

268

MAT 39

க. பொ. த. உயர்தரம்

உதவி நூல்

G. C. E. A / L

~~5754~~

நுண்கணிதம்

44

தீர்மான தளக் கேத்திரகணிதம்

திரிகோண கணிதம்

உத்திக்குகளுக்கும் பயிற்சிகளும்

Problems & Exercises

in

Calculus

Solid, Plane Geometry & Trigonometry

For

G. C. E. A / L

பதிப்புரிமை

மாசில் பதிப்பகம்

வவ. எம். சி. ஏ. எட்டிடம்,

யாழ்ப்பாணம்.

1654

விலை 30/=



க. பொ. த. உயர்தரம்

G. C. E. A / L

உதவி நூல் MAT 39

~~268~~

~~கணி 54~~

நுண் கணி தம்

தீண்ம தளக் கேத்திரகணிதம்

திரிகோண கணிதம்

உத்திக்குகணக்குகளும் பயிற்சிகளும்

Problems & Exercises

in

Calculus

Solid, Plane Geometry & Trigonometry

For

G. C. E. A / L

பதிப்புரிமை

மாசில் பதிப்பகம்

வை. எம். சி. ஏ. கட்டிடம்,

யாழ்ப்பாணம்.

விலை 30/=

1654

உள்ளறை

நுண்கணிதம்

அலகு	1. வகையீடு	1
	2. உயர் இழிவு	16
	3. தொகையீடு	30
	4. பரப்பும் கனவளவும்	50

510

திண்ம தளக் கேத்திரகணிதம்

அலகு	1. திண்மக் கேத்திரகணிதம்	56
	2. தளக் கேத்திரகணிதம்	62

திரிகோண கணிதம்

அலகு	1. சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்	67
	விடைகள்	84

பின்னிணைப்பு	1. <u>நுண்கணிதம்</u>	103
	2. <u>திண்ம தளக் கேத்திரகணிதம்</u>	124
	3. <u>திரிகோண கணிதம்</u>	136

<u>பின்னிணைப்பு விடைகள்</u>	145
-----------------------------	-----

நுண் கணிதம்

அலகு 1

வகையீடு

1. (i) $x \rightarrow 1$ ஆக $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^{1/2} - 1}{x - 1}$ என்பவற்றின் எல்லைப் பெறு
மானங்களைக் காண்க.

(ii) x ஐக் குறித்து வகையீடுக.

கோசை $(x + x^2)$ கோதா x கோசே x , $\sqrt{1 + x^2}$ சைன் $2x$.

2. (i) ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பு $16 \text{ m}^2/\text{s}^{-1}$ என்னும் மாறா வீதத்தில் விரிகிறது. ஆரை 5 m ஆகும்போது செக்கனுக்கு கனவளவு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

(ii) ஒரு தள வளையியிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் செவ்வகக் காட்டியின் ஆள்கூறுகள் $x = a(\theta + \text{சைன்}\theta)$, $y = a(1 - \text{கோசை}\theta)$ என்னும் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும். இதில் θ புள்ளியுடன் மாறி, 0 இற்கும் π இற்கும் இடையில் இருக்கிறது. வளையியின் ஒரு புள்ளியிலுள்ள தொடலி $x -$ அச்சுடன் $\theta/2$ கோணத்தை ஆக்குமெனக் காட்டுக.

3. முதற்கோட்பாடுகளிலிருந்து, $\frac{d}{dx}$ தான் $x = c^2 x$ எனக் காண்க.

இதிலிருந்து $\frac{d}{dx}$ (தான் $-1/x$) இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

u, v என்பன x இன் சார்புகளாயின்,

$$\frac{d}{dx} \text{ தான் }^{-1} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{u^2 + v^2}$$

x ஐக் குறித்து வகையீடுக.

(i) தான் $-1 \left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \text{ தான் } x/2 \right]; a > b > 0$

(ii) தான் $-1 \left[\frac{a \text{ சைன் } x + b \text{ கோசை } x}{a \text{ கோசை } x - b \text{ சைன் } x} \right]$ இங்கு a, b என்பன

ஒருமைகள்: முடிவுகளை இயலக்கூடிய எளிய வடிவில் தருக.

4. u, v என்பன x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளாயின்,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot du/dx - u \cdot dv/dx}{v^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

(i) x ஐக் குறித்து வகையிடுக. விடையை எளியவடிவில் எழுதுக.

a) சைன்⁻¹ $\left[\frac{3+5 \text{ கோசை } x}{5+3 \text{ கோசை } x} \right]; 0 < x < \pi$

b) மட e $\left[\frac{\sqrt{3} + \text{தான் } x}{\sqrt{3} - \text{தான் } x} \right]; -\pi/3 < x < \pi/3$

(ii) $y = x^4/(x-1)(x-3)^3$ ஆயின் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும் வண்ணம் x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. y என்பது x இன் சார்பாகவும், u என்பது x இன் சார்பாகவும்

இருப்பின் $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ என நிறுவுக.

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) தான்⁻¹ $\left(\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}} \right)$ (ii) $\left[(1-3/(x+x^2)) \right]$

(iii) மட $\left[\text{சீக } \sqrt{x} + \text{தான் } \sqrt{x} \right]$

6. $y=f(x)$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து x இன் தீர்வு $x=g(x)$ ஆகும்.

$f(g(x)) \neq 0$ எனத் தரப்பட்டால்,

$$\frac{d}{dx} (f(x)) = \frac{1}{\frac{dx}{d[g(x)]}} \text{ என நிறுவுக.}$$

x ஐக் குறித்து $y = \text{சைன்}^{-1} x$ $y = \text{தான்}^{-1} x$ என்பவற்றின் வகையீட்டுக் குணகங்களைப் பெறுக.

$1 < x < 3/2$ ஆயின்

(i) $2 \text{ தான்}^{-1} \sqrt{(x-1)/(2-x)}$ (ii) $2 \text{ சைன்}^{-1} \sqrt{(x-1)}$

(iii) $\text{சைன்}^{-1} 2 \sqrt{(2-x)(x-2)}$ என்ற x இன் சார்புகள் ஒவ்வொன்றினதும் வகையீட்டுக் குணகம்

$$\frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}$$

எனக் காட்டுக.

7. x ஐக் குறித்து x சைன் x என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தை முதற் தத்துவங்களிலிருந்து காண்க.
 x ஐக் குறித்து வகையிடுக.
 (i) தான்⁻¹ (e^x சைன் x) (ii) தான் x சைன் (தான் x)
 (iii) x சைன் x மட $|x$ சைன் $x|$
8. (i) முதற் தத்துவங்களிலிருந்து x ஐக் குறித்து $\frac{\text{சைன் } x}{x}$ என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.
 (ii) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.
 $\sqrt{x^2+1}$ சைன் $3x$, கோசை (கோசை \sqrt{x}), $\sqrt{\text{தான் } (x^2-1)}$
9. (i) $x \rightarrow 0$ ஆக $\frac{1-\text{கோசை } x}{x^2}$; $\frac{\text{சைன் } x + \text{சைன் } 5x}{\text{சைன் } 2x}$ என்பவற்றின் எல்லையைக் காண்க
 (ii) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.
 $\text{சைன் } 2x$ சைன்² $\left(\frac{1}{x}\right)$, தான் x சீக $3x$ ($x+x^4$) $\sqrt{1+x^2}$
10. (i) நேரம் t இல் O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரம் $at^3/(1+t^4)$ ஆகும் வண்ணம் ஒரு துண்டி கோட்டிலே இயங்குகிறது. துணிக்கை O இலிருந்து θ திற் கு அசையும் என்றும், பின்னர் O இற்குத் திரும்பும் போது, குறிப்பிட்ட நேரத்திற்கு வேகம் சீராக அதிகரிக்கிறது என்றும், பின் சீராக குறைகின்றதென்றும் காட்டுக.
 (ii) θ இன் வேறுவேறான பெறுமானங்களுக்கு செவ்வக அச்சைக் குறித்து $x=a$ கோசை θ , $y=a$ சைன்³ θ என்னும் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி தரப்படுகிறது. $\theta = \pi/4$ இல் வளையியின் தொடலிக்குரிய சமன்பாட்டைத் தருக.
11. ஒரு வளையியில் மாறும் புள்ளியொன்றின் ஆள்கூறுகள் (x, y) $x=t(1-t^2)$, $y=t^2(1-t)$ என்பவற்றால் கொடுக்கப்படுகின்றது. இதில் t என்பது சாராமாறி $t=\frac{1}{2}$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. வளையி முழுவதும் இக் கோட்டின் ஒரு பக்கத்திலேயே உள்ளது எனவும் நிறுவுக.

12. (i) $x \rightarrow 0$ ஆக $\frac{\text{சைன் } x}{x}$ என்பதன் எல்லையைக் காண்க.

முதற் தத்துவங்களிலிருந்து $x \neq 0$ ஆயின், x சைன் $\frac{1}{x}$ என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.

(ii) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\text{சைன்}^{-1} \left(e^{-\text{தான்}^2 x} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2x-1)}} \text{ மட } \sqrt{1 - \text{கோசை}^2 x}$$

13. x ஐக் குறித்து $\text{தான்}^2 x$ என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தை முதற் தத்துவங்களிலிருந்து காண்க.

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $e^{\text{தான்}^2 x}$ மட / $\text{தான்} x$ / (ii) $1 - \sqrt{x}$ கோசை e^x

14. u, v என்பன x இன் சார்புகளாயின்.

$$\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \text{ என நிறுவுக.}$$

u, v, w என்பன x இன் சார்புகளாயின்.

$$\frac{d}{dx}(uvw) \text{ என்பதற்குக் கோவையைப் பெறுக.}$$

x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

சைன் (சைன் x), $\text{தான்}^2 x$

$$\text{சைன்} (1+x^2) e^{1+x^2} \text{ மட } (1+x^2)$$

15. x ஐக் குறித்து வகையீட்டுக் குணகங்களைக் காண்க.

(a) $\text{தான்}^{-1} \left[\frac{e^x}{\sqrt{(1-x^2)}} \right]$ (b) சைன் கோசை x மட $(1 \times x^4)$

16. $\theta \rightarrow 0$ ஆக $\frac{\text{சைன் } \theta}{\theta} \rightarrow 1$ ஆகுமென நிறுவுக. இங்கு கோணம் θ

ஆனது ஆரையவில் அளக்கப்படுகின்றது.

x ஐக் குறித்து சைன் x என்பதன் வகையீட்டுக் குணகத்தை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து காண்க.

(i) சைன்⁻¹ $\left(\frac{2x}{1+x^2} \right), (x^2 < 1)$

(ii) மட $e^{\left[\frac{e^x \sin x}{(1-x^2)^2} \right]}$

என்பவை ஒவ்வொன்றினதும் x ஐக் குறித்த வகையீட்டுக் குணகத்தை எளிய வடிவில் உணர்த்து.

17. (i) $y = \text{சைன்}^2 nx$ கோசை $2x$ எனின்

$\frac{dy}{dx}$ ஐ $n(\text{சைன் } ax - \text{சைன் } bx)$ என்னும் வடிவில் உணர்த்த

லாம் எனக் காட்டுக. இங்கு a உம் b உம் n இன் பெருக்கங்களாகும்.

(ii) $xy^2 = (x-1)^2$ எனின்

$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^3}$ என நிறுவுக.

(iii) a ஆரையுடைய கோளத்துள் a+x உயரமுடைய ஓர் செவ்வட்டக் கூம்பு வரையப்படுகிறது. கூம்பின் கனவளவு மிகக் கூடியதாக இருப்பதற்கு x இன் பெறுமானத்தை a இற்காண்க.

18. (i) x ஐக் குறித்து வகையிடுக. (a) $x^2 e^{kx}$; (b) $3x^e$

(ii) $y = \text{மட}(\text{மட } x)$ எனின்.

$\frac{d^2y}{dx^2} + (e^y + 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ என நிறுவுக.

(iii) ஒரு வட்டத்தின் ஆரைச்சிறையொன்றின் சுற்றளவு ஆரைச் சிறையின் சாத்தியமான மிகப் பெரிய ப்பைக்காண்க.

19. (i) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(a) $\frac{1 + \text{சைன்}^2 x}{1 + \text{கோசை}^2 x}$

(b) $\text{மட} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

இங்கு $-1 < x < 1$

இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் விடையைச் சுருக்கித் தருக.

(ii) ஒரு மெல்லிய கடதாசி மட்டையிலிருந்து ஒரு திறந்த வெற்றுச் செவ்வட்டக் கூம்பு செய்யப்பட வேண்டியுள்ளது. கடதாசி மட்டையின் அதிகுறைந்த அளவைக் கொள்ளுதற்கான வட்டக்கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணத்தைக்காண்க.

20. (i) $y = \text{கோசை} [\text{மட}_e (1 + x)]$ எனின்

$(1 + x)^2 (d^2y/dx^2) + (1+x) (dy/dx) + y = 0$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ, y ஐ x இன் ஏறடுக்குகளில் x^4 உறுப்பு வரை விரித்தெழுதுக.

(ii) $y = (\text{சீக}x + \text{தான்}x)^p$ எனின்,

கோசை $x \frac{dv}{dx} = py$ என நிறுவுக.

இச் சமன்பாட்டைத் தொடர்ந்து வகையிடுவதன் மூலம் $x = 0$ ஆகும்போது $y \cdot \frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

21. $y = e^x$ சைன் x எனின், தொகுத்தறி முறையினால் அல்லது வேறு வழியால் $\frac{d^n y}{dx^n} = 2^{\frac{1}{2}n} e^x$ சைன் $(x + \frac{1}{2}n\pi)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ e^x சைன் x ஐ x இன் அடுக்குகளில் x^3 உறுப்பு வரை விரித்தெழுதுக. விரிவின் x^{4r}, x^{4r+1} உறுப்புக்களின் குணகங்களை எளிய வடிவில் உணர்த்துக.

25. $y = \text{தான்}^{-1}x$ ஆயின்,

$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n (n-1)! \text{சைன் } n\theta}{R^n}; (n > 1)$ என நிறுவுக.

இங்கு $R = +\sqrt{(x^2 + 1)}$ ஆகவும்,

கோசை θ ; சைன் θ ; $1 - n \therefore R$ ஆகவும் உள்ளது.

$\text{தான்}^{-1}x$ இன் விரிவை x இன் ஏறடுக்குகளில் உய்த்தறிக. பொதுவுறுப்பையும் எளிய வடிவில் தருக.

23. t ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$\text{மட}_e \left\{ \frac{3/1+t}{\sqrt{1-t}} \right\}$$

(ii) $x^2 + xy + y^3 = 1$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ ஐ x, y இல் காண்க.

$(x + 2y)^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 6 = 0$ எனவும் காட்டுக.

(iii) $\frac{d}{dx} (xe^{1/x}) = xe^{1/x}$ ஆவதற்கு x இற்கு மெய்யான பெறுமானம் இல்லை எனக் காட்டுக.

24. (i) $y = x$ தான் $x^{-1}x - m \cdot e^{-\sqrt{1+x^2}}$ எனின்,

$$(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} = 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) x, y என்னும் மாறிகள் $x =$ கோசை $2t, y =$ சைன் $2t$ என்னும் தொடர்புகளால் இணைக்கப்பட்டால், $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் t இன் உறுப்புகளில் காண்க.

(iii) $x = m \cdot (u+2)$ ஆகவும், $\frac{d^2y}{du^2} = ye^{-2x}$ ஆகவும் இருப்பின்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

25. (i) $x \rightarrow \alpha$ ஆக, எல்லைகளைக் காண்க.

(a) $m \cdot e^{(1+ax)} - 2m \cdot e^{-x} + m \cdot e^{(a+x)}$

(b) $\{ (x^2 + ax + b)^{\frac{1}{2}} - x \}$

(ii) x இன் சார்பாக வகையிடுக.

$m \cdot e^{\{ (a-x) / (a+x) \}} + 2$ தான் $h^{-1}(x/a)$

26. முதல் தத்துவங்களிலிருந்து x கோசை x இன் வகையீட்டுக்குணகத்தை x இன் சார்பாகக் காண்க.

x இன் சார்பாக பின்வருவனவற்றின் வகையீட்டுக்குணகத்தை மிக எளிய வடிவில் உணர்த்துக.

(i) தான் $x^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{x(3-x)}}{1-3x} \right\}$

(ii) $x^a m \cdot e^{-x}$

$x, 0$ ஐ அணுக $\frac{\text{சைன் } 2x - x^2 \text{ கோசை } x}{x^3 \text{ தான் } x}$

இன் எல்லையைக் காண்க.

27. (i) x இன் சார்பாக வகையிடுக.

(a) தான் $x^{-1} \left(\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} \right)$ (b) $m \cdot e^{\left\{ e^x \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}}$

(ii) $x = a$ சைன் t, b கோசை $\left(\frac{a}{b} t \right)$ ஆகவும்,

மீள் சூத்திரம்

27. $y = a$ கோசை $t - b$ கோசை $\left(\frac{a}{b} t\right)$ ஆகவும் இருப்பின்,

t இன் உறுப்புகளில் $\frac{dy}{dx}$ இற்கு $\frac{d^2y}{dx^2}$ இற்கும் கோவைகளைப் பெறுக. இங்கு a, b என்பன t ஐச் சாராதன,

28. (i) $y = \tan^{-1}x$ ஆயின்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\text{இதிலிருந்து } \frac{d^3y}{dx^3} - 8x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \text{ என உய்த்தறிக.}$$

(ii) a ஆரையுடைய ஓர் வட்டத்தட்டு, a உயரத்தில் நிலத்தில் கிடையாக பொருத்தப்பட்டுள்ளது. ஒரு சிறிய விளக்கு தட்டின் மையத்தின் நிலைக்குத்து கோட்டில் v வேகத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குகிறது. நிலத்தில் இருந்து விளக்கின் உயரம் $2a$ ஆக இருக்கும் கணத்தில் தட்டின் நிழலின் பரப்பு அதிகரிக்கும் வீதத்தைக் காண்க.

29. (i) செவ்வகம் ABCD இல் பக்கம் AB, p cm/s வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. பக்கம் BC, q cm/s வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது. $AB = x$ cm $BC = y$ cm ஆகவிருக்கும்போது பின்வருவனவற்றின் அதிகரிப்பு வீதத்தை (rate of increase) காண்க.

a) பரப்பு ABCD

b) மூலைவிட்டம் AC

c) $\angle BAC$

$x^2 + xy + y^2 = 1$ என்னும் வளையத்தில் படித்திறன் 1 ஆகவிருக்கும் புள்ளிகளில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

30.

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ என்பதிற்கு $0 < x < 0.8$ எனும் வீச்சில் 0.1 இடைவெளியில் $f(x)$ இன் பெறுமானத்தை மூன்று தசம தானத்திற்கு அட்டவணைப்படுத்துக. இதிலிருந்து

$$\int_0^{0.8} f(x) dx \text{ யை}$$

a) சரிவக முறையால், சகல நிலைத்தூர பெறுமானத்திலும்

b) சிம்சனின் நெறியால், 0.2 இடைவெளி கொண்ட நிலைத்தூரத்தை மட்டும் பயன்படுத்தி கணிக்க.

31. (i) பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக. விடைகளை இயலுமானவரை சுருக்குக.

a) $\frac{1}{x^2} \sqrt{1+x^3}$ b) $\ln \left(\frac{2 + \cos x}{3 - \sin x} \right)$

(ii) $y = e^{3x} \sin 4x$ ஆயின்

$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 25y = 0$ எனக் காட்டுக.

32. (i) வகையிடுக.

a) $\ln\{x + \sqrt{(x^2 + 1)}\}$

b) $\sec^2 2x$

c) 10^x ; உமது விடைகளைச் சுருக்குக.

(ii) $x^2 + y^2 = 2y$ ஆயின் முதலில் y இனை x இன் உறுப்புகளாக

காணுது $\frac{dx}{dy}$ என்பதை x, y இன் உறுப்புகளில் காண்க.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(1-y)^3}$ என்பதை நிறுவுக.

33. (i) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(a) $(1 - 3x)^{5/2}$

(b) $x \ln x$

(c) $\sin^{-1}(1-x^2); 0 < x < \sqrt{2}$

(ii) α மாறிலியாகவும், $y = e^{4x} \cos 3x$ ஆகவும் இருக்க

$\frac{dy}{dx} = 5e^{4x} \cos(3x + \alpha)$ எனக் காட்டுக.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ யையும் காண்க.

34. (i) x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(a) $\log_{10} x$

(b) $\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3$

(c) $(e^x \sin x)^2$

(ii) $x^2 + y^2 = 10y$ எனில் புள்ளி $(3, 1)$ இல் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க.

35. (i) கணிக்க.

(a) $L_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{x^2}$

(b) $L_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(ii) $y = \operatorname{sech} x$ எனில்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2(1-y^2) \text{ என நிறுவுக.}$$

இதிலிருந்து

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^2(1-y^2) \text{ என உய்த்தறிக.}$$

(iii) $y = \cosh^{-1} \frac{x}{a}$ எனில்

$$y = \pm \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) \text{ என நிறுவுக.}$$

$x \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ யை x யைக் குறித்து வகையிடுக.

36. (i) θ பூச்சியத்தை அணுகும்போது $\frac{1 - \cos 4\theta + \theta \sin 3\theta}{\theta^2}$

இன் எல்லைப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $x = 2(\theta - \sin \theta)$

$y = 2(1 - \cos \theta)$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ எனக் காட்டி } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ஐ } \operatorname{cosec}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

இல் தருக.

37. ஐக் குறித்து வகையிடுக.

$$(i) (x^2 + 5x + 3)^{\frac{1}{2}} \quad (ii) \frac{(2x - 3)^2}{(3x + 4)^3}$$

(iii) வது விடையை சுருக்கவும்.

b) ஒரு வளைவியின் பரமானச் சமன்பாடு $x = t(t^2 + 1), y = t^2 + 1$ ஆல் தரப்படுகின்றது. இவ்வளைவியில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டை 't' இல் தருக.

38. a) $y = \sin x \operatorname{lccos}^3 x$ எனின், $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகுமாறு 0 க்கும் π க்கும்

கும் இடையிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$y = \sin x \operatorname{ccos}^3 x$ என்ற வரைபை 0 க்கும் π க்கும் இடையிலான x இன் பெறுமானங்களுக்கு வரைக. $x = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்

போது வரையின் அமைப்பைத் தெளிவாகக் காட்டுக.

b) $y = e^x + 2e^{-x}$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள் கூற்றைக் கண்டு வரைபை வரைக.

39. a) $x > 0$ ஆன, x இன் பெறுமானங்களுக்கு ஒரு வளையின் சமன்பாடு $y = x \ln x$. இவ்வளையியில் திரும்பற் புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகளைக் கண்டு, அது உயர்வா அல்லது இழிவா எனத் தீர்மானிக்குக.

வரைபை வரைக. [$x \rightarrow 0$ ஆகும்போது $y \rightarrow 0$ என எடுத்துக் கொள்ளப்படலாம்.]

b) ஒரு வளையியின் பரமானச் சமன்பாடு.

$$x = t - \frac{1}{t}, \quad y = t + \frac{1}{t} \quad \text{ஆகும், இங்கு } t \neq 0$$

இவ்வளையியில் சாய்வு பூச்சியமாகும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் கண்டு. $t = 2$ ஆகவுள்ள புள்ளியில் உள்ள தொடரவியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

40. a) பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(i) $\ln(\sin x)$

(ii) $x e^{-x^2}$

b) $y = \sqrt{x}$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ ஐ எழுதி, y இன் அண்ணளவான

மிகச்சிறிய மாற்றத்திற்கு x இன் மிகச்சிறிய மாற்றத்தில் ஒரு கோவையைப் பெறுக. விடையை சரிசெய்ததற்கு 1001 இன் கனமுததைக் கணக்கிடுக.

41. a) $x^2 y = a \cos nx$ எனின்,

$$\frac{x^2 d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (n^2 x^2 + 2) y = 0 \quad \text{எனக் காட்டுக,}$$

b) ஒரு வளையி பின்வரும் பரமானச் சமன்பாடுகளினால் தரப்படுகின்றது, $x = t^2 + 3$, $y = t(t^2 + 3)$

(i) இவ்வளையி x அச்சு பற்றிச்சமச்சீரானது எனக் காட்டுக.

(ii) $x < 3$ இல் வளையி இல்லை எனக் காட்டுக.

(iii) $\frac{dy}{dx}$ ஐ t இல் கண்டு $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \geq 9$ எனக் காட்டுக.

(i), (ii), (iii), களை உபயோகித்து வளையியை வரைக.

42. ஒரு செவ்வட்ட உருளையினுள் ஒரு உருளை கூம்பு வரையப் பட்டுள்ளது. உருளையின் அச்சம் கூம்பின் அச்சம் பொருந்துகின்றது. அத்துடன் உருளையின் அடி கூம்பின் அடியில் அமைந்துள்ளன. உருளையின் மேல் பாகத்தின் வட்ட விளிம்பு கூம்பின் வளை பரப்பில் அமைந்துள்ளது. கூம்பின் அடி ஆரை 'a' உம் அரை உச்சிக் கோணம் 'α' உம் ஆகும்.

உருளையின் அடி ஆரை 'o' இலிருந்து 'a' வரை மாறலாம்.

(i) உருளையின் மிகக் கூடிய கனவளவைக் காண்க.

(ii) $\cot \alpha = 3$ எனத் தரப்பட்டால், உருளையின் உயரமும், அடி ஆரையும் சமனாகும்போது, அதன் மொத்த மேற்பரப்பு மிகக் கூடியதாகும் எனக் காட்டுக.

43. a) $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ எனின் $f'(x)$ ஐக் காண்க.
 $x > 0$ எனின் $f(x) > 0$ எனக் காட்டுக.

b) $x -$ அச்சின் வழியே இயங்கும் ஒரு புள்ளி P நேரம் t இல் உற்பத்தியில் இருந்து இடப்பெயர்ச்சி.

$$x = te^{-2t} \quad (t \geq 0) \text{ ஆகும்.}$$

நேரம் 't' இல் வேகம், ஆர்முடுகனுக்குக் கோவைகளைப் பெறுக. இதிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவேளையில் (கண்டு பிடிக்கப்பட வேண்டியது), P ஆனது O ஐ நோக்கி நேரத்துடன் அதிகரிக்கும் ஒரு வேகத்துடன் இயங்கும் எனக் காட்டுக.

44. ஒரு கோளக்கோள வடிவான தாழி a cm ஆரையுடையது. இதில் நிலைக்குத்தாயிருக்க $5\pi a^2$ cm² நிமி எனும் மாறாததத்தில் நீரால் நிரப்பப்படுகிறது. நீரின் ஆழம் $\frac{3}{4}a$ cm ஆயுள்ள போது நீர் மட்டம் உயரும் வீதத்தை cm/நிமி இல் காண்க. r ஆரையுள்ள ஒரு கோளத்தின் h உயரமுள்ள ஒரு மூடியின் கனவளவு $\frac{4}{3}\pi h^3 (3r - h)$

45. $y = e^x \cos x$, $y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$, $n > 0$ எனில் $x = 0$ ஆகையில்

y_1, y_2 வைக் காண்க. x இன் சகல பெறுமானங்களிற்கும்.

$$y_{n+2} = 2(y_{n+1} - y_n) \text{ என நிறுவுக.}$$

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $e^x \cos x$ க்கு x இன் அடுக்குகளின் சார்பில் ஒரு தொடரை x^5 இன் உறுப்பு வரை பெறுக. இதை உபயோகித்து $x = 0.1$ ஆகையில் y யை 6 தசமதானத் திற்கு காண்க.

46. (i) L நீளம் கொண்ட ஒரு மெல்லிய கம்பியானது r ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தின் ஆரைச் சிறையாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆரைச்சிறையின் ஆரைகளிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ ஆரையன்கள் எனில் θ வை L, r இல் காண்க. ஆரைச் சிறையின் பரப்பு $\frac{1}{2} Lr - r^2$ என உயத்தறிக.

r வேறுபட, தரப்பட்ட நீளமுள்ள கம்பியால் ஆக்கப்படும் ஆரைச்சிறையின் உயர் பரப்பைக் காண்க.

- (ii) $y = \cos h (2 \sin h^{-1} x)$ எனில்

$$(x^2 + 1) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - 4y = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

47. மக்லோரின் (Mclaurin) $\cosh x \cos x$ இன் விரிவில் x, x^2, x^3 இன் குணகங்கள் பூச்சியமென்றும் x^4 இன் குணகம் $-1/6$ எனவும் காட்டுக.

உறுப்பு x^8 வரையிலான விரிவைப் பெறுக.

$$1.93333 < \int_{-1}^1 \cosh x \cos x \, dx < 1.93343$$

எனக் காட்டுக.

48. $y = x \sin^{-1} x, |x| \leq 1, |y| \leq \frac{\pi}{2}$ எனில்

$x = \frac{1}{2}$ எனில், $y = \frac{\pi}{12}$ எனவும்: $\frac{dy}{dx} = 1.1$ எனவும் நிறுவுக.

$x=0, x = -\frac{1}{2}$ ஆகையின் y யையும், $\frac{dy}{dx}$ யையும் காண்க.

$y = x \sin^{-1} x$ யை வரைக. $x = 0, x = \pm 1$ ஆகையின் உள்ள தொடலிகளை காட்டுக.

49. (i) $-\frac{1}{2}\pi \leq y < \pi/2$ இற்கு, $y = \sin^{-1} x$ இன் வரைபை வரைக.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ ஆகும் வண்ணம் உள்ள புள்ளியில் வளை$$

யிக்கான தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

50. சைன் hx , கோசை hx , தான் hx , சீக hx என்பவற்றை விளக்குக.

உமது வரைவிலக்கணத்திலிருந்து $\frac{d}{dx} (\text{தான் } hx) = \text{சீக } h^2x$

எனக் காட்டுக.

$y =$ தான் hx ஆயின்,

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2 \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right\} = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

51. (i) எல்லை $\frac{a}{a \rightarrow 0} \frac{\text{கோசை } h a b - \text{கோசை } a x}{\text{கோசை } h a b - \text{சைன் } h a b}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\left\{ \text{தான் } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right\}}$ ஐயும்

2 தான் $b^{-1} (x/2)$ ஐயும் வகையிடுக.

இம் முடிபுகளிலிருந்து என்ன உய்த்தறியலாம்?

52. (i) $y = x$ சைன் $\left(\frac{1}{x} \right)$ எனின்,

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) x, y என்பன $x =$ கோசை⁴ $t, y =$ சைன்⁴ t ஆகிய தொடர்

புகளால் இணைக்கப்பட்ட மாறிகளாயின் $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

ஆகியவற்றை t யின் சார்பாகக் காண்க.

(iii) $y = (x - 4) e^x$ என்னும் வளையிக்கு $x = 1$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்ட புள்ளியுள்ள தொடலியின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

இந்த வளையியிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் அமைந்த தொடலி உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லுகின்றதெனக் காட்டி, அப்புள்ளியினது x இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

53. (i) n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண் ஆயின்,

$$x \rightarrow a \text{ எல் } \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) இதிலிருந்து, முதற்கோட்பாடுகளைக் கொண்டு

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \text{ என நிறுவுக.}$$

முதற் கோட்பாடுகளைக் கொண்டு, $\frac{d}{dx}$ சைன் $x =$

கோசை x என நிறுவுக. இங்கு நீர் எடுத்துக்கொள்ளும் அடிப்படை எல்லையெதனையும் (நிறுவல் இல்லாமல்) கூறுக.

$\frac{d}{dx}$ கோசை $x = -$ சைன் x என்பதை உய்த்தறிக.

(iii) $f_1(x), f_2(x)$ என்பன x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளாகவும் $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ ஆகவும் இருப்பின், $\frac{d}{dx} f(x)$ இற்

கான சூத்திரமொன்றை $\frac{d}{dx} f_1(x), \frac{d}{dx} f_2(x), f_1(x), f_2(x)$

ஆகியவற்றின் சார்பாகப் பெறுக.

m உம் ஒரு நேர் முழுவெண் ஆக இருக்க.

$y =$ சைன் $m + 1$ x கோசை $n - 1$ x ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx} = (m + n) \text{ சைன் }^m x \text{ கோசை }^n x -$$

$(n - 1)$ சைன் x கோசை $n - 2$ x என நிறுவுக.

54. $0 < \theta < \pi/2$ ஆயின் $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ எனக் கேத்திர கணித முறையில் நிறுவுக. இதிலிருந்து, $\theta \rightarrow +0$ ஆகும்போது

$\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ ஆகுமெனக் காட்டுக. $\theta \rightarrow 0$ ஆகும்போது

$\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ ஆகும் என்பதை உய்த்தறிக.

முதற் கோட்பாட்டிலிருந்து $\frac{d \sin x}{dx}$ ஐக் காண்க. இதி

லிருந்து $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}; \frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$ ஆகிய சூத்திரங்

களைப் பயன்படுத்தி முறையே, $\frac{d}{dx} \cos x$ ஐயும் $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x$ ஐயும் காண்க.

a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்படித்து $y =$ சைன் $(a \text{ சைன் }^{-1} x)$

ஆயின், $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ என நிறுவுக.

மேலதிகப் பயிற்சி - பின்னிணைப்பில் காண்க.

உயர்வு இழிவு

1. (ii) $x^3(x-1)^2/(2x+1)^2$ என்ற சார்பு ஓர் இழிவையும், இரண்டு உயர்வையும் கொண்டுள்ளதென நிறுவுக.

(ii) இதன் பருமட்டான வரைபினைத் தருக.

2. $y = \frac{x^2(8x-5)}{(x-1)^2}$ என்னும் சார்பு ஓர் உயர்வையும் இரு இழிவுகளையும் கொண்டுள்ளதென நிறுவுக. சார்பின் பருமட்டான வரைபடத்தைத் தருக.

3. $x^{2/3}(2x+1)^3/(2x-1)$ என்னும் சார்பு இரு உயர்வுகளையும் இரு இழிவுகளையும் கொண்டுள்ளதெனக் காட்டுக. அதனுடைய பருமட்டான வரைபினைத் தருக.

எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கூடாகவும் x அதிகரிக்க $\frac{4}{x-1} - \frac{1}{x-3}$ என்பதன் நடத்தையை ஆராய்க. இது $\frac{1}{2}$ இற்கு சமமான உயர்வையும், $\frac{3}{2}$ இற்குச் சமமான இழிவையும், கொண்டுள்ளதெனவும். உயர்வு இழிவுகளுக்கிடையில் எந்த ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காதெனவும் நிறுவுக. இதை வரை மூலம் விளக்குக.

5. பெறுதிகளை ஆராய்வதன் மூலம் x இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு $\frac{x^2-3x+4}{(x-3)^2}$ என்பதன் நடத்தையை விளக்குக.

x அதிகரிக்க சார்பும் கூடுவதற்கான x இன் வீச்சுக்களைக் காண்க. சார்பிற்கு பருமட்டான வரைபடமொன்றைத் தருக.

6. (i) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ என்பதால் தரப்படும் வரைபினைக் கீறிக. y உயர்வு அல்லது இழிவைக் கொள்வதற்கான x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) ஒரு வளைவி $x = e^\theta$ கோசை θ $y = e^\theta$ சைன் θ என்ற சாராமாறிச் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகிறது. θ ஐச் சாராமாறியாகக் கொண்ட P என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடர்வழியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

O என்பது உற்பத்தியாயின், P மாறுப்போது OP இற்கு P இனுள்ள தொடலிக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ஒருமையாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

7. பின்வருவனவற்றின் உயர்வு இழிவுகளைக் கண்டு, அவற்றின் பருமட்டான வரைபுகளைத் தருக.

(i) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ (ii) $e^x (x^2 - 3)$

8. x என்பது மெய்யாகவும், $y = \frac{[k(x+2)^2 - (x-2)^2]}{[k(x+2)^2 + (x-2)^2]}$ ஆகவும் இருப்பின்.

