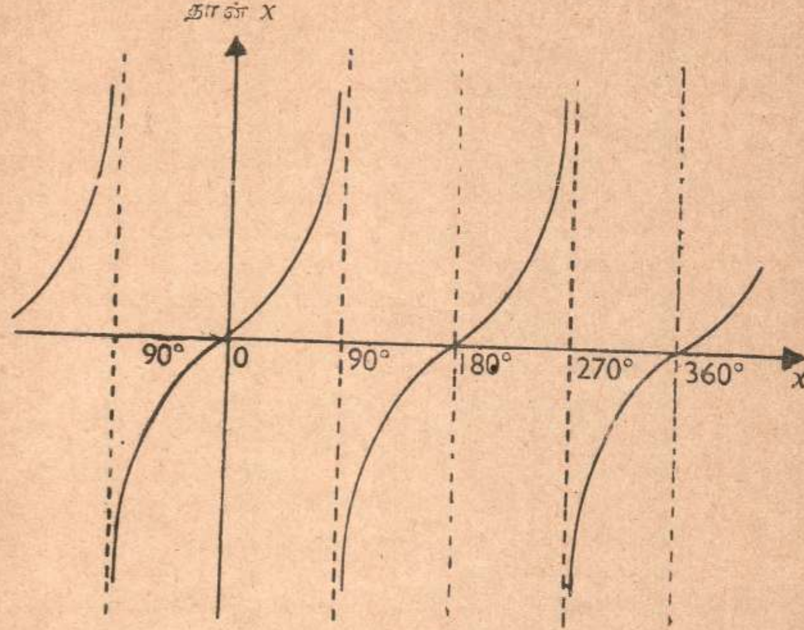
(i) $x \longrightarrow$ தான் x என்ற படமாக்கலுக்குப் பெறுமானங்களின் அட்டவணை ஒன்று அமைக்க.

(ii) இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $x \longrightarrow$ தான் x என்பதன் வரைபை வரைக. இதனை $\{x : -360° \leqslant x \leqslant 720°\}$ என்ற ஆட்சிக்கு விரிவாக்குக.

(iii) இப்படமாக்கலின் வீச்சைக் கூறுக.

(iv) இப்படமாக்கலின் வீச்சத்தைக் கூறுக.

$x \to 90°$, $x \to 270°$ ஆகும்போது தான் x இன் பெறுமானம் மிகவும் பெரிதாகின்றது என்பதையும், x இன் இப்பெறுமானங்களுக்குத் தான் x இல்லை என்பதையும் அவதானியுங்கள். இப்புள்ளிகளில், குறிகள் திடீரென மாறுவதையும் கவனியுங்கள் (உரு 4.32). இப்புள்ளிகளில் வளையி தொடர்ச்சியற்றது எனக் கூறுவோம்.



உரு 4.32

$x = 90°$, $x = 270°$ ஆகிய கோடுகள் வளையியின் அணுகு கோடுகள் எனப்படும்.

4.2 ஆவர்த்தனவியல்பு. ஆவர்த்தனவியல்பு, இயற்கை நிகழ்ச்சிகளிற் சாதாரணமாகக் காணப்படும் ஒன்றாகும். ஒரு முழு நாளில் இரவும் பகலுமென ஓரளவு சமமான பகுதிகளிரண்டு உண்டு. இவையிரண்டும் ஆவர்த்தன முறையில் ஒன்றுக்குப் பின் ஒன்றாக மாறி மாறி வருகின்றன. பாடசாலை நேர சூசி 5 நாள் ஆவர்த்தனத்தைக் கொண்டதாகும். சந்திரன் 29 நாள் 12 மணி 44 நிமிடம் 2·78 செக்கன் ஆவர்த்தனத்தைக் கொண்டதாகும். 1/11 என்னும் பின்னத்தைத் தசமாக்கினல் 0·090909 . . . எனப் பெறுவோம். இது 09 ஆவர்த்தனத்தைக் கொண்டுள்ளது.

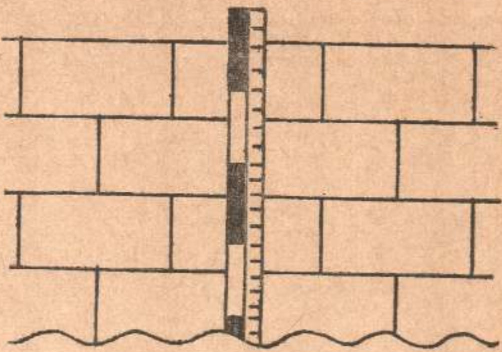
பயிற்சி 4.5

1. பின்வருவனவற்றில் ஆவர்த்தனவியல்பு எவ்வாறமைந்துள்ளது என்பதை விபரிக்க. முடியுமாயின் ஆவர்த்தனத்தையுங் கூறுக.

(i) வில்லொன்றிலே தொங்கும் நிறை (உரு 4.33)

(ii) கடற்கரையிலே தோன்றும் அலைகள்

உரு 4.33



உரு 4.34

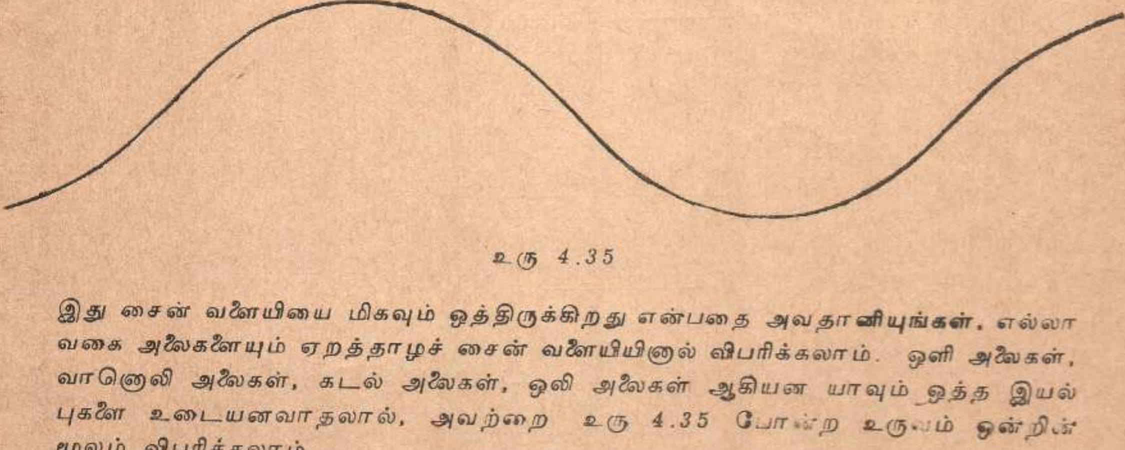
(iii) சூரியனைச் சுற்றிப் பூமியின் அசைவு

(iv) கொழும்புத் துறைமுகத்தில் நீரின் ஆழம் (உரு 4.34)

(v) பெரிய இராவணன் கோட்டையிலுள்ள கலங்கரைவிளக்கம்

(vi) எண் $\frac{1}{7} = 0 \cdot 142857142857142 \ldots\ldots$

திறந்த கடலில் உள்ள அலை குறிப்பிட்ட ஒரு நேரத்தில் உரு 4.35 இற் போன்று இருக்கும்.



உரு 4.35

இது சைன் வளையியை மிகவும் ஒத்திருக்கிறது என்பதை அவதானியுங்கள். எல்லா வகை அலைகளையும் ஏறத்தாழச் சைன் வளையியினால் விபரிக்கலாம். ஒளி அலைகள், வானொலி அலைகள், கடல் அலைகள், ஒலி அலைகள் ஆகியன யாவும் ஒத்த இயல்புகளை உடையனவாதலால், அவற்றை உரு 4.35 போன்ற உருவம் ஒன்றின் மூலம் விபரிக்கலாம்.

5. நிகர்மாற்றுச் சார்புகள்

5.1 சைன், கோசைன், தான்சன் சார்புகள் வட்டத்தைப் பயன்படுத்திப் பெறப்பட்டமையால் அவை பெரும்பாலும் வட்டச் சார்புகள் எனப்படும். இவற்றின் நிகர் மாற்றுகளான வேறு மூன்று வட்டச் சார்புகளையும் நாம் பெறலாம். அவை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

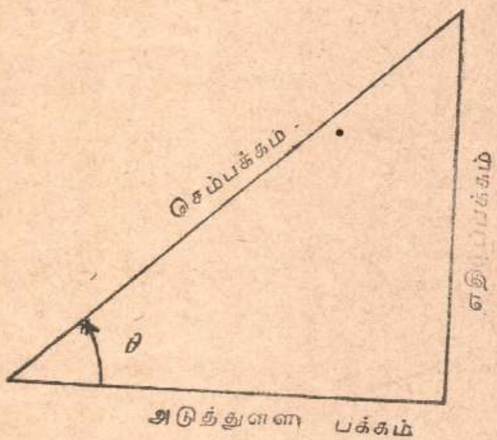
14725—22

$$\text{சீக்கன்}\ \theta = \frac{1}{\text{கோசைன்}\ \theta}, \quad \text{கோசைன்}\ \theta \neq 0$$

$$\text{கோசீக்கன்}\ \theta = \frac{1}{\text{சைன்}\ \theta}, \quad \text{சைன்}\ \theta \neq 0$$

$$\text{கோதான்சன்}\ \theta = \frac{1}{\text{தான்சன்}\ \theta}, \quad \text{தான்சன்}\ \theta \neq 0$$

இவற்றை சீக θ, கோசீ θ, கோதா θ எனச் சுருக்கிக் கூறுவோம். உரு 4.36 இலுள்ள முக்கோணியைப் பயன்படுத்த, பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்.



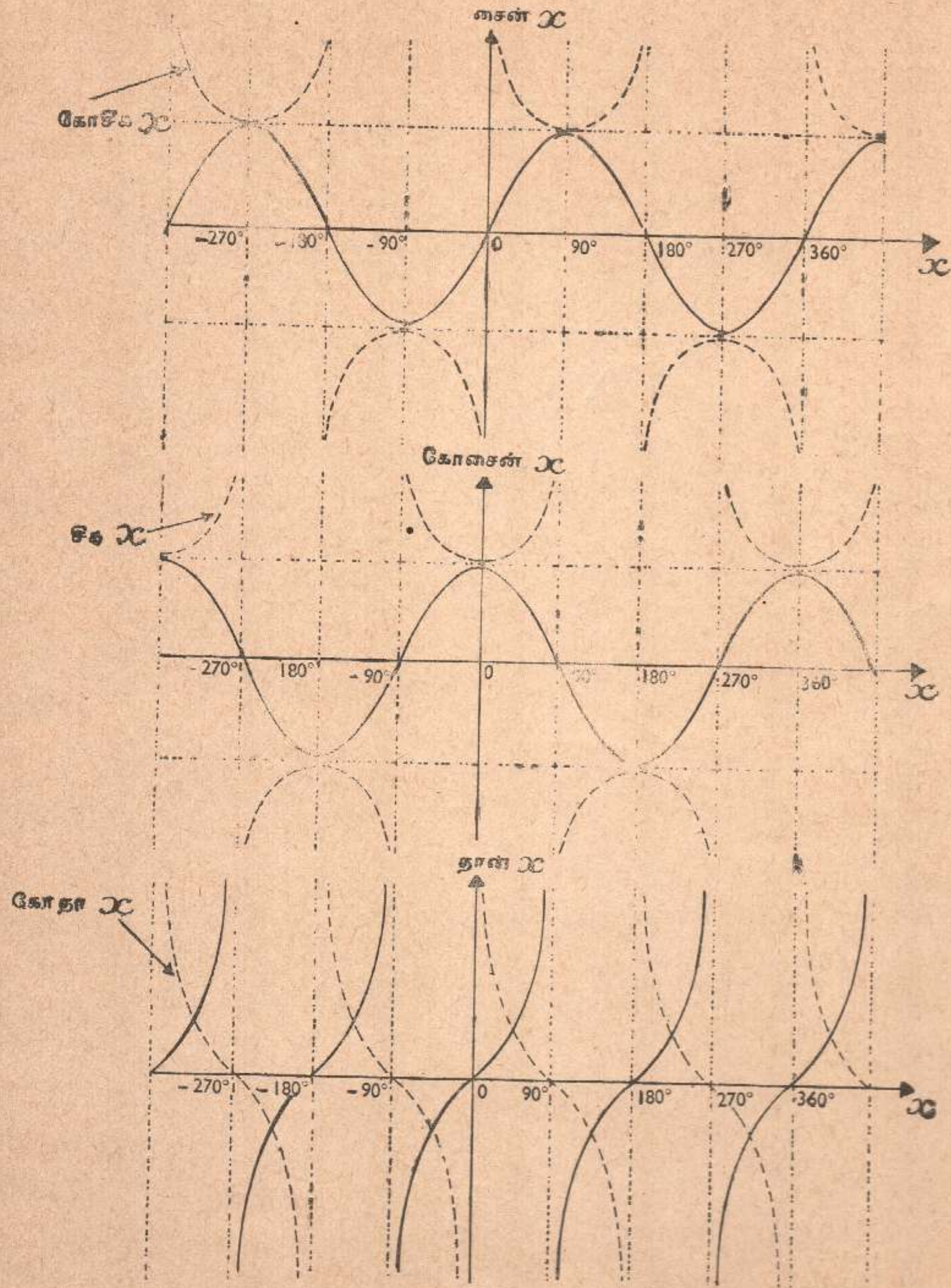
உரு 4.36

$$\text{சீக}\ \theta = \frac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$$

$$\text{கோசீ}\ \theta = \frac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$$

$$\text{கோதா}\ \theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$$

5.2 கோசைன், கோதான்சன், கோசீக்கன் ஆகிய மூன்று பெயர்களும் மற்றைய மூன்று விகிதங்களுக்கும் 'கோ' என்ற எழுத்தை முன்னுக்குச் சேர்ப்பதாற் பெறப்படுகின்றன என்பதை நீங்கள் அவதானிக்கக்கூடும். கோணமொன்றின் விகிதம் அதன் நிரப்புகோணத்தின் (complementary angle) கோ விகிதத்துக்குச் சமம் என்பதே இதன் கருத்து. 'கோ' என்பது complementary என்பதில் வரும் 'co' ஆகும்.



உரு 4.37

உதாரணமாக,

சைன் 20° = கோசை 70° ; கோசை 20° = சைன் 70°

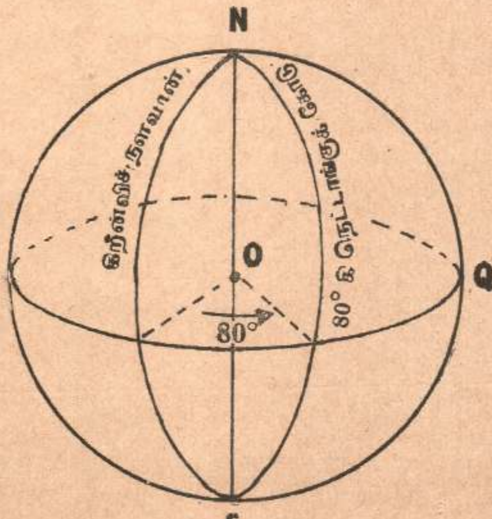
சீக 40° = கோசீ 50° ; கோசீ 40° = சீக 50°

தான் 30° = கோதா 60° ; கோதா 30° = தான் 60°

கோசீ x, சீக x, கோதா x ஆகியவற்றின் வரைபு முறையே உரு 4.37 (i), (ii), (iii) இலே தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் அவற்றின் நிகர்மாற்றுச் சார்புகளின் வரைபுகள் குற்றிட்ட கோடுகளாகத் தரப்பட்டுள்ளன.

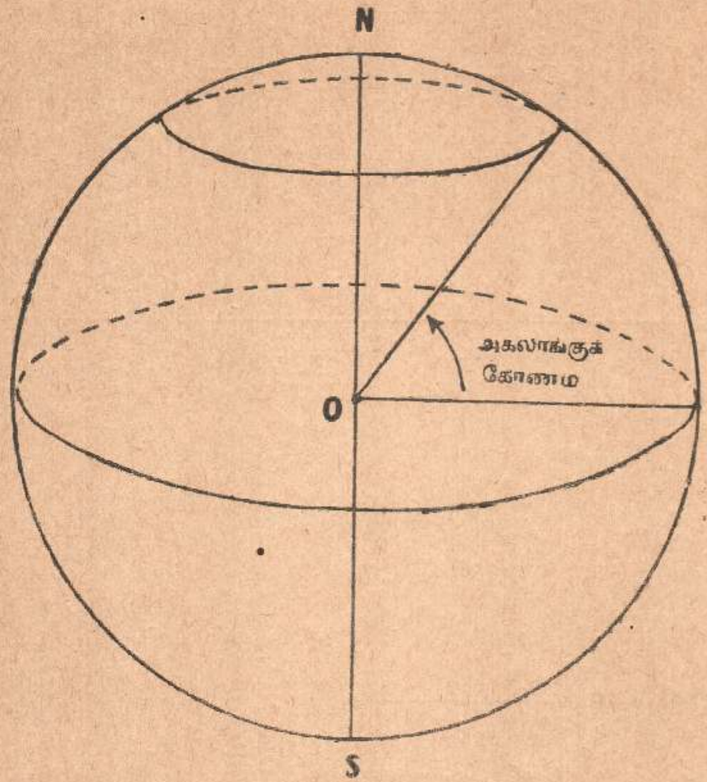
6. அகலாங்கும் நெட்டாங்கும்

6.1 புவியை நாம் ஏறத்தாழ 6,400 *km* ஆரை (R) உள்ள ஒரு கோளமாகக் கருதலாம். வட, தென் துருவங்களை (N, S) இணைக்குங் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்டு, அரைவட்டமொன்றை அமைத்து அதனை அவ்விட்டம் பற்றிச் சுழற்றினால், புவியின் மாதிரியுருவினை நாம் பெறுவோம். அரைவட்டம் NS இன் நடுப்புள்ளி Q ஆயின், Q வின் ஒழுக்கு (பாதை) மத்தியகோட்டை வரைகிறது. NS இற்கு ஊடாகச் செல்லும் வெட்டுகள் புவிப் பரப்பின்மீது நள்வான்களை வரையறுக்கின்றன. நள்வான் புவியின் பரப்பிலுள்ள இடமொன்றின் நெட்டாங்கை 0° — 180° வரையுள்ள கோணமாகத் தருகின்றது. இந்தக் கோணம் கிறீன்விச்சின் நள்வானிலிருந்து கிழக்காக அல்லது மேற்காக அளக்கப்படும். (கிறீன்விச்சிற்கூடான நெட்டாங்கு முதன்மை நள்வான் எனக் கூறப்படும்.)



உரு 4.38

எனவே, N, S இற்கூடாகவும், கொழும்பிற்கூடாகவும் உள்ள வெட்டு அண்ணளவாக 80° கி. நெட்டாங்கை உடையதாகும். நெட்டாங்குகள் அரைவட்டங்களே என்பதை அவதானியுங்கள் (உரு 4.38).



உரு 4.39

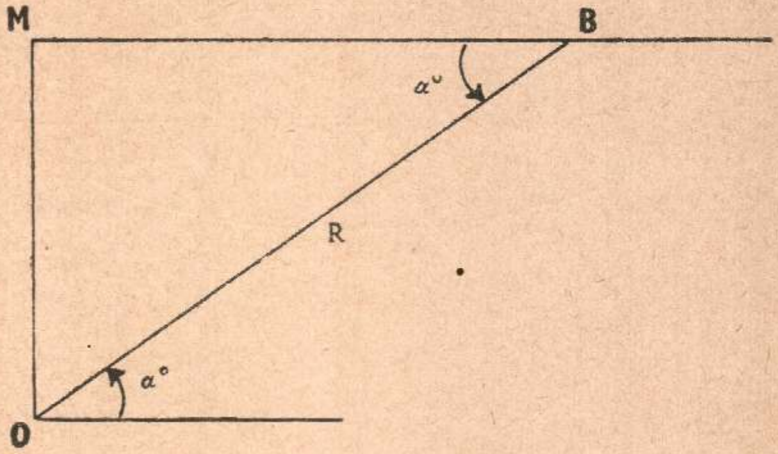
6.2 NS இற்குச் செங்குத்தான வட்டமாகிய வெட்டொன்று மத்திய கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான, புவிப் பரப்பிலுள்ள வட்டமொன்றை வரையறுக்கிறது. இந்த வட்டம் அகலாங்குச் சமாந்தரம் எனப்படும் (உரு 4.39). ஒவ்வோர் அகலாங்கும் 0°, 90° ஆகியவற்றிற்கு இடையே வடக்காக அல்லது தெற்காக அமையும். யாழ்ப்பாணம் கிட்டத்தட்ட $9\frac{1}{2}^\circ$ வடக்கு அகலாங்கை உடையது. அதாவது மத்தியகோட்டின் தளத்துடன் எந்தவொரு புள்ளியும் $9\frac{1}{2}^\circ$ கோணத்தை அமைக்கின்ற வட்டத்தில் உளது. புவிமீதுள்ள புள்ளி ஒன்றுக்கூடாகவும், அப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்ற விட்டம் புவிப் பரப்பைச் சந்திக்கும் மற்றப் புள்ளிக்கூடாகவும் செல்லும் வட்டம் பெருவட்டம் எனப்படும். இது மிகப்பெரிய ஆரையுடைய வட்டமாகும். எனவே, எல்லா நள்வான்களும் அதாவது நெட்டாங்குக் கோடுகளும் N இற்கும் S இற்கும் ஊடாகச் செல்கின்றமையால் அவை பெரு வட்டங்களாகும். மத்தியகோடு பெரு வட்டத்திற்குரிய இன்னோர் உதாரணமாகும். புவியின் மையத்தில் ஒரு கலை கோணத்தை எதிரமைக்கும் நள்வானின் வில்லினது நீளம் ஒரு கலவர் மைல் ஆகும்.

$$\frac{1 \text{ கலவர் மைல்}}{\text{புவியின் பரிதி}} = \frac{1 \text{ கலை}}{360^\circ}$$

$$\therefore \ 1 \text{ கலவர் மைல்} = \frac{\frac{1}{60} \times (2 \times \pi \times 6400)}{360}$$

$$\simeq 1{\cdot}8 \ km$$

6.3 அகலாங்கு வழியே தூரம். முக்கோணி MBO (உரு 4.40, உரு 4·41 நோக்குங்கள்). புவியின் ஆரை R ஆகும். அகலாங்கு α° என்னும் சமாந்தரத்தின் ஆரை MB ஆகும். $\frac{MB}{R}$ = கோசை α°. எனவே அகலாங்குச் சமாந்தரத்தின் ஆரை R கோசை α°, B இன் நெட்டாங்கு β° ஆயின் (உரு 4.41), $A\hat{M}B = \beta^\circ$. வில் AB இன் நீளம் $\frac{\beta}{60} \times 2\pi$ R கோசை α°



உரு 4.40

உதாரணம் 4.11

65° மே, 60° வ ஆகவுள்ள A இற்கும் 25° கி, 60° வ ஆகவுள்ள B இற்குமிடையேயுள்ள தூரத்தை அவற்றின் அகலாங்குச் சமாந்தரம் வழியே காண்க. அகலாங்குச் சமாந்தரத்தின் ஆரை

$$= 6400 \times \text{கோசை } 60^\circ$$
$$= 3200 \ km.$$

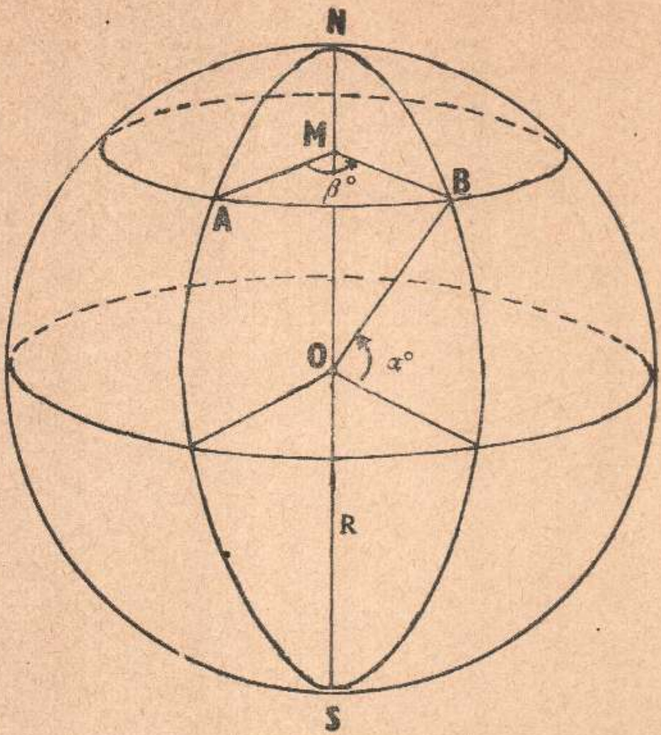
நெட்டாங்குகளின் வித்தியாசம் $65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$

வில் AB இன் நீளம் $= \frac{90}{360} \times 3200 \times 2\pi.$

$$\simeq 5000 \ km$$

உதாரணம் 4.12

A, B எனும் இரு இடங்கள் 26° வ அகலாங்குச் சமாந்தரத்தில் உள்ளன. அவற்றின் நெட்டாங்குகளின் வித்தியாசம் 40°. அவற்றிற்கிடையேயுள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க.



உரு 4.41

இங்கு தேவையான தூரம் பெருவட்டத்தில் (அதாவது உயர்வுப் பெறுமான முள்ள ஆரையைக் கொண்ட வட்டத்தில்) இருக்கும்.

உரு 4.42 இற் காட்டப்பட்டுள்ள நாண் AB, புள்ளி M இல் 40° கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது.

$\frac{1}{2} AB = ($ R கோசை 26°) சைன் 20°.
(உரு 4.43)

AB, புவியின் மையத்திலே கோணம் $2x^\circ$ ஐ எதிரமைக்கின்,
$\frac{1}{2} AB =$ R சைன்x°

மேற்படி இரு கூற்றுக்களிலிருந்தும் சைன் $x^\circ =$ கோசை 26° சைன் 20°

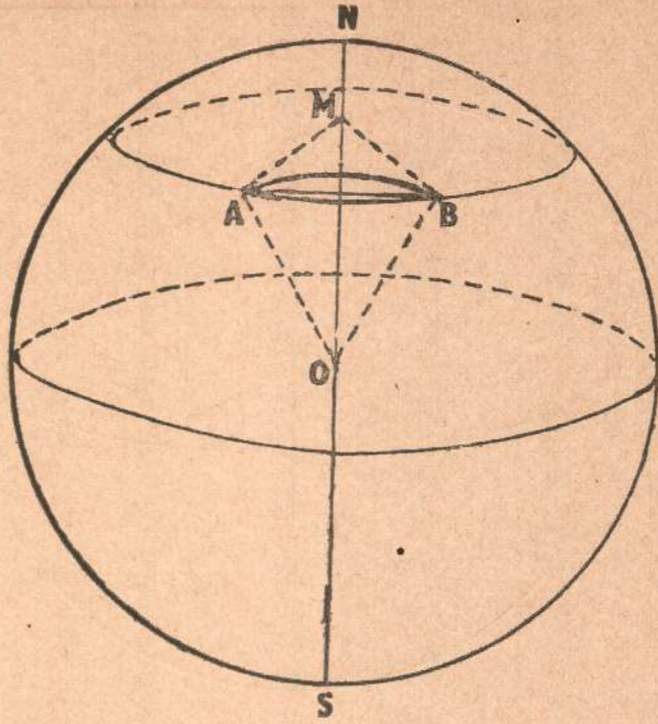
$$x = 17\tfrac{9}{10}$$
$$\therefore \quad 2x = 35\tfrac{4}{5}$$

எனவே, பெருவட்டமொன்றின் வில்லைப் பின்வரும் விகிதத்திலிருந்து காணலாம்.

$$\frac{\text{வில் } AB}{\text{பெருவட்டத்தின் பரிதி}} = \frac{O \text{ வில் } AB \text{ எதிரமைக்குங் கோணம்}}{360^\circ}$$

$$\therefore \quad \text{வில் } AB = 2\pi \times 6400 \times \frac{35\frac{4}{5}}{360}$$

$$\simeq 3968 \ km$$



உரு 4.42

பயிற்சி 4.6

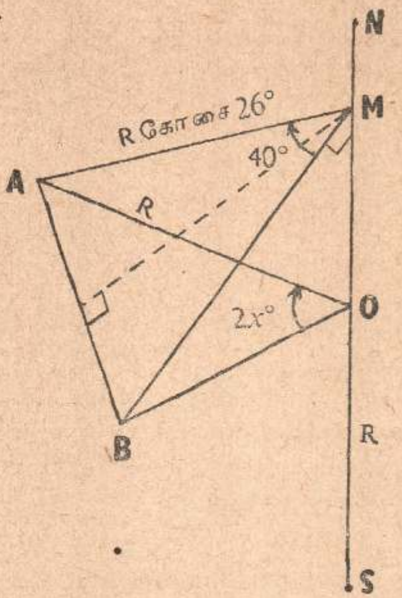
நகரம்	அகலாங்கு		நெட்டாங்கு	
கொழும்பு	7°	வ	80°	கி
யாழ்ப்பாணம்	$9\frac{1}{2}$°	வ	80°	கி
லண்டன்	52°	வ	0°	
மொஸ்கோ	55°	வ	38°	கி
ரோக்கியோ	35°	வ	140°	கி
அடிலெயிட்	35°	தெ	140°	கி
நைரொபி	2°	தெ	38°	கி
அக்ரா	5°	வ	0°	
சென்னை	13°	வ	80°	கி

அட்டவணை 4.6

1. மேலே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணை 4.6 ஐப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் நகரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரங்களைக் காண்க. ஒவ்வொன்றுக்கும் உருவம் வரைக.

(i) லண்டனிற்கும் அக்ராவிற்கும்

(ii) ரோக்கியோவிற்கும் அடிலெயிட்டிற்கும்



உரு 4.43

(iii) மொஸ்கோவிற்கும் நைரோபிக்கும்

(iv) கொழும்பிற்கும் யாழ்ப்பாணத்திற்கும்

(v) கொழும்பிற்கும் சென்னைக்கும்

(vi) யாழ்ப்பாணத்திற்கும் சென்னைக்கும்

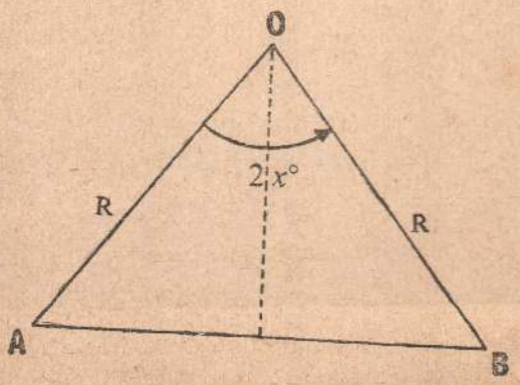
2. $45°$ வடக்கே அகலாங்கையுடைய வட்டத்தின் ஆரையைக் காண்க.

3. பூமி தனது அச்சுப்பற்றி 24 மணிக்கு ஒரு முறை சுற்றுகிறது.

(i) மத்தியகோட்டிலுள்ள புள்ளி ஒன்றின் கதி என்ன?

(ii) யாழ்ப்பாணத்தின் கதி என்ன?

(iii) லண்டனின் கதி என்ன?



உரு 4.44

14725—24

4. P என்ற இடத்தின் உள்ளூர் நேரம் அதன் நெட்டாங்கைச் சார்ந்ததாகும். மத்தியகோட்டிற்கு எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ள இரு இடங்கள் 12 மணித்தியாலங்களால் நேரத்திலும், 180^0 ஆல் நெட்டாங்கிலும் வித்தியாசப்படுகின்றன.

1^0 நெட்டாங்கிற்கான நேர வித்தியாசம் $\frac{12 \times 60}{180}$ நிமிடங்கள் $= 4$ நிமிடங்கள்

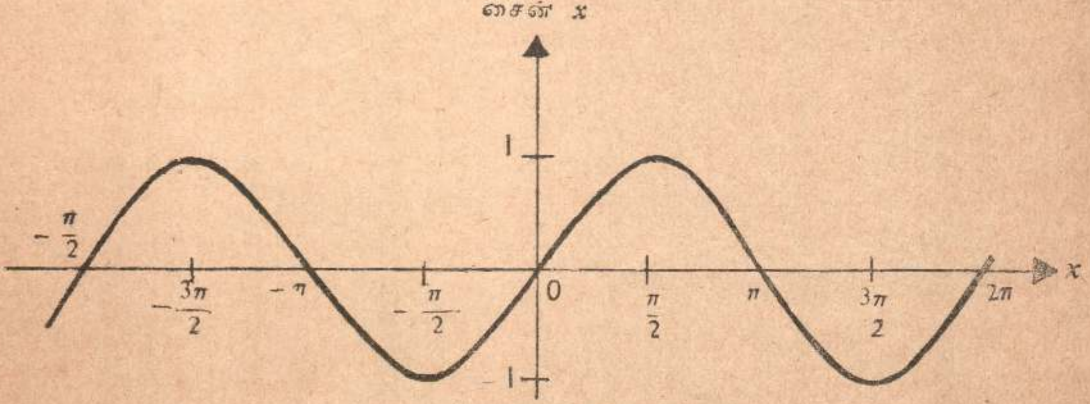
(i) கொழும்பில் நண்பகலாக இருக்கும்போது, லண்டனில் என்ன நேரமாக இருக்கும்?

(ii) கிறிக்கெற் பந்தாட்டம் ஒன்றை லண்டனிலிருந்து உபகோள் மூலம் ஒலிபரப்ப வேண்டும். விளையாட்டு லண்டன் நேரப்படி காலை 11.00 மணிக்கு ஆரம்பமாகின்றதாயின், எந்த நேரம் உங்கள் வானொலிப் பெட்டியைப் போடவேண்டும்?

(iii) அடிலெயிட்டிலிருந்து கிறிக்கெற் பந்தாட்டத்தை ஒலிபரப்ப வேண்டும். எந்த நேரம் உங்கள் வானொலிப் பெட்டியைப் போட வேண்டும்?

7. திரிகோணகணிதச் சார்புகளை வரைபுமூலங் குறித்துக் காட்டல்

7.1 உரு 4.45 $x \rightarrow$ சைன் x இன் வரைபைக் காட்டுகிறது. இங்கு x ஆனது ஆரையன்களில் அளக்கப்படுகிறது.



உரு 4.45

4.1 ஆம் பகுதியிற் குறிப்பிட்ட வண்ணம் இதனை வட்டத்திலிருந்து உய்த்தறியலாமெனக் கண்டோம் (உரு 4.30).

பின்வருவனவற்றை அவதானிப்பது முக்கியமாகும்.

(i) சார்பின் வீச்சு $\{ y : -1 \leqslant y \leqslant 1 \}$ ஆகும்.

(ii) இரு அச்சுகளிலும் ஒரே அலகுகள் பயன்படுத்தப் பெற்றுள்ளன. அளவிடைகள் வேறுபடலாம்.

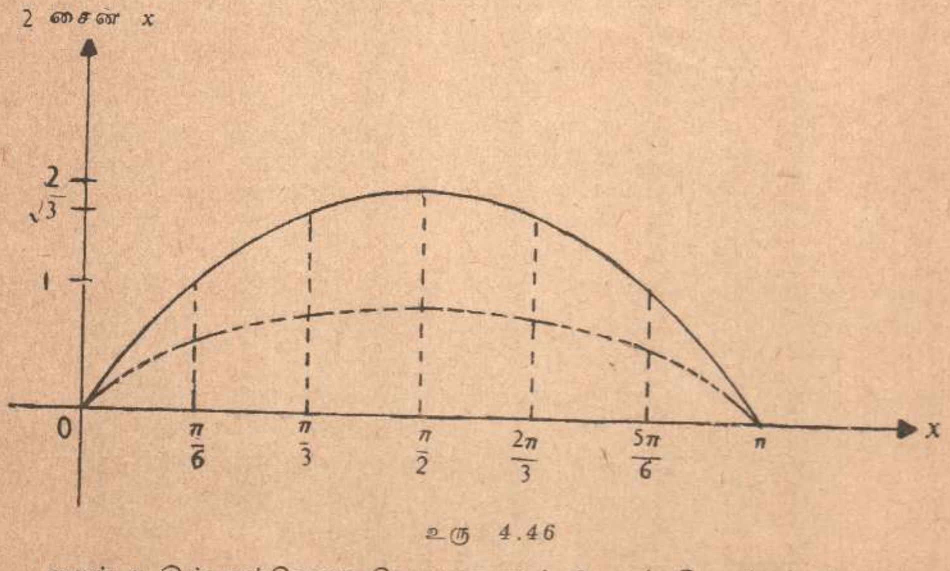
(iii) சார்பு ஆவர்த்தன இயல்புடையதாகையாலும், சைன் $(x + k \cdot 2\pi)$ $=$ சைன் x, இங்கு $k \in \mathbb{Z}$ ஆதலாலும், ஒவ்வொரு 2π ஆவர்த்தனத்திற்குப் பின்னரும் சார்பு மீண்டும் அதே பெறுமானங்களைப் பெறுகிறது.

7.2 $x \rightarrow 2$ சைன் x என்ற படமாக்கல்

$\{x : 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$ என்பதற்கு x இன் பெறுமானங்களையும், அவற்றுக்கு ஒத்த 2 சைன் x இன் பெறுமானங்களையும் அட்டவணை 4.7 தருகிறது. இந்த அட்டவணையைப் பூர்த்தியாக்கி, உரு 4.46 இலுள்ள பூர்த்தியாகாத $x \rightarrow 2$ சைன் x இன் வரைபை $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$ என்ற வீச்சுக்குப் பூர்த்தியாக்குக.

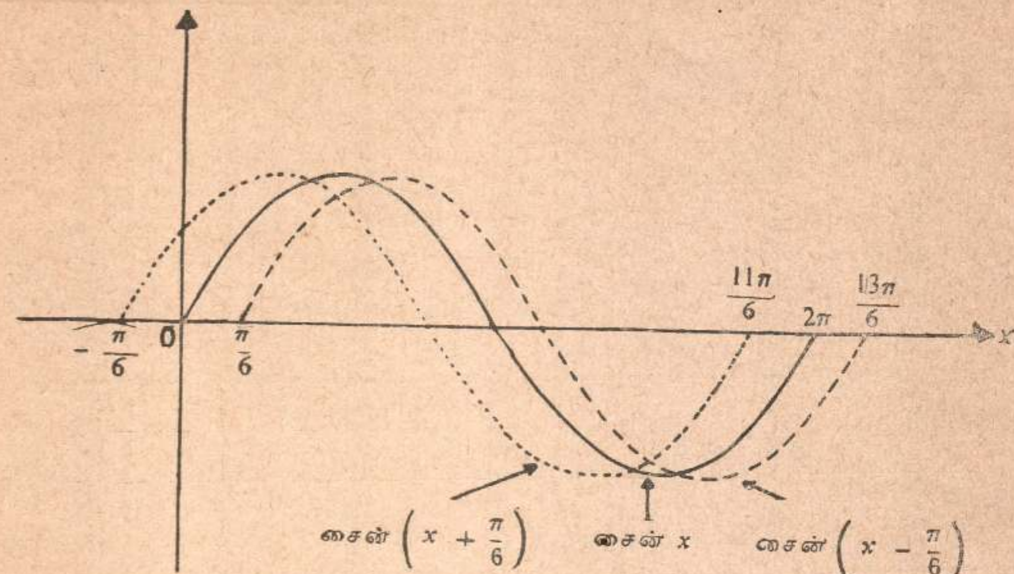
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
சைன் x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0						
2 சைன் x	0	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	1	0						

அட்டவணை 4.7



உரு 4.46

சைன் x இன் ஒவ்வொரு பெறுமானமும் 2 ஆற் பெருக்கப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே $x \rightarrow 2$ சைன் x என்ற சார்பு ஆவர்த்தனவியல்புடையது. அதன் ஆவர்த்தனம் 2π ; வீச்சம் 2 ஆகும். $x \rightarrow$ சைன் x, நிலைக்குத்துத் திசையில் ஈர்ப்பு ஒன்றைப் பெற்றுள்ளதெனக் கூறலாம். இந்த ஈர்ப்புக் காரணி 2 ஆகும். (படம் 4.46 இலுள்ள குற்றிட்ட வரைபு $x \rightarrow$ சைன் x இன் வரைபாடும்.) பொதுவாக $y = A$ சைன் x என்னும் சார்பானது வீச்சம் A யைக் கொண்டது.



உரு 4.47

பயிற்சி 4.7

1. (i) $x \to \frac{2}{3}$ சைன் x என்ற படமாக்கலில் (அ) π (ஆ) $\frac{\pi}{6}$ ஆகியவற்றுக்குப் படமாக்கும் பெறுமானங்கள் என்ன ?

   (ii) சிறிய அட்டவணை ஒன்று தயாரித்து அதன் வரைபை வரைக.

2. ஒரே அச்சுகளில், பின்வரும் படமாக்கல்களின் வரைபுகளையும் வரைக

   (i) $y = 2$ சைன் x

   (ii) $y = 10$ சைன் x

   (iii) $y = \frac{1}{2}$ சைன் x

   ஒவ்வொன்றுக்கும் ஆவர்த்தனத்தையும், வீச்சத்தையும் கூறுக.

3. $x \to 4$ சைன் x என்பதை விபரித்து அதன் வளையியையும் வரைக.

7.3 $x \to$ சைன் $\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ என்ற படமாக்கல். $x + \frac{\pi}{6} = 0$ அல்லது π ஆகவிருக்கும்போது, $y =$ சைன் $\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ என்ற சார்பு 0 ஆகவிருக்கும். அதாவது $x = -\frac{\pi}{6}$ ஆகவும், $x = \frac{5\pi}{6}$ ஆகவுமிருக்கும்போது சார்பு பூச்சியமாகும்.

இதன் வரைபு சைன் x இன் வரைபேயாகும்; ஆனால் இது $\frac{\pi}{6}$ ஆல் இடது பக்கமாகப் பெயர்க்கப்பட்டுள்ளது. இது $x \to x - \frac{\pi}{6}$ என்னும் பெயர்ச்சியாகும். $x \to$ சைன் x வரைந்துள்ள அதே அச்சுகளில் இதன் வரைபையும் வரைந்தால் (உரு 4.47 ஐப் பாருங்கள்), இது $x \to$ சைன் x இற்கு $\frac{\pi}{6}$ ஆற் பின்தங்கி நிற்பதாகத் தோன்றும். இந்த இரு வளையிகளும் ஒன்றிலிருந்து ஒன்று இவ்வாறு பின்தங்கி நிற்கும் அளவு அவத்தை வித்தியாசம் எனப்படும்.

$y =$ சைன் $\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y =$ சைன் $\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ஆகிய இரண்டினதும் வளையிகள் $y =$ சைன் x இன் ஆவர்த்தனத்தையும் வீச்சத்தையுங் கொண்டுள்ளன. ஆனால் $y =$ சைன் $\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ஆனது $\frac{\pi}{6}$ ஆற் பின்தங்குகிறது, $y =$ சைன் $\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ஆனது $\frac{\pi}{6}$ ஆல் முன்னிற்கின்றது. சார்பு ஒன்றை அதனுடன் பொருந்த வைக்கின்ற அவத்தை வித்தியாசம் என, ஆவர்த்தனத்தைக் கொள்ளலாம். சைன் $(x + 2\pi)$, சைன் x உடன் 2π அவத்தை வித்தியாசத்தைக் கொண்டுள்ளது. ஆனால் சைன் $(x + 2\pi) =$ சைன் x. ஆகவே அதன் ஆவர்த்தனம் 2π ஆகும்.

பயிற்சி 4.8

1. ஒரே அச்சுகளில், பின்வரும் சார்புகளின் வரைபை வரைக:

(i) $y =$ சைன் x, $y =$ சைன் $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
$y =$ சைன் $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(ii) $y =$ கோசை x, $y =$ கோசை $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,
$y =$ கோசை $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(iii) $y =$ கோசை $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y =$ கோசை x,
$y =$ சைன் x

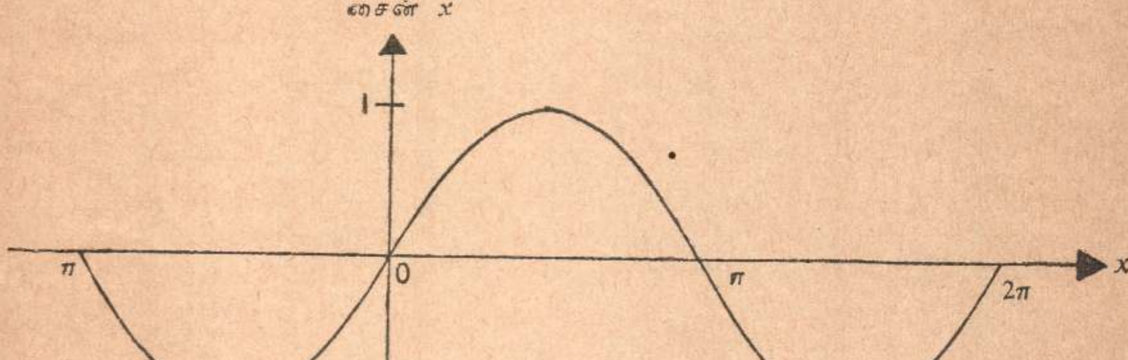
(iii) இலிருந்து என்ன உய்த்தறியலாம் ?

