Miss.
G.C.E (A/L)
1968 — 1970

P. Vakeesha
1996 A/L

இடைத்தரப் பொறியியல்

ஆக்கியோன் :

டி. ஹம்பிறி, B.A., B.Sc.

முன்னாள் கல்வி இயக்குநர், பன்னுண்கலைக்கழகம், லண்டன், W. 1.

(கணித, பௌதிகத்துறையின் முன்னாள் தலைவர்.)

* *

நிலையியலும் நீர்நிலையியலும்

(படங்களுடன்)

அரசகரும மொழித் திணைக்கள வெளியீட்டுப் பிரிவினருக்காக
இலங்கை அரசாங்க அச்சகத்திற் பதிப்பிக்கப்பட்டது.

முதற் பதிப்பு 1965

INTERMEDIATE MECHANICS

VOLUME II—STATICS AND HYDROSTATICS

by

D. HUMPHREY

Copyright by

LONGMANS, GREEN AND CO. LTD.

Translated and Published in Ceylon

by

The Official Language Department (Publications Section)

by arrangement with

LONGMANS, GREEN AND CO. LTD.

லண்டன், வரையற்ற லொங்மன்ஸ், கிறீன் கம்பனியாரின் இசைவுடன்
அரசகரும மொழித் திணைக்கள வெளியீட்டுப் பிரிவினரால்
வெளியிடப்பெற்றது.

அறிமுகம்

இது, டி. ஹம்பிறி எழுதிய "Intermediate Mechanics" என்னும் நூலினது இரண்டாந் தொகுதியின் மொழிபெயர்ப்பாகும். இந்நூலானது, ஆரம்ப நூல்களுக்கும், பட்டப்படிப்பு மாணவர்களுக்கான பெருநூல்களுக்கு முள்ள இடைவெளியை நிரப்புதற்காகத் திட்டமிடப்பட்டது. இதில் படிமுறைக் கிரமமாகத் தரமுயர்ந்து செல்லும் பயிற்சிகள் பல உண்டு. அவை, கணிசமான அளவு சிந்தனையையும் திறமையையும் வேண்டி நிற்கும் பிரச்சினைகளைத் தீர்ப்பதில் மாணவர்க்கு அரிய பயிற்சியை அளிப்பனவாம்.

இந்நூல், கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர, சாதாரணதர) வகுப்பு மாணவர்களுக்கு உகந்ததாகும்.

இப்போது வெளிவரும் இத்தொகுதியில் நிலையியல், நீர்நிலையியல் என்னும் பாடங்கள் அடங்கியுள்ளன. இயக்கவியல் என்னும் பாடத்தை உள்ளடக்கிய முதலாந் தொகுதி எலவே வெளியிடப்பட்டுள்ளது.

நந்த தேவ விஜேசேகர,
அரசகரும மொழி அலுவல் ஆணையாளர்.

அரசகரும மொழித் திணைக்களம்,
(வெளியீட்டுப் பிரிவு)
5, த பொன்சேகா வீதி,
கொழும்பு 5.

P. Vyithan
Jaffnahindu College
Yr 13A
(A/L 93—95)

முகவுரை

"இடைத்தரப் பொறியியல்" என்னும் நூலின் இயக்கவியல் பற்றிய பகுதி எற்கெனவே வெளியிடப்பெற்றுள்ளது. நிலையியல், நீர்நிலையியல் போன்ற பாடங்களை உள்ளடக்கும் இந்நூலோடு என் முயற்சி முற்றுப் பெறுகின்றது.

கல்விப் பொதுச் சான்றிதழ், உயர்தரம், புலமைப்பரிசிற்றரம் போன்ற தேர்வுகள் வரைக்குமுள்ள தேவைகளை இவ்விரு தொகுதிகளும் பூர்த்தி செய்யுமென எதிர்பார்க்கிறேன்.

அதிகாரம் IV இல், வரைபு முறைகளை ஆன அளவிற்குக் கையாண டுள்ளேன். அதோடு, உதாரணங்களையும் வேறும் பல பயிற்சிகளையும் சேர்த்துள்ளேன்.

அதிகமான தொடக்க நூல்களிலே தவிர்க்கப்பெற்றோ, மிகச் சுருக்க மாகக் கையாளப்பெற்றோவுள்ள வளையற்றிருப்புதிறன்கள், இழையிலே தொங்கவிட்ட துணிக்கைகள் (சங்கிலியம் வரைக்கும்) போன்ற பாடங்களுக்கு என்றே அதிகாரம் VIII ஐ ஒதுக்கியுள்ளேன்.

அதிகாரம் IX இல், மாயவேலை பற்றிய ஒரு பிரிவும் பல வில்லங்கமான பயிற்சிகளும் உள்ளன. இடைத்தர நிலைக்கு வேண்டிய பாடங்களை மட்டும் பயிலும் மாணவர்கள் இவ்வதிகாரத்தைத் தவிர்க்கலாம்.

பாயி உதைப்பு, மிதப்பு என்ற இரண்டையும் பற்றியே நீர்நிலையியல் ஆய்கின்றது. இந்நூல், எதிர்பார்த்த அளவிலும் பெரிதாகவுள்ளமை யினால், தன்னீர்ப்பைக் காணுதற்குரிய பற்பல முறைகளையும் பம்பி போன்ற நடைமுறைச் சாதனங்களையும் பற்றிய விளக்கவுரைகளை வேண்டுமென்றே தவிர்த்துள்ளேன்.

நுண்கணித முறைகளைக் கையாளத்தக்க இடங்களிற் பயன்படுத்தியுள் ளேன்.

பற்பல தேர்வுகளிலுமுள்ள வினாக்களைக் கையாள அனுமதி அளித்த தற்காகக் கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக்கழக அச்சக ஆட்சிக் குழுவினர், லண்டன் பல்கலைக்கழகம், கேம்பிரிட்ஜைச் சார்ந்த சில கல்லூரிகள், ஒக்ஸ்போட், கேம்பிரிட்ஜ் பாடசாலைகளின் தேர்வுச் சபை, கூட்டுப் பல்கலைக்கழக நுழை வுத் தேர்வுச் சபை, மத்திய வெல்ஷ் சபை போன்றனவற்றிற்கு நன்றியுடையவனாக இருக்கிறேன்.

சாவைத் தாள்களைத் திருத்துங்கால், பல கருத்துக்களைத் தந்துதவிய திரு. F. J. சுவான், B.A. என்பார்க்கும் திரு. G. E. மகோன், B.Sc. என்பார்க்கும் மிகவும் கடப்பாடுடையேன்.

இந்நூலின் முன்னேற்றம் கருதி, பாடங்களில் அல்லது பயிற்சிகளில் கொண்டுவரப்படும் திருத்தங்களை நன்றியுடன் வரவேற்கிறேன்.

டி. ஹம்பிறி.

பொருளடக்கம்

அதிகாரம் I.

முன்னுரை—ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள்.

அதிகாரம் II.

சமாந்தர விசைகள்—திருப்புதிறன்கள்—இணைகள்.

அதிகாரம் III.

ஒருதள விசைகள்.

அதிகாரம் IV.

வரைபு அமைப்புக்கள்.

அதிகாரம் V.

உராய்வு.

அதிகாரம் VI.

வேலை—பொறிகள்.

அதிகாரம் VII.

புவியீர்ப்பு மையம்.

அதிகாரம் VIII.

வளையற்றிருப்புதிறன்—தொங்கற் பாலம்—சங்கிலியம்.

அதிகாரம் IX.

மாயவேலை—பலவினப் பயிற்சிகள்.

அதிகாரம் X.

பாயி அமுக்கம்—ஒரு தளப்பரப்பின் மீதான உதைப்பு.

அதிகாரம் XI.

அமுக்க மையம்.

அதிகாரம் XII.

யாதுமொரு பரப்பின் மீதுள்ள உதைப்பு.

அதிகாரம் XIII.

மிதக்கும் பொருட்களின் சமநிலை.

அதிகாரம் XIV.

வாயுக்கள்.

இந்நூலின் பயிற்சிகளிற் காணப்படும் கணக்குகளின் மூலத்தைக் குறிக்கப் பின்வரும் குறுக்கங்கள் கையாளப் பெறுகின்றன :—

B.Sc.	லண்டன் பல்கலைக்கழகம். B.Sc. தேர்வு.
C.S.	கல்லூரிப் புலமைப்பரிசில்கள். கேம்பிரிட்ஜ் பல்கலைக்கழகம்.
C.W.B.	மத்திய வெல்ஷ் சபை. உயர்தரச் சான்றிதழ்.
Ex.	ஆதாரப்படித் தேர்வு. லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.
H.C.	ஒக்ஸ்போட், கேம்பிரிட்ஜ் உயர்தரச் சான்றிதழ்.
H.S.C.	உயர் பள்ளிகள். தொகுதி C. லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.
H.S.D.	உயர் பள்ளிகள். தொகுதி D. லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.
I.A.	இடைக் கலை. லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.
I.C.	பேரரசுக் கல்லூரி. புகுமுக, புலமைப்பரிசில் தேர்வுகள்.
I.E.	இடைநிலை எந்திரவியல். லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.
I.S.	இடைநிலை விஞ்ஞானம். லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.
M.T.	கணிதத் திறைபோசு. பகுதி 1. கேம்பிரிட்ஜ்.
N.U.	கூட்டுப் பல்கலைக்கழக நுழைவுத் தேர்வுச் சபை. வட பல்கலைக் கழகங்கள். உயர்தரச் சான்றிதழ்.
Q.E.	தகுதித் தேர்வு. பொறிமுறை விஞ்ஞானத் திறைபோசு, கேம்பிரிட்ஜ்.
S.	புலமைப்பரிசில் தேர்வு. லண்டன் பல்கலைக்கழகம்.

அதிகாரம் I.

முன்னுரை — ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள்.

§1. **பொறியியல்** என்பது பொருட்களின்மீது ஏற்படும் விசைத் தாக்கத்தைப் பற்றிக் கூறும் விஞ்ஞானமாகும். இவ்விசைகளின் தூண்டுதலின்கீழ் அப்பொருள்கள் இயங்கிக் கொண்டோ ஓய்வு நிலையிலோ இருக்கலாம். இயக்கத்தைப் பற்றிய பொறியியற் பகுதி, இயங்கும் பொருட்கள் திண்மமாக இருப்பின் **இயக்கவியல்** எனவும், அப் பொருட்கள் திரவப் பொருட்களாகவோ வாயுப் பொருட்களாகவோ இருப் பின் **நீரியக்கவியல்** எனவும் கூறப்படும்.

§2. ஓய்வுநிலை பற்றிய பொறியியற் பகுதி, ஓய்விலிருக்கும் பொருட்கள் திண்மமாயின் **நிலையியல்** எனவும், அவை திரவ அல்லது வாயுப் பொருட்களாக இருப்பின் **நீர்நிலையியல்** எனவும் கூறப்படும்.

விசையானது பொருளொன்றின் ஓய்வு நிலையை அல்லது நேர்கோட்டில் அதன் சீரான இயக்கத்தை மாற்றுகின்ற அல்லது மாற்ற நாடுகின்ற யாதுமொரு தாக்கமென வழக்கமாக வரையறுக்கப்படும்.

துணிக்கை என்பது சடப்பொருளின் ஒரு பாகமாகும். எமது ஆராய்ச்சித் தேவைகளை நோக்கி, துணிக்கை ஒரு புள்ளியாற் குறிக்கப்படுமாறு, அதன் பரிமாணங்கள் கருதாது விடக்கூடியவை.

தன்னிரு புள்ளிகளின் இடைத்தூரம் மாறுததாயும், தொழிற்படும் விசைகளாற் பருமனும் வடிவமும் தாக்கப்படாததாயுமுள்ள பொருளே **விறைப்பான பொருள்** எனப்படும்.

உண்மையான திண்மப் பொருட்களெதுவும் இந்நிபந்தனையை முற்றுக நிறைவேற்றுவதில்லை. ஆனல், குறிப்பிட்டாலொழிய, திண்மப் பொருட்கள் மேற்கூறப்பெற்ற நிபந்தனையை நிறைவேற்றுகின்றனவென மேற்கொள் வோமாக (உ-ம். மீள்தன்மையிழை).

சம விசைகள்.

ஒரே துணிக்கையின்மீது முரண் திசைகளில் இரு விசைகளைப் பிர யோகிக்கும்போது, துணிக்கை ஓய்வு நிலையிலிருக்குமாயின், அவ்விசைகள் சம விசைகள் எனப்படும்.

§3. ஒரு விசையின் சிறப்பியல்புகள்.

ஒரு பொருளின்மீது ஒரு விசை செயற்படுமிடத்து, அவ்விசையை முற்றுக நிர்ணயிக்கப் பின்வரும் மூன்றும் இன்றியமையாதன :—

(1) அவ்விசையின் பிரயோகப் புள்ளி.

(2) வெளியில் அவ்விசையின் திசை.

(3) அதன் பருமன்.

ஒரு விசையின் பருமன், அவ்விசையின் விளைவினுல் அளவிடப்பட வேண்டும். இயக்கவியலில், ஒரு தந்த பொருளில் குறித்த நேரத்தில் இவ்விசை உண்டாக்கும் இயக்கத்தினுலேயே அதன் பருமன் வழக்கமாக மதிப்பிடப்படுகின்றது.

ஒரு விசையை, அது மட்டுமட்டாகத் தாங்கும் நிறையைக் கொண்டும் மதிப்பிடலாம். இவ்விடத்து, அவ்விசையை மதிப்பிடும் இடத்திலுள்ள புவியீர்ப்பு விசையில் அதன் பெறுமானம் தங்கியிருக்கும்.

நிலையியலில், ஒரே இடத்திலுள்ள விசைகளின் **தொடர்புப்** பெறுமானங்களைப்பற்றி ஆராய்வதே நம் நோக்காகும். இவ்வாறு, ஒரு விசையை, யாதுமொரு தெரிந்த விசையுடன் ஒப்பிட்டு மதிப்பிடலாம். உ-ம். 1 இருத்தல் நிறை. அப்பொழுது, விசையலகு 1 இரு. நிறையாகும். அத்துடன், பல இடங்களிலும் இவ்வலகில் ஏற்படும் மாற்றம் எமது முடிபுகளைப் பாதிக்காது.

§4. ஒரு விசையினது மூன்று சிறப்பியல்புகளுமுடைய வேறு சிலவும் இருக்கின்றன. அவற்றுள் மிக முக்கியமானது முடிபுள்ள நேர்கோடாகும்.

தந்தவொரு விசையை AB என்ற நேர் கோட்டினுல் முழுமையாகக் குறிக்கலாம். ஏனெனில், இங்கு A என்னும் முனைப்புள்ளி பிரயோகப் புள்ளியையும், வெளியில் அக்கோட்டின் திசை விசையின் திசையையும் குறிக்கலாம். அதோடு, அக்கோட்டின் நீளத்தை, ஒரு வசதியான அளவுத் திட்டத்திற்கு அவ்விசையின் பருமனைக் குறிக்குமாறும் அமைக்கலாம்.

முடிவுள்ள நேர் கோடு அல்லது விசை போன்ற யாதுமொரு கணியம் பருமன், திசை ஆகிய இரண்டையும் ஒருங்கே பெற்றிருப்பின் **காவி** எனப்படும்.

இயக்கவியலில் வேகம், உந்தம், ஆர்முடுகல் போன்ற காவியின் வேறு உதாரணங்களும் காணப்படுகின்றன. இவற்றையும் நேர்கோடுகளால் முழுமையாகக் குறிக்கலாம்.

ஒரு விசையை AB என்னும் கோட்டினுற் குறிக்குமிடத்து, அவ்விசை A இலிருந்து B நோக்கிச் செயற்படுகிறதென்பதை AB மேல் $\overrightarrow{AB}$ என அம்புக் குறியிட்டுத் தெளிவாய் விளக்கலாம். எனினும், பல இடங்களில் விசையின் திசையானது எழுத்து ஒழுங்கு முறையால் விளங்கக் கூடியதாக இருக்கின்றது, அ-து. A இலிருந்து B நோக்கிச் செயற்படும் விசையை AB உம், B இலிருந்து A நோக்கிச் செயற்படும் விசையை BA உம் குறிக்கின்றன.

§5. பொறியியல் பற்றிய விஞ்ஞானத்தை அமைப்பதற்குப் பரிசோதனையையோ அவதானத்தையோ ஆதாரமாகக் கொண்ட சில தனி விதிகளுடன் தொடங்கவேண்டும்.

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து, நிலையியலானது இயக்கவியலின் ஒரு குறிப்பிட்ட வகையென்பது தெளிவாகின்றது. இங்கு, பொருள்களின் இயக்கங்கள் பூச்சியமாகவுள்ளன. எனவே, இயக்கவியலைப் பொதுப்படையாகக் கொண்டு, பொருட்களின்மீது விசைகளின் தாக்கத்துடன் சார்புள்ள விதிகளை நாம் தேர்ந்தெடுப்பின், அவை நிலையியலிற் குறிப்பிட்ட வகைக்கும் இயையும்.

நிலையியலை, இயக்கக் கருத்தில் தங்கியிராத விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைப்பது சாத்தியமாகும். ஆனால் இக்கருத்தைப் புகுத்தாது, நிலையியலின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை (விசை இணைகரம்) நிறுவுதல் மிகக் கடினமாகும். இத்தேற்றத்தை ஒரு பரிசோதனை முடிவாக ஏற்றுக்கொள்ளலாம். ஆனால், இதன் சிறந்த நிறுவல் **நியூற்றனின் இயக்க விதிகள்** என வழங்கப்படும் இயக்கவியலின் அடிப்படை விதிகளை ஆதாரமாகக் கொண்டது.

நிலையியலை, பொறியியலிலிருந்து முற்றிலும் தனிப்பிரிவெனக் கருதாமைக்கு இன்னொரு காரணமும் உண்டு. சிற்றளவிற்கு அசைவு நிகழ்கிறதென்று கருதன்மூலம், விசைகளின் சமநிலை தொடர்பான முடிவுகள் பல பெறுதலே அக்காரணமாகும்.

§6. வேறு சில அடிப்படைக் கோட்பாடுகளைத் தரும் நியூற்றனின் இயக்க விதிகள் வழக்கமாகப் பின்வருமாறு கூறப்படும் :—

1. ஓய்வு நிலையிலோ நேர்கோட்டுச் சீரியக்க நிலையிலோ இருக்கும் ஒவ்வொரு பொருளும், அழுத்திய வெளி விசையால் அந்நிலை மாற்றப்படுமளவும் அந்நிலையில் தொடர்ந்து இருக்கும்.
2. உந்த மாற்ற வீதமானது பிரயோகித்த விசைக்கு விகிதசமனுகவும், விசை செயற்படும் திசையில் நிகழுவதாகவும் இருக்கும்.
3. ஒவ்வொரு தாக்கத்திற்கும் எப்பொழுதும் சமமானதும் முரணுனதுமான மறுதாக்கம் இருக்கும் ; அல்லது , எவையேனுமிரு பொருட்களின் தம்முள்ளான தாக்கங்கள் எப்பொழுதும் சமமாகவும் எதிர்த் திசையில் செயற்படுவனவாகவும் இருக்கும்.

§7. நியூற்றனின் முதல் இயக்க விதி, விசையின் வரைவிலக்கணத்தைத் தருவதுடன், **சடப்பொருளின் சடத்தன்மைக் கோட்பாட்டையும்** வற்புறுத்திக் கூறுகின்றது.

இக்கோட்பாடு ஒரு பொது அனுபவமாக எண்ணப்படலாம். ஏனெனில், ஓய்வில் இருக்கும் பொருட்கள் ஏதுமொரு வெளிக் காரணத்தினுல் இயங்குமாறு தூண்டப்படாவிடின், அவை இயங்க ஆரம்பிக்காதிருப்பதைக் காண்கிறோம்.

§8. இரண்டாம் விதி, **விசைகளின் சாராமையை** வற்புறுத்திக் கூறுகின்றது. ஒரு துணிக்கைமீது செயற்படும் ஒவ்வொரு விசையும் அத்துணிக்கை

மீது தனிமையாகச் செயற்பட்டது போல, திசையிலும் பருமனிலும் தனக்கேயுரிய விளைவை ஆக்கவேண்டும்.

விசைத் தொகுதியொன்று, தொடக்கத்திலே ஓய்விலிருக்கும் ஒரு துணிக்கைமீது ஒரே நேரத்தில் செயற்படுமிடத்து அதனை அந்நிலையிலே வைத்திருக்கக் கூடியதாக அமைகிறதெனக் க. இவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றன. பின்பு, புறம்பாகத் தாக்குமிடத்து அத்துணிக்கையை ஓய் வில் வைத்திருக்கக்கூடிய இன்னொரு விசைத் தொகுதி, முதல் தொகுதி தாக்கிய அதே நேரத்தில் அதனைத் தாக்குமானால், ஒவ்வொரு விசைத்தொகு தியும் தனக்கேயுரிய விளைவை ஆக்குவதினால், அத்துணிக்கை தொடர்ந்து சமநிலையிலிருக்கும்.

எனவே, சமநிலையிற் பல விசைகள் இருக்குமாயின், தாமாகவே சம நிலையிலிருக்கும் சில குறிப்பிட்ட விசைகளைச் சேர்க்கவோ நீக்கவோ முடி யும். உ-ம். ஒரே நேர் கோட்டிற் செயற்படும் இரு சம, முரண் விசைகள்.

§9. மூன்றும் விதி தாக்கம், மறுதாக்கம் ஆகியவற்றின் சமமான தன்மையை வற்புறுத்திக் கூறி **விசை ஊடுகடத்தற் கோட்பாட்டையும்** குறிப்பாகச் சொல்கின்றது.

A என்னுமொரு புள்ளியில் தாக்கும் விசை **P** ஆனது **B** என்னும் வேறொரு புள்ளியை ஓய்விற் கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளை இழுக்குமாயின், **B** இல் ஏற்படும் மறுதாக்கமானது, **A** இற் செயற்படும் விசைக்குச் சமனுகவும் முரணுகவும் அத்துடன் அதன் தாக்க நேர் கோட்டிலும் அமையும். இது, விசைகள் தாக்கும் அப்பொருளின் துணிக்கைகள் ஒருமித்து விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்குமாயின், **A** இற் செயற்படும் விசையானது அதன் தாக்கக் கோட்டிலுள்ள **B** என்னும் யாதுமொரு புள்ளியிற் செயற்படும் ஒரு சம, முரண் விசையினுற் சமன்செய்யப்பட லாமென்ற கருத்தையுடையது.

ஆனால் **B** இற் செயற்படும் விசை, **A** இலுள்ள விசையின் அதே பருமனையும் திசையையுமுடையதும் **B** இற் செயற்படுவதுமான விசை யொன்றினாலும் சமன்செய்யப்படலாம். எனவே, **A** இலுள்ள விசையானது **B** இல், அ-து. **A** இனது தாக்கக் கோட்டிலே யாதுமொரு புள்ளியில், (அப்புள்ளி **A** உடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்குமாயின்) செயற்படும் ஒரு சம விசைக்குச் சமவலுவுடையது.

இதனின்றும், **ஒரு விசை ஒரு பொருளைத் தாக்கும்போது, பிரயோகப் புள்ளி தாக்கக் கோட்டின் எப்புள்ளியாயினும், அது அப்பொருளின் எஞ்சிய பாகத்தோடு யாதுமொரு மாருமுறையில் தொடுக்கப்பட்டிருக் கிறதெனக் கொண்டால், தாக்கலின் விளைவு ஒரேயளவினது** என்பது பெறப்படும்.

§10. பொறியியலிலே தொடர்பு கொண்டபல சந்தர்ப்பங்களில், ஒரு பொருளின்மீது உஞற்றப்படும் விசைகள் மற்றப் பொருட்களுடன்

ஏற்படும் தொடுகையினுலேயே உண்டாக்கப்படுகின்றன. உ-ம். ஒரு பொருள் இன்னொரு பொருளைத் தள்ளுதல், அல்லது ஓர் இழை அதனை இழுத்தல்.

யாதுமொரு பருப்பொருட் பதார்த்தத்தின் குறுக்கீடேனும் பொருட்களின் தொடுகையேனுமின்றி ஒரு பொருள் இன்னொரு பொருள் மீது உஞற்றக்கூடிய வேறு சில விசைகளுமுள. இத்தகைய விசை கவர்ச்சி அல்லது தள்ளுகை எனப்படும். எல்லாப் பொருட்களின்மீதும் புவி செலுத்தும் கவர்ச்சியே நாம் கருதப்போகும் இவ்வினத்திற்குரிய ஒரேயொரு வகையாம்.

நியூற்றனின் ஈர்ப்பு விதி, சடப் பொருளின் **ஒவ்வொரு** துணிக்கையும் மற்றைய துணிக்கையொவ்வொன்றையும் கவருகிறதெனக் கூறுகின்றது. ஆனல், பொறியியலிற் கருதப்பெற்ற பருமனையுடைய (புவியைத்தவிர்ந்த) பொருட்களைப் பொறுத்தளவில், இத்தகைய விசை சாதாரண தேவைகளுக்குச் சிறிதளவாகின்றது.

மின்னேற்றிய இரு பொருட்கள், அல்லது இரு காந்த முனைவுகளிடையே கவர்ச்சி அல்லது தள்ளுகை போன்றன இவ்வகை விசைகளின் வேறு சில உதாரணங்களாகும்.

கவர்ச்சியின் எல்லா வகைகளினிடத்தும், அது இருதலைத் தாக்கமாகவே உள்ளது, அ-து. இரு பொருட்களும் ஒன்றையொன்று நோக்கி இயங்க நாடும்.

அப்பொருட்களிலொன்று புவியாகவும் மற்றைய பொருள் புவியுடன் ஒப்பிடுமிடத்துச் சிறிதாகவும் அமையும்போது, புவியும் மற்றைய பொருளை நோக்கி இயங்குகிறதே எனினும், புவியின் திணிவு பொருளினதை விட மிக அதிகமாக இருப்பதனுல் அதன் இயக்க அளவு தவிர்க்கக்கூடியதாக இருக்கின்றது.

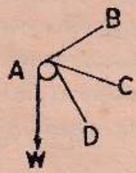
§11. ஓர் இழையின் இழுவை.

ஒரு நிறையைத் தொங்கவிட அல்லது ஒரு பொருளை இயக்க ஓர் இழையைப் பயன்படுத்தும்போது, இவ்விழை இழுவை நிலையில் இருக்கின்றது.

இவ்விழை நிறையற்றதாயின் அதன் நீளமெங்கும் இழுவை ஒரேயளவினதாக இருக்கும். இதனை, ஒரு நுண்ணிழையில் W என்னும் ஒரு நிறையைத் தொங்கவிட்டு, மற்றைய நுனியை ஒரு விற்றராசுடன் இணைத்துச் சரிபார்க்கலாம். இவ்விடத்து, இழையின் நீளம் எதுவாயினும், தராசு ஒரே வாசிப்பையே காட்டும்.

அதோடு, இவ்விழையின் ஏதாவதொரு சிறிய பகுதியைத் தாக்கும் விசைகளைக் கருதுவோமாயின், இதன் இருமருங்கிலுமுள்ள இழுவைகள்

சமமாகவும் முரணகவும் இருக்கவேண்டுமென்பது தெளிவாகும். இல்லேயேல் இழை நகரும்.



படம் 1.

ஒரு நிறையைத் தாங்கும் ஓர் இழையை ஒப்பமான சிறிய கப்பி யொன்றின் மேலாக A (படம் 1) இற் போலச் செல்லவிடின், அந் நிறையை நிலேயிற் பேணத் தேவையான விசை மாருதிருக்கக் காணப் படும். அத்துடன், அவ்விழை AB, AC அல்லது AD ஆகிய எந்நிலேயிற் பேணப்படினும் எவ்வித வேறுபாடும் ஏற்படாது.

ஆகவே, ஓர் ஒப்பமான முளே அல்லது கப்பியைச் சுற்றிச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையில் அதன் நீளமெங்கும் இழுவை ஒரேயளவினதாக இருக்கும்.

§12. ஒப்பமான பொருட்கள்.

உண்மையில், ஒப்பம் நிறைந்த பொருளென ஒன்றில்லே. நடைமுறையில், ஒரு பொருள் இன்னென்றை அழுத்தும்போது, ஒன்றிலிருந்து ஒன்று நழுவாமல் தடுக்க நாடுகின்ற ஏதாவதொரு விசை இவ்விரண்டிற்கும் பொதுவான பரப்பின் வழியே எப்பொழுதும் இருக்கும்.

நன்கு துலக்கிய பரப்புக்களோடு இவ்விசை சிறிய அளவினதாக இருக்கலாம். அத்துடன், பல பிரச்சினேகளில், அப்பொருட்கள் முற்றிலும் ஒப்பமானவையாகவும் எண்ணப்படுகின்றன. இவ்விடத்து, பொருட்களி னிடையேயுள்ள ஒரேயொரு விசை அவற்றிற்குப் பொதுவான பரப்பிற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும்.

ஒரு கோல் ஒப்பமானதொரு தளத்திற் சாய்ந்திருக்கும்போது, மறு தாக்கம் அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும்.

ஒரு கோல் ஒப்பமானதொரு முளேயிற் சாய்ந்திருக்கும்போது, மறு தாக்கம் கோலிற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும்.

ஒரு கோலின் முனே அல்லது ஒரு துணிக்கை, ஓர் ஒப்பமான கோளத் தின் வளேபரப்பிலோ ஒப்பமான வட்ட வில்லிலோ சாய்ந்திருக்கும்போது, மறுதாக்கம் அக்கோளம் அல்லது வட்டத்திற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது. எனவே, அதன் மையத்தூடாய்ச் செல்லும்.

இவை அடிக்கடி நிகழ்வதால், இவற்றைக் குறிப்பாக நோக்கவேண்டும்.

§13. விளையுள் விசை.

ஒரு துணிக்கையை இரு விசைகள் ஒரே காலத்தில் தாக்கும்போது, அவை பருமனிற் சமமாகவும் ஒரே நேர்கோட்டில் முரண் திசைகளில் தாக்குவனவாகவும் அமையின், அவை சமநிலையிலிருக்கும்.

அவ்விசைகள் சமநிலையில் இல்லாதிருப்பின், அவை அத்துணிக்கையை இயக்க நாடும். எனவே, அத்துணிக்கையை ஓய்வு நிலையிற் பேண வேறொரு மூன்றும் விசை இருக்கவேண்டுமென்று ஊகித்தறிகின்றோம்.

இம்மூன்றும் விசைக்குச் சமமாகவும் முரணாகவும் அமையும் விசை அவ்விரு விசைகளினதும் **விளையுள்** எனப்படும். இவ்விளைவுள், ஒருமித்துத் தாக்கும் அவ்விரு விசைகளுக்கும் சமவலுவுடையதாக இருக்கும்.

அவ்விரு விசைகளும் விளையுளின் **கூறுகள்** எனப்படும்.

இரு விசைகள் ஒரே திசையில் ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்கும்போது, இவற்றின் விளையுள் இவற்றின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்.

இவ்விசைகள் ஒரே நேர்கோட்டில் முரண் திசைகளில் தாக்கும்போது, விளையுள் இவற்றின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாய், பேரளவினதான விசையின் திசையில் தாக்கும்.

ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்கும் இரு விசைகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாதவிடத்து, பின்வரும் தேற்றத்தைக் கொண்டு அவற்றின் விளையுள் காணப்படுகின்றது.

§14. விசை இணைகரம்.

O என்னும் ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் இரு விசைகள், O இலிருந்து வரையப்படும் OA, OB என்னும் இரு நேர் கோடுகளினுற் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படின், இணைகரம் OACB இன் மூலைவிட்டம் OC இனுல் இவற்றின் விளையுளானது பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

படம் 2.

இதுவே நிலையியலின் அடிப்படைத் தேற்றமாகும். அத்துடன், ஏற்கெனவே கூறியவாறு, இயக்கக் கருத்தைப் புகுத்தாது ஒழுங்கான, திருத்தியான நிறுவலேதும் தரப்படாவிடினும், இம்முடிவைப் பரிசோதனையாற் சரிபார்க்கலாம்.

$\overrightarrow{OC}$ என்பது $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ என்பனவற்றின் காவிக் கூட்டுத்தொகை.

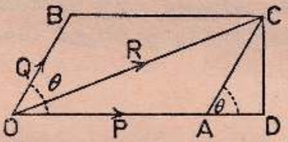
நியூற்றனின் விதிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஒரு நிறுவல் இயக்கவியலில் தரப்பட்டுள்ளது (ப. 74).

"**ஒரு புள்ளியில் தாக்கும்**" விசைகள்பற்றிக் கூறும்போது, அவை அப்புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு துணிக்கைமீதே தாக்குகின்றன வென்பது வெள்ளிடை.

ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது இரு விசைகள் தாக்குமாயினும், அவைகளின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமாயினும், அவை, ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியிற் செயற்படும் இரு சம விசைகளினு லான அதே விளையுளைக் கொண்டிருக்குமென்பது விசை ஊடுகடத்தற் கோட்பாட்டின் மூலம் அறியக்கிடக்கின்றது. அத்துடன், அவை அப் புள்ளியில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு துணிக்கையின் மீது தாக்குவதாகக் கொண்டு அவற்றின் விளையுளை அறியலாம்.

இரு விசைகளினது கூறுகளின் பருமனும் திசைகளும் தெரிந்துள்ள விடத்து, அவற்றின் விளையுளினது பருமனையும் திசையையும் அடுத்த பந்தியிலுள்ளவாறு கணிக்கலாம்.

§15. O இல் தாக்கும் P, Q என்னும் இரு விசைகளை OA உம் OB உம் (படம் 3) குறிப்பதாகக் கொள்க. அவற்றின் விளையுள் R, இணைகரம் OACB இன் மூலைவிட்டம் OC இனுற் குறிக்கப்படும்.



படம் 3.

P, Q ஆகியனவற்றின் திசைகளிடையேயுள்ள கோணம் θ என்க. அ–து. $AOB = \theta$.

பின்பு, $OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA.AC$ கோசை OAC.

ஆனால், கோணம் $OAC = 180° - \theta$. எனவே, கோசை OAC $=$ $-$கோசை θ.

அதோடு, $AC = OB$. (OB என்பது Q ஐக் குறிக்கின்றது.)

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$ கோசை θ.

$\therefore R = \pm\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \text{ கோசை } \theta}$.

சயக்குறியானது P, Q ஆகியன முன்பின்னுக்கப்படுமிடத்து, R இன் பெறுமானத்தைத் தருகின்றது.

OC இன் திசையைக் காண, CD ஐ OA இற்குச் செங்குத்தாக வரைக. (தேவைப்படின் OA ஐ நீட்டலாம்.)

$$\text{தான் } COD = \frac{CD}{OD} = \frac{AC \text{ சைன் } \theta}{OA + AC \text{ கோசை } \theta} = \frac{Q \text{ சைன் } \theta}{P + Q \text{ கோசை } \theta}.$$

விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பின், $\theta = 90°$.

பின்பு, $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ உம், தான் $COA = \dfrac{Q}{P}$ உம் ஆகும்.

அவ்விசைகள் ஒவ்வொன்றும் P இற்குச் சமமாயின்,

$$R = \sqrt{P^2(1+1+2\,\text{கோசை}\,\theta)} = P\sqrt{2(1+\text{கோசை}\,\theta)} = P\sqrt{4\,\text{கோசை}^2\frac{\theta}{2}}$$

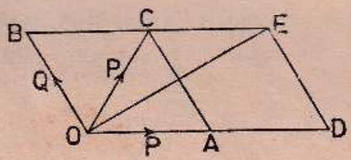
$$= 2P\,\text{கோசை}\,\frac{\theta}{2}.$$

$$\text{அதோடு, தான்}\, COA = \frac{P\,\text{சைன்}\,\theta}{P+P\,\text{கோசை}\,\theta} = \frac{2\,\text{சைன்}\,\frac{\theta}{2}\,\text{கோசை}\,\frac{\theta}{2}}{2\,\text{கோசை}^2\,\frac{\theta}{2}} = \text{தான்}\,\frac{\theta}{2}.$$

எனவே, இவ்விடத்து விசைகளின் இடைக் கோணத்தை விளையுள் இரு கூறிடுகிறது. இதை, விசைகள் சமமாயிருக்கும்போது இணைகரம் சாய்சதுரமாகிறதென்ற உண்மையிலிருந்தும் உய்த்துணரலாம்.

§16. உதாரணம் (i).

P, Q என்னும் இரு விசைகள், R = P என்றமையத்தக்கதொரு கோணத்தில் தாக்குமாயின், P இரட்டிக்குமிடத்து, புதிய விளையுளானது Q இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமெனக் காட்டுக.



படம் 4.

OA, OB (படம் 4) என்பன P, Q என்பனவற்றைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. எனவே, R ஐக் குறிக்கும் இணைகரம் OACB இன் மூலைவிட்டம் OC ஆனது, OA இற்குச் சமம்.

AD = OA ஆகுமாறு OA ஐ D இற்கு நீட்டுக. எனவே OD, 2P ஐக் குறிக்கும். Q, 2 P என்பனவற்றின் விளையுளானது இணைகரம் ODEB இன் மூலைவிட்டம் OE இனற் குறிக்கப்படும்.

இப்போது,

$$BC = OA = P,$$
$$CE = AD = P,$$
$$\therefore\ CB = CE = CO.$$

∴ BE என்பது C ஐ மையமாகக் கொண்டு O இனூடாகச் செல்லும் ஓர் அரைவட்டத்தின் விட்டமாகும்.

∴ ∠BOE ஒரு செங்கோணம்.

அல்லது, $CE = CO$ என்பதனால், $\angle CEO = \angle COE$.
அதோடு, $CB = CO$ என்பதனால், $\angle CBO = \angle COB$.

$$\therefore \angle CEO + \angle CBO = \angle BOE,$$

$\therefore$ $\angle BOE$ ஒரு செங்கோணம்.

உதாரணம் (ii).

3 P, 5 P என்னும் விசைகளின் விளையுள் 7 P இற்குச் சமமாயின், இவ்விசைகளின் இடைக் கோணத்தைக் காண்க.

விசைகள் 3 P, 5 P என்பனவற்றின் இடைக் கோணம் θ உம், விளையுள் R உம் ஆயின்,

$$R^2 = 9P^2 + 25P^2 + 30P^2 \text{ கோசை } \theta,$$

$$\therefore 34P^2 + 30P^2 \text{ கோசை } \theta = 49P^2, \quad (\because R = 7P),$$

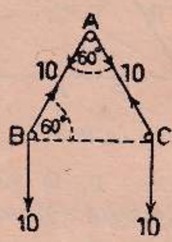
$$\therefore 30P^2 \text{ கோசை } \theta = 15P^2,$$

$$\therefore \text{கோசை } \theta = \tfrac{1}{2},$$

$$\therefore \theta = 60^\circ.$$

உதாரணம் (iii).

இரு 10 இரு. நிறைகள் ஒரு பக்கம் கிடையான சமபக்க முக்கோணியொன்றின் வடிவில் ஒரு சுவரிலே அமைத்த மூன்று ஒப்பமான முளைகளின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையின் இரு நுனிகளிலும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு முளையின் மீதுமுள்ள தாக்கத்தைக் காண்க.



படம் 5.

முளைகளின் நிலையங்களை A,B,C (படம் 5) என்க.

முளைகள் ஒப்பமானவையாகையால், இழையெங்கும் ஒரே இழுவை இருக்கும். இவ்விழுவை 10 இரு. நிறையினதாக இருக்கும்.

A இன் மீதுள்ள தாக்கம், 60° கோணச் சாய்விலுள்ள 10 இரு. நிறையுடைய இரு இழுவைகளினதும் விளையுளாகும். இவ்விளையுளின் பருமன் R ஆயின்,

$$R^2 = 10^2 + 10^2 + 2 \times 10^2 \text{ கோசை } 60^\circ = 3 \times 10^2,$$

$$\therefore R = 10\sqrt{3} = 17{\cdot}321 \text{ இரு. நிறை.}$$

B அல்லது C இன் மீதுள்ள தாக்கம், 150° சாய்வு கோணத்தில் அமைந்திருக்கும் 10 இரு. நிறையுடைய இரு இழுவைகளினதும் விளையுளாகும். இவ்விளையுளின் பருமன் S ஆயின்,

$$S^2 = 10^2 + 10^2 + 2 \times 10^2 \text{ கோசை } 150^\circ$$

$$= 200 - 200 \frac{\sqrt{3}}{2} = 26{\cdot}8,$$

$$\therefore S = 5{\cdot}176 \text{ இரு. நிறை.}$$

ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் விசைகளின் கூறுகள் சமமாக இருக்கின்றமையால், முளையின் இருமருங்கிலுமுள்ள இழையின் பாகங்களின் இடைக் கோணங்களை அத்தாக்கங்களின் திசைகள் இருகூறிடுகின்றன.

பயிற்சி I.

1. பின்வருவனவற்றில் P, Q என்பன இரு கூறுகளையும், θ, இவற்றின் இடைக்கோணத்தையும், R, இவற்றின் விளையுளையும் குறிக்கின்றன:—

(1) $P = 9,\ Q = 12,\ \theta = 90^\circ$ ஆயின், R ஐக் காண்க.
(2) $R = 13,\ Q = 5,\ \theta = 90^\circ$ ஆயின், P ஐக் காண்க.
(3) $P = 7,\ Q = 8,\ \theta = 60^\circ$ ஆயின், R ஐக் காண்க.
(4) $P = 10,\ Q = 10,\ \theta = 120^\circ$ ஆயின், R ஐக் காண்க.
(5) $P = 12,\ Q = 5,\ R = 11$ ஆயின், θ ஐக் காண்க.
(6) $P = 3,\ Q = 5,\ \theta = \text{சைன்}^{-1}\frac{3}{5}$ ஆயின், R ஐக் காண்க.

2. ஒவ்வொன்றும் P இற்குச் சமமானதும், 120° கோணச் சாய்வுள்ளதுமான இரு விசைகளின் விளையுள் P எனக் காட்டுக.

3. P பெறுமானம் கொண்ட இரு சம விசைகளின் விளையுள், முறையே (i) P, (ii) $\sqrt{3}P$ இற்குச் சமமாயிருக்கும் பொழுது அவற்றின் இடைக் கோணத்தைக் காண்க.

4. P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளையுள் பருமனில் P இற்குச் சமன்; அதே திசையிற் செயற்படும் 2P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளையுளும் P இற்குச் சமம். Q இன் பருமனைக் கண்டு, Q இன் திசை P இன் திசையுடன் 150° கோணத்தை ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக. (H.C)

5. இரு விசைகளின் கூட்டுத்தொகை 24 இரு. நிறை; இவற்றிற் சிறிய விசைக்குச் செங்குத்தான இவற்றின் விளையுள் 12 இரு. நிறை கொண்டது. இரு விசைகளினதும் பருமனையும் இவற்றின் இடைக்கோணத்தையும் காண்க.

6. அடிப்பாகம் கிடையாகவும் 120° உச்சிக்கோணத்தையுமுடைய ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணி வடிவில் மூன்று ஒப்பமான முளைகள் சுவரில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையின் நுனிகளில் இரு 20 இரு. நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு முளையின் மீதுமுள்ள தாக்கத்தைக் காண்க.

7. ஒன்றைவிட மற்றொன்று உயரமாக, இரு ஒப்பமான முளைகள் சுவரில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றை இணைக்கும் கோடு கிடையுடன் 30° கோணத்தை ஆக்குகின்றது. இம்முளைகளின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையின் நுனிகளில் இரு 10 இரு. நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு முளையின் மீதுமுள்ள தாக்கத்தைக் காண்க.

8. 5 இரு., 12 இரு. நிறையான இரு விசைகள் ஒரு 15 இரு. நிறை விசையினால் சமன்செய்யப்படின், இவ்விரு விசைகளும் எச்சாய்வு கோணத்தில் இருக்கவேண்டும்?

9. A, B என்பன ABC என்னும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள இரு நிலையான புள்ளிகள். P என்பது வில் ABC இல் இயங்கும் ஒரு புள்ளி. PA, PB என்பனவற்றின் வழியே, மாறாப் பருமனையுடைய விசைகள் செயற்படுகின்றன. இவற்றினது விளையுளின் தாக்கக்கோடு ஒரு நிலைத்த புள்ளியினூடாகச் செல்கிறதென நிறுவுக.

10. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் P, 2 P என்னும் இரு விசைகளின் விளையுள், P இற்குச் செங்குத்தானது. P, 2P ஆகியவற்றின் இடைக் கோணத்தைக் காண்க.

11. 3 இரு., 5 இரு. நிறை விசைகளின் விளையுள் இவற்றிற் சிறிய விசைக்குச் செங்குத்தானது. இவ்விளையுளின் பருமனையும் விசைகளின் இடைக்கோணத்தையும் காண்க.

12. 4 இரு., 6 இரு. நிறை விசைகள் 60° கோணத்திற் செயற்படுகின்றன. இவற்றின் விளையுளை வரைபுமுறையாகக் கண்டு, கணிப்பாற் செவ்வைபார்க்க.

13. 40° கோணத்திற் செயற்படும் 5 இரு., 6 இரு., நிறை விசைகளின் விளையுளை வரைபுமுறையாகக் காண்க.

14. இரு விசைகளினது விளையுள் 8 இரு. நிறையாகும். இதன் திசை, இவ்விசைகளில் 4 இரு. நிறைப் பருமனையுடைய ஒன்றுடன் 60° கோணத்திலுள்ளது. மற்றைய விசையின் பருமனையும் திசையையும் வரைபுமுறையாகக் காண்க.

15. இரு சம விசைகளின் இடைக்கோணம் 2α ஆக இருக்கும்போது, இவற்றின் விளையுள் இவற்றின் இடைக்கோணம் 2β ஆக இருக்கும்போது உள்ளதன் இருமடங்காக இருக்கும்.

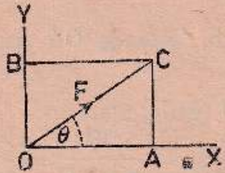
$$\text{கோசை } \alpha = 2 \text{ கோசை } \beta$$

எனக் காட்டுக.

§17. ஒரு விசையைத் துணித்தல்.

ஒரு விசையை எல்லையற்ற பல வழிகளில் இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம் ; ஏனெனில், ஒரு குறித்த கோட்டினை மூலைவிட்டமாகக் கொண்டு எண்ணற்ற பல இணைகரங்களை அமைக்கலாம்.

நடைமுறையில், அக்கூறுகளின் திசைகள் தெரிந்திருக்கும். இத்திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் சந்தர்ப்பமே மிக முக்கியமானதாகும்.



படம் 6.

OC (படம் 6), ஒரு தந்த விசை F ஐக் குறிக்கிறதெனக். இதனை OX வழியேயும், இத்திசைக்குச் செங்குத்தான OY வழியேயும் இரு கூறுகளாகத் துணிக்க விரும்புவதாகக் கொள்வோம்.

CA ஐ OX இற்கும், CB ஐ OY இற்கும் செங்குத்தாக வரைக.

பின்பு OA உம் OB உம் முறையே OX, OY வழியேயுள்ள கூறுகளைக் குறிக்கும்.

கோணம் $\mathrm{COX} = \theta$ ஆயின்,

$\mathrm{OA} = \mathrm{F}$ கோசை θ உம், $\mathrm{OB} = \mathrm{F}$ சைன் θ உம் ஆகும்.

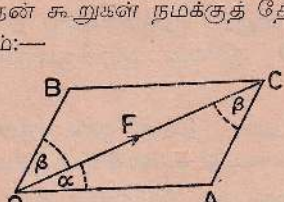
எனவே, F என்னும் ஒரு விசை, அதன் திசையுடன் θ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும் ஒரு கோட்டின் வழியே F கோசை θ என்னும் ஒரு விசையுடன், முதற் கூறினது திசைக்குச் செங்குத்தான F சைன் θ என்னும் ஒரு விசைக்கும் சமவலுவாகும்.

இவ்வாறாக ஒரு விசை, செங்கோணத்திலுள்ள திசைகளில் இரு விசைகளாகத் துணிக்கப்படும்போது, இவ்விசைகள் இவ்விரு திசைகளிலும், தரப்பட்ட விசையின் **துணித்த பகுதிகள்** அல்லது **துணிசல்கள்** எனப்படும்.

F என்னும் ஒரு விசையுடன் θ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும் ஒரு திசையில், அதன் துணித்த பகுதி F கோசை θ ஆகும்.

பெரும்பாலும் கையாளப்படும் விசையின் “கிடைக் கூறு” என்ற சொற்றொடர், கிடையான திசையிலே துணித்த பகுதியைக் குறிப்பதாகக் கருதப்படல் வேண்டும், அ-து. மற்றைய கூறு நிலைக்குத்தானதென்பது தெரிந்ததே.

§18. F என்னும் ஒரு விசையுடன் α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்கும் திசைகளில், அதன் கூறுகள் நமக்குத் தேவைப்படின், அவற்றைப் பின்வருமாறு காணலாம்:—



படம் 7.

OC (படம் 7), F ஐக் குறிப்பதாகக் கொள்க. OC உடன் α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்குமாறு OA ஐயும் OB ஐயும் வரைக. C இன் ஊடாய்ச் சமாந்தரங்களை வரைந்து, இணைகரம் OACB ஐ முற்றுக் குக.

பின்பு OA உம் OB உம், அல்லது OA உம் AC உம் தேவைப்படும் கூறுகளைக் குறிக்கும்.

எனவே, முக்கோணி OAC இலிருந்து,

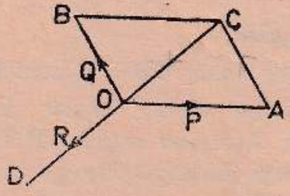
$$\frac{\mathrm{OA}}{\text{சைன்}\,\beta} = \frac{\mathrm{OC}}{\text{சைன்}\,\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{OC}}{\text{சைன்}\,(\alpha+\beta)}.$$

$$\therefore \mathrm{OA} = \frac{\mathrm{F}\,\text{சைன்}\,\beta}{\text{சைன்}\,(\alpha+\beta)}.$$

இதேமாதிரியாக,

$$\mathrm{OB} = \frac{\mathrm{F}\,\text{சைன்}\,\alpha}{\text{சைன்}\,(\alpha+\beta)}.$$

§19. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூவிசைகள்.



படம் 8.

O இலுள்ள ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்கும் மூவிசைகளை P, Q, R (படம் 8) என்க.

இவற்றில் இரண்டான P, Q என்பன முறையே OA, OB இனூற் குறிக்கப்படின், இணைகரம் OACB இன் மூலைவிட்டம் OC இவற்றின் விளையுளைக் குறிக்கும்.

எனவே, R இனைப் பருமனிலும் திசையிலும் CO குறிக்குமாயின், P, Q ஆகியவற்றின் விளையுளை அது சமன்செய்வதுடன், P, Q, R என்னும் மூவிசைகள் சமநிலையிலுமிருக்கும்.

எனவே, P, Q, R என்னும் மூவிசைகளைப் பருமனிலும் திசையிலும் முறையே OA, AC, CO ஆகியன குறிக்குமாயின், அவை சமநிலையி லிருக்கும்.

(Q ஐ AC பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்குமாயினும் தாக்கக் கோட்டிற் குறிப்பதில்லையென்பது கவனிக்கப்படவேண்டும்.)

விசை முக்கோணி எனப்படும் இம்முடிபு வழக்கமாகப் பின்வருமாறு கூறப்படும் :—

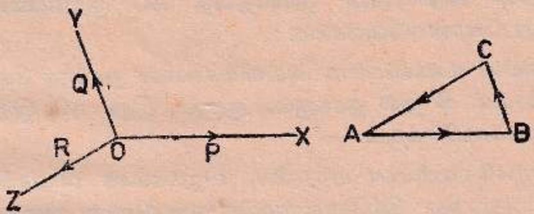
ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூவிசைகள், பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களினுல் வரிசைப்படி குறிக்கப்படின், அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையானது :—

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூவிசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், இவை பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களினுல் வரிசைப்படி குறிக்கப்படலாம்.

§20. வரைபு முறை.

விசை முக்கோணியின் மறுதலை, மூவிசைகளின் சமநிலை பற்றிய கணக்குகளின் எளிய வரைபுமுறைத் தீர்வுகளைக் காண வழிவகுக்கின்றது.



படம் 9.

O என்னும் ஒரு புள்ளியில், **OX, OY, OZ** (படம் 9) என்னும் தந்த திசைகளில் தாக்கும் **P,Q,R** என்னும் மூவிசைகள் சமநிலையிலிருப்பதாக எண்ணுக. பின்பு, இவ்விசைகளில் ஒன்ருன **P** இன் பருமன் தெரிந்திருப்பின், மற்றைய இரு விசைகளினதும் பருமன்களைப் பின்வருமாறு பெறலாம் :—

இவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதனுல், பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களினுல் இவை வரிசையாகக் குறிக்கப்படலாம்.

AB ஐ **OX** இற்குச் சமாந்தரமாக வரைந்து, **P** இன் பருமனை யாதுமொரு வசதியான அளவுத்திட்டத்திற்குக் குறிக்குமாறு அதன் நீளத்தினை ஆக்குக.

A இலிருந்து AC ஐ **OZ** இற்கும், B இலிருந்து BC ஐ **OY** இற்கும் சமாந்தரமாக வரைக. P ஐ AB குறிப்பதனுல், முக்கோணி ABC இன் மற்றைய இரு பக்கங்களும் Q, R என்பனவற்றைக் குறிக்கவேண்டும். P ஐ AB குறிக்குமதே அளவுத்திட்டத்தில், Q ஐ BC உம், R ஐ CA உம் குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு தரமும், எழுத்து ஒழுங்கு முறையானது விசையின் திசையைக் குறிக்கின்றது. இவ்வொழுங்குமுறை, அம்முக்கோணியை அதே வரிசையில் தொடர்ந்து செல்லுமிடத்துப் பெறப்படுகின்றது.

§21. படம் 9 இல், **P, Q** என்பனவற்றின் விளையுளுடன் சமநிலையிலிருக்கும் விசை **R** ஐ **CA** குறிப்பதாகக் கண்டோம். எனவே, **P, Q**

என்பனவற்றின் விளையுளை AC பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கவேண்டும். ஆகையால், இணைகரத்தைப் பயன்படுத்தாது, முக்கோணி ABC மூலம், P, Q என்பனவற்றின் விளையுளைப் பருமனிலும் திசையிலும் பெறலாம்.

ஏதாவதொரு புள்ளியில் தாக்கும் இரு விசைகள், ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியின் AB, BC ஆகிய பக்கங்களினுற் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படின், மூன்றும் பக்கம் AC அவற்றின் விளையுளைப் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கும்.

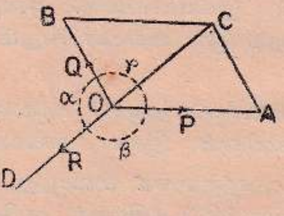
காவிக் குறிப்பீட்டில், $\overrightarrow{AC}$ என்பது $\overrightarrow{AB}$ இனதும் $\overrightarrow{BC}$ இனதும் காவிக் கூட்டுத்தொகை.

AB, BC என்பன குறிக்கும் விசைகள் தாக்கும் புள்ளியிலே தாக்குகின்ற இவற்றின் விளையுளின் தானத்தை AC குறிக்கவில்லையென்பது நன்கு தெரிந்து கொள்ளவேண்டும்.

AB, BC ஆகியன உண்மையாக அவ்விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளாயின், அவற்றின் விளையுள் B இல் தாக்கும். ஆனால், இது AC இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவுமிருக்கும்.

§22. விசைமுக்கோணியின் மறுதலை, வழக்கமாக **லாமியின் (Lami's) தேற்றம்** எனப்படும் ஒரு திரிகோணகணித வடிவிலும் அமைக்கப்படலாம்.

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் மூவிசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், ஒவ்வொரு விசையும் மற்றைய இரு விசைகளின் இடைக்கோணத்தின் சைனிற்கு விகிதசமமாகும்.



படம் 10.

P, Q, R (படம் 10) என்பன O இல் தாக்கும் மூவிசைகளென்க.

P ஐ OA உம், Q ஐ OB உம் குறிப்பின், R ஐ CO பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கும்.

α, β, γ என்பன முறையே Q இனதும் R இனதும், R இனதும் P இனதும், P இனதும் Q இனதும் இடைக்கோணங்களென்க.

முக்கோணி OAC இல்,

$\angle ACO = \angle BOC = 180° - \alpha$, $\quad\therefore$ சைன் ACO = சைன் α.

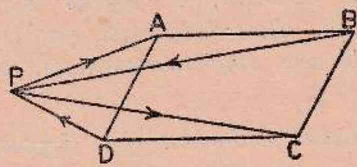
$\angle COA = 180° - \beta$, $\quad\therefore$ சைன் COA = சைன் β.

$\angle CAO = 180° - \gamma$, $\quad\therefore$ சைன் OAC = சைன் γ.

அதோடு,
$$\frac{OA}{\text{சைன் } ACO} = \frac{AC}{\text{சைன் } COA} = \frac{CO}{\text{சைன் } OAC},$$
$$\therefore \quad \frac{P}{\text{சைன் } \alpha} = \frac{Q}{\text{சைன் } \beta} = \frac{R}{\text{சைன் } \gamma}.$$

§23. உதாரணம்.

ABCD, ஓர் இணைகரம். P, யாதுமொரு புள்ளி. PA, BP, PC, DP என்பன வற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைத் தொகுதி சமநிலையிலுள்ளதென நிறுவுக.



படம் 11.

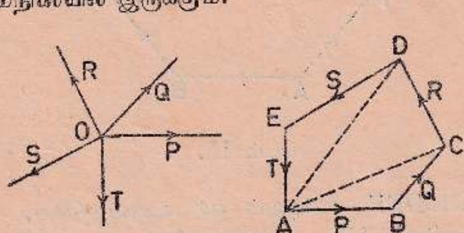
BP, PA ஆகியன குறிக்கும் விசைகளின் விளையுளை BA பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கிறதென்பது படம் 11 இலிருந்து தெளிவாகின்றது. இவ்விளையுள் P இலும் தாக்குகின்றது.

DP, PC ஆகியன குறிக்கும் விசைகளின் விளையுளானது DC இனற் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படுவதுடன், P இலும் தாக்குகின்றது.

AB ஆனது DC இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனுல், அவ்விளையுள்கள் பருமனிற் சமமாகின்றன. அதோடு, ஒரே புள்ளி P இல் அவை தாக்குவதனுல் அதே நேர் கோட்டிலும் இருக்கின்றன. அவற்றின் திசைகள் முரணுக இருப்பதனுல், அவை சமநிலைப்படுவதுடன், அத் தொகுதி சமநிலையிலும் இருக்கின்றது.

§24. விசைப் பல்கோணி.

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் எத்தொகை விசைகளும், பருமனிலும் திசையிலும் ஒரு பல்கோணியின் பக்கங்களால் வரிசையாகக் குறிக்கப்படுமாயின், அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.



படம் 12.

பல்கோணி ABCDE (படம் 12) இன் AB, BC, CD, DE, EA என்னும் பக்கங்கள், O என்னும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள ஒரு துணிக்கைமீது தாக்கும் விசைகளைக் குறிக்கின்றனவென்க.

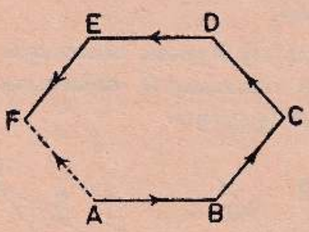
AB, BC என்னும் விசைகளின் விளையுளை AC பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கின்றது.

AC, CD என்னும் விசைகளின் விளையுளை AD, பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கின்றது. இதேபோல், AD, DE என்னும் விசைகளின் விளையுளை AE, பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கின்றது. ஆகவே, P, Q, R, S என்பனவற்றின் விளையுள், T இற்குச் சமமாகவும் முரணாகவுமிருக்கின்றது. அத்துடன், விசைகளெல்லாம் ஒரு புள்ளியில் தாக்குவதனால், இவ்விளையுளும் T உம் சமநிலைப்படுவதுடன், விசைத் தொகுதியும் சமநிலையிலுள்ளது.

விசைகள் எத்தொகையினவாயினும், இந் நிறுவல் முறை பயன்படும் என்பது தெளிவு.

அத்துடன், விசைகள் ஒரே தளத்திலிருக்கத் தேவையில்லையென்பதும் தெளிவாகின்றது.

§25. முன்பு கூறியவாறு, ஒரு புள்ளியிற் பல விசைகள் தாக்கின், இவ்விசைகளுக்குச் சமாந்தரமானவும் விகிதசமமானவுமான பக்கங்களையுடைய பல்கோணியொன்றை வரையுமிடத்து (ஒவ்வொரு முறையும், முன்னைய பக்கம் முடிந்த புள்ளியிலிருந்து அடுத்த பக்கத்தை வரைய வேண்டும்), அப்பல்கோணி இவற்றை அடைத்திருக்குமாயின், அத்தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும் ; பல்கோணி இவற்றை அடைத்திராவிடின், இப் படத்தை முற்றுக்கத் தேவையான நேர்கோடு அவ்விசைகளின் விளையுளைக் குறிக்கும். இவ்விளையுள், இப்படம் வரையப்பட்ட திசைக்கு முரணாக இருக்கும்.



படம் 13.

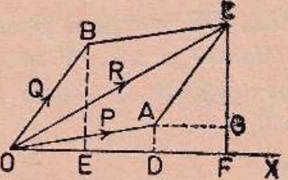
இவ்வாறாக, ABCDEF என்னும் ஓர் உருவத்தினை, படம் 13 இற் போல பெற்றோமாயின், AF, அவ்விளையுளைப் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கும்.

பல விசைகளின் விளையுளை வரைபுமுறையாகக் காணும் இத்தகைய முறை, விசையிணைகரத்தை மறுபடி பிரயோகித்துக் காண்பதிலும் எளிதானதென்பது தெளிவாகின்றது.

அவ்விசைகள் ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்குமிடத்து, இத்தகைய முறை பெரும்பாலாகக் கையாளப்படுமென்பதைப் பின்னர் காண்போம்.

பெரும்பாலான சந்தர்ப்பங்களிலும் பல விசைகளின் விளையுளை விரைவாகவும் செம்மையாகவும் கணக்கிடப் பின்வரும் பந்திகளில் விளக்கப்படும் முறையே தகுந்ததாகும்.

§26. ஒரு புள்ளியில் எதாவதொரு குறித்த திசையில் தாக்கும் இரு விசைகளினது துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை, அத்திசையில், அவற்றினது விளையுளின் துணித்த பகுதிக்குச் சமமாகும்.



படம் 14.

P, Q ஆகிய அவ்விரு விசைகளை முறையே OA உம் OB உம், அவற்றின் விளையுள் R ஐ OC உம், OACB ஓர் இணைகரமாக (படம் 14) அமையக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

OX, தரப்பட்ட திசையென்க.

AD, BE, CF என்பனவற்றை OX இற்கும், AG ஐ CF இற்கும் செங்குத்தாக வரைக.

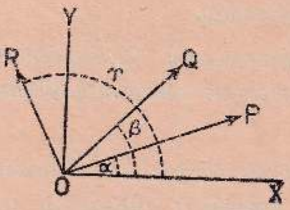
OBE, ACG என்னும் முக்கோணிகள் சர்வசமனாயிருப்பதாக, அவற்றின் பக்கங்கள் சமாந்தரமாகவும், OB, AC என்னும் பக்கங்கள் சமமாகவுமுள்ளன.

$$\therefore \quad OE = AG = DF,$$
$$\therefore \quad OF = OD + DF = OD + OE.$$

ஆனால், OD, OE, OF என்பன OX இன் திசையில் P, Q, R என்பனவற்றின் துணித்த பகுதிகளைக் குறிக்கின்றன.

இத்தேற்றத்தினை எத்தொகை விசைகளுக்கும் விரிவாக்கலாமென்பது வெளிப்படை.

§27. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் பல ஒருதள விசைகளின் விளையுளைக் காணல்.



படம் 15.

O இலுள்ள ஒரு துணிக்கையின்மீது P, Q, R, முதலான விசைகள் தாக்குகின்றன என்க. O இனூடாக OX, OY என்னும் எவையேனுமிரு செங்குத்தான அச்சுக்களை வரைக.

விசைகள் P, Q, R.... OX உடன் கோணங்கள் α, β, γ.... ஐ ஆக்குகின்றனவென்க. OX, OY என்னும் திசைகளில் P இன் துணித்த பகுதிகள் முறையே P கோசை α உம், P சைன் α உம் ஆகும். இது போல, Q இன் துணித்த பகுதிகள் Q கோசை β உம், Q சைன் β உம் ஆகும். பிறவும் இவ்வாறே.

எனவே, இவ்விசைகள்,

OX வழியே, P கோசை α + Q கோசை β + R கோசை γ .... என்னும் கூற்றிற்கும்,

OY வழியே, P சைன் α + Q சைன் β + R சைன் γ .... என்னும் கூற்றிற்கும் சமவலுவுடையன.

இக்கூறுகளை முறையே X, Y எனவும், இவற்றின் விளையுளை F எனவும், OX உடன் இதன் சாய்வை θ எனவும் கொள்க.

எனவே,
$$\text{F கோசை } \theta = \text{X},$$
$$\text{F சைன் } \theta = \text{Y},$$
$$\therefore \quad \text{F}^2 = \text{X}^2 + \text{Y}^2,$$

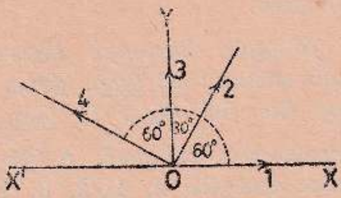
அதோடு,
$$\text{தான் } \theta = \frac{\text{Y}}{\text{X}}.$$

உதாரணம்.

1, 2, 3, 4 இரு. நிறை விசைகள் ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்குகின்றன; அவற்றின் இடைக்கோணங்கள் முறையே 60,° 30,° 60° ஆகும். விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

அவ்விசைகளில் ஒன்றின் தாக்கக் கோட்டினை x அச்சாக எடுப்பது வசதியானதாகும்.

துணிக்கையின் தானத்தை O (படம் 16) எனவும், 1 இரு. விசையின் தாக்கக் கோட்டினை OX எனவும் கொள்க.



படம் 16.

அவ்வாறுயின், 3 இரு. விசை OY வழியே தாக்கும்.

OX வழியே கூறு,

$$1 + 2 \text{ கோசை } 60 - 4 \text{ கோசை } 30 = 1 + 1 - 2\sqrt{3}$$
$$= 2 - 3{\cdot}464 = -1{\cdot}464.$$

அ–து. OX′ வழியே 1·464 இரு. நிறை விசையொன்று தாக்கும்.

OY வழியே கூறு,

$$2 \text{ கோசை } 30 + 3 + 4 \text{ கோசை } 60 = \sqrt{3} + 3 + 2 = \sqrt{3} + 5 = 6{\cdot}732.$$

இவற்றின் விளையுள்,

$$\sqrt{(1{\cdot}464)^2 + (6{\cdot}732)^2} = 6{\cdot}9 \text{ இரு. நிறை.}$$

இவ்விளையுளானது OX உடன் ஆக்கும் கோணம் θ ஆயின்,

$$\text{தான் } \theta = -\frac{6{\cdot}732}{1{\cdot}464} = -4{\cdot}597,$$
$$\therefore \ \theta = 107°16' \text{ கிட்டத்தட்ட.}$$

பயிற்சி II.

1. 4, 3, 2, 1 இரு. நிறை விசைகள் A என்னும் ஒரு புள்ளியில் முறையே AB, AC, AD, AE என்னும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இங்கு, $\angle BAC = 30°$, $\angle CAD = 30°$, $\angle DAE = 90°$. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், AB உடன் அதன் திசையின் சாய்வையும் காண்க.

2. செங்கோணத்திலுள்ள 2 இரு., 4 இரு. நிறை விசைகளும் $4\sqrt{2}$ இரு. நிறை விசையொன்றும் ஒரு துணிக்கைமீது தாக்குகின்றன. இவ்விசையின் திசை, மற்றைய விசைகளின் இடைக்கோணத்தை இருகூறிடுகின்றது. துணிக்கை மீதுள்ள விளையுள் விசையைக் காண்க.

3. 5, 10, 13 இரு. நிறையான மூவிசைகள் ஒரு புள்ளியில் ஒரே தளத்தில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் திசைகளில் எவையேனும் இரண்டின் இடைக்கோணம் 120°. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

4. ABCD ஒரு சதுரம். A இல் AB, AC, AD என்னும் திசைகளில் முறையே 2, 4, 5 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளின் பருமனைக் காண்க.

5. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் பின்வரும் விசைகளினது விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க : 20 இரு. நிறை கி., 42 இரு. நிறை **வ.** மே., 60 இரு. நிறை மே. 30° தெ., 15 இரு. நிறை தெ. (H.C.)

6. ABCDEF ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. A இல் AB, AC, AD, AE, AF என்னும் திசைகளில் முறையே 2, $4\sqrt{3}$, 8, $2\sqrt{3}$. 4 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், AB உடன் அதன் திசையின் சாய்வையும் காண்க.

7. ஒரு தொலைபன்னிக் கம்பத்திற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ள நான்கு இடையான கம்பிகள், அதன்மீது பின்வரும் இழுவைகளை உஞற்றுகின்றன : 20 இரு. நிறை **வ.**, 30 இரு. நிறை கி., 40 இரு. நிறை தெ. மே., 50 இரு. நிறை தெ. கி. கம்பம் மீதுள்ள விளையுள் இழுப்பைக் கணித்து, அதன் திசையைக் காண்க. (H.C.)

8. A, B, C, D என்னும் நான்கு ஒப்பமான முளைகள் பக்கம் BC ஐக் கிடையாகக் கொண்ட ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் நான்கு கீழ் மூலைகளை அமைக்குமாறு ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. A இற்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கும் ஓர் இழையானது B இற்கும் C இற்கும் கீழாகவும், D இற்கும் A இற்கும் மேலாகவும் செல்கின்றது. அதன் சுயாதீன நுனியில் ஒரு 10 இரு. நிறை நிலைக்குத்தாகத் தொங்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முளைகளின் மீதுள்ள தாக்கங்களைக் காண்க.

9. ஒவ்வொன்றும் F பருமனுள்ள மூன்று விசைகள், ஒரே தளத்திலுள்ள OA, OB, OC என்னும் கோடுகள் வழியே புள்ளி O இல் தாக்குகின்றன. கோணம் BOA, $+45^\circ$ உம், கோணம் BOC, -90° உம் ஆகும். விளையுள் விசையின் பருமனைக் காண்க ; அது, OB உடன் ஆக்கும் கோணத்தின் தான்சனைக் கண்டு, அதன் திசையை நிர்ணயிக்க.

10. முறையே 100, 200, 300 இரு. நிறை கொண்ட விசைகள் ஒரு புள்ளியில் வடமேற்கு, வடகிழக்கு, தெற்குத் திசைகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளுக்குச் சமவலுவான தனி விசையின் திசையையும் பெறுமானத்தையும் கண்டு, செம்மையாகக் கூறுக.

11. ஒரு முக்கோணியின் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்கள் முறையே 7, 5, 3 அங்குலமாகும். ஒரு **புள்ளியில் தாக்கும்** பின்வரும் விசைகளினது விளையுளின் பருமனையும், இது BC உடன் ஆக்கும் கோணத்தையும், வரைபுமுறையாகவோ வேறுவிதமாகவோ காண்க : திசை BC இல் 5 இரு. நிறை, திசை AC இல் 9 இரு. நிறை, திசை AB இல் 3 இரு. நிறை. (I.A.)

12. 2, 3, 4 இரு. நிறை விசைகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் AB, AC, BC என்னும் பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமான திசைகளில், ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளேயுளேக் காண்க.

13. 5, 4, 12, 4 இரு. நிறை விசைகள் முறையே AB, AC, AD, AE வழியே, A என்னும் ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்றன. $BAC = 30°$, $BAD = 90°$, $BAE = 150°$. இவற்றின் விளேயுளின் பருமனேயும், AB உடன் அதன் தாக்கக் கோடு ஆக்கும் கோணத்தையும் காண்க.

14. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி. G, இதன் இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி. 8, 8, 16 இரு. நிறை விசைகள் முறையே GB, GC, GA வழியே G இல் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளேயுளின் பருமனேயும் திசையையும் காண்க.

§28. ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்கும் எத்தொகை விசைகளினதும் சமநிலேக்கான நிபந்தனேகள்.

இவ்விசைகளேச் செங்கோணங்களிலுள்ள எவையேனும் இரு திசைகளிலே துணிக்கு ம்பிடத்து, இத்திசைகளிலே துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகைகள் X உம் Y உம் ஆயின்,

$$F^2 = X^2 + Y^2$$

இனல், விளேயுள் F தரப்படும்.

ஆனல், இவ்விசைகள் சமநிலேயிலிருப்பின், F பூச்சியமாகவேண்டும்.

இங்கு, ஒவ்வொரு கணியமும் புறம்பாகப் பூச்சியமாக இருந்தாலொழிய, இரு மெய்க் கணியங்களின் வர்க்கக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகமாட்டாது.

$$\therefore X = 0 \text{ உம்}, Y = 0 \text{ உம் ஆகும்.}$$

எனவே, **ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்கும் எத்தொகை விசைகளும் சமநிலேயிலிருப்பின், செங்கோணங்களிலுள்ள எவையேனும் இரு திசைகளில் அவற்றின் துணித்த பகுதிகளினது அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகைகள் புறம்பாக மறையவேண்டும்.**

மறுதலேயாக, **செங்கோணங்களிலுள்ள இரு திசைகளில் அவற்றின் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகைகளிரண்டும் பூச்சியமாயின், அவ்விசைகள் சமநிலேயிலிருக்கும்.**

ஏனெனில், அப்போது X, Y இரண்டும் பூச்சியமாகும். ஆகவே, F, பூச்சியம்.

§29. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலேயிலிருக்கும் பிரசினங்களுக்குக் கணிப்பினல் ஒரு தீர்வைப் பெறும் மிகப் பொதுவான முறையொன்றை இறுதிப் பந்தியின் முடிபு தருகின்றது.

இம்முடிபைப் பிரயோகப்படுத்துமுகமாக, தந்த விசைகளேச் செங்கோணங்களிலுள்ள இரு திசைகளில் (வழக்கமாகக் கிடையாகவும் நிலேக்குத்தாகவும்) துணித்து, இத்திசைகள் ஒவ்வொன்றிலும் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனக்கலாம்.

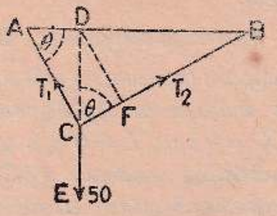
மூன்று விசைகளைப் பொறுத்தளவில், லாமியின் தேற்றத்தையும் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், இது, விசைகள் மூன்றாயிருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகின்றமையாலும், மேலும் பொதுவான துணிக்கும் முறையிலும் பார்க்கச் சிறிதே குறுகியதாகையாலும், இதன் தேவை இன்றியமையாத கடினமான அப்பியாசங்களுக்கு வருமுன், பின் சொல்லப் பட்ட முறையைச் செய்முறையில் பயன்படுத்தலாம்.

விசைமுக்கோணி, விசைப் பல்கோணி ஆகியவற்றுடன் சம்பந்தப்பட்ட வரைபு முறைகளை எத்தொகை விசைகளுக்கும் பயன்படுத்தலாம். ஆனால், அவை வழக்கமாகக் கணிப்பினும் பார்க்க அதிக நேரம் எடுப்பதுடன், கணித்த பேற்றிலும் பார்க்கச் செம்மை குறைந்தனவாகவுமுள்ளன.

பின்வரும் உதாரணங்களில், தீர்வு காணும் சில மாற்று முறைகள் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன:—

உதாரணம் (i).

50 இரு. திணிவுள்ள ஒரு துணிக்கை ஒரே மட்டத்தில் 5 அடி இடைத்-தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைத்த 3 அடி, 4 அடி நீளமான இரு இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றது. இழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.



படம் 17.

அவ்விழைகளை AC, BC (படம் 17) என்க.

AC = 3 அடி, BC = 4 அடி, AB = 5 அடி ; ACB, ஒரு செங்கோணம்.

AB, கிடையாகவும் DC, நிலைக்குத்தாகவுமுள்ளது. அதோடு, C இலுள்ள துணிக்கையின் நிறை, நீட்டிய DC வழியே தாக்குகின்றது. எனவே, AB இற்கு CD செங்குத்தானதென்க.

$\angle DCB = \theta$ ஆயின், $\angle BAC = \theta$ உம், கோசை $\theta = \frac{3}{5}$ உம், சைன் $\theta = \frac{4}{5}$ உம் ஆகும்.

(A) கிடையாகத் துணிக்குமிடத்து, இடப்பக்கக் கூறு வலப்பக்கக் கூற்றைச் சமனாக்க வேண்டும்.

$$\therefore T_1 \text{ கோசை } \theta = T_2 \text{ சைன் } \theta \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்குமிடத்து, மேன்முகக் கூறுகள் கீழ்முகக் கூறு களைச் சமனாக்க வேண்டும்.

$$\therefore \mathrm{T}_1 \text{ சைன் } \theta + \mathrm{T}_2 \text{ கோசை } \theta = 50 \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(i) இலிருந்து, $\frac{3}{5}\mathrm{T}_1 = \frac{4}{5}\mathrm{T}_2$, அல்லது $\mathrm{T}_2 = \frac{3}{4}\mathrm{T}_1$,

அதோடு (ii) இலிருந்து, $\frac{4}{5}\mathrm{T}_1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\mathrm{T}_1 = 50$,

$$\therefore \tfrac{25}{20}\mathrm{T}_1 = 50,$$

$\therefore \mathrm{T}_1 = 40$ இரு. நிறையும், $\mathrm{T}_2 = 30$ இரு. நிறையும் ஆகும்.

(B) DC ஐ E இற்கு நீட்டுக. பின்பு, லாமியின் தேற்றப்படி,

$$\frac{\mathrm{T}_1}{\text{சைன் BCE}} = \frac{\mathrm{T}_2}{\text{சைன் ACE}} = \frac{50}{\text{சைன் ACB}}.$$

ஆனால், சைன் BCE = சைன்θ, சைன் ACE = சைன் $(90-\theta)$ = கோசை θ, $\angle ACB = 90°$.

$$\therefore \frac{\mathrm{T}_1}{\frac{4}{5}} = \frac{\mathrm{T}_2}{\frac{3}{5}} = \frac{50}{1},$$

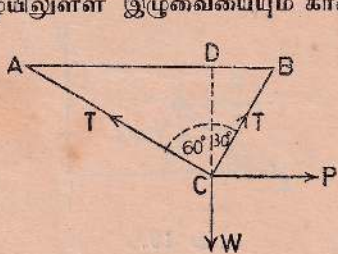
$\therefore \mathrm{T}_1 = 40$ இரு. நிறையும், $\mathrm{T}_2 = 30$ இரு. நிறையுமாகும்.

(C) இப்படம் ஓர் அளவுத்திட்டத்திற்கமையவும், AC இற்கு DF சமாந்தரமாகவும் வரையப்பட்டிருப்பின், முக்கோணி DCF இன் பக்கங்கள் முறையே நிறை 50, இழுவை T_2, இழுவை T_1 ஆகியனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

எனவே, DC ஆனது 50 ஐக் குறிக்குமதே அளவுத்திட்டத்திற்கு CF உம் FD உம் முறையே T_2 ஐயும் T_1 ஐயும் குறிக்கின்றன.

உதாரணம் (ii).

ஓர் இழை, ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இழையின் வழியே சுயாதீனமாக வழுவிச் செல்லக்கூடிய W இரு. நிறையுள்ள ஓர் ஒப்பமான வளையம், P இரு நிறையுள்ள ஒரு கிடை விசையினுல் இழுக்கப்படுகின்றது. சமநிலைத் தானத்தில், இழையின் பாகங்கள் நிலைக்குத்துடன் 60°, 30° கோணங்களை ஆக்கின், P இன் பெறுமானத்தையும் இழையிலுள்ள இழுவையையும் காண்க.



படம் 18.

இழை இணைத்த புள்ளிகளை A, B (படம் 18) எனவும், வளையத்தின் நிலையத்தை C எனவும், $\angle ACD = 60°$ என்றும், $\angle BCD = 30°$ என்றும்

அமைய AB இற்கு CD செங்குத்தானதெனவும் கொள்க. வளையம் ஒப்பமானதாகையால், இழையெங்கும் T என்னும் ஒரே இழுவை இருக்கும்.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$T \text{ கோசை } 30^\circ + T \text{ கோசை } 60^\circ = W,$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)T = W,$$

$$\therefore T = \frac{2W}{\sqrt{3}+1} = W(\sqrt{3}-1) \text{ இரு. நிறை.}$$

கிடையாகத் துணிக்க,

$$P + T \text{ சைன் } 30^\circ = T \text{ சைன் } 60^\circ,$$

$$\therefore P = \frac{\sqrt{3}}{2}T - \tfrac{1}{2}T = \frac{T}{2}(\sqrt{3}-1),$$

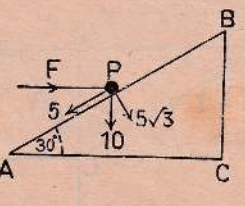
$$\therefore P = \frac{W}{2}(\sqrt{3}-1)^2 = W(2-\sqrt{3}) \text{ இரு. நிறை.}$$

உதாரணம் (iii).

10 இரு. நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை, கிடையுடன் 30° கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கும் ஓர் ஒப்பமான தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையைச் சமநிலையிற் பேணத் தேவையான, (*a*) அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக, (*b*) கிடையாகத் தாக்கும் விசையின் பருமனைக் காண்க.

தளத்தின் பரப்பை AB (படம் 19) எனவும், கிடையை AC எனவும், துணிக்கையை P எனவும் கொள்க.

