

உ. மெ. த. உயர்தரம்
G. C. E. A/L

— உதவி நூல் P. M. - 1

நுயகணிதப் பயிற்சி

பகுதி 1

அட்சர கணிதம்

தொகுப்பு 1-

S. F. அசோகாநந்தன் B. Tec. -(IIT)

S. வரதராஜன் B. Sc.

PROBLEMS & EXERCISES
IN
ALGEBRA
FOR
G. C. E. A/L

வெளியீடு:-

மாசில் பதிப்பகம்

Y. M. C. A. கட்டிடம் மேல்மாடி,

வாழற்பாளையம்.

[பதிப்புரிமை]

விலை ரூபா 35/-

க. பெ. த. உயர்தரம் — உதவி நூல் P. M. - 1
G. C. E. A/L

தூயகணிதப் பயிற்சி

பகுதி 1

அட்சர கணிதம்

தொகுப்பு 1-

- S. F. அசோகாந்தன் B. Tec. - (I T)
S. வரதராஜன் B. Sc.

PROBLEMS & EXERCISES
IN
ALGEBRA
FOR
G. C. E. A/L

வெளியீடு:-

மாசில் பதிப்பகம்

Y. M. C. A. கட்டிடம் மேல்மாடி,

யாழ்ப்பாணம்.

[பதிப்புரிமை]

அச்சுப்பதிப்பு :

அண்ணை அச்சகம், குருநகர், யாழ்ப்பாணம்.

அட்சர கணிதம்

அலகு	பக்கம்
1. சமன்பாடுகளின் தீர்வு, சினைகாணல், மீதித் தேற்றம்	1
2. தொடர்	8
3. சார்புகளின் நடத்தைகளும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களும்.	26
4. ஒழுங்குத் தொகையும் கூட்டுத் தொகையும்	38
5. ஈருறுப்பு விரிவு	44
6. சிக்கல் எண்கள்	57
7. சமனிவிகள்	75
8. நிகழ்தகவு	80
விடைகள்	90
பின்னிணைப்பு	104
விடைகள் -- பின்னிணைப்பு	125

மாணவர்களுக்கு

இர்
அரிய சேவை

G. C. E. A/L மாணவர்களுக்கு பயன்தரக் கூடிய வகையில் எமது கல்விச் சேவையால் வினா விடை திருத்தல் சேவை ஆரம்பிக்கப்பட உள்ளது.

எமது வெளியீடுகளாகிய

தூயகணிதம்

பிரயோக கணிதம்

பௌதிகவியல்

* ஆசிரிய பாடங்களின்

பயிற்சிகளிலிருந்து

தெரிவு செய்யப்பட்ட வினாக்களுக்கு நீங்கள் விடை எழுதலாம்.

விடைகள் திருத்தப்பட்டு புள்ளி யிடப்பட்டு அனுப்பி வைக்கப்படும் - 6 வினாக்களைத் திருத்தி உங்க ளுக்கு அனுப்புவதற்கான கட்டணம் தபாற் செலவு உட்பட ரூபா 20/-

இச் சேவையில் பங்கு கொள்ள விரும்பின் நீங்கள் படித்த அவகுகளை எமக்கு எழுதி எம்முடன் பதிவு செய்யுங்கள்:

* விடை எழுத வேண்டிய பயிற்சி எண்கள் உங்களுக்கு அனுப்பி வைக்கப்படும்.

மாசில் பதிப்பகம்

Y. M. C. A. மேல்மாடி,

யாழ்ப்பாணம்.

அட்சர கணிதம்

அலகு 1

சமன்பாடுகளின் தீர்வு, சினை காணல்
மீதித் தேற்றம்

1. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$(i) \quad 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

$$(ii) \quad \frac{1}{x^2 - 3x - 10} + \frac{1}{x^2 - 3x - 2} = \frac{1}{x^2 - 3x - 1}$$

$$(iii) \quad \sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2x-1}$$

2. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$(i) \quad x-y=2; \quad x^2-13y^2=14 \quad (ii) \quad x^2+y^2=25; \quad x^2+xy-y^2=15$$

3. (1) $3x^2+5xy-2y^2-5x+4y+k \equiv (lx+my+n)(l^1x+m^1y+n^1)$
ஆகும் வண்ணம் $k, l, m, n, l^1, m^1, n^1$ என்னும் ஒருமைகளைக் காண்க.

$$(ii) \quad \text{சினைகளாக்குக: } a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3$$

4. (i) x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களும்,

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1} \quad \text{ஆகும் வண்ணம்}$$

a, b, c , என்ற ஒருமையைக் காண்க.

(ii) சினைகளாக்குக.

$$(x+y+z)^5 + x^5 + y^5 + z^5 - (y+z)^5 - (z+x)^5 - (x+y)^5$$

5. சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$(i) \quad x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$(ii) \quad \text{சினை காண்க: } 8abc + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

6. (i) சினை காண்க: $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(ii) $1+r+r^2+\dots+r^n+\dots$ என்னும் பெருக்கற் தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இன் வீச்சுக்களைக் காண்க.

$$\text{இதில் } r = \frac{2x^2-5x+7}{x^2+1}$$



R. S. S. S. S.

7. (i) மீதித்தேற்றத்தைப் பாவித்து அல்லது வேறுவிதமாக,

(a) $x^2(y^3-z^3)+y^2(z^3-x^3)+z^2(x^3-y^3)$

(b) $x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)$

என்பவற்றின் சினைகளைக் காண்க.

(ii) $x + \frac{1}{x} = t$ எனப் பிரதியிடு செய்து அல்லது வேறுவித

மாக $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க.

8. (i) $2x^4+x^3-x^2+ax+b$ என்பதை x^2-1 என்பதால் வகுக்கும் போது மீதி $2x+3$ ஆயின் a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$ என்பதை ஒரு இருபடிச் சினை யாகவும், மூன்று முதலாம் படிச் சினைகளாகவும் காரணிப் படுத்துக.

(iii) $(x+y)^2(x+z)^2(y-z)+(y+z)^2(y+x)^2(z-x)+(z+x)^2(z+y)^2(x-y)$ என்பதை சினைகளாக்குக.

9. $x^8+2x^7+ax^2+bx+c$ என்பது x^2+x-2 என்பதால் சரியாக வகுக்கப்படக் கூடியதாகவும், $x+1$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது -8 மீதியைக் கொடுக்கக் கூடியதாகவும் இருப்பின் a, b, c என்பவற்றைக் காண்க.

10. மீதித் தேற்றத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக.

$f(x)$ என்பது. x இன் பல்லுறுப்புச் சார்பாகவும், $f(1) = a$; $f(-1) = b$; $f(0) = c$ ஆகவும் இருப்பின், $f(x)$ என்பதை x^2-1 என்பதால் வகுக்கவரும் மீதி $\frac{1}{2}(a-b)x + \frac{1}{2}(a+b)$ எனக்காட்டுக. $f(x)$ என்பதை (x^3-x) என்பதால் வகுக்கவரும் மீதியையும் காண்க.

11. மீதித் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

வேறு வேறான x இன் நான்கு பெறுமானங்களுக்கு,

ax^3+bx^2+cx+d என்பது மறைந்துவிடின், a, b, c, d என்பன எல்லாம் பூச்சியம் எனக் காட்டுக.

a, b, c, d என்பன பூச்சியம் அன்றெனின் x^2-1 என்பது ஒரு சிணையாகும் வண்ணம் இவற்றிற்கிடையிலுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

12. (i) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு வழியினால்

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) ax^3+bx^2+cx+d என்ற பல்லுறுப்புச் சார்பு x^2-1, x^2-4 என்பவற்றால் வகுக்கப்படும்போது, மீதிகள் முறையே $5x-2$ $11(x-1)$ ஆயின் a, b, c, d , என்பனவற்றைக் காண்க.

13. $f(x)$ என்பது x இன் ஒர் பல்லுறுப்பி, k என்பது ஒர் ஒருமை, $f(x)$ என்பது $x-k$ என்பதால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $f(k)$ என நிறுவுக.

$f(x)$ என்பது $(x-a)(x-b)$ என்பதால் வகுக்கப்படும்போது $px+q$ என்பதாகும். இதில் a, b என்பன ஒருமைகள்.

$$a \neq b, p = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}; q = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b} \text{ என நிறுவுக.}$$

$F(x) \equiv x^7+lx^2+mx+n$ என்பது $x+1; x^2-x$ என்பவற்றால் வகுக்கப்படும்போது மீதிகள் முறையே $2, x+2$ ஆகும். l, m, n என்பவற்றைக் காண்க.

14. (i) a உம் b உம், மெய்யாகவும், சமனிலிகளாகவும் இருப்பின் பல்லுறுப்பி $f(x), (x-a)(x-b)$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி $\frac{(x-a)f(a)-(x-b)f(b)}{a-b}$ என நிறுவுக.

(ii) மீதித் தேற்றத்தைப் பாவித்து $x^3+y^3+z^3-3xyz$ இன் ஒரு சினை $x+y+z$ என நிறுவுக. x, y, z என்பன தேர்மெய்யாயின் $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ என உய்த்தறிக. என்பது 1 இன் ஒரு சிக்கல் கனமூலமாயின் $x+\omega y+\omega^2 z$ என்பது $x^3+y^3+z^3-3xyz$ இன் ஒரு சினை என நிறுவுக. இதிலிருந்து இக் கோவையைப் பூரணமாக சினைகளாக்குக.

15. $px^4+qx^3+rx^2+sx+1$ என்னும் கோவை x^2-1 ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி $6-9x; x^2-4$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி $45-12x$; கோவையை x^2+3x+2 ஆல் வகுக்கும்போது வரும் மீதியைக் காண்க.

16. (i) x இன் சார்பிலுள்ள ஒரு இருபடிக் கோவையை $(x-1), (x-2), (x-3)$ ஆல் வகுக்கும்போது மீதிகள் முறையே $r, 2r, 4r$ ஆகும் கோவை $(x-4)$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதியை r இன் சார்பில் காண்க.

(ii) $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$ என்னும் கோவையைப் பகுதிப் பின்னங்களாகக்

குக். இதிலிருந்து, இச்சார்பை x^{-1} ஐ முதலாகக் கொண்டு x இன் ஏற்பாடுகளில் விரிக்குக. விரிவின் பொது உறுப்பைக் கூறி, விரிவு பெறும் தியாவதற்குரிய x இன் பெறுமானங்களை யும் காண்க.

17. p எனும் கூற்றானது,

$(x-2)^2$ என்பது $f(x)$ என்னும் பல்லுறுப்பியின் ஒரு காரணியாகும்.

q எனும் கூற்றானது,

$(x-x)$ என்பது $f(x)$ என்னும் பல்லுறுப்பியின் ஒரு காரணியாகும்.

(a) $p \Rightarrow q$ என நிறுவுக.

(b) ஒரு எதிர் உதாரணத்தால் $q \not\Rightarrow p$ என நிறுவுக.

$f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 9$ எனத் தரப்பட்டால் $f'(x)$ ஐத் தருக.

$f(x)$ மீளவரும் காரணி உடையதாயின் $f'(x)$ ஐயும் $f(x)$ ஐயும் காரணிப்படுத்துக.

$$ff(x) \equiv (x-1)^2 (2x+3)^2;$$

$$f(x) \equiv 2(x-1) (2x+3), (4x+1)]$$

18. (i) $2^{2x} - 5 \cdot 2^{2x+1} + 16 = 0$ யைத் தீர்க்க.

(ii) l, c பூச்சியமல்லாத மாறிலிகளாக இருப்பின் $x^2 + lx + c = 0$, $7x^2 + 21x - 3c = 0$ என்பன பொது மூலம் ஒன்றை கொண்டிருக்க $l^2 = 4c$ ஆகவேண்டும் என நிறுவுக.

19. (i) $4x^4 + 1 \equiv (2x^2 + ax + 1) (2x^2 + lx + 1)$ ஆக அமைய a, l எனும் மாறிலிகளைக் கணிக்க.

இதை பாவித்து $2^4 + 1$ இன் முதன்மைக்காரணிகளைக் காண்க.

(ii) மாறிலிகள் A, B, C, D ஐக் காண்க.

$$\frac{2x-2}{(x+1)^2 (x^2+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

- 20- (a) பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் திருப்திப்படுத்தும் x, y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$2x + 3y = 1$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$$

(b) $3(4^P) = 7(6^Q)$

$$3(8^P + 1) = 25(6^Q)$$

எனத்தரப்பட்டால் $2P = \frac{25}{56}$ என நிறுவி, 6^Q ஐ இரு முழு

எண்களின் விகிதமாகத் தருக. p இன் பெறுமானத்தை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

21. $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = -b(b-c)(c-a)(a-b)$ என நிறுவுக.

(i) $bc + ca + ab = k(a^2 + b^2 + c^2)$ எனத் தரப்பட்டால் $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = \frac{1}{2} \{ (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \}$ என நிறுவுக.

(ii) $k < 1$ என நிறுவுக. $k=1$ ஆகுவதற்கான நிபந்தனைகள் யாவை? மேலும் a, b, c ஆகியவை ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் குறிப்பின் $k > \frac{1}{2}$ என நிறுவுக. $b=c=1$ ஆன முக்கோணிகளைக் கருதுவதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாகவோ, k அண்ணளவாக $\frac{1}{2}$ க்குச் சமமாகவுள்ள முக்கோணிகளைப் பெறமுடியும் என நிறுவுக.

22. $a=b+c$ எனப்பிரதியிட்டு அல்லது வேறுவழியாக $a-b-c$ ஆனது $a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டுக.

இக் கோவையை முழுமையாக காரணிகளாக்குக.

- 23 (a) காரணித் தேற்றத்தை உபயோகிப்பதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாகவோ $(2x+1), f(x)$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டுக.

இங்கு $f(x) = 12x^3 - 4x^2 - 13x - 4$ ஆகும்.

$f(x) = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(b) $4x - y > 2; 2x + y < 12; y > x$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைந்து திருப்திப்படுத்தும் (x, y) இன் முழுவெண் கோடுகளை வரைபு முறையால் காண்க.

24. $f(x)$ எனும் பல்லுறுப்பியானது $(x-a)$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி $f(x)$ என நிறுவுக. மேலும் $f(x)$ ஆனது $(x-a)(x-b)$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி,

$$\left\{ \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \right\} x + \left\{ \frac{af(b)-bf(b)}{a-b} \right\} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இங்கு $a \neq b$

$f(x)$ ஆனது $(x-a)(x-b)$ ஆலும் $(x-a)(x-c)$ ஆலும் வகுக்கப்படும்போது பெறப்படும் மீதிகள் சமனானவை ஆயின்

$$(b-c)f(a) + (c-a)f(b) + (a-b)f(c) = 0 \text{ எனக்காட்டுக.}$$

இங்கு $a \neq b \neq c$

25. (i) தீர்க்க.

$$\text{Log}_2 x - \text{log}_4 y = 4$$

$$\text{Log}_2 (x-2y) = 5$$

- (ii) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு வழியாக

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

என நிறுவுக.

26. $P(x) \equiv p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$ என்பது $(x-a)$ ஆல் வகுக்கப்படின் மீதி $P(a)$ எனக் காட்டுக.

$Q(x) \equiv x^4 + hx^3 + gx^2 - 16x - 12$ என்பது $(x-1)$, $(x-2)$ என்பவற்றை காரணிகளாக உடையதாயின் மாநிலிகள் n, g என்பவற்றையும் மற்றைய காரணிகளையும் காண்க.

27. (i) $\sum_{r=1}^n r^2$ இற்கான சூத்திரத்தை உபயோகித்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(a) முதல் $2n$ நேர் முழு எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

(b) முதல் n இரட்டை எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

இதிலிருந்து $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$ என்பதைக் காண்க.

$$(ii) S_n = \sum_{r=0}^n ar(1+a+a^2+\dots+a^r), (|a| \neq 1)$$

ஆயின்; $(1-a) S_n$ என்பதைக் கருத்திற் கொண்டு

$$S_n = \frac{1-a^{2n+2}}{(1-a^2)(1-a)} - \frac{a^{n+1}(1-a^{n+1})}{(1-a)^2}$$

எனக் காட்டுக.

$n \rightarrow \infty$ ஆகும்போது S_n ஓர் முடிவுள்ள பெறுமானத்தை அடையுமாயின் a இன் பெறுமானத் தொடையாது? a இன் இப் பெறுமானங்களுக்குரிய தொடரின் முடிவிலி கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

28. $2\ln x - \ln y = \ln(5x-6y)$ என்னும் சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் x/y இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

29. (i) x மெய்யாயின்

$$\frac{(2x+1)}{(x^2+2)}$$

என்பதன் எல்லாப் பெறுமான வீச்சுக்களையும் காண்க.

(ii) $x^2 + px + q = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β ஆயின் சமன்பாட்டைத் தீர்க்காது $(\alpha + \beta)^2, (\alpha - \beta)$ என்பவற்றை மூலங்களாயுடைய இருபடிச் சமன்பாடொன்றைத் தருக.

30. $x^m + nx$ ஐ $x^2 - x - 2$ ஆல் வகுக்க $2x+6$ மீதியாயின் முழு எண்கள் m, n என்பவற்றைக் காண்க.

தொடர்

1. (i) முதல் உறுப்பு 1ஐயும் பொது வித்தியாசம் 3ஐயும் கொண்ட கூட்டில் விருத்தியின் முதல் n உறுப்புக்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $1+r(1+r) + r^2(1+r+r^2)+\dots+r^n(1+r+\dots+r^n)$ என்னும் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டு $-1 < r < 1$ ஆகும்போது

$n \rightarrow \infty$ ஆக இக் கூட்டுத்தொகையின் எல்லையைக் காண்க.

2. (i) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n}{6} (n+1) (2n+1)$ என நிறுவுக.

$1^2+4^2+7^2+10^2+\dots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) ஒரு பெருக்கற்தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $9/4$ ஆகவும், முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 2 ஆகவும் இருப்பின் தொடரைக் காண்க.

3. (i) $\sum_{r=0}^{\infty} (x^2 - 2x - 2)^r$ என்னும் தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இன் வீச்சங்களைக் காண்க.

(ii) $1^2+2^2+\dots+n^2 = a+bn+cn^2+dn^3$ ஆகும் வண்ணம் a, b, c, d என்னும் ஒருமைகளைக் காண்க.

4. கணிதத் தொகுத்தறி முறையினாலோ வேறு முறையினாலோ

$$1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}; r \neq 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

$-1 < r < 1$ ஆயின் மேலேயுள்ள தொடர் ஒருங்குமென நிறுவுக. இதன் முடிவிலிக் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க. பின்வரும் பெருக்கற்தொடர்கள் இரண்டும் ஒருங்கத்தக்கதாய் x இன் பொதுப் பெறுமானம் யாதுமில்லையெனக் காட்டுக.

(i) $1 + \frac{5x-6}{3x-2} + \left(\frac{5x-6}{3x-2}\right)^2 + \dots$

(ii) $1 + \frac{2x-1}{4x-5} + \left(\frac{2x-1}{4x-5}\right)^2 + \dots$

5. (i) $x+y+z=0$ ஆயின் $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ எனக் காட்டுக.
 (ii) $1^2n+2^2(n-1)+\dots+\dots+n^21=1/12 n(n+1)^2(n+2)$ என நிறுவுக.

6. (i) r ஆவது உறுப்பு r^2 , 2^r ஆகவுள்ள n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.
 (ii) $u_r = 1^2+2^2+3^2+\dots+r^2$ ஆகவும்
 $s_n = u_1+u_2+\dots+u_n$ ஆகவும் இருப்பின்
 $n \rightarrow \infty$ ஆக, $s_n/n^4 \rightarrow \frac{1}{12}$ எனக் காட்டுக.

7. (i) n என்பது நேர் முழு எண்ணாகவும் $0 < x < 1$ ஆகவும் $n > 1/x$ ஆகவும் இருப்பின், $(1-x)^n > 1-nx$ என நிறுவுக.
 (ii) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+2)}$ எனக் காட்டுக.

8. (i) n என்பது நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$
 எனத் தொகுத்தறி முறையினால் நிறுவுக.
 (ii) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ என்பது 7 ஆம் பிரிபடுமென நிறுவுக.

9. n என்பது நேர் முழுவெண்ணாயின்
 (i) $1^5+2^5+3^5+\dots+n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$ என தொகுத்தறி முறையினால் நிறுவுக.
 (ii) $3^{2n+2} - 8n - 9$ என்பது 64 ஆம் பிரிபடுமென நிறுவுக.

10.
$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

 ஆகும் வண்ணம் A, B, C என்னும் ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக.

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

என்னும் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

11. (i) n என்பது நேர் முழுமெண்ணுயின். தொகுத்தறி முறையி னாலோ அல்லது வேறு வழியினாலோ,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)} \text{ என நிறுவுக.}$$

- (ii) x இன் குறிப்பிட்ட வீச்சுக்களுக்கு.

$$\sum_{r=0}^x \left(\frac{3x^2 - 9 - 1}{2x + 3} \right)^r = \frac{3 + 2x}{1 + 11x - 3x^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

இவ் வீச்சங்களைக் காண்க.

12. $1 + \frac{3x+2}{x+10} + \left[\frac{(3x+2)}{x+10} \right]^2 + \dots$

$1 + \frac{3x-9}{x+1} + \left(\frac{3x-9}{x+1} \right)^2 + \dots$ என்ற

பெருக்கற் தொடர்கள் இரண்டும் ஒருங்குவதற்கான x இன் பொதுவான வீச்சுக்களைக் காண்க.

S_1, S_2 என்பன முறையே இரு தொடர்களினதும் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாயின் $2S_1 = 13S_2$ ஆவதற்கு x இற்கு ஒரே ஒரு பெறுமானம் மட்டுமே உண்டு என நிறுவுக.

13. (i) கணிதத் தொகுப்பு முறையினால் அல்லது வேறு வழியினால் $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$ எனக் காட்டுக.

- (ii) $x=1/3$ உம், $x=1/2$ உம் ஆகும் போது

$$1 + \frac{2x}{ax+b} + \left[\frac{2x}{ax+b} \right]^2 + \dots$$
 என்ற தொடரின்

முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை முறையே 2 உம் 3 உம் ஆயின் a, b என்பவற்றைக் கண்டு. தொடர் ஒருங் குவதற்கான x இன் வீச்சுக்களைக் காண்க.

14. (i) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$

என்னும் முடிவிலித் தொடரினது முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

இத் தொடர் ஒருங்குமென நிறுவுக.

- (ii) $r \neq 1$ ஆயின், $1 + 2r + 3r^2 + \dots + nr^{n-1} \dots$ எனும் முடிவிலித் தொடரினது முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை.

$$\frac{1-r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r} \text{ என நிறுவுக.}$$

$-1 < r < 1$ எனின், $n \rightarrow \infty$ ஆக $nr^n \rightarrow 0$ ஆகுமென எடுத்துக் கொண்டு, $-1 < r < 1$ ஆயின் இத் தொடர் ஒருங்குமென நிறுவுக.

15. (i) ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் உறுப்பு 8. முதல் பத்து உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை இவ்வறுப்புகளின் நேர்மரின் கூட்டுத்தொகையின் $1/8$ ஆகும். ஆரம்ப பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் ஏழு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை இவ்வறுப்புகளின் நேர்மரின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனெனக் காட்டுக.

(ii) $x^3 + ax^2 + bx + c$ என்பது $x=1$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி 2; $x=2$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி -1 ; $x=3$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது மீதி 15; $x=4$ ஆல் வகுக்கும்போது மீதியைக் காண்க. முப்பதுக் கோவையின் மூன்று முதலாம் படிச் சினைகளையும் காண்க.

16. (i) மட $b = a \times$ மட $a = b = 1$ என நிறுவுக. n என்பது நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$$m \log_e (n+1) - m \log_e n = 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right)$$

$m \log_{10} e = 0.43429$ எனத் தரப்படின் $m \log_{10} 11$ ஐ 5 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(ii) முடிவில் உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{3}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{n^2 - n + 1}{n!} + \dots$$

17. (i) ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலுறுப்பு 2 பொது விகிதம் $2a - (1/a)$ இங்கு $a > 0$ தொடர் ஒருங்குவதற்குரிய a இன் விச்சங்களைக் காண்க. $a = \frac{1}{2}$ ஆகும்போது இத்தொடரின் முடிவில் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) $\sum_{r=1}^n (2r+1)(r-2) = \frac{1}{6}n(4n^2 - 3n - 19)$ என நிறுவுக.

18. ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் a ஐ முதலுறுப்பாகவும் r ஐ பொது விகிதப்பாகவும் கொண்டுள்ள முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகைக்குக் கோவையொன்றைப் பெறுவதுடன் தொடர் ஒருங் குவதற்கான r இன் வீச்சங்களையும் குறிப்பிடுக.

x இன் ஒரே பெறுமானத்திற்கு,

(a) $e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots$

(b) $1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots$

என்னும் இரு பெருக்கற் தொடர்களும் ஒருங்குவது சாத்திய மில்லை எனக் காட்டுக.

தொடர் (a) இன் முதல் நூறு உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை தொடர் (b) இன் முதல் 50 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையின் $\frac{3}{4}$ ஆகும். தொடர் (a) இனதும் தொடர் (b) இனதும் முதல் 1000 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையின் விகிதத்தைக் காண்க.

19 (i) r ஆவது உறுப்பை $(r^2 + 2r + 2) / (r^2 + 2r)$ ஆகக் கொண்டுள்ள தொடரின் முதல் இலட்சம் உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கிட்டிய முழுவெண்ணில் காண்க.

(ii) $x^{10} - 2x^9 - x^3 + 2x + k$ என்ற பல்லுறுப்பி $x+1$ ஆல் வகுக்கப்படுமாயின் ஒருமை k ஐக் காண்க.

k இன் இப்பெறுமானத்திற்கு, பல்லுறுப்பியை $(x+1)^2$ ஆல் வகுக்கும்போது (பிரித்தலைச் செய்யாது) உள்ள மீதியைக் காண்க.

20. x இன் ஏறுவரிசையிலுள்ள விரிவின் முதல் நான்கு உறுப்புக்களையும் எழுதுக.

(i) e^x (ii) $(e^x)^2$ (iii) 2^x ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் பொது உறுப்பையும் தருக.

$e^x + e^{-x}$ ஒரு போதும் 2 இலும் சிறிதாகாது என்றும்,

$(2^x - 2^{-x}) x$ ஒரு போதும் 2 மட e 2 இலும் சிறிதாகாது என்றும் காட்டுக.

21. (i) n உறுப்புக்களில் வரையறுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க,

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2 + \dots + n)$$

உமது விடையை எளிய வடிவில் உணர்த்துக.

(ii) e இன் உறுப்புக்களில், முடிவில் தொடரின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$3 + \frac{5}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{2n+1}{n!} + \dots$$

22. (i) $\sum_{r=2}^n \frac{1}{(r^2-1)(r+3)}$ ஐக் காண்க. $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{(r^2-1)(r+3)}$ ஐ உய்த்தறிக.

(ii) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு வழியால் $7^{2n} - 5 \cdot 7^n - 2$ என்பது 6 ஆல் வகுக்கப்படுமென நிறுவுக.

23. (i) $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r+1)^3}{r!} = 71e - k$ என நிறுவுக.

இங்கு k என்பது தீர்மானிக்கப்பட வேண்டிய முழுவெண்ணாகும்.

(ii) n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

n முடிவிலிக்கு அணுக. கூட்டுத்தொகை 1 ஐ அணுகுமெனவும் காட்டுக.

24. (i) $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ என நிறுவுக.

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots$ இல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையையும் உய்த்தறிக.

(ii) $\frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{6}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புக்களினதும் முடிவிலி உறுப்புக்களினதும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

25. $x > 0$ ஆயின் $m \leq x \leq m+1$ எனக் காட்டுக. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r, \dots, a_n$ எனும் n நேர் எண்களின் கூட்டலிடையும் பெருக்கலிடையும் முறையே A உம் G உம் ஆகும். மேலே உள்ளதில் $x = a_r / A$; ($r = 1, 2, \dots, n$) எனப் பிரதியிடு செய்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ $G \leq A$ என நிறுவுக.

26. (i) $\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ என நிறுவுக.

$\sum_{r=1}^n r(r-1)$ ஐயும் காண்க.

(ii) $f(n) = 2^{3n} - 7n - 1$ எனின்

$f(n) - 8f(n-1) = 49(n-1)$ என நிறுவுக.

n என்பது 1 இலும் பெரிதான நேர் முழுவெண்ணாயின் $f(n)$ என்பது 49 ஆல் சரியாக வகுபடும் எனத் தொகுத்தறி முறையினால் காட்டுக.

27. (i) $(u-a)^2 + (v-b)^2 + (u^2+v^2-1)(a^2+b^2-1)$ என்பதை x ஆற் குறிப்பின், x என்பது இரு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையால் தரப்படலாம் எனக் காட்டுக. இவற்றுள் ஒன்று $(bu-av)^2$ ஆகும்.

$x=0$ ஆயின் $u = \frac{a}{a^2+b^2}$ எனவும்

$v = \frac{b}{a^2+b^2}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n உம் முடிவிலி உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை S உம் ஆகும்.

$\sum_{n=1}^{\infty} (S - S_n) = KS$ ஆயின், பொது விசிதத்தைக் K இல் காண்க.

28. (i) ஒரு பெருக்கல் விருத்தியில் அடுத்துவரும் 5 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை; நடு உறுப்பின் வர்க்கத்தின் 20 மடங்காகும் 5 உறுப்புக்களினதும் பெருக்கம் 80 ஆகும். நடு உறுப்பைக் காண்க.

(ii) 2cm; நீளமான ஒரு ஆணி சம்மட்டியினால் மரத்தினுட் செலுத்தப்படுகின்றது. முதலாவது அறைதல் $1\frac{1}{2}$ cm உட் செலுத்த அடுத்துவரும் அறைதல்கள் முன்னையதிலும் $\frac{2}{5}$ ஐ உட்செலுத்துகிறது. [கடைசி அறைதலுக்கு தூரம் போதாது] எத்தனை அறைதல்கள் (blows) உபயோகிக்க வேண்டும் எனக் காண்க.

அறைதல்கள் குறைக்கப்பட்டு அடுத்துவரும் தூரங்களின் விசிதம் ஒரேயளவாக நிலைப்படுத்தப்பட்டால், இறுதியாக முழுவதும் உட்செல்லும்படி முதலறைதலில் செலுத்த வேண்டிய ஆகக்குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

29. (i) S_n, S_{2n}, S_{3n} என்பன முறையே ஒரு பெருக்கல் 'நீருத் தியின் முதல் $n; 2n; 3n$; உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையாயின் $S^2_{2n} - S_n S_{2n} + S^2_n = S_n S_{3n}$ என நிறுவுக.

(ii) $\frac{1-7x}{(1+x)(1-3x)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக்குக.

x இன் ஏறுவரிசையிலுள்ள இவ்விரிவின் x^r இன் குணகத்தைக் காண்க. இக் குணகம் a_r இனால் குறிக்கப்படின்,

$$\frac{a_s + 1 - a_s}{a_s + 1 - a_s - 1} = 3 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இங்கு ($s > 0$) என்பது யாதுமொரு முழுவெண்.

30. $(2r+1) 3^r$ ஐ r ஆவது உறுப்பாகக் கொண்டுள்ள தொடரின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

[உதவி; தொடர் ஒரு கூட்டற் பெருக்கத்தொடர் [Arithmetico Geometric Progression) ஆகும். கூட்டுத்தொகையைக் காணும் முறை ஒரு G. P இற்குச் சூத்திரத்தைப் பெறுவது போன்றதாகும்.]

31. x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்.

$f(x) - f(x-1) = (2x-1)^4$ ஆயின், குணகங்கள் A, B, C என்பவற்றை காண்க. இங்கு $f(x)$ என்பது $Ax^5 + Bx^3 + Cx$ என்ற பல்லுறுப்புச் சார்பால் தரப்படுகிறது.

முதல் n ஒற்றை நேர்முழுவெண்களின் 4 வது அடுக்குகளின் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

32. (a) a, b, c என்பன மெய்யெண்களாகவும் $a \neq 0$ ஆகவும் இருக்க $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ எனின் $f(x)$ ஆனது ஒன்றில் $a[(x-p)^2 + q^2]$ ஆகவோ, அன்றி $a[(x-p)^2 - r^2]$ ஆகவோ எடுத்துரைக்கப்படலாம் எனக் காட்டுவதோடு, இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக. இங்கு p, q, r என்பன மெய்யெண்களாகும். $b^2 - 4ac = 0$ ஆகும்போது யாது நிகழும்?

(b) $f_1(x) \equiv -x^2 + 2x + 3$ என்பதை மேற்கூறப்பட்ட வடிவங்களுள் ஒன்றில் எடுத்துரைத்து, இதிலிருந்து $y = f_1(x)$ எனும் சார்பின் வரைபைப் பரம்படிபாக வரைக. $f_1(x)$ இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தை இப்படத்திலே தெளிவாகக் குறித்துக் காட்டுக.

(c) (i) $d > 5$ இற்கும் (ii) $d < 5$ இற்கும் $y = f_2(x) \equiv x^2 - 2x + d$ என்பதன் வரைபுகளை மேலுள்ள அதே படத்திற் பரும்படியாய் வரைக. $f_1(x) = f_2(x)$ எனும் இருபடிச் சமன்பாடானது $d > 5$ ஆயிருக்கையில் மெய் மூலங்கள் எதனையும் கொண்டிருக்கவில்லையெனவும் $d < 5$ ஆயிருக்கையில் இரு மெய்யான வேறு வேறான மூலங்களைக் கொண்டிருக்குமெனவும் உய்த்தறிக. $d = 5$ ஆயிருக்கையில் யாது நிகழும்?

[$y = f(x)$ என்பதன் வரைபானது y - அச்சுக்கு சமாந்தரமான அச்சினைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பரவளைவாகுமெனக் கொள்ளப்படலாம்]

33. (i) $\sum_{r=0}^{\alpha} (2x+1)^r$ எனும் தொடர் ஒருங்கும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. தொடரின் கூட்டுத்தொகையை x இல் காண்க

(ii) $\ln(1+x)$ இன் விரிவை சுருத்திற் கொள்வதால்

$\ln 11$ யைக் 5 தசமதானத்திற்குக் காண்க.

$\ln 10 = 2.302585$ எனக் கொள்க.

34. x இன் எப்பெறுமானங்கட்கு

$$(i) \sum_{r=0}^{\alpha} (1-x)^r$$

எனும் தொடரானது ஒருங்கவல்லது இத்தொடர் ஒருங்கும் போது அதன் கூட்டுத்தொகை ஆகும்.

மேலே கணித்த பெறுமான வீச்சினுள் x இன் எல்லா பெறுமானங்கட்கும் $S > a$ எனத் தரப்படுமாயின் a இன் உயர் பெறுமானம் என்ன?

(ii) $\ln(1+x)$ இன் விரிவை சுருதுவதன் மூலம் $|x| < 1$ ஆயின்

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)}$$
 என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\ln\left(\frac{11}{9}\right)$ இன் பெறுமானத்தை 5 தசம தானத்திற்கு காண்க.

35. ஒரு பெருக்கற்றொடரும் ஒரு கூட்டற்றொடரும் ஒரே முதலாம் உறுப்பை தொண்டுள்ளன. கூட்டற்றொடரின் பொதுவித்தியாசம் r ஆனது பெருக்கற்றொடரின் பொதுவிகிதத்திற்கு சமனாகும். கூட்டற்றொடரில் முதல் எட்டு உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையானது பெருக்கற்றொடரின் முதலாம், மூன்றாம் உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையினது 5 மடங்காகும். பெருக்கற்றொடரின் 5 ம் உறுப்பு $-r$ எனின் r ஐயும் முதலாம் உறுப்பையும் காண்க.

இப் பெருக்கற்றொடரானது ஒருங்குமெனக் காட்டி அதன் முடிவிலி கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

36. (i) ஒரு பெருக்குத்தொடரின் முதலுறுப்பு x பொது விகிதம் $\frac{x}{1+r}$ இது ஒருங்கு தொடராக இருக்க x இன் பெறுமான விச்சைக் காண்க. $x = \frac{1}{2}$ எனின் முடிவிலி உறுப்பு கூட்டுத்தொகையிலும் 10^{-5} இலும் குறைந்த பெறுமானத்தால் வித்தியாசப்படக்கூடியதாக முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை அமைய, மிகச் சிறிய எண் n ஐக் காண்க.

(ii) $\sum_{n=1}^{100} (-1)^n n^2$ யை கணிக்க.

37. (i) ஒரு தொடரின் r ஆம் உறுப்பு $(r+1)(r+4)$; முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $S_n = \frac{1}{3}n(n+4)(n+5)$ எனநிறுவுக

(ii) $p(x) \equiv \frac{3x}{(1+x)(1-2x)}$ ஐ பகுதிப்பின்னங்களாக உணர்த்துக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $p(x)$ ஐ x இன் அடுக்குகளில் x^3 இன் உறுப்பு வரை விரிக்க,

(iii) $e^{3x} - 2e^x - 3e^{-x} = 0$ ஐ தீர்க்க.

38. (i) $\sum_{r=1}^n 1(r+4)$ யைக் காண்க.

