உயர் தர இணைந்த கணிதம்

2017 ஆம் ஆண்டுப் பாடத்திட்டதிற்கான

தாயங்கள்

- தாயங்களுக்கான அறிமுகம்
- தாய அட்சரகணிதம்
- ஓர் 2 X 2 தாயத்தின் நேர்மாறு
- தாயங்களைப் பயன்படுத்தி ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல்
- பயிற்சிகளும் தீர்வுகளும்

கலாநிதி மேனகா லியனகே

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)க் கணிதத்தின்
2017 ஆம் ஆண்டுப் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கான நூல்

உயர் தர இணைந்த கணிதம்

2017 பாடத்திட்டத்திற்கான

தாயங்கள்

கலாநிதி மேனகா லியனகே
BSc (Hon) (SL), M. Maths.(Canada), PhD. (Canada)
சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதக் கல்வித் துறை,
ஸ்ரீ ஜயவர்த்தனபுரப் பல்கலைக்கழகம்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

முதலாம் பதிப்பு 2019

ISBN No. : 978-955-25-0352-8

இந்நூல் கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
கொழும்பு வீதி, ஹொரகஸ்முல்ல, திவுலப்பிடிய,
பிரின்பெலஸ் லங்கா நிறுவனத்தில்
அச்சிட்டு வெளியிடப்பட்டது.

முன்னுரை

சகலருக்கும் மகிழ்ச்சியாக வாழ முடியுமான சிறந்ததொரு சமூகத்தைக் கட்டியெழுப்புவது கல்வியின் அடிப்படை நோக்கங்களுள் ஒன்றாகும். இதற்குத் தேவையான அறிவு, திறன், மனப்பாங்குகளை வழங்குவதில் நூல்களுக்குத் தனித்துவமான இடமொன்றுள்ளது.

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம் மூலம் மேலதிக வாசிப்பு நூல்கள் வெளியிடப்பட்டு சாதாரண விலைக்குப் பெற்றுக் கொள்வதற்கு நடவடிக்கை எடுக்கப்படுவது மேற்படி நோக்கத்தை அடைவதற்கு மேற்கொள்ளும் ஒரு முயற்சியாகவேயாகும்.

கா. பொ. உயர்தரம் மற்றும், உயர் பரீட்சைகளுக்குத் தயாராவோர் மற்றும் நூல்கள் வாசிப்பதில் ஆர்வமுள்ள ஏனையோரின் பயன்பாட்டின் பொருட்டே இந்நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்நூல்கள் மூலம் உச்ச பயனைப் பெற்றுக் கொள்வது உங்கள் பொறுப்பாகும்.

இந்நூலை ஆக்குவதில் பல்வேறு விதத்திலும் உதவி ஒத்தாசைகள் புரிந்த அனைவருக்கும் எனது நன்றிகள் உரித்தாகட்டும்.

டபிள்யு. எம். ஜயந்த விக்கிரமநாயக்க
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்
இசுருபாய
பத்தரமுல்ல

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

திரு டபிள்யூ. எம். ஜயந்த விக்கிரமநாயக்க
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

திருமதி டபிள்யூ. ஏ. நிர்மலா பியசீலி
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்கள ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

திருமதி அ. குலரத்தினம்
உதவி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர்

கலாநிதி மேனகா லியனகே
சிரேட்ட விரிவுரையாளர்
ஸ்ரீ ஜயவர்த்தனபுரப் பல்கலைக்கழகம்.

மொழிபெயர்ப்பு

திரு ந. வாகீசமூர்த்தி
ஓய்வு பெற்ற கல்விப் பணிப்பாளர்.

கணினி வடிவமைப்பு

திரு முத்தையா காந்தரூபன்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

நூலாசிரியரின் குறிப்பு

கல்விப் பொதுத்தராதரப் பத்திரம் (உயர் தர) இணைந்த கணித பாடத்தின் ஒரு பகுதியாகிய தாயங்கள் பற்றிய பாடசாலை ஆசிரியர்களின் வேண்டுகோளுக்கேற்ப நான் பல கருத்தரங்குகளை நடத்தினேன். அவற்றின்போது பிள்ளைகளுக்கு விநியோகிக்கப்பட்ட கைச்சிற்றிதழ்களை மிகவும் மேம்படுத்தி 2017 இன் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கேற்ப ஒரு பாடநூலாக வெளியிட்டுள்ளேன்.

கணிதம் ஓர் அழகான பாடமாகும். பாட விடயங்களைக் கற்கும்போது அதன் அழகைக் கண்டு கொள்ளலாம். பாட விடயங்களை நன்றாகக் கற்பதற்குப் பல உதாரணங்களை இந்நூலில் சேர்த்துள்ளேன். பிள்ளைகள் பயிற்சிகளைத் தீர்த்த பின்னர் அவற்றுக்குத் தரப்பட்டுள்ள தீர்வுகளுடன் தமது தீர்வுகளைச் செவ்வை பார்க்க வேண்டும் என்பதை இங்கு புதிதாகக் கூற வேண்டியதில்லை. பிள்ளைகள் பெற்ற அறிவை மேலும் வளர்ப்பதற்கு உகந்த விதத்தில் இத்தீர்வுகளை முன்வைப்பதற்குப் பெரிதும் முயன்றுள்ளேன்.

பெருஞ் சவாலாக விளங்கும் இப்போட்டிப் பாரீட்சைக்குத் தோற்றும் பிள்ளைகளுக்காக எழுதப்பட்ட இந்நூல் தொடர்பாக நான் விடுத்த வேண்டுகோளை ஏற்றுக்கொண்ட கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தின் ஆணையாளர் நாயகத்திற்கு எனது நன்றியை நவில விரும்புகின்றேன். இத்தகைய ஒரு நூலின் தேவையை எடுத்தியம்பி இணைவ்வுப் பணிகளை மிகத் திறமையாக நிறைவேற்றிய திருமதி தனுஜா மைத்திரி விதாரணவுக்கு எனது நன்றி உரியது, இந்நூலை வாசித்து முக்கிய கருத்துக்களை எடுத்துரைத்த பதிப்பாசிரியர் திரு மடுல்லே கபில சி ல்வா, அவர்களுக்கும் கலாநிதி ஜயந்த சேனாதீர, திருமதி எச். கே. அமரசீலி ஆகியோருக்கும் இலக்கண வழுக்களை எடுத்துக்காட்டிய திரு ஜயத் பியதசுன்னிற்கும் எனது நன்றி உரியது.

எனக்குப் பல விதங்களில் ஒத்துழைப்பு அளித்த எனது சகோதரர்களாகிய டாக்டர் கோலித லேல்வல, வருண லேல்வல, அசோக லேல்வல ஆகியோரை இங்கு குறிப்பிட விரும்புகிறேன். இப்பணி காரணமாக நெடுங்காலத்திற்குத் தாயின் அரவணைப்பின்றி இருந்த விகசித்த, நிசங்க என்ற இரு பிள்ளைகளுக்கும் பயன்தரத்தக்க பல கருத்துகளைத் தெரிவித்த எனது கணவருக்கும் எனது நன்றி உரியது, பாடவிடயங்களை உயர்தர மாணவி என்ற ரீதியில் நோக்கிப் பல கருத்து களை நல்கிய மகள் விகசித்தவிற்கு எனது விசேட நன்றி உரியதாகும்.

இந்நூலை எழுதும்போதும் கணனியில் தட்டச்சிடும்போதும் உயர் தரப் பிள்ளைகளின் தேவைகளைப் பூர்த்திசெய்யும் விதத்தில் பலகாலும் முயன்றுள்ளேன். இந்நூலில் எவையேனும் வழுக்களும் குறைபாடுகளும் இருந்தால் அல்லது இந்நூலை மேம்படுத்தும் கருத்துக்கள் உங்களிடம் இருந்தால் menakaliyanage@yahoo.com என்ற மின்னஞ்சல் முகவரியில் எனக்கு அறியத் தருமாறு கேட்டுக் கொள்கின்றேன். இப்பாடத்தைக் கற்பிக்கும் ஆசிரியர்களுக்கும் இந்நூல் உதவுமென நினைக்கின்றேன். இறுதியாக இந்நாட்டில் செழிப்புக்கு உதவும் ஆக்க பூர்வமாகச் செயற்படும் பிள்ளைகள் உருவாகவேண்டுமென வாழ்த்துகிறேன்.

கலாநிதி மேனகா
கணிதத்துறை
ஸ்ரீ ஜயவர்த்தனபுரப் பல்கலைக்கழகம்
நுகேகொட
2017 நவெம்பர் 05.

பொருளடக்கம்

அத்தியாயம்

[[1]] தாயங்கள் பற்றிய அறிமுகம்

1.1 ஒரு தாயத்தின் வரைவிலக்கணம்

செவ்வக வடிவமாகத் தயார்செய்யப்படும் எண் பந்தி **தாயம்** எனப்படும்.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$ போன்றன

தாயங்களுக்குச் சில உதாரணங்களாகும்.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$$

நிரைகள்

நிரல்கள்

3 நிரைகளும் 2 நிரல்களும்

1.2 ஒரு தாயத்தின் வரிசை

m எண்ணிக்கையான நிரைகளும் n எண்ணிக்கையான நிரல்களும் உள்ள ஒரு தாயம் $m \times n$ வரிசைத் தாயமாகும்.

உதாரணம் : $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 22 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & -11 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$. தாயம் A ஆனது 2×4 வரிசையுள்ள தாயமாகும்.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் தாயங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் வரிசையைத் துணிக.

i. $\begin{bmatrix} 4 & -18 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}$ iii. $\begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$

iv. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 23 \end{bmatrix}$ v. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \\ 9 & 10 & 14 \end{bmatrix}$ vi. $\begin{bmatrix} 17 & 0 & -2 & 1 \\ -11 & 24 & 5 & 16 \end{bmatrix}$

குறிப்பு :
தாயம் பொதுவாக A, B, C போன்ற ஆங்கிலப் பேரெழுத்துகளினால் குறிப்பிடப்படும்.

1.3 $m \times n$ வரிசைத் தாயத்தின் பொது வடிவம்

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

a_{ij} – i ஆம் நிரையின் j ஆம் நிரலின் மூலகம்

ஓர் உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ எனின்,

$a_{11} = 3$, $a_{12} = -5$, $a_{13} = 7$, $a_{14} = 3$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = 2$, $a_{24} = 11$ ஆகும்.

1.4 விசேட தாயங்கள்

1.4.1 நிரைத் தாயங்கள்

ஒரு நிரைத் தாயத்தில் ஒரு நிரை மாத்திரம் இருக்கும்.

உதாரணம் : $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$

1.4.2 நிரல் தாயங்கள்

ஒரு நிரல் தாயத்தில் ஒரு நிரல் மாத்திரம் இருக்கும்.

உதாரணம் : $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$

1.4.3 பூச்சியத் தாயங்கள்

எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமாகவுள்ள தாயம் **பூச்சியத் தாயம்** எனப்படும்.

ஓர் உதாரணமாக $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ ஆனது 2×4 வரிசைப் பூச்சியத் தாயமாகும்.

பூச்சியத் தாயத்தை வகைகுறிப்பதற்குப் பொதுவாகக் குறியீடு O பயன்படுத்தப்படும்.

1.4.4 சதுரத் தாயங்கள்

ஒரு தாயத்தின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமெனின், அத்தாயம் **சதுரத் தாயம்** எனப்படும்.

உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 10 \\ 1 & 4 & 8 \\ -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

ஒரு தாயத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டம்

ஒரு சதுரத் தாயத்திற்கு மாத்திரம் இங்கு முக்கிய மூலைவிட்டம் வரையறுக்கப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ மூலகங்கள் உள்ள மூலைவிட்டம் மேற்குறித்த தாயத்தின் **முக்கிய மூலைவிட்டம்** எனப்படும்.

(தாயத்தின் மற்றைய மூலைவிட்டம் அதாவது $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ மூலகங்கள் உள்ள மூலைவிட்டம் மேற்குறித்த தாயத்தின் **துணை மூலைவிட்டம்** எனப்படும்.)

ஓர் உதாரணமாக 2, 4, 9 ஆகியன பின்வரும் 3×3 வரிசை உள்ள தாயம் A இன் முக்கிய மூலைவிட்டத்தின் மூலகங்கள் ஆகும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

1.4.5 மூலைவிட்டத் தாயங்கள்

ஒரு சதுரத் தாயத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டத்தில் இல்லாத எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமெனின், அது **மூலைவிட்டத் தாயம்** எனப்படும்.

உதாரணங்களாக

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

போன்றன மூலைவிட்டத் தாயங்களாகும்.

குறிப்பு :
ஒரு மூலைவிட்டத் தாயத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டத்தின் மூலகங்களும் பூச்சியமாக இருக்கலாம். அதாவது ஒரு சதுரமான பூச்சியத் தாயம் ஆகும்.

ஓர் உதாரணமாக

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$ உம் ஒரு மூலைவிட்டத் தாயமாகும்.

1.4.6 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயங்கள்

ஒரு சதுரத் தாயத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டத்தில் இருக்கும் எல்லா மூலகங்களும் 1 ஆகவும் ஏனைய எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமாகவும் இருக்கும் ஒரு தாயம் **சர்வசமன்பாட்டுத் தாயம்** எனப்படும்.

குறிப்பு :
ஒரு சதுரத் தாயத்திற்கு மாத்திரம் சர்வசமன்பாட்டுத் தாயங்கள் வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணங்கள் : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.4.7 முக்கோணத் தாயங்கள்

1.4.7.1 மேல் முக்கோணத் தாயங்கள்

ஒரு சதுரத் தாயத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டத்திற்குக் கீழே இருக்கும் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமெனின், அத்தாயம் **மேல் முக்கோணத் தாயம்** எனப்படும்.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.7.2 கீழ் முக்கோணத் தாயங்கள்

ஒரு சதுரத் தாயத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டத்திற்கு மேலே இருக்கும் எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமெனின், அத்தாயம் **கீழ் முக்கோணத் தாயம்** எனப்படும்.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.8 சமச்சீர்த் தாயங்கள்

ஒரு சதுரத் தாயம் $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ இன் எல்லா i இற்கும் j இற்கும் $a_{ij} = a_{ji}$ ஆக இருக்கும்போது A ஆனது **சமச்சீர்த் தாயம்** எனப்படும்.

உதாரணம் : $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 5 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1.4.9 ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயங்கள்

ஒரு சதுரத் தாயம் $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ இன் எல்லா i இற்கும் j இற்கும் $a_{ij} = -a_{ji}$ ஆக இருக்கும்போது A ஆனது **ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயம்** எனப்படும்.