(i) k என்பது நேராயின், $-1 < y < 1$ எனவும்;

(ii) k எதிராயின் $-1 > y > 1$ எனவும் நிறுவுக.

k = 1 ஆகும்போது y இன் உயர்வு இழிவுகளைக் காண்ட. இவ்வகையில் சார்பின் வரைபினையும் தருக.

9. a என்பது மெய்யொருமையாகவும், $(x^2 - 16) / (x - a)$ என்பது சார்பு y ஆற்றுகிறபடியின்.

(i) $a^2 < 16$ ஆயின் y எல்லாமெய்ப் பெறுமானத்தையும் கும்; ஆனால் y இற்கு நிலைத்தபுள்ளிகள் இல்லை என

(ii) $a^2 > 16$ ஆயின், குறிப்பிட்ட விச்சங்களில் ஒரு பெறுமானத்தையும் எடுக்காது; ஆனால் y இற்கு ஒரு நிலைத்த புள்ளிகள் உண்டாகவும் நிறுவுக. $a = 5$ எனில் உயர்வு இழிவுகளைக் கண்டு இவ்வகையில் சார்பின் வரைபினையும் பருமட்டாகத் தருக.

10. $0 < x < 2\pi$ இல் $f(x) = \frac{1}{2}$ கோசை $2x -$ சைன் x என்னும் சார்பின் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்ட.

x இன் அவ்விச்சிலே $y' = f'(x)$ இனது வரைபினும் பருமட்டியாக வரைக.

K இன் வேறுவேறான மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கு,

$0 < x < 2\pi$ இலே சமன்பாடு $f(x) = K$ இனது வேறுவேறான மெய்தீர்வுகளைக் காண்ட.

11. x இன் $0, \pi$ என்பவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பெறுமானங்களில் கோசை x - $\frac{1}{2}$ கோசை $3x + \frac{1}{2}$ கோசை $5x$ என்பதன் நடத்தையை க. ப 3

ஆராய்க. இவ்வீச்சிலுள்ள x இன் ஒரே ஒரு பெறுமானத்திற்கு மட்டுமே சார்பு மறையும் எனக் காட்டுக. x இன் நூப்பெறுமானத்தையும் காண்க. சார்பின் உயர்வு இழிவுகளைக் கண்டு வரைபையுந் தருக.

12. $(x^3 - 3x^2 + 5x - 5)e^x$ என்னும் சார்பின் உயர்வு இழிவுகளைக் கண்டு. பருமட்டான வரைபினையும் கீறக இதிலிருந்து $x^3 - 3x^2 + 5x - 5 = 0$ என்னும் சமன்பாடு ஒரேயொரு மெய் மூலத்தைக் கொண்டுள்ளதெனவும் திறவுக.

“ $x=3$ இலே சார்பு $f(x)$ இற்கு உயர்வுப் பெறுமானம் உண்டு” என்பதாற் கருதுவது யாது?

$x^2 e^{-2x}$ என்னுஞ் சார்பின் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க. இச்சார்பின் வரைபினைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து k ஆன் எவ்வா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு சமன்பாடு $x^2 - ke^{2x} = 0$ இனது வேறுவேறு மெய்த்தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு, அதன் தட்டையான வட்ட அடியும் உட்பட ஒரு மெக்லிய தடிப்புடைய உலோகத்தகட்டிலிருந்து ஆக்கப்பட்டுள்ளது. முழு மேற்பரப்பையும் அரையுச்சிக் கோணம் θ இலும் களவளவிலும் உணர்த்துக. தரப்பட்ட களவளவிற்கு அரையுச்சிக்கோணம் θ இற்குச் சமமாய்விடுவதற்குரிய தடிப்பு இழிவாகும் எனக் காண்க.

14. x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் சைன் x ($1+3$) கோசை x)¹ இன் வகையீட்டுக் குணகம் நேரானதென்றும், சைன் x / ($5 + கோசை x$)³ இன் வகையீட்டுக் குணகம் x ஆனது $2n\pi$ இலிருந்து $(2n+1)\pi$ இற்குச் செல்லத் தனது குறியை மாற்றும் எனவும் திறவுக.

ஒரு சார்புகளினதும் பருமட்டான வரைபடத்தைத் தருக. முதலாவது சார்பு யாதுமொரு மெய்ப்பெறுமானத்தைக்கொள்ளும் என்றும் இரண்டாவது சார்பு தரப்பட்ட இரு எல்லைகளுக்கிடையிலேயே மெய்ப்பெறுமானத்தைக் கொள்ளும் என்றும் காட்டுக.

15. கோசை x கோசை $(x - \pi/6)$ கோசை $(x + \pi/6)$ என்ற சார்பின் உயர்விழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க. இற்கு $0 \leq x < \pi$.

16. R ஆரையுடைய ஓர் அரைவட்டக் கோள வார்ப்பினூடாக ஓர் உருளைத் துவாரமிடப்பட்டுள்ளது. துவாரத்தின் அச்சு, அரைவட்டக் கோளத்தின் அச்சில் அமைந்துள்ளது இவ்வருளையின் கனவளவு உயர்வாக இருக்கும்வண்ணம் துவாரச் சவரின் நீளத்தைக் காண்க. இச்சந்தர்ப்பத்தில் எடுகியுள்ள உலோகத்தைக் காண்க.

17. $x e^{a/x}$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு a ஓர் ஒருமை.

$x e^{a/x} = 1$ என்ற சமன்பாடு $1 < x < 2$ இலும் பெரிது அல்லதெனியது என்பதற்கேற்ப இரண்டு அல்லது 3 நேர்மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

18. $y = e^{-x}$ இன் வரைபடத்தை $-2 < x < 2$ என்ற வீச்சுக்குள் வரைக அதே படத்தில் பொருத்தமான வேறொரு வரைபடத்தை வரைவதன் மூலம் $x^2 e^x = 3$ என்பதன் அண்ணளவான தீர்வுகளைத் தரப்பட்ட x இன் வீச்சிற்குள் காண்க.

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் அண்ணளவான தீர்வுகளை உய்த்து

(i) $x + m e^{-x^2} - m e^{-3} = 0$

(ii) $x - m e^{-x^2} + m e^{-3} = 0$

19. $\frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ என்னும் கோவை x இன் யாதும் மெய் பெறுமானங்களுக்கு -1 இற்கும் 1 இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானங்களைக் கொள்ளாத எனக் காட்டுக.

$y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ என்ற வரைபின் அணுகு கோடுகளையும், திரும்பப் புள்ளிகளையும் கண்டு வளைகோட்டைப் பருமட்டாக வரைக.

20. $y = f(x)$ என்னும் வரைபு $(1, 0)$ என்ற புள்ளிக்கூடாகச் சென்று (x, y) என்னும் புள்ளியில் $(x^2 + 2x + 3 / x + 1)^2$ என்னும் சாய்வையும் கொண்டிருக்கிறது. $f(x)$ ஐக் கண்டு, $y = f(x)$ இன் வரைபடத்தைப் பருமட்டாக வரைக.

(ii) $y^2 = \frac{3x^2(3-x)}{x+1}$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு உற்பத்தி

யிலுள்ள தொடர்ச்சியான சமன்பாட்டைக் காண்க.

x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாகத் தொடவிகள் வரையற்கூடிய புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

21. 76cm^3 கனவளவுள்ள ஓர் உலோகம் சதுர அடியும் செவ்வக பக்கங்களும் கொண்ட மூடியற்ற ஒரு பெட்டியின் உருவத்திற்கு உருக்கிச் செய்யப்பட்டுள்ளது. பக்கங்களை 1cm கனம் (தடிப்பு) உடையன. பெட்டியின் உள் அகலம் $x\text{ cm}$ ஆயின், அதன்

கொள்ளளவு $\frac{x^3(72-4x-x^2)}{4(x+1)}\text{cm}^3$ எனக் காட்டுக.

கொள்ளளவு அதியுயர்வாயின் மடக்கை வகையிட்டினால் அகலது வேறு வழியினால், $72-4x-x^2=2x(x+1)$ எனக் காட்டுக. அதியுயர் கொள்ளளவையும் காண்க.

22. $y=2x^3+3x^2-12x+K$ என்னும் சார்பு உயர்வு அகலது இழிவாக இருத்தற் பொருட்டு x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இங்கு K ஒரு ஒருமை.

இழிவுப் பெறுமானம் உயர்வின் x_0 ஆயின், $K=10$ என நிறுவுக. $y=2x^3+3x^2-12x+10$ என்னும் வரைகோட்டிற்கு, x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் தொடவிகள், வளைகோட்டை மீண்டும் முறையே PQ இல் வெட்டுகின்றன. P, Q மீண்டும் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

23. x ஐக் குறித்து ஒரு வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதம் மாறுகின்ற விடத்தில் ஒரு மாறிலியாகவுள்ளது. வளைகோட்டு $(1, 2)$, $(-3, 0)$ புள்ளிகளுக்குடாகச் செல்லும் முதலுள்ளையானுள்ள சாய்வு விகிதம் $-\frac{1}{2}$ ஆகும் வளைகோட்டின் சமன்பாடு $4y=9-x^2$ எனக் காட்டுக. வளைகோட்டின் பருமட்டான படத்தையும் வரைக.

வளைகோட்டினுள் $y=2x$ என்ற வரைபினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பையும் காண்க.

24. t இன் சாராமாறியில் தரப்படும் ஆள்கூறுகள் $x=ae^{-t}$ கோணை, $y=ae^{-t}$ சைன் t ஐ உடைய புள்ளி P ஒரு வளைகோட்டை வரைகிறது. O என்பது உற்பத்தியாயின் P இல் உள்ள தொடலி OP உடன் $\pi/4$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. O இலிருந்து இத் தொடலிக்கு வரையப்படும் செவ்வனின் நீளத்தையும் காண்க.

$t=0$; $t=\pi/2$ என்பவற்றிற்குரிய புள்ளிகளுக்கிடையேயான வளைகோட்டினாலும் ஆள்கூற்றச்சுகளினாலும் உளைடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

25. 1 கோதா $\theta + m(3-4 \text{ சைன்}^2 \theta) = n$ என்னும் சமன்பாட்டிற்கு $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ என்னும் மூன்று மெய்தீர்வுகளை θ க்கும் π க்கும் இடையிலிருப்பின் $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ அல்லது 2π என நிறுவுக. (கோதா $\theta, 3-4 \text{ சைன்}^2 \theta$) என்னும் புள்ளி $y(1+x^2) = 3x^2 - 1$ என்னும் வளைகோட்டில் இருக்குமெனக் காட்டுக. சார்பின் வரைபடத்தையும் பருமட்டாக வரைக.

26. (i) $y = (x+1)e^x$ என்னும் புள்ளிக்கு $x=t$ என்பதால் வரையறுக்கப்படும் புள்ளியில் தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் தொடலிகள் வரையப்படுவ வதற்கு வளைகோட்டில் இரண்டு முடிவுள்ள புள்ளிகளை உண்டெனக் காட்டி அப்புள்ளிகளிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(ii) P என்பது வளைகோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். Q என்பது P இலுள்ள தொடலி X அச்சை சந்திக்கும் புள்ளியாகு வளைகோடு $\left(0, \frac{K\sqrt{3}}{2}\right)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்கிற

இங்கு K ஓர் ஒருமை. வளைகோட்டில் P இன் எல்லா நிலைகளுக்கும் PQ இன் நீளம் K ஆகும்.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{K^2 - y^2}{y^2} \text{ நிறுவுக.}$$

இந் நிபந்தனைகளைத் திருப்திப்படுத்தும் வளைகோடுகளின் சமன்பாட்டைத் தெக்காட்டின் வடிவிற்கு காண்க.

27. a) C ஆனது, x இன் O க்கும் π க்கும் இடையில் $y = \sin x$ ஆல் கொடுக்கப்படும் ஒரு வளைவாகும்.

(i) x அச்சுக்கும் C க்கும் இடையிலான பரப்பையும்

(ii) இப்பிரதேசத்தை x அச்சுப்பற்றிச் சுழற்றிப் பெறப்படும் கனவளவையும் காண்க.

28. (i) $y = \cos x$ என்னும் வளைவியில் புள்ளி $A(x=0)$ இலுள்ள தொடலியும் புள்ளி $B(x=\pi/2)$ இலுள்ள தொடலியும் C இல் சந்திக்கின்றன. C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

நேர் வரைகளை AC, CB, வில் BA எளிபவற்றால் அடக்கப் படும் பிரதேசத்தின் பரப்பையும் காண்க.

29. a) $y = x(2-x)$ என்ற வளைவியின் ஒரு பகுதியாலும் x -அச்சாலும் $x=0$ க்கும் $x=2$ க்கும் இடையில் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு x -அச்சைப்பற்றிக் சுழற்றப்பட்டு ஒரு சுற்றற் திண்மம் பெறப்படுகிறது. இத்திண்மத்தின் எவ்வளவைக்காண்க.

b) பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க:

$$\frac{dy}{dx} = y \cot x \quad (0 < x < \pi, y > 0) \quad \text{இங்கு } \frac{1}{6} \pi \text{ ஆகும்}$$

போது $y=2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

30. 0க்கும் $3\frac{1}{2}$ க்கும் இடையிலான x -இல் பெறுமானங்களுக்கு ஒரே படத்தில், $y = \frac{1}{x}$, $y = \sin \pi x$ ஆகிய இரு வரைபுகளையும் வரைக. y -இன் பெறுமானங்களை $x = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3$ ஆகிய வற்றிற்குப் பெற்றால் போதும்.

$2\frac{1}{2}$ ஐ முதலாவது அண்ணளவாகக் கொண்டு $\sin \pi x = \frac{1}{x}$ இன் மிகச் சிறிய நேர் மூலகத்தின் பெறுமானத்தை நியூற்றனின் முறையாலோ அல்லது வேறு வழியாலோ காண்க. விடையை இரண்டு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாக எழுதுக.

31. ஒரே அச்சங்களில் $y = \tan^{-1} x$ ($\frac{\pi}{4} < y < \frac{3\pi}{4}$) $y = e^{-x}$ ஐ வரைக. இவ்வரைபுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியின் x ஆள்கூற்றை கொண்டு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

$f: x \rightarrow xe^{-x}$ ஆயின், $y = f(x)$ இன் திரும்பற்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் கண்டு வரைபை வரைக. இங்கு x மெய் $x \rightarrow \infty$ ஆக $xe^{-x} \rightarrow 0$ எனக் கொள்க.

b) $g: x \rightarrow x e^{-x}$ ஆயின், $g(x)$ இன் நிலைத்த பெறுமானங்களுக்கான x இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இவ் நிலைத்த பெறுமானங்களின் தன்மையை n இன் இரட்டை, ஒற்றைப் பெறுமானங்களுக்கு தனித்தனியே காண்க. இங்கு n ஒன்றிலும் கூடிய நேர்ெண். x ஒரு மெய்யெண்.

32. $y = \sin^2 x$ எனும் வளைவியில் $x=0$ இலிருந்து $x=\pi$ வரையிலான வில்லை பருமட்டாக வரைக.

இவ் வில்லின் கீழாகவும் $y = \frac{1}{2}$ எனும் கோட்டுக்கு மேலாகவும் அடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பைக் காண்க.

33. $y^2 = 3(3-x)$ இங்கு $a > 0$ என்பதை பருமட்டாக வரைக. வளைவியில் $(0, a)$ புள்ளியில் அமையும் தொடலியினதும், செவ்வனினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தொடலி, வளைவி, x அச்ச என்பவற்றுல் முதலாம் கால் வட்டத்தில் அடைக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் மையப்போலியின் x ஆள்கூறையும் காண்க.

34. (i) $y = \frac{15+10x}{4+x^2}$ ஆக இருக்க, x மெய்யாக y பெறக்கூடிய பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $x=0$ ஆகையில் வளைவியின் சாய்வைக் காண்க. வளைவியை வரைக.

(iii) $y=4-x^2$ இனாலும், கோடு $y=4-2x$ இனாலும் அடைக்கப்பட்ட திணிவு பரப்பு $\frac{4}{3}$ எனக் காட்டுக. இப் பரப்பின் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

35. (i) $x^2+2xy+4y^2-12x-24y+36=0$ என்பதில் x மெய்யாக $0 \leq y \leq 4$ என நிறுவுக.

$y=0$ ஆக $\frac{d^2y}{dx^2}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ii) $\sum_{r=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{r}\right) > 5$ ஆகுமாறு n கொள்ளக் கூடிய

மிகச்சிறிய நன்றை காண்க.

36. $y = \frac{2x}{x+3}$ இனால் ஒரு வளைவியின் சமன்பாடு தரப்படுகிறது.

இவ்வளைவியானது அணுகு கோடுகளை எவ்வாறு அணுகுமென்பதை ஒரு பருமட்டான படம் வரைந்து காட்டுக.

வளைவியாலும் $x=0$, $x=3$, $y=2$ ஆகிய கோடுகளாலும் அடைக்கப்பட்ட பரப்பை சாயலிட்டுக் காட்டி அப்பரப்பைக்கணிக்க.

37. $y = xe^x$ எனும் வளைவியின் திருட்பல் புள்ளிகள் எல்லாவற்றின் நிலைகளையும் காண்க. இப்புள்ளிகளின் உதவியுடன், $[x]$ ஆனது உயர்வாயுள்ளபோது வளைவியானது எவ்வாறு மாறுகின்றது என்பதையும் விளக்குவதற்கு ஒரு பருமட்டமான வரைபுவரைக. இவ்வளைவியாலும் $y=0$, $x=-2$ ஆகிய கோடுகளாலும் அடைக்கப்படும் பரப்பை காண்க;

38. $y = \cosh x$, $y = \tanh x$ இன் வரைபுகளை தருக.

$x = \ln(2+\sqrt{3})$ ஆகையில் $\cosh x$ யைக் காண்க.

$z = \cosh x - \tanh x$ எனின் $x=0$ ஆகையில் z யையும்,

$\frac{dz}{dx}$ யைக் கணிக்க. $x = \ln(2+\sqrt{3})$ ஆகையில் $z > 1$ எனக் காட்டுக.

$0 < x < \ln(2+\sqrt{3})$ க்கு அடங்கிய ஓர் x இன் பெறுமானத்திற்கு 2இழிவைக் கொண்டது எனக் காட்டுக.

39. (i) x சிறிதாகின் $\ln \cosh x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$ என நிறுவுக.

x பெரிதாகவும், நேராகவும் எனில் $\ln \cosh x = x - \ln 2$ என நிறுவுக. $\ln \cosh x$ இன் பருமட்டான வரைபைத் தருக.

(ii) $(\cosh x + \lambda \sinh x)$ ஒரு இழிவைக்கொண்டிருக்க λ எனும் ஒருமை கொள்ள வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க.

$3 \cosh x + 2 \sinh x$ இன் இழிவைக் காண்க.

$y = (x-a)e^{x/a}$ எனும் வளையியை $a > 0$ எனில் பருமட்டாக வரைக. $P(h,k)$ இல் வளையியின் சாயவு $\tan \phi$ எனில் $a(h-a)\tan \phi = hk$ என நிறுவுக.

புள்ளி P வளையியின் வழங்குமையின் புள்ளி $Q(h,0)$ மாணக்கிய வட்டன் பங்குமாறு இயங்குகிறது. ஆகவே மாற்று வீதத்தை h - நேர கணத்தில் நேரம் சார்பாகக் காண்க. மாற்று வீதம் சீரியம் ஆகையில் h, k யை காண்க.

41. $y\sqrt{3} = x\sqrt{x+1}$ எனும் வளையியானது $x = -2/3$ ஆகவிருக்கும் போதே y ஆனது இழிவுப் பெறுமானம் $-2/3$ ஐ எடுக்கிறது. என நிறுவுக.

வளையி $3y^3 = x^2(x+1)$ என்பதை பருமட்டாக வரைக வளையியில் புள்ளி $P(2,2)$ இல் அமையும் தொடலியின் சமன்பாட்டைத் தருக.

இத்தொடலி வளையியை மீண்டும் Q இல் சந்திப்பின் Q இன் ஆகக் கூறுகளைக் காண்க. PQ ஆனது வளையியிக்கு Q இல் அமையும் செவ்வன் எனவும் காட்டுக.

42. $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ என்பது ஒரு உயர்வுப் பெறுமானத்தையும் ஒரு இழிவுப் பெறுமானத்தையும் உடையது எனக் காட்டுக. இவற்றிற்கான புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை $y = f(x)$ எனும் வளையியில் தந்து வேறுபடுத்துக. அதே அச்சுகளை உபயோகித்து $y = x + 1 + \frac{1}{x}$ இன் வளையியையும் $y = x + 1$ என்னும் நேர் வரையையும் வரைக.

43. $y = \frac{x}{x-2}$ எனும் சமன்பாட்டினால் வளையியொன்று தரப்படுகிறது.

(i) ஒவ்வொரு அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகளையும்,

(ii) உற்பத்தியில் அமையும் தொடரலியின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

வளையியானது அணுகுகோடுகளை எவ்வாறு அணுகுகிறது. உற்பத்திக்கண்மையில் வளையியின் வடிவம் என்பவற்றை விளக்கவதற்கு ஒரு பருமட்டான படமொன்று வரைக.

இன்றோர் படத்தில் $y = \left| \frac{x}{x-2} \right|$ இன் வரையை படமாக வரைக.

44. (i) $[x : a < x < b]$ $[y : |2x-3| = |x-2|]$ ஆக அமைய a, b யைக் காண்க.

(ii) $y = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-3)}$ யை பருமட்டாக வரைக.

45. $y = 1 + 2e^{-x}$ எனும் வளையியை வரைந்து $x \rightarrow +\infty$ ஆக, சார்பின் நடத்தையை ஆராய்க.

இவ்வளையியாலும் $x=0$, $x=1$, $y=1$ ஆகிய கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

மேற்குறிப்பிடப்பட்ட பரப்பானது, $y=1$ பற்றி முழுமையாக சுழற்றப்பட ஏற்பட்ட திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

க. ப. ர.

46. $r (r < 8)$ ஆரையுடைய ஒரு வட்ட அடரானது $(r + 8)$ பக்க முடைய ஒரு சதுர அடரிலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. r மாறுமாயின் $r = \frac{8}{\pi - 1}$ ஆகும்போது மிஞ்சும் அடரின் பரப்பு ஒரு உயர்வுப் பெறுமானமென காட்டுக.
47. ஒரு வட்டம் ஆரைக்கு சமனான நானொன்றினால் இரு பகுதிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. பெரிய, சிறிய பகுதிகளின் பரப்பு களிற்கு இடைப்பட்ட விகிதம் $\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{2\pi - 3\sqrt{3}}$ என நிறுவுக.
48. $y = \ln(x^n)$ (இங்கு n ஒரு முழு எண்) என்னும் வளையியை பருமட்டாக வரைக. n இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் வளையியில் $x = e$ என்னும் புள்ளியில் அமையும் தொடலி உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் எனவும் காட்டுக.
49. $ay^2 = 4x^2 (a - x)$, $a > 0$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் வளையியை உற்பத்திக்கண்மையில் ($0 \leq x \leq a$) பருமட்டாக வரைக. வளையியால் உண்டாக்கப்படும் வளையத்தினால் (loop) அடைக்கப்படும் பரப்பு R ஐக் கணிக்க. பரப்பு R இன் மையப்போலியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க. இப்பரப்பு R ஆனது x அச்சுபற்றி π கோணத்தினூடு சுற்றப்பட்டால் உண்டாகும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{3}{8}\pi a^3$ எனவும் காட்டுக.
50. நூராக இருக்கும் $y = 2x - x^2$ எனும் வளையியை பருமட்டாக வரைக, வளையின் பகுதியாலும் x அச்சாலும் அடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க. இப்பகுதி x அச்சுபற்றி சுழற்றப்படின், ஏற்படும் திண்மத்தின் கனவளவை காண்க.
- (ii) $y = x^2$, $x = 2$, $x = 3$, x அச்ச என்பவற்றால் அடக்கப்படும் பரப்பின் மையப்போலியை காண்க.
51. $y = \frac{x+2}{x+1}$ எனும் வளையிற்கு சகல புள்ளிகளிலும் உள்ள சாய்வு மறையானது என நிறுவுக. வளையியின் அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகளை கண்டு, வளையியை கீறுக. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq (x+2)/(x+1)$ எனும் சமனிலிகளால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியின் சுரப்பு மையத்தை x அச்சில் இருந்து காண்க.

52. $\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-2}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை எனக் காட்டுக.

$y = \frac{1}{x+1}$, $y = \frac{x}{x-2}$ என்னும் வளைவிகளை ஒரே படத்தில் பருமட்டாக வரைக.

$\frac{1}{x+1} < \frac{x}{x-2}$ ஆகும் x இன் பெறுமானங்களை காண்க.

$\left| \frac{1}{x+1} \right| = \left| \frac{x}{x-2} \right|$ என்பதிற்கு எத்தனை மெய்மூலங்கள் உண்டு?

53. $0 < \frac{2-x-x^2}{x^2} < 2$ ஆக இருக்கும் x இன் பெறுமானங்களை காண்க.

$y = \frac{2-x-x^2}{x^2}$ என்னும் வளைவியின் திரும்பற் புள்ளிகள் அணுகுகோடுகள் ஆகியவற்றைக் கண்டு, வளைவியை மட்டாக வரைக.

54. $y = \frac{x^3+1}{x}$ எனும் வளைவி x அச்சுடன் வெட்டும் புள்ளிகளை காண்க. $x = \pm 1$ ஆகையில் சார்வையும் காண்க. இவ்வளைவியின் உயர்வு இழிவை காண்க. இவ்வளைவியையும் $\frac{x}{x-1}$ எனும் வளைவியையும் பருமட்டாக வரைக.

55. $y = (1+x)e^{-2x}$ எனும் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் வளைவியானது ஒரு உயர்வுப் புள்ளியையும் ஒரு விபத்திப் புள்ளியையும் உடையதென காட்டி புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. வளைவியின் பருமட்டான வரைபொன்று வரைக.

($x \rightarrow +\infty$ ஆக $(1+x)e^{-2x}$ ஆனது 0 ஐ அணுகுகிறது.)

56. $y = \frac{(x-2)^2}{(x-6)(x+1)}$ எனும் வளைவியை பருமட்டாகவரை

ஆள்கூற்று அச்சுகளுடன் வெட்டும் புள்ளிகளையும் காண்க. வளைவியின் அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடுகளையும் தருக.

57. (i) n என்பது ஒரு நேர் முழுவெண்ணாயிருக்க, x குறித்து x^n இன் பெறுதியை (வகையீட்டுக் குணகத்தை) முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து பெறுக

$y = m \cdot x^n$ ஆகும் போது $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க. $y = n \cdot m \cdot x^{n-1}$

$e^y = x^n$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படும் y யின் சமாளிப்பு சார்புகளும் இதே பெறுதியையே தருமெனவுங் காட்டுக.

(ii) $f(x) = (x + 5)^2 (x^3 - 10)$ என்பதன் ஒரேயொரு இழிவுப் பெறுமானம் $f(1)$ எனவும் அதன் ஒரேயொரு உயர்வுப் பெறுமானம் $f(-5)$ எனவுங் காட்டுக.

$-3 \leq x \leq -1$ என்பதற்கு $y = f(x)$ என்பதன் பரும்படியான வரைபை வரைந்து $y = -162$ எனும் கோடு குறித்து $x = -2$ என்பதன் அயலில் $f(x)$ இன் நடத்தை எடுத்துக் காட்டுக.

(i) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ என்னும் வளையியியைப் பரும்படியாக வரைக.

(ii) ஒரு குறித்த அளவு சீரான மெல்லிய பொருளிலிருந்து திறந்த உருளைப் பாத்திரமொன்று அமைக்கவேண்டியிருக்கிறது. அதனுடைய உயரம் அதன் அடியின் ஆரைக்குச் சமனாகவிருக்குமாறு இந்தப் பாத்திரம் சாத்தியமான மிகக்கூடிய கனத்தைக் கொண்டிருப்பெனக் காட்டுக.

59. $y = f(x)$ என்னும் சார்பானது $x = a$ என்னும் புள்ளியிலே (i) ஓர் உயர்வையும் (ii) ஓர் இழிவையும் கொண்டிருப்பதற்குப் போதிய நிபந்தனைகளின் தொகுதியொன்றை $\frac{dy}{dx}$ இல் மாத்திரம் தருக. $x = 0$ என்னும் புள்ளியிலே (i) $y = x^3$ என்னும் சார்பானது திரும்பற் புள்ளியெதனையும் கொண்டிருக்கவில்லை எனவும் (ii) $y = x^4$ என்னும் சார்பானது திரும்பற் புள்ளியைக் கொண்டிருக்கிறது எனவும் காட்டுக.

$y = x^3$ என்னும் சார்பின் வரைபைப் பரும்படியாக வரைந்து அதைப் பயன்படுத்தி $y = x^4$ ஆகிய சார்பின் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

60. $y = (3x^2 - 3) / (6x - 10)$ என்னும் வளைமீதுள்ள உயர்வு இழிவுப் புள்ளிகள் $(k, k) : \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக. இவ்வளைமீயின் பரும்படி வரைபொன்றை அதே படத்தில் வரைக.

$xy = 1$ என்னும் செங்கோண அதிபரவளைவின் பரும்படி வரைபொன்றை அதே படத்தில் வரைக. இதிலிருந்து $3x^3 - 9x + 10 = 0$ என்னும் சமன்பாடு ஒரேயொரு மெய் மூலத்தை மாத்திரமே கொண்டிருக்கும் எனவும் இம்மூலமானது -1 இலுங் குறைவானது எனவும் காட்டுக.

56. $f(x) \equiv 3x^2 - 5x^3 + c$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இங்கு c என்பது யாதாயினுமொரு மாறிலியாகும். $y = f'(x) \equiv 15x^2(x^2 - 1)$ இன் பரும்படி வரைபொன்றை வரைக. இவ்வரைபிலே $f'(x)$ இன் உயர்வு இழிவுப்பெறுமானங்களைத் தெளிவாகக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $f(x)$ ஆனது ஒரேயொரு உயர்வையும், ஒரேயொரு இழிவையும் கொண்டிருக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

அதோடு (i) $|x| > 1$ ஆயின் மாத்திரம் $f(x)$ ஆனது x உட்கிரிக்கும் என்பதையும், (ii) $y = f(x)$ என்னும் வரைபின் நான்கு புள்ளிகளில் மாத்திரம் வரையப்பட்ட தொடரின் மூலத்தை $x + y = 0$ என்னும் நேர்கோட்டிற்குச் சமாள்தரம் இருக்கின்றன என்பதையும், இப்புள்ளிகள் எல்லாம் $|x| < 1$ என்னும் வீச்சிலே இருக்கின்றன என்பதையும் உய்த்தறிக. $(y = f(x))$ இன் வரைபை இவ்வரைபைவென்பதில்

6. (i) $3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7$ என்னும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படும் வளையிற்ரு $(1,1)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இவ்வளையியை $y = ax^2 + b$ எனும் வளையி $(1,1)$ என்னும் புள்ளியில் தொடுவதற்கமைய a, b என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

- (ii) பெறுமானம் காண்க.

$$(a) \int_0^{\pi/2} \frac{\text{கோசை } x}{(2 + \text{சைன் } x)^2} dx; \quad (b) \int_2^3 \text{மட } x dx$$

7. பெறுமானங் காண்க.

$$(i) \int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^2} dx; \quad (ii) \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \text{சைன் } x}{(x + \text{கோசை } x)^2} dx$$

$$(iii) \int_0^{\pi/2} \text{சைன் } x \text{ சைன் } 2x \text{ சைன் } 3x, dx$$

8. x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக.

$$(i) \text{கோசை } 2x \text{ சைன் } 4x \quad (ii) x/\sqrt{x+1}$$

$$(iii) (1+x+x^2) \text{ மட } x$$

9. பெறுமானம் காண்க.

$$(i) \int x^2 \text{சைன் } x dx \quad (ii) \int (x+4)/(x^2+2x) dx$$

$$(iii) \int_0^{\pi/3} \text{சைன்}^2 x \text{ கோசை } 2x dx$$

$$10. (i) \frac{4x}{(x+2)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \text{ ஆகுமாறு } A, B, C$$

என்ற ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலிருந்து $\frac{4x}{(x+2)(x^2+4)}$

என்பதை x ஐக் குறித்துத் தொகையிடுக.

(ii) பெறுமானம் காண்க.

$$(a) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|4 - (x - 1)^2|}}$$

$$(b) \int_0^{\pi/2} e^x (x + \text{சைன் } x) dx$$

11. பெறுமானம் காண்க.

$$(i) (a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + 6x - 3x^2}}$$

$$(b) \int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{4 - x} \quad (\sqrt{x} = t \text{ என இருக்க})$$

(ii) $\frac{dv}{dx} = x^2 e^{x+y}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

12. (i) $t = x - \frac{1}{2}(a + b)$ எனப் பிரதியீடு செய்து.

$$\int_a^b (b - x)(x - a) \left\{ x - \frac{1}{2}(a + b) \right\} dx$$

இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \text{சைன்}^2 x dx \text{ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

13. வளைகோடு பின்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகிறது.

$$4 - 3t; y = 9t(1 - t) \text{ இரண்டு } t \text{ ஒரு சாராமாற்.}$$

x சிச்சினாலும் வளைகோட்டினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

வளைகோட்டிற்கு ஒரு தொடலி $x - y = 3$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவுள்ளதென்றும் இரு தொடலிகள் (2, 6) என்ற புள்ளிக்கூடாகச் செல்கின்றனவென்றும் காட்டுக. இம் மூன்று தொடலிகளின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

0.25 இற்கும், 6 இற்கும் இடையிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு $y = 2$ மட e^x என்பதன் வரைபினை வரைக. $y = x^2 - 4x$ மட e^x என்பதை வகையீடுவதன் மூலமும் 2 மட e^x

இன் வரைபினைக் கருதுவதன் மூலமும், ($x > 0$) இன் பெறுமானங்களுக்கு y இன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

15. வளைகோட்டின் எல்லாப் புள்ளிகளிலுமுள்ள சாய்வு விகிதத்தின் மாறுவீதம் (x ஐக் குறித்து) $-\frac{1}{2}$ ஆகும். வளைகோடு (1, -3) இற் கூடாகச் செல்கிறது. இப்புள்ளியிலுள்ள சாய்வு விகிதம் -2 ஆகும்.

வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. வளை கோடு $y = x + 4$ என்ற கோட்டை A, B இல் வெட்டுகின்றது. A, B இலுள்ள செவ்வென்களின் வெட்டும் புள்ளியின் ஆள்கூற்றைக் காண்க.

16. θ இன் சாராமாறியில் ஒரு வளைகோடு $x = a \cos \theta$ (சீக $\theta +$ தான் θ) $y = a \sin \theta$ என்னும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகிறது.

$\frac{dy}{dx} =$ தான் θ எனக் காட்டி, $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2x}{dy^2}$ என்பவற்றின் பெறு

மானங்களை θ இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

N என்பது, புள்ளி P இன் நிலைத்தூரத்தின் (Ordinate) அடியாகும். L என்பது, P இலுள்ள தொடலிக்கு N இலிருந்து வரைந்த செங்குத்தின் அடியாகும். P அசையும்போது LN மாறிலியாகவும், PL, வளைகோட்டிற்கு P இலுள்ள சாய்வு விகிதத்துடன் விகித சமமாகவும் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

வளைகோட்டின் தெக்காட்டின் சமன்பாடு

$$y = \frac{a}{2} \left(\frac{x/a}{e} + \frac{x/a}{e} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

17. ஒரு வளைகோடு $x = \cos t$, $y = \sin t$ என்னும் சமன்பாடுகளால் வரையறுக்கப்படுகிறது. உயர்விலிருந்து வளை கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் உயர்வு இழிவுத் தூரங்கள் முறையே, $\sqrt{\frac{2}{3}}(3 + \sqrt{5})$; $\sqrt{\frac{2}{3}}(3 - \sqrt{5})$ என நிறுவுக.

முறையே P, Q என்பன உற்பத்தியிலிருந்துள்ள உயர்வு, தாழ்வுப் புள்ளிகளாக இருப்பின், P, Q இலுள்ள தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தென நிறுவுக.

18. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

(i) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} dx$

(ii) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x-1} dx$

$$(ii) \int_0^{\pi} \frac{2 - \text{கோசை } \theta}{2 + 2 \text{கோசை } \theta} d\theta \quad (iv) \int \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$(iv) \int \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$$

19. பின்வருவனவற்றின் பெறுமானம் காண்க.

$$(i) \int x^2 e^{-x} dx \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \text{தான் } \theta x dx$$

$$(iii) \int x^{3/2} (1-x)^3 dx \quad (iv) \int \frac{1+2 \text{கோசை } x}{(2+\text{கோசை } x)^2} dx$$

20. $I_n = \int \text{சீக}^n \theta d\theta$ எனின்,

$(n-1) I_n = \text{சீக}^{n-2} \theta$ தான் $\theta + (n-2) I_{n-2}$ என நிறுவுக.

$\int_0^a x^4 (a^2+x^2)^{3/2} dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

$$21. I_n = \int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{3a^2+x^2}} \text{ன்,}$$

$I_n = \frac{2x^n}{n} - \frac{3(n-1)}{n} a^2 I_{n-2}$ என நிறுவுக.

I_n இன் பெறுமானம் காண்க.

$$22. (i) a > 1 \int_1^a \frac{x^4 - 1}{x^3} dx = \frac{9}{8} \text{ ஆக இருப்பின், } a \text{ ஐக் காண்க.}$$

(ii) n என்பது நேர்முழுவெண்ணாயின், n இன் உறுப்புக்களில்

$\int_0^{\pi} \text{கோசை } nx dx$ இன் மூன்று சாத்தியப் பெறுமானம் $\pi/2$ களைக் காண்க.

(iii) $\int_0^{\pi/4} \frac{2 \text{கோசை } x - \text{சைன் } x}{2 \text{சைன் } x + \text{கோசை } x} dx$ இன் பெறுமானத்தை மூன்று

தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

23. (i) (a) பெறுமானம் காண்க. $\int_1^2 \frac{(x-1)}{x^3} dx$; விடையை

மூன்று தசம தானத்துக்குத் திருத்தமாகத் தருக.

(b) $\int_{\alpha}^{7\alpha} \text{சைன் } 2(x + \alpha) dx$; இங்கு $\alpha = \pi/24$

(ii) $\int_3 (x+1)^{3/2} dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

இதிலிருந்து $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$ இன்

பெறுமானத்தையும் காண்க.

24. $x^4 + x^2 + 1$ ஐ இரண்டுபடிச் சினைகளாக உணர்த்துக. இவ்விருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ.

$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ என நிறுவுக.

(ii) $\int_0^a t(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ,

$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\text{சைன் } x + \text{கோசை } x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1)$

(i) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \frac{1}{(1+x)^2}$ என்ற சமவிலிகளால் வரையறுக்கப்படும் பரப்பின் திணிவு மையத்தைக் காண்க.

(i) $x = et$ எனப் பிரதியீடு செய்து,

$$\int \frac{e^{2t}}{e^{2t} - 1} dt \text{ இன் பெறுமானங் காண்க.}$$

$$\int_0^{\pi/4} x \text{ சைன் } x dx \text{ இன் பெறுமானங் காண்க.}$$

26. (i) $\int_0^{\frac{1}{3}} x^2 e^{-3x} dx = \frac{2e - 5}{27e}$ என நிறுவுக.

(ii) பெறுமானம் காண்க.

$$\int \frac{7 \text{ கோசை}^3 x + 2 \text{ சைன்}^2 x}{9 \text{ கோசை}^2 x + 4 \text{ சைன்}^2 x} dx$$

27. (i) $\int \frac{dx}{x(5x^2 + 4x - 1)}$ இன் பெறுமானம் காண்க.

தொகையீட்டின் எல்லைகள் $\frac{1}{5}$ இற்கும் $\frac{1}{3}$ இற்கும் இடையிலுள்ள பெறுமானமும், எல்லைகள் $\frac{1}{3}$ இற்கும், 1 இற்கும் இடையிலுள்ளதன் பெறுமானமும் சமனெனக் காட்டுக.

$$(ii) (n - 1) \int_0^{\pi/4} \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2}(n-2) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{n-2} \theta d\theta$$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து,

$$\int_0^{\pi/4} \sin^5 \theta d\theta \text{ இன் பெறுமானம் காண்க.}$$

28. (i) $0 < \alpha < \pi/6$ ஆயின்,

$$\int_0^{\alpha} \frac{\text{சைன் } x}{\text{கோசை } 3x} dx = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\text{கோசை}^3 \alpha}{\text{கோசை}^3 \alpha} \right) \text{ என நிறுவுக.}$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \text{கோசை } mx \text{ கோசை}^n x dx$ எனின், $(m, n \geq 1)$
 $(m+n) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \text{சைன் } mx \text{ கோசை}^n x + \dots + 1$
எனக் காட்டுக.

m, n என்பது நேர்மூல வெண்களாயின், இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ.

$$\int_0^{\pi} \cos 2mx \cos 2n-1 x dx = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

29. (i) நிறுவுக: (a) $\int_1^e x^2 dx = 1/3 (2e^3 + 1)$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} (\pi + 2 \ln 2)$

(ii) $x = 1 - 2t$ தான் h^2u எனப் பிரதியீடு செய்து,

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1-x)}$$
 இன் பெறுமானம் காண்க.

30. $x = \pi - y$ எனப் பிரதியீடு செய்து,

$$\int_0^{\pi} x f(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\cos x) dx$$
 என நிறுவுக.

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$$
 இன் பெறுமானத்தை காண்க.

31. பெறுமானம் காண்க.

(i) (a) $\int \frac{1}{2x^2 - 5x + 1} dx$ (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

(ii) $\int \frac{e^x dx}{4\sqrt{1-e^{2x}}} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{e} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{1}{e^2} \right)$

காட்டுக.

32. (i) $\sin^{-1}(2x - 1)$ என்பதை வகையிடுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு வழியாக,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{(x-x^2)}} \text{ என்பதன் பெறுமானம் காண்க.}$$

- (ii) பெறுமானம் காண்க.

a) $\int_3^4 \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2} dx$

b) $\int_0^{\pi/2} 4x \cos 2x dx$

- 33 பெறுமானம் காண்க.

a) $\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{12 dx}{x^2 - 4x + 5}$

b) $\int_1^2 \frac{1+x}{2+2x+x^2} dx$

- i) $\tan^{-1}(kx)$ என்பதை k மாறிலியாயின் x குறித்து வகையிடு செய்க.

$$\int_1^4 \frac{1-2x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} dx = \tan^{-1} 2 - (\pi/4)$$

- (ii) பெறுமானம் காண்க.

$$\int_0^1 (3-2x)e^{-2x} dx$$

- 3 i) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \sin^{-1} x dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

(ii) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ இன் காண்க.

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+3\cos x}$

36. (a) பெறுமானம் காண்க. $\int_0^{\frac{1}{2}} (2 - e^{-2x}) dx$

(b) திரிகோணகணித பிரதியீட்டினால் அல்லது வேறுவழியால்

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi \text{ என நிறுவுக.}$$

37. (a) (i) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$ என்பவற்றைக் காண்க.

(b) $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sin x, \cos x} dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

38. (a) பகுதிப் பின்னங்களின் உதவியால் அல்லது வேறுவழியால்

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x - 3} dx \text{ ஐக் காண்க.}$$

(b) $z = 1 - x$ எனப்பிரதியிடுவதன் மூலமோ அல்லது வேறு

வழியாகவோ $\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ இன் பெறுமானம் காண்க.

39. பெறுமானம் காண்க.

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(b) $\int_0^2 \frac{x^2 - 4x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$

40. (i) பெறுமானம் காண்க.

(a) $\int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \cos 3x} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1} dx$

41. (i) பெறுமானம் காண்க.

$$\int_3^4 \frac{x^3 + 4x + 4}{(x-2)^2 (x^2+1)} dx$$

(ii) $x = \sin u$ எனும் பிரதியீட்டை உபயோகித்து அல்லது வேறு வழியால்,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

42. (i) $x = \sin \theta$ அல்லது $x = \cos \theta$ அல்லது இரண்டு பிரதியீடுகளையும் உபயோகித்து

$$\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} dx \text{ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

(ii) $n \geq 0$ இற்கு $I_n = \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} dx$ எனத் தரப்படுமாயின்,

$n \geq 1$ இற்கு $2(n+1)I_n = (2n+1)I_{n-1}$ எனக் காண்க.

43. (a) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin 3\theta \sin \theta d\theta$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(i) $\int \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta$ ஐக் காண்க.

(ii) $\int \frac{x}{\sqrt{3+x}} dx$ ஐக் காண்க.

(a) $z = 2x - 1$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துவதன் மூலமோ அல்லது வேறு வழியிலோ,

$$\int \frac{x+1}{(2x-1)^2} dx \text{ ஐக் காண்க.}$$

b) $\frac{d}{d\theta}(\tan^3\theta)$ ஆனது $3 \tan^2\theta + 3 \sec^2\theta - 3$ என உணர்த்தப் படலாமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு

$\frac{\pi}{4}$
வழியாலோ $\int_0^{\pi/4} \tan^4 \theta d\theta$ ஐக் காண்க.

45. a) $\frac{x+2}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{(x-1)}$ எனின், a, b, c ஆகியவற்றின் எண் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து $\int \frac{x+2}{x^2(x-1)} dx$ ஐக் காண்க.

b) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 kx \cdot dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
(விடையை π இல் தருக.)

46. $\frac{4(x+5)}{(x+1)(x^2+3)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாகத் தருக.

$$\int_0^3 \frac{4(x+5)}{(x+1)(x^2+3)} dx = 3(1 + \ln 2) - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

நிறுவுக.

47. $\frac{56(2x+3)}{(x+5)^2(x^2+3)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாகத் தருக.

இதிலிருந்து $\int_0^1 \frac{56(2x+3)}{(x+5)^2(x^2+3)} dx$ இன் பெறுமானத்தைத்

காண்க.

(i) (a) $\int_0^{\sqrt{5}} x \sqrt{x^2+4} dx$ ஐக் காண்க.

(b) $\int_2^3 x^2 e^{-x} dx$ யை e யின் சார்பில் காண்க.

(ii) பெறுமானங் காண்க.

$$\int_0^1 \frac{8 dx}{3+4x} \quad \int_0^1 \frac{8 dx}{\sqrt{3+4x}} \quad \int_0^1 \frac{8x dx}{3+4x}$$

49. (i) கணிக்க. $\int_4^5 \frac{2x dx}{x^2-4x+3}$

(ii) $x = \sec^2 y$ என பிரதி இடுவதால் அல்லது வேறுவிதமாக

$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}$ ஐக் கணிக்க.

50. $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ ஆகியவற்றை பகுதிப்பின்னங்களாகத் தரு

$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ யைக் கணிக்க.

1. (i) $t = \tan \frac{x}{2}$ என பிரதியிடுவதால் அல்லது வேறுவிதமாக

$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{cosec} x dx$ யை கணிக்க.

(ii) $x = \sin \theta$ என பிரதியிடுவதால் அல்லது வேறுவிதமாக

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \text{ யை காண்க.}$$

52 (i) பெறுமானம் காண்க. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+\cos \theta}$

(ii) $\int_1^3 \frac{3(x+1)}{x^2(x^2+3)} dx = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

எனக் காட்டுக.

(iii) $\int_e^{e^2} \ln \sqrt{x} dx$

(iv) $\int_{-1}^1 x e^{-2x} dx$

(v) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

53. $y = \frac{4-3x}{(2x-1)(x^2+1)}$ யை பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதிக்

$\int_1^2 y dx$ யை காண்க.

54. x இன் சகல பெறுமானங்களிற்கும் $f(-x) = -f(x)$ என

$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ என நிறுவுக.

பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க.

a) $\int_{-1}^1 x (e^x + e^{-x}) dx$ (b) $\int_{-1}^1 (1+x)^2 \tan^{-1} x dx$

(c) $\int_1^3 \frac{(x-2)^3}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

55. (a) $\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{32}{27}$ எனக் காட்டுக.

(b) $x-2 = y^2$ எனப் பிரதியிடுவதால்

$\int_3^6 \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-2)^{3/2}} dx$ யைக் கணிக்க.

56. (i) (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$ (b) $\int \sin h^2 3x dx$

ஆகியவற்றைத் தொகையிடுக.

(ii) $\int_1^e \frac{1+x^2}{x(1+x)} dx$ பெறுமானத்தை கணிக்க.

57. $\frac{2x^2 + 10x - 40}{(x-3)^2(x+1)}$ யை பகுதி பின்னங்களாக உணர்த்துக.

$\int_4^5 \frac{2x^2 + 10x - 40}{(x-3)^2(x+1)} dx = 1 + \ln \left(\frac{500}{27} \right)$ எனக் காட்டுக.

(i) கணிக்க

(a) $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$ (b) $\int_3^{11} \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx$

(ii) $t = \tan x$ என்பதை பிரதியிடுவதால் அல்லது வேறுவிதமாக

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4 + 5 \cos^2 x} \text{ என்பதை கணிக்க.}$$

(iii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1} x \, dx}{(1-x^2)}$

(iv) $\int_1^2 x^2 e^{2x} \, dx$

59. (i) $I_n = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$ ஆயின் $n > 1$ ஆகும்போது

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = x^{n-1} \sqrt{1+x^2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(ii) $t = u^2$ என பிரதியிடுவதன் மூலம்

$$\int_0^x \ln(t + \sqrt{t}) \, dt \text{ ஐக் காண்க.}$$

60. (i) $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, இங்கு $n > 0$ I_n யை I_{n-1} இல் உணர்த்த

துக். 15 யை e^x ல் காண்க.

(ii) $x = \frac{1}{y}$ என பிரதியிடுவதால் அல்லது வேறுமுறையால்

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

பெறுமானம் காண்க.

(a) $\int_0^1 \frac{e^x \, dx}{1+e^x}$

(b) $\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$

61. $f(x) \equiv \frac{(x-2)(x+5)}{(x-3)(x+1)}, x \neq -1, x \neq +3$

- a) x இன் எப்பெறுமான வீச்சுக்கு $f(x) < 0$
- b) $f(x)$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக்குக.
- c) $f'(x) < 0$ என நிறுவுக.
- d) $y=f(x)$ எனும் வளையியை பருமட்டாக வரைக.
- e) பெறுமானம் காண்க.

$$\int_4^5 f(x) dx$$

62. $\sin x$ பூச்சியமல்லாவாயின்
 $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x = \frac{1}{2} \sin 2nx \operatorname{cosec} x$
 என நிறுவுக.

பெறுமானம் காண்க;

(a) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 8x \operatorname{cosec} x dx$

(b) $\int_0^{\pi/4} \sin 8x \operatorname{sec} x dx$

63. (i) வளையி $y = ax^2 + bx + c$ என்பது $(h, y_1), (0, y_0), (-h, y_1)$ மூலக்கூறுகளாகக் கொள்ளப்படுமாயின்

$\int_{-h}^h y dx = \frac{2}{3} h (y_1 + 4y_0 + y_1)$ எனக் காட்டுக.

(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ என்பதின் பெறுமானத்தை துணைவதற்கு சிம்
 சனின் விதியை உபயோகித்து 18 ஆயிடை கொண்ட
 அட்டவணை ஒன்றை அமைக்க.

(i) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ யை e இல் காண்க

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \, dx$ யை சிம்சனின் நெறியால் 5 நிலைத்தூரத்தை $\pi/6$ உபயோகித்து இரண்டு தசம தானத்திற்கு காண்க.

(iii) $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$

(iv) $\int 2 \sin x \sin 2x \, dx$

(v) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+2x} \, dx$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x \, dx$

65. $f(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{x}{1+x^2}$ என தரப்படுமாயின் நேரடி

0.1

தொகையிடுவதால் $\int_0^3 f(x) \, dx$ இன் பெறுமானத்தை 3 தசம தானங்கட்கு திருத்தமாக காண்க

$f(x)$ இன் விரிவில் (x இன் அடுக்குகளின் ஏறுவரிசையில்) முதல் நான்கு உறுப்புகளும் முறையே $2, px, qx^2, rx^3$ ஆயின் p, q, r ஐ காண்க. இவ்வறுப்புகளை கொண்டு மேலுள்ள தொகையீட்டின் அண்ணளவான பெறுமானத்தை 3 தசம தானங்கட்கு காண்க.

66. \sin இன் வகை வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+3 \cos x}$ ($t = \tan \frac{x}{2}$ எனப் பிரதியிடுக)

(b) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ($x = \frac{1}{t}$ எனப் பிரதியிடுக)

(c) $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$

(ii) x இன் ஒரு சார்பான y என்பது, x இற்கு எதிராக y யைக் குறிக்கும்போது, வரைபிலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி (x, y) இலுமுள்ள படிதிறனைது கோசை y கோசீ x இற்கு நேர்விதித சமமாயிருக்குமாறு உள்ளது.

$x = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்போது $y = 0$ உம் $\frac{dy}{dx} = 1$ உம் ஆயின்,

x இற்கும் y இற்கும் இடையிலான தொடர்பைக் காண்க.

67. (i) பெறுமானங் கணிக்க.

(a) $\int \frac{dx}{9x^2 - 4}$ (b) $\int_0^{+1} x e^{-2x} dx$

(ii) $x = \text{சைன்}^2 \theta$ என்னும் பிரதியீட்டைப் $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$

பயன்படுத்தி பெறுமானம் காண்க.

(iii) $x = 3$ ஆக இருக்கும்போது $y = 2$ எனத் தரப்பட்டால்,

$2y(x+1) \frac{dy}{dx} = y^3 + 4$ என்னும் சமன் பாட்டைத் தீர்க்க.

68. (i) $I = \int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{x+2}}$ ஆயின், $\sqrt{x+2} = u$ என்னும்

பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $I = \int \frac{du}{u^2 + \frac{1}{2}}$ எனக் காட்

க. மேலும், $2x+5 = \frac{1}{v}$ என்னும் பிரதியீட்

டையைப் பயன்படுத்தி $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{2} - (v - \frac{1}{2})^2}}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, I யை (i) a தான்⁻¹ $f + b$ (ii) p சைன்⁻¹ $g + q$ ஆகிய வடிவங்களில் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b, p, q என்பன மாறிலியாகும். f, g என்பன x இன் சார்புகளும் ஆகும்.

தான் $\frac{x}{2} = t$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி, அஸ்

வது வேறுவிதமாக $\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x + 4 \sin x}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

69. (i) பெறுமானம் கணிக்க.

(அ) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x^2+4)}$ (ஆ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\csc t - \cot t) dt$

(இ) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{2 + \csc \theta}$

(ii) வளையியொன்றின் மீதுள்ள (x, y) என்னும் புள்ளியிலே அவ் வளையியின் படித்திறன் $1/(y\sqrt{1-x^2})$ கோசை y ஆகும். இவ் வளையியானது உற்பத்தியினூடாகச் செல்லுமாயின் அது $\left[\csc \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \frac{\pi}{2} \right]$ என்னும் புள்ளியினூடாகவும் செல்லுமென நிறுவுக.

70. (i) S என்னும் தளவளையியொன்றின் மீதுள்ள புள்ளி (x, y) இலே இவ்வளையிக்காகிய தொடலியின் படித்திறன் $(1+4y^2)x (\log x)^2$ ஆகும். S ஆனது $(1, \frac{1}{2})$ இனூடு செல் கின்றதெனில் S ஆனது (e, y_0) இனூடு செல்லும் எனக் காட்டுக. இங்கு $y_0 = \frac{1}{2} \tan \left\{ \left(e^2 + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right\}$ ஆகும்

(ii) வளையியொன்றினது பெறாய்ப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ ஆகியவற்றினாலே தரப்பட்டிருக்கிறது. இங்கு θ என்பது ஒரு பரமானம் $0 < \theta < \pi/2$; a என்பது ஒரு நேர் மாறிலி. வளையிமீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலே வரையப் பட்ட தொடலிக்கும், செவ்வனுக்கும் உற்பத்தித் தளத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளங்கள் முறையே p, q ஆயின், $4p^2 + q^2 = a^2$ என நிறுவுக.

71. (i) $\tan x/2 = t$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + \sin x + 1} = -2 \int_0^1 \frac{dt}{(t-3)(t+1)}$ என

காட்டுக. இதிலிருந்து தொகைமீட்டின் பெறுமானத்தை கணிக்க.

(ii) $x+1 = \frac{1}{t}$ என்னும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-2(t-1)^2}} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

காட்டுக.

அலகு 4

பரப்பும் கனவளவும்

1. (a) $(1,1)$ என்னும் புள்ளியில் $x^3 + y^3 = 2xy$ என்ற வளைவியின் தொடரையைக் காண்க.

வளைவியிற்கு இப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடலி வளைவியைத் திரும்பவும் உற்பத்தியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக

(b) முதலாம் காற்பகுதியில், $x^2 + y^2 = 2$ என்ற வட்டத்தாலும் $y^2 = x$ என்ற பரவளைவாலும், x - அச்சாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

2. செவ்வக அச்சை குறித்து, ஓர் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் x, y என்பதற்குத் தொடர்புகள் $x^2 + y^2 = 1$ ஆகும்போது $y = x^2 + x$ என்பதற்கும் $x \geq 1$ ஆகும்போது $y = 2\sqrt{x}$ என்பதற்கும் ஆணைகளைக் கொடுக்கிறன. $x=0, y=4$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள வளைவியின் வில்லாலும், $y=4$ என்ற கோட்டாலும் y - அச்சாலும் அடைக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

3. $3x - 4y + 4 = 0$ என்னும் நேர்கோடு $x^2 = 4y$ என்னும் வளைவியை A, B என்னும் புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. A, B என்ற நாணாலும் A, B இற்கு இடைப்பட்ட வளைவியின் வில்லாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

A, B இலுள்ள வளைவியின் தொடலிகள் செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

இத் தொடலிகளாலும், A, B இற்கு இடையிலுள்ள வளைவியினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

4. $2x+3y-7=0$ என்னும் கோடு $xy=1$ என்னும் வளைவியை A, B இல் சந்திக்கிறது.

(i) A, B என்னும் நாணிலும், A, B இற்கு இடைப்பட்ட வளைவியின் வில்லாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பையும்.

(ii) வளைவியிற்கு A, B இலுள்ள தொடலிகளாலும், A, B இற்கு இடைப்பட்ட வளைவியின் வில்லாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பையும் காண்க.

5. ஒரு வளைவி $y=f(x)$ என்னும் சமன்பாட்டாலே தரப்படும். இதில் $f(x)=12+x-x^2$, $x \leq 0$ ஆகும்போது

$$=12-4x-x^2, x \geq 0 \text{ ஆகும்போது}$$

இது x-அச்சை A, B என்பவற்றில் வெட்டினால் A, B என்ற நாணுக்கும், வளைவியில் A, B என்பவற்றிற்கு இடைப்பட்ட முடிவான வில்லுக்கும் இடையே உள்ள பரப்பைக் காண்க. இப்பரப்பை $3y=x+20$ என்ற கோடு பிரிக்கும் விகிதத்தையும் காண்க.

6. ஒரு வரைபு $y=x^4-5x^2+4$ என்னும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது. $x=-2$, $x=2$ என்பவற்றிற்கு இடையிலுள்ள வரைபாலும், x-அச்சாலும் உண்டாக்கப்படும் பரப்பு 8 ச. அலகு எனக் காட்டுக.

இதற்கென $x=-1$ என்பவற்றிற்கும் இடைப்பட்ட வரைபாலும் உண்டாக்கப்படும் பரப்பை y அச்சப் பற்றி சுற்றினால், உண்டாகும் சுழற்சித் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

7. (i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள் வளையத்தின் பரப்பு πb என நிறுவுக.

(ii) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ எனும் நீள்வளையங்களின் பொதுவான பரப்பைக் காண்க.

8. S என்னும் வளைவியை $y=4-4x+3x^2-x^3$ என்னும் சமன்பாடு குறிக்கின்றது.

S இற்கு (1,2) இலுள்ள தொடலியும் $y^2=4x$ என்னும் வரைவளையின் தொடலியும் செங்குத்த்தெனவும்.

(ii) Sஇற்கு (2,0) என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் செவ்வன் (6,1) இற்கூடாகச் செல்லும் எனவும் காட்டுக. S இல் x அதிகரிக்க, y குறைகிறது எனவும் காட்டுக. $0 \leq x \leq 2$ இல் x-அச்சாலும், S இன் வில்லாலும் $y^2 = 4x$ என்னும் பரவளைவின் வில்லாலும் முதற் காற்பகுதியில் அடைக்கப்படும் பரப்பு $31/12$ எனவும் நிறுவுக.

9. $y^2 = 16x$, $3y = 4(4-x^2)$ என்னும் பரவளைவுகள் (1,4) என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் எனக் காட்டுக. முதற் காற்பகுதியில் வேறொரு புள்ளியிலும் வெட்டாதெனப் பருமட்டான வரைபு கீறிக் காட்டுக. முதற் காற்பகுதியில் இரு பரவளைவு விற்களாலும், x-அச்சாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பு $44/9$ எனக் காட்டுக. $x=3$ என்னும் கோட்டால் இப் பரப்பு $(-c^3 + 12c - 5) : (c^3 - 12c + 16)$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும் எனவும் காட்டுக. இங்கு $1 \leq c \leq 2$ ஆகும்.

10. $xy=4$ என்னும் வளையியிற்கு $P \equiv (1, 4)$ இலுள்ள தொடலி x-அச்சை T இற் சந்திக்கிறது இவ்வளையியிற்கு புள்ளி $Q \equiv (4, 1)$ இலுள்ள செவ்வன் x-அச்சை N இல் சந்திக்கிறது. T, N என்பவற்றின் x ஆள்கூறுகளைக் காண்க. PT, TN, NQ என்னும் நேர்கோடுகளாலும், வளையியின் P, Q என்னும் வில்லாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பு $(8\sqrt{e} - 2) - 17/8$ சது. அலகு எனநிறுவுக.

11. அச்சக்கள் Ox, Oy குறித்து வளையி $y = -x^2 + 2x + 8$ இனது பரும்படி வரைபினை காண்க. A(0,8), P(2,8) B(4,0) என்னும் புள்ளிகள் அதிலுள்ள புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

அந்த அச்சக்கள் குறித்து $y^2 = 32x$ இனது பரும்படி வரைபினை வரைக. முதற் காற்பகுதியில் அவ்விரு வளையிகளும் புள்ளி P இல் மாத்திரமே இடை வெட்டுகின்றன எனக் காட்டுக.

முதற் காற்பகுதியினை,

(i) அவ்விரு வளையிகளின் விற்கள் PB, OP என்பவற்றாலும் x-அச்சாலும்,

(ii) அவ்விரு வளையிகளின் விற்கள் AP, OP என்பவற்றாலும் y-அச்சாலும் அடக்கப்பட்ட பரப்பளவுகள் இரண்டையும் காண்க.

12. $xy=4$ என்னுஞ் செங்கோண அதிபரவளையில் புள்ளி P(4,1) இலுள்ள செவ்வன் x-அச்சை A இலே சந்திக்கின்றன எனக் காண்க. A இனது ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அச்செங்கோண அதிபரவளைவானது $y^2=16x$ என்னும் பரவளைவை Q என்னும் புள்ளியிற் சந்திக்கின்றது. Q இனது ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

O என்பது உற்பத்தியாயின், அப்பரவளைவினது வில் OQ ஆலும் அச்செங்கோண அதிபரவளைவினது வில் OP ஆலும் கோட்டுத் துண்டம் PA ஆலும் x அச்சாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவு $\frac{61}{24} + 8$ மட 2 சதுர அலகாகும் என நிறுவுக

13. $y^2 = \frac{x^2}{4 - x^2}$ என்னும் வளைகோட்டாலும், x அச்சினாலும் x = 1 என்னும் கோட்டினாலும் உள்ளடக்கப்படும் முதற் காற்பகுதியிலுள்ள பரப்பின் திணிவு மையத்தின் x ஆள்கூற்றைக் காண்க. இப்பரப்பு முழுவதையும் y- அச்சப்பற்றிச் சுழற்றினால் உண்டாகும் சுழற்சித் திணிமத்தின் கனவளவைக் காண்க.

14. $2x - 3y + 4 = 0$ என்னும் கோடும் $y^2 = 4x$ என்னும் வளைகோடும் P, Q இல் வெட்டுகின்றன. கோட்டினாலும் வில் PQ இனாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பைக் காண்க.

இப்பரப்பு முழுவதையும் x- அச்சப்பற்றிச் சுழற்றினால், உண்டாகும் திணிமத்தின் கனவளவைக் காண்க.

14. $y = \frac{x}{1+x}$ இன் வளைபடத்தைப் பருமட்டாக வளைத்து x- அச்ச, x = 2 என்னும் கோடு x = 0 க்கும் x = 2 இற்கும் இடையிலுள்ள வளைகோட்டின் பகுதி இவற்றினால் உண்டாகும் பகுதியின் பரப்பைக் காண்க. இப்பரப்பு x- அச்சைப் பற்றிப் பூரணமாகச் சுழற்றப்பட்டால் உண்டாகும் திணிமத்தின் கனவளவைக் காண்க.

15. ஒரு வட்டப்புள்ளியுரு (cycloid) வின் சாராமாறிச் சமன்பாடு $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ என்பவற்றால் தரப்படுகிறது. x = 0 இற்கும் x = 2πa இற்கும் இடையிலுள்ள வளைகோட்டின் பகுதியாகும் x- அச்சினாலும் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பின் திணிவுமையத்தைக் காண்க.

என்னும் கோட்டைப்பற்றி இப்பரப்பைப் பூரணமாகச் சுழற்றினால் உண்டாகும் திணிமத்தின் கனவளவைக் காண்க.

16. உவைன் (wine) கண்ணாடிப் பாத்திரமொன்று $y = m \cdot x$ என்னும்

வளைகோட்டை $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ என்னும் எல்லைகளுக்கிடையில் y -
அச்சுப்பற்றி 2π ஆரையினூடு சுழற்றுவதன்மூலம் ஆக்கப்படு
கிறது. பாத்திரத்தின் அடி $\frac{1}{e}$ ஆரையுடைய வட்டக் கண்ணாடித்
தட்டு ஆகும். பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

- (i) இது உள்ளடக்கும் உவைனின் கனவளவு
- (ii) அடித்தட்டிலிருந்து உவைன் நிரம்பிய பாத்திரத்தின் திணிவு
மையத்தின் உயரம்.
- (iii) பாத்திரம் அரைவாசி நிரம்பியிருக்கும்போது, அடியிலிருந்து
அதன் மேற்பரப்பின் உயரம்.

17. ஒருபாத்திரத்தின் மேற்பரப்பு $ay = x^2$ என்னும் பரவளைவை
அதன் அச்சுப்பற்றிச் சுழற்றுவதால் உண்டாகப்படுகின்றது.
பாத்திரம் நீரைக் கொண்டுள்ளது. அதனுள் ஒரு திண்ம உருளை
கீழிறங்கு மட்டும் அமிழ்த்தப்படுகிறது. இரண்டினதும் அச்சுக்
கள் பொருந்துகின்றன, உருளையின் அடிக்குமேல் அரைப்பங்கு
நீருள்ளது. உருளை h ஆழத்திற்கு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. நீரின்
திணிவு மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

18. $4ay^2 = x^3$ என்னும் வளைகோட்டில் உற்பத்தி O இலிருந்து புள்ளி

$(a, a/2)$ வரையுமுள்ள வளைவின் நீளம் $\frac{61}{54}$ எனக் கொண்டு

வளைகோட்டிற்கு P இலுள்ள தொடலி வளைகோட்டை மீண்டும்

Q இல் சந்திக்கின்றது. Q என்பது $(\frac{1}{4}a, \frac{1}{16}a)$ என்னும்

புள்ளி என நிறுவ்க. நாண்கள் OP, OQ என்பவற்றிற்கு வளை

கோட்டிற்குமிடையேயுள்ள பரப்புகள் முறையே $\frac{1}{20}a^2$; $\frac{1}{640}a^2$

என நிறுவ்க.

நாண் PQ இனாலும் வளைகோட்டிலுள்ள உள்ளடக்கும் பரப்பை
உய்த்தறிச.

19. ஒரு பாத்திரம் ஒரு செவ்வட்டச் கூம்பின் அடித்துண்டின் அ
பாசமாக உள்ளது. இது கூம்பினடித்துண்டின் அடி $\frac{1}{2}$ டாகச்
செல்லும் தளத்தினால் வெட்டுதவன் மூலம் ஆக்கப்பட்டது.

அரைவட்ட முனைகளின் ஆரைகள் $\frac{1}{2}m$, $1m$ ஆகும். இரண்டும் $4\frac{1}{2}m$ இடைதூரத்தில் உள்ளன. பாத்திரம் வெட்டப்பட்ட தளம் மேல்முகமாகவும் கிடையாகவும் இருக்கும் வண்ணம் நிறுத்தப்பட்டு, சிறிய அரைவட்ட முனையின் கீழ்ப்புள்ளியைத் தொடுமளவும் நீரால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. நீரின் கனவளவைக் காண்க.

$$\left[\int \frac{1}{2} \sin \theta \, d\theta = m \Delta (\frac{1}{2} \cos \theta + \text{தான் } \theta) \text{ எனவும்,} \right.$$

$$\int \frac{1}{2} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} m \Delta (\frac{1}{2} \cos \theta + \text{தான் } \theta)$$

எனக் கொள்க.]

20. r ஆரையுடைய கோளத்தில் மையத்திலிருந்து $r - h$ என்னும் தூரத்தில் ஒரு தளத்தினால் வெட்டப்பட்ட கோளப் பகுதியின் (Cap) கனவளவு $\pi h^2(r - \frac{1}{2}h)$ என நிறுவுக. ஓர் அரைக்கோளப் பாத்திரத்துள் 11 cm^3 / செக். என்னும் வீதத்தில் நீர் ஊற்றப்படுகின்றது. பாத்திரத்தின் உள் ஆரை 8 cm ஆயின். பாத்திரத்திலுள்ள நீரின் ஆழம் அதிகரிக்கின்ற வீதத்தை இவ்வாழம் 5 cm ஆக இருக்கும்போது காண்க.
21. x உயரமுள்ள ஒரு வட்டவருளை h உயரமும் a ஆரையுமுடைய ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பினால் இரண்டு அண்டுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. உருளையின் கனவளவு $\frac{1}{3} \pi a^2 x (h-x)^2 / h^2$ எனவும் முழு மேற்பரப்பும் $2 \pi a (h-x) \{ ah + (h-a)x \} / h^2$ எனவும் நிறுவுக.
22. x, y அச்சுக்கள், $y=2a$ என்னும் கோடு $y^2=4a(x-a)$ என்னும் பரவளைவில் புள்ளிகள் $(a, 0)$, $(2a, 2a)$ என்பவற்றிற்கிடையிலுள்ள பகுதி என்பவற்றால் உள்ளடக்கப்படும் பரப்பு நாற்கு செங்கோணங்களினூடே x அச்சுபற்றி சுழற்றப்படுகின்றது. சுழற்சித் திண்மத்தின் திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளை காண்க.

திண்ப, தளக் கேத்திரகணிதம்

அலகு 1

திண்மக் கேத்திரகணிதம்

1. $PQ \parallel BC$ ஆகவும் $QR \parallel AD$ ஆகவும் இருக்கும்வண்ணம் P, Q, R என்பன $ABCD$ என்னும் நான்முகியில் முறையே AB, AC, CD என்ற விளிம்புகளிலுள்ள புள்ளிகளாலும் BD தளம் PQR ஐ S இற் சந்திப்பின், $PQRS$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

AD, PR, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் உள்ளன என்றும் நிறுவுக.

2. $ABCD$ என்னும் நான்முகியின் விளிம்புகள் AB, CD, BC, AD, CA, BD என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P, Q, R, S, T, U என்பன ஆகும். PQ, RS, TU என்பன ஒன்றையொன்று இரு சமகூறிடும் என நிறுவுக.

