கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)
இணைந்த கணிதத்திற்கும் உயர் கணிதத்திற்குமான
பாடநூல் வேறு உயர் பரீட்சைகளுக்கும் உகந்தது

இணைந்த கணிதம் II

- காவிகள்
- விசைத் தொகுதிகள்
- ஒரு பரிமாண இயக்கம்

கபில சில்வா
சிரேட்ட விரிவுரையாளர்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)
இணைந்த கணிதத்திற்கும் உயர் கணிதத்திற்குமான பாடநூல்
வேறு உயர் பரீட்சைகளுக்கும் உகந்தது

இணைந்த கணிதம் II
தரம் 12

I, II ஆகிய தவணைகளுக்கான பிரயோக கணிதக் கூறு

உயர் கணிதத்திற்கு மாத்திரம் உரிய பாடப் பகுதிகளிலும்
பிரசினங்களிலும் * குறி இடப்பட்டுள்ளது

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

முதலாம் பதிப்பு - 2018

இந்நூல், கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
இல. 341/1/109, பெலன்வத்த, பன்னிப்பிட்டியவில்
அமைந்துள்ள பிரின்ட் வன் தனியார் நிறுவனத்தில்
அச்சிடப்பட்டு, வெளியிடப்பட்டது.

கபில சில்வா

சிரேட்ட விரிவுரையாளர்
பிரயோக விஞ்ஞான பீடம்
ஸ்ரீ ஜயவர்த்தனபுரப் பல்கலைக்கழகம்

மொழிபெயர்ப்பு

திரு ந. வாகீசமூர்த்தி

ஒய்வுபெற்ற கல்விப் பணிப்பாளர்

''புதிதாகி, மாற்றமடைந்து சரியான அறிவின் மூலம் நாட்டுக்குப் போன்றே முழு உலகிற்கும் அறிவுச் சுடராகுங்கள்''

கௌரவ கல்வி அமைச்சரின் செய்தி

கடந்து சென்ற இரு தசாப்தங்களுக்கு அண்மிய காலமானது உலக வரலாற்றில் விசேட தொழினுட்ப மாற்றங்கள் நிகழ்ந்ததொரு காலமாகும். தகவல் தொழினுட்பம் மற்றும் ஊடகங்களை முன்னணியாகக் கொண்ட பல்வேறு துறைகளில் ஏற்பட்ட துரித வளர்ச்சியுடன் இணைந்து மாணவர் மத்தியில் பல்வேறு சவால்கள் தோன்றியுள்ளன. இன்று சமூகத்தில் காணப்படும் தொழில் வாய்ப்பின் இயல்பானது மிக விரைவில் சிறப்பான பல்வேறு மாற்றங்களுக்கு உட்படலாம். இத்தகைய சூழலில் புதிய தொழினுட்ப அறிவையும் திறனையும் அடிப்படையாகக் கொண்டதொரு சமூகத்தில் வெவ்வேறு விதமான இலட்சக்கணக்கான தொழில் வாய்ப்புகள் உருவாகின்றன. எதிர்காலச் சவால்களை வெற்றிகொள்வதற்கு நீங்கள் பலம்பெற வேண்டும் என்பது கல்வி அமைச்சர் என்ற வகையில் எனதும் எமது அரசினதும் பிரதான நோக்கமாகும்.

உலகில் மிக வேகமாக மாறிவரும் சுற்றுச்சூழல் மாற்றத்திற்குப் பொருந்தும் விதத்தில் புதிய பாடத்திட்டத்தை அமைப்பதற்கும் கல்வித் துறையில் தீர்க்கமான மாற்றங்களை மேற்கொள்வதற்கும் ஓர் அரசாக நாம் செயற்படுவது ஒரு நாட்டின் எதிர்காலம் கல்வி மூலமே சிறப்படையும் என்பதை மிக நன்றாகப் புரிந்து வைத்துள்ளோம் என்பதனாலேயாகும். நாட்டிற்கு மாத்திரமன்றி உலகுக்கே செயற்றிறன்மிக்க ஓர் இலங்கைப் பிரசையாக நீங்களும் வளர்ந்து நிற்பதற்குத் தீர்மானிக்க வேண்டியது அதனாலேயே ஆகும். இதற்காக இந்நூலைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் நீங்கள் பெற்றுக்கொள்ளும் அறிவு உங்களுக்கு உதவும் என்பது எனது நம்பிக்கையாகும்.

அரசு உங்கள் கல்வியின் நிமித்தம் செலவிடுகின்ற மிகவும் கூடிய நிதித்தொகைக்குப் பெறுமதியொன்றைச் சேர்ப்பது உங்கள் கடமையாவதுடன் பாடசாலைக் கல்வியூடாக நீங்கள் பெற்றுக்கொள்ளும் அறிவு, திறன்கள் என்பனவே உங்கள் எதிர்காலத்தைத் தீர்மானிக்கின்றன என்பதையும் நீங்கள் நன்கு கவனத்திற்கொள்ள வேண்டும். நீங்கள் சமூகத்தில் எந்த நிலையிலிருந்தபோதும் சகல தடைகளையும் தாண்டிச் சமூகத்தில் மிக உயர்ந்ததொரு இடத்திற்குப் பயணிக்கும் ஆற்றல் கல்வி மூலமாகவே உங்களுக்குக் கிடைக்கின்றது என்பதை நீங்கள் நன்கு விளங்கிக்கொள்ள வேண்டும்.

எனவே கல்வியின் மிகக் கூடிய பிரதிபலனைப் பெற்று, மதிப்புமிக்கதொரு பிரசையாக நாளைய உலகை நீங்கள் வெற்றிகொள்வதற்கும் இந்நாட்டில் மட்டுமன்றி வெளிநாடுகளில் கூட இலங்கையின் நாமத்தை இலங்கச் செய்வதற்கும் உங்களால் இயலுமாகட்டும் எனக் கல்வி அமைச்சர் என்ற வகையில் நான் பிரார்த்திக்கின்றேன்.

அகில விராஜ் காரியவசம்
கல்வி அமைச்சர்

முகவுரை

உயர் கல்விக்காகக் கணிதத்தைக் கற்பதன் மூலம் நியாயித்தல்கள், கொள்கைகள், கோட்பாடுகள் ஆகியவற்றை ஆராய்ந்து பார்க்கத்தக்கதாகவும் ஏனைய துறைகளில் கணித எண்ணக்கருக்களைச் செய்முறையாகப் பிரயோகிக்கத்தக்கதாகவும் இருக்கும். மேலும் பயனுறுதிவாய்ந்த ஒன்றிணைந்த ஆளுமையை உருவாக்குவதற்கும் அதன் மூலம் வாய்ப்புக் கிடைக்கும்.

மேற்குறித்த குறிக்கோள்களை அடைவதற்கு ஒரு கற்றல் துணையாக இந்நூல் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

இந்நூலில் உள்ள பிரசினங்களும் தீர்வுகளும் கணித எண்ணக்கருக்களைத் தக்க சந்தர்ப்பங்களில் பயன்படுத்துவதற்குத் தேவையான அறிவு மாணவர்களுக்குக் கிடைக்கத்தக்கதாகச் செய்முறைச் சந்தர்ப்பங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன.

இந்நூல் க. பொ. த. (உயர் தர) இணைந்த கணிதம், உயர் கணிதம் ஆகியவற்றின் பாடத்திட்டங்களில் இடம்பெறும் பாடவிடயங்களும் செய்முறைப் பிரயோகங்களும் அடங்கத்தக்கவாறு தயாரிக்கப்பட்டிருப்பதனால் க.பொ. த. (உயர் தர) இணைந்த கணிதத்தையும் உயர் கணிதத்தையும் கற்கும் மாணவர்களுக்கும் வேறு உயர் பரீட்சைகளுக்குத் தயாராகும் மாணவர்களுக்கும் உகந்தது. இணைந்த கணிதப் பாடப் பகுதிகளையும் உயர் கணிதப் பாடப் பகுதிகளையும் வேறுபடுத்தி இனங்காண்பதற்காக உயர் கணிதத்தின் உரிய பகுதிகளில் " * " குறி இடப்பட்டுள்ளது.

இந்நூலைத் தயாரிப்பதில் பங்களிப்புச் செய்த பாட வல்லுநர்களுக்கும் பாட இணைப்பாளருக்கும் இந்நூல் பாடத்திட்டத்திற்கமைய உள்ளமையை உறுதிப்படுத்திய தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் அலுவலருக்கும் எனது நன்றியை நவில விழைகின்றேன்.

உங்கள் உயர் கணிதத் திறன்களை மேம்படுத்துவதற்கு இந்நூல் உங்களுக்கு உதவுமென நம்புகின்றேன்.

டபிள்யூ. டீ. பத்மினி நாளிகா
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய,
பத்தரமுல்ல.
2018.05.06

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

திருமதி டபிள்யூ. டீ. பத்மினி நாளிகா - கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள
ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

வழிகாட்டல்

திருமதி **டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி** - கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள
ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

இணைப்பாக்கம்

திருமதி அ. குலரத்தினம் - உதவி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

திரு அ. ஞானேஸ்வரன் - அபிவிருத்தி உத்தியோகத்தர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

எழுத்தாளர்

திரு கபில சில்வா - சிரேட்ட விரிவுரையாளர்
ஸ்ரீ ஜயவர்த்தனபுரப்

பல்கலைக்கழகம்

மொழிபெயர்ப்பாளர்

திரு ந. வாகீசமூர்த்தி - ஓய்வுபெற்ற கல்விப்
பணிப்பாளர்

கணினி வடிவமைப்பு

திருமதி நிரோஷனி தேவநாயகம் - கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

திரு முத்தையா காந்தரூபன் - கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

நூலாசிரியரின் குறிப்பு

இணைந்த கணித பாடத்தைக் கற்கும் மாணவர்களே,

க. பொ. த. (உயர் தர)ப் பாடங்களில் இணைந்த கணிதம் ஒரு விசேட பாடமாகும். தினசரி வாழ்வின் பணிகளுக்குப் போன்று ஏனைய பாடங்களுக்கும் அளப்பரிய பங்களிப்பைச் செய்யும் இப்பாடத்தை நீங்கள் தெரிந்தெடுத்தமையையிட்டு நான் மிகவும் மகிழ்ச்சியடைகின்றேன்.

இப்பாடத்தில் நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டிய பல விடயங்களும் சூத்திரங்களும் இருக்கின்றன. இவ்விடயங்களை விளக்கமின்றிக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள் தேவையான குறிக்கோள்களை அடையமுடியாது. உங்கள் பாடசாலையின் ஆசிரியர்களின் வழிகாட்டலுடன் இப்பாட விடயங்களை விளங்கிக் கொள்வதற்கும் அதற்கமையப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கான பொறிநுட்பத்தை விளங்கிக் கொள்வதற்கும் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும் நீங்கள் முயல வேண்டும். சில பிரசினங்களுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகள் இருப்பதையும் மிகச் சுருக்கமான, மிக எளிய, மிக நல்ல தீர்வைக் காணும் விதத்தையும் ஒரு குறித்த தீர்வு இருக்குமெனின், அதனை மேலும் முறையாக எடுத்துரைக்கும் விதத்தையும் நீங்கள் பரிசீலிக்க வேண்டும்.

கணிதத்தில் உள்ள வரைவிலக்கணங்களையும் சூத்திரங்களையும் நீங்கள் நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டும். தேவையானபோது அவற்றை நிறுவுவதற்கான திறன் உங்களிடத்தில் இருத்தல் வேண்டும். கணிதம் என்பது குறுகிய காலத்தில் விளங்கிக்கொள்ளத்தக்க ஒரு பாடமன்று. நாம் இளம் பிராயத்திலிருந்து தொடங்கிப் படிப்படியாகக் கற்ற கணிதத்தின் அடிப்படை எண்ணக்கருக்களை விளங்கிக் கொள்ளல், கோவைகளைச் சுருக்கல், சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் போன்றவற்றை மிகக் கவனமாகச் செய்தல் வேண்டும் என்பதை இங்கு நினைவுபடுத்த விரும்புகின்றேன்.

இந்நூலில் உள்ள பிரசினங்களை முதலில் நீங்களாகவே தீர்க்க முயலுங்கள். முடியாவிட்டால் மாத்திரம் தீர்வைப் பாருங்கள். தீர்த்த பின்னர் உங்கள் தீர்வையும் தரப்பட்டுள்ள தீர்வையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து உங்கள் குறைபாடுகளைத் திருத்திக் கொள்ளுங்கள். பாடசாலையில் உங்கள் ஆசிரியர்களின் அறிவுறுத்தல்களைப் பின்பற்றிக் கணிதம் பற்றிய அறிவு உள்ளவராக மாற முயலுங்கள்.

கணிதம் பற்றிய நல்ல விளக்கத்தையும் க. பொ. த. (உயர் தர) இறுதிப் பரீட்சையில் நீங்கள் மிகச் சிறந்த பெறுபேறுகளையும் பெற வேண்டும் என்று இறுதியாக உங்களை வாழ்த்துகின்றேன்.

பொருளடக்கம்

அத்தியாயம்

$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin(90-x) = \cos x$	$\cos(90-x) = \sin x$	$\tan(90-x) = \cot x$
$\sin(90+x) = +\cos x$	$\cos(90+x) = -\sin x$	$\tan(90+x) = -\cot x$
$\sin(180-x) = +\sin x$	$\cos(180-x) = -\cos x$	$\tan(180-x) = -\tan x$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 - 2\sin^2 x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan 2x}$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$	$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$	$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$	$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$	$2\sin A\sin B = \sin(A-B) - \cos(A+B)$

W.R. Hamilton

அயர்லாந்திலே 1805 ஆம் ஆண்டில் பிறந்து 1865 ஆம் ஆண்டில் இறந்த சேர் வில்லியம் றோவன் ஹமில்ரன் (W.R. Hamilton) என்பவர் பிரசித்திபெற்ற பௌதிகவியலாளராவார். இவர் வானியலிலும் கணிதத்திலும் விசேட திறமை பெற்றிருந்தார். டப்ளின் பல்கலைக்கழகத்தில் வானியல் பேராசிரியராகப் பணியாற்றிய இவர் அட்சரகணிதம், பழைய பொறியியல், ஒளியியல் ஆகியவற்றிற்காக முக்கிய சேவையை ஆற்றியுள்ளார்.

ஒளியியல் தொகுதிகள், இயக்கவியல் தொகுதிகள் என்பன பற்றி நன்றாக ஆராய்ந்த இவர் புதிய கணித எண்ணக்கருக்களை எடுத்துரைத்து நாம் ஹமில்ரன பொறியியல் என அழைக்கும் புதிய வேடம் பூண்ட நியூற்றன பொறியியலின் முன்னோடியாவார். மின்காந்தக் கொள்கை போன்று சொட்டுப் பொறியியலின் விருத்திக்கும் அவருடைய வழிகாட்டல் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாக இருந்தது. அவர் தூய கணிதத்திற்கும் அளப்பரிய சேவையை ஆற்றியுள்ளார். அதில் அவருடைய விசேட எண்ணக்கருவாகிய சதுட்டயம் (Quaternion) பற்றிய கருத்து பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

நாம் அடிப்படையாகக் கற்பதற்கு எதிர்பார்க்கும் காவிகள் பற்றிய எண்ணக்கருவும் இக்கணிதவியலாளரின் தலைமையில் உருவாகியதெனக் கருதப்படுகின்றது.

1 காவிகள்

உயர் தரத்திற்கான இணைந்த கணிதப் பாடத்திட்டத்தில் பிரயோக கணிதம் பற்றிக் கற்பதற்கு விரும்பும் உங்களுக்குத் தேவையான முக்கிய விடயங்களில் காவிகளுக்கு முக்கியமான இடத்தை வழங்கலாம். ஆகவே முதலில் எமது கவனத்தைக் காவிகளில் செலுத்துவோம். நீங்கள் இவ்விடயங்களை இப்போது அறிந்திருப்பீர்கள். இங்கு அவை ஒழுங்குபடுத்தித் தரப்படும் அதே வேளை பிரயோக கணிதத்தில் இவ்விடயங்கள் ஒன்றோடொன்று தொடர்புபட்டிருப்பதனால் அவற்றை நீங்கள் நினைவில் வைத்திருப்பீர்களென எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது.

இவ்வத்தியாயத்தில் காவிகள் என்னும் எண்ணக்கரு அறிமுகஞ்செய்யப்படும் அதே வேளை காவிகளை உகந்தவாறு பயன்படுத்தலில் கவனஞ்செலுத்துவோம். பொறியியலில் நாம் எதிர்கொள்ளும் பல கணியங்கள் காவிக் கணியங்களாக இனங்காணப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை அவற்றின் இயல்புகள், அவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமைகள் பற்றிக் கருதிப் பார்த்தல், அவற்றின் பயன்பாடுகள் என்பன பற்றி அறிவுறுத்துவதற்குத் தொடக்கத்தில் முயல்வோம்.

1.1 அறிமுகம்

நாம் தினசரி வாழ்வில் எதிர்கொள்ளும் கணியங்களில் பெரும்பாலானவற்றுக்கு அவற்றுக்குரிய அவற்றின் பருமன் பற்றிய அளவீடுகள் இருக்கும் அதே வேளை அப்பெறுமானத்தை அறிந்திருக்கும்போது அதன் தொடர்பாகப் போதிய நிச்சயமான கருத்தைப் பெறலாம். ஓர் எளிய உதாரணமாக ஓர் இலந்தைப் பழத்தின் திணிவு 20 g எனின், நாம் அதன் அளவு பற்றி ஓர் அளவுக்குச் சிந்தித்துப் பார்க்கலாம். அதற்குக் காரணம் இலந்தைப் பழம் பெரும்பாலும் அதற்குரிய வடிவத்தை, அதாவது போதிய அளவில் கோள வடிவத்தைக் கொண்டிருப்பதாகும். வேறுவிதமாகக் கூறும்போது அதன் திணிவு பரம்பியுள்ள விதம் பற்றிய ஒரு கருத்தை அறியலாம்.

மேலும் ஓர் உதாரணமாக ஏறத்தாழ 10 cm ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தைக் கருதுவோம். உமது நண்பர் ஒருவர் அவ்வட்டத்தினுள்ளே இருக்கும் ஒரு புள்ளியை நினைவில் வைத்துக் கொண்டு வட்டத்தினுள்ளே ஒரு புள்ளியைக் குறிக்குமாறு உம்மிடத்தில் கூறுகின்றார். நீங்கள் குறிக்கும் புள்ளி உங்கள் நண்பர் சிந்தித்திருக்கும் புள்ளியாக இருக்குமா? இத்தகைய ஒரு புள்ளியை நீங்கள் எண்ணற்ற விதங்களில் குறிக்கலாம் அல்லவா? அப்புள்ளி வட்டத்தினுள்ளே இருக்கின்றபோதிலும் அதன் அமைவு நிச்சயமானதன்று. அப்புள்ளியை நிச்சயமாக இனங்காண்பதற்கு வட்டத்தின் மையம் பற்றி அல்லது வேறொரு குறிப்பிட்ட புள்ளி பற்றி அப்புள்ளியின் தானத்தைக் குறிப்பிட வேண்டும். அதாவது வட்டத்தின் மையம் என்னும் புள்ளியிலிருந்து தேவையான புள்ளிக்கு உள்ள தூரமும் தேவையான புள்ளி இருக்கும் திசையும் அறியப்படுமெனின், நீங்கள் அப்புள்ளியைத் திருத்தமாகக் குறிக்கலாம். இருக்கும் திசையுடன் தூரம் என்பது **இடப்பெயர்ச்சி** ஆகும் என்பதை நீங்கள் இப்போது அறிவீர்கள் அல்லவா?

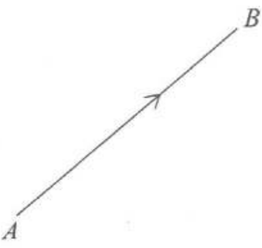
நாம் பயன்படுத்தும் கணியங்களைக் கருதும்போது அவை பற்றிய ஓர் எண்ணத்தைப் பெறுவதற்கு அவற்றின் அளவு முக்கியமானதாகும். திணிவு, தூரம், நேரம், கதி போன்ற கணியங்களுக்குப் **பருமன்** மாத்திரம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. இத்தகைய ஓர் இயல்பை (பருமன்) மாத்திரம் கருதுவதன் மூலம் துணியத்தக்க கணியங்களுக்கு **எண்ணிக் கணியங்கள்** என்னும் பதத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம். இடப்பெயர்ச்சியைக் கருதினால் அப்போது பருமனை மாத்திரமன்று, திசையையும் கருதுதல் முக்கியமான தாகும். இத்தகைய கணியங்களுக்குக் **காவிக் கணியங்கள்** என்னும் பதத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம். இத்தகைய காவிக் கணியங்களை நீங்கள் இதற்கு முன்னர் இனங்கண்டிருக்கிறீர்கள். எளிதாக விசை, வேகம், ஆர்முடுகல் ஆகியவற்றை எடுத்துரைக்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை உந்தம், கோண உந்தம், கணத்தாக்கு என்னும் காவிக் கணியங்களை இனிமேல் இனங்காண்போம். அவற்றின் பிரயோகங்களையும் ஒவ்வொரு பிரச்சினைக்கும் அவை பயன்படுத்தப்படும் விதத்தையும் அறிவதற்கு முயல வேண்டும்.

இதற்காகப் பிரச்சினையில் தரப்பட்டுள்ள விடயங்களைக் கருத்திற்கொண்டு ஒரு கணித மாதிரியுருவை உருவாக்குதல் மிகவும் முக்கியமான படிமுறையாகும். இம்மாதிரியுருவைப் பகுப்பாய்வு செய்தல் போன்று அதிலிருந்து கிடைக்கும் பேறுக்கேற்பத்

தரப்பட்டுள்ள பிரச்சினைக்கு உகந்த யோசனைகளைத் தெரிவிப்பதற்கு அல்லது தேவைகளை நிறுவுவதற்கு நாம் பரிச்சயப்படுதல் வேண்டும். இக்கணித மாதிரியுருவுக்காகக் காவிக் கணியங்களைப் பிரயோகித்தால் அவற்றை எடுத்துரைப்பதற்கான ஒரு வகைக் குறிப்புப் பற்றிக் கற்போம்.

1.2 திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்கள் (Directed Line Segments)

உங்கள் குறிப்புப் புத்தகத்தின் ஒரு பக்கத்தில் இரு வேறுவேறான புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை A, B எனப் பெயரிடுக. இப்போது இப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் AB பற்றி உங்கள் கவனத்தைச் செலுத்துக. உங்கள் பென்சிலின் அல்லது பேனையின் கூரைப் புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B வரைக்கும் கோடு வழியே கொண்டு செல்க. அப்போது அக்கூர் புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B இற்கு இடம்பெயர்வதை நீங்கள் காணலாம். அருகில் உள்ள உரு 1.1 இனால் அவ்விடப்பெயர்ச்சி வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.



உரு 1.1

இங்கு முக்கியமான இரு விடயங்களை அவதானிக்கலாம்.

(i) கோட்டுத் துண்டம் AB இற்குப் பருமன் உண்டு.
(ii) கோட்டுத் துண்டத்தின் திசை A இலிருந்து B ஐ நோக்கியுள்ளது.

ஆகவே இக்கோட்டுத் துண்டத்தினால் பருமன் போன்று திசையும் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. அத்தகைய ஒரு **நேர்கோட்டுத் துண்டமானது** **திசையளித்த கோட்டுத் துண்டம்** எனப்படும். இது **திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டம்** எனவும் அழைக்கப்படும். மேலும் அதன் மூலம் குறிப்புப் புத்தகத்தில் ஒரு **காவியை வகைகுறிக்கலாம்.** இக்காவியை $\overrightarrow{AB}$ அல்லது $\overleftarrow{BA}$ எனக் குறிப்பிடுவோம். இது A இலிருந்து B இற்கு இக்காவியின் **போக்கு** எனப்படும்.

காவிகளை அறிமுகஞ்செய்வதற்குப் பெரும்பாலும் ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்தின் (simple) கீழே ஒரு கோடு இடப்படும்.

அதாவது, அவை $\underline{a}$, $\underline{b}$, ... என எழுதப்படும்.

பருமனுக்கு வழங்கும் வேறொரு பெயர் மட்டு ஆகும். அதாவது காவியின் பருமன் $|\underline{a}|$ அல்லது a என எடுத்துரைக்கப்படும். $|\underline{a}|$ ஆனது மட்டு a என வாசிக்கப்படும்.

$\overrightarrow{AB}$ போன்ற ஒரு காவிக்கு அதன் பருமனை $|\overrightarrow{AB}|$ அல்லது AB என எழுதுகிறோம். $|\overrightarrow{AB}|$ ஆனது மட்டு AB என வாசிக்கப்படும்.

இவ்விடயங்கள் காரணமாகக் காவிகளை எடுத்துரைக்கும்போது குறிப்பீடு மிகவும் முக்கியமானது என்பது தெளிவாகும். ஆங்கிலச் சிற்றெழுத்திற்குக் (simple) கீழே வரையப்பட்டுள்ள கோடு இல்லாவிட்டால் அது காவியன்று என்பதையும் அது ஒரு குறித்த காவியின் பருமன் மாத்திரமே ஆகும் என்பதையும் நினைவில் வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

இரு காவிகளின் சமம்

பருமன், திசை என்னும் இரு விடயங்களும் வேறு வேறாகச் சமமாக இருக்கும்போது அவை **சம காவிகள்** (Equal Vectors) எனப்படும்.

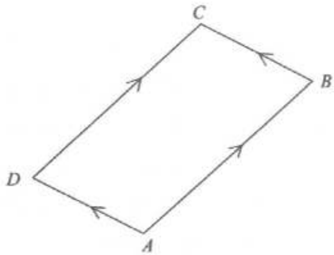
ஒரு கணித மாதிரியுருவில் காவிகளை வகைகுறிப்பதற்குத் திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களைப் பயன்படுத்தலாம் என்பதை நீங்கள் நினைவில் வைத்துக் கொள்ளும் அதே வேளை அத்தகைய மாதிரியுருக்களை மேலும் காவிகள் பற்றி நல்ல விளக்கத்தைப் பெற்ற பின்னர் அமைக்கலாம்.

மேலும் ஒரு முக்கியமான விடயம் யாதெனில், ஒரு தாளில் ஒரு காவியை இத்தகைய ஒரு திசையளித்த கோட்டுத் துண்டத்தினால் வகைகுறிக்கும்போது தொடக்கப் புள்ளி இருக்கும் தானம் ஒரு தனியானதாக இராமையாகும். அத்தொடக்கப் புள்ளிக்கேற்ப வகைகுறிப்பதற்குத் தேவைக்கேற்ப ஒரு திசையளித்த கோட்டுத் துண்டத்தைப் பயன்படுத்தலாம். இத்தகைய காவிகள் **சுயாதீனக் காவிகள்** (Free Vectors) எனப்படும்.

ஓர் எளிய உதாரணமாக ஓர் இணைகரத்தைக் கருதுவோம். உரு 1.2 ஐப் பார்க்க. அதில் $AB = DC$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை AB உம் DC உம் ஒரே திசையில் இருக்கின்றன. ஆகவே அத்திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் காவிகள் சமமாகும்.

அது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ என எடுத்துரைக்கப்படும்.

மேலும் $BC = AD$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை BC உம் AD உம் ஒரே திசையில் இருக்கின்றன. ஆகவே அத்திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் காவிகள் சமம் ஆகையால் $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ என எடுத்துரைக்கப் படுகின்றது.



உரு 1.2

மறுசார் AB இன் திசையும் BA இன் திசையும் எதிராகும். பருமனில் சமமாக ஆனால் திசையில் எதிராக இருப்பதனால் ஒரு மறைக் குறியுடன் அது $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ அல்லது $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ என எழுதப்படும். இக்காவிகள் எதிர்த் திசையில் உள்ளனவென இம்மறைக் குறி எடுத்துரைக்கின்றது.

மேலும் $DC = -\overrightarrow{CD}$, $CD = -\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{BA}$ எனக் காண்பீர்கள்.

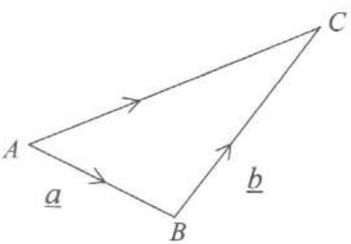
மேலும் $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ ஆகிய தொடர்புடைமைகளும் உள்ளன.

இப்போது இரு காவிகள் தொடர்புபடுத்தப்படும் விதத்தை, அதாவது இரு தரப்பட்ட காவிகளுக்குப் பதிலாக ஒரு தனிக் காவி தரப்படும் விதம்பற்றிக் கற்போம். இச்செயல் **காவிக் கூட்டல்** எனப்படும்.

1.3 ➡ காவிக் கூட்டல்

உங்கள் குறிப்புப் புத்தகத்தில் $\underline{a}$ என்னும் காவியை வகை குறிப்பதற்கு AB என்னும் ஒரு திசையளித்த கோட்டுத் துண்டத்தை அமைக்க. அதன் பின்னர் $\underline{b}$ என்னும் காவியை வகைகுறிப்பதற்கு BC என்னும் ஒரு திசையளித்த கோட்டுத் துண்டத்தை அமைக்க. இங்கு அத்திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்கள் சமாந்தரமல்ல எனக் கருதுவோம். அருகே உள்ள உரு 1.3 ஐப் பார்க்க.

இப்போது உங்கள் பென்சிலின் கூரைப் புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B வரையுள்ள கோடு வழியே கொண்டு சென்று மேலும் புள்ளி C வரைக்கும் கொண்டு செல்க. ஒட்டுமொத்தமாக இச்செயன்முறையைக் கருதும்போது உங்கள் பென்சிலின் கூர் பயனுறுதி வாய்ந்த விதத்தில் புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி C வரைக்கும் சென்றிருப்பதை நீங்கள் உணர்கிறீர்களா? விடை ஆம் எனின், நீங்கள் காவிகள் பற்றிக் கற்பதற்குத் தயாராக இருக்கிறீர்களென நான் நினைக் கின்றேன். ஆகவே AB, BC என்னும் இரு திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் இரு காவிகளின் கூட்டுத்தொகை திசையளித்த கோட்டுத் துண்டம் AC இனால் வகைகுறிக்கப்படும் காவியாக வரையறுக்கப்படும்.



உரு 1.3

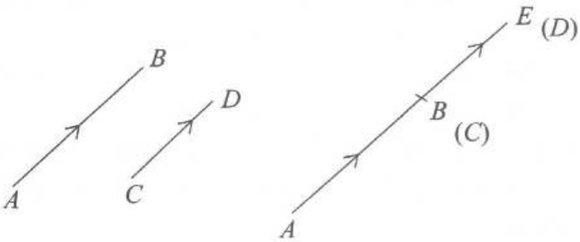
அக்கூட்டுத்தொகை $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ எனக் குறிப்பிடப்படும் அதே வேளை அது $\overrightarrow{AC}$ ஆகையால் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ஆகும். அதாவது $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய இரு காவிகளினதும் கூட்டுத்தொகை $\overrightarrow{AC}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை இக்காவி $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் விளையுள் எனக் கூறப்படும். இங்கு குறி $+$ இனால் இரு காவிகளின் கூட்டல் கருதப்படுகின்றது.

இங்கு ABC ஆனது ஒரு முக்கோணியாகவும் AB, BC ஆகியன அம்முக்கோணியின் இரு பக்கங்களாகவும் இருக்கும் அதே வேளை எழுத்து ஒழுங்குமுறையில் அவ்விரு பக்கங்களினாலும் வகைகுறிக்கப்படும் இரு காவிகளின் விளையுள் முக்கோணி ABC இன் எஞ்சிய பக்கம் AC இன் மூலம் பெறப்படுகின்றமையால் இப்பொறியமைப்பானது காவிக் கூட்டல் பற்றிய **முக்கோணி விதி** எனப்படும்.

இங்கு ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திற்கும் ஒரு முக்கோணி அமைக்கப் படுவதில்லை. அதாவது அவ்விரு காவிகளும் சமாந்தரமாக இருக்கும்போதாகும். சமாந்தரமாதல் என்பது இரு காவிகளினதும் போக்குகள் சமமாக அல்லது எதிராக இருத்தல் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்களா? இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களையும் வேறுவேறாகக் கருதுவோம்.

சந்தர்ப்பம் (1) : ஒரே போக்குகளை உடைய இரு காவிகளுக்கு

இப்போது $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ஆகியவற்றை வகைகுறிக்கும் திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையில் இருக்கும். அப்போது விளையுளின் பருமன் $AE = AB + CD$ ஆகும். இதற்காகக் கீழே தரப்பட்டுள்ள உரு 1.4 ஐப் பார்க்க. இங்கு $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.

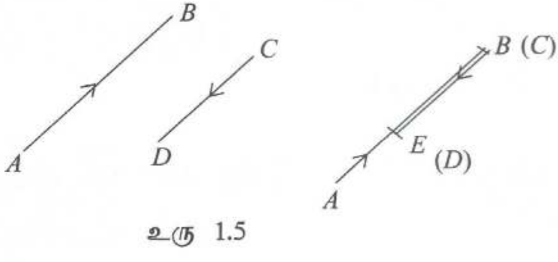


உரு 1.4

மேலும் விளையுளின் திசை மேற்குறித்த காவிகளின் திசையாக இருக்கும் அதே வேளை $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ ஆகும்.

சந்தர்ப்பம் (2): போக்குகள் எதிராக இருக்கும் இரு காவிகளுக்கு

இப்போது $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ஆகியவற்றை வகைகுறிக்கும் திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களின் திசைகள் எதிரானவையாகும். இதற்காகப் பின்வரும் உரு 1.5 ஐப் பார்க்க.



உரு 1.5

அப்போது விளையுளின் பருமன் $AE = AB - CD$ ஆகும்.

இங்கு $AB > CD$ எனக் கருதப்பட்டுள்ளது. மேலும் விளையுளின் திசை காவி $\overrightarrow{AB}$ இன் திசையிலாகும். இதற்காக மேலே உள்ள உரு 1.5 ஐப் பார்க்க.

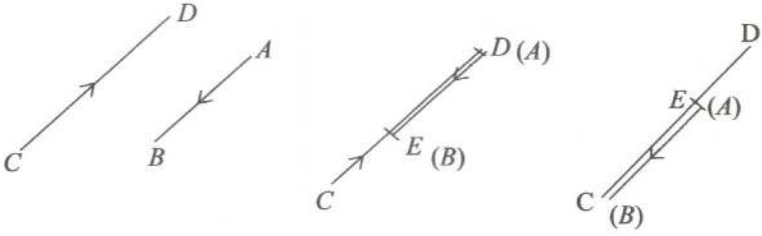
$AB = CD$, அதாவது இக்காவிகள் பருமனில் சமமாக இருந்தால் A, E ஆகிய இரு புள்ளிகளும் பொருந்தும் அதே வேளை அவற்றின் விளையுள் சூனியக் காவி ஆகும்.

சூனியக் காவி என்பது பருமன் பூச்சியமாக உள்ள காவிக்கு வழங்கும் பெயராகும். ஆகவே $\underline{a}$ என்னும் ஒரு காவி $|\underline{a}| = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குமெனின் அது ஒரு சூனியக் காவியாகும்.

$\underline{0}$ என்னும் குறியீடு சூனியக் காவியை வகைகுறிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் அதே வேளை அது குறிப்புப் புத்தகத்தில் வகைகுறிக்கப்படும்போது உரிய கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளம் சூனியமாக இருக்க வேண்டும் ஆகையால் சூனியக் காவியைக் குறிப்பதற்கு ஒரு புள்ளி மாத்திரம் போதுமாகும். அதாவது சூனியக் காவியை வகைகுறிக்கும் கோட்டுத் துண்டத்தின் முடிவுப் புள்ளிகள் பொருந்துகின்றன.

ஆகவே $\underline{0} = \overrightarrow{AA}$ என வகைகுறிக்கலாம்; இங்கு A ஆனது ஒரு குறித்த புள்ளியாகும்.

இறுதியாக $AB < CD$ எனின், அப்போது கீழேயுள்ள உரு 1.6 இற்கேற்ப



உரு 1.6

விளையுளின் பருமன் $CE = CD - AB$. இங்கு $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ ஆகும்.

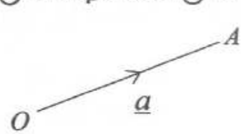
1.4 ➡ காவிகள்

காவி என்பது இரு பரிமாணங்கள் (ஒரு பருமனும் ஒரு திசையும்) உள்ளதும் முக்கோணி விதிக்கேற்பக் கூட்டப்படுவதுமான கணித (பௌதிக)க் கணியமாகும்.

விசேட காவிகள் :

- அலகுக் காவிகள் - பருமன் ஓர் அலகான காவிகள் அலகுக் காவிகளாகும்.
- மாறாக் காவிகள் - பருமனும் போக்கும் மாறாமல் இருக்கும் காவிகள் மாறாக் காவிகளாகும்.
- சூனியக் காவிகள் - பருமன் பூச்சியமான காவிகள் சூனியக் காவிகளாகும்.

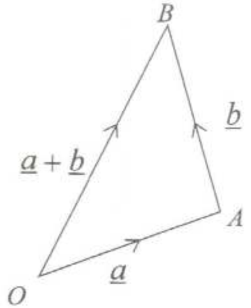
ஒரு திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டத்தை இடுவதன் மூலம் ஒரு காவியை வகைகுறிக்கும்போது பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் நாம் அதன் பருமனைக் குறித்தவாறு எமது சிறிய குறிப்புப் புத்தகத்தில் குறிக்க முடியாது. ஆகவே ஓர் உகந்த அளவிடையைப் பயன்படுத்தி இவ்விடர்ப்பாட்டை நீக்கலாம். எனவே, தேவையான காவியின் பருமனுக்கு விகிதமாக இருக்குமாறு இத்திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்கள் அமைக்கப்படும். பல காவிகளை ஒரே தடவையில் வகைகுறிக்கும்போது அவற்றின் பருமன்களுக்கு விகிதசமமாக இருக்குமாறு இத்திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களை அமைத்தல் வேண்டும். $\underline{a}$ என்னும் காவி குறிப்புப் புத்தகத்தில் வகைகுறிப்பதற்கு அமைத்த ஒரு திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டம் கீழே உரு 1.7 இல் உள்ளவாறு இருக்கின்றதெனக் கொள்வோம். இப்போது $\underline{a}$ ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OA இனால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றமையால் $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ என எடுத்துரைக்கப்படும் அதே வேளை இந்தக் காவி $\underline{a}$ இன் பருமன் OA இற்கு விகிதசமமாகும்.



உரு 1.7

➢ காவிக் கூட்டல் (மேலும்)

சமாந்தரமல்லாத காவிகள் முக்கோணி விதிக்கு இசைவாகக் கூட்டப்படுகின்றன. $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளின் கூட்டலைக் கருதுவோம். அதனை $\underline{a}+\underline{b}$ என எடுத்துரைப்போம். அது கீழே உள்ள உருவில் வகைகுறிக்கப்பட்டுள்ளது.



முதலில் காவி $\underline{a}$ ஐ வகைகுறிப்பதற்குக் கோட்டுத் துண்டம் OA ஐ அமைத்து புள்ளி A இலிருந்து தொடங்கிக் காவி $\underline{b}$ ஐ வகைகுறிப்பதற்கு ஒரு கோட்டுத் துண்டத்தை அமைக்க. அது AB எனக் கொள்வோம். அப்போது கோட்டுத் துண்டம் OB இனால் காவி $\underline{a}+\underline{b}$ வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

இந்த $\underline{a}+\underline{b}$ ஐ $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் **விளையுள்** எனவும் கூறுவோம். மறுசார் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றை $\underline{a}+\underline{b}$ இன் கூறுகள் எனவும் அழைக்கின்றோம்.

மேலும் இவ்விரு காவிகளும் சமாந்தரமாக இருக்கும்போது அவை கூட்டப்படும் விதம் காவிக் கூட்டலின் கீழ் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளது.

கூட்டலின் இயல்புகள் :

- $\underline{a}+\underline{b} = \underline{b}+\underline{a}$ - பரிவர்த்தனை இயல்பு (பரிவர்த்தனை விதி).
- $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ - தொகுப்பு இயல்பு (தொகுப்பு விதி).
- $\underline{a}+\underline{0} = \underline{a}$ - $\underline{0}$ ஆனது கூட்டற்றகவுச் சர்வ சமன்பாடு எனப்படும். மேலும் அது சூனியக் காவியும் ஆகும்.

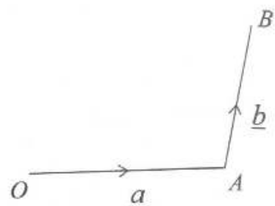
தேவையானபோது இப்பேறுகளை நிறுவலின்றிப் பிரயோகிக் கலாம்.

➢ காவிக் கூட்டல் பற்றிய பரிவர்த்தனை விதி

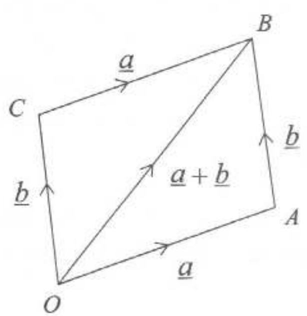
$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன இரு காவிகளாக இருக்கும்போது $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ என்பது உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை அது காவிக் கூட்டல் பற்றிய **பரிவர்த்தனை விதி** எனப்படும்.

காவிக் கூட்டல் பற்றிய பரிவர்த்தனை விதியின் உண்மை பற்றி ஆராய்ந்து பார்ப்போம்.

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் முறையே OA, AB என்னும் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்வோம்.



பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு இணைகரம் $OABC$ ஐ அமைக்க.



அப்போது $\overrightarrow{CB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{OC}=\underline{b}$ என்பதை நாம் அறிவோம். புள்ளி O இலிருந்து புள்ளி A வரையும் புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B வரையும் உள்ள இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கருதும்போது

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \underline{a}+\underline{b}. \qquad \text{——①}$$

மேலும் புள்ளி C இனூடாகப் புள்ளி O இலிருந்து புள்ளி B வரையும் உள்ள இடப்பெயர்ச்சியைக் கருதும்போது

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$= \underline{b} + \underline{a} \text{ . } \text{———— ②}$$

இந்த ①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளினாலும் $\overrightarrow{OB}$ இற்கு இரு வகைக்குறிப்புகள் கிடைக்கும் அதே வேளை அவை சமமாக இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே

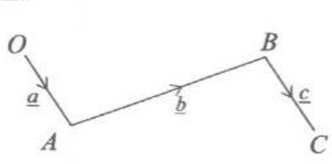
$\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$. ஆகவே பரிவர்த்தனை விதி உண்மையாகும்.

மேற்குறித்த காவிகள் சமாந்தரமாக இருக்கும்போதும் இது உண்மையானதென நீங்கள் எளிதாக நிறுவலாம்.

➢ காவிக் கூட்டல் பற்றிய தொகுப்பு விதி

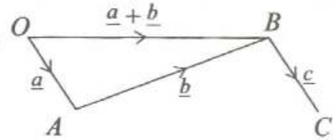
$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகியன மூன்று காவிகளாக இருக்கும்போது $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ பற்றி ஆராய்ந்தால் அது $\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ அல்லது $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ ஆகுமா என்பது பற்றி உறுதியாகத் தெரிவதில்லை. எனினும் கூட்டல் பற்றிக் கருதுவதன் மூலம் அதனைக் காணலாம். இதன்போது மேற்குறித்த இரு கூற்றுகளும் சமமாக இருக்கும் என்பது உண்மையாகும். அதே வேளை அது **காவிக் கூட்டல் பற்றிய தொகுப்பு விதி** எனப்படும்.

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகிய காவிகள் முறையே OA, AB, BC என்னும் திசை கொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன வெனக் கொள்வோம்.



முதலில் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய இரு காவிகளையும் கூட்டி, அதன் பின்னர் அவ்விளையுளையும் காவி $\underline{c}$ ஐயும் கூட்டுவோம். பின்வரும் உரு 1.8 ஐப் பார்க்க.

முதலில் $\underline{a}$ ஐயும் $\underline{b}$ ஐயும் கூட்டுவோம்.



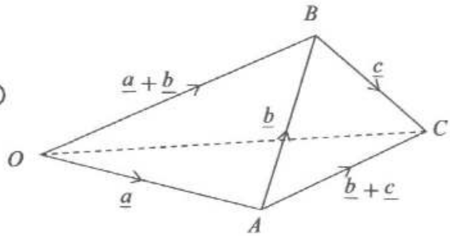
$$\underline{a}+\underline{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OB}$$

இப்போது $\underline{a}+\underline{b}$ உடன் $\underline{c}$ ஐக் கூட்டுவோம்.

$$(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{OC}. \text{ ——— ①}$$



உரு 1.8

ஆனால் உருவிற்கேற்ப

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \text{ ஆகையால்}$$

$$= \underline{a} + \overrightarrow{AC}$$

$$= \underline{a} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \underline{a} + (\underline{b}+\underline{c}) \text{ . ——— ②}$$

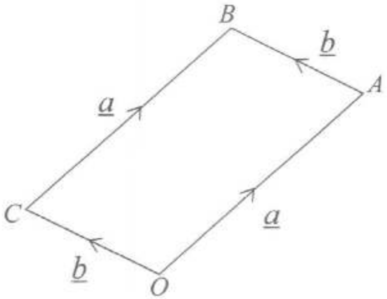
ஆகவே ①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளினாலும் $\overrightarrow{OC}$ இற்கு இரு வகைக்குறிப்புகள் கிடைக்கும் அதே வேளை அவை சமமாகவும் இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \underline{a} + (\underline{b}+\underline{c})$ ஆகும். ஆகவே தொகுப்பு விதி உண்மையானதாகும். மேற்குறித்த காவிகள் சமாந்தரமாக இருக்கும்போதும் இது உண்மையானதென நீங்கள் எளிதாக நிறுவலாம்.

இதற்கு மேலே தரப்பட்ட சூனியக் காவி பற்றிய அறிவு தேவைப்படும் அதே வேளை காவி $\overrightarrow{AB}$ இற்கு $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \underline{0}$ ஆகையால் காவி $\overrightarrow{BA}$ ஆனது காவி $\overrightarrow{AB}$ இன் மறைக் காவி எனப்படும் அதே வேளை அது $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

➢ காவி வித்தியாசம்

உங்கள் குறிப்புப் புத்தகத்தில் O, A, B என்னும் ஒரே கோட்டில் இல்லாத மூன்று புள்ளிகளைக் குறிக்க. OA, AB என்னும் திசை கொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ எனக் கொள்வோம். இணைகரம் $OABC$ ஐப் பூரணப்படுத்துக. கீழே உள்ள உரு 1.9 ஐப் பார்க்க. அத்தகைய ஓர் இணைகரம் அதில் பூரணப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

இப்போது $\overrightarrow{OC} = \underline{b}$. அப்போது $\overrightarrow{CO} = -\underline{b}$.



உரு 1.9

ஆகவே $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO}$$

$$= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$$

$$= \overrightarrow{CA}.$$

எனவே இணைகரம் $OABC$ இன் மூலைவிட்டம் CA இனால் பருமனிலும் திசையிலும் காவி $\underline{a} - \underline{b}$ வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. மேலே பருமனிலும் திசையிலும் காவி $\underline{a} + \underline{b}$ ஆனது மூலைவிட்டம் OB இனால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது என்பது உங்கள் நினைவில் இருக்கின்றதா?

1.5 ➡ ஒரு காவியை ஓர் எண்ணியினால் பெருக்கல்

ஓர் எண்ணி என்பது ஒரு பரிமாணம் உள்ள ஒரு கணியம் ஆகும். எளிதாக அது மெய் எண் ஆகும். $\lambda \in \mathbb{R}$ ஆக இருக்கும்போது $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$ என்னும் மூன்று நிபந்தனைகளில் ஒன்று - ஒன்று

மாத்திரம் உண்மையானது. λ, $\underline{a}$ ஆகியவற்றின் பெருக்கம் $\lambda\underline{a}$ என எழுதப்படும் அதே வேளை அது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

- $\lambda = 0;$

  இங்கு $\lambda\underline{a} = \underline{0}$ ஆகும். அதாவது சூனியக் காவி ஆகும்.

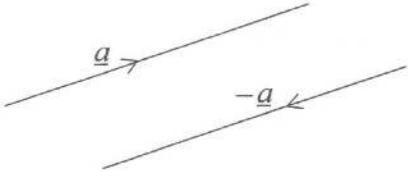
- $\lambda > 0;$

  இங்கு $|\lambda\underline{a}| = \lambda a$. அவற்றின் போக்குகள் ஒரே திசையிலாகும். ஆகவே λ இன் பெறுமானத்திற்கேற்ப $\lambda\underline{a}$ இன் பருமன் மாறும் அதே வேளை போக்கு மாறாமல் இருக்கும்.

- $\lambda < 0;$

  இச்சந்தர்ப்பத்தில் $\lambda\underline{a}$ இன் போக்கும் $\underline{a}$ இன் போக்கும் எதிராக இருக்கும் அதே வேளை $|\lambda\underline{a}| = |\lambda| a = -\lambda a$ ஆகும்.

$\lambda = -1$ என்பது ஒரு விசேட சந்தர்ப்பமாகும். இங்கு $\lambda\underline{a}$ இற்குக் காவி $-\underline{a}$ கிடைக்கும் அதே வேளை அது நாம் மேலே கண்ட $\underline{a}$ இன் மறைக் காவியாகும். பின்வரும் வகைக்குறிப்பைப் பார்க்க.

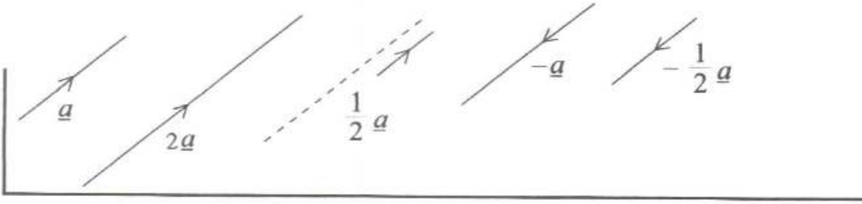


ஆகவே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சமாந்தரமெனின், $\underline{b} = \lambda\underline{a}$ ஆக இருக்குமாறு λ என்னும் ஒரு சூனிய எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது.

உதாரணம் 1.1

காவி $\underline{a}$ ஐ வகைகுறிப்பதற்கு உங்கள் குறிப்புப் புத்தகத்தில் திசை கொண்ட கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக.

$\lambda = 2, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ ஆகியவற்றுக்குக் காவி $\lambda\underline{a}$ ஐ வகை குறிக்குமாறு திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களை அமைக்க.

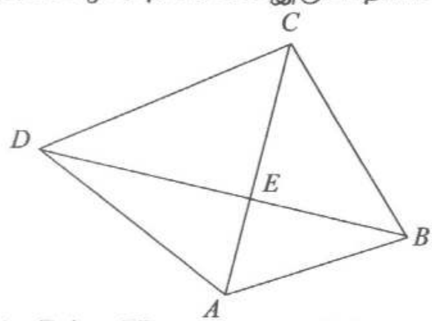


உதாரணம் 1.2

நாற்பக்கல் $ABCD$ இல் மூலைவிட்டங்கள் இருகூறிடுமெனின், அது ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

மூலைவிட்டங்கள் இருகூறிடும் புள்ளி E எனக் கொள்வோம். அப்போது $DE = EB$. அவை ஒரே திசையில் இருப்பதனால் $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$. மேலும் $CE = EA$. அவை ஒரே திசையில் இருப்பதனால் $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$.



மேலும் $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$

$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CE}$

$= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB}$

$= \overrightarrow{CB}$ ஆகையால் $DA = CB$; அத்துடன் DA

CB ஆனது இற்குச் சமாந்தரம்.

அதாவது நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் ஓர் எதிர்ப் பக்கச் சோடியாகிய DA உம் CB உம் சமமும் சமாந்தரமும் ஆகும். எனவே அந்நாற்பக்கல் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

➢ கூட்டலின் இயல்புகள் (மேலும்)

- ➢ $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ - பரம்பல் இயல்பு
- ➢ $(\lambda + \mu)\,\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$ - பரம்பல் இயல்பு

இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன காவிகளும் λ, μ ஆகியன எண்ணிகளும் ஆகும்.

λ, μ ஆகியன வேறுவேறாக நேர், சூனியம், மறை என்னும் நிபந்தனைகளைக் கருதுவதன் மூலம் மேலே காட்டப்பட்டுள்ள பரம்பல் இயல்பு உண்மையானதென நிறுவப்படும்.

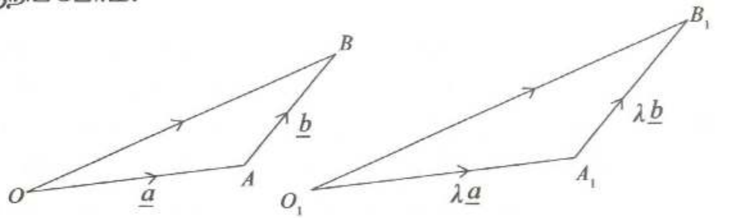
$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ இன் நிறுவல்

① $\lambda = 0$;

இப்போது $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{0}$, $\lambda\underline{a} + \lambda\underline{b} = 0$ ஆகையால் இப்பரம்பல் இயல்பு $\lambda = 0$ ஆக இருக்கும்போது உண்மையாகும்.

② $\lambda > 0$;

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளைப் பின்வரும் உரு 1.10 இல் உள்ளவாறு OA, AB ஆகிய திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிப்போம்.



உரு 1.10

$O_1A_1 = \lambda OA$ போன்று O_1A_1 உம் OA உம் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு O_1A_1 உம் AB ஆனது A_1B_1 இற்குச் சமாந்தரமாகவும் $A_1B_1 = \lambda AB$ ஆகவும் இருக்குமாறு A_1B_1 உம் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே $OAB, O_1A_1B_1$ ஆனவை இயல்பொத்த முக்கோணிகள் ஆகும். ஆகவே எஞ்சிய பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதத்தைக் கருதும்போது $O_1B_1 = \lambda OB$ உம் O_1B_1 ஆனது OB இற்குச் சமாந்தரமும் ஆகும்.

ஆகவே $\overrightarrow{O_1B_1} = \lambda\overrightarrow{OB}$ ஆகையால் $\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right)$;

இங்கு $\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$,

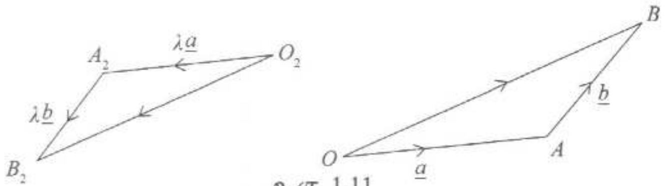
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{a} + \underline{b}$ ஆகையால் மேற்குறித்த சமன்பாடு $\lambda(\underline{a}+\underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ ஆக மாறும்.

அதாவது, $\lambda > 0$ ஆக இருக்கும்போது பரம்பல் இயல்பு உண்மையானதாகும்.

③ $\lambda < 0$;

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளை மேற்குறித்த விதமாகவே பின்வரும் உரு 1.11 இல் உள்ளவாறு OA, AB ஆகிய திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிப்போம்.

இப்போது காவி $\underline{a}$ இனதும் காவி $\lambda\,\underline{a}$ இனதும் போக்குகள் எதிரானவை ஆகும்.



உரு 1.11

$O_2A_2 = \lambda OA$ போன்று O_2A_2 உம் OA உம் சமாந்தரமும் எதிருமாக இருக்குமாறு O_2A_2 உம் AB உம் A_2B_2 உம் சமாந்தரமும் எதிரும் $A_2B_2 = \lambda AB$ ஆகவும் இருக்குமாறு A_2B_2 உம் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே OAB, $O_2A_2B_2$ ஆகியன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் ஆகும். எனவே எஞ்சியுள்ள பக்கங்களிடையே உள்ள விகிதத்தைக் கருதும்போது $O_2B_2 = \lambda OB$ உம் O_2B_2 ஆனது OB இற்குச் சமாந்தரமும் எதிரும் ஆகும்.

ஆகவே $\overrightarrow{O_2B_2} = \lambda\,\overrightarrow{OB}$ ஆக இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{O_2A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right).$$

இங்கு $\overrightarrow{O_2A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} = \lambda\,\underline{a} + \lambda\,\underline{b}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{a} + \underline{b}$ ஆகையால் மேற்குறித்த சமன்பாடு $\lambda\,(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ என மாறும்.

அதாவது, $\lambda < 0$ ஆக இருக்கும்போது பரம்பல் விதி உண்மையாகும்.

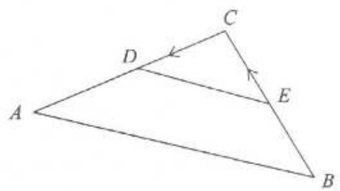
இதற்கேற்ப எல்லா λ இற்கும் $\lambda\,(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\,\underline{a} + \lambda\,\underline{b}$ உண்மையாகும்.

இவ்வாறே $(\lambda + \mu)\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a} + \mu\,\underline{a}$ உம் உண்மையெனக் காட்டலாம்.

உதாரணம் 1.3

முக்கோணி ABC இல் AC, BC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் பக்கம் AB இற்குச் சமாந்தரமாகவும் அதன் அரைவாசி நீளத்தைக் கொண்டதாகவும் இருக்குமெனக் காட்டுக.

தீர்வு



பக்கம் AC இன் நடுப் புள்ளி D எனக் கொள்வோம். அப்போது $CD = DA$. அவை ஒரே திசையில் இருப்பதனால் $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

ஆகவே $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CD}$.

மேலும் பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளி E எனின், $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{EC}$.

அப்போது $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$= 2\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{CD}$

$= 2\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}\right)$ இங்கு பரம்பல் இயல்பு பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது

$= 2\overrightarrow{ED}$.

ஆகவே ED, BA ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் சமாந்தரமும் ED இன் நீளம் BA இன் நீளத்தில் அரைவாசியும் ஆகும்.

பயற்சி 1.1

1. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம். இதில் உள்ள சம காவிகளை வகை குறிக்கும் கோட்டுத் துண்டங்களைக் குறிப்பிடுக.

2. $ABCD$ ஒரு சதுரமெனக் கொள்வோம். இங்கு உள்ள

   (i) சமாந்தரக் காவிகளையும்

   (ii) சம பருமனுள்ள காவிகளையும்

   வகைகுறிக்கும் கோட்டுத் துண்டங்களைக் குறிப்பிடுக.

3. AB, BC என்னும் கோட்டுத் துண்டங்கள் வகைகுறிக்கும் காவிகள் சமாந்தரமெனின், A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி யாது கூறலாம்?

   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ எனின், A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி யாது கூறலாம்?

4. ஒரு நாற்பக்கலின் அடுத்துள்ள பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் ஓர் இணைகரம் அமைக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

5. ஒரு படகோட்டி ஒரு படகை 6 km h^{-1} கதியில் அசையாத நீரில் வலித்துச் செல்லலாம். சமாந்தரமான நேர்க் கரைகள் உள்ள ஓர் ஆறு 3 km h^{-1} கதியில் பாயும் ஒரு நாளில் குறைந்தபட்சத் தூரத்தில் இப்படகை வலித்துப் படகோட்டி ஆற்றின் மற்றைய கரைக்குச் செல்வதற்குப் படகைச் செலுத்த வேண்டிய திசையைத் துணிக.

1.1 மாதிரித் தீர்வு

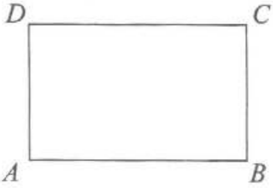
1. $ABCD$ ஒரு செவ்வகம். இதில் உள்ள சம காவிகளை வகைகுறிக்கும் கோட்டுத் துண்டங்களைக் குறிப்பிடுக.

சம காவிகளை வகைகுறிக்கும் இரு சோடிக் கோடுகள் உள்ளன. அவை

(a) AB உம் DC உம்

(b) BC உம் AD உம்

ஆகும். இங்கு திசைகொண்ட கோடுகள் துண்டங்களாகக் கருதப்பட வேண்டும். ஆகவே விடையாக



(a) BA, CD ஆகியவற்றையும்

(b) CB, DA ஆகியவற்றையும்

எடுத்துரைக்கலாம்.

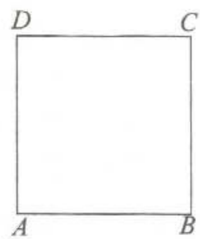
2. $ABCD$ ஒரு சதுரமெனக் கொள்வோம். இங்கு உள்ள

(i) சமாந்தரக் காவிகளையும்

(ii) சம பருமனுள்ள காவிகளையும்

வகைகுறிக்கும் கோட்டுத் துண்டங்களைக் குறிப்பிடுக.

(i) சமாந்தரக் காவிகளை வகைகுறிக்கும் இரு கோட்டுச் சோடிகள் உள்ளன. அவை



(a) AB உம் DC உம்

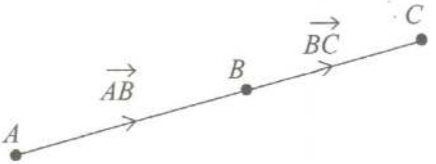
(b) BC உம் AD உம்

ஆகும். இங்கு இவற்றைத் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களாகக் கருத வேண்டும்.

(ii) சம பருமனுள்ள காவிகளை வகைகுறிக்கும் கோடுகள் AB, BC, CD, AD ஆகும்.

3. AB, BC என்னும் கோட்டுத் துண்டங்கள் வகைகுறிக்கும் காவிகள் சமாந்தரமெனின், A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி யாது கூறலாம்?

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ எனின், A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் பற்றி யாது கூறலாம்?



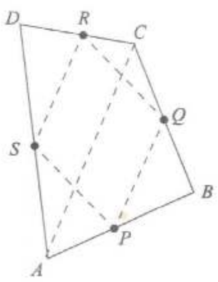
AB, BC ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் வகைகுறிக்கும் காவிகள் சமாந்தரமெனின், AB, BC ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களும் சமாந்தர மாகும்.

மேலும் அக்கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே புள்ளி B இனூடாகச் செல்கின்றமையால் A, B, C ஆகியன ஒரே கோட்டின் மீது உள்ள புள்ளிகளாகும். அதாவது, அவை ஒரே கோட்டிலுள்ளன.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ எனின், அக்காவிகள் சமாந்தரமாகையால் A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளன. மேலும் A இலிருந்து B இன் திசையும் B இலிருந்து C இன் திசையும் சமமாக இருக்கும் அதே வேளை $AB = BC$ ஆகும். ஆகவே B ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AC இன் நடுப் புள்ளியாகும்.

4. ஒரு நாற்பக்கலின் அடுத்துள்ள பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் ஓர் இணைகரம் அமைக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

ஒரு நாற்பக்கலை வரைந்து அதன் உச்சிகளை A, B, C, D எனப் பெயரிடுக. பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் P, Q, R, S எனக் கொள்வோம். அவற்றை முறையே இணைப்பதன் மூலம் அமைக்கப்படும் நாற்பக்கலைக் கருதுக. அதற்காகப் பின்வரும் உருவைப் பார்க்க.



நடுப் புள்ளிகளை இணைப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் நாற்பக்கல் முறிந்த கோடுகளினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

முதலாம் நாற்பக்கலின் யாதாயினும் ஒரு மூலைவிட்டத்தைக் கருதுக. இங்கு மூலைவிட்டம் AC கருதப்பட்டுள்ளது.

முக்கோணி ABC இன் AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆகையால் AC ஆனது PQ இற்குச் சமாந்தரமும் $AC = 2PQ$ உம் ஆகும்.

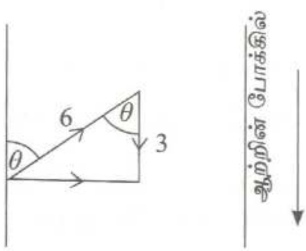
$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ}$.

இவ்வாறே முக்கோணி ACD ஐக் கருதும்போது $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{SR}$ எனக் கிடைக்கும். ஆகவே $2\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{SR}$ உம் $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ உம் ஆகும்.

எனவே PQ, SR ஆகிய பக்கங்கள் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனால் $PQRS$ ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

5. ஒரு படகோட்டி ஒரு படகை 6 km h^{-1} கதியில் அசையாத நீரில் வலித்துச் செல்லலாம். சமாந்தரமான நேர்க் கரைகள் உள்ள ஓர் ஆறு 3 km h^{-1} கதியில் பாயும் ஒரு நாளில் குறைந்தபட்சத் தூரத்தில் இப்படகை வலித்துப் படகோட்டி ஆற்றின் மற்றைய கரைக்குச் செல்வதற்குப் படகைச் செலுத்த வேண்டிய திசையைத் துணிக.

முதலில் ஆற்றை வரைவோம். படகோட்டி இத்திசையில் படகைச் செலுத்தும்போது அது ஆற்றின் அலைகளுடன் தன்பாட்டில் ஆற்றின் கீழுக்கு இழுக்கப்பட்டு வரும். மேலும் குறைந்தபட்சத் தூரத்திற்கு இப்படகைச் செலுத்தி ஆற்றின் மற்றைய கரைக்குச் செல்ல வேண்டுமெனின், படகு கரைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்ல வேண்டும்.



ஆகவே $\cos\theta = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

எனவே படகு செலுத்தப்பட வேண்டிய திசை ஆற்றின் கரைகளின் மேல் திசையுடன் 60° ஐ ஆக்கும் திசையாகும்.

தேற்றம் 1.1

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமல்லாத, சூனியமல்லாத காவிகளாக இருக்கும்போது குறித்த λ, μ என்னும் எண்ணிகளுக்கு $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0}$ திருப்தியாக்கப்படுவதாக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $\lambda = 0, \mu = 0$ ஆகும்.

இங்கு இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் என்பதன் கருத்து யாதெனில் குறித்த λ, μ ஆகிய எண்ணிகளுக்கு $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0}$ திருப்தியாக்கப்படுவதாகவும் $\lambda = 0$ ஆகவும் $\mu = 0$ ஆகவும் $\lambda = 0$ ஆகவும் $\mu = 0$ ஆகவும் இருப்பின் $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$ திருப்தியாக்கப்படும்.

சிலவேளைகளில் இத்தகைய நிபந்தனைகள் **வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகள்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

நிறுவல்

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமல்லாத, சூனியமல்லாத காவிகளெனக் கொள்வோம்.

வேண்டிய நிபந்தனையை நிறுவல்

$\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0}$ உண்மையெனக் கொண்டு $\lambda \neq 0$ எனக் கொள்வோம். அப்போது $\underline{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\underline{b} \Rightarrow \underline{a}$ உம் $\underline{b}$ உம் சமாந்தரமல்லாத, சூனியமல்லாத காவிகள் ஆகையால் $\mu = 0$ ஆகும். அப்போது $\underline{a} = \underline{0}$. இது முரணானது.

ஆகவே மேலே செய்த எடுகோள் $\lambda \neq 0$ ஆனது பொய்யாகும். ஆகவே $\lambda = 0$ ஆகும்.

இவ்வாறே $\mu = 0$ என நிறுவலாம்.

போதிய நிபந்தனையை நிறுவல்

$\lambda = 0$ எனவும் $\mu = 0$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $\lambda \underline{a} = 0. \underline{a} = \underline{0}$ ஆகவும் $\mu \underline{b} = \underline{0}$ ஆகவும் இருப்பதனால் $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$.

பேறு 1.1

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய சமாந்தரமல்லாத, சூனியமல்லாத காவிகளாகவும் λ, μ, α, β ஆகியன எண்ணிகளாகவும் இருக்கும்போது $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $\lambda = \alpha$ உம் $\mu = \beta$ உம் ஆகும்.

தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை $(\lambda - \alpha)\,\underline{a} + (\mu - \beta)\,\underline{b} = \underline{0}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதி மேற்குறித்த தேற்றம் 1.1 ஐப் பிரயோகிக்கும்போது $\lambda - \alpha = 0$, $\mu - \beta = 0$ ஆகையால் $\lambda = \alpha$, $\mu = \beta$ ஆகும்.

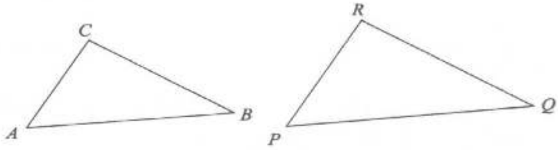
செய்முறையாகப் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது இப்பேறைப் பயன்படுத்துவோம்.

உதாரணம் 1.4

இரு இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதங்கள் சமமெனக் காட்டுக.

தீர்வு

இரு இயல்பொத்த முக்கோணிகளைக் கருதுக. இங்கு ஒத்த பக்கங்கள் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு முக்கோணிகளை வரைவோம்.



இங்கு $\dfrac{PQ}{AB} = \lambda$, $\dfrac{QR}{BC} = \mu$, $\dfrac{RP}{CA} = \nu$ எனக் கொண்டு $\lambda = \mu = \nu$ என நிறுவுவோம்.

$\dfrac{PQ}{AB} = \lambda$ ஆகவும் PQ ஆனது AB இற்குச் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனால் $\overrightarrow{PQ} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ ஆகும். மேலும் $\overrightarrow{QR} = \mu\,\overrightarrow{BC}$ உம் $\overrightarrow{RP} = \nu\,\overrightarrow{CA}$ உம் ஆகும்.

$$\text{அப்போது } \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}$$

$$= \mu\, \overrightarrow{BC} + \nu\, \overrightarrow{CA} \text{ ——— ①}$$

$\overrightarrow{PQ} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$ ஆகையால் $\overrightarrow{QP} = -\lambda\, \overrightarrow{AB}$

$$= \lambda\, \overrightarrow{BA}$$

$$= \lambda\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$\therefore \mu\, \overrightarrow{BC} + \nu\, \overrightarrow{CA} = \lambda\, \overrightarrow{BC} + \lambda\, \overrightarrow{CA}.$

$\Rightarrow (\mu - \lambda)\, \overrightarrow{BC} = (\lambda - \nu)\, \overrightarrow{CA}$. மேலும் $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ என்னும் காவிகள் ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களை வகைகுறிக்கின்றமையால் அவை சமாந்தரமல்லாத சூனியமல்லாத காவிகள் ஆகும். ஆகவே $\mu - \lambda = 0$, $\lambda - \nu = 0$ எனக் கிடைக்கின்றது. அதாவது $\lambda = \mu = \nu$.

எனவே, ஒத்த பக்கங்களிடையே உள்ள விகிதங்கள் சமம்.

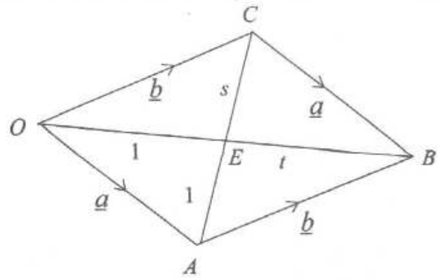
*** உதாரணம் 1.5**

(காவிகளைப் பயன்படுத்தித் தேற்றத்தை நிறுவல் இணைந்த கணிதத்தில் எதிர்பார்க்கப்படுவதில்லை.)

ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடுகின்றனவெனக் காட்டுக.

தீர்வு

$OABC$ ஓர் இணைகரம் எனவும் அதன் மூலைவிட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி E எனவும் கொள்வோம்.



OA, OC ஆகிய திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் வகைகுறிக்கப்படுகின்றனவெனக் கொள்வோம்.

$OE : EB = 1 : t$ எனவும் $AE : EC = 1 : s$ எனவும் கொள்வோம். இங்கு $t = 1$, $s = 1$ எனக் காட்டுவோம்.

இங்கு $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \underline{b} + \underline{a}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\dfrac{OE}{OB} = \dfrac{1}{1+t}$ ஆகும். OE உம் OB உம் ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{1+t}\,\overrightarrow{OB}$$
$$= \frac{1}{1+t}\,(\underline{a} + \underline{b}) \text{ ——— } ①$$

மேலும் $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \underline{b} - \underline{a}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{1+s}$ ஆகும். AE உம் AC உம் ஒரே திசையில் உள்ளன.

ஆகவே $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{1+s}\,\overrightarrow{AC}$
$$= \frac{1}{1+s}\,(\underline{b} - \underline{a}) \text{ ——— } ②$$

முக்கோணி OAE இலிருந்து $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$ ஆகையால் ①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளை இங்கு பிரதியிடும்போது

$$\frac{1}{1+t}(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{a} + \frac{1}{1+s}(\underline{b}-\underline{a}).$$

மேலும் உறுப்புகளைத் தயார்செய்யும்போது

$\frac{1}{1+t}\underline{a} + \frac{1}{1+t}\underline{b} = \underline{a} + \frac{1}{1+s}\underline{b} - \frac{1}{1+s}\underline{a}$ கிடைக்கும் அதே வேளை பேறு 1.1 இற்கேற்ப இரு பக்கங்களிலும் $\underline{a}$ இனதும் $\underline{b}$ இனதும் குணகங்கள் வேறுவேறாகச் சமம்.

$\underline{a}$ இன் குணகங்களைக் கருதும்போது $\frac{1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+s}$ ——— ③

ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\underline{b}$ இன் குணகங்களைக் கருதும்போது

$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+s}$ ——— ④ கிடைக்கும்.

சமன்பாடு ④ இலிருந்து $s = t$ ஆகும்.

அதனைச் சமன்பாடு ③ இல் பிரதியிடும்போது

$\frac{1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை சுருக்கும்போது

$t = 1$ ஆகும்.

அப்போது $s = 1$ உம் ஆகும்.

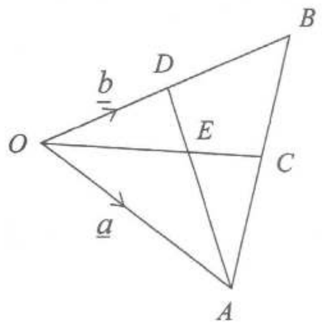
ஆகவே $OE : EB = 1:1, AE : EC = 1:1$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை இதனால் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருகூறிடுகின்றன.

* **உதாரணம் 1.6**

ஒரு முக்கோணியின் இடையங்கள் இடைவெட்டும் விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு

OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் அதில் OA, OB ஆகிய இரு பக்கங்களினாலும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன எனவும் கொள்வோம்.



இடையங்கள் என்பவை ஒரு முக்கோணியின் ஒவ்வோர் உச்சியையும் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியுடன் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டங்கள் ஆகும். மேற்குறித்த உருவில் OC, AD ஆகியன இரு இடையங்கள் என்பதை நீங்கள் காணலாம்.

இப்போது இடையங்களை வகைகுறிக்கும் காவிகள் $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ ஆகியவற்றுக்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் கோவைகளைப் பெறவேண்டும். முதலில் $\overrightarrow{OC}$ இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுவோம்.

பக்கம் AB இன் நடுப் புள்ளி C ஆகையால், $AC = CB$. இவை ஒரே திசையில் உள்ளன.

அப்போது $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

ஆகவே $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AC}$

ஆகவே $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OA} + \underline{b}\right) = \frac{1}{2}\,(\underline{b} - \underline{a})$

அதற்கேற்ப $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{a} + \frac{1}{2}\,(\underline{b} - \underline{a}) = \frac{1}{2}\,(\underline{a} + \underline{b})$.

இப்போது $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் $\overrightarrow{OE}$ இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுவோம்.

இடையங்கள் E இல் இடைவெட்டுமெனின், OE ஆனது OC இற்குச் சமாந்தரம் ஆகையால் $\overrightarrow{OE} = \lambda\, \overrightarrow{OC}$ ஆக இருக்குமாறு ஓர் எண்ணி λ உளதாக இருக்கின்றது.

எனவே $\overrightarrow{OE} = \lambda \times \frac{1}{2}\ (\underline{a} + \underline{b})$. ——— ①

D ஆனது பக்கம் OB இன் நடுப் புள்ளி ஆகையால் $OD = \frac{1}{2}\ OB$,

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\ \underline{b}$ ஆகும்.

அப்போது
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = -\ \overrightarrow{OD} + \underline{a} = -\ \frac{1}{2}\ \underline{b} + \underline{a} = \underline{a} - \frac{1}{2}\ \underline{b}$.

இப்போது மறுபடியும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் OE இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுவோம்.

D, E, A ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் இருக்கின்றமையால் DE ஆனது DA இற்குச் சமாந்தரம் ஆகையால் $\overrightarrow{DE} = \mu\, \overrightarrow{DA}$ ஆக இருக்குமாறு ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது.

இதற்கேற்ப $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE}$

$$= \frac{1}{2}\ \underline{b} + \mu \left(\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b} \right) \text{ ——— ②}$$

இது மேலே கிடைத்த $\overrightarrow{OE}$ இற்குக் கிடைத்த கோவைக்குச்

சமவலுவுள்ளதாக இருத்தல் வேண்டும் ஆகையால் ①, ②

ஆகியவற்றிலிருந்து $\frac{\lambda}{2}\ (\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}\ \underline{b} + \mu \left(\underline{a} - \frac{1}{2}\ \underline{b} \right)$.

அதாவது, $\frac{\lambda}{2}\ \underline{a} + \frac{\lambda}{2}\ \underline{b} = \frac{1}{2}\ \underline{b} + \mu\, \underline{a} - \frac{\mu}{2}\ \underline{b}$. பேறு 1.1 இற்கேற்ப

$\underline{a}$ இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது

$\frac{\lambda}{2} = \mu$, $\underline{b}$ இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது

$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}$ என்னும் சமன்பாடுகளை λ, μ ஆகிய எண்ணிகள் திருப்தியாக்குகின்றன எனப் பெறப்படும்.

இவற்றிலிருந்து μ ஐ நீக்கும்போது $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\lambda}{2}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை மேலும் அதனை 4 இனால் பெருக்கும்போது

$2\lambda = 2 - \lambda$ ஆகையால் $\lambda = \frac{2}{3}$.

அப்போது $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OC}$ ஆகையால் இரு பக்கங்களிலும் மட்டுகளைக் கருதும்போது

$$OE = \frac{2}{3}\,OC = \frac{2}{3}\,(OE + EC) \text{ ஆகையால்}$$

$$3\,OE = 2\,OE + 2EC.$$

$$\Rightarrow OE = 2\,EC.$$

$\frac{OE}{EC} = \frac{2}{1}$ அல்லது $OE : EC = 2 : 1$.

ஆகவே ஒரு முக்கோணியின் இடையங்கள் $2:1$ விகிதத்தில் இடைவெட்டுகின்றன.

1.6 தானக் காவி

ஒரு குறித்த புள்ளி பற்றி வேறொரு புள்ளியின் தானத்தை எடுத்துரைக்கும்போது காவிகள் மிகவும் பயன்படுமென மேலே காட்டப்பட்டுள்ளது. ஒரு குறித்த புள்ளி A ஐ நாம் அறிந்திருக்கும்போது வேறொரு புள்ளி B இன் தானத்தை ஒரு தனியாய் $\overrightarrow{AB}$ ஆக எடுத்துரைக்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை இக்காவி புள்ளி A தொடர்பாகப் புள்ளி B இன் **தானக் காவி** எனப்படும்.

பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் நாம் கருதும் நிலைத்த அச்சுத் தொகுதியின் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து வேறு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் எடுத்துரைக்கப்படும்.

வசதிக்காக உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ஆகியன முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ என எடுத்துரைக்கப்படும்.

இக்குறிப்பீடுகளுடன் $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

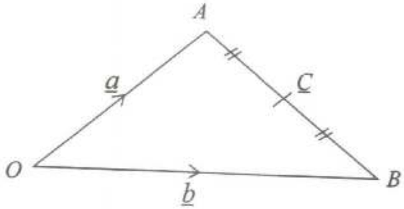
$$= -\underline{a} + \underline{b}$$

$= \underline{b} - \underline{a}$ என மாறும்.

தானக் காவிகளின் சார்பில் ஒரு முக்கிய பேறைப் பெறுவோம்.

பேறு

ஒரு கோட்டுத் துண்டம் AB இன் நடுப் புள்ளி C இன் தானக் காவி $\underline{c}$ ஆனது $2\,\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது. இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் தானக் காவிகள் ஆகும்.



நிறுவல்

C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB இன் நடுப் புள்ளி ஆகையால் $AC = CB$ ஆகும். AC, CB ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையில் இருக்கின்றமையால்

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \underline{0}\ .$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \underline{0}\ .$$

மேலும் $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ என்னும் காவியை $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{a} + \overrightarrow{AC}$ என எழுதலாம் ஆகையால்

$$\underline{c} = \underline{a} + \overrightarrow{AC}. \text{ ——— ①}$$

மேலும் $\underline{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \underline{b} + \overrightarrow{BC}$. ——— ②

① ஐயும் ② ஐயும் கூட்டும்போது

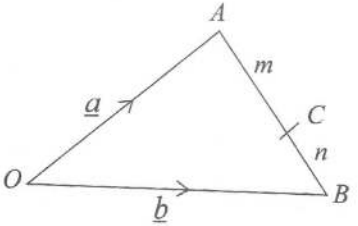
$2\underline{c} = \left(\underline{a} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\underline{b} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \underline{a} + \underline{b} + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \underline{a} + \underline{b} + \underline{0} = \underline{a} + \underline{b}$ அதாவது $2\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$.

இப்பேறை மேலும் விரிவாக்குவதன் மூலம் கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $m:n$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி C இன் தானக் காவி $\underline{c}$ ஆனது $(m+n)\,\underline{c} = n\underline{a} + m\underline{b}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது. இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன முறையே A, B ஆகியவற்றின் தானக் காவிகள் ஆகும்.

நிறுவல்



C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $m : n$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி C ஆகையால் $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$ ஆகும். AC, CB ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையில் இருப்பதால்

$\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{n}\,\overrightarrow{CB}$. ஆகவே $n\,\overrightarrow{AC} - m\,\overrightarrow{CB} = \underline{0}$.

$n\,\overrightarrow{AC} + m\,\overrightarrow{BC} = \underline{0}$.

மேலும் $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ என்னும் காவியை $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \underline{a} + \overrightarrow{AC}$ என எழுதலாம்

ஆகையால் $\underline{c} = \underline{a} + \overrightarrow{AC}$ ——— ①

$$\text{மேலும் } \underline{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \underline{b} + \overrightarrow{BC} \quad \text{——— ②}$$

$$① \times n + ② \times m; \ n\underline{c} + m\underline{c} = n\left(\underline{a} + \overrightarrow{AC}\right) + m\left(\underline{b} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\Rightarrow (n+m)\,\underline{c} = n\underline{a} + n\overrightarrow{AC} + m\underline{b} + m\,\overrightarrow{BC}$$

$$= n\underline{a} + m\underline{b} + n\,\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{BC}.$$

$$= n\underline{a} + m\underline{b} + \underline{0}$$

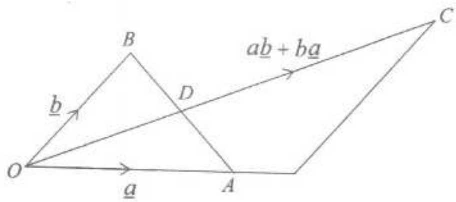
$$= n\underline{a} + m\underline{b}.$$

அதாவது, $(m+n)\,\underline{c} = n\underline{a} + m\underline{b}$ ஆகும்.

உதாரணம் 1.7

O, A, B, C என்பன ஒரு தளத்தின் மீது உள்ள ஒரே கோட்டில் இல்லாத நான்கு வேறுவேறான புள்ளிகள் ஆகும். O ஐக் குறித்து A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியனவும் $\overrightarrow{OC} = a\underline{b} + b\underline{a}$ உம் ஆகும். OC இனதும் AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளி D எனின், $AD : DB = a : b$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு



புள்ளி D ஆனது OC மீது இருப்பதனால் $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\overrightarrow{OD}$ இற்குச் சமாந்தரம். $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OC}$ ஆக இருக்குமாறு λ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது. $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \lambda\,(a\underline{b} + b\underline{a})$.

மேலும் புள்ளி D ஆனது AB மீது இருப்பதனால் $\overrightarrow{AD}$ ஆனது $\overrightarrow{AB}$ இற்குச் சமாந்தரம்.

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \mu\, \overrightarrow{AB}$ ஆக இருக்குமாறு μ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \mu\,(\underline{b} - \underline{a}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \underline{a} + \mu\,(\underline{b} - \underline{a}) = (1-\mu)\underline{a} + \mu\,\underline{b}.$$

இது மேலே $\overrightarrow{OD}$ இற்குக் கிடைத்த கோவைக்குச் சமவலுவாக இருக்க வேண்டும் ஆகையால்

$\lambda(a\underline{b} + b\underline{a}) = (1-\mu)\,\underline{a} + \mu\,b$. பேறு 1.1 இற்கேற்ப $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் குணகங்கள் வேறுவேறாகச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். அதாவது,

$\lambda a = \mu$, $\lambda b = 1 - \mu$ என்னும் சமன்பாடுகள் λ, μ ஆகிய எண்ணிகளைத் திருப்தியாக்குகின்றன எனப் பெறப்படும். அவற்றிலிருந்து λ ஐ நீக்கும்போது

$b\dfrac{\mu}{a} = 1 - \mu$ ஆக இருக்கும் அதேவேளை மேலும் அதனை μ இற்குச் சுருக்கும்போது

$b\mu = a - a\mu$ எனவும் கிடைக்கும். ஆகவே $\mu = \dfrac{a}{a+b}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{AD} = \mu\, \overrightarrow{AB}$ ஆகையால் $\overrightarrow{AD} = \dfrac{a}{a+b}\, \overrightarrow{AB}$.

இரு பக்கங்களிலும் மட்டுகளைக் கருதும்போது

$$AD = \frac{a}{a+b}\; AB \;= \frac{a}{a+b}(AD + DB).$$

$$(a+b)\,AD = a\,(AD + DB). \Rightarrow b\,AD = a\,DB$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{a}{b} \text{ அல்லது } AD : DB = a : b\,.$$

பயற்சி 1.2

1. ஓர் இணைகரம் $OABC$ இன் OA, AB என்னும் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்கள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகளை வகைகுறிக்கின்றன. D ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OB இன் நடுப் புள்ளியாகும். பின்வரும் கோட்டுத் துண்டங்களை வகை குறிக்கும் காவிகளை $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

   (a) OB (b) OC (c) OD

   (d) AC (e) AD (f) BD

2. நாற்பக்கல் $OABC$ இல் OB, AC என்னும் இரு மூலைவிட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

   (a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}$.

   (b) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}$.

   இதிலிருந்து $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{XY}$ எனப் பெறுக.

3. $ABCDEF$ என்பது ஒரு குறித்த தளத்தில் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். அதே தளத்தில் உள்ள உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. O பற்றி அறுகோணியின் மையம் G இன் தானக் காவி $\underline{a} - \underline{b} + \underline{c}$ எனக் காட்டுக. D, E, F ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகளையும் காண்க.

4. OAB ஒரு முக்கோணி. புள்ளி O பற்றி A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும். C, D ஆகியன முறையே $\overrightarrow{OC} = 2\,\underline{b}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OD} = 4\,\underline{b} - \underline{a}$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். A, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளன எனக் காட்டுக.

5. $ABCD$ என்பது பக்கம் AB உம் பக்கம் DC உம் சமாந்தரமாகவும் பக்கம் CD இன் நீளம் பக்கம் AB இன் நீளத்திலும் சிறியதாகவும் இருக்கும் ஒரு சரிவகம் ஆகும். நீட்டப்பட்ட AD, BC ஆகிய பக்கங்கள் புள்ளி E இல் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB}$ இன் சார்பில் $\overrightarrow{DC}$ ஐ எடுத்துரைத்து $AE : DE$ உம் $BE : CE$ உம் சமமெனக் காட்டுக.

6. ABC ஒரு முக்கோணி. AC, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே D, E ஆகும். CE, BD ஆகிய கோடுகள் புள்ளி X இல் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BD}$ ஆகியவற்றை எடுத்துரைத்து $CX : XE$ ஐக் காண்க.

* 7. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் OA, OB ஆகிய திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்கள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளை வகை குறிக்கின்றன எனவும் கொள்வோம். C, D ஆகியன முறையே $\overrightarrow{OC} = -\underline{a}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OD} = -\underline{b}$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகள் எனின், $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

* 8. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் OA, OB ஆகிய திசைகொண்ட கோடுகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளை வகைகுறிக்கின்றன எனவும் கொள்வோம். D ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OB இன் புள்ளி B இற்குக் கிட்ட உள்ள முக்கூறிடும் புள்ளி எனவும் C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OA இன் நடுப் புள்ளி எனவும் கொள்வோம். AD, BC ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் E இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ ஆகியவற்றுக்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் கோவைகளைக் காண்க.

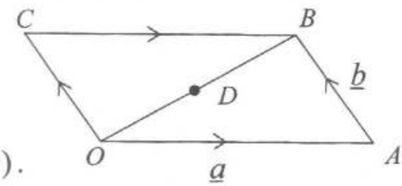
(ii) இக்காவிகளின் சார்பில் காவி OE ஐக் கண்டு E ஆனது BC இன் நடுப் புள்ளியெனக் காட்டுக.

1.2 மாதிரித் தீர்வு

1. ஓர் இணைகரம் $OABC$ இன் OA, AB என்னும் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்கள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகளை வகைகுறிக்கின்றன. D ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OB இன் நடுப் புள்ளியாகும். பின்வரும் கோட்டுத் துண்டங்களை வகை குறிக்கும் காவிகளை $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(a) OB (b) OC (c) OD

(d) AC (e) AD (f) BD



(a) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{a} + \underline{b}$.

(b) $\overrightarrow{OC} = \underline{b}$.

(c) $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\,(\underline{a} + \underline{b})$.

(d) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{b} + (-\underline{a}) = \underline{b} - \underline{a}$.

(e) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\,(\underline{b} - \underline{a})$.

(f) $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\,(\underline{a} + \underline{b})$.

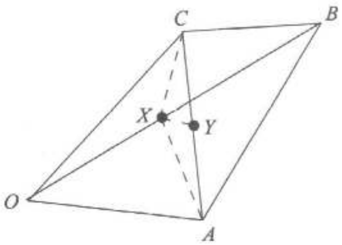
2. நாற்பக்கல் $OABC$ இல் OB, AC என்னும் இரு மூலை விட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}$.

(b) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}$.

இதிலிருந்து $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{XY}$ எனப் பெறுக.

பக். 26 இல் உள்ள பேறைப் பார்க்க.



(a) முக்கோணி OAX இல்

$$\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{XA}.$$

முக்கோணி ABX இல்

$$\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{XA}.$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$$\left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BA}\right) = 2\,\overrightarrow{XA}.$$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB}\right) + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}$. இங்கு $\overrightarrow{XO}$, $\overrightarrow{XB}$ ஆகிய காவிகள் திசையில் எதிராகவும் பருமனில் சமமாகவும் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB} = \underline{0}.$$

$$\Rightarrow \underline{0} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}.$$

ஆகவே $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}$.

(b) முக்கோணி OCX இல் $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{XC}$.

முக்கோணி BCX இல் $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XC}$.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

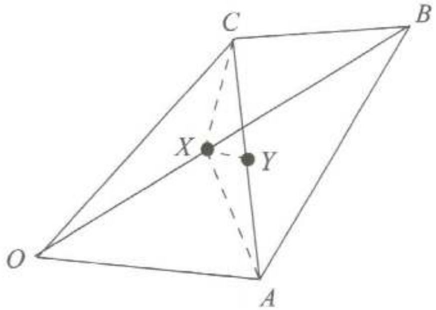
$$\left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\,\overrightarrow{XC}.$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB}\right) + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}.$$

இங்கு $\overrightarrow{XO}$, $\overrightarrow{XB}$ ஆகிய காவிகள் திசையில் எதிராகவும் பருமனில் சமமாகவும் இருப்பதனால் $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB} = \underline{0}$.

$$\Rightarrow 0 + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}.$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}.$$



(a), (b) ஆகியவற்றுக்குப் பெற்ற பேறுகளிலிருந்து

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XA} + 2\,\overrightarrow{XC}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right).$$

முக்கோணி AXY இலிருந்து $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{XY}$.

முக்கோணி CXY இலிருந்து $\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{XY}$. இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$$\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AY}\right) + \left(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY}\right) = 2\overrightarrow{XY}.$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{CY}\right) + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\,\overrightarrow{XY}.$$

இங்கு $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{CY}$ ஆகிய காவிகள் திசையில் எதிராகவும் பருமனில் சமமாகவும் இருப்பதனால் $\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{CY} = \underline{0}$.

$$\Rightarrow \underline{0} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\,\overrightarrow{XY}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\,\overrightarrow{XY}$$

ஆகவே $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right)$

$$= 2\left(2\overrightarrow{XY}\right) = 4\,\overrightarrow{XY}$$

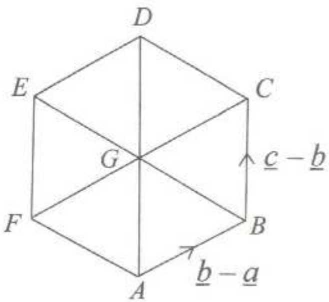
3. $ABCDEF$ என்பது ஒரு குறித்த தளத்தில் உள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். அதே தளத்தில் உள்ள உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. O பற்றி அறுகோணியின் மையம் G இன் தானக் காவி $\underline{a}-\underline{b}+\underline{c}$ எனக் காட்டுக. D, E, F ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகளையும் காண்க.

அறுகோணியின் மையம் அதன் நடுப் புள்ளியாகும். அதாவது, மூலைவிட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளியாகும்.

ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A,B,C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகையால்

$\overrightarrow{OA}=\underline{a}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$, $\overrightarrow{OC}=\underline{c}$ ஆகும்.

AG ஆனது BC இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனால்,



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}$. ஆகவே அறுகோணியின் மையத்தின் தானக் காவி

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\underline{a}+\underline{c}-\underline{b}=\underline{a}-\underline{b}+\underline{c}.$$

மேலும்

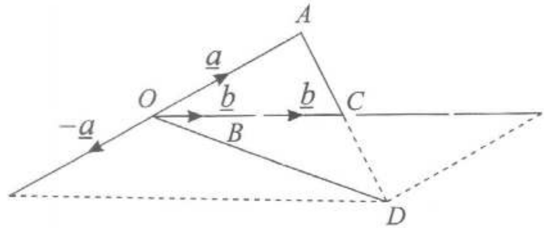
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}=(\underline{a}-\underline{b}+\underline{c})+(\underline{c}-\underline{b})=\underline{a}-2\underline{b}+2\underline{c}.$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}$$
$$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BA}$$
$$=(\underline{a}-2\underline{b}+2\underline{c})+(\underline{a}-\underline{b})$$
$$=2\underline{a}-3\underline{b}+2\underline{c}.$$

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GF}$$
$$=(\underline{a}-\underline{b}+\underline{c})+\overrightarrow{BA}$$
$$=\underline{a}-\underline{b}+\underline{c}+(\underline{a}-\underline{b})$$
$$=2\underline{a}-2\underline{b}+\underline{c}.$$

4. OAB ஒரு முக்கோணி. புள்ளி O பற்றி A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும். C, D ஆகியன முறையே $\overrightarrow{OC} = 2\underline{b}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OD} = 4\,\underline{b} - \underline{a}$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். A, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளன எனக் காட்டுக.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\\ &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\\ &= -\underline{a} + 2\,\underline{b}\\ &= 2\underline{b} - \underline{a}\,.\end{aligned}$$



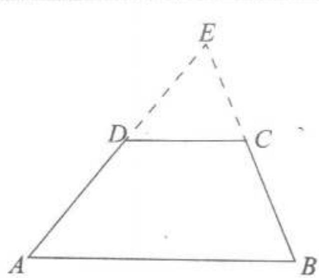
மேலும்

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = -\,2\,\underline{b} + (4\,\underline{b} - \underline{a}) = 2\,\underline{b} - \underline{a}\,.$$

ஆகவே $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow AC$ உம் CD உம் சமாந்தரமும் அவை பொதுப் புள்ளி C இனூடாகச் செல்கின்றனவும் ஆகும்.

ஆகவே அவை ஒரே கோடு மீது உள்ளன. A, C, D ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளன.

5. $ABCD$ என்பது பக்கம் AB உம் பக்கம் DC உம் சமாந்தரமாகவும் பக்கம் CD இன் நீளம் பக்கம் AB இன் நீளத்திலும் சிறியதாகவும் இருக்கும் ஒரு சரிவகம் ஆகும். நீட்டப்பட்ட AD, BC ஆகிய பக்கங்கள் புள்ளி E இல் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB}$ இன் சார்பில் $\overrightarrow{DC}$ ஐ எடுத்துரைத்து $AE : DE$ உம் $BE : CE$ உம் சமமெனக் காட்டுக.



இங்கு AB உம் DC உம் சமாந்தரமாக இருக்கும் அதே வேளை ஒரே திசையில் உள்ளன.

மேலும் $DC = \frac{DC}{AB} AB$ ஆகையால் $\overrightarrow{DC} = \frac{DC}{AB} \overrightarrow{AB}$ ஆகும்.

DE ஆனது AE இற்குச் சமாந்தரம் ஆகையால் $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{AE}$ ஆக இருக்குமாறு λ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது. மேலும் EC ஆனது EB இற்குச் சமாந்தரம் ஆகையால் $\overrightarrow{EC} = \mu \overrightarrow{EB}$ ஆக இருக்குமாறு μ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது.

முக்கோணி CED இலிருந்து $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$ ஆகையால்

$$\lambda \overrightarrow{AE} + \mu \overrightarrow{EB} = \frac{DC}{AB} \overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{DC}{AB} \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right)$$
$$= \frac{DC}{AB} \overrightarrow{AE} + \frac{DC}{AB} \overrightarrow{EB}$$

இங்கு $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EB}$ ஆகிய காவிகள் சூனியமாகவும் சமாந்தரமற்றும் இருப்பதனால் அவற்றின் குணகங்களைக் கருதும்போது

$$\lambda = \frac{DC}{AB}, \mu = \frac{DC}{AB} \text{ ஆகும் } \Rightarrow \lambda = \mu.$$

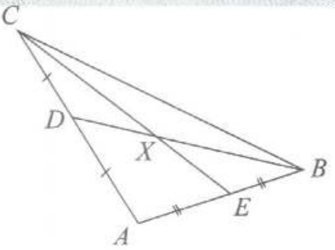
$$\Rightarrow \overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EC} = \lambda \overrightarrow{EB}$$

$$\Rightarrow DE = \lambda AE, \; EC = \lambda EB.$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{AE}{EB}, \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{EB}{EC}$$

$$\Rightarrow AE : DE = BE : CE.$$

6. ABC ஒரு முக்கோணி. AC, AB ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே D, E ஆகும். CE, BD ஆகிய கோடுகள் புள்ளி X இல் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{BD}$ ஆகியவற்றை எடுத்துரைத்து $CX : XE$ ஐக் காண்க.



$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

BD ஆனது BX இற்குச் சமாந்தரம் ஆகையால்

$\overrightarrow{BX} = \lambda\,\overrightarrow{BD}$ ஆக இருக்குமாறு λ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது. ஆகவே

$\overrightarrow{BX} = \lambda\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \lambda\,\overrightarrow{AD} - \lambda\,\overrightarrow{AB}$.

மேலும் EX ஆனது EC இற்குச் சமாந்தரம் ஆகையால்

$\overrightarrow{EX} = \mu\,\overrightarrow{EC}$ ஆக இருக்குமாறு μ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது.

ஆகவே $\overrightarrow{EX} = \mu\,\overrightarrow{EC}$

$$= \mu\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \mu\left(\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \mu\,\overrightarrow{BE} + \mu\left(2\overrightarrow{AD}\right)$$; D ஆனது AC இன் நடுப் புள்ளி ஆகையால்

$$= \mu\,\overrightarrow{BE} + 2\mu\,\overrightarrow{AD}$$

$$= \mu\left(-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right) + 2\mu\,\overrightarrow{AD}.$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mu\,\overrightarrow{AB} + 2\,\mu\,\overrightarrow{AD}$$

முக்கோணி BEX இலிருந்து $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{EX}$ ஆகையால்.

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \lambda\,\overrightarrow{AD} - \lambda\,\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\mu\,\overrightarrow{AB} + 2\mu\,\overrightarrow{AD}.$$

இங்கு $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ஆகிய காவிகள் சூனியமற்றும் சமாந்தரமற்றும் இருப்பதனால் அவற்றின் குணகங்களைக் கருதும்போது $\frac{1}{2} - \lambda = -\frac{1}{2}\mu$, $\lambda = 2\mu$ ஆகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் λ ஐ நீக்கும்போது

$$\frac{1}{2} - 2\mu = -\frac{1}{2}\mu$$

$$\Rightarrow 1 - 4\mu = -\mu$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{3}.$$

அப்போது $\overrightarrow{EX} = \mu\,\overrightarrow{EC} \Rightarrow \overrightarrow{EX} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EC} \Rightarrow EX = \frac{1}{3}\,EC$.

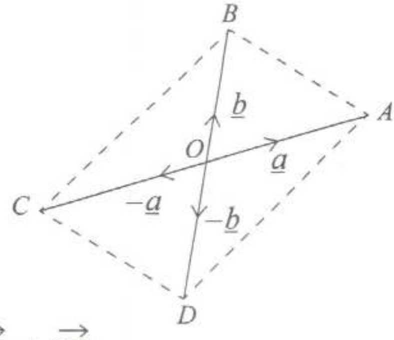
$$\Rightarrow EX = \frac{1}{3}\,(EX + XC)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\,XE = \frac{1}{3}\,CX$$

$$\Rightarrow \frac{CX}{XE} = \frac{2}{1} \Rightarrow CX : XE = 2 : 1.$$

* 7. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் OA, OB ஆகிய திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்கள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளை வகைகுறிக்கின்றன எனவும் கொள்வோம். C, D ஆகியன முறையே $\overrightarrow{OC} = -\underline{a}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OD} = -\underline{b}$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகள் எனின், $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

காவிகளைப் பயன்படுத்திக் கேத்திரகணிதத் தேற்றத்தை நிறுவல் உயர் தர இணைந்த கணிதப் பாடத்திட்டத்தில் எதிர்பார்க்கப் படுவதில்லை.



இங்கு $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= -\underline{a} + \underline{b}$

$= \underline{b} - \underline{a}$.

மேலும் $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$

$= -(-\underline{b}) + (-\underline{a})$

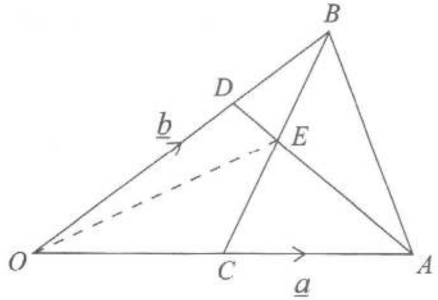
$= \underline{b} - \underline{a}$.

ஆகவே $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ஆகையால் AB ஆனது DC இற்குச் சமாந்தரமும் அவை சம நீளங்களைக் கொண்டனவும் ஆகும். நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் எதிர்ப் பக்கச் சோடி சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் உள்ளது. ஆகவே $ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

* **8.** OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் OA, OB ஆகிய திசைகொண்ட கோடுகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளை வகைகுறிக்கின்றன எனவும் கொள்வோம். D ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OB இன் புள்ளி B இற்குக் கிட்ட உள்ள முக்கூறிடும் புள்ளி எனவும் C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் OA இன் நடுப் புள்ளி எனவும் கொள்வோம். AD, BC ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் E இல் சந்திக்கின்றன.

(i) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ ஆகியவற்றுக்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் கோவைகளைக் காண்க.

(ii) இக்காவிகளின் சார்பில் காவி OE ஐக் கண்டு E ஆனது BC இன் நடுப் புள்ளியெனக் காட்டுக.



(i) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OD} - \underline{a}$.

$OD : OB = 2 : 3$ ஆகவும் OD உம் OB உம் ஒரே திசையிலும் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\ \underline{b}$. அப்போது $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\ \underline{b} - \underline{a}$.

மேலும் $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$

$= -\ \overrightarrow{OC} + \underline{b}$

$= \underline{b} - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OA}$

$= \underline{b} - \frac{1}{2}\ \underline{a}$.

A, D, E ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் இருக்கும் அதே வேளை $\frac{AE}{AD} = \lambda$ ஆக இருக்குமாறு λ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது.

அப்போது $\overrightarrow{AE} = \lambda\ \overrightarrow{AD} = \lambda\left(\frac{2}{3}\ \underline{b} - \underline{a}\right)$.

ஆகவே $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

$= \underline{a} + \lambda\left(\frac{2}{3}\ \underline{b} - \underline{a}\right)$ ——— ①

$= (1-\lambda)\,\underline{a} + \frac{2}{3}\lambda\,\underline{b}$

C, E, B ஆகியன ஒரே கோட்டில் இருக்கும் புள்ளிகளாக இருக்கும் அதே வேளை $\dfrac{CE}{CB} = \mu$ ஆக இருக்குமாறு μ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது. அப்போது $\overrightarrow{CE} = \mu\,\overrightarrow{CB} = \mu\left(\underline{b} - \frac{1}{2}\,\underline{a}\right)$.

ஆகவே $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{a} + \mu\left(\underline{b} - \frac{1}{2}\,\underline{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\mu)\,\underline{a} + \mu\,\underline{b} \quad \text{——— ②}$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து ஒரே காவி $\overrightarrow{OE}$ இற்கு இரு வகைக்குறிப்புகள் கிடைக்கின்றன. ஆகவே $(1-\lambda)\,\underline{a} + \frac{2}{3}\lambda\,\underline{b} = \frac{1}{2}(1-\mu)\,\underline{a} + \mu\,\underline{b}$. இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சூனியமற்றும் சமாந்தரமற்றும் இருப்பதனால் அவற்றின் குணகங்களைக் கருதும்போது

$1 - \lambda = \frac{1}{2}(1-\mu)$ உம் $\frac{2}{3}\lambda = \mu$ உம் ஆகும். சமன்பாடு ② இல் λ இற்குப் பதிலாக $\frac{3}{2}\mu$ இருப்பதனால் அதனை முதற் சமன்பாட்டில் பிரதியிடுவோம்.

அப்போது $1 - \frac{3}{2}\mu = \frac{1}{2}(1-\mu)$

$$\Rightarrow 2 - 3\mu = 1 - \mu.$$

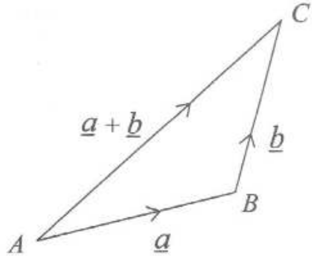
μ இற்காகத் தீர்க்கும்போது, $\mu = \frac{1}{2}$ ஆகையால் சமன்பாடு $\overrightarrow{CE} = \mu\,\overrightarrow{CB}$ இலிருந்து

$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CB}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அப்போது $CE = \frac{1}{2}CB$.

$\Rightarrow CE = \frac{1}{2}(CE + EB) \Rightarrow CE = EB$.

எனவே E ஆனது BC இன் நடுப் புள்ளியாகும்.

➢ ஒரு காவியின் கூறுகள்

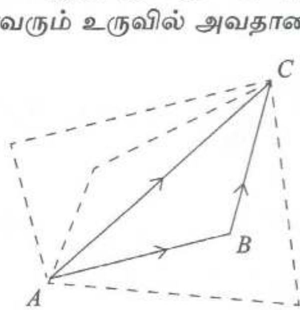


இரு தரப்பட்டுள்ள காவிகள் முக்கோணி விதியைப் பூர்த்தி செய்யுமாறு கூட்டப்படுகின்றனவென நாம் கற்றுள்ளோம். அதாவது AB, BC என்னும் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் $\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளின் கூட்டலிலிருந்து கிடைக்கும் காவி $\underline{a} + \underline{b}$ ஆனது பருமனிலும் திசையிலும் திசை கொண்ட கோட்டுத் துண்டம் AC இனால் வகைகுறிக்கப்படும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

அதாவது $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

ஆகவே ஒரு காவி $\overrightarrow{AC}$ இற்குச் சமவலுவாக இருக்கத்தக்கதாக $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய இரு காவிகளை முன்வைக்கலாம்.

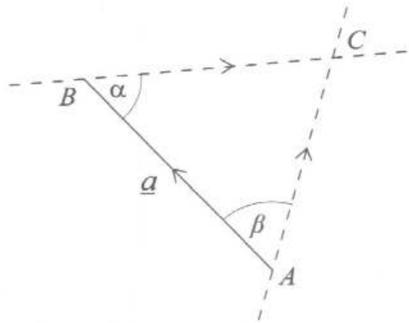
காவி $\overrightarrow{AC}$ இன் கூறுகளாக $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகியன அழைக்கப்படும். இக்கூற்றுகள் ஒருதனியானவையாக இராத அதே வேளை இரு எதேச்சைத் திசைகளில் இருக்குமாறு அவற்றைத் துணியலாம். நீங்கள் அதனைப் பின்வரும் உருவில் அவதானிக்கலாம்.



ஒரு தரப்பட்ட காவியை இவ்வாறு கூறுகளாகப் பிரித்தல் **காவித் துணிப்பு** எனப்படும்.

காவித் துணிப்பின்போது சுருக்குவதன் வசதிக்காக ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகள் வழியே உள்ள கூறுகள் கருதப்படும்.

இரு தரப்பட்ட திசைகள் வழியே ஒரு காவி துணிக்கப்படும் விதத்தைக் கருதுவோம்.



காவி $\underline{a}$ ஆனது திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டம் AB இனால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது எனவும் தரப்பட்ட திசைகளுக்குச் சமாந்தரமாக A, B ஆகிய புள்ளிகளினூடாக வரையப்பட்ட கோடுகள் AB உடன் α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்குகின்றன எனவும் கொள்வோம். மேலும் இவ்விரு கோடுகளினதும் வெட்டுப் புள்ளி C ஆகும். அப்போது கோணம் ACB ஆனது $\pi-(\alpha+\beta)$ ஆகும்.

முக்கோணி ABC இற்குச் சைன் சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\beta}{BC}=\frac{\sin\left(\pi-(\alpha+\beta)\right)}{AB}$$
$$=\frac{\sin\ (\alpha+\beta)}{a}$$ எனக் கிடைக்கும்.

இதற்கேற்ப

$$\frac{\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{a},\ \frac{\sin\beta}{BC}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{a}$$ ஆகையால்

$$AC=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad BC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$ எனத் தேவையான இரு கூறுகளினதும் பருமன்கள் கிடைக்கும்.

ஓர் எளிய உதாரணமாக 10 அலகுகள் பருமனுள்ள ஒரு காவியை அக்காவியுடன் 30°, 45° கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில் துணிப்போம்.

இங்கு $a = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ என எடுப்போம். மேலே பெற்றுள்ள சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தும்போது

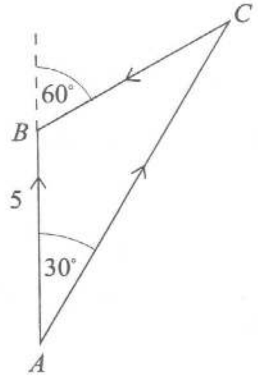
$$AC = \frac{10 \sin 30^\circ}{\sin (30^\circ + 45^\circ)} = \frac{10 \times \frac{1}{2}}{\sin 75^\circ} = \frac{5}{\sin 75^\circ} \text{ ஆகும்,}$$

இங்கு $\sin 75^\circ$ இன் பெறுமானம் தேவையெனின், அதனைத் திரிகோணகணிதம் பற்றிய விளக்கத்திலிருந்து பெறலாம்.

$$\text{மேலும் } BC = \frac{10 \sin 45^\circ}{\sin (30^\circ + 45^\circ)} = \frac{10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin 75^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 75^\circ} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 1.8

5 அலகுகள் பருமனுள்ள ஒரு காவி பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டம் AB இனால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. அதனை AC, CB ஆகிய திசைகளில் துணிக்கும்போது கூறுகளின் பருமன்களைக் காண்க.



தீர்வு

மேற்குறித்த பேறுடன் ஒப்பிடும்போது

$a = 5$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 180^\circ - 60^\circ$

அதாவது $\beta = 120^\circ$ ஆகையால்

$$AC = \frac{5 \sin 120^\circ}{\sin (30^\circ + 120^\circ)}$$

$$= \frac{5 \sin 60^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{5 \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = 5\sqrt{3}.$$

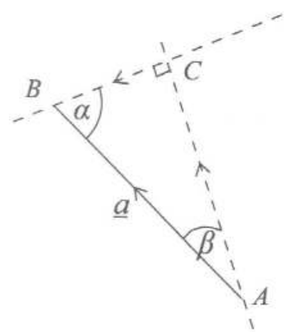
கோணம் BCA + கோணம் BAC = புறக் கோணம் ABC ஆகையால் ABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும்.

AB இன் நீளம் = BC இன் நீளம் $= 5$ அலகுகள்.

விசேட சந்தர்ப்பம்

துணிக்கப்படும் திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில்

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ ஆகையால்



$$AC=\frac{a\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$BC=\frac{a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}.$$

அப்போது $AC = a\sin\alpha$, $BC = a\cos\alpha$.