உதாரணம் : $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 1.2

1. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ஓர் ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயமெனின், $a = 0$, $d = 0$, $b = -c$ எனக் காட்டுக.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்கள் எனக் காட்டுக.

[[2]] தாய அட்சரகணிதம்

2.1 இரு தாயங்களின் சமம்

ஒரே வரிசையில் உள்ள இரு தாயங்களின் ஒத்த மூலகங்கள் சமமாக இருந்தால் மாத்திரம் அத்தாயங்கள் சமமாகும்.

பயிற்சி 2.1

1. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

1. $\begin{bmatrix} 5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -6 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 2x \\ y & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$

2.2 தாயக் கூட்டல்

ஒரே வரிசையில் உள்ள இரு தாயங்களுக்கு மாத்திரம் தாயக் கூட்டல் வரையறுக்கப்படும்.

ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டுவதன் மூலம் கூட்டல் தாயம் பெறப்படும்.

தாயங்கள் கூட்டப்படும் விதத்தை ஓர் உதாரணத்தின் மூலம் தெரிந்தெடுப்போம்.

உதாரணம் :

$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 4}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & 4 \\ 11 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

எனக் கொள்வோம்.

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 3 + 0 & (-5) + (-1) & 7 + 5 & 3 + 4 \\ (-1) + 11 & 4 + (-5) & 2 + 1 & 11 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 & 7 \\ 10 & -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

எனினும் A, C இன் வரிசை வேறுபட்டது ஆகையால் $A + C$ வரையறுக்கப் படுவதில்லை.

பொதுவாக

$A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$, $B = \left[b_{ij} \right]_{m \times n}$ எனின்,

அப்போது $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij} \right]_{m \times n}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.2

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க.

   i. $A + C$

   ii. $B + D$

   iii. $A + D$

   ஆகியன வரையறுக்கப்படுமெனின், அவற்றைத் துணிக.

2.2.1 தாயக் கூட்டலின் இயல்புகள்

$m \times n$ வரிசையில் உள்ள A, B, C என்னும் தாயங்களுக்கு

1. பரிவர்த்தனை விதி

$A + B = B + A$

2. சேர்த்தி விதி

$A + (B + C) = (A + B) + C$

2.3 ஓர் எண்ணியினால் ஒரு தாயத்தைப் பெருக்கல்

k ஆனது ஓர் எண்ணியாக (மாறா எண்) இருக்கும்போது A இன் எல்லா மூலகங்களையும் k இனால் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் தாயம் kA என வரையறுக்கப்படும்.

$kA = k\left[a_{ij} \right] = \left[ka_{ij} \right]$

மேலும் $-A = (-1)A$ உம் $A - B = A + (-B)$ உம் ஆகும்.

உதாரணம்: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

i. $A - B$

ii. $3A$

iii. $\frac{1}{5}A$

iv. $3A - 4B$

ஆகியவற்றைத் துணிக.

தீர்வு:

i. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $-B = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -1 \\ 2 & -6 & -8 \end{bmatrix}$ ஆகும். அப்போது

$$A - B = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -2 \\ 6 & -11 & -1 \end{bmatrix}.$$

ii. $3A = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3(-1) \\ 3\cdot 4 & 3(-5) & 3\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 12 & -15 & 21 \end{bmatrix}$

iii. $\frac{1}{5}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}.2 & \frac{1}{5}.3 & \frac{1}{5}(-1) \\ \frac{1}{5}.4 & \frac{1}{5}(-5) & \frac{1}{5}.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & -1 & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$

iv. $3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 12 & -15 & 21 \end{bmatrix}$, $-4B = \begin{bmatrix} -20 & -40 & -4 \\ 8 & -24 & -32 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அப்போது $3A - 4B = \begin{bmatrix} -14 & -31 & -7 \\ 20 & -39 & -11 \end{bmatrix}$.

குறிப்பு :

$A - B$ இன் மூலகங்கள் A, B ஆகிய ஒத்த மூலகங்களின் வித்தியாசத்திலிருந்து கிடைக்கின்றன என்பது தெளிவாகும். ஓர் உதாரணமாக

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 1 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A - B = \begin{bmatrix} 2 - 5 & 3 - 10 & -1 - 1 \\ 4 - (-2) & -5 - 6 & 7 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -2 \\ 6 & -11 & -1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

2.3.1 எண்ணிப் பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

k, λ ஆகியன எண்ணிகளாகவும் A, B ஆகியன ஒரே வரிசையின் தாயங்களாகவும் இருப்பின்,

1. $kA = Ak$
2. $k(A + B) = kA + kB$
3. $(k + \lambda) A = kA + \lambda A$
4. $(k\lambda)A = k(\lambda A)$

குறிப்பு :
இவ்வியல்புகளை நிறுவலின்றிச் சோதித்தால் போதியதாகும்.

உதாரணம்:

விக்கசித்த இல்ல பேக்கரியின் மூலம் நுகேகொட, காலி நகரங்களில் உள்ள பேக்கரிகளில் மூன்று வகையான கேக்குகள் உற்பத்தி செய்யப்படுகின்றன. டிசெம்பர் மாதத்தில் ஒவ்வொரு பேக்கரியிலும் ஒவ்வொரு கேக் வகையிலும் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அளவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	பட்டர் கேக் (kg)	பழக் கேக் (kg)	சொக்களேற் கேக் (kg)
நுகேகொட	400	250	300
காலி	300	150	200

i. அட்டவணையில் தரப்பட்ட தகவல்களை ஒரு 2×3 வரிசைத் தாயம் A இன் மூலம் எழுதுக.

ii. ஜனவரி மாதத்தில் அவர்களுடைய உற்பத்தி 40% இனால் குறைந்துள்ளது. ஜனவரி மாத உற்பத்தியை வகைகுறிக்கும் தாயம் B ஐக் காண்க.

iii. $A + B$ ஐக் கணித்து அத்தாயத்தினால் வகைகுறிக்கப்படுவது யாதென எடுத்துரைக்க.

தீர்வு :

i. $A = \begin{bmatrix} 400 & 250 & 300 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix}$

ii. ஜனவரி மாத உற்பத்தி தாயம் $A - \frac{40}{100}\ A$ இற்குச் சமம் அதாவது,

$B = A - \frac{40}{100}\,A = A - (0.4)\,A = (\,1 - 0.4\,)\,A$ (2.3.1 ஐப் பயன்படுத்தும்போது)

$$= (0.6)\begin{bmatrix} 400 & 250 & 300 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 240 & 150 & 180 \\ 180 & 90 & 120 \end{bmatrix}.$$

iii. $A + B = \begin{bmatrix} 400 & 250 & 300 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & 150 & 180 \\ 180 & 90 & 120 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 640 & 400 & 480 \\ 480 & 240 & 320 \end{bmatrix}.$$

டிசெம்பர் மாதத்திலும் ஜனவரி மாதத்திலும் ஒவ்வொரு பேக்கரியிலும் ஒவ்வொரு வகைக் கேக்கிலும் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட அளவுகள் தாயம் $A + B$ இன் மூலம் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன.

பயிற்சி 2.3

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ எனின்,

i. $4B$ ii. $A - B$ iii. $3A - B$

iv. $\lambda = 0,\ \lambda = -1$ ஆக இருக்கும்போது λB

ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

v. $3A - B + C = 0$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள தாயம் C ஐப் பெறுக.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்களாகும். **(பயிற்சி 1.4)**

$A + B,\ A - B$ ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்கள் எனக் காட்டுக.

2.4 தாயப் பெருக்கம்

இப்போது நாம் தாயப் பெருக்கம் பற்றி ஆராய்வோம்.

உதாரணம் :

திக்கிரி, கயனாத், சக்தி ஆகியோர் வாங்கிய றம்புட்டான், கொய்யாப் பழம் ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

	றம்புட்டான்	கொய்யா
திக்கிரி	10	1
கயனாத்	5	2
சக்தி	6	1

ஒரு றம்புட்டானின் விலை ரூ. 5 உம் ஒரு கொய்யாப்பழத்தின் விலை ரூ. 9 உம் ஆகும். ஒவ்வொருவரும் செலுத்திய பணத்தைக் காண்பதற்குத் தாயத்தைப் பயன்படுத்துக.

தீர்வு :

அட்டணையில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை ஒரு தாயத்தின் மூலம்

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$ என எழுதலாம்.

ஒவ்வொரு பழத்தினதும் விலையை $S = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$ நிரல் தாயத்தினால் வகை குறிக்கலாம்.

ஒவ்வொருவரும் செலுத்திய பணத்தைத் தாயப் பெருக்கம் AS இன் மூலம் பெறலாம்.

$$AS = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 10 \times 5 + 1 \times 9 \\ 5 \times 5 + 2 \times 9 \\ 6 \times 5 + 1 \times 9 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 59 \\ 43 \\ 39 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

திக்கிரி செலுத்திய பணம் முதலாம் நிரையிலும் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள மூலகத்தின் (11 மூலகம் *) மூலம் தரப்படுகின்றது.

* இது **'ஒன்று ஒன்று மூலகம்'** என வாசிக்கப்படும்.

அவ்வாறே கயனாத் செலுத்திய பணத்தை இரண்டாம் நிரையிலும் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள மூலகத்தின் (மூலகம் 21) மூலமும் சக்தி செலுத்திய பணத்தை மூன்றாம் நிரையிலும் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள மூலகத்தின் (மூலகம் 31) மூலமும் பெறலாம் என்பது தெளிவாகும்.

நாம் வேறோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

தாயம் A இன் வரிசை 1×3 உம் தாயம் B இன் வரிசை 3×1 உம் ஆகும். அப்போது பெருக்கம் AB ஆனது 1×1 தாயம் ஆகும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2\times 7 + (-1)(-2) + (-3)5 \end{bmatrix}_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

அதாவது A இன் 1 ஆம் நிரையிலும் B இன் 1 ஆம் நிரலிலும் உள்ள ஒத்த மூலகங்களுக்கிடையே இருக்கும் பெருக்கத்தின் கூட்டுத்தொகை பெருக்கம் AB இன் நிரை 1 இலும் நிரல் 1 இலும் உள்ள மூலகத்திற்குச் சமம்.

முக்கியம் :
பெருக்கத்தை வரையறுப்பதற்கு A இன் ஒரு நிரையின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கை B இன் ஒரு நிரலின் மூலகங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டுமென இதிலிருந்து தெரிகின்றது. அதாவது A இன் நிரல் எண்ணிக்கையும் B இன் நிரை எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

இப்போது நாம் ஒரு பொது வகை பற்றி ஆராய்வோம்.

பொதுவாக A இன் வரிசை $1 \times n$ ஆகவும் B இன் வரிசை $n \times 1$ ஆகவும் இருக்கும்போது

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \dots + a_{1n}\, b_{n1} \end{bmatrix}_{1 \times 1}$$

இங்கு A இன் வரிசை ஓர் $1 \times n$ தாயமாகவும் B இன் வரிசை ஓர் $n \times 1$ தாயமாகவும் இருப்பதனால், AB இன் வரிசை 1×1 ஆகும்.

வேறு உதாரணங்களைப் பின்னர் கருதுவோம்.

2.4.1 பெருக்கலுக்கான பொருத்தம்

முக்கியம் :
A, B ஆகிய இரு தாயங்களின் பெருக்கத்தை A இன் நிரல் எண்ணிக்கையும் B இன் நிரை எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால் மாத்திரம் வரையறுக்கலாம்.

நாம் இப்போது பின்வரும் உதாரணத்தைக் கருதுவோம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(-1) + (-1)0 + 3 \times 2 & 2 \times 0 + (-1)4 + 3 \times 1 & 2 \times 2 + (-1)3 + 3(-1) \\ 4(-1) + 0 \times 0 + (-2)2 & 4 \times 0 + 0 \times 4 + (-2)1 & 4 \times 2 + 0 \times 3 + (-2)(-1) \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -8 & -2 & 10 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

AB இன் முதலாம் நிரையிலும் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள உறுப்பு (11 உறுப்பு) A இன் முதலாம் நிரையிலும் B இன் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள ஒத்த மூலகங்களுக்கிடையே பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

பொதுவாக AB இன் $\boldsymbol{i}$ ஆம் நிரையிலும் $\boldsymbol{j}$ ஆம் நிரலிலும் உள்ள உறுப்பு ($\boldsymbol{ij}$ உறுப்பு) ஆனது A இன் $\boldsymbol{i}$ ஆம் நிரையிலும் B இன் $\boldsymbol{j}$ ஆம் நிரலிலும் ஒத்த உறுப்புகளுக்கிடையே பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து பெறப்படும்.

குறிப்பு :
மேற்குறித்த உதாரணத்தில் (பெருக்கம் AB வரையறுக்கப்பட்ட போதிலும்) B இன் வரிசை 3×3 ஆகவும் A இன் வரிசை 2×3 ஆகவும் இருப்பதனால் பெருக்கம் BA வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

தாயம் X இன் வரிசை $m \times n$ ஆகவும் தாயம் Y இன் வரிசை $n \times p$ ஆகவும் இருப்பின் பெருக்கத் தாயம் XY இன் வரிசை $m \times p$ ஆகும்.

2.4.2 தாயப் பெருக்கத்தையும் இயல்புகளையும் மேலும் உதாரணங்களுடன் ஆராய்தல்

நாம் இப்போது மேலும் ஓர் உதாரணத்தைப் பார்போம்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ இற்கும் } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ இற்கும்}$$

(i) AB (ii) BA

ஆகியவற்றைத் துணிக.

தீர்வு:

(i) தாயம் A இன் வரிசை 2×3 ஆகவும் தாயம் B இன் வரிசை 3×2 ஆகவும் இருப்பதனால், தாயம் AB இன் வரிசை 2×2 ஆகும்.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2(-1)+4\cdot 0+0\cdot 2 & 2\cdot 0+4\cdot 4+0\cdot 1 \\ (-1)(-1)+3\cdot 0+1\cdot 2 & (-1)\cdot 0+3\cdot 4+1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

(ii) தாயம் B இன் வரிசை 3×2 ஆகவும் தாயம் A இன் வரிசை 2×3 ஆகவும் இருப்பதனால், தாயம் BA இன் வரிசை 3×3 ஆகும்.

$$BA=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-1)2+0(-1) & (-1)4+0\cdot 3 & (-1)0+0\cdot 1 \\ 0\cdot 2+4(-1) & 0\cdot 4+4\cdot 3 & 0\cdot 0+4\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1(-1) & 2\cdot 4+1\cdot 3 & 2\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 4 \\ 3 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

மேற்குறித்த (i) இற்கும் (ii) இற்கும் ஏற்ப $AB \neq BA$.