நான்முகியின் பக்கங்கள் எல்லாம் சமமாயின் PQ, BC என்பவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் 45° என நிறுவுக.

3. $ABCD$ என்னும் நான்முகியின் விளிம்புகள் AB, AC, AD, CD, DA, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே U, V, W, X, Y, Z என்பனவாகும். UX, VY, WZ என்பன ஒன்றையொன்று O இல் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

$\triangle BCD$ மையப்போலி G ஆயின், O என்பது PQ இல் இருக்குமெனவும், $AO = 3 OG$ எனவும் நிறுவுக.

4. $ABCD$ என்னும் நான்முகியின் விளிம்புகள் AB, CD என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆகும். O என்பது PQ இன் நடுப்புள்ளியாகும். AO தளம் BCD ஐ G இல் சந்திப்பின், G என்பது $\triangle BCD$ இனது மையப்போலி எனவும் $AO = 3 OG$ எனவும் நிறுவுக.

$OA = OB = OC = OD$ எனின், நான்முகியின் யாதுமிறு எதிர் விளிம்புகளின் நீளங்கள் சமனென நிறுவுக.

5. இரு சமச்சீரில்லாத கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தை விளக்குக.
 $ABCD$ என்னும் நான்முகியின் எல்லா விளிம்புகளும் நீளத்தின் சமம். நான்முகியின் எதிர் விளிம்புகள் செங்குத்தென நிறுவுக. E என்பது BC இன் நடுப்புள்ளியாயின், AE, BD என்பவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணம் $45^\circ (2\sqrt{3})$ என நிறுவுக.
6. இரு தளங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தை விளக்குக.
 $ABCD$ என்ற நான்முகியில் $AB=AC=AD, BD=CD$ ஆகவும் $\angle BDC=90^\circ$ ஆகவும் இருப்பின், ABC, DBC என்னும் தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தென நிறுவுக.
 அத்துடன் $AD=BC$ ஆயின், ABD, ACD என்ற தளங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.
7. a பக்கமுடைய $ABCD$ என்னும் சதுரத்தின்மீது h உயரமுடைய $OABCD$ என்னும் கூம்பகம் நிற்கின்றது. பின்வருவனவற்றைக் கணிக்குக.
 (i) OA இற்கும் BC இற்கும் இடையிலுள்ள கோணம்.
 (ii) OA இற்கும் தளம் $ABCD$ இற்கும் இடையிலுள்ள கோணம்
 (iii) தளங்கள் $OAB, ABCD$ என்பவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணம்.
 (iv) OAB, OAD என்னும் தளங்களுக்கிடையிலுள்ள கோணம்.
8. இரு சமச்சீரில்லாத கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தை விளக்குக. $ABCD$ என்ற நான்முகியில் AB, CD என்பவற்றின் தொகுப்பின் முறையே P, Q ஆகும்.
 $4PQ^2=AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2$ என நிறுவுக.
 $AB=AC$ ஆயின். இதிலிருந்து $BD=CD$ எனவும், AD, BC இற்குச் செங்குத்து எனவும் நிறுவுக.
9. $ABCD$ என்பது ஒரு நான்முகி, G என்பது $\triangle BCD$ இன் மையப் போலியாகும். X, Y என்பவை முறையே BC, AD என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும்.
 பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
 (i) AG என்பது XY என்பதை O என்னும் ஒரு புள்ளியில் இரு கூறிடுகின்றது.
 (ii) $AO=3 OG$.
 (iii) $16AO^2=3 (AB^2 + AC^2 + AD^2) - (BC^2 + CD^2 + DB^2)$

10 ABCD என்பது ஓர் ஒழுங்கான நான்முகி; G என்பது முக்கோணி ABC இனது மையப்போலி. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) AB என்பது GD என்பதற்குச் செங்குத்தாகும்.

(ii) தளங்கள் BGA, BCD என்பவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் கோணம் $\cos^{-1} (1/3)$ ஆகும்.

(iii) $\angle DGA$ என்பது ஒரு செங்கோணமாகும்.

11. உச்சிகள் A, B, C, D என்பன ஒரு நான்முகியின் எதிர் முக்கோணிகளின் திணிவு மையங்கள் G_1, G_2, G_3, G_4 என்பவற்றுடன் முறையே இணைக்கப்படுகின்றன. நான்கு இணைப்புகளும் G இல் சந்திக்கின்றன என்றும் $AG = 3 GG_1$ என்றும் காட்டுக. AG_1 முக்கோணி $G_2 G_3 G_4$ ஐ E இற் சந்திப்பின், E என்பது முக்கோணி $G_2 G_3 G_4$ இன் திணிவு மையம் என நிறுவுக. $EG : GG_1$ இன் விகிதத்தையும் காண்க.

12. $AB = AC = AD$ ஆகும் வண்ணம் ABCD என்பது ஒரு நான்முகியாகும். A இலுள்ள தளக்கோணங்கள் சமனற்றவையாகவும், கூட்டல் விருத்தியிலும் இருக்கின்றன. BC, CD, DB என்ற பக்கங்கள் கூட்டல் அல்லது பெருக்கல் விருத்தியில் இருக்கமுடியாதெனக் காட்டுக. இப்பக்கங்களின் நீளங்கள் 7, 13, 17 அலகுகளாயின், A இலுள்ள தளக்கோணங்களையும், மீந்த பக்கங்களின் பிபாது நீளத்தையும் காண்க.

13. ஒரு நெஞ்சுதுரக் கூம்பகம் உச்சி V ஐயும், அடி ABCD ஐயும் கொண்டுள்ளது. புள்ளிகள் X, Y என்பன முறையே A இலிருந்து VB, VD, இற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடிகளாகும். அடியின் ஒவ்வொரு பக்கமும் $2a$ நீளத்தையும். கூம்பகத்தின் சரிவு விளிம்பு 1 நீளத்தையும் உடையது. AX, AY இன் நீளங்களை a, l உறுப்புக்களிற் காண்க. அத்துடன் X, Y இன் நீளம்.

$$\frac{2\sqrt{2a(l^2 - 2a^2)}}{l^2(l^2 - a^2)} \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

ϕ என்பது AX, AY இற்கிடையில் உள்ளடக்கப்படும் கோணமாயின்,

$$\text{கோண } \phi = \frac{a^2(2l^2 - 4a^2)}{l^2(l^2 - a^2)} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

14. படத்தின் உதவியுடன் இரு ஓராயகோடுகளுக்கு கிடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தூரத்தை எவ்வாறு ஆக்கலாம் என விளக்குக. ஒரு கம்பி (wire) மேற்கிலிருந்து கிழக்கிற்கு கிடைத்தளத்தில் செல்கிறது. அதே கிடைத்தளத்தில் அதிலிருந்து 10 m தெற்கிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு நீண்ட நேரிய கம்பத்தின் அடியுள்ளது கம்பம் கிடையுடன் 60° இல் சரிந்து வ. கி. (N. E) ஐ நோக்குகிறது. கம்பிலிருந்து கம்பத்திற்குள்ள மிகக் கிட்டிய தூரம் 9.26 m என நிறுவுக.

15. ஒரு நான்முகியின் எதிர்ப்பக்கச் கோடிகள் சமமாகும். அவை 13, 14, 15 அலகு நீளங்கையுடையன. நான்முகியின் கனவளவைக் கணிக்க. அது உள்ளடக்கும் மிகப்பெரிய கோளத்தின் ஆரை $\frac{3}{8} \sqrt{55}$ எனவும் காட்டுக.

[ஒரு நான்முகியின் கனவளவு $\frac{1}{6}abd$ சைன் θ ஆகும். இங்கு a, b என்பன எதிர்ப்பக்கங்களின் நீளங்களாகும். $\theta =$ இப்பக்கங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சரிந்துள்ள கோணமாகும். d என்பது அவற்றிற்கிடையிலுள்ள மிகச்சிறிய தூரமாகும்.]

16. ஒரு தள நாற்கோணி ABCD உம், பக்கங்கள் abcd ஐ உடைய ஒரு தள நாற்பக்கமும் A, a இலும்; B, b இலும்; C, c இலும்; D, d இலும் இருக்கும்வண்ணம் அமைந்துள்ளன. அத்துடன் AB உம் - D உம் ad இனதும் bc இனதும் சந்திக்கும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் சந்திப்பின், AD உம் BC உம் ab இனதும் cd இனதும் சந்திக்கும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

abcd என்ற நாற்பக்கமும் a இலும் A என்ற புள்ளியும் தரப்பட்டால் மேலேயுள்ள புண்புகையுடைய நாற்கோணி ABCD ஐ அதன் மூலைவிட்ட முக்கோணி, நாற்பக்கவின் மூலைவிட்ட முக்கோணியுடன் பொருந்தும்வண்ணம் அமைக்க முடியும் என உய்த்தறிக.

17. O என்பது சாய்தளம் P இனதும் கிடைத்தளம் q இனதும் வெட்டுங் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும், A, B என்பது $OA = OB = a$ ஆகும் வண்ணம் P இலுள்ள புள்ளிகளாகும். HK என்பன முறையே q இலுள்ள இவற்றின் எறியங்களாகும். (projections) கோணங்கள் AOH, BOD, HOK என்பன முறையே θ, ϕ, α என்பவை ஆகும்.

$$a^2 = 2a^2 (1 - \cos \theta \cos \phi)$$

கோசை θ கோசை ϕ கோசை α என நிறுவுக.

18. P, Q என்பன C ஐ மையமாகவுடைய கோளத்தின் மேற்பரப்பிலுள்ள இரு புள்ளிகளாகும். அவற்றின் அகலக்கோடுகளும், நெடுங்கோடுகளும் முறையே θ வடக்கு, λ கிழக்கு, μ வடக்கு, $(\lambda + x)$ கிழக்கு ஆகும்.

கோசை P C Q = (சைன் θ சைன் μ + கோசை $\theta \mu$ கோசை x) எனக் காட்டுக

$\theta = \mu = 30^\circ$ ஆகவும், $a = 60^\circ$ ஆகவும் இருப்பின், புவிவின் மேற்பரப்பில் அளக்கப்பட்ட P, Q இற்கிடையிலுள்ள கிட்டிய தூரத்தை கடல் மைலிற் காண்க. (புவியைக் கோளமாகக் கருதுக) ஒரு கடல் மைல் என்பது மையத்தில் 1 கலை உண்டாக்கும் புவியின் மேற்பரப்பு நீளம் என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

19. ஒரு கூம்பகம் a பக்கமுள்ள A B C D என்னும் சதுர அடியைக் கிடையாகக் கொண்டுள்ளது. V என்பது அடியின் உட்புள்ளி யொன்றிற்கு நேர் எதிரேயுள்ள உச்சியாகும்.

A, B, C இலிருந்து V இனது ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே $45^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ஆகும்.

கூம்பகத்தின் உயரம் $\left(2 - \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} a$ எனக்காட்டுக

நான்கு சாய்வுத் தளங்களும் அடியுடன் அமைக்கும் கோணத்தில் இழிவுப் கோணத்தை மிகக்கிட்டிய பாகையிற் காட்டுக.

20. ஒரு நான்முகி ABCD a, b, c ஐப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணி ABC ஐத் தனது அடியாகக் கொண்டுள்ளது. BDC, CDA, ADB என்பன செங்கோணங்களாகும். நான்முகிக்கு D இலிருந்துள்ள செங்குத்துத் தூரம் h என்பது.

$32 \Delta^2 h^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக

இங்கு $\Delta =$ முக்கோணி ABC இன் பரப்பு BDC, BAD தள முகங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ என்பது.

சைன் $2\theta = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{8\Delta^2}$ என்பதாற் தரப்படுமெனக்காட்டுக

21. $y = \frac{3x^2}{x^2 + 4}$ என்னும் சார்பினாலே தரப்படும் வளையியை வரைக.

$y = \frac{3}{4}x$ என்னும் நேர்கோடானது வளையியை $(2, \frac{3}{4})$ என்றும் புள்ளியிலே தொடுகிறதெனக் காட்டுக. இந் நேர்கோட்டினாலும் வளையினாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவைக் காண்க. $y =$ அச்சைப்பற்றி நான்கு செங்கோணிகளினூடாக இப்பரப்பளவைச் சுழற்றுவதன்மூலம் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவு $4\pi(31)g$ 2—2 எனக் காட்டுக.

22. $y = \frac{4}{k^2x^2 - 1}$ என்னும் சார்பின் பரப்படி வரையொன்றை வரைக

இங்கு $k = \frac{3}{\pi}x -$ அச்சு $y -$ அச்சு, $x = \frac{\pi}{3}$ இலுள்ள நிலைக்கூறு ஆகியவற்றிலும் மேலே குறிக்கப்பட்ட வளையியின் பகுதியினாலும் வரைப்புற்ற முதலாம் கால் பகுதியிலுள்ள பரப்பானது $y -$ அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகச் சுழற்றப்படுகிறது. இங்கு பிறப்பிக்கப்படுகின்ற திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{4}{9}\pi^3 \log 2$ அலகுகள் ஆகுமெனக் காட்டுக.

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ஆகவுள்ள $y = \sec x$ என்னும் சார்பின் வரைபை $x = \frac{\pi}{2}$ கோட்டில் வரைக. இவ்வரைபை $y = \sec x$ யொரு புள்ளியில் மாத்திரம் இடைவெட்டும் எனவும், இப்புள்ளியின் $x -$ ஆள்கூறு $\frac{\pi}{3}$ எனவும் காட்டுக.

$x =$ அச்சு, $y =$ அச்சு $x = \frac{\pi}{3}$ இலுள்ள நிலைக்கூறு, இவ்விரு வளையிகளினதும் இரு பகுதிகள் என்பவற்றால் வரைப்புற்ற பரப்பைக் காண்க.

அலகு 2

தளக் கோத்திரகணிதம்

1. ΔABC ஒரு வட்டத்திற்குள் உள்ள ஒருவழமாக வரையப்பட்டுள்ளது. A இல் வரையப்பட்ட வட்டத்தின் தொடவி BC ஐ L, இற் சந்திக்கிறது. $BL / CL = AB^2 / AC^2$ என நிறுவுக. B இல் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடவி CA ஐ M இற் சந்திக்கின்றது. LM, AB ஐ N இற் சந்திக்கின்றது. C இல் உள்ள தொடவி N இற்கூடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.
2. ABC எணுங் கூர்ங்கோண முக்கோணியின் சுற்றுவட்ட மையம் O ஆகும் AB இன் நடுப்புள்ளியை O உடன் இணைக்கும் கோடு AC ஐ D இலும், B இற்கூடாக OB இற்கு வரையப்படும் செங்குத்து C இற்கூடாக CC இற்கு வரையப்படும் செங்குத்தை E இலும் சந்திப்பின், $DE \parallel AB$ என நிறுவுக.
3. Γ என்பது ΔABC இன் உள்வட்ட மையம். BI, CI இம் முக்கோணியின் சுற்றுவட்டத்தை முறையே E, F என்பவற்றில் சந்திக்கின்றன. E, F என்பது AB, AC என்பவற்றை முறையே R, S என்பவற்றில் சந்திப்பின், A R I S ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.
4. AB என்பது O வை மையமாகவருடைய S என்னும் வட்டத்திற்கு P என்னும் புள்ளியிலிருந்து வட்டப்படும் தொடவிகளின் தொடுநாட்டாகும். OP, AB ஐ Q இற் சந்திப்பின், $OP, OQ = OA^2$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக PQ இன் நீளம், FQ இன் நடுப்புள்ளியிலிருந்து S இற்கு வரையும் தொடவியின் நீளத்தின் இருமடங்கென நிறுவுக.
5. AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்வண்ணம் D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாயின், $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$ என நிறுவுக.

கோணங்கள் BAC, CBA, ACB என்பவற்றின் இரு கூடுக்கிகள் EF, FD, DE என்பவற்றை முறையே L, M, N என்பவற்றிற் சந்திப்பின், DL, EM, FN என்பன ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமென நிறுவுக.

6. P, Q என்பவற்றில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடலி வட்டங்களை A, B என்பவற்றில் தொடுகின்றது. AQ, BP ஐ R இலும், AP, BQ ஐ S இலும் சந்திப்பின். PQRS ஒரு வட்ட நாற்பக்கம் என நிறுவுக. RS \parallel AB எனவும், PQ, RS ஐ இருகூறுக்கும் எனவும் நிறுவுக.
7. மெனிஸாகின் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுக.
 $BD = \frac{1}{3} BC$; $CE = \frac{1}{3} CA$; $AF = \frac{1}{3} AB$ ஆகும்வண்ணம் D, E, F என்பன ΔABC இல் முறையே BC, CA, AB என்பவற்றில் உள்ள புள்ளிகளாகும். BE உம் CF உம் X இல் வெட்டுகின்றன. CF உம் AD உம் Y இல் வெட்டுகின்றன. AD உம் BE உம் Z இல் வெட்டுகின்றன $\frac{CX}{XF} = \frac{3}{4}$ என நிறுவி $\Delta BXC = \frac{2}{7} \Delta ABC$ எனவும் நிறுவுக.
 இதிலிருந்து $\Delta XYZ = \frac{1}{7} \Delta ABC$ எனக் காட்டுக.
8. AB என்பது O என்பதை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு P என்னும் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுநாண் ஆகும். OP, AB ஐ Q இற் சந்திப்பின், $OP, OQ = OA^2$ என நிறுவுக.
 S எனும் வட்டத்தின் மையம் O என்பது X, Y இல் சந்திக்கும் வேறொரு வட்டம் S^1 கிடக்கிறது S^1 இலுள்ள புள்ளி P இலிருந்து S இற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் தொடுநாண் XY உம் O^* உம் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.
9. ~~AB என்பது O~~ மையமாகவுடைய S என்னும் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியாகும். R என்பது OA ஐ A இல் தொடும் S^1 என்றும் வட்டத்தில் ஒரு புள்ளியாகும். $\angle OAR$ இனது இருகூறுக்கி S ஐ மீண்டும் B இலும், S^1 ஐ மீண்டும் P இலும் சந்திக்கிறது BR, S ஐ மீண்டும் C இலும், S^1 ஐ மீண்டும் Q இலும் சந்திப்பின்
 i) புள்ளிகள் O, P, Q என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன என்றும்
 ii) AC என்பது OP இற்குச் செங்குத்தெனவும் நிறுவுக.
10. கூர்ங்கோண முக்கோணி ABC இனது நிமிர்மையம் (orthocentre) H ஆகும். வட்டம் BHC, AB, AC என்பவற்றை மீண்டும் முறையே D, E என்பவற்றில் சந்திக்கிறது. H என்பது ΔADH இனது சுற்றவட்ட மையம் என நிறுவுக.
 வட்டம் ADE இற்கு D, E இல் வரையப்படும் தொடலிகள் T இற் சந்திப்பின், T என்பது வட்டம் BHC இல் கிடைக்குமெனவும், $BT \parallel AC$ எனவும் நிறுவுக.

11. A, B, C என்பன வட்டம் S இலுள்ள மூன்று புள்ளிகளாகும். S இற்கு A, B இலுள்ள தொடரிகள் O இலும், OC என்பது வட்டம் S ஐ மீண்டும் D இலும் சந்திக்கின்றன. AC என்பது வட்டம் OAD ஐ மீண்டும் E இற் சந்திப்பின்,
 (i) $OE = OB$ (ii) $\angle CBE = 90^\circ$ என நிறுவுக.

12. L, M, N என்பன $\frac{YL}{LZ} \cdot \frac{ZN}{MX} \cdot \frac{XN}{NY} = 1$ ஆகும் வண்ணம் $\triangle XYZ$ இல் முறையே YZ, ZX, XY என்னும் பக்கங்களிலுள்ள புள்ளிகளாகும். L, M, N என்பன ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுக.

AD, BE, CF என்பன வட்டம் S இன் விட்டங்கள் S இற்கு A இலுள்ள தொடரி EF ஐ P இல் சந்திப்பின்.

$$\frac{EP}{FP} = \frac{AD^2 - DE^2}{AD^2 - FD^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

S இற்கு B இலுள்ள தொடரி FD ஐ Q இலும், S இற்கு C இலுள்ள தொடரி DE ஐ R இலும் சந்திப்பின். P, Q, R என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்குமென நிறுவுக

13. AD, BE, CF என்பன ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் வண்ணம் DEF என்பன $\triangle ABC$ இல் முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாகும். $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ ஆகும் என நிறுவுக. இத் தேற்றத்தின் மறுதலையைக் கூறுக

ஒன்பது $\triangle ABC$ இன் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைப் புள்ளியாகும். A இனூடாக l என்னும் கோடு, வட்டங்கள் ABO, ACO என்பவற்றை மீண்டும் R, Q என்பவற்றில் முறையே சந்திக்கின்றது RP, QC என்பன P இல் சந்திக்கின்றன. P வட்டம் BCO இல் கிடக்குமென நிறுவுக. O என்பது $\triangle ABC$ இன் சுற்றுவட்ட மையமாகும் l என்பது OA இற்குச் செங்குத்தாகவிருப்பின், PA, QB, RC என்பன ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக

14. ABC என்பது கூர்ங்கோண முக்கோணியாகும், வட்டம் ABC இற்கு A, B இலுள்ள தொடரிகள் T இற் சந்திக்கின்றன. AC அவ்வட்டத்தை மீண்டும் D இற் சந்திக்கிறது. CB, AT என்பன வட்டம் TDB ஐ மீண்டும் PQ இல் சந்திக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக
 (i) $TP = TB$; (ii) $\angle ABC = \angle ABQ$; (iii) $\angle PAC = 90^\circ$

15. ABC என்பது $AC > AB$ ஆகவுள்ளது ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணி D, E, F என்பன A, B, C என்பவற்றிலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்களின் அடிகளாகும் BD, AD என்பன வட்டம் DEF ஐ மீண்டும் முறையே L, X இற் சந்திக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) L என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி.

(ii) $\angle DEL = \angle ABC - \angle ACB$

(iii) LX என்பது EF என்பதற்குச் செங்குத்து.

16. X, Y, Z என்பவை முறையே முக்கோணி ABC இனது பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாகும். பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{AZ} \cdot \frac{AZ}{ZB} = +1$ எனின்,

AX, BY, CZ என்பன ஒரே புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன.

(ii) $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{XA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$ எனின்,

X, Y, Z என்பன ஒரு கோட்டிலுள்ளன.

D, E, F என்பன A, B, C ஆனவற்றிலிருந்து முறையே BC, CA, AB என்பவற்றிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக்களின் அடிகளாகும். கோணங்கள் A, B, C என்பவற்றின் உள்ளிரு கூழுக்கிகள் முறையே BC, CA, AB என்பவற்றை L, M, N இற் சந்திக்கின்றன. PC, CA, AB என்பன முறையே EN, FL, AL என்பனவற்றை P, Q, R இற் சந்திக்கின்றன. P, Q, R என்பவை ஒரே கோட்டிலுள்ளன என நிறுவுக.

17. ABCD என்னும் நாற்பக்கலில் பக்கங்கள் AB, CD என்பன E இல் சந்திக்கின்றன. AC, BD என்பன F இல் சந்திக்கின்றன. AD, BC என்பன G இல் சந்திக்கின்றன. AB, FG என்பன P இல் சந்திக்கின்றன. AC, EG என்பன Q இல் சந்திக்கின்றன. BD, EG என்பன R இல் சந்திக்கின்றன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) APBE ஒரு இசை வீச்சு (Harmonic Range)

(ii) AR, BQ, GP ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

18. ஒரு முக்கோணியின் குத்துயரங்கள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

முக்கோணி ABC இல் AD, BE, CF என்ற மூன்று குத்துயரங்களும் H இற் சந்திக்கின்றன. P, X என்பன முறையே AH, BC இன் மையப் புள்ளிகளாகும். $\angle PEX$ ஒரு செங்கோணம் என நிறுவுக.

$4PX^2 = AH^2 + BC^2 + BH^2$ எனவும் நிறுவுக. இதிலிருந்து $AH^2 + BC^2 = BH^2 + CA^2 = CH^2 + AB^2$ என உய்த்தறிக. [ஏதாவது புள்ளி வட்டத்தின் பண்புகள் உபயோகித்தால், அவை நிறுவப்படல் வேண்டும்]

19. P என்பது சமபக்க முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தின் சிற்றச்சு BC இலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். D என்பது $\angle ACD = \angle BCP$ ஆகும்வண்ணம் AP இலுள்ள புள்ளியாகும். $AD = BP$ எனவும், $AP = BP + CP$ எனவும் நிறுவுக.

சமபக்க முக்கோணிகள் $\triangle YZL, \triangle YXM, \triangle XYN$ என்பன சுற்றுகோண முக்கோணி XYZ இன் பக்கங்களில் வெளியிருவதாக வரையப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் சுற்றுவட்டங்கள் ஒரு புள்ளி R இல் சந்திக்கும் என்றும், XL, YM, ZN என்பன R இற்கூடாகச் செல்வதுடன், சமநீளங்களைக் கொண்டிருக்கும் என்றும் நிறுவுக.

20. முக்கோணி ABP இன் சுற்றுவட்டத்திற்கு P இலுள்ள தொடவி நீட்டப்பட்ட AB ஐ O இற் சந்திக்கிறது.

$OA \cdot OB = OP^2$ எனவும், $OA \cdot OB = PA^2 - PB^2$ எனவும் நிறுவுக. இதிலிருந்து P என்பது நிலையான புள்ளிகள் AP ஐக் கொண்ட தளத்தில் ஒரு மாறும் புள்ளியாகவும் $PA : PB$ என்ற விகிதம் K என்ற ஒருமைப் பெறுமானத்தையும் கொண்டிருப்பின் P இன் ஒழுக்கு $KAB / (K^2 - 1)$ ஐ ஆரையாகவுடைய வட்டம் எனக் காட்டுக. இங்கு $K > 1$.

திரிகோண கணிதம்

அலகு 1

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

1. (i) θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,
 $6 \text{ கோசை}^2 \theta - 4 \text{ கோசை } \theta \text{ சைன் } \theta + 5 \text{ சைன்}^2 \theta$ என்பதன்
 பெறுமானம் 4 இற்கும் 9 இற்கும் இடையில் இருக்குமென
 நிறுவுக.
- (ii) $\text{கோசை}^{-1}x + \text{கோசை}^{-1}y + \text{கோசை}^{-1}z = \pi$ எனின்,
 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ என நிறுவுக.
2. i) தான் $\theta = \frac{1}{2} \text{கோசை } 2x$ கோதா ϕ எனின்.
 $\frac{\text{கோசை}(\theta + \phi)}{\text{கோசை}(\theta - \phi)} = - \text{தான்}^2 \alpha$ என நிறுவுக.
- (ii) $\text{கோசை } \theta + 3 \text{ சைன் } \phi = 2$ ஆகும் வண்ணம் $\theta \phi$ என்பன
 நேர் கூர்ங்கோணங்களாகவும் $r = \text{சைன் } \theta + 3 \text{ கோசை } \theta$ ஆக
 வும் இருப்பின் r இன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் $2\sqrt{3}$ எனவும்
 $\theta = 2\phi = \pi/3$ ஆகும் போது இது நிகழும் எனவும் நிறுவுக.
3. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.
 (i) $\text{சைன் } 8\theta - \text{சைன் } 6\theta + \text{சைன் } 4\theta = 0$
 (ii) $\text{கோசை } \theta \text{ கோசை } 3\theta - 1 = 0$
 (iii) $4 \text{ தான் } \theta \text{ தான் } 2\theta + 3 \text{ சைன்}^2 \theta = 0$
4. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக
 (i) (a) $\text{கோசை } 3\theta + \text{சைன் } 4\theta + \text{கோசை } 7\theta = 0$
 (b) $6 \text{ தான் } 2\theta - 3 \text{ தான் } \theta - 5 \text{ கோதா } \theta = 0$
 (ii) $\text{சைன்}^{-1}x + \text{சைன்}^{-1}y = \pi/3$ ஆயின்,
 $x^2 + xy + y^2 = 3/4$ என நிறுவுக
5. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.
 (i) $2 \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } 3\theta - 1 = 0$
 (ii) $4 \text{ கோசை } \theta - 3 \text{ சைன் } \theta - 2 = 0$
 (iii) $8 \text{ கோதா}^2 2\theta - 5 \text{ தான்}^2 \theta - 3 = 0$

6. (i) சைன் $2x = \frac{2t}{1+t^2}$ எனவும், கோசை $2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனவும்

நிறுவுக. இதில் $t =$ தான் x

(ii) சைன் $\theta +$ சைன் $\phi = \alpha$ ஆகவும், கோசை $\theta +$ கோசை $\phi = b$ ஆகவும் இருப்பின், கோசை $(\theta + \phi)$ கோசை $(\theta - \phi)$ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை a, b இன் தொடர்புகளில் காண்க.

$$\text{தான் } \theta + \text{தான் } \phi = \frac{8ab}{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2} \text{ எனவும் நிறுவுக.}$$

7. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.

(i) கோசை $6x$ கோசை $2x -$ கோசை $3x$ கோசை $x = 0$

(ii) தான் $x -$ சிக $2x + 1 = 0$

(iii) கோசை $3x + 4$ கோசை $2x - 2 = 0$

8. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.

(i) (a) சைன் $3x +$ சைன் $2x$ சைன் $x = 0$

(b) கோசை $5x -$ கோசை $4x +$ கோசை $x = 1$

(ii) நேர்மாறு சார்புகள் தலைமைப் பெறுமானம் கொள்ளும் போது 2 தான் $-1/x +$ தான் $-1/(x^3) = \pi/2$ எனின், x என்பது ஒரேயொரு பெறுமானத்தையே கொள்ளும் எனவும், அப் பெறுமானம் $\sqrt{2}$ எனவும் நிறுவுக.

9. a கோசை $\theta + b$ சைன் θ என்பதை r கோசை $(\theta + \alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் எப்படி உண்மையாகக் காட்டுக.

இங்கு $r > 0, \theta < \alpha < 2\pi$

θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

(a) சைன் $\theta + b$ கோசை θ சைன் θ என்பதன் பெறுமானம் $-r$ சைன் $2\alpha/2$ இற்கும் r கோசை $2\alpha/2$ என்பதற்கும் இடையில் கிடக்கும் என நிறுவுக.

10. θ இன் எம். மெ. பெ இற்கும், $\frac{6 \text{ கோசை } \theta + 7 \text{ சைன் } \theta + 5}{3 \text{ கோசை } \theta + 2 \text{ சைன் } \theta + 1}$

என்பது 2 இற்கும் $5/2$ இற்குமிடையிலுள்ள எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக.

மேற்கூறிய கோவை பெறுமானம் 3 ஐ ஒடுக்கும்போது, θ_1, θ_2 என்பன 2π இல் முழுவெண் பெருக்குத்தொகையால் வித்தியாசப்படாத θ இன் இரு பெறுமானங்களாயின்.

கோசை $(\theta_1 - \theta_2) = -1/5$ என நிறுவுக.

11. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.

(i) 2 சைன் $5x$ கோசை $3x -$ சைன் $4x = 0$

(ii) கோசை $3x - 4$ கோசை $2x + 2$ கோசை $x - 2 = 0$

(iii) 3 தான் x தான் $2x - 4$ கோசை $x + 13 = 0$

12. θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்,

2 கோசை $2\theta + 6$ சைன் θ கோசை $\theta + 10$ சைன் 2θ எனும் கோவையின் பெறுமானம் 1 இற்கும் 11 இற்கும் இடையில் கிடக்கும் எனக் காட்டுக

மேற்கூறிய கோவை பெறுமானம் 7 ஐ எடுக்க, θ_1, θ_2 என்பன π இன் பெருக்குத் தொகையால் வேறுபடாத θ இன் இரு பெறுமானங்களாயின், தான் $^2 (\theta_1 - \theta_2) = 24$ எனக் காட்டுக.

13. சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குக.

(i) சைன் $3\theta -$ சைன் $2\theta +$ சைன் $\theta = 1$

(ii) 4 கோசை $3\theta -$ சைன் 2θ கோசை $\theta = 0$

(iii) 6 கோதா $2\theta - 4$ கோதா $\theta - 5$ கோசை $\theta = 0$

14. α என்பது ஒருமைக்கோணமாயின், θ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும், சீக α சீக $\theta +$ தான் α தான் θ என்னும் கோவை -1 இற்கும் 1 இற்கும் இடையிலுள்ள எப்பெறுமானத்தையும் எடுக்கமாட்டாது எனக் காட்டுக.

மேற்கூறிய கோவை பெறுமானம் $\sqrt{2}$ ஐ எடுக்க θ_1, θ_2 என்பன 2π இன் முழுவெண் பெருக்குத்தொகையால் வித்தியாசப்படாத θ இன் இரு பெறுமானங்களாயின்,

தான் $^2 (\theta_1 - \theta_2) = 4$ கோதா $^2 \alpha$ கோ $^2 \alpha$ நிறுவுக.

15. θ இன் எப்பெறுமானத்திற்கும்,

தான் θ தான் $(\pi/3 - \theta)$ என்பது $1/3$ இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலுள்ள எப்பெறுமானத்தையும் கொள்ளாது என நிறுவுக.

மேற்கூறிய கோவை பெறுமானம் 7 ஐ எடுக்க, θ_1, θ_2 என்பன π இன் முழுவெண் பெருக்குத் தொகையால் வேற்றுமைப்படாத θ இன் இரு பெறுமானங்களாயின்,

கோதா $^2 (\theta_1 - \theta_2) = 4/5$ என நிறுவுக.

16. (i) கோசை $2\theta +$ கோசை $4\theta +$ கோசை $6\theta + 1 =$

4 கோசை θ கோசை 2θ கோசை 3θ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக.

4 கோசை θ கோசை 2θ கோசை $3\theta - 1 = 0$ என்னும்

சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

(ii) தான் $^2 \theta + 2$ கோசை $2\theta - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

17. (i) $2\tan^{-1} x - \tan^{-1} 2x/7 = \pi/4$ ஆயின், x ஒரேயொரு மெய்ப்பெறுமானத்தையே கொள்ளுமெனவும். இப்பெறுமானம் $\frac{3}{4}$ எனவும் நிறுவுக.

(ii) θ இன் எம் மெய்ப்பெறுமானத்திற்கும்.

$\tan \theta = 2$ $\tan (\theta - \pi/4)$ என்பது -7 இற்கும் 1 இற்கும் மிடையிலுள்ள எப்பெறுமானத்தையும் கொள்ளாது என நிறுவுக.

18. (i) கோதா 4θ ஐ கோதா θ இன் சார்பில் உணர்த்துக.

(ii) சைன் $\theta +$ சைன் $2\theta +$ சைன் $3\theta +$ சைன் $4\theta +$ சைன் $5\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை முற்றாகத் தீர்க்குக.

19. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் பொதுவான தீர்வுகளைக் காண்க.

(i) $\cos 2\theta + 3 \cos \theta + 8 = 0$

(ii) கோசை $3\theta + 2$ கோசை $2\theta + 2 = 0$

கணித வாய்பாட்டை உபயோகித்து.

$3 \cos \theta - 4 \sin \theta + 2 = 0$ இன் 0° , இற்கும் 360° இற்கும் இடையிலுள்ள தீர்வுகளைக் காண்க.

20. (i) நேர்மாறு சார்புகள் தலைமைப் பெறுமானங்கொள்ளும் போது $2 \cos^{-1} x + \sin^{-1} (2x) = \pi$ என்பது ஒரேயொரு பெறுமானத்தையே கொள்ளும் எனவும். இப்பெறு

மானம் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\sin 3\theta = \sin \theta$ என்பது பொதுமானத்திற்கும் $9 \cos \theta - 4 \sin \theta = 0$ எனும் கோவை -3 இற்கும் 3 இற்கும் இடையிலுள்ள எப்பெறுமானங்களையும் கொள்ளாது என நிறுவுக.

21. கோசை $2\theta =$ சைன் $(90 - 2\theta)$ என எழுதுவதன் மூலம் சைன் $3\theta -$ கோசை $2\theta = 0$ இன், 0° இற்கும் 360° இற்கும் இடையிலுள்ள தீர்வுகளைக் காண்க.