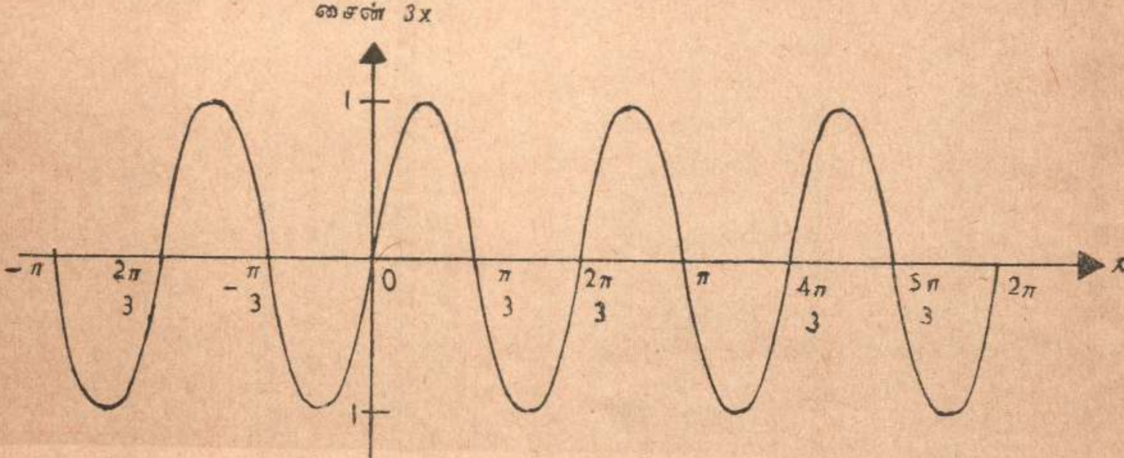
2. $y = 2$ சைன் $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ என்பதன் வரைபை வரைக. இச்சார்பின் வீச்சம், ஆவர்த்தனம், அவத்தை ஆகியவற்றைக் கூறுக.

3. $y =$ சைன் $(x + b)$ என்பதன் வரைபை வரைக. b என்ன பெறுமானங்களை எடுக்கலாமெனக் கூறுக. இச்சார்பு சைன் x இலிருந்து எவ்வாறு வேறுபடுகின்றது ?

7.4 $x \rightarrow$ சைன் $3x$ என்ற படமாக்கல். $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\ldots$ ஆதியனவாக இருக்கும்போது சைன் x என்ற சார்பு பூச்சியமாகும். பொதுவாகக் கூறின், $x \in \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ ஆகும்போது' சைன் $x = 0$.

$3x \in \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$ ஆகும்போது அதாவது, $3x = n\pi$ அல்லது $x = \frac{n}{3}\pi$ ஆகும்போது சைன் $3x = 0$. அதாவது $x = \pm \frac{1}{3}\pi, \pm \frac{2}{3}\pi, \pm \frac{3}{3}\pi, \pm \frac{4}{3}\pi$ ஆகும்போது சைன் $3x = 0$ ஆகும். இத்தீர்வை $x \in \{ \frac{k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \}$ என எழுதலாம். $y =$ சைன் x என்ற சார்பிலும் இச்சார்பு கூடிய பூச்சியங்களைக் கொண்டுள்ளது. $y =$ சைன் x, $y =$ சைன் $3x$ ஆகியவற்றின் இரு வரைபுகளும் உரு 4.48 இலே தரப்பட்டுள்ளன. ஆரம்பித்த அலையினது ஆவர்த்தனம் 2π இன்





உரு 4.48

1/3 பங்காக அதாவது அச்சார்பின் ஆவர்த்தனம் $\frac{\pi 2}{3}$ ஆக மாறியுள்ளது. வீச்சம் அதேயளவாகிய 1 ஆகும். சைன் $3x$ இன் படித்திறன் எல்லாவிடத்

திலும் காரணி 3 ஆல் அதிகரித்துள்ளது. ஆனல் அதன் ஆவர்த்தனம் 1/3 பங்கு அதாவது 2π இலிருந்து $\frac{2\pi}{3}$ இற்குக் குறைந்துள்ளது.

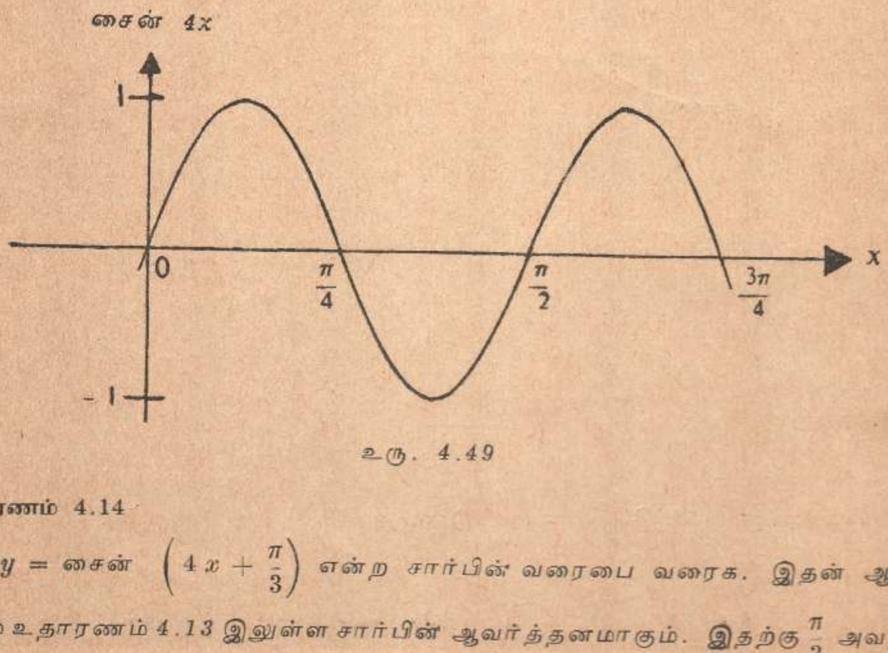
$$\text{சைன்}\ 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \text{சைன்}\ (3x+2\pi) = \text{சைன்}\ 3x$$

என்பது காரணமாக ஆவர்த்தனம் குறைந்துள்ளது எனக் கூறலாம். உரு 4.48 இலுள்ள வரைபுகளிலிருந்து சைன் $3x$ இன் பூச்சியங்கள் அடிக்கடி தோன்று வதைக் காணலாம். ஆவர்த்தனம் 1/3 பங்கு குறைந்ததும், வீச்சம் அதேயளவு இருக்க சைன் $3x$ இன் படித்திறன் காரணி 3 மடங்கு அதிகரித்துள்ளதைக் காண லாம்.

உதாரணம் 4.13

$y =$ சைன் $4x$ இன் வரைபை வரைக. $4x = 0, \pi, 2\pi$ .... ஆகும்போது, சார்பு பூச்சியமாகும்.

அதாவது $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, , ... ஆகும்போது சார்பு பூச்சியமாகும். உரு 4.49 இற் போன்று வரைபு தோன்றும்.



உரு. 4.49

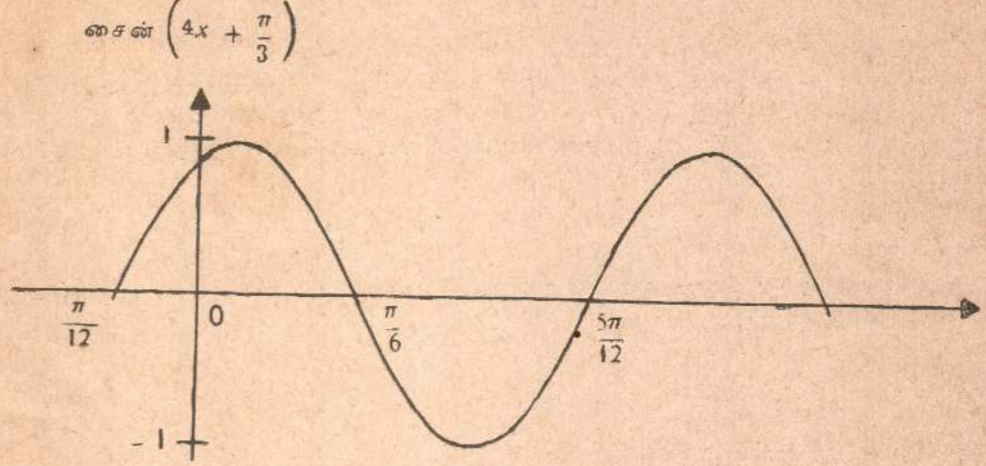
உதாரணம் 4.14

$y =$ சைன் $\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ என்ற சார்பின் வரைபை வரைக. இதன் ஆவர்த் தனம் உதாரணம் 4.13 இலுள்ள சார்பின் ஆவர்த்தனமாகும். இதற்கு $\frac{\pi}{3}$ அவத்தை நூக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சார்பானது x இன் பின்வரும் பெறுமானங் களுக்குப் பூச்சியமாக அமையும்.

$$4x + \frac{\pi}{3} = 0, \pi, 2\pi, \ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \ldots\ldots\ldots$$

வளையி உரு 4.50 இற் போன்று அமையும்.



உரு. 4.50

உதாரணம் 4.15

$y = 3$ கோசை $2x$ இன் வரைபை வரைக.

3 கோசை $2x$ உயர்வு ஆவது $x = 0$ (கோசை $x = 1$) ஆகும் போது ஆதலால்.

இச்சார்பின் வீச்சம் 3, ஆவர்த்தனம் $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ஆகும்.

சார்பு பின்வரும் x இன் பெறுமானங்களுக்குப் பூச்சியமாக அமையும்.

$$2x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$$

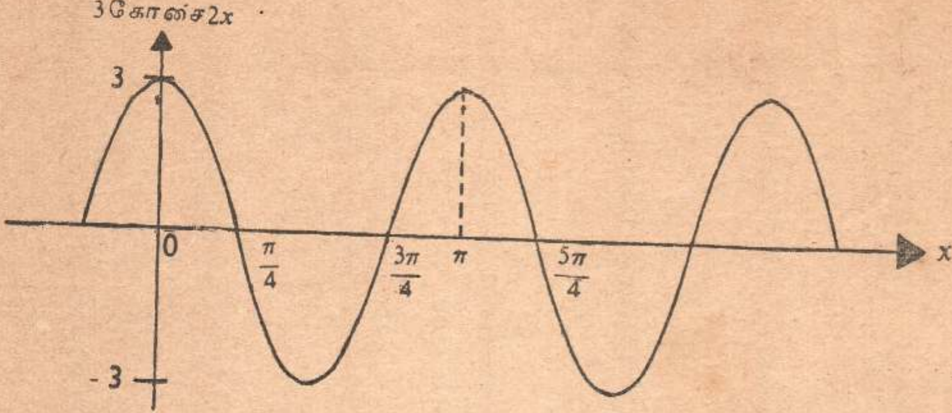
$$\text{அதாவது } x = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \ldots\ldots\ldots$$

இந்த வளையி உரு 4.51 இலே தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 4.16

$y = 2$ கோசை $\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ என்பதன் வரைபை வரைக.

வீச்சம் 2, ஆவர்த்தனம் $\frac{2\pi}{3}$. x இன் பின்வரும் பெறுமானங்களுக்குச் சார்பு பூச்சியமாகும்.



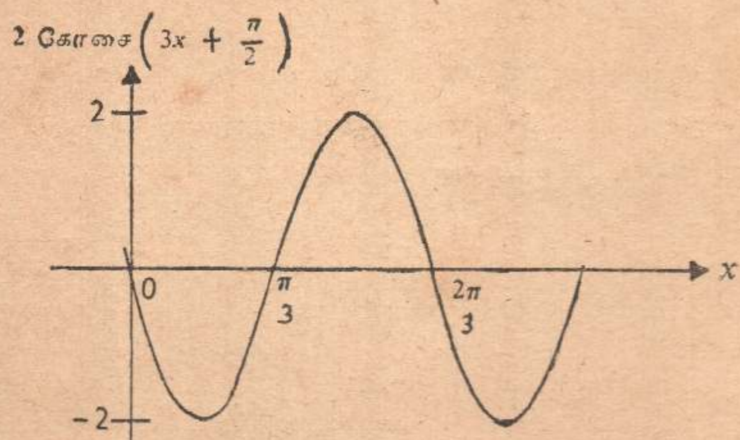
உரு 4.51

$$3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}$$

அ–து. $x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}, \ldots\ldots$

$x = \frac{\pi}{6}$ ஐப் பிரதியிட்டால்,

$y = 2$ கோசை $\pi = -2$ எனப் பெறுவோம். இதன் வளையி, சைன் வளையியின் தலைகீழாகும். உரு 4.52 இல் இந்த வளையி தரப்பட்டுள்ளது.



உரு 4.52

இந்தச் சார்பு $y = -2$ சைன் $3x$ என்ற சார்பேயாகும் என்பதை அவதானியுங்கள். $\frac{\pi}{2}$ என்னும் அவத்தை நூக்கு கோசைன் ⟶ - சைன் ஆகச் செய்கின்றது.

14725—25

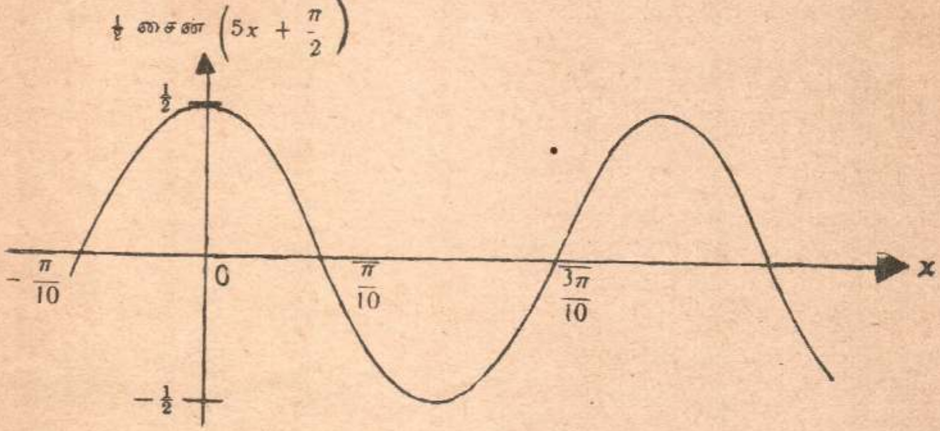
உதாரணம் 4.17

$y = \frac{1}{2}$ சைன் $\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$ என்பதன் வளையியை வரைக.

வீச்சம் $\frac{1}{2}$, ஆவர்த்தனம் $\frac{2\pi}{5}$.

$$5x + \frac{\pi}{2} = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots\ldots$$

ஆகும்போது சார்பு பூச்சியமாகும். அதாவது $x = -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \ldots\ldots$ ஆகும்போது சார்பு பூச்சியமாகும்.



உரு 4.53

இந்த வளையி y – அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீருடையது. $\frac{\pi}{2}$ என்னும் அவத்தை நூக்கு $\frac{1}{2}$ சைன் $5x$ ஐ $\frac{1}{2}$ கோசை $5x$ இற்கு எடுத்துச் செல்கிறது.

$x = 0$ ஐப் பிரதியிட்டால்,

$$y = \frac{1}{2} \text{ சைன் } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

வளையி உரு 4.53 இலே தரப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 4.18

(i) $0 < a < 1$ (ii) $a > 1$ என்பவற்றுக்கு $y =$ சைன் ax இன் வளையியை வரைக. a ஐ அதிகரிப்பதால் வளையியில் ஏற்படும் விளைவைக் கூறுக.

பயிற்சி 4.9

1. 4.13 – 4.17 வரையான 5 உதாரணங்களிலும், சார்புகளின் முதல் மூன்று பூச்சியங்களும் தரப்பட்டுள்ளன.

ஒவ்வொன்றுக்கும் அடுத்த இரு பூச்சியங்களையும் பூச்சியத்திற்கான பொதுப் பெறுமானத்தையும் தருக.

2. பின்வரும் சார்புகளின் வீச்சங்களைக் காண்க.

(i) சைன் $2x$ (ii) $\frac{2}{3}$ சைன் $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (iii) $1\cdot5$ சைன் $\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

(iv) கோசை $(4x + 1)$ (v) 3 சைன் $(x + \pi)$; (vi) a கோசை $x + b$.

3. பின்வரும் சார்புகளின் ஆவர்த்தனங்களைக் காண்க.

(i) சைன் $8x$ (ii) சைன் $(\sqrt{\mu}\,.\,x)$; (iii) சைன் $\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ (iv) கோசை $\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

(v) கோசை $3(x + 2\pi)$.

4. பின்வரும் சார்புகள் சைன் x இலிருந்து வேறுபடும் அவத்தை வித்தியாசத்தைக் கூறுக.

(i) சைன் $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (ii) 3 சைன் $\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (iii) $\frac{1}{4}$ கோசை x

(iv) $\frac{1}{2}$ கோசை $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

5. $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 360^\circ\}$ என்பதற்குப் பின்வரும் சார்புகளின் வரைபுகளை வரைக.

(i) சைன் $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (ii) சைன் $\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ (iii) கோசை $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(iv) கோசை $\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

6. பின்வரும் இயல்புகளை உடைய சைன் சார்பு ஒன்று எழுதுக.

(i) ஆவர்த்தனம் 2π, வீச்சம் 3

(ii) ஆவர்த்தனம் $\frac{\pi}{2}$, வீச்சம் 1

(iii) ஆவர்த்தனம் $p\pi$, வீச்சம் $\frac{1}{2}$.
உங்கள் விடைகள் ஒருதனியானவையா ?

7. பின்வருவனவற்றுக்கு இசைவான இரு சைன் சார்புகள் தருக.

வீச்சம் 3, ஆவர்த்தனம் 2, அவத்தை வித்தியாசம் $\frac{\pi}{6}$.

8. திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்கள்

8.1. சைன் x இனதும் கோசை x இனதும் உயர்வுப் பெறுமானம் 1 எனவும் இழிவுப் பெறுமானம் -1 எனவுங் கண்டோம்.

அதாவது $-1 \leqslant$ சைன் $x \leqslant 1$

$-1 \leqslant$ கோசை $x \leqslant 1$

$y = A$ சைன் $(px + q)$ ஆயின்

$-A \leqslant y \leqslant A$

உதாரணம் 4.19

$4 + 3$ சைன் x இன் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$\text{E} = 4 + 3 \text{ சைன் } x \text{ என எழுதுக.}$$

$$\text{E}_{\text{உயர்வு}} = 4 + 3 \times 1 = 7;$$

$$\text{E}_{\text{இழிவு}} = 4 + 3 \times (-1) = 1.$$

$$\therefore \; 1 \leqslant E \leqslant 7.$$

உதாரணம் 4.20

$\dfrac{4}{3 + 2 \text{ கோசை}^2 x}$ இன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$E = \frac{4}{3 + 2 \text{ கோசை}^2 x} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$-1 \leqslant \text{கோசை } x \leqslant 1 \text{ ஆயின்,}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \text{கோசை}^2 x \leqslant 1;$$

கோசை x மறையாகும்போது, கோசை$^2 x$ நேராகும்.

$$\therefore \; E_{\text{உயர்வு}} = \frac{4}{3 + 2 \times 0} = \frac{4}{3};$$

$$E_{\text{இழிவு}} = \frac{4}{3 + 2 \times 1} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \; \frac{4}{5} \leqslant E \leqslant \frac{4}{3}.$$

உதாரணம் 4.21

சைன் $\theta = \dfrac{3 - 2x}{4 + x}$ ஆக அமைதற்கு x இன் பெறுமான வீச்சைக் காண்க.

$$-1 \leqslant \text{சைன் } \theta \leqslant 1 \text{ ஆதலால்}$$

$$-1 \leqslant \frac{3 - 2x}{4 + x} \leqslant 1 \text{ எனப் பெறுவோம்.}$$

முதலாவது சமனில்பாட்டை எடுத்தால்

$$-1 \leqslant \frac{3 - 2x}{4 + x}$$

$$\Rightarrow -4 - x \leqslant 3 - 2x$$

$$\Rightarrow x \leqslant 7$$

இரண்டாவது சமனில்பாட்டை எடுத்தால்

$$\frac{3 - 2x}{4 + x} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 3 - 2x \leqslant 4 + x$$

$$\Rightarrow -1 \leqslant 3x$$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{3} \leqslant x$$

$$\therefore \; -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 7 \text{ ஆகவிருக்கும்போது}$$

$$\text{சைன் } \theta = \frac{3 - 2x}{4 + x}$$

பயிற்சி 4.10

1. பின்வருவனவற்றின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $2 + 3$ சைன் x ; (ii) $\dfrac{8}{3 + 5 \text{ சைன் } x}$; (iii) 3 சைன்^{2} $2x$.

2. p உம் q உம் நேரானவையாயின், பின்வருவனவற்றிற் சாத்தியமானவை எவை ?

(i) சைன் $x = \dfrac{p + 2q}{p + q}$ (ii) கோசை $x = \dfrac{a - b}{a + b}$;

(iii) தான் $\theta = 23\frac{1}{2}\, pq$

3. பின்வருவன சாத்தியமாக அமைதற்கு x இனது பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

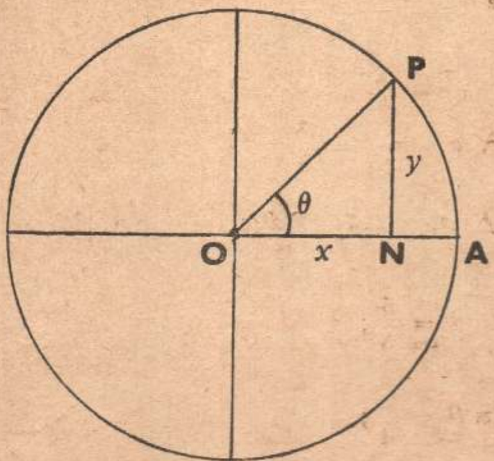
(i) சைன் $\theta = \dfrac{1}{x}$ (ii) கோசை $\theta = 1 - x$ (iii) கோசை $\theta = \dfrac{x}{2x-1}$.

4. 2 சைன் θ + கோசை θ வின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. சில சர்வசமன்பாடுகள்

9.1 O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஆரை OP ஐ r எனக் கொள்வோம்.

செங்கோண முக்கோணி OPN இல் (உரு 4.54),



உரு 4.54

$$x = r \text{ கோசை } \theta, \quad y = r \text{ சைன் } \theta$$

பைதகரசின் விதிப்படி

$$ON^2 + PN^2 = OP^2 ;$$

$\therefore$ கோசை$^2\ \theta$ + சைன்$^2\ \theta = 1$ . . . (1)

இங்கு கோசை $^2\ \theta$ என்பது (கோசை $\theta)^2$ என்பதைக் கருதும்

(1) ஆவதைக் கோசை $^2\ \theta$ ஆல் வகுத்தால், பின்வருவதைப் பெறுவோம்:

$$1 + \frac{\text{சைன்}^2\ \theta}{\text{கோசை}^2\theta} = \frac{1}{\text{கோசை}^2\ \theta}$$

அதாவது, $1 +$ தான்$^2\ \theta =$ சீக$^2\ \theta$ ....(2).

அவ்வண்ணமே, சைன்$^2\ \theta$ ஆல் வகுத்தால், பின்வருவதைப் பெறுவோம் :

$$\frac{\text{கோசை}^2\ \theta}{\text{சைன்}^2\ \theta} + 1 = \frac{1}{\text{சைன்}^2\ \theta}$$

$1 +$ கோதா$^2\ \theta =$ கோசீ$^2\ \theta$ ....(3).

உதாரணம் 4.22

கோசை $\theta = \frac{4}{5}$ ஆயின், சைன் θ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க. இவற்றிலிருந்து θ வின் மற்றைய திரிகோணகணித விகிதங்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(1) இலிருந்து, கோசை$^2\ \theta$ + சைன் $^2\ \theta = 1$

அதாவது, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ + சைன் $^2\ \theta = 1$.

சைன் $^2\ \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

முதலாவது வகை

$0 < \theta < 90^\circ$ ஆயின், சைன் $\theta = \frac{3}{5}$

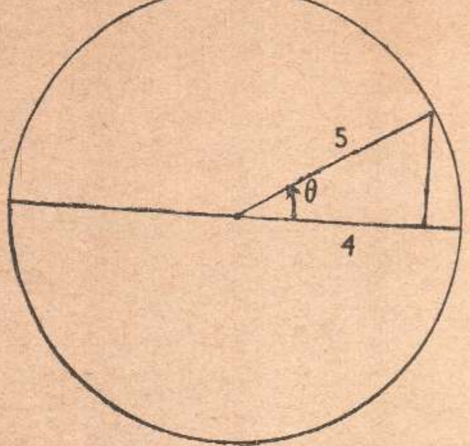
கணிப்புகள் செய்த உரு 4.55 இலிருந்து மற்ற விகிதங்களின் பெறுமானங்களை வாசிக்கலாம்.

கோசீ $\theta = \frac{5}{3}$;

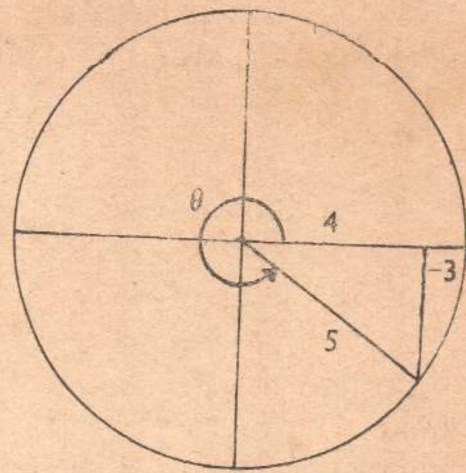
சீக $\theta = \frac{5}{4}$;

தான் $\theta = \frac{3}{4}$;

கோதா $\theta = \frac{4}{3}$.



உரு 4.55



உரு 4.56

இரண்டாவது வகை

$360^\circ > \theta > 270^\circ$ ஆயின்,

$$\text{சைன் } \theta = -\frac{3}{5} \text{ (உரு. 4.56)}$$

மற்றைய விகிதங்கள் பின்வருமாறு

$$\text{கோசீ } \theta = -\frac{5}{3}$$

$$\text{சீக } \theta = \frac{5}{4}$$

$$\text{தான் } \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\text{கோதா } \theta = -\frac{4}{3}.$$

360° இலும் கூடிய அல்லது 0° இலும் குறைந்த கோணங்களுக்குங்கூட இப் பெறுமானத் தொடைகளில் ஒன்றை எஞ்சிய ஐந்து சார்புகளுக்கும் பெறுவோம்.

உதாரணம் 4.23

தான் $\alpha = p$ ஆயின், $0 < \alpha < 90^\circ$ எனக் கொண்டு, மற்றைய சார்புகளைக் காண்க.

$$\text{தான்}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\text{கோசை}^2 \alpha};$$

$$\therefore \text{ கோசை}^3 \alpha = \frac{1}{\text{தான்}^2 \alpha + 1};$$

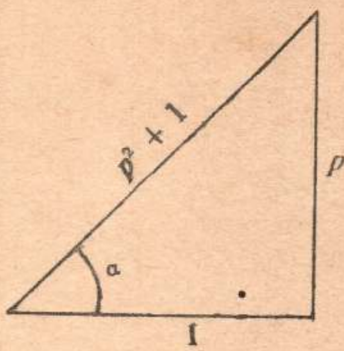
$$\text{அதாவது கோசை}^2 \alpha = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\therefore \text{ கோசை } \alpha = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

$$\text{தான் } \alpha = \frac{\text{சைன் } \alpha}{\text{கோசை } \alpha} \quad \text{ஆதலின்,}$$

$$\text{சைன் } \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

இவற்றிலிருந்து உரு 4.57 ஐ நாம் வரையலாம்.



உரு 4.57

பின்வருவனவற்றை நாம் பெறலாம்.

$$\text{சீக } \alpha = \sqrt{p^2+1}$$

$$\text{கோசீ } \alpha = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$$

$$\text{கோதா } \alpha = \frac{1}{p}$$

$\alpha < 90^\circ$ எனத் தரப்பட்டிருந்தால், இந்த உதாரணத்தில் நாம் சார்புகளின் குறிகளைப் பரிசீலனை செய்ய வேண்டியதில்லை. அவ்வாறு தரப்படாவிடின், இதற்கு முந்திய உதாரணத்திற் போன்று சாத்தியமான மற்றைய பெறுமானங்களையும் பரிசீலனை செய்ய வேண்டும்.

பயிற்சி 4.11

1. சைன் $\theta = \frac{1}{2}$ ஆயின், கோசை θ, தான் θ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. கோசை $\theta = \dfrac{5}{13}$ ஆயின், கோசீ θ, கோதா θ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. கோசை $\alpha = 1$ ஆயின், சைன் α, தான் α ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. தான் $x = \dfrac{a}{b}$ ஆயின், சைன் x, கோசை x ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. சைன் $\theta = \frac{3}{4}$ கோசை θ ஆயின் ; சீக θ, கோதா θ ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. a கோசை^{2} $\theta + b$ சைன்^{2} $\theta + c = 0$ ஆயின், தான் θ வை a, b, c ஆகியவற்றிற் காண்க.

உதாரணம் 4.24

$$\text{சைன் } A = \frac{\text{கோசை } A \text{ சீக } A}{\text{கோசீ } A} = \frac{\text{தான் } A}{\sqrt{1 + \text{தான்}^2 A}}$$

என்ற சர்வசமன்பாட்டை நிறுவுக.

$$\frac{\text{கோசை } A \text{ சீக } A}{\text{கோசீ } A} = \frac{\text{கோசை } A \quad \dfrac{1}{\text{கோசை } A}}{\dfrac{1}{\text{சைன் } A}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\text{சைன் } A}} = \text{சைன் } A$$

$$\text{மேலும் } \frac{\text{தான் } A}{\sqrt{1 + \text{தான்}^2 A}} = \frac{\text{சைன் } A}{\text{கோசை } A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\text{சீக}^2 A}}$$

$$= \frac{\text{சைன் } A}{\text{கோசை } A} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{\text{கோசை } A}}$$

$$= \text{சைன் } A$$

$$\text{அல்லது } \frac{\text{தான் } A}{\sqrt{1 + \text{தான்}^2 A}} = \frac{\text{சைன் } A}{\text{கோசை } A} \div \sqrt{1 + \frac{\text{சைன்}^2 A}{\text{கோசை}^2 A}}$$

$$= \frac{\text{சைன் } A}{\text{கோசை } A} \div \sqrt{\frac{\text{கோசை}^2 A + \text{சைன்}^2 A}{\text{கோசை}^2 A}}$$

$$= \frac{\text{சைன் } A}{\text{கோசை } A} \div \frac{1}{\text{கோசை } A}$$

$$= \text{சைன் } A$$

இத்தகைய சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவும்போது, நீண்ட கோவைகளில் ஆரம்பித்து, குறுகிய கோவைகள் வருமாறு அவற்றைச் சுருக்குதல் பெரும்பாலும் சுலபமாகும்.

உதாரணம் 4.25

நிறுவுக :

$$\text{சைன் } \alpha \, (1 + \text{தான் } \alpha) + \text{கோசை } \alpha \, (1 + \text{கோதா } \alpha)$$
$$= \text{சீக } \alpha + \text{கோசீ } \alpha$$

14725—26

நீண்ட கோவையாகிய இடக்கைக் கோவையை நோக்குவோம்.

$$\text{சைன் } \alpha\,(1 + \text{தான் } \alpha) + \text{கோசை } \alpha\,(1 + \text{கோதா } \alpha)$$

$$= \text{சைன் } \alpha + \frac{\text{சைன் } \alpha\,.\,\text{சைன் } \alpha}{\text{கோசை } \alpha} + \text{கோசை } \alpha$$

$$+ \frac{\text{கோசை } \alpha\,.\,\text{கோசை } \alpha}{\text{சைன் } \alpha}$$

$$= \text{சைன் } \alpha + \frac{\text{கோசை}^2 \alpha}{\text{சைன் } \alpha} + \text{கோசை } \alpha + \frac{\text{சைன்}^2 \alpha}{\text{கோசை } \alpha}$$

$$= \frac{\text{சைன்}^2 \alpha + \text{கோசை}^2 \alpha}{\text{சைன் } \alpha} + \frac{\text{கோசை}^2 \alpha + \text{சைன்}^2 \alpha}{\text{கோசை } \alpha}$$

$$= \frac{1}{\text{சைன் } \alpha} + \frac{1}{\text{கோசை } \alpha}$$

$$= \text{கோசீ } \alpha + \text{சீக } \alpha$$

உதாரணம் 4.26

$$\frac{\text{தான் } \theta + \text{சீக } \theta - 1}{\text{தான்} \theta - \text{சீக } \theta + 1} = \frac{1 + \text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta}$$ என நிறுவுக.

$$\frac{\text{தான் } \theta + \text{சீக } \theta - 1}{\text{தான் } \theta - \text{சீக } \theta + 1}$$

$$= \frac{\text{தான் } \theta + \text{சீக } \theta - (\text{சீக}^2 \theta - \text{தான்}^2 \theta)}{\text{தான் } \theta - \text{சீக } \theta + 1}$$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ என்பதைப் பயன்படுத்த,

$$= \frac{(\text{தான் } \theta + \text{சீக } \theta)(1 - \text{சீக } \theta + \text{தான் } \theta)}{(\text{தான் } \theta - \text{சீக } \theta + 1)}$$

$$= \text{தான் } \theta + \text{சீக } \theta$$

$$= \frac{\text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta} + \frac{1}{\text{கோசை } \theta}$$

$$= \frac{1 + \text{சைன் } \theta}{\text{கோசை } \theta}$$

எனப் பெறுவோம்.

பயிற்சி 4.12

பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக.

1. $\dfrac{1 + \text{சைன் } \alpha}{1 + \text{கோசை } \alpha} \times \dfrac{1 + \text{சீக } \alpha}{1 + \text{கோசீ } \alpha} = \text{தான் } \alpha$

2. $\text{தான் } \alpha + \text{கோதா } \alpha = \text{கோசீ } \alpha \text{ சீக } \alpha$

3. $\dfrac{\text{சைன் } \theta}{1 - \text{கோசை } \theta} = \dfrac{1 + \text{கோசை } \theta}{\text{சைன் } \theta}$

4. $\text{தான் } \alpha - \text{கோதா } \alpha = \dfrac{2 \text{ சைன் }^2 \alpha - 1}{\text{சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha}$

5. $\dfrac{\text{கோசை } \alpha}{1 - \text{தான் } \alpha} + \dfrac{\text{சைன் } \alpha}{1 - \text{கோதா } \alpha} = \text{சைன் } \alpha + \text{கோசை } \alpha$

6. $\text{சைன் }^2 \theta \ \ \text{தான் } \theta + \text{கோசை }^2 \theta \text{ கோதா } \theta$
$+ 2 \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta = \text{தான் } \theta + \text{கோதா } \theta$

7. $\text{சைன் }^4 \theta + \text{கோசை }^4 \theta = 1 - 2 \text{ சைன் }^2 \theta \text{ கோசை }^2 \theta.$

8. $(\text{சைன் } A + \text{கோசை } A).\ (\text{தான் } A + \text{கோதா } A)$
$= \text{சீக } A + \text{கோசீ } A.$

10. பொதுவான முக்கோணிகள்

10.1. உரு 4.58 இற் காட்டியது போன்ற B இற் செங்கோணமும் AB, BC சமநீளம் r அலகுகளாகவும் அமைந்த செங்கோண முக்கோணி ABC யை வரைக. பைதகரசின் விதிப்படி AC இன் நீளத்தைக் கணித்தால், அது $r\sqrt{2}$ அலகுகளாக அமையும். மேலும் A, B இலுள்ள கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் 45° ஆகும்.

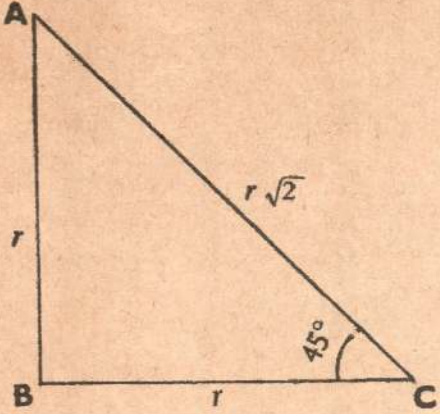
ஆகவே, $\text{சைன் } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{கோசை } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}},$

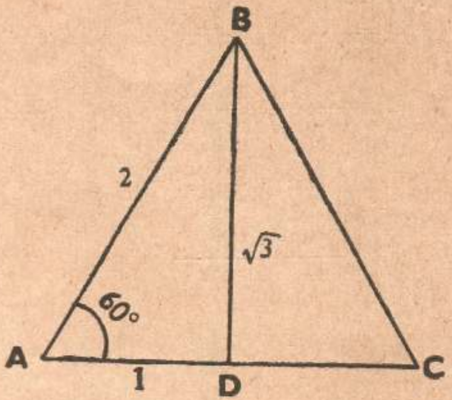
$\text{தான் } 45^\circ = 1$ என்பவற்றைப் பெறுவோம்.

10.2. பக்கம் 2 அலகு நீளமுள்ள சமபக்க முக்கோணி ஒன்று வரைக. உரு 4.59 இற் காட்டியவாறு B இலிருந்து AC இற்குச் செங்குத்து BD யை வரைக. BD ஆனது AC ஐ இருசமகூறிடுகிறது. ஆகவே AD யின் நீளம் 1 அலகாகும். பைதகரசின் விதிப்படி $BD = \sqrt{3}$. கோணம் $A = 60^\circ$; கோணம் $ABC = 30^\circ$ எனவே பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்.

$\text{சைன் } 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$ $\qquad \text{சைன் } 30^\circ = \dfrac{1}{2};$



உரு 4.58



உரு 4.59

(குறிப்பு: பக்கத்தின் நீளம் விகிதத்தைப் பாதிக்காது)

கோசை $60^\circ = \frac{1}{2}$; கோசை $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

தான் $60^\circ = \sqrt{3}$; தான் $30^\circ = 1/\sqrt{3}$.

இந்த இரு கோணங்களும் கணிதத்துறையில் அடிக்கடி வருவன. ஆகையால் இவற்றின் திரிகோணகணித விகிதங்களை அறிந்திருத்தல் நன்று.

பிரசினம் 4.11

கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணை 4.8 ஐப் பிரதிசெய்து, உரு 4.58, உரு 4.59 ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி அதனைப் பூர்த்தியாக்குக.

x	0°	30°	45°	60°	90°
சைன் x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
கோசை x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$	0
தான் x	0		1		—

அட்டவணை 4.8

பயிற்சி 4.13

அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாது, பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை எழுதுக. [சைன் $(90^\circ - A)$ முதலியவற்றின் சர்வசமன்பாடுகளை நினைவு கூருக.]

(i) $\dfrac{\text{சைன் } 50^\circ}{\text{கோசை } 40^\circ}$ (ii) $\dfrac{\text{தான் } 29^\circ}{\text{கோதா } 61^\circ}$

(iii) கோசை^{2} 30° + சைன்^{2} 30° (iv) கோசீ^{2} 30° − கோதா^{2} 60°

(v) 1 + தான்^{2} 60° (vi) 1 − கோசை^{2} 60°

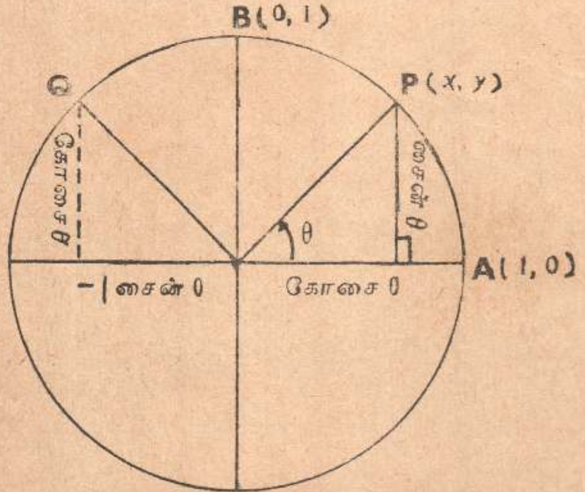
(vii) சைன் ^{2} 60° + தான்^{2} 45° (viii) தான்^{2} 60° + தான்^{2} 45°

(ix) சைன் ^{2} 30° + கோசை^{2} 60° (x) கோசீ^{2} 60°−1

11. சுழற்சி

11.1 6 − 9 ஆம் வகுப்புகளிலே காவிபற்றிக் கற்றதிலிருந்து, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற தாயம், தளத்தில் அமையும் உருமாற்றங்களை வரையறுக்கிறது என்பதை நீங்கள் நினைவுகூரலாம்.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ என்பது எந்த நிலைக்கு உருமாற்றப்பட்டுள்ளது எனக் காவி $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ கூறுகின்றது ; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ என்பது எந்த நிலைக்கு உருமாற்றப்பட்டுள்ளது எனக் காவி $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$



உரு 4.60

கூறுகின்றது. உற்பத்திபற்றிக் கோணம் θ வைச் சுழற்சியாகத் தருகின்ற தாயத்தை இப்போது அமைப்போம். உரு 4.60 இல், புள்ளி $P\ (x, y)$ ஐ $A\ (1, 0)$ இலிருந்து பெற்ற சுழற்சியாகக் கொள்ளலாம். எனவே

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{கோசை } \theta \\ \text{சைன் } \theta \end{pmatrix}$$

இது தாயம் $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ இன் முதலாவது நிரலைத் தருகின்றது. மேலும் புள்ளி

$B(0, 1)$, புள்ளி Q விற்கு உருமாற்றப்பட்டுள்ளது. Q வின் ஆள்கூறுகள் ($-$ சைன் θ, கோசை θ) என நாம் காணலாம். ஆகவே, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\text{சைன் } \theta \\ \text{கோசை } \theta \end{pmatrix}$. இது தாயத்தின் இரண்டாவது நிரலைத் தருகின்றது. உற்பத்திபற்றி θ சுழற்

$$\text{தாயம் } \Theta = \begin{pmatrix} \text{கோசை } \theta & -\text{சைன் } \theta \\ \text{சைன் } \theta & \text{கோசை } \theta \end{pmatrix}$$

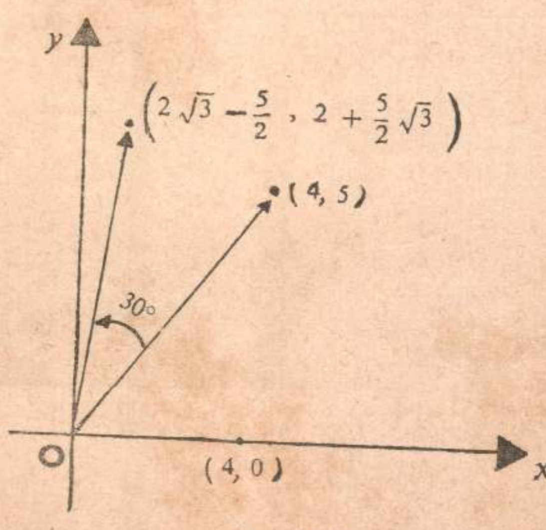
என்பதால் விபரிக்கலாம் என நாம் காண்கிறோம். ஆகவே, காவி ஒன்றை θ கோணத்தாற் சுழற்றுவதாற் பெறும் விளைவை அக்காவியைத் தாயம் Θ ஆல் முன் பெருக்கிக் காணலாம்.

உதாரணம் 4.27

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ என்ற காவி 30° கோணத்தாற் சுழற்றப்பட்டுள்ளது. புது நிலையைக் காண்க. உரு 4.61 ஐப் பாருங்கள். சைன் $30^\circ = \frac{1}{2}$; கோசை $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகவே, இந்தச் சுழற்சியை விபரிக்கும் தாயம்

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

என்பதாகும்.



உரு 4.61

காவியை $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ என்ற நிரற் காவியாக எழுதலாம். எனவே உருமாற்றம் பின்வருமாறு வரும்.

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}.5\\ \frac{1}{2}.4 & +\frac{\sqrt{3}}{2}.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3} & -\frac{5}{2}\\ 2 & +\frac{5\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

பயிற்சி 4.14

1. (i) 60° (ii) 45° (iii) 30° ஆகிய சுழற்சிகளை விபரிக்கும் தாயங்களை எழுதுக.

2. $(\frac{2}{3})$ என்ற காவியை 60°, 45°, 30° ஆகிய கோணங்களுக்கூடாக அடுத்தடுத்துச் சுழற்றும்போது ஏற்படும் முதலாவது நிலையைக் காண்பதற்கு வினா 1 இற்குப் பெற்ற தாயங்களைப் பயன்படுத்துக.

12. கூட்டுக் கோணங்கள்

12.1 ஒரு சுழற்சியைப் பின்தொடர்ந்து இன்னொரு சுழற்சி தோன்றுவதால் ஏற்படும் விளைவுகளை இனி நோக்குவோம். $P(x, y)$ என்னும் புள்ளி θ கோணத்திற்கூடாக, புள்ளி Q விற்குச் சுழற்றப்பட்டுப் பின்னர் மேலும் கோணம் ϕ இற்கூடாகப் புள்ளி R இற்குச் சுழற்றப்பட்டதாகக் கொள்வோம்.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\theta\\\theta\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{கோசை}\ \theta & -\ \text{சைன்}\ \theta\\ \text{சைன்}\ \theta & \text{கோசை}\ \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

இரண்டாவது சுழற்சியால்

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\text{கோசை}\ \phi & -\ \text{சைன்}\ \phi\\ \text{சைன்}\ \phi & \text{கோசை}\ \phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y''\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ இற்காக முன்னர் பெற்றதைப் பிரதியிட்டால், பின்வருங் கூற்றைப் பெறுவோம்.