குறிப்பு 1 :
a, b என்னும் எவையேனும் இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு $ab = ba$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனினும் தாயங்களுக்கு இவ்வாறு இருத்தலாகாது.

வேறோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு :
பொதுவாக $AB \neq BA$. அதாவது தாயப் பெருக்கம் பொதுவாகப் பரிவர்த்தனையானதன்று.

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

எனினும் சில விசேட சந்தர்ப்பங்களில் மாத்திரம் $AB = BA$ ஆக இருக்கலாம்.

ஓர் உதாரணமாக

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ஆக இருக்கும்போது

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $AB = BA$ ஆகும். எனினும் இது ஒரு விசேட சந்தர்ப்பமே ஆகும்.

குறிப்பு 2 :
A, B ஆகியன பெருக்கம் AB ஐ வரையறுக்கும் இரு தாயங்களாக இருக்கின்ற போதிலும் பெருக்கம் BA கருத்தற்றதாக இருக்கலாம்.

ஓர் உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

ஆகியவற்றைக் கருதும்போது

$AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -8 & -2 & 10 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ எனினும் பெருக்கம் BA ஐ வரையறுக்க முடியாது.

குறிப்பு 3 :
மேலும் AB, BA ஆகிய இரு பெருக்கங்களையும் வரையறுக்கத்தக்கதாக இருக்கின்றபோதிலும் பெருக்கத் தாயங்களின் வரிசை வேறுபடுகின்றமையாலும் $AB \neq BA$ ஆக இருக்கலாம்.

ஓர் உதாரணமாக

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$ எனின்,

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$ ஆகும். எனினும் $$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 16 & 0 & -8 \\ 8 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

ஆகவே தாயப் பெருக்கம் தொடர்பாகக் கவனமாக இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு 4 :
a, b என்னும் எவையேனும் இரு மெய்யெண்களுக்கு $ab = 0$ ஆக இருக்கும்போது $a = 0$ அல்லது $b = 0$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனினும் தாயங்களுக்கு இவ்வாறு இருத்தலாகாது.

ஓர் உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ஆக இருக்கும்போது

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$ ஆகும். எனினும் $A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

$AB = O$ எனினும் $A \neq O$ அத்துடன் $B \neq O$ ஆகும்.

பூச்சியத் தாயம்

மேலும் $AB = O$ ஆக இருப்பதற்கு

$A = O$ அல்லது $B = O$ ஆக இருக்கவேண்டியதில்லை.

இப்போது மேற்குறித்த **குறிப்பு 4** இன் ஒரு விசேட சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

குறிப்பு 5 :
யாதாயினும் ஒரு மெய்யெண் a இற்கு $a^2 = 0$ ஆக இருக்கும்போது $a = 0$ ஆகும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனினும் தாயங்களுக்கு இவ்வாறு இருத்தலாகாது.

ஓர் உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க.

அப்போது $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. எனினும் A பூச்சியமன்று.

பின்வரும் குறிப்பு மேலே தரப்பட்டுள்ள குறிப்பு 4 ஐப் பெரிதும் ஒத்ததென விளங்கிக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 6 :
a பூச்சியமற்றதாக இருக்கும் a, b, c என்னும் எவையேனும் மெய்யெண்களுக்கு $ab = ac$ ஆக இருக்கும்போது $b = c$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனினும் தாயங்களுக்கு இவ்வாறு இருத்தலாகாது.

ஓர் உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

ஆக இருக்கும்போது $AB = AC$ ஆகும். எனினும் $B \neq C$.

குறிப்பு :
மெய்யெண்களின் சில இயல்புகள் தாயங்களுக்கு உண்மையானவையல்ல என்பதை நீங்கள் பயிற்சி 2.4 இன் 3, 4 ஆகிய பிரசினங்களைக் கற்பதன் மூலம் மேலும் அறிந்து கொள்ளலாம்.

2.4.3 தாயப் பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

A, B, C ஆகியன பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் காட்டப்பட்டுள்ள கணிதச் செய்கைகளை வரையறுக்கும் தாயங்களெனக் கொள்வோம். அப்போது

1. $A(BC) = (AB)C$ சேர்த்திக் கொள்கை.

2. $A(B + C) = AB + AC$ பரம்பற் கொள்கை

$(A + B)\,C = AC + BC$

குறிப்பு :
இவ்வியல்புகளை நிறுவலின்றிச் சோதித்தால் போதும்.

3. $IA = A = AI$. இங்கு A ஒரு சதுரத் தாயமும் I அதே வரிசையில் உள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் ஆகும்.

இப்போது நாம் வேறோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் :

அகல்யா, ஹசினி, சசினி என்னும் மூன்று கடைகளுக்குச் சங்கரின் உற்பத்திப் பொருள்கள் வழங்கப்படுகின்றன. ஒரு மாதத்தின்போது உள்ள வழங்கல்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

	மின் சூள் எண்ணிக்கை	மின் விசிறி எண்ணிக்கை	மின் குமிழ் எண்ணிக்கை	வளிச்சீராக்கி எண்ணிக்கை
அகல்யா	30	40	70	15
ஹசினி	50	25	100	10
சசினி	40	45	75	5

ஒரு மின் சூள் ரூ. 35 ஆகவும் ஒரு மின் விசிறி ரூ. 2500 ஆகவும் ஒரு மின் குமிழ் ரூ. 30 ஆகவும் இருக்கும் அதே வேளை ஒரு வளிச்சீராக்கி ரூ. 7000 ஆகும்.

i. அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை 4×3 வரிசையில் உள்ள ஒரு தாயம் A இன் மூலம் எழுதுக.

ii. ஒவ்வோர் உற்பத்திப் பொருளினதும் விலைகளை வகைகுறிக்கும் நிரைத் தாயம் S ஐ எழுதுக.

iii. பெருக்கம் SA ஐக் காண்க.

iv. SA இன் ஒவ்வொரு மூலகத்தினாலும் எது வகைகுறிக்கப்படுகின்றதென எடுத்துரைக்க.

தீர்வு:

i. $$A = \begin{bmatrix} 30 & 50 & 40 \\ 40 & 25 & 45 \\ 70 & 100 & 75 \\ 15 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

ii. $$S = \begin{bmatrix} 35 & 2500 & 30 & 7000 \end{bmatrix}$$

iii. $$SA = \begin{bmatrix} 35 & 2500 & 30 & 7000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 50 & 40 \\ 40 & 25 & 45 \\ 70 & 100 & 75 \\ 15 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 208150 & 137250 & 151150 \end{bmatrix}$$

iv. ஒவ்வொரு கடையும் சங்கரிடமிருந்து உற்பத்திப் பொருள்களைப் பெறுவதற்குச் செலவிடப்பட்ட மொத்தப் பணம் SA இன் ஒவ்வொரு மூலகத்தினாலும் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. அகல்யா கடைக்கு மொத்தப் பணம் ரூ. 208 150 உம் ஹசினி கடைக்கு மொத்தப் பணம் ரூ. 137 250 உம் சசினி கடைக்கு மொத்தப் பணம் ரூ. 151 150 உம் ஆகும்.

பயிற்சி 2.4

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்,

கீழே தரப்பட்டுள்ள i, ii ஆகியவற்றின் உண்மையை உறுதிப்படுத்துக.

i. $A\,(B + C) = AB + AC$

ii. $(B + C)\,A = BA + CA$

2. A ஒரு சதுரத் தாயமெனின்,

$$(3A + I)(2A - I) = 6A^2 - A - I$$ ← முக்கியம்

எனக் காட்டுக.

3. i. $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$ எனக் காட்டுவதற்கு $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ஐயும் $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ஐயும் பயன்படுத்துக.

ii. A, B ஆகியன $AB = BA$ ஆகவுள்ள சதுரத் தாயங்களின், $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ எனக் காட்டுக.

4. i. $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ எனக் காட்டுவதற்கு $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஐயும் $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ஐயும் பயன்படுத்துக.

ii. A, B ஆகியன $AB = BA$ ஆகவுள்ள சதுரத் தாயங்களெனின்,

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ எனக் காட்டுக.

2.5 ஒரு தாயத்தின் நிலைமாற்று

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

ஒரு தாயம் A இன் நிலைமாற்று A^T இனால் வகைகுறிக்கப்படும் அதே வேளை A இன் நிரைகளையும் நிரல்களையும் இடைமாற்றுவதன் மூலம் A^T பெறப்படும்.

குறிப்பு :
$m \times n$ வரிசையில் உள்ள ஒரு தாயத்தின் நிலைமாற்றாகிய A^T இன் வரிசை $n \times m$ ஆகும்.

உதாரணம் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு :
மேலே வரையறுத்த சமச்சீர்த் தாயத்தையும் ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயத்தையும் இப்போது நாம் வேறு விதமாகப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம். ஒரு சதுரத் தாயம் A இற்கு

i. $A = A^T$ ஆக இருந்தால் மாத்திரம் A சமச்சீரானது.

ii. $A = -A^T$ ஆக இருந்தால் மாத்திரம் A ஓராயச் சமச்சீரானது.

உதாரணம் :

கீழே தரப்பட்டுள்ள i, ii, iii ஆகியவற்றின் உண்மையை $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ஆகிய தாயங்களுக்கு உறுதிப்படுத்துக.

i. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

ii. ஓர் எண்ணி k இற்கு $(kA)^T = kA^T$.

iii. $(A^T)^T = A$

(மேலே காட்டப்பட்டுள்ள i, ii, iii ஆகிய இயல்புகள் எத்தாயத்திற்கும் உண்மையாக இருக்கின்ற போதிலும் 2017 ஆம் ஆண்டிற்காகப் புதிதாக அறிமுகஞ்செய்யப்பட்ட பாடத்திட்டத்தில் இவ்வியல்புகள் இடம்பெறவில்லை.)

தீர்வு:

i. A, B ஆகிய இரு தாயங்களினதும் கூட்டுத்தொகை

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$(A + B)$ இன் நிலைமாற்றை எடுக்கும்போது

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

ஆகையால் $(A + B)^T$, $A^T + B^T$ ஆகிய இரு தாயங்களும் சமம்.

அதாவது $(A + B)^T = A^T + B^T$.

ii. k ஓர் எண்ணியெனின்,

$$kA = k\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot 1 & k(-2) \\ k \cdot 0 & k \cdot 3 \\ k(-1) & k \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -2k \\ 0 & 3k \\ -k & 4k \end{bmatrix}$$

இப்போது தாயம் kA இன் நிலைமாற்றை எடுக்கும்போது

$$(kA)^T = \begin{bmatrix} k & -2k \\ 0 & 3k \\ -k & 4k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k & 0 & -k \\ -2k & 3k & 4k \end{bmatrix}.$$

எண்ணி k இனால் இன் A நிலைமாற்றைப் பெருக்கும்போது

$kA^T = k\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k \\ -2k & 3k & 4k \end{bmatrix}$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது $(kA)^T$, kA^T ஆகிய தாயங்கள் சமமெனத் தெரிகின்றது. ஆகவே ஓர் எண்ணி k இற்கு $(kA)^T = kA^T$ எனக் கிடைக்கும்.

iii. தாயம் $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ இன் நிலைமாற்றை எடுக்கும்போது

$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. இது தாயம் A ஆகும்.

ஆகவே $(A^T)^T = A$ எனப் பெறப்படும்.

உதாரணம் :

$(AB)^T = B^T A^T$ இன் உண்மையை $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ஆகிய தாயங்களுக்கு உறுதிப்படுத்துக.

தீர்வு :

முதலில் பெருக்கம் AB ஐக் காண்போம். தாயப் பெருக்கம் இப்போது எமக்கு எளிதான ஒரு பயிற்சி ஆகையால்

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைப்பதாகத் தெரிகின்றது.

அப்போது $(AB)^T = \begin{bmatrix} -2 & 16 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$.

இப்போது நாம் நிறுவலுக்குத் தேவையான B^T இனதும் A^T இனதும் பெருக்கத்தைப் பெறுவோம்.

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

மேற்குறித்த சுருக்கல்களின் மூலம் $(AB)^T = B^T A^T$ எனப் பெறப்படுகின்றது.

உதாரணம் :

A யாதாயினும் ஒரு தாயமாகும்.

i. பெருக்கம் AA^T வரையறுக்கப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.
ii. பெருக்கத்தை வரையறுக்கும் X, Y என்னும் எவையேனும் இரு தாயங்களுக்குப் பேறு $(XY)^T = Y^T X^T$ உம் யாதாயினும் ஒரு தாயம் X இற்குப் பேறு $(X^T)^T = X$ உம் உண்மையெனத் தரப்படும்போது தாயம் AA^T ஒரு சமச்சீர்த் தாயமெனக் காட்டுக.

தீர்வு :

i. A இன் வரிசை $n \times m$ எனின், A^T இன் வரிசை $m \times n$ ஆகும். A இன் நிரல் எண்ணிக்கை A^T இன் நிரை எண்ணிக்கைக்குச் சமம். ஆகவே பெருக்கம் AA^T வரையறுக்கப்படுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

ii. AA^T ஆனது வரிசை $n \times n$ இல் உள்ள ஒரு சதுரத் தாயமாகும். AA^T சமச்சீரான தெனக் காட்டுவதற்கு அதன் நிலைமாற்று அத்தாயத்திற்குச் சமமெனக் காட்ட வேண்டும்.

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T \text{ (மேலே தரப்பட்ட } (XY)^T = Y^T X^T \text{ இன் மூலம்)}$$

$$= AA^T \text{ (மேலே தரப்பட்ட } (X^T)^T = X \text{ இன் மூலம் } (A^T)^T = A)$$

அதாவது AA^T சமச்சீரானதாகும்.

பயிற்சி 2.5

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க. (இங்கு A, B ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்கள் என்பதை நாம் எளிதாகக் காட்டலாம்.)
அப்போது

i. $(AB + BA)$ சமச்சீரானது
ii. $(AB - BA)$ ஓராயச் சமச்சீரானது

எனக் காட்டுக.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி $(AB)^T = B^T A^T$ ஐ வாய்ப்புப் பார்க்க.