மேலும் $\underline{a}$ இன் திசையில் உள்ள அலகுக் காவி $\underline{l}$ எனக் கொள்ளும் போது

$\left|a\,\underline{l}\right| = a\left|\,\underline{l}\,\right| = a\times 1 = a$ ஆகையால் $\underline{a}=a\underline{l}$. இவ்வாறே AC, CB ஆகிய திசைகளில் உள்ள அலகுக் காவிகள் முறையே $\underline{m}$, $\underline{n}$ எனின், $\underline{a} = AC\,\underline{m} + CB\,\underline{n}$

$$= a\sin\alpha\,\underline{m} + a\cos\alpha\,\underline{n}\ .$$

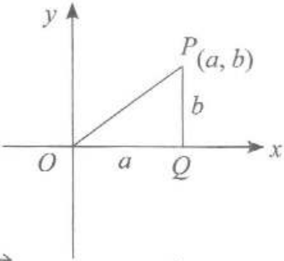
இவ்வாறே ஒரு காவியின் கூறுகளை எடுத்துரைத்தல் செய்முறைப் பிரச்சினைகளுக்காக ஒரு கணித மாதிரியுருவை உருவாக்கும்போது கருதப்படும் மாட்டேற்றுச் சட்டத்தைக் கொண்டு காவி வகைகுறித்தலில் மிகவும் எளிதானதாகும். ஒரு தளத்திற்கு மாத்திரம் மட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ள காவிகள் பற்றி மாத்திரம் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். அதற்காக Oxy தெக்காட்டு அச்சுத் தொகுதியைக் குறித்து Ox அச்சினதும் Oy அச்சினதும் நேர்த் திசைகளில் இருக்கும் அலகுக் காவிகளை முறையே $\underline{i}$, $\underline{j}$ எனக்

கொள்வோம். இவ்வச்சுகள் மாறாத் திசைகளில் இருக்கின்றமையால் இக்காவிகள் **மாறாக் காவிகள்** ஆகும். அவை **அடிக் காவிகள்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

மேலும் $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$

$= OQ\,\underline{i} + QP\,\underline{j}$

$= a\,\underline{i} + b\,\underline{j}$.

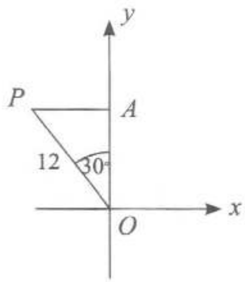


இங்கு a, b ஆகியன முறையே காவி $\overrightarrow{OP}$ இன் $\underline{i}$, $\underline{j}$ கூறுகள் எனப்படும்.

உதாரணம் 1.9

12 அலகுகள் பருமனுள்ள ஒரு காவி Oy அச்சின் நேர்த் திசையிலிருந்து இடஞ்சுழித் திசையில் 30° கோணத்தை ஆக்குகின்றது. இக்காவியின் $\underline{i}$, $\underline{j}$ கூறுகளைக் காண்க.

தீர்வு



இவ்வுருவிற்கேற்ப

$OA = 12\cos 30^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

$AP = 12\sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$.

$\Rightarrow p \equiv (-6, 6\sqrt{3})$.

ஆகவே இக்காவியின் $\underline{i}$, $\underline{j}$ கூறுகள் முறையே -6, $6\sqrt{3}$ ஆகும். இங்கு $\underline{i}$ கூறு மறையாகும். காவியின் அக்கூறு Ox அச்சின் மறைத் திசையில் உள்ளது என்பது இதன் கருத்தாகும்.

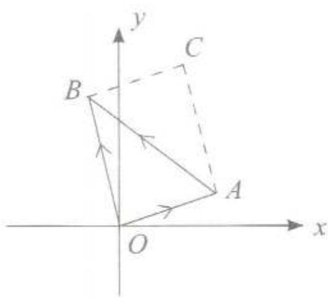
உதாரணம் 1.10

ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $3\underline{i}+\underline{j}$, $4\underline{j}-\underline{i}$ ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) காவி $\overrightarrow{AB}$

(ii) $OACB$ ஓர் இணைகரமாக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளி C இன் தானக் காவி.

தீர்வு



(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$$= -(3\underline{i}+\underline{j}) + 4\underline{j} - \underline{i}$$

$$= -4\underline{i} + 3\underline{j}.$$

(ii) $OACB$ ஓர் இணைகரமாக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளி C இன் தானக் காவி

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$= (3\underline{i}+\underline{j}) + (4\underline{j}-\underline{i}) = 2\underline{i} + 5\underline{j}.$$

ஓர் Oxy அச்சுத் தொகுதியைக் குறித்து யாதாயினும் ஒரு புள்ளி $P\,(x, y)$ ஐக் கருதும்போது $\overrightarrow{OP} = x\underline{i} + y\underline{j}$ என P இன் தானக் காவியை எழுதலாம் என்பதை நாம் அறிவோம்.

தரப்பட்ட $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ இற்கு $\alpha \underline{i} + \beta \underline{j}$ ஒரு தானக் காவியாக இருக்கும் அதே வேளை அது ஓர் ஒருதனிப் புள்ளியின் தானக் காவியை வகை குறிக்கின்றது. அதாவது, ஒரு குறித்த புள்ளியின் தானக் காவியை $\underline{i}$ இனதும் $\underline{j}$ இனதும் சேர்மானமாக எடுத்துரைக்கலாம். அவற்றுக்கு வழக்கம்போல் கூட்டல், வித்தியாசம், எண்ணிப் பெருக்கம் போன்ற காவியுடன் தொடர்புபட்ட கணிதச் செய்கைகளைப் பிரயோகிக்கலாம்.

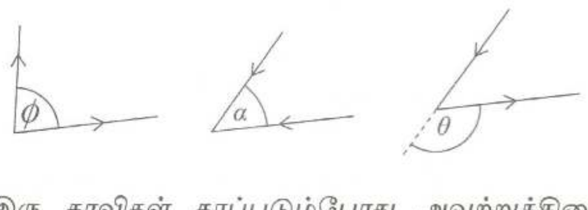
1.7 காவிகளுக்கிடையே உள்ள பெருக்கங்கள்

1. குற்றுப் பெருக்கம் / எண்ணிப் பெருக்கம்

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன இரு காவிகளெனக் கொள்வோம். $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள குற்றுப் பெருக்கம் $\underline{a}.\underline{b}$ என எழுதப்படும் அதே வேளை $\underline{a}$ அல்லது $\underline{b}$ ஆனது சூனியக் காவியாக இருக்கும்போது $\underline{a}.\underline{b} = 0$ எனவும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சூனியக் காவிகளாக இல்லாதபோது $\underline{a}.\underline{b} = a \times b \times \cos\theta$ எனவும் வரையறுக்கப்படும். இங்கு θ ஆனது $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணம் ஆகும்.

இரு காவிகளுக்கிடையே உள்ள குற்றுப் பெருக்கத்திலிருந்து எண்ணி கிடைக்கின்றமையால் குற்றுப் பெருக்கம் **எண்ணிப் பெருக்கம்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

இங்கு இரு காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் பற்றிய விளக்கம் முக்கியமானது என்பதை நீங்கள் விளங்கிக் கொள்வீர்கள். இரு காவிகளும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவுவதுபோல் செல்லும் விதத்தில் அல்லது ஒரு புள்ளியில் குவிவதுபோல் அமைக்கப்படுதல் இங்கு அவசியமாகும். உருவைப் பார்க்க.



இதற்கேற்ப இரு காவிகள் தரப்படும்போது அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை நீங்கள் இனங்காண்பீர்களென நினைக்கிறேன்.

➢ குற்றுப் பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

- $\underline{a}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{a}$ - பரிவர்த்தனை இயல்பு
- $\underline{a}.(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$ - கூட்டலின் மீது பரம்பல் இயல்பு
- $\underline{a}.\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{0}$ அல்லது $\underline{b} = \underline{0}$ அல்லது $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன செங்குத்தானவை.

❖ பரிவர்த்தனை இயல்பின் நிறுவல்

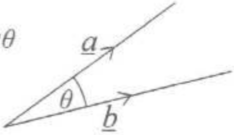
$\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகளில் ஒன்று சூனியமாக இருக்கும்போது $\underline{a}.\underline{b} = 0$ போன்று $\underline{b}.\underline{a} = 0$ ஆகும். ஆகவே $\underline{a}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{a}$.

$\underline{a}, \underline{b}$ ஆகிய இரு காவிகளும் சூனியமல்லாது இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை இப்போது கருதுவோம்.

வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப $\underline{b}.\underline{a} = b \times a \times cos\theta$

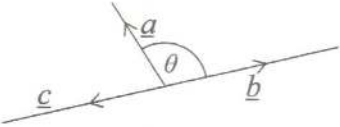
$= a \times b \times cos\theta$

$= \underline{a}.\underline{b}$



ஆகவே பரிவர்த்தனை இயல்பின் உண்மையை நீங்கள் விளங்கிக் கொள்வீர்கள்.

❖ கூட்டலின் மீது பரம்பல் இயல்பின் நிறுவல்



முதலில் $\underline{a} = \underline{0}$ எனின், எளிதாக அது உண்மையென நீங்கள் காண்பீர்கள்.

இரண்டாவதாக $\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ எனின், $\underline{b} = -\underline{c}$ உம் $\underline{a}.(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{0}$ உம் ஆகும். $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\underline{a}.\underline{b} = a \times b \times \cos\theta$

அத்துடன் $\underline{a}$, $\underline{c}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\pi - \theta$ ஆகையால்

$\underline{a}.\underline{c} = a \times c \times \cos(\pi - \theta) = -a \times c \times \cos\theta = -a \times b \times \cos\theta$.

ஆகவே $\underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c} = \underline{0}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$ ஆகும்.

இறுதியாக $\underline{a} \neq \underline{0}$ எனவும் $\underline{b} + \underline{c} \neq \underline{0}$ எனவும் கொள்வோம்.

இங்கு வசதிக்காகக் காவி $\underline{a}$ இன் திசையில் காவி $\underline{b}$ இன் கூறையும் $\underline{a}.\underline{b}$ இற்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமையையும் கருதுவோம்.

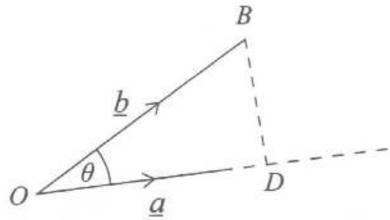
இக்கூறு OD ஆகும்.

அத்துடன் $OD = OB\cos\theta$.

இங்கு $OB = b$.

மேலும் $\underline{a}.\underline{b} = a \times b \times \cos\theta$

$= a \times OD$.



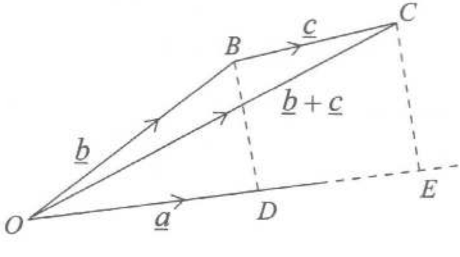
இப்போது நாம் நிறுவல் பற்றிக் கருதிப் பார்ப்போம்.

$\underline{a}.\underline{b} = a \times OD$.

$\underline{a}.\underline{c} = a \times DE$.

$\underline{a}.(\underline{b} + \underline{c}) = a \times OE$.

மேலும் $OE = OD + DE$.



ஆகவே $\underline{a}.(\underline{b}+\underline{c}) = a \times OE$

$$= a \times (OD + DE)$$

$$= a \times OD + a \times DE$$

$$= \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$$

ஆகவே பரம்பல் இயல்பு உண்மையானதாகும்.

மேலும் $(\underline{b}+\underline{c}).\underline{a}$ $= \underline{a}.(\underline{b}+\underline{c})$ குற்றுப் பெருக்கம் பரிவர்த்தனை ஆகையால்

$= \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$ பரம்பல் இயல்பினால்

$= \underline{b}.\underline{a} + \underline{c}.\underline{a}$ மறுபடியும் பரிவர்த்தனை இயல்பினால்

எனவே $(\underline{b}+\underline{c}).\underline{a} = \underline{b}.\underline{a} + \underline{c}.\underline{a}$.

❖ **$\underline{a}.\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{0}$ அல்லது $\underline{b} = \underline{0}$ ஆக வேண்டும்.**

அல்லது $\underline{a}.\underline{b} = a \times b \times \cos\theta$.

$\Rightarrow \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

அதாவது $\underline{a}$ உம் $\underline{b}$ உம் செங்குத்தானவை.

மறுசார் $\underline{a}$ உம் $\underline{b}$ உம் செங்குத்தானவை எனின், அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆகும். அப்போது $\cos\theta = 0$.

$\Rightarrow \underline{a}.\underline{b} = a \times b \times \cos\theta = 0$.

ஆகவே சூனியமல்லாத $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் செங்குத் தானவையெனின், $\underline{a}.\underline{b} = 0$ ஆகும்.

➢ பேறு

வேறொரு முக்கியமான பேறு யாதெனில், யாதாயினும் ஒரு சூனியமல்லாத காவி $\underline{a}$ ஆனது அதே காவிக்குச் சமாந்தரமாக இருப்பதனால்

$\underline{a}.\,\underline{a} = a \times a \times \cos 0 \Rightarrow \underline{a}.\,\underline{a} = a^2.$

மேலும் $\underline{a}$ ஆனது சூனியக் காவியாக இருக்கும்போது வரைவிலக் கணத்திலிருந்து

$\underline{a}.\,\underline{a} = 0 = |\underline{a}|^2$.

ஆகவே எந்தவொரு காவி $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{a}.\,\underline{a} = a^2$ என்பது உண்மையானதாகும்.

- $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன காவிகளாகவும் $k \in \mathbb{R}$ ஆகவும் இருப்பின் $k\,(\underline{a}.\,\underline{b}) = \underline{a}.\,(k\,\underline{b}) = (k\,\underline{a}).\,\underline{b}$.

நிறுவலை இங்கு $k = 0, k > 0,\ k < 0$ என்னும் சந்தர்ப்பங்களுக்கு வேறுவேறாகக் கருதுவோம்.

- $k=0$ எனின் மூன்று கோவைகளும் சூனியத்திற்குச் சமமாகையால் அது உண்மையானதாகும்.

- $k > 0$ ஆயின் $\underline{b}$, $k\underline{b}$ ஆகியவற்றின் போக்குகள் ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணமும் $\underline{a}$ இற்கும் $k\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணமும் சமம் ஆகும். அது θ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\underline{a}.\,(k\,\underline{b}) = a \times |k\underline{b}| \times \cos\theta$

$$= a \times (kb) \times \cos\theta$$

$$= k \times a \times b \times \cos\theta$$

$$= k\,(\underline{a}.\,\underline{b}).$$

மேலும் இங்கு $\underline{a}$ ஐயும் $\underline{b}$ ஐயும் பரிமாற்றும்போது

$\underline{b}.(k\underline{a}) = k(\underline{b}.\underline{a})$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை குற்றுப் பெருக்கம் பரிவர்த்தனை ஆகையால்

$\underline{a}.(k\underline{b}) = k(\underline{a}.\underline{b})$ ஆகும். $k > 0$ ஆக இருக்கும்போது மேற்குறித்த பேறு உண்மையானதாகும்.

- $k < 0$ எனின், $\underline{b}$, $k\underline{b}$ ஆகியவற்றின் போக்குகள் எதிர்த் திசைகளில் இருப்பதனால் $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணம் θ எனின், $\underline{a}$ இற்கும் $k\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணம் $\pi - \theta$ ஆகும். மேலும் $|k| = -k$.

அப்போது $\underline{a}.(k\underline{b}) = a \times |k\underline{b}| \times \cos(\pi - \theta)$

$$= -a \times (|k|b) \times \cos\theta$$

$$= -a \times (-k \times b) \times \cos\theta$$

$$= k \times a \times b \times \cos\theta$$

$$= k(\underline{a}.\underline{b}).$$

மேலும் இங்கு $\underline{a}$ ஐயும் $\underline{b}$ ஐயும் பரிமாற்றும்போது $\underline{a}.(k\underline{b}) = k(\underline{a}.\underline{b})$.

ஆகவே எல்லா $k \in \mathbb{R}$ இற்கும் $k(\underline{a}.\underline{b}) = \underline{a}.(k\underline{b}) = (k\underline{a}).\underline{b}$.

மேலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$ ஆகியன அடிக் காவிகள் ஆகும்.

- அலகுக் காவிகள் ஆகையால் $\underline{i}\,.\,\underline{i} = 1$ உம் $\underline{j}\,.\,\underline{j} = 1$ உம் ஆகும்.

- ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகையால் $\underline{i}\,.\,\underline{j} = 0$ உம் $\underline{j}\,.\,\underline{i} = 0$ உம் ஆகும்.

கூறுகளின் சார்பில் $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$ எனவும் $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j}$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}.(b_1\underline{i} + b_2\underline{j})$

$$= \underline{a}.(b_1\underline{i}) + \underline{a}.(b_2\underline{j})$$

$$= b_1\underline{a}.\underline{i} + b_2\underline{a}.\underline{j}$$

$$= b_1(a_1\underline{i} + a_2\underline{j}).\underline{i} + b_2(a_1\underline{i} + a_2\underline{j}).\underline{j}$$

$$= b_1[a_1(\underline{i}.\underline{i}) + a_2(\underline{i}.\underline{j})] + b_2[a_1(\underline{i}.\underline{j}) + a_2(\underline{j}.\underline{j})]$$
$$= b_1[a_1 \times 1 + a_2 \times 0] + b_2[a_1 \times 0 + a_2 \times 1]$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

மேலும் $\underline{a}.\underline{a} = a_1 \times a_1 + a_2 \times a_2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\underline{a}.\underline{a} = a^2$ ஆகவும் இருப்பதனால் $a^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2}$.

உதாரணம் 1.11

காவி $\underline{a} = \sqrt{3}\,\underline{i} + \underline{j}$ இற்கும் காவி $\underline{b} = \underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு $\underline{a} = \sqrt{3}\,\underline{i} + \underline{j}$ ஆகவும் மேலே தரப்பட்ட $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$ ஆகவும் இருப்பதனால் $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = 1$ ஆகும். எனவே $a^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ $\Rightarrow a = 2$.

அவ்வாறே $b^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

குற்றுப் பெருக்கம் பற்றிய வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$\underline{a}.\underline{b} = a \times b \times \cos\theta.$$

$$= 2 \times 2 \times \cos\theta.$$

இங்கு θ ஆனது காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் ——— ①

மேலும் $\underline{a}.\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ ஆகவும் இருப்பதனால்

$$\underline{a}.\underline{b} = \sqrt{3} \times 1 + 1 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}. \text{ ——— ②}$$

①, ② ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\Rightarrow 2 \times 2 \times \cos\theta = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

உதாரணம் 1.12

$\underline{a} = \underline{i} + 3\underline{j}$, $\underline{b} = \underline{j} - \underline{i}$ ஆகிய காவிகள் செங்குத்தானவையா எனக் காண்க.

தீர்வு

$$\underline{a}.\underline{b} = (\underline{i} + 3\underline{j}).(\underline{j} - \underline{i})$$

$$= (\underline{i} + 3\underline{j}).(-\underline{i} + \underline{j})$$

$$= 1 \times (-1) + 3 \times 1$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \underline{a}.\underline{b} \neq 0.$$

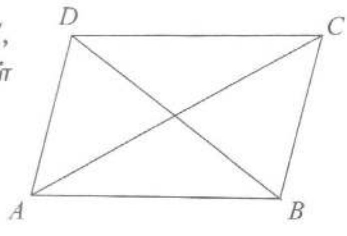
$\therefore$ அக்காவிகள் செங்குத்தானவையல்ல.

* **உதாரணம் 1.13** **(உயர் கணிதத்திற்குரியது)**

காவிக் குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி, சம நீளமுள்ள மூலை விட்டங்கள் இருக்கும் ஓர் இணைகரம் செவ்வகமெனக் காட்டுக.

தீர்வு

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனவும் AC, BD ஆகிய அதன் மூலைவிட்டங்கள் நீளத்தில் சமம் எனவும் கொள்வோம்.



இங்கு $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

$$AC^2 = \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AC}$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\,\overrightarrow{BC}$$

$$= AB^2 + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + BC^2 \text{ ——— } ①$$

மேலும் $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ ஆகையால்

$$BD^2 = \overrightarrow{BD}\,.\,\overrightarrow{BD}$$

$$= \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{BC}.\,\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

$$= BC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + AB^2 \text{ ——— } ②$$

மூலைவிட்டங்கள் சமநீளமுள்ளன ஆகையால் $AC = BD$.

$\Leftrightarrow AC^2 = BD^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + BC^2 = BC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} + AB^2$

$\Leftrightarrow 4\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0$

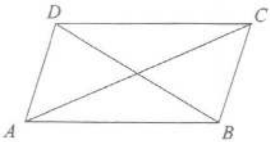
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow AB$ ஆனது BC இற்குச் செங்குத்தானது ஆகையால் $ABCD$ ஒரு செவ்வகம் ஆகும்.

✻ **உதாரணம் 1.14** **(உயர் கணிதத்திற்குரியது)**

காவிக் குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி ஓர் இணைகரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை இரு மூலைவிட்டங்களினதும் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

தீர்வு

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனக் கொள்வோம்.



அப்போது $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ஆகையால்

$$AC^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$$

$$= AB^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + BC^2 \text{ ——— } ①$$

சுருக்கல் மேலே உள்ள உதாரணம் 1.13 இற்கேற்ப நடைபெறும்.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ஆகையால்

$$BD^2 = \overrightarrow{BD}.\,\overrightarrow{BD}$$

$$= AD^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\,\overrightarrow{AD} + AB^2 \text{ ——— } ②$$

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + BC^2 + AD^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + AB^2$$

$ABCD$ ஓர் இணைகரம் ஆகையால் $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

எனவே $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. மேற்குறித்த சமன்பாட்டைப் பிரயோகிக்கும்போது

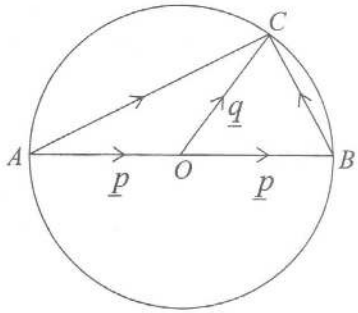
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + BC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + CD^2$$

$$= AB^2 + BC^2 + AD^2 + CD^2.$$

அதாவது இணைகரத்தின் இரு மூலைவிட்டங்களினதும் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு அதன் பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை சமம் ஆகும்.

* **உதாரணம் 1.15 (உயர் கணிதத்திற்குரியது)**

ஒரு வட்டத்தின் ஒரு விட்டம் பரிதியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கின்றதெனக் காட்டுக.



தீர்வு

இங்கு $OA = OB = OC = a$ வட்டத்தின் ஆரை எனவும்

$\overrightarrow{AO} = \underline{p}$ எனவும் $\overrightarrow{OC} = \underline{q}$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது $\overrightarrow{OB} = \underline{p}$, $P = q = a$, $\underline{p}.\underline{p} = \underline{q}.\underline{q} = a^2$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \underline{p} + \underline{q},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$$

$$= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$= \underline{q} - \underline{p}$ ஆகையால்

$$\overrightarrow{AC}.\,\overrightarrow{BC} = (\underline{p} + \underline{q}).(\underline{q} - \underline{p})$$

$$= \underline{p}.\underline{q} - \underline{p}.\underline{p} + \underline{q}.\underline{q} - \underline{q}.\underline{p}$$

$= \underline{q}.\underline{q} - \underline{p}.\underline{p}$ குற்றுப் பெருக்கம் பரிவர்த்தனையாக இருப்பதனால்

$$= a^2 - a^2 = 0.$$

எனவே $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய காவிகள் செங்குத்தானவை. அதாவது கோணம் ACB ஒரு செங்கோணம் ஆகும். அதற்கேற்ப ஒரு வட்டத்தின் ஒரு விட்டம் பரிதியில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது.

2. குறுக்குப் பெருக்கம் / காவிப் பெருக்கம்

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன காவிகளாக இருக்கும்போது $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள குறுக்குப் பெருக்கம் $\underline{a} \wedge \underline{b}$ என எழுதப்படும் அதே வேளை $\underline{a}$ அல்லது $\underline{b}$ ஆனது சூனியக் காவியாக இருக்கும்போது $\underline{a} \wedge \underline{b} = 0$ எனவும் மறுசார் $\underline{a} \wedge \underline{b} = a \times b \times \sin\theta \, \underline{n}$ எனவும் வரையறுக்கப்படும். இங்கு θ ஆனது $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணமும் $\underline{n}$ ஆனது $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{n})$ வலக் கைத் தொகுதியை உண்டாக்குமாறு உள்ள அலகுக் காவியும் ஆகும்.

இரு காவிகளுக்கிடையே உள்ள குறுக்குப் பெருக்கத்திலிருந்து ஒரு காவி கிடைக்கின்றமையால் குறுக்குப் பெருக்கம் **காவிப் பெருக்கம்** எனவும் அழைக்கப்படும்.

➢ குறுக்குப் பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

- $\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge \underline{a}$ பரிவர்த்தனை முரண் இயல்பு
- $\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \wedge \underline{b} + \underline{a} \wedge \underline{c}$ கூட்டல் மீது பரம்பல் இயல்பு
- $\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \underline{a} = \underline{0}$ அல்லது $\underline{b} = \underline{0}$ அல்லது $\underline{a}$ உம் $\underline{b}$ உம் சமாந்தரம்
- $k(\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{a} \wedge (k\,\underline{b}) = (k\,\underline{a}) \wedge \underline{b}$. இங்கு $k \in \mathbb{R}$.

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சூனியக் காவிகள் எனின்,

- $\underline{a}$, $a^2\underline{b}$, $-(\underline{a}.\underline{b})\,\underline{a}$ ஆகியன செங்குத்துக் காவிகள் ஆகும்.

இப்பேறுகளுக்கு நிறுவல்கள் முன்வைக்கப்படவில்லை. மேலே தரப்பட்ட குற்றுப் பெருக்கத்தில் உள்ள நிறுவல்களை ஒத்த நிறுவல்கள் இவற்றுக்கு உகந்தன.

பயற்சி 1.3

1. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று 120° சாய்வில் உள்ளனவாகவும் $|\underline{a}+\underline{b}|=a$ ஆகவும் இருப்பின், $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சம பருமனைக் கொண்டனவெனக் காட்டுக. இங்கு $\underline{b}$ ஆனது ஒரு சூனியமல்லாத காவியாகும்.

* 2. D ஆனது முக்கோணி ABC இன் பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளியாக இருக்கும்போது $AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$ எனக் காட்டுக.

* 3. வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் முக்கோணி ABC இற்கு
(a) குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி

$$c=b\cos A+a\cos B$$

(b) குறுக்குப் பெருக்கத்தைப் பிரயோகித்து

$$bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C$$

எனக் காட்டுக.

4. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து P, Q என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $24\underline{i}+7\underline{j}$, $12\underline{i}+5\underline{j}$ ஆகும். காவி $\overrightarrow{PQ}$ ஐக் கண்டு PQ இன் நடுப் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க. கோணம் POQ ஐத் துணிக.

5. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $16\underline{i}+8\underline{j}$, $20\underline{j}$ ஆகும். $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ ஆகிய காவிகளின் பருமன்கள் சமமெனக் காட்டுக.

OA இன் நடுப் புள்ளி D எனக் கொள்வோம். அப்போது OD ஆனது BD இற்குச் செங்குத்தானது எனவும் காட்டுக.

முக்கோணி OAB இன் சுற்றுமையம் C எனின், அப்புள்ளி BD மீது உள்ளதெனக் காட்டி C இன் தானக் காவியைத் துணிக.

1.3 மாதிரித் தீர்வு

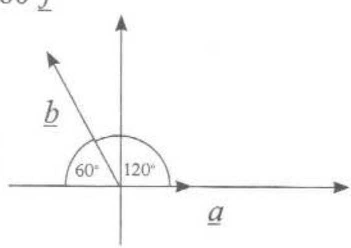
1. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று 120° சாய்வில் உள்ளனவாகவும் $|\underline{a}+\underline{b}| = a$ ஆகவும் இருப்பின், $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சம பருமனைக் கொண்டனவெனக் காட்டுக; இங்கு $\underline{b}$ ஆனது ஒரு சூனியமல்லாத காவியாகும்.

காவி $\underline{a}$ இன் திசையில் Ox அச்சு இருக்குமாறு ஒரு Oxy அச்சுத் தொகுதியைத் தெரிந்தெடுப்போம். அப்போது $\underline{a} = a\underline{i}$ என எழுதலாம். அதே வேளை

காவி $\underline{b}$ ஐக் கூறுகளாகப் பிரிக்கும்போது

$$\underline{b} = -b\cos 60\,\underline{i} + b\sin 60\,\underline{j}$$

$$= \frac{-b}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\underline{j}.$$



அப்போது $\underline{a}+\underline{b} = a\underline{i} + \left(\frac{-b}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\underline{j}\right)$

$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)\underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\underline{j}$$

$$|\underline{a}+\underline{b}|^2 = \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$$

$$= a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$= a^2 - ab + b^2.$$

மேலும் $|\underline{a}+\underline{b}| = a$ ஆகையால் $|\underline{a}+\underline{b}|^2 = a^2$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a^2.$$

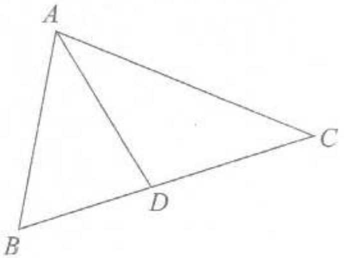
$$\Rightarrow -ab + b^2 = 0.$$

$\Rightarrow (b - a)\,b = 0$; இங்கு $\underline{b} \neq 0$. ஆகையால் $\underline{b} \neq 0$.

$$\Rightarrow b = a.$$

$\Rightarrow \underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன சம பருமனுள்ளவை.

* 2. D ஆனது முக்கோணி ABC இன் பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளியாக இருக்கும்போது $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ எனக் காட்டுக.



இங்கு $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ உம்

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}$ உம்

ஆகும்.

அப்போது $AB^2 = \overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AB}$

$$= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}\right).\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AD}.\ \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}$$

$$= AD^2 - 2\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} + BD^2$$

அத்துடன் $AC^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

$$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\right).\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AD}.\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\ \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}$$

$$= AD^2 + 2\ \overrightarrow{AD}.\ \overrightarrow{BD} + BD^2.$$

மேற்குறித்த கோவைகளைக் கருதும்போது

$$AB^2 + AC^2 = AD^2 - 2\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} + BD^2 + AD^2 + 2\ \overrightarrow{AD}.\ \overrightarrow{BD} + BD^2$$

$$= 2AD^2 + 2BD^2$$

$$= 2\,(AD^2 + BD^2).$$

* 3. வழக்கமான குறிப்பீட்டுடன் முக்கோணி ABC இற்கு

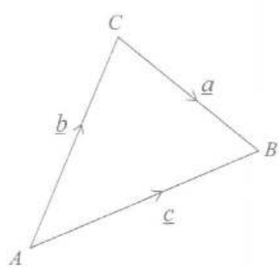
(a) குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்தி

$c = b\cos A + a\cos B$

(b) குறுக்குப் பெருக்கத்தைப் பிரயோகித்து

$bc\sin A = ca\sin B = ab\sin C$

எனக் காட்டுக.



இங்கு வழக்கமான குறிப்பீடு என்பது ஒரு முக்கோணியின் AB, BC, CA என்னும் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே c, a, b என்பதை நினைவில் வைத்துக் கொள்க.

(a) இங்கு $\overrightarrow{AB} = \underline{c}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{a}$ ஆக இருக்கும்

அதே வேளை $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ஆகையால்

$$c^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$$

$$= c.b\cos A + c.a\cos B$$

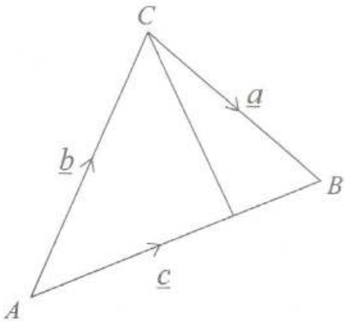
$$\Rightarrow c = b\cos A + a\cos B.$$

(b) குறுக்குப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB.\,AC.\sin A\,\underline{n}$; இங்கு $\underline{n}$ ஆனது $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\underline{n}$ வலக் கைத் தொகுதியாக இருக்குமாறு உளதாக இருக்கும் அலகுக் காவியாகும்.

அப்போது $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = AB.\, AC.\, \sin A$

$$\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = c.\, b \sin A \text{ ——— } ①$$



$$\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$= -\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} + \underline{0}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

மேலும் குறுக்குப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AB} = CB.AB \sin B\, \underline{n}$ ஆகையால்

$$\left|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AB}\right| = a.c.\sin B. \text{ ——— } ②$$

② இலிருந்து

$$\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AB}\right|$$

$$\therefore\ b.c \sin A = a.c \sin B$$

இவ்வாறே $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) \wedge \overrightarrow{CA}$

$$= \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA}$$

$$= \underline{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA}$$

$$= -\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

மேலும் $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA} = CB.CA.\sin(\pi - C)\,\underline{n} = a.b.\sin C\ \underline{n}$ ஆகையால்

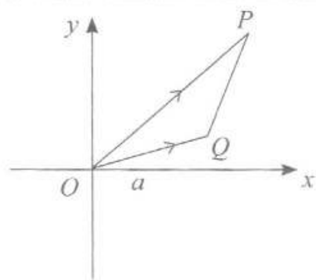
$\left|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}\right| = a.b.\sin C.$ ———— ③

அப்போது ①, ②, ③ ஆகியவற்றிலிருந்து

$b.c.\sin A = \left| - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right| = \left| \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA} \right| = a.b.\sin C.$

இதற்கேற்ப $b.c.\ \sin A = c.a.\ \sin B = a.b.\sin C$.

4. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து P, Q என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $24\underline{i} + 7\underline{j}$, $12\underline{i} + 5\underline{j}$ ஆகும். காவி $\overrightarrow{PQ}$ ஐக் கண்டு PQ இன் நடுப் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க. கோணம் POQ ஐத் துணிக.



புள்ளி P இன் தானக் காவி $\underline{p}$ ஆனது

$\underline{p} = \overrightarrow{OP} = 24\underline{i} + 7\underline{j}$ உம்

புள்ளி Q இன் தானக் காவி $\underline{q}$ ஆனது

$\underline{q} = \overrightarrow{OQ} = 12\underline{i} + 5\underline{j}$ உம் ஆகும்.

ஆகவே $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$

$$= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = -(24\underline{i} + 7\underline{j}) + 12\underline{i} + 5\underline{j}$$

$$= -12\underline{i} - 2\underline{j}.$$

R ஆனது PQ இன் நடுப் புள்ளியாகும்.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$

$$= 24\underline{i} + 7\underline{j} + \frac{1}{2}(-12\underline{i} - 2\underline{j})$$

$$= 18\underline{i} + 6\underline{j}.$$

இப்போது கோணம் POQ ஐக் காண்பதற்கு

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = (24\underline{i} + 7\underline{j})(12\underline{i} + 5\underline{j}) = 24.12 + 7.5 = 323.$$

மேலும் $OP^2 = |24\underline{i} + 7\underline{j}|^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 25 = 625$

$$\Rightarrow OP = 25.$$

$$OQ^2 = |12\underline{i} + 5\underline{j}|^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow OQ = 13.$$

கோணம் POQ ஆனது θ எனக் கொள்வோம். அப்போது வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = OP.OQ.\cos\theta$ ஆகையால்

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = 25 \times 13\cos\theta$ ஆகையால்

$$25 \times 13\cos\theta = 323 \Rightarrow 325.\cos\theta = 323 \Rightarrow \cos\theta = \left(\frac{323}{325}\right).$$

எனவே கோணம் $POQ = \cos^{-1}\left(\frac{323}{325}\right)$.

5. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $16\underline{i} + 8\underline{j}$, $20\underline{j}$ ஆகும். $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$ ஆகிய காவிகளின் பருமன்கள் சமமெனக் காட்டுக.

   OA இன் நடுப் புள்ளி D எனக் கொள்வோம். அப்போது OD ஆனது BD இற்குச் செங்குத்தானது எனவும் காட்டுக.

   முக்கோணி OAB இன் சுற்றுமையம் C எனின், அப்புள்ளி BD மீது உள்ளதெனக் காட்டி C இன் தானக் காவியைத் துணிக.

$$\overrightarrow{OB} = 20\underline{j} \Rightarrow |\overrightarrow{OB}| = |20\underline{j}| = 20|\underline{j}| = 20 \times 1 = 20.$$

$$\therefore |\overrightarrow{OB}| = 20.$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(16\underline{i} + 8\underline{j}) + 20\underline{j}$$

$$= -16\underline{i} + 12\underline{j}.$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = (-16)^2 + 12^2 = (4 \times 4)^2 + (4 \times 3)^2$$

$$= 4^2 \times 4^2 + 4^2 \times 3^2 = 20^2.$$

$$\therefore \left| \overrightarrow{AB} \right| = 20$$

ஆகவே காவிகள் $\overrightarrow{OB}$ உம் $\overrightarrow{AB}$ உம் பருமனில் சமம்.

OA இன் நடுப் புள்ளி D ஆகையால் $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{OA}$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\ (16\,\underline{i} + 8\,\underline{j}\,) = 8\,\underline{i} + 4\,\underline{j}.$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$$

$$= -\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

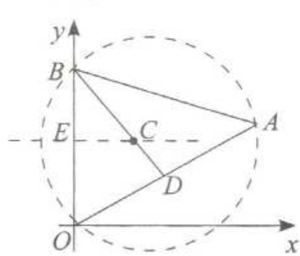
$$= -\ 20\underline{j} + 8\,\underline{i} + 4\,\underline{j}$$

$$= 8\ \underline{i} - 16\,\underline{j}.$$

$\therefore \overrightarrow{OD}\cdot\ \overrightarrow{BD} = (8\ \underline{i}\ + 4\underline{j}).\ (8\,\underline{i}\ - 16\underline{j}) = 8\ \times 8 - 4\ \times 16\ = 0$ ஆகையால்

$\overrightarrow{OD}\cdot\ \overrightarrow{BD} = 0.$ எனவே OD உம் BD உம் செங்குத்தாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் சுற்றுமையம் என்பது மூன்று உச்சிகளினூடாகவும் செல்லும் வட்டமாகிய சுற்றுவட்டத்தின் மையம் ஆகும். இப்போது முக்கோணியின் ஒவ்வொரு பக்கமும் சுற்றுவட்டத்தின் ஒரு நாண் ஆகும். ஆகவே ஒவ்வொரு பக்கத்தினதும் செங்குத்து இருகூறாக்கி சுற்றுவட்டத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும். கேத்திரகணித முறையாக ஒரு முக்கோணியின் சுற்றுவட்டத்தை அமைக்கும்போது இவ்வியல்பு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.



இப்போது முக்கோணி OAB இன் சுற்றுமையம் C ஐக் கருதுவோம். மேலே OD உம் BD உம் செங்குத்தானவையெனக் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதாவது, OA உம் BD உம் செங்குத்தானவை. மேலும் D ஆனது பக்கம் OA இன் நடுப் புள்ளி ஆகையால் BD ஆனது பக்கம் OA இன் செங்குத்து இருகூறாக்கியாகும். எனவே BD மீது முக்கோணி OAB இன் சுற்றுமையம் C இருக்கின்றது.

இப்போது BD, DC ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரம் ஆகையால்

$\overrightarrow{DC} = \lambda\,\overrightarrow{BD}$ ஆக இருக்குமாறு $\lambda \in \mathbb{R}$ உளதாக இருக்கின்றது. எனவே $\overrightarrow{DC} = \lambda\,(8\underline{i} - 16\,\underline{j}\,)$.

இதற்கேற்ப $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$

$$= 8\underline{i} + 4\underline{j} + \lambda\,(8\underline{i} - 16\,\underline{j}\,)$$

$$= 8(1+\lambda)\,\underline{i} + 4\,(1-4\,\lambda)\underline{j}\,. \text{ ——— } ①$$

OC இற்கு வேறொரு கோவையைப் பெறுவோம்.

OB இன் நடுப் புள்ளி E எனக் கொள்வோம்.

பக்கம் OB ஐக் கருதும்போது அதற்குச் செங்குத்தான திசை Ox அச்சின் திசை ஆகையால் $\overrightarrow{EC} = \mu\,\underline{i}$ வடிவத்தில் உள்ளது. இங்கு $\mu \in \mathbb{R}$. மேலும் $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = 10\underline{j}$.

ஆகையால் $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}$

$$= 10\,\underline{j} + \mu\,\underline{i}\,.$$

மேலே ① இல் பெற்ற கோவையுடன் ஒப்பிடும்போது

$8(1+\lambda)\,\underline{i} + 4(1-4\,\lambda)\,\underline{j} = 10\,\underline{j} + \mu\,\underline{i}$ ஆகும். இங்கு $\underline{i}$, $\underline{j}$ ஆகியன சூனியமற்ற சமாந்தரமற்ற காவிகள் ஆகையால் மேற்குறித்த சமன்பாடுகளில் அக்குணகங்கள் சமம்.

$\Rightarrow 8(1+\lambda) = \mu$ உம் $4(1-4\,\lambda) = 10$ உம் ஆகும்.

எனவே $\Rightarrow 8(1+\lambda) = \mu$ உம் $4(1-4\,\lambda) = 10$ உம் ஆகும். இவ்விரண்டாம் சமன்பாட்டை λ இற்காகத் தீர்க்கும்போது

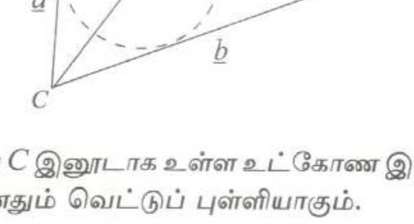
$\lambda = -\frac{3}{8}$. அப்போது $\mu = 8(1+\lambda) = 5$.

$\overrightarrow{OC} = 8(1+\lambda)\,\underline{i} + 4(1-4\lambda)\,\underline{j}$ இல் இவற்றைப் பிரதியிடும்போது $\overrightarrow{OC} = 5\,\underline{i} + 10\,\underline{j}$. எனவே சுற்றுமையம் C இன் தானக் காவி $5\underline{i} + 10\,\underline{j}$ ஆகும்.

மேற்குறித்த உதாரணத்திலிருந்து ஒரு முக்கோணியின் சுற்றுமையம் பற்றிய ஒரு கருத்து முன்வைக்கப்படும் அதே வேளை ஒரு முக்கோணியுடன் தொடர்புபட்ட வேறு இரு முக்கிய மையங்களாக உள்மையம், நிமிர்மையம் ஆகியவற்றை அறிமுகஞ் செய்யலாம்.

* ஒரு முக்கோணியின் உள்மையம் (உயர் கணிதத்திற்குரியது)

ஒரு முக்கோணியின் ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் உள்ளிரு கூறாக்கிகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவெனக் காட்டலாம். அவ்விருகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணியின் **உள்மையம்** எனப்படும். இப்புள்ளி மையமாக இருந்தாலும் ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் தொடுமாறு ஒருதனியான வட்டத்தை வரையத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அது முக்கோணியின் **உள்வட்டம்** எனப்படும். இதற்காகப் பல்வேறு நிறுவல்கள் இருக்கும் அதே வேளை காவிகளைப் பயன்படுத்தி அதற்குரிய நிறுவலைக் கருதிப் பார்ப்போம்.



இங்கு D ஆனது C இனூடாக உள்ள உட் கோண இருகூறாக்கியினதும் பக்கம் AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளியாகும்.

அப்போது கேத்திரகணிதத்திலிருந்து $AD : DB = CA : CB$.

அதாவது $\frac{AD}{DB} = \frac{CA}{CB}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை முக்கோணி ABC

இற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில்

$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{b}{a}$ ஆகையால் $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{b}{a+b}$.

மேலும் $\overrightarrow{AD}$ உம் $\overrightarrow{AB}$ உம் ஒரே போக்கைக் கொண்ட காவிகள் ஆகையால் $\overrightarrow{AD}=\lambda\,\overrightarrow{AB}$ ஆக இருக்குமாறு λ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது; இங்கு $\lambda>0$ ஆகும்.

இரு பக்கங்களிலும் மட்டுகளைக் கருதும்போது $AD=\lambda\,AB$

$\Rightarrow \lambda=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{b}{a+b}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை ஆகவே

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}.$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\;\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\left[\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right]$$

$$=\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\left[-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right]$$

$$=\left(1-\frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{CB}=\frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}.$$

$$\overrightarrow{CI}=\mu\,\overrightarrow{CD}$$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{CI}=\mu_{\circ}\left(\dfrac{a}{a+b}\,\overrightarrow{CA}+\dfrac{b}{a+b}\,\overrightarrow{CB}\right)$; இங்கு $\mu_{\circ}$ ஆனது ஓர் எண்ணியாகும்.

ஆகவே ஒரு குறித்த எண்ணி μ இற்கு $\overrightarrow{CI}=\mu\left(a\,\overrightarrow{CA}+b\,\overrightarrow{CB}\right)$.

A இனூடாக உள்ள உட்கோண இருகூறாக்கியினதும் பக்கம் BC இனதும் வெட்டுப் புள்ளி E எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $BE:EC=AB:AC=c:b$, அதாவது $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{c}{b}$ ஆகையால் $\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{b}{c+b}$.

மேலும் $\overrightarrow{CE}$ உம் $\overrightarrow{CB}$ உம் ஒரே போக்கைக் கொண்ட காவிகள் ஆகையால் $\overrightarrow{CE}=\lambda_{\circ}\,\overrightarrow{CB}$ ஆக இருக்குமாறு $\lambda_{\circ}$ என்னும் ஓர் எண்ணி உளதாக இருக்கின்றது; இங்கு $\lambda>0$.

இரு பக்கங்களிலும் மட்டுகளைக் கருதும்போது $CE = \lambda_0 CB$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{CE}{CB} = \frac{b}{c+b}$$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

ஆகவே $\overrightarrow{CE} = \frac{b}{c+b}\overrightarrow{CB}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \frac{b}{c+b}\overrightarrow{CB}$$

$$= -\overrightarrow{CA} + \frac{b}{c+b}\overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{1}{b+c}\left[b\,\overrightarrow{CB} - (b+c)\,\overrightarrow{CA}\right]$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = v\,\overrightarrow{AE} = v_0\,\frac{1}{b+c}\left[b\,\overrightarrow{CB} - (b+c)\,\overrightarrow{CA}\right]$; இங்கு v_0 ஆனது ஓர் எண்ணியாகும்.

அதாவது v என்னும் ஓர் எண்ணியுடன் $\overrightarrow{AI} = v\left[b\,\overrightarrow{CB} - (b+c)\,\overrightarrow{CA}\right]$ என எழுதலாம்.

அப்போது முக்கோணி ACI இலிருந்து $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI}$ ஆகையால்

$$\mu\left(a\,\overrightarrow{CA} + b\,\overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA} + v\left[b\,\overrightarrow{CB} - (b+c)\,\overrightarrow{CA}\right].$$

இங்கு $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ ஆகியன சூனியமற்ற சமாந்தரமற்ற காவிகள் ஆகையால் அவற்றின் குணகங்கள் இரு பக்கங்களிலும் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே $\overrightarrow{CA}$ இன் குணகங்களைக் கருதும்போது

$\mu a = 1 - v(b+c)$ உம் $\overrightarrow{CB}$ இன் குணகங்களைக் கருதும்போது $\mu b = vb$ உம் ஆகும்.

ஆகவே $\mu a = 1 - v(b+c)$ ஆகவும் $\mu = v$ ஆகவும் இருப்பதனால் v ஐ நீக்கும்போது

$\mu a = 1 - \mu(b+c)$.

அதாவது $\mu = \frac{1}{a+b+c}$.

எனவே $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\,\overrightarrow{CA} + b\,\overrightarrow{CB}\right)$.

இப்போது நாம் மேற்குறித்த உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ எனக் கொள்வோம். அப்போது CD, AE ஆகிய கோண இருகூறாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளி I இன் தானக் காவி $\overrightarrow{OI}$ ஆகும்.

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI}$$

$$= \underline{c} + \frac{1}{a+b+c}\left(a\,\overrightarrow{CA} + b\,\overrightarrow{CB}\right).$$

மேலும் $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$

$= -\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = -\underline{c} + \underline{a}$ ஆகவும்

$\overrightarrow{CB} = -\underline{c} + \underline{b}$ ஆகவும் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{OI} = \underline{c} + \frac{1}{a+b+c}\left[a(-\underline{c}+\underline{a}) + b(-\underline{c}+\underline{b})\right]$$

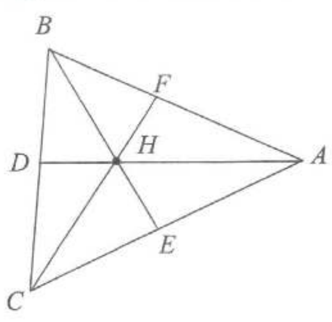
$$= \frac{1}{a+b+c}\left[(a+b+c)\,\underline{c} + a(-\underline{c}+\underline{a}) + b(-\underline{c}+\underline{b})\right]$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\,(a\underline{a} + b\underline{b} + c\underline{c}).$$

இத்தானக் காவி A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானத்தின் மீது மாத்திரம் இருக்கின்றது என்பதை அவதானிக்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை ஆகவே எஞ்சிய கோண இருகூறாக்கியும் I இனூடாகவும் செல்கின்றது. ஆகவே ஒரு முக்கோணியின் ஒவ்வொரு கோணத்தினதும் உள்ளிருகூறாக்கிகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

* ஒரு முக்கோணியின் நிமிர்மையம் (உயர் கணிதத்திற்குரியது)

ஒரு முக்கோணியின் ஒவ்வோர் உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப் பக்கத்திற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவெனக் காட்டலாம். அச்செங்குத்துகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணியின் **நிமிர்மையம்** எனப்படும். இதற்கும் பல்வேறு நிறுவல்கள் இருக்கும் அதே வேளை அதற்கான ஒரு நிறுவலைக் காவிகளின் சார்பில் கருதிப் பார்ப்போம்.



இங்கு D, E, F ஆகியன முறையே A, B, C ஆகியவற்றிலிருந்து எதிர்ப் பக்கத்திற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகளின் அடிகளாகும். AD இனதும் BE இனதும் வெட்டுப் புள்ளி H எனக் கொள்வோம். புள்ளி H ஐக் குறித்து A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $\overrightarrow{HA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{HB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{HC} = \underline{c}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

HA, BC ஆகியன செங்குத்தானவை ஆகையால்
$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CB} = 0.$
$\Rightarrow \underline{a}.\,(\underline{b} - \underline{c}) = 0$ அதாவது $\underline{a}.\underline{b} = \underline{a}.\underline{c}.$ ——— ①
மேலும் $\overrightarrow{CA} = \underline{a} - \underline{c}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை HE, AC ஆகியன செங்குத்தானவை ஆகையால்

$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0. \Rightarrow \underline{b}\ (\underline{a} - \underline{c}) = 0.$
அதாவது $\underline{a}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{c}$. ——— ②

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் $\underline{a}.\underline{b}$ ஐ நீக்கும்போது

$\underline{a}.\underline{c} = \underline{b}.\underline{c} \Rightarrow \underline{a}.\underline{c} - \underline{b}.\underline{c} = 0 \Rightarrow (\underline{a} - \underline{b}).\ \underline{c} = 0.$

மேலும் $\overrightarrow{BA} = \underline{b} - \underline{a}$ ஆகையால் இச்சமன்பாட்டை $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{HC} = 0$ என எழுதலாம். ஆகவே AB உம் HC உம் செங்குத்தானவை. அதாவது உச்சி C இலிருந்து எதிர்ப் பக்கம் AB இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தும் புள்ளி H இனூடாகச் செல்கின்றது. அதாவது, முக்கோணியின் ஒவ்வோர் உச்சியிலிருந்தும் எதிர்ப் பக்கத்திற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

பயற்சி 1.4

* 1. ஓர் உற்பத்தி O பற்றி A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ எனக் கொள்வோம். $\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{d}$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

* 2. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் பக்கம் AB இன் நடுப் புள்ளி C எனவும் கொள்வோம். காவி $\overrightarrow{OC}$ ஐ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

முக்கோணியின் இடையங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ ஆகிய காவிகளை OB, OA, AB ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}$ ஆனது சூனியக் காவி என்பதை உய்த்தறிக.

3. $\underline{a}=x\underline{i}+2\underline{j}$, $\underline{b}=y\underline{j}-\underline{i}$ ஆகிய காவிகள் சமமெனின், x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் பற்றி நீங்கள் என்ன கூறுவீர்கள்?

4. $\underline{a}=3\underline{i}+4\underline{j}$, $\underline{b}=3\underline{j}-4\underline{i}$ எனக் கொள்வோம். $|\underline{a}|=|\underline{b}|$ எனக் காட்டுக. $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சமமா?

* 5. $\underline{a}=8\underline{i}+4\underline{j}$, $\underline{b}=4\underline{i}+\underline{j}$ எனக் கொள்வோம். $|\underline{a}+\underline{b}|$ ஐக் காண்க. $\underline{a}+\underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு உள்ள அலகுக் காவிகளைத் துணிக.

6. $3\underline{i}+\underline{j}$, $6\underline{i}-2\underline{j}$, $10\underline{i}+2\underline{j}$ என்னும் தானக் காவிகள் உள்ள புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் உச்சிகளெனக் காட்டுக.

7. $\underline{i}+3\underline{j}$, $2\underline{j}-6\underline{i}$ என்னும் தானக் காவிகள் உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q எனக் கொள்வோம். கோட்டுத் துண்டம் PQ ஐ உள்ளே $1:2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைத் துணிக.

8. $\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் காவிகளின் மட்டுகள் முறையே $1, 2$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\underline{a}.\underline{b} = 1$ எனின், அக்காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைத் துணிக.

9. $\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளின் மட்டுகள் முறையே $2, 3$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\underline{a}.\underline{b} = 4$ எனின், $|\underline{a} - \underline{b}|$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

* 10. ஒரு தளத்தில் இருக்கும் A, B, C, D, E, F என்னும் புள்ளிகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் உச்சிகளாகுமாறு உள்ளன. ஒரு புள்ளி O பற்றி A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ ஆகும். புள்ளி O பற்றி அறுகோணியின் மையப்போலியின் தானக் காவி $\underline{d} + \underline{b} - \underline{c}$ எனக் காட்டுக. $\underline{a} - \underline{d} = 2\underline{b} - 2\underline{c}$ எனவும் காட்டுக. இதிலிருந்து அறுகோணியின் ஏனைய உச்சிகளின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

* 11. ABC ஒரு முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை ஒரு குறித்த உற்பத்தி O பற்றி A, B, C ஆகிய உச்சிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகும். ABC, CDA ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைந்தும் கோடு AC இன் இரு பக்கங்களிலும் B, D ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்தும் இருப்பின், முக்கோணி ACD இன் மையப்போலியின் தானக் காவி $\frac{1}{3}(2\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c})$ எனக் காட்டுக. இம்மையப்போலி கோடு BD மீது உள்ளது எனவும் காட்டுக.

12. $\underline{a}$ என்பது ஓர் அலகுக் காவியாகும். காவி $\underline{b}$ ஆனது $(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} + \underline{b}) = 1$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனின், $|\underline{b}|$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

அது $(\underline{b} - \underline{a}).(\underline{a} + \underline{b}) = 1$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனின், $|\underline{b}|$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13. $\underline{a} = 2\underline{i} + p\underline{j}$, $\underline{b} = 2\underline{j} - 5\underline{i}$ என்னும் காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின், மாறிலி p இற்கு இருக்கத்தக்க பெறுமானத்தைக் காண்க. p இன் இப்பெறுமானத்திற்கு $\underline{b} - \underline{a}$ ஐக் கண்டு, $\underline{a}$, $\underline{b} - \underline{a}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைத் துணிக.

14. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $3\underline{j} - \underline{i}$, $\underline{i} - 2\underline{j}$ ஆகும். BC இன் நடுப் புள்ளி A எனின், புள்ளி A இன் தானக் காவியைக் காண்க. $3\underline{i} + 7\underline{j}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தையும் துணிக.

15. $OABC$ ஒரு சாய்சதுரம். A இன் தானக் காவி $3\underline{i} + \underline{j}$ ஆகும்; இங்கு $\underline{i}$, $\underline{j}$ ஆகியன வழக்கமான குறிப்பீடுள்ளவை. C இன் தானக் காவி $\underline{c}$ எனின், மூலைவிட்டம் OB இனால் வகைகுறிக்கப்படும் காவியைக் காண்க. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தானவை என்பதைப் பயன்படுத்தி $|\underline{c}| = \sqrt{10}$ எனக் காட்டுக.

* 16. OAB ஒரு முக்கோணி. OA, OB ஆகிய பக்கங்கள் பருமனிலும் திசையிலும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகளினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. காவி $a\underline{b} + b\underline{a}$ ஆனது கோணம் AOB இன் உள்ளிருகூறாக்கிக்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுவதற்குக் குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்துக.
AOB, BAO ஆகிய கோணங்களின் உள்ளிருகூறாக்கிகள் புள்ளி D இல் இடைவெட்டுமெனின், $(a + b + |\underline{a} - \underline{b}|)\overrightarrow{OD} = a\underline{b} + b\underline{a}$ எனக் காட்டுக.

* 17. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளுக்குப் பின்வரும் சமனிலிகளைக் காட்டுக.

(i) $|\underline{a}.\underline{b}| \le |\underline{a}|.|\underline{b}|$.
(ii) $|\underline{a} + \underline{b}| \le |\underline{a}| + |\underline{b}|$.

$|\underline{a} - \underline{b}| \ge |\underline{a}| - |\underline{b}|$ என்பதை உய்த்தறிக.

18. $-2\underline{i} + 3\underline{j}$, $\underline{i} + 2\underline{j}$, $7\underline{i}$ என்னும் தானக் காவிகள் உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q, R எனக் கொள்வோம். $|\overrightarrow{PQ}|$, $|\overrightarrow{QR}|$, $|\overrightarrow{RP}|$ ஆகியவற்றைக் காண்க. P, Q, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளன என்பதை உய்த்தறிக.

19. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ என்னும் மூன்று அலகுக் காவிகள் சமன்பாடு $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன. $\underline{a}.\underline{b} + \underline{b}.\underline{c} + \underline{c}.\underline{a} = -\frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக.

20. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ எனவும் கொள்வோம். C, D, E ஆகியன முறையே $\overrightarrow{OC} = \underline{a} + \underline{b}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\underline{b}$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளிகளாகும். மேலும் OD இன் நடுப் புள்ளி F எனின், C, F, E ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளனவெனக் காட்டுக.

21. $OABC$ ஒரு நாற்பக்கல் எனவும் D, E ஆகியன முறையே OB, AC ஆகிய இரு மூலைவிட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம். உச்சி O பற்றி A, B, C ஆகிய உச்சிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ எனவும் கொள்வோம். M ஆனது DE இன் நடுப் புள்ளியெனின், M இன் தானக் காவி $\frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ எனக் காட்டுக.

22. முக்கோணி ABC இல் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்கள் முறையே P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் $3:7$, $3:2$, $3:7$ விகிதத்திற் பிரிக்கப்படுகின்றன. உச்சி A பற்றி B, C ஆகிய உச்சிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{b}$, $\underline{c}$ எனக் கொண்டு காவி $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}$ ஐ $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. பக்கம் AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளி D இற்கு மேற்குறித்த காவியும் காவி $\overrightarrow{CD}$ உம் சமாந்தரமெனின், புள்ளி D இன் தானத்தைத் துணிக.

* 23. ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் O அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $\lambda, \mu, v > 0$ ஆக இருக்கும் போது $\lambda\overrightarrow{OA}$, $\mu\overrightarrow{OB}$, $v\overrightarrow{OC}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுளை $(\lambda + \mu + v)\overrightarrow{OG}$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக. ஒரு தளத்தில் உள்ள A, B, C, D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் உச்சிகளாக இருக்கும் அதே வேளை K ஆனது அதே தளத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியும் O ஆனது அறுகோணியின் மையமும் ஆகும். $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{KE}$, $\overrightarrow{KF}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுள் $6\overrightarrow{KO}$ என்பதை உய்த்தறிக.

* 24. O, A, B ஆகியன ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத புள்ளிகளாக இருக்கும் அதே வேளை $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ எனக் கொள்வோம். P, Q ஆகியன $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\underline{a}$ ஆகவும் $\overrightarrow{QP} = \frac{a}{2b}\underline{b}$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகளாகும். $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PA}$ ஆகியவற்றை $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைத்து $\underline{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$ என்பதையும் $\underline{b} = \frac{b}{a}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA}\right)$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

R ஆனது $AR : RB = a : b$ ஆகுமாறு AB மீது உள்ள புள்ளியெனத் தரப்படும்போது $\overrightarrow{OR}$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து

(i) O, P, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது இருக்கின்றன எனவும்

(ii) $2|OP| > |OR|$ எனவும்

காட்டுக.

(1989)

* 25. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரு சூனியமற்ற காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கத்தை வரையறுக்க.

ஒரு முக்கோணி ABC இல் $\overrightarrow{CA} = \underline{a}$ எனவும் $\overrightarrow{CB} = \underline{b}$ எனவும் கொள்வோம். எண்ணிப் பெருக்கம் $(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} - \underline{b})$ ஐக் கருதுவதன்மூலம்; $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ எனக் காட்டுக. இங்கு $a = |\underline{a}|$, $b = |\underline{b}|$, $c = |\underline{a} - \underline{b}|$

கோணம் ACB இன் உள்ளிருகூறாக்கி CL ஆக இருக்குமாறு AB மீது புள்ளி L உள்ளது. $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் ஒவ்வொன்றுடனும் காவி $\overrightarrow{CL} = \underline{l}$ இன் எண்ணிப் பெருக்கத்தைக் கருதுவதன் மூலம் $\underline{l} = \dfrac{b\underline{a} + a\underline{b}}{a+b}$ எனக் காட்டுக.

$CL^2 = ab\left[1 - \dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right]$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1993)

* **26.** ஓர் உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகும். புள்ளி P ஆனது $m : n$ விகிதத்தில் AB ஐப் பிரிக்கின்றது. $(m+n)\overrightarrow{OP} = n\underline{a} + m\underline{b}$ எனக் காட்டுக.

$OABC$ ஓர் இணைகரமெனக் கொள்வோம். D ஆனது பக்கம் OA இன் நடுப் புள்ளியெனின், OB, CD ஆகியன ஒன்றையொன்று முக்கூறிடுகின்றனவெனக் காட்டுக.

(1981)

* **27.** i. A, B என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோடு மீது புள்ளி P உள்ளது. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகவும் $AP : PB = n : m$ ஆகவும் இங்கு $n + m = 1$ ஆகவும் இருப்பின் O பற்றி P இன் தானக் காவி $m\underline{a} + n\underline{b}$ எனக் காட்டுக.

ii. ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணி ABC இன் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை அல்லது நீட்டப்பட்ட அப்பக்கங்களை முறையே X, Y, Z என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது.
$\dfrac{BX}{XC} \cdot \dfrac{CY}{YA} \cdot \dfrac{AZ}{ZB} = -1$ எனக் காவிகளைப் பயன்படுத்திக் காட்டுக.

(1981)

* **28.** ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகும். R ஆனது AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளையும் OR மீது உள்ள புள்ளி C உடன் தொடுக்கும் கோடுகள் முறையே OB, OA ஆகிய கோடுகளை S, T என்னும் இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. $\dfrac{AR}{RB} = p$, $\dfrac{BS}{SO} = q$, $\dfrac{OT}{TA} = r$ எனின், $(1+p)\overrightarrow{OR} = \underline{a} + p\underline{b}$ எனவும் $(1+q+qr)\overrightarrow{OC} = qr\,\underline{a} + \underline{b}$ எனவும் காட்டுக. ஓர் எண்ணி α உடன் $\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OR}$ எனக் கொண்டு $pqr = 1$ எனவும் காட்டுக.

(1985)

* 29. O, A, B, C என்பன O, A, B ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத நான்கு வெவ்வேறான புள்ளிகளாகும். α, β ஆகியன சூனியமல்லாத எண்களும் $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ உம் $\overrightarrow{OC} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ உம் ஆகும்.

(i) கோடு OA மீது ஒரு புள்ளி D ஆனது $\overrightarrow{OD} = \gamma\,\underline{a}$ ஆக இருக்குமாறும் $\overrightarrow{DC} = \delta\,\underline{b}$ ஆக இருக்குமாறும் எடுக்கப்பட்டுள்ளது. γ இனதும் δ இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவற்றை $\alpha, \beta, \underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. $\alpha + \beta = 1$ எனின், A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளனவெனக் காட்டுக. மேலும் A இற்கும் B இற்குமிடையே C இருக்கின்றதெனத் தரப்பட்டிருப்பின் $AC : CB$ விகிதத்தை α இன் சார்பில் எடுத்துரைத்து, $0 < \alpha < 1$ என்பதை உய்த்தறிக.

(iii) P, Q ஆகியன $\overrightarrow{OP} = 2\underline{a}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\,\underline{b}$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ள இரு புள்ளிகளாகும். AB இனதும் PQ இனதும் வெட்டுப் புள்ளி R ஆகும். $\overrightarrow{OR}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைத்து, $AR : RB; PR : RQ$ ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க.

(1991)

* 30. பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) அலகுக் காவி l இன் திசை வழியே காவி $\underline{a}$ இன் கூறு $(\underline{a}.\underline{l})\underline{l}$ ஆகும்.

(ii) முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\left|\underline{a}\wedge\underline{b}\right|$ ஆகும்.

இங்கு $\underline{a}=\overrightarrow{OA}$, $\underline{b}=\overrightarrow{OB}$.

C ஆனது உச்சி A இலிருந்து பக்கம் OB இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடியெனக் கொள்வோம்.

முக்கோணி OAC இன் பரப்பளவு முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவின் $\frac{1}{b^2}\left|\underline{a}.\underline{b}\right|$ மடங்கு என்பதை உய்த்தறிக.

1.4 மாதிரித் தீர்வு

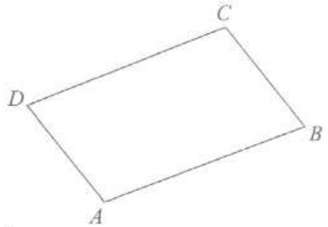
* 1. ஓர் உற்பத்தி O பற்றி A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ எனக் கொள்வோம். $\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{d}$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

இங்கு $\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{d}$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனக் காட்ட வேண்டும்.

அதாவது $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனின், $\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{d}$ எனவும் $ABCD$ ஓர் இணைகரமாக இருப்பதற்கு $\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{d}$ ஆக இருக்க வேண்டும் எனவும் நிறுவ வேண்டும்.

முதலில் $ABCD$ ஓர் இணைகரமெனக் கொள்வோம். பின்வரும் உருவைப் பார்க்க. இணைகரத்தின் ஓர் இயல்பாகிய எதிர்ப் பக்கங்கள் சமமும் சமாந்தரமுமாகும் என்னும் பேறைப் பிரயோகிப்போம்.

பக்கம் AB ஆனது பக்கம் DC இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனால்



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$.

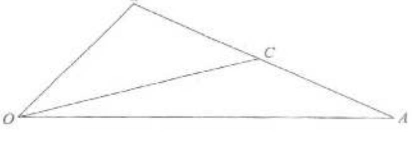
$\Rightarrow -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$.

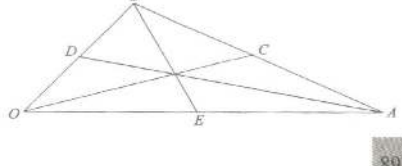
$\Rightarrow -a + b = -d + c \Rightarrow a + c = b + d$.

இப்போது $\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{d}$ எனக் கொள்வோம். மேற்குறித்த படிமுறைகளைப் பின்னோக்கிச் செய்யும்போது $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை ஆகவே பக்கம் AB உம் பக்கம் DC உம் சமாந்தரமாகும். எனவே $ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

* 2. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் பக்கம் AB இன் நடுப் புள்ளி C எனவும் கொள்வோம். காவி $\overrightarrow{OC}$ ஐ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.
முக்கோணியின் இடையங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ஆகிய காவிகளை OB, OA, AB ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}$ ஆனது சூனியக் காவி என்பதை உய்த்தறிக.

பக். 26 இல் உள்ள பேறிலிருந்து C ஆனது AB இன் நடுப் புள்ளி ஆகையால் $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ ஆகும்.





இங்கு D, E ஆகியன முறையே பக்கம் OB இனதும் பக்கம் OA இனதும் நடுப் புள்ளிகளாகும்.

மேலேயிருந்து $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

அவ்வாறே $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}\right)$ உம் $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA}\right)$ உம் ஆகும்.

ஆகவே

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}\right) + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OB} + \underline{0} - \overrightarrow{OB}\right]$$

$$= \underline{0}.$$

ஆகவே ஒரு முக்கோணியின் இடையங்களினால் வகைகுறிக்கப்படும் மற்றும் உச்சிகளிலிருந்து வழிப்படுத்தப்படும் மூன்று காவிகளினதும் கூட்டுத்தொகை சூனியக் காவியாகும்.

3. $\underline{a} = x\underline{i} + 2\underline{j}$, $\underline{b} = y\underline{j} - \underline{i}$ ஆகிய காவிகள் சமமெனின், x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் பற்றி நீங்கள் என்ன கூறுவீர்கள்?

$\underline{a} = x\,\underline{i} + 2\,\underline{j}$, $\underline{b} = y\underline{j} - \underline{i}$ ஆகிய காவிகள் சமமெனின்,

$x\,\underline{i} + 2\,\underline{j} = -\underline{i} + y\,\underline{j}$. மேலும் $\underline{i}$, $\underline{j}$ ஆகியன சூனியமற்ற சமாந்தரமற்ற காவிகள் ஆகையால் $x = -1$, $y = 2$ ஆகும்.

4. $\underline{a} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$, $\underline{b} = 3\underline{j} - 4\underline{i}$ எனக் கொள்வோம். $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ எனக் காட்டுக. $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சமமா?

$\underline{a} = 3\,\underline{i} + 4\underline{j} \Rightarrow |\,\underline{a}|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow |\underline{a}| = 5.$

$\underline{b} = 3\,\underline{i} - 4\,\underline{j} \Rightarrow |\,\underline{b}\,|^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow |\underline{b}| = 5.$

$\therefore\ |\,\underline{a}\,| = |\,\underline{b}\,|.$

இக்காவிகளின் மட்டுகள் சமம் ஆகையால் அவை பருமனில் சமமாகும். எனினும் இக்காவிகளின் கூறுகள் வேறுபட்டன ஆகையால் அவை சமமற்ற காவிகளாகும்.

* 5. $\underline{a} = 8\underline{i} + 4\underline{j}$, $\underline{b} = 4\underline{i} + \underline{j}$ எனக் கொள்வோம். $|\underline{a} + \underline{b}|$ ஐக் காண்க. $\underline{a} + \underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு உள்ள அலகுக் காவிகளைத் துணிக.

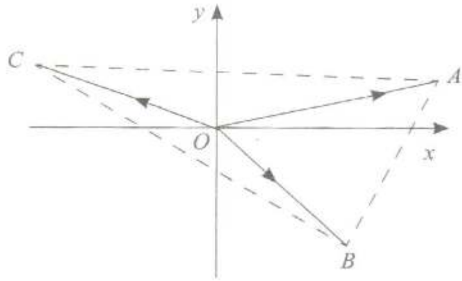
$\underline{a} + \underline{b} = (8\,\underline{i} + 4\,\underline{j}) + (4\,\underline{i} + \underline{j}) = (8 + 4)\,\underline{i} + (4 + 1)\,\underline{j} = 12\,\underline{i} + 5\underline{j}.$

$\Rightarrow |\,\underline{a} + \underline{b}\,|^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

$\Rightarrow |\,\underline{a} + \underline{b}\,| = 13.$

$\underline{a} + \underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு உள்ள அலகுக் காவிகள் $\frac{12}{13}\,\underline{i} + \frac{5}{13}\,\underline{j}$, $-\frac{12}{13}\,\underline{i} - \frac{5}{13}\,\underline{j}$ ஆகும்.

6. $3\underline{i}+\underline{j}$, $6\underline{i}-2\underline{j}$, $10\,\underline{i}+2\,\underline{j}$ என்னும் தானக் காவிகள் உள்ள புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் உச்சிகளெனக் காட்டுக.



$\overrightarrow{OA}=3\underline{i}+\underline{j}$

$\overrightarrow{OB}=6\underline{i}-2\underline{j}$

$\overrightarrow{OC}=10\,\underline{i}+2\underline{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-(3\,\underline{i}+\underline{j})+6\,\underline{i}-2\,\underline{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=3\,\underline{i}-3\underline{j}$.

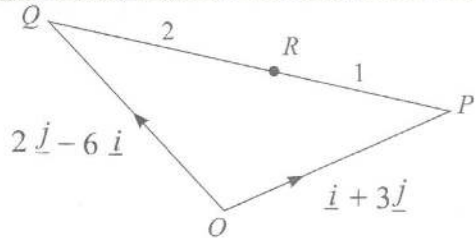
இவ்வாறே $\overrightarrow{BC}=4\underline{i}+4\underline{j}$, $\overrightarrow{CA}=-7\underline{i}-\underline{j}$.

$\underline{i}$, $\underline{j}$ கூறுகள் வேறுபட்டன ஆகையால் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ஆகிய காவிகள் சமாந்தரமற்றவை.

மேலும் $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$. ஆகவே A, B, C ஆகியன ஒரு முக்கோணியின் உச்சிகளாகும்.

மேலும் $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}=(3\,\underline{i}-3\,\underline{j})\;(4\,\underline{i}+4\,\underline{j})=3.4-3.4=0$ ஆகையால் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய காவிகள் செங்குத்தானவை. எனவே ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும்.

7. $\underline{i} + 3\underline{j}$, $2\underline{j} - 6\underline{i}$ என்னும் தானக் காவிகள் உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q எனக் கொள்வோம். கோட்டுத் துண்டம் PQ ஐ உள்ளே $1:2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைத் துணிக.



$PR : RQ = 1 : 2 \quad \Rightarrow PR = \frac{1}{3}\, PQ.$

மேலும் PR உம் PQ உம் ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\,(-\underline{i} - 3\underline{j} + 2\underline{j} - 6\underline{i})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\,(-7\underline{i} - \underline{j}).$$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$ ஆகையால் $\overrightarrow{OR} = \underline{i} + 3\,\underline{j} + \frac{1}{3}\,(-7\underline{i} - \underline{j})$

$$= \frac{1}{3}\,(-4\underline{i} + 8\underline{j}).$$

8. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளின் மட்டுகள் முறையே 1, 2 ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\underline{a}.\underline{b} = 1$ எனின், அக்காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைத் துணிக.

வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $\underline{a}\,.\,\underline{b} = a\,b\cos\alpha$. இங்கு α ஆனது காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஆகும். எனவே $1 = 1.\,2\cos\alpha$.

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

ஆகவே அக்காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 60° ஆகும்.

9. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளின் மட்டுகள் முறையே 2, 3 ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\underline{a} . \underline{b} = 4$ எனின், $| \underline{a} - \underline{b} |$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$\underline{a} - \underline{b}$ இற்கும் $\underline{a} - \underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள குற்றுப் பெருக்கத்திலிருந்து

$$| \underline{a} - \underline{b} |^2 = (\underline{a} - \underline{b}) . (\underline{a} - \underline{b})$$

$$= \underline{a}.\underline{a} - \underline{a}.\underline{b} - \underline{b}.\underline{a} - \underline{b}.\underline{b}$$

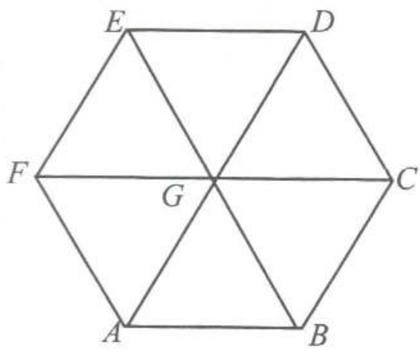
$$= | \underline{a} |^2 - 2\underline{a}.\underline{b} + | \underline{b} |^2 \text{ ஆகையால்}$$

$$| \underline{a} - \underline{b} |^2 = 2^2 - 2 \times 4 + 3^2 = 4 - 8 + 9 = 5$$

$$\Rightarrow | \underline{a} - \underline{b} | = \sqrt{5}$$

* 10. ஒரு தளத்தில் இருக்கும் A, B, C, D, E, F என்னும் புள்ளிகள் ஒழுங்கான அறுகோணியின் உச்சிகள் ஆகுமாறு உள்ளன. ஒரு புள்ளி O பற்றி A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ ஆகும். புள்ளி O பற்றி அறுகோணியின் மையப்போலியின் தானக் காவி $\underline{d} + \underline{b} - \underline{c}$ எனக் காட்டுக. $\underline{a} - \underline{d} = 2\underline{b} - 2\underline{c}$ எனவும் காட்டுக. இதிலிருந்து அறுகோணியின் ஏனைய உச்சிகளின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

அறுகோணியின் மையப்போலி G ஆகும். G ஆனது AD, BE, CF ஆகிய மூன்று மூலைவிட்டங்களுக்கும் பொதுவான வெட்டுப் புள்ளியாகும். அது ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தினதும் நடுப் புள்ளியும் ஆகும்.



முதலில் G இன் தானக் காவியாகிய $\overrightarrow{OG}$ஐக் காண்போம். உருவில் உள்ள ஒருங்கிசை முக்கோணிகளைக் கருதும்போது $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -\underline{c} + \underline{b}.$$

ஆகவே G இன் தானக் காவி $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}$

$$= \underline{d} - \underline{c} + \underline{b}.$$

இப்போது D, E, F ஆகியவற்றின் தானக் காவிகளான $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

மேலும் $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \underline{a} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

$= \underline{a} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AG}$ ($\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$ ஆகையால்)

$$= \underline{a} + 2\,\overrightarrow{AG}$$

$$= \underline{a} + 2\,(-\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} - 2\underline{b} + 2\underline{c}.$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{CD}.$$

இங்கு $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

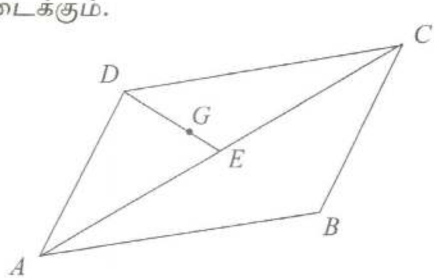
$$= -\underline{c} + \underline{a} - 2\underline{b} + 2\underline{c} = \underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}.$$

ஆகவே $\overrightarrow{OE} = \underline{a} - \underline{b} + \underline{c} + \underline{a} - 2\,\underline{b} + \underline{c} = 2\,\underline{a} - 3\,\underline{b} + 2\,\underline{c}.$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \underline{a} + \overrightarrow{CD} = \underline{a} + \underline{a} - 2\,\underline{b} + \underline{c} = 2\,\underline{a} - 2\,\underline{b} + \underline{c}$$

* 11. ABC ஒரு முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை ஒரு குறித்த உற்பத்தி O பற்றி A, B, C ஆகிய உச்சிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகும். ABC, CDA ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைந்தும் கோடு AC இன் இரு பக்கங்களிலும் B, D ஆகிய புள்ளிகள் அமைந்தும் இருப்பின், முக்கோணி ACD இன் மையப்போலியின் தானக் காவி $\frac{1}{3}(2\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c})$ எனக் காட்டுக. இம்மையப்போலி கோடு BD மீது உள்ளது எனவும் காட்டுக.

இதற்காக முதலில் ஓர் உருவை வரைவோம். ABC, CDA ஆகிய முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைகின்றன. இங்கு எழுத்து வரிசை முக்கியமானது. ஆகவே பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு ஓர் இணைகரம் கிடைக்கும்.



பக். 28 இன் உதாரணம் 1.6 இல் கவனஞ் செலுத்துக. ஒரு முக்கோணியின் இடையங்கள் இடைவெட்டும் விகிதம் 1 : 2 என அதில் காட்டப்பட்டுள்ளது. DE ஆனது D இனூடாக உள்ள இடையமாக இருக்கும் அதே வேளை DE மீது E இற்குக் கிட்டவுள்ள முக்கூறிடற் புள்ளி முக்கோணி ACD இன் மையப்போலியாகும். அது G எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -\underline{a} + \underline{c}$.

ஆகவே $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(-\underline{a} + \underline{c})$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\underline{b} + \underline{c}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}(-\underline{a} + \underline{c}) - \underline{b} + \underline{c}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}).$$

மேலும் $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} = \frac{1}{6}(\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c})$.

ஆகவே $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}$

$$= \underline{a} + \frac{1}{2}(-\underline{a} + \underline{c}) + \frac{1}{6}(\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c})$$

$$= \frac{1}{3}(2\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c}).$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= -\underline{b} + \underline{a} - \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} \quad —①$$

மேலும் $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}$

$$= -\underline{b} + \frac{1}{3}(2\underline{a} - \underline{b} + 2\underline{c})$$

$$BG = \frac{2}{3}(\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}). —②$$

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஏற்ப $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BG}$ ஆகிய காவிகள் சமாந்தரமாகும். மேலும் அக்காவிகள் பொதுப் புள்ளி B இனூடாக இருப்பதனால் B, D, G ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளனவாகும். ஆகவே மையப்போலி கோடு BD மீது இருக்கின்றது.

12. $\underline{a}$ என்பது ஓர் அலகுக் காவியாகும். காவி $\underline{b}$ ஆனது $(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} + \underline{b}) = 1$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனின், $|\underline{b}|$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

அது $(\underline{b} - \underline{a}).(\underline{a} + \underline{b}) = 1$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றது எனின், $|\underline{b}|$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} + \underline{b}) = 1 \Rightarrow \underline{a}.\underline{a} + \underline{a}.\underline{b} - \underline{b}.\underline{a} - \underline{b}.\underline{b} = 1$$

$$\Rightarrow |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2 = 1.$$

$\underline{a}$ ஓர் அலகுக் காவி ஆகையால், $\Rightarrow 1 - |\underline{b}|^2 = 1.$

$$\Rightarrow |\underline{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\underline{b}| = 0. \quad \underline{b} = \underline{0}.$$

$(\underline{b}-\underline{a}).(\underline{a}+\underline{b})=1 \Rightarrow \underline{b}.\underline{a}+\underline{b}.\underline{b}-\underline{a}.\underline{a}-\underline{a}.\underline{b}=1$

$\Rightarrow \left|\underline{b}\right|^2-\left|\underline{a}\right|^2=1.$

$\underline{a}$ ஓர் அலகுக் காவி ஆகையால், $\Rightarrow \left|\underline{b}\right|^2-1=1.$

$\Rightarrow \left|\underline{b}\right|^2=2 \Rightarrow \left|\underline{b}\right|=\sqrt{2}.$

13. $\underline{a}=2\underline{i}+p\underline{j}$, $\underline{b}=2\underline{j}-5\underline{i}$ என்னும் காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின், மாறிலி p இற்கு இருக்கத்தக்க பெறுமானத்தைக் காண்க. p இன் இப்பெறுமானத்திற்கு $\underline{b}-\underline{a}$ ஐக் கண்டு, $\underline{a}$, $\underline{b}-\underline{a}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைத் துணிக.

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய சூனியமல்லாத காவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனின், $\underline{a}.\underline{b}=0$.

ஆகவே $(2\underline{i}+p\underline{j}).(2\underline{j}-5\underline{i})=0$

$$\Rightarrow 2\times -5+p\times 2=0 \Rightarrow p=5.$$

இப்போது $\underline{a}=2\underline{i}+5\underline{j}$ ஆகையால்

$\underline{b}-\underline{a}=2\underline{j}-5\underline{i}-(2\underline{i}+5\underline{j})=-7\underline{i}-3\underline{j}.$

$\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}-\underline{a}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்பதற்கு $\underline{a}$, $\underline{b}-\underline{a}$ ஆகியவற்றின் குற்றுப் பெருக்கத்தைக் கருதுவோம்.

முதலில் $\underline{a}.(\underline{b}-\underline{a})=(2\underline{i}+5\underline{j}).(-7\underline{i}-3\underline{j})$

$$=-14-15$$
$$=-29$$

$\underline{a}$, $\underline{b}-\underline{a}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் α எனக் கொள்வோம்.

குற்றுப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப
$\underline{a}.(\underline{b}-\underline{a})=\left|\underline{a}\right|\left|\underline{b}-\underline{a}\right|\cos\alpha$ ஆகையால்

$\left|\underline{a}\right|\left|\underline{b}-\underline{a}\right|\cos\alpha=-29.$ மேலும் $a^2=2^2+5^2=29,$

$\left|\underline{b}-\underline{a}\right|^2=(-7^2)+(-3)^2=58$ ஆகையால்

$\sqrt{29}\sqrt{58}\cos\alpha = -29.$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}.$

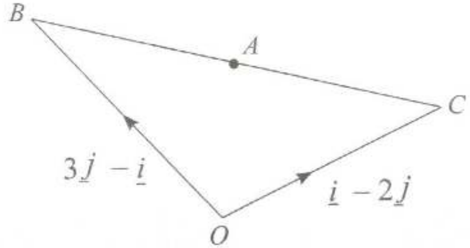
அதாவது $\underline{a}$, $\underline{b}-\underline{a}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\dfrac{3\pi}{4}$ ஆகும்.

14. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து B, C ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $3\underline{j}-\underline{i}$, $\underline{i}-2\underline{j}$ ஆகும். BC இன் நடுப் புள்ளி A எனின், புள்ளி A இன் தானக் காவியைக் காண்க. $3\underline{i}+7\underline{j}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தையும் துணிக.

$CA : AB = 1:1$

$\Rightarrow CA = \frac{1}{2}CB.$

மேலும் CA போன்று CB ஒரே திசையில் இருப்பதனால்



$$\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-\underline{i}+2j+3\underline{j}-\underline{i})$$

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(-2\underline{i}+5\underline{j}).$$

A இன் தானக் காவி $\overrightarrow{OA}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}$ ஆகையால் $\overrightarrow{OA} = \underline{i}-2\underline{j}+\frac{1}{2}(-2\underline{i}+5\underline{j}) = \frac{1}{2}\underline{j}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = -3\underline{j}+\underline{i}+\underline{i}-2\underline{j} = 2\underline{i}-5\underline{j}.$

$3\underline{i}+7\underline{j}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் α எனின்,

குற்றுப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப

$$(3\underline{i}+7\underline{j}).\ \overrightarrow{BC} = |3\underline{i}+7\underline{j}| \times BC \cos\alpha$$

$$= \sqrt{58} \times |2\underline{i} - 5\underline{j}| \cos\alpha$$

$$= \sqrt{58} \times \sqrt{29} \cos\alpha$$

$$= 29\sqrt{2} \cos\alpha.$$

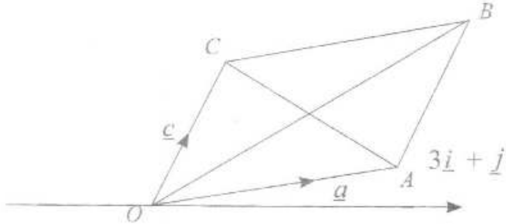
மேலும் $(3\underline{i}+7\underline{j}).\ \overrightarrow{BC} = (3\underline{i}+7\underline{j}).(2\underline{i}-5\underline{j})$

$$= 3\times 2 - 7\times 5 = -29.$$

ஆகவே $29\sqrt{2}\cos\alpha = -29. \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$.

$3\underline{i}+7\underline{j}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகிய காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\frac{3\pi}{4}$ ஆகும்.

15. $OABC$ ஒரு சாய்சதுரம். A இன் தானக் காவி $3\underline{i}+\underline{j}$ ஆகும். இங்கு $\underline{i}, \underline{j}$ ஆகியன வழக்கமான குறிப்பீடுள்ளவை. C இன் தானக் காவி $\underline{c}$ எனின், மூலைவிட்டம் OB இனால் வகைகுறிக்கப்படும் காவியைக் காண்க. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தானவை என்பதைப் பயன்படுத்தி $|\underline{c}| = \sqrt{10}$ எனக் காட்டுக.



மூலைவிட்டம் OB ஐ வகைகுறிக்கும் காவி $\overrightarrow{OB}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

$$= 3\underline{i} + \underline{j} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{c}.$$

இங்கு $\underline{a} = 3\underline{i} + \underline{j}$.

மேலும் $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = (3\underline{i} + \underline{j}) - \underline{c} = \underline{a} - \underline{c}$. ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்தானவை ஆகையால் $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{OB} = 0$.

$(\underline{a} - \underline{c}).(\underline{a} + \underline{c}) = 0$ எனின், $\underline{a} . \underline{a} + \underline{a} . \underline{c} - \underline{c} . \underline{a} - \underline{c} . \underline{c} = 0$.

மேலும் $\underline{a} . \underline{c} = \underline{c} . \underline{a}$ ஆகையால் இச்சமன்பாடு

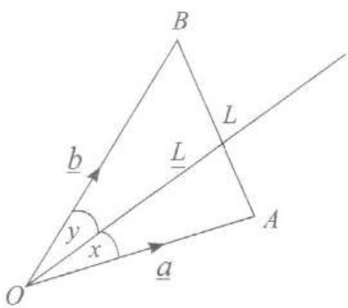
$\underline{a} . \underline{a} - \underline{c} . \underline{c} = 0$ ஆகும். எனவே $\underline{c} . \underline{c} = \underline{a} . \underline{a}$.

$\left|\underline{c}\right|^2 = \underline{c} . \underline{c} = \underline{a} . \underline{a} = \left|\underline{a}\right|^2 = 10$ ஆகையால் $\left|\underline{c}\right| = \sqrt{10}$.

* 16. OAB ஒரு முக்கோணி. OA, OB ஆகிய பக்கங்கள் பருமனிலும் திசையிலும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் காவிகளினால் வகைகுறிக்கப் படுகின்றன. காவி $a\underline{b} + b\underline{a}$ ஆனது கோணம் AOB இன் உள்ளிருகூறாக்கிக்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுவதற்குக் குற்றுப் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்துக.

AOB, BAO ஆகிய கோணங்களின் உள்ளிருகூறாக்கிகள் புள்ளி D இல் இடைவெட்டுமெனின், $(a + b + |\underline{a} - \underline{b}|)\ \overrightarrow{OD} = a\underline{b} + b\underline{a}$ எனக் காட்டுக.

$a\underline{b} + b\underline{a} = \underline{L}$ எனக் கொள்வோம். O இனூடாக உள்ள $\underline{L}$ இற்குச் சமாந்தரமாகக் கோட்டுத் துண்டம் உருவில் வரையப்பட்டுள்ளது. அது OA, OB ஆகிய பக்கங்களுடன் முறையே x, y என்னும் கோணங்களை ஆக்குகின்றதெனக் கொள்வோம்.



அப்போது $\underline{L}.\underline{a} = (a\underline{b} + b\underline{a}).\,\underline{a}$

$$= a\underline{b}.\underline{a} + b\underline{a}.\underline{a}$$

$$= a\,\underline{a}.\underline{b} + a^2 b.$$

ஆகவே $\underline{L}.\frac{1}{a}\,\underline{a} = \underline{b}.\underline{a} + ab.$ இங்கு $\frac{1}{a}\,\underline{a}$ ஆனது OA திசையில் அலகுக் காவியாகும்.

$\underline{L}.\underline{b} = (a\underline{b} + b\underline{a}).\underline{b} = a\underline{b}.\underline{b} + b\,\underline{a}.\underline{b}$

$= b\underline{b}.\underline{a} + ab^2$ ஆகையால் $\underline{L}.\frac{1}{b}\,\underline{b} = \underline{b}.\underline{a} + ab.$

இங்கு $\frac{1}{b}\,\underline{b}$ ஆனது OB திசையில் உள்ள அலகுக் காவியாகும்.

இதற்கேற்ப $\underline{L}.\frac{1}{a}\,\underline{a} = \underline{L}.\frac{1}{b}\,\underline{b}$ எனக் கிடைக்கின்றது.

குற்றுப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$\underline{L}.\frac{1}{a}\,\underline{a} = L \times 1 \times \cos x$$

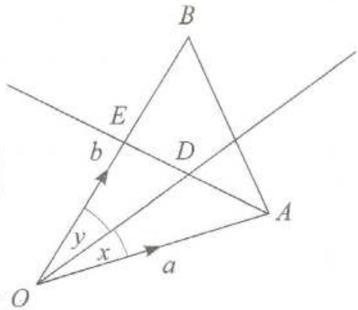
$\underline{L}.\frac{1}{b}\,\underline{b} = L \times 1 \times \cos y$ ஆகையால்

$L \times 1 \times \cos x = L \times 1 \times \cos y.$

அதற்கேற்ப $\cos x = \cos y \Rightarrow x = y.$ ஆகவே $\underline{L}$ காவி OA, OB ஆகிய பக்கங்களுடன் சம கோணங்களை ஆக்குகின்றது. எனவே $\underline{L}$ காவி அகக் கோணம் AOB இன் இருகூறாக்கியின் திசையாகும்.

மேலும் இக்கோண இருகூறாக்கி மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி D இற்கு $\overrightarrow{OD} = \lambda\ \overrightarrow{OL}$. அதாவது $\overrightarrow{OD} = \lambda\,(a\underline{b} + b\underline{a})$ என எழுதலாம்; இங்கு λ ஓர் எண்ணி.

DA ஆனது கோணம் BAO இன் உள்ளிருகூறாக்கி எனக் கொள்வோம்.



$\overrightarrow{AO} = -\underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ஆகையால் மேற்குறித்தவாறு AE இருகூறாக்கி யாகும்.

$\overrightarrow{AE} = \left|-\underline{a}\right|(\underline{b} - \underline{a}) + \left|\underline{b} - \underline{a}\right|$
$(-\underline{a}) = a(\underline{b} - \underline{a}) - \left|\underline{b} - \underline{a}\right|\underline{a}$

காவிக்குச் சமாந்தரமாகும். அப்போது AD காவி ஓர் எண்ணி μ உடன்

$\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{AE}$ ஆக இருக்கும்.

$\overrightarrow{AD} = \mu\left[\,a(\underline{b} - \underline{a}) - \left|\underline{b} - \underline{a}\right|\underline{a}\,\right]$ என எழுதலாம்.

அப்போது D இன் தானக் காவி $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ ஆகையால்

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \mu\left[\,\underline{a}\,(\underline{b} - \underline{a}) - \left|\underline{b} - \underline{a}\right|\underline{a}\,\right]$$

$$= \underline{a} + \mu\left[\,\underline{a}\,(\underline{b} - \underline{a}) - \left|\underline{b} - \underline{a}\right|\underline{a}\,\right]$$ என எழுதலாம்

ஆகையால்,

$$\lambda\,(a\underline{b} + b\underline{a}) = \underline{a} + \mu\left[\,\underline{a}\,(\underline{b} - \underline{a}) - \left|\underline{b} - \underline{a}\right|\underline{a}\,\right].$$

அப்போது $\lambda\, a\underline{b} + \lambda\, b\underline{a} = \underline{a} + \mu a\,(\underline{b} - \underline{a}) - \mu\left|\underline{b} - \underline{a}\right|\underline{a}.$

$$= (1 - \mu a - \mu\left|\underline{b} - \underline{a}\right|)\,\underline{a} + \mu a\underline{b}\,.$$

$\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன பூச்சியமல்லாத சமாந்தரமல்லாத காவிகள் ஆகையால் அவற்றின் குணகங்கள் வேறுவேறாகப் பூச்சியமாகும்.

$\lambda\, b = 1 - \mu a - \mu\left|\underline{b} - \underline{a}\right|$, $\lambda\, a = \mu a$ ஆகும்.

இரண்டாம் சமன்பாட்டிலிருந்து $\lambda = \mu$. அப்போது முதற் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\lambda b = 1 - \lambda a - \lambda \left| \underline{b} - \underline{a} \right|.$$

அதாவது $\lambda = \dfrac{1}{a + b + \left| \underline{b} - \underline{a} \right|}$.

$\overrightarrow{OD} = \lambda\,(a\underline{b} + b\underline{a})$ ஆகையால் அதில் λ ஐப் பிரதியிடும்போது

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{a + b + \left| \underline{b} - \underline{a} \right|}(a\underline{b} + b\underline{a}).$$

குறுக்குப் பெருக்கத்தின் மூலம் $(a + b + \left| \underline{b} - \underline{a} \right|)\,\overrightarrow{OD} = a\,\underline{b} + b\,\underline{a}$.

* 17. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளுக்குப் பின்வரும் சமனிலிகளைக் காட்டுக.

(i) $|\underline{a}.\underline{b}| \le |\underline{a}|.|\underline{b}|$.

(ii) $|\underline{a} + \underline{b}| \le |\underline{a}| + |\underline{b}|$.

$|\underline{a} - \underline{b}| \ge |\underline{a}| - |\underline{b}|$ என்பதை உய்த்தறிக.

(i) $\left|\underline{a}.\underline{b}\right| \le \left|\underline{a}\right|.\left|\underline{b}\right|$ இன் நிறுவல்

முதலில் $\underline{a}$ அல்லது $\underline{b}$ ஒரு சூனியக் காவியெனின், $\left|\underline{a}.\underline{b}\right| = 0$.

மேலும் $\left|\underline{a}\right|.\left|\underline{b}\right| \ge 0$ ஆகையால் அப்போது $\left|\underline{a}.\underline{b}\right| \le \left|\underline{a}\right|.\left|\underline{b}\right|$ உண்மையாகும்.

இரண்டாவதாக $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சூனியமற்ற காவிகளாக இருக்கும் போது

$\underline{a}.\underline{b} = a.b.\cos\theta$; இங்கு θ ஆனது அக்காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணமாகும்.

$\underline{a}.\underline{b} = ab\cos\theta$ ஆகையால் $\left|\underline{a}.\underline{b}\right| = \left|a.b.\cos\theta\right|$

ஆனால் $\left|\underline{a}\right| > 0,\ \left|\underline{b}\right| > 0,\ \left|\cos\theta\right| \leq 1$ ஆகையால்

$\left|a.b.\cos\theta\right| \leq \left|\underline{a}\right|\left|\underline{b}\right|$

$\therefore \left|\underline{a}.\underline{b}\right| \leq \left|\underline{a}\right|\left|\underline{b}\right|$

(ii) $\left|\underline{a}+\underline{b}\right| \leq \left|\underline{a}\right| + \left|\underline{b}\right|$ இன் நிறுவல்

$$\left|\underline{a}+\underline{b}\right|^2 = \left|(\underline{a}+\underline{b}).(\underline{a}+\underline{b})\right|$$

$$= \left|\underline{a}.\underline{a} + \underline{a}.\underline{b} + \underline{b}.\underline{a} + \underline{b}.\underline{b}\right|$$

$$\leq \left|\underline{a}\right|^2 + 2\left|\underline{a}.\underline{b}\right| + \left|\underline{b}\right|^2$$

$\leq \left|\underline{a}\right|^2 + 2\left|\underline{a}\right|.\left|\underline{b}\right| + \left|\underline{b}\right|^2$ மேற்குறித்த பகுதி (i) இலிருந்து

$$= (\left|\underline{a}\right| + \left|\underline{b}\right|)^2.$$

அதாவது $\left|\underline{a}+\underline{b}\right|^2 \leq (\left|\underline{a}\right| + \left|\underline{b}\right|)^2$

ஆகவே இரண்டு பக்கங்களிலும் நேர் வர்க்கமூலத்தைக் கருதும் போது $\left|\underline{a}+\underline{b}\right| \leq \left|\underline{a}\right| + \left|\underline{b}\right|$.

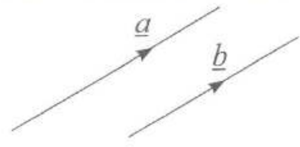
கேத்திரகணிதரீதியாகவும் இச்சமனிலியை நிறுவலாம்.

பின்வரும் மூன்று சந்தர்ப்பங்களையும் கருதுவோம்.

இங்கு $\underline{a} = \underline{0}$ அல்லது $\underline{b} = \underline{0}$ எனின், சமனிலி உண்மையானதென மிக எளிதாகக் காட்டலாம். ஆகவே $\underline{a} \neq \underline{0}$ எனவும் $\underline{b} \neq \underline{0}$ எனவும் கருதுவோம்.

சந்தர்ப்பம் (1) : $\underline{a},\ \underline{b}$ ஆகிய இரு காவிகளுக்கும் ஒரே போக்குகள் இருக்கும்போது

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய இரு காவிகளினதும் போக்கிற்கு உள்ள அலகுக் காவி $\underline{l}$ எனின், $\underline{a} = a\underline{l}$ எனவும் $\underline{b} = b\underline{l}$ எனவும் எழுதலாம்.



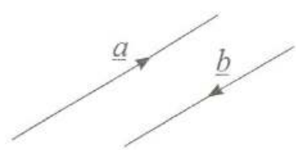
அப்போது

$$\underline{a} + \underline{b} = a\underline{l} + b\underline{l} = (a+b)\,\underline{l}.$$

$$\therefore \left|\underline{a} + \underline{b}\right| = a + b = \left|\underline{a}\right| + \left|\underline{b}\right|.$$

சந்தர்ப்பம் (2) : $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளின் போக்குகள் எதிராக இருக்கும்போது

கூடுதலான பருமன் உள்ள காவி $\underline{a}$ எனக் கொள்வோம். அக்காவியின் போக்கு உள்ள அலகுக் காவி $\underline{l}$ எனின், அப்போது $\underline{b}$ காவியின் போக்கிற்கு உள்ள அலகுக் காவி

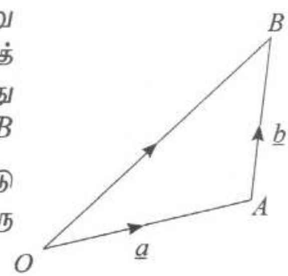


$-\underline{l}$ ஆகும். எனவே $\underline{a} = a\underline{l}$, $\underline{b} = -b\underline{l}$ என எழுதலாம் அப்போது $\underline{a} + \underline{b} = a\underline{l} - b\underline{l} = (a-b)\,\underline{l}$.

$$\Rightarrow \left|\underline{a} + \underline{b}\right| = (a - b).$$

சந்தர்ப்பம் (3) : $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் சமாந்தரமல்லாமல் இருக்கும்போது

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகளை வகைகுறிக்குமாறு OA, AB ஆகிய திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களை அமைப்போம். அப்போது திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டம் OB இனால் காவி $\underline{a} + \underline{b}$ வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. மேலும் இப்போது OAB ஒரு முக்கோணி ஆகையால்



$OB < OA + AB$

எனவே $\left|\underline{a} + \underline{b}\right| < \left|\underline{a}\right| + \left|\underline{b}\right|$.

சந்தர்ப்பங்கள் (1), (2), (3) ஆகியன தொடர்பான பொதுச் சமனிலி

$|\underline{a}+\underline{b}| \leq |\underline{a}|+|\underline{b}|$.

$|\underline{a}-\underline{b}| \geq |\underline{a}|-|\underline{b}|$ என்பதை உய்த்தறிதல்.

$|\underline{a}+\underline{b}| \leq |\underline{a}|+|\underline{b}|$ ஐச் சுருக்கும்போது $|\underline{a}+\underline{b}|-|\underline{b}| \leq |\underline{a}|$

அதாவது $|\underline{a}| \geq |\underline{a}+\underline{b}|-|\underline{b}|$. இங்கு a இற்குப் பதிலாகக் காவி $\underline{a}-\underline{b}$ ஐ இடும்போது $|\underline{a}-\underline{b}| \geq |(\underline{a}-\underline{b})+\underline{b}|-|\underline{b}|$

$$\geq |\underline{a}-\underline{b}+\underline{b}|-|\underline{b}|$$

$$\geq |\underline{a}|-|\underline{b}|$$ ஆகையால்

$$|\underline{a}-\underline{b}| \geq |\underline{a}|-|\underline{b}|$$

என்பது உண்மையாகும்.

18. $-2\underline{i}+3\underline{j}$, $\underline{i}+2\underline{j}$, $7\underline{i}$ என்னும் தானக் காவிகள் உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q, R எனக் கொள்வோம். $|\overrightarrow{PQ}|$, $|\overrightarrow{QR}|$, $|\overrightarrow{RP}|$ ஆகியவற்றைக் காண்க. P, Q, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளன என்பதை உய்த்தறிக.

ஒரு குறித்த உற்பத்தி O ஐக் குறித்து P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் $-2\underline{i}+3\underline{j}$, $\underline{i}+2\underline{j}$, $7\underline{i}$ ஆகையால்

$\overrightarrow{OP}=-2\underline{i}+3\underline{j}$,

$\overrightarrow{OQ}=\underline{i}+2\underline{j}$,

$\overrightarrow{OR}=7\underline{i}$. அப்போது

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\underline{i}-3\underline{j}+\underline{i}+2\underline{j}=3\underline{i}-\underline{j}.$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PQ}|^2=3^2+1^2=10. \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{10}.$$

இவ்வாறே $\overrightarrow{QR} = 6i - 2\underline{j}$, $\overrightarrow{RP} = -9\underline{i} + 3\underline{j}$

$\left| \overrightarrow{QR} \right| = 2\sqrt{10}$, $\left| \overrightarrow{RP} \right| = 3\sqrt{10}.$

அதற்கேற்ப $\left| \overrightarrow{PQ} \right| = \sqrt{10}$

$$\left| \overrightarrow{QR} \right| = 2\sqrt{10}$$

$$\left| \overrightarrow{RP} \right| = 3\sqrt{10}.$$

$$\Rightarrow \left| \overrightarrow{PQ} \right| + \left| \overrightarrow{QR} \right| = \sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} = \left| \overrightarrow{RP} \right|.$$

$\Rightarrow PQ + QR = PR.$ ஆகவே PQ, QR ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் சமாந்தரமல்லாதனவும் ஒரே புள்ளி Q இனூடாகச் செல்வனவுமாகும். $\therefore$ P, Q, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டி லுள்ளன ஆகும்.

19. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ என்னும் மூன்று அலகுக் காவிகள் சமன்பாடு $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன. $\underline{a}.\underline{b} + \underline{b}.\underline{c} + \underline{c}.\underline{a} = -\frac{3}{2}$ எனக் காட்டுக.

$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$, $\underline{a}$ ஆகியவற்றின் குற்றுப் பெருக்கத்திலிருந்து

$\underline{a}.(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}.\underline{0}$

$$\Rightarrow \underline{a}.\underline{a} + \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow a^2 + \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c} = 0.$$

$\underline{a}$ ஆனது ஓர் அலகுக் காவி ஆகையால் $\left| \underline{a} \right| = 1$

எனவே மேற்குறித்த சமன்பாடு

$$1 + \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c} = \underline{0} \Rightarrow \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c} = -1. \quad \text{—— (1)}$$

சமன்பாடு $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ இல் $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகிய அலகுக் காவிகள் ஒரே மாதிரி இருப்பதனால் மேற்குறித்தவாறு முறையே $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகியவற்றுடனான குற்றுப் பெருக்கத்தினால்

$\underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{b} \cdot \underline{c} = -1$ ——②

$\underline{c} \cdot \underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{b} = -1$ ——③

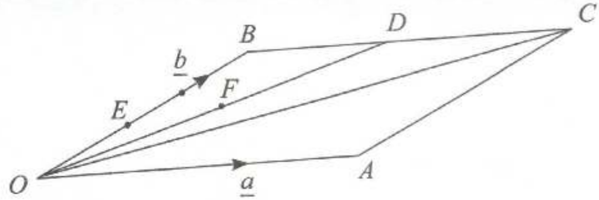
இம்மூன்று சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$\underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{c} \cdot \underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{b} = -3$

$\Rightarrow 2\underline{a} \cdot \underline{b} + 2\,\underline{b} \cdot \underline{c} + 2\,\underline{c} \cdot \underline{a} = -3$

$\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{c} \cdot \underline{a} = -\frac{3}{2}$.

20. OAB ஒரு முக்கோணி எனவும் $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ எனவும் கொள்வோம். C, D, E ஆகியன முறையே $\overrightarrow{OC} = \underline{a} + \underline{b}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\underline{b}$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளிகளாகும். மேலும் OD இன் நடுப் புள்ளி F எனின், C, F, E ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளனவெனக் காட்டுக.



குறிப்பு: C, F, E ஆகியன ஒரேகோட்டிலுள்ளனவெனின், $\overrightarrow{EF} = \lambda\,\overrightarrow{EC}$ வடிவத்தில் இருக்க வேண்டிய அதே வேளை $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EC}$ ஆகியன ஒரே புள்ளியினூடாகச் (E) செல்ல வேண்டும்.

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underline{a} + 2\underline{b}\right).$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = -\frac{1}{3}\underline{b} + \frac{1}{4}(\underline{a} + 2\underline{b})$$

$$= \frac{3\underline{a} + 2\underline{b}}{12}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{3}\underline{b} + \underline{a} + \underline{b} = \frac{3\underline{a} + 2\underline{b}}{3} = 4\,\overrightarrow{EF}.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF}$ ஆனது $\overrightarrow{EC}$ இற்குச் சமாந்தரம்.

மேலும் இக்காவிகள் இரண்டும் E இனூடாக இருக்கின்றமையால் பொருந்துகின்றன. E, F, C ஆகியன ஒரே கோட்டிலுள்ளன.

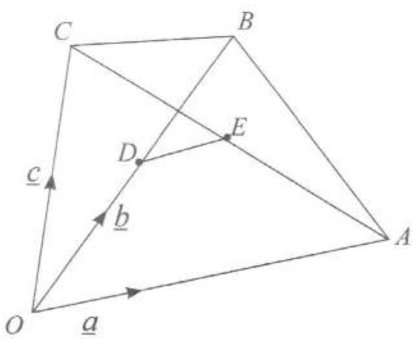
21. $OABC$ ஒரு நாற்பக்கல் எனவும் D, E ஆகியன முறையே OB, AC ஆகிய இரு மூலைவிட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம். உச்சி O பற்றி A, B, C ஆகிய உச்சிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ எனவும் கொள்வோம். M ஆனது DE இன் நடுப் புள்ளியெனின், M இன் தானக் காவி $\frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ எனக் காட்டுக.

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\underline{b}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

$$= -\underline{a} + \underline{c} = \underline{c} - \underline{a}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{a}).$$



$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\frac{1}{2}\underline{b} + \underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{a}) = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b} + \underline{c}).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\ (\ \underline{a} - \underline{b} + \underline{c}).$$

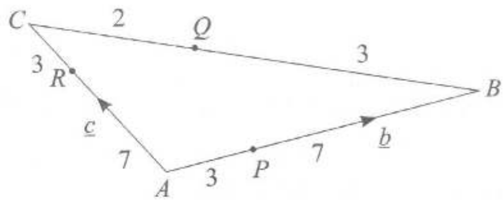
$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM}$$

$$= \frac{1}{2}\ \underline{b} + \frac{1}{4}(\ \underline{a} - \underline{b} + \underline{c})$$

$$= \frac{1}{4}\ (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}).$$

22. முக்கோணி ABC இல் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்கள் முறையே P, Q, R ஆகிய புள்ளிகளில் $3:7$, $3:2$, $3:7$ விகிதத்திற் பிரிக்கப்படுகின்றன. உச்சி A பற்றி B, C ஆகிய உச்சிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{b}$, $\underline{c}$ எனக் கொண்டு காவி $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}$ ஐ $\underline{b}$, $\underline{c}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. பக்கம் AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளி D இற்கு மேற்குறித்த காவியும் காவி $\overrightarrow{CD}$ உம் சமாந்தரமெனின், புள்ளி D இன் தானத்தைத் துணிக.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{7}$$



$$\Rightarrow AP = \frac{3}{10}\ AB.$$

AP போன்று AB உம் ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{10}\ \overrightarrow{AB} = \frac{3}{10}\ \underline{b}. \ \text{———} \ ①$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{3}{2} \Rightarrow BQ = \frac{3}{5}\ BC.$$

BQ போன்று BC உம் ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{5}\ \overrightarrow{BC} = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{5}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{3}{5}(\ \underline{c} - \underline{b}\ ). \ \text{———} \ ②$$

$\frac{CR}{RA} = \frac{3}{7} \Rightarrow CR = \frac{3}{10} CA.$

CR போன்று CA உம் ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{CR} = \frac{3}{10} \overrightarrow{CA} = -\frac{3}{10} \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{10} \underline{c} \text{ . ——— ③}$$

①, ②, ③ ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = \frac{3}{10} \underline{b} + \frac{3}{5} (\underline{c} - \underline{b}) - \frac{3}{10} \underline{c}$$

$$= \frac{-3}{10} \underline{b} + \frac{3}{10} \underline{c} = \frac{3}{10} (\underline{c} - \underline{b})$$

D ஆனது பக்கம் AB மீது உள்ள புள்ளியெனின், $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$

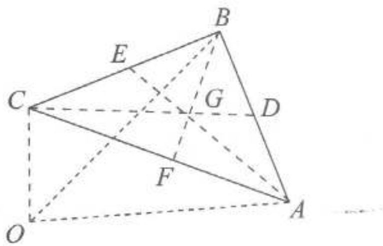
ஆக இருக்குமாறு ஓர் எண்ணி λ உளதாக இருக்கின்றது. அப்போது $\overrightarrow{AD} = \lambda \underline{b}$.