(ii) ஒரு பெருக்கற்றொடரின் முதலுறுப்பு $\frac{x-9}{x+5}$, பொது விகிதம் $\frac{x+5}{x-9}$, இங்கு $x \neq 9$, $x \neq -5$ ஆகும்.

(a) தொடரின் சகல உறுப்புகளும் நேராக இருக்க x இன் பெறுமானங்களை காண்க.

(b) இத்தொடர் ஓர் ஒருங்கு தொடராக அமையும் x இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு இதன் முடிவின் கூட்டுத் தொகையை x இன் சார்பாகத் தருக.

39. (i) $\sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$ என நிறுவுக.

(ii) $x \neq 1$ ஆகையில் $1+x+x^2+\dots+x^n$ இன் கூட்டுத் தொகையை காண்க. வகையீட்டை உபயோகிப்பதால் அல்லது வேறுவிதமாக $1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$ இன் கூட்டுத்தொகையை கண்டு $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$ இன் கூட்டுத்தொகையை உய்த்தறிக.

40. (i) $f(x)$ எனும் பல்லுறுப்பி $(x-a)^2$ இனால் வகுக்கப்பட வரும் மீதி $f(a)$, $f'(a) = 0$ என நிறுவுக.

(ii) $(n+1)^3 \equiv An(n-1)(n-2) + Bn(n-1) + Cn + D$ எனில் A, B, C, D யைக் காண்க.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!}$ யை e இன் சார்பில் காண்க.

41. $\frac{2r+3}{r(r+1)} - \frac{2r+5}{(r+1)(r+2)} \equiv \frac{2(r+3)}{r(r+1)(r+2)}$

என காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக கீழுள்ள தொடரில் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n ஐ காண்க.

$$\frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{10}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{12}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{2(n+3)}{n(n+1)(n+2)}$$

$n \rightarrow \infty$ ஆக S_n இன் எல்லைப் பெறுமானம் S ஐ காண்க.

42. (i) கணித தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறுவழியால் நிறுவுக.

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

(ii) $f(r) = \log \left(1 + \frac{1}{r} \right)$ ஆயின்

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = f \left(\frac{1}{n} \right) \text{ என நிறுவுக.}$$

(iii) தொகுத்தறி முறையால் அல்லது வேறு முறையால்
 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + \dots + n(n+1)(2n+1)$
 $= \frac{n}{2}(n+1)^2(n+2)$ என நிறுவுக.

43. (i) $\frac{3r+1}{r(r-1)(r+1)}$ ஐ பகுதிப்பின்னங்களாக தருக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$$\sum_{r=1}^n \frac{3r+1}{r(r+1)(r-1)} = \frac{5}{2} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$$
 எனக் காட்டுக.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறுவழியாக n என்பது ஒரு நேர் முழு எண்ணாயின்

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
 என காட்டுக.

44. $2+4x+8x^2+\dots+2^n x^{n-1}+\dots$ என்பது ஒருங்கு தொடராக x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இத் தொடர் $x+2$ இலும் பெரிதாகவும் ஒருங்கு, x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 0$$
 ஐ தீர்க்க.

45. (a) ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை S_n எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$(q-r) \frac{S_p}{p} + (r-p) \frac{S_q}{q} + (p-q) \frac{S_r}{r} = 0$$

என நிறுவுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக $p+q=2r$ எனின்

$$\frac{S_p}{p} + \frac{S_q}{q} = 2 \frac{S_r}{r}$$
 என காட்டுக.

(b) $\frac{\sin B}{\sin A} \frac{\sin C}{\sin B} \frac{\sin(B-C)}{\sin(A-B)} + \frac{\sin C}{\sin A} \frac{\sin A}{\sin B} \frac{\sin(C-A)}{\sin(A-B)} = -\frac{\sin(B-C)}{\sin(A-B)} \frac{\sin(C-A)}{\sin(A-B)}$

46. (a) முதல் உறுப்பை 2 ஆகவும், n உறுப்பை 32 ஆகவும் உடைய கூட்டல் விருத்தியின் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 357. 'n' ஐக் காண்க.

இத்தொடரின் r வது உறுப்பு மிகச் சிறியதாகவும் 100 இலும் அதிகமாகவும் இருப்பின் 'r' ஐக் காண்க.

- (b) ஒரு பெருக்கல் விருத்தியின் முதலுறுப்பு a உம் பொது விகிதம் r உம் ஆகும். முதல் n உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை S_n உம் ஆகும். இக் கூட்டுத்தொகை முடிவிலியாவதற்கு r இன் வீச்சைக் கண்டு இக் கூட்டுத்தொகையின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$a > 0$, $r = 0.8$ எனவும் தரப்பட்டால், S_n முடிவிலிக் கூட்டுத்தொகையின் 99% இலும் அதிகமாவதற்கு, n இன் மிகக்குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

47. (a) ஒரு கூட்டல் விருத்தியின் முதலுறுப்பு 13 ஆகவும், முதல் 10 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை -5 உம் ஆகும். பத்தாவது உறுப்பையும், பொது விகிதமாகத்தையும் காண்க.

- (b) $1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \dots$ என்ற பெருக்கற்தொடரில் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை, முடிவிலிக் கூட்டுத்தொகையின் 99.99% இலும் பெரிதாக இருக்குமாறு மிகக் குறைந்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையைத் தருக.

48. நேர்முழு எண்கள் பின்வருமாறு அடைக்கப்பட்டுள்ளன.

(1), (2, 3), (4, 5, 6) -----,

இங்கு r முழுவெண்கள், r வது அடைப்புக்குள் உள்ளது r வது அடைப்பின் முதலும் கடைசி உறுப்பிற்கும் கோவையைப் பெறுக.

முதல் 20 அடைப்புக்களிலுள்ள முழுவெண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

r வது அடைப்புக்குள் இருக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{2}(r^2 + 1)$ என நிறுவுக.

[முதல் n நேர் முழுவெண்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{1}{2}n(n+1)$ ஆக எடுக்கப்படலாம்]

49. (i) ஒரு பெருக்கல் தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை முதலாம் உறுப்பின் k மடங்கிற்குச் சமனாகும் k இன் சாத்தியமான பெறுமானத் தொடையைக் காண்க. முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 16 ஆகவும் முதல் 9 உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை 21 ஆகவும் இருப்பின் இத் தொடரின் முடிவி வரைக்கான கூட்டுத்தொகை யாது?

(ii) இத் தொடரின் r ஆனது 1 இற்குச் சமனில்லை எனின் தொடர் $a + 2ar + 3ar^2 + \dots + nar^{n-1}$ இன் கூட்டுத்தொகை

$$\frac{a(1-r^n)}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{(1-r)}$$
 எனக் காட்டுக.

50. (i) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2r-1}}{2r-1} + \dots$ எனக் காட்டுக.

இவ்விரிவு உண்மையாய் இருக்கும் x இன் பெறுமான வீச்சைத் தருக.

(ii) இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாகவோ $y > 0$ எனின்

$$\ln \sqrt{\left(\frac{y+1}{y}\right)} = \frac{1}{(2y+1)} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \dots$$

என பொது உறுப்பை எழுதி நிறுவுக.

இத் தொடரின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை உபயோகித்து $\ln \sqrt{1.5}$ என்பதன் பெறுமானத்தை 5 தசமதானம் வரை காண்க.

51. (i) பின்வரும் தொடரின் கூட்டுத்தொகை காண்க.
 $2 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 8 \cdot 10 + \dots + (3n-1)(3n+1)$

(ii) $1-x^3 \equiv (1-x)(1+x+x^2)$ எனும் சர்வ சமன்பாட்டை உபயோகித்து அல்லது வேறுவழியாக $\ln(1+x+x^2)$ இன் ஏறும் அடுக்கின் விரிவில் x இன் முதல் நான்கு பூச்சியமல்லாத உறுப்புகள்

$$x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$
 எனக் காட்டுக.

x^n இன் குணகத்தை n ஆனது (a) 3 ஆல் பிரிபடும்போது (b) 3 ஆல் பிரிபடாதபோது காண்க.

(iii) $n(n+1) \equiv (n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து $n \geq 3$ ஆகும்போது

$$\frac{n(n+1)}{1(n-1)} = \frac{1}{1(n-3)} + \frac{4}{1(n-2)} + \frac{2}{1(n-1)}$$

எனவும் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக

$$1.2 + \frac{2.3}{1!} + \frac{3.4}{2!} + \dots + \frac{n(n+1)}{(n-1)!} + \dots$$

எனுந்தொடரின் முடிவினை வரைக்கான கூட்டுத்தொகையைப் பெறுக.

52. (i) $\sum_{r=1}^n \frac{3r+1}{r(r-1)(r+1)}$ ஐ பகுதிப்பின்பின்னங்களாக தருக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$$\sum_{r=1}^n \frac{3r+1}{r(r+1)(r-1)} = \frac{5}{2} - \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$$

எனக் காட்டுக.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறுவழியாக n என்பது ஒரு நேர்முழு எண்ணுயின்

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

53. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ என்னும் தொடர்கள்

ஒருங்குவன. ஒன்றின் கூட்டுத்தொகை மற்றையதன் இரு மடங்காயின் x இன் பெறுமானம் யாது?

(ii) பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

$$(a) \sum_{r=1}^{10} \frac{10!}{(10-r)!r!} \quad (b) \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r(r+2)}$$

54. $S_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ எனின்

$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(2n+1)(n+2)}$ என நிறுவுவதற்குக் கணிதத்

தொகுத்தறிவைப் பயன்படுத்துக.

$S'_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)}$ எனில்

$\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$ என எழுதுவதால் S'_n ஐக் காண்க

p, q என்பன ஒருமைகளாயிருக்க

$S''_n = \sum_{r=1}^n \frac{pr+q}{r(r+1)(r+2)}$ எனின்

$S''_n = p \left[S_{n+1} - \frac{1}{2} \right] + qS_n$ என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து, p, q என்பனவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் மேலே குறிப்பிடப்பட்ட கடைசித் தொடரானது ஒருங்குமேனக் காட்டி முடிவிலிவரைக்குமான அதன் கூட்டுத்தொகையை யுங் காண்க.

55. (i) $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ எனின் $u_n - u_{n+1}$ ஐச் சுருக்குக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^n \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ ஐக் காண்க.

இத்தொடரின் முடிவிலி வரைக்குமான கூட்டுத்தொகையை உய்த்தறிக.

(ii) $\frac{6-7x}{(1-x)(2-x)}$ என்பதைப் பகுதிப் பின்னங்களில் தருக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு முறையிலோ

$\frac{6-7x}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ எனக் காட்டுக.

இங்கு, $a_n = 2^{2-n} - 1$ ஆகும்.

x இன் எந்தப் பெறுமானங்களுக்கு இவ்விரிவு வலிதானதாக இருக்குமெனக் கூறுக.

56. (i) n ஒரு நேர் முழுவெண்ணாகவும் $f(n) = 3^{2n} + 7$ ஆகவும் இருப்பின், $f(n+1) - f(n)$ ஆனது 8 இனம் செப்பமாகப் பிரிக்கப்படலாமெனக் காட்டுக.

(ii) $-1 < a < 1$ ஆக இருக்க $n \rightarrow \infty$ ஆகும்போது $na^n \rightarrow 0$ ஆக இருப்பின், $n \rightarrow \infty$ ஆகும்போது $a^n \rightarrow 0$ ஆகும் என்பதை உய்த்தறிக.

$-1 < a < 1$ ஆகவும் $u_r = a^{r-1}$ ஆகவும் இருப்பின் $\sum_{r=1}^n u_r$ ஐக் காண்பதோடு இது ஒருங்குமெனவும் காட்டுக.

மேலும் $V_r = ra^{r-1}$ ஆக இருப்பின், $(1-a) \sum_{r=1}^n V_r =$

$-\sum_{r=1}^n U_r - na$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து, $\sum_{r=1}^n V_r$ என்பதும் ஒருங்குமெனக் காட்டி,

அதன் முடிவிலிவரைக்குமான கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

57. $U_r \equiv f(r+1) - f(r)$ எனின், $\sum_{r=1}^n u_r = f(n+1) - f(1)$ என நிறுவுக.

(i) பொருத்தமான λ விற்கு $f(r) \equiv \lambda \frac{4r+1}{r(r+1)}$ என எடுத்து

$\sum_{r=1}^n \frac{2r+1}{r(r+1)(r+2)}$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்குமென நிறுவி முடிவிலிக்கான அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) பொருத்தமான μ விற்கு $F(r) \equiv \mu(r-1)r(r+2)$ என எடுத்து

$\sum_{r=1}^n r(3r+5)$ ஐக் காண்க. இத்தொடர் ஒருங்குவதில்லையென நிறுவுக.

(iii) $U_r \equiv$ கோசை $(0+r-\alpha)$ எனின், $2 \left(\text{சைன் } \frac{\alpha}{2} \right) U_r \equiv f(r+1) - f(r)$ ஆக இருக்குமாறு $f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து, α ஆனது 2π யின் ஒரு மடங்காக இராதபோது

$\sum_{r=1}^n U_r$ ஐக் காண்க.

58. (i) $f(r) \equiv \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r}{6}$ ஆயின் $f(r) - f(r-1) \equiv r^2$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^n r^2$ ஐக் காண்க.

எல்லா நேர் முழுவெண் n இற்கும் $\sum_{r=1}^n r(7r-1) =$

$\sum_{r=1}^{2n} r(r+1)$ என நிறுவுக.

(ii) $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ ஆயின், கணிதத் தொகுத் தறிவைக் கொண்டு.

$\sum_{r=1}^n U_r = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து, (அ) $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றது என்பதையும்

(ஆ) எல்லா நேர் முழுஎண் n இற்கும்

$\frac{1}{6} \leq \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} < \frac{1}{4}$ என்பதையும் உய்த்தறிக.

சார்புகளின் நடத்தைகளும் சமன்பாடுகளின் மூலங்களும்

1. (i) $b^2 - 4ac < 0$ ஆகவும் $a > 0$ ஆகவும் இருப்பின், x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c$ நேரானது எனக் காட்டுக.
 - (ii) $p < -1$ எனின், பொருத்தமான x இன் பெறுமானங்களுக்கு $\frac{x+1}{(x-p)(x-1)}$ யாதுமொரு தரப்பட்ட பெறுமானத்தை எடுக்கும் எனக் காட்டுக.
2. a, b, c இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$ என்ற சமன்பாடு, x இற்கு மெய்மூலங்களைத் தரும் என நிறுவுக.
 - (a) இரு மூலங்களும் நேராக இருப்பதற்கு
 - (b) இரு மூலங்களும் எதிர்க்குறிகளையுடையதாய் இருப்பதற்கு
 - (c) இரண்டும், பொருந்தும்மூலங்களாக இருப்பதற்கு
 - (d) இரு மூலங்களும் 1 இலும் குறைவாக இருப்பதற்கு தேவையான நிபந்தனைகளைக் கூறுக.
3. (i) α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $\alpha^2 + a, \beta^2 + b$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை, அதன் குணகங்கள் a, b, c இல் இருக்கத்தக்கவாறு காண்க.
 - (ii) $a < -2$ அல்லவா $a > 1$ ஆயின், x இன் வித்தியாசமான இரு பெறுமானங்களுக்கு, $\frac{ax+1}{(x+1)(2x-1)}$ என்பது யாதுமொரு உண்மைப் பெறுமானத்தை எடுக்கும் என நிறுவுக.
4. (i) $1 + \left(\frac{x}{x-1}\right) + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{x-1}\right)^n$ என்னும் முடிவித் தொடர் ஒருங்குவதற்கான x இன் பெறுமான வீச்சங்களைக் காண்க.
 - (ii) $a > 4$ எனின் $\frac{x^2-4}{x-2}$ என்பது, x இன் வேறுவேறான இரு பெறுமானங்களுக்கு யாதுமொரு தரப்பட்ட பெறுமானத்தை எடுக்கும் எனக் காட்டுக. $a < 4$ எனின், குறிக்கப்பட்ட இரு பெறுமானங்களுக்கிடையில் யாதுமொரு, பெறுமானத்தையும் சார்பு அடையாதெனக் காட்டுக.

5. $a > 0$, $4ac > b^2$ ஆகினால் மட்டும், x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $ax^2 + bx + c > 0$ ஆகும் என நிறுவுக.

A, B, p, q என்பன மெய்யொருமைகளாகவும், $AB > 0$ ஆகவும் $p \neq q$ ஆகவும் இருப்பின், $\frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q}$ என்பது, x இல் இரு வித்தியாசமான பெறுமானங்களுக்கு ஒவ்வொரு பூச்சியமில்லாத பெறுமானத்தை அடையும் எனக் காட்டுக.

6. (i) $\frac{4x}{x^4 - 1} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ ஆயின், A, B, C, D என்னும் ஒருமைகளைக் காணலாமெனக் காட்டுக.

(ii) $E = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x + 7$ ஆயின், $E = (x^2 + px + q)^2 + (x^2 + px + q) + r$ ஆகும் வண்ணம் p, q, r எனும் ஒருமைகளைக் காணலாமெனக் காட்டுக.

x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும், E நேரானதென உய்த்தறிக.

7. (i) α, β என்பன, $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $\alpha^2 + \beta^2 = (b^2 - 2ac) / a^2$ எனக்காட்டுக. $(\alpha^3 + \beta^3)$, $(\alpha^5 + \beta^5)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ என்னும் சார்பு x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு, குறிக்கப்பட்ட வீச்சில் உள்ளவற்றைத் தவிர்ந்த ஏனைய மெய்ப்பெறுமானங்களை எடுக்கும் எனக் காட்டுக.

8. (i) $t + \frac{1}{t} = T + \frac{1}{T}$ ஆயின், $t = T$ அல்லது $t = \frac{1}{T}$ என நிறுவுக. α, β என்பன $px^2 + qx + r = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். $\alpha/\beta = \lambda$ ஆயின், $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{q^2 - 2pr}{pr}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $a_1 b_2^2 c_1 = a_2 b_1^2 c_2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், α_1, β_1 என்பன $a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினதும் α_2, β_2 என்பன $a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டினதும் மூலகங்கள் எனின் $\alpha_1 / \beta_1 = \alpha_2 / \beta_2$ அல்லது β_2 / α_2 என நிறுவுக.

9. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ஆகவும், a, b, c என்பன உண்மையாகவும் $a \neq 0$ ஆகவும் இருப்பின், $af(-b/2a) \leq 0$ என்பதற்கேற்ப $f(x) = 0$

என்பதன் மூலங்கள் உண்மையானவையும் வேறு வேறுனவையும், உண்மையானவையும் பொருந்துவனவும்; கற்பனையானவையாகவும் ஆக இருக்கும் எனக் காட்டுக. $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் நேர்மெய் ஆயின்,

(i) $2a^2x^2 + b^2 + 2abx - 2ac = 0$ இன் மூலங்கள் உண்மை பொருந்துவன அல்லது கற்பனை எனவும்,

(ii) $a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவையும் எதிர் அல்லாதனவும் என்றும் நிறுவுக.

10. α, β என்பன $x^2 + px + q = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இதில் p, q என்பன உண்மை எண்கள் $y = \alpha + \beta^2$; $\mu = \beta + \alpha^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

α, β என்பன கற்பனையானவையாயின், $p = -1$ ஆயினால் மட்டும்தான் λ உம் μ உம் உண்மையாகும் என நிறுவுக. இவ்வகையில் $\mu = \lambda = 1 - q$ எனவும் நிறுவுக.

11. a, b, q என்பவை மெய்யானவையாயின் $(x-a)(x-b) - p^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எப்போதும் மெய்யானவை என நிறுவுக.

$f(x) = (x-a)(x-b) + p^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவையாக இருக்கத்தக்கதாய் p இலுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க. α, β என்பன $f(x) = 0$ இனது மூலங்களாயின், $\alpha + 2\beta, \beta + 2\alpha$ என்பவற்றினை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $(x-a-2b)(x-b-2a) + p^2 = 0$ ஆகுமென நிறுவுக.

12. $q^2 > 4pr$ எனின், $(ax^2 + bx + c) / (px^2 + qx + r)$ என்னும் சார்பு x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும், எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் அல்லது, x இன் குறிக்கப்பட்ட வீச்சைத் தவிர்த்த ஏனைய மெய்ப் பெறுமானங்களையும் எடுக்கும் எனக் காட்டுக.

$q^2 > 4pr$ எனின், x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு சார்பு ஒரு குறிக்கப்பட்ட வீச்சில் உள்ள மெய்ப் பெறுமானங்களை மட்டுமே எடுக்கும் எனக் காட்டுக.

$x/(x^2-1), 1/(x^2-1), 1/(x^2+1)$ என்பதன் வரைபடங்கள் மூலம் உமது விடையை விளக்குக.

13. p, q என்பவை மெய்யானவையும் $q \neq 0$ ஆயும் இருக்க $p + iq$ என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் மெய்யான இருபடிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாயின், $p - iq$ என்பதும் அச்சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும் என நிறுவுக.

α என்பது $x^2 + 2x + 2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் $-1 + i$ என்னும் மூலமாயும்; β என்பது மற்ற மூலமாகும். α, β என்பவற்றின் மட்டுகளையும் விச்சங்களையும் காண்க.

$\alpha, \beta, -i\alpha, -i\beta$ என்னுஞ் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை ஆகண் வரிப்படத்திற் குறிக்க, இப்புள்ளிகள் சதுரமொன்றின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

p, q, r என்பவை மெய்யான ஒருமையாகவும் $p < q$ ஆகவுமிருக்க, $y = \frac{(x-p)(x-q)}{x-r}$ ஆகும் $p \leq r \leq q$ எனின் x ஆனது

மெய்ய் பெறுமானங்களுடாக மாறும்போது y ஆனது எல்லா மெய்ய் பெறுமானங்களையும் எடுத்துக் கொள்ளுமென நிறுவுக. r ஆனது இவ்விச்சினுள் இருக்கவில்லை எனின், y இனது பெறுமானங்களின் வீச்சைத் துணிக.

$p=1$ ஆயும் $q=4$ ஆயும் $r=5$ ஆயும் இருக்கும்போது y இனது வரைபினைப் படிப்படியாக வரைக.

14. (i) சமன்பாடு $2x^2 - qx + r = 0$ என்பது α, β என்ற மூலங்களைக் கொண்டிருப்பின், q, r என்பவற்றை b, c இல் காண்க. இங்கு α, β என்பன $x^2 - bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்களாகவும் $\alpha \geq \beta$ ஆகவும் உள்ளது. $\alpha = \beta$ ஆகும்போது $q^2 = 4(2r+1)$ எனக் காட்டுக.

(ii) a, b இரண்டும் நேரானவையாகவும் சமனற்றவையாகவும் $m_{a^2} b + m_{b^2} a^2 = 3$ எனவும் தரப்பட்டால் b ஐ a இல் காண்க.

15. (i) α, β என்பன இரண்டும் நேராகவும், α^2, β^2 என்பன $x^2 - bx + c = 0$ இன் மூலங்களாகவும் இருப்பின், (இங்கு $b > 2c > 0$) α, β ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை காண்க.

(ii) $px^2 - 8x + p - 6 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவையாயின் p இன் வீச்சங்களைக் காண்க.

$x^2 - px + p = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களும் மெய்யானவையாயின், p இன் புதிய வீச்சங்களைக் காண்க.

16. சமன்பாடு $ax^3+bx^2+cx+d=0$ இன் ஒரு மூலம் மற்ற இரண்டினதும் கூட்டுத்தொகையின், $b^3 = 4a(bc - 2ad)$ என நிறுவுக. $36x^3+12x^2 - 11x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

17. (i) x மெய் எனவும் $y = \frac{4(x^2+1)}{4x-3}$ எனவும் தரப்பட்டால் y இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.
 $y=mx$ என்ற கோடு, $y = \frac{4(x^2+1)}{4x-3}$ என்ற வளையிற்றுக்குத் தொடலியாயின் m இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $(1+mL-10y)mL-x = 10 = 1$ } என்ற ஒருங்கமை சமன்
 $2xy=5$ } பாடுகளைத் தீர்க்குக.

18. p, q, r என்பன சமன்பாடு $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ இன் மூலங்களாயின் a, b, c இற்கு p, q, r இல் கோவைகளைப் பெறுக.

மூலங்கள் பெருக்கல் விருத்தியில் இருப்பின் $p=q/k, r=kq$ எனப் பிரதியீடுசெய்து a, b, c களுக்கிடையில் இருக்கக்கூடிய தொடர்பைப் பெறுக. இத்தொடர்பை சமன்பாடு $40x^3-78x^2+39x-5=0$ ஐத் தீர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்துக.

19. x மெய்யாகவும், $y = \frac{x+\lambda}{(x+2)(x+3)}$ ஆகவும் இருப்பின் $\lambda = 1$ ஆகும்போது y என்பது $3-2\sqrt{2}$ இற்கும் $3+2\sqrt{2}$ இற்கும் இடையில் இருக்காதெனக் காட்டுக. λ இன் இப்பெறுமானத்துடன் y நேராவதற்கு x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

y எவ்வா நேர்ப்பெறுமானங்களையும் கொள்வதற்கு, λ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

20. (i) α, β என்பன $ax^2-bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின், $\alpha + \frac{1}{\alpha}, \beta + \frac{1}{\beta}$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைப் பெறுக.

(ii) $x-4 < x(x-4) \leq 5$ ஆவதற்கு x இன் வீச்சுக்களைக் காண்க.

21. x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $\frac{x+3}{(x-1)^2}$ என்ற கோவை எடுக்கும் பெறுமானங்களின் தொடரைக் காண்க.

$y = \frac{x+2}{(x-1)^2}$ என்பதன் வரைபை பருமட்டாக வரைந்து

(a) x என்பது $+1$ இற்குச் சமீபத்தில், (b) x என்பது பெரிதா கவும் நேராகவும் உள்ளபோது, (c) $x < -2$ ஆக உள்ள போது, சார்பின் நடத்தையைத் தெளிவாகக் காட்டுக.

22. x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு,

$$\left| \frac{1-x^3}{x^6-2x^3+5} \right| \leq \frac{1}{2} \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு தீர்க்க.

$$\left| \frac{x+2}{x-2} \right| + \left| \frac{x-2}{x+2} \right| > 1$$

23. $x^4 - 2x^3 - 18x^2 + px + 45 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் நான்கு மூலங்களில் இரண்டு சமனும் எதிரும் (α உம் $-\alpha$ உம்) என அறியப்பட்டுள்ளது. மற்ற இரண்டும் $1+\beta$, $\beta-1$ என்ற வடிவில் உள்ளன எனக் காட்டுக. α இனதும் β இனதும் சாத்தியமான பெறுமானங்களையும், p இன் இரு சாத்தியமான பெறுமானங்களையும் காண்க.

24. x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு சார்பு $\frac{(x+1)^2}{x^2+2}$ என்பது 0 இற்கும் $\frac{3}{2}$ இற்கும் இடையில் இருக்குமென நிறுவுக. x முடிவிலிக்கு அணுக. சார்பின் எல்லையையும் காண்க.

இதன் வரைபடத்தைப் பருமட்டாக வரைந்து அணுகு கோடுகளின் பொருட்டு இதன் நடத்தையையும் தெளிவாகக் குறிப்பிடுக.

25. $y = \frac{ax}{x^2+x+1}$ ($a > 0$) ஆயின்,

x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு, $-a \leq y \leq \frac{1}{3}a$ எனக் காட்டுக. $a=6$ ஆயின், y இன் வரைபடத்தை பருமட்டாக வரைக.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்வரைபை வரைவதன் மூலம், $x^3-1=6x$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு மூன்று மெய் மூலங்கள் (இரண்டு நேர் ஒன்று எதிர்) உண்டெனக் காட்டுக.

26. $f(x) \equiv (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)$ ஆயின் இங்கு $c < b < a$. $f(x)$ இன் குறிமற்றத்தைக் கருதுவதன் மூலமோ

அல்லது வேறு வழியாகவோ $f(x)=0$ என்ற சமன்பாடு இரண்டு மெய்யான, வேறுவேறான (p உம், q உம் என்க) இரு மூலங்களைக் கொண்டிருக்க மெனக் காட்டுக.

$p+q$ இற்கும், pq இற்கும் a, b, c இல் கோவைகளை எழுதுக. பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) p, b, q , என்பன கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின், c, b, a என்பன கூட்டல் விருத்தியில் இருக்கும் எனவும், $f(a)=f(c)=-2f(b)$ எனவும்

(ii) c, b, a என்பன பெருக்கல் விருத்தியில் இருப்பின் $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ என்பன கூட்டல் விருத்தியில் இருக்கும்.

27. α, β என்பன $x^2-ax+b=0$ (a, b மெய்யானவை) எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின், $\alpha^2/\beta, \beta^2/\alpha$, என்பனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை உருவாக்குக. $\alpha^3/\beta, \beta/\alpha^3$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டை உய்த்தறிக.

$b^2(x^4+1)-14b(1+b^2)x(x^2+1)+(1+196b^2+b^4)x^2=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களெல்லாம் மெய்யானவை என்றும், எல்லாவற்றிற்கும் b இனது குறியே இருக்கும் எனவும் காட்டுக.

28. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2bxy$ என்னும் கோவையை $(lx-my+nz)^2+(py+rz)^2+sz^2$ என்னும் வடிவில் எழுதுவதன் மூலம் $a, b, c, bc-f^2, ca-g^2, ab-h^2, abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$ என்பன எல்லாம் நேராயின், கோவை எப்பொழுதும் நேராகும் எனக் காட்டுக. [$x=y=z=0$ என்ற சந்தர்ப்பத்தைத் தவிர்க்க.]

$x^2+2y^2+7z^2-2yz+3zx-2xy=0$ என்ற சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தும் x, y, z இன் எல்லா முழுவுண் பெறுமானங்களையும் காண்க.

29. (i) a, b, c என்பன நேர் ஒருமையாகவும் $ax^2 + 2bx + c = 0$ $bx^2 + 2cx + a = 0$ என்பவற்றின் மூலங்கள் எல்லாம் மெய்யானவையாகவும், சமனற்றவையாகவும் இருப்பின்,

$cx^2 + 2ax + b = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யானவையல்ல எனக் காட்டுக.

(ii) மட₁₀ $(3x+475/3x) = 2$ என்ற சமன்பாடு கூட்டுத் தொகையை மட₄₇₅ / மட₃ ஆகக் கொண்ட x இன் பெறுமானங்களுக்குத் திருப்திப்படுத்தும் எனக் காட்டுக.

30. (i) $ax^2+bx+c=0$ என்னும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்ற தன் வர்க்கத்தின் நேர்மாறாயின் $a^3+c^3+abc=0$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\frac{x^2}{x+2} + 2 \frac{x+2}{x^2} = 3$ ஐ இருபடிச் சமன்பாடாக உணர்த்தி முற்றாகத் தீர்க்குக.

31. $A^2 K^x$ என்னும் வடிவுடைய சார்பு, (இங்கு A உம், K உம் ஒருமைகள்) $x=2$ ஆகும்போது 6 ஐயும், $x=-2$ ஆகும்போது $3/32$ ஐயும் கொள்கிறது. K, A இனது பெறுமானங்களைக் கண்டு $x=-2$ இலிருந்து $x=2$ வரைக்கும் சார்பின் வரைபையும் பருமட்டாக வரைக.

வரைபின் உதவியாலோ அல்லது வேறு வழியாகவோ $2^{3x/2} - 2^{-(3x/2)} = 4$ என்ற சமன்பாட்டைச் சரிப்படுத்தும் x இன் அண்ணளவான பெறுமானத்தைக் காண்க.

32. (i) a, x இன் ஏதாவது மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு கோவை $(a^2+1)x^2-2a^2x+(a^2-1)$ இன் பெறுமானம் ஒருபோதும் -1 இலும் குறையாதெனக் காட்டுக.

(ii) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் p உம் q உம் சமனற்றவையாயின், $p+q^3=q+p^3$ ஆவதற்குரிய நிபந்தனையை a, b, c இல் காண்க.

33. α, β என்பன $x^2+px+q=0$ இன் மூலங்களாயின், α^2, β^2 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாலோ, α^4, β^4 ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

34. α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ இன் மூலங்களாகவும் $\alpha^n + \beta^n = \Delta_n$ ஆயின், (இங்கு n என்பது நேர்முழுவெண்) $a\Delta_{n+2} + b\Delta_{n+1} + c\Delta_n = 0$ எனக் காட்டுக.

35. $(x-1)^2 = \lambda(x-2\mu); (x-4)$ என்னும் சமன்பாடு சமமான மூலகங்களைக் கொண்டுள்ளது. λ இன் பூச்சியமில்லாத ஒரு பெறுமானத்திற்கு மட்டும் μ என்பது தரப்பட்ட யாதுமொரு பெறுமானத்தைக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக.

அத்துடன், μ இன் இரு பெறுமானங்களுக்கு [இவை $\lambda < 1$ இற்கு மட்டும் நேராகும்] λ பூச்சியமில்லாத யாதுமொரு தரப்பட்ட பெறுமானத்தைக் கொள்ளும் எனக் காட்டுக.

$\lambda = -15$ ஆயின், சமன்பாட்டின் சமமான மூலங்களின் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

36. (i) $x^2 - 6x + 7$ என்னும் கோவையின் பெறுமானம் ± 1 இற்குள் இருப்பின், x இனுடைய வீச்சுக்களை [Ranges] காண்க.

(ii) $3x^2 + 12xy + 7y^2 + K(x^2 + y^2)$ என்னும் கோவை x, y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் பூச்சியத்திலும் பெரிதாக இருக்கும் வண்ணம், K இன் மிகச்சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

37. $\frac{x^2 + 1}{x(x-1)}$ என்பதை y இன் சார்பாக உணர்த்துக. இங்கு $x-1 = xy$. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாலோ, இக் கோவை $-2 \pm \sqrt{2}$ இற்கு இடையில் இல்லாத பெறுமானங்களை மட்டுமே கொள்ளும் எனக் காட்டுக.

38. $a + b + c = 0$ ஆகவும், $bc + ca + ab + 3m = 0$ ஆகவும் இருப்பின் கோவை,

$$E = (x^2 + ax + m)(x^2 + bx + m)(x^2 + cx + m)$$

என்பது x இன் 3 அடுக்குகளின் (Index) பெருக்கத்தைத் தவிர்த்த ஏனைய அடுக்குகளைக் கொண்டிருக்காதென நிறுவுக.

$x^6 + 16x^3 + 64$ என்னும் கோவையின் ஒரு மூலம் $x^2 - 2x + m$ என்ற வடிவில் உள்ளது எனத் தரப்பட்டின், இதை E ஐப் போன்று மூன்று இருபடி மூலங்களாகப் பிரிக்குக. இதிலிருந்து $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் உய்த்தறிக.

39. (i) α உம் β உம், $ax^2 + 2x + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின், $(a^2\alpha^4 - b^2)(a^2\beta^4 - b^2)$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) x எந்த நேர்ப் பெறுமானத்தை எடுத்தாலும் $\frac{5x^2 + 8x + 5}{4x^2 + 10x + 4}$ என்பது ± 1 இற்கு இடையில் ஒரு போதும் இருக்காது என நிறுவுக.

40. (i) $ax^2+a^2x+1=0$, $bx^2+b^2x+1=0$ ஆகியவற்றிற்கு ஒரு பொது மூலம் உண்டெனின், இவற்றின் மற்றைய மூலங்கள், $abx^2+x+a^2b^2=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

(ii) x என்பது மெய்யாயின், $\frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ என்னும் கோவை 1 இற்கும் 2 இற்கும் இடையேயுள்ள மெய்ப்பெறுமானம் எதையேனும் கொண்டிருக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக.

41. (i) தொகுத்தறிவுமூலமோ அல்லது வேறு முறையிலோ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ என நிறுவுக.

(ii) ஆறு வெவ்வேறு பரிசுகளை மூன்று பிள்ளைகளுக்கிடையே, ஒவ்வொரு பிள்ளைக்கும் ஒரு பரிசாவது கிடைக்கக் கூடியதாக எத்தனை வழிகளில் பிரிக்கலாமெனக் காண்க.

42. a, b, c ஆகியன மெய்யாக இருக்க $f(x) \equiv ax^2+bx+c$ என்னும் கோவையை $f(x) \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்னும் வடிவத்தில் எப்போதும் எழுதலாமெனக் காட்டுக. இங்கு α, β , ஆகிய இரண்டும் (i) மெய்யாக அல்லது (ii) சிக்கலாக இருக்கும்.

a யை ஒரு நேர்மாதிரியாகக் கொண்டு, மேலே குறிப்பிட்ட இரு சந்தர்ப்பங்களை எடுத்துக் காட்டுவதற்கு வரைபுகள் வரைக. a ஒரு மறை மாறிலியாக இருக்கும்போது இவ்வரைபுகளில் ஏற்படும் மாற்றம் யாது?

$x=p$ ஆக இருக்கும்போது $f(x) > 0$ ஆகவும், $x=q$ ($q > p$) ஆக இருக்கும்போது $f(x) < 0$ ஆகவும் இருப்பின், $f(x) = 0$ என்னும் சமன்பாடானது இரு மெய்யான, வேறு வேறான மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும் என்பதையும் அவற்றுள் ஒன்றையொன்று மாத் திரம் p யிற்கும் q விற்றுகமிடையே இருக்கும் என்பதையும், மேலே எடுத்து நோக்கிய வரைபுகளைக் கொண்டு, அல்லது வேறு விதமாகக் காட்டுக.