2.6 ஒரு சதுரத் தாயத்தின் நேர் நிறையெண் சுட்டிகள்

ஒரு சதுரத் தாயம் A இன் நேர் நிறையெண் சுட்டிகளைப் பின்வருமாறும் வரையறுக்கலாம்.

$$
\begin{aligned}
A^1 &= A,\\
A^2 &= AA,\\
A^3 &= AA^2,\\
A^4 &= AA^3,\\
&\vdots\\
A^{n+1} &= AA^n,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

குறிப்பு :
தாயப் பெருக்கத்தின் சேர்த்திக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி $A^3 = A^2A$, $A^4 = A^3A$, ... என்றவாறு காட்டலாம்.

பயிற்சி 2.6

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க. இந்த A சமச்சீரானதெனத் தெரிகின்றது. A^2, A^3, A^4 ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்களெனக் காட்டுக.

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க. இந்த P ஓராயச் சமச்சீரானதெனத் தெரிகின்றது.

i. P^2, P^4, P^6 ஆகியன சமச்சீரானவை

ii. P^3, P^5 ஆகியன ஓராயச் சமச்சீரானவை

எனக் காட்டுக.

[3] ஓர் 2×2 தாயத்தின் நேர்மாறு

ஒரு சதுரத் தாயம் A இற்கு

$$AB = BA = I$$

ஆக இருக்குமாறு ஒரு தாயம் B உளதாக இருப்பின், அத்தாயம் B ஆனது தாயம் A இன் நேர்மாறு எனப்படும்.

மேலும் தாயம் B ஆனது தாயம் A இன் நேர்மாறு எனின், தாயம் A ஆனது தாயம் B இன் நேர்மாறாகும்.

குறிப்பு : ஒரு தாயத்தின் நேர்மாறு உளதாக இருக்குமெனின், அது ஒரு தனியானதாகும். ஆகவே அது A^{-1} எனக் குறிப்பிடப்படும்.

A^{-1} உளதாக இருப்பின், அப்போது $\boxed{A^{-1}A = I = AA^{-1}}$

உதாரணம் 1

தாயம் $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு $B=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

AB, BA ஆகியவற்றின் பெருக்கங்களைக் கருதுவோம்.

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 7(-1) & 4(-7) + 7 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 2(-1) & 1(-7) + 2 \cdot 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

அத்துடன்

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + (-7)1 & 2 \cdot 7 + (-7)2 \\ (-1)4 + 4 \cdot 1 & (-1)7 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

அதாவது $AB = I$, $BA = I$ எனத் தெரிகின்றது. ஆகவே வரைவிலக்கணத்திற்கேற்பத் தாயம் B ஆனது தாயம் A இன் நேர்மாறாகும்.

அதாவது $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

தாயம் $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ இற்கு நேர்மாறு தாயம் இருக்கின்றதெனத் தரப்பட்டிருப்பின், அதனைக் காண்க.

தீர்வு:

தரப்பட்டுள்ள தாயத்தின் நேர்மாறு $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என எடுக்கும்போது

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

அப்போது $\begin{bmatrix} 5c & 5d \\ 4a & 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

இதற்கேற்ப $5c = 1,\ 5d = 0,\ 4a = 0,\ 4b = 1$

அதாவது $c = \frac{1}{5},\ d = 0,\ a = 0,\ b = \frac{1}{4}$

என $a,\ b,\ c,\ d$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் கிடைக்கும்.

இப்போது நாம் இப்பெறுமானங்கள் உள்ள தாயம் தரப்பட்டுள்ள தாயத்தின் நேர்மாறு என்பதை வாய்ப்புப் பார்ப்போம்.

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஆகையால்

$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$ ஆனது தரப்பட்ட தாயம் $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறாகும்.

3.1 ஓர் 2×2 தாயத்தின் நேர்மாறு உளதாக இருப்பின், அந்நேர்மாறைக் காணல்

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பின், அதனை $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ என

எடுக்கும்போது

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

அப்போது $\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

$\Rightarrow \quad ap + br = 1 \qquad aq + bs = 0$

$\qquad cp + dr = 0 \qquad cq + ds = 1$

இவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது

$$p = \frac{d}{ad - bc}, \quad q = \frac{-b}{ad - bc}, \quad r = \frac{-c}{ad - bc}, \quad s = \frac{a}{ad - bc}$$

(நேர்மாறு உளதாக இருக்கின்றதெனத் தரப்பட்டிருந்தால் p, q, r, s ஆகியன மெய்யெண்களாக இருக்க வேண்டும். அதற்கு $ab - bc \neq 0$ ஆக இருக்க வேண்டுமெனத் தெரிகின்றது.)

அதாவது $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

இப்போது $AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-cd & -cb+ad \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

அவ்வாறே

$$BA = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ஆகவே $ad - bc \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது $B = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ஆனது தாயம் $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறாகும்.

அதாவது, $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$

உதாரணம் 3

தாயம் $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பதைத் துணிக.

தீர்வு:

தரப்பட்டுள்ள தாயத்திற்கு நேர்மாறு உளதாக இருப்பின், அந்நேர்மாறை $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என எடுக்கும்போது

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அப்போது $\begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 6a+9c & 6b+9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப $2a + 3c = 1$ உம் $6a + 9c = 0$ உம் ஆகும்.

அதாவது $2a + 3c = 1$, $2a + 3c = 0$.

ஆனால் $2a + 3c$ ஆனது ஒரே தடவையில் 1, 0 ஆக இருக்கமுடியாது.

ஆகவே $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என ஒரு தாயம் $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ உளதாக இருப்பதில்லை.

இதற்கேற்பத் தாயம் $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லை.

முக்கியம் :
நீங்கள் 2×2 தாயங்களின் நேர்மாறு பற்றி மாத்திரம் கற்க வேண்டும்.

பயிற்சி 3.1

கீழே தரப்பட்டுள்ள தாயங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் நேர்மாறு உளதாக இருப்பின், அதனைக் கணிக்க.

1. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

3.2 2×2 தாயங்களுக்கான துணிகோவைகள்

எந்தவொரு சதுரத் தாயம் தொடர்பாகவும் துணிகோவை எனப்படும் ஒரு பெறுமானம் உண்டு. ஒரு சதுரத் தாயம் A இற்கு அது $det\ A$ அல்லது $|A|$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ இற்கு $det\ A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ஆகும்.

முக்கியம் :
நீங்கள் 2×2 தாயங்களின் துணிகோவைகளை மாத்திரம் கற்க வேண்டும்.

உதாரணம் 1

தரப்பட்டுள்ள துணிகோவைகளின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ t & t^2 \end{vmatrix}$

விடை (i) 13 (ii) $2t\,(2t-1)$

உதாரணம் 2

k ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்போது $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ எனின், $|B| = k|A|$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$$|B| = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = (ka)d - (kb)c = k(ad - bc) = k|A|.$$

கவனிக்க! $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ உம் $\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ உம் ஆகும்.

துணிகோவைகள் தாயங்கள்

மேலும் $\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = (ka)(kd) - (kb)(kc) = k^2(ad - bc) = k^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

உதாரணம் 3

வரிசை 2×2 ஆகவுள்ள ஒரு தாயம் A இன் எந்த ஒரு நிரையையும் பூச்சியமல்லாத பெருக்கி மாறிலியினாற் மற்றைய நிரையுடன் கூட்டும்போது தாயம் B கிடைக்கும். $det\, A = det\, B$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். முதலாம் நிரையை $k \neq 0$ இனாற் பெருக்கி

இரண்டாம் நிரையுடன் கூட்டும்போது $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது $det\, B = a(d + kb) - b(c + ka) = ad - bc = det\, A$ ஆகும்.

உதாரணம் 4

வரிசை 2×2 ஆன யாதாயினும் ஒரு தாயம் A ஐப் பயன்படுத்தி $|A| = |A^T|$ எனக் காட்டுக. (அதாவது, ஒரு தாயத்தின் எல்லா நிரைகளையும் நிரல்களையும் இடைமாற்றும்போது துணிகோவையின் பெறுமானம் மாறமாட்டாது.)

தீர்வு:

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனின், $A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ஆகும். அப்போது $|A| = ad - bc = |A^T|$.

குறிப்பு :

ஒரு தாயம் $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கும்போது

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ஆகுமென 3.1 இல் பார்த்தோம்.

அப்போது $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அதாவது தாயம் $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கும்போது $|A| \neq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும் எனவும் $|A| \neq 0$ ஆக இருக்கும்போது தாயம் $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கும் எனவும் தோன்றுகின்றது.

உதாரணம் 5

தாயம் $P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உள்ளதாக இருக்கின்றதா எனத் துணிக.

தீர்வு:

$|P| = 14$ ஆகும். $|P| \neq 0$ ஆகையால், தாயம் P இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கின்றது.

உதாரணம் 6

தாயம் $Q = \begin{bmatrix} 2b & -4c \\ b & -2c \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கின்றதா எனத் துணிக;

இங்கு b, c ஆகியன மெய்யெண்கள்.

தீர்வு:

$|Q| = (2b)(-2c) - (b)(-4c) = 0$ ஆகும். $|Q| = 0$ ஆகையால், தாயம் Q இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லை.

உதாரணம் 7

தாயம் $\begin{bmatrix} 3 & a \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ இன் துணிகோவையின் பெறுமானம் 8 எனின், a இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

தீர்வு:

$$\begin{vmatrix} 3 & a \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 7a = 8 \Rightarrow a = 1.$$

பயிற்சி 3.2

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள துணிகோவைகளின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

i. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} x+2 & 4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ எனின், $|B| = -|A|$ எனக் காட்டுக.

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ எனின், $|A| = 0$ எனக் காட்டுக.

4. $|AB| = 1$ ஆக இருக்கின்ற போதிலும் $AB \neq 1$ ஆகவுள்ள வரிசை 2×2 இல் அமைந்து A, B என்னும் சதுரத் தாயங்களுக்கு ஒவ்வோர் உதாரணம் வீதம் எழுதுக.

5. $\begin{vmatrix} t+2 & 4t \\ 2 & t+2 \end{vmatrix} = 0$ ஐத் தீர்ப்பதன் மூலம் t இன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

A, B ஆகியன சதுரத் தாயங்களாக இருக்கும்போது $det\,(AB) = det\,A \times det\,B$ எனக் கொண்டு பின்வரும் பிரசினங்களைத் தீர்க்க.

6. ஒரு சதுரத் தாயம் A இற்கு $A^2 = A$ எனின், $|A| = 0$ அல்லது $|A| = 1$ எனக் காட்டுக.

7. தாயம் A இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்குமெனின், $|A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$ எனக் காட்டுக.

8. தாயம் A ஆனது $|A| = 1$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள வரிசை 2×2 தாயமாகும். $B = 2A$, $C = 4B^{-1}$ எனின், $|C| = 4$ எனக் காட்டுக.

9. வரிசை 2×2 ஆகவுள்ள தாயம் A ஆனது $A^T = A^{-1}$ ஆக இருக்குமெனின், A இன் துணிகோவையின் பெறுமானம் 1 ஆகவோ, -1 ஆகவோ இருக்க வேண்டுமெனக் காட்டுக.

(சாடை: உதாரணம் 4 இன் பேறைப் பயன்படுத்துக.)

[[4]] தாயங்களைப் பயன்படுத்தி இரு மாறிகள் உள்ள ஓர் ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடியைத் தீர்த்தல்

4.1 இரு மாறிகள் உள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்

a, b, c ஆகியன மாறிலிகளாகவும் a, b ஆகியன ஒரே தடவையில் பூச்சியமாக அமையாமலும் உள்ள ஓர்

$$ax + by = c$$

வடிவச் சமன்பாட்டின் வரைபு xy – தளத்தில் ஒரு நேர்கோடாகும். இத்தகைய சமன்பாடு x, y ஆகிய மாறிகளின் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு எனப்படும்.

$$x + y = 3$$

$$2x - 6y = 0$$

$$5x = 11$$

ஆகியன இரு மாறிகள் உள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளுக்கு உதாரணங்களாகும். ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளில் மாறிகளின் வலுக்களோ, மாறிகளின் மூலங்களோ, மாறிகளின் பெருக்கங்களோ இருப்பதில்லை.

$$x^2 + 4y = 3$$

$$3x + \sqrt{y} = 4$$

$$xy = 4$$

ஆகியன ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளல்ல. x^2, $\sqrt{y}, xy$ ஆகிய உறுப்புகள் காரணமாக இச்சமன்பாடுகளின் ஏகபரிமாணவியல்பு அற்றுப் போகின்றது.

4.2 இரு மாறிகள் உள்ள ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடி

ஓர் உதாரணமாக

$x - y = 4$

$x + 3y = 8$

ஆகியன இரு மாறிகள் உள்ள ஓர் ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடியாகும்.

பொதுவாக ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடியை

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

என வகைகுறிக்கலாம்.

4.3 இரு மாறிகள் உள்ள ஓர் ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுகள்

சமன்பாட்டுச் சோடியைத் திருப்தியாக்கும் x, y பெறுமானம் தீர்வு எனப்படும்.

உதாரணம்:

$x - y = 4$

$x + 3y = 8$

என்னும் சமன்பாட்டுச் சோடியில்

i. $x = 5, y = 1$ ஒரு தீர்வு எனவும்

ii. $x = 9, y = 5$ ஒரு தீர்வன்று எனவும்

காட்டுக.

தீர்வு:

i. $x = 5, y = 1$ ஆக இருக்கும்போது

$x - y$

$= 5 - 1$

$= 4.$

$\therefore$ சமன்பாடு $x - y = 4$ திருப்தியாக்கப்படுகின்றது.

$x + 3y$

$= 5 + 3 \times 1$

$= 8.$

$\therefore$ சமன்பாடு $x + 3y = 8$ உம் திருப்தியாக்கப்படுகின்றது.

ஆகவே $x = 5, y = 1$ ஆகியன தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுச் சோடியின் ஒரு தீர்வாகும்.

ii. $x = 9, y = 5$ ஆக இருக்கும்போது

$x - y$

$= 9 - 5$

$= 4$

$\therefore$ சமன்பாடு $x - y = 4$ திருப்தியாக்கப்படுகின்றது.

$x + 3y$

$= 9 + 3 \times 5$

$= 24 \neq 8$

$\therefore$ சமன்பாடு $x + 3y = 8$ திருப்தியாக்கப்படுவதில்லை.

ஆகவே $x = 9, y = 5$ ஆகியன தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுச் சோடியின் ஒரு தீர்வன்று.