சைன் θ இல் உணர்த்துவதன் மூலம்.

$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1 , சைன் 18° , சைன் 54° எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து சைன் $18^\circ -$ சைன் 54° என்பவற்றை மூலகங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டினை முழுவெள்ள குணகங்களுடன் பெறுக.

இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டினைத் தீர்ப்பதன்மூலம் சைன் 18° இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

22. 5 கோசை²α + 18 கோசை α சைன் a + 29 சைன்²a என்பதை a + b கோசை (2α + β) என்னும் வடிவில் உணர்த்துக இங்கு a, b, β என்பன α ஐச் சாராதன.

K ஒருமையாகவும், α ஒரு ஒருமைக் கோணமாகவும் இருப்பில் 2 (கோசை α + சைன் α) கோசை θ + (கோசை α + 5 சைன் α சைன் θ) = K என்னும் சமன்பாடு தீர்க்கத்தக்கதாயின், K² ≤ 32 என நிறுவுக. K = 2√2 ஆயின், -1 ≤ கோதா α ≤ 7 ஆகும் பொழுது சமன்பாடு தீர்க்கத்தக்கதென நிறுவுக.

23. (i) கோசை⁴θ + சைன்⁴θ என்பதை a + b சைன்² 2θ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்துக. இங்கு a, b என்பன θ ஐச் சாராதன 2 (கோசை⁴θ + சைன்⁴θ) + 7சைன் θ கோசை θ = 0 என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

(ii) நேர்மாறு சார்புகள் தலைமைப் பெறுமானங்களைக் கொள்ளும் போது 2 தான்⁻¹ $\frac{x}{2}$ - தான்⁻¹ $\frac{x}{7} = \frac{\pi}{4}$ எனின். x என்பது ஒரேயொரு பெறுமானத்தையே கொள்ளுமெனவும் அப்பெறுமானம் 1 எனவும் நிறுவுக.

24. c² ≥ a² + b² எனின், a கோசை θ + b சைன் θ = c என்னும் சமன்பாடு தீர்க்கத்தக்கதென நிறுவுக. p, q, α என்பவற்றின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் q² கோசை (θ - α + q² சைன் (θ + α)) = -2 - q² என்னும் சமன்பாடு தீர்க்கத்தக்கதென நிறுவுக.

α = $\frac{\pi}{4}$ ஆயும், $\frac{q}{p}$ = தான்^β ஆயுமிருந்தால் = (8n + 1) $\frac{\pi}{4}$ - 2β ஆகுமென நிறுவுக.

இங்கு n என்பது யாதுமொரு முழுவெண்ணாகும்.

25. 5 கோசை x + 12 சைன் x என்பதை a கோசை (x - a) என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்துக.

y = 5 கோசை x + 12 சைன் x என்பதன் வரைபின் வரைக இது கீருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ, 5கோசை x + 12 சைன் x + 13 = 0 என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு x = (2n + 1)π + a ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு n என்பது ஒரு நேர்முழுவெண் அல்லது மறைமுழுவெண் அல்லது பூச்சியம்.

26. (i) சைன் $2A$ கோசீ $(r + 1) A$ கோசீ $(r - 1) A =$ கோதர் $(r - 1) A -$ கோதா $(r + 1) A$ என நிறுவுக. இம்முடிபைப் பயன்படுத்தி, கோசீ A கோசீ $3A +$ கோசீ $3A$ கோசீ $5A + \dots +$ கோசீ $(2n - 1) A$ கோசீ $(2n + 1) A$ என்னும் தொடரின் கூட்டுத்தொகை,

{கோதா $A +$ கோதா $(2n + 1)A$ } கோசீ $2A$ எனக் காட்டுக.

(ii) நேர்மாறு சார்புகள் தலைமைப் பெறுமானங்களைக் கொள்ளும்போது, தான்⁻¹ $x +$ தான்⁻¹ $y =$ தான்⁻¹ $\left(\frac{x+y}{1-(xy)} \right)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து தான்⁻¹ $(1/5) +$ தான்⁻¹ $4/5 = \pi/4$ எனக் காட்டுக.

27. (i) சைன் $3\theta = 2$ கோசை 2θ என்னும் சமன்பாடு $\theta = 30^\circ$ என்பதால் திருப்திப்படுத்தப்படும் என வாய்ப்புப் பார்க்குக அத்துடன் 0° இற்கும் 360° இற்கும் இடையிலுள்ள எல்லாத்தீர்வுகளையும் தருக.

(ii) மூன்று கோணங்கள் கூட்டல் விருத்தியுள்ள அதே ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்டவையின் சைன்கள் (எல்லாம் சமமானவையல்ல) பெருக்கத் தொடரிலுள்ளன. பெருக்கற் தொடரின் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

28. (i) சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.

$$\text{சைன் } \theta + \text{சைன் } 3\theta + \text{சைன் } 5\theta + \text{சைன் } 7\theta = 0$$

இங்கு $0^\circ < \theta < 360^\circ$ எனக் கொள்க.

(ii) 3 தான் $\theta -$ சீக $\theta = 1$ எனின், 3 தான் $\theta +$ சீக θ இன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் காண்க.

29. (i) தான் $\theta +$ சீக $n\theta = 1$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தும் θ இன் பெறுமானங்களை -90° இற்கும் $+90^\circ$ இற்கும் இடையில் $n = 1, n = 2$ ஆகிய இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் காண்க

(ii) $(5 + 3 \text{ கோசை } 2\alpha)$ தான் $\theta + 3$ சைன் 2α . ஆகவும், 4 தான் $9 =$ தான் x ஆகவுமிருப்பின் தான் θ ஐ t இன் உறுப்புகளிற் தருக. இங்கு $t =$ தான் α இதிலிருந்து $\theta + \phi$ இன் ஒரு பெறுமானத்தை α இன் உறுப்புகளால் எழுதாக்கப்பட்டவடிவிற் பெறுக.

26. (i) சைன் $2A$ கோசீ $(r + 1)A$ கோசீ $(r - 1)A =$
கோதா $(r - 1)A -$ கோதா $(r + 1)A$ என நிறுவுக.
இம்முடிவைப் பயன்படுத்தி, கோசீ A கோசீ $3A +$ கோசீ
 $3A$ கோசீ $5A + \dots +$ கோசீ $(2n - 1)A$ கோசீ
 $(2n + 1)A$ என்னும் தொடரின் கூட்டுத்தொகை.
{கோதா $A +$ கோதா $(2n + 1)A$ } கோசீ $2A$ எனக் காட்டுக.
- (ii) நேர்மாறுச் சார்புகள் தலைமைப் பெறுமானங்களைக்
கொள்ளும் போது, $\text{தான்}^{-1}x + \text{தான்}^{-1}y = \text{தான்}^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $\text{தான்}^{-1}(1/9) + \text{தான்}^{-1}(4/5)$
 $= \pi/4$ எனக் காட்டுக.
27. (i) சைன் $3\theta - 2$ கோசை 2θ என்னும் சமன்பாடு $\theta = 30^\circ$ என்ப
தால் திருப்திப்படுத்தப்படும் என வாய்ப்புப் பார்க்குக. அத்
துடன் 0° இற்கும் 360° இற்கும் இடையிலுள்ள எல்லாத்
தீர்வுகளையும் தருக.
- (ii) மூன்று கோணங்கள் கூட்டல் விருத்தியுள்ள அதே ஒழுங்கில்
எடுக்கப்பட்டவையின் சைன்கள் (எல்லாம் சமமானவை
யல்ல) பெருக்கத் தொடரிலுள்ளன. பெருக்கற் தொடரின்
பொது விகிதத்தைக் காண்க.
28. (i) சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக.
சைன் $\theta +$ சைன் $3\theta +$ சைன் $5\theta +$ சைன் $7\theta = 0$
 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ எனக் காண்க.
- (ii) 3 தான் $\theta -$ சீக $\theta = 1$ எனின், 3 தான் $\theta +$ சீக θ இன் சாத்திய
மான் பெறுமானங்களைக் காண்க.
29. (i) தான் $\theta +$ சீக $n\theta = 1$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்
படுத்தும் θ இன் பெறுமானங்களை -90° இற்கும் $+90^\circ$ இற்கும்
இடையில் $n = 1, n = 2$ ஆகிய இரு சந்தர்ப்பங்களிலும்
காண்க.
- (ii) $(5 + 3$ சோசை $2\alpha)$ தான் $A + 3$ சைன் 2α ஆகவும், 4 தான் 9
 $=$ தான் x ஆகவுமிருப்பின், தான் θ ஐ t இன் உறுப்பு
களிற் தருக. இங்கு $t =$ தான் α இதிலிருந்து $\theta + \theta$ இன் ஒரு
பெறுமானத்தைக் α இன் உறுப்புகளால் எளிதாக்கப்பட்ட
வடிவிற்குப் பெறுக.

30. (i) தான் $(\theta - \alpha) +$ தான் $(\theta - \beta) = u;$
கோதா $(\theta - \alpha) +$ கோதா $(\theta - \beta) = v;$ எனில்,
தான் $(\alpha - \beta)$ ஐ u, v உறுப்புக்களில் தருக

(ii) சைன் $\frac{\beta}{2} \frac{n-1}{n}$ சைன் $(\alpha + \beta) =$

சைன் $(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta)$ சைன் $\frac{n\beta}{2}$ என நிறுவுக.

n பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணி, R ஆரையுடைய வட்டத்திற்குள் உள்ளருவமாக வரையப்பட்டுள்ள ஓர் உச்சியிலிருந்து மற்றைய உச்சிகளுக்குள்ள தூரங்களின் கூட்டுத் தொகை $2R$ கோதா $\frac{\pi}{2n}$ எனக் காட்டுக.

31. (i) சீக $x = \sqrt{2}$ சீக y
கோதா $v = \sqrt{3}$ கோதா x என்ற ஒருங்கமைந்த சமன்பாடுகளின் பொதுத் தீர்வுகளைக் காண்க.

(ii) சைன் $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = கோசை $(\frac{\pi}{2} - \theta)$

(iii) ϕ, ω என்பன,

a கோசை $2\theta + b$ சைன் $2\theta = c$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு வேறுவேறான தீர்வுகளாயின், கோசை $^2\phi +$ கோசை $^2\omega$ இன் பெறுமானத்தை a, b, c இன் உறுப்புக்களில் காண்க. இங்கு a, b, c என்பன ஒருமைகளாகும்.

32. (i) $\frac{2e - 2}{1 - e}$ கோசை $2\phi - e$ எனின்
கோசை 2ϕ

தான் $2\theta = \frac{1+e}{1-e}$ தான் θ எனக் காட்டுக.

(ii) சைன் $x = 2$ சைன் y , தான் $x = 3$ தான் y என்ற ஒருங்கமைந்த சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை x, y இன் நேர் கூர்ங்கோணங்களுக்கு பாகையிலும் கலையிலும் தருக.

33. தான் 3θ , தான் 4θ என்பவற்றை தான் θ இன் விகிதமுறுகின்ற சார்புகளில் தருக. தான் $3\theta +$ தான் $4\theta = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கருதுவதன் மூலமோ அல்லது வேறுவழியாலோ

தான் $^2(\frac{\pi}{7})$, தான் $^2(\frac{2\pi}{7})$, தான் $^2(\frac{3\pi}{7})$ என்பவற்றை

மூலங்களாகக் கொண்ட முப்படிச் சமன்பாட்டைப் பெறுக

உய்த்தறிக. (அல்லது வேறுவழியால் நிறுவுக.)

(i) தான் $\frac{\pi}{7}$, தான் $\frac{2\pi}{7}$, தான் $\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$

(ii) தான்⁴ $\left(\frac{\pi}{7}\right) +$ தான்⁴ $\left(\frac{2\pi}{7}\right) +$ தான்⁴ $\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 371$

34. (i) தான்⁻¹ $p +$ கோதா⁻¹ $(p + 1) =$ தான்⁻¹ $(p^2 + p + 1)$ என நிறுவுக. தான் $\theta = p$ ஆகவும் கோதா $\phi = p + 1$ ஆகவும் தான் $x = \sqrt[3]{4}$ ஆகும் வண்ணம் x என்பது கூர்ங்கோணம் ஆகவும் இருப்பின். p இன் பெறுமானம் எதுவாக இருப்பினும் கோணம் $(\theta - \phi)$ ஒருபோதும் $-\frac{\pi}{2}$ இற்கும் a இற்கும்

இடையில் இருக்காது எனக் காட்டுக.

(ii) 5 சைன்⁻¹ $x = 7$ கோசை⁻¹ x எனின் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு சைன்⁻¹ x , கோசை⁻¹ x என்பன கூர்ங்கோணங்களைக் குறிக்கின்றன.

35. (i) சைன் $\frac{3\beta}{\beta}$ என்பது $\frac{\text{கோசை } 3\beta}{\text{கோசை } \beta}$ இலிருந்து β இன் சார்பில்லாத ஒரு கணியத்தினால் வேறுபடுகிறது எனக் காட்டுக

(ii) a கோசை² $\theta + b$ சைன் θ கோசை $\theta + c$ சைன்² θ என்பது A சைன் $(2\theta + B) + c$ என்னும் வடிவில் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக. இங்கு A, B, C என்பன θ ஐச் சாராதன. இதை, 4 கோசை² $\theta + 3$ சைன் θ கோசை $\theta - 2$ சைன்² θ என்பதன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைக் காண்பதற்குப் பயன்படுத்துக ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கான θ இன் மிகச் சிறிய நேர்ப்பெறுமானங்களையும் தருக.

36. $0 < \theta < 2\pi$ என்ற வீச்சிற்குள் θ இற்கு a கோசை² $\theta + b$ கோசை $\theta + c$ சைன் $\theta + d = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் நான்கு பெறுமானங்கள் இருப்பின், இந்நான்கு கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை π இன் இரட்டைப் பெருக்கம் எனக் காட்டுக.

இவற்றுள் இரண்டு π இனால் வேறுபட்ட மிகுதி இரண்டும் $b^2 + c^2 + a(b$ கோசை $\theta - c$ சைன் $\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

37. (i) $8\sin \theta + 15 \cos \theta$ வை $R \sin (\alpha + \theta)$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு $R > 0$, $\alpha < 90^\circ$; $8\sin \theta + 15\cos \theta = 8.5$ யை தீர்க்க.

(ii) $A B C$ என்ற சூர்ங்கோண முக்கோணியில் AC, AB, BC என்பன முறையே $x, x+1, x+2$ ஆகும் BD என்பது ஓர் இடையம்: $\cos A = \frac{x-3}{2x}$ என நிறுவுக
 AB, BD யை x இல் காண்க.

38. (i) $t = \tan \frac{x}{2}$ எனும் பிரதியீட்டை உபயோகித்து அல்லது வேறு வழியாக $\sin x - 7 \cos x + 5 = 0$ எனும் சமன்பாட்டினை திருப்தி செய்யும் $\tan x$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $(\cos 3\theta + \sin 3\theta)$ எனும் கோவையை $R \cos(3\theta - \alpha)$ எனும் வடிவில் உணர்த்துக. இங்கு $R > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
இதிலிருந்து அல்லது வேறுவழியாக $\cos 3\theta + \sin 3\theta = 1$ எனும் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வை ஆராயன்களில் காண்க.

39. (i) (a) $k \neq 2$, (b) $k = 2$ எனும் ஒவ்வொரு வகையிலும் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க

$$2x + 3z = 7$$

$$x - y + 2z = 4$$

$$kx + 4y + z = 5$$

ஒவ்வொரு வகையையும் கேத்திரகணிதப்படி விளக்குக.

$$(ii) \Delta = \begin{vmatrix} 1 - \cos \theta & -\sin \theta \\ 1 \cos \theta & \sin \theta \\ 1 \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

என தரப்படுமாயின் Δ ஐ $\cos 2\theta$ சார்பாக உணர்த்துக
இதிலிருந்து $\Delta = 4 \sin 2\theta$ எனும் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வை எழுதுக.

40. (i) தொகுதியை இரு கோணங்களின் சைன்களின் வித்தியாசமாக உணர்த்துவதன் மூலம் அல்லது வேறு வழியாக θ மாறும் போது $\frac{2 \sin \theta \cos(\theta + \alpha)}{\cos^2 \alpha}$ இன் உயர்வுப் பெறு

மாணம் $\frac{1}{1 + \sin x}$ என காட்டுக. இங்கு $0 < x < \frac{\pi}{2}$

கோவை உயர்வாய் உள்ளபோது θ இன் மிகச்சிறிய நேர்ப் பெறுமானத்தை α இல் தருக.

- (ii) $\operatorname{cosec} 2x, \cot 2x$ என்பவற்றை $\tan x$ இல் உணர்த்துவதன் மூலம் அல்லது வேறு வழியாக $3\cot 2x + 7\tan x = 5 \operatorname{cosec} 2x$ என்னும் சமன்பாட்டை திருப்தி செய்யும் $\tan x$ இன் பெறுமானங்களை காண்க.

41. பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக

(i)
$$\frac{\sin 2A \cos 2A + 1}{\sin 2A + \cos 2A + 1} = \tan A$$

(ii)
$$\frac{\sin 3B + \sin B}{\cos 3B + \cos B} = \tan 2B$$

P எனும் புள்ளியானது $x - y$ தளத்திலேயே முதலாம் கால் வட்டத்திலுள்ளது. O உற்பத்தி $A \equiv (a, 1), B \equiv (1, b)$

இங்கு $a, b > 0$ $\angle APO = \alpha, \angle BPO = \beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{4}$
ஆபுமிருப்பின் சைன் விதியை பாவித்து OP இன்

படித்திறன் $\frac{b \cot \beta - a}{a \cot \alpha - b}$ எனக் காட்டுக

42. (i) $\cos A + \cos B$ என்ற வாய்மையை பாவித்து

$\cos n\theta + \cos (n-2)\theta$ வை பெருக்கமாக தருக.
 $\cos n\theta = 2\cos\theta \cos (n-1)\theta - \cos (n-2)\theta$ என உய்த்தறிக
இதிலிருந்து $\cos 3\theta, \cos 4\theta, \cos 5\theta$ வை $\cos\theta$ வில் உணர்த்து
க. $\sin 5\theta$ வை $\sin\theta$ வில் காண்க.

(ii) $y = 2 \sin x + \cos x + 2$ வின் உறுப்புகளை $\tan \frac{x}{2}$ வில்

உணர்த்தி $y=0$ ஆக $\tan \frac{x}{2}$ வைக் காண்க.

43. (i) $\sin x + \sin 2x = \sin 3x$ எனும் சமன்பாட்டை ஆரையன் களில் தீர்க்க.

(ii) $\sec 2x, \tan 2x$ என்பவற்றை $\tan x$ இல் எழுதுவதன் மூலம் அல்லது வேறுவிதமாக, -180° க்கும் 180° க்கும் இடையில் $2 \tan x + \sec 2x = 2 \tan 2x$ என்பதை தீர்க்க.

44. (i) $2 \text{ தான்}^{-1} \frac{1}{3} + \text{தான்}^{-1} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

(ii) சைன் $\theta + \text{சைன் } 3\theta = \text{சைன் } 2\theta$ என்னும் திரிகோணகணிதச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வைப் பெறுக.

(iii) $\alpha = \text{சைன்}^{-1} \frac{1}{\sqrt{10}}$ எனின், $3\text{சைன் } 2\theta + 2 \text{சைன்}^2 \theta = 2$ என்னும் திரிகோணகணிதச் சமன்பாட்டின் சில தீர்வுகள் α வைச் சார்ந்தன எனவும் வேறு சில தீர்வுகள் α வைச் சாராதன எனவும் காட்டுக.

45. (i) 2 கோசை $x = \sqrt{3}$ கோதா x எனும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வை ஆரையனில் காண்க.

(ii) α என்பது ஒரு கூர்ங்கோணமாக இருக்கையில் 4 கோசை $x - 3$ சைன் x என்பதை a கோசை $(x + \alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு முறையிலோ

(அ) 4 கோசை $x - 3$ சைன் $x = 3$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து 0 இற்கும் 2π ஆரையன்களுக்கும் இடையே இருக்கும் எல்லாத் தீர்வுகளையும் தருக.

(ஆ) $\frac{1}{4 \text{ சைன் } x - 3 \text{ கோசை } x + 6}$ என்பதன் மிக உயர்ந்த பெறுமானங்களையும் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தையும் காண்க.

46. கோசை $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ஆகவும், சைன் $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ஆகவும்

இருக்க.

$\sqrt{6}$ கோசை $(x - \alpha) - \text{தான் } x = \sqrt{2}$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களை 0, 2π என்னும் ஆரையன்களுக்கிடையிலே காண்க. 0, 2π என்னும் ஆரையன்களுக்கிடையிலுள்ள x இன் பெறுமானங்களுக்கு $\sqrt{6}$ கோசை $(x - \alpha)$, $\sqrt{2} + \text{தான் } x$ என்பவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரைபடத்தில் பரம்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து, தான் $x \sqrt{6}$ கோசை $(x - \alpha) + \sqrt{2} \geq 0$ ஆக இருக்கையில், 0 இலிருந்து 2π வரையான ஆட்சிக்குள்ளே இருக்கும் ஆயிடைகளைக் காண்க.

47. $f(x) \equiv 5$ கோசை $2x - 24$ சைன் x கோசை $x - 5$ சைன் $2x$ என்பதை a கோசை $(2x + p) + b$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க, இங்கு a, b, p ஆகியன x இலே தங்கியிருக்கவில்லை, இதிவிருந்து x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களுக்கும், $|f(x) - (x)| \leq 13$ எனக் காட்டுக.

$0 \leq x \leq 180^\circ$ என்னும் வீச்சில் $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக $0 \leq x \leq 180^\circ$ என்னும் வீச்சிலே. C யின் எப்பெறுமானங்களுக்கு $f(x) = C$ என்னும் சமன்பாடானது (i) ஒரு தீர்வையும் கொண்டிருக்காது, (ii) ஒரு தீர்வைக் கொண்டிருக்கும் (iii) இரண்டு தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கும் (iv) மூன்று தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காண்க.

48. (i) தான் $(A - 2B) =$ கோதா $(2A - B)$ உம் தான் $(A + 2B) =$ கோதா $(2A + B)$ உம் எனின்.

A, B ஆகிய இரண்டும் $\frac{\pi}{6}$ ஆரையின் மடங்குகள் என்பதையும், A ஆனது ஓர் ஒற்றை மடங்காயின், B ஆனது ஓர் இரட்டை மடங்காகும் என்பதையும் காட்டுக.

(ii) n, v என்பன 12 கோசை $x + 5$ சைன் $x = 1$ என்னும் சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகளாகும்.

u, v ஆகியன 2π ஆரையினில் ஒருமடங்கினால் வேறுபடா வெனின், கோசை $u +$ கோசை $v = \frac{24}{169}$ எனக் காட்டுக.

49. (i) சீக $\theta +$ தான் $\theta = u$ ஆயின். சைன் θ ஒரேயொரு பெறுமானத்தையே கொண்டிருக்கலாமெனக் காட்டி, இந்தப் பெறுமானத்தைத் துணிக.

$$\text{கோசை } x + \text{கோசை } y + \text{கோசை } z = \frac{3}{2}$$

தான் $x =$ தான் $y =$ தான் z எனின் x, y, z என்பவற்றிற்கு இற்கும் 2π யிற்குமிடையே இரண்டு தொடர்பு பெறுமானங்கள் இருப்பது சாத்திய மெனக் காட்டி, பொதுத்தீர்வைத் தருக. $C^2 \leq a^2 + b^2$ ஆக இருக்கும் போது, a கோசை $+ b$ சைன் $\theta = C$ எனும் சமன்பாட்டை தீர்க்க.

50. θ_1, θ_2 என்பன 0 இற்கும் 2π யிற்கும் இடையேயான இரண்டு தீர்வுகளாயின் தான் $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ கோசை $(\theta_1 - \theta_2)$ என்பவற்றைக் காண்க.

51. (i) $-2\pi \leq y \leq 2\pi$ என்னும் வீச்சினுள் $y = \cos^{-1} x$ என்னும் சார்பின் வரையைப் பரும்படியாக வரைக
 $\cos y = \frac{1}{2}$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, மேலே குறிப்பிட்ட வீச்சினுள் அமைந்த தீர்வுகளை இவ்வரைபீலே தெளிவாகக் காட்டுக.
- (ii) $-4\pi \leq y \leq 4\pi$ என்னும் வீச்சினுள் $y = \tan^{-1} x$ என்னும் சார்பின் வரையைப் பரும்படியாக வரைக
 $\tan 2y = 1$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து, $-2\pi \leq y \leq 2\pi$ என்னும் வீச்சினுள் அமைந்த தீர்வுகளை இப்பரும்படிப் படத்திலே தெளிவாகக் காட்டுக.
52. (i) θ இன் பெறுமானம் எதுவாக இருந்தாலும், $\cos \phi = -\frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்போது, $\cos \phi + \cos (\theta + \phi) + \cos (\theta + 2\phi)$ இன் பெறுமானம் பூச்சியமாகுமெனக் காட்டுக.
- (ii) $\cot \theta - (7 + 4\sqrt{3}) \cot (\theta + \alpha) = 0$ ஆயின்,
 $\sqrt{3} \sin (2\theta + \alpha) = 2 \sin \alpha$ ஆகுமெனக் காட்டுக,
 θ இற்கு ஒரு தீர்வு பெறக்கூடியதான $\sin \alpha$ இன் வீச்சைக் குறிப்பிடுக. இதிலிருந்து,
 $\cot \theta - (7 + 4\sqrt{3}) \cot (\theta + \pi/3) = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருத்தியாக்குகின்ற θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
53. (i) $2 \sin \theta = \sqrt{3} \tan \theta$ என்னும் சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வை ஆரையன்களில் காண்க.
- (ii) $4 \sin \theta - 3 \cos \theta = 3$ என்பதை $R \sin (\theta - \alpha)$ எனும் உருவில் தருக இங்கு α ஒரு கூடுதலான கோணமாகும்.
- (a) $4 \sin \theta - 3 \cos \theta = 3$ எனும் சமன்பாட்டின் $0^\circ - 360^\circ$ இடையிலுள்ள எல்லாத் தீர்வுகளையும் தருக.
- (b) $\frac{1}{4 \sin \theta - 3 \cos \theta + 6}$ என்பதன் மிகக் கூடியதும் மிகக் குறைந்ததுமான பெறுமானங்களைக் காண்க.
54. (i) A, B நேர்கோணங்களாகவும் A + B கூர்ங்கோணமாகவும் இருப்பின் $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ என நிறுவுக இவ் விடையை உபயோகித்தும் அத்துடன் $\tan A = \frac{1}{3}$ எனவும் $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ எனவும் தரப்பட்டின் வாய்பாட்டை உபயோகியாது (A + B) ஐக் காண்க.

(ii) $y = \sin \theta - \cos \theta$ ஆகவும் $x = \tan \theta + \cot \theta$ ஆகவும் இருப்பின் y^2 ஐ x இல் உணர்த்துக.

55. (i) பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க ஒவ்வொன்றிற்கும் $0^\circ - 360^\circ$ இடையிலான எல்லாத் தீர்வுகளையும் தருக.

$$(a) \cos \frac{3x}{4} = \tan 163^\circ$$

$$(b) 7 \cos x - 24 \sin x = 12.5$$

(ii) வாய்ப்பாட்டை உபயோகியாது

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

என்பதன் எண் பெறுமானத்தை காண்க.

56. (i) R, α இன் பெறுமானங்களைத் தந்து $R > 0$ ஆகவும் α கூர்நோணம் ஆகவும் இருக்கும் போது, $2 \cos 5x + 3 \sin 5x$ என்பதை $R \cos(5x - \alpha)$ வடிவில் தருக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு வழியாக $2 \cos 5x + 3 \sin 5x = 3$ என்பதன் பொதுவான தீர்வை கிட்டிய கலையில் காண்க.

(ii) h உயரமுடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளை r ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தினுள் உள்நுருவமாக அமைக்கப்பட்டது உருளையின் கனவளவை h, r ஆல் தருக. h மாறுமாயின் உருளையின் மிகக்கூடிய கனவளவைக் காண்க.

57. $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{1}{7}$ எனின் $\cos(\alpha - \beta)$ எனக் கக் கூடிய பெறுமானங்களைக் காண்க.

b) $3 \cos \theta - 5 \sin \theta = 2$ ஐத் திருப்திப்படும், -180° க்கும் 180° க்கும் இடையில் உள்ள θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

58. a) x இன் 0 க்கும் 360 க்கும் இடையில் $(0, 360$ உட்பட) தீர்க்க.

$$(i) \cos 2x = \cos x$$

$$(ii) \sin x = 2 \sin(60 - x)$$

b) $p \cos 2x + q \sin 2x + r = 0$ எனின், $\tan x$ க்கு ஒரு சமன்பாட்டைக் காண்க. இங்கு $p \neq 0, p \neq r$ இச் சமன்பாட்டின்

மூலங்கள் $\tan x_1, \tan x_2$ எனின் $\tan(x_1 + x_2) = \frac{q}{p}$ எனக்

காட்டுக.

59. a) $\cos 3\theta - \sin 3\theta = (\cos \theta + \sin \theta)(1 - 4\cos \theta \sin \theta)$ என நிறுவுக.

b) $\sec A = \cos B + \sin B$ எனின்

(i) $\tan^2 A = \sin 2B$

(ii) $\cos 2A = \tan^2 \left(\frac{1}{2}\pi - B \right)$ என நிறுவுக.

60. a) $15\cos 2\theta + 20\sin 2\theta + 7 = 2(11\cos \theta - 2\sin \theta)(\cos \theta + 2\sin \theta)$ என நிறுவுக. இதிலிருந்தோ அல்லது வேறு வழியாலோ $15\cos 2\theta + 20\sin 2\theta + 7 = 0$ ஆகமாறு θ க்கும் 180° க்கும் இடையான θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

b) $\sin(\theta + \alpha) = \lambda \sin(\theta - \alpha)$ எனின் α, λ இல் $\tan \theta$ க்கு ஒரு கோவையைப் பெறுக. இங்கு λ ஆனது ஒரு எண் மாறிலி ($\lambda \neq 1$), $\lambda = \frac{1}{2}$ உம் $\alpha = 30^\circ$ உம் எனின், θ க்கும் 360° க்கும் இடையிலிருக்கும் θ இன்பெறுமானங்களைக் காண்க.

61. a) $\tan 2A$ க்கு $\tan A$ இல் ஒரு சூத்திரத்தைக் காண்க. A ஐ $22\frac{1}{2}^\circ$ ஆகக் கருதுவதன் மூலம், $22\frac{1}{2}^\circ$ ஆனது, $t^2 + 2t - 1 = 0$ என்றும் சமன்பாட்டின் நேர் மூலம் எனக் காட்டுக. இம்மூலத்தைக் கண்டு, $\tan \theta$, இச்சமன்பாட்டின் மூலமாகும்படி, θ ஐ காண்க.

b) $0 < x < \pi$ வீச்சுக்கில் இரு சார்புகள் $f: x \rightarrow \sin x$, $g: x \rightarrow \cos x$ ஆகியன வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விரு சார்புகளின் ஒன்றுக்கு நேர்மாறு ஏன் இல்லை எனக் கண்டு வீச்சம் $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ ஆகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்டால் $f^{-1} g \left(\frac{1}{2}\pi \right)$ ஐக் காண்க.

62. a) $3\sin 2x = 2\tan x$ இல் 0° க்கும் 360° க்கும் இடையிலுள்ள கோணம் x இன் பெறுமானங்களை (360° உட்பட) காண்க.

b) $4\cos x - 6\sin x = 5$ இல் 0° க்கும் 360° க்கும் இடையிலுள்ள கோணம் x இன் பெறுமானங்களை (360° உட்பட) காண்க.

63. $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \cot \frac{1}{2}\theta$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து

(i) $\cot \frac{1}{8}\pi, \cot \frac{1}{12}\pi$ இனது பெறுமானங்களைத்.

(ii) $\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 4\theta$ இனை இரு கோதாஸ்களின் வித்தியாசமாகத் தருக.

(iii) வாய்ப்பாட்டை உபயோகிக்காமல் நிறுவுக.

$$\cos \theta \left(\frac{4}{15} \pi + \operatorname{cosec} \theta \right) = \frac{8}{15} \pi + \operatorname{cosec} \theta \left(\frac{16}{15} \pi + \operatorname{cosec} \theta \right) = \frac{32}{15} \pi = 0$$

64. (a)
$$\frac{\cos \theta + 2 \cos 2\theta + \cos 3\theta}{\cos \theta - 2 \cos 2\theta + \cos 3\theta} = -\cot^2 \frac{1}{2} \theta$$
 என நிறுவுக.

(b) 0 க்கும் 2π க்கும் இடையிலான x இன் பெறுமானங்களுக்கு $y = \tan x$ என்ற வரைபை வரைக. வரைந்த வரைபையும் வேறு சில நேர்கோடுகளின் வரைபுகளையும் உபயோகித்து பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க.

(i) $a > 0, b > 0$ எனின் 0 க்கும் 2π க்கும் இடையிலான $\tan x = ax + b$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) m ஆனது எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் எடுக்குமாயின், $\tan x = mx + \pi$ ஆனது சரியாக மூன்று மூலங்களை $0 < x < 2\pi$ என்ற வீச்சில் கொண்டிருப்பதற்கு m இன் பெறுமானக் கோவைகளைக் காண்க.

65. (a) $2\cos^{-1} x = \sin^{-1} (\frac{3}{2} x^2)$ ஆயின் x ஐக் காண்க.

(b) a நேராயின் $\tan^{-1}(1+a) - \tan^{-1}(1-a) = \cot^{-1}(1+a+a^2)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து,

$$\cot^{-1} 3 + \cot^{-1} 7 + \cot^{-1} 13 + \dots + \cot^{-1}(1+x+x^2) = \cot^{-1}(1+2/x)$$

எனவும் உய்த்தறிக.

இவ்வினாவின் நேர்மாறு சார்புகள் அனைத்தும் 0 இற்கும் $\pi/2$ இற்கும் இடையில் பெறுமானங்களைக் கொண்டவை.

66. (a) $-2\pi \leq x \leq 2\pi, -2\pi \leq y \leq 2\pi$

மேல் காணும் வீச்சங்களில் உள்ளனவும், $\sin^2 x + \cos^2 y = 2$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தக்கூடிய புள்ளிகளை x, y தளத்தில் குறித்துக் காட்டுக.

(b) பின்வரும் ஒருங்கிணைச் சமன்பாடுகளைத் திருப்திப்படுத்தும் x, y இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களையும் காண்க.

$$16 \sin x + 9 \tan y = 35$$

$$64 \sin^2 x + 27 \tan^2 y = 259$$

இங்கு x, y ஆகியன பாகையில் அளக்கப்படும் கோணங்களாகும்.

விடைகள்

நுண்கணிதம்

அலகு 1

1. (i) $3/2, 1/2$

(ii) (a) $-(2x+1)$ சைன் $(x+x^2)$

(b) $-\text{கோசை } x (\text{கோதா}^2 x + \text{கோசை}^2 x)$

$2(1+x^2)$ சைன் $4x+x$ சைன் $2x$

(c) $\frac{\quad}{\sqrt{1+x^2}}$

2. 40 க, அடி/செக்.

3. (i) $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b^2)} \text{ சை}^2 x/2}{a \text{ சை}^2 x/2 + b (1-\text{தாண்}^2 x/2)}$ (ii) 1.