ஆகவே $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = - \underline{c} + \lambda \underline{b}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\overrightarrow{CD}$ உம் $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}$ உம் சமாந்தரம் ஆகையால் $- \underline{c} + \lambda \underline{b} = \mu (\underline{c} - \underline{b})$ ஆக இருக்குமாறு ஓர் எண்ணி μ உளதாக இருக்கின்றது. அப்போது $\underline{b}$ உம் $\underline{c}$ உம் சமாந்தரமல்லாத சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் வேறுவேறாக அவற்றின் குணகங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும் ஆகையால் $\lambda = - \mu$, $-1 = \mu$ ஆகும். எனவே. $\lambda = 1$.

$\overrightarrow{AD} = \lambda \underline{b}$ ஆகையால் $\overrightarrow{AD} = \underline{b} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow D, B$ ஆகிய புள்ளிகள் பொருந்துகின்றன.

* 23. ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் O அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $\lambda, \mu, \nu > 0$ ஆக இருக்கும்போது $\lambda\overrightarrow{OA}$, $\mu\overrightarrow{OB}$, $\nu\overrightarrow{OC}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுளை $(\lambda + \mu + \nu)\overrightarrow{OG}$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக;

இங்கு G ஆனது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியாகும்.
ஒரு தளத்தில் உள்ள A, B, C, D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் உச்சிகளாக இருக்கும் அதே வேளை K அதே தளத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளி ஆகும். $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KF}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுள் $6\overrightarrow{KO}$ என்பதை உய்த்தறிக.



முதலில் $\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுவோம். அதற்கு முக்கோணி ABC இன் பக்கம் AB ஐ $\mu:\lambda$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி D ஆகையால் λ ஐயும் μ ஐயும் தொடர்புபடுத்தி $\overrightarrow{OD}$ இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுவோம்.

அப்போது $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

ஆகையால் $\lambda.\overrightarrow{OD}=\lambda.\overrightarrow{OA}+\lambda.\overrightarrow{AD}$. —①

மேலும் $AD : DB = \mu : \lambda$ அத்துடன் அவை ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$\lambda.\overrightarrow{AD}=\mu.\overrightarrow{DB}$. —②

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$\Rightarrow \lambda.\overrightarrow{OD}=\lambda.\overrightarrow{OA}+\mu.\overrightarrow{DB}$. —③

மேலும் $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}$ ஆகையால்

$\mu.\overrightarrow{OD} = \mu.\overrightarrow{OB} + \mu.\overrightarrow{BD}.$ —④

③, ④ ஆகியவற்றிலிருந்து

$\lambda.\overrightarrow{OD} + \mu.\overrightarrow{OD} = \lambda.\overrightarrow{OA} + \mu.\overrightarrow{DB} + \mu.\overrightarrow{OB} + \mu.\overrightarrow{BD}.$

$\Rightarrow (\lambda + \mu)\overrightarrow{OD} = \lambda.\overrightarrow{OA} + \mu.\overrightarrow{OB} + \mu.\overrightarrow{DB} - \mu.\overrightarrow{DB}.$

$\Rightarrow (\lambda + \mu)\overrightarrow{OD} = \lambda.\overrightarrow{OA} + \mu.\overrightarrow{OB} + \underline{0}$

$\Rightarrow (\lambda + \mu)\overrightarrow{OD} = \lambda.\overrightarrow{OA} + \mu.\overrightarrow{OB}.$ —⑤

இப்போது $\overrightarrow{OG}$ இற்கு ஒரு கோவையைப் பெறுவோம்.

இடையம் CD ஐ $(\lambda + \mu) : v$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி G ஆகும். மேலும் CG, GD ஆகியன ஒரே திசையிலும் $v\,CG = (\lambda + \mu)\,GD$ ஆகவும் இருக்கின்றமையால்

$v.\overrightarrow{CG} = (\lambda + \mu).\overrightarrow{GD}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG}$ ஆகையால்

$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}.$

$\overrightarrow{CG}$ இற்குப் பிரதியிடும்போது

$\Rightarrow v\left(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}\right) = (\lambda + \mu).\overrightarrow{GD}.$

$\Rightarrow v\,\overrightarrow{OG} - v\,\overrightarrow{OC} = (\lambda + \mu).\overrightarrow{GD}.$

$\Rightarrow v\,\overrightarrow{OG} = v\,\overrightarrow{OC} + (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{GD}.$ —⑥

மேலும் $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}$ ஆகையால்

$(\lambda + \mu)\,\overrightarrow{OG} = (\lambda + \mu).\overrightarrow{OD} + (\lambda + \mu).\overrightarrow{DG}.$ —⑦

⑥, ⑦ ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டும்போது

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{OG} + v\,\overrightarrow{OG} = v\,\overrightarrow{OC} + (\lambda+\mu).\,\overrightarrow{GD} + (\lambda+\mu).\,\overrightarrow{OD} + (\lambda+\mu).\,\overrightarrow{DG}\,.$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu+v)\,\overrightarrow{OG} = (\lambda+\mu).\overrightarrow{OD} + v\,\overrightarrow{OC} + (\lambda+\mu).\,\overrightarrow{GD} - (\lambda+\mu).\,\overrightarrow{GD}.$$

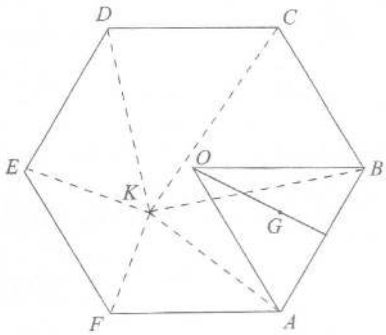
$$= (\lambda+\mu).\,\overrightarrow{OD} + v\,\overrightarrow{OC}.$$

சமன்பாடு ⑤ இலிருந்து $(\lambda+\mu).\,\overrightarrow{OD}$ இற்குப் பிரதியிடும்போது

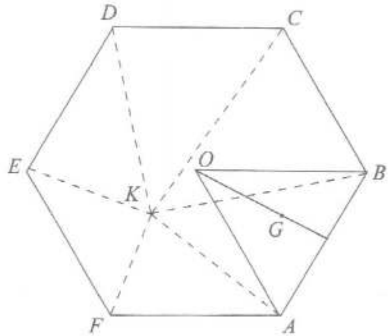
$$(\lambda+\mu+v)\,\overrightarrow{OG} = \lambda.\,\overrightarrow{OA} + \mu.\,\overrightarrow{OB}. + v\,\overrightarrow{OC}.$$

ஒரு தளத்தில் இருக்கும் A, B, C, D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் உச்சிகளாக இருக்கும் அதே வேளை K அத்தளத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியும் O ஆனது அறுகோணியின் மையமும் ஆகும். $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KF}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுள் $6\,\overrightarrow{KO}$ என உய்த்தறிதல்.

இப்போது முக்கோணி OAB ஐயும் அதே தளத்தில் இருக்கும் நிலைத்த புள்ளி K ஐயும் கருதுக.

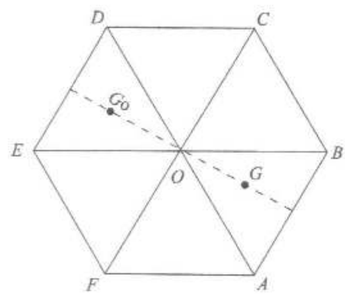


இங்கு G ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $1:1$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளியும் எஞ்சியுள்ள உச்சியாகிய புள்ளி O ஐத் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டம் அதாவது முக்கோணி OAB இன் O இனூடாக உள்ள இடையத்தை $2:1$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளியாகிய முக்கோணி OAB இன் மையப்போலியும் ஆகும்.



மேலே நிறுவிய பேறைக் கொண்டு $\lambda=\mu=\nu=1$ என எடுக்கும்போது $\lambda\,\overrightarrow{KA},\ \mu\,\overrightarrow{KB},\ \nu\overrightarrow{KO}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுள் $(\lambda+\mu+\nu)\,\overrightarrow{KG}$.
அதாவது $3\,\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KO}$ ஆகும்.

ஆகவே $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KO}=3\,\overrightarrow{KG}$.



முக்கோணி ODE ஐக் கருதும்போது

$\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KO}=3\,\overrightarrow{KG_{o}}$.

இங்கு G_{o} ஆனது முக்கோணி ODE இன் மையப்போலியாகும். சமச்சீரிலிருந்து $GO=OG_{o}$ ஆகவும் ஒரே திசையிலும் இருப்பதனால்
$\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{OG_{o}}\,.\Rightarrow\overrightarrow{OG_{o}}=-\overrightarrow{OG}$ ஆகவே $\overrightarrow{OG_{o}}+\overrightarrow{OG}=\underline{0}$.
எனவே $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KO}=3\,\overrightarrow{KG_{o}}+3\,\overrightarrow{KG}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}+2\,\overrightarrow{KO} &= 3\left(\overrightarrow{KG_{o}}+\overrightarrow{KG}\right)\\
&= 3\left(\overrightarrow{KG_{o}}+\overrightarrow{KG}\right)\\
&= 3\left(\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OG_{o}}+\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OG}\right)\\
&= 3\left(2\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OG_{o}}+\overrightarrow{OG}\right)\\
&= 6\,\overrightarrow{KO}.
\end{aligned}$$

ஆகவே $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} = 4\overrightarrow{KO}$. —— ④

OBC, OEF ஆகிய முக்கோணிகளைக் கருதும்போது

$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KE} = 4\overrightarrow{KO}$. —— ⑤

OCD, OFA ஆகிய முக்கோணிகளைக் கருதும்போது

$\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KA} = 4\overrightarrow{KO}$. —— ⑥

④, ⑤, ⑥ ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டும்போது

$$2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KE} + 2\overrightarrow{KF} = 12\overrightarrow{KO}.$$

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KF} = 6\overrightarrow{KO}.$$

ஆகவே $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KF}$ ஆகிய காவிகளின் விளையுள் $6\overrightarrow{KO}$ ஆகும்.

* 24. O, A, B ஆகியன ஒரு நேர்கோட்டில் இல்லாத புள்ளிகளாக இருக்கும் அதே வேளை $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ எனக் கொள்வோம். P, Q ஆகியன $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\underline{a}$ ஆகவும் $\overrightarrow{QP} = \frac{a}{2b}\underline{b}$ ஆகவும் உள்ள புள்ளிகளாகும்.

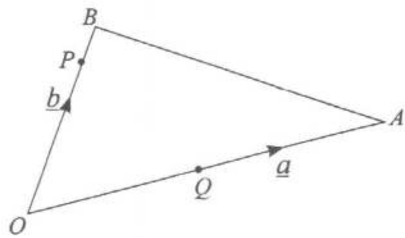
$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PA}$ ஆகியவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைத்து $\underline{a} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$ என்பதையும் $\underline{b} = \frac{b}{a}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA}\right)$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

R ஆனது $AR:RB = a:b$ ஆகுமாறு AB மீது உள்ள புள்ளியெனத் தரப்படும்போது $\overrightarrow{OR}$ ஐக் காண்க.

(i) O, P, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டின் மீது உள்ளன எனவும்

(ii) $2\left|OP\right| > \left|OR\right|$ எனவும்

காட்டுக. (1989)



$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\ \underline{a}$, $\overrightarrow{QP} = \frac{a}{2b}\ \underline{b}$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆகும்.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{a}{2b}\ \underline{b} = \frac{1}{2b}(b\underline{a} + a\underline{b})$$

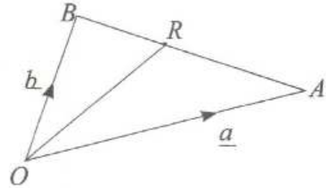
$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2b}(b\underline{a} + a\underline{b}) + \underline{a}$$

$$= \frac{1}{2b}(b\underline{a} - a\underline{b}).$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \frac{1}{2b}(b\underline{a} + a\underline{b}) + \frac{1}{2b}(b\underline{a} - a\underline{b}) = \underline{a}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA} = \frac{1}{2b}(b\underline{a} + a\underline{b}) - \frac{1}{2b}(b\underline{a} - a\underline{b}) = \frac{1}{b}a\underline{b}.$$

$$\therefore \underline{b} = \frac{b}{a}\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{PA}\right).$$



R ஆனது $AR : RB = a : b$ ஆகுமாறு AB மீது உள்ள புள்ளியாகும். ஒரே திசையில் உள்ள BR, RA ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களைக் கருதும்போது

$\frac{1}{BR}\overrightarrow{BR}$, $\frac{1}{RA}\overrightarrow{RA}$ ஆகியன சம காவிகள் ஆகையால் $\overrightarrow{RA} = \frac{RA}{BR}\overrightarrow{BR}$.

ஆகவே $\overrightarrow{RA} = \frac{a}{b}\overrightarrow{BR}$.

$\Rightarrow b.\overrightarrow{RA} = a.\overrightarrow{BR}$ உம் $\Rightarrow b.\overrightarrow{RA} + a.\overrightarrow{RB} = \underline{0}$ உம் ஆகும். —— ①

மேலும் $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \underline{a} + \overrightarrow{AR}$

$\therefore b.\overrightarrow{OR} = b.\underline{a} + b.\overrightarrow{AR}$ —— ②

மேலும் $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BR}$

$= \underline{b} + \overrightarrow{BR}$ ஆகையால்

$a.\overrightarrow{OR} = a.\underline{b} + a.\overrightarrow{BR}$ —— ③

② + ③ ;

$a.\overrightarrow{OR} + b.\overrightarrow{OR} = a.\underline{b} + a.\overrightarrow{BR} + b.\underline{a} + b.\overrightarrow{AR}$

$\Rightarrow (a+b)\overrightarrow{OR} = b.\underline{a} + a.\underline{b} - a.\overrightarrow{RB} + b.\overrightarrow{AR}$

① இலிருந்து $b.\overrightarrow{RA} + a.\overrightarrow{RB} = \underline{0}$ ஆகையால்

$= b.\underline{a} + a.\underline{b} - a.\overrightarrow{RB} - b.\overrightarrow{RA}$.

$\Rightarrow (a+b)\overrightarrow{OR} = b.\underline{a} + a.\underline{b}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OR} = \frac{1}{a+b}(b.\underline{a} + a.\underline{b})$.

(i) O, P, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டின் மீது இருக்கின்றன எனக் காட்டல்;

இங்கு $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2b}\ (b\underline{a} + a\underline{b})$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{a+b}\,(b.\underline{a} + a.\underline{b})$ ஆகையால்

$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OR}$ ஆகியன சமாந்தரக் காவிகளாக இருக்கும் அதே வேளை அவை பொதுப் புள்ளி O இனூடாக இருக்கின்றமையால் O, P, R ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டின் மீது இருக்கின்றன.

(ii) $2\left|OP\right| > \left|OR\right|$ எனக் காட்டல்

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2b}\ (b\underline{a} + a\underline{b})\ \Rightarrow 2\left|OP\right| = \frac{1}{b}\left|\,b\underline{a} + a\underline{b}\,\right|.$

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{a+b}\ (b\underline{a} + a\underline{b})$ ஆகையால் $\left|OR\right| = \frac{1}{a+b}\left|\,b\underline{a} + a\underline{b}\,\right|$

மேலும் a, b ஆகியன ஒரு முக்கோணியின் இரு பக்கங்களின் நீளங்களை வகைகுறிக்கின்றமையால் $a > 0,\ b > 0$ ஆதலின் $a + b > b$ ஆகும். $\Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a+b}$ ஆகையால்

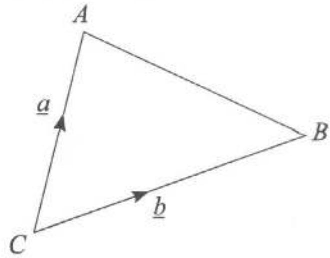
$\frac{1}{b}\left|\,b\underline{a} + a\underline{b}\,\right| > \frac{1}{a+b}\left|\,b\underline{a} + a\underline{b}\,\right|$

ஆகையால் $2\left|OP\right| > \left|OR\right|$.

* 25. $\underline{a}$, $\underline{b}$ என்னும் இரு சூனிய மற்ற காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கத்தை வரையறுக்க. ஒரு முக்கோணி ABC இல் $\overrightarrow{CA} = \underline{a}$ எனவும் $\overrightarrow{CB} = \underline{b}$ எனவும் கொள்வோம். எண்ணிப் பெருக்கம் $(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} - \underline{b})$ ஐக் கருதுவதன்மூலம் $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ எனக் காட்டுக; இங்கு $a = |\underline{a}|$, $b = |\underline{b}|$, $c = |\underline{a} - \underline{b}|$. கோணம் ACB இன் உள்ளிரு கூறாக்கி CL ஆக இருக்குமாறு AB மீது புள்ளி L உள்ளது. $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய காவிகள் ஒவ்வொன்றுடனும் காவி $\overrightarrow{CL} = \underline{l}$ இன் எண்ணிப் பெருக்கத்தைக் கருதுவதன் மூலம் $\underline{l} = \dfrac{b\underline{a} + a\underline{b}}{a+b}$ எனக் காட்டுக.

$CL^2 = ab\left[1 - \dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right]$ என்பதை உய்த்தறிக.

(1993)



$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகிய இரு சூனியமற்ற காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கம் $\underline{a}\,.\underline{b} = ab\cos\alpha$ என வரையறுக்கப்படும். இங்கு α ஆனது காவிகளுக்கிடையே உள்ள கோணமாகும்.

$$\underline{a} - \underline{b} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \left| \underline{a} - \underline{b} \right| = BA = c.$$

$$(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} - \underline{b}) = \underline{a}\,.(\underline{a} - \underline{b}) - \underline{b}\,.(\underline{a} - \underline{b})$$

$$= \underline{a}\,.\underline{a} - \underline{a}\,.\underline{b} - \underline{b}\,.\underline{a} + \underline{b}\,.\underline{b}$$

$$= a^2 - \underline{a}\,.\underline{b} - \underline{a}\,.\underline{b} + b^2$$

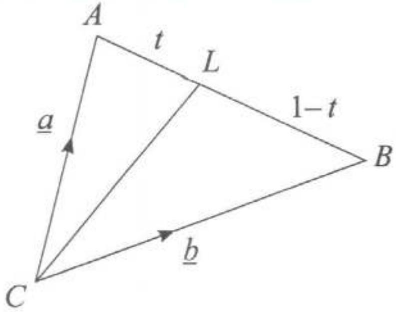
$$= a^2 - 2\,\underline{a}\,.\underline{b} + b^2.$$

மேலும் $(\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} - \underline{b}) = \left| \underline{a} - \underline{b} \right|^2 = c^2.$

ஆகவே $c^2 = (\underline{a} - \underline{b}).(\underline{a} - \underline{b}) = a^2 - 2\underline{a}\,.\,\underline{b} + b^2$

$$c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2.$$

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2.$$



$AL : LB = t : (1-t)$ எனக் கொள்வோம்.

$\Rightarrow \dfrac{AL}{AB} = \dfrac{t}{t+1-t} = t$

$\Rightarrow \overrightarrow{AL} = t\,\overrightarrow{AB}.$

$$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{CA} + t\,\overrightarrow{AB} = \underline{a} + t\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \underline{a} + t\left(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right).$$

$$\therefore\ \overrightarrow{CL} = \underline{a} + t\,(\underline{b} - \underline{a}) = (1-t)\,\underline{a} + t\,\underline{b} \Rightarrow \underline{l} = \underline{a} + t\,(\underline{b} - \underline{a}).$$

$\underline{l}\,.\underline{a} = l \times a \times \cos\dfrac{C}{2}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

$\underline{l}\,.\underline{a} = (1-t)\,\underline{a}\,.\underline{a} + t\,\underline{b}\,.\,\underline{a} = (1-t)a^2 + tba\,\cos C.$

$\Rightarrow la\cos\dfrac{C}{2} = (1-t)\,a^2 + bta\cos C.$

$\Rightarrow l\cos\dfrac{C}{2} = (1-t)\,a + bt\cos C.$ —①

மேலும் $\underline{l}\,.\underline{b} = l \times b \times \cos\dfrac{C}{2}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

$\underline{l}\,.\underline{b} = (1-t)\,\underline{a}.\underline{b} + t\,\underline{b}.\underline{b} = (1-t)\,ab\cos C + tb^2.$

$\therefore\ l \times b \times \cos\dfrac{C}{2} = (1-t)\,ab\cos C + tb^2.$

$\Rightarrow l\cos\dfrac{C}{2} = a\,(1-t)\cos C + tb$ —②

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும்

$$a\,(1-t)\ + bt\cos C = a\,(1-t)\cos C + tb$$

$$\Rightarrow a\,(1-t)\,(1-\cos C\,)\ = bt\ (1-\cos C\,) \Rightarrow a\,(1-t) = bt$$

$$\Rightarrow t = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow 1-t = 1-\ \frac{a}{a+b}\ .$$

$\underline{l}\ = (1-t)\,\underline{a}\ + t\,\underline{b}$ ஆகையால் $l = \dfrac{b}{a+b}\ \underline{a}\ +\ \dfrac{a}{a+b}\,\underline{b}$

$$= \frac{b\underline{a} + a\underline{b}}{a+b}$$

$$\therefore\ CL^2 = \underline{l}\,.\underline{l}\ = \left(\frac{b\underline{a} + a\underline{b}}{a+b}\right).\left(\frac{b\underline{a} + a\underline{b}}{a+b}\right)$$

$$= \frac{b^2a^2 + 2ab\ \underline{a}\ .\ \underline{b}\ + b^2a^2}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2ab \times ab\cos C}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2}\left[2ab + 2ab\cos C\right].$$

மேலும் $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ ஆகையால்

$$CL^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}\left[2ab + a^2 + b^2 - c^2\right]$$

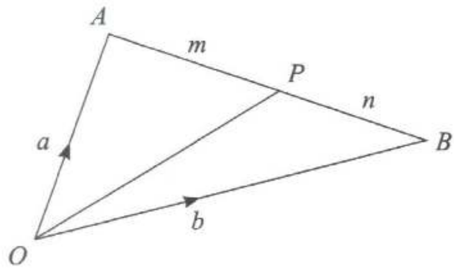
$$= \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right]$$

எனவே $CL^2 = ab\left[1 - \dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right].$

* 26. ஓர் உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகும். புள்ளி P ஆனது $m : n$ விகிதத்தில் AB ஐப் பிரிக்கின்றது. $(m+n)\overrightarrow{OP} = n\underline{a} + m\underline{b}$ எனக் காட்டுக.

$OABC$ ஓர் இணைகரமெனக் கொள்வோம். D ஆனது பக்கம் OA இன் நடுப் புள்ளியெனின், OB, CD ஆகியன ஒன்றையொன்று முக்கூறிடுகின்றனவெனக் காட்டுக.

(1981)



$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$ ஆகையால்

$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{m}{n+m}$.

AP, AB ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையில் இருக்கின்றமையால் $\overrightarrow{AP} = \dfrac{m}{n+m}\overrightarrow{AB}$.

ஆகவே $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$.

$$= \underline{a} + \frac{m}{n+m}\overrightarrow{AB}.$$

இங்கு $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.
$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
$= -\underline{a} + \underline{b}$.

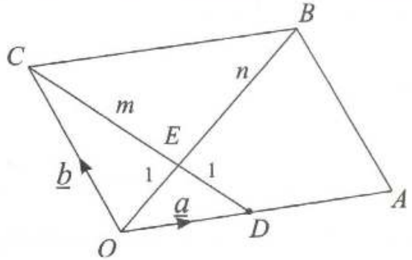
$$= \underline{a} + \frac{m}{n+m}(-\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \left(1 - \frac{m}{n+m}\right)\underline{a} + \frac{m}{n+m}\underline{b}$$

$$= \frac{n}{n+m}\underline{a} + \frac{m}{n+m}\underline{b}.$$

$\Rightarrow (m+n)\overrightarrow{OP} = n\underline{a} + m\underline{b}.$

இது ஒரு தேற்றமாக இருந்தாலும் உயர் தர இணைந்த கணிதப் பாடத்திட்டத்தில் இது பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.



$\dfrac{CE}{ED}=\dfrac{m}{1}$ எனின், மேற்குறித்த பேறுக்கேற்ப

$$(m+1)\ \overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+m\ \overrightarrow{OD}$$

$$=\underline{b}+\frac{m}{2}\ \underline{a}.$$

இங்கு $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\ \overrightarrow{OA}$
$=\dfrac{1}{2}\ \underline{a}.$

$\dfrac{OE}{EB}=\dfrac{1}{n}$ எனின், மேற்கூறியதிலிருந்து $(n+1)\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+n\ \overrightarrow{AO}$

$$(n+1)\ \overrightarrow{AE}=\underline{b}+n\,(-\underline{a}).$$

மேலும் முக்கோணி OAE இலிருந்து $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow (m+1)(1+n)\ \overrightarrow{OE}=(m+1)(1+n)\ \overrightarrow{OA}+(m+1)(1+n)\ \overrightarrow{AE}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை மேலே $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AE}$ ஆகியன பெறப்பட்ட கோவைகளிலிருந்து

$$(1+n)\left[\underline{b}+\frac{m}{2}\ \underline{a}\right]=(1+m)\ (n+1)\ \underline{a}+\ (1+m)\left[\underline{b}-n\ \underline{a}\right].$$

இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமல்லாத சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் அக்காவிகளின் கூறுகளைக் கருதுவோம்.

$\underline{a}$ இன் கூறுகளைக் கருதும்போது

$$(1+n)\frac{m}{2}=(1+m)\,(n+1)-(1+m)n$$

$$(1+n)\frac{m}{2}=\ 1+m \text{ ——①}$$

$\underline{b}$ இன் கூறுகளைக் கருதும்போது

$$1+n=1+m\Rightarrow m=n.$$

① இல் பிரதியிடும்போது $(1+n)\frac{n}{2} = 1+n$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} = 1. \Rightarrow n = 2.$$

$\Rightarrow \frac{CE}{ED} = \frac{2}{1} \Rightarrow CE : ED = 2:1,\ \frac{OE}{EB} = \frac{1}{2} \Rightarrow OE : EB = 1:2$

ஆகையால் E ஆனது OB ஐயும் CD ஐயும் முக்கூறிடும் புள்ளியாகும்.

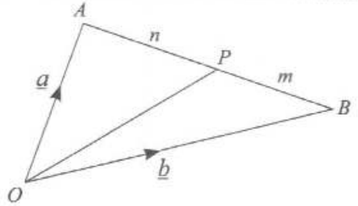
ஆகவே OB, CD ஆகியன ஒன்றையொன்று முக்கூறிடுகின்றன.

* 27. i. A, B என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோடு மீது புள்ளி P உள்ளது. ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B ஆகிய புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகவும் $AP : PB = n : m$ ஆகவும் இங்கு $n + m = 1$ ஆகவும் இருப்பின் O பற்றி P இன் தானக் காவி $m\underline{a} + n\underline{b}$ எனக் காட்டுக.

ii. ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணி ABC இன் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை அல்லது நீட்டப்பட்ட அப்பக்கங்களை முறையே X, Y, Z என்னும் புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது.
$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$ எனக் காவிகளைப் பயன்படுத்திக் காட்டுக.

(1981)

i.



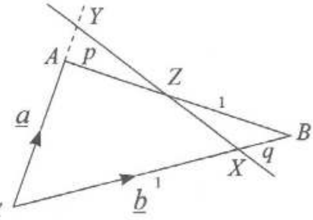
மேற்குறித்த பிரசினத்தில்

$(n+m)\overrightarrow{OP} = m\underline{a} + n\underline{b}$ என அறிவோம் (மேலே வினா 26 இற்கேற்ப அதனைக் காண வேண்டும்).

இங்கு $n + m = 1$ ஆகையால்

$\overrightarrow{OP} = m\underline{a} + n\underline{b}.$

ii. ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணி ABC இன் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை அல்லது நீட்டப்பட்ட பக்கங்களை முறையே X, Y, Z ஆகிய புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றது எனக் கொள்வோம்.



கோட்டினால் AB, CB ஆகிய பக்கங்கள் உள்ளேயும் பக்கம் CA வெளியேயும் உருவில் உள்ளவாறு இடைவெட்டப்படுகின்றன.

புள்ளி C ஐக் குறித்து A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ எனக் கொள்வோம்.

ஒரே திசையில் இருக்கும் AZ, ZB ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களைக் கருதும்போது

$\frac{1}{AZ}\ \overrightarrow{AZ},\ \frac{1}{ZB}\ \overrightarrow{ZB}$ ஆகியன சம காவிகள் ஆகையால்

$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} = \frac{AZ}{ZB}\ \overrightarrow{ZB}$; இங்கு $\frac{AZ}{ZB} = p$ எனக் கொள்ளும்போது

$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} = p\ \overrightarrow{ZB}$ ஆகையால் $\overrightarrow{AZ} - p\ \overrightarrow{ZB} = \underline{0}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} + p\ \overrightarrow{BZ} = \underline{0}$.

மேலும் $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AZ} = \underline{a} + \overrightarrow{AZ}$. —①

மேலும் $\overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BZ}$

$= \underline{b} + \overrightarrow{BZ}$.

ஆகவே $p\ \overrightarrow{CZ} = p\ \underline{b} + p\ \overrightarrow{BZ}$. —②

$$① + ② ; \overrightarrow{CZ} + p\,\overrightarrow{CZ} = \underline{a} + \overrightarrow{AZ} + p\,\underline{b} + p\,\overrightarrow{BZ}$$

$$(1+p)\,\overrightarrow{CZ} = \underline{a} + p\,\underline{b} + \overrightarrow{AZ} + p\,\overrightarrow{BZ}$$

$$= \underline{a} + p\,\underline{b} + \underline{0}.$$

$$= \underline{a} + p\,\underline{b}.$$

ஆகவே $\overrightarrow{CZ} = \dfrac{\underline{a} + p\,\underline{b}}{1+p}$; இங்கு $\dfrac{AZ}{ZB} = p.$

இதனைப் பக். 26 இல் உள்ள பேறின் விரியிலிருந்தும் பெறலாம். அதாவது ஒரு புள்ளி O ஐக் குறித்துக் கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $1 : p$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளியின் தானக் காவி

$$\overrightarrow{OC} = P\,\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{1+p}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CZ}$$

$$= -\underline{a} + \frac{\underline{a} + p\,\underline{b}}{1+p}$$

$$= p\,\frac{\underline{b} - \underline{a}}{1+p}$$

பக்கம் BC ஆனது $BX : XC = q : 1$ விகிதத்தில் உள்ளே புள்ளி X இனால் பிரிக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம். அப்போது $CX : CB = 1 : (1+q)$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அவை ஒரே திசையில் இருக்கின்றமையால்

$$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{1+q}\,\overrightarrow{CB} = \frac{1}{1+q}\,\underline{b}\,.$$ இங்கு $\dfrac{BX}{XC} = q.$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}$$

$$= -\underline{a} + \frac{1}{1+q}\,\underline{b}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AZ}$$

$$= -\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AZ}$$

$$= -\left(-\underline{a} + \frac{1}{1+q}\underline{b}\right) + p\,\frac{\underline{b}-\underline{a}}{1+p}$$

$$= \frac{1}{1+p}\underline{a} + \left(\frac{p}{1+p} - \frac{1}{1+q}\right)\underline{b}.$$

நீட்டப்பட்ட பக்கம் AC ஆனது $CY : AY = r:1$ விகிதத்தில் புள்ளி Y இனால் பிரிக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம்.

அப்போது

$AY : CA = 1 : (r-1)$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

அவை ஒரே திசையில் இருப்பதனால்

$$\overrightarrow{AY} = \frac{1}{r-1}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{r-1}\underline{a}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AY}$$

$$= -\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{AY}$$

$$= -\left(-\underline{a} + \frac{1}{1+q}\underline{b}\right) + \frac{1}{r-1}\underline{a}$$

$$= \frac{r}{r-1}\underline{a} - \frac{1}{1+q}\underline{b}.$$

X, Y, Z ஆகியன ஒரே கோட்டில் இருக்கும் புள்ளிகள் ஆகையால் $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}$ ஆகியன சமாந்தரக் காவிகள் ஆகும்.

$\Rightarrow \overrightarrow{XZ} = \lambda\, \overrightarrow{XY}$ ஆகுமாறு ஓர் எண்ணி λ உளதாக இருக்கின்றது.

ஆகவே $\frac{1}{1+p}\underline{a} + \left(\frac{p}{1+p} - \frac{1}{1+q}\right)\underline{b} = \lambda\left[\frac{r}{r-1}\underline{a} - \frac{1}{1+q}\underline{b}\right]$

இங்கு $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமற்ற சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் அக்காவிகளின் கூறுகளைக் கருதும்போது

$\frac{1}{1+p} = \lambda \frac{r}{r-1}$, $\frac{p}{1+p} - \frac{1}{1+q} = -\lambda \frac{1}{1+q}$. முதற் சமன்பாட்டிலிருந்து

$\lambda (1 + p) = \frac{r-1}{r}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை இரண்டாம் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\lambda (1 + p) = -p \ (1 + q) + (1 + p)$$

$$= 1 - pq \text{ ஆகையால் } 1 - pq = \frac{r-1}{r}$$

$$1 - pq = 1 - \frac{1}{r}$$

$$pqr = 1$$

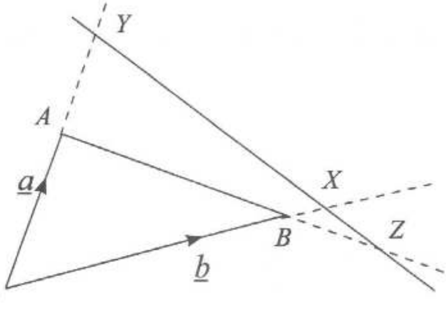
இங்கு $p = \frac{AZ}{ZB}$, $q = \frac{BX}{XE}$, $r = \frac{CY}{AY}$

$$\Rightarrow \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

இப்பிரசினத்தில் குறி வழக்கு கருதப்பட்டுள்ளது. அதாவது $AY = -YA$. ஆகவே $\Rightarrow \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{(-YA)} = 1$ ஆகையால்

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$

இந்நிறுவலில் முக்கோணியின் ஒரு பக்கம் மாத்திரம் வெளியே இடைவெட்டப்படும் சந்தர்ப்பம் கருதப்பட்டுள்ளது. இதற்கு மேலதிகமாக முக்கோணிக்கு வெளியே ஒரு நேர்கோடு இருக்கலாம். பின்வரும் உருவைப் பார்க்க.



இப்போது மேற்குறித்தவாறு

$$\Rightarrow \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{AY} = 1.$$

இப்போது $\frac{AZ}{ZB}, \frac{BX}{XC}, \frac{CY}{AY}$ ஆகிய மூன்று கோவைகளும் மறை ஆகையால்

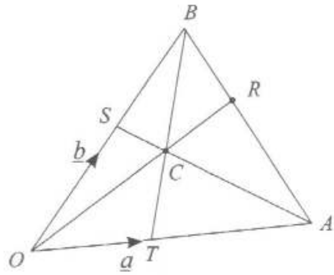
$$\frac{AZ}{ZB}, \frac{BX}{XC}, \frac{CY}{YA} = -1.$$

* **28.** ஓர் உற்பத்தி O ஐக் குறித்து A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகும். R ஆனது AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியாகும். A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளையும் OR மீது உள்ள புள்ளி C உடன் தொடுக்கும் கோடுகள் முறையே OB, OA ஆகிய கோடுகளை S, T என்னும் இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. $\frac{AR}{RB} = p$, $\frac{BS}{SO} = q$, $\frac{OT}{TA} = r$ எனின், $(1+p)\overrightarrow{OR} = \underline{a} + p\underline{b}$ எனவும் $(1+q+qr)\overrightarrow{OC} = qr\,\underline{a} + \underline{b}$ எனவும் காட்டுக.

ஓர் எண்ணி α உடன் $\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OR}$ எனக் கொண்டு $pqr = 1$ எனவும் காட்டுக.

(1985)

முதலில் $(1+p)\overrightarrow{OR} = \underline{a} + p\,\underline{b}$ எனக் காட்டுவோம்.



$\frac{AR}{RB} = p$ ஆகவும் AR, RB ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையிலும் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{AR} = p\overrightarrow{RB}$.

அதாவது $\overrightarrow{AR} - p\overrightarrow{RB} = \underline{0}$.

மேலும் $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \underline{a} + \overrightarrow{AR}$. —— ①

மேலும் $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BR}$

$= \underline{b} + \overrightarrow{BR}$. —— ②

① + ② × p ; $\overrightarrow{OR} + p\,\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \overrightarrow{AR} + p\left(\underline{b} + \overrightarrow{BR}\right)$

$\Rightarrow (1+p)\,\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \overrightarrow{AR} + p\,\underline{b} + p\,\overrightarrow{BR}$

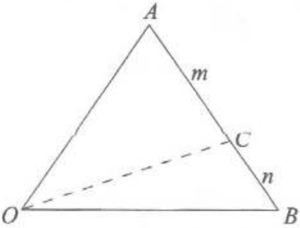
$= \underline{a} + p\,\underline{b} + \overrightarrow{AR} + p\,\overrightarrow{BR}$.

$= \underline{a} + p\,\underline{b} + \underline{0}$

$= \underline{a} + p\,\underline{b}$.

ஆகவே $(1+p)\,\overrightarrow{OR} = \underline{a} + p\,\underline{b}$. இதனைப் பக். 32 இல் உள்ள பேறின் விரியிலிருந்தும் பெறலாம். அதாவது, ஒரு புள்ளி O ஐக் குறித்துக் கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $m:n$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி C இன் தானக் காவி

$\overrightarrow{OC} = \dfrac{n\,\overrightarrow{OA} + m\,\overrightarrow{OB}}{m+n}.$



கோட்டுத் துண்டம் OB ஆனது $OS : SB = 1 : q$ விகிதத்தில் உள்ளே புள்ளி S இனால் பிரிக்கப்படும் அதே வேளை புள்ளி A ஐக் குறித்து

$\overrightarrow{AS} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + q\,\overrightarrow{AO}}{1+q}$ இங்கு $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= -\underline{a} + \underline{b}$.

$$= \frac{\underline{b} - \underline{a} + q\,(-\underline{a})}{1+q}$$

$$= \frac{\underline{b} - (1+q)\,\underline{a}}{1+q}.$$

AC, AS ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையில் இருக்கின்றமையால் $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AS}$ ஆகுமாறு ஓர் எண்ணி λ உளதாக இருக்கின்றது.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AS}$$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\,\frac{\underline{b} - (1+q)\,\underline{a}}{1+q}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{1+q}\left[\underline{b} - (1+q)\,\underline{a}\right].$$

மேலும் கோட்டுத் துண்டம் OA ஆனது $OT : TA = r : 1$ விகிதத்தில் உள்ளே புள்ளி T இனால் பிரிக்கப்படும் அதே வேளை புள்ளி B ஐக் குறித்து

$\overrightarrow{BT} = \dfrac{r\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO}}{1+r}$; இங்கு $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = -\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$

$$= -\ \underline{b} + \underline{a}\,.$$

$$= \frac{r(-\ \underline{b} + \underline{a}\ ) + (-\ \underline{b}\ )}{1+r}$$

$$= \frac{r\,\underline{a} - r\underline{b} - \underline{b}}{1+r}$$

BC, BT ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்கள் ஒரே திசையில் இருக்கின்றமையால் $\overrightarrow{BC} = \mu\,\overrightarrow{BT}$ ஆகுமாறு ஓர் எண்ணி μ உளதாக இருக்கின்றது.

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \mu\ \overrightarrow{BT}$$

$$= \mu\ \frac{r\,\underline{a} - (1+r)\underline{b}}{1+r}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{\mu}{1+r}\left[r\,\underline{a} - (1+r)\,\underline{b}\right].$$

மேலும் $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ ஆகையால்

$$\frac{\mu}{1+r}\left[r\,\underline{a} - (1+r)\,\underline{b}\right] = -\,\underline{b} + \underline{a} + \frac{\lambda}{1+q}\left[\underline{b}\ - (1+q)\,\underline{a}\right].$$

இதற்கேற்ப $\dfrac{\mu}{1+r}\left[r\,\underline{a} - (1+r)\,\underline{b}\right]$

$$= -\,\underline{b} + \underline{a} + \frac{\lambda}{1+q}\left[\underline{b}\ - (1+q)\,\underline{a}\right]$$

அதாவது $\mu\ \dfrac{r}{1+r}\,\underline{a} - \mu\underline{b} = -\,\underline{b} + \underline{a} + \dfrac{\lambda}{1+q}\,\underline{b} - \lambda\underline{a}\,.$

இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமற்ற சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் அக்காவிகளின் கூறுகளைக் கருதி

$\underline{a}$ இன் கூறுகளைச் சமப்படுத்தும்போது

$$\mu \frac{r}{1+r} = 1-\lambda ,$$

$\underline{b}$ இன் கூறுகளைச் சமப்படுத்தும்போது

$$-\mu = -1 + \frac{\lambda}{1+q} .$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து μ ஐ நீக்கும்போது

$$\frac{(1-\lambda)(1+r)}{r} = 1 - \frac{\lambda}{1+q} .$$

$$\Rightarrow 1-\lambda = \frac{r}{1+r}\left[1 - \frac{\lambda}{1+q}\right]$$

$$1-\lambda = \frac{r}{1+r} - \frac{r}{1+r}\,\frac{\lambda}{1+q} .$$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{r}{1+r}\,\frac{1}{1+q}\right]\lambda = 1 - \frac{r}{1+r} .$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(1+r)\,(1+q)-r}{(1+r)\,(1+q)}\right]\lambda = \frac{1}{1+r} .$$

$$\Rightarrow \frac{1+q+qr}{1+q}\,\lambda = 1.$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1+q}{1+q+qr} .$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{1+q}\left[\underline{b} - (1+q)\,\underline{a}\right]$$ ஆகையால்

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{1+q+qr}\left[\underline{b} - (1+q)\,\underline{a}\right].$$

ஆகவே $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$$= \underline{a} + \frac{1}{1+q+qr}\left[\underline{b} - (1+q)\,\underline{a}\right]$$

$$= \frac{(1+q+qr)\,\underline{a} - (1+q))\,\underline{a} + \underline{b}}{1+q+qr}$$

$$= \frac{qr\,\underline{a} + \underline{b}}{1+q+qr}.$$

ஓர் எண்ணி α உடன் $\overrightarrow{OC} = \alpha\,\overrightarrow{OR}$ எனக் கொள்வோம்.

மேற்குறித்தவற்றிலிருந்து, $(1+p)\,\overrightarrow{OR} = \underline{a} + p\,\underline{b}$ ஆகையால்

$$\alpha\,\overrightarrow{OR} = \alpha\,\frac{\underline{a} + p\,\underline{b}}{1+p} = \overrightarrow{OC} = \frac{qr\,\underline{a} + \underline{b}}{1+q+qr}.$$

ஆகவே $\frac{\alpha}{1+p}\,\underline{a} + \frac{p\alpha}{1+p}\,\underline{b} = \frac{qr}{1+q+qr}\,\underline{a} + \frac{1}{1+q+qr}\,\underline{b}$.

$\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமற்ற சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் இரு பக்கங்களிலும் குணகங்களைச் சமப்படுத்தும் போது

$\underline{a}$ இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $\frac{\alpha}{1+p} = \frac{qr}{1+q+qr}$

$\underline{b}$ இன் குணகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $\frac{p\alpha}{1+p} = \frac{1}{1+q+qr}$.

முதற் சமன்பாட்டினை p இனாற் பெருக்கும்போது $\frac{p\alpha}{1+p} = \frac{pqr}{1+q+qr}$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது $\frac{pqr}{1+q+qr} = \frac{1}{1+q+qr}$. எனவே $pqr = 1$

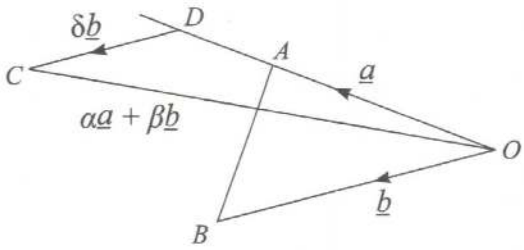
* 29. O, A, B, C என்பன O, A, B ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத நான்கு வெவ்வேறான புள்ளிகளாகும். α, β ஆகியன சூனியமல்லாத எண்களும் $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ உம் $\overrightarrow{OC} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ உம் ஆகும்.

(i) கோடு OA மீது ஒரு புள்ளி D ஆனது $\overrightarrow{OD} = \gamma\,\underline{a}$ ஆக இருக்குமாறும் $\overrightarrow{DC} = \delta\,\underline{b}$ ஆக இருக்குமாறும் எடுக்கப்பட்டுள்ளது. γ இனதும் δ இனதும் பெறுமானங் களைக் காண்க.

(ii) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ஆகியவற்றை α, β, $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. $\alpha + \beta = 1$ எனின், A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோட்டிலுள்ளனவெனக் காட்டுக. மேலும் A இற்கும் B இற்குமிடையே C இருக்கின்றதெனத் தரப்பட்டிருப்பின் $AC : CB$ விகிதத்தை α இன் சார்பில் எடுத்துரைத்து, $0 < \alpha < 1$ என்பதை உய்த்தறிக.

(iii) P, Q ஆகியன $\overrightarrow{OP} = 2\underline{a}$ ஆகவும் $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\,\underline{b}$ ஆகவும் இருக்குமாறு உள்ள இரு புள்ளிகளாகும். AB இனதும் PQ இனதும் வெட்டுப் புள்ளி R ஆகும். $\overrightarrow{OR}$ ஐ $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைத்து, $AR : RB$, $PR : RQ$ ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க.

(1991)



(i) கோடு OA மீது புள்ளி D ஆனது $\overrightarrow{OD} = \gamma \underline{a}$ ஆகுமாறு உள்ளது.

$\overrightarrow{DC} = \delta \underline{b}$ ஆகுமாறு γ இனதும் δ இனதும் பெறுமானங்கள்

$\delta \underline{b} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$= -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = -\gamma \underline{a} + \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ ஆகையால்

$\delta \underline{b} = (\alpha - \gamma)\, \underline{a} + \beta \underline{b}$.

இங்கு $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமற்ற சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் அக்காவிகளின் கூறுகளைக் கருதும்போது $0 = \alpha - \gamma$, $\delta = \beta$. ஆகவே $\gamma = \alpha$, $\beta = \delta$.

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \underline{b} - \underline{a}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$= -\underline{a} + \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = (\alpha - 1)\, \underline{a} + \beta \underline{b}$.

$\alpha + \beta = 1$ எனின், $\alpha - 1 = -\beta$ ஆகையால்

$\overrightarrow{AC} = -\beta \underline{a} + \beta \underline{b} = \beta\, (\underline{b} - \underline{a})$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ ஆனது $\overrightarrow{AC}$ இற்குச் சமாந்தரம்.

அவை பொதுப் புள்ளி A இனூடாக இருப்பதனால் A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரேகோட்டிலுள்ளனவாகும்.

மேலும் A இற்கும் B இற்குமிடையே C இருப்பின்,

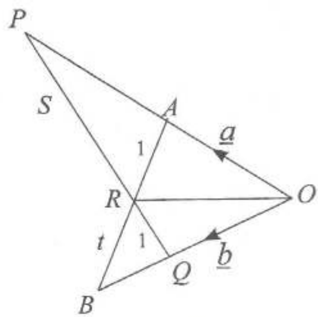
$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} \Rightarrow \left| \overrightarrow{AB} \right| = \left| \underline{b} - \underline{a} \right|, \overrightarrow{AC} = \beta (\underline{a} - \underline{b})$$

$$\Rightarrow \left| \overrightarrow{AC} \right| = \left| \beta (\underline{a} - \underline{b}) \right| = \left| \beta \right| \left| \underline{a} - \underline{b} \right|$$ ஆகையால்

$$AC : AB = \left| \beta \right| : 1 = \left| 1 - \alpha \right| : 1 .$$

$$AC : CB = \left| 1 - \alpha \right| : 1 - \left| 1 - \alpha \right| .$$

இப்போது C ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB இன் ஓர் உட்புள்ளி ஆகையால் $\left| 1 - \alpha \right| < 1$ ஆதலின் $0 < 1 - \alpha < 1$ ஆகையால் $\alpha < 1$ எனக் கிடைக்கின்றது.



$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR}$$

$$= \underline{a} + \frac{1}{1+t} \overrightarrow{AB}$$

$$= \underline{a} + \frac{1}{1+t} (\underline{b} - \underline{a})$$

$$= \frac{t}{1+t} \underline{a} + \frac{1}{1+t} \underline{b}$$

மேலும் $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{1+s} \overrightarrow{PQ}$

$$= \frac{1}{1+s} (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$$

$$= \frac{1}{1+s} \left(\frac{2}{3} \underline{b} - 2\underline{a} \right)$$

$$= \frac{2}{3(1+s)} \underline{b} - \frac{2}{1+s} \underline{a}.$$

$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QO} = \underline{0}$ ஆகையால்

$$\frac{t}{1+t}\,\underline{a} + \frac{1}{1+t}\,\underline{b} + \frac{2}{3(1+s)}\,\underline{b} - \frac{2}{1+s}\,\underline{a} - \frac{2}{3}\,\underline{b} = \underline{0}$$

$$\left(\frac{t}{1+t} - \frac{2}{1+s}\right)\underline{a} + \left(\frac{1}{1+t} - \frac{2s}{3(1+s)}\right)\underline{b} = 0.$$

மேலும் $\underline{a}$, $\underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமற்ற சூனியமற்ற காவிகள் ஆகையால் அவற்றின் குணகங்கள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\ \frac{t}{1+t} - \frac{2}{1+s} = 0,\ \frac{1}{1+t} - \frac{2s}{3(1+s)} = 0$$

சமன்பாடு $\frac{t}{1+t} - \frac{2}{1+s} = 0$ ஐச் சமன்பாடு $\frac{t+1-1}{1+t} - \frac{2}{1+s} = 0$ என எழுதும்போது

$$\frac{1}{1+t} = 1 - \frac{2}{1+s}.$$

அப்போது $1 - \frac{2}{1+s} = \frac{2s}{3(1+s)}$

$$\Rightarrow \frac{s-1}{1+s} = \frac{2s}{3(1+s)}$$

$$\Rightarrow 3s - 3 = 2s$$

$$\Rightarrow s = 3$$

$$\Rightarrow t = 1$$

$AR : RB = 1 : t$

$\qquad = 1 : 1$

$PR : RQ = s : t$

$\qquad = 3 : 1.$

* **30.** பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

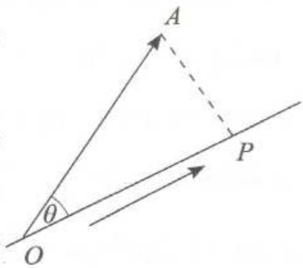
(i) அலகுக் காவி $\underline{l}$ இன் திசை வழியே காவி $\underline{a}$ இன் கூறு $(\underline{a}.\underline{l})\underline{l}$ ஆகும்.

(ii) முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\,|\underline{a}\wedge\underline{b}|$ ஆகும்;

இங்கு $\underline{a}=\overrightarrow{OA}$, $\underline{b}=\overrightarrow{OB}$.

C ஆனது உச்சி A இலிருந்து பக்கம் OB இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடியெனக் கொள்வோம். முக்கோணி OAC இன் பரப்பளவு முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவின் $\frac{1}{b^2}\,|\underline{a}.\underline{b}|$ மடங்கு என்பதை உய்த்தறிக.

(i) அலகுக் காவி $\underline{l}$ இன் திசையில் காவி $\underline{a}$ இன் கூறு $(\underline{a}.\underline{l})\,\underline{l}$ ஆகும். காவி $\underline{a}$ இன் கூறின் பருமன் $OP = OA\cos\theta = a\cos\theta$.

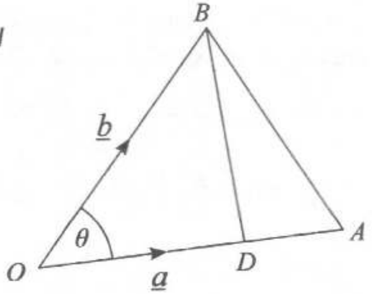


குற்றுப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$\underline{a}.\underline{l} = a\times 1\times\cos\theta = a\cos\theta$ ஆகையால் அலகுக் காவி $\underline{l}$ $\underline{a}$ இன் திசை வழியே காவி $\underline{a}$ இன் கூறு $(\underline{a}.\underline{l})\,\underline{l}$ ஆகும்.

(ii) முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு

$\frac{1}{2}\,|\underline{a}\wedge\underline{b}|$ எனக் காட்டல்



முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு

$$=\frac{1}{2}\text{ அடி}\times\text{ உயரம்}$$

அடி $= OA = |\underline{a}|$

உயரம் $= BD = OB \sin\theta = \left|\underline{b}\right| \sin\theta$

ஆகவே முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times \left|\underline{a}\right| \times \left|\underline{b}\right| \sin\theta \quad \text{—①}$$

குறுக்குப் பெருக்கத்தின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $\underline{a} \wedge \underline{b} = \left|\underline{a}\right| \times \left|\underline{b}\right| \sin\theta\ \underline{n}$; இங்கு $\underline{n}$ ஒரு வலக் கைத் தொகுதியாக அமையுமாறு உள்ள ஓர் அலகுக் காவியாகும்.

$\therefore \left|\underline{a} \wedge \underline{b}\right| = \left|\underline{a}\right| \left|\underline{b}\right| \sin\theta \Rightarrow$ முக்கோணி OAB இன்

பரப்பளவு $\frac{1}{2}\ \left|\underline{a} \wedge \underline{b}\right|$ ஆகும்.

C ஆனது உச்சி A இலிருந்து பக்கம் OB இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடியெனக் கொள்வோம்.

முக்கோணி OAC இன் பரப்பளவைக் காண்பதற்குக் காவி $\overrightarrow{CA}$ ஐப் பயன்படுத்தலாம் ஆகையால் அதனைக் காண்போம்.

அதற்காகக் காவி $\underline{a}$ ஐக் காவி $\underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாகவும் செங்குத்தாகவும் துணிப்போம். காவி $\underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாக உள்ள அலகுக் காவி $\underline{l} = \frac{1}{b}\ \underline{b}$ ஆகையால் அக்கூறு

பகுதி (i) இற்கேற்ப $(\underline{a}.\underline{l})\ \underline{l} = \left(\underline{a} \cdot \frac{1}{b}\ \underline{b}\right) \frac{1}{b}\ \underline{b} = \frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\underline{b})\ \underline{b}$.

ஆகவே $\underline{a} = \frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\ \underline{b})\ \underline{b} + \left(\underline{a} - \frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\underline{b})\ \underline{b}\right)$; இங்கு காவி $\frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\underline{b})\ \underline{b}$ ஆனது $\underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கும் அதே வேளை எஞ்சியுள்ள காவிப் பகுதி செங்குத்துத் திசையிலாகும். அதனை $\underline{b}$ உடன் குற்றுப் பெருக்கத்தினால் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\left(a - \frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\underline{b})\ \underline{b}\right) \cdot \underline{b} = \underline{a}.\ \underline{b} - \frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\underline{b})\ (\underline{b}.\underline{b}) = \underline{a}.\ \underline{b} - \frac{1}{b^2}\ (\underline{a}.\underline{b})\ b^2 = 0.$$

மேலும் $\underline{a} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$; இங்கு காவி $\overrightarrow{OC}$ ஆனது $\underline{b}$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கும் அதே வேளை காவி $\overrightarrow{CA}$ ஆனது $\underline{b}$ இற்குச் செங்குத்தான திசையிலாகும்.

ஆகவே $\overrightarrow{CA} = \underline{a} - \frac{1}{b^2}(\underline{a}.\underline{b})\,\underline{b}.$

$\Rightarrow$ முக்கோணி OAC இன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{CA}\right|.$

இங்கு $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{CA} = \underline{a} \wedge \left(\underline{a} - \frac{1}{b^2}(\underline{a}.\underline{b})\,\underline{b}\right)$

$$= \underline{a} \wedge \underline{a} - \underline{a} \wedge \frac{1}{b^2}(\underline{a}.\underline{b})\,\underline{b}$$

$$= \underline{0} - \frac{1}{b^2}(\underline{a}.\underline{b})\,\underline{a} \wedge \underline{b}\,.$$

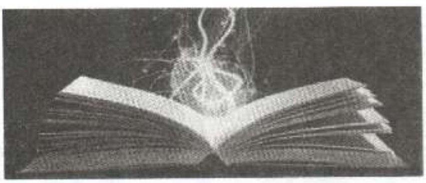
$\therefore$ முக்கோணி OBC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{b^2}(\underline{a}.\underline{b})\,\underline{a} \wedge \underline{b}\right|$

$$= \frac{1}{b^2}\left|\underline{a}\,.\,\underline{b}\right| \times \frac{1}{2}\left|\underline{a} \wedge \underline{b}\right|$$

முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}\left|\underline{a} \wedge \underline{b}\right|$ ஆகையால்

முக்கோணி OAC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{b^2}\left|\underline{a}\,.\,\underline{b}\right| \times$ முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவு

ஆகவே முக்கோணி OAC இன் பரப்பளவு முக்கோணி OAB இன் பரப்பளவின் $\frac{1}{b^2}\left|\underline{a}\,.\,\underline{b}\right|$ மடங்காகும்.



இப்பாடத்தில் நீங்கள் கற்ற முக்கிய விடயங்கள்

காவி

காவியானது இரு பரிமாணங்கள் (பருமனும் திசையும்) உள்ள முக்கோணி விதிக்கு இசைவாகக் கூட்டப்படும் கணித (பௌதிக)க் கணியத்தின் உறுப்பாகும்.

காவி வகைக்குறிப்பு

ஒரு கணித மாதிரியுருவில் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டத்தை இடுவதன் மூலம் காவி வகைகுறிக்கப்படும்.

காவிக் கூட்டல்

சமாந்தரமற்ற காவிகள் முக்கோணி விதிக்கு இசைவாகக் கூட்டப்படும். இரு காவிகள் ஒரு முக்கோணி OAB இன் OA, AB என்னும் இரு பக்கங்களினால் அத்திசைகளில் வகைகுறிக்கப் படும்போது அவற்றின் கூட்டல் பக்கம் OB இனால் அத்திசையில் வகைகுறிக்கப்படும்.

ஒரு காவியை ஓர் எண்ணியினால் பெருக்கல்

$\underline{a}$ ஆனது ஒரு காவியாகவும் $\lambda \in \mathbb{R}$ ஆகவும் இருக்கும்போது $\lambda \underline{a}$ பெருக்கம்

$\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda < 0$ என்னும் சந்தர்ப்பங்களுக்கேற்ப

- ⋆ $\lambda = 0; \lambda \underline{a} = \underline{0}$ அதாவது சூனியக் காவி
- ⋆ $\lambda > 0; |\lambda \underline{a}| = \lambda a$ உம் அவற்றின் போக்குகள் ஒரே திசையிலும்
- ⋆ $\lambda < 0; \lambda \underline{a}$ இன் போக்கும் $\underline{a}$ இன் போக்கும் எதிராக இருக்கும் அதே வேளை $|\lambda \underline{a}| = |\lambda| a = -\lambda a.$

தானக் காவி

ஒரு நிலைத்த புள்ளியைக் குறித்து ஒரு புள்ளியின் அமைவு தானக் காவியினால் எடுத்துரைக்கப்படும்.

பேறு

$\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன சமாந்தரமற்ற, சூனியமற்ற காவிகளாக இருக்கும்போது குறித்த λ, μ எண்ணிகளுக்கு $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குமெனின்

$\lambda = 0, \mu = 0.$

பேறு

$\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன தானக் காவிகளாக உள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டத்தை $m : n$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி C இன் தானக் காவி $\underline{c}$ ஆனது $(m + n)\,\underline{c} = n\underline{a} + m\underline{b}$ ஐத் திருப்தியாக்கும்.

குற்றுப் பெருக்கம்/ எண்ணிப் பெருக்கம்

$\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளுக்கிடையே உள்ள குற்றுப் பெருக்கம் $\underline{a}\cdot\underline{b}$ என எழுதப்படும் அதே வேளை $\underline{a}$ அல்லது $\underline{b}$ சூனியக் காவியாக இருக்கும்போது $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ எனவும் $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன சூனியக் காவிகளாக இராதபோது $\underline{a}\cdot\underline{b} = a \times b \times \cos\theta$ எனவும் வரையறுக்கப்படும்; இங்கு θ ஆனது $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணமாகும்.

குறுக்குப் பெருக்கம்/ காவிப் பெருக்கம்

$\underline{a}, \underline{b}$ என்னும் இரு காவிகளுக்கிடையே உள்ள குறுக்குப் பெருக்கம் $\underline{a} \wedge \underline{b}$ என எழுதப்படும் அதே வேளை $\underline{a}$ அல்லது $\underline{b}$ சூனியக் காவியாக இருக்கும்போது $\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{0}$ எனவும் மறுசார் $\underline{a} \wedge \underline{b} = a \times b \times \sin\theta\ \underline{n}$ எனவும் வரையறுக்கப்படும். இங்கு θ ஆனது $\underline{a}$ இற்கும் $\underline{b}$ இற்குமிடையே உள்ள கோணமும் $\underline{n}$ ஆனது $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{n})$ வலக் கைத் தொகுதியை உண்டாக்குமாறு உள்ள அலகுக் காவியும் ஆகும்.

2 விசைத் தொகுதிகள்

விசை என்பது யாதென முதலில் பார்ப்போம். ஒரு குறித்த அளவு திணிவின் இயக்க இயல்பை மாற்றும் அல்லது மாற்ற முயலும் பௌதிகக் கணியமாக விசையை மிக எளிதாக அறிமுகஞ் செய்யலாம்.

2.1 விசையும் துணிக்கையும்

விசையானது பருமனும் திசையும் உள்ள ஒரு கணியம் ஆகையால் அது ஒரு காவிக் கணியமாகும். இதற்கு மேலதிகமாக விசை ஒரு கோடு வழியே தாக்கும் அதே வேளை அக்கோடு விசையின் **தாக்கக் கோடு** எனப்படும். மேலும் விசை பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு புள்ளி இருக்கின்றமையால் அது ஓரிடப்படுத்திய காவி எனவும் அழைக்கப்பட வேண்டும். அவை விசை பிறப்பிக்கப்படும் விதத்தில் அல்லது பிரயோகிக்கப்படும் விதத்தில் பாகுபடுத்தப்படும். விசேட விசை வகைகளாகக் கவர்ச்சி விசை, தொடுகை விசை, இழுவை, உதைப்பு, உராய்வு விசை ஆகியவற்றை எடுத்துரைக்கலாம்.

➢ கவர்ச்சி விசை

பொருள்களில் உள்ள திணிவு, நிலைமின் இயல்பு, காந்த இயல்பு ஆகிய இயல்புகள் காரணமாகக் கவர்ச்சி விசைகள் போன்று தள்ளுகை விசைகளும் உண்டாகின்றன. நாம் வாழும் புவியின் திணிவு காரணமாக வேறொரு திணிவைக் கவரும் ஈர்ப்பு விசை நாம் கருதும் கவர்ச்சி விசையின் விசேட வகையாகும். வளித் தடை போன்ற வேறு புற விசைகளைக் கருதாதபோது புவியின் கவர்ச்சி காரணமாக அத்திணிவுக்கு ஆர்முடுகல் கிடைக்கும் அதே வேளை அந்த ஆர்முடுகல் புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் எனப்படும். அது g எனக் குறிப்பிடப்படும். நியம அலகுகளைக் கொண்டு அதன் பெறுமானம் அண்ணளவாக $10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ எனக் கருதப்படும் அதே வேளை $9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ மிகவும் செம்மையான பெறுமானமாகும். அது m kg திணிவுள்ள புவியின் மையத்தை நோக்கி mg N பருமன் உள்ள ஒரு விசையினால் கவரப்படுகின்றதெனக் கருதுவோம். இங்கு

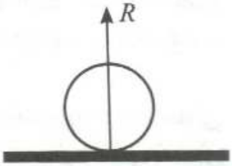
g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலும் N ஆனது விசையின் நியம அலகாகிய நியூற்றனும் ஆகும். 1 N (1 நியூற்றன்) ஆனது ஒய்வில் உள்ள ஓர் 1 kg திணிவுக்கு $1\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ஆர்முடுகலை வழங்கத் தேவையான விசையாகும்.

திணிவு m_1 இற்கும் திணிவு m_2 இற்குமிடையே உள்ள கவர்ச்சி விசையின் பருமன் நேர்மாறு வர்க்க விதிக்கேற்பத் தாக்கும் அதே வேளை அப்பருமனை $G = \dfrac{m_1 m_2}{d^2}$ என எடுத்துரைக்கலாம். இங்கு G, d ஆகியன முறையே ஒரு மாறிலியும் திணிவுகளுக்கிடையே உள்ள தூரமும் ஆகும்.

➢ தொடுகை விசைகள் (Contact Forces)

ஒரு குறித்த பொருளின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ள வேறொரு பொருளைக் கருதுக. இவ்விரண்டாம் பொருள் முதற் பொருளுடன் தொடுகையில் இருக்கின்றமையால் அவ்வாறு இருக்கின்றது. இப்பொருள்கள் தொடுகை இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுவதன் காரணமாக விசைகள் உண்டாகின்றன. தொடுகைத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள விசைகள் எல்லாவற்றினதும் விளையுள் **செவ்வன் மறுதாக்கம்** எனப்படும் அதே வேளை அச்செவ்வன் மறுதாக்கம் பொதுத் தொடுகைத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீது உள்ள ஒரு பந்தைக் கருதுக.



உருவில் கிடைத் தளம் காரணமாகப் பந்து மீது உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம் குறிக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை அது கிடைத் தளத்தினதும் பந்தினதும் தொடுகை காரணமாக மாத்திரமன்று பந்து மீது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைச் சமன்செய்வதன் விளைவாகவும் உண்டாகின்றது. அதன் பருமன் R எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. மேலும் பந்தினதும் தளத்தினதும் தொடுகை காரணமாகத் தளத்தின் மீது இத்தகைய ஒரு செவ்வன் மறுதாக்கம் உண்டாகும் அதே வேளை அதன் பருமன் R ஆகும். இவ்வுருவில் அது காட்டப்படவில்லை. பிரசினத்திற்கேற்ப இம்மறுதாக்கங்கள் குறிப்பிடப்படும்.

➢ இழுவை

ஓர் இழையை அல்லது வில்லை அல்லது மெல்லிய கோலைக் கொண்டு ஒரு பொருளைத் தொங்கவிடும்போது பொருளின் திணிவு மீது புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியின் தாக்கம் காரணமாக அப்பொருள் கீழ்நோக்கி இழுக்கப்படும் அதே வேளை இழை அல்லது வில் அல்லது மெல்லிய கோல் காரணமாகத் தாக்கும் ஒரு குறித்த விசையின் விளைவாகத் தாக்கும் ஒரு விசையினால் அது நாப்பத்தில் வைக்கப்படும். அவ்விசை **இழுவை** எனப்படும்.

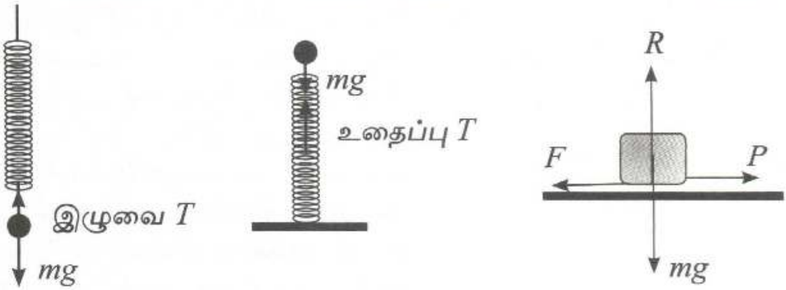
➢ உதைப்பு

ஒரு வில் அல்லது மெல்லிய கோல் மீது ஒரு குறித்த விசை யைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் அதனை நாப்பத்தில் பேணலாம். மேற்குறித்த சந்தர்ப்பத்தில் போன்று புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியின் தாக்கம் காரணமாக அப்பொருள் கீழ்நோக்கி இழுக்கப்படும் அதே வேளை அது வில் அல்லது மெல்லிய கோல் மீது தாக்கும் ஒரு விசையின் விளைவாக உண்டாகும். இவ்விசை **உதைப்பு** எனப்படும்.

➢ உராய்வு விசைகள்

தொடுகையில் இருக்கும் இரு பொருள்கள் பரஸ்பரம் இயங்குவதன் அல்லது இயங்க முயல்வதன் விளைவாக அவ்வியக்க இயல்பிற்குத் தடையை ஏற்படுத்தி **உராய்வு** விசைகள் உண்டாகின்றன. இவ்விரு பொருள்களினதும் இயக்க இயல்புக்கேற்ப அவ்விசைகள் **நிலையியல் உராய்வு விசை, இயக்கவியல் உராய்வு விசை** எனப் பாகுபடுத்தப்படும்.

இவ்வுராய்வு விசைகள் தொடுகையில் உள்ள மேற்பரப்புகளின் இயல்புக்கேற்ப வேறுபடுகின்றன. பொறிகளில் இத்தகைய உராய்வு விசைகளை இழிவளவாக்குவதற்கு மசகு இடப்படுகின்றது. உராய்வு விசைகள் காரணமாக உண்டாகும் பிரதிகூலங்களாகக் கூடுதலான எத்தனத்தைப் பிரயோகிக்க வேண்டியிருத்தல், வெப்ப நிலை அதிகரித்துச் சக்தி விரயமாதல் ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடலாம். மறுசார் அனுகூலங்களாக வீதிகளில் மோட்டர் வாகனங்களைச் செலுத்தல், நாம் அடியெடுத்து வைத்து உலாவுதல் ஆகியவற்றை எடுத்துரைக்கலாம்.



விசை P பிரயோகிக்கப்படுவதனால் உராய்வு விசை F தாக்குகின்றது

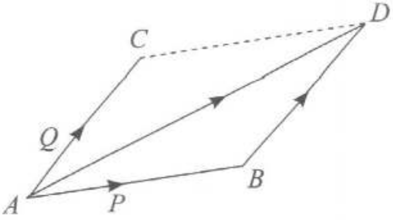
பிரசினத்தைத் தீர்க்கும்போது சில சந்தர்ப்பங்களில் உராய்வு விசைகள் புறக்கணிக்கப்படும். அப்போது தொடுகை ஒப்பமானதாகக் கருதப்படும்.

நாம் பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது கணித மாதிரியுருவை உருவாக்குவதற்குத் துணிக்கை என்னும் எண்ணக்கருவிற்கு முக்கிய இடத்தை வழங்குகின்றோம். கணிதத்தில் மாத்திரமன்று, பௌதிகவியல், இரசாயனவியல், சமூகவியல், பொருளியல் ஆகிய துறைகளிலும் துணிக்கை என்னும் எண்ணக்கரு பயன்படுத்தப்படுகின்றது. நுண் கனவளவு உள்ள ஒரு பொருள் **துணிக்கை** எனப்படும். ஆகவே ஒரு துணிக்கை அதன் நீளம், அகலம், உயரம் போன்ற பரிமாணங்கள் அளக்கப்பட முடியாத அளவிற்கு மிகச் சிறியதாகக் கருதப்படுகின்றது. முதலில் ஒரு துணிக்கை மீது, அதாவது ஒரு புள்ளி மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம்.

2.2 ➡ ஒரு பொருளில் தாக்கும் இரு விசைகளின் விளையுள்

விசை ஒரு காவிக் கணியம் என்பதால் அத்தியாயம் 1 இல் ஆராய்ந்தவாறு தரப்பட்ட இரு விசைகளின் விளையுளைத் துணியலாம். ஒரு குறித்த புள்ளியில் தாக்கும் P, Q என்னும் பருமன்களை உடைய இரு விசைகளைக் கருதுவோம்.

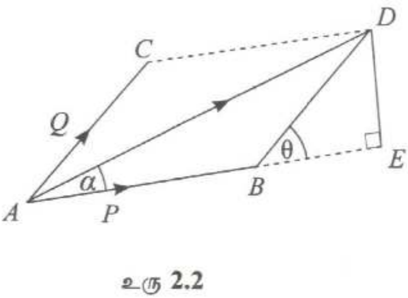
இவ்விசைகள் AB, AC என்னும் திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றனவெனக் கொள்வோம். உரு 2.1 ஐப் பார்க்க.



உரு 2.1

இப்போது BD ஆனது AC இற்குச் சமாந்தரமாகவும் சமமாகவும் இருக்குமாறு கோட்டுத் துண்டம் BD ஐ அமைக்க. அப்போது காவிக் கூட்டல் விதிக்கேற்ப P, Q என்னும் பருமன்களைக் கொண்ட இரு விசைகளின் விளையுள் திசையளித்த கோட்டுத் துண்டம் AD இனால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

இப்போது இவ்விளையுள் விசையின் பருமனையும் திசையையும் துணிவோம். விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ எனவும் விளையுள் விசை பருமன் P ஐ உடைய விசையுடன் கோணம் α ஐ ஆக்குகின்றது எனவும் கொள்வோம். புள்ளி D இலிருந்து பக்கம் AB இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடி E எனவும் கொள்வோம். உரு 2.2 ஐப் பார்க்க.



உரு **2.2**

இங்கு கோணம் BAC ஆனது θ ஆகையால் கோணம் DBE உம் θ ஆகும். மேலும் செங்கோண முக்கோணி BDE இல் $BE = BD\cos\theta$ உம் $DE = BD\sin\theta$ உம் ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணி ADE இல்

$$\begin{aligned}
AD^2 &= AE^2 + ED^2 \\
&= (AB + BE)^2 + ED^2 \\
&= (AB + BD\cos\theta)^2 + (BD\sin\theta)^2 \\
&= (P + Q\cos\theta)^2 + (Q\sin\theta)^2 \\
&= P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2\cos^2\theta + Q^2\sin^2\theta \\
&= P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2.
\end{aligned}$$

மேலும் cosine சூத்திரத்தை முக்கோணி ABD இற்குப் பிரயோகிக்கும் போது

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2.AB.BD\cos(\pi - \theta)$$
$$= P^2 + Q^2 - 2.P.Q(-\cos\theta)$$
$$= P^2 + Q^2 + 2.P.Q\cos\theta$$
$$= P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$$ ஐயும் பெறலாம்.

எனவே மேற்குறித்த இரு விசைகளினதும் விளையுளின் பருமன் R எனின்,

$$R^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$$

மறுபடியும் செங்கோண முக்கோணி ADE ஐக் கருதும்போது

$$\tan\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{AB + BE}$$
$$= \frac{BD\sin\theta}{P + BD\cos\theta}$$
$$= \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

மேலும் முக்கோணி ABD இல் புறக்கோணம் B ஆனது θ ஆகவும் ஓர் அகக்கோணம் α ஆகவும் இருப்பதனால் எஞ்சியுள்ள அகக்கோணமாகிய கோணம் ADB ஆனது $\theta - \alpha$ ஆகும். அம் முக்கோணிக்கு sine சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(\theta - \alpha)} \Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

$$\Rightarrow Q\sin(\theta - \alpha) = P\sin\alpha.$$

$$\Rightarrow Q\sin\theta\cos\alpha - Q\cos\theta\sin\alpha = P\sin\alpha.$$

இங்கு சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $\cos\alpha$ இனால் வகுக்கும்போது

$$Q\sin\theta - Q\cos\theta\tan\alpha = P\tan\alpha.$$
$$\Rightarrow (P + Q\cos\theta)\tan\alpha = Q\sin\theta.$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}.$$

ஆகவே விளையுள் விசை பருமன் P ஐ உடைய விசையுடன் ஆக்கும் கோணம் α இற்குச் சூத்திரம்

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}}$$ எனக் கிடைக்கும்.

மேற்குறித்த சூத்திரங்களுக்கு விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ ஆனது $0 < \theta < \pi$ ஆக இருக்கும்போது உண்மையாகும். இங்கு $0 \le \theta \le \pi$ ஆகும். $\theta = 0$, $\theta = \pi$ என்னும் முனைச் சந்தர்ப்பங்களுக்கு மிக எளிதாகப் பிரயோகிக்கத்தக்க சூத்திரங்கள் இல்லாதபோதும் பின்வருமாறு விளையுள் விசையைத் துணியலாம்.

சந்தர்ப்பம் (1) $\theta = 0$ ஆக இருக்கும்போது;
இங்கு இரு விசைகளினதும் போக்குகள் சமம். அப்போது விளையுளின் பருமன் $P+Q$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் திசை அவ்விசைகள் ஒவ்வொன்றினதும் திசையாகும்.

சந்தர்ப்பம் (2) $\theta = \pi$ ஆக இருக்கும்போது,
இங்கு இரு விசைகளினதும் போக்குகள் எதிரானவை. அப்போது விளையுளின் பருமன் $|P-Q|$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அதன் திசை மிகப் பெரிய பருமன் உள்ள விசையின் திசையாகும்.

இப்பேறுகள் மேற்குறித்த சூத்திரங்களுடன் இசைந்தவை.

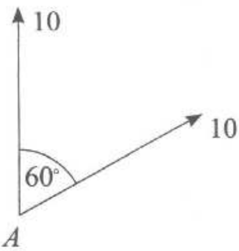
உதாரணம் 2.1

பருமன் 10 N வீதமுள்ள இரு விசைகள் ஒரு புள்ளி A இல் ஒன்றோடொன்று 60° இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றன. விளையுளைத் துணிக.

தீர்வு

இதற்கு மேலே பெற்ற சூத்திரங்களைப் பிரயோகிக்கலாம். ஓர் உருவில் இவ்விசைகளைக் கீழே உள்ளவாறு வகைகுறிக்கலாம்.

இங்கு ஒரு விசை நிலைக்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது.



இங்கு $P = 10$, $Q = 10$, $\theta = 60^\circ$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

சூத்திரம் $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$R^2 = 10^2 + 2.10.10\cos 60 + 10^2$$
$$= 100 + 2.10.10.\frac{1}{2} + 100$$
$$= 300.$$
$$\Rightarrow R = 10\sqrt{3}.$$

சூத்திரம் $\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$ இலிருந்து

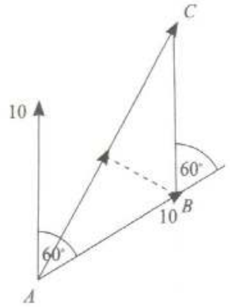
$$\tan\alpha = \frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10 + 10 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30.$$

$$\Rightarrow \alpha = 30.$$

இதற்கேற்ப விளையுள் விசை ஒவ்வொரு விசையுடனும் 30° வீதம் சாய்ந்துள்ளது. அதாவது விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோடு இரு விசைகளுக்குமிடையே உள்ள கோணத்தின் உள்ளிருகூறாக்கியாகும்.

சில பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது அதற்குரிய பேறுகளை மாத்திரமல்ல நாம் அறிந்த வேறு பேறுகளையும் கொண்டு அப்பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம். இதற்காகக் கேத்திரகணிதப் பேறுகள் முக்கிய இடத்தை வகிக்கின்றன.

மேலே கற்ற காவிக் கூட்டல் பற்றிய விடயங்களுக்கேற்ப இங்கு கீழே உரு 2.3 இல் உள்ளவாறு முக்கோணி ABC ஐக் கருதுக.



உரு 2.3

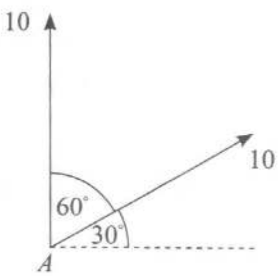
அது இருசமபக்க முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை AB, BC ஆகிய பக்கங்கள் சம நீளமுள்ளவை. ஆகவே ACB, BAC ஆகிய கோணங்கள் சமமாகவும் அவற்றின் பெறுமானம் 30° வீதமும் உள்ளன.

$$\Rightarrow AC = 2\,AB\cos 30$$
$$= 2 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

மேலும் விளையுள் விசை AC ஒவ்வொரு விசையுடனும் 30° இல் சாய்ந்திருப்பதனால் விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோடு ஒவ்வொரு விசையுடனும் 30° வீதம் சாய்ந்துள்ளது.

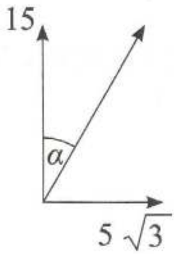
இது நாம் முன்னர் பெற்ற அதே தீர்வாகும்.

வேறு விதத்தில் காவித் துணிப்பைக் கருதுவதன் மூலம் இத்தகைய பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம். இவ்விசையைக் கிடைத் திசையிலும் நிலைக்குத்துத் திசையிலும் துணிக்கும்போது



$$\overrightarrow{X} = 10\cos 30$$
$$= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 5\sqrt{3}.$$

$$\uparrow\ Y = 10 + 10 \sin 30$$
$$= 10 + 10 \times \frac{1}{2}$$
$$= 15.$$



$$X^2 + Y^2 = 5^2 \times 3 + 15^2 = 5^2 \times 3 + 3^2 \times 5^2 = 5^2 (3 + 9)$$
$$= 5^2 \times 12 = 5^2 \times 4 \times 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{X^2 + Y^2} = 5 \times 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

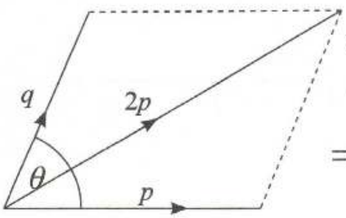
ஆகவே விளையுள் விசையின் பருமன் $10\sqrt{3}$ N ஆகும்.

$\tan \alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{15} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ஆகையால் $\alpha = 30^\circ$. எனவே விளையுள் நிலைக்குத்துடன் 30° இற் சாய்ந்துள்ளது.

உதாரணம் 2.2

ஒன்றோடொன்று கோணம் θ இல் சாய்ந்து தாக்கும் $\underline{p}$, $\underline{q}$ என்னும் இரு விசைகளுக்கு $\left|\, \underline{p} + \underline{q} \,\right| = 2p$. அவ்விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $180 - \theta$ ஆக இருக்கும்போது விளையுளின் பருமன் p எனின், $p : q$ ஐக் காண்க.

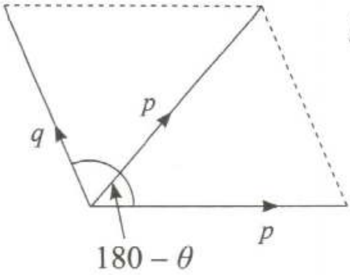
தீர்வு : இவ்விசைகளையும் விளையுளையும் முதற் சந்தர்ப்பத்தில் பின்வருமாறு உருவில் வகைகுறிக்கலாம்.



சூத்திரம் $R^2 = P^2 + 2PQ \cos\theta + Q^2$ இலிருந்து

$$4p^2 = p^2 + 2pq \cos\theta + q^2$$
$$\Rightarrow 3p^2 = 2pq \cos\theta + q^2 \quad \text{———} \ (1)$$

இரண்டாம் சந்தர்ப்பத்திற்கு



இப்போது, $p^2 = p^2 + 2pq\cos(180-\theta) + q^2$

$\Rightarrow 0 = -2\,pq\cos\theta + q^2$

$\Rightarrow 2\,pq\cos\theta = q^2$ ஆகும்.

சமன்பாடு ① இல் பிரதியிடும்போது

$3p^2 = q^2 + q^2$

$\Rightarrow 3p^2 = 2q^2$.

$\Rightarrow \dfrac{p}{q} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$\therefore p : q = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

உதாரணம் 2.3

ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC இல் புள்ளி A இல் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமான திசைகளில் முறையே p, $2p$, $2p$ பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையைக் காண்க.

தீர்வு

விசைத் துணிப்பைக் கருதுவதன் மூலம் இப்பிரசினத்தைத் தீர்க்கலாம்.

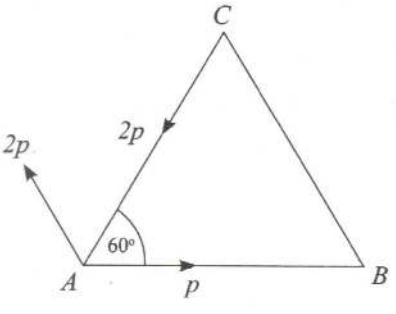
இவ்விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$\overrightarrow{X} = p - 2p\cos 60 - 2p\cos 60$

$= p - 2p \times \dfrac{1}{2} - 2p \times \dfrac{1}{2}$

$= p - p - p$

$= -p$



ஆகவே கிடைக் கூறு

$\overleftarrow{X} = p$ ஆகும்.

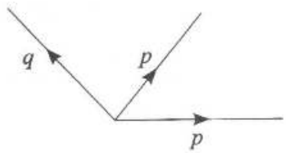
நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது $Y = 2P\sin 60 - 2P\sin 60 = 0$ எனவே விளையுள் விசை திசை BA இல் பருமன் p ஐ உடைய ஒரு விசையாகும்.

உதாரணம் 2.4

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் p, q என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் p ஆகும். பருமன் p ஐ உடைய விசையை அதே திசையில் உள்ள பருமனால் இருமடங்காக்கும்போதும் விளையுளின் பருமன் மாறாவிட்டால், $q = \sqrt{3}\ p$ எனக் காட்டி, விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க. பருமன் q ஐ உடைய விசைக்கும் விளையுள் விசைக்குமிடையே உள்ள கோணத்தையும் காண்க.

தீர்வு

p, q என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகளையும் விளையுளையும் ஓர் உருவில் காட்டுவோம்.



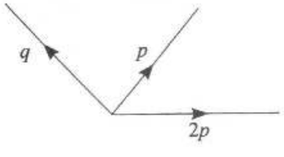
தரப்பட்டுள்ள இரு விசைகளினதும் விளையுளின் பருமன் p ஆகையால் $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$
சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது $p^2 = p^2 + 2\,pq\cos\theta + q^2$.

$\Rightarrow 0 = 2\,pq\cos\theta + q^2$.

$\Rightarrow -2\,pq\cos\theta = q^2$. இங்கு $q \neq 0$ ஆகையால்

$\Rightarrow -2p\cos\theta = q^2$ ஆகும். ——— (1)

பருமன் p ஐ உடைய விசையை அதே திசையில் உள்ள பருமனால் இருமடங்காக்கும்போதும் விளையுளின் பருமன் p ஆகையால் மறுபடியும் மேற்குறித்த சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது



$$p^2 = (2p)^2 + 2\,(2p)\,q\cos\theta + q^2$$

$\therefore\ p^2 = 4p^2 + 4\,pq\cos\theta + q^2$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை மேலும் சுருக்கும்போது

$-3p^2 = 2q \times 2p\cos\theta + q^2$ ஆகும். சமன்பாடு (1) ஐப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் $2p\cos\theta$ ஐ நீக்கும்போது

$-3p^2 = 2q \times (-q) + q^2$, $3p^2 = q^2$ ஆகும்.

$\therefore\ q = \sqrt{3}\,p$ எனக் கிடைக்கும்.

மறுபடியும் சமன்பாடு (1) இலிருந்து $-2\,p\cos\theta = \sqrt{3}\,p$.

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

ஆகவே விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\frac{5\pi}{6}$ ஆகும்.

முதற் சந்தர்ப்பத்தில் விளையுளுக்கும் பருமன் p ஐ உடைய விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் α எனின் சூத்திரம் $\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\tan\alpha = \frac{q\sin\frac{5\pi}{6}}{p + q\cos\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,p \times \frac{1}{2}}{p + \sqrt{3}\,p\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{3} = \tan\frac{2\pi}{3}.$$

எனவே பருமன் p ஐ உடைய விசைக்கும் விளையுள் விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{2\pi}{3}$ ஆகும். ஆகவே பருமன் q ஐ உடைய விசைக்கும் விளையுள் விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

இரண்டாம் சந்தர்ப்பத்தில் விளையுளுக்கும் பருமன் $2p$ ஐ உடைய விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் β எனின், சூத்திரம் $\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\tan\beta = \frac{q\sin\frac{5\pi}{6}}{2p + q\cos\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}\,p \times \frac{1}{2}}{2p + \sqrt{3}\,p\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}.$$

ஆகவே பருமன் $2p$ ஐ உடைய விசைக்கும் விளையுள் விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஆகும். இப்போது பருமன் q ஐ உடைய விசைக்கும் விளையுள் விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2.5

p, $2p$ என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒன்றுடனொன்று கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமன் பின்வரும் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றையும் எடுக்கும்போது θ இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

(i) $2p$ (ii) $3p$ (iii) p

தீர்வு

p, $2p$ என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒன்றுடனொன்று கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்கும்போது விளையுளின் பருமன் R எனின்,

$$R^2 = p^2 + 2p\, 2p \cos\theta + (2p)^2$$

$$= p^2 + 4p^2\cos\theta + 4p^2$$

$$= \left[\ 5 + 4\cos\theta\ \right] p^2.$$

தரப்பட்ட சந்தர்ப்பங்களை வேறுவேறாகக் கருதுவோம்.

(i) $R = 2p$ எனின், $\left[\ 5 + 4\cos\theta\ \right] p^2 = 4p^2$

$$\Rightarrow 5 + 4\cos\theta = 4.$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right).$$

(ii) $R = 3p$ எனின், $\left[\ 5 + 4\cos\theta\ \right] p^2 = 9p^2$

$$\Rightarrow 5 + 4\cos\theta = 9.$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1$$

$$\therefore \theta = 0$$

$\Rightarrow \theta = 0$. ஆகவே விசைகள் ஒரே திசையில் உள்ளன.

(iii) $R = p$ எனின், $\left[\ 5 + 4\cos\theta\ \right] p^2 = p^2 \Rightarrow 5 + 4\cos\theta = 1.$

$$\Rightarrow \cos\theta = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \pi.$$

ஆகவே விசைகள் எதிர்த் திசைகளில் உள்ளன.

பயிற்சி 2.1

1. $4\sqrt{2}$ N , 4 N என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒரு புள்ளி A இல் ஒன்றுடனொன்று 45° சாய்வில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிக.

2. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் P, Q என்னும் பருமனுள்ள இரு விசை களின் விளையுளின் பருமன் X ஆகும். பருமன் Q ஐ உடைய விசையின் பருமன் R ஆக மாறும்போது விளையுளின் பருமன் X ஆகும். $QR = P^2 - X^2$ எனக் காட்டுக.

   தொடக்கத்தில் இருந்த பருமன் Q ஐ உடைய விசை அவ்வாறே இருக்கையில் பருமன் P ஐ உடைய விசையின் பருமன் R ஆக மாறும்போது விளையுளின் பருமன் Y எனின், $QR\,(Q + R) = P\,(Q^2 + R^2 - Y^2)$ எனவும் காட்டுக.

*3. ஒரு நாற்பக்கல் $OABC$ இன் OB, AC என்னும் இரு மூலைவிட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். O இல் OA, BA, OC, BC ஆகிய திசைகளில் அப்பருமனைக் கொண்ட விசைகள் தாக்குகின்றன. அப்போது விசைத் தொகுதியின் விளையுள் திசை XY இற்குச் சமாந்தரம் எனவும் அதன் பருமன் $4XY$ எனவும் காட்டுக.

4. P, Q என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றுடனொன்று கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றன. அவ்விளையுளுக்கும் இரு விசைகளையும் இடைமாற்றும்போது கிடைக்கும் புதிய விளையுளுக்குமிடையே உள்ள கோணத்தை

   $2\tan^{-1}\left[\dfrac{|P-Q|}{P+Q}\tan\dfrac{\theta}{2}\right]$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக.

*5. (i) ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் O அத்தளத்தில் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $x, y, z > 0$ ஆக இருக்கும்போது $x\overrightarrow{OA}$, $y\overrightarrow{OB}$, $z\,\overrightarrow{OC}$ என்னும் விசைகள் புள்ளி O இல் தாக்குகின்றன. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுளை ஓர் உகந்த புள்ளி G உடன் $(x+y+z)\,\overrightarrow{OG}$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக.

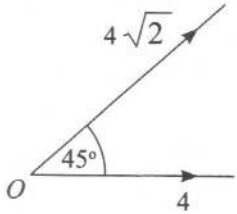
(ii) $ABCD$ ஆனது ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாக இருக்கும் அதே வேளை P ஆனது அதே தளத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியும் O ஆனது சதுரத்தின் மையமும் ஆகும். $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ ஆகிய காவிகளுக்குப் பருமனிலும் திசையிலும் சமமான விசைகள் புள்ளி P இல் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுள் $4\ \overrightarrow{PO}$ என்பதை உய்த்தறிக.

2.1 மாதிரித் தீர்வு

1. $4\sqrt{2}$ N, 4 N என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒரு புள்ளி A இல் ஒன்றுடனொன்று 45° சாய்வில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிக.

இவ்விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$\overrightarrow{X} = 4 + 4\sqrt{2}\cos 45.$$
$$= 4 + 4\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 8.$$



ஆகவே கிடைக் கூறு $\overrightarrow{X} = 8$ ஆகும்.

நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது $\uparrow\ Y = 4\sqrt{2}\sin 45$

$$= 4\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4.$$

எனவே விளையுள் விசையின் பருமன் $= \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ N

விளையுளின் திசை கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்குமெனின், $\tan\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. எனவே கிடையுடனான சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் P, Q என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் X ஆகும். பருமன் Q ஐ உடைய விசையின் பருமன் R ஆக மாறும்போது விளையுளின் பருமன் X ஆகும். $QR = P^2 - X^2$ எனக் காட்டுக.

தொடக்கத்தில் இருந்த பருமன் Q ஐ உடைய விசை அவ்வாறே இருக்கையில் பருமன் P ஐ உடைய விசையின் பருமன் R ஆக மாறும்போது விளையுளின் பருமன் Y எனின், $QR(Q+R) = P(Q^2 + R^2 - Y^2)$ எனவும் காட்டுக.

P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் X ஆகையால் சூத்திரம் $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது,

$X^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$ ஆகும். ——— ①

இங்கு θ ஆனது விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஆகும். விசை Q இன் பருமன் R ஆக மாறினாலும் விளையுளின் பருமன் X ஆகையால்

$X^2 = P^2 + 2PR\cos\theta + R^2$ ஆகும். ——— ②

① $\times R -$ ② $\times Q$;

$RX^2 - QX^2 = P^2R + Q^2R - P^2Q - QR^2.$

$\Rightarrow (R-Q)X^2 = P^2(R-Q) - QR(R-Q).$

பருமன் Q ஐ உடைய விசையின் பருமன் R ஆக மாறுகின்றமையால் $Q \neq R$.

மேற்குறித்த சமன்பாடு $X^2 = P^2 - QR$ ஆகும்.

அதாவது $QR = P^2 - X^2$ ஆகும்.

ஆரம்பத்தில் இருந்த பருமன் Q ஐ உடைய விசை அவ்வாறே இருக்கையில் பருமன் P ஐ உடைய விசையின் பருமன் R ஆக மாறும்போது விளையுளின் பருமன் Y எனின்,

$Y^2 = Q^2 + 2QR\cos\theta + R^2$ ஆகும். ——— ③

① $-$ ② ; $0 = 2P(Q-R)\cos\theta + Q^2 - R^2.$

$\Rightarrow \theta = 2P(Q-R)\cos\theta + (Q-R)(Q+R).$

$\Rightarrow \theta = 2P\cos\theta + (Q+R).$

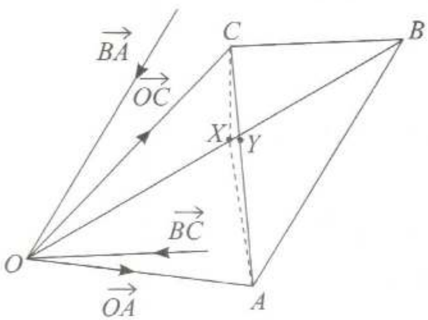
$\Rightarrow 2\cos\theta = -\dfrac{1}{P}\,(Q+R)$. இதனை (3) இல் இடும்போது

$Y^2 = Q^2 - QR\,\dfrac{1}{P}\,(Q+R) + R^2.$

$\Rightarrow QR\,\dfrac{1}{P}\,(Q+R) = Q^2 + R^2 - Y^2\,.$

ஆகவே $QR\,(Q+R) = P\,(Q^2 + R^2 - Y^2)$ ஆகும்.

* 3. ஒரு நாற்பக்கல் $OABC$ இன் OB, AC என்னும் இரு மூலை விட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். O இல் OA, BA, OC, BC ஆகிய திசைகளில் அப்பருமனைக் கொண்ட விசைகள் தாக்குகின்றன. அப்போது விசைத் தொகுதியின் விளையுள் திசை XY இற்குச் சமாந்தரம் எனவும் அதன் பருமன் $4XY$ எனவும் காட்டுக.



முக்கோணி OAX இல் $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{XA}$.

முக்கோணி ABX இல் $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{XA}$.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$\left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BA}\right) = 2\,\overrightarrow{XA}.$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB}\right) + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}.$

இங்கு $\overrightarrow{XO}$, $\overrightarrow{XB}$ ஆகிய காவிகள் திசையில் எதிராகவும் பருமனில் சமமாகவும் இருப்பதனால் $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB} = \underline{0}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{XA}. \quad \text{——————} \quad (1)$$

முக்கோணி OCX இல் $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{XC}$ எனவும்

முக்கோணி BCX இல் $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XC}$ எனவும் பெறலாம்.

இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$$\left(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB}\right) + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}.$$

இங்கு $\overrightarrow{XO}$, $\overrightarrow{XB}$ ஆகிய காவிகள் திசையில் எதிராகவும் பருமனில் சமமாகவும் இருப்பதனால் $\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{XB} = \underline{0}$.

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{XC}.$ — ②

ஆகையால் ①,② ஆகியவற்றிலிருந்து $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC}$

$$= 2\,\overrightarrow{XA} + 2\,\overrightarrow{XC} = 2\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right).$$

முக்கோணி AXY இல் $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{XY}$.

முக்கோணி CXY இல் $\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{XY}$.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$$\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AY}\right) + \left(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY}\right) = 2\,\overrightarrow{XY}.$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{CY}\right) + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\,\overrightarrow{XY}.$$

இங்கு $\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{CY}$ ஆகிய காவிகள் திசையில் எதிராகவும் பருமனில் சமமாகவும் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{CY} = \underline{0}$.

$\Rightarrow \underline{0} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\,\overrightarrow{XY}. \Rightarrow \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\,\overrightarrow{XY}.$

ஆகையால் $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right)$

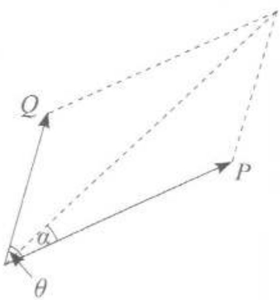
$$= 2\left(2\overrightarrow{XY}\right)$$

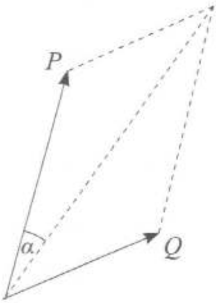
$$= 4\overrightarrow{XY}.$$

எனவே விசைத் தொகுதியின் விளையுள் திசை XY இற்குச் சமாந்தரமும் அதன் பருமன் $4\,XY$ உம் ஆகும்.

4. $P,\ Q$ என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒரு புள்ளியில் ஒன்றுடனொன்று கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றன. அவ்விளையுளுக்கும் இரு விசைகளையும் இடைமாற்றும்போது கிடைக்கும் புதிய விளையுளுக்குமிடையே உள்ள கோணத்தை $2\tan^{-1}\left(\frac{|P-Q|}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}\right)$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக.

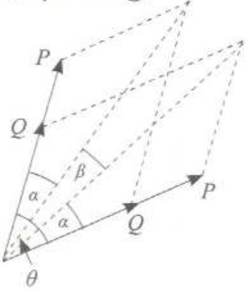
$P,\ Q$ பருமனுள்ள இரு விசைகள் இடைமாற்றப்பட்டுள்ளன. அவை ஒன்றுடனொன்று கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றன.





இங்கு $P > Q$ எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

விளையுள் விசை பருமன் P ஐ உடைய விசையுடன் கோணம் α ஐ ஆக்குகின்றதெனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. கோணங்களைக் கருதுவதற்காக வரிப்படங்கள் இரண்டையும் தேவைக்கேற்ப ஒரே உருவில் வரையும்போது



முதல் விளையுளுக்கும் புதிய விளையுளுக்குமிடையே உள்ள கோணம் β எனின், $\theta = 2\alpha + \beta$ ஆகையால் $\beta = \theta - 2\alpha$ ஆகும்.

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{\theta}{2} - \alpha.$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)$$

$$= \frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \tan\alpha}{1 + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\tan\alpha}$$

தொகுதியினதும் பகுதியினதும் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $\cos\frac{\theta}{2}$ இனால் பெருக்கும்போது

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\theta}{2} - \tan\alpha\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \tan\alpha\sin\frac{\theta}{2}}.$$

$\tan\alpha = \dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$ ஐ இடும்போது

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\theta}{2} - \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{(P + Q\cos\theta)\sin\frac{\theta}{2} - Q\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}}{(P + Q\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} + Q\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{P\sin\frac{\theta}{2} + Q\left(\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)}{P\cos\frac{\theta}{2} + Q\left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{P\sin\frac{\theta}{2} + Q\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)}{P\cos\frac{\theta}{2} + Q\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{P\sin\ \frac{\theta}{2} \quad - Q\sin\ \frac{\theta}{2}}{P\cos\ \frac{\theta}{2} \quad + Q\cos\ \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}.$$

$P > Q$ எனக் கருதப்படுவதனால் இவ்விடை பெறப்பட்டுள்ளது.

$Q > P$ எனின், $\tan\ \frac{\beta}{2} = \frac{Q-P}{P+Q}\tan\ \frac{\theta}{2}$ ஆகும்.

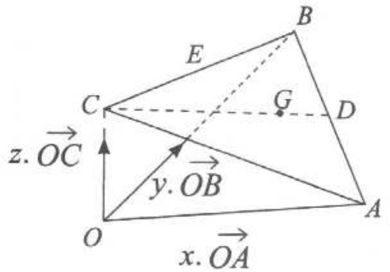
மேலும் $Q = P$ எனின், விளையுள்கள் பொருந்துகின்றன என்பதும் தெளிவாகும்.

ஆகவே $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{|P-Q|}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$ ஆகையால், விளையுள்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் $2\ \tan^{-1}\left(\left|\frac{P-Q}{P+Q}\right|\right)\tan\frac{\theta}{2}$ ஆகும்.

* 5. (i) ABC ஒரு முக்கோணி எனவும் O அத்தளத்தில் இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி எனவும் கொள்வோம். $x, y, z > 0$ ஆக இருக்கும்போது $x\ \overrightarrow{OA}, y\ \overrightarrow{OB},\ z\ \overrightarrow{OC}$ என்னும் விசைகள் புள்ளி O இல் தாக்குகின்றன. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுளை ஓர் உகந்த புள்ளி G உடன் $(x+y+z)\ \overrightarrow{OG}$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக.

(ii) $ABCD$ ஆனது ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாக இருக்கும் அதே வேளை P ஆனது அதே தளத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியும் O ஆனது சதுரத்தின் மையமும் ஆகும். $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}$ ஆகிய காவிகளுக்குப் பருமனிலும் திசையிலும் சமமான விசைகள் புள்ளி P இல் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுள் $4\ \overrightarrow{PO}$ என்பதை உய்த்தறிக.

(i)



முக்கோணி ABC இல் பக்கம் AB ஐ $y : x$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி D எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ ஆகையால்

$x.\overrightarrow{OD} = x.\overrightarrow{OA} + x.\overrightarrow{AD}$. ——— ①

மேலும் $AD : DB = y : x$ ஆகவும் அவை ஒரே திசையிலும் இருப்பதனால்

$x.\overrightarrow{AD} = y.\overrightarrow{DB}$. ——— ②

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$\Rightarrow x.\overrightarrow{OD} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{DB}$. ——— ③

மேலும் $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ ஆகையால்

$y.\overrightarrow{OD} = y.\overrightarrow{OB} + y.\overrightarrow{BD}$. ——— ④

எனவே ③, ④ ஆகியவற்றிலிருந்து

$x.\overrightarrow{OD} + y.\overrightarrow{OD} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{DB} + y.\overrightarrow{OB} + y.\overrightarrow{BD}$.

$\Rightarrow (x+y)\overrightarrow{OD} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} + y.\overrightarrow{DB} - y.\overrightarrow{DB}$.

$\Rightarrow (x+y)\overrightarrow{OD} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}$. ——— ⑤

இப்போது கோட்டுத் துண்டம் CD ஐ $(x+y) : z$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி G எனக் கொள்வோம். மேலும் CG , GD ஆகியன ஒரே திசையிலும்

$z\,CG = (x+y)\,GD$ ஆகவும் இருப்பதனால்

$z.\overrightarrow{CG} = (x+y).\overrightarrow{GD}$.

$\Rightarrow z.\overrightarrow{CG} = (x+y).\overrightarrow{GO} + (x+y).\overrightarrow{OD}$.

சமன்பாடு ⑤ இலிருந்து $(x+y).\overrightarrow{OD}$ இற்குப் பிரதியிடும்போது

$$z.\overrightarrow{CG} = (x+y).\overrightarrow{GO} + x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}.$$

$$\Rightarrow z.\overrightarrow{CO} + z.\overrightarrow{OG} = -(x+y)\overrightarrow{OG} + x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}.$$

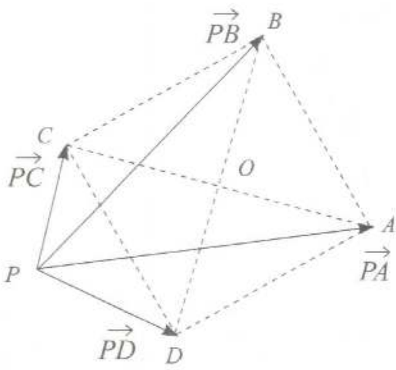
$$\Rightarrow (x+y).\overrightarrow{OG} + z.\overrightarrow{OG} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} - z.\overrightarrow{CO}.$$

$$\Rightarrow (x+y+z)\overrightarrow{OG} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} + z.\overrightarrow{OC}.$$

அதாவது $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = (x+y+z)\overrightarrow{OG}$.

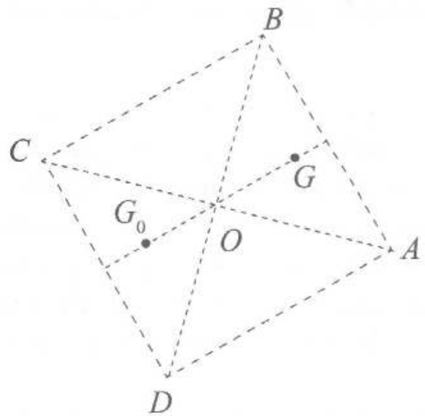
ஆகவே $x\overrightarrow{OA}$, $y\overrightarrow{OB}$, $z\overrightarrow{OC}$ ஆகிய மூன்று விசைகளினதும் விளையுளை $(x+y+z)\overrightarrow{OG}$ என எழுதலாம்.

(ii) இப்போது முக்கோணி OAB ஐயும் அதே தளத்தில் உள்ள நிலைத்த புள்ளி P ஐயும் கருதுக. $x=y=z=1$ என எடுக்கும்போது $x\overrightarrow{PA}$, $y\overrightarrow{PB}$, $z\overrightarrow{PO}$ ஆகிய மூன்று விசைகளினதும் விளையுள் மேற்குறித்த நிறுவலிலிருந்து ஓர் உகந்த புள்ளி G உடன் $(x+y+z)\overrightarrow{PG}$ ஆகும்.



அதாவது $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{PG}$. இங்கு G ஆனது பக்கம் AB ஐ $1:1$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளியையும் முக்கோணியின் எஞ்சியுள்ள உச்சியாகிய புள்ளி O ஐயும் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டத்தை, அதாவது முக்கோணி OAB இன் O இனூடாக உள்ள இடையத்தை $2:1$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளியாகிய முக்கோணி OAB இன் மையப்போலியாகும்.

முக்கோணி OCD ஐக் கருதும்போது $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG_0}$; இங்கு G_0 ஆனது முக்கோணி OCD இன் மையப்போலியாகும்.



OAB, OCD ஆகியன ஒருங்கிசை முக்கோணிகளாக இருக்கும் அதே வேளை சமச்சீரிலிருந்து $GO = OG_0$ ஆகவும் அவை ஒரே திசையிலும் இருப்பதனால்

$\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{OG_0}$. எனவே $\overrightarrow{OG_0} + \overrightarrow{OG} = \underline{0}$.

ஆகவே $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\,\overrightarrow{PG_0} + 3\,\overrightarrow{PG}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + 2\,\overrightarrow{PO} &= 3\left(\overrightarrow{PG_0} + \overrightarrow{PG}\right) \\
&= 3\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG_0} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG}\right) \\
&= 3\left(2\,\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OG_0} + \overrightarrow{OG}\right) \\
&= 6\,\overrightarrow{PO}.
\end{aligned}$$

ஆகவே $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 6\,\overrightarrow{PO} - 2\,\overrightarrow{PO} = 4\,\overrightarrow{PO}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\,\overrightarrow{PO}.$$

புள்ளி P இல் தாக்கும் $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் $4\,\overrightarrow{PO}$ ஆகும்.

உங்கள் கவனத்திற்கு

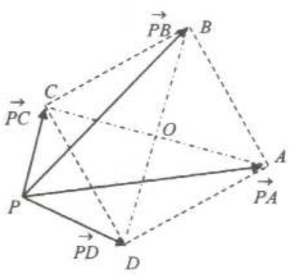
சில சந்தர்ப்பங்களில் எமக்கு வழங்கப்பட்டுள்ள அறிவுறுத்தல் களைப் பின்பற்றிப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படுகின்றன. பின்வருமாறு காவிகளைப் பிரயோகிப்பதன் மூலமும் மேற்குறித்த பிரசினத்தைத் தீர்க்கலாம்.

வேறு பிரசினங்களுக்கும் இத்தகைய தீர்வுகளைக் காண்பதற்கு முயலுக.

நீங்கள் இதுவரைக்கும் நன்றாக உங்கள் கவனத்தைச் செலுத்தியிருந்தால் காவிகள் பற்றிய பிரசினங்களுக்கும் விசைகள் பற்றிய பிரசினங்களுக்குமிடையே மிகத் தெளிவான தொடர்பு இருப்பதைக் காணலாம் என்பதையும் காவி சுயாதீனக் கணியம் என்பதையும் விசை காவிக் கணியமாக இருந்தாலும் நடைமுறையில் பிரயோகிக்கப்படுகின்றமையால் ஒரு குறித்த பொருளுக்கு ஓரிடப்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்பதையும் அவதானிக்கலாம்.

மேற்குறித்த பிரசினங்களுக்காகவும் வேறு காவிகளுடன் தொடர்புபட்ட ஒரு தீர்வு;

விசைத் தொகுதியின் உருவை மறுபடியும் கருதுவோம்.



$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}\right)$$
$$= 2\,\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.$$

மூலைவிட்டம் AC இன் நடுப் புள்ளி O ஆகையால் OA உம் OC உம் நீளத்தில் சமம். அவை திசையில் எதிரானவை ஆகையால்

$\overrightarrow{OA} = -\,\overrightarrow{OC}$. எனவே $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \underline{0}$.

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\,\overrightarrow{PO}$

இவ்வாறே $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\,\overrightarrow{PO}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 4\,\overrightarrow{PO}$.

ஆகவே விசைத் தொகுதியின் விளையுள் $4\,\overrightarrow{PO}$ ஆகும்.

2.3 ஒரு விசைத் தொகுதியின் விளையுள்

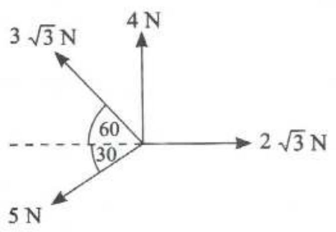
முதலில் ஒரு புள்ளிப் பொருளின் மீது தாக்கும் விசைகள் பற்றிய சில சந்தர்ப்பங்களைக் கருதுவோம்.

நடைமுறையில் ஒரு பொருளின் மீது பெரும்பாலும் பல்வேறு விதங்களில் விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகள் எல்லாவற்றுக் கும் பதிலாக அவற்றுக்காக முன்வைக்கத்தக்க ஒரு தனி விசை இருப்பின், அது மிகவும் பயனுறுதி வாய்ந்தது. அதாவது அவ்விசை கள் எல்லாவற்றினதும் விளையுளைக் காணல் எமது நோக்கமாகும்.

ஒவ்வொரு விசையையும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு மாறாத் திசைகளில் அவற்றின் கூறுகளாகத் துணித்தல் ஓர் இலகுவான முறையாகும்.

உதாரணம் 2.6

ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் விசைத் தொகுதி பின்வரும் உருவில் தரப்பட்டுள்ளது. தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க.



தீர்வு

இங்கு வசதிக்காகக் கிடைத் திசையிலும் நிலைக்குத்துத் திசையிலும் விசைத் துணிப்பு கருதப்படுகின்றது.

விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$\overrightarrow{X} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\cos 60 - 5\cos 30$$

$$= 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

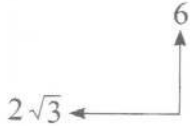
$$= -2\sqrt{3}\,.$$

இக்கூறு மறை ஆகையால் அதன் திசை எதிராக இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே கிடைத் திசையில் கூறு $\overleftarrow{X} = 2\sqrt{3}$ ஆகும்.
நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$\uparrow Y = 4 + 3\sqrt{3}\sin 60 - 5\sin 30$$
$$= 4 + 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \times \frac{1}{2}$$
$$= 6.$$

ஆகவே விளையுள் விசை



கூறுகளை வர்க்கித்துக் கூட்டும்போது $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = 4 \times 3 + 36 = 48.$

எனவே, விளையுள் விசையின் பருமன் $4\sqrt{3}$ ஆகும். அது கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்குமெனின்,

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Longrightarrow \alpha = 60^{\circ}.$$

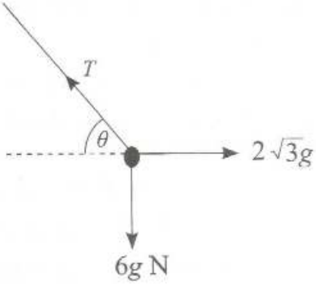
ஆகவே விளையுள் விசை கிடையுடன் கோணம் 60° இற் சாய்ந்திருக்கின்றது.

உதாரணம் 2.7

6 kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருள் ஒரு நீட்டமுடியாத இழையினால் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை கிடையாகத் தாக்கும் பருமன் $2\sqrt{3}g$ N ஐ உடைய ஒரு விசையைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் இழை கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருக்கப் பொருள் நாப்பத்தில் உள்ளது. இழையின் இழுவையையும் θ இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

தீர்வு

இங்கு பொருள் நாப்பத்தில் உள்ளது என்பதன் கருத்து அதன் மீது தாக்கும் விளையுள் விசை பூச்சியமாகும் என்பதாகும். ஓர் உருவில் விசைகளைக் காட்டுவோம்.



T ஆனது இழையின் இழுவையாகும்.
புள்ளிப் பொருளின் திணிவு 6 kg ஆகையால் அதன் நிறை 6g N எனக் கொள்வோம்.

விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$\overrightarrow{X} = 2\sqrt{3}\,g - T\cos\theta$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை பொருள் நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால்

$2\sqrt{3}g - T\cos\theta = 0.$

ஆகவே $T\cos\theta = 2\sqrt{3}g$. ——— ①

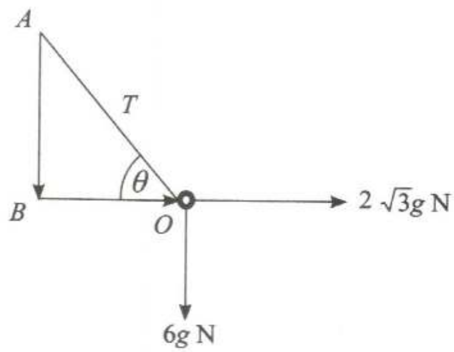
நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது $\uparrow Y = T\sin\theta - 6g.$
பொருள் நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால்
$T\sin\theta = 6g.$ ——— ②

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளை வர்க்கித்துக் கூட்டும்போது
$T^2 = (4 \times 3 + 36)g^2 = 48g^2.$
$\Rightarrow T = 4\sqrt{3}g.$
எனவே இழையின் இழுவை $4\sqrt{3}\,g$ N.
சமன்பாடு ② இலிருந்து $4\sqrt{3}\ g\sin\theta = 6g$
$\Rightarrow \theta = 60^{\circ}.$
$\Rightarrow \sin\theta = \dfrac{6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^{\circ}.$
$\Rightarrow \theta = 60^{\circ}.$

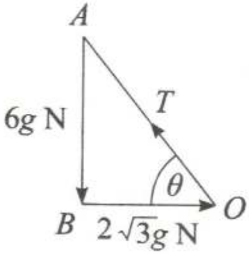
அதாவது இழை கிடையுடன் 60° இற் சாய்ந்திருக்கின்றது.

இப்பிரசினத்திற்காகக் காவிகளைப் பயன்படுத்தி வேறொரு தீர்வைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.
பொருளின் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகள் மாத்திரம் இருப்பதனால் அதற்கு ஒரு விசை முக்கோணியைப் பிரயோகிக்கலாம்.

இங்கு இழையின் இழுவை, பொருளின் நிறை, மேலதிக விசை ஆகியன முறையே கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்து நிலைக்குத்தாகவும் கிடையாகவும் தாக்குகின்றமையால் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு முக்கோணி OAB ஐ இவ்விசைகளை வகைகுறிப்பதற்குப் பயன்படுத்தலாம்.



OA, AB, BO ஆகிய பக்கங்கள் பருமனிலும் திசையிலும் இழையின் இழுவை, பொருளின் நிறை, மேலதிக விசை ஆகியவற்றை வகை குறிக்கின்றன.



ஆகவே அப்பக்கங்களின் நீளங்கள் இழையின் இழுவை T, பொருளின் நிறை $6g$ N, மேலதிக விசையின் பருமன் $2\sqrt{3}\,g$ N ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமன்.

$$\Rightarrow \frac{T}{OA} = \frac{6g\text{ N}}{AB} = \frac{2\sqrt{3}g\text{ N}}{BO}.$$

$$\Rightarrow \frac{T}{OA} = \frac{6g\text{ N}}{AB}\,,\quad \frac{6g\text{ N}}{AB} = \frac{2\sqrt{3}g\text{ N}}{BO}.$$

சமன்பாடு ② இலிருந்து $\frac{AB}{BO} = \frac{6g}{2\sqrt{3}g} = \sqrt{3}$.

மேலும் $\tan\theta = \frac{AB}{BO}$ ஆகையால் $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$.

$\Rightarrow \ \theta = 60^\circ$.

மேலும் $\frac{T}{OA} = \frac{6g\text{ N}}{AB}$ ஆகையால் $T = \frac{OA}{AB} \times 6g\text{ N}$.

விசை முக்கோணியிலிருந்து $\frac{AB}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ஆகையால்

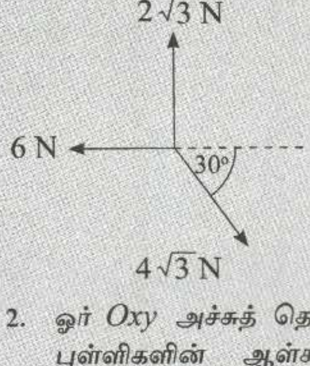
$$T = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 6g\text{ N} = 4\sqrt{3}g\text{ N}.$$

எனவே இழையின் இழுவை $4\sqrt{3}g$ N உம் அதன் சாய்வு கிடையுடன் 60° உம் ஆகும்.

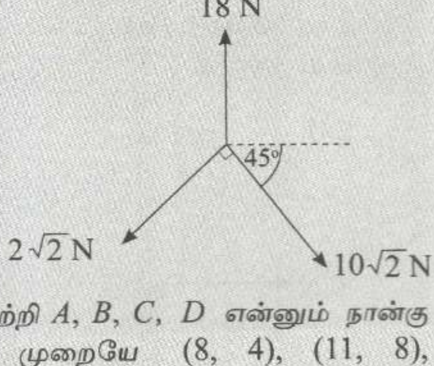
பயற்சி 2.2

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள புள்ளியில் தாக்கும் விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிக.

(a)



(b)



2. ஓர் Oxy அச்சுத் தொகுதி பற்றி A, B, C, D என்னும் நான்கு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே (8, 4), (11, 8), (20, 9) , (2, 7) ஆகும். AB, AC, AD ஆகிய திசைகள் வழியே முறையே 5 N, 13 N, $3\sqrt{5}$ N பருமனுள்ள விசைகள் புள்ளி A இல் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிக.

* 3. ABC ஒரு முக்கோணியும் D ஆனது பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளியும் ஆகும். AB, AC, DA ஆகிய திசைகளில் முறையே AB, AC, DA பருமனுள்ள விசைகள் புள்ளி A இல் தாக்குகின்றன. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுளைத் துணிக.

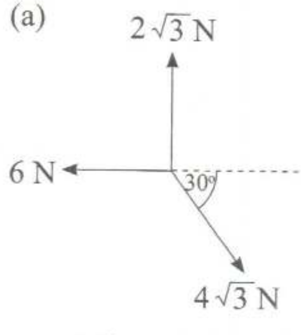
* 4. A, B, C, D, E ஆகியன ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணியின் உச்சிகளும் O ஆனது அவ்வைங்கோணியின் மையப்போலியும் K ஆனது அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியும் ஆகும். புள்ளி K இல் KA, KB, KC, KD, KE என்னும் திசைகளில் முறையே அதே பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளை ஓர் உகந்த புள்ளி G உடன் $\overrightarrow{KG}$ என எழுதலாம் எனக் காட்டுக.

5. ABC ஒரு முக்கோணியும் O ஆனது முக்கோணியின் அதே தளத்தில் உச்சிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் உள்ள புள்ளியும் ஆகும். BOC, AOB ஆகிய கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் $120°$ ஆகும். புள்ளி O இல் OA, OB, OC ஆகிய திசைகளில் 6 N, 8 N, P N என்னும் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுள் திசை AO வழியே இருக்குமெனின், P இன் பருமனையும் விளையுளின் பருமனையும் துணிக.

2.2 மாதிரித் தீர்வு

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள புள்ளியில் தாக்கும் விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிக.

(a)



விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

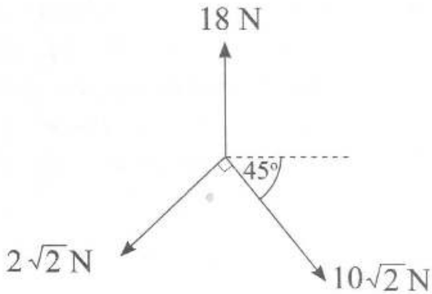
$$\overrightarrow{X} = 4\sqrt{3}\cos 30 - 6$$
$$= 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6$$
$$= 6 - 6 = 0.$$

நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$\uparrow Y = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\sin 30$$
$$= 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 0.$$

ஆகவே விளையுள் விசை சூனியக் காவிக்குச் சமம்.

(b)



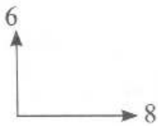
விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$\overrightarrow{X} = 10\sqrt{2}\cos 45 - 2\sqrt{2}\cos 45$$
$$= 10\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 8.$$

நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$\uparrow Y = 18 - 2\sqrt{2}\sin 45 - 10\sqrt{2}\sin 45$$
$$= 18 - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 10\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6.$$

ஆகவே விளையுள் விசை



$R = \sqrt{6^2+8^2}$
$= 10$

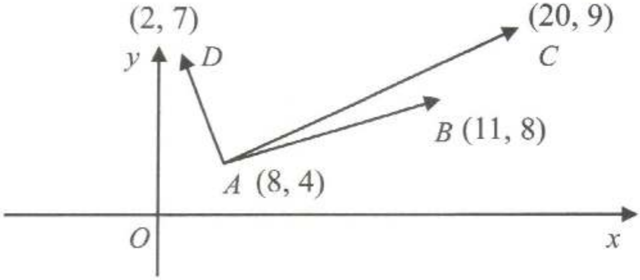
இதிலிருந்து விளையுள் விசையின் பருமன் 10 ஆகும். அது கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்குமெனின்,

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

எனவே விளையுள் விசை கிடையுடன் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ இற் சாய்ந்துள்ளது.

2. ஓர் Oxy அச்சுத் தொகுதி பற்றி A, B, C, D என்னும் நான்கு புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே (8, 4), (11, 8), (20, 9), (2, 7) ஆகும். AB, AC, AD ஆகிய திசைகள் வழியே முறையே 5 N, 13 N, $3\sqrt{5}$ N பருமனுள்ள விசைகள் புள்ளி A இல் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிக.



இங்கு $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(8\underline{i} + 4\underline{j}) + 11\underline{i} + 8\underline{j} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$.

ஆகவே திசை AB இல் உள்ள அலகுக் காவி $\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{1}{5}(3\underline{i} + 4\underline{j})$.

$\Rightarrow AB$ வழியே தாக்கும் விசை $= 5 \times \frac{1}{5}(3\underline{i} + 4\underline{j}) = 3\underline{i} + 4\underline{j}$.

இவ்வாறே $\overrightarrow{AC} = 12\underline{i} + 5\underline{j}$ ஆகையால்

AC வழியே உள்ள அலகுக் காவி $= \frac{1}{13}(12\underline{i} + 5\underline{j})$.

$\overrightarrow{AC}$ வழியே தாக்கும் விசை $= 13 \times \frac{1}{13}(12\underline{i} + 5\underline{j}) = 12\underline{i} + 5\underline{j}$.

மேலும் $\overrightarrow{AD} = -6\underline{i} + 3\underline{j}$ ஆகையால்

AD வழியே உள்ள அலகுக் காவி $= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2\underline{i} + \underline{j})$.

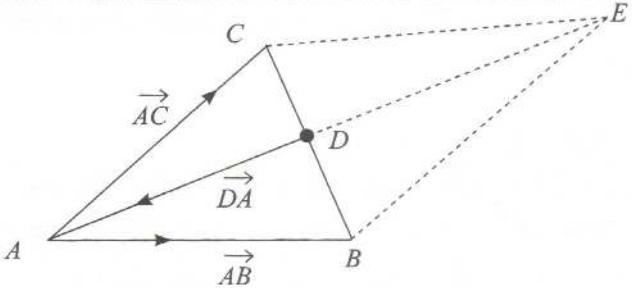
$\overrightarrow{AD}$ வழியே தாக்கும் விசை $= 3\sqrt{5} \times \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2\underline{i} + \underline{j}) = -6\underline{i} + 3\underline{j}$.

ஆகவே விளையுள் $= 3\underline{i} + 4\underline{j} + 12\underline{i} + 5\underline{j} - 6\underline{i} + 3\underline{j} = 9\underline{i} + 12\underline{j}$.

$\Rightarrow$ விளையுளின் பருமன் $= \sqrt{9^2+12^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$.

விளையுள் விசை Ox அச்சுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்குமெனின், $\tan\alpha = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

* 3. ABC ஒரு முக்கோணியும் D ஆனது பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளியும் ஆகும். AB, AC, DA ஆகிய திசைகளில் முறையே AB, AC, DA பருமனுள்ள விசைகள் புள்ளி A இல் தாக்குகின்றன. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுளைத் துணிக.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ஐ முதலில் கருதுவோம். அதற்காக இணைகரம் $ABEC$ ஐப் பயன்படுத்தலாம்.

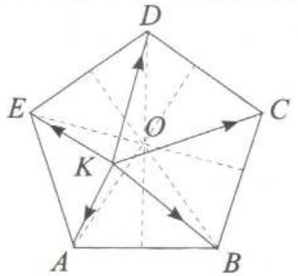
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$

$= 2\,\overrightarrow{AD}$ (ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் இருகூறிடுகின்றமையால்)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$.

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள மூன்று விசைகளினதும் விளையுளின் பருமன் AD உடன் திசை AD இல் தாக்குகின்றது.

* 4. A, B, C, D, E ஆகியன ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணியின் உச்சிகளும் O ஆனது அவ்வைங்கோணியின் மையப்போலியும் K ஆனது அதே தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியும் ஆகும். புள்ளி K இல் KA, KB, KC, KD, KE என்னும் திசைகளில் முறையே அதே பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளை ஓர் உகந்த புள்ளி G உடன் $5\,\overrightarrow{KG}$ என எழுதலாமெனக் காட்டுக.



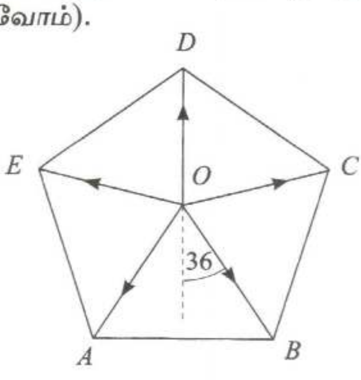
இங்கு $OA = OB = OC = OD = OE$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை கோணம் AOB ஆனது 72° ஆகும். தொகுதியின் விளையுள் $\underline{R}$ எனக் கொள்வோம்.

$\underline{R} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KE}$.

இங்கு $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OA}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை ஏனைய விசைகளுக்கும் இத்தகைய கோவைகளைக் கருதும்போது

$\underline{R} = 5\,\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ ஆகும்.

இங்கு உள்ள $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ ஆகிய விசைகளைக் கருதுக. அவற்றின் விளையுளைக் காண வேண்டும். அதற்காக மறுபடியும் உருவைக் கருதுவோம். (OD ஆனது y அச்சு வழியே உள்ளதெனக் கொள்வோம்).



கிடைத் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$\overleftarrow{X} = OA \sin 36 - OB \sin 36 - OC \sin 72 + OE \sin 72$$
$$= OA \sin 36 - OA \sin 36 - OC \sin 72 + OC \sin 72 .$$

$\Rightarrow X = 0.$

நிலைக்குத்துத் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$\uparrow Y = OD + OC \cos 72 + OE \cos 72 - OA \cos 36 - OB \cos 36$$
$$= OD\,(1 + 2 \cos 72 - 2 \cos 36).$$

கோட்டுத் துண்டம் OD மீது $5\,OG = OD\,(1 + 2 \cos 72 - 2 \cos 36)$ ஆகுமாறு புள்ளி G ஐத் தெரிந்தெடுக்கும்போது
$Y = 5\,OG$ ஆகும்.

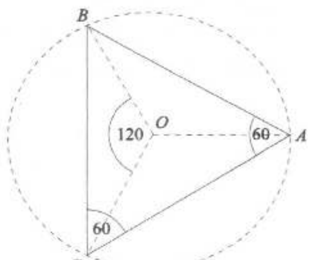
$\therefore\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ இன் விளையுள் $5\,\overrightarrow{OG}$ ஆகும்.

$\therefore\ \underline{R} = 5\,\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ ஆகவே

$$\underline{R} = 5\,\overrightarrow{KO} + 5\,\overrightarrow{OG} = 5\left(\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OG}\right) = 5\ \overrightarrow{KG} .$$

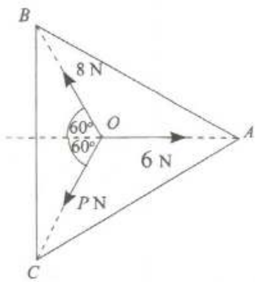
5. ABC ஒரு முக்கோணியும் O ஆனது முக்கோணியின் அதே தளத்தில் உச்சிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் உள்ள புள்ளியும் ஆகும். BOC, AOB ஆகிய கோணங்கள் 120° வீதம் ஆகும். புள்ளி O இல் OA, OB, OC ஆகிய திசைகளில் 6 N, 8 N, P N என்னும் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. இம்மூன்று விசைகளினதும் விளையுள் திசை AO வழியே இருக்குமெனின், P இன் பருமனையும் விளையுளின் பருமனையும் துணிக.

முதலில் முக்கோணி ABC ஐ வரைவோம். O ஆனது முக்கோணியின் அதே தளத்தில் உச்சிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும் புள்ளி ஆகையால் அது முக்கோணியின் சுற்றுமையம் ஆகும்.



இங்கு கோணம் BOC ஆனது 120° ஆக இருக்கும் அதே வேளை ஒரு நாண் ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம் பரிதியில் ஒரு புள்ளியில் எதிரமைக்கும் கோணத்தின் இரு மடங்கு ஆகையால் கோணம் BAC ஆனது 60° ஆகும்.

அவ்வாறே கோணம் ABC உம் 60° ஆகும். ஆகவே ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். தரப்பட்டுள்ள விசைகளைக் கருதுவோம்.



கிடைத் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$\overleftarrow{X} = 8\cos 60 + P\cos 60 - 6$$

$$= 8 \times \frac{1}{2} + P \times \frac{1}{2} - 6$$

$$= \frac{1}{2}P - 2 \text{ ——————— } (1)$$

நிலைக்குத்துத் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$\uparrow Y = 8\sin 60 - P\sin 60$$

$$= (8 - P)\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ ——————— } (2)$$

விளையுள் திசை AO இல் இருக்குமெனின் நிலைக்குத்துக் கூறு பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும் ஆகையால் சமன்பாடு (2) இலிருந்து $P = 8$ எனக் கிடைக்கும். சமன்பாடு (1) இலிருந்து $X = 2$. எனவே விளையுளின் பருமன் 2 N ஆகும்.

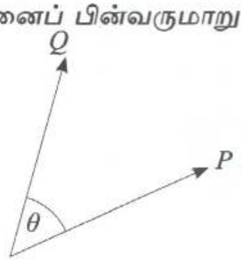
2.4 ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் சமநிலைப்பட்ட விசைத் தொகுதிகள்

நியூற்றனின் இயக்க விதிகள் பற்றி நீங்கள் கற்றுள்ளீர்கள். நீங்கள் இணைந்த கணிதத்தில் அவ்விதிகள் பற்றி மேலும் விடயங்களைக் கற்பீர்களென எதிர்பார்க்கிறோம். இப்போது, ஒரு குறித்த புள்ளிப் பொருளின் மீது புற விசைகள் தாக்குமெனின், அப்பொருள் நாம் கருதும் ஒரு மாட்டேற்றுச் சட்டம் குறித்து ஓய்வில் இருப்பதற்கான நிபந்தனை தாக்கும் புற விசைகள் நாப்பத்தில் இருப்பதாகும்.

ஒரு புள்ளிப் பொருளின் மீது தாக்கும் விசைகள் கருதப்படுவதனால் விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விசைத் தொகுதிக்கும் இப்பேறுகள் எல்லாம் பொருந்தும். மேலும் ஒரே தளத்தின் மீது மாத்திரம் தாக்கும் விசைத் தொகுதிகள் பற்றிக் கவனம் செலுத்துவோம். இத்தகைய ஒரு விசைத் தொகுதி சமநிலைப்படுதல் என்பதன் கருத்து தொகுதியின் பயன்படும் விளையுள் பூச்சியமாகும் என்பதாகும்.

அதாவது, ஒரு துணிக்கை அல்லது புள்ளிப் பொருள் மீது தாக்கும் ஒருதள விசைத் தொகுதிகள் கருதப்படும் அதே வேளை விளையுள் விசை சூனிய விசையைச் சமப்படுத்தும் தொகுதிகள் நாப்பத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும்.

முதலில் இரு விசைகளை மாத்திரம் கொண்ட ஒரு விசைத் தொகுதியைக் கருதுவோம். அவ்விசைகள் பருமனில் சமமாகவும் திசையில் எதிராகவும் இருப்பின், அது நாப்பத்தில் இருக்கும் என்பது நாம் அறிந்த விடயமாகும். காவிக் குறிப்பீட்டில் அவ்விசை கள் $\underline{P}$, $\underline{Q}$ எனக் கொள்ளும்போது நாப்பத்தில் இருப்பதற்கான நிபந்தனை $\underline{P} + \underline{Q} = \underline{0}$ ஆக இருத்தலாகும். அப்போது $\underline{Q} = -\underline{P}$ அல்லது $P = Q$ உடன் அவை எதிர்த் திசைகளில் இருக்கும் விசை களாக இருக்கும். அதனைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.



மேற்குறித்த இரு விசைகளினதும் விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$. இரு விசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதனால் $R = 0$.

$\Rightarrow$ அப்போது $P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2 = 0$. ———— ①

இங்கு சார்பு $P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$ ஆனது θ மீது மாறும் அதே வேளை

$-1 \leq \cos\theta \Rightarrow -2PQ \leq 2PQ\cos\theta$.

$\Rightarrow P^2 - 2PQ + Q^2 \leq P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$.

$\Rightarrow (P-Q)^2 \leq R^2$.

ஆகவே R^2 இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\Rightarrow (P-Q)^2$ ஆகும்.

$\Rightarrow R$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $|P-Q|$ ஆகும்.

ஆகவே தொகுதி சமநிலைப்படுவதற்கு இவ்விழிவுப் பெறுமானம் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$\Rightarrow P = Q$. மேலும் $\theta = \pi$ ஆக இருக்கும்போது இவ்விழிவுப் பெறுமானம் கிடைக்கின்றது. அதாவது விசைகள் எதிர்த் திசைகளில் தாக்கும்போதாகும்.

நடைமுறையில் நீங்களும் காணத்தக்க இத்தகைய சந்தர்ப்பங்கள் பற்றிக் கருதுக.

ஒரு மெல்லிய நூலினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு வீட்டு அலங்காரம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

நூலின் மீது உள்ள இழுவை, அலங்காரத்தின் திணிவு ஆகியவற்றின் விளைவாக உள்ள நிறை காரணமாக அது நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. அவ்விசைகளை உருவில் உள்ளவாறு முன்வைக்கலாம். அலங்காரத்தின் நிறை, நூலின் மீது உள்ள இழுவை ஆகிய விசைகள் எதிர்த் திசைகளில் தாக்கும் அதே வேளை அவை பருமனில் சமமாகும்.

➢ மூன்று விசைகளைக் கொண்ட தொகுதிகள்

ஒரு துணிக்கை அல்லது புள்ளிப் பொருள் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகளைக் கொண்ட தொகுதிகளைக் கருதுவோம். அவ்விசைகளை முறையே $\underline{P}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$ என வகைகுறிக்கும்போது எவையேனும் இரு விசைகளின் விளையுளைக் கருதுவோம். $\underline{P}$, $\underline{Q}$ ஆகிய இரு விசைகளினதும் விளையுளைக் கருதுவோம். $\underline{R}_o$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $\underline{R}_o = \underline{P} + \underline{Q}$ ஆகும். அப்போது பொருளின் மீது தாக்கும் விசைகள் $\underline{R}$, $\underline{R}_o$ ஆகியவற்றினால் வகைகுறிக்கப்படும் அதே வேளை மேற்குறித்த ஒரு பொருளின் மீது இரு விசைகள் தாக்கும்போது நாப்பத்திற்கு $\underline{R}_o = -\underline{R}$ எனப் பெறப்பட்டுள்ளது. ஆகவே $\underline{P} + \underline{Q} = -\underline{R}$ ஆகும். அதாவது $\underline{P} + \underline{Q} + \underline{R} = \underline{0}$ அதாவது $\underline{P}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$ ஆகிய மூன்று விசைகளினால் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்கள் முறையே வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. இது **விசை முக்கோண விதி** எனப்படும்.

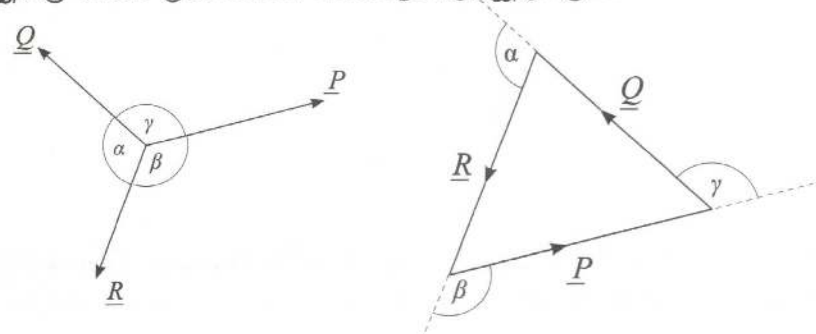
➢ விசை முக்கோணி விதி

ஒரு துணிக்கை அல்லது புள்ளிப் பொருள் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகள் நாப்பத்தில் இருக்குமெனின், அம்மூன்று விசைகளையும் பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு குறித்த முக்கோணியின் பக்கங்களினால் வகைகுறிக்கலாம்.

இங்கு கிடைக்கும் முக்கோணி **விசை முக்கோணி** எனப்படும்.

மறுதலையாக ஒரு துணிக்கை அல்லது புள்ளிப் பொருள் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகள் பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு குறித்த முக்கோணியின் பக்கங்களினால் வகைகுறிக்கப்படலாமெனின், அவ்விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கும்.

ஓர் உருவில் இவ்விசைகளை முன்வைக்கும்போது,
இங்கு விசை முக்கோணி பின்வருமாறு இருக்கும்.



➢ லாமியின் தேற்றம்

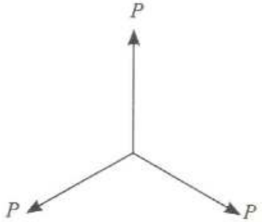
ஒரு துணிக்கை அல்லது புள்ளிப் பொருள் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகள் நாப்பத்தில் இருப்பின், ஒவ்வொரு விசையினதும் பருமன் மற்றைய விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தின் sine பெறுமானத்திற்கு விகிதசமம்.

நிறுவல்

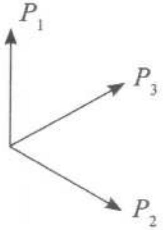
மேற்குறித்த முக்கோணிக்கு sine சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{P}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{Q}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{R}{\sin(\pi-\gamma)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}.$$



விசை முக்கோணி விதியில் அதன் மறுதலையும் உண்மையாக இருக்கும் அதே வேளை லாமியின் தேற்றத்திற்கு அவ்வா றன்று. பருமன்கள் சமமானவையாகவும் ஒவ்வொரு விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் 60° ஆகவும் உள்ள, உருவில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. விசைகளைத் துணிப்பதன் மூலம் அல்லது விசை முக்கோணியைக் கருதுவதன் மூலம் இத்தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றதெனக் காட்டலாம். இப்போது ஒரு விசையைப் புறமாற்றுக.



இங்கு $P_1 = P_2 = P_3 = P$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை விசைகளை வேறுபடுத்தி இனங்காண்பதற்கு அவ்வாறு பெயரிடப்பட்டுள்ளது.

கிடைத் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$\overrightarrow{X} = P_2 \cos 30 + P_3 \cos 30$$

$= 2P \cos 30 = \sqrt{3}\, P \neq 0$. ஆகவே விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருப்பதில்லை.

மேலும் P_1 இற்கும் P_3 இற்குமிடையே உள்ள கோணத்தைப் போன்று P_2 இற்கும் P_3 இற்குமிடையே உள்ள கோணம் 60° ஆக இருக்கும் அதே வேளை P_1 இற்கும் P_2 இற்குமிடையே உள்ள கோணம் 120° ஆகும். லாமியின் தேற்றத்திற்குரிய சூத்திரத்திலிருந்து

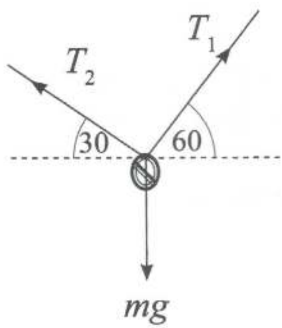
$$\frac{P_1}{\sin 60} = \frac{P_2}{\sin 60} = \frac{P_3}{\sin 120}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P}{\sin 60} = \frac{P}{\sin 60} = \frac{P}{\sin 60}$$

ஆகையால் இச்சமநிலைப்படாத விசைத் தொகுதிக்கும் லாமியின் தேற்றத்திற்குரிய சூத்திரத்தினால் வழு காட்டப்படவில்லை. ஆகவே லாமியின் தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையானதன்று எனத் தெரிகின்றது.

உதாரணம் 2.8

திணிவு m ஐ உடைய ஓர் அலங்காரப் பொருள் உருவில் உள்ளவாறு இலேசான நீட்ட முடியாத இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டு நாப்பத்தில் உள்ளது. இழைகளின் இழுவைகளைக் காண்க.



தீர்வு : லாமியின் தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{T_1}{\sin 120} = \frac{T_2}{\sin 150} = \frac{mg}{\sin 90}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_1}{\sin 60} = \frac{T_2}{\sin 30} = \frac{mg}{1} .$$

$$\Rightarrow T_1 = mg \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \text{ , } T_2 = mg \sin 30 = \frac{1}{2} mg .$$

ஆகவே இழைகளின் இழுவைகள் $\frac{\sqrt{3}}{2} mg$, $\frac{1}{2} mg$ ஆகும்.

உதாரணம் 2.9

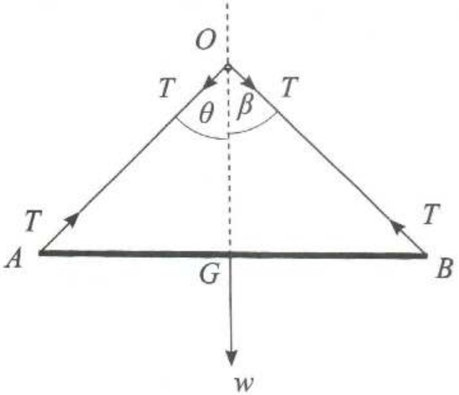
நிறை W ஐ உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் இரு முனைகளிலும் ஓர் ஒப்பமான முளை O மீது செல்லும் ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை இணைக்கப்பட்டு, கோல் நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது. இழைப் பகுதி OA ஆனது நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ இற் சாய்ந் திருப்பின், மற்றைய இழைப் பகுதி நிலைக்குத்துடன் கொண்டுள்ள சாய்வையும் இழையின் இழுவையையும் காண்க.

தீர்வு :

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம்.
அவை

a. கோலின் நிறை
b. இழைப் பகுதி OA இல் இழுவை
c. இழைப் பகுதி OB இல் இழுவை

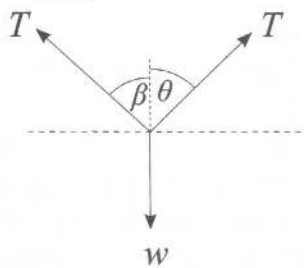
என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.



கோல் நாப்பத்தில் இருப்பதனால் இவ்விசைகள் சந்திக்கின்றன. ஆகவே அவ்விசைகளை ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகளாகக் கருதலாம். இவ்விசைகளை மறுபடியும் வரைவோம்.

ஒரே இழை ஆகையால் இழுவை எல்லா இடங்களிலும் சமம்.

லாமியின் தேற்றத்திலிருந்து



$$\frac{T}{\sin(180-\theta)} = \frac{T}{\sin(180-\beta)} = \frac{w}{\sin(\theta+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin\beta} = \frac{w}{\sin(\theta+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin\theta} = \frac{T}{\sin\beta}, \quad \frac{T}{\sin\theta} = \frac{w}{\sin(\theta+\beta)}.$$

ஆகவே $T\sin\theta = T\sin\beta$, ① $\frac{T}{\sin\theta} = \frac{w}{\sin(\theta+\beta)}$. — ②

சமன்பாடு ① இலிருந்து $\sin\theta = \sin\beta \Rightarrow \theta = \beta$.

அப்போது சமன்பாடு ② இலிருந்து $T = \frac{w}{\sin(\theta+\theta)}\sin\theta$

$$T = \frac{w}{\sin 2\theta}\sin\theta = \frac{w}{2\cos\theta}.$$

எனவே இழையின் இழுவை $\frac{w}{2\cos\theta}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2.10

ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனியுடன் w நிறையுள்ள ஒரு திணிவு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடைத் திசையில் திணிவு மீது தாக்கும் பருமன் $5\sqrt{3}\ g$ N ஐ உடைய ஒரு விசையைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் இழை இறுக்கமாகவும் திணிவு சமநிலையிலும் வைக்கப்படுகின்றது. அப்போது இழையின் இழுவை $10\sqrt{3}\ g$ N என்பதை நாம் அறிவோம். இழை கிடையாக இருக்கும் சாய்வையும் w இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

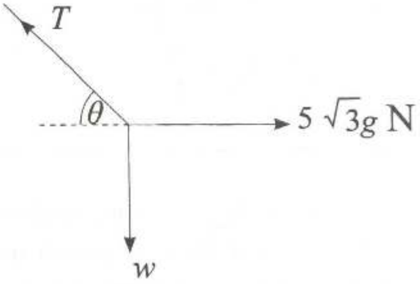
தீர்வு :

திணிவு மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம்.
அவை

- திணிவின் நிறை
- இழையின் இழுவை
- கிடை விசை

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.

திணிவு நாப்பத்தில் இருப்பதனால் ஒரு புள்ளியில் இவ்விசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. ஆகவே அவ்விசைகளை ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகளாகக் கருதலாம்.



லாமியின் தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{T}{\sin 90} = \frac{5\sqrt{3}g}{(\sin 90+\theta)} = \frac{w}{(\sin 180-\theta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{10\sqrt{3}g}{1} = \frac{5\sqrt{3}g}{\cos\theta} = \frac{w}{\sin\theta}.$$

$$\Rightarrow \frac{10\sqrt{3}g}{1} = \frac{5\sqrt{3}g}{\cos\theta}, \frac{10\sqrt{3}g}{1} = \frac{w}{\sin\theta}.$$

ஆகவே $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ——— (1)

$w = 10\sqrt{3}\, g\sin\theta$ ——— (2)

சமன்பாடு ① இலிருந்து $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ.$$

அப்போது சமன்பாடு ② இலிருந்து $w = 10\sqrt{3}g \sin 60^\circ$

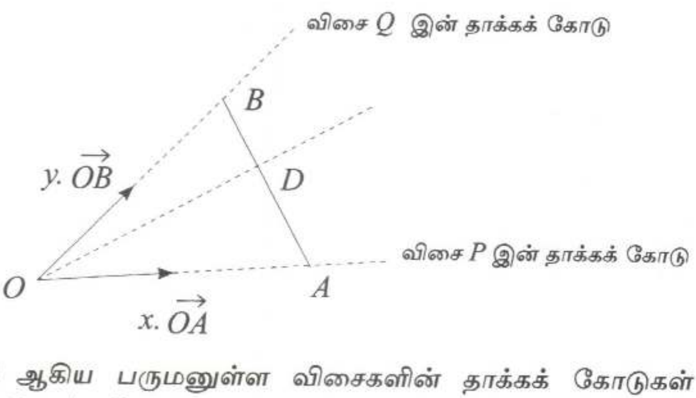
$$= 10\sqrt{3}g \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 15g.$$

❖ **பேறு**

ஒரு குறித்த புள்ளி O இல் தாக்கும் P, Q என்னும் பருமனுள்ள இரு விசைகளைக் கருதுவோம். இங்கு விளையுளின் பருமனையும் ஒவ்வொரு விசையுடனும் விளையுள் ஆக்கும் கோணத்தையும் நாம் இப்போது அறிவோம். வேறொரு விதத்தில் இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களுக்கு ஒரு தீர்வைப் பின்வருமாறும் எடுத்துரைக்கலாம்.

பின்வரும் உருவை நன்றாகப் பார்க்க.



P, Q ஆகிய பருமனுள்ள விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் மீது முறையே A, B என்னும் புள்ளிகள் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை $OP : OA = x : 1$ ஆகவும் $OQ : OB = y : 1$ ஆகவும் இருக்குமாறு A, B ஆகிய புள்ளிகள் இருக்கின்றன எனக் கொள் வோம்.

இங்கு OP, OQ ஆகிய கோட்டுத் துண்டங்களினால் முறையே P, Q ஆகிய பருமனுள்ள விசைகள் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன.

அப்போது $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{OA}$,

$\overrightarrow{OQ} = y\,\overrightarrow{OB}$.

அதாவது $\underline{P} = x\,\overrightarrow{OA}$, $\underline{Q} = y\,\overrightarrow{OB}$.

பக். 33 இல் உள்ள பேறின் விரியிலிருந்து புள்ளி O ஐக் குறித்துக் கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $y : x$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி D இன் தானக் காவி

$$\overrightarrow{OD} = \frac{x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}}{x+y}.$$

ஆகவே $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \underline{P} + \underline{Q} = (x+y)\,\overrightarrow{OD}.$$

இதற்கேற்பக் கோட்டுத் துண்டம் AB ஐ $y : x$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கும் புள்ளி D எனின், $(x+y)\,\overrightarrow{OD}$ இன் மூலம் கருதிய இரு விசைகளினதும் விளையுள் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

இப்புள்ளி D ஆனது x, y ஆகியன பற்றி A, B ஆகியவற்றின் மையப்போலி எனப்படும்.

இப்பேறை விரிக்கும்போது

ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் $P_1, P_2, \ldots, P_n$ என்னும் பருமனுள்ள n விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் மீது முறையே $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னும் புள்ளிகளைத் தெரிந்தெடுத்து மேற்குறித்த விசைகளை $\lambda_1\overrightarrow{OA_1}, \lambda_2\overrightarrow{OA_2}, \ldots, \lambda_n\,\overrightarrow{OA_n}$ என வகைகுறிக்கும்போது அவற்றின் விளையுளை $(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)\,\overrightarrow{OG}$ என எடுத்துரைக்கலாம். இப்புள்ளி G ஆனது $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ பற்றி $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ என்னும் புள்ளிகளின் மையப்போலி எனப்படும்.

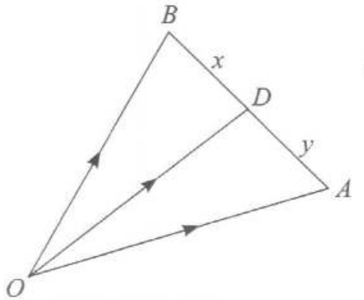
இப்பேறு **இலைப்னிற்சின் பேறு** எனப்படும்.

* **உதாரணம் 2.11**

A, B, C, D ஆகியன ஒரு நாற்பக்கலின் உச்சிகளாக இருக்குமாறு உள்ள நான்கு புள்ளிகளாகும். AC, BD ஆகிய இரு மூலைவிட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே M, N ஆகும். புள்ளி D இல் AB, CB, AD, CD ஆகிய திசைகளில் அக்கோட்டுத் துண்டங்களின் பருமன்களுக்குச் சமமாகவும் அத்திசைகளுக்குச் சமாந்தரமாகவும் இருக்குமாறு விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுள் திசை MN இற்குச் சமாந்தரம் எனவும் பருமனில் கோட்டுத் துண்டம் MN இன் பருமனின் நான்கு மடங்கு எனவும் காட்டுக.

பக்.164 இல் உள்ள வினா **3** ஐப் பார்க்க.

குறிப்பு:

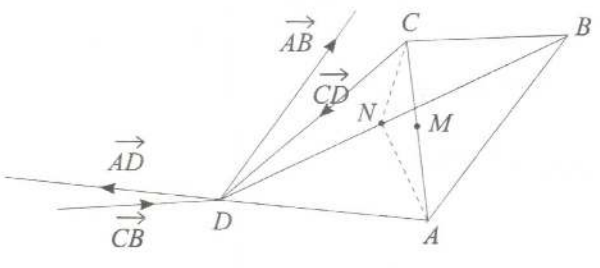


$$\overrightarrow{OD} = \frac{x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}}{x+y}$$

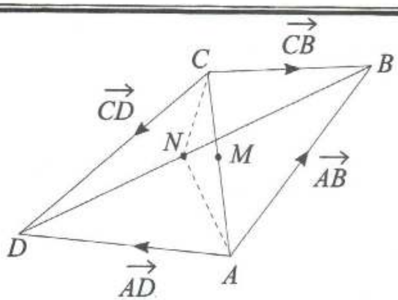
இப்பேறு முன்னர் நிறுவப்பட்டுள்ளமையால் இங்கு பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது. பிரசினத்தைத் தீர்க்கும்போது அதனை நிறுவ வேண்டும். நிறுவலுக்குப் பக். 33 ஐப் பார்க்க.

தீர்வு:

இவ்விசைகளை வகைகுறிப்பதற்கு ஓர் உருவை வரைவோம்.



விசைத் தொகுதியின் விளையுளைக் காணும்போது இவ்விசைகளைப் பின்வருமாறு வகைகுறிக்கலாம்.



முதலில் $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD}$ ஆகிய விசைகளைக் கருதுவோம். மேற்குறித்த பக். 194 இல் உள்ள பேறாகிய $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = (x+y)\overrightarrow{OD}$ இல் $x = 1, y = 1$ என இடும்போது

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = 1 \times \overrightarrow{DA} + 1 \times \overrightarrow{DC}$

$= (1+1)\overrightarrow{DM}$; இங்கு M ஆனது மூலைவிட்டம் AC இன் நடுப் புள்ளியாகும்

$= 2\,\overrightarrow{DM}.$

எனவே $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = -\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) = -2\,\overrightarrow{DM}$
$= 2\,\overrightarrow{MD}.$

$\Rightarrow$ இப்போது $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ ஆகிய விசைகளைக் கருதுவோம். மேற்குறித்தவாறு

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 1 \times \overrightarrow{BA} + 1 \times \overrightarrow{BC}$

$= (1+1)\overrightarrow{BM}$; இங்கு M ஆனது மூலைவிட்டம் AC இன் நடுப் புள்ளியாகும்

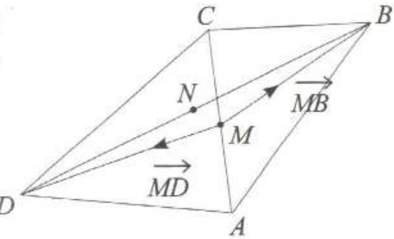
$= 2\,\overrightarrow{BM}.$

எனவே $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = -2\,\overrightarrow{BM}$
$= 2\,\overrightarrow{MB}.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{MD} + 2\,\overrightarrow{MB}$

$= 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}\right).$

மறுபடியும் பக். 194 இல் உள்ள பேறில் $x = 1, \ y = 1$ என இடும்போது



$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = 1 \times \overrightarrow{MD} + 1 \times \overrightarrow{MB}$$

$$= (1+1)\overrightarrow{MN};$$

இங்கு N ஆனது மூலைவிட்டம் BD இன் நடுப் புள்ளியாகும்

$$= 2\,\overrightarrow{MN}.$$

எனவே $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}\right)$

$$= 2\left(2\,\overrightarrow{MN}\right) = 4\,\overrightarrow{MN}.$$

ஆகவே விசைத் தொகுதியின் விளையுள் திசை MN இற்குச் சமாந்தரமும் பருமனில் கோட்டுத் துண்டம் MN இன் பருமனின் நான்கு மடங்கும் ஆகும்.

உதாரணம் 2.12

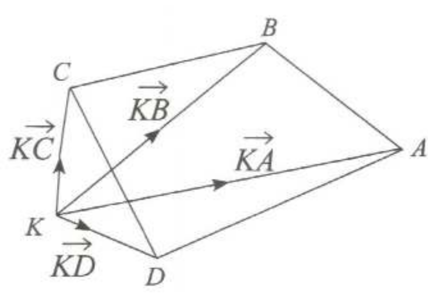
A, B, C, D ஆகியன ஒரு நாற்பக்கலின் உச்சிகளாக இருக்குமாறு உள்ள நான்கு புள்ளிகளாகும். K அதே தளத்தில் உள்ள வேறொரு புள்ளியாக இருக்கும் அதே வேளை புள்ளி K இல் $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}$ ஆகிய நான்கு விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுள் $\underline{R}$ ஆகும்.

(i) $\underline{R}$ மாறிலியெனின் புள்ளி K ஒரு வட்டத்தின் மீது மாறுகின்றது எனவும்

(ii) $\underline{R}$ ஒரு மாறாத் திசையில் இருப்பின் புள்ளி K ஒரு நேர்கோடு வழியே மாறுகின்றது எனவும்

காட்டுக.

தீர்வு :



மேற்குறித்த பக். 194 இல் உள்ள பேறிற்கேற்ப ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் $P_1, P_2, ..., P_n$ என்னும் பருமனுள்ள n விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் மீது முறையே $A_1, A_2, ..., A_n$ என்னும் புள்ளிகளைத் தெரிந்தெடுத்து அவ்விசைகளை $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1}$, $\lambda_2 \overrightarrow{OA_2}, \dots, \lambda_n \overrightarrow{OA_n}$ என வகைகுறிக்கும்போது அவற்றின் விளையுளை $(\lambda_1 + \lambda_2 + ..., \lambda_n)\overrightarrow{OG}$ என எடுத்துரைக்கலாம். இப்புள்ளி G ஆனது $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ பற்றி $A_1, A_2, \dots A_{n-1}, A_n$ என்னும் புள்ளிகளின் மையப்போலி ஆகும்.

இத்தொகுதியில் நான்கு விசைகள் இருக்கும் அதே வேளை λ_1, $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் 1 ஆக எடுக்கும்போது G ஆனது இந்நாற்பக்கல் $ABCD$ இன் மையப்போலி ஆகும். அது நாற்பக்கல் பற்றி ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும்.

மேலும் $\overrightarrow{KA}_1 + \overrightarrow{KA}_2 + \overrightarrow{KA}_3 + \overrightarrow{KA}_4 = 4\,\overrightarrow{KG}$ ஆகையால் $\underline{R} = 4\,\overrightarrow{KG}$ ஆகும். இங்கு A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகியன முறையே A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகளாகும்.

(i) $\underline{R}$ மாறிலியெனின்

$4\,\overrightarrow{KG}$ உம் மாறிலியாகும். KG ஒரு மாறிலி. G ஒரு நிலைத்த புள்ளி ஆகையால் புள்ளி K ஆனது G மையமாகவுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மீது மாறுகின்றது.

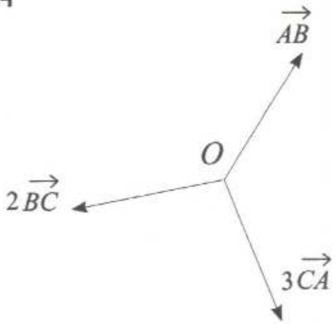
(ii) $\underline{R}$ ஒரு மாறாத் திசையில் இருப்பின்

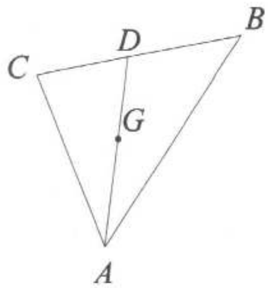
$4\,\overrightarrow{KG}$ உம் ஒரு மாறாத் திசையில் இருக்கும். ஆகவே $\overrightarrow{KG}$ உம் ஒரு மாறாத் திசையில் இருக்கும். இதற்கேற்பப் புள்ளி K ஒரு நேர்கோடு வழியே மாறுகின்றது.

*** உதாரணம் 2.13**

ABC ஒரு முக்கோணியும் O ஆனது முக்கோணியின் தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியும் ஆகும். O இல் தாக்கும் AB, $2BC$, $3CA$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CA திசைகளில் உள்ளன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமன் GA போன்று மும்மடங்கு எனவும் அது திசை GA இல் உள்ளது எனவும் காட்டுக. இங்கு G ஆனது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி ஆகும்.

தீர்வு





தரப்பட்டுள்ள $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{CA}$ ஆகிய விசைகளின் விளையுள் $\underline{R}$ எனின்,

$$\underline{R} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$$

$$= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$$

$$= 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$

$$= 3 \times \underline{0} - \left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \underline{0} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$= -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

இங்கு $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ என எடுத்துரைக்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை D ஆனது பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளியாகும். G ஐ முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியாக எடுக்கும்போது $AG : AD = 2 : 3$ ஆகவும் AG போன்று AD உம் ஒரே திசையிலும் இருப்பதனால் $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ஆகையால் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$ ஆகும்.

$$\Rightarrow \underline{R} = -3\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GA}.$$

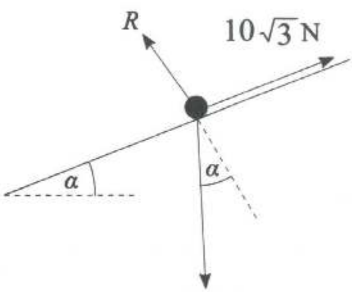
அதற்கேற்ப விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமன் GA போன்று மும்மடங்காகவும் அது திசை GA இல் தாக்குவதாகவும் உள்ளது.

உதாரணம் 2.14

20 N நிறையுள்ள ஒரு சிறிய பொருள் ஓர் ஒப்பமான சாய்தளத்தின் மீது சாய்தளத்தின் ஓர் அதியுயர் சரிவுக் கோடு வழியே மேல்நோக்கி ஒரு $10\sqrt{3}$ N விசையைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. தளத்தின் சாய்வையும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் துணிக.

தீர்வு

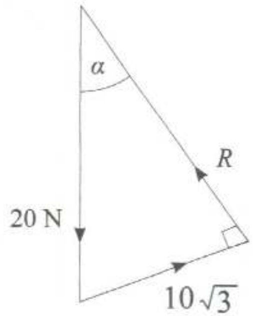
இதற்காக ஓர் உருவை வரைவோம். சாய்தளத்தின் கிடையுடனான சாய்வு α எனக் கொள்வோம்.



அப்போது செவ்வன் மறுதாக்கத்திற்கும் சாய்தளத்திற்கான செங்குத்துத் திசைக்குமிடையே உள்ள கோணமும் α ஆகும்.

இப்பொருள் அதன் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகளின் கீழ் நாப்பத்தில் உள்ளது. விசைத் துணிப்பு, லாமியின் தேற்றம் ஆகியவற்றின் மூலம் தளத்தின் சாய்வையும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் துணியலாம். இதனை வேறொரு விதத்தில் மூன்று விசைகளின் நாப்பத்தைக் கருதுவதன் மூலமும் பெறலாம்.

இதனை வரைபு முறையாகப் பின்வருமாறு செய்யலாம்.



இப்போது மூன்று விசைகளும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களினால் முறையே வகைகுறிக்கப்படுகின்றன. இச்செங்கோண முக்கோணியில்

$R^2 + (10\sqrt{3})^2 = 20^2.$

$$\Rightarrow R^2 = 2^2 \times 10^2 - 10^2 \times 3$$
$$= 4 \times 10^2 - 3 \times 10^2$$
$$= 10^2$$
$$\Rightarrow R = 10.$$

மேலும் $\tan\alpha = \dfrac{10\sqrt{3}}{R}$.

$R = 10$ ஆகையால் $\tan\alpha = \sqrt{3}$

$= \tan\dfrac{\pi}{3}$. ஆகையால் $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

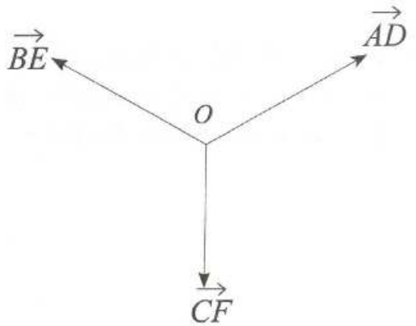
நாப்பத்தில் இராத ஒரு விசைத் தொகுதிக்கும் இம்முறையைப் பின்பற்றலாம். திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டங்களைப் பயன்படுத்தி இவ்விசைகளை வகைகுறித்து வரைபுமுறையாக விளையுளைத் துணியலாம்.

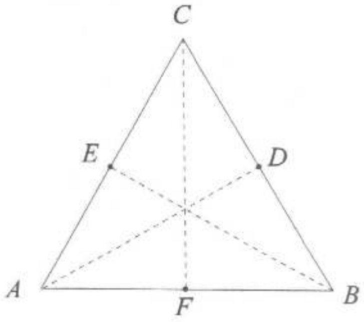
உதாரணம் 2.15

ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் D, E, F ஆகியன முறையே BC, CA, BA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம். முக்கோணியின் தளத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி O இல் AD, BE, CF பருமனுள்ள விசைகள் முறையே அதே திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளைத் துணிக.

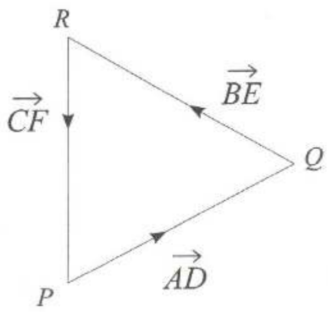
தீர்வு

இதுவரைக்கும் நீங்கள் நன்றாகக் கவனித்திருந்தால் இவ்விளையுள் பற்றிய ஒரு கருத்தை நீங்கள் பெறவேண்டும். முதலில் விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் வகைகுறிப்போம்.





வரைபு முறையாகத் தீர்ப்பதற்கு விசைகளைக் கருதுவோம்.

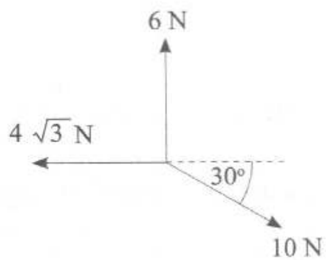


ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆகையால் ஒவ்வொரு விசைக்குமிடையே உள்ள கோணம் 60° உம் அவ்விசைகள் பருமனில் சமமும் ஆகும். உருவில் அவ்விசைகளை வகைகுறிக்கும் P, Q, R ஆகியவற்றை இணைப்பதன் மூலம் ஒரு சமபக்க முக்கோணி பெறப்படுகின்றது. ஆகவே விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் உள்ளது.

ஆகவே தொகுதியின் விளையுள் பூச்சியமாகும்.

உதாரணம் 2.16

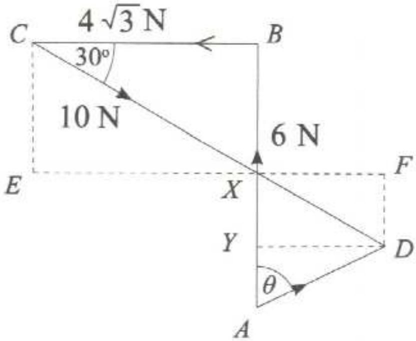
ஒரு துணிக்கை மீது தாக்கும் விசைத் தொகுதி உருவில் காணப்படுகின்றது. வரைபு முறையைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளைத் துணிக.



தீர்வு

இங்கு விசைகளை வகைகுறிக்கும்போது இயன்றவரைக்கும் அளவிடைக்கும் குறித்த திசைக்கும் கருதுதல் முக்கியமானதாகும்.

6 N, $4\sqrt{3}$ N , 10 N விசைகளை முறையே AB, BC, CD என்னும் திசையளித்த கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிப்போம்.



விளையுள் AD என்னும் திசையளித்த கோட்டுத் துண்டத்தினால் வகைகுறிக்கப்படும்.

$$EF = CD\cos 30^\circ$$
$$= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 5\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow YD = \sqrt{3}.$$

மேலும் $BY = CD\sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$
$$\Rightarrow AY = AB - BY = 1.$$

ஆகவே முக்கோணி ADY இல் $\tan\theta = \frac{DY}{AY} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

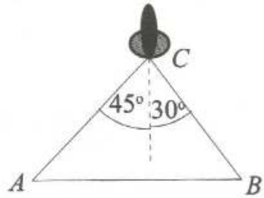
$$= \tan 60^\circ.$$
$$\Rightarrow \theta = 60^\circ.$$

$$AD^2 = AY^2 + YD^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow AD = 2.$$

ஆகவே விளையுளின் பருமன் 2 N ஆக இருக்கும் அதே வேளை அது 6 N பருமனுள்ள விசையுடன் 60° கோணத்தை ஆக்குகின்றது.

உதாரணம் 2.17

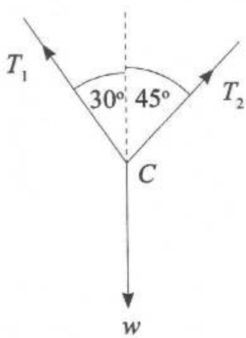
உருவில் W நிறையுள்ள ஒரு சுமை C ஐ வைப்பதற்கு AB, BC, CA என்னும் இலேசான கோல்களை இட்டு அமைக்கப் பட்டுள்ள சட்டப்படல் உள்ளது. AC, BC ஆகிய கோல்களின் மீது தாக்கும் விசைகளின் பருமனைத் துணிக.

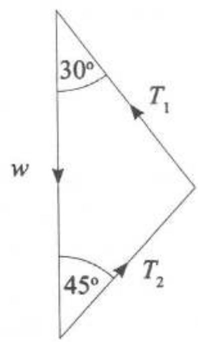


தீர்வு

இதற்கு வரைபு முறையைப் பிரயோகிப்போம்.

C இல் தாக்கும் இவ்விசைத் தொகுதியை முதலில் வரைவோம். அச்சுமை நாப்பத்தில் உள்ளது.





இப்போது இவ்விசைகளை வரைபுமுறையாக வகைகுறிக்கும்போது sine சூத்திரத்திலிருந்து

$$\frac{T_1}{\sin 45} = \frac{T_2}{\sin 30} = \frac{w}{\sin 75}.$$

$$T_1 = \frac{w}{\sin 75} \times \sin 45 = \frac{\sqrt{2}\,w}{2 \sin 75},$$

$$T_2 = \frac{w}{\sin 75} \times \sin 30 = \frac{w}{2 \sin 75}$$ ஆகும்.

இத்தகைய பிரசினங்களை வரைபு முறையாகத் தீர்த்தல் பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் பிரயோகிக்கப்படாத போதிலும் நாம்

எதிர்காலத்தில் கற்கவுள்ள சட்டப்படல்கள் என்னும் பாடத்தில் போவின் குறிப்பீட்டுடன் இம்முறை தேவை ஆகையால் இப்பொறிநுட்பமும் மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

2.5 ➡ ஒருதள விசைத் தொகுதிகள்

இதுவரைக்கும் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் விசைத் தொகுதிகள் பற்றிக் கற்ற அதே வேளை அவ்வெண்ணக்கருக்களை விரிவாக்கித் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காத விசைத் தொகுதிகள் பற்றியும் கவனஞ் செலுத்துவோம். அதற்காக முக்கியமான அடிப்படை விடயங்களிடையே ஓர் அச்சைப் பற்றி ஒரு விசையின் திருப்பத்தையும் விசை இணையையும் குறிப்பிடலாம்.

➢ ஓர் அச்சைப் பற்றி ஒரு விசையின் திருப்பம்

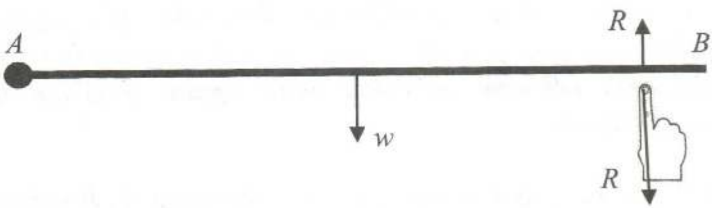
கவராயம் கேத்திரகணித அமைப்புகளுக்கு முக்கியமான ஓர் உபகரணமாகும். கவராயத்தில் தேவையான அளவுக்குக் கவராயத்தின் கூருக்கும் பென்சிலின் கூருக்குமிடையே உள்ள இடை வெளியைச் செப்பஞ்செய்வதற்கு விசையைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் கவராயத்தின் புயங்களைச் சுழற்ற வேண்டும். இங்கு விசை பிரயோகிக்கப்படுவதனால் அப்புயங்கள் தொடுக்கப்பட்டுள்ள அச்சைப் பற்றிச் சுழல்கின்றன. அதற்குக் காரணம் பிரயோகிக்கப்படும் விசை ஆகையால் அவ்வச்சைப் பற்றி ஒரு திருப்பம் உண்டாகின்றது.

வேறோர் எளிய உதாரணமாகத் தராசைக் கருதலாம்.

ஆய்கூடங்கள், மருந்தகங்கள், வர்த்தக நிலையங்கள் ஆகியவற்றில் இத்தகைய தராசுகளைக் காணலாம். தராசின் இரு பக்கங்களிலும் தராசுத் தட்டுகளில் சம திணிவுகளை இடும்போது அது நாப்பத்தில் இருக்கும் அதே வேளை மறுசார் திணிவு கூடிய தட்டு கீழே செல்லும். திணிவு காரணமாக உண்டாகும் புவியீர்ப்பு விசையின் திருப்பத்தின் விளைவாக அவ்வாறு நடைபெறுகின்றது.

நாம் வேறோர் எளிய பரிசோதனையைச் செய்வோம். ஒரு கோல் AB ஆனது A இல் ஒப்பமாகச் சுழலையிடப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்வோம். அதாவது கோல் புள்ளி A ஐப் பற்றிச் சுயாதீனமாகச் சுழலத்தக்கது.

உருவில் உள்ளவாறு உங்கள் விரல் நுனியினால் கோலைக் கிடையாக வைத்திருப்பதற்கு முயலுக. அப்போது உங்கள் விரல் எவ்வளவு உதைப்பை உணருமெனச் சிந்தித்துப் பார்க்க. இப்போது உங்கள் விரலைக் கோல் AB மீது வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வைத்து விரல் உணரும் உதைப்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க. விரலின் நுனியைப் புள்ளி A ஐ நோக்கிக் கிட்டக் கொண்டுவரும்போது விரல் உணரும் உதைப்பு கூடியது என்பது உங்கள் முடிவாக இருக்க வேண்டும் அல்லவா? விசைகள் பற்றிய விளக்கத்திலிருந்து இதற்காகப் பின்வருமாறு ஒரு கணித மாதிரியுருவை முன்வைக்கலாம்.



இங்கு கோலைக் கிடையாக வைக்கத் தேவையான விசையின் பருமன் R ஆக இருக்கும் அதே வேளை எதிர்த் திசையில் அது உங்கள் விரல் உணரும் உதைப்பாகும். மேலும் இது கோலின் நிறை அச்சு A ஐப் பற்றி உண்டாக்கும் திருப்பத்தை நீக்குவதற்குத் தேவையான திருப்பத்திற்கு விரலினால் பிரயோகிக்கப்படும் விசை யாக உண்டாகின்றது. ஆகவே ஒரு விசை காரணமாக ஒரு குறித்த அச்சைப் பற்றி உண்டாகும் திருப்பம் தூரத்திற்கு நேர் விகிதசமமென ஊகிக்கலாம். மேலும் விரல் நுனியை ஒரு நிலையான தானத்தில் வைத்துக் கோலின் திணிவைக் கூட்டும்போது விரல் நுனி உணரும் உதைப்பும் அதிகரிக்குமென நீங்கள் அனுபவப்பட்டிருப்பீர்கள். ஆகவே ஒரு குறித்த அச்சைப் பற்றிய ஒரு விசை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் விசையின் பருமனுக்கும் நேர் விகிதசமமெனக் காணலாம்.

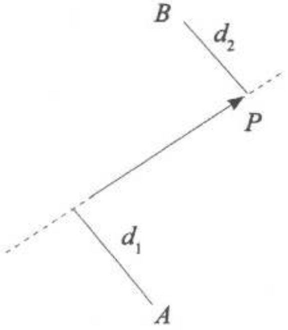
ஒரு குறித்த அச்சைப் பற்றிய ஒரு விசை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பமானது அவ்வச்சைப் பற்றி ஒரு விசையை உண்டாக்கும் **திரும்பல் விளைவு** ஆகும். அதாவது எப்போதும் ஒரு சுழற்சி ஏற்படாவிட்டாலும் சுழல்வதற்கான நாட்டம் உண்டாகின்றது.

மேலும் இத்திருப்பத்தின் பருமன் விசையின் பருமனினதும் அச்சிலிருந்து விசையின் தாக்கக் கோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரத்தினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமம். ஆகவே திருப்பத்தின் அலகுகளுக்காகத் தூரத்தின் அலகுகளினதும் விசையின் பருமனின் அலகுகளினதும் பெருக்கம் பயன்படுத்தப்படும் அதே வேளை நியம அலகுகள் நியூற்றன் மீற்றர் (N m) ஆகும்.

மேலும் திருப்பம் ஒரு காவியாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் திசை சுழலும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலாகும். வசதிக்காக அதனை இடஞ்சுழிப் போக்கு அல்லது வலஞ்சுழிப் போக்கு எனக் கொள்வோம். ஒரு வழக்காக இடஞ்சுழிப் போக்கு + எனவும் வலஞ்சுழிப் போக்கு − எனவும் கருதப்படும்.

நாம் ஒருதள விசைகளை மாத்திரம் கருதுகின்றமையால் சுழற்சி அச்சு விசைகள் தாக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும். ஆகவே கருதப்படும் ஒரு குறித்த புள்ளியினூடாக உள்ள அச்சைப் பற்றிய திருப்பத்திற்குப் பதிலாக அப்புள்ளியைப் பற்றிய திருப்பத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசை உருவில் உள்ளவாறு A , B என்னும் புள்ளிகளைப் பற்றி உண்டாக்கும் திருப்பங்களைக் கருதுவோம்.



புள்ளி A பற்றித் திருப்பம் $= P \times d_1$
வலஞ்சுழியாக

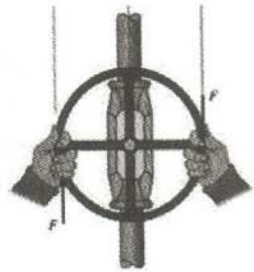
அல்லது $\circlearrowright \; = P \times d_1$.

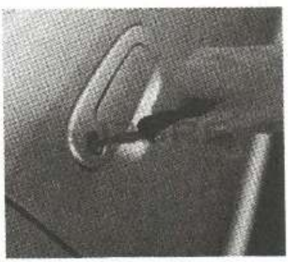
புள்ளி B பற்றித் திருப்பம் $= P \times d_2$
இடஞ்சுழியாக

அல்லது $\circlearrowleft \; = P \times d_2$.

ஒரு புள்ளி மீது தாக்கும் இரு விசைகளின் விளையுள் பூச்சியமெனின், அவ்விசைகள் நாப்பத்தில் இருக்கின்றன என்பதை நாம் அறிவோம். இப்போது அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. எனினும் இரு விசைகளினதும் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்காதபோது நிலைமை வேறுபடுகின்றது. இதற்கு மிகச் சிறந்த உதாரணம் விசை இணையாகும்.

ஒரு விசை இணை பிரயோகிக்கப்படும் சந்தர்ப்பம் உருவில் காணப்படுகின்றது. இங்கு ஒரு பெரிய திருகுபிடி இரு கைகளினாலும் திருப்பப்படும் விதம் முன்வைக்கப் பட்டுள்ளது. இங்கு ஒரு விசை இணை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது.

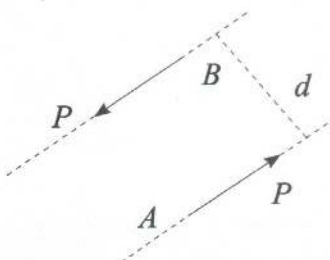




ஒரு மோட்டர் வாகனத்தின் கதவு சாவியைப் பயன்படுத்தித் திறக்கப்படும் விதம் இவ்வுருவிற் காணப்படுகின்றது. ஒரு விசை இணை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது.

2.6 விசை இணை

பருமன்கள் சமமாகவும் திசைகள் எதிராகவும் உள்ள இரு விசைகள் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் பொருந்தாதவாறு தாக்கும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் விசை இணை உண்டாகின்றது.



ஒரு விசை இணை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் அது இருக்கும் தளத்தில் கருதப்படும் புள்ளி மீது இருப்பதில்லை.

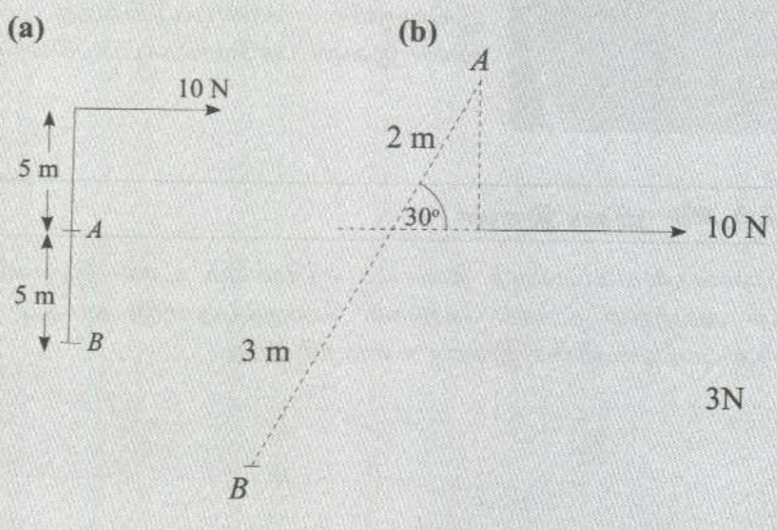
உருவில் உள்ள ஒரு விசை இணை காரணமாக அத்தளத்தின் எந்தவொரு புள்ளியிலும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓர் அச்சுப் பற்றிய இணையின் திருப்பம் இடஞ்சுழிப் போக்கில் இருக்கும் அதே வேளை அதன் பருமன் $P \times d$ ஆகும்.

இதற்குப் பயிற்சி 2.2 இன் வினா 2 ஐப் பார்க்க.

ஓர் அச்சுத் தொகுதி Oxy பற்றி அத்தளத்தின் மீது இருக்கும் யாதாயினும் ஒரு புள்ளியைப் போன்று ஒரு காவியை அல்லது விசையை எடுத்துரைக்கலாம் ஆகையால் பல சந்தர்ப்பங்களில் தளத்தின் மீது ஓர் அச்சுத் தொகுதி Oxy ஐ அறிமுகஞ்செய்தல் கணித பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதை மேலும் எளிதாக்கும்.

பயற்சி 2.3

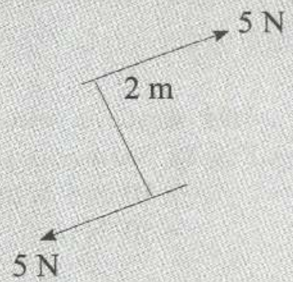
1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள விசை காரணமாகத் தரப்பட்டுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகள் பற்றித் திருப்பத்தைத் துணிக.



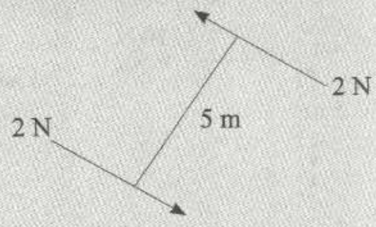
2. ஒரு விசை இணை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் அது இருக்கும் தளத்தில் கருதப்படும் புள்ளி மீது இருப்பதில்லை எனக் காட்டுக.

3. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள இணை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பத்தைத் துணிக.

(a)



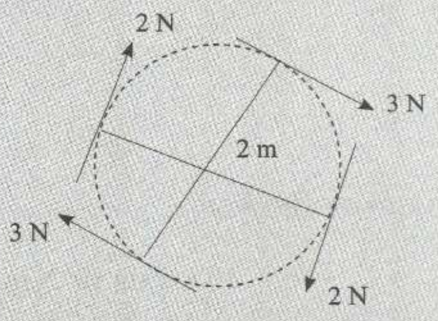
(b)



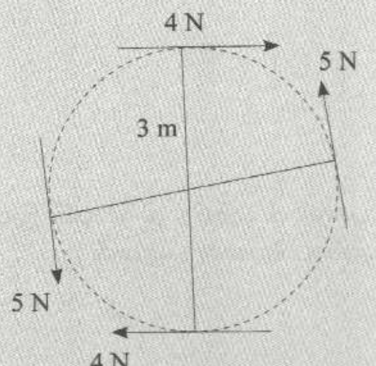
4. ஒரே தளத்தில் தாக்கும் இரு விசை இணைகளுக்காக வேறொரு விசை இணையை முன்வைக்கலாமெனக் காட்டுக.

5. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள இணைகளுக்குச் சமவலுவான ஒரு தனி இணையை முன்வைக்க.

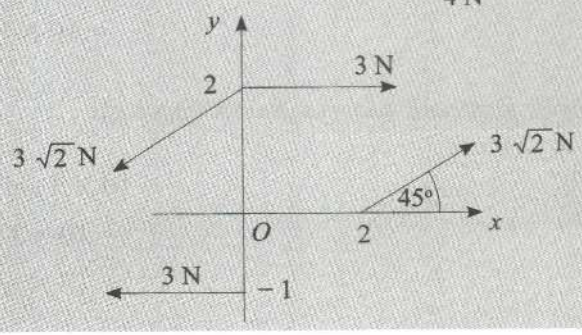
(a)



(b)



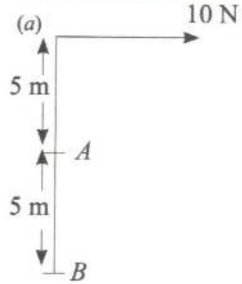
(c)



2.3 மாதிரித் தீர்வு

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள விசை காரணமாகத் தரப்பட்டுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகள் பற்றித் திருப்பத்தைத் துணிக.

(a)



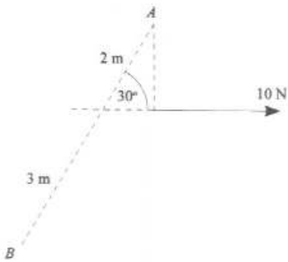
புள்ளி A பற்றித் திருப்பம் வலஞ்சுழி யாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன்

$$= 10 \times 5 \text{ N m}$$
$$= 50 \text{ N m.}$$

புள்ளி B பற்றித் திருப்பமும் வலஞ் சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன்

$$= 10 \times 10 \text{ N m}$$
$$=100 \text{ N m.}$$

(b)



புள்ளி A பற்றித் திருப்பம் இடஞ்சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன்

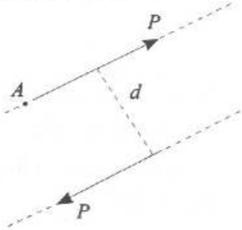
$$10 \times 2 \sin 30^\circ \text{ N m}$$
$$= 10 \times 2 \times \frac{1}{2} \text{ N m}$$
$$= 10 \text{ N m.}$$

புள்ளி B பற்றித் திருப்பம் வலஞ்சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன்

$$10 \times 3 \sin 30^\circ \text{ N m}$$
$$= 10 \times 3 \times \frac{1}{2} \text{ N m}$$
$$= 15 \text{ N m.}$$

2. ஒரு விசை இணை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் அது இருக்கும் தளத்தில் கருதப்படும் புள்ளி மீது இருப்பதில்லை எனக் காட்டுக.

இரு விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் d எனக் கொள்வோம்.

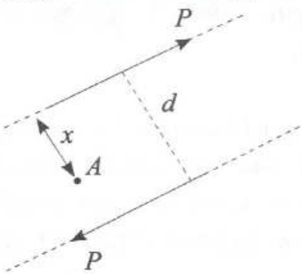


உருவில் உள்ள விசை இணையைக் கருதுக.
இத்தளத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி A ஐப் பின்வருமாறு மூன்று சந்தர்ப்பங்களாக வேறுபடுத்தலாம்.

- ஒரு விசையின் தாக்கக் கோடு மீது
- இரு விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளிடையே
- தாக்கக் கோடுகளுக்கு வெளியே

- ஒரு விசையின் தாக்கக் கோடு மீது A இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை முதலில் கருதுவோம். அப்போது அவ்விசை காரணமாக ஒரு திருப்பம் உண்டாகாத அதே வேளை மற்றைய விசை காரணமாகப் புள்ளி A பற்றி ஒரு வலஞ்சுழித் திருப்பம் உண்டாகும். அதே வேளை அதன் பருமன் pd ஆகும்.

- இரு விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளுக்கிடையே புள்ளி A இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம். பின்வரும் உருவைப் பார்க்க.

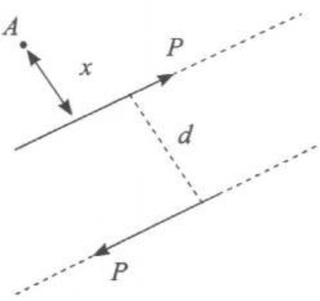


புள்ளி A இற்கும் ஒரு தாக்கக் கோட்டிற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் x எனக் கொள்வோம். அப்போது மற்றைய தாக்கக் கோட்டிற்கும் புள்ளி A இற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $d-x$ ஆகும். முதல் விசை காரணமாகப் புள்ளி A பற்றி ஒரு வலஞ்சுழித் திருப்பம் உண்டாகும் அதே வேளை அதன் பருமன் Px ஆகும்.

மற்றைய விசை காரணமாகவும் A பற்றி ஒரு வலஞ்சுழித் திருப்பம் உண்டாகும் அதே வேளை அதன் பருமன் $P(d-x)$ ஆகும். ஆகவே இரு விசைகளும் புள்ளி A பற்றி உண்டாக்கும் வலஞ்சுழித் திருப்பத்தின் பருமன் $P(d-x)+Px=Pd$ ஆகும்.

- இரு விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளுக்கு வெளியே புள்ளி A இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை இறுதியாகக் கருதுவோம்.

பின்வரும் உருவைப் பார்க்க.



புள்ளி A இற்கும் கிட்டிய தாக்கக் கோட்டிற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் x எனக் கொள்வோம். அப்போது மற்றைய தாக்கக் கோட்டிற்கும் புள்ளி A இற்குமிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $d+x$ ஆகும்.

முதல் விசை காரணமாகப் புள்ளி A பற்றி ஓர் இடஞ்சுழித் திருப்பம் உண்டாகும் அதே வேளை அதன் பருமன் Px ஆகும். மற்றைய விசை காரணமாக A பற்றி ஒரு வலஞ்சுழித் திருப்பம் உண்டாகும் அதே வேளை அதன் பருமன் $P(d+x)$ ஆகும்.

ஆகவே இரு விசைகளும் புள்ளி A பற்றி உண்டாக்கும் இடஞ் சுழித் திருப்பத்தின் பருமன் $Px-P(d+x)=-Pd$.

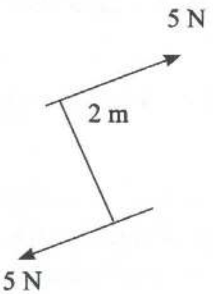
இங்கு அத்திருப்பத்தின் திசையைப் புறமாற்ற வேண்டும் என்பதை மறைக் குறி கருதுகின்றது. ஆகவே இவ்விசை இணையின் விளையுள் திருப்பம் வலஞ்சுழியாகப் பருமன் Pd ஐக் கொண்ட ஒரு காவியாகும்.

அதற்கேற்ப ஒரு விசை இணை அதே தளத்தில் யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் ஒரே திருப்ப விளைவை உண்டாக்குகின்றது. எனவே திருப்பம் புள்ளியைச் சார்ந்திராமையால் ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

குறிப்பு : ஒரே தளத்தில் இருக்கும் விசை இணைகளின் திசைகள் சமம் அல்லது எதிர் ஆகும். எனவே அவற்றின் விளையுளை எளிதாகத் துணியலாம். ஒரு தனி விசையின் பருமன் P ஆகவும் தாக்கக் கோடுகள் d தூரத்திலும் இருக்கும் ஒரு விசை இணை காரணமாக அது இருக்கும் தளத்தில் யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் பருமன் Pd ஐக் கொண்ட ஒரு திருப்பம் உண்டாகின்றது.

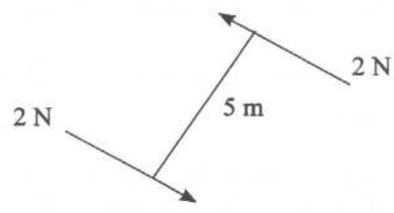
3. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள இணை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பத்தைத் துணிக.

(a)



திருப்பம் வலஞ்சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன் 10 N m ஆகும்.

(b)



திருப்பம் இடஞ்சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன் 10 N m ஆகும்.

குறிப்பு : ஒரே பருமனுள்ள திருப்பங்களை உண்டாக்கும் வேறுபட்ட இணைகள் இருக்கின்றன.

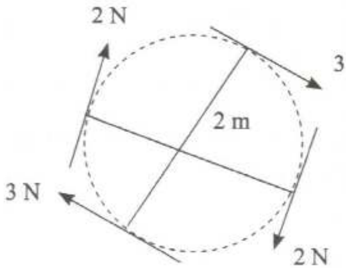
ஓர் இணை காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் G ஆக இருக்குமாறு P, d என்னும் இரு எண்களைக் கருதும்போது ஒன்றிலிருந்தொன்று தூரம் d இல் இருக்கும் இணை உள்ள அதே தளத்தில் இருக்கும் தாக்கக் கோடுகளையும் பருமன் P ஐ உடைய தனி விசையையும் கொண்டு அந்த இணையை வகைகுறிக்கலாம்.

4. ஒரே தளத்தில் தாக்கும் இரு விசை இணைகளுக்காக வேறொரு விசை இணையை முன்வைக்கலாமெனக் காட்டுக.

இதற்குரிய விடை மேற்குறித்த குறிப்பில் தரப்பட்டுள்ளது.

5. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள இணைகளுக்குச் சமவலுவான ஒரு தனி இணையை முன்வைக்க.

(a)

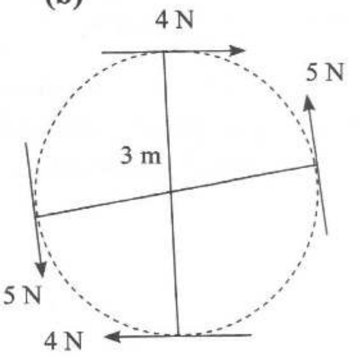


இங்கு இரு விசை இணைகள் இருக்கும் அதே வேளை உருவில் ஒவ்வோர் இணையினதும் விசைகளுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி 4 m எனத் தெரிகின்றது. இரு இணைகளினதும் திருப்பங்கள் வலஞ்சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை பருமன்கள் 12 N m, 8 N m ஆகும்.

ஆகவே விளையுள் திருப்பம் 20 N m ஆகும். அதன் திசை வலஞ்சுழியாகும்.

வலஞ்சுழிப் போக்கில் திருப்பம் உள்ள இணைகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் இருக்கும் அதே வேளை ஒன்றிலிருந்தொன்று 4 m தூரத்தில் இருக்கும் பருமன் 5 N ஐ உடைய தனி விசையையும் வலஞ்சுழிப் போக்கில் ஒரு திருப்பம் உள்ள ஓர் இணையையும் முன்வைக்கலாம்.

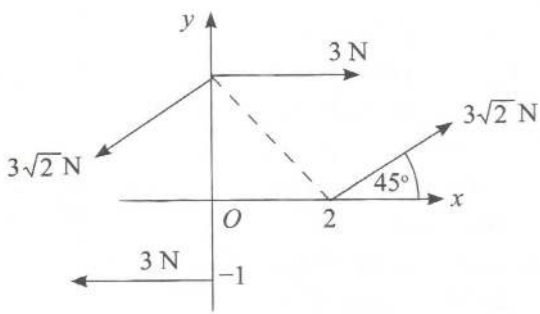
(b)



இங்கும் இரு விசை இணைகள் இருக்கும் அதே வேளை ஒவ்வோர் இணையினதும் விசைகளுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி 6 m எனத் தெரிகின்றது. இரு இணைகளினதும் திருப்பங்கள் வலஞ்சுழியாகவும் இடஞ்சுழியாகவும் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றின் பருமன்கள் முறையே 24 N m, 30 N m ஆகும்.

மிகப் பெரிய இடஞ்சுழித் திருப்பம் ஆகையால் விளையுள் திருப்பமும் இடஞ்சுழியாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பருமன் $(30-24)$ N m $=6$ N m ஆகும்.
ஒன்றிலிருந்தொன்று 3 m தூரத்தில் இருக்கும் பருமன் 2 N ஐ உடைய தனி விசைகளையும் இடஞ்சுழிப் போக்கில் ஒரு திருப்பம் உள்ள ஓர் இணையையும் இங்கு முன்வைக்கலாம்.

(c)



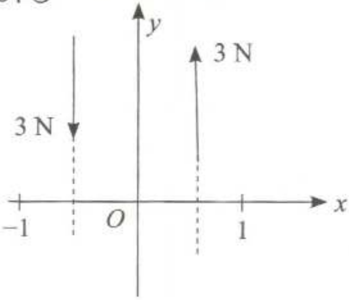
இங்கும் இரு விசை இணைகள் உள்ளன.

தனி விசைகளின் பருமன்கள் 3 N வீதம் உள்ள விசை இணையைக் கருதுவோம். அதன் திருப்பம் வலஞ்சுழியானதும் பருமன் 3×3 N m $= 9$ N m உள்ளதும் ஆகும்.

மற்றைய இணையில் தனி விசைகளின் பருமன்கள் $3\sqrt{2}$ N வீதம் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றிற்கிடையே உள்ள இடைவெளி $2\sqrt{2}$ m உம் திருப்பத்தின் திசை இடஞ்சுழிப் போக்கும் அதன் பருமன் $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ N m $= 12$ N m உம் ஆகும்.

ஆகவே விளையுள் திருப்பம் இடஞ்சுழிப் போக்கில் இருக்கும் அதே வேளை அதன் பருமன் $(12-9)$ N m $= 3$ N m ஆகும்.

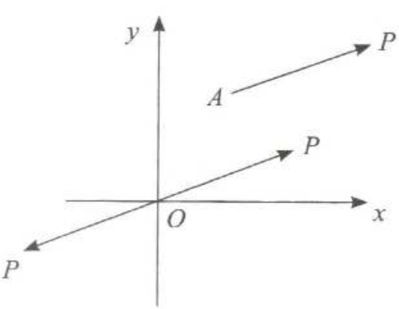
ஒன்றிலிருந்தொன்று 1 m தூரத்தில் இருக்கும் 3 N பருமனுள்ள தனி விசைகளையும் இடஞ்சுழிப் போக்கில் ஒரு திருப்பம் உள்ள ஓர் இணையையும் இங்கு முன்வைக்கலாம். அதனைப் பின்வருமாறு ஓர் உருவில் எடுத்துக் காட்டலாம்.



ஒரு புள்ளி A இல் தாக்கும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசையைப் புள்ளி O இற்குக் கொண்டு வருதல், அதாவது ஒடுக்கல் பற்றிக் கருதுவோம்.

சந்தர்ப்பம் 1

இங்கு விசை P இன் தாக்கக் கோடு மீது புள்ளி O இருக்கிறதெனக் கொள்வோம். அப்போது நாம் செய்ய வேண்டிய செயல் எதுவும் இல்லை. அப்போது தாக்கக் கோடு மீது உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் அவ்விசை தாக்குவதாகக் கருதலாம். அது **விசை ஊடுகடத்தப்படுதன்மைக் கோட்பாடு** எனப்படும்.



சந்தர்ப்பம் 2

விசை P இன் தாக்கக் கோடு மீது புள்ளி O இருப்பதில்லை எனக் கொள்வோம்.

இப்போது புள்ளி O இல் விசை P இன் திசையிலும் எதிர்த் திசையிலும் தாக்கும் பருமன் P ஐ உடைய இரு விசைகளை அறிமுகஞ் செய்வோம். அப்போது புள்ளி A இல் தாக்கும்

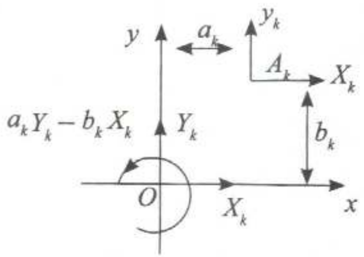
பருமன் P ஐ உடைய விசை காரணமாகவும் அதற்கு எதிரான திசையில் தாக்கும் புள்ளி O இல் உள்ள விசை காரணமாகவும் ஓர் இணை உண்டாகின்றது. கருதப்பட்டுள்ளவாறு அத்திருப்பம் வலஞ்சுழிப் போக்கில் இருக்கும் அதே வேளை அதன் பருமன் G எனக் கொள்வோம். இத்திருப்பம் தொடக்க விசைப் புள்ளி O பற்றி உண்டாக்கும் திருப்பத்திற்குச் சமம்.

ஆகவே ஒரு புள்ளி A இல் தாக்கும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசைக்குப் பதிலாக விசையின் தாக்கக் கோடு மீது இல்லாத ஒரு புள்ளி O இல் முதல் விசையின் அதே திசையில் தாக்கும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசையையும் புள்ளி O பற்றிப் பருமன் P ஐ உடைய விசை உண்டாக்கும் திருப்பம் உள்ள ஓர் இணையையும் அறிமுகஞ் செய்யலாம்.

குறிப்பு: சந்தர்ப்பம் 2 இல் கிடைக்கும் பேறு சந்தர்ப்பம் 1 இல் கிடைத்த பேறுடன் இசைகின்றது. அதற்குக் காரணம் விசை P இன் தாக்கக் கோடு மீது புள்ளி O இருக்கும்போது திருப்பம் பூச்சியமாக இருப்பதாகும். எனவே ஒரு புள்ளி A இல் தாக்கும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசைக்குப் பதிலாக யாதாயினும் ஒரு புள்ளி O இல் முதல் விசையின் அதே திசையில் தாக்கும் பருமன் P ஐ உடைய ஒரு விசையையும் புள்ளி O பற்றி உகந்த ஒரு திருப்பம் உள்ள ஓர் இணையையும் அறிமுகஞ்செய்யலாம்.

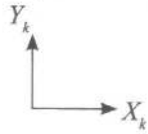
இப்போது மேற்குறித்த பேறை விரித்து, தரப்பட்ட ஒரு விசைத் தொகுதியைப் புள்ளி O இற்கு ஒடுக்கலைக் கருதுவோம். இங்கு தொகுதியின் விசைகளின் எண்ணிக்கை n எனவும் அவ்விசைகள் முறையே புள்ளி $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k, \dots, A_n$ இல் தாக்கும் விசைகள் $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3, \dots, \underline{P}_k, \dots, \underline{P}_n$ எனவும் கொள்வோம்.

புள்ளி A_k (a_k, b_k) இல் தாக்கும் விசை $\underline{P}_k$ ஐக் கருதுவோம். இங்கு $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ஆகும். கூறுகளின் சார்பில் $\underline{P}_k = X_k\underline{i} + Y_k\underline{j}$ எனக் கொள்வோம். பின்வரும் உருவைப் பார்க்க.



புள்ளி A_k இல் தாக்கும் விசை $\underline{P}_k$ ஐப் புள்ளி O இற்கு ஒடுக்குவோம்.

அப்போது O இல் தாக்கும்



விசையுடன் விசை Y_k காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் $a_k\ Y_k$ உள்ள ஓர் இணைக்கும் விசை X_k காரணமாக உண்டாகும் திருப்பம் $-b_k\ X_k$ உள்ள ஓர் இணைக்கும் சமவலுவுள்ளது. எனவே இங்கு விளையுள் திருப்பம் $a_kY_k - b_kX_k$ ஆகவுள்ள ஓர் இணைக்கு அது சமவலுவுள்ளது.

ஆகவே தொகுதியின் விசைகள் எல்லாவற்றையும் புள்ளி O இற்கு ஒடுக்கும்போது சமவலுவுள்ள தனி விசையானது கிடையாகத் தாக்கும் எல்லா விசைகளினதும் நிலைக்குத்தாகத் தாக்கும் எல்லா விசைகள் Y_k இனதும் விளையுள் ஆகும்.
அவ்விசையை $\underline{R} = X\,\underline{i} + Y\,\underline{j}$ என வகைகுறிக்கும்போது

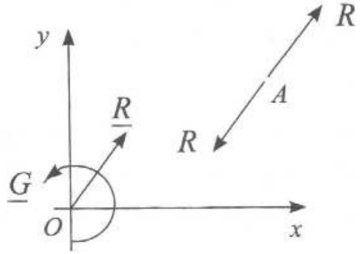
$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\,,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் விளையுள் திருப்பம் $a_kY_k - b_kX_k$ போன்ற எல்லாத் திருப்பங்களினதும் கூட்டுத்தொகை ஆகையால் சமவலு விளையுள் திருப்பம் G ஆனது $G = \sum_{k=1}^{n} a_k\ Y_k\ - b_k\ X_k$ இனால் தரப்படும்.

ஆகவே தரப்பட்ட ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதியை ஓர் எதேச்சைப் புள்ளியில் தாக்கும் ஒரு தனி விசையாகவும் ஓர் இணையாகவும் எடுத்துரைக்கலாம். பல சந்தர்ப்பங்களில் புள்ளி O இற்கு ஒடுக்கப்படும் அதே வேளை அதில் அத்தொகுதிக்குச் சமவலுவான

தனி விசை $\underline{R}$ ஆகவும் சமவலு இணையின் திருப்பம் $\underline{G}$ ஆகவும் எடுத்துரைக்கப்படும். வசதிக்காகத் தொகுதி புள்ளி O இல் $(\underline{R}\ ,\underline{G})$ இற்குச் சமவலுவுள்ளதெனக் கருதுவோம்.

இப்போது இவ்விசைத் தொகுதியை வேறொரு புள்ளி A இற்கு ஒடுக்குவோம்.



மேலே நாம் செய்தவாறு புள்ளி O இல் தாக்கும் தனி விசை $\underline{R}$ ஐப் புள்ளி A இல் தாக்கும் விதத்தில் தயார்செய்வதற்குப் புள்ளி A இல் தாக்கும் $\underline{R}$ இன் திசையிலும் எதிர்த் திசையிலும் தாக்கும் பருமன் R ஐ உடைய இரு விசைகளை அறிமுகஞ்செய்வோம். அப்போது புள்ளி O இல் தாக்கும் பருமன் R ஐ உடைய விசை காரணமாகவும் அதற்கு எதிரான திசையில் தாக்கும் புள்ளி A இல் உள்ள விசை காரணமாகவும் ஓர் இணை உண்டாகின்றது. அவ்விணையின் திருப்பம் $\underline{G}_1$ எனக் கொள்வோம். அப்போது விளையுள் திருப்பம் $\underline{G}+\underline{G}_1$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அது $\underline{G}_A$ எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே தொடக்கத் தொகுதியைப் புள்ளி A இற்கு ஒடுக்கினால் தொகுதி தனி விசை $\underline{R}$ இற்கும் திருப்பம் $\underline{G}_A$ ஐ உடைய ஓர் இணைக்கும் சமவலுவானதாகும்.

எனவே புள்ளி A இல் $(\underline{R}\ ,\underline{G}_A)$ இற்குச் சமவலுவுள்ளது. மேலும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொகுதி சமவலுவுள்ள தனி விசை $\underline{R}$ ஆகையால் $\underline{R}$ ஆனது தொகுதியின் ஒரு மாற்றமிலி ஆகும்.

முடிபுகள் :

(1) ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சமவலுவுள்ள தனி விசை $\underline{R}$ ஆகும்.

(2) கருதப்படும் புள்ளிக்கேற்ப இணையின் திருப்பம் மாறலாம்.

மேற்குறித்த கற்கைக்கேற்பத் தரப்பட்ட ஒரு விசைத் தொகுதியைத் தேவையான ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் ஒரு தனி விசையாகவும் அதே தளத்தில் தாக்கும் ஓர் இணையாகவும் எடுத்துரைக்கலாம். இவ்விணையின் திருப்பம் கருதப்படும் புள்ளி மீது இருக்கின்றமையால் அத்திருப்பம் பூச்சியமாக உள்ள ஒரு புள்ளி அல்லது புள்ளிகள் இருக்கலாம். அத்தகைய ஒரு புள்ளியில் தொகுதி ஒரு தனி விசையாக ஒடுங்குகின்றதெனக் கூறுகின்றோம். அத்தகைய புள்ளிகளைத் தொடுப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் கோடு $\underline{R}$ இன் திசையில் இருக்கும்.

தரப்பட்ட ஒரு விசைத் தொகுதியை ஓர் ஏதேச்சைப் புள்ளியில் $(\underline{R}, \underline{G})$ என ஒடுக்கலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். இந்த $\underline{R}$, $\underline{G}$ ஆகியவற்றின் இயல்புக்கேற்ப இவ்விசைத் தொகுதிகளைப் பாகுபடுத்தலாம்.

சந்தர்ப்பம் 1 : $R = 0,\ G = 0$ எனின், விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கும்.

சந்தர்ப்பம் 2 : $R = 0,\ G \neq 0$ எனின், தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவானதாகும்.

சந்தர்ப்பம் 3 : $R \neq 0,\ G = 0$ எனின், தொகுதி அப்புள்ளியில் ஒரு தனி விசைக்குச் சமவலுவானதாகும்.

சந்தர்ப்பம் 4 : $R \neq 0, G \neq 0$ எனின், தொகுதி ஒரு குறித்த புள்ளியில் ஒரு தனி விசைக்கும் ஓர் இணைக்கும் சமவலுவான தாகும்.

இங்கு உள்ள சந்தர்ப்பம் 1 இல் மாத்திரம் விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் உள்ளது.

சந்தர்ப்பம் 2 இல் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொகுதி திருப்பம் G ஐ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது.

இரு இறுதிச் சந்தர்ப்பங்களிலும் தொகுதியை ஒரு குறித்த புள்ளியில் ஒரு தனி விசையாக ஒடுக்கலாம். அதே வேளை ஓர் உகந்த அச்சுத் தொகுதியைக் கருதுவதன் மூலம் அத்தனி விசையின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணலாம்.

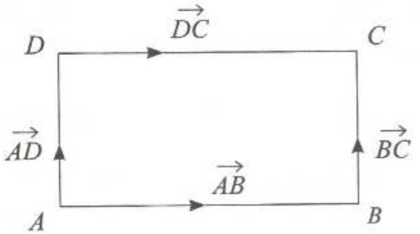
உதாரணம் 2.18

ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ இன் AB, AD என்னும் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே $2a$, a ஆகும். AB, BC, DC, AD ஆகிய பக்கங்கள் வழியே அதே திசைகளில் அப்பக்கங்களின் நீளத்திற்குப் பருமனில் விகிதசமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் நாப்பம் பற்றி ஆராய்க.

இரு அடுத்துள்ள பக்கங்களின் மீது தாக்கும் விசைகளைப் புறமாற்றும்போது தொகுதியின் நாப்பம் பற்றி என்ன கூறலாம்?

தீர்வு : முதலில் இவ்விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் வகை குறிப்போம்.

தொகுதியை AB , AD ஆகிய திசைகளில் துணிப்போம்.



$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}.$$

$$\uparrow Y = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}.$$

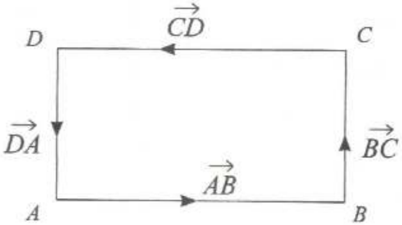
புள்ளி A பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$G = 2a \times BC - a \times DC = 0.$$

ஆகவே புள்ளி A இல் தொகுதி ஒரு தனி விசைக்குச் சமவலுவுள்ளது.

$$\text{இத்தனி விசை} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}.$$

ஆகவே விசைத் தொகுதி புள்ளி A இல் பருமனில் $2AC$ இற்கு விகிதசமமானதும் திசை AC இல் உள்ள விசைக்குச் சமவலுவுள்ளதும் ஆகும்.
எனவே விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருப்பதில்லை.



இரு அடுத்துள்ள பக்கங்களாகிய AD, CD ஆகியவற்றின் மீது தாக்கும் விசைகள் எதிராக இருக்கும்போது
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\underline{0}$ ஆகையால் தொகுதிக்குச் சமவலுவுள்ள தனி விசை பூச்சியமாகும்.

மேலும் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ஆகியவற்றின் காரணமாக ஒரு விசை இணை உண்டாகின்றது. அவ்விணையின் திருப்பம் இடஞ்சுழிப் போக்கிலும் பருமனிலும் $\overrightarrow{AB}$ இன் பருமனினதும் நீளம் AD இனதும் பெருக்கத்திற்கு விகிதசமமாகும். ஆகவே,

அத்திருப்பத்தின் பருமன் $= AB \times AD = 2a^2$ இற்கு விகிதசமன்.

மேலும் $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ ஆகியவற்றின் காரணமாக ஒரு விசை இணை உண்டாகும் அதே வேளை அவ்விணையின் திருப்பமும் இடஞ் சுழிப் போக்கிலும் பருமனிலும் $\overrightarrow{BC}$ இன் பருமனினதும் நீளம் AB இனதும் பெருக்கத்திற்கு விகிதசமம் ஆகையால்

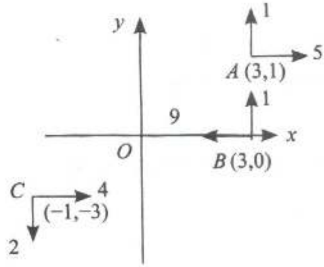
அத்திருப்பத்தின் பருமன் $= BC \times AB = 2a^2$ இற்கு விகிதசமம்.

ஆகவே விசைத் தொகுதி புள்ளி A இல் பருமனில் $= 2a^2 + 2a^2 = 4\,a^2$ இற்கு விகிதசமமும் இடஞ்சுழித் திசையில் திருப்பம் உள்ள ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதும் ஆகும்.
எனவே இங்கும் விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருப்பதில்லை.

உதாரணம் 2.19

ஓர் அச்சுத் தொகுதி Oxy பற்றித் தானக் காவிகள் $3\underline{i}+\underline{j}$, $3\underline{i}$, $-\underline{i}-3\underline{j}$ ஐ உடைய புள்ளிகளில் முறையே $5\underline{i}+\underline{j}$, $\underline{j}-9\underline{i}$, $4\underline{i}-2\underline{j}$ என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதிக்குச் சமவலுவான இணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

தீர்வு : முதலில் இவ்விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் வகை குறிப்போம்.



இங்கு A, B, C ஆகியன முறையே $3\underline{i} + \underline{j}$, $3\underline{i}$, $-\underline{i} - 3\underline{j}$ தானக் காவிகளை உடைய புள்ளிகளாகும்.

தொகுதியை Ox, Oy திசைகளில் துணிப்போம்.

$\overrightarrow{X} = 5 - 9 + 4 = 0.$

$\uparrow Y = 1 + 1 - 2 = 0.$ ஆகையால் தொகுதிக்குச் சமவலுவுள்ள தனி விசை பூச்சியமாகும்.

$\Rightarrow$ தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளதாக இருக்கலாம்.

புள்ளி O பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$G = 1 \times 3 - 5 \times 1 + 1 \times 3 + 9 \times 0 + 2 \times 1 + 4 \times 3$

$= 15$

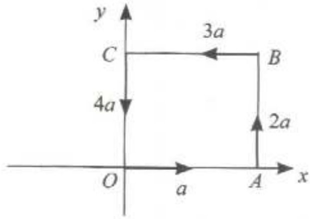
$G \neq 0 \Rightarrow$ தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது.

சமவலுவுள்ள இணையின் திருப்பம் 15 திருப்ப அலகுகளாகும்.

உதாரணம் 2.20

ஓர் அச்சுத் தொகுதி Oxy பற்றி A, B, C ஆகியவற்றின் தானக் காவிகள் முறையே $a\underline{i}$, $a\underline{i} + a\underline{j}$, $a\underline{j}$ ஆகும். O, A, B, C ஆகிய புள்ளிகளில் முறையே $a\underline{i}$, $2a\underline{j}$, $-3a\underline{i}$, $-4a\underline{j}$ என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளையும் அது OA, AB ஆகிய கோடுகளை இடைவெட்டும் புள்ளிகளையும் காண்க; இங்கு $a > 0$.

தீர்வு : முதலில் இவ்விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் வகை குறிப்போம்.



தொகுதியை Ox, Oy திசைகளில் துணிப்போம்.

$\overrightarrow{\ } \; X = a - 3a = -2a.$

$\uparrow Y = 2a - 4a = -2a.$

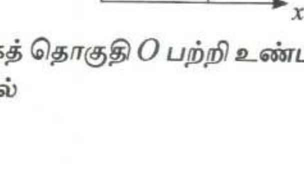
ஆகவே தொகுதிக்குச் சமவலுவுள்ள தனி விசை $\underline{R} = 2a$ ஆகும்.

$2a$

புள்ளி O பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது
$G = 2a \times a + 3a \times a = 5a^2$. மேலும் அது இடஞ்சுழித் திசையிலாகும்.

$\Rightarrow R \neq 0$ ஆகையால் தொகுதி ஒரு குறித்த புள்ளியில் ஒரு தனி விசைக்குச் சமவலுவுள்ளதாகும்.

தனி விசையும் Oy அச்சும் $(0, c)$ இல் இடைவெட்டுமெனின், புள்ளி O பற்றி அதன் திருப்பங்களைக் கருதும்போது



$G = 2a \times c$. தொடக்கத் தொகுதி O பற்றி உண்டாக்கும் திருப்பத்திற்கு இது சமம் ஆகையால்

$2ac = 5a^2$

$\Rightarrow c = +\dfrac{5a}{2}$.

தனி விசையின் x கூறும் y கூறும் சமம் ஆகையால் அது Ox அச்சுடன் 45° இற் சாய்ந்துள்ளது. ஆகவே அக்கோட்டின் படித் திறன் $\tan 45^\circ = 1$.

$\Rightarrow$ கோட்டின் சமன்பாடு $y = x + \dfrac{5a}{2}$.

Ox அச்சுடன் இக்கோட்டின் இடைவெட்டைக் காண்பதற்குச் சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவோம். அப்போது $x = \dfrac{5a}{2}$. விளையுளும் கோடு OA உம் புள்ளி $\left(\dfrac{5a}{2}, 0\right)$ இல் இடைவெட்டுகின்றன.

கோடு AB இன் சமன்பாடு $x = a$. தனி விசையினதும் கோடு AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளிக்கு $y = x$, $x = a + \dfrac{5a}{2}$ என்னும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது $y = + \dfrac{7a}{2}$ ஆகையால் அவ்வெட்டுப் புள்ளி $\left(a, \dfrac{7a}{2}\right)$ ஆகும்.

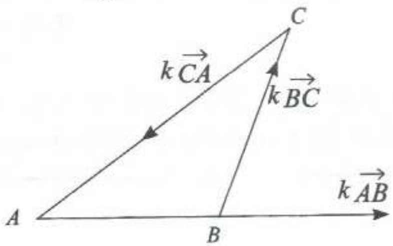
உதாரணம் 2.21

ABC ஒரு முக்கோணி. உச்சி B இல் AB, BC ஆகிய திசைகளிலும் உச்சி C இல் திசை CA இலும் முறையே AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நீளத்திற்கு விகிதசமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியை ஓர் இணையாக ஒடுக்கலாம் எனவும் அவ்விணையின் திருப்பத்தின் பருமன் முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவின் இருமடங்கிற்கு விகிதசமம் எனவும் காட்டுக.

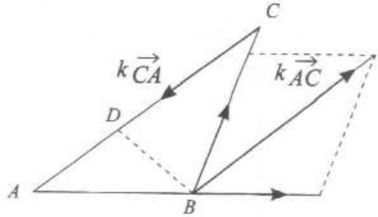
தீர்வு :

இங்கு விசைகள் முறையே AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நீளத்திற்கு விகிதசமம் ஆகையால் அவ்விசைகளின் பருமன்களை ஒரு குறித்த நேர் மாறிலி k உடன் kAB, kBC, kCA என எழுதலாம். மேலும் அப்போது விசைகள் முறையே $k\overrightarrow{AB}$, $k\overrightarrow{BC}$, $k\overrightarrow{CA}$ ஆகும். இவ்விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் காட்டுவோம்.

முதலில் $k\overrightarrow{AB}$, $k\overrightarrow{BC}$ ஆகிய விசைகளின் கூட்டலைக் கருதுவோம்.



அதற்காக விசைகளைப் பின்வருமாறு உருவில் மறுபடியும் குறிப்போம்.



இப்போது இவ்விசைத் தொகுதி CA வழியே தாக்கும் விசை $k\overrightarrow{CA}$ ஆகவும் B இனூடாகத் தாக்கும் விசை $k\overrightarrow{AC}$ ஆகவும் ஒடுக்கப்படுகின்றது.

அதற்கேற்பத் தரப்பட்டுள்ள விசைத் தொகுதி ஒரு விசை இணையாக ஒடுங்குகின்றது.

இவ்விணையின் திருப்பத்தின் பருமன் $\left| k\overrightarrow{CA} \right| \times d$; இங்கு $d = BD$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை BD ஆனது B இலிருந்து பக்கம் AC இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் நீளமாகும்.

ஆகவே திருப்பம் $k \times d \times CA$ ஆகும்.

மேலும் முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\, BD \times CA$

$= \frac{1}{2} \times d \times CA$ ஆகும்.

எனவே திருப்பத்தின் பருமன் $k \times d \times CA = 2k \times \frac{1}{2} \times d \times CA$

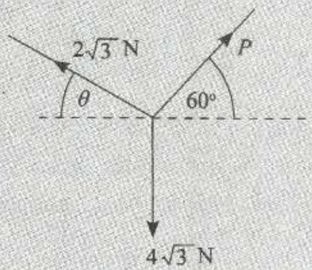
$= 2k \times$ முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு

எனவே சமவலு இணையின் திருப்பத்தின் பருமன் முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவின் இருமடங்கிற்கு விகிதசமமாகும்.

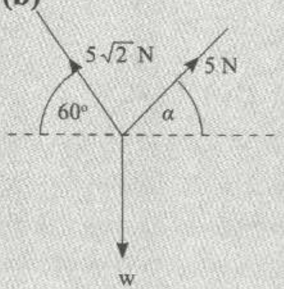
பயற்சி 2.4

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள நாப்பத்தில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் அறியாத விசையையும் அறியாத கோணத்தையும் காண்க.

(a)

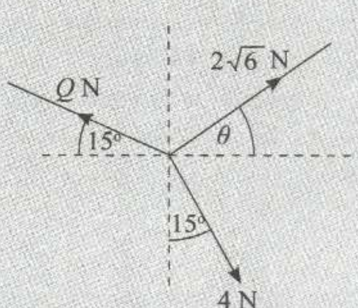


(b)

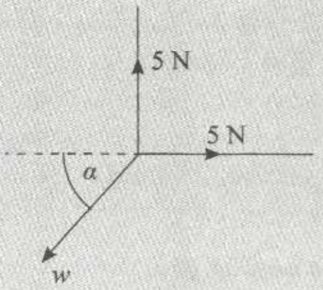


2. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள நாப்பத்தில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. அறியாத விசையையும் அறியாத கோணத்தையும் வரைபு முறையினால் காண்க.

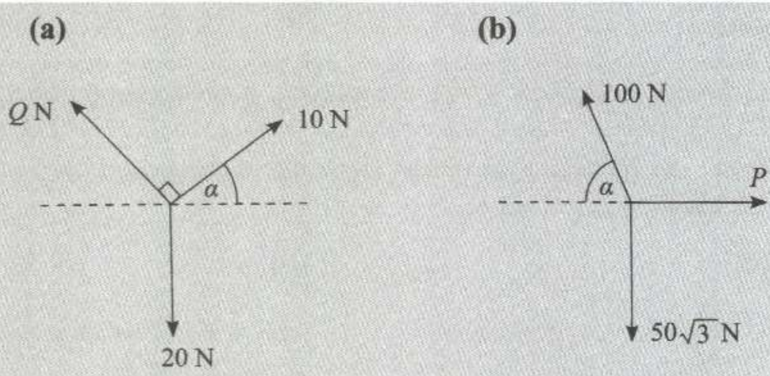
(a)



(b)



3. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள நாப்பத்தில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. இரு செங்குத்தான திசைகளில் துணிப்பதன் மூலம் அறியாத விசையையும் கோணம் α ஐயும் காண்க.