4.4 கேத்திரகணித வரைவிலக்கணம்

இரு மாறிகள் உள்ள ஓர் ஏகபரிமாண ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடியைக் கருதுவோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad L_1$$

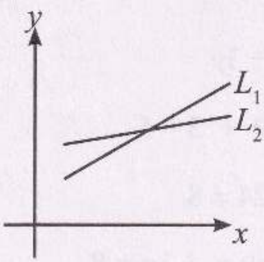
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad L_2$$

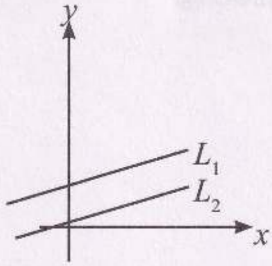
இந்த L_1, L_2 ஆகியன நேர்கோடுகளாகும். நாம் கற்ற அடிப்படைக் கேத்திரகணிதத் திற்கேற்ப பின்வரும் மூன்று சந்தர்ப்பங்கள் மாத்திரம் இருப்பதாகத் தெரிகின்றது.

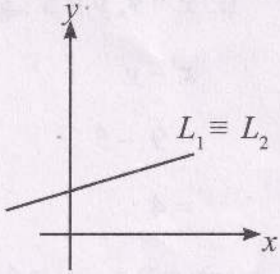
i. L_1, L_2 ஆகிய கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டுகின்றன (சந்தர்ப்பம் i ஐப் பார்க்க)

ii. L_1, L_2 ஆகிய கோடுகள் சமாந்தரமானவை. ஆகவே அக்கோடுகள் இடைவெட்டுவதில்லை. (சந்தர்ப்பம் ii ஐப் பார்க்க).

iii. L_1, L_2 ஆகிய கோடுகள் பொருந்துகின்றன (சந்தர்ப்பம் iii ஐப் பார்க்க.)







சந்தர்ப்பம் i	சந்தர்ப்பம் ii	சந்தர்ப்பம் iii
ஒரு பொதுப் புள்ளி மாத்திரம் உண்டு. ஒரு தீர்வு (ஒருதனித் தீர்வு) மாத்திரம் உண்டு.	சமாந்தரக் கோடு களாகும். பொதுப் புள்ளிகள் இல்லை. தீர்வுகள் இல்லை.	கோடுகள் பொருந்து கின்றன. பொதுப் புள்ளிகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் உள்ளன. தீர்வுகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

படித்திறன்களைக் கருதும்போது

படித்திறன்கள் வேறுபட்டவை	படித்திறன்கள் சமம் எனினும் y –வெட்டுத் துண்டுகள் வேறுபட் டவை	படித்திறன்களும் y – வெட்டுத்துண்டு களும் சமம்.

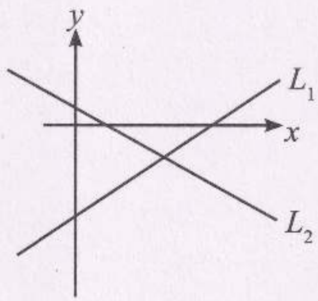
உரு 1

உதாரணம் 1 :

கீழே தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகளை வரைபுகளைக் கொண்டு ஆராய்க.

$x - 2y = 8$

$5x + 9y = 2$



முதலாம் சமன்பாட்டினை -5 இனாற் பெருக்கி இரண்டாம் சமன்பாட்டுடன் கூட்டும்போது

$19y = -38$. இதிலிருந்து $y = -2$ அதற்கேற்ப $x = 4$.

ஆகவே இவ்வுதாரணம் மேற்குறித்த சந்தர்ப்பம் i இற்கு உரியதாகும்.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டுச் சோடிக்கு

$x = 4,\ y = -2;$

ஓர் ஒருதனித் தீர்வு இருப்பதாகத் தெரிகின்றது.

குறிப்பு :
சமன்பாட்டுச் சோடியைக் கேத்திரகணித முறையாக வகைகுறிக்கும்போது படித் திறன்கள் சமமற்றன ஆகையால் மேற்குறித்த சந்தர்ப்பம் i இற்கு உரியன எனவும் ஆகவே ஒரு தீர்வு மாத்திரம் (ஓர் ஒருதனித் தீர்வு) இருக்க வேண்டும் எனவும் அறியப்படுகின்றது.

இப்போது நாம் வேறோர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 2

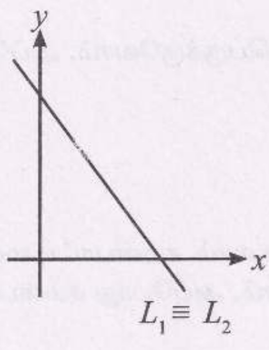
$x + y = 3$

$2x + 2y = 6$

தீர்வு

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் சர்வசமமாகும்

$L_1 \equiv L_2$



$L_1 \equiv L_2$ ஆகையால் இவ்வுதாரணம் மேற்குறித்த சந்தர்ப்பம் iii இற்கு உரியதாகும்.

பொதுப் புள்ளிகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் இருக்கின்றன. ஆகவே தீர்வுகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

$x = 1,\ y = 2$ எனப் பிரதியிடும்போது இச்சமன்பாட்டுச் சோடி திருப்திசெய்யப்படுகின்றமையால் $x = 1,\ y = 2$ இங்கு ஒரு தீர்வாகும்.

$x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{10}{3}$ இன் மூலமும் இச்சமன்பாட்டுச் சோடி திருப்தியாக்கப்படுகின்றது. அத்தகைய வேறு பல தீர்வுகளும் உள்ளன.

$x = 5,\ y = -2$

$x = -\frac{1}{4},\ y = \frac{13}{4}$

$x = -2,\ y = 5$ ஆகியன தீர்வுகளாகும்.

தரப்பட்ட இரு கோடுகளினதும் படித்திறன்களும் வெட்டுத்துண்டுகளும் சமம். அப்போது $L_1 \equiv L_2$.

இவ்விரு கோடுகளினதும் படித்திறன்களும் y - வெட்டுத்துண்டுகளும் சமம். அப்போது கோடுகள் பொருந்தும். ஆகவே தீர்வுகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் இருக்கின்றன.

உதாரணம் 3

$x + y = 3$

$2x + 2y = 4$

தீர்வு :

இரண்டாம் சமன்பாட்டினை $\frac{1}{2}$ இனாற் பெருக்குவோம். அப்போது

$x + y = 3$

$x + y = 2$

எனக் கிடைக்கும். இப்போது நாம் முதலாம் சமன்பாட்டினை -1 இனாற் பெருக்கி இரண்டாம் சமன்பாட்டுடன் கூட்டுவோம். அப்போது சமன்பாட்டுச் சோடி

$x + y = 3$

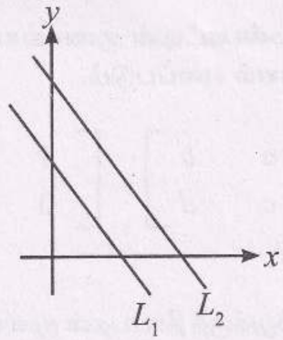
$0 = -1$

ஆகும். எனினும் 0 உம் -1 உம் சமமற்றன ஆகையால் இவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளைத் திருப்தியாக்கும் x, y பெறுமானங்கள் இல்லையெனத் தெரிகின்றது.

அதாவது, இவ்வொருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடிக்குத் தீர்வுகள் இல்லையென முடிபுசெய்யலாம்.

வரைபுகளைக் கொண்டு நாம் மேற்குறித்த முடிபுக்கு எளிதாக வரலாம்.

இவ்விரு கோடுகளும் சமாந்தரமாகும். ஆகவே தீர்வுகள் உளதாக இருப்பதில்லை.



இவ்விரு கோடுகளும் சமாந்தரமாகும். ஆகவே

- இத்தொகுதி தீர்வுகளைக் கொண்டிருப்பதில்லை.
- மேற்குறித்த சந்தர்ப்பம் ii இற்கு உரியது.

4.5 இரு மாறிகள் உள்ள ஒருங்கமை ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடியைத் தாயங்களைப் பயன்படுத்தித் தீர்த்தல்

தாயங்களைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தலைத் தெரிந்தெடுப்பதற்கு நாம் மேற்குறித்த பகுதியில் ஆராய்ந்த உதாரணத்தையே தெரிந்தெடுப்போம்.

உதாரணம் 1

$$x - 2y = 8$$

$$5x + 9y = 2$$

தீர்வு:

மேற்குறித்த சமன்பாடுகளைத் தாயங்கள் $\begin{bmatrix} x & - & 2y \\ 5x & + & 9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ உடன் ஒரு சமன்பாடாக எழுதலாம்.

இடப் பக்கத்தில் உள்ள இரு தாயங்களையும் ஒரு பெருக்கமாக எழுதும்போது

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. **இது தாயங்கள் உள்ள ஒரு சமன்பாடாகும்.**

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ எனத் தெரிந்தெடுத்தால்,

மேற்குறித்த தாயச் சமன்பாட்டினை $AX = C$ என எழுதலாம்.

இங்கு A ஆனது சமன்பாட்டின் குணகங்களினால் ஆக்கப்பட்ட தாயமாகும். ஆகவே A ஆனது **குணகத் தாயம்** எனப்படும்.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a, b, c, d ஆகியவற்றுக்குத் தீர்ப்பதன் மூலம் இத்தாயம் A இற்கு நேர்மாறு இருக்கின்றது

எனவும் அந்நேர்மாறு

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{19} & \frac{2}{19} \\ -\frac{5}{19} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}$ எனவும் கிடைக்கும்.

இப்போது சமன்பாடு $AX = C$ இன் இரு பக்கங்களையும் A^{-1} இனாற் பெருக்கும்போது $A^{-1}(AX) = A^{-1}C$ ஆகும்.

சேர்த்திக் கொள்கையின் மூலம் (2.4.5) $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = X$ எனப் பெறப்படும்.

அதாவது, சமன்பாட்டின் இடப் பக்கம் X இற்குச் சமம்.

அப்போது $X = A^{-1}C$ எனப் பெறப்படும். அதாவது

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{9}{19} & \frac{2}{19} \\ -\frac{5}{19} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}}_{A^{-1}}\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ ஆகையால் $x = 4,\ y = -2$ என ஒரு தீர்வு மாத்திரம் உண்டெனத் தாயங்களைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இப்போது கற்ற தாயங்களைப் பயன்படுத்தி தீர்வுகளைக் காணல் பற்றிக் கருதும்போது குணகத் தாயம் A இற்கு இச்சந்தர்ப்பத்தில் நேர்மாறு இருப்பதாகத் தெரிகின்றது. அப்போது சமன்பாட்டுச் சோடிக்கு ஒரு தீர்வு மாத்திரம், அதாவது ஓர் ஒருதனித் தீர்வு கிடைக்கும் எனவும் அந்த ஒருதனித் தீர்வு $A^{-1}C$ மூலம் கிடைக்கும் எனவும் தெரிகின்றது.

மேற்குறித்த உதாரணத்திலிருந்து பெற்ற அறிவுக்கேற்ப ஒரு பொது வகை பற்றி ஆராய்வோம்.

4.5.1 குணகத் தாயத்தின் நேர்மாறு உள்ளதாக இருக்குபோது ஒருதனித் தீர்வு

பொதுவாகக் குணகத் தாயம் A இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கும்போது அதனைக் கருதுவதன் மூலம் தீர்வைக் காண்போம்.

இரு மாறிகளைக் கொண்ட இரு ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

எனக் கொள்வோம்.

நிரல் தாயத்தைப் பயன்படுத்தி இதனை

$$\begin{bmatrix} a_1x & + & b_1y \\ a_2x & + & b_2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

என எழுதலாம்.

இடப் பக்கத்தில் உள்ள நிரல் தாயத்தை இப்போது ஒரு தாயப் பெருக்கமாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$. இது தாயங்கள் உள்ள சமன்பாடாகும்.

மேற்குறித்த தாயச் சமன்பாட்டினை $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

ஆக இருக்கும்போது $AX = C$ என எழுதலாம்.

A நேர்மாறு உள்ள ஒரு தாயமெனின், $AX = C$ இன் இரு பக்கங்களையும் A இன் நேர்மாறினால் பெருக்கும்போது

$A^{-1}(AX) = A^{-1}C$

அதாவது $(A^{-1}A)X = A^{-1}C$ (2.4.5 இல் உள்ள சேர்த்திக் கொள்கைக்கேற்ப)

$A^{-1}A = I$, $IX = X$ ஆகையால்

$X = A^{-1}C$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ இலிருந்து நாம் பெறவேண்டிய தீர்வு, அதாவது ஒருதனித் தீர்வு

(x, y) ஆகும்.

அதாவது $X = A^{-1}C$ இலிருந்து தீர்வு பெறப்படுகின்றது.

ஆகவே A நேர்மாறு உள்ள ஒரு தாயமெனின், $X = A^{-1}C$ இலிருந்து ஒருதனித் தீர்வு கிடைக்கின்றது.

4.5.2 குணகத் தாயத்தின் நேர்மாறு உளதாக இராதபோது தீர்த்தல்

4.5.2.1 தீர்வுகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் உளதாக இருத்தல்

இப்போது நாம் பகுதி 4.4 இல் ஆராய்ந்த இரண்டாம் உதாரணத்திற்குத் தாயங்களைப் பயன்படுத்துவோம்.

உதாரணம் 2

$x + y = 3$

$2x + 2y = 6$

தீர்வு:

தரப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளை நிரல் தாயமாக $\begin{bmatrix} x & + & y \\ 2x & + & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம்.

அதனை ஒத்த தாயச் சமன்பாடு $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இங்கு குணகத் தாயம் $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ இற்கு நேர்மாறு இருக்குமெனின்,

அந்நேர்மாறை $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என எடுக்கும்போது $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ஆகும். அப்போது $\begin{bmatrix} a + c & b + d \\ 2a + 2c & 2b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப $a + c = 1$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $2a + 2c = 0$ ஆகும்.

அதாவது $a + c = 1$ உம் $a + c = 0$ உம் ஆகும். எனினும் $a + c$ ஆனது ஒரே தடவையில் 1 ஆகவும் 0 ஆகவும் இருக்க முடியாது.

அதாவது குணகத் தாயம் A இற்கு நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லையெனத் தெரிகின்றது.

குணகத் தாயம் $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ இற்கு ஒரு நேர்மாறு உளதாக இருக்காவிட்டாலும்

இவ்வொருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் உளதாக இருக்குமென (பகுதி 4.4 இல் உதாரணம் 2 இலிருந்து) தெரிகின்றது.