7. (ii) (a) $-4/(5+3 \text{ கோசை } x \dots)$

(b) $\frac{\quad}{3-\text{தாண்}^2 x}$

(c) $x+0$ உட்ப... 1/5

5. (i) $2e^2 x / (1+e^4 x)$

(ii) $\frac{6(1+2x)x^2+x-3}{(x+x^2)^3}$

(iii) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ சை } x$

7. (i) $(x \text{ கோசை } x + \text{சைன் } x) e^x \text{ சைன் } x / (1+e^2 x \text{ சைன் } x)$

(ii) $\text{சை}^2 x [\text{சைன் } (\text{தாண் } x)] + [\text{தாண் } x \text{ கோசை } (\text{தாண் } x)]$

(iii) $[x \text{ கோசை } x + \text{சைன் } x] [1+\text{மட}/x \text{சைன் } x]$

8. (i) $1/x^2 (x \text{ கோசை } x - \text{சைன் } x)$

(ii) (a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} [3(1+x^2) \text{ கோசை } 3x+x \text{சைன் } 3x]$

$$(b) \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{சைன் } \sqrt{x} \text{சைன் (கோசை } \sqrt{x}) \quad (c) \frac{x^2 e^{2x} (x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

9. (i) $\frac{1}{2}, 0$

(ii) (a) $2 \text{ சைன் } 1/x [\text{சைன் } 1/x \text{ கோசை } 2x - \frac{1}{x^2} \text{ சைன் } 2x \text{ கோசை } 1/x]$

(b) $3x^3 \text{ தான் } x \text{ தான் } 3x + 3x^2$

(c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} [5x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1]$

10. $y + x - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$

11. $4x + 4y - 1 = 0$

12. (i) சைன் $1/x - 1$ கோசை $1/x$

(ii) (a) $\frac{-2 \text{ தான் } x \text{ சைன் } x e - \text{தான் } x^2}{\sqrt{1 - 1 - e^{-2} \text{தான் } x}}$

(b) $\frac{-1}{\sqrt{(2x-1)}} \left[\frac{\text{சைன் } x \text{ கோசை } x}{1 + \text{கோசை } x} + \frac{ML \sqrt{(\text{கோசை } x)}}{(2x-1)} \right]$

13. (i) $e^{2x} \text{ தான் } x \text{ (கோசை } x + 2 \text{ தான் } x \text{ ML தான் } x)$

(ii) $\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} [2\sqrt{x}e^x (1-\sqrt{x}) \text{ சைன் } 2ex - 3 \text{ கோசை } (e^x)]$

14. (i) தான் $x [2 \text{ சைன் } x \text{ சைன் } (\text{சைன் } x) + \text{சைன் } x \text{ கோசை } (\text{சைன் } x)]$

(ii) $2xe^{1+x^2} \left\{ \frac{\text{சைன் } (1+x^2)}{1+x^2} + ML (1+x^2) [\text{சைன் } (1+x^2) + \text{கோசை } (1+x^2)] \right\}$

15. (a) $\frac{ex(1+x-x^2)}{(1-x^2+e^{2x}) \sqrt{1-x^2}}$

(b) $\frac{\text{—சைன் } x \text{ கோசை (கோசை } x) \text{ மட } (1+x^4)}{x(x^2-1)} +$

$$\frac{4x^3 \text{ சைன் (கோசை } x)}{x(x^2-1)(x^4+1)}$$

$$\frac{\text{—}(3x^2-1) \text{ சைன் (கோசை } x \text{ மட } (1+x^4))}{x^2(x^2-1)^2}$$

16. (i) $\frac{2}{1-x^2}$ (ii) $\frac{(1-x^2)(\text{சைன் } x + \text{கோசை } x) + 4\text{சைன் } x}{(1-x^2)\text{சைன் } x}$

17. (i) $a=4n$ $b=2n$ (iii) $a/3$

18. (a) x சீக $x e^{x^2}$ சீக $x(x \text{தான் } x+2)$ (b) $3x$ மட 3 (iii) $1/16$

19. (a) (i) 3 சைன் $2x/(1+\text{கோசை}^2 x)^2$ (b) $1/(x^2-1)$
(ii) தான் -1 $(1/\sqrt{2})$

20. (i) $y=1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{12}x^4$

(ii) $1, P, P^2, P^3+P:$ $1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{48}x^3$

21. $z + x^2 + \frac{x^3}{3} = 0, (-1)^r 2^{2/r} (4r+1)!$ 22. (i) $n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

23. (i) $\frac{2}{3(1-t^2)}$ (ii) $\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{x+y}{x+2y} \right)$

24. தான் $t: 1/3$ கோசை $^4 t$ சைன் t 25. மட $a: 1/2a; 0$
 e

26. கோசை $x -$ சைன் x

(i) $\frac{3}{2(1+x)\sqrt{x}}$

(ii) $x^{a-1}(a \text{ மட } x+1); 1/3$
 e

27. i (a) $\frac{2}{(1+4x)\sqrt{x}}$ (b) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \text{கொத்தா} \left(\frac{a+b}{2b} t \right)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a+b)}{4ab} \text{கொத்தா}^2 \left(\frac{a+b}{2b} t \right) \text{கொச்சை} \left(\frac{a+b}{2ab} \right) t$

28. (i) (a) $\frac{(1-3e^{-2})}{4}$

(b) $2 \ln 4$

(ii) $4\pi av$

29. (i) (a) $(py + qx) \text{ cm}^2/\text{s}$

(b) $(px + qy) / \sqrt{(x^2 + y^2)} \text{ cm/s}$

(c) $(qx - py) / (x^2 + y^2) \text{ ஆரையன்/s}$

(ii) ± 6

30. (a) 0.879 (b) 0.879

31. (a) $\frac{-(x^3+4)}{2x^3(1+x^3)} \frac{1}{2}$

$\frac{1+2\cos x - 3\sin x}{(2+\cos x)(3-\sin x)}$

32. (i) (a) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$ (b) $4\sec^2 2x \tan 2x$

33. (i) (a) $\frac{-15}{2} (1 - 3x)^{3/2}$

(b) $\ln x + 1$ (c) $\frac{-2}{\sqrt{(2-x^2)}}$

(ii) $25 e^{4x} \cos(3x + \alpha)$

34. (i) (a) $\frac{1}{x \ln 10}$ (b) $-3 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{-4} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

(ii) $25/64$

35. (i) (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{dy}{dx} = x^2 / \sqrt{x^2 - 9} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 9})$

36. (i) 11 (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{8} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$

37. (a) (i) $\frac{2x + 5}{2(x^2 + 5x + 3)}$ $\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{(2x - 3)(43 - 6x)}{(3x + 4)^4}$

(b) $(3t^2 + 1)y - 2tx = (t^2 + 1)^2$

38. (a) $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{6}\pi, (\frac{1}{2}\pi, 0)$ இல்

(b) $\frac{1}{2} \ln 2, 2\sqrt{2}$ இல் இழிவு

39. (a) $(1/e, -1/e)$ இல் இழிவு

(b) $(0, 2)$ அல்லது $(0, -2), 3x - 5y + 8 = 0$

40. (a) (i) $\cot x$ (ii) $(1 - 2x^2) e^{-x^2}$

(b) $\frac{1}{(3\sqrt[3]{x^2})}$, $\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 10.003

42. (i) $\frac{4}{27} \pi a^3 \cot \alpha$

43. (a) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$

(b) $v = e^{-2t}(1-2t); f = e^{-2t}(4t^2 - 4)$

44. (i) 9 a cm/நிமிடம்

45. (i) $y_1 = 1, y_2 = 0$
 $y = 1 + x - \frac{4x^3}{3!} - \frac{4x^4}{4!} - \frac{4x^5}{5!} + \dots$
 1.099650

46. (ii) $\frac{|2|}{16}$

47. $1 - x^4/6 + x^8/2520$

48. $x=0, y=0, \frac{dy}{dx} = 0$

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{\pi}{12}, \frac{dy}{dx} \approx 1.1$

49. $y - \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})x - 1$

51: (i) $\frac{3}{2d^2} (b^2 - x^2)$

(i) சீசX

உய்த்தறிதல் மட தான் $(\sqrt{4+x/2})^2 =$

2 தான் $h^{-1} \left(\text{தான் } \frac{x}{2} \right) + c$

52. (ii) $\frac{1}{2} \sec^6 t$

(iii) $y = e^t (t-3) x - e^t (t-2)^2$

53.
$$d_1 x \frac{d[f_2(x)]}{dx} f_2(x) \frac{d[f_1(x)]}{dx}$$

$-\sin x,$

54.
$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

அலகு 2 உயர்வு இழிவு

5. $\frac{1}{3} < x < 3$

6. (i) $x = 3 + 1/\sqrt{3}$ அல்லது $2 - 1/\sqrt{3}$

(ii) $y(\text{கோசை}\theta - \text{சை}\theta) - x(\text{சை}\theta + \text{கோசை}\theta) + c = 0$

7. (i) $x = 0$ இல் உயர்வு: $x = 4/3$ இல் இழிவு

(ii) $x = 1$ இல் இழிவு: $x = 3$ இல் உயர்வு

9. $x = 8$ இல் இழிவு: $x = 2$ இல் உயர்வு

10. $x = \pi/2$ இல் இழிவு: $x = 7\pi/6$ இல் உயர்வு

11. $\pi/2$ 13. $A = (3\sqrt{3})^{2/3}$. $\pi^{1/3}$. தான் $\frac{2}{3}\theta$ ($1 + \text{கோசை}\theta$)

15. இழி பெறு. $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6} \sqrt{12}$; உயர் பெறு. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6} \sqrt{12}$

16. $1 = R/\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$. $\pi R^3/27$ 17. ae

19. $x = -1$; $x = 3$; $y = 1$ $(-3, \frac{1}{2}), (0, -1)$

20. $y = \pm 3x$; $[\sqrt{\pm 3(2\sqrt{-3})}]^2$

22. $I, -2(-\frac{1}{2}, 16\frac{1}{2})$ 23. $4I \ 2/2$

24. $\frac{-t}{ae} / \sqrt{2}, \frac{a^2}{4} (1 - e^{-\pi})$

26. (i) $y - (t+1)e^t = (t+2)e^t (x-t); (-1 \pm \sqrt{5}) 2$

(ii) $\sqrt{(k^2 - y^2) - \frac{ML}{e}} \left\{ \frac{k + \sqrt{(x^2 - y^2)}}{y} \right\} = \pm x + \frac{1}{2}k(1 - \frac{ML}{e})$

27. (a) (i) 2 (ii) $1/2\pi^2$ (b) 0.15

28. $(\frac{1}{2}\pi - 1, 1); (\frac{1}{2}\pi - 8)$

29. (a) $16/15\pi$ (b) $y = 4\sin x$

30. நியூட்டன் முறை 2.155 31. 0.61 (b) $(1, 1/e)$

32. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

34. (i) $-\frac{5}{4} \leq y \leq 5, \frac{5}{2}$

(ii) $(1, 2^{2/3})$

35. (i) $1/6$ (ii) 148 36. $6 \ln 2$

37. 0.5940 (38) 2 39. $\sqrt{5}$

40. $\frac{U}{Q} \left(-a - \frac{2a}{e} \right)$

41. $4x - 3y = 2 ; Q \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9} \right)$

42. உயர் $(-1, -1)$ இழிவு $(1, 3)$ 43. $y=1 ; x=2; y=\frac{1}{2}x$

44. (i) $a = -18$ $b = 8$

45. பரப்பு $2 - \frac{2}{e}$ கனவளவு $2\pi \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$

$$46. \quad \frac{1}{2\sqrt{2}\ln} \left(\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}} \right)$$

$$49. \quad \frac{16a^2}{15} - \frac{4a}{7}$$

$$50. \quad (i) \quad \frac{4}{3}, \frac{16\pi}{15} \quad (ii) \quad x = \frac{195}{76}, \quad y = \frac{633}{190}$$

$$51. \quad x = -1, y = 1$$

$$(2/4 + \ln 2) / (1 + \ln 2)$$

$$52. \quad x < -1, x > 2, 2$$

$$53. \quad -2 < x < -1; \frac{2}{3} < x < 1$$

$$\left(4, -\frac{9}{8} \right) ; x = 0, y = -1$$

$$54. \quad (-1, 0) + 1 - 3, \left(\frac{1}{2}\right)$$

56. நிலையான பன்னை

$$(2, 0) \left(-22, \frac{48}{49} \right) \text{ அணுகு கோடுகள் } x = -1, x = 6, y = 1$$

$$57. \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ இல் } y \text{ இற்கு இழிவு } -13/4$$

$$61. \quad -\frac{n}{6} (n+1) (2n+1)$$

அலகு 3 தொகையீடு

$$1. \quad (i) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (ii) \quad \int e^{2x} (6x^2 - 2x + 3) dx + c$$

(iii) $\int \frac{(x+3)^2}{x+1} dx$

2. (i) $\frac{3}{2}x^2 [2(\int dx)^2 - 2\int dx \cdot x - 1]$

(ii) $\int \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} dx + c$ (iii) $4^{1/12}$

3. (i) $\frac{1}{2} \int dx (x^2 - 4) - \frac{1}{2} \int dx \cdot x + c$

(ii) $\int \frac{dx}{3} + \pi / (3\sqrt{3})$ (i) $2\pi^3 - 7/9$

4. (i) $\int_{1/12} (3x+20x+48x^2+48x) dx + c; \int_{1/5} (2x+1)^{1/2} dx + c$

$\int_{1/64} dx$ கோசை $2x+3/8$ கோசை $x-1/24$ கோசை $5x+c$

(ii) $\int_{16/3} dx$ ச. அலகு

5. (i) $a(t^2-1)y - b(t^2+1)x + 5abt = 0$

(ii) (a) $x + \frac{1}{2}e^{-x} + 9/2e^{x/3} - 9/4e^{-2x/3} + c$

(b) $\frac{1}{2} [3x - 2 \text{ சைன் } 2x + \frac{1}{2} \text{ சைன் } 4x] + c$

6. (i) $3y+4x-7=0, a = -\frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$

(ii) (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\int dx (27/4) - 1$

7. (i) $\int dx 2+1$

(ii) $1-2/\pi [=4/11]$ (iii) $\frac{1}{2}$

8. (i) $-\frac{1}{3} \int dx 2x+c$

(ii) $\frac{1}{3} \int (x-2) \sqrt{\dots} dx + c$

(iii) $\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3}\right) \int dx \frac{1}{|x|} - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} + c$

9. (i) $2 \int dx x + 2x \text{ சைன் } x - x^2 \int dx x + c$

(ii) $\int dx [(x^2/x+2)] + c$

(iii) $\int_{1/16} [4 \text{ சைன் } 2x - 4x - \text{சைன் } 4x] dx = 1/96 [15\sqrt{3} - 2x - 24]$

10. (i) $A = -1; B = 1; c = 2 \int dx (\sqrt{(x^2+y)/(x+2)}) + 2$
தரன் $-1/x + 2 + c$

11. (a) $\pi/3\sqrt{3}$ (b) $3 \int dx [(2+\sqrt{2})/2(-\sqrt{2})] - 2\sqrt{2}$

12. (i) $0; \pi^2/48 + \pi/8$

13. $4\frac{1}{2}; x+y=5; y+3x=12; y=5x-4$

14. உயர்வு: 1.62 இழிவு -7.1

15. $4y + x^2 + 6x + 5 = 0$, $(-3^{-1} - 5)$

16. $\frac{d\theta}{da}$: கோசை² (θ/a) சைன்³ θ

18. (i) xy மட $\frac{1}{e}$ $(x^2 - x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}}$ தான்⁻¹ $\left(\frac{2x-1}{3}\right) + c$

(ii) $2x^{\frac{1}{2}}$ + மட $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{e x^{\frac{1}{2}} + 1} + c$ (iii) $2\pi/\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ மட $\frac{1}{e}$

19. (i) $e - e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$ (ii) $13/15 - \pi/4$

(iii) $2/5 - 6/7x + 2/5x^2 - 2/11x^3 + x^{5/2} + c$

(iv) சைன் $x/(2 + கோசை) + c$

20. $a^6 \left\{ \frac{7}{47} \sqrt{2} + \frac{1}{16} \text{ மட } \frac{1}{e} \left(\text{தான் } \frac{3\pi}{7} \right) \right\}$

21. $-\frac{746}{39} a^7 x - \frac{432}{35} a\sqrt{3}$

22. (i) 2; (ii) $-\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}$ (iii) 0.752

23. (i) (a) 0.068 (b) $(1 + \sqrt{3})/1$ (ii) $62/5 \cdot 116^{*15}$

25. (i) $(2 \text{ மட } 2 - 1, 7/24)$ (ii) $ct + \frac{1}{2} \text{ மட } \left\{ \frac{ct + 1}{ct + 1} \right\}$
 (iii) 0.35, 3.1

26. $x^{-2/3}$ தான்⁻¹ $(\frac{2}{3} \text{ தான் } x) + c$

27. (i) சைன்⁻² $\left(\frac{2x-1}{3x}\right)$ ஒவ்வொன்றும் சைன்^{-1/2}

(ii) $\frac{7\sqrt{2}}{8} + \frac{3}{8} \text{ மட } (1 + \sqrt{2})$

29. (i) $-\sqrt{2} \operatorname{arctanh}^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

30. $\frac{\pi}{2} \operatorname{arctan}(\sqrt{2+1})$

31. (i) $\frac{1}{2} \operatorname{arctan} \left| \frac{x-3}{2x-1} \right| + c$ (ii) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

32. (i) $\pi/3$ (ii) $\frac{5}{4} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{24}; -2$

33. (i) $-2/\sqrt{2-x^2}$ (ii) $\pi; 0.8862; 0.3466$

34. (i) $k/(1+k^2 x^2)$ (ii) 1

35. (ii) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$ 36. (a) 0.95

38. (a) $\frac{1}{4} \ln(x-3) + \frac{1}{4} \ln(x+1)$ (b) $^{16}/_{105}$

(b) $y=1-e^{-x}$

39. (a) $\frac{\pi}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\ln 3 - \frac{\pi}{2}$

40. (a) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$ (b) $2 + \ln 3$

41. (i) $2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{17}{10}\right)$ (ii) $\frac{\pi^2}{72}$

42. (i) $\pi/4$ 43. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5} \sin^3 \theta - \frac{1}{5} \sin^5 \theta + c$
 (c) $\frac{2}{3} (3+x)^{3/2} = 6(3+x)^{1/2} + c$

44. (a) $\frac{1}{2} [\ln(2x-1) - 3/(2x-1)]$ (b) $\pi/4 - 2/3$

45. (a) $a = -3, b = -2, c = 3;$

$$3 \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) + \frac{2}{x} + c \quad (b) \frac{1}{2} (\pi - 3)$$

47. $\frac{A}{x+5} + \frac{B}{(x+5)^2} + \frac{(cx+d)}{x^2+3}$

48. (i) (a) $19/3$ (b) $10e^{-2} - 17e^{-3}$

(ii) $2\ln^2/3; 4(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

49. (i) $\ln 6$ (ii) $\cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{10}$

50. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}; \frac{1}{2} \ln (32/27)$

51. (i) $\ln (\tan \pi/6)$ (ii) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1+x^2} + \ln \pi^2$
 (iii) $\pi/16$

52. (i) (iii) $e^2/2$ (iv) $(1-3e^{-2})/4$ ~~$\frac{1}{2} \ln 4$~~

53. $\frac{2}{2x-1} - \frac{x+2}{x^2+1}; -0.12$ 54. (a) 0 (b) π (c) 0

55. $11 \frac{2}{3}$ 57. $\frac{5}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{3}{x+1}$

58. (i) (a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ (b) $\frac{5}{3} \ln 3$

(ii) $\frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{\pi^2}{72}$ (iv) $\frac{5e^4 - e^2}{4}$

59. (ii) $x \ln (x + \sqrt{x}) - x + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})$

60. (i) $\ln = e - \ln e^{-1}$ $I_5 = 120 - 44e$

- (iii) (a) $a \ln(1+e) - \ln 2$ (b) $\frac{1}{2}$
61. (a) $-5 < x < -1; 2 < x < 3$
 (b) $1 + 2/(x-3) + 3(x+1)$ (c) $1 + 2 \ln 2 + 3 \ln 6 - 3 \ln 5$
62. (a) $(152 - 104\sqrt{2})/105$ (b) $(104\sqrt{2} - 152)/105$
64. (i) $-\frac{2}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}$ (ii) 0.95
- (iv) $\frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{4}$ (v) $\frac{1}{3}$
65. 0.177, -5, 8, -15

அலகு 4 பரப்பும் கன வளவும்

1. (i) $x+y-2=0$ (ii) 1 சதுர அலகு
2. (i) $\frac{1}{3(x^2+1)} + c, \frac{1}{128} [3 - \text{சைன் } 4x + \frac{1}{8} 8x] + c$
3. (i) $5^5/24$ ச. அலகு (ii) $2^{41}/48$ ச. அலகு
4. (i) $35/12$ - மட 6 ச. அலகு (ii) மட 6 - $10/7$ ச. அலகு
5. (i) $35^5/6$ (ii) $57 : 158$ 6. $1/5$ ச. அலகு
7. (i) $\pi/2 + \text{சைன்}^{-1}(2/\sqrt{5})$ (ii) $\pi/2$
11. (i) 20 ச. அலகு (ii) $20/3$ ச. அலகு
13. $1/6 (2\pi - 3\sqrt{3}) (2 + \sqrt{3}), \frac{1}{2}\pi (2\pi - 3\sqrt{3})$
14. (i) $\frac{1}{2} : 2\pi$ (ii) $A-2$ - மட e^3 $V = \pi [\frac{2}{3} - 2 \text{ மட } e^3]$
15. $(\pi a - 5 a/6; 1/6 \pi a^3 (9x^2 - 16))$
15. (i) $\frac{1}{2}\pi (e^2 - e^{-2})$ (ii) $(3e^4 + 1)/2(e^4 - 1)$
- (iii) $\frac{1}{2} \text{ மட } c \left| \frac{e^4 + 1}{1} \right|$
17. $x = 0; y = 7h/6$ 18. $27a^2/640$
19. $8\pi - 12\sqrt{3} + 3 \text{ மட } (\sqrt{3} + 2)$
20. 0.68 அங். / செக் 22. $(0.5/4 a)$

திண்ம கேத்திர கணிதம்

அலகு 1

6. 2 சைன்⁻¹ ($2/\sqrt{7}$)

7. (i) கோசைன்⁻¹ $\left[\frac{a}{4b+2a^2} \right]$ (ii) தாண்⁻¹ $\left[\frac{2b}{a\sqrt{2}} \right]$

(iii) தாண்⁻¹ $\left(\frac{3b}{a} \right)$ (iv) 2 தாண்⁻¹ $\left(\sqrt{\frac{4b+2a^2}{8b^2+2a^2}} \right)$

12. $44^\circ 45'$, 90° ; $135^\circ 15'$; $\frac{1}{2}$, $13\sqrt{2}$

13. $AX (O_1AY) = 2a\sqrt{\frac{(1^2-a^2)}{1}}$ 15. கனவனவு = $42\sqrt{55}$

17. 3080 கடல்மீட்டர் 19. 50°

திரிகோண கணிதம்

அலகு 1

சமன்பாடுகளின் தீர்வு

3. (i) $\theta = \frac{n\pi}{6}$ அல் $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(ii) $\theta = n\pi$ அல் $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (iii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

4. (a) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ அல் $\frac{\pi}{6}$ (4n+1) அல் $\frac{\pi}{14}$ (4n-1)

(b) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

5. (i) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ அல் $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(ii) $\theta = \alpha - [n\pi \pm (-1)^n \text{சைன்}^{-1} (2/5)]$ (iii) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}$

6. (i) (a) கோணை $(\theta + \phi) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$

(b) கோணை $(+\phi\theta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$

7. (i) $x = \frac{n\pi}{3}$ அல் $\frac{n\pi}{5}$ (iii) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

8. (a) $x = n\pi$ அல் $\pi/4$ $(2n-1)$ அல் $n\pi + \text{தான்}^{-1} 3$

(b) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ அல் $\frac{2n\pi}{5}$ அல் $2n\pi$

11. (i) $x = \frac{n\pi}{2}$ அல் $\frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$ (ii) $x = n \pm \frac{\pi}{9}$

(iii) $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ அல் $n\pi \pm \text{தான்}^{-1} 2$

13. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ அல் $2\pi \frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{6}$ அல் $\frac{\theta}{2} - 2n\theta$

(ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ அல் $n\theta + \text{தான்}^{-1} (\pi/3)$ அல் $n\pi \pm \text{தான்}^{-1} 2$

(iii) $\theta = 2n\pi \pm 2\pi/3$

16. (i) $\pi = n\pi \pm \pi/3$ (ii) $\theta = n \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$

18. (i) கோணை $4\theta = \frac{1 + \text{கோணை}^4 \theta - 6 \text{கோணை}^2 \theta + 1}{4 \text{கோணை}^2 \theta - 4 \text{கோணை} \theta}$

(ii) $\theta = 2n 18^\circ \pm 72^\circ$

$\theta = 2n 80^\circ + 144^\circ$

$\theta = n 3/\pi$

19. (i) $n\pi \pm \pi/4$ அல் $n\pi \pm \pi/3$
 (ii) (a) $2n\pi \pm \pi/2$ அல் $2n\pi \pm \pi/3$
 (b) $\theta = 60^\circ 28'$ அல் $193^\circ 18'$

21. $4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 = 0$
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

23. (i) $1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\theta$ (ii) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{n7\pi}{12}$

27. (i) $150^\circ; 231^\circ 20'; 308^\circ 40'$ (ii) -1

28. (i) $45^\circ, 90^\circ, 315^\circ$ (ii) $-3, 4 \frac{1}{2}$

29. (i) $n = 1$ ஆகும்போது $\theta = 0^\circ$
 $n = 2$ ஆகும்போது $\theta = 0^\circ 67\frac{1}{2}', -22\frac{1}{2}'$

30. (i) $\pm \frac{\sqrt{\{uv(uv-4)\}}}{u+v}$

31. (i) $x = n\pi \pm \pi/4$
 $y = (2m + n)\pi \pm \pi/4$ (m, n முழுவெண்களாகும்)
 (ii) $\theta = K\pi, (2K+1/2)\pi$ (K முழுவெண்)
 (iii) $(a^2 + b^2)^{1/2} / (a^2 + b^2)^{1/2}$

32. $x = 50^\circ 14' : y = 23^\circ 17'$

33. (i) தான் $\frac{\pi}{7}$ தான் $\frac{2\pi}{7}$ தான் $\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$
 (ii) தான் $(\pi/7) +$ தான் $(2\pi/7 +$ தான் $(3\pi/7) = 371$

34. $\cos^2 \frac{1}{24} \pi$

35. உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{3}{2} (2 + \sqrt{5})$
 $\theta = 13^\circ 17'$ ஆகும்போது நிகழும்
 இழிவுப் பெறுமானம் $= \frac{3}{2} (2 - \sqrt{5})$
 $\theta = 103^\circ 17'$ ஆகும்போது நிகழும்

37. (i) $\theta + (4n+1) 90^\circ \pm 60^\circ - 61^\circ 56'$
 (ii) $AD = (x+1)(x-3)/2x$; $BD^2 = (x+1)^2 - AD^2$
38. (i) $\frac{2}{3}$ அல் $-4/3$ (ii) $\theta = (2n\pi) 3$ அல் $(4n+1)\pi/6$
39. (i) (a) 0 ; $2/3$; $7/3$ (b) $x = (7-32)/2$; $y = (z-1)/2$
 (ii) $\Delta = 2 \cos 2\theta$; $\theta = 13^\circ 17' + 180n$ அல் $103^\circ 17' + 180n$
40. (ii) $\pm 1/\sqrt{3}$
42. (i) $\cos \theta = c$. $\sin \theta = s$ எனில்
 $4c^3 - 8c$, $8c^4 - 8c^2 + 1$, $16c^5 - 20c^3 + 5c$, $16s^5 - 20s^3 + 5s$
 (ii) $\tan x/2 = -1$ அல் -3
43. (i) $x = 2n\pi/3$ அல்லது $n\pi$ (ii) $x = 26^\circ 34'$ அல் $-153^\circ 26'$
44. (ii) $\theta = 2n\pi + \pi/3$ அல் $2n\pi - \pi/3$ அல் $(n\pi)/2$
45. (i) $x = 2n\pi \pm \pi/2$ அல் $n\pi + (-1)^n \pi/3$
 (ii) (அ) $x = n/2 - 2\alpha$, $3/2\pi$, $5/2\pi - 2\alpha$
 இங்கு $\alpha = \sin^{-1}(2/5)$
 (ஆ) உயர் பெறுமானம் 1 குறைந்த பெறுமானம் $3/11$
46. $x/4 \leq x \leq x/3$; $\tan^{-1}(-\sqrt{2}) \leq x \leq 3x/2$
 $2\pi - \tan^{-1}(\sqrt{2}) \leq x \leq 2\pi$
47. (i) $|c| = 13$; (ii) $|c| \pm 13$
 (iii) $5 < c < 13$ (iv) $c = 5$
49. (i) $\sin \theta = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ (ii) $0 \leq x \leq 2\pi$
50. $\theta = 2\pi n \pm \phi + \alpha$; $\frac{b}{a} = \frac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$
52. $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$; $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$
53. $\theta = n\pi$ or $(2n \pm \frac{1}{2})\pi$
 (a) $\theta = 73^\circ 44'$ or 180° (b) $1, 1/11$

54. (i) 45° (ii) $y^2 = 1 - 2/x$
55. (i) (a) $336^\circ 16'$ அல் $143^\circ 44'$ (b) $226^\circ 16'$ அல் $346^\circ 16'$
 (ii) $\frac{1}{2}$
56. (i) $\sqrt{13}$, $56^\circ 19'$, $72n^\circ + 18$ அல் $72n^\circ + 4^\circ$ 32°
 (ii) $V = \pi r^2 h - \frac{1}{2} \pi h^3$, $4\pi r^2 / (3\sqrt{3})$
57. (a) $\pm \frac{8\sqrt{5}}{21}$, $\pm \frac{4\sqrt{5}}{21}$ (b) 10° , $54'$, $-128^\circ 58'$
58. (a) (i) $x=0^\circ$, 120° , 240° , 360°
 (ii) $x=40^\circ 54'$ அல் $220^\circ 54'$
 (b) $t^2(r-p) + 2qt + (r+p) = 0$
59. (a) $\tan \theta = 79^\circ 42'$ அல் $153^\circ 26'$
 (b) $\theta = [(\lambda + 1) / (\lambda - 1)] \tan \theta$; $\theta = 120^\circ$ அல் 300°
60. (a) $2 \tan A / (1 - \tan^2 A)$; $-1 + \sqrt{2}$ உம் $112 \cdot 5^\circ$
 (b) $\pi/6$.
61. (a) 0° , 180° , 360° , $54^\circ 44'$, $125^\circ 16'$, $234^\circ 44'$, $305^\circ 16'$
 (b) $257^\circ 36'$, $349^\circ 48'$,
62. (i) $\sqrt{2} + 1$, $2 + \sqrt{3}$ (ii) $\cot \frac{1}{2} \theta - \cot 4 \theta$
63. (b) 2 (ii) $m < -\frac{1}{2}$
64. (a) $4/5$
65. (a) 20 புள்ளிகள் x ஆனது $\pi/2$ இன் ஒற்றைப் பெருக்கம் y ஆனது π இன் பெருக்கங்கள்
 (b) $x = 180n + (-1)^n 30$, $y = 180m + 71 \cdot 57$ பாகையில்

பின்னிணைப்பு

நுண்கணிதம்

அலகு 1

வகையீடு

(54 வரை பக்கம் 15)

55. (1) முதற் தத்துவங்களிலிருந்து d/dx தான் $x = e^{k^2 x}$ என நிறுவி. d/dx தான் $x^{-1} = 1/(1+x^2)$ என உய்த்தறிக.

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையீட்டு உமது விடைகளைக் காட்டுக.

(அ) தான்⁻¹ $\left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$

(ஆ) மட $\left| \frac{1 + \text{தான் } x}{1 - \text{தான் } x} \right|$

(2) $y = e^{mx}$ தான்⁻¹ x^2 எனின் (இங்கு m ஓர் ஒருமை)

$(1+x) \frac{dy}{dx} = 2 m x y$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $(1+x^4) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(2x^2 - m) \frac{dy}{dx}$

$- 2 m y = 0$ எனக் காட்டுக.

56 (1) $0 < \theta < \pi/2$ எனின் சைன் $\theta < \theta <$ தான் θ எனக் கேத்திர கணித முறையால் நிறுவுக.

இதிலிருந்து நேர்ப் பெறுமதிகளுடாக $\theta \rightarrow 0$ ஆகும்போது சைன் θ

$\frac{\theta}{\theta} \rightarrow 1$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

முதற் தத்துவங்களிலிருந்து d/dx சைன் $(ax) = a$ கோசை (ax) எனப் பெறுக.

இங்கு a ஒரு ஒருமை

$y = \text{சைன்}^{-1} (x/b)$, $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$, $-b < x < b$ எனின்

$$\frac{dy}{dx} \text{ ஐக் காண்க.}$$

x ஐக் குறித்து வகையீடுக.

$$(\alpha) (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \text{ சைன்}^3 2x, \quad (\beta) \text{சைன்}^2 \left(a \text{சைன்}^{-1} \frac{x}{b} \right) \\ -b < x < b$$

(2) $y = \left\{ \text{மட} (x-a)^2 \right\}$ இங்கு $x-a > 0$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$(x-a)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x-a) \frac{dy}{dx} = 2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

87. (1) $y = \text{சைன்}^{-1} x$ எனின் $(1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $n = 2, 3, 4, 5$ இற்கு $x = 0$ எனும் புள்ளியில் $\frac{d^n y}{dx^n}$ இனது பெறுமானங்களைக் காண்க.

x^5 வெள்ளை நூல்பு வரையிலான $\text{சைன்}^{-1} x$ இனது மக்குளொரினது விரிவு $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5$ எனக் காட்டுக.

(ii) $1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{n(n+1) + \dots + (n-r+1) x^r}{r}$

இங்கு $|x| < 1$ என்னும் முடிவுருத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை $(1+x)^n$ இற்கு சமமானது என எடுத்து.

(a) $\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2}$ இன் விரிவில் x^r இன் குணகம் $3r$, ($r \geq 3$) எனவும்.

(b) நான்கு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாக $(217)^{\frac{1}{2}}$ என்பது 6.0092 இற்குச் சமனாகும் எனவும் காட்டுக.

58. (i) $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ என்பதை முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து நிறுவுக.

$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ என்பதை உய்த்தறிச.

இதிலிருந்து $\frac{d \cot x}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$ என்பதைக் காட்டுக.

$\frac{d \cot^{-1} x}{dx}$ ஐக் காண்க,

மேலேயுள்ள பெறுபேறுகளை நினைநாட்ட நீங்கள் பயன்படுத்திய தேற்றங்கள், குத்திரங்கள், பெறுமதிகள் ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடுக.

நிறுவல்கள் தேவையல்ல. பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

(அ) $\cot(\sin x \cot^{-1} x)$

(ஆ) $\cot^{-1}(\log \cos x)$, $0 < x < \pi/2$

(ii) $y = \log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ ஆகவும், அதில் $x > a > 0$ எனவும் கையவிட $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $x^2 - a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$ எனக் காட்டுக.

59. $\frac{d}{dx}$ காண்க $x = \operatorname{cosec} x$ எனக் கொண்டு $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\frac{d}{dx}$ தான் x ஐப் பெற்று $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1} x$

$= \frac{1}{1+x^2}$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{d}{dx} \text{தான்}^{-1} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} [F(x)] - F(x) \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2 + [F(x)]^2}$$

என நிறுவுக.

மேலேயுள்ள முடிவுகளைப் பெறும்பொருட்டு நீர் பயன்படுத்திய வகையிடல் சம்பந்தமான யாதேனும் தேற்றத்தையோ, சூத் திரத்தையோ தெளிவாகக் குறிப்பிடுக.

$$F_1(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \text{ஆகவும்} \quad g_1(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\text{ஆகவுமிருப்பின்} \quad \frac{d}{dx} \text{தான்}^{-1} \frac{F_1(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{g_1(2x)}$$

என நிறுவுக.