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{கோசை}\ \phi & -\ \text{சைன்}\ \phi\\ \text{சைன்}\ \phi & \text{கோசை}\ \phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{கோசை}\ \theta & -\ \text{சைன்}\ \theta\\ \text{சைன்}\ \theta & \text{கோசை}\ \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{array}{l}\text{கோசை}\ \theta\ \text{கோசை}\ \theta\\ -\text{சைன்}\ \phi\ \text{சைன்}\ \phi\end{array} & \begin{array}{l}-(\text{கோசை}\ \phi\ \text{சைன்}\ \theta\\ +\ \text{சைன்}\ \phi\ \text{கோசை}\ \theta)\end{array}\\ \\ \begin{array}{l}\text{சைன்}\ \phi\ \text{கோசை}\ \theta\ +\\ \text{கோசை}\ \phi\ \text{சைன்}\ \theta\end{array} & \begin{array}{l}\text{கோசை}\ \phi\ \text{கோசை}\ \theta\\ -\text{சைன்}\ \phi\ \text{சைன்}\ \theta\end{array}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

இறுதி விளைவு, P ஐ $(\theta + \phi)$ கோணத்தால் R இற்குச் சுழற்றுவதாகும். இதன் சுழற்சித் தாயம் பின்வருமாறு.

$$\begin{pmatrix} \text{கோசை } (\theta+\phi & -\text{சைன் } (\theta+\phi) \\ \text{சைன் } (\theta+\phi) & \text{கோசை } \phi(\theta+\phi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{கோசை } (\theta+\phi) & \text{சைன் } (\theta+\phi) \\ \text{சைன் } (\theta+\phi) & \text{கோசை } (\theta+\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ஆகவே, பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்.

$$\begin{pmatrix} \text{கோசை } (\theta+\phi) & -\text{சைன் } (\theta+\phi) \\ \text{சைன் } (\theta+\phi) & \text{கோசை } (\theta+\phi) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \text{கோசை } \phi \text{ கோசை } \theta & -(\text{கோசை } \phi \text{ சைன் } \theta \\ -\text{சைன் } \phi \text{ சைன் } \theta & +\text{சைன் } \phi \text{ கோசை } \theta \\ & \\ \text{சைன் } \phi \text{ கோசை } \theta & \text{கோசை } \phi \text{ கோசை } \theta \\ +\text{கோசை } \phi \text{ சைன் } \theta & -\text{சைன் } \phi \text{ சைன் } \theta \end{pmatrix}$$

இது பயனுள்ள இரு சர்வசமன்பாடுகளைத் தருகின்றது. அவற்றை ஒழுங்குபடுத்தியபின் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\left.\begin{aligned} \text{கோசை } (\theta+\phi) &= \text{கோசை } \theta \text{ கோசை } \phi - \text{சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi \\ \text{சைன் } (\theta+\phi) &= \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi + \text{கோசை } \theta \text{ சைன் } \phi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(1)$$

இந்த இரு முக்கியமான சர்வசமன்பாடுகளையும் நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்துவோம். இவற்றிலிருந்து நாம் வேறு பல தொடர்புகளை உய்த்தறியலாம்.

12.2 இப்போது இந்தச் சர்வசமன்பாடுகளிலிருந்து பெறக்கூடிய தொடர்புகள் சிலவற்றைக் காட்டுவோம். கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் கூட்டுக்கோணங்கள் எனக் குறிப்பிடுவோம்; 3θ, 4θ போன்ற கோணங்களை மடங்குக் கோணங்கள் எனக் குறிப்பிடுவோம். சமன்பாடு *(1)* இல் ϕ இற்காக $(-\phi)$ ஐப் பிரதியிடுவோம். கோசை $(-\phi)$ = கோசை ϕ, சைன் $(\theta-\phi)$ = சைன் ϕ ஆதலால்

$$\text{கோசை } (\theta-\phi) = \text{கோசை } \theta \text{ கோசை } (-\phi) - \text{சைன் } \theta \text{ சைன் } (-\phi)$$

$$\therefore \text{கோசை } (\theta-\phi) = \text{கோசை } \theta \text{ கோசை } (-\phi) + \text{சைன் } \theta \text{ சைன் } (-\phi)$$

இவ்வண்ணமே

$$\text{சைன் } (\theta-\phi) = \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi - \text{கோசை } \theta \text{ சைன் } \phi$$

உதாரணம் 4.28

$$\text{தான் } (\theta+\phi) = \frac{\text{தான் } \theta + \text{தான் } \phi}{1 - \text{தான் } \theta \text{ தான் } \phi} \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\text{தான் } (\theta+\phi) = \frac{\text{சைன் } (\theta+\phi)}{\text{கோசை } (\theta+\phi)}$$

$$= \frac{\text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi + \text{கோசை } \theta \text{ சைன் } \phi}{\text{கோசை } \theta \text{ கோசை } \phi - \text{சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi}$$

பகுதியையும், தொகுதியையும் கோசை θ கோசை ϕ ஆல் வகுத்தால், பின் வருவதைப் பெறுவோம்.

$$\frac{\text{தான் } \theta + \text{தான் } \phi}{1 - \text{தான் } \theta \text{ தான் } \phi}$$

உதாரணம் 4.29

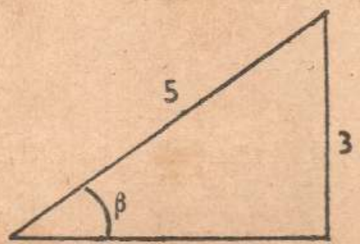
$A = 60°$, $B = 30°$ ஆகும்போது கோசை $(A + B)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\begin{aligned} \text{கோசை } (60° + 30°) &= \text{கோசை } 60° \text{ கோசை } 30° \\ &= \text{சைன் } 60° \text{ சைன் } 30° \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

உதாரணம் 4.30

கோசை $\alpha = \frac{5}{13}$, சைன் $\beta = \frac{3}{5}$ ஆயின், சைன் $(\alpha + \beta)$, கோசை $(\alpha + \beta)$ ஆகியவற்றைக் காண்க. இங்கு α, β கூர்ங்கோணங்களாகும்.

உரு 4.62



உரு 4.63

கோசை $\alpha = \frac{5}{13}$. பைதகரசின் விதிப்படி சைன் $\alpha = \frac{12}{13}$ (உரு 4.62 ஐப் பாருங்கள்).

சைன் $\beta = \frac{3}{5}$ ஆதலின், பைதகரசின் விதிப்படி கோசை $\beta = \frac{4}{5}$ (உரு 4.63 ஐப் பாருங்கள்).

$\therefore$

14725—27

$$சைன் \ (\alpha + \beta) = சைன் \ \alpha \ கோசை \ \beta + கோசை \ \alpha \ சைன் \ \beta.$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{63}{65}$$

$$கோசை \ (\alpha + \beta) = கோசை \ \alpha \ கோசை \ \beta - சைன் \ \alpha \ சைன் \ \beta$$

$$= \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{16}{65}$$

பயிற்சி 4.15

1. கோசை $A = 0{\cdot}6$, கோசை $B = 0{\cdot}5$ ஆயின் அட்டவணையைப் பயன் படுத்திப் பின்வருவனவற்றைக் காண்க. இங்கு $A, \ B < 90^\circ$ ஆகும்.

   (i) கோசை $(A + B)$, (ii) தான் $(A - B)$

2. (i) சைன் $(30^\circ + x) =$ கோசை x

   (ii) கோசை $(45^\circ - x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ சைன் x

3. பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக.

   (i) $தான் \ A + தான் \ B = \dfrac{சைன் \ (A + B)}{கோசை \ A \ கோசை \ B}$

   (ii) $\dfrac{தான் \ \alpha - தான் \ \beta}{தான் \ \alpha + தான் \ \beta} = \dfrac{சைன் \ (\alpha - B)}{சைன் \ (\alpha + \beta)}$

   (iii) சைன் $(A + B)$ சைன் $(A - B) =$ சைன்$^2 A -$ சைன்$^2 B$

   (iv) தான் $2A -$ தான் $A =$ தான் A சீக $2A$

12.3 மடங்குக் கோணங்கள். கோணங்களின் கூட்டுத்தொகையை அல்லது வித்தியாசத்தை நாம் கூட்டுக் கோணங்கள் எனக் குறிப்பிடுவோம். அவை ஒரே கோணமாயின் அவற்றை மடங்குக் கோணங்கள் எனக் குறிப்பிடுவோம். $(A + 4B)$, $(\theta - \phi)$ என்பன கூட்டுக் கோணமாகும். $\frac{13}{4} C$ மடங்குக் கோணமாகும்.

சைன் $(A+B)$ = சைன் A கோசை $B+$ கோசை A சைன் B இல் $A = B$ எனப் பிரதியிட்டால், பின்வருவதைப் பெறுவோம்:

$$\text{சைன் } 2A = 2 \text{ சைன் } A \text{ கோசை } A$$

அவ்வண்ணமே,

கோசை $(A+B)$ = கோசை A கோசை $B-$ சைன் A சைன் B இல் $A = B$ ஐப் பிரதியிட்டு சைன்$^2 A +$ கோசை$^2 A = 1$ என்பதையும் பயன்படுத்தினால், பின்வருவதைப் பெறுவோம்:

$$\begin{aligned} \text{கோசை } 2A &= \text{கோசை}^2 A - \text{சைன்}^2 A \\ &= 2 \text{ கோசை}^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \text{ சைன்}^2 A \end{aligned}$$

பிரசினம் 4.12

மேலே குறிப்பிட்ட முறையைப் பயன்படுத்தி

$$\text{தான் } 2A = \frac{2 \text{ தான் } A}{1 - \text{தான்}^2 A} \quad \text{என்ற}$$

சர்வசமன்பாட்டை நிறுவுக.

உதாரணம் 4.31

சைன் $3A = 3$ சைன் $A - 4$ சைன்$^3 A$ என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} \text{சைன் } 3A &= \text{சைன் } (2A + A) \\ &= \text{சைன் } 2A \text{ கோசை } A + \text{கோசை } 2A \text{ சைன் } A \\ &= 2 \text{ சைன் } A \text{ கோசை}^2 A + (1 - 2 \text{ சைன்}^2 A) \text{ சைன் } A \\ &= 2 \text{ சைன் } A (1 - \text{சைன்}^2 A) \\ &\quad + \text{சைன் } A (1 - 2 \text{ சைன்}^2 A) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{சைன் } 3A = 3 \text{ சைன் } A - 4 \text{ சைன்}^3 A.$$

பிரசினம் 4.13

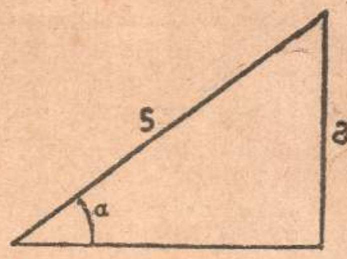
(i) கோசை $3A = 4$ கோசை$^3 A - 3$ கோசை A

(ii) $$\text{தான் } 3A = \frac{3 \text{ தான் } A - \text{தான்}^3 A}{1 - 3 \text{ தான்}^2 A}$$

எனக் காட்டுக.

உதாரணம் 4.32

சைன் $\alpha = \frac{3}{5}$ ஆயின் (உரு 4.64), (i) சைன் 2α (ii) கோசை 2α (iii) தான் 3α ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



உரு 4.64

$$\text{சைன் } 2\alpha = 2 \text{ சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha$$

$$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{24}{25}$$

$$\text{கோசை } 2\alpha = 1 - 2 \text{ சைன்}^2 \alpha = 1 - 2 . \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

$$\text{தான் } 3\alpha = \frac{3 \text{ தான் } \alpha - \text{தான்}^3 \alpha}{1 - 3 \text{ தான்}^2 \alpha}$$

$$= \frac{3.\frac{3}{4} - (\frac{3}{4})^3}{1 - 3(\frac{3}{4})^2} = -\frac{117}{44}$$

பயிற்சி 4.16

1. $\text{சைன் } 105^\circ = \sqrt{\dfrac{1 - \text{கோசை } 210^\circ}{2}}$

   $= \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

2. $\text{தான் } 105^\circ = -(2 + \sqrt{3})$ எனக் காட்டுக.

3. அட்டவணை பயன்படுத்தாது

   (i) $2 \text{ சைன் } 40^\circ \text{ சைன் } 50^\circ = \text{சைன் } 80^\circ$,

   (ii) $(\text{கோசை } 20^\circ + \text{கோசை } 70^\circ)(\text{கோசை } 20^\circ - \text{கோசை } 70^\circ)$
   $= \text{கோசை } 40^\circ$ என நிறுவுக.

4. $\text{கோசை } 4\theta + 2 \text{ கோசை } 2\theta + 1 = 4 \text{ கோசை } 2\theta \text{ கோசை}^2 \theta$ என நிறுவுக.

12.4 **அரைக்கோணச் சூத்திரங்கள்.** முன்னர் சந்தித்த சர்வசமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி சைன் A, கோசை A, தான் A ஆகிய மூன்றுக்கும் வேறு கோவைகளைப் பெறலாம். இவை திரிகோணகணிதக் கணக்குகளிலும் வேறு துறைகளிலும் பயன்படும்.

தான் $\frac{A}{2} = t$ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{சைன் } A = 2 \text{ சைன் } \frac{A}{2} \text{ கோசை } \frac{A}{2}$$

$$= \frac{2 \text{ சைன் } \frac{A}{2} \text{ கோசை } \frac{A}{2}}{\text{கோசை}^2 \frac{A}{2} + \text{சைன்}^2 \frac{A}{2}}$$

(இங்கு பகுதியெண் 1 என்பதை அவதானியுங்கள்)

$$\therefore \text{சைன் } A = \frac{2 \text{ தான் } \frac{A}{2}}{1 + \text{தான் }^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2t}{1 + t^2}$$

பிரசினம் 4.14

$$\text{கோசை } A = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\text{தான் } A = \frac{2t}{1 - t^2}$$

என எழுதலாம் எனக் காட்டுக.

உரு 4.65 இலுள்ள செங்கோண முக்கோணியைப் பயன்படுத்தினல் இவற்றை மனத்தில் வைத்திருப்பது இலகுவாகும்.

உதாரணம் 4.33

தான் $22\frac{1}{2}°$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

தான் $22\frac{1}{2}° = x$ எனக் கொள்வோம்.

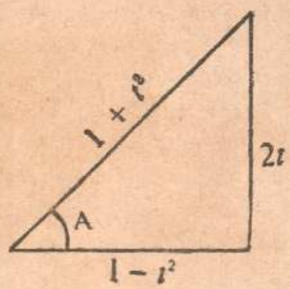
$$\text{தான் } 45° = 1 = \frac{2x}{1 - x^2} \quad ;$$

$$\therefore \; 1 - x^2 = 2x$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$x > 0$ ஆகையால் $x = \sqrt{2} - 1$.



உரு 4.65

உதாரணம் 4.34

சைன் $A +$ கோசை A ஐ தான் $\frac{A}{2}$ இற் கூறுக.

தான் $\frac{A}{2} = t$ எனக் கொள்க.

$$\text{சைன் } A + \text{கோசை } A = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{1+2t-t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{தான்}\,\frac{A}{2} - \text{தான்}^2\,\frac{A}{2}}{1 + \text{தான்}^2\,\frac{A}{2}}$$

13. **திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் கூட்டுத்தொகையும் பெருக்கமும்**

சைன் $(A \pm B)$, கோசை $(A \pm B)$ ஆகியவற்றுக்கான கோவைகள் திரிகோணகணிதக் கணக்குகளுக்குப் பயனுள்ள சர்வசமன்பாடுகளைப் பெறுதற்கு வழிவகுக்கின்றன.

$$\text{சைன் } A \text{ கோசை } B + \text{கோசை } A \text{ சைன் } B = \text{சைன் } (A+B)$$

$$\text{சைன் } A \text{ கோசை } B - \text{கோசை } A \text{ சைன் } B = \text{சைன் } (A-B)$$

மேற்கூறிய இரண்டையுங் கூட்டினுல்,

$$\text{சைன் } A \text{ கோசை } B = \tfrac{1}{2}\,[\,\text{சைன் } (A+B) + \text{சைன் } (A-B)\,] \;\ldots\ldots (1)$$

எனப் பெறுவோம்.

கழித்தால்,

$$\text{கோசை } A \text{ சைன் } B = \tfrac{1}{2}\,[\,\text{சைன் } (A+B) - \text{சைன் } (A-B)\,] \;\ldots\ldots (2)$$

என்பதைப் பெறுகிறேம்.

பிரசினம் 4.15

கோசை $(A \pm B)$ என்பதன் கோவையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவன வற்றைக் காட்டுக.

சைன் A சைன் $B = \frac{1}{2}$ [கோசை $(A - B)$ − கோசை $(A + B)$]......(3)
கோசை A கோசை $B = \frac{1}{2}$ [கோசை $(A + B)$ + கோசை $(A - B)$]......(4)

இச்சமன்பாடுகள் பெருக்கங்களைக் கூட்டுத்தொகையாகவும், வித்தியாசமாக வும் தருகின்றன. கூட்டுத்தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் பெருக்கமாகவுங் கூறலாம்.

$A + B = \alpha, \quad A - B = \beta$ எனப் பிரதியிட்டால்

$A = \dfrac{\alpha + \beta}{2}, \quad B = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ ஆகும்.

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றைப் புறமாற்று ஒழுங்காக எழுதினால், பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்.

சைன் α + சைன் $\beta = 2$ சைன் $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ கோசை $\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ .... (5)

சைன் α − சைன் $\beta = 2$ கோசை $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ சைன் $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$ ....(6)

பிரசினம் 4.16

கோசை α + கோசை β, கோசை α — கோசை β ஆகியவற்றுக்கு மேற்குறிப்பிட்டவை போன்ற கோவைகளைப் பெறுக.

[குறிப்பு: $\alpha > \beta$ ஆகும்போது கோசை $\alpha <$ கோசை β என மனதிற் கொண்டு கோசை β − கோசை α என்னும் வித்தியாசம் நேர்ப் பெறுமானம் ஆக அமையுமாறு கூறுகின்றோம்.]

உதாரணம் 4.35

சைன் $3A$ + சைன் $5A$ சைன் என்பதைத் திரிகோணகணிதச் சார்புகளின் பெருக்கமாகத் தருக.

சைன் $3A$ + சைன் $5A = 2$ சைன் $\dfrac{3A + 5A}{2}$ கோசை $\dfrac{3A - 5A}{2}$
$= 2$ சைன் $4A$ கோசை $(-A)$
$= 2$ சைன் $4A$ கோசை A

உதாரணம் 4.36

கோசை $2A$ சைன் $3A$ ஐக் கூட்டுத்தொகையாகத் தருக.

கோசை $2A$ சைன் $3A = \frac{1}{2}$ [சைன் $(2A + 3A)$ − சைன் $(2A - 3A)$]
$= \frac{1}{2}$ [சைன் $5A$ − சைன் $(-A)$]
$= \frac{1}{2}$ [சைன் $5A$ + சைன் A]

இதனைப் பின்வருமாறும் செய்யலாம் :

சைன் $3A$ கோசை $2A$

$$= \frac{1}{2}\,[\text{ சைன் } (3A + 2A) + \text{ சைன் } (3A - 2A)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[\text{ சைன் } 5A + \text{ சைன் } A]$$

இவ்வாற்ருல், சைன் A இல் மறைக் குறியைத் தவிர்த்திருக்கலாம்.

உதாரணம் 4.37

கோசை A கோசை $4\ A$ என்பதைக் கூட்டுத்தொகையாகத் தருக.

கோசை A கோசை $4\ A$

$$= \frac{1}{2}\ [\text{ கோசை } (A + 4A) + \text{ கோசை } (A - 4A)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [\text{ கோசை } 5A + \text{ கோசை } (-3A)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [\text{ கோசை } 5A + \text{ கோசை } 3A]$$

பின்வருமாறு ஒழுங்குபடுத்திச் செய்திருந்தோமானுல், மறைக் குறியைத் தவிர்த்திருக்கலாம்.

கோசை $4\ A$ கோசை A

$$= \frac{1}{2}\ [\text{ கோசை } (4A + A) + \text{ கோசை } (4A - A)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [\text{ கோசை } 5A + \text{ கோசை } 3A$$

உதாரணம் 4.38

கோசை 4θ − கோசை 2θ என்பதைப் பெருக்கமாகத் தருக.

கோசை 4θ − கோசை 2θ

$$= 2 \text{ சைன் } \frac{4\theta + 2\theta}{2} \text{ சைன் } \frac{2\theta - 4\theta}{2}$$

$$= 2 \text{ சைன் } 3\theta \text{ சைன் } (-\theta).$$

$$= -2 \text{ சைன் } 3\theta \text{ சைன் } \theta.$$

மறைக்குறி கோசை $4\theta <$ கோசை 2θ எனக் காட்டுகிறது.

உதாரணம் 4.39

பின்வருங் கூட்டுத்தொகையைப் பெருக்கமாகத் தருக:

சைன் 10° + சைன் 30° + சைன் 50° + சைன் 70°

ஒரே கோணத்தைக் கூட்டுத்தொகையாகத் தரும் பொருட்டுச் சோடி சோடியாக எடுத்து நிறுவுவோம்.

சைன் 10° + சைன் 30° + சைன் 50° + சைன் 70°

$=$ (சைன் 10° + சைன் 70°) + (சைன் 30° + சைன் 50°)

$=$ 2 சைன் 40° கோசை 30° + 2 சைன் 40° கோசை 10°

$=$ 2 சைன் 40° (கோசை 30° + கோசை 10°)

$=$ 2 சைன் 40° (2 கோசை 20° கோசை 10°)

$=$ 4 கோசை 10° கோசை 20° சைன் 40°

பயிற்சி 4.17

1. கூட்டுத்தொகையாகத் தருக.

(i) 2 சைன் 5θ கோசை 2θ ;

(ii) கோசை $2y$ கோசை $8y$;

(iii) கோசை $\frac{\pi}{4}$ கோசை $\frac{3\pi}{4}$;

(iv) கோசை $\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$ சைன் $\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

2. பெருக்கமாகத் தருக.

(i) சைன் $3p$ + சைன் $5p$,

(ii) கோசை p − கோசை $5p$,

(iii) கோசை $\frac{x}{2} + \frac{3x}{2}$, (iv) சைன் $(a + b)$ − சைன் $(a - b)$.

3. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\dfrac{\text{சைன் } p + \text{சைன் } q}{\text{கோசை } p - \text{கோசை } q} = -$ கோதா $\dfrac{p-q}{2}$,

(ii) $\dfrac{\text{சைன் } (2x - y) + \text{சைன் } y}{\text{கோசை } (2x - y) + \text{கோசை } y} =$ தான் x,

(iii) $\dfrac{\text{சைன் } x + \text{சைன் } 2x + \text{சைன் } 3x}{\text{கோசை } x + \text{கோசை } 2x + \text{கோசை } 3x} = \dfrac{2 \text{ தான் } x}{1 \text{ தான் }^2 x} =$ தான் $2x$,

(iv) கோசை 20° கோசை 40° கோசை 60° கோசை 80° $= 1/16$

பலவினப் பயிற்சி IV

1. கூர்ங்கோணத்திற் கூறும்போது பின்வரும் சார்புகள் என்ன குறியைக் கொண்டுள்ளன என்பதைக் குறித்துக் காட்டுக.

(i) சைன் 260° (ii) கோசை 320° (iii) கோதா 520° (iv) சீக 1000°

(v) கோசை (-1820°) (vi) கோசீ 2100° (vii) தான் (-300°)

14725—28

2. பின்வருவனவற்றைக் கூர்ங்கோணங்களின் சார்புகளாகக் கூறுக.

(i) சைன் 562° (ii) கோசை 600° (iii) தான் 873° (iv) சீக (-580°)
(v) கோதா (1000°) (vi) கோசீ (-1200°) (vii) சீக (700°)
(viii) சைன் (-1250°) (ix) தான் (-2000°) (x) கோசை (-884°)

3. அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (முதலாவதைச் செய்து காட்டியுள்ளோம்.)

(i) கோசை 110° = கோசை $(180^\circ - 70^\circ)$
= $-$ கோசை 70°
= $-0{\cdot}3420$.

(ii) சைன் 120°; (iii) தான் 130°; (iv) சைன் 280°;
(v) கோசை 300°; (vi) தான் 350°; (vii) தான் 260° (viii) சைன் 190°;
(ix) கோசை 240°; (x) சைன் 140°; (xi) சைன் 210°;
(xii) கோசை 330°; (xiii) தான் (-20°) (xiv) கோசை (-100°);
(xv) சைன் (-190°); (xvi) தான் (-280°) (xvii) கோசை (-340°);
(xviii) சைன் (-180°); (xix) தான் 310°; (xx) சைன் (270°);
(xxi) கோசை (-270°); (xxii) கோசை (160°); (xxiii) தான் (-160°);
(xxiv) சைன் (-750°); (xxv) தான் 900°.

4. பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக.

(i) $\dfrac{\text{சைன்}\, x}{1+\text{கோசை}\, x} + \dfrac{1+\text{கோசை}\, x}{\text{சைன்}\, x} = 2\ \text{கோசீ}\, x.$

(ii) $(\text{சீக}\, x + \text{கோசீ}\, x)^2 = (\text{தான்}\, x + \text{கோதா}\, x)(\text{தான்}\, x + \text{கோதா}\, x + 2).$

(iii) $(1 + \text{சீக}\,\theta + \text{தான்}\,\theta)(1 - \text{சீக}\,\theta + \text{தான்}\,\theta) = 2\ \text{தான்}\,\theta.$

(iv) $(\text{சைன்}\, x + \text{சீக})^2 + (\text{கோசை}\, x + \text{கோசீ}\, x)^2$

(v) $\sqrt{\dfrac{1 + \text{கோசை}\, x}{1 - \text{கோசை}\, x}} = \dfrac{\text{தான்}\, x}{\text{சீக}\, x - 1}$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1 - \text{சைன்}\,\theta}{1 + \text{சைன்}\,\theta}} = \text{சீக}\,\theta - \text{தான்}\,\theta.$

5. $u = \dfrac{1 + \text{சைன்}\,\theta}{\text{கோசை}\,\theta}$ ஆயின், $\dfrac{1}{u} = \dfrac{1 - \text{சைன்}\,\theta}{\text{கோசை}\,\theta}$

என நிறுவுக.

பின்னர், சைன் θ, கோசை θ, தான் θ ஆகியவற்றை u விற் கூறுக.

6. p தான் x = தான் px ஆயின்,

$$\text{சைன்}^2\, px = \frac{p^2 \text{ சைன்}^2 x}{1 + (p^2 - 1)\text{ சைன்}^2 x}$$ என நிறுவுக.

7. (i) தான் $\alpha = \dfrac{24}{7}$ ஆயின், கோசீ α, சீக α ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) 4 சைன்$^2\,\alpha$ + 3 கோசை$^2\,\alpha$ = 2 ஆயின், தான் α வைக் காண்க.

(iii) சைன் $\theta = s$ ஆயின், பின்வருவனவற்றை s இற் கூறுக.

(அ) 2 கோசை $^2\,\theta - 1$ (ஆ) கோதா$^2\,\theta$ − கோசீ θ

(இ) $\dfrac{1}{\text{சைன் }\theta}$ − தான் θ

(iv) தான் $\theta = t$ ஆயின், பின்வருவனவற்றை t இற் காண்க.

(அ) $\dfrac{\text{சைன் }\theta}{\text{கோசை }^3\theta}$. (ஆ) $\dfrac{\text{கோசை }^2\theta}{\text{சைன் }^4\theta}$

8. பின்வருவனவற்றிலிருந்து α வை நீக்குக.

(i) $x = a$ கோசை α, $y = a$ சைன் α !

(ii) $x = \dfrac{a}{\text{கோசை } \alpha}$, $y = \dfrac{b}{\text{தான் } \alpha}$

(iii) $x = a$ சீக α, $y = b$ தான் α.

9. b சைன் $\theta + a$ கோசை $\theta = 2$, a சைன் $\theta - b$ கோசை $\theta = 1$ ஆயின் $a^2 + b^2 = 5$ என நிறுவுக.

10. A இற் செங்கோணம் அமைந்த முக்கோணி ABC இல் AN, BC இற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது. AN, BC ஐ N இற் சந்திக்கிறது. $A\hat{B}C = \psi$, $AN = p$. பின்வருவனவற்றை p இலும் தான் ψ இலுங் கூறுக.

(i) CN (ii) BN (iii) AC (iv) AB

11. அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாது பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங் களைக் காண்க.

(i) தான் $20°$ கோதா $20°$, (ii) கோசீ $25°$ கோசை $65°$

(iii) சைன்$^2\,30°$ + கோசை $^2\,30°$.

12. x கூர்ங்கோணமும்,

சைன் $x = \dfrac{p}{q}$ உம் ஆயின், தான் x, சீக x ஆகியவற்றைக் காண்க.

13. பின்வருவனவற்றின் எண் பெறுமானங்களை எழுதுக.

(i) கோசை $\frac{5}{6}\pi$ (ii) தான் $\frac{2}{5}\pi$ (iii) சைன் 3π

(iv) கோசை $\frac{7}{2}\pi$ (v) தான் $\frac{4}{3}\pi$ (vi) சைன் $\frac{1}{12}\pi$

(vii) கோசை $\frac{3}{2}\pi$ (viii) தான் $\frac{11}{12}\pi$

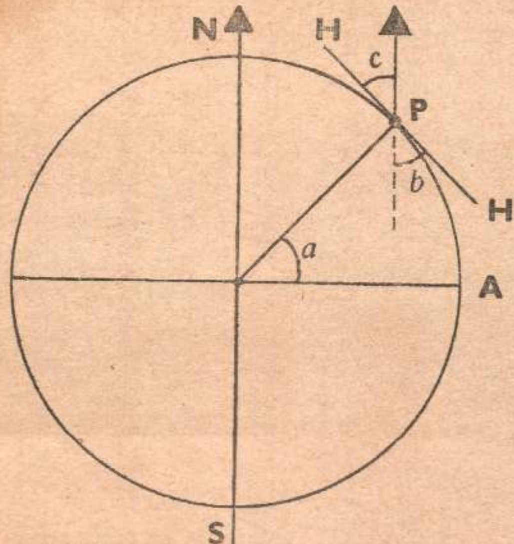
14. சுருக்குக:

(i) கோசை $(\pi + \alpha)$ (ii) கோசை $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (iii) கோசை $(3\pi + \alpha)$

(iv) சைன் $(\pi + \alpha)$ (v) சைன் $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (vi) சைன் $(3\pi + \alpha)$

(vii) தான் $(\pi + \alpha)$ (viii) தான் $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (ix) தான் $(3\pi + \alpha)$

15. ஆரை r ஆகவுள்ள வட்டமொன்றின் மையத்திற் கோணம் θ ஆரையன்களை நாண் ஒன்று எதிரமைக்கின்றது. அந்த நாணால் வெட்டப்படும் துண்டத்தின் பரப்பளவுக்கான சூத்திரத்தைக் காண்க.



உரு 4.66

16. நீங்கள் இருக்கும் இடத்தின் அகலாங்கைக் காண்க. உரு 4.66 புவியின் குறுக்குவெட்டு ஒன்றைக் காட்டுகின்றது. P இல் அகலாங்கு α° எனக் கொள்வோம். ஆயின், வடக்காகிய SN, வடக்கே உள்ள துருவ நட்சத்திரத்தைச் சுட்டுகிறது.

$H\ H'$ கிடையாயின்

(i) $a = b$,

(ii) $b = c$,

$\therefore\ a = c$.

$\therefore$ c யும் அகலாங்குக் கோணத்தை அளக்கிறது. இதனை எவ்வாறு அளப்பீர்கள் ?

17. புவியின் மத்தியகோட்டிலுள்ள இரண்டு இடங்கள் நெட்டாங்கில் 43° ஆல் வேறுபடுகின்றன.

(i) அவற்றுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

(ii) அவற்றின் நேர வித்தியாசம் என்ன ?

18. 30° அகலாங்கில் உள்ள A, B என்னும் இரண்டு இடங்கள் நெட்டாங்கில் $56^\circ 40'$ வேறுபடுகின்றன. அவற்றின் அகலாங்கு வழியே தூரம் அளக்கப்பட்டால், அவற்றுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

19. இந்தியாவிலே கல்வி சம்பந்தமான தொலைக்காட்சிக்கு நேரவிசைவுத் தொடர்புத் துணைக்கோளொன்று பயன்படுகின்றது. இது 1975ஆம் ஆண்டில் அனுப்பப்பட்டது. இது பூமியின் பரப்பிலிருந்து ஏறத்தாழ 36,000 km தூரத்திலுள்ளது. இது ஒரு நாளில் ஒரு முறை பூமியைச் சுற்றி வருகிறது. ஆகவே, இது மத்தியகோட்டின் ஒரு புள்ளியின் மேல் நிலைத்துள்ளதாகத் தோன்றுகின்றது. இந்த உபகோள் செல்லும் வேகத்தை மணிக்கு எத்தனை km எனக் காண்க.

20. பின்வருவனவற்றின் வீச்சங்களைக் காண்க.

(i) 3 சைன் $2x$ (ii) $\frac{2}{3}$ கோசை $4x$

(iii) $\frac{1}{4}$ சைன் $4x$ (iv) $\frac{1}{4}$ சைன் $4x - 3$

(v) $\frac{5}{8}$ கோசை $\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

21. பின்வருவனவற்றின் ஆவர்த்தனங்களைக் காண்க.

(i) கோசை $2x$ (ii) கோசை $\frac{\sqrt{3}}{2}\ x$ (iii) கோசை $\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

(iv) கோசை $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ (v) சைன் $2(x + 5\pi)$

22. பின்வரும் இயல்புகளைக் கொண்ட கோசைன் சார்புகளைக் கூறுக.

(i) ஆவர்த்தனம் 2π, வீச்சம் 2

(ii) ஆவர்த்தனம் π வீச்சம் $\frac{1}{2}$

(iii) ஆவர்த்தனம் $\frac{1}{4}\pi$, வீச்சம் 4

(iv) ஆவர்த்தனம் $n\pi$ வீச்சம் a

23. பின்வருவனவற்றின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) 2 கோசை $x - 1$ (ii) $\dfrac{1 - a^2}{1 + a \text{ கோசை } x}$ (iii) $a^2 - b^2$ சைன்^{2} x

(iv) $\dfrac{1}{1 - 2\text{சைன்}^2 x}$

24. p, q ஆகியன நேரெண்களாயின் பின்வருவனவற்றுட் சாத்தியமானவை எவை ?

(i) சீக $x = \dfrac{p}{p + q}$ (ii) சைன் $x = \dfrac{p - q}{p + q}$

(iii) p சைன் $\theta + q$ கோசை $\theta = p + q$ (iv) கோசீ $\theta = \dfrac{pq}{p^2 + q^2}$

25. பின்வருவனவற்றுட் சாத்தியமானவற்றுக்கு x இன் ஆட்சியைக் காண்க.

(i) சைன் $\theta = \dfrac{x}{2}$ (ii) கோசை $\theta = \dfrac{3 - x}{x - 2}$ (iii) கோசீ $\theta = \dfrac{x + 5}{4x - 1}$

26. பின்வருவனவற்றின் அதி உயர்ந்த பெறுமானத்தையும் அதி குறைந்த பெறுமானத்தையுங் காண்க.

(i) 2 கோசை^{2} $\theta +$ சைன்^{2} θ, (ii) a கோசை^{2} $\theta + b$ சைன்^{2} θ

27. விரிவாக்குக.

(i) சைன் $(2x - y)$; (ii) கோசை $(30^\circ - x)$;

(iii) சைன் $\left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)$; (iv) கோசை $\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$;

(v) சைன் $(2x + 90^\circ)$; (vi) தான் $(60^\circ - 30^\circ)$:

(vii) தான் $(A + B - 30^\circ)$.

28. பின்வருவனவற்றைத் தனியொரு கோணத்தின் சார்பாகத் தருக.

(i) கோசை A கோசை A + சைன் A சைன் A ;

(ii) சைன் 15° கோசை 65° − சைன் 65° கோசை 15° ;

(iii) கோசை 10° கோசை 40° − கோசை 80° கோசை 50° ;

(iv) $\dfrac{\text{தான் } A - \text{தான் } (A - 30^\circ)}{1 - \text{தான் } A \text{ தான் } (A - 30^\circ)}$

(v) சைன் $(A + B)$ கோசை $(A - B)$ +
கோசை $(A + B)$ சைன் $(A - B)$;

(vi) கோசை $(x - 60^\circ)$ கோசை x +
சைன் $(x - 60^\circ)$ சைன் x.

29. விரிவாக்கிய பின்னர், A இன் சார்பாகக் கூறுக.

(i) தான் $(180^\circ + A)$; (ii) சைன் $(270^\circ + A)$; (iii) தான் $(270^\circ - A)$.

30. தனியொரு கோணத்தின் சார்பாகத் தருக.

(i) $\dfrac{\text{கோசை } x + \text{சைன் } x}{\text{கோசை } x - \text{சைன் } x}$ (தான் $45^\circ = 1$)

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (சைன் x + கோசை x) $\left(\text{சைன் } 45^\circ = \text{கோசை } 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

31. தான் $(x+y) = 0{\cdot}75$, தான் $y = 0{\cdot}5$ ஆயின், $x, y < \dfrac{\pi}{2}$ ஆகும்போது அட்டவணை பயன்படுத்தாது தான் x ஐக் காண்க.

32. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிலும் தான் x ஐக் காண்க.

(i) சைன் $(60^\circ + x)$ = சைன் $(60^\circ - x)$;

(ii) 2 சைன் $(x + 30^\circ)$ = கோசை x.

(iii) a கோசை $(x + \alpha)$ = b கோசை $(x - \alpha)$

33. பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக.

(i) கோசை $(A + B)$ கோசை $(A + B)$ = கோசை ^2A − சைன்^{2} B

(ii) தான் $\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$ தான் $\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 1$;

(iii) (சைன் A + கோசை A) (சைன் $2A$ + கோசை $2A$) =
சைன் $3A$ + கோசை A ;

(iv) சைன் x + சைன் $(x + 120°)$ + சைன் $(x + 240°) = 0$;

(v) $\dfrac{\text{சைன் } (A - B)}{\text{கோசை } A \text{ கோசை } B} + \dfrac{\text{சைன் } (B - C)}{\text{கோசை } B \text{ கோசை } C}$

$+ \dfrac{\text{சைன் } (C - A)}{\text{கோசை } C \text{ கோசை } A} = 0.$

34. கோசை $105° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

35. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) சீக $2\theta = \dfrac{\text{சீக}^2\,\theta}{2 - \text{சீக}^2\,\theta}$;

(ii) கோசீ $2\theta = \dfrac{\text{சீக } \theta \text{ கோசீ } \theta}{2}$;

(iii) சைன் $4A = 8$ கோசை ^3A சைன் $A - 4$ கோசை A சைன் A ;

(iv) கோசை $4A = 8$ கோசை $^4A - 8$ கோசை $^2A + 1$;

(v) கோசை $4\theta + 2$ கோசை $2\theta + 1 = 4$ கோசை 2θ கோசை$^2\,\theta$;

(vi) $\dfrac{\text{சைன் } 8\,\theta}{\text{சைன் } \theta} = 8$ கோசை 4θ கோசை 2θ கோசை θ.

அதிகாரம் 4 இன் சுருக்கம்

திரிகோணகணித விகிதங்கள் உரு 4.67 இலுள்ள முக்கோணி OPQ பற்றியவையாகும்.

சைன் $\alpha = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$

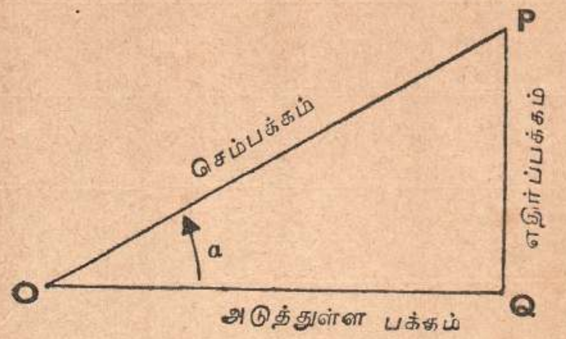
கோசை $\alpha = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$

தான் $\alpha = \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

கோசீ $\alpha = \dfrac{OP}{QP} = \dfrac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

சீக $\alpha = \dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{\text{செம்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

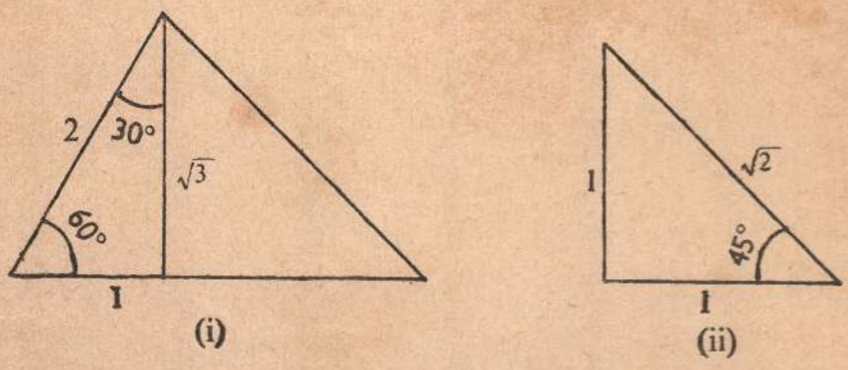
கோதா $\alpha = \dfrac{OQ}{PQ} = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$



உரு 4.67

சைன் $(-\theta)$ = $-$ சைன் θ
கோசை $(-\theta)$ = கோசை θ
சைன் $(90^\circ + \theta)$ = கோசை θ
கோசை $(90^\circ + \theta)$ = $-$ சைன் θ
தான் $(90^\circ + \theta)$ = கோதா θ
சைன் $(180^\circ + \theta)$ = $-$ சைன் θ
கோசை $(180^\circ + \theta)$ = $-$ கோசை θ
தான் $(180^\circ + \theta)$ = தான் θ
சைன் $(270^\circ + \theta)$ = $-$ கோசை θ
கோசை $(270^\circ + \theta)$ = சைன் θ
தான் $(270^\circ + \theta)$ = $-$ கோதா θ

சிறப்பான இரு முக்கோணிகள் :



உரு 4.68

வட்ட அளவை

$$\text{ஆரையன்} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{\cdot}3^\circ.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{சைன் } x}{x} = 1$$

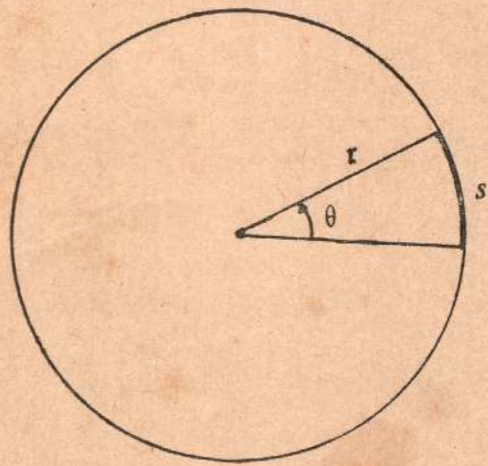
14725—29

	θ	30°	45°	60°	90°
சைன் θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
கோசை θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
தான்	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

அட்டவணை 4.9

r ஆரையுள்ள வட்டமொன்றில் வில் s அதன் மையத்தில் எதிரமைக்குங் கோணம் θ எனின்

$$s = r\,\theta$$



உரு 4.69

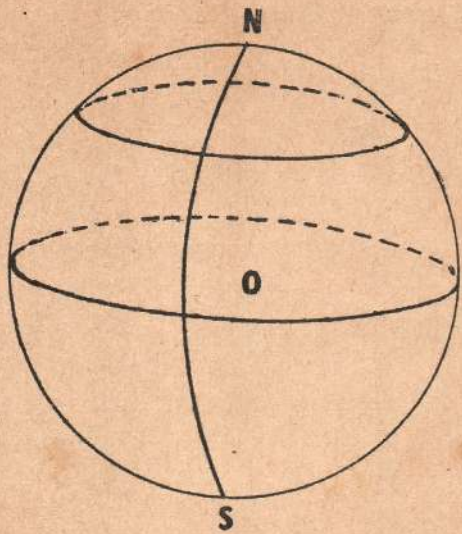
ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\,r^2\,\theta$

நெட்டாங்கும் அகலாங்கும்

பெருவட்டம் என்பது O வை மையமாகக் கொண்டு கோளத்திற் கிடக்கும் ஒரு வட்டமாகும். மத்தியகோடு என்பது NS என்னுங் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் பெருவட்டமாகும் (உரு 4. 70).

நெட்டாங்கு நள்வான் என்பது N இற்கும் S இற்கும் ஊடாகச் செல்லும் பெருவட்டம் ஆகும்.

முதன்மை நள்வான் என்பது கிறீன்விச்சிற்கூடாகச் செல்லும் நள்வானாகும்.



உரு 4.70

அகலாங்குச் சமாந்தரம் என்பது மத்தியகோட்டிற்குச் சமாந்தரமான வெட்டு ஒன்று அமைக்கும் வட்டத்தின் பரிதியாகும்.