தரப்பட்ட சமன்பாட்டுச் சோடியில் வரைபுகள் பொருந்துகின்றமையால் பொதுப் புள்ளிகளின் ஒரு முடிவில் எண்ணிக்கை, அதாவது தீர்வுகள் ஒரு முடிவில் எண்ணிக்கையில் உளதாக இருக்கின்றமை மேலும் தெளிவாகும்.

முக்கியம்

குணகத் தாயம் A இற்கு ஒரு நேர்மாறு உளதாக இராவிட்டாலும் ஒருங்கமை சமன்பாடு களுக்குத் தீர்வுகளின் ஒரு முடிவில் எண்ணிக்கை உளதாக இருக்கலாமென உதாரணம்
$x + y = 3$
$2x + 2y = 2$ இலிருந்து தெரிகின்றது.

இப்போது நாம் இதிலிருந்து வேறுபட்ட ஓர் உதாரணத்தைப் பார்ப்போம். குணகத் தாயத்திற்கு நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லை. ஒருங்கமை சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குத் தீர்வுகளும் உளதாக இருப்பதில்லை.

4.5.2.2 தீர்வுகள் உளதாக இராமை

கீழே தரப்பட்டுள்ள இரு ஒருங்கமை சமன்பாடுகளினதும் குணகத் தாயம் மேலே உதாரணம் 2 இல் உள்ள குணகத் தாயமே ஆகும். அதில் நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லை. எனினும் உதாரணம் 2 இல் நேர்கோடுகள் பொருந்துகின்றமையால், தீர்வுகளின் முடிவில் எண்ணிக்கை உளதாக இருக்கின்றது. அதிலிருந்து வேறுபட்ட விதத்தில், உதாரணம் 3 இல் நேர்கோடுகள் சமாந்தரமாகையால், தீர்வுகள் உளதாக இருப்பதில்லையெனத் தெரிகின்றது.

உதாரணம் 3

$x + y = 3$

$2x + 2y = 4$ இற்குரிய தாயச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ ஆகும்.

இங்கு குணகத் தாயம் $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ஆனது உதாரணம் 2 இல் உள்ள அதே குணகத் தாயமாகும். அதற்கு ஒரு நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லை என நாம் கண்டோம்.

$y-$ அச்சை வேறுபடும் இரு தானங்களில் வெட்டுகின்றமையால் இச்சமாந்தரக் கோடுகளுக்குப் பொதுப் புள்ளிகள் இருப்பதில்லை. அதாவது சமன்பாட்டுச் சோடிக்குத் தீர்வுகள் இல்லை.

மேலே உதாரணம் 2 ஐயும் உதாரணம் 3 ஐயும் பொழிப்பாக்கினால் குணகத் தாயத்திற்கு ஒரு நிலைமாறு உளதாக இராதபோதிலும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் உளதாக இருக்கலாம் அல்லது உளதாக இல்லாதிருக்கலாம் எனத் தெரிகின்றது.

பயிற்சி 4.5

தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளில் எவற்றுக்கு ஒருதனித் தீர்வு உளதாக இருக்கின்றது எனவும் தீர்வுகளின் ஒரு முடிவில் எண்ணிக்கை உளதாக இருக்கின்றது எனவும் தீர்வுகள் உளதாக இருப்பதில்லை எனவும் காட்டுக. ஒருதனித் தீர்வுகள் உளதாக இருக்கும் சமன்பாட்டுச் சோடியைத் தீர்ப்பதற்குத் தாயங்களைப் பயன்படுத்துக.

1. $8x + 7y = 3$

$5x + 6y = -1$

2. $6x + 7y = 2$

$12x + 14y = -1$

3. $x - y = 5$

$2x + y = 4$

4. $-x + 2y = 4$

$5x - 10y = -20$

[5] பயிற்சிகளும் தீர்வுகளும்

5.1 மீட்டற் பயிற்சிகள்

பின்வரும் வகைகளுக்கு x, y ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

1. $\begin{bmatrix} 6x \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 5y \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} x-6 & 3 \\ y-7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

3 தொடக்கம் **11** வரையுள்ள கணிப்புகளுக்குப் பின்வரும் தாயங்களைப் பயன்படுத்துக.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. $A + B$ **4.** $B + A$ **5.** $C + O$

6. $4B$ **7.** $B + O$ **8.** $A - B$

9. $B - A$ **10.** AB **11.** BA

12 தொடக்கம் **20** வரையுள்ள கணிப்புகளுக்குப் பின்வரும் தாயங்களைப் பயன்படுத்துக.

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & 11 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

பின்வரும் தாயங்களை வரையறுக்கும் சந்தர்ப்பங்களுக்குப் பெறுமானங் கணிக்க.

12. $X - Y$ **13.** $Y - X$ **14.** $X^T + Y^T$ **15.** $(Y^T)^T$

16. $Y^T C$ **17.** $X - \frac{1}{2}Y$ **18.** $X + 3C$ **19.** $C - C^T$

(தாயம் $C - C^T$ இல் மூலைவிட்டத்தில் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியம் என்பதை அவதானிக்க.)

20. $X + 2Y - Z = 0$ ஆக இருக்குமாறு தாயம் Z ஐப் பெறுக.

21. பின்வரும் தாயச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ எனின்,

(i) $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

(ii) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2B + B^2$

எனக் காட்டுக.

23. A, B ஆகியன $AB = BA$ ஆகவுள்ள சதுரத் தாயங்களெனின்,

(i) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(ii) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(iii) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

(iv) $(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 3AB^3 + B^4$

எனக் காட்டுக.

24. தரப்பட்டுள்ள ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குச் சமவலுத் தாயச் சமன்பாட்டை எழுதிக் குணகத் தாயத்தின் நேர்மாறைப் பயன்படுத்துக.

(i) $3x + 4y = 2$
$5x + 7y = 1$

(ii) $2x + 3y = 5$
$x + 7y = 8$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க.

(i) A இல் நேர்மாறு உளதாக இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

(ii) A^{-1} ஐக் காண்க.

(iii) இதிலிருந்து $\begin{matrix} 3x + 2y = 2 \\ 4x + 3y = 6 \end{matrix}$ ஐத் தீர்க்க.

26. தாயங்களைப் பயன்படுத்தி x, y ஆகியவற்றை u, v ஆகியவற்றின் சார்பில் தீர்க்க. (இங்கு θ ஒரு மாறிலி).

$u = x\cos\theta - y\sin\theta$

$v = x\sin\theta + y\cos\theta$

27. A ஒரு சதுரத் தாயமாகும். $A + A^T$ ஒரு சமச்சீர்த் தாயமெனக் காட்டுக.

28. A ஒரு சதுரத் தாயமாகும். $A - A^T$ ஓர் ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயமெனக் காட்டுக.

29. A, B ஆகியன ஒரே வரிசையில் உள்ள சமச்சீர்த் தாயங்களெனின், $A + B$, $A - B$ ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்களெனக் காட்டுக.

30. A, P, B ஆகியன $A = P^{-1}BP$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள 2×2 ஆம் வரிசையில் இருக்கும் சதுரத் தாயங்களாக இருக்கும்போது
(i) $A^2 = P^{-1}B^2P$
(ii) $A^n = P^{-1}B^nP$
எனக் காட்டுக; இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண் ((ii) சாடை: கணிதத் தொகுத்தறிமுறைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துக).

31. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். தாயப் பெருக்கத்தை **மாத்திரம்** பயன்படுத்தி $AB = I$ ஆக இருக்குமாறு வரிசை 3×3 ஆகவுள்ள ஒரு தாயம் B ஐப் பெறுக. $BA = I$ ஐ வாய்ப்புப் பார்க்க.

32. A ஒரு சதுரத் தாயமும் I அதே வரிசையில் உள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் ஆகும். $(A - 5I)^2 = A^2 - 10A + 25I$ எனக் காட்டுக.

33. A ஒரு சதுரத் தாயமும் I அதே வரிசையில் உள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் ஆகும்.
(i) $A^2 + A - 6I = (A - 2I)(A + 3I)$ எனக் காட்டுக.
(ii) $(A - 2I)(A + 3I) = 0$ ஆக இருந்தாலும் $(A - 2I) = 0$ அல்லது $(A + 3I) = 0$ அன்று என்பதை வாய்ப்புப் பார்ப்பதற்குத் தாயம் $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ ஐப் பயன்படுத்துக (இங்கு 0 ஆனது A இன் வரிசையில் உள்ள பூச்சியத் தாயமாகும்).

34. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்க.
$A^2 - A - 2I = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு 0 ஆனது 2×2 பூச்சியத் தாயமாகும். இதிலிருந்து
(i) A^{-1} உளதாக இருக்கின்றது எனவும் $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$ எனவும்
(ii) $A^4 = 5A + 6I$ எனவும்
காட்டுக; இங்கு I ஆனது வரிசை 2×2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

1. (A/L 2011) 13 (a)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ எனவும் $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம். $\boldsymbol{A(\lambda A + \mu I) = I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக λ, μ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இங்கு $\boldsymbol{I}$ ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும். இதிலிருந்து, A^{-1} ஐக் காண்க.

2. (A/L 2012) 13 (a)

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்.

$\boldsymbol{A^2 - 3A + 2I = O}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\boldsymbol{I}$ ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் $\boldsymbol{O}$ ஆனது 2×2 பூச்சியத் தாயமும் ஆகும். **இதிலிருந்து,** $\boldsymbol{A^{-1}}$ ஐக் காண்க.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம். $\boldsymbol{BA = B}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\boldsymbol{BC = O}$ ஆக இருக்குமாறு ஒரு பூச்சியமல்லாத 2×2 தாயம் $\boldsymbol{C}$ ஐக் காண்க.

3. (A/L 2013) 13 (a)

$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$\boldsymbol{Q^T Q = \lambda I}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $\lambda \in \mathbb{R}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க; இங்கு $\boldsymbol{Q^T}$ ஆனது தாயம் $\boldsymbol{Q}$ இன் நிலைமாற்றும் $\boldsymbol{I}$ ஆனது 2×2 சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமும் ஆகும்.

இதிலிருந்து, தாயம் $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறைக் காண்க.

$\boldsymbol{A}$ ஆனது $\boldsymbol{AP = PD}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக ஓர் 2×2 தாயமெனக் கொள்வோம்; இங்கு $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ஆகும். $\boldsymbol{A}$ ஐக் காண்க.

4. (A/L 2014) 13 (a)

$a, b \in \mathbb{R}$ எனவும் $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனவும் $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்.

$\boldsymbol{A^T A = B}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க; இங்கு $\boldsymbol{A^T}$ ஆனது தாயம் $\boldsymbol{A}$ இன் நிலைமாற்றைக் குறிக்கின்றது.

$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ எனவும் $X = \begin{bmatrix} u \\ u+1 \end{bmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $u \in \mathbb{R}$ ஆகும். அத்துடன் $\boldsymbol{CX = \lambda BX}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$ ஆகும்;
λ இன் பெறுமானத்தையும் u இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.
λ இன் பெறுமானத்திற்கு தாயம் $\boldsymbol{C - \lambda B}$ ஐக் கண்டு அதன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பதில்லை எனக் காட்டுக.

5. (A/L 2015) 13 (a)

$\boldsymbol{A, B, C}$ ஆகிய மூன்று தாயங்களும்

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ஆகியவற்றினால் தரப்படுகின்றன.

(i) $\boldsymbol{AC} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் காட்டுக. அத்துடன் பெருக்கம் $\boldsymbol{CA}$ ஐயும் காண்க.

(ii) $\boldsymbol{BC} = I_2$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக a, b, c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) $(\boldsymbol{\lambda A + \mu B})\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I_2}$ எனின், $\boldsymbol{\lambda}$ ஐயும் $\boldsymbol{\mu}$ ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் ஒரு சமன்பாட்டைப் பெறுக.

தாயம் $D = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ ஐ $\boldsymbol{A, B}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைத்து, **இதிலிருந்து,** பெருக்கம் $\boldsymbol{DC}$ ஐக் காண்க.

6. (A/L 2016) 13 (a)

$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். $AX = \lambda X$ ஆகவும் $AY = \mu Y$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக λ, μ ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளைக் காண்க.

$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். P^{-1}, AP ஆகியவற்றைக் கண்டு $P^{-1}AP = D$ எனக் காட்டுக; இங்கு $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

7. (A/L 2017) 13 (a)

$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$ ஆகும்.

$AB^T = P$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு B^T ஆனது தாயம் B இன் நிலைமாற்றைக் குறிக்கின்றது. $a = 1$, $b = -1$ எனக் காட்டி a, b ஆகியவற்றுக்கு இப்பெறுமானங்களுடன் B^TA ஐக் காண்க.

P^{-1} ஐ எழுதி அதனைப் பயன்படுத்தி $PQ = P^2 + 2I$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் Q ஐக் காண்க; இங்கு I ஆனது வரிசை 2 இலான சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

பயிற்சி 1.1

1. 2×3 **2.** 4×1 **3.** 1×1 **4.** 1×4 **5.** 3×3 **6.** 2×4

பயிற்சி 1.2

1. தாயம் A ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயம் ஆகையால், $x_{ij} = -x_{ji}$ ஆகும். அப்போது,

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}$ இலிருந்து $a = -a, b = -c, d = -d$ எனக் கிடைக்கும். அப்போது $a = 0, d = 0, b = -c$.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ஆகிய இரு தாயங்களினதும் எல்லா i இற்கும் j இற்கும் $x_{ij} = x_{ji}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.1

1. $x = -6, y = 5$ **2.** $x = -2, y = 1$

பயிற்சி 2.2

1. (i) $A + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $B + D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ (iii) $A + D$ வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

பயிற்சி 2.3

1. (i) $4B = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 24 \\ -4 & 0 & 80 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} -2 & 14 & -10 \\ 1 & -1 & -18 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - B = \begin{bmatrix} 0 & 38 & -18 \\ 1 & -3 & -14 \end{bmatrix}$

(iv) $0B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(-1)B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

(v) $C = -3A + B = \begin{bmatrix} 0 & -38 & 18 \\ -1 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

2. $A+B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 13 \end{bmatrix}$ எல்லா i, j இற்கும் $x_{ij}=x_{ji}$; அதாவது சமச்சீர்த் தாயமாகும்.