4. மேற்குறித்த மூன்று பிரசினங்களையும் லாமியின் தேற்றம், வரைபு முறை, இரு செங்குத்தான திசைகளில் துணித்தல் என்னும் மூன்று முறைகளில் அப்பிரசினத்தில் கேட்கப்படாத இரு விதங்களில் தீர்க்க.

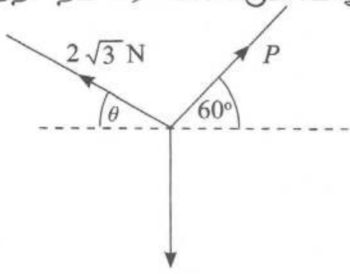
5. ஒரு சுமை நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகத் தாக்கும் P, $\sqrt{3}$ p என்னும் பருமனுள்ள விசைகளைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. அவ்விசைகள் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணத்தைத் துணிக.

6. 15 cm நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB அதன் இரு முனைகளுடன் இணைக்கப்பட்ட 9 cm, 12 cm நீளமுள்ள இலேசான நீட்ட முடியாத இழைகளின் மூலம் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனின், $25 \sin\theta = 24$ எனக் காட்டுக.

2.4 மாதிரித் தீர்வு

1. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள நாப்பத்தில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் அறியாத விசையையும் அறியாத கோணத்தையும் காண்க.

(a) லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது



$$\frac{P}{\sin(90+\theta)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(90+60)} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin(180-\theta-60)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin(\theta+60)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60} \text{ —— } (1) \quad \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin(\theta+60)} \text{ —— } (2)$$

சமன்பாடு (2) இலிருந்து $\sin(\theta+60) = 2 \times \cos 60 = 1$

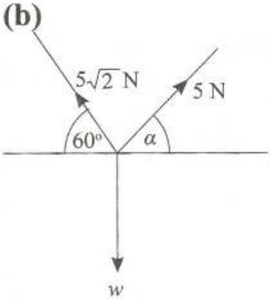
$\Rightarrow \theta + 60 = 90. \Rightarrow \theta = 30$

அப்போது சமன்பாடு (1) இலிருந்து $\Rightarrow \dfrac{P}{\cos 30} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos 60}$

$$\Rightarrow P = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60} \times \cos 30 = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

எனவே $P = 6$.

(b)



லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{5}{\sin(90+60)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin(90+\alpha)} = \frac{w}{\sin(180-\alpha-60)}.$$

$$\frac{5}{\cos 60} = \frac{5\sqrt{2}}{\cos \alpha} = \frac{w}{\sin (\alpha + 60)}.$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\cos 60} = \frac{5\sqrt{2}}{\cos \alpha} \text{ —— (1) } \quad \frac{5}{\cos 60} = \frac{w}{\sin (\alpha + 60)} \text{ —— (2)}$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து

$\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2}\ \cos 60 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45 \Rightarrow \alpha = 45.$

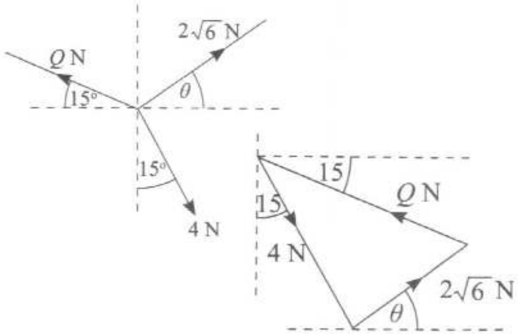
அப்போது சமன்பாடு (2) இலிருந்து $\dfrac{5}{\cos 60} = \dfrac{w}{\sin (45 + 60)}.$

$\Rightarrow 10 = \dfrac{w}{\sin 75}.$

$\Rightarrow w = 10 \sin 75.$

2. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள நாப்பத்தில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. அறியாத விசையையும் அறியாத கோணத்தையும் வரைபு முறையினால் காண்க.

(a) விசைகளை வரைபுமுறையாக வகைகுறிப்போம்.



இம்முக்கோணிக்கு sine விதியைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{Q}{\sin (90 - \theta + 15)} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin (90 - 15 - 15)} = \frac{4}{\sin (\theta + 15)}.$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\cos (\theta - 15)} = \frac{2\sqrt{6}}{\sin 60} = \frac{4}{\sin (\theta + 15)}.$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\cos (\theta - 15)} = 4\sqrt{2} = \frac{4}{\sin (\theta + 15)}.$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\sin (\theta + 15)} = 4\sqrt{2}, \quad \frac{Q}{\cos (\theta - 15)} = 4\sqrt{2} \text{ ஆகும்.}$$

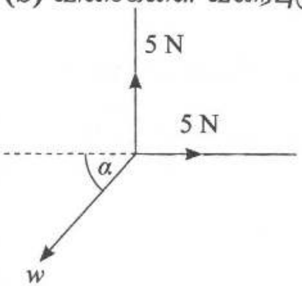
சமன்பாடு (1) இலிருந்து

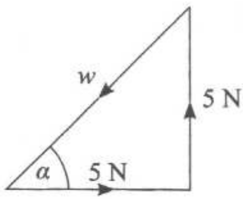
$$\Rightarrow \sin(\theta+15) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45 \Rightarrow \theta+15 = 45.$$
$$\Rightarrow \theta = 30.$$

அப்போது சமன்பாடு (2) இலிருந்து $\Rightarrow \frac{Q}{\cos(30-15)} = 4\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow Q = 4\sqrt{2}\cos 15.$$

(b) விசைகளை வரைபுமுறையாக வகைகுறிப்போம்.

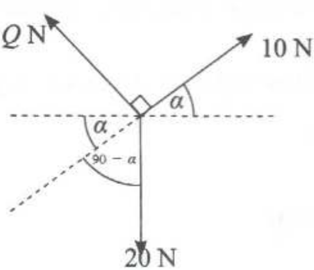




இந்த இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியிலிருந்து $\alpha = 45^\circ$ ஆகும்.
மேலும் $w \cos 45^\circ = 5$, $w = 5\sqrt{2}$.

3. பின்வரும் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள நாப்பத்தில் இருக்கும் விசைத் தொகுதியைக் கருதுக. இரு செங்குத்தான திசைகளில் துணிப்பதன் மூலம் அறியாத விசையையும் கோணம் α ஐயும் காண்க.

(a)



தொகுதியை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் துணிக்கும்போது பல சந்தர்ப்பங்களில் கிடையாகவும் நிலைக் குத்தாகவும் கருதினாலும் இங்கு 10 N பருமனுள்ள விசையை அதன் திசையிலும் அதற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் துணித்தல் இதனைத் தீர்ப்பதை மேலும் எளிதாக்கும்.

10 N பருமனுள்ள விசையின் திசையில் துணிக்கும்போது

$$10 = 20\cos(90 - \alpha)$$

$$= 20\sin\alpha$$

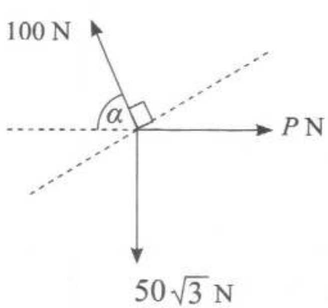
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30.$$

$$\Rightarrow \alpha = 30.$$

அத்திசைக்குச் செங்குத்தாக ↖ திசையில் துணிக்கும்போது

$$Q = 20\sin(90 - \alpha) = 20\cos\alpha = 20\cos 30 = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

(b)



தொகுதியை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் துணிப் போம். இங்கு P N பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தாகவும் அத்திசையிலும் துணித்தல் மேலும் உகந்தது.

P N பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தாகத் துணிக்கும்போது

$$100\sin\alpha = 50\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60.$$

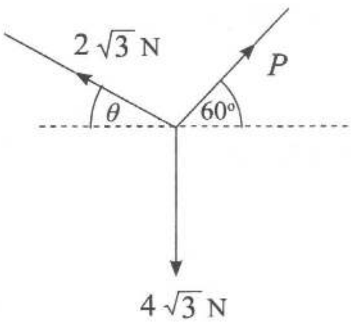
$$\Rightarrow \alpha = 60.$$

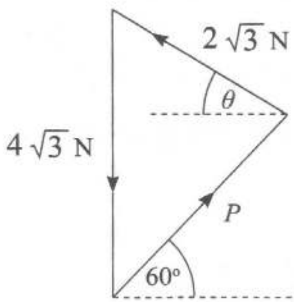
P N பருமனுள்ள விசையின் திசையில், அதாவது $\longrightarrow$ திசையில் துணிக்கும்போது

$$P = 100 \cos \alpha = 100 \cos 60$$
$$= 100 \times \frac{1}{2}$$
$$= 50.$$

4. மேற்குறித்த மூன்று பிரசினங்களையும் லாமியின் தேற்றம், வரைபு முறை, இரு செங்குத்தான திசைகளில் துணித்தல் என்னும் மூன்று முறைகளில் அப்பிரசினத்தில் கேட்கப்படாத இரு விதங்களில் தீர்க்க.

பிரசினம் **1.** (a) ஐ வரைபு முறையினால் தீர்த்தல்
இவ்விசைகளை வரைபு முறையாக வகைகுறிப்போம்.





இம்முக்கோணிக்கு sine சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{P}{\sin(90-\theta)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(90-60)} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin(\theta+60)}.$$

$\Rightarrow \dfrac{P}{\cos\theta} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos 60} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin(\theta+60)}.$ இது மேலே லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் பெற்ற பேறாகும். ஆகவே $P = 6,\ \theta = 30.$

பிரசினம் 1 இல் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$\longrightarrow$ திசையில் $P \cos 60 = 2\sqrt{3} \cos\theta.$

$\Rightarrow P = 4\sqrt{3}\cos\theta.$ —①

$\uparrow$ திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது
$P \sin 60 + 2\sqrt{3}\sin\theta = 4\sqrt{3}$.

$\Rightarrow P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\sin\theta = 4\sqrt{3}$.
$\Rightarrow P + 4\sin\theta = 8.$

சமன்பாடு ① இலிருந்து P இற்காகப் பிரதியிடும்போது
$4\sqrt{3}\cos\theta + 4\,\mathrm{Sin}\,\theta = 8.$

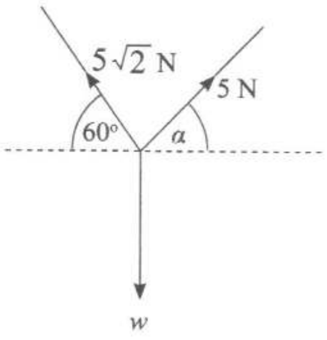
$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = 1.$

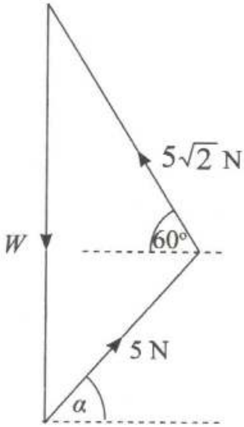
$\cos 30 \cos\theta + \sin 30 \sin\theta = 1.$

$\Rightarrow \cos(\theta - 30) = \cos 0. \Rightarrow \theta - 30 = 0.$ ஆகவே $\theta = 30.$
அப்போது சமன்பாடு ① இலிருந்து
$P = 4\sqrt{3}\cos 30 = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$

பிரசினம் **1.** (b) ஐ வரைபு முறையினால் தீர்த்தல்

(b)





இவ்விசைகளை வரைபு முறையாக வகைகுறித்தபோது உருவில் உள்ளவாறு செய்தோம். இம்முக்கோணிக்கு sine சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{5}{\sin(90-60)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin(90-\alpha)} = \frac{w}{\sin(\alpha+60)}.$$

$\Rightarrow \dfrac{5}{\cos 60} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\cos\alpha} = \dfrac{w}{\sin(\alpha+60)}$. இதுவும் மேலே லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் பெற்ற பேறாகும்.

ஆகவே $w = 10 \sin 75,\ \alpha = 45.$

$\longrightarrow$ திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$5\cos\alpha = 5\sqrt{2}\ \cos 60.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45.$$

$$\Rightarrow \alpha = 45.$$

$\downarrow$ திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$w = 5\sqrt{2}\ \sin 60 + 5\sin 45.$$

$$= 5\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$= 5\frac{\sqrt{2}}{2}\ (1+\sqrt{3})$$

$$= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

மேலும் $\sin 75 = \sin(30+45) = \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ (1+\sqrt{3})$ ஆகையால்

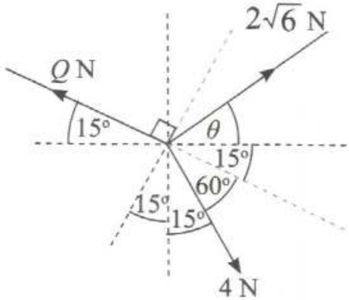
$$w = 10 \sin 75.$$

குறிப்பு :

ஒருதளச் சமாந்தரமற்ற நாப்பத்தில் உள்ள மூன்று விசைகள் தாக்கும் போது லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கலாம். அப்போது விசை முக்கோணியை வரைந்து வேறு விதத்தில் கூறினால் வரைபு முறையில் அம்முக்கோணிக்கு sine சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்பதன் மூலமும் தீர்க்கலாம். இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் ஒரே பேறு கிடைக்கும்.

பிரசினம் 2 வரைபு முறையினால் தீர்க்கப்பட்டிருப்பதனால் லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்பதைப் புறக்கணிப்போம்.
பிரசினம் 2.(a) ஐத் துணிப்பைக் கருதுவதன் மூலம் தீர்ப்போம்.

(a)



Q N பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தாக ↗ திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$$2\sqrt{6}\cos(90-15-\theta) = 4\cos 30.$$

$$2\sqrt{6}\sin(15+\theta) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow \sin(15+\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45.$$

$$\Rightarrow 15+\theta = 45.$$

$$\Rightarrow \theta = 30.$$

Q N பருமனுள்ள விசையின் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும் போது

↖ $\Rightarrow Q = 2\sqrt{6}\cos(15+\theta) + 4\sin 30$

$$= 2\sqrt{6}\cos(15+30) + 4\sin 30.$$

$$\Rightarrow Q = 2\sqrt{6}\cos 45 + 4\sin 30$$

$$= 2\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 2 = 2(1+\sqrt{3})$$

மேலும் $\cos 15 = \cos(45-30) = \cos 45\cos 30 + \sin 45 \sin 30$

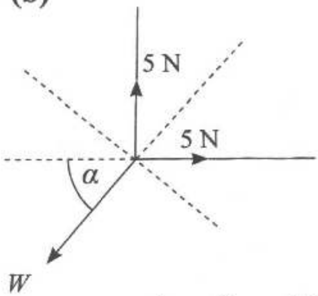
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$ ஆகையால்

$$4\sqrt{2}\cos 15$$

ஆகவே $Q = 4\sqrt{2}\cos 15.$

(b)



w பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தான திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$5 \cos \alpha = 5 \cos (90 - \alpha)$.

$\cos \alpha = \cos (90 - \alpha)$.

$\Rightarrow \alpha = 90 - \alpha. \Rightarrow \alpha = 45$.

w பருமனுள்ள விசையின் திசையில் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

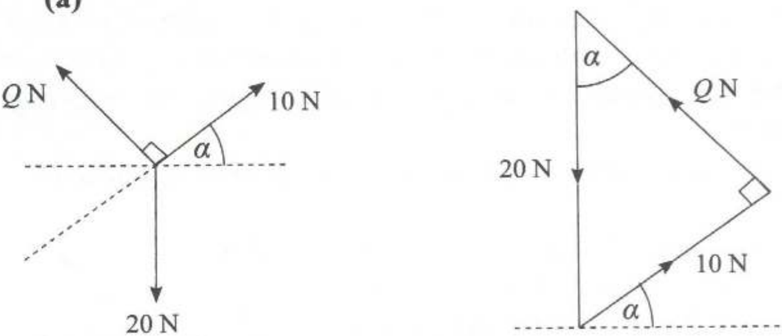
$$w = 5 \cos 45 + 5 \cos 45$$

$$= 2 \times 5 \cos 45$$

$$\Rightarrow w = 5\sqrt{2}.$$

பிரசினம் 3. (a) ஐ வரைபு முறையினால் தீர்ப்போம்.

(a)



இம்முக்கோணிக்கு sine சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{20}{\sin 90} = \frac{10}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin (90 - \alpha)}.$$

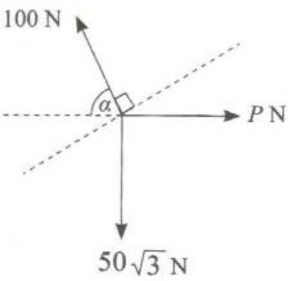
$$\Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{10}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{10}{\sin \alpha}, \frac{20}{1} = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}$.

சமன்பாடு (2) இலிருந்து $Q = 20 \cos \alpha = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

(b)



லாமியின் தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{50\sqrt{3}}{\sin(180-\alpha)} = \frac{100}{\sin 90} = \frac{P}{\sin(90+\alpha)}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{50\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{100}{1} = \frac{P}{\cos\alpha}\,.$$

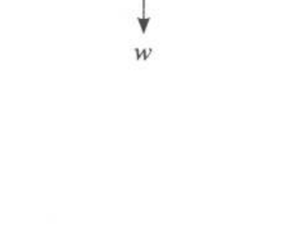
$$\frac{50\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{100}{1},\ \frac{100}{1} = \frac{P}{\cos\alpha}\,.$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

சமன்பாடு (2) இலிருந்து $P = 100\cos\alpha = 100 \times \frac{1}{2} = 50$.

5. ஒரு சுமை நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகத் தாக்கும் P, $\sqrt{3}P$ என்னும் பருமனுள்ள விசைகளைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. அவ்விசைகள் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணத்தைத் துணிக.

மேற்குறித்த விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் வகைகுறிப்போம்.



கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே P, $\sqrt{3}P$ பருமனுள்ள விசைகளின் சாய்வுகள் $90+\theta$, $180-\theta$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

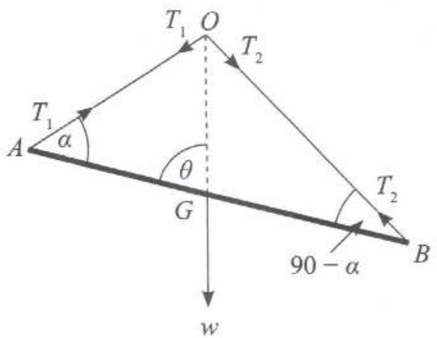
$$\frac{P}{\sin(180-\theta)} = \frac{\sqrt{3}P}{\sin(90+\theta)} = \frac{w}{\sin 90}\,.$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}P}{\cos\theta}\,.$$

எனவே $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகையால் $\theta = 30^\circ$ ஆகும். அப்போது மற்றைய கோணம் 60° ஆகும். அதற்கேற்ப P, $\sqrt{3}P$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே கிடையுடன் 30°, 60° இற் சாய்ந்துள்ளன.

6. 15 cm நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB அதன் இரு முனைகளுடனும் இணைக்கப்பட்ட 9 cm, 12 cm நீளமுள்ள இலேசான நீட்ட முடியாத இழைகளின் மூலம் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு θ எனின், $25 \sin \theta = 24$ எனக் காட்டுக.

கோலையும் அதன் மீது தாக்கும் விசைகளையும் ஓர் உருவில் வகைகுறிப்போம்.



$AB = 15$ cm, $OA = 9$ cm, $OB = 12$ cm ஆகையால் OAB ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும்.

கோணம் OAB ஆனது α எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\tan \alpha = \dfrac{4}{3}$.

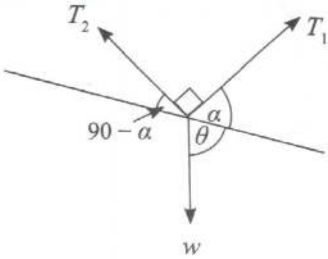
கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்குப் புள்ளி A பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$T_2 \times AB \cos \alpha = w \times AG \sin \theta.$$

$$\Rightarrow T_2 \times 2\, AG \cos \alpha = w \times AG \sin \theta.$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{w \sin \theta}{2 \cos \alpha} . \text{ ——— } (1)$$

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம். அவற்றை ஓர் உருவில் முன்வைக்கலாம்.



லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{T_1}{\sin(270-\alpha-\theta)} = \frac{T_2}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{w}{\sin 90}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{w}{1}.$$

$$T_2 = w\sin(\alpha+\theta).$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $T_2 = \dfrac{w\sin\theta}{2\cos\alpha}$

ஆகவே $\dfrac{w\sin\theta}{2\cos\alpha} = w\sin(\alpha+\theta).$

$$\Rightarrow \sin\theta = 2\cos\alpha\sin(\alpha+\theta).$$

$$= 2\cos\alpha(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha).$$

$\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ ஆகையால் $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ஆகும்.

இவற்றை மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$\sin\theta = 2\times\frac{3}{5}\left(\sin\theta\times\frac{3}{5} + \cos\theta\times\frac{4}{5}\right).$$

$$\Rightarrow 25\sin\theta = 18\sin\theta + 24\cos\theta.$$
$$\Rightarrow 7\sin\theta = 24\cos\theta.$$

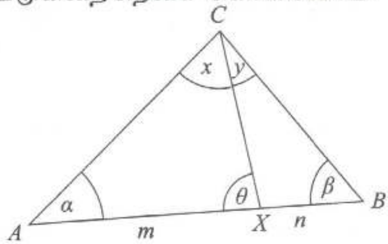
இதன் இரு பக்கங்களையும் வர்க்கிக்கும்போது

$$49\sin^2\theta = 24^2\cos^2\theta$$
$$49\sin^2\theta = 576(1-\sin^2\theta).$$
$$625\sin^2\theta = 24^2.$$

θ ஒரு கூர்ங்கோணம் ஆகையால் $\sin\theta$ நேர் ஆதலின் மேற்குறித்த சமன்பாட்டிலிருந்து $25\sin\theta = 24$ எனக் கிடைக்கின்றது.

இத்தகைய பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதை எளிதாக்கும் வேறொரு விதம் cot சூத்திரமாகும். அது பின்வருமாறாகும்.

கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது புள்ளி X இனால் $m : n$ விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்வோம்.



அப்போது

$$\boxed{(m+n)\cot\theta = m\cot\beta - n\cot\alpha}$$

$$\boxed{(m+n)\cot\theta = n\cot y - m\cot x}$$

sine சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி அதனைப் பின்வருமாறு எளிதாக நிறுவலாம்.

$(m+n)\cot\theta = m\cot\beta - n\cot\alpha$ என நிறுவுதல்

முக்கோணி AXC இலிருந்து, $\dfrac{AX}{\sin x} = \dfrac{CX}{\sin\alpha}$ —— ①

முக்கோணி BCX இலிருந்து, $\dfrac{CX}{\sin\beta} = \dfrac{BX}{\sin y}$ —— ②

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளையும் பெருக்கும்போது

$$\frac{AX}{\sin x}\,\frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{BX}{\sin y}.$$

$$\Rightarrow \frac{AX}{BX}\sin\alpha\sin y = \sin x\sin\beta.$$

$\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{m}{n}$ ஆகையால் $\dfrac{m}{n}\sin\alpha\sin y = \sin x\sin\beta$ ஆக இருக்கும்

அதே வேளை அப்போது

$m \sin\alpha \sin y = n \sin x \sin\beta$ ஆகும். —— ③

மேலும் முக்கோணி AXC இலிருந்து $x + \alpha + \theta = 180$, முக்கோணி BCX இலிருந்து $y + \beta = \theta$ ஆகையால் சமன்பாடு ③ இல் x, y ஆகியவற்றிற்குப் பிரதியிடும்போது

$$m \sin\alpha \sin(\theta - \beta) = n \sin(180 - \theta - \alpha) \sin\beta.$$
$$\Rightarrow m \sin\alpha [\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta] = n \sin(\theta + \alpha)\sin\beta.$$
$$= n[\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha]\sin\beta.$$

இங்கு ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $\sin\theta \sin\alpha \sin\beta$ இனால் வகுக்கும்போது

$$m[\cot\beta - \cot\theta] = n[\cot\alpha + \cot\theta].$$

$$\Rightarrow (m+n)\cot\theta = m\cot\beta - n\cot\alpha.$$

$$\boxed{(m+n)\cot\theta = n\cot y - m\cot x}$$

சமன்பாடு ③ இல் α, β ஆகியவற்றிற்கு முறையே $180 - (x + \theta)$, $\theta - y$ ஆகியவற்றைப் பிரதியிடும்போது

$$\Rightarrow m \sin[180 - (x + \theta)], \sin y = n \sin x \sin(\theta - y).$$
$$\Rightarrow m \sin(x + \theta)\sin y = n \sin x \sin(\theta - y).$$
$$\Rightarrow m[\sin x\cos\theta + \cos x\sin\theta]\sin y$$
$$= n\sin x[\sin\theta\cos y - \cos\theta\sin y]$$

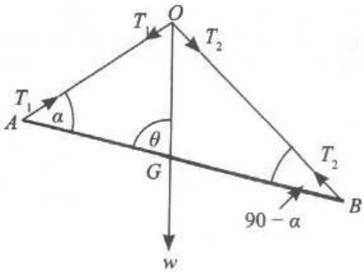
இங்கு ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $\sin\theta \sin x \sin y$ இனால் வகுக்கும்போது

$$m[\cot\theta + \cot x] = n[\cot y - \cot\theta].$$

$$\boxed{\Rightarrow (m+n)\cot\theta = n\cot y - m\cot x.}$$

இந்த cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் மேற்குறித்த பிரசினத்தைத் தீர்ப்போம். அதற்காக அவ்வுருவை மறுபடியும் கருதுவோம்.

கோட்டுத் துண்டம் AB ஆனது புள்ளி G இனால் $1:1$ விகிதத்திற்கு உள்ளே பிரிக்கப்படுகின்றது.



cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$(1+1)\cot\theta = 1\times\cot(90-\alpha) - 1\times\cot\alpha$.

அப்போது $2\cot\theta = \tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\alpha}$

$$= \frac{4}{3} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{12}. \Rightarrow 7\sin\theta = 24\cos\theta.$$

ஆகவே மேற்குறித்தவாறு சுருக்குவதன் மூலம் தேவையான விடையைப் பெறவேண்டும்.

எனவே மூன்று ஒருதளச் சமாந்தரமற்ற விசைகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதி பற்றிக் கருதும்போது விசைத் துணிப்புடன் திருப்பங்களைக் கருதுதல், ஒரு விசை முக்கோணியைக் கருதுதல், லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தல், வரைபு முறையாகத் தீர்த்தல் என்னும் முறைகளிடையே ஓர் உகந்த முறையைப் பின்பற்றுவதன் மூலம் தேவையான பேறுகளை அடையலாம். அதே வேளை இம்முறைகளிடையே ஒரு முறை அல்லது பல முறைகள் பயனுறுதி வாய்ந்தன என நீங்கள் அவதானிக்கலாம். இம்முறைகளிடையே மிகவும் உகந்த முறையை எங்ஙனம் கண்டுபிடிக்கலாம் என்பது பற்றி உங்களுக்குப் பிரச்சினை ஏற்படலாம். அதற்குப் பரிகாரமாக நீங்கள் பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதன் மூலம் பெறும் அனுபவம் போதியது. மேலும் நீங்கள் விசைத் தொகுதியைத் துணிப்பதற்கு முயன்றால் பெரும்பாலும் செய்கின்றவாறு கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் அன்றி மிகவும் வசதியான ஒரு திசையையேனும் குறைந்தபட்சம் தெரிந்தெடுப்பதில் கவனமாக இருந்தால் அது மிகவும் உகந்ததாகும்.

2.7 ஒரு விறைத்த பொருள் மீது உள்ள விசைகள்

இங்கு சில விசேட விறைத்த பொருள்களைக் கருதுவோம். அவை சீரான அல்லது சீரற்ற மெல்லிய கோல், திண்மக் கூம்பு, பொள் கூம்பு, பொள் அரைக்கோளம், திண்ம அல்லது பொள் உருளை போன்றனவும் ஒரு குறித்த வடிவமுள்ள தள அடரும் ஆகும்.

இவ்விறைத்த பொருள்களின் மீது தாக்கும் ஒரு புற விசை அவற்றின் நிறையாகும். சில சந்தர்ப்பங்களில் அவை இலேசானவையாகக் கருதப்படும் அதே வேளை அப்போது அவற்றின் நிறை புறக்கணிக்கப்படும். மேலும் இந்நிறை அவற்றின் திணிவு மீது புவியீர்ப்பின் செல்வாக்குக் காரணமாகத் தாக்குகின்றமையால் அந்நிறை தாக்கும் புள்ளி புவியீர்ப்பு மையம் எனப்படும். அது G என அழைக்கப்படும். இங்கு திணிவு மீது புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியின் செல்வாக்கைக் கருதுவதற்குப் பதிலாகத் திணிவு காரணமாக உண் டாகும் தாக்கத்தின் விளையுளையும் கருதலாம். இப்புள்ளி திணிவு மையம் எனப்படும். நாம் கருதும் பொருள்கள் மிகச் சிறியன ஆகையால் திணிவு மையமும் புவியீர்ப்பு மையமும் பொருந்து கின்றன.

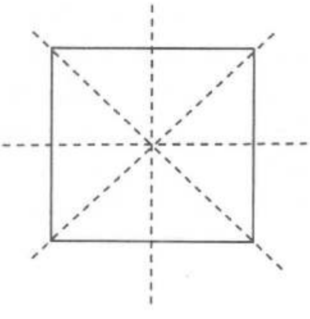
சில விசேட பொருள்களின் திணிவு மையத்தின் / புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானம்

(1) **தள அடர்கள்**

❖ தள அடரானது மிகவும் மெல்லிய திரவியத்தினால் செய்யப்பட்ட பொருளாகும். பிரசினங்களைத் தீர்க்கும் வசதிக்காக இதன் கீழ் சதுர, செவ்வக, முக்கோண, வட்ட வடிவமுள்ள அடர்கள் தொடர்பாகக் கவனஞ் செலுத்தப்படும்.

சதுர அடர்கள்

❖ இத்தகைய அடரில் நான்கு சமச்சீரச்சு கள் இருக்கும் அதே வேளை அதன் திணிவு மையம் G ஆனது சமச்சீரச்சு கள் வெட்டும் புள்ளியாகும். அப் புள்ளி செவ்வக அடரின் மையம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

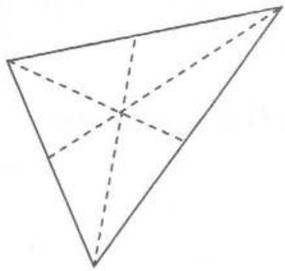


செவ்வக அடர்கள்

❖ செவ்வக அடரில் இரு சமச்சீரச்சுகள் இருக்கும் அதே வேளை அதன் திணிவு மையம் G ஆனது சமச்சீரச்சுகள் வெட்டும் புள்ளியாகும். அப்புள்ளி செவ்வக அடரின் மையம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

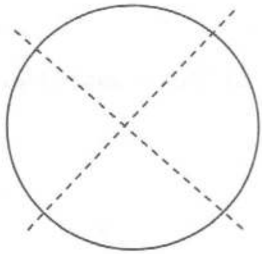
முக்கோண அடர்கள்

❖ சமச்சீரச்சுகள் இராத இத்தகைய அடர்கள் அதிக எண்ணிக்கையில் உள்ளன. ஒவ்வோர் உச்சியையும் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப் புள்ளியுடன் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் இடையங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். இவ்வெட்டுப் புள்ளி அம் முக்கோண அடரின் திணிவு மையம் ஆகும். மேலும் இவ்விடையங்கள் 1:2 விகிதத்தில் இடைவெட்டும்.



வட்ட அடர்கள்

❖ விட்டம் இத்தகைய ஓர் அடரின் சமச்சீரச்சாக இருக்கும் அதே வேளை இத்தகைய அச்சுகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் இருக்கும். சமச்சீரச்சுகள் வெட்டும் புள்ளி திணிவு மையம் ஆகும். இது வட்ட அடரின் மையமும் ஆகும்.



(2) சீரான மெல்லிய கோல்

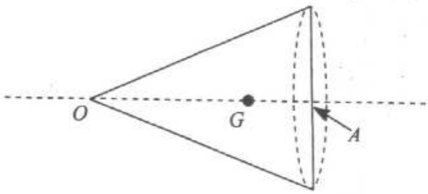
G - நடுப் புள்ளி

ஒரு சீரான கோலின் நிறை எப்போதும் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் தாக்கும்.

(3) சீரானதாக அமையாத மெல்லிய கோல்கள்

G - பிரசினத்திற்கேற்பத் துணியப்பட வேண்டும்.

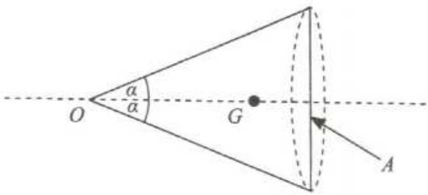
(4) பொள் கூம்பு



இங்கு வட்ட அடி உள்ள செங் கூம்பின் மெல்லிய மேற்பரப்பு கருதப்படும் (அடி இல்லை).

O - கூம்பின் உச்சி
A - கூம்பின் அடியின் மையம்
$AG : GO = 1 : 2$ ஆக இருக்குமாறு G உள்ளது.

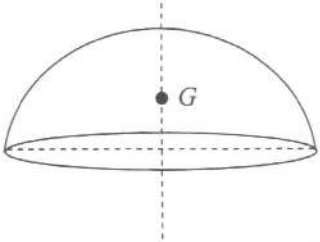
(5) திண்மக் கூம்பு



உட்பகுதி சீரான திரவியத்தினால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும் வட்ட அடி உள்ள செங்கூம்பு கருதப்படும் (அடி இல்லை).
α - கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம்.

$AG : GO = 1 : 3$ ஆக இருக்குமாறு G உள்ளது.

(6) பொள் அரைக்கோளம்



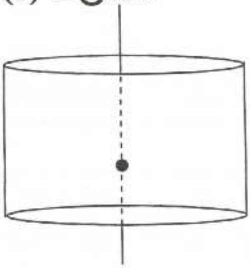
இங்கு அரைக்கோளத்தின் மெல்லிய மேற்பரப்பு கருதப்படும் (அடி இல்லை).

G - திணிவு மையம் சமச்சீரச்சு மீது அடியிலிருந்து அரைக்கோளத்தின் ஆரையின் அரைவாசியாக இருக்கும் (அடி உண்டு).

(7) திண்ம அரைக்கோளம்

உட்பகுதி சீரான திரவியத்தினால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும் அரைக் கோளம் கருதப்படும். திணிவு மையம் சமச்சீரச்சு மீது அடியிலிருந்து அரைக்கோளத்தின் ஆரையில் எட்டில் மூன்றாக இருக்குமாறு அமையும் (அடி உண்டு).

(8) உருளை



இங்கு உருளை பொள் உருளையாக அல்லது திண்ம உருளையாக இருந்தாலும் திணிவு மையம் சமச்சீரச்சு மீது ஒவ்வொரு தட்டை முகத்திலிருந்தும் உருளையின் உயரத்தில் அரைவாசியாக இருக்குமாறு உள்ள புள்ளி யாகும்.

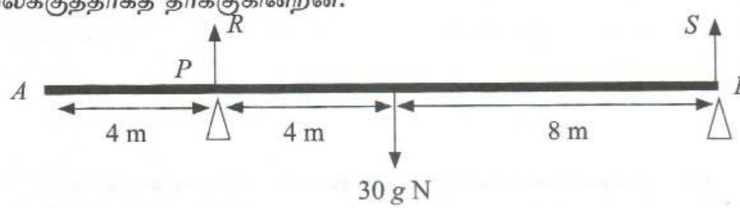
உதாரணம் 2.22

16 m நீளமும் 30 kg நிறையும் உள்ள ஓர் ஒப்பமான சீரான கோல் AB கிடையாக இருக்குமாறு இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஆதாரம் முனை A இலிருந்து 4 m தூரத்திலும் மற்றைய ஆதாரம் முனை B இலும் உள்ளன. ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்

கங்களைத் துணிக.

தீர்வு :

கோல்களின் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு ஓர் உருவை வரைவோம். கோலும் ஆதாரங்களும் ஒப்பமானவை ஆகையால் மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றன.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி P பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது

$$S \times 12 \text{ m} = 30\,g \times 4 \text{ N m}$$
$$\Rightarrow S = 10\,g \text{ N}.$$

கோலின் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$R + S = 30\,g \text{ N}.$$

$\Rightarrow R + 10\,g\,\text{N} = 30\,g\,\text{N}.$

$\Rightarrow R = 20\,g\,\text{N}.$

ஆகவே ஆதாரங்களின் மீது உள்ள தாக்கங்கள் முறையே $20\,g\,\text{N}$, $10\,g\,\text{N}$ ஆகும். அவை நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித் தாக்குகின்றன.

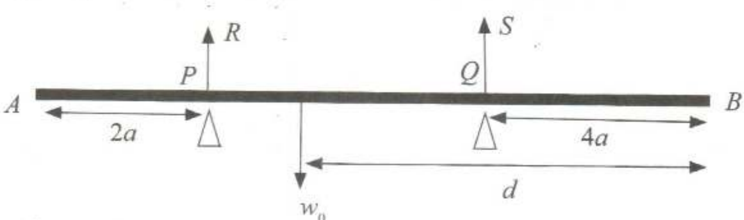
குறிப்பு : சீரான கோலின் நிறை எப்போதும் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில் தாக்குகின்றது. கோல் ஒப்பமாக இருப்பின் ஆதாரங்களின் அல்லது முளைகளின் மூலம் கோல் மீது உண்டாக்கப்படும் தாக்கங்கள் கோலிற்குச் செங்குத்தாகத் தாக்குகின்றன.

உதாரணம் 2.23

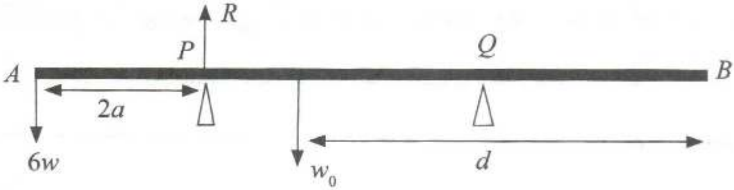
$14a$ நீளமும் w_0 நிறையும் உள்ள ஓர் ஒப்பமான சீரற்ற கோல் AB கிடையாக இருக்குமாறு ஒப்பமாக P, Q என்னும் இரு ஆதாரங்களின் மீது நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $AP = 2a$, $BQ = 4a$ ஆகும். கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாதவாறு A, B ஆகிய முனைகளில் வேறுவேறாகத் தொங்கவிடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறையின் அளவுகள் முறையே $6w$, $5w$ ஆகும். கோலின் நிறையையும் அதன் திணிவு மையத்தின் தானத்தையும் காண்க.

தீர்வு :

கோலின் நிறை w_0 எனக் கொள்வோம். கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு ஓர் உருவை வரைவோம். கோலும் ஆதாரங்களும் ஒப்பமானவை ஆகையால் மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றன.



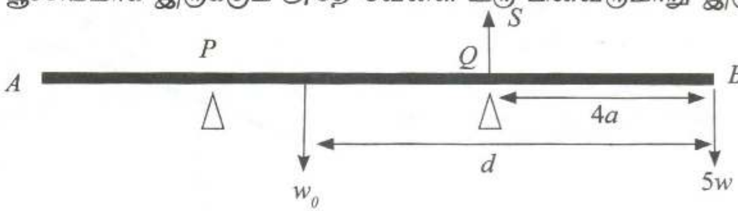
கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாதவாறு முனை A இல் தொங்கவிடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறை $6w$ ஆகையால் அப்போது ஆதாரம் Q உம் கோலும் மட்டுமட்டாகத் தொடுகையுறுகின்றன. அப்போது S இன் பெறுமானம் பூச்சியம் ஆகையால் உருவைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி P பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது

$$6w \times 2a = w_0 \times (12a - d).$$
$$\Rightarrow 12aw = w_0 \times (12a - d). \quad \text{——} (1)$$

முனை B இல் கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாதவாறு தொங்கவிடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறை $5w$ ஆகையால் அப்போது ஆதாரம் P உம் கோலும் மட்டுமட்டாகத் தொடுகையுறும். அப்போது R இன் பெறுமானம் பூச்சியமாக இருக்கும் அதே வேளை உரு பின்வருமாறு இருக்கும்.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி Q பற்றி இடஞ்சுழித் திசையில் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது

$$w_0 \times (d - 4a) = 5w \times 4a.$$
$$\Rightarrow 20aw = w_0 \times (d - 4a). \quad \text{——} (2)$$

(1), (2) ஆகிய இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டும்போது

$32aw = w_0 \times 8a.$
$\Rightarrow w_0 = 4w.$ ஆகவே கோலின் நிறை $4w$ ஆகும்.

இந்த w_0 பெறுமானத்தைச் சமன்பாடு (2) இற் பிரதியிடும்போது

$$20aw = 4w\ (d - 4a).$$
$$\Rightarrow d - 4a = 5a.$$
$$\Rightarrow d = 9a.$$

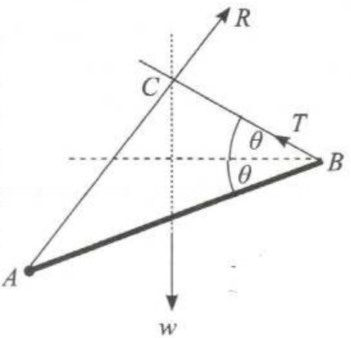
எனவே கோலின் திணிவு மையம் முனை B இலிருந்து $9a$ தூரத்தில் இருக்கின்றது.

உதாரணம் 2.24

ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை முனை B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இழையின் மூலம் கோல் நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது. கோல் போன்று இழையும் கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருப்பின், லாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இழையின் இழுவையையும் பிணையலின் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு :

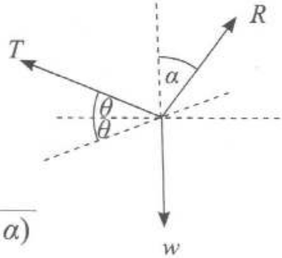
கோல் நாப்பத்தில் இருப்பதைப் பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு முன்வைக்கலாம். சீரான கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் கோலின் நடுப் புள்ளியில் உள்ளது. கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம். அவை



- கோலின் நிறை
- பிணையலின் மறுதாக்கம்
- இழையின் இழை

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.

அதற்கேற்ப இம்மூன்று விசைகளினதும் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணங்களைத் துணிவதை எளிதாக்குவதற்கு ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகளாக அவற்றை மறுபடியும் வரைவோம்.



லாமியின் தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{T}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{(\sin 90+\theta)} = \frac{w}{(\sin 90-\theta+\alpha)}$$

$$\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{w}{\cos(\theta-\alpha)}.$$

இங்கு α ஆனது பிணையலின் மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் கொண்டுள்ள சாய்வு ஆகும்.

மேற்குறித்த சமன்பாடுகளைக் கருதும்போது

$$T = \frac{w \sin \alpha}{\cos (\alpha - \theta)} \quad \text{——} ①$$

$$R = \frac{w \cos \theta}{\cos (\theta - \alpha)} \quad \text{——} ② \quad \text{ஆகும்.}$$

புள்ளி A பற்றிக் கோல்கள் மீது தாக்கும் விசைகளுக்குத் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$T \times AB \sin 2\theta = w \times AG \cos \theta,\ AB = 2 \times AG$ ஆகையால்

$$T \times 2 \times AG \sin 2\theta = w \times AG \cos \theta.$$

$$\Rightarrow T \times 2 \times 2 \sin \theta \cos \theta = w \times \cos \theta.$$

$$\Rightarrow T = \frac{w}{4 \sin \theta} .$$

சமன்பாடு ① இலிருந்து $\dfrac{w}{4 \sin \theta} = \dfrac{w \sin \alpha}{\cos \ (\theta - \alpha)}$.

$$\Rightarrow \cos (\theta - \alpha) = 4 \sin \alpha \sin \ \theta.$$

$$\Rightarrow \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = 4 \sin \alpha \sin \theta.$$

$$\Rightarrow 3\sin \theta \sin \alpha \ = \ \cos \theta \cos \alpha \ .$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{3 \tan \theta} .$$

$$\Rightarrow \tan \theta \tan \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{——} ③$$

சமன்பாடு ② இலிருந்து $R = \dfrac{w \cos \theta}{\cos \ (\theta - \alpha)}$

$$= \frac{w \cos \alpha}{\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha}$$

ஒவ்வொன்றையும் $\cos \theta \cos \alpha$ இனால் வகுக்கும்போது

$$= \frac{w \sec \theta}{1 + \tan \theta \tan \alpha}$$

$\tan\theta \tan\alpha$ இற்கு ③ இலிருந்து பிரதியிடுவோம்.

$$= \frac{w \sec\alpha}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3w \sec\alpha}{4}.$$

மேலும் $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3\tan\theta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{3\tan\theta}\right)^2 \left(1 + 9\tan^2\theta\right).$$

$$\Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{3\tan\theta}\sqrt{1 + 9\tan^2\theta}.$$

$$\therefore R = \frac{3w}{4} \times \frac{1}{3\tan\theta}\sqrt{1 + 9\tan^2\theta}$$

$$= \frac{w}{4\tan\theta}\sqrt{1 + 9\tan^2\theta}$$

$$= \frac{w}{4}\sqrt{9 + \cot^2\theta}.$$

ஆகவே இழையின் இழுவை $T = \frac{w}{4\sin\theta}$ ஆகும்.

பிணையலின் மறுதாக்கம் பருமனில் $\frac{w}{4}\sqrt{1 + 9\cot^2\theta}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை நிலைக்குத்துடன் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3\tan\theta}\right)$ இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றது.

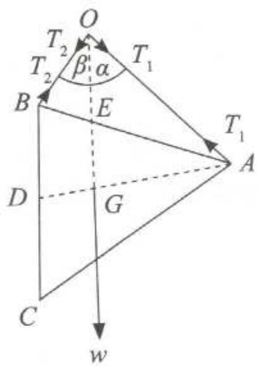
குறிப்பு : இப்பிரசினத்தை லாமியின் தேற்றத்திற்குப் பதிலாக விசைத் துணிப்பினால் மேலும் எளிதாகத் தீர்க்கலாமா எனப் பார்க்க.

உதாரணம் 2.25

ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்ட OA, OB என்னும் இலேசான இழைகளின் மூலம் w நிறையுள்ள ஒரு சீரான முக்கோண அடர் ABC அதன் விளிம்பு BC நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் OA, OB ஆகிய இழைகள் முறையே α, β ஆகிய கோணங்களில் சாய்ந்திருப்பின், $2 \cot \alpha - \cot \beta = 3 \cot B$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

அடர் நாப்பத்தில் இருத்தல் பின்வரும் உருவில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மீது தாக்கும் விசைகள்



- ❖ அடரின் நிறை w
- ❖ இழை OA இன் இழுவை
- ❖ இழை OB இன் இழுவை

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.

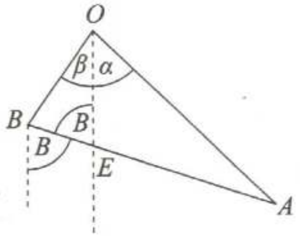
அதற்கேற்ப இம்மூன்று விசைகளினதும் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. முக்கோண அடரின் இடையம் AD எனக் கருதுக. திணிவு மையம் G ஆனது AD மீது $AG : GD = 2 : 1$ ஆகுமாறு உள்ளது.

AEG, ABD ஆகிய முக்கோணிகளைக் கருதுக. AE, AB ஆகிய பக்கங்கள் ஒரே கோட்டிலும் AG, AD ஆகிய கோடுகள் ஒரே கோட்டிலும் EG, BD ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனால் அவை இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும்.

$\Rightarrow AE : EB = AG : GD = 2 : 1.$

$\Rightarrow \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{2}{1}$.

முக்கோணி AOB இற்கு cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்போம்.



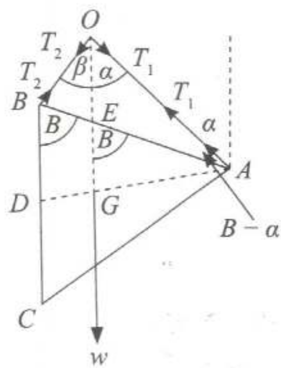
$(AE + EB) \cot B = AE \cot \alpha - EB \cot \beta.$

$\Rightarrow \left(\frac{AE}{EB} + 1\right) \cot B = \frac{AE}{EB} \cot \alpha - \cot \beta.$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{1} + 1\right) \cot B = \frac{2}{1} \cot \alpha - \cot \beta.$

$\Rightarrow 3 \cot B = 2 \cot \alpha - \cot \beta.$

அடர் மீது தாக்கும் விசைகளைத் துணிப்பதன் மூலமும் இப் பிரசினத்தைத் தீர்ப்போம்.



$\uparrow \; T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = w$ ______ ①

$\longrightarrow T_2 \sin \beta = T_1 \sin \alpha$ ______ ②

புள்ளி B பற்றி அடர் மீது தாக்கும் விசைகளுக்குத் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$\therefore T_1 \times AB \sin (B - \alpha) = w \times BE \sin B.$$

$\therefore T_1 \sin\ (B-\alpha) \times (AE+EB) = w \times BE \sin B.$

$\therefore T_1 \sin\ (B-\alpha) \times \left(\dfrac{AE}{EB}+1\right) = w \times \sin B.$

$AE : EB = 2 : 1$ ஆகையால் மேற்குறித்த சமன்பாடு

$T_1 \sin\ (B-\alpha) \times 3 = w \times \sin B.$ —— ③

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து T_2 ஐ நீக்குவோம். அப்போது

$T_1 \cos\alpha \sin\beta + T_1 \sin\alpha \cos\beta = w \sin\beta$.

$\Rightarrow T_1 \sin(\alpha+\beta) = w \sin\beta$. —— ④

③, ④ ஆகிய சமன்பாடுகளின் இரு பக்கங்களையும் இடைமாற்றிப் பெருக்கும்போது

$\sin(B-\alpha) \times 3 \sin\ \beta = \sin B \sin(\alpha+\beta).$
$\Rightarrow (\sin B \cos\alpha - \cos B \sin\alpha) \times 3 \sin\beta$
$= \sin B (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta).$

இங்கு ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $\sin\ \alpha\ \sin\ \beta\ \sin\ B$ இனால் வகுக்கும்போது

$3(\cot\ \alpha - \cot B) = \cot\beta + \cot\alpha.$

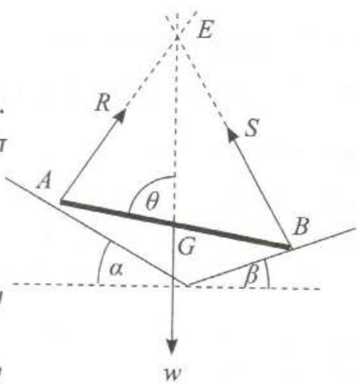
$\Rightarrow 3 \cot\ B = 2\cot\alpha - \cot\beta$.

இவ்விரு தீர்வுகளிடையே cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகித்துத் தீர்த்தல் எளிதானது. பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது விசேட விதம் எடுத்துரைக்கப்படாதபோது மிகவும் எளிதான முறையைப் பின்பற்றுவதன் மூலம் தேவையான பேறுகளை அடையலாம். அப்போது எமது நேரத்தைப் போன்று உழைப்பும் மீதப்படும். அதற்காகப் பிரசினங்களைத் தீர்த்து அனுபவங்களைப் பெறுதல் முக்கியமானதாகும்.

உதாரணம் 2.26

w நிறையுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் இரு முனைகளிலும் கிடையுடன் α, β $(< \alpha)$ கோணங்களில் சாய்ந்திருக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்களுடன் தொடுகையுற்று நிலைக்குத்துடன் கூர்ங்கோணம் θ இற் சாய்ந்து நாப்பத்தில் இருக்குமெனின் $\cot\alpha + 2\cot\theta = \cot\beta$ எனக் காட்டி, கோலுக்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

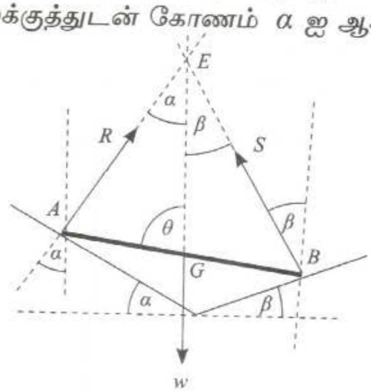


கோல் நாப்பத்தில் இருக்கும் விதம் உருவில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகள் உள்ளன. அவை

- ❖ கோலின் நிறை w
- ❖ A இல் சாய்தளத்தில் உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம் R.
- ❖ B இல் சாய்தளத்தில் உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம் S.

கோல் நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால் மூன்று விசைகளினதும் தாக்கக் கோடுகள் பொருந்தும் அதே வேளை அப்புள்ளி E எனக் கொள்வோம்.

பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு முனை A இல் செவ்வன் மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் கோணம் α ஐ ஆக்குகின்றது.



மேலும் முனை B இல் செவ்வன் மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் கோணம் β ஐ ஆக்குகின்றது.

முக்கோணி ABE இற்கு cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்போம்.
$(AG + GB) \cot \theta = GB \cot \beta - AG \cot \alpha$.
கோல் சீராக இருக்கின்றமையால் $AG = GB$ ஆதலின் மேற்குறித்த சமன்பாடு
$(1 + 1) \cot \theta = \cot \beta - \cot \alpha$.
$\Rightarrow \cot \alpha + 2 \cot \theta = \cot \beta$.
கோல் மீது விசைத் துணிப்பு
$\longrightarrow R \sin \alpha = s \sin \beta$.
$\uparrow R \cos \alpha + s \cos \beta = w$.
இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் s ஐ நீக்குவோம்.

$$R \cos \alpha + R \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta = w.$$

$$\Rightarrow R \left[\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha \right] = w \sin \beta.$$

$$\Rightarrow R \sin (\alpha + \beta) = w \sin \beta.$$

$$\Rightarrow R = \frac{w \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

இவ்வாறே $S = \dfrac{w \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$.

உதாரணம் 2.27

w நிறையுள்ள ஒரு சீரான கோலின் ஒரு முனை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையிலும் அம்முனைக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே இருக்கும் ஒரு புள்ளியும் கோலின் மற்றைய முனையும் ஓர் இலேசான நீட்டப்படமுடியாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டும் இருக்கத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. சுவருக்கும் கோலிற்குமிடையே உள்ள சாய்வு θ எனின், இழையின் நீளம் கோலின் நீளத்தின் $\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$ மடங்கெனக் காட்டுக.

தீர்வு :

கோல் நாப்பத்தில் இருப்பதற்கு மூன்று ஒருதளச் சமாந்தரமற்ற விசைகள் பிரயோகிக்கப்படும் அதே வேளை அதனால் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் பொருந்துகின்றன. அப்புள்ளி E எனக் கொள்வோம்.

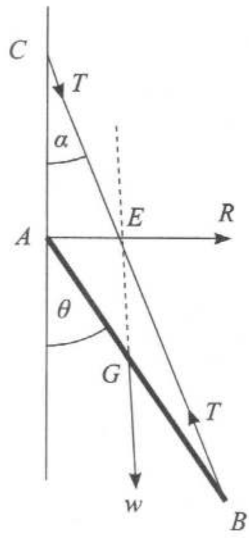
கோலினதும் இழையினதும் நீளங்கள் முறையே a, l எனக் கொள்வோம். மேலும் சுவருக்கும் இழைக்குமிடையே உள்ள கோணம் α எனவும் கொள்வோம்.

பின்வரும் உருவில் கோல் நாப்பத்தில் இருக்கும் விதம் முன்வைக்கப் பட்டுள்ளது.

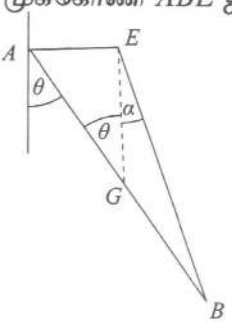
கிடைத் திசையில் கோலினதும் இழையினதும் நீளங்களின் துணிப்புகளைக் கருதும்போது

$BC \sin \alpha = AB \sin \theta.$

$\Rightarrow l \sin \alpha = a \sin \theta.$ —— ①



முக்கோணி ABE ஐக் கருக.



முக்கோணி ABE இற்கு cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்போம்.

$(AG + GB) \cot \theta = GB \cot \alpha - AG \cot 90.$

$\Rightarrow (AG + GB) \cot \theta = GB \cot \alpha .$

மேலும் கோல்கள் சீராக இருப்பதனால் $AG = GB$ ஆகும்.

$\Rightarrow 2 \cot \theta = \cot \alpha .$

$\Rightarrow 4 \cot^2 \theta = \cot^2 \alpha .$

$\Rightarrow 4 + 4 \cot^2 \theta = 4 + \cot^2 \alpha$

$\Rightarrow 4 (1 + \cot^2 \theta) = 3 + 1 + \cot^2 \alpha .$

$\Rightarrow 4 \operatorname{cosec}^2 \theta = 3 + \operatorname{cosec}^2 \alpha .$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 \alpha = 4 \operatorname{cosec}^2 \theta - 3 .$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{4 \operatorname{cosec}^2 \theta - 3}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{4 - 3\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1 + 3 - 3\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta}$$

இரு பக்கங்களிலும் நேர் வர்க்கமூலத்தைக் கருதும்போது

$$\sin\alpha = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}} \quad \text{——} ②$$

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளினதும் இரு பக்கங்களையும் இடைமாற்றிப் பெருக்கும்போது

$$l\sin\alpha \times \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}} = a\sin\theta \times \sin\alpha.$$

$$\Rightarrow l\,\frac{1}{\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}} = a.$$

$$\Rightarrow l = a \times \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}\ .$$

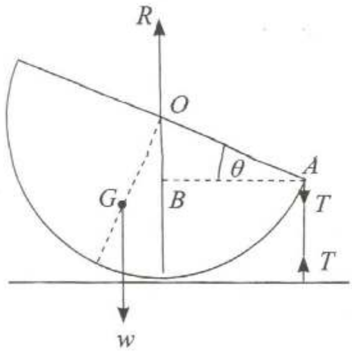
ஆகவே இழையின் நீளம் கோலின் நீளத்தின் $\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$ மடங்காகும்.

உதாரணம் 2.28

நிறை w ஐயும் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு திண்ம அரைக்கோளம் அதன் வளைபரப்பு ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு, அரைக்கோளத்தின் விளிம்பில் உள்ள ஒரு புள்ளி மேசை மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் $l(<a)$ நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டு நாப்பத்தில் உள்ளது. இழை நிலைக்குத்தானதெனக் காட்டி அதன் இழுவை $\frac{3w}{8}(a-l)\left[l(2a-l)\right]^{-\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

அரைக்கோளம் நாப்பத்தில் இருத்தல் உருவில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் மீது தாக்கும் விசைகள்



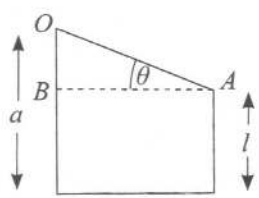
- அரைக்கோளத்தின் நிறை
- மேசை காரணமாக உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம்
- இழையின் இழுவை

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.

இவற்றில் முதல் இரு விசைகளினதும் தாக்கக் கோடுகள் நிலைக்குத்தாகவும் அரைக்கோளம் நாப்பத்திலும் இருக்கின்றமையால் எஞ்சியுள்ள விசையாகிய இழையின் இழுவையின் தாக்கக் கோடும் நிலைக்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே இழை நிலைக்குத்தாகும்.

அரைக்கோளத்தின் தள முகம் கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருக்கின்றதெனக் கொள்வோம். கோடு OG ஆனது நிலைக் குத்துடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்துள்ளது. முக்கோணி AOB ஐக் கருதுவோம். அது கீழே முன்வைக்கப்பட்டுள்ளது.

உருவிற்கேற்ப $\sin\theta = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{a-l}{a}$ ஆகும்.



$$\Rightarrow \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\frac{(a-l)^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2-(a-l)^2}{a^2}$$

$$= \frac{(2a-l)l}{a^2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{(2a-l)l}}{a}.$$

புள்ளி O பற்றி அரைக்கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளுக்குத் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$w \times OG\sin\theta = T \times OA\cos\theta.$

$$\Rightarrow w \times \frac{3a}{8} \times \frac{(a-l)}{a} = T \times a \times \frac{\sqrt{(2a-l)l}}{a}$$

$$\Rightarrow T = w \times \frac{3}{8} \times \frac{(a-l)}{\sqrt{(2a-l)l}}$$

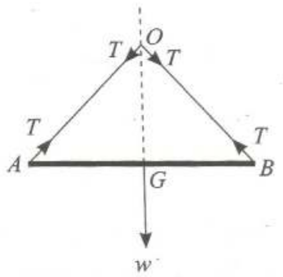
ஆகவே இழையின் இழுவை $\frac{3w}{8}(a-l)[l(2a-l)]^{\frac{-1}{2}}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2.29

ஒரு முளைக்கு மேலாக இடப்பட்ட $2l$ நீளமுள்ள ஓர் இலேசான இழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ள w நிறையுள்ள ஒரு சீரான கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. கோலின் ஒரு முனையுடன் w' நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்படும்போது இழை முளைக்கு மேலாக $\frac{lw'}{w+w'}$ தூரம் நழுவிச் சென்று நாப்பத்திற்கு வருகின்றதெனக் காட்டுக.

தீர்வு :

தொடக்கத்தில் உருவில் உள்ளவாறு கோலின் நாப்பத்தை முன்வைக்கலாம். இப்போது புள்ளி B இல் ஒரு நிறை w' ஐ இணைப்போம். இழை முளைக்கு மேலாக x தூரம் நழுவிச் சென்று நாப்பத்திற்கு வருகின்றதெனக் கொள்வோம். கோலினதும் இழையினதும் புதிய அமைவைக் கருதி நாப்பத்திற்கு மறுபடியும் ஓர் உருவை வரைவோம். அது பின்வரும் உருவில் உள்ளவாறு இருக்கலாம்.



இங்கு $OA = l + x, \quad OB = l - x.$

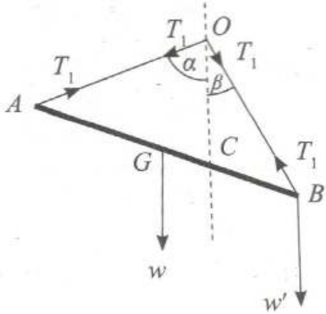
கோல் மீது உள்ள விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$\longrightarrow$

$$T_1 \sin\alpha = T_1 \sin\beta .$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta.$$

$$\alpha = \beta.$$



எனவே கோணம் AOB ஆனது O இனூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் கோட்டினால் இருகூறிடப்படுகின்றது.

$\Rightarrow AC : CB = AO : OB = (l+x) : (l-x)$.

w, w' ஆகிய இரு நிறைகளினதும் விளையுள் $w+w'$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை அது நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கித் தாக்குகின்றது. அப்போது கோல் மீது தாக்கும் விசைகள் A, B ஆகிய புள்ளிகளில் தாக்கும் இழுவைகளுடன் பருமன் $w+w'$ ஐ உடைய நிலைக்குத்து விசையாகும். ஆகவே அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் O இனூடாக உள்ளன. எனவே புள்ளி O இனூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் கோடு மீது இருக்கும் யாதாயினும் ஒரு புள்ளி பற்றி w, w' ஆகிய இரு நிறைகளினதும் திருப்பங்கள் எதிர்த் திசைகளில் இருக்கும் அதே வேளை அவை பருமனில் சமம்.

கோலின் நீளம் $2a$ எனக் கொள்வோம்.

$AC : CB = (l+x) : (l-x)$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\Rightarrow BC = 2a \times \frac{l-x}{(l+x)+(l-x)} = \frac{a}{l} \times (l-x)$$

$$CG = a - \frac{a}{l} \times (l-x) = \frac{a}{l} x .$$

கோலின் கிடையுடனான சாய்வு θ எனக் கொண்டு புள்ளி C பற்றி w, w' ஆகிய விசைகளுக்குத் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$w \times CG \cos\theta = w' \times BC \cos\theta$.

$\Rightarrow w \times CG = w' \times BC$.

$\Rightarrow w \times \frac{a}{l} x = w' \times \frac{a}{l} \times (l-x)$.

$\Rightarrow w \times x = w' \times (l-x)$.

$\Rightarrow w \times x = w' \times l - w' \times x$.

$$\Rightarrow x = \frac{w' l}{w + w'} .$$

பயிற்சி 2.5

1. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் $4P$, $5P$ பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுள் $4P$ பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தானதெனின், விளையுளின் பருமனைத் துணிக.

2. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் P ஆகும். பருமன் P ஐ உடைய விசையைப் பருமனில் இரு மடங்காக்கினால், புதிய விளையுளின் திசைக்குப் பருமன் Q ஐ உடைய விசையின் திசை செங்குத்தானதெனக் காட்டுக.

3. ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் R ஆகும். அது P பருமனுள்ள விசையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ளது. P பருமனுள்ள விசையின் பருமன் $P + R$ ஆக இருக்கும்போது புதிய விளையுளின் திசை விலகும் கோணம் α இன் பெறுமானத்தில் அரைவாசியெனக் காட்டுக.

4. P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகள் கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்கும்போது விளையுளின் பருமன் $(a + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ எனவும் விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $90^\circ - \theta$ ஆக இருக்கும்போது விளையுளின் பருமன் $(a - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ எனவும் எடுத்துரைக்கலாம். இங்கு a ஆனது $a \pm -2$ ஆகவுள்ள ஒரு குறித்த மெய்யெண் ஆகும். $(a + 2)\tan\theta = a - 2$ எனக் காட்டுக.

5. ஒரு புள்ளியில் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தாக்கும் $10\sqrt{3}$ N, 10 N பருமனுள்ள இரு விசைகள் முறையே கிடையுடன் ஒரே திசையில் 30°, 60° கோணங்களை ஆக்குகின்றன. விளையுளின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் கண்டு விளையுளின் பருமனைத் துணிக.

6. ஒரு நாற்பக்கல் $OABC$ இன் A, B, C ஆகிய மூன்று உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(0, 2)$, $(-2, 3)$, $(-4, -1)$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை O ஆனது ஆள்கூற்றுத் தொகுதியின் உற்பத்தி ஆகும். O இல் 2 N, $3\sqrt{5}$ N, $2\sqrt{5}$ N, $\sqrt{17}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே OA, AB, BC, CO வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனைத் துணிக.

7. ஒரு புள்ளி O இல் கிடையாக ஓர் 6 N விசை தாக்கும் அதே வேளை $2\sqrt{3}$ N, 8 N பருமனுள்ள விசைகள் முதல் விசையுடன் ஒரே திசையில் முறையே 30^o, 120^o கோணங்களில் சாய்ந்திருக்குமாறு தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் கிடைக் கூறையும் நிலைக் குத்துக் கூறையும் கண்டு விளையுளைத் துணிக.

8. ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதி முறையே OA, OB, OC, OD, OE திசையில் தாக்கும் 1 N, $4\sqrt{3}$ N, $3\sqrt{3}$ N, $2\sqrt{2}$ N, 10 N விசைகளைக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$ ஆகிய கோணங்கள் முறையே 30^o, 60^o, 45^o, 105^o ஆகும். இரு எதேச்சைத் திசைகளில் விசைத் தொகுதியின் கூறுகளைக் கண்டு விளையுளைத் துணிக.

9. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி. AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே $L, M,$ N ஆகும். புள்ளி B இல் தாக்கும் 4N, $\sqrt{3}$ N, $2\sqrt{3}$ N, 3 N, 5 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே BA, BC, AM, LC, NB வழியே தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது BC உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

10. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. புள்ளி A இல் தாக்கும் $2\sqrt{3}$ N, $\sqrt{3}$ N, 9 N, $5\sqrt{3}$ N, $4\sqrt{3}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, AC, AD, EA, AF திசையில் உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது AB உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

11. $ABCD$ ஒரு சதுரம். 1 N, 2 N, 3 N, 4 N, $9\sqrt{2}$ N, $\sqrt{2}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA, AC, BD திசையில் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைக் கண்டு அது AB உடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணத்தையும் காண்க.

12. ABC ஆனது $AB = AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm ஆகவுள்ள ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளி D ஆகும். ஒரு பொருளின் மீது தாக்கும் 5 N, 9 N, 10 N, 3 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே BA, BD, CA, DA வழியே இதே எழுத்து ஒழுங்குமுறையில் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது BC உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

13. $ABCD$ ஆனது $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வக அடராகும். AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே L, M ஆகும். அதன் மீது தாக்கும் 4 N, 20 N, 3 N, 2 N, 10 N, 15 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, AD, CD, CB, DB, ML வழியே உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது பக்கம் AB உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

14. ஒன்றிலிருந்தொன்று 5 m தூரத்தில் ஒரு கிடைக் கோட்டில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள 3 m, 4 m நீளமுள்ள இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் 50 kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அது நாப்பத்தில் இருப்பின், ஒவ்வோர் இழையினதும் இழுவையைக் காண்க.

15. ஒன்றிலிருந்தொன்று 10 cm தூரத்தில் ஒரே கிடைக் கோட்டில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm நீளமுள்ள இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளின் மூலம் 20 kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அது நாப்பத்தில் இருப்பின், ஒவ்வோர் இழையினதும் இழுவையைக் காண்க.

16. கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்த ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான தளத்தின் மீது $50\sqrt{3}$ kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருளை நாப்பத்தில் வைப்பதற்குக் கிடையாகப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையையும் தளத்திற்கும் பொருளிற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

17. ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை $ABCD$ இன் A, D ஆகிய இரு நுனிகளும் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை நுனி D ஆனது A இற்கு மேலே உள்ளது. B, C ஆகியவற்றில் முறையே 20 kg, m kg திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நாப்பத்தில் பகுதி AB கிடையாக இருக்கும் அதே வேளை BC, CD ஆகிய பகுதிகள் கிடையுடன் முறையே 30°, 60° இற் சாய்ந்துள்ளன. m இன் பெறுமானத்தையும் ஒவ்வோர் இழைப் பகுதியினதும் இழுவையையும் காண்க.

18. ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழை AB இன் A, B ஆகிய இரு நுனிகளும் ஒரே கிடை மட்டத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை இழை மீது உள்ள C, D ஆகிய இரு புள்ளிகளிலும் முறையே m kg, $2m$ kg திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நாப்பத்தில் AC, CD, DB ஆகிய பகுதிகள் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β, θ என்னும் கூர்ங்கோணங்களை ஆக்கும் அதே வேளை புள்ளி D ஆனது புள்ளி C இற்கு மேலே உள்ளது. $\sin\alpha\ \sin(\beta-\theta) = 2\sin\theta\sin(\alpha+\beta)$ எனக் காட்டுக.

19. ABC என்பது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே D, E, F ஆகும். ஒரு பொருள் மீது தாக்கும் $4\sqrt{3}$ N, $3\sqrt{3}$ N, $2\sqrt{3}$ N, 3 N, 2 N, 6 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, AC, AE, BF, CD வழியே உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிந்து அதன் தாக்கக் கோட்டை AB உம் BC உம் சந்திக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து புள்ளி B இன் தூரங்களையும் காண்க.

20. $ABCD$ ஓர் இணைகரம். அதில் $B\hat{A}D = 60^\circ$ ஆகும். $A\hat{B}D$ ஒரு செங்கோணம். ஒரு பொருள் மீது தாக்கும் $2\sqrt{3}$ N, 1 N, $2\sqrt{3}$ N, $\sqrt{3}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BD, AD, DC வழியே உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் அது திசை AD உடன் ஆக்கும் கோணத்தையும் காண்க.
P N பருமனுள்ள ஒரு விசையை BC வழியே அறிமுகஞ் செய்யும்போது விசைத் தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி A இனூடாக இருக்குமெனின், P இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

21. ஓர் ஒப்பமான சீரான கோல் AB இன் நீளம் $8a$ உம் திணிவு $30m$ உம் ஆகும். ஒன்றிலிருந்தொன்று $4a$ தூரத்தில் ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது கோல், முனை A இலிருந்து கிட்டிய ஆதாரம் $3a$ தூரத்தில் இருக்குமாறு, வைக்கப்பட்டுள்ளது. A, B ஆகிய இரு முனைகளுடனும் முறையே $30m$, $40m$ திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டு, கோல் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்களைத் துணிக.
இம்மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமாவதற்கு முனை A இல் உள்ள திணிவு $30m$ எவ்வளவு தூரம் முனை B ஐ நோக்கிக் கொண்டு செல்லப்பட வேண்டும்?

22. ஒரு சீரற்ற கோல் AB இன் நீளம் $16a$ உம் நிறை $24w$ உம் ஆகும். ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது கோல் A உம் B உம் தொடுகையுறுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் மீது ஒரு குறித்த நிறை ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வைக்கப்படும்போது முனை A இருக்கும் ஆதாரத்தின் மீது உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனின் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானமும் குறைந்தபட்சப் பெறுமானமும் முறையே $29w$, $9w$ எனின், வைக்கப்பட்ட நிறையையும் கோலின் திணிவு மையத்தின் அமைவையும் காண்க.
இச்சுமையைக் கோல் மீது ஒரு குறித்த தானத்தில் வைக்கும்போது A , B ஆகிய ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமெனின், சுமையின் அவ்வமைவைத் துணிக.

23. $5a$ நீளமும் $8w$ நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB கிடையாக இருக்குமாறு இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாதவாறு A, B ஆகிய முனைகளில் வேறுவேறாகத் தொங்கவிடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறைகள் முறையே $12w$, $2w$ ஆகும். A இலிருந்து கிட்டிய ஆதாரத்திற்கு உள்ள தூரத்தையும் இரு ஆதாரங்களுக்குமிடையே உள்ள இடைத்தூரத்தையும் துணிக.

24. w நிறையுள்ள ஒரு சீரான திண்மக் கோளம் ஓர் ஒப்பமான நிலைக் குத்துத் தளத்திற்கும் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் α ஐ ஆக்கும் ஓர் ஒப்பமான தளத்திற்குமிடையே நாப்பத்தில் உள்ளது. ஒவ்வொரு தளத்தினாலும் கோளத்தின் மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

25. w நிறையும் a ஆரையும் உள்ள ஒரு சீரான திண்மக் கோளத் தின் மேற்பரப்பு மீது ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்ட a நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் மற்றைய நுனி ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோளம் சுவருடன் தொடுகையுற்று நாப்பத்தில் இருக்குமெனின்,

(i) இழை கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தையும்
(ii) இழையின் இழுவையையும் சுவர் மீது உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கத்தையும்

காண்க.

26. a ஆரையும் w நிறையும் உள்ள ஒரு கோளம் அதன் மேற்பரப்பு மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒரு நுனியும் ஓர் ஒப்பமான சாய்தளத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் மற்றைய நுனியும் இணைக்கப்பட்ட l நீளமுள்ள ஓர் இழையின் மூலம் அச்சாய் தளத்தின் மீது பேணப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு α எனின், இழையின் இழுவை $\dfrac{w(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ எனக் காட்டுக.

27. கிடையுடன் α, β கோணங்களில் சாய்ந்துள்ள இரு ஒப்பமான தளங்களின் மீது சீரான நிறையுள்ள ஒரு கோளம் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ள தளத்தின் மூலம் பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தின் பருமன் கோளத்தின் நிறையின் அரைவாசியெனின், $(2-\cos\alpha)\tan\beta=\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

28. $2a$ நீளமுள்ள சீரான நிறையுள்ள ஒரு கோல் ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து கிடையாக h தூரத்தில் உள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையைத் தொட்டுக்கொண்டு சுவருடன் பொருந்தியிருக்கின்றது. நாப்பத்தில் கோலின் நிலைக்குத்துடனான சாய்வு θ எனின், $a\sin^3\theta=h$ எனக் காட்டுக.

29. w நிறையும் $2a$ நீளமும் உள்ள இரு சீரான கோல்கள் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு, நிலையாக உள்ள ஆரை r ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான கோளத்தின் மீது சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு கோலும் கிடையுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குமெனின் $r\tan\theta=a\cos^2\theta$ எனக் காட்டுக.

30. உள் மேற்பரப்பு ஒப்பமான ஒரு கோளத்தினுள்ளே திணிவு மையத்தினால் $a:b$ விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும் ஒரு கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. கோல் கோளத்தின் மையத்தில் கோணம் 2α ஐ எதிரமைக்கும் அதே வேளை கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருக்குமெனின், $(b+a)\tan\theta=(b-a)\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

31. w நிறையுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழலத்தக்கதாக முனை A இல் சுழலையிடப்பட்டு, முனை B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான இழை A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள ஒரு முளை C இற்கு மேலாகச் செல்லும் இழையின் சுயாதீன நுனியில் ஒரு சுமை P இணைக்கப்பட்டு, கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. இங்கு $AB = AC$ ஆகும். $P = w \cos A\hat{C}B$ எனக் காட்டி, A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

32. A இனூடாக உள்ள ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழலத்தக்கவாறு முனை A இல் சுழலையிடப்பட்ட l நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை B உம் முனை A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள ஒரு புள்ளி C உம் a நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீட்ட முடியாத இழையினால், தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கும்போது இழை கிடையாக இருக்குமாறு, இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A இல் உள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருப்பின், $2\,(l^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \tan \alpha = a$ எனக் காட்டுக.

33. r ஆரையுள்ள ஓர் உருளை அதன் ஒரு பிறப்பாக்கி ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையுற்றிருக்க நிலையாக உள்ளது. நிலைக்குத்துடன் 45° இற் சாய்ந்த $2l$ நீளமும் $2w$ நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான பலகை சுவருடன் தொடுகையுற்று உருளை மீது நாப்பத்தில் உள்ளது. உராய்வு விசை இல்லையெனின், $\sqrt{10}\,l = (\sqrt{5} - 1)\, r$ எனக் காட்டி, உருளை மீதும் சுவர் மீதும் உள்ள மறுதாக்கங்கள் முறையே $\sqrt{5}\,w$, w எனக் காட்டுக.

34. $12a$ நீளமும் $16w$ நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையுற்று, கோலில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C உடனும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக $\sqrt{3}a$ மேலே இருக்கும் ஒரு புள்ளி D உடனும் இணைத்த ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. கோணம் DAB ஆனது 30° எனின், கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் இழையின் இழுவையையும் புள்ளி C இன் அமைவையும் காண்க.

35. $8a$ நீளமும் w நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையுற்று ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே கோல், அதில் உள்ள ஒரு புள்ளி C உடனும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக $6a$ மேலே சுவரில் உள்ள ஒரு புள்ளி D உடனும் இணைக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால், நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணம் DAB ஆனது 120° எனின், கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் இழையின் இழுவையையும் புள்ளி C இன் அமைவையும் காண்க.

36. $12w$ நிறையும் $8a$ நீளமும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை B ஆனது முனை A இற்குக் கீழே இருக்குமாறு முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் முனை B இலிருந்து $2a$ தூரத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C இல் உள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையுடன் தொடுகையுற்று ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு 60° ஆக இருக்குமாறு கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. முளைக்கும் கோலுக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

37. திணிவுகள் மையத்தினால் $1:2$ விகிதத்திற்குப் பிரிக்கப்படும் ஒரு சீரற்ற கோல் ஒரு கோளத்தினுள்ளே வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் கோளத்தின் மையத்தில் கோணம் 120° ஐ எதிரமைக்கின்றது. உராய்வு விசைகள் இல்லாவிட்டால், மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோல் 60° கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

38. $3a$ ஆரையுள்ள ஓர் ஒப்பமான கோள மேற்பரப்பினுள்ளே a ஆரையும் w நிறையும் உள்ள இரு சீரான சம கோளங்கள் நாப்பத்தில் உள்ளன. கோள மேற்பரப்புக்கும் ஒரு சிறிய கோளத்திற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் சிறிய கோள்களுக்கிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

39. a ஆரையுள்ள ஓர் ஒப்பமான அரைக்கோளப் பாத்திரம் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சீரான கோல் ACB இன் முனை A பாத்திரத்தினுள்ளே வளைபரப்புடன் தொடுகையுற்றும் முனை B பாத்திரத்தின் விளிம்பிலிருந்து வெளியே நீட்டிக் கொண்டும் புள்ளி C பாத்திரத்தின் விளிம்புடன் தொடுகையுற்றும் இருக்குமாறு கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. கோலின் கிடையுடனான சாய்வு 30° எனின், கோலின் நீளம் $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ எனக் காட்டுக.

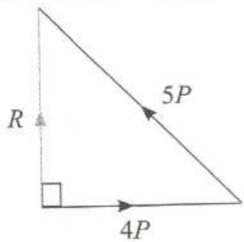
கோலின் நிறை w எனின், A, C ஆகிய புள்ளிகளில் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

40. உள் மேற்பரப்பு ஒப்பமாக உள்ளதும் a ஆரையுள்ளதுமான ஒரு கோளத்திலிருந்து வெட்டப்பட்டதும் மையத்தில் 120° ஐ எதிரமைக்குமாறு உள்ளதுமான பகுதி அதன் விளிம்பு கிடையாகவும் அது மேன்முகமாகவும் இருக்குமாறு நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனை இம்மேற்பரப்புடன் தொடுகையுற்று எஞ்சியுள்ள முனை வெளியே நீட்டிக்கொண்டு இருக்குமாறு கிடையுடன் 15° சாய்வுடன் நாப்பத்தில் இருக்குமெனின், கோலின் நீளம் $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})a$ எனக் காட்டுக.

2.5 மாதிரித் தீர்வு

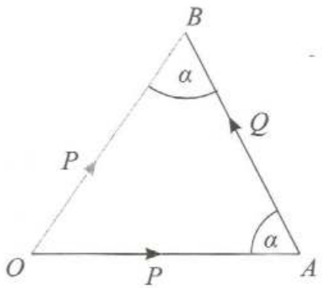
1. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் $4P$, $5P$ பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுள் $4P$ பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தானதெனின், விளையுளின் பருமனைத் துணிக.

இங்கு ஓர் உருவைப் பயன்படுத்தி இச்சந்தர்ப் பத்தை உருவில் உள்ளவாறு முன்வைக்கலாம். பைதகரசின் விதிக்கேற்ப R இன் பெறுமானம் $3P$ ஆகையால் விளையுளின் பருமன் $3P$ ஆகும்.



2. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் P ஆகும். பருமன் P ஐ உடைய விசை யைப் பருமனில் இரு மடங்காக்கினால், புதிய விளையுளின் திசைக்குப் பருமன் Q ஐ உடைய விசையின் திசை செங்குத் தானதெனக் காட்டுக.

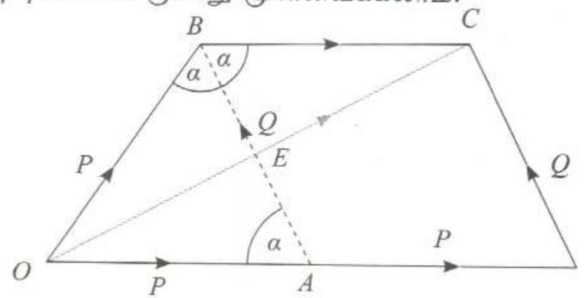
முதலில் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் P ஆக இருக்குமாறு உள்ள இரு விசைகளை உருவில் வகைகுறிப்போம்.



P, Q பருமனுள்ள விசைகள் முறையே OA, AB என்னும் கோட்டுத் துண்டங்களினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

இது இருசமபக்க முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை அம்முக்கோணியின் OAB, OBA என்னும் கோணங்கள் சமமாகும். அக்கோணங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பெறுமானம் α எனக் கொள்வோம்.

இப்போது P பருமனுள்ள விசையின் பருமனை $2P$ என மாற்றுவோம். புதிய விளையுளை மேற்குறித்த உருவில் சேர்த்து மறுபடியும் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



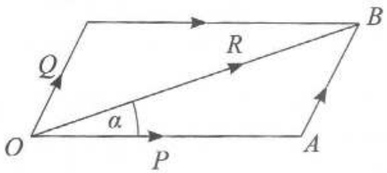
புதிய விளையுள் கோட்டுத் துண்டம் OC இனால் வகை குறிக்கப்படுகின்றது. அப்போது BOC ஆனது ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும்.

மேலும் அம்முக்கோணியில் BOC, BCO ஆகிய கோணங்கள் சமம். கோட்டுத் துண்டம் AB இனால் அம்முக்கோணி BOC ஆனது மேலும் இரு முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப்படும் அதே வேளை அவை BOE, BCE எனக் கொள்வோம். அம்முக்கோணிகளில் OBE, CBE ஆகிய கோணங்கள் சமமாகவும் BOC, BCO ஆகிய கோணங்கள் சமமாகவும் இருப்பதனால், அவை இயல்பொத்த முக்கோணிகளாகும். மேலும் பக்கம் BE அம்முக்கோணிகளுக்குப் பொது ஆகையால் அவை ஒருங்கிசை முக்கோணிகளாகும். ஆகவே BEC, BEO ஆகிய கோணங்களும் சமமாக இருக்கும் அதே வேளை

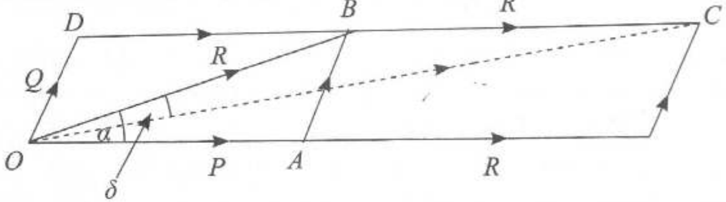
அவற்றின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆகையால், ஒவ்வொரு கோணமும் 90° ஆகும். இதற்கேற்ப OC உம் AB உம் செங்குத்தானவை. புதிய விளையுளின் திசைக்கு Q பருமனுள்ள விசையின் திசை செங்குத் தானது.

3. ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் R ஆகும். அது P பருமனுள்ள விசையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ளது. P பருமனுள்ள விசையின் பருமன் $P + R$ ஆக இருக்கும்போது புதிய விளையுளின் திசை விலகும் கோணம் α இன் பெறுமானத்தில் அரைவாசியெனக் காட்டுக.

முதலில் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் R எனவும் அது P பருமனுள்ள விசையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ளது எனவும் கொண்டு அதனை ஓர் உருவில் வகை குறிப்போம்.



இப்போது P பருமனுள்ள விசையின் பருமனை $P + R$ என மாற்றுவோம். புதிய விளையுளை மேற்குறித்த உருவில் சேர்த்து மறுபடியும் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



உருவில் தொடக்க விளையுளுக்கும் இரண்டாம் விளையுளுக்கு மிடையே உள்ள விலகற் கோணம் BOC இனால் வகைகுறிக்கப் படுகின்றது எனவும் அக்கோணத்தின் பெறுமானம் δ எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது எனவும் நீங்கள் காண்பீர்கள்.

இப்போது முக்கோணி BOC ஐக் கருதுக. பக்கம் OB உம் பக்கம் BC உம் பருமனில் சமம் ஆகையால் அது ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். எனவே கோணம் BCO உம் கோணம் BOC உம் சமம் ஆகையால் கோணம் BCO இன் பெறுமானமும் δ ஆகும். அம்முக்கோணியின் புறக்கோணம் OBD இன் பெறுமானம் கோணம் BOA இன் பெறுமானமாகிய α ஆகும். அதே வேளை புறக்கோணத்தின் பெறுமானம் இரு அகக்கோணங்களின் பெறுமானங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் ஆகையால் $\alpha = 2\delta$. எனவே δ இன் பெறுமானம் α இன் பெறுமானத்தின் அரைவாசியாகும். இதற்கேற்ப விளையுளின் திசை விலகும் கோணம் α இன் பெறுமானத்தின் அரைவாசியாகும்.

குறிப்பு : இப்பிரசினத்தை இரு விசைகளின் விளையுளைக் காண்பதற்காகப் பெற்ற சூத்திரங்களிடையே உகந்த சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் தீர்க்கலாம். நீங்களும் அவ்வாறு தீர்ப்பதற்கு முயலுங்கள்.

---

4. P , Q பருமனுள்ள இரு விசைகள் கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்கும்போது விளையுளின் பருமன் $(a + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ எனவும் விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் $90^{\circ} - \theta$ ஆக இருக்கும்போது விளையுளின் பருமன் $(a-1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ எனவும் எடுத்துரைக்கலாம்; இங்கு a ஆனது $a \pm -2$ ஆகவுள்ள ஒரு குறித்த மெய்யெண் ஆகும். $(a+2)\tan\theta = a-2$ எனக் காட்டுக.

இங்கு கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்கும் P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகளின் விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்போம். P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகள் கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்கும்போது விளையுளின் பருமன் $(a + 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ என எடுத்துரைக்கப்படுகின்றமையால்

$$(a+1)^2(P^2 + Q^2) = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2 .$$

$$\Rightarrow (a^2 + 2a + 1)(P^2 + Q^2) = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2.$$

$$\Rightarrow a(a+2)(P^2 + Q^2) = 2PQ\cos\theta. \quad \text{——} ①$$

இரு விசைகளுக்குமிடையே உள்ள கோணம் $90^{\circ} - \theta$ ஆக இருக்கும்போது விளையுளின் பருமன் $(a - 1)\sqrt{P^2 + Q^2}$ என எடுத்துரைக்கப்படலாம் ஆகையால்

$(a-1)^2(P^2+Q^2) = P^2 + 2\,PQ\sin\theta + Q^2.$

$\Rightarrow (a^2-2a+1)\,(P^2+Q^2) = P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2.$

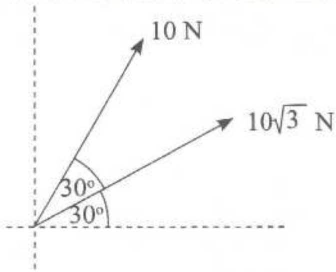
$\Rightarrow a\,(a-2)\,(P^2+Q^2) = 2\,PQ\sin\theta\,.$ —— ②

சமன்பாடு ② ஐச் சமன்பாடு ① இனால் வகுக்கும்போது

$\Rightarrow \dfrac{(a-2)}{(a+2)} = \tan\theta.$

$\Rightarrow (a+2)\tan\theta = a-2.$

5. ஒரு புள்ளியில் ஒரே நிலைக்குத்துத் தாக்கம் தாக்கும் $10\sqrt{3}$ N, 10 N பருமனுள்ள இரு விசைகள் முறையே கிடையுடன் ஒரே திசையில் 30°, 60° கோணங்களை ஆக்குகின்றன. விளையுளின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் கண்டு விளையுளின் பருமனைத் துணிக.



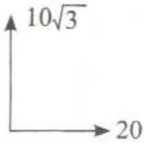
தொகுதியை → திசையில் துணிப்போம்.

$$\begin{aligned} X &= 10\sqrt{3}\cos 30^\circ + 10\cos 60^\circ \\ &= 10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\times\frac{1}{2} \\ &= 15+5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$\begin{aligned} Y &= 10\sqrt{3}\sin 30^\circ + 10\sin 60^\circ \\ &= 10\sqrt{3}\times\frac{1}{2} + 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

ஆகவே விளையுள்

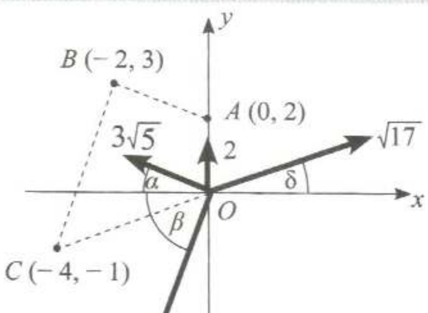


எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = 20^2 + (10\sqrt{3}\,)^2$

$$= 10^2 \times 2^2 + 10^2 \times \sqrt{3}^{\,2}$$
$$= 10^2\,(2^2 + \sqrt{3}^{\,2})$$
$$= 10^2 \times 7.$$

$$\Rightarrow R = 10\,\sqrt{7}\ \text{N}.$$

6. ஒரு நாற்பக்கல் $OABC$ இன் A, B, C ஆகிய மூன்று உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே $(0, 2), (-2, 3),\ (-4, -1)$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை O ஆனது ஆள்கூற்றுத் தொகுதியின் உற்பத்தி ஆகும். O இல் 2 N, $3\sqrt{5}$ N, $2\sqrt{5}$ N, $\sqrt{17}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே OA, AB, BC, CO வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனைத் துணிக.



இங்கு $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ ஆகையால் $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

மேலும் $\tan\beta = \dfrac{2}{1}$ ஆகையால் $\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$\tan\delta = \dfrac{1}{4}$ ஆகையால் $\sin\delta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\delta = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

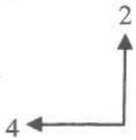
தொகுதியை $\rightarrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$X = \sqrt{17}\cos\delta - 3\sqrt{5}\cos\alpha - 2\sqrt{5}\cos\beta$$
$$= \sqrt{17}\times\frac{4}{\sqrt{17}} - 3\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= 4 - 6 - 2 = -4.$$

தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 2 + \sqrt{17}\ \sin\delta + 3\sqrt{5}\ \sin\alpha - 2\sqrt{5}\ \sin\beta$$
$$= 2 + \sqrt{17}\times\frac{1}{\sqrt{17}} + 3\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$= 2 + 1 + 3 - 4 = 2.$$

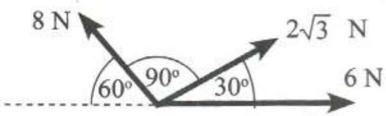
ஆகவே விளையுள்



எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = 4^2 + 2^2$
$$= 16 + 4$$
$$= 20.$$
$$\Rightarrow R = 2\sqrt{5N}.$$

7. ஒரு புள்ளி O இல் கிடையாக ஓர் 6 N விசை தாக்கும் அதே வேளை $2\sqrt{3}$ N, 8 N பருமனுள்ள விசைகள் முதல் விசையுடன் ஒரே திசையில் முறையே 30°, 120° கோணங்களில் சாய்ந்திருக்குமாறு தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் கண்டு விளையுளைத் துணிக.

முதலில் விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.



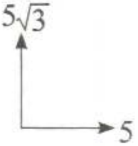
தொகுதியை → திசையில் துணிப்போம்.

$$X = 6 + 2\sqrt{3}\cos 30^\circ - 8\cos 60^\circ$$
$$= 6 + 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 8\times\frac{1}{2}$$
$$= 6 + 3 - 4 = 5.$$

தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 2\sqrt{3}\sin 30^\circ + 8\sin 60^\circ$$
$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

ஆகவே விளையுள்

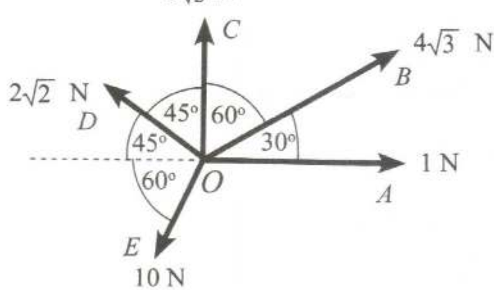


எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின்,

$$R^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$$
$$= 5^2 + 5^2 \times 3$$
$$= 5^2 \times 4$$
$$= 10^2.$$
$$\Rightarrow R = 10.$$

8. ஒரு புள்ளி O இல் தாக்கும் ஓர் ஒருதள விசைத்தொகுதி முறையே OA, OB, OC, OD, OE திசையில் தாக்கும் 1 N, $4\sqrt{3}$ N, $3\sqrt{3}$ N, $2\sqrt{2}$ N, 10 N விசைகளைக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$ ஆகிய கோணங்கள் முறையே $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ ஆகும். இரு எதேச்சைத் திசைகளில் விசைத் தொகுதியின் கூறுகளைக் கண்டு விளையுளைத் துணிக.

இங்கும் முதலில் விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.



தொகுதியை $\rightarrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$X = 1 + 4\sqrt{3}\cos 30^\circ - 2\sqrt{2}\cos 45^\circ - 10\cos 60^\circ$$

$$= 1 + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 + 6 - 2 - 5 = 0.$$

அதாவது 1 N பருமனுள்ள விசையின் திசையில் தொகுதிக்கு ஒரு கூறும் இல்லை.

தொகுதியை $\uparrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 4\sqrt{3}\sin 30^\circ + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sin 45^\circ - 10\sin 60^\circ$$

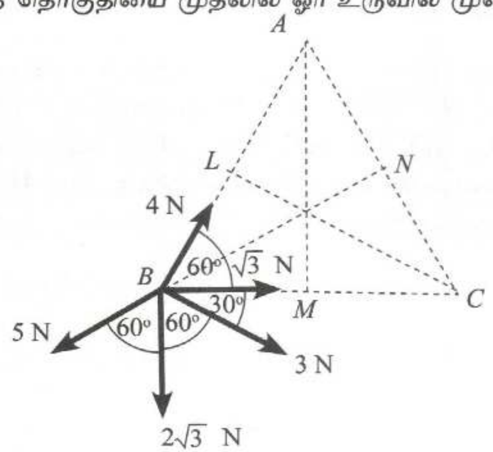
$$= 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2 - 5\sqrt{3} = 2.$$

ஆகவே விளையுள் 1 N பருமனுள்ள விசைக்குச் செங்குத்தாகத் தாக்கும் 2 N பருமனுள்ள விசையாகும்.

9. *ABC* ஒரு சமபக்க முக்கோணி. *AB*, *BC*, *CA* ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே *L*, *M*, *N* ஆகும். புள்ளி *B* இல் தாக்கும் $4\text{ N}, \sqrt{3}\text{ N}, 2\sqrt{3}\text{ N}, 3\text{ N}, 5\text{ N}$ பருமனுள்ள விசைகள் முறையே *BA*, *BC*, *AM*, *LC*, *NB* வழியே தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது *BC* உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

விசைத் தொகுதியை முதலில் ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.

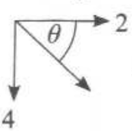


தொகுதியை $\rightarrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$X = \sqrt{3} + 4\cos 60^\circ - 5\sin 60^\circ + 3\cos 30^\circ$$
$$= \sqrt{3} + 4 \times \frac{1}{2} - 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3} + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2.$$

தொகுதியை $\uparrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 4\sin 60^\circ - 5\cos 60^\circ - 2\sqrt{3} - 3\cos 60^\circ$$
$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 \times \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} - 3 \times \frac{1}{2}$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{5}{2} - 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} = -4.$$

ஆகவே விளையுள் 

ஆகும்.

எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = 2^2 + 4^2$
$$= 20.$$
$$\Rightarrow R = 2\sqrt{5}N .$$

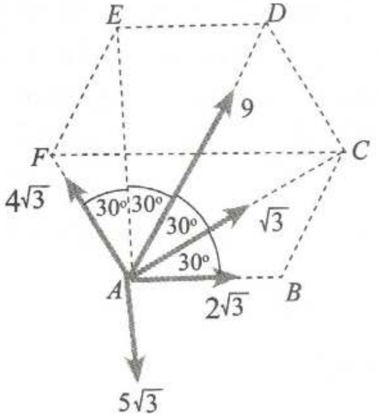
விளையுள் BC உடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\tan\theta = \frac{4}{2} = 2.$

$$\theta = \tan^{-1} 2.$$

10. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. புள்ளி A இல் தாக்கும் $2\sqrt{3}$ N, $\sqrt{3}$ N, 9 N, $5\sqrt{3}$ N, $4\sqrt{3}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, AC, AD, EA, AF திசையில் உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது AB உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

விசைத் தொகுதியை முதலில் ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.



தொகுதியை → திசையில் துணிப்போம்.

$$X = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos 30^\circ + 9\cos 60^\circ - 4\sqrt{3}\cos 60^\circ$$

$$X = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 \times \frac{1}{2} - 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - 2\sqrt{3}\ .$$

$$= 6$$

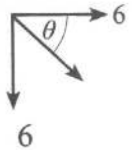
தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = \sqrt{3}\sin 30^\circ + 9\sin 60^\circ + 4\sqrt{3}\cos 30^\circ - 5\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 5\sqrt{3}$$

$$= 6$$

ஆகவே விளையுள்



ஆகவே விளையுளின் பருமன் R எனின்,

$$R^2 = 6^2 + 6^2$$
$$= 2 \times 6^2$$

விளையுள் AB உடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\tan\theta = \frac{6}{6} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

11. $ABCD$ ஒரு சதுரம். 1 N, 2 N, 3 N, 4 N, $9\sqrt{2}$ N, $\sqrt{2}$ N. பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, CD, DA, AC, BD திசையில் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைக் கண்டு அது AB உடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணத்தையும் காண்க.

விசைத் தொகுதியை முதலில் ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.

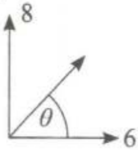
தொகுதியை $\rightarrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$X = 1 - \sqrt{2}\cos 45^\circ - 3 + 9\sqrt{2}\cos 45^\circ$$
$$= 1 - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 + 9\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 1 - 1 - 3 + 9 = 6.$$

தொகுதியை $\uparrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 9\sqrt{2}\sin 45^\circ + 2 + \sqrt{2}\sin 45^\circ - 4$$
$$= 9\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 + \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4$$
$$= 9 + 2 + 1 - 4 = 8.$$

ஆகவே விளையுள்



எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = 6^2 + 8^2$

$$= 36 + 64$$
$$= 100.$$
$$\Rightarrow R = 10 \text{ N}.$$

விளையுள் AB உடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\tan\theta = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right).$$

12. ABC ஆனது $AB = AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm ஆகவுள்ள ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளி D ஆகும். ஒரு பொருளின் மீது தாக்கும் 5 N, 9 N, 10 N, 3 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே BA, BD, CA, DA வழியே இதே எழுத்து ஒழுங்குமுறையில் தாக்குகின்றன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது BC உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

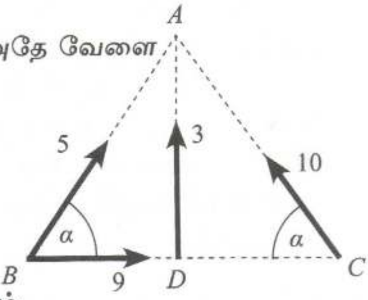
இங்கும் விசைத் தொகுதியை முதலில் ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.

$A\hat{B}D = \alpha$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $A\hat{C}B = \alpha$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை

$$\cos\alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{4}{5}.$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$



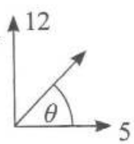
தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$\begin{aligned} X &= 9 + 5\cos\alpha - 10\cos\alpha \\ &= 9 + 5 \times \frac{4}{5} - 10 \times \frac{4}{5} \\ &= 9 + 4 - 8 \\ &= 5. \end{aligned}$$

தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$\begin{aligned} Y &= 5\sin\alpha + 3 + 10\sin\alpha \\ &= 5 \times \frac{3}{5} + 3 + 10 \times \frac{3}{5} \\ &= 3 + 3 + 6 = 12. \end{aligned}$$

ஆகவே விளையுள்



எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின்,

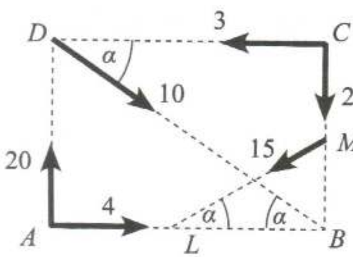
$$R^2 = 5^2 + 12^2$$
$$= 25 + 144 = 169.$$
$$\Rightarrow R = 13 \text{ N}.$$

விளையுள் BC உடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\tan\theta = \dfrac{12}{5}$. $\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right)$.

13. $ABCD$ ஆனது $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm ஆகவுள்ள ஒரு செவ்வக அடராகும். AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே L, M ஆகும். அதன் மீது தாக்கும் 4 N, 20 N, 3 N, 2 N, 10 N, 15 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, AD, CD, CB, DB, ML வழியே உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைத் துணிந்து அது பக்கம் AB உடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

விசைத் தொகுதியை முதலில் ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.



இங்கு $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ ஆகையால்

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ ஆகும்.

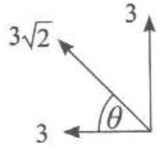
மூலைவிட்டங்களுக்கும் பக்கங்களுக்கும் இடையே உள்ள சாய்வு α ஆக இருக்கும் அதே வேளை AB, BC ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே L, M ஆகையால் LM இற்கும் பக்கங்களுக்குமிடையே உள்ள சாய்வும் அதுவாகும்.

தொகுதியை $\rightarrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$X = 4 - 15\cos\alpha - 3 + 10\cos\alpha$$
$$= 4 - 15 \times \frac{4}{5} - 3 + 10 \times \frac{4}{5}$$
$$= 4 - 12 - 3 + 8 = -3.$$

தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 20 - 15 \sin \alpha - 2 - 10 \sin \alpha$$
$$= 20 - 15 \times \frac{3}{5} - 2 - 10 \times \frac{3}{5}$$
$$= 20 - 9 - 2 - 6 = 3.$$

ஆகவே விளையுள் 

எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின்,

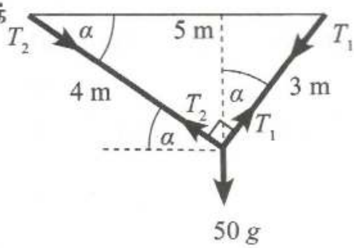
$$R^2 = 3^2 + 3^2$$
$$= 3^2 \times 2.$$
$$\Rightarrow R = 3\sqrt{2} \text{ N}.$$
$$\tan \theta = \frac{3}{3}$$
$$\tan \theta = 1$$
$$\theta = 45^\circ$$

விளையுள் BA உடன் ஆக்கும் கூர்ங்கோணமும் 45° ஆகையால் விளையுள் AB உடன் ஆக்கும் கோணமும் 135° ஆகும்.

14. ஒன்றிலிருந்தொன்று 5 m தூரத்தில் ஒரு கிடைக் கோட்டில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள 3 m, 4 m நீளமுள்ள இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் 50 kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அது நாப்பத்தில் இருப்பின், ஒவ்வோர் இழையினதும் இழுவையைக் காண்க.

ஒரு செங்கோண முக்கோணி அமைக்கப்படுகின்றமையால், இங்கு

$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$ ஆகும்.



லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{T_1}{\sin(90+\alpha)} = \frac{T_2}{\sin(180-\alpha)} = \frac{50g}{\sin 90}.$$

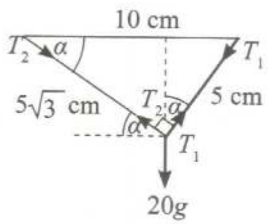
$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos\alpha} = \frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{50g}{1}.$$

$$\Rightarrow T_1 = 50\,g\cos\alpha\ ,\ T_2 = 50g\sin\alpha.$$

$$\Rightarrow T_1 = 50\,g \times \frac{4}{5},\ T_2 = 50\,g \times \frac{3}{5}.$$

$$\Rightarrow T_1 = 40\,g\ ,\ T_2 = 30\,g.$$

15. ஒன்றிலிருந்தொன்று 10 cm தூரத்தில் ஒரே கிடைக் கோட்டில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm நீளமுள்ள இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளின் மூலம் 20 kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அது நாப்பத்தில் இருப்பின், ஒவ்வோர் இழையினதும் இழுவையைக் காண்க.



இங்கும் ஒரு செங்கோண முக்கோணி அமைக்கப்படும் அதே வேளை இங்கு $\sin\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. ஆகையால் $\alpha = 30^\circ$ ஆகும்.

லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{T_1}{\sin(90+30)} = \frac{T_2}{\sin(180-30)} = \frac{50g}{\sin 90}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos 30} = \frac{T_2}{\sin 30} = \frac{50g}{1}.$$

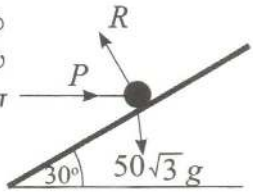
$$\Rightarrow T_1 = 50\,g\cos 30,\ T_2 = 50\,g\sin 30.$$

$$\Rightarrow T_1 = 50\,g \times \frac{\sqrt{3}}{2},\ T_2 = 50\,g \times \frac{1}{2}.$$

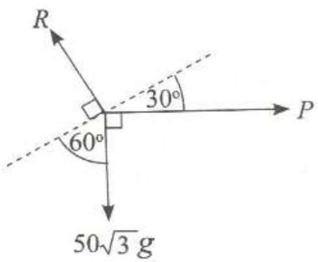
$$\Rightarrow T_1 = 25\sqrt{3}\,g\text{N},\ T_2 = 25g\ \text{N}.$$

16. கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்த ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான தளத்தின் மீது $50\sqrt{3}$ kg திணிவுள்ள ஒரு புள்ளிப் பொருளை நாப்பத்தில் வைப்பதற்குக் கிடையாகப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையையும் தளத்திற்கும் பொருளிற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

இங்கு மூன்று விசைகளின் நாப்பத்தின் கீழ் நாப்பத்தில் இருக்கும் ஒரு பொருள் ஆகையால் லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தல் எளிதாகும்.



மிக நன்றாக விசைகளிடையே உள்ள கோணங்களைக் காண்பதற்கு விசைகளை மாத்திரம் மறுபடியும் வரைவோம்.
லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது



$$\frac{R}{\sin 90} = \frac{P}{\sin(90+60)} = \frac{50\sqrt{3}\,g}{\sin(90+30)}.$$

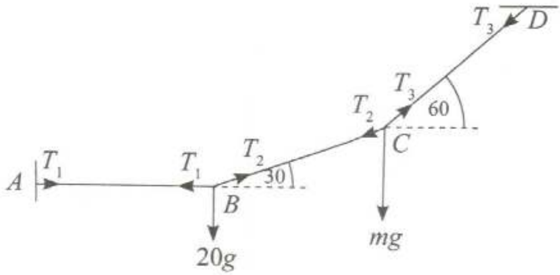
$$\Rightarrow \frac{R}{1} = \frac{P}{\cos 60} = \frac{50\sqrt{3}\,g}{\cos 30}.$$

$$\Rightarrow R = \frac{50\sqrt{3}\,g}{\cos 30},$$

$$P = \frac{50\sqrt{3}\,g}{\cos 30}\ \cos 60.$$

$$\therefore\ R = 100\,g,\ P = 50\,g.$$

17. ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை $ABCD$ இன் A, D ஆகிய இரு நுனிகளும் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை நுனி D ஆனது நுனி A இற்கு மேலே உள்ளது. B, C ஆகியவற்றில் முறையே 20 kg, m kg திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நாப்பத்தில் பகுதி AB கிடையாக இருக்கும் அதே வேளை BC, CD ஆகிய பகுதிகள் கிடையுடன் முறையே 30°, 60° இற் சாய்ந்துள்ளன. m இன் பெறுமானத்தையும் ஒவ்வோர் இழைப் பகுதியினதும் இழுவையையும் காண்க.



B, C ஆகிய புள்ளிகளில் மூன்று விசைகள் வீதம் தாக்கிக் கொண்டு தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால் அப்புள்ளிகளில் லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்போம். புள்ளி B இல்

$$\frac{T_1}{\sin(90+30)} = \frac{T_2}{\sin 90} = \frac{20g}{\sin(180-30)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\cos 30} = \frac{T_2}{1} = \frac{20g}{\sin 30}. \text{ ———— ①}$$

$$\frac{T_1}{\cos 30} = \frac{20g}{\sin 30}, \ \frac{T_2}{1} = \frac{20g}{\sin 30}$$

$$\therefore \ T_1 = 20g\frac{\cos 30}{\sin 30}, \ T_2 = \frac{20g}{\sin 30}$$

$$\therefore \ T_1 = 20\sqrt{3}\,g, \ T_2 = 40g.$$

புள்ளி C இல்

$$\frac{T_2}{\sin(90+60)} = \frac{T_3}{\sin 60} = \frac{mg}{\sin(180-30)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\cos 60} = \frac{T_3}{\sin 60} = \frac{mg}{\sin 30}. \text{ ———— ②}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\cos 60} = \frac{mg}{\sin 30}, \frac{T_2}{\cos 60} = \frac{T_3}{\sin 60}.$$

மேலும் $T_2 = 40\ g$ ஆகையால் $\dfrac{40g}{\cos 60} = \dfrac{mg}{\sin 30}$ ஆகும்.

அப்போது $m = \dfrac{40}{\cos 60} \sin 30$ ஆகையால் $m = 40$ ஆகும்.