கலவர் மைல்

1 கலவர் மைல் $= \dfrac{1}{60 \times 360} \times 2\pi \times 640\ km.$

சர்வசமன்பாடுகள்

கோசை $^2 a +$ சைன்$^2 \theta = 1$;
$1 +$ தான்$^2 \theta =$ சீக$^2\ \theta$;
$1 +$ கோதா$^2 \theta =$ கோசீ $^2 \theta$;

சைன் $(\theta + \phi) =$ சைன் θ கோசை $\phi +$ கோசை θ சைன் ϕ ;
கோசை $(\theta + \phi) =$ கோசை θ கோசை $\phi -$ சைன் θ சைன் ϕ ;
சைன் $(\theta - \phi) =$ சைன் θ கோசை $\phi -$ கோசை θ சைன் ϕ ;
கோசை $(\theta - \phi) =$ கோசை θ கோசை $\phi +$ சைன் θ சைன் ϕ ;

தான் $(\theta + \phi) = \dfrac{\text{தான் } \theta + \text{ தான் } \phi}{1 - \text{ தான் } \theta \text{ தான் } \phi}$

தான்$(\theta - \phi) = \dfrac{\text{தான் } \theta - \text{ தான் } \phi}{1 + \text{ தான் } \theta \text{ தான் } \phi}$

சைன் $2\theta = 2$ சைன் θ கோசை θ ;

கோசை $2\theta =$ கோசை$^2 \theta -$ சைன்$^2 \theta$
$= 2$ கோசை$^2 \theta - 1$
$= 1 - 2$ சைன்$^2 \theta$;

தான் $2\theta = \dfrac{2 \text{ தான் } \theta}{1 - \text{ தான்}^2 \theta}$

4. திரிகோணகணிதம் - I

கூட்டுத்தொகைகள், பெருக்கங்கள் ஆகியவற்றின் சூத்திரங்கள்

சைன் A கோசை $B = \frac{1}{2}[$ சைன் $(A+B) +$ சைன் $(A-B)]$

சைன் A சைன் $B = \frac{1}{2}[$ கோசை $(A-B) -$ கோசை $(A+B)]$

கோசை A கோசை $B = \frac{1}{2}[$ கோசை $(A+B) +$ கோசை $(A-B)]$

சைன் $\alpha +$ சைன் $\beta = 2$ சைன் $\frac{\alpha+\beta}{2}$ கோசை $\frac{\alpha-\beta}{2}$

சைன் $\alpha -$ சைன் $\beta = 2$ கோசை $\frac{\alpha+\beta}{2}$ சைன் $\frac{\alpha-\beta}{2}$

கோசை $\alpha +$ கோசை $\beta = 2$ கோசை $\frac{\alpha+\beta}{2}$ கோசை $\frac{\alpha^2+\beta}{2}$

கோசை $\alpha -$ கோசை $\beta = 2$ சைன் $\frac{\alpha+\beta}{2}$ சைன் $\frac{\beta-\alpha}{2}$

அதிகாரம் 5

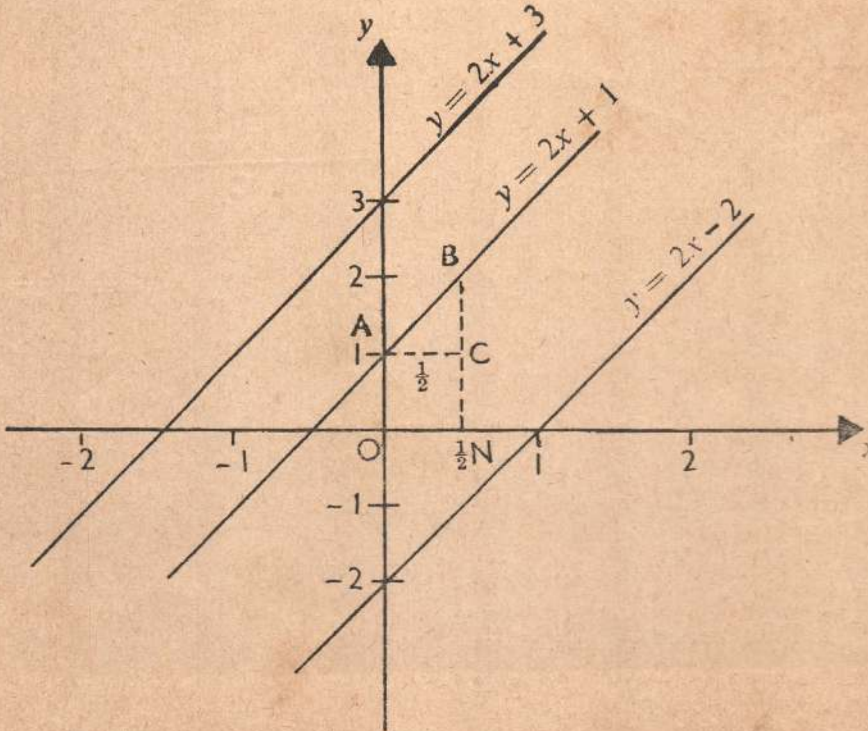
வரைபுகள்

1. நேர்கோட்டு வரைபு

1.1 8 ஆம் வகுப்பில் $y = 2x + 3$, $y = 2x + 1$, $y = 2x - 2$ என்பவற்றின் வரைபை அமைத்துள்ளீர்கள். இவை உரு 5.1 இற் காட்டப்பட்டுள்ளன. இவ்வரைபுகள் அச்சை முறையே 3. 1, -2 என்பவற்றில் வெட்டுகின்றன எனக் கண்டோம். $y = 4x + 7$ என்னும் கோடு y- அச்சை எங்கு வெட்டுமென எண்ணுகிறீர்கள்?

இக்கோடுகளின் சாய்வு அல்லது படித்திறன் சமனுக இருப்பதையும் கண்டோம். ஒவ்வொரு வகையிலும் அது 2 ஆகும். உரு 5.1 இலுள்ள அமைப்பு இது எவ்வாறு பெறப்பட்டுள்ளதெனக் காட்டுகிறது.

$$AB \text{ யின் படித்திறன்} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

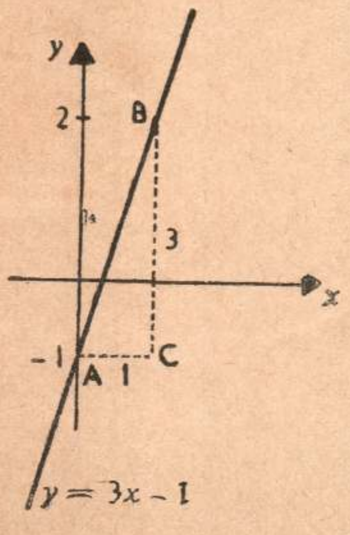


உரு 5.1

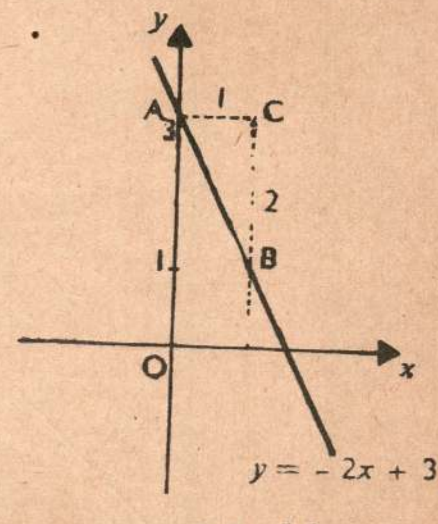
பொதுவாக ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $y = mx + c$ என்று எழுதலாம். இது ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிப்பதால் ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு எனப்படும். இது m என்னும் படித்திறனுடன் $(0, c)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு கோடாகும்.

உதாரணம் 5.1 $y = 3x - 1$ என்னும் நேர்கோட்டின் வரைபைக் கீறுக. இக்கோடு $(0, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதாய் 3 என்னும் படித்திறனைக் கொண்டுள்ளது. உரு 5.2 இலுள்ள முக்கோணி ABC யை அமைப்போம்.

இது படித்திறன் $AB = \dfrac{CB}{AC} = 3$ ஐத் தருவதாய் $A\ (0, -1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது. AB யை நீட்ட, தேவையான கோட்டைப் பெறுவோம்.



உரு 5.2



உரு. 5.3

உதாரணம் 5.2 $y = -2x + 3$ என்னும் சமன்பாட்டாலே தரப்பட்ட நேர்க் கோட்டின் வரைபைக் கீறுக. கோடானது $(0, 3)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதுடன் படித்திறன் -2 ஐக் கொண்டுள்ளது.

இதன்படி. AB மறைப் படித்திறனைக் கொண்டுள்ளது.

$$AB \text{ யின் படித்திறன் } = \frac{BC}{AC} = -2.$$

இவ்வகையில் நாம் CB யைக் கீழ்நோக்கி (மறையாக) அளவிடுவோம். கோடு உரு 5.3 இலே தரப்பட்டுள்ளவாறாகும்.

$y = -2x + 3$ என்னும் கோடு $(0, 3)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது எனக் கூறினேம். இக்கூற்றை இன்னேரு விதமாக "$(0, 3)$ என்னும் புள்ளி $y = -2x + 3$ என்னும் கோட்டின்மேல் அமைகின்றது" எனவும் எடுத்துரைக்கலாம். இதனைக் காட்டுவதற்கு, புள்ளியைச் சமன்பாட்டிற் பிரதியீடு செய்து $3 = -2(0) + 3$ என்று பெறுவோம். பொதுவாக, $b = ma + c$ ஆயின் (a, b) என்னும் புள்ளி $y = mx + c$ என்னும் கோட்டின்மேல் அமைகின்றது.

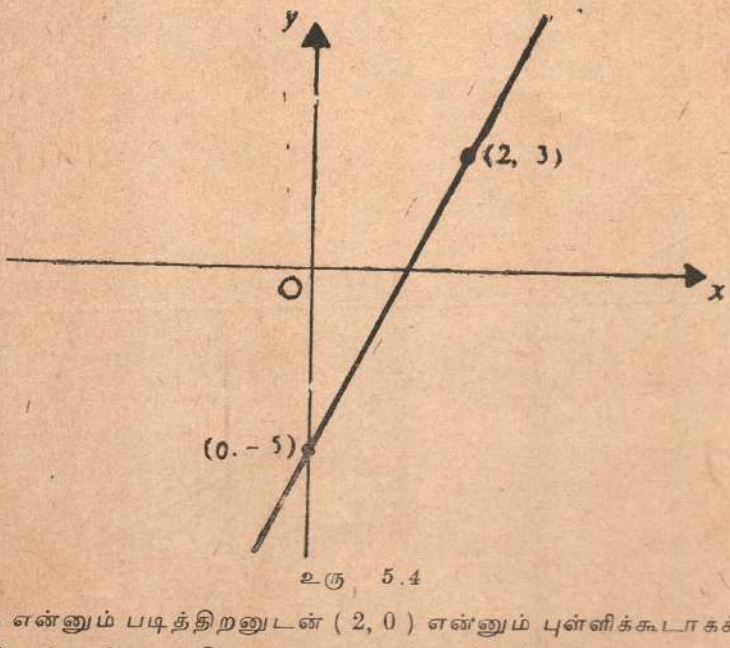
உதாரணம் 5.3 4 என்னும் படித்திறனுடன் $(2 . 3)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதி அதன் வரையைக் கீறுக.

$(2 . 3)$ என்னும் புள்ளி 4 என்னும் படித்திறனைக் கொண்டுள்ள கோட்டின்மேல் அமைவதால்

$$3 = 4.2 + c \text{ என்று கூறலாம்.}$$
$$\Rightarrow c = -5$$

ஆகவே தேவையான கோடு $y = 4x - 5$ ஆகும். இக்கோடு $(0, -5)$ இற்கூடாகவும் செல்கின்றது. உரு 5.4 இற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கோட்டைக் கீறுவதற்கு இவ்விரு புள்ளிகளும் போதும்.

பிரசினம் 5.1 பின்வரும் விபரம் தரப்பட்டுள்ள கோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.



உரு 5.4

(i) $\frac{3}{2}$ என்னும் படித்திறனுடன் $(2, 0)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்,
(ii) 3 என்னும் படித்திறனுடன் $(-2, 0)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்,
(iii) -1 என்னும் படித்திறனுடன் $(2, 2)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்,
(iv) $\frac{3}{2}$ என்னும் படித்திறனுடன் $(-3, -\frac{3}{2})$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும்,

பொருத்தமான அளவிடைகளுடன் இவற்றை ஒரு வரைபிற் கீறுக.

கடைசிப் பிரதினத்தின் (iv) ஆம் பகுதியிலுள்ள கோட்டின் சமன்பாடு $y = -\frac{5}{2}x - 10$. இதனைப் பின்வரும் வடிவில் மீள ஒழுங்கு செய்யலாம்:

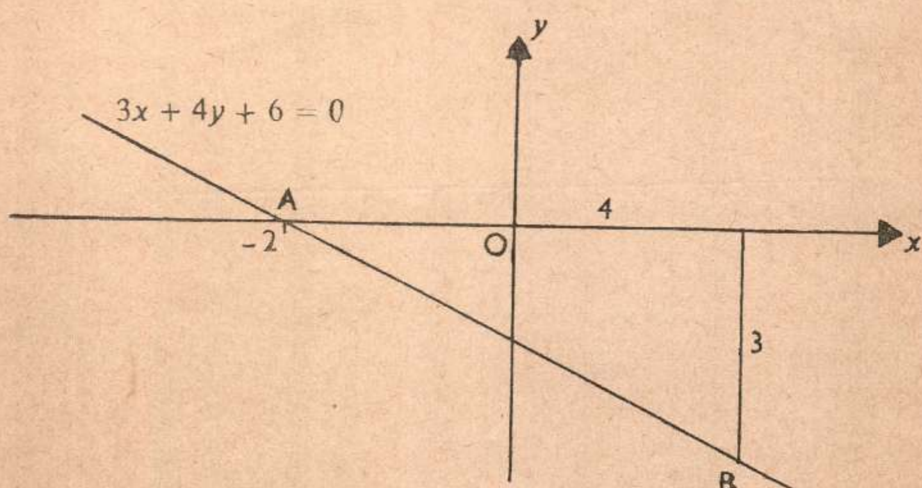
$$2y = -5x - 20$$

$$\text{அல்லது} \quad 5x + 2y + 20 = 0$$

இது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை எடுத்துரைப்பதற்கான மற்றைய முறையாகும். படித்திறன் m ஒரு பின்னமாக இருக்கும்போது இது வசதியானது. பொதுவாக ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $ax + by + c = 0$ என்று எழுதலாம் இதனை $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ என்று மீள ஒழுங்கு செய்யலாம். இதன் படித்திறன் $-\frac{a}{b}$ ஆகும்.

உதாரணம் 5.4. $3x + 4y + 6 = 0$ என்னும் நேர்கோட்டின் வரைபைக் கீறுக. இதனை $y = -\frac{3}{4}x - \frac{6}{4}$ என்று மீள ஒழுங்கு செய்யலாம். இதிலிருந்து படித்திறன் $-\frac{3}{4}$ என வருகிறது. $y = 0$ ஆகும்போது $3x + 6 = 0$. எனவே $(-2, 0)$ என்னும் புள்ளி கோட்டில் அமைகின்றது. இதிலிருந்து உரு 5.5 இற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு வளையியைக் கீறலாம். •

ஒரு தனிப் புள்ளியையும் கோட்டின் படித்திறனையும் காண்பதற்கான மாற்று முறையொன்று கோட்டில் அமையும் இரு புள்ளிகளைக் காண்பதாகும். இரு புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் கோடு ஒருதனியாதலால், தரப்பட்ட இரு புள்ளிகளையும் தொடுப்பதன்மூலம் தேவையான கோட்டைப் பெறலாம். எனினும் சரிபார்ப்பதற்காக ஒரு மூன்றுவது புள்ளியையும் காணுதல் நல்லது. அடுத்த உதாரணத்தில் இம்முறை பயன்படுகிறது.

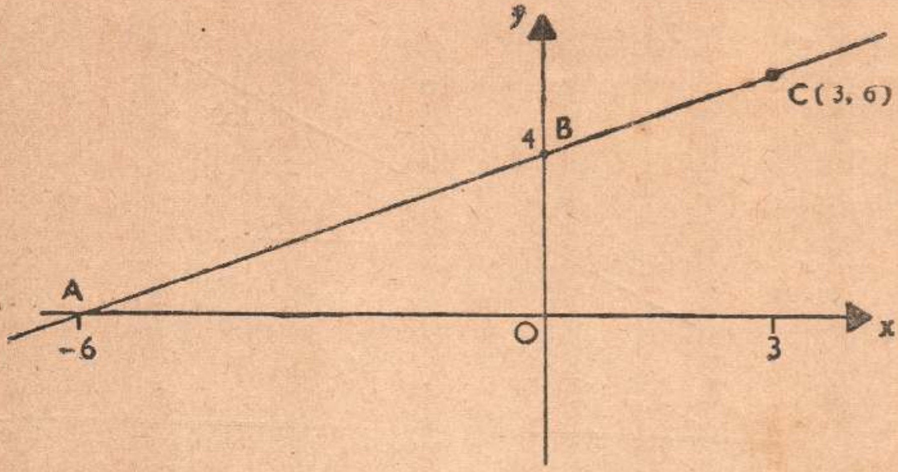


உரு 5.5

உதாரணம் 5.5 $2x - 3y + 12 = 0$ என்பதன் வரைபைக் கீறுக. $x = 0$. என்பதைப் பிரதியிட,

$$-3y + 12 = 0$$

$$\Rightarrow y = 4$$



உரு 5.6

எனவே $A \equiv (0, 4)$ என்னும் புள்ளி இக்கோட்டில் அமைகின்றது.

$y = 0$ என்று பிரதியிட

$2x + 12 = 0$ என்று பெறுவோம்.

$\Rightarrow x = -6$

எனவே $B \equiv (-6, 0)$ என்னும் புள்ளி கோட்டில் அமைகின்றது. சரிபார்ப்பதற்கு $x = 3$ என்று போட $2.3 - 3y + 12 = 0$

$$y = 6$$

எனவே $C \equiv (3.6)$ என்னும் புள்ளி கோட்டில் அமைகின்றது. முதல் இரு புள்ளிகளையும் பயன்படுத்தி உரு 5.6 இல் உள்ளவாறு கோட்டைக் கீறுவோம். இக்கோடு $(3,6)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றதெனக் காணுவோம்.

பிரசினம் 5.2 ஒவ்வொன்றிலும் அமைகின்ற மூன்று புள்ளிகளைக் காண்பதன் மூலம் பின்வரும் கோடுகளை வெவ்வேறு வரைபுகளிற் கீறுக.

(i) $2x - 4y + 3 = 0$; (ii) $5x - 3y + 4 = 0$;

(iii) $5x + 6y - 10 = 0$; (iv) $4x - 5y + 6 = 0$.

உரு 5.7 இல் l என்னும் கோடு $A(a, b)$, $P(x, y)$ என்னும் புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ளது. இக்கோட்டை

$$y = mx + c \qquad (1)$$

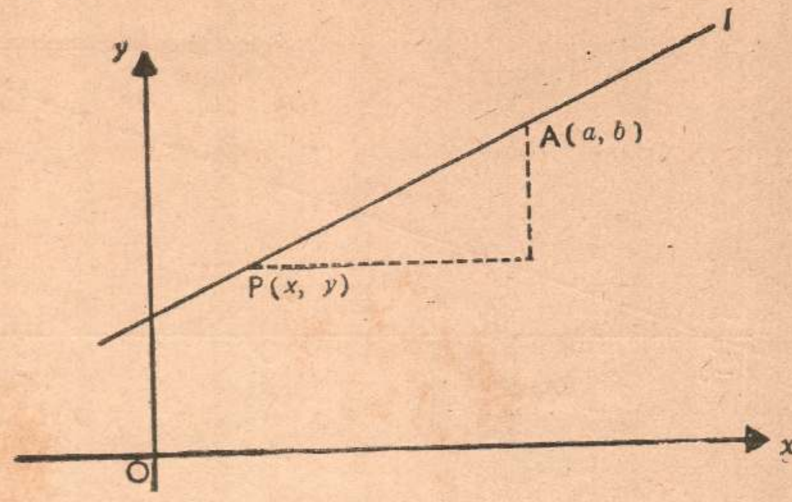
என்னும் வடிவில் எழுதினல் (a, b) இதனைத் திருப்தி செய்கின்றதென அறிவோம் எனவே $b = ma + c$ (2) என்று பெறுவோம்.

(1) இதிலிருந்து (2) ஐக் கழிக்க,

$y - b = m(x - a)$ என்று பெறுவோம்.

இது m படித்திறனுடன் (a, b) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டை எடுத்துரைப்பதற்கான வேருெரு வடிவமாகும்.

14725—30



உரு 5.7

உதாரணம் 5.6 (4, − 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாக $3x - 4y + 1 = 0$ என்னும் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இப்போது $3x - 4y + 1 = 0$

$$\Rightarrow y = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}.$$

எனவே தேவையான படித்திறன் $\tfrac{3}{4}$.

ஆகவே $y - b = m(x - a)$ தேவையான சமன்பாடாகும்.

$$y - (-1) = \tfrac{3}{4}(x - 4)$$

அ-து $y + 1 = \tfrac{3}{4}x - 3$

அல்லது $4y - 3x + 16 = 0$.

பிரசினம் 5.3 பின்வருவன ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்ட புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்வனவும் தரப்பட்டுள்ள படித்திறன்களை முறையே கொண்டுள்ளனவுமான கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $(4, 1), 6$; (ii) $(6, 3), -2$: (iii) $(-4, 2), 1$:

(iv) $(0, 0), 0{\cdot}6$: (v) $(2, 0), -\tfrac{1}{2}$; (vi) $(3, -7), -7$.

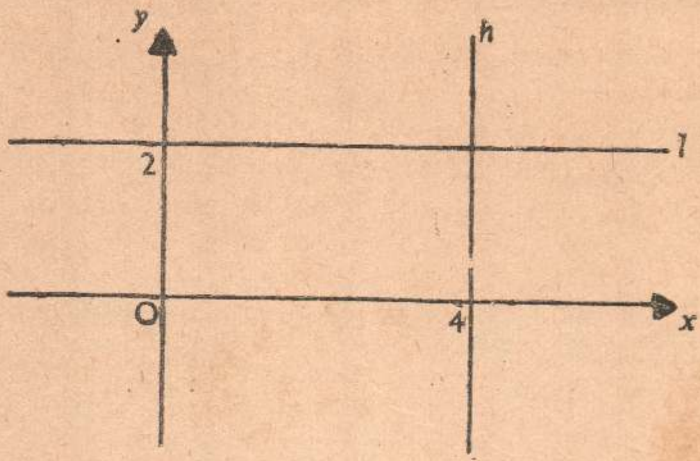
பிரசினம் 5.4 (i) வரைபுத் தாளில் $A(4, 2)$, $B(3, -1)$, $C(0, 3)$ ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து AB, BC, CA ஆகியவற்றின் படித்திறன்களைக் காண்க.

(ii) A யிற்கூடாக BC யிற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

(iii) B யிற்கூடாக AC யிற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் கோட்டின சமன்பாட்டை எழுதுக.

(iv) C யிற்கூடாக AB யிற்குச் சமாந்தரமாகச் செல்லும் கோட்டின சமன்பாட்டை எழுதுக.

இவற்றை உங்கள் வரைபிற் கீறுக



உரு 5.8

உரு 5.8 இல் l என்னும் கோடு அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக (0,2) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது. இக்கோட்டில் உள்ள வேறு சில புள்ளிகள் (1, 2), (2, 2), (3, 2)...... ஆகும்.

(x, 2) என்ற வகையிலான எந்த வரிசைப்பட்ட சோடியும் இக்கோட்டில் அமையும். புள்ளிகளின் வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் ஒரு தொடையாக இதனை $\{ (x, y) : y = 2 \}$என்று எழுதலாம். $y = 2$ என்னும் சமன்பாடு கோட்டின் சமன்பாடாகும். இவ்வகையில், கோட்டின் படித்திறன் $m = 0$. சமன்பாடானது $m = 0$ உடன் $y = mx + c$ என்பதன் ஒரு விசேட வகையாகும்.

h என்னும் கோடு y – அச்சிற்குச சமாந்தரமாகும். (4, 0) என்னும் புள்ளி இக்கோட்டில் அமையும். (4, 1), (4, 2), (4, 3)...... என்னும் புள்ளிகளும் அவ்வாறே அமையும். ஆள்கூறு எப்போதும் 4 ஆகவேண்டுமென்பதைக் கவனிக்க. புள்ளிகளின் வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் ஒரு தொடையாக எழுத நாம் பெறுவது $\{ (x, y) : x = 4 \}$. $x = 4$ என்னும் சமன்பாடு கோட்டின் சமன்பாடாகும். இக்கோட்டிற்குப் படித்திறன் இல்லை.

பிரசினம் 5.5 (i)(4, 1) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் சென்று x – அச்சிற்கும், y – அச்சிற்கும் சமாந்தரமாக அமையும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(ii) A,B,C,D என்னும் உச்சிகளைக் கொண்டுள்ள ஒரு செவ்வகத்தில் எல்லாப் பக்கங்களும் ஒன்றில் x – அச்சிற்கு அல்லது y – அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக அமைந்துள்ளன. $A (-2, 1)$, $C (3, -2)$ என்பன இரண்டு உச்சிகளாகும். கோடிட்ட தாளிற் செவ்வகத்தைக் கீறி, பக்கங்களின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

பொழிப்பாக, ஒரு நேர் கோட்டின் மூன்று வகைகளைப் பெறுவோம்.

(i) $y = mx + c$; இது m என்னும் படித்திறனைக் கொண்டுள்ளதாக (0, c) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது

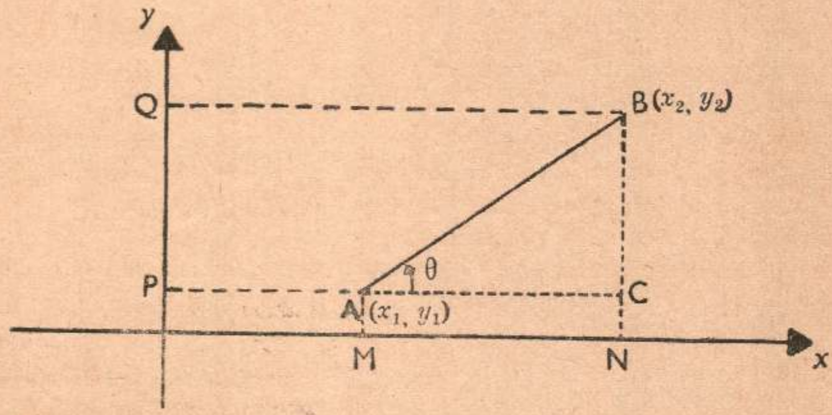
(ii) $ax + by + c = 0$; பொதுவான ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு. கோட்டின் படித்திறன் $-\dfrac{a}{b}$

(iii) $y - b = m(x - a)$; m என்னும் படித்திறனைக் கொண்டுள்ளதாக (a, b) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றது. இது (i) இன் பொதுமை கூடிய வடிவமாகும்.

பயிற்சி 5.1

பின்வரும் புள்ளிகளை, கோடிட்ட தாளிற் குறித்து இயலுமானல் ஒவ்வொரு சோடியையும் தொடுக்கும் கோட்டின் படித்திறனைக் காண்க.

(i) $(4, 2)$, $(5, 4)$; (ii) $(6, 4)$, $(2, 0)$;
(iii) $(3, 1)$, $(4, 2)$; (iv) $(-5, 5)$, $(5, -5)$;
(v) $(3, 2)$, $(3, -1)$; (vi) $(3, 4)$, $(7, 4)$;
(vii) $(-2, 1)$, $(1, -3)$; (viii) $(5, 2)$, $(5, -1)$;
(ix) $(-3, -1)$, $(3, 1)$; (x) $(2, 6)$, $(3, 2)$;



உரு 5.9

2. உரு 5.9 இல் A என்னும் புள்ளி (x_1, y_1) உம் B என்னும் புள்ளி (x_2, y_2) உம் ஆகும். வரிப்படத்தைப் பிரதி செய்து M, N என்னும் புள்ளிகளை x அச்சிலும் P, Q என்னும் புள்ளிகளை y – அச்சிலும் குறிக்க.

பின்வரும் கூற்றுகளை நிரப்புக.

(i) BC என்னும் தரம் $= y_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) AC என்னும் தூரம் $= \ldots\ldots - x_1$.

(iii) AB என்னும் கோட்டின் படித்திறன் $= m_{AB}$ $\dfrac{BC}{\ldots} = \dfrac{y_2 - \ldots}{\ldots - x_1}$

(iv) முக்கோணி ABC இல், கோணம் CAB $= \ldots$

(v) $\text{தான்}\,\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \dfrac{\ldots - \ldots}{\ldots - x_1} = m_{AB}$

$\therefore$ தான் $\theta = m_{AB}$

3. $A\,(2, 0)$ என்னும் புள்ளியும், $B\,(4, k)$ என்னும் புள்ளியுமாகும். AB ஆனது x – அச்சுடன் கோணம் θ° ஐ அமைக்கின், θ பின்வரும் பெறுமானங்களை எடுக்கும்போது k இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) 45 (ii) 60 (iii) 30 (iv) 57

4. ஒரு தனி வரிப்படத்திற் பின்வரும் கோட்டுத் தொடையிற் சிலவற்றைக் கீறுக.

(i) $\{(x, y) : y = x + c\}$ (c யின் வேறுபட்ட பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றும் வேறுவேருன ஒவ்வொரு கோட்டைத் தருமென்பதைக் கவனிக்க.) ;

(ii) $\{(x, y) : \ y = 2x + c\}$;

(iii) $\{(x, y) : \ y = mx + 3\}$;

(iv) (iii) இலுள்ள எல்லாத் தொடைகளும் எப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லுகின்றன?

5. $y = 5x - 6$ என்னும் கோட்டை உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் ஒரு சமாந்தரக் கோட்டின் மேலாகப் படமாக்கும் பெயர்வு யாது?

6. பின்வரும் வகை ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்ட புள்ளிக்கூடாகச் சென்று தரப்பட்ட படித்திறனைக் கொண்டுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $(2, 3), 4$; (ii) $(4, 3), -1/2$.

7. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்ட புள்ளிகளுக்கூடாகச் சென்று தரப்பட்ட கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக அமையும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $(3, 1)$, $y = 4x + 1$; (ii) $(-1, 6)$, $2x - 3y + 7 = 0$;

(iii) $(-2, 0)$, $x + y + 1 = 0$; (iv) $(-1, -1)$, $x + y = 3$.

8. பின்வரும் வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்ட சோடிப் புள்ளிகளின் படித்திறனை முதலிற் கண்டு, பின்னர் அவற்றிற்கூடாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $(3, 4), (4, 6)$; (ii) $(1, 6), (3, 2)$;

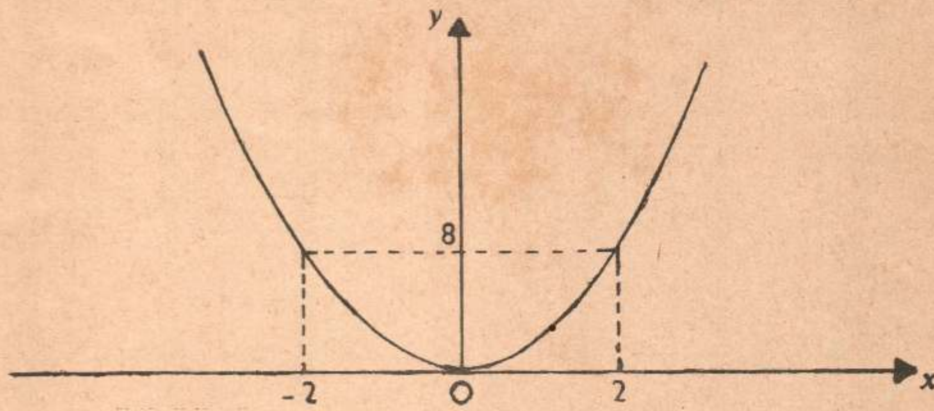
(iii) $(0, 0), (1, 4)$; (iv) $(-1, -2), (4, 3)$;

(v) $(-5, -2), (-8, -6)$.

14725—31

2. இருபடிச் சார்பு $ax^2 + bx + c$

2.1 $x \to 2x^2$ என்பது ஓர் இருபடிச் சார்பு எனவும், அதன் வரைபு உரு 5.10 இல் உள்ளது போன்று இருக்குமெனவும் நாம் அறிவோம். இருபடிச் சார்பின் மிகப்பொதுவான வடிவம் $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$ என அதிகாரம் 2 இலே கண்டோம்.



உரு 5.10

இது ஒரு முக்கியமான சார்பு; பல பிரயோகங்களை உடையது. உரு 5.10 இலுள்ள வரையின் வளையி பரவளைவு எனப்படும். இது இயற்கையிற் பெரிதும் பயின்று வரும். உரு 5.11 இல் உதாரணங்கள் சிலவற்றைக் காணலாம்.

சில சமயங்களிலே வரைபினைச் செம்மையாகக் கீறுவது அவசியமாகும். இதை எவ்வாறு செய்வதென, பகுதி 2.5 இலே காண்போம். பெரும்பாலான வேளைகளில் வரைபுபற்றிய பருமட்டான கருத்தொன்று தேவைப்படும். இது பற்றி, பகுதி 2.2 இலே காண்போம்.

2.2 $y = ax^2 + bx + c$ என்னுஞ் சார்பைப் பருமட்டாகக் கீறுதல்

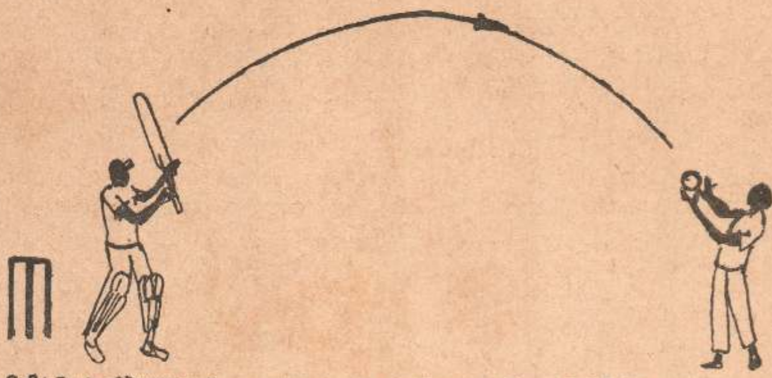
$y = ax^2 + bx + c$ என்னுஞ் சார்பைப் பருமட்டாகக் கீற முற்படுகையிற் கவனிக்க வேண்டிய பிரதான அமிசங்கள் பின்வருமாறு:—

(i) அது y – அச்சை எங்கு வெட்டுகிறது ($x = 0$ என இட்டு அறிக),

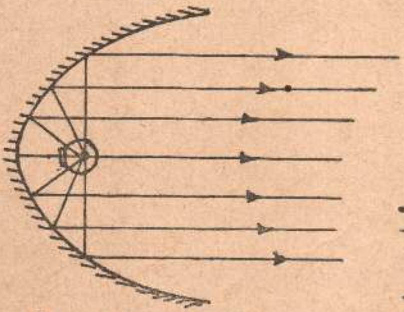
(ii) அது x – அச்சை எங்கு வெட்டுகிறது ($y = 0$ என இட்டு அறிக),

(iii) வரைபின் திரும்பற் புள்ளியும் சமச்சீர்க்கோடும்,

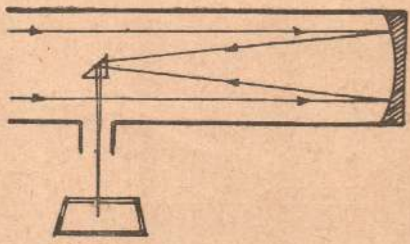
(iv) வரைபின் திசைகோட்கிடை -அதாவது வரைபுக்கு ஓர் உயர்வு உண்டா, இழிவு உண்டா என்பது. வேறு விதத்திற் கூறினால், வரைபு தலைகீழாக உள்ளதா, தலைமேலாக உள்ளதா? (உரு 5.12 பார்க்க.)



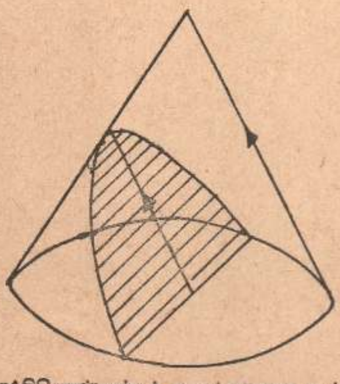
கிறிக்கெற் விளையாட்டில் அல்லது உதைபந்தாட்டத்தில் பந்தின் பாதை



மோட்டர்க்கார் முன்விளக்கு



தொலைகாட்டி ஆடி

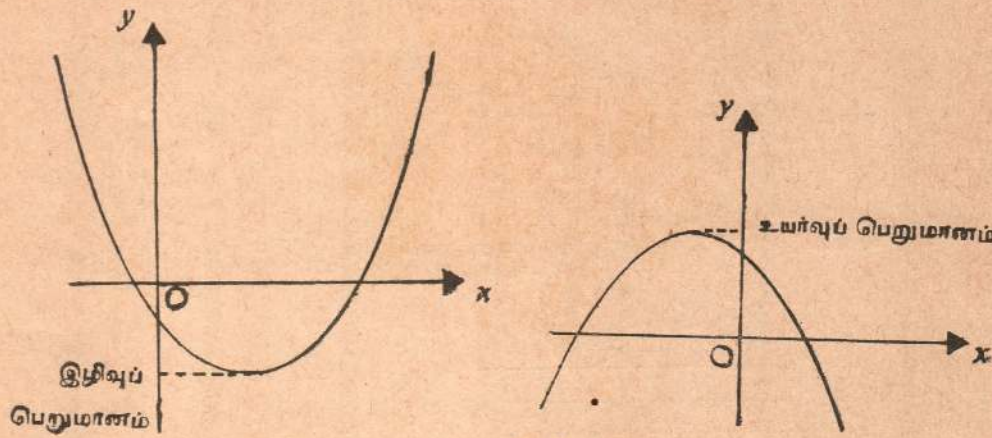


பிறப்பாக்கியொன்றுக்குச் சமாந்தரமான கூம்பு வெட்டு

விண்வெளிக்கப்பல்களுக்கான சுவடுகாண் ஏரியல்

உரு 5.11

I. முதலாவது அம்சத்தை அறிவதற்கு, சமன்பாட்டில் $x = 0$ எனப் போடலாம். உதாரணமாக $y = x^2 - 6x + 5$ ஆனது y – அச்சை $y = 5$ இல் வெட்டும். இருபடிச் சார்பானது எல்லா மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கப் பட்டதாகையால், அது y – அச்சை வெட்டும் புள்ளியொன்று இருந்தே தீரும்.



உரு 5.12

II. x அச்சைப் பொறுத்தவரை $y = 0$ என இட்டு.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்த்தல் வேண்டும். இதன் மூலங்கள்

$$\frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}, \quad \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

என நாம் அறிவோம்.

பின்வரும் உதாரணங்கள் மூன்றையும் நோக்குக. ஒவ்வொன்றிலும் வளையி x அச்சை எங்கு வெட்டுகிறதெனக் காண முயல்க.

(i) $y = x^2 - 4x - 6.$

$y = 0$ என இட்டுத் தீர்க்க.

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$

இங்கு $a = 1, \ b = -4, \ c = -6$

எனவே $b^2 - 4ac = 40$;

ஆகவே, தீர்வுகள் $\dfrac{4 + \sqrt{40}}{2}, \quad \dfrac{4 - \sqrt{40}}{2}$

அவையாவன $2 + \sqrt{10}, \quad 2 - \sqrt{10}$

இவை மெய்யான, வேறுவேறான மூலங்கள்.

(ii) $y = x^2 + 4x + 4.$

$y = 0$ என இட,

$x^2 + 4x + 4 = 0$

இங்கு $a = 1, \ b = 4, \ c = 4.$

எனவே $b^2 - 4ac = 0.$

ஆகவே, தீர்வுகள் $-\frac{4}{2}$, $-\frac{4}{2}$, அவையாவன $-2 \ -2$,

இம் மூலங்கள் சமமானவை.

(iii) $y = x^2 + x + 1.$

$y = 0$ என இட

$x^2 + x + 1 = 0.$

இங்கு, $a = 1, \ b = 1, \ c = 1.$

எனவே $b^2 - 4ac = -3.$

ஆகவே மூலங்கள் $\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$ $\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}$

$\sqrt{(-3)}$ இற்குச் சமமான மெய் எண் இல்லை ஆதலால், தீர்வு இல்லை.

முதலாம் உதாரணத்தில் x இற்கு இரு பெறுமானங்கள் இருப்பதால், வளையி அச்சினை இரண்டு இடங்களில் வெட்டும்: அவை $(2 + \sqrt{10}, 0)$, $(2 - \sqrt{10}, 0)$ என்னும் புள்ளிகளாம். இது உரு 5.13 (i) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. இரண்டாம் உதாரணத்தில், இரு தீர்வுகளும் ஒரே பெறுமானம் உடையன வாய் வந்துள்ளன. அதாவது $x = -2$, இரு தடவை வந்துள்ளது. இதனல், வளையியானது x – அச்சை ஒரு புள்ளியில் அ–து. $(2, 0)$ இல் மட்டுமே வெட்டும்; இது உரு 5.13 (ii) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

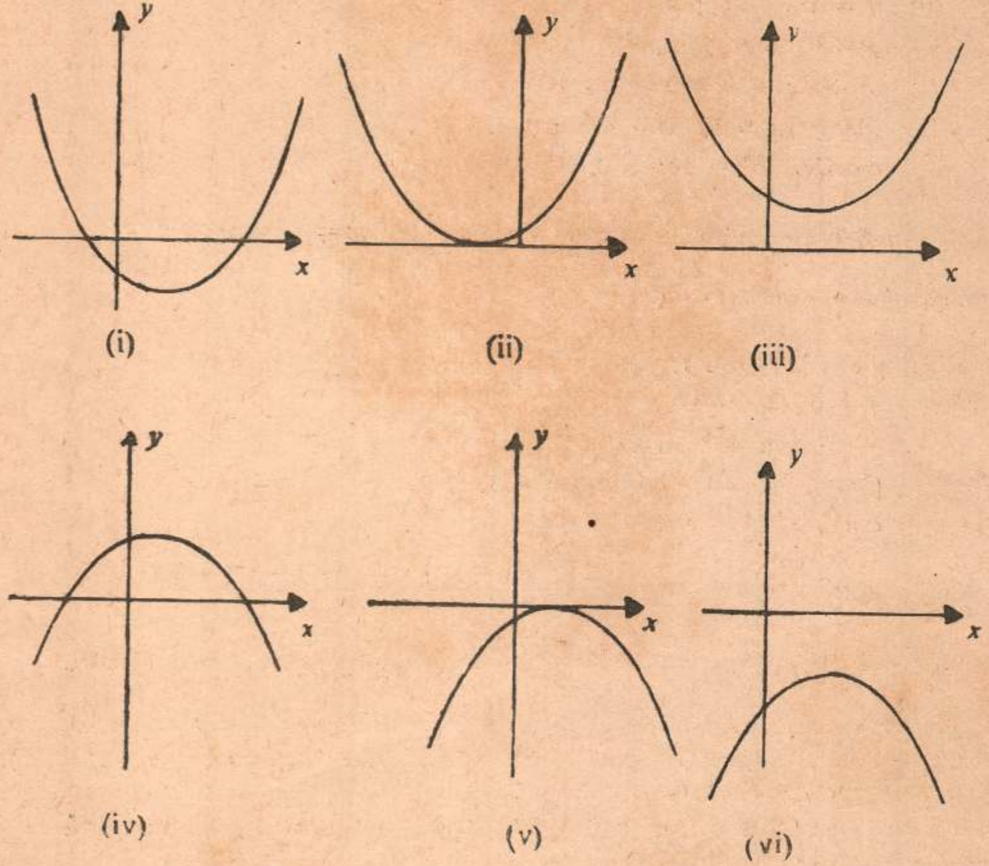
மூன்றும் உதாரணத்தில், தீர்வுகள் இல்லை. அதாவது வளையி x – அச்சை எப்புள்ளியிலும் வெட்டாது. இது உரு 5.13 (iii) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. மூன்று வகைகளிலும் சார்புக்குத் தாழி உண்டு. இச்சார்புக்கு உரிய முடி உள்ள மூன்று வகைகள் உரு 5.13 (iv), (v) (vi) ஆகியவற்றிற் காட்டப்பட்டுள்ளன.

வளையியானது x– அச்சை வெட்டுமோ வெட்டாதோ என்பதை நிச்சயிப்பது $b^2 - 4ac$ என்னும் கணியம். $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்காமலே $b^2 - 4ac$ இன் பெறுமதியைக் காண்பதால் மட்டும் பின்வருவனவற்றைத் திடமாக நாம் கூறலாம்.

(*a*) சமன்பாட்டுக்கு மெய்யான, வேறுவேறன மூலங்கள் (உதாரணம் (i) இற் போல்) உண்டா, அவை விகிதமுறுவனவா, இல்லையா?

(*b*) சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமானவையா (உதாரணம் (ii) இற் போன்று)?

14725—32



உரு 5.13

(c) சமன்பாட்டுக்கு மூலங்களே இல்லையா (உதாரணம் (iii) இற் போன்று)?

$b^2 - 4ac$ என்னும் கணியம் இம்மூன்று வகைகளையும் பிரித்துக் காட்டுவதால் அது சமன்பாட்டின் பிரித்துக்காட்டி எனப்படும். மேற்கூறிய மூன்று வகைகளுக்கும் விளக்கம் பின்வருமாறு:—

(i) $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ மூலங்கள் மெய்யானவை; வேறுவேறானவை ($b^2 - 4ac$ ஒரு பூரண வர்க்கமாயின் மூலங்கள் விகிதமுறுவன).

(ii) $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ மூலங்கள் சமம் (விகிதமுறுவன).

(iii) $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ மூலங்கள் மெய்யானவை அல்ல.

உதாரணம் 5.7 $(k+1)x^2 - 2(k+3)x + 3k = 0$ என்னும் சமன்பாடு

(i) சம மூலங்களைக் கொண்டுள்ளது.

(ii) மெய்யான வேறுவேருன மூலங்களைக் கொண்டுள்ளது என்று தரப்படின் k யைக் காண்க.

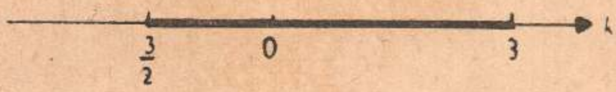
(i) சம மூலங்களுக்கு, $b^2 - 4ac = 0$

அ-து, $4(k+3)^2 - 4(k+1)(3k) = 0$

இது $2k^2 - 3k - 9 = 0$ ஆகச் சுருங்குகிறது.