பயிற்சி 2.4

1. (i) $A(B+C)=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$;

$AB+AC=\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$;

அதாவது $A(B+C)= AB+AC$

(ii) $(B+C)A=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -1 & 13 & 3 \\ -5 & 25 & 7 \end{bmatrix}$;

$BA+CA=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 3 \\ -6 & 8 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -7 & 11 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -1 & 13 & 3 \\ -5 & 25 & 7 \end{bmatrix}$;

$(B+C)A=BA+CA$

2. $(3A+I)(2A-I)= 3A(2A-I)+I(2A-I) = 6A^2-3A+2A-I^2$
$= 6A^2-A-I$

3. (i) $(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^2-B^2=\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

(ii) $(A+B)(A-B)=A(A-B)+B(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
$=A^2-B^2$

4. (i) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 52 & -9 \\ -27 & 7 \end{bmatrix}$; $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 53 & -7 \\ -28 & 6 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B)$
$= A^2 + AB + BA + B^2$
$= A^2 + 2AB + B^2$

பயிற்சி 2.5

1. (i) $AB + BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 9 & -16 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB+BA)^T = (AB+BA)$; $\therefore AB + BA$ சமச்சீரானது.

(ii) $AB - BA = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (AB - BA)^T = -(AB - BA)$; $AB - BA$ ஓராயச் சமச்சீரானது

2. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$

$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$; ஆகவே $(AB)^T = B^T A^T$.

பயிற்சி 2.6

1. $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}, A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 21 & 34 \\ 34 & 55 \end{bmatrix}, A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{bmatrix}$

ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்களெனத் தெரிகின்றது.

2. (i) $P^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, P^4 = P^2P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^6 = P^4P^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்களாகும்.

(ii) $P^3 = P^2P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, P^5 = P^4P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ஆகியன ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயங்களாகும்.

பயிற்சி 3.1

1. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். நேர்மாறை $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என எடுக்கும்போது $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

தீர்க்கும்போது $\begin{bmatrix} 5a+7c & 5b+7d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $5a + 7c = 1, 2a + 3c = 0. a = 3, c = -2.$

$5b + 7d = 0, 2b + 3d = 1; b = -7, d = 5.$

மேலும் $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ஆகையால் நேர்மாறு உளதாக இருக்கின்றது. அது $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பின், அதனை $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என எடுக்கும்போது, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அதாவது $\begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ -4a-6c & -4b-6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

அதாவது $2a + 3c = 1$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $-4a - 6c = 0$. இரண்டாம் சமன்பாட்டை $-\frac{1}{2}$ இனால் பெருக்கும்போது $2a + 3c = 1$, $2a + 3c = 0$. ஆனால், $2a + 3c$ ஆனது ஒரே தடவையில் 1 ஆகவும் 0 ஆகவும் இருக்க முடியாது.

ஆகவே $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என ஒரு தாயம் $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ உளதாக இருப்பதில்லை.

இதற்கேற்பத் தாயம் $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ இற்கு ஒரு நேர்மாறு இருப்பதில்லை.

3. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருப்பின், அதனை $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ஆக எடுக்கும்போது

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $\begin{bmatrix} 4a+6c & 4b+6d \\ 5a+8c & 5b+8d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

$4a + 6c = 1$, $5a + 8c = 0$. அப்போது $a = 4$, $c = -\frac{5}{2}$

$4b + 6d = 0$, $5b + 8d = 1$ ஆகியவற்றிலிருந்து $b = -3$, $d = 2$.

மேலும் $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகையால் நேர்மாறு உளதாக இருக்கின்றது.

அது $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.2

1. i. 0 ii.1 iii. x^2

2. $|B| = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -|A|$

3. $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$

4. ஓர் உதாரணமாக $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனவும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ எனவும் கொள்க.

அப்போது $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \therefore\ |AB| = 1$, ஆனால் $AB \neq I$ ஆகும்.

5. $0 = \begin{vmatrix} t+2 & 4t \\ 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2)^2 - 8t = (t-2)^2 \Rightarrow t = 2$

6. $A^2 = A \Rightarrow |A^2| = |A| \Rightarrow = |A|\,|A| = |A| \Rightarrow |A|\,(|A| - 1) = 0 \Rightarrow |A| = 0$ அல்லது $|A| = 1$

7. தாயம் A இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்குமெனின், $AA^{-1} = I$ ஆகும். $|A|\,|A^{-1}| = |I| = 1$.
$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}$

8. B, C ஆகிய தாயங்களும் 2×2 வரிசைத் தாயங்களாகும்.

$$|C| = |4B^{-1}| = 4^2\,|B^{-1}| = 16 \times \frac{1}{|B|} = 16 \times \frac{1}{|2A|} = 16 \times \frac{1}{2^2|A|} = 16 \times \frac{1}{4} = 4$$

9. $AA^{-1} = I \Rightarrow |A|\,|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A|\,|A^{-T}| = 1.\ |A^T| = |A|$ ஆகையால் $|A|^2 = 1$ ஆகும். ஆகவே $|A| = 1$ அல்லது $|A| = -1$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

பயிற்சி 4.5

1. இரு நேர்கோடுகளினதும் படித்திறன்கள் வேறுபட்டவை; அப்போது ஒரே புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டுகின்றன; ஆகவே ஓர் ஒருதனித் தீர்வு உளதாக இருக்கின்றது.

ஒத்த தாயச் சமன்பாடு $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ஆகும். குணகத் தாயம்

$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறைக் காண்பதற்கு

$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a, b, c, d ஆகியவற்றுக்குத் தீர்ப்பதன்

மூலம்; $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வு $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{13} \\ -\frac{23}{13} \end{bmatrix}$ ஆகும்.

அதாவது ஒருதனித் தீர்வு $\left(\frac{25}{13}, -\frac{23}{13}\right)$ ஆகும்.

2. சமமான படித்திறன்களும் வேறுபட்ட y – வெட்டுத்துண்டுகளும் இருக்கும்; ஆகவே கோடுகள் சமாந்தரமாகும்; அப்போது தீர்வுகள் இல்லை.

3. இரு நேர்கோடுகளினதும் படித்திறன்கள் வேறுபட்டவை; அப்போது ஒரே புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டும்; ஆகவே ஓர் ஒருதனித் தீர்வு உளதாக இருக்கும். ஒத்த தாயச் சமன்பாடு

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

குணகத் தாயம் $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறைக் காண்பதற்கு

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a, b, c, d ஆகியவற்றுக்குத் தீர்ப்பதன்

மூலம்; $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வு $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

ஆகும். அதாவது ஒருதனித் தீர்வு $(3, -2)$ ஆகும்.

4. ஒரே சமன்பாடுகளாகும். கோடுகள் பொருந்துகின்றன. பொதுப் புள்ளிகள் முடிவில் எண்ணிக்கையில் உள்ளன. ஆகவே தீர்வுகள் ஒரு முடிவில் எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

5.4 மீட்டற் பயிற்சிக்குரிய விடைகள்

1. $x = -6, y = 6$

2. $x = 5, y = 7$

3. $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

4. $B + A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

5. $C + O = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $4B = \begin{bmatrix} -8 & 20 \\ 4 & -16 \end{bmatrix}$

7. $B + O = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

8. $A - B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

9. $B - A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

10. $AB = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

11. $BA = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$

12. $X - Y = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 13 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

13. $Y - X = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -13 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

14. $X^T + Y^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 16 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$

15. $(Y^T)^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & 11 & 5 \end{bmatrix}$

16. $Y^T C$ வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

17. $X - \frac{1}{2}Y = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{9}{2} & \frac{23}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$

18. $X + 3C$ வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

19. $C - C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

20. $Z = X + 2Y = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 4 & 27 & 19 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a, b, c, d ஆகியவற்றுக்குத் தீர்க்கும்போது

$A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

அதாவது $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ தீர்வாகும்.

22. (i) $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -25 & -34 \\ -71 & -34 \end{bmatrix}$;

$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 40 \\ 24 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -45 \\ -44 & -51 \end{bmatrix}$;

$\therefore (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

(ii) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 5 & 52 \\ -13 & 96 \end{bmatrix}$;

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 40 \\ 24 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 41 \\ 14 & 79 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

23. (i) $(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$

(ii) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$$= A^2 + 2AB + B^2$$

(iii) $(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = (A+B)(A^2 + 2AB + B^2)$

$$= A(A^2 + 2AB + B^2) + B(A^2 + 2AB + B^2)$$

$$= A^3 + 2A^2B + AB^2 + BA^2 + 2BAB + B^3$$

இப்போது $AB = BA$ ஆகையால் $BA^2 = BAA = ABA = A^2B$, $BAB = ABB = AB^2$. அப்போது பேறு கிடைக்கும். (iv) ஐயும் (iii) பெறப்பட்ட அதே விதத்திலே காட்டலாம்.

24. (i) $\begin{matrix} 3x + 4y = 2 \\ 5x + 7y = 1 \end{matrix}$ இலிருந்து $\begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 5x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ கிடைக்கின்றது.

இத்தாயச் சமன்பாட்டின் இடப் பக்கத்தை ஒரு பெருக்கமாக எழுதும்போது

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

இப்போது $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a, b, c, d ஆகியவற்றுக்குத் தீர்க்கும்போது

தாயம் $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ஆனது $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறாகக் கிடைக்கும்.

அப்போது $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}$

தீர்வு $x = 10, y = -7$ ஆகும்.

(ii) சமன்பாட்டுச் சோடி $\begin{matrix} 2x + 3y = 5 \\ x + 7y = 8 \end{matrix}$ ஆனது தாயச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$ ஐத் தரும்.

குணகத் தாயம் $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறை மேற்குறித்தவாறு

கணிக்கும்போது $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ கிடைக்கும்.

அப்போது $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

அதாவது $x = 1, y = 1$ ஆகும். ஆகவே தீர்வு $(1, 1)$ ஆகும்.

25. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a, b, c, d ஆகியவற்குத் தீர்க்கும்போது $a = 3, b = -2, c = -4, d = 3$; ஆகவே ஒரு நேர்மாறு $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ உள்ள ஒரு தாயமாகும்.

(ii) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) தரப்பட்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தாயச் சமன்பாடாக எழுதும்போது

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$ எனக் கிடைக்கும்.

இது வடிவம் $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ஐ எடுக்கும்.

இரு பக்கங்களையும் A^{-1} இனாற் பெருக்கும்போது; $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \end{bmatrix}$; $x = -6,\ y = 10$ அதாவது தீர்வு $(-6, 10)$ ஆகும்.

26. தரப்பட்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை ஒரு தாயச் சமன்பாடாக எழுதும்போது

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

இங்கு குணகத் தாயம் $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஐத் தீர்க்கும்போது

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ கிடைக்கும். A^{-1} இனால் தாயச் சமன்பாடு

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ இன் இரு பக்கங்களையும் பெருக்கும்போது;

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\cos\theta + v\sin\theta \\ -u\sin\theta + v\cos\theta \end{bmatrix}$; எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $x = u\cos\theta + v\sin\theta,\ y = -u\sin\theta + v\cos\theta$

27. $A=[a_{ij}]$ என எடுக்கும்போது $A^T=[a_{ji}]$ ஆகும். $P=A+A^T=[a_{ij}+a_{ji}]$, $p=[p_{ij}]$ எனின், அப்போது $p_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$ ஆகும். i, j ஆகியவற்றை இடைமாற்றும்போது $p_{ji}=a_{ji}+a_{ij}=a_{ij}+a_{ji}=p_{ij}$ எனக் கிடைக்கும். அதாவது $p^T=[p_{ji}]=[p_{ij}]=p$; அதாவது $p^T=p$ ஆகும். அதாவது $(A+A^T)^T=A+A^T$ ஆகும்.

28. $A=[a_{ij}]$ என எடுக்கும்போது $A^T=[a_{ji}]$ ஆகும். $C=A-A^T=[a_{ij}-a_{ji}]$ என எடுக்குபோது $C=[C_{ij}]$, $c_{ij}=a_{ij}-a_{ji}$ ஆகும். i, j ஆகியவற்றை இடைமாற்றும்போது $c_{ji}=a_{ji}-a_{ij}=-(a_{ij}-a_{ji})=-c_{ij}$. அப்போது $C^T=[c_{ji}]=[-c_{ij}]=-C$ எனக் கிடைக்கும். ஆகவே $C^T=-C$ ஆகும். அப்போது $(A-A^T)^T=-(A-A^T)$. எனக் கிடைக்கும். அப்போது, $A-A^T$ ஓர் ஓராயச் சமச்சீர்த் தாயமாகும்.

29. $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ என எடுக்கும்போது $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$; அப்போது A, B ஆகியன சமச்சீர்த் தாயங்கள் ஆகையால், $(A+B)^T=[a_{ij}+b_{ij}]^T=[a_{ji}+b_{ji}]=[a_{ji}]+[b_{ji}]=A^T+B^T=A+B$. அவ்வாறே $(A-B)^T=A-B$ எனக் காட்டலாம்.

30. (i) தாயப் பெருக்கத்தின் சேர்த்திக் கொள்கைக்கேற்ப
$A^2=(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)=P^{-1}B\ (PP^{-1})BP=P^{-1}BIBP=P^{-1}B^2P$
கிடைக்கும்.

(ii) $A^n=P^{-1}B^nP$; $n\in\mathbb{Z}^+$ எனக் காட்டுவதற்குக் கணிதத் தொகுத்தறிமுறைக் கோட்பாட்டைப் பிரயோகிப்போம். $n=1$ இற்குப் பேறு உண்மையான தெனத் தரப்பட்டுள்ளது. k ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்கும்போது $n=k$ இற்குப் பேறு உண்மையானதெனக் கொள்வோம். அப்போது $A^k=P^{-1}B^kP$ ஆகும். $n=k+1$ இற்குப் பேறைப் பெறுவோம்.

$A^{k+1}=A^kA=(P^{-1}B^kP)(P^{-1}BP)=P^{-1}B^k(PP^{-1})BP=P^{-1}B^{k+1}P.$
ஆகவே கணிதத் தொகுத்தறிமுறைக் கோட்பாட்டிற்கேற்ப எல்லா n நேர் நிறையெண்களுக்கும் $A^n=P^{-1}B^nP$ ஆகும்.

31. $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். அப்போது

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ -5g & -5h & -5k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இரு தாயங்களினதும் சமத்திலிருந்து $a=\frac{1}{2}, b=0, c=0, d=0, e=\frac{1}{3}, f=0, g=0,$ $h=0, k=-\frac{1}{5}$

அதாவது $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

$BA=I$ என்பதை வாய்ப்புப் பார்த்தலை மாணவரிடம் கையளிப்போம்.