$x^2+b_1x+c_1=0$, $x^2+b_2x+c_2=0$ என்னும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் முறையே α_1, β_1 உம் α_2, β_2 உம் ஆகும்.

$\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$ ஆயின் $f(x) \equiv 2x^2+(b_1+b_2)x+c_1+c_2=0$ என்னும் சமன்பாடானது இரு மெய்யான வேறுவேறான மூலகங்களைக் கொண்டிருக்குமெனக் காட்டுக.

41. (i) α, β என்பன $4x^2+5x+4=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

(அ) $\alpha^4 + \beta^4$ ஐக் கணிக்க. (ஆ) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) மீதித் தேற்றத்தையும் சமச்சீர் உடைமைகளையும் பயன்படுத்தி,

$$\begin{aligned} & a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4) \\ & = (b-c)(c-a)(a-b) [\lambda(a^2+b^2+c^2)+\mu(bc+ca+ab)] \end{aligned}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு λ, μ என்பன எண் மாறிலியாகும். λ, μ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

44. $k(x^2+x+1) = 2x+1$ எனும் சமன்பாட்டின் இருமூலங்களும், நேராயின் k இன் பெறுமானத்தொடையைக் காண்க.

45. (i) x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $f(x)=3x^2-5x-k$ என்பது 1 இற்கு கூடுதலாயிருக்கும் k இன் பெறுமானத் தொடையைக் காண்க.

(ii) k இன் எல்லாப் பெறுமானங்களிலும் $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $x = \frac{5}{6}$ ஆக விருக்கையிலேயே கிடைக்கும் எனக் காட்டுக.

46. (i) $ax^2+2bx+c=0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 4 இனால் வித்தியாசப்படி

$$8a=c \pm \sqrt{c^2+16b^2}$$

என நிறுவுக. $ax^2+2x+3=0$ என்பது 4 இனால் வித்தியாசப்படும் மூலங்களைக் கொண்டிருக்க a கொண்டிருக்கக்கூடிய இரு பெறுமானங்களையும் காண்க.

(ii) $10^x - 3 = 2^{10+x}$ எனும் சமன்பாட்டை தீர்க்க.

47. a, b, d என்பன மாறிலிகளாயும், $a < 0$ ஆகவுமிருப்பின் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்கட்கும் ax^2+bx+c ஆனது மறைகுறியையுடையதாயிருப்பதற்கான நிபந்தனை ஒன்றை பெறுக. $f(x)=px^2-3x+3p+2$ என தரப்பட்டின்

- (i) $f(x) = 0$ எனும் சமன்பாடானது பொருந்தும் மெய் மூலங்களை கொண்டிருப்பதற்கான p இன் இரு பெறுமானங்களையும் காண்க.
- (ii) x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்கட்கும் $f(x) < 0$ ஆயிரும்பதற்கான p இன் பெறுமான வீச்சுக்களைக் காண்க.
 $p = -2$, $p = 1$ ஆகும் வகைகளில் $y = f(x)$ இன் வரைபை பருமட்டாக தருக.

48. α, β என்பன $2x^2 - 7x - 17 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $(\alpha - 4), (\beta - 4)$ என்பவற்றை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச் சமன்பாடு $2x^2 + 9x - 13 = 0$ என காட்டுக.
 $y = 2x^2 - 7x - 17$ $y = 2x^2 + 9x - 13$

எனும் வளைவிகள் ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. ஒவ்வொரு வளைவினதும் நிலைத்தபுள்ளிகளையும் கண்டு ஒரே படத்தில் இரு வளைவிகளினதும் பருமட்டான வரைபு வரைக.

49. (i) $ax^2 + bx + c \equiv a \{(x+p)^2 + q\}$ $a \neq 0$ ஆயின் p, q என்பவற்றை a, b, c இல் தருக. $b^2 < 4ac$ ஆயின் கோவையின் குறியானது x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும் ஒத்ததாகவே இருக்கும் என உய்த்தறிக.
- (ii) $g(x) = (k-6) + (k-3)x - x^2$ ஆயின் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்கட்கும் $g(x)$ மறையாகவிருக்கும் k இன் எல்லாப் பெறுமானத் தொடையையும் காண்க.

50. α, β என்பன $x^2 - px + q = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $\alpha + \beta = p$ $\alpha\beta = q$ என நிறுவுக.
பின்வருவனவற்றையும் நிறுவுக.

(i) $\alpha^{2n} + \beta^{2n} = (\alpha^n + \beta^n)^2 - 2q^n$

(ii) $\alpha^4 + \beta^4 = p^4 - 4p^2q^2 + 2q^2$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் நான்காம் அடுக்கை மூலங்களாக கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை காண்க.

51. (i) a, b, c மாறிலியாகவும் $a > 0$ ஆகவும் இருக்க $ax^2 + bx + c$ என்பது x இன் மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு நேராக இருக்க வேண்டிய நிபந்தனையை பெறுக. $x - 1 = k(x - 2)(x + 1)$ எனும் சமன்பாடு k க்கு பூச்சியம் இல்லாத சகல பெறுமானத்துக்கு மெய் மூலங்களை கொண்டிருக்குமென காட்டுக.

- (ii) $\log_a 45 + 4 \log_a 2 - \frac{1}{2} \log_a 81 - \log_a 10 = \frac{3}{2}$ எனின் அடி a ஐக் காண்க.

அலகு 4

ஒழுங்குத் தொகையும், கூட்டுத்தொகையும்

1. முதற் தத்துவங்களிலிருந்து,

$$(a) r^n C_r = n, {}^{n-1}C_r \text{ எனவும்}$$

$$(b) {}^{n+2}C_r = {}^nC_r + {}^{2n}C_{r-1} + {}^nC_{r-2} \text{ எனவும் நிறுவுக.}$$

8 ஆண்களிலிருந்தும், 5 பெண்களிலிருந்தும் இருபாலாருமுள்ள 5 பேர் கொண்ட கூட்டமொன்றை ஆக்குவதற்கான வழிகளினது எண்ணிக்கையைக் காண்க.

2. (i) p ஒற்றுமைப்பட்டதாயும், மிகுதி வேற்றுமைப்பட்டதாயும் உள்ள n பொருட்கள் ஒரங்கே எடுக்கப்படும்போது அவற்றின் வரிசை மாற்றங்கள் $\frac{n!}{p!}$ எனக் காட்டுக.

(ii) 'Transfiguration' என்ற சொல்லின் எழுத்துக்களை முறைக்கு 5 ஆக எடுக்கவரும் வேறு வேறான ஒழுங்குத் தொகைகளைக் காண்க.

3. a ஓரின ஒற்றுமைப்பட்டதாயும், b வேறொரின ஒற்றுமைப்பட்டதாயும், மிகுதி எல்லாம் வேற்றுமைப்பட்டதாயும் இருப்பின் n பொருட்களின் வேறு வேறான ஒழுங்குத் தொகைகள் $\frac{n!}{a! b!}$ எனக் காட்டுக.

'parallel' என்ற சொல்லில் இருந்து முறைக்கு 4 ஆக வரும் எழுத்துக்களின் (a) கூட்டுத்தொகையையும்

(b) ஒழுங்குத் தொகையையும் காண்க.

4. (a) எல்லாம் வேற்றுமைப்பட்ட பொருட்களாகும்போது,

(b) ஓரினத்தில் a ஒற்றுமைப்பட்டும், வேறொரினத்தில் b ஒற்றுமைப்பட்டும், மிகுதி எல்லாம் வேற்றுமைப்பட்டு மிகுக்கும் போது n பொருட்களின் ஒழுங்குத் தொகைக்கு கோவையைப் பெறுக.

(c) ஒவ்வொரு எண்ணும் ஆக்கக்கூடியது மூன்றுமுறை வரக்கூடியதாயின், 0, 1, 2 என்ற மூன்று நேர் எண்களை மட்டும் உபயோகித்து ஐந்து எழுத்து இலக்கங்களை ஆக்கும் வேறு வேறு வழிகளைக் காண்க.

5. P பொருட்கள் ஒற்றுமைப்பட்டும், மிகுதி எல்லாம் வேற்றுமைப்பட்டும் இருப்பின், n பொருட்களை ஒருங்கே எடுக்கவரும் ஒழுங்குத் தொகை $\frac{\angle n}{\angle p}$ எனக் காட்டுக.

“mathematician” எனும் சொல்லின் முறைக்கு 6 ஆக எடுக்கவரும் எழுத்துக்களின் வேறுவேறு ஒழுங்குத் தொகைகளை

(i) 2m ஒன்றாக வராதபொழுதும்,

(ii) 3a ஒன்றாக வருமாறும், ஆனால் 2m உம், 2t உம், ஒன்றாக வராதபொழுதும் காண்க.

6. P₁ ஓரினத்தின் ஒற்றுமைப்பட்ட பொருட்களாகவும், P₂ வேறொரினத்தின் ஒற்றுமைப்பட்ட பொருட்களாகவும் P_r, r ஆவதன் ஒற்றுமைப்பட்டதாயும் இருப்பின் n பொருட்களின் வேறுவேறு ஒழுங்குத் தொகை $\frac{\angle n}{\angle P_1 \angle P_2 \dots \angle P_r}$ என நிறுவுக.

எல்லாம் ஒழுங்கே எடுக்கப்படும். “philosophically” எனும் சொல்லின் எழுத்துக்களின் வேறுவேறு ஒழுங்குத் தொகுதிகளைக் காண்க.

இரண்டு ஒரே எழுத்துக்கள் ஒன்றாக இருக்காத ஒழுங்குத் தொகையையும் காண்க.

7. (i) 8 பிள்ளைகள் ஒரு வட்டத்தில் உட்புறமாக நோக்கிய வண்ணம் எத்தனை விதமாக அமரலாம்? ரவி என்னும் பிள்ளை அவரின் நண்பர்களான ராகவிற்கும், சாந்தவிற்கும் அருகில் இருக்க எத்தனை விதங்கள் உண்டு?

(ii) “Multiplication” எனும் சொல்லின் நான்கு எழுத்துக்களால் ஆக்கப்படும் ஒழுங்குத் தொகையைக் காண்க.

8. n ரூபாக்களை, 1 ரூபா நாணயங்களாகவும், 50 சத நாணயங்களாகவும், 25 சத நாணயங்களாகவும் ஆக்கப்படக்கூடிய வழிகளினதும் தொகை $(n+1)^2$ எனக் காட்டுக.

மேலே கூறப்பட்ட மூன்று வகையினதும் சரியாக 16 நாணயங்களுடன் 10 ரூபாவை ஆக்குவதற்கு 5 வேறுவேறான வழிகள் உண்டெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து ஒவ்வொருவரும் ஒரு நாணயத்தைப் பெறும்படி, மேலே கூறப்பட்ட மூன்றுவகை நாணயங்களால் ஆக்கப்பட்ட 10 ரூபாவை 16 பேர்களுக்கிடையில் பங்கிடும் வெவ்வேறான வழிகளைக் காண்க.

9. முறைக்கு r ஆக எடுக்கவரும் n வேறுவேறான பொருட்களின் ஒழுங்குத்தொகை ${}^n P_r$ ஆகவும் முறைக்கு r ஆக எடுக்கவரும் n வேறுவேறான பொருட்களின் கூட்டுத்தொகை ${}^n C_r$ ஆகவும் இருப்பின், ${}^n P_r = {}^n C_r \cdot r!$ என நிறுவுக.

ஒரு தொடை (set) a பொருட்கள்

- (i) $n-3$ வேறுவேறான பொருட்களையும் (ii) (i) இலிருந்து வேறுபட்ட 3 ஒற்றுமைப்பட்ட பொருட்களையும் கொண்டுள்ளன. $r < n-2$ ஆயின் முறைக்கு r ஆக எடுக்கவரும் பொருட்களின் கூட்டுத்தொகை ${}^{n-2} C_r + {}^{n-3} C_{r-2} + {}^{n-3} C_{r-3}$ ஒழுங்குத்தொகை.

$${}^{n-2} P_r + \frac{r(r-1)}{2} \cdot {}^{n-3} P_{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{6} \cdot {}^{n-3} P_{r-3}$$

எனவும் நிறுவுக,

10. (i) $3n$ வேறுவேறான புத்தகங்களால் ஆனவை, ஒவ்வொரு கட்டும் 3 புத்தகங் கொண்ட n கட்டுக்களாக ஆக்கப்படக் கூடிய வழிகளினது எண்ணிக்கை $\frac{\angle 3n}{6n \angle n}$ ஆகுமென நிறுவுக.

- (ii) ஒரு நேர்கோட்டிலே ஒரே மாதிரியான P செங்குண்டுகளையும், ஒரே மாதிரியான q வெண்குண்டுகளையும் ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளினதும் எண்ணிக்கையைக் காண்க. $P \geq 2$ எனின், முனைகளிலுள்ள குண்டுகள் இரண்டும் செம்மையாய் இருத்தற்கான நிகழ்தகவுகள் $\frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}$ ஆகுமென நிறுவுக.

11. முறைக்கு r ஆக எடுக்கவரும் n பொருட்களின் சேர்மானங்களைக் காண்க.

a, b, c, d, e, i, o என்னும் எழுத்துக்களிலிருந்து உருவாக்கப்படும் ஐந்து எழுத்துக்களை இரு உயிரெழுத்துக்களை ஒருங்கு இருக்காதவாறு ஒழுங்குபடுத்தக்கூடிய வழிகளைக் காண்க.

12. n வேறுவேறான பொருட்களிலிருந்து r பொருட்களை ஆக்கும் கூட்டுத்தொகைகள் $\frac{\Delta n}{\Delta (n-r) \Delta r}$ என நிறுவுக..

n வேறுவேறான பொருட்கள் ஒரு வகையில் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன. இதிலிருந்து வரிசையில் அடுத்து இருக்காத மூன்று பொருட்களைக் கொண்ட கூட்டத்தை ஆக்கும் வழிகளினது தொகைகளைக் காண்க.

தெரியப்பட்ட பொருட்களில் இரண்டு ஒன்றுக்கருகில் மற்றது இருக்காவிடின், 3 பொருட்களை ஆக்கும் வழிகள் $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ என நிறுவுக.

13. ஒரு வட்ட மேசையினிடத்து அமர்ந்திருக்கும் பத்து ஆட்களுள் எவரேனும் இருவர் ஒருவருக்கொருவர் அடுத்து அமர்ந்திருக்காத மூன்று ஆட்களை தேரக்கூடிய வழிகளினது தொகை 50 எனக் காட்டுக.

இப்பத்து ஆட்கள் ஒரே வரிசையில் அமர்ந்திருந்தால் அவ்வாறான மூன்று ஆட்கள் கொண்ட குழுக்களைத் தேரக்கூடிய வழிகளினது தொகை 56 எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ வேறுவழியாலோ, மேலேயுள்ள இரு வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் அவ்வாறான மூன்று ஆட்கள் கொண்ட குழுவொன்றைத் தேர்வதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

14. 15 'கிரிக்கெட்' வீரர்களைக் கொண்ட ஊர் சுற்றும் குழுவில் 7 துடுப்படி வீரர்களும், 6 பந்தெறி வீரர்களும், 2 விக்கெற் காப்போர்களும் இருக்கின்றனர். 11 பேர்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும் ஆகக் குறைந்தது 5 துடுப்படி வீரர்களும் 4 பந்தெறி வீரர்களும் 1 விக்கெற் காப்போனும் இருத்தல் வேண்டும்.

(a) 1 துடுப்படி வீரரும், 1 விக்கெற் காப்போனும் காயமடைந்தால்,

(b) எல்லா வீரர்களும், தேர்வுக்குக் கிடைக்கக் கூடியதாக இருந்தால்,

எத்தனை வேறுவேறான குழுக்கள் ஆக்கப்படலாம்?

15. 'Successor' என்னும் சொல்விருந்து மூன்று எழுத்துக்களைக் கொண்ட வேறுவேறான ஒழுங்குகளை எத்தனை முறைகளில் ஆக்கலாம்?

இவ்வொழுங்குகளில் எத்தனையில் உயிரெழுத்தும் உயிரில்லா எழுத்தும் மாறி மாறி வரும்?

16. (i) 3, 3, 4, 2, 2, 1 ஆகிய ஆறு இலக்கங்களில் இருந்து 5 இலக்கங்களைக் கொண்ட எண்கள் எத்தனை வேறுவேறான வழிகளில் ஆக்கப்படலாம்?

(ii) $0 \rightarrow 0$ ஆகும்போது $\frac{\text{கோசை } (20 + \pi/2)}{\text{கோசை } (0 + \pi/4) - \text{கோசை } \pi/4}$ இன் எல்லையைக் காண்க.

(iii) தான் $x=2$ தான் y ஆயின்,

தான் $(x+y) = \frac{3 \text{ சைன் } 2y}{3 \text{ கோசை } 2y - 1}$ எனக் காட்டுக.

17. (i) $\sum_{r=1}^n r^2(r+1) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$ எனக் காட்டுக.

(ii) 4 ஆண்கள் 4 பெண்கள், 6 குழந்தைகள் கொண்டுள்ள ஒரு குழு ஒரு வட்டமேசையைச் சுற்றி எதேச்சையாக அமருகின்றனர்.

ஒரு தரப்பட்ட ஆண் (a) இரு குழந்தைகளுக்கிடையில் (b) ஒரு குழந்தைக்கும் ஒரு பெண்ணுக்குமிடையில் இருக்கக் கூடிய சந்தர்ப்பங்களைக் காண்க.

18. ஒரு மனிதன் ஒரு கடித உறையில் மூன்று 5 பவுண் நோட்டுக்களையும், மூன்று 1 பவுண் நோட்டுக்களை இதேபோன்ற வேறொரு உறையுளும் போடுகிறான். ஒவ்வொரு வருடமும் 'கிறிஸ்மஸ்' இற்கு எதேச்சையாக ஒரு உறையை எடுத்து அதிலிருந்து ஒரு நோட்டைத் தனது மருமகனுக்குக் கொடுக்கிறான். கடைசி நோட்டை எடுத்து இரு உறைகளையும் வெற்றாக்கியபின், இந்த முறை (Process) முடிகிறது.

(i) முறை முடிகிறபோது, மருமகன் பெற்ற வேறு வேறான தொகையைக் கூறுக

(ii) இவ் ஒவ்வொரு தொகையையும் நடைபெறக்கூடிய சந்தர்ப்பங்களைக் கூறுக.

(iii) மருமகனின் எதிர்பார்த்த இலாபம் பவுண் $12\frac{3}{8}$ என உய்த்தறிக.

19. ESTEEM என்ற சொல்லிலிருந்து முற்றாக எடுத்த எழுத்துக்களின் வேறுவேறான ஒழுங்குகளைக் காண்க.
20. மூன்று இலக்கங்களைக்கொண்ட பட்டி எண்கள் (code numbers) 1, 2, 3, 9 என்ற 9 இலக்கங்களிலிருந்து ஆக்கப்படுகிறது. எந்த எண்ணிலும், ஒரு குறிக்கப்பட்ட இலக்கம் ஒரு இடத்திற்கு மேல் இடம்பெற முடியாது எனின்,
- (i) எத்தனை பட்டி எண்கள் ஆக்கப்படலாம். இவற்றுள் எத்தனையில் 9 ஒரு இலக்கமாக உள்ளது?
- (ii) எத்தனை எண்களில் மூன்று இலக்கங்களும் அவற்றின் இயற்கை ஒழுங்கில் இருக்கும்? (அதாவது இடமிருந்து வலமாக இலக்கங்கள் அவற்றின் பருமன்களின் ஏறுவரிசையில் e, g 359)?
21. ஒரு தேர்வுப் போட்டியில் 8 நிகழ்ச்சிகளிலிருந்து 6 நிகழ்ச்சிகள் விருப்பத்தின் முறைப்படி தேரப்படல் வேண்டும். போட்டிக்கு எத்தனை வேறுவேறான விண்ணப்பங்கள் ஆக்கப்படலாம்? இவற்றுள் எத்தனைகளில் (a) ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி (b) இரண்டு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி, (c) இரு குறிக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் அடுத்தடுத்த ஸ்தானங்களில் காணப்படும்?
22. (i) AMAIGAM என்னும் சொல்லிலிருந்து 4 எழுத்துக்கள் கொண்ட வித்தியாசமான வரிசை மாற்றங்கள் எத்தனை அமைக்கலாம்.
- (ii) இவற்றுள் எத்தனை ஒரு சோடி ஒத்த எழுத்துக்களை உடையதாயிருக்கும்.

ஈருறுப்பு விரிவு

1. (i) $C_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle (n-r)}$ ஆயின்

$$C_1^2 + 2C_2^2 + 3C_3^2 + \dots + nC_n^2 = \frac{\angle (2n-1)}{[\angle (n-1)]^2} \text{ or } \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$

என நிறுவுக.

(ii) $(3+2x)^{15}$ என்பதன் விரிவின் மிகப்பெரிய குணகத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. n என்பது நேர்முழுவெண்ணாகவும்,

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$$

ஆகவிரும்பின் $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ என்ற குணகங்களுக்கிடையில் மிகப்பெரியது.

(i) n இரட்டையாயின், $\frac{C_n}{2}$ எனவும்

(ii) n ஒற்றையாயின், $\frac{C_{n-1}}{2}$ எனவும் நிறுவுக.

$\left(2x + \frac{1}{3x}\right)^{20}$ என்னும் விரிவில், (a) மிகப்பெரிய குணகத்தையும் (b) $x = \frac{1}{2}$ ஆயின் மிகப்பெரிய உறுப்பையும் காண்க.

3. n என்பது நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$$

இதில் $C_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle (n-r)}$

(i) $C_0C_1 + C_1C_2 + \dots + C_{n-1} C_n = \frac{\angle 2n}{\angle (n+1) \angle (n-1)}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $C_0C_1 + C_1C_2 + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1} C_n$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. n என்பது நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$(1+x)^n = 1 + {}^n C_1 x + {}^n C_2 x^2 + \dots + {}^n C_r x^r + \dots + x^n$ என நிறுவுக.

இதில் ${}^n C_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle (n-r)}$

$(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2})^{15}$ என்னும் சுருறுப்பு விரிவில்

(i) x ஐச் சாராத உறுப்பு,

(ii) $x = \frac{1}{2}$ ஆயின், மிகப்பெரிய உறுப்பு; என்பவற்றைக் காண்க.

5. (i) x இன் ஏறடுக்குகளில், $(2x+3x^2)^{15}$ இன் விரிவிலுள்ள மிகப்பெரிய குணகத்தைக் காண்க.

(ii) $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n$ எனின்,

$C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1)C_n = (n+2)^{2n-1}$ எனக் காட்டுக.

6. (i) x இன் ஏறடுக்குகளில், $(1+x)^n$ என்பதன் விரிவுள்ள உறுப்புகள் நேராகவும் குறிக்கப்பட்ட உறுப்பு T (முதலும், முடிவும் தவிர்ந்த) முன்னும் பின்னும் அடுத்துள்ள உறுப்புகளிலும் பெரிதாகவும் இருப்பின், T என்பதே இவ்விரிவில் மிகப்பெரிய உறுப்பு எனக் காட்டுக.

(ii) $x > 0$ எனின், $(1+x)^{30}$ என்பதன் மிகப்பெரிய உறுப்பு, மிகப்பெரிய குணகத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான x இன் நிபந்தனையைக் காண்க.

7. n என்பது நேர்முழுவெண்ணாயின்,

$(1+x)^n = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_r x^r + \dots + C_n x^n$ என நிறுவுக.

இதில் $C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$(3-2x)^{20} = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{20} x^{20}$ எனின்

(i) $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = \frac{1}{2}(5^{20} + 1)$ எனவும்

(ii) a_8 என்பது மிகப்பெரிய குணகம் எனவும் நிறுவுக.

8. (i) n என்பது நேர்முழுவெண்ணாயின்
 $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$ என நிறுவுக.

$$\text{இதில் } C_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle (n-r)}$$

(ii) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \dots + (n+1) C_n = 2^{n-1} (2+n)$ என நிறுவுக.

(iii) 10-வது உறுப்பு, $(1+2/3)^n$ என்னும் விரிவின் மிகப்பெரிய உறுப்பாயின், n என்னும் நேர் எண்ணின் பொருத்தமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

9. n என்பது நேர்முழுவெண்ணாகவும், $(1+x)^n = C_0 + C_1x + \dots + C_n x^n$ ஆகவும் இருப்பின், n ஒற்றை எனின் $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - \dots$

$$+ (-1)^n C_n^2 = 0 \text{ ஆகவும், } n \text{ இரட்டை எனின் } \frac{(-1)^{n/2} \angle n}{(\angle n/2)^2}$$

ஆகவும் இருக்கும் என நிறுவுக.

$(x+1/x)^{2n}$ என்னும் விரிவிலுள்ள x ஐச் சாராத உறுப்பைக் காண்க. இவ்வுறுப்பு விரிவின் மிகப்பெரிய உறுப்பு ஆவதற்குரிய x இன் நிபந்தனைகள் யாவை?

10. n என்பது நேர்முழுவெண்ணாயின்,
 $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$ என நிறுவுக.

$$\text{இதில் } C_r = \frac{\angle n}{\angle r \angle (n-r)}$$

$$\sum_{r=1}^n r^2 C_r = n(n+1)2^{n-2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + \dots + C_{n-r} C_n$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு $0 \leq r \leq n$

11. n என்பது நேர்முழுவெண்ணாயின்,
 $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$ என்ற கூறும்

$$\text{புத்தேற்றத்தை நிறுவுக. இதில் } C_r = \frac{\angle n}{\angle (n-r) \angle r}$$

$(1+1/x)^n (1+x)^n = x^n (1+1/x)^{2n}$ என்பதில் கூறும்புத்தேற்றத்தை இரு பக்கமும் கருதுவதன் மூலம்,

(i) $(n-r)$ ஒற்றையாயின், $C_0 C_r - C_1 C_{r+1} + C_2 C_{r+2} + \dots + C_{n-r} C_n = 0$ எனவும், (ii) $(n-r)$ இரட்டையாயின்

$$= (-1)^{\frac{n-r}{2}} \left| \begin{matrix} \Delta n \\ \Delta \frac{(n-r)}{2} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Delta \frac{(n+r)}{2} \end{matrix} \right| \text{ எனவும் நிறுவுக.}$$

12. n என்பது நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$$(1+x)^n = 1 + {}^n C_1 x + {}^n C_2 x^2 + \dots + {}^n C_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

என நிறுவுக.

$$\text{இங்கு } {}^n C_r = {}^n C_{n-r} = \frac{\Delta n}{\Delta r \Delta (n-r)}$$

m என்பது ஒர் ஒற்றை நேர் முழுவெண்ணாயின்,

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^m = \left(x^m + \frac{1}{x^m} \right) + {}^m C_1 \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}} \right) + {}^m C_2 \left(x^{m-4} + \frac{1}{x^{m-4}} \right) + \dots + {}^m C_{\frac{m-1}{2}} \left(x + \frac{1}{x} \right) \text{ என}$$

நிறுவுக.

$$\text{மேலே உள்ளவாறு } \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 \left(x + \frac{1}{x} \right)^5 \left(x + \frac{1}{x} \right)^7$$

$$\text{என்பவற்றை விரிப்பதால் } x + \frac{1}{x} = 1 \text{ ஆயின், } x^3 + \frac{1}{x^3} = -2$$

$$\text{எனவும், } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1 = x^7 + \frac{1}{x^7} \text{ எனவும் நிறுவுக.}$$

13. n என்பது நேர் முழுவெண்ணாகவும்,

$$(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_r x^r + \dots + C_n x^n \text{ ஆகவும்}$$

$$\text{குப்பின் } C_r = \frac{\Delta n}{\Delta r \Delta (n-r)} \text{ என நிறுவுக.}$$

T_r என்பது $(a+b)^n$ இனது b இன் ஏறுவலுவிலுள்ள விரிவின்

$$r \text{ ஆம் உறுப்பாயின், } \left| \frac{a}{b} \right| \geq \left| \frac{n-r+1}{r} \right| \text{ என்பதற்கு ஏற்ப}$$

$$\left| T_r \right| \geq \left| T_{r+1} \right| \text{ ஆதமென நிறுவுக.}$$

$(2+3x)^{16}$ என்பதன் விரிவிலுள்ள மிகப்பெரிய குணகத்தைக் காண்க. $x=5$ ஆயிருக்கும்போது, இவ்விரிவிலுள்ள மிகப்பெரிய உறுப்பையும் காண்க.

14. (1) $(1+nx)^{5/2}$ இன் ஈற்றுப்பு விரிவிலுள்ள x^2 இன் குணகம் $(1+5/2x)$ இன் ஈற்றுப்பு விரிவிலுள்ள x^2 இன் குணகத்தின் மூன்று மடங்காகும். இவ்விரிவிலுள்ள x^3 இன் குணகங்களின் விகிதங்களைக் காண்க.

$a > 1$ ஆயின், $a - \sqrt{a^2 - 1}$ இன் விரிவை $\frac{1}{a}$ இன் அடுக்குகளில் $\frac{1}{a^5}$ உள்ள உறுப்புவரை விரிக்குக.

15. (i) மட x $a=5$ ஆகவும், மட x $3a=9$ ($x > 0$) ஆகவும் இருப்பின், x ஐயும் a ஐயும் காண்க.

(ii) $\frac{9}{1-x-20x^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக்குக. இதிலிருந்து, x இன் ஏறுபடிகளிலுள்ள விரிவின் x^n இன் குணகத்தைக் காண்க.

(iii) $-a < x < a$ இற்கு x இன் ஏறுபடிகளிலுள்ள $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ என்பதன் விரிவிலுள்ள x^{2n} இன் குணகத்தைக் காண்க.

16. (i) x^6 உம் அதற்குமேல் உள்ள உறுப்புக்களும் கருதாது விடப்பட்டால்,

$$\left[1 - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = x \left[A \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + Bx^4 \right]$$

ஆகும்வண்ணம் ஒருமைகள் A, B ஐக் காண்க.

(ii) $S_1 = 1+2+3+\dots+n$ ஆகவும்,

$S_2 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$ ஆகவும்,

இருப்பின் தொகுத்தறி முறையினால் $S_3 = (S_1)^2$ என நிறுவுக.

17. பின்வருவனவற்றை x^2 ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்புக்கள் வரை x இன் ஏறுபடிகளில் விரிக்குக,

(a) $\frac{7x+8}{(2x+1)^2(x^2+2)}$ (b) மட c $\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4)}$

விரிவு செல்லும்படியாவதற்குரிய x இன் வீச்சங்களை ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் காண்க.

18. (i) x இன் ஏறுபடிகளில் x^2 ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்பு வரை

கோவை $\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$ ஐ விரித்தெழுதுக. இவ் விரிவைப்

பாவித்து a_1/b இன் பெறுமானத்தில் a ஐ 1% ஆக அதிகரிப்பதாலும் b ஐ 1% ஆகக் குறைப்பதாலும் ஏற்படும் மாற்ற வீதத்தை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(ii) தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு வழியாக,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n+1) (2n+1) \text{ என நிறுவுக.}$$

19. (i) $(1+x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_r x^r + \dots + a_n x^n$,

இங்கு n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண் ஆயின், a_r இன் குணகத்திற்கு கோவையை எழுதுக.

குணகங்கள் a_1, a_2, \dots, a_n இன் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

(ii) x^2 ஐ கொண்டுள்ள உறுப்புவரை x இன் ஏறுபடிகளில் $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{1+3x}}$

என்னும் கோவையை விரித்தெழுதுக. விரிவு செல்லும்படியாகும் x இன் வீச்சங்களையும் குறிப்பிடுக. $\sqrt{3}$ இற்கு அண்ணளவான பெறுமானத்தைக் காண்பதற்கு இவ்விரிவை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம்?

20. தொகுத்தறி முறையினாலோ அல்லது வேறு வழியினாலோ முறைக்கு இரண்டாக எடுக்கவரும் முதல் n நேர் முழுவெண்களின் சாத்தியமான எல்லாப் பெருக்கங்களினதும் கூட்டுத்தொகை

$$S_n = \frac{1}{24} (n-1) n(n+1) (3n+2) \text{ என நிறுவுக.}$$

(i) $n^3(n-1) < 8S_n < n^3(n+1)$ எனக் காட்டு.

(ii) $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ ஐ $a + \frac{b}{n}$ என்ற வடிவில் உணர்த்துக. இங்கு

முதலாவதிலும் பார்க்க கூடுதலான $\frac{1}{n}$ இன் அடுக்குகள் தவிர்க்கப்பட்டுள்ளன. a இனதும், b இனதும் எண் பெறுமானங்களையும் குறிப்பிடுக.

21. n இன் எல்லா நேர் முழுமெண்களுக்கும் தொகுத்தறி முறையி னாலோ அல்லது வேறு வழியாலோ, $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > -1$) எனக் காட்டுக.

$\sum (1+x)^r$, $r = 0, 1, \dots, n$ என்பதைக் கருதுவதன் மூலம் $x \geq 0$ எனின், $(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ என நிறுவுக.

$-1 < x < 0$ எனில், $(1+x)^n \leq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ என நிறுவுக.

22. n என்பது நேர் முழுமெண்ணாயின், $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ இன் பெறுமானம் ஓர் இரட்டை முழுமெண் ($2p$ என்க) எனக் காட்டுக. $2p-1 < (3+\sqrt{5})^n < 2p$ என உய்த்தறிக.

$n=3$ என்ற குறிக்கப்பட்ட சந்தர்ப்பத்தில் $(3-\sqrt{5})^3 = F$ ஆகவும் $(3+\sqrt{5})^3 = 1+G$, (இங்கு 1 ஒரு முழுமெண் $0 < G < 1$) ஆகவும்

இருப்பின், $\frac{G}{F}$ இன் பெறுமானத்தை இயலக் கூடிய வகையில் மிக எளிய வடிவில், பிரிக்கும் எண் முழு எண்ணாக இருக்கும் வண்ணம் தருக.

23. $(1+ax+x^2)^n$ என்னும் விரிவில் x^2 இன் குணகத்தைக் காண்க. இங்கு n என்பது நேர் முழுமெண். இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ,

$$2^n C_5 = 3 \cdot 2^n C_5 + 6^n C_2 + 3 \cdot 2^n C_4 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

24. (i) $(1+x+ax^2)(1+bx)^{10}$ என்னும் விரிவில் x இனதும் x^2 இனதும் குணகங்கள் இரண்டும் பூச்சியமாகும் a இனதும் b இனதும் எண் பெறுமானங்களைக் காண்க. x^3 இனது குணகத்தையும் காண்க.

(ii) $2 + mL_{10}x = mL_e x$ என்பதைத் தீர்க்குக.

25. (i) $mL_e \sqrt{x} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots$

எனக் காட்டி x இன் எவ்வீச்சிற்கு இத்தொடர் செல்லுபடியாகும் எனவும் குறிப்பிடுக.

(ii) $(1+2x+3x^2+4x^3)^{\frac{1}{2}} = A+Bx+Cx^2+Dx^3$ ஆயின், (n இன் 4-வது அடுக்கும் அதற்கு மேல் உள்ளனவும் தவிரக் கப்பட்டுள்ளது), A, B, C, D இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) x இன் ஏறடுக்குகளிலுள்ள $\frac{1}{(a-x)^{p+1}}$ இன்விரிவில் x^p இன்

குணகம் L ஆகும். x^q இன் குணகம் M ஆகும்.

$\frac{L}{M}$ என்பது a, x, p, q என்பவற்றின் சார்பற்றது எனக் காட்டி அதன் பெறுமானத்தையும் காண்க. இங்கு p, q என்பன நேர்முழுவெண்; இங்கு $-a < x < a$ ஆகும்.

26. (i) $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ என்பது x இன் ஏறுபடிகளில் விரிக்கும்போது

(இங்கு $-1 < x < 1$), x^{n-1} இன் குணகம் $2n-1$ எனக் காட்டுக. n ஆவது உறுப்பிற்குப்பிறகு உள்ள உறுப்புகளின்

கூட்டுத்தொகை $\frac{(2n+1)x^n}{1-n} + \frac{2x^{n+1}}{(n-1)^2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $P(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ ஆகவும்

$Q(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ ஆகவும்

இருப்பின் $P(x)$, ஐயும் $Q(x)$ ஐயும் e^x இலும் e^{-x} இலும் உணர்த்துக.

$2P(x) \cdot Q(x) = Q(2x)$ எனவும் காட்டுக.

27. (i) x இன் ஏறடுக்குகளில் உள்ள $(1+px)^{1/P} - (1+px)^{1/3P}$ என்பதன் விரிவில் x^3 உறுப்பு இல்லையாயின், P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு $P \neq 0$ ஆகும்.

அத்துடன் x^4 உறுப்பும் அதன்மேலுள்ள x இன் உறுப்புக் களும் கருதப்படாதுவிட்டால் கோவை $\frac{3}{8} x^2$ ஆக கருக்கப்படும் எனவும் காட்டுக.

(ii) x இன் ஏறாடுக்குகளிலுள்ள $\frac{1+2x^2-x^3}{e^{2x}}$ இன் விரிவில் x^n

இன் குணகம்,

$$\frac{(-1)^n}{n!} 2^{n-3} (n^3+n^2-2n+8) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

28. (i) $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n x^n$ ஆயின், $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு n என்பது நேர்முழுவெண்,

$$a_0^2 + a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + \dots + na_n^2 = \frac{n}{2} (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

என்றும் நிறுவுக. அத்துடன், $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n$ எனக் காட்டுக.