P இன் நிறை, AB இற்குச் செங்குத்தாக 10 கோசை 30° இரு. நிறை என்றும், BA இற்குச் சமாந்தரமாக 10 சைன் 30° அல்லது 5 இரு. நிறை என்றும் இரு கூறுகளாகத் துணிக்கப்படலாம். தளம் ஒப்பமானதாகையால், அதனுல் துணிக்கையை வழுவிச் செல்வதைத் தடுக்கக்கூடியதாக அதன் பரப்பிற்குச் சமாந்தரமான விசையெதையும் உஞற்றமுடியாது.



படம் 19.

(*a*) துணிக்கை வழுவிச் செல்வதைத் தடுக்கத் தேவையானதும் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குவதுமான விசை மேனேக்கித் தாக்கும் 5 இரு. நிறையேயாகும். AB இற்குச் செங்குத்தான நிறையின் கூறு $5\sqrt{3}$, தளத்தின் மறுதாக்கத்தினுல் சமன்செய்யப்படுகின்றது.

(*b*) காட்டப்பெற்றவாறு, F என்னும் ஒரு விசை கிடையாகத் தாக்கின், AB இற்குச் செங்குத்தான அதன் கூறு F சைன் 30°, தளத்திற்கு எதிராக அத்துணிக்கையை வெறுமனே அழுத்துகின்றது. ஆகவே, தளத்திற்குச் சமாந்தரமான அதன் கூறு F கோசை 30°, தளத்தில் கீழ் நோக்கித் தாக்கும் அந்நிறையின் கூறு 5 இரு. நிறையைச் சமன் செய்யப் போதுமானதாக வேண்டும்.

$$\therefore \ \mathrm{F} \text{ கோசை } 30^\circ = 5,$$

$$\therefore \mathrm{F} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ இரு. நிறை.}$$

பயிற்சி III.

1. 20 இரு. நிறையொன்று ஒரே மட்டத்தில் 10 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து 6 அடியும் 8 அடியும் நீளமான இரு இலேசான இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்விழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

2. ஒரு 90 இரு. திணிவு, ஒரே மட்டத்தில் 15 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து 9 அடியும் 12 அடியும் நீளமான இரு இலேசான இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்விழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

3. 26 இரு. நிறையொன்று ஒரே மட்டத்தில் 13 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து 5 அடியும் 12 அடியும் நீளமான இரு இலேசான இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்விழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

4. ஒரு 30 இருத்தல் சுமையைத் தாங்கியுள்ள ஓர் ஒப்பமான, நிறையற்ற கப்பி நிலைக்குத்துத் தவாளியில் சுயாதீனமாய் மேனோக்கியும் கீழ் நோக்கியும் செல்லக் கூடியது. இக்கப்பியானது அதனைச் சுற்றிச் செல்லும் ஓர் இழையினால், இழையின் இரு பாகங்களும் கிடையுடன் 30°, 60° கோணங்களை ஆக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழையிலுள்ள இழுவையின் பெறுமானம் 22 இரு. நிறையினும் சிறிது குறைவானதெனக் காட்டுக. (H.C.)

5. 5 அடியும் 6 அடியும் நீளமான இரு இழைகள் 10 இரு. நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவ்விழைகளின் மற்றைய நுனிகள், ஒரே மட்டத்தில் 8 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வோர் இழையிலுமுள்ள இழுவையைக் காண்க. (I.A.)

6. 100 இரு. நிறையொன்று, ஒரே கிடைக்கோட்டில் 25 அங்குல இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைத்த 7 அங்குலமும் 24 அங்குலமும் நீளமான இரு இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க. (I.S.)

7. 10 இறு. நிறையான ஒரு துணிக்கை, 60° கோணச் சாய்வுள்ள ஓர் ஒப்பமான தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. (a) தளத்தின் பரப்பிற்குச் சமாந்தரமாக, (b) கிடையாகப் பிரயோகிக்கப்படும் எவ்விசை துணிக்கையை ஓய்வு நிலையிற் பேணும் ?

8. 30° கோணச் சாய்வுள்ள ஓர் ஒப்பமான தளத்தின்மீது தங்கியிருக்கும் ஒரு 12 இறு. நிறையுள்ள துணிக்கை, தளத்தின் உச்சியிலிருக்கும் ஓர் ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையினால் நிலைக் குத்தாகத் தொங்குமொரு W இறு. நிறையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நிறைகள் சமநிலையிலிருக்கும் வண்ணம் W இன் பெறுமானத்தையும், இந் நிபந்தனை நிறைவேற்றப்படுமிடத்து கப்பியின் மீதுள்ள தாக்கத்தையும் காண்க.

9. 10 இறு. நிறையுள்ள ஒரு சிறிய பொருள், அதன் ஒரே புள்ளியுடன் இணைத்த 7 அங்குலமும் 10 அங்குலமும் நீளமுள்ள இரு இழைகளினால், ஒரே கிடைக்கோட்டில் 12 அங்குல இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வோர் இழையினுமுள்ள இழுவையைக் காண்க. (I.S.)

10. C என்னும் ஒரு 10 இறு. நிறை, முறையே 2 அடியும் 3 அடியும் நீளமான AC, BC என்னும் இரு நாண்களினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இந்நாண்களின் A, B ஆகிய நுனிகள், ஒரே மட்டத்தில் 4 அடி இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு முளைகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந் நாண்களினுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

11. P, Q, R என்னும் மூன்று விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன. Q இனதும் R இனதும், R இனதும் P இனதும், P இனதும் Q இனதும் விளையுள்கள் பருமனிலும் திசையிலும் தெரிந்துள்ளன. விசைகள் P, Q, R ஒவ்வொன்றையும் எவ்வாறு நிர்ணயிக்கலாம் ? (I.S.)

12. தந்த சாய்வுகளையுடைய தளங்களில் பின்வரும் நிறைகளையுடைய துணிக்கைகளைத் தாங்குதற்குத் தேவையான (a) கிடைவிசையையும், (b) தளத்தில் மேனோக்கிச் செயற்படும் விசையையும் காண்க :—

(1) 10 அடி நீளமும் 6 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் 10 இறு.

(2) 25 அடி நீளமும் 20 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் 45 இறு.

(3) 30° சாய்தளத்தில் 5 தொன்.

13. 20 இறு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள், கிடையுடன் 30° சாய்வுள்ள ஓர் ஒப்பமான தளத்தின்மீது தங்கியிருக்கின்றது. அதனைச் சமநிலையிற் பேணத் தேவையான விசையின் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தையும், தளத்தின் விளையுள் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

14. 10 இறு. நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை, அதனுடன் இணைத்த இரு இழைகளினால் தாங்கப்படுகின்றது. ஓர் இழையின் திசை கிடையுடன்

60° இலிருப்பின், மற்றையதின் இழுவை இயன்றளவு குறைவாயிருப்பதற்கு அதன் திசையையும், இச்சந்தர்ப்பத்தில் இரு இழைகளிலுமுள்ள இழுவைகளின் பெறுமானங்களையும் காண்க.

15. ஒரு நிறையற்ற கம்பி, ஒரே மட்டத்தில் 4 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிடையே இழுத்துக்கட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இக்கம்பியின் நடுப்புள்ளியில் தொங்கவிட்ட ஒரு 10 இரு. நிறை கம்பியை AB என்னும் நிலையிலிருந்து 2 அங்குலம் தாழச் செய்கின்றது. கம்பியிலுள்ள இழுவையைக் காண்க.

16. மூன்று இழைகள், சமநிலையிலிருக்கும் ஓர் இலேசான துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவற்றிலிரண்டு, கப்பிகளின் மேலாகச் சென்று, நிறைகளைத் தாங்கி நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்றன. மற்றையது, W இரு. நிறையைத் தாங்குகின்றது. மேற்செல்லும் இழைகள், P ஊடான மேண்முக நிலைக்குத்துடன் முறையே 30°, 45° இற் சாய்ந்துள்ளன. இப்பொழுது, மேலதிகமாக ஒரு 10 இரு. நிறை W இற்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. P அதே தானத்திற் சமநிலையிலிருக்கும் என்பதை உறுதிப்படுத்த, மற்றைய இரு இழைகளுக்கும் எவ்வளவு மேலதிகமான நிறைகள் இணைக்க வேண்டும்? (N. U. 3 உம் 4 உம்.)

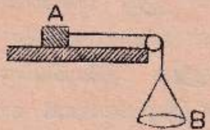
17. 2 அடி நீளமான ஓர் இழை, ஒரே மட்டத்தில் 1 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்விழையில் தொங்கவிட்ட 10 இரு. நிறையான ஒரு வளையம், ஒரு கிடைவிசை P இனால் தாக்கப்படுகின்றது. இவ்விசை அதனை B இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே சமநிலையிற் பேணுகின்றது. இவ்விழையிலுள்ள இழுவையையும் P இன் பருமனையும் காண்க. (N.U. 3 உம் 4 உம்.)

18. 31 அங்குல நீளமுள்ள ஓர் இழையின் இரு நுனிகளும், ஒரே கிடைக்கோட்டில் 25 அங்குல இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு 9 இரு. நிறை தொங்கவிட்டிருக்கும் ஒரு சிறுவளையம் இவ்விழையில் வழுவிச் செல்லக்கூடியது. சமநிலைத் தானத்தில் இழையின் கிட்டிய நுனியிலிருந்து 7 அங்குலத்தில் அவ்வளையம் இருக்கும் வண்ணம் பேணக்கூடிய பருமனுள்ள ஒரு கிடைவிசை அவ்வளையத்தின்மீது தாக்குகின்றது. இவ்விசை ஏறத்தாழ 5 இரு. நிறைக்குச் சமமெனக் காட்டி, இழையின் இழுவையைக் காண்க. (I.S.)

உராய்வு.

§30. ஒரு பொருள் இன்னொன்றின்மீது வழுக்கிச் செல்லும்போது, இயக்கத்தைத் தடைசெய்ய நாடும் ஒரு விசை செயற்படுகிறதென்பது அனுபவத்திலிருந்து தெரிகின்றது. இவ்விசை உராய்வு விசை எனப்படும்.

தெரிந்த நிறையுள்ள ஒரு மரக்குற்றி A ஐ (படம் 20) ஒரு மேசைமீது வைத்து, ஒரு கப்பியின் மேலாகச் சென்று மறு நுனியில் ஓர் இலேசான தராசுத்தட்டைத் தாங்கும் ஓர் இழைத் துண்டை இக்குற்றியுடன் இணைப்பின், இவ்விசையின் தாக்கத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் விதிகளை அறியலாம்.



படம் 20.

தட்டு B இல் ஒரு சிறிய நிறையை வைக்குமிடத்து, A இல் ஓரியக்கமும் ஏற்படாது. ஆகவே, A இற்கும் மேசைக்குமிடையேயுள்ள உராய்வு, தட்டு B இன் நிறைக்கும் சேர்த்த நிறைக்கும் சமமாக வேண்டும். ஒரு குறித்த நேரத்தில் A இயங்க ஆரம்பிக்கும் வரை, B இலுள்ள நிறையைப் படிப்படியாக அதிகரித்துக்கொண்டே செல்லலாமென அறியப்பட்டுள்ளது. ஓர் எல்லைக்குட்பட்ட உராய்வை மட்டுமே செயலுறச் செய்யலா மென்பதை இது காட்டுகின்றது.

A ஐ இயக்க நாடும் விசை பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரிக்கும் அதே வீதத்தில் உராய்வு விசையானது, ஓர் உயர்வுப் பெறுமானத்தை அல்லது எல்லைப் பெறுமானத்தை அடையும் வரை பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரித்துக் கொண்டு போகும். பின்பு, இயக்கம் ஏற்படும். அப்பொழுது, B இன் மொத்த நிறையானது உராய்வு விசைக்குச் சமமாகும். A இற்கும் மேசைக்குமிடையேயுள்ள அமுக்கம் அதிகரிக்கு முகமாக A இல் இப்பொழுது ஒரு நிறையை வைத்து, இப்பரிசோதனையை மறுபடியும் செய்வோமாயின், இயக்கம் ஏற்படுமுன் B இற்கு மிகுதியாக நிறை சேர்க்கப்படவேண்டும் என்பதைக் காண்போம், அ-து. உராய்வின் உயர்வுப் பெறுமானம் அதிகரித்துவிட்டது. A இல் வெவ்வேறு நிறைகளை வைத்து, பரிசோதனையை மறுபடியும் செய்யுமிடத்து, A இற்கும் மேசைக்குமிடையேயுள்ள அமுக்கத்திற் சார்ந்திருக்கும் உயர்வு உராய்விற்குரிய பெறுமானத் தொடரொன்றைப் பெறலாம். ஒவ்வொரு தரமும், B இன் மொத்த நிறையை A இன் மொத்த நிறையினாற் பிரிக்குமிடத்துப் பெற்ற எண் மாறுதிருத்தலைக் காணலாம்.

வெவ்வேறு பருப்பொருட்களாலாய குற்றிகளைக் கொண்டு, இதைப் போன்ற பரிசோதனைகளைச் செய்யலாம். இத்தகைய பரிசோதனைகளின் முடிபுகளைப் பின்வரும் விதிகளில் அடக்கிக் கூறலாம் :—

உராய்வு விதிகள்.

1. **உராய்வின் திசையானது, பொருள் இயங்க நாடும் திசைக்கு எதிரானதாகும்.**
2. **உராய்வின் பருமனானது, ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு வரைக்கும், இயக்கத்தை உண்டுபண்ண நாடும் விசைக்குச் சரிசமமாகும்.**

3. ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு உராய்வை மட்டுமே செயற்பட வைக்கலாம். இவ்வுயர்வளவானது எல்லை உராய்வு எனப்படும்.

4. எல்லை உராய்வின் பருமனானது (தந்த பரப்புக்களுக்கு) பரப்புகளிடையேயுள்ள செங்குத்தான அமுக்கத்துடன் μ என்னும் மாறு விகிதத்தைக் கொண்டுள்ளது. இவ்விகிதம் μ, அப்பரப்புக்களின் தன்மையிற் சார்ந்திருக்கின்றது. இது, உராய்வுக் குணகம் எனப்படும்.

5. செங்குத்தான அமுக்கம் மாறாதிருக்கும் வரையில், உராய்வின் அளவானது, அது தொடுகையுடனிருக்கும் பரப்புக்களின் பரப்பளவுகள், வடிவம் ஆகியவற்றிலே தங்காததாகும்.

6. இயக்கம் ஏற்படும்போதும், உராய்வானது இயக்கத்தை எதிர்த்துக் கொண்டே இருக்கும். அது, வேகத்திலே தங்காததாகவும் செங்குத்தான அமுக்கத்திற்கு விகிதசமமாகவும் இருக்கும் ; ஆனால், அது எல்லை உராய்விலும் சிறிது குறைவானதாகும்.

§31. இவ்விதிகள் பரிசோதனை மூலமாகப் பெறப்பட்டனவென்பதும், முதல் மூன்று விதிகள் நீங்கலாக ஏனையவை வரையறைக்குட்பட்டன என்பதும் தெளிவாக விளங்கப்படவேண்டியன. எனவே, மிக்க பேரளவினதான அமுக்கங்களிற்கு, அவை தொடுகையுடனிருக்கும் பரப்புக்கள் நெரிக்கப்படலாம். பின்பு, நான்காம் விதி இவற்றை மேலும் கட்டுப்படுத்தாது.

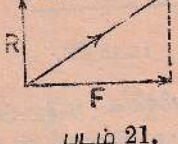
F, எல்லை உராய்வும் (அ–து. இயக்கம் ஆரம்பிக்கும் தறுவாயிலுள்ள உராய்வு விசை), **R**, செவ்வன முக்கமும் μ, உராய்வுக் குணகமுமாயின், நான்காம் விதியிலிருந்து,

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}} = \mu \text{ அல்லது, } \mathrm{F} = \mu \mathrm{R}.$$

உராய்வு எப்பொழுதும் μR இற்குச் சமமெனக் கொள்ளாதிருக்க மிக்க கவனமாக இருக்கவேண்டும். இயக்கம் ஏற்படும் தறுவாயிலேயே அது இப்பெறுமானத்தை உடையதாக இருக்கும் ; இல்லையாயின், பூச்சியத்திற்கும் μR இற்குமிடையே எப்பெறுமானத்தையும் உடையதாக இருக்கும்.

§32. உராய்வுக் கோணம்.

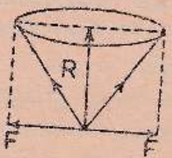
செவ்வன முக்கம் **R** உம், உராய்வு விசை **F** உம் ஒரு தனி விசையாகச் சேர்க்கப்படுமாயின், இவ்விசையானது விளையுள் அல்லது மொத்த மறுதாக்கம் எனப்படும்; இது, செவ்வனுடன் தான் $^{-1}\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}$ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும்.



படம் 21.

F, பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரிக்குந்தோறும், உராய்வு **F** ஆனது அதன் உயர்வுப் பெறுமானம் μR ஐ அடையும் வரை, செவ்வனுடன் இவ்

விளையுள் ஆக்கும் கோணம் அதிகரித்துக் கொண்டே போகும். இவ்விடத்து, விளையுளினதும் செவ்வனினதும் இடைக்கோணத்தின் தான்சன், $\frac{\mu R}{R}$ அல்லது μ ஆகும். உராய்வு எல்லையுராய்வாக இருக்கும்போது, விளையுள் மறுதாக்கம் செவ்வனுடன் ஆக்கும் கோணம் **உராய்வுக் கோணம்** எனப்படும். இது, λ அல்லது ϵ இனற் குறிக்கப்படும். எனவே, தான் $\lambda = \mu$ ஆகும்.

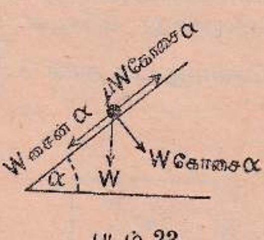


படம் 22.

செவ்வனுடன் விளையுள் மறுதாக்கம் இப்பெறுமானத்திற்குட்பட்ட எக்கோணத்தையும் ஆக்கலாம். ஆனல், இதற்குக் கூடிய கோணச் சாய்வு இருக்கமுடியாது. செவ்வனுக்குச் செங்குத்தான வேறேதும் திசையில் இயக்கம் ஏற்படமுடியுமாயின், இதற்கிசைவான விளையுள் மறுதாக்கத்தின் எல்லைத் தானங்கள், λ அல்லது தான்$^{-1}\mu$ என்னும் அரையுச்சிக் கோணமுள்ள ஒரு கூம்பின் மீதிருக்கும்.

இக்கூம்பு **உராய்வுக் கூம்பு** எனப்படும். விளையுள் மறுதாக்கம் எப்பொழுதும் இக்கூம்பின் உட்புறத்தில் அல்லது பரப்பில் இருக்கவெண்டும். பரப்பிலிருக்குமிடத்து, சமநிலை எல்லைச் சமநிலையாக இருக்கும்.

§33. ஒரு முரடான சாய்தளத்தின்மீது ஒரு துணிக்கையின் சமநிலை.



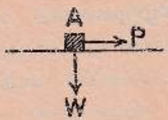
படம் 23.

W நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை ஒரு முரடான சாய்தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. இடையுடன் இத்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக அதிகரிக்கப்படுகின்றது (படம் 23). α என்னும் ஏதாவதொரு சாய்வில், தளத்தில் கீழ்நோக்கி அந்நிறையின் கூறு W சைன் α ஆகும்.

துணிக்கைக்கும் தளத்திற்குமிடையே அமுக்கம் W கோசை α ஆகும். எல்லை அல்லது உயர்வு உராய்வு μW கோசை α ஆகும். எனவே, W சைன் $\alpha = \mu$W கோசை α, அல்லது தான் $\alpha = \mu$ ஆகும்போது, இயக்கம் ஏற்படும் தறுவாயிலிருக்கும்.

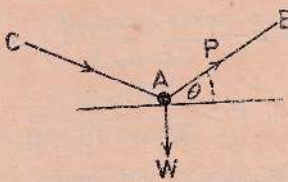
ஆகவே, தான் $\alpha = \mu$, அ-து. தளத்தின் சாய்வானது உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமாக அமையுமாறு சாய்வு கோணம் இருக்கும்போது, துணிக்கை அதன் நிறை காரணமாகக் கீழ்நோக்கிச் சறுக்கத் தொடங்கும்.

§34. ஒரு வெளி விசையினுல் தாக்கப்பட்டு ஒரு முரடான கிடைத்தளத்திலுள்ள துணிக்கை.



படம் 24.

அவ்விசை (படம் 24 இற் போல்), கிடையாகவும் P இற்குச் சமமாகவும் இருப்பின், அப்போது இயக்கம் ஏற்படவேண்டின், P, μW இலும் அதிகமானதாக இருக்கவேண்டும்.



படம் 25.

விசை P ஆனது, படம் 25 இற்போல, θ கோணத்தில் AB வழியே மேன்முகமாகச் சாய்ந்திருப்பின், அது மேன்முக நிலைக்குத்துக் கூறென்றை உடையதாக இருக்கும். இது, துணிக்கைக்கும் தளத்திற்குமிடையே அமுக்கத்தைக் குறைக்கின்றது.

இப்பொழுது, செவ்வன் மறுதாக்கம் W − P சைன் θ உம், இதற்கிசைவான எல்லை உராய்வு μ (W − P சைன் θ) உம் ஆகும். ஆகவே, இயக்கம் ஏற்படும் தறுவாயில் P கோசை $\theta = \mu$ (W − P சைன் θ) ஆகவேண்டும்.

$$\therefore\ \mathrm{P}\,(\text{கோசை}\,\theta + \mu\,\text{சைன்}\,\theta) = \mu \mathrm{W}.$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\,\left(\text{கோசை}\,\theta + \frac{\text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\,\lambda}\,\text{சைன்}\,\theta\right) = \frac{\text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\,\lambda}\,\mathrm{W}.$$

இங்கு, $\lambda =$ உராய்வுக் கோணம் ;

$$\therefore\ \mathrm{P}\frac{\text{கோசை}\,\theta\,\text{கோசை}\,\lambda + \text{சைன்}\,\theta\,\text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\,\lambda} = \frac{\text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\,\lambda}\mathrm{W}.$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\ \text{கோசை}\,(\theta - \lambda) = \mathrm{W}\ \text{சைன்}\,\lambda,$$

$$\therefore\ \mathrm{P} = \mathrm{W}\frac{\text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\,(\theta - \lambda)}.$$

கோசை $(\theta - \lambda)$ உயர்வாக இருக்கும்போது, அ–து. $\theta = \lambda$ ஆகும்போது, P இன் பெறுமானம் இழிவானதாக இருக்கும். $\theta = \lambda$ ஆயின், $\mathrm{P} = \mathrm{W}$ சைன் λ ஆகும்.

P ஆனது CA வழியே **கீழ்முகமாகச்** சாய்ந்திருப்பின், அது, அமுக்கத்தை அதிகரிக்கும் கீழ்முகமான நிலைக்குத்துக் கூறொன்றை உடையதாக இருக்கும். எனவே, அது உராய்வினை அதிகரிக்கின்றது. ஆகவே, இயன்றளவு மிகக் குறைவான விசையுடன் அத்துணிக்கையை இயக்கும் பொருட்டு, கிடையுடன் உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமான கோணத்தில் ஒரு மேன்முகத்திசையில் அவ்விசை பிரயோகிக்கப்பட வேண்டும்.

P ஐக் கீழ்முகமாகப் பிரயோகிக்கும்போது, உராய்வு $\mu\,(\mathrm{W} + \mathrm{P}$ சைன் $\theta)$ ஆகும். அதோடு, இயக்கம் ஏற்படவேண்டின்,

P கோசை $\theta > \mu\,(\mathrm{W} + \mathrm{P}$ சைன் $\theta)$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(\text{கோசை}\ \theta - \frac{\text{சைன்}\,\lambda\,\text{சைன்}\,\theta}{\text{கோசை}\,\lambda}\right) > \frac{\mathrm{W}\ \text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\,\lambda},$$

$$\therefore\ \mathrm{P} > \frac{\mathrm{W}\ \text{சைன்}\,\lambda}{\text{கோசை}\ (\theta + \lambda)}.$$

இப்பொழுது, $(\theta + \lambda)$ கிட்டத்தட்ட 90° ஆயின், வலக்கைப் பகுதியெண் மிகச் சிறியதாகிவிடும். இயக்கம் ஏற்படவேண்டின், P மிகப் பெரியதாக இருக்கவேண்டும். $(\theta + \lambda)$ ஆனது 90° இற்குச் சமமாகும்போது, P எத்துணைப் பெரியதாயினும், துணிக்கை இயங்காது.

அன்றியும், $(\theta + \lambda)$ ஆனது 90° இலும் அதிகமாயின், அதன் கோசைன் மறைக்கணியமாகும். அதோடு, அத்துணிக்கையை இயக்க P இனல் இயலாது. முரண்திசையில், அ–து. AC வழியே P தாக்கவேண்டுமென அம்மறைக்கணியப் பெறுமானம் பொருள்படுகின்றது.

பயிற்சி IV.

1. 20 இரு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றது. தளத்தின் உராய்வுக்குணகம் 0·5. (i) கிடையாக, (ii) கிடையுடன் 30° கோணத்தில் தாக்குகின்ற மிகக் குறைந்த எவ்விசை அப்பொருளை இயக்கும் ?

2. 40 இரு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு முரடான கிடைத்தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றது ; இப்பொருளை, கிடையாகத் தாக்குமொரு 10 இரு. நிறை விசையினுல் இயக்கலாம் ; உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

3. ஒரு 20 இரு. நிறையை 0·25 உராய்வுக்குணகமுள்ள ஒரு முரடான கிடைத்தளத்தின் வழியே இயக்கத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க.

4. W இரு. நிறையுள்ள ஒரு சிறிய மரக்குற்றி, அதன் மேண்முக மையத்தில் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்திற் செயற்படும் ஒரு விசையினுல் ஒரு முரடான தரை வழியே தள்ளப்படுகின்றது. θ ஆனது உராய்வுக் கோணத்திலும் குறைவாயின், குற்றி இயங்காதென நிறுவுக. θ ஆனது உராய்வுக் கோணம் λ இலும் அதிகமாயின், குற்றியை இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை

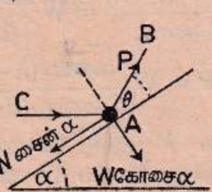
$$\text{W சைன் } \lambda \text{ கோசீ } (\theta - \lambda)$$

என நிறுவுக.

§35. ஒரு வெளிவிசையினுல் தாக்கப்பட்டு முரடான சாய்தளத்திலிருக்கும் துணிக்கை.

I. தளததின் சாய்வானது, உராய்வுக் கோணத்திலும் குறைவாக இருக்கும் போது.

இச்சந்தர்ப்பத்தில், சொந்த நிறை காரணமாகத் துணிக்கை கீழ்நோக்கிச் சறுக்குதலைத் தடுக்க உராய்வு போதுமானது.



படம் 26.

துணிக்கையைத் தளத்தின் மேல் அல்லது கீழ் நோக்கி இயக்கத் தேவையான, அதியுயர் சரிவுக் கோட்டினுடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் பிரயோகிக்கும் விசை P ஐக் காணல்.

(a) P, படம் 26 இற்போல, தளத்துடன் θ கோணத்தில் மேனேக்கித் தாக்கின், செவ்வன் மறுதாக்கம் P சைன் θ இனுற் குறைக்கப்படும்.

எனவே, எல்லை உராய்வு μ(W கோசை α − P சைன் θ) ஆகிக் கீழ்நோக்கித் தாக்கும். தளத்தின் கீழ்நோக்கி நிறையின் கூறு W சைன் α ஆகும். ஆகவே, துணிக்கை மேனேக்கி இயங்கும் தறுவாயிலிருக்கும்போது,

$$\text{P கோசை } \theta = \text{W சைன் } \alpha + \mu\,(\text{W கோசை } \alpha - \text{P சைன் } \theta),$$

$$\therefore\ \text{P}\left(\text{கோசை } \theta + \frac{\text{சைன் } \lambda}{\text{கோசை } \lambda}\,\text{சைன் } \theta\right) = \text{W}\left(\text{சைன் } \alpha + \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \lambda}\right),$$

$$\therefore\ \text{P}\,\frac{\text{கோசை } (\theta - \lambda)}{\text{கோசை } \lambda} = \text{W}\,\frac{\text{சைன் } (\alpha + \lambda)}{\text{கோசை } \lambda},$$

$$\therefore\ \text{P} = \text{W}\,\frac{\text{சைன் } (\alpha + \lambda)}{\text{கோசை } (\theta - \lambda)}.$$

$\theta = \lambda$ ஆகும்போது, இது இழிவாக இருக்கும். பின்பு, P = W சைன் $(\alpha + \lambda)$.

$\theta = 0$ ஆயின், அ-து. தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக P தாக்கின்,

$$\text{P} = \text{W}\,\frac{\text{சைன் } (\alpha + \lambda)}{\text{கோசை } \lambda}.$$

(b) P ஆனது θ கோணத்தில் AC வழியே கீழ்நோக்கித் தாக்கின், எல்லை உராய்வு மீண்டும் μ (W கோசை α − P சைன் θ) ஆகும். ஆனால், இப்பொழுது தளத்தில் மேனோக்கித் தாக்குகின்றது. எனவே, துணிக்கை இயங்கும் தறுவாயில்,

$$\text{P கோசை } \theta + \text{W சைன் } \alpha = \mu\,(\text{W கோசை } \alpha - \text{P சைன் } \theta),$$

$$\therefore\ \text{P}\left(\text{கோசை } \theta + \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ சைன் } \theta}{\text{கோசை } \lambda}\right) = \text{W}\left(\frac{\text{சைன் } \lambda \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \lambda} - \text{சைன் } \alpha\right),$$

$$\therefore\ \text{P}\,\frac{\text{கோசை } (\theta - \lambda)}{\text{கோசை } \lambda} = \text{W}\,\frac{\text{சைன் } (\lambda - \alpha)}{\text{கோசை } \lambda},$$

$$\therefore\ \text{P} = \text{W}\,\frac{\text{சைன் } (\lambda - \alpha)}{\text{கோசை } (\theta - \lambda)}.$$

$\theta = \lambda$ ஆக இருக்கும்போது, P இன் பெறுமானம் மீண்டும் இழிவாக இருக்கும். பின்பு, அதன் பெறுமானம் W சைன் $(\lambda - \alpha)$ ஆகும்.

II. தளத்தின் சாய்வானது உராய்வுக்கோணத்திலும் அதிகமாக இருக்கும் போது.

இச்சந்தர்ப்பத்தில் துணிக்கை வெளிவிசையினால் தாங்கப்பட்டாலொழிய கீழ்நோக்கிச் சறுக்கும். இங்கு, (a) துணிக்கையைத் தளத்தில் **மேனோக்கி இயக்கத்** தேவையான விசையையும், (b) அதனைத் **தாங்கத்** தேவையான விசையையும் எடுத்துநோக்கவேண்டும்.

(a) இதுவும் I.(a) இலுள்ளதும் ஒன்றேயாகும். தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும் விசை,

$$\text{W}\,\frac{\text{சைன் } (\alpha + \lambda)}{\text{கோசை } \lambda}.$$

θ கோணத்தில் மேனோக்கித் தாக்கின்,

$$P = W \frac{\text{சைன் } (\alpha+\lambda)}{\text{கோசை } (\theta-\lambda)}.$$

$\theta = \lambda$ ஆக இருக்கும்போது, P இழிவானதாகும். பின்பு, அதன் பெறுமானம், W சைன் $(\alpha+\lambda)$.

(*b*) P ஆனது θ கோணத்தில் மேனோக்கித் தாக்கின், பின்பு மேலுள்ளது போல, செவ்வன் மறுதாக்கம் W கோசை α − P சைன் θ உம், எல்லை உராய்வு μ (W கோசை α − P சைன் θ) உம் ஆகும். துணிக்கை கீழ்நோக்கிச் செல்ல நாடுவதால், உராய்வு இப்பொழுது தளத்தில் **மேனோக்கித்** தாக்குகின்றது.

$$\therefore \text{P கோசை } \theta + \mu (\text{W கோசை } \alpha - \text{P சைன் } \theta) = \text{W சைன் } \alpha,$$

$$\therefore \text{P}\left(\text{கோசை } \theta - \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ சைன் } \theta}{\text{கோசை } \lambda}\right) = \text{W}\left(\text{சைன் } \alpha - \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \lambda}\right).$$

$$\therefore \text{P}\frac{\text{கோசை } (\theta+\lambda)}{\text{கோசை } \lambda} = \text{W}\frac{\text{சைன் } (\alpha-\lambda)}{\text{கோசை } \lambda},$$

$$\therefore \text{P} = \text{W}\frac{\text{சைன் } (\alpha-\lambda)}{\text{கோசை } (\theta+\lambda)}. \quad . \quad . \quad (\text{i})$$

$\theta = -\lambda$ ஆக இருக்கும்போது, அ−து. P ஆனது CA வழியே தாக்கும்போது, P இன் பெறுமானம் இழிவாக இருக்கும். இதைப் பின்வருமாறும் காட்டலாம்.

P ஆனது CA வழியே தாக்கின், அமுக்கத்தை அதிகரிக்கின்ற, தளத்திற்குச் செங்குத்தான கூறொன்றை அது உடையதாக இருக்கும். பின்பு, எல்லை உராய்வு μ (W கோசை α + P சைன் θ) ஆகி, தளத்தில் **மேனோக்கித்** தாக்கும்.

$$\therefore \text{P கோசை } \theta + \mu (\text{W கோசை } \alpha + \text{P சைன் } \theta) = \text{W சைன் } \alpha,$$

$$\therefore \text{P}\left(\text{கோசை } \theta - \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ சைன் } \theta}{\text{கோசை } \lambda}\right) = \text{W}\left(\text{சைன் } \alpha - \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \lambda}\right),$$

$$\therefore \text{P}\frac{\text{கோசை } (\theta-\lambda)}{\text{கோசை } \lambda} = \text{W}\frac{\text{சைன் } (\alpha-\lambda)}{\text{கோசை } \lambda},$$

$$\therefore \text{P} = \text{W}\frac{\text{சைன் } (\alpha-\lambda)}{\text{கோசை } (\theta-\lambda)}. \quad . \quad . \quad (\text{ii})$$

$\theta = \lambda$ ஆக இருக்கும்போது, இதன் பெறுமானம் இழிவானது. பின்பு, P = W சைன் $(\alpha-\lambda)$.

பயிற்சி V.

1. 5 அடி நீளமும் 3 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும் ஒரு 4 இரு. நிறை விசை, 10 இரு. நிறையொன்று கீழ்நோக்கிச் சறுக்குதலை மட்டுமட்டாகத் தடுக்கும். உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

2. 10 இரு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள், $30°$ சாய்வுள்ள ஒரு முரடான தளத்தில் எல்லைச் சமநிலையில் தங்கியுள்ளது ; தளம், $60°$ சாய்வுக்கு உயர்த்தப்படுகின்றது. அப்பொருளைத் தாங்கத் தளத்திற்குச் சமாந்தரமான விசையைக் காண்க.

3. 20 இரு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள், சைன் $^{-1}\frac{3}{5}$ சாய்வுள்ள ஒரு முரடான சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது ; தளத்திற்கும் பொருளிற்கு மிடையே உராய்வுக்குணகம் 0·2 ஆயின், (*a*) பொருள் கீழ்நோக்கிச் சறுக்குதலைத் தடுக்க, (*b*) அதனைத் தளத்தில் மேனோக்கி இழுக்கத் தேவையான, தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும் மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க.

4. 40 இரு. நிறையொன்று, ஒரு முரடான சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்ற ஒரு 16 இரு. நிறை விசையினால் தாங்கப்படும்போது தளத்தில் கீழ்நோக்கிச் சறுக்கும் தறுவாயிலும், தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு 24 இரு. நிறை விசையினால் தாக்கப்படும்போது தளத்தில் மேனோக்கிச் செல்லும் தறுவாயிலுமுள்ளது. உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

5. ஒரு 610 இரு. நிறை, தான் $^{-1}\frac{11}{60}$ சாய்வும் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{6}$ உம் உடைய ஒரு முரடான சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிறை, தளத்தின் உயர்பரப்புடன் தான் $^{-1}\frac{5}{12}$ கோணத்தை ஆக்குகின்ற திசையுள்ள ஒரு கயிற்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலை அழியாதிருக்கக் கயிற்றின் இழுவையின் எல்லைப் பெறுமானங்களை, கிட்டிய முழுவெண்ணுக்குக் காண்க.

6. கிடையுடன் $30°$ இற் சாய்ந்துள்ள ஒரு முரடான தளத்தில் 80 இரு. நிறையொன்றை மேனோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையை, உராய்வுக் குணகம் 0·75 ஆக இருக்கும்போது காண்க. (I.S.)

7. α சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தில், நிறையொன்றை மேனோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசையானது, அந்நிறை தளத்தில் கீழ்நோக்கிச் சறுக்குதலை மட்டுமட்டாகத் தடுக்கும் மிகக் குறைவான விசையின் இருமடங்காயின், நிறைக்கும் தளத்திற்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$ தான் α எனக் காட்டுக.

8. ஒரு நிறையை, ஒரு சாய்தளத்தில் மேனோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை P ஆகும். தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கி, அந்நிறையை மேனோக்கி இயக்கும் மிகக் குறைந்த விசை

$$P\sqrt{1+\mu^2}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம். (I.S.)

9. கிடையுடன் 20° சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தில், ஓர் 200 இரு. நிறை மேனேக்கி இழுக்கப்படவேண்டியுள்ளது. உராய்வுக்குணகம் 0·25. தேவைப் படும் மிகக்குறைந்த விசையின் திசையையும், கிட்டிய இரு. நிறைக்குப் பருமனையும் காண்க. (H.S.C.)

10. இரு சாய்தளங்கள் ஒரு பொது உச்சியையுடையன. இவ்வுச்சியி லிருக்கும் ஓர் ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்கின்ற ஓர் இழை, ஒவ்வொரு தளத்திலும் ஒவ்வொன்றுகவுள்ள இரு சம நிறைகளை இணைக் கிறது. ஒரு தளம் ஒப்பமாகவும், மற்றையது முரடாகவுமிருப்பின், ஒப்ப மான தளத்திலுள்ள நிறை கீழ்நோக்கிச் செல்லும் தறுவாயிலிருக்குமிடத்து இரு தளங்களினதும் சாய்வு கோணங்களிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

11. 2 இரு. உம் 1 இரு. உம் நிறையுள்ள இரு துணிக்கைகள், முறையே 60°, 30° சாய்வு கோணங்களுள்ள ஓர் இரட்டைச் சாய்தளத்தின் சம முரடான சரிவுகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. தளங்களின் பொது வுச்சியிலுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழை அத்துணிக்கைகளைத் தொடுக்கின்றது ; கூடிய பாரமுள்ள துணிக்கை கீழ்நோக்கிச் சறுக்கும் தறுவாயிலிருப்பின், உராய்வுக் குணகம் $5\sqrt{3}-8$ எனக் காட்டுக.

12. 40 இரு. நிறையொன்று, கிடையுடன் 22° சாய்வுள்ள ஒரு முரடான தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அத்தளத்தினது சாய்வின் வழியே கீழ்நோக்கித் தாக்கி அதனை இயங்கச் செய்யும் மிகக் குறைந்த விசை 4·9 இரு. நிறை எனக் காணப்பட்டுள்ளது. (i) உராய்வுக் குணகத் தையும், (ii) தளத்தின் சாய்வு வழியே தாக்கி, அந்நிறையை மட்டுமட்டாக மேனேக்கி இயங்கச் செய்யும் மிகக் குறைந்த விசையையும் காண்க. (I.S.)

13. W எனும் ஒரு நிறை α சாய்வுள்ள ஒரு முரடான தளத்தின் அதியுயர் சரிவு கோடொன்றில், தளத்தின் மேலே β கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள P எனும் ஒரு விசையினுல் மேனேக்கி இழுக்கப்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின், W ஐ மட்டுமட்டாய் இழுக்கும் P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. W ஐத் தளத்தில் l தூரம் மேலே இழுக்குமிடத்து, இவ்விசை P செய்யும் வேலையைக் காண்க. $W = 112$ இரு., $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$, $\mu = 0{\cdot}20$, $l = 100$ அடி ஆயின், செய்யப்பெறும் வேலையைக் கணிக்க. (I.E.)

14. P எனும் ஒரு இடைவிசை W நிறையுள்ள ஒரு பொருளை ஒரு முரடான சாய்தளத்தில் மட்டுமட்டாகத் தாங்கக்கூடியது ; இதனை, தளத்தில் மேனேக் கித் தாக்கும் Q என்னும் ஒரு விசையும் மட்டுமட்டாகத் தாங்கக்கூடியது. P, Q, W ஆகியனவற்றை மட்டும் கொண்ட ஒரு கோவையாக உராய்வுக் கோணக் கோசைனைக் காண்க. (I.S.)

15. W நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை, ஒரு முரடான சாய்தளத்தில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. தளத்தின் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்திலும் அதிகமானதாகும். தளத்தில் கீழ்நோக்கி இயக்கத்தைத் தடுக்கத் தேவையான மிகக் குறைந்த

இடை விசை W உம், தளத்தில் மேனேக்கி இயக்கத்தை உண்டுபண்ணத் தேவையான மிகக் குறைந்த கிடை விசை $W\sqrt{3}$ உம் ஆகும். தளத்தின் சாய்வையும் உராய்வுக் கோணத்தையும் காண்க. துணிக்கையைச் சமநிலையிற் பேணக்கூடிய மிகக் குறைந்த விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (I.S.)

16. ஓர் இலேசான இழையினுல் தொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு சம நிறைகள், R ஆரையுள்ள ஒரு முரடான கோளத்தின் பரப்பில் தங்கியிருக்கின்றன. அந்நிறைகளிலொன்று கோளத்தின் உச்சிப்புள்ளியிலுள்ளது. உராய்வுக் கோணமானது α இற்குச் சமமாகவும், இழையின் உராய்வு தவிர்க்கத்தக்கதாகவும் இருப்பின், இழையின் இயன்றளவு மிகக்கூடிய நீளத்தைக் காண்க. (Ex.)

17. 4 இரு. நிறையுள்ள ஒரு மரக்குற்றி, 6 அடி நீளக் கிடைப் பலகையொன்றில் தங்கியுள்ளது. பலகையின் ஒரு முனை 2 அடி உயர்த்தப்படும்போது, குற்றி சறுக்கும் தறுவாயில் இருக்குமெனக் காணப்பட்டுள்ளது ; உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க. அம்முனையின் நிலைக்குத்துயரம் 3 அடிக்குக் கூட்டப்படின், சமநிலையைப் பேணுகின்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தான மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க. (H.C.)

18. 40 இரு. பாரமொன்று, கிடையுடன் $30°$ சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பாரம் கீழ்நோக்கிச் சறுக்காதிருக்க, தளத்திற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள விசையைக் காண்க. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{4}$ உள்ள முரடான தளமாக அது அமையின், அப்பாரத்தைத் தளத்தில் மேனேக்கி மட்டுமட்டாய் இயக்கத் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள மிகக் குறைந்த விசையைக் காண்க. (H.C.)

19. ஒரு முரடான சாய்தளத்தின் வழியே தாக்குகின்ற விசை P, அத்தளத்தில் ஒரு பொருளைப் பேண மட்டுமட்டாகப் போதுமானது. உராய்வுக்கோணம் λ, தளத்தின் கோணம் α இலும் குறைவானது. தளத்தில் மேனேக்கி அப்பொருளை இழுப்பதற்குப் போதுமான, தளத்தின் வழியே தாக்கும் மிகக் குறைந்த விசை,

$$P\frac{\text{சைன் } (\alpha+\lambda)}{\text{சைன் } (\alpha-\lambda)}$$

என நிறுவுக. (I.E.)

20. W நிறையுள்ள ஒரு பொருள், α சாய்வுள்ள ஒரு முரடான தளத்தில் தங்கியுள்ளது. அதனைத் தளத்தில் மேனேக்கி இயக்கும் ஒரு விசையின் மிகக் குறைந்த பருமன், W சைன் $(\alpha+\lambda)$ எனக் காட்டுக. இங்கு λ, உராய்வுக் கோணம். விசையின் திசை மாறுது பேணப்படின், $\alpha > \lambda$ ஆனுல், அப்பொருள் தளத்தில் கீழ்நோக்கிச் செல்லுமுன் அவ் விசையின் பருமன் W சைன் $(\alpha-\lambda)$ சீக 2λ ஆகச் சுருக்கப்படலாமெனக் காட்டுக. (C.W.B.)

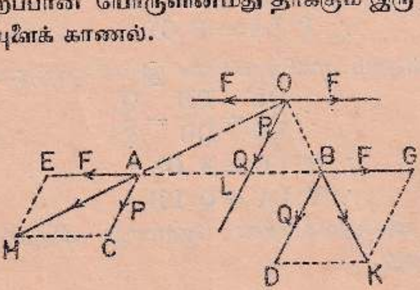
அதிகாரம் II.

சமாந்தர விசைகள் — திருப்புதிறன்கள் — இணைகள்.

§36. முன்னைய அதிகாரத்தில், ஒரு துணிக்கையின்மீது விசைகளின் தாக்கம் பற்றி ஆராய்ந்தோம். இப்போது ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது விசைகளின் தாக்கம் பற்றி ஆராயத் தொடங்குவோம். இச்சந்தர்ப்பங்களில், ஒரே நேர் கோட்டில் அமையாது சமாந்தரமாக இருக்கும் இரு விசைகளின் விளையுளைக் காண வேண்டியிருக்குமென்பது தெள்ளிது. அவ் விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பதில்லையாதலின், விசையிணைகரத்தை நேராகப் பிரயோகித்து அவற்றின் விளையுளைக் காண முடியாது. எனினும், சமாந்தர விசைகளின் விளையுளைப் பெறுதற்குரிய விதிகளைப் பின்வரும் இரு பந்திகளிலுமுள்ளவாறு இணைகர விதியிலிருந்து பெறலாம்.

இரு சமாந்தர விசைகள் ஒரே திசையிற் செயற்படின், **நிகர்த்தவை** எனவும், சமாந்தரமான முரண் திசைகளிற் செயற்படின், **நிகராதவை** எனவும் கருதப்படும்.

§37. **ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்கும் இரு நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகளின் விளையுளைக் காணல்.**



படம் 27.

P, Q என்பன அப்பொருளின் A, B (படம் 27) என்னும் புள்ளிகளில் தாக்கும் விசைகளென்க. அவ்விசைகளை முறையே AC, BD என்னும் கோடுகளினாற் குறிக்க.

கோடு AB வழியே தாக்குவதும், முறையே AE, BG என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படுவதுமான F என்னும் இரு சம, முரண் விசைகளை A இலும் B இலும் புகுத்துக. பொருள் விறைப்பாக இருக்க, A இலுள்ள விசை F ஆனது B இற்கு மாற்றப்பட்டு, அங்கே மற்றைய விசை F ஐச் சமன்செய்யுமென்று கருதலாமாகையால், இவ்விசைகளைப் புகுத்தல் P, Q ஆகியவற்றின் தாக்கத்தைக் குழப்பாது. AEHC, BGKD ஆகிய

இணைகரங்களை நிறைவாக்கி, **HA, KB** என்னும் மூலைவிட்டங்களை **O** இற் சந்திக்கும்படி நீட்டுக. **OL** ஐ, **AC** அல்லது **BD** இற்குச் சமாந்தரமாக **AB** ஐ **L** இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

A இலுள்ள **P, F** ஆகிய விசைகள் **AH** இனாற் குறிக்கப்படும் ஒரு விளையுளையுடையன. இவ்விளையுள் **O** இல் தாக்குவதாகக் கருதலாம். இதே மாதிரியாக, **B** இலுள்ள **Q, F** ஆகிய விசைகள் **BK** இனாற் குறிக்கப்படும் ஒரு விளையுளையுடையன. இதுவும் **O** இல் தாக்குவதாகக் கருதலாம்.

இவ்விசைகளை **OL** வழியே **P, AE** இற்குச் சமாந்தரமாக **F** எனவும் **OL** வழியே **Q, BG** இற்குச் சமாந்தரமாக **F** எனவும், **O** இல் அவற்றின் கூறுகளாகத் துணிக்கலாம். **F** என்ற அவ்விரு விசைகளும் சமநிலையிலுள்ளன.

எனவே, **P, Q** என்னும் தொடக்க விசைகள், **OL** வழியே, அ-து **P, Q** ஆகியவற்றின் தொடக்கத் திசைகளுக்குச் சமாந்தரமாக **L** இற் செயற்படும் $(P+Q)$ என்னும் ஒரு விசைக்குச் சமவலுவுடையன.

புள்ளி L இன் நிலையத்தைக் காணல்.

OLA, ACH என்னும் முக்கோணிகள் அமைப்பின்படி. இயல்பொத்தவை,

$$\therefore \frac{OL}{LA} = \frac{AC}{CH} = \frac{P}{F},$$

$$\therefore P.LA = F.OL \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (i)$$

OLB, BDK என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை,

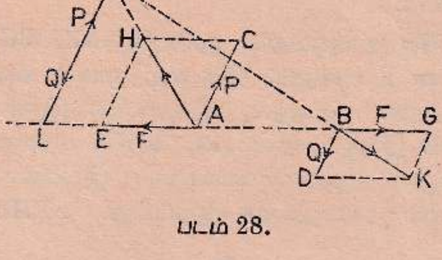
$$\therefore \frac{OL}{LB} = \frac{BD}{DC} = \frac{Q}{F},$$

$$\therefore Q.LB = F.OL \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (ii)$$

$$\therefore P.LA = Q.LB,$$

அ-து. புள்ளி **L**, அவ்விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் **AB** ஐ உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது.

§38. ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்கும் இரு நிகராத சமாந்தர விசைகளின் விளையுளைக் காணல்.



படம் 28.

P, Q என்பன (P தான் பேரளவினது) அப்பொருளின் A, B (படம் 28) என்னும் புள்ளிகளில் தாக்கும் விசைகளென்க. இவற்றை, முறையே AC, BD என்பனவற்றுற் குறிக்க.

கோடு AB வழியே தாக்குவனவும் AE, BG என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படுவனவுமான F என்னும் இரு சம, முரண் விசைகளை A இலும் B இலும் புகுத்துக.

அப்பொருள் விறைப்பானதாதலின், இவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதுடன், P, Q ஆகியவற்றின் தாக்கத்தையும் குழப்பமாட்டா.

AEHC, BGKD என்னும் இணைகரங்களை நிறைவாக்கி, AH, KB என்னும் மூலைவிட்டங்களை O இற் சந்திக்கும்படி நீட்டுக. (அம்மூலைவிட்டங்கள் சமாந்தரமாக அமைந்தாலொழிய, அவை எப்பொழுதும் சந்திக்கும். P, Q ஆகியன சமமாக இருக்குமிடத்து இந்நிலையே ஏற்படுகின்றது.)

OL ஐ CA, BD என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக, நீட்டப்பெற்ற AB ஐ L இற் சந்திக்குமாறு வரைக. A இலுள்ள P, F என்னும் விசைகள், AH இனுற் குறிக்கப்படும் விளையுளொன்றை உடையன. இவ்விளையுள் O இல் தாக்குவதாகக் கருதலாம். இதேமாதிரியாக, B இலுள்ள Q, F என்பன, BK இனுற் குறிக்கப்படும் விளையுளொன்றை உடையன. இதுவும் O இல் தாக்குவதாகக் கருதலாம்.

இவ்விசைகள் LO வழியே P, AE இற்குச் சமாந்தரமாக F எனவும், OL வழியே Q, BG இற்குச் சமாந்தரமாக F எனவும் இவற்றின் கூறுகளாக O இற் துணிக்கப்படலாம்.

F என்னும் இரு விசைகளும் சமநிலையிலுள்ளன.

எனவே, P, Q என்னும் தொடக்க விசைகள் LO வழியே, அ-து. L ஊடாய், P இற்குச் சமாந்தரமாக P இன் அதே திசையில் தாக்கும் (P − Q) என்னும் ஒரு விசைக்குச் சமவலுவுடையன.

புள்ளி L இன் நிலையத்தைக் காணல்.

OLA, HEA என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை.

$$\therefore \frac{OL}{LA}=\frac{HE}{EA}=\frac{P}{F},$$

$$\therefore\ P.LA = F.OL.$$

OLB, BDK என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை.

$$\therefore \frac{OL}{LB}=\frac{BD}{DK}=\frac{Q}{F},$$

$$\therefore\ Q.LB = F.OL,$$

$$\therefore\ P.LA = Q.LB,$$

அ-து. L, கோடு AB ஐ விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் **வெளிப்புறமாகப்** பிரிக்கின்றது.

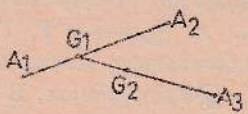
§39. அமைப்புத் தவறும் நிலை.

முன்னைய பந்தியின் படத்தில், $P = Q$ ஆயின், AEH, BGK என்னும் முக்கோணிகள் சர்வசமனானவை. இச்சந்தர்ப்பத்தில், $\angle HAE = \angle GBK$ ஆகும். எனவே, AH, KB என்னும் கோடுகள் சமாந்தரமாக இருப்பதனால், O போன்ற ஏதாவதொரு புள்ளியிற் சந்திக்கமாட்டா. அதோடு, அந்த அமைப்பும் தவறுகின்றது. ஆகவே, அவ்விரு விசைகளும் சம, நிகராத, சமாந்தர விசைகளாக இருக்குமிடத்து, அவைக்குச் சமவலுவுள்ள தனி விசையேதும் இராது.

அத்தகைய விசைச்சோடி ஓர் இணையை அமைக்கும்.

இணைகளின் தன்மைகள் பின்பு ஆராயப்படும் (பந்திகள் 50 உம் 61 உம்).

§40. சமாந்தர விசைமையம்.



படம் 29.

$W_1, W_2, W_3 \ldots$ என்னும் நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள் $A_1, A_2, A_3 \ldots$ என்னும் புள்ளிகளில் தாக்குவதாகக் கொள்க (படம் 29).

A_1, A_2 என்பனவற்றில் தாக்கும் W_1, W_2 என்ற விசைகளின் விளையுள், $W_1 + W_2$ இற்குச் சமம். இது, A_1A_2 இலுள்ள G_1 என்னும் ஒரு புள்ளியூடாய் (எனவே $W_1 . G_1A_1 = W_2 . G_1A_2$), அவ்விரு விசைகளும் தாக்கும் ஏதாவது பொதுவான திசையில் எப்பொழுதும் செல்கிறது. இதேமாதிரியாக, G_1 இலுள்ள $W_1 + W_2$, A_3 இலுள்ள W_3 என்னும் நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளின் விளையுள், $W_1 + W_2 + W_3$ இற்குச் சமமாய், G_1A_3 இலுள்ள G_2 என்னும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியூடாய் என்றும் செல்கிறது.

எனவே, எல்லா விசைகளும் நிகர்த்தவையாகவும் சமாந்தரமாகவுமிருக்குமேயாயின், அவற்றின் விளையுள், விசைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாய், A_1, A_2, முதலானவைக்குச் சார்பாக நிலைத்த தானத்தையுடைய ஒரு புள்ளியூடாய் என்றும் செல்லும். அதன் தானமானது சமாந்தர விசைகளின் பொதுத் திசையிற் சார்பற்றது.

இப்புள்ளி **சமாந்தர விசைமையம்** எனப்படும். அதோடு, அவ்விசைகள் ஒரே தளத்திலிருப்பினும், அல்லது இல்லாதிருப்பினும், மேற்கூறப்பெற்ற நியாயம் பொருந்துமென்பதும் தெளிவாகின்றது.

§41. முன்னைய பந்தியிலுள்ள தேற்றத்தின் மிகமுக்கியமான ஒரு பிரயோகம், ஒரு பொருளின் நிறையுடன் சம்பந்தப்படத் தோன்றுகின்றது.

சடப்பொருளின் ஒவ்வொரு துணிக்கையும் புவியின் மையத்தை நோக்கிக் கவரப்படுகின்றது. துணிக்கையின் திணிவுக்கு விகிதசமனான இக்கவர்ச்சி விசையானது, துணிக்கையின் நிறை எனப்படும்.

ஒரு பொருள், மிக்க எண்ணிக்கையான துணிக்கைகளாலாயதெனக் கருதலாம். இதன் பருமன் புவியின் பருமனுடன் ஒப்பிடுமிடத்துச் சிறியதாக இருப்பின், இதன் துணிக்கைகள் அனைத்தின் மீதுமுள்ள விசைகள் கிட்டத்தட்டச் சமாந்தரமாக இருக்கும்.

சாதாரணப் பருமனுள்ள பொருட்களிடத்து, இவ்விசைகள் முற்றாகவே சமாந்தரமானவை என நாம் எண்ணலாம்.

எனவே, முன்னைய பந்தியின் படத்திலுள்ள A_1, A_2, முதலான புள்ளிகள் அப்பொருளின் துணிக்கைகளைக் குறிக்க எடுக்கப்படலாம். இத்துணிக்கைகளின் நிறைகள் ஒரு சமாந்தர விசைத்தொகுதியை ஆக்குவதனால், (அப்பொருளின் நிறைக்குச் சமமான) அவற்றின் விளையுள் ஏதுமொருபுள்ளி G ஊடாய் என்றும் செல்கின்றது; **அப்பொருள் எத்தகைய தானத்தில் வைக்கப்பட்டிருப்பினும்**, அப்பொருள் தொடர்பாக G இன் தானம் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இப்புள்ளி அப்பொருளின் **புவியீர்ப்பு மையம்** அல்லது **திணிவுமையம்** எனப்படும்.

இப்புள்ளி அப்பொருளினுள்ளேயே இருக்கவேண்டியதில்லையெனப் பின்பு தெரியவரும்.

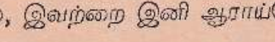
பல்வேறு வடிவங்களுள்ள பொருட்களுக்குரிய புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையம் பற்றி அதிகாரம் VII இல் ஆராயப்பெறும்.

சில எளிய பொருட்களிற்கு, புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தை நிர்ணயித்தல் எளிதாகும். உ–ம். ஒரு சீரான மெல்லிய கோல், செவ்வகம் அல்லது இணைகரம், முக்கோணி போன்றவை. இவை மிகப்பல பிரச்சினைகளுடன் சம்பந்தப்பட்டிருப்பதனால், இவற்றை இனி ஆராய்வோம்.

§42. ஒரு மெல்லிய சீர்க் கோலின் புவியீர்ப்பு மையம்.

அக்கோல் சீரானதாதலின், அதன் சம நீளங்கள் எத்துணைச் சிறியவையாயினும் சமநிறையை உடையன.

AB (படம் 30) அக்கோலினைக் குறிக்கிறதென்க. G, அதன் நடுப்புள்ளி என்க.



படம் 30.

PG = GQ என, G இற்கும் A இற்குமிடையே ஏதாவதொரு புள்ளி P ஐயும், G இற்கும் B இற்குமிடையே ஒரு புள்ளி Q ஐயும் எடுக்க.

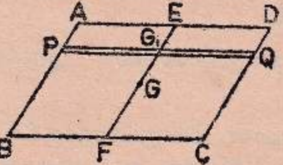
P இலும் Q இலுமுள்ள கோலின் சம துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமானது, P, Q என்பவற்றிலுள்ள சம, நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகளின் விளையுள் G ஊடாய்ச் செல்வதனுல், G இலுள்ளதென்பது வெளிப்படை.

அன்றியும், G இற்கும் A இற்குமிடையே உள்ள P போன்ற ஒவ்வொரு துணிக்கைக்கும், G இற்கும் B இற்குமிடையே G இலிருந்து சம தூரத்தில் ஒரு சம துணிக்கை இருக்கும்.

இத்துணிக்கைச் சோடிகள் ஒவ்வொன்றினதும் புவியீர்ப்பு மையம் G இலுள்ளது. எனவே, முழுக்கோலினதும் புவியீர்ப்பு மையம் G இல் ஆகும்.

சமாந்தர விசைகள் (அத்துணிக்கைகளின் நிறைகள்) தாக்கும் திசையினுல் எவ்வித மாறுபாடும் ஏற்படாதென்று அறியவரும்; அ-து. அக்கோல் எத்தானத்தில் வைக்கப்பட்டிருப்பினும், துணிக்கைகள் அனைத்தினதும் நிறைகளின் விளையுள் G ஊடாய்ச் செல்லும்.

§43. ஓர் இணைகர வடிவ மெல்லிய தட்டு அல்லது அடரின் புவியீர்ப்புமையம்.



படம் 31.

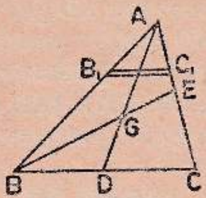
ABCD (படம் 31) ஓர் இணைகரமென்க. அது, AD இற்குச் சமாந்தரமாக PQ போன்ற பல மிகவுமொடுங்கிய கீற்றுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்க.

இக்கீற்றுக்களொவ்வொன்றும் ஒரு மெல்லிய சீர்க் கோலெனக் கருதலாம். அதன் புவியீர்ப்பு மையம் நடுப்புள்ளி G_1 இல் இருக்கும்.

எனவே, அக்கீற்றுக்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில், அ-து. AD, BC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு EF இல் முழு உருவத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம் இருக்கும். இதே மாதிரியாக, இவ்வுருவம் AB இற்குச் சமாந்தரமாகப் பல கீற்றுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனக்கொண்டு, AB, DC என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில் புவியீர்ப்பு மையம் அமையவேண்டுமெனக் காண்கிறேம்.

ஆகவே, இக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் G இல் புவியீர்ப்பு மையம் உள்ளது. அன்றியும், இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியும் உண்மையிலேயே G ஆக இருக்கின்றது.

§44. ஒரு மெல்லிய முக்கோணித் தட்டு அல்லது அடரின் புவியீர்ப்பு மையம்.



படம் 32.

ABC (படம் 32) அம்முக்கோணியடர் என்க.

இவ்வடர், BC இற்குச் சமாந்தரமாக B_1C_1 போன்ற மிகப் பல கீற்றுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கருதுக.

ஒவ்வொரு கீற்றினதும் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் நடுப்புள்ளியில் இருக்கும். எனவே, அக்கீற்றுக்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டில், அ–து. இடையம் AD இல், முழு முக்கோணியினதும் புவியீர்ப்பு மையம் இருக்கும்.

இதேமாதிரியாக, AC இற்குச் சமாந்தரமாகக் கீற்றுக்களை எடுத்து, இடையம் BE இல் புவியீர்ப்புமையம் இருக்கக் காண்போம். ஆகவே, இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி G இல் புவியீர்ப்புமையம் உள்ளது.

ஒவ்வோர் இடையத்திலும் கீழிருந்து அதன் $\frac{1}{3}$ நீளத்தில் இப்புள்ளி இருக்கும், அ–து. $DG = \frac{1}{3}AD$ எனக் கேத்திரகணிதத்திலிருந்து நமக்குத் தெரியும்.

§45. ஏதாவதொரு சீரான முக்கோணியடரின் புவியீர்ப்பு மையமும், அம்முக்கோணியின் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்டிருக்கும் மூன்று சமமான துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றுகும்.

படம் 33.

ABC (படம் 33) அவ்வடர் என்க. B இலும் C இலும் தாக்குவனவும் ஒவ்வொன்றும் W இற்குச் சமமுமான நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளின்

விளையுளானது, BC இன் நடுப்புள்ளி D ஊடாய்த் தாக்கும் 2W என்னும் ஒரு சமாந்தர விசையாகும். D இலுள்ள 2W, A இலுள்ள W என்னும் நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளின் விளையுளானது AD இல் G இல் தாக்கும் 3W என்னும் ஒரு விசையாகும். இங்கு, AG = 2GD. எனவே, A, B, C என்பனவற்றில் வைக்கப்பட்டிருக்கும் மூன்று சம துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது AD இல் அமைவதுடன், $GD = \frac{1}{3}AD$ உம் ஆகும், அ–து. இப்புள்ளியும் அடரின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றுகும்.

பயிற்சி VI.

1. 4 இரு., 7 இரு. நிறையான நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள், 22 அங்குல இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், இது AB ஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க. விசைகள் நிகராதனவாயின், இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், நீட்டிய AB ஐ இது வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

2. 9 இரு., 12 இரு. நிறையான நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள், 42 அங்குல இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், இது AB ஐ வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க. விசைகள் நிகராதனவாக இருக்கும்போது, இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் நிலையத்தையும் காண்க.

3. 12 இரு., 8 இரு. நிறையான நிகராத, சமாந்தர விசைகள், 12 அங்குல இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், நீட்டிய AB ஐ இது வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

4. இரு சமாந்தர விசைகளிலொன்று 8 இரு. நிறை ஆகும். இவ் விசைகளின் 20 இரு. நிறை விளையுள், 8 இரு. விசையிலிருந்து 6 அங்குல தூரத்தில் தாக்குகின்றது. மற்றைய விசையின் பருமனையும், 8 இரு. விசையிலிருந்து இதன் தாக்கக் கோட்டின் தூரத்தையும் காண்க.

5. இரு நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள் 4 அடி இடைத்தூரத்தில் தாக்குகின்றன. இவை, இவற்றிலொன்றிலிருந்து 1 அடி தூரத்தில் தாக்குமொரு 20 இரு. நிறை விசைக்குச் சமவலுவானவை. இவ்விரு விசைகளினதும் பருமன்களைக் காண்க.

6. நான்கு சம, நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள் ஒரு சதுரத்தின் மூலைகளில் தாக்குகின்றன ; இவற்றின் விளையுள், சதுரத்தின் மையத்தூடாய்ச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

7. மூன்று சம, நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள் ஒரு முக்கோணியின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன ; இவற்றின் விளையுள், முக்கோணியின் இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

8. ஒரு முக்கோணி ABC இன் A, B, C என்னும் உச்சிகளில் முறையே P, P, 2P என்னும் பருமன்களுள்ள நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள் தாக்குகின்றன. AB இன் நடுப்புள்ளியுடன் C ஐ இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியூடாக இவற்றின் விளையுள் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

9. P, Q என்பன நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள். Q, தனக்குச் சமாந்தரமாகத் தூரம் x இனூடாக நகர்த்தப்படின், P இனதும் Q இனதும் விளையுளானது தூரம் $\dfrac{Qx}{P+Q}$ இனூடாய்ச் செல்கின்றதென நிறுவுக.

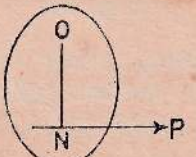
10. மூன்று சம, நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள், ஒரு முக்கோணியினது பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன; இம்முக்கோணியின் இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியூடாக இவற்றின் விளையுள் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

§46. ஒரு விசையின் திருப்புதிறன்.

ஒரு துணிக்கையின்மீது தாக்கும் விசைகளைப் பொறுத்தளவில், துணிக்கையை முழுமையாக இயக்குமிடத்து இவற்றின் விளைவையே நாம் ஆராயவேண்டும். எனினும், விசைத்தொகுதியொன்று ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்கும்போது, அதன் விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கவேண்டியதில்லை. அத்துடன், அவை அப்பொருளைச் சுழற்றவும் முன்னோக்கி இயக்கவும் கூடும்.

ஒரு நிலைத்த புள்ளியையுடைய ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது ஒரு தனி விசை தாக்கின், இவ்விசையின் தாக்கக் கோடு அப்புள்ளியினூடாகச் சென்றலொழிய, விசையானது அப்புள்ளிபற்றி அப்பொருளைத் திருப்ப நாடும். இது, வழக்கமாகப் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் ஒரு விசையின் **திருப்பல் விளைவு** அல்லது **திருப்புதிறன்** பற்றிய எண்ணத்தைப் புகுத்துகின்றது :—

§47. ஒரு தந்த புள்ளிபற்றி ஒரு விசையின் திருப்புதிறனானது அவ்விசையினதும் தந்த புள்ளியிலிருந்து அவ்விசையின் தாக்கக் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்தினதும் பெருக்கமாகும்.



படம் 34.

இவ்வாறாக, O என்னும் ஒரு புள்ளிபற்றி, படம் 34 இற் காட்டப்பெற்றுள்ள தாக்கக் கோடுள்ள P என்னும் ஒரு விசையின் திருப்பு

திறன் $P \times ON$ ஆகும். இங்கு ON, O இலிருந்து P இனது தாக்கக் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்து.

P இனது தாக்கக் கோடு O இனூடாகச் செல்லின், அப்புள்ளிபற்றி அதன் திருப்புதிறன் பூச்சியமாகும்.

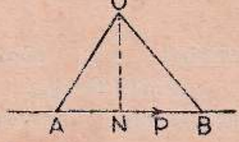
ஒரு தளத்தினால் வெட்டுமுகமாக்கும்போது, அதில் O ஐயும் P இன் தாக்கக் கோட்டையும் கொண்ட ஒரு பொருளிலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி O ஆயின் (படத்திற் காட்டப்பெற்றுள்ளது), $P \times ON$ என்னும் பெருக்கமானது O பற்றி அப்பொருளைத் திருப்ப P இன் நாட்டத்தின் அளவீடாகும். (1) P அதிகரிக்கப்பெறின், அல்லது (2) O இலிருந்து அதன் தூரம் அதிகரிக்கப்பெறின், திருப்புதிறன் அதிகரிக்கப்பெறும்.

ஒரு குறித்த புள்ளிபற்றி ஒரு விசையின் திருப்புதிறன், அவ் விசை அப்புள்ளிபற்றிப் பொருளைத் திருப்ப நாடும் திசைக்கிணங்க நேராகவோ மறையாகவோ இருக்கலாம்.

இப்படத்தில், வலஞ்சுழிக்கெதிரான திசையில், விசை P அப்பொருளைத் திருப்ப நாடுகின்றது. இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில், திருப்புதிறன் **நேரானது** எனப்படும். இவ்விசை அப்பொருளை வலஞ்சுழியாகத் திருப்பநாடின், அதன் திருப்புதிறன் **மறையானது** எனப்படும்.

ஒரு பொருளின்மீது பல விசைகள் தாக்குமிடத்து, **அவற்றினது திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை** ஒவ்வொரு திருப்புதிறனின் பெறுமானத்திற்கும் அதற்குரிய முறையான குறியைச் சேர்த்து அவற்றை ஒரு மிக்கக் கூட்டிப் பெறப்படுகின்றது.

§48. ஒரு திருப்புதிறனின் வரைபு வகைக்குறிப்பு.



படம் 35.

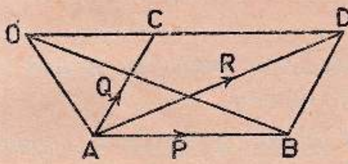
விசை P (படம் 35) இனது தாக்கக் கோட்டிற் குறிக்கப்பெற்றுள்ள நீளம் AB ஆனது P இன் பருமனைக் குறிக்குமாயின், O பற்றி P இன் திருப்புதிறனனது $AB \times ON$ இனாற் குறிக்கப்பெறும்.

ஆனால், முக்கோணி AOB இன் பரப்பு $= \frac{1}{2} AB \times ON$. எனவே முக்கோணி AOB இனது பரப்பின் இருமடங்கு, O பற்றி P இன் திருப்புதிறனைக் குறிக்கும். இனி, இவ்வரைபு வகைக்குறிப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி, ஒருதள விசைகளின் திருப்புதிறன்கள் பற்றிய அடிப்படைத் தேற்றத்தினை நிறுவுவோம்.

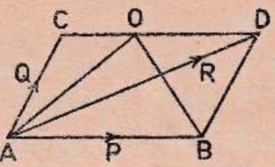
§49. இரு விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையானது அப்புள்ளியைப் பற்றி அவற்றின் விளையுளினது திருப்புதிறனிற்குச் சமம்.

இங்கு, இரு சந்தர்ப்பங்கள்பற்றி ஆராயவேண்டும்.

1. **அவ்விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பதாகக் கொள்க.**



படம் 36A.



படம் 36B.

படம் 36A இலும் B இலும் காட்டப்பெற்றவாறு, A இல் தாக்கும் விசைகளை P, Q என்க. O, அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியென்க.

OC ஐ P இன் திசைக்குச் சமாந்தரமாக, Q இன் தாக்கக் கோட்டினை C இற் சந்திக்கும்படி வரைக.

Q இன் பருமனைக் குறிக்க நீளம் AC ஐ எடுக்க. அதோடு, இதே அளவுத் திட்டத்தில் P ஐ AB குறிக்கிறதென்க.

இணைகரம் ABDC ஐ நிறைவாக்கி, OA, OB ஐ இணைக்க.

AD என்பது P இனதும் Q இனதும் விளையுள் R ஐக் குறிக்கின்றது.

படம் இரண்டிலும்,

O பற்றி P இன் திருப்புதிறனானது $2\triangle AOB$ இனாற் குறிக்கப்பெறுகின்றது,
O ,, Q ,, ,, $2\triangle AOC$,, ,, ,, ,
O ,, R ,, ,, $2\triangle AOD$,, ,, ,, .
அன்றியும், $\triangle AOB = \triangle ADB$, (ஒரே அடியும், சமாந்தரங்களும்.)
$= \triangle ADC$.

படம் 36A இல், திருப்புதிறன்களிரண்டும் நேராக இருப்பதோடு, அவற்றின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை,

$$2\triangle AOB + 2\triangle AOC = 2\triangle ADC + 2\triangle AOC$$
$$= 2\ \triangle OAD$$
$= R$ இன் திருப்புதிறனாற் குறிக்கப்படுகின்றது.

படம் 36B இல், திருப்புதிறன்கள் முரண் திசைகளில் உள்ளன; P இன் திருப்புதிறன் நேராகவும், Q இனது மறையாகவும் உள்ளன ; இவற்றின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை,

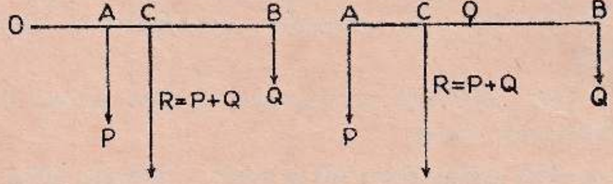
$$2\triangle AOB - 2\triangle AOC = 2\triangle ADC - 2\triangle AOC$$
$$= 2\triangle OAD$$
$= R$ இன் திருப்புதிறனாற் குறிக்கப்படுகின்றது.

2. **அவ்விசைகள் சமாந்தரமானவை என்க.**

P, Q என்பன, படம் 37 A இலும் B இலும் உள்ளவாறு தாக்கும் இரு சமாந்தர விசைகளென்க. O, அவற்றின் தளத்திலுள்ள எதாவதொரு புள்ளியென்க.

OAB ஐ அவ்விசைகளுக்குச் செங்குத்தாக, அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளை A இலும் B இலும் சந்திக்கும்படி வரைக.

விளேயுள் R $(= P + Q)$ ஆனது P இற்கும் Q இற்கும் சமாந்தரமாகவும், $P.AC = Q.CB$ ஆகுமாறு AB இலுள்ள ஒரு புள்ளி C இனூடாகவும் தாக்குகின்றது.



படம் 37A. படம் 37B.

படம் 37A இல், O பற்றி P, Q என்பனவற்றினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

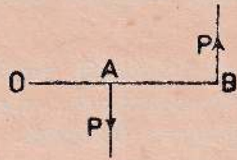
$$= P.OA + Q.OB$$
$$= P(OC - AC) + Q\,(OC + CB)$$
$$= (P + Q)\,OC - P.AC + Q.CB$$
$$= (P + Q)\,OC$$
$= O$ பற்றி R இன் திருப்புதிறன்.

படம் 37B இல், O பற்றி P, Q என்பனவற்றினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= P.OA - Q.OB$$
$$= P(OC + AC) - Q(BC - OC)$$
$$= (P + Q)\,OC + P.AC - Q.BC$$
$$= (P + Q)\,OC$$
$= O$ பற்றி R இன் திருப்புதிறன்.

§50. அவ்விசைகள் ஓர் இணையை உருவாக்கின், தனி விளேயுளேதும் இராது ; அதோடு, அத்தேற்றமும் செல்லுபடியாவதில்லை.

இச்சந்தர்ப்பத்தில், அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள எப்புள்ளியைப் பற்றியும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரேயளவினதெனக் காட்டுதல் எளிதாகும்.



படம் 38.

P, P என்பன, படம் 38 இற் காட்டப்பெற்றவாறு தாக்கும் விசைகளென்க. O, அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியென்க.

OAB ஐ அவ்விசைகளுக்குச் செங்குத்தாக, அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளை A இலும் B இலும் சந்திக்கும்படி வரைக.

O பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$\begin{aligned} &P.OB - P.OA \\ &= P(OB - OA) \\ &= P.AB. \end{aligned}$$

அதோடு, O இன் நிலையத்துடன் இது சார்பற்றதாகும்.

அவ்விணையின் விசையெதினதும் பருமன் P ஆயும், அவ்விசைகளின் இடைச் செங்குத்துத் தூரம் AB ஆயும் இருப்பின், P.AB என்னும் பெருக்கமானது **இணையின் திருப்புதிறன்** எனப்படும்.

ஓர் இணையின் திருப்புதிறனானது, அவ்விணையின் ஒரு விசையின் தாக்கக் கோட்டிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி மற்றைய விசையின் திருப்புதிறனிற்குச் சமமென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

§51. பந்தி 49 இன் தேற்றத்தை ஒரு தனி விளையுளையுடைய எத்தொகை விசைகளுக்கும் விரிவாக்கலாம் என்பது வெள்ளிடை. எனெனில், ஓர் இணையை உருவாக்காதிருக்கும் எவையேனுமிரு விசைகளுக்கும் அத்தேற்றம் இயைகின்றது ; இவ்விரு விசைகளினதும் விளையுளுக்கும் இதனுடன் ஓர் இணையை உருவாக்காது உள்ள அவ்விசைகளில் ஏதாவதொன்றுக்கும் அத்தேற்றம் இயைகின்றது. இவ்வாறாக, எல்லா விசைகளும் எடுத்துக்கொள்ளப்படும் வரைக்கும் இயையும். இத்தொகுதி ஒரு தனி விளையுளை உடையதென நாம் ஏற்றுக்கொள்வதனால், ஒன்றைத் தவிர்ந்த ஏனைய விசைகளினதும் விளையுள் இக்கடைசி விசையுடன் ஓர் இணையை உருவாக்க இயலாது.

இவ்வாறாக, **பொதுத் திருப்புதிறன் தத்துவத்திற்கு** வரலாம். இத் தத்துவத்தைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம் :—

ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்கும் எத்தொகை ஒருதள விசைகளும் ஒரு விளையுளை உடையனவாயின், அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப்பற்றி அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகை அதே புள்ளியைப்பற்றி அவற்றின் விளையுளின் திருப்புதிறனிற்குச் சமம்.

§52. *ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின், அதன் விசைகளின் விளையுள் பூச்சியமாவதோடு, ஏதாவதொரு புள்ளிபற்றிய அதன் திருப்புதிறனும் பூச்சியமாக வேண்டும்.*

எனவே, **ஓர் ஒருதள விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்போது, அதன் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப்பற்றி அதன் விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.**

இதன் மறுதலை உண்மையாக இருக்கவேண்டியதில்லை. ஏனெனில், ஒரு விசையின் தாக்கக் கோட்டிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி அதன் திருப்புதிறன் பூச்சியமாகையால், ஓர் ஒருதள விசைத் தொகுதியினது விசைகளின் தாக்கக் கோட்டிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். எனவே. ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமென்ற உண்மை அவை சமநிலையிலுள்ளனவென்ற கருத்தைக் கட்டாயமாகக் கொண்டிருத்தலில்லை ; அப்புள்ளி அவற்றின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டில் இருத்தலும் கூடும்.

பயிற்சி VII.

1\. 8 அங்குல உயரமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC இன் AB, BC, CA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக, முறையே 2, 4, 8 இறு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்புதிறனை ஒவ்வொரு கோணப் புள்ளியைப் பற்றியும் காண்க. (C.E.)

2\. ஒவ்வொரு பக்கமும் 20 அங்குல நீளமான ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்கள் வழியாக முறையே 3, 4, 5, 6 இறு. நிறையான நான்கு விசைகள் வலஞ்சுழியாகத் தாக்குகின்றன. அந்நான்கு விசைகளினதும் திருப்பு திறன்களின் பெறுமானத்தை, (*a*) சதுரத்தின் மையத்தையும், (*b*) 3, 6 இறு. நிறை விசைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியையும் பற்றிக் காண்க. விடையின் அலகுகளைத் தெளிவாகக் கூறுக. (C.E.)