66. (i) n என்பது ஒரு நேர் முழுவுண்ணாயிருக்க

$$\text{எல்லை} \quad \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1} \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

n ஆனது ஒரு மறையெண் ஆயிருக்கும்போது இம் முடிவு சரியென அதிலிருந்து உய்த்தறிக.

n (≠ 0) என்பது யாதேனும் ஒரு முழுவுண் ஆயின்

$$\frac{d x^n}{d x} = n x^{n-1} \quad \text{என அதிலிருந்து எடுத்துக் காட்டுக.}$$

(ii) முதற் கோட்பாட்டிலிருந்து $\frac{d}{dx} \tan x = \text{Sec}^2 x$ என நிறுவுக.

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x \quad \text{ஐக் காண்க.}$$

x னக் குறித்து $\left\{ \log | \tan^{-1} x | \right\}^2$ ஐ வகையிடுக.

(iii) $y = x \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ என்க.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

என நிறுவுக.

61. (அ) $0 < x < \pi/2$ எனின், சைன் $x < x <$ தான் x என்று கேத்திர கணித முறையில் நிறுவுக.

இதிலிருந்து தேர் பெறுமானங்களுக் கூடாக

$$x \rightarrow 0, \frac{\text{சைன் } x}{x} \rightarrow 1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$x \rightarrow 0 \frac{1 - \text{கோசை } 3x}{x^2} \text{ ஐக் காண்க.}$$

(ஆ) x ஐக் குறித்து வகையீடு செய்ய:

$$(i) \text{கோசை}^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \quad (ii) \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \neq 1$$

(இ) $y_n = \text{சிக } x$ தான் n^x எனின்,

$$\frac{dy_n}{dx} = n y_{n-1} + (n+1) y_{n+1} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

n க்கும் பொருத்தமான பெறுமானத்தைக் கொடுப்பதன் மூலம் $\int \text{சிக } x \text{ தான் } x \text{ } dx$ என்பதைக் காண்க.

62: (1) F உம் g உம் x இன் வகையீட்டைக் காட்டுக எனின்

$$\frac{d}{dx} (Fg) = F \frac{dg}{dx} + g \frac{dF}{dx} \text{ என நிறுவுக.}$$

x ஐக் குறித்து வகையீடுக:

$$(அ) e^{x^2} \sin 2x \quad (ஆ) \sqrt{x} \sin^{-1}(2x-1)$$

$$(இ) \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} \right) \log | \sec x + \tan x |$$

(2) α உம் β உம் ஒருமையாக இருக்கும்போது $(\alpha + \beta x)e = x$ எனின் $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = (x \frac{dy}{dx} - y)^2$ என நிறுவுக.

அலகு 2

உயர்வு இழிவு
(61 வரை பக்கம் 29)

62. (1) முதலாவது பெறுமதியை மட்டும் கருத்திற் கொண்டு

$$F(x) = \frac{(x-5)^3 (4x+1)}{x+1} \text{ என்னும் சார்பின் உயர்வு}$$

இழிவுப் பெறுமதிகளைக் காண்க. $y = F(x)$ இக் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக. $(5, 0)$ என்னும் புள்ளியைப் பற்றி யாது கூறுவீர்?

(2) $ay^2 = x^3$ என்னும் வளைவியீதுள்ள புள்ளி $p(ot^2, ot^3)$ யில் வரையப்பட்ட தொடலி வளைவியை மீண்டும் Q இற் சந்திக்கிறது. Q இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. O உற்பத்தியும் N, P யிலிருந்து x அச்சிற்கான செங்குத்து அடியும் R, PQ வினதும் y அச்சினதும் இடைவெட்டுப் புள்ளியும் எனின் OQ வும் RN உம் x - அச்சுக்கு சமமாகச் சாய்ந்துள்ள T_1 என திறவுக.

63. (1) பெறுமதியைப் பரீட்சிப்பதன் மூலம் $\frac{x}{(x-1)(x-4)}$ என்பதன் உயர்வு இழிவுப் பெறுமானங்களைப் பெறுக.

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-4)} \text{ என்னும் வளைவியைப் பருமட்டாக வரைக. } -1 < K < \frac{-1}{9} \text{ இற்கு } k(x-1)(x-4)$$

$-x = 0$ என்னும் சமன்பாடு மெய்த்தீர்வுகளைக் கொண்டிருக்கிறது என உய்த்தறிக.

(ii) $x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{t}{1+t^2}$ என்னும் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளைவியை வரையறுக்கப்படுகிறது. இக்கு t ஒரு பரமானம்

வளைவியீது ஒரு "புள்ளி t' " யில் $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும்

காண்க. இதிலிருந்து வளைவியீதுள்ள கணதலைப் புள்ளிகளையும் அவற்றின் இயல்புகளையும் காண்க.

64. (i) $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ எனினும் வரையீயைப் பரும்படி யாய் வரைக?

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = k \text{ எனினும் சமன்பாட்டுக்கு } -4 < k < 0$$

என்பதற்கு மெய்த்தீர்வுகள் இல்லை என்பதை உய்த்தறிக.

(ii) $x = t^2 + 4, y = t^3 - 3t$ ஆகிய பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி தரப்படுகிறது. இங்கே $t \neq 0$ ஆகும்.

வளையியின் t புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐயும் காண்க.

இதிலிருந்து வளையியில் திரும்பற் புள்ளிகளைக் கண்டு எது உயர்வு எது இழிவு எனத் தீர்மானிக்குக.

65.

$$y = F(x) = \frac{(x-1)^3(6x+1)}{(x+1)^3} \text{ எனின் } \frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{6x(x-1)^2(x+6)}{(x+1)^4} \text{ எனக் காட்டுக. } x = 1 \text{ ஆகும்போது}$$

y இன் உயர்வோ, இழிவோ பெறப்படாது என்பதை உய்த்தறிக. $y = F(x)$ இன் பரும்படியான வரைபை

வரைக. இவ் வரைபைப் பயன்படுத்தி $-\left(\frac{49}{5}\right)^2 < K < -1$

எனின் $(x-1)^3(6x+1) - k(x+1)^3 = 0$ எனினும் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லையெனக் காட்டுக.

66. C எனும் ஒரு தள வளையியிலுள்ள பொதுவான ஒரு புள்ளி F இன் ஆங்குறகள் $x = a \cos^3\theta, y = a \sin^3\theta$ என்பவற்றினால் தரப்படுகின்றன. இங்கே $\theta [0 \leq \theta \leq 2\pi]$ ஒரு பரமானமாகவும் a ஒரு நேர் ஒருமைவாகவும் உள்ளன. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) வளையியானது உற்பத்தியுடன் $x-, y-$ அச்சுகள் பற்றியும் சமச்சீர் உடையது.

(ii) எந்த அச்சுளிலும் அமைவாத புள்ளி P யிலுள்ள வளையியில் சாய்வானது $-\tan\theta$ ஆகும்.

(iii) வளையி C ஆனது $x -$ அச்சை $(a, 0) (-a, 0)$ எனினும் புள்ளிகளிலும் $y -$ அச்சை $(0, a) (0, -a)$ எனினும் புள்ளிகளிலும் தொட்ட வண்ணம் உள்ளது. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

யிற்குரிய C இன் பகுதியை வரைக. சமச்சீர் உடைமைகளைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது வேறொரு வழியாகவோ பிறம்பான வரைபடமொன்றில் C ஐ முற்றாக காண்க.

67. வகையிடத்தக்க $F(x)$ எனும் சார்பு $x = x_0$ இல்

(i) இழிவுப் பெறுமானத்தை

(ii) உயர்வுப் பெறுமானத்தை

உடையதாக இருப்பதற்கு வேண்டியதம் போதுமானது மான நிபந்தனைகளைக் கொண்ட ஒரு தொடையை முதல் வகையீட்டுக் குணகத்தில் கூறுக.

$x = 3at^2$, $y = a(t - 3t^3)$ எனும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கே t என்பது ஒரு பரமானமாகும். a என்பது நேரான ஒருமையாகும். வளையியில் “ t ” என்னும் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ ஐ காண்க.

இதிலிருந்து வளையியிலுள்ள நிலையான புள்ளிகளைக் கண்டு வளையியின் பருமட்டான வரைபொன்றை வரைக.

68. இரு முறை வகையீடு செய்யக்கூடிய $F(x)$ எனும் சார்பு $x = x_0$ இல் இழிவுப் பெறுமானத்தை உடையதாக இருக்கக்கூடிய போதுமான நிபந்தனைகளைத் தருக. $F(x)$ என்பது $x = x_0$ இல் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதற்கு $F''(x_0) > 0$ எனனும் நிபந்தனை தேவையானதுமல்ல போதுமானதுமல்ல என்று உதாரணங்களின் உதவியுடன் காட்டுக.

$x = a(1 - 3t^2)$, $y = a(t - 3t^3)$ எனும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வளையி வரையறை செய்யப்படுகிறது. இங்கே t என்பது ஒரு பரமானமாகும். a என்பது நேர் ஒருமையாகும். வளையியில் “ t ” எனும் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ ஐயும் $\frac{d^2y}{dx^2}$

ஐயும் காண்க. இதிலிருந்து வளையியில் உள்ள நிலையான புள்ளிகளைக் கண்டு வளையியின் பருமட்டான வரைபடம் ஒன்றை வரைக.

69. (i) வகையிடத்தக்க சார்பொன்றின் உயர்வுப் பெறுமானமும் இழிவுப் பெறுமானமும் (இருப்பின்) இவற்றின் முதற் பெறுமதியைக் கொண்டே தீர்மானிக்கலாம் என்பதை விளக்குக. $\frac{x^3}{1+x^4}$ என்பதன் முதற் பெறுமதியை மாத்

திரம் கொண்டு இதன் உயர்வுப் பெறுமானத்தையும் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் காண்க. இந்த வளையியிற்கு ஒரு பருமட்டான வரைபடம் வரைக.

- (ii) $x = e \cos \theta$, $y = e \sin \theta$ என்னும் பரமானக் சமன்பாடுகளினால் ஒரு வளைவி தரப்படுகின்றது. P என்னும் புள்ளியில் பரமானம் θ ஆகவுள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க. வளைவியின் ஊடாக P மாறும்போது OP இற்கும் P இல் உள்ள தொடலிக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் ஒருமையாக அமையும் எனக் காட்டுக. O என்பது ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி.

அலகு 3

தொகையீடு

(71 வரை பக்கம் 50)

72. (1) $Q(x) = (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2$ இங்கு α வும் β வும் மெய்யும் வேறுனவையும்.

(2) $P(x)$ என்பது படி மூன்றிலும் குறைவானதாயும்

(3) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha)^2} + \frac{A_2}{(x - \alpha)} + \frac{B_1}{(x - \beta)}$ ஆயும் இருப்பின்

$$A_1 = \frac{P(\alpha)}{(\alpha - \beta)^2}, \quad A_2 = \frac{P(\alpha)}{\alpha - \beta} - \frac{P(\alpha)}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$B_1 = \frac{P(\beta)}{(\alpha - \beta)^2} \text{ எனக் காட்டுக. ஆங்கு}$$

$$P'(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \text{ உம் } k > r > Z$$

உயர் (α, β) உம் ஆயிருப்பின்

$$\int_r^k \frac{x}{(x - \alpha)^2 (x - \beta)} dx \text{ ஐ மதிப்பிடுக.}$$

எக்லை k

$$k - \alpha \int_r^k \frac{x}{(x - \beta)^2 (x - \alpha)} dx \text{ முடிவுள்ளது என}$$

உய்த்தறிக.

73. (1) y $(\text{சைன்}^{-1} x + (\text{சைன்}^{-1} x)^2)$ என்க

$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx}$ என்பது x ஐச் சாராதது என நிறுவுக. இதிலிருந்து $x=0$ எனும் புள்ளியில் $P=2, 3, 4$ இற்கு $\frac{d^4y}{dx^2}$ இன் பெறுமதிகளைக் காண்க. $(\text{சைன்}^{-1} x + (\text{சைன்}^{-1} x)^2)$ இன் x^4 இல் உள்ள உறுப்பு வரை யிலான மக்குளொரினது விரிவு $x + x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{3}$

எனக் காட்டுக.

(2) ஈடுறுப்பு விரிவில் கரைச் சட்டியொன்றிற்கான விரிவை எடுத்தக் கொண்டு $\frac{(1-x)^2}{(1+x+x^2)^2}$ இல் விரிவில் $\frac{3r}{x}, \frac{3r+1}{x}, \frac{3r+2}{x}$ என்பவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

74. (1) $x = t^2, (t > 0)$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்

$$\text{படுத்தி } \int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = 2 \int_1^{\sqrt{k}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= - \int_1^{\sqrt{k}} t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{k}}{1+k} + \text{தான்}^{-1} \left(\sqrt{k} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ எனக் காட்டுக}$$

என்க $k \rightarrow \alpha$ $\int_1^k \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ என உய்த்தறிக.

(ii) பெறுமதி காண்க. $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \text{தான்}^6 x dx.$

(iii) பின்வரும் அட்டவணைபிலிருந்து $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ஐக் காண்பதற்கு

சிம்சனின் விதியைப் பயன்படுத்துக.

x	1.0000	1.2500	1.5000	1.7500	2.0000
1/x	1.0000	0.8000	0.6667	0.5714	0.5000

இதிலிருந்து $md e^2$ இன் அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

$md e^2 = 0.6931$ என நான்கு தசமதானங்களுக்கு திருத்தமாக தரப்பட்டுள்ளது எனின் $md e^2$ ஐ மதிப்பீடு செய்யச் சிம்சனின் விதியைப் பயன்படுத்துவதில் ஏற்பட்ட வழுவைக் காண்க.

75. (i) $\tan \frac{x}{2} = t$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} = 1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$2 \sin x = \lambda (1 + \sin x) + \mu$ என அமைய λ, μ ஆகிய ஒருமைகளைக் காண்க. இதிலி

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 2 \sin x}{1 + \sin x} dx \text{ இன் பெறுமானங்களைக் கணிக்க}$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} x \cos^2 x dx$ இன் பெறுமானங் கணிக்க.

(iii) பின்வரும் வாய்ப்பாட்டிலிருந்து $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ஐக்

காண சிம்சனின் நெறியை உபயோகிக்கவும்.

$x =$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$\frac{1}{x^2+1} =$	1.0000	0.9412	0.8000	0.6400	0.5000

இதிலிருந்து π க்கு அண்ணளவான பெறுமானத்தைப் பெறவும்.

76. (i) $\frac{d}{dx} \left[-\cos x \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right]$ என்பதை எழுதுக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x \log \tan \frac{x}{2} dx$$

என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

(ii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

($x = \cos \theta$ என இருக).

(iii) $\frac{x}{(x+1)(x-1)^2}$ என்பதைப் பகுதிப் பின்னங்களில்

தருவதன் மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{(x+1)(x-1)^2}$$

என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க

77. $\int_0^P \sin x \cdot \sin (P-x) dx = \frac{1}{2} (\sin P - P \cos P)$

எனக் காட்டுக. இங்கே P ஆனது ஒர் ஒருமை ஆகும்.

$$I = \int_0^p \phi(x) dx, \quad J = \int_p^0 \phi(p-x) dx \text{ என்க. இங்கே}$$

$\phi(x)$ ஆனது x இன் தொகையிடத்தக்க சார்பாகவும் P ஆனது ஒரு நேர் ஒருமையாகவும் உள்ளன, $I = J$ எனக் காட்டுக.

x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கும் $F(x) + F(P-x) = q$ ஆகுமாறு $F(x)$ என்பது x இன் தொகையிடத்தகு சார்பாகும். இங்கே $P (> 0)$, q என்பன ஒருமைகள் ஆகும்;

$$(i) \int_0^P F(x) dx = \frac{1}{2} pq \text{ எனவும்}$$

$$(ii) \int_0^P \sin x \cdot \sin(P-x) F(x) dx = \frac{1}{2} q (\sin p - p \cos p)$$

எனவும் காட்டுக.

78. (i) x^4 ஐயும் அதற்கு மேற்பட்ட வலுக்களையும் கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்து

$$\frac{1}{(1+2x)^{3/2}} - \frac{1}{(x+x)^{1/2}} \text{ இன் விரிவைப் பெறுக}$$

(ii) $\int_a^b F(x) dx$ எனும் வரையறுத்த தொகையீட்டை மதிப்பிடு

வதற்கான சிம்சனின் நெறியைக் கூறுக. $(0, 1)$ ஐ நான்கு

சமனான ஆயிடைகளாகப் பகிர்ந்து $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$

ஐப்பெறுமானம் கணிக்க.

(iii) x^4 உறுப்பு வரை $\sec x$ இற்குரிய மக்குளோரின் விரிவைப் பெறுக.

79. (i) $I = \int_0^a \frac{x^2}{x^2 + (x-a)^2} dx$, $J = \int_0^a \frac{(x-a)^2}{x^2 + (x-a)^2} dx$ என்க.

$I = J = \frac{a}{2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $y = e^{-x}$ எனும் பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி

$\int_1^2 \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}} dx$ எனும் தொகையீட்டைக் கணிக்க.

80. (1) $\tan(x + \frac{\pi}{4})$ எனும் சார்பின் மக்குளோரின் விரிவை x^5 எனும் உறுப்பு வரை காண்க.

(ii) $F(x) = \frac{1}{(1-x)^3(1+x)}$ ஐ பகுதிப் பின்னங்களாக எழுதுக.

$|x| < 1$ எனின் x இன் ஏறுகின்ற வலுக்களில் உள்ள $F(x)$ இன் விரிவில் x^{2n} , x^{2n+1} என்பவற்றின் குணகங்களைக் காண்க.

81. $\int_0^k \frac{1}{a^2 + b^2 t^2} dt$ என்பதன் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

இங்கே a, b, k என்பன நேர் ஒருமைகள் $k \rightarrow a$ எல்லை $\int_0^k \frac{1}{a^2 + b^2 t^2}$

$dt = \frac{\pi}{2ab}$ என்பதை உய்த்தறிச

$t = \tan x$ என்று எழுதுவதன் மூலம்

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2 \text{கோசை}^2 x + b^2 \text{சைன்}^2 x} dx = \frac{\pi}{2ab} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{கோசை}^2 x}{a^2 \text{கோசை}^2 x + b^2 \text{சைன்}^2 x} dx$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{சைன்}^2 x}{a^2 \text{கோசை}^2 x + b^2 \text{சைன்}^2 x} dx \text{ எனக் கொண்டு}$$

$$a^2 I + b^2 J = \frac{\pi}{2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இதையும் I, J எனும் இன்னுமோர் ஏகபரிமாணச் சேர்மானம் ஒன்றையும் பயன்படுத்தி I ஐயும் J ஐயும் a, b ஆகியவற்றில் வெளியார்த்தமாகக் காண்க.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \text{கோசை}^2 x - b^2 \text{சைன்}^2 x}{a^2 \text{கோசை}^2 x + b^2 \text{சைன்}^2 x} dx \text{ என்னும் தொகை}$$

யீட்டின் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

82. (I) $\frac{d^2}{dx^2} F(x) + ax \frac{d}{dx} F(x) + b F(x) = 0$

$$F(0) = \frac{1}{b}, F'(0) = \frac{1}{a} \text{ என்னும் வகையில்}$$

இங்கே a உம் b உம் பூச்சியம் அல்லாதவை.

ஒரு வகையீடு செய்யக்கூடிய F(x) என்னும் சார்பு உண்டு.

F(x) இன் மக்குளோரி வின்ரிவை x⁵ இல் உள்ள உறுப்பு வரையும் காண்க.

(ii) x இன் ஏறுகின்ற வலுக்களில் உள்ள

$$\left(\frac{1+ax}{2+\frac{x}{3}} \right)^3 + b(1-2x)^{\frac{1}{2}} \text{ என்னும் விரிவில் உறுப்புகள்}$$

x இனதும் x^2 இனதும் குணகங்கள் பூச்சியமாக இருப்பின் a இனதும் b இனதும் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதில் x^3 இனதும் x^4 இனதும் குணகங்களைக் காண்க.

83. (i) மதிப்பிடுக. $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$

(ii) $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$

என்பதைப் பகுதிப் பின்னங்களில் தந்து

$$\frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2} + \frac{2x}{4(x^2+1)^2}$$

என்று காட்டுக;

மதிப்பிடுக:

$$\int_a^k \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} dx \quad (k > 2)$$

எல்லை $k \rightarrow \infty$ $\int_a^k \frac{1}{\{(x-1)(x^2+1)\}^2} dx$

என்பது முடிவுள்ளது என உய்த்தறிக.

84. (i) $y = \frac{b}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x\sqrt{3}}{x+b} \right)$ எனின்

$$(b^3 - 8x^3) \frac{dy}{dx} = b^2 (b - 2x) \text{ என திறவுக.}$$

x இன் வலு நான்குக்கு மேற்பட்டவற்றைக் கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்தால் $b \neq 0$ எனக் கொண்டு

$$\frac{b}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x\sqrt{3}}{x+b} \right) \text{ என்பதன் மக்குளேரிஸ் விரிவு}$$

$$x - \frac{1}{b} x^2 + \frac{2}{b^3} x^4 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(ii) விகித முறுகின்ற சுட்டிகளுக்கு உரிய ஈருறுப்பு தேற்றத்தை உபயோகித்து 1003 இன் கனமூலத்தை ஐந்து தசம தானங்களுக்கு திருத்தமாகக் காண்க.

(iii) $y = 1 + 2x + x^3$ எனும் வளைவரில் $x = 1, 2, 3, 4, 5$ ஆகியவற்றிலுள்ள நிலைக்குத்துக்களைக் கொண்டும் சிம்சளின் நெறிகளை உபயோகித்தும்.

$$\int_1^5 (1 + 2x + x^3) dx \text{ என்பதை மதிப்பிடுக.}$$

இந்தப் பெறுமானம் தொகை வீட்டின் பெறுமானத்துக்கு சமன் எனக் காட்டுக.

அலகு 4

பரப்பும் கனவளவும்

(22 வரை 55 பக்கம்)

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தினால் உள்ளடக்கப்படும்

பரப்பளவு $\pi a b$ எனக் காட்டுக.

மேற்படி நீள்வளையம் y - அச்சப்பற்றி இரண்டு செங்கோணங்களினூடே சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவைக் காண்க.

$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனும் நீள்வளையத்தையும் பரவளையையும் ஒரே

வரிப்படத்தில் வரைக.

நீள்வளையத்தாலும் பரவளையாலும் முதலாம் கால் வட்டத்தில் வரைப்புற்ற பிரதேசம் 3 இன் பரப்பளவைக் காண்க.

x, y அச்சப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடே சுழற்றப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $7/15 \pi a^2 b$ எனக் காட்டுக.

24: ஒரே படத்தில் $y = \frac{2x}{1+x^2}$, $y = 2-x^2$ என்னும் வளையிக

ளைப் பருமட்டாக வரைக.

இவ்விரு வளையிகளாலும் வரைப்புற்ற பரப்பளவு s இன் பருமன் $(\pi - 2/3)$ அலகுகள் எனக் காட்டுக.

s என்பது y - அச்ச பற்றி இரண்டு செங்கோணங்களினூடே சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவின் பருமளையும் காண்க.

25. $x^2 = 4y$, $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்குரிய வளைவிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாய் வரைக

முதற் கால்வட்டத்தில் இந்த இரு வளைவிகளும் y - அச்சம் உள்ளடக்கும் s என்னும் பரப்பு

$$\int_0^2 \sqrt{2 - (x-1)^2} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx \quad \text{ஆகும்}$$

எனக் காட்டுக

முதற் தொகையீட்டுக்கு $x-1 = \sqrt{2} \cos \theta$ எனப் பிரதியிடு

செய்தோ, அல்லது வேறு வகையாகவோ $s = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$

எனவும் காட்டுக:

நான்கு செங்கோணங்களினூடாக x - அச்சைச் சுற்றி s சுழற் றப்பட்டால் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

26. $y = \frac{1}{x^2+1}$, $2y = x^2$ எனும் சமன்பாடுகள் முறையே c_1, c_2

எனும் இரு வளைவிகளை x, y தளத்திலே தருகின்றன.

c_1, c_2 என்பவற்றின் பரும்படியான வரைபுகளை ஒரே வரிப் படத்தில் வரைந்து அவற்றின் வெட்டுப்புள்ளிகளைத் தெளிவாகக் குறித்துக.

c_1, c_2 என்பவற்றினால் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவான A இன் பருமன் $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right)$ சதுர அலகுகளாகும் எனக் காட்டுக.

x அச்சைப்பற்றி நான்கு செங்கோணங்களினூடாகப் பரப்பளவு A சுழற்றப்பட்டால் பிறப்பிக்கப்பட்ட திண்மத்தின் கனவளவு

v இன் பருமனானது $2x \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \frac{\pi}{10}$ கன அலகுகள்

எனக் குறிக்கப்படலாம் எனக் காட்டுக.

$x = \tan \theta$ என்ற பிரதியீட்டின் மூலம் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் கணித்து இதிலிருந்து v இன் பருமனைத் தெளிவாகப் பெறுக.

27. முறையே $y = 1 - \frac{3}{x+3}$, $y = \frac{x}{x^2+1}$ என்பவற்றினால்

தரப்பட்ட C_1 , C_2 எனும் வளையிகளின் இடைவெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க.

ஒரே வரிப்படத்தில் இவ்விரு வளையிகளையும் வரைந்து, அவற்றின் அணுகு கோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டுக.

முதற் கால்வட்டத்திலே C_1 , C_2 என்பவற்றினால் வரைப்புற்ற முடிவுள்ள பிரதேசத்தின் s பரப்பளவானது $7/2 \log 5 - 3 \log 3 - 2$ எனக் காட்டுக.

C_1 , C_2 கோடுகள் $y = 0$, $x = 2$ என்பவற்றினால் வரைப்புற்ற பரப்பளவானது x -அச்சப் பற்றி நான்கு செங்கோணங்களுக்கூடாகச் சுழற்றப்படும் போது பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவைக் காண்க.

28. ஒரே வரைபடத்தில் $y^2(2-x) = 4x$, $y^2 = 4(2-x)$ எனும் சமன் பாடுகளுக்குரிய வரைபுகளை வரைக.

இவ்விரு வளையிகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட s எனும் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

s ஆனது y -அச்சு பற்றி நான்கு செங்கோணத்தினூடாக சுழற்றப்படுகிறது.

அவ்வாறு உருவாக்கப்படும் கனஅளவிற்குரிய ஒரு கோவையை வரையறுத்த தொகையீடுகளில் காண்க.

(தொகையீடுகள் கணிக்கப்படத் தேவையில்லை)

29. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ என்னும் இடைவெளியில் $y = \sec^2 x$,

$y = 1 + \sec^2 x$ ஆகிய சார்புகளுக்கான வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இரு வளைவிகளால் உள்ளடக்கப்பட்ட S என்னும் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

(1) y - அச்ச பற்றியும், (2) x - அச்ச பற்றியும் S என்பது இரு செங்கோணங்களினூடு சுழற்றப்படுகின்றது.

இந்த இரு வகைகளிலும் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளைவுகளைக் காண்க

30. $y^2 = 4x$, $y^2 = 8/x - 4$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கான வளைவிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரம்படியாய் வரைக.

இந்த இரு வளைவிகளும் உள்ளடக்கும் S என்னும் பரப்பின் பருமனைக் காண்க.

S என்பது நான்கு செங்கோணங்களுக்கிடையே y அச்சைப் பற்றி சுழற்றப்பட்டால் உருவாகும் V என்னும் கனவளைவு

$$128\pi \int_0^2 \frac{dy}{(y^2 + 4)^2} - \frac{4\pi}{5}$$

தரப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுக.

$$y = 2 \tan \theta \text{ ஐ பிரதியிடு செய்து } V = \frac{2\pi}{5} (8 + 5\pi) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

பின்னிணைப்பு

திண்ம தள கேத்திரகணிதம்

அலகு 1

திண்மக் கேத்திர கணிதம்

(32 வரை பக்கம் 61)

23. X எனும் புள்ளி ABCD என்னும் நான் முகியின் ஓரம் DA யீது இருக்கின்றது. M என்பது ஓரம் BC யின் நடுப்புள்ளியாகும். BC ஆனது LM இற்கும் AM இற்கும் செங்குத்தாயின் $BX = CX$ எனக் காட்டுக.
- BC என்பது XM, DA ஆகிய இரண்டிற்கும் செங்குத்தானது என்பதை உய்த்தறிக.
24. A, B, C, D என்பன ஒரு நான்முகியின் உச்சிகளாகும். P, Q, R, X, Y, Z என்பன முறையே BC, CA, AB, DA, DB, DC என்னும் ஓரங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும். PX, QY, RZ ஆகியன ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென நிரவுக.
- நான்முகியொன்றின் ஓர் உச்சியினூடாகவும் மேற்கூறிய சந்திப்புப் புள்ளியினூடாகவும் செல்கிற நேர்கோடானது எதிர் முகத்தை அதன் மையப்போலியிற் சந்திக்கிறதெனக் காட்டுக.
- நான்முகியொன்றின் உச்சிகளை எதிர் முகங்களின் மையப்போலிகளுடன் இணக்கும் நேர்கோடுகள்,
- அவை ஒவ்வொன்றையும் நாற்கூறுக்குகின்ற ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.
25. ஒரு நேர்கோட்டிற்கும் ஒரு தளத்திற்கும் இடையேயான கோணத்தை வரையறுக்க.
- OA, OB, OC என்பன ஒரே தளத்திலில்லாத மூன்று நேர்கோடுகளாகும்.
- OC ஆனது OA இற்கும் OB இற்கும் OD என்பது \perp ஆகும். ஆது AB யிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

CO = OC¹ ஆக இருக்கத்தக்கதாக CO ஆனது OC¹ இற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது.

முக்கோணிகள் OCD, OC¹ D என்பன ஒருமுகிசைவாணவை என நிறுவுக.

GC¹ ஆனது தளம் O A B யிற்குச் செங்குத்தாகும் என்பதை உய்த்தறிக.

26. இரு "ஓராயக்கோடுகளுக்கிடையேயான கோணம்" என்பதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக.

ABCD என்பது சமபக்க முக்கோண முகங்களினால் வரைபுற்ற ஒரு நாள் முகியாகும்.

M என்பது CD இன் நடுப்புள்ளியாகும்

AM இற்கும் CB இற்கும் இடையேயான கோணம்

$\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$ ஆகுமெனக் காட்டுக

BC, BD, AD, AC ஆகிய ஓரங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே R S, T, U ஆயின் RSTU ஒரு சதுரமாகுமென நிறுவுக.

AB, CD ஆகிய ஓரங்கள் செங்குத்தானவை என்பதை உய்த்தறிக

27. A₁, A₂, A₃, A₄ எனும் நான்முகியிலுள் O யானமொரு புள்ளியாகும்.

கோடுகள் OA₁, OA₂, OA₃, OA₄ என்பன முறையே முகங்கள் A₂ A₃ A₄, A₃ A₄ A₁, A₄ A₁ A₂, A₁ A₂ A₃ என்பவற்றை B₁ B₂ B₃ B₄ இற் சந்திக்கின்றன.

கோடுகள் A₃ B₄, A₁ B₂, A₂ B₁ என்பன A₃ A₄ என்னும் விளிம்பில் P எனும்மொரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனவும் கோடுகள்

A₃ B₄, A₄ B₃ என்பன A₁ A₂ எனும் விளிம்பில் Q என்னும் மொரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனவும் நிறுவுக.

O, P, Q வைப் பற்றி யாது கூறுவீர் ?

காரணங்கள் தருக.

28. P, Q என்னுமிரு இடைவெட்டும் கோடுகளின் இடைவெட்டும் புள்ளியில், ஒரு கோடு l. அக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக விருப்பின், P ஐயும் q ஐயும் கொண்டுள்ள தளத்திற்கு, l செங்குத்தாகும் என நிறுவுக.

PABCD என்னும் கூம்பகத்தின் அடி ABCD என்னுமொரு சதுரமாகும்.

P யில் இருந்து அடி ABCD இற்கான செங்குத்தின் அடி E. மூலைவிட்டம் BD யின் மீது கிடக்கிறது.

E, BD ஐ 2 : 1 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கிறது.

முகங்கள் PAB யும் PCD யும் அடியுடன் முறையே α , β என்னும் கோணங்களை ஆக்கின்றன.

தான் $\alpha = \frac{3}{4}$ எனின், தான் $\beta = \frac{3}{2}$ ஆகுமென நிறுவுக.

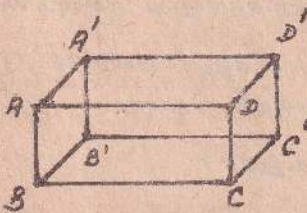
கோணம் PBA ஐயும் முகங்கள் PAB, PBC என்பவற்றிற் கிடையேயுள்ள கோணத்தையும் காண்க.

29. (i) AB = CD ஆக அமைந்துள்ள நான்முகி ABCD ஆகும், ஓரங்கள் AC, BC, BD, AD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q, R, S ஆகும்.

PR என்னும் இற்கு செங்குத்தான என நிறுவுக.

(ii) முகங்கள் இணைகரங்களாக அமைந்துள்ள பன்முகி இணைகரப்பரவை எனப்படும், உருவில் தந்துள்ள இணைகரப்பரவையில் AB, A'B', DC, D'C' ஆகியன சமாந்தர ஓரங்களாகும்.

மேலும் AA', BB', CC', DD' ஆகியனவும் சமாந்தர ஓரங்களாகும்.



மூலைவிட்டங்கள் AC', BD', A'C, B'D ஆகியன ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

இணைகரப்பரவையின் முகங்கள் செவ்வகங்களாகும்.

$AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $BB' = 6 \text{ cm}$ ஆகவும் இருப்பின் பிவிவருவனவற்றைக் காண்க.

(அ) கோடுகள் AC க்கும், BC' க்கும் இடையிலுள்ள கோணம்.

(ஆ) தளங்கள் A'BCD' க்கும் ABCD க்கும் இடையில் உள்ள கோணம்.

30. (i) கூம்பகமொன்று அதன் அடியானது s நீளமுடைய சம குகை பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணியாகவும், அதன் சாய்வு ஓரங்கள் ஒவ்வொன்றும் $l \left(l > \frac{s}{\sqrt{3}} \right)$ நீளம் உடையதாகவும் அமைந்துள்ளது.

கூம்பகத்தின் கவளவையையும், இந்த இரு சாய்வு முகங்களுக்கும் இடையிலான கோணத்தையும் காண்க.

(ii) முறையே a, b, c எனும் நீளமுடைய OA, OB, OC எனும் மூன்று நேர்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவானது

$$\frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}$$
 ஆகுமெனக் காட்டுக.

O இற்கும் ABC இற்கும் இடையிலான செங்குத்துத் தூரத்தையும் காண்க.

31. (i) OABC எனும் நான்முகி யொன்றில் A_1, B_1, C_1 எனும் புள்ளிகள் முறையே OA, OB, OC எனும் ஓரங்களில் அமைந்துள்ளன.

$B_1 C_1, C_1 A_1, A_1 B_1$ எனும் கோடுகள் முறையே BC, CA, AB எனும் ஓரங்களை L, M, N இல் சந்திக்கின்றன.

L, M, N ஒரே கோட்டுப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

- (ii) VABCD எனும் கூம்பகமொன்றின் அடி ABCD ஆனது $2a$ எனும் பக்கம் கொண்ட சதுரமாகும்.

சாய்வோரங்கள் ஒவ்வொன்றும் b நீளமுடையது.

VAB, VAD எனும் தளங்களுக்கிடையிலான இருமுகிக்

$$\text{கோணம் } \theta \text{ ஆனது } \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

இதைத் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

- (iii) மேற் குறிக்கப்பட்ட கூம்பகத்தின் கனவளவு V ஆகவும் பக்க முகங்கள் ஒவ்வொன்றின் பரப்பளவு s ஆகவும் உள்ளன.

VBC எனும் பக்கமுகம் அமைந்துள்ள தளத்திலிருந்து A இல்

தூரம் d ஆனது $\frac{3V}{2s}$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

$$d = \frac{2a \sqrt{(b^2 - 2a^2)}}{\sqrt{b^2 - a^2}} \text{ என்பதை உய்த்தறிக்க.}$$

32. VABCD எனும் கூம்பகத்தின் அடியான ABCD ஒரு சதுரமாகவும் V ஆகும் அடியின் மையம் O இனூடாக வரையப் பட்ட செங்குத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகவும் உள்ளன.