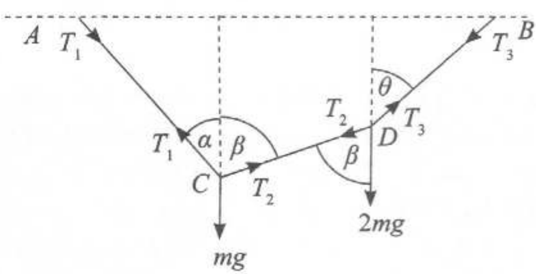
சமன்பாடு ② ஐக் கருதும்போது $\dfrac{40\ g}{\cos 60} = \dfrac{T_3}{\sin 60}$.

$$\Rightarrow T_3 = \frac{40\ g}{\cos 60} \sin 60 = 40\sqrt{3}\,g.$$

எனவே m இன் பெறுமானம் 40 kg உம் AB, BC, CA ஆகிய இழைப் பகுதிகளின் இழுவைகள் முறையே $20\sqrt{3}\,g$, $40g$, $40\sqrt{3}g$ நியூற்றனும் ஆகும்.

18. ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழை AB இன் A , B ஆகிய இரு நுனிகளும் ஒரே கிடை மட்டத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை இழை மீது உள்ள C, D ஆகிய இரு புள்ளிகளிலும் முறையே m kg, $2m$ kg திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நாப்பத்தில் AC, CD, DB ஆகிய பகுதிகள் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β, θ என்னும் கூர்ங்கோணங்களை ஆக்கும் அதே வேளை புள்ளி D ஆனது புள்ளி C இற்கு மேலே உள்ளது.

$\sin\alpha \sin(\beta - \theta) = 2\sin\theta \sin(\alpha + \beta)$ எனக் காட்டுக.



C, D ஆகிய புள்ளிகளில் மூன்று விசைகள் வீதம் தாக்கிக் கொண்டு தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால் அப்புள்ளிகளில் லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்போம்.

புள்ளி C இல்

$$\frac{T_1}{\sin(180-\beta)} = \frac{T_2}{\sin(180-\alpha)} = \frac{mg}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin(180-\alpha)} = \frac{mg}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore T_2 = mg\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

புள்ளி D இல்

$$\frac{T_2}{\sin(180-\theta)} = \frac{T_3}{\sin\beta} = \frac{2mg}{\sin(180-\beta+\theta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin(180-\theta)} = \frac{2mg}{\sin(180-\beta+\theta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{\sin\theta} = \frac{2mg}{\sin(\beta-\theta)}.$$

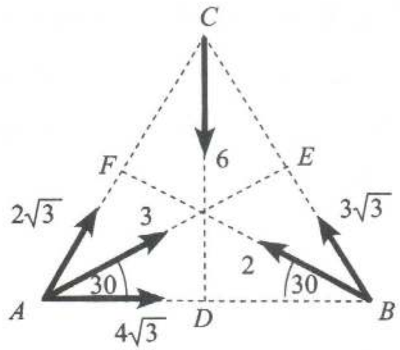
$$\Rightarrow T_2 = \frac{2mg\sin\theta}{\sin(\beta-\theta)}.$$

T_2 இற்கு இரு கோவைகள் கிடைத்திருக்கும் அதே வேளை அவை சமமாக இருக்கின்றமையால்

$$mg\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \sin\theta\,\frac{2mg}{\sin(\beta-\theta)}.$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\sin(\beta-\theta) = 2\sin\theta\sin(\alpha+\beta).$$

19. ABC என்பது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே D, E, F ஆகும். ஒரு பொருள் மீது தாக்கும் $4\sqrt{3}$ N, $3\sqrt{3}$ N, $2\sqrt{3}$ N, 3 N, 2 N, 6 N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC, AC, AE, BF, CD வழியே உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் துணிந்து அதன் தாக்கக் கோட்டை AB உம் BC உம் சந்திக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து புள்ளி B இன் தூரங்களையும் காண்க.



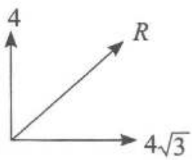
தொகுதியை $\rightarrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$X = 4\sqrt{3} + 3\cos 30 + 2\sqrt{3}\cos 60 - 2\cos 30 - 3\sqrt{3}\cos 60$$
$$= 4\sqrt{3} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$
$$= 4\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$= 4\sqrt{3}.$$

தொகுதியை $\uparrow$ திசையில் துணிப்போம்.

$$Y = 2\sqrt{3}\sin 60 + 3\sin 30 + 2\sin 30 + 3\sqrt{3}\sin 60 - 6$$
$$= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 6$$
$$= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 6 = 4.$$

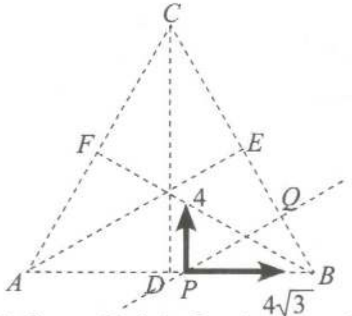
ஆகவே விளையுள்



ஆகவே விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2$

$$= 4^2 + 4^2.3$$
$$= 4^2 \times 4.$$
$$\Rightarrow R = 8 \text{ N}.$$

விளையுள் AB உடன் ஆக்கும் கோணம் θ என எடுக்கும்போது $\tan\theta = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகையால் $\theta = 30^{\circ}$. விளையுள் AB உடன் ஆக்கும் கோணம் 30° ஆகும். எனவே விளையுள் AE இன் திசையில் தாக்குகின்றது.



புள்ளி A பற்றித் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் கருதுவோம்.
இடஞ்சுழித் திசையில்

$$G = 2\sin 30 \times 2a + 3\sqrt{3}\sin 60 \times 2a - 6 \times a$$
$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 2a + 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a - 6 \times a$$
$$= 2a + 9a - 6a$$
$$= 5a.$$

தொகுதியை ஒரு தனி விசையாக ஒடுக்கும்போது அது புள்ளி P இனூடாகச் செல்கின்றதெனக் கொள்வோம். புள்ளி A பற்றித் தனி விசையின் திருப்பம் மேற்குறித்த அதே பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதனால் $4 \times AP = 5a$.

$$\Rightarrow AP = \frac{5}{4}\ a.$$
$$\therefore BP = 2a - \frac{5}{4}\ a = \frac{3}{4}\ a.$$

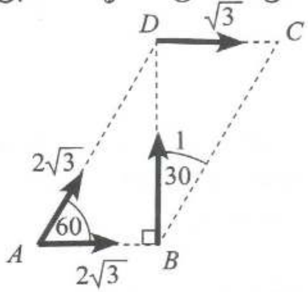
தனி விசையும் பக்கம் BC உம் Q இல் சந்திக்குமெனின், ABE, PBQ ஆகிய இயல்பொத்த முக்கோணிகளைக் கருதும்போது
$$\frac{BQ}{BP} = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{BQ}{BP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$
$$\therefore BQ = \frac{1}{2}\ BP$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\ a$$
$$= \frac{3}{8}\ a.$$

ஆகவே விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டை AB உம் BC உம் சந்திக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து புள்ளி B இன் தூரங்கள் முறையே $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{8}a$ ஆகும்.

20. $ABCD$ ஓர் இணைகரம். அதில் $B\hat{A}D = 60^\circ$ ஆகும். $A\hat{B}D$ ஒரு செங்கோணம். ஒரு பொருள் மீது தாக்கும் $2\sqrt{3}$ N, 1 N, $2\sqrt{3}$ N, $\sqrt{3}$ N பருமனுள்ள விசைகள் முறையே AB, BD, AD, DC வழியே உள்ளன. விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் அது திசை AD உடன் ஆக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

P N பருமனுள்ள ஒரு விசையை BC வழியே அறிமுகஞ் செய்யும்போது விசைத் தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி A இனூடாக இருக்குமெனின், P இன் பெறுமானத்தைத் துணிக.

இவ்விசைத் தொகுதியை ஓர் உருவில் முன்வைப்போம்.



தொகுதியை → திசையில் துணிப்போம்.

$X = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos 60 + \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$.

தொகுதியை ↑ திசையில் துணிப்போம்.

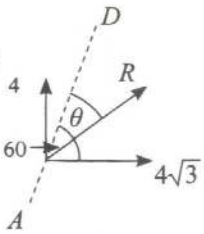
$Y = 2\sqrt{3}\sin 60 + 1$

$= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$= 3 + 1$

$= 4$.

ஆகவே விளையுள்



எனவே விளையுளின் பருமன் R எனின், $R^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2$
$= 4^2 + 4^2.3$
$= 4^2 \times 4.$
$\Rightarrow R = 8$ N.

விளையுள் AD உடன் ஆக்கும் கோணம் θ என எடுக்கும்போது

$\tan(60 - \theta) = \dfrac{4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகையால்

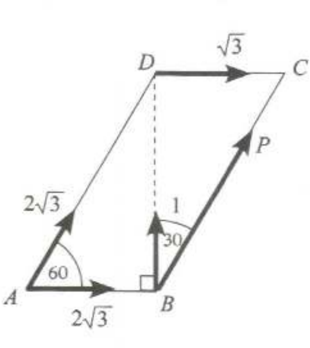
$60^\circ - \theta = 30^\circ$

எனவே $\theta = 30^\circ$.

P N பருமனுள்ள ஒரு விசையை BC வழியே அறிமுகஞ்செய்யும் போது விசைத் தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி A இனூடாக இருக்குமெனத் தரப்பட்டுள்ளது.

புள்ளி A பற்றித் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் கருதுவோம்.

அது பருமனில் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும். இடஞ்சுழித் திசையில்



$1 \times AB + P\cos 30 \times AB - \sqrt{3} \times BD = 0$

$$\Rightarrow 1 + P\cos 30 - \sqrt{3} \times \frac{BD}{AB} = 0.$$

செங்கோண முக்கோணி ABD இல் $\tan 60 = \frac{BD}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \sqrt{3}.$$

இதனை மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$1 + P\cos 30 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0.$$

ஆகவே $1 + P \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = 0. \Rightarrow P \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$

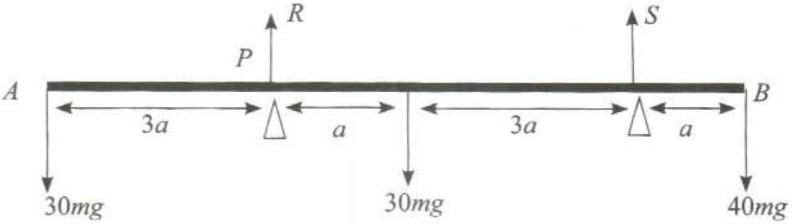
$$\Rightarrow P = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

எனவே P இன் பெறுமானம் $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ N ஆகும்.

21. ஓர் ஒப்பமான சீரான கோல் AB இன் நீளம் $8a$ உம் திணிவு $30m$ உம் ஆகும். ஒன்றிலிருந்தொன்று $4a$ தூரத்தில் ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது கோல், முனை A இலிருந்து கிட்டிய ஆதாரம் $3a$ தூரத்தில் இருக்குமாறு, வைக்கப்பட்டுள்ளது. A, B ஆகிய இரு முனைகளுடனும் முறையே $30m$, $40m$ திணிவுகள் இணைக்கப்பட்டு, கோல் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்களைத் துணிக.

இம்மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமாவதற்கு முனை A இல் உள்ள திணிவு $30m$ எவ்வளவு தூரம் முனை B ஐ நோக்கிக் கொண்டு செல்லப்பட வேண்டும்?

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு ஓர் உருவை வரைவோம். கோலும் ஆதாரங்களும் ஒப்பமானவை ஆகையால் மறு தாக்கங்கள் நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றன.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி P பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$30\,mg \times 3a + S \times 4a = 30mg \times a + 40mg \times 5a.$$

$$\Rightarrow 4S = 30\,mg + 200mg - 90mg\,.$$

$$\Rightarrow 4S = 140mg.$$

ஆகவே $S = 35mg.$

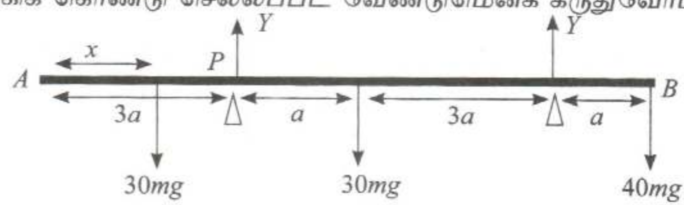
கோல் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$R + S = 30mg + 30mg + 40mg$$

$$\Rightarrow R + 35\,mg = 100mg$$

$$\Rightarrow R = 65mg.$$

ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமாவதற்கு முனை A இல் உள்ள திணிவு $30m$ ஆனது x தூரம் முனை B ஐ நோக்கிக் கொண்டு செல்லப்பட வேண்டுமெனக் கருதுவோம்.



இப்போது கோல்களின் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$Y + Y = 30mg + 30mg + 40mg.$

$\Rightarrow Y = 50mg.$

கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி A பற்றி இடஞ்சுழித் திசையில் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$Y \times 3a + Y \times 7a = 30mg \times x + 30mg \times 4a + 40mg \times 8a.$$

$$\Rightarrow Y \times 10a = 30mg \times x + 440mga.$$

$$\Rightarrow 50mg \times 10a = 30mg \times x + 440mga.$$

$$\Rightarrow 3x = 6a.$$

$$\Rightarrow x = 2a.$$

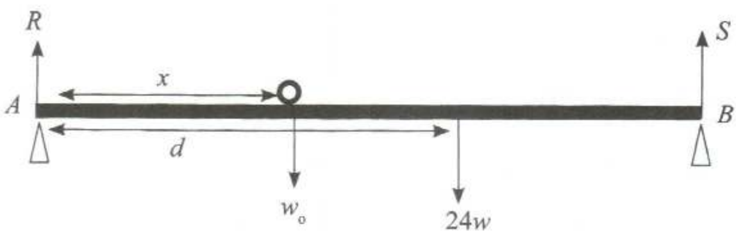
ஆகவே ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமாவதற்கு முனை Aஇல் உள்ள திணிவு $30m$ ஆனது $2a$ தூரம் முனை B ஐ நோக்கிக் கொண்டு செல்லப்படவேண்டும்.

22. ஒரு சீரற்ற கோல் AB இன் நீளம் $16a$ உம் நிறை $24w$ உம் ஆகும். ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது கோல் A உம் B உம் தொடுகையுறுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் மீது ஒரு குறித்த நிறை ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வைக்கப்படும்போது முனை A இருக்கும் ஆதாரத்தின் மீது உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனின் உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானமும் குறைந்தபட்சப் பெறுமானமும் முறையே $29w$, $9w$ எனின், வைக்கப்பட்ட நிறையையும் கோலின் திணிவு மையத்தின் அமைவையும் காண்க.

இச்சுமையைக் கோல் மீது ஒரு குறித்த தானத்தில் வைக்கும்போது A , B ஆகிய ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமெனின், சுமையின் அவ்வமைவைத் துணிக.

வைக்கப்பட்ட நிறை w_0 எனக் கொள்வோம். அது கோலின் முனை A இலிருந்து x தூரத்தில் வைக்கப்பட்டிருக்கும் சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுக. கோலின் திணிவு மையம் முனை A இலிருந்து d தூரத்தில் இருக்கின்றதெனக் கொள்வோம்.

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு ஓர் உருவை வரைவோம். ஆதாரங்கள் ஒப்பமானவை ஆகையால் கோலுக்கும் ஆதாரங்களுக்கு மிடையே உள்ள மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றன.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி B பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$w_o \times (16a - x) + 24w \times (16a - d) = R \times 16a.$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{16a}\ (w_o \times (16a - x) + 24w \times (16a - d)).$$

இதற்கேற்ப முனை A இல் ஆதாரத்தின் மீது உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமன் R இன் பெறுமானம் x ஐச் சார்ந்திருக்கும் அதே வேளை உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானமும் குறைந்தபட்சப் பெறுமானமும் முறையே $x = 0$, $x = 16a$ ஆக இருக்கும்போது கிடைக்கின்றன.
ஆகவே $R = 29w$ ஆன உயர்ந்தபட்சப் பெறுமானம் $x = 0$ ஆக இருக்கும்போது கிடைக்கின்றது.

$$29\ w = \frac{1}{16a}\ (w_o \times (16a - 0) + 24w \times (16a - d))$$

$$= w_o + \frac{3w}{2a}\ (16a - d). \quad \text{——} \ ①$$

$R = 9w$ ஆன குறைந்தபட்சப் பெறுமானம் $x = 16a$ ஆக இருக்கும்போது கிடைக்கின்றது.

$$9w = \frac{1}{16a}\ (w_o \times (16a - 16a) + 24w \times (16a - d))$$

$$= \frac{3w}{2a}\ (16a - d).$$

$$\Rightarrow 16a - d = 3 \times 2a.$$

$$\Rightarrow d = 10a.$$

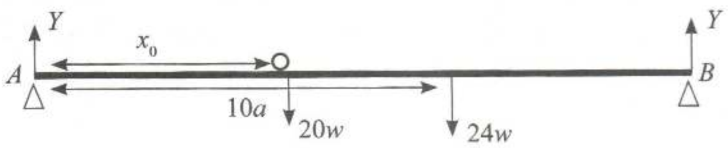
எனவே கோலின் திணிவு மையம் முனை A இலிருந்து $10a$ தூரத்தில் உள்ளது.

சமன்பாடு ① இலிருந்து $w_o + \frac{3w}{2a}\ (16a - 10a)\ = 29w.$

$\Rightarrow w_o = 29w - \frac{3w}{2a} \times 6a.$

$\Rightarrow w_o = 20w.$

இச்சுமையைக் கோலின் மீது ஒரு குறித்த தானத்தில் வைக்கும்போது A, B ஆகிய ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமெனக் கொள்வோம்.



இப்போது கோல் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்துத் திசையில் துணிக்கும்போது

$Y + Y = 20w + 24w.$

$\Rightarrow Y = 22w.$

கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி A பற்றி இடஞ்சுழித் திசையில் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$Y \times 16a = 20w \times x_o + 24w \times 10a$$

$$\Rightarrow 22w \times 16a = 20w \times x_o + 24w \times 10a.$$

$$\Rightarrow 20w \times x_o = 352wa - 240wa$$

$$= 112wa.$$

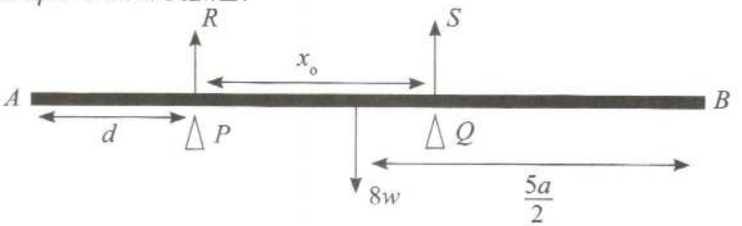
$$\Rightarrow x_o = \frac{112}{20}\,a = \frac{28}{5}\,a.$$

$$= 5\,\frac{3}{5}\,a.$$

இச்சுமையைக் கோல் மீது முனை A இலிருந்து $5\ \frac{3}{5}\ a$ தூரத்தில் வைக்கும்போது ஆதாரங்களின் மீது உள்ள மறுதாக்கங்கள் பருமனில் சமமாகும்.

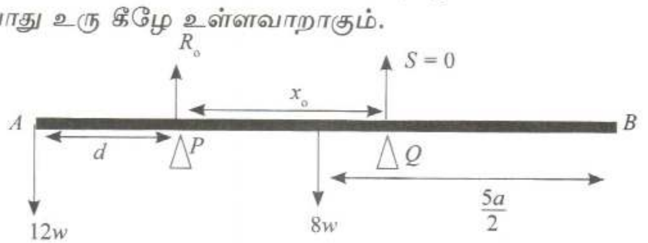
23. $5a$ நீளமும் $8w$ நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB கிடையாக இருக்குமாறு இரு ஒப்பமான ஆதாரங்களின் மீது நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாதவாறு A, B ஆகிய முனைகளில் வேறுவேறாகத் தொங்கவிடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறைகள் முறையே $12w$, $2w$ ஆகும். A இலிருந்து கிட்டிய ஆதாரத்திற்கு உள்ள தூரத்தையும் இரு ஆதாரங்களுக்குமிடையே உள்ள இடைத்தூரத்தையும் துணிக.

முதலில் கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு ஓர் உருவை வரைவோம். முனை A இலிருந்து கிட்டிய ஆதாரம் P ஆனது d தூரத்தில் இருக்குமாறும் ஆதாரங்களுக்கிடையே உள்ள இடைத்தூரம் x_o எனவும் கொள்வோம்.



கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாதவாறு முனை A இல் தொங்கவிடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறை $12w$ ஆகையால் இப்போது அந்நிறையை இணைத்தபோது கோலிற்கும் ஆதாரம் Q இற்குமிடையே உள்ள தொடுகை புறக்கணிக்கத்தக்க அளவினதாகும்.

அப்போது உரு கீழே உள்ளவாறாகும்.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி P பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$12w \times d = 8w \times \left(\frac{5a}{2} - d\right).$$

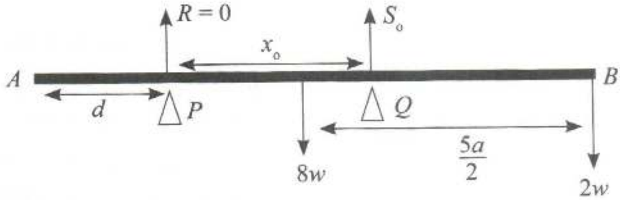
$$\Rightarrow 3d = 2\left(\frac{5a}{2} - d\right).$$

$$\Rightarrow 3d = 5a - 2d.$$

$$\Rightarrow d = a.$$

ஆகவே முனை A இலிருந்து கிட்டிய ஆதாரத்திற்கு உள்ள தூரம் a ஆகும்.

இப்போது கோலின் நாப்பம் தகர்வுறாமல் முனை B இல் தொங்க விடத்தக்க உயர்ந்தபட்ச நிறை $2w$ ஆகையால் இப்போது அந் நிறையை இணைக்கும்போது கோலுக்கும் ஆதாரம் P இற்கு மிடையே உள்ள தொடுகை புறக்கணிக்கத்தக்க அளவினதாகும். அப்போது கோல் மீது உள்ள விசைகள் பின்வருமாறாகும்.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதிப் புள்ளி Q பற்றி இடஞ்சுழியாகத் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$8w \times \left(d + x_0 - \frac{5a}{2}\right) = 2w \times (5a - d - x_0).$$

$d = a$ ஆகையால் $\Rightarrow 4\left(a + x_0 - \frac{5a}{2}\right) = 5a - a - x_0.$

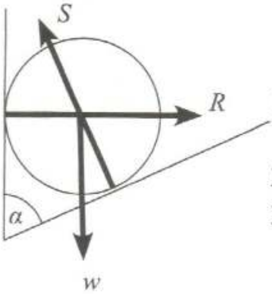
$$\Rightarrow 4a + 4x_0 - 10a = 4a - x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = 2a.$$

ஆகவே ஆதாரங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் $2a$ ஆகும்.

24. w நிறையுள்ள ஒரு சீரான திண்மக் கோளம் ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துத் தளத்திற்கும் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் α ஐ ஆக்கும் ஓர் ஒப்பமான தளத்திற்குமிடையே நாப்பத்தில் உள்ளது. ஒவ்வொரு தளத்தினாலும் கோளத்தின் மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுக. அவை



1. நிலைக்குத்துத் தளத்தின் காரணமாக உள்ள மறுதாக்கம்
2. சாய்தளத்தின் காரணமாக உள்ள மறுதாக்கம்
3. கோளத்தின் நிறை

என்னும் மூன்று விசைகள் மாத்திரம் ஆகும். தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால் இவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. மேலும் அப்புள்ளி கோளத்தின் மையமும் ஆகும். நிறையின் தாக்கக் கோடு நிலைக்குத்தானது ஆகையால் சாய்தளத்திற்கும் அத்தாக்கக் கோட்டிற்குமிடையே உள்ள கோணமும் α ஆகும். எனவே மறுதாக்கம் கிடையுடன் α இற் சாய்ந்து தாக்குகின்றது.

கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளை நிலைக்குத்தாக $\uparrow$ துணிப்போம்.

$$S \sin \alpha = w.$$

$$\Rightarrow S = \frac{w}{\sin \alpha}.$$

கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கிடையாக $\rightarrow$ துணிப்போம்.

$$R = S \cos \alpha.$$

$$\Rightarrow R = \frac{w}{\sin \alpha} \cos \alpha.$$

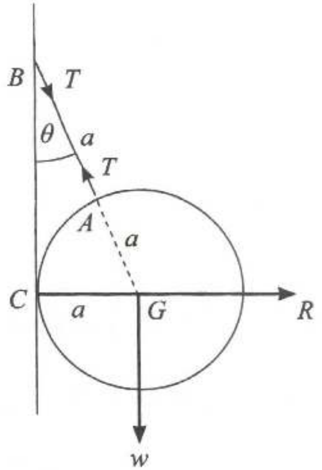
$$\therefore R = w \cot \alpha.$$

25. w நிறையும் a ஆரையும் உள்ள ஒரு சீரான திண்மக் கோளத்தின் மேற்பரப்பு மீது ஒரு நுனி இணைக்கப்பட்ட a நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் மற்றைய நுனி ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோளம் சுவருடன் தொடுகையுற்று நாப்பத்தில் இருக்குமெனின்,

(i) இழை கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தையும்

(ii) இழையின் இழுவையையும் சுவர் மீது உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கத்தையும்

காண்க.



கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுக. அவை
1. சுவர் காரணமாக உள்ள மறுதாக்கம்
2. இழையின் இழுவை
3. கோளத்தின் நிறை

என்னும் மூன்று விசைகள் மாத்திரம் ஆகும். ஆகவே அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. மேலும் அப்புள்ளி கோளத்தின் மையமும் ஆகும்.

மேலும் இழையின் இரு நுனிகளும் A, B எனக் கொள்வோம். அப்போது கோடு AB ஆனது கோளத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்கின்றது. இழை கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

(i) செங்கோண முக்கோணி BCG இலிருந்து

$$\sin\theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

இழை கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் $\frac{\pi}{6}$ ஆகும்.

(ii) கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் காண்பதற்கு லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்போம்.

$$\frac{T}{\sin 90} = \frac{R}{\sin(180-\theta)} = \frac{w}{\sin(90+\theta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T}{1} = \frac{R}{\sin\theta} = \frac{w}{\cos\theta}.$$

$$\Rightarrow T = \frac{w}{\cos\theta} \;,\; R = w\tan\theta.$$

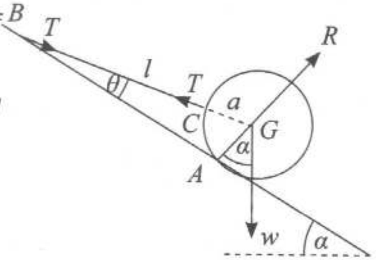
இங்கு $\theta = \frac{\pi}{6}$.

எனவே $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ஆகவே இழையின் இழுவை $T = \frac{2}{\sqrt{3}}w = \frac{2\sqrt{3}}{3}w$ ஆக இருக்கும்

அதே வேளை சுவர் மீது உள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம் $R = \frac{1}{\sqrt{3}}w$
$= \frac{\sqrt{3}}{3}w.$

26. a ஆரையும் w நிறையும் உள்ள ஒரு கோளம் அதன் மேற்பரப்பு மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒரு நுனியும் ஓர் ஒப்பமான சாய்தளத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் மற்றைய நுனியும் இணைக்கப்பட்ட l நீளமுள்ள ஓர் இழையின் மூலம் அச்சாய் தளத்தின் மீது பேணப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு α எனின், இழையின் இழுவை $\frac{w(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ எனக் காட்டுக.



கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுக. அவை

1. தளத்தின் காரணமாக உள்ள மறு தாக்கம்
2. இழையின் இழுவை
3. கோளத்தின் நிறை

என்னும் மூன்று விசைகள் மாத்திரம் ஆகும்.

தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கின்றமையால் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. மேலும் அப்புள்ளி கோளத்தின் மையமும் ஆகும்.

மேலும் இழையின் இரு நுனிகளும் B, C எனக் கொள்வோம். அப்போது கோடு BC ஆனது கோளத்தின் மையம் G இனூடாகச் செல்கின்றது. A ஆனது தளமும் கோளமும் தொடுகையுறும் புள்ளியெனின், ABG ஆனது செங்கோண முக்கோணியாகும். மேலும் AG ஆனது கோளத்தின் ஆரையாகும்.

இழைக்கும் தளத்திற்குமிடையே உள்ள கோணம் θ எனக் கொள்வோம். செங்கோண முக்கோணி ABG இலிருந்து

$$\sin\ \theta = \frac{AG}{BG} = \frac{a}{l+a}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

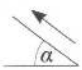
$$= 1 - \left(\frac{a}{l+a}\right)^2$$

$$= \frac{(l+a)^2 - a^2}{(l+a)^2}$$

$$= \frac{l^2 + 2al}{(l+a)^2}\ .$$

ஆகவே $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{l^2+2al}}{l+a}$ ஆகும்.

சாய்தளத்தின் வழியே கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைத் துணிக்கும்போது



$$T\cos\theta = w\sin\alpha.$$

$$\Rightarrow T = w\,\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}\,.$$

$$\Rightarrow T = \frac{w\,(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}\ .$$

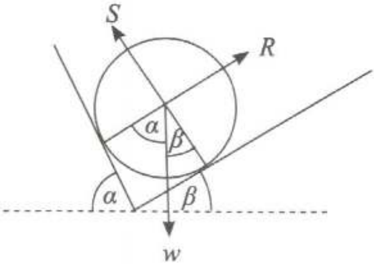
27. கிடையுடன் α , β கோணங்களில் சாய்ந்துள்ள இரு ஒப்பமான தளங்களின் மீது சீரான நிறையுள்ள ஒரு கோளம் நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணம் α இற் சாய்ந்துள்ள தளத்தின் மூலம் பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தின் பருமன் கோளத்தின் நிறையின் அரைவாசியெனின், $(2 - \cos\alpha)\tan\beta = \sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுக.

அவை

1. சாய்வு α ஐக் கொண்ட தளத்திற்கும் கோளத்திற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கம்
2. சாய்வு β ஐக் கொண்ட தளத்திற்கும் கோளத்திற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கம்
3. கோளத்தின் நிறை

என்னும் மூன்று விசைகள் மாத்திரம் ஆகும்.



கோளம் நாப்பத்தில் இருப்பதனால் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. மேலும் அப்புள்ளி கோளத்தின் மையமும் ஆகும்.

கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்போம்.

$$\frac{R}{\sin(180-\beta)} = \frac{S}{\sin(180-\alpha)} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sin(180-\beta)} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sin\beta} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

கோணம் α இற் சாய்ந்த தளத்தின் மறுதாக்கத்தின் பருமன் கோளத்தின் நிறையின் அரைவாசியெனின் $R = \frac{w}{2}$ ஆகையால் மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$\frac{1}{\sin\beta} \times \frac{w}{2} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\beta.$$

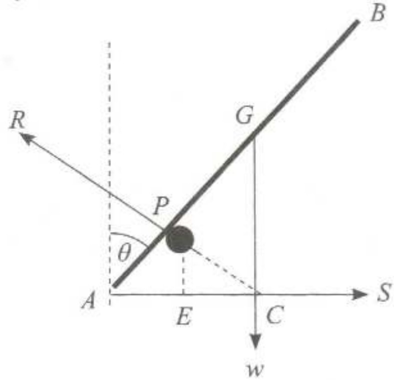
$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 2\sin\beta.$

$$\Rightarrow (2-\cos\alpha)\ \sin\beta = \sin\alpha\cos\beta.$$

$$\Rightarrow (2-\cos\alpha)\ \tan\beta = \sin\alpha.$$

28. $2a$ நீளமுள்ள சீரான நிறையுள்ள ஒரு கோல் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து கிடையாக h தூரத்தில் உள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையைத் தொட்டுக்கொண்டு சுவருடன் பொருந்தியிருக்கின்றது. நாப்பத்தில் கோலின் நிலைக்குத்துடனான சாய்வு θ எனின், $a\sin^3\theta = h$ எனக் காட்டுக.

இதற்காக முதலில் ஓர் உருவை வரைவோம்.



கோல் மீதுள்ள விசைகள்

- கோலின் நிறை
- சுவர் காரணமாக உள்ள மறுதாக்கம்(கிடை)
- முளையின் மறுதாக்கம் (கோலிற்குச் செங்குத்தாக)

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.

தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் (C) சந்திக்கின்றன. விசைத் துணிப்பு, லாமியின் தேற்றம் ஆகிய முறைகளைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் இதனைத் தீர்க்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை கேத்திரகணிதத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கும் விதம் கீழே எடுத்துரைக்கப்பட்டுள்ளது.

சுவரினதும் நிறையினதும் தாக்கக் கோடுகள் சமாந்தரம் $\Rightarrow$ கோணம் AGC ஆனது θ ஆகும்.

$\Rightarrow$ கோணம் PCG உம் $90^\circ - \theta$ ஆகும். $\Rightarrow$ கோணம் ACP ஆனது θ ஆகும். மேலும் கோணம் APE உம் θ ஆகும்.

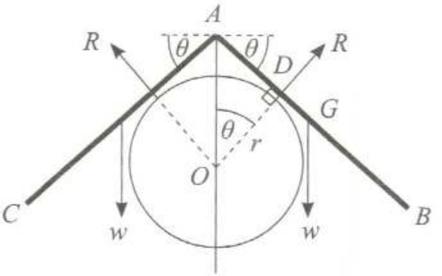
முக்கோணி ACG இலிருந்து $\dfrac{AC}{AG} = \sin\theta.$

முக்கோணி ACP இலிருந்து $\dfrac{AP}{AC} = \sin\theta.$

முக்கோணி AEP இலிருந்து $\frac{AE}{AP} = \sin\theta$. இம்மூன்று சமன்பாடுகளினதும் பெருக்கத்திலிருந்து $\frac{AE}{AG} = \sin^3\theta$.

இங்கு AE ஆனது சுவரிலிருந்து முளைக்கு உள்ள தூரம் ஆகையாலும் $AE = h$ ஆகையாலும் $h = a\sin^3\theta$.

29. w நிறையும் $2a$ நீளமும் உள்ள இரு சீரான கோல்கள் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு, நிலையாக உள்ள ஆரை r ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான கோளத்தின் மீது சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு கோலும் கிடையுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குமெனின், $r\tan\theta = a\cos^2\theta$ எனக் காட்டுக.



AB, AC ஆகிய இரு கோல்களும் A இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அப்போது A இல் ஒவ்வொரு கோல் காரணமாகவும் மற்றையதன் மீது விசைகள் தாக்கிக் கொண்டு நாப்பத்தில் இருக்கும் அதே வேளை இத்தகைய மூட்டுகள் பற்றிப் பின்னர் மேலும் விவரமாகக் கற்கப்படும். அவை உள் விசைகள் எனப்படும் அதே வேளை கோல்கள் மீது தாக்கும் வெளி விசைகள் மாத்திரம் உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

கோளத்தின் மையம் O ஆகும். செங்கோண முக்கோணி OAD இலிருந்து

$$\tan\theta = \frac{AD}{OD} \Rightarrow AD = OD\tan\theta = r\tan\theta.$$

கோல்கள் மீது தாக்கும் விசைகளை $\uparrow$ துணிப்பதன் மூலம்
$R\cos\theta + R\cos\theta = w + w.$

$$\Rightarrow R = w\sec\theta.$$

கோல் AB மீது மாத்திரம் தாக்கும் விசைகளுக்குப் புள்ளி A பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$R \times AD = w \times AG\cos\theta.$$

இங்கு $AD = r\tan\theta$, $AG = a$ ஆகையால்
$R \times r\tan\theta = w \times a\cos\theta$.

மேலும் $R = w\sec\theta$ ஐ இடும்போது $w\sec\theta \times r\tan\theta = w \times a\cos\theta$.

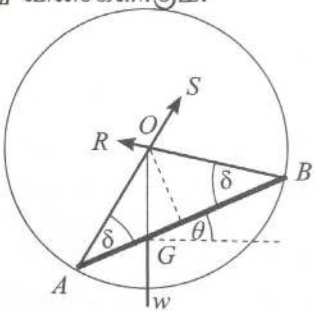
$$\Rightarrow \sec\theta \times r\tan\theta = a\cos\theta.$$

$$\Rightarrow r\tan\theta = a\cos^2\theta.$$

30. உள் மேற்பரப்பு ஒப்பமான ஒரு கோளத்தினுள்ளே திணிவு மையத்தினால் $a : b$ விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும் ஒரு கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. கோல் கோளத்தின் மையத்தில் கோணம் 2α ஐ எதிரமைக்கும் அதே வேளை கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருக்குமெனின், $(b + a)\tan\theta = (b - a)\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் விசைகள் இருக்கும் விதம் உருவில் உள்ளவாறாகும். கோல் மீது உள்ள விசைகள்
- கோலின் நிறை
- A இல் உள்ள மறுதாக்கம்
- B இல் உள்ள மறுதாக்கம்

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.



தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. மேலும் இவ்விரு மறுதாக்கங்களும் கோளத்தின் மையம் O இனூடாக உள்ளன. கோல் கோளத்தின் மையத்தில் கோணம் 2α ஐ எதிரமைக்கின்றமையால் கோணம் AOB ஆனது 2α ஆகும். மேலும் OA, OB ஆகியன சமம் (ஆரை) ஆகையால் $2\alpha + 2\delta = \pi$ (ஒரு முக்கோணியின் கோணங்கள் ஆகையால்) $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ ஆகும்.

கோல் கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருக்கின்றமையால் கோணம் OGB ஆனது $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ ஆகும்.

முக்கோணி OAB இற்கு cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$(AG + GB) \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = GB \cot \delta - AG \cot \delta.$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{GB}{AG}\right) \tan \theta = \left(\frac{GB}{AG} - 1\right) \cot \delta.$$

மேலும் கோல் திணிவு மையத்தினால் $a : b$ விகிதத்திற் பிரிக்கப் படுகின்றமையால்

$$\frac{GB}{AG} = \frac{b}{a}.$$

இதனை மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right) \tan \theta = \left(\frac{b}{a} - 1\right) \cot \delta.$$

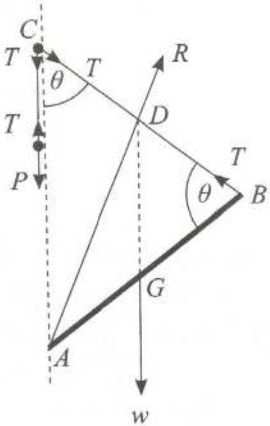
$$\Rightarrow \left(1 + \frac{b}{a}\right) \tan \theta = \left(\frac{b}{a} - 1\right) \cot \delta.$$

$$\Rightarrow (a + b) \tan \theta = (b - a) \cot \delta.$$

மேலும் $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ஆகையால் அச்சமன்பாடு

$$(a + b) \tan \theta = (b - a) \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$
$$\Rightarrow (a + b) \tan \theta = (b - a) \tan \alpha.$$

31. w நிறையுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழலத்தக்கதாக முனை A இல் சுழலையிடப்பட்டு, முனை B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான இழை A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள ஒரு முளை C இற்கு மேலாகச் செல்லும் இழையின் சுயாதீன நுனியில் ஒரு சுமை P இணைக்கப்பட்டு, கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. இங்கு $AB = AC$ ஆகும். $P = w \cos A\hat{C}B$ எனக் காட்டி, A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



இங்கு $AB = AC$ ஆகையால் கோணம் ACB உம் கோணம் ABC உம் சமம். அக்கோணம் θ எனக் கொள்வோம். இப்போது கோணம் BAC ஆனது $\pi - 2\theta$ ஆகும்.

சுமையின் நாப்பத்தைக் கருதும்போது $T = P$.

சுழலையிடப்பட்டுள்ள முனை A இல் மறுதாக்கத்தினதும் கோலின் நிறையினதும் தாக்கக் கோடுகளும் இழையும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்கு இடஞ்சுழித் திசையில் புள்ளி A பற்றித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$T \sin\theta \times AC = w \times AG \sin(\pi - 2\theta)$$
$$= w \times AG \sin 2\theta.$$
$$= w \times AG \times 2 \sin\theta \cos\theta.$$

$$\Rightarrow P \times AC = 2w \times AG \times \cos\theta. \quad \text{①}$$

இங்கு B இல் இழையின் இழுவை

$$\begin{array}{cc} & \uparrow T\cos\theta \\ T\sin\theta \leftarrow & \end{array}$$

எனக் கூறுகளைக் கருதி அது C இல் தாக்குவதாகக் கருதுவதன் மூலம் திருப்பங்களை எடுத்தல் எளிதாகும். கோல் சீரானதாகையால் $AB = 2.\,AG$ ஆகும்.

எனவே சமன்பாடு ① $\Rightarrow$ $P \times AC = w \times AB \times \cos\theta$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $AB = AC$ ஆகையால் $P = w \times \cos\theta$ ஆகும்.

அதாவது, $P = w \cos A\hat{C}B$.

A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறும் நிலைக்குத்துக் கூறும் முறையே X, Y எனக் கொள்வோம். அப்போது
$X = P \sin \theta$, $Y = w - P \cos \theta = w - w \cos \theta \times \cos \theta = w \sin^2\theta$ ஆகும்.

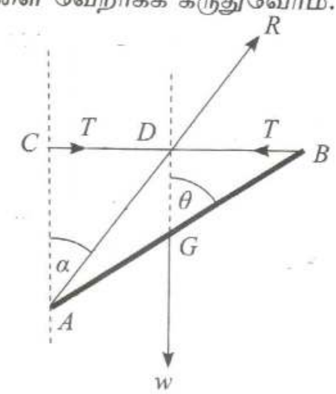
இங்கு $\theta = A\hat{C}B$.

32. A இனூடாக உள்ள ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழலத்தக்கவாறு முனை A இல் சுழலையிடப்பட்ட l நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை B உம் முனை A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள ஒரு புள்ளி C உம் a நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால், தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்கும் போது இழை கிடையாக இருக்குமாறு, இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A இல் உள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருப்பின், $2(l^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \tan \alpha = a$ எனக் காட்டுக.

இங்கு உருவில் உள்ளவாறு கோல் மீது தாக்கும் விசைகளை முன் வைக்கலாம். அவை

- ❖ கோலின் நிறை
- ❖ A இல் உள்ள மறுதாக்கம்
- ❖ இழையின் இழுவை

என்னும் மூன்று விசைகளாகும். அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. அப்புள்ளி D எனக் கொள்வோம். கோல் மீது தாக்கும் விசைகளை வேறாகக் கருதுவோம்.

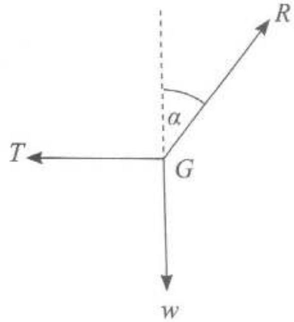


லாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\frac{T}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{\sin 90} = \frac{w}{\sin(90+\alpha)}.$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sin\alpha} = \frac{w}{\cos\alpha}.$$

$$\Rightarrow T = w\tan\alpha.$$

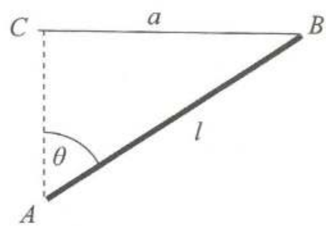


கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்குப் புள்ளி A பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது $T \times AC = w \times AG \sin\theta.$ இங்கு θ ஆனது கோல் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கொண்டுள்ள சாய்வாகும். அதனைக் காண்பதற்கு முக்கோணி ABC ஐக் கருதுவோம்.

செங்கோண முக்கோணி ABC இல்

$AC = l^2 - a^2$ ஆகையால்

$AC = \sqrt{l^2 - a^2}$, $\sin\theta = \frac{a}{l}$ ஆகும்.

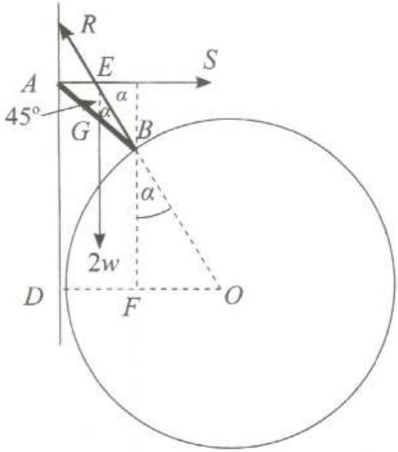


திருப்பச் சமன்பாட்டில் இதனைப் பிரதியிடும்போது

$$w\tan\alpha \times \sqrt{l^2 - a^2} = w \times \frac{l}{2}\;\frac{a}{l}$$

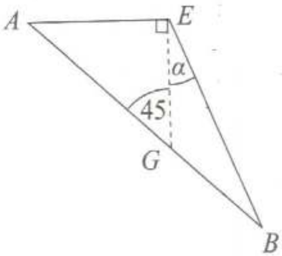
$$\Rightarrow 2\,(l^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\tan\alpha = a.$$

33. r ஆரையுள்ள ஓர் உருளை அதன் ஒரு பிறப்பாக்கி ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையுற்றிருக்க நிலையாக உள்ளது. நிலைக்குத்துடன் 45° இற் சாய்ந்த $2l$ நீளமும் $2w$ நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான பலகை சுவருடன் தொடுகையுற்று உருளை மீது நாப்பத்தில் உள்ளது. உராய்வு விசை இல்லையெனின், $10\sqrt{l} = (\sqrt{5} - 1)\, r$ எனக் காட்டி, உருளை மீதும் சுவர் மீதும் உள்ள மறுதாக்கங்கள் முறையே $\sqrt{5}\, w$, w எனக் காட்டுக.



பலகை மீது தாக்கும் விசைகளை உருவில் உள்ளவாறு முன்வைக் கலாம். இங்கும் மூன்று சமாந்தரமற்ற ஒருதள விசைகள் நாப்பத்தில் இருப்பதைக் காணலாம். ஆகவே அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. அப்புள்ளி E ஆகும். உருளை காரணமாகப் பலகை மீது உள்ள மறுதாக்கம் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்கின்றதெனக் கொள்வோம்.

முக்கோணி ABE ஐக் கருதுக.



cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$(AG + GB)\cot 45 = GB\cot\alpha - AG\cot 90.$

சீரான கோல் ஆகையால் $AG = BG$.

$\Rightarrow (AG + AG)\times 1 = AG\cot\alpha - AG\times 0.$

இரு பக்கங்களையும் AG இனால் வகுக்கும்போது $2 = \cot\alpha$.

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

கோல் AB இன் கிடை எறியம் $DF = 2l\cos 45$

$$= \sqrt{2}\,l.$$

$$\Rightarrow OF = r - \sqrt{2}\,l.$$

முக்கோணி OBF இல் $\sin\alpha = \dfrac{OF}{OB}$

$$= \frac{r - \sqrt{2}\,l}{r}.$$

ஆகவே $\dfrac{r - \sqrt{2}\,l}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\Rightarrow \sqrt{5}\; r - \sqrt{10}l = r.$$

$$\therefore \sqrt{10}l = (\sqrt{5} - 1)\, r.$$

பலகை மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித் துணிக்கும்போது

$$R\cos\alpha = 2w.$$

$$\Rightarrow R \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2w.$$

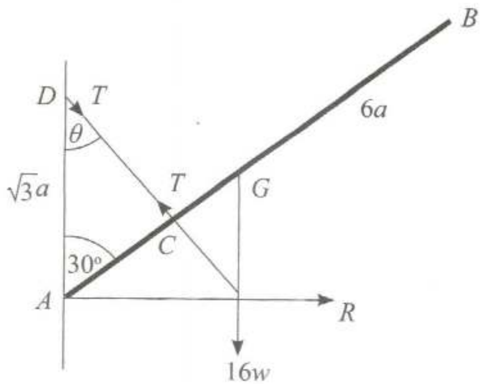
$$\therefore R = \sqrt{5}\,w$$

பலகை மீது உள்ள விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

$$S = R\sin\alpha.$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{5}\,w \times \frac{1}{\sqrt{5}} = w.$$

34. $12a$ நீளமும் $16w$ நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையுற்று, கோலில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C உடனும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக $\sqrt{3}\,a$ மேலே இருக்கும் ஒரு புள்ளி D உடனும் இணைத்த ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. கோணம் DAB ஆனது 30° எனின், கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் இழையின் இழுவையையும் புள்ளி C இன் அமைவையும் காண்க.



சுவருக்கும் இழைக்குமிடையே உள்ள கோணம் θ எனக் கொள்வோம். புள்ளி D பற்றிக் கோல் மீது உள்ள விசைகளுக்கு இடஞ்சுழித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$R \times AD = 16w \times AG \sin 30.$$

$$\Rightarrow R \times \sqrt{3}\,a = 16w \times 6a \times \frac{1}{2}.$$

$$\therefore R = 16\sqrt{3}\,w.$$

ஆகவே கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கம் $16\sqrt{3}\ w$ ஆகும்.

கோல் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித் துணிக்கும்போது

$$T\cos\theta = 16w. \quad \text{——} \ ①$$

கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது $T\sin\theta = R.$

$$\text{அதாவது, } T\sin\theta = 16\sqrt{3}\ w. \quad \text{——} \ ②$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளை வகுக்கும்போது $\tan\theta = \sqrt{3}$.

$\Rightarrow \theta = 60^\circ.$

சமன்பாடு (2) இலிருந்து $T \times \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}\ w.$

$$\Rightarrow T = 32w.$$

இதற்கேற்ப இழையின் இழுவை $32w$ ஆகும்.

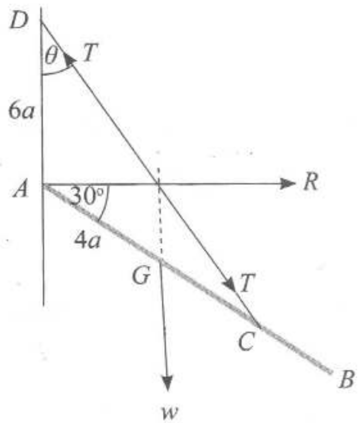
மேலும் ACD ஒரு செங்கோண முக்கோணி என்பதை இனங்காணும் போது

$$\frac{AC}{\sqrt{3}a} = \cos 30. \Rightarrow AC = \sqrt{3}\, a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\, a.$$

எனவே புள்ளி C ஆனது முனை A இலிருந்து $\frac{3}{2}\, a$ தூரத்தில் இருக்கின்றது.

35. $8a$ நீளமும் w நிறையும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருடன் தொடுகையுற்று ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே கோல், அதில் உள்ள ஒரு புள்ளி C உடனும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக $6a$ மேலே சுவரில் உள்ள ஒரு புள்ளி D உடனும் இணைக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால், நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணம் DAB ஆனது 120^o எனின், கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் இழையின் இழுவையையும் புள்ளி C இன் அமைவையும் காண்க.



சுவருக்கும் இழைக்குமிடையே உள்ள கோணம் θ எனக் கொள்வோம். புள்ளி D பற்றிக் கோல் மீது உள்ள விசைகளுக்கு இடஞ்சுழித் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

$$R \times AD = w \times AG \cos 30.$$

$$\Rightarrow R \times 6a = w \times 4a \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{3}}{3}\, w.$$

ஆகவே கோலுக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கம் $\frac{\sqrt{3}}{3}w$ ஆகும்.

கோல் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித் துணிக்கும்போது

$$T\cos\theta = w. \text{ —— ①}$$

கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது $T\sin\theta = R$.

அதாவது $T\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}w$. —— ②

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளை வகுக்கும்போது $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \theta = 30^{\circ}$.

சமன்பாடு ② இலிருந்து $T \times \sin 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}w$.

$\Rightarrow T = \frac{2\sqrt{3}}{3}w$.

இதற்கேற்ப இழையின் இழுவை $\frac{2\sqrt{3}}{3}w$ ஆகும்.

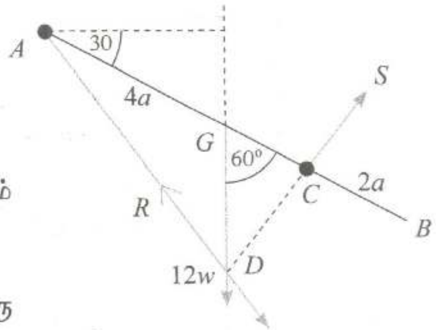
மேலும் ACD ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி என்பதை இனங்காணும் போது

$$AC = AD.$$
$$\Rightarrow AC = 6a.$$

எனவே புள்ளி C ஆனது முனை A இலிருந்து $6a$ தூரத்தில் இருக்கின்றது.

36. $12w$ நிறையும் $8a$ நீளமும் உள்ள ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை B ஆனது முனை A இற்குக் கீழே இருக்குமாறு முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் முனை B இலிருந்து $2a$ தூரத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளி C இல் உள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையுடன் தொடுகையுற்று ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு 60° ஆக இருக்குமாறு கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. முளைக்கும் கோலுக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம்.



- ❖ கோலின் நிறை
- ❖ A இல் உள்ள மறுதாக்கம்
- ❖ C இல் உள்ள மறுதாக்கம்

ஆகியன அம்மூன்று விசைகளும் ஆகும்.

அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன.

அப்புள்ளி D எனக் கொள்வோம்.

மேலும் C இல் உள்ள மறுதாக்கம் கோலிற்குச் செங்குத்தாகும். புள்ளி A பற்றிக் கோல் மீது தாக்கும் விசைகளுக்காகத் திருப்பங்களைக் கருதும்போது

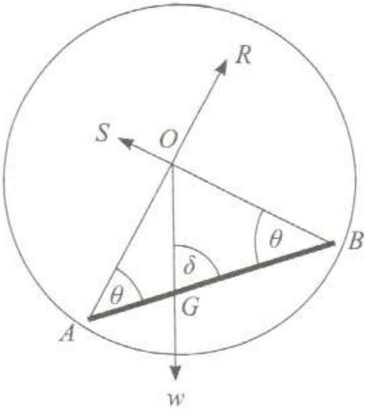
$$S \times AC = 12w \times AG \cos 30.$$

$$\Rightarrow S \times 6a = 12w \times 4a \times \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow S = 4\sqrt{3}\, w\ .$$

முளைக்கும் கோலுக்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கம் திசையில் கோலுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை பருமனில் $4\sqrt{3}\, w$ ஆகும்.

37. திணிவுகள் மையத்தினால் $1:2$ விகிதத்திற்குப் பிரிக்கப்படும் ஒரு சீரற்ற கோல் ஒரு கோளத்தினுள்ளே வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் கோளத்தின் மையத்தில் கோணம் 120° ஐ எதிரமைக்கின்றது. உராய்வு விசைகள் இல்லாவிட்டால், மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோல் 60° கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக.



கோலின் நாப்பத்தைக் கருதுவோம்.

கோலின் நிறை, A இல் உள்ள மறுதாக்கம், B இல் உள்ள மறு தாக்கம் என்னும் மூன்று விசைகளின் கீழ் கோல் நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் கோளத்தின் மையம் O இனூடாக உள்ளன. கோல் மேன்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் δ எனக் கொள்வோம்.

கோல் கோளத்தின் மையத்தில் 120° கோணத்தை எதிரமைக்கின்றமையால் முக்கோணி AOB இல் $\theta = 30^\circ$ ஆகும்.

மேலும் $AG : GB$ ஆனது $1 : 2$ இற்குச் சமம் ஆகையால் $\dfrac{AG}{GB} = \dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

முக்கோணி OAB இற்கு cot சூத்திரத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$(AG + GB)\cot\delta = BG\cot\theta - AG\cot\theta.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AG}{GB} + 1\right)\cot\delta = \left(1 - \frac{AG}{GB}\right)\cot\theta.$$

$\dfrac{AG}{GB} = \dfrac{1}{2}$, $\theta = 30^\circ$ ஆகியவற்றை மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + 1\right)\cot\delta = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cot 30.$$

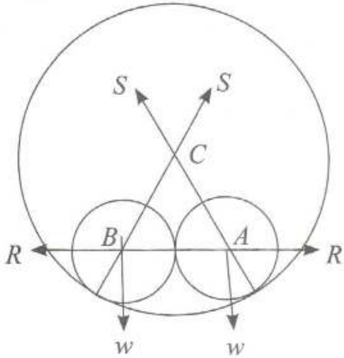
$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cot\delta = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \tan\delta = \sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \delta = 60^\circ.$$

இதற்கேற்ப மேன்முக நிலைக்குத்துடன் கோல் ஆக்கும் கோணம் 60° ஆகும்.

38. $3a$ ஆரையுள்ள ஓர் ஒப்பமான கோள மேற்பரப்பினுள்ளே a ஆரையும் w நிறையும் உள்ள இரு சீரான சம கோளங்கள் நாப்பத்தில் உள்ளன. கோள மேற்பரப்புக்கும் ஒரு சிறிய கோளத்திற்குமிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் சிறிய கோளங்களுக்கிடையே உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.



ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி என்பதை இனங்காண்க. இரு சிறிய கோளங்களின் மீது உள்ள விசைகளை நிலைக்குத்தாகத் துணிக்கும்போது

$$\uparrow 2S \times \sin 60 = 2w.$$

$$\Rightarrow 2S \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2w.$$

$$\Rightarrow S = \frac{2\sqrt{3}}{3} w.$$

மையம் A ஆகவுள்ள கோளத்தின் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும்போது

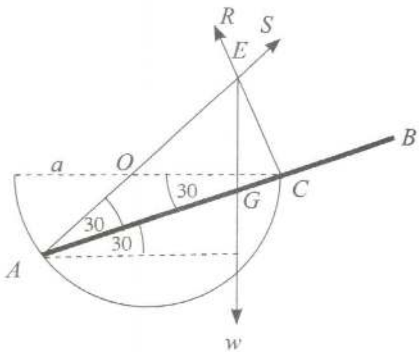
$$R = S \cos 60$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} w \times \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} w.$$

39. a ஆரையுள்ள ஓர் ஒப்பமான அரைக்கோளப் பாத்திரம் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சீரான கோல் ACB இன் முனை A பாத்திரத்தினுள்ளே வளைபரப்புடன் தொடுகையுற்றும் முனை B பாத்திரத்தின் விளிம்பிலிருந்து வெளியே நீட்டிக்கொண்டும் புள்ளி C பாத்திரத்தின் விளிம்புடன் தொடுகையுற்றும் இருக்குமாறு கோல் நாப்பத்தில் உள்ளது. கோலின் கிடையுடனான சாய்வு 30° எனின், கோலின் நீளம் $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ எனக் காட்டுக.

கோலின் நிறை w எனின், A, C ஆகிய புள்ளிகளில் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.



C இல் உள்ள மறுதாக்கம் கோலுக்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே ACE ஒரு செங்கோண முக்கோணி. அதன் செங்கோணம் C ஆகும். OAC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை OA, OC ஆகியன கோளத்தின் ஆரைகள் ஆகையால் OAC, ACO ஆகிய கோணங்கள் சமமும் 30° வீதமும் ஆகும்.

எனவே விட்டம் AOE ஆனது கிடையுடன் 60° இல் சாய்ந்துள்ளது.

விட்டம் AOE இனதும் கோட்டுத் துண்டம் AG இனதும் கிடை எறியங்கள் சமம் ஆகையால் $AG\cos 30 = AE\cos 60$.

$$\Rightarrow AG \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a \times \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow AG = 2\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

ஆகவே கோலின் நீளம் $2.AG = 4\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,a.$

கோல் வழியே கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைத் துணிக்கும்போது

$S \cos 30 = w \cos 60.$

$\Rightarrow S \times \frac{\sqrt{3}}{2} = w \times \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{3}\,w.$

கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கிடைத் திசையில் துணிக்கும் போது

$R \cos 60 = S \cos 60.$

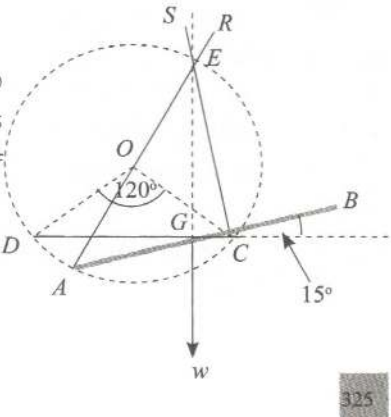
$\Rightarrow R = S.$

A , C ஆகிய புள்ளிகளில் உள்ள மறுதாக்கங்களின் பருமன்கள் $\frac{\sqrt{3}}{3}\,w$ வீதம் இருக்கும் அதே வேளை அவை முறையே கோளத்தின் மையம் O இனூடாகவும் கோலிற்குச் செங்குத்தாகவும் தாக்குகின்றன.

40. உள் மேற்பரப்பு ஒப்பமாக உள்ளதும் a ஆரை உள்ளதுமான ஒரு கோளத்திலிருந்து வெட்டப்பட்டதும் மையத்தில் 120° ஐ எதிரமைக்குமாறு உள்ளதுமான பகுதி அதன் விளிம்பு கிடையாகவும் அது மேன்முகமாகவும் இருக்குமாறு நிலையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு முனை இம்மேற்பரப்புடன் தொடுகையுற்று எஞ்சியுள்ள முனை வெளியே நீட்டிக் கொண்டு இருக்குமாறு கிடையுடன் 15° சாய்வுடன் நாப்பத்தில் இருக்குமெனின், கோலின் நீளம் $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\,a$ எனக் காட்டுக.

இங்கு கோலின் நாப்பம் பற்றிய ஓர் உருவைப் பயன்படுத்திக் கருதுவோம்.

கோல் AB நாப்பத்தில் இருத்தலை உருவில் உள்ளவாறு முன்வைக்கலாம். கோல் மீது தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோம். அவை

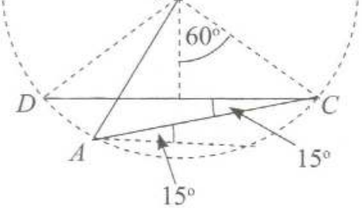


- கோலின் நிறை
- A இல் உள்ள மறுதாக்கம்
- C இல் உள்ள மறுதாக்கம்

என்னும் மூன்று விசைகளாகும்.

அதற்கேற்ப இம்மூன்று விசைகளினதும் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. அப்புள்ளி E எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

கோலின் நிறை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கியும் A இல் உள்ள மறுதாக்கம் கோளத்தின் மையம் O இனூடாகவும் தாக்கும் அதே வேளை கோளத்தின் விளிம்பும் கோலும் தொடுகையுறும் C இல் உள்ள மறுதாக்கம் கோலிற்குச் செங்குத்தானது. ஆகவே AE ஆனது கோளத்தின் குறுக்கு வெட்டாகிய வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாக இருக்க வேண்டியமையால் புள்ளி E அவ்வட்டத்தின் பரிதி மீது உள்ளது. இப்போது OA ஆனது அவ்வட்டத்தின் ஓர் ஆரையாக இருக்கும் அதே வேளை OC உம் அவ்வட்டத்தின் ஓர் ஆரையாகும். இவ்வுருவில் உள்ள ODC, OAC ஆகிய முக்கோணிகளை மிக நன்றாக அவதானிப்போம்.



O இலிருந்து பக்கம் DC இற்கு ஒரு செங்குத்தை அமைப்பதன் மூலம் முக்கோணி ODC ஐ இரு ஒருங்கிசை முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கலாம். அதே வேளை அதற்கேற்ப ODC, OCD ஆகிய கோணங்கள் 30° வீதம் உள்ளனவென முடிபுசெய்யலாம். எனவே முக்கோணி OAC இல் கோணம் OCA ஆனது 45° ஆகும். முக்கோணி OAC உம் இரு சமபக்க முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை கோணம் OAC உம் 45° ஆகும். அப்போது கோட்டுத் துண்டம் OA ஆனது கிடையுடன் 60° இற் சாய்ந்துள்ளது. மேலும் கோல் கிடையுடன் 15° இற் சாய்ந்து நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. புள்ளி A இனூடாக உள்ள கிடைக் கோடு மீது கோலின் பகுதி AG இனதும் விட்டம் AE இனதும் எறியங்களைக் கருதும்போது

$AG \cos 15 = AE \cos 60.$

$$\Rightarrow AG = \frac{2a}{\cos 15} \times \frac{1}{2} = \frac{a}{\cos 15}.$$

இங்கு $\cos 15 = \cos(45 - 30)$

$$= \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1). \quad \Rightarrow \frac{1}{\cos 15} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

ஆகவே கோலின் நீளம் $2AG = \dfrac{2a}{\cos 15} = 2a \times \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$$= 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,a.$$

இப்பாடத்தில் நீங்கள் கற்றுள்ள முக்கிய விடயங்கள்

விசை

விசை என்பது ஒரு பொருளின் இயக்கத்தின் இயல்பை மாற்றுவதற்கு முயலும் அல்லது மாற்றும் பௌதிகக் கணியமாகும்.

துணிக்கை

துணிக்கை என்பது அதன் பரிமாணங்களை அளக்க முடியாத அளவுக்கு மிகச் சிறிய பொருளாகும்.

இரு விசைகளின் விளையுள்

இரு தரப்பட்ட விசைகளுக்குப் பதிலாக முன்வைக்கத்தக்க ஒரு தனி விசை விளையுள் எனப்படும். P, Q பருமனுள்ள இரு விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று கோணம் θ இற் சாய்ந்து தாக்கும்போது விளையுள் விசையின் பருமன் R ஆகும். விளையுள் விசையானது P பருமனுள்ள விசையுடன் கோணம் α ஐ ஆக்குமெனின்,

$$R^2 = P^2 + 2\,PQ\cos\theta + Q^2 \text{ உம் } \tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta} \text{ உம் ஆகும்.}$$

விசை முக்கோணி விதி

மூன்று ஒருதள விசைகள் நாப்பத்தில் இருக்குமெனின், அம்மூன்று விசைகளும் பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு குறித்த முக்கோணியின் பக்கங்களினால் வகைகுறிக்கப்படலாம்.

இதன் மறுதலை மூன்று ஒருதள விசைகள் பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு குறித்த முக்கோணியின் பக்கங்களினால் வகைகுறிக்கப்படலா மெனின், அம்மூன்று விசைகளும் நாப்பத்தில் இருக்கும்.

விசைப் பல்கோணி

ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதியின் விளையுளைக் காணும்போது ஒரு விசையிலிருந்து தொடங்கி எல்லா விசைகளையும ஒரு திசையளித்த கோட்டுத் துண்டத்தினால் வகைகுறிக்கும்போது தொடக்கக் கோட்டுத் துண்டத்தின் தொடக்கப் புள்ளியையும் இறுதிக் கோட்டுத் துண்டத்தின் இறுதிப் புள்ளியையும் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத் துண்டத்தின் பருமனினாலும் திசையினாலும் விசைத் தொகுதியின் விளையுள் வகைகுறிக்கப்படும்.

விசையின் நாப்பம்

ஒரு துணிக்கை மீது தாக்கும் ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதியின் விளையுள் பருமனில் பூச்சியமெனின், அவ்விசைத் தொகுதி நாப்பத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும்.

லாமியின் தேற்றம்

மூன்று ஒருதள விசைகள் நாப்பத்தில் இருப்பின், ஒவ்வொரு விசையும் இரு எஞ்சிய விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தின் sine பெறுமானத்திற்கு விகிதசமம். விசை முக்கோணித் தேற்றத்தில் போன்று அல்லாது லாமியின் தேற்றத்தின் மறுதலை பற்றி நம்பிக்கை வைக்க முடியாது.

விசைத் தொகுதியின் நாப்பம்

ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதி ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் ஒரு தனி விசையாகவும் ஒரு விசை இணையாகவும் முன்வைக்கப்படலாம்.

3 ஒருபரிமாண இயக்கம்

உயர்தர இணைந்த கணிதப் பாடத்திட்டத்தில் பிரயோக கணிதப் பகுதியில் இயக்கவியலின் கீழ் இயக்கம் பற்றிய குறித்த விடயங்களைக் கற்பதற்கு இவ்வத்தியாயத்தில் முயல்வோம். ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் உள்ள அசைவு, அதாவது ஒருபரிமாண இயக்கம் பற்றிக் கற்போம். தூரம், இடப்பெயர்ச்சி, கதி, வேகம், ஆர்முடுகல் போன்று அமர்முடுகல் பற்றிக் கருதப்படும் அதே வேளை இடப்பெயர்ச்சி - நேர வரைபுகளையும் வேக - நேர வரைபுகளையும் அறிமுகஞ்செய்வதற்கும் வேக - நேர வரைபுகளைக் கொண்டு பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்கும் இறுதியாக இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகளைப் பெறுவதற்கும் அவற்றின் பயன்பாடுகள் பற்றி ஆராய்வோம்.

3.1 அறிமுகம்

ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் அல்லது பொருளின் இயக்கம் பற்றிக் கற்பதற்கு இத்தலைப்பின் கீழ் எதிர்பார்க்கின்றோம்.

➢ தூரமும் இடப்பெயர்ச்சியும்

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை அப் பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து இருக்கும் தூரத்தை எளிதாக அளக்கலாம். அத்தூரத்தைத் துணிக்கை இயங்கும் திசையுடன் கருதும்போது அது **இடப்பெயர்ச்சி** எனப்படும். இடப்பெயர்ச்சி ஒரு காவிக் கணியம் என்பதை இனங்காண வேண்டும்.

எமது கற்கையில் ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை அல்லது பொருள் பற்றிக் கவனஞ் செலுத்துவோம்.

தூரம், இடப்பெயர்ச்சி என்னும் கணியங்களின் பரிமாணம் L ஆக இருக்கும் அதே வேளை அவற்றை அளப்பதற்குப் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் அலகுகள் மில்லிமீற்றர் (mm), சென்ரிமீற்றர் (cm), கிலோமீற்றர் (km) ஆகும். மீற்றர் (m) என்பது அதற்கான நியம அலகு ஆகும்.

➢ சராசரிக் கதியும் சராசரி வேகமும்

ஒரு தரப்பட்ட நேர ஆயிடையில் துணிக்கை அல்லது பொருள் இயங்கும் தூரத்தை அந்நேர ஆயிடையின் பருமனால் வகுக்கும் போது அதன் சராசரிக் கதி கிடைக்கும். அதாவது, சராசரிக் கதியானது கருதப்படும் நேர ஆயிடையில் ஓரலகு நேரத்தில் அது இயங்கும் தூரம் ஆகும்.

சராசரிக் கதியின் பரிமாணம் LT^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை நேரத்தை அளப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படும் நியம அலகாகிய செக்கனைத் (s) தொடர்புபடுத்திக் கதியை எடுத்துரைக்கையில் நியம அலகாக மீற்றர்/செக்கன் ($m\ s^{-1}$) பயன்படுத்தப்படுகின்றது. மேலும் சென்ரிமீற்றர்/ செக்கன் ($cm\ s^{-1}$), கிலோமீற்றர்/மணித்தியாலம் ($km\ h^{-1}$) என்னும் அலகுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

இவ்வாறே ஒரு தரப்பட்ட நேர ஆயிடையில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியை அந்நேர ஆயிடையின் பருமனால் வகுப்பதன் மூலம் அதன் சராசரி வேகத்தைப் பெறலாம். அதாவது சராசரி வேகமானது கருதப்படும் நேர ஆயிடையில் ஓரலகு நேரத்தில் அதன் இடப்பெயர்ச்சியாகும். இங்கு பரிமாணம் கதிக்கான பரிமாணமாக இருப்பதைப் போன்று வேகத்தின் அலகுகள் கதிக்கான அலகுகளாகும்.

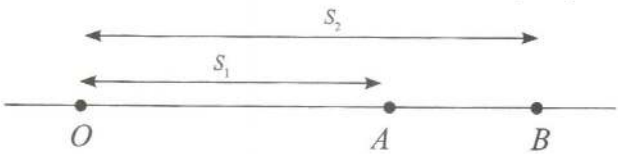
➢ கணநிலைக் கதியும் கணநிலை வேகமும்

ஒரு குறித்த கணத்தில் தூரத்தின் கணநிலை மாற்றத்தை எடுத்துரைக்கும்போது கணநிலைக் கதி பயன்படுத்தப்படும். இயங்கும் துணிக்கை ஒரு குறித்த கணத்தில் ஒரு புள்ளி A இலும் அதற்கு நேரம் t இற்குப் பின்னர் துணிக்கை புள்ளி A இலிருந்து தூரம் s இல் உள்ள ஒரு புள்ளியிலும் இருப்பின், அப்போது சராசரிக் கதி $\frac{s}{t}$ ஆகும். அதே வேளை இந்த t இன் பெறுமானம் இயன்றவரை சிறிதாக இருக்கும்போது அதாவது t இன் பெறுமானம் பூச்சியத்தை அணுகும்போது $\frac{s}{t}$ இன் எல்லைப் பெறுமானம் (இருப்பின்) புள்ளி A இல் துணிக்கையின் கணநிலைக் கதியாகும். அது $\lim_{t \to 0} \frac{s}{t}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

கணநிலைக் கதியின் பரிமாணமும் LT^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை சராசரிக் கதியைப் போன்று இங்கும் நியம அலகாக மீற்றர்/செக்கன் ($m\ s^{-1}$) பயன்படுத்தப்படும்.

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில், அதாவது ஒருபரிமாணத்தில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கைக்குக் கணநிலை வேகத்தையும் அறிமுகஞ் செய்யலாம். நேரம் t_1 ஆக இருக்கும்போது அப்பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O பற்றி ஒரு துணிக்கை இருக்கும் புள்ளி A இன் இடப்பெயர்ச்சி s_1 எனவும் நேரம் t_2 ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை ஒரு புள்ளி B இல் இருக்கின்றது எனவும் புள்ளி O பற்றிப் புள்ளி B இன் இடப்பெயர்ச்சி s_2 எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B இற்குத் துணிக்கை இயங்கும்போது துணிக்கையின் சராசரி வேகம் $\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும்.



நிலைத்த புள்ளி

தரப்பட்ட சிறிய நேர ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் துணிக்கையின் சராசரி வேகம் $\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும். $t_2 - t_1$ இன் பெறுமானம் எதேச்சையாகச் சிறியதாக இருக்கும்போது அதாவது அப்பெறுமானம் பூச்சியத்தை அணுகும்போது இக்கோவையின் பெறுமானம் புள்ளி A இல் துணிக்கையின் கணநிலை வேகம் எனப்படும்.

அது $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{s_2 - s_1}{t}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்; இங்கு $t = t_2 - t_1$.

நுண்கணிதத்தைக் கற்ற பின்னர் வகையீட்டுக் குணகத்தைப் பயன்படுத்தியும் கணநிலைக் கதியையும் கணநிலை வேகத்தையும் எடுத்துரைக்கலாம்.

கணநிலை வேகத்திற்கும் பரிமாணம் LT^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை இங்கும் நியம அலகாக மீற்றர்/செக்கன் ($m\ s^{-1}$) பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

➢ சீரான கதி

துணிக்கையின் தூர மாற்றம் நேரத்திற்கு நேரடி விகிதசமம் எனின், அப்போது பொருள் சீரான கதியுடன் இயங்குவதாகக் கூறப்படும். இப்போது யாதாயினும் ஓரலகு நேர ஆயிடையில் செல்லும் தூரங்கள் சமம். மேலும் இச்சந்தர்ப்பத்தில் சராசரிக் கதியும் கணநிலைக் கதியும் இச்சீரான கதிக்குச் சமம்.

➢ சீரான வேகம்

நேரத்துடனும் இடப்பெயர்ச்சி மாற்றம் வேகத்திற்கு நேரடி விகிதசமம் எனின், அப்போது பொருள் சீரான வேகத்துடன் இயங்குவதாகக் கூறப்படும். இப்போது யாதாயினும் ஓரலகு நேர ஆயிடையில் சம இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கொண்டிருக்கும். மேலும் இச்சந்தர்ப்பத்தில் இச்சீரான வேகமும் கணநிலை வேகமும் பருமனில் சமம். சீரான கதியைப் போன்று சீரான வேகத்திற்கும் பரிமாணம் LT^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை நியம அலகு மீற்றர்/செக்கன் ($m\,s^{-1}$) ஆகும்.

➢ ஆர்முடுகல்

துணிக்கையின் வேகம் மாறும் வீதம் ஆர்முடுகல் எனப்படும். இதன் பரிமாணம் LT^{-2} ஆக இருக்கும் அதே வேளை நியம அலகு மீற்றர்/செக்கன்/செக்கன் ஆக இருக்கும். அது $m\,s^{-1}s^{-1}$ அல்லது $m\,s^{-2}$ என எடுத்துரைக்கப்படும்.

➢ சராசரி ஆர்முடுகல்

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில், அதாவது ஒருபரிமாணமாக இயங்கும் ஒரு துணிக்கைக்கு முதலில் சராசரி ஆர்முடுகலை அறிமுகஞ் செய்யலாம். நேரம் t_1 ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகம் $\underline{v}_1$ எனவும் நேரம் t_2 ஆக இருக்கும்போது வேகம் $\underline{v}_2$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது புள்ளி A இலிருந்து புள்ளி B இற்குத் துணிக்கை இயங்கும்போது துணிக்கையின் சராசரி ஆர்முடுகல் $\dfrac{\underline{v}_2 - \underline{v}_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும்.

இங்கு வேகம் $\underline{v}_1$ ஆக இருக்கும்போது வேகத்தின் பருமன் v_1 என எழுதுவோம். வேகம் ஒரு காவிக் கணியம் என்பதையும் ஒரு குறித்த துணிக்கை இயங்கும் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு திசை நேர்த் திசை என்பதையும் அதற்கு எதிரான திசை மறைத் திசை என்பதையும் இப்போது நாம் அறிவோம்.

ஒரு தரப்பட்ட சிறிய நேர ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் துணிக்கையின் சராசரி ஆர்முடுகல் $\dfrac{\underline{v}_2 - \underline{v}_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும். $t_2 - t_1$ இன் பெறுமானம் எதேச்சையாகச் சிறியதாக இருக்கும்போது, அதாவது அப்பெறுமானம் பூச்சியத்தை அணுகும்போது இக்கோவையின் பெறுமானம் புள்ளி A இல் துணிக்கையின் கணநிலை ஆர்முடுகல் எனப்படும்.

அது $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\underline{v}_2 - \underline{v}_1}{t}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்; இங்கு $t = t_2 - t_1$.

பல சந்தர்ப்பங்களில் இடப்பெயர்ச்சி, வேகம், ஆர்முடுகல் ஆகியவற்றை எடுத்துரைப்பதற்கு $\underline{s}$, $\underline{v}$, $\underline{a}$ என்னும் குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படும். நுண்கணிதத்தை விளங்கிக்கொண்டால் $\underline{v} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{s}$, $\underline{a} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{v}$ என எடுத்துரைக்கலாம்.

அப்போது $\underline{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\underline{s}$ ஆகும்.

நுண்கணிதத்தில் பிரயோகிக்கப்படும் சார்பின் சார்பு பற்றிய வகையீட்டு நெறியைக் (சங்கிலி நெறி) கருதும்போது

$$\underline{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{v}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underline{v} \times \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$= v \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\underline{v}$$ எனவும் வேறொரு கோவையை ஆர்முடுகலுக்கு எழுதலாம்.

பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது இச்சூத்திரங்கள் பயன்படும்.

➢ கணநிலை ஆர்முடுகல்

ஒரு குறித்த கணத்தில் வேகத்தின் கணநிலை மாற்றம் கணநிலை ஆர்முடுகல் எனப்படும். ஒரு குறித்த கணத்தில் இயங்கும் துணிக்கையின் வேகம் $\underline{v}_1$ ஆகவும் அதற்கு நேரம் t இற்குப் பின்னர் துணிக்கையின் வேகம் $\underline{v}_2$ ஆகவும் இருப்பின், அப்போது சராசரி ஆர்முடுகல் $\dfrac{\underline{v}_2-\underline{v}_1}{t_2-t_1}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை இந்த t இன் பெறுமானம் பூச்சியத்தை அணுகும்போது $\dfrac{\underline{v}_2-\underline{v}_1}{t_2-t_1}$ இன் எல்லைப் பெறுமானம் (இருப்பின்), அக்கணத்தில் துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் கணநிலை ஆர்முடுகல் ஆகும்.

அது $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\underline{v}_2-\underline{v}_1}{t}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்; இங்கு $t = t_2 - t_1$.

➢ சீரான ஆர்முடுகல்

நேரத்துடனும் வேக மாற்றம் ஆர்முடுகலுக்கு நேரடி விகித சமமெனின், அப்போது பொருள் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குவதாகக் கூறப்படும். இப்போது யாதாயினும் ஓர் ஓரலகு நேர ஆயிடையில் சம வேகங்கள் மாற்றத்தைக் காட்டுகின்றன. மேலும் இச்சந்தர்ப்பத்தில் இச்சீரான வேகமும் சராசரி வேகமும் கணநிலை வேகமும் பருமனில் சமம்.

உதாரணம் 3.1

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் வேகம் நேரம் 3 செக்கனாக இருக்கும்போது 32 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆகவும் அதற்கு 5 செக்கனுக்குப் பின்னர் 85 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆகவும் இருப்பின் சராசரி ஆர்முடுகலைத் துணிக.

தீர்வு

ஒரு தரப்பட்ட நேர ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இற்குத் தொடக்கத்திலும் இறுதியிலும் துணிக்கையின் வேகங்கள் முறையே $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ எனின்,

துணிக்கையின் சராசரி ஆர்முடுகல் $\dfrac{\underline{v}_2-\underline{v}_1}{t_2-t_1}$ ஆகையால்,

$$\text{சராசரி ஆர்முடுகல்} = \frac{85-32}{5}$$
$$= 10.6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

உதாரணம் 3.2

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் வேகம் நேரம் 4 செக்கனாக இருக்கும்போது 36 km h^{-1} ஆகவும் அதற்கு 10 செக்கனுக்குப் பின்னர் 72 km h^{-1} ஆகவும் இருப்பின், சராசரி ஆர்முடுகலைத் துணிக.

தீர்வு

இங்கு அலகுகள் பற்றிக் கவனமாக இருத்தல் வேண்டும். அலகுகள் கலந்துள்ளன. அலகுகளை ஓர் அலகு வகைக்கு மாற்ற வேண்டிய அதே வேளை நியம அலகுகளைக் கருதல் மிகவும் உகந்தது.

$$\begin{aligned} 36 \text{ km h}^{-1} &= 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\ &= 36 \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} \\ &= 36 \times \frac{5}{18} \text{ m s}^{-1} \\ &= 10 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

இவ்வாறே $72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$.

சராசரி ஆர்முடுகல் $= \dfrac{20-10}{10}$

$= 1 \text{ m s}^{-2}$.

குறிப்பு: அலகு மாற்றல்

km h^{-1} உள்ள ஒரு பெறுமானத்தை m s^{-1} பெறுமானமாக மாற்றலில் $\dfrac{5}{18}$ இனால் பெருக்க வேண்டும் என்பதை அவதானிக்க.

ஒரு குறித்த பரீட்சையில் விடை எழுதும்போது மேற்குறித்தவாறு சுருக்கல் மிகவும் உகந்தது.

3.2 ➡ இயக்கத்திற்கான வரைபுகள்

நேரத்திற்கு எதிரே இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி, வேகம், ஆர்முடுகல் என்பன பற்றிய வரைபுகள் கருதப்படும் அதே வேளை பெரும்பாலும் வேக-நேர வரைபுகள் பற்றிக் கவனஞ் செலுத்தப்படும்.

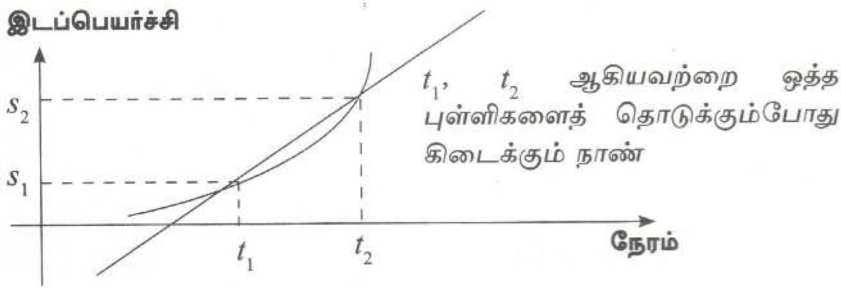
(1) இடப்பெயர்ச்சி - நேர வரைபுகள்

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கைக்கு அப்பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இலிருந்து இடப்பெயர்ச்சி (s) அளக்கப்படும் அதே வேளை நேரம் (t) இற்கு எதிராக இடப்பெயர்ச்சியை வரைபுப்படுத்தும்போது அவ்வரைபு **இடப்பெயர்ச்சி - நேர வரைபு** எனப்படும்.

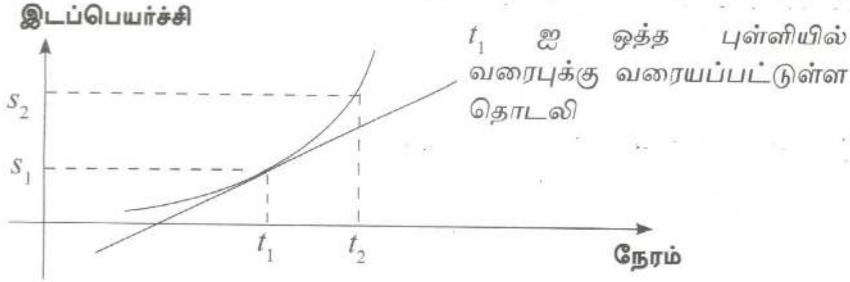
நேரம் t_1 ஆகவும் t_2 ஆகவும் இருக்கும்போது துணிக்கை முறையே A, B ஆகிய புள்ளிகளில் இருக்கின்றது எனவும் ஒத்த இடப்பெயர்ச்சிகள் s_1, s_2 எனவும் கொள்வோம்.

- ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் துணிக்கையின் சராசரி வேகம் $\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும்.
- வரைபில் t_1, t_2 ஆகியவற்றை ஒத்த புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் போது கிடைக்கும் நாணின் படித்திறன் $[t_1, t_2]$ இல் சராசரி வேகத்திற்குச் சமம்.
- t_1 ஐ ஒத்த புள்ளியில் வரைபுக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் படித்திறன் அச்சந்தர்ப்பத்தில் கணநிலை வேகத்திற்குச் சமம்.

இவ்விடயங்களைப் பின்வருமாறு ஒரு வரைபைக் கொண்டு முன்வைக்கலாம்.



இந்நாணின் படித்திறன் சராசரி வேகத்திற்குச் சமம்.

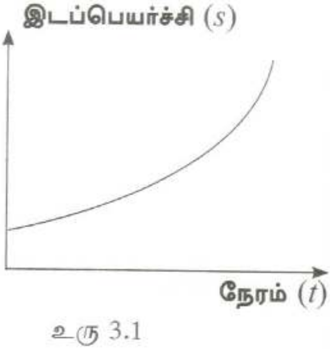


இத்தொடலியின் படித்திறன் கணநிலை வேகத்திற்குச் சமம்.
ஏகபரிமாணப் பாதையில் துணிக்கை இயங்கும் திசைக்கேற்ப வரைபுகளின் வடிவம் மாறும். அவ்வாறே மறுசார் ஒரு வரைபின் வடிவத்திற்கேற்பத் துணிக்கையின் இயக்கத்தின் இயல்புபற்றிப் போதிய அளவுக்கு முடிபுசெய்யலாம்.

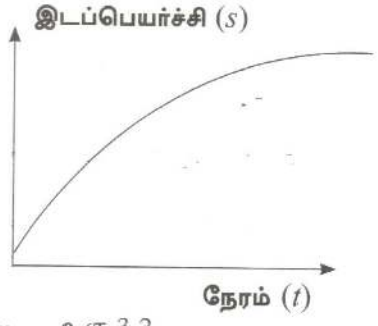
பின்வரும் சந்ததர்ப்பங்களைக் கருதுக.

சந்தர்ப்பம் 1 : துணிக்கை புள்ளி O இலிருந்து அப்பாலும் இடப்பெயர்ச்சியின் நேர்த் திசையிலும் இயங்கும் போது

இப்போது பின்வரும் உபசந்தர்ப்பங்களை வேறுபடுத்தலாம்.



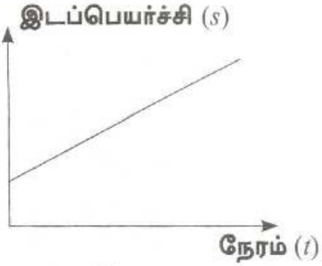
உரு 3.1



உரு 3.2

உரு 3.1 இல் **வேகம்** படிப்படியாக **அதிகரிக்கும்** சந்தர்ப்பம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.
உரு 3.2 இல் **வேகம்** படிப்படியாகக் **குறையும்** சந்தர்ப்பம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.
இறுதியாக வேகம் அதிகரிக்காத அல்லது குறையாத சந்தர்ப்பமாகிய

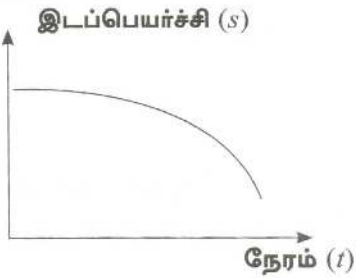
சீரான வேகத்துடன் இயங்குதலைக் கருதலாம். அதற்காக உரு 3.3 ஐப் பார்க்க.



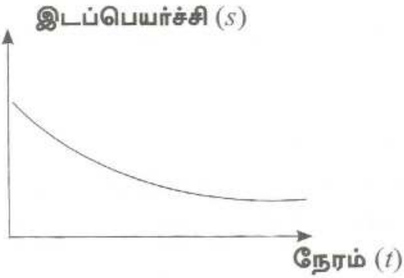
உரு 3.3

சந்தர்ப்பம் 2 : துணிக்கை புள்ளி O ஐ நோக்கியும் இடப்பெயர்ச்சியின் மறைத் திசையிலும் இயங்கும்போது

இப்போது பின்வரும் உபசந்தர்ப்பங்களை வேறுபடுத்தலாம்.



உரு 3.4



உரு 3.5

உரு 3.4 இல் **வேகம்** படிப்படியாகக் **குறையும்** சந்தர்ப்பம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.
உரு 3.5 இல் **வேகம்** படிப்படியாக **அதிகரிக்கும்** சந்தர்ப்பம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

உரு 3.6

இறுதியாக வேகம் அதிகரிக்காத அல்லது குறையாத சந்தர்ப்பமாகிய **சீரான வேகத்துடன்** இயங்குதலைக் கருதலாம். அதற்காக உரு 3.6 ஐப் பார்க்க.

உதாரணம் 3.3

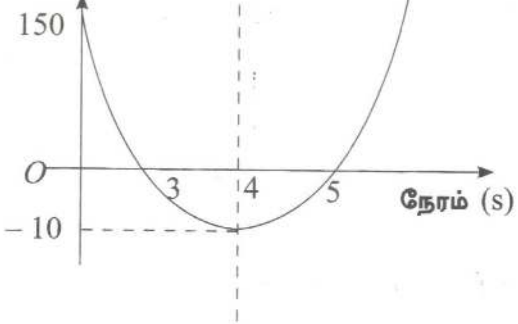
ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி (s) இற்கும் நேரம் (t) இற்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமை $s = 10\,(t^2 - 8t + 15)$ ஆகும். இடப்பெயர்ச்சி மீற்றரிலும் நேரம் செக்கனிலும் அளக்கப்பட்டுள்ளன. இடப் பெயர்ச்சி - நேர வரைபை வரைந்து இயக்கத்தை விவரிக்க.

தீர்வு

இருபடிச் சார்புகள் பற்றிய விளக்கத்துடன் இதனை எளிதாகத் தீர்க்கலாம். இவ்வரைபு மேலே திறந்த பரவளைவாக இருக்கும் அதே வேளை நேர அச்சை இடைவெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்பதற்கு அதனை முதலில் காரணிகளாக வேறுபடுத்துவோம்.

$$\begin{aligned} s &= 10\,(t^2 - 8t + 15) \\ &= 10\,(t-5)\,(t-3) \end{aligned}$$

ஆகையால் $t = 3$ செக்கன் ஆகவும் $t = 5$ செக்கன் ஆகவும் இருக்கும்போது வரைபு நேர அச்சை இடைவெட்டுகின்றது.



புள்ளி O தொடர்பாக இடப்பெயர்ச்சியும் வேகமும் அளக்கப் படுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

இயக்கம் பற்றிய பின்வரும் முடிபுகளை முன்வைக்கலாம்.

❖ ஆயிடை $[0, 4]$ இல் இடப்பெயர்ச்சி படிப்படியாகக் குறைகின்றது. ஆகவே துணிக்கை தொடக்கத்தில் புள்ளி O இன் திசையில் இயங்குகின்றது. $t = 3$ செக்கனாக இருக்கும்போது $s = 0$ ஆகையால் அப்போது துணிக்கை செப்பமாகப் புள்ளி O இல் உள்ளது. $t = 4$ செக்கனாக இருக்கும் வரை துணிக்கை அத்திசையில் இயங்குகின்றது. இந்த ஆயிடையில் துணிக்கையின் வேகம் படிப்படியாகக் குறைகின்றது.

மேலும் ஆயிடை $[3, 4]$ இல் புள்ளி O இலிருந்து துணிக்கை அப்பால் செல்கின்றது.

❖ $t = 4$ செக்கனின் பின்னர் துணிக்கை மறுபடியும் புள்ளி O இன் திசையில் இயங்குகின்றது. $t = 5$ செக்கனாக இருக்கும்போது துணிக்கை மறுபடியும் செப்பமாகப் புள்ளி O இல் உள்ளது. இங்கு துணிக்கையின் வேகம் படிப்படியாக அதிகரிக்கின்றது.

$t = 5$ செக்கனுக்குப் பின்னர் மறுபடியும் புள்ளி O இற்கு அப்பால் அது இயங்குகின்றது.

(2) வேக - நேர வரைபுகள்

ஓர் இயங்கும் துணிக்கைக்குத் துணிக்கையின் வேகம் (v) ஐ நேரம் (t) இற்கு எதிராக வரைபுப்படுத்தும்போது அவ்வரைபு **வேக - நேர வரைபு** எனப்படும்.

நேரம் t_1 ஆகவும் t_2 ஆகவும் இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 எனக் கொள்வோம்.

❖ ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் துணிக்கையின் சராசரி ஆர்முடுகல்

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$ ஆகும்.

- வரைபில் t_1, t_2 ஆகியவற்றை ஒத்த புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாணின் படித்திறன் $[t_1, t_2]$ இல் சராசரி ஆர்முடுகலுக்குச் சமம்.

❖ t_1 ஐ ஒத்த புள்ளியில் வரைபுக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் படித்திறன் அச்சந்தர்ப்பத்தில் கணநிலை ஆர்முடுகலுக்குச் சமம்.

இவ்விடயங்களையும் மேலே தரப்பட்டுள்ள இடப்பெயர்ச்சி - நேர வளையியில் உள்ளவாறு வேக - நேர வளையிகளுக்கும் ஒரு வரைபைக் கொண்டு எடுத்துரைக்கலாம்.
மேலும் பின்வரும் விசேட சந்தர்ப்பங்களையும் கருதலாம்.

சந்தர்ப்பம் 1 : துணிக்கை வேகத்தின் நேர்த் திசையில் இயங்கும்போது;
இப்போது பின்வரும் உபசந்தர்ப்பங்களை வேறுபடுத்தலாம்.

- ஆர்முடுகல் படிப்படியாக அதிகரித்தல்
- ஆர்முடுகல் படிப்படியாகக் குறைதல்
- ஆர்முடுகல் சீராக இருத்தல்

சந்தர்ப்பம் 2 : துணிக்கை வேகத்தின் நேர்த் திசைக்கு எதிரான திசையில் இயங்கும்போது;
இப்போதும் பின்வரும் உபசந்தர்ப்பங்களை வேறுபடுத்தலாம்.

- ஆர்முடுகல் படிப்படியாக அதிகரித்தல்
- ஆர்முடுகல் படிப்படியாகக் குறைதல்
- ஆர்முடுகல் சீராக இருத்தல்

அமர்முடுகல் : நேரத்துடன் வேகம் குறையுமெனின் அப்போது ஆர்முடுகலுக்கு ஒரு மறைப் பெறுமானம் கிடைக்கும். மறை ஆர்முடுகலுக்கு **அமர்முடுகல்** என்னும் பெயர் பயன்படுத் தப்படுகின்றது.

ஒரு வேக - நேர வரைபைக் கருதும்போது ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியானது நேர அச்சு, வேக - நேர வளையி ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள பரப்பளவிலிருந்து கிடைக்கும்.

ஒரு வழக்காக நேர அச்சுக்கு மேலே உள்ள பரப்பளவு நேர் எனவும் அதாவது இடப்பெயர்ச்சி நேரான திசையில் துணிக்கை இயங்கும் எனவும் நேர அச்சுக்குக் கீழே உள்ள பரப்பளவு மறை எனவும் அதாவது இடப்பெயர்ச்சி மறையான திசையில் துணிக்கை இயங்கும் எனவும் கருதுவோம்.

3.3 வேக - நேர வளையிகளின் பயன்பாடு

இங்கு பின்வரும் பேறுகள் மிகவும் முக்கியமானவை.

- வேக - நேர வளையிக்கு அதன் மீது ஒரு குறித்த புள்ளியில் வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் படித்திறன் அச்சந்தர்ப்பத்தில் கணநிலை ஆர்முடுகலுக்குச் சமம்.
- ஒரு குறித்த ஆயிடையில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியானது நேர அச்சுக்கும் வேக - நேர வளையிக்குமிடையே உள்ள பரப்பளவிலிருந்து கிடைக்கும்.

இங்கு எமது கவனம் சீரான ஆர்முடுகல் அல்லது விரைவாகச் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் துணிக்கைகள் அல்லது பொருள்கள் பற்றியதாகும். ஆர்முடுகல் சீரானதாக இருக்கும்போது துணிக்கையின் சராசரி ஆர்முடுகல் போன்று கணநிலை ஆர்முடுகலும் ஒரே பெறுமானத்தை எடுக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

மேலும் வேக - நேர வளையிக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் படித்திறன் மாறாமல் இருக்குமாறு குறித்த ஆயிடைகளில் இருக்கும். ஆகவே வேக - நேர வளையி பகுதிகளாக ஏகபரிமாணமானது.

உதாரணம் 3.4

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் செல்லும் சைக்கிளோட்டி ஒருவர் ஒரு மலையின் உச்சியிலிருந்து கீழ்நோக்கி மலையுச்சியில் வேகம் 8 m s^{-1} உடன் தனது பயணத்தை ஆரம்பிக்கின்றார். மலையின் சரிவு காரணமாக அவர் சீரான ஆர்முடுகல் 0.5 m s^{-2} ஐ அடைகின்றார். இயக்கத்திற்கு ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைக.

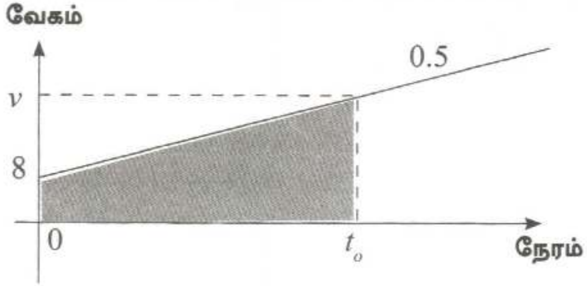
இதிலிருந்து 80 m தூரத்திற்குச் சரிவு வழியே கீழ்நோக்கிச் செல்லும் போது

(i) அவருடைய வேகம்,
(ii) அதற்கு எடுக்கும் நேரம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



சைக்கிளோட்டி மலையின் உச்சியில் இருக்கும்போது நேரத்தை அளக்கத் தொடங்குவோம். அவருடைய ஆர்முடுகல் கோட்டின் படித்திறனிற்குச் சமம்.

ஆகவே

$$0.5 = \frac{v-8}{t_o - 0}\cdot$$

$$2(v-8) = t_o. \longrightarrow ①$$

அவர் சென்ற தூரம் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவுக்குச் சமம். அது ஒரு சரிவகம். ஆகவே பரப்பளவானது இரு சமாந்தரப் பக்கங்களின் நீளங்களின் கூட்டுத்தொகையினதும் அவற்றுக் கிடையே உள்ள தூரத்தின் அரைவாசியினதும் பெருக்கமாகும்.

$$\Rightarrow 80 = \frac{1}{2}\times(v+8)\times t_o.$$

சமன்பாடு ① இலிருந்து t_o இற்குப் பிரதியிடும்போது

$$\Rightarrow 80 = \frac{1}{2}\times(v+8)\times 2\,(v-8).$$

$$\Rightarrow 80 = (v+8)\,(v-8) = v^2 - 64.$$

$$\Rightarrow v^2 = 144.$$

எனவே $v = 12$. இப்போது சமன்பாடு ① இலிருந்து

$2\,(12-8) = t_o.$

ஆகவே $t_o = 8$

இதற்கேற்ப 80 m தூரத்திற்குச் சரிவு வழியே கீழ்நோக்கிச் செல்லும் போது

(i) அவருடைய வேகம் 12 m s^{-1}.

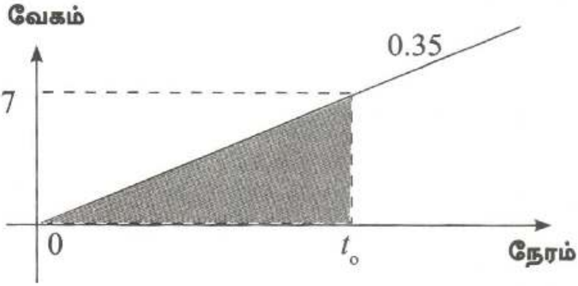
(ii) அதற்கு எடுக்கும் நேரம் 8 s.

உதாரணம் 3.5

ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து சீரான ஆர்முடுகல் 0.35 $\mathrm{m\ s^{-2}}$ உடன் இயங்குகின்றது. துணிக்கையின் வேகம் 7 $\mathrm{m\ s^{-1}}$ ஆவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் அப்போது துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி யையும் காண்க.

தீர்வு

வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் கோட்டின் படித்திறனிற்குச் சமம் ஆகையால்

$$0.35 = \frac{7 - 0}{t_o - 0}\ .$$

$$\Rightarrow\ t_o = \frac{7}{0.35} = 20\ \mathrm{s}$$

துணிக்கையின் வேகம் 7 $\mathrm{m\ s^{-1}}$ ஆவதற்கு எடுக்கும் நேரம் 20 செக்கன் ஆகும்.

அவர் சென்ற தூரம் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவுக்குச் சமம். அது ஒரு முக்கோணி.

இம்முக்கோணியின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 7 \times t_o$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 20$$

$$= 70.$$

அப்போது துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி 70 m ஆகும்.

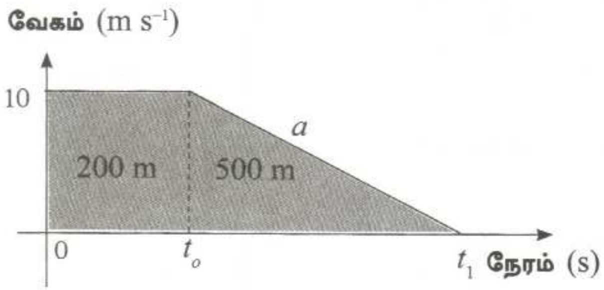
உதாரணம் 3.6

ஒரு நேர்க் கிடைப் பாதையில் ஒரு புகையிரதம் சீரான வேகம் $36\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் செலுத்தப்பட்டு, ஒரு புகையிரத நிலையத்திலிருந்து $0.7\ \mathrm{km}$ தூரத்தில் உள்ள ஒரு சைகைக் கம்பத்தைக் கடந்து புகையிரத நிலையத்தில் நிற்பதற்கு மேலும் $0.5\ \mathrm{km}$ தூரம் இருக்கையில் தடுப்புகளைப் பிரயோகித்து சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்குகின்றது. இயக்கத்துக்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைக.

இதிலிருந்து இயக்கத்துக்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் புகையிரதத்தின் அமர்முடுகலையும் காண்க.

தீர்வு

வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



புகையிரதத்தின் தொடக்க வேகம் $36\ \mathrm{km\ h^{-1}} = 10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$. நியம அலகுகளுக்கு மாற்றல் மிகவும் உகந்தது.

புகையிரதம் சீரான வேகத்துடன் செலுத்தப்படும் நேரம் t_0 ஆகும். வேக - நேர வளையியின் ஒத்த செவ்வகத்தின் பரப்பளவிலிருந்து

$$200 = 10 \times t_0 .$$

$$\Rightarrow t_0 = 20\ \mathrm{s}.$$

அமர்முடுகலுடன் செலுத்தப்படுதலைக் கருதுக.

அமர்முடுகல் $a = \dfrac{10-0}{t_1 - t_0}$.

$$\therefore\ a\,(t_1 - 20) = 10. \longrightarrow (1)$$

அமர்முடுகலுடன் செலுத்தப்படும் நேரத்தைக் கருதும்போது

$$500 = \frac{1}{2} \times 10\,(t_1 - t_0).$$

$$\Rightarrow 100 = t_1 - t_0$$

$t_0 = 20$ என்பதால்

$$\Rightarrow t_1 = 120\,.$$

சமன்பாடு (1) இல் t_1 இற்காகப் பிரதியிடும்போது $a\,(120 - 20) = 10.$

$$\therefore\ a = 0.1 \text{ m s}^{-2}.$$

ஆகவே இயக்கத்துக்கு எடுக்கும் நேரம் 120 செக்கனும் புகையிரதத்தின் அமர்முடுகல் 0.1 m s^{-2} உம் ஆகும்.

மேற்குறித்த பிரசினம் எண்களுடன் தொடர்புபட்டிருக்கும் அதே வேளை அட்சரகணிதக் கோவைகள் இடம்பெறும் பிரசினங்களும் உள்ளன. தேவையானவாறு பெறுமானங்களைத் தெரிந்தெடுப்பதன் மூலம் குறிப்பிட்ட பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம்.

உதாரணம் 3.7

ஒரு நேர்ப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் தொடக்க வேகம் u இல் இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் t இற்குப் பின்னர் இடப்பெயர்ச்சி s ஐக் காட்டும் அதே வேளை வேகம் v ஐ அடைகின்றது. பின்வருவன உண்மையெனக் காட்டுக.

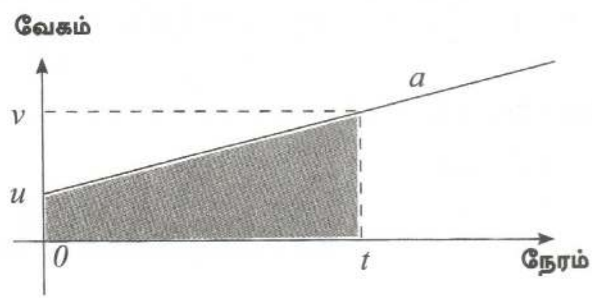
$$v = u + at$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \cdot$$

$$v^2 = u^2 + 2as.$$

தீர்வு

வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



ஆர்முடுகல் a மாறிலி ஆகையால் வளையியின் படித்திறன் மாறிலியாகும். மேலும் வேக - நேர வளையி ஒரு நேர்கோடாகும். சராசரி ஆர்முடுகலும் சீரான ஆர்முடுகலும் ஒரே பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதனால்

சீரான ஆர்முடுகல் a = சராசரி ஆர்முடுகல்

கோட்டின் படித்திறன் $a = \dfrac{v-u}{t-0}$.

$$a = \frac{v-u}{t}$$

$$\Rightarrow v = u + at.$$

ஆகவே ஆயிடை $[0, t]$ இல் மேற்குறித்த துணிக்கை செல்லும் தூரம் s ஆனது ஆயிடை $[0, t]$ இற்கு மேலே உள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவு ஆகும்.

எனவே $\quad s = \dfrac{1}{2} \times (u + v) \times t.$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} \times (u + u + at) \times t$$

$$= \frac{1}{2} \times (2u + at) \times t$$

$$\Rightarrow s = ut + \frac{1}{2} at^2.$$

$v = u + at$, $\Rightarrow s = ut + \dfrac{1}{2} at^2$ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து t ஐ நீக்கும்போது

$$s = u \times \frac{v-u}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v-u}{a}\right)^2$$

$$s = u \times \frac{v-u}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v^2 - 2uv + u^2)}{a}.$$

$$\therefore\ 2as = 2uv - 2u^2 + v^2 - 2uv + u^2.$$

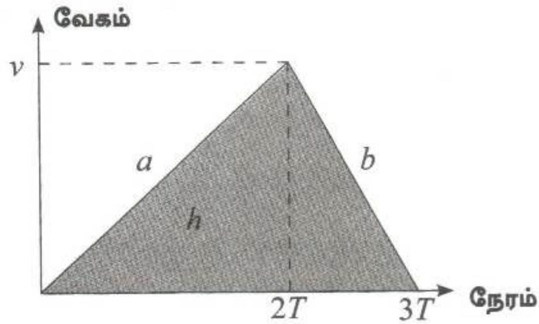
$$\Rightarrow v^2 = u^2 + 2as.$$

உதாரணம் 3.8

ஒரு சுரங்கத்தில் உயர்த்தி ஓய்விலிருந்து கீழ்நோக்கிச் செல்லும் பயணத்தில் முதற் பகுதியில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் நேரம் $2T$ இற்கும் எஞ்சியுள்ள பகுதியில் சீரான அமர்முடுகலுடன் நேரம் T இற்கும் சென்று ஓய்வுக்கு வருகின்றது. உயர்த்தி ஆழம் h இற்குச் செல்லுமெனின், இயக்கத்துக்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைந்து $h = 3aT^2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

உயர்த்தியின் இயக்கத்துக்கான வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



உயர்த்தியின் உயர்ந்தபட்ச வேகம் v எனவும் அமர்முடுகல் b எனவும் கொள்வோம்.

ஆர்முடுகல் $a = \dfrac{v-0}{2T-0} = \dfrac{v}{2T}$ ———— ①

$$v = 2aT$$

அது செல்லும் தூரம் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவுக்குச் சமம் ஆகையால் $h = \dfrac{1}{2} v \times 3T.$

சமன்பாடு ① இலிருந்து $v = 2aT$ ஆகையால் $h = \dfrac{1}{2} \times 2aT \times 3T.$

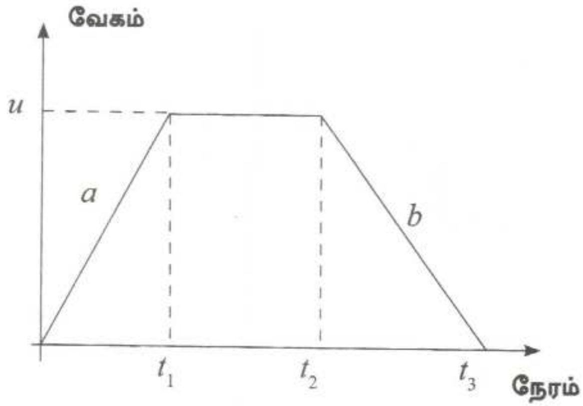
$$\therefore h = 3aT^2.$$

உதாரணம் 3.9

ஓய்விலிருந்து பயணத்தை ஆரம்பிக்கும் ஒரு வாகனம் முதற் பகுதியில் மாறா ஆர்முடுகல் a உடனும் அதன் பின்னர் மாறா வேகம் u உடனும் மூன்றாம் பகுதியில் மாறா அமர்முடுகல் b உடனும் சென்று ஓய்வுக்கு வருகின்றது. முழுப் பயணத்தினதும் சராசரி வேகம் $\frac{7u}{8}$ எனின், பயணத்தில் ஈடுபடும் மொத்த நேரத்தில் என்ன பின்னத்திற்கு மாறா வேகத்துடன் செல்கின்றதெனக் காண்க.

தீர்வு

தொடக்கத்திலிருந்து நேரம் t_1 இற்கு ஆர்முடுகலுடனும் t_1 இலிருந்து t_2 வரைக்கும் சீரான வேகத்துடனும் t_2 இலிருந்து t_3 வரைக்கும் சீரான அமர்முடுகலுடனும் இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.
இயக்கத்திற்கான வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \frac{u}{t_1}$

அதாவது $t_1 = \frac{u}{a}$

அமர்முடுகலைக் கருதும்போது $b = \frac{u}{t_3 - t_2}$

எனவே $t_3 - t_2 = \frac{u}{b}$

சென்ற மொத்தத் தூரம் s எனக் கொள்வோம். வேக - நேர வளையியின் ஆயிடை $[0, t_3]$ இற்கு மேலே உள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கருதும்போது

$$s = \frac{1}{2} \times \left[(t_3 - 0) + (t_2 - t_1) \right] u.$$

$$s = \frac{1}{2} u \, (t_3 + t_2 - t_1)$$

இதற்கு நேரம் t_3 எடுக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை சராசரி வேகம் $\frac{7u}{8}$ ஆகையால் $\frac{u}{2t_3} (t_3 + t_2 - t_1) = \frac{7u}{8}$

அதாவது $$4 \, (t_3 + t_2 - t_1) = 7t_3$$

அதாவது $$3t_3 = 4 \, (t_2 - t_1).$$

$$\Rightarrow \frac{t_2 - t_1}{t_3} = \frac{3}{4}.$$

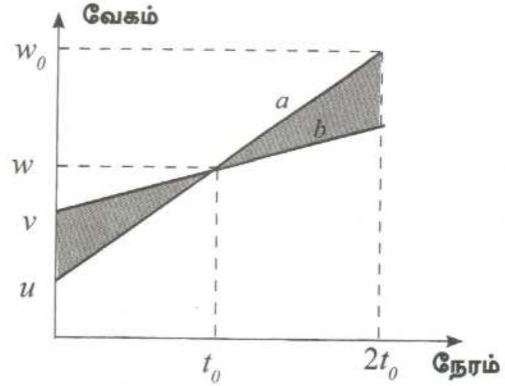
பயணத்தில் மாறா வேகத்துடன் செல்லும் நேரம் $t_2 - t_1$ ஆகையால் மொத்த நேரத்தில் $\frac{3}{4}$ ஆனது மாறா வேகத்துடன் செல்லப் பட்டுள்ளது.