3\. 2 அடி நீளப் பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC இன் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்கள் வழியாக, முறையே 4, 5, 6 இறு. நிறை விசைகள் எழுத்து ஒழுங்குமுறையினுற் காட்டப்பெறும் திசைகளில் தாக்குகின்றன. முக்கோணியின் இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியைப்பற்றி அவ்விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

4. 3 அடி நீளப் பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் ABCD இன் AB, CB, DC, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக முறையே 2, 4, 2, 4 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. (i) A ஐயும, (ii) சதுரத்தின் மையத்தையும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

5. A, B, C, D என்பன ஒரே கிடைக் கோட்டில் ஒழுங்காக ஒவ்வோர் அடி தூரத்திலுள்ள நான்கு புள்ளிகள். B இல் 2 இரு. நிறை விசையொன்று AD இற்குச் செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கித் தாக்குகின்றது; C இல் CD உடன் 30° கோணத்தினை ஆக்கும் திசையொன்றில் 4 இரு. நிறை விசையொன்று மேனேக்கித் தாக்குகின்றது ; D இல் AD இற்குச் செங்குத்தாக 1 இரு. நிறை விசையொன்று மேனேக்கித் தாக்குகின்றது. (i) A ஐயும், (ii) C ஐயும் பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

6. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, EF, FA வழியாக முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவ்வறுகோணியின் பக்கம் 2 அடியாயின், (i) அறு கோணியின் மையத்தையும், (ii) A ஐயும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

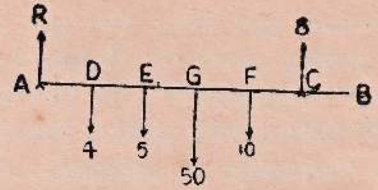
§53. திருப்புதிறன் தத்துவம் மிக்க முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததோடு, இந்நூலின் எஞ்சிய பகுதியெங்கும் இடைவிடாது கையாளப்பெறும். இவ் வதிகாரத்தில், தாங்கிகளின் மேல் தங்கியுள்ள, அல்லது ஏதாவதொரு புள்ளியைப்பற்றிச் சுழலுமாறு அமைத்த ஒரு விறைப்பான கோல் அதன் சொந்த நிறையுடன் சேர்த்துப் பல விசைகளினுல் தாக்கப் படுதல் போன்ற சில எளிய உதாரணங்களுடன் தொடர்புகொண்டு இத் தத்துவத்தின் பயனை எடுத்துக் காட்டுவோம்.

திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனுக்குதற்குப் பதிலாக, அப்புள்ளியைப் பற்றி ஒரு திசையில் தாக்குவன வற்றின் கூட்டுத்தொகையை, எதிர்த்திசையில் தாக்குவனவற்றின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனுக்குதலே வசதியானதாகும்.

உதாரணம் (i).

12 அடி நீளமும் 50 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல், A இலும் B இலிருந்து 2 அடி தூரத்திலுமுள்ள இரு தாங்கிகள் மீது தங்கியிருக்கின்றது. A இலிருந்து 2, 4, 8 அடியிலுள்ள புள்ளிகளில் முறையே 4, 5, 10 இரு. நிறைகள் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. தாங்கிகளின் மீதுள்ள தாக்கங்களைக் காண்க.

மற்றைய தாங்கியின் நிலையத்தை C (படம் 39) எனவும், கோலின் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், நிறைகள் இணைத்த புள்ளிகளை D, E, F எனவும், A இலும் B இலும் உள்ள மறுதாக்கங்களை முறையே R, S எனவும் கொள்க.



படம் 39.

கோலினது நிறை G இல் தாக்குகின்றது.

கோலிற்கு A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\begin{aligned} 10\,S &= 4 \times 2 + 5 \times 4 + 50 \times 6 + 10 \times 8 \\ &= 8 + 20 + 300 + 80 \\ &= 408, \end{aligned}$$

$\therefore\ S = 40{\cdot}8$ இரு. நிறை.

C பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\begin{aligned} 10\,R &= 10 \times 2 + 50 \times 4 + 5 \times 6 + 4 \times 8 \\ &= 20 + 200 + 30 + 32 \\ &= 282 \end{aligned}$$

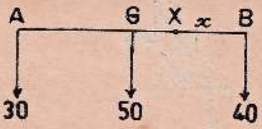
$R = 28{\cdot}2$ இரு. நிறை.

R, S என்பனவற்றின் கூட்டுத்தொகை, எல்லா நிறைகளினதும் (அக்கோலின் நிறையுடன்) கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகவேண்டுமாதலின், நிறைகளின் இக்கூட்டுத்தொகை (69) இலிருந்து S ஐக் கழித்து R ஐப் பெற்றிருக்கலாம். எனினும், நடைமுறையில், ஒவ்வொரு மறுதாக்கத்தையும் புறம்பாகக் காணல் சிறந்ததாகும்; அதோடு, அவற்றின் கூட்டுத்தொகை, நிறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாதல் வேண்டுமென்ற உண்மையின் மூலம் செய்கைமுறையைச் செவ்வைபார்க்கலாம். இல்லையாயின், முதலாவதைக் கணக்கிடுதலில் ஏற்படும் தவறு இவ்விரு முடிபுகளையும் தவறானவையாக்கலாம்.

உதாரணம் (ii).

12 அடி நீளமும் 50 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு சீரான கோலின் முனைகளில் 30 இரு., 40 இரு. நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கோல் கிடையாகத் தங்குமாறு அது எப்புள்ளியில் தாங்கப்படவேண்டும்?

கோலினை AB எனவும், (படம் 40), அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினை G எனவும் கொள்க.



படம் 40.

30, 40, 50 இரு. என்ற அந்நிறைகளின் திருப்புதிறன்கள் சமன் செய்யும் புள்ளியே எமக்குத் தேவையான புள்ளி X ஆகும்.

BX $= x$ ஆயின், X பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$40x = 50(6-x) + 30\ (12-x)$$
$$= 300 - 50x + 360 - 30x,$$
$$\therefore\ 120x = 660,$$
$$\therefore\ x = 5\tfrac{1}{2} \text{ அடி.}$$

கோலின் ஒரு முனைபற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்தும் X இன் நிலையத்தைக் காணலாம். அம்மூன்று நிறைகளினதும் விளையுள் X இல் தாக்குகின்றது. இதன் பருமன் 120 இரு. நிறை.

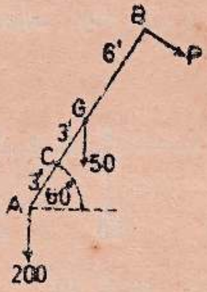
எனவே, B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$120x = 50 \times 6 + 30 \times 12$$
$$= 300 + 360,$$
$$\therefore\ 120x = 660,$$
$$\therefore\ x = 5\tfrac{1}{2} \text{ அடி.}$$

உதாரணம் (iii).

12 அடி நீளமும் 50 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல், A இலிருந்து 3 அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிற் சுழலுமாறு அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. A இல் 200 இரு. நிறையொன்று தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. கோலிற்குச் செங்குத்தானதொரு திசையில் B இற் பிரயோகிக்கப்படும் எவ்விசை, B இற்குக் கீழே A உம், கிடையுடன் AB 60° இற் சாய்ந்திருக்குமாறும் கோலினைச் சமநிலையிற் பேணும் ?

கோலின் நடுப்புள்ளியை G எனவும் (படம் 41), சுழற்சித் தானத்தை C எனவும் கொள்க.



படம் 41.

G ஊடாய் நிலைக்குத்தாகத் தாக்கும் நிறையினதும், AB இற்குச் செங்குத்தாக B இல் தாக்கும் விசை P இனதும் C பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையானது 200 இரு. நிறையின் C பற்றிய திருப்புதிறனிற்குச் சமமாக இருக்கும்போது, அக்கோல் சமநிலையில் இருக்கும்.

50 இரு., 200 இரு. நிறைகளின் C பற்றிய திருப்புதிறன்களைப் பெற, C இலிருந்து அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளின் **செங்குத்துத்** தூரங்களைக் காண வேண்டும்.

200 இரு. நிறையினது கோட்டின் செங்குத்துத் தூரம் 3 கோசை 60° ஆகும். 50 இரு. நிறையினது கோட்டின் தூரம் இதுவேயாகும்.

C இலிருந்து, P இனது கோட்டின் செங்குத்துத் தூரம் = 9.

$$9P + 50 \times \tfrac{3}{2} = 200 \times \tfrac{3}{2},$$

$$\therefore\ 9P = 300 - 75 = 225,$$

$$\therefore\ P = 25 \text{ இரு. நிறை.}$$

பயிற்சி VIII.

1. 18 அங்குல நீளமும் 10 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் முனைகளிலுள்ள தாங்கிகள் மீது கிடையாகத் தங்கியுள்ளது. ஒரு முனையிலிருந்து 12 அங்குல தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு 3 இரு. நிறை இணைக்கப் பெற்றிருப்பின், தாங்கிகளின் மீதுள்ள தாக்கங்களைக் காண்க.

2. 20 அடி நீளமும் 40 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான சட்டமானது ஒன்று A இலும், மற்றையது B இலிருந்து 4 அடி தூரத்திலுமுள்ள இரு தாங்கிகள் மீது தங்கியுள்ளது. சட்டத்தில் A இலிருந்து 12 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் ஒரு 20 இரு. நிறை இணைக்கப்பெற்றிருப்பின், தாங்கிகளின் மீதுள்ள தாக்கங்களைக் காண்க.

3. 8 அடி நீளமுள்ள ஓர் இலேசான கோலிலிருந்து தொங்கவிட்டிருக்கும் 2 அந்தர் பாரத்தை இரு மனிதர்கள் கோலின் ஒவ்வொரு முனையும் ஒவ்வொருவருடைய தோளிலும் இருக்குமாறு தூக்கிச் செல்கின்றுர்கள். அப்பாரம் தொங்கவிட்ட புள்ளி ஒரு மனிதனுக்கு மற்றையவனிலும் பார்க்க 2 அடி. அண்மையிலுள்ளது. ஒவ்வொருவனின் தோளிலுமுள்ள தாக்கம் யாது ?

4. 10 அடி நீளமுள்ள சீரான சட்டமொன்றின் ஒரு முனையில் ஒரு 50 இரு. நிறை தொங்கும்போது இச்சட்டம், இம்முனையிலிருந்து 3 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றிக் கிடையான நிலையிற் சமன் செய்கின்றது. அவ்வாருயின் சட்டத்தின் நிறையைக் காண்க.

5. 6 அடி நீளமும் 3 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் அதன் முனைகளில் தாங்கப்படுகின்றது. இதனில், A இலிருந்து 1, 2, 3, 4, 5 அடி தூரங்களில் முறையே 1, 2, 3, 4, 5 இரு. நிறைகள் தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளன. எனின், தாங்கிகளின் மீதுள்ள தாக்கங்களைக் காண்க.

6. 5 அடி நீளமும் 3 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு சீரான கோலில், ஒரு முனையிலிருந்து 1, 2, 3, 4 அடி தூரங்களில் முறையே 1, 2, 3, 4 இரு. நிறைகள் தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளன. அக்கோல் எப்புள்ளி பற்றிச் சமன்செய்யும் ?

7. AB = 1 அடி, BC = 3 அடி, CD = 5 அடி என்றமைய ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளில் முறையே ஒரு திசையில் விசைகள் 3, 6, 8 உம், முரண் திசையில் 12 உம் எனத் தாக்கும் சமாந்தர விசைகளினது விளையுளின் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டினையும் காண்க.

8. 10 அடி நீளமும் 6 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சட்டம் A இலும் இன்னுமொரு புள்ளியிலும் தாங்கப்பெற்றுள்ளது. B இல் ஒரு 1 இரு. பாரமும், B இலிருந்து 3, 6 அடி தூரங்களிலுள்ள புள்ளிகளில் முறையே 5, 4 இரு. பாரங்களும் தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளன. A இலுள்ள தாங்கி மீதான தாக்கம் 4 இரு. நிறையாயின், மற்றைய தாங்கி எங்குள்ளது ?

9. 12 அடி நீளமும் 60 இரு. நிறையுமுள்ளதொரு பாரமான சீரான சட்டம் இரு நிலைக்குத்தான இழைகளினூற் கிடையாகத் தொங்க விடப்பெற்றுள்ளது ; ஒவ்வோர் இழையும் 40 இரு. நிறை இழுவையை மட்டுமட்டாகத் தாங்கக்கூடியது. அவ்வாருயின் சட்டத்தின் மையத்திலிருந்து எத்தூரத்திற்குள் ஒரு 15 இரு. நிறையை இழையெதனையும் அறுக்காது தொங்கவிடலாம் ?

10. $2\frac{1}{2}$ அடி நீளமும் 6 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான சட்டம், A இலிருந்து முறையே 4, 24 அங்குல தூரத்திலுள்ள C, D என்னும் தாங்கிகள் மீது தங்கியுள்ளது. A இலிருந்து முறையே 8, 20

அங்குல தூரத்திலுள்ள **E**, **F** என்னும் புள்ளிகளில் **14** இரு., **4** இரு. நிறைகள் தொங்க விடப்பெற்றுள்ளன. **C**, **D** என்பனவற்றிலுள்ள மறு தாக்கங்களையும், கோலின் நடுப்புள்ளியின் வலதுபுறமாகத் தாக்கும் எல்லா விசைகளினதும் அப்புள்ளி பற்றிய திருப்புதிறனையும் காண்க.

11. 6 அடி நீளமும் **2** இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு சீரான கோல், அதன் முனைகளை இரு தாங்கிகளின் மீது பொருந்தப்பெற்றுக் கிடை நிலையில் தங்கியுள்ளது. ஒவ்வொரு தாங்கியும் **12** இரு. இற்கு மேற்படா நிறையைத் தாங்கும். தாங்கியெதனையும் உடைக்காதவாறு கோலின் எப்பகுதியில் ஒரு **17** இரு. நிறையை வைக்கலாம்? (I.S.)

12. **W** நிறையுள்ள ஒரு பிரயாணி ஒரு மோட்டர் வசுவின் உச்சி வழியே a தூரம் முன்னோக்கிக் கடப்பாராயின், பின்வில்லிலிருந்து முன்வில்லிற்கு $W\frac{a}{b}$ என்னும் நிறை இடமாற்றப்படுமென நிறுவுக. இங்கு b, அச்சாணிகளின் இடைத்தூரம். (I.E.)

13. **2** அடி நீளமும் **34** இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் இரு நிலைக்குத்தான இழைகளினால் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. ஓர் இழை, கோல் முனையொன்றிலிருந்து **3** அங்குல தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது ; இது, அருமல் **18** இரு. நிறையொன்றை மட்டுமட்டாய்த் தாங்கவல்லது. மற்றைய இழை, மற்றைய முனையிலிருந்து 4 அங்குல தூரத்தில் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது ; இது, **20** இருத்தலை மட்டுமட்டாகத் தாங்கவல்லது. இப்போது, கோலில் ஒரு $3\frac{2}{5}$ இரு. நிறை இணைக்கப்பெறுகின்றது ; இழையெதனையும் அறுக்காதவாறு இந்நிறை இணைக்கப்பெறக்கூடிய நிலையங்களின் எல்லைகளைக் காண்க. (I.S.)

14. **10, 3, 7** தொன் ஒருதள விசைகள் அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி **O** இலிருந்து முறையே 5, −9, 2 அடி (வலம் நோக்கி நேர்க்கணியமாகக் கொள்ளப்பெற்ற) தூரங்களில் மேனோக்கி நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றன. ஒரு **20** தொன் விசை **O** இனூடாய் கீழ் நோக்கி நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றது. விளையுளைக் காண்க. **O** இனூடாய்த் தாக்கும் விசை **30** தொன்னாக அதிகரிக்கப்படின், விளையுளைக் காண்க.

15. $(a+b)$ நீளமும் **W** நிறையுமுள்ள ஒரு கோல் **AB** இன் புவியீர்ப்பு மையமானது **A** இலிருந்து a தூரத்திலுள்ளது. அதே கிடைத் தளத்தில் c இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு சமாந்தரக் கத்தி விளிம்புகளின் மீது அக்கோல், ஒவ்வொரு கத்தி விளிம்பிற்கும் அப்பாலுள்ள கோலின் பாகங்கள் சமமாக இருக்குமாறு தங்கியுள்ளது. கத்தி விளிம்புகளின் மீதான தாக்கங்கள் முறையே $\frac{a-b+c}{2c}W$ உம், $\frac{b-a+c}{2c}W$ உம் ஆகுமென நிறுவுக. (I.E.)

16. 20 இரு. நிறையும் 4 அடி நீளமுமுள்ள பாரமான, சீரான கோலொன்று, 3 அடி இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு ஆதாரக்கட்டைகளினுல் சமச்சீராகத் தாங்கப்பெறுகின்றது. இப்போது கோலின் ஒரு முனையில் ஒரு 4 இரு. நிறை தொங்கவிடப்படுகின்றது. இரு ஆதாரக்கட்டைகளின் மீதுமுள்ள தாக்கங்களைக் கணக்கிடுக. (H.S.D.)

17. 12 அங்குல நீளமுள்ள ஓர் இலேசான கிடைக்கோல், அதன் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் 3 அங்குல தூரத்திலிருக்கும் இரு நிலைக்குத்தான ஆதாரக் கட்டைகளிலே தாங்கப்பட்டு அதன் ஒவ்வொரு முனையிலும் 16 இரு. பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது. முனைகளில் தொங்கவிடும் எந் நிறைகள், 16 இரு. நிறைகள் தோற்றுவிக்கும் தாக்கத்தின் இரு பங்கை ஓர் ஆதாரக்கட்டையிலும் அரைப்பங்கை மற்றைய கட்டையிலும் உண்டுபண்ணும் ? (H.C.)

18. 24 அடி நீளமும் 200 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு பலகை, ஒரு மேசையின் பக்கத்தின் மீது 8 அடி நீட்டியிருக்கின்றது. அப்பலகைமேல் அதன் ஒரு முனையை நோக்கி 150 இரு. நிறையான ஒரு மனிதன் நடக்க வேண்டுமாயின், அது கவிழாதிருக்க மறுமுனையில் என்ன நிறை வைக்கப்படவேண்டும் ? (H.C.)

19. ABCD என்னும் ஒரு கிடைச்சட்டம், B இலும் C இலும் உள்ள இரு தாங்கிகளின் மேல் தங்கியுள்ளது. இங்கு, $AB = BC = CD$. A இல் p இரு. நிறை அல்லது D இல் q இரு. நிறை தொங்க விடப்படுமிடத்து, அச்சட்டம் மட்டுமட்டாகச் சரியுமெனக் காணப்பட்டுள்ளது. சட்டத்தின் நிறையைக் காண்க ; அதோடு, அதன் புவியீர்ப்பு மையமானது $2p+q : p+2q$ என்னும் விகிதத்தில் AD ஐப் பங்கிடுமென நிறுவுக.

(H.C.)

20. 6 அடி நீளமும் 24 இரு. நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான சட்டம், C இலும் D இலும் உள்ள இரு நிலைக்குத்துத் தாங்கிகளின் மீது தங்கியுள்ளது. CD, 3 அடி தூரமுள்ளது. C, D ஆகியவற்றிலுள்ள தாங்கிகள் மீது முறையே 16 இரு., 8 இரு. நிறை தாக்கமுள்ளது. A ஆனது D இலும் பார்க்க C இற்கு அண்மையிலுள்ளதெனக் கொண்டு, AC, DB ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் காண்க. (H.C.)

21. சீரான சட்டமொன்று, முனையொன்றிலிருந்து 2 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தாங்கப்பட்டும், இம்முனையில் தொங்கவிட்டுள்ள ஒரு 10 இரு. நிறையினைத் தாங்கியும் கிடையாகத் தங்கியுள்ளது. அத்தாங்கி மீதான தாக்கம் 30 இரு. நிறை. அவ்வாருயின், சட்டத்தின் நிறையையும் நீளத்தையும் நிர்ணயிக்க. (H.C.)

22. 12 இரு. நிறையும் G இற் புவியீர்ப்பு மையத்தினையும் கொண்ட ABGCD என்னும் ஒரு வளையாத பாரமான கோல், B இலும் C இலும் இணைத்த நிலைக்குத்தான இழைகளினுல் தொங்க விடப்பெற்றுள்ளது. ஒவ்வோர் இழையும் கோலின் நிறையினை மட்டுமட்டாகத் தாங்க வல்லது.

AB = 2 அங்குலம், BG = 3 அங்குலம், GC = 4 அங்குலம், CD = 3 அங்குலம் ஆயும் A, D இல் முறையே W_1, W_2 இரு. நிறைகள் தொங்க விடப்பட்டும் இருக்குமிடத்து இழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க. அதோடு, இரு இழைகளும் அறும் தறுவாயில் இருக்கும்போது, W_1, W_2 ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (I.S.)

23. 12 அடி நீளமும் 50 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு சீரான சட்டம், அதன் முனைகளிலிருந்து சம தூரங்களிலுள்ள இரு தாங்கிகளின் மீது தங்கியுள்ளது. இச்சட்டத்தின் மேல் எவ்விடத்திலாவது 11 கல் நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் இதனைக் கவிழ்க்காது நிற்குமாறு, மேற்கூறப்பட்டுள்ள தூரத்தின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

24. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவுள்ள சீரான தள அடர் (lamina) ABCDEF அதன் நிலைக்குத்தான சொந்தத் தளத்தில், அதன் மையம் O பற்றிச் சுயாதீனமாகச் சுழலவல்லது. உச்சிகள் A, B, C, D, E, F இல் முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 இரு. திணிவுகள் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. இத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்போது, நிலைக்குத்துடன் AD இன் சாய்வைக் காண்க. (N. U. 3 உம் 4 உம்.)

25. 20 அடி நீளமுள்ள ஓர் இலேசான கிடைக்கோலின் ஒரு முனையிலிருந்து 3, 7, 15 அடி தூரங்களிலுள்ள புள்ளிகளில் முறையே மூன்று 10 இரு. நிறைகள் தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளன. அக்கோல், அதன் நடுப்புள்ளியில் 5 இரு. நிறைக்குச் சமமான ஒரு மேன்முக உதைப்பிற்கு உட்பட்டது. கோலின் மீது தாக்கும் இச்சமாந்தர விசைகளின் விளையுளைக் கண்டு, கோல் அதன் இரு முனைகளிலும் தாங்கப்படுமாயின், தாங்கிகள் மீதான தாக்கங்களை உய்த்தறிக. (C.W.B.)

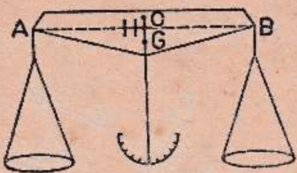
§54. ஒரு நெம்பானது **சுழலிடம்** எனப்படும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி பற்றித் திரும்பக்கூடிய ஒரு விறைப்பான கோலினை முக்கியமாகக் கொண்டது.

நெம்புத் தத்துவம் ஆக்கிமீடீசிற்குத் (287–212 கி.மு.) தெரிந்திருந்தது. அதோடு, பதினாறும் நூற்றாண்டில் விசையிணைகரம் கண்டுபிடிக்கப்படும் வரை, இது நிலையியலின் அடிப்படைத் தத்துவமாகவும் விளங்கியது.

நெம்பின் மீது தாக்கும் விசைகளின் சுழலிடத்தைப் பற்றிய திருப்பு திறன்களினது அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக இருக்கும்போது, அந்நெம்பு சமநிலையிலிருக்குமென்ற திருப்புதிறன் தத்துவமே இத் தத்துவமாகும்.

இனி, நெம்பின் சில நடைமுறை வடிவங்களைப் பார்ப்போம்.

§55. தராசு.



படம் 42.

தராசு, படம் 42 இல் உள்ளவாறு முக்கியமாக ஒரு விறைப்பான கோலினை உடையது. இப்படத்தில் குற்றுக் கோடு AB இன் முனைப்புள்ளிகள், தராசுத் தட்டுகள் இணைத்த புள்ளிகளைக் குறிக்கின்றன.

வழக்கமாக, சுழலிடமானது, கோலினூடாக நிலைப்படுத்தப்பெற்று, ஓர் அகேற்றுத் தகட்டில் O இல் தங்கும் அகேற்றினாலாய ஒரு கத்தி விளிம்பாக அமையும்.

A, B என்னும் புள்ளிகளில் அகேற்றுக் கத்தி விளிம்புகளின் மேல் தங்கியுள்ள அகேற்றுத் தகடுகளிலிருந்து தராசுத் தட்டுகள் தொங்கும்.

அக்கோல், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது கோடு AB இற்குக் கீழ் அமையுமாறு அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. கோலானது கிடையாக இருக்கும்போது, G, H (AB இன் நடுப்புள்ளி) என்பன O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருக்குமாறு, சுழலிடம் O ஆனது AB இற்கு மிக அண்மையில் அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. இது, கோல் கிடையாக இருக்கும்போது தராசுத்தட்டுகளினதும் அவற்றின் உள்ளுறைகளினதும் நிறைகள், சுழலிடத்திலிருந்து சம தூரங்களில் தாக்குமென்பதை உறுதிப்படுத்துகின்றது.

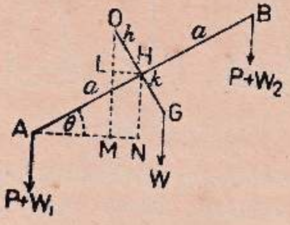
இது, தராசின் புயங்கள் சமமானவையென்ற மிக முக்கியமான விடயத்தில் விளக்கப்பெறுகின்றது.

கோல் கிடையானதாவென்பதைக் காட்ட, AB இற்குச் செங்குத்தாய்க் கோலுடன் உறுதியாக இணைத்த ஒரு காட்டி, ஒரு நிலைத்த அளவுகோல் S இன் மீது இயங்குகின்றது.

தராசுத் தட்டுக்களினதும் அவற்றிலுள்ளவற்றினதும் நிறைகள் சமமாக இருக்கவேண்டும். இந்நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப்பட்டதும், தட்டுக்களில் சமநிறைகளை வைக்கும்போது அக்கோல் கிடையாக மட்டுமே தங்க இயலுமெனவும், நிறைகள் சமமற்றவையாகும்போது அது கிடையுடன் ஒரு குறித்த கோணத்தில் தங்கமுடியுமெனவும் இனிக் காட்டுவோம்.

படம் 43 இல் A, B, O, H, G ஆகிய புள்ளிகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இப்படத்தில் கோல் AB கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது.

P = ஒவ்வொரு தராசுத் தட்டினதும் நிறையெனக்.
W = கோலின் நிறை.
W_1, W_2 = தட்டுக்களிலுள்ள நிறைகள்.
a = ஒவ்வொரு புயத்தினதும் நீளம் (அ-து. $\mathrm{AH} = \mathrm{BH} = a$).
$h = \mathrm{OH}$.
$k = \mathrm{HG}$.



படம் 43.

அக்கோல், A இலும் B இலும் கீழ்நோக்கி நிலைக்குத்தாய்த் தாக்கும் $\mathrm{P}+\mathrm{W}_1$, $\mathrm{P}+\mathrm{W}_2$ என்னும் விசைகளினாலும், G இல் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கும் W இனாலும், O இலுள்ள நிலைக்குத்தான மேன்முக மறு தாக்கத்தினாலும் தாக்கப்படுகின்றது.

படத்தில், கோணம் $\mathrm{LOH} = \theta$, $\mathrm{AN} = a$ கோசை θ, $\mathrm{LH} = h$ சைன் θ; H இனூடான நிலைக்குத்திலிருந்து G இன் தூரம் $= k$ சைன் θ.

O இலிருந்து $(\mathrm{P}+\mathrm{W}_1)$ இன் தூரம் $\mathrm{AM} = a$ கோசை $\theta - h$ சைன் θ.
O இலிருந்து $(\mathrm{P}+\mathrm{W}_2)$ இன் தூரம் $= a$ கோசை $\theta + h$ சைன் θ.
O இலிருந்து W இன் தூரம் $= h$ சைன் $\theta + k$ சைன் θ.
O பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,
$(\mathrm{P}+\mathrm{W}_1)$ (a கோசை $\theta - h$ சைன் θ)
$= \mathrm{W}(h+k)$ சைன் $\theta + (\mathrm{P}+\mathrm{W}_2)$ (a கோசை $\theta + h$ சைன் θ),
$\therefore$ சைன் $\theta\,[\mathrm{W}(h+k) + (\mathrm{P}+\mathrm{W}_2)\,h + (\mathrm{P}+\mathrm{W}_1)h]$
$= $ கோசை $\theta\,[(\mathrm{P}+\mathrm{W}_1)\,a - (\mathrm{P}+\mathrm{W}_2)\,a]$

$$\therefore \text{ தான் } \theta = \frac{(\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2)a}{(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 + 2\mathrm{P})\ h + \mathrm{W}\ (h+k)}.$$

இம்முடிபிலிருந்து, தட்டுகளிலுள்ள நிறைகள் சமமாயின், அ-து. $\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_2$ ஆயின், θ ஆனது பூச்சியமாவதோடு, அக்கோல் கிடையாகவே தங்கமுடியுமென்று வெளியாகின்றது.

அந்நிறைகள் சிறிது வித்தியாசப்படின், அக்கோல் கிடையுடன் ஒரு குறித்த கோணத்தில் தங்கியிருக்கும்.

h, k இரண்டும் பூச்சியமாயின், அ-து. கோலின் புவியீர்ப்பு மையமும், தொங்கன் மையமும் கோடு AB இல் முற்றிலும் பொருந்தியிருப்

பின், தட்டுகளில் சமநிறைகள் இருக்கும்போது எதாவதொரு நிலையில் அக்கோல் தங்குமென்பதும், நிறைகள் வித்தியாசப்படின், ஒரு நிலைக்குத் தான நிலையில் மட்டுமே தங்குமென்பதும் குறிப்பிடத்தக்கவை.

§56. ஒரு தராசு (i) **உண்மை**யாகவும், (ii) **உணர்திறன்** உடைய தாகவும், (iii) **உறுதி**யாகவும், (iv) **விறைப்பா**கவும் இருக்கவேண்டும். இவையே ஒரு சரியான தராசிற்குரிய குணங்களாகும்.

(i) ஒரு தராசின் புயங்கள் சமமாகவும், தட்டுக்களின் நிறைகள் சமமாகவும் இருப்பதோடு கோலின் புவியீர்ப்பு மையம், கோலின் நடுப்புள்ளி, சுழலிடம் ஆகியன அக்கோலிற்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர்கோட்டில் இருப்பின், அத்தராசு உண்மையானதாகும்.

(ii) உணர்திறன்மிக்க ஒரு தராசினிடத்து, அதன் தட்டுக்களிலுள்ள மிகச் சிறிய வித்தியாசத்திற்கும் அதன் கோல் இடையுடன் ஒரு கணிச மான கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கவேண்டும். முன்னைய பந்தியிற் பெற்ற முடிபைப் பயன்படுத்தி, $\frac{\text{தான் } \theta}{W_1 - W_2}$ என்ற விகிதம் தராசின் உணர்திறன் அளவீடாகக் கருதப்படலாம். எனவே, இவ்விகிதம் $\frac{a}{(W_1 + W_2 + 2P)\, h + W\,(h + k)}$ இற்குச் சமமாகும்.

இக்கோவையிலிருந்து, நிறைகள் கூடுமிடத்துத் தராசின் உணர்திறன் குறையுமென்பது பெறப்படுகின்றது.

எனினும், $h = 0$ ஆயின், அ-து. கத்தி விளிம்புகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையின், உணர்திறன் $\frac{a}{Wk}$ ஆவதோடு, தட்டுக்களிலுள்ள நிறையிலே தங்காததாகவும் இருக்கும்.

இந்நிபந்தனை வழக்கமாக எதிர்பார்க்கப்படும். ஆனால், கோலில் ஏற்படும் சிறு வளைவும் இந்நோக்கினைச் சரியாய் அடையவிடாது தடுக்கின்றது.

தந்த நிறைகளுக்கு உணர்திறனானது a, அ-து. புயங்களின் நீளம் கூடுவதுடன் அதிகரிக்கின்றது. W குறையும்போதும் அது அதிகரிக்கின்றது. எனவே, கோல் இலேசாகவும் நீளமாகவும் இருத்தல் நலமுடைத்து. கோல் மிக இலேசாக இருப்பின், அதன் விறைப்பின்மை மிகக் குறைவாக இருக்கும். எனவே, சிறந்த தராசுகளினிடத்து, கோல் வழக்கமாக ஒரு திறந்த தீராந்தி வடிவில் இருக்கும்.

k ஐக் குறைத்தும் உணர்திறனை அதிகரிக்கலாம்.

(iii) ஒரு தராசு அதன் சமநிலைத் தானத்தில் ஓய்விலிருக்க வருதற்கு எடுக்கும் நேரத்தை உறுதிப்பாடு பாதிக்கின்றது. இது, இயக்க வியலில் ஒரு பெரிய பிரச்சினையாக அமைகின்றது. O பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புதிறன் மிக்க அதிகமாக இருக்கும் போது, அ-து. ஒவ்வொரு தட்டிலுமுள்ள நிறை W_1 ஆயின்,

$[2(P+W_1)h+W(h+k)]$ சைன் θ ஆனது மிக்க அதிகமாக இருக்கும்போது, இந்நிபந்தனை உண்மையாக நன்கு நிறைவேற்றப் படுகின்றது.

θ இன் ஒரு தந்த பெறுமானத்திற்கு, h உம் k உம் மிக்க அதிகமாக இருக்கும்போதுள்ள நிலையும் இதுவேயாகும்.

தராசானது h, k ஆகியன சிறியவையாக இருக்கும்போது உணர்திறன் மிக்கதாகவும், அவை பெரிதாக இருக்கும்போது உறுதிமிக்கதாகவும் இருப்பதனால் மிகுதியான உணர்திறனையும் விரைவாக நிறுத்தலையும் ஒருங்கே அடைய முடியாது.

§57. ஒரு தராசு உண்மையில்லாததாகவும், இதற்குரிய காரணம் தராசுத்தட்டுக்களின் நிறையில் ஏற்படும் வித்தியாசமுமாயின், நிறை குறைந்த தட்டில் கடதாசி அல்லது மணல் வைத்தோ, தட்டுகள் இணைத்த புள்ளிகட்கண்மையிலுள்ள கோலின் முனையிலே தொழிற்படும் ஒரு சிறிய திருகு மூலமோ இவ்வழுவைச் செப்பஞ்செய்யலாம்.

தராசின் புயங்கள் சமமற்றவையாயின், இத்தகைய செப்பஞ்செய்கை யேதும் அதனை உண்மையானதாக்காது.

செம்மையின்மைக்குரிய காரணம் எதுவாக இருப்பினும், ஒரு பொருளின் சரியான நிறையைப் பின்வருமாறு பெறலாம் :—

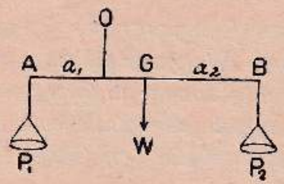
அப்பொருளை ஒரு தட்டில் வைத்து, மற்றைய தட்டில் மணல் வைத்து அதனைச் சமன்செய்க.

பொருளை அகற்றி, அத்தட்டில் நிறைகளை வைத்து, மணலைச் சமன்செய்க.

இந்நிறைகள் இப்பொருளின் நிறைக்குச் சமமாகவேண்டும்.

இது, சிலவேளைகளில் **வோடாவின் (Borda's) முறை** எனப்படும்.

§58. இருதரம் நிறுத்தல்.



படம் 44.

புயத்தின் நீளங்களை a_1, a_2 எனவும், தட்டுக்களின் நிறைகளை P_1, P_2 எனவும் கொள்க. கோலினது நிறை, சுழலிடம் O (படம் 44) இலிருந்து x தூரத்தில் தாக்குகிறதெனவும், ஆனல் தராசிலிருந்து நிறைகள் அகற்றப் படும்போது கோல் கிடையாகவுள்ளதெனவும் எண்ணுக.

பின்பு,
$$P_1a_1 = Wx + P_2a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

இப்போது, கோலினைக் கிடையாகப் பேண P_1 இலுள்ள நிறை W_1 இற்கு, P_2 இல் W_2 என்னும் நிறை தேவைப்படுகிறதென்க.

$$(P_1 + W_1)\, a_1 = Wx + (P_2 + W_2)\, a_2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

இப்போது, P_2 இல் W_1 ஐ வைத்து, இதைச் சமன்செய்ய P இல் வைக்கவேண்டிய நிறை W_3 ஐக் காண்க.

$$(P_1 + W_3)\, a_1 = Wx + (P_2 + W_1)\, a \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

(i) இலும் (ii) இலும் இருந்து, $W_1 a_1 = W_2 a_2$.

(i) இலும் (iii) இலும் இருந்து, $W_3 a_1 = W_1 a_2$.

இச்சமன்பாட்டுக்களிலிருந்து, $\quad W_1^2 = W_2 W_3$;

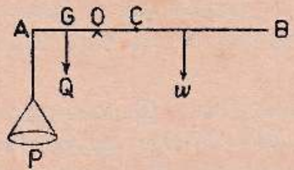
அல்லது, $\quad W_1 = \sqrt{W_2 W_3}$,

அ—து. அப்பொருளின் உண்மையான நிறையானது, ஒவ்வொரு தட்டிலும் மாறிமாறி வைக்கும்போது அதனைச் சமன் செய்யத் தேவையான நிறைகளின் பெருக்கலிடையாகும். அதோடு,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{W_2}{W_1}.$$

இது, புயங்களின் விகிதத்தினைத் தருகின்றது.

§59. பொதுத் துலாக்கோல்.



படம் 45.

இது, ஒரு பாரமான கோல் AB (படம் 45) ஐ உடையது. இக்கோல், இதனொரு முனைக்கு மற்றைய முனையிலும் பார்க்கக் கிட்டவுள்ள ஒரு நிலைத்த சுழலிடம் O இல் தாங்கப்பெற்றுள்ளது.

நிறை காணவேண்டிய பொருளினைத் தாங்க, துலாக்கோலின் குறுகிய புயத்தின் முனையில் ஒரு தராசுத் தட்டு இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. அளவு கோடிட்ட நீண்ட புயம் OB வழியே w என்னும் ஓர் அசையும் நிறை வழுவிச் செல்லக்கூடியது.

P = தராசுத் தட்டின் நிறையென்க.
$a = OA$.
Q = G இல் தாக்கும், கோலின் நிறை.
$b = OG$.

தராசுத் தட்டில் நிறையேதும் இல்லாதவிடத்து, கோலினைக் கிடையாகப் பேண w வைக்கப்படவேண்டிய புள்ளியை C எனவும், $OC = c$ எனவும் கொள்க.

பின்பு,
$$wc = Pa + Qb \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$
ஒரு நிறை W ஐத் தராசுத் தட்டில் வைக்குமிடத்து, இதனை C இலிருந்து x தூரத்தில் w சமன்செய்யின்,
$$w\,(c + x) = (P + W)\,a + Qb \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$
(i) இனும் (ii) இனும் இருந்து, $wx = Wa$.

எனவே, a, $2a$, $3a$ முதலான தூரங்களை C இலிருந்து குறிப்போமாயின், முதற் குறியில் w ஐச் சமன்செய்யும் தட்டிலுள்ள நிறை w ஆகும் ; இரண்டாம் குறியிற் சமன்செய்யின் அதன் நிறை $2w$ ஆகும். இவ்வாறே பிறவுமாம்.

$w = 1$ இரு. ஆயின், அந்த அளவுக்குறிகள் தட்டிலுள்ள இருத்தல்களை ஒத்திருக்கும். அதோடு, அவுன்சுகளைக் குறிக்கும்படி அளவுக்குறிகளை மேலும் பிரிக்கலாம்.

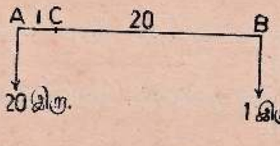
C இலிருந்து $14a$ தூரத்தில், அவ்வசையும் நிறை தட்டிலுள்ள 14 இரு. இற்குச் சமவலுவுள்ளது, அ—து. துலாக்கோல் 0 இற்கும் 14 இரு. இற்குமிடையே எந்நிறையையும் நிறுக்கும். பல சந்தர்ப்பங்களில், துவாரங்களுள்ள நிறைகளைக் காவும் ஒரு சுமைகாவியானது நீண்ட புயத்தின் முனையில் இணைக்கப்பெற்றிருக்கும்.

இவ்விடத்து, தட்டில் நிறையேதும் இல்லாதபோது, கோலினைக் கிடையாகப் பேண, வழுக்குநிறை w வைக்கப்படவேண்டிய புள்ளி மீண்டும் C ஆகும்.

முன்புபோலவே அளவுக்குறிகள் இடப்பெற்றுள்ளன. ஆனால், C இல் w இருக்குமிடத்து, $X.OB = W.OA$ ஆயிருப்பின், சுமைகாவியிலுள்ள X என்னும் நிறை தட்டிலுள்ள W என்னும் ஒரு நிறையைச் சமன் செய்யும்.

இவ்வாறாக, ஏறக்குறைய 1 இரு. உள்ள ஒரு சிறிய நிறையைத் தராசுத் தட்டில் ஒரு கல் (14 இரு.) இற்குச் சமன்செய்யலாம்.

§60. நெம்புத் தத்துவம் பல நடைமுறைப் பிரயோகங்களிற் கையாளப்படுகின்றது. ஒரு புள்ளியில் ஒரு சிறிய விசையைப் பிரயோகித்து இன்னொரு புள்ளியில் ஒரு பெரிய விசையை உஞற்றுதலே இவற்றின் முக்கிய நோக்கு.



படம் 46.

இவ்வாறு, $BC = 20.AC$ (படம் 46) எனவுள்ள புள்ளி C இற் சுழலும் வண்ணம் அமைத்த ஒரு கோல் AB ஐக் கொண்டு A இல்

20 இரு. நிறையொன்றை B இல் 1 இரு. நிறை விசையொன்றினால் தாங்கலாம். இதிலும் சிறிது அதிகமான ஒரு விசையானது A இலுள்ள நிறையை உயர்த்தும்.

இவ்வகை இரட்டை நெம்புகளின் உதாரணங்கள் கத்தரிக்கோல்களும் வெட்டும் குறடுகளுமாம்.

கோல் AB ஆனது A இற் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டிருப்பின், B இல் 1 இரு. நிறை விசையொன்று C இல் 21 இரு. நிறையொன்றைத் தாங்கும்.

ஒற்றைச் சில்லு வண்டி, பாரமான தீராந்தியை உயர்த்தப் பயன்படுகின்ற தரையில் முனையொன்றினைக் கொண்டுள்ள கோல், போன்றன இவ்வொழுங்குவகையின் சில உதாரணங்களாகும்.

C இல், மிகுந்த தாக்குவிசையை உண்டாக்கப் பயன்படும் இவ் வகை இரட்டை நெம்பின் உதாரணங்களில் பாக்குவெட்டியும் ஒன்றாகும்.

A இற் சுழலுமாறு AB ஐ அமைத்து, C இல் F என்னும் ஒரு விசையைப் பிரயோகிக்கின், இது B இல் $\frac{1}{21}$F என்னும் விசையை மட்டுமே வெல்லமுடியும். எவ்வாறாயினும், C நகர்ந்த தூரத்தின் இருபத்தொரு மடங்கு தூரத்தினூடாக முனை B நகரும். இவ்வொழுங்கு முறை, அசைவைப் பெரிதாக்கப் பயன்படுகின்றது. உ—ம். ஒரு கடையியினது மிதியிலே C இல் காலின் அடியை வைத்து, காலின் அடியின் சிற்றசைவினால், முனை B ஒரு கணிசமான தூரத்தினூடாக நகருமாறு செய்யப்படுகின்றது.

பயிற்சி IX.

1. ஒரு பொதுத் துலாக்கோலில், அதன் வழுக்கு நிறையின் பொருட்டு, பூச்சியக் குறிகளின் நிலையமும் அளவுகோடுகளின் இடைத்தூரமும் எவ்வாறு நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன என்பதை விளக்குக. வழுக்கு நிறை $\frac{1}{4}$ இரு. ஆயும், இவ்வழுக்கு நிறை பூச்சியக் குறியிலிருக்கும் போது, துலாக்கோலின் நீண்ட புயத்தின் முனையிலுள்ள 2 அவு. நிறை குறுகிய புயத்தின் முனையிலுள்ள 10 இரு. ஐச் சமன்செய்வதாயும் இருப்பின், குறுகிய புயத்தின் முனையில் அடுத்துவருகின்ற இருத்தல்களை அளவிட அவ்வழுக்கு நிறையின் பொருட்டுள்ள அளவுகோடுகளின் இடைத் தூரம், நீண்ட புயத்தின் நீளத்தின் எப்பின்னமென்பதைக் காண்க. (I.A.)

2. ஒரு தராசின் சுழலிடம் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கு அடுத்துச் சரி நேர் மேலே அமையாவிடினும் அதன் புயங்கள் சமமாக இருப்பின், ஒரு பொருளை இரு தட்டுக்களிலும் மாறிமாறி நிறுத்து, இவ்விரு நிறைகளினதும் கூட்டலிடையைக் கொண்டு, அதன் நிறையைச் சரியாக மதிப்பிடலாமென நிறுவுக. இதனுடன், புயங்கள் சமமாகாது h என்னும்

அளவினால் வித்தியாசப்படின், முழு அகல்வும் l ஆக இருக்குமிடத்து, அதன் நிறையைச் சரியாக மதிப்பிட, கூட்டலிடையில் $\frac{1}{2}(W_1 \sim W_2)\frac{h}{l}$ கழிக்கப்பட வேண்டுமென மேலும் காட்டுக. இங்கு, W_1, W_2 என்பன இரு சந்தர்ப்பங்களிலும், தோற்ற நிறைகளாகும்.

3. ஒரு நிறுவைப் பொறி பின்வருமாறு அமைக்கப்பெறுகின்றது : ABCD என்னும் ஒரு விறைப்பான கோல் C இற் சுழலுமாறு அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. இங்கு, CD இலும் BC குறைவானது. B இலும் D இலுமிருந்து BF, DE என்னும் சம நீளக் கோல்கள் தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளன. இவற்றின் F, E என்னும் முனைகள் BD இற்குச் சமமான நீளமுள்ள ஒரு கோலினால் தொடுக்கப்பெற்றுள்ளன. இக்கோல்கள் B, D, E, F என்பனவற்றில் சுயாதீனமாகப் பொருத்தப்பெற்றுள்ளன. FE இன் நடுப்புள்ளியில் ஒரு தராசுத் தட்டு இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. ஈடுசெய்நிறை, AC வழியே வழுக்கிச் செல்லக் கூடிய P என்னும் நிறையாகும். இப்பொறி பாரமெதனையும் கொண்டிராது சமநிலையில் இருக்கும்போது, P இனது நிலையம் M ஆயின், பொறியில் எவ்வாறு அளவுகளைக் குறிக்கலாமென்று கூறுக. (I.A.)

4. சரியாகச் சமன்செய்யாத ஒரு தராசினை உடைய ஒரு வியாபாரி, அதன் தட்டுகளிலொன்றிற்கு ஒரு சிறிய நிறையைச் சேர்த்து அதனைச் சமன்செய்யுமாறு அமைக்கிறான். ஒரு பொருளை ஒரு வாடிக்கைக்காரனுக்கு விற்க முயலும் அவ்வியாபாரி, நிறுக்க வேண்டிய நிறையின் அரைப் பங்கை ஒரு தட்டிலும் அதற்குத் தகுந்த பொருளை மற்றைய தட்டிலும் வைத்து நிறுத்தபின், அந்நிறையை மற்றைய தட்டில் வைத்து மிகுதிப் பொருளை நிறுத்துச் கொடுத்தால் அவன் தன்னைத்தானே ஏமாற்றுவானெனக் காட்டுக. (H.S.C.)

5. 3 அடி நீளமுள்ள சீரான கோலொன்று, அதன் மையம் C இல், ஒரு நிலைத்த கிடையான முளைமீது சுழலுமாறு ஒப்பமாக நிலைப்படுத்தப் பெற்றுள்ளது. கோலின் A, B என்னும் முனைகளில் இணைத்த இழைகள், முறையே A′, B′ என்னும் நிலைத்த, ஒப்பமான வளையங்களினூடாகச் செல்கின்றன. ஒவ்வோர் இழைக்கும் 14 இரு. நிறையொன்று இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. A′ ஆனது C இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயும், B′ ஆனது C இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழேயும், C இலிருந்து 18 அங்குலத்திலுள்ளன. அக்கோலில் A இல் x இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளது. அக்கோல் நிலைக்குத்தாக இல்லாத வேறொரு நிலையில் ஓய்விலிருக்கவேண்டின், x ஆனது ஒரு குறித்த பெறுமானத்திலும் குறையலாகாதென நிறுவி, x இன் எப்பெறுமானத்திற்கு அக்கோல் கிடையாகச் சமநிலையில் இருக்குமென்பதை நிர்ணயிக்க. (I.A.)

6. இலேசான, சமமற்ற நீளமுள்ள புயங்களையும், சமமற்ற நிறையுள்ள தராசுத் தட்டுக்களையும் கொண்ட ஒரு தராசு, நிறைகள் அகற்றப்படுமிடத்துச்

சமன்செய்யாது. a இரு. நிறைப் பொருளொன்று இங்கு x இரு. நிறையுள்ளதாகவும், b இரு. நிறையுள்ள வேறொரு பொருள் இங்கு y இரு. நிறையுள்ளதாகவும் தோன்றுகிறது. z இரு. நிறையுள்ளதாகத் தோன்றும் ஒரு பொருளின் உண்மையான நிறை

$$\frac{bx - ay + (a-b)z}{x-y} \text{ இரு.}$$

எனக் காட்டுக. (H.S.D.)

7. பாரமான, சீரற்ற 10 அடி நீளச் சட்டமொன்று, அதன் ஒரு முனையில் 4 இரு. திணிவொன்று தொங்கவிடப்பட்டு, அதன் நடுப்புள்ளி பற்றிச் சமன்செய்யக்கூடியது. அதே முனையில் ஒரு 12 இரு. திணிவு தொங்கவிடப்படின், சட்டம் அதன் மையத்திலிருந்து 1 அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றிச் சமன்செய்யும். சட்டத்தின் நிறையையும் அதன் புவியீர்ப்புமைய நிலையத்தையும் காண்க. அசையக்கூடிய சுழலிடமொன்றுடன் கூடிய ஒரு துலாக்கோலாக அச்சட்டம் எவ்வாறு அளவு கோடிடப்பெறலாம் என்பதைக் காட்டி, அத்திணிவுகள் நிறுக்கப்பெறும் முனையிலிருந்து அளக்கப்பெறும் அளவுகோடுகளின் தூரங்கள் ஓர் இசை விருத்தித் தொடரை உருவாக்குகின்றனவென நிறுவுக. (I.E.)

8. ஒரே பொருளினால் ஆக்கப்பெற்றனவும் ஒரே தடிப்புள்ளனவுமான AB, BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள், கோணம் $ABC = 120^\circ$ என அமையுமாறு ஒருமிக்க B இல் பொருத்தப்பெற்றுள்ளன. இவ்வாறு அமையும் கூன்நெம்பு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாக B இற் சுழலுமாறும், சமநிலைத் தானத்தில் BC கிடையாக இருக்குமாறும் அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. சமநிலையில் AB ஆனது கிடையாகும் வண்ணம் C இல் ஒரு நிறை இணைக்கப்பெற்றிருப்பின், இந்நிறை $\frac{3}{2}$ BC எனக் காட்டுக. (I.S.)

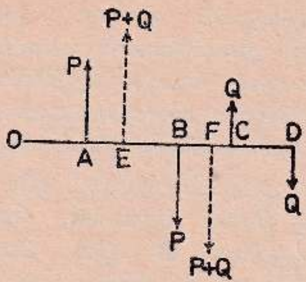
9. ஒரு கிடை நெம்பு ABC, அதன் நடுப்புள்ளியாகிய B இற் சுழலுமாறு அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. இது C இல் W_0 நிறையுள்ள ஒரு தராசுத் தட்டினைக் காவுகின்றது. AD என்னும் ஓர் இலேசான சட்டம் நெம்பில் A இலும், நிலைத்த முனை F ஐப் பற்றிச் சுயாதீனமாக அசையக்கூடிய ஒரு கிடைச் சட்டம் FDE இல் A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே D இலும் சுழலுமாறு அமைக்கப்பெற்றுள்ளது. இச்சட்டத்தின் நிறை W_1 ஆகும். இதன் புவியீர்ப்பு மையம் F இலிருந்து d தூரத்திலுள்ளது; $FD = c$. C இலுள்ள தராசுத் தட்டில் வைக்கும் W என்னும் வெவ்வேறு நிறைகளுக்கு, இயங்கு நிறை w ஐக் கொண்டு இச்சட்டத்தில் எவ்வாறு அளவுகோடிடலாம் என்பதைக் காட்டுக. அங்குலக் குறியீடுகள் இரு. குறியீடுகளை ஒத்திருப்பதுடன், $w = \frac{1}{4}$ இரு. ஆயின், c இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. இவ்விடத்து, $d = 1$ அங். ஆகவும், பூச்சியக் குறியானது F இலிருந்து 1 அங்குலத்திலும் இருக்கும் போது, W_0 இற்கும் W_1 இற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க. (I.E.)

§61. இணைகளின் சேர்க்கை.

ஓர் இணையின் தளத்திலுள்ள எப்புள்ளியைப் பற்றியும் அதன் திருப்புதிறன் ஒரேயளவினதென்பதைப் (பந்தி 50) பார்த்திருக்கிறோம். ஒரே தளத்திலுள்ள எத்தொகை இணைகளினதும் விளையுளைப் பெற வழிவகுக்கும் பின்வரும் தேற்றத்தை இனி நிறுவுவோம்.

ஒரே தளத்தில் தாக்கும் இரு இணைகள், அவற்றின் புறம்பான திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைத் திருப்புதிறனாகக் கொண்ட ஒரு தனி இணைக்குச் சமவலுவுடைத்து.

வகை (i). விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் யாவும் சமாந்தரமாக இருக்கும் போது.



படம் 49.

P, P, Q, Q என்பன படம் 48 இலுள்ளவாறு தாக்கும் இணைகளின் விசைகளெனக் ; OABCD என்னும் ஒரு நேர் கோட்டினை அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாய் இவற்றை A,B,C,D என்பனவற்றிற் சந்திக்கும்படி வரைக.

முறையே A இலும் C இலும் தாக்கும் P, Q என்னும் விசைகள் AC இல் E என்னும் ஒரு புள்ளியில் $P.AE = Q.EC$ என்றமையத் தாக்கும் $(P+Q)$ என்னும் ஒரு சமாந்தர விசைக்குச் சமவலுவுடைத்து.

முறையே B இலும் D இலும் தாக்கும் P, Q என்னும் விசைகள் BD இல் F என்னும் ஒரு புள்ளியில் $P.BF = Q.FD$ என்றமையத் தாக்கும் $(P+Q)$ என்னும் ஒரு சமாந்தர விசைக்குச் சமவலுவுடைத்து. இவ் விசையானது முதல் விசைக்கு முரணான திசையிலுள்ளது.

எனவே, அவ்விணைகள் ஒரு தனி இணைக்குச் சமவலுவுடைத்து.

அன்றியும், அவ்விளையுள் இணையின் திருப்புதிறன்

$=$ E இலும் F இலும் தாக்கும் $P+Q$ என்னும் இரு விசைகளினதும் O பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

ஆனால், E இலுள்ள P + Q இன் O பற்றிய திருப்புதிறன்

= A இலுள்ள P இனதும் C இலுள்ள Q இனதும் O பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

இதேமாதிரியாக, F இலுள்ள P + Q இன் O பற்றிய திருப்புதிறன்

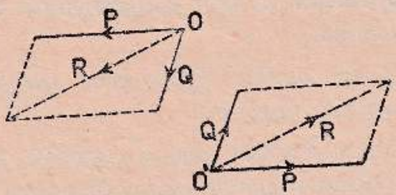
= B இலுள்ள P இனதும் D இலுள்ள Q இனதும் O பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

எனவே, விளையுள் இணையின் திருப்புதிறன்

= அவ்விணைகளினது நான்கு விசைகளினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

= தொடக்க இணைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

வகை (ii). விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் யாவும் சமாந்தரமாக இல்லாத போது.



படம் 48.

P, P, Q, Q என்பன அவ்விணைகளின் விசைகளெனக் ; இவற்றுள் ஒன்றுன P இன்னொரு விசை Q ஐ O இற் சந்திப்பதாகவும் (படம் 48), மற்றைய இரு விசைகளும் O′ இற் சந்திப்பதாகவும் கொள்க.

O இல் தாக்கும் P, Q என்னும் விசைகளை ஒரு தனி விசை R ஆகச் சேர்க்கலாம். இவ்வாறே O′ இல் தாக்கும் P, Q என்னும் விசைகளும் சேர்க்கப்படலாம். இத்தனி விசைகளிரண்டும், ஒரே கோணத்திலும் முரண் திசைகளிலும் தாக்கும் P, Q என்னும் விசைகளின் விளையுட்களாதலின், இவை சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் முரணுகவும் இருக்கும்.

எனவே, அவ்விரு இணைகளும் ஒரு தனி இணைக்குச் சமவலுவுடையன.

இங்கு, இவ்விளையுளிணையின் திருப்புதிறன்

= O′ இலுள்ள R இன் O பற்றிய திருப்புதிறன்,

= O′ இலுள்ள P இனதும் Q இனதும் O பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

= தொடக்க இணைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

இரு இணைகளின் எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, ஒரே தளத்திலுள்ள எத்தொகை இணைகளும், புறம்பான இணைகளினது திருப்புதிறன்களின்

அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைத் திருப்புதிறனுகக் கொண்ட ஒரு தனி இணைக்குச் சமவலுவுடைத்து என்பது தெரியவருகின்றது.

§62. முன்னைய பந்தியின் தேற்றத்திலிருந்து பின்வருவனவற்றை உய்த்தறியலாம் :—

1. ஒரு தளத்தில் தாக்கும் இரு இணைகளினது திருப்புதிறன்கள் சமமாகவும் முரணுகவுமிருப்பின், அவை ஒன்றையொன்று சமன்செய்யும்.

ஏனெனில், அவற்றின் விளையுளானது பூச்சியத் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணையாகும், அ-து. இவ்விணையின் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாகும் அல்லது இணையின் புயம் பூச்சியமாகும். அதன் புயம் பூச்சியமாயின், அது ஒரே நேர் கோட்டில், உண்மையிலேயே சமநிலையிலுள்ள இரு சம, முரண் விசைகளை உடையதாக இருக்க வேண்டும்.

2. சம திருப்புதிறனையுடைய, ஒரே தளத்திலுள்ள எவையேனும் இரு இணைகள் சமவலுவானவை.

இதனை, (1) இலுள்ள சமநிலை இணைகளில் ஒன்றினது விசைகளின் திசைகளைப் பின்முன்னுக்கிப் பெறலாம்.

(1) இற்குரிய வேறொரு நிறுவல் அடுத்த பந்தியில் தரப்பெற்றுள்ளது ; இவ்விரு இணைகளின் விசைகள் யாவும் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றனவா, சமாந்தரமாக இருக்கின்றனவா என்பதற்கேற்ப இரு சந்தர்ப்பங்கள் ஆராயப்பெறும்.

§63. வகை (i).

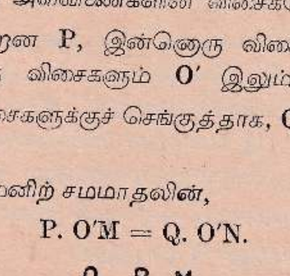
P, P, Q, Q என்பன அவ்விணைகளின் விசைகளெனக.

இவ்விசைகளிலொன்ருன P, இன்னெரு விசை Q ஐ O (படம் 49) இலும், மற்றைய இரு விசைகளும் O′ இலும் சந்திக்கின்றனவெனக.

O இற் சந்திக்கும் விசைகளுக்குச் செங்குத்தாக, O′ இலிருந்து O′M, O′N என்பனவற்றை வரைக.

திருப்புதிறன்கள் பருமனிற் சமமாதலின்,

$$P.\,O'M = Q.\,O'N.$$



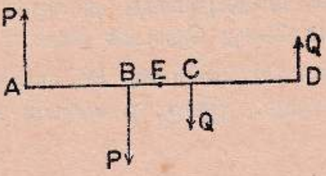
படம் 49.

எனவே, O இல் தாக்கும் P, Q என்னும் விசைகளினது விளையுளின் தாக்கக் கோட்டில் O′ உள்ளது. ஆகவே, OO′, இவ்விளையுளின் திசையாகும்.

இதேமாதிரியாக, O′ இலுள்ள P + Q இன் விளையுளானது திசை O′O இலுள்ளது. O இலும் O′ இலுமுள்ள விசைகள் சமமானவையாதலின், இவ்விளையுள்கள் பருமனிற் சமமாவதோடு, ஒரே கோணத்திலும் தாக்குகின்றன. இதனுல், விளையுள்கள் சமன்செய்வதோடு, அவ்விரு இணைகளின் நான்கு விசைகளும் சமநிலையிலுள்ளன.

வகை (ii).

இணைகளை ஆக்கும் P, P, Q, Q என்னும் விசைகள் யாவும் சமாந்தரமெண்க.



படம் 50.

அவற்றின் திசைக்குச் செங்குத்தான ஒரு நேர் கோடு ABCD (படம் 50) அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளை A, B, C, D என்பனவற்றில் வெட்டுகிறதெனக.

திருப்புதிறன்கள் பருமனிற் சமமாதலின்,

$$P.AB = Q.CD \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

A இலுள்ள P இனதும் D இலுள்ள Q இனதும் விளையுள், E இல் தாக்கும் (P + Q) என்னும் ஒரு சமாந்தர விசையாகும். இங்கு,

$$P.AE = Q.ED \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

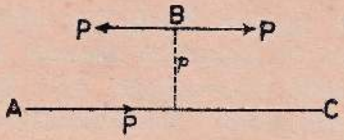
(ii) இலிருந்து (i) ஐக் கழிக்க,

$$P.BE = Q.EC,$$

∴ E என்பது B இலுள்ள P இனதும் C இலுள்ள Q இனதும் விளையுள் தாக்கும் புள்ளியாகும். ஆனல், இக் கடைசி விளையுள், பருமன் (P + Q) உள்ள ஒரு சமாந்தர விசையாகவும் முதல் விளையுளின் திசைக்கு முரணகவுமுள்ளது. எனவே, அவை சமநிலையிலுள்ளன.

§64. ஒரு விறைப்பான பொருளின் ஏதாவதொரு புள்ளி A இல் தாக்கும் P என்னும் ஒரு விசை அவ்விசைக்குச் சமாந்தரமாக, அப்பொருளின் ஏதேனுமொரு புள்ளி B இல் தாக்கும்படி Pp திருப்புதிறன் கொண்ட (p என்பது P இன் தாக்கக் கோட்டிலிருந்து B இன் செங்குத்துத் தூரம்) ஓர் இணையைப் புகுத்துதல்மூலம் செய்யலாம்.

A இல் தாக்கும் P ஆனது அப்பொருளைத் திருப்ப நாடும் அதே திசையில் இவ்விணை அதனை B பற்றித் திருப்புமாறு தாக்கும்.



படம் 51.

P இனது தாக்கக் கோட்டினை AC (படம் 51) என்க.

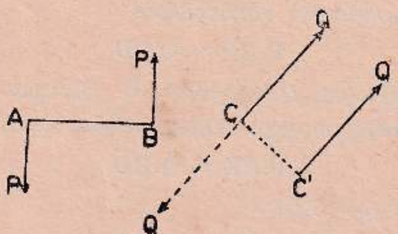
B இனூடான கோட்டின் வழியே AC இற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும் P என்னும் இரு சம, முரண் விசைகளை B இற் பிரயோகிக்க.

இவற்றுள் ஒன்றுன வலதுபுறமாகத் தாக்கும் விசையானது, B இல் தாக்குமாறு இடமாற்றம் செய்த தொடக்க விசை P ஆகும்.

மற்றைய விசை தொடக்கவிசையுடன், Pp என்னும் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணையை ஆக்குகின்றது. இங்கு, p என்பது AC இலிருந்து B இன் செங்குத்துத் தூரம்.

§65. உதாரணம் (i).

ஒரே தளத்தில் தாக்கும் ஒரு விசையுடன் ஓர் இணையின் சேர்க்கையானது, அவ்விசையின் தாக்கக் கோட்டின் தானத்தை மாற்றுதற்குச் சமவலுவுடைத்தென நிறுவுக.



படம் 52.

A இலும் B இலும் (படம் 52) தாக்கும் P என்னும் இரு விசைகளினூல் அவ்விணை ஆக்கப்படுகிறதென்க. C இல் தாக்கும் விசையை Q என்க.

இவ்விணையை, இதன் தளத்திலுள்ள, சம திருப்புதிறனுள்ள வேறு எதாவதோர் இணையால் ஈடுசெய்யலாம்.

ஆகையால், இவ்விணையின் விசைகளின் திசைகளையும் பருமன்களையும் ஒவ்வொன்றும் Q இற்குச் சமமாகும் வரை மாற்றி, C இல் எற்கெனவே தாக்கும் விசை Q இன் திசைக்கு முரணுக அவ்விசைகளில் ஒன்று

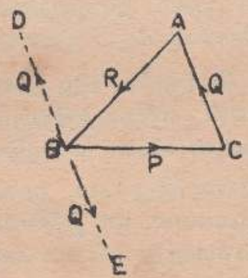
C இல் தாக்குமாறு செய்யலாம். அவ்விணையின் மற்றைய விசை C′ இல் தாக்கும். இங்கு, தொடக்கவிசை Q இனது திசைக்கு CC′ செங்குத் தாகும். அதோடு $CC' = \frac{P}{Q}AB$.

இப்போது, ஒன்றையொன்று சமன்செய்யும் இரு விசைகளை C இலும், Q என்னும் ஒரு தனி விசையை C′ இலும் கொண்டுள்ளோம்.

ஆகவே, Q இன் தாக்கக் கோட்டினை அதற்கே சமாந்தரமாக, தூரம் $\frac{M}{Q}$ இனூடாக இயக்குதலே இதன் விளைவாகும். இங்கு M, இணையின் திருப்புதிறன்.

உதாரணம் (ii).

ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தாக்கும் மூன்று விசைகள், பருமனிலும் திசையிலும் தாக்கக் கோட்டிலும் ஒரு முக்கோணியின் பக்கங்களால் வரிசைப்படி குறிக்கப்படின், அம்முக்கோணியினது பரப்பின் இரு மடங்கினால் குறிக்கப்படும் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணைக்கு அவை சமவலுவுடையன.



படம் 53.

அம்முக்கோணியை ABC (படம் 53) எனவும், விசைகளை P, Q, R எனவும் கொள்க. எனவே P, Q, R ஆகியன முறையே BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களினால் முழுமையாகக் குறிக்கப்படுகின்றன.

AC இற்குச் சமாந்தரமாக DBE ஐ வரைக. BD, BE என்னும் திசைகளில் தாக்குகின்ற, ஒவ்வொன்றும் Q இற்குச் சமமான இரு முரண் விசைகளை B இற் புகுத்துக.

விசைகள் P, R என்பனவும் திசை BD இல் தாக்கும் விசை Q உம் புள்ளி B இல் தாக்குவதனால், விசை முக்கோணியின்படி அவை சமநிலையிலுள்ளன.

இவ்வாறாக, CA, BE என்னும் திசைகளில் தாக்குகின்ற, ஒவ்வொன்றும் Q இற்குச் சமமான இரு விசைகள் எஞ்சியுள்ளன.

இவை, $Q \times CA$ இலிருந்து B இன் செங்குத்துத் தூரம் என்ற பெருக்கத்திற்குச் சமமான திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணையை ஆக்குகின்றன.

அன்றியும், Q ஐ CA குறிப்பதனுல், $CA \times CA$ இலிருந்து B இன் செங்குத்துத் தூரம், அ-து. முக்கோணி ABC இனது பரப்பின் இரு மடங்கினுல் இத்திருப்புதிறன் குறிக்கப்படுகின்றது.

§66. இதுகாறும், ஒருதள விசைகளையும் ஒரு **புள்ளியைப்** பற்றி அவற்றின் திருப்புதிறன்களையுமே ஆராய்ந்தோம்.

ஒரு விறைப்பான பொருள், அதனுள் நிலைப்பட்ட யாதுமோர் **அச்சைப்** பற்றிச் சுயாதீனமாகச் சுழலக்கூடியதென எண்ணுக.

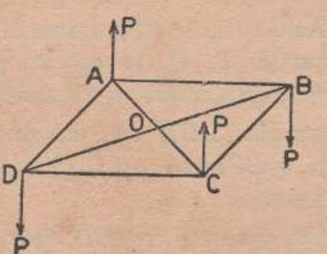
(இவ்வச்சிற்குச் சமாந்தரமாக அமையாத, அல்லது அச்சினூடாகச் செல்லாத) எவ்விசையும் அவ்வச்சைப் பற்றி அப்பொருளைத் திருப்ப நாடும். இது, **ஓர் அச்சைப் பற்றி ஒரு விசையின் திருப்புதிறன்** பற்றிய கருத்தைப் புகுத்துகின்றது.

தற்போதைக்கு, விசையானது அச்சிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் சந்தர்ப்பங்கள் பற்றியே ஆராய்வோம். இவ்விடத்து, அவ்வச்சைப் பற்றி விசையின் திருப்புதிறன், அவ்விசையினதும் விசையிற்கும் அச்சிற்குமிடையேயான செங்குத்துத் தூரத்தினதும் பெருக்கமாகும்.

பின்வரும் தேற்றத்தின் மூலம், திருப்புதிறன் தத்துவம், ஒரு நிலைத்த அச்சைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களுக்கும் இயையுமெனக் காட்டலாம்.

§67. **ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தாக்கும் ஓர் இணை அதனுடைய தளத்திற்குச் சமாந்தரமான எத்தளத்திற்கும் இடமாற்றப் படும்போது அப்பொருளின் மீதான அதன் விளைவு மாருதிருக்கும்.**

சமாந்தரத் தளங்களிலுள்ள இரு சம, முரண் இணைகள் சமநிலைப்படுமெனக் காட்டி இதனை நிறுவலாம். ஓர் இணையின் விசைகளை மற்றையதின் விசைகளுக்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் அமையுமாறு மாற்றலாம் என்றும், அப்போது புயங்கள் சமாந்தரமாகவும் சமமாகவுமிருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரியும்.



படம் 54.

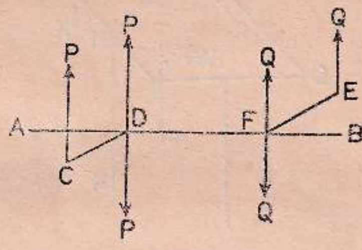
அவ்விசைகள் ஒவ்வொன்றும் P இற்குச் சமமென்க. ஓர் இணையின் புயம் AB (படம் 54) உம் மற்றையதின் புயம் CD உம் ஆகும்.

எல்லா விசைகளும் சமாந்தரமாக இருப்பதோடு, AB ஆனது CD இற்குச் சமாந்தரமாகவும் சமமாகவுமுள்ளது.

எனவே, ABCD ஓர் இணைகரம். அதோடு, A இலும் C இலுமுள்ள விசைகள் மையம் O இல் 2P இற்கும், B இலும் D இலுமுள்ள விசைகள் O இல் 2P இற்கு முரண் திசையிலும் சமவலுவுள்ளன. எனவே, அந் நான்கு விசைகளும் சமநிலைப்படுவதோடு, தொடக்க இணைகளும் சமநிலைப் படுகின்றன.

இதனின்றும், ஒரே போக்கிலுள்ள, சமாந்தரத் தளங்களிலிருக்கும் இரு சம இணைகள் சமவலுவுடையன.

§68. ஒரு நிலைத்த அச்சைப் பற்றிச் சுழலக்கூடிய ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது அவ்வச்சிற்குச் செங்குத்தான திசைகளில் விசைகள் தாக்கு மிடத்து, அவ்வச்சினைப் பற்றி அவ்விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாயின், அப்பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்.



படம் 55.

அப்பொருளிலுள்ள நிலைத்த அச்சை AB (படம் 55) என்க ; அப்பொருளின் மீது P, Q முதலான விசைகள் தாக்குகின்றனவென்க. இவ்விசைகள் சமாந்தரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால், இவற்றின் திசைகள் AB இற்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.

CD ஐ P இற்கும் அச்சிற்கும் செங்குத்தாக, அவற்றை முறையே C இலும் D இலும் வெட்டுமாறும், EF ஐ Q இற்கும் அச்சிற்கும் செங்குத்தாக, அவற்றை முறையே E இலும் F இலும் வெட்டுமாறும் வரைக.

ஒவ்வொன்றும் P இற்குச் சமமான இரு சம, முரண் விசைகளை D இற் புகுத்துக ; இவற்றிலொன்று தொடக்க விசை P இற்குச் சமாந்தரமான தாகும். தொடக்க விசை P இற்குப் பதிலாக, அதற்குச் சமாந்தரமாக D இல் தாக்கும் ஒரு விசையும் $P \times CD$ என்னும் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணையும் இப்போது உள்ளன. இதேமாதிரியாக, Q ஆனது F இலுள்ள Q என்னும் சமாந்தர விசைக்கும் $Q \times EF$ என்னும் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணைக்கும் சமவலுவுள்ளது. இவ்வாறே மற்றைய விசைகளுக்குமாம். D, F முதலானவற்றில் தாக்கும் P, Q முதலான

5—R 13456 (10/63)

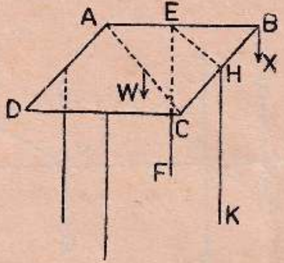
விசைகள் அப்பொருளைத் திருப்புமிடத்து எவ்விளைவையும் ஏற்படுத்தா; அச்சை நிலைப்படுத்தும் விசைகளினால் அவை சமன்செய்யப்படுகின்றனவெனக.

அவ்விணைகள், அச்சிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்திலுள்ள $P \times CD + Q \times EF + \ldots$ என்னும் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளன.

எனவே, $P \times CD + Q \times EF + \ldots$ பூச்சியமாயின், அப்பொருள் சமநிலையிலிருக்கும்; அதோடு, இக்கோவையானது அச்சினைப் பற்றி அவ் விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையாகும்.

§69. உதாரணம் (i).

ஒரு சதுர மேசை, அதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளிற் பொருத்திய நான்கு கால்களில் நிற்கின்றது. மேசையினதும் கால்களினதும் மொத்த நிறை W ஆயின், அம்மேசையைப் புரட்டாது அதன் ஒரு மூலையில் மிகக் கூடிய எந்நிறை வைக்கப்படலாம்?



படம் 56.

அம்மேசையை ABCD (படம் 56) என்க; B இல் நிறை X வைக்கப் படுகிறதென்க.

இந்நிறை, EF, HK என்னும் கால்களின் நிலத்துடனான தொடுகைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு FK பற்றி மேசையை ஒருச்சரிக்கப் பார்க்கும். நிறை W ஆனது AC இன் நடுப் புள்ளியில் தாக்குகின்றது. எனவே, இது, FK இலிருந்து நிறை X இன் அதே தூரத்திலுள்ளது.

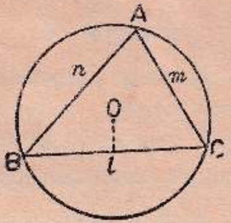
ஆகவே, X இன் மிகக் கூடிய பெறுமானம் W ஆகும்.

உதாரணம் (ii).

சீரான வட்டத் தட்டொன்று, அதன் விளிம்பில் l, m, n என்னும் இடைத்தூரங்களிலுள்ள மூன்று புள்ளிகளிற் கிடையாகத் தாங்கப்படு கின்றது; ஒவ்வொரு தாங்கியும் தாங்குவது தட்டினது நிறையின் எவ்விகித மெனக் காண்க.

தாங்கிகளின் நிலையங்களை A, B, C (படம் 57) எனவும், $BC = l$, $CA = m$, $AB = n$ எனவும் கொள்க.

முக்கோணி ABC இனது சுற்றுவட்டத்தின் மையம் O இலே இத் தட்டின் நிறை தாக்குகின்றது.



படம் 57.

BC இலிருந்து O இன் தூரம் R கோசை A உம், A இன் தூரம் m சைன் C உம் ஆகும். இங்கு R, அவ்வட்டத்தின் ஆரை. எனவே, A இலுள்ள தாக்கம் P_A ஆயின், BC பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$P_A \times m \text{ சைன் } C = W \times R \text{ கோசை } A.$$

அதோடு,
$$R = \frac{l}{2} \text{ கோசீ } A,$$

$$\therefore\ P_A = W\frac{l}{2} \cdot \frac{\text{கோசை } A}{m \text{ சைன் } C \text{ சைன் } A},$$

$$= \frac{Wl^2}{2mn} \cdot \frac{\text{கோசை } A}{\text{சைன்}^2 A} \quad (\because \text{ சைன் } C = \frac{n}{l} \text{ சைன் } A).$$

இப்பேறு, l, m, n என்பனவற்றைக் கொண்ட ஒரு கோவையாக எடுத்துரைக்கப்பட வேண்டும்.

$$\text{சைன் } A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்துவதோடு, $a = l$, $b = m$, $c = n$, என்பதையும் நினைவுபடுத்தி,

$$\text{சைன்}^2 A = \frac{4}{m^2n^2} \cdot \frac{(l+m+n)\ (m+n-l)\ (l+n-m)\ (l+m-n)}{16}.$$

அதோடு,

$$\text{கோசை } A = \frac{m^2+n^2-l^2}{2mn}.$$

$$\therefore\ P_A = \frac{Wl^2}{2mn} \cdot \frac{(m^2+n^2-l^2)}{2mn}$$
$$\times \frac{4m^2n^2}{(l+m+n)\ (m+n-l)\ (l+n-m)\ (l+m-n)},$$
$$= W\frac{l^2(m^2+n^2-l^2)}{(l+m+n)\ (m+n-l)\ (l+n-m)\ (l+m-n)};$$

இதேமாதிரியாக, B இலும் C இலுமுள்ள தாக்கங்களுக்குக் கோவைகளைக் காணலாம்.

பயிற்சி X.

1. சீரான வட்ட மேசையொன்று, அதன் விளிம்புகளைச் சுற்றிச் சமச்சீராக அமைத்த சமமான நான்கு கால்களிலும் நிற்கின்றது. இம்மேசையின் நிறை 100 இரு. அதன் விளிம்பில் தொங்கவிடும்போது அம்மேசையை மட்டுமட்டாகப் புரட்டும் மிகக் குறைந்த நிறையினைக் காண்க.

2. ஒரு வட்ட மேசை, மூன்று நிலைக்குத்துக் கால்களில் சமச்சீராக நிற்கின்றது. இக்கால்கள் ஒவ்வொன்றினதும் இடைத்தூரம் 40 அங்குலம். அம்மேசையின் மேற் பகுதியில் இக்கால்கள் பொருத்திய புள்ளிகள் ABC என்னும் ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் மூலைகளாக அமைகின்றன. மேசையின் மேற்பகுதி 80 இரு. நிறையுள்ளது. BC இலும் CA இலுமிருந்து முறையே 6, 10 அங்குல தூரத்தில் (முக்கோணி ABC இன் உட்புறத்தில்) உள்ள L இல் ஒரு 120 இரு. நிறை வைக்கப்பெற்றுள்ளது. ஒவ்வொரு காலின் மீதுமுள்ள தாக்கத்தைக் கணக்கிடுக. (H.D.)

3. ஒரு வட்ட மேசை, மூன்று நிலைக்குத்துக் கால்களில் சமச்சீராகத் தங்கியுள்ளது. இக்கால்கள், மேசையின் விளிம்பில் ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் மூலைகளான புள்ளிகளிற் பொருத்தப்பெற்றுள்ளன. இக்கால்களிலொன்றிற்கு நேரெதிரே விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியில், மேசையைப் புரட்டாதவாறு மிகக் கூடிய எந்நிறை தொங்கவிடப்படலாம் ?

4. ஒரே தளத்தில் அமையாத மூன்று சமாந்தர விசைகளின் விளையுளை எவ்வாறு காணலாம் ? ஓர் இலேசான மேசை சமமான மூன்று நிலைக்குத்துக் கால்களில் நிற்கின்றது. இக்கால்கள் மேசையின் மேற்பகுதியுடன் பொருத்திய புள்ளிகள் ஆக்கும் முக்கோணியின் உள்வரைந்த வட்டத்தின் மையத்தில் ஒரு நிறை வைக்கப்பெற்றுள்ளது. இக்கால்களின் மீதுள்ள தாக்கங்கள் அம்முக்கோணியின் எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு விகிதசமமானவையெனக் காட்டுக. (I.S.)

5. 40 இரு. நிறையும் 4 அடி விட்டமுமுள்ள ஒரு வட்ட மேசை, அதன் விளிம்பிற் பொருத்திய சம இடை வெளியுள்ள மூன்று கால்களினால் தாங்கப்படுகின்றது. ஒரு காலிற்கு முற்றிலும் எதிராக அம்மேசையின் விளிம்பில் வைக்கப்படும் ஒரு பாரம், மேசையினதும் பாரத்தினதும் மொத்த நிறை மற்றைய இரு கால்களினாலும் தாங்கப்படுமாறு செய்யின், அப்பாரத்தைக் காண்க. (C.E.)

6. 5 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வட்ட மேசை, சமச்சீராகப் பொருத்திய மூன்று கால்களில் நிற்கின்றது. ஒவ்வொரு காலும், மையத்திலிருந்து

2 அடியிலுள்ளது. மேசையின் நிறை 50 இரு. ஆயின், மேசை விளிம்பில் வைக்கப்படும் மிகக் குறைந்த எந்நிறை மேசையைச் சரிக்கும் ? மேசையைச் சரிக்காது, மிகக் கூடிய எந்நிறையை அவ்விளிம்பில் வைக்கலாம் ?

7. 8 இரு. நிறையான ஒரு முக்காலி, 2 அடி விட்டமுள்ள வட்டமான மேற்பகுதியையுடையது. இம்முக்காலி, 2 அடி நீளமுள்ள மூன்று கால்களினாற் சமச்சீராகக் கிடையாய்த் தாங்கப்படுகின்றது ; ஒவ்வொரு காலும் தரையுடன் 60° கோணத்தை ஆக்குகின்றது. 1 அடி நீளப் பக்கங்களுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் மூலைப் புள்ளிகளில் இக் கால்கள் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. முக்காலியின் விளிம்பில் வைக்கப்படும் மிகக் குறைந்த எந்நிறை, முக்காலியைக் கவிழச் செய்யும் ? (Q.E.)