(ii) சுருறுப்பு விரிவை உபயோகித்து $\sqrt{4.04}$ இன் பெறுமானத்தை 6 தசம தானங்களுக்கு காண்க.

29. $f(x) \equiv \frac{2}{2-3x+x^2}$ என்பதைப் பகுதிப் பின்னங்களில் உணர்த்துக.

இதினிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ, $f(x)$ ஐ, x இன் குறையும் வலுவில் ஒரு தொடராக உணர்த்துக. அத்துடன் இத் தொடரின் முதல் நான்கு பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளைத் தருக.

இவ்விரிவு வலிதான x இன் பெறுமானத் தொடையைக் கண்டு, இவ்விரிவில் x^n இன் குணகத்தைக் காண்க.

30. $\frac{1+ax}{1+bx} - e^x$ இன் விரிவில் (x இன் இறங்கு வரிசை வலு)

முதலாவது பூச்சியமில்லாத உறுப்பு, x^3 இன் விரிவின் முதலாவது உறுப்புக்குச் சமனெனின் a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

முதல் விரிவில் x^3 இன் குணகத்தைக் காண்க.

x இன் இரண்டாவதற்கு மேலான வலுக்கள் புறக்கணிக்கத்தக்க

அளவு, x சிறிதாயின் $e^x = \frac{2+x}{2-x}$ எனக் காட்டுக.

இவ்வண்ணளவை உபயோகித்து $e^{1/20}$ இன் பெறுமானத்தை நான்கு தசமதானங்களுக்குக் காண்க.

31. விரித்து சுருக்குக: (a) $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^6 + \left(x - \frac{1}{2x}\right)^8$

(b) $\frac{3-x}{(a+x)(1-2x)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து, அதன் மூலமாகவோ அல்லது வேறு வழியாகவோ x இன் அதிகரிக்கும் வலுவிரிவின் முதல் மூன்று பூச்சியமற்ற உறுப்புக்களையும் காண்க.

32. (i) நேர்நிறை எண்களை சுட்டிகளாக சுருறுப்பு விரிவை கூறி, தொகுத்தறி முறையால் அல்லது வேறு முறையால் நிறுவுக.

$\left[x^2 - \frac{1}{x}\right]^6 \left[x + \frac{1}{x}\right]^4$ என்பதின் விரிவில் x யைச்

சாராத உறுப்பைக் காண்க.

(ii) $(1-x)^{-1/2}$ வை x இன் அடுக்கு கூடும் வரிசையில் x^3 வரை விரிக்க. $x = \frac{1}{50}$ என பிரதியிடுவதால் $\sqrt{2}$ வின் பெறுமானத்தை ஐந்து தசமதானத்திற்கு கணிக்க.

33. (i) தொடர்புகள் f உம் g உம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டன.

$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

$g(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$

$f(x)$ யையும், $g(x)$ யையும் e^x இல் எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்து $[f(x)]^2 + [g(x)]^2$ இன் விரிவை x இன் அடுக்குகளிற் காண்க. x^{2n} இன் குணகத்தை காண்க.

(ii) x இன் அடுக்கு கூடும் வரிசையில் $\ln \frac{1+2x}{1-x}$ இன் விரிவின்

முதல் நான்கு உறுப்புக்களை காண்க. இவ்விரிவு உண்மையாகும் x இன் பெறுமானவீச்சை காண்க. a_n, a_{n+1} என்பன

$x^n x^{n+1}$ என்பதின் உறுப்புகளின் குணகங்களாக மேற்படி விரிவில் அமையின் $(n+1)a_{n+1} + 2na_n$ என்பதின் பெறுமானம் n இல் தங்கியிராது எனக் காட்டுக.

34. n, r என்பன 1 இலும் பெரிய நிறை எண்களாக

$$\frac{(n+1)!}{(n+r)!} < \frac{1}{(n+1)^{r-1}}$$
 என நிறுவுக.

இதிலிருந்து

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+r)!} + \dots < \frac{1}{n \cdot n!}$$

எனப் பெறுக.

இதிலிருந்து

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{8!}$$
 என எடுப்பதில் உள்ள

வழுவின் பருமன் 4×10^{-6} இலும் சிறிதெனக் காட்டுக.

35. $(1+x-3x^2)^4$ யை x இன் அடுக்கு கூடும் வரிசையில் x^3 இலுள்ள உறுப்புவரை விரிக்க, x, x^2 இலுள்ள உறுப்புகளின் குணகங்கள் முறையே $4, -6$ என நிறுவுக.

$a > b$ ஆக இருக்க $\frac{1+ax}{\sqrt{1+bx}}$ இன் விரிவின் முதல் மூன்று

உறுப்புகளும், முன்னைய விரிவின் உறுப்புகளிற்கு சமனாயின் a, b யைக் காண்க. இரண்டாம் விரிவு உண்மையாகும் x இன் வீச்சை தருக. x^3 இன் குணகம் இவ்விரிவுகளிலும் 48 இலும் வித்தியாசப்படும் எனக் காட்டுக.

36. (i) $y = e^{2x}; y = 1 + 2x$ எனும் வளையிகளை ஒரே வரைபில் வரைக. தொடுபுள்ளிகளையும் வெட்டுப்புள்ளிகளையும் சிதவிவாக்கக் காட்டுக.

(ii) $\ln(1+x)$ இன் விரிவை உண்மையென கொள்வதால், $m > n > 0$ ஆகையில்

$$\ln\left(\frac{m}{n}\right) = 2\left[\frac{m-n}{m+n}\right]^{1/3} + \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \dots$$

எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\ln\left(\frac{13}{12}\right)$ யை 6 தசமதானத்திற்கு காண்க.

37. (i) $2(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (4+5x)^{\frac{1}{2}}$ என்பதை x இன் அடுக்கு கூடும் வரிசையில் x^2 இன் உறுப்பு வரை விரிக்க.

(ii) $(1-x)(1-e^x) + \ln(1+x)$ இன் விரிவின் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பை காண்க.

(iii) $0 < \frac{x^2+1}{2(2x-1)} < 1$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க

38. (i) $\frac{e^{nx}}{(1+x)^n}$ இன் விரிவில் x, x^2, x^3 இன் உறுப்புக்களின் குணகங்களை காண்க.

(ii) $\ln(1+x)$ இன் விரிவை சரியெனக் கொண்டு

$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$ இன் விரிவின் பொது உறுப்பை காண்க
 $f(x)$ யை பருமட்டாக வரைக.

39. (i) $13n x$ இன் x இன் ஏறு அடுக்குகளான விரிவில் முதல் மூன்று பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளை காண்க.

(ii) $f(x) = 2x^4 + ax^2 + 1x - 60$; $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மிகுதி -94 , $(x-3) f(x)$ இன் ஓர் காரணி $a, 1$ ஐக் காண்க.

$y = x(x+1), y = \frac{1}{x(x+1)}$ ஆகிய வரைபுகளை பருமட்டாக வரைக.

40. $(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_r x^r + \dots + c_n x^n$;

இங்கு n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணும் $C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

உம் ஆகும்.

(i) n என்பது இரட்டையாகவும் n என்பது ஒற்றையாகவும் உள்ள இரு வகைகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, C_r என்பது இவ்விரிவின் மிகப் பெரிய குணகமாபிடுப்பதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

(ii) x என்பது நேராயின் c_0 என்பது மிகப் பெரிய உறுப்பாயி
ருப்பதற்கான நிபந்தனை $x < \frac{1}{n}$ எனக் காட்டுக.

41. (i) r இல் எல்லா நேர் முழுவெண் பெறுமானங்களுக்கும்

$$\frac{1}{r!} \leq \frac{1}{2^{r-1}}$$

என கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையினால், அல்லது வேறுவிதமாகக் காட்டுக.

(ii) n ஒரு நேர் முழுவெண்ணை இருக்கும் போது $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$

ஐ ஒருறுப்புத் தேற்றத்தினால் வழக்கமான முறையில், விரிக்க. இவ்விரிவின் r ஆவது உறுப்பை

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)}{r!}$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதலாமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து இவ்வறுப்பானது $\frac{1}{r!}$ இற்கு மேற்படாதெனக் காட்டுக.

மேலும் இவ்விரிவின் உறுப்புகளைப் பொது விகிதம் $\frac{1}{2}$ ஆகவும் முதல் உறுப்பு 1 ஆகவுமுள்ள பெருக்கற்றொடரின் உறுப்புகளுடன் ஒப்பிடுவதன்மூலம், n இன் எல்லா நேர் முழுவெண்

பெறுமானங்களுக்கும் $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ எனக் காட்டுக.

42. n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் ஆயின்,

(i) $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$ என நிறுவுக.

$${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(ii) $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ என நிறுவுக $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ஆக இருக்க. $1 + i$ என்னும் சிக்கலெண்ணை $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைத்து மேலே குறிப்பிட்ட இரு தேற்றங்களையும் பயன்படுத்தி,

$$C_0 - C_2 + C_4 - C_6 + C_8 - \dots = 2^{n/2} \text{கோசை } \frac{n\pi}{4} \text{ எனவும்}$$

$$C_1 - C_3 + C_5 - C_7 + C_9 - \dots = 2^{n/2} \text{சைன் } \frac{n\pi}{4} \text{ எனவும்}$$

நிறுவுக.

அலகு 6

சிக்கல் எண்கள்

1. பின்வருவனவற்றை $a+ib$ என்ற வடிவில் உணர்த்துக. இதில் a, b என்பன மெய்யெண்கள்

(i) $(-1-i)^{1/3}$ (ii) $(3+4i)^5$ (iii) $e^{(3 + \frac{\pi i}{3})}$

(iv) கோசை h^3i (v) தான் $h(1+i)$

(vi) சைன் $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}i\right)$ (vii) $m_L(3+4i)$

(viii) $m_L(3+i\sqrt{3})$ (ix) $m_L(-3)$ (x) $(3+4i)^{1/5}$

2. z, α, β என்பன $\left| \frac{z-\alpha}{z-\beta} \right| = K (> 0)$ ஆகும் வண்ணம் z — தளத்தில் உள்ள மூன்று புள்ளிகளாகும். இதில் α உம் β உம் இரு சிக்கல் ஒருமைகள் (complex constants). z இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் அல்லது ஒரு நேர்வரை என நிறுவுக.

3. R. L. cw என்பன மெய்யாகவும், $\frac{1}{Z} = \frac{1}{L+iwR+icw}$ ஆகவும்

இருப்பின், $|z|^2 = \frac{R^2+w^2L^2}{(1-cw^2L)^2+w^2c^2R^2}$ எனக் காட்டுக.

$L=cR^2$ ஆயின், வீச்சு (Z) = தான் $-1(-wcR)^3$ எனக் காட்டுக.

4. (a) x, y என்பன மெய்யாயின்,

$$\frac{iy}{ix+1} - \frac{3y+4i}{3x+y} = 0 \text{ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.}$$

(b) $z=x+iy$ ஆயின், (x உம் y உம் மெய்யானவை)

(i) $\frac{z+i}{z+2}$ மெய்யாகும்போது (x, y) இன் ஒழுக்கு ஒரு நேர் கோடு எனவும்,

(ii) $\frac{z+i}{z+2}$ கற்பனையாகும்போது (x, y) இன் ஒழுக்கு $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ஐ ஆரையாகவுடைய வட்டம் எனவும் நிறுவுக. இவ் வட்டத்தின் மைய ஆள் கூறுகளையும் காண்க.

5. $zz_1=K^2$ ஆகவும் ஆகண் படத்தில் z ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் ஒழுக்கு ($a, 1$) ஐ மையமாகவும், γ ஐ ஆரையாகவுமுள்ள வட்டமாயின் z_1 ஐக் குறிக்கும் புள்ளியின் ஒழுக்கு $K^2 / (a^2 + b^2)r^2$ என்னும் ஆரையையுடைய வட்டம் என நிறுவுக. இங்கு z உம் z_1 உம் சிக்கல் கணியங்கள், K மெய்யானது.

6. z உம் a உம் சிக்கலெண்களாயின்,

$$|z+a|^2 + |z-a|^2 = 2\{|z|^2 + |a|^2\} \text{ என நிறுவுக.}$$

இதில் $|P|$ என்பது p இன் மட்டு; p ஒரு சிக்கலெண்.

7. கோசை 7θ ஐ கோசை θ இன் பல்லுறுப்பாக உணர்த்துக; $x=2$ கோசை θ ஆயின்,

$$\frac{1+\text{கோசை } 7\theta}{1+\text{கோசை } \theta} = (x^3 - x^2 - 2x + 1)^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

8. ஒரு சிக்கலெண்ணின் மட்டு (modulus), வீச்சம் (Argument) என்பவற்றை விளக்குக.

(i) $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ ஆயின், z_1, z_2 என்பவற்றின் வீச்சங்களின் வித்தியாசம் $\pi/2$ என நிறுவுக.

(ii) $\text{amp} \left\{ \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} \right\} = \pi/2$ ஆயின், $|z_1| = |z_2|$ என நிறுவுக.

9. P என்பது, z என்ற சிக்கலெண்ணை ஆகண் படத்தில் குறிப்பிடும் புள்ளியாகும். Q என்பது $\frac{1}{z-3} + \frac{17}{3}$ என்பதைக் குறிப்பிடும் புள்ளி P; $|z-3|=3$ என்ற வட்டத்தை வரையும்போது Q இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

10. $\left(\frac{z+c}{x-c}\right)^2 = \left(\frac{z_1+2c}{z_1-2c}\right)$ ஆயின் $z = ce^{i\theta}$ ஆகும்போது, $z_1 = 2c$ கோசை 0 ஆகும் என நிறுவுக. இங்கு $z = x+iy$, x, y, c என்பன மெய்யானவை.

11. (i) $x+iy =$ கோசை $h(x+iy)$ ஆயின், x, y என்பவற்றை u, v என்பவற்றில் உணர்த்துக. u (=ஒருமை), v (=ஒருமை) என்பவற்றின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(ii) $\phi = \pi/2 - 2t$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியாலோ,

$$\left(\frac{1 + \text{சைன் } \phi + i \text{கோசை } \phi}{1 - \text{சைன் } \phi - i \text{கோசை } \phi} \right)$$

= கோசை $(n\pi/2 - n\phi) + i$ சைன் $(n\pi/2 - n\phi)$ என நிறுவுக.

12. n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணெனின், $(\text{கோசை } \theta + i \text{சைன் } \theta)^n = \text{கோசை } n\theta + i \text{சைன் } n\theta$ என நிறுவுக.

$z_1 = -1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$, $z_3 = 1-\sqrt{3}i$ என்னுஞ் சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் $r(\text{கோசை } \theta + i \text{சைன் } \theta)$ என்னும் வடிவத்திலே உணர்த்துக. இங்கு $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. இதிலிருந்து $z_1^6 = 8i$, $z_2^7 = 64[\sqrt{3}+i]$, $z_3^8 = -128[1+\sqrt{3}i]$ என நிறுவுக.

13. ஆகண் வரிப்படத்திலே புள்ளிகள் P_1 , P_2 என்பவை முறையே Z_1 , Z_2 என்னுஞ் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. $Z_1 - Z_2$ என்பதைக் குறிக்கும் புள்ளியைப் பெறுதற்குக் கேத்திரகணித அமைப்பொன்றைத் தருக. $\frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)$ என்பதைக் குறிக்கும் புள்ளியாது?

A, B, C, D என்பவை இவ்வொழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும். இப்புள்ளிகள் a, b, c, d என்னுஞ் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. $a - b = d - c$ என நிறுவுக.

ஆகண் வரிப்படத்திலே ஓர் இணைகரத்தினது மேற்கூறிய உடமையைப் பயன்படுத்தி, ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு கூறிடும் என நிறுவுக.

14. பி.வ.வ. $a+ib$ என்னும் வடிவில் உணர்த்துக, இங்கு $i = \sqrt{-1}$

(i) $\frac{(1+i)(2+i)}{(3+i)}$ (ii) $\frac{1+i}{\sqrt{1-i}}$

(iii) கோசை $\left(\pi/4 + \frac{i}{2} \right)$

$x+iy = t + \frac{1}{t}$ ஆகவும் $t = re^{-i\theta}$ ஆகவும் இருப்பின்,

r ஒருமை என்பதற்கொத்த ஒழுக்கு xy தளத்தில் ஒரு நீள் வளையம் எனக் காட்டுக. அதன் அரை அச்சுக்களின் நீளங்களையும் குறிப்பிடுக. r மாறும்போது, $\theta = \pi/4$ இற்கு ஒத்த ஒழுங்கையும் காண்க.

15. மூன்று சிக்கல் எண்கள் Z, Z_1, Z_2 இல் Z_1 உம் Z_2 உம் ஒருமைகள்; Z மாறி, ஆகண் வரிப்படத்தில் படத்தில் Z ஐக் குறிக்கும் புள்ளி, ஒரு வட்டவிலலை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

$Z_1 = 2(3+i)$ ஆகவும், $Z_2 = 2-(1+i)$ ஆகவும், $\frac{Z-Z_1}{Z-Z_2}$ இன் வீச்சம் $\pi/6$ ஆகவும், இருப்பின், $Z = 2[2+i(1+\sqrt{3})]$ இன் மட்டு ஒர் ஒருமை எனக் காட்டி; அதன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

16. (i) $Z_1 = 1 + 3i; Z_2 = 3 - i$ எனத் தரப்பட்டால்,

$Z_1 - 2Z_2, Z_1^2 - Z_2^2, \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1}$ என்பவற்றை $a + ib$ என்னும் வடிவில் உணர்த்துக.

(ii) $\left(z + \frac{1}{z} \right)^4, \left(z - \frac{1}{z} \right)^4$ என்பவற்றை விரித்தெழுதுக

$Z =$ கோசை $\theta + i$ சைன் θ எனப் பிரதியீடு செய்வதன் மூலம் கோசை $^4\theta +$ சைன் $^4\theta = \frac{1}{4}$ (கோசை $4\theta + 3$) என உய்த்தறிக.

17. (i) (a) $(3+2i)^2$ (b) $\frac{1}{(3+2i)^2}$ என்பவற்றை $x+iy$

என்னும் வடிவில் உணர்த்துக.

(ii) P என்னும் புள்ளி ஆகண் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் Z ஐக் குறிக்கிறது. $|z-1| = 3|z+i|$ ஆக P இன் ஒழுக்கை பரும் படியாக வரைந்து. இவ் ஒழுக்கின் சமன்பாட்டைத் தெக்காட்டின் உருவத்தில் தருக.

$|z| = |z-1+i|$ என்னும் சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்தும் புள்ளிகளை ஒழுக்கில் குறிக்குக.

18. (i) $z = \text{கோசை } \theta + i \text{ சைன் } \theta$ எனின், $z^n + z^{-n} = 2$ கோசை $n\theta$ எனக் காட்டுக. கோசை 7θ ஐ θ இன் பெருக்கமாகவுள்ளவற்றுள் கோசைளில் உணர்த்துக. இதிலிருந்து,

$\int_0^{\pi/3} (64 \text{ கோசை } 7\theta - 35 \text{ கோசை } \theta) d\theta$ என்பதன் பெறுபெறுமானத்தைக் காண்க,

(ii) α, β, γ என்பன கோசை $\frac{\pi}{4} + i$ சைன் $\frac{\pi}{4}$ இன் கனமூலங்களாயின், α, β, γ என்பவற்றை ஆகண் வரிப்படத்திற்குறிக்குக. $(\alpha + \beta + \gamma), \alpha\beta, \gamma$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களையும் காண்க.

19. (i) $z = 3 + 4i$ எனின். (a) $\frac{1}{z^2}$ (b) \sqrt{z} என்பவற்றை $a + ib$ என்னும் வடிவில் உணர்த்துக.

(ii) $|z - 3 + 6i| = 2|z|$ என்னும் சமன்பாட்டால் வரையப்படும் வளைகோட்டை ஆகண் வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைக. சமன்பாட்டைத் தெக்காட்டின் உருவத்தில் உணர்த்துக.

(iii) கோசை $4\theta = 1/8$ (கோசை $4\theta + 4$ கோசை $2\theta + 3$) எனக் காட்டுக.

20. (i) (a) $1, \omega$ என்பன 1 இன் கனமூலங்களில் இரண்டாயின் மூன்றாவது மூலம் ω^2 என நிறுவுக.

(b) $-1, \lambda$ என்பன -1 இன் கனமூலங்களில் இரண்டாயின் மூன்றாவது மூலத்தை λ இற் காண்க.

(ii) வீச் $(z+1) = \text{வீச் } (z-1) + \pi/4$ ஆகும் வண்ணம், z என்ற புள்ளியின் ஒழுக்கைப் பருமட்டாக வரைக.

21. (i) $\frac{x}{1-i} + \frac{y}{1+i} = 2+3i$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தும் x, y இன் பெறுபெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $z = \text{கோசை } \theta + i \text{ சைன் } \theta$ எனின்,

$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \left(1 + i \text{ கோதா } \frac{\theta}{2} \right)$ என நிறுவுக. z ஐக் குறிக்கும் புள்ளி, ஆகண் வரிப்படத்தில் உற்பத்தியை மையமாக

வட்டைய ஓரலகு வட்டத்தை வரையின் $\frac{1}{1-z}$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளி நேர்வரையை வரையும் என உய்த்துக.

22. z என்பது ஒரு சிக்கலெண்ணாகவும், $f(z) \equiv (z+i)/(z-i)$ ஆகவும் உள்ளது.

$f(z)$ என்பது z_1 இனாலும் $f(z_1)$ என்பது z_2 இனாலும் $f(z_2)$ என்பதை z_3 இனாலும் குறிக்கின் $z^3 = z$ என நிறுவுக.

z ஐக் குறிக்கும் புள்ளி ஆகண் வரிப்படத்தில் x அச்சின் வழியே அசைந்தால் (ie, z என்பது மெய்யாயின்) z_1, z_2 ஐக் குறிக்கும் புள்ளிகள் முறையே உற்பத்தியை மையமாகவுடைய ஓரலகு ஆரைவட்டத்தின் வழியேயும், y அச்சின் வழியேயும் அசையும் எனக் காட்டுக.

23. (i) $1+i$ என்னும் சிக்கலெண்ணின் மட்டு, வீச்சம் என்பவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாலோ $(1+i)^{10}$, $(1+i)^{13}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை $(a+ib)$ என்னும் வடிவிற்கு காண்க.

(ii) $|z-1| = 2|z-i|$ எனின், ஆகண் வரிப்படத்தில் சிக்கலெண் z ஐக் குறிக்கும் புள்ளி P இனது ஒழுக்கு ஒரு வட்டம் என நிறுவி, அதன் மையத்தையும் ஆரையையும் காண்க.

24. z என்பது $\text{amp}\left(\frac{z}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் $\left|\frac{z-2}{1-2+i}\right| < 1$ ஆகவும் இருக்கும் வண்ணமுள்ள ஒரு மாறுகின்ற சிக்கலெண்ணாகும். z இன் பாதையை, ஆகண் வரிப்படத்தில் பருமட்டாக வரைந்து அதன் நீளத்தையும் குறிப்பிடுக.

25. $z^4 - 16 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆகண் வரிப்படத்தில் ஒரு சதுரத்தின் நான்கு மூலைகளாற் குறிக்கப்படும் எனக் காட்டுக.

$2+0i$, $0+2i$ என்னும் சிக்கல் எண்கள் படத்தில் முறையே P, Q என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகின்றன. L, M என்பன P, Q என்னும் நேர் வரையில் PL=MQ ஆகும் வண்ணம் எடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. L, M என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும் சிக்கல் எண்கள் z_1, z_2 ஆயின்

(i) $z_1 + z_2$ ஐ $a+ib$ என்னும் வடிவில் உணர்த்துக.

(ii) L, M என்பன மாறும்போது, z_1, z_2 ஐக் குறிக்கும் புள்ளி கற்பனை அச்சில் இரு எல்லைகளுக்கிடையில் அசையும் எனக் காட்டுக. இவ்வெல்லை நிலைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

26. $z = \alpha + i$ சைன் α எனின், z, z^2, z^3 என்பவற்றை ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளிகளாற் குறிக்குக. (α கூர்ங் கோணமாகக் கொள்ளப்படலாம்) இப்புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு முக்கோணி வரையப்படுகிறது.

$z + z^2 + z^3$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளியில் இம்முக்கோணியின் குத்துயரங்கள் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக

27. இரு சிக்கலெண்கள் z உம் w உம்

$w = \frac{1 + iz}{iz}$ என்னும் சமன்பாட்டால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

இவற்றை ஆகண் வரிப்படத்தில் குறிக்கும் புள்ளிகள் Z உம் w உம் ஆகும். Z என்பது ஆகண் படத்தில் கற்பனை அச்சில் இருப்பின் w மெய் அச்சில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

Z என்பது $|z| = 1$ என்னும் ஒழுக்கில் கிடப்பின், w இன் ஒழுக்கைக் காண்க. Z இன் ஒழுக்கில் தரப்பட்ட புள்ளிகளின் நிலைக்கு w இன் நிலையை எப்படிக் காணலாம் எனவும் காட்டுக.

28. (i) z, y மெய்யாயிருக்கையில் $(z+1)(z-i) = 3 - 4i$ ஆகும் போது $z+iy$ வடிவில் z ஐக் காண்க.

z இன் நிலையை ஆகண் வரைபில் காட்டுக.

(ii) தெமோவரின் தேற்றத்தினை உபயோகித்து அல்லது வேறு வழியாக $\sin 4\theta, \cos 4\theta$ என்பவற்றை $\sin \theta, \cos \theta$ வில் எழுதுக.

$\tan 4\theta = \frac{4 \tan \theta (1 - \tan^2 \theta)}{1 - 6 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta}$ எனவும் காட்டுக.

29. (i) $1, w, w^2$ என்பன ஒன்றின் மூன்று கனமூலங்களாயின் பின் வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(a) $1+w+w^2$

(b) $(1+2w+3w^2)(1+2w^2+3w)$ சமன்பாடுகள் $x^3-1=0$ என்பதும் $px^5+qx+r=0$ என்பதும் பொது மூலத்தை உடையதாயின்

$(p+q+r)(pw^5+qw+r)(pw^{10}+qw^2+r)=0$

(ii) $|z - 1| = 3|z + 1|$ ஆயின் ஆகன் வரைபடத்தில் z இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக. இவ்வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரையையும் காண்க.

30. (i) பின்வரும் சிக்கல் என்களை $a + bi$ வடிவில் தருக. a, b மெய்யானவை.

$$z_1 = (1-i)(1+2i), z_2 = \frac{2+6i}{3-i}, z_3 = \frac{-4i}{1-i}$$

$$|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3| \text{ எனக் காட்டுக.}$$

வீச்சங்களிற்கான முதன்மைப் பெறுமானங்களுக்கு வீச்சம் $(z_2 - z_1) -$ வீச்சம் $(z_1 - z_3) = \pi/2$ எனவும் காட்டுக.

ஒரு ஆகன் வரைபில் z_1, z_2, z_3 என்பன முறையே P_1, P_2, P_3 எனும் புள்ளிகளால் தரப்படின் P_1 ஆனது $P_2 P_3$ ஐ விட்ட மாகக்கொண்ட வட்டத்தில் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

(ii) தெமோவரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\cos 6\theta$ ஐ $\cos \theta$ இன் அடுக்குகளில் காண்க.

31. (i) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ஆயின் $z^n + 1/z^n = 2 \cos n \theta$,

$$z^{n-1} / z^n = 2i \sin n \theta \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \text{ என்பதைவிரித்து அல்லது வேறு}$$

வழியாக $128 \sin^4 \theta \cos^4 \theta = \cos 8 \theta - 4 \cos 4 \theta + 3$ எனவும் காட்டுக.

(ii) ஒன்றின் (unity) மெய்யெண் அல்லாத கனமூலத்தில் ஒன்று w ஆயின் மற்றையது w^2 எனக் காட்டுக.

$$1 + w + w^2 = 0 \text{ எனவும், } i(w - w^2) \text{ மெய் எனவும் காட்டுக.}$$

32. (i) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ஆகும். $w^2 = z$ எனும் சமன்பாட்டை திருத்திப்படுத்தும் w இன் இரு பெறுமானங்களின் மட்டு (modulus) வீச்சம் (argument) என்பவற்றைக் காண்க. $(2-i) 2\sqrt{3}$ எனும் சிக்கல் எண்ணின் இரண்டு வர்க்க மூலங்களை $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ வடிவில் பெறுக. இவ்வெண்ணையும், அதன் வர்க்க மூலங்களையும் ஒரு ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

(ii) w என்பது ஒன்றின் மெய்யற்ற கனமூலங்களில் ஒன்றாயின் மற்றையது w^2 எனக் காட்டுக.

$$\text{மேலும் (a) } 1 + w + w^2 = 0 \text{ எனவும்}$$

$$1 + w \text{ என்பது } -1 \text{ இன் கனமூலம் எனவும் காட்டுக.}$$

33. (i) சிக்கல் எண்கள் z_1, z_2 ஒரு ஆகண் வரைபடத்தில் தரப் பட்டுள்ளன.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$|z_1| = 6$ ஆகவும் $|z_2| = 4 + 3i$ ஆகவுமிருப்பின் $|z_1 + z_2|$ இன் உச்சப் பெறுமானம் 11 எனக் காட்டுக. இதன் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் காண்க.

(ii) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ஆயின்

$$(a) z + 1/z = 2 \cos \theta$$

$$(b) z^n + 1/z^n = 2 \cos n\theta \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக

$$\cos^4 \theta = 1/3 (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

34. z இன் எல்லாப் பெறுமானங்களும்

$$a(z+b)(z+c) + b(z+c)(z+a) + c(z+a)(z+b) = 3 \text{ ஆயின்}$$

மாறிலிகள் a, b, c ஐக் காண்க.

35. இக்கேள்வியின் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் z எனும் சிக்கல் எண்களின் வீச்சம் $-\pi < z$ இன் வீச்சம் $\leq \pi$ என்னும் சமனிலியை திருப்திப்படுத்துகின்றது.

(a) சிக்கல் எண் z இனது மட்டு r உம் வீச்சம் θ உம் ஆகும். இங்கு $0 < \theta < \frac{3\pi}{4}$, θ இல் பின்வருவனவற்றின் மட்டையும் வீச்சத்தையும் காண்க. (i) z^2 (ii) $1/z$ (iii) iz

(b) z ஆனது $|z| = 1$ ஆகுமாறு உள்ள சிக்கல் எண் எனின், ஆகண் வரைபடத்தின் உதவியால் அல்லது வேறுவழியாக $1 \leq |2+z| \leq 3$ எனவும், $-1/6 \leq (2+z)$ இன் வீச்சம் $\leq 1/6$ எனவும் நிறுவுக.

36. (a) $(x+iy)^2 = 3-4i$ ஆயின், x, y இற்கு இரு சமன்பாடுகள் எழுதுக. $x=2$ ஆயின், இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் திருப்திப்படுத்தக்கூடியதாக y இற்கு ஒரு பெறுமானம் பெறப்படலாமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $3-4i$ இன் இரு வர்க்கமூலகங்களை $a+ib$ வடிவில் காண்க.

(b) z_1, z_2 இரு பூச்சியமில்லாத சிக்கலெண்கள் $|z_1|; |z_2|$ $|z_1 + z_2|$ ஐத் தொடர்பு படுத்தும் சமனிலியைத் தந்து இதனை ஒரு ஆகண் வரிப்படத்தின் மூலம் விளக்குக.

$(1+ia)$, $(a+i)$ ஆகிய சிக்கலெண்களைக் கருத்திற் கொள்வதன்மூலம் அல்லது வேறு வழியால், $a+1 \leq \sqrt{2(1+a^2)}$ எனக் காட்டுக. இங்கு a , மெய் நேரெண் ஆகும்.

37. (a) $a=3-i$, $b=1+2i$ எனின், பின் வருவனவற்றின் பருமன்களைக் காண்க. (i) $2a+3b$ (ii) $\frac{a}{2b}$

(b) $|z|=3$ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒழுக்கை வரைக. $c=5+i$ உம் $|z|=3$ உம் எனின், $|z+c|$ இன் அதிகுயர், அதி குறைந்த பெறுமானங்களையும் காண்க.

38. (i) ஆகண் வரிப்படத்தில்

(a) $z^3-1=0$ இன் கனமூலங்களையும்

(b) $z^4-16=0$ இன் நான்கு மூலங்களையும் காண்க.

(ii) $z = e^{i\theta}$ எனில்

(a) $z + z^{-1} = 2 \cos \theta$

(b) $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta$ எனக் காட்டி

$$\cos^6 \theta = \frac{1}{32} (\cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10)$$

எனவும் காட்டுக.

39. (i) Z என்பது ஒரு சிக்கலெண்ணாகும்; $\left(\frac{2Z+1}{iZ+1}\right)$ எனும் சிக்கலெண்ணின் கற்பனைப் பகுதி -2 ஆயின் ஆகண் வரிப்படத்தில் Z ஐ குறிக்கும் புள்ளியின் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடென காட்டுக.

(ii) Z_1, Z_2 என்பன ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளிகளை குறிக்குமாயின், கேத்திரகணித முறைப்படி அல்லது வேறுவிதமாக $|Z_1| + |Z_2| \geq |Z_1+Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2|$ எனக் காட்டுக.

40. ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z| < 1$ ஆன பிரதேசம் R ஐ சாயமிடுக. (Shade) Z என்பது இப் பிரதேசத்திலுள்ள யாதுமொர் புள்ளி Z என்பது Z இன் உடன் புணரிச் சிக்கல் ஆகும். பின் வரும் வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும் w காணப்படக்கூடிய பிரதேசத்தை வரிப்படத்தில் குறிப்பிடுக.

(i) $w = z + 3 + 4i$

(ii) $|wz| = 1$

(iii) $w = z\bar{z}$

41. $f(x) = x^3 + px + q, p > 0, q > 0$

(i) என தரப்படுமாயின், $f(x)$ இன் நிலைத்த பெறுமானங்களை கருத்திற் கொள்வதன்மூலம் அல்லது வேறு வழியாக $f(x) = 0$ எனும் சமன்பாடானது ஒரேயொரு மூலத்தை கொண்டிருக்க மென்றும், அது பூச்சியத்திலும் சிறிதென்றும் காட்டுக.

(ii) $x^4 + 4x + 3 = 0$ எனும் சமன்பாடானது 2 சிக்கல் மூலங்களை கொண்டிருக்கமெனவும், அச் சிக்கலெண்ணின் மெய்ப்பகுதி நேரானதெனவும் காட்டுக.

42. (i) பின்வரும் சிக்கலெண்களை $a + bi$ எனும் வடிவில் எடுத்துரைக்க $Z_1 = \frac{-2+i}{1-3i}, Z_2 = \frac{-3+i}{2+i}; Z_1, Z_2, Z_1 Z_2$ வை ஆகன் வரிப்பட மொன்றில் குறிக்க.

(ii) தமோய்வரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $(\sqrt{3} + i)^{10} - (\sqrt{3} - i)^{10}$ என்பதை எளிய வடிவில் தருக.

43. ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF, ஒரு ஆகன் வரிப்படத்தில் தன் மையத்தை உற்பத்தியில் கொண்டுள்ளது. உச்சி A, Z=2 இல் உள்ளது.

(a) $|z| \geq 1, -\frac{\pi}{3} \leq \text{வீச்சம் } z \leq \frac{\pi}{3}$ எனும் இரு சமனிலிகளும் உண்மையாகும். அறுகோணியின் பகுதியை வரிப்படத்தில் காட்டுக.

(b) $|z - c| = R$ எனும் வடிவில் O, B, F க் கூடான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

(c) உச்சிகள் C, E க்கான z இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(d) அறுகோணி உற்பத்திபற்றி 45° வலஞ்சுழியாக சுழற்றப்படுகிறது. C, E இன் புதிய நிலைகளுக்கூரிய z இன் பெறுமானத்தை $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ எனும் வடிவில் தருக.

44. (i) ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z| \leq |z-i|$ ஆயுள்ள பிரதேசம் R ஐ சாயலிடுக. (shade) $w=z-\frac{1}{2}i$ ஆயின் $|w| < |w-i|$ ஆயுள்ள பிரதேசத்தை காண்க.

(ii) தமோவரின் தேற்றத்தை உபயோகித்து அல்லது வேறு வழியாக $2^5 \cos^6 \theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10$ என காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக

$$\pi/4$$

$\int_0^{2\pi} 2^5 \cos^6 \theta \, d\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

45. (i) $(1+3i)$ $z_1=5(1+i)$ எனில் z_1, z_1^2 என்பவற்றை $a+bi$ வடிவில் தருக.

ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z-z_1| = |z_1|$ என்பது மையத்தின் ஆள் கூறுகளை தரும் வட்டத்தை கீறுக.

(ii) $z=\cos \theta + i \sin \theta$ எனில்

$$z - \frac{1}{z} = 2i \sin \theta, z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta \text{ என நிறுவுக.}$$

இதிலிருந்து அல்லது வேறுமுறையால்

$$16\sin^5 \theta = \sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin \theta \text{ என நிறுவுக.}$$

46. (i) $|z|=1$ என்பதின் ஒழுக்கை ஆகண் வரிப்படத்தில் வரைக. $z=a+bi$ எனும் புள்ளியை $a>b>0; a^2+b^2>1$ ஆகையில் அதே படத்தில் குறிக்க. அதே படத்தில்

$$z^2, \frac{1}{z}, z + \frac{1}{z} \text{ எனும் புள்ளிகளை உற்பத்தியுடன் இணைத்து}$$

ஏதும் சமகோணங்கள் உண்டாயின் வேறுபடுத்துக.