உதாரணம் 3.10

இரு பொருள்கள் ஒரே கணத்தில் u, v என்னும் வேகங்களுடன் ஓர் இடம் A இலிருந்து ஆரம்பித்து முறையே a, b என்னும் மாறா ஆர்முடுகல்களுடன் இயங்கி ஒரே தடவை புள்ளி B ஐக் கடக்கின்றன. $(a - b)^2 . AB = 2(u - v) \, (ub - av)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

B ஐக் கடக்கும்போது நேரம் $t = 2t_0$ எனக் கொள்வோம். இப்போது இரு துணிக்கைகளும் சென்றுள்ள தூரங்கள் சமம் ஆகையால் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணிகள் பரப்பளவில் சமம். மேலும் அவை இயல்பொத்த முக்கோணிகள் ஆகையால் ஒருங்கிசையும் அதே வேளை அதிலிருந்து இரு பொருள்களினதும் வேகங்கள் சமமாக இருக்கும்போது அதாவது வேக - நேர வளையிகள் இடைவெட்டும்போது $t = t_0$.



பொருள்களின் ஆர்முடுகல்களைக் கருதும்போது

$$\frac{w-v}{t_0} = b\,,\ \frac{w-u}{t_0} = a\,.$$

இங்கு w ஆனது நேரம் $t = t_0$ ஆக இருக்கும்போது அவற்றின் பொது வேகம் ஆகும். இச்சமன்பாடுகளை வகுக்கும்போது

$\dfrac{w-v}{w-u} = \dfrac{b}{a}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $aw - av = bw - bu.$

$$\Rightarrow (b-a)\,w = bu - av.$$

அதாவது $w = \dfrac{bu-av}{b-a}$.

மேற்குறித்தவற்றிலிருந்து $\dfrac{w-u}{a} = t_0$ ஆகையால் $w = u + at_0$.

மேலே பெற்ற கோவையை w இற்குப் பிரதியிடும்போது

$$u + at_0 = \frac{bu-av}{b-a}$$

$$\Rightarrow bu - au + a\,(b-a)\,t_0 = bu - av.$$

$$\Rightarrow av - au = a\,(a-b)\,t_0.$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{v-u}{a-b}\,.$$

வேகம் u உடன் A ஐக் கடக்கும் பொருள் பயணத்தை முடிக்கும் போது அப்பொருளின் வேகம் w_0 எனின்,

$$a = \frac{w_0 - u}{2t_0}\,.$$

எனவே $w_0 = u + 2at_0$

$$= u + 2a\,\frac{v-u}{a-b}$$

$$= \frac{u\,(a-b) + 2a\,(v-u)}{(a-b)}$$

$$= \frac{2av - (a+b)\,u}{a-b}.$$

இலிருந்து $AB =$ அப்பொருள் சென்ற தூரம் ஆகையால்

$$AB = \frac{1}{2} \times (u + w_0) \times 2t_0$$

$$= \left[u + \frac{2av - (a+b)\,u}{a-b} \right] . \left(\frac{v-u}{a-b} \right)$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 .\, AB = (v-u)[(a-b)u + 2av - (a+b)u]$$
$$= (v-u)[2av - 2bu]$$
$$= 2\,(v-u)(av-bu).$$

அதாவது $(a-b)^2 .\, AB = 2\,(u-v)\,(ub-av).$

பயற்சி 3.1

பின்வரும் பிரசினங்கள் ஒவ்வொன்றையும் வேக - நேர வளையியை வரைந்து தீர்க்க.

1. ஒரு நேர்ப் பாதையில் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை ஒரு குறித்த கணத்தில் வேகம் $4\ \text{m s}^{-1}$ ஐ உடையது. அதற்கு 5 செக்கனுக்குப் பின்னர் அதன் வேகம் $16\ \text{m s}^{-1}$ ஆகும். துணிக்கையின் ஆர்முடுகலையும் இடப்பெயர்ச்சியையும் காண்க.

2. ஓர் ஒப்பமான தளத்தின் மீது இயங்கும் ஒரு சிறிய கோளம் வேகம் $300\ \text{m s}^{-1}$ உடன் நிலையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு கிடை மரக் குற்றியில் பட்டு அதனுள்ளே ஊடுருவுகின்றது. கோளத்தின் வேகம் சீராகக் குறையும் அதே வேளை 10 செக்கனுக்குப் பின்னர் கோளத்தின் வேகம் $50\ \text{m s}^{-1}$ ஆகும். கோளம் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு முன்னர் கோளம் மேலும் இயங்கும் தூரத்தைக் காண்க.

3. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் வேகம் 72 km h^{-1} உடன் செலுத்தப்படும் ஒரு புகையிரதம் ஒரு புகையிரத நிலையத்தில் நிற்பதற்காகத் தடுப்புகளைப் பிரயோகித்து, சீரான அமர்முடுகல் 4 m s^{-2} இன் கீழ் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. அது புகையிரத நிலையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும்போது தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்க வேண்டும்?
சீரான அமர்முடுகல் 2 m s^{-2} எனின், அது புகையிரத நிலையத்தைக் கடந்து எவ்வளவு தூரம் செல்ல வேண்டும்?

4. ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் சீரான அதே வேளை தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்கின்றமையால் ஒரு சீரான அமர்முடுகல் 0.2 m s^{-2} இன் கீழ் நேரம் 75 செக்கனுக்குப் பின்னர் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்கத் தொடங்கும்போது மோட்டர் வாகனத்தின் வேகத்தைத் துணிந்து தடுப்புகளைப் பிரயோகிப்பதன் கீழ் இயங்கும் தூரத்தையும் காண்க.

5. ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் சீரான ஆர்முடுகல் 0.25 m s^{-2} இன் கீழ் 2 நிமிடங்களுக்கு இயங்கி, ஒரு சீரான அமர்முடுகலின் கீழ் மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. இயங்கிய தூரம் 2.7 km எனின், மோட்டர் வாகனத்தின் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தையும் அமர்முடுகலையும் காண்க.

6. ஒரு புகையிரதம் ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி உயர்ந்தபட்ச வேகம் 90 km h^{-1} ஐப் பெறுகின்றது. அது இவ்வேகத்துடன் ஒரு குறித்த நேரத்திற்கு இயங்கி, பின்னர் ஒரு மாறா அமர்முடுகலின் கீழ் மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. புகையிரம் 3 நிமிடத்தில் 2500 m தூரம் இயங்கியது. ஆர்முடுகலும் அமர்முடுகலும் பருமனில் சமமெனின், அப்பருமனையும் புகையிரதம் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் சென்ற நேரத்தையும் இதற்கு ஒத்த தூரத்தையும் காண்க.

7. A, B, C என்பன $AB = 100 \text{ m}$ ஆகவும் $BC = 75 \text{ m}$ ஆகவும் இருக்குமாறு ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் உள்ள மூன்று இடங்கள் ஆகும். ஒரு மாறா ஆர்முடுகலுடன் செல்லும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு 6

செக்கனையும் B இலிருந்து C இற்குச் செல்வதற்கு 4 செக்கனையும் எடுக்கின்றது. வாகனத்தின் ஆர்முடுகலையும் A ஐக் கடக்கும் வேகத்தையும் காண்க.

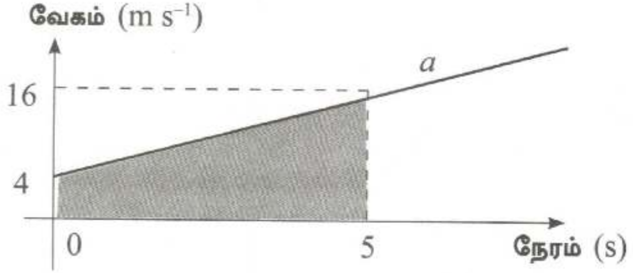
8. இரு சமாந்தர நேர்ப் பாதைகளில் இரு மோட்டர் வாகனங்கள் ஒரே திசையில் செல்கின்றன. இரு வாகனங்களும் ஓர் இடம் A ஐ ஒரே தடவை கடக்கும் அதே வேளை அப்போது ஒரு வாகனத்தின் வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உம் ஆர்முடுகல் $2a \text{ m s}^{-2}$ உம் மற்றைய வாகனத்தின் வேகம் $2u \text{ m s}^{-1}$ உம் ஆர்முடுகல் $a \text{ m s}^{-2}$ உம் ஆகும். இரு வாகனங்களும் மறுபடியும் ஒரே தடவையில் ஒரு குறித்த இடம் B ஐக் கடந்து செல்லுமெனின், அதற்காக எடுக்கும் நேரத்தையும் A இற்கும் B இற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தையும் a, u ஆகியவற்றின் சார்பில் பெறுக.

9. ஒரு புகையிரதம் ஒரு புகையிரத நிலையம் A இல் ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து ஒரு நேர்ப் பாதை வழியே சீரான ஆர்முடுகல் $a \text{ m s}^{-2}$ உடன் இயங்குகின்றது. அது ஒரு குறித்த வேகத்தைப் பெற்ற பின்னர் சீராக d m தூரம் ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரத்திற்குச் சமமான ஒரு நேரத்தில் இயங்கி ஒரு புகையிரத நிலையம் B ஐக் கடக்கின்றது. அது ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரத்தையும் A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

10. ஒரு நேர்ப் பாதையில் சீரான வேகம் $3u$ உடன் இயங்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓர் இடம் A இல் சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்குவதற்கு ஆரம்பித்து வாகனத்தின் வேகத்தை u ஆகக் குறைத்து அவ்வேகத்தை ஒரு குறித்த நேரத்திற்குப் பேணுகின்றது. அதன் பின்னர் அது ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி மறுபடியும் ஓர் இடம் B இல் வேகம் $3u$ ஐப் பெறுகின்றது. அது A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு நேரம் t_0 ஐ எடுத்தது. சீரான வேகத்துடன் வாகனம் இயங்கிய நேரம் $2t_0 - \frac{AB}{u}$ எனக் காட்டுக.

3.1 மாதிரித் தீர்வு

1. ஒரு நேர்ப் பாதையில் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை ஒரு குறித்த கணத்தில் வேகம் 4 m s^{-1} ஐ உடையது. அதற்கு 5 செக்கனுக்குப் பின்னர் அதன் வேகம் 16 m s^{-1} ஆகும். துணிக்கையின் ஆர்முடுகலையும் இடப்பெயர்ச்சியையும் காண்க.



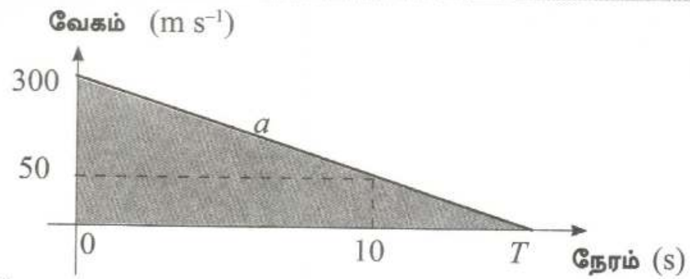
துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $a = \dfrac{16-4}{5-0} = \dfrac{12}{5} = 2.4 \text{ m s}^{-2}$.

இடப்பெயர்ச்சி s ஆனது வேக - நேர வளையியில் ஆயிடை $[0, 5]$ இற்கு மேலே உள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவு ஆகையால்

$$s = \frac{1}{2} \times [4+16] \times 5$$

$$= 50 \text{ m.}$$

2. ஓர் ஒப்பமான தளத்தின் மீது இயங்கும் ஒரு சிறிய கோளம் வேகம் 300 m s^{-1} உடன் நிலையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ள ஒரு மரக் குற்றியில் பட்டு அதனுள்ளே ஊடுருவுகின்றது. கோளத்தின் வேகம் சீராகக் குறையும் அதே வேளை 10 செக்கனுக்குப் பின்னர் கோளத்தின் வேகம் 50 m s^{-1} ஆகும். கோளம் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு முன்னர் கோளம் மேலும் இயங்கும் தூரத்தைக் காண்க.



ஆயிடை $[0, 10]$ இல் கோளத்தின் அமர்முடுகல்

$$\text{அமர்முடுகல்} \quad a = \frac{300 - 50}{10 - 0} = \frac{250}{10} = 25 \text{ m s}^{-2}.$$

கோளம் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு நேரம் T ஐ எடுக்கின்றதெனக் கொள்வோம். ஆயிடை $[0, T]$ இல் கோளத்தின் அமர்முடுகலைக் கருதும்போது

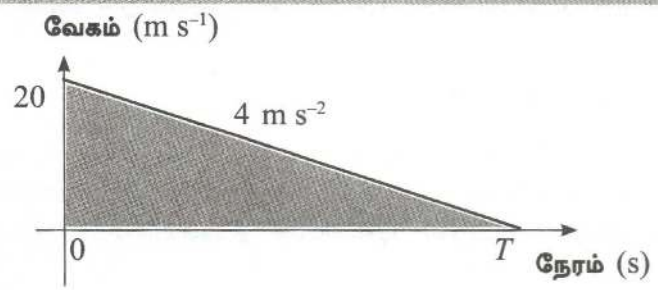
$$a = \frac{300 - 0}{T - 0} = \frac{300}{T}.$$

$$25 = \frac{300}{T}. \Rightarrow T = 12 \text{ செக்கன்}$$

ஓய்வுக்கு வருவதற்கு முன்னர் கோளம் மேலும் இயங்கும் தூரமானது வேக - நேர வளையியில் ஆயிடை $[10, T]$ இற்கு மேலே உள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவு ஆகையால்

$$\text{இயங்கும் தூரம்} = \frac{1}{2} \times [T - 10] \times 50$$
$$= [12 - 10] \times 25$$
$$= 50 \text{ m}.$$

3. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் வேகம் 72 km h^{-1} உடன் செலுத்தப்படும் ஒரு புகையிரதம் ஒரு புகையிரத நிலையத்தில் நிற்பதற்காகத் தடுப்புகளைப் பிரயோகித்து, சீரான அமர்முடுகல் 4 m s^{-2} இன் கீழ் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. அது புகையிரத நிலையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும்போது தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்க வேண்டும்?
சீரான அமர்முடுகல் 2 m s^{-2} எனின், அது புகையிரத நிலையத்தைக் கடந்து எவ்வளவு தூரம் செல்ல வேண்டும்?



$$72 \text{ km h}^{-1} = 72 \times \frac{1000}{60 \times 60} = 20 \text{ m s}^{-1}$$

புகையிரதம் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் T எனக் கொள்வோம்.

புகையிரதத்தின் அமர்முடுகல் $4 = \dfrac{20-0}{T-0} = \dfrac{20}{T}$.

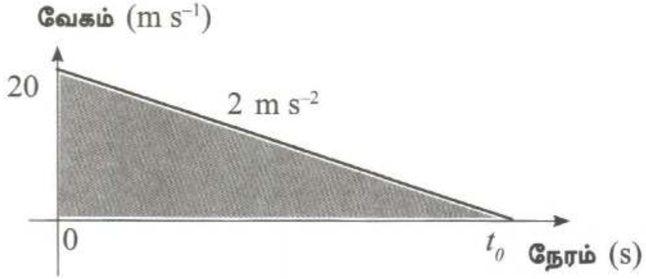
$$\Rightarrow T = 5 \text{ s.}$$

ஓய்வுக்கு வருவதற்கு முன்னர் புகையிரதம் இயங்கும் தூரம் வேக - நேர வளையியில் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவு ஆகையால்

அத்தூரம் $= \dfrac{1}{2} \times T \times 20 = 5 \times 10 = 50 \text{ m.}$

ஆகவே புகையிரத நிலையத்திலிருந்து 50 m தூரத்தில் தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்க வேண்டும்.

சீரான அமர்முடுகல் 2 m s^{-2} எனின்,



இப்போது புகையிரதம் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு நேரம் t_0 ஆகும்.

புகையிரதத்தின் அமர்முடுகலிலிருந்து $2 = \dfrac{20-0}{t_0 - 0} = \dfrac{20}{t_0}$

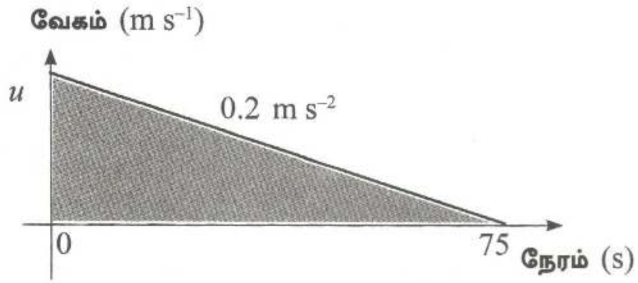
$\Rightarrow t_0 = 10 \text{ s.}$

ஓய்வுக்கு வருவதற்கு முன்னர் புகையிரதம் இயங்கும் தூரம் s எனின்,

$$s = \frac{1}{2} \times t_0 \times 20 = 10 \times 10 = 100 \text{ m.}$$

புகையிரதம் புகையிரத நிலையத்தைக் கடந்து செல்லும் தூரமானது s இற்கும் முதற் சந்தர்ப்பத்திற் சென்ற தூரத்திற்குமிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஆகும். எனவே புகையிரத நிலையத்தைக் கடந்து செல்லும் தூரம் $100 - 50 = 50 \text{ m.}$

4. ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் அதே வேளை தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்கின்றமையால் ஒரு சீரான அமர்முடுகல் $0.2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ இன் கீழ் நேரம் 75 செக்கனுக்குப் பின்னர் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்கத் தொடங்கும்போது மோட்டர் வாகனத்தின் வேகத்தைத் துணிந்து தடுப்புகளைப் பிரயோகிப்பதன் கீழ் இயங்கும் தூரத்தையும் காண்க.



மோட்டர் வாகனத்தின் தொடக்க வேகம் u எனக் கொள்வோம்.

அதன் சீரான அமர்முடுகல் $0.2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ ஆகையால்

$$0.2 = \frac{u-0}{75} = \frac{u}{75}\,.$$

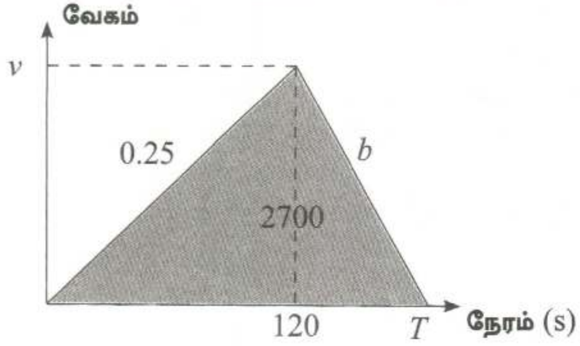
$$\Rightarrow u = 0.2 \times 75 = 15\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

$\therefore$ தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்கத் தொடங்கும்போது மோட்டர் வாகனத்தின் வேகம் $15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

தடுப்புகளைப் பிரயோகிப்பதன் கீழ் இயங்கிய தூரம் வேக - நேர வளையியில் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவு ஆகையால்

அத்தூரம் $s = \frac{1}{2} \times u \times 75 = \frac{1}{2} \times 15 \times 75 = 562.5\ \mathrm{m}$

5. ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் சீரான ஆர்முடுகல் $0.25\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ இன் கீழ் 2 நிமிடத்திற்கு இயங்கி, ஒரு சீரான அமர்முடுகலின் கீழ் மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. இயங்கிய தூரம் 2.7 km எனின், மோட்டர் வாகனத்தின் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தையும் அமர்முடுகலையும் காண்க.



வாகனம் இயங்கிய நேரம் T எனவும் அது பெற்ற உயர்ந்தபட்ச வேகம் v எனவும் அதன் அமர்முடுகல் b எனவும் கோள்வோம்.

மோட்டர் வாகனத்தின் ஆர்முடுகல் $0.25 = \dfrac{v-0}{120-0}$.

$$\Rightarrow v = 0.25 \times 120 = 30 \text{ m s}^{-1}.$$

$\therefore$ மோட்டர் வாகனத்தின் உயர்ந்தபட்ச வேகம் 30 m s^{-1}.

மோட்டர் வாகனத்தின் அமர்முடுகல்

$$b = \frac{v-0}{T-120}.$$

$$= \frac{30}{T-120}.$$

$$\Rightarrow T = \frac{30}{b} + 120.$$

அது சென்ற தூரம் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவுக்குச் சமம் ஆகையால் $2700 = \dfrac{1}{2} v \times T$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times \left(\frac{30}{b} + 120\right)$$

$$\Rightarrow 180 = \frac{30}{b} + 120.$$

$$\Rightarrow \frac{30}{b} = 60.$$

$$\Rightarrow b = 0.5 \text{ m s}^{-2}.$$

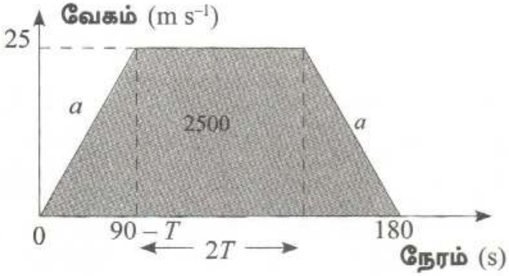
$\therefore$ மோட்டர் வாகனத்தின் அமர்முடுகல் 0.5 m s^{-2} ஆகும்.

6. ஒரு புகையிரதம் ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி உயர்ந்தபட்ச வேகம் 90 km h^{-1} ஐப் பெறுகின்றது. அது இவ்வேகத்துடன் ஒரு குறித்த நேரத்திற்கு இயங்கி, பின்னர் ஒரு மாறா அமர்முடுகலின் கீழ் மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. புகையிரம் 3 நிமிடத்தில் 2500 m தூரம் இயங்கியது. ஆர்முடுகலும் அமர்முடுகலும் பருமனில் சமமெனின், அப்பருமனையும் புகையிரதம் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் சென்ற நேரத்தையும் ஒத்த தூரத்தையும் காண்க.

புகையிரதத்தின் உயர்ந்தபட்ச வேகம் $90 \text{ km h}^{-1} = 90 \times \dfrac{1000}{60 \times 60}$

$= 25 \text{ m s}^{-1}$

உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் சென்ற நேரம் $2T$ எனவும் ஒத்த தூரம் d எனவும் கொள்வோம்.



புகையிரதம் சென்ற நேரம் 3 நிமிடம் $= 180$ செக்கன் ஆகும்.

ஆர்முடுகலும் அமர்முடுகலும் பருமனில் சமம் ஆகையால் ஆர்முடுகலுடன் சென்ற நேரமும் அமர்முடுகலுடன் சென்ற நேரமும் சமம்.

$\therefore$ ஆர்முடுகல் போன்று அமர்முடுகலுடன்

சென்ற நேரம் $\dfrac{180 - 2T}{2} = 90 - T$ செக்கன் வீதம் ஆகும்.

புகையிரதத்தின் ஆர்முடுகல் $a = \dfrac{25 - 0}{90 - T - 0}$.

$$\Rightarrow a = \frac{25}{90 - T} \cdot \quad \text{——— ①}$$

சென்ற மொத்தத் தூரம் வேக - நேர வளையியில் நிழற்றப்பட்டுள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவு ஆகையால்

$$2500 = \frac{1}{2} \times (2T + 180) \times 25.$$
$$\Rightarrow 2T + 180 = 200.$$
$$\therefore\ T = 10$$

$\therefore$ புகையிரதம் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் சென்ற நேரம் 20 செக்கன் ஆகும். ஒத்த தூரம் உரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு ஆகையால்

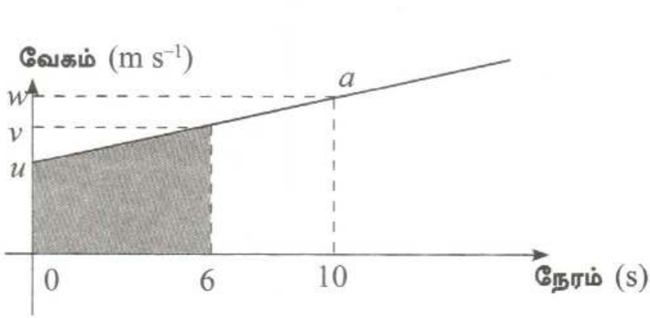
ஒத்த தூரம் $2T \times 25 = 2 \times 10 \times 25 = 500$ m.

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $a = \frac{25}{90 - 10}$. $\Rightarrow a = \frac{25}{80}$ m s^{-2}

ஆகவே ஆர்முடுகல் போன்று அமர்முடுகலின் பருமன் $\frac{25}{80}$ m s^{-2}

$$= \frac{5}{16} \text{ m s}^{-2}.$$

7. A, B, C என்பன AB =100 m ஆகவும் BC = 75 m ஆகவும் இருக்குமாறு ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் உள்ள மூன்று இடங்கள் ஆகும். ஒரு மாறா ஆர்முடுகலுடன் செல்லும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு 6 செக்கனையும் B இலிருந்து C இற்குச் செல்வதற்கு 4 செக்கனையும் எடுக்கின்றது. வாகனத்தின் ஆர்முடுகலையும் A ஐக் கடக்கும் வேகத்தையும் காண்க.



மோட்டர் வாகனத்தின் தொடக்க வேகம், அதாவது A இல் உள்ள வேகம் u எனக் கொள்வோம். மேலும் B, C ஆகிய இடங்களைக் கடக்கும்போது வேகங்கள் முறையே v, w எனக் கொள்வோம். A இலிருந்து B இற்கான ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$a = \frac{v-u}{6-0} = \frac{v-u}{6}$; இங்கு a ஆனது வாகனத்தின் சீரான ஆர்முடுகல் ஆகும்.

$$\Rightarrow v = u + 6a. \text{ ———— ①}$$

A இலிருந்து C இற்கான இயக்கத்திற்கு ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$a = \frac{w-u}{10-0} = \frac{w-u}{10}$$

$$\Rightarrow w = u + 10\,a. \text{ ———— ②}$$

$AB = 100$ m ஆகையால் $100 = \frac{1}{2} \times (v+u) \times 6.$

(ஒத்த சரிவகத்தின் பரப்பளவு)

$$\therefore 100 = \frac{1}{2} \times (u + 6a + u) \times 6.$$

$$\Rightarrow 3u + 9a = 50. \text{ ———— ③}$$

$BC = 75$ m ஆகையால் $75 = \frac{1}{2} \times (v + w) \times 4$

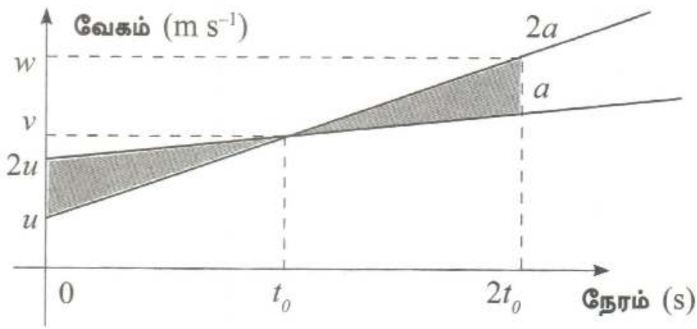
$$\therefore\ 75 = \frac{1}{2} \times (u + 6a + u + 10a) \times 4.$$

$$\Rightarrow 4u + 32a = 75. \text{ ———— ④}$$

③, ④ ஆகிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது $a = \frac{5}{12}\ \text{m s}^{-2}$, $u = \frac{185}{12}\ \text{m s}^{-1}$

எனவே வாகனத்தின் ஆர்முடுகல் $\frac{5}{12}\ \text{m s}^{-2}$ உம் A ஐக் கடக்கும் வேகம் $\frac{185}{12}\ \text{m s}^{-1}$ உம் ஆகும்.

8. இரு சமாந்தர நேர்ப் பாதைகளில் இரு மோட்டர் வாகனங்கள் ஒரே திசையில் செல்கின்றன. இரு வாகனங்களும் ஓர் இடம் A ஐ ஒரே தடவை கடக்கும் அதே வேளை அப்போது ஒரு வாகனத்தின் வேகம் u m s^{-1} உம் ஆர்முடுகல் $2a$ m s^{-2} உம் மற்றைய வாகனத்தின் வேகம் $2u$ m s^{-1} உம் ஆர்முடுகல் a m s^{-2} உம் ஆகும். இரு வாகனங்களும் மறுபடியும் ஒரே தடவையில் ஒரு குறித்த இடம் B ஐக் கடந்து செல்லுமெனின், அதற்காக எடுக்கும் நேரத்தையும் A இற்கும் B இற்கும் இடையே உள்ள தூரத்தையும் a, u ஆகியவற்றின் சார்பில் பெறுக.



இரு வாகனங்களும் மறுபடியும் ஒரே தடவை இடம் B ஐக் கடக்கும்போது நேரம் $2t_0$ எனக் கொள்வோம். இரு மோட்டர் வாகனங்களும் இப்போது சம தூரம் சென்றிருப்பதனால் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணிகள் பரப்பளவில் சமம். அவை இயல்பொத்த முக்கோணிகள் ஆகையால் ஒருங்கிசை முக்கோணிகள் ஆகும். எனவே இரு வாகனங்களினதும் வேகங்கள் சமமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில், அதாவது வேக - நேர வளையிகளின் வெட்டுப் புள்ளியின் ஒத்த நேரம் t_0 ஆகும்.

இரு வாகனங்களினதும் ஆர்முடுகல்களைக் கருதும்போது

$$\frac{v-2u}{t_0}=a\,,\ \frac{v-u}{t_0}=2a\,;$$

இங்கு v ஆனது நேரம் t_0 ஆக இருக்கும்போது இரு வாகனங்களினதும் பொது வேகம் ஆகும்.

$$\Rightarrow \frac{v-u}{t_0}=2\times\ \frac{v-2u}{t_0}.$$

$$\Rightarrow v - u = 2v - 4u.$$
$$\Rightarrow v = 3u.$$

முதலாவது ஆர்முடுகற் சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{3u-2u}{t_o} = a$ ஆகையால்

$t_o = \frac{u}{a}$.

ஆகவே இயக்கத்துக்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{2u}{a}$ ஆகும்.

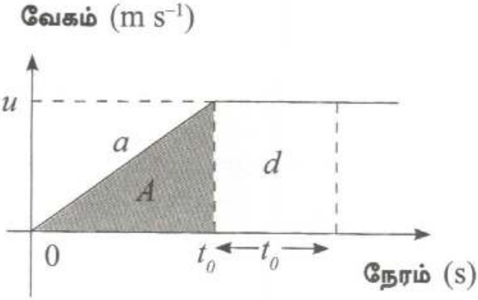
ஆர்முடுகல் $2a$ உடன் இயங்கிய வாகனத்தின் இறுதி வேகம் w எனின், ஆயிடை $[0, 2t_0]$ இல் அதன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$\frac{w-u}{2t_o} = 2a.$$
$$\Rightarrow w = u + 4at_0.$$
$$\therefore w = u + 4a \times \frac{u}{a} = 5u.$$

இதற்கேற்ப A, B ஆகிய இரு இடங்களுக்குமிடையே உள்ள வெளியானது ஒரு வாகனத்தின் இடப்பெயர்ச்சிக்குச் சமமாகையால்

$$AB = \frac{1}{2} \times (u + w) \times 2t_0$$
$$= \frac{1}{2} \times (u + 5u) \times 2 \times \frac{u}{a}$$
$$= \frac{6u^2}{a}.$$

9. ஒரு புகையிரதம் ஒரு புகையிரத நிலையம் A இல் ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து ஒரு நேர்ப் பாதை வழியே சீரான ஆர்முடுகல் a m s^{-2} உடன் இயங்குகின்றது. அது ஒரு குறித்த வேகத்தைப் பெற்ற பின்னர் சீராக d m தூரம் ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரத்திற்குச் சமமான ஒரு நேரத்தில் இயங்கி ஒரு புகையிரத நிலையம் B ஐக் கடக்கின்றது. அது ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரத்தையும் A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.



ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரம் t_o எனவும் பெற்ற உயர்ந்தபட்ச வேகம் u எனவும் கொள்வோம்.

இயக்கத்துக்கான ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{u-0}{t_o-0}$. $\Rightarrow t_o = \dfrac{u}{a}$.

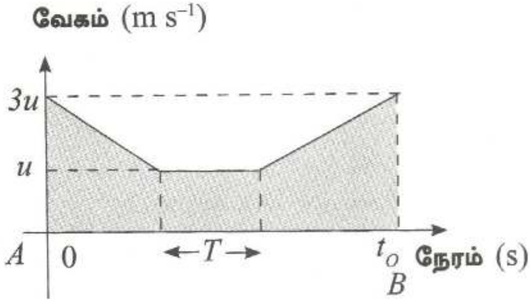
ஆர்முடுகலின் கீழ்ச் சென்ற தூரம் நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவுக்குச் சமம். மேலும் அப்பரப்பளவு ஆயிடை $[0, t_o]$ இற்கு மேலே உள்ள செவ்வகத்தின் பரப்பளவில் அரைவாசியாகும். மேலும் சீரான வேகத்தில் சென்ற தூரத்தை ஒத்த செவ்வகமும் இப்பரப்பளவையே உடையதாகும். $2A = d$. சீரான வேகத்துடன் சென்ற தூரம் d ஆகையால் $\Rightarrow ut_0 = d$.

$$\Rightarrow t_o = \frac{d}{u}. \text{ எனவே } \frac{d}{u} = \frac{u}{a}. \Rightarrow u = \sqrt{ad}$$

ஆகவே ஆர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரம் $t_0 = \dfrac{\sqrt{ad}}{a} = \sqrt{\dfrac{d}{a}}$.

A இலிருந்து B இற்கு உள்ள தூரம் $A + d = \dfrac{1}{2}d + d = \dfrac{3}{2}d$.

10. ஒரு நேர்ப் பாதையில் சீரான வேகம் $3u$ உடன் இயங்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓர் இடம் A இல் சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்குவதற்கு ஆரம்பித்து வாகனத்தின் வேகத்தை u ஆகக் குறைத்து அவ்வேகத்தை ஒரு குறித்த நேரத்திற்குப் பேணுகின்றது. அதன் பின்னர் அது ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி மறுபடியும் ஓர் இடம் B இல் வேகம் $3u$ ஐப் பெறுகின்றது. அது A இலிருந்து B இற்குச் செல்வதற்கு நேரம் t_0 ஐ எடுத்தது. சீரான வேகத்துடன் வாகனம் இயங்கிய நேரம் $2t_0 - \dfrac{AB}{u}$ எனக் காட்டுக.



சீரான வேகத்துடன் வாகனம் இயங்கிய நேரம் T எனக் கொள்வோம்.

மோட்டர் வாகனம் சென்ற தூரம் AB ஆனது வரைபில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவுக்குச் சமம். மேலும் அப்பரப்பளவானது பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவிலிருந்து மேலே உள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கழித்துப் பெறப்படும் பரப்பளவுக்குச் சமம்.

ஆகவே $AB \quad = 3u \times t_o - \dfrac{1}{2} \times (T + t_o) \times (3u - u)$

$$= 3u \times t_o - \frac{1}{2} \times (T + t_o) \times 2u$$

$$= 3ut_0 - (T + t_0)\, u$$
$$= 2ut_0 - uT.$$

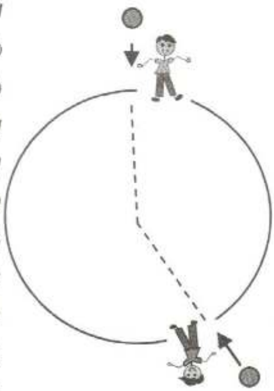
$\Rightarrow uT = 2ut_0 - AB$ ஆகையால் $T = 2t_0 - \dfrac{AB}{u}$.

வாகனம் சீரான வேகத்துடன் இயங்கிய நேரம் $2t_0 - \dfrac{AB}{u}$.

3.4 புவியீர்ப்பின் கீழ் உள்ள நிலைக்குத்து இயக்கம்

பொருள்களின் திணிவு காரணமாக அவை ஒன்றையொன்று கவருகின்றன. திணிவு கூடிய ஒரு பொருளை நோக்கித் திணிவு குறைந்த ஒரு பொருளைக் கவர்வதற்கான நாட்டம் உள்ளது. இங்கு பொருளை நோக்கிக் கவருதல் என்பதன் கருத்து பொருளின் அகணியை நோக்கிக் கவர்தலாகும். நாம் கருதும் பொருள்களிடையே புவி திணிவு கூடிய பொருள் ஆகும். இங்கு வளி காரணமாக இயக்கத்திற்கு உள்ள தடை, ஏற்றங்கள் போன்று காந்த விசைகள் காரணமாக உண்டாகும் கவர்ச்சி, தள்ளுகை விசைகள் என்பன

பற்றிக் கவனஞ் செலுத்தமாட்டோம். ஆகவே எல்லாச் சிறிய பொருள்களும் புவியின் அகணியை நோக்கிக் கவரப்படுகின்றன எனக் கருதுவோம். அப்போது அவை ஒரே விதமாக மாறா ஆர்முடுகலுடன் புவியின் அகணியை நோக்கிக் கவரப்படுகின்றன எனவும் கருதுவோம்.



விண்வெளிக்குச் சென்று புவியைப் பார்த்தால் அது எமக்குத் தோன்றும் விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. நாம் புவியில் எவ்விடத்தில் இருந்தாலும் எமது இரு பாதங்களும் புவியின் மேற்பரப்பு மீது இருக்கும் அதே வேளை தலை புவியின் அகணியில் இருந்து அப்பாலும் இருக்கும். மேலும் ஒரு பொருள் புவியை நோக்கிக் கவரப்படுதலை ஒரு கிட்டிய புள்ளியிலிருந்து அவதானித்தால் அது நாம் அறிந்தவாறு நிலைக்குத்தாக விழுவதைக் காணலாம். எனினும் உண்மையில் அது புவியின் அகணியை நோக்கிக் கவரப்படுகின்றது.

இக்கவர்ச்சி காரணமாகத் துணிக்கை அல்லது பொருள் இயங்கும் திசையில் ஒரு விசை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. இதனால் அது ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகின்றது. புவியின் எல்லா இடங்களிலும் இந்த ஆர்முடுகல் ஒரு மாறாக் காவியாகக் கருதப்படும் அதே வேளை இது **புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல்** எனப்படும். அதற்காக g பயன்படுத்தப்படும் என்பதையும் அதன் பெறுமானம் அண்ணளவாக 10 m s^{-2} என்பதையும் அதற்கு மிகவும் அண்ணளவான பெறுமானமாக 9.8 m s^{-2} எடுக்கப்படுகின்றது என்பதையும் இப்போது நீங்கள் அறிவீர்கள்.

பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது இப்பெறுமானம் g இற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களில் பெறுமானம் பிரசினத்துடன் தரப்படுகின்றது. இப்பெறுமானம் தரப்படாவிட்டால் g ஐக் கொண்டு தீர்வுகளை முன்வைக்கலாம். பிரசினங்களைத் தீர்க்கும்போது பெறும் அனுபவங்கள் இதற்கு மிகவும் முக்கியமானவை.

இத்தகைய பிரசினங்களைச் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் துணிக்கைகளாக அல்லது பொருள்களாகக் கருதி அதனைத் தீர்க்கத்தக்கதாக இருத்தல் வேறொரு முக்கிய விடயமாகும்.

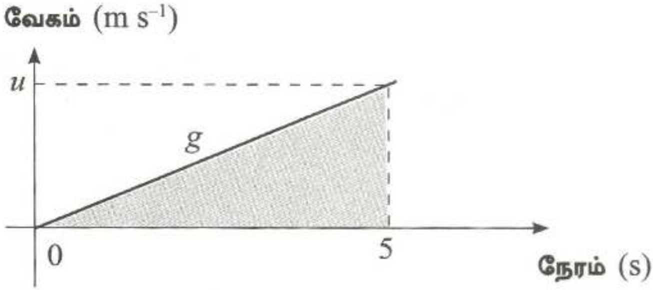
உதாரணம் 3.11

ஓர் உயரமான இடத்திலிருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படும் ஒரு கல் 5 செக்கனுக்குப் பின்னர் நிலத்தில் படுகின்றது. கல்லின் இயக்கத்திற்கு ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைந்து கல் தொடக்கத்தில் இருந்த உயரத்தைக் காண்க.

இங்கு $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ எனக் கருதுக.

தீர்வு

கல்லின் இயக்கத்துக்கான வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



இங்கு கல் 5 செக்கனுக்குப் பின்னர் நிலத்தில் படும்போது அதன் வேகம் u எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

இயக்கத்துக்கான ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $g = \dfrac{u-0}{5-0}$.

$\Rightarrow u = 5g = 50.$

கல் தொடக்கத்தில் இருந்த உயரம் = கல் சென்ற தூரம்

= நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times 5u$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 50$$

$$= 125 \text{ m}.$$

உதாரணம் 3.12

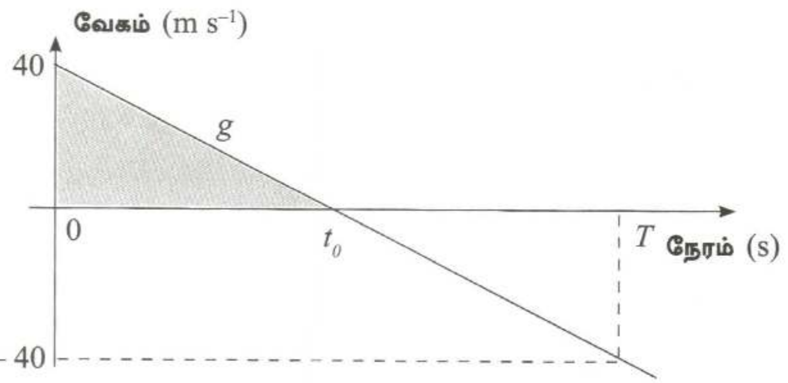
ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை வேகம் 40 m s^{-1} உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. துணிக்கையின் இயக்கத்துக்கு ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைந்து, அது செல்லும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தையும் மறுபடியும் அது புள்ளி O இற்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

அது செல்லும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தில் அரைவாசி புள்ளி O இன் மட்டத்திற்கு மேலே இருக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

இங்கு $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ எனக் கொள்க.

தீர்வு

துணிக்கையின் இயக்கத்துக்கான வேக-நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



நேரம் t_0 ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகம் பூச்சியம் என்பதை அவதானிக்க. அது உயர்ந்தபட்ச உயரத்தை ஒத்தது. அதன் பின்னர் துணிக்கை ஓய்விலிருந்து புவியீர்ப்பினாலான அமர்முடுகல் தாக்கும் திசைக்கு எதிரான திசையில், ஆகவே சீரான அமர்முடுகல் $-g$ இன் கீழ் மறுபடியும் புள்ளி O இற்கு வருகின்றது. இங்கு முன்னர் இருந்த இயக்கம் மற்றைய திசையில் நடைபெறுகின்றது. எனவே $T = 2t_o$.

மேலும் நேர அச்சுக்குக் கீழே என்பது மறை வேகம் ஆகும். துணிக்கை கீழ்நோக்கிய திசையில் இயங்குகின்றது என்பது அதன் கருத்தாகும். இத்தகைய பிரசினங்களில் வேகத்தின் நேர்த் திசை போன்று எதிர்த் திசையிலும் துணிக்கை இயங்குகின்றமையால் ஒரு வழக்காக ஒரு திசை நேரானதாகக் கருதப்படும்.

நேர ஆயிடை $[0, t_0]$ இற்கு ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$g = \frac{40 - 0}{t_0 - 0}.$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{40}{g} = \frac{40}{10} = 4.$$

துணிக்கை செல்லும் உயர்ந்தபட்ச உயரம்

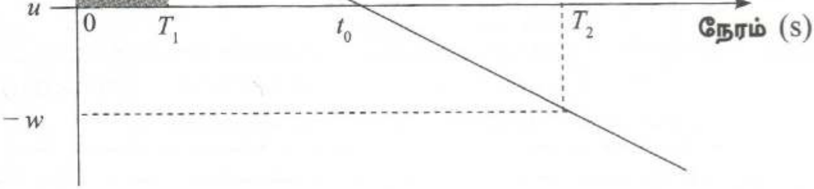
= நிழற்றப்பட்டுள்ள முக்கோணியின் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times t_0$$

$$= 20 \times 4$$

$$= 80 \text{ m}.$$

வேக - நேர வளையியைப் பார்க்க. நேர அச்சுடன் தொடர்புபட்ட இரு முக்கோணிகள் இருக்கும் அதே வேளை அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் சமாந்தரம் ஆகையால் அவை இயல்பொத்தனவாகும். மேலும் $T = 2.\ t_0$ ஆகையால் நேர அச்சுடன் தொடர்புபட்ட பக்கங்கள் நீளத்தில் சமமாகும். அதற்கேற்ப அம்முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவனவாகும். ஆகவே துணிக்கை மறுபடியும் புள்ளி O இற்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் உயர்ந்தபட்ச உயரத்திற்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தின் இருமடங்கு ஆகையால் அந்நேரம் 8 செக்கன் ஆகும்.



துணிக்கை மேலே செல்லும்போதும் கீழே வரும்போதும் இரு தடவை செல்லும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தின் அரைவாசியான புள்ளியில் இருக்கின்றது.

அதற்கு உரிய நேரங்கள் முறையே T_1, T_2 என வேக - நேர வளையியில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை செல்லும் உயர்ந்தபட்ச உயரம் 80 m ஆகையால் 40 m உயரத்தை ஒத்த நேரங்கள் முறையே T_1, T_2 ஆகும். நேரம் T_1 இற்கு வேகம் w எனக் கொள்வோம்.

நேர ஆயிடை $[0, T_1]$ இற்கு ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$10 = \frac{40 - w}{T_1 - 0}.$$

$$\Rightarrow w = 40 - 10\,T_1.$$

இப்போது நிழற்றப்பட்டுள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவு துணிக்கை சென்ற உயரத்திற்குச் சமம் ஆகையால்

$$40 = \frac{1}{2} \times (40 + w) \times T_1.$$

$$\Rightarrow 80 = (40 + w) \times T_1.$$

மேலே கிடைத்த கோவையில் w இற்குப் பிரதியிடும்போது

$$80 = (40 + 40 - 10T_1) \times T_1.$$

$$\Rightarrow 8 = (8 - T_1) \times T_1.$$

$$\Rightarrow T_1^2 - 8T_1 + 8 = 0.$$

$$\Rightarrow T_1^2 - 8T_1 + 16 = 8.$$

$$\Rightarrow (T_1 - 4)^2 = (2\sqrt{2})^2.$$

$$\Rightarrow T_1 - 4 = \pm 2\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow T_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ அல்லது $\Rightarrow T_1 = 4 - 2\sqrt{2}$

துணிக்கை செல்லும் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தின் அரைவாசி புள்ளி O இன் மட்டத்திற்கு மேலே இருக்கும் நேரங்கள் $4 + 2\sqrt{2}$ செக்கனும் $4 - 2\sqrt{2}$ செக்கனும் ஆகும்.

குறிப்பு : மேலே இடம்பெறும் சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு இருபடிக் கோவையையும் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம் 3.13

ஒரு புள்ளி O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேலே எறியப்படும் ஒரு துணிக்கை உயர்ந்தபட்ச உயரத்திற்குச் செல்வதற்கு 10 செக்கன் நேரத்தை எடுக்கின்றது. $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ எனக் கொண்டு ஒரு வேக - நேர வளையியைப் பயன்படுத்தித் தொடக்க வேகத்தைக்

காண்க. நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிய இயக்கத்தில் இறுதிச் செக்கனில் துணிக்கை எழும் உயரம் ஏறத்தாழ 5 m எனவும் காட்டுக.

துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் u எனக் கொள்வோம்.
இயக்கத்துக்கு ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $g = \dfrac{u-0}{10-0}$.

$$\Rightarrow u = 10 \times g = 10 \times 9.8 = 98 \text{ m s}^{-1}.$$

ஆகவே துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் 98 m s^{-1} ஆகும்.

இறுதிச் செக்கன் என்பது $t = 9$ s தொடக்கம் $t = 10$ s வரையுள்ள நேரம் ஆகும். இங்கு சென்ற தூரம் ஆயிடை [9, 10] இற்கு மேலே உள்ள வேக - நேர வளையியின் ஒத்த முக்கோணியிலிருந்து பெறத்தக்கதாகும்.

முதலில் $T = 9$ s இல் துணிக்கையின் வேகம் v ஐக் காண்போம்.
ஆயிடை [9, 10] இல் இயக்கத்துக்கு ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$g = \frac{v-0}{10-9}.$$

$$\Rightarrow v = g = 9.8 \text{ m s}^{-1}.$$

இறுதிச் செக்கனில் துணிக்கை எழும் உயரம் $= \dfrac{1}{2} \times v \times 1$

$$= \frac{1}{2} \times 9.8$$

$$= 4.9 \text{ m}$$

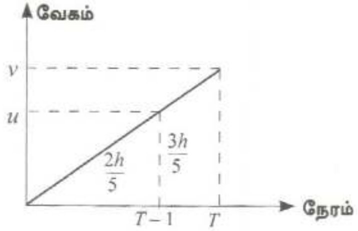
இறுதிச் செக்கனில் துணிக்கை எழும் உயரம் அண்ணளவாக 5 m ஆகும்.

உதாரணம் 3.14

ஓய்விலிருந்து விழும் ஒரு மழைத் துளி அதன் இயக்கத்தின் இறுதிச் செக்கனில் அது சென்ற மொத்தத் தூரத்தில் $\dfrac{3}{5}$ ஆன தூரம் செல்லுமெனின், மழைத் துளி சென்ற மொத்தத் தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

மழைத் துளி புவியீர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருந்து விழத் தொடங்கு கின்றது. இதற்கான வேக - நேர வரைபு கீழே உள்ளவாறாகும்.



மழைத் துளி சென்ற தூரம் h எனவும் அதற்கான நேரம் T செக்கன் எனவும் கொள்வோம். இப்போது $T-1$ இலிருந்து T வரையுள்ள நேரத்தில் அது $\frac{3h}{5}$ தூரம் சென்றுள்ளது. புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் g ஐக் கருதும்போது

ஆயிடை $[0, T-1]$ இல் $g = \dfrac{u-0}{T-1-0}. \Rightarrow u = gT - g$

ஆயிடை $[0, T]$ இல் $g = \dfrac{v-0}{T-0}. \Rightarrow v = gT$.

$T-1$ தொடக்கம் T வரையுள்ள நேரத்தில் அது சென்ற தூரத்தைக் கருதும்போது

$$\frac{3h}{5} = \frac{1}{2}(u+v) \times 1$$
$$= \frac{1}{2} \times (gT - g + gT).$$

$$\Rightarrow \frac{6h}{5} = 2gT - g. \text{ ——— } ①$$

அது சென்ற மொத்தத் தூரத்தைக் கருதும்போது

$$h = \frac{1}{2} \times v \times T$$
$$= \frac{1}{2} gT \times T.$$
$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} gT^2 .$$

சமன்பாடு (1) இல் h இற்குப் பிரதியிடும்போது
$\frac{6}{5} \times \frac{1}{2} gT^2 = 2gT - g.$

$$\therefore \frac{3}{5}T^2 = 2T - 1.$$

$$\Rightarrow 3T^2 - 10\,T + 5 = 0.$$

$$\Rightarrow T = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 3 \times 5}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{40}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}$$

மேலும் $\sqrt{10} \approx 3.162$ ஆகையால் $\frac{5 - \sqrt{10}}{3} \approx \frac{5 - 3.162}{3}$

$$= \frac{5 - 3.162}{3}$$

$$= 0.612 < 1\ .$$

சென்ற நேரம் ஒரு செக்கனிலும் பார்க்கக் குறைந்ததாகும். எனவே அவ்விடையை ஏற்றுக்கொள்ள முடியாது.

ஆகவே $\Rightarrow T = \frac{5 + \sqrt{10}}{3}$.

சமன்பாடு ① இலிருந்து $\frac{6h}{5} = 2g \times \frac{5 + \sqrt{10}}{3} - g$

$$= \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}\, g.$$

$$\Rightarrow h = \frac{5}{18}\,(7 + 2\sqrt{10})\, g.$$

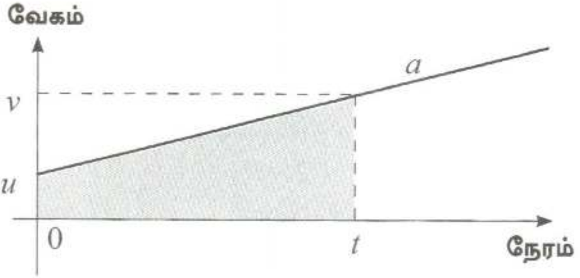
அதாவது இதற்கேற்ப மழைத் துளி சென்ற மொத்தத் தூரம்

$$\frac{5}{18}\,(7 + 2\sqrt{10})\, g.$$

3.5 இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகள்

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடனும் தொடக்க வேகம் u உடனும் இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் t இற்குப் பின்னர் இடப்பெயர்ச்சி s ஐக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை வேகம் v ஐ அடைகின்றது. அப்போது துணிக்கையின்

வேக - நேர வளையி பின்வருமாறாகும்.



துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி – நேர வளையியில் ஒத்த தூரம் பரப்பளவிலிருந்து கிடைக்கின்றமையால்

$$s = \frac{1}{2} \times \ u + v \ \times t. \Rightarrow 2s = \ u + v \ t.$$

மேலும் பின்வருவன உண்மையானவையென உதாரணம் 3.7 இல் நிறுவப்பட்டுள்ளது (பக். 347).

$$v = u + at$$
$$s = ut + \frac{1}{2}\, at^2.$$
$$v^2 = u^2 + 2as.$$

இச்சமன்பாடுகள் **இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகள்** எனப்படும். இடப்பெயர்ச்சி - நேர வளையிகளையும் வேக - நேர வளையிகளையும் வரையாமல் இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து உகந்தவற்றைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் பிரசினங்களைத் தீர்க்கலாம். சில சந்தர்ப்பங்களில் இயக்கச் சமன்பாடுகள் என்னும் பெயரும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

$$v = u + at.$$
$$s = ut + \frac{1}{2}\, at^2$$
$$v^2 = u^2 + 2as.$$

இச்சமன்பாடுகளை மேற்குறித்தவாறு வேக - நேர வளையிகளைக் கொண்டும் நுண்கணிதம் பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்ற பின்னர் அதனைக் கொண்டும் பெறலாம்.

உதாரணம் 3.15

சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்லும் ஒரு மோட்டர்க் கார் வேகம் $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ உடன் ஒரு கிலோமீற்றர் தூணைக் கடக்கின்றது. அடுத்த கிலோமீற்றர் தூணைக் கடப்பதற்கு 50 செக்கன் எடுக்குமெனின், வாகனம் அக்கிலோமீற்றர் தூணைக் கடக்கும் வேகத்தைக் காண்க.

வாகனத்தின் வேகம் $45\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ ஆக இருக்கும்போது தொடக்கத்திலிருந்து அது சென்றுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

வேகம் $15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ உடன் ஒரு கிலோமீற்றர் தூணைக் கடக்கும் வாகனம் அடுத்த கிலோமீற்றர் தூணைக் கடப்பதற்கு 50 செக்கன் எடுக்கின்றமையால் $u = 15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, $s = 1000\ \mathrm{m}$, $t=50\ \mathrm{s}$ ஆகவே

சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது

$$1000=15\times 50 + \frac{1}{2}a\times 50^2.$$
$$\Rightarrow a=\frac{1}{5}\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

இப்போது சமன்பாடு $v=u+at$ இல் $u=15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, $a=\frac{1}{5}\ \mathrm{m\ s^{-2}}$, $t=50\ \mathrm{s}$ என இடும்போது

$v=15+\frac{1}{5}\times 50= 25\ \mathrm{m\ s^{-1}}.$

வாகனம் அடுத்த கிலோமீற்றர் தூணைக் கடக்கும் வேகம் $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆகும். வாகனத்தின் வேகம் $45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆக இருக்கும்போது மறுபடியும் சமன்பாடு $v=u+at$ இல் $u=15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, $a=\frac{1}{5}\ \mathrm{m\ s^{-2}}$, $v=45\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ என இடும்போது $45=15+\frac{1}{5}\times t. \Rightarrow t=150\mathrm{s}.$

$u=15\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, $a=\frac{1}{5}\ \mathrm{m\ s^{-2}}$, $t=150\,\mathrm{s}$ எனச் சமன்பாடு $s=ut+\frac{1}{2}at^2$ இல் இடும்போது

$$s=15\times 150+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times 150^2.$$
$$\Rightarrow s= 4500\ \mathrm{m}$$
$$= 4.5\ \mathrm{km}.$$

வாகனத்தின் வேகம் $45\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ ஆக இருக்கும்போது தொடக்கத்திலிருந்து அது சென்றுள்ள தூரம் $4.5\ \mathrm{km}$ ஆகும்.

உதாரணம் 3.16

ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு பொருள் தொடக்கத்திலிருந்து $t = 20$ s ஆகவும் $t = 50$ s ஆகவும் இருக்கும்போது முறையே 750 m, 1500 m இடப்பெயர்ச்சியைக் காட்டுகின்றது. பொருளின் அமர்முடுகலையும் $t = 50$ s ஆக இருக்கும்போது பொருளின் வேகத்தையும் தொடக்கத்திலிருந்து பொருள் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

தீர்வு :

முதலில் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐக் கருதுவோம்.

தொடக்கத்திலிருந்து $t = 20$ s ஆக இருக்கும்போது 750 m இடப்பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருப்பதனால்

$$750 = u \times 20 + \frac{1}{2} \times a \times 20^2.$$

$$\Rightarrow 2u + 20\,a = 75. \text{ ———— } ①$$

இங்கு u, a ஆகியன முறையே பொருளின் தொடக்க வேகமும் ஆர்முடுகலும் ஆகும். இங்கு ஓர் அமர்முடுகல் இருக்கின்றமையால் a இன் பெறுமானம் மறையாக இருத்தல் வேண்டும்.

தொடக்கத்திலிருந்து $t = 50$ s ஆக இருக்கும்போது 1500 m இடப்பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருப்பதனால்

$$1500 = u \times 50 + \frac{1}{2} \times a \times 50^2.$$

$$\Rightarrow u + 25\,a = 30 \text{ ———— } ②$$

$① - 2 \times ②; -30a = 15. \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$. ஆகவே பொருளின் அமர்முடுகல் $\frac{1}{2}$ m s^{-2} ஆகும். மேலும் $\Rightarrow u = 42.5$ m s^{-2}.

$t = 50$ s ஆக இருக்கும்போது பொருளின் வேகத்தைக் காண்பதற்குச் சமன்பாடு $v = u + at$ இல் $u = 42.5$ m s^{-1}, $a = -\frac{1}{2}$ m s^{-2}, $t = 50$ s என இடும்போது $v = 42.5 - \frac{1}{2} \times 50 = 17.5$ m s^{-1}.

$\Rightarrow t = 50$ s ஆக இருக்கும்போது பொருளின் வேகம் 17.5 m s^{-1} ஆகும்.

தொடக்கத்திலிருந்து பொருள் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்பதற்குச் சமன்பாடு $v = u + at$ இல் $u = 42.5 \text{ m s}^{-1}$, $a = -\frac{1}{2} \text{ m s}^{-2}$, $v = 0 \text{ m s}^{-1}$ என இடும்போது $0 = 42.5 - \frac{1}{2} \times t \Rightarrow t = 85 \text{ s}$

தொடக்கத்திலிருந்து பொருள் ஓய்வுக்கு வருவதற்கு 85 செக்கன் எடுக்கின்றது.

உதாரணம் 3.17

ஒரு பொருள் O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படும் ஒரு துணிக்கை புள்ளி O இற்கு நிலைக்குத்தாக உயரம் H இல் இருக்கும் ஒரு புள்ளியைக் கடந்து மேலே செல்வதற்கும் கீழே வருவதற்கும் எடுக்கும் நேரங்கள் முறையே T_1, T_2 ஆகும். எறியப்பட்டு நேரம் $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கையின் வேகத்தைக் கண்டு $g\,T_1\,T_2 = 2H$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

முதலில் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐக் கருதுவோம். புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்குகின்றமையால் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிய திசையில் அமர்முடுகல் g ஆகின்றது. ஆகவே இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகளில் $a = -g$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

தொடக்கத்திலிருந்து $t = T_1$ ஆக இருக்கும்போது இடப்பெயர்ச்சி H ஆகக் காணப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் u என எடுக்கும்போது

$$H = u \times T_1 - \frac{1}{2} \times g \times T_1^2.$$

$$\Rightarrow gT_1^2 - 2uT_1 + 2H = 0. \text{ ——— } ①$$

$t = T_2$ ஆக இருக்கும்போது இடப்பெயர்ச்சி H ஆகையால்,

$$\Rightarrow gT_2^2 - 2uT_2 + 2H = 0 \text{ ——— } ②$$

எனவே T_1, T_2 ஆகியன இருபடிச் சமன்பாடு $gt^2 - 2ut + 2H = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன. அதாவது T_1, T_2 ஆகியன அச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$\Rightarrow gt^2 - 2ut + 2H = g(t - T_1)(t - T_2)$ ——— ③

நேரம் $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கையின் வேகத்தைக் காண்பதற்கு;

சமன்பாடு $v = u + at$ இல் $t = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ எனக் கொள்ளும்போது $v_o = u - g \times \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$. இங்கு v_0 ஆனது இப்போது வேகம் ஆகும்.

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளினதும் வித்தியாசத்திலிருந்து

$g(T_1^2 - T_2^2) - 2u(T_1 - T_2) = 0.$

$\Rightarrow g(T_1 - T_2)(T_1 + T_2) - 2u(T_1 - T_2) = 0.$

$(T_1 - T_2)[g(T_1 + T_2) - 2u = 0]$

இங்கு T_1, T_2 ஆகிய நேரங்கள் வேறுவேறானவை ஆகையால் $T_1 - T_2 \neq 0$. ஆகவே மேற்குறித்த சமன்பாட்டிலிருந்து $g(T_1 + T_2) - 2u = 0$ எனக் கிடைக்கின்றது.

அதாவது $u - \frac{1}{2}g(T_1 + T_2) = 0$.

எனவே $v_0 = 0$. அதற்கேற்ப நேரம் $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகம் பூச்சியமாகும். அதாவது துணிக்கை கணநிலை ஓய்வில் உள்ளது.

சமன்பாடு ③ இலிருந்து

$$gt^2 - 2ut + 2H = g(t - T_1)(t - T_2)$$
$$= gt^2 - g(T_1 + T_2)t + gT_1 T_2$$

இங்கு இரு பக்கங்களிலும் ஒத்த உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமம் ஆகையால் t உள்ள உறுப்பைக் கருதும்போது $-2u = -g(T_1 + T_2)$.

$$\Rightarrow u - \frac{1}{2}g(T_1 + T_2) = 0.$$

இத்தொடர்புடைமை வேறு விதத்தில் மேலேயும் பெறப்பட்டுள்ளது. மாறா உறுப்பைக் கருதும்போது $2H = g T_1 T_2$.

உதாரணம் 3.18

ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் உயர்த்தி கீழ்நோக்கிச் செல்லும் பயணத்தின் முதற் பகுதியில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடனும் எஞ்சிய பகுதியில் அமர்முடுகல் $2a$ உடனும் செல்கின்றது. சுரங்கத்தின் ஆழம் h ஆகவும் உயர்த்தி இறங்குவதற்கு எடுக்கும் நேரம் T ஆகவும் இருப்பின்,

$T=\sqrt{\dfrac{3h}{a}}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

உயர்த்தி கீழ்நோக்கிச் செல்லும் பயணத்தில் முதற் பகுதியில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் சென்று அது பெறும் உயர்ந்தபட்ச வேகம் u எனக் கொள்வோம். மேலும் அது நேரம் t_0 இற்கு ஆர்முடுகலுடன் சென்றது எனவும் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$u = 0 + at_0. \Rightarrow u = at_0. \quad \text{———} \quad ①$$

சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$s = 0 + \frac{1}{2}at_0^2. \Rightarrow s = \frac{1}{2}at_0^2. \quad \text{———} \quad ②$$

முழுப் பயணத்திற்கும் எடுத்த நேரம் T ஆகையால் அமர்முடுகலுடன் சென்ற நேரம் $= T - t_o$.

அமர்முடுகல் $2a$ உடன், அதாவது ஆர்முடுகல் $-2a$ உடன் சென்று ஓய்வுக்கு வருகின்றமையால் அவ்வியக்கத்திற்குச் சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$0 = u - 2a(T - t_o). \Rightarrow u = 2a(T - t_o). \quad \text{———} \quad ③$$

①, ③ ஆகிய சமன்பாடுகளை ஒப்பிடும்போது $at_0 = 2a\,(T - t_0)$.

$$t_o = \frac{2}{3}T. \text{ மேலும் } T - t_o = \frac{1}{3}T, \ u = \frac{2}{3}aT.$$

எனவே ஆர்முடுகலுடனும் அமர்முடுகலுடனும் சென்ற நேரங்கள் முறையே $\frac{2}{3}T$, $\frac{1}{3}T$ ஆகும்.

சமன்பாடு ② இலிருந்து $\Rightarrow s = \frac{1}{2}a\left(\frac{2}{3}T\right)^2 = \frac{2}{9}aT^2$.

எனவே பயணத்தின் எஞ்சிய தூரம் $= h-\frac{2}{9}\,aT^2$. இது அமர்முடுகல் $2a$ உடன் நேரம் $\frac{1}{3}T$ இல் தொடக்க வேகம் $u=\frac{2}{3}\,aT$ உடன் சென்றுள்ளது.

சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}\,at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$h-\frac{2}{9}\,aT^2=\frac{2}{3}\,aT\times\frac{1}{3}\,T-\frac{1}{2}\times 2a\left(\frac{1}{3}\,T\right)^2.$$

$$\Rightarrow h-\frac{2}{9}\,aT^2=\frac{2}{9}\,aT^2-\frac{1}{9}\,aT^2.$$

$$\Rightarrow h=\frac{1}{3}\,aT^2.$$

$$\therefore\ T=\sqrt{\frac{3h}{a}}$$

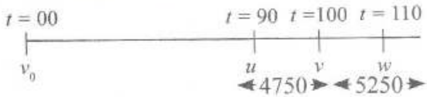
உதாரணம் 3.19

சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கையின் இயக்கத்தை அவதானிக்கும் ஒருவர் அவ்வவதானிப்பை ஆரம்பித்த பின்னர் முதல் 10 செக்கனில் துணிக்கை 4750 m இடப் பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருப்பதாகவும் அடுத்த 10 செக்கனில் துணிக்கை 5250 m இடப்பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருப்பதாகவும் அவதானித்தார். அவதானிப்பை ஆரம்பிப்பதற்கு 90 செக்கனுக்கு முன்னர் துணிக்கையின் இயக்கம் ஆரம்பித்திருப்பின் துணிக்கை ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து இருக்கின்றது எனவும் அப்போது (90 s இல்) 20250 m இடப்பெயர்ச்சி உள்ளது எனவும் காட்டுக.

தீர்வு:

நேரத்தை அளத்தலைத் துணிக்கை இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் சந்தர்ப்பத்திலிருந்து கருதுவோம்.

அப்போது துணிக்கை ஆயிடை [90, 100] இல் 4750 m இடப்பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை இங்கு துணிக்கையின் வேகம் u இலிருந்து v வரைக்கும் மாறுகின்றதெனக் கொள்வோம். துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் a எனவும் கொள்வோம்.



சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$v = u + a \times 10. \Rightarrow v = u + 10a.$$

சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$(u + 10a)^2 = u^2 + 2a \times 4750.$$

$$\therefore\ u^2 + 20au + 100a^2 = u^2 + 9500a.$$

$$\Rightarrow u + 5a = 475. \quad \text{———— ①}$$

அடுத்த 10 செக்கன் நேர ஆயிடையில் 5250 m இடப்பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை துணிக்கையின் பிந்திய வேகம் w எனக் கொள்வோம்.

சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$w = v + a \times 10. \Rightarrow w = v + 10a = u + 20a.$$

சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$(u + 20\,a)^2 = (u + 10a)^2 + 2a \times 5250.$$

$$\therefore\ u^2 + 40au + 400a^2 = u^2 + 20au + 100a^2 + 2 \times 5250a.$$

$$\Rightarrow u + 15a = 525. \quad \text{———— ②}$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து $a = 5 \text{ m s}^{-1}$. அப்போது சமன்பாடு ① இலிருந்து

$$u = 450 \text{ m s}^{-1}.$$

துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் v_0 எனக் கொள்வோம். ஆயிடை [0, 90] இற்குச் சமன்பாடு

$v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$u = v_0 + a \times 90. \Rightarrow v_0 = u - 90a.$$

$$= 450 - 90 \times 5 = 0.$$

ஆகவே துணிக்கையின் தொடக்க வேகம் பூச்சியம் ஆகும். அதாவது துணிக்கை ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்துள்ளது.

மேலும் ஆயிடை [0, 90] இல் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$s = 0 \times 90 + \frac{1}{2} \times 5 \times 90^2$$
$$= 20250 \text{ m.}$$

எனவே துணிக்கை இயக்கத்தை ஆரம்பித்து 20250 m இடப்பெயர்ச்சியைக் கொண்டிருக்கும்போது அவதானிப்பு ஆரம்பித்துள்ளது.

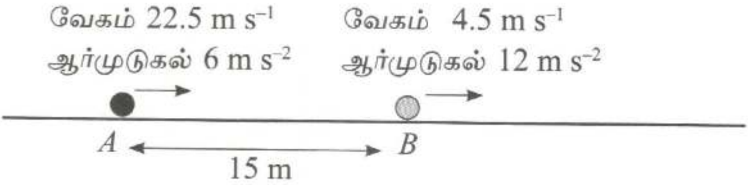
உதாரணம் 3.20

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரே திசையில் இயங்கும் A, B என்னும் இரு துணிக்கைகளின் சீரான ஆர்முடுகல்கள் முறையே 6 m s^{-2}, 12 m s^{-2} ஆகும். ஒரு குறித்த கணத்தில் அவற்றின் வேகங்கள் முறையே 22.5 m s^{-1}, 4.5 m s^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை துணிக்கை B ஆனது துணிக்கை A இற்கு 15 m முன்னால் உள்ளது. துணிக்கை A ஆனது துணிக்கை B ஐக் கடந்து செல்கின்றது எனவும் அதன் பின்னர் துணிக்கை B ஆனது துணிக்கை A ஐக் கடந்து செல்கின்றது எனவும் காட்டுக.

இச்சந்தர்ப்பங்களில் ஒவ்வொரு துணிக்கையின் வேகத்தையும் அவதானிக்க.

தீர்வு

தொடக்கத்தில்



நேரம் t_0 இற்குப் பின்னர் இரு துணிக்கைகளும் ஒரு புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

தொடக்கத்திலிருந்து நேரம் t_0 இற்குப் பின்னர் இரு துணிக்கை களினதும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் காண்போம்.

துணிக்கை A ஐக் கருதுவோம்.

சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$s_A = 22.5 \times t_0 + \frac{1}{2} \times 6 \times t_0^2$$
$$= 22.5 \times t_0 + 3 \times t_0^2.$$

இவ்வாறே துணிக்கை B இற்கு

$$s_B = 4.5 \times t_0 + \frac{1}{2} \times 12 \times t_0^2$$
$$= 4.5 \times t_0 + 6 \times t_0^2.$$

துணிக்கை A இற்குத் துணிக்கை B இலும் பார்க்க 15 m கூடுதலான ஓர் இடப்பெயர்ச்சி தேவை. ஆகவே

$$s_A = 15 + s_B.$$
$$\therefore\ 22.5 \times t_0 + 3 \times t_0^2 = 15 + 4.5 \times t_0 + 6 \times t_0^2.$$

$\Rightarrow 3t_0^{\,2} - 18t_0 + 15 = 0.$

$\Rightarrow t_0^{\,2} - 6t_0 + 5 = 0.$

$\Rightarrow (t_0 - 1)(t_0 - 5) = 0.$

$\Rightarrow t_0 - 1 = 0$ அல்லது $t_0 - 5 = 0.$

$\Rightarrow t_0 = 1$ அல்லது $t_0 = 5.$

இதிலிருந்து $t_0 = 1$ ஆனது கிடைத்த இரு பெறுமானங்களிலும் சிறிய பெறுமானம் ஆகையால் அப்போது துணிக்கை A ஆனது துணிக்கை B ஐக் கடந்து செல்கின்றது. மறுபடியும் $t_0 = 5$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை B ஆனது துணிக்கை A ஐக் கடந்து செல்கின்றது.

$t_0 = 1$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை A இன் வேகம் u_A எனின், சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது $u_A = 22.5 + 6 \times 1 = 28.5 \text{ m s}^{-1}$.

துணிக்கை B இன் வேகம் u_B மேற்குறித்தவாறே $u_B = 4.5 + 12 \times 1 = 16.5 \text{ m s}^{-1}$.

$t_0 = 5$ ஆக இருக்கும்போது
துணிக்கை A இன் வேகம் v_A எனின், $v_A = 22.5 + 6 \times 5 = 52.5 \text{ m s}^{-1}$.
துணிக்கை B இன் வேகம் v_B எனின், $v_B = 4.5 + 12 \times 5 = 64.5 \text{ m s}^{-1}$.

பயற்சி 3.2

1 தொடக்கம் **17** வரையுள்ள வினாக்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் வேக - நேர வளையியை வரைந்து, அதிலிருந்து அதனைத் தீர்க்க.

1. ஒரு துணிக்கை வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உடன் இயக்கத்தை ஆரம்பித்து ஆர்முடுகல் 2 m s^{-2} உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் செல்கின்றது. இத்துணிக்கை 10 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரம் 5 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரத்தின் இருமடங்காகும். u இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. மாறா ஆர்முடுகலுடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் செல்லும் ஒரு புகையிரதம் அதன் இரு அந்தங்களும் ஒரு சைகைத் தூணைக் கடக்கும்போது நேரம் $t = t_1$ ஆகவும் $t = t_2$ ஆகவும் இருக்கும் அதே வேளை அப்போது புகையிரதத்தின் வேகங்கள் முறையே u, v ஆகும். $t = t_1$ தொடக்கம் $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ வரையுள்ள நேரத்தில் புகையிரதத்தின் நீளத்தின் $\frac{3u + v}{4(u + v)}$ பகுதி அச்சைகைத் தூணைக் கடக்குமெனக் காட்டுக.

3. சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் T s வீதமான அடுத்துவரும் நேர ஆயிடைகளில் a, b, c என்னும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. $a + c = 2b$ எனவும் துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{T^2}(c - b)$ எனவும் காட்டுக.

முதலாவது நேர ஆயிடையின் தொடக்கத்தில் துணிக்கையின் வேகம் $\frac{1}{2T}(3a - b)$ எனவும் காட்டுக.

4. சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O ஐ வேகம் u உடன் கடக்கின்றது. 3 செக்கனுக்குப் பின்னர் சீரான ஆர்முடுகல் $\frac{4a}{3}$ உடன் மேற்குறித்த அதே திசையில் அதே பாதையில் இயங்கும் வேறொரு துணிக்கை அப்புள்ளி O ஐ வேகம் $\frac{1}{3}u$ உடன் கடக்கின்றது. இரண்டாம் துணிக்கை முதலாம் துணிக்கையைக் கடந்து செல்லும் அதே வேளை அப்போது அவற்றின் வேகங்கள் முறையே 31 m s^{-1}, 27 m s^{-1} ஆகும். a, u ஆகியவற்றின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. P, Q என்னும் துணிக்கைகள் ஒன்றிலிருந்தொன்று 50 m தூரத்தில் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளில் உள்ளன. ஒரே கணத்தில் இரு துணிக்கைகளும் திசை AB இல் இயங்கத் தொடங்குகின்றன. P இன் தொடக்க வேகம் 29 m s^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை Q ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கின்றது. அவற்றின் சீரான ஆர்முடுகல்கள் முறையே 6 m s^{-2}, 10 m s^{-2} ஆகும். ஒவ்வொரு துணிக்கையும் மற்றைய துணிக்கையைக் கடந்து செல்லும் எனக் காட்டி, அந்த ஒத்த புள்ளிகளில் நேர ஆயிடை 10.5 s இல் துணிக்கைகள் இருக்கின்றன எனக் காட்டுக. அப்புள்ளிகளிடையே உள்ள தூரம் 761.25 m எனவும் காட்டுக.

6. A, B ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று d m தூரத்தில் இருக்கும் இரு புள்ளிகள் ஆகும். P, Q என்னும் துணிக்கைகள் A, B ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரே கணத்தில் திசை AB இல் இயங்கத் தொடங்குகின்றன. P இன் தொடக்க வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை Q ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கின்றது. அவற்றின சீரான ஆர்முடுகல்கள் முறையே $a \text{ m s}^{-2}$, $2a \text{ m s}^{-2}$ ஆகும். $u^2 = 2ad$ எனின், துணிக்கைகள் ஒரு தடவை மாத்திரம் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

$u^2 > 2ad$ எனின், ஒவ்வொரு துணிக்கையும் மற்றைய துணிக்கையை ஒரு தடவை வீதம் கடக்கும் எனக் காட்டி அந்த ஒத்த புள்ளிகளின் தானங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் காண்க.

7. ஒரு மோட்டர்வாகனம் ஓய்விலிருந்து பயணத்தை ஆரம்பிக்கும் அதே வேளை வேகம் v m s^{-1} கிடைக்கும் வரை சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகின்றது. அது ஒரு குறித்த நேரத்திற்கு அம்மாறா வேகத்துடன் இயங்கிச் சீராக அமர்முடுகுவதனால் மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. வாகனத்தின் சராசரிக் கதி $\frac{7v}{8}$ m s^{-1} ஆகும். ஆர்முடுகலும் அமர்முடுகலும் பருமனில் சமம். மாறா வேகத்துடன் இயங்கிய தூரம் பயணத்தின் மொத்தத் தூரத்துடன் கொண்டுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

8. சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் $t = t_1, t = t_2, t = t_3$ ஆக இருக்கும்போது பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து முறையே x_1, x_2, x_3 ஆகிய தூரங்களில் இருக்கின்றது. இங்கு t_1, t_2, t_3 ஆகியன பொது வித்தியாசம் d ஆகவுள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாக இருக்கும் அதே வேளை x_1, x_2, x_3 ஆகியன ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாகும். $\left(\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}\right)^2 = ad^2$ எனக் காட்டுக.

9. மோட்டர் வாகன ஓட்டப் போட்டியில் ஒரு மோட்டர் வாகனம் X ஆனது ஓட்டப் போட்டியை முடிப்பதற்கு 1100 m தூரத்தில் இருக்கும்போது அது சீரான ஆர்முடுகல் 0.44 m s^{-2} ஐக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை அதன் வேகம் 38.5 m s^{-1} ஆகும். இக்கணத்தில் ஓட்டப் போட்டியில் பங்குபற்றும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் Y இன் சீரான ஆர்முடுகல் 0.55 m s^{-2} ஆகவும் அதன் வேகம் 48.4 m s^{-1} ஆகவும் இருக்கும் அதே வேளை அது மோட்டர் வாகனம் X இலும் பார்க்க 220 m பின்னால் உள்ளது. போட்டி முடிவுக் கோட்டுக்கு 242 m இருக்கையில் மோட்டர் வாகனம் Y ஆனது மோட்டர் வாகனம் X ஐக் கடந்து செல்லுமெனக் காட்டுக.
இவ்வோட்டப் போட்டி முடிவடையும் நேரங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஒரு செக்கன் எனவும் காட்டுக.

10. ஒரு புள்ளி A இலிருந்து ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து ஆரம்பித்து சீரான ஆர்முடுகல் a m s^{-2} உடன் இயங்கி அதன் உயர்ந்தபட்ச வேகம் u m s^{-1} ஐப் பெறுகின்றது. அது அவ்வேகத்துடன் சீராக ஒரு குறித்த நேரத்துக்கு இயங்கி அதன் பின்னர் சீரான அமர்முடுகல் b m s^{-2} உடன் இயங்கி வேகம் v m s^{-1} உடன் ஒரு புள்ளி B ஐக் கடக்கின்றது. இப்போது $2ab.\ AB \geq (a+b)u^2 - av^2$ எனக் காட்டுக.

11. ஓய்விலிருந்து செல்லத் தொடங்கும் ஒரு துணிக்கை ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் a உடனும் அதன் பின்னர் மாறா அமர்முடுகல் b உடனும் சென்று ஓய்வுக்கு வருகின்றது. பயணத்திற்கான மொத்த நேரம் $\left[\dfrac{2s}{ab}(a+b)\right]^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக; இங்கு s ஆனது துணிக்கை சென்ற தூரம் ஆகும்.

12. ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் செல்லும் ஒரு துணிக்கை நேரம் t_1, t_2, t_3 ஆக இருக்கும்போது A, B, C என்னும் புள்ளிகளைக் கடக்கின்றது; இங்கு $AB = BC$. துணிக்கையின் அமர்முடுகல் $\dfrac{2AB.\ (t_1 - 2t_2 + t_3)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}$ எனக் காட்டுக.

13. ஒரு நேர்கோட்டில் ஒரு திசையில் ஒரு துணிக்கை A ஆனது மாறா வேகம் u உடன் இயங்குகின்றது. அது கோடு மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O ஐக் கடக்கும்போது ஓய்விலிருந்து வேறொரு துணிக்கை B ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் a உடன் O இலிருந்து துணிக்கை A இயங்கும் திசைக்கு எதிரான திசையில் இயங்குகின்றது. துணிக்கைகளின் கதிகள் சமமாக இருக்கும்போது O இலிருந்து B இற்கு உள்ள தூரம் $\dfrac{u^2}{2a}$ எனவும் துணிக்கை A அதன் இரு மடங்கு தூரம் சென்றுள்ளது எனவும் காட்டுக. இரு துணிக்கைகளும் O இலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கும்போது துணிக்கை B இன் கதி $2u$ எனவும் காட்டுக.

14. ஒரு பொருள் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி நேரம் t_1 இல் தூரம் a உம் மேலும் நேரம் t_2 இல் மேலும் தூரம் b உம் செல்கின்றது. பொருளின் ஆர்முடுகலைக் காண்க. பொருள் t_1, t_2, t_3 ஆகிய நேர ஆயிடைகளில் சம தூரங்களுக்குச் செல்லுமெனின், t_1, t_2, t_3 ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமையைப் பெறுக.

15. இரு சமாந்தர ஏகபரிமாணப் பாதைகளில் d நீளமுள்ள ஒரு புகையிரதமும் எஞ்சினும் முறையே a, $2a$ என்னும் ஆர்முடுகல்களுடனும் $2v$, $3v$ என்னும் உயர்ந்தபட்ச வேகங்களுடனும் செல்கின்றன. புகையிரதத்தின் பிற்பக்கமும் மற்றைய எஞ்சினும் நேராக இருக்கும்போது அவற்றின் வேகங்கள் முறையே v, $\frac{v}{2}$ ஆக இருப்பதோடு அவை ஆர்முடுகல்களுடன் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. அவை உயர்ந்தபட்ச வேகங்களை அடையும்போது அவ்வேகங்களுடன் இயங்குவதோடு $3v^2 < 16ad$ எனின், மேற்குறித்த அமைவிலிருந்து புகையிரதத்தின் முற்பக்கமும் மற்றைய எஞ்சினும் நேராக இருக்கும்போது புகையிரதம் $\frac{1}{8a}(16ad + 13v^2)$ தூரம் சென்றுள்ளதெனக் காட்டுக. அதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

16. $2d$ தூரத்தில் இருக்கும் கோட்டுத் துண்டம் AB இன் நடுப் புள்ளி C ஆகும். வேகம் u உடன் A ஐக் கடந்து செல்லும் ஒரு பொருள் சீரான அமர்முடுகலுடன் சென்று வேகம் V உடன் C இற்கு வரும் அதே வேளை கணப்பொழுதில் பொருளின் வேகம் $w\,(<v)$ ஆகும். பொருள் மேலும் ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கி B இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. பயணத்துக்கு எடுத்த மொத்த நேரத்தையும் AC இற்கும் BC இற்குமிடையே உள்ள ஆர்முடுகல்கள் சமமாக இருப்பதற்கான ஒரு நிபந்தனையையும் காண்க.

17. ஒரு நகரத்தில் வாகனங்களுக்கான கதி எல்லை $u\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ ஆகும். கதி $v\,(>u)\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் செலுத்தப்படும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் நகர எல்லையை அணுகும்போது ஒரு சீரான அமர்முடுகல் $a\ \mathrm{km\,h^{-2}}$ இன் கீழ் இயங்கி வேகம் $u\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் நகர எல்லையைக் கடக்கின்றது. மேலும் அந்த அமர்முடுகலின் கீழ் இயங்கும் மோட்டர் வாகனம் ஆர்முடுகல் $2a\ \mathrm{km\,h^{-2}}$ இன் கீழ்

இயங்கி மறுபடியும் வேகம் $u\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் நகரத்தின் மற்றைய எல்லையைக் கடக்கின்றது. நகர எல்லைகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $3d$ km ஆகும். இவ்வியக்கம் நடைபெறுவதற்கான நிபந்தனை $u \leq 2\sqrt{ad}$ எனக் காட்டுக.
வாகனத்தின் குறைந்தபட்சக் கதியுடன் நகர எல்லைகளுக் கிடையே செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் வாகனம் அமர்முடுகுவதற்கு ஆரம்பித்த இடத்திலிருந்து நகர எல்லைக்கு உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

18. ஓய்வில் உள்ள ஒரு வாகனம் A ஆனது சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு குறித்த புள்ளியிலிருந்து இயங்க ஆரம்பிக்கும்போது சீரான வேகம் v உடன் செல்லும் வேறொரு வாகனம் B ஆனது வாகனம் A ஐக் கடந்து செல்கின்றது. இரு வாகனங்களும் இரு நேர்க் கிடைப் பாதைகளில் செல்லும் அதே வேளை வாகனம் A இன் உயர்ந்தபட்ச வேகம் kv $(k > 1)$ ஐ அடையும் வரை ஆர்முடுகலுடன் சென்று அதன் பின்னர் சீரான அமர்முடுகல் a உடன் செல்கின்றது. இரு வாகனங்களினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, $\sqrt{2}\,(k-1) < 1$ஆக இருக்கும்போது வாகனம் A ஆனது வாகனம் B ஐக் கடந்து செல்ல முடியாதெனக் காட்டுக.

19. A, B ஆகிய இரு புகையிரதங்களும் பெறத்தக்க உயர்ந்தபட்சக் கதிகள் முறையே $u\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, $v\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ஆகும்; இங்கு $u > v$. அவை ஒரே சீரான ஆர்முடுகல் $a\,\mathrm{km\,h^{-2}}$ உடன் ஓய்விலிருந்து ஒரே புகையிரத நிலையம் X இலிருந்து ஒருமிக்கப் பயணத்தை ஆரம்பித்து அவற்றின் உயர்ந்தபட்சக் கதிகளில் சென்று ஒரே சீரான அமர்முடுகல் $a\,\mathrm{km\,h^{-2}}$ உடன் புகையிரத நிலையம் Y இல் ஒருமிக்க ஓய்வுக்கு வருகின்றன. புகையிரதம் A ஆனது X, Y ஆகிய புகையிரத நிலையங்களுக்கிடையே ஒரு குறித்த இடத்தில் t_0 மணித்தியாலத்திற்கு நிற்பாட்டப்படும் அதே வேளை அதற்கு முன்னரும் பின்னரும் முறையே t_1 மணித்தியாலத்திற்கும் t_2 மணித்தியாலத்திற்கும் அதன் உயர்ந்தபட்சக் கதியில் செல்லும் அதே வேளை மற்றைய புகையிரதம் நிற்பாட்டப்படாமல் பயணத்தில் ஈடுபடுகின்றது. இரு புகையிரதங்களினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, $a(t_1 + t_2)(u - v) + 2(u - v)^2 = v^2 + avt_0$ எனக் காட்டுக.

■ **20** தொடக்கம் **30** வரையுள்ள வினாக்கள் ஒவ்வொன்றையும் இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

20. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் வேகம் 54 km h^{-1} உடன் ஒரு கிலோமீற்றர் தூணைக் கடந்து செல்கின்றது. அடுத்த கிலோமீற்றர் தூணைக் கடந்து செல்வதற்கு 50 செக்கன் எடுப்பின், அக்கிலோமீற்றர் தூணைக் கடந்து செல்லும்போது வாகனத்தின் வேகத்தைக் காண்க.

21. சீரான ஆர்முடுகலுடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை 10 ஆம் செக்கனிலும் 16 ஆம் செக்கனிலும் முறையே 29 m, 41 m இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. 25 ஆம் செக்கனில் அதன் இடப்பெயர்ச்சி 59 m எனக் காட்டுக.

22. A, B ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று 561 m தூரத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளாகும். ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A இலிருந்து திசை AB இல் வேகம் 10 m s^{-1} உடன் இயங்க ஆரம்பித்துச் சீரான ஆர்முடுகல் 4 m s^{-2} உடன் இயங்குகின்றது. துணிக்கை P இயங்க ஆரம்பித்து ஒரு செக்கனுக்குப் பின்னர் ஒரு துணிக்கை Q ஆனது வேகம் 20 m s^{-1} உடன் புள்ளி B இலிருந்து புள்ளி A ஐ நோக்கி இயங்கத் தொடங்குகின்றது. அத்துணிக்கை சீரான ஆர்முடுகல் 2 m s^{-2} உடன் இயங்குகின்றது. இரு துணிக்கைகளும் ஒரு புள்ளி C இல் சந்திக்கின்றன. $AC : CB = 100 : 87$ எனக் காட்டுக.

23. A, B என்னும் இரு இடங்களுக்கிடையே உள்ள ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு புகையிரதம் சீரான வேகம் 72 km h^{-1} உடன் செலுத்தப்படவுள்ளது. பாதை பழுது பார்க்கப்படுகின்றமையால், ஒரு கிலோமீற்றர் தூரத்திற்குச் சீரான வேகம் 9 km h^{-1} இல் செலுத்தப்படும் அதே வேளை இவ்வேகம் 9 km h^{-1} ஐப் பெறுவதற்கு ஒரு சீரான அமர்முடுகலின் கீழ் புகையிரதம் 1575 m தூரத்திற்குச் சென்று மறுபடியும் வழக்கமான வேகத்தை அடைவதற்கு 3150 m தூரத்திற்கு ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்லுமெனின், அத்தினத்தில் புகையிரதம் A, B ஆகிய இடங்களுக்குமிடையே தாமதித்த நேரத்தைக் காண்க.

24. P, Q ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று 275 m தூரத்தில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். A, B ஆகிய இரு துணிக்கைகள் முறையே P, Q ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே கணத்தில் ஒன்றையொன்று சந்திப்பதற்கு எறியப்படுகின்றன. A, B ஆகிய இரு துணிக்கைகளினதும் தொடக்க வேகங்கள் முறையே $10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ இற்கும் $30\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ இற்குமிடையே இருக்கும் அதே வேளை அத்துணிக்கைகள் $4\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ என்னும் சீரான ஆர்முடுகல்களுடன் இயங்குகின்றன. இரு துணிக்கைகளும் ஒரு புள்ளி C இல் சந்திக்கின்றன. PC ஐக் கண்டு, துணிக்கைகள் சந்திக்கும்போது அவற்றின் வேகங்களையும் துணிக.

25. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை ஒரு குறித்த கணத்தில் பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இலிருந்து ஓர் இடப்பெயர்ச்சி a ஐக் கொண்டுள்ளது. அதன் பின்னர் நேரம் $T, 2T, 3T$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சிகள் புள்ளி O இலிருந்து முறையே b, c, d ஆகும். துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{T^2}(a-2b+c)$ எனக் காட்டி, $d-a=3(c-b)$ எனவும் காட்டுக.

26. ஓய்விலிருந்து ஒரு துணிக்கை ஒரு நேர்ப் பாதையில் ஒரு சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் இயங்க ஆரம்பிக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் ஒவ்வொரு நேர வித்தியாசம் T இற்கும் பின்னர் துணிக்கையின் ஆர்முடுகலின் பருமன் a வீதம் அதிகரிக்கின்றது. துணிக்கை nT ஆவது நேர ஆயிடையைப் பூரணப்படுத்தும்போது அதன் வேகம் $\frac{1}{2}n(1+n)aT$ எனவும் அப்போது இடப்பெயர்ச்சி $\frac{1}{2}n(1+n)(2n+1)aT^2$ எனவும் காட்டுக; இங்கு n ஒரு நேர் நிறைவெண்.

27. புள்ளி A இலிருந்து ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை 96 m இடப்பெயர்ச்சிக்குப் பின்னர் புள்ளி B ஐக் கடக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கி 40 m இடப்பெயர்ச்சியுடன் புள்ளி C இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. A, B ஆகிய புள்ளிகளில் ஒத்த வேகங்கள் முறையே $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ஆகும். ஆர்முடுகலுடனும் அமர்முடுகலுடனும் இயங்கிய நேரங்களை v இன் சார்பில் காண்க.

இயக்கத்துக்காக 12 செக்கன் எடுத்ததெனின், v இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு ஆர்முடுகலினதும் அமர்முடுகலினதும் பருமன்களைக் காண்க.

28. ஒரு பிள்ளை ஒரு தானம் A ஐக் கடந்து சீரான வேகம் 4 m s^{-1} உடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் செல்கின்றது. சிறிது நேரத்திற்குப் பின்னர் சைக்கிளோட்டி ஒருவர் தானம் A இல் ஓய்விலிருந்து ஒரு சீரான ஆர்முடுகல் 2 m s^{-2} உடன் தனது வேகத்தை 8 m s^{-1} இற்கு அதிகரிக்கச் செய்து, பின்னர் அச்சீரான வேகத்துடன் ஒரு சைக்கிளைச் செலுத்துகின்றார். தானம் A இலிருந்து 64 m இடப்பெயர்ச்சிக்குப் பின்னர் சைக்கிளோட்டி பிள்ளையைக் கடந்து சென்றால், சைக்கிளோட்டி பிள்ளையைத் தானம் A இல் கடந்து எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பின்னர் புறப்பட்டுச் சென்றார் எனக் காண்க.

29. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு துணிக்கை A ஆனது மாறா வேகம் $u\text{ m s}^{-1}$ உடன் இயங்குகின்றது. அது ஒரு நிலைத்த புள்ளி O ஐக் கடக்கும்போது வேறொரு துணிக்கை B ஆனது புள்ளி O இலிருந்து துணிக்கை A இன் இயக்கத் திசைக்கு எதிரான திசையில் ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் $a\text{ m s}^{-2}$ உடன் ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்குகின்றது. இரு துணிக்கைகளினதும் கதிகள் சமமாக இருக்கும்போது துணிக்கை B இன் இடப்பெயர்ச்சியைக் காண்க.
இப்போது துணிக்கை B இன் இடப்பெயர்ச்சி துணிக்கை A இன் இடப்பெயர்ச்சியின் இரு மடங்காகும் என்னும் கூற்றைப் பற்றி உங்கள் கருத்தை எடுத்துரைக்க.

30. P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஒருமிக்க முறையே $u\text{ m s}^{-1}$, $v\text{ m s}^{-1}$ என்னும் வேகங்களுடன் ஒரு புள்ளி O ஐக் கடக்கின்றன. துணிக்கை P ஆனது மாறா வேகத்துடன் இயங்கும் அதே வேளை துணிக்கை Q ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகின்றது. துணிக்கை P ஓர் இடப்பெயர்ச்சி a ஐக் கொண்டிருக்கும்போது துணிக்கை Q ஓர் இடப்பெயர்ச்சி b ஐக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை துணிக்கை P ஓர் இடப்பெயர்ச்சி b ஐக் கொண்டிருக்கும்போது துணிக்கை Q ஓர் இடப்பெயர்ச்சி a ஐக் கொண்டிருக்குமெனின், $abv = (a^2 + ab + b^2)u$ எனக் காட்டுக.

31. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓய்விலிருந்து பயணத்தை ஆரம்பித்து முதலில் சீரான ஆர்முடுகலுடனும் இரண்டாவதாகச் சீரான வேகத்துடனும் இறுதியில் மாறா அமர்முடுகலுடனும் இயங்கி மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. ஆர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்திற்கு முழுப் பயணத்தின் தூரத்தின் விகிதம் $1 : P$ உம் அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்திற்கும் முழுப் பயணத்தின் தூரத்திற்குமிடையே உள்ள விகிதம் $1 : Q$ உம் ஆகும். மோட்டர் வாகனத்தின் இயக்கத்துக்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைந்து, அதிலிருந்து உயர்ந்தபட்சக் கதிக்குச் சராசரிக் கதியின் விகிதம் $(P + PQ + Q) : PQ$ எனக் காட்டுக.

32. ஒரு மோட்டர் வாகனம் வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உடன் செல்வதை அவதானித்த ஒரு பொலிஸ் அலுவலர் தமது வாகனம் அவரைத் துரத்திக்கொண்டு செல்லும்போது தனது மோட்டர்ச் சைக்கிளில் ஏறி ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகல் $a \text{ m s}^{-2}$ உடன் உயர்ந்தபட்ச வேகம் $v \text{ m s}^{-1}$ வரைக்கும் சென்று பின்னர் அவ்வேகத்தைப் பேணுகின்றார்.

பொலிஸ் அலுவலர் d m $\left(d > \dfrac{1}{2a}v^2\right)$ தூரம் சென்று வாகனத்திற்குக் கிட்ட வருகின்றார். மோட்டர்ச் சைக்கிளினதும் மோட்டர் வாகனத்தினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து மோட்டர்ச் சைக்கிள் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் செலுத்தப்பட்ட நேரம் $\dfrac{d}{u} - \dfrac{v}{a}$ எனக் காட்டுக.

a, v, u, d ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பைக் கண்டு, அதிலிருந்து

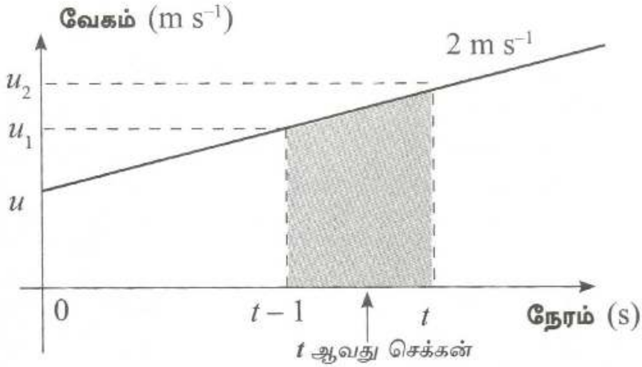
$$v = \frac{ad}{u}\left[1 - \left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

எனக் காட்டுக.

3.2 மாதிரித் தீர்வு

1. ஒரு துணிக்கை வேகம் u m s^{-1} உடன் இயக்கத்தை ஆரம்பித்து ஆர்முடுகல் 2 m s^{-2} உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் செல்கின்றது. இத்துணிக்கை 10 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரம் 5 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரத்தின் இருமடங்காகும். u இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இங்கு இயக்கத்தின் 5 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரத்தையும் 10 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரத்தையும் வேக - நேர வளையியைக் கொண்டு காண்போம். t ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரத்தைக் கருதிப் பின்வருமாறு பிரசினத்தைத் தீர்க்கலாம்.



நேரம் $t-1$ ஆகவும் t ஆகவும் இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகங்கள் முறையே u_1, u_2 எனக் கொள்வோம்.

இயக்கத்திற்கு ஆயிடை $[0, t-1]$ இல் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$2 = \frac{u_1 - u}{t-1-0}. \Rightarrow u_1 = u + 2(t-1).$$

ஆயிடை $[0, t]$ இல் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$2 = \frac{u_2 - u}{t-0}. \Rightarrow u_2 = u + 2t.$$

ஆகவே ஆயிடை $[t-1, t]$ இல், அதாவது t ஆவது செக்கனில் துணிக்கை செல்லும் தூரம் $s_t =$ வரைபில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பரப்பளவு

$$S_t = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \times 1$$
$$= \frac{1}{2}\left[u + 2(t-1) + u + 2t\right]$$
$$= u + 2t - 1.$$

துணிக்கை 5 ஆவது செக்கனில் செல்லும் தூரத்தின் இரு மடங்கை 10 ஆவது செக்கனில் செல்கின்றமையால் $s_5 \times 2 = s_{10}$ ஆகும்.

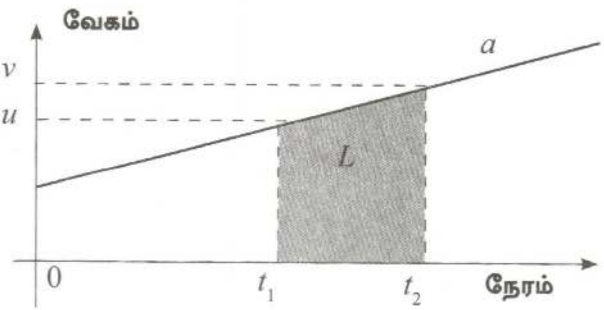
இங்கு $s_5 = u + 2 \times 5 - 1 = u + 9$, $s_{10} = u + 2 \times 10 - 1 = u + 19$
ஆகையால் $2 \times (u + 9) = u + 19$.

$$\Rightarrow 2u + 18 = u + 19.$$
$$\Rightarrow u = 1.$$

எனவே u இன் பெறுமானம் 1 m s^{-1} ஆகும்.

2. மாறா ஆர்முடுகலுடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் செல்லும் ஒரு புகையிரதம் அதன் இரு அந்தங்களும் ஒரு சைகைத் தூணைக் கடக்கும்போது நேரம் $t = t_1$ ஆகவும் $t = t_2$ ஆகவும் இருக்கும் அதே வேளை அப்போது புகையிரதத்தின் வேகங்கள் முறையே u, v ஆகும். $t = t_1$ தொடக்கம் $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ வரையுள்ள நேரத்தில் புகையிரதத்தின் நீளத்தின் $\frac{3u + v}{4(u + v)}$ பகுதி அச்சைகைத் தூணைக் கடக்குமெனக் காட்டுக.

புகையிரதத்தின் நீளம் L எனவும் அதன் ஆர்முடுகல் a எனவும் கொள்வோம்.
புகையிரதம் சைகைத் தூணைக் கடக்கும்போது இயக்கத்துக்கான வேக - நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



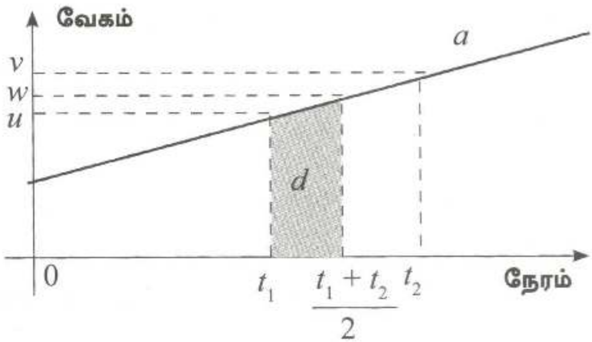
ஆகவே ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் புகையிரதம் L தூரம் செல்கின்றது. அதன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$a = \frac{v-u}{t_2 - t_1}. \quad \text{———} \ ①$$

இந்நேரத்தில் புகையிரதம் சென்ற தூரம் $L =$ வரைபில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பரப்பளவு

$$\therefore L = \frac{1}{2}(u+v)\,(t_2 - t_1)\,. \quad \text{———} \ ②$$

$t = t_1$ தொடக்கம் $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ வரையுள்ள நேரத்தில் புகையிரதத்தின் இயக்கத்துக்கான வேக - நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



நேரம் $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ இல் புகையிரதத்தின் வேகம் w எனக் கொள்வோம்.

ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{w-u}{\frac{t_1 + t_2}{2} - t_1}$

$$= \frac{2(w-u)}{t_1 + t_2 - 2t_1}$$

$$= \frac{2(w-u)}{t_2 - t_1} \quad \text{———} \ ③$$

①, ③ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து $\dfrac{v-u}{t_2-t_1} = \dfrac{2(w-u)}{t_2-t_1}$.

இங்கு t_1 உம் t_2 உம் சமனில்லை ஆகையால் $v-u=2(w-u)$.

$$\Rightarrow w=\frac{v+u}{2}.$$

இந்நேரத்தில் புகையிரதம் சென்ற தூரம் $d=\dfrac{1}{2}(u+w)\times\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}-t_1\right)$

$$=\frac{1}{4}(u+w)\times(t_2-t_1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(u+\frac{v+u}{2}\right)\times(t_2-t_1)$$

$$=\frac{1}{8}(3u+v)\times(t_2-t_1).$$

சமன்பாடு ② இலிருந்து t_2-t_1 இற்குப் பிரதியிடும்போது

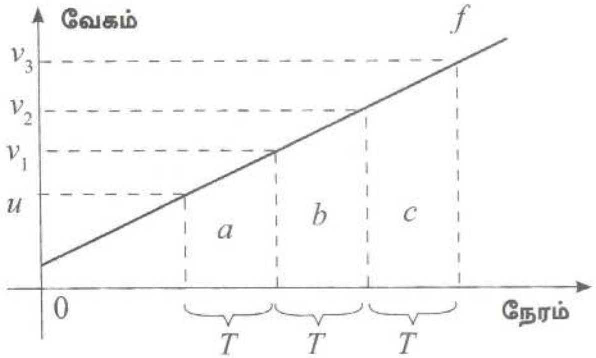
$$d=\frac{1}{8}(3u+v)\times\frac{2L}{u+v}.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{L}=\frac{3u+v}{4(u+v)}.$$

ஆகவே $t=t_1$ தொடக்கம் $t=\dfrac{t_1+t_2}{2}$ வரையுள்ள நேரத்தில் புகையிரதத்தின் நீளத்தின் $\dfrac{3u+v}{4(u+v)}$ பகுதி அச்சைகைத் தூணைக் கடக்கின்றது.

3. சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் T s வீதமான அடுத்துவரும் நேர ஆயிடைகளில் a, b, c என்னும் இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. $a+c=2b$ எனவும் துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\dfrac{1}{T^2}(c-b)$ எனவும் காட்டுக. முதலாவது நேர ஆயிடையின் தொடக்கத்தில் துணிக்கையின் வேகம் $\dfrac{1}{2T}(3a-b)$ எனவும் காட்டுக.

துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் f எனக் கொள்வோம். இயக்கத்துக்கான வேக - நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



முதலாவது நேர ஆயிடையின் தொடக்கத்தில் துணிக்கையின் வேகம் u எனக் கொள்வோம். மேலும் முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது நேர ஆயிடைகளின் இறுதியில் துணிக்கையின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2, v_3 எனக் கொள்வோம்.

முதலாவது நேர ஆயிடையில் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$f = \frac{v_1 - u}{T}.$$

$$\Rightarrow v_1 = u + f\,T.$$

முதலாவது, இரண்டாவது நேர ஆயிடைகள் பூராகவும் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$f = \frac{v_2 - u}{2T}. \Rightarrow v_2 = u + 2fT.$$

மூன்று ஆயிடைகள் பூராகவும் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$f = \frac{v_3 - u}{3T}.$$

$$\Rightarrow v_3 = u + 3f\,T.$$

முதலாவது நேர ஆயிடை T இல் இடப்பெயர்ச்சி

$$a = \frac{1}{2} \times (u + v_1) \times T$$

$$= \frac{1}{2} \times (u + u + f\,T) \times T$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \times (2u + fT)T \quad \text{———} \quad ①$$

இரண்டாவது நேர ஆயிடையில் இடப்பெயர்ச்சி $b = \frac{1}{2} \times (v_1 + v_2) \times T$

$$= \frac{1}{2} \times (u + fT + u + 2fT) \times T$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \times (2u + 3fT)T \cdot \text{———} \quad ②$$

மூன்றாவது நேர ஆயிடையில் இடப்பெயர்ச்சி

$$c = \frac{1}{2} \times (v_2 + v_3) \times T$$

$$= \frac{1}{2} \times (u + 2fT + u + 3fT) \times T$$

$$\therefore c = \frac{1}{2} \times (2u + 5fT)T \quad \text{———} \quad ③$$

①, ③ ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்டும்போது

$$a + c = \frac{1}{2} \times (4u + 6fT)T$$

$$= 2.\frac{1}{2} \times (2u + 3fT)T$$

$$= 2.b.$$

[சமன்பாடு ② இலிருந்து]

③ − ② இலிருந்து $c - b = \frac{1}{2} \times (2fT)T \Rightarrow f = \frac{c-b}{T^2}.$

① × 3 − ② இலிருந்து $3a - b = \frac{1}{2} \times (6u + 3fT - 2u - 3fT)T$

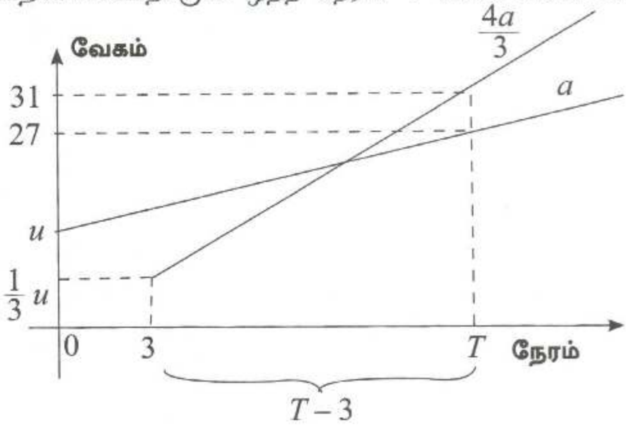
$$= 2uT.$$

$$\Rightarrow u = \frac{3a-b}{2T}.$$

4. சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O ஐ வேகம் u உடன் கடக்கின்றது. 3 செக்கனுக்குப் பின்னர் சீரான ஆர்முடுகல் $\frac{4a}{3}$ உடன் மேற்குறித்த அதே திசையில் அதே பாதையில் இயங்கும் வேறொரு துணிக்கை அப்புள்ளி O ஐ வேகம் $\frac{1}{3}u$ உடன் கடக்கின்றது. இரண்டாம் துணிக்கை முதலாம் துணிக்கையைக் கடந்து செல்லும் அதே வேளை அப்போது அவற்றின் வேகங்கள் முறையே 31 m s^{-1}, 27 m s^{-1} ஆகும். a, u ஆகியவற்றின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இரு துணிக்கைகளினதும் இயக்கத்துக்கு வேக - நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.

இரண்டாம் துணிக்கை முதலாம் துணிக்கையைக் கடந்து செல்கின்றது என்பதன் கருத்து அப்போது அவை சம தூரங்கள் செல்கின்றன என்பதாகும். ஒத்த நேரம் T எனக் கொள்வோம்.



முதலாவது துணிக்கையின்
ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{27-u}{T}$.

$$\Rightarrow T = \frac{27-u}{a} . \qquad \text{———} ①$$

இரண்டாம் துணிக்கையின் இயக்கத்தைக் கருதுக. இத்துணிக்கை 3 செக்கனுக்குப் பின்னர் இயங்கத் தொடங்குகின்றமையால் அத்துணிக்கைக்குரிய நேரம் $T-3$ ஆகும்.

அதன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $\frac{4a}{3} = \frac{31 - \frac{1}{3}u}{T-3}$.

$$\Rightarrow T - 3 = \frac{3}{4a} \times (31 - \frac{1}{3}u)$$

$$= \frac{93 - u}{4a} \cdot \text{———} ②$$

①, ② ஆகிய இரு சமன்பாடுகளினதும்
வித்தியாசத்திலிருந்து $3 = \frac{27 - u}{a} - \frac{93 - u}{4a}$

$$\Rightarrow 12a = 4\,(27 - u) - (93 - u).$$

$$\Rightarrow 12a = 15 - 3u. \text{———} ③$$

முதலாம் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு வேக - நேர வளையியின் ஒத்த சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கருதும்போது அவ்விடப்பெயர்ச்சி

$$S_1 = \frac{1}{2}(27 + u) \times T$$

$$= \frac{1}{2}(27 + u) \times \frac{27 - u}{a}$$

$$= \frac{1}{2a}(27^2 - u^2).$$

இவ்வாறே இரண்டாம் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(31 + \frac{1}{3}u\right) \times (T - 3)$$

$$= \frac{1}{2}\left(31 + \frac{1}{3}u\right) \times \frac{93 - u}{4a}$$

$$= \frac{1}{24a}(93 + u) \times (93 - u)$$

$$= \frac{1}{24a}(93^2 - u^2).$$

துணிக்கைகள் சந்திக்கும்போது இரு துணிக்கைகளினதும் இடப்பெயர்ச்சிகள் சமம் ஆகையால் $S_1 = S_2$.

$$\frac{1}{2a}(27^2 - u^2) = \frac{1}{24a}(93^2 - u^2).$$

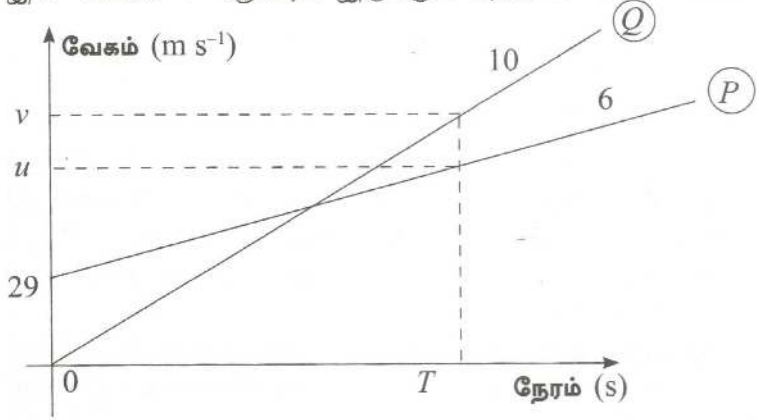
$$\Rightarrow 12\,(27^2 - u^2) = (93^2 - u^2).$$

$$\Rightarrow 11u^2 = 12 \times 27^2 - 93^2.$$
$$\Rightarrow 11u^2 = 99.$$
$$\Rightarrow u^2 = 9.$$
ஆகவே $u = 3$.