அதிகாரம் III.

ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்கும் ஒருதள விசைகள்.

§70. முதலில், ஒரு பொருளின் மீது மூன்று விசைகள் மட்டுமே தாக்கும் பிரசினங்களை எடுத்துநோக்குவோம்.

மூவிசைப் பிரசினங்கள் ஒரு தனி வகையினவெனக் காண்பதோடு, அடுத்த பந்தியில் நிறுவப்பெறும் தேற்றத்திலிருந்து, அவ்விசைகள் ஒரு துணிக்கை மீது தாக்குமிடத்துக் கையாண்ட அதே நீர்வு காணும் முறையே பல சந்தர்ப்பங்களிலும் கையாளப்பெறுமென்பதும் தெரிய வரும்.

§71. **மூன்று ஒருதள விசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ் ஒரு விறைப்பான பொருள் சமநிலையில் இருப்பின், இவ்விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் யாவும் சமாந்தரமாகவோ, ஒரு பொதுப் புள்ளியிற் சந்திப்பனவாகவோ இருக்கவேண்டும்.**

P, Q, R என்பன அவ்விசைகளென்க. அவை யாவும் சமாந்தரமாக இராவிடின், அவற்றுள் P, Q என்னும் இரண்டு ஏதாவதொரு புள்ளி O இற் சந்திக்க வேண்டும்.

எனவே, P இனதும் Q இனதும் விளையுள் O இனூடாகச் செல்லும் யாதுமொரு விசையாகும்.

ஆனால், இம்மூவிசைகள் சமநிலையில் இருப்பதனால் இவ்விளையுளானது R ஐச் சமன்செய்ய வேண்டும்.

ஆகவே, R ஆனது P இனதும் Q இனதும் விளையுளிற்குச் சமமாக வும் முரணாகவும் அதனுடன் ஒரே நேர்கோட்டிலும் அமையவேண்டும். எனவே, O இனூடாகச் செல்லவேண்டும்.

§72. மேற்கூறப்பெற்ற தேற்றத்திலிருந்து, அவ்விசைகள் சமாந்தரமாக அமைந்தாலொழிய, அவை ஒரு துணிக்கையின் மீது தாக்குவனவெனக் கொண்டு கையாளப்படும் அதே முறைகளை, அ-து. லாமியின் தேற்றத்தையோ, வரைபுமுறையாக விசை முக்கோணியையோ பயன்படுத்த லாம், அல்லது அவ்விசைகளை இரு திசைகளிலே துணிக்கலாமென்பது தெரிய வருகின்றது. நிலைத்த ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு பொருள் பிணைக்கப்பட்டிருத் தல் போன்ற சில இடங்களில், அப்புள்ளியைப் பற்றித் திருப்புதிறன் களைக் கணித்தல் விரைவான முறையாகும். பொருளின் நிலையம் மட்டுமே தேவைப்படும் இடங்களில், அம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்குமாறு ஒரு படத்தினை வரைந்து, கேத்திரகணித மூலமாகவோ, திரிகோணகணித மூலமாகவோ அந்நிலையத்தைக் காணலாம்.

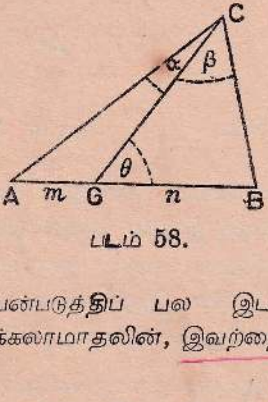
இந்நோக்கிற்குப் பின்வரும் திரிகோணகணிதச் சூத்திரங்கள் மிகப் பயன் படுவன :—

§73. ஒரு முக்கோணி ABC இன் (படம் 58) பக்கம் AB இல் G யாதுமொரு புள்ளி எனின், இது AB ஐ m, n என்ற இரு பகுதி களாகவும், CG ஆனது கோணம் ACB ஐ α, β என்ற இரு பகுதி களாகவும் பிரிக்குமாயின், அதோடு $CGB = \theta$ ஆயின்,

$(m+n)$ கோதா θ = n கோதா A − m கோதா B உம்,
$(m+n)$ கோதா θ = m கோதா α − n கோதா β உம் ஆகும்.

G என்பது (பல கணக்குகளிற் போல) A இன் நடுப் புள்ளியாயின், $m = n$ ஆகும். பின்பு இச்சூத்திரங்களைச் சுருக்க,

2 கோதா θ = கோதா A − கோதா B,
2 கோதா θ = கோதா α − கோதா β.



படம் 58.

இச்சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்திப் பல இடங்களில் கணக்குகளின் செய்கை முறைகளைச் சுருக்கலாமாதலின், இவற்றை நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டும்.

§74. ஏற்கெனவே கூறப்பெற்ற சில குறிப்புக்களைக் கொண்ட பின்வரும் குறிப்புக்கள் அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாதலின், இவற்றை நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டும் :—

(1) ஒரு பொருளின் நிறை அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாய் நிலைக் குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுகின்றது.

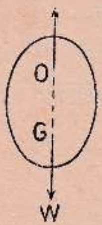
(2) ஒரு பொருள் ஓர் **ஒப்பமான பரப்**பிற் சாய்ந்திருக்கும்போது, மறுதாக்கம் அப்பரப்பிற்குச் செங்குத்தாகும்.

(3) ஒரு கோல் ஓர் **ஒப்பமான** முளை மீது தங்கும்போது, முளையின் மறுதாக்கம் கோலிற்குச் செங்குத்தாகும்.

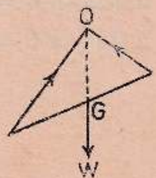
(4) ஓர் இலேசான இழையெங்கும் இழுவை ஒரேயளவினதாக இருப்ப தோடு, இவ்விழுவையானது **ஒப்பமான** முளைகள் அல்லது கப்பிகள் மேலாக இழை செல்வதனாற் பாதிக்கப்படவும் மாட்டாது.

(5) இரு சம விசைகளின் விளையுள் அவற்றின் இடைக்கோணத்தை இருகூறிடுகின்றது. எனவே, ஓர் ஒப்பமான முளையின் மேலாக ஓர் இழை செல்லும்போது, முளைமீதுள்ள தாக்கம் முளையின் இரு மருங்கிலுமுள்ள இழையின் பாகங்களின் இடைக்கோணத்தை இரு கூறிடுகிறது.

(6) ஒரு விறைப்பான பொருளை ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இலிருந்து தொங்கவிடும்போது, O இனூடான நிலைக்குத்தில் இப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது இருக்கவேண்டும். நிறையை O இலுள்ள



படம் 59A.



படம் 59B.

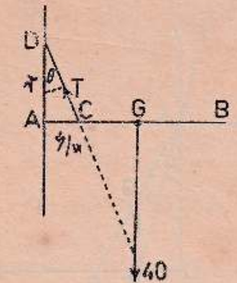
விளையுள் மறுதாக்கம் சமன்செய்ய வேண்டும். அப்படியாயின், இவ்விரு விசைகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்க வேண்டும். O ஆனது படம் 59A இலுள்ளவாறு அப்பொருளினுள் உள்ள ஒரு புள்ளியாக அமையினும், அல்லது அப்பொருள் படம் 59B இலுள்ளவாறு O உடன் இரு இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டிருப்பினும் இம்முடிபு பெறப்படும்.

மேலேயுள்ள கருத்துக்களுடன், மூன்று விசைகள் மட்டுமே இருப்பின் அவை ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கவேண்டும் என்ற உண்மையும் அப்பொருளின் நிலையத்தைக் காட்டும் ஒரு செம்மையான படத்தை வரைய உதவுகின்றது. இது, கீழுள்ள (iii) ஆம், (iv) ஆம் உதாரணங்களில் விளக்கப்படுகின்றது.

உதாரணம் (i).

6 அடி நீளமானதொரு சீரான சட்டம் AB இன் நிறை 40 இறு. அது சுயாதீனமாகத் திரும்பக் கூடிய முனை A ஆனது ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A இலிருந்து $1\frac{1}{4}$ அடி தூரத்தில் அச்சட்டத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியுடனும், A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலிருக்கும் ஒரு புள்ளியுடனும் இணைத்த ஒரு கயிற்றினால் சட்டம் கிடையாகப் பேணப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இழுவை 120 இறு.

நிறைக்கு மேற்படாதிருக்க வேண்டின், கயிறுனது சுவருடன் இணைத் திருக்கும் புள்ளிக்கும் A இற்குமிடையேயுள்ள தூரம் $1\frac{2}{3}$ அடியிலும் குறையலாகாதெனக் காட்டுக. (I.S.)



படம் 60.

சட்டத்தின் மையம் G (படம் 60) எனவும், கயிறுனது சட்டத்துடனும் சுவருடனும் இணைத்திருக்கும் புள்ளிகள் முறையே C, D எனவும் கொள்க.

AD = x எனவும், கோணம் ADC = θ எனவும் கொள்க.

$$\text{கோதா } \theta = \frac{x}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}x,$$

$$\therefore \text{ கோசி }^2\theta = 1 + \frac{16x^2}{25}, \text{ அல்லது சைன் } \theta = \frac{5}{\sqrt{25 + 16x^2}}.$$

கயிற்றிலுள்ள இழுவை T ஆயின், A பற்றி சட்டத்திற்கான திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$T.\ x \text{ சைன் } \theta = 3 \times 40,$$

$$\therefore T = \frac{120}{x \text{ சைன் } \theta}.$$

இங்கு, $T \ngtr 120$,

$$\therefore \frac{120}{x \text{ சைன் } \theta} \ngtr 120,$$

$$\therefore x \text{ சைன் } \theta \nless 1$$

$$\therefore 5x \nless \sqrt{25 + 16x^2},$$

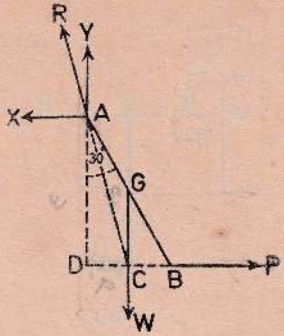
$$\therefore 25x^2 \nless 25 + 16x^2,$$

அல்லது, $x \nless \frac{5}{3}$ அல்லது $1\frac{2}{3}$ அடி.

உதாரணம் (ii).

W இரு. நிறையுள்ள AB என்னுமொரு பாரமான சீர்க் கோல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்குப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அது, நிலைக்குத்

துடன் 30° கோணச் சாய்வில் தங்குமாறு P என்னும் ஒரு கிடை விசையினுல் ஒரு பக்கத்திற்கு இழுக்கப்படுகின்றது. விசை P இன் பருமனையும் அப் பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.



படம் 61.

G (படம் 61) அக்கோலின் நடுப்புள்ளியென்க. நிறை W ஆனது G இனூடாய் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படுகின்றது.

G, A என்பவற்றினூடான நிலைக்குத்துக்கள் P இன் தாக்கக் கோட்டினை முறையே C இலும் D இலும் வெட்டுகின்றனவென்க. எனவே, A இலுள்ள மறுதாக்கம் R ஆனது W உம் P உம் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி C இனூடாய்ச் செல்லவேண்டும்.

(*a*) கோலிற்கு A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mathrm{P.AD} = \mathrm{W.CD},$$

அதோடு,

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\ \text{கோசை}\ 30°,$$

$$\mathrm{CD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\ \text{சைன்}\ 30°,$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{W}\frac{\frac{1}{4}\mathrm{AB}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{W}.$$

அத்துடன், X, Y ஆகியன முறையே R இன் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளாயின்,

$$\mathrm{X} = \mathrm{P} = \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{W},$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{W},$$

$$\therefore\ \mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2} = \mathrm{W}\sqrt{\frac{3}{36}+1} = \mathrm{W}\sqrt{\frac{13}{12}}.$$

கிடையுடன் R இன் சாய்வு θ ஆயின்,

$$\text{தான்}\ \theta = \frac{Y}{X} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

(b) முக்கோணி ADC இன் பக்கங்கள் ஒழுங்காக முறையே W, P, R என்னும் விசைகளுக்குச் சமாந்தரமாகவுள்ளன ; ஆகையால், இதனை ஒரு விசைமுக்கோணியாகப் பாவிக்கலாம்.

$$\therefore \frac{P}{DC} = \frac{R}{AC} = \frac{W}{AD}.$$

மேலுள்ளவாறு, $$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB, \quad CD = \frac{1}{4}AB.$$

அதோடு, $$AC^2 = AD^2 + CD^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{16}\right)AB^2.$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{13}}{4}AB,$$

$$\therefore P = W\frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}W.$$

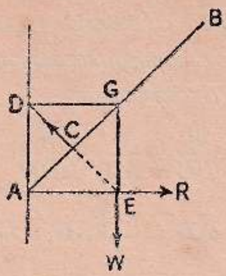
$$R = W\frac{\frac{\sqrt{13}}{4}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \sqrt{\frac{13}{12}}W.$$

$$\text{தான்}\ ACD = \frac{AD}{DC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}{\frac{1}{4}AB} = 2\sqrt{3}.$$

உதாரணம் (iii).

சீரான, பாரமுள்ளதொரு கோல் AB, அதன் முனை A ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றைத் தொடும்வண்ணம் இருக்கின்றது. ஓர் இழையின் ஒரு நுனி கோலிலே புள்ளி C இல், $AC = \frac{1}{4}AB$ என அமையுமாறும், மற்றைய நுனியானது A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவருடனும் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. அக்கோல் நிலைக்குத்துடன் சாய்வானதொரு தானத்தில் தங்கின், இழையின் நீளத்தைக் காண்க.

அக்கோல் AB, படம் 62 இற் போல சுவரிற் சாய்ந்திருக்குமாறு வரைக; G, அதன் நடுப்புள்ளியெண்க.



படம் 62.

சுவர் ஒப்பமானதாதலின், A இலுள்ள மறுதாக்கம் சுவருக்குச் செங்குத்தானது, அ-து கிடையானதாகும்.

இச்செவ்வகனது நிறையின் கோட்டினை E இற் சந்திக்கிறதெண்க. அப்பொழுது இம்மறுதாக்கம், அந்நிறை, இழையின் இழுவை ஆகியன மட்டுமே அக்கோலின் மீது செயற்படும் விசைகளாதலின், இவை ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கவேண்டும்.

எனவே, இழையின் திசையானது E இனூடாய்ச் செல்லவேண்டும். EC ஐ இணைத்து, சுவரினை D இற் சந்திக்கும்படி நீட்டுக. அப்பொழுது, D, சுவருடனான இணைப்புப் புள்ளியாகவும், CD, இழையின் நீளமாகவும் அமையவேண்டும்.

இப்போது, GEA, EAD என்பன செங்கோணங்கள் என்பதாலும் C ஆனது AG இன் நடுப்புள்ளியென்பதாலும் உருவம் AEGD ஒரு செவ்வகமாகும். AG, ED என்பன இதன் மூலைவிட்டங்கள்.

$$\therefore \ CD = AC,$$

அ-து. இழையின் நீளம் கோலினது நீளத்தின் காற்பங்காகும்.

குறிப்பு.—படம் 62 இற் போல B மேனோக்கிய வண்ணம் அக்கோல் தங்கின், இழை கோலுடன் இணைக்கப்பெற்றிருக்கும் புள்ளியானது A இற்கும் G இற்குமிடையே இருக்கவேண்டுமென்பது தெளிவு. இப்புள்ளியுடன் E ஐ இணைக்கும் கோடு, இழையானது சுவருடன் இணைத்த புள்ளியிற் சுவரைச் சந்திக்கவேண்டும் என்பதனாலேயாம். G இலேயோ, அதற்கு மேலேயோ C இருப்பின் இது சாத்தியமாகாதென்பதும் தெளிவாகின்றது.

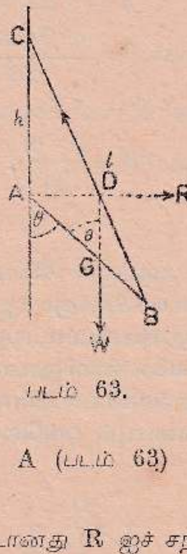
இவ்விழையானது G இற்கும் B இற்கும் இடையிலோ, B இலோ இணைக்கப்பெற்றிருப்பின், முனை B ஆனது பின்வரும் உதாரணத்திற்போல A இற்குக் கீழே இருக்கவேண்டும் :—

உதாரணம் (iv).

நீளம் a ஆகவுள்ளதொரு சீரான கோல் AB, அதன் ஒரு முனை A ஆனது ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் பொருந்தப்பெற்றுச் சாய்ந்திருக்குமாறு, கோலின் மற்றைய முனைக்கும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் இணைத்த ஒரு l நீள இழையினுல் தாங்கப்படுகின்றது. அக்கோல் சுவருடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்து தங்கின்,

$$\text{கோசை}^2\theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}$$

எனக் காட்டுக.



படம் 63.

சுவர் ஒப்பமானதாதலின், A (படம் 63) இலுள்ள மறுதாக்கம் R கிடையானதாகும்.

இப்போது, நிறையின் கோடானது R ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியூடாக இழையின் கோடு செல்லவேண்டும். அதோடு, A இன் கீழாக B இருந்தாலொழிய இது சாத்தியமாகாதென்பதும் தெளிவாகின்றது.

எனவே, AB ஐக் கீழ்முகமாக வரைக; G, அதன் நடுப்புள்ளியென்க. G இனூடான நிலைக்குத்தானது R ஐ D இற் சந்திக்கிறதென்க. BD ஐ இணைத்து, சுவரினை C இற் சந்திக்கும்படி அதனை நீட்டுக. அப்பொழுது, அவ்விழையை BC குறிப்பதுடன் BC $= l$ உம் ஆகும்.

AC $= h$ ஆகுக; ஆயின், AB இன் நடுப்புள்ளி G ஆகவும், AC இற்கு GD சமாந்தரமாகவும் இருப்பதனுல், DG $= \frac{h}{2}$ ஆகும்.

முக்கோணி AGD இல்,

$$கோசை\ \theta = \frac{GD}{AG} = \frac{\frac{h}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{h}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

முக்கோணி ACB இல்,

$$கோசை\ CAB = \frac{h^2 + a^2 - l^2}{2ah}.$$

ஆனால், $$கோசை\ CAB = -கோசை\ \theta.$$

$$\therefore\ -கோசை\ \theta = \frac{h^2 + a^2 - l^2}{2ah} \quad . \quad . \quad . \quad (ii)$$

(i) இலிருந்து, $h = a$ கோசை θ எனப் பிரதியிட,

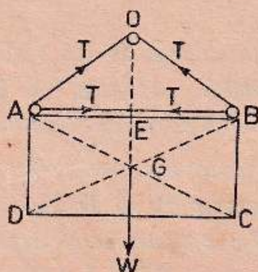
$$-கோசை\ \theta = \frac{a^2\ கோசை^2\ \theta + a^2 - l^2}{2a^2\ கோசை\ \theta},$$

$$\therefore\ -2a^2\ கோசை^2\ \theta = a^2\ கோசை^2\ \theta + a^2 - l^2,$$

$$\therefore\ கோசை^2\ \theta = \frac{l^2 - a^2}{3a^2}.$$

உதாரணம் (V).

6 அடி நீளமும் 4 அடி அகலமும் கொண்ட ஒரு செவ்வகப் பலகை, அதன் நீளப் பக்கம் கிடையாயிருக்குமாறு 16 அடி நீளமுள்ள ஓர் இலேசான இழையினுல் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. பலகையினது மேல் மூலேகளிலுள்ள ஒப்பமான வளையங்களினூடாகக் கோர்த்த இவ்விழை, ஓர் ஒப்பமான முளையிலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. பலகையின் நிறை W ஆயின், இழையின் இழுவையையும் ஒவ்வொரு வளையத்தின் மீதுமுள்ள தாக்கத்தையும் காண்க.



படம் 64.

பலகையை ABCD (படம் 64) எனவும், முளையின் நிலேயத்திணை O எனவும் கொள்க. அவ்வளேயங்கள் A இலும் B இலும் உள்ளன.

அவ்விழை தொடர்ந்ததாய், ஒப்பமான பரப்புக்களுக்கு மேலாக மட்டுமே ல்வதனுல், இழையெங்கும் இழுவை T ஒரேயளவினதாக இருக்கும். O இலுள்ள இரு இழுவைகளினதும் விளையுளானது கோணம் AOB ஐ இருகூறிடுகின்றது. அதோடு, பலகையின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஊடாய் நிலைக்குத்தாகத் தாக்கும் நிறை W ஐயும் சமன்செய்ய வேண்டும்.

எனவே, G ஆனது O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே அமையவேண்டும்.

OG ஆனது AB ஐ E இல் வெட்டின், $AE = 3$ அடியாகும். அதோடு, $AO + OB = 10$ அடியும், $OA = OB$ உம் ஆகும்.

$$\therefore\ AO = 5 \text{ அடி}.$$

$$\therefore\ OE = \sqrt{25-9} = 4 \text{ அடி}.$$

$\angle AOE = \theta$ ஆயின், நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$2T \text{ கோசை } \theta = W,$$

அதோடு,
$$\text{கோசை } \theta = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore\ T = \frac{5}{8}W.$$

A இலுள்ள வளையத்தின் மீதான தாக்கம் R ஆனது கோணம் OAE இல் தாக்கும் T என்னும் இரு விசைகளினதும் விளையுளாகும். இங்கு,

$$\text{கோசை } OAE = \frac{3}{5}.$$

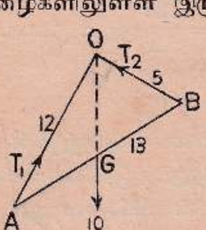
$$\therefore\ R^2 = T^2 + T^2 + 2T^2 .\ \frac{3}{5} = \frac{16}{5}T^2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{25}{64}W^2.$$

$$\therefore\ R = \frac{\sqrt{5}}{2}W.$$

R இன் திசையானது கோணம் OAE ஐ இருகூறிடுகிறது.

உதாரணம் (vi).

13 அங்குல நீளமும் 10 இரு. நிறையுமுள்ள பாரமான சீர்க் கோலொன்று, அதன் முனைகளில் இணைத்த, 12 அங்குலமும் 5 அங்குலமும் நீளமுள்ள இரு இழைகளினுல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தொங்க விடப்பெற்றுள்ளது. அக்கோல் நிலைக்குத்துடன் எக்கோணத்திற் சாய்ந் திருக்கிறதென்பதையும், இழைகளிலுள்ள இழுவைகளையும் காண்க.



படம் 65.

கோலை AB (படம் 65) எனவும், தொங்கற் புள்ளியை O எனவும் கொள்க.

மூன்று விசைகள் மட்டுமே கோலின் மீது தாக்குவதனால், நிறையின் கோடானது O இனூடாகச் செல்லவேண்டும், அ–து. O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே கோலினது நடுப்புள்ளி G அமையவேண்டும்.

$$\angle OAB = \theta \text{ எண்க.}$$

$$12^2 + 5^2 = 13^2 \text{ என்பதனால்,}$$

கோணம் AOB ஒரு செங்கோணமாகும். அதோடு,

$$GO = GA = GB.$$

$$\therefore \angle OGB = 2\,\theta.$$

$$\therefore \text{ சைன் } OGB = \text{சைன் } 2\theta = 2 \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta$$

$$= 2\,\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}$$

$$= \frac{120}{169}.$$

T_1, T_2 என்பன முறையே OA இலும் OB இலுமுள்ள இழுவைகளெனக.

நிறையின் கோட்டிலிருந்து A அல்லது B இன் தூரம்

$$= \frac{13}{2} \text{ சைன் } 2\,\theta = \frac{60}{13} \text{ அங்.}$$

எனவே, கோலிற்கு A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$T_2 \times 12 = 10 \times \frac{60}{13}.$$

$$\therefore T_2 = \frac{50}{13} \text{ இரு. நிறை.}$$

B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$T_1 \times 5 = 10 \times \frac{60}{13}.$$

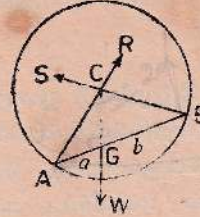
$$\therefore T_1 = \frac{120}{13} \text{ இரு. நிறை.}$$

உதாரணம் (vii).

ஒரு கோல், ஓர் ஒப்பமான கோளத்தின் உட்புறத்தில், கிடையுடன் சாய்ந்த நிலையில் தங்கியிருக்கிறது. இக்கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் இதனை a, b என்ற இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றது. கிடையுடன் இதன் சாய்வு θ உம், கோளத்தின் மையத்தில் இது எதிரமைக்கும் கோணம் 2α உம் ஆயின்,

$$\text{தான் } \theta = \frac{b-a}{b+a} \text{ தான் } \alpha$$

எனக் காட்டுக.



படம் 66.

கோலை AB (படம் 66) எனவும், கோளத்தின் மையத்தை C எனவும் கொள்க. கோளம் ஒப்பமானதாதலின், A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் கோளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே, இவை C இனூடாகச் செல்லவேண்டும். எனவே, நிறையின் கோடானது C இனூடாகச் செல்லவேண்டும், அ-து. புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது C இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே அமையவேண்டும்.

$AG = a$ எனவும், $GB = b$ எனவும் கொள்க.

கோணம் $ACB = 2\alpha$ என்பதனால், கோணங்கள் A, B ஒவ்வொன்றும் $90° - \alpha$ இற்குச் சமம்.

இப்போது, $(a+b)$ கோதா $CGB = b$ கோதா $A - a$ கோதா B.

$$\therefore (a+b) \text{ கோதா } CGB = b \text{ தான் } \alpha - a \text{ தான் } \alpha.$$

$$\therefore \text{கோதா } CGB = \frac{b-a}{b+a} \text{ தான் } \alpha.$$

அன்றியும், கோணம் $CGB = 90° - \theta$.

$$\therefore \text{தான் } \theta = \frac{b-a}{b+a} \text{ தான் } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

மறுதாக்கங்கள் தேவைப்படின், திருப்புதிறன்களைக் கணித்து அவற்றைக் காணலாம்.

A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களை முறையே R, S என்க. கோலிற்கு A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$S\,(a+b) \text{ சைன் } (90° - \alpha) = Wa \text{ கோசை } \theta,$$

$$\therefore S = W \frac{a \text{ கோசை } \theta}{(a+b) \text{ கோசை } \alpha}.$$

B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$R\ (a+b)\ \text{சைன்}\ (90^\circ-\alpha) = Wb\ \text{கோசை}$$

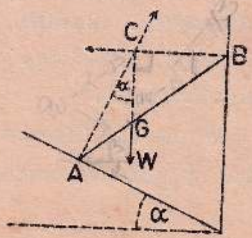
$$\therefore\ R = W\frac{b\ \text{கோசை}\ \theta}{(a+b)\ \text{கோசை}\ \alpha}.$$

உதாரணம் (viii).

ஒரு சீரற்ற கோல் அதன் கீழ்முனை A ஆனது கிடையுடன் α கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள ஓர் ஒப்பமான தளத்தின்மீதும், மேல் முனை B ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவர்மீதும் தங்கியிருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தி லிருக்கிறது. G, அக்கோலின் புவியீர்ப்பு மையமாயும் β, கிடையுடன் அதன் சாய்வுமாயின்,

$$\frac{AG}{GB}=\frac{\text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta}{\text{கோசை}\ (\alpha+\beta)}$$

எனக் காட்டுக. (H.S.D.)



படம் 67.

A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் C (படம் 67) இற் சந்திக்கின்றன வெனக்க. இம்மறுதாக்கங்கள் முறையே தளத்திற்கும் சுவரிற்கும் செங்குத்தானவை.

பின்பு, G ஆனது C இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருக்கவேண்டும்.

இப்பொழுது,

$\angle CBG=\beta$ உம், $\angle ACG=\alpha$ உம், $\angle CAG = 90^\circ-\beta-\alpha$ உம் ஆகும்.

அன்றியும், $$\frac{AG}{\text{சைன்}\ \alpha}=\frac{CG}{\text{சைன்}\ CAG}=\frac{CG}{\text{கோசை}\ (\alpha+\beta)}.$$

அதோடு, $$\frac{GB}{\text{சைன்}\ 90^\circ}=\frac{CG}{\text{சைன்}\ \beta}.$$

$$\therefore\ \frac{AG}{GB}=\frac{\text{சைன்}\ \alpha\ \text{சைன்}\ \beta}{\text{கோசை}\ (\alpha+\beta)}.$$

பயிற்சி XI.

1. சீர்க் கோலொன்று, அதன் ஒரு முனையிலுள்ள ஒரு பிணையலைப் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியது. அதன் மற்றைய முனையிற் செயற்படுவதும், கோலினது நிறையின் அரைப்பங்கிற்குச் சமமானதுமான ஒரு கிடை விசையினுல் நிலைக்குத்திலிருந்து ஒரு பக்கத்திற்கு இழுக்கப்படுகின்றது. நிலைக்குத்துடன் எச்சாய்வில் அக்கோல் தங்கும் ?

2. முதலாம் வினுவில், கிடை விசையானது கோலினது நிறையின் முக்காற்பங்காயின், நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வையும் பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

3. ஓர் ஏணி AB, ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் A இற் சாய்ந்தும் கீழ் முனை B வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தாங்குகுழியினுலே தாங்கப்பெற்றுமுள்ளது. G (ஏணியினதும் பாரத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம்) இனூடான நிலைக்குத்தானது A இனூடான கிடையை K இற் சந்திப்பதோடு, அதே கிடை, B இனூடான நிலைக்குத்தை L இலும் சந்திக்கிறது. A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களுக்கும், நிறைக்குமுரிய விசை முக்கோணியாக முக்கோணி BKL அமையுமென நிறுவுக. (I.S.)

4. W நிறையுள்ள AB என்னும் சீர்ச் சட்டமொன்று, A இலுள்ள ஒரு பிணையலைப் பற்றி ஒரு நிலைக்குத்தான தளத்தில் அசையக்கூடியது. A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே, AC = AB எனவுள்ள C என்னும் ஓர் ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் ஒரு கயிறு, மற்றைய முனை B உடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. கிடையுடன் 60° கோணத்தில் அச் சட்டத்தைப் பேணத்தேவையான கயிற்றின் இழுவையைக் காண்க. அத்துடன், பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (I.A.)

5. AB என்பது A இல் நிலைப்படுத்திய ஓர் ஒப்பமான கிடையச்சைப் பற்றி அசையக்கூடிய W இரு. நிறையுள்ளதொரு சீர்க் கோலாகும். B உடன் இணைத்த ஓர் இலேசான நாணனது A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே நிலைப்படுத்திய C என்னும் ஒரு கப்பியின் மேலாகச் சென்று, அதன் சுயாதீன நுனியில் ஒரு P இரு. திணிவைத் தாங்குகிறது. விசை முக்கோணியைப் பிரயோகித்து, சமநிலைத் தானத்தில்,

$$CB = 2\frac{P}{W}.AC$$

எனக் காட்டுக. (I.A.)

6. பாரமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் AB, ஓர் ஒப்பமான சுவரிலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி A இற் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இக்கோல், அதன் சுயாதீன முனை B இலும், சீலிங்கைச் சுவர் சந்திக்கும் கோடு LM இலுள்ள ஒரு புள்ளி P இலும் இணைத்த ஓர் இலேசான நாணிணுற் சுவரிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கிடைத் தானத்திற் பேணப்பட்

டுள்ளது. LM இன் மீது (அக்கோல் எப்பொழுதும் கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் அந்நாணின் நீளம் சீராக்கப்படும்) P இன் வெவ்வேறான நிலையங்களுக்கு, நாணிலுள்ள இழுவையானது, அதன் நீளம் BP இற்கு விகிதசமமெனக். (H.S.D.)

7. ஒரு கம்பம், அதன் கீழ்முனை P ஐ ஒரு தாங்குகுழியிற் கொண்டு தங்கியுள்ளது ; அத்துடன் அது, அதன் ஒரு புள்ளி Q ஐயும், தாங்கு குழிக்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள ஒரு புள்ளி R ஐயும் தொடுக்கும் ஒரு கயிற்றினுல் தாங்கப்படுகின்றது. கம்பத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடான நிலைக்குத்தானது QR ஐ S இல் வெட்டின், கம்பத்தின் நிறை, கயிற்றிலுள்ள இழுவை, தாங்குகுழியின் மறுதாக்கம் ஆகியனவற்றிற்கு விசை முக்கோணியாக முக்கோணி PRS அமையுமென நிறுவுக. (H.C.)

8. 3 அடி நீளமுள்ள சீர்க் கோலொன்று, ஓர் ஒப்பமான முளையின் மேலாகச் செல்லும் 5 அடி நீளமுள்ள ஓர் இலேசான இழையினுற் கிடையாகத் தங்குமாறு தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளது ; இங்கு, இழையானது கோலின் முனைகளுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. கோலின் நிறை 7 இறு. ஆயின், இழையின் இழுவையைக் காண்க. (H.C.)

9. 10 இறு. நிறையுள்ள AB என்னுமொரு சீர்க் கோல் A இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இக்கோல், ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றில் முனை B சாய்ந்திருக்க, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியுள்ளது. கோல் சுவருடன் 40° கோணத்தை ஆக்கின், சுவரின் மீதுள்ள தாக்கத்தையும், A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (H.C.)

10. B இற் செங்கோணப்பட்ட ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி ABC இன் வடிவுள்ள சீரான அடரொன்று, A இலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிற் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பெற்று, AC நிலைக்குத்தாகவும் C ஆனது A இற்கு மேலாகவுமிருக்குமாறு தங்கியிருக்கின்றது. அவ்வடர் W இறு. நிறையுள்ளது. இங்கு, C உடன் இணைத்த ஒரு கிடையிழையினுல் இதன் சமநிலை பேணப்படுகின்றது. இழையிலுள்ள இழுவையையும், A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையுங் காண்க. (H.C.)

11. W நிறையுள்ள ஒரு சீர்ச் சமபக்க முக்கோணியடர் ABC இனது உச்சி A, ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்குப் பிணைக்கப்பெற்றுள்ளது. அது, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அப்புள்ளியைப் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியது. அவ்வடர், A இற்குமேலே B அமைய AB நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும், ஓர் ஒப்பமான, நிலைக்குத்துச் சுவரில் உச்சி C தொடுமாறுந் தங்கியுள்ளது. சுவருக்கும் அடருக்குமிடையே மறுதாக்கத்தையும், A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையுங் காண்க. (H.C.)

12. W நிறையுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் ACB, ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் A இற் சாய்ந்தும், B இன் மட்டத்திற் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளி D

ஐயும் C ஐயும் இணைக்கும் ஓர் இழையினால் முனை B ஐ மேற்புறமாகக் கொண்டும் தாங்கப்படுகின்றது. சுவருடன் CD இன் சாய்வு 30° ஆயின், இழையின் இழுவையையும் சுவரிலுள்ள மறுதாக்கத்தையுங் கண்டு, $AC = \frac{1}{3} AB$ என நிறுவுக.

13. ஒரு சீர்க் கோல் AB, அதன் மேல் முனை A ஓர் ஒப்பமான முளையிற் சாய்ந்திருக்கப்பெற்றும், A இன் மட்டத்திலுள்ள புள்ளி C இல் இணைத்த ஓர் இலேசான நாணிற்கு முனை B ஐ இணைக்கப் பெற்றும், கிடையுடன் α கோணத்திற் சமநிலையிலுள்ளது. அந்நாண் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் β,

$$\text{தான்}\ \beta = 2\ \text{தான்}\ \alpha + \text{கோதா}\ \alpha$$

என்னும் சமன்பாட்டினால் தரப்பெறுமெனவும்,

$$AC = \frac{AB\ \text{சீக}\ \alpha}{1 + 2\ \text{தான்}^2 \alpha}$$

எனவும் நிறுவுக. (H.S.C.)

14. பாரமான ஒரு சீர்க் கோலின் நீளமானது, அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு நிலைப்படுத்திய ஓர் ஒப்பமான அரைக்கோளக் கிண்ணத்தினது விட்டத்திற்குச் சமம். இக்கோல் அதன் ஒரு முனையைக் கிண்ணத்தினுள்ளும் மற்றைய முனையை வெளியேயுங் கொண்டு தங்கியுள்ளது. கிடையுடன் கோலின் சாய்வு பெரும்பாலாக $32^\circ\ 32'$ என நிறுவுக. (I.S.)

15. 5 இரு. நிறையும் 21 அங்குல ஆரையுமுள்ள ஒரு கோளம், ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து 8 அங்குல நீள இழையொன்றினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்விழையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க. (H.S.D.)

16. 40 அடி நீளமும் 240 இரு. நிறையுமுள்ள சீர்க் கொடிக்கம்பமொன்றின் கீழ்முனையானது ஒரு சுழல்மூட்டினால் நிலத்துடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. அக்கம்பம், அதன் உச்சிப் புள்ளியில் இணைத்த ஒரு கயிற்றினால் உயர்த்தப்படுகின்றது. கிடையுடன் கம்பத்தின் சாய்வு 50° ஆகும்போது, கிடையுடன் கயிற்றின் சாய்வு 20° ஆயின், வரைபு மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ, கயிற்றின் இழுவையையும் சுழல்மூட்டினது மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (I.A.)

17. 2W நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்ச் சட்டம் AB, அதன் மேல் முனை A இலுள்ள ஓர் ஒப்பமான பிணையலைப் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியது. A இனூடான நிலைக்குத்திலிருந்து a தூரத்தில் B இருப்பதோடு, சட்டம் சமநிலையிலிருக்கும்படி முனை B இல் ஒரு கிடை விசை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. அப்பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கம்

$$W\left[\frac{4l^2 - 3a^2}{l^2 - a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

இற்குச் சமமென நிறுவுக. (I.S.)

18. ஒரு செவ்வகக் குற்றி, அதன் மேன்முகத்தில் சமச்சீராக அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளுடன் இணைத்த இரு சமநீளக் கம்பிகளினால் ஒரு தாங்கியிலிருந்து தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளது. அக்கம்பிகளின் மேல் நுனிகள் தாங்கியின் அதே புள்ளியில் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. கம்பிகளின் நீளம் குறைக்கப்படின், அவற்றிலுள்ள இழுவை அதிகரிக்குமெனக் காட்டுக. குற்றியானது 3 அடி விளிம்பும் $4556\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுமுள்ள கனமாகவும், கம்பிகளின் இணைப்புப் புள்ளிகள் 2 அடி தூரத்திலும் அமையின், கம்பிகளின் இயன்றளவு மிகக் குறுகிய நீளத்தைக் காண்க. ஒவ்வொரு கம்பியினதும் அறுத்தல் விகாரம் 1·75 தொன். (I.E.)

19. நிலைக்குத்துத் தளத்தையும் மையம் C ஐயுங் கொண்ட W நிறையுள்ள சீரான வட்டத் தட்டொன்று, அதன் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளி A இல் நிலைப்பட்ட ஒரு கிடை அச்சைப் பற்றித் தனது சொந்தத் தளத்திற் சுயாதீனமாக இயங்கவல்லது. பரிதியிலுள்ள B என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருக்கும் ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான முளையில் தட்டைச் சாய்ந்திருக்கும்படி செய்து, கோடு AC ஆனது நிலைக்குத்துடன் ஒரு தந்த கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்குமாறு பேணப்படவேண்டியுள்ளது. அம்முளையின் மீதுள்ள தாக்கம் இழிவுப் பெறுமானத்தில் இருக்கும் வண்ணம் B இன் நிலையத்தையும், இவ்விழிவுத் தாக்கத்தையுங் காண்க. (I.A.)

20. ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சுயாதீனமாக இயங்கும், a ஆரையும் W நிறையுமுள்ள சீரான பெருவளையமொன்று, P இல் நிலைப்பட்ட ஒப்பமான வளையமொன்றினூடாகச் செல்கின்றது. l நீளமுள்ள ஒரு நீளா இழை, பெருவளையத்தின் Q என்னும் ஒரு புள்ளியையும் P இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள O என்னும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியையும் தொடுக்கின்றது. $PO > l$ ஆகின், சமநிலைத் தானத்தில் இழையின் இழுவை W $\frac{l+a}{PO}$ ஆகுமென நிறுவுக. (I.A.)

21. 5 இரு. நிறையுள்ள ஒரு படம், 3 அடி தூரங்களிலுள்ள இரு வளையங்களை இணைக்கும் 5 அடி நீளமுள்ள ஒரு நாணினால் ஓர் ஆணியிலிருந்து தொங்கவிடப் பெற்றுள்ளது. அந்நாணில் இழுவையைக் காண்க. (I.A.)

22. 40 இரு. நிறையுள்ள சீரான ஏணியொன்று, ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் ஒரு முனையிற் சாய்ந்தும், ஒரு முரடான கிடைத் தரையில் மற்றைய முனையிலே தங்கியும், நிலைக்குத்துடன் 25° கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கின்றது. ஏணியினூடான நிலைக்குத்துத் தளம் சுவருக்குச் செங்குத்தாகும். தரையிலும் சுவரிலுமுள்ள மறுதாக்கங்களின் பருமன்களை மிகக் கிட்டிய இரு. நிறைக்குக் காண்க. (H.S.D.)

23. W நிறையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு கோளம், ஓர் ஒப்பமான சாய்தளத்திலே தங்கும்படி l நீள இழையொன்றினால் தாங்கப்படுகின்றது.

இவ்விழையின் ஒரு நுனி கோளப் பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும், மற்றைய நுனி தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. கிடையுடன் இத்தளத்தின் சாய்வு α ஆயின், இழையின் இழுவை

$$\frac{W(a+l) \text{ சைன் } \alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$$

என நிறுவுக. (H.S.D.)

24. ஒரு கனத்திண்மத்தின் l நீள விளிம்புகளில் ஒன்றின் நடுப்புள்ளியில் l நீளமான ஓர் இழை இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இவ்விழையின் மற்றைய நுனி ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்திண்மம் சுயாதீனமாகத் தொங்கும் போது, சுவருடன் இழையின் சாய்வைக் காண்க. (I.E.)

25. ஒரு சீரான கோல் AB, நிலைத்த முனை A பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. இக்கோல், B இற்கு இணைத்த ஓர் இழையினால் நிலைக்குத்துடன் θ சாய்விற் பேணப்படுகின்றது. இழையிலுள்ள இழுவை இயன்றளவு சிறிதாகலாமெனும் அதன் திசையைக் கண்டு, இச்சந்தர்ப்பத்தில் அப்பிணையலின் மறுதாக்கத்தை நிர்ணயிக்க.

26. ஒரு சமபக்க முக்கோணியடர், அதன் கோணப் புள்ளிகளில் இரண்டினுக்கு இணைத்த இழைகளினாலே தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளது. இவ்விழைகளின் திசைகள் அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாகச் செல்கின்றன. இவற்றுளொன்று கிடையாகவும் 1 இரு. நிறை இழுவையை உடையதாகவுமுள்ளது. மற்றைய இழையின் இழுவையையும் அடரின் நிறையையுங் காண்க.

27. 10 அடி நீளமும் 40 இரு. நிறையுமுள்ள சீர்க் கோலொன்று கிடையுடன் 30°, 60° இற் சாய்ந்திருக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்கள் மீது வைக்கப்பெற்றுள்ளது. ஒவ்வொரு தளத்தின் மீதுமுள்ள தாக்கத்தையும், சமநிலையிற் கிடையுடன் அக்கோலின் சாய்வையுங் காண்க.

28. சீரான சமபக்க முக்கோணிப் பலகையொன்று, அதன் ஓர் உச்சி ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடும்படியாகவும் இன்னோர் உச்சி ஓர் இழையினால் அச்சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சமநிலையிலே தங்கியுள்ளது. சமநிலை சாத்தியமான தானமொன்றைக் காட்டி ஒரு விளக்கப்படம் வரைந்து, இழை நீளம் பலகையின் ஒரு பக்கத்திற்குச் சமமாயின், சுவருடன் இழையின் சாய்வைக் காண்க. (I.S.)

29. W நிறையுள்ள AB என்னும் ஒரு சீர்க் கோல், முனை A இற் பிணைக்கப்பெற்றுள்ளது. மற்றைய முனை B இற்கு இணைத்த ஓர் இழையானது C இலுள்ள ஒரு சிறிய கப்பியின் மேலாகச் சென்று, சுயாதீனமாகத் தொங்கும் W′ என்னும் ஒரு நிறையைக் காவுகின்றது.

AC கிடையாக இருப்பதோடு, $AC = AB$ ஆகவுமிருப்பின், கோணம் $CAB = 60^\circ$ ஆக இருக்கும்போது, $6W' = \sqrt{3}W$ ஆயின் சமநிலை பேணப்படு மெனக் காட்டுக. அப்பிணையலின்மீதுள்ள தகைப்பையுங் காண்க. (C.W B.)

30. ஒரு பாரமான சீர்க் கோளம், கிடையுடன் α, β என்னுங் கோணங் களிற் சாய்ந்திருக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்களிலே தங்கியுள்ளது. α தரப் படின், அதோடு இத்தளத்தின் மீதுள்ள தாக்கம் கோளத்தின் நிறையின் அரைப்பங்குமாயின், β ஆனது

$$\text{தாண்}^{-1}\left(\frac{\text{சைன் }\alpha}{2-\text{கோசை }\alpha}\right)$$

ஆக இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக. (I.A.)

§75. இனி, ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது மூன்றிற்கு மேற்பட்ட ஒருதள விசைகள் தாக்குதல் பற்றிய பொது வகையினை ஆராயவேண்டும். இவ்விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்க வேண்டியதில்லை.

விசை ஊடுகடத்தப்படுதன்மைத் தத்துவத்திலிருந்து, ஒரு விறைப்பான பொருள் விசையொன்றின் தாக்கத்தைப் பிரயோகப் புள்ளியிலிருந்து வேறொன்றிற்கு ஊடுகடத்துகிறதென்பதும், ஆனால் அவ்விசையின் பருமனை மாற்றுவதில்லையென்பதும் நமக்குத் தெரியும்.

ஒரு விசைத்தொகுதி யாதுமொரு பொருளின் மீது தாக்குமிடத்துச் சமநிலையிலிருப்பின், அத்தொகுதி வேறு ஏதாவதொரு பொருளின் மீது தாக்குமாறு இடமாற்றப்படும்போது, அவ்விசைகளின் பிரயோகப் புள்ளி கள் சில மாறுத் தொடர்புகளினால் இணைக்கப்பட்டிருக்குமாயின் அத் தொகுதியும் சமநிலையிலிருக்கும் (அப்பொருள்கள் விறைப்பானவையாகும் போது ஏற்படும் நிலை இதுவேயாகும்).

அவ்விசைகள் யாதுமொன்றின் மீது செயற்படவேண்டும். ஆனால், சமநிலை நிபந்தனைகள் விசைகளின் மீதே தங்கியுள்ளன ; பொருளிலன்று.

இதனாற்றான், தந்ததொரு விசைத் தொகுதிக்குச் சமநிலை நிபந்தனை கள் என அடிக்கடி கூறுவோம் ; அவை தாக்கும் பொருளைப் பற்றி நாம் குறிப்பிடுவதில்லை.

ஒரு சதுரம் அல்லது பல்கோணியின் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் சில விசைகளின் விளையுளைப் பற்றிய வினாக்கள் அடிக்கடி கேட்கப்படுகின்றன. இவ்வுருவத்தின் பக்கங்கள் அவ்விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளை வெறுமனே குறிக்கின்றன. அவ்விசைகள் இவ்வடிவப் பொருளொன்றின் மீது செயற்பட வேண்டியதில்லை ; அவ்விசைகள் தாக்கும் பொருளின் வடிவு எதுவா யிருப்பினும், அப்பொருள் விறைப்பானதாயின் அவற்றின் விளையுள் ஒரே மாதிரியானதாயிருக்கும்.

முதலில், அடுத்த பந்தியிலுள்ள தேற்றத்திலிருந்து எத்தொகை ஒரு தள விசைகளுக்குமுரிய சமநிலை நிபந்தனைகளை உய்த்தறிவோம். மேலும் பொதுவான செய்முறையொன்று பந்தி **87** இலே தரப்பெற்றுள்ளது.

§76. ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தாக்கும் யாதுமோர் ஒரு தள விசைத் தொகுதி சமநிலையிலிராவிடின், அத்தொகுதியை ஒரு தனி விசையாகவோ, ஒரு தனி இணையாகவோ சுருக்கலாம்.

அவ்விசைகளில் P, Q, R என்னும் மூன்றினை இரண்டாக எப்பொழுதும் சுருக்கலாம். ஏனெனில், Q உடனே R உடனே ஓர் இணையை P உண்டாக்கினாலொழிய, Q அல்லது R உடன் P ஐ எப்பொழுதும் கூட்டலாம்.

இவ்விடத்து, Q, R என்பன (ஒவ்வொன்றும் P இற்கு முரணான திசையிலிருப்பதனால்) சம, **நிகர்த்த**, சமாந்தர விசைகளாகும். ஆகவே, Q ஐயும் R ஐயும் கூட்டலாம்.

P, Q, R என்பனவற்றிலிருந்து பெற்ற இரு விசைகளுடன் அத் தொகுதியின் இன்னொரு விசையையுஞ் சேர்த்து, இம்மூன்று விசைகளை யும் இரு விசைகளாகத் திரும்பவும் சுருக்கலாம். இம்முறையை மறுபடி யும் பயன்படுத்தி அத்தொகுதி முழுவதையும் இருவிசைகளாகச் சுருக்கலா மென்பது தெளிவு. இவ்விரு விசைகளும் சமநிலையிலிராவிடின், இவை ஓர் இணையை ஆக்கவேண்டும், அல்லது ஒரு தனி விளையுளைக் கொண் டிருக்க வேண்டும்.

§77. அத்தொகுதி ஒரு தனி விசையாகச் சுருங்குமாயின், இவ்விசை வழக்கமாக R இனாற் குறிக்கப்படும்; அது ஓர் இணையாகச் சுருங்குமா யின், இவ்விணையின் திருப்புதிறன் G இனாற் குறிக்கப்படும்.

ஏதாவதொரு விசைத் தொகுதியினது சுருக்கமும், எத்திசையினும் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகையில் எவ்வித மாற்றத்தையும் ஏற் படுத்துவதில்லை என்பது வெளிப்படை. ஏனெனில், எவையேனும் இரு விசை களைக் கூட்டும்போது அவற்றின் விளையுளினது துணித்த பகுதி அவ்விளையு ளின் கூறுகளினது துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும். எனவே, கடைசி இரண்டு விசைகளினதும் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகை, தொடக்கவிசைகளினது துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாவதோடு, இறுதியாக அத்தொகுதி சுருங்க வரும் தனி விளையுள் R இன் அல்லது இணையின் (இங்கு பூச்சியம்) துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகைக்கும் சமம்.

இவ்வாறாக, ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பாதிக்கப்படாதிருக்கும் ; ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி R அல்லது G இன் திருப்புதிறன், புறம்பான விசைகளினது திருப்புதிறன் களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

§78. சமநிலை நிபந்தனைகள்.

ஒரு விசைத்தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின், அதனைப் பந்தி **76** இற் போலச் சுருக்குமிடத்து, அது ஒரு தனி விசைக்கோ இணைக்கோ சுருங்க மாட்டாது.

இப்போது, R பூச்சியமாயின், யாதுமொரு திசையில் அதன் துணித்த பகுதி பூச்சியமாகவேண்டும். மறுதலையாக, R ஆனது பூச்சியமாக இருக்க வேண்டின், வெவ்வேருன **இரு** திசைகளில் அதன் துணித்த பகுதிகள் பூச்சியமாகுமென்பதைத் தெரிந்திருக்க வேண்டும். ஒரு திசையிலே துணித்த பகுதி மட்டுமே பூச்சியமாயின், இத்திசை R இன் திசைக்குச் செங்குத்தாக **இருக்கலாம்.** ஆனல், இரண்டாம் திசையிலே துணித்த பகுதியும் பூச்சியமாயின், R ஆனது பூச்சியமாகவேண்டும்.

அன்றியும், யாவுமிரு திசைகளில் R இன் துணித்த பகுதிகள் பூச்சியமாயின், இத்திசைகளிற் புறம்பான விசைகளின் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகைகளும் பூச்சியமாகவேண்டும்.

ஓர் இணையின் தளத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் பற்றி அதன் திருப்புதிறன் ஒரேயளவினதாதலின், G ஆனது பூச்சியமாக வேண்டின், யாதுமொரு புள்ளியைப் பற்றிய அதன் திருப்புதிறன் பூச்சியமாகவேண்டும். எனவே, அத்தொகுதியினது புறம்பான விசைகளின் தளத்திலுள்ள **ஏதாவதொரு** புள்ளியைப் பற்றி அவற்றின் திருப்புதிறன்களினது கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

மறுதலையாக, அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாயின், அத்தொகுதி ஓர் இணையாகச் சுருங்கமாட்டாது.

எனினும், ஒன்று அல்லது இரண்டு புள்ளிகளைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக அமைதல் அத்தொகுதி சமநிலையிலுள்ளதென்பதை நிறுவாதென்பது கவனிக்கத்தக்கது. ஏனெனில், இவ்விரு புள்ளிகளும் தனி விளையுளின் தாக்கக் கோட்டில் அமையும்படி நேரிடலாம். ஒரே நேர் கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாயின், அத்தொகுதி ஒரு விசையாகவோ இணையாகவோ சுருங்காதாதலின், அது சமநிலையிலிருக்க வேண்டும்.

ஒரு விசைத்தொகுதி சமநிலையிலிருத்தற்கு இன்றியமையாத நிபந்தனைகள், ஏதாவதொரு தந்த திசையிலே துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை அல்லது ஏதாவதொரு தந்த புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும் என்பனவாம். ஆனல், அவ்விசைகள் சமநிலையில் **உள்ளன** என்பதை நிறுவ அந்நிபந்தனைகள் **போதாமல்** உள்ளன.

§79. ஒரு விசைத்தொகுதி சமநிலையிலுள்ளதென்பதை உறுதிப்படுத்தப் பின்வரும் **மிக** எளிய நிபந்தனைச் சோடி போதுமானது :—

I. எவையேனும் **இரண்டு** திசைகளில் அவ்விசைகளின் துணித்த பகுதிகளினது கூட்டுத்தொகைகள் **பூ**ச்சியமாகவேண்டும்.

அதோடு,

II. அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களினது அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

I. அத்தொகுதி ஒரு தனி விசையாகச் சுருங்குவதில்லையென உறுதிப்படுத்துகிறது.

II. அது ஓர் இணையாகச் சுருங்குவதில்லையென உறுதிப்படுத்துகிறது.

I உம் II உம் உண்மையாக மூன்று நிபந்தனைகட்குச் சமவலுவுடைத்து என்பது தெளிவு.

முன்னரே கூறப்பெற்ற நிபந்தனைத் தொகுதி, ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகளைப் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புதிறன்களினது கூட்டுத்தொகைகள் பூச்சியமாகவேண்டும் என்பதேயாகும்.

மறுபடியும் இது மூன்று நிபந்தனைகட்குச் சமவலுவுடைத்து.

§80. நிலையியற் பயிற்சிகளுக்குத் தீர்வுகாணும்போது, சமநிலையிலுள்ள விசைத்தொகுதியுடன் தொடர்புபடுகிறோம். ஆகவே, மேற்கூறிய நிபந்தனைகளில் எதையேனும் பயன்படுத்தலாம்.

தெரியா விசைகளையும் கோணங்களையும் இணைக்கும் மூன்று சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு பொதுவாக எப்பொழுதும் பெறுவோம் :—

I. யாதுமொரு வசதியான திசையில் எல்லா விசைகளினதும் துணித்த பகுதிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனுக்குக.

II. வேறெதாவது திசையில் (வழக்கமாக I. இலுள்ள திசைக்குச் செங்குத்தானது) விசைகள் அனைத்தினதும் துணித்த பகுதிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனுக்குக.

III. அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியைப் பற்றி அவற்றினது திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமனுக்குக.

குறிப்பு.—I. இனும் II. இனும் வழக்கமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் திசைகள் கிடையும் நிலைக்குத்துமாகும் ; ஆனால், முக்கியமாக அவை அவ்வாறிருக்கத் தேவையில்லை.

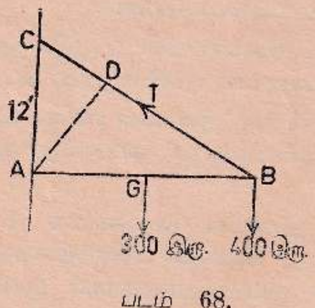
நாம் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்கும் புள்ளி, இயன்றளவு பல விசைகளை விலக்கும் புள்ளியாக, அ-து. அவ்விசைகளிற் பல அதனூடாகச் செல்லும் புள்ளியாக வழக்கமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்.

§80*a*. முன்னைய பந்தியிற் கூறப்பெற்ற சமன்பாடுகளைப் பெறும் முறை பின்வரும் உதாரணங்களில் விளக்கப்படுகின்றது.

நீளங்கள் அல்லது கோணங்கள் சம்பந்தப்பட்ட கேத்திர கணிதத் தொடர்புகள் வரும் சில இடங்களில், துணித்துத் திருப்புதிறன்களைக் கணித்துப் பெற்ற சமன்பாடுகளுடன் மேலதிகமான சமன்பாடுகள் கொடுக்கப் படுவது நன்கு கவனிக்கப்படும். பல பயிற்சிகளில் இடர்ப்பாடுகள் உண்மையாக அவற்றின் பொறிமுறைத் தத்துவங்களில் இல்லாமல், அவற்றின் பேற்றினைப் பெறத் தேவையான கேத்திரகணித, திரிகோணகணித அறிவிலேயே உள்ளன.

உதாரணம் (i).

300 இரு. நிறையும் 15 அடி நீளமுமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச் சட்டம் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிற்குப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றைய முனையுடன் இணைத்த ஓர் இழுவைச் சட்டம் அச்சட்டத்தினைக் கிடையாகப் பேணுகிறது. இவ்விழுவைச் சட்டம், அச்சட்டத்திற்கு மேலே 12 அடி தூரத்தில் சுவரில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இம்முனையில் 400 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளது. இழுவைச் சட்டத்தின் இழுவையையும் சட்டத்தின் மீதுள்ள உதைப்பையுங் காண்க.



படம் 68.

AB, (படம் 68) சட்டத்தினையும், AC சுவரினையும், BC இழுவைச் சட்டத்தினையும் குறிப்பதாகக் கொள்க.

$$AB = 15 \text{ அடி}, \ AC = 12 \text{ அடி} \text{ என்பதனால்},$$

$$BC = 3\sqrt{41} \text{ அடியும்}, \quad \text{சைன் } ABC = \frac{4}{\sqrt{41}} \text{ உம் ஆகும்.}$$

A இல் இருந்து BC இற்கு AD செங்குத்தாயின்,

$$AD = AB \text{ சைன் } ABC = \frac{60}{\sqrt{41}}.$$

இழுவைச் சட்டத்தின் இழுவை T ஆயின், A பற்றிச் சட்டத்திற்கும் நிறைக்கும் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\frac{60}{\sqrt{41}}\mathrm{T} = 300 \times \frac{15}{2} + 400 \times 15 = 8250,$$

$$\therefore\ \mathrm{T} = \frac{8250\sqrt{41}}{60} = \frac{825\sqrt{41}}{6} \text{ இரு. நிறை.}$$

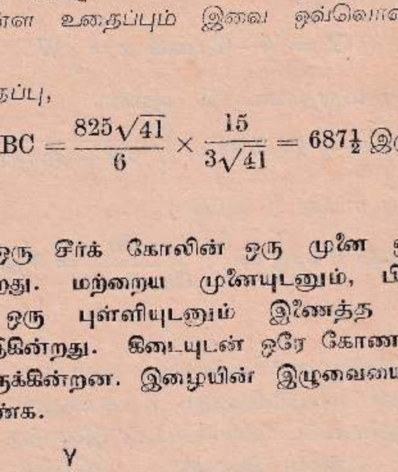
சட்டத்தின் மீது செயற்படும் கிடை விசைகள் இழுவைச் சட்டத்திலுள்ள இழுவையினதும் A இலுள்ள மறுதாக்கத்தினதும் கிடைக்கூறுகள் மட்டுமேயாம். இவை தம்முட் சமமாகவும் முரணாகவும் இருப்பதோடு, அச்சட்டத்தின் மீதுள்ள உதைப்பும் இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் சமனாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே அவ்வுதைப்பு,

$$\mathrm{T} \text{ கோசை } \mathrm{ABC} = \frac{825\sqrt{41}}{6} \times \frac{15}{3\sqrt{41}} = 687\tfrac{1}{2} \text{ இரு. நிறை.}$$

உதாரணம் (ii).

W நிறையுள்ள ஒரு சீர்க் கோலின் ஒரு முனை ஒரு பிணையலிற்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. மற்றைய முனையுடனும், பிணையலின் அதே மட்டத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியுடனும் இணைத்த ஓர் இழையினால் இம்முனை தாங்கப்படுகின்றது. கிடையுடன் ஒரே கோணத்தில் அக்கோலும் இழையும் சாய்ந்திருக்கின்றன. இழையின் இழுவையையும் பிணையலிலே தாக்கத்தையும் காண்க.



படம் 69.

கோலினை (படம் 69) AB எனவும், அதன் நடுப்புள்ளியை G எனவும், இழையை BC எனவும் கொள்க. AC கிடையானது.

$\angle$BAC $= \angle$BCA $= \alpha$ எனவும், AB $= l$ எனவுங் கொள்க.

பின்பு AC $= 2l$ கோசை α. அதோடு, A இல் இருந்து BC இற்கு AD செங்குத்தாயின்,

$$\mathrm{AD} = 2l \text{ கோசை } \alpha \text{ சைன் } \alpha.$$

எனவே, இழையின் இழுவை T ஆயின், A பற்றித் திருப்பு திறன்களைக் கணிக்க,

$$T.2l \text{ கோசை } \alpha \text{ சைன் } \alpha = W\frac{l}{2} \text{கோசை } \alpha, \text{ அல்லது, } T = \frac{W}{4 \text{ சைன் } \alpha}.$$

A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே X, Y ஆயின், கிடையாகத் துணிக்க,

$$X = T \text{ கோசை } \alpha = \frac{W \text{ கோசை } \alpha}{4 \text{ சைன் } \alpha}.$$

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$Y = W - T \text{ சைன் } \alpha = \frac{3}{4}W.$$

A இல் விளையுள் மறுதாக்கம் R ஆயின்,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{W}{4}\sqrt{9 + \text{கோதா}^2\alpha}.$$

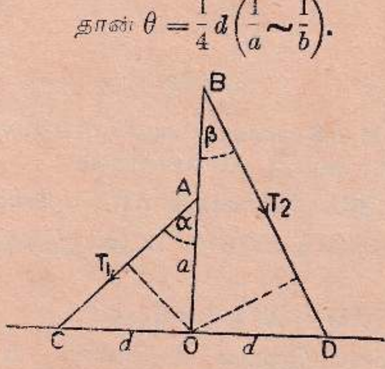
கிடையுடன் R இன் சாய்வு θ ஆயின்,

$$\text{தான் } \theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4 \text{ சைன் } \alpha}{\text{கோசை } \alpha} = 3 \text{ தான் } \alpha.$$

உதாரணம் (iii).

நிலத்திலே தங்கியிருக்கும் முனையை உடைய ஒரு கம்பம், அதன் தளத்திலும் அதன் அடியிலிருந்து d என்னும் சம தூரங்களிலும் நிலத்திலிருக்கும் நிலைப்பட்ட புள்ளிகளுடன் இணைத்த இரு கயிறுகளினல் நிலைக்குத்தாகவும் தாங்கப்பட்டுள்ளது. கயிறுகள் கம்பத்தில் a, b என்னும் உயரங்களில் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கம்பத்தினது நிறையின் இருமடங்காக நிலத்தின் மீதுள்ள நிலைக்குத்தான மறுதாக்கம் அமையுமாறு, கயிறுகளின் இழுவைகள் சரிப்படுத்தப்படுகின்றன. நிலத்தின் மீதுள்ள மொத்த மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குகிறதென நிறுவுக. இங்கு,

$$\text{தான் } \theta = \frac{1}{4}d\left(\frac{1}{a} \sim \frac{1}{b}\right).$$



படம் 70.

கம்பத்தை OAB (படம் 70) எனவும், அதன் கீழ் முனையை O எனவுங் கொள்க. $OC = OD = d$ என அமையுமாறு AC, BD என்னுங் கயிறுகளின் இணைப்புப் புள்ளிகளை முறையே A, B என்க.

$AO = a$, $OB = b$, $\angle OBD = \beta$ எனவும், AC, BD என்பனவற்றி லுள்ள இழுவைகளை T_1, T_2 எனவும் கொள்க.

O பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$T_1 d \text{ கோசை } \alpha = T_2 d \text{ கோசை } \beta \quad . \quad \text{(i)}$$

கம்பத்தின் நிறை W ஆயின், நிலத்தின் மீதுள்ள நிலைக்குத்து மறு தாக்கம் 2W என்பதால், இழுவைகளினது நிலைக்குத்துத் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை W இற்குச் சமமாக வேண்டும்.

$$\therefore T_1 \text{ கோசை } \alpha + T_2 \text{ கோசை } \beta = W \quad . \quad \text{(ii)}$$

எனவே, (i) இலிருந்து,

$$T_1 \text{ கோசை } \alpha = T_2 \text{ கோசை } \beta = \frac{W}{2}.$$

நிலத்தின் மீதுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு X, இழுவைகளின் கிடைக்கூறுகளினிடையேயான வித்தியாசத்தைச் சமனுக்கவேண்டும்.

$$\therefore X = T_1 \text{ சைன் } \alpha - T_2 \text{ சைன் } \beta = \frac{W}{2} (\text{தான் } \alpha - \text{தான் } \beta)$$

$$= \frac{W}{2}\left(\frac{d}{a} - \frac{d}{b}\right).$$

நிலைக்குத்து மறுதாக்கம் = 2W.

எனவே,

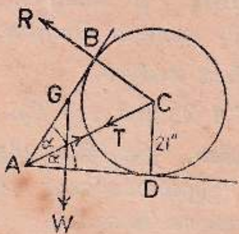
$$\text{தான் } \theta = \frac{X}{2W} = \frac{d}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

உதாரணம் (iv).

21 அங்குல ஆரையுள்ள ஓர் உருளை நிலத்திலே உள்ளது. 30 அங்குல நீளமுள்ள சீர்ப் பலகையொன்று அவ்வுருளையின் மீது சாய்ந்து, அதன் ஒரு முனை நிலத்திற் பொருந்தப்பெற்றும் மற்றைய முனை உருளையின் மேற்புறமாக நீட்டப்பெற்றுமுள்ளது. அப்பலகையின் நீளம் உருளையின் அச்சிற்குச் செங்குத்தானது. உருளையின் அச்சாணிக்கும் நிலத் திலே தங்கும் பலகையின் முனைக்கும் இணைத்த 35 அங்குல நீள நாணினுல் உருளையும் பலகையும் நழுவாது தடுக்கப்படின், நாணின் இழுவை பலகை நிறையின் $\frac{9}{50}$ என நிறுவுக.

குறிப்பு.—அப்பொருள்களுக்கும் நிலத்திற்குமிடையே, அல்லது தத்தமக் கிடையேயான உராய்வினைப் பற்றி ஒன்றும் குறிப்பிடப்படவில்லை. எனினும்,

ஒரு நாணினால் அவை நழுவாது தடுக்கப்படுகின்றன என்பதனால் தொடுகைகள் அனைத்தும் ஒப்பமானவையென ஏற்றுக்கொள்ளலாம். இல்லையாயின், இப்பிரசினம் உண்மையாகத் தீர்க்க முடியாததாகும்.



படம் 71.

உருளையின் மையத்தை C (படம் 71) எனவும், நிலத்துடன் அதன் தொடுகைப் புள்ளியை D எனவும், B இல் உருளையைத் தொடும் பலகையை AB எனவும், அதன் நடுப்புள்ளியை G எனவும் கொள்க. அதோடு, $\angle CAD = \alpha$ ஆகுக.

CD = 21 அங்குலமும், AC = 35 அங்குலமுமாகும் என்பதனால்,

$AD = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28$ அங்.,

$\therefore$ AB = 28 அங்.

உருளைக்கும் பலகைக்குமிடையே மறுதாக்கம் R, ஆரை CB இன் வழியே செயற்படுகின்றது. அதோடு, G இனூடாய்ப் பலகையின் நிறை W நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றது.

பலகைக்கு, A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$28R = W.15 \text{ கோசை } 2\alpha.$$

இங்கு, சைன் $\alpha = \frac{3}{5}$, கோசை $\alpha = \frac{4}{5}$, கோசை $2\alpha =$ கோசை$^2 \alpha -$ சைன்$^2 \alpha = \frac{7}{25}$.

$$\therefore\ R = W.\frac{15 \times 7}{28 \times 25} = \frac{3}{20}W$$

உருளையைக் கிடையாக இயக்க நாடும் விசைகள், R இன் கிடைக் கூறுகளும் நாணிலுள்ள இழுவை T உமாகும். இவை சமனாகவும் முரணாகவும் இருக்க வேண்டுமாதலின்,

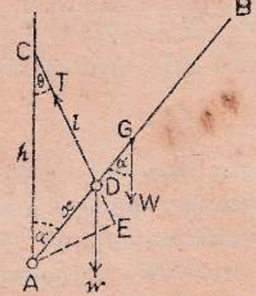
$$T \text{ கோசை } \alpha = R \text{ சைன் } 2\alpha = R.\frac{2 \times 3 \times 4}{25} = \frac{9}{50}W.$$

உதாரணம் (ᐡ).

W நிறையும் $2a$ நீளமும் கொண்ட சீர்க் கோலொன்று, முனை A பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. l நீள இலேசான இழையினால்

அது தாங்கப்படுகின்றது. இழையின் ஒரு நுனியானது A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே h தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியொன்றிற்கும், மற்றைய நுனி அக்கோல் நுழைந்திருக்கும் w நிறையுள்ள ஓர் ஒப்பமான வளையத்திற்கும் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சமநிலைத் தானத்தில் இழை நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமெனை நிறுவுக ; இங்கு,

$$Wal\,(h \text{ கோசை } \theta - l) = w\,(l^2 - 2lh \text{ கோசை } \theta + h^2)^{\frac{3}{2}}.$$



படம் 72.

இழையின் மேல் நுனியை C (படம் 72) எனவும், வளையத்தின் நிலையத்தைத் D எனவும், கோலின் நடுப் புள்ளியை G எனவுங் கொள்க.

கோணம் CAD $= \alpha$ எனவும், AD $= x$ எனவுங் கொள்க.

CD இற்குச் செங்குத்தாக AE ஐ வரைக. பின்பு AE $= h$ சைன் θ ; இழையின் இழுவையை T எனக.

வளையம், கோல் ஆகிய இரண்டிற்கும் A பற்றித் திருப்புதிறன் களைக் கணிக்க,

$$Th \text{ சைன் } \theta = wx \text{ சைன் } \alpha + Wa \text{ சைன் } \alpha \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

கோலின் வழியே அவ்வளையத்திற்கு மட்டும் துணிக்க,

$$T \text{ கோசை } CDG = w \text{ கோசை } \alpha.$$

அதோடு,
$$\text{கோசை } CDG = \frac{DE}{AD} = \frac{h \text{ கோசை } \theta - l}{x},$$

$$\therefore\ T\frac{h \text{ கோசை } \theta - l}{x} = w \text{ கோசை } \alpha. \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(i) இல் T இற்குப் பிரதியிட,

$$\frac{wx \text{ கோசை } \alpha . h \text{ சைன் } \theta}{h \text{ கோசை } \theta - l} = wx \text{ சைன் } \alpha + Wa \text{ சைன் } \alpha,$$

இங்கு, சைன் $\alpha = \frac{l}{x}$ சைன் θ உம், x கோசை $\alpha = h - l$ கோசை θ உம் ஆகும்.

6—R 13456 (10/63)

$$\therefore\ \frac{w(h-l\ \text{கோசை}\ \theta)\ h\ \text{சைன்}\ \theta}{h\ \text{கோசை}\ \theta-l}=wl\ \text{சைன்}\ \theta+\frac{\mathrm{W}al\ \text{சைன்}\ \theta}{x},$$

$$\therefore\ w\left[\frac{h^2-hl\ \text{கோசை}\ \theta}{h\ \text{கோசை}\ \theta-l}-l\right]=\frac{\mathrm{W}al}{x},$$

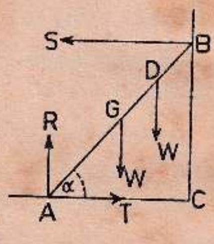
$$\therefore\ w\ \frac{h^2-2hl\ \text{கோசை}\ \theta+l^2}{h\ \text{கோசை}\ \theta\ -l}=\mathrm{W}\frac{al}{x},$$

$\therefore\ x=\sqrt{h^2-2hl\ \text{கோசை}\ \theta+l^2}$ என்பதனால்,

$w(h^2-2hl\ \text{கோசை}\ \theta+l^2)^{\frac{3}{2}}=\mathrm{W}al\ (h\ \text{கோசை}\ \theta-l)$ ஆகும்.

உதாரணம் (vi).

ஓர் ஏணி, ஓர் ஒப்பமான தரையில் ஒரு முனையிலே தங்கியும் ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் மற்றைய முனையிற் சாய்ந்தும், கிடையுடன் α கோணத்திலே தங்கியுள்ளது. ஓர் இழை, சுவரினதும் தரையினதும் சந்திப்பையும் ஏணியின் கீழ்முனையையும் தொடுக்கின்றது. இழையின் இழுவையையும், சுவரிலும் தரையிலுமுள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க. அத்துடன், ஏணியின் அதே நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் அதன் நீளத்தின் முக்காற்பங்கை ஏறியிருப்பின், இழையின் இழுவையையுங் காண்க.



படம் 73.

ஏணியை AB (படம் 73) எனவும், சுவரினதும் தரையினதும் சந்தியை C எனவும், ஏணியின் நடுப்புள்ளியை G எனவுங் கொள்க.

பரப்புக்கள் ஒப்பமானவையாதலின், A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் முறையே தரைக்கும் சுவருக்கும் செங்குத்தாகும்; இவற்றை முறையே R, S என்க.

G இனூடாய் நிலைக்குத்தாகத் தாக்கும் ஏணியின் நிறையை W எனவும், இழையின் இழுவையை T எனவுங் கொள்க.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க, $\mathrm{R}=\mathrm{W}$ . . . . (i)

கிடையாகத் துணிக்க, $\mathrm{S}=\mathrm{T}$ . . . . (ii)

B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mathrm{T.AB}\ \text{சைன்}\ \alpha = \mathrm{R.AB}\ \text{கோசை}\ \alpha - \mathrm{W}\frac{\mathrm{AB}}{2}\ \text{கோசை}\ \alpha \quad . \quad \text{(iii)}$$

(i) இல் இருந்து R இற்குப் பிரதியிட,

$$\mathrm{T}\ \text{சைன்}\ \alpha = \mathrm{W}\ \text{கோசை}\ \alpha - \tfrac{1}{2}\mathrm{W}\ \text{கோசை}\ \alpha,$$

$$\therefore\ \mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\mathrm{W}\ \text{கோதா}\ \alpha.$$

(ii) இல் இருந்து, $\mathrm{S} = \mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{W}$ கோதா α.

$\mathrm{AD} = \frac{3}{4}\mathrm{AB}$ என, மனிதன் D இல் இருப்பின், சமன்பாடுகள் (i) உம் (iii) உம்,

$$\mathrm{R} = \mathrm{W} + \mathrm{W} = 2\mathrm{W}\ \text{என அமைகின்றன ;}$$

அத்துடன்,

$$\mathrm{T.AB}\ \text{சைன்}\ \alpha = \mathrm{R.AB}\ \text{கோசை}\ \alpha - \mathrm{W}\frac{\mathrm{AB}}{2}\ \text{கோசை}\ \alpha - \mathrm{W}\frac{\mathrm{AB}}{4}\ \text{கோசை}\ \alpha,$$

$$\therefore\ \mathrm{T}\ \text{சைன்}\ \alpha = 2\mathrm{W}\ \text{கோசை}\ \alpha - \tfrac{3}{4}\mathrm{W}\ \text{கோசை}\ \alpha,$$

$$\therefore\ \mathrm{T} = \tfrac{5}{4}\mathrm{W}\ \text{கோதா}\ \alpha.$$

பயிற்சி XII.

1. 40 இரு. நிறையும் 8 அடி நீளமுமுள்ள ஒரு பாரமான சட்டம் AB, ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் A இற் பிணைக்கப் பட்டுள்ளது. A இற்கு மேலே 5 அடியில் சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியை யும் B ஐயும் தொடுக்கும் ஒரு சங்கிலியால் அச்சட்டம் இடையாகப் பேணப்படுகின்றது. A இலிருந்து 6 அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் சட்டம் 20 இரு. சுமையைக் காவுமாயின், சங்கிலியின் இழுவையையும் சட்டத்திற்கும் சுவரிற்குமிடையே A இலே தாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையுங் கணக்கிடுக. (I.E.)

2. 6 அடி நீளமும் 8 இரு. நிறையுமுள்ள ACB என்னும் சீர்க் கோலொன்று, A இலிருந்து 2 அடியிலுள்ள பிணையல் C பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. A இல் 10 இரு. நிறையுள்ள கீழ்முக நிலைக்குத்து விசையினாலும், B இல் ஒரு கிடை விசையினாலும், அக் கோலானது A ஐக் கீழ்முகமாகக் கொண்டு நிலைக்குத்துடன் 45° சாய்விற் பேணப்படுகின்றது. B இலுள்ள விசையின் பருமனையும், பிணையல் C இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையுங் காண்க. (I.E.)

3. W நிறையுள்ள பாரமான சீர்க் கோலொன்று, அதன் முனைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒவ்வோர் இழையாக இணைத்த இரு சம இழைகளினால் ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. w என்னும் ஒரு நிறை, கோலின் மையத்திற்கும் ஒரு முனைக்குமிடையே அரைவழியிலே தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. இழைகளிலுள்ள இழுவைகளின் விகிதம்

$$\frac{2\mathrm{W} + 3w}{2\mathrm{W} + w}$$

என நிறுவுக. (H.S.C.)

4. 7 அடி 6 அங்குல உயரமுள்ள ஒரு கதவு, அதன் உச்சியிலும் அடியிலுமிருந்து 9 அங்குலத்திலுள்ள இரு பிணைச்சல்களிலிருந்து இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. கதவின் நிறை 36 இரு. அதன் புவியீர்ப்புமையம் பிணைச்சல்களின் கோட்டிலிருந்து 2 அடி 3 அங்குல தூரத்திலுள்ளது. ஒவ்வொரு பிணைச்சலினாலும் கதவினது நிறையின் அரைப்பங்கு தாங்கப்படுகிறதெனக் கொண்டு, ஒவ்வொரு பிணைச்சலின் மீதுள்ள மொத்த விசையைக் காண்க. (I.S.)

5. ஒரு படலை A, B என்னும் பிணைச்சல்களிலிருந்து இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அதன் புவியீர்ப்புமையம் G இனூடான நிலைக்குத்து, A இனூடான கிடையை K இற் சந்திக்கிறது. நிறை முழுவதும் A இலே தாங்கப்பெறின், முக்கோணி ABK ஆனது A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களை நிர்ணயிக்க வகைசெய்யும் ஒரு விசை முக்கோணியாக அமையுமென நிறுவுக. அதோடு, அந்நிறை A, B என்பவற்றின் இடையே சமபங்காகப் பிரிக்கப்படுமிடத்து இவ்வமைப்பை மாற்றி அமைக்க. (I.S.)

6. ஒரு சீரான வளை தன் முனைகளை, கிடையுடன் முறையே கோணங்கள் $30°$, $60°$ ஐ ஆக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்களிற் கொண்டு தங்கியிருக்கின்றது. அதன் நிறையின் இரு மடங்கிற்குச் சமமான நிறையொன்று அதன் நீளத்தின் வழியே வழுக்கிச் செல்லவல்லது. அவ்வளை கிடையாகத் தங்கும்போது வழுக்குநிறையின் நிலையத்தினைக் காண்க. (I.A.)

7. ஓர் ஒப்பமான சீரேணி அதன் முனைகள் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலும் ஒரு கிடைத்தளத்திலும் பொருந்துமாறு தங்கி நிற்கின்றது. அது ஒரு கயிற்றினால் தாங்கப்படுகிறது. அக்கயிற்றின் ஒரு நுனி ஏணியின் அடியிலிருந்து காற்பங்கு தூரத்தில் அதன் படியொன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. மற்றைய நுனி ஏணியின் உச்சிக்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே சுவரின் அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. சுவரின் அடியிலிருந்து முறையே a, b தூரத்தில் ஏணியின் அடியும் உச்சியுமிருப்பின் ஏணிக்கும் நிலத்துக்கும், ஏணிக்கும் சுவருக்கும் இடையே மறுதாக்கங்கள் Q, P என்பனவற்றின் விகிதம்

$$\frac{Q}{P}=\frac{3a}{5b}$$

இனலே தரப்படுமெனக் காட்டுக. (I.A.)

8. 35 இரு. நிறையும் 10 அடி நீளமுமுடைய ஓர் ஏணி, அதனொரு முனை A ஐ ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிலும், முனை B ஐ சுவரிலிருந்து 6 அடி தூரத்தில் ஓர் ஒப்பமான நிலத்திலும் கொண்டு தங்கியிருக்கின்றது. B உடன் இணைத்த ஒரு கிடை நாணினால் அது இந்நிலையிற் பேணப்படுகின்றது. B இலிருந்து 4 அடியில் ஏணியின் புவியீர்ப்புமையம் இருப்பின், நாணின் இழுவையைக் காண்க. அதோடு, நாணின் உதவியில்லாமல் ஏணியை இந்நிலையிற் பேணக்கூடியதும் A இற் பிரயோகிக்கப்படுவதுமான விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (I.S.)