(ii) $u=x+yi$ எனில் $u + \frac{1}{u}$ மெய்யாக u கொள்ளக்கூடிய சகல பெறுமானங்களையும் காண்க.

(iii) $\omega = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ எனில், ω^4, ω^5 என்பவற்றை $p+qi$ வடிவில் எடுத்துரைக்க.

47. x, y என்பன பின்வரும் சமன்பாடுகளை திருப்தி செய்கிறது.

$$\cosh x \cdot \cosh y = 2$$

$$\sinh x \cdot \sinh y = -1$$

ஆயின் $x = -y = \pm \ln(1 + \sqrt{2})$ என காட்டுக.

48. (i) $(z+1)^6 + (z-1)^6 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை
 $-i \cot \left[(2r+1) \frac{\pi}{12} \right]; r = 1, 2, \dots, 6,$ எனும்
 வடிவில் எழுதலாமென காட்டுக.

(ii) $\tan 5\theta = \frac{5 \tan\theta - 10 \tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10 \tan^2\theta + 5 \tan^4\theta}$
 என காட்டுக.

49. (i) $(2 + \omega)^3$ இன் கனமூலங்களின் மட்டுகளையும், வீச்சையும்
 காண்க, இங்கு $|\omega| = 1$, வீச்சு $\omega = \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

(ii) $(z-1)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ இன் மூலங்கள் z_1, z_2 எனில்
 $|z_1 - 2|^2 + |z_2 - 2|^2$ என்பது θ வின் சார்பற்றது என
 நிறுவுக.

$\theta = \frac{\pi}{8}$ எனில் z_1^n, z_2^n என்பன மெய்யாக இருக்க n இன்
 பெறுமானங்களை காண்க. இங்கு n நிறை எண்.

50. (i) $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = \sqrt{3} - i$ எனில் z_1, z_2 இன் மட்டையும்,
 வீச்சையும் காண்க. $q = \frac{z_1}{z_2}$ எனில் q வை $a + ib$ எனும்
 வடிவில் எடுத்துரைக்க.

(ii) z_1, z_2, q வை ஆகன் வரிப்படத்தில் வரைந்து,
 $|z_1 - z_2| = |q - z_1|$ ஆல் குறிக்கப்படும் லணையியை வரைக.

51. (i) z என்பது $|z-1| = 1$ ஆக உள்ள ஒரு மாறும் சிக்கலெண்
 னாகும். z இன் ஒழுக்கை ஆகன் வரிப்படத்தில் பருமட்டாக
 வரைக. படத்திலே $|z-1| < 1$ ஆயும் $\frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{3}$
 ஆயும் உள்ள பிரதேசத்தை சாயலிடுக.

(ii) $z^8 = 256$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை குறிக்கும் புள்ளி
 கள் ஆகன் வரிப்படத்தில் ஒரு ஒழுங்கான எண்கோணியின்
 உச்சிகளில் இருக்குமென காட்டுக.

52. (i) $(1+w)(1+w^2)$ யை எளிய வடிவில் தருக.
 இங்கு $w = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
 $(z-w)^3 = 1$ இன் மூலங்களை $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ எனும் வடிவில் தருக.
- (ii) $z+z^{-1} = 2 \cos \theta$ இன் மூலங்கள் α, β வை θ வின் சார்பில் தருக. ஆகன் வரிப்படத்தில் P, Q எனும் புள்ளிகள் முறையே $(\alpha^n + \beta^n), (\alpha^n - \beta^n)$ யைக் குறிப்பின், PQ வின் நீளம் n இல் தங்கி இராது எனக் காட்டுக.
53. z_1, z_2 என்பன யாதுமிரு சிக்கலெண்களாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
- (a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 (b) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
 $z^2 + z + 2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் $|z| < 1$ ஆகுமாறு ஒரு மூலம் z இருக்க முடியாதெனக் காட்டுக.
54. (i) P என்பது ஆகன் வரிப்படத்தில் z எனும் சிக்கலெண்ணை குறிக்கும் புள்ளியாகும். ஒவ்வொரு வகையிலும் P இன் ஒழுக்கை கேட்கிற கணித முறைப்படி விளக்குக.
- (a) $|2z + i| = 1$
 (b) $|z - (3 + 3i)| = |z - (1 + i)|$
 (c) $|z - (3 + 3i)| + |z - (1 + i)| = 4$
- (ii) a, b, c, d என்பன மெய்யானவையாயும் பூச்சியத்திற்கு சமனற்றவையுமாகும்.
 $z^2 + (a+ib)z + c + id = 0$
 எனும் சமன்பாடானது மெய்மூலமொன்றை கொண்டிருப்பின் $abd = d^2 + b^2c$ என நிறுவுக.
55. $z = x + iy$ எனும் சிக்கலெண்ணை P எனும் புள்ளி ஆகன் வரிப்படத்தில் குறிக்கிறது. பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் Pயின் ஒழுக்கை விபரிக்க.
- (a) $|2z + 1 - 2i| = 3$
 (b) விச்சு $\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \frac{\pi}{4}$
 (c) $|z-i| + |z+i| = 4$
 $|z| = 1$ எனில் $z + \frac{1}{z}$ ஐ குறிக்கும் புள்ளியின் ஒழுக்கை காண்க.

56. $z = \text{கோசை } \theta + i \text{சைன் } \theta$ எனின், $\frac{1}{z} = \text{கோசை } \theta - i \text{சைன் } \theta$
 $= \text{கோசை } (-\theta) + i \text{சைன் } (-\theta)$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\frac{1}{z^n} = \text{கோசை } n\theta - i \text{சைன் } n\theta$ என நிறுவுவதற்கு
 n எனும் ஒரு நேர் முழுவெண் சுட்டிக்குத் தமோய்வரின் தேற்
 மத்தைப் பயன்படுத்துக.

16 கோசை⁵ θ , 16 சைன்⁵ θ என்பனவற்றை முறையே a கோசை
 $5\theta + b$ கோசை $3\theta + c$ கோசை θ , a^1 சைன் $5\theta + b^1$ சைன் $3\theta +$
 c^1 சைன் θ எனும் வடிவங்களில் எடுத்துரைப்பதற்கு $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$
 $\left(z - \frac{1}{z}\right)^5$ என்பவற்றின் சுருறுப்புத் தேற்றத்தையும், மேலே
 பெறப்பட்ட முடிவுகளையும் பயன்படுத்துக.

இங்கு a, b, c, a^1, b^1, c^1 என்பன ஒருமைகளாகும்.
 இதிலிருந்து

(i) 16 கோசை⁵ $\theta = \text{கோசை } 5\theta$

(ii) 16 சைன்⁵ $\theta = \text{சைன் } 5\theta$ எனும் திரிகோணசணிதச் சமன்பாடு
 களின் θ, π என்பவற்றிற்கிடையான எல்லாத் தீர்வுகளை
 யும் பெறுக.

57. ஆகண் வரிப்படத்திலேயுள்ள P_1, P_2 எனும் புள்ளிகள் z_1, z_2
 எனும் சிக்கலெண்களை முறையே குறிக்கின்றன. $P_1 P_2$ இன்
 நடுப்புள்ளியானது $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ எனும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கு
 மென காட்டுக.

A எனும் புள்ளி a எனும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கின்றது.
 $z_2 - a = \pm i(z_1 - a)$ ஆக இருந்தால் மாத்திரமே $AP_1 = AP_2$
 ஆகவும் $\angle P_1 A P_2 = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் இருக்குமென காட்டுக.

ஆகண் வரிப்படத்திலேயுள்ள Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 எனும் புள்ளி
 கள் $3 + 4i, 9 + 12i, 1 + 18i, -5 + 10i$ எனும் சிக்கலெண்களை
 முறையே குறிக்கின்றன. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 என்பன இடஞ்சுழிப்
 போக்கில் முறையே எடுக்கப்படுகின்ற சதுரமொன்றின் உச்சி
 கள் ஆகுமெனக் காட்டுவதற்கு, நாற்பக்கலொன்றின் இரு முலை
 விட்டங்களும் சமநீளமுடையனவாயும் ஒன்றையொன்று செற்
 குத்தாக இருக்கிறவனவாயும் இருந்தால் மாத்திரமே அது ஒரு
 சதுரமாகும் என்ற கேத்திரகணித நிபந்தனையைப் பயன்படுத்துக.

சதுரமொன்றின் ஓர் உச்சியானது $2-i$ எனும் சிக்கலெண் னையும் சதுரத்தின் மையமானது $1+2i$ எனும் சிக்கலெண்ணையும் குறிப்பின், சதுரத்தின் ஏனைய மூன்று உச்சிகளும் குறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் காண்க.

58. (i) ஆகண் வரிப்படத்திலேயுள்ள, P யும் Qயும் z_1, z_2 என்னும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. O என்பது உற்பத்தியாகும். $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$ எனின் OP என்பது OQ விற்கு செங்குத்தாகுமெனக் காட்டுக.

(ii) a, b என்பன மெய்யெண்களாக இருக்க, $(3+5i)(7+5i)$ என்பதை $a+ib$ என்னும் வடிவத்தில் தருக.

$11-29i$ இனது ஒரு சோடி காரணிகளை உய்த்தறிக. இதிலிருந்து $11^2 + 29^2$ என்பதை இரண்டு நேர் முழுவெண்களின் பெருக்கமாகத் தருக.

(iii) $|z+1| + |z-1| = 4$ ஆகவும் வீச்சம் $(iz) = \pi$ ஆகவுமுள்ள z என்னும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

59. a, b என்பன சிக்கலெண்களாக இருக்க $a^3 = b$ ஆயின், a ஆனது b யின் ஒரு கன மூலமாக வரையறுக்கப்படும். இவ்வரைவிலக்கணத்தின்படி,

$$z_1 = \cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3}; z_2 = \cos \frac{2\pi + \theta}{3} + i \sin \frac{2\pi + \theta}{3};$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi + \theta}{3} + i \sin \frac{4\pi + \theta}{3} \text{ ஆகிய ஒவ்வொன்றும்}$$

$Z = \cos \theta + i \sin \theta$ வின் ஒரு கன மூலமாகுமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக,

(i) $1; \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}; \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$ ஆகிய எண்கள் ஒவ்வொன்றும் 1 இன் ஒரு கன மூலமாகுமெனக் காட்டுக.

(ii) $-1; \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ ஆகிய எண்கள் ஒவ்வொன்றும் -1 இன் ஒரு கன மூலமாகும் எனக் காட்டுக.

$$(iii) z^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1+i) \text{ என்னும் சிக்கலெண்ணை}$$

கோசை $\alpha + i$ சைன் α என்னும் வடிவத்தில் எழுதுக. இங்கு $0 < \alpha < \pi$ இதிலிருந்து, z^1 இன் மூன்று கன மூலங்களையும் எழுதுக.

60. ஆகண் வரிப்படத்திலே P, P^1 ஆகிய புள்ளிகளால் Z, z^1 என்னும் சிக்கலெண்கள் குறிக்கப்படுகின்றன. $\frac{Z}{z^1}, Z - z^1$ என்னும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கான கேத்திரகணித அமைப்புகளைத் தருக.

ஆகண் வரிப்படத்திலே முறையே Z_1, Z_2, Z_3 என்னும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கும் P_1, P_2, P_3 என்னும் புள்ளிகள் இடஞ்சுழிப் போக்கில் எடுக்கப்படுகின்ற முக்கோணியொன்றின் உச்சியாகும். $\frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_2} = \text{கோசை } \frac{\pi}{3} + i \text{ சைன் } \frac{\pi}{3}$

ஆக இருந்தால் மட்டுமே $P_1 P_2 P_3$ என்னும் முக்கோணி சமபக்க முக்கோணியாக இருக்குமென நிறுவுக.

61. ஆகண் வரிப்படத்தில் P, P^1 என்னும் புள்ளிகள் முறையே Z, z^1 என்னும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன.

(i) $\frac{PQ}{QP^1} = \frac{\lambda}{\mu}$ ஆகுமாறு PP^1 என்னும் நேர்கோட்டில் Q என்னும் புள்ளி இருக்குமாயின் Q வினாற் குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணைக் காண்க.

- (ii) $Z - z^1$ என்னும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளியைக் காண்பதற்கு ஒரு கேத்திரகணித அமைப்பைத் தருக.

ஆகண் வரிப்படத்தில் P_1, P_2, P_3, P_4 என்னும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , என்னும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன $Z_1 - Z_2 = Z_4 - Z_3$ ஆக இருந்தால் மாத்திரமே $P_1 P_2 P_3 P_4$ என்னும் நேர்கோட்டுருவம் ஒர் இணைகரமாகும் என நிறுவுக.

இம் முடிவைப் பயன்படுத்தி, இணைகரமொன்றின் மூலவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு கூறிடுமென நிறுவுக. (இங்கு, காவி முறைகள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படமாட்டா.)

62. $z = \cos\theta + i \sin\theta$ எனின் $1 + z = 2\cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து, $(1+z)^n$ இற்கு தமோய்வரின் தேற்றத்தையும், சுருறுப்புத் தேற்றத்தையும் பிரயோகித்து,
 $1 + nc_1 \cos\theta + nc_2 \cos 2\theta + \dots + nc_r \cos r\theta + \dots + nc_n \cos n\theta$

$$= \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^n \cos \frac{n\theta}{2} \text{ எனவும்}$$

$$nc_1 \sin \theta + nc_2 \sin 2\theta + \dots + nc_r \sin r\theta + \dots + nc_n \sin n\theta$$

$$= \left[\left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^n \sin \frac{n\theta}{2} \right] \text{ எனவும்}$$

நிறுவுக. இங்கு $nc_r = \frac{\binom{n}{r}}{r}$ இதிலிருந்து, அல்லது வேறு முறையில் பின்வரும் இரு தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

(i) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 \theta / 2 \cos \frac{5\theta}{2} d\theta$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta d\theta$

63. ஆகண் வரிப்படத்திலுள்ள P_1, P_2 ஆகிய இரு புள்ளிகளும், முறையே z, z_2 என்னும் இரு சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கின்றன. P_1, P_2 இளை ஒரு செங்கோணத்தினூடாக P_1 பற்றிச் சுழற்றும் போது P_1 இன் புதிய தானம் P_3 ஆகும். P_3 ஆனது $z_1 \pm i(z_2 - z_1)$ என்னும் சிக்கலெண்ணைக் குறிக்கின்றதென நிறுவுக. இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

ஆகண் வரிப்படத்திலே A, B, P என்பன முறையே a, b, z ஆகிய சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. இங்கு A யும், B யும் நிலைத்த புள்ளிகள் ஆகும். P என்பது மாறும் புள்ளியாகும். C என்பது AB இன் நடுப்புள்ளியாகும். PA யை A பற்றி இடச் சுழிப்போக்கிலே ஒரு செங்கோணத்தினூடாகச் சுழற்றும்போது P இன் புதிய தானம் P^I ஆகும். PB ஆனது B பற்றி வலச்சுழிப்போக்கிலே ஒரு செங்கோணத்தினூடாகச் சுழற்றப்படும்போது P இன் புதிய தானம் P^{II} ஆகும். P^I, P^{II} ஆகியன குறிக்கும் சிக்கலெண்களைக் கண்டு, P^I, P^{II} இன் நடுப்புள்ளி Q ஆனது P இன் எல்லாத் தானங்களுக்கும் நிலைப்பட்டதெனக் காட்டுக.

$$Q \text{ குறிக்கும் சிக்கலெண்ணை } \frac{a+b}{2} + i \left[b - \frac{a+b}{2} \right]$$

என்னும் வடிவில் எடுத்துரைக்கலாமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து Q இன் தானத்தை விரைவாகத் துணிதற்சூரியவொரு கேந்திரகணித முறையைத் தருக.

அலகு 7

சமனிலிகள்

1. a, b, c மெய் நேர் எண்களாயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
 - (i) $a^2 + b^2 \geq 2ab$
 - (ii) $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$
 - (iii) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$
 - (iv) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
 - (v) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
 - (vi) $(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$

2. x, y, z என்பவை நேராக இருப்பின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
 - (i) $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \geq 0$
 - (ii) $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \geq 6xyz$
 - (iii) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \geq 3$
 - (iv) $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yx + zx)$

3. $a \geq 0$ ஆகவும் x, y சமனற்ற நேர் அல்லது எதிர் முழுவெண்களாகவும் இருப்பின், $a^{3x} + a^{3y} + a^{2x+y} + a^{x+2y}$ என்னும் கோவைகளில் பெரியது யாது?

4. (i) x, y இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ காட்டுக.
 $(x+y)(x^3 + y^3) \leq 2(x^4 + y^4)$ என உய்த்தறிக.
 - (ii) p, q, r, s என்பவை நேர் எண்களாயின்
 $(p + q)(1/p + 1/q) \geq 4$ எனவும்
 $(p+q+r+s)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \geq 16$ எனவும் காட்டுக

5. $A + B + C = \pi$ ஆயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
 - (i) $-3 < \text{கோசை } A + \text{கோசை } B + \text{கோசை } C < 3/2$
 - (ii) $\text{கோசை } A \text{ கோசை } B \text{ கோசை } C < 1/8$
 - (iii) $\text{கோசை } A \text{ கோசை } B \text{ கோசை } C < \sqrt{3}$ சைன் A சைன் B

6. (i) x மெய்யாயின், $x^3 - 2x^2 + 8 \geq 4x$ ஆவதற்கு x இன் ஆகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) a, b, c நேர் எண்களாயின்

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$a + b + c = 1 \text{ ஆகும்போது } \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} \text{ யின்}$$

ஆகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

7. a, b நேர் எண்களாயின், $a+b=4$ ஆக

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{17}{2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

8. u, v, w நேர் எண்களாயின் $u+v+w=1$ ஆக,

$$8uvw \leq (1-u)(1-v)(1-w) \leq \frac{8}{27} \text{ என நிறுவுக.}$$

9. x, y, z நேர் எண்களாயின், $(x+y+z)^5 \geq 27xyz$ எனக் காட்டுக.

இத்துடன் $xyz=8$ ஆயின், $xy+yz+zx \geq 12$ எனக் காட்டுக.

10. a, b நேர் எண்களாயின், $a + b = 1$ ஆக, $ab \geq \frac{1}{4}$ எனவும் $(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2 \geq \frac{25}{2}$ எனவும் காட்டுக.

11. a, b நேர் எண்களாயின்,

$$(i) a + \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b}$$

$$(ii) \sqrt{a^2 + b} > a + \frac{b}{2a+1} \text{ (இங்கு } 2a + 1 > b \text{) என நிறுவுக.}$$

12. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக. (x, y, a, b, c நேரெனக் கொள்க)

$$(i) x^{m+n} + y^{m+n} \geq x^m y^n + y^m x^n$$

(இங்கு m, n நேர்முழுவெண்கள்)

$$(ii) (a+b+c)^3 \geq 27abc \leq 9(a^3+b^3+c^3)$$

$$(iii) (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 \geq bc+ca+ab$$

$$(iv) \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

$$(v) \sqrt{13} + \sqrt{6} > \sqrt{17} + \sqrt{3}$$

13. a, b, c நேர் எண்களாயின்,
 $(a^2 + b^2) (a^7 + b^7) \geq (a^4 + b^4) (a^5 + b^5)$
 $a^4 + b^4 + c^4 \geq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc (a+b+c)$ எனக் காட்டுக.
14. a, b, c, x, y, z நேர் எண்களாயும்
 $b+c \geq a, c+a \geq b, a+b \geq c$ ஆயும் இருப்பின்,
 $a^2(x-y)(x-z) + b^2(y-x)(y-z) + c^2(z-x)(z-y)$ என்னும்
 கோவை நேர் என நிறுவுக.
 $b+c > a, c+a > b, a+b > c$ ஆயின்
 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > abc$ என நிறுவுக.
15. எல்லா $x > 0$ இற்கும்
 $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} > m(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ என நிறுவுக.
16. தான்⁻¹ $(x+a) -$ தான்⁻¹ $(x+b) = \pi/4$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு x இலே மெய்த் தீர்வுகள் உண்டெனின், $(a-b+2)^2 \geq 8$ என நிறுவுக.
 a, b என்பன நேராயின் $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ என நிறுவுக.
 Z_1, Z_2 என்பன சிக்கல் எண்களாகவும், ϕ என்னும் கோணம்
 $-\phi \leq \arg Z_1 \leq \phi$ ஆகவும் $-\phi \leq \arg Z_2 \leq \phi$ ஆகவும் இருக்கின்றது. $|Z_1 + Z_2| \geq |Z_1 Z_2|^{1/2}$ கோசை ϕ என நிறுவுக.
17. q என்பது நேர் முழுவெண்ணாகவும்,
 $a^5 + b^5 = p$ ஆகவும், $a+b=2q$ ஆகவும் இருப்பின், பெருக்கம்
 ab இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களை p, q இற் காண்க,
 ab மெய்யாயின், $8q^5 + p > 0$ எனக் காட்டுக.
 a, b என்பன மெய்யாயின், $p \geq 2q^5$ எனக் காட்டுக,
 $a^5 + b^5 = 33, a+b=3$ என்பதன் எல்லாத் தீர்வுகளையும் காண்க.
18. a, b மெய்யெண்களாயின், $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ எனக் காட்டுக,
 a, b, c, d நேராயின். $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ இன்
 தகுந்த பெறுமானம் கொடுத்து,

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \text{ என நிறுவுக.}$$

19. a_1, a_2, a_3 என்பன நேராகவும் மெய்யாகவும் இருப்பின்,

$$(a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \geq 9 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$a_1 a_2 \dots a_n$ என்றும் n கணியங்களுக்கு இக்கூற்றின் பொது வரையை (Generalisation) நிறுவுக.

20. (a) (i) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2 = 1$ ஆயின். xyz இன் அதிக யர்ந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $x + 2y = 4$ ஆகவும், $-1 < x < 8$ ஆகவும் இருப்பின் $(x+1)(y+2)^2(y+3)^3$ இன் அதி உயர்ந்த பெறு மானம் காண்க.

(iii) n ஒன்றிலும் கூடிய முழுவெண்ணாயின்,

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} < n \sqrt{\frac{n+1}{2}} \text{ எனக் காட்டுக}$$

(b) $A+B+C=\pi$ ஆயின் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $-3 < \text{கோசை } A + \text{கோசை } B + \text{கோசை } C \leq 3/2$

(ii) $\text{கோசை } A \text{ கோசை } B \text{ கோசை } C \leq 1/8$

(iii) $\text{கோசை } A \text{ கோசை } B \text{ கோசை } C + \sqrt{3} \text{ சைன் } A \text{ சைன் } B \text{ சைன் } C \leq 5/4$

(iv) தான் $A/2 \leq \frac{a}{2\sqrt{s(s-a)}}$ இதிவிருந்து.

$$\text{தான் } \frac{A}{2} \text{ தான் } \frac{B}{2} \text{ தான் } \frac{C}{2} \leq \frac{R}{2s} \text{ என்பதைப் பெறுக}$$

(v) $\frac{1}{2} \leq \text{கோசை}^2 A + \text{கோசை}^2 B + \text{கோசை}^2 C \leq 3$

21. x, y, z என்பன மெய் எண்களாயின்

$$(y+z-x)^2 + (z+x-y)^2 + (x+y-z)^2 \geq yz + zx + xy \text{ எனக் காட்டுக.}$$

22. அசைன் x , அகோசை x என்பவற்றின் வரைவிலக்கணங்களைப் பாவித்து, x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் அகோசை $x >$ அசைன் x எனக் காட்டுக.

23. (i) $(a+b)^2 - (a-b)^2$ ஐக் கருக்கவும் இச் சர்வசமன்பாட்டினை குந்து இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை தரப்படுமாயின் அவற்றின் பெருக்கம், அவை சமனாகவிருக்கும்போதே உயர் வாயிருக்கும் எனக் காட்டுக.

- (ii) இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக பின்வரும் கோவையின் மிகக் கூடிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\left(11 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) \left(7 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)$$

24. (i) P மெய்யாயின் $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ எனக் காட்டுக, இதிலிருந்தோ அல்லது வேறுவழியாகவோ $p + q = 1$ ஆகவும் $0 < p < 1$ ஆகவுமிருப்பின் $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் காண்க.

25. $x(x-4)(x^2-4) < 0$ எனும் சமனிலியை திருப்திசெய்யும் x இன் பெறுமான வீச்சுகளை காண்க.

p, q, r, s என்பன நேராயும் ஒன்றுக்கொன்று சமனற்றதாயும் இருப்பின்

(i) $(pq + rs)^2 \leq (p^2 + r^2)(q^2 + s^2)$

(ii) $p^3q + pq^3 < p^4 + q^4$ எனக் காட்டுக.

$p^4 + q^4 + r^4 + s^4 > 4pqrs$ எனவும் காட்டுக.

26. பின்வரும் சமனிலிகளை திருப்தி செய்யும் x இன் பெறுமான வீச்சுகளை ஆராய்க.

(a) $0 < \frac{(x-1)(x+3)}{(3x-1)} < 1$

(b) $|x^2 + 1| < |x^2 - 4|$

27. d, c, a என்பன மூன்று மெய்யெண்களாயின், $a^2 + b^2 + c^2 - (bc + ca + ab) \geq 0$ எனவும் நிறுவுக.

l, m, n என்பன எவையேனும் மூன்று நேர் எண்களாயின் $\frac{1}{3}(l+m+n) \geq \sqrt[3]{lmn}$ என்பதை இதிலிருந்து அல்லது வேறு முறையிற் காட்டுக.

ஒரு செங்கோண இணைகர பரவை வடிவத்தில் உள்ள மூடியவொரு பெட்டியின் நீளம், அகலம், உயரம் ஆகியன முறையே x, y, z. அலகுகளாகும். அப்பெட்டியினது பரப்பின் பரப்பளவு A அலகுகளும், கனவளவு V அலகும் ஆகும். அதன் நான்கு மூலைவிட்டங்கள் ஒன்வொன்றினதும் நீளம் p அலகுகளாகும்

(i) $A \leq 2p^2$ எனவும் (ii) $V \leq A^{3/2} / 6\sqrt{6}$ எனவும்

(iii) $V \leq p^3 / 3\sqrt{3}$ எனவும் நிறுவுக.

அலகு 8

நிகழ்தகவு

1. (i) ஒரு பையனும் ஒரு பெண்ணும் மாறிமாறி நாணயமொன்று சுண்டுகின்றனர். முதலில் தலையொன்றை பெறுபவரே வெற்றி பெற்றவராவர். முதலில் பெண் சுண்டுவாளாயின், பையன் வெற்றி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன?
 - (ii) சிவப்புத் தாயக்கட்டையொன்றும், நீலநிறத் தாயக்கட்டையொன்றும் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்பட்டு ஒவ்வொன்றிலும் விழும் எண்கள் பதிவு செய்யப்பட்டன. பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளை காண்க.
 - (a) இரு தாயக்கட்டைகளிலும் யாதும் இரட்டை எண்கள் பெறப்படல்.
 - (b) இரு தாயக்கட்டைகளிலும் பெறப்படும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை 8 அல்லது அதற்கு கூடியதாய் இருத்தல்.
 - (c) சிவப்பு நிற தாயக்கட்டையில் விழும் எண் 4 என தரப்படுமாயின் விழும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 8 அல்லது அதற்கு கூடியதாய் இருத்தல்.
2. (i) $P(A)=0.6$, $P(B)=0.25$, $P(A \cup B)=0.725$ ஆகுமாறு A, B இரு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

A, B என்பன தம்முள் புற நீக்குபவை அல்லாமலும் ஒன்றில் ஒன்று சார்பற்றதும் ஆனதெனக் காட்டுக $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ என்பவற்றைக் காண்க.
- (ii) ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சிவப்புச் சீட்டும், இரண்டு கறுப்புச் சீட்டுகளும் அகற்றப்படுகின்றன. மிகுதியில் இருந்து மூன்று சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள் மீண்டும் கட்டினால் இடப்படவில்லை. எடுக்கப்பட்டவையெல்லாம் ஒரே நிறமுடையதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{23}{93}$ எனக் காட்டுக. இந்நிகழ்ச்சி நடைபெறுகிறது எனக் கருத்திற் கொண்டு மிகுதி 46 சீட்டுக்களில் இருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்ட அடுத்தசீட்டு எடுக்கப்பட்ட மற்றைய மூன்று சீட்டுக்களின் நிறத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
3. ஒரு பெட்டியில் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் 3 நீலப் பந்துகளும் 4 மஞ்சள் பந்துகளும் உள்ளன, பெட்டியிலிருந்து எழுமாற்றாக 3 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்பட்ட பந்து மீண்டும் பெட்டியில் இடப்படவில்லை.

பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளை காண்க.

- (i) மூன்றும் வித்தியாசமான நிறமுள்ளதாய் இருத்தல்
 (ii) மூன்றும் ஒரே நிறமுடையதாய் இருத்தல்

4. ஒரு கட்டிட வேலையில் எல்லா கட்டிடப் பொருள்கள் சரியான நேரத்துக்கு கொடுக்கப்படும் என்பது M ஆகும். கட்டிடம் குறிப்பிட்ட காலத்தில் முடிக்கப்படும் என்பது F. $P(M) = 0.8$ எனவும் $P(M \cap F) = 0.65$ எனவும் தரப்பட்டால் $P(F/M)$ என்பதன் கருத்தை விளக்கி அதன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

$P(F) = 0.7$ ஆயின் கட்டிடப்பொருள்கள் நேரகாலத்துள் கொடுபடாவிடினும் கட்டிடம் குறித்த காலத்துள் முடிக்கப்படும் என்பதன் நிகழ்தகவைக் காண்க.

5. கறுப்பு, வெள்ளை நிற தாயக்கட்டைகள் இரண்டு உருட்டப்படுகின்றன. பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இரண்டிலும் விழும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 5 ஆல் பிரிபடக்கூடியது

(ii) கறுப்பு தாயக்கட்டையில் விழும் எண் ஆனது வெள்ளை தாயக்கட்டையில் விழும் எண்ணின் இருமடங்கிலும் கூடியதாய் இருத்தல்

(iii) ஏதாவதொரு தாயக்கட்டையில் விழும் எண் 3 அல்லது 4 என தரப்படுமாயின் இரண்டிலும் விழும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 8 ஆயிருத்தல்

(iv) வெள்ளை தாயக்கட்டையில் விழும் எண் கறுப்பு தாயக்கட்டையில் விழும் எண்ணிலும் பெரியது என தரப்படுமாயின், இரண்டிலும் விழும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 6 இலும் குறைவாயிருத்தல்.

6. மூன்று நாணயங்களில் ஒன்றில் பூ இருக்கவேண்டிய பக்கமும் தலை பொறிக்கப்பட்டுள்ளது. மற்ற இரண்டு நாணயங்களும் வழக்கமானவை. மூன்றில் ஓர் நாணயம் எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்டு மூன்று தரம் சுண்டப்படுகிறது. மூன்று முறையும் தலை பெறப்பட்டதெனின் மரவரிப்படத்தால் அல்லது வேறு விதமாக சுண்டப்பட்ட நாணயம் ஏமாற்றப்பட நிகழ்தகவு என்ன?

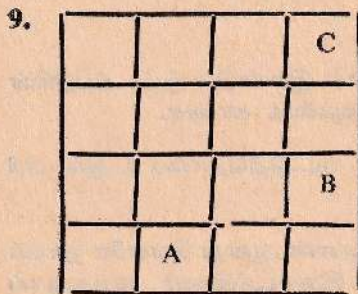
7. $\int \frac{4dx}{(1+x^2)} = x$ என நிறுவுக.

x இன் பெறுமானத்தை பெற ரீமானின் நெறியைப் பிரயோகித்து பெறுக.

8. ஒரு சீட்டுக் கட்டானது கலைக்கப்பட்டு ஒரு ஆளுக்கு 13 சீட்டுகள் வீதம் நான்கு பேருக்குக் கொடுக்கப்பட்டது. பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(a) நான்கு ஆக (Ace) களும் ஒரு ஆளுக்குச் செல்லுதல்

(b) ஒவ்வொருவரும் ஆகக்கூடியது ஒரு ஆக (Ace) வைத்திருந்தல்



மேல்வரும் படமானது 25 புள்ளிகளை கொண்ட சதுரவடிவான சாலகமாகும். (square lattice) A, B, C என்பன அதிலுள்ள நிலையான புள்ளிகள் ஆகும். இரு புள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரமானது அவற்றிற்கிடையே உள்ள அலகு நீளமுள்ள தேர்கோட்டுத் துண்டங்களின் மிகக் குறைந்த எண்ணிக்கை ஆகும். இவ்வாறு AB=3, BC=2, AC=5 ஆகின்றது. இச் சாலகத்தில் ஒரு புள்ளி எழுமாற்றாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றது.

(a) இப்புள்ளிகளை எழுமாற்றாகத் தெரிவதற்கு ஒரு தாயக்கட்டையை எவ்வாறு உபயோகிப்பீர் என விளக்குக.

(b) புள்ளியானது A இல் இருந்து 3 அலகு தூரத்தில் தெரியப்படுவது நிகழ்ச்சி 'E' ஆகும். புள்ளியானது B இலிருந்து 2 அலகு தூரத்தில் தெரியப்படுவது நிகழ்ச்சி F ஆகும். P(E), P(F) என்பவற்றைக் காண்க.

$E \cap F$ ஐ விளக்குக. $P(E \cap F)$ ஐக் கணித்து E, F ஆகியவை சார்பற்றவை அல்ல* எனக் காட்டுக.

10. நான்கு நாணயங்களும் ஒரு தாயக்கட்டையும் ஒன்றாக எறியப்படுகின்றன. S என்பது விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கையுடன் தாயக்கட்டையில் விழும் எண்ணைக் கூட்டவருவதாகும்.

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

- (a) $P(S=6)$
 (b) $P(S>7)$
 (c) $P(2 \leq S \leq 5)$
 (d) $P(S=8, \text{ இரண்டு தலைகள் விழுவதுடன்})$

11. A, B, C, D என்பன ஒன்றில் ஒன்று சார்பற்ற எழுமாற்றான நிகழ்ச்சிகள் (Independent Random events) ஆகும்.

$$P(A)=0.1, P(B)=0.2, P(C)=0.3, P(D)=0.4$$

எனின் $P(A \cup B \cup C)$ $P(A \cup B \cup C \cup D)$ என்பவற்றைக் கணித்து, எவ்வாறு முடிவுகளைப் பெற்றீர் என விளக்குக.

12. ஒரு தாயக்கட்டையானது எண் 6 உம் எண் 1 உம் குறைந்தது ஒரு முறை விழும்வரை தொடர்ந்து எறியப்படுகின்றது. தாயக்கட்டை 'n' முறை எறியப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{1}{3} \left[\left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right]$$

இங்கு 'n' ஆனது 2, 3, 4, என்னும் பெறுமானங்களை எடுக்கும்போது எனக் காட்டுக.

13. (i) சிவப்புத் தாயக்கட்டை ஒன்றும், நீலத் தாயக்கட்டை ஒன்றும் உருட்டப்படுகின்றன. இந் நிகழ்ச்சியின் முடிவு 'R' ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது. இரு தாயக்கட்டைகளிலும் ஒரே எண் விழுமாயின் 'R' என்பது அவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஆகும். இரண்டிலும் விழும் எண்கள் வித்தியாசமாயின், 'R' என்பது அவற்றின் பெருக்கமாகும்.

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

- (a) $P(R=6)$
 (b) $P(R=8)$
 (c) $P(R=12)$

- (ii) இவ்வாறான இரு செய்கைகளின் முடிவுகளின் கூட்டுத்தொகை 45 இலும் கூடியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

14. (i) $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{4}$ எனவும்
 நிகழ்ச்சிகள் A, B ஒன்றில் ஒன்று சாராதவை.
 நிகழ்ச்சிகள் A, C ஒன்றில் ஒன்று சாராதவை.
 நிகழ்ச்சிகள் B, C என்பன தம்முள் புறநீங்குபவை, (Mutually
 exclusive)

(a) $P(A \cup C)$ (b) $P(A \cap B)$

(c) $P(A' \cap B' \cap C')$

மேல்வருவனவற்றைக்கண்டு ஒவ்வொரு வகையிலும் எவ்வாறு
 உமது முடிவைப் பெற்றீர் என விளக்குக.

- (ii) 1, 2, 2, 2, 3, 3, எனக் குறிக்கப்பட்ட ஆறு சீட்டுகளில்
 இருந்து இரண்டு சீட்டுகள் எடுக்கப்பட்டன. இங்கு எடுக்
 கப்பட்ட சீட்டுகள் மீண்டும் வைக்கப்படவில்லை. எடுக்கப்
 பட்ட இரண்டு சீட்டுகளில் குறிக்கும் எண்களின் கூட்டுத்
 தொகை 4 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

15. 13 கலாவரைகளை (Clubs) உள்ளடக்கும் 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட
 ஒரு கட்டில் இருந்து சீட்டுகள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றன
 இங்கு எடுக்கப்பட்ட சீட்டுகள் பதிவு செய்யப்பட்டபின் மீண்டும்
 கட்டில் இடப்படுகின்றன, பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக்
 காண்க.