சமன்பாடு ③ இலிருந்து $\Rightarrow 12a = 15 - 3 \times 3.$
$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\ \text{m s}^{-2}.$$

5. P, Q என்னும் துணிக்கைகள் ஒன்றிலிருந்தொன்று 50 m தூரத்தில் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளில் உள்ளன. ஒரே கணத்தில் இரு துணிக்கைகளும் திசை AB இல் இயங்கத் தொடங்குகின்றன. P இன் தொடக்க வேகம் $29\ \text{m s}^{-1}$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை Q ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கின்றது. அவற்றின் சீரான ஆர்முடுகல்கள் முறையே $6\ \text{m s}^{-2}$, $10\ \text{m s}^{-2}$ ஆகும். ஒவ்வொரு துணிக்கையும் மற்றைய துணிக்கையைக் கடந்து செல்லும் எனக் காட்டி, அந்த ஒத்த புள்ளிகளில் நேர ஆயிடை 10.5 s இல் துணிக்கைகள் இருக்கின்றன எனக் காட்டுக. அப்புள்ளிகளிடையே உள்ள தூரம் 761.25 m எனவும் காட்டுக.

இரு துணிக்கைகளினதும் இயக்கங்களுக்கு வேக - நேர வளையிகளைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம். துணிக்கை P ஆனது மற்றைய துணிக்கை Q ஐக் கடந்து செல்லும் கணத்தில் P ஆனது Q இலும் பார்க்க மேலும் 50 m செல்ல வேண்டும். P ஆனது Q ஐக் கடந்து செல்லும் சந்தர்ப்பத்தில் P இன் வேகம் u ஆகவும் Q இன் வேகம் v ஆகவும் இருக்கும் நேரம் T எனக் கொள்வோம்.



துணிக்கை P இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $6 = \dfrac{u - 29}{T}$.

$$\Rightarrow u = 29 + 6T.$$

துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு வேக - நேர வளையியின் ஒத்த சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கருதும்போது அத்தூரம்

$$s_P = \frac{1}{2}(29 + u) \times T$$

$$= \frac{1}{2}(29 + 29 + 6T)T$$

$$= 29T + 3T^2.$$

துணிக்கை Q இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $10 = \dfrac{v - 0}{T}$.

$$\Rightarrow v = 10T.$$

துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி $s_Q = \dfrac{1}{2} v \times T$

$$= \frac{1}{2} \times 10T \times T$$

$$= 5T^2.$$

P ஆனது Q சென்ற தூரத்திலும் பார்க்க மேலும் 50 m செல்ல வேண்டும் ஆகையால் $s_P = s_Q + 50$.

$$\Rightarrow 29T + 3T^2 = 5T^2 + 50.$$

$$\therefore \; 2T^2 - 29T + 50 = 0.$$

$$\Rightarrow (2T - 25)(T - 2) = 0.$$

$$\Rightarrow 2T - 25 = 0 \text{ அல்லது } T - 2 = 0.$$

$$\Rightarrow T = 12.5 \text{ அல்லது } T = 2.$$

T இற்கு இரு பெறுமானங்கள் கிடைக்கின்றமையால் பின்னர் இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் துணிக்கை P முதலில் துணிக்கை Q ஐக் கடந்து செல்லும் அதே வேளை பின்னர் Q ஆனது P ஐக் கடந்து செல்கின்றது. இச்சந்தர்ப்பங்களுக்கிடையே நேர வித்தியாசம் $12.5 - 2 = 10.5$ செக்கன் ஆகும்.

இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களையும் ஒத்த தானங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை P அல்லது Q சென்ற தூரத்திலிருந்து பெறலாம். Q இன் இடப்பெயர்ச்சி $S_Q = 5T^2$ ஆகையால் அதனைப் பயன்படுத்தல்

மிகவும் வசதியானதாகும்.

12.5 செக்கனாக இருக்கும்போது அது செல்லும் தூரம் $= 5 \times 12.5^2 = 781.25$ m.

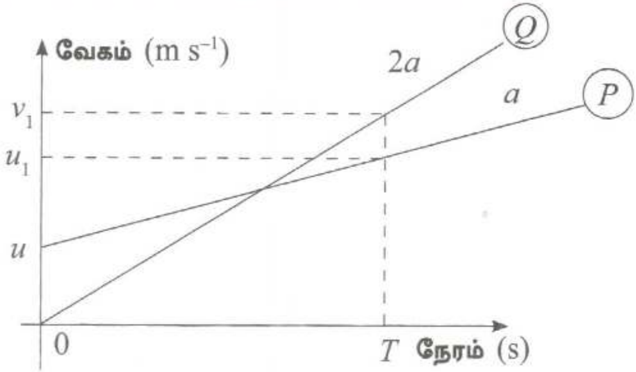
2 செக்கனாக இருக்கும்போது அது செல்லும் தூரம் $= 5 \times 2^2 = 20$ m.

ஆகவே அந்த ஒத்த புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $= 781.25 - 20 = 761.25$ m.

6. A, B ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று d m தூரத்தில் இருக்கும் இரு புள்ளிகள் ஆகும். P, Q என்னும் துணிக்கைகள் A, B ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரே கணத்தில் திசை AB இல் இயங்கத் தொடங்குகின்றன. P இன் தொடக்க வேகம் u m s^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை Q ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கின்றது. அவற்றின சீரான ஆர்முடுகல்கள் முறையே a m s^{-2}, $2a$ m s^{-2} ஆகும். $u^2 = 2ad$ எனின், துணிக்கைகள் ஒரு தடவை மாத்திரம் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

$u^2 > 2ad$ எனின், ஒவ்வொரு துணிக்கையும் மற்றைய துணிக்கையை ஒரு தடவை வீதம் கடக்கும் எனக் காட்டி, அந்த ஒத்த புள்ளிகளின் தானங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைக் காண்க.

இரு துணிக்கைகளினதும் இயக்கங்களுக்கு வேக - நேர வளையிகளைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம். ஒரு துணிக்கை மற்றைய துணிக்கையைக் கடந்து செல்லும் கணத்தில் துணிக்கை P ஆனது துணிக்கை Q இலும் பார்க்க மேலும் d m தூரம் செல்ல வேண்டும். இத்தகைய ஒரு சந்தர்ப்பத்தில் எடுக்கும் நேரம் T எனக் கொள்வோம்.



துணிக்கை P இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{u_1 - u}{T}$

$$\Rightarrow u_1 = u + aT.$$

துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சிக்கு வேக - நேர வளையியின் ஒத்த சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கருதும்போது அத்தூரம்

$$S_P = \frac{1}{2}(u_1 + u) \times T$$

$$= \frac{1}{2}(u + aT + u)T$$

$$= uT + \frac{1}{2}aT^2.$$

துணிக்கை Q இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $2a = \dfrac{v_1 - 0}{T}$.

$$\Rightarrow v_1 = 2aT.$$

துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி $s_Q = \dfrac{1}{2} v_1 \times T$

$$= \frac{1}{2} \times 2aT \times T$$

$$= aT^2.$$

துணிக்கை P ஆனது துணிக்கை Q சென்ற தூரத்திலும் பார்க்க மேலும் d m தூரம் செல்ல வேண்டும் ஆகையால் $S_P = S_Q + d$

$$\Rightarrow uT + \frac{1}{2}aT^2 = aT^2 + d$$

$$\therefore \frac{1}{2}aT^2 - uT + d = 0$$

$$\Rightarrow aT^2 - 2uT + 2d = 0$$

$$\Rightarrow T^2 - \frac{2u}{a}T + \frac{2d}{a} = 0 \quad \text{①}$$

$$\Rightarrow T^2 - \frac{2u}{a}T + \frac{u^2}{a^2} = -\frac{2d}{a} + \frac{u^2}{a^2}.$$

$$\Rightarrow (T - \frac{u}{a})^2 = \frac{-2d}{a} + \frac{u^2}{a^2}.$$

$$= \frac{u^2 - 2ad}{a^2}$$

$u^2 > 2ad$ எனின், $u^2 - 2ad > 0$.

ஆகவே $\sqrt{u^2 - 2ad}$ உளதாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.
எனவே சமன்பாடு (1) ஆனது $T - u = \pm\sqrt{u^2 - 2ad}$ ஆக இருக்கும் ஆகவே $T = +u \pm \sqrt{u^2 - 2ad}$.

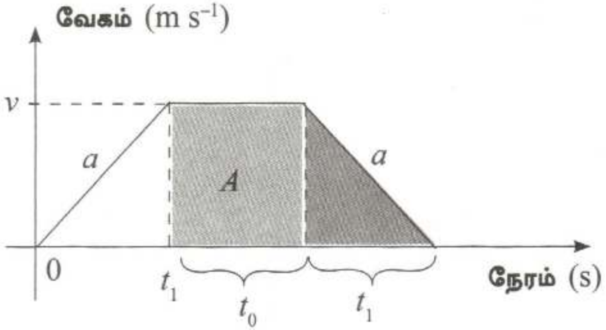
T இற்கு இரு வேறுவேறான தீர்வுகள் இருக்கின்றன. ஒரு துணிக்கை மற்றையதைக் கடந்து செல்லும் இரு சந்தர்ப்பங்கள் கிடைக்கின்றன. அதாவது ஒவ்வொரு துணிக்கையும் மற்றைய துணிக்கையை ஒரு தடவை வீதம் கடந்து செல்கின்றது. அவ்வமைவுகளில் நேரம் T_1 எனவும் T_2 எனவும் எடுக்கும்போது
$T_1 = +u - \sqrt{u^2 - 2ad}$ எனவும் $T_2 = +u + \sqrt{u^2 - 2ad}$ எனவும் எழுதலாம்.
எனவே நேரங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம்

$$|T_1 - T_2| = T_2 - T_1$$

$$= 2\sqrt{u^2 - 2ad}$$

7. ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓய்விலிருந்து பயணத்தை ஆரம்பிக்கும் அதே வேளை வேகம் v m s^{-1} கிடைக்கும் வரை சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகின்றது. அது ஒரு குறித்த நேரத்திற்கு அம்மாறா வேகத்துடன் இயங்கிச் சீராக அமர்முடுகுவதனால் மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. வாகனத்தின் சராசரிக் கதி $\frac{7v}{8}$ m s^{-1} ஆகும். ஆர்முடுகலும் அமர்முடுகலும் பருமனில் சமம். மாறா வேகத்துடன் இயங்கிய தூரம் பயணத்தின் மொத்தத் தூரத்துடன் கொண்டுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

இயக்கத்துக்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரையும்போது



ஆர்முடுகலும் அமர்முடுகலும் பருமனில் சமம் ஆகையால் அதற்கு எடுத்த நேரத்தைப் போன்று சென்ற தூரமும் சமம். ஆர்முடுகலுடனும் சீரான வேகத்துடனும் சென்ற நேரங்கள் முறையே t_1, t_0 எனக் கொள்வோம். பயணத்திற்கு எடுத்த மொத்த நேரம் $t_1 + t_o + t_1 = t_o + 2t_1$.

இங்கு வாகனத்தின் மொத்த இடப்பெயர்ச்சிக்கான வேக - நேர வளையியின் ஒத்த சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கருதும்போது அவ்விடப்பெயர்ச்சி S எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } S = \frac{1}{2}v \times (t_o + t_o + 2t_1)$$
$$= v(t_0 + t_1)$$

சீரான வேகத்துடன் சென்ற தூரம் ஒத்த செவ்வகத்திலிருந்து கிடைக்கின்றமையால் அவ்விடப்பெயர்ச்சி $A = v \times t_o$.

வாகனத்தின் சராசரிக் கதி, அதாவது இடைக் கதி $\frac{7v}{8}$ m s^{-1} ஆகையால்,

$$\frac{7v}{8} = v(t_o + t_1) \div (t_o + 2t_1)$$
$$= v(t_o + t_1) \times \frac{1}{t_o + 2t_1}.$$

$$\Rightarrow 7(t_o + 2t_1) = 8(t_o + t_1).$$
$$\Rightarrow t_o = 6t_1.$$

$$\Rightarrow S = v\,(6t_1 + t_1) = 7_1 tv,\ A = v \times 6t_1 = 6t_1 v.$$

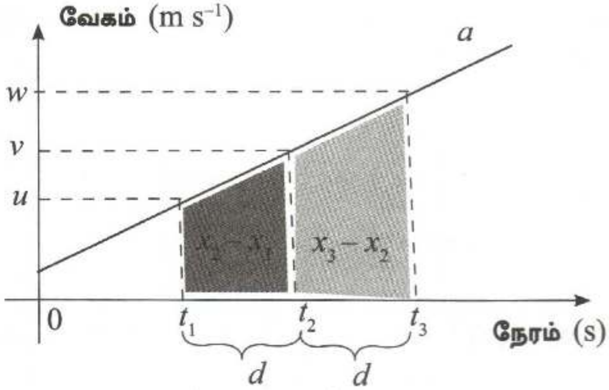
$$\Rightarrow \frac{A}{S} = \frac{6vt_1}{7vt_1}$$

$$= \frac{6}{7}.$$

ஆகவே மாறா வேகத்துடன் இயங்கிய தூரம் பயணத்தின் மொத்தத் தூரத்துடன் கொண்டுள்ள விகிதம் $6:7$ ஆகும்.

8. சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் $t = t_1, t = t_2, t = t_3$ ஆக இருக்கும்போது பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து முறையே x_1, x_2, x_3 ஆகிய தூரங்களில் இருக்கின்றது. இங்கு t_1, t_2, t_3 ஆகியன பொது வித்தியாசம் d ஆகவுள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாக இருக்கும் அதே வேளை x_1, x_2, x_3 ஆகியன ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகளாகும். $\left(\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}\right)^2 = ad^2$ எனக் காட்டுக.

இயக்கத்திற்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைவோம்.



$t_1,\ t_2,\ t_3$ ஆகியன பொது வித்தியாசம் d ஆகவுள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகள் ஆகையால் $t_2 - t_1 = d$, $t_3 - t_2 = d$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை x_1, x_2, x_3 ஆகியன ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் அடுத்துள்ள உறுப்புகள் ஆகையால் $x_1 . x_3 = {x_2}^2$.

துணிக்கையின் ஆர்முடுகலை ஆயிடை $[t_1, t_2]$ இல் கருதும்போது

$$a = \frac{v-u}{t_2 - t_1} .$$

$$\Rightarrow v = u + a(t_2 - t_1) .$$

$$\Rightarrow v = u + ad$$

இங்கு துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சிக்கான வேக - நேர வளையியின் ஒத்த சரிவகத்தின் பரப்பளவைக் கருதும்போது

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(v + u) \times d$$

$$= \frac{1}{2}(u + ad + u)d$$

$$= ud + \frac{1}{2}ad^2.$$

துணிக்கையின் ஆர்முடுகலை ஆயிடை $[t_1, t_3]$ இல் கருதும்போது

$$a = \frac{w-u}{t_3 - t_1}.$$

$$\Rightarrow w = u + a(t_3 - t_1).$$

$$\Rightarrow w = u + 2ad .$$

ஆகவே ஆயிடை $[t_2, t_3]$ இல் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியைக் கருதும்போது

$$x_3 - x_2 = \frac{1}{2}(v + w) \times d$$

$$= \frac{1}{2}(u + ad + u + 2ad)d$$

$$= ud + \frac{3}{2}ad^2.$$

அப்போது $\left(\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}\right)^2 = x_3 - 2\sqrt{x_3}\sqrt{x_1} + x_1$

$$= x_3 - 2x_2 + x_1$$

$$= x_3 - x_2 - x_2 + x_1$$

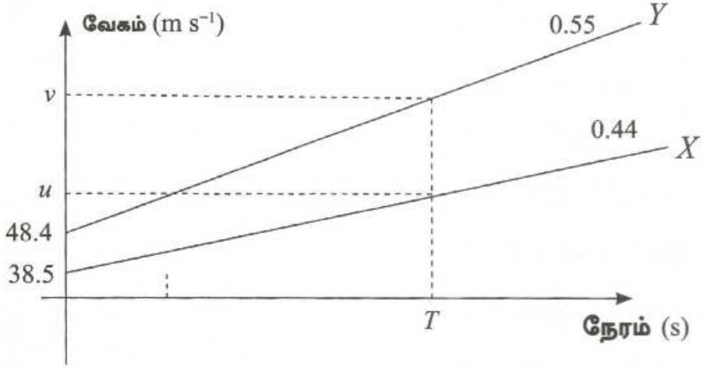
$$= x_3 - x_2 - (x_2 - x_1)$$

$$= ud + \frac{3}{2}ad^2 - \left(ud + \frac{1}{2}ad^2\right)$$

$$= ad^2.$$

9. மோட்டர் வாகன ஓட்டப் போட்டியில் ஒரு மோட்டர் வாகனம் X ஆனது ஓட்டப் போட்டியை முடிப்பதற்கு 1100 m தூரத்தில் இருக்கும்போது அது சீரான ஆர்முடுகல் 0.44 m s^{-2} ஐக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை அதன் வேகம் 38.5 m s^{-1} ஆகும். இக்கணத்தில் ஓட்டப் போட்டியில் பங்குபற்றும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் Y இன் சீரான ஆர்முடுகல் 0.55 m s^{-2} ஆகவும் அதன் வேகம் 48.4 m s^{-1} ஆகவும் இருக்கும் அதே வேளை அது மோட்டர் வாகனம் X இலும் பார்க்க 220 m பின்னால் உள்ளது. போட்டி முடிவுக் கோட்டுக்கு 242 m இருக்கையில் மோட்டர் வாகனம் Y ஆனது மோட்டர் வாகனம் X ஐக் கடந்து செல்லுமெனக் காட்டுக. இவ்வோட்டப் போட்டி முடிவடையும் நேரங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஒரு செக்கன் எனவும் காட்டுக.

இரு மோட்டர் வாகனங்களினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக -நேர வளையிகளைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம். மோட்டர் வாகனம் Y ஆனது மோட்டர் வாகனம் X ஐக் கடந்து செல்லும் கணத்தில் Y ஆனது X சென்ற தூரத்திலும் பார்க்க மேலும் 220 m சென்றுள்ளது. இதற்குத் தேவையான நேரம் T எனக் கொள்வோம்.



X இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $0.44 = \dfrac{u - 38.5}{T}$.

$$\Rightarrow u = 38.5 + 0.44\, T.$$

மோட்டர் வாகனத்தின் இடப்பெயர்ச்சிக்கான வேக - நேர வளையியின் ஒத்த சரிவகப் பரப்பளவைக் கருதும்போது அத்தூரம்

$$s_X = \frac{1}{2}(38.5 + u) \times T$$
$$= \frac{1}{2}(38.5 + 38.5 + 0.44T)T$$
$$= 38.5T + 0.22T^2.$$

Y இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$0.55 = \frac{v - 48.4}{T}.$$
$$\Rightarrow v = 48.4 + 0.55T.$$

அதன் இடப்பெயர்ச்சி $s_Y = \frac{1}{2}(48.4 + v) \times T$
$$= \frac{1}{2}(48.4 + 48.4 + 0.55T)T$$
$$= 48.4T + \frac{1}{2} \times 0.55T^2.$$

Y ஆனது X சென்ற தூரத்திலும் பார்க்க மேலும் 220 m செல்கின்றமையால் $s_Y = s_X + 220$.

$$\Rightarrow 48.4T + \frac{1}{2} \times 0.55\,T^2 = 38.5T + 0.22\,T^2 + 220.$$

200 இனால் பெருக்கும்போது

$$9680T + 55T^2 = 7700T + 44T^2 + 44000.$$

$$\Rightarrow 11T^2 + 1980T - 44000 = 0.$$

$$\Rightarrow T^2 + 180T - 4000 = 0.$$

$$\Rightarrow (T + 200)(T - 20) = 0.$$

$$\Rightarrow T + 200 = 0 \text{ அல்லது } T - 20 = 0.$$

$$\Rightarrow T = -200 \text{ அல்லது } T = 20.$$

நேரம் நேராக இருக்க வேண்டும் ஆகையால் $T = 20$ மாத்திரம் உண்மையானது.

இப்போது X சென்ற தூரம் $s_X = 38.5 \times 20 + 0.22 \times 20^2$

$$= 770 + 0.22 \times 400$$
$$= 770 + 88$$
$$= 858.$$

எனவே போட்டி முடிவுக் கோட்டிற்கு இன்னும் உள்ள தூரம்
$$= 1100 - 858$$
$$= 242 \text{ m}.$$

ஆகவே போட்டி முடிவுக் கோட்டிற்கு 242 m இருக்கையில் Y ஆனது X ஐக் கடந்து செல்கின்றது.

X ஆனது போட்டியை முடிப்பதற்கு 1100 m தூரம் செல்ல வேண்டிய அதே வேளை அதற்கான நேரம் t_1 எனின், $s_X = 38.5T + 0.22T^2$ ஐக் கருதும்போது,
$$1100 = 38.5 \times t_1 + 0.22 \times t_1^2.$$

100 இனால் பெருக்கும்போது $110000 = 3850 \times t_1 + 22 \times t_1^2$.
$$\Rightarrow 22t_1^2 + 3850\, t_1 - 110000 = 0.$$
$$\Rightarrow t_1^2 + 175\, t_1 - 5000 = 0.$$
$$\Rightarrow (t_1 + 200)(t_1 - 25) = 0.$$
$$\Rightarrow t_1 + 200 = 0 \text{ அல்லது } t_1 - 25 = 0.$$
$$\Rightarrow t_1 = -200 \text{ அல்லது } t_1 = 25.$$

நேரம் நேராக இருக்க வேண்டியமையால் $t_1 = 25$ மாத்திரம் உண்மையானது.

ஆகவே X ஆனது போட்டியை முடிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் 25 செக்கன் ஆகும்.

Y ஆனது போட்டியை முடிப்பதற்கு 1100 m தூரமும் மேலும் 220 m உம் செல்ல வேண்டிய அதே வேளை அதற்கான நேரம் t_2 எனின்,
$s_Y = 48.4\,T + \frac{1}{2} \times 0.55\, T^2$ ஐக் கருதும்போது
$$1100 + 220 = 48.4t_2 + \frac{1}{2} \times 0.55t_2^2 .$$

200 இனால் பெருக்கும்போது $264000 = 9680 \times t_2 + 55 \times t_2^2$.

$$\Rightarrow 55\, t_2^2 + 9680\, t_2 - 264000 = 0.$$

$$\Rightarrow 11\, t_2^2 + 1936\, t_2 - 52800 = 0.$$

$$\Rightarrow t_2^2 + 176\, t_2 - 4800 = 0.$$

$$\Rightarrow (t_2 + 200)(t_2 - 24) = 0.$$

$$\Rightarrow t_2 + 200 = 0 \text{ அல்லது } t_2 - 24 = 0.$$

$$\Rightarrow t_2 = -200 \text{ அல்லது } t_2 = 24.$$

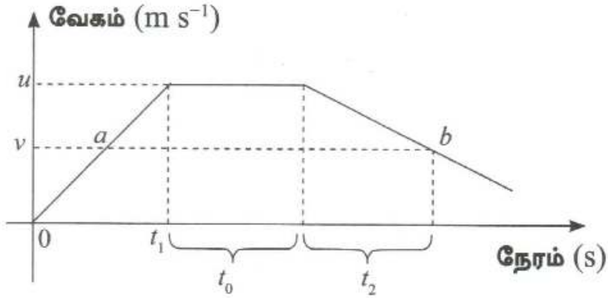
நேரம் நேராக இருக்க வேண்டியமையால் $t_2 = 24$ மாத்திரம் உண்மையானது.

எனவே Y ஆனது போட்டியை முடிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் 24 செக்கன் ஆகும்.

X, Y ஆகியன போட்டியை முடிக்கும் நேரங்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் ஒரு செக்கன் ஆகும்.

10. ஒரு புள்ளி A இலிருந்து ஒரு துணிக்கை ஓய்விலிருந்து ஆரம்பித்து சீரான ஆர்முடுகல் $a \text{ m s}^{-2}$ உடன் இயங்கி அதன் உயர்ந்தபட்ச வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ ஐப் பெறுகின்றது. அது அவ்வேகத்துடன் சீராக ஒரு குறித்த நேரத்துக்கு இயங்கி அதன் பின்னர் சீரான அமர்முடுகல் $b \text{ m s}^{-2}$ உடன் இயங்கி வேகம் $v \text{ m s}^{-1}$ உடன் ஒரு புள்ளி B ஐக் கடக்கின்றது. இப்போது $2ab.\, AB \geq (a+b)u^2 - av^2$ எனக் காட்டுக.

இயக்கத்துக்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரையும்போது



ஆர்முடுகலுடனும் சீரான வேகத்துடனும் அமர்முடுகலுடனும் சென்ற நேரங்கள் முறையே t_1, t_0, t_2 எனக் கொள்வோம்.

துணிக்கையின் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{u-0}{t_1}$.

$$\Rightarrow t_1 = \frac{u}{a} \cdot$$

இங்கு இடப்பெயர்ச்சிக்கான வேக - நேர வளையியில் ஒத்த முக்கோணியிலிருந்து அவ்விடப்பெயர்ச்சி

$$= \frac{1}{2} u \times t_1 = \frac{1}{2} u \times \frac{u}{a} = \frac{1}{2a} u^2.$$

சீரான வேகத்துடன் சென்ற தூரம் ஒத்த செவ்வகத்திலிருந்து கிடைக்கின்றமையால் அவ்விடப்பெயர்ச்சி $u \times t_o = ut_o$.

துணிக்கையின் அமர்முடுகலைக் கருதும்போது $b = \dfrac{u-v}{t_2}$.

$$\Rightarrow t_2 = \frac{u-v}{b} \cdot$$

இங்கு இடப்பெயர்ச்சி $= \dfrac{1}{2}(u+v) \times t_2 = \dfrac{1}{2}(u+v) \times \dfrac{(u-v)}{b}$

$$= \frac{1}{2b}(u^2 - v^2).$$

பயணத்தின் மொத்தத் தூரம் ஆர்முடுகலுடன், சீரான வேகத்துடன், அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரங்கள் ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஆகையால்

$$AB = \frac{1}{2a} u^2 + ut_o + \frac{1}{2b} (u^2 - v^2).$$

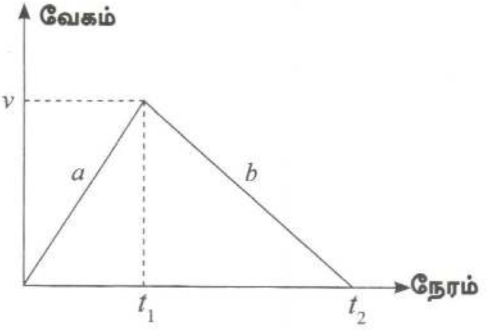
$$\Rightarrow AB \geq \frac{1}{2a} u^2 + \frac{1}{2b}(u^2 - v^2)$$

$$= \frac{1}{2ab}\left[bu^2 + a(u^2 - v^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2ab}\left[(a+b)u^2 - av^2\right].$$

$$\Rightarrow 2ab.\,AB \geq (a+b)u^2 - av^2.$$

11. ஓய்விலிருந்து செல்லத் தொடங்கும் ஒரு துணிக்கை ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் a உடனும் அதன் பின்னர் மாறா அமர்முடுகல் b உடனும் சென்று ஓய்வுக்கு வருகின்றது. பயணத்திற்கான மொத்த நேரம் $\left[\frac{2s}{ab}(a+b)\right]^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக; இங்கு s ஆனது துணிக்கை சென்ற தூரம் ஆகும்.



ஆர்முடுகலுடனும் அமர்முடுகலுடனும் சென்ற நேரங்கள் முறையே $t_1,\ t_2 - t_1$ எனக் கொள்வோம்.

துணிக்கையின் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{v-0}{t_1}. \Rightarrow t_1 = \dfrac{v}{a}.$

அமர்முடுகலுடன் $b = \dfrac{v-0}{t_2 - t_1}. \ \Rightarrow t_2 - t_1 = \dfrac{v}{b}.$

ஆகவே $t_2 - \dfrac{v}{a} = \dfrac{v}{b}.$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v}{a} + \frac{v}{b}$$

$$= \frac{v}{ab}(a+b).$$

$$\Rightarrow v = \frac{ab}{(a+b)} t_2.$$

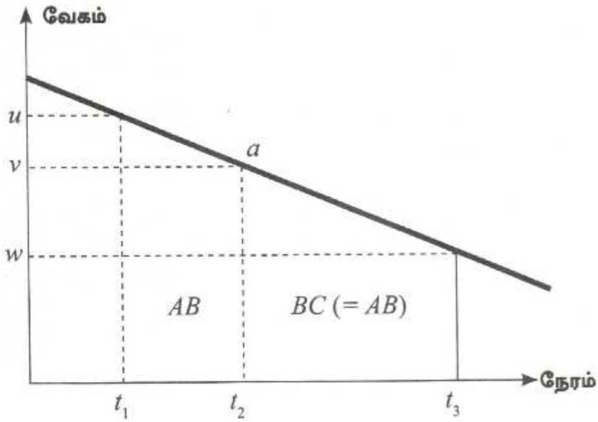
துணிக்கை சென்ற மொத்தத் தூரம் $s = \dfrac{1}{2} v \times t_2$

$$s = \frac{1}{2} \frac{ab}{(a+b)} \times t_2^2.$$

எனவே மொத்த நேரம் $t_2 = \left[\dfrac{2s}{ab}(a+b)\right]^{\frac{1}{2}}.$

12. ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் செல்லும் ஒரு துணிக்கை நேரம் t_1, t_2, t_3 ஆக இருக்கும்போது A, B, C என்னும் புள்ளிகளைக் கடக்கின்றது; இங்கு $AB = BC$. துணிக்கையின் அமர்முடுகல் $\dfrac{2AB.(t_1 - 2t_2 + t_3)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}$ எனக் காட்டுக.

துணிக்கையின் சீரான அமர்முடுகல் a எனவும் A, B, C ஆகிய புள்ளிகளைக் கடந்து செல்லும்போது அதன் வேகங்கள் முறையே u, v, w எனவும் கொள்வோம்.



துணிக்கையின் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{u - w}{t_3 - t_1}$.

$\Rightarrow a(t_3 - t_1) = u - w.$ ———— ①

துணிக்கை சென்ற தூரத்தைக் கருதும்போது $AB = \dfrac{1}{2}(u + v)(t_2 - t_1)$.

$$BC = AB = \frac{1}{2}(v + w)(t_3 - t_2).$$

ஆகவே $2 \times \dfrac{AB}{t_2 - t_1} = u + v,\ 2 \times \dfrac{AB}{t_3 - t_2} = v + w.$

இவற்றின் வித்தியாசத்திலிருந்து

$$2AB \times \left(\frac{1}{t_2 - t_1} - \frac{1}{t_3 - t_2} \right) = u - w.$$

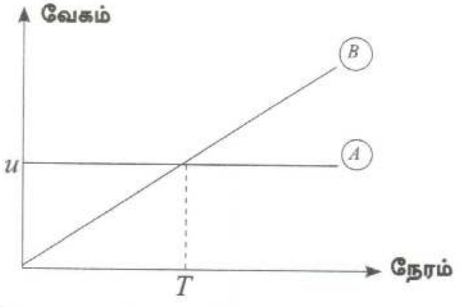
$$2AB \times \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} = u - w$$

$$= a \times (t_3 - t_1).$$

$$\Rightarrow a = 2AB \times \frac{t_1 - 2t_2 + t_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)}.$$

எனவே துணிக்கையின் சீரான ஆர்முடுகல் $\frac{2AB\,(t_1 - 2t_2 + t_3)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)}$ ஆகும்.

13. ஒரு நேர்கோட்டில் ஒரு திசையில் ஒரு துணிக்கை A ஆனது மாறா வேகம் u உடன் இயங்குகின்றது. அது கோடு மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O ஐக் கடக்கும்போது ஓய்விலிருந்து வேறொரு துணிக்கை B ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் a உடன் O இலிருந்து துணிக்கை A இயங்கும் திசைக்கு எதிரான திசையில் இயங்குகின்றது. துணிக்கைகளின் கதிகள் சமமாக இருக்கும்போது O இலிருந்து B இற்கு உள்ள தூரம் $\frac{u^2}{2a}$ எனவும் துணிக்கை A அதன் இரு மடங்கு தூரம் சென்றுள்ளது எனவும் காட்டுக. இரு துணிக்கைகளும் O இலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கும்போது துணிக்கை B இன் கதி $2u$ எனவும் காட்டுக.



இயக்கத்திற்காக மேற்குறித்தவாறு ஒரு வேக - நேர வளையியை வரையலாம். இரு துணிக்கைகளினதும் கதிகள் சமமாக இருக்கும்போது நேரம் T எனின், $u = aT$ ஆகையால் புள்ளி O இலிருந்து B இருக்கும் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் $\frac{1}{2}uT$ ஆதலின் அத்தூரம் $\frac{u^2}{2a}$ ஆகும்.

இப்போது புள்ளி O இலிருந்து A இருக்கும் புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் $uT = \frac{u^2}{a}$ ஆகையால் துணிக்கை A ஆனது துணிக்கை B ஐப் போன்று இரு மடங்கான தூரத்திற்குச் சென்றுள்ளது.

இரு துணிக்கைகளும் புள்ளி O இலிருந்து சம தூரத்தில் இருக்கும்போது எடுத்துள்ள நேரம் t எனின், துணிக்கை A சென்றுள்ள தூரம் ut உம் துணிக்கை B சென்றுள்ள தூரம் $\frac{1}{2}wt$ உம் ஆகும்.

துணிக்கை B இன் ஆர்முடுகல் $a = \frac{w}{t}$ ஆகையால் இவ்விடயங்கள் எல்லாவற்றையும் சேர்க்கும்போது

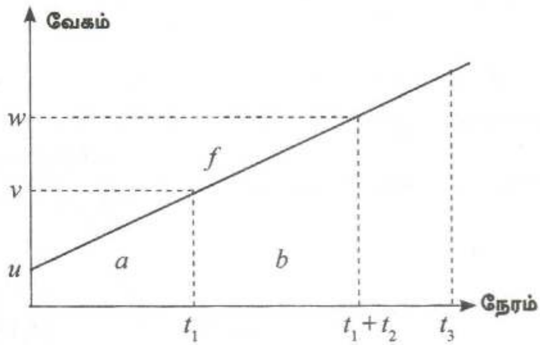
$$u \times \frac{w}{a} = \frac{1}{2} w \times \frac{w}{a}.$$

$$\Rightarrow w = 2u.$$

14. ஒரு பொருள் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி நேரம் t_1 இல் தூரம் a உம் மேலும் நேரம் t_2 இல் மேலும் தூரம் b உம் செல்கின்றது. பொருளின் ஆர்முடுகலைக் காண்க. பொருள் t_1, t_2, t_3 ஆகிய நேர ஆயிடைகளில் சம தூரங்களுக்குச் செல்லுமெனின், t_1, t_2, t_3 ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்புடைமையைப் பெறுக.

இயக்கத்திற்காகப் பின்வருமாறு ஒரு வேக - நேர வளையியை வரையலாம்.

தொடக்க வேகம் u எனவும் நேரம் t_1, $t_1 + t_2$ ஆகவுள்ள வேகங்கள் v, w எனவும் கொள்வோம்.



நேரம் t_1 இல் பொருள் சென்றுள்ள தூரம் $a = \frac{1}{2}(u+v) \times t_1$.
அதாவது $\frac{2a}{t_1} = u + v$.
t_1 இலிருந்து $t_1 + t_2$ நேர வித்தியாசத்தில்
சென்ற தூரம் $b = \frac{1}{2}(v+w) \times t_2$.
அதாவது $\frac{2b}{t_2} = v + w$.

இவற்றின் வித்தியாசத்திலிருந்து $\frac{2b}{t_2} - \frac{2a}{t_1} = (v+w) - (u+v)$.

அதாவது $w - u = \frac{2}{t_1 t_2}(bt_1 - at_2)$. ——— ①

பொருளின் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $f = \frac{v-u}{t_1} = \frac{w-v}{t_2}$.
ஆகவே $w - u = f t_2$, $v - u = f t_1$.
இவற்றின் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து $w - u = f(t_1 + t_2)$.

$$\Rightarrow f = \frac{w-u}{t_1 + t_2}.$$

① இலிருந்து $w - u$ இற்குப் பிரதியிடும்போது $f = \frac{2(bt_1 - at_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$.

0 தொடக்கம் t_1 வரையும் t_1 தொடக்கம் $t_1 + t_2$ வரையும் உள்ள நேர ஆயிடைகளில் பொருள் சம தூரம் சென்றிருப்பின், $a = b$.

எனவே பொருளின் ஆர்முடுகல் $f = \frac{2a(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$.

இவ்வாறே t_1 தொடக்கம் $t_1 + t_2$ வரையும் $t_1 + t_2$ தொடக்கம் $t_1 + t_2 + t_3$ வரையும் உள்ள நேர ஆயிடைகளில் பொருள் சம தூரம் சென்றிருப்பின், பொருளின் ஆர்முடுகல் $f = \frac{2a(t_2 - t_3)}{t_2 t_3 (t_2 + t_3)}$ எனப் பெறலாம்.

இக்கோவைகளைக் கருதும்போது $\frac{2a(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = \frac{2a(t_2 - t_3)}{t_2 t_3 (t_2 + t_3)}$.

$$\therefore \frac{t_1 - t_2}{t_1(t_1 + t_2)} = \frac{t_2 - t_3}{t_3(t_2 + t_3)}.$$

அதாவது $t_1(t_1+t_2)(t_2-t_3)=t_3(t_2+t_3)(t_1-t_2)$.

$$\Rightarrow t_1(t_1+t_2+t_3-t_3)(t_2-t_3)=t_3(t_1+t_2+t_3-t_1)(t_1-t_2).$$

$$\Rightarrow t_1(t_1+t_2+t_3)(t_2-t_3)-t_1t_3(t_2-t_3)=t_3(t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2)-t_1t_3(t_1-t_2).$$

$$\Rightarrow (t_1+t_2+t_3)[t_1(t_2-t_3)-t_3(t_1-t_2)]=t_1t_3(t_2-t_3)-t_1t_3(t_1-t_2).$$

$$\Rightarrow (t_1+t_2+t_3)[t_1t_2-2t_1t_3+t_2t_3]=t_1t_3(-t_1+2t_2-t_3).$$

$$\Rightarrow (t_1+t_2+t_3)[t_1t_2-t_1t_3+t_2t_3]-(t_1+t_2+t_3)t_1t_3=t_1t_3(-t_1+2t_2-t_3).$$

$$\Rightarrow (t_1+t_2+t_3)[t_1t_2-t_1t_3+t_2t_3]=(t_1+t_2+t_3)t_1t_3+t_1t_3(-t_1+2t_2-t_3).$$

$$\Rightarrow 3t_1t_2t_3.$$

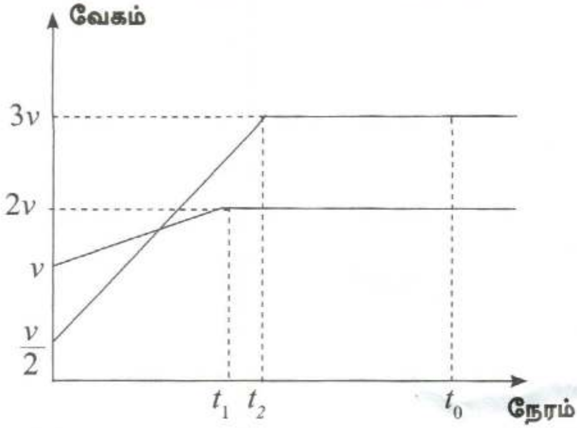
$$\Rightarrow \frac{t_1t_2-t_1t_3+t_2t_3}{t_1t_2t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}.$$

$$\Rightarrow \frac{t_1t_2}{t_1t_2t_3}-\frac{t_1t_3}{t_1t_2t_3}+\frac{t_2t_3}{t_1t_2t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t_3}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_1}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}.$$

ஆகவே $\dfrac{1}{t_1}-\dfrac{1}{t_2}+\dfrac{1}{t_3}=\dfrac{3}{t_1+t_2+t_3}$.

15. இரு சமாந்தர ஏகபரிமாணப் பாதைகளில் d நீளமுள்ள ஒரு புகையிரதமும் எஞ்சினும் முறையே a, $2a$ என்னும் ஆர்முடுகல்களுடனும் $2v$, $3v$ என்னும் உயர்ந்தபட்ச வேகங்களுடனும் செல்கின்றன. புகையிரதத்தின் பிற்பக்கமும் மற்றைய எஞ்சினும் நேராக இருக்கும்போது அவற்றின் வேகங்கள் முறையே v, $\frac{v}{2}$ ஆக இருப்பதோடு அவை ஆர்முடுகல்களுடன் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. அவை உயர்ந்தபட்ச வேகங்களை அடையும்போது அவ்வேகங்களுடன் இயங்குவதோடு $3v^2 < 16ad$ எனின், மேற்குறித்த அமைவிலிருந்து புகையிரதத்தின் முற்பக்கமும் மற்றைய எஞ்சினும் நேராக இருக்கும்போது புகையிரதம் $\frac{1}{8a}(16ad+13v^2)$ தூரம் சென்றுள்ளதெனக் காட்டுக. அதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.



இயக்கத்திற்கு மேற்குறித்தவாறு ஒரு வேக - நேர வளையியை வரையலாம்.

தேவையான அமைவுக்குப் புகையிரதமும் எஞ்சினும் வரும்போது எடுக்கும் நேரம் t_0 எனவும் அவை உயர்ந்தபட்ச வேகங்களைப் பெறும்போது எடுக்கும் நேரங்கள் முறையே t_1, t_2 எனவும் கொள்வோம்.

ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $a=\dfrac{2v-v}{t_1}$, $2a=\dfrac{3v-\frac{v}{2}}{t_2}$ ஆகும்.

$$\Rightarrow t_1=\frac{v}{a},\ t_2=\frac{5v}{4a}.$$

புகையிரதம் செல்லும் தூரம் $s_1=\dfrac{1}{2}(v+2v)\,t_1+2v\,(t_0-t_1)$

$$=\frac{3}{2}v\times\frac{v}{a}+2v\left(t_0-\frac{v}{a}\right)$$

$$=2vt_0-\frac{v^2}{2a}.$$

எஞ்சின் செல்லும் தூரம் $s_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v}{2}+3v\right)t_2+3v\,(t_0-t_2)$

$$=\frac{7}{4}v\times\frac{5v}{4a}+3v\left(t_0-\frac{5v}{4a}\right)$$

$$=3vt_0-\frac{25v^2}{16a}.$$

நேரம் t_2 ஆக இருக்கும்போது

புகையிரதம் செல்லும் தூரம் $= 2vt_2 - \dfrac{v^2}{2a}$

$$= 2v \times \frac{5v}{4a} - \frac{v^2}{2a}$$

$$= \frac{2v^2}{a}.$$

நேரம் t_2 ஆக இருக்கும்போது

எஞ்சின் செல்லும் தூரம் $= \dfrac{1}{2}\left(3v + \dfrac{v}{2}\right) t_2$

$$= \frac{7v}{4} \times \frac{5v}{4a}$$

$$= \frac{35}{16a} v^2.$$

இப்போது எஞ்சின் புகையிரதத்தின் முற்பக்கத்திலும் பார்க்க முன்னால் இருப்பின்

$$\frac{2v^2}{a} + d \leq 35 \frac{v^2}{16a}.$$

$$\Rightarrow 32v^2 + 16ad \leq 35v^2.$$

$$\Rightarrow 16ad \leq 3v^2.$$

இது அவ்வாறு இல்லையெனத் தரப்பட்டுள்ளமையால் புகையிரதம் உயர்ந்தபட்சக் கதியைப் பெற்ற பின்னர் புகையிரதத்தின் முற்பக்கத்திற்கு நேராக வருகின்றது.

தரப்பட்டுள்ள விடயங்களுக்கேற்ப $s_1 + d = s_2$.

அதாவது $2vt_0 - \dfrac{v^2}{2a} + d = 3vt_0 - \dfrac{25v^2}{16a}.$

$$\Rightarrow vt_0 = d + \frac{25}{16a} v^2 - \frac{1}{2a} v^2.$$

$$\Rightarrow vt_0 = d + \frac{17}{16a} v^2.$$

ஆகவே புகையிரதம் செல்லும் தூரம் $s_1 = 2vt_0 - \frac{v^2}{2a}$

$$= 2\left(d + \frac{17}{16a}v^2\right) - \frac{v^2}{2a}$$

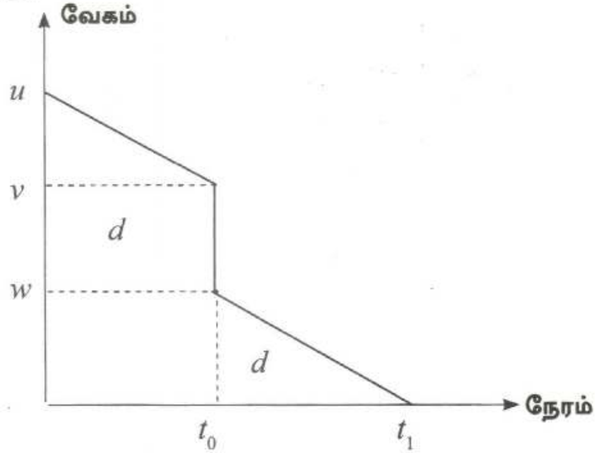
$$= 2d + \frac{13}{8a}v^2.$$

மேலும் இதற்கான நேரம் $t_0 = \frac{d}{v} + \frac{17}{16a}v$ ஆகும்.

16. $2d$ தூரத்தில் இருக்கும் கோட்டுத் துண்டம் AB இன் நடுப் புள்ளி C ஆகும். வேகம் u உடன் A ஐக் கடந்து செல்லும் ஒரு பொருள் சீரான அமர்முடுகலுடன் சென்று வேகம் V உடன் C இற்கு வரும் அதே வேளை கணப்பொழுதில் பொருளின் வேகம் $w\,(<v)$ ஆகும். பொருள் மேலும் ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கி B இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. பயணத்துக்கு எடுத்த மொத்த நேரத்தையும் AC இற்கும் BC இற்குமிடையே உள்ள ஆர்முடுகல்கள் சமமாக இருப்பதற்கான ஒரு நிபந்தனையையும் காண்க.

A இற்கும் C இற்குமிடையே உள்ள இயக்கத்தில் அமர்முடுகல் a எனவும் C இற்கு வரும்போது எடுக்கும் நேரம் t_0 எனவும் கொள்வோம்.

இயக்கத்திற்கான ஒரு வேக - நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



A இற்கும் C இற்குமிடையே உள்ள
அமர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{u-v}{t_0}$

மேலும் $d = \dfrac{1}{2}(u+v)\,t_0. \Rightarrow t_0 = \dfrac{2d}{u+v}.$

C இற்கும் B இற்குமிடையே உள்ள இயக்கத்தில் ஆர்முடுகல் b எனவும் அதற்கான நேரம் t_1 எனவும் கொள்வோம். u, v ஆகியவற்றுக்கு முறையே w, 0 என இடும்போது அல்லது வேக நேர வளையியைக் கொண்டு

$$b = \frac{w-0}{t_1} = \frac{w}{t_1},\ t_1 = \frac{2d}{0+w} = \frac{2d}{w}.$$

எனவே பயணத்துக்கு எடுத்த நேரம் $t_0 + t_1$

$$= \frac{2d}{u+v} + \frac{2d}{w}$$

$$= \frac{u+v+w}{(u+v)\,w}\,2d.$$

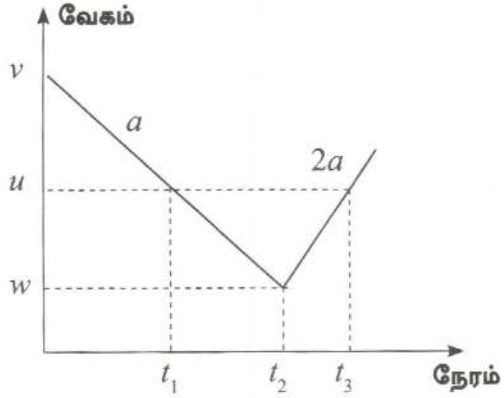
A இற்கும் C இற்குமிடையே போன்று C இற்கும் B இற்குமிடையே அமர்முடுகல்கள் சமமெனின், $a = b$

அதாவது $\dfrac{u-v}{t_0} = \dfrac{w}{t_1}$.

$$\Rightarrow \frac{u-v}{2d} \times (u+v) = \frac{w}{2d} \times w.$$

$$\Rightarrow u^2 - v^2 = w^2.$$

17. ஒரு நகரத்தில் வாகனங்களுக்கான கதி எல்லை u km h^{-1} ஆகும். கதி $v\,(>u)$ km h^{-1} உடன் செலுத்தப்படும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் நகர எல்லையை அணுகும்போது ஒரு சீரான அமர்முடுகல் a km h^{-2} இன் கீழ் இயங்கி வேகம் u km h^{-1} உடன் நகர எல்லையைக் கடக்கின்றது. மேலும் அந்த அமர்முடுகலின் கீழ் இயங்கும் மோட்டர் வாகனம் ஆர்முடுகல் $2a$ km h^{-2} இன் கீழ் இயங்கி மறுபடியும் வேகம் u km h^{-1} உடன் நகரத்தின் மற்றைய எல்லையைக் கடக்கின்றது. நகர எல்லைகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $3d$ km ஆகும். இவ்வியக்கம் நடைபெறுவதற்கான நிபந்தனை $u \le 2\sqrt{ad}$ எனக் காட்டுக.
வாகனத்தின் குறைந்தபட்சக் கதியுடன் நகர எல்லைகளுக்கிடையே செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரத்தையும் வாகனம் அமர்முடுகுவதற்கு ஆரம்பித்த இடத்திலிருந்து நகர எல்லைக்கு உள்ள தூரத்தையும் காண்க.



இயக்கத்திற்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை மேற்குறித்தவாறு முன்வைக்கலாம்.

அமர்முடுகலைக் கருதும்போது $a = \dfrac{v-u}{t_1} = \dfrac{v-w}{t_2} = \dfrac{u-w}{t_2 - t_1}$ —— ①

ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது $2a = \dfrac{u-w}{t_3 - t_2}$. —— ②

நகர எல்லைகளுக்கிடையே தூரம் $3d$ ஆகையால்

$$\frac{1}{2}(u+w)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(u+w)(t_3 - t_2) = 3d.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u+w)(t_3 - t_1) = 3d.$$

$$\Rightarrow (u+w)(t_3 - t_1) = 6d. \text{ —— ③}$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து t_2 ஐ நீக்குவோம்.

$$\Rightarrow u - w = 2a\left(t_3 - \frac{v-w}{a}\right)$$

$$= 2at_3 - 2(v-w).$$

எனவே $u - 3w = 2at_3 - 2v.$

சமன்பாடு ① இலிருந்து $at_1 = v - u$ ஆகையால் $2at_1 = 2\ (v-u)$.
மேற்குறித்த சமன்பாட்டுடன் கூட்டும்போது

$$u + 2at_1 - 3w = 2(v-u) + 2at_3 - 2v$$
$$2a(t_3 - t_1) = u + 2v - 3w - 2(v-u)$$
$$= 3u - 3w.$$

சமன்பாடு ③ இலிருந்து $(u+w)\times\frac{3}{2a}\times(u-w)=6d.$

$$\Rightarrow u^2-w^2=4ad.$$

$w^2\geq 0$ ஆகையால் $-w^2\leq 0.\Rightarrow u^2\leq 4ad.$

அதாவது $\quad u\leq 2\sqrt{ad}$.

மேற்குறித்த சுருக்கலுக்கேற்ப வாகனத்தின் குறைந்தபட்சக் கதி $w=\sqrt{u^2-2ad}$.

நகர எல்லைகளுக்கிடையே செல்வதற்கு நேரம் $t_3-t_1=\frac{3}{2a}(u-w)$

$$=\frac{3}{2a}\left(u-\sqrt{u^2-2ad}\right).$$

அமர்முடுகல் தொடங்கிய இடத்திலிருந்து நகர எல்லைக்கு உள்ள தூரம் A எனின்,

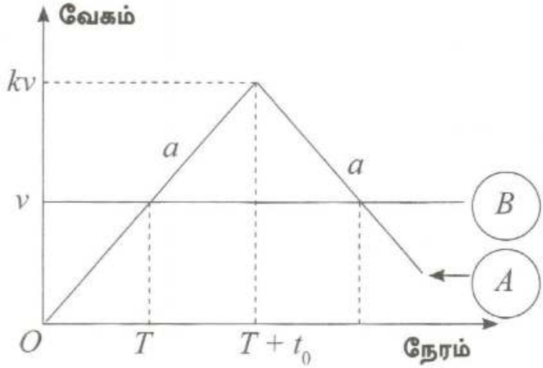
$$A=\frac{1}{2}(u+v)\times t_1$$

$$=\frac{1}{2}(u+v)\times\frac{v-u}{a}$$

$$=\frac{1}{2a}(v^2-u^2).$$

18. ஓய்வில் உள்ள ஒரு வாகனம் A ஆனது சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு குறித்த புள்ளியிலிருந்து இயங்க ஆரம்பிக்கும்போது சீரான வேகம் v உடன் செல்லும் வேறொரு வாகனம் B ஆனது வாகனம் A ஐக் கடந்து செல்கின்றது. இரு வாகனங்களும் இரு நேர்க் கிடைப் பாதைகளில் செல்லும் அதே வேளை வாகனம் A இன் உயர்ந்தபட்ச வேகம் kv $(k>1)$ ஐ அடையும் வரை ஆர்முடுகலுடன் சென்று அதன் பின்னர் சீரான அமர்முடுகல் a உடன் செல்கின்றது. இரு வாகனங்களினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து, $\sqrt{2}\ (k-1)<1$ ஆக இருக்கும்போது வாகனம் A ஆனது வாகனம் B ஐக் கடந்து செல்ல முடியாதெனக் காட்டுக.

பின்வருமாறு இயக்கத்திற்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை முன்வைக்கலாம்.



தொடக்கத்திலிருந்து நேரம் T வரைக்கும் வாகனம் A இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$a = \frac{v-0}{T-0}. \text{ ஆகவே } T = \frac{v}{a}.$$

இந்நேரத்தில் வாகனம் B இன் வேகம் வாகனம் A இன் வேகத்திலும் பார்க்கக் கூடுதலாக இருக்கும் அதே வேளை வாகனங்களுக்கிடையே உள்ள கூடுதலான இடைத்தூரம் $s_1 = \frac{1}{2} vT = \frac{1}{2a} v^2.$

நேரம் T தொடக்கம் நேரம் $T + t_0$ வரைக்கும் வாகனம் A இன் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$a = \frac{kv - v}{t_0}. \text{ ஆகவே } t_0 = \frac{v}{a}(k-1).$$

மேலும் நேர ஆயிடை $[T, T + 2t_0]$ இல் வாகனம் A இன் வேகம் வாகனம் B இன் வேகத்திலும் கூடியதாக இருக்கும் அதே வேளை இப்போது வாகனம் B ஆனது வாகனம் A இலும் கூடுதலாகச் செல்லும் தூரம் $s_2 = \frac{1}{2} \times 2t_0 \times (k-1)\, v = \frac{1}{a}(k-1)^2 v^2.$

$\sqrt{2}\,(k-1) < 1$ ஆக இருக்கும்போது $(k-1)^2 < \frac{1}{2}.$

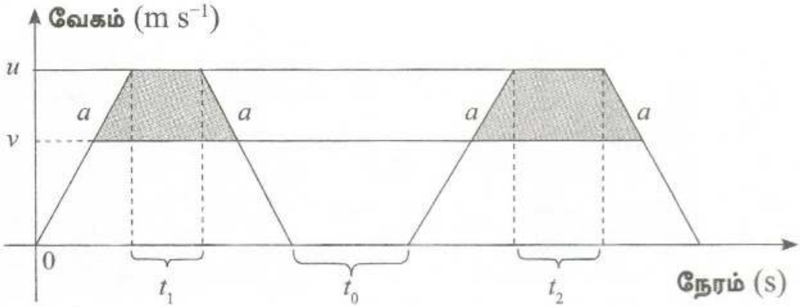
$$\frac{1}{a}(k-1)^2 v^2 < \frac{1}{a} v^2 \text{ ஆகையால் } s_2 < s_1.$$

எனவே $\sqrt{2}\,(k-1) < 1$ ஆக இருக்கும்போது வாகனம் A வாகனம் B ஐக் கடந்து செல்ல முடியாது.

19. A, B ஆகிய இரு புகையிரதங்களும் பெறத்தக்க உயர்ந்தபட்சக் கதிகள் முறையே u km h^{-1}, v km h^{-1} ஆகும்; இங்கு $u > v$. அவை ஒரே சீரான ஆர்முடுகல் a km h^{-2} உடன் ஓய்விலிருந்து ஒரே புகையிரத நிலையம் X இலிருந்து ஒருமிக்கப் பயணத்தை ஆரம்பித்து அவற்றின் உயர்ந்தபட்சக் கதிகளில் சென்று ஒரே சீரான அமர்முடுகல் a km h^{-2} உடன் புகையிரத நிலையம் Y இல் ஒருமிக்க ஓய்வுக்கு வருகின்றன. புகையிரதம் A ஆனது X, Y ஆகிய புகையிரத நிலையங்களுக்கிடையே ஒரு குறித்த இடத்தில் t_0 மணித்தியாலத்திற்கு நிற்பாட்டப்படும் அதே வேளை அதற்கு முன்னரும் பின்னரும் முறையே t_1 மணித்தியாலத்திற்கும் t_2 மணித்தியாலத்திற்கும் அதன் உயர்ந்தபட்சக் கதியில் செல்லும் அதே வேளை மற்றைய புகையிரதம் நிற்பாட்டப்படாமல் பயணத்தில் ஈடுபடுகின்றது. இரு புகையிரதங்களினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இதிலிருந்து, $a(t_1 + t_2)(u - v) + 2(u - v)^2 = v^2 + avt_0$ எனக் காட்டுக.

இரு புகையிரதங்களினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையியைப் பின்வருமாறு முன்வைக்கலாம்.



புகையிரதம் A ஆனது u km h^{-1}, v km h^{-1} ஆகிய கதிகளுக்கிடையே மாறுவதற்குத் தேவையான நேரம் T_0 எனின், ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது

$$a = \frac{u-v}{T_0}. \Rightarrow T_0 = \frac{u-v}{a_0}.$$

மேலும் புகையிரதம் B ஆனது ஓய்வுக்கும் கதி v km h^{-1} இற்கு மிடையே மாறுவதற்கான நேரம் T_1 எனின், ஆர்முடுகலிலிருந்து
$a = \frac{v-0}{T_1}$.
$\Rightarrow T_1 = \frac{v}{a}$.

இரு புகையிரதங்களும் ஒரே நிலையத்திலிருந்து ஒருமிக்கப் பயணத்தைத் தொடங்கி ஒரே நிலையத்தில் ஒருமிக்க ஓய்வுக்கு வருகின்றமையால், நிழற்றப்பட்டுள்ள இரு சரிவகங்களினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையும் நேர ஆயிடை t_0 இற்கு மேலே உள்ள சரிவகத்தின் பரப்பளவும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\frac{1}{2}(t_1 + 2T_0 + t_1)(u-v) + \frac{1}{2}(t_2 + 2T_0 + t_2)(u-v) = \frac{1}{2}(t_0 + 2T_1 + t_0)v.$$

$$\Rightarrow (t_1 + T_0)(u-v) + (t_2 + T_0)(u-v) = (t_0 + T_1)v.$$

$$\Rightarrow (t_1 + t_2)(u-v) + 2T_0(u-v) = vt_0 + vT_1.$$

T_0, T_1 ஆகியவற்றுக்கு மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$(t_1 + t_2)(u-v) + 2 \times \frac{u-v}{a} \times (u-v) = vt_0 + v \times \frac{v}{a}.$$

$$\Rightarrow a(t_1 + t_2)(u-v) + 2(u-v)^2 = avt_0 + v^2.$$

20. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் வேகம் 54 km h^{-1} உடன் ஒரு கிலோமீற்றர் தூணைக் கடந்து செல்கின்றது. அடுத்த கிலோமீற்றர் தூணைக் கடந்து செல்வதற்கு 50 செக்கன் எடுப்பின், அக்கிலோமீற்றர் தூணைக் கடந்து செல்லும்போது வாகனத்தின் வேகத்தைக் காண்க.

வேகம் 54 km h^{-1} ஆனது 15 m s^{-1} ஆகும்.

இங்கு இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ இல் $u = 15$ m s^{-1}, $t = 15$s, $s = 1$ km $= 1000$ m ஐப் பிரதியிடும்போது

$$1000 = 15 \times 50 + \frac{1}{2}a \times 50^2.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a \times 50^2 = 1000 - 15 \times 50$$
$$= 250.$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5} \text{ m s}^{-2}.$$

எனவே மோட்டர் வாகனத்தின் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{5}$ m s^{-2}.

இப்போது இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v = u + at$ இல் $u = 15$ m s^{-1}, $t = 50$ s, $a = \frac{1}{5}$ m s^{-2} எனப் பிரதியிடும்போது $v = 15 + \frac{1}{5} \times 50$

$$\therefore\ v = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

ஆகவே இரண்டாவது கிலோமீற்றர் கல்லைக் கடந்து செல்லும்போது வாகனத்தின் வேகம் 25 m s^{-1} ஆகும்.

21. சீரான ஆர்முடுகலுடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை 10 ஆம் செக்கனிலும் 16 ஆம் செக்கனிலும் முறையே 29 m, 41 m இடப்பெயர்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளது. 25 ஆம் செக்கனில் அதன் இடப்பெயர்ச்சி 59 m எனக் காட்டுக.

இங்கு குறித்த செக்கன்களில் இடப்பெயர்ச்சிகள் அறியப் பட்டிருக்கும் அதே வேளை வேறொரு செக்கனில் இடப்பெயர்ச்சி தேவைப்படுகின்றமையால் t ஆம் செக்கனில், அதாவது ஆயிடை $[t - 1, t]$ இல் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியைக் காணுதல் உகந்ததாகும்.

துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் a எனவும் தொடக்கத்தில் துணிக்கையின் வேகம் u எனவும் இந்த ஆயிடையில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி s_t எனவும் கொள்வோம்.

ஆயிடை $[0, t-1]$ இல் இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐக் கருதும்போது

$$s_1 = u(t-1) + \frac{1}{2}a(t-1)^2.$$

ஆயிடை $[0, t]$ இல் $s = ut + \frac{1}{2}at^2$; $s_2 = ut + \frac{1}{2}at^2$.

$$\therefore\ s_t = s_2 - s_1 = ut - u(t-1) + \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}a(t-1)^2$$

$$= u + \frac{1}{2}a\left[t^2 - (t-1)^2\right]$$

$$= u + \frac{1}{2}a(2t-1).$$

10 ஆம் செக்கனில் இடப்பெயர்ச்சி 29 m ஆகையால் $s_{10} = 29$.

$$s_{10} = u + \frac{1}{2}\, a\,(2 \times 10 - 1) = 29.$$

$$\Rightarrow\; u + \frac{1}{2}\, a \times 19 = 29. \text{ ——— ①}$$

16 ஆம் செக்கனில் இடப்பெயர்ச்சி 41 m ; $s_{16} = 41$.

$$\Rightarrow\; u + \frac{1}{2}\, a\,(2 \times 16 - 1) = 41.$$

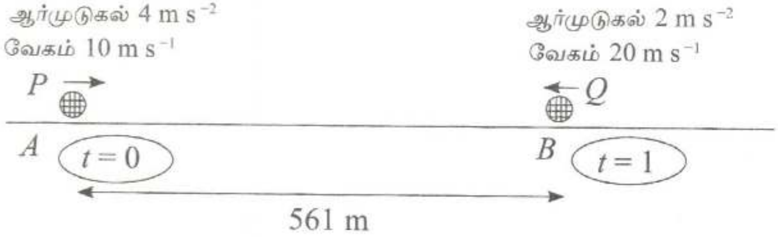
$$\Rightarrow\; u + \frac{1}{2}\, a \times 31 = 41. \text{ ——— ②}$$

இரு சமன்பாடுகளினதும் வித்தியாசத்திலிருந்து $6a = 12$. $a = 2$. அப்போது $u = 10$.

$$\therefore\quad s_{25} = 10 + \frac{1}{2} \times 2 \times (2 \times 25 - 1) = 59.$$

ஆகவே 25 ஆம் செக்கனில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி 59 m ஆகும்.

22. A, B ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று 561 m தூரத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளாகும். ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A இலிருந்து திசை AB இல் வேகம் 10 m s^{-1} உடன் இயங்க ஆரம்பித்துச் சீரான ஆர்முடுகல் 4 m s^{-2} உடன் இயங்குகின்றது. துணிக்கை P இயங்க ஆரம்பித்து ஒரு செக்கனுக்குப் பின்னர் ஒரு துணிக்கை Q ஆனது வேகம் 20 m s^{-1} உடன் புள்ளி B இலிருந்து புள்ளி A ஐ நோக்கி இயங்கத் தொடங்குகின்றது. அத்துணிக்கை சீரான ஆர்முடுகல் 2 m s^{-2} உடன் இயங்குகின்றது. இரு துணிக்கைகளும் ஒரு புள்ளி C இல் சந்திக்கின்றன. $AC : CB = 100 : 87$ எனக் காட்டுக.



P, Q ஆகிய துணிக்கைகளில் துணிக்கை P ஆனது இயக்கத்தை ஆரம்பித்து நேரம் t_o இற்குப் பின்னர் புள்ளி C இல் சந்திக்கின்றதெனக் கொள்வோம். அதற்காகத் துணிக்கை P ஆனது நேரம் t_o இற்கு இயங்க வேண்டிய அதே வேளை துணிக்கை Q இற்கு அந்நேரம் $t_o - 1$ ஆகும்.

இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

துணிக்கை P இற்கு $\overrightarrow{AC} = 10 \times t_o + \frac{1}{2} \times 4 \times t_o^2$

$$= 10t_o + 2t_o^2.$$

துணிக்கை Q இற்கு $\overleftarrow{BC} = 20 \times (t_o - 1) + \frac{1}{2} \times 2 \times (t_o - 1)^2$

$$= 20(t_o - 1) + (t_o - 1)^2.$$

P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் தொடர்பாக A, B ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 561 m இற்குச் செல்ல வேண்டும் ஆகையால் $AC + BC = 561$.

$$10t_o + 2t_o^2 + 20(t_o - 1) + (t_o - 1)^2 = 561.$$
$$\Rightarrow 10t_o + 2t_o^2 + 20t_o - 20 + t_o^2 - 2t_o + 1 = 561.$$
$$\Rightarrow 3t_o^2 + 28t_o - 580 = 0.$$
$$\Rightarrow (3t_o + 58)(t_o - 10) = 0.$$
$$\Rightarrow t_o = -\frac{58}{3} \text{ அல்லது } t_o = 10.$$

தேவையான நேரம் ஒரு நேர்ப் பெறுமானம் ஆகையால் $t_o = 10$ ஐ மாத்திரம் ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

அப்போது $AC = 10 \times 10 + 2 \times 10^2 = 300.$

$BC = AB - AC = 561 - 300 = 261.$

$\Rightarrow BC : AB = 300 : 261 = 100 : 87.$

23. A, B என்னும் இரு இடங்களுக்கிடையே உள்ள ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு புகையிரதம் சீரான வேகம் 72 km h^{-1} உடன் செலுத்தப்படவுள்ளது. பாதை பழுதுபார்க்கப் படுகின்றமையால், ஒரு கிலோமீற்றர் தூரத்திற்குச் சீரான வேகம் 9 km h^{-1} இல் செலுத்தப்படும் அதே வேளை இவ்வேகம் 9 km h^{-1} ஐப் பெறுவதற்கு ஒரு சீரான அமர்முடுகலின் கீழ் புகையிரதம் 1575 m தூரத்திற்குச் செல்லும் அதே வேளை மறுபடியும் வழக்கமான வேகத்தை அடைவதற்கு 3150 m தூரத்திற்கு ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்லுமெனின், அத்தினத்தில் புகையிரதம் A, B ஆகிய இடங்களுக்குமிடையே தாமதித்த நேரத்தைக் காண்க.

புகையிரதம் தாமதிப்பதற்குக் காரணம் முதலில் ஒரு சீரான அமர்முடுகலின் கீழ் 1575 m தூரம் செல்கின்றமையும் இரண்டாவதாகச் சீரான வேகம் 9 km h^{-1} உடன் ஒரு கிலோமீற்றர் செல்கின்றமையும் இறுதியாக ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் 3150 m தூரம் செல்கின்றமையும் ஆகும். இதற்கான நேரங்களை வேறுவேறாகக் காண்போம். இந்நேரங்கள் முறையே t_1, t_2, t_3 எனக் கொள்வோம்.

மேலும் $72 \text{ km h}^{-1} = 72 \times \frac{5}{18} \text{ m s}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$, $9 \text{ km h}^{-1} = 2.5 \text{ m s}^{-1}$ ஆகும்.

சீரான அமர்முடுகல் b இன் கீழ் 1575 m தூரம் செல்கின்றமையால் இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$2.5^2 = 20^2 + 2b \times 1575.$$

$\therefore\ b = -\frac{20^2 - 2.5^2}{3150}$. இப்போது சமன்பாடு $v = u + at$ இலிருந்து

$$2.5 = 20 - \frac{20^2 - 2.5^2}{3150} \times t_1.$$

$$\Rightarrow t_1 = (20 - 2.5) \times \frac{3150}{20^2 - 2.5^2}$$

$$= \frac{3150}{20 + 2.5}$$

$$= \frac{3150}{22.5}$$

ஆர்முடுகல் a இன் கீழ் 3150 m தூரம் செல்கின்றமையால்

சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ இலிருந்து

$$20^2 = 2.5^2 + 2a \times 3150.$$

$\therefore\ b = \dfrac{20^2 - 2.5^2}{2 \times 3150}$. இப்போது சமன்பாடு $v = u + at$ இலிருந்து

$$20 = 2.5 + \frac{20^2 - 2.5^2}{6300} \times t_2.$$

$$\Rightarrow t_2 = 20 - 2.5 \times \frac{6300}{20^2 - 2.5^2}$$

$$= \frac{6300}{20 + 2.5}$$

$$= \frac{6300}{22.5}.$$

ஒரு கிலோமீற்றர் தூரம் சீரான வேகம் 9 km h^{-1} உடன் செலுத்தப்படுகின்றமையால்; இப்போது ஆர்முடுகல் பூச்சிய மாகையால் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஆனது $s = ut$ ஆக மாற்றப்படுகின்றமையால் $1000 = 2.5 \times t_2$ எனவே $t_2 = 400$ s.

ஆகவே அத்தினத்தில் இப்பயணத்திற்கான நேரம்

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3150}{22.5} + \frac{6300}{22.5} + 400$$

$$= 420 + 400$$
$$= 820.$$

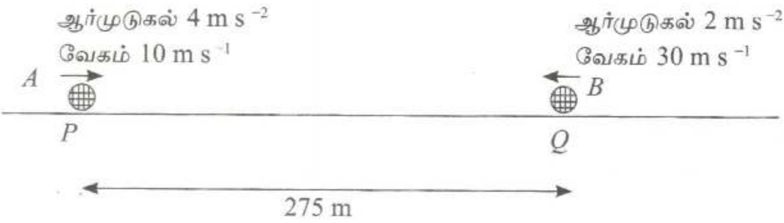
புகையிரதம் சீரான வேகம் 72 km h^{-1} உடன் செலுத்தப்பட்ட தெனின், எடுக்கும் நேரம் T எனின், மறுபடியும் $s = ut$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$1000 + 1575 + 3150 = 20 \times T$ ஆகையால் $T = 286.25$ s.

இதற்கேற்ப அத்தினத்தில் A, B ஆகிய இரு இடங்களுக்கிடையே தாமதித்த நேரம் $t_1 + t_2 + t_3 - T$

$$= 820 - 286.25$$
$$= 533.75.$$

24. P, Q ஆகியன ஒன்றிலிருந்தொன்று 275 m தூரத்தில் இருக்கும் இரு புள்ளிகளாகும். A, B ஆகிய இரு துணிக்கைகள் முறையே P, Q ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே கணத்தில் ஒன்றையொன்று சந்திப்பதற்கு எறியப்படுகின்றன. A, B ஆகிய இரு துணிக்கைகளினதும் தொடக்க வேகங்கள் முறையே 10 m s^{-1} இற்கும் 30 m s^{-1} இற்குமிடையே இருக்கும் அதே வேளை அத்துணிக்கைகள் 4 m s^{-2}, 2 m s^{-2} என்னும் சீரான ஆர்முடுகல்களுடன் இயங்குகின்றன. இரு துணிக்கைகளும் ஒரு புள்ளி C இல் சந்திக்கின்றன. PC ஐக் கண்டு, துணிக்கைகள் சந்திக்கும்போது அவற்றின் வேகங்களையும் துணிக.



A, B ஆகிய துணிக்கைகள் இயக்கத்தை ஆரம்பித்து நேரம் t_0 இற்குப் பின்னர் புள்ளி C இல் சந்திக்கின்றன எனக் கொள்வோம். அதற்காக இரு துணிக்கைகளும் நேரம் t_0 இற்கு இயங்க வேண்டும்.

இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$\rightarrow$

துணிக்கை A இற்கு $PC = 10 \times t_0 + \frac{1}{2} \times 4 \times t_0^2$

$$= 10t_0 + 2t_0^2.$$

$\leftarrow$

துணிக்கை B இற்கு $QC = 30 \times t_0 + \frac{1}{2} \times 2 \times t_0^2$

$$= 30t_0 + t_0^2.$$

A, B ஆகிய துணிக்கைகள் சேர்ந்து P, Q ஆகிய புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 275 m இற்குச் செல்ல வேண்டும் ஆகையால் $PC + QC = 275$.

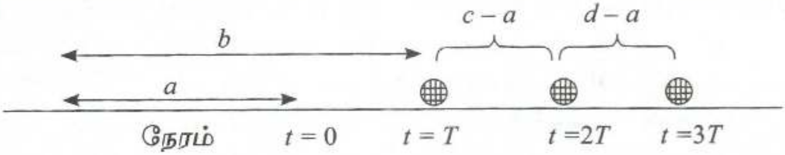
$$\therefore\ 10t_0 + 2t_0^2 + 30t_0 + t_0^2 = 275.$$

$$\Rightarrow 3t_0^{\,2} + 40t_0 - 275 = 0.$$
$$\Rightarrow (3t_0^{\,2} + 55)\,(t_0 - 5) = 0.$$
$$\Rightarrow t_0 = -\frac{55}{3} \text{ அல்லது } t_0 = 5.$$

நேரம் நேர் ஆகையால் $t_0 = 5$ ஐ மாத்திரம் ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.
அப்போது $PC = 10 \times 5 + 2 \times 5^2 = 100.$
இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது
துணிக்கை A இற்கு $\longrightarrow v = 10 + 4 \times 5 = 30.$
துணிக்கை B இற்கு $\longleftarrow v = 30 + 2 \times 5 = 40.$

ஆகவே துணிக்கைகள் சந்திக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் அவற்றின் வேகங்களின் பருமன்கள் முறையே 30 m s^{-1}, 40 m s^{-1} ஆக இருக்கும் அதே வேளை அவை PQ, QP ஆகிய திசைகளில் இருக்கும்.

25. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை ஒரு குறித்த கணத்தில் பாதையில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இலிருந்து ஓர் இடப்பெயர்ச்சி a ஐக் கொண்டுள்ளது. அதன் பின்னர் நேரம் $T, 2T, 3T$ ஆக இருக்கும்போது துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சிகள் புள்ளி O இலிருந்து முறையே b, c, d ஆகும். துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{T^2}(a - 2b + c)$ எனக் காட்டி, $d - a = 3(c - b)$ எனவும் காட்டுக.



துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் f எனவும் $t = 0$ ஆக இருக்கும்போது வேகம் u எனவும் கொள்வோம்.
இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிப்போம்.

ஆயிடை $[0, T]$ இல் $b - a = uT + \frac{1}{2}fT^2.$ —— ①

ஆயிடை $[0, 2T]$ இல் $c - a = u \times 2T + \frac{1}{2}f(2T)^2.$

$$c - a = 2uT + \frac{1}{2} \times 4fT^2 \text{ —— ②}$$

ஆயிடை $[0, 3T]$ இல் $d - a = u \times 3T + \frac{1}{2} f(3T)^2$.

$$d - a = 3uT + \frac{1}{2} \times 9fT^2 \text{ —— ③}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ a - 2b + c &= 2a - 2b - a + c \\ &= 2(a - b) + c - a \\ &= -2(b - a) + c - a. \end{aligned}$$

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து பிரதியிடும்போது

$$\begin{aligned} a - 2b + c &= -2\left(uT + \frac{1}{2} \times fT^2\right) + \left(2uT + \frac{1}{2} \times 4fT^2\right) \\ &= fT^2. \\ \Rightarrow f &= \frac{1}{T^2}(a - 2b + c). \end{aligned}$$

ஆகவே துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{T^2}(a - 2b + c)$.

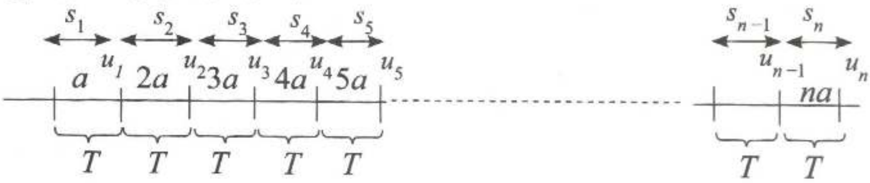
①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளின் வித்தியாசத்திலிருந்து

$$\begin{aligned} c - a - (b - a) &= 2uT + \frac{1}{2} \times 4fT^2 - uT - \frac{1}{2} fT^2. \\ \Rightarrow c - b &= uT + \frac{1}{2} \times 3fT^2 \\ \Rightarrow 3(c - b) &= 3uT + \frac{1}{2} \times 9fT^2 \\ &= d - a. \end{aligned}$$

அதாவது $d - a = 3(c - b)$.

26. ஓய்விலிருந்து ஒரு துணிக்கை ஒரு நேர்ப் பாதையில் ஒரு சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் இயங்க ஆரம்பிக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் ஒவ்வொரு நேர வித்தியாசம் T இற்கும் பின்னர் துணிக்கையின் ஆர்முடுகலின் பருமன் a வீதம் அதிகரிக்கின்றது. துணிக்கை nT ஆவது நேர ஆயிடையைப் பூரணப்படுத்தும்போது அதன் வேகம் $\frac{1}{2} n(1 + n) aT$ எனவும் அப்போது இடப்பெயர்ச்சி $\frac{1}{2} n(1 + n)(2n + 1) aT^2$ எனவும் காட்டுக.

இங்கு n ஒரு நேர் நிறைவெண்.



முதலாவது ஆயிடையில் ஆர்முடுகல் a, இரண்டாவது ஆயிடையில் ஆர்முடுகல் $2a$, மூன்றாவது ஆயிடையில் ஆர்முடுகல் $3a$ என்றவாறு n ஆவது ஆயிடையில் ஆர்முடுகல் na ஆகும்.

அவ்வாறே முதலாவது ஆயிடையின் இறுதியில் வேகம் u_1, இரண்டாவது ஆயிடையின் இறுதியில் வேகம் u_2, மூன்றாவது ஆயிடையின் இறுதியில் வேகம் u_3 என்றவாறு n ஆவது ஆயிடையின் இறுதியில் வேகம் u_n எனக் கொள்வோம்.

முதலில் இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கலாம்.

முதலாவது ஆயிடையில் $u_1 = 0 + aT.$
இரண்டாவது ஆயிடையில் $u_2 = u_1 + 2aT.$
மூன்றாவது ஆயிடையில் $u_3 = u_2 + 3aT.$

$n-1$ ஆவது ஆயிடையில் $u_{n-1} = u_{n-2} + a\,(n-1)T.$

n ஆவது ஆயிடையில் $u_n = u_{n-1} + a\,nT.$

இச்சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து

$$u_n = aT + 2\,aT + 3\,aT + \dots + (n-1)aT + naT.$$
$$= aT\,[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n].$$

இங்கு முதல் நேர் நிறைவெண்களின் கூட்டுத்தொகைக்கான சூத்திரம்

$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ ஐப் பிரயோகிக்கலாம்.

$$\Rightarrow u_n = aT \times \frac{1}{2}\,n\,(n+1).$$

துணிக்கை nT ஆவது நேர ஆயிடையைப் பூரணப்படுத்தும்போது அதன் வேகம் $\frac{1}{2}\,n\,(1+n)aT$ ஆகும்.

இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

முதலாவது ஆயிடையில் $s_1 = 0 \times T + \frac{1}{2} aT^2 = \frac{1}{2} aT^2$

இரண்டாவது ஆயிடையில் $s_2 = u_1 \times T + \frac{1}{2} \times 2aT^2$

$$= aT^2 + \frac{1}{2} \times 2aT^2$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} aT^2.$$

மூன்றாவது ஆயிடையில் $s_3 = u_2 \times T + \frac{1}{2} \times 3aT^2$

$$= 3aT^2 + \frac{1}{2} \times 3aT^2$$

$$= 9 \times \frac{1}{2} aT^2.$$

$n - 1$ ஆவது ஆயிடையில்

$$s_{n-1} = u_{n-2} \times T + \frac{1}{2} \times (n-1)aT^2$$

$$= \frac{1}{2} (n-2)(n-1) aT^2 + \frac{1}{2} \times (n-1)aT^2$$

$$= (n-1)^2 \times \frac{1}{2} aT^2.$$

n ஆவது ஆயிடையில்

$$s_n = u_{n-1} \times T + \frac{1}{2} \times naT^2$$

$$= \frac{1}{2} (n-1)naT^2 + \frac{1}{2} \times naT^2$$

$$= n^2 \times \frac{1}{2} aT^2.$$

இச்சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து துணிக்கை nT ஆவது நேர ஆயிடையைப் பூரணப்படுத்தும்போது அதன் இடப்பெயர்ச்சி $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n$.

ஆகவே $s = \frac{1}{2}aT^2 + 4 \times \frac{1}{2}aT^2 + 9 \times \frac{1}{2}aT^2 + \ldots + n^2 \times \frac{1}{2}aT^2$

$$= \frac{1}{2}aT^2 [1 + 4 + 9 + \ldots + n^2]$$

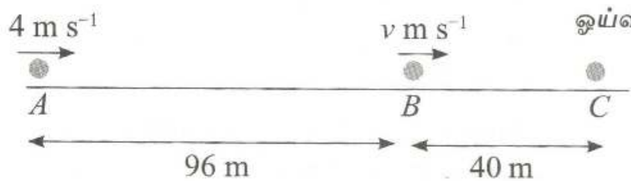
$$= \frac{1}{2}aT^2 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2].$$

இங்கு முதல் நேர் நிறைவெண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகைக்கான சூத்திரம்
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ஐப் பிரயோகிக்கலாம்.

துணிக்கை nT ஆவது நேர ஆயிடையைப் பூரணப்படுத்தும்போது துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி $= \frac{1}{2}aT^2 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)aT^2.$$

27. புள்ளி A இலிருந்து ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கும் ஒரு துணிக்கை 96 m இடப்பெயர்ச்சிக்குப் பின்னர் புள்ளி B ஐக் கடக்கும் அதே வேளை அதன் பின்னர் ஒரு சீரான அமர்முடுகலுடன் இயங்கி 40 m இடப்பெயர்ச்சியுடன் புள்ளி C இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. A, B ஆகிய புள்ளிகளில் ஒத்த வேகங்கள் முறையே $4\ \text{m s}^{-1}$, $v\ \text{m s}^{-1}$ ஆகும். ஆர்முடுகலுடனும் அமர்முடுகலுடனும் இயங்கிய நேரங்களை v இன் சார்பில் காண்க.
இயக்கத்துக்காக 12 செக்கன் எடுத்ததெனின், v இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு ஆர்முடுகலினதும் அமர்முடுகலினதும் பருமன்களைக் காண்க.



புள்ளி A தொடக்கம் புள்ளி B வரையுள்ள இயக்கத்திற்கு; சீரான ஆர்முடுகல் a எனக் கொள்வோம்.
இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது
$v^2 = 4^2 + 2a \times 96.$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2 - 16}{192}.$$

புள்ளி B தொடக்கம் புள்ளி C வரையுள்ள இயக்கத்திற்கு; சீரான அமர்முடுகல் b எனக் கொள்வோம். இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ இலிருந்து $0^2 = v^2 - 2b \times 40.$

$$\Rightarrow b = \frac{v^2}{80}.$$

இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

புள்ளி A தொடக்கம் புள்ளி B வரையுள்ள இயக்கத்திற்கு $v = 4 + a \times t_0$.

$\Rightarrow t_0 = \dfrac{v-4}{a}$.

இங்கு t_0 ஆனது எடுக்கும் நேரமாகும். ஆகவே புள்ளி B தொடக்கம் C வரை எடுக்கும் நேரம் $12 - t_0$ ஆகும்.
மேற்குறித்த இயக்கத்தியற் சமன்பாட்டைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\Rightarrow 0 = v - b\,(12 - t_0).$$
$$\Rightarrow v = b\,(12 - t_0).$$

இந்த t_0 இடம்பெறும் சமன்பாடுகளைக் கருதும்போது $v = b\left(12 - \dfrac{v-4}{a}\right)$.

$$\therefore\ \frac{v}{b} = 12 - \frac{v-4}{a}.$$

மேலே ஆர்முடுகல் a இற்கும் அமர்முடுகல் b இற்கும் கிடைத்த கோவைகளை இங்கு பிரதியிடும்போது

$$v \times \frac{80}{v^2} = 12 - \frac{192}{v^2 - 16} \times (v-4).$$

$$\Rightarrow \frac{80}{v^2} = 12 - \frac{192}{(v+4)\,(v-4)} \times (v-4).$$

$$\Rightarrow \frac{80}{v} = 12 - \frac{192}{v+4}.$$

$$\Rightarrow 80\,(v+4) = 12v\,(v+4) - 192\,v.$$
$$\Rightarrow 12v^2 - 224v - 320 = 0.$$
$$\Rightarrow 3v^2 - 56v - 80 = 0.$$
$$\Rightarrow (3v+4)\,(v-20) = 0.$$

$\Rightarrow 3v + 4 = 0$ அல்லது $v - 20 = 0$.
$v = -\dfrac{4}{3}$ அல்லது $v = 20$.

v ஆனது வேகத்தின் பருமன் ஆகையால் அது நேர் ஆகும். எனவே $v = 20$ மாத்திரம் உண்மையாகும்.

அப்போது தொடர்பு $a = \dfrac{v^2 - 16}{192}$ இலிருந்து $a = \dfrac{20^2 - 16}{192}$

$$= \frac{(20-4)(20+4)}{192}$$

$$= \frac{16 \times 24}{192} = 2 \text{ m s}^{-2}.$$

மேலும் $b = \frac{v^2}{80}$ ஆகையால் $b = \frac{20^2}{80} = 5 \text{ m s}^{-2}$.

எனவே ஆர்முடுகலினதும் அமர்முடுகலினதும் பருமன்கள் முறையே 2 m s^{-2}, 5 m s^{-2} ஆகும்.

28. ஒரு பிள்ளை ஒரு தானம் A ஐக் கடந்து சீரான வேகம் 4 m s^{-1} உடன் ஒரு நேர்ப் பாதையில் செல்கின்றது. சிறிது நேரத்திற்குப் பின்னர் சைக்கிளோட்டி ஒருவர் தானம் A இல் ஓய்விலிருந்து ஒரு சீரான ஆர்முடுகல் 2 m s^{-2} உடன் தனது வேகத்தை 8 m s^{-1} இற்கு அதிகரிக்கச் செய்து, பின்னர் அச்சீரான வேகத்துடன் ஒரு சைக்கிளைச் செலுத்துகின்றார். தானம் A இலிருந்து 64 m இடப்பெயர்ச்சிக்குப் பின்னர் சைக்கிளோட்டி பிள்ளையைக் கடந்து சென்றால், சைக்கிளோட்டி பிள்ளையைத் தானம் A இல் கடந்து எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பின்னர் புறப்பட்டுச் சென்றார் எனக் காண்க.

பிள்ளை தானம் A ஐக் கடந்து நேரம் t_0 இற்குப் பின்னர் சைக்கிளோட்டி புறப்பட்டுச் சென்றார் எனவும் அதற்கு நேரம் T இற்குப் பின்னர் சைக்கிளோட்டி பிள்ளையைக் கடந்து செல்கின்றார் எனவும் கொள்வோம்.

இப்போது தானம் A இலிருந்து 64 m இடப்பெயர்ச்சியில் அவர்கள் இருக்கின்றமையால் பிள்ளையின் இயக்கத்திற்கு இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$64 = 4(t_0 + T) + 2 \times 0 \times (t_0 + T)^2.$$

$$\Rightarrow t_0 + T = 16. \quad \text{——} \ (1)$$

குறிப்பு : வேகம் சீரானதாக இருக்கும்போது ஆர்முடுகல் பூச்சியம் ஆகையால் இங்கு $s = ut$ ஆக இடப்பெயர்ச்சி, வேகம், நேரம் ஆகியவற்றுக்கிடையே தொடர்புடைமையைப் பிரயோகிக்கலாம்.

சைக்கிளோட்டி ஆர்முடுகலுடன் சென்ற தூரம் t_1 எனின் இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது $8 = 0 + 2 \times t_1$. $\therefore t_1 = 4$.

ஆர்முடுகலுடன் சைக்கிளோட்டியின் இடப்பெயர்ச்சியைக் காண்பதற்குச் சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது $8^2 = 0 + 2 \times 2 \times s. \Rightarrow s = 16.$

ஆகவே சீரான வேகத்துடன் சைக்கிளைச் செலுத்திச் சென்ற தூரம் $= 64 - 16 = 48$ m

எனவே தேவையான நேரம் $= \dfrac{48}{8} = 6$ செக்கன்.

T ஆனது ஆர்முடுகலைப் போன்று சீரான வேகத்துடன் சைக்கிளோட்டி சென்ற நேரம் ஆகையால் $T = 4 + 6 = 10$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து $t_0 + 10 = 16 \Rightarrow t_0 = 6$
ஆகவே பிள்ளை தானம் A ஐக் கடந்து 6 செக்கனுக்குப் பின்னர் அத்தானத்திலிருந்து சைக்கிளோட்டி புறப்பட்டுச் சென்றுள்ளார்.

29. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் ஒரு துணிக்கை A ஆனது மாறா வேகம் u m s^{-1} உடன் இயங்குகின்றது. அது ஒரு நிலைத்த புள்ளி O ஐக் கடக்கும்போது வேறொரு துணிக்கை B ஆனது புள்ளி O இலிருந்து துணிக்கை A இன் இயக்கத் திசைக்கு எதிரான திசையில் ஒரு மாறா ஆர்முடுகல் a m s^{-2} உடன் ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்குகின்றது. இரு துணிக்கை களினதும் கதிகள் சமமாக இருக்கும்போது துணிக்கை B இன் இடப்பெயர்ச்சியைக் காண்க.
இப்போது துணிக்கை B இன் இடப்பெயர்ச்சி துணிக்கை A இன் இடப்பெயர்ச்சியின் இரு மடங்காகும் என்னும் கூற்றைப் பற்றி உங்கள் கருத்தை எடுத்துரைக்க.

இரு துணிக்கைகளினதும் கதிகள் சமமாக இருக்கும்போது துணிக்கை B இன் கதியும் துணிக்கை A இன் கதியும் u m s^{-1} ஆகும். அப்போது துணிக்கை B இன் இடப்பெயர்ச்சி s_0 எனின்,

இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v^2 = u^2 + 2as$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது $u^2 = 0^2 + 2a \times s_0$.

$\therefore \quad s_0 = \dfrac{1}{2a} u^2$

இப்போது எடுத்துள்ள நேரத்தைக் காண்பதற்கு இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $v = u + at$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது $u = 0 + a \times t$ ஆகையால் $t = \dfrac{u}{a}$.

துணிக்கை A ஆனது மாறா வேகம் u m s^{-1} உடன் இயங்குகின்றமையால் அதன் இடப்பெயர்ச்சிக்குச் சமன்பாடு $s = ut$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது $s_1 = u \times \dfrac{u}{a} = \dfrac{1}{a}\, u^2$.

இங்கு துணிக்கைகள் சென்ற தூரங்களுக்கிடையே ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும் அதே வேளை அவை எதிர்த் திசைகளில் இயங்குகின்றமையால் துணிக்கை B இன் இடப்பெயர்ச்சி துணிக்கை A இன் இடப்பெயர்ச்சி போல் இரு மடங்கு என்னும் கூற்று பொய்யாகும்.

30. P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் ஒருமிக்க முறையே u m s^{-1}, v m s^{-1} என்னும் வேகங்களுடன் ஒரு புள்ளி O ஐக் கடக்கின்றன. துணிக்கை P ஆனது மாறா வேகத்துடன் இயங்கும் அதே வேளை துணிக்கை Q ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்குகின்றது. துணிக்கை P ஓர் இடப்பெயர்ச்சி a ஐக் கொண்டிருக்கும்போது துணிக்கை Q ஓர் இடப்பெயர்ச்சி b ஐக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை துணிக்கை P ஓர் இடப்பெயர்ச்சி b ஐக் கொண்டிருக்கும்போது துணிக்கை Q ஓர் இடப்பெயர்ச்சி a ஐக் கொண்டிருக்குமெனின், $abv = (a^2 + ab + b^2)u$ எனக் காட்டுக.

நேரம் t ஆக இருக்கும்போது P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளினதும் இடப்பெயர்ச்சிகள் முறையே x, y எனக் கொள்வோம்.

துணிக்கை P ஆனது மாறா வேகத்துடன் இயங்குகின்றமையால் அதன் இடப்பெயர்ச்சிக்குச் சமன்பாடு $s = ut$ ஐப் பயன்படுத்தும்போது $x = ut$.

துணிக்கை Q ஆனது சீரான ஆர்முடுகல் f உடன் இயங்குமெனின், அதன் இடப்பெயர்ச்சிக்கு இயக்கத்தியற் சமன்பாடு $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

ஐப் பயன்படுத்தும்போது
$y = vt + \frac{1}{2} ft^2.$
இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் t ஐ நீக்கும்போது
$y = v \times \frac{x}{u} + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{u}\right)^2.$

$\Rightarrow 2u^2y = 2uv\,x + fx^2.$

துணிக்கை P ஆனது இடப்பெயர்ச்சி a உடன் இருக்கும்போது துணிக்கை Q இற்கு இடப்பெயர்ச்சி b இருக்கின்றமையால் $x = a$, $y = b$ என மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$2u^2b = 2uv\,a + fa^2. \text{ —— } ①$$

துணிக்கை P ஆனது இடப்பெயர்ச்சி b உடன் இருக்கும்போது துணிக்கை Q இற்கு இடப்பெயர்ச்சி a இருக்கின்றமையால் $x = b$, $y = a$ என மேற்குறித்த சமன்பாட்டில் பிரதியிடும்போது

$$2u^2a = 2uv\,b + fb^2. \text{ —— } ②$$

① $\times b^2 -$ ② $\times a^2$ இலிருந்து $2u^2b^3 - 2u^2a^3 = 2uv\,ab^2 - 2uv\,a^2b.$

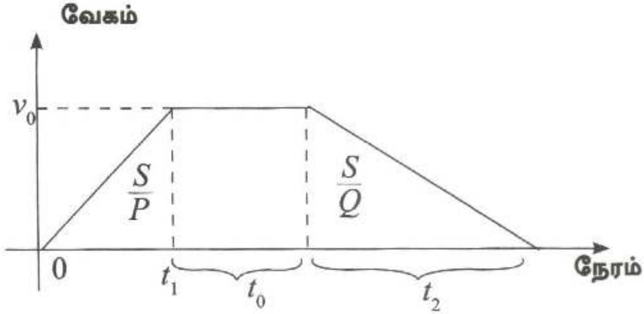
$$\Rightarrow u(b^3 - a^3) = v\,ab\,(b - a).$$

$$\Rightarrow u(b - a)(b^2 + ba + a^2) = v\,ab\,(b - a).$$

$$\Rightarrow u(b^2 + ba + a^2) = v\,ab.$$

31. ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு மோட்டர் வாகனம் ஓய்விலிருந்து பயணத்தை ஆரம்பித்து முதலில் சீரான ஆர்முடுகலுடனும் இரண்டாவதாகச் சீரான வேகத்துடனும் இறுதியில் மாறா அமர்முடுகலுடனும் இயங்கி மறுபடியும் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. ஆர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்திற்கு முழுப் பயணத்தின் தூரத்தின் விகிதம் $1 : P$ உம் அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்திற்கும் முழுப் பயணத்தின் தூரத்திற்கு மிடையே உள்ள விகிதம் $1 : Q$ உம் ஆகும். மோட்டர் வாகனத்தின் இயக்கத்துக்கான ஒரு வேக - நேர வளையியை வரைந்து, அதிலிருந்து உயர்ந்தபட்சக் கதிக்குச் சராசரிக் கதியின் விகிதம் $(P + PQ + Q) : PQ$ எனக் காட்டுக.

இயக்கத்துக்காக ஒரு வேக - நேர வளையியை வரையும்போது



மோட்டர் வாகனம் ஆர்முடுகலுடன், சீரான வேகத்துடன், அமர்முடுகலுடன் இயங்கிய நேரங்கள் முறையே t_1, t_0, t_2 எனவும் மோட்டர் வாகனத்தின் உயர்ந்தபட்சக் கதி v_0 எனவும் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

முழுப் பயணத்திற்கான தூரம் S எனவும் கொள்வோம்.
அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்திற்கு முழுப் பயணத்தின் தூரத்தின் விகிதம் $1 : P$ ஆகையால் ஆர்முடுலுடன் சென்ற தூரம் $\frac{S}{P}$ ஆகும்.

அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்திற்கும் முழுப் பயணத்தின் தூரத்திற்குமிடையே உள்ள விகிதம் $1 : Q$ ஆகையால் அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரம் $\frac{S}{Q}$ ஆகும்.

வேக - நேர வளையியிலிருந்து, ஆர்முடுகலுடன் சென்ற தூரம் $= \frac{1}{2} v_0 \times t_1$ ஆகையால்

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{2} v_0 \times t_1.$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2S}{Pv_0}. \text{ —— } ①$$

இவ்வாறே அமர்முடுகலுடன் சென்ற தூரத்தைக் கருதும்போது

$$\Rightarrow t_2 = \frac{2S}{Qv_0} \text{ —— } ②$$

மேலும் சீரான வேகத்துடன் இயங்கிய தூரம் $= S - \frac{S}{P} - \frac{S}{Q}$

$$= S\left(\frac{PQ - P - Q}{PQ}\right).$$

அப்போது $v_0 \times t_0 = S\left(\frac{PQ-P-Q}{PQ}\right)$

ஆகையால் $t_0 = \frac{S}{v_0}\left(\frac{PQ-P-Q}{PQ}\right)$.

①, ② ஆகிய சமன்பாடுகளினதும் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து

$$t_1+t_0+t_2 = \frac{2S}{Pv_0} + \frac{2S}{Qv_0} + \frac{S}{v_0}\left(\frac{PQ-P-Q}{PQ}\right).$$

$$= \frac{S}{PQv_0}(2Q+2P+PQ-P-Q)$$

$$= \frac{S}{PQv_0}(P+PQ+Q).$$

மோட்டர் வாகனத்தின் சராசரிக் கதி u எனின்,

$$u = \frac{S}{t_1+t_0+t_2}$$

$$= S \times \frac{PQv_0}{S} \frac{1}{P+PQ+Q}.$$

$$\Rightarrow \frac{v_0}{u} = \frac{P+PQ+Q}{PQ}.$$

$$\Rightarrow v_0 : u = P+PQ+Q : PQ.$$

ஆகவே உயர்ந்தபட்சக் கதிக்குச் சராசரிக் கதியின் விகிதம் $(P+PQ+Q) : PQ$ ஆகும்.

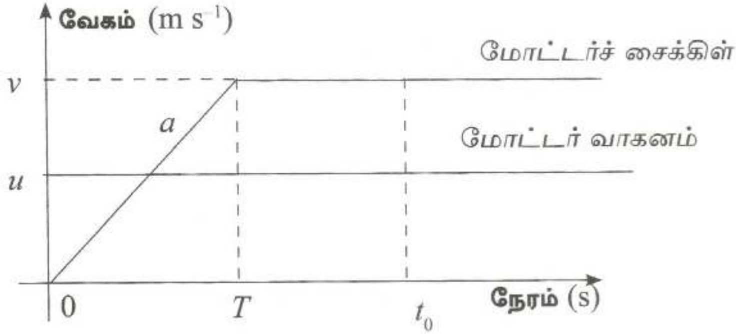
32. ஒரு மோட்டர் வாகனம் வேகம் u m s^{-1} உடன் செல்வதை அவதானித்த ஒரு பொலிஸ் அலுவலர் தமது வாகனம் அவரைத் துரத்திக் கொண்டு செல்லும்போது தனது மோட்டர்ச் சைக்கிளில் ஏறி ஓய்விலிருந்து சீரான ஆர்முடுகல் a m s^{-2} உடன் உயர்ந்தபட்ச வேகம் v m s^{-1} வரைக்கும் சென்று பின்னர் அவ்வேகத்தைப் பேணுகின்றார். பொலிஸ் அலுவலர் d m $\left(d > \frac{1}{2a}v^2\right)$ தூரம் சென்று வாகனத்திற்குக் கிட்ட வருகின்றார். மோட்டர்ச் சைக்கிளினதும் மோட்டர் வாகனத்தினதும் இயக்கங்களுக்கான வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து மோட்டர்ச் சைக்கிள் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் செலுத்தப்பட்ட நேரம் $\frac{d}{u} - \frac{v}{a}$ எனக் காட்டுக.

a, v, u, d ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பைக் கண்டு, அதிலிருந்து

$$v = \frac{ad}{u}\left[1 - \left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

எனக் காட்டுக.

இதற்காக வேக - நேர வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பின்வருமாறு வரையலாம்.



மோட்டர்ச் சைக்கிள் அதன் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தைப் பெறும்போது நேரம் T எனவும் பொலிஸ் அலுவலர் மோட்டர் வாகனத்திற்கு அண்மையில் வரும்போது நேரம் t_0 எனவும் கொள்வோம்.
ஆர்முடுகலுடன் $a = \frac{v-0}{T-0}$. $\Rightarrow T = \frac{v}{a}$.

எனவே ஆர்முடுகலுடன் சென்ற தூரம் $\frac{1}{2} \times v \times T = \frac{1}{2} \times v \times \frac{v}{a}$ $= \frac{1}{2a}v^2$.
பொலிஸ் அலுவலர் வாகனத்திற்கு அண்மையில் வருவதற்குச் சென்ற தூரம் d m ஆக இருக்கும் அதே வேளை $d > \frac{1}{2a}v^2$ ஆகையால் அவர் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தைப் பெறுவதற்கு முன்பாக மோட்டர் வாகனத்திற்கு அண்மையில் வர முடியாது. எனவே $t_0 > T$.

ஆயிடை $[0, t_0]$ இற்கு மேலே;

மோட்டர் வாகனம் சென்ற தூரம் $= ut_0$. இது d m எனத் தரப்பட்டிருப்பதனால் $ut_0 = d$.

$$\Rightarrow t_0 = \frac{d}{u}.$$

மோட்டர்ச் சைக்கிள் உயர்ந்தபட்ச
வேகத்தில் செலுத்தப்பட்ட நேரம் $= t_0 - T$

$$= \frac{d}{u} - \frac{v}{a}.$$

வேக - நேர வளையியிலிருந்து
மோட்டர்ச் சைக்கிள் சென்ற தூரம் $= \frac{1}{2} \times v \times (t_0 + t_0 - T).$

ஆகவே $d = \frac{1}{2} \times v \times (t_0 + t_0 - T).$

$$\Rightarrow 2d = v\left(2 \times \frac{d}{u} - \frac{v}{a}\right).$$

$$\Rightarrow 2da = 2av\frac{d}{u} - v^2.$$

$$\Rightarrow v^2 - 2\frac{ad}{u}v = -2da.$$

$$\Rightarrow v^2 - 2\frac{ad}{u}v + \left(\frac{ad}{u}\right)^2 = -2da + \left(\frac{ad}{u}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \left(v - \frac{ad}{u}\right)^2 = \left(\frac{ad}{u}\right)^2\left(1 - \frac{2}{ad}u^2\right).$$

$$\Rightarrow v - \frac{ad}{u} = \pm\frac{ad}{u}\left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Rightarrow v = \frac{ad}{u} \pm \frac{ad}{u}\left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

இங்கு நேர்ப் பெறுமானத்தைக் கருதுவோம். $\frac{v}{a} = \frac{d}{u} + \frac{d}{u}\left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}.$

$$\Rightarrow \frac{v}{a} - \frac{d}{u} = \frac{d}{u}\left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

வர்க்கமூலக் கோவை நேர் அல்லது பூச்சியம் ஆகையால்

$$\frac{v}{a} - \frac{d}{u} \geq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{u} - \frac{v}{a} \leq 0.$$

அப்போது மோட்டர்ச் சைக்கிள் உயர்ந்தபட்ச வேகத்தில் செலுத்தப்பட்ட நேரம் $\frac{d}{u} - \frac{v}{a}$ மறை அல்லது பூச்சியமாகும். ஆனால் அவ்வாறு இருப்பதில்லை ஆகையால் நேர்ப் பெறுமானம் உகந்ததன்று. ஆகவே $v = \frac{ad}{u} - \frac{ad}{u}\left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}$.

அதாவது $v = \frac{ad}{u}\left[1 - \left(1 - \frac{2u^2}{ad}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$.

இப்பாடத்திலிருந்து நீங்கள் கற்ற முக்கிய விடயங்கள்

தூரம்

ஒரு புள்ளியைக் குறித்து ஒரு துணிக்கையின் அல்லது பொருளின் நேரத்துடன் இருக்கும் தானங்களுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி தூரம் எனப்படும். தூரம் ஓர் எண்ணிக் கணியம் ஆகும்.

கதி

நேரத்துடன் தூரம் மாறும் வீதம் கதி எனப்படும். கதி ஓர் எண்ணிக் கணியம் ஆகும்.

இடப்பெயர்ச்சி

ஒரு குறித்த நிலைத்த அச்சுத் தொகுதி பற்றி ஒரு துணிக்கை அல்லது பொருள் இருக்கும் தானத்தின் தானக் காவி இடப்பெயர்ச்சி எனப்படும் காவியாகும்.

வேகம்

நேரத்துடன் இடப்பெயர்ச்சி மாறும் வீதம் வேகம் எனப்படும் காவியாகும்.

ஆர்முடுகல்

நேரத்துடன் வேகம் மாறும் வீதம் ஆர்முடுகல் எனப்படும் காவியாகும்.

வரைபு

நேரத்திற்கு எதிராக ஒரு துணிக்கையின் அல்லது பொருளின் தூரம், கதி, இடப்பெயர்ச்சி, வேகம், ஆர்முடுகல் ஆகியவற்றைக் கருதி வரையப்படும் வரைபு ஆகும். இங்கு கவனம் வேக - நேர வரைபில் செலுத்தப்படும்.

- ஒரு வேக - நேர வரைபு மீது உள்ள இரு புள்ளிகளைத் தொடுக்கும்போது கிடைக்கும் நாணின் படித்திறன் ஒத்த ஆயிடையில் சராசரி ஆர்முடுகலிற்குச் சமமாகும்.

- ஒரு வேக - நேர வரைபின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலியின் படித்திறன் ஒத்த புள்ளியில் கணநிலை ஆர்முடுகலிற்குச் சமம்.

- ஒரு குறித்த நேர ஆயிடையில் சென்ற தூரம் ஒத்த ஆயிடையில் வேக - நேர வளையிக்கும் நேர அச்சுக்குமிடையே உள்ள பரப்பளவுக்குச் சமம்.

இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகள்

ஓர் ஏகபரிமாணப் பாதையில் சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் தொடக்க வேகம் u இல் இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் ஒரு துணிக்கை நேரம் t இற்குப் பின்னர் இடப்பெயர்ச்சி s ஐக் கொண்டிருக்கும் அதே வேளை v ஐ அடைகின்றது. அப்போது பின்வருவன உண்மையா இருக்கும் அதே வேளை அவை இயக்கத்தியற் சமன்பாடுகள எனப்படும்.

$v = u + at.$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2.$

$v^2 = u^2 + 2as.$

$2s = (v + u)t.$

நூலாசிரியரிடமிருந்து...

இளம் பிராயந்தொட்டே நான் திறமையைக் காட்டிய, நான் விரும்பியது போன்று முயற்சியின்றித் திறமை பெற்ற பாடங்களில் கணிதமும் ஒன்றாகும். சிறப்புப் பாடத்தைப் போன்று பட்டப் பின் பட்டத்தையும் கணிதம் தொடர்பாக பெற்றுள்ள நான் உள்நாட்டு பல்கலைக்கழகத்தைப் போன்று வெளிநாட்டுப் பல்கலைக்கழகத்திலும் விரிவுரையாளராக ஏறத்தாழ முப்பதாண்டுகள் பணியாற்றிமையால் பெற்ற அறிவும் அனுபவமும் இந்நூலை எழுதுகையில் உதவியளித்தன.

பல்வேறு பாடசாலைகளில் நான் பங்குபற்றிய க. பொ. த. (உயர் தர) இணைந்த கணித பாடம் பற்றிய கருத்தரங்குகளில் ஆசிரியர்கள் எடுத்துரைத்த கருத்துகளும் இந்நூலைப் பயனுறுதிவாய்ந்த விதத்தில் வெளியிடுவதற்கு உதவியமையால் நான் அவர்களுக்கு எனது மனமார்ந்த நன்றியை நவில்கின்றேன். மேலும் நான் பங்கு பற்றிய ஆசிரியர் பயிற்சி அமர்வுகளிலும் ஆசிரியர்களிடமிருந்து பெற்ற தகவல்களையும் கருத்திற் கொண்டு இந்நூலின் விடயங்களை எடுத்துரைக்க முயன்றுள்ளேன்.

நீண்டகாலமாகக் க. பொ. த. (உயர் தர) இணைந்த கணித பாடம் தொடர்பான மதிப்பீட்டுப் பணிகளில் ஈடுபடுகையில் கட்டுப்பாட்டுப் பரீட்சகர்களிடமிருந்து நான் பெற்ற அறிவுறுத்தல்களும் இங்கு மிகவும் பயன்பட்டன. மதிப்பீட்டு பணிகளின்போது என்னுடன் சுமுகமாகப் பணியாற்றிய ஆசிரியர்கள் மாணவர்களின் அறிவு, விளக்கம் ஆகியன தொடர்பாக தெரிவித்த கருத்துகளும் இந்நூலுக்கு வழிகாட்டியாக அமைந்தமையால் அவர்களுக்கு எனது நன்றி உரியதாகும். விசேடமாக எனது பாடசாலை நண்பராகிய திரு கே. லக்ஷமன் பர்ணாந்து இத்தகைய ஒரு நூலின் தேவை ஏற்பட்டிருப்பதாகவும் ஓர் ஆக்கபூர்வமான விதத்தில் இதனை என்னால் செய்யமுடியும் எனவும் கூறிய அதே வேளை இதனைப் பற்றிய ஓர் எண்ணம் ஏற்கனவே என்னிடம் இருந்தமையால் நான் இந்நூலை எழுதும் பணியை உடனடியாக மேற்கொண்டேன். நான் அதன் தொடர்பாக எனது நண்பனுக்கு நன்றியுடையவனாவேன். க. பொ. த. (உயர் தர) இணைந்த கணித நூலை எழுதுவதற்கு என்னை நிதமும் தூண்டிய பௌதிகத் துறையில் சேவையில் ஈடுபட்டுள்ள எனது நண்பராகிய கலாநிதி. பீ. கீக்கியனகே அவர்களுக்கும் எனது நன்றி உரித்தாகும். இந்நூலை எழுதுவதறகு ஊக்குவித்த திருமதி தனுஜா மைத்திரி விதாரண, இந்நூல் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப அமைந்துள்ளதென உறுதிப்படுத்திய தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் திரு எஸ். ராஜேந்திரம் ஆகியோருக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

E.P.D (SALES DIVISION)
P01
3020033
A/L COMBINE MATHS - P II (T)
Rs. 275.00

සංයුක්ත ගණිතය II (දෙ)
2018/T/අති/18-1/3000