அ-து $(2k+3)(k-3) = 0.$

$\therefore$ சம மூலங்களுக்கு $k = -\frac{3}{2}$ அல்லது $k = 3$



உரு 5.14

(ii) மெய்யான வேறுவேருன மூலங்களுக்கு $b^2 - 4ac > 0.$

அ-து $4(k+3)^2 - 4(k+1)(3k) > 0$

இது $-2k^2 + 3k + 9 > 0$ ஆகச் சுருங்குகிறது.

அ-து $(2k+3)(-k+3) > 0$

இப்பெருக்கம் நேராவதற்கு ஒன்றில் இரண்டு உறுப்புகளும் நேராதல் வேண்டும் அல்லது இரண்டு உறுப்புகளும் மறையாதல் வேண்டும். இரண்டும் நேராயின், $2k + 3 > 0$ உம் $-k + 3 > 0$ உம் ஆதல் வேண்டும், அ-து $k > -\frac{3}{2}$ உம் $k < 3$ உம் ஆகும் (உரு 5.14).

இரண்டும் மறையாயின் $2k + 3 < 0$ உம் $-k + 3 < 0$ உம் ஆதல் வேண்டும். அ-து $k < -\frac{3}{2}$ உம் $k > 3$ உம் ஆகும்.

இது இயலாது என்பது வெளிப்படை.

உரு 5.15 தேவையான பிரதேசங்களைக் காட்டுகிறது.

உதாரணம் 5.8 $(x^2 - x + 1)y = 2x$ ஆயின் எப்பெறுமானங்களின் வீச்சுள் y அமைகின்றது ?

$(x^2 - x + 1)y = 2x$ ஐ x இலான ஓர் இருபடியமாக எழுத $yx^2 - (y+2)x + y = 0.$ $b^2 - 4ac \geqslant 0$ ஆகும்போது இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யாகும்.

ஆகவே x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு,

$$[-(y+2)]^2 - 4y^2 \geqslant 0;$$

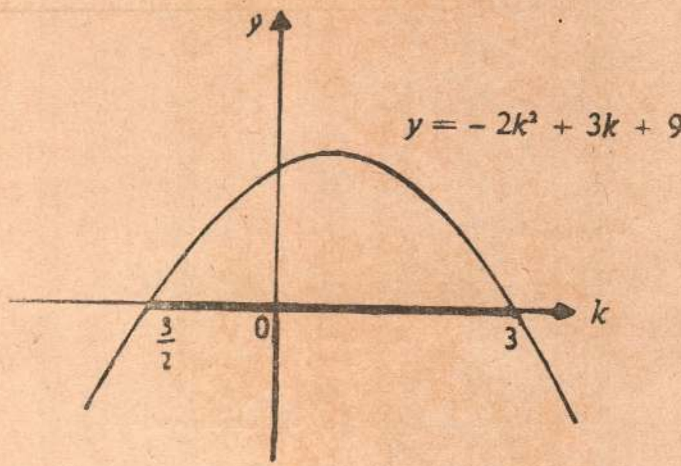
அ-து $-3y^2 + 4y + 4 \geqslant 0$

அ-து $(2 + 3y)(2 - y) \geqslant 0$

அ-து $-\frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 2$

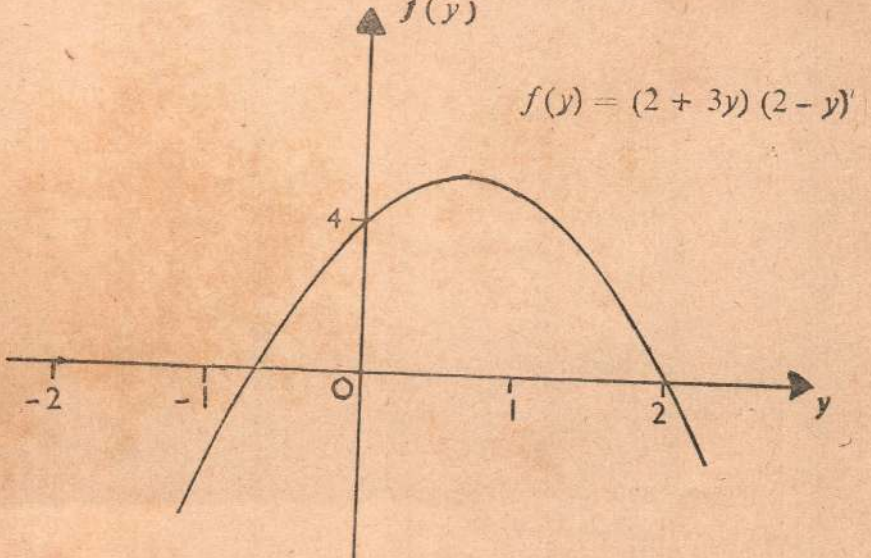
x மெய்யாயின் y ஆனது

$-\frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 2$ என்னும் வீச்சினுள் அமையும்.



உரு 5.15

இவ்வுதாரணத்தை வேறொரு விதமாக $\frac{2x}{x^2 - x + 1}$ இன் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க என்று எழுதலாம். செய்முறை அதே மாதிரியானதாகும். சார்பானது 2 ஆகும்போது உயர்வாகும் என்பதும் $-\frac{2}{3}$ ஆகும் போது இழிவாகும் என்பதுமே இறுதி விடைகளாகும்.



உரு 5.16

பிரசினம் 5.6 பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பிரித்துக்காட்டியை எழுதி, சமன்பாடுகள் சம மூலங்கள் கொண்டிருப்பதாகத் தரப்பட, k யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $2x^2 - 8x + k = 0$;

(ii) $x^2 + 2kx + 9 = 0$;

(iii) $x^2 + (x + k)^2 = 18$.

III. வரையின் திரும்பற் புள்ளி எங்கு இருக்கின்றதெனக் காண்பதற்குச் சமன்பாட்டைப் பின்வரும் வடிவில் ஒழுங்கு செய்வோம்.

$$y = a(x + \alpha)^2 + \beta$$

பகுதி I இன் உதாரணத்தைக் கருக.

$$y = x^2 - 6x + 5$$

இதனை $y = (x - 3)^2 - 4$ என்று எழுதலாம்.

இதிலிருந்து $x = 3$ ஆகும்போது y ஓர் இழிவுப் பெறுமானத்தை எடுக்குமென்றும், அவ்விழிவுப் பெறுமானம் -4 ஆகுமென்றும் காணலாம். எனவே $(3, -4)$ என்பதே வரையிலுள்ள இழிவுப் புள்ளியாகும் (உரு 5.17). இது வரையின் சமச்சீர்க் கோட்டையும் தருகின்றது. இது y - அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக உரு 5.17 இலேகுற்றிட்ட கோடுகளாற் காட்டப்பட்டுள்ளது. $a = 1$ ஆகும் எல்லாக் கோவைகளுக்கும் இது பிரயோகமாகும். $a \neq 1$ ஆகும் பொது வகையில் $y = ax^2 + bx + c$ என்னும் சமன்பாடு $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ ஆக எழுதப்படலாம்.

இங்கு $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ உம் $\beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ உம் ஆகும்.

இது $(-\alpha, \beta)$ என்னும் புள்ளியை. சார்பின் திரும்பற் புள்ளியாகத் தருகின்றது.

IV. மேற்படி III இலுள்ள அதே நியாயத்தின்படி, $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் பொதுச் சமன்பாட்டின் வரையானது $a > 0$ ஆகும்போது ஓர் இழிவையும் $a < 0$ ஆகும்போது ஓர் உயர்வையும் கொண்டிருக்கும்.

உதாரணம் 5.9 $2x^2 - 2x - 3$ ஐ $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க.

$$\begin{aligned}
\text{இப்போது } & 2x^2 - 2x - 3 \\
&= 2(x^2 - x) - 3 \\
&= 2(x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{2} - 3 \\
&= 2(x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{7}{2}.
\end{aligned}$$

பிரசினம் 5.7 பின்வரும் கோவைகளை $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ என்னும் வடிவில் ஒழுங்கு செய்க.

(i) $y = x^2 + 4x + 3$; (ii) $y = x^2 - 2x - 8$;

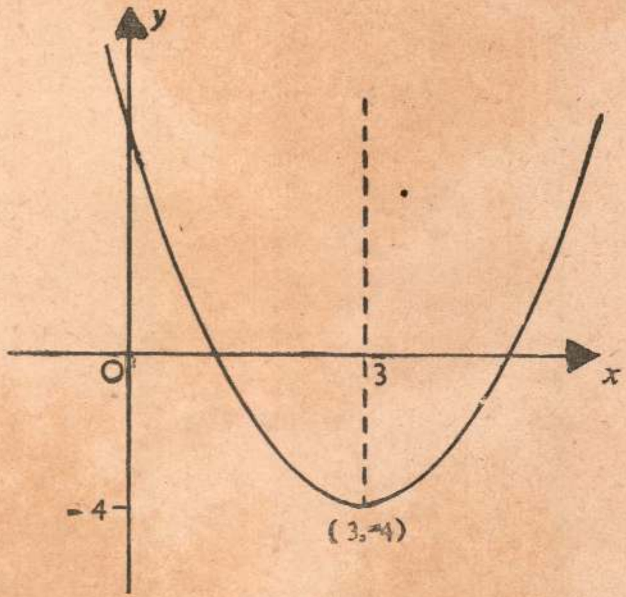
(iii) $y = x^2 - 10x + 9$; (iv) $y = x^2 + 7x - 6$.

2.23 $y = 3x^2 + 2x + 4$ என்னும் சமன்பாட்டில் x மிகவும் பெரிதாகும்போது வலது கைப் பக்கத்தேயுள்ள முக்கிய உறுப்பு $3x^2$ ஆகும். இது நேரும் பெரிதும் ஆகும். எனவே y யும் நேரும் பெரிதும் ஆகும். இதனைப் பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$x \to + \infty \Rightarrow y \to + \infty$$

அல்லது $x \to + \infty$ ஆகையில், $y \to + \infty$.

$y = -4x^2 + 9x + 400$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு $x \to + \infty$ ஆக $y \to \infty$ ஆகும். ஏனெனில் x^2 இன் குணகத்தினது குறி மறையாகும்.



உரு 5.17

பயிற்சி 5.2

1. இயலுமானபோது பின்வருவன எங்கு x அச்சைக் கடக்கின்றனவெனக் காட்டி, மூலங்கள் மெய்யாயும் வேறுவேறுயும் வரும் ஆட்சித் தொடையைக் கூறுக.

ஒவ்வொன்றையும் $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ என்னும் வடிவில் ஒழுங்கு செய்வதன் மூலம் திரும்பற் புள்ளியின் நிலையைக் காண்க. ஒவ்வொரு வகையிலும் மேலுள்ளவற்றையும் வளையி y – அச்சை வெட்டும் இடத்தையும் காட்டும் ஒரு சிறு வரைபைத் தருக.

(i) $y = x^2 - 4x + 3$; (ii) $y = -x^2 + 4x + 12$;

(iii) $y = x^2 + 8x + 16$; (iv) $y = 6x^2 - 7x + 2$;

(v) $y = 2x^2 - 2x + 9$; (vi) $y + 10 = x(2x + 1)$.

2. சமன்பாடு (i) சம மூலங்களை (ii) மெய்யான, வேறுவேறான மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதாகத் தரப்பட, பின்வரும் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் k யைக் காண்க.

(i) $x^2 - 8x + k = 0$;

(ii) $x^2 + (k + 1)x + 9 = 0$;

(iii) $k^2 x^2 + 2(k + 1)x + 4 = 0$;

(iv) $x^2 + kx + 16 = 0$.

3. $x^2 + (x + k)^2 = 8$ என்னும் சமன்பாடு சம மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

4. $(2k - 1)x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாடு சம மூலங்களைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க. $m = 3$ ஆயின், இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைப்பற்றி யாது கூறலாம்?

5. $\dfrac{x^2 + 4x + 10}{2x + 5} = k$ என்னும் சமன்பாட்டை x இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக ஒழுங்கு செய்து சமன்பாடு சமமூலங்களைக் கொண்டிருப்பின் k யைக் காண்க. k யின் எப்பெறுமானங்களுக்கு மூலங்கள் மெய்யாகும்.

6. $kx^2 - 10x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாடு விகிதமுறும் மூலங்களைக் கொண்டுள்ளதென்றும் k ஒரு நேர் நிறையெண்ணென்றும் தரப்பட, k யிற்கான எல்லா இயல்தகு பெறுமானங்களையும் காண்க.

7. பின்வருவன ஒவ்வொன்றையும் x இலான ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக ஒழுங்கு செய்து எப்பெறுமானங்களின் வீச்சிற்குள் y அமைய முடியாதெனக் காண்க.

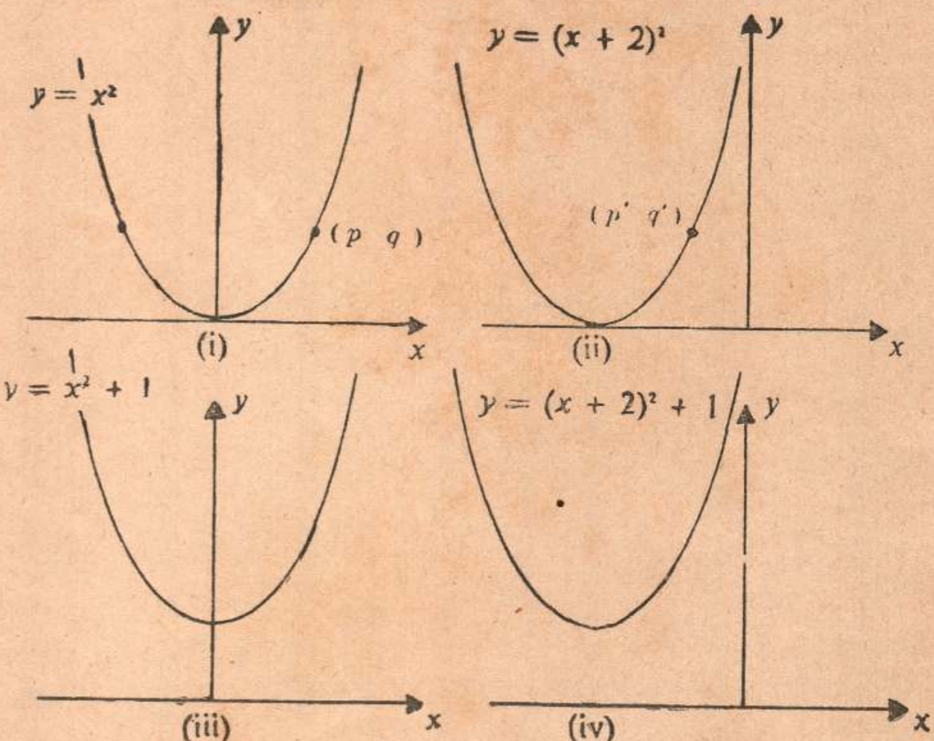
(i) $y = \dfrac{4}{(x - 1)(x - 3)}$; (ii) $y = \dfrac{3x - 6}{x(x + 6)}$;

(iii) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; (iv) $y = \dfrac{4x^2 - 3x}{x^2 + 1}$;

(v) $y = \dfrac{(x - 3)(x - 1)}{(x - 2)^2}$; (vi) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$;

2.4 $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ என்னும் கோவை உரு 5.18 இலுள்ள மூன்று வரைபுகளையும் கருதுக. இவை அடிப்படையில் ஒரே வரைபேயாகும். இவை ஒன்றுக்கொன்று கொண்டுள்ள தொடர்பு பற்றி அறிந்திருந்தால் வரைபுகளை விரைவாகக் கீறிக்கொள்ளலாம்.

உதாரணம் 5.10 $y = x^2 + 4x + 4$ இன் வரைபைக் கீறுக. இதனை $y = (x + 2)^2$ என்னும் வடிவில் ஒழுங்கு செய்தால் இது $y = x^2$ போன்ற வரைபுக் குடும்பத்திலிருந்து பெறப்பட்டது என்று காணலாம். இவ்வகையில் $x = -2$ ஆகும்



உரு 5.81

போது $y = 0$. எனவே இது -2 அலகுக் கிடைநூக்குடனை $y = x^2$ இன் வரைபாகும். உரு 5.18 (ii) இல் வரைபு காட்டப்பட்டுள்ளது. (p, q) ஆனது $y = x^2$ என்னும் வரைபிலும் (p', q') ஆனது $y = x^2 + 4x + 4$ என்னும் வரைபிலும் இருப்பின்,

$$p \longrightarrow p',$$
$q \longrightarrow q'$ என்னும் படமாக்கல்
$$p' = p - 2,$$
$$q' = q$$
அல்லது $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

அ—து x திசையில் 2 அலகுகள் பெயர்ப்பதனாலே தரப்படும்.

உதாரணம் 5.11 $y = x^2 + 1$ இன் வரைபைக் கீறுக. இதுவும் ஒரே குடும்பத்தைச் சேர்ந்தது. $x = 0$ ஆகும்போது $y = 1$. மேலும் $y = x^2$ என்னும் வரைபினது y யின் ஒவ்வொரு பெறுமானமும் 1 ஆல் அதிகரிக்கப்பட்டுள்ளது. இது உரு 5.18 (iii) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. (p', q') ஆனது இவ்வரைபில் அமையின்

$$p \to p'$$
$$q \to q' \quad \text{என்னும் படமாக்கல்.}$$
$$p' = p$$
$$q' = q + 1$$

அல்லது $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

அ—து y திசையில் 1 அலகு பெயர்வு என்பதனுலே தரப்படும்.

உதாரணம் 5.12 $y = x^2 + 4x + 5$ இன் வரைபைக் கீறுக.

மீள ஒழுங்கு செய்ய $y = (x + 2)^2 + 1$ என்று பெறுவோம். இது x திசையில் -2 அலகுப் பெயர்வையும் y திசையில் 1 அலகுப் பெயர்வையும் உள்ளடக்கும். படமாக்கலானது

$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ என்பதனுலே தரப்படும்.

இது உரு 5.18 (iv) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 5.3

பின்வரும் சமன்பாடுகளை $y = a(x + \alpha)^2 + \beta$ என்னும் வடிவில் ஒழுங்கு செய்க. அதிலிருந்து தரப்பட்ட சமன்பாட்டை உண்டுபண்ணுவதற்கு $y = x^2$ எவ்வுருமாற்றத்திற்கு உட்படல் வேண்டும் என்பதையும் கூறுக.

(i) $y = x^2 + 8x + 16$;

(ii) $y = x^2 - 4$;

(iii) $y = x^2 + 11x + 18$;

(iv) $y + 15 = (x + 1)(2x + 1)$;

(v) $y = 3x^2 - 13x - 10$.

2.5 $y = ax^2 + bx + c$ என்பதன் வரைபை மேலும் திருத்தமாக வரைதல்

சில சமயங்களில், சார்பின் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆட்சியில் அல்லது தரப்பட்ட ஆட்சியின் ஒரு பகுதியில், சார்புக்கு ஓரளவு திருத்தமான வரைதல் தேவைப் படுகிறது. இவ்வகையில் நாம் கூண்டுபட்ட வடிவில் ஒழுங்கு செய்து, தரப்பட்ட சார்பை அட்டவணைப்படுத்தி, பின்னர், கவனமாக வரைவோம். பின்வரும் உதாரணம் இதனை எடுத்துக் காட்டும்.

உதாரணம் 5.13 $x \to x^2 + 3x - 5$ என்னும் சார்பை $\{x : -3 \leqslant x \leqslant 2\}$ என்னும் ஆட்சியின் மேலாகக் கவனமாயும் திருத்தமாயும் வரைக.

$x \to x^2 + 3x - 5$ என்னும் சார்பை, கூண்டுபட்ட வடிவில், $(x + 3)x - 5$ என்று ஒழுங்கு செய்யலாம். அப்போது நாம் அட்டவணை 5.1 ஐ எளிதில் முற்றுக்கலாம்.

14725—33

x	-3	-2	-1	0	1	2
$x + 3$	0	1	2	3	4	5
$(x + 3)x$	0	-2	-2	0	4	10
$(x + 3)x - 5$	-5	-7	-7	-5	-1	5

அட்டவணை 5.1

அட்டவணையில் $x = -\frac{3}{2}$ என்னும் பெறுமானம்பற்றிச் சமச்சீர் இருப்பதைக் கவனிக்க. சார்பை $y = (x + \alpha)^2 + \beta$ என்னும் வடிவில் ஒழுங்கு செய்தால்,

$y = (x + \frac{3}{2})^2 - 7\frac{1}{4}$ என்று பெறுவோம். மேலும் இழிவுப் பெறுமானம் $(-\frac{3}{2}, -7\frac{1}{4})$ இல் இருப்பதைக் காணலாம்.

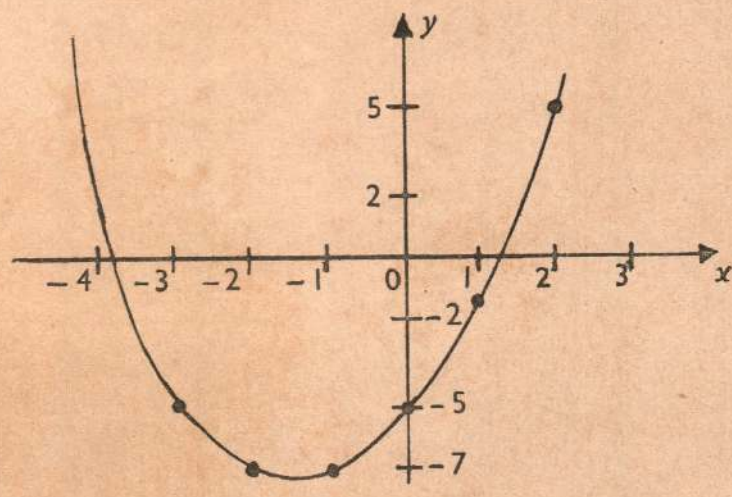
$x^2 + 3x - 5 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$b^2 - 4ac = 29$ என்று பெறுவோம்.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

அ—து, வளையி அச்சை $x \simeq 4{\cdot}19$ இலும் $x \simeq 1{\cdot}19$ இலும் வெட்டுகிறது.

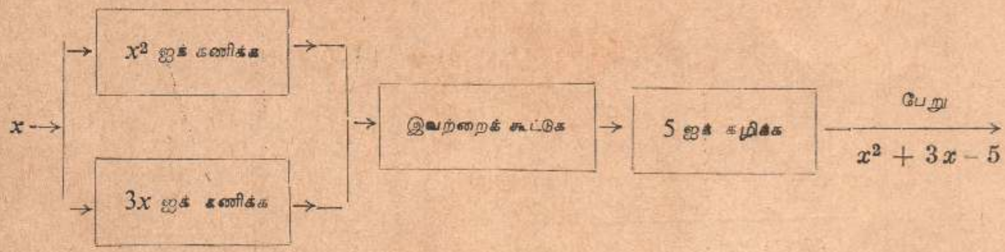
இத் தகவலுடன் உரு 5.19 இற் போன்று வலையியை வரையலாம்.



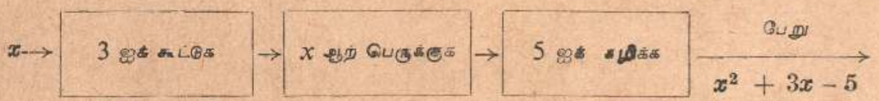
உரு 5.19

மேலேயுள்ள கூண்டுபடும் ஒழுங்கு, உமது அட்டவணையில் எவ்வெவ்வுறுப்புகளைக் கூட்டவேண்டும் எனவெல்லாம் ''நினைத்து'' வைத்திருக்க வேண்டிய தேவையைத் தவிர்க்கிறது. அது ஒரே திசையிலே படிப்படியாக முன்னேக்கிச் செயல்பட உதவுகிறது. இம்முறையின் நன்மையைப் பின்வரும் பாய்ச்சல் வரிப்படங்கள் காட்டுகின்றன. இரண்டாம் வகையிலே 3 செயல்கள் மட்டுமே தேவை என்பதையும் முதலாம் வகையிற் போன்று, $3x$ ஐக் கணிக்கும்போது x^2 ஐ நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டியதில்லை என்பதையும் நோக்குக.

வகை I $x^2 + 3x - 5$ ஐக் கணிக்க.



வகை II $(x + 3)\,x - 5$ ஐக் கணிக்க.



பயிற்சி 5.4

1. காட்டியுள்ள ஆட்சிகளில், பின்வருவனவற்றின் வரைபுகளைக் கீறுக.

   அவற்றின் திரும்பற் புள்ளிகளையும் அவை அச்சுகளை வெட்டும் இடங்களையும் குறிக்க.

   (i) $y = x^2 - 3x + 2$; $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 4\}$ என்னும் ஆட்சியில்

   (ii) $y = 1 - 2x - 3x^2$; $\{x : -3 \leqslant x \leqslant 3\}$ என்னும் ஆட்சியில்

   (iii) $y = x^2 + 6x + 5$; $\{x : -6 \leqslant x \leqslant 0\}$ என்னும் ஆட்சியில்.

2. $y = x^2 - 1$ என்னுஞ் சார்பின் வரைபை $\{x : -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ என்னும் ஆட்சியிற் கீறுக. உமது வரைபிலிருந்து (i) $x^2 - 1 = 0$ (ii) $x^2 - 4 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

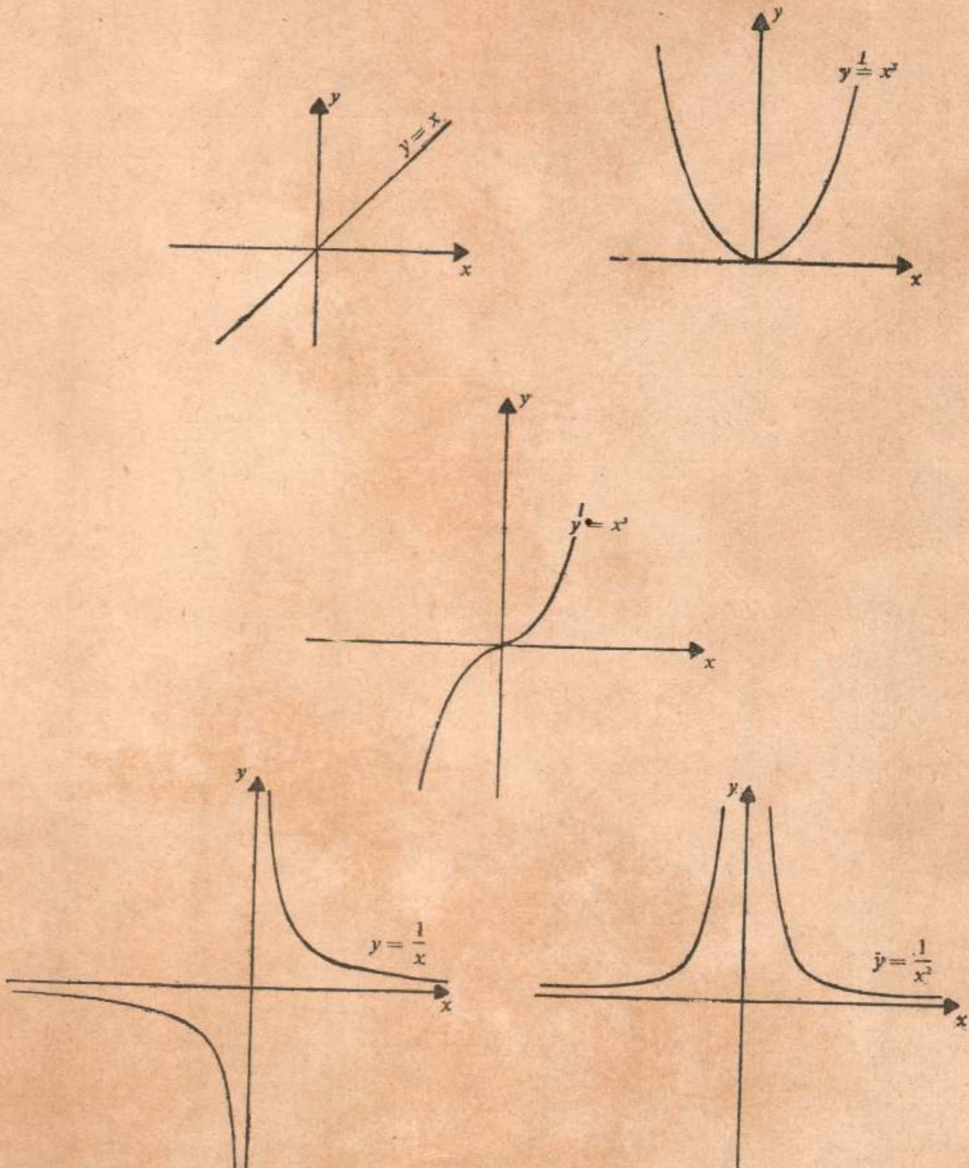
   [குறிப்பு: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 3$. எனவே $y = x^2 - 1$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில் $y = 3$ எனத் தரும் x இன் பெறுமானத்தைக் காண முயல்க.]

3. $y = x^2 + 4x + 3$ என்னுஞ் சார்பின் வரைபை $\{x : -5 \leqslant x \leqslant 0\}$ என்னும் ஆட்சியிற் கீறி, அதிலிருந்து (i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ என்பதையும் (ii) $x^2 + 4x + 2 = 0$ என்பதையும் தீர்க்க.

3. நியம வரைபுகள் சில

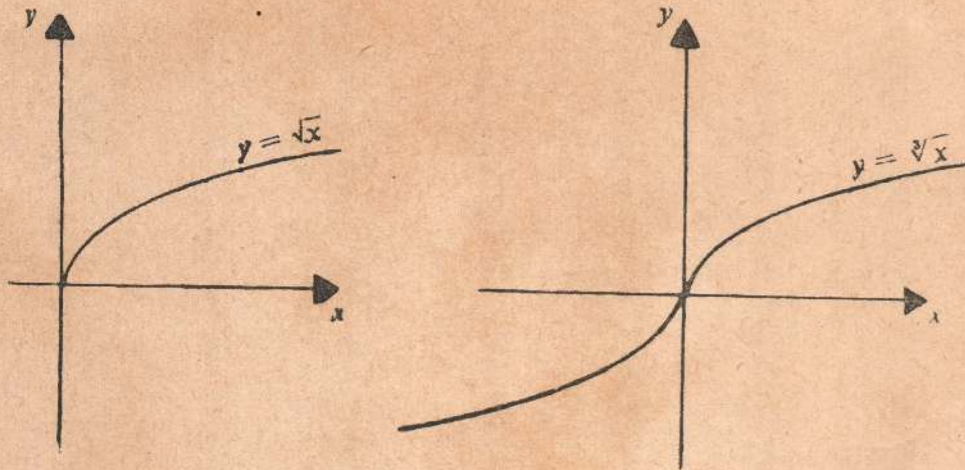
3.1 சில வரைபுகளை நீங்கள் அடிக்கடி சந்திப்பீர்கள். அவற்றை இலகுவாக வரையக்கூடியவர்களாக நீங்கள் இருத்தல் வேண்டும். பின்வருவன அந்தப் பொது வகை வரைபுகள். இவற்றுட் பலவற்றை நீங்கள் ஏற்கெனவே அறிவீர்கள்.

$y = x,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = \dfrac{1}{x^2}$ என்றவாறான x இனது வலுக்களின் வரைபுகளை உரு 5.20 இலே தந்துள்ளோம்.



உரு 5.20

$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ என்னும் சார்புகளின் வரைபுகளை உரு 5.21 இலே தந்துள்ளோம்.



உரு 5.21

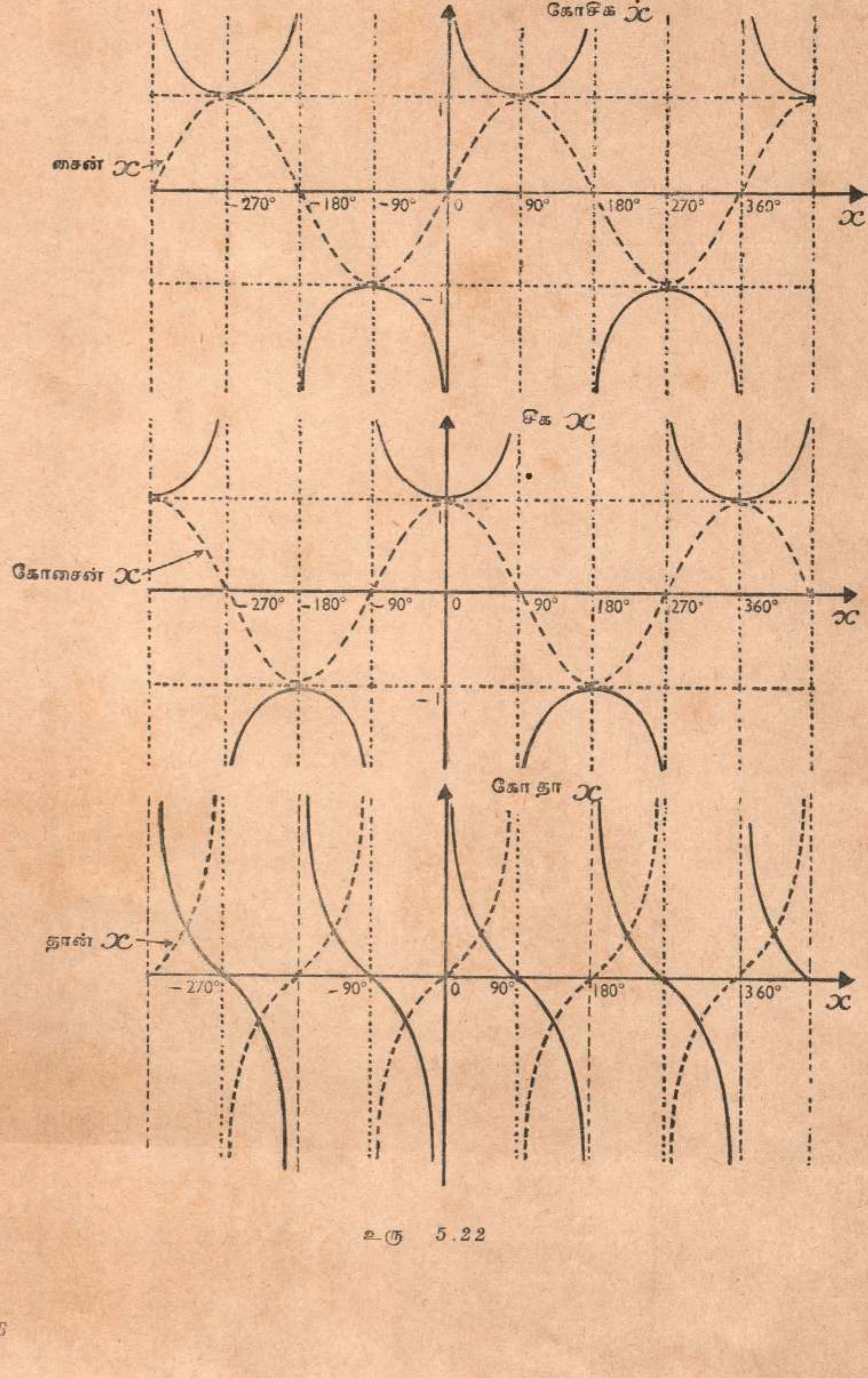
$y = \frac{1}{x}$ உம் $y = \frac{1}{x^2}$ உம் $x = 0$ இற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கவில்லை என்பதையும், வழக்கப் பிரகாரம் வர்க்க மூலத்தின் நேர்ப் பெறுமானத்தை எடுக்கும்போது $\sqrt{4} = 2$ என்பது போல் $y = \sqrt{x}$ என்பது $x < 0$ இற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கவில்லை என்பதையும் கவனிக்க.

ஒரு சார்பின் நேர்மாற்றை வரையும்போது $y = x^3$ இற் போன்று அது 'ஒன்று-ஒன்று' ஆக அமைதல் வேண்டும் என்பதை உறுதிசெய்து கொள்க. உதாரணமாக $y = x^2$ என்பது 'இரண்டு - ஒன்று' சார்பாகும். சார்பு இவ்வாறு ஒன்று - ஒன்றாக அமையாதவிடத்து, தொடக்கச் சார்பை ஒன்று - ஒன்று ஆக்குமாறு அதன் ஆட்சியைத் தெரிந்தெடுத்தல் வேண்டும். அவ்வாறு செய்த பின் நேர்மாற்றைக் காண்பது, எளிது.

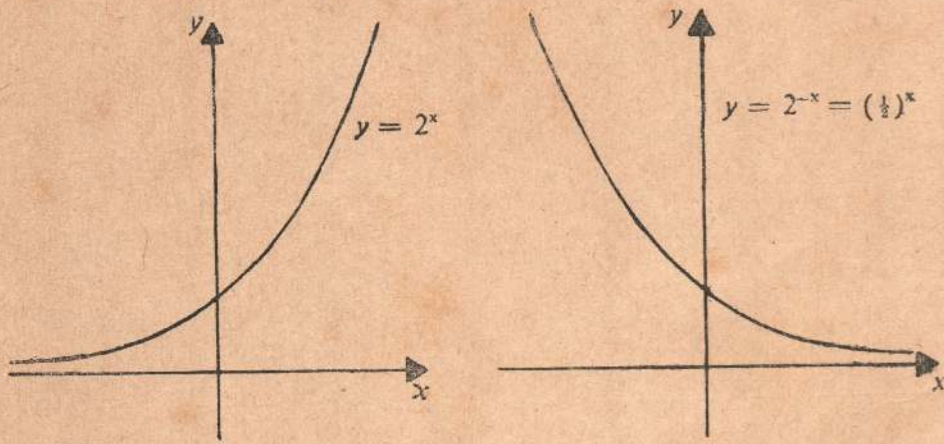
குறிப்பு. உரு 5.21 (ii) ஆனது உரு 5.20 (iii) இன் நேர்மாறு; உரு 5.21 (i) ஆனது உரு 5.20 (ii) இன் நேர்மாறு அன்று. அது கண்டிப்பாக $\{ (x, y) : y = x^2, x$ ஒரு நேர் மெய் எண் $\}$ என்பதன் நேர்மாறாகும்.

திரிகோண கணிதச் சார்புகளான சைன் x, கோசைன் x தான்சன் x என்பனவும் அவற்றின் நிகர்மாற்றுகளான கோசீக்கன் x, சீக்கன் x கோதான்சன் x என்பனவும் உரு 5.22 இலே தரப்பட்டுள்ளன.

மேலும் $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$ (உரு 5.23) என்பவற்றை அதிகாரம் 3 இலே அறிந்திருப்பீர்கள். அவ்வாறே உரு 5.24 இல் உள்ள $y = a^x$, $y =$ மடக்கை$_a x$ என்பவற்றின் வரைபுகளும் நீங்கள் அறிந்தவையே. இறுதியாகச் சொன்னவை இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகையால் அவை ஒவ்வொன்றும் $y = x$ என்னும் கோட்டின்மீது மற்றதன் தெறிப்பாகும் என்பதை நினைவுகூர்க.

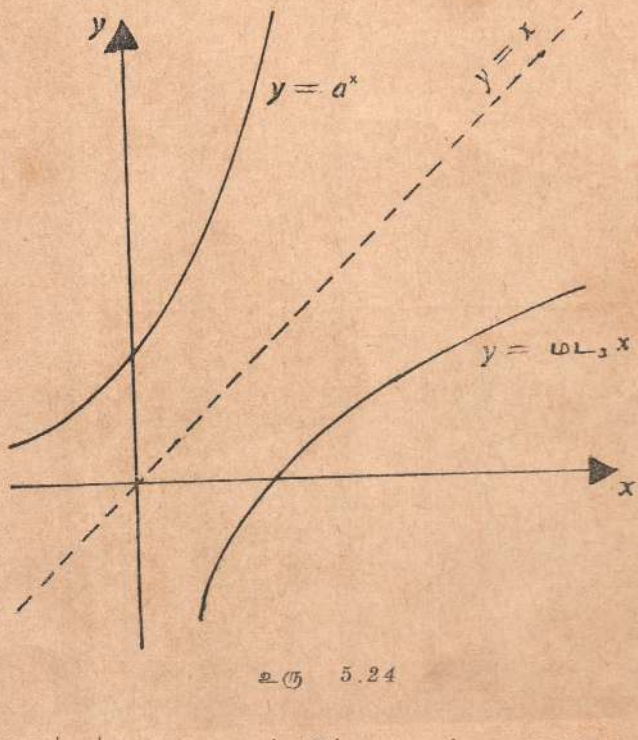


உரு 5.22



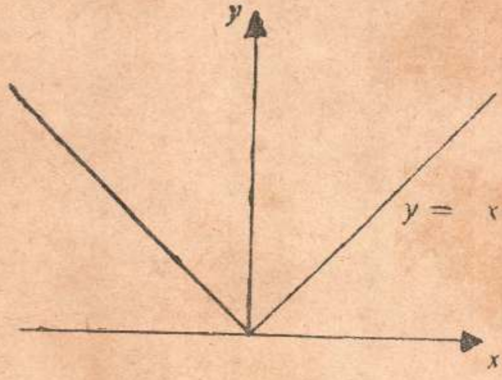
(i) (ii)

உரு 5.23

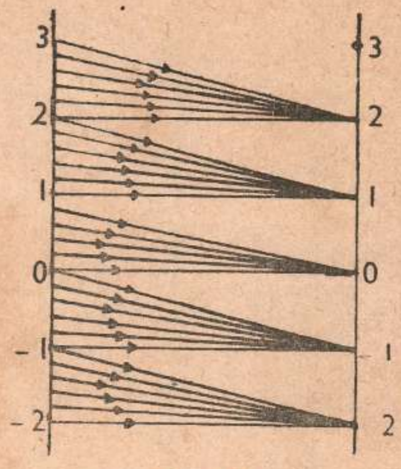


உரு 5.24

x இன் மட்டு $|x|$ என எழுதப்படும். அதன் வரைபு உரு 5.25 இலே காட்டப்பட்டுள்ளது. அது x நேராகும்போது $y = x$ என்னும் சார்பும் x மறையாகும்போது $y = -x$ என்னும் சார்புமாகும்.



உரு 5.25



உரு 5.26

மற்றொரு சார்பு $y = [x]$ என்னும் நிறையெண் சார்பாகும். $[x]$ என்பது x இலும் பெரிதாகாத ஆகப் பெரிய நிறையெண்ணைக் குறிக்கும். (x நேராயின் அது x இன் முழு எண் பகுதியாகும்.)

பிரசினம் 5.8 (i) பின்வருவனவற்றின் பெறுமதிகள் யாவை?

$[3\frac{1}{4}]$, $[2{\cdot}718]$, $[\pi]$, $[\sqrt{7}]$, $[6]$, $[0]$, $[-1{\cdot}01]$, $[-3)$, $[-0{\cdot}44]$

(ii) அட்டவணை 5.2 ஐப் பிரதி செய்து பூர்த்தியாக்குக.

x	-2	$-1\frac{3}{4}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$
$[x]$	-2	-2							0	0								2

அட்டவணை 5.2

படம் 5.26 ஆனது மேலுள்ள அட்டவணை 5.2 இலுள்ளவற்றை வரைபாக்கிக் காட்டுகிறது. இதனை உரு 5.15 இற்போன்று தெக்காட்டின் வரைபாய் மாற்றுக. புள்ளிகள் 1, 2, 3, . . . எவ்விடங்களில் வரும் எனத் தெளிவாய்க் காட்டுக.

இவ்வரைபுகளையெல்லாம் ஒரு தடவையாயினும் திருத்தமாக நீங்கள் வரைந்து பார்த்தல் வேண்டும். அவற்றின் மிகப் பிரதானமான இயல்புகளை நன்கு அறிந்திருப்பதும் அவசியம். உதாரணம்: அச்சுகளை வெட்டும் இடங்கள். அவ்வாறு அறிந்திருந்தால் வேண்டிய சமயத்திலே விரைவாக வரைபுகளைக் கீறும்போது, அவ்வியல்புகளை உங்கள் படத்திலே அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் சார்புகளின் வரைபுகளைக் கீறுக.

(i) $y = x^4$; (ii) $y = \sqrt[4]{x}$; (iii) $y = x^5$;

(iv) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; (v) $y = x^6$; (vi) $y = x^7$.

2. $y = x^n$ இன் வரைபை,

(i) n ஓர் ஒற்றை நேர் நிறையெண்ணாய் இருக்கையிலும்,

(ii) n ஓர் இரட்டை நேர் நிறையெண்ணாய் இருக்கையிலும் வரைக.

3. ஒரே வரைபில் $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ என்னும் சார்புகளை வரைக. $0 < x < 1$ ஆகும்போது அவற்றை ஒப்பிடுக.

4. ஒரே வரைபில் $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$ என்னும் சார்புகளை வரைக. அவற்றை ஒப்பிடுக.

5. பின்வருவனவற்றின் வரைபுகளைக் கீறுக:—

(i) $y = -x^2$, (ii) $y = -\frac{1}{x^2}$, (iii) $y = -x^3$, (iv) $y = -\sqrt{x}$,

(v) $y = \frac{4}{x}$ (vi) $y = \sqrt{x} + 2$, (vii) $y = 3 + \frac{1}{x}$ (viii) $y = -\frac{4}{x} + 4$,

(ix) $y = 2x^2 - 3$, (x) $y = -3x^4$.

6. (i) $x \to \frac{1}{x}$, (ii) $x \to \frac{1}{x+1}$, (iii) $x \to \frac{1}{x+2}$ என்னும் சார்புகளின் வரைபுகளை ஒரே அச்சுத்தொகுதியில் வரைக.

4. விகிதமுறு சார்புகளின் வரைபுகள்

4.1 நாம் இங்கு $f : x \to \frac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}$ என்னும் வடிவிலான சார்புகளை நோக்குவோம். இங்கு a, b, c, A, B, C என்பன எல்லாம் மெய் எண்கள். முந்திய பகுதியிற் கையாண்ட முறைகளையே இங்கும் கையாள்வோம்.