- (a) எடுக்கப்பட்ட முதலிரண்டு சீட்டுகளும் கலாவரை (clubs)
 ஆக இருப்பதற்கான
 (b) எடுக்கப்பட்ட மூன்றாவது சீட்டே கலாவரை (clubs) வகை
 யைச் சேர்ந்த முதலாவது சீட்டாக இருப்பதற்கான
 (c) எடுக்கப்பட்ட முதல் ஐந்து சீட்டுக்களில் ஏதாவது நான்கு
 கலாவரை வகையைச் சேர்ந்து இருப்பதற்கான
 (d) எடுக்கப்பட்ட முதல் ஆறு சீட்டுகளில் ஏதாவது இரண்டு
 கலாவரை வகையைச் சேர்ந்த இரு வித்தியாசமான சீட்டு
 களாக இருப்பதற்கான

16. சிவப்பு நிறமானதும் நீல நிறமானதுமான இரு தாயக்கட்டை
 கள் உருட்டப்பட்டு அவற்றில் விழும் எண்கள் பதிவு செய்யப்
 பட்டன.

பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

- (a) அவற்றின் கூட்டுத்தொகை 3 ஆல் வகுபடக் கூடியதான

- (b) சிவப்புத் தாயக்கட்டையில் விழும் எண்ணுனது 5 இலும் சிறியது எனத் தரப்படுமாயின், இரு எண்களினதும் கூட்டுத் தொகை 10 ஆக இருக்கக்கூடியதான.
- (c) நீலத் தாயக்கட்டையில் விழும் எண் 3 எனத் தரப்படுமாயின் இரு எண்களினதும் கூட்டுத்தொகை 7 இலும் சிறியதாய் இருக்கக் கூடியதான.
- (d) சிவப்புத்தாயக்கட்டை, நீலத்தாயக்கட்டையிலும் பெரிய எண்ணைக்காட்டக் கூடியதான.
17. ஒன்பது எண்ணிகள் (Counters) ஒன்றோடொன்று ஒத்தவை ஆனால் நிறம் மட்டும் வேறுபடும். நீலம் 2, சிவப்பு 2, பச்சை 2, மஞ்சள் 2, கறுப்பு 1, ஒன்பது எண்ணிகளிலுயிருந்து எத்தனை வெவ்வேறான மூன்று எண்ணிகள் கொண்ட தொடைகளை ஆக்கலாம்.
18. இரண்டு தாயக்கட்டைகள் உருட்டப்பட்டன கீழ்வரும் நிபந்தனைகள் தரப்பட்டால், இரண்டு தாயக்கட்டைகளிலும் கூட்டுத் தொகை 6 ஆக்குவதற்கான, நிபந்தனை (Conditional) நிகழ்தகவு யாது?
- (i) கூட்டுத்தொகை ஒற்றை (B_1)
- (ii) கூட்டுத்தொகை > 6 , (B_2)
- (iii) முதல் தாயக்கட்டையில் பெறுமானம் ஒற்றை (B_3)
- (iv) இரண்டு தாயக்கட்டைகளும் ஒரே பெறுமானமுடையது (B_4)
- (v) இரண்டு தாயக்கட்டைகளும் வித்தியாசமான பெறுமதி (B_5) உடையது.
- (vi) கூட்டுத்தொகை = 13. (B_6)
19. ஒரு இலத்திரனியல் சாதனம் இரண்டு உப தொகுதிகளைக் (Subsystemse) கொண்டுள்ளது. பின்வருவன அறியப்பட்டுள்ளன. $P(A \text{ பழுது}) = 0.20$, $P(B \text{ பழுது}) = 0.15$, $P(A \ \& \ B \text{ பழுது}) = 0.15$ $P(A \text{ பழுது} | B \text{ பழுது})$ என்பதைக் கணிக்க.
20. இரண்டு பிள்ளையுள்ள குடும்பத்தில் குறைந்தது ஒன்று ஆண் ஆயின், இரண்டும் ஆண் ஆகவுள்ளதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
21. 3 ஒழுங்கான தாயக்கட்டைகள், வித்தியாசமான முகங்களைக் கொண்டிருக்க வேண்டுமெனத் தரப்பட்டால் கீழ்வருவதின் நிகழ்தகவைக் காண்க.
ஆகக் குறைந்தது ஒன்று '6' ஆக இருத்தல்

22. ஒரு சீட்டுக்கட்டில் இருந்து (42 சீட்டுகள்) இரண்டு சீட்டுகள் அடுத்தடுத்து எடுக்கப்படுகின்றன. அவை எடுக்கப்பட்டவுடன் மீண்டும் வைக்கப்படுவதில்லை. எடுத்த இரண்டு சீட்டுக்களும் 2 இலும் அதிகமாகவும் 9 இலும் குறைவாகவுமிருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
23. A, B ஆகியன புற நீங்கலான (mutually exclusive) நிகழ்ச்சிகள் ஆகவும் $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ ஆகவும் இருப்பின்
(a) $P(A \cup B)$ (b) $P(A')$ (c) $P(A' \cap B)$ என்பவற்றைக் காண்க.
24. 4 நாவல்கள், கவிதைப் புத்தகங்கள், 1 அகராதி ஆகியவற்றை உடைய ஒரு புத்தக அலுவாரியில் இருந்து, மூன்று புத்தகங்கள் மேலெழுந்தவாரியாக எடுக்கப்படுகின்றனவெனின் பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
(a) அகராதி எடுக்கப்படுதல்
(b) இரண்டு நாவல்களும், ஒரு கவிதைப்புத்தகமும் எடுக்கப்படுதல்
25. கமலஹாசன் 20 வருடத்தில் சினிமாத்துறையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 ஆகவும், ரஜினிகாந்த் 20 வருடத்தில் சினிமாத்துறையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.9 ஆகவுமிருப்பின் 20 வருடத்தில் இரண்டுபேரும் சினிமாத்துறையில் இல்லாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
26. ஒரு விவாகம் செய்த ஆண் ஒரு தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். ஒரு விவாகம் செய்த பெண் அந்நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 ஆகும். ஒருவருடைய மனைவி T. V. பார்க்கிறார் எனின் அவ்வாண் அந் நிகழ்ச்சியைப் பார்க்கப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.7 பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
(a) ஒரு விவாகம் செய்த சோடி T. V. நிகழ்ச்சியைப் பார்த்தல்
(b) புருஷன் T. V. பார்க்கிறான் எனின், மனைவி T. V. பார்த்தல்
(c) ஒரு விவாகம் செய்த சோடியில் ஆகக் குறைந்தது ஒரு ஆளாவது T. V. நிகழ்ச்சி பார்த்தல்.
27. ஒரு கூடைப்பந்து விளையாட்டுக்காரன் தான் முயற்சி செய்வதில் 56% ஐப் போடுகிறான் அவன் தனது அடுத்த நாலு முயற்சியில் சரியாக மூன்றைக் கூடையில் போடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
28. 'N' மணிதர் வித்தியாசமான பிறந்தநாளைக் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது? லீப் வருடம் எனக் கொள்க;

29. ஒன்றையொன்று வெட்டாவண்ணம் 8 'Rooks' ஐ சதுரங்க மட்டையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

30. 12 பந்துகள், 3 பெட்டிகளுக்குள் மேலெழுந்தவாரியாகப் பங்கிடப்பட்டால், முதல் பெட்டிக்குள் 3 பந்துகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

31. ஒரு பொருட்கூட்டம், 20 பழுதடைந்தும், 20 பழுதடையாத பொருட்களைக் கொண்டுள்ளது.

இரண்டு பொருட்கள்

(a) with replacement மாற்றக் கூடியதாகவும்

(b) without replacement மாற்றமுடியாததாகவும்

தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன,

A: முதலாவது பழுதடைந்தது என்ற நிகழ்ச்சி

B: இரண்டாவது பழுதடைந்தது என்ற நிகழ்ச்சி

$P(A)$, $P(B)$ ஐ (a), (b) என்ற இரண்டு வகைகளிலும் காண்க.

32. (i) "TOPOLOGY" எனும் சொல்லில் இருந்து பெறக்கூடிய எழுத்துக்களின் சேர்மானங்களின் இரு எண்ணிக்கை என்ன?

இவற்றில் எத்தனை சேர்மானங்களில் 'O' காணப்படும்?

(ii) 6 பேரைக் கொண்ட குடும்பமொன்று ஒரு சினிமா தியேட்டரில் ஒரே வரிசையில் அமர்கிறார்கள். குறிப்பிட்ட இரு சகோதரர்கள் அடுத்தடுத்து இருக்காமல், எத்தனைவிதமாக இக்குடும்பம் அமரலாம்.

33. (i) n தேர்நிறை எண்ணை இருக்க $n^3 + 6n^2 + 8n$ என்பது 3ஆல் வகுபடும் என தொகுத்தறி முறையால் அல்லது வேறு முறையால் காட்டுக.

(ii) n பொருட்களில் இருக்கக்கூடிய சேர்மானங்களில் ஒரு மாதிரியானவைகளின் எண்ணிக்கை P . இன்னொரு மாதிரியானவைகளின் எண்ணிக்கை q . மற்றவை இவற்றிலிருந்து வேறுபட்டவையும் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்டவையும் ஆகும்.

மொத்தச் சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை $\frac{n!}{(p!)(q!)}$ என நிறுவுக.

34. ஒரு நிலைக்குத்து கம்பத்தில் கொடிகளை கட்டி, மேலிருந்து கீழாக கொடிகளை எண்ணுவதால் சில சமிக் கைகள் வழங்கப்பட்டு ஒரு பச்சைக் கொடி, மூன்று சிவப்புக் கொடி, இரண்டு நீலக் கொடி ஆகியவற்றைக் கொண்டு எத்தனை விதமான சமிக் கைகள்

- (a) 6 கொடியுகளையும் பாவிக்கையில்
 (b) குறைந்தது 5 கொடியுகளை பாவிக்கையில் வழங்கலாமெனக் கணிக்க.

35. 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 எனும் 7 இலக்கங்களிலிருந்து எத்தனை 4 இலக்கங்கள் கொண்ட வேறுவேறான எண்கள் பின்வரும் நிபந்தனைக் கமைய ஆக்கப்படலாம்.

- (a) ஒவ்வொரு இலக்கமும் எத்தனை முறையும் விரும்பியவாறு பயன்படுத்தினால்
 (b) ஒரு இலக்கம் ஒரு முறை மாத்திரம் உபயோகித்தல்
 b இல் எத்தனை எண்களில் இரண்டு ஒற்றை இலக்கங்களும் இரண்டு இரட்டை இலக்கங்களும் உபயோகிக்கப்படுகின்றன இவற்றுள் எத்தனை எண்கள் இரட்டையானவை.

36. (i) 10 வெவ்வேறு புத்தகங்கள் இரண்டு இரண்டாக 5 பொட்டலங்களாக கட்டப்பட வேண்டும். எத்தனை முறையில் கட்டலாம்?

(ii) தொகுத்தறிமுறையால்

$$2 \left[\sum_{r=1}^n r^5 \right] + \left[\sum_{r=1}^n r^3 \right] = 3 \left[\sum_{r=1}^n r^2 \right]^2$$

என நிறுவுக.

37. எட்டு மரங்கள் ஒரு வட்டத்தின் வழியே சமதூர இடைகளில் எழுமாற்றாக நடப்படுகின்றன. சிறிது காலத்தின் பின் இவற்றுள் 2 மரங்கள் நோயினால் இறக்க நேரிடுமாயின் இவையிரண்டும் அடுத்தடுத்து இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

இவற்றுள் 4 மரங்கள் மட்டும் நோயினால் பாதிக்கப்படுமாயின்

- (i) ஆகக்குறைந்தது 2 பாதிக்கப்பட்ட மரங்களாவது அடுத்தடுத்து இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?
 (ii) பாதிக்கப்பட்ட 4 மரங்களும் அடுத்தடுத்து இருப்பதற்கான, நிகழ்தகவு யாது?

38. ஒரு பெட்டியானது 4 சிவப்புப் பந்துகளையும், 5 வெள்ளைப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. இப்பெட்டியிலிருந்து எழுமாற்றாக 3 பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக (மீண்டும் பெட்டியுள் இடப்படாது) எடுக்கப்படுகின்றன. வரவுகளை குறிப்பதற்கு மரவரிப்படமொன்று வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் பெட்டியில் மிஞ்சியிருப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

39. ஒரு பையன் நாணயமொன்றை 3 முறையும் ஒரு பெண் அதே நாணயத்தை 2 முறையும் சுண்டுகின்றனர். பெண்ணானவள் ஆணைவிட கூடிய "தலைகளை" பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?
40. 6 கோல்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியில் 2 கோல்கள் ஒரு குறிக்கப்பட்ட நீளத்திலும் நீளம் கூடியவை என அறியப்படுகிறது. இரு கோல்கள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எழுமாற்றாக தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்படுகின்றன. (எடுக்கப்பட்ட கோலொன்று மீண்டும் தொகுதியுள் சேர்க்கப்படவில்லை)
- (a) எடுக்கப்பட்ட இரண்டும் குறிப்பிட்ட நீளத்திலும் கூடியதாய் இருத்தல்.
- (b) எடுக்கப்படும் இரண்டாவது கோல் குறிப்பிட்ட நீளத்திலும் கூடியதாய் இருத்தல்.
41. ஒரு பெட்டி X ஆனது 2 வெள்ளைப் பந்துகளையும், 1 நீலப் பந்தையும் 3 சிவப்பு பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. இன்னுமோர் பெட்டி Y ஆனது 4 வெள்ளைப் பந்துகளையும் 2 நீலப் பந்துகளையும் மட்டும் கொண்டுள்ளது. ஒரு தாயக்கட்டையானது ஒரு முறை எறியப்பட்டு அதில் விழும் எண் 1 அல்லது 6 ஆயின் மட்டும் ஒரு பந்து பெட்டி X இலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும். வேறு எண்ணாயின் ஒரு பந்து பெட்டி Y இலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும்.
- இப்பரிசோதனையில் 5 பெறுபெறுகளில் ஒவ்வொன்றினதும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
- (i) ஒரு வெள்ளைப்பந்து எடுக்கப்படுவதால் நிகழ்தகவையும்
- (ii) ஒரு வெள்ளைப்பந்து எடுக்கப்படுகிறது என தரப்படுமாயின் பெட்டி X ஆனது பாவிக்கப்படுவதன் நிகழ்தகவையும் காண்க.
42. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து 6 அட்டையொன்று எடுக்கப்பட்டு பதிவு செய்யப்பட்டது. பின் மீண்டும் சீட்டுக் கட்டிலுள் இடப்பட்டது. இவ்வாறாக 4 அட்டைகள் எடுக்கப்படுமாயின் பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
- (a) எடுக்கப்படும் சீட்டுக்களுள் ஒன்றேனும் Heart (ஆடித்தன்) வகையை சேராதிருத்தல்
- (b) எடுக்கப்படுவன எல்லாம் Heart வகையைச் சேராதிருத்தல்
- (c) இரு சீட்டுகள் Heart வகையையும் இருசீட்டுகள் Diamond (டயமன்) வகையையும் சேர்ந்திருத்தல் (எவ்வித வழங்கிலும் எடுக்கப்படலாம்.)
- (d) ஒவ்வொருவகையிலும் 1 சீட்டு எடுக்கப்படுதல்.

விடைகள்

அலகு 1

1. (i) $x=1$, 2 அல்லது $\frac{1}{2}$
 (ii) $x=1$ அல்லது 2, -1 அல்லது 4
 (iii) $x=1$ அல்லது $\frac{2}{3}$
2. (i) $x=3$ அல்லது 1 அல்லது $\frac{1}{2}$ (ii) $x=\pm 3$ அல்லது $\pm 2\sqrt{5}$
 $y=1$ அல்லது -1 அல்லது $\frac{1}{2}$ $y=\pm 4$ அல்லது $\pm\sqrt{5}$
3. (i) $l=1$; $m=-\frac{1}{3}$ அல்லது 2; $n=-2$ அல்லது -1 ; $l^2=3$;
 $m^2=6$ அல்லது -1 ; $n^2=-1$ அல்லது 2; $k=-2$ அல்லது 2
 (ii) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$
4. (i) $a=2$; $b=1$; $c=-1$
 (ii) $xyz [20(x^2+y^2+z^2) + 30(xy+yz+zx)]$
5. (i) $x=1\pm\sqrt{2}$ அல்லது $x = \frac{3+\sqrt{13}}{3}$
 (ii) $(a+b+c) / 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$
6. (i) $-(a-b+c)(b-c+a)(c-a-b)(a+b+c)$
 (ii) $2 > x > 3$
7. (i) (a) $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$
 (b) $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$
 (ii) $x=1$ அல்லது $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
8. (i) $a=1$; $b=2$
 (ii) $5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
 (iii) $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx)$
9. $c=-8$; $b=2$; $a=3$
10. $x^2[\frac{1}{2}(a+b)-c] + \frac{1}{2}(a-b)x + c$
11. $b=-d$; $a=-c$
12. $a=2$; $b=-3$; $c=3$; $d=1$

13. $l = \frac{1}{2}; m = -\frac{1}{2}; n = 2$

14. (ii) $(x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz)$

15. $24x - 27$

16. (i) $7r$ (ii) $\frac{1}{x} + 3 + 5x + 7x^2 + \dots + (2n+3)x^n \dots$

Valid for $-1 < x < 1, x \neq 0$

17. $f(x) \equiv (x-1)^2(2x+3)^2$

$f(x) \equiv 2(x-1)(2x+3)(4x+1)$

18. $1, 3$

19. (i) $2, -2; 5, 29, 113$

(ii) $A=1, B=1, C=-1, D=-2$

20. (a) $x=-1, y=1$ (b) $6^q = \frac{1875}{21952} p = -1.2$

21. $a=b=c$ ஆகும்படியே $k=1$

22. $(a+b+c)(a-b+c)(a-b-c)(a+b-c)$

23. $a = -\frac{1}{2}$ or $\frac{4}{3}$ (b) $(2, 3) (2, 4) (2, 5) (3, 4) (3, 8)$

25. (i) $x=64, y=16$

26. (i) $h=4, g=-1; (x+2); (x+3)$

27. $\frac{n}{3} (4^{n^2} - 1)$

28. $x/y = 2$ or 3

29. (i) $-\frac{1}{2} < \frac{(2x+1)}{(x^2+2)} < 1$

(ii) $x^2 - (2p^2 - 4q)x + p^2(q^2 - 4q) = 0$

30. $m=4, n=-3$

अवध 2

1. (i) $n/2(6n^2 - 27n + 23)$

(ii) (a) $\frac{1-r^{2n}}{(1-r^2)(1-r)} - \frac{r^{n+2}(1-r^n)}{(1-r)^2}$

(b) $\frac{1}{(1-r^2)(1-r)}$

2. (i) $n/2(6n^2 - 3n - 1)$ (ii) $3, 3/2, 3/4, \dots$

3. (i) $1 + \sqrt{3} < x < 3: -1 < x < 1 - \sqrt{2}$

(ii) $a=0; b=1/6; C=1/2, d=1/3$

4. (i) $1 + \frac{5x-6}{3x-2} + \left(\frac{5x-6}{2x-2}\right)^2 + \dots$

6. (i) $S_n = 2 + 8/(2^{n-1} - 1) + 2^{n+1}(n^2 - 2n + 1)$

10. (i) $A=1/2; B=2; C=3/2$

(ii) $S_n = 1/2 + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$

11. (ii) $-1/3 < x < 1/3; 2 < x < 4$

12. $2 < x < 4$

13. (ii) $a=1; b=1; 1/3 < x < 1$

14. $S_n = 1/2 - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$

15. (ii) $(x+1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

16. (i) 1.04139 (ii) $2(c-1)$

17. (i) $1/2 < a < 1; 22/5$

18. $S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}; |r| < 1; \frac{S_n}{S_b} = \frac{1}{270}$

19. (i) $10^6 + 1$ (ii) $-2, -29(x+1)$

20. (i) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (ii) $3e-1$

22. $\frac{11}{96} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right); \frac{11}{96}$

23. (i) $7/e-1$ (ii) $S_n = - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$

24. (i) $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ (ii) $\frac{n(n+1)}{(2n+1)(2n+5)}$, $\frac{1}{4}$

26. $\frac{1}{3}n(n^2-1)$

27. (i) $(bu-av)^2 + (au+bv-1)^2$ (ii) $r = \frac{k}{1+k}$

28. (i) நடு உறுப்பு = 2 (ii) 4 அடிப்படைகள், $11/3$ அம்

29. (ii) $\frac{2}{1+x} - \frac{1}{1-2x}, 2(-1)^i - 3^i$

30. n^{3n+1}

31. (i) $A=16/5, B=8/3, C=7/15$
 (ii) $n(2n-1)(2n+1)(n^2-7)/15$

33. (i) $-1 < x < 0; -\frac{1}{2x}$ (ii) 2.39790

34. (i) $2 > x > 0$, உயர் $a = \frac{1}{2}$ (ii) 0.20067

35. $r = -\frac{1}{2}$ முதல் உறுப்பு = 8 முடிவிலிவரை கூட்டுத்தொகை $\frac{16}{3}$

36. (i) $x > \frac{1}{2}, n=11$ (ii) 5050

38. (i) $\frac{n(2n+1)(n+1)}{6+2n(n+1)}$

(ii) (a) $x < -5$ or $x > 9$

(b) $x < 2$

$S_{\infty} = (x-9)^2/14(x+5)$

$$39. \frac{1-x^{n+1}}{2-x} \quad \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad 2+(n-1)2^{n+2}$$

40. (ii) 15e

$$41. \frac{2(r+3)}{r(r+1)(r+2)}, \quad 5/2$$

44. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; -\frac{1}{3} < x \leq 0; x = -\frac{1}{4}$

46. (a) 21, 67 (b) $|r| < 1, S = \frac{a}{(1-r)}$; 21

47. (a) $u_{10} = -14, d = -3$ (b) 23

$$48. \frac{r^2-r+2}{2} \text{ ; } \frac{r^2+r}{2}; \quad 22, \quad 155$$

49. (i) $\frac{3}{4} \leq k < 3; 64/3$

50. (i) $|x| < 1; 0.20273$

(ii) $n(6n^2+9n+1)/2$

51. (i) (a) $-3/n$ (b) $1/n$

(ii) 7e

53. (i) $-\frac{1}{2}$ (a) 1023

(b) $(6n^2+5n)/2(2n+1)(2n+2)$

$$54. \frac{2p+q}{4}$$

55. (i) $\frac{l}{2}$ (ii) $|x| < 1$

$$56. \frac{l}{(1-a)^2}$$

57. (i) $5/4$ (iii) $\frac{\left(\frac{0+n-a/2}{2}\right) - \text{சென்சர்} \left(\frac{0+l-a/2}{2}\right)}{2 \text{ சென்சர்} \frac{a}{2}}$

58. (i) $\frac{n}{8} (n+1) (2n+1)$

அலகு 3

2. (a) $\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c} > 0$; $\frac{3abc}{a+b+c} > 0$ (b) $\frac{3abc}{a+b+c} < 0$
 (c) $a=b=c$ (d) $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} < 1$; $3abc < a+b+c$
3. $a^2x^2 - (b^2 - ab - 2ac)x + (c^2 + ac + bc) = 0$
4. (i) $- < x < 1$
6. (i) $A=1$; $B=1$; $C=-2$; $D=0$
 (ii) $p=-3$; $q=2$; $r=1$
7. $b/a^3(3ac-b^2)$; $b/a^5 [5ac(b^3-ac)-b^4]$
10. $x^2 - (p^2 - p - 2q)x + (-p^3 + q^2 + q + 2pq) + 0$
11. $(b-a)/2 \leq p \leq (a-b)/2$
13. (i) $|z| = \sqrt{2}$, $(-1, 1)$ (ii) $|z| = \sqrt{2}$, $(-1, -1)$
14. (i) $q = 2b + 6$; $r = 2c + 3b + 4 + \sqrt{(b^2 - 4p)}$ (ii) $b = a^2 -$
15. (i) $x^2 - x\sqrt{(b+2c)} + c = 0$
 (ii) $-2 \leq p \leq 8$; $-2 \leq p \leq 0$; $4 < q \leq 8$
16. $-2/3$, $-1/6, \frac{1}{2}$
17. (i) $y \geq 1$, $y \leq -1$, $m = -8$, $2/9$
 (ii) $x = 5$, $y = \frac{1}{2}$
18. $b^3 = a^3c$, $1/5$, $\frac{1}{2}$, $5/4$
19. $x > -1$, $-3 < x < -2$, $y \leq 3$
20. (i) $acx^2 - b(a+c)x + a^2 + b^2 + c^2 - 2ac = 0$
 (ii) $-1 \leq x < 1$ அல்லது $4 > x \leq 5$
21. கோவை $-1/22$
22. $x > +2$, $-2 < x < 4 - 2\sqrt{5}$
23. $(\alpha, \beta, p) = (\sqrt{3}, 4, 6)$ அல்லது $(\sqrt{15}, 2, 30)$
24. $x \rightarrow x$ எல்லை $= 1$

27. $bx^2 - (a^2 - 4a^2b + 2b^2)x + b^3 = 0$
 $b^3x^2 - (a^2 - 4a^2b + 2b^2)x + b = 0$
28. $(\pm 3, 0, 0), (\pm 3, \pm 3, 0), (\sqrt{5}, \pm 2, \pm 2)$
 $(\pm 7, \pm 2, \pm 2), (\pm 7, \pm 3, \pm 2), (\pm 5, \pm 2, \pm 2)$
30. $x = 2, -1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$
31. $x = 1.4$
32. $a^2 = b^2 - ac$
33. $x^2 - (p^4 + 4p^2q + 2q^2)x + q^4 = 0$
35. $19/4, 13/4$
36. (i) $+4$ to $3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}$ to $+2$ (ii) $-5 + 2\sqrt{10}$
38. $(x^2 - 2x + 1)^2 (x^2 + 4x + 4)$; -2 இருமுறை, $(1 \pm 3i)$ இது முறை
39. $16b^2(ab - 1)/a^2$
41. 180
43. (அ) $-\frac{163}{256}$ (ஆ) $2x^2 + 5x + 8 = 0$
 (ii) $\lambda = 1; \mu = 1$
44. $1 < k < 2/\sqrt{3}$
45. $k < -3^{1/12}$ $k = -2^{1/12}$
46. (i) -1.4 (ii) 8.6
47. (a) $p = 1/8$ or -1 (b) $b < -1$
48. $(-1/4, -15^{1/3}), (7/4, -23^{1/6}), (-9/4, 23^{1/8})$
49. $p = b/2a, q = (4ac - b^2)/4a^2$
 $-3 < k < 5$
51. $a = 4$

அலகு 4

1. 1230 2. 17220 3. (a) 22 (b) 286
4. 100 6. (i) $\frac{15!}{3!(2!)^4}$ 7. 5040, 240
14. (a) 51 (b) 77 15. 151, 42
16. (i) 60 (ii) $2\sqrt{2}$ 17. (ii) (a) $5/26$ (b) $4/13$
18. (i) 3, 8, 13, 17, 16, 15 (ii) $1/8, 3/16, 3/16, 3/16, 3/16, 1/8$
19. 120 20. (i) 504; 168 (ii) 84
21. (i) 20, 160; (a) 15, 120 (b) 10,800 (c) 3,600
22. 114; 72

அலகு 5

1. ${}^{15}C_6 \cdot 3^9 \cdot 2^6$
2. (i) ${}^{20}C_2 \cdot 2^{18} (1/8)^3$ (ii) 9-ஆவது உறுப்பு
3. (ii) $(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot {}^n C_{\frac{n-1}{2}}$
4. (i) 4-ஆவது உறுப்பு (ii) 7-ஆவது உறுப்பு
5. ${}^{15}C_9 \cdot 2^6 \cdot 3^9$ 6. $x=1$ 8. (iii) $n=22$ or 14
9. (i) n-ஆவது உறுப்பு
- (ii) $-\sqrt{\frac{2n-r+1}{r}} < x < \sqrt{\frac{2n-r+1}{r}}$
10. $\frac{1}{2} \left[{}^{2n}C_{n-r} + {}^{2n}C_{n+r} \right]$
13. (i) 7-ஆவது உறுப்பு (ii) 3-ஆவது உறுப்பு
14. (i) -1 (ii) $\frac{1}{2a} + \frac{1}{8a^3} + \frac{1}{16a^5} + \dots$

15. (i) $x=3\frac{1}{4}$; $a=4^5/4$
 (ii) $\frac{4}{1+4x} + \frac{4}{1-5x}$; $(-1)^n \cdot 4^{n+1} + 5^{n+5}$
 (iii) $(2n-1)! / (2^{2n-1}) \cdot a^{2n/n(n-1)}$
16. $A=1/\sqrt{2}$, $B=1/16\sqrt{2}$ $x>0$ ஆகும்போது.
17. (a) $4-25/2x+32x^2$ valid for $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$
 (b) $-1-2-3/2x+5/8x^2$ valid for $-1 < x \leq 1$
18. $1+3/2x+11/8x^2$; 1.51% அதிகரிப்பு
19. (i) $2^n - 1$ (ii) $2-13/4x+455/64x^2 \dots -\frac{1}{2} < x \leq 1/3$
20. $a=1$; $b=4$; 22. $1/e(1+4\sqrt{5})$
23. ${}^nC_5 \cdot a^5 + 4^n C_4 \cdot a^3 + 3^n C_3 \cdot a$
24. (i) $11/20, -1/10, 11/50$ (ii) 34.36
25. (i) $x>0$ (ii) $A=B=C=D=1$ (iii) 1
26. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
27. (i) 3/8 (ii) $2^n C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
28. (ii) 2.009975
29. $\frac{2}{1-x} - \frac{2}{2-x}$; $1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}x^2 + \frac{15}{8}x^3$;
 $|x| < 1$; $2 - \frac{1}{2^n}$
30. $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$; $1/12$; 1.0513
31. (a) $2x^6 + \frac{15}{2}x^4 + \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{x^6}$
 (b) $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$; $\frac{3}{2} + \frac{7}{4}x + \frac{33}{8}x^2$
 $|x| < \frac{1}{2}$
32. (i) 90 (ii) 1.41421

33. (i) $\frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right); \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right); \frac{2^{2n}}{(2n)!}$

(ii) $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$

35. $b=4 \quad a=6;$

$|x| < \frac{1}{4}$

36. 0.080043 37. (i) $\frac{3x}{4} + \frac{217x^2}{64}$

38. (i) $0, n/2, -n/3$

(ii) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

அலகு 6

1. (i) (சைன் $75+i$ கோசை 75) $2^{1/6}$

(ii) $5^5 \{ \text{கோசை } [6 \text{ தான் }^{-1(4/3)}] + i \text{ சைன் } [5 \text{ தான் }^{-1(4/3)}] \}$

(iii) $\frac{1}{2} e^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} e^3 i$ (ix) கோசை 3 (v) i தான் i

(vi) $\sqrt{3}/2$ கோசை $h\pi/4 + i/2$ சைன் $h\pi/4$

(vii) $m \angle_e 5 + i$ தான் $^{-1(3/4)}$ (viii) $m \angle_e 2\sqrt{3} + i\pi/6$

(xi) $m \angle_e 3$ (x) $5^{1/5}$ [கோசை $(1/5)$ தான் $^{-1(3/4)}$ + i சைன் $(1/5)$ தான் $^{-1(3/4)}$]

2. (i) (a) நான்கு மூலங்கள்; $(1/\sqrt{2}) (1+i), (1/\sqrt{2})_i (-1+i), (1/\sqrt{2}) (-1-i)$ and $(1/\sqrt{2}) (1-i)$

4. ஆள்கூறுகள்; $(-1, -\frac{1}{2})$

7. 64 கோசை⁷ $\theta - 112$ கோசை⁵ $\theta + 56$ கோசை³ $\theta - 7$ கோசை θ

11. $x = \text{கோசை } hu, \text{ கோசை } v$

$y = \text{சைன் } hv, \text{ சைன் } u$

$$\frac{x^2}{\text{கோசை } u h} + \frac{y^2}{\text{சைன் } h^2 u} = 1, u \text{ ஒருமை}$$

14. (i) $\frac{3}{5} + \frac{4i}{6}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (கோசை $h \frac{1}{4} - i$ சைன் $h \frac{1}{2}$)

ஆரை அச்சுக்களின் நீளம் — $\left(\frac{1}{r}\right) - r; \left(\frac{1}{r} - r\right) x^2 - y^2 = 2$

15. மட்டு 4

16. (i) $-2 + 5i; -1 + 30i; -1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

17. (i) (a) $5 + 12i$, (b) $5/169 - \frac{12i}{169}$

(ii) $4x^2 + 4y^2 + x + ay + 4 = 0$ $(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}), (-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$

18. $\frac{(\text{கோசை } 7\theta + 7 \text{ கோசை } 5\theta + 21 \text{ கோசை } 3\theta + 35 \text{ கோசை } \theta)}{64}$

$\frac{-22}{35} \sqrt{3};$ (ii) $0, \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

19. (i) (a) $7/625 - 24/625 i$ (b) $3 + i$

(ii) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

20. (i) (b) $5/6$ அல்லது சமமான வடிவம்

(ii) $x^2 + (y-1)^2 = 2$ இன் பேரினில் வடிவம்

21. $5, -1$

23. (i) $\sqrt{2}, \pi/4; 32i - 6i(1+i)$

(ii) மையம் $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2});$ ஆரை $2/3 \sqrt{2}$

24. $x^2 + y^2 + y = 0$ என்னும் வட்டத்தின் காற்பகுதி

$x \leq 0, 0 \geq y \geq -\frac{1}{2}; \pi/4$

25. (i) $Z_1 + Z_2 = 2 + 2i$ (ii) 2 அவகுகள்

27. (i) $-i$

28. (i) $0, 3$ (ii) $(-5/4, 0); 6/4$

30. (i) $Z_1=3+i, Z_2=2i, Z_3=2-2i$
 (ii) $32 \cos^6\theta - 48 \cos^4\theta + 18 \cos^2\theta - 1$
32. (i) $|w| = \sqrt{r}, \arg w = \frac{\theta}{2} \text{ or } \pi + \frac{\theta}{2}$
 $2 \left\{ \cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right\}$
 $2 \left\{ \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right\}$
33. (i) 1
34. 1, $(-1+i\sqrt{3})/2; (-1-i\sqrt{3})/2$
35. (a) (i) $r^2, 2\theta$ (ii) $1/r, -\theta$ (iii) $r; \theta + \frac{1}{2}\pi$
36. (a) $2-i; -2+i$ (b) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
37. (a) (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{26} \pm 3$
41. $(x+1)^2(x^2-2x+3)$
42. (i) $-\frac{1}{2}(1+i); -1+i$
 (ii) $2^{10}(-i\sqrt{3})$
43. (b) $|z-2|=2$ (c) $-1 \pm i\sqrt{3}$
 (d) $2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
 $2(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$
44. $2^2/3 + 5\pi/2$
45. $z_1=2-i, z_1^2=3-4i$
 மையம் (3, -1)
46. (ii) $y=0$ அல்லது $x^2+y^2=1$
 (iii) $w^4 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$
 $w^5 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$
49. (i) $\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}$ (ii) $\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}; \sqrt{3}, \frac{3\pi}{2}$

50. (i) $\frac{2\pi}{6}; (1+i\sqrt{3})/2$

(ii) 17, $15/8$

52. (i) $1; \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \pi + i \sin \pi$

$2 \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right]$

(ii) $\cos \theta \pm i \sin \theta; PQ = 2$

54. (a) வட்டம், $(0, \frac{1}{2})$, ஆரை $\frac{1}{2}$

(b) செவ்வன் இரு கூறுக்கி வரை $(3, 3)$ $(1, 1)$ இணைக்கும்.