32. $(A-5I)^2=(A-5I)(A-5I) = A(A-5I)-5I(A-5I)$
$= A^2-5A-5A+25I = A^2-10A+25I$

33. $(A-2I)(A+3I) = A(A+3I)-2I(A+3I) = A^2+3A-2A-6I$
$= A^2+A-6I$

தரப்பட்டுள்ள தாயம் A இல் $A^2=\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$; அப்போது

$$A^2+A-6I=\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}-6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ எனினும்,

$$A-2I=\begin{bmatrix}-6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -3\\ 8 & 3\end{bmatrix}$$ பூச்சியத் தாயமாக இராத

அதே வேளை

$$A+3I=\begin{bmatrix}-6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 8 & 8\end{bmatrix}$$ உம் பூச்சியத் தாயமன்று.

34. $$A^2-A-2I=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

(i) $A^2 - A - 2I = 0$ இலிருந்து $A^2 - A = 2I$ எனக் கிடைக்கும். அதாவது $2I = A^2 - A = A\ (A - I)$ ஆகும். அதாவது $I = A\ \{\frac{1}{2}\ (A-I)\}$. இப்போது நாம் $\frac{1}{2}(A-I)$ ஆனது தாயம் A இன் நேர்மாறென உறுதிப்படுத்துவோம். $\{\frac{1}{2}(A-I)\}A=\frac{1}{2}(A^2-A)$ $=\frac{1}{2}(2I)=I.$ A^{-1} உளதாக இருக்கும் அதே வேளை $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I)$.

(ii) $A^2 - A - 2I = 0$ இலிருந்து $A^2 = A + 2I$

அப்போது $A^4 = A^2A^2 = (A + 2I)(A + 2I)$

$$= A^2 + 4A + 4I = A + 2I + 4A + 4I = 5A + 6I$$

5.5 பரீட்சை வினாத்தாள் பிரசினங்களுக்கான தீர்வுகள்

1. (A/L 2011) 13 (a)

$A(\lambda A + \mu I) = I$ இலிருந்து

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\left\{\lambda\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $$\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\lambda+\mu & \lambda\\ -\lambda & 3\lambda+\mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

அப்போது $$\begin{bmatrix}3\lambda+2\mu & 5\lambda+\mu\\ -5\lambda-\mu & 8\lambda+3\mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$ ஒத்த உறுப்புகளைச்

சமன்படுத்தும்போது

$3\lambda + 2\mu = 1 \longrightarrow (1),\ 5\lambda + \mu = 0 \longrightarrow (2)$
$-5\lambda - \mu = 0 \longrightarrow (3),\ 8\lambda + 3\mu = 1 \longrightarrow (4)$
என்னும் நான்கு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $\lambda = -\frac{1}{7}, \mu = \frac{5}{7}$. λ, μ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளைத் திருப்தியாக்குகின்றன. (குறிப்பு : இரு தாயங்கள் சமமாவதற்கு எல்லா ஒத்த மூலகங்களும் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஆகவே பெற்ற λ, μ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்கள் இவ்வாறு எஞ்சிய இரு சமன்பாடு களையும் திருப்தியாக்குகின்றன என்பதை ஆராய்ந்து பார்த்தல் வேண்டும்).

அதாவது $A(-\frac{1}{7}A + \frac{5}{7}I) = I.$ மேலும் $(-\frac{1}{7}A + \frac{5}{7}I)A = I$ எனவும் காட் டலாம்.

அதாவது $A(-\frac{1}{7}A + \frac{5}{7}I) = I = (-\frac{1}{7}A + \frac{5}{7}I)A$ ஆகும்.

நேர்மாறின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}A + \frac{5}{7}I = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \frac{5}{7}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
ஆகும்.

2. (A/L 2012) 13 (a)

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = O$$

$\therefore 2I = -(A^2 - 3A) = 3A - A^2 = A(3I - A)$ இதற்கேற்ப $I = A\left[\frac{1}{2}(3I - A)\right]$ ஆகும்.

மேலும் $\left[\frac{1}{2}(3I - A)\right]A = \frac{1}{2}(3A - A^2) = \frac{1}{2}(2I)$. $(\because A^2 - 3A + 2I = O)$
$= I$

அதாவது $A\left[\frac{1}{2}(3I - A)\right] = I = \left[\frac{1}{2}(3I - A)\right]A.$

நேர்மாறின் வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

அதாவது $A^{-1} = \frac{1}{2}\left[3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

அதிலிருந்து $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = B$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது $BA - B = O$. அதிலிருந்து $B(A - I) = O$ எனக் கிடைக்கும்.

$C = A - I = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ எனத் தெரிந்தெடுக்கலாம்.

(இங்கு C இற்குப் பல தாயங்களை எடுக்கலாம். அதாவது C இற்கு விடை ஒருதனியானதன்று. ஓர் உதாரணமாக $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ இன் எந்த ஓர் எண்ணிப் பெருக்கத்தையும் C என எடுக்கலாம்.)

3. (A/L 2013) 13 (a)

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I.$$

இதற்கேற்ப $\lambda = 2$.

அப்போது $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

இடப் பக்கத்தில் உள்ள தாயங்கள் ஒவ்வொன்றையும் எண்ணி $\frac{1}{\sqrt{2}}$ இனால் பெருக்கும்போது

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

அதாவது $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

மேலும் $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

அப்போது நேர்மாறின் வரைவிலக்கணத்திற்கேற்ப $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம். $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ஆகையால்,

$$AP = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & \frac{-a+b}{\sqrt{2}} \\ \frac{c+d}{\sqrt{2}} & \frac{-c+d}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$PD = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{-8}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$AP = PD$ ஆக இருக்க வேண்டும் ஆகையால் $\begin{bmatrix} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & \frac{-a+b}{\sqrt{2}} \\ \frac{c+d}{\sqrt{2}} & \frac{-c+d}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{-8}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{8}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

ஆக இருக்க வேண்டும்.

இரு தாயங்களின் ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{-a+b}{\sqrt{2}} = \frac{-8}{\sqrt{2}}$, $\frac{c+d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $\frac{-c+d}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

அதாவது $a+b=2, -a+b=-8, c+d=2, -c+d=8$.

தீர்க்கும்போது $a=5, b=-3, c=-3, d=5$ எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

4. (A/L 2014) 13 (a)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ஆகையால் $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

அப்போது $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{bmatrix}$.

இப்போது $A^TA = B$ ஆகையால் $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. இரு தாயங்களின் ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $2 = b$, $a^2+1=1$. அப்போது $b=2$, $a=0$ எனக் கிடைக்கும்.

$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} u \\ u+1 \end{bmatrix}$ ஆகையால் $CX = \begin{bmatrix} 12u+5 \\ 8u+3 \end{bmatrix}$

$BX = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u+1 \\ 2u+1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$CX = \lambda BX$ ஆகையால் $\begin{bmatrix} 12u+5 \\ 8u+3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3u+1 \\ 2u+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(3u+1) \\ \lambda(2u+1) \end{bmatrix}$

இரு தாயங்களின் ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது

$12u + 5 = \lambda(3u + 1) \longrightarrow (1)$

$8u + 3 = \lambda(2u + 1) \longrightarrow (2)$

$2u + 1 \neq 0$ ஆகையால் (2) இலிருந்து $\lambda = \dfrac{8u+3}{2u+1}$ ஆகும்.

இந்த λ பெறுமானத்தை (1) இற் பிரதியிடும்போது $12u + 5 = \left(\dfrac{8u+3}{2u+1}\right)(3u + 1)$.

இதிலிருந்து $(12u + 5)(2u + 1) = (8u + 3)(3u + 1)$.

ஆகையால் $24u^2 + 22u + 5 = 24u^2 + 17u + 3$. தீர்க்கும்போது, $5u = -2$ ஆகையால் $u = -\dfrac{2}{5}$. இங்கு u இன் பெறுமானத்தை (1) இற் பிரதியிடும்போது $\lambda = -1$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\text{இப்போது } C - \lambda B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

இத்தாயம் $C - \lambda B$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்குமெனின் அதனை $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

என எடுக்கும்போது $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என a, b, c, d

ஆகியன உளதாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $\begin{bmatrix} 9a + 6c & 9b + 6d \\ 6a + 4c & 6b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

முதலாம் நிரையிலும் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள மூலகங்களைச் சமமாக்கும்போது $9a + 6c = 1$ எனக் கிடைக்கும். இச்சமன்பாட்டை $\dfrac{2}{3}$ இனாற் பெருக்கும்போது $6a + 4c = \dfrac{2}{3}$ எனக் கிடைக்கும். இரண்டாம் நிரையிலும் முதலாம் நிரலிலும் உள்ள மூலகங்களைச் சமன்படுத்தும்போது $6a + 4c = 0$ எனக் கிடைக்கும். எனினும் $6a + 4c$ ஆனது ஒரே தடவை $\dfrac{2}{3}$ ஆகவும் 0 ஆகவும் இருக்க முடியாது.

ஆகவே $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என ஒரு தாயம் $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

உளதாக இருக்க முடியாது.

இதற்கேற்பத் தாயம் $C - \lambda B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ இன் நேர்மாறு உளதாக இருக்கமாட்டாது.

5. (A/L 2015) 13 (a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) $$AC = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$CA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $$BC = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3a+2b & 4a+3b \\ 3c+2d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

முதலாம் நிரையின் ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $3a + 2b = 1$, $4a + 3b = 0$. தீர்க்கும்போது $a = 3$, $b = -4$ எனக் கிடைக்கும். அவ்வாறே இரண்டாம் நிரையில் ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $3c + 2d = 0$, $4c + 3d = 1$ எனக் கிடைக்கும். அப்போது $c = -2$, $d = 3$.

(iii) $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC = \lambda I_2 + \mu I_2 = (\lambda + \mu) I_2 = I_2$ ஆகும். அப்போது $(\lambda + \mu - 1) I_2 = 0$ எனக் கிடைக்கும் (இங்கு 0 ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள பூச்சியத் தாயமாகும்).

அதாவது $$(\lambda + \mu - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + \mu - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது $\lambda + \mu - 1 = 0$ எனக் கிடைக்கும்.

$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ஆகும். $D = \alpha A + \beta B$ ஆக இருக்குமாறு α, β ஆகியவற்றைப் பெறவேண்டும்.

அதாவது $\begin{bmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3\beta & 2\alpha - 4\beta & -3\alpha \\ -2\beta & -\alpha + 3\beta & 2\alpha \end{bmatrix}$$

ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது முதலாம் நிரலிலிருந்து $\beta = -1$ உம் மூன்றாம் நிரலிலிருந்து $\alpha = 2$ உம் ஆகும். ஆகவே $\boldsymbol{D} = 2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$.
அப்போது $\boldsymbol{DC} = (2A - \boldsymbol{B})\,C = 2AC - \boldsymbol{BC} = 2I_2 - \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_2$

6. (A/L 2016) 13 (a)

$AX = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\lambda X = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$

இப்போது $AX = \lambda X$ இலிருந்து $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$. ஆகவே $\lambda = 2$ ஆகும்.

$AY = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mu Y = \mu \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\mu \\ \mu \end{bmatrix}$

இப்போது $AY = \mu Y$ இலிருந்து $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\mu \\ \mu \end{bmatrix}$. ஆகவே $\mu = -1$.

$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{P}$ இன் நிலைமாறு $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

அதாவது $\begin{bmatrix} -a-2c & -b-2d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது

$-a-2c=1 \longrightarrow (1),\ a+c=0 \longrightarrow (2)$

$-b-2d=0 \longrightarrow (3),\ b+d=1 \longrightarrow (4)$ ஆகியன கிடைக்கும்.

(1), (2) ஆகியவற்றைத் தீர்க்கும்போது $c=-1,\ a=1$ ஆகியன கிடைக்கும். (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து $d=-1,\ b=2$ ஆகியன கிடைக்கும்.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$ எனக் கிடைக்கும்.

மேலும் $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் காட்டலாம்.

ஆகவே $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$$\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}$$ ஆகியன கிடைக்கும்.

7. (A/L 2017) 13 (a)

$$\boldsymbol{AB}^T = \begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{AB}^T = \boldsymbol{P}$ இலிருந்து $\begin{bmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ எனக் கிடைக்கும்.

ஒத்த மூலகங்களைச் சமப்படுத்தும்போது

$2-a+3a=4 \longrightarrow (1),\ 2+ab=1 \longrightarrow (2)$

$-1-b+2a=2 \longrightarrow (3),\ -1+b^2=0 \longrightarrow (4)$ ஆகியன கிடைக்கும்.

(1) இலிருந்து $a=1$ எனக் கிடைக்கும். அப்போது (2) இலிருந்து $b=-1$ எனக் கிடைக்கும்.

இந்த a, b பெறுமானங்கள் (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளையும் திருப்தியாக்குமெனத் தெரிகின்றது. (இவ்வாறு திருப்தியாக்கப்படுகின்றதா என்பதைச் சோதித்தல் முக்கியமாகும். திருப்தியாக்கப்படாவிட்டால். $\boldsymbol{AB^T}$, $\boldsymbol{P}$ ஆகிய தாயங்கள் சமமல்ல).

இப்போது $\boldsymbol{B^T A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{P}$ இன் நேர்மாறைக் காண்பதற்கு a, b, c, d ஆகியவற்றுக்கு

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஐத் தீர்ப்போம்.

இப்போது $\begin{bmatrix} 4a+c & 4b+d \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ஒத்த மூலகங்களைச்

சமப்படுத்தும்போது $4a+c=1,\ 2a=0,\ 4b+d=0,\ 2b=1$ ஆகியன கிடைக்கும்.

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்போது $a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = 1,\ d = -2$ எனக் கிடைக்கும்.

(ஆகவே $\boldsymbol{P}^{-1}$ உளதாக இருக்கும் எனவும்) $\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ எனவும் கிடைக்கும்.

$\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{P}^2 + 2\boldsymbol{I}$ தரப்படும்போது இரு பக்கங்களையும் $\boldsymbol{P}^{-1}$ இனால் பெருக்கும்போது

$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PQ}) = P^{-1}(\boldsymbol{P}^2 + 2\boldsymbol{I})$

அப்போது $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}^2 + \boldsymbol{P}^{-1}(2\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{P} + 2\boldsymbol{P}^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

උසස් පෙළ සංයුක්ත ගණිතය නතක (දෙ)
2019/T/අති/54-1/3000

ISBN 978-955-25-0352-8
P01
3020034
A/L COMBI: MATHS MATRI: (T)
Rs. 115.00