9. 6 அடி நீளமும் தந்த நிறையுமுள்ளதொரு சீர்ப் பலகை AB, முறையே C இலும் D இலுமுள்ள இரு முளைகளிடைற் கிடையாகத் தாங்கப்படுகின்றது. இங்கு, $AC = BD = 8$ அங்குலம். வேறொரு சரிசமமான பலகை $A'B'$, A இற்கு அப்பால் A' இன் 11 அங்குலம் இருக்குமாறு முதற் பலகையின் மேல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. C இலும் D இலுமுள்ள R_1, R_2 என்னும் தாக்கங்களைக் காண்க. சமநிலையைத் தொடர்ந்து பேணுமாறு A' இல் P என்னும் ஒரு நிலைக்குத்துவிசை இப்போது பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. C இலும் D இலும் இப்போதுள்ள தாக்கங்கள் R_1', R_2' ஆயின்,

$$\frac{R_1' - R_1}{R_2 - R_2'} = \frac{75}{19}$$

எனக் காட்டுக. (H.S.D.)

10. ஓர் அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ஆரையில் உள்ளது. இக்கிண்ணம் ஆரையைச் சுற்றிச் சமச்சீராயுள்ளது. புவியீர்ப்பு மையம் இவ்வாரையை $m : n$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கிறது. கிடையுடன் θ என்னுங் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள, சறுக்குதலைத் தடுக்கக்கூடிய அளவு முரடான ஒரு தளத்தினை அவ்வரைக்கோளத்தின் விளிம்பு பரப்புத் தொடுமாறு அது வைக்கப்படின், கிடையுடன் அக்கிண்ணத்தினது விளிம்பின் சாய்வைக் காண்க. θ ஆனது கிட்டத்தட்ட $25°$ ஆக இருக்கும்போது, விளிம்பின் தளத்தினை நிலைக்குத்தாகக் கொண்டு அக்கிண்ணம் சமநிலையிலிருக்குமெனக் காணப்பட்டுள்ளது. விகிதம் $m : n$ ஐக் கணிக்க. (I.S.)

11. ஒரு மனிதன், 200 இறு. நிறையும் 20 அங்குல விட்டமுமுள்ள ஓர் ஒப்பமான புற்றரையுருளையை 4 அங்குல உயர ஓரக்கல்லொன்றின் மேல் இழுக்கப் பார்க்கிறான். மிகக் குறைந்த எத்தனத்துடன் அவ்வுருளையை உயர்த்த, எந்நிலையிலும் அதனை எத்திசையில் அவன் இழுக்க வேண்டும் என்பதைக் காண்க. அத்துடன், அவன் உஞற்றவேண்டிய மிகக் கூடிய விசை 160 இறு. எனக் காட்டுக. (H.C.)

12. W நிறையும் r ஆரையுமுள்ள ஒரு புற்றரையுருளையை $\frac{1}{2}r$ உயரமான ஒரு படியில் மேனோக்கி இழுக்க வேண்டியிருக்கிறது. உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சில் அமைகின்றது. உருளையின் அச்சின் மீது நேராகச் செயற்படும் ஒரு கைபிடிக்கு விசை பிரயோகிக்கப்படுகிறது. இக்கைபிடியை எத்திசையிலே திறம்பட இழுக்கலாம்? இத்திசையிற் பிரயோகிக்குமிடத்து உருளையை இயக்கத் தேவையான விசையை, கைபிடி கிடையாக இழுக்கப்படுமிடத்து உருளையை இயக்கத் தேவையான விசையுடன் ஒப்பிடுக. படி அல்லது நிலத்திலிருந்து அந்த உருளை வழுவ நாடுமா? (H.S.D.)

13. 3 அடி நீளமும் 4 இறு. நிறையுமுடையதொரு நீர்க் கோல் AB, அதன் முனைகளுடன் இணைத்த 5 அடி நீளமான நாணொன்றைக் கொண்டது. ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் நிலைப்பட்ட ஒப்பமான

வளையம் O இனூடாக இந்நாண் செல்கிறது. அச்சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே முனை A சுவரிற் பொருந்த அக்கோல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. OA, 2 அடியாயின், அக்கோல் சமநிலையில் இருக்குமென நிறுவுக. அதோடு, நாணின் இழுவை 3 இரு. நிறை எனவுங் காட்டுக. (H.C.)

14. ஒரு தந்திக் கம்பத்துடன் இணைத்த ஆறு கம்பிகளில், மூன்று தெற்கு நோக்கியும், இரண்டு வட கிழக்கு நோக்கியும், ஒன்று மேற்கு நோக்கியும் செல்கின்றன. அக்கம்பிகள் யாவும் ஒரே கிடையான தளத்தில் அமைந்தும் 200 இரு. நிறை இழுவையினால் ஈர்க்கப்பட்டும் இருப்பின், கம்பத்தின் மீது அவை உஞற்றும் இழுப்பைக் காண்க. கம்பிகள் ஒவ்வொன்றும் நிலத்திற்கு மேலே 40 அடியில் இருக்கின்றன. அதோடு, கம்பத்தில் அடியிலிருந்து 30 அடியிலிருக்கும் ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்த ஒரு தடை கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 15 அடியில் நிலத்தில் உறுதியாக்கப்பட்டுள்ளது. கம்பம் கவிழ நாடாவிடின், அத்தடையிலுள்ள இழுவையைக் காண்க. (N.U.S.)

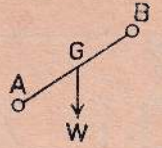
15. கோணங்கள் B, C ஒவ்வொன்றும் 45° ஆகக் கொண்ட 3 இரு. திணிவுள்ள ஒரு முக்கோணியடர் ABC, பக்கம் BC இன் நடுப் புள்ளியிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. A இலும் B இலுமிருந்து முறையே 2, 8 இரு. நிறைகளும் C இலிருந்து M என்னும் ஒரு நிறையும் தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. பக்கம் BC நிலைக்குத்துடன் 60° கோணத்தை ஆக்கின், M இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. (Q.E.)

§81. இனி, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விறைப்பான பொருட்களுடன் சம்பந்தப்பட்ட சில பிரச்சினைகளை, குறிப்பாக, பல பாரமான கோல்கள் ஒருமித்து ஒப்பமாக இணைக்கப்பெற்றிருத்தல் பற்றிய சந்தர்ப்பங்களைப் பற்றிச் சிந்திப்போம்.

தற்போதைக்கு, கோல்களின் ஆக்கப் பொருட்களிலுள்ள தகைப்புக்கள் (அதிகாரம் VIII இல் இது ஆராயப்பெறும்) பற்றி ஆராயாது விடுவோம். அத்துடன், **பிரசினத்தில் இவ்வுட்தகைப்புக்கள் கேட்கப்பெற்றாலொழிய,** அவற்றைப் புகுத்த முயலலாகாதென்பதையும் நன்கு நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டும்.

மூட்டியுள்ள பாரமான கோல்களின் சமநிலை பற்றிய சாதாரண பிரசினங்களில், இணைப்புக்களிலே தாக்கும் விசைகளை மட்டுமே (கோல்களின் நிறைகளும் தான்) சிந்திப்போம், அ–து. அக்கோல்களின் நிறையின் கீழும், பிணையல்கள் அவற்றின் **முனைகளின்** மீது உஞற்றும் விசைகளின் கீழும் அவற்றின் சமநிலையைச் சிந்திப்போம்.

§82. A இலும் B இலும் சுயாதீனமாக மூட்டியுள்ள ஒரு பாரமான கோல் AB (படம் 74) ஐக் கருதுக.



படம் 74.

அதன் நிறை, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G இனூடாய் நிலைக்குத்தாகத் தாக்குகின்றது. அதோடு, A இலும் B இலும் பிரயோகிக்கும் விசைகளைக் கொண்டு அக்கோலினைச் சமநிலையிற் பேணவேண்டின், இவ் விசைகள் நிலைக்குத்தாகவோ, நிறையின் தாக்கக் கோடு, அ-து. G இனூடாக நிலைக்குத்திற் சந்திப்பனவாகவோ இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவு.

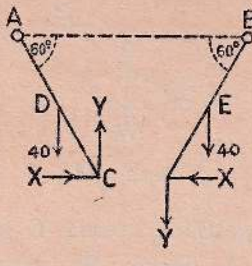
(அக்கோல் நிலைக்குத்தாக இருந்தாலொழிய) **இச்சந்தர்ப்பங்களில் எதன்போதும் அவை அக்கோலின் வழியே செயற்பட முடியாது.** எனினும், அக்கோல் **இலேசாயிருப்பின்** முனைகளிற் பிரயோகிக்கப்பட்டு அதனைச் சமநிலையிற் பேணும் விசைகள் சமமாகவும் முரணாகவும் இருப்பதோடு, **கோலின் வழியே** செயற்படவும் வேண்டும்.

பாரமான கோலையும் இலேசான கோலையும் பற்றிய சந்தர்ப்பங்களிடையே எற்படும் குழப்பமே, பாரமான கோல்களைப் பற்றிய பிரசினங்களின் போது மாணவர்களினால் அனுபவிக்கப்படும் தொல்லைகளுக்குக் காரணமாக வுள்ளது. ஒரு பாரமான கோலினிடத்து, அதன் முனைகளிலுள்ள விசைகள் செயற்பட **முடியாத** ஒரே திசை கோலின் வழியேயாகும். ஒரு பிணையலினால் அக்கோலின் மீது உஞற்றப்படும் விசையின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளையே சிந்திப்பது வழக்கம். அத்துடன், இவற்றைத் தெளிவாகப் படத்திற் காட்ட வேண்டுமாயின், அதை வரையும்போது அக்கோல்கள் சந்திக்காதவாறு அவற்றினிடையே ஒரு வெளி விடப்படவேண்டும்.

§83. **உதாரணம் (i).**

C இல் ஒப்பமாக இணைத்த AC, CB, என்னும் இரு சமமான சீர்க் கோல்களின் முனைகள், ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கிடையுடன் 60° சாய்விலிருக்கும் ஒவ்வொரு கோலினதும் நிறை 40 இரு. ஆயின் பிணையல் C இன் மீதுள்ள தாக்கத்தைக் காண்க.

அக்கோல்களின் நடுப்புள்ளிகள் D, E (படம் 75) எனின், பின்பு அவற்றின் நிறைகள் D, E இல் நிலைக்குத்தாகத் தாக்கும்.



படம் 75.

கோல் AC மீது C இலுள்ள பிணையலினது தாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளை முறையே X, Y என்க. BC இன் மீது அதன் தாக்கம் சம கூறுகளை முரண் திசைகளில் உடையதாக இருக்கும்.

ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளத்தை l என்க.

A பற்றி AC இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mathbf{X}l \text{ சைன் } 60^\circ + \mathbf{Y}l \text{ கோசை } 60^\circ = 40\frac{l}{2} \text{ கோசை } 60^\circ,$$

$$\therefore \mathrm{X} \text{ தான் } 60^\circ + \mathrm{Y} = 20 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

B பற்றி BC இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mathrm{X}l \text{ சைன் } 60^\circ - \mathbf{Y}l \text{ கோசை } 60^\circ = 40\frac{l}{2} \text{ கோசை } 60^\circ,$$

$$\therefore \mathrm{X} \text{ தான் } 60^\circ - \mathrm{Y} = 20 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) இல் இருந்து, $\mathrm{Y} = 0$ என்பது தெளிவாகின்றது. எனவே, C இல் உள்ள மறுதாக்கம் கிடை விசை X ஐயே கொண்டதாயிருக்கும். X இன் பெறுமானம்,

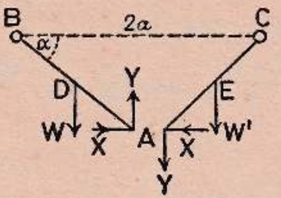
$$\mathrm{X} \text{ தான் } 60^\circ = 20 \text{ இனால் தரப்படும்.}$$

$$\therefore \mathrm{X} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20}{3}\sqrt{3} \text{ இரு. நிறை.}$$

குறிப்பு.—இத்தொகுதி முழுவதும் C இனூடான நிலைக்குத்தைப்பற்றிச் சமச்சீராக இருப்பதனால் எத்தகைய சமன்பாடுகளையும் வருவிக்காது, Y ஆனது பூச்சியமாகவேண்டுமென்பதைப் பார்த்திருக்கலாம். ஒரு கோலின் மீது Y மேனோக்கித் தாக்கின் மற்றதின் மீது கீழ்நோக்கித் தாக்க வேண்டும். ஆனால், சமச்சீர் காரணமாக, அது மற்ற விதமாக அமையாமைக்கு எவ்வித நியாயமுமில்லை. எனவே, பப்பிணையல், கோல் எதன் மீதும் நிலைக்குத்து விசையெதையும் உஞற்றுது.

உதாரணம் (ii).

A இல் ஒப்பமாக மூட்டிய, W, W′ என்னும் நிறைகளும் சம நீளங்களுமுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள், ஒரே மட்டத்திலுள்ள B, C என்னும் பிணையல்களிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தொங்குகின்றன. A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு $\frac{1}{4}\frac{(W+W')a}{h}$ என நிறுவுக. இங்கு, $2a$ என்பது தூரம் BC உம், h என்பது BC இற்குக் கீழே A இன் ஆழமுமாகும். அம்மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக் கூற்றினையுங் காண்க. (I.A.)



படம் 76.

அக்கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளை D, E (படம் 76) எனவும் கோல்களின் மீது A இலுள்ள பிணையலினது தாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளை முறையே X, Y எனவும் கொள்க.

இவை அவ்விரு கோல்களின் மீதும் முரண் திசைகளில் இருத்தல் வேண்டும். ஆனால், படத்திற்போலவோ மாற்றுத் திசைகளிலோ நாம் அவற்றைக் காட்டினும் பரவாயில்லை. அவை உண்மையாகச் செயற்படும் திசைகளுக்கு முரணான திசைகளில் அவற்றைக் கணிப்பின், அவற்றிற்கு **மறைக்கணியப்** பெறுமானங்களை மட்டுமே பெறுவோம்.

கோணம் $ABC = \alpha$ என்க; அப்போது $ACB = \alpha$ ஆகும். ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளத்தை l என்க.

B பற்றி AB இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Xl \text{ சைன் } \alpha + Yl \text{ கோசை } \alpha = W\frac{l}{2} \text{ கோசை } \alpha,$$

$$\therefore X \text{ தான் } \alpha + \overset{Y}{\cancel{X}} = \frac{W}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

C பற்றி AC இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Xl \text{ சைன் } \alpha - Yl \text{ கோசை } \alpha = W'\frac{l}{2} \text{ கோசை } \alpha,$$

$$\therefore X \text{ தான் } \alpha - Y = \frac{W'}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(i) ஐயும் (ii) ஐயும் கூட்ட,

$$2X \text{ தான் } \alpha = \frac{W + W'}{2},$$

$$\therefore\ X = \frac{W + W'}{4} \text{ கோதா } \alpha.$$

$$\therefore \text{ கோதா } \alpha = \frac{a}{h} \text{ என்பதனுல்,}$$

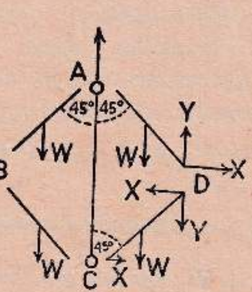
$$X = \frac{(W + W')a}{4h},$$

(i) இலிருந்து (ii) ஐக் கழிக்க,

$$2Y = \frac{W - W'}{2}, \text{ அல்லது } Y = \frac{W - W'}{4}.$$

உதாரணம் (iii).

ஒருமித்து மூட்டிய நான்கு சீரான, பாரமான சமகோல்களைக் கொண்டு ஒரு சதுர உருவம் ABCD அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்வொழுங்கு, புள்ளி A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டும், A, C என்னும் மூட்டுக்களை இணைக்கும் இழையொன்றினுற் சதுர உருவத்திற் பேணப்பட்டுமுள்ளது. இழையின் இழுவையையும் மூட்டுகள் B அல்லது D இனது தாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.



படம் 77.

B, D என்பவற்றில் இடைவெளிகள் விட்டு ஆனுல், A இலும் C இலும் பிணையல்களைக் காட்டுமாறு அப்பிணையல்களுக்கும் கோல்களுக்கும் இடையே இடைவெளிகள் விட்டு படம் 77 இற்போல படத்தினை வரைக.

AD மீது D இலுள்ள பிணையலின் தாக்கத்தினது கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளை முறையே X, Y என்க. CD இன் மீதுள்ள தாக்கம், முரண் திசைகளிற் சம கூறுகளை உடையதாயிருக்கும்.

ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளம் l ஆயின், A பற்றி AD இற்குத் திருப்பு திறன்களைக் கணிக்க,

$$Xl \text{ கோசை } 45° + Yl \text{ சைன் } 45° = W\frac{l}{2} \text{ சைன் } 45°,$$

$$\therefore X + Y = \frac{W}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

C பற்றி CD இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Xl \text{ கோசை } 45° - Yl \text{ சைன் } 45° = W\frac{l}{2} \text{ சைன் } 45°,$$

$$\therefore X - Y = \frac{W}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து, $Y = 0$ உம் $X = \frac{W}{2}$ உம் ஆகுமென்று தெளிவு.

($Y = 0$ ஆகுமென இங்கு முன்னராகவே அறிய இயலவில்லை.)

இனி, கோல் CD இன் சமநிலையைச் சிந்திப்போம். C இலுள்ள பிணையலின் தாக்கம் D இலுள்ள X இற்குச் சமமானதும் முரணானதுமான கிடைக் கூறு X ஐயும், (D இல் நிலைக்குத்து விசையொன்றும் இல்லாமையால்) நிறை W ஐச் சமன்செய்ய மேன்முக நிலைக்குத்துக்கூறு W ஐயும் உடையதாயிருக்க வேண்டும். (சமச்சீரின்படி) C இலுள்ள பிணையலும் கோல் BC இன் மீது சம மேன்முக விசை W ஐ உஞற்றவேண்டும்.

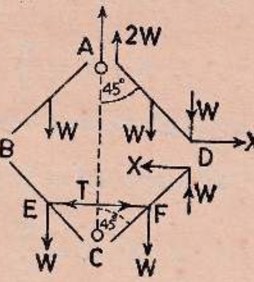
எனவே, இப்பிணையல், மொத்த மேன்முக நிலைக்குத்து விசை 2W ஐ உஞற்றவேண்டும். இது, இழை OC இனால் வழங்கப்படவேண்டும். ஆகையால், இழையின் இழுவை 2W ஆகும்.

$Y = 0$ என்பதனால், D இலுள்ள மறுதாக்கமானது X என்னும் ஒரு கிடைவிசையாகும். இவ்விசை $\frac{W}{2}$ இற்குச் சமமானதெனக் காணப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் (iv).

ஒரு சாய்சதுரம் ABCD ஐ அமைக்குமாறு நான்கு சீரான சமக் கோல்கள் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. மூட்டு A இல் இருந்து தொங்கும் இச்சாய்சதுரம், BC இனதும் CD இனதும் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள கோலினால் ஒரு சதுர வடிவத்திற் பேணப்படுகின்றது. மூட்டுகள் B, D இல் மறுதாக்கங்களின் நிலைக்குத்து, கிடைக் கூறுகளைக் காண்க.

EF நிறையற்றதாதலின் E இலும் F இலுமுள்ள கோல்கள் அதன் மீது உஞற்றும் தாக்கங்கள் அதற்குச் சமமாகவும் முரணுகவும் அதன் நீளத்தின் வழியேயும் அமையவேண்டும். அன்றியும், B உம் D உம்



படம் 78.

உள்ளசையுமாறு அவ்வுருவம் விழ நாடுமாதலின் EF இல் T என்னும் ஓர் உதைப்பு உண்டென்பது தெளிவு.

ஒவ்வொரு கோலினதும் நிறை W ஆயின், பிணையல் A ஆனது AB, AD என்னும் கோல்கள் ஒவ்வொன்றின் மீதும் மேன்முக இழுப்பு 2W ஐ உஞற்றுமாறு, இப்பிணையல் நான்கு கோல்களையும் தாங்குகிற தென்பது எமக்குத் தெரியும்.

எனவே, AD, AB ஆகியவற்றின் மீது D இலும் B இலும் W என்னும் ஒரு கீழ்முக இழுப்பும் (B இலும் D இலுமுள்ள பிணையல்கள் கீழுள்ள இரு கோல்களையும் தாங்குகின்றன என்ற உண்மையிலிருந்தும் இது தெளிவு), CD, CB ஆகியவற்றின் மீது W என்னும் ஒரு மேன்முக இழுப்பும் இருக்கவேண்டும்.

D இலுள்ள பிணையலின் தாக்கத்தினது கிடைக் கூற்றை X எனக. கோலொன்றின் நீளம் l ஆயின், A பற்றி AD இற்குத் திருப்பு திறன்களைக் கணிக்க,

$$Xl \text{ கோசை } 45^\circ = Wl \text{ சைன் } 45^\circ + W\frac{l}{2} \text{ சைன் } 45^\circ,$$

$$\therefore X = \frac{3}{2}W.$$

ஆகையால், D இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்து, கிடைக் கூறுகள் முறையே W, $\frac{3}{2}$W ஆகி, சமச்சீரின்படி அவை B இல் ஒரே பெறுமானத்தை உடையனவாக இருக்கும்.

EF இலுள்ள உதைப்பைக் காணுமாறு கேட்கப்பட்டிருப்பின், இதையறிய C பற்றி CD இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

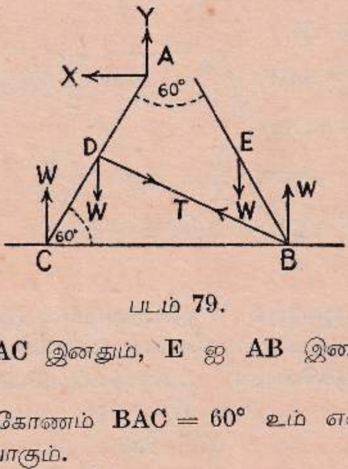
$$T\,\frac{l}{2}\text{ கோசை }45^\circ + W\,\frac{l}{2}\text{ சைன் }45^\circ = \frac{3}{2}W.l\text{ கோசை }45^\circ + W.l\text{ சைன் }45^\circ,$$

$$\therefore\ \frac{T}{2}+\frac{W}{2}=\frac{3}{2}W+W,$$

$$\therefore\ T = 4W.$$

உதாரணம் (v).

AB, AC என்னும் இரு பாரமான சமவளைகள் A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன ; இழையொன்றினுல் AC இன் நடுப்புள்ளியுடன் B இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வளைகள், B உம் C உம் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் இருக்குமாறு தங்கி நிற்கின்றன. கோணம் BAC = 60° ஆயின், ஒருவளையின் நிறைபற்றி இழையின் இழுவையைக்காண்க. (H.S.D.)



படம் 79.

D (படம் 79) ஐ AC இனதும், E ஐ AB இனதும் நடுப்புள்ளியாகக் கொள்க.

AB = AC உம், கோணம் BAC = 60° உம் என்பதனுல், ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும்.

எனவே, AC இற்கு BD செங்குத்தாகும்.

அவ்வளைகள் சமநிறை W ஐ உடையவையென்பதாலும் அந்நிறைகளின் கோடுகள் B, C என்பவற்றிலிருந்து சம தூரத்தில் இருப்பதாலும் B இலும் C இலுமுள்ள நிலைக்குத்து மறுதாக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் W இற்குச் சமம்.

(இதனை, **அவ்விரு வளைகளுக்கும்** C, B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்துங் காட்டலாம்.)

இழையின் இழுவையை T எனவும், ஒவ்வொரு வளையினதும் நீளத்தை l எனவுங் கொள்க.

A பற்றி AC இற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$T.\frac{l}{2}+W.\frac{l}{4}=W.\frac{l}{2},$$

$$\therefore \frac{T}{2}=\frac{W}{4}, \text{ அல்லது } T=\frac{W}{2}.$$

A இனுள்ள மறுதாக்கம் தேவைப்படின், அதைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

AC மீது, A இல் உள்ள பிணையலினது தாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத் துக் கூறுகளை முறையே X, Y என்க.

AC இற்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

$$X = T \text{ கோசை } 30° = \frac{\sqrt{3}}{4}W.$$

AC இற்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$Y + W = W + T \text{ சைன் } 30°,$$

$$\therefore Y = \frac{1}{2}T = \frac{W}{4}.$$

விளையுள் மறுதாக்கம் R,

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} = W\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{W}{2} \text{ இனலே தரப்படுகின்றது.}$$

இது கிடையுடன் கோணம்

$$\text{தான்}^{-1}\frac{Y}{X} = \text{தான்}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}},$$

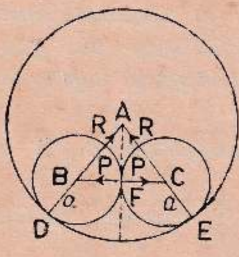
அ—து. கோணம் 30° இற் சாய்ந்திருக்கின்றது.

உதாரணம் (vi).

ஒவ்வொன்றும் a ஆரையும் W நிறையுமுள்ள இரு ஒப்பமான கோளங் கள் b ஆரையுள்ள ஒப்பமான கோளக் கிண்ணத்தில் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு இருக்கின்றன. அவற்றினிடையேயான தாக்கம்,

$$\frac{Wa}{\sqrt{b^2-2ab}}$$

என நிறுவுக. (H.S.D.)



படம் 80.

அக்கிண்ணத்தினதும் இரு கோளங்களினதும் மையங்களை A, B, C, (படம் 80) என்க.

இம்மையங்களை இணைக்கும் AB, AC என்னுங் கோடுகளில், கோளங்களின் கிண்ணத்துடனன தொடுகைப் புள்ளிகள் D, E என்பன இருக்கும். BC இல், அக்கோளங்களின் தொடுகைப் புள்ளி F இருக்கின்றது.

சமச்சீரின்படி, A இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே F அமைகின்றது.

கோணம் BAF $= \alpha$ எனின், AB $= b - a$ என்பதனல்,

$$\text{சைன் } \alpha = \frac{a}{b-a} \text{ உம்,}$$

$$\text{கோசை } \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - 2ab}}{b-a} \text{ உம் ஆகும்.}$$

D இலும் E இலும் அக்கிண்ணத்தின் மறுதாக்கங்கள் (சமச்சீரின்படி) சமவலுவுடையன.

ஒவ்வொன்றும் R இற்குச் சமமென்க.

இரண்டு கோளங்களுக்கும் நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$2\text{R கோசை } \alpha = 2\text{W},$$

$$\therefore \text{R} = \text{W சீக } \alpha.$$

ஒரு கோளத்திற்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

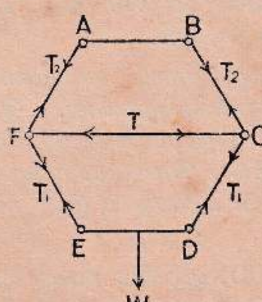
$$\text{P} = \text{R சைன் } \alpha,$$

இங்கு P, அக்கோளங்களிடையேயான தாக்கம்.

$$\therefore \text{P} = \text{W தான் } \alpha = \frac{\text{W}a}{\sqrt{b^2 - 2ab}}.$$

உதாரணம் (vii).

ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF வடிவில் ஆறு நிறையற்ற சம கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB கிடையாகத் தாங்கப்படுகின்றது. DE இன் நடுப்புள்ளியில் ஒரு நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்வறுகோணி வடிவம் ஓர் இலேசான கோல் CF இனுற் பேணப்படுகின்றது. கோல் CF இல் தகைப்பைக் காண்க.



படம் 81.

இச்சட்டப்படலை ABCDEF (படம் 81) குறிப்பதாகக் கொள்க.

கோல்கள் இலேசாக இருப்பதோடு, மூலைகளில் மட்டுமே விசைகளினால் தாக்கப்படுவதனால் (ED ஐத் தவிர), இவற்றின் தகைப்புக்கள் இவற்றின் நீளத்தின் வழியே இருக்கவேண்டும்.

CD அல்லது EF இலுள்ள இழுவையை T_1 எனவும், BC அல்லது FA இலுள்ளதை T_2 எனவும் கொள்க. இழுவை T_1 இன் நிலைக் குத்துக் கூறுகள் நிறை W ஐத் தாங்கவேண்டும்.

$$\therefore\ 2T_1 \text{ கோசை } 30^\circ = W,$$

$$\therefore\ T_1 = \frac{W}{\sqrt{3}}.$$

A அல்லது B இலுள்ள நிலைக்குத்துத் தகைப்பு தெளிவாக $\frac{W}{2}$ ஆகும்.

$$\therefore\ T_2 \text{ கோசை } 30^\circ = \frac{W}{2},$$

$$\therefore\ T_2 = \frac{W}{\sqrt{3}}.$$

CF இல் உதைப்பு T ஆயின், பிணையல் C இற்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

$$T = T_1 \text{ கோசை } 60^\circ + T_2 \text{ கோசை } 60^\circ,$$

$$= \frac{W}{2\sqrt{3}} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\ T = \frac{\sqrt{3}}{3} W.$$

பயிற்சி XIII.

1. ஒவ்வொன்றும் W நிறையான மூன்று சீரான சமகோல்கள், ஒரு சமபக்க முக்கோணிவடிவில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இம்முக் கோணி, அதன் பக்கங்களில் ஒன்றின் நடுப்புள்ளியிலே தாங்கப்படின், மூட்டுக்களில் தாக்கங்களைக் காண்க.

2. ABCD என்னும் ஒரு சதுரம், சுயாதீனமாக ஒருமித்து மூட்டிய நான்கு சமமான சீர்க் கோல்களினாலாயது. இவ்வொழுங்கு, கீழ்மூட்டு C இலே தாங்கப்பெற்றும், C ஐயும் A ஐயும் தொடுக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் அவ்வடிவத்தில் பேணப்பட்டுமுள்ளது. இக்கோலினுள்ள உதைப்பையும், மூட்டுக்கள் B அல்லது D இன் தாக்கத்தினது பருமனையும் திசையையுங் காண்க.

3. ஒரு சாய்சதுரம் ABCD, ஒருமிக்க மூட்டியிருக்கும் நான்கு சமமான சீர்க் கோல்களினாலாயது. இவ்வொழுங்கு, மூட்டு A இலிருந்து தொங்கவிடப் பெற்றும், கோணம் CAD = 30° எனக்கொண்டு, A ஐயும் C ஐயும்

தொடுக்கும் ஓர் இழையினுல் அவ்வடிவத்திற் பேணப் பெற்றுமுள்ளது. இழையின் இழுவையையும் B அல்லது D இல் மறுதாக்கத்தின் பருமனையுந் திசையையும் காண்க.

4. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, BC என்னும் சரிசமமான இரு சீர்க் கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரு நிலைத்த கிடைக் கம்பிமீது உராயாமல் A, C என்னும் முனைகள் இயங்குமாறு, தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள சிறிய வளையங்கள் அக்கோல்களில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அக்கோல்கள், கம்பிக்குக் கீழே மூட்டு B இருக்கக்கொண்டு ஒரு செங்கோணத்தை உள்ளடக்குமாறு வைக்கப்பட்டும், கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு விறைப்பான தடையினுல், மூடப்படாது தடுக்கப்பட்டுமுள்ளன. இத்தடையிலுள்ள தகைப்பையும் A, B, C என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க. (H.C.)

5. AB, BC என்னும் இரு சமநீளக் கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB இன் நிறை W உம், BC இன் நிறை 2W உம் ஆகும். அவை, A, C என்னும் முனைகளை ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது கொண்டு, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையைப் பேண A இலும் C இலும் எக்கிடைவிசைகள் பிரயோகிக்கப்படவேண்டும்? (I.E.)

6. ஒரே ஆக்கப்பொருளினுலான, ஒரே குறுக்கு வெட்டுள்ள AB, BC என்னும் இரு கோல்களின் நீளம் முறையே a, b அடியாகும். இவை B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. ABC ஒரு செங்கோணமாக அமையுமாறு, ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இவற்றின் A, C என்னும் முனைகள் இணைக்கப்பட்டு இவை தொங்குகின்றன. ஓரடி கோலின் நிறை W இரு. ஆயின், மூட்டு B இலும் A, C என்னும் இணைப்புப் புள்ளிகளிலும் மறுதாக்கங்களைக் காண்க. (I.E.)

7. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் a நீளமுமுள்ள இரு சீரான ஏணிகள், அவற்றின் மேன்முனைகளிற் பிணைக்கப்பட்டு ஒப்பமான கிடைத் தளமொன்றில் நிற்கின்றன. அவ்வேணிகளில் ஒன்றின் அடியிலிருந்து b தூரத்திலுள்ள படியொன்றில் ஒரு W நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதோடு, அவ்வேணிகள், அவற்றின் கீழ் முனைகளுடன் இணைத்த $2c$ நீளக் கயிறென்றினுற் சறுக்காது தடுக்கப்பட்டுமுள்ளன. நிலத்தின் மீது ஒவ்வோர் ஏணியினதும் தாக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவையையுங் காண்க.

8. ஒரே ஆக்கப்பொருளினுலானவையும், ஒரே தடிப்பும் வெவ்வேறான நீளங்களுமுள்ளனவுமான AB, BC என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டும், A, C என்னும் முனைகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் நிலைப்பட்டுமுள்ளன. மூட்டு B இல் தகைப்பு, கோணம் ABC இன் இருகூறாக்கியான BD வழியே செயற்படுகிறதெனவும், அதன் பருமன்

$$\frac{1}{2}W\frac{BD}{AC}$$

எனவும் காட்டுக. இங்கு W, அவ்விருகோல்களினதும் நிறை.

9. 2W நிறையுள்ள ஒரு படியேணி இரு சம பகுதிகளாலாயது. அவை, உச்சியில் மூட்டப்பட்டும், உச்சிக்கும் அடிக்குமிடையே அரைவழியி லுள்ள கயிறு இறுக்கமாக இருக்கும்போது ஏணியின் பாதிகளிடையேயான கோணம் 2 தான்$^{-1}\frac{6}{13}$ ஆக ஆகுமாறு அக்கயிற்றினால் ஒருமிக்கக் கட்டபெற்றுமுள்ளன. அந்த ஏணியில் ஏறும் 5W நிறை மனிதன் ஒருவன் ஏணியின் நீளத்தில் மூன்றிலிரண்டு பங்கு சென்றதும் நிற்கிறான். ஏணிக் கும் நிலத்துக்கும் இடையேயான உராய்வினைத் தவிர்த்து, கயிற்றின் இழுவையையும் அப்பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.. (I.S.)

10. இரு சீர்ப் பலகைகள், அவற்றின் கீழ்முனைகளை ஓர் ஒப்பமான கிடைநிலத்திற் பொருந்தப்பெற்று ஒப்பமான சமாந்தரச் சுவர்களிற் சாய்ந் திருக்கின்றன. அப்பலகைகளின் நிறைகள் w, w' உம், நிலைக்குத்துடன் அவற்றின் சாய்வுகள் θ, θ' உம் ஆயின், சமநிலைக்கான நிபந்தனை w தான் θ $= w'$ தான் θ' ஆகுமென நிறுவுக. (I.A.)

11. சம நீளத்தையும் வெவ்வேறான அகலங்களையும் உடைய இரு பாரமான, தட்டையான செவ்வகப் பாப்புக்கள், அவற்றின் சமபக்க வழியே பிணைக்கப்பட்டும் அப்பிணையலானது கிடையாகவும் அதியுயர்வாகவும் இருக்கு மாறு ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டும் இருக்கின்றன. அவற் றின் கீழ்விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் ஓர் இழையினால் அவை சறுக்காது பேணப்படுகின்றன. அவற்றின் நிறைகள் W_1, W_2 உம், தளத்துடன் அவற்றின் சாய்வுகள் முறையே θ, ϕ உம் ஆயின், அப்பிணை யலில் அவற்றின் இடையேயான தாக்கமானது கிடையுடன்

$$\frac{W_1 \text{ தான் } \phi - W_2 \text{ தான் } \theta}{W_1 + W_2}$$

என்னும் தான்சனை உடைய கோணத்தை ஆக்குமென நிறுவுக. (H.S.D.)

12. ஒவ்வொன்றும் W நிறையான AB, BC, CD, DE, EA என்னும் ஐந்து சீரான சமகோல்கள் அவற்றின் முனைகளிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டும், ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி அமைப்பில் A இல் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டும் இருக்கின்றன. A ஐ C உடனும் D உடனும் இணைக்கும் இலேசான இழைகளினால் இவ்வுருவ அமைப்பு பேணப்படுகின்றது. B, E என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கண்டு, ஒவ்வோர் இழையினும் இழுவை 2W கோசை 18° ஆகுமெனக் காட்டுக. (H.S.D.)

13. மூன்று சமகோல்கள் AB, BC, CD உம் அவற்றைப்போல இருமடங்கு நீளமுள்ள கோல் AD உம், A, B, C, D ஆகியவற்றில் சுயா தீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப்படல், BC இன் நடுப்புள்ளியில் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அக்கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும்

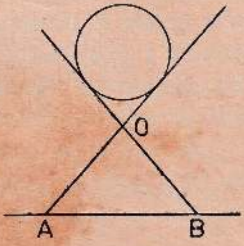
4978
Sun

நிறை w உம், மிக நீண்ட கோலின் நிறை $2w$ உம் ஆயின், அப்பிணையல்களின் மீதுள்ள விசைகளின் பருமன்களைக் காண்க. A, B என்பவற்றிலுள்ள விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் BC இற்குக் கீழே ஆழம் $\frac{BC}{\sqrt{3}}$ இற் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக. (H S.C.)

14. BC, CA, AB என்னும் மூன்று சீர்க் கோல்கள் முறையே 15, 20, 25 அங்குல நீளமும், அங்குலமொன்றிற்கு ஓர் அவுன்சு நிறையுமுள்ளன. இவை, நிறையற்ற ஊசிகளினால் இவற்றின் முனைகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கோல்கள் ஒரு படலினை உருவாக்குகின்றன. இப் படல் நீண்ட பக்கம் AB ஐக் கிடையாகக் கொண்டு சமநிலையில் இருக்கும் வண்ணம் AB இலுள்ள D என்னும் புள்ளியிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. AB இன் நடுப்புள்ளியிலிருந்து D இன் தூரத்தையும், இணைப்புக்களில் தகைப்புக்களையுங் காண்க. (Ex.)

15. AC, BC என்பன C இலும், AC ஆனது கிடையாகவும் கோணம் $ACB = \alpha°$ ஆகவுமிருக்குமாறு ஒரு சுவருடன் A இலும் B இலும் சுயாதீனமாக மூட்டப்பெற்றுள்ள இரு இலேசான கோல்கள். A இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே புள்ளி B உள்ளது. C இல் ஒரு W நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. AC இன் இழுவையையும், BC இலுள்ள உதைப்பையுங் காண்க. BC இன் நடுப்புள்ளியில் இருந்தும் W′ என்னும் நிறை தொங்கவிடப்பட்டிருப்பின், AC இன் இழுவை $\frac{1}{2}$ கோதா α $(W' + 2W)$ என நிறுவுக. (H.S.D.)

16. ஓர் ஒப்பமான மேசையில் A, B என்னும் முனைகள் தங்குமாறு O இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டும் ஓர் இழை AB இனாற் சமநிலையிற் பேணப்பட்டும் இருக்கும் இரு இலேசான கோல்களினிடையே, a ஆரையும் W நிறையும் உடைய ஒரு தட்டு, படம் 82 இல் உள்ளவாறு, தங்குகின்றது. $OA = OB = c$, $AOB = 2\alpha$; இம்முழுப்படமும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்திருக்கின்றது. இழையின் இழுவையைக் காண்க. (H.S.C.)



படம் 82.

17. முறையே 6 இரு., 3 இரு. நிறையுள்ள BA, AC என்னும் இரு பாரமான சீர்க் கோல்கள், ஒவ்வொன்றுடனும் A இலும், ஓர் இலேசான கோல் BC இற்கும் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. BC கிடையாக, BC இற்குக் கீழே A அமையுமாறு B, C என்பனவற்றில் உள்ள பிணையல்கள் நிலைக்குத்து இழைகளினாலே தாங்கப்படுகின்றன ; A இல் இருந்து BC இற்குள்ள செங்குத்தின் நீளம் 3 அடி. அதனடி, BD 2 அடியாகவும் DC 4 அடியாகவும் இருக்குமாறு BC ஐப் பிரிக்கின்றது. A இல் மறுதாக்கம் கிடையாகுமெனை நிறுவுக ; BC இல் மறுதாக்கத்தினையும் உதைப்பினையும் காண்க. (H.S.D.)

18. எல்லா வகையிலும் ஒத்திருப்பனவும், ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ளதுமான AB, BC என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள், ABC ஆனது ஒரு செங்கோணமாகுமாறு B இல் விறைப்பாக மூட்டப் பட்டுள்ளன. இவ்விரு கோல்களும் சமநிலையிலே தொங்கும் நிலைத்த புள்ளியொன்றுடன் முனை A சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB ஆனது நிலைக்குத்துடன் தான் $^{-1}\,\frac{1}{3}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக. அக்கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக இணைக்கப் பட்டும், ABC ஒரு செங்கோணமாக அமையத்தக்க நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீளா இழையினால் A உம் C உம் இணைக்கப்பட்டும் இருப்பின், இழையின் இழுவை $\frac{3W}{2\sqrt{5}}$ எனக் காட்டுக. (H.C.)

19. முறையே W, W′ நிறையுள்ள AB, BC என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளி A இற் சுயாதீனமாகச் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதே சமயத்தில், தவிர்க்கத்தக்க திணிவுள்ள ஒரு சிறு ஒப்பமான வளையம் ஒன்றின் மூலமாக, A ஊடாய்ச் செல்லும் ஒரு நிலைத்த கிடைக் கம்பி மீது முனை C நகருமாறு செய்யப்பட்டுள்ளது. CAB, ACB என்னுங் கோணங்கள் முறையே θ, ϕ ஆகவும், AC இற்குக் கீழாக B ஐயுங் கொண்டுள்ள நிலையில் அக்கோல்களைப் பேண C இற் பிரயோகிக்கவேண்டிய கிடைவிசை

$$\tfrac{1}{2}(W + W') \text{ கோசை } \phi \text{ கோசை } \theta \text{ கோசீ } (\theta + \phi)$$

எனக் காட்டுக. (H.C.)

20. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் α கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்கள் ஒரு பொதுக் கிடைக் கோட்டினை உடையன. W நிறையுள்ள ஒரு சீருருளை ஒவ்வொரு தளத்தையும் ஒரு பிறப்பாக்கியின் வழியே தொட்டுக் கொண்டு அவற்றினிடையேயுள்ள வெளியில் தங்கியிருக்கின்றது. W′ நிறையான வேறொரு சீருருளை முதல் உருளைக்கும் அத்தளங்களில் ஒன்றிற்கும் இடையே வைக்கப்பட்டுள்ளது ; இந்நிலையில், அவ்விரு உருளைகளினதும் அச்சினூடான தளம் கிடையாகுமாறு இரண்டாம் உருளையின் ஆரை அமைந்திருக்கின்றது. இத்தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின், அத்தளங்களிற்கும் உருளைகளிற்கும் இடையேயுள்ள மறுதாக்கங்களையும், இரு உருளைகளுக்கும் இடையேயான மறுதாக்கத்தையும் கண்டு, W இலும் பார்க்க W′ அதிகமாக இருப்பின் சமநிலை சாத்தியமாகாதெனக் காட்டுக. (H.C.)

21. சம நீளமும் வெவ்வேறான நிறையுமுடைய AB, BC என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள் B இற் சுயாதீனமாகப் பொருத்தப்பட்டும், ABC ஒரு செங்கோணமாகத்தக்க இடைத்தூரத்தில் ஒரே கிடைக் கோட்டில் அமைந்திருக்கும் A, C என்னும் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டும் இருக்கின்றன. B இலுள்ள மறுதாக்கத்தினது திசை, கோல் BA உடன் ஆக்கும் கோணத்தின் தான்சன், AB இன் நிறைக்கும் BC இன் நிறைக்கும் உள்ள விகிதமெனக் காட்டுக. (I.S.)

22. A இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டும் B, C என்பவற்றை ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்திற் கொண்டும் தங்கும் W_1, W_2 நிறைகளையுடைய AB, AC என்னும் இரு சீர்ச் சமநீளக் கோல்கள், BC ஐ இணைக்கும் ஒரு நீளா இழையினாற் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றன. AC இல் A இலிருந்து $\frac{3}{4}$AC தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு w நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழையின் இழுவை

$$\tfrac{1}{4}(W_1 + W_2 + \tfrac{1}{2}w) \text{ தான் } \tfrac{1}{2}A \qquad \text{(L.S.)}$$

என நிறுவுக.

23. ஒரு படியேணியின் ஒவ்வொன்றும் $5\frac{1}{2}$ அடி. நீளமான இரு பாதிகள், அவற்றின் சுயாதீன முனைகளிலிருந்து 16 அங்குல தூரத்தில் அவற்றிலிருக்கும் புள்ளிகளுடன் இணைத்த 28 அங்குல நீள நாண் ஒன்றினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. படிகளுடன் கூடிய பாதியின் நிறை 16 இரு.; மற்றப்பாதியின் நிறை 4 இரு. அந்நாண் பூரணமாக நீட்டப்பட்டு இருப்பதோடு, அவ்வேணிக்கும் நிலத்துக்கும் இடையே மறுதாக்கங்கள் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கின்றனவெனக் கொண்டு, அவ்வேணியின் உச்சியிலிருந்து $1\frac{1}{2}$ அடியில் 11 கல் நிறை மனிதனொருவன் நிற்கும்போது நாணின் இழுவையைக் காண்க. (I.S.)

24. கிடையான அச்சையும் ஆரை b ஐயும் உடைய ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான பொள்ளுருளையின் உட்புறமாக, ஒவ்வொன்றும் a ஆரையுள்ள இரு ஒப்பமான சம உருளைகள் சமச்சீராகவும் நெடும்பாட்டாகவும் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சம ஆரையும் இரட்டை நிறையுமுள்ளதொரு மூன்றாவது உருளை அவற்றின் மீது சமச்சீராக வைக்கப்பட்டிருப்பதுடன், எல்லா அச்சுக்களும் சமாந்தரமாகவும் இருக்கின்றன. $a(1+\sqrt{13})$ இலும் b அதிகமாயின், இம்மூன்றாவது உருளை அவ்விரு உருளைகளையும் விலக்கும் என நிறுவுக. (H.S.D.)

25. ஒவ்வொன்றும் $16\frac{1}{4}$ அடி நீளமும் 10 இரு. நிறையுமுள்ள **OA**, **OB** என்னும் இரு சம கோல்கள் **O** இல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் மற்றைய முனைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது உள்ளன. இங்கு A, B, **O** என்பன ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. $20\frac{2}{5}$ அடி. நீள இழையொன்று A ஐயும் B ஐயும் இணைப்பின், (i) **O** இல் தாக்கத்தையும், (ii) A இலும் B இலும் தாக்கங்களையும், (iii) இழையில் இழுவையையுங் காண்க.

26. h உயரமுள்ள ஒரு கனவடிவப் பெட்டி முரடான மட்ட நிலத்தில் இருக்கின்றது. $2a$ நீளமும் W நிறையுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் கிடையுடன் θ கோணத்தில் இப்பெட்டியில் சமச்சீராகச் சாய்ந்திருக்கின்றது. கோலினது உச்சி, பெட்டிக்கு மேற்புறமாக நீட்டியிருக்கின்றது. அந்நிலம் சறுக்குதலைத் தடுக்கக்கூடியளவு முரடானது; கோலிற்கும் பெட்டிக்குமிடையேயுள்ள தொடுகை ஒப்பமானது. $\theta < 45°$ ஆயின், கோலின் தாக்கம் அப்பெட்டியைக் கவிழ்க்க நாடாதென நிறுவுக. $\theta > 45°$ ஆக இருக்கும்போது,

பெட்டியைக் கவிழ்க்க நாடும் இணையின் திருப்புதிறனைக் காண்க. அதோடு, $\theta = 69° \ 6'$ ஆக இருக்கும்போது, இது உச்சமாக இருக்குமெனக் காட்டுக. (H.S.C).

27. ஒரு வட்டவுருளை, அதன் நீளவழியே ஒரு சாய்தளத்தைத் தொட்டும் அதன் அச்சினைக் கிடையாகவுங் கொண்டு, அவ்வுருளைக்குச் சமமான நிறையுள்ள ஒரு கோல் AB இனாற் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. இக் கோல் உருளைக்குக் கீழே தளத்தில் A இற் பொருத்தப் பட்டுள்ளது. இது மேன்முனை B இல், அவ்வுருளையின் தொடலியாகவும் இருக்கின்றது. அக்கோலினூடான நிலைக்குத்துத்தளம் அதியுயர் சரிவு கோட்டில் சாய்தளத்தை வெட்டுவதுடன், உருளையின் புவியீர்ப்பு மையத்தினையும் கொண்டிருக்கின்றது. பரப்புக்கள் யாவும் ஒப்பமாயின்,

$$\text{தான் } \alpha = \frac{\text{சைன் } 2\theta}{5 - \text{கோசை } 2\theta}$$

என நிறுவுக. இங்கு α, கிடையுடன் அத்தளத்தினது சாய்வு ; θ, தளத்துடன் கோல் AB ஆக்கும் கோணம். (H.S.D.)

28. a ஆரையுள்ள இரு பாரமான சமவுருளைகள் ஒன்றையொன்று தொடும்படி, $b(>2a)$ ஆரையுள்ள ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த உருளையின் உட்புறமாக ஒரேமட்டத்தில் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; a ஆரையுள்ள மூன்றும் சம உருளையொன்று அவ்விரு உருளைகளின்மீதும் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. எல்லா உருளைகளினதும் அச்சுகள் கிடையானவை, சமாந்தரமானவை. $b < a(1 + 2\sqrt{7})$ ஆயின், கீழிரண்டு உருளைகளும் ஒன்றையொன்று பிரியாது எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

29. கிடையான விளிம்பும் a ஆரையுமுள்ள ஓர் ஒப்பமான அரைக் கோளக் கிண்ணத்தில் ஒரு பகுதியை உள்ளேயும் மற்றப்பகுதியை வெளியேயும் கொண்டு l நீளச் சீர்க் கோலொன்று சமநிலையிலே தங்கியிருக்கின்றது. l கோசை $\theta = 4a$ கோசை 2θ இனால், கிடையுடன் அக்கோலின் சாய்வு θ நிர்ணயிக்கப்படுமெனக் காட்டுக. $4a$ இற்குக் குறைவாகவும்

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

இற்கு அதிகமாகவும் l இருக்க வேண்டுமெனவும் காட்டுக. (C.S.)

30. ஓர் இலேசான சமபக்க முக்கோணி ABC அதன் மையத்தினூடான ஓர் அச்சைப் பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சுயாதீனமாகச் சுழல வல்லது. அதன் மூலைகள் A, B, C இல் முறையே 3, 4, 5 இரு. நிறைகள் இணைக்கப்பட்டு இருக்கின்றன. அதேசமயத்திற் சமநிலையைப் பேண, AB வழியே P என்னும் விசை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. A இனூடான கீழ்முக நிலைக்குத்துடன், AB θ கோணத்திற் சாய்ந்திருப்பின் P இன் பருமனைக் காண்க. θ இன் சார்பாக P ஐக் குறித்து (அல்லது வேறுவிதமாக) θ இன் எப்பெறுமானங்களுக்கு (i) P உச்சமாகவும், (ii) P பூச்சியமாகவும் இருக்கிறதென்பதைக் காண்க. (N.U.)

31. தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு நேர்கோல் ABC கிடையாகவும், ஓர் ஒப்பமான பிணையல் A இற் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டும் இருக்கின்றது. C இல் ஒரு 200 இரு. நிறை தொங்குகிறது. இக்கோல், அதன் நடுப்புள்ளி B இல், தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு விறைப்பான சீர்க்கோல் BD இனுல் தாங்கப்பெறுகின்றது. D என்பது A இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே, AD = AB என நிலைப்படுத்திய ஓர் ஒப்பமான பிணையல். D இலும் B இலுமுள்ள தகைப்புக்களின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் காண்க.

32. ஒரு படியேணியின் W_1, W_2 என்னும் நிறையுள்ள இரு பகுதிகளும் சீராகவும் ஒரே நீளமுள்ளனவாகவும், உச்சியில் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டுமுள்ளன. அவ்வேணி, அதன் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் α கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கப்பெற்று முரடான கிடைத் தளமொன்றின் மீது தங்கின், ஒவ்வொரு பகுதியின் அடியிலும் செங்குத்து மறுதாக்கங்கள் $\frac{1}{4}(3W_1 + W_2)$ உம், $\frac{1}{4}(W_1 + 3W_2)$ உம் ஆகுமென நிறுவி, ஒவ்வொரு பகுதியினதும் அடியில் உராய்வு விசைகளைக் காண்க. (N.U.3.)

33. முறையே 5, 4 அடி நீளமும் 20, 10 இரு. நிறையுமுள்ள AB, BC என்னும் இரு சீர்ச்சட்டங்கள் B இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. ஓர் ஒப்பமான சுழற்சித் தானத்தினுல், சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் முனை C சுழலுமாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளது. AB இன் கீழ் வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தாங்கியினுல் அச்சட்டங்கள் ஒரே கிடைக் கோட்டிற் பேணப்படுகின்றன. அத்தாங்கியின் நிலையத்தினையும் C இல் மறுதாக்கத்தினையும் காண்க. (N.U.3.)

34. எல்லா வகையிலும் சமமான, தட்டையான முனைகளை உடைய மூன்று ஒப்பமான வட்ட உருளைகள், அவற்றின் அச்சுக்களைக் கிடையாகக் கொண்டு பிறப்பாக்கிகளின் வழியே ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. அதோடு, கீழுள்ள உருளைகளின் அச்சுக்களைக் கொண்டிருக்கும் தளமும் கிடையானது. அவை, கீழுள்ள உருளைகளினது அச்சுக்களின் முனைகளுக்கு, இவ்வச்சுக்களுக்குச் செங்குத்தாக, இணைத்த இழைகளினுற் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றன. ஒவ்வோர் இழையும் நிலைக்குத்துடன் θ இற் சாய்ந்திருக்கின்றது. கீழுள்ள உருளைகளினிடையே தாக்கம்

$$\frac{W(3\sqrt{3}\ \text{தான்}\ \theta - 1)}{2\sqrt{3}}$$

என நிறுவுக. இங்கு W, ஒவ்வோர் உருளையினதும் நிறை. $3\sqrt{3}$ இலும் பார்க்க கோதா θ அதிகமாயின் என்ன நிகழும்? (H.C.)

35. ஒவ்வொன்றும் 4 அடி நீளமும் 5 இரு. நிறையுமுள்ள AB, AC என்னும் இரு சீர்ச் சம கோல்கள் A இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. அவை, 1 அடி ஆரையுள்ள ஒப்பமான, நிலைத்த கோளம் ஒன்றின் மீது, அதன் மையத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே A அமையு

மாறு சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையின்போது, அக்கோல்களின் இடைக் கோணம் செங்கோணம் எனக் காட்டி அப்பொருத்தில் மறுதாக்கத்தின் பருமனைக் காண்க. (N.U. 3 உம் 4 உம்.)

36. m திணிவும் $2a$ நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் அதன் கீழ்முனையில், ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இற் சுழலுமாறு பொருத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒரு முனையுடனும் O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $2a$ தூரத்தில் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடனும் இணைத்த ஓர் இலேசான இழை, அக்கோலின் சுயாதீன மேல் முனையிலிருக்கும் ஒரு சிறு ஒப்பமான தவாளிப்பின் மேலாகச் சென்று, மறுமுனையில் ஒரு திணிவு M ஐக் காவுகிறது. சமநிலைத் தானத்தில் நிலைக்குத்துடன் அவ்விழையின் மேற்பகுதியின் சாய்வைக் காண்க. (N.U.3.)

37. ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் a நீளமுமுள்ள AB, CD என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள் O இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இங்கு $OB = OD = b$. அக்கோல்கள், A, C என்னும் முனைகளை ஓர் ஒப்பமான மேசையின் மீது கொண்டும், B, D என்னும் முனைகள் ஓர் இலேசான இழையினால் இணைக்கப்பெற்றும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றன. அப்பொருத்தில் மறுதாக்கம் $\frac{aW}{2b}$ தான் α என நிறுவுக. இங்கு α, நிலைக்குத்துடன் கோல் எதினதும் சாய்வு. (C.W.B.)

38. ஒரு மீள்தகவின்றிய இழையின் ஒரு நுனி ஓர் ஒப்பமான சீர்க் கோலின் முனையுடனும், மற்றைய நுனி அக்கோலில் வழுக்கிச் செல்லும் ஓர் இலேசான வளையத்துடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழை ஓர் ஒப்பமான சிறிய முளையின் மேலாகத் தொங்குகிறது. நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வு 45° இலும் குறையாதெனவும், அச்சாய்வு θ ஆயின்,

$$a \text{ தான்}^3\,\theta = l(1 + \text{தான்}^2\,\theta)$$

எனவும் காட்டுக. இங்கு l, இழைநீளமும், a கோலின் நீளமுமாம்.

39. கிடையான விளிம்பையுடைய ஓர் ஒப்பமான, நிலைத்த அரைக் கோளக் கிண்ணத்தின் உட்புறத்தில், 6W நிறைத் துணிக்கையொன்றுள்ளது. இத் துணிக்கை, கிண்ணத்தின் விளிம்பின் மேலாகச் சென்று நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் ஓர் இழையினால் W நிறையான இன்னொரு துணிக்கையுடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத் தானத்தில் முதல் துணிக்கையினூடான ஆரையானது நிலைக்குத்துடன் கோணம் சைன்$^{-1}(\frac{1}{8})$ ஐ ஆக்குகிறதென நிறுவுக. (I.S.)

40. A பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்ல ஒரு கோல் AB இன்னொரு கோல் BC உடன் B இல் ஒப்பமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இதன் முனை C ஆனது A இனூடாகச் செல்லும் ஓர் ஒப்பமான தவாளிப்பில் தங்குமாறு நிர்ப்பந்திக்கப்பட்டுள்ளது. CA வழியே BC இல் விசை F பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. AB இல் ஆக்கப்படும் இணை F.AK என நிறுவுக. இங்கு K, AC இற்கு A இல் உள்ள செங்குத்தை, நீட்டப்பட்ட BC வெட்டும் புள்ளி. (I.E.)

41. h உயரமான வீட்டுச் சுவரொன்றில் நிலைக்குத்தாகச் சாய்ந்திருக்கும் l நீள ஏணியொன்று வீட்டின் உச்சியிலிருந்து நிலத்திற்கு ஒரு கயிற்றினால் மெல்ல இறக்கப்படுகின்றது. ஏணியின் அடி எப்போதும் சுவரின் அடியிற் சுழலும் ; சுவருக்குச் செங்குத்தானதொரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அவ்வேணி இயங்கும். ஏணியின் உச்சிக்கு அக்கயிறு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணியின் உச்சி சுவரை விட்டு இறங்கும் தறுவாயில், கயிற்றின் தொடக்க இழுவை

$$W\frac{h-l}{2h}$$

என நிறுவுக. (H.S.C.)

§84. இனி, தந்த பருமன்களையும் தாக்கக் கோடுகளையும் உடைய பல விசைகளின் விளையுள் தேவைப்படும் சில சந்தர்ப்பங்கள் பற்றி ஆராய்வோம்.

அவ்விசைகள் எதன் மீது செயற்படுகின்றன என்பதைப் பற்றி வழக்கமாகக் கூறப்படுவதில்லை. எனினும், ஏற்கெனவே கூறியவாறு, இது அவற்றின் விளையுளைப் பாதிப்பதில்லை. அவை தாக்கும் பொருள் விறைப்பாயிருப்பின் அவற்றின் விளைவு ஒரேமாதிரியானதாயிருக்கும்.

அவ்விசைகளைச் செங்கோணங் கொண்ட இரு திசைகளிலே துணித்து, இத்திசைகளிலே துணித்த பகுதிகளைக் கூட்டி, இவ்வாறு பெற்ற இரு கூறுகளையும் ஒரு தனி விசையாகக் கூட்டி விளையுளின் பருமன் பொதுவாகப் பெறப்படுகின்றது.

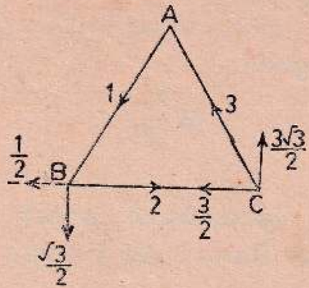
இவ்விரு கூறுகளினதும் விகிதம், விளையுளினது திசையை, அ-து. துணித்த திசைகளில் ஒன்றுடன் அது ஆக்கும் கோணத்தின் தான்சனைத் தருகின்றது.

தாக்கக் கோட்டின் தானத்தைத் தீர்மானிக்க, அதில் உள்ள ஒரு புள்ளியைக் கண்டு அதனையும் திசையையும் கொடுக்கலாம் ; அல்லது, சிலவேளைகளில் தந்த இரு கோடுகளை விளையுள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்பது எளிதாயிருக்கும் ; திருப்புதிறன்களைக் கணித்துப் பின்னையவற்றை அடிக்கடி வசதியாகப் பெறலாம். பொது முறையொன்றையும் விதிக்கக் கூடாது. ஏனெனில், தேவையான முடிவைப் பெறுவதற்கான மிகக் குறுகிய முறை வெவ்வேறு இடங்களில் கணிசமாக வேறுபடுகின்றது.

பின்வரும் உதாரணங்களில் வெவ்வேறு முறைகள் கையாளப்படுகின்றன.

உதாரணம் (i).

$2a$ பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணியின் மூன்று பக்கங்களின் வழியேயும் ஒழுங்காகத் தாக்கும் 1, 2, 3 அலகுள்ள மூன்று விசைகளினது விளையுளின் பருமன், திசை, தாக்கக் கோடு என்பனவற்றைக் காண்க.



படம் 83.

சமபக்க முக்கோணி ABC இன் AB, BC, CA என்னும் பக்கங்கள் வழியே, படம் 83 இற்போல, முறையே விசைகள் 1, 2, 3 என்பன தாக்குவதாகக் கொள்க.

BC வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் அவ்விசைகளைத் துணிக்க.

விசை 1, CB வழியே B இலே தாக்கும் $\frac{1}{2}$ இற்கும், BC இற்குச் செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி B இலே தாக்கும் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ இற்கும் சமவலுவுடைத்து.

விசை 3, CB வழியே C இலே தாக்கும் $\frac{3}{2}$ இற்கும், BC இற்குச் செங்குத்தாக C இல் மேனோக்கித் தாக்கும் $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ இற்கும் சமவலுவுடைத்து.

BC வழியேயான கூறுகள் விசை 2 ஐச் சமன்செய்கின்றன. இப்போது B இல் $\frac{\sqrt{3}}{2}$, C இல் $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ என்னும் நிகராச் சமாந்தர விசைகளே எஞ்சியுள்ளன.

அவற்றின் விளையுள், நீட்டப்பெற்ற BC இலுள்ள ஒரு புள்ளி D இல் BC இற்குச் செங்குத்தாக மேனோக்கித் தாக்கும் $\sqrt{3}$ ஆகும்.

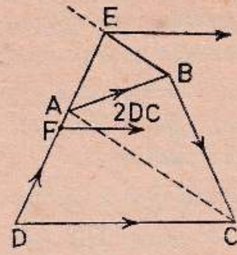
இங்கு, $$\frac{3\sqrt{3}}{2}\,CD = \frac{\sqrt{3}}{2}\,BD.$$

அல்லது, $$3CD = BD.$$

அல்லது, $$CD = \tfrac{1}{2}BC = a.$$

உதாரணம் (ii).

ABCD, தந்ததொரு நாற்பக்கல் ; AB, BC, DC (வட்ட வரிசை குழப்பப்பட்டுள்ளது), DA என்னும் பக்கங்களினால், விசைகள் பருமனிலும் தாக்கக் கோடுகளிலும் போக்குகளிலும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. விளையுளினது பருமனையும் தாக்கக் கோட்டையுங் காண்க. (I.S.)



படம் 84.

விசைகள் AB, BC (படம் 84) என்பனவற்றின் விளையுளானது AC இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் B இலே தாக்குகின்றது.

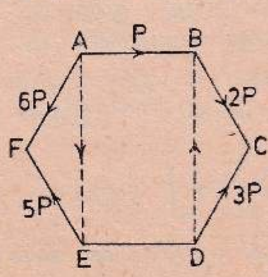
இவ்விசையினதும் DA இனதும் விளையுளானது, DC இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் இருப்பதோடு, B இனூடான, CA இற்குச் சமாந்தர மான கோட்டினை நீட்டப்பட்ட DA சந்திக்கும் E இலே தாக்குகின்றது.

இப்போது, ஒவ்வொன்றும் DC இற்குச் சமமானதும், ஒன்று DC வழியேயும் மற்றது DC இற்குச் சமாந்தரமாக E இலும் தாக்குவன வான இரு சமாந்தர விசைகள் இருக்கின்றன.

அவற்றின் விளையுள், DE இன் நடுப்புள்ளி F இலே தாக்கும் விசை 2DC ஆகும்.

உதாரணம் (iii).

ABCDEF, ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி ; AB, BC, DC, EF, AF என்பனவற்றின் வழியாக முறையே P, 2P, 3P, 5P, 6P என்னும்



படம் 85.

விசைகள் தாக்குகின்றன. இவற்றுடன் சேர்ந்து ஓர் இணைக்குச் சமான மாகுமாறு ED வழியே தாக்கும் ஒரு விசையைத் தீர்மானிக்கலாம் எனக் காட்டி, அவ்விணையின் திருப்புதிறனைக் காண்க. (I.S.)

அறுகோணியை வரைந்து, விசைகளைப் படம் 85 இற் போல இடுக.

[இதனைப் போன்ற இடங்களில் யாதுமொரு திசையிலே துணித்த பகுதி களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாக இருக்கிறதா என்பதை அறிய விசைகளின் பருமனையும் திசைகளையும் கவனிப்பது பயனுடைத்து.]

AB இற்கோ, ED இற்கோ செங்குத்தாகத் துணிக்குமிடத்து, திசை AE இல் 6P கோசை 30° ஐயும், திசை EA இல் 5P கோசை 30° ஐயும் பெறுகின்றமையை நாம் கவனிக்கின்றோம்.

இவற்றின் விளையுள், திசை AE இல் P கோசை 30° ஆகும்.

விசைகள் 2P, 3P என்பன திசை DB இல் 3P கோசை 30° ஐயும், திசை BD இல் 2P கோசை 30° ஐயும் தருகின்றன.

இவற்றின் விளையுள், திசை DB இல் P கோசை 30° ஆகும்.

இது, AE வழியே P கோசை 30° உடன் ஓர் இணையை ஆக்கு கின்றது.

AB, ED என்பனவற்றின் வழியே துணிக்க,

$$-6\,\text{P கோசை } 60^\circ + \text{P} + 2\text{P கோசை } 60^\circ, \quad \text{AB வழியே,}$$

$$= -3\text{P} + \text{P} + \text{P},$$

$$= -\text{P}, \quad \text{AB வழியே.}$$

அதோடு,

$$-5\text{P கோசை } 60^\circ + 3\text{P கோசை } 60^\circ, \quad \text{ED வழியே,}$$

$$= -2\text{P கோசை } 60^\circ, \ \text{ED வழியே,}$$

$$= -\text{P}, \ \text{ED வழியே.}$$

எனவே, ED வழியே ஒரு விசை 2P ஐப் புகுத்தின், வேறோர் இணையை உருவாக்கும் $+\text{P}, -\text{P}$ என்பனவற்றை முறையே ED, BA வழியே பெறலாம். இத்தொகுதி முழுவதும் இரு இணைகளுக்கு, ஆகவே ஒரு தனி இணைக்குச் சமவலுவுடைத்து.

அவ்வறுகோணியின் பக்கம் a ஆயின், AE, DB என்பனவற்றின் வழியேயான விசைகள் P கோசை 30° இனால் ஆக்கப்படும் இணையின் திருப்புதிறன்

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\text{P}a \circlearrowleft \text{ ஆகும்.}$$

BA, ED என்பனவற்றின் வழியேயான விசைகள் P இனால் ஆக்கப் படும் இணையின் திருப்புதிறன்

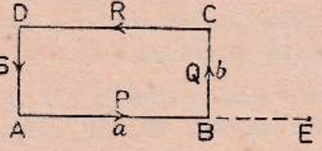
$$\text{P}.\sqrt{3}.a \circlearrowleft \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, விளையுள் இணையின் திருப்புதிறன்

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}Pa \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் (iv).

ஒரு செவ்வகம் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியாக AB, BC, CD, DA என்னும் திசைகளில் முறையே P, Q, R, S என்னும் நான்கு விசைகள் தாக்குகின்றன. $AB = a$ உம், $AD = b$ உம் ஆயின், இவ்விசைத் தொகுதியினது விளையுளின் பருமனையும் விளையுளின் தாக்கக் கோடானது AB, AD என்னும் பக்கங்களை வெட்டும் புள்ளிகளிலிருந்து A இன் தூரங்களையுங் காண்க.



படம் 86.

செவ்வகம் ABCD ஐ வரைந்து, படம் 86 இற் போல விசைகளை இடுக. AB இற்குச் சமாந்தரமாகத் துணிக்க, துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை, $P-R$ ஆகும். அதோடு, AB இற்குச் செங்குத்தாகத் துணிக்க, துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை, $Q-S$ ஆகும்.

விளையுளின் பருமன்,

$$\sqrt{(P-R)^2+(Q-S)^2} \text{ ஆகும்.}$$

விளையுள், AB ஐ A இல் இருந்து x தூரத்தில் புள்ளி E இல் வெட்டின், விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின்மீது E இருப்பதனால் அதனைப் பற்றி விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\ Q(x-a) = Rb + Sx,$$

$$\therefore\ x(Q-S) = Rb + Qa,$$

$$\therefore\ x = \frac{Rb+Qa}{Q-S}.$$

இதே மாதிரியாக, விளையுளானது AD ஐ A இல் இருந்து y தூரத்தில் புள்ளி F இல் வெட்டின், F பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Py = Qa + R(b+y),$$

$$\therefore\ y(P-R) = Qa + Rb,$$

$$\therefore\ y = \frac{Qa+Rb}{P-R}.$$

குறிப்பு.—

R இனும் பார்க்க P அதிகமாயின் (மேலே ஏற்றுக் கொண்டாற்போல), A இற்குக் கீழ் F இருக்கும்.

P இனும் பார்க்க R அதிகமாயின், A இற்கு மேல் F இருக்கும்.

Q இனும் பார்க்க S அதிகமாயின், E, A இன் வலப்பக்கத்தில் இருப்பதற்குப் பதிலாக, படம் 86 இற் போல, இடப்பக்கத்தில் இருக்கும்.

பயிற்சி XIV.

1. A, B, C என்பன ஒரு கோடு ABCD இல், $AB = BC = a$ எனவாகுமாறு இருக்கும் மூன்று புள்ளிகள். A, B, C என்பன வற்றில் AD உடன் 60°, 120°, 270° கோண திசைகளில் முறையே 3, 6, 4 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவை ஒரு தனி விசையாகச் சுருங்கும் எனக் காட்டி அதன் தாக்கக் கோடானது AD ஐ எங்கே வெட்டுகிறது என்பதைக் காண்க. (I.S.)

2. ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் 3, 4, 5 அடி பக்கங்கள் வழியாக முறையே விசைகள் 3P, 4P, 5P வரிசைக் கிரமமாகத் தாக்கு கின்றன. இவ்விசைகளுடன் சமநிலையைப் பேணவல்லனவும் 5 அடி நீளப் பக்கத்தின் முனைகளிலும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் தாக்கு வனவுமான விசைகளைக் காண்க.

3. 4 அடி குத்துயரமுள்ள சமபக்க முக்கோணியொன்றின் BA, AC, BC என்னும் பக்கங்கள் வழியாக முறையே 3, 3, 5 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. A இல் இருந்து விளையுளின் தாக்கக் கோட்டினது தூரத்தைக் காண்க. (I.A.)

4. ஒரு சதுரம் ABCD இனது BC, CD என்னும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F ஆகும். முறையே AB, AE, FA, AD என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும் 2, 5, 10, 1 அலகு விசைகளின் விளையுளினது பருமனையும் திசையையும் காண்க. (I.A.)

5. ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC இன் AB, AC, BC என்னும் பக்கங்களின் வழியே, இவ்வெழுத்துக்களினாற் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே 4, 2, 1 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள், BC இற்குச் செங்குத்தான ஒரு திசையில் தாக்கும் $3\sqrt{3}$ இரு. விசையாகுமெனநிறுவி, அதன் தாக்கக் கோடானது BC ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் காண்க. (I.A.)

6. ஒரு சதுரம் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் பின்வரும் விசைகளின் விளையுளைக் காண்க; CD வழியே 21 இரு. நிறை, DA வழியே 15 இரு. நிறை, BA வழியே 3 இரு. நிறை, CB வழியே 9 இரு. நிறை. அத்துடன் அதன் தாக்கக் கோடு சதுரத்தின் பக்கங்களில் இரண்டினை இருகூறிடுகிறது எனவும் காட்டுக. (I.S.)

7. ஒரு சதுரம் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் பின்வரும் விசைகளினது விளையுளின் பருமனைக் காண்க : DA வழியே 11 இரு. நிறை, CB வழியே 7 இரு. நிறை, CD வழியே 19 இரு. நிறை, BA வழியே 5 இரு. நிறை; அத்துடன், அதன் தாக்கக் கோடானது AD ஐ இருகூறிடுகிறதெனவும், CD ஐ முக்கூறிடுகிறதெனவும் காட்டுக. (I.A.)

8. AD, ஒரு முக்கோணி ABC இன் குத்துயரம். இதில், BC = 6, CA = 7, AB = 5. DA வழியேயுள்ள 12 இரு. விசை, B இலும் C இலும் தாக்கும் சமாந்தர விசைகளினுற் சமநிலைப்படுத்தப் படுகின்றது. இவ்விசைகள் யாவற்றினதும் திசைகள் AB இற்குச் செங்குத்தாகுமாறு முறையே A, B, C என்பனவற்றைப் பற்றி ஒரே கோணத்தினூடாகச் சுழற்றப்படின், இவ்விசை களின் விளையுள் ஓர் இணையாகும் என நிறுவுக ; அதோடு அதன் திருப்பு திறனையும் காண்க. (I.S.)

9. ஒரு சரிவகம் ABCD இன் AD, BC என்னும் சமாந்தரமான பக்கங்கள் விகிதம் 2 : 3 இலுள்ளன. AB = AD = DC ; B இலிருந்து C ஐ நோக்கி 3P, B இலிருந்து A ஐ நோக்கி P, D இலிருந்து A ஐ நோக்கி 2P, D இலிருந்து C ஐ நோக்கி $2\frac{1}{2}$P என்னும் விசைகளினது விளையுளின் பருமனையும் நிலையத்தையும் காண்க. (I.E.)

10. ஒரு சதுரம் ABCD இன் பக்கம் AB வழியே ஓர் அலகு விசை தாக்குகின்றது. சமநிலையைப் பேண, எஞ்சிய மூன்று பக்கங் களின் வழியேயும் தாக்கவேண்டிய விசைகளின் பருமன்களையும் திசை களையும் காண்க. (i) BC வழியேயான விசை முன்பின்னுகத் திருப்பப் படினும், (ii) BC, AD என்பனவற்றின் வழியேயான விசைகளிரண்டும் முன்பின்னுகத் திருப்பப்படினும் விளையுளைக் காண்க. (H.S.D.)

11. ABCD, ஒரு செவ்வகப் பலகை. இங்கு AB = DC = 3 அடி, BC = AD = 6 அடி. இதனை ஒரு கயிறு AD வழியே 15 இரு. நிறை விசையுடன் இழுக்கிறது ; இன்னெரு கயிறு BC வழியே 25 இரு. நிறை விசையுடன் இழுக்கிறது ; மூன்றுவது கயிருென்று CD வழியே 16 இரு. நிறை விசையுடன் இழுக்கிறது. செவ்வகம் ABCD இன் நடுப்புள்ளி G இன் ஊடாக விளையுளைச் செல்லுமாறு செய்யக்கூடிய, AB வழியேயான விசையைக் கண்டு, விளையுளை முற்றுகக் கணிக்க. (I.S.)

12. ABCD, ஓர் அடரின் மேல் வரைந்த a பக்கச் சதுரம். E, F என் பன முறையே A, C என்பனவற்றினூடாக நீட்டிய BA, BC என்பனவற்றில், BE = $3a$, BF = $3a$ என்றவாறுமாறு இருக்கும் புள்ளிகள். அவ்வடரின் மீது தாக்கும் ஒரு விசைத் தொகுதி AB வழியே P, BC வழியே 2P, CD வழியே 3P, DA வழியே 4P, EF வழியே $2\sqrt{2}$ P ஆகியனவற்றைக் கொண்டிருக்கின்றது. அத்தொகுதியின் விளையுள் Pa திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணை என நிறுவுக. (H.S.D.)

13. 1 அடி பக்கமுள்ள ஒரு சதுரத்தின் AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக முறையே 1, 2, 3, 4 இரு. நிறை

விசைகள் தாக்குகின்றன. சதுரத்தின் மையத்தில் இருந்து, விளையுளினது தாக்கக் கோட்டின் தூரத்தினைக் காண்க. மூலைவிட்டம் BD வழியேயான எந்தக் கூடுதலான விசை முழுத் தொகுதியையும், A இனூடாகச் செல்லும் ஒரு விளையுளை உடையதாக இருக்கச் செய்யும்? (H.S.D.)

14. ஒரு செவ்வகம் ABCD அதன் நிலைத்த மையத்தினைப் பற்றி ஒரு கிடைத் தளத்திற் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. AB, BC, DC வழியாக முறையே 1, 2, 3 இறு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. $AB = 1$ அடியும் $BC = 2$ அடியுமாயின், அச்செவ்வகத்தினை ஓய்வில் வைத்திருக்க AD வழியே பிரயோகிக்கவேண்டிய விசையைத் தீர்மானிக்க.

15. ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC இன் AB, AC, BC என்னும் பக்கங்கள் வழியாக, இவ்வெழுத்து முறையினுற் குறிக்கப்படும் திசைகளில், முறையே 4, 2, 2 இறு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. நீட்டிய CA ஐ, B இல் BC இற்கான செங்குத்து புள்ளி E இற் சந்திப்பின், அதோடு AB ஐ F இருகூறிடின், விளையுள், EF வழியே தாக்கும் $2\sqrt{7}$ இறு. நிறையாகுமெனா நிறுவுக. (H.C.)

16. ABCD ஒரு நாற்பக்கல். இங்கு $AB = BC$, $CD = DA$, $B = 60°$, $D = 120°$, A, C என்பன செங்கோணங்கள். AD, DC என்பவற்றின் வழியே $\sqrt{3}P$ என்னும் சம விசைகள் தாக்குகின்றன; CB, BA என்பனவற்றின் வழியே P என்னும் சம விசைகள் தாக்குகின்றன. அவைற்றின் விளையுளின் பருமனையும், நீட்டிய BD ஐ அது வெட்டும் புள்ளியையுங் காண்க. (H.C.)

17. ஒரு சதுரம் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியே வரிசைக் கிரமமாக, ஒரு கூட்டல் விருத்தியை உருவாக்கும் அட்சரகணிதப் பருமன்களை உடைய நான்கு விசைகள் தாக்குகின்றன. சதுரத்தின் மூலையொன்றினூடாக அவற்றின் விளையுள் செல்லின், அவ்விருத்தி குறையும் விருத்தியாகுமெனக் காட்டுக; இங்கு, பொது வித்தியாசம் 2P ஆயின், மிகக் கூடிய விசை 5P அல்லது 3P ஆகும். (H.C.)

18. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் BA, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக, எழுத்து ஒழுங்கு முறையினுற் காட்டப்படும் திசைகளில், முறையே F, 2F, 3F, 4F என்னும் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. AB, BC ஆகியன ஒரு சதுரம் ABCE இன் இரு பக்கங்களாகவும், D ஆனது CE இன் நடுப்புள்ளியாகவும் இருக்கின்றன. விளையுளினது பருமனையும் திசையையும் கண்டு, அதன் தாக்கக் கோடானது AB, BC என்பவற்றைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து B இன் தூரங்களைக் காண்க. (I.E.)

19. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் பக்கங்கள் வழியே வரிசைக் கிரமமாக F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F என்னும் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. தந்த விசைகளிலொன்றிற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கும்

ஒரு தனி விசை 6F இற்கு அவை சமவலுவுடையனவெனக் காட்டுக ; அவ்வறுகோணி மையத்திலிருந்து, அவ்விசையினதும் விளையுளினதும் தாக்கக் கோட்டின் தூரங்கள் விகிதம் 2 : 7 இலுள்ளன. (I.E.)

20. ஒரு சதுரம் ABCD இன் பக்கம் AD இல் $AE = \frac{1}{5}AD$ என அமையுமாறு E உள்ளது. E இல் EB வழியே தாக்கும் 20 இரு. நிறை விசையினதும் D இல் DC வழியே தாக்கும் 15 இரு. நிறை விசையினதும் விளையுளின் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டினையும் காண்க.

21. ABCD, $2a$ பக்கச் சதுரம் ; P, AD இன் நடுப்புள்ளி. Q, DC இன் நடுப்புள்ளி ; அத்துடன் பின்வரும் விசைகள் தாக்கு கின்றன : A இல் இருந்து B இற்கு 20, C இல் இருந்து D இற்கு 20, A இல் இருந்து Q இற்கு 40, P இல் இருந்து B இற்கு 30. இவற்றின் விளையுள் 50 விசையாகுமெனவும், A இல் இருந்து அதன் தாக்கக் கோட்டிற்குள்ள செங்குத்தின் நீளம் கிட்டத்தட்ட $0{\cdot}26a$ எனவும் காட்டுக. (விளையுளை ஒரு படத்திற் குறிக்க.) (I.S.)

22. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியே, சமநிலையிலுள்ள நான்கு விசைகள் தாக்குகின்றன. AB, BC என்பவற்றின் வழியே தாக்கும் விசைகளின் விளையுள் BD வழியே தாக்குகிறதெனக் காட்டி, கோணங்கள் ABC, BCD ஒவ்வொன்றும் 50° ஆகவும், கோணங்கள் BDC, BAC ஒவ்வொன்றும் செங்கோணமாகவும் இருக்குமிடத்து, எல்லா விசைகளினதும் விகிதங்களைக் காண்க. (I.S.)

23. ABCD, ஒரு செவ்வகம். இங்கு $BC = nAB$. முறையே AB, CB, CD, AD வழியாகத் தாக்கும் P, nP, P, nP என்னும் விசைத் தொகுதி சமநிலையைப் பேணுமென நிறுவுக. $BC = 3AB$ ஆயின், முறையே செவ்வகத்தின் AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் 1, 3, 1, 5 இரு. நிறை விசைகளினது விளையுளின் பருமன், நிலையம் என்பவற்றைக் காண்க. (I.E.)

24. 1 அடி பக்கமான சமபக்க முக்கோணியொன்றின் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியாக, முறையே 5, 6, 7 இரு. நிறை விசைகள் தாக்கு கின்றன. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும், அதன் தாக்கக் கோடானது AB ஐ வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து A இன் தூரத்தையும் காண்க.

25. மூன்று அங்குல பக்கச் சதுர அடர் ABCD இன் பக்கங்கள் AB, CB, CD, DA, வழியாக, காட்டப்பெற்ற வரிசை முறைப்படி முறையே விசைகள் 3P, 4P, P, 5P தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளானது நீட்டப் பெற்ற AD ஐ D இலிருந்து $1\frac{1}{2}$ அங்குல தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளி யிற் சந்திக்கிறதென நிறுவுக ; அத்துடன், அவ்விளையுள் AB ஐச் சந் திக்கும் புள்ளியிலிருந்து B இன் தூரத்தினைக் காண்க. (N.U.3.)

26. ஒரு சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியாக, முறையே P, P, Q, Q என்னும் நான்கு விசைகள் தாக்குகின்றன. சாய்

7—R 13456 (10/63)

சதுரத்தின் மையம் O பற்றி அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க. அவற்றின் விளையுள், O இலிருந்து $\frac{1}{2}$ BD $\frac{P+Q}{P-Q}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக. P = Q ஆகும் போதுள்ள நிலைமையினை ஆராய்க (C.W.B.)

27. A, B, C, D என்பன ஒரு நேர்கோட்டில் 2 அடி சம இடைத் தூரத்தில் அமைந்திருக்கும் நான்கு புள்ளிகள். 2, 3, 4, இரு. நிறை விசைகள் AD இற்குச் செங்குத்தாக முறையே A, B, D என்பனவற்றில் மேனோக்கித் தாக்குகின்றன ; C இல் AD இற்குச் செங்குத்தாக ஒரு 9 இரு. நிறை விசை கீழ்நோக்கித் தாக்குகின்றது. அத்தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுடையதெனக் காட்டுக ; அத்துடன் சமநிலையை உண்டுபண்ண 3 இரு. நிறை எங்கு பிரயோகிக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும் என்பதையும் காண்க. (I.S.)

28. ஒரு 12 அங்குலச் சதுரத்தின் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியாக, முறையே 4, 5, 6, 7 இரு. நிறைப் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன; B இல் இருந்து DC இன் நடுப்புள்ளிக்கு 8 இரு. நிறை விசையொன்று தாக்குகின்றது. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் அதன் தாக்கக் கோட்டிலிருந்து A இன் தூரத்தையும் காண்க. (Q.E.)

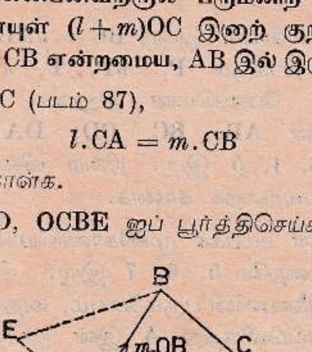
§85. OA, OB என்னும் திசைகளில் புள்ளி O இலே தாக்குவனவும், l.OA, m.OB என்பனவற்றால் பருமனிற் குறிக்கப்படுவனவுமான இரு விசைகளின் விளையுள் $(l+m)$OC இனாற் குறிக்கப்படுகின்றது. இங்கு C என்பது, l.CA = m.CB என்றமைய, AB இல் இருக்கும் ஒரு புள்ளி.

ஏனெனில், AB ஐ C (படம் 87),

$$l.CA = m.CB$$

எனப் பிரிப்பதாகக் கொள்க.

இணைகரங்கள் **OCAD, OCBE** ஐப் பூர்த்திசெய்க.



படம் 87.

l.OA என்னும் விசை, l.OC, l.OD என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து.

$m.\mathrm{OB}$ என்னும் விசை, $m.\mathrm{OC}$, $m.\mathrm{OE}$ என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து.

எனவே, $l.\mathrm{OA}$, $m.\mathrm{OB}$ என்னும் விசைகள் $(l+m)\mathrm{OC}$ இனுற் குறிக்கப் படும் விசைக்கும், $l.\mathrm{OD}$, $m.\mathrm{OE}$ என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசை களுக்கும் சமவலுவுடையன.

ஆனல், $\mathrm{OD} = \mathrm{CA}$, $\mathrm{OE} = \mathrm{CB}$, $l.\mathrm{CA} = m.\mathrm{CB}$.

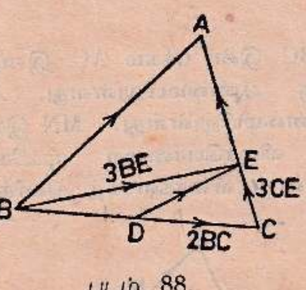
∴ இக்கடைசி விசைகளிரண்டும் சமமாகவும் முரணுகவும் இருப்பதனுல் சமநிலையிலும் இருக்கின்றன.

எனவே, $l.\mathrm{OA}$, $m.\mathrm{OB}$ என்பனவற்றின் விளையுள், $(l+m)\mathrm{OC}$ இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது.

$l = m = 1$ ஆயின், OA, OB என்னும் விசைகளின் விளையுள் 2OC ஆகும். இங்கு C, AB இன் நடுப்புள்ளி. இவ்விடத்து OA, OB என்பன வற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத் தின் அரைவாசியாக OC இருக்கிறது என்னும் உண்மையிலிருந்தும் இது தெளிவாகின்றது.

உதாரணம் (i).

ஒரு முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் வழியாக 2BC, CA, BA என்பனவற்றுல் குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுள் 6DE ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு, BC ஐ D இரு கூறிடுகிறது ; அத்துடன் E என்பது CA இல், $\mathrm{CE} = \frac{1}{3}\mathrm{CA}$ எனவாகுமாறு இருக்கும் ஒரு புள்ளி. (H.C.)



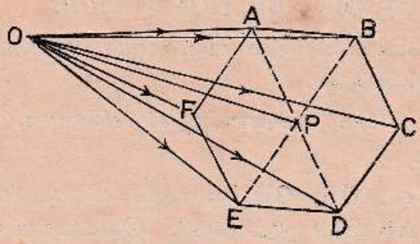
படம் 88.

படம் 88 இல், 2BC, BA என்பனவற்றின் விளையுள் 3BE ஆகும். இங்கு, E என்பது $2\mathrm{CE} = \mathrm{EA}$, அ—து. $\mathrm{CE} = \frac{1}{3}\mathrm{CA}$ எனவாகுமாறு AC இல் உள்ள ஒரு புள்ளி.

அத்துடன், $\mathrm{CA} = 3\mathrm{CE}$ உம், 3BE, 3CE என்னும் விசைகளினது விளையுள் 6DE உம் ஆகும். இங்கு D என்பது BC இன் நடுப்புள்ளி.

உதாரணம் (ii).

ABCDEF, ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. O, யாதுமொரு புள்ளி. OA, OB, OC, OD, OE, OF என்பனவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் 6OP ஆகுமென நிறுவுக. இங்கு P, இவ்வறுகோணியினது சுற்றுவட்டத்தின் மையம்.



படம் 89.

படம் 89 இல், AD, BE, CF என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளி P ஆகும். O, யாதுமொரு புள்ளியென்க. OP ஐ இணைக்க.

OA, OD என்பனவற்றின் விளையுள் 2OP.

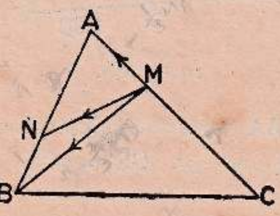
OB, OE என்பனவற்றின் விளையுள் 2OP.

OC, OF, என்பனவற்றின் விளையுள் 2OP.

∴ OA, OB, OC, OD, OE, OF என்பனவற்றின் விளையுள் 6OP ஆகும்.

உதாரணம் (iii).

ஒரு முக்கோணி ABC இன் பக்கம் AC இனது முக்கூறிடும் புள்ளி M ஆனது A இற்கு அண்மையிலுள்ளது. AB இன் முக்கூறிடும் புள்ளி N, B இற்கு அண்மையிலுள்ளது. MN இனற் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும் விசையொன்றை முக்கோணியின் பக்கங்களின் வழியே செயற்படும் மூன்று விசைகளாகத் துணிக்க. (I.S.)



படம் 90.

MB (படம் 90) ஐ இணைக்க.

AB ஐ விகிதம் 2 : 1 இல் N பிரிப்பதனுல், விசைகள் $\frac{2}{3}$MB, $\frac{1}{3}$MA என்பனவற்றிற்கு MN என்னும் விசை சமவலுவுடையது.

இறுதி விசை, CA வழியே இருப்பதுடன் $\frac{1}{9}$CA இற்குச் சமமாகும்.

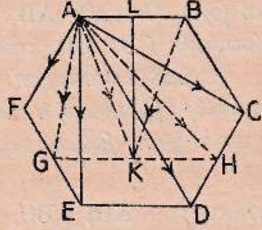
AC ஐ விகிதம் 1:2 இல் M பிரிப்பதனுல், விசைகள் $\frac{2}{3}$AB, $\frac{1}{3}$CB என்பனவற்றிற்கு MB என்னும் விசை சமவலுவுடையது.

எனவே, $\frac{4}{9}$AB இற்கும் $\frac{2}{9}$CB இற்கும் $\frac{2}{3}$MB சமவலுவுடைத்து.

ஆகையால், விசை MN, பக்கங்களின் வழியே செயற்படும் $\frac{4}{9}$AB, $\frac{2}{9}$CB, $\frac{1}{9}$CA என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடையது.

உதாரணம் (iv).

ABCDEF, ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவத் தள அடர். A, B என்பனவற்றிலிருந்து மற்றைய உச்சிகளை நோக்கி, அவற்றிலிருந்துள்ள தூரத்திற்கு விகிதசமமான பருமனுள்ள விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுள் 6AE இற்கு விகிதசமமென நிறுவுவதோடு, தாக்கக் கோட்டினையுங் காண்க.



படம் 91.

AF, AE (படம் 91) என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான விசைகளின் விளையுள் 2AG இற்கு விகிதசமம். இங்கு G, EF இன் நடுப்புள்ளி.

இதனைப்போல, AC, AD என்பனவற்றின் விளையுள் 2AH இற்கு விகிதசமம். இங்கு H, CD இன் நடுப்புள்ளி.

2AG, 2AH என்பனவற்றின் விளையுள் 4AK இற்கு விகிதசமம். இங்கு K, GH இன் நடுப்புள்ளி.

இதனைப்போல, BC, BD, BE, BF என்பனவற்றின் வழியேயுள்ள விசைகளினது விளையுள் 4BK இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது.

இறுதியாக, 4AK, 4BK என்பனவற்றின் விளையுள் 8LK இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது. இங்கு L, AB இன் நடுப்புள்ளி. அதோடு, LK $= \frac{3}{4}$ AE என்பதுந் தெளிவு.

எனவே, அவ்விளையுள் 6AE இற்கு விகிதசமனுவதோடு, LK வழியேயும் செயற்படுகின்றது.

பயிற்சி XV.

1. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் BC, DA என்னும் பக்கங்கள் முறையே F, H என்பனவற்றல் இருகூறிடப்படுகின்றன. AB, DC என்பனவற்றிற்குச் சமமான, சமாந்தரமான இரு விசைகள் ஒரு புள்ளியிலே தாக்கின், அவற்றின் விளேயுளானது HF இற்குச் சமாந்தரமாகவும் 2HF இற்குச் சமமாகவுமிருக்குமெனக் காட்டுக.

2. O, ஒரு முக்கோணி ABC இன் தளத்திலிருக்கும் எதாவதொரு புள்ளி. D, E, F என்பன அதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். OA, OB, OC என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைத் தொகுதி OD, OE, OF என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைத் தொகுதிக்குச் சமவலுவுடையதெனக் காட்டுக.

3. ஒரு முக்கோணி ABC இன் சுற்றுமையம் O உம், நிமிர்மையம் H உம் ஆயின், HA, HB, HC என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளேயுள் பருமனிலுந் திசையிலும் 2HO இனற் குறிக்கப்படுமென நிறுவுக.

4. ABCD, ஒரு நாற்பக்கல். A, C என்பன அதன் எதிர் உச்சிகள். A இலே தாக்கும் இரு விசைகள் AB, AD என்பனவற்றுலும், C இலே தாக்கும் இரு விசைகள் CB, CD என்பனவற்றுலும் பருமன்களிலும் திசைகளிலும் குறிக்கப்படுகின்றன. அந்நாற்பக்கலினது மூலேவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளே இணைக்கும் கோட்டின் நான்கு மடங்கினல் விளேயுள் விசை பருமனிலும் திசையிலுங் குறிக்கப்படுகிறதெனக் காட்டுக.

5. ABCD, ஒரு நாற்பக்கல்; AB, BC, AD, DC என்னுங் கோடுகளினுல் அவ்விசைகள் முற்றுகக் குறிக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் விளேயுள் பருமனிலுந் திசையிலும் 2AC இனற் குறிக்கப்படுகிறதெனவும், அதன் தாக்கக் கோடானது BD ஐ இருகூறிடுகிறதெனவும் நிறுவுக.

6. ABC, ஒரு முக்கோணி. G, அதன் இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி. O, அம்முக்கோணியின் தளத்திலிருக்கும் எதாவதொரு புள்ளியாயின், OA, OB, OC என்பனவற்றல் குறிக்கப்படும் விசைகளினது விளேயுள் 3OG இனற் குறிக்கப்படுமென நிறுவுக.

7. ABCD, ஒரு நாற்பக்கல். O, அதன் தளத்திலிருக்கும் எதாவதொரு புள்ளி. E, F, G, H என்பன முறையே AB, BC, CD, DA என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். OA, OB, OC, OD என்பன குறிக்கும் விசைகளினது விளேயுளே 4OK குறிக்குமென நிறுவுக. இங்கு, EG ஐ K இருகூறிடுகின்றது.

8. ஒரு வட்டத்தின் பரிதியிலிருக்கும் ஒரு புள்ளி P, அவ்வட்டத்திலிருக்கும் A, B என்னும் நிலேத்த புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முறையே PA, PB என்பனவற்றின் வழியாகச் செயற்படும் 2PA, 3PB

என்னும் விசைகளின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும் PQ இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது. அவ்வட்டத்தின் வழியே P இயங்கும்போது Q இன் ஒழுக்கினைக் காண்க. (H.S.C.)

9. ஒரு முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் வழியே, எழுத்து முறையினுற் குறிக்கப்படும் திசைகளில் AB, 2BC, 2AC என்னும் மூன்று விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுளைக் காண்க. அதோடு, C இற்கு அண்மையான, BC இன் முக்கூறிடும் புள்ளியுடன் AB இன் நடுப்புள்ளியை இணைக்கும் கோடு, நீட்டப்பட்ட AC ஐ E இல் வெட்டு கிறதென உய்த்தறிக. இங்கு AC = CE. (I.S.)

10. A, B என்பன நிலைத்த புள்ளிகள் ; PA, PB என்பன வற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் எப்பொழுதும் முதல் விசையின் இரு மடங்காக இருக்குமாறு P நகருகின்றது. P இன் ஒழுக்கினைக் காண்க.

11. ஒரு புள்ளி P இல் இருந்து ஒரு நாற்பக்கலின் உச்சிகளுக்கு வரைந்த கோடுகளினுற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் மாறுப் பருமனை உடையதாயின், P இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமாகுமென நிறுவி அதன் மையத்தினையும் ஆரையையும் காண்க.

12. ABCD, ஓர் இணைகரம் ; E, AD இல் உள்ள ஒரு புள்ளி. AE, AF என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுளானது திசை AC இற் செயற்படுமாறு BC இல் ஒரு புள்ளி F ஐக் காண்க.

13. ஒரு முக்கோணி ABC இன் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்கள் முறையே D, E, F என்பனவற்றில் இருகூறிடப்படுகின்றன. DA, EB, FC என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுளைக் காண்க.

14. O, ஒரு முக்கோணி ABC இன் இடையமொன்றில் இருக்கும் யாதுமொரு புள்ளி. O இலிருந்து A, B, C என்பனவற்றை நோக்கி, இப்புள்ளிகளிலிருந்து O இன் தூரங்களுக்கு விகிதசமனுக விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும் 3OG இனுற் குறிக்கப்படுகிறதென நிறுவுக. இங்கு G, முக்கோணியின் மையப் போலி.

15. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியே முற்றுக AB, CB, CD, AD என்பனவற்றுல் குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற் படுகின்றன. அவற்றின் விளையுள் 4HK இனுல் முற்றுகக் குறிக்கப்படுகிற தென நிறுவுக. இங்கு H, K என்பன முறையே AC, BD என்பன வற்றின் நடுப்புள்ளிகள். (C.W.B.)

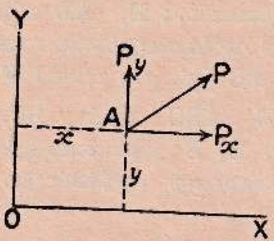
16. ABC, ஒரு சமபக்க முக்கோணி. G, அதன் மையப்போலி. BC, CA, AB, AG, BG, CG என்பனவற்றின் வழியாக முறையே 1, 1, 4, 2, 2, 1 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும், அது AB ஐ வெட்டும் புள்ளியி லிருந்து A இன் தூரத்தையுங் காண்க. (I.S.)

17. $l.\mathrm{OA}$, $m.\mathrm{OB}$, $n.\mathrm{OC}$ . . . என்னும் சந்திக்கின்ற விசைகளின் எத்தொகையினதும் விளையுள், $(l+m+n+\ldots)\,\mathrm{OG}$ ஆகுமெனநிறுவுக. இங்கு G என்பது முறையே l, m, n . . . இற்கு விகிதசமமான, A, B, C . . . இல் வைத்துள்ள திணிவுகளின் புவியீர்ப்பு மையம். (H.S.C.)

§86. இனி, ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்றைச் சுருக்குதற்குரிய மேலும் பொதுவான முறையொன்றை ஆராய்வோம்.

அடுத்த பந்தியில் நிறுவியுள்ள தேற்றத்திலிருந்து, **76** ஆம் பந்தியின் தேற்றத்தை உய்த்தறிவதுடன், விசைத் தொகுதியொன்று சமநிலையில் இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான பல்வேறு நிபந்தனைத் தொடைகளையும் எளிதாகப் பெறலாம்.

§87. ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தாக்கும் ஏதாவதோர், ஒருதள விசைத்தொகுதிக்குப் பதிலாக, அதன் தளத்திலிருக்கும் ஓர் எதேச்சையான புள்ளியிலே தாக்கும் ஒரு தனி விசையை ஓர் இணையுடன் பொதுவாக இடலாம்.



படம் 92.

P_1, P_2, முதலிய விசைகள் A_1, A_2, முதலிய புள்ளிகளிலே தாக்குகின்றனவென்க. O (படம் 92), அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியென்க. O ஐ ஆள்கூற்று உற்பத்தியாக எடுக்க. O இனூடான செவ்வக அச்சுக்கள் எனப்படும் A_1, A_2, முதலியவற்றின் ஆள்கூறுகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), என்க.

புள்ளி A (x, y) இலே தாக்கும் விசைகளில் P என்னும் ஏதாவதொன்றை எடுத்துநோக்குக.

P ஐ OX, OY என்பனவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக P_x, P_y என்னும் அதன் கூறுகளாகத் துணிக்க.

$y\mathrm{P}_x$ என்னும் திருப்புதிறனையுடைய ஓர் இணையைப் புகுத்தி P_x ஐத் தனக்குத்தானே சமாந்தரமாக O இலே தாக்குமாறும், $x\mathrm{P}_y$ என்னும் ஓர் இணையைப் புகுத்தி P_y ஐத் தனக்குத்தானே சமாந்தரமாக O இலே தாக்குமாறும் இடமாற்றலாம்.

இவ்விணைகள் எதிர்ப் போக்கில் இருக்கின்றன. அவற்றின் திருப்புதிறன்களினது அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை $xP_y - yP_x$ ஆகும்.

இதே மாதிரியாக எல்லா விசைகளுக்குங் கொள்ளலாம்.

x – அச்சு வழியே தாக்குமாறு இடமாற்றிய எல்லா விசைகளினதும் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகையை X எனவும், y – அச்சு வழியே தாக்குவனவற்றின் கூட்டுத்தொகையை Y எனவுங் கொள்க.

இவற்றை, O இலே தாக்கும் ஒரு தனி விசை R ஆகக் கூட்டலாம். இணைகளை (அவற்றிற்குரிய குறிகளுடன்) திருப்புதிறன் G ஐ உடைய ஒரு தனி இணையை ஆக்குமாறு கூட்டலாம்.

விளையுள் R, x – அச்சுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கின்,

$$R^2 = X^2 + Y^2 \text{ உம், தான் } \theta = \frac{Y}{X} \text{ உம் ஆகும்.}$$

R, θ என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் A_1, A_2, முதலிய புள்ளிகளில் யாதுமொன்றின் ஆள்கூறுகளைக் கொண்டிராமையினால், அவை O இன் தானத்துடன் சார்பற்றனவென்பது கவனிக்கப்படவேண்டும்.

விளையுள் இணையின் திருப்புதிறன்,

$$G = \Sigma(xP_y - yP_x).$$

இங்கு P_x, P_y என்பன அவ்வச்சிற்குச் சமாந்தரமாக P இன் கூறுகள்; Σ, விசைகள் அனைத்தினதும் கூட்டலைக் குறிக்கின்றது.

உற்பத்தி O பற்றி விசைகள் அனைத்தினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை G ஆகுமென்பது தெளிவு. அதன் பெறுமானம் O இன் நிலையத்துடன் சார்புடையது.

§88. ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்றிற்கான சமநிலை நிபந்தனைகள்.

அவ்விசைகளை யாதுமோர் எதேச்சையான புள்ளி O இல் ஒரு தனி விசை R ஆகவும், ஓர் இணை G ஆகவும் சுருக்கலாம்.

பின்பு, சமநிலையின் பொருட்டு, $R = 0$ ஆகவும், $G = 0$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

$R = 0$ ஆயின், $X = 0$ ஆகவும், $Y = 0$ ஆகவும் இருக்க வேண்டும்.

இது, பின்வரும் **மூன்று** நிபந்தனைகளைத் தருகின்றது :—

சமாந்தரமாக இல்லாத எவையேனும் இரு திசைகளில் அவ்விசைகளினது துணித்த பகுதிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகைகள் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

யாதுமோர் எதேச்சையான புள்ளி பற்றி விசைகள் அனைத்தினதும் திருப்புதிறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

§89. அடிமாற்றம்.

உற்பத்திக்குப் பதிலாக ஒரு புள்ளி O' (x', y') ஐ அடியாக எடுப்பின், G இன் பெறுமானத்தில் x, y என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $x-x'$, $y-y'$ என்பவற்றை எழுதி, உற்பத்தி O இன் இணையிலிருந்து அவ்வடியின் இணையைப் பெறலாம்.

$$\therefore\ G' = \Sigma(x-x')P_y - \Sigma(y-y')P_x,$$
$$= \Sigma xP_y - \Sigma yP_x - \Sigma x'P_y + \Sigma y'P_x,$$
$$= G - x'\Sigma P_y + y'\Sigma P_x,$$

x', y' என்பன மாறுதிருப்பதனுல்,

$$= G - x'Y + y'X.$$

இப்பேற்றில் G, உற்பத்தியைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகையும், x', y' என்பன அடியின் ஆள்கூறுகளும், X, Y என்பன அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாக விசைகளின் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகைகளும் ஆகும்.

§90. விளையுளின் தாக்கக் கோடு.

இத்தொகுதி சமநிலையில் இராமலும், அதோடு இநணைப் புள்ளி x, y இல் ஒரு விசை R ஆகவும், ஓர் இணை G' ஆகவும் சுருக்கின்,

$$R^2 = X^2 + Y^2.$$
$$G' = G - xY + yX.$$

இப்போது R பூச்சியமாயின், $X = 0$ உம் $Y = 0$ உம் ஆகும். அத்துடன், அத்தொகுதி ஓர் இணை G இற்குச் சுருங்குகிறது. ஏனெனில், இதுவும் மறையமாட்டாது என்பதனுலேயாம்.

R பூச்சியமாகாவிடின், அடியைத் தகுந்தவாறு தேர்ந்தெடுத்து, அத் தொகுதி தனி விசை R இற்குச் சுருங்குமாறு இணை G' ஐ மறையச் செய்யலாம்.

$$G - xY + yX = 0$$

என்னும் சமன்பாட்டினை, அடியின் ஆள்கூறுகள் (x, y) பூர்த்திசெய்யும் போது இந்நிலையே ஏற்படுகின்றது. அ·து, அடி இக்கோட்டின் மீது அமைய வேண்டும்.

இப்போது, x – அச்சுடன் இக்கோடு தான் $^{-1}\frac{Y}{X}$ என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்றது. ஆகவே, இது R இற்குச் சமாந்தரமாகும். R, அடி (x, y) இலே தாக்குவதனுல், இந்நேர்கோடு R இன் தாக்கக் கோடாகும். எனவே, விளையுளினது தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$G - xY + yX = 0.$$

§91. சமநிலே நிபந்தனேகளின் மறு வடிவங்கள்.

(1) ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்று, இரு வேறுன புள்ளிகள் (O உம் C உம் என்க) பற்றி விசைகள் அனைத்தினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவும், OC இற்குச் செங்குத்தாக அல்லாத யாதுமொரு திசையிலே துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவும் கொண்டிருப்பின் சமநிலேயிலிருக்கும்.

O ஐ உற்பத்தியாகவும், C ஐ அடி (x, y) ஆகவும் எடுக்க,

$$G = 0,$$
$$G' = G - xY + yX = 0,$$
$$X = 0,$$

இவற்றிலிருந்து, x பூச்சியமாகாவிடின், அ-து. (OC இற்கு X செங்குத்தாக இருக்குமாறு) y – அச்சின்மீது C அமையாவிடின், $X = 0, Y = 0, G = 0$ எனத் தெரியவருகின்றது.

(2) ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்று, எல்லாம் ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத O, C, C′ என்னும் மூன்று வெவ்வேறு புள்ளிகளேப் பற்றிய திருப்புதிறன்களினது கூட்டுத்தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமாயின் சமநிலேயிலிருக்கும்.

O ஐ உற்பத்தியாகவும், C ஐ x, y எனவும், C′ ஐ x', y' எனவும் எடுக்க, இந்நிபந்தனேகளிலிருந்து,

$$G = 0,$$
$$G - xY + yX = 0,$$
$$G - x'Y + y'X = 0,$$
$$\therefore \quad -xY + yX = 0,$$
$$-x'Y + y'X = 0,$$

$\therefore \; xy' - x'y = 0$ ஆக இருந்தாலொழிய, அ-து. O, C, C′ ஆதியன ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்தாலொழிய $X = 0$ உம், $Y = 0$ உம் ஆகும்.

§92. உதாரணம் (i).

xy தளத்திற் செயற்படும் ஒரு விசையின் (0, 0), (8, 0), (0, 10) என்னும் புள்ளிகளேப்பற்றிய திருப்புதிறன்கள் முறையே –60, –156, 84 அடி இரு.; ஆள்கூறுகள் அடியில் உள்ளன. அவ்விசையின் பருமனேயும், அது ஆள்கூற்றச்சுக்களே வெட்டும் புள்ளிகளேயும் காண்க. (I.E.)

அச்சுக்கள் வழியே விசையின் கூறுகளே X, Y எனவும் உற்பத்தியைப் பற்றி அதன் திருப்புதிறனே G எனவும் கொள்க.

புள்ளி (x, y) பற்றிய திருப்புதிறன் $G - xY + yX$ ஆகும்.

$$\therefore G = -60,$$

அதோடு,
$$-60 - 8Y = -156,$$
$$-60 + 10X = 84.$$
$$\therefore Y = 12 \text{ உம்}, X = 14{\cdot}4 \text{ உம் ஆகும்.}$$

$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(14{\cdot}4)^2 + 12^2} = 12\sqrt{1{\cdot}44 + 1} = 18{\cdot}72$ இரு. நிறை.

விசை R இனது தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு,
$$-60 - 12x + 14{\cdot}4y = 0.$$

அதோடு $y = 0$ ஆக இருக்கும்போது, $x = -5$ அடி.

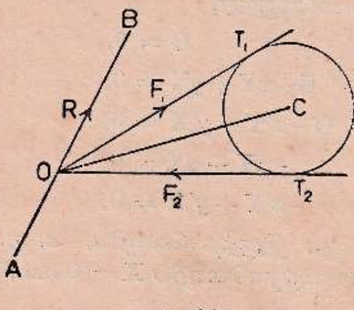
$x = 0$ ஆக இருக்கும்போது $\qquad y = \dfrac{60}{14{\cdot}4} = 4{\cdot}16$ அடி.

உதாரணம் (ii).

யாதுமொரு விசைத் தொகுதியை, ஒரு தந்த வட்டத்தின் தொடலிகளாக அமையும் தாக்கக் கோடுகளை உடைய இரு விசைகளாக எண்ணற்ற பல வழிகளிலே துணிக்கலாம். இவ்வாறுகத் துணிக்க, அவ்விசைகளின் பருமன்கள் F_1, F_2 உம் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளினிடைக் கோணம் 2α உம் ஆயின்,

$$F_1F_2 \text{ கோசை}^2\ \alpha = \text{மாறிலி}$$

எனக் காட்டுக. (H.S.C)



படம் 93.

தந்த வட்டத்தின் மையத்தை C (படம் 93) எனவும், அதன் விட்டத்தை $2a$ எனவுங் கொள்க.

அத்தொகுதி சமநிலையில் இல்லை என எடுத்துக்கொள்ளலாமாதலின், அதனை ஒரு தனி இணையாகவோ, ஒரு தனி விசையாகவோ சுருக்கலாம்.

அது ஓர் இணை G ஆகச் சுருங்கின், இது, அவ்வட்டத்திற்கான யாதுமொரு சமாந்தரத் தொடலிச் சோடி வழியே முரண் திசைகளிலிருக்கும் $\dfrac{G}{2a}$ என்னும் இரு சம விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து என்பது தெள்ளிது.

இவ்விடத்து, F_1F_2 கோசை$^2 \alpha = \frac{G^2}{4a^2}$, ஒரு மாறிலி.

அத்தொகுதி ஒரு தனி விசை R ஆகச் சுருங்கின், அதன் தாக்கக் கோட்டினை AB என்க. AB மீது யாதுமொரு புள்ளி O ஐ எடுத்து, O இலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு OT_1, OT_2 என்னுந் தொடலிகளை வரைக. R ஐ ஒரு தொடலி வழியே ஒரு விசையாக, F_1, F_2 என்னும் இரு விசைகளாகத் துணிக்கலாம். அதோடு, AB இல் O இன் வெவ்வேறான நிலையங்களுக்கு எண்ணற்ற பல துணிக்கும் வழிகளைப் பெறலாம்.

F_1, F_2 என்னும் விசைகள் காட்டப்பெற்றவாறு தாக்கின், R என்பது அவற்றின் விளையுளாதலின்,

$$F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \text{ கோசை } 2\alpha = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

C பற்றி அவற்றினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை, C பற்றி R இன் திருப்புதிறனுக்குச் சமமாக இருப்பதோடு, இது ஒரு மாறிலியுமாகும்.

$$\therefore \; (F_1 + F_2)a = \text{மாறிலி (G என்க)},$$

$$\therefore \; F_1 + F_2 = \frac{G}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \; F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 = \frac{G^2}{a^2},$$

அதோடு (i) இலிருந்து,

$$F_1^2 + F_2^2 - 4F_1F_2 \text{ கோசை}^2 \alpha + 2F_1F_2 = R^2,$$

$$\therefore \; 4F_1F_2 \text{ கோசை}^2 \alpha = \frac{G^2}{a^2} - R^2,$$

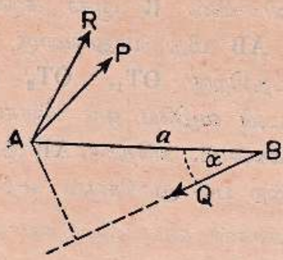
$$\therefore \; F_1F_2 \text{ கோசை}^2 \alpha = \text{மாறிலி.}$$

R பூச்சியமாயின் இது முன்னைய வகையாகச் சுருங்குகிறதென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

உதாரணம் (iii).

ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்றை, அதன் தளத்திலுள்ள இரு நிலைத்த புள்ளிகளில், ஒரு புள்ளியூடு ஒரு விசையாகத் தாக்கும் இரு விசைகளால் எண்ணற்ற பல வழிகளிற் குறிக்கலாமெனக் காட்டுக. A, B என்பன அந்நிலைத்த புள்ளிகளையும், AP, BQ என்பன அவ்விசைகளைப் போன்ற எவையேனும் இரு விசைகளை ஏதாவதோர் அளவுத் திட்டத்திலுங் குறிப்பின், P இனதும் Q இனதும் ஒழுக்குகள் AB இற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோடுகளென நிறுவுக. (H.S.C.)

அவ்விரு புள்ளிகளை A, B (படம் 94) எனவும், $AB = a$ எனவும் கொள்க.



படம் 94.

A ஐ அடியாகக் கொண்டு, அத்தொகுதியை A இல் விசை R ஆகவும், இணை G ஆகவும் சுருக்குக.

அவ்விணைக்குப் பதிலாக, A, B என்பவற்றிலே தாக்கும் ஒவ்வொன்றும் $\dfrac{G}{a \text{ சைன் } \alpha}$ பருமனுள்ள இரு சம, முரண், சமாந்தர விசைகளை இடலாம். இங்கு α, AB உடன் அவற்றின் திசையின் சாய்வு.

A இல் உள்ள இரு விசைகளையும் ஒரு தனி விசையாகக் கூட்டலாம். பின்பு, A இல் ஒரு விசையும் B இல் ஒரு விசையும் இருக்கும். α ஐ மாற்றி இவற்றை எண்ணற்ற பல வழிகளிலே மாற்றலாம் என்பது தெளிவு.

BQ என்பது B இல் உள்ள விசையைக் குறிப்பின், AB இல் இருந்து Q இன் தூரம்,

$$BQ \text{ சைன் } \alpha = \frac{G}{a} = \text{மாறிலி}.$$

எனவே, α இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு Q இன் ஒழுக்கு, AB இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோடாகும்.

இப்போது AP ஆனது, R இனதும் A இலே தாக்கும் இணையின் விசை $\dfrac{G}{a \text{ சைன் } \alpha}$ இனதும் விளையுளாகும்.

AB இலிருந்து P இன் தூரமானது, AB இற்குச் செங்குத்தான ஒரு கோட்டின் மீது AP இன் எறியத்தினது நீளமாகும். இது, இக்கோட்டின் மீது R இனதும் விசை $\dfrac{G}{a \text{ சைன் } \alpha}$ இனதும் எறியங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமனாகவேண்டும்.

θ, AB உடன் R இன் சாய்வாயின், இவ்வெறியங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= R \text{ சைன் } \theta + \frac{G}{a \text{ சைன் } \alpha} \text{ சைன் } \alpha$$

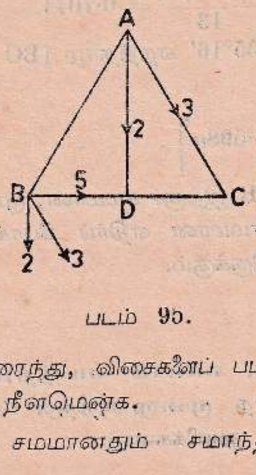
$$= R \text{ சைன் } \theta + \frac{G}{a}.$$

அதோடு, இக்கோவை மாறிலியாகும் என்பதுந் தெளிவு.

எனவே, P இன் ஒழுக்கும் AB இற்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர் கோடாகும்.

உதாரணம் (iv).

ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்திலே தங்கியிருக்கும் ஒரு சமபக்க முக் கோணியடர் ABC மீது, BC, AC, AD வழியாக முறையே 5, 3, 2 இரு. நிறை விசைகள் செயற்படுகின்றன. இங்கு, BC இற்கு AD செங்குத்து. அவ்வடரை ஓய்வில் வைத்திருக்கின்ற, B இற் செயற்படும் விசையையும், இணையையும் காண்க.



படம் 95.

அம்முக்கோணியை வரைந்து, விசைகளைப் படம் 95 இற் போல இடுக. a, அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளமென்க.

விசை 3, அதற்குச் சமமானதும் சமாந்தரமானதுமான B இற் செயற்படும் விசைக்கும்

$$3.\frac{\sqrt{3}}{2}a \rceil\!\downarrow.$$

என்னுந் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணைக்கும் சமவலுவுடைத்து.

விசை 2, அதற்குச் சமமானதும் சமாந்தரமானதுமான B இற் செயற்படும் விசைக்கும்

$$2.\frac{a}{2} \rceil\!\downarrow.$$

என்னுந் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணைக்கும் சமவலுவுடைத்து.

B இலுள்ள விசைகளை BC வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் துணிக்க,

BC வழியே

$$5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2} \text{ ஐயும்,}$$

BC இற்குச் செங்குத்தாக,

$$2+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{2} \text{ ஐயும்}$$

பெறுவோம்.

B இல் விளையுள் விசை R ஆயின்,

$$R^2=\frac{169}{4}+4+\frac{27}{4}+6\sqrt{3}=53+6\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ R=7{\cdot}962.$$

θ, BC உடன் R இன் சாய்வாயின்,

$$\text{தான் } \theta=\frac{4+3\sqrt{3}}{13}=0{\cdot}7074.$$

$$\therefore\ \theta=35°16' \text{ எறத்தாழ (BC இற்குக் கீழே).}$$

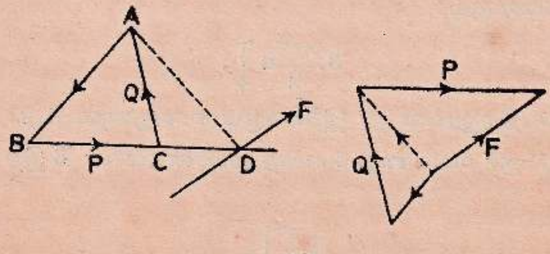
விளையுள் இணை,

$$\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a=3{\cdot}598a \rfloor.$$

B இற் செயற்படுகின்ற, R இற்குச் சமமான, முரணான விசையொன்றும் இவ்விளையுள் இணைக்குச் சமமான எதிர்ப் போக்கான இணையொன்றும் இவ்வுடலை ஒய்வில் வைத்திருக்கும்.

உதாரணம் (v).

ஒரு குறித்த விசையினை, எல்லாம் சமாந்தரமாகவோ ஒருபுள்ளியிற் சந்திப்பனவாகவோ இல்லாத மூன்று குறித்த கோடுகள் வழியே செயற் படும் மூன்று கூறுகளாகத் துணிக்கலாம்.

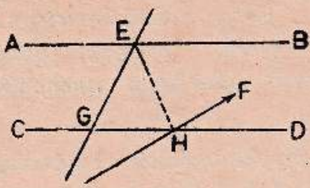


படம் 96.

அம்மூன்று கோடுகளும் ஒரு முக்கோணி ABC (படம் 96) ஐ உருவாக்குகின்றனவெனவும் தந்த விசை F ஆனது BC ஐ D இல் வெட்டுகிறது எனவும் கொள்க.

பின்பு **F** ஐ முறையே **DA, BC** என்பவற்றின் வழியாகச் செயற்படும் இரு கூறுகளாகவும், **DA** வழியேயான விசையை முறையே **AB, CA** என்பவற்றின் வழியாக இரு கூறுகளாகவும் துணிக்கலாம். இவற்றை வலக்கைப் படத்திற்போல வரைபு முறையாலும் செய்யலாம். இப்படத்தில் புள்ளிக்கோடு, **DA** இற்குச் சமாந்தரம்.

இதே மாதிரியாக, அக்கோடுகளில் **AB, CD** என்னும் இரண்டும், படம் **97** இற் போலச் சமாந்தரமாகவும், **EG** என்பது மூன்றாங் கோடாகவும் இருப்பின்.



படம் 97.

F என்பது **CD** ஐ **H** இல் வெட்டுகிறதெனக.

பின்பு **F** ஐ முறையே **CD, HE** என்பவற்றின் வழியாக இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம்.

HE வழியேயுள்ள விசையை முறையே **GE, BA** என்பவற்றின் வழியாகச் செயற்படும் இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம்.

பயிற்சி XVI.

1. தந்த பருமன், தாக்கக் கோடு என்பவற்றையுடைய யாதுமொரு விசை **P** இற்குப் பதிலாக **Q, R** என்னும் இரு விசைகளை இடலாம். இங்கு, ஒரு குறித்த புள்ளி **O** இனூடாக **Q** உம், **O** ஐயும் **P** இன் தாக்கக் கோட்டினையும் கொண்ட தளத்தில் ஒரு குறித்த கோட்டின் வழியே **R** உம் செயற்படுகின்றன. **R** இன் பருமன் **P** இற்குச் சமமாயின், அதன் தாக்கக் கோடானது **O** ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தைத் தொடவேண்டுமெனவும், **Q** இன் பருமன், **2P** இலும் அதிகமாகாதெனவும் காட்டுக. (I.S.)

2. ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசையின் மீதிருக்கும் ஒரு சதுர அடர் **ABCD**, மூலைவிட்டம் **BD** இனது **B** இற்கு அண்மையான முக் கூறிடும் புள்ளியில் நிலைத்ததோர் ஒப்பமான முளையைப் பற்றித் திரும்பவல்லது. அதன்மீது **AD** வழியே **5** இரு. நிறை விசையொன்றும், **CB** வழியே **3** இரு. நிறை விசையொன்றும் செயற்படுகின்றன. **A** இல் **AB** வழியே செயற்பட்டு அதனைச் சமநிலையிற் பேணும் விசையையும் முளையின் மீதான விளையுள் அமுக்கத்தையும் காண்க. (H.S.C.)

3. ஒரு முக்கோணி ABC இன் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களில் முறையே P, Q, R என்னும் புள்ளிகள்,

$$\frac{BP}{PC}=\frac{CQ}{QA}=\frac{BR}{RA}=3$$

எனவாகுமாறு எடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. BC = 4 அலகுகள், CA = 5, AB = 6. முறையே BC, CA என்பவற்றிற்குச் செங்குத்தாக P, Q என்பவற்றில் முக்கோணியின் உட்புறமாகச் செயற்படும் 8, 10 இறா. நிறை விசைகள், AB இற்குச் செங்குத்தாக R இல் வெளிப்புறமாகச் செயற்படும் 12 இறா. நிறை விசையொன்றுடன் ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுடையனவென நிறுவுக. அதோடு, இவ்விணையின் திருப்புதிறனையும் காண்க. விசைகள் அனைத்தும் அம்முக்கோணியின் தளத்தில் இருக்கின்றன. (H.S.C.)

4. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் பக்கங்கள் வழியே வரிசைக்கிரமமாக ஒரே போக்கில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 அலகுப் பருமன்களுள்ள விசைகள் செயற்படுகின்றன. அதன் மையத்தில் ஒரு விசை செயற்படுகிறது. அவ்விசைகள் ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுடையனவாயின், அவ்விணையின் திருப்புதிறனையும், மையத்திற் செயற்படும் விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (H.S.D.)

5. $2a$ அலகுப் பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணிவடிவத் தட்டின்மீது ஒரு விசைத்தொகுதி செயற்படுகின்றது. மூன்று உச்சிகளையும் பற்றி அவ்விசைகளின் திருப்புதிறன்கள் முறையே G_1, G_2, G_3 ஆகும். விளையுளின் பருமனைக் காண்க. (H.S.C.)

6. ஒரே தளத்திற் செயற்படும் பலவிசைகளினது x கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை X உம், y கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை Y உம், உற்பத்தியைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை N உம் ஆகும். அவற்றின் விளையுளினது தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. (H.S.D.)

7. ABCD, 2 அடி பக்கங்கொண்ட சதுரம். P, AD இன் நடுப்புள்ளி. Q, CD இன் நடுப்புள்ளி. AB, CD, QB, CP எண்பனவற்றின் வழியாக எழுத்து ஒழுங்குமுறையினுற் காட்டப்பெறும் திசைகளில் முறையே 10, 10, 30, 40 என்னும் பருமன்களையுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றினது விளையுளின் பருமனையும், அதன் தாக்கக் கோடானது AB, AD என்பவற்றைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து A இனது தூரங்களையும் காண்க.

8. ஒரு சதுரம் ABCD இன் AB, CB, CD, AD என்னும் பக்கங்கள் வழியாக எழுத்து ஒழுங்குமுறையினுற் காட்டப்பெறும் திசைகளில் முறையே 3P, 2P, P, 2P என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளினது பருமனையும் தாக்கக் கோட்டினையும் காண்க. (H.C.)

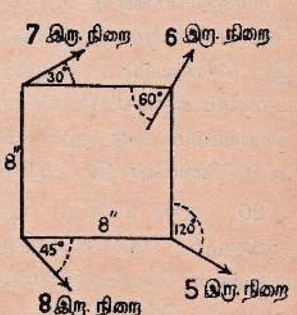
9. இரு செவ்வக அச்சுக்களின் தளத்திலிருக்கும் ஒரு விசையானது x, y என்னும் அச்சுக்களின் வழியாக முறையே X, Y என்னுங் கூறுகளை உடையது. அதன் தாக்கக் கோடு புள்ளி (x', y') இனூடாகச் செல்கின்றது. அது, உற்பத்தியிற் செயற்படுவதும் X, Y என்னுங் கூறுகளை உடையதுமான ஒரு விசையுடன் $x'Y - y'X$ என்னுந் திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுடைத்தென நிறுவுக. சமாந்தர விசைகள் $P_1, P_2, P_3 \ldots$ இவ்வச்சுக்களின் தளத்தில் முறையே புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots$ இலே தாக்குகின்றன. அவ்விசைகள், அவற்றின் பொதுத்திசை எதுவாயினும், $\Sigma P = 0$, $\Sigma Px = 0$, $\Sigma Py = 0$ ஆயின் சமநிலையிலிருக்கும் என நிறுவுக. (H.C.)

10. ABCDEF ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. AB, BE, ED, DA என்பனவற்றின் வழியாக முறையே 1, 3, 2, 4 இறு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனைக் காண்க. AB ஐ x அச்சாகவும் AE ஐ y அச்சாகவும் எடுத்துத் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. விளையுளின் திசையினை ஓர் அம்புக்குறியினுற் காட்டுக. (I.E.)

11. Ox, Oy என்பன செவ்வக அச்சுக்கள். P, (3, 4) என்னும் ஆள்கூறுகளுள்ள ஒரு புள்ளி. OP வழியே ஒரு 7 அலகு விசையினதும் 21 அலகுப் பருமனுள்ள இடஞ்சுழியான இணை யொன்றினதும் விளையுளினது தாக்கக் கோடானது Ox இலும் Oy இலும் வெட்டும் துண்டுகளைக் காண்க. (I.S.)

12. ABCD ஒரு செவ்வகம். AB = 5 அடி., BC = 3 அடி. AB, BC, DC, DA என்பவற்றின் வழியாக முறையே 2, 4, 3, 11 இறு. நிறை விசைகள் எழுத்து ஒழுங்குமுறையினுற் காட்டப்பெறும் திசைகளிற் செயற்படுகின்றன. இத்தொகுதியானது ஓர் இணையுடன், AC, BD என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியிற் செயற்படும் ஒரு விசையாகச் சுருக்கப்படின் அவ்விசையினது பருமனையும் திசையையும், அவ்விணையினது திருப்புதிறனையும் போக்கினையும் காண்க. (I.S.)

13. 8 அங்குல பக்கச் சதுரமொன்றின் மூலைகளில், படம் 98 இற் காட்டப்பெற்றவாறு விசைகள் செயற்படுகின்றன. அதன் மையத்திற் செயற்படும் விளையுள் விசையின் பருமனையும் திசையையும், விளையுள் இணையையும் கணிக்க.



படம் 98.

14. 2 அங்குல பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான தள அறுகோணி OABCDE இன் OA, AB, BC, CD, DE, EO என்னும் பக்கங்கள் வழியாக எழுத்து ஒழுங்குமுறையினுற் காட்டப் பெறும் திசைகளில் முறையே 1, 2, 3, 4, 5,

6 (இரு. நிறையில்) என்னும் பருமனுள்ள விசைகள் செயற்படுகின்றன. O இலுள்ள விளையுள் விசையையும் O பற்றிய விளையுள் திருப்புதிறனையும் காண்க. (I.C.)

15. ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்று, ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றையும் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாயிருப்பின், சமநிலையிலிருக்கும் என நிறுவுக. 10 அடி இரு. அலகுள்ள இணையொன்று ஒரு 2 அடி பக்கச் சதுரப்பலகை ABCD இன்மீது செயற்படுகின்றது. அவ்விணைக்குப் பதிலாக AB, BD, CA என்பவற்றின் வழியே செயற்படும் விசைகளை இடுக. (N.U.3.)

16. ABC, ஒரு முக்கோணி ; $AB = AC = 4$ அங்குலம், $BC = 3$ அங்குலம். E, AB இன் நடுப்புள்ளி. BC இல் C இலிருந்து 1 அங்குலத்தில் புள்ளி F இருக்கின்றது. அம்முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களின் வழியே செயற்படுவனவும் EF வழியே 4 இரு. நிறை விசையொன்றிற்கு ஒருமிக்கச் சமவலுவுடையனவுமான மூன்று விசைகளை 1 அங்குலத்திற்கு 1 இரு. நிறை என்ற அளவுத்திட்டத்திற்கு ஒரு செம்மையான படத்திற் குறித்துக் காண்க. (Ex.)

17. ஒரு சதுரம் ABCD இன் AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்களின் வழியாக முறையே 1, 2, 3, 4 என்னும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. இத்தொகுதியினை A இனூடான ஒரு விசையாகவும், BC இலுள்ள ஒரு விசையாகவும் சுருக்குக.

18. ABC, ஒரு முக்கோணியாம் ; $AC = 6$ அங்குலம், $BC = 8$ அங்குலம், $C = 90°$. AB வழியே ஒரு 10 இரு. நிறை விசை செயற்படுகின்றது. இதனை, AC, BC என்பவற்றிற்குச் செங்குத்தாக அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளிற் செயற்படும் இரு விசைகளினால் முற்றாகச் சமன் செய்யலாமென நிறுவுக. இவ்விசைகளின் பருமன்களைக் காண்க. (N.U.)

19. ஒரு விறைப்பான அடரின் மீது செயற்படும் ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்று முதலாவதாக, அவ்வடரிலுள்ள ஒரு புள்ளி A இற் செயற்படும் ஒரு தனி விசையாகவும் இரண்டாவதாக, வேறொரு புள்ளி B இற் செயற்படும் ஒரு தனி விசையாகவும், G திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணையாகவும் சுருக்கப்படுகின்றது. இத்தொகுதியானது AB இன் நடுப்புள்ளியிற் செயற்படும் ஒரு தனி விசையாகவும், ஓர் இணையாகவும் சுருக்கப்படின், அவ்விணையின் திருப்புதிறன் $\frac{1}{2}G$ ஆகுமெனை நிறுவுக. (N.U.3.)

20. ஒரு, 3 அடி பக்கச் சதுரம் ABCD இன் AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக முறையே 3, 4, 2, 1 இரு. நிறை விசைகள் செயற்படுகின்றன. அத்தொகுதியை (i) A இல் ஒரு விசையாகவும், ஓர் இணையாகவும், (ii) B, C என்பவற்றினூடான இரு சமாந்தர விசைகளாகவும் சுருக்குக.

21. A, B என்பன ஓர் அடரிலுள்ள எவையேனும் இரு புள்ளிகள். அவ்வடரின் மீது, அதன் தளத்திலிருக்கும் விசைத்தொகுதியொன்று செயற்படுகின்றது. அவ்விசைகளை இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் செயற்படும் ஒரு தனி விசையாகவும், ஓர் இணையாகவும் சுருக்குமிடத்து, இணைகளின் திருப்புதிறன்கள் முறையே G_a உம் G_b உம் ஆகும். அவ்விசைகள், AB இன் நடுப்புள்ளியிற் செயற்படும் ஒரு விசையாகவும், ஓர் இணையாகவும் சுருக்கப்படின், அவ்விணையின் திருப்புதிறன் $\frac{1}{2}(G_a + G_b)$ என நிறுவுக. (C.W.B.)

22. ஒரு சதுரத்தின் AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக முறையே P, Q, P, Q என்னும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. இந் நான்கு விசைகளும் இவற்றின் தளத்திலுள்ளதும் குறித்த பருமனுள்ளதுமான R என்னும் ஐந்தாம் விசையும் சதுரத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்லும் விளையுளொன்றினை உடையனவாயின் R இன் தாக்கக்கோடு ஒரு நிலைத்த வட்டத்தினைத் தொடுமென நிறுவுக. (I.S.)

23. 15 இறா. நிறையான ஒரு 2 அடி பக்கச் சீர்ச் சதுர அடர் ABCD, நிலைப்பட்டுள்ள A பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. இவ்வடரானது மூலைவிட்டம் AC ஐக் கிடையாகக் கொண்டு உச்சப்புள்ளி D ஊடான ஒரு கிடையிழையிலே உஞற்றப்படும் இழுப்பினாலும், இணையினாலும் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமன் 25 இறா. நிறையாக இருக்குமிடத்து, அவ்விணையின் திருப்புதிறனைக் காண்க. (I.S.)

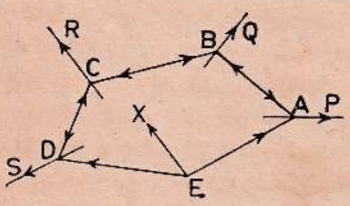
அதிகாரம் IV.

வரைபு அமைப்புக்கள்.

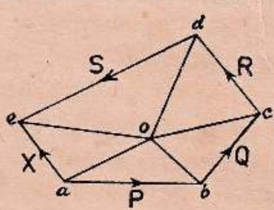
§93. எத்தொகை ஒருதள விசைகளினதும் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் விசைப் பல்கோணியைக் கொண்டு வரைபுமூலமாகக் காணலாம். அவ்விசைகள் ஒரு புள்ளியிலே தாக்குமிடத்து விளையுள் இப்புள்ளியினூடாகச் செல்லவேண்டும். இதிலிருந்து அதன் தாக்கக் கோட்டினை அறியலாம். ஒரு விறைப்பான பொருள் மீது அவ்விசைகள் தாக்கும் போதும் விசைப் பல்கோணியை வரைந்து, விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் அறியலாம். ஆனால் தாக்கக் கோட்டினை நிர்ணயிப்பதற்கு மேலும் ஓர் அமைப்புத் தேவைப்படுகின்றது.

இனி, இதனை எவ்வாறு அமைக்கலாம் என்பதையும், குறித்த விசைகளினாலே தாக்கப்படுவதும் இலேசான கோல்களினாலாயதுமான ஒரு சட்டப்படலிலுள்ள தகைப்புக்களை வரைபு முறையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு நிர்ணயிக்கலாமென்பதையும் ஆராய்வோம்.

§94. எத்தொகை ஒருதள விசைகளினதும் விளையுளை வரைபு மூலமாகக் காணல்.



படம் 99A.



படம் 99B.

P, Q, R, S என்னும் விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளைப் படம் **99A** இற் போலக் கொள்க.

ab, bc, cd, de என்னும் பக்கங்கள் முறையே **P, Q, R, S** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாகவும் விகிதசமமாகவும் இருக்குமாறு படம் ***abcde*** (படம் **99B**) ஐ வரைக. ***ae*** ஐ இணைக்க.

விசைப் பல்கோணியின் படி **P, Q, R, S** என்பவற்றின் விளையுளைப் பருமனிலும் திசையிலும் ***ae*** குறிக்கின்றது.

யாதுமொரு புள்ளி ***o*** ஐ எடுத்து அதனை ***a, b, c, d, e*** என்பவற்றுடன் இணைக்க.

விசை P, *ao* இனுலும் *ob* இனுலும் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து ; Q, *bo* இற்கும் *oc* இற்கும் சமவலுவுடைத்து. இவ்வாறே மற்றவையுமாம்.

P இன் தாக்கக் கோட்டின் மீது யாதுமொரு புள்ளி A ஐ எடுத்து, AE, AB என்பவற்றை முறையே *oa*, *ob* என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக வரைக. AB, Q இன் தாக்கக் கோட்டினை B இற் சந்திப்பதாகக் கொள்க. *ao* இனுலும் *ob* இனுலும் குறிக்கப்பட்டு முறையே EA, BA என்பவற்றின் வழியே செயற்படும் விசைகளுக்கு P சமவலுவுடைத்து.

B இனூடாக BC ஐ *oc* இற்குச் சமாந்தரமாக, R ஐ C இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

AB, CB என்பவற்றின் வழியே செயற்படும் *bo*, *oc* என்னும் விசைகளுக்கு Q சமவலுவுடைத்து. இவற்றுள் முன்னையது BA வழியே செயற்படும் விசை *ob* ஐச் சமன்செய்கிறது.

C இலிருந்து CD ஐ *od* இற்குச் சமாந்தரமாக, S ஐ D இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

BC, DC என்பவற்றின் வழியே செயற்படும் *co*, *od* விசைகளுக்கு R சமவலுவுடைத்து. அதோடு, முன்னையது CB வழியே செயற்படும் விசை *oc* ஐச் சமன்செய்கின்றது.

D இலிருந்து DE ஐ *oe* இற்குச் சமாந்தரமாக, AE ஐ E இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

CD, ED என்பவற்றின் வழியே செயற்படும் *do*, *oe* என்னும் விசைகளுக்கு S சமவலுவுடையது. அதோடு, முன்னையது DC வழியே செயற்படும் விசை *od* ஐச் சமன்செய்கின்றது.

எனவே, P, Q, R, S என்னும் விசைகள் முறையே EA, ED என்பவற்றின் வழியே செயற்படும் *ao*, *oe* என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடையன. இவை E இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதனுல் இவற்றின் விளேயுள் E ஊடாகச் செல்லவேண்டும்.

ஆகவே, விளேயுள், *ae* இற்குச் சமாந்தரமாகவுள்ளதும் பருமனில் *ae* இனுற் குறிக்கப்படுவதும் E இனூடாகச் செல்கின்றதுமான X என்னும் விசையாகும்.

இவ்வாறுக விளேயுளின் தாக்கக் கோட்டினையும் பருமனையும் திசையையும் நாம் நிர்மாணித்துள்ளோம்.

படம் *abcde*, குறித்த தொகுதியின் **விசைப் பல்கோணி** எனவும், படம் ABCDE, **இணைப்பு அல்லது இழைப் பல்கோணி** எனவும் கூறப்படும்.

இவ்விணைப்புப் பல்கோணி இழைகளாலானதாயின், அது, முறையே A, B, C, D இற் செயற்படும் விசைகள் P, Q, R, S இனுலும் அவற்றின் விளேயுளிற்குச் சமமானதும் முரணுனதும் E இற் செயற்படுவதுமான ஒரு விசையினுலும் வடிவு ABCDE இலே சமநிலையிற் பேணப்படும்.

இழைப் பல்கோணி என்ற பெயரின் தொடக்கம் இதுவேயாகும். இழைப் பல்கோணி என்பது ஒரு கயிற்றிலான பல்கோணி.

A, *o* என்பவற்றிற்கு வெவ்வேறு நிலையங்களை எடுத்து இழைப் பல்கோணி வடிவினைப் பல வழிகளிலும் மாற்றலாம் என்பது தெளிவு. ஆனால், **AE**, **DE** என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் கடைசிப் புள்ளியானது விளையுளின் தாக்கக் கோடாகிய அதே நேர்கோட்டில் எப்பொழுதும் அமையும்.

§95. விசைப் பல்கோணியின் *e* என்னும் புள்ளியானது *a* உடன் பொருந்தின், அந்தப் பல்கோணி மூடுவதாகச் சொல்லப்படும். அதோடு, விளையுள் விசையும் மறையும்.

எனினும், அவ்விசைகள் சமநிலையிலுள்ளனவென்பது இதன் கருத் தன்று.

எனெனில், இவ்விடத்து *oe*, *oa* ஆகியன ஒன்றுபட்டும், **AE**, **DE** என்பன சமாந்தரமாகவும், அவற்றின் வழியே செயற்படும் விசைகள் சமமாகவும் முரணாகவும் இருக்கும்.

எனவே, **DEA** ஒரு நேர்கோடாக இருந்தாலொழிய, அ-து. இழைப் பல்கோணி மூடினாலொழிய ஓர் இணை எஞ்சியிருக்கும்.

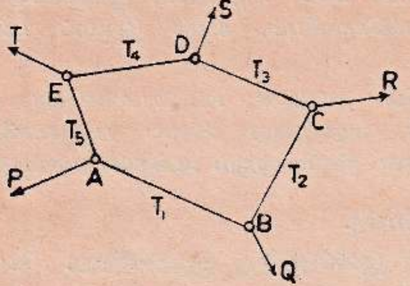
அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், விசைப் பல்கோணி, இழைப் பல்கோணி ஆகிய இரண்டும் மூடவேண்டும் என்பதை இதன் கருத்து.

§96. வரைபுமுறை பயன்படுத்தப்படும் மிகப் பல இடங்களில் விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும் என்பது தெரியும். அவ்விசைகள் வழக்கமாக யாதுமொரு சட்டப்படல்மீது செயற்படுவனவாகவும், பிரசினம் இச்சட்டப் படலின் வெவ்வேறு பகுதிகள் அல்லது " உறுப்புக்களி " லுள்ள தகைப்புக்களை காணவேண்டியதாகவும் இருக்கும். இதற்காக முன்னைய பந்திகளிற் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் அமைப்புக்களை மாற்றியமைக்கும் முறைகள் பின்வரும் உதாரணங்களில் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

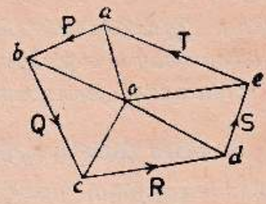
ஓர் **இலேசான** கோலின் சமநிலையைக் கருதுமிடத்து அதன்மீது செயற்படும் விசைகள் மட்டுமே முனைகளிற் பிரயோகிக்கப்படின், இவ் விசைகள் அக்கோலின் வழியே செயற்படுமாறு வழிப்படுத்தப்படல் வேண்டும். இல்லையாயின், அவை ஒன்றையொன்று சமன்செய்யாது. அத் தோடு அவை உண்மையாகச் சமமாகவும் முரணாகவும் இருக்கவேண்டும். எனவே, விசைகள் முனைகளில் மட்டுமே தாக்கும் ஓர் **இலேசான** கோலிலுள்ள தகைப்பானது கோலின் நீள வழியே ஓர் உதைப்பையோ இழுவையையோ கொண்டிருக்க வேண்டும்.

ஒரு கோல் உதைப்பு நிலையிலிருக்கும் போது **உதைசட்டம் (கந்து)** எனவும், இழுவை நிலையிலிருக்கும்போது **இழுவைச்சட்டம்** எனவும் கூறப்படும்.

§97. மூனகளிலே சுயாதீனமாகப் பொருத்தியுள்ள இலேசான கோல்களினாலாய ஒரு மூடிய பல்கோணி அப்பொருத்துக்களிற் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு குறித்த விசைத் தொகுதியினாலே தாக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் உள்ளது; இக் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காணல்.



படம் 100A.



படம் 100B.

AB, BC, CD, DE, EA என்பன மூனகளிலே சுயாதீனமாய்ப் பொருத்தியுள்ள கோல்களைக் குறிப்பதாகவும், P, Q, R, S, T என்னும் விசைகள் அப் பொருத்துக்களில், படம் 100A இற்போற் செயற்படுவதாகவுங் கொள்க.

அக்கோல்களின் வழியேயுள்ள விளையுள் தாக்கங்கள் முறையே T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 என்க.

முறையே P, Q, R, S, T என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமானதும் விகிதசமனானதுமான பக்கங்களை உடைய விசைப் பல்கோணி *abcde* (படம் 100B) ஐ வரைக. விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதனால் இந்தப் பல்கோணி மூடவேண்டும். *a* இனூடாக AE இற்குச் சமாந்தரமாக *ao* ஐயும், *b* இனூடாக AB இற்குச் சமாந்தரமாக *bo* ஐயும் வரைக. முக்கோணி *boa* இன் பக்கங்கள் A இற் செயற்படும் P, T_1, T_5 என்னும் விசைகளுக்குச் சமாந்தரம். ஆகவே, அதன் பக்கங்கள் இவ்விசைகளுக்கு விகித சமனுவதோடு, P ஐ *ab* குறிக்கும் அதே அளவுத்திட்டத்தில் T_1, T_5 ஐ முறையே பக்கங்கள் *bo*, *oa* குறிக்கின்றன.

oc, *od*, *oe* என்பவற்றை இணைக்க.

முக்கோணி *obc* இன் பக்கங்கள் *ob*, *bc* என்பன B இற் செயற்படும் விசைகளில் T_1, Q என்னும் இரண்டினைக் குறிக்கின்றன. எனவே, B இற் செயற்படும் மூன்றாவது விசை, அ–து. T_2 ஐ *co* குறிக்கின்றது.

இதே மாதிரியாக *do*, T_3 ஐயும் *eo*, T_4 ஐயும் குறிக்கின்றன.

ஆகவே, கோடுகள் *oa*, *ob*, *oc*, *od*, *oe* என்பன பருமனிலும் திசையிலும் சட்டப்படலின் பக்கங்கள் வழியேயான விசைகளைக் குறிக்கின்றன.

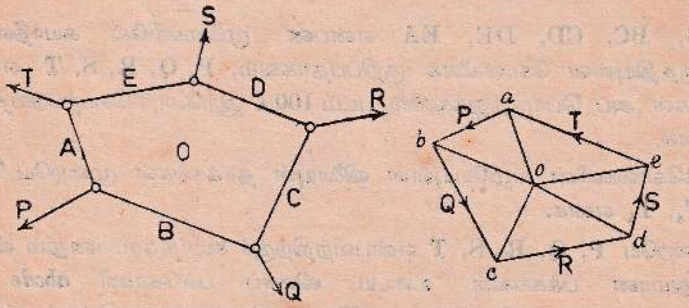
§98. இறுதிப்பந்திப் படங்களிலிருந்து P, Q, R, S, T என்னும் விசைத் தொகுதிக்கு *abcde* ஒரு விசைப் பல்கோணியும், ABCDE ஓர் இழைப் பல்கோணியுமாகும் என்பது தெளிவு.

அதோடு, விசைகள் *oa*, *ob*, *oc*, *od*, *oe* என்பவற்றினுலே தாக்கப்படுகின்ற, ஒரு மூட்டிய சட்டப்படலை *abcde* குறிப்பின், இவ்விசைத் தொகுதிக்கு ABCDE விசைப் பல்கோணியும், *abcde* இழைப் பல்கோணியும் ஆகும்.

எனவே, இப்பல்கோணிகளில் ஒன்றைச் சட்டப்படலாகவோ இழைப் பல்கோணியாகவோ எடுப்பின், மற்றையது விசைப் பல்கோணியாகும். இதன் காரணமாக, அப்படங்கள் **நிகர்மாற்றுப் படங்கள்** எனப்படும்.

§99. போவின் (Bow's) குறிப்பீடு.

படங்களை எழுத்திடும் முறை இன்னென்று இருக்கின்றது. வேண்டின் இதையும் பயன்படுத்தலாம். பந்தி 97 இலுள்ள சட்டப்படலை எடுத்துநோக்குக.



படம் 101.

சட்டப்படலையும் விசைகளையும் படம் 101 இற் போல வரைக. சட்டப்படலின் மூலைகளில் எழுத்திடுதற்குப் பதிலாக, விசைகளுக்கும் சட்டங்களுக்கும் இடையேயுள்ள **வெளிகளில்** எழுத்திடுக, உ–ம். T இற்கும் P இற்கும் இடையே உள்ள வெளியை A எனவும், P இற்கும் Q இற்கும் இடையேயுள்ள வெளியை B எனவும், Q இற்கும் R இற்கும் இடையேயுள்ள வெளியை C எனவும் கொள்க ; பிறவும் இவ்வாறேயாம்.

P இன் தாக்கக் கோடானது A, B என்னும் வெளிகளிடையேயான எல்லையாகும். அதோடு, விசைப் பல்கோணியில் P ஐக் குறிக்கும் கோடு *ab* எனவும், Q ஐக் குறிப்பது *bc* எனவும் கூறப்படும் ; பிறவும் இவ்வாறேயாம்.

பின்பு விசைப் பல்கோணி *abcde* ஆகும்.

அவ்விசைப் பல்கோணியின் முனைவை *o* எனபோமாயின், இழைப் பல்கோணியினுள் உள்ள வெளி O எனப்படும்.

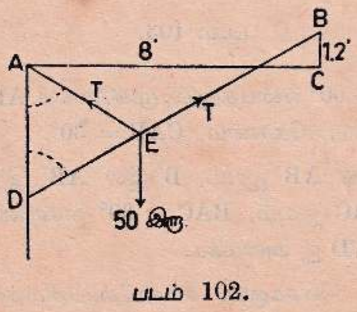
விசைப் பல்கோணியின் கோணத்துடன் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு சிறிய எழுத்து இழைப் பல்கோணியின் வெளியுடன் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு பெரிய எழுத்திற்கு உரியதாகும்.

§100. உதாரணம் (i).

A, B என்னும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைத்த ஒரு கயிறு அதன் வழியே ஒப்பமாக வழுக்கக்கூடிய ஒரு 50 இரு. நிறையைக் காவுகிறது. A இலுள்ள கிடையையும் நிலைக்குத்தையும் பொறுத்து B இன் ஆள்கூறுகள் முறையே 8 அடியும் 1·2 அடியுமாகும். கயிற்றின் நீளம் 10 அடி. வரைபு முறையாக, சமநிலைத் தானத்தையும் கயிற்றின் இழுவையையும் காண்க. (I.E.)

8 அடியைக் குறிக்க AC (படம் 102) ஐக் கிடையாய் ஓர் அளவுத்திட்டத்திற்கும் 1·2 அடியைக் குறிக்க அதற்குச் செங்குத்தாக CB ஐயும் வரைக.

கயிற்றின் வழியே அந்த நிறை ஒப்பமாக வழுகுமாதலின், அதன் இருபக்கங்களிலும் உள்ள இழுவைகள் சமனாகவேண்டும். எனவே கயிற்றின் இரு பாகங்களும் நிலைக்குத்துடன் சமமாகச் சாய்ந்திருக்க வேண்டும். A இனூடாக AD ஐ நிலைக்குத்தாக வரைக. B ஐ மையமாகக் கொண்டு, 10 அடி (அளவுத்திட்டத்திற்கு) ஆரையினால் AD ஐ D இல் வெட்டுக.



படம் 102.

$\angle DAE = \angle ADE$ என அமைந்து BD ஐ E இல் வெட்டக்கூடியதாக A இல் AE ஐ வரைக.

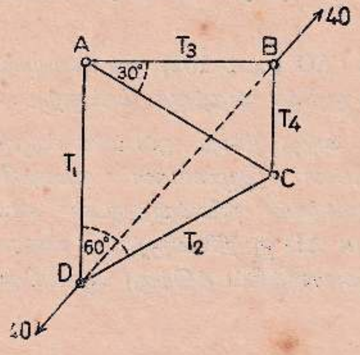
பின்பு $AE = DE$. அதோடு, AE, BE என்பன நிலைக்குத்துடன் சம சாய்வு கோணத்தில் அமையும்.

எனவே, AEB கயிற்றினைக் குறிக்கின்றது. அதோடு, 50 இரு. நிறை E இல் நிலைக்குத்தாகச் செயற்படுகின்றது.

இனி, E இற்கு விசை முக்கோணியை வரைந்து இழுவையைக் காணலாம்.

உதாரணம் (ii).

நான்கு இலேசான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் இணைத்து ஆக்கிய நாற்பக்கல், ABCD ஆகும். A, B என்பவற்றில் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் செங்கோணமாகும். கோணம் $ADC = 60°$, $AD = CD$. ஒரு கோல் AC இனுல் அது விறைப்பாக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் சம நிலையிலிருக்குமாறு B, D என்பவற்றில் 40 இரு. நிறை விசைகள் செயற் படுகின்றன. அக்கோல்களில் இழுவைகளை அல்லது உதைப்புக்களைக் காண்க.



படம் 103.

$AD = DC$, $ADC = 60°$ என்பதனுல், முக்கோணி ADC ஒரு சமபக்க முக் கோணியாகும். அதோடு, கோணம் $CAB = 30°$.

படம் 103 இற் போல AB ஐயும், B இல் AB இற்குரிய செங்குத்தை C இல் வெட்டுமாறு AC ஐயும், $BAC = 30°$ என்றமைய வரைக. பின்பு AC மீது முக்கோணி ACD ஐ அமைக்க.

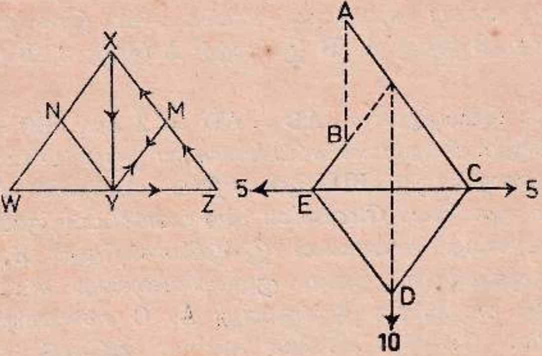
அவ்விரு 40 இரு. விசைகளும் சமன்செய்கின்றமையால் அவை ஒரே நேர்கோடு, அ–து. BD வழியே முரண் திசைகளிற் செயற்பட வேண்டும். அவை வெளிப்புறமாகத் தாக்குவதாகக் கொள்க.

மூலை D இற்கு விசை முக்கோணியை வரைந்து, AD இலும் DC இலுமுள்ள இழுவைகள் T_1, T_2 ஐக் காண்க, ($T_1 = 15{\cdot}1$, $T_2 = 30{\cdot}2$).

மூலை B இற்கு விசை முக்கோணியை வரைந்து, AB இலும் BC இலு முள்ள இழுவைகள் T_3, T_4 ஐக் காண்க, ($T_3 = 26{\cdot}2$, $T_4 = 30{\cdot}2$). A அல்லது C இற்கான விசை முக்கோணியை வரைந்து AC இல் உதைப்பு அறியப்படுகின்றது. (இவ்வுதைப்பு 30·2 ஆகும்.)

உதாரணம் (iii).

A, B என்னும் இரு முனைகளுடன் இணைத்த ஓர் இழையில் மூன்று மணிகள் கோர்க்கப்பட்டுள்ளன. அம்முனைகளில் ஒன்றிற்கு நிலைக் குத்தாகக் கீழே மற்றது உள்ளது. இழையின் நீளம் AB இலும் அதிக மானது. 10 இரு. நிறையொன்று நடு மணியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றைய இரு மணிகளும் 5 இரு. நிறைக் கிடை விசைகளினால் முரண் திசைகளில் வெளிப்புறமாக இழுக்கப்படுகின்றன. விசைப் படத்தினை வரைந்து, கிடையுடன் இழையின் வெவ்வேறு பாகங்களின் சாய்வை இப்படத்தி லிருந்து உய்த்தறிக. (N.U.)



படம் 104. படம் 104A.

மணிகள் இழையின்மீது சுயாதீனமாய் இயங்குமாதலின் இழுவை இழையெங்கும் ஒரேயளவினதாக இருக்கும். அதோடு, ஒரு மணியின் இரு மருங்கிலும் உள்ள இழையின் பாகங்கள் கிடையுடனே நிலைக்குத்துடனே சமமாகச் சாய்ந்திருக்கவும் வேண்டும்.

10 இரு. நிறை இணைத்துள்ள மணியினதும் வலப்பக்கமாகச் செயற்படும் 5 இரு. நிறை விசையினை உடைய மணியினதும் சமநிலையை எடுத்துநோக்குக. XY (படம் 104) ஐ நிலைக்குத்தாய் 10 இரு. நிறை விசையைக் குறிக்குமாறும் YZ ($= \frac{1}{2}$XY) ஐ 5 இரு. நிறையைக் குறிக்கு மாறும் வரைக. இவ்விசைகள், இவற்றின் தாக்கக் கோடுகளுடன் ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் சமமாகச் சாய்ந்திருக்கும் சம இழுவைகளினாற் சமன் செய்யப்படுகின்றன. ஆகவே, இவ்விரு நிறைகளுக்குமான விசை முக்கோணி கள் சமபக்க முக்கோணிகளாக வேண்டும். அதோடு, Y இல் முடியும் பக்கங் கள் ஒன்றோடொன்று பொருந்தவும் வேண்டும். எனவே, அவை XZ ஐ இணைத்தும், Y ஐ XZ இன் நடுப்புள்ளி M உடன் இணைத்தும் பெறப்படுகின்றன.

MZ, MY ஆகியன 5 இரு. நிறை விசை செயற்படும் இடத்திலுள்ள இழையின் பாகங்களின் கிடையுடனான சாய்வுகளைத் தருகின்றன. அதோடு, 10 இரு. நிறையில் உள்ள பாகங்கள் அவைக்குச் சமாந்தரமுமாகும்.

YW ஐ இடது பக்கமாகச் செயற்படும் 5 இரு. நிறை விசையைக் குறிக்குமாறு இடது பக்கமாக வரைய, முன்பின்னாக மாறிய படம் வரும். இழையானது படம் 104A இற் காட்டப்பெற்ற வடிவிலிருக்கும்.

கோணம் BAC, தான் $^{-1}\frac{1}{2}$ ஆகும்.

பயிற்சி XVII.

1. ஒரு முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் AB, BC, CA முறையே 12, 10, 15 அங்குல நீளமானவை. BD, B இலிருந்து CA இற்கான செங்குத்து. பின்வரும் விசைகளினது விளையுளின் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டினையும் வரைபு மூலமாகக் காண்க :—A இலிருந்து C இற்கு 8, C இலிருந்து B இற்கு 4, B இலிருந்து A இற்கு 3, B இலிருந்து D இற்கு 2.

2. ஒப்பமாக இணைந்துள்ள, AB = AD = 2 அடி, BC = CD = 15 அங்குலம் என்னும் விறைப்பான சட்டங்களாலாய ஒரு சட்டப்படல், கோணம் BAD = 60° என்றவாறும் BD இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் A, C என்பன இருக்குமாறும் ஒரு கிடை மேசையின் மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. ஒரு 28 இரு. நிறையைத் தாங்கவல்ல இழையொன்றினால் B, D என்பன இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இழை குழம்பாவண்ணம் சட்டப்படல் தரப்பட்ட தானத்திற் சமநிலையில் இருக்குமாறு A, C என்பவற்றில் பிரயோகிக்கத்தக்க மிகப் பெரிய விசைகளைக் காண்க. அதோடு, சட்டப்படலின் உறுப்புக்களிலுள்ள நிகர்த்த தகைப்புக்களை அவை இழுவைகளோ அமுக்கங்களோ எனக் கூறி நிர்ணயிக்க. (H.S.D.)

3. ஒரு சுவருடன் B இல் பிணைக்கப்பட்டுள்ளதும், A இல் ஒரு 105 இரு. நிறையைக் காவுவதுமான ஒரு 10 அடி நீளமான கோல் AB, அதன் நடுப்புள்ளி C உடனும் B இற்கு 7 அடி மேலே சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளி D உடனும் இணைந்த ஒரு நாணினாலே தாங்கப்படுகின்றது. CD, 6 அடி நீளமானது. அளவுத்திட்டப்படி ஒரு படம் வரைந்து, ஒரு விசை முக்கோணியிலிருந்து, நாணிலுள்ள இழுவையையும் பிணைச்சல் B இன் மறுதாக்கத்தினது பருமனையும் திசையையும் மதிப்பிடுக.

4. 100 இரு. நிறையான ஒரு சீர்க் கோல் AB, இழைகள் AC, BD என்பவற்றினாலே தாங்கப்படுகின்றது. BD நிலைக்குத்தானது. கோணங்கள் CAB, ABD ஒவ்வொன்றும் 105° ஆகும். B இல் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசை F இனால் கோல் இந்நிலையிற் பேணப்படுகின்றது. F இன் பெறுமானம் ஏறத்தாழ 25 இரு. நிறையெனக் காட்டுக.