(c) நீள் வளையம், குவியம் $(3, 3)$, $(1, 1)$

55. (a) வட்டம், மையம் $(-\frac{1}{2}, 1)$, ஆரை $3/2$

(b) வட்டப்பகுதி, மையம் $(1, 0)$, ஆரை $\sqrt{2}$

(c) நீள்வளையம் $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

$y=0$, ஒழுக்கு $|x| = 1$

56. (i) $\theta = n\pi \pm \pi/3$

(ii) $\theta = n\pi \pm \pi/6$ அல்லது $\theta = n\pi$

57. $(-2+i), 5i, (4+3i)$

58. (ii) $11 + 29i; 13 \times 74; \pm 3i$

அலகு 7

17. a, b=1, 2 அல்லது $(3\pi i \sqrt{19}/2)$

18. n^2 20. (i) 8 (ii) -2

23. 81

24. (i) 4 (ii) 7; 8; -4

அலகு 8

1. (i) $1/8$

2. (i) $7/8, 19/30$, (ii) $22/47$

3. (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{84}$
4. 0.8125, 0.25 6. $\frac{32}{59}$
8. (a) $\frac{44}{4165}$ (b) $\frac{133}{17} \times \frac{25}{49}$
9. (b) $P(E) = \frac{6}{25}$; $P(F) = \frac{7}{25}$; $P(E \cup F) = \frac{10}{25}$
10. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{17}{96}$ (c) $\frac{47}{96}$ (d) $\frac{1}{18}$
11. 0.496, 0.6976
13. (i) (a) $\frac{5}{36}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{5}{36}$ (ii) $\frac{2}{81}$
14. (i) (a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{5}{24}$ (ii) $\frac{1}{3}$
15. (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{9}{96}$ (c) $\frac{15}{1024}$ (d) $\frac{3645}{13312}$
16. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{24}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{5}{12}$
18. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{1}{6}$
 (iv) 0 (v) $\frac{1}{5}$ (vi) $\frac{1}{10}$
19. 0.5 20. $\frac{1}{8}$ 21. $\frac{1}{2}$ 22. $\frac{46}{221}$
23. (a) 0.9 (b) 0.6 (c) 0.5
24. (a) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{9}{28}$
25. 0.24
26. (a) 0.35 (b) 0.875 (c) 0.55
27. $\frac{1}{2}$
28.
$$\frac{365!}{365 \cdot N \cdot N!}$$
29.
$$\frac{81}{64C_8}$$
30.
$$P = \frac{{}^{12}C_3 \cdot 2^9}{3^{12}}$$
31. (a) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{19}{99}$
32. (i) 2400
34. (a) 60 (b) 120
35. (a) 2401 (b) 840; 432, 216
36. (i) 945

பின்னிணைப்பு

அலகு 1

31. (i) x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $0 < p < 1$ எனின் $\frac{x-p}{x^2-2x+p}$ எனும் சார்பு எல்லா மெய்ப்பெறுமதிக்கீளையும் கொள்ள முடியும் எனக் காட்டுக. உமது விடையை $p=\frac{1}{2}$ ஆகும்போது ஒரு வரைபால் விளக்குக.

(ii) x^2+1 ஆல் வகுக்கப்படக் கூடிய ஆனால் $(x-1)^2(x+1)$ ஆல் வகுக்கும்போது $-10x+6$ ஐ மீதியாக விடக்கூடிய நாலாமடிமீயுள்ள மெய்ப் பல்லுறுப்பியொன்றைக் காண்க.

32. (i) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 \equiv 3(b-c)(c-a)(a-b)$ எனக் காட்டுக. $x+y+z=0$, $ax+by+cz=0$ $x^3+y^3+z^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$ என அமையும் வண்ணம் x, y, z ஆகியன மெய் மாறிகள் எனின், மெய் a, b, c ஆகியவற்றுக்கு $a \neq b \neq c$ என அமையின் $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b} = 1$ எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x) = px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ $f(x)$ என்பது x^2+q ஆல் வகுக்கப்பட்டால் மிகுதி $(s-qa)x+pa^2-ra+t$ எனக் காட்டுக.

a உம் $-c$ உம் $f(x) = 0$ என்பதன் மூலங்கள் எனின் $ps^2 - qrs + q^2t = 0$ தொடர்பை p, q, r, s, t என்பன திருப்தியாக்கும் என நிறுவுக.

33. (i) $f(x, y, z) \equiv (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ எனக்கொள்வோம் $(x+y), (y+z), (z+x)$ என்பன $f(x, y, z)$ என்பதன் காரணிகள் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ என்பதைக் காண்பிப்படுத்துக.

(ii) x^2+px+1 என்பது ax^5+bx^2+c என்பதன் காரணி எனின் $(a^2-c^2)(a^2-c^2+bc) = a^2b^2$ என நிறுவுக. இந்த நிபந்தனை திருப்திசெய்யப்பட்டால் x^2+px+1 என்பதும் (x^5+bx^2+a) என்பதன் ஒரு காரணியாகும் என்று காட்டுக.

34. (i) $x^2 - k$ என்பது $f(x) = [2x^4 + (3k - 4)x^3 + (2k^2 - 5k - 5)x^2 + (2k^3 - 2k^2 - 3k - 6)x + 6]$ இன் ஒரு வகுத்தியாக இருக்கத்தக்கதாக k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
 k யின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்தையும் நேரொத்த $f(x)$ இன் எஞ்சிய காரணிகளை எழுதுக.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = \frac{1}{2} \{ (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 \}$ எனக் காட்டுக.

$x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$ எனின்,
 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ என்பதை உய்த்தறிக.

அலகு 2

59. $u_r = \frac{r}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ எனின்,

$u_r = \frac{A}{r+1} + \frac{B}{r+2} + \frac{C}{r+3}$ என அமையக்கூடியதாக A, B, C ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க?

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^n u_r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையினால் இதே முடிவைத் தனி யாகப் பெறுக.

இத் தொடரானது ஒருங்குமெனக் காட்டி முடிவிலி வரைக்கும் இதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

60. (i) $\sum_{r=1}^n r = n(n+1)/2$ என்பதைக் கணிதத் தொகுத்தறிமுறையால் நிறுவுக.

$r^3 - (r-1)^3 \equiv 3r^2 - 3r + 1$ எனும் சமன்பாட்டை

உபயோகித்து $\sum_{r=1}^n r^2$ என்பதைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\sum_{r=1}^n r(3r+1)$ ஐக் காண்க.

(ii)
$$\frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)} = \frac{A}{(r+2)} + \frac{B}{(r+3)} + \frac{C}{(r+4)}$$
 என அமையின் A, B, C ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க.

இதனால்
$$\sum_{r=1}^n \frac{2r+1}{(r+2)(r+3)(r+4)}$$
 என்பதன் பெறுமானங் கணிக்க.

இத் தொடர் ஒருங்கும் என உய்த்தறிந்து, முடிவினை வரைக்கும் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

61. $k > 1$ எனின் $\frac{2k-1}{2k} > \frac{(2k-2)}{(2k-1)}$ எனக் காட்டுக.

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$
 ஆகவும்,

$$V_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$
; ($n > 1$) ஆகவும் இருப்பின்,

$$u_n > V_n$$
 எனக் காட்டுக.

$$\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
; ($n > 1$) என

உய்த்தறிக.

$$w_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} (2n+1)$$
 எனின்

$$w_{n+1} - w_n$$
 ஐக் காண்க.

$$\sum_{r=1}^{n+1} u_r = (w_{n+1} - 1)$$
 எனவும் முடிவுறுத் தொடரி.

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$$
 ஒருங்காது எனவும் உய்த்தறிக.

62. (i) u_n உம் V_n
$$u_n = \sum_{k=2n}^{4n-1} \frac{1}{k}$$
;

$$V_n = \sum_{k=1}^{4n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
 என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படு

கின்றன. இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண் கணிதத் தொகுத் தறி தத்துவமூலம் $u_n = V_n$ என நிறுவுக.

(ii) $\sum_{k=0}^n r^k$ எனும் பெருக்கற் தொடரின் கூட்டுத் தொகை

யைக் காண்க. $-1 < r < 1$ எனின், $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r^k$

உண்டு என உய்த்தறிக.

$r < -2$ எனின் அல்லது $r \geq 0$ எனின்,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{r}{(1+r)^k}$ உண்டு எனக் காட்டுக.

63. (i) $n \geq 1$ என்பதற்கு $\tan \theta_{n+1} = \tan \theta_n \cdot \text{Sec} \theta_1 + \text{Sec} \theta_n \cdot \tan \theta_1$ என்று அமைய கூர்ங்கோணங்களின் தொடரியாகும் $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ என்பது $n \geq 1$ என்பதற்கு, $\text{Sec} \theta_{n+1} = \text{Sec} \theta_n \text{Sec} \theta_1 + \tan \theta_n \cdot \tan \theta_1$ எனக் காட்டுக. $n \geq 1$ என்பதற்கு $\tan \theta_n + \text{Sec} \theta_n = (\tan \theta_1 + \text{Sec} \theta_1)^n$ என்பதைக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையைக் கையாண்டு காட்டுக.

(ii) $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ எனும் பெருக்கல் தொடரியின் கூட்டுத்தொகை

யைக் காண்க. $-1 < r < 1$ எனின் $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k$

உண்டு என உய்த்தறிக.

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k}$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ எனக் கொண்டு

$(S - S_n) < 10^{-20}$ என்பதற்கு n இனது மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

64. எல்லா $n \geq 1$ என அமையும் போது $S_1 > \sqrt{3}$; $S_{n+1} = \frac{3(1 + S_n)}{(3 + S_n)}$ என்று அமையும் வண்ணம் $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$

என்பது நேர் எண்களின் தொடரியாகும்.

$(S_{n+1}^2 - 3)$ என்பதை S_n இல் தருக.

கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி n எனும் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் $S_n > \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. n எனும் எல்லா நேர் முழு எண்களுக்கும் $S_{n+1} < S_n$ என உய்த்தறிக. $\tan x/2 = \cot x/2 - 2\cot x$ ($0 < x < \pi$)

எனும் தொடர்பைப் பயன்படுத்தி $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x$ எனக் காட்டுக.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x$ என்பதை உய்த்தறிக.

65. (i) $k > 0$ ஆக இருக்க, $x^2 - x - k = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் நேரான, மறையான மூலங்கள் $\alpha, -\beta$ ஆகும்.

எல்லா $n \geq 1$ இற்கும் $S_1 > \alpha$; $S_{n+1} = \sqrt{k + S_n}$ ஆகுமாறு $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ என்பது நேர் எண்களின் தொடரியாகும்.

$S_{n+2}^2 - S_{n+1}^2 = S_{n+1} - S_n$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, n எனும் எல்லா நேர் முழு எண்கட்கும் $S_{n+1} < S_n$ எனவும், $S_n < \alpha$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\frac{3}{1^2, 2^2} + \frac{5}{2^2, 3^2} + \frac{7}{3^2, 4^2} + \dots$ எனும் தொடரின் n ஆம் உறுப்பு v_n ஐ எழுதுக.

v_n ஐ $V_n - V_{n+1}$ எனும் வடிவத்தில் எழுதக் கூடியதாக

V_n என்பதைக் கண்டு $\sum_{k=1}^n v_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k$ உண்டு என உய்த்தறிக.

66. (i) $u_r = \frac{2r + 1}{r(r + 1)(r + 2)}; f(r) = \frac{\lambda r + \mu}{(r + 1)(r + 2)}$ எனின்,

$f(r) - f(r - 1) = u_r$ ஆகுமாறு λ, μ எனும் ஒருமைகளைக் காண்க.

$\sum_{r=1}^n u_r$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

தொடரானது ஒருங்குமென நிறுவி அதன் முடிவில் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(ii) நான்கு நேரான அடுத்து வரும் முழுவெண்களின் பெருக்கமானது 24 இனால் பிரிக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

$n \geq 2$ ஆயின் கணிதத் தொகுத்தறிவு முறையைப் பயன்படுத்தி $n^5 - 5n^3 + 6n^2 - 5n$ ஐ 120 இனால் பிரிக்கலாமென நிறுவுக.

67. (i) $\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$ என்னுந் தொடரின் r வது உறுப்பு u_r ஐ எழுதுக.

$f(r)$ என்பது r இன் ஒரு சார்பெனின் u_r ஐ $f(r) - f(r - 1)$ எனலும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்தோ, வேறு விதமாகவோ $\sum_{r=1}^n u_r$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்கு தொடரா? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

(ii) கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, n ஒரு நேர் நிறையெண்ணாக இருக்கும்போது,

$2^n - 1 - 9n^2 + 3n - 2$ ஆனது 54 இனால் வகுபடத்தக்கது என்று நிறுவுக.

68. (i) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} + \dots$ என்னுந் தொடரின் r ஆவது உறுப்பு u_r ஆகும். $u_r + 1$ ஐ u_r

இன் சார்பில் எடுத்துரைக்க, $f(r) - f(r - 1) = u_r$ ஆகவும் $f(r) = (Ar + B) u_r + 1$

ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ என்பது r இன் ஒரு சார்பாகும். இங்கு A, B ஆகியவை மாறிலிகள்.

A, B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, இது
 விருந்து $\sum_{r=1}^n u_r = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)} - 1 \right\}$ எனக்
 காட்டுக.

(ii) எந்த நேர் நிறைவெண் n இற்கும் $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$
 ஆனது 17 இனால் வகுபடத்தக்கதெனக் கணிதத் தொகுத்
 தறிவினால் நிறுவுக.

அதோடு, இப்பேறை வேறொரு சாராத முறையினாலும்
 நிறுவுக.

அலகு 3

52. (i) a, b, c என்பன நேர் ஒருமைகளாகவும், $a \neq 0$ ஆகவும்
 இருக்க α, β என்பன $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச்
 சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

λ என்பது யாதாயினுமொரு ஒருமையாயிருக்க, $\alpha + \lambda,$
 $\beta + \lambda$ என்பவற்றை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச் சமன்
 பாட்டைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\alpha + \frac{b}{2a}, \beta + \frac{b}{2a}$ என்னும் இரு எண்
 கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் குறிகளை உடையன எனவும்
 அவை இரண்டும் மெய்யாகவோ, இரண்டும் முற்றாகக் கற்
 பணியாகவோ உள்ளன எனவும் காட்டுக.

(ii) $m = 3$ அல்லது $m = -1$ ஆக இருந்தால், அவ்வாறிருந்தால்
 மாத்திரமே $x^2 + x + 1 = mx$ எனும் இருபடிச் சமன்பா
 னது இரு பொருந்தும் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக்
 காட்டுக.

$y = x^2 + x + 1$ எனும் சார்பின் பரும்படியான
 வரைபை வரைக. $y = 3x, y = -x$ எனும் நேர்கோடுகள்
 இரண்டினதும் தானங்களை அதே படத்தில் தெளிவாகக்
 குறித்துக் காட்டுக.

$m \geq 3$ அல்லது $m \leq -1$ ஆக இருந்தால் அவ்வாற
 ிருந்தால் மாத்திரமே, $x^2 + x + 1 = mx$ எனும் இருபடிச்
 சமன்பாடானது இரு மெய் மூலங்களைக் கொண்டிருக்கும்
 என்பதை இப்படத்திலிருந்து உய்த்தறிக.

53. (i) $f(x) \equiv ax^2 + 2bx + c$, $g(x) \equiv 2(ax + b)$ எனின் இங்கே a, b, c ஆகியன மெய் ஒருமைகள் எனக் கொண்டு பின் வரும் இருபடிச் கோவையின் பிரித்துக் காட்டியை எழுதுக.

$F(x) \equiv f(x) + \lambda g(x)$. இங்கே λ ஒரு மெய் ஒருமையாகும். $f(x) = 0$ இன் மூலகங்கள் மெய்யாகவும் வேறுகவும் அமையின் $F(x) = 0$ இன் மூலங்களும் மெய்யாகவும் வேறுகவும் அமையும் என உய்த்தறிக.

(ii) $y = x^2 - x - 2$, $y = 2x - 1$, $y = -2x + 1$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்குரிய வளையியையும் நேர் கோடுகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாய் வரைக.

$$x^2 - x - 2 + (2x - 1) = 0$$

$x^2 - x - 2 - (2x - 1) = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகள்¹ ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு மூலம் தான் $x^2 - x - 2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கிடையில் அமையும் என உய்த்தறிக.

54. (i) α, β என்பன $x^2 + ax + b = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இங்கு a யும் b யும் ஒருமைகள். $S_0 = 2$ ஆகவும் $S_n = \alpha^n + \beta^n$, $n = 1, 2, \dots$ ஆகவும் வழங்கப்படின் $S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, \dots$ ஆகும். எனக் காட்டுக. இதுவிருந்து, a, b , இன் உறுப்புக்களில் $\alpha^5 + \beta^5$ யையும், $\frac{1}{\alpha^5} + \frac{1}{\beta^5}$ என்பவற்றை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(ii) $n > 2$ என்பது ஒற்றை நேர் நிறை எண் எனின் $x^n + 2$ என்பது $x^2 - 1$ ஆல் வகுக்கப்படும்போது பெறப்படும் மீதி $x - 2$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

55. ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை பெருக்கம் ஆகியவற்றிற்கான கோவைகளை அதன் குணகங்களில் பெறுக.

α, β என்பன $x^2 + px + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆயின், $\alpha + \lambda, \beta + \lambda$ எனும் மூலங்களையுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கே λ ஆனது ஓர் ஒருமையாகும்.

மேலும் γ, δ என்பன $x^2 + qx + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயின் $(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = q^2 - p^2$ ஆகமென நிறுவுக.

56. (i) இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கும், பெருக்குத் தொகைக்குமுரிய கோவைகளை அதன் குணகங்களின் சார்பிற் பெறுக.

$(a + x)(b + x) - c(a + x) - d(b + x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின், $(\alpha - \beta)^2 = (a - b + c - d)^2 + 4cd$ என்று காட்டுக.

a, b, c, d ஆகியன மெய்யாகவும் c, d , ஆகிய இரண்டும் நேராகவும் அல்லது மறையாகவும் இருக்குமாயின், α, β ஆகியன மெய்யானவை என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $a > 0$ ஆகவும் $b^2 < 4ac$ ஆகவும் இருக்குமாயின், $ax^2 + bx + c$ என்னுங் கோவையானது x இன் மெய்ப் பெறுமானங்கள் யாவற்றுக்கும் நேரானது என்று காட்டுக.

$(x^2 - x - 2)(x^2 + x + 1)(x - 3)$ என்னுங் கோவை நேராக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

57. $acx^2 - b(c + a)x + (c + a)^2 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களை $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் α, β என்னும் மூலங்களின் சார்பில் எடுத்துரைக்க. இங்கு a, b, c ஆகியன மாறிலிகள்.

அலகு 4

23. 10 மாணவர்களைக் கொண்ட வகுப்பு ஒன்றில் 7 பேர் ஆண்கள் 3 பேர் பெண்கள்.

(அ) வகுப்பினிருந்து 4 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவைத் தேர்ந்தெடுக்கக்கூடிய வெவ்வேறு வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ஆ) எத்தனை குழுக்களில் குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இடம் பெறுவாள்?

(இ) எத்தனை குழுக்களில் சரியாக ஒரு பெண் இடம் பெறுவாள்?

24. 15 துடுப்பாட்டக்காரர்களைக் கொண்ட ஊர்சுற்றும் குழு 7 துடுப்படிப்போரையும்; 6 பந்து எறிவோர்களையும், 2 விக்கற் காவலர்களையும் கொண்டது. 11 ஆட்டக்காரரைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவிலும் குறைந்தது 5 துடுப்படிப்போரும், 4 பந்து எறிவோரும், 1 விக்கற் காவலனும் இருத்தல் வேண்டும்.

- (அ) துடுப்படிப்பவன் ஒருவனும், விக்கற் காவலன் ஒருவனும் காயமடைந்தன ரெனின், தெரியப்படக்கூடிய வேறுபட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
- (ஆ) எல்லா ஆட்டக்காரரும் உள்ளனர் எனின் எத்தனை வேறு பட்ட குழுக்கள் தெரியப்படலாம்?
25. 7 மனிதர்களிலிருந்தும் 5 சீமாட்டிகளிலிருந்தும் 5 பேரைக் கொண்ட குழு ஒன்றை இருபாலாரையும் பிரதிநிதித்துவப் படுத்துமுகமாக ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட மனிதனையும் ஒரு குறிப் பிட்ட சீமாட்டியையும் ஒன்றாகக் குழுவில் வைத்திருக்காத வண் ணம் எத்தனை முறைகளில் தெரிவு செய்யலாமெனக் காண்க.
26. PREPOSSESSED என்னும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களில் ஒரு முறைக்கு நான்கு எழுத்துக்களை எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங்கள் அமைக்கலாம்?
27. TISSAMAHARAMA என்னும் சொல்லில் உள்ள எழுத்துக்களில் முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசைமாற்றங்கள் செய் யலாம் என்று காண்க.
28. KAHATAGASDIGILIYA எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களி லிருந்து முறைக்கு நான்காக எடுத்து எத்தனை வரிசை மாற்றங் கள் செய்யலாம் என்பதைக் காண்க.
29. சைகையாளர் ஒருவரிடம் ஆறு கொடிகள் இருக்கின்றன. அவற் றில் ஒரு கொடி நீல நிறமானது; இரண்டு கொடிகள் வெண் ணிறமானவை; எஞ்சியவை சிவப்பு நிறமானவை. அவர் கொடிக் கம்பம் ஒன்றிலே கொடிகளை உயர்த்திச் செய்திகளை அனுப்புகின்றார். இங்கு கொடிகள் அமைந்திருக்கும் வரிசைக் கிரமத்தின் மூலம் செய்திகள் அறியப்படுகின்றன. அவர்
- (i) எல்லா ஆறு கொடிகளையும் பயன்படுத்தி,
(ii) சரியாக 5 கொடிகளை பயன்படுத்தி அனுப்பத்தக்க வெவ் வேறு செய்திகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
30. (i) ஓர் அலுவலரையிலே வெவ்வேறு வகையான 16 பாடநூல்கள் உள்ளன. இவற்றில் 3 அட்சரகணித நூல்களும் 4 நுண்கணித நூல்களும் 3 கேத்திரகணித நூல்களும் ஏனை யவை திரிகோண கணித நூல்களும் ஆகும். இந்நூல்களை

எத்தனைவழிகளில் ஒழுங்குபடுத்தி வைக்கலாம்? அதோடு ஒவ்வொரு பாடத்துறையையும் பற்றிய நூல்கள் ஒருமிக்க இருக்க வேண்டியபோது உள்ள ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

- (ii) NARRAGANSETT எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களிலிருந்து முறைக்கு நான்கு எழுத்துக்களைத் தேர்ந்தெடுத்து எத்தனை வெவ்வேறான வரிசை மாற்றங்களைச் செய்யலாம் என்பதை ஆராய்க.

அலகு 5

43. (i) n ஒரு நேர் எண்ணுயிருக்க $(1+x)^n$ இன் விரிவில் $0 \leq r \leq n$ ஆக x^r இன் குணகம் ஒரு நேர் நிறையெண்ணாகுமென நிறுவுக.

$(1+x)^n = (1+x)(1+x)\dots\dots n$ முறை எனும் வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்துக.

இதிலிருந்து p யும் Q யும் n இல் தங்கியுள்ள நேர் நிறையெண்களாயிருக்குமிடத்து,

$(1+\sqrt{2})^n$ என்பதை $p + \sqrt{2}Q$ ஆக எடுத்துரைக்கலாம் எனக் காட்டுக. $P^2 - 2Q^2 = (-1)^n$ எனவும் காட்டுக.

மேலும் $P = \frac{1}{2} \{ (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \}$ எனக் காட்டி Q இற்கு ஓர் ஒத்த பெறுமானத்தைப் பெறுக.

- (ii) $(3x^2 + 1)$ உம் $(3x^2 + 3x + 1)$ உம் $f(x) \equiv 27x^6 + 1$ இன் காரணிகள் எனத் தரப்படுமிடத்து, குணகங்களைச் சமப்படுத்துவதன்மூலம் $f(x)$ இன் மற்ற இருபடிக் காரணியைக் காண்க.

இதிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் 170,000 இலும் பெரிதான மூன்று காரணிகளாக, $3^{33} + 1$ எனும் நிறையெண்ணைப் பிரிக்க. [குறிப்பு $3^6 = 729$, $3^{11} = 177,147$]

44. உறுப்பு x^4 வரையும் $(1+5x)^{1/5}$ இன் சுருறுப்பு விரிவை எழுதுக. இதிலிருந்து $(1.5)^{1/5} = 1.081$ எனக் காட்டுக.

45. நேர் நிறையெண் சுட்டி ஒன்றுக்கு சுருறுப்பு தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}})^n$ இன் விரியில் உள்ள அதியுயர் குணகமானது 9 வது உறுப்பில் மட்டும் இருப்பதாகத் தரப்பட்டுள்ளது. n ஐயும் விரியிலே x^4 இன் குணகத்தையும் காண்க.

46. n என்பது ஓர் நேர் முழுவெண்ணாயின் $(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^n C_r x^r$

ஆகுமென நிறுவுக. இங்கு $C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ஆகும்.

n என்பது ஒரு நேர் முழு எண்ணிருக்க $(5 + 2\sqrt{5})^n$ இன் முழுவெண்ணும் பின்னவெண்ணும் முறையே p, f என்பவற்றினால் குறியிடப்படுமாயின்,

$f + (5 - 2\sqrt{5})^n = 1$ ஆகுமென நிறுவி, அதிலிருந்து p ஆனது ஓர் ஒற்றையெண் என உய்த்தறிக.

மேலும், இதிலிருந்து $(1-f)(p+f) = 5^n$ எனவும்

$$(5 + 2\sqrt{5})^n = \frac{p+f}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+f}{2}\right)^2 - 5^n}$$

எனவும் காட்டுக.

47. ${}^n C_r < n$, ${}^{n-1} C_{r-1}$, $r = 2, 3, \dots, n$ என்பதை வழமை யான குறிப்பீடுகளைக் கொண்டு காட்டுக.

$$(1+x)^n = 1 + {}^n C_1 x + {}^n C_2 x^2 + \dots + {}^n C_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$(a+b)^n = a^n + {}^n C_1 a^{n-1} \cdot b + {}^n C_2 a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + {}^n C_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

என்பதை உய்த்தறிக.

இதிலிருந்து a உம் b உம் நேர் ஆகவும் $n \geq 2$ ஆகவுமிருப்பின் $(a+b)^n - a^n < nb(a+b)^{n-1}$ எனக் காட்டுக.

48. (a) n ஒரு நேர் நிறையெண் எனின், ${}^n C_r + {}^n C_{r-1} =$

$${}^{n+1} C_r$$

; இங்கு ${}^n C_r = \frac{\angle n}{\angle r \cdot \angle n-r}$ எனக் காட்டுக.

(b) n யாதுமெரு நேர் நிறையெண் எனின்.

$$(1+x)^n = {}^n C_0 + {}^n C_1 x + \dots + {}^n C_r x^r + \dots$$

..... $+ {}^n C_n x^n$ எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக:

(c) $(1+x)^{2n} \equiv (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ என்பதையும் ஈருறுப்பு விரிவையும் பயன்படுத்தி,

$${}^{2n} C_n = \left({}^n C_0 \right)^2 + \left({}^n C_1 \right)^2 + \dots + \left({}^n C_r \right)^2$$

$$+ \dots + \left({}^n C_n \right)^2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

49. (i) a_r என்பது $(1+x+x^2)^n$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகத்தைக் குறிக்கிறது. இங்கு n ஒரு நேர் நிறையெண், $a_3 = 2a_2$ எனின் $n = 5$ என நிறுவுக.

(ii) நேர் முழு எண் சுட்டிக்கூரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக. p யும் n உம் நேர் முழு எண் எனின் p^n என்பது $(1+p)^{p^{n-1}} - 1$ என்பதை வகுக்கும் என நிறுவுக.

$$[(1+p)^{p^n} = (1+p)^{p^{n-1}} \cdot (1+p)^{p^{n-1}}$$

$$\dots \dots (1+p)^{p^{n-1}} \quad p \text{ காரணிகள் என்பதை உதவியாகக் கொள்ளலாம்.}]$$

50. $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_r x^r$ எனின் இங்கு $C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

அப்போது $\sum_{r=0}^n (r+1) C_r x^r = \{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து, $\sum_{r=0}^n (r+1) C_r^2 = \{1+(n+1)x\} \cdot$

$(1+x)^{2n-1}$ என்னும் விரிவில் x^n என்பதன் குணகம் $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!(n-1)!}$

51. நேர் முழுவெண் சுட்டிக்குரிய ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக.

$\left(3\sqrt{2}x - \frac{5}{\sqrt{2}} \right)^8$ எனும் பல்லுறுப்பியின் குணகங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

உமது விடையை இயன்ற அளவு சுருக்கமான வடிவில் தருக.

52. (i) $(5\sqrt{2} + 7)^{1/3} - (5\sqrt{2} - 7)^{1/3}$ ஆனது 2 இற்கு சமமெனக் காட்டுக.

(ii) ஒரு நேர் நிறையெண் சுட்டிக்கு ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.

(a) $x = 1/3$ ஆக இருக்கும்போது x இன் ஏறு வலுக்களில் $(\frac{1}{2} + x)^9$ இன் விரியில் உள்ள அதியுயர் உறுப்பின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_n x^n$

எனின் $\frac{C_r}{C_{r-1}}$ இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு,

$r(C_r + C_{r-1}) = (n+1)C_{r-1}$ எனக் காட்டுக,

இதிலிருந்து, $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \dots + (2n+1)C_n = 2^n(n+1)$ என நிறுவுக.

அலகு 6

54. (a) OPQ எனும் முக்கோணியின் பக்கமான PQ வின் நடுப்புள்ளி R எனில், கேத்திரகணித முறைப்படி $OP^2 + OQ^2 = 2(OR^2 + PR^2)$ என நிறுவுக.

(b) ஆகண் வரிப்படத்திலே P_1, P_2 எனும் புள்ளிகள் முறையே Z_1, Z_2 எனும் சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கின்றன. ஆகண் வரிப்படத்திலே $Z_1 + Z_2, Z_1 - Z_2$ என்பவற்றைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கான கேத்திர கணித அமைப்புகளையும் திறுவல்களையும் தருக.

P, Q என்பன முறையே z, z' எனும் இரு சிக்கல் எண்களைக் குறிக்கும் வண்ணம் O விலே உற்பத்தியாகக் கொண்ட ஆகன் வரிப்படத்தை எடுப்பதன் மூலமும் பகுதி (a) இலுள்ள தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ, z, z' என்கின்ற எவையேனும் இரு சிக்கல் எண்களுக்கு $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\{|z|^2 + |z'|^2\}$ என நிறுவுக.

65. $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ எனின், 1, ω, ω^2 என்பன $x^3 - 1 = 0$ எனும் முப்படிச் சமன்பாட்டின் வெவ்வேறான மூலங்கள் எனக் காட்டுக. ω க்கும் ω^2 க்கும் பெறுமானத்தைக் கணியாது.

(a) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ எனவும்,

(b) $(1 + \omega)^3 = -1$ எனவும் நிறுவுக. $-1, -\omega, -\omega^2$ என்பன $x^3 + 1 = 0$ என்னும் முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூன்று வெவ்வேறான மூலங்கள் என உய்த்தறிக.

$r > 0$ ஆகவும் $0 \leq \theta < 2\pi$ ஆகவும் இருக்க இம் மூலங்கள் ஒவ்வொன்றையும் $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ எனும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க.

66. z, z' ஆகிய சிக்கல் எண்களை முறையே P, P' ஆகிய புள்ளிகள் ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுகின்றன.

(a) $\frac{1}{2}(z + z')$ (b) $z - z'$ (c) $i(z - z')$

ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறக்கூடிய கேத்திர கணித அமைப்புகளைத் தருக.

z_1, z_2, z_3 ஆகிய சிக்கலெண்களை முறையே P_1, P_2, P_3 ஆகியவன் ஆகன் வரிப்படத்தில் குறித்துக் காட்டுகின்றன.

$i(z_2 - z_3) = \frac{1}{2}\{(z_1 - z_2) + (z_1 - z_3)\}$ எனின் முக்கோணி $P_1 P_2 P_3$ ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணி என்றும் இதன் பரப்பு $\frac{1}{2}|z_2 - z_3|^2$ என்றும் நிறுவுக.

67. நேர் முழுவெண் சுட்டிக்குரிய தாய்மோவரின் தேற்றத்தைத் தருக.

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ எனின், $1/z = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து n ஒரு நேர் முழுவெண் எனின், $\frac{1}{z^n} = \text{Cos } n\theta$

$- i \sin n\theta$ எனக் காட்டுக.

$\omega + 1/\omega = 2 \text{Cos } \theta$ எனின், $\omega = \text{Cos } \theta + i \sin \theta$ அல்லது $\omega = \text{Cos } (-\theta) + i \sin(-\theta)$ எனக் காட்டுக.

n ஒரு நேர் முழுவெண் எனின், $\omega^n + \frac{1}{\omega^n} = 2 \text{Cos } n\theta$ என

உய்த்தறிக. $(\omega + 1/\omega)^6$ விரிவைக் கருத்துக் கொண்டு, $\text{Cos } 6\theta = \frac{1}{32} \{ \text{Cos } 6\theta + 6 \text{Cos } 4\theta + 15 \text{Cos } 2\theta + 10 \}$ எனக் காட்டுக.

68. $x^3 - 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

(i) $1, \omega, \omega^2$ என்பவற்றுற் தரப்படும் எனவும்.

(ii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ ஐத் திருப்திப்படுத்தும் எனவும்

வாய்ப்புப் பார்க்க: இங்கு $\omega = \text{Cos } 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$ ஆகும். Z_1, Z_2, Z_3 என்பன யாதேனும் மூன்று சிக்கல் எண்கள் எனின், $(Z_1 + Z_2\omega + Z_3\omega^2)(Z_1 + Z_2\omega^2 + Z_3\omega) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_2Z_3 - Z_3Z_1 - Z_1Z_2$ எனக் காட்டுக.

ஆகண் வரிப்படத்தில், Z_1, Z_2, Z_3 என்னும் சிக்கலெண்கள் முறையே புள்ளிகள் A_1, A_2, A_3 ஐக் குறிக்கின்றன. $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_2Z_3 - Z_3Z_1 - Z_1Z_2 = 0$ எனின் முக்கோணி $A_1A_2A_3$ சமபக்க முக்கோணியாகும். என உய்த்தறிக.

69. நேர் நிறையெண் கட்டிக்கான தாய்மோவரின் தேற்றத்தைக் கூறுக. $z = r(\text{Cos } \theta + i \sin \theta)$ எனின், $\bar{z} = r\{\text{Cos } (-\theta) + i \sin(-\theta)\}$ என நிறுவுக. இங்கு \bar{z}, z இன் சிக்கல் உடன்புணரியாகும்.

இதிலிருந்து, n ஒரு நேர் நிறையெண் எனின்,

$(\bar{z})^n = \frac{1}{z^n}$ எனவும் நிறுவுக. $(x + i)$ ஐ $r(\text{Cos } \theta + i \sin \theta)$

இங்கு $r > 0, 0 \leq \theta < \pi, x$ மெய், எனும் வடிவத்தில் எழுத

வதன் மூலம், $\left\{ \frac{1}{(x - i)^n} - \frac{1}{(x + i)^n} \right\} = \frac{2i \sin n\theta}{(x^2 + 1)^{n/2}}$

எனக் காட்டுக.

Cot $k\pi/n$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$ என்பன $(x + i)^n - (x - i)^n = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என வாய்ப்புப் பார்க்க.

70. z_1, z_2, z_3 எனும் சிக்கலெண்கள் ஆகண் வரிப்படத்தில் நேர் கோட்டில்லாத A_1, A_2, A_3 யினால் முறையே குறிக்கப்பட்டுள்ளன. $\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ என்பது முக்கோணி $A_1 A_2 A_3$ இன் மையப் போலியினுற் குறிக்கப்படும் எனக் காட்டுக

$(z_1 + z_2 + z_3)(z_1 + z_2 \omega^2 + z_3 \omega)(z_1 + z_2 \omega + z_3 \omega^2) = (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3)$ எனவும் காட்டுக. இங்கு $\omega = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$ $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3 = 0$ எனின் பின்வரும் வகைகள் நிகழக் கூடும் என உய்த்தறிச.

- (i) முக்கோணி $A_1 A_2 A_3$ ஒரு சமபக்க முக்கோணி. ஆனால் அதன் மையப்போலி உற்பத்தியில் இல்லை.
- (ii) முக்கோணி $A_1 A_2 A_3$ சமபக்க முக்கோணியன்று. ஆனால், அதன் மையப்போலி உற்பத்தியிலாகும்.
- (iii) முக்கோணி $A_1 A_2 A_3$ சமபக்க முக்கோணியும், அதன் மையப்போலி உற்பத்தியில் உள்ளதும் ஆகும். (முக்கோணி யொன்றின் மையப் போலியானது மூன்று இடையங்களினதும் இடைவெட்டின் பொதுப்புள்ளியாகும்.)

71. $z = x + iy$ என்னும் சிக்கலெண்ணொன்றின் உடன் புணரி \bar{z} என்பது $\bar{z} = x - iy$ இனும் தரப்படும் எனின், பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\overline{(x + \beta)} = \bar{x} + \bar{\beta}$

(ii) $\overline{(x - \beta)} = \bar{x} - \bar{\beta}$

(iii) $\overline{(x\beta)} = \bar{x} \bar{\beta}$

(iv) $(x^{-1}) = (\bar{x})^{-1}$

(v) $(x^n) = (\bar{x})^n$

இங்கு x, β என்பன சிக்கல் எண்களும் n ஒரு நேர் நிறையெண்ணும் ஆகும். $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ எனும் மெய்க் குணகங்களுடனான பல்லுறுப்பி $z = z_0$ இல் மறையும் எனின் அது $z = \bar{z}_0$ இலும் மறையும் எனக் காட்டுக.

72. $x^3 - 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டை $\omega = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$ என்பது திருப்திப்படுத்தும் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்கவும்.

(i) ω^r உம் ω^{2r} உம் $x^3 - 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டை r எனும் யாதாயினும் ஒரு நேர் முழுவெண்ணுக்கும்

(ii) $1 + \omega^r + \omega^{2r} = 0$ எனும் சமன்பாட்டை r எனும் 3 இன் பெருக்கம் அல்லாத நேர் முழுவெண்ணுக்கும் திருப்திப்படுத்தும் எனக் காட்டுக.