உதாரணம் 5.14

$$y = \frac{x+2}{x-3}$$ என்பதன் வரைபைக் கீறுக.

(i) $x = 0$ ஆயின் $y = -\frac{2}{3}$.

(ii) $y = 0$ ஆயின் $x = -2$.

(iii) $x = 3$ ஆயின், சார்பின் பகுதியெண் பூச்சியம். அப்பொழுது சார்பு வரையறையற்றது. இதனால், சார்பிலே ஒரு தொடர்ச்சியின்மை அல்லது முறிவு நேர்கிறது. தொடர்ச்சியின்மைக்கு அருகிலே சார்பு எவ்வாறு நடந்து கொள்கின்றதெனக் கவனமாக ஆராய்தல் முக்கியம். 3 இற்கும் x இற்கும் வித்தியாசம் சிறிதாயின் y பெரிதாகும். x ஆனது 3 இனும் சற்றே பெரிதாயின் பகுதியெண்ணும் தொகுதியெண்ணும் நேராகையால், y ஆனது மிகப் பெரிதும் நேரும் ஆகும்.

14725—34

$$x \to 3^- \text{ ஆயின் } y \to +\infty$$

என நாம் எழுதலாம். x ஆனது 3 இனும் சற்றுச் சிறிதாயின் y பெரிதும் மறையும் ஆகும்.

$$x \to 3^- \text{ ஆயின் } y \to -\infty$$

என நாம் எழுதலாம்.

இவற்றின்படி, நம் வளையி $x = 3$ என்னும் கோட்டை அணுகுகிறது; 3 இற்குக் கிட்டிய x களுக்கு வளையி இக்கோட்டுடன் நெருக்கமாகப் பொருந்தும். கோடு $x = 3$ ஓர் அணுகுகோடு எனப்படும்.

(iv) x மிகப் பெரிதாகும்போது $x + 2$ உம் $x - 3$ உம் கிட்டத்தட்டச் சமன் அதனுல், $x \to +\infty$ ஆயின் $y \to 1$; $x \to -\infty$ ஆயின் $y \to 1$.

அதனுல் $y = 1$ ஓர் அணுகுகோடு ஆகும்.

$$x \to +\infty \text{ ஆயின், } x + 2 > x - 3 \text{ ஆதலால் } \frac{x+2}{x-3} > 1$$

அதனுல் மேற்புறத்திருந்து $y \to 1$.

$$\text{அதேபோன்று } x \to -\infty \text{ ஆயின் } \frac{x+2}{x-3} < 1 \qquad y \to 1$$

அதனுல், கீழ்ப்புறத்திருந்து $y \to 1$

(v) $y = 1$ என்னும் பெறுமதியைச் சார்பிலே பிரதியிட்டால்,

$$1 = \frac{x+2}{x-3}$$

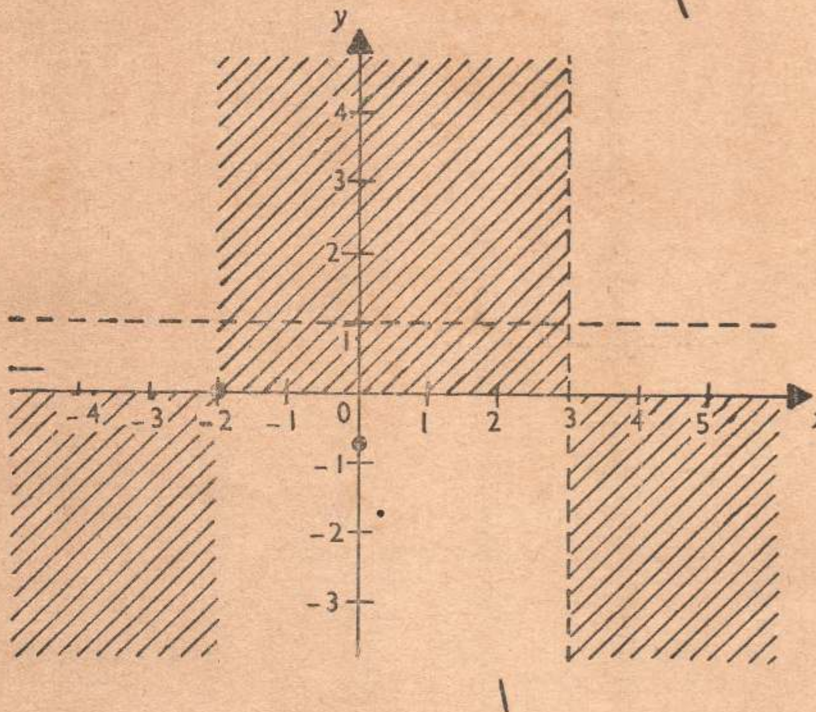
இச்சமன்பாட்டை x இன் எப்பெறுமானமும் திருப்தி செய்யவில்லையாதலால் $y = 1$ என்னும் கோட்டை வளையி சந்திக்கவில்லை எனலாம்.

(vi) $x + 2, x - 3$ என்பவற்றின் குறிகளை நோக்குவதால் y இன் குறிகளைத் துணியலாம் (அட்டவணை 5.3 ஐப் பார்க)

	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$3 < x$
$x + 2$ $x - 3$	$-$ $-$	$+$ $-$	$+$ $+$
y	$+$	$-$	$+$

அட்டவணை 5.3

நாம் கண்டறிந்தவற்றை உரு 5.27 இற் காட்டியுள்ளோம். நிழலிட்ட இடங்கள் வளையி கிடக்க இயலாத இடங்களைக் காட்டுகின்றன. ஒரு வரைபு நாடும் அணுகுகோட்டை அறிந்துவிட்டோமாயின் வரைபு ஓரளவுக்கு வரைபட்டாயிற்று எனலாம். முழு வரைபையும் வரைய உரு 5.28 இல் உள்ளவாறு வரும்.



உரு 5.27

உதாரணம் 5.15 $x \to \dfrac{3x-9}{x^2-x-2}$ என்னும் சார்பு சில பெறுமானங்களுக்கிடையே இருத்தல் இயலாதெனக் காட்டி அதன் வரைபை வரைக.

$$y = \frac{3x-9}{x^2-x-2} \quad \text{என்க.}$$

இதனை ஓர் இருபடியமாகக் கருதி, $ax^2 + bx + c$ என ஒழுங்கு பண்ணுக.

$$(x^2 - x - 2)\, y = 3x - 9\, ;$$

$$yx^2 - (y+3)\, x + 9 - 2y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

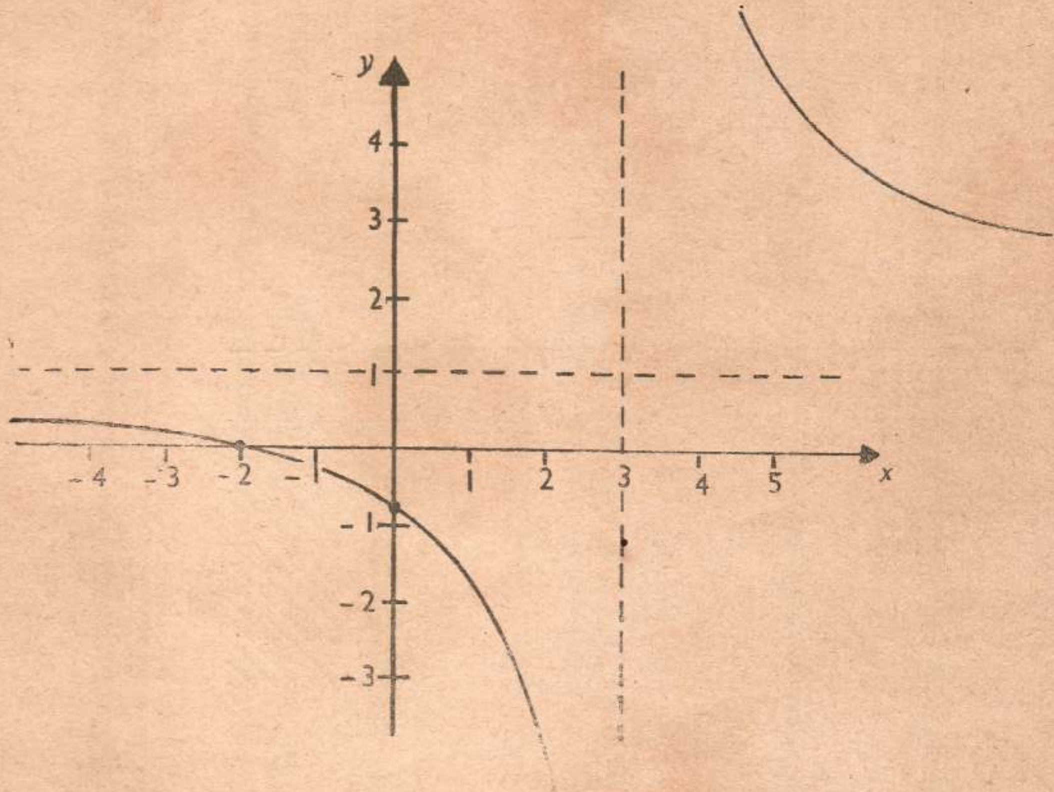
x மெய் அன்றுயின் $b^2 - 4ac < 0$ ஆதல் வேண்டும்.

அ—து $\quad [-(y+3)]^2 - 4y(9-2y) < 0,$

$\therefore\ 9y^2 - 30y + 9 < 0,$

$3(3y-1)(y-3) < 0\, ;$

$\frac{1}{3} < y < 3.$



உரு 5.28

$\therefore$ சார்பு $\frac{1}{3}$ இற்கும் 3 இற்கும் இடையிற் கிடத்தல் இயலாது.

இனி, $$y = \frac{3(x-3)}{(x+1)(x-2)};$$

உதாரணம் 5.14 இற்போல நாம் செய்து கொள்ளலாம்.

(i) $x = 0$ ஆயின் $y = 4\frac{1}{2}$.

(ii) $y = 0$ ஆயின் $x = 3$.

(iii) $x = -1$ உம் $x = 2$ உம் அணுகுகோடுகள்.

(iv) x பெரிதாயின் x இன் மிகப்பெரிய வலுக்களையே நாம் நோக்குவோம்.

சார்பு கிட்டத்தட்ட $\frac{3x}{x^2}$ ஆகும்.

இச்சார்பு $x \to \infty$ ஆகும்போது 0 ஐ நாடும்.

அ—து $x \to +\infty$ ஆயின் $y \to 0^+$; $x \to -\infty$ ஆயின் $y \to 0^-$

(v) $y = \frac{1}{3}\,y = 3$ என்னும் பெறுமானங்களை (1) இற் பிரதியிட்டால் x இன் பெறுமானங்களைக் காணலாம்.

$y = \frac{1}{3}$ எனின் $\frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{3} = 0$

$(x - 5)^2 = 0$

அ-து $x = 5$.

$y = 3$ எனின் $3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0.$

அ-து $x = 1$

(vi) y இன் குறியை அட்டவணை 5.4. இலிருந்து காணலாம்.

	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
$x + 1$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
y	$-$	$+$	$-$	$+$

அட்டவணை 5.4

மேற்கண்ட செய்திகளை உரு 5.29 இற் காட்டியவாறு தெரிவிக்கலாம்.

இறுதி வளையி உரு 5.30 இல் உள்ளவாறு வரும்.

உதாரணம் 5.16 $y = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)}$ என்னும் வளையியை வரைக.

(i) $x = 0$ ஆயின் $y = +2$.

(ii) $y = 0$ ஆயின் $x = 2$ அல்லது -3

(iii) $x = -1,\ x = 3$ என்பன அணுகுகோடுகள்.

(iv) $x \to \infty$ ஆக $y \simeq \frac{x^2}{x^2}$ 1; அதனல் $x \to +\infty$ ஆக $y \to 1^+$; $x \to -\infty$ ஆக

$y \to 1^-$ எனவே $y = 1$ என்பது

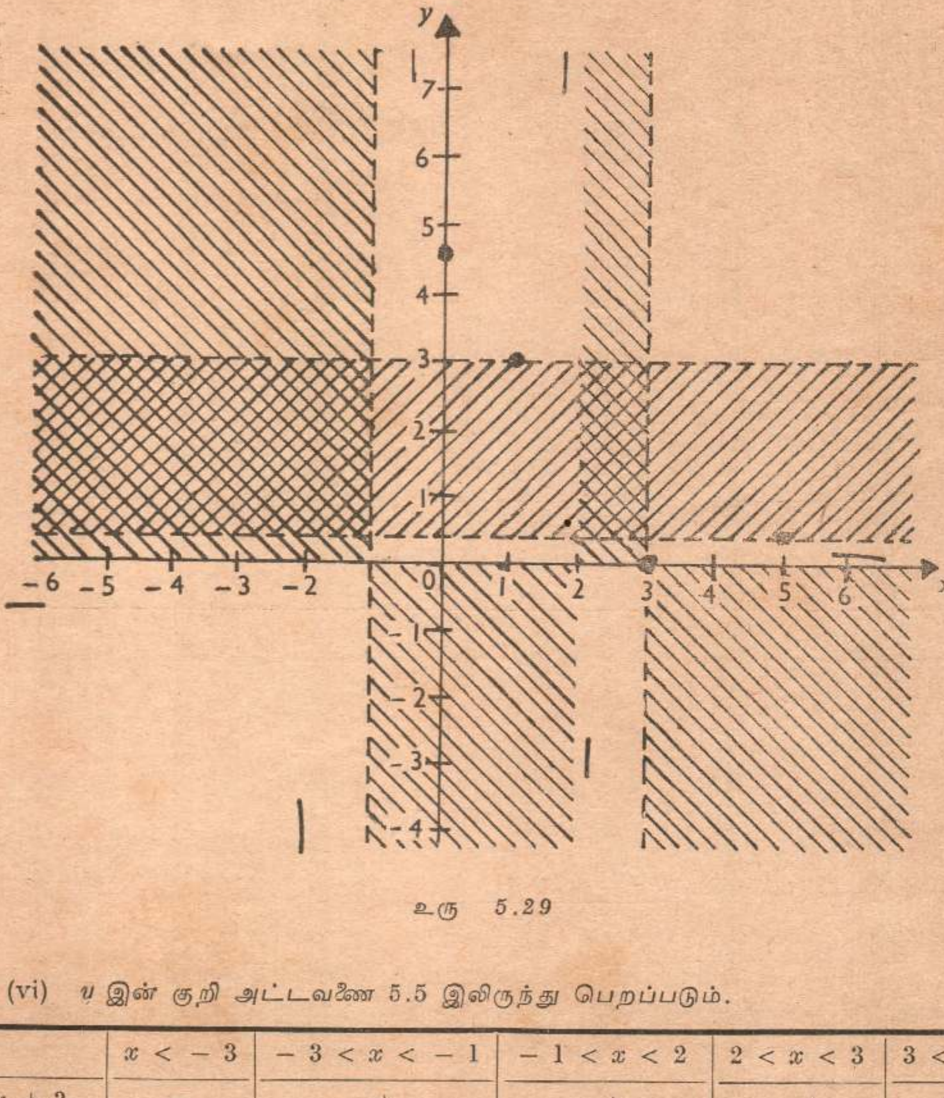
வளையிக்கு ஓர் அணுகுகோடாகும்.

(v) $y = 1$ என இட

$x^2 - 2x - 3 = x^2 + x - 6.$

$\therefore\ x = 1.$

எனவே வளையியானது $y = 1$ என்னும் கோட்டை $(1, 1)$ இற் குறுக்கிடும்.



உரு 5.29

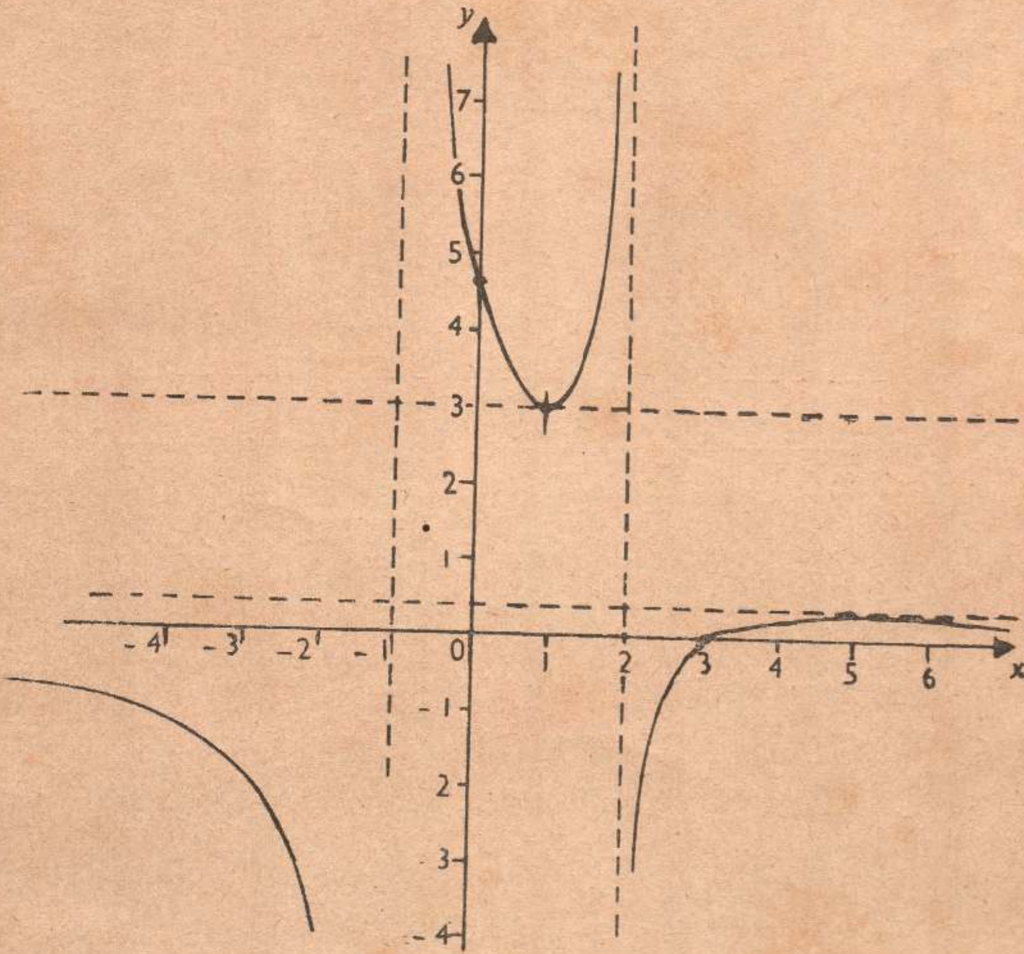
(vi) y இன் குறி அட்டவணை 5.5 இலிருந்து பெறப்படும்.

	$x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

அட்டவணை 5.5

நாம் கண்டறிந்தவை உரு 5.31 இற் காட்டப்பட்டுள்ளன.

இதிலிருந்து வரைபை உரு 5.32 இல் உள்ளவாறு பூர்த்தியாக்கலாம்.



உரு 5.30

பயிற்சி 5.6

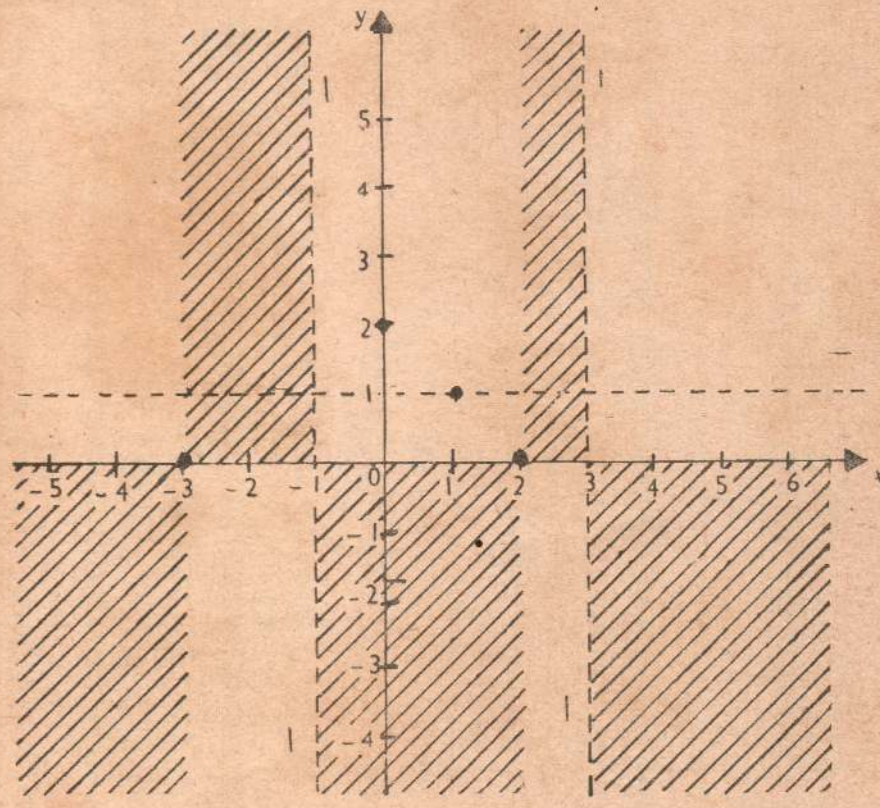
1. பின்வரும் சார்புகளின் வரைபுகளைக் கீறுக.

(i) $\dfrac{x+2}{x-3}$; (ii) $\dfrac{x}{x-4}$; (iii) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$; (iv) $\dfrac{x^2}{x^2-4}$;

(v) $\dfrac{3x-6}{(x-3)(x+1)}$; (vi) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$; (vii) $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-4x+4}$;

(viii) $\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)}$.

2. பயிற்சி 5.2 வினா 7 இல் வந்த சார்புகளின் வரைபுகளைக் கீறுக.



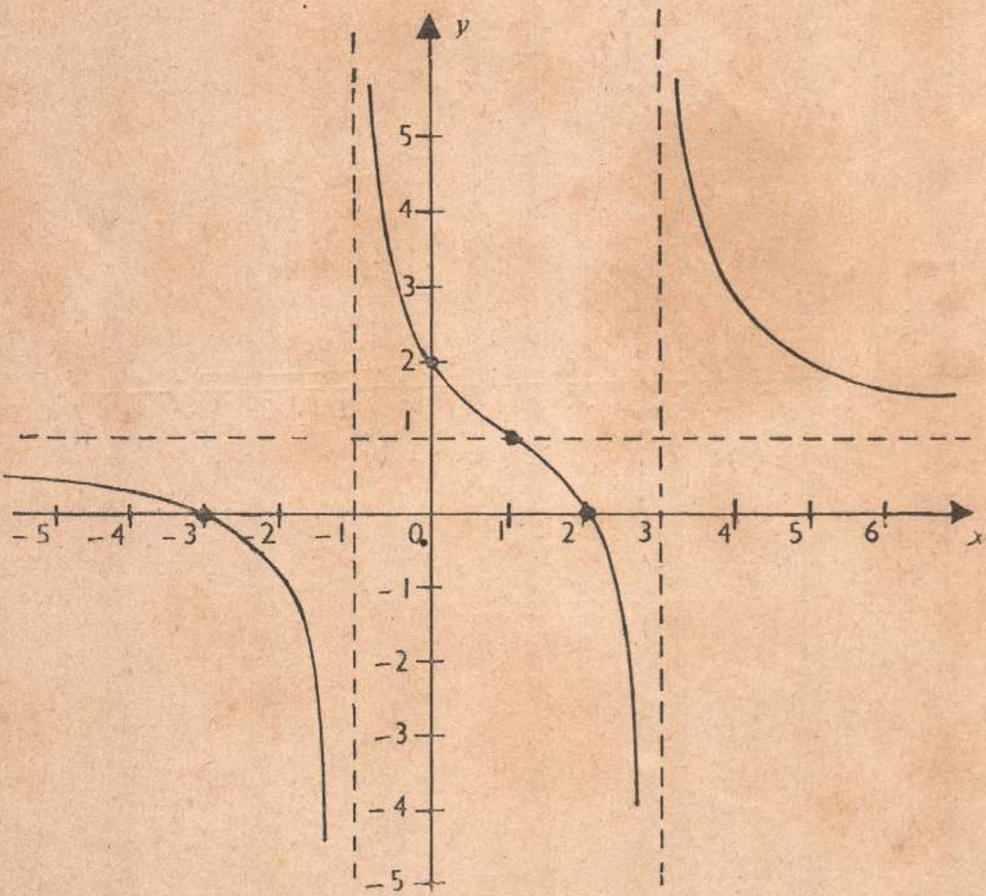
உரு 5.31

5. வரைபுகளின் உருமாற்றங்கள்

5.1 தெறிப்பு பயிற்சி 5.5 வினா 5 இற் கீறப்பட்ட $y = -x^2$ இன் வரைபு, அச்சு Ox இல் $y = x^2$ என்பதன் தெறிப்பாகும். எந்தவொரு சார்பு $y = f(x)$ ஐயும் x அச்சிலே தெறிக்கச் செய்தால் $y = -f(x)$ என்னும் சார்பை நாம் பெறுவோம். ஏனெனில், முன்பு நேர்ப் பெறுமானங்களை எடுத்த y ஆனது இப்பொழுது மறைப் பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

அதே பயிற்சியில் உரு 5.32 இற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $x \rightarrow \dfrac{1}{2+x}$ இன் வரையையும் நீங்கள் கீறினீர்கள்.

பிரசினம் 5.9 $x \rightarrow \dfrac{1}{2+x}$ இன் வரையை உரு 5.33 இற் காட்டியவாறு கீறுக. $x \rightarrow \dfrac{1}{2-x}$ என்னும் சார்பு, -4 முதல் 4 வரை எடுக்கும் பெறுமானங்களுக்கு ஓர் அட்டவணை தயாரித்து இதன் வரையை முன்னைய வரைபுமீது கீறுக.



உரு 5.32

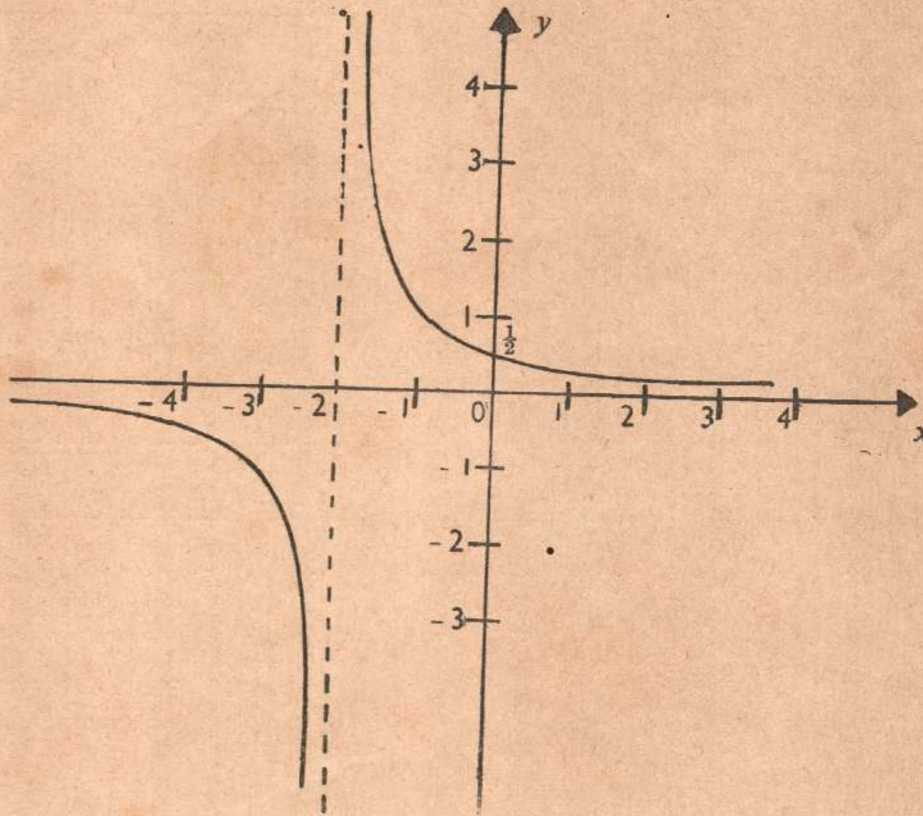
இது y - அச்சுமீது, $x \to \dfrac{1}{2+x}$ என்பதன் தெறிப்பு வளையி ஆகும். Oy மீது நிகழுந் தெறிப்பாற் கிடைக்கும் வளையியானது x ஐ $-x$ ஆற் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும். $\{x : x \geqslant 0\}$ என்னும் ஆட்சியையுடைய $(3-x)\sqrt{x}$ என்பதன் வரைபு உரு 5.34 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் தெறிப்பு. $\{x : x \leqslant 0\}$ என்னும் ஆட்சியையுடைய $[3-(-x)]\sqrt{x}$ என்பதாம். இது, அதே படத்திற் குற்றிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பிரசினம் 5.10

(i) $y = x^2$ என்னும் சார்பின் வரைபைக் கீறுக. அதே அச்சுகளில் $y = (-x)^2$ என்னும் சார்பின் வரைபையும் கீறுக.

(ii) $y = (-x)^4$ என்னும் சார்பின் வரைபு எவ்வாறு தோற்றமளிக்கும் ?
$f(x) = f(-x)$ ஆகுமாறு வரும் சார்பு இரட்டைச் சார்பு எனப்படும்.

14725—35



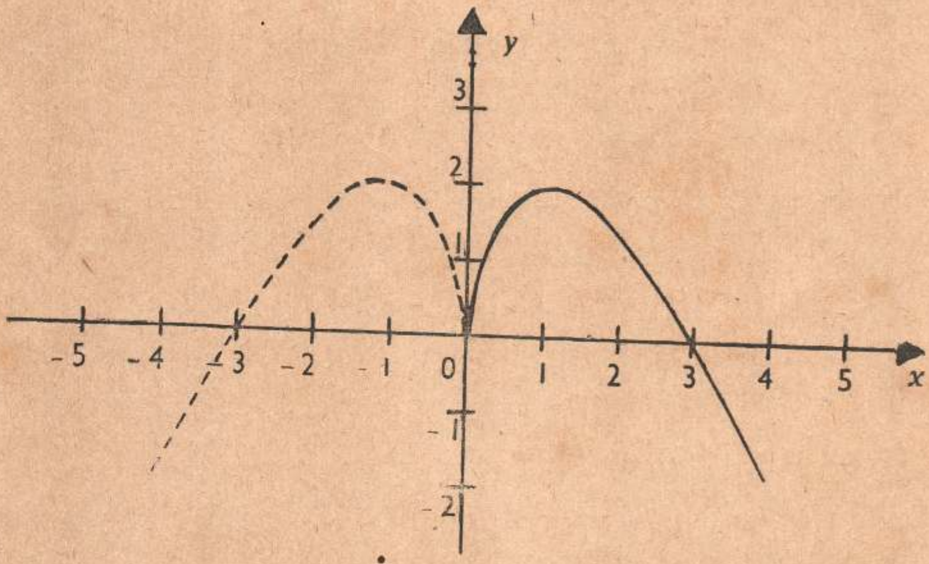
உரு 5.33

அதன் வரைபு y – அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீராயிருக்கும். (a, b) என்னும் புள்ளி இச்சார்பிற் கிடந்தால் $b = f(a)$; அவ்வாறே $b = f(-a)$ அதனால் $(-a, b)$ யும் வரைபிற் கிடக்கும் (உரு. 5.34) பார்க்க.

x இன் எல்லா இரட்டை வலுக்களுக்கும் இவ்வியல்பு இருப்பதால் இவை இரட்டைச் சார்பு எனப் பெயர் பெற்றன. உ-ம்: $(-x)^2 = x^2$.

கோசை x என்னும் கோசைன் சார்பு ஓர் இரட்டைச் சார்பு. ஏனெனில், அது y – அச்சுப்பற்றிச் சமச்சீரானது. அத்துடன் அதிகாரம் 3 இலிருந்து கோசை x = கோசை $(-x)$ என நாம் அறிவோம். இரட்டைச் சார்புக்குப் பிற சில உதாரணங்கள், $x \to x^4 + 2x^2 + 3$, $x \to \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ $x \to \dfrac{1}{x^2 + 1}$

5.2 சுற்றலும் ஒற்றைச் சார்புகளும். ஒரு சார்பை Ox இலே தெறிப்புறச் செய்து, பின் Oy இலே தெறிப்புறச் செய்தால் அச்சார்புக்கு யாது நேரும்? உரு 5.34 இலுள்ள $(3 - x)\sqrt{x}$ இன் வரைபை எடுத்து அதை முதலில் x – அச்சிலும் பின் y – அச்சிலும் தெறிப்புறச் செய்க. முதலாம் தெறிப்புத் தரும் உருமாற்றம் $y = (3 - x)\sqrt{x} \to -(3 - x)\sqrt{x}$.



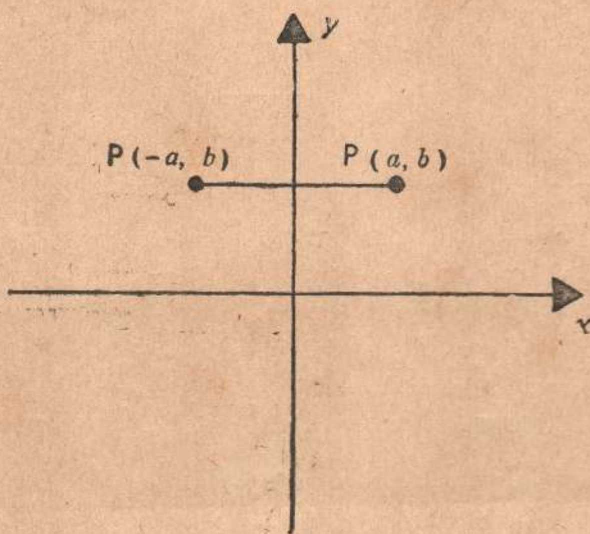
உரு 5.34

இரண்டாம் தெறிப்புத் தருவது.

$$-(3-x)\sqrt{x} \rightarrow -[3-(-x)]\sqrt{(-x)}$$

அதனால் $(3-x)\sqrt{x} \rightarrow -(3+x)\sqrt{-x}$.

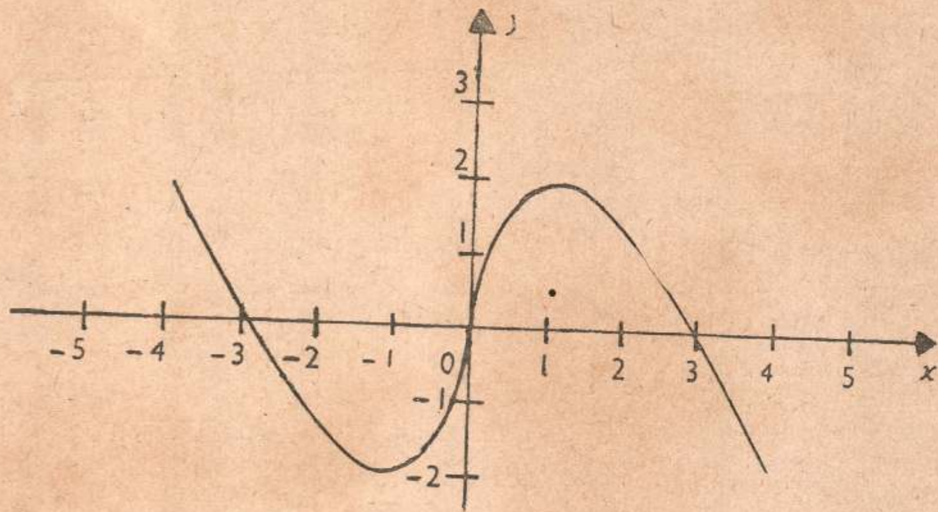
இது உரு 5.36 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. அது உற்பத்திபற்றி $180°$ சுற்றலுக்குச் சமானமாகும்.



உரு 5.35

$y = x^3$ என்னும் சார்பின் வரைபைக் கீறுக. மேற்படி தெறிப்புகள் இரண்டையும் பயன்படுத்தி 180° சுற்றலைப் பெற, $y = -(-x)^3$ என்னும் சார்பு கிடைக்கிறது.

உதாரணம் 5.17 பயிற்சி 5.5 இல் $y = 3 + \frac{1}{x}$ என்னும் சார்பின் வரைபைக் கீறினீர்கள் (உரு 5.37 பார்க்க). உற்பத்தி பற்றி இச்சார்பினை 180° ஊடே சுற்ற வரும் சார்பினை எழுதி அதன் வரைபைக் கீறுக.



உரு 5.36

விம்பச் சார்பு

$$y = -\left\{3 + \frac{1}{(-x)}\right\}$$

$$\text{அ-து} \quad y = \frac{1}{x} - 3.$$

இதன் வரைபு உரு 5.38 இலே தரப்பட்டுள்ளது.

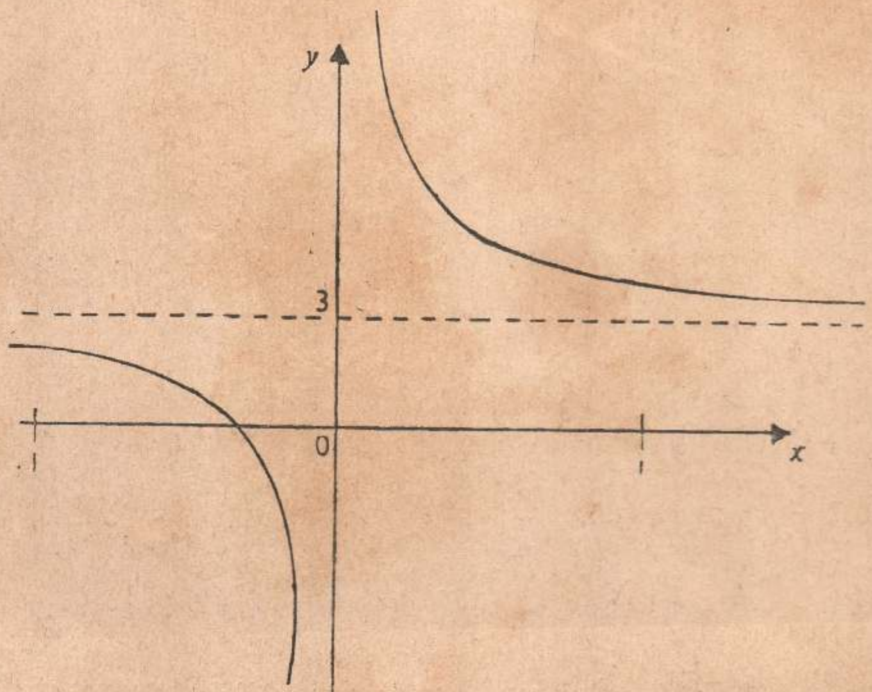
$f(-x) = -f(x)$ என வரும் சார்பு ஒற்றைச் சார்பு எனப்படும். அது உற்பத்தி பற்றி 180° சுற்றற் சமச்சீர் உடையது.

(a, b) வரைபிலே கிடந்தால், $b = f(a)$; அத்துடன் $-b = f(-a)$ அதனால் $(-a, -b)$ உம் வரைபிற் கிடக்கும். இரட்டைச் சார்புகளைப் போலன்றி ஒற்றை வலுவுடைய எல்லாச் சார்புகளுமே ஒற்றைச் சார்புகள் ஆகா. $\frac{x^5 - x^3}{x}$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\frac{(-x)^5 - (-x)^3}{-x} = \frac{x^5 - x^3}{x}$ என்பதை நோக்குக.

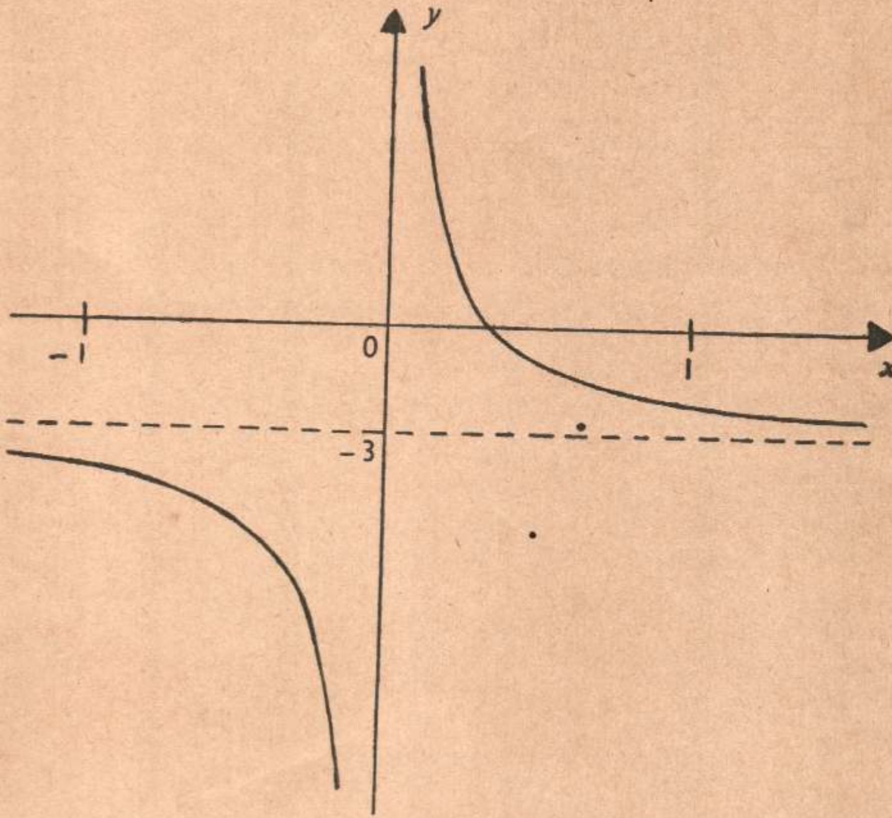
நாம் சந்திக்கும் சார்புகளிற் பல இரட்டையும் அல்ல ஒற்றையும் அல்ல. $\frac{1}{x-1}$ போன்ற எளியதொரு சார்புகூட அப்படியே. ஏனெனில் $\frac{1}{(-x)-1}$ $= -\frac{1}{x+1}$ இது தொடக்கச் சார்பினின்றும் முற்றாக வேறுபடுகிறது.

5.3 பெயர்வுகளும் ஆவர்த்தனச் சார்புகளும். உரு 5.18 இல் வந்த இருபடிச் சார்பின் வரைபைக் கீறுகையில், $y = x^2$ என்னும் 'தாய்' வரைபை 2 அலகுகள் இடப்பக்கம் பெயர்ப்பதால் $y = (x+2)^2$ கிடைக்கும் எனவும், அவ்வாறே 1 அலகு இடப்பக்கப் பெயர்வினால் $y=(x+1)^2$ கிடைக்கும் எனவும் அறிந்தீர்கள். 3 அலகு வலப்பக்கப் பெயர்வினால் $y=(x-3)^2$ வரும் எனவும் நாம் உய்த்தறிவோம். பொதுவில் $y = f(x)$ என ஒருப் சார்பு இருபின் $x \to x - a$ என்னும் உருமாற்றத்தைப் பிரயோகிக்க, $y = f(x-a)$ என்பது இடப்புறமாக ஓர் அலகு பெயர்வைத் தருமென உய்த்தறிவோம்.

'தாய்' வரைபாகிய $y = x^2$ ஐ y – அச்சு வழியே 1 அலகு உயர்த்த $y = x^2 + 1$ இன் வரைபு பெறப்படும் எனவும் நாம் கண்டோம். அவ்வாறே 'தாய்' வரைபை y – அச்சு வழியே a அலகு உயர்த்துவதால் $y = x^2 + a$ என்பதன் வரைபு கிடைக்கும் எனவும் நாம் உய்த்தறிவோம். பொதுவில், $y = f(x)$ ஆயின், நேர் y – அச்சுவழியேயான a அலகுப் பெயர்வின் பேறாக, $y = f(x) + a$ என்னுஞ் சார்பு கிடைக்கும்.



உரு 5.37



உரு 5.38

$f(x) = f(x + a)$ ஆயின், வரைபுக்குப் பெயர்வுச் சமச்சீர் உண்டு என்போம். f ஆனது $f(x) = f(x + a)$ ஆகுமாறு ஒரு சார்பு அமையின். அச்சார்பு, ஆவர்த்தன மானது எனவும் அதன் ஆவர்த்தனம் a எனவும் திரிகோணகணிதம் பற்றிய அதிகாரத்தில் நாம் கண்டோம்.

பயிற்சி 5.7

1. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிலும் $f(-x)$ என எழுதி, தந்த சார்புகள் இரட்டையா, ஒற்றையா, இரண்டும் இல்லையா எனக் கண்டு, எல்லா வரைபுகளையும் கீறுக.

(i) $x \to 4x^3$; (ii) $x \to x^2 - x + 1$; (iii) $x \to \dfrac{1}{x^2 + 2}$;

(iv) $x \to \dfrac{x}{x + 1}$; (v) $x \to 6x^4 + 2x^2 + 4$; (vi) $x \to 2x + \dfrac{1}{x}$.

2. ஒரே சமயத்தில் ஒற்றையும் இரட்டையுமாயமையும் ஒரு வரையைக் கீற உங்களால் முடியுமா?

3. தெறிப்பு, சுற்றல், பெயர்வு என்னும் மூவகைச் சமச்சீர்களுள் எவை பின்வரும் சார்புகளுக்கு உரியவை?

3. (i) $x \rightarrow$ கோசை x

(ii) $x \rightarrow$ சைன் x

(iii) $x \rightarrow$ தான் x

4. பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் பெறப்பட்ட 'தாய்' வரைபு யாதெனக் கண்டு தந்த சார்பை எய்துவதற்குப் பயன்பட்ட பெயர்வுகளை எழுதுக.