5. ஐந்து இலேசான சமகோல்கள் ஓர் ஐங்கோணி ABCDE வடிவில் அவற்றின் முனைகளிற் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இத்தொகுதி, இணைப்பு A இலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இணைப்பு C இல் ஒரு w நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. BE, BD என்னும் கோல்களினால் ஒழுங்கான

ஐங்கோணி வடிவம் பேணப்படுகின்றது. பற்பல கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களின் பருமன்களைக் காட்டுமாறு ஒரு வரைபு வரைந்து அக்கோல்களில் எவை நெருக்கலிலும் எவை இழுவையிலும் இருக்கின்றன என்பதைக் காண்க. (I.S.)

6. ஒவ்வொன்றும் 2 அடி நீளமான மூன்று இலேசான கோல்கள் ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC வடிவில் அவற்றின் முனைகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணி, A இலிருந்து 15 அங்குலத்தில் AC இலிருக்கும் ஒரு புள்ளியிலே தாங்கப்படுகின்றது. A இலிருந்து 7 அங்குலத்தில் AB இலிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் 13 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல் BC இலுள்ள இழுவையையும், A இலுள்ள மற்றைய இரு கோல்களிடையேயான தாக்கத்தையும் (வரைபு மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ) காண்க. (I.A.)

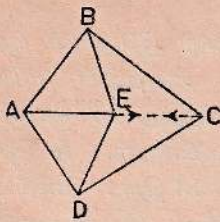
7. மூன்று இலேசான சட்டங்கள், கோணங்கள் A, C ஒவ்வொன்றும் 30° ஆகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணிச் சட்டப்படல் ABC ஐ உருவாக்குமாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. புள்ளி B பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சுழலவல்ல இச்சட்டப்படல், C இலே தொங்கும் ஒரு 100 இரு. நிறையினாலும் A இலுள்ள ஒரு நிலைக்குத்து விசை P இனாலும் AB கிடையாகச் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. விசை P இனதும் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களினதும் பருமன்களை, வரைபு மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ காண்க. (H.S.D.)

8. ABCDEF, ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. A இலே திசைகள் AC, DA, FA இல் முறையே 2, 5, 3 இரு. நிறை விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுளைப் பருமனிலும் திசையிலும் வரைபுமூலமாகக் கண்டு, பேற்றுக்களைக் கணிப்பினாற் சரிபார்க்க. (H.S.D.)

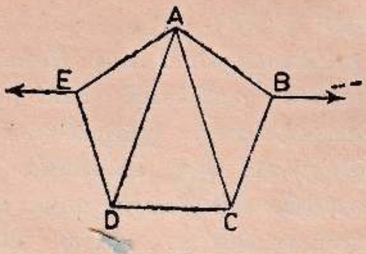
9. ஐந்து இலேசான கோல்கள் ஓர் இணைகரம் ABCD ஐ அமைக்கின்றன. BD, அதன் மூலைவிட்டம். அதன் பக்கங்கள் AD, BC என்பன மற்றைய இரு பக்கங்களிலும் பார்க்க இருமடங்கு நீளமானவை. கோணங்கள் A, C ஒவ்வொன்றும் 60° ஆகும். இணைகரம் சமநிலையிலிருக்குமாறு F பருமனுள்ள இரு சம, முரண் விசைகள் AC வழியே A இலும் C இலும் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. எல்லாக் கோல்களிலும் தகைப்புக்களைக் காண்க. (I.S.)

10. படம் 105 இல் உள்ள சட்டப்படல், ஒப்பமாக இணைத்துள்ள 3 அடி நீளக் கோல்கள் AB, AD என்பவற்றினாலும் 4 அடி நீளக் கோல்கள் BC, DC என்பனவற்றினாலும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. AC, 5 அடி நீளமானது. E அதன் நடுப்புள்ளி. C, E என்பவற்றில்

40 இரு. விசைகள் காட்டப்பெற்றவாறு தாக்குகின்றன. அச்சட்டப் படலின் ஒவ்வொரு கோலிலும் உள்ள இழுவை அல்லது நெருக்கலைக் காண்க. (Q.E.)



படம் 105.

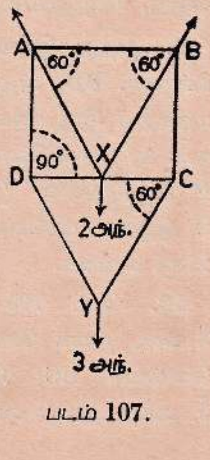


படம் 106.

11. மூலைகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ABCDE (படம் 106), AC, AD என்னும் இரு சட்டங்களினால் இறுக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் 3 இரு. நிறைக்குச் சமமான இரு சம, முரண் விசைகள் B இலும் E இலும் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. சட்டப்படலின் ஒவ்வொரு சட்டத்திலும் உள்ள தகைப்பினை அது இழுவையோ நெருக்கவிசையோ எனக் கூறிக் காண்க. (Q.E.)

12. பக்கங்கள் AB, BC ஐ முறையே 8, 12 சமீ. ஆகக் கொண்ட ஒரு செவ்வகம் ABCD ஒப்பமாக இணைத்துள்ள கோல்களாலாயது. அது மூலைவிட்டம் BD இனால் இறுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இச்சட்டப்படல் A இலே தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. 10 கிலோ நிறையொன்று C உடன் இணைக்கப் பட்டிருக்கிறது. (இலேசானவை என எண்ணப்படும்) இக்கோல்களிலுள்ள விசைகளுக்கான ஒரு தகைப்புப் படத்தை வரைந்து, உதைப்புக்களையும் இழுவைகளையும் பிரித்துக்காட்டித் தகைப்புக்களைக் காண்க. (I.S.)

13. ஒரு விறைப்பான அடரில் வரைந்துள்ள 2 அங்குல பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறு கோணியின் அடுத்துவருகின்ற மூன்று பக்கங்களின் வழியே வரிசைக்கிரமமாக 3, 2, $-3\cdot5$ இரு. நிறை விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளை யுளின் பருமனையும் திசையையும் தாக்கக் கோட் டினையும் காட்டும் ஒரு வரைபு அமைப்பினைத் தருக. (N.U.3.)



படம் 107.

14. ஒப்பமாக மூட்டியுள்ள ஒன்பது சட்டங்களாலாய ஒரு சட்டப்படல், காட்டப்பெற்ற திசைகளில் A இலும் B இலும் கயிறுகளினாலே தாங்கப்பட்டும், பாரங்களை X இலும் Y இலும் காவியுமிருப்பதைப் படம் 107 காட்டு கின்றது. ஒவ்வொரு சட்டத்திலுமுள்ள விசைகளை, பேறு

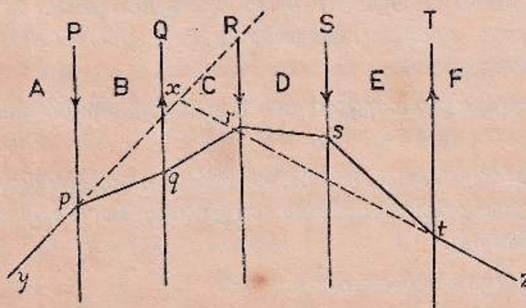
கீள வரைபிற் குறித்தும் அவை இழுவைகளோ உதைப்புக்களோ எனக் காட்டியும், வரைபு மூலமாகக் காண்க. (சட்டங்களின் நிறையைத் தவிர்க்க.)

15. ஒரு சட்டப்படல் ABCDE இன் AB, BC, CD, DE என்னும் நான்கு கோல்கள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியின் பக்கங்களாகும். இச்சட்டப்படலானது AC, AE, CE என்பவற்றை இணைக்கும் கோல்களால் இறுக்கப் பெற்றுள்ளது. வெளியிலிருந்து, முறையே AC இற்கும் CE இற்கும் செங்குத்தான திசைகளில் 20 இரு. நிறைச் சம விசைகள் B, D என்னும் இணைப்புக்களிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. இச்சட்டப்படல் முறையே AB, ED என்பவற்றின் வழியாக A, E என்பனவற்றிற் பிரயோகிக்கப்படும் விசைகளினூற் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது. இவ்விசைகளின் பருமனையும் சட்டப்படலின் உறுப்புக்களிலுள்ள தகைப்புக்களையும் காண்க. (N.U.)

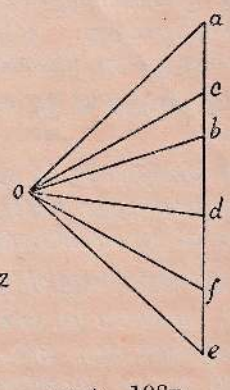
16. ஒரு விறைப்பான அடரில் வரைந்துள்ள 2 அங்குல சமபக்க முக்கோணியொன்றின் பக்கங்கள் வழியே வரிசையாக, 1, 3, -4 இரு. நிறை விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளினது பருமனையும் திசையையும் தானத்தையுங் காட்டி ஒரு வரைபை அமைக்க. (C.W.B.)

17. தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள மூன்று சம இழைகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணி ABC வடிவில் முடிச்சிடப்பெற்றுள்ளன. A இல் ஒரு 30 இரு. நிறை தொங்கவிடப்பெற்றுள்ளது. அதேசமயத்தில், அம்முக்கோணியும் நிறையும், B இலும் C இலுமுள்ள இழைகளினூல் BC ஐக் கிடையாகக் கொண்டு தாங்கப்படுகின்றன. இவ்விழைகள் BC உடன் 135° கோணத்திற் சமமாகச் சாய்ந்திருப்பின், ஒரு வரைபுமுறையைக் கொண்டு இழைகளிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க. (N.U. 3 உம் 4 உம்.)

§101. நடைமுறையில், விசைகள் சமாந்தரமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பம் மிக முக்கியமானதொன்றாகும். இத்தகைய முறை பந்தி 94 இல் உள்ளதற்குச் சரியொத்ததாகும். ஆனால், இங்கு விசைப் பல்கோணி ஒரு நேர்கோடாக இருக்கும்.



படம் 108A.



படம் 108B.

விசைகளை P, Q, R, S, T எனவும் அவற்றின் தாக்கக் கோடுகளைப் படம் 108 A இற் போலவுங் கொள்க.

வெளிகளைக் காட்டப்பெற்றவாறு A, B, C, D, E, F என எழுத்திடுக. விசைகளின் திசைக்குச் சமாந்தரமானதொரு கோட்டில் P ஐ அளவுத் திட்டத்திற் குறிக்குமாறு (படம் 108B) கீழ்நோக்கி *ab* ஐயும், Q ஐக் குறிக்குமாறு மேனேக்கி *bc* ஐயும், முறையே R, S, T என்பவற்றைக் குறிக்குமாறு *cd*, *de*, *ef* என்பவற்றையும் குறிக்க.

பின்பு *af*, விளையுளைப் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கும்.

யாதுமொரு புள்ளி *o* ஐ எடுத்து, *oa*, *ob*, *oc*, *od*, *oe*, *of* என்பவற்றை இணைக்க.

விசை P, *ao* இனுலும் *ob* இனுலும் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்கும், Q, *bo* இனுலும் *oc* இனுலும் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்கும் சமவலுவுடைத்து. பிறவும் இவ்வாறே.

P இன் தாக்கக் கோட்டில் யாதுமொரு புள்ளி *p* ஐ எடுத்து, முறையே *ao*, *ob* இற்குச் சமாந்தரமாக *py*, *pq* ஐ வரைக. *pq*, Q இன் தாக்கக் கோட்டினை *q* இற் சந்திக்கிறதெனக.

P, முறையே *py*, *pq* வழியேயுள்ள *ao*, *ob* என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து.

q இலிருந்து *qr* ஐ *oc* இற்குச் சமாந்தரமாக, R ஐ *r* இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

Q, முறையே *qp*, *qr* வழியே செயற்படும் *bo*, *oc* என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து. அதோடு, முன்னைய விசையானது *pq* வழியேயுள்ள விசை *ob* ஐச் சமன்செய்கின்றது.

r இலிருந்து *rs* ஐ *od* இற்குச் சமாந்தரமாக, S ஐ *s* இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

R, முறையே *rq*, *rs* வழியே செயற்படும் *co*, *od* என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து. அதோடு, முன்னைய விசையானது *qr* வழியே செயற்படும் விசை *oc* ஐச் சமன்செய்கின்றது.

s இலிருந்து *st* ஐ *oe* இற்குச் சமாந்தரமாக, T ஐ *t* இற் சந்திக்குமாறு வரைக.

S, முறையே *sr*, *st* வழியே செயற்படும் *do*, *oe* என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து. அதோடு, முன்னைய விசையானது *rs* வழியே செயற்படும் விசை *od* ஐச் சமன்செய்கின்றது.

t இலிருந்து *tz* ஐ *of* இற்குச் சமாந்தரமாக வரைக.

T, முறையே *ts*, *tz* வழியே செயற்படும் *eo*, *of* என்னும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து. அதோடு, முன்னைய விசையானது *st* வழியே செயற்படும் விசை *oe* ஐச் சமன்செய்கின்றது.

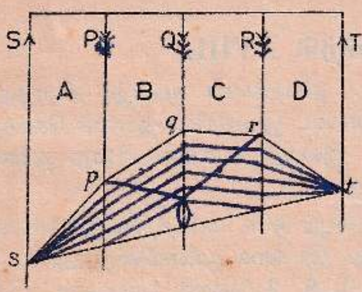
எனவே, py வழியேயுள்ள விசை ao உம், tz வழியேயுள்ள விசை of உம் எஞ்சியுள்ளன.

yp ஐயும், zt ஐயும் x இற் சந்திக்கும்படி நீட்டுக. பின்பு, விசைகளின் விளையுள் x இனூடாய்ச் செல்ல வேண்டும்.

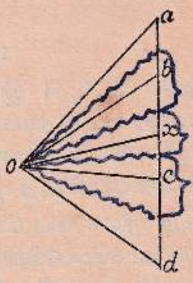
விளையுள், x இனூடாய்ச் செல்வதும் பருமனிலும் திசையிலும் af இனாற் குறிக்கப்படுவதுமான X என்னும் விசையாகும்.

உதாரணம் (i).

ஓர் இலேசான சட்டத்தின் நீளப்பாட்டிலே குறித்த புள்ளிகளிலே குறித்த நிறைகள் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. இச்சட்டம் அதன் முனைகளிலே தாங்கப்படுகின்றது. தாங்கிகளின் மீதுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.



படம் 109A.



படம் 109B.

படம் 109A இற் போலத் தாக்கும் நிறைகளை P, Q, R எனவும் தாங்கிகளின் மீதான மறு தாக்கங்களை S, T எனவும் கொள்க.

வெளிகளைக் காட்டப்பெற்றவாறு A, B, C, D என எழுத்திடுக. விசைப் பல்கோணி $abcd$ (படம் 109B) ஐ வரைக. யாதுமொரு புள்ளி o ஐ எடுத்து, oa, ob, oc, od ஐ இணைக்க.

P இன் தாக்கக் கோட்டில் யாதுமொரு புள்ளி p ஐ எடுத்து, oa இற்குச் சமாந்தரமாக S ஐ s இல் வெட்டுமாறு ps ஐயும் ob இற்குச் சமாந்தரமாக Q ஐ q இல் வெட்டுமாறு pq ஐயும் வரைக.

q இலிருந்து oc இற்குச் சமாந்தரமாக, R ஐ r இல் வெட்டுமாறு qr ஐயும், r இலிருந்து od இற்குச் சமாந்தரமாக, T ஐ t இல் வெட்டுமாறு rt ஐயும் வரைக.

விசைகள் P, Q, R முறையே ps, rt வழியே செயற்படுகின்ற ao, od இனாற் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடையன.

st ஐ இணைத்து, st இற்குச் சமாந்தரமாக, ad ஐ x இல் வெட்டுமாறு ox ஐ வரைக.

ps வழியே செயற்படும் விசை *ao* ஆனது, S இன் கோடு வழியே கீழ் நோக்கிச் செயற்படுகின்ற *ax* இனூற் குறிக்கப்படும் விசையொன்றிற்கும், *ts* வழியே செயற்படும் விசை *xo* இற்கும் சமவலுவுடைத்து.

rt வழியே செயற்படும் விசை *od* ஆனது, T இன் கோடு வழியே கீழ் நோக்கிச் செயற்படுகின்ற *xd* இற்கும் *st* வழியே செயற்படும் விசை *ox* இற்கும் சமவலுவுடைத்து. இப்பின்னைய விசையானது *ts* வழியே செயற்படும் விசை *xo* ஐச் சமன்செய்யும்; முறையே S, T இனது கோடுகளின் வழியே செயற்படுவதும் *ax*, *xd* இனூற் குறிக்கப்படுவதுமான நிலைக் குத்து விசைகளே எஞ்சியிருக்கின்றன.

முனைகளிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் இவ்விசைகளுக்குச் சமமாகவும் முரணுகவும் இருக்க வேண்டியதனுல், அவை *ax*, *xd* இற்குச் சமமாகவும் முரணுகவும் இருக்கும்.

பயிற்சி XVIII.

1. முறையே 3, 5, 4 இரு. நிறையான மூன்று நிகர்த்த விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவை. இவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் 1 அடி இடைத் தூரங்களில் உள்ளன. இவற்றின் விளையுளினது தானத்திற்குரிய ஒரு வரைபு அமைப்பினைத் தருக. (I.S.)

2. 30 அடி நீளச் சட்டமொன்று ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் அதன் இரு முனைகளிலும் தாங்கப்படுகின்றது. இடக்கை முனையிலிருந்து 8, 12, 17, 25 அடி தூரங்களில் முறையே 5, 3, 9, 2 தொன் பாரங்கள் இச்சட்டத்தின் மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. தாங்கிகளிலுள்ள மறுதாக்கங்களை இணைப்பு, காவிப் பல்கோணிகளைக் கொண்டு வரைபு மூலமாகப் பெறுக. மறு தாக்கங்களையும் கணிக்க. (I.C.)

3. முறையே 1, 0·5, 1·2 அங்குல இடைத் தூரங்களிலே குறித்த ஒழுங்கிற் செயற்படுவனவும் +7, +4, −5, +2 இரு. பருமனுள்ளனவு மான நான்கு சமாந்தர விசைகளின் விளையுளினது தானத்தினை வரைபு மூலமாகக் காண்க. (I.E.)

4. 10 அடி நீளச் சட்டமொன்றின்மீது ஒரு முனையிலிருந்து 1, 3, 5 அடி தூரங்களில் முறையே 2, 3, 5 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் விளையுளினது தாக்கக் கோட்டினை வரைபு மூலமாகக் காண்க.

5. முனைகளிலே தாங்கப்படும் 20 அடி நீளக் கிடைச் சட்டமொன்றில் ஒரு முனையிலிருந்து 3, 6, 12, 15 அடி தூரங்களில் முறையே 2, 3, 6 ,4 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அதன் முனைகளின் மீதான உதைப் புக்களை வரைபு மூலமாகக் காண்க.

6. முனைகளிலே தாங்கப்படும் 10 அடி நீள இலேசான கோல் ஒன்றில் முனையொன்றிலிருந்து 2, 3, 6, 8 அடி தூரங்களில் முறையே 8, 3, 2, 6 இரு. நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. தாங்கிகளின் மீதான உதைப்புக்களை வரைபு மூலமாகக் காண்க.

7. 2, 4, 6, 8, 10 இரு. நிறையான நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகள் 1 அடி இடைத் தூரங்களிற் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுளினது தாக்கக் கோட்டின் தானத்தினை வரைபு மூலமாகக் காண்க.

8. ஓர் இடம்பெயரியினது சில்லின் மீதான 10, 10, 18, 16, 8, 8 தொன் பாரங்களின் இடைத் தூரங்கள் முறையே 4, 10, 8, 6, 4, அடியாகும். தண்டவாளங்களின் மீதான விளையுளுநதைப்பின் பருமனையும் நிலையத்தினையும் வரைபுமூலமாகக் கண்டு கணிப்பினுற் செவ்வை பார்க்க.

9. 10 அடி நீளக் கிடைச்சட்டமொன்றில் முனையொன்றிலிருந்து 2, 5, 7, 9 அடி தூரங்களில் முறையே 4, 5, 6, 7 இரு. நிறைகள் வைக்கப் பட்டுள்ளன ; (i) அந்நிறைகளின் விளையுள், (ii) சட்டம் அதனிரு முனை களிலும் தாங்கப்படுமிடத்து, அதன் நிறையினைத் தவிர்த்து, தாங்கிகளின் மீதான தாக்கங்கள், ஆகியவற்றிற்கு வரைபு அமைப்புக்களைத் தருக. (Q.E.)

10. ஓர் இடம்பெயரியின் அச்சாணிகளின் இடைத் தூரங்களும் அவற்றின் மீது பொறுத்துள்ள பாரங்களும் பின்வருவன. முன்புறமிருந்து பின்புற மாக வாசிக்குமிடத்து :—

இடைத்தூரங்கள்	9	10	8	10	அடி.
பாரங்கள்	12	12	25	25	5 தொன்.

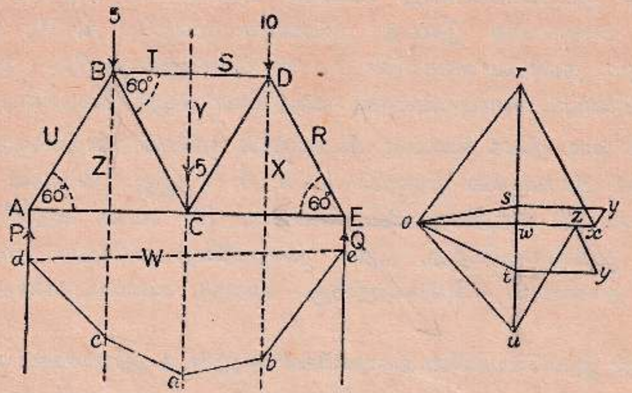
இடம்பெயரியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் அதன் முன் அச்சாணிக் கும் இடையேயுள்ள கிடைத் தூரத்தினை வரைபு அமைப்பாற் காண்க. (Q.E.)

11. 100 இரு. நிறையும் 20 அடி நீளமுமுள்ள சீர்ச் சட்டம் AB, A இலும் B இலிருந்து 4 அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலும் தாங்கப்படு கின்றது. அதன்மீது A இலிருந்து 5 அடி., 8 அடியிலுள்ள புள்ளிகளில் 60 இரு. நிறைப் பாரங்களும் B இல் 80 இரு. நிறைப் பாரமொன்றும் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. தாங்கிகளின் மீதான தாக்கங்களை **வரைபு மூலமாகக்** காண்க.

§102. உதாரணம் (i).

மூன்று சமபக்க முக்கோணிகள் ABC, BCD, CDE வடிவிலுள்ள, ஏழு கோல்களினுலான ஒரு சட்டப்படல், A இலும் E இலுமுள்ள ஒப்பமான நிலைக்குத்துத் தாங்கிகளின்மீது BD, ACE என்பன கிடையாகுமாறு, BD ஐ ACE இற்கு மேலாகக் கொண்டு தங்கியிருக்கின்றது. அதன்மீது B, C, D இல் முறையே 5, 5, 10 அந்தர் பாரங்கள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கோல்களின் நிறைகளைத் தவிர்த்து, A இலும் E இலுமுள்ள மறுதாக்

கங்களேக் காண்க. அதோடு, ஒவ்வொரு கோலிலும் உள்ள தகைப்பினே, எவை உதைப்புக்கள் எனவும் எவை இழுவைகள் எனவும் காட்டி நிர்ணயிக்க. இவற்றை ஒரு தகைப்புப் பட மூலமாகக் காணுதல் விரும்பத் தக்கது.



படம் 110.

சட்டப்படலே வரைந்து வெளிவிசைகளேப் படம் 110 இற் போல இடுக.

வெளிகளே எழுத்திடுதல் P, Q என்பவற்றை வரைபுமூலமாகப் பெறுதலிலோ திருப்புதிறன்களே எடுத்து அவற்றைக் கணித்தலிலோ சார்ந்திருக்கும்.

(1) அவற்றை வரைபு மூலமாகப் பெற, காட்டியவாறு எடுத்திடுக. AE இன் கீழுள்ள முழு வெளியையும் W என்க.

1 அங்குலம் = 4 அந்., $rs = 10$, $st = 5$, $tu = 5$ எனக் கொண்டு விசைப் பல்கோணியை (இது ஒரு நிலேக்குத்துக் கோடாக இருக்கும்) வரைக.

யாதுமொரு முனேவு *o* ஐ எடுத்து *or*, *os*, *ot*, *ou* ஐ இணேக்க.

C ஊடான நிலேக்குத்தில் யாதுமொரு புள்ளி *a* ஐ எடுத்து, *os* இற்குச் சமாந்தரமாக, D ஊடான நிலேக்குத்தினே *b* இற் சந்திக்குமாறு *ab* ஐயும், *ot* இற்குச் சமாந்தரமாக, B ஊடான நிலேக்குத்தினே *c* இற் சந்திக்குமாறு *ac* ஐயும் வரைக.

uo இற்குச் சமாந்தரமாகவும் A ஊடான நிலேக்குத்தினே *d* இற் சந்திக்குமாறும் *cd* ஐயும், *or* இற்குச் சமாந்தரமாகவும் E ஊடான நிலேக்குத்தினே *e* இற் சந்திக்குமாறும் *be* ஐயும் வரைக.

ow ஐ *de* இற்குச் சமாந்தரமாக, விசைப் பல்கோணியை *w* இற் சந்திக்குமாறு வரைய *uw*, P ஐயும் *wr*, Q ஐயும் குறிக்கும்.

இப்போது A இன் சமநிலேயை எடுத்துநோக்கி, AC இற்குச் சமாந்தரமாக *wz* ஐயும் AB இற்குச் சமாந்தரமாக *uz* ஐயும் வரைந்து

A இற்கு விசைப் பல்கோணியை அமைக்க. *uw*, P ஐக் குறிப்பதனுல், *wz*, AC இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் இழுவை) ஐயும் *zu*, AB இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் உதைப்பு) ஐயும் குறிக்கும்.

மூலே B இற்கு விசைப் பல்கோணியை அமைக்க. *tu*, B இலுள்ள 5 அந். விசையையும் *uz*, AB இனல் B மீதுள்ள உதைப்பையும் குறிப்பதனுல், BC இற்குச் சமாந்தரமாக *zy* ஐயும் BD இற்குச் சமாந்தரமாக *ty* ஐயும் வரைக.

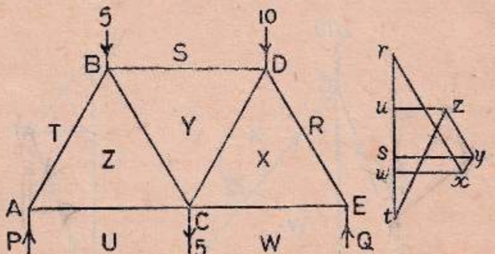
பின்பு *zy*, BC இலுள்ள தகைப்பையும் (ஓர் இழுவை), *yt*, BD இலுள்ள தகைப்பையும் (ஓர் உதைப்பு) குறிக்கும்.

மூலே D இற்குப் பல்கோணியை வரைதற்கு, 10 அந். விசையைக் குறிக்கும் *rs* பயன்படுகிறது. *ty* இற்குச் சமமாக, சமாந்தரமாக *sy* ஐ இப்போது வரையின், இது BD காரணமாக D மீதுள்ள உதைப்பினைக் குறிக்கும். இப்போது DC இற்குச் சமாந்தரமாக *yx* ஐயும் DE இற்குச் சமாந்தரமாக *rx* ஐயும் வரையின், *yx*, DC இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் இழுவை) ஐயும் *xr*, DE இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் உதைப்பு) ஐயும் குறிக்கும்.

wr, Q ஐயும் *rx*, BE காரணமாக E இலுள்ள உதைப்பையும் குறிப்பதனுல், *wrx*, E இற்கான விசை முக்கோணியாக வேண்டும், அ–து. *wx* ஆனது CE இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு *x* அமைய வேண்டும். அதோடு, இது படத்தின் செம்மையைச் செவ்வை பார்த்தலுமாகும். *xw*, EC இலுள்ள தகைப்பினைக் குறிக்கின்றது. அதோடு அது E இற்கப்பால் இருப்பதனுல் அது ஓர் இழுவையுமாகும்.

இப்போது நாம் A இலும் E இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களையும் கோல்கள் யாவற்றிலும் உள்ள தகைப்புக்களையும் அறிந்திருக்கிறேம். இவை எறத்தாழ—

$P = 8\frac{3}{4}$, $Q = 11\frac{1}{4}$. தகைப்புக்கள்: AB இல் $+10$, AC இல் -5, BC இல் $-4\frac{1}{4}$, BD இல் $+5$, CD இல் $-1\frac{3}{4}$, CE இல் $-6\frac{1}{4}$, DE இல் $+13$.



படம் 111.

(2) திருப்புதிறன்களைக் கொண்டு P, Q என்பவற்றைக் கணிப்பின், $P = 8\frac{3}{4}$ அந்., $Q = 11\frac{1}{4}$ அந். பின்பு வெளிகளைப் படம் 111 இற்போல எழுத்திட்டு, விசைப் பல்கோணியைக் கீழ்க் கூறியவாறு வரையலாம்.

ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டில் 1 அங்குலம் = 4 அந். என்ற அளவுத்திட்டப் படி $rs = 10$ ஐயும், $st = 5$ ஐயும், P ஐக் குறிக்குமாறு மேனோக்கி $tu = 8\frac{3}{4}$ ஐயும் குறிக்க. C இலுள்ள 5 அந். நிறையைக் குறிக்குமாறு $uw = 5$ ஐக் குறிக்க. wr, E இலுள்ள மறுதாக்கம் Q ஐக் குறிக்கின்றது.

AC இற்குச் சமாந்தரமாக uz ஐயும் AB இற்குச் சமாந்தரமாக tz ஐயும் வரைந்து A இற்கு விசை முக்கோணியை அமைக்க. uz, AC இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் இழுவை) ஐயும் zt, AB இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் உதைப்பு) ஐயும் குறிக்கின்றன.

B இற்குரிய பல்கோணிக்கு st உம் tz உம் நமக்கு ஏற்கெனவே தெரியும். அதை முற்றுக்குவதற்கு zy ஐ BC இற்கும் sy ஐ BD இற்கும் சமாந்தரமாக வரைகிறேம்.

zy, BC இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் இழுவை) ஐயும் ys, BD இலுள்ள தகைப்பு (ஓர் உதைப்பு) ஐயும் குறிக்கின்றன.

D இற்குரிய பல்கோணிக்கு rs உம் sy உம் நமக்கு ஏற்கெனவே தெரியும். அதை முற்றுக்குதற்கு yx ஐ DC இற்கும் rx ஐ DE இற்கும் சமாந்தரமாக வரைகிறேம்.

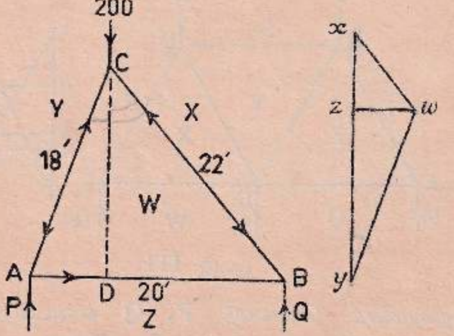
yx, CD இலுள்ள தகைப்பையும் (ஓர் இழுவை), xr, DE இலுள்ள தகைப்பையும் (ஓர் உதைப்பு) குறிக்கின்றன.

wr, Q ஐயும் rx, DE காரணமாக E மீதான உதைப்பையும் குறிப் பதனுல், wx, E இற்கான முக்கோணியின் மூன்றுவது பக்கமாக வேண்டும், அ-து. wx, CE இற்குச் சமாந்தரமாக வேண்டும். அதோடு, xw, CE இலுள்ள தகைப்பையும் (ஓர் இழுவை) குறிக்கின்றது.

மூலை C இற்கு $yzuwx$ என்னும் மூடிய பல்கோணியும் உண்டு என்பதை அறிகிறேம்.

உதாரணம் (ii).

சுயாதீனமாக ஒருமிக்க இணைத்த இலேசான கோல்களாலாய ABC என் னும் ஒரு முக்கோணிச் சட்டப்படல் AB, கிடையாகவும் C, AB இற்கு மேலாக



படம் 112.

வும் தளம் ABC, நிலைக்குத்தாவும் இருக்குமாறு A இலும் B இலுமுள்ள தாங்கிகளின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. BC = 22 அடி, CA = 18 அடி, AB = 20 அடி. C இலிருந்து 200 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. மூன்று கோல்களிலும் உள்ள உதைப்புக்களை அல்லது இழுவைகளை வரைபு நிலையியல் முறைகளினூற் காண்க. (H.S.D.)

வெளிவிசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் சட்டப்படலிற்கு வெளிப்புறமாக இருக்குமாறு சட்டப்படலைப் படம் 112 இற்போல அளவுத்திட்டத்திற்கு வரைக. 200 இரு. நிறையும் A, B என்பவற்றிலுள்ள தாங்கிகள் P, Q இன் நிலைக்குத்து மறுதாக்கங்களுமே அவ்வெளிவிசைகளாம்.

மறுதாக்கங்கள் P ஐயும் Q ஐயும் பந்தி 101 இற் போல வரைபுமூலமாகக் காணவேண்டும். இவற்றைக் காண, C ஊடான கீழ்முக நிலைக்குத்து வரையப்படுகின்றது. AB ஐ இந்நிலைக்குத்து வெட்டும் புள்ளி D இல் 200 இரு. நிறை விசை செயற்பட்டதுபோன்றதே தாங்கிகளின் மீதான விளைவாகும்.

வெளிவிசைகளின் தாக்கக் கோடுகளும் சட்டப்படலின் கோல்களும் அமைக்கும் வெளிகளை X, Y, Z, W என, காட்டப்பெற்றவாறு எழுத்திடுக.

வெளி Y இடப்பக்கமாக எல்லையின்றி விரிந்தும், மற்றைய வெளிகளி லிருந்து, 200 இரு. விசை, கோல் AC, விசை P ஆகியவற்றினூல் வேருக் கப்பட்டும் இருக்கின்றது.

இதேமாதிரியாக, வெளி X வலப்பக்கமாக எல்லையின்றி விரிந்திருக்கின் றது.

எல்லா வெளி விசைகளுக்கும் விசைப் படத்தை வரைக. இது, ஒரு நிலைக்குத்து நேர்கோடாயிருக்கும். இதனிடத்து, xy, அளவுத்திட்டப்படி 200 இரு. நிறையையும் yz, P ஐயும் zx, Q ஐயும் குறிக்கும். (z இனது தானம் பந்தி 101 இற்போலக் காணப்படும்.)

மூலை A இன் சமநிலையை நோக்குக; அது P இனூலும் AB, AC என்பவற்றிலுள்ள தகைப்புக்களினூலும் தாக்கப்படுகின்றது. இப்போது yz, P ஐக் குறிக்கின்றது. zw ஐ AB இற்கும் yw ஐ AC இற்கும் சமாந்தரமாக வரைந்து A இற்கான விசை முக்கோணியை முற்றுக்குகிறோம். பின்பு zw, AB இலுள்ள தகைப்பினைக் குறிக்கும். அதோடு இது A இற்கப்பாற்பட்ட திசையிற் செயற்படுவதனூல், கோல் AB இழுவைப் படும்.

wy, AC இலுள்ள தகைப்பினைக் குறிக்கின்றது. இத்தகைப்பு A ஐ நோக்கிச் செயற்படுவதனூல் AC இல் ஓர் உதைப்பு ஏற்படும்.

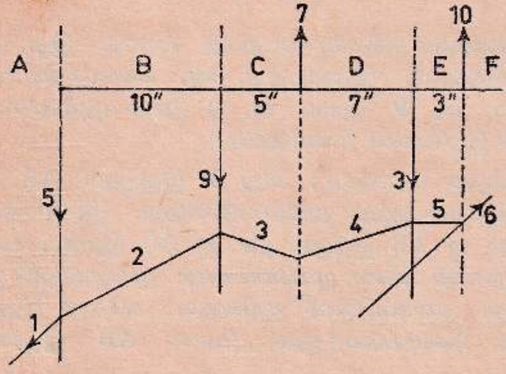
மூலை B ஐ நோக்குமிடத்து, zx, Q ஐக் குறிக்கின்றது. அதோடு, xw ஐ CB இற்கும் zw ஐ AB இற்கும் சமாந்தரமாக வரைந்து B இற் கான முக்கோணியை முற்றுக்குகிறோம். புள்ளி w முன்னைய புள்ளியாகவே இருக்கவேண்டும். இதன் மூலம் வரைதலின் செம்மையைச் செவ்வை

பார்க்கலாம். *xw*, CB இலுள்ள தகைப்பினைக் குறிப்பதோடு, அது ஓர் உதைப்பாகுமாறு B ஐ நோக்கியுமுள்ளது. *wz*, AB இலுள்ள தகைப்பினைக் குறிக்கின்றது. AB இழுவையில் உள்ளது என்பதை நாம் முன்னரே கண்டிருப்பதனால், அது B இற்கப்பாற் செயற்படவேண்டியிருப்பதாற் செயற்படுகின்றது.

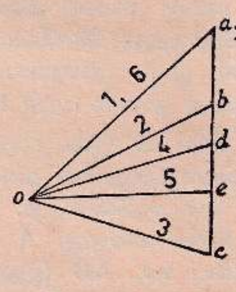
இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும், காட்டப்பெற்றவாறு அம்புக்குறிகளினாலோ இழுவைக்கு – உம் உதைப்புக்கு + உம் இட்டோ குறிக்கலாம். சிலவேளைகளில், அவற்றைக் கோலினூடாக ஒரு கீறு, இரு கீறு ஆகியனவற்றை இட்டுப் பிரித்தறியலாம். விசை முக்கோணியிலிருந்து விசைகளின் திசைகளைப் பெறும்போது முக்கோணி வழியே வரிசைக்கிரமமாகப் போக வேண்டும் என்பதைக் கவனமாக ஞாபகப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும், உ-ம். A இனிடத்து, *yz*, P ஐக் குறிப்பதனால் *zw*, AB இலுள்ள தகைப்பினைக் குறிக்கும், அ-து. அது A இற்கப்பால் வலதுபுறமாகச் செயற்படுகின்றது.

உதாரணம் (iii).

முறையே 10, 5, 7, 3 அங்குல இடைத் தூரங்களிலிருக்கும் சமாந்தர நேர் கோடுகளின் வழியாக 5, 9, –7, 3, –10 இரு. நிறை விசைகள் செயற்படுகின்றன. காவி, இணைப்புப் பல்கோணிகள் மூலமாக விளையுளிணையின் பருமனையும் போக்கினையும் காண்க.



படம் 113 A.



படம் 113 B.

படம் 113A இற் போல வெளிப்படத்தினை வரைந்து, காட்டியவாறு எழுத்திடுக.

படம் 113B இற்போல விசைப் பல்கோணியை வரைக. இப்படத்தில் $ab = 5$, $bc = 9$, $cd = 7$, $de = 3$, ef அல்லது $ea = 10$, அ-து. பல்கோணி மூடுகின்றது.

o ஐ *a*, *b*, முதலானவற்றுடன் இணைக்கும் கோடுகளை, காட்டப்பெற்ற வாறு, எண் இடுக. கோடு *oa*, முரண் திசைகளிலான இரு சம, சமாந் தர விசைகளைக் குறிக்கின்றது. வெளிப்படத்தில் *oa*, முதலானவற்றிற்குச் சமாந்தரங்களை வரைந்து இழைப் பல்கோணியை அமைக்க.

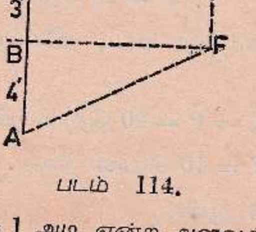
1 இனும் 6 இனும் தரப்படும் சம விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் சமாந்தரமானவை ; ஆனல் விசைகள் காட்டப்பெற்றவாறு முரண் திசைகளிலுள்ளன. *ab* இனற் குறிக்கப்படும் விசை 5 ஆனது, *ob* இனும் *ao* இனும் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்குச் சமவலுவுடைத்து. பின்னையது இழைப் பல்கோணியில் 1 ஆகும். *ef* இனற் குறிக்கப்படும் விசை 10, *eo* இற் கும் *oa* இற்கும் சமவலுவுடைத்து. பின்னைய விசை இழைப் பல்கோணியில் 6 ஆகும்.

விளையுளிணையின் திருப்புதிறனனது, இழைப் பல்கோணியில் 1 இற்கும் 6 இற்குமிடையேயுள்ள தூரங்களினற் குறிக்கப்படும் சரியான தூரத்தை *oa* இனற் குறிக்கப்படும் விசையின் பருமனற் பெருக்கிப் பெறப்படுகின்றது. இணையின் போக்கு முதற் படத்திற் காட்டப்படுகின்றது.

உதாரணம் (iv).

ஒரு பாரந்தூக்கி, படம் 114 இற்போல, A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டும் B இல் ஒரு கிடையமுக்கத்தினல் நிலைக்குத்தாகப் பேணப்பட்டும் இருக்கின்றது.

10 தொன் பாரமொன்று E இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருப்பின், A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களையும் CE இலும் DE இலுமுள்ள விசைகளையும் வரைபு மூலமாக எவ்வாறு காணலாம் என்பதைக் காட்டுக. அதோடு, மறுதாக்கங்களையும் விசைகளையும் கணிக்க.



படம் 114.

படத்தை $\frac{1}{2}$ அங்குலம் = 1 அடி என்ற அளவுத்திட்டப்படி வரைக.

கோல் AD அதன் முனைகளல்லாத வேறு புள்ளிகளில் விசைகளினலே தாக்கப்படுவதால் அதனிலுள்ள தகைப்பு ஒரு தனி உதைப்பாகவோ

இழுவையாகவோ இருக்கமாட்டாது. A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண, பாரந்தூக்கியின்மீது செயற்படும் எல்லா வெளிவிசைகளையும், அ-து. இவ்விரு மறுதாக்கங்களையும் 10 தொன் நிறையையும் எடுத்துநோக்குவோம்.

BF ஐக் கிடையாக, E ஊடான நிலைக்குத்தினை F இற் சந்திக்குமாறு வரையின், A இலுள்ள மறுதாக்கமானது F ஊடாகச் செல்லவேண்டும்.

AF ஐ இணைக்க. முக்கோணி ABF ஆனது அம்மறுதாக்கங்களுக்கும் 10 தொன் நிறைக்கும் ஒரு விசை முக்கோணியாக அமையும். முறையே BA, AF, FB என்பனவற்றின் நீளங்கள் 2, $2\sqrt{5}$, 4 அங்குலமாகும். இவை 10 தொன், A இலுள்ள மறுதாக்கம், B இலுள்ள மறுதாக்கம் ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன.

எனவே A இலுள்ள மறுதாக்கம் $10\sqrt{5}$ தொன் நிறையும் B இலுள்ள மறுதாக்கம் 20 தொன் நிறையுமாகும்.

முக்கோணி DCE மூலை E இற்கு ஒரு விசை முக்கோணியாகும்.

முறையே DC, CE, ED இன் நீளங்கள் 3, 5, 4 அங்குலமாகும். இவை 10 தொன் நிறை, CE இலுள்ள தகைப்பு, ED இலுள்ள தகைப்பு ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. எனவே CE இலுள்ள தகைப்பு $\frac{50}{3}$ தொன் நிறையும் (ஓர் உதைப்பு), ED இலுள்ள தகைப்பு $\frac{40}{3}$ தொன் நிறை (ஓர் இழுவை) யுமாம்.

B இலும் A இலுமுள்ள மறுதாக்கத்தைக் கணித்தல்.

B இலுள்ள மறுதாக்கம் P ஆயின், முழுச் சட்டப்படலுக்கும் A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$4P = 8 \times 10,$$

$$\therefore\ P = 20 \text{ தொன் நிறை.}$$

A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே X, Y ஆயின், பின்பு

$$X = P = 20 \text{ தொன் நிறை},$$

$$Y = 10 \text{ தொன் நிறை.}$$

விளையுள் மறுதாக்கம் R ஆயின்,

$$R = \sqrt{20^2 + 10^2} = 10\sqrt{5} \text{ தொன் நிறை.}$$

R, கிடையுடன் தான்$^{-1}\frac{1}{2}$ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கிறது.

CE இனும் ED இனுமுள்ள தகைப்புக்களைக் கணித்தல்.

CE இலுள்ள உதைப்பினை T_1 என்க.

மூலை E இற்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ சைன் CED} = 10,$$

$$\therefore\ \frac{3}{5}T = 10, \text{ அல்லது } T = \frac{50}{3} \text{ தொன் நிறை.}$$

ED இலுள்ள இழுவையை T_2 என்க.

மூலை E இற்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

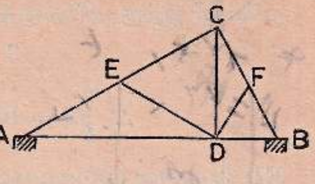
$$T_2 = T \text{ கோசை CED} = \frac{50}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{40}{3} \text{ தொன் நிறை.}$$

பயிற்சி XIX.

1. படம் 115 ஒரு வீட்டின் கோப்பியத்தைக் குறிக்கின்றது. அதன் நிறை காட்டப்பெற்ற முறையில் பங்கிடப் பட்டுள்ளதாகக் கொள்ளப்படலாம். அதன் ஒன்பது உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பினைக் காண்பதோடு அதன் தன்மையையும் காட்டுக.

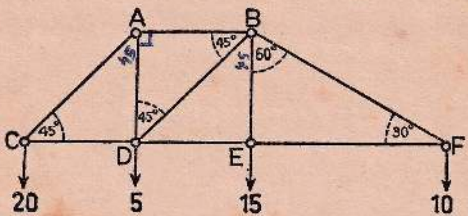
$AE = EC = ED = 2CF = 2FD = 2FB$.

நிறை: **E** இல் 200 இரு., **F** இல் 100 இரு., C இல் 150 இரு. ACB, ஒரு செங்கோணம்.



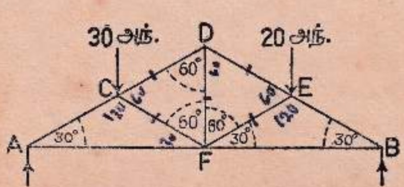
படம் 115.

2. சட்டப்படல் **ABCDEF** (படம் 116), ஒப்பமாக மூட்டிய இலேசான கோல்களினலாயது. A, B என்பவற்றிலுள்ள ஒப்பமான ஊசிகளிலிருந்து தொங்கும் இச்சட்டப்படலிற்குக் காட்டப்பெற்றவாறு நிறைகள் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. எல்லாக் கோல்களினுமுள்ள தகைப்புக்களைக் கிட்டிய அலகிற்குக் காண்பதோடு உதைப்பில் அடங்கிய கோல்களை ஓர் இரட்டைக் கோட்டினலும் குறிக்க.



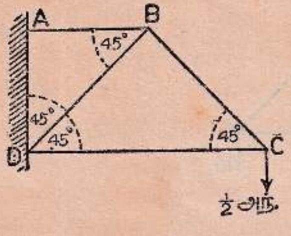
படம் 116.

3. படம் 117, காட்டப்பெற்றவாறு பாரமேற்றப்பட்டிருப்பதும் ஒன்பது இலேசான கோல்களினலானதும் **AB** கிடையாக இருக்குமாறு A, B என்பவற்றிலுள்ள நிலைக்குத்துத் தாங்கிகளிலே தங்கிநிற்கின்றதுமான ஒரு சட்டப்படலைக் குறிக்கின்றது. A, B என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங் களையும் எல்லாக் கோல்களினுமுள்ள தகைப்புக்களையும் காண்க.



படம் 117.

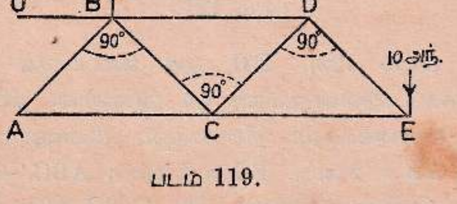
4. படம் 118 இலுள்ள சட்டப்படலானது B, C, D என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூட்டியும் A, D என்பவற்றில் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு இணைத்துமிருக்கும் AB, BC, CD, DB என்னும் நான்கு இலேசான சட்டங்களினுலானது. ஒரு $\frac{1}{2}$ அந். நிறை C இலிருந்து தொங்க விடப்பட்டிருக்கின்றது. எல்லாச் சட்டங்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களையும் A, D என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க. உதைசட்டங்களை இரட்டைக் கோடுகளினுற் குறிக்க.



படம் 118.

5. சுயாதீனமாக ஒருமிக்க மூட்டிய ஒன்பது இலேசான சம கோல்களினுலான ஒரு சட்டப்படல், ABC, CBD, CDE, EDF என்னும் நான்கு சமபக்க முக்கோணிகளைக் கொண்டது. இம்முக்கோணிகள் யாவும் சேர்ந்து ஓர் இணைகரம் ABFE ஐ உருவாக்குகின்றன. சட்டப்படல், கீழுள்ள கோல் AB கிடையாக இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. F இலிருந்து ஒரு 20 அந். நிறை தொங்க விடப்பட்டிருக்கின்றது. A, B என்பவற்றிலுள்ள நிலைக்குத்து விசைகள் சமநிலையைப் பேணுகின்றன. கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காட்ட ஒரு விசைப்படம் வரைக.

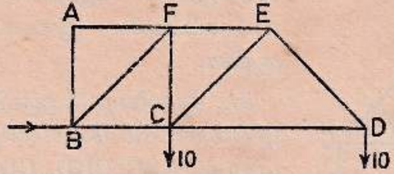
6. படம் 119, மூன்று இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணிகள் வடிவில் மூட்டிய இலேசான சட்டங்களினுலாய ஒரு சட்டப்படலைக் குறிக்கின்றது. இச்சட்டப்படல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் A இல் பிணைக்கப்பட்டும், B இல் அதனுடனும் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான கிடைக்கோல் OB இனுல் உரிய நிலையிற் பேணப்பட்டும் இருக்கின்றது ; காட்டப்பெற்றவாறு அதற்கு நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A இலுள்ள மறுதாக்கத்தினையும் OB இலுள்ள இழுவையையும் கண்டு எல்லாச் சட்டங்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களைத் தருமாறு ஒரு தகைப்புப் படத்தையும் வரைக.



படம் 119.

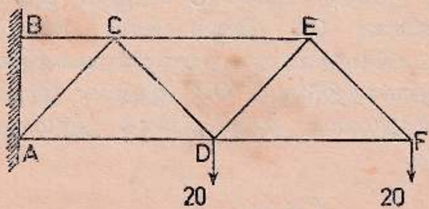
7. A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருப்பதும், ஒப்பமாக மூட்டிய ஒன்பது இலேசான கோல்களாலாயதும் படம் 120 இலுள்ளதுமான சட்டப்படல் B இலுள்ள கிடையான மறுதாக்கத்தினுல்

உரிய நிலையிற் பேணப்படுகின்றது. C, D ஒவ்வொன்றிலும் 10 அந். பாரமேற்றப்பட்டிருக்கின்றது. படத்தின் கோணங்கள் 45° அல்லது 90° ஆகும். உதைசட்டங்களை இரட்டைக் கோட்டினுற் குறித்துக் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.



படம் 120.

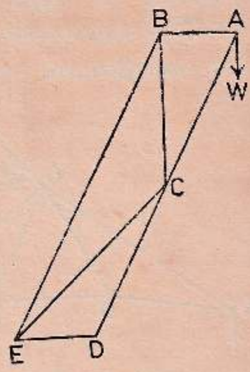
8. படம் 121, இலேசான கோல்களினுலானதும் ADF, BCE கிடையாக இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் A இலும் B இலும் இணைக்கப்பட்டிருப்பதுமான ஒரு பாரமேற்றிய சட்டப்படலைக் குறிக்கின்றது. B இலுள்ள மறுதாக்கம் முற்ருக BC வழியேயானது எனக் கொண்டு, A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. அதோடு கோல்கள் எல்லாவற்றிலும் உள்ள தகைப்புக்களை, எவை உதைப்புநிலையிலும் எவை இழுவை நிலையிலுமுள்ளன எனக் காட்டிக் காண்க. ஒரு தகைப்புப் படத்தில் அளவீடுகள் போதுமானவை. (I.S.)



படம் 121.

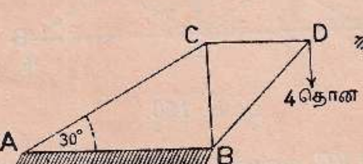
9. ABCDE (படம் 122), ED ஐக் கிடையாகக் கொண்டுள்ளதும் ஒப்பமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளதுமான ஓர் இலேசான நிலைக்குத்துச் சட்டப் படல். அதன் கோணங்களும் நீளங்களும் பின்வருமாறு :— ABED ஓர் இணைகரம் ; AB = 2 அடி, BC = 4 அடி ; ABC, ஒரு செங்கோணம் ; AC = CD. A இலிருந்து நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஆறு கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களை, ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் அவற்றின் தன்மையை வரையறுத்துக் காண்க. (I.S.)

10. ஒரு முக்கோணி AET ஐ AT = AE ஆக வரைக. இடையை AE உம், ஓர் அமைப்பின் நிலைக்குத்துப் பகுதியை AT உம் அளவுத்திட்டத்திற்குக் குறிக்கின்றன. இங்கு AT = 40 அடி. AE ஐ நான்கு சம பகுதிகளாகப் பிரித்து, பிரிக்கும் புள்ளிகளை B, C, D என எழுத்திடுக. TB, TC, TD என்பவற்றை இணைத்து, இச்சட்டங்கள் TE உடன் இழுவைச் சட்டங்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. AB, BC, CD, DE ஐ விறைப்பான நிறையற்ற சட்டங்களாகக் கொள்க. புள்ளிகள் B, C, D, E இலிருந்து 1 தொன் பாரங்கள் தொங்கவிடப்பட்டிருப்பதாக எண்ணுக. இழுவைச் சட்டங்களின் இழுவைகளை வரைபு மூலமாகவோ வேறு விதமாகவோ பெறுக. (I.E.)

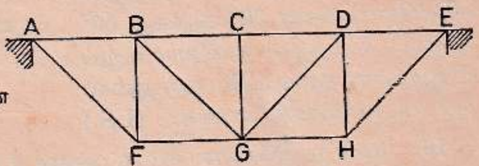


படம் 122.

11. படம் 123, சுயாதீனமாக மூட்டிய AC, BC, BD, CD என்னும் நான்கு இலேசான சட்டங்களினாலானதும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருப்பதுமான ஒரு பாரந்தூக்கியைக் குறிக்கின்றது. இது D இல் ஒரு 4 தொன் நிறையைத் தாங்குகின்றது ; AB, CD, கிடையானவை ; BC, நிலைக்குத்தானது. வரைபு மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ ஒவ்வொரு சட்டத்தின் மீதும் செயற்படும் விசையினைக் காண்க.



படம் 123.



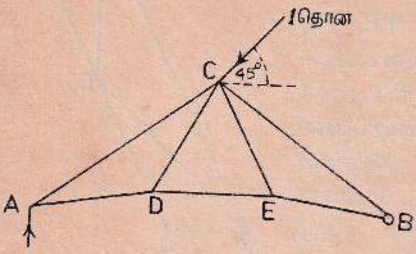
படம் 124.

12. படம் 124, A இலும் E இலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்படும் ஒரு பாலத் தீராந்தியைக் குறிக்கின்றது ; CF, CH என்பன சதுரங்கள்; AB = BF = DE. B, C, D இல் முறையே 10, 15, 12 தொன் பாரங்கள் ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றன. AB, BF, BG, FG, CG என்பவற்றிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. (I.E.)

13. ஒரு செவ்வகம். ABCD ஐ AB = DC = 6 அங்குலம், AD = BC = 2 அங்குலமாக வரைக. DC ஐ E இல் இருகூறிடுக ; AB ஐ F இலும் G இலும் முக்கூறிடுக. இங்கு, F, B இலும் பார்க்க A இற்கு அண்மையில் உள்ளது. DF, FE, EG, GC என்பவற்றை இணைக்க. இப்படம் ஒரு பாலச் சட்டகத்தை அளவுத்திட்டத்திற்குக் குறிப்ப

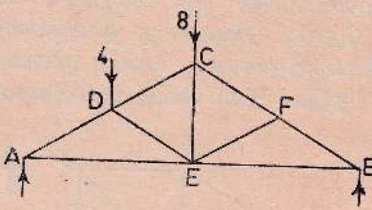
தாகக் கொள்க. இச்சட்டகம், AB மட்டமாக இருக்குமாறு A இலும் B இலும் தாங்கப்பட்டு F இல் ஒரு தொன்னுற் பாரமேற்றப்பட்டிருப்பின் சட்டகத்தின் உறுப்புக்கள் யாவற்றிலும் உள்ள விசைகளைக் காண்க. (I.E.)

14. சுயாதீனமாக மூட்டிய சட்டங்களினுலான சட்டப்படல் ABCDE (படம் 125) இல், AD = DC = CE = EB = DE, AC = CB = 1·8AD. அது A இலே சுயாதீனமாகத் தாங்கப்படுகின்றது. B, அதே மட்டத்திலிருக்கும் ஒரு தாங்கிக்குப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. C இல் 1 தொன் விசையொன்று காட்டியவாறு செயற்படுகின்றது ; A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கண்டு, சட்டங்களிற்கு ஒரு தகைப்புப் படம் வரைக. (I.E.)



படம் 125.

15. படம் 126 இலுள்ள, ஒப்பமாக மூட்டிய கோல்களினுலாய சட்டப்படலானது AB கிடையாக இருக்குமாறு A இலும் B இலும் தாங்கப்படுகின்றது. C இலும் D இலுமிருந்து முறையே 8 அந்., 4 அந். நிறைகள் தொங்க விடப்பட்டிருக்கின்றன. படத்தில் கூர்ங்கோணங்கள் 30° அல்லது 60° ஆகும். சட்டத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலுமுள்ள தகைப்பினை ஒரு தகைப்புப் படமூலமாகக் காண்க. (I.S.)

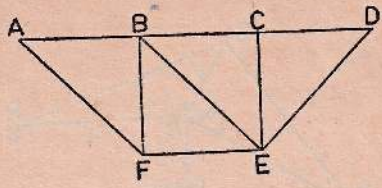


படம் 126.

16. மூன்று இலேசான சம சட்டங்கள் ABC என்னுமொரு முக்கோணிச் சட்டப்படல் வடிவில் ஒருங்கே மூட்டப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப்படல் A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது ; B, C என்பவற்றில் முறையே 4 இறா., 5 இறா. நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நிலைக்குத்துடன் AB ஆக்கும் கோணத்தையும் BC வழியேயுள்ள விசையையும் வரைபுமூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ காண்க. (H.S.D.)

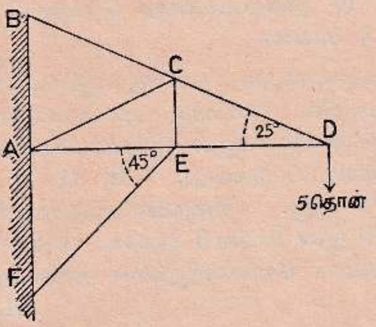
17. படம் 127, ஒன்பது நிறையற்ற சட்டங்களை ஒப்பமாக மூட்டிப் பெற்ற ஒரு சட்டப்படலைக் குறிக்கின்றது. இச்சட்டங்களில் AB, BC, CD, BF, CE, EF என்பன ஒவ்வொன்றும் 1 அடி நீளமுள்ளவை ; AF, BE, ED ஒவ்வொன்றும் $\sqrt{2}$ அடி நீளமுள்ளவை. சட்டப்படல் A இலும் D இலும் தாங்கப்பட்டுள்ளது. F, E என்பவற்றிலிருந்து முறையே 3 தொன், 6 தொன் பாரங்கள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு சட்டத்திலும் உள்ள தகைப்பின் தன்மையைக் காட்டி அதனை வரைபுமூலமாகக் காண்க. (H.S.D.)

18. படம் 128 இலுள்ள சுவர்ப் பாரந்தூக்கியின் சட்டங்களில், D இலுள்ள ஒரு சங்கிலியிலிருந்து தொங்கும் 5 தொன் பாரமொன்றின் காரணமாக ஏற்படும் தகைப்புக்களேக் காண்க. D இலும் E இலுமுள்ள கப்பி

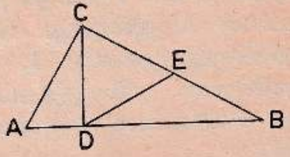


படம் 127.

களின் மேலாகச் செல்கின்ற அச்சங்கிலி ஒரு சுவரில் F இல் நிலேப்படுத்தப் பட்டுள்ளது. அதோடு AE = ED. (I.E.)



படம் 128.

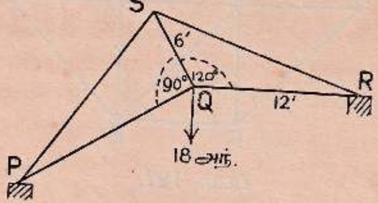


படம் 129.

19. ABCDE என்னுமொரு கோப்பியம் (படம் 129) C இல் 2 தொன், E இல் 1 தொன்னுற் பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது. CAB = 60° உம், ABC = 30° உம், E, BC இன் நடுப்புள்ளியுமாயின், A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களேக் கண்டு, உறுப்புக்களிலுள்ள இழுவை, நெருக்கு தகைப்புக்களே அட்டவணேப்படுத்துக. (I.E.)

20. படம் 130 இல், 24 அடி தூரத்திலுள்ள இரு நிலேக்குத்துத் தூண்களின்மீது ஒப்பமாக மூட்டிய இலேசான கோல்களினுலாய ஒரு சட்டப்படல் தங்குகின்றது. இடையான QR, 12 அடி நீளமானது ; 6 அடி நீளமான QS, QR உடன் 120° இற் சாய்ந்துள்ளது ; QP, QS இற்குச் செங்குத்தானது. Q இலிருந்து ஒரு 18 அந். நிறை தொங்கவிடப்பட்டிருப்பின், விசைப் படத்தினே வரைந்து, பற்பல கோல்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களேக் காண்க. நெருக்கத்திலுள்ள கோல்களே + எனவும் இழுவையிலுள்ளவற்றை – எனவும் குறிக்க. (H.S.D.)

21. ஐந்து இலேசான கோல்களில் நான்கு ஒரு சதுரச் சட்டப்படல் ABCD ஐயும் ஒன்று அதன் மூலைவிட்டம் BD ஐயும் அமைக்கின்றன. இச்சட்டப்படல் A இலும் C இலுமுள்ள நிலைக்குத்து விசைகளினால், கோல்

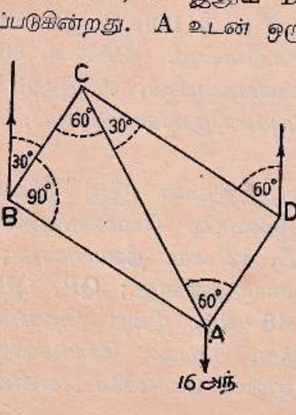


படம் 130.

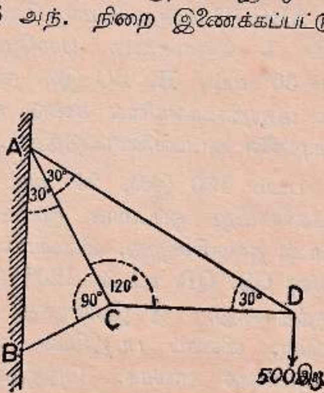
BD ஐ நிலைக்குத்தாகவும் D ஐ B இற்கு மேலாகவும் கொண்டு தாங்கப்படுகின்றது. B இலிருந்து W நிறையொன்று தொங்கவிடப்படும் போது கோல்களில் தகைப்புக்களைக் காண்க. (I.E.)

22. ஒரு சதுரச் சட்டப்படலை உருவாக்கும் நான்கு இலேசான சம கோல்கள், A, B, C, D என்பவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன; மூட்டுகள் B உம் D உம் ஓர் இலேசான கோலினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B, C, D என்பவற்றிலிருந்து முறையே 1, 2, 3 இரு. நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. நிலைக்குத்துடன் AD இன் சாய்வு θ ஆயின், தான் $\theta = \frac{3}{5}$ எனக் காட்டுக. ஒரு விசைப்பட மூலமாக கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. (H.S.D.)

23. படம் 131 இலுள்ள, ஒப்பமாக மூட்டிய ஐந்து இலேசான கோல்களினாலான சட்டப்படல், B இலும் D இலும் நிலைக்குத்து இழைகளினாலே தாங்கப்படுகின்றது. A உடன் ஒரு 16 அந். நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 131.

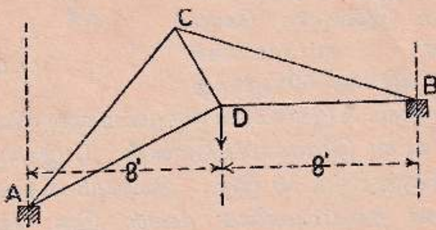


படம் 132.

இழைகளிலுள்ள இழுவைகளையும் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களையும் இழுவைகளை – ஆலும் உதைப்புக்களை + ஆலும் குறித்து, வரைபு மூல மாகவோ வேறுவிதமாகவோ காண்க.

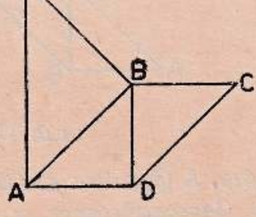
24. படம் 132 இலுள்ள சட்டப்படல் ABCD ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருடன் A இலும் B இலும் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. D இலிருந்து ஒரு 500 இரு நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. உறுப்பு CD கிடையானது. சட்டப்படலின் உறுப்புக்களிலுள்ள விசைகளை (1) அமைப்பு (வரைபு), (2) நேர்க்கணிப்பு ஆகியவற்றினாற் காண்க. (Q.E.)

25. படம் 133 இலுள்ள சட்டப்படலில் DC, 4 அடி நீளமானது; கோணங்கள் ADC, BDC முறையே 90°, 120° ஆகும். D இலிருந்து ஒரு 10 அந். நிறை தொங்குகிறது. விசைப் படத்தினை வரைந்து சட்டப்பட லின் உறுப்புக்களிலுள்ள விசைகளைக் காண்க. (Q.E.)

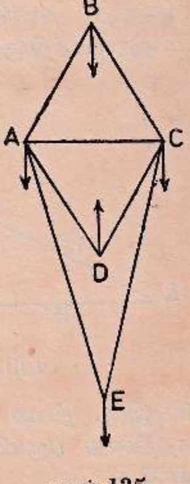


படம் 133.

26. படம் 134, இலேசான ஊசிமூட்டிய கோல்களினாலான ஒரு சட்டப்படலைக் குறிக்கின்றது. ஒரு சுவருடன் A இலும் E இலும் இணைத்த இச்சட்டப்படலில் D, C என்பவற்றில் முறையே 10 அந்., 20 அந். பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது. கோல்கள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள தகைப்புக்களையும் A இலுள்ள ஊசியின் மறுதாக்கத்தையும் குறிக்க ஒரு விசைப் படத்தினை வரைந்து, உதைப்பிலுள்ள கோல்களை ஓர் இரட்டைக் கோட்டினாற் குறிக்க. கோல் AE இல் தகைப்பு



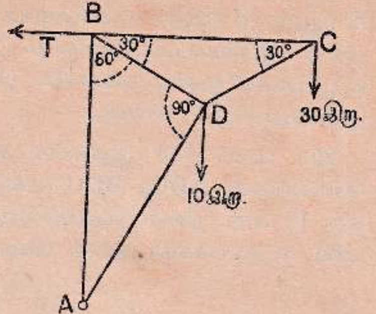
படம் 134.



படம் 135.

எதுமில்லை எனக் கொண்டு தகைப்புக்களின் பெறுமானங்களைக் காண்க. (கோணங்கள் 90° அல்லது 45°.)
(H.C.)

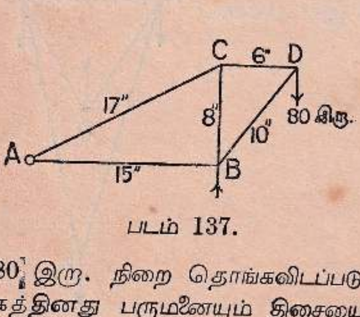
27. படம் 135 இலுள்ளதும் ஊசிமூட்டிய கோல்களினாலானதுமான சமச்சீர்ச் சட்டப்படலில், முக்கோணிகள் ABC, ADC என்பன சமபக்கமானவை ; கோணம் AEC = 30°. மூட்டுகள் A, B, C, E ஒவ்வொன்றிலும் 20 இரு. பாரமேற்றப் பட்டுள்ளது. இச்சட்டப்படல் D இலே தாங்கப்படுகின்றது. கோல்கள் AE, AD, AB, AC இலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.
(H.C.)



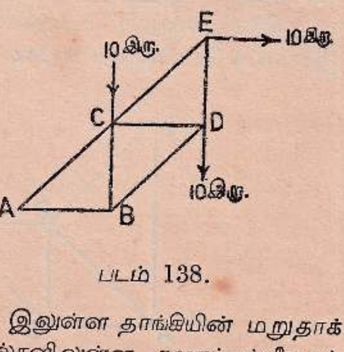
படம் 136.

28. படம் 136 இலுள்ளதும் சுயாதீனமாக மூட்டிய இலேசான கோல்களாலானதுமான சட்டப்படலின் கோணங்கள் 30° அல்லது 60° அல்லது 90° அல்லது 120° ஆகும். A இல் உள்ள ஒரு மூட்டினால் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள இச்சட்டப்படல் B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. C இலிருந்து ஒரு 30 இரு. நிறையும் D இலிருந்து ஒரு 10 இரு. நிறையும் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு, இரு கோல்கள் இழுவைச் சட்டங்களாகுமெனவும் மூன்று கோல்கள் உதைசட்டங்களாகுமெனவும் நிறுவுக.
(H.C.)

29. படம் 137 இலுள்ளதும் A, B, C, D என்பவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டிய ஐந்து இலேசான கோல்களாலாயதுமான சட்டப்படல், A இலுள்ள ஒரு நிலைத்த தாங்கியுடன் பிணைக்கப்பட்டும் B இலுள்ள ஒரு நிலைக்குத்து மறுதாக்கத்தினால் இன்னும் தாங்கப்பட்டுமுள்ளது. D இலிருந்து ஒரு



படம் 137.



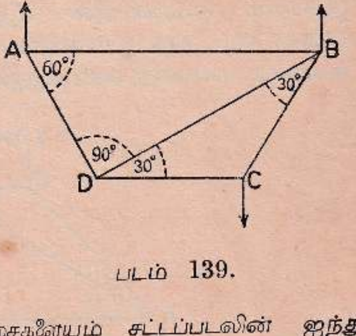
படம் 138.

80 இரு. நிறை தொங்கவிடப்படுமிடத்து, A இலுள்ள தாங்கியின் மறுதாக்கத்தினது பருமனையும் திசையையும் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களையும் காண்க.
(H.C.)

30. படம் 138 இலுள்ள சட்டப்படல் ஒப்பமாக மூட்டிய எழு இலேசான கோல்களினுலானது. இதில் கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் உள்ள கோல்கள் சமமானவை. C இலும் D இலும் 10 இரு. சம நிறை பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது. E இல் 10 இரு. நிறை கிடை விசையொன்று செயற்படுகின்றது. அச்சட்டப்படல் ஒரு நிலைத்த தாங்கியுடன் B இற் பிணைக்கப்பட்டும், A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுமுள்ளது. கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு, இழுவைச் சட்டங்களான கோல்களைக் குறிக்க. (H.C.)

31. எழு இலேசான கோல்களினுலான ஒரு சட்டப்படல் ABC, BCD, CDE என்னும் மூன்று சமபக்க முக்கோணிகளைக் கொண்டுள்ளது. இச் சட்டப்படல் A இலும் E இலுமுள்ள ஒப்பமான நிலைக்குத்துத் தாங்கிகளின் மீது ACE, BD ஆகியவற்றைக் கிடையாகவும் BD ஐ ACE இற்கு மேலாகவும் கொண்டு தங்கிநிற்கின்றது. மூட்டு B இல் ஒரு 10 அந். பாரமும், மூட்டு C இல் 15 அந். பாரமும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படலின் கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களை, எவை இழுவைநிலையிலும் எவை உதைப்புநிலையிலுமுள்ளன எனக் காட்டிக் காண்க. இதை ஒரு தகைப்புப்படமூலமாகக் காணுதல் விரும்பத்தக்கது. (H.C.)

32. ஒரு சட்டப்படல் AB, BC, CA, BD, CD, DE, CE என்னும் எழு இலேசான கோல்களினுல் ஆனது. இவை, ABC, BCD, CDE ஆகியன இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணிகளாகுமாறு, முறையே B, C, D என்னும் புள்ளிகளிலே செங்கோணங்களைக் கொண்டு ACE, BD இற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோட்டில் அமையுமாறு மூட்டப்பட்டுள்ளன. A இலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியிற் சுழலுமாறு அமைத்த இச்சட்டப்படல் AB ஐ நிலைக்குத்தாகவும் B ஐ A இற்கு மேலாகவும் மூட்டு E ஐ ஒரு தாங்கிமீது சாய்ந்திருக்குமாறும் கொண்டு தங்கியிருக்கின்றது. இத்தாங்கி, AE இற்குச் செங்குத்தான ஓர் அமுக்கத்தினை உஞற்றுகின்றது. மூட்டுகள் B, C, D ஒவ்வொன்றிலும் 10 அந். பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது. CD இலே தகைப்பேதுமில்லை எனக் காட்டுவதோடு, மற்றைய கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களை எவை உதைப்புக்கள், எவை இழுவைகள் எனவுங் காண்க. (H.C.)

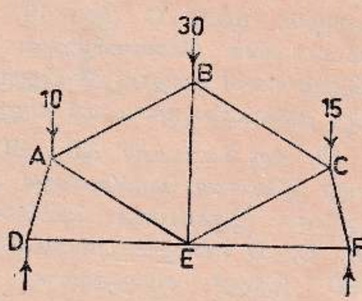


படம் 139.

33. படம் 139 இலுள்ள மூட்டிய சட்டப்படலில், AB, CD கிடையானவை. A இலும் B இலும் தாங்கப்படும் இச்சட்டப்படலிற்கு C இல் ஒரு 100 இரு. பாரம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A இலும் B இலுமுள்ள தாங்குவிசைகளையும் சட்டப்படலின் ஐந்து உறுப்புக்களிலுமுள்ள விசைகளையும் வரைபு மூலமாகவோ கணித்தோ காண்க. (Q.E.)

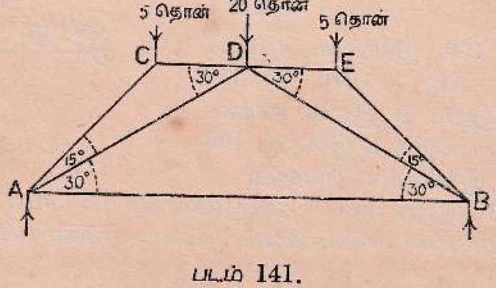
34. 2 அடி 6 அங்குல நீளமான AB என்னுமொரு சீர்ச் சட்டம் 10 இரு. நிறையானது. இதன் முனைகளுடனும் 4 அடி இடைத்தூரத்தில் ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் X, Y என்னுமிரு புள்ளிகளுடனும் இணைந்த, முறையே 2 அடி, 2 அடி 6 அங்குல நீளமான AX, BY என்னும் இழைகளினால் இச்சட்டம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சட்டத்தில் B இலிருந்து 6 அங்குலத்திலிருக்கும் புள்ளி யொன்றிலிருந்து ஒரு நிறை தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத் தானத்தில் நிலைக்குத்துடன் இழை AX, கோணம் 25°ஐ ஆக்குவதாகக் காணப்பட்டுள்ளது. சட்டத்திலிருந்து தொங்கவிட்டுள்ள நிறையைக் காண்க. (முடியுமாயின் வரைபு முறையொன்றைப் பயன்படுத்தி, செய்கை முறையின் விவரங்களை விளக்கப் போதுமான விளக்கத்தைத் தருக.) (N.U. 3.)

35. படம் 140 இலுள்ள கோப்பியம் ஒன்பது சட்டங்களினாலாயது. இவற்றுள் AB, BC, AE, EC, DE, EF என்பன 15 அடி நீளமானவை; AD, CF, 6 அடி நீளமானவை. கோப்பியம், DEF கிடையாக இருக்குமாறு D இலும் F இலும் தாங்கப்படுகின்றது. அச்சட்டங்கள் ஒருமிக்க ஒப்பமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன எனவும் அவற்றின் நிறைகள் தவிர்க்கத்தக்கனவெனவும் கொள்ளப்படலாம். அக்கோப்பியத்திற்கு A, B, C இல் முறையே 10, 30, 15 அந். நிறைகள் இணைக்கப்பட்டிருப்பின், தாங்கிகளின் மீதுள்ள விசைகளையும் சட்டங்களிலுள்ள தகைப்புக்களையும் வரைபு மூலமாகக் காண்க. (N.U.4.)



படம் 140.

36. படம் 141 இற் காட்டியவாறு பாரமேற்றப்பட்டும் தாங்கப்பட்டும் இருக்கும் சட்டப்படலின் உறுப்பு ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பினைக் காட்ட ஒரு படம் வரைக. சட்டங்கள் இழுவையிலோ உதைப்பிலோ உள்ளன என்பதை அம்புக்குறிகளினாற் காட்டுக. (C.W.B.)



படம் 141.

§103. ஒரு சட்டப்படலே இறுக்குதற்குத் தேவையான சட்டங்களின் எண்ணிக்கை.

முன்னைய பந்திகளில் அவற்றுடன் சம்பந்தப்பட்ட சட்டப்படல்கள் இறுக்க மானவை, அ–து. அவற்றின்மீது செயற்படும் வெளிவிசைகளினுல் அவற்றின் வடிவு அழியாதெனக் கொள்ளப்பட்டது.

இனி ஒரு சட்டப்படலே ஒரு தந்த எண்ணிக்கை மூட்டுகளைக் கொண்டு இறுக்குதற்கு எவ்வளவு சட்டங்கள் தேவை என்பதைப் பார்ப்போம்.

$A_1, A_2, \ldots A_n$ என்னும் n மூட்டுகள் இருப்பின் n, 2 இலும் பார்க்கக் குறைவானதன்று எனக்கொண்டு A_1, A_2 என்னும் இரண்டையும் ஒரு சட்டத்தினுல் இறுக்கி, ஆரம்பிக்கலாம். இப்போது, எஞ்சிய $n-2$ மூட்டுகளை இவற்றுடன் இணைக்கவேண்டும். இவ்விரண்டுடனும் A_3 என்னும் மூன்ரும் மூட்டை விறைப்பாக இணைப்பதற்கு அதை அவ்விரண்டுடனும் இணைக்கவேண்டும். இதனுல் மேலும் இரண்டு சட்டங்கள் தேவைப்படு கின்றன.

இவற்றுடன் A_4 என்னும் நான்காம் மூட்டை இணைப்பதற்கு, இதை முதல் மூன்றில் எவையேனும் இரண்டுடன் இணைக்கவேண்டும். இதற்கு மேலும் இரண்டு சட்டங்கள் தேவைப்படுகின்றன. இவ்வாருகச் செல்கையில், முதலிரண்டு மூட்டுகளைத் தவிர, எஞ்சியிருக்கும் $n-2$ மூட்டுகளொவ்வொன் றிற்கும் அதை இறுக்க இரு சட்டங்கள் தேவைப்படுகின்றன எனத் தெரிகின்றது.

எனவே, n மூட்டுகளினுலான தொகுதியொன்றை விறைப்பான தாக்குவதற்கு $2(n-2)+1$, அ–து. $2n-3$ சட்டங்களினுலாய ஒரு சட்டப்படல் போதுமானது.

§104. மட்டுமட்டாகப் போதுமான எண்ணிக்கைச் சட்டங்களினுலாய ஒரு மூட்டுத் தொகுதி **வெறுமனே** அல்லது **மட்டுமட்டாக விறைப்பானது** எனப்படும்.

தேவைக்கு அதிகமான சட்டங்கள் இருப்பின் அத்தொகுதி **அதிவிறைப் பானது** எனப்படும்.

ஓர் எளிய விறைப்புச் சட்டப்படல் அதனைச் சமநிலையிற் பேணுவதும் அதன் மூட்டுகளின்மீது செயற்படுவதுமான தந்த வெளி விசைத் தொகுதி யொன்றினுலே தாக்கப்படுமிடத்து, சட்டங்கள் யாவற்றிலுமுள்ள மறுதாக் கங்களைத் தீர்மானிப்பதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

ஏனெனில், ஒவ்வொன்றையும் இரு திசைகளிலே துணிக்க, சமநிலை நிபந்தனைகள், n மூட்டுகளுக்கு $2n$ சமன்பாடுகளைத் தருகின்றன.

எனினும், இச்சமன்பாடுகள் முழுமையாக அச்சட்டப்படலின் மூன்று சமநிலை நிபந்தனைகளையும் உள்ளடக்கியிருக்கவேண்டும். எனவே இதில்

பொதுவாக எஞ்சியிருக்கும் $2n-3$ சார்பற்ற சமன்பாடுகள் $2n-3$ சட்டங்களிலுள்ள தெரியாத் தகைப்புக்களைத் தீர்மானிப்பதற்கு மட்டுமட்டாகப் போதுமானவை.