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ எனின் $f(1)$, $f(\omega)$, $f(\omega^2)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$\{f(x)\}^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{3n}x^{3n}$ என்று அமையின் $c_0 + c_3 + c_6 + \dots + \dots + c_{3n} = 1/3(4^n + 2)$; $c_1 + c_4 + c_7 + \dots + c_{3n-2} = 1/3(4^n - 1) = c_2 + c_5 + c_8 + \dots + c_{3n-1}$ எனக் காட்டுக.

73. z உம் \bar{z} உம் சிக்கலெண்களாகும். $\overline{z + \bar{z}}$ உம் $\overline{z - \bar{z}}$ உம் இவற்றின் சிக்கலெண் உடன்புணரிகளைக் குறிக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\overline{z + \bar{z}} = 2 \operatorname{Re}(z)$

(ii) $\overline{(z + \bar{z})} = z + \bar{z} + 2 \operatorname{Re}(z)$

(iii) $2 |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq |z|^2$

(iv) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2} |z|$

(v) $|z + \bar{z}| \leq |z| + |\bar{z}|$. இங்கே $\operatorname{Re} z$ உம் $\operatorname{Im} z$ உம் z இன் மெய், கற்பனைக் கூறுகளையும் முறையே குறிக்கின்றன.

கேத்திர கணித நிறுவல்கள் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட மாட்டா.

74. தமோய்வரின் நேர் முழு எண்ணுக்குரிய சுட்டித் தேற்றத்தைத் தருக.

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(1 \pm i \cot k\pi/2n)$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ என்பன $(z+1)^{2n} - z^{2n} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் என்று வாய்ப்புப் பார்க்க.

இதிலிருந்து $(z + 1)^6 - z^6 \equiv \sqrt[3]{16} (2z + 1) \{ 4z^2 + 4z + \operatorname{cosec}^2 \pi/6 \} \times [4z^2 + 4z + \operatorname{cosec}^2 \pi/3]$ என்று காட்டுக.

$16(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) \equiv 3 \cos 2\theta [\cos^2 2\theta + \cot^2 \pi/6] [\cos^2 2\theta + \cot^2 \pi/3]$ என்பதை உய்த்தறிக்க.

75. z_1, z_2, z_3, z_4 ஆகிய சிக்கல் எண்கள் முறையே A_1, A_2, A_3, A_4 ஆகிய தெளிவான புள்ளிகளை ஆகண் வரிப்படத்தில் குறிப்பிடுகின்றன. $\frac{(z_1 - z_2)}{(z_3 - z_4)}$ என்பது சூரிய கற்பனையாக இருப்பதற் சூரிய நிபந்தனையைக் கேத்திர கணித முறையில் காண்க.

$\operatorname{Re}(z_1 - z_2) \cdot \operatorname{Re}(z_3 - z_4) + \operatorname{Im}(z_1 - z_2) \cdot \operatorname{Im}(z_3 - z_4) = 0$ எனின், அப்போது $A_1 A_2$ என்பது $A_3 A_4$ உக்குச் செங்குத்தாகும் என நிறுவுக.

இங்கே $\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w)$ என்பன w இன் மெய், கற்பனைப் பகுதியையும் குறிக்கும்.

நிமிர் மையம் உண்டு என்பதைக் கொள்ளாது, $A_1 A_2 A_3$ என்னும் முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் இருந்து எதிர்ப்பக்கங்களிற்கு வரையப்படும் உள்செங்குத்துக்களும்

$\operatorname{Re} \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_3} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z - z_2}{z_3 - z_1} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z - z_3}{z_1 - z_2} \right) = 0$ என்பதை திருப்திப்படுத்தும் z என்பதாற் குறிப்பிடப்படும் புள்ளியிற் சந்திக்கும் என்று காட்டுக.

76. நேர் முழுவெண் சுட்டிக்குரிய தமோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக. $\tan 5\theta$ ஐ $\tan \theta$ இன் உறுப்புக்களில் எழுதுக. $\tan 5\theta = 0$ எனும் சமன்பாட்டைக் கருதி, $x^2 - 10x + 5 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\tan^2(\pi/5), \tan^2(2\pi/5)$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\sec^4(\pi/5) + \sec^4(2\pi/5)$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

77. z_1, z_2, z_3, z_4 எனும் சிக்கல் எண்கள் முறையே ஆகண் வரிப்படத்திலுள்ள A_1, A_2, A_3, A_4 என்னும் வெவ்வேறான புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன. z_1, z_2 என்பன $az^2 - 2bz + c = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாயிருக்க z_3, z_4 என்பன $a'z^2 + 2b'z + c' = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். $ac' + a'c - 2bb' = 0$ எனின் $(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) = 2(z_1z_2 + z_3z_4)$ ஆகும் எனக் காட்டுக. மேற்குறிப்பிட்ட முடிவை,

$[z_1 - \frac{1}{2}(z_3 + z_4)] \cdot [z_2 - \frac{1}{2}(z_3 + z_4)] = [\frac{1}{2}(z_3 - z_4)]^2$
 எனும் வடிவத்தில் எழுதி A_3A_4 வின் நடுப்புள்ளி E ஆயின் EA_1, EA_2 என்பன A_3A_4 உடன் சமனான சாய்வுக் கோணங்களில் அமைந்திருக்கும் எனக் காட்டுக.

78. z, z' எனும் சிக்கலெண்கள் முறையே ஆகண் வரிப்படத்திலுள்ள P, P' என்னும் புள்ளிகளினால் குறிக்கப்படுகின்றன. $z - z', zz'$ ஆகிய சிக்கலெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கான கேத்திரகணித அமைப்பைத் தருக.

P_1, P_2, P_3 எனும் புள்ளிகள் முறையே z_1, z_2, z_3 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. Q_1, Q_2, Q_3 எனும் புள்ளிகள் முறையே zz_1, zz_2, zz_3 எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கின்றன. இங்கே z ஆனது பூச்சியமற்ற ஒரு சிக்கலெண் $P_1 P_2 P_3, Q_1 Q_2 Q_3$ என்பன இயல்பொத்த முக்கோணிகள் எனக் காட்டுக.

79. $z = \cos \theta + i \sin \theta$ எனின் $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta, z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கே n ஆனது ஒரு நேர் முழுவெண் ஆகும்,

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறொரு வழியாகவோ,

(அ) $3(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - 2(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta) = 1$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

(ஆ) $5x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$ ஐ முற்றாகத் தீர்க்க.

80. ஒரு நேர் நிறைவெண் கட்டி n இற்குத் தமோய்வரின் தேற்றத்தை (நிறுவல் இல்லாமல்) கூறுக. $z + 1/z = 2\cos \theta$ எனின் $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ என்று காட்டி,

$\cos 7\theta = 64 \cos^7 \theta - 112 \cos^5 \theta + 56 \cos^3 \theta - 7 \cos \theta$ என்பதை உய்த்தறிக. $\cos 7\theta = 1$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை எடுத்து நோக்கியோ, வேறுவழியாகவோ, $64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 \equiv 64(x-1)(x-\cos 2\pi/7)(x-\cos 4\pi/7)(x-\cos 6\pi/7)(x-\cos 12\pi/7)$ என்று காட்டுக.

இதிலிருந்தோ, அல்லது வேறுவிதமாகவோ,

$\cos \pi/7 \cdot \cos 3\pi/7 \cdot \cos 5\pi/7 = -1/8$ எனவும்

$\cos \pi/7 + \cos 3\pi/7 + \cos 5\pi/7 = \frac{1}{2}$ எனவும் காட்டுக.

81. z_1, z_2, z_3 என்னும் சிக்கல் எண்கள் ஆகண் வரிப்படத்திலே முறையே P_1, P_2, P_3 என்னும் புள்ளிகளினால் வகை குறிக்கப் படுகின்றன.

ω என்பது 1 இன் ஒரு கற்பனைக் கனமூலமாக இருக்கும் போது $(z_3 - z_1) = \omega (z_2 - z_3)$ எனின், $P_1P_2P_3$ ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும் என நிறுவுக.

ஒரு முக்கோணி $Q_1Q_2Q_3$ இன் பக்கங்களின் மீது அதற்குப் புறத்தே சமபக்க முக்கோணிகள் வரையப்படுகின்றன. இவ்வாறு வரையப்படும் சமபக்க முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றினதும் மையப் போலிகளை நேரொத்த சிக்கல் எண்களைக் காண்க. முதற் பகுதியைப் பயன்படுத்தி, மைப்போலிகள் சமபக்க முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளாக அமையும் என்று காட்டுக.

82. ஒரு நேர் நிறைவேண் சுட்டிக்குத் த மோய்வரின் தேற்றத்தைக் கூறுக.

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ எனின், ஒரு நேர் நிறைவேண் n இற்கு $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$ எனவும் $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$ எனவும் காட்டுக.

$(z + 1/z)^3, (z - 1/z)^3$ ஆகியவற்றின் விரிகளை எடுத்து நோக்குவதன் மூலம்,

(a) $64(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = \cos 3\theta + 28\cos 4\theta + 35$ எனவும்,

(b) $8(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + 7\cos 2\theta$ எனவும் காட்டுக.

$\cos 6\theta = -7\cos 2\theta$ என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

83. P_0, P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகள் முறையே z_0, z_1, z_2 என்னும் சிக்கல் எண்களை வகைகுறிக்கின்றன. $\frac{P_0 P_2}{P_0 P_1} = \lambda > 0$ ஆகவும்

θ ஆனது இடஞ்சுழிப் போக்கில் அளக்கப்படும்போது $\angle P_1P_0P_2 = \theta$ ஆகவும் இருக்குமெனின், $(z_2 - z_0), (z_1 - z_0) (\cos \theta + i \sin \theta)$ என்னும் சிக்கல் எண்கள் வகை குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்குக் கேத்திரகணித அமைப்புகளைத் தந்து, $z_2 = z_0 + \lambda (z_1 - z_0) (\cos \theta + i \sin \theta)$ என்பதை உய்த்துறிக.

A, B, C, D, E, F, ஆகிய உச்சிகள் இடஞ்சுழிப் போக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் ஒழுங்கான ஓர் அறுகோணி ABCDEF இலே A, B ஆகிய உச்சிகள் முறையே $2 + 2i$, $3 + 3i$ என்னும் சிக்கல் எண்களை வகைகுறிக்கின்றன.

மேலுள்ள பேறைப் பயன்படுத்தி, E, F ஆகிய உச்சிகள் வகைகுறிக்கும் சிக்கல் எண்களைக் காண்க.

அலகு 7

18. a, b என்பன 1 இலும் பெரிதாயிருப்பின் $2(ab + 1) > (a + 1)(b + 1)$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து c உம் d உம் 1 இலும் பெரிதாயிருப்பின் $8(abcd + 1) > (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$ எனக் காட்டுக.

19. (i) இரு நேர் எண்களின் கூட்டவிடையானது அவ்வெண்களின் பெருக்கவிடையிலும் பெரியது அல்லது பெருக்கவிடைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, $n > r \geq 0$ எனின் $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$ என நிறுவுக.

யாதாயினும் ஒரு நிறைவேண் $n \geq 1$ இற்கு $(n+1)^n \geq 2^n \cdot n!$ என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ என்னும் சமனிலி உண்மையாக இருக்கும் x இனுடைய பெறுமானங்களின் வீச்சைக் காண்க.

அலகு 8

43. முறையே P_1, P_2, \dots, P_n எனும் நிகழ்தகவுகளையுடைய X என்னுமொர் பின்னக எழுமாற்று மாறியானது X_1, X_2, \dots, X_n எனும் பெறுமானங்களை எடுக்கின்றது. X இன் எதிர்வு, மாறந் நிறன் என்பவற்றை வரையறுக்க.

கோடாத நாணயமொன்று அடுத்தடுத்து மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது X எனும் எழுமாற்று மாறியானது "தலை"

தென்படும் முறைகளின் எண்ணிக்கை என வரையறுக்கப்பட்டின் X இன் இயல்தகு பெறுமானங்களை எழுதுக.

X இன் பரம்பலைக் காண்க: இதிலிருந்து X இன் எதிர்வு, மாறற்றிறன் என்பவற்றையும் காண்க.

$$Y \text{ என்பது, } Y = \begin{cases} 0; & X \text{ இரட்டை எனின்} \\ 1; & X \text{ ஒற்றை எனின்} \end{cases}$$

ஆகுமாறு ஓர் எழுமாற்று மாறி எனின், Y இன் பரம்பலைக் கண்டு, இதிலிருந்து Y இன் எதிர்வு, மாறற்றிறன் என்பன முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

44. (i) A யும் B யும் S எனும் ஒரு மாதிரி வெளிமில் வரையறுக்கப்பட்ட எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \text{ என நிறுவுக.}$$

இதிலிருந்து A' என்பது A இன் நிரப்பியாயிருக்க $P(A') + P(A) = 1$ என நிறுவுக.

குழுவொன்று 100 அங்கத்தவர்களைக் கொண்டது. 60 பேர் மீன் உண்பவர்கள், 50 பேர் இறைச்சி உண்ண மாட்டார்கள், 10 பேர் மீனையும், இறைச்சியையும், இரண்டையுமோ உண்ணமாட்டார்கள். குழுவின் ஓர் அங்கத்தவர் எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டால் அவர்

[a] மீன் உண்பவராக

[b] இறைச்சி உண்ணாதவராக

[c] மீனையும், இறைச்சியையும், இரண்டையுமோ உண்ணாதவராக இருக்கக் கூடிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

இம்மூன்று நிகழ்வுகளை மாத்திரம் பயன்படுத்தி மேலேயுள்ள இரு முடிவுகளை உபயோகித்து, தெரிவு செய்யப்பட்ட அங்கத்தவர் (α) மீன் உண்ணாதவராக

(β) மீனையும், இறைச்சியையும் உண்ணாதவராக

(γ) மீன், இறைச்சி என்பவற்றுள் குறைந்த

பட்சம் ஒன்றையாவது உண்பவராக இருக்கக் கூடிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

- (ii) A, B, C எனும் மூன்று மாணவர்கள் இடைவேளையில் போது பள்ளிக்கூட நூல்நிலையத்திலோ, பள்ளிக்கூட உண

வுச்சாலையிலோ சந்திப்பதெனத் தீர்மானித்தனர். ஒவ்வொரு மாணவரும் இடைவேளையின்போது உணவுச் சாலைக்கோ, நூல் நிலையத்துக்கோ செல்கிறார்கள் எனக் கொண்டே இயல்தகு விளைவுகள் எல்லாவற்றினதும் தொடையைக் காண்க.

இதிலிருந்து (a) A, B, C ஒருமிக்கச் சந்திப்பதற்கு

(b) இருவர் மாத்திரம் நூல் நிலையத்தில் சந்திப்பதற்கு

(c) A யும் B யும் மாத்திரம் இடைவேளையின்போது சந்திப்பதற்கு ஆன நிகழ்தகவைக் காண்க.

45. (i) ஒரு முடிவுள்ள மாதிரி வெளியான S ஆனது சம நேர் தகவுள்ள செப்பமான n ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளைக் கொண்டுள்ளன. n_0 ஐ மாத்திரம் ஆரம்ப நிகழ்ச்சியாகக் கொண்ட S இல், ஏதாவது ஒரு நிகழ்ச்சியாக E என்பது இருந்தால் நிகழ்ச்சி E இனது நிகழ்தகவு, $P(E) = n_0/n$ என்பதனால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

A, B, C என்பன யாதாயினும் மூன்று நிகழ்ச்சிகளால் S இல் இருப்பின்,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ என்று மேலேயுள்ள வரையறையைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேறு முறையாகவோ நிறுவுக.

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் x, y, z ஆகிய மூன்று செய்திப் பத்திரிகைகள் வெளியிடப்படுகின்றது. இந் நகரின் சனத்தொகையின் 60% ஆனோர் x பத்திரிகையையும், 44% ஆனோர் y பத்திரிகையையும், சனத்தொகையில் 34% ஆனோர் z பத்திரிகையையும், சனத்தொகையில் 21% ஆனோர் x ஐயும் y ஐயும் சனத்தொகையில் 13% ஆனோர் y ஐயும் z ஐயும், சனத்தொகையில் 10% ஆனோர் மூன்று பத்திரிகைகளையும் வாசிக்கின்றனர் இந்த நகரத்தில் இருந்து எழுமாற்றாக ஒருவர் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டால் இவர் இந்த மூன்று செய்திப் பத்திரிகைகளில் குறைந்தது ஒன்றையாவது வாசிக்கக் கூடிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

- (ii) தலை தோன்றக்கூடிய நிகழ்தகவு $\frac{2}{3}$ ஆகவும் பூ தோன்றக்கூடிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆகவும் அமைந்த நாணயம் ஒன்று

நான்கு முறை சுண்டப்படுகிறது. எழுமாற்று மாறியான X தலைகள் தோன்றும் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு, அதிலிருந்து X இன் எதிர்வையும் மாற்றற்றினையும் காண்க.

46. ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் இயந்தக பேறுகள் S_1, S_2, S_3 என்பவை மட்டுமேயாகும். S_1 இன் நிகழ்விற்கான நிகழ்தகவு S_2 அல்லது S_3 இன் நிகழ்தகவின் இரு மடங்காகும். S_2 உம் S_3 உம் சமநிகழ்தகவுகளுடையன. $P(S_1), P(S_2), P(S_3)$ என்பவற்றைக் காண்க.

கோடாத நாணயமொன்று இரு முறை சுண்டப்படுகிறது. தோன்றும் தலைகளின் எண்ணிக்கை X, பதியப்படுகிறது. இவ் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் இயந்தக பேறுகளைக் காண்க. X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் காண மேற்படி முடிவைப் பயன்படுத்துக.

X இன் எதிர்வையும் மாற்றற்றினையும் காண்க.

எழுமாற்று மாறி Y, $Y = \begin{cases} 2X + 3, & X = 0 \text{ எனின்} \\ X = 2, & X = 1, 2 \text{ எனின்} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்படும் எனின் Y இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் காண்க. இதிலிருந்து Y இன் எதிர்வையும் மாற்றற்றினையும் காண்க.

47. (i) ஒரு கூடை w வெள்ளைப் பந்துகளையும் r சிவப்புப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. கூடையிலிருந்து எழுமாற்றாக ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அப்பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

ஒரு கூடை w_1 வெள்ளைப்பந்துகளையும் r_1 சிவப்புப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. இரண்டாவது கூடை w_2 வெள்ளைப் பந்துகளையும் r_2 சிவப்புப் பந்துகளையும் கொண்டுள்ளது. முதலாம் கூடையிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாகத் தெரியப்பட்டு இரண்டாம் கூடையில் வைக்கப்படுகிறது. இப்போது இரண்டாம் கூடையிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் எனின், இப்பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{w_1 + w_2 (w_1 + r_1)}{(w_1 + r_1) (w_2 + r_2 + 1)}$ எனக் காட்டுக.

- (ii) ஒரு மனிதனிடமுள்ள ஐந்து வேறுபட்ட சாஸிகளில் ஒன்று மட்டுமே ஒரு குறித்த கதவைத் திறக்கும். அவன் அக் கத

வைத் திறக்கச் சாஸினை எழுமாற்றாக எத்தனிக்கிறது. நித்யசில்லாக திறப்புக்களை அவன் நீக்குகிறது எனின் அவனது எத்தனிப்புக்களின் எண்ணிக்கையில் இடையையும் மாற்றற்றனையும் காண்க.

48. A யும் B யும் ஒருவரோடு ஒருவர் மூன்று தொடர் சதுரங்க ஆட்டங்களை விளையாடுகின்றனர். A ஒரு ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$. B ஒரு ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$. A யோ or B யோ வெற்றி தோல்வி பெறாது முடியும் ஆட்டத்திற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க பின்வருவனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

- (i) எல்லா ஆட்டங்களிலும் A வெற்றி பெறுதல்
- (ii) இரண்டு ஆட்டங்கள் வெற்றி தோல்வி இன்றி முடிவது.
- (iii) A உம் B உம் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று வெற்றி பெறுவது.
- (iv) குறைந்தது ஒரு ஆட்டத்திலாவது B வெல்லுவது.

B வெற்றி பெறும் ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கையை X குறித்தால் X இன் இடையையும் மாற்றற்றனையும் காண்க

49. ஒரு குறிப்பிட்ட விமானச் சேவை இரு நகரங்களுக்கிடையில் நான்கு இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் இரு இயந்திரங்களைக் கொண்ட விமானங்களையும் சேவையில் ஈடுபடுத்தி கிறது. விமானங்கள் ஒரே வகையான இயந்திரங்களைக் கொண்டுள்ளன. பறக்கும்போது இயந்திரங்கள் ஒன்றை ஒன்று சாராது தனித்து இயங்குகின்றன. பிரயாணம் ஒன்றில்போது இயந்திரம் ஒன்று பழுதடையும் தன்மையில் நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆகும். இங்கே $0 < p < 1$ குறைந்தது அரைவாசி எண்ணிக்கையான இயந்திரங்கள் இயங்கிக் கொண்டிருந்தாலே ஒரு விமானம் ஒரு பிரயாணத்தைப் பாதுகாப்பாக முடிக்கும். ஒரு விமானம் பறப்பின் போது அடைய வேண்டிய இடத்தை அடைய முடியாமல்க்குரிய நிகழ்தகவைப் பின்வருவனவற்றில் காண்க.

- (i) நான்கு இயந்திரமுள்ள விமானம் ஒன்றிற்கு
- (ii) இரு இயந்திரமுள்ள விமானம் ஒன்றிற்கு

0 வின் எப்பெறுமானங்களுக்கு நான்கு இயந்திர விமானம் இரு இயந்திர விமானத்தைப் பார்க்கிலும் பாதுகாப்பானது.

50. ஓர் முடிவுள்ள மாதிரி வெளி S என்பது சம நேர் தகவு உள்ள n ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்டுள்ளது. S இல் E என்பது n' ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்டுள்ள யாதாயினும் ஒரு நிகழ்ச்சி என்க. நிகழ்ச்சி E இன் நிகழ்தகவு P(E) என்பது $P(E) = n'/n$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

இவ்வரைவிலக்கணத்தைப் பாவித்தோ அல்லது வேறு முறையாகவோ S இலுள்ள யாதாயினும் இரு நிகழ்ச்சிகள் A, B என்பவற்றிற்கு

(i) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ என நிறுவுக.

40 மனிதர்கள் கொண்ட ஓர் கூட்டத்தில் 20 பேர் 35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர்கள், 10 பேர் 35 வயதிலும் கூடிய பொறியியலாளர்கள், 4 பேர் 35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர் அல்லாதவர்கள். 6பேர் 35 வயதிலும் கூடிய பொறியியலாளர்கள் அல்லாதவர்கள். இக் கூட்டத்திலிருந்து ஒருவர் எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டுள்ளார். மேற்படி முடிவுகளைப் பாவித்து தெரியப்பட்டவர்

[i] 35 வயதிலும் குறைந்த பொறியியலாளர் ஒருவர்

[ii] பொறியியலாளர் 35 வயதிலும் கூடிய ஒருவர் என்பவற்றிற்குரிய நிகழ்தகவுகளைப் பெறுக.

உமது விடைகளை வேறு ஒரு முறையைப் பாவித்து சரி பார்க்க.

51. ஆண், பெண் இருபாலாருக்குமான பாடசாலை ஒன்றில் உயிரியல் (B) பௌதிகம் (P) விஞ்ஞானம் பயிலும் 100 மாணவர்கள் ஒவ்வொருவருக்கும் T₁, T₂ எனும் இருவகை பரீட்சை வினாத்தார்களுள் ஒன்று வழங்கப்படுகிறது. செப்பமான வகுப்பாக்கமானது பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

பரீட்சை வினாத்தாள் வகை	பால்	உயிரியல் விஞ்ஞானம்	பௌதிக விஞ்ஞானம்
T ₁	பெண்[F]	30	10
	ஆண்[M]	15	5
T ₂	பெண்[F]	20	5
	ஆண்[M]	10	5

மாணவர் ஒருவர் எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டுள்ளார்.

- (i) (a) மாணவர் ஒரு பெண்ணாக.
- (b) மாணவர் உயிரியல் விஞ்ஞானத்தைப் பயில்கிறார்.
- (c) அவர் T_1 ஆன பரீட்சை வினாத்தாள் பெற்ற மாணவர்
- (d) மாணவர் பெண் என ஏற்றுக் கொண்டு அம் மாணவி உயிரியல் விஞ்ஞானத்தைப் பயில்கிறாள், ஆகியவற்றுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(ii) தெரிவு செய்யப்பட்ட மாணவரின் வினாத்தாள், பால், விஞ்ஞானப் பிரிவு ஆகியவற்றிற்கு அமைய X எனும் எழுமாற்று மாறிக்கு பெறுமானங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன.

எழுமாற்று மாறி X இன் பெறுமானங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

தாள்	T_1	T_1	T_1	T_1	T_2	T_2	T_2	T_2
பால்	F	M	F	M	F	M	F	M
விஞ்ஞானம்	B	B	P	P	B	B	P	P
X இன் பெறுமானம்	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4

X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு அதிலிருந்து அதன் இடையையும், மாற்றற்றிகளையும் காண்க.

52. A, B என்ற இரு போட்டியாளர்கள் சதுரங்க ஆட்டம் ஒன்றைவிளையாடும்போது A வெல்லும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ எனவும் B வெல்லும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனவும் அறியப்பட்டுள்ளது. ஓர் ஆட்டம் வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவடைவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

அவர்கள் மூன்று ஆட்டங்களை விளையாடுவதற்கு ஒப்புக் கொள்கின்றனர்.

- [i] எல்லா ஆட்டங்களிலும் B வெல்லுதல்
- [ii] இரு ஆட்டங்கள் வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவடைதல்.
- [iii] A யும் B யும் மாறி மாறி வெல்லுதல்
- [iv] குறைந்த பட்சம் ஓர் ஆட்டத்திலேனும் A வெல்லுதல் ஆகியவற்றுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

மூன்று ஆட்டங்களில் A வெல்லும் ஆட்டங்களின் எண்ணிக்கை X ஆகட்டும் X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலைக் கண்டு இதின்குந்து அதன் இடையையும் மாற்றற்றிறனையும் காண்க

53. (i) குறித்த நகரம் ஒன்றிலே விபத்துக்கள் நிகழ்தல் பற்றி ஆராய்வதற்கு மதிப்பீடு ஒன்று மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. கடந்த 200 நாட்களாக அந்நகரத்தில் நிகழ்ந்த விபத்துக்களின் எண்ணிக்கைகள் பின்வரும் அட்டவணியிலே தரப்பட்டுள்ளன.

ஒரு நாளில் நிகழ்ந்த விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
நாட்களின் எண்ணிக்கை	48	75	36	26	10	5

ஒரு நாளில் நிகழ்ந்த விபத்துக்களின் இடை எண்ணிக்கையையும் விபத்துக்களின் மாற்றற்றிறனையும் கணிக்க.

- (ii) குறித்த பரீட்சை ஒன்றிலே 20 மாணவர்கள் கணிதத்திற் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டவிடையையும் நியம விலகலும் முறையே 45, 15 எனக் கணிக்கப்பட்டன. இவற்றைக் கணிக்கும்போது ஒரு மாணவனின் புள்ளிகள் 80 எனத் தவறாக வாசிக்கப்பட்டன இம் மாணவனின் உண்மையான புள்ளிகள் 60 எனின், திருத்தமான கூட்டவிடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

54. ஆண் பெண் பாலாரின் பரம்பல் சமமாய் நிகழ்த்தக்கதெனக் கொண்டு 4 பிள்ளைகள் உள்ள குடும்பம் ஒன்று

[a] செப்பமாக இரு பெண் பிள்ளைகளை உடையதாக

[b] குறைந்த பட்சம் ஒரு பெண்பிள்ளையேனும் உடையதாக இருக்கும் 4 குடும்பங்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

64 குடும்பங்களில்,

[a] ஒவ்வொன்றும் செப்பமாக இரண்டு பெண்பிள்ளைகளை உடையதாக இருக்கும்,

[b] ஒவ்வொன்றும் குறைந்த பட்சம் ஒரு பெண்பிள்ளையேனும் உடையதாக இருக்கும் என்று நினைக்க எதிர்பார்க்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

$f(X) = np$ என நீங்கள் கொள்ளலாம்; இங்கு, $p(X=x)$
 $= {}^n C_x p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$ இனும் நிகழ்
 தகவுப் பாய்பல் தரப்படும் சுருறுப்புப் பரம்பலை எழுமாற்று
 மாறி X உடையது.

பின்னிணைப்பு விடைகள்

அலகு 1

31. $f(x) = (x-1)^2(x+1)(x-4) - 10x + 6$

அலகு 2

39. $A = -\frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = -\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$

60. (i) $u/6 \cdot (n+1)(2n+1)$; $n(n+1)^2$

(ii) $A = -\frac{3}{2}$, $B = 5$, $C = -\frac{7}{2}$; $\frac{3}{2}$ — $\frac{(2n+5)}{2(n+3)(n+4)}$; $\frac{3}{2}$

61. (i) u_{n+1} (ii) $\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ 63. (ii) $\frac{1-r^n}{1-r}$, 2)

64. $\frac{6(S_n^2 - S)}{(3 + S_n)^2}$ 65. (ii) $\frac{3n+1}{n^2(n+1)^2}$

66. (i) -2 , $-\frac{5}{2}$; $\frac{5}{4}$

67. (i) $u_r = \frac{(r+2)^2}{r(r+1)(r+3)}$;
 $\frac{29}{36} = \frac{(6n^2+27n+29)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$; ஆம்; $S_\infty = \frac{29}{36}$

68. (i) $u_{r+1} = \frac{(3r+1)}{(3r+2)} u_r$; $A = \frac{3}{2}$, $B = 1$

அலகு 3

52. $x^2 - \frac{(b-2a\lambda)}{a}x + \frac{(c-b\lambda+5\lambda^2)}{a} = 0$

53. (i) $4(b+\lambda a)^2 - 4a(2b\lambda+c)$

54. [i] $5a^3b - a^5 - 5ab^2, b^5x^2 + (a^5 - 5a^3b + 5ab^2)x + 1 = 0$
 56. [ii] $-1 < x < 2, 3 < x < \infty$ 57. $-\alpha(c+a)/a, -\beta(c+a)/a$

அலகு 4

23. [அ] 210 [ஆ] 175 [இ] 105 24. [அ] 51 [ஆ] 777
 25. 650 26. 779 27. 1423 28. 6427
 29. [i] 60 [ii] 60 30. 16!; $4! \times 4! \times 3! \times 3! \times 6!$

அலகு 5

43. [i] $Q = \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \right]$
 [ii] $(3x^2 - 3x + 1); (177148), (177877), (176419)$
 45. $n=16, 0$ 51. $1/16$ 52. [ii] [a] $7/144$ [b] $(n-r+1)/r$

அலகு 6

65. $(\cos\theta + i\sin\theta), (\cos 5\pi/3 + i\sin 5\pi/3), (\cos \pi/3 + i\sin \pi/3)$
 72. [ii] 4, 1, 1
 76. $\tan 5\theta = \frac{\tan^5\theta - 10\tan^3\theta + 5\tan\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}; 112$
 79. $(3 \pm 4i)/5$ or $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$ 82. $\theta = n\pi \pm \pi/4$

அலகு 8

43. [ii] $3/2, 3/4$ [ii] $1/2, 1/4$
 44. [i] [a] 0.6 [b] 0.5 [c] 0.1
 44. [α] 0.4 [β] 0.8 [γ] 0.9
 [ii] $2/8, 3/8, 2/8$
 45. [i] 0.25; $2/3, 72/81$
 46. [i] $P(S_1) = \frac{1}{2}, P(S_2) = \frac{1}{2}, P(S_3) = \frac{1}{2}; I. \frac{1}{2}$
 [ii] $13/4, 3/16$ 47. $\frac{w}{w+r}$ [ii] 3, 2
 48. [i] $1/8$ [ii] $5/12$ [iii] $5/36$ [iv] $19/27; I. 2/3$
 49. [i] $(4-30)\theta^2$ [ii] $\theta^2; 0 < \theta < 1/3$ 50. $\frac{1}{2}, 9/10$
 51. [i] [a] 0.65 [b] 0.75 [c] 0.65 [d] 0.768
 [ii] $-1.15, 7.1275$

1. (a) $r \geq 4$ ஆக $\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} > \frac{1}{r!}$ எனக் காட்டுக.

$$S_n = 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \text{ எனின் } S_n < 3 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(b) $f(x) = ax^3 + bx^2$

$f[r(r+1)] - f[(r-1)r] \equiv r^5$ ஆக a, b இன் பெறுமானம் என்ன?

$$\sum_{r=1}^n r^5 \text{ ஐக் காண்க.}$$

(c) n ஒரு நேர் முழுவெண் $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = u_n$ எனின், $5u_n - 4u_{n-1} = u_{n+1}$ எனக் காட்டுக.

$(3 + \sqrt{5})^n$ இன் பெறுமானத்திற்கு அடுத்த முழுவெண் 2^n ஆல் பிரிபடும் எனக் காட்டுக.

2. (i) $a < b < c$ ஆக.

$f(x) \equiv (x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a)$ ஆகும். $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் உண்டு எனக் காட்டுக. இதன் மூலங்கள் α, β உம் $\alpha > \beta$ ஆயின் $a < -\alpha < b < -\beta < c$ எனக் காட்டுக.

(ii) $5 \geq \frac{6-x^2}{x} \geq 1$ திருப்தி ஆவதற்கு x இன் வீச்சம் என்ன?

3. (i) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ என்ற சார்பை மெய்க் காரணியாக்குக.

(ii) n நேர் முழுவெண் எனின் $(x+1)^n - (x-1)^n = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $-i \cot k\pi/n$, $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ எனக் காட்டுக.

$\cot \pi/9, \cot 2\pi/9, \cot 4\pi/9 = 1/\sqrt{3}$ என்பதை உய்த்தறிக.

4. சிக்கலெண்கள் p, q ஐ முறையே ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளிகள் P, Q ஆல் குறிக்கப்படுகின்றன.

$p - q, pq$ எனும் சிக்கலெண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளைப் பெறுவதற்கான கேத்திரகணித அமைப்புக்களைத் தருக.

l, m, n, rl, rm, rn , எனும் சிக்கலெண்கள் முறையே புள்ளிகள் L, M, N, A, B, C ஆல் குறிக்கப்படுகின்றன. r பூச்சியமற்ற சிக்கலெண்ணாகும். முக்கோணங்கள் LMN, ABC என்பன இயல்பொத்த முக்கோணங்கள் என நிறுவுக.

5. $a + b + c = 0$ எனின் பின்வருவனவற்றை நிறுவு
 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
 $a^5 + b^5 + c^5 = 5abc(bc + ca + ab)$
 $a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(bc + ca + ab)^2$ எனக் காட்டுக.

6. ஓரினத்தில் a ஒற்றுமைப் படும் வேறு ஓரினத்தில் b ஒற்றுமைப் படும் யிகுதி எல்லாம் வேற்றுமைப் படும் இருக்கும் போது, n பொருட்களின் ஒழுங்குத் தொகைக்கு கோவைகையப் பெறுக. ஒவ்வொரு எண்ணும் வாகக்கடியதாக $0, 1, 2$ என்ற மூன்று எண்களை மட்டும் உபயோகித்து ஐந்து எழுத்து இலக்கங்களை ஆக்கும் வேறு வேறான வழிகள் 100 எனக் காட்டுக.

7. ஒரு குதாட்ட விளையாட்டில் 3 நாணயங்கள் சண்டப்படுகின்றன. ஒருவன் பெறுவது எல்லாம் தலையாகவோ அல்லது எல்லாம் பூவாகவோ இருப்பின் அவன் 5/- ஐ வெற்றி பெறுகிறான். இதற்கழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

வேறு விதமாகப் பெற்றால் அவன் 3/- ஐ இழக்கிறான். இதற்கழுவதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

இவ்விளையாட்டின் பெறுபேறுகள் எழுமாற்று மாநி X இனக் குறிக்கப்படின் X இன் பெறுமானங்கள் யாவை?

X இன் எதிர்வையும், மாறற்றிறனையும் காண்க.

C. C. E. A/L வகுப்புகளுக்கான விஞ்ஞான பாடங்களுக்கான ஏழு வெளியீடுகள்

பாடப் புத்தகங்கள்

ஒளியியலும்
ஒலியியலும்
வெப்பவியல்
மின்னியலும்
சூந்தவியலும்
பொறியியலும்
சட்ப்பொருளியலும்
ஒட்டுண்ணிகள்
பிசுடிகள்
சர்ப்பாதி
மீன் வளர்ப்பு

பயிற்சிப் புத்தகங்கள்

மீட்டல் பௌதிகம்
கடங்கள் - I
கடங்கள் - II
கடங்கள் - III
பௌதிகவியல் A, B, C, D
அட்சரகணிதம்
நுண்மகணிதம்
ஆள்கூற்றுக் கேத்திரகணிதம்
பொறியியல்
இயக்க விசையியல்

கலை, சினை வகுப்புகளுக்கான ஏழு வெளியீடுகள்

சகாதாரக் கல்வி ஆண்டு 8, 7, 6, 5, 1^{ம்}
அறிஞரைக் கேத்திரகணிதம் ஆண்டு 7-11 வரை
ஆரம்ப விஞ்ஞானம் ஆண்டு 1, 2, 3
உடற் கல்வி ஆண்டு 6-11 வரை

மாசில் பதிப்பகம்
T. M. C. A. வட்டம் சென்னை
வழங்கலகம்.