$AB = x$; $VA = y$ பின்வருவன வற்றை (நிறுவுக) காண்க.

- VA க்கும் அடி ABCD க்கும் இடையிலுள்ள கோணம்.
- முகங்களை VAB க்கும் VAD க்கும் இடையிலுள்ள கோணம்
- A இல் இருந்து முகம் VBC இற்கான செங்குத்தின் உயரம்

அலகு 2

தள கேத்திர கணிதம்

(20 வரை பக்கம் 66)

21. ABC என்னும் முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களான BC, CA, AB என்பனவற்றை ஒரு குறுக்கோடி முறையே D, E, F எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

P, Q, R, S என்பன நான்முகியொன்றின் உச்சிகளாகும். இவ்வச்சிகளுக்கு எதிரேயுள்ள நான்முகியின் முகங்களின் மையப் போலிகள் முறையே G_1, G_2, G_3, G_4 ஆகும். P, Q, G_1 ஆகிய வற்றிலுடாக நான்முகியின் தளவெட்டிதான்

பொருத்தமான முக்கோணிகளுக்கும் குறுக்கோடிகளுக்கும் மேலே யுள்ள தேற்றத்தைப் பிரயோகித்து அல்லது வேறுவிதமாக.

$$PG_1, QG_2 \text{ என்பன } \frac{PG}{GG_1} = \frac{QG}{GG_2} = \frac{3}{1} \text{ ஆகுமாறு}$$

G எனும்புள்ளியில் இடைவெட்டுமென நிறுவுக.

RG_3, SG_4 என்பனவும் G யுடாகச் செல்லுமென உய்த்திக

22. A, B, C, D என்பன உச்சிகளாயுள்ள நான்முகியின் ABCD யும் $AC \perp BD$ யும் ஆகும்.

இந்நான்முகியில் எதிரான ஓரங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் முற்றுக்கோடுகளும் சமநீளமுடையன என நிறுவுக.

$AD \perp BC$ ஆகும் என்பதை உய்த்திக.

ABCD என்னும் நான்முகியொன்றில் BCD என்பது பக்கம் a யையுடைய ஒரு சமபக்க முக்கோணி ஆகவும்

$AB=AC=AD=2a$ ஆகவுமுள்ளன. AB, CD என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆவின் PQ லின் நீளத்தைக்

காண்க, PQ ஆனது முகம் BCD யுடன் கோணம் $1 - \frac{1}{5}$

எனுகி கோணத்தை அமைக்கின்றதெனக் காட்டுக.

23. (i) D, E, F என்னும் புள்ளிகள் முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களான BC, CA, AB ஆகியவற்றில் முறையே அமைந்துள்ளன.

AD, BE, CF ஆகியன P யீற் சந்திக்குமாயின்.

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BP}{BE} + \frac{CP}{CF} = 2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(ii) ABC என்னும் முக்கோணியின் உள் மையம் I யும் AB, AC எனும் பக்கங்களை வெளியிலே தொடுகின்ற வெளிவட்டத்தின் மையம் J யும் ஆகும்.

AIJ எனும் நேர்கோடு முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தை P யிலே சந்திக்கின்றது.

P ஐ மையமாகவும் P J ஐ ஆரைபாகவும் கொண்ட வட்டமானது B, I, C என்னும் புள்ளிகளுடாகச் செங்கின்றதெனக் காட்டுக.

24. ABC என்பது ஒரு முக்கோணியாகும். X, Y, Z என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகியவற்றின் மீதுள்ள புள்ளிகளாகும்.

AX, BY, CZ ஆகியன ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமாயின்

$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = 1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

POPS என்பது ஒரு வட்ட சூழ்பக்கலாகும்.

QR, PS ஆகியன V யிலும், PR, QR ஆகியன W யிலும் சந்திக்கின்றன.

VW ஆனது PQ வை இரு கூறிடுகிறதெனின், SR, ஆனது PQ யீற் குச் சமாந்தரம் எனவும் RQ = PS எனவும் காட்டுக.

25. P என்பது ABC எனும் முக்கோணவொன்றின் சுற்றுவட்டத்தின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாயின், P யிலிருந்து முக்கோணியின் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்களின் அடிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் (P யின் பாதக் கோட்டில்) கிடக்குமென நிறுவுக.

AQ ஆனது P யின் பாதக் கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கத் தக்கதாக, Q என்பது சுற்றுவட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாயின் PQ ஆனது BC யிற்குச் செங்குத்தாகுமென நிறுவுக.

26. A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து CD என்னும் நேர்கோட்டிற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துக்களின் அடிகள் முறையே M, N ஆகும்,

A, B, C, D ஆகியன ஒரு தளப்புள்ளிகளாகும்.

அப்போது M N ஆனது CD மீது AB இன் எறியமாகும்.

வழமையான குறி வழக்கைப் பாலித்து.

(AB) (AB மீது CD இன் எறியம்) = (CD மீது AB இன் எறியம்) (CD) எனக் காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC இன் உட்புறத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி O லிலிருந்து அம்முக்கோணியின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் மீதுள்ள செங்குத்துக்களின் அடிகள் முறையே X, Y, Z ஆகும்.

வட்டம் XYZ ஆனது BC, CA, AB ஆகியவற்றை முறையே X_1, Y_1, Z_1 ஆகியவற்றில் மீண்டும் வெட்டுகிறதென்க.

(BC) (XX) = 2 (PO மீது BC இன் எறியம்) (PO) எனக் காட்டுக. இங்கு P ஆனது அவ்வட்டத்தில் மையமாகும்.

(GA) ($Y_1 Y$) என்பதற்கும் (AB) ($Z_1 Z$) என்பதற்கும் இதே மாதிரியான கோவைகளை எழுதுக.

(BC) ($X_1 X$) + (CA) ($Y_1 Y$) + (AB) ($Z_1 Z$) = 0 என்பதை உய்த்தறிக.

27. முக்கோணி ABC இல் கோடுகள் BH, CH என்பன முறையே BC, CA, AB எனும் பக்கங்களை L, M, N இல் இடைவெட்டுகின்றன.

இங்கு H நிமிர்மையம் D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் x, y, z என்பன முறையே AH, BH, CH என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை DX ஐ விட்டமாக வுடைய வட்டம் E, F, L ஊடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.

இதிலிருந்தோ வேறு வழியாகவோ D, E, F, L, M, N X, Y, Z எனும் ஒன்பது புள்ளிகளினூடாகவும் ஒரு வட்டம் வரையலாம் எனவும், அதன் மையம் OH ஐ இரு கூறிலும் எனவும் நிறுவுக.

இங்கு O முக்கோணி ABC இன் சுற்று மையம் ஆகும்.

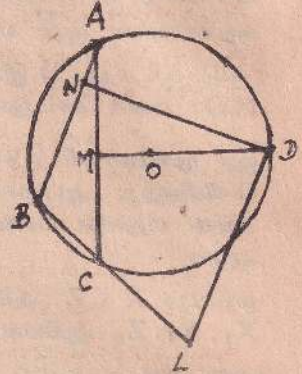
முக்கோணி ABC இன் சுற்றுவட்டத்தை நீட்டப்பட்ட AL, P யில் சந்திக்கிறது எனவும், OH இல் நடுப்புள்ளி R எனவும் கொள்க.

28. முக்கோணி ABC யின் சுற்றுவட்டத்தின் (மையம் O) மீது D ஒரு புள்ளியாகும். D யிலிருந்து BC, CA, AB எனும் பக்கங்களுக்கு வரையும் செங்குத்துக்களின் அடிகள் முறையே L, M, N ஆகும்.

(1) L, M, N என்பன ஒரு நேர் கோட்டிலிருக்கும்.

(2) $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$

(3) $AB \cdot CD = 2 \cdot OA \cdot LM$
 $BC \cdot AD = 2 \cdot OA \cdot MN$
 $AC \cdot BD = 2 \cdot OA \cdot LN$
 எனக் காட்டுக.



(4) இதிலிருந்து $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$ ஆகுமென உய்த்தறிக.

29. முக்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளுக்கு ஊடாகச் செல்லும் மூன்று நேர்கோடுகளின் சந்திப்பைக் கூறும் சேவானின் தேற்றத்தைக் கூறுக. இதேதேற்றத்தின் மாறுநிலையையும் கூறுக.

ABC எனும் முக்கோணியின் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை ஊடாட்டம் முறையே புள்ளிகள் D இலும் D' இலும், E யிலும் E' இலும், F இலும் F' இலும் ஊடவெட்டுகிறது.

AD, BE, CF ஆகியவை ஒரு புள்ளியிற் சந்தித்தால் AD', BE', CF' ஆகியவையும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென நிறுவுக.

PQR எனும் முக்கோணியின் QR, RP, PQ ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே L, M, N ஆகும்.

L, M, N ஆகியவற்றின் ஊடாகச் செல்லும் வட்டம் QR ஐ மீண்டும் L' இல் சந்திக்கிறது.

(அ) PL, QM, RN ஆகியவை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என்றும்

(ஆ) கோணம் PL'Q ஒரு செங்கோணம் என்றும் நிறுவுக.

முக்கோணியொன்றின் மூன்று குத்துயரங்களும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமென உய்த்தறிக.

30. ஒரு வட்டத்தின் நான்கு மூலங்களில் அவ்வட்டத்தின் மையத்தே அமைக்கப்படும் கோணமானது ஒத்த வில்லிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலே அந்நான்கு மூலங்களும் அமைக்கப்படும் கோணத்தின் இரு மடங்காடுமென நிறுவுக.

பின்வருவனவற்றை உய்த்தறிக.

(a) வட்டமொன்றின் ஒரே துண்டத்தில் அமைந்துள்ள கோணங்கள் சமனாகும்.

(b) வட்ட நூற்பக்கவொன்றின் எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்பு கோணங்களாகும்.

இரு வட்டங்கள் Aயிலும் Bயிலும் இடைவெட்டுகின்றன:

A ஊடானவொரு நேர்கோடு அவ்விரு வட்டங்களை மீண்டும் C இலும் D இலும் வெட்டுகின்றது.

Aயிற் கூடாக அவ்விரு வட்டங்களிலும் அமையும் இரு நாண்டுகளையும் AB இற்குச் செங்குத்தாக வரைவதன் மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ $BC : BD =$ வட்டம் ABC இன் விட்டம் : வட்டம் ABD இன் விட்டம் என நிறுவுக.

நீட்டப்பட்ட CB ஆனது வட்டம் ABD ஐ மீண்டும் E இற் சந்திப்பின் $AB \cdot CD = BC \cdot DE$ என நிறுவுக.

31. (i) முக்கோணியொன்றின் ஒரு கோணத்தின் உள்ளிரு கூறுக்கி ஆனது எதிர்ப்பக்கத்தை $\frac{1}{2}$ றய இரு பக்கங்களின் விவீதத்தில் பிரிக்கிறது எனக் காட்டுக.

(ii) மூன்று புள்ளிகள் முக்கோணி யொன்றின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் (அல்லது நீட்டிய பக்கத்திலும்) ஒரு புள்ளி அமையும் வண்ணம் ஒரே கோட்டில் இருப்பதற்கான மெனிலோசின் தேற்றத்தை நிறுவுக.

முக்கோணி யொன்றின் உச்சிகளான A, B, C என்பவற்றிலுள்ள உள் கோணங்களின் இரு கூறுக்கிகள், எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே D, E, F இல் சந்திக்கின்றன.

FE உம், BC உம் D¹ இல் சந்திக்கின்றன.

AD¹ ஆனது AD இற்குச் செங்குத்தாக அமையுமென நிறுவுக.

32. (i) C_1, C_2 எனும் சமனான வட்டங்கள் A, B இல் இடை வெட்டுகின்றன.

C_2 இன் B இல் உள்ள தொடலி C_1 ஐ P இல் இடை வெட்டுகிறது.

Q, R எனும் புள்ளிகள் B உடன் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையுமாறு முறையே C_1, C_2 இல் உள்ளன.

PQ = BR எனக் காட்டுக.

(ii) ABC எனும் முக்கோணியின் பக்கங்களான BC, CA இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே M, N ஆகும்,

AM, BN என்பன ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாய் இருப்பின் முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவானது $\frac{2}{3}$ AM, BN இனார் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

(iii) நேர்கோடொன்று ABCD எனும் நாற்பக்கலொன்றின் பக்கங்களான AB, BC, CD, DA என்பவற்றை முறையே P, Q, R, S எனும் புள்ளியில் இடைவெட்டுகிறது,

மெனிலோசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது

$$\text{வேறு வழியாகவோ} \quad \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

என நிறுவுக.

33. $\frac{BP}{PC} = \lambda, \quad \frac{CQ}{QA} = \mu, \quad \frac{AR}{RB} = \nu$ எனினும் வண்

ணம் P, Q, R ஆன புள்ளிகள் முறையே முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களான BC, CA, AB இல் அமைந்துள்ளன.

$$\frac{\Delta PQR}{\Delta ABC} = \frac{1 + \lambda \mu \nu}{(1 + \lambda)(1 + \mu)(1 + \nu)} \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவகையிலோ மெனிலோஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையை நிறுவுக.

L, M, N ஆகியன ஒரு வட்டத்திலே உள்ள மூன்று தெளிவான புள்ளிகளாகும்.

L, M, N ஆகியவற்றில் உள்ள வட்டத்தின் தொடரிகள் MN, NL, LM ஆகிய கோடுகளை முறையே x, y, z இல் சந்திக்கின்றன.

y, y, z ஆகியன ஒரே கோட்டும் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

84. (1) O என்பது முக்கோணி ABC இனுள் அமைந்துள்ள யாதா பீனுமொரு புள்ளியாகும்.

AO, BO, CO என்ன BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களை முறையே L, M, N ஆகியவற்றில் சந்திக்கின்றன.

$$\frac{AO}{AL} + \frac{BO}{BM} + \frac{CO}{CN} = 2 \text{ என நிறுவுக.}$$

(2) மாறுகின்ற இரு புள்ளிகளான B உம் C உம் முறையே இரு வேறு வேறு கோடுகளான AX இலும், AY இலும் AB + AC ஒருமையாக அமையும் வண்ணம் எடுக்கப்பட்டுள்ளன.

A, B, C இன் ஊடாக வட்டம் எப்போதும் கோணம் XAY இனது இரு கூறுகளில் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியின் ஊடாகச் செல்லும் என நிறுவுக.

பின்னிணைப்பு:

திரிகோண கணிதம்

அலகு 1

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

(66 வரை பக்கம் 84)

67. (1) 6 தான் $2\theta = 3$ தான் $\theta - 3$ கோதா $\theta = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$(2) \text{சைன் } 2x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ கோசை } 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ என நிறுவுக}$$

இங்கு $t = \text{தான் } x$

சைன் $\theta +$ சைன் $\phi = a$ கோசை $\theta +$ கோசை $\phi = b$ எனின், கோசை $(\theta + \phi)$, கோசை $(\theta - \phi)$ என்பவற்றின் பெறுமதி களை a, b யின் உறுப்புக்களில் காண்க.

$$\text{தான் } \theta + \text{தான் } \phi = \frac{8ab}{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2} \text{ எனக் கற்றுக் கொடுக்க.}$$

68. வழமையான குறியீடுகளுடன் ஒரு முக்கோணி ABC இல்

$$\frac{a}{\text{சைன் } A} = \frac{b}{\text{சைன் } B} = \frac{c}{\text{சைன் } C} \text{ என நிறுவி.}$$

$$(1) a = (b - c) \text{ கோசை } \frac{A}{2} \text{ கோசை } \frac{B - C}{2}$$

$$(2) \text{கோதா } \frac{B - C}{2} + \frac{b \times c}{b - c} \text{ தான் } \frac{A}{2} \text{ எனப் பெறுக}$$

69. (1) தான் $3\theta = 1$ எனின் தான் θ என்பது $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தி செய்யும் எனக் காட்டுக.

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்த்து இம் மூன்று மூலகங்களுக்கும் மூலத θ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

- (2) கோசை $x +$ கோசை $y = \frac{1}{2}$ எனின்
 சைன் $x +$ சைன் $y = \frac{1}{2}$ எனின்
 தான் $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

இச் சமன்பாடுகளைத் திருப்தி செய்யும் x இனதும் y இனதும் இயல்தகு பெறுமானங்களையும் காண்க.

70. ABC என்பது கூர்ங்கோண முக்கோணியாகும்.

உச்சிகள் A, B, C இல் இருந்து எதிர்ப்பக்கங்களை முறையே D, E, F இற் சந்திக்கும் வண்ணம் செங்குத்துக்கள் வரையப் படுகின்றன.

$$(1) \frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{r} \text{ இங்கு } r \text{ முக்கோணி}$$

ABC இன் உள்வட்ட ஆரை ஆகும்.

$$(2) \frac{\text{கோசை } A}{AD} + \frac{\text{கோசை } B}{BE} + \frac{\text{கோசை } C}{CF} = \frac{1}{R}$$

இங்கு R முக்கோணி ABC இன் சுற்று வட்ட ஆரை ஆகும்.

$$(3) \text{ முக்கோணி } D E F \text{ இன் பரப்பளவு } \frac{1}{4} R^2$$

சைன் 2A, சைன் 2B, சைன் 2C எனக் காட்டுக.

71. (i) a, b, c மெய்யாக இருக்கும் போது $C^2 \leq a^2 + b^2$ என இருப்பின் a சைன் x + b கோசை x = c எனும் சமன்பாடு மெய்த் தீர்வுகள் உடையது என்று நிறுவுக.

பின்வரும் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிற்கும் பொதுத் தீர்வைக் காண்க:

(அ) $\sqrt{3}$ கோசை x - சைன் x = $\sqrt{2}$

(ஆ) கோசை x + $\sqrt{3}$ சைன் x = 2

- (ii) கோசை 7x - $\sqrt{3}$ கோசை 3x + கோசை x = 0 எனும் சமன்பாட்டில் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(iii) $\theta_1 = \text{தான்}^{-1}(\frac{1}{3})$, $\theta_2 = \text{தான்}^{-1}(\frac{1}{2})$

$\theta_3 = \text{தான்}^{-1}(\frac{2}{9})$ எனின்

$0 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < \frac{3\pi}{4}$ என நிறுவுக?

இதிலிருந்து $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

72. வழமையான குறிப்பீட்டுக்களைக் கொண்டு முக்கோணம் ABC இல் $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ என நிறுவுக.

P ஐயும், Q ஐயும் மையங்களாகவும் p ஐயும் q ஐயும் ($\neq P$) முறையே ஆரைகளாகவும் கொண்ட இரண்டு ஒருதள வட்டங்கள் X இலும் Y இலும் இடைவெட்டுகின்றன.

கோணம் PXQ = α ஆகவும், வட்டத்தின் இரு பொதுத் தொடிகளும் ஒன்றோடொன்று அமைக்கும் கோணம் θ ஆகவும் இருப்பின் $(p-q)^2 \cos^2 \theta/2 = 4pq \sin^2 \alpha/2$ என நிறுவுக.

இரு வட்டங்களும் திமிர் கோணமாக இடைவெட்டினால் கோசை θ இனது பெறுமானத்தை p இலும் q இலும் காண்க.

73. (i) $\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos (n-1)\theta - \cos (n-2)\theta$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\cos 4\theta$ வை $\cos \theta$ இல் எடுத்துரைக்க:

(ii) $\cot \alpha \cot \beta = k$ எனில்,

$(k+1) \cos (\alpha + \beta) = (k-1) \cos (\alpha - \beta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\cot \theta \cot \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

74. (i) α என்பது 2π இன் இரு மடக்கிற்று எனவும்

தான் $\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ எனவும் கொண்டு

தான் $\beta = \alpha$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\tan^{-1}(x) = 2 \tan^{-1}(\tan^{-1} x)$ என நிறுவுக.

(ii) (a) R என்பது ஒரு நேர் ஒருமையாய் இருக்க α என்பது ஒரு உரங்கோணமாகவும் இருக்க R சைன் $(\theta + \alpha)$ எனும் வடிவத்திலே சமன்பாட்டின் இடக்கைப் பக்கத்தை எடுத்துரைப்பதில் மூலமாகவும்.

(b) கோசை θ வையும், சைன் θ வையும் தான் $\theta/2$ இல் எடுத்துரைப்பதில் மூலமாகவும் 7 சைன் $\theta + \cos \theta = 5$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

75. (i) $(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^3$ என்பதை விரிவுபடுத்தியோ வேறு முறையாலோ $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta$ என்பதை $\cos 4\theta$ ஆகிய உறுப்பில் எழுதி அதிலிருந்து

$\cos^6 \theta + \sin^6 \theta = \frac{1}{2} \cos 4\theta + \frac{3}{4}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ii) $\tan 2\alpha + \tan 2\beta = 0$ ஆயின் $\alpha + \beta$ ஆனது $\pi/2$ இன் முழுவெண் மடங்காருமென நிறுவுக.

$\tan \theta + \tan \phi + 3 = 0$, $\tan 2\theta + \tan 2\phi = 0$
எனும் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை திருப்தியாக்கும்.

ஆனால் 0° இற்கும் 180° இற்கும் இடையில் திட்டமாய் அமையும் எல்லாக் கோணச் சோடிகள் θ , ϕ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(iii) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{x}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

76. முக்கோணி ABC இற்குரிய வழமையான குறியீடுகளைக் கொண்டு

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ என்பவற்றை நிறுவுக.}$$

முக்கோணி ABC இன் கோணம் A இன் உள்ளிரு கூறுக்கியானது BC ஐ D இல் சந்திக்கிறது.

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \text{ ஆகுமென நிறுவுக.}$$

$c > b$ ஆயிருக்க கோணம் A இன் வெளியிரு கூறுக்கியானது BC ஐ E இல் சந்திக்குமாயின் AE யிற்குரிய இயல்பொத்த கோவை யொன்றைப் பெறுக.

கோணம் DAE இன் உள்ளிரு கூறுக்கியானது DE ஐ x இல் சந்திக்குமாயின்,

$$AX = \frac{\sqrt{2} bc \sin A}{c \left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \right) + b \left(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)}$$

ஆகுமெனக் காட்டுக.

$b = c$ ஆயின் AE, AX ஆகியவைபற்றி நீர் என்ன கூறமுடியும்.

77. வழமையான குறியீடுகளைக் கொண்டு யாதும்பொரு முக்கோணி

$$ABC \text{ இல் } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

(i) $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C$
எனவும்.

(ii) $a^2 + c^2 = 3b^2$ எனின் $\cot A + \cot C = 3 \cot B$
எனவும் காட்டுக.

78. (i) $\sin x + \cos y = 1$

$$\cos 2x - \cos 2y = 1$$

எனும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(ii) $\cot^{-1} \left(\frac{xy + 1}{x - y} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{yz + 1}{y - z} \right) +$

$$\cot^{-1} \left(\frac{2x + 1}{2 - x} \right) = n\pi \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இங்கு n ஆனது ஒரு முழு எண் ஆகும்.

79. கோசை⁻¹ x + கோசை⁻¹ y + கோசை⁻¹ z = π எனில்
 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ ஆகும் என்று காட்டுக.

பொருத்தமான வகையில் x, y, z ஆகியவைகளை தெரிவு செய்து
 $A + B + C = \pi$ எனின்,

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} +$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 1 \text{ என்று உய்த்தறிக.}$$

$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ என்பது உச்சிகள் வட்டத்தில் அமைந்துள்ளதும்

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = 2a,$$

$$A_3 A_4 = A_4 A_5 = 2b,$$

$$A_5 A_6 = A_6 A_1 = 2c.$$

எனும் வகையில் அமைந்துள்ளதுமான அறு கோணி ஆகும்.

இவ் வட்டத்தின் ஆரையான r என்பது $r^3 - (a^2 + b^2 + c^2)r - 2abc = 0$ என்பதால் தரப்படுகிறது என்று காட்டுக.

80. x இன் எல்லா மெய்யான பெறுமானங்களுக்கும்

a கோசை² x + $2b$ சைன் x கோசை x + c சைன்² x எனும்

கோவையானது $\frac{a+c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$ என்பதற்கும்

$\frac{a+c}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$ என்பதற்கும்

இடையில் அமைகிறது என்று நிறுவுக.

மெய்யான தீர்வுகளை ஏற்றுக்கொள்ளும் $F(x) =$

9 கோசை² x + 24 சைன் x கோசை x 16 சைன்² x என்பதின் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

9 கோசை² x + 24 சைன் x கோசை x + 16 சைன்² x -

$\frac{25}{4} = 0$ எனும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்குக;

81. (i) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ என நிறுவுக.

$\theta = 18^\circ$ எனின் $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ என்றும் $\sin 18^\circ$ என்பது $4x^2 + 2x - 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் என்றும் நிறுவுக.

இதிலிருந்து $\sin 18^\circ \cos 18^\circ$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $t = \tan \frac{\theta}{2}$ என அமையின் $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ என்றும்

$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ என்றும் நிறுவுக.

$|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ என அமைந்துள்ள $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ எனும் சமன்பாட்டை மேலேயுள்ள பிரதியீட்டைக் கொண்டு எவ்வாறு தீர்க்கலாமெனக் காட்டுக.

$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ஆகியன இந்தச் சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகள் எனின்,

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a} \text{ எனக் காட்டி,}$$

$$\frac{\cos \frac{(\alpha - \beta)}{2}}{\cos \frac{(\alpha + \beta)}{2}} = \frac{c}{a} \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

82. வழமைமான குறியீடுகளுடன் ஒரு முக்கோணியில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ என்பதை}$$

1. கரங்கோண முக்கோணி
2. செங்கோண முக்கோணி

8. விரிகோண முக்கோணி ஆகிய வெவ்வேறுளவற்றுக்கு நிறுவல்:
எந்தவொரு முக்கோணி ABC இற்கும்

$$(i) \quad b \sin \left(\frac{B}{2} + C \right) = (c+a) \sin \frac{B}{2} \text{ எனவும்,}$$

$$(ii) \quad \frac{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{B}{2}} = \frac{2b}{c+a-b} \text{ எனவும்.}$$

(iii) a, b, c ஆகியன கூட்டல் விருத்தியில் அமைந்தால்

$$\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2} \text{ ஆகியவையும் இவ்வாறு}$$

அமையும் எனக் காட்டுக.

பின்னிணைப்பு விடைகள்

அலகு 1

வகையீடு

$$55. \frac{d}{dx} \tan^{-1} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \log \left| \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \right| = 2 \sec^2 x$$

$$56. (i) \frac{d}{dx} \sin^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) = \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$(cc) (x^2+1)^{\frac{3}{2}} 6 \sin^2 2x \cos 2x + \frac{x \sin^3 2x}{(x^2+1)^{1/2}}$$

$$(\beta) 2 \sin \left[a \sin^{-1} \left(\frac{x}{b} \right) \right] \cdot \frac{a}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$(ii) \frac{2}{x-a} \log \left| x-a \right|$$

$$57. (i) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 1, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = 9$$

$$58. (i) \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(அ) \operatorname{Co} \operatorname{Sec}^2 x \left[\sin x \operatorname{Cot}^{-1} x \right]$$

$$\left[\frac{\sin x}{(1+x^2)} - \operatorname{Cot}^{-1} x \cos x \right]$$

$$(2) \frac{\tan x}{1 + (\log \cos x)^2}$$

$$59. (ii) \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2t} (t^2 - 1), \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 3t$$

(5, -2) (3) (5, 2) answer

$$60. (ii) \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{2 \log |\tan^{-1} x|}{\tan^{-1} x (1+x^2)}$$

$$61. (i) \operatorname{Lt} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (a) 2 : (b) 1$$

$$(ii) I_4 = \frac{24}{85} (1 - e^{-\pi})$$

$$(iii) (2) a/2$$

$$(2) (i) \frac{2}{(1+x^2)} \quad (ii) \frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$(3) \sec x$$

$$62. (i) (1) 2e^{x^2} (x \sin 2x + \cos 2x)$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sin^{-1}(2x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$$(3) \sec x (\sec x + \tan x)$$

$$\left\{ 1 + 2 \log |\sec x + \tan x| \right\}$$

அலகு 2

உயர்வு இழிவு

63. (i) $F'(x_0) = 0$ உம் $F'(x_0 - \delta) < 0$ அல்லது

$F'(x_0 + \delta) > 0$, $\delta > 0$, δ சிறியது

(ii) $F'(x_0) = 0$ உம் $F'(x_0 - \delta) > 0$ அல்லது

$F'(x_0 + \delta) < 0$

$\delta > 0$ δ சிறியது

$$1 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1-9t^2)}{6t}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\infty < t < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad x \rightarrow a \quad y \rightarrow 0 \quad \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad a \rightarrow \frac{a}{3} \quad 0 \rightarrow \frac{-2a}{9} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{இழிவு}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{a}{3} \rightarrow a \quad \frac{2a}{9} \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} < t < +\infty \quad a \rightarrow \infty \quad 0 \rightarrow -\infty \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{உயர்வு}$$

64. $\frac{(9t^2-1)}{6t}$, $\frac{-(9t^2-1)}{36at^3}$, $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{9}\right)$, $\left(\frac{2a}{3}, \frac{-2a}{9}\right)$

65. (i) $(4\sqrt{3}, \frac{2}{3})$, $(-4\sqrt{3}, -\frac{2}{3})$

(ii) $y - e^\theta \sin \theta = \left[\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \right] x - e^\theta \cos \theta$

அலகு 3

தொகையீடு

$$72: \frac{\alpha (k - \delta)}{(\alpha - \beta) (k - \alpha) (\delta - \alpha)} + \frac{\beta}{(\alpha - \beta)^2}$$

$$\log \left[\frac{(k - \beta) (\delta - \alpha)}{(\delta - \beta) (k - \alpha)} \right]$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{8} \log 3$$

73. (i) 2, 1, 8

(ii) $(1 - 3r)$, $-(3r + 4)$, $6(r + 1)$

74. $\frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$, 0.6733, 0.0002

75: $\lambda = 2$, $\mu = -2$, $\log(2) + \pi - 2$

$$1/6 (\pi^2 - 2)$$

3.1416

76: (i) $\frac{\cos x \cdot \sec^2 x/2}{2 \tan x/2} - \sin x \log \left(\tan \frac{x}{2} \right)$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{4}{\sqrt[3]{s}} \right|$$

(ii) $(\sqrt{s} - 1)$, (iii) $\frac{1}{2} \log \left| \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2}$

78. (ii) 0.8358

79. (ii) $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + \log \left\{ \frac{1 + e^2}{e(1+e)} \right\}$

80. (i) $1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^3}{3!} + \frac{80x^4}{4!} + \frac{512x^5}{5!} + \dots$

(ii) $\frac{1}{2(1-x)^3} + \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{1}{8(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)}$

$(n+1)^2, (n+1)(n+2)$

81. $I = \frac{\pi}{2a(a+b)}, J = \frac{\pi}{2b(a+b)}$

$\frac{\pi(a-b)}{2(a+b)}$

82. $f(x) = \frac{1}{6} + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2!} - \frac{(a+b)x^3}{a \cdot 3!}$

$+ \frac{(2a+b)x^4}{4!} + \frac{(3a+b)(a+b)}{5!} x^5 + \dots$

$a = \frac{7}{9}, b = \frac{-2}{9}, \frac{7}{27}, \frac{35}{27 \times 36}$

83. (i) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(x-1)} + \frac{x+1}{x^2+1} \right\} ;$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{k^2+1}{k^2-2k+1} \right| - \frac{1}{4(k-1)} + \frac{1}{2} \tan^{-1} k$$

$$- \frac{1}{4(k^2+1)} - \frac{1}{4} \log \left| \frac{5}{1} \right| + \frac{1}{4}$$

$$- \frac{1}{2} \tan^{-1} (2) + \frac{1}{20} ;$$

$$\frac{6}{20} - \frac{1}{4} \log 5 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \tan^{-1} (2)$$

84. (ii) 10.00999

(iii) 184

அலகு 4

மர்ப்பும் கனவளவும்

23. (i) $\frac{4}{3} \pi a^2 b$

(ii) $\frac{ab}{12} (3\pi - 4)$

24. $v = 2\pi \log_e(2) - \pi/2$

25. $v = \frac{44\pi}{15}$

26. (i) $(1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$ | $v = \pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{2}{5} \right]$

27. $V = \pi \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} 2 - 1/5 \right)$

28. $S = 2(\pi - 2/3)$

$$V = 2 \left\{ \pi - \int_0^2 \left[\frac{8-y^2}{4} \right] dy - \int_0^2 \left[\frac{2y^2}{4+y^2} \right] dy \right\}$$

29. (i) $S = \pi$, $V = \left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right] 2\pi$

(ii) $V = 2\pi^2$

30. $S = 2(\pi - 2/3)$

அங்கு 1

தூண்ம கேத்திர கணிதம்

$$28. \cos^{-1} \left[\frac{16}{25} \right]$$

$$29. (அ) \cos^{-1} \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

$$(ஆ) \cos^{-1} \left[\frac{2}{\sqrt{13}} \right]$$

$$30. V = \frac{1}{12} s^2 \sqrt{3a^2 - s^2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} - s^2}}$$

$$ON = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$$32. (i) \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{2y}} ;$$

$$(ii) \cos^{-1} \left[\frac{x^2}{4y^2 - x^2} \right]$$

$$(iii) h = x \sqrt{\frac{2(2y^2 - x^2)}{4y^2 - x^2}}$$

திரிகோண கணிதம்

67. $\theta = \pm \tan n \pi \pm \pi/6,$

$$\text{Cos } (\theta + \phi) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

$$\text{Cos } (\theta - \phi) = \frac{a^2 - b^2 - 2}{2}$$

69. $\theta = \frac{n \pi}{3} + \frac{\pi}{12} : \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}$

$$\frac{x+y}{2} = n \pi + \alpha : \frac{x-y}{2} = 2m \pi \pm \beta (n)$$

இங்கு $\beta (n) = \text{Cos}^{-1} \left[(-1)^n \frac{5}{24} \right]$

$m = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \dots \dots$

71. (அ) $x = 2n \pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ இங்கு

$n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots \dots$

(ஆ) $x = n \pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ இங்கு

$n = 0 \pm 1, \pm 2 \dots \dots \dots$

(ii) $x = \frac{2}{3} n \pi \pm \frac{\pi}{6} ;$

$$x = \frac{k \pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$$

$$72. \cos \theta = \frac{6pq - (p^2 + q^2)}{(p + q)^2}$$

$$73. (i) \cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$$

$$(ii) \theta = \frac{1}{2} (2n\pi \pm \pi) + \pi/6$$

$$74. (ii) (a) \sin(\theta + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(b) \theta = 2n\pi + 2\beta, \quad \theta = 2n\pi + 2\gamma$$

$$\text{இங்கு } \beta = \tan^{-1}(\frac{1}{2}), \quad \gamma = \tan^{-1}(2)$$

$$75. (i) \cos^6 \theta + \sin^4 \theta = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\theta,$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} \quad (\alpha = \cos^{-1} \frac{3}{5})$$

$$(ii) \tan \theta = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ எனில் } \theta = \theta_1.$$

$$\phi = \frac{3\pi}{2} - \theta_1$$

$$\tan \theta = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ எனில், } \theta = \theta_2$$

$$\phi = \frac{3\pi}{2} - \theta_2$$

$$(iii) x = +1$$

$$76. AE = \frac{2bc}{c-b} \sin \frac{A}{2}$$

AE முடிவிலி நீளமுடையது. $AX = \sqrt{2bc} \cos \frac{A}{2}$

$$78. (i) x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, y = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

இங்கு $m, n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots\dots$

$$80. 0 \leq k \leq 25$$

அதிகபடிய பெறுமானம் = 25

குறைந்த பெறுமானம் = 0

$$2x = n\pi + (-1)^n \left[-\frac{\pi}{6} \right] - \alpha$$

$$81. \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{8}$$

அச்சுப் பதிப்பு
கண்ணா அச்சகம்,
யாழ்ப்பாணம்.

M