(i) $y = x^2 + 4$; (ii) $y = (x + 1)^2$;

(iii) $y = x^2 - 2x + 1$; (iv) $y = \frac{1}{x - 3}$;

(v) $y = \sqrt{(x - 2)}$; (vi) $y = x^2 + 2x$.

5. $y = x^2 + 4x$ என்னுஞ் சார்பின் வரைபுக்குப் பின்வரும் உருமாற்றங்களைப் பிரயோகிக்க வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தருக.

(i) x – அச்சில் ஒரு. தெறிப்பு.

(ii) y – அச்சில் ஒரு தெறிப்பு

(iii) O பற்றி ஓர் 180° சுற்றல்.

(iv) ஒரு பெயர்வு $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. $f(x)$, $g(x)$ இரண்டும் ஒற்றைச் சார்புகளாயின், (i) $f(x) + g(x)$, (ii) $f(x) . g(x)$, (iii) $\frac{f(x)}{g(x)}$ என்பன பற்றி யாது கூறுவீர்கள்? (கவனமாய் யோசித்து விடை தருக).

7. $f(x)$, $g(x)$ இரண்டும் இரட்டைச் சார்புகளாயின், வினா 6 இன் விடை எவ்வாறு மாறும் ?

பலவினப் பயிற்சி V

1. $A(1, 2)$, $B(4, -1)$, $C(0, 3)$ என்னும் உச்சிகளையுடைய முக்கோணியது பக்கங்களின் படித்திறன்களைக் காண்க.

2. அச்சுகளின் உற்பத்தியை, $y = x^2$ என்னும் வளையியதும் $y = x + 2$ என்னும் கோட்டினதும் இடைவெட்டுப் புள்ளிக்குத் தொடுக்கும் கோட்டினது படித்திறனைக் காண்க.

3. $A(-4, 3)$, $B(4, -5)$, $C(0, -1)$ என்னும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

4. உற்பத்தியூடு செல்வனவும். (i) 4, (ii) -3 (iii) $-\frac{5}{3}$ (iv) 0 என்னும் படித்திறன்களை உடையனவுமான கோடுகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

5. பின்வருவனவற்றில் எவை உண்மை எவை பொய் ?

(i) $(1, -1)$ ஆனது கோடு $y = -x$ இற் கிடக்கும்;

(ii) $(1, 1)$ ஆனது கோடு $y = -x$ இற் கிடக்கும்;

(iii) $(2, 3)$ ஆனது கோடு $2y = 3x$ இற் கிடக்கும்;

(iv) $(2, 3)$ ஆனது கோடு $3y = 2x$ இற் கிடக்கும்;

(v) $(4, 6)$ ஆனது கோடு $2y = 3x$ இற் கிடக்கும்;

(vi) உற்பத்திக்கும் புள்ளி $(3, 4)$ இற்கும் ஊடே செல்லும் கோட்டின் படித்திறன் $\frac{3}{4}$.

6. (i) $\frac{1}{3}$ படித்திறன் உடையதாய் உற்பத்தியூடு செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதி. கோட்டைக் கீறுக.

(ii) இதற்குச் சமாந்தரமான மூன்று கோடுகளைக் கீறி அவற்றின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(iii) $y = \frac{1}{3}x$ என்பதை $y = \frac{1}{3}x + 2$ என்னும் கோட்டுக்குப் படமாக்குமாறு செய்யும் உருமாற்றம் யாது?

(iv) பின்வரும் கூற்றைப் பூர்த்தியாக்குக.

(p, q) ஆனது கோடு $y = mx$ இற் கிடக்க (p, q') ஆனது கோடு $y = mx + c$ இற்கிடந்தால் $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$ ஆனது $\begin{pmatrix} p \\ \ \end{pmatrix}$ இலிருந்து $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ என்னும் உருமாற்றத்தாற் பெறப்படும்.

7. பின்வரும் கோடுகளின் படித்திறன்களையும், அக்கோடுகள் x, y அச்சுகளை வெட்டும், புள்ளிகளையும் தருக.

(i) $y = 3x - 2$; (ii) $3y = 2x + 4$; (iii) $6y = 4x + 8$;
(iv) $6y = 4x + 4$; (v) $2y = x + 6$; (vi) $3x + 2y + 4 = 0$;
(vii) $x + y + 1 = 0$.

8. புள்ளி $(\frac{1}{2}, 16)$ ஊடே சென்று (i) x – அச்சுக்கு (ii) y – அச்சுக்குச் சமாந்தரமாயுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தருக.

9. (i) கோடு $y = 2x + 1$ என்பதைக் கீறுக. (ii) y – அச்சின்மீது அதன் தெறிப்பினது படித்திறனையும் சமன்பாட்டையும் கண்டு, அத்தெறிப்பு வரைபைக் கீறுக. (iii) $y = x$ என்னும் கோட்டில் முன்னைய கோட்டினது தெறிப்பினது படித்திறனையும் சமன்பாட்டையும் கண்டு, அத்தெறிப்பைக் கீறுக.

10. $y = \frac{1}{3}x$, $y = 1\frac{2}{5}x$ என்பன ஓர் இணைகரத்தின் பக்கங்கள்; எதிருச்சிகள் இரண்டும் $(-5, -12)$ $(15, 5)$ ஆகியன. ஏனைய பக்கங்களின் சமன்பாடுகளையும் ஏனைய உச்சிகளின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க. இணைகரத்தைக் கீறுக.

11. $3x^2 - 5x - 2$ என்னும் சார்பு x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு (i) மறை (ii) நேர் ஆகும்.

12. $kx^2 + 7x + k = 0$ இற்கு மெய்யான, வேறு வேறான மூலங்கள் உண்டெனின் k யைக் காண்க. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

13. $k^2 x^2 + 2(k + 1)x + 4 = 0$ இற்குச் சமமூலங்கள் உண்டாயின் k யைக் காண்க. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

14. பின்வருவனவற்றை x இன் இருபடியங்களாக ஒழுங்கு செய்து, பிரித்துக் காட்டியைச் சீர்தூக்குதலால் x, y இன் எப்பெறுமான வீச்சுக்கு இவை மெய் மூலங்கள் அற்றன ஆகும் எனக் காண்க.

(i) $y^2 = x(1 - x)$; (ii) $3x^2 + 4y^2 = 12$;

(iii) $(x^2 - 5x + 6)y = (2x - 5)$; (iv) $(2x - 1)(2x + 3)y = 2x + 1$.

15. பின்வருஞ் சார்புகளின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $\dfrac{x^2 + 2x - 5}{2x - 3}$. (ii) $\dfrac{x^2 - 20}{2x - 9}$

(iii) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ (iv) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

16. $\{x : -3 \leqslant x \leqslant 3\}$ என்னும் ஆட்சிக்கு $y = x^2 + x - 3$ இன் வரைபைக் கீறுக. அதிலிருந்து (i) $x^2 + x - = 0$, (ii) $x^2 + x - 5 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

17. $\{x : -3 \leqslant x \leqslant 3\}$ என்னும் ஆட்சிக்கு $y = 1 + x - 2x^2$ இன் வரைபைக் கீறுக. உயர்வுத் திரும்பற் புள்ளி எது? இதன் துணைகொண்டு (i) $1 + x - 2x^2 = 0$, (ii) $4x^2 - 2x = 5$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

18. (அ) $y = \dfrac{1}{x(x + 4)}$ (ஆ) $y = \dfrac{1}{(x - 2)^2 (x + 3)}$ (இ) $y = \dfrac{(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)}$,

ஆயின், x இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு y மிகப் பெரிதாகவும் (i) நேராகவும் (ii) மறையாகவும் இருக்கும்?

19. பின்வரும் சார்புகளின் வரைபைக் கீறி, திரும்பற் புள்ளிகளைத் தெளிவாய்க் காட்டுக. (i) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}$ (ii) $\dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 - 4x + 4}$.

20. $x \in \mathbb{R}$ ஆயின், சார்பு $x \to \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1}$ என்பது எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் எடுக்க வல்லது எனக் காட்டுக. வரைபைக் கீறுக.

14725—36

21. k இன் எப்பெறுமானத்துக்கு, $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + k}$ என்னும் சார்பின் மிகப்பெரிய பெறுமானம் 3 ஆகும் எனக் காண்க. k இன் இப்பெறுமானத்துக்கு வரைபைக் கீறுக.

22. k இன் எப்பெறுமான வீச்சக்கு $\dfrac{3x - 1}{x\,(x + 1)}$ என்னும் சமன்பாடு மெய் மூலங்களை உடையதெனக் காண்க. பின்னர் $x \to \dfrac{3x - 1}{x\,(x + 1)}$ என்னுஞ் சார்பின் உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்களை எழுதுக. சார்பின் வரைபைக் கீறுக.

அதிகாரம் 5 இன் சுருக்கம்

$y = mx + c$	ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு y – அச்சை $(0, c)$ இல் வெட்டும். படித்திறன் m m நேர் ஆயின் கோடு வலப்புறம் மேல்நோக்கிச் சாயும். m மறை ஆயின் கோடு இடப்புறம் மேல்நோக்கிச் சாயும்.
$ax + by + c = 0$	ஏகபரிமாணப் பொதுச் சமன்பாடு ; நேர்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் மற்றொரு வடிவம்.
$y - b = m\,(x - a)$	(a, b) இனூடாகச் சென்று m படித்திறன் கொள்ளும் நேர்
$y = ax^2 + bx + c$	பொது இருபடிச் சமன்பாடு. வரைபு ஒரு பரவளைவு.
$a > 0$	வளையிக்கு ஒரு தாழி அல்லது இழிவுப் பெறுமானம் உண்டு,
$a < 0$	வளையிக்கு ஒரு முடி அல்லது உயர்வுப் பெறுமானம் உண்டு.
$b^2 - 4ac$	பிரித்துக்காட்டி.
$b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$	மூலங்கள் மெய்யானவை; வேறுவேறானவை.
$b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$	மூலங்கள் மெய் அல்ல
$y = a\,(x + \alpha)^2 + \beta$	$(-\alpha, \beta)$ இலே திரும்பற் புள்ளியைத் தரும். இது $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ என்பதாலும் a என்னும் ஈர்ப்பினாலும் நிகழும் $y = x^2$ இன் பெயர்வு .
$y = [\,x\,]$	நிறையெண் சார்பு. $[\,3\frac{1}{2}\,] = 3.$

வரைபுகளைக் கீறுதற்குப் பின்வருவன உபயோகமாகும்

(i) $x = 0$ ஆகும்போது y ஐக் காண்க.

(ii) $y = 0$ ஆகும்போது x ஐக் காண்க.

(iii) வரையறை பெருத x இன் பெறுமானங்களை நோக்கியும், x மிகப் பெரிதாகும்படி செய்தும் அணுகுகோடுகளைக் காண்க.

(iv) வளையி அணுகுகோடுகளைக் குறுக்கிடுகிறதா என்று பதிலீட்டினுற் காண்க.

(v) சார்புக்கு உயர்வு, இழிவுப் பெறுமானங்கள் உண்டாயின் அவற்றைக் காண்க.

(vi) சார்பின் குறியைச் சீர்தூக்கிக் காண்க.

(vii) வரைபைக் கீறுமுன், நீங்கள் அறிந்தவை யாவற்றையும் ஒரு பருமட்டான படத்திலே குறிக்க.

இரட்டைச் சார்பு— $f(-x) = -f(x)$ என வரும். உ–ம்: $y = x^2$ அது Oy பற்றிச் சமச்சீர் உடையது.

ஒற்றைச் சார்பு— $(-xf) = -f(x)$ என வரும். உ—ம்: $y = x^3$. அதற்கு 180° சுற்றற் சமச்சீர் உண்டு.

ஆவர்த்தனச் சார்பு— $f(x+a) = f(x)$ என வரும். a என்பதன் அத்தகைய பெறுமானங்களுள் மிகச் சிறியது சார்பின் ஆவர்த்தனம் எனப்படும்.

உ—ம்: $y =$ கோசை x.

அதிகாரம் 6

வகையீடுபற்றிய அறிமுகம்

1. தோற்றுவாய்

1.1 இவ்வதிகாரத்தில், பொருள்கள் எவ்வாறு மாற்றமடைகின்றன என்று படிப்போம். உதாரணங்கள்: சனத்தொகை அதிகரிக்கும் வீதம், ஒரு காரின் கதியும் ஆர்முடுகலும் அல்லது ஒரு கதிர்த்தொழிற்பாட்டுப் பதார்த்தம் தேய்வுறும் வீதம். எம்மை நோக்கி ஒரு கார் வருமாயின் அது இயங்குகின்ற தென்னும் வெறும் உண்மையை விட, அது இயங்கும் வீதம் அல்லது கதி பற்றியே அதிக அக்கறை காட்டுவோம்.

ஒரு காரானது ஒரு நிலையான புள்ளியைக் கடக்கக் காணப்பட்டது. தரவு அட்டவணை 6.1 இலே திரட்டப்பட்டுள்ளது. இங்கு t ஆனது நிலையான புள்ளியைக் கடந்த பின்னரான நேரமும் (செக்கன்களில்) d ஆனது அந்நேரத்தில் நிலையான புள்ளியிலிருந்து கார் உள்ள தூரமுமாகும் (மீற்றர்களில்).

நேரம் t (s)	0	1	2	3	4	5	6
தூரம் d (m)	0	4	16	36	64	100	144

அட்டவணை 6.1

காரின் சராசரிக் கதியைக் காண்பதற்கு, $\text{கதி} = \dfrac{\text{பிரயாணஞ் செய்த தூரம்}}{\text{எடுத்த நேரம்}}$

என்னும் விகிதத்தைக் காண்போம். இது செக்கனுக்கு மீற்றர் என்னும் அலகில் அளவிடப்படும். முதலாவது செக்கனில், காரானது 4 செக்கன் பிரயாணஞ் செய்தது. எனவே அதன் சராசரிக் கதி 4 மீற்றர்/செக்கன் எனக் கூறுவோம். இதனை $4\ ms^{-1}$ என்று எழுதுவோம். அடுத்த செக்கனில், காரானது $16 - 4 = 12$ மீற்றர் பிரயாணஞ் செய்தது. எனவே, இச்செக்கனில் அதன் சராசரிக் கதி $12\ ms^{-1}$ ஆகும். முதல் இரண்டு செக்கன்களிலும் அதன் சராசரிக் கதி $\dfrac{16-0}{2} = 8\ ms^{-1}$. ஆகும்.

பிரசினம் 6.1

(i) மூன்றும் செக்கனின்போது (அதாவது இரண்டு செக்கன் இறுதியிலிருந்து மூன்று செக்கன் இறுதிக்கு) காரின் சராசரிக் கதி என்ன?

(ii) முதல் ஐந்து செக்கன்களிலான சராசரிக் கதி யாது?

(iii) ஆறும் செக்கனிலான சராசரிக் கதி யாது?

(iv) ஏழாம் செக்கனிற் காரின் சராசரிக் கதி என்னவாகுமென்பதற்கு ஒரு மதிப்பீடு தருக.

பிரசினம் 6.2 இன்னுமொரு கார் அதே புள்ளியைக் கடக்கக் காணப்படுகிறது. இதற்கான தரவுகள் அட்டவணை 6.2 இலே திரட்டப்பட்டுள்ளன.

நேரம் (s)	0	1	2	3	4	5	6
தூரம் (m)	0	4	8	12	16	20	24

அட்டவணை 6.2

(i) முதலாம் செக்கனிலான சராசரிக் கதி என்ன?

(ii) இரண்டாம் செக்கனிலான சராசரிக் கதி என்ன?

(iii) மூன்றும் செக்கனிலான சராசரிக் கதி என்ன?

(iv) முதல் நான்கு செக்கன்களிலுமான சாரசரிக் கதி என்ன?

(v) முதல் ஆறு செக்கன்களிலுமான சராசரிக் கதி என்ன?

(vi) உமது விடைகளை விமர்சிக்க.

(vii) இக்காரின் இயக்கம்பற்றி யாது கூறுவீர்?

பிரசினம் 6.3 கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணை 6.3 சென்ற 30 வருடங்களாக, கொழும்பு மாநகரசபை எல்லையுள் வாழும் சனங்களின் அண்ணளவான தொகையைத் தருகின்றது.

ஆண்டு	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975
சனத்தொகை (ஆயிரங்களில்)	311	349	391	438	490	549	616

அட்டவணை 6.3

ஐந்து வருட காலப்பகுதி ஒவ்வொன்றுக்கும் சராசரி அதிகரிப்பு வீதத்தை (வருடத்திற்கு ஆயிரங்களில்) கணிக்க: ஒவ்வோர் அதிகரிப்பு வீதத்தையும் ஒவ்வொரு காலப்பகுதியினதும் ஆரம்பத்திலுள்ள சனத்தொகை அளவின் சதவீதமாக எடுத்துரைக்க.

2. சராசரி அளவிடைக் காரணிகள்

2.1 $f\colon x \to 3x - 2$ என்னும் படமாக்கலைக் கருதுக. இது $\mathbb{R}$ போன்ற ஆட்சியைக் கொண்டுள்ளது. உரு 6.1 இற் காட்டப்பட்டுள்ளதுபோல், படமாக்கலானது ஆட்சியின் இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலான தூரத்தை 3 என்னும்

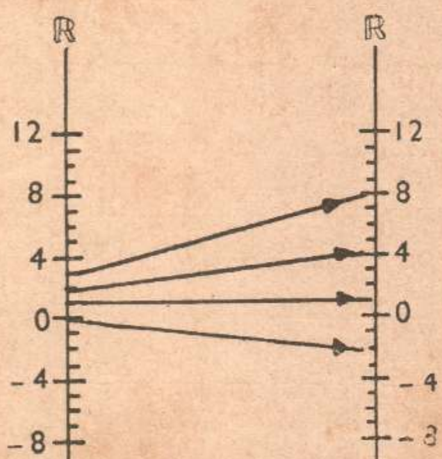
காரணியாற் பெரிதாக்குகின்றது ; உதாரணமாக 1 இற்கும் 2 இற்கும் இடையிலான ஆயிடை 1 இற்கும் 4 இற்கும் இடையிலான ஆயிடைக்குப் படமாக்குகின்றது. ஒரு படமாக்கலின்போது ஆட்சியிலுள்ள புள்ளிகளுக்கிடையேயான தூரம் பெருக்கப்படும் காரணியானது அளவிடைக் காரணி எனப்படும். முன்னர் இதே மாதிரியான சந்தர்ப்பங்களில் வரைவிலக்கணந் தராது இப்பதத்தைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

2.2 ஒரு நேர்கோட்டுப் படமாக்கலின் அளவிடைக் காரணி. பின்வரும் வேலையில் a, b என்னும் மெய்யெண்களுக்கிடையேயான ஆயிடையை $[a, b]$ என்னும் ஆயிடையாகக் குறிப்பது வசதியானதாகும். ஆகவே $[1, 4]$ ஆனது $\{x : 1 \leqslant x \leqslant 4, x \in \mathbb{R}\}$ என்னும் ஆயிடையைக் குறிக்கின்றது.

மேலே தரப்பட்டுள்ள $f : x \to 3x - 2$ என்னும் படமாக்கலில்,

$$1 \longrightarrow 3.1 - 2 = 1 \text{ உம்}$$
$$4 \longrightarrow 3.4 - 2 = 10 \text{ உம்}$$

ஆகும்



உரு 6.1

இவ்வண்ணமாக $[1, 4]$ என்னும் ஆயிடை $[1, 10]$ என்னும் இணை-ஆட்சியிலுள்ள ஆயிடைக்குப் படமாக்கப்படுகிறது. இவ்வாயிடையின் அளவிடைக் காரணியைக் காண்பதற்கு ஆயிடை எவ்வளவால் ஈர்க்கப்படுகின்றதெனக் காணல் வேண்டும். இப்படமாக்கலிலுள்ள அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{10 - 1}{4 - 1} = 3 \text{ ஆகும்.}$$

ஆயிடையானது 3 என்னும் காரணியால் ஈர்க்கப்பட்டுள்ளது.

$[a, b]$ என்னும் ஒரு பொது ஆயிடையை எடுப்போமாயின் $a \to 3a - 2$ என்றும் $b \to 3b - 2$ என்றும் காண்போம். ஆகவே படமாக்கலின் அளவிடைக் காரணி

$$\frac{(3b - 2) - (3a - 2)}{b - a} = 3 \text{ ஆகும்.}$$

இது a ஐயும் b ஐயும் சாராதாகையால் எல்லா ஆயிடைகளுக்கும் இது ஒரே பெறுமானமுடையதாகும். அளவிடைக் காரணி மாறிலி என்று கூறுவோம்.

2.3 ஓர் இருபடிச் சார்பின் அளவிடைக் காரணி. $g : t \to 4t^2$ என்னும் சார்பை எடுக்க. அட்டவணை 6.4, 0 தொடக்கம் 6 வரையிலான t யின் பெறுமானங்களுக்கு $4t^2$ இன் பெறுமானங்களைத் தருகிறது.

இவ்வதிகாரத்தின் *6.1* ஆம் பந்தியில் ஆராயப்பட்ட அட்டவணையே இதுவாகும்.

t	0	1	2	3	4	5	6
$4t^2$	0	4	16	36	64	100	144

அட்டவணை 6.4

படமாக்கல் வரிப்படம் உரு *6.2* இலே காட்டப்பட்டுள்ளது. $[0, 1]$ என்னும் ஆயிடை $[0, 4]$ என்னும் ஆயிடைக்குப் படமாக்குகின்றது. எனவே $[0, 1]$ என்னும் ஆயிடைக்கான அளவிடைக் காரணி $\dfrac{4 - 0}{1 - 0} = 4$ ஆகும். $[1, 2]$ என்னும் ஆயிடை $[4, 16]$ என்னும் ஆயிடைக்குப் படமாக்குகின்றது. எனவே $[1, 2]$ என்னும் ஆயிடைக்கான அளவிடைக் காரணி $= \dfrac{16 - 4}{2 - 1} = 12.$

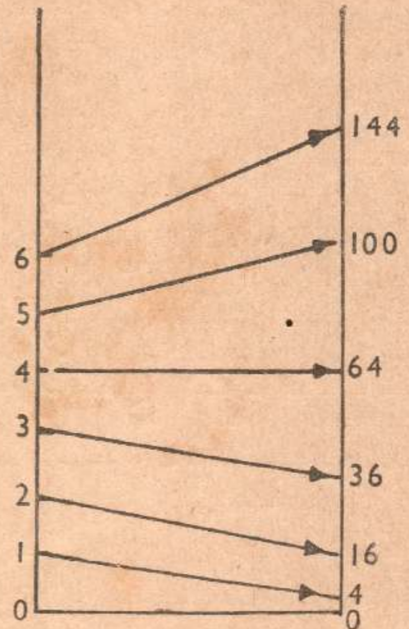
$[2, 3]$ என்னும் ஆயிடைக்கான அளவிடைக் காரணி $\dfrac{36 - 16}{3 - 2} = 20.$

இப்படமாக்கலை விவரிப்பதற்குத் தனியானதோர் அளவிடைக் காரணியும் இல்லை.

இதனை உரு *6.2* இலிருந்தும் காணலாம். இங்கு அம்புக்குறிகள் உருவத்தில் மேல்நோக்கி அசைகையில் அம்புக்குறிகளுக்கிடையேயான இடைவெளிகள் அதிகரிக்கின்றன. இங்கு ஓர் ஆயிடைமேலான அளவிடைக் காரணியை, சராசரி அளவிடைக் காரணி என்று குறிப்பிடுவோம். இவ்வாறாக *[2,3]* என்னும் ஆயிடை மேலான சராசரி அளவிடைக் காரணி *20* ஆகும் . பிரசினம் *6.1* (i) இல் மூன்றும் செக்கனின்போது காரின் சராசரிக் கதிக்கு நீர் பெற்றிருக்கக்கூடிய விடையான *20* ms^{-1} உடன் இது ஒத்திருக்கிறது.

$[a, b]$ என்னும் ஒரு பொது ஆயிடை $[4a^2, 4b^2]$ இற்குப் படமாகின்றது. எனவே இவ்வாயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணி,

$$\frac{4b^2 - 4a^2}{b - a} = \frac{4(b-a)(b+a)}{(b-a)} = 4(b+a) \quad (b, \neq a)$$



உரு 6.2

சராசரி அளவிடைக் காரணியானது தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஆயிடையிலே தங்கியுள்ளது என்பதை இதிலிருந்து காணலாம்.

0 இற்கு அருகிலான ஓர் ஆயிடையைத் தெரிந்தெடுப்போமாயின் சராசரி அளவிடைக் காரணியானது 0 இலிருந்து பெருமளவு தூரத்தில் நாம் தெரிந்தெடுக்கும் ஓர் ஆயிடையினதிலும் பார்க்கச் சிறிதாயிருக்கும்.

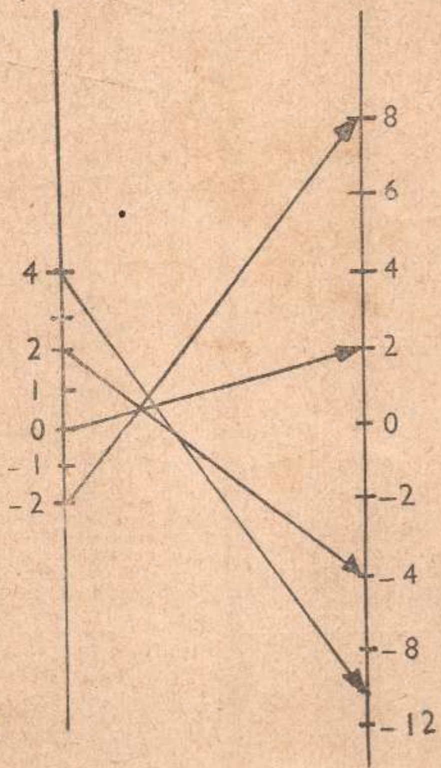
2.4 பொதுச் சார்புக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணி. $\mathbb{R}$ ஐத் தன் ஆட்சியாகவும் இணை ஆட்சியாகவும் கொண்டுள்ள ஒரு சார்பு $f(x)$ இற்கு $[a\ b]$ என்னும் ஆயிடை மேலான சராசரி அளவிடைக் காரணி.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 6.1. $f : x \longrightarrow 2 - 3x$ என்னும் சார்புக்குப் படமாக்கல் வரிப்படத்தை வரைந்து $[-1, 1]$, $[2, 4]$ என்னும் ஆயிடைகள் மேலாகச் சராசரி அளவிடைக் காரணிகளைக் காண்க. விடைகளை விமர்சிக்க.

$-1 \longrightarrow 5$ உம் $1 \longrightarrow -1$ உம் ஆதலால் இவ்வாயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியானது,

$$\frac{-1-5}{1-(-1)} = -3 \text{ ஆகும்.}$$



உரு 6.3

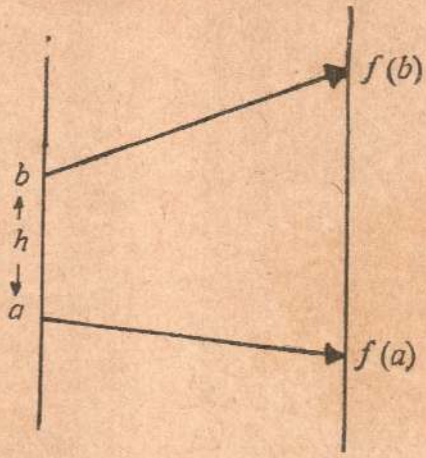
மேலும் $2 \rightarrow -4$ உம் $4 \rightarrow -10$ உம் ஆகும். எனவே அத்துடன் ஒத்த சராசரி அளவிடைக் காரணியானது $\dfrac{-10-(-4)}{4-2} = -3$ ஆலே தரப்படும்.

இச் சார்பு -3 என்னும் மாறிலி அளவிடைக் காரணியைக் கொண்டுள்ளது என இது உணர்த்துகின்றது. x அதிகரிக்கையில் $f(x)$ குறைகின்றது என்பதைமறைக் குறி காட்டுகின்றது. $[a, b]$ என்னும் ஒரு பொது ஆயிடையை எடுப்போமாயின் சராசரி அளவிடைக் காரணியானது,

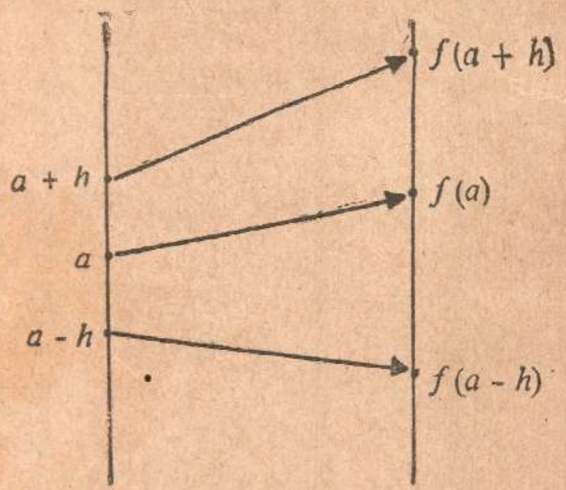
14725—37

$$\frac{(2 - 3b) - (2 - 3a)}{b - a} = \frac{-3b + 3a}{b - a} = \frac{3(b - a)}{b - a} = -3$$

என்பதனுலே தரப்படும். அளவிடைக் காரணி ஒரு மாறிலி என்பதை இது உறுதிப்படுத்துகின்றது.



உரு 6.4



உரு 6.5

2.5 சராசரி அளவிடைக் காரணியின் மாற்று வடிவங்கள். $[a, b]$ என்னும் ஆயிடையை $[a, a + h]$ என்னும் வடிவில் எடுத்துக் கருதுவது சில சமயங்களில் வசதியானதாகும். இவ்வகையில் h ஆனது a யிற்கும் b யிற்குமுள்ள இடைவெளியைக் குறிக்கின்றது. இக்குறிப்பீட்டு மாற்றத்திற்கு ஒத்தவாறு சராசரி அளவிடைக் காரணியை

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$ என்று எழுதலாம்.

$[a - h, a + h]$ என்னும் ஆயிடையை எடுப்பதன்மூலம் இன்னுமொரு மாற்று வடிவத்தைப் பெறலாம். இவ்வகையில், சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$$ என்று எழுதப்படும்.

இவ்விறுதி வகையில் உரு 6.5 இலிருந்து நீர் கண்டுகொள்வதுபோல் நாம் தெரிந்தெடுத்த ஆயிடையானது a என்னும் புள்ளியை இருமருங்கும் அணைத்து நிற்கிறது.

பயிற்சி 6.1

1. $f : x \longrightarrow 3 + 6x$, $g : x \longrightarrow 6 - 4x$ என்பவற்றிற்குப் படமாக்கல் வரிப்படங்களைக் கீறுக.

ஒவ்வொரு வகையிலும் [1, 3], [2, 5] என்பன எவ்வாயிடைகளுக்குப் படமாகின்றன என்று காண்க. இப்படமாக்கல்களுக்கான அளவிடைக் காரணி யாது?

2. பின்வரும் படமாக்கல்களுக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணிகளை [2, 5] என்னும் ஆயிடை மேலாகக் கணிக்க.

(i) $x \longrightarrow 2 - 5x$; (ii) $x \longrightarrow \dfrac{3x+1}{2}$; (iii) $x \longrightarrow px + q$.

3. 2 ஆம் கேள்வியிலுள்ள படமாக்கல்களுக்கு [a, b] என்னும் ஆயிடையில் உள்ள சராசரி அளவிடைக் காரணிகளைக் காண்க.

4. பின்வருவனவற்றிற்கான சராசரி அளவிடைக் காரணிகளை [1, 5] என்னும் ஆயிடைமேலாகக் கணிக்க.

(i) $x \longrightarrow 2x^2$; (ii) $x \longrightarrow 2x^2 + 1$; (iii) $x \longrightarrow x^2 + 2$;

(iv) $x \longrightarrow 2x^2 + 3$; (v) $x \longrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

5. பின்வருவனவற்றிற்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியை [a, b] என்னும் ஆயிடை மேலாகக் கணிக்க.

(i) $x \longrightarrow 2x^2$, (ii) $x \longrightarrow 2x^2 + 1$, (iii) $x \longrightarrow x^2 + 2$.

6. பின்வருவனவற்றிற்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியை [a, $a + h$] என்னும் ஆயிடை மேலாகக் கணிக்க.

(i) $x \longrightarrow 3x + 1$. (ii) $x \longrightarrow 6x^2$, (iii) $x \longrightarrow 6x^2 + 3x + 1$.

7. ஒரு காரானது ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்தான தன் தூரம், நேரம் t யில் $s = 3t^2 + 2t + 1$ என்பதனுலே தரப்படுமாறு பிரயாணஞ் செய்கிறது. $t = 4$ தொடக்கம் $t = 8$ வரையிலான நேர ஆயிடைமேலாக அதன் சராசரிக் கதியைக் காண்க.

8. $x \longrightarrow x^2$ என்னும் சார்புக்குப் பின்வரும் ஆயிடைகள் மேலான சராசரி அளவிடைக் காரணிகளைக் காண்க. [2, 4], [2, 3], [2, 2 . 5],[1] [2, 2·01] உம் [1, 2], [1·5, 2], [1·9, 2], [1·99, 2], உம் ஆயிடை சிறிதாகும் போது சராசரி அளவிடைக் காரணிக்கு என்ன நேர்கின்றது?

9. பின்வருவனவற்றிற்கு 8 ஆம் கேள்வியை மீளச் செய்க.

(i) $x \longrightarrow 2x^2$, (ii) $x \longrightarrow 3x^2 + 2x$, (iii) $x \longrightarrow 6x$,

(iv) $x \longrightarrow x^3$, (iv) $x \longrightarrow 4x^2 + 2x + 3$.

3. பெறுதிகள்

3.1 இதுவரை ஓர் ஆயிடை மேலான சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கணித்துள்ளோம். இது ஒரு காரின் கதியுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது என முன்னைய பகுதியிற் கண்டுள்ளோம். எனினும் ஒரு காரின் கதி 20 மீற்றர்/செக்கன்

எனக் குறிப்பிடும்போது, இறுதிச் செக்கனில் அது 20 மீற்றர் பிரயாணஞ் செய்துள்ளது என்பது எமது கருத்தன்று. ஒரு செக்கனில் 20 மீற்றரைக் கடக்க வேண்டுமாயின். அது பிரயாணஞ் செய்யவேண்டிய வீதத்தையே நாம் கருத்திற் கொண்டுள்ளோம். ஒவ்வொரு தரப்பட்ட கணத்திலும் காரானது ஒரு கதியைக் கொண்டுள்ளது என இது உணர்த்துகின்றது. இதனை எவ்வாறு நாம் துணியலாம்?

இப்பிரசினத்திற்கான ஒரு விடையைக் காண்கையில், முதலில் இதற்குச் சமனான ஒரு சார்பின் வகையைக் கருதி ஒரு பிரத்தியேக புள்ளியில் அதன் மாற்ற வீதத்தைக் காண இயலுமோ என்று பார்போம். ஒரு தரப்பட்ட சார்புக்கு ஓர் ஆயிடை மேலான சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கணிப்பது போன்று தனியானதொரு புள்ளியில் அதன் சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கணிக்க முடியுமோ என்று பார்ப்போம்.

$x \longrightarrow 4x^2$ என்னும் படமாக்கலுக்கு 2 என்னும் புள்ளிக்கு அருகிலான சில சராசரி அளவிடைக் காரணிகளை அட்டவணை 6.5 தருகின்றது.

ஆயிடை	சராசரி அளவிடைக் காரணி
[1·9, 2]	15.6
[1·99, 2]	15.96
[1·999, 2]	15 996
(2, 2·1)	16·4
(2, 2·01)	16·04
(2, 2·001)	16·004

அட்டவணை 6.5

ஆயிடை சிறிதாகையில், சராசரி அளவிடைக் காரணியானது 16 இற்கு அருகில் நெருங்குகிறது என்பதைக் காணலாம். $[\,2,\ 2+h\,]$ என்னும் ஓர் ஆயிடையைக் கருதுவோமாயின் சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{4(2+h)^2 - 4(2)^2}{(2+h) - 2} = \frac{16 + 16h + 4h^2 - 16}{h} = 16 + 4h.$$

என்பதனுலே தரப்படும்.

h ஐப் போதுமளவு சிறிதாகத் தெரிந்தெடுப்பதன்மூலம் இவ்வாயிடை மேலாக $16 + 4h$ ஐ நாம் விரும்பிய அளவு 16 இற்குச் சமீபமாகக் கொண்டு வரலாம்.

h இன் மிகச் சிறிய பெறுமானங்களுக்கு 16 ஐச் சராசரி அளவிடைக் காரணியின் பெறுமானத்திற்கு ஒரு சிறந்த அண்ணளவாக்கமாகப் பயன்படுத்தலாம்.

h ஆனது பூச்சியத்தை அணுகுகையில், 16 ஆனது இப்பெறுமானத் தொடையின் எல்லை அல்லது முடிவுப் புள்ளியாவதைப் பார்க்கலாம். இது $x = 2$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி என்று கூறப்படும். இதனை h ஆனது 0 ஐ அணுக $16 + 4h$ என்பது 16 ஐ அணுகுகின்றது என எழுதுவதே பெருவழக்கு. அல்லது $16 + 4h \to 16$, $h \to 0$ ஆகையில், அல்லது

$16 = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \; (16 + 4h)$ எனவும் எழுதலாம்.

இவ்விறுதிக் கூற்றைக் குறுகிய வடிவிலே பின்னர் பயன்படுத்துவோம்.

உரு 6.4 இலிருந்து $[2, 2 + h]$ என்னும் ஆயிடை $[2, b]$ என்னும் ஆயிடையை ஒத்தது எனக் காண்கிறோம். எனவே $h \to 0$ ஆகையில் $b \to 2$ ஆகும். அப்போது சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\begin{aligned} \frac{4b^2 - 4(2)^2}{b - 2} &= \frac{4(b-2)(b+2)}{(b-2)} \\ &= 4(b+2) \\ &= 8 + 4b \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

இதிலிருந்து $b \to 2$ ஆகையில் $8 + 4b \to 16$ என்று காணலாம். எனவே பெறுதியை

$16 = \underset{b \to 2}{\text{எல்லை}}(8 + 4b)$ என்று எழுதுவோம். ஓரிட அளவிடைக் காரணியானது நேரடியாகக் கணிக்கப்படும்போது $\frac{0}{0}$ என்னும் கருத்தற்ற பின்னத்தைக் கொடுப்பதனால் அதனை நேரடியாகக் கணிக்க இயலாது என்பதைக் கவனத்திற் கொள்க.

$[a, b]$ என்னும் ஆயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{4b^2 - 4a^2}{b - a} = \frac{4(b+a)(b-a)}{(b-a)} = 4(b+a)$$

என்பதனாலே தரப்படும்.

$b \to a$ ஆகையில் $4(b + a) \to 8a$ என்று காண்போம். எனவே

$$8a = \underset{b \to a}{\text{எல்லை}} \left\{ 4(b+a) \right\}$$

a யிலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி $8a$ ஆகும்.

உதாரணம் 6.2 $x \to 4x^2$ என்னும் படமாக்கலுக்கு முதலில் $[a, a+h]$ என்னும் ஆயிடையிலான சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் காண்பதன்மூலம் a யிலான ஓரிட அளவிடைக் காரணியைக் கணிக்க.

$[a, a+h]$ என்னும் ஆயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{4(a+h)^2 - 4a^2}{h}$$

$$= \frac{4a^2 + 8ah + 4h^2 - 4a^2}{h}$$

$= 8a + 4h$ என்பதனுலே தரப்படும்.

இப்போது $h \to 0$ ஆகையில் $8a + 4h \to 8a$. $\therefore x = a$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி $8a$ ஆகும்.

உதாரணம் 6.3 $x \to x^2 - x$ என்னும் சார்புக்கு $x = 2$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணியைக் கணிக்க.

$[2, b]$ என்னும் ஆயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{(b^2 - b) - (4 - 2)}{b - 2} = \frac{b^2 - b - 2}{b - 2} = \frac{(b-2)(b+1)}{b-2} = b + 1$$

$b \to 2$ ஆக $b + 1 \to 3$ ஆகும். எனவே $x = 2$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி 3 ஆகும்.

உதாரணம் 6.4 $x = 3$ இல் $x \to 6x^2 - 2x$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணியைக் கணிக்க.

இங்கு $[3, b]$ என்னும் ஆயிடையை எடுத்து, சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கணிப்போம். அப்போது சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{[6(b)^2 - 2(b)] - [6(3)^2 - 2(3)]}{b - 3}$$

$$= \frac{6b^2 - 2b - 48}{b - 3} = \frac{2(3b + 8)(b - 3)}{b - 3}$$

$= 2(3b + 8)$. $b \to 3$ ஆகையில் $2(3b + 8) \to 34$.

எனவே $x = 3$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி 34 ஆகும்.

உதாரணம் 6.5 f ஆனது $x \to x^3$ என்னும் சார்பு ஆகட்டும். பின்வரும் ஆயிடை ஒவ்வொன்றிற்கும் சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் காண்பதன் மூலம் $x = 1$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணியைத் துணிக.

(i) $(1, b)$, (ii) $(1, 1+h)$, (iii) $(1-h, 1+h)$.

(i) சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$\dfrac{b^3 - 1^3}{b - 1} = \dfrac{(b^2 + b + 1)(b - 1)}{(b - 1)} = b^2 + b + 1$ இனுலே தரப்படும்.

இப்போது $b \to 1$ ஆகையில் $b^2 + b + 1 \to 3$ ஆகும். $\therefore x = 1$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி 3 ஆகும்.

(ii) இவ்வகையிலான சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h)-1} = \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = 3 + 3h + h^2.$$

இப்போது $h \to 0$ ஆகையில் $3 + 3h + h^2 \to 3$ ஆகும்.

$\therefore x = 1$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி 3 ஆகும்.

(iii) சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{(1+h)^3 - (1-h)^3}{(1+h)(1-h)}$$

$$= \frac{(1 + 3h + 3h^2 + h^3) - (1 - 3h + 3h^2 - h^3)}{2h}$$

$$= \frac{6h + 2h^2}{2h} = 3 + h^2 \text{ ஆகும்.}$$

இப்போது $h \to 0$ ஆகையில் $3 + h^2 \to 3$ ஆகும்.

$\therefore x = 1$ இலான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி 3 ஆகும்.

இறுதி வகையில் $[1 - h, 1 + h]$ என்னும் ஆயிடை $x = 1$ என்னும் தேவையான புள்ளியை மத்தியிற் கொண்டுள்ளமையைக் குறித்துக் கொள்க. மற்றைய இரு வகைகளிலும் $x = 1$ ஆனது ஆயிடையின் ஓர் அந்தத்தில் உள்ளது.

பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $[2, b]$ என்னும் ஆயிடையிலான சராசரி அளவிடைக் காரணிகளைக் கணித்து, பின்னர் ஒவ்வொன்றையும் முதலில் $b \to 2$ ஆகையில் ஓர் எல்லையாக எடுத்துரைப்பதன் மூலம் $x = 2$ இல் அவற்றின் பெறுதிகளையும் காண்க.

1. (i) $x \to 3x^2$, (ii) $x \to x^2 + x$, (iii) $x \to x^2 + x + 1$,
(iv) $x \to 2x^2 + x$, (v) $x \to 7x$, (vi) $x \to 3x^2 + x + 1$,
(vii) $x \to 4x^2 - x - 2$, (viii) $x \to x^3$, (ix) $x \to \frac{1}{x}$.
(x) $x \to x - x^2$.

2. (அ) பின்வரும் சார்பு ஒவ்வொன்றிற்கும் பின்வரும் ஆயிடைகளிலான சராசரி அளவிடைக் காரணிகளைக் கணிக்க.

$[2, 3]$, $[2, 2\frac{1}{2}]$, $[2, 2{\cdot}1]$, $[2, 2{\cdot}01]$, $[2, 2{\cdot}001]$

$[1, 2]$, $[1\frac{1}{2}, 2]$, $[1{\cdot}9, 2]$, $[1{\cdot}99, 2]$, $[1{\cdot}999, 2]$

(ஆ) அச்சார்பு ஒவ்வொன்றிற்கும் $x = 2$ இலான பெறுதியைக் கூறுக.

(i) $x \to 3x^2$; (ii) $x \to 4x$, (iii) $x \to 3x^2 + 4x$.

3. ஒரு காரானது நேரம் t யிற்குப் பின்னர் ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்தான தன் தூரம் $s = 3t^2 - 2t + 4$ ஆகுமாறு, பிரயாணஞ் செய்கிறது. $t = 4$ $t = 8$ ஆகிய நேரங்களின் பின்னர் அதன் கதியைக் கணிக்க.

4. $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ என்று காட்டுக.

5. $[9, b]$ என்னும் ஆயிடை மேலாக $x \to \sqrt{x}$ என்னும் சார்பின் சராசரி அளவிடைக் காரணி $\dfrac{1}{\sqrt{b} + 3}$ இற்குச் சமன் என்று காட்ட 4 ஆம் கேள்வியைப் பயன்படுத்துக. $x = 9$ இலான பெறுதியைக் கூறுக.

6. முதலில் $[2, b]$ என்னும் ஆயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கருதுவதன் மூலம் $x = 2$ இல், பின்வரும் சார்புகளின் பெறுதிகளைக் காண்க.

(i) $x \to x^4$, (ii) $x \to \dfrac{1}{x}$, (iii) $x \to \sqrt{x}$,

(iv) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, (v) $x \to \sqrt[3]{x}$, (vi) $x \to \dfrac{1}{x^2}$.

7. $[2, 2 + h]$ என்னும் ஆயிடையை முதலிற் கருதுவதன் மூலம் $x = 2$ இல், பின்வரும் சார்பு ஒவ்வொன்றினதும் பெறுதியைக் கண்டு அதனை ஓர் எல்லையாக எடுத்துரைக்க.

(i) $x \to 2x^2$, (ii) $x \to \dfrac{3}{2}x^2 - 1$, (iii) $x \to 4x^2 - 4x + 1$,

(iv) $x \to \dfrac{1}{x}$, (v) $x \to \dfrac{1}{x^2}$.

8. பின்வருவன ஒவ்வொன்றினதும் பெறுதிகளை, தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளிற் காண்க.

(i) $x \to x^2$: $x = 4$ இல் (ii) $x \to x^3$· $x = 3$ இல்

(iii) $x \to 3x + 2$· $x = 2$ இல் (iv) $x \to 2x^2 + 3x$· $x = 5$ இல்

(v) $x \to 3x - x^2$· $x = 5$ இல் (vi) $x \to 4x^2 - 4x + 1$· $x = 3$ இல்

(vii) $x \to (x + 1)(x - 1)$; $x = 2$ இல் (viii) $x \to (2x - 3)(x - 4)$; $x = 1$ இல்

(ix) $x \to x\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$; $x = 3$ இல் (x) $x \to 1 - 3x - 2x^2$. $x = 6$ இல்

9. பின்வரும் சார்பு ஒவ்வொன்றிற்கும் $[a, b]$ என்னும் ஆயிடை மேலாகச் சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கண்டு, அதனை மிக எளிய வடிவிலே தருக.

(i) $x \to x$; (ii) $x \to x^2$; (iii) $x \to 3x^2$;
(iv) $x \to x^3$; (v) $x \to 2x^3$; (vi) $x \to 3x$;
(vii) $x \to 4x$; (viii) $x \to 2x^2 + 3x$: (ix) $x \to 3x^2 - 4x$:
(x) $x \to 6x^2 - 5x + 6$.

10. 9 ஆம் கேள்வியிலுள்ள ஒவ்வொரு சார்புக்கும் $x = a$ இலான பெறுதிக்கு ஒரு சூத்திரத்தை ஊகித்துக் கூறுக.

4. பெற்ற சார்பு

4.1 3.1 ஆம் பகுதியில் $x \to 4x^2$ என்னும் சார்பானது a என்னும் புள்ளியில் $8a$ என்னும் பெறுதியைக் கொண்டிருந்தது எனக் கண்டோம். பொதுவாக $f(x)$ என்னும் சார்பு a என்னும் புள்ளியில் ஒரு பெறுதியைக் கொண்டிருப்பின் அதனை $f'(a)$ என்று எழுதுவோம். $f : x \to 4x^2$ என்னும் படமாக்கலுக்கு

$f'(a) = 8a$ ஆகும்.

$f(x)$ ஆனது அதன் ஆட்சியின் ஒவ்வொரு மூலகம் a யிலும் $f'(a)$ என்னும் பெறுதியைக் கொண்டிருப்பின் $x \longrightarrow f(x)$ இன் பெறுதி என்பதனால் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு புதிய சார்பைப் பெறுவோம்

இதனை $f(x)$ இன் **பெற்ற சார்பு** என்று பெயரிட்டு f' இனாற் குறிப்பிடுவோம். $f : x \to 4x^2$ என்னும் சார்புக்குப் பெற்ற சார்பானது $f' : x \to 8x$ ஆகும்.

உதாரணம் 6.6 பின்வருவனவற்றின் பெற்ற சார்பைக் காண்க.

$$\text{(i)}\ 12x^3 + 3x, \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{2x+1}, \quad \text{(iii)}\ \frac{1}{(px+q)}$$

(i) $[a, b]$ என்னும் ஆயிடைக்குச் சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் காண்போம்.

இது $\dfrac{(12b^3 + 3b) - (12a^3 + 3a)}{b - a}$ இனாலே தரப்படும்.

$$= \frac{12(b^3 - a^3) + 3(b - a)}{b - a}$$

$$= \frac{12(b^2 + ab + a^2)(b - a) + 3(b - a)}{b - a}$$

$$= 12(b^2 + ab + a^2) + 3.$$

14725—38

$b \to a$ ஆகையில் $x = a$ இலான பெறுதி $f'(a) = 36\,a^2 + 3$ இனாலே தரப்படும்.

எனவே பெற்ற சார்பானது

$$f'(x) = 36x^2 + 3 \quad \text{ஆகும்.}$$

(ii) $[a, a + h]$ என்னும் ஆயிடைக்குச் சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் காண்போம்.

இது $\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{1}{2(a+h)+1} - \dfrac{1}{2a+1}\right]$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{2a + 1 - 2a - 2h - 1}{(2a + 2h + 1)(2a + 1)}\right] = \frac{-2}{(2a + 2h + 1)(2a + 1)}$$

$h \to 0$ ஆகையில் $x = a$ இலான பெறுதி.

$$f'(a) = \frac{-2}{(2a+1)^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

எனவே பெற்ற சார்பானது

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

(iii) $[a, b]$ என்னும் ஆயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{1}{(b-a)}\left[\frac{1}{(pb+q)} - \frac{1}{(pa+q)}\right] \text{ இனாலே தரப்படும்.}$$

$$= \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{pa + a - pb - q}{(pb+q)(pa+q)}\right]$$

$$= \frac{-p(b-a)}{(b-a)(pb+q)(pa+q)}$$

$$= \frac{-p}{(pb+q)(pa+q)}.$$

$b \to a$ ஆகையில் $x = a$ இலான பெறுதி

$$f'(a) = \frac{-p}{(pa+q)^2} \text{ இனாலே தரப்படும்.}$$

எனவே பெற்ற சார்பானது.

$$f'(x) = \frac{-p}{(px+q)^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

பிரசினம் 6.4 $f : x \to x$ இற்கான சராசரி அளவிடைக் காரணியை $[a, a+h]$ என்னும் ஆயிடையில் எழுதிச் சுருக்குக. $f'(x)$ என்னும் பெற்ற சார்பைக் கூறுக.

பிரசினம் 6.5 பின்வரும் சார்புகளுக்கு, பிரசினம் 6.4 ஐ மீளச் செய்து ஒவ்வொரு வகையிலும் $f'(x)$ என்னும் பெற்ற சார்பைக் கூறுக.

(i) $f : x \to x^2$; (ii) $f : x \to x^3$;

(iii) $f : x \to x^4$; (iv) $f : x \to \frac{1}{x}$;

(v) $f : x \to \frac{1}{x^2}$; (vi) $f : x \to \sqrt{x}$;

(vii) $f : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$; (viii) $f : x \to \sqrt[3]{x}$;

(ix) $f : x \to 4x$; (x) $f : x \to 2x^2$;

(xi) $f : x \to 6x^3$; (xii) $f : x \to 6x^3 + 2x^2 + 4x$.

பிரசினம் 6.6 அட்டவணை 6.6 ஐப் பிரதி செய்து பூர்த்தியாக்குக. (k ஒரு மாறிலி).

$f(x)$	1	x	kx	x^2	kx^2	x^3	kx^3	x^1	kx^4	$x^{\frac{1}{2}}$	$kx^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{k}{x}$
$f'(\mathrm{x})$													

அட்டவணை 6.6

அட்டவணை 6.6 இல் வரும் பேறுகளான பெற்ற சார்புகள் ஒரு கோலத்தில் அமைந்து கிடப்பதை அவ்வட்டவணை காட்டும். அவை ஒரு பொதுப் பேற்றின் பிரத்தியேக வகைகளாகும்.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{எல்லா விகிதமுறும் } n \text{ களுக்கும்.}$$

$$f(x) = kx^n \Rightarrow f'(x) = kn(x)^{n-1}$$

இவற்றையும், $f(x) = \frac{1}{x^{n1}}$, $f(x) = \frac{k}{x^n}$ என்னும் சார்புகளையும் அட்டவணையிற் சேர்த்துக் கொள்க. பிரசினம் 6.6 இலுள்ள அட்டவணையிலிருந்தும் பொதுவான பேற்றிலிருந்தும் மேலும் கூடுதலான பெற்ற சார்புகளை எழுதிக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு தடவையும் சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கணிப்பது அவசியமன்று. உதாரணமாக $f : x \to \frac{3}{x}$ இன் பெற்ற சார்பு ஒரேயடியாக எழுதப்படலாம். ஏனெனில் $\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ உம்.

14725—39

$\frac{1}{x}$ இன் பெற்ற சார்பு $-\frac{1}{x^2}$ உம் ஆகும்.

$$f' : x \to -\frac{3}{x^2}$$

அதே மாதிரி $g : x \to 3x + 5x^3$ ஆயின், x இனதும் x^3 இனதும் பெற்ற சார்புகள் எவையென்று நாம் அறிந்துள்ளோமாதலால் $g' : x \to 3 + 15x^2$ என்று எழுதலாம்.

பெற்ற சார்பைக் காணும் இம்முறை **வகையிடுதல்** எனப்படும். முதலில் $[a, b]$ என்னும் ஆயிடை மேலாகச் சராசரி அளவிடைக் காரணியின் பெறுமானங் கணிக்கப்பட்டு, பெற்ற சார்பு $f'(x)$ காணப்படும். பின்னர் $x = a$ இலான பெறுதியாகிய $f'(a)$ ஐத் தருவதற்கு a, b ஐ அணுகுகையில் இது அணுகும் பெறுமானம் காணப்படும். இதிலிருந்து $f'(x)$ எழுதப்படும். இச்செய்கையைப் பின் வருமாறு எடுத்துக் கூறலாம். பெறுதியானது சராசரி அளவிடைக் காரணியின் எல்லைப் பெறுமானமாகும். எனவே,

சராசரி அளவிடைக் காரணி $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

$x = a$ இலான பெறுதியானது

$$f'(a) - \underset{b \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}.$$

$f'(a)$ இலிருந்து $f'(x)$ என்னும் பெற்ற சார்பு எழுதப்படும். ஆயிடையானது $[a, a + h]$ ஆகவும் இருக்கலாமென்பதைக் கவனிக்க. அப்போது சராசரி அளவிடைக் காரணியானது

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

அப்போது $x = a$ இலான பெறுதியானது

$$f'(a) = \underset{h \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் கண்டு பின்னர் அதன் எல்லைப் பெறுமானத்தைக் காண்பது முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து செயலாற்றுவதாகும். புதிய சார்புகளைச் சந்திக்கும்போது அவற்றின் பெறுதிகளைக் காண்பதற்குப் பெரும்பாலும் முதற் கோட்பாடுகளுக்குத் திரும்ப வேண்டும். உதாரணமாக அதிகாரம் 12 இல், சைன் x இன் பெறுதியைக் காண்கையில் இதனைச் செய்யவேண்டும்.

நமக்கு நன்கு பழக்கப்பட்ட பொதுவான சார்புகளுக்கு, பெற்ற சார்புகளை நாம் நேரடியாகவே எழுதுவோம். பிரசினம் 6.6 இற்குரிய அட்டவணையைப் பார்த்தால் இதை எவ்வாறு செய்யலாமென்பது விளங்கும். இம்முறைப்படி,

பெற்ற சார்பை முதலில் எழுதி, பின்னர் அதிலிருந்து எந்தவொரு குறித்த புள்ளிக்குமுரிய பெறுதியைக் காண்போம். இவ்வாறு செய்வதால், முந்திய பந்திகளில் நாம் கையாண்ட முறை புறமாற்றப்படுகிறது. எனினும் செய்கைமுறை இலகுவாக்கப்படுகிறது. உதாரணம்: $f : x \to \frac{3}{x}$ இன் பெற்ற சார்பு $f'\, x \to -\frac{3}{x^2}$. $x = 2$ இல் $f'(x) = \frac{3}{4}$.

பயிற்சி 6.3

1. அட்டவணை 6.6 இன் உதவியுடன் பின்வருவனவற்றின் பெற்ற சார்புகளை எழுதுக.

(i) $f : x \to 2x^3 - 3$; (ii) $f : x \to 4 \frac{-2}{x^2}$, (iii) $f : x \to \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$;

(iv) $f : x \to x + 2x^2 + 3x^3$, (v) $f : x \to (x+3)(x^2+2)$, (vi) $f : x \to \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

(vii) $f : x \to 3\sqrt{x} + 2x$, (viii) $f : x \to px^2 + qx + 1$,

(ix) $f : x \to 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$, (x) $f : x \to 1 - \frac{1}{x}$.

2. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிற்கும் $f(2)$ ஐத் துணிக. மேலும்

(*a*) முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து,

(*b*) $f'(x)$ ஐ எழுதிப் பின்னர் பிரதியிடுவதன்மூலம் $f'(2)$ இன் பெறுமானத்தையும் கணிக்க.

(i) $f : x \to \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; (ii) $f : x \to x^3 + 2x^2$;

(iii) $f : x \to 2 + 7x + 3x^2 - 4x^3$; (iv) $f : x \to \frac{1}{\sqrt{x}} + x$;

(v) $f : x \to x + 2 + \frac{1}{x}$.

5. கதியும் மாற்ற வீதமும்

5.1 ஒரு மோட்டர்க் காரானது ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து பிரயாணஞ் செய்யும் தூரம் s அத்தூரத்தைக் கடப்பதற்கு அது எடுக்கும் நேரம் t யுடன் $s = 4t^2$ என்பதாலே தொடர்பு கொண்டிருக்குமாறு பிரயாணஞ் செய்கிறது எனக் கருதுக. ஏதாயினும் தரப்பட்ட நேரம் t யில், கார் பிரயாணஞ் செய்யும் கதியைக் காணமுடியுமா?

$s = 4t^2$ என்னும் சமன்பாட்டுடன் தொடர்புற்ற சார்பைக் குறிப்பதற்கு $f: t \to 4t^2$ என்பதைப் பயன்படுத்த, $t = 0$ இலிருந்து நேரம் t யிற் பிரயாணஞ் செய்த தூரமானது $f(t)$ இனலே தரப்படும். [2.4] என்னும் நேர ஆயிடையில், காரானது $f(4) - f(2)$ என்னும் தூரம் பிரயாணஞ் செய்கிறது. எனவே சராசரிக் கதியானது.

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{4(4)^2 - 4(2)^2}{2} = \frac{64 - 16}{2} = 24\, ms^{-1}.$$

அட்டவணை 6.7 ஆனது $[2, b]$, $[b, 2]$ என்னும் நேர ஆயிடையில் b யின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்குக் காரின் சாரசரிக் கதியைத் தருகிறது.

b(s)	4	3	2·5	2·1	2·01	2·001	1·999	1·99	1·9	1·5
சராசரி வேகம் $\dfrac{f(b) - f(2)}{b - 2}$ (ms^{-1})	24	20	18	16·4	16·04	16·004	15·996	15·96	15·6	14

அட்டவணை 6.7

b ஆனது 2 இற்கு அருகில் இருக்கையில், சராசரிக் கதியானது $16\, ms^{-1}$ இற்கு மிக அருகில் இருக்குமென்பதை அட்டவணையிலிருந்து காணலாம். $b \sim 2$ ஐப் போதிய அளவு சிறிதாக எடுப்பதன்மூலம் இச்சராசரிக் கதியை நாம் விரும்பிய அளவு $16\, ms^{-1}$ இற்கு அருகிற் கொண்டு வரலாம். இவ்வண்ணம் $b \to 0$ ஆக, சராசரிக் கதியானது

$$\frac{f(b) - f(2)}{b - 2} \to 16 \text{ ஆகும்:}$$

இதுவே நேரம் $t = 2$ இற் காரின் கதியாகும்.

உதாரணம் 6.7 மேலேயுள்ள காரிற்கு நேரம் $t = 5$ இலே கதியைக் காண்க.

$[5, 5 + h]$ என்னும் நேர ஆயிடையிற் பிரயாணஞ் செய்த தூரமானது $f(5 + h) - f(5)$ இனலே தரப்படும். எனவே இவ்வாயிடையின் சராசரிக் கதி

$$\frac{f(5 + h - f(5)}{h} = \frac{4(5 + h)^2 - 4(5)^2}{h}$$

$$= \frac{100 + 40h + 4h^2 - 100}{h}$$

$$= 40 + 4h.$$

இப்போது $h \to 0$ ஆகையில் $40 + 4h \to 40$.

ஆகவே $t = 5$ இல், கதி $40\, ms^{-1}$ ஆகும்.

மேலே தரப்பட்ட இரு வகைகளிலுமிருந்து, $s = f(t)$ என்னும் தொடர்பு ஒரு காரானது நேரம் t இற் பிரயாணஞ் செய்த தூரம் s ஐ t உடன் இணைப்பின், ஒரு புள்ளியிலே காரின் கதியானது அப்புள்ளியிலான சார்பு $f(t)$ இன் பெறுதியைக் கணிப்பதன்மூலம் காணப்படும் என்பது விளங்கும்.

பிரதியிட்டால், யாதுமொரு கணத்தில் வேகத்தைக் கணிக்கும் முறையைப் பெறுகிறோம். உதாரணமாக, $t = 10$ ஆகையில்,

$$8.10 = 80\, ms^{-1}$$

உதாரணம் 6.8 ஒரு பலூனின் கனவளவு $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ இனாலே தரப்படும். இங்கு t சென்ரிமிற்றரில் ஆரையாகும். (i) $r = 3$ (ii) $r = a$ ஆகும்போது ஆரை தொடர்பாகப் பலூனின் கனவள்வு மாற்ற வீதத்தைக் காண்க.

(i) இங்கு கனவளவை ஆரையுடன் தொடுக்கும் சார்பு

$$f : r \to \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{ஆகும்.}$$

$[\,3,\ 3 + h\,]$ என்னும் ஆயிடை மேலாக இச்சார்பின் மாற்ற வீதம்

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi(3+h)^3 - \frac{4}{3}\pi(3)^3}{h}$$

$$= \frac{4\pi}{3h}(27 + 27h + 9h^2 + h^3 - 27)$$

$$= \frac{4\pi}{3}(27 + 9h + h^2).$$

இப்போது $\frac{4\pi}{3}(27 + 9h + h^2) \to 36\pi$, $h \to 0$ ஆகையில்.

அட்டவணை 6.6 ஐப் பயன்படுத்த $f' : r \to \frac{4}{3}\pi r^3$ இன் பெற்ற சார்பு

$$f : r \to \frac{4}{3}\pi(3r^2) \quad \text{ஆகும்.}$$

அல்லது $f' : r \to \frac{4\pi}{3}(3r^2)$ இதில் $r = 3$ என்று பிரதியிட, $f'(3) = 36\pi$.

கனவளவின் மாற்ற வீதம் பெற்ற சார்பு ஆகும். வகையிடுவதன்மூலம் சார்பின் மாற்ற வீதத்தைக் காணலாம்.

(ii) $f' : r \to 4\pi r^2$. ஆகும்போது $f'(a) = 4\pi a^2$.

பயிற்சி 6.4

1. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து ஒரு காரின் தூரம் $S = 3t^2$ என்பதனுலே தரப்படும். $t = 2, 3, 4$ செக்கன் ஆகையில், காரின் கதியைக் காண்க.

2. ஒரு பொருளானது ஓர் ஆகாய விமானத்திலிருந்து விழுகிறது. t செக்கனின் பின்னர் மீற்றரிலே அதன் தூரம் $S = 16t^2 - 16$ என்பதனுலே தரப்படும்.

 (i) $t = 10$ இற் பொருளின் கதி,

 (ii) $t = 5$ இல் t தொடர்பாக S இன் மாற்ற வீதம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. ஒரு பொருளானது நிலையான புள்ளியொன்றிலிருந்து தன் தூரம் S நேரம் t யில் $S = 6t^2 + 4t + 3$ இனுலே தரப்படுமாறு ஒரு நேர் கோட்டில் இயங்குகின்றது.

 (i) (அ) $t = 3$ (ஆ) $t = a$ என்னும் நேரங்களில், பொருளுக்குள்ள கதியைக் கணிக்க.

 (ii) நேரம் t யில், கதி $V(t)$ ஆனது $f: t \to 6t^2 + 4t + 3$ இன் பெற்ற சார்பாகும். இப்பெற்ற சார்பு $V(t)$ ஐ எழுதுக.

4. ஒரு காரானது ஒரு தரப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து தன் தூரம் S நேரம் t யில் $S = 2t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 12t + 4$ இனுலே தரப்படுமாறு

 இயங்குகின்றது.

 (i) அதன் கதிச் சார்பைக் காண்க.

 (ii) $t = 4$ இல் அதன் கதியைத் துணிக.

 (iii) கதி $V = 0$ ஆகையில் நேரத்தைக் காண்க.

 (iv) (iii) இல் வரும் மறையான விடைக்குக் காரணம் தருக.

5. ஒற்றுத்தாள் ஒன்றிற் சிந்திய மைத்துளியொன்று வட்டவடிவில் விரிகிறது. நேரம் t யில் அப்பொட்டின் ஆரை $r = t + \sqrt{t}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $t = 4$ இலும் $t = 9$ இலும் ஆரை வளரும் கதியைக் காண்க.

6. மேற்படி பொட்டின் பரப்பளவு $A = \pi r^2$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

 (i) $r = 1\frac{1}{4},\ r = 1\frac{1}{8}$ ஆகும்போது பரப்பளவின் விரிகை வீதத்தைக் காண்க.

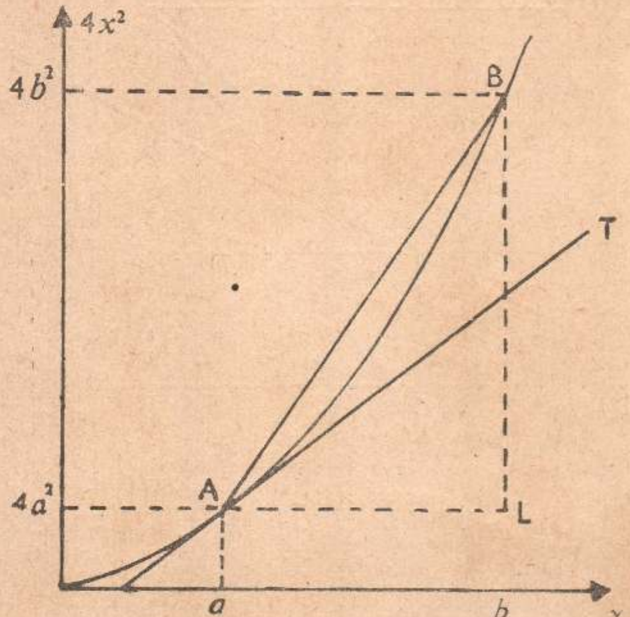
 (ii) $t = 4, t = 9$ ஆகையில், பரப்பளவின் விரிகை வீதங்கள் யாவை?

6. ஒரு வளையியின் படித்திறன்

6.1 நாம் இதுவரை எமது சார்புகளை எடுத்துக் காட்டுவதற்குப் படமாக்கல் வரிப்படங்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம். இப்போது ஒரு சார்பின் வரைபை உற்று நோக்கி, சராசரி அளவிடைக் காரணிக்கும், பெறுதிக்கும் எவ்வண்ணம் ஒரு வித்தியாசமான கருத்தைக் கொடுக்கலாமெனப் பார்போம்.

$f : x \to 4\pi r^2$ என்னும் சார்பினது தெக்காட்டு வரைபு உரு 6.6 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $A\ (a,\ 4a^2)$, உம் $B\ (b,\ 4b^2)$ உம் ஆகும். AB யின் படித்திறன்

$$\frac{BL}{AL} = \frac{4b^2 - 4a^2}{b-a} = 4\ (b + a).$$



உரு 6.6

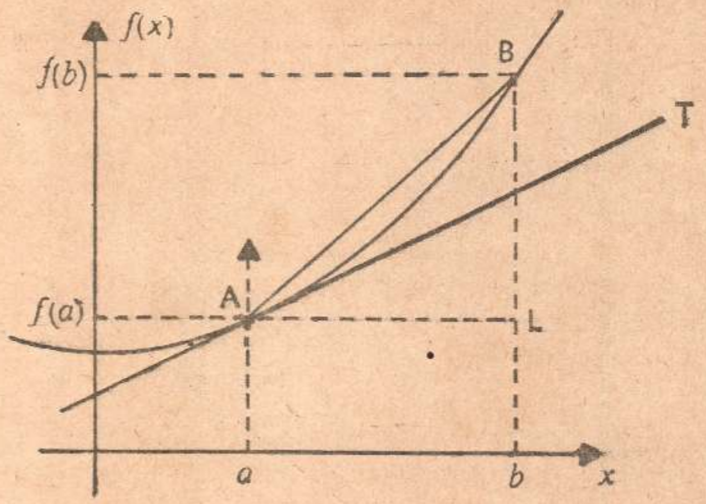
இவ்வாறாக நாண் AB யின் படித்திறன் $[\ a,\ b\ ]$ என்னும் ஆயிடை மேலான சராசரி அளவிடைக் காரணியாலே தரப்படும் (பிரிவு 2.4 பார்க்க). இப்போது புள்ளி B யை A நோக்கி வளையியின்கீழ் இயங்கச் செய்வோமாயின், நாண் AB யின் திசை A யிலுள்ள தொடலி AT யின் திசையை அணுகும். இச்செய்கையின் போது $b \to a$. மேலும்,

$$\begin{aligned} AT \text{ யின் படித்திறன் } &= \lim_{b \to 0} \text{ படித்திறன் } AB \\ &= \lim_{b \to 0}\ 4\ (b + a) \\ &= 8a \end{aligned}$$

இது ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது $x = a$ இலான f இன் பெறுதி என்பதைக் காணலாம்.

பொதுவாக உரு 6.7 இல் உள்ளதுபோல் ஒரு சார்பு $f(x)$ இருப்பின் ஒரு நாண் AB யின் படித்திறன் $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ இனலே தரப்படும்.

அ—து சராசரியானது அளவிடைக் காரணியாலே தரப்படும்.



உரு 6.7

A யிலான தொடலியின் படித்திறன் $b \to a$ ஆகையில் இதன் எல்லை நிலையினலே அ—து பெறுதியினலே தரப்படும்.

$$f'(a) = \underset{b \to a}{\text{எல்லை}} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

பொதுவாக $y = f(x)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டையுடைய வளையிக்கான தொடலியின் படித்திறன் $f'(x)$ இனலே தரப்படும்.

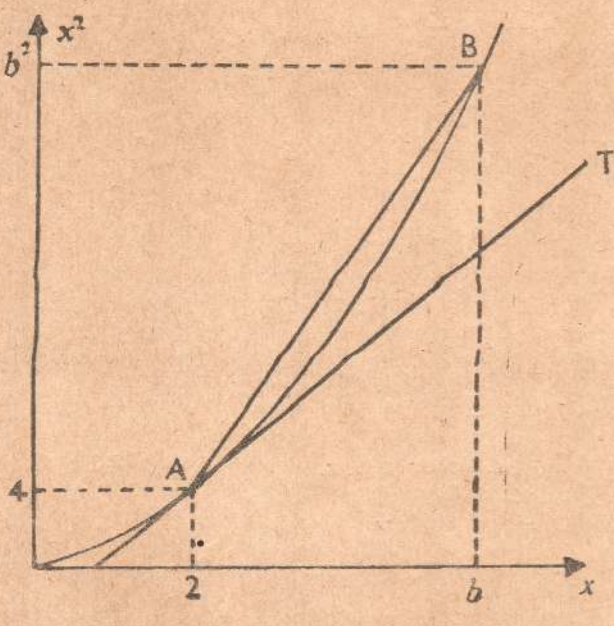
உதாரணம் 6.7 $y = x^2$ என்னும் வளையிக்கு $(2,4)$ என்னும் புள்ளியிலான தொடலியின் படித்திறனைக் கண்டு, தொடலியின் சமன்பாட்டைத் தருக. ஒத்த சார்பானது $f : x \to x^2$ ஆகும்.

முறை 1. உரு 6.8 இல் உள்ளதுபோல் $[2, b]$ என்னும் ஆயிடையை எடுப்போமாயின் சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{b^2-4}{b-2} = b+2$$

நாண் AB யின் படித்திறனக இருக்கக் காணலாம்.

இப்போது $b \to 2$ ஆகையில் $b + 2 \to 4$ ஆகும். $b = 2$ இலான ஒரிட அளவிடைக் காரணியை ஒத்த படித்திறன் 4 ஆகும்.



உரு 6.8

தொடலியின் சமன்பாடானது 4 என்னும் படித்திறனுடன் (2,4) என்னும் புள்ளிக்கூடாகக் கீறப்படும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

இது $y - b = m\ (x - a)$ இனலே தரப்படும். அ—து $y - 4 = 4\,(x - 2)$

அல்லது $y = 4x - 4$.

முறை 2. $f : x \to x^2$ என்னும் சார்பின் பெறுதி $f' : x \to 2x$

$A\ (2,\ 4)$ இலான படித்திறன் $2.2 \doteq 4$

$(2,\ 4)$ இற்கூடான தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - 4 = 4\,(x - 2)$$

$y = 4x - 4$ ஆகும்.

முன்னைய பேறுகளைப் பயன்படுத்தி எமது கணிப்பைச் சுருக்கிக் கொள்ள லாமென்பதையே இரண்டாவது முறை எமக்கு உணர்த்துகின்றது. ஒவ்வொரு தடவையும் முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து வகையிடத் தேவையில்லை.

உதாரணம் 6.8 பின்வரும் வளையிகளுக்கு, தரப்பட்ட புள்ளியிலான தொடலியின் படித்திறனையும் சமன்பாட்டையும் தருக.

(i) $y = x^3$ இற்கு $(3,27)$ இல்

(ii) $y = 3x - x + 1$ இற்கு $(4,45)$ இல்

(i) ஒத்த சார்பானது $f: x \to x^3$ ஆகும், இதன் பெறுதி $f^1\ x \to\ 3x^2$ ஆகும்.

14725 40

இதில் $x = 3$ ஐப் பிரதியிடுவதன் மூலம் (3,27) இலான தொடலியின் படித்திறன் பெறப்படும்.

அ—து $3.(3)^2 = 27$.

இப்புள்ளியிலான தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - 27 = 27\,(x - 3)$$

அ—து $y = 27x - 54$ ஆகும்.

(ii) இங்கு $f : x \to 3x^2 - x + 1$ என்னும் சார்பு $f' : x \to 6x - 1$ என்னும் பெறுதியைக் கொண்டுள்ளது. இதில் $x = 4$ ஐப் பிரதியிடுவதன் மூலம் $(4,45)$ இலான தொடலியின் படித்திறன் தரப்படும்.

அ—து $6\,(4) - 1 = 23$.

இப்புள்ளியிலான தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - 45 = 23\,(x - 4)$$

அ—து $y = 23x - 47$ இனுலே தரப்படும்.

உதாரணம் 6.9: ஒரு பந்து மேல்நோக்கி வளியில் எறியப்படுகிறது. t செக்கனின் பின்னர் அதன் நிலை $h = 42t - 6t^2$ இனுலே தரப்படுகிறது. (i) $t = \frac{3}{4}$ (ii) $t = 4$ ஆகும்போது அதன் வேகத்தைக் கணிக்க.

பந்தின் வேகமானது திசைகொண்ட கதியாகும். இதனுல் அது நேராகவோ, மறையாகவோ இருக்கலாம். கதி எப்போதும் நேரானதாகும். அது வேகத்தின் பருமனை மட்டுமே குறிக்கின்றது. ஆகவே வேகம் ஒரு காவிக் கணியமாகும்.

$$h = f(t) = 42t - 6t^2$$

$$v = f'(t) = 42 - 12t.$$

$t = \frac{3}{4}$ ஆகையில் $f'(\frac{3}{4}) = 33$.

$t = 4$ ஆகையில் $f'(4) = -6$

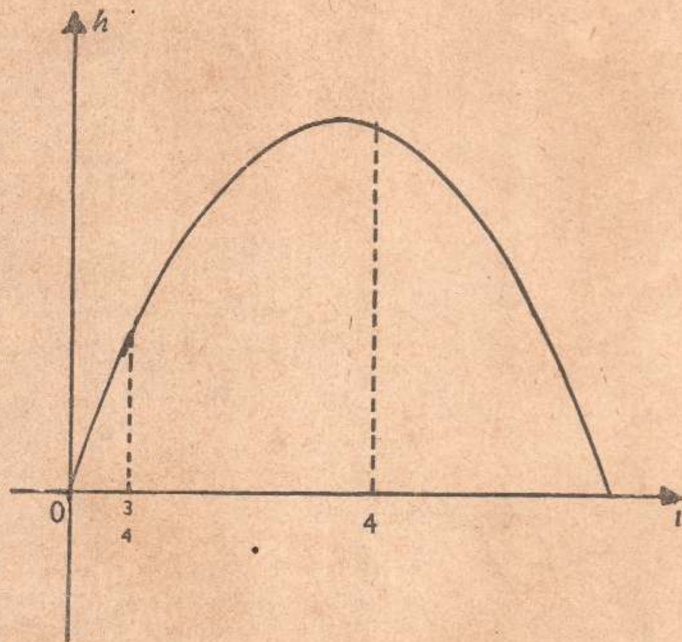
$f'(4)$ மறையாக இருப்பது வேகமானது உயரம் அளவிடப்படும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் உள்ளது என்பதைக் காட்டுகிறது எனக் கவனிக்க. உரு 6.9 இல் இருந்து தெரியவருவதுபோல் வேகம் கீழ்முகமாக இருக்கின்றது. அங்கு தொடலியின் படித்திறன் மறையாகும்.

பயிற்சி 6.5

1. $y = 5x^2$ என்னும் வளையிக்கு.

(i) $x = 3$; (ii) $x = 5$ இல் உள்ள தொடலியின் படித்திறனையும் சமன்பாட்டையும் காண்க.

2. $y = x^2 + 3x$ என்னும் வளையியைக் கீறி $(0,0)$, $(2,10)$ என்னும் புள்ளிகளிலான தொடலிகளை இயலுமளவு திருத்தமாக அமைக்க. வரைதல்மூலம் இத்தொடலிகளின் படித்திறன்களைக் கணிக்க. வகையிட்டு அப்புள்ளியிலான பெறுதியை நீர் கணித்த பெறுமதியுடன் ஒப்பிடுக.



உரு 6.9

3. குறிப்பிடப்பட்ட புள்ளியிலே பின்வரும் வளையிகளுக்கான படித்திறன்களைக் காண்க.

(i)	$y = 3x^2$	இற்கு $(1, 3)$	இல்
(ii)	$y = x^2 + x$	இற்கு $(1, 2)$	இல்
(iii)	$y = 2x^2 + x + 2$	இற்கு $(2, 12)$	இல்
(iv)	$y = 2x^2$	இற்கு $(3, 18)$	இல்
(v)	$y = 2x^2 - x$	இற்கு $(3, 15)$	இல்
(iv)	$y = 2x^2$	இற்கு (a, b)	இல்
(vii)	$y = x - 3x + 1.$	இற்கு (a, b)	இல்

4. மூன்றும் கேள்வியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலுமுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைத் தருக.

7. குறிப்பீடு

$y = f(x)$ என்னும் சார்பிற்கு அடிக்கடி $f(b) - f(a)$ எனவும் $b - a$ எனவும் எழுதுவோமாதலால் அவற்றிற்குச் சில குறுகிய குறிப்பீடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

$\delta y = f(b) - f(a)$ (டெல்ற்ரு y என்று உச்சரிக்கப்படும்) எனவும்

$\delta x = b - a$ (டெல்ற்ரு x என்று உச்சரிக்கப்படும்) என்றும் எழுதுவோம்.

அப்போது சராசரி அளவிடைக் காரணியை $\frac{\delta y}{\delta x}$ என்று எழுதலாம்.

மேலும் இதன் எல்லையான ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதி $\frac{dy}{dx}$ என்று எழுதப்படும்.

வரைபுகளோடு ஈடுபடும்போது வளையியை $y = f(x)$ என்று எழுதுவோம். பின்னர் புள்ளி (x, y) இல் வளையியின் படித்திறனை

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{என்று எழுதுவோம்.}$$

உயரம் $h = 3t - 4t^2$ என்னும் வகையில், பெறுதி $\frac{dh}{dt} = 3 - 8t$ ஆகும்.

பல்வினப் பயிற்சி VI

1. $x \to 3 - 2$ என்னும் படமாக்கலுக்கு.
   - (i) $[0, 2]$ என்னும் ஆயிடை எதனைப் படமாக்குகின்றது?
   - (ii) இவ்வாயிடைக்கான சராசரி அளவிடைக் காரணி யாது?

2. பின்வரும் படமாக்கல்களுக்கு வினா 1 ஐ மீளச் செய்க.
   - (i) $x \to 4x^2 - 6$;
   - (ii) $x \to 2x - x^2$;
   - (iii) $x \to x(4x + 3)$;
   - (iv) $x \to 3x^2 + 3x + 1$;
   - (v) $x \to (2x - 3)(x - 4)$.

3. பின்வரும் சார்புகளுக்கு $[2, 6]$ என்னும் ஆயிடையில், சராசரி அளவிடைக் காரணியைக் காண்க.
   - (i) $x \to 2x^2 + 1$;
   - (ii) $x \to 3x + 1$,
   - (iii) $x \to 1 + \frac{1}{x}$;
   - (iv) $x \to 2x + \sqrt{x}$
   - (v) $x \to 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

4. வினா 3 இலுள்ள சார்புகளுக்கு $b \to 2$ ஆக விடுவதன்மூலம் $x = 2$ இலான பெறுதியைக் காண்க.

5. $[3, 3 + h]$ என்னும் ஆயிடையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் சார்புகளுக்குச் சராசரி அளவிடைக் காரணியையும் அதிலிருந்து 3 இலான பெறுதியையும் கணிக்க.
   - (i) $x \to x^2$,
   - (ii) $x \to 3x - x^3$,
   - (iii) $x \to 4x - \frac{x^2}{2}$,
   - (iv) $x \to 2x^3 - x$,
   - (v) $x \to (1 + x)^2$

6. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிற்கும் $f(3)$ ஐயும் $f'(3)$ ஐயும் காண்க.

(i) $f : x \to (2 - 3x)$; (ii) $f : x \to 2x^3 - 8x$;

(iii) $f : x \to (2 - 3x)(x + 1)$; (iv) $f : x \to 2 + x - \frac{3}{2}x^2$;

(v) $f : x \to \frac{x^3 - x^2}{x}$

7. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிற்கும் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

7. (i) $y = 3x^4$, (ii) $y = \frac{x^5}{2}$

(iii) $y = \frac{6}{x}$, (iv) $y = 4x^6$,

(v) $y = \frac{1}{x^4}$, (vi) $y = 3x - x^4$,

(vii) $y = \frac{1}{2x^2}$, (viii) $y = 1 + x + x^2$,

(ix) $y = (2x + 1)(2x + 2)$, (x) $y = (3 + 2x)^2$,

(xi) $y = 2x^3 - \frac{6}{x^2}$, (xii) $y = 7x^4 + 6x^3 + 2$,

(xiii) $y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, (xiv) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$,

(xv) $y = \frac{(1 - x)^2}{x}$

8. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிற்கும் $\frac{ds}{dt}$ ஐக் காண்க.

(i) $s = ut + \frac{1}{2} g t^2$, (ii) $s = 16t - t^2$ (iii) $s = t^3 - t^2 + 1$.

9. பின்வரும் வகைகளில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆவதற்கான a இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(i) $y = 3x^2 - x$, (ii) $y = 6x^2 - 2x + 4$,

(iii) $y = 3x^2 - 4x$, (iv) $y = x^3 - 2x^2$,

(v) $y = \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 - 8x + 4$,

10. (i) $xy = 1$ ஆயின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

(ii) $u + v = 1$ ஆயின் $\frac{du}{dv}$ ஐக் காண்க.

(iii) $pv = 40$ ஆயின் $p(10)$, $p'(10)$ என்பவற்றைக் காண்க.

11. ஓர் இயங்கும் காரின் வேகம் $v = (1 - 2t)^2$ இனாலே தரப்படும். (i) ஒரு காரின் ஆர்முடுகலானது வேக மாற்ற வீதமாயின் காரின் ஆர்முடுகலை [அ—து $v'(t)$ ஐக்] காண்க. (ii) 3 செக்கன்களின் பின்னர் காரின் ஆர்முடுகலைத் தருக. (iii) கார் எப்போது ஓய்வுக்கு வரும்? (iv) இந் நேரத்தில் அதன் ஆர்முடுகல் என்ன? (v) (iii) இற்கும் (iv) இற்குமான விடைகளை விளக்குக.

12. ஒரு கல்லு வளியில் எறியப்படுகின்றது. t செக்கன்களின் பின்னர் நிலத்திலிருந்து அதன் தூரம் $s = 10t - 65\,t^2$ இனாலே தரப்படும்.

(i) 1, 2, 3 செக்கன்களின் பின்னர் வேகத்தைக் காண்க.

(ii) (i) இன் விடைகளுட் சில ஏன் மறையாக இருக்கின்றன என விளக்குக.

13. ஒரு மைத் துளியின் பரப்பளவு $A = 2t + t^2$ இனாலே தரப்படும். $t = 3$ ஆகையில், பரப்பளவின் அதிகரிப்பு வீதத்தைக் காண்க.

14. ஒரு போத்தலிலுள்ள நீரின் கனவளவு V நேரம் t யுடன் $V = 1 + 2t - t^2$ இனாலே தொடர்பு கொண்டது.

(i) $\frac{dV}{dt}$ எதைக் குறிக்கின்றது.

(ii) $t = 3$ ஆகையில் $\frac{dV}{dt}$ ஐக் காண்க.

15. (i) $y = 4x^2$ என்னும் வளையிக்கு (3, 36) என்னும் புள்ளியிலான படித்திறனைக் காண்க. (ii) அப்புள்ளியிலான தொடலியின் சமன்பாட்டைத் தருக.

16. (i) $xy = 4$ என்னும் வளையியை $\{x : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ என்னும் ஆட்சியிற் கீறுக.

(ii) (2, 2) என்னும் புள்ளியில் வளையியின் தொடலியைக் கீறுக.

(iii) தொடலியின் படித்திறனைக் கணிக்க.

(iv) $x = 2$ என்னும் புள்ளியில் $y = \frac{4}{x}$ என்பதன் பெறுதியைக் கணித்து விடையை (iii) உடன் ஒப்பிடுக.

17. $y = x + \frac{1}{x}$ என்னும் வளையியில் $(-1, -2)$ என்னும் புள்ளியிலான படித்திறனைக் காண்க.

18. (i) $y = (1 - 2x)(1 + x)$ என்னும் வளையியில் அது x– அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளிலான படித்திறன்களைக் காண்க.

(ii) படித்திறன் m உடன் (a, b) என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடாகிய $y - b = m(x - a)$ என்பதைப் பயன் படுத்தி இப்புள்ளியிலான தொடலியின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

19. (i) $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 4\}$ என்னும் ஆட்சிக்கு $y = \frac{1}{2}x^2$ இன் வரைபைக் கீறுக.

(ii) $[2, 2 + h]$ என்னும் ஆட்சி ஆயிடைக்கு ஒத்த நாணைக் கீறுக.

(iii) சிறிய h இற்கு $[2, - h, 2 + h]$ என்னும் ஆட்சி ஆயிடைக்கு ஒத்த நாணைக் கீறுக. மேலும் $(2, 2)$ இலான தொடலியைக் கீறுக.

(iv) $x = 2$ இலுள்ள தொடலியின் படித்திறனுக்கு (ii) இலுள்ள நாணிலும் பார்க்க (iii) இலுள்ள நாண் ஏன் பெரும்பாலும் சிறந்த அண்ணள வாக்கமாக அமைகிறது என்று விளக்குக.

(v) (iii) இலுள்ள ஆயிடையைப் பயன்படுத்தி முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து வகையிடுக.

20. $b - a$ ஐ $(b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}})(b^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\}$ என்று எழுதலாமெனக் காட்டி முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து $x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ ஐ வகையிடுக.

21. $x \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ஐ முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து வகையிடுக.

22. $x \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{(px + q)}}$ ஐ முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து வகையிடுக.

அதிகாரம் 6 இன் சுருக்கம்

$[a, b]$ என்னும் ஆயிடையில் f என்னும் சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ இனலே தரப்படும்.

மாற்று ஆயிடைகளும் அதற்கான கோவைகளும்.

I. $[a, a + h]$ என்னும் ஆயிடையிலே சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$ ஆகும்.

II. $[a - h, a + h]$ என்னும் ஆயிடையிலே சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}.$$

6. வகையீடுபற்றிய அறிமுகம்

ஓரிட அளவிடைக் காரணி அல்லது பெறுதியானது $b \to a$ ஆகையில் $[a\ b]$ இல், சராசரி அளவிடைக் காரணியின் எல்லையாகும். இது $f'(a)$ என எழுதப்படும்.

$$f(a) = \underset{b \to a}{\text{எல்லை}} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$h \to 0$ ஆகையில் I உம் II உம் ஒத்த வரைவிலக்கணங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

பெற்ற சார்பு $f'(x)$ ஆனது f இன் ஆட்சியில் எல்லா a இற்கும் $f'(a)$ என்னும் எல்லாப் புள்ளிகளினதும் தொடையாகும்.

சில நியமப் பெற்ற சார்புகளுக்கு, பிரசினம் 6.6 ஐப் பார்க்க.

ஒரு வரைபின் ஒரு புள்ளி A யிலான தொடலியின் படித்திறன் A யிலான சார்பின் பெறுதியாகும்.

ஓர் இயங்கும் பொருளினது தூரம் s நேரம் t தொடர்பாக $s = f(t)$ ஆயின், அதன் கதியானது பெற்ற சார்பு $v = f'(t)$ ஆகும்.

$y = f(x)$ என எழுதுவோமாயின் சராசரி அளவிடைக் காரணி

$$\frac{\zeta y}{\partial x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ என எழுதப்படும்.}$$

மேலும் பெறுதி $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ என எழுதப்படும்.