தேவைக்கு அதிகமான எண்ணிக்கைச் சட்டங்களிருப்பின் தகைப்புக்கள் யாவற்றையும் தீர்மானிப்பதற்குப் போதுமான சமன்பாடுகளில்லை.

n மூட்டுகளுக்கு $2n-3$ சட்டங்களிருக்கின்றன என்பதனால் சட்டப்படல் விறைப்பானது என்பது அவசியப் பெறுபேறாகாது. இது கவனிக்கப்படத்தக்கது ; ஒரு பகுதி, தேவைக்கு அதிகமான எண்ணிக்கைச் சட்டங்களினால் விறைப்பாக்கப்பட்டிருக்கலாம். அதோடு, வேறொரு பகுதி போதுமான எண்ணிக்கையைக் கொண்டிராது. இதனுடன், "அவதி வடிவங்கள்" எனப்படுவனவும் உள்ளன. இவ்வடிவங்களில், சட்டப்படல் விறைப்பிற்குப் பொதுவாகப் போதுமான ஓர் அமைப்பினைக் கொண்டிருந்தும், சட்டங்களினது நீளங்களினிடையேயுள்ள யாதுமொரு விசேட தொடர்பின் காரணமாக அதனில் மிகச்சிறிய வடிவ அழிவுகள் ஏற்படுவதுண்டு. இவ்வகைகள் ஆராயப்படமாட்டா.

§105. இதுகாறும் ஆராய்ந்தனவற்றில், சட்டப்படல் இரு சட்டங்கள் மட்டுமே சந்திக்கும் (பொதுவாகத் "தனி" மூட்டு எனப்படும்) ஒரு மூட்டினையாயினும் கொண்டிருந்தது. இச்சந்தர்ப்பங்களில், வெளிவிசைகளிலொன்று செயற்படும் மூட்டிலிருந்து எப்பொழுதும் தொடங்க வேண்டும். ஏனெனில், அப்புள்ளியுடன் பிணைத்த இரு சட்டங்களிலுமுள்ள தகைப்புக்களைப் பின்பு தீர்மானிக்கலாம்.

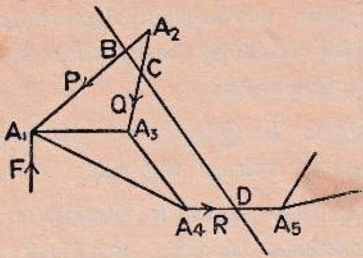
எனினும், சில சட்டப்படல்களில் வெளிவிசைகள் பிரயோகிக்கப்படும் தனி மூட்டுகள் ஏதுமில்லை. இச்சந்தர்ப்பங்களில், தொடங்குவதற்கு மூலையேதுமில்லை என்பதனால், பொதுவான முறை தவறுகின்றது.

இவற்றுடன் தொடர்புகொள்ளப் பல தனிமுறைகள் உள்ளன. இவற்றுள் பொதுவாகப் பயன்படுத்தக்கூடிய ஒன்றைப் பார்ப்போம். இது "பிரிப்பு முறை" எனப்படும்.

§106. பிரிப்புமுறை.

இத்தகைய முறை, சட்டப்படல் **மூன்று** சட்டங்களினால் இணைந்த இரு தெளிவான பாகங்களினாலானது என எண்ணப்படும் போதெல்லாம், அ–து. மூன்று சட்டங்களை மட்டுமே வெட்டி, சட்டப்படலை இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் ஒரு கோட்டினைச் சட்டப்படலிற்குக் குறுக்கே வரையமுடியுமாயின், பயன்படுத்தப்படலாம் ; அச்சட்டங்கள் சந்திப்பனவுமல்ல ; சமாந்தரமானவையுமல்ல.

இவ்வாருக, படம் 142 இற் காட்டப்பெற்ற பகுதியையுடைய ஒரு சட்டப்பட லின் A_1A_2, A_2A_3, A_4A_5 என்னும் சட்டங்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காணப்பதாகக் கொள்க.



படம் 142.

இச்சட்டங்களை, வேறேதும் சட்டங்களை வெட்டாத ஒரு கோடு BCD இனல் வெட்டலாம். சட்டப்படலின் வலக்கைப் பகுதி நீக்கப்பட்டுள்ள தாகக் கருதின், வெட்டப்பெற்ற மூன்று சட்டங்களிலுமுள்ள தகைப்புக் கள் P, Q, R, இடக்கைப் பகுதியின்மீது செயற்படும் வெளிவிசையுடனே விசைகளுடனே சமநிலையில் இருக்கவேண்டும். இவ்வெளிவிசைகள், சட் டங்கள் A_1A_2, A_2A_3, A_4A_5 என்பனவற்றின் கோடுகள் எல்லாம் சமாந் தரமாகவோ ஒரு புள்ளியிற் சந்திப்பனவாகவோ அமையாமையால், பந்தி 92 இலுள்ள உதாரணம் v இன் முறையைக் கொண்டு, இக்கோடுகள் வழியே செயற்படும் மூன்று கூறுகளாகத் துணிக்கப்படக்கூடிய ஒரு தனி விசை (அல்லது ஓர் இணை) ஆகச் சுருக்கப்படலாம்.

எனவே, தகைப்புக்கள் P, Q, R என்பன தீர்மானிக்கப்படத்தக்கவை.

பல இடங்களில் திருப்புதிறன்களைக் கணித்துத் தகைப்புக்களைக் காண லாம்.

எனவே, மேலுள்ள படத்தில் வெளிவிசை, A_1 இலுள்ள F என்னும் ஒரு விசையாக இருப்பின், **சட்டப்படலின் இடக்கைப் பகுதிக்கு** A_2 பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க, R இன் திருப்புதிறன் F இன் திருப்புதிறனிற்குச் சமம். R ஐக் கண்டதும், A_1 பற்றித் திருப்பு திறன்களைக் கணித்து Q ஐத் தீர்மானிக்க. A_3 பற்றித் திருப்புதிறன் களைக் கணித்து P ஐக் காணலாம்.

பிரிப்புமுறை, கடைசிப் பந்தியில் தெரிவித்துள்ளவாறு, தெரிந்த விசைகள் செயற்படும் மூட்டுகளெல்லாம் படத்திலுள்ள A_1 ஐப் போல மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சட்டங்களைக் கொண்டிருப்பின், சிறப்பாகப் பயன்படும்.

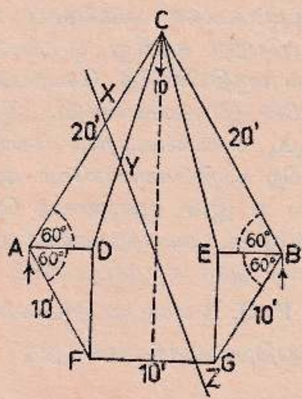
இம்முறையை, ஒரு சிக்கலான சட்டப்படலினிடத்துச் சில சட்டங்களில் மட்டுமே தகைப்புகள் தேவைப்படினும் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம்.

படம் 143 இற் காட்டியுள்ள, ஒப்பமாக மூட்டிய இலேசான கோல்களினு லான சமச்சீர்ச் சட்டப்படல் A இலும் B இலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப் பட்டும் C இல் 10 தொன் பாரமேற்றப்பட்டுமுள்ளது. இச்சட்டப்படலிற்கு ஒரு தகைப்புப் படத்தினை எவ்வாறு வரையலாம் என்பதைக் காட்டி, FG இலுள்ள தகைப்பினைத் திர்மானிக்க.

சமச்சீர்ப்படி, A இலும் B இலுமுள்ள நிலைக்குத்து மறுதாக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் 5 தொன் என்பது தெளிவு.

எவ்வாறுயினும், தெரிந்த விசைகள் செயற்படும் மூலைகள் A, C, B ஒவ்வொன்றிலும் இரண்டுக்கு மேற்பட்ட சட்டங்கள் உள்ளன ; எனவே, பொதுவான முறை தவறுகின்றது. பிரிப்புமுறையைப் பயன்படுத்தித் தொடரலாம்.



படம் 143.

சட்டங்கள் AC, CD, FG, மூன்றையும் அவற்றினை முறையே X, Y, Z இற் சந்திக்கும் ஒரு நேர் கோட்டினுல் வெட்டலாம்.

இவ்வெழுத்துக்களை அவற்றிற்குரிய சட்டங்களிலுள்ள தகைப்பினைக் குறிக்கு மாறு பயன்படுத்தியும் பிரிவின் இடது பக்கத்திலுள்ள சட்டப்படலினது பகுதியின் சமநிலையை எடுத்துநோக்கியும், வெட்டிய சட்டங்களின் கோடுகள் வழியே A இலுள்ள 5 தொன் விசையைத் துணித்துத் தகைப்புக்கள் மூன்றையும் பெறலாம்.

இத்தகைப்புக்களை, சட்டப்படலின் இடக்கைப் பகுதிக்குத் திருப்புதிறன் களைக் கணித்தும் பெறலாம்.

C பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Z.15\sqrt{3} = 5.10,$$

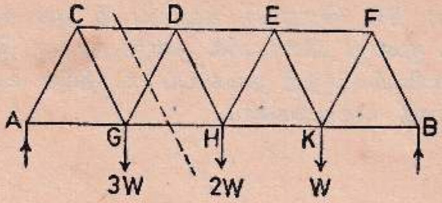
$$\therefore\ Z = \frac{10}{3\sqrt{3}} \text{ தொன் நிறை.}$$

D ஐயும் A ஐயும் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்து, மூலைகள் D இற்கும் F இற்கும் விசை முக்கோணியைப் பயன்படுத்தி AD இலும் AF இலுமுள்ள தகைப்புக்களைத் தீர்மானித்தும் X, Y என்பவற்றைக் காணலாம்.

இல்லையேயாயின், FG இலுள்ள தகைப்பு Z ஐக் கண்டதும், மூலை F இற் செயற்படும் மூன்று விசைகளில் ஒன்று நமக்கு இப்போது தெரிந் திருப்பதனுல் இம்மூலையிலிருந்து தகைப்புப் படத்தினை வழக்கமாக வரை வது போல் வரையத் தொடங்கலாம்.

பயிற்சி XX.

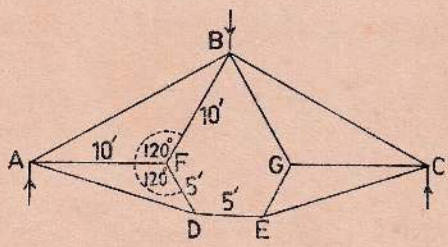
1. படம் 144 இற் காட்டியுள்ள உவாறன் தீராந்திக்கு விசைப் படத்தினைப் பரும்படி வரைக. இதன் முக்கோணி ஒவ்வொன்றும் இருசமபக்கமானது ; இம்முக்கோணியின் குத்துயரம் இதன் அடிக்குச் சமம்.



படம் 144.

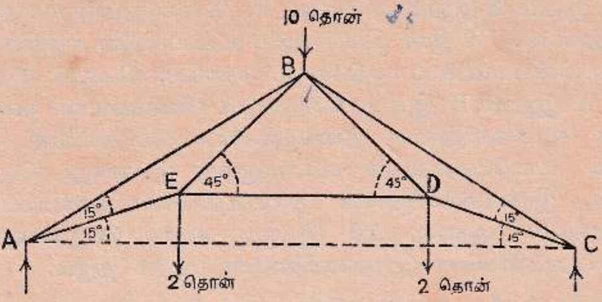
புள்ளிக்கோட்டினால் வெட்டிய சட்டங்களிலுள்ள விசைகளை, இக்கோட்டின் இருமருங்கிலும் சட்டப்படலின் சமநிலையை எடுத்துநோக்கி, கணிக்க. (I.C.)

2. படம் 145 இல் விளக்கியுள்ள சமச்சீர்ச் சட்டப்படலிற்கான விசைப் படத்தினை, வழக்கமான முறை தவறுமிடத்து எவ்வாறு தொடர்ந்து வரையலாம் என விளக்கி, வரைக.



படம் 145.

3. படம் 146 இற் காட்டியுள்ள சமச்சீர்ச் சட்டப்படல் A இலும் C இலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்பட்டும் B, E, D இல் முறையே 10, 2, 2, தொன் பாரமேற்றப்பட்டுமுள்ளது. பிரிப்புமுறை மூலமாக AB, EB, ED, என்ப வற்றிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.



படம் 146.

§107. சட்டங்கள் மீது செயற்படும் வெளிவிசை.

இதுகாறும் ஆராய்ந்தனவற்றில், சட்டப்படலின்மீது செயற்படும் வெளி விசைகள் மூட்டுகளில் மட்டுமே செயற்படுவனவாகக் கொள்ளப்பட்டன. வெளிவிசைகள் சட்டங்களுக்கே பிரயோகிக்கப்படும்போது, சட்டமொவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பு முற்றிலும் தனியான ஒரு நெட்டாங்குதைப் பிணையோ இழுவையிணையோ கொண்டுள்ளதாக மேலும் இருக்கமாட்டாது. இச்சந்தர்ப்பங்களில் சட்டத்தின் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள தகைப்பு, (i) சட்டத்தின் வழியே ஓர் இழுவை அல்லது உதைப்பு, (ii) சட்டத்தினை வளைக்க நாடுமோர் இணை, (iii) சட்டத்தின் குறுக்கே அதன் நீளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படும் ஒரு விசை என்னும் மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டிருக்கலாம் என்பதைப் பின்பு (அதிகாரம் VIII) பார்ப்போம். இம்மூன்றும் சட்டத்தின் புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறும். பின்பு, வெளிவிசைகளினாலே தாக்கப்படுகின்ற சட்டமொன்றிலுள்ள தகைப்பினை, தம் முனைகளில் மட்டுமே தாக்கப்படும் சட்டங்களிற் குறித்த மாதிரி, குறித்ததொரு கணியமாகக் கூறமுடியாது.

எனினும், சட்டத்தினால் அதன் முனைகளில் இருக்கும் மூட்டுகளின் மீது உஞற்றப்படும் விசைகளைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

படம் 147.

முனைகளில் மூட்டிய AB என்னுமொரு சட்டம் படம் 147 இற் காட்டியவாறு, W என்னும் ஒரு விசையினாலே தாக்கப்படுகிறதென்க.

W ஐ A இலும் B இலும் முறையே P, Q என்னுமிரு சமாந்தரக் கூறு களாகத் துணிக்க. W இன் இம்மாற்றம் சட்டப்படலின் எஞ்சிய பகுதியின் மீது தகைப்பின் பரம்பலைப் பாதிக்காது. எனவே, விசைகள் P உம் Q உம் மூட்டுகள் A இலும் B இலும் செயற்படும் விசைகளுடன் ஒன்றுசேர்க்கப் படுமிடத்து சட்டங்களிலுள்ள தகைப்புக்களைப் பொதுவாகக் காணுமாறு காணலாம். பாரமேற்றப்படாச் சட்டங்களுக்கு இவ்வாறு பெற்ற பெறு மானங்கள், இச்சட்டங்களிலுள்ள தகைப்புக்களின் உண்மையான பெறு மானங்களாகும். ஆனல், AB இற்குக் கண்ட பெறுமானம் அதனி லுள்ள உதைப்பினையோ இழுவையினையோ மட்டும் தரும்.

AB இனல் A மீது உஞற்றப்படும் அமுக்கத்தைக் காண்பதற்கு, இவ் வுதைப்புடனே, இழுவையுடனே P இற்குச் சமமான ஒரு விசையைக் கூட்ட வேண்டும். இதே மாதிரியாக, B இன் மீது உஞற்றப்படும் அமுக்கத்திற்கும்.

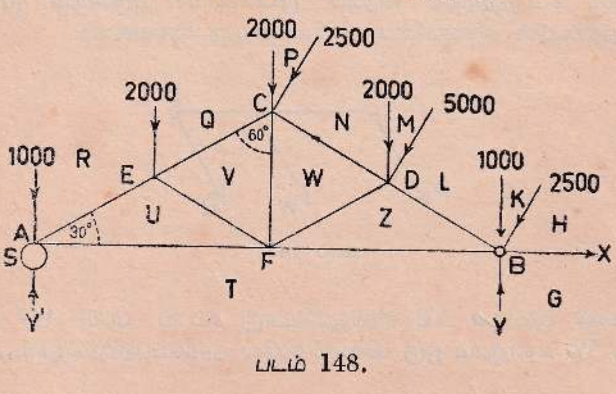
உதாரணம்.

படம் 148, AE, EC, CD, DB, EF, FD, CF என்னும் ஏழு சமமான சட்டங் களினுலும் AF, FB என்னும் இரு நீண்ட கிடைச் சட்டங்களினுலும் அமைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கோப்பியத்தைக் குறிக்கின்றது. AB, 10 அடி நீளமானது.

முனை B நிலைப்படுத்தப்பட்டும் முனை A ஓர் உருளையின்மீது தாங்கப்பட்டும் உள்ளது. கூரையின் மாய்நிறை காட்டப்பெற்றவாறு பங்கிடப்பட்டுள்ளது (A, B ஒவ்வொன்றிலும் 1000 இரு., E, C, D ஒவ்வொன்றிலும் 2000 இரு.). இடப்பக்கத்திலிருந்து வீசும் காற்று CDB இற்குச் செங்குத்தான அமுக்கங் களைக் காட்டப்பெற்றவாறு உண்டாக்குகிறது (B இலும் C இலும் 2500 இரு., D இல் 5000 இரு.) சட்டங்களின் நிறைகளைத் தவிர்த்து, விசைப் படத்தினை வரைக.

A, B இரண்டும் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் என்ன நடைபெறும் ? (C.S.)

A இல் ஒரு நிலைக்குத்து மறுதாக்கம் Y′ உம் B இல் கிடை, நிலைக் குத்து மறுதாக்கங்கள் X, Y ஆகியனவும் இருக்கும்.

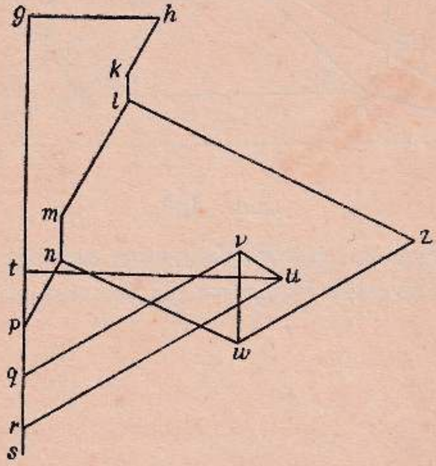


படம் 148.

இவற்றை, திருப்புதிறன்களைக் கணித்து, முழுச் சட்டப்படலிற்கும் துணித்துக் காணலாம். பெறுமானங்கள்,

$$X = 5000, \quad Y = 9800, \quad Y' = 6800.$$

காட்டியவாறு வெளிகளை எழுத்திட்டு, விசைப் பல்கோணி *ghklmnpqrstg* (படம் 149) ஐ, *gh* உடன் தொடங்கி *gh*, X ஐயும் *hk*, B இலுள்ள 2500 ஐயும் *kl*, B இலுள்ள 1000 ஐயும் மற்றவையை இவ்வாறும் குறிக்குமாறு கொண்டு வரைக.



படம் 149.

இப்போது மூலை A இற்குப் பல்கோணியை வரைக. இது உண்மையாக ஒரு முக்கோணி *rtu* ஆகும்.

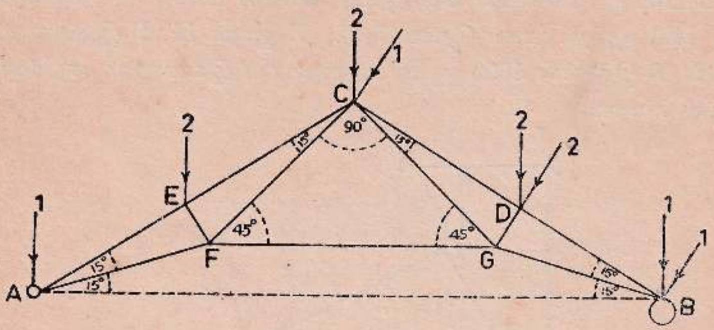
அடுத்ததாக, E இற்குப் பல்கோணி *qruv*, C இற்கு *npqvwn*, D இற்கு *lmnwzl* என்பவற்றை வரைக. B இற்கான பல்கோணி *ghklztg* ஆகும். *zt*, BF இலுள்ள தகைப்பினைத் தருகின்றது.

விசைப் படத்திலிருந்து உதைப்புக்களையும் இழுவைகளையும் அறியலாம். A உம் B உம் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருப்பின், கிடை உதைப்பு X ஐத் தீர்மானிக்க முடியாது. ஏனெனில், ஒரே நேர்கோட்டில் இரு தெரியாக் கிடை மறுதாக்கங்கள் இருப்பதனால், அவற்றைப் புறம்பாகக் காணமுடியாது.

பயிற்சி

படம் 150 ஒரு கோப்பியத்தைக் குறிக்கின்றது. அதன்மீது கூரையின் மாய்நிறை காட்டப்பெற்றவாறு பங்கிடப்பட்டுள்ளது (A, B ஒவ்வொன்றிலும்

1 தொன், E, C, D, ஒவ்வொன்றிலும் 2 தொண்). முனை A நிலைப்படுத்தப்பட்டும், முனை B ஓர் உருளையிலே தாங்கப்பட்டுமுள்ளது. வலப்பக்கத்திலிருந்து வீசும் காற்று BC இற்குச் செங்குத்தாக அமுக்கங்களைக் காட்டப்பெற்றவாறு உண்டாக்குகிறது. சட்டங்களின் நிறையைத் தவிர்த்து விசைப் படத்தினை வரைந்து பற்பல உறுப்புக்களிலுமுள்ள இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் காண்க.



படம் 150.

அதிகாரம் V.

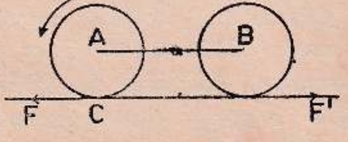
உராய்வு.

§108. உராய்வு விதிகளும் முரடான பரப்பொன்றின்மீது இருக்கும் ஒரு துணிக்கையின் சமநிலைக்கு அவற்றின் பிரயோகமும் அதிகாரம் I இல் ஆராயப்பட்டன. இனி, உராய்விஞலோ மற்றைய விசைகள் காரணமாக வோ சமநிலையில் இருக்கும் துணிக்கைகளை விட மற்றைய பொருட்கள் பற்றிய சந்தர்ப்பங்களை எடுத்து நோக்குவோம். இச்சந்தர்ப்பங்களில் தனி இடர்ப்பாடுகள் உள்ளன. ஆனல், மிகப்பல இடங்களில், இவற்றை உராய்வுக் கோணத்துடன் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு விசேட கையாளுமுறையினுல் வெல்லலாம். இதன் காரணமாகத்தான் இவற்றிற்கென ஒரு தனி அதிகாரம் ஒதுக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளது.

குறித்த பிரசினங்களை ஆராயுமுன், உராய்வுடன் தொடர்புடைய ஒன்று அல்லது இரண்டு குறிப்பிடத்தக்க குறிப்புக்கள் நோக்கற்பாலவை.

§109. உராய்வு அன்றாட பொறியியலில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. ஒருவர் நடக்கும்போது, அடி பின்னேக்கி நழுவப் பார்க்கும்; இது முன்னேக்கிச் செயற்படும் நிலத்தின் உராய்விஞலே தடுக்கப்படுகின்றது. அதோடு, இங்கு உராய்வுவிசை உண்மையாக இயக்கு விசையேயாகும். உராய்வின்றி நடத்தல் என்பது முடியாத காரியம்.

புகைவண்டி எஞ்சின் ஒன்று, அதன் பின்புறமாகப் பெட்டித்தொடரொன்றைக் கொண்டிராமல் இருப்பினும், முன்னேக்கிச் செயற்படும் ஒரு வெளி விசையிருந்தாலொழிய முன்னேக்கி இயங்கமுடியாது. எஞ்சினுல், அதன் சொந்தச் செலுத்தும் சில்லுகளைச் சுற்றுமாறு மட்டுமே செய்யமுடியும். இவை ஒப்பமான தண்டவாளங்களின்மீது தங்கியிருப்பின் முன்னேக்கு இயக்கமொன்றையும் ஏற்படுத்தாமல் அவை சுற்றும். நடைமுறையில், செலுத்தும் சில்லுக்கும் தண்டவாளத்துக்கும் இடையேயான உராய்வானது சுற்றுதலைத் தடுக்கவோ தொடுகைப் புள்ளி C (படம் 151) இல் நழுவலைத் தடுக்கவோ நாடும். இவ்வாருக, சில்லு தண்டவாளத்தின் வழியே



படம் 151.

உருளுமாறு செய்யப்படுகின்றது. இங்கு செயற்படுமாறு செய்யப்படும் உராய்வுவிசை முன்னேக்கிச் செயற்படுகின்றது. இவ்வுராய்வு, எஞ்சினின் இழுப்புவிசையின் பருமனைத் தருகின்றது. எஞ்சினின் மற்றைய சில்லுகள்

அல்லது புகைவண்டிப் பெட்டியொன்றின் சில்லுகள் அச்சாணிக்கு B இற் போலப் பிரயோகிக்கப்படும் விசையொன்றினால் முன்னோக்கி இழுக்கப்படு கின்றன. ஒப்பமான தண்டவாளங்களின் மீதுள்ள இச்சில்லுகள் திரும்பாது முன்னோக்கிச் சறுக்கப்பார்க்கும். பின்னோக்கிச் செயற்படும் உராய்வின் விளையுள், F′ ஐப்போல, அவற்றை உருளச் செய்கின்றது.

§110. தடுப்புக்கள் தொழிற்படுமுறை.

ஒரு மோட்டர்க் காரின் தடுப்புக்கள் சில்லுகளைச் சுற்றுது தடுக்க நாடும். அவை சில்லுகளை உண்மையாகப் பூட்டின் (அ–து. அவற்றை முழுவதும் சுற்றுது தடுப்பின்) வழுக்குராய்வு நிலத்துடனான தொடுகைப் புள்ளிகளிற் செயற்பட்டுக் காரினை நிற்பாட்டும்.

எனினும் மிகப்பல இடங்களில் தடுப்புக்கள் உருண்டுகொண்டேயிருக்கும் சில்லுகளின் சுற்றுதலை வெறுமனே தடுக்கும். இவ்விடத்து, காரினை நிற்பாட்ட நாடுகின்ற விசை எவ்வாறு உண்டாக்கப்படுகிறது என்பது தெளி வாக இல்லை.

சில்லுச் சுற்றுதலைத் தடுத்துத் தனக்குள்ளே கார்மீது அமர்முடுகும் விசையொன்றினை ஆக்கமுடியாது என்பது தெளிவு. நிலம் ஒப்பமாக இருப்பின், பின்பு சில்லுகளைப் பூட்டுதலும் அவ்வித விளைவு எதையும் கொண்டிருக்கமுடியாது.

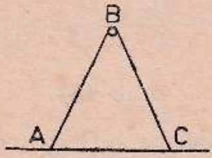
மையம் A (படம் 151) ஐயும் தொடுகைப்புள்ளி C ஐயுமுடைய ஒரு சில்லு சுயாதீனமாக உருளும்போது C இல் நழுவல் எதுமில்லை. A இன் தொடர்பாக C இன் பின்முக வேகம் A இன் முன்முக வேகத்திற்குச் சமன். எனவே, சில்லுச் சுற்றுது தடுக்கப்படின் C இன் பின்முக வேகம் குறைக்கப்படும். பின்பு C, A உடன் முன்னோக்கி இயங்க நாடும். இது C இல் பின்முக உராய்வுவிசையொன்றை ஏற்படுத்து கின்றது. இவ்விசையே சில்லின் முன்முக இயக்கத்தைத் தடைசெய் கின்றது.

§111. உராய்வுடன் சம்பந்தப்பட்ட பிரசினங்களைப் பருமட்டாகப் பின்வரு மாறு வகைப்படுத்தலாம் :—

1. பொருள் விறைப்பாகவும், சமநிலை வழுக்குதலினால் மட்டுமே குழப்பப்படுவதாகவும் உடைய பிரசினங்கள். இங்கு இயக்கத்திசை வெளிப் படையானது. உதாரணமாக, முரடான நிலத்திலே தங்கும் ஓர் ஏணி முரடான சுவரொன்றில் அதற்குச் செங்குத்தானதொரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சாய்ந்திருத்தலை எடுப்போம். இங்கு வேறேதும் விசைகள் செயற் பாவிடடின், நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயக்கம் நிகழின் ஏணியின் கீழ் முனை சுவருக்கு அப்பாலும் அதேநேரத்தில் மேன்முனை கீழ்நோக்கியும் வழுவும் என்பது தெளிவு. ஒரு முனை மற்றையமுனை வழுவாமல் வழுவாது.

2. சமநிலை வழுக்குதலினலோ சாய்த்தலினலோ குழப்பப்படக்கூடிய பிரசினங்கள். உதாரணமாக, முரடான தளமொன்றின்மீது தங்கும் ஒரு குற்றி அல்லது உருளை படிப்படியாகச் சாய்க்கப்படுதல். புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஊடான நிலைக்குத்து, வழுக்குதல் ஆரம்பிக்குமுன் அடிக்கு வெளிப்புறமாக வருமாயின் அப்பொருள் வழுக்குமுன் கவிழும்.

3. B இல் மூட்டப்பட்டும் முரடான இடைத் தளமொன்றின்மீது தங்கியுமிருக்கும் இரு மூட்டிய கோல்கள் AB, BC (படம் 152) என்பவற்றைப்



படம் 152.

போன்ற ஒரு விறைப்பற்ற பொருளை உடைய பிரசினங்கள். இவ்விடத்து, A, C இரண்டிலும் நழுவல் ஏற்பட அவசியமில்லை. உராய்வு, A இலும் C இலும் எல்லைப் பெறுமதியை உடையதாக இராமல் A இலோ C இலோ எல்லைப் பெறுமதி உடையதாக இருக்கலாம். அது அவை இரண்டிலும் எல்லைக்குட்பட்டதாக இருக்கலாம். கோலின் நிறைகளையும் அதன் மீது வைத்த நிறைகளையும் தவிர வேறு வெளி விசை எதுமில்லையாயின், சமநிலையில், A இலும் C இலுமுள்ள உராய்வுகள் மட்டுமே செயற்படும் இடை விசைகளாகையால் இவை சமமாகவும் முரணுகவும் இருக்க வேண்டும்.

எனினும், அவைகள் இரண்டிலும் ஒன்று எல்லைப் பெறுமதியை உடையது, அ–து. μR இற்குச் சமம், எனக் கொள்ளாதிருப்பதிற் கவனமாக இருக்கவேண்டும்.

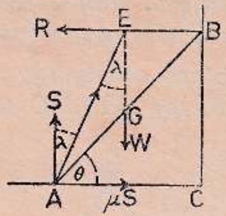
4. இயக்கத்திசை தெளிவாக இல்லாத பல கடினமான பிரசினங்கள்; வழுக்குதலினலோ உருளுதலினலோ சமநிலை குழப்பப்படக் கூடியவை, உ–ம். முரடான நிலமொன்றிலே தங்கியுள்ளதோர் ஏணி முரடான சுவரொன்றில் அதற்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலில்லாமற் சாய்ந்திருத்தல்; அல்லது முரடான இடைத் தளமொன்றின்மீது தங்கியிருக்கும் இரு உருளைகளின் மீது தங்கும் ஒரு முரடான உருளை.

பின்வரும் பந்திகளில் பலவகை உதாரணங்கள் எடுத்துக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

§112. உதாரணம் (i).

W நிறையுள்ள சிரேணியொன்று அதன் ஒரு முனை ஒப்பமான சுவரொன்றின்மீதும் மறு முனை முரடான இடை நிலத்திலுமிருக்குமாறு

சாய்ந்துள்ளது. μ, உராய்வுக் குணகம். ஏணி நழுவும் நிலையில், கிடையுடன் ஏணியின் சாய்வையும், சுவரினதும் நிலத்தினதும் மறுதாக்கங்களையும் காண்க.



படம் 153.

AB (படம் 153) ஐ ஏணியெனவும் G ஐப் புவியீர்ப்பு மையமெனவும் C ஐச் சுவரும் நிலமும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியெனவும் கொள்க. சுவர் ஒப்பமானதாகையால் B இலுள்ள மறுதாக்கம் R சுவருக்குச் செங்குத்தாக இருக்க வேண்டும்.

நிலத்தின்மீது A இலுள்ள செவ்வனமுக்கம் S ஆயின், ஏணி நழுவும் நிலையில் இருப்பதனால், A இலுள்ள உராய்வு μS ஆகும்.

எனவே, ஏணியின் மீது செயற்படும் நான்கு விசைகள் உள்ளன. கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் துணித்து, C அல்லது A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்து, தெரியா மறுதாக்கங்கள் R, S என்பனவற்றையும் கோணம் θ ஐயும் காண்பதற்கு மூன்று சமன்பாடுகளைப் பெறுகின்றோம்.

கிடையாகத் துணிக்க, $R = \mu S$ . . . . . (i)
நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க, $S = W$ . . . . . (ii)
C பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Rl \text{ சைன் } \theta + W\frac{l}{2} \text{ கோசை } \theta = Sl \text{ கோசை } \theta \quad . \quad . \quad . \quad (iii)$$

(i) இலும் (ii) இலுமிருந்து $R = \mu W = W$ தான் λ. இங்கு λ, உராய்வுக் கோணம்.

(iii) இலிருந்து W தான் λ சைன் $\theta + \frac{W}{2}$ கோசை $\theta = W$ கோசை θ,

$$\therefore W \text{ தான் } \lambda \text{ தான் } \theta = \frac{W}{2},$$

$$\therefore \text{ தான் } \theta = \frac{1}{2} \text{ கோதா } \lambda.$$

நிலத்தின் விளையுள் மறுதாக்கம் $= \sqrt{S^2 + \mu^2 S^2}$
$= S\sqrt{1 + \text{தான்}^2 \lambda}$
$= W$ சீக λ.

ஏணியின் சாய்வுக் கோணத்தினை, கூறுகள் S, μS இரண்டிற்கும் பதிலாக A இல் நிலத்தின் விளையுள் மறுதாக்கத்தினை எடுத்து நோக்கியும் காணலாம். இது விசைகளின் எண்ணிக்கையை மூன்றுகச் சுருக்குவதனுல், இவை ஒரு புள்ளியில், அ-து. R இன் தாக்கக் கோடானது G இனூடான நிலைக்குத்தினை வெட்டும் புள்ளி E இல், சந்திக்கவேண்டும்.

ஏணி நழுவும் நிலையில் இருப்பதனுல், A இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் A இலுள்ள செவ்வனுடன் உராய்வுக் கோணம் λ ஐ ஆக்குகிறது.

பந்தி 73 இன் சூத்திரத்தினை முக்கோணி EAB இற்குப் பயன்படுத்த,

$$2 \text{ கோதா } \widehat{\mathrm{EGB}} = \text{கோதா } \widehat{\mathrm{AEG}} - \text{கோதா } \widehat{\mathrm{GEB}},$$

ஆனுல்,
$$\widehat{\mathrm{EGB}} = 90^\circ - \theta,\ \widehat{\mathrm{AEG}} = \lambda,\ \widehat{\mathrm{GEB}} = 90^\circ,$$

$$\therefore\ 2 \text{ தான் } \theta = \text{கோதா } \lambda,$$

அல்லது
$$\text{தான் } \theta = \tfrac{1}{2} \text{ கோதா } \lambda.$$

எல்லைச் சமநிலையில் ஒரு பொருளின் **நிலையம்** மட்டுமே தேவைப்படும் போது, மறுதாக்கங்களைப் புகுத்தாமலும் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தும் பேற்றினைப் பெறுவதனுல், கேத்திரகணித முறை குறிப்பாகப் பயன்படுகிறது. மறுதாக்கங்கள் தேவைப்படினும் பொருளின் நிலையத்தினைக் காண்பதற்கு இம்முறை விரைவானது. பின்பு துணித்தோ திருப்புதிறன்களைக் கணித்தோ மறுதாக்கங்களைக் காணலாம்.

உதாரணம் (ii).

ஒரு முரடான கிடை நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட W நிறையுள்ள ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஒரு முரடான சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. நிலத்திலும் சுவரிலும் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே μ உம் μ' உமாகும். ஏணி நழுவும் தறுவாயிலிருக்கும்போது கிடையுடன் ஏணியின் சாய்வினையும், சுவரிலும் நிலத்திலுமுள்ள மறுதாக்கங்களையும் காண்க.

ஏணியை AB எனவும், (படம் 154) புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், சுவரிலும் நிலத்திலுமுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கங்களை R, S எனவும் கொள்க. இரு முனைகளும் நழுவும் தறுவாயில் இருப்பதனுல், B இல் **மேனேக்கித்** தாக்கும் ஓர் உராய்வுவிசை μ'R உம், A இற் சுவரை **நோக்கிச்** செயற்படும் μS உம் உள்ளன.

θ, நிலத்துடன் ஏணியின் சாய்வு என்க. $2l$, ஏணி நீளமெனக. கிடையாகத் துணிக்க,

$$\mu \mathrm{S} = \mathrm{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{i})$$

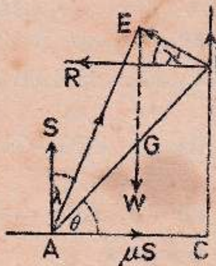
நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$S + \mu' R = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

C பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Wl \text{ கோசை } \theta = S2l \text{ கோசை } \theta - R2l \text{ சைன் } \theta,$$

அல்லது $$W \text{ கோசை } \theta = 2S \text{ கோசை } \theta - 2R \text{ சைன் } \theta \ . \quad \text{(iii)}$$



படம் 154.

(i) இலும் (ii) இலுமிருந்து $S(1 + \mu\mu') = W$,

$$\therefore\ S = \frac{W}{1 + \mu\mu'} \text{ உம், } R = \frac{\mu W}{1 + \mu\mu'} \text{ உம் ஆகும்.}$$

(iii) இல் R இற்கு μS ஐப் பிரதியிட,

$$W \text{ கோசை } \theta = 2S(\text{கோசை } \theta - \mu \text{ சைன் } \theta),$$

$$= \frac{2W}{1 + \mu\mu'}(\text{கோசை } \theta - \mu \text{ சைன் } \theta),$$

$$\therefore\ 1 = \frac{2}{1 + \mu\mu'}(1 - \mu \text{ தான் } \theta),$$

$$\therefore\ \frac{1 + \mu\mu'}{2} = 1 - \mu \text{ தான் } \theta,$$

அல்லது $$\mu \text{ தான் } \theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2},$$

அல்லது $$\text{தான் } \theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}.$$

இவ்விடத்து θ இன் பெறுமானத்தை, A இலும் B இலுமுள்ள விளையுள் மறுதாக்கங்களையும் உதாரணம் (i) இல் விளக்கிய கேத்திரகணித முறையையும் பயன்படுத்தி மிக எளிதாகக் காணலாம்.

இம்மறுதாக்கங்கள், A இலும் B இலுமுள்ள செவ்வன்களுடன் முறையே λ, λ' (இங்கு தான் $\lambda = \mu$, தான் $\lambda' = \mu'$) என்னும் கோணங்களை ஆக்கவும், G இனூடான நிலைக்குத்தின்மீது E இற் சந்திக்கவும் வேண்டும்.

பின்பு, $\widehat{AEG} = \lambda$, $\widehat{GEB} = 90° - \lambda'$, $\widehat{EGB} = 90° - \theta$,

$$\therefore\ 2\ \text{தான்}\ \theta = \text{கோதா}\ \lambda - \text{தான்}\ \lambda',$$

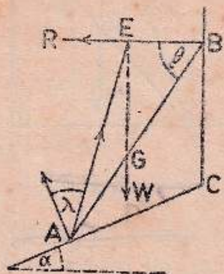
$$\therefore\ 2\ \text{தான்}\ \theta = \frac{1}{\mu} - \mu' = \frac{1-\mu\mu'}{\mu},$$

$$\therefore\ \text{தான்}\ \theta = \frac{1-\mu\mu'}{2\mu}.$$

பின்பு மேற்கண்டவாறு துணித்து R ஐயும் S ஐயும் காணலாம்.

உதாரணம் (iii).

முரடான நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட W நிறையுள்ள ஒரு ஏணியின் மறுமுனை ஓர் ஒப்பமான சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. ஏணி கிடையுடன் கோணம் α இல் சுவரிலிருந்து கீழ்நோக்கிச் சரிகின்றது. ஏணி வழுகும் நிலையிலிருப்பின் கிடையுடன் ஏணியின் சாய்வைக் கண்டு, சுவரின் மறுதாக்கம் W தான் $(\lambda - \alpha)$ எனக் காட்டுக. இங்கு, λ, உராய்வுக் கோணம்.



படம் 155.

ஏணியை AB (படம் 155) எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், கிடையுடன் அதன் சாய்வை θ எனவும் கொள்க.

சுவர் ஒப்பமானதாகையால், B இலுள்ள மறுதாக்கம் R சுவருக்குச் செங்குத்தாகும்.

A இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் A இலுள்ள செவ்வனுடன் கோணம் λ ஐ ஆக்குவதாகவும், G இனூடான நிலைக்குத்தினை R இன் தாக்கக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளி E இனூடாகச் செல்வதாகவும் உள்ளது.

கோணம் AEG, $(\lambda - \alpha)$ இற்குச் சமம். அதோடு $\widehat{EGB} = 90° - \theta$.
மேலும், 2 கோதா EGB = கோதா AEG − கோதா GEB,

$$\therefore\ 2\ \text{தான்}\ \theta = \text{கோதா}\ (\lambda - \alpha),\ \widehat{GEB} = 90°\ \text{என்பதனால்},$$

ஏணியின் நீளம் $2l$ ஆயின், A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$R2l \text{ சைன் } \theta = Wl \text{ கோசை } \theta,$$

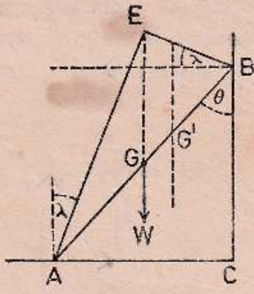
$$\therefore\ R = \frac{W}{2} \text{ கோதா } \theta = \frac{W}{2} . 2 \text{ தான் } (\lambda - \alpha),$$

$$= W \text{ தான் } (\lambda - \alpha).$$

உதாரணம் (iv).

முரடான கிடை நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஒரு முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. நிலமும் சுவரும் சம முரடானவை ; உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் அதியுயர் சாய்வு 2λ எனக் காட்டுக.

ஏணி இந்நிலையிலிருக்கும்போது அது நழுவாமல் அதில் ஏறலாமா ?



படம் 156.

ஏணியை AB (படம் 156) எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வை θ எனவும் கொள்க. ஏணி நழுவும் தறுவாயிலிருக்கும்போது A இலும் B இலுமுள்ள விளையுள் மறுதாக்கங்கள் இப்புள்ளிகளிலுள்ள செவ்வன்களுடன் λ இற்குச் சமமான கோணங்களை ஆக்குகின்றன. அதோடு அவை G இனூடான நிலைக்குத்தின் மீது யாதுமொரு புள்ளி E இற் சந்திக்கவும் வேண்டும்.

$$\widehat{AEG} = \lambda,\ \widehat{GEB} = 90^\circ - \lambda,\ \widehat{EGB} = \theta,$$

$$\therefore\ 2 \text{ கோதா } \theta = \text{ கோதா } \lambda - \text{ தான் } \lambda$$

$$= \frac{1}{\text{தான் } \lambda} - \text{ தான் } \lambda$$

$$= \frac{1 - \text{தான்}^2\lambda}{\text{தான் } \lambda},$$

$$\therefore\ \text{தான் } \theta = \frac{2 \text{ தான் } \lambda}{1 - \text{தான்}^2\lambda},$$

$$\therefore\ \theta = 2\lambda.$$

ஏணியில் A இற்கும் G இற்குமிடையே எவ்விடத்திலும் கூடுதலான நிறையொன்று வைக்கப்படின், ஏணியினதும் கூட்டிய நிறையினதும் புவியீர்ப்பு மையமானது G இற்குக் கீழேயுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு நகருகின்றது. பின்பு, புதிய புவியீர்ப்பு மையத்தினூடான நிலைக்குத்து படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளதிற்கு இடப்பக்கத்திலிருக்கும். அதோடு A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள், A, B என்பவற்றிலுள்ள செவ்வன்களுடன் அவற்றின் சாய்வானது λ இலும் பார்க்க அதிகமாக இருக்காமலே இந்நிலைக்குத்தின்மீது இப்போதும் சந்திக்கக் கூடியவை என்பது தெளிவு ; அவை உண்மையாக λ இலும் பார்க்கக் குறைவாக இருக்கும். பின்பு சமநிலை எல்லைச் சமநிலையாகத் தொடர்ந்திருக்க மாட்டாது.

கூட்டிய நிறை G ஐ அடையும்போது சமநிலை மீண்டும் எல்லைச் சமநிலையாகின்றது.

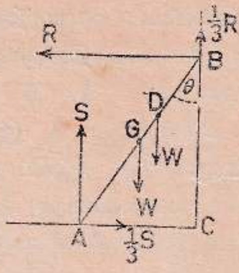
கூட்டிய நிறை G இற்கு மேலே அமையும்போது புவியீர்ப்பு மையமானது G இற்கு மேலே (G′ இற்கு என்க) நகர்கின்றது. அதோடு, A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் G′ இனூடான நிலைக்குத்தின்மீது சந்திக்க முடியாதவையாகின்றன. ஏனெனில், இதற்குச் செவ்வனுடனான சாய்வுகளிலொன்று λ இலும் அதிகமாக இருக்க வேண்டும். எனவே, ஏணியில் அதன் மையம் வரையே ஏறலாம்.

ஏணியின் அடியுடன் (அதன் அடிப் படியின்மீது யாராவது நிற்றல் போன்று) கூடுதலான நிறையொன்று இணைக்கப்படின், புவியீர்ப்பு மையம் G இற்குக் கீழே அமையும். இவ்விடத்து, ஏணியில் G இற்கு மேலே வேறொரு மனிதன் ஏறலாம். ஆனால், ஏணியினதும் இரு கூட்டிய நிறைகளினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தினை G இற்குத் திருப்பிக் கொண்டு வரக் கூடிய உயரத்திற்கு மட்டுமே ஏறலாம்.

உதாரணம் (v).

ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஒரு முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}$. நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் சாய்வு தான்$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ ஆயின், சமநிலையைக் குழப்பாமல் ஏணியின் நிறைக்குச் சமமான ஒரு நிறையை ஏணியின் அடியிலிருந்துள்ள தூரத்தின் $\frac{9}{10}$ இலும் அதிகமான தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் இணைக்க முடியாதென நிறுவுக.

ஏணியை AB (படம் 157) எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், அதன் நிறையை W எனவும், ஏணி நழுவும் தறுவாயில் மேலதிக நிறை W இன் நிலையத்தை D எனவும் கொள்க.



படம் 157.

சுவரிலும் நிலத்திலுமுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கங்கள் முறையே R உம் S உம் ஆயின், இப்புள்ளிகளிலுள்ள உராய்வுகள் $\frac{1}{3}$ R, $\frac{1}{3}$ S ஆகும்.

கிடையாகத் துணிக்க, $\mathrm{R} = \frac{1}{3}\mathrm{S}$ . . . . . (i)

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க, $\mathrm{S} + \frac{1}{3}\mathrm{R} = 2\mathrm{W}$ . . . . . (ii)

$$\therefore\ \mathrm{S} + \frac{1}{9}\mathrm{S} = 2\mathrm{W} \text{ அல்லது } \mathrm{S} = \frac{9}{5}\mathrm{W},$$

அதோடு, $\mathrm{R} = \frac{3}{5}\mathrm{W}.$

ஏணியின் நீளம் $2l$ எனவும் $\mathrm{AD} = x$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = \theta$ எனவும் கொள்க. இங்கு, தான் $\theta = \frac{1}{2}$. A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mathrm{W}l \text{ சைன் } \theta + \mathrm{W}x \text{ சைன் } \theta \ngtr \mathrm{R}\ 2l \text{ கோசை } \theta + \frac{1}{3}\mathrm{R}2l \text{ சைன் } \theta,$$

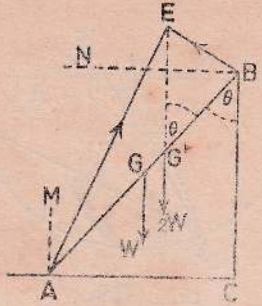
$$\therefore\ \mathrm{W} \text{ சைன் } \theta + \mathrm{W}\frac{x}{l} \text{சைன் } \theta \ngtr \frac{6}{5}\mathrm{W} \text{ கோசை } \theta + \frac{2}{5}\ \mathrm{W} \text{ சைன் } \theta,$$

$$\therefore\ \frac{x}{l} \ngtr \frac{6}{5} \text{கோதா } \theta + \frac{2}{5} - 1,$$

$$\ngtr \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \ngtr \frac{9}{5},$$

$$\therefore\ x \ngtr \frac{9}{5}l \ngtr \text{ ஏணியின் நீளத்தின் } \frac{9}{10}.$$

இப்பிரசினத்தை (உ-ம். IV இற் போல) கேத்திரகணித முறை யாலும் செய்யலாம்.



படம் 158.

சமநிலைக்கு A இலும் B இலுமுள்ள விளையுள் மறுதாக்கங்கள் ஏணியினதும் யாதுமொரு சேர்ந்த நிறையினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடான நிலைக்குத்தின்மீது சந்திக்க வேண்டும்.

ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம் மட்டுமே G உம் (படம் 158), ஏணியினதும் கூட்டிய நிறையினதும் புவியீர்ப்பு மையம் எல்லைச் சமநிலையில் G′ உம் ஆயின், A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் G′ இனூடான நிலைக்குத்தை E இற் சந்திக்கும்.

பின்பு, தான் $AEG' =$ கோதா $G'EB = \frac{1}{3}$.

அதோடு $(AG' + G'B)$ கோதா $\theta = AG'$ கோதா $AEG' - G'B$ கோதா $G'EB$.

எனவே, கோதா $\theta = 2$, கோதா $AEG' = 3$, கோதா $G'EB = \frac{1}{3}$ ஆதலின்,

$$4l = 3AG' - \tfrac{1}{3}(2l - AG').$$
$$\therefore\ 3\tfrac{1}{3}\,AG' = 4\tfrac{2}{3}l,$$
$$\therefore\ AG' = \tfrac{14}{10}l = \tfrac{7}{5}l.$$

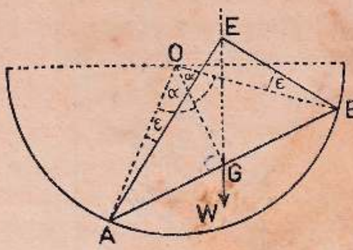
அதோடு, கூட்டிய நிறை W இற்கும் A இற்குமிடையேயுள்ள தூரம் x ஆயின், இதனதும் ஏணியினதும் புவியீர்ப்பு மையம் G′ இல் இருப்பதனல், A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Wx + Wl = 2W.\tfrac{7}{5}l.$$
$$\therefore\ x = \tfrac{9}{5}l = \text{ஏணி நீளத்தின் } \tfrac{9}{10}.$$

உதாரணம் (vi).

ஒரு முரடான பொட் கோளத்தின் உட்புறத்தில் அதன் மையத்தினூடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு சீர்க் கோல் எல்லைச் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கின்றது. கோல் கிடையுடன் தான் $^{-1}\dfrac{\text{சைன் } 2\epsilon}{\text{கோசை } 2\alpha + \text{கோசை } 2\epsilon}$

என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக. இங்கு ϵ, உராய்வுக் கோணம் ; 2α, கோல் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம்.



படம் 159.

கோலினை AB (படம் 159) எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினை G எனவும், கோளத்தின் மையத்தினை O எனவும் கொள்க. பின்பு, A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் G இனூடான நிலைக்குத்தின் மீது ஒரு புள்ளி E இற் சந்திக்கின்றன. அவை ஆரை OA, OB என்பவற்றுடன் ஒரே கோணம் ϵ இற் சாய்ந்திருக்கின்றன. ஏனெனில், இவ்வாரை A இலும் B இலும் கோளத்தின் செவ்வன்களாகும்.

இப்போது, $\widehat{EAG} = \widehat{OAG} - \epsilon = 90^\circ - \alpha - \epsilon = 90^\circ - (\alpha + \epsilon)$,

$$\widehat{EBG} = \widehat{OBG} + \epsilon = 90^\circ - \alpha + \epsilon = 90^\circ - (\alpha - \epsilon).$$

அதோடு, 2 கோதா $EGB =$ கோதா $EAG -$ கோதா EBG,

$$= \text{கோதா } [90^\circ - (\alpha+\epsilon)] - \text{கோதா } [90^\circ - (\alpha - \epsilon)],$$

$$= \text{தான் } (\alpha+\epsilon) - \text{தான் } (\alpha - \epsilon),$$

$$= \frac{\text{சைன் } (\alpha+\epsilon)}{\text{கோசை } (\alpha+\epsilon)} - \frac{\text{சைன் } (\alpha-\epsilon)}{\text{கோசை } (\alpha-\epsilon)},$$

$$= \frac{\text{சைன் } 2\epsilon}{\text{கோசை } (\alpha+\epsilon) \text{ கோசை } (\alpha-\epsilon)},$$

$$\therefore \text{கோதா } EGB = \frac{\text{சைன் } 2\epsilon}{2 \text{ கோசை } (\alpha+\epsilon) \text{ கோசை } (\alpha-\epsilon)} = \frac{\text{சைன் } 2\epsilon}{\text{கோசை } 2\alpha + \text{கோசை } 2\epsilon}.$$

அதோடு $\widehat{EGB}$, கிடையுடன் கோலினது சாய்வின் நிரப்பியுமாகும்,

$\therefore$ கிடையுடனான சாய்வு =

$$\text{தான்}^{-1} \frac{\text{சைன் } 2\epsilon}{\text{கோசை } 2\alpha + \text{கோசை } 2\epsilon}.$$

பயிற்சி XXI.

1. இடை நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட ஒரு சீரேணியின் மறு முனை ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கிறது. நிலத்தினதும் சுவரினதும் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே $\frac{3}{5}$ உம் $\frac{1}{3}$ உம் ஆகும். எணி நழுவுந் தறுவாயில் நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வைக் காண்க.

2. முரடான இடை நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்டுள்ள ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. நிலத்தின் உராய்வுக் குணகம் $\frac{5}{8}$ ஆகும். எணியின் சாய்வு $45°$ ஆயின், எணியின் நிறைக்குச் சமமான நிறையுடைய மனிதனொருவன் எணியின் நீளத்தின் முற்காற்பங்கு மட்டுமே ஏறலாம் எனக் காட்டுக.

3. முன்னைய கணக்கில், மனிதன் எணியின் உச்சிக்கு ஏறுமாறு செய்ய எணியின் அடிப்புறத்தில் வைக்கவேண்டிய நிறையைக் காண்க.

4. முரடான நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட W நிறையுள்ள ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை ஒப்பமான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. எணி இடையுடன் α சாய்வில் சுவரிலிருந்து கீழ்நோக்கிச் சரிகின்றது. எணி எல்லைச் சமநிலையிலிருப்பின், சுவருடன் அதன் சாய்வு

$$\text{தான்}^{-1}\ [2\ \text{தான்}\ (\epsilon-\alpha)]$$

என நிறுவுக. இங்கு ϵ, உராய்வுக் கோணம். பின்பு நிலைத்துடனான விளையுள் மறுதாக்கம் W சீக $(\epsilon-\alpha)$ ஆகும் என்பதையும் நிறுவுக. (I.S.)

5. நிலத்திலிருந்து உயரம் h இல் ஒரு குடைதாங்கியின் முரடான வளையத்தின் உட்புறத்தில் l நீளமான ஒரு சீர்க் கோல் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அது ஒப்பமான நிலமொன்றின்மீதும் தங்கியிருக்கிறது. உராய்வுக் குணகம்.

$$\frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}}$$

இலும் குறைவாயின் கோல் நிலைக்குத்தாக இருந்தாலொழிய சமநிலை சாத்தியமாகாதெனக் காட்டுக. (I.E.)

6. l நீளச் சீர்க் கோலொன்று h உயரத்திலிருக்கும் ஓர் ஒப்பமான இடைச் சட்டத்தின் மீது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சாய்ந்து (அதற்கு மேலாக) இருக்கின்றது. கோலின் கீழ் முனை மட்டமான நிலத்திற் பொருந்தியுள்ளது. இடையுடன் அக்கோலின் சாய்வு θ ஆக இருக்கும் போது அது நழுவும் தறுவாயிலிருப்பின், கோலிற்கும் நிலத்திற்கு மிடையேயான உராய்வுக் குணகம்.

$$\frac{l\ \text{சைன்}\ 2\theta\ \text{சைன்}\theta}{4h-l\ \text{சைன்}\ 2\theta\ \text{கோசை}\ \theta}$$

எனக் காட்டுக. (I.E.)

7. ஒரு பாரமான மெல்லிய சீர்க் கோல் AB நிலைக்குத்துடன் $45°$ இற் சாய்ந்திருப்பனவும் ஒரு இடைக் கோட்டிற் சந்திக்கின்றனவுமான

OA, OB என்னுமிரு தளங்களுக்கிடையே தங்கியிருக்கின்றது. கோலின் முனை A உம் தளம் OA உம் முரடானவை. மற்றைய முனையும் தளம் OB உம் ஒப்பமானவை. தான் θ இன் பெறுமதி $1-2\mu$ இற்கும் $1+2\mu$ இற்குமிடையே இருக்குமாயின் ஒப்பமான தளத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கும் எந்நிலையிலும் கோல் தங்கும் எனக் காட்டுக.

8. $2l$ நீளமான AB, BC என்னுமிரு சீர்ச் சமகோல்கள் ABC ஒரு செங்கோணம் என்றவாறு, B இல் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அக்கோல்கள் ஆரை a உடைய ஒரு நிலைத்த வட்ட வளையமொன்றைத் தொட்டுக்கொண்டு, AB கிடையாகவும் BC அவ்வட்டத்தின் ஒரு நிலைக்குத்துத் தொடலியாகவும் இருக்குமாறு எல்லைச் சமநிலையிலே தங்கின்,

$$2a(1-\mu) = l(1+\mu^2)$$

என நிறுவுக. இங்கு μ, கோல்களுக்கும் வளையத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம். (I.S.)

9. நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட சீரேணியின் மறுமுனை ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரில், சுவரும் நிலமும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதொரு தளத்திற் சாய்ந்திருக்கின்றது. சுவரினும் நிலத்திலும் உள்ள உராய்வுக் குணகங்களிரண்டும் தான் 15° இற்குச் சமம். நிலத்துடன் ஏணியின் சாய்வு 60° இலும் குறையலாகாதெனக் காட்டுக. ஏணியின் நிறையின்

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

இற்குச் சமமான ஒரு நிறை, அதன் கீழ்முனையுடன் இணைக்கப்படின் அது மட்டுமட்டாக 30° சாய்விலே தங்கியிருக்குமெனக் காட்டுக. (H.C.)

10. ஒரு சீர்க் கோல், கிடையாகவும் அதனுடன் 120° இற் சாய்ந்துமிருக்கும் இரு தளங்களிற் சமமாகச் சாய்ந்து எல்லைச் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கிறது. கோலிற்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையே உராய்வுக் கோணம் 30° ஆயின், கோலிற்கும் கிடைத் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. (H.S.D.)

11. 20 இரு. நிறையும் 8 அடி நீளமுமுடைய சீர்ப் பலகை AB அதன் முனை A ஐ முரடான நிலத்திற்கொண்டு, கிடையுடன் தான்$^{-1}\frac{4}{3}$ சாய்வில் 4 அடி உயரமுள்ள ஓர் ஒப்பமான மேசையின் விளிம்பிற் சாய்ந்திருக்கிறது. பலகைக்கும் நிலத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ, $\frac{48}{89}$ இலும் அதிகமானதெனக் காட்டுக. $\mu = \frac{3}{4}$ ஆயின், பலகை நழுவாமல் முனை B இலிருந்து எந்நிறை தொங்கவிடப்படலாம் என்பதைக் காண்க. (H.S.D.)

12. தரையில் ஒரு முனையைக் கொண்ட $\mathbf{W}$ நிறையுள்ள ஒரு பாரமான சீர்க் கோல் மறுமுனையை ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிற் கொண்டு கிடையுடன் 45° இற் சாய்ந்திருக்கின்றது. கோலினூடான நிலைக்குத்துத் தளம் சுவருக்குச் செங்குத்தானது; தரையும் சுவரும் சமமுரடானவை. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் கோலிற்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$. கோலின் கீழ்முனையில் உராய்வு $\frac{1}{2}$ W இற்கும் $\frac{1}{3}$W இற்குமிடையே எப்பெறுமதியையும் உடையதாக இருக்கலாமெனக் காட்டி, மேன்முனையில் உராய்வுகளின் ஒத்த பெறுமானங்களைக் காண்க. உராய்வுக் குணகம் ஒவ்வொன்றும் $\sqrt{2}-1$ ஆக இருத்தல் பற்றிய சந்தர்ப்பத்தை ஆராய்க. (H.S.C.)

13. முரடான நிலத்தில் ஒருமுனையைக் கொண்ட 100 இறு. நிறையான ஓர் ஏணியின் மறுமுனை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. கிடையுடன் 60° இல் ஏணி சாய்ந்திருப்பின், ஏணியை ஓய்வு நிலையில் வைத்திருத்தற்கு வேண்டிய உராய்வு விசையைக் காண்க. ஏணிக்கும் நிலத்துக்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ஆயின், ஏணி நழுவாமல் அதன் உச்சியிலிருந்து தொங்கவிடப்படும் மிகக்கூடிய நிறையை நிர்ணயிக்க.

14. ஒரு சீர்க் கோல் ஒரு முரடான உருளைப் பீப்பாவின் உட்புறத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பீப்பா அதன் அச்சுக் கிடையாக நிலைப்படுத்தப் பட்டுள்ளது. பீப்பாவின் அச்சிற்குச் செங்குத்தானதொரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அக்கோல் தங்கின், நிலைக்குத்துடன் அதன் ஆகக் குறைந்த சாய்வு தான்$^{-1}$(கோதா 2λ + கோசை γ கோசீ 2λ) எனக் காட்டுக. இங்கு λ, கோலிற்கும் பீப்பாவிற்குமிடையே உராய்வுக் கோணம்; γ, கோல் பீப்பாவினது அச்சின் மிகக்கிட்டிய புள்ளியில் எதிரமைக்கும் கோணம். (N.U.3.)

15. ஒரு முரடான கிடைப் பரப்பில் ஒரு முனையைக் கொண்ட 50 இறு. திணிவும் 30 அடி நீளமுமுடைய ஓர் ஏணியின் மறுமுனை ஒரு முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சாய்ந்திருக்கின்றது. ஏணியின் முதற் படி அடியிலிருந்து 12 அங்குலத்திலும் மற்றவை 12 அங்குல இடைவெளிகளிலும் இருப்பின், ஏணி கிடையுடன் 60° இற் சாய்ந்தும் முனை ஒவ்வொன்றிலும் உராய்வுக் குணகம் 0·25 ஆகவும் இருக்கும்போது, ஏணி நழுவாமல் 150 இறு. நிறையான மனிதனொருவன் ஏறக்கூடிய மிக்க உயரமான படியைக் காண்க. (N.U. 3 உம் 4 உம்.)

16. ஒரு $2a$ நீளச் சீரேணி ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது புள்ளி O இலே தங்கியிருக்கிறது. அவ்வேணி அதன் மேன்முனையிற் கட்டப்பட்டுள்ளதும் O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $2a$ தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் நிலைப்பட்டுள்ள ஒரு கப்பியின் மேலாகச் செல்வதுமான ஒரு கயிற்றினால் நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இற் சாயுமாறு

தாங்கப்பட்டுள்ளது. ஏணிக்கும் தளத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் தான் $\frac{\alpha}{2}$ இலும் அதிகமாக இருப்பின் மட்டுமே சமநிலை சாத்தியமென நிறுவுக. (C.W.B.)

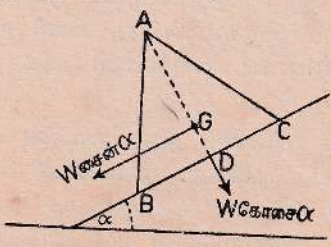
17. நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றினதும் ஒரு இடை நிலத்தினதும் உராய்வுக் குணகங்கள் முறையே $\frac{1}{2}$ உம் $\frac{1}{3}$ உம் ஆயின், நிலத்தில் ஒரு முனையைக் கொண்ட ஒரு சீரேணியின் மறுமுனை சுவரில் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திற் சாய்ந்து தங்கக்கூடியதாகக் கிடையுடனான மிகக் குறைந்த சாய்வு ஏறத்தாழ $51^\circ\ 20'$ எனக் காட்டுக. (C.W.B.)

18. ஒரு சீர்க் கோல், கிடையாக இருப்பதுவும் அதனுடன் 135° இற் சாய்ந்திருப்பதுவுமான இரு தளங்களிற் சமமாகச் சாய்ந்து எல்லைச் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கிறது. கோலிற்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் கோணம் $22\frac{1}{2}^\circ$ ஆயின், கோலிற்கும் கிடைத் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{17}(3\sqrt{2}+1)$ எனக் காட்டுக. (H.S.D.)

19. ஒரு சீர்க் கோல் AB, ஒரு முரடான சாய்தளத்தில் முனை A பொருந்தப்பெற்றுத் தங்கியிருக்கின்றது; இத்தளம் கிடையுடன் 30° ஐ ஆக்குகின்றது. அக்கோல் தளத்தின் மேன்முகத் திசையுடன் கோணம் 30° ஆக்கியும் அதியுயர் சரிவு கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் அமைந்துமிருக்கிறது. அது முனை B உடன் இணைத்த ஓர் இழையினாற் சமநிலையிற் பேணப்பட்டும், தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக இழுக்கப்பட்டுமுள்ளது. A இலுள்ள உராய்வுக் கோணம் ஆகக் குறைந்தது தான்$^{-1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ ஆக இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக. (H.S.D.)

§113. உதாரணம் (i).

h உயரமும் r ஆரையுமுடைய ஒரு கூம்பு ஒரு முரடான தளத்தின் மீது தங்கியிருக்கிறது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாக அதிகமாக்கப்படுகின்றது; உராய்வுக் குணகமானது $\frac{4r}{h}$ இலும் குறைவாயின், கூம்பு கவிழுமுன் வழுக்குமெனக் காட்டுக.



படம் 160.

கூம்பின் நிறையை W எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G (படம் 160) எனவும், தளத்தின் சாய்வை α எனவும் கொள்க.

W சைன் $\alpha > \mu$W கோசை α ஆயின், அ—து. தான் $\alpha > \mu$ ஆயின் கூம்பு வழுக்கும்.

B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$W \text{ சைன் } \alpha . \frac{h}{4} > W \text{ கோசை } \alpha . r,$$

அ—து.
$$\text{தான் } \alpha > \frac{4r}{h} \text{ ஆயின்.}$$

கூம்பு கவிழும்.

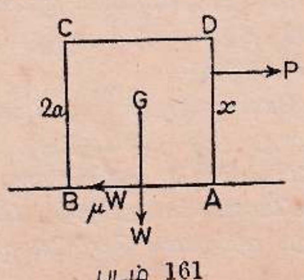
μ, $\frac{4r}{h}$ இலும் குறைவாயின், தான் α, பெறுமானம் $\frac{4r}{h}$ ஐ அடையுமுன் பெறுமானம் μ ஐ அடைவதுடன் கூம்பும் வழுக்கும்.

μ, $\frac{4r}{h}$ இலும் அதிகமாயின், தான் α, பெறுமானம் $\frac{4r}{h}$ ஐ முதலில் அடையும். பின்பு கூம்பு கவிழும்.

$\mu = \frac{4r}{h}$ ஆயின், கூம்பு ஒரேநேரத்தில் வழுக்கவும் கவிழவும் தொடங்கும்.

உதாரணம் (ii).

$2a$ பக்கக் கனவடிவக் குற்றியொன்று ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீதுள்ளது. குற்றிக்கும் தளத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். படிப்படியாக அதிகமாகும் கிடை விசையொன்று அக்குற்றியின் நிலைக் குத்து முகமொன்றிற்குச் செங்குத்தாக, அதன் புவியீர்ப்பு மையத் தூடான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது, விசைப் பிரயோகப் புள்ளி தளத்திற்குமேலே $\frac{a}{\mu}$ இலும் அதிகமான உயரத்தில் இருப்பின், $\mu < \frac{1}{2}$ ஆயின் குற்றி நிலைகுலையாமல் வழுக்கவும் ஆனல் $\mu > \frac{1}{2}$ ஆயின் குற்றி வழுக்காமல் நிலைகுலையவும் நாடுமெனக் காட்டுக.



படம் 161

கனத்தின் புவியீர்ப்புமையம் G ஊடான நிலைக்குத்து வெட்டினை ABCD (படம் 161) என்க. இவ்வெட்டு வழியே விசை P செயற்படுகின்றது. தளத்திற்கு மேலே P இன் உயரத்தை x என்க.

வழுக்குதற்கு, $P > \mu W$.

ஒருச்சரிவுக்கு, $Px > Wa$, அல்லது $P > W \frac{a}{x}$.

$\frac{a}{x}$ இன் ஆகக்குறைந்த பெறுமானம் $\frac{a}{2a}$ அல்லது $\frac{1}{2}$ என்பதனால், $\mu < \frac{1}{2}$ ஆயின், P பெறுமானம் μW ஐ முதலில் அடையும். எனவே, இச்சந்தர்ப்பத்தில் கனம் ஒருச்சரியாமல் வழுக்கும்.

$\mu > \frac{1}{2}$ ஆயின், கணக்குற்றி,

$$\mu > \text{அல்லது} < \frac{a}{x}.$$

அ—து.
$$x > \text{அல்லது} < \frac{a}{\mu}$$

என்பதற்கேற்ப முதலில் ஒருச்சரியும் அல்லது வழுக்கும். எனவே, $x > \frac{a}{\mu}$ ஆயின், கனம் வழுக்காமல் கவிழும்.

பயிற்சி XXII.

1. h உயரமும் r ஆரையுமுடைய ஒரு சீருருளை அதன் தட்டையான அடி ஒரு முரடான தளத்திற் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாகக் கூட்டப்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகத்திலும் $\frac{2r}{h}$ குறைவாயின், உருளை வழுக்கமுன் கவிழுமெனக் காட்டுக.

2. ஒரு செங்கூம்பு அதன் அடி ஒரு முரடான சாய்தளத்திற் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது ; உராய்வுக் குணகம் 0·25 ஆயின், கூம்பு ஒரே நேரத்தில் நழுவுந் தறுவாயிலும் கவிழும் தறுவாயிலுமிருப்பின் கூம்பின் கோணத்தைக் காண்க.

3. ஒரு சமபக்க முக்கோணி அதன் ஒரு பக்கம் முரடான கிடைத்தளமொன்றிற் பொருந்துமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருக்கிறது ; முக்கோணியின் அதியுயர் உச்சியின்மீது படிப்படியாகக் கூடும் கிடைவிசையொன்று முக்கோணியின் தளத்திற் செயற்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ இலும் குறைவாக இருப்பின் முக்கோணி ஒருச்சரியமுன் வழுக்குமென நிறுவுக.

4. பக்கங்கள் a, h ஐ உடைய ஒரு செவ்வகம், a நீளப்பக்கமொன்று ஒரு முரடான கிடைமேசையிற் பொருந்துமாறு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருக்கிறது. படிப்படியாகக் கூடும் கிடை விசையொன்று செவ்வகத்தினது தளத்தில் மேற்பக்க வழியே செயற்படுகிறது. செவ்வகம் வழுக்குமுன் ஒருச்சரிவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

5. முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது தங்கிநிற்கும் ஒரு செங்கூம்பு அதன் உச்சியிற் செயற்படுகின்ற படிப்படியாகக் கூடும் கிடைவிசையொன்றினாலே தாக்கப்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகம் $>$ அல்லது $< \frac{r}{h}$ என்பதற்கிணங்க கூம்பு கவிழும் அல்லது வழுக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு r, கூம்பின் ஆரை; h, அதன் உயரம்.

6. ABC என்னுமொரு முக்கோணியடர் BC ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது பொருந்துமாறு நிற்கிறது. இங்கு C, செங்கோணம். B இற்குக் கீழே C இருக்குமாறு, BC இற்குச் செங்குத்தான அதன் சொந்தத்தளத்திலுள்ள ஓர் அச்சினைப் பற்றி அத்தளம் ஒருச்சரிக்கப்படின், உராய்வுக் குணகம், தான் A இலும் குறையவோ கூடவோ இருத்தற்கிணங்க அவ்வடர் வழுக்கவோ ஒருச்சரியவோ தொடங்குமெனக் காட்டுக.

7. ஒரு சீர்க் கனக்குற்றி, கனத்தின் கிடையான மேல் விளிம்பின் நடுப்புள்ளியுடன் இணைத்துள்ளதும் அதியுயர் சரிவுகோட்டிற்குச் சமாந்தரமானதுமான ஒரு கயிற்றினால் முரடான சாய்தளமொன்றின்மீது தாங்கப்படுகின்றது. தளத்தின் சாய்வு தான்$^{-1}(1 + 2\mu)$ இலும் குறைவாக இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம். (I.S.)

8. ஒரு கனம் அதன் மேல் விளிம்புகளில் இரண்டும் கீழ் விளிம்புகளில் இரண்டும் கிடையாக இருக்குமாறு $\alpha(\alpha < \frac{1}{4}\pi)$ சாய்வுடைய முரடான தளமொன்றின்மீது தங்கியிருக்கிறது. தளத்திற்கும் கனத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}(1 -$ தான் $\alpha)$ இற்கு மேற்படின், உயரமான விளிம்பின் நடுப்புள்ளியுடன் இணைத்துள்ளதும் தளத்தின் அதியுயர் சரிவிற்குச் சமாந்தரமாக இழுக்கப்படுவதுமான ஒரு கயிற்றினாலே கனத்தினை நிலைகுலைக்காது தளத்தின் மேனோக்கி இழுக்க இயலாதெனக் காட்டுக. (H.C.)

9. $4a$ விளிம்பினையுடைய ஒரு சீர்க் கனம் முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீதுள்ளது. அதன் நிலைக்குத்து முகங்களிலொன்றில் அம்முகத்தின் மையத்திற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே a உயரத்தில் படிப்படியாகக் கூடும் கிடைவிசையொன்று பிரயோகிக்கப்படுகின்றது.

(i) தளத்திற்கும் கனத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் 0·5 ஆக இருக்கும்போதும்,

(ii) குணகம் 0·7 ஆக இருக்கும்போதும்,

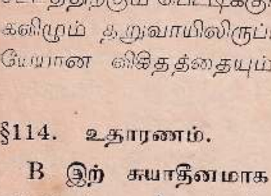
சமநிலை எவ்வாறு குழப்பப்படுமென்பதை நிர்ணயிக்க. (H.C.)

10. முக்கோணி ABC இல், BC கிடையானது ; AB உம் AC உம் சமமானவை, BC இலும் கூடியவை. இம்முக்கோணி, ஒரு செவ்வக முகத்தில் முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது நிற்கும் ஒரு முக்கோணியரியத்தின் குறுக்குவெட்டினைக் குறிக்கின்றது ; AB குறிக்கும் முகம் காற்றமுக்கத்துக்குட்பட்டது. AB இற்குச் செங்குத்தானதெனக் கருதப்படும் இவ்வமுக்கம் போதியளவு அதிகமாகின், உராய்வுக் கோணம் $\pi - 2\alpha$ இலும் அதிகமாகவோ குறைவாகவோ இருத்தற்கிணங்க அரியம் கவிழவோ சரியவோ செய்யுமெனக் காட்டுக. இங்கு α, அடியுடன் சரிவான முகமெதினதும் சாய்வு. (I.E.)

11. விளிம்பு a ஐயும் நிறை W ஐயுமுடைய ஒரு கனப் பெட்டி முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது நிற்கிறது. b நீளமும் w நிறையுமுடைய ஒரு பாரச் சட்டம் அதனொரு முனையைத் தளத்திலும் மற்ற முனையைப் பெட்டியின் நிலைக்குத்து முகமொன்றிலும் பொருந்தப்பெற்று 45° இற் சாய்ந்திருக்கின்றது. சட்டத்தினூடான நிலைக்குத்துத் தளம் பெட்டியின் மையத்தூடாகச் செல்கின்றது. சட்டத்தின் கீழ்முனை நழுவாது தடுக்கப்படின், பெட்டி வழுக்காதிருப்பதற்குப் பெட்டிக்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணத்தின் ஆகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க. இங்கு, சட்டத்திற்கும் பெட்டிக்குமிடையேயான குணகம் தவிர்க்கத்தக்கது. பெட்டி கவிழும் தறுவாயிலிருப்பின், சட்டத்தினதும் பெட்டியினதும் நிறைகளிடையேயான விகிதத்தையும் காண்க. (I.E.)

§114. உதாரணம்.

B இற் சுயாதீனமாக மூட்டிய AB, BC என்னும் இரு சீர்ச் சமநீளச் சட்டங்கள், முனைகள் A ஐயும் C ஐயும் முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது கொண்டு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிற் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கின்றன. AB இன் நிறை BC இன் நிறையின் இரு மடங்காயின், A, C இரண்டிலும் எல்லையுராய்வு இருக்கமாட்டாதென்றும் இப்புள்ளிகளில் எதிலேனும் எல்லையுராய்வு இருக்குமாயின் அது C இலேயேயென்றும் காட்டுக. சட்டங்கள் ஒவ்வொன்றுடனும் ஆக்கக் கூடிய மிகவுயர்ந்த கோணம் செங்கோணமாயின், உராய்வுக் குணகத்தையும் காண்க.



படம் 162.

சட்டங்கள் மீது செயற்படும் கிடையான வெளி விசைகள் A இலும் C (படம் 162) இலுமுள்ள உராய்வு விசைகளே என்பதனால் இவ்வுராய்வு விசைகள் சமமாக இருக்கவேண்டும். $\widehat{ABC} = 2\theta$ உம், A இலும் C இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் முறையே R உம் S உம் ஆயின், இரு சட்டங்களுக்கும் A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$S.4l \text{ சைன் } \theta = W.3l \text{ சைன் } \theta + 2Wl \text{ சைன் } \theta,$$

இங்கு $2l = AB$ அல்லது BC இன் நீளம்,

$$\therefore S = \frac{5}{4}W \text{ உம், எனவே } R = \frac{7}{4}W \text{ உம் ஆகும்.}$$

இங்கு, A இலுள்ள உராய்வு எல்லையுராய்வாக இருப்பின் அதன் பெறுமானம் μR அல்லது $\frac{7}{4}\mu W$ ஆக இருக்கவேண்டும். அதே சமயத்தில் C இலுள்ள உராய்வு எல்லையுராய்வாக இருப்பின், அதன் பெறுமானம் μS அல்லது $\frac{5}{4}\mu W$ ஆக இருக்கவேண்டும். எனவே; அது A இலும் C இலும் ஒரே பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பதனால் இவ்விருபுள்ளிகளிலும் அது எல்லையுராய்வாக இருக்கமாட்டாது. ஏனெனில் $\frac{5}{4}\mu W$, $\frac{7}{4}\mu W$ இற்குச் சமமாகாது.

F ஆனது பெறுமானம் $\frac{7}{4}\mu W$ ஐ அடையுமுன் பெறுமானம் $\frac{5}{4}\mu W$ ஐ அடையும். பின்பு புள்ளி எதிலும் உராய்வு எல்லையுராய்வாக இருப்பின், C இலேயே அவ்வாறிருக்கும். ஏனெனில், C இலேயே மறுதாக்கம் ஆகவும் குறைவு.

சட்டம் BC இற்கு B பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$F.2l \text{ கோசை } \theta = S.2l \text{ சைன் } \theta - W.l \text{ சைன் } \theta,$$

$$\therefore 2F = 2S \text{ தான் } \theta - W \text{ தான் } \theta.$$

$\theta = 45°$ ஆயின், உராய்வு C இல் எல்லையுராய்வாக இருக்கும்போது,

$$F = \mu S \text{ என்பதனாலும், } S = \frac{5}{4}W \text{ என்பதனாலும்,}$$

$$2\mu\frac{5}{4}W = 2.\frac{5}{4}W - W = \frac{3}{2}W.$$

$$\therefore \mu = \frac{3}{5}.$$

பயிற்சி XXIII.

1. ஒருமிக்கப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளனவும் முறையே 3 அடி, 2 அடி நீளமுள்ளனவுமான AB, BC என்னும் இரு சீர்க் கோல்கள் ஒரே தடிப்பையுடையவை; ஒரே பொருளினாலானவை. இவை இவற்றின் முனைகள் A உம் C உம் முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது பொருந்துமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலே தங்கியிருக்கின்றன. சமநிலைக்கு இசைவாகக் கோணம்

ABC இன் இயன்றளவு மிகக்கூடிய பெறுமானம் 90° ஆயின், கோல்களுக்கும் நிலத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தைக் கண்டு, கோல்களின் சாய்வு 90° இற்கு அப்பாற் சிறிது கூட்டப்படுமிடத்து சமநிலை எவ்வாறு குறைப்பபடும் என்பதைக் காண்க. (H.S.C.)

2. ஒரே நிறையை உடையனவும் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளனவுமான AB, BC என்னும் இரு சீர்ச் சமகோல்கள் அவற்றின் முனைகள் A உம் C உம் முரடான இடைத் தளமொன்றிற் பொருந்துமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருக்கின்றன. செங்கோணத்திலும் மிகுதியானதல்லாத கோணமாக ABC இருக்கும்போது சமநிலை சாத்தியமாயின் கோல்களுக்கும் தளத்துக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

3. முறையே W, W′ (W > W′) என்னும் நிறைகளையுடைய இரு சம நீளச் சீரேணிகள் AB உம் BC உம் உச்சி B இல் ஒருமிக்கப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவைகளினிடையே கோணம் 2θ ஆக இருக்கும்போது இவை முரடான நிலத்தின்மீது நிற்கும். A இலுள்ள மொத்த மறுதாக்கம் நிலைக்குத்துடன், C இலுள்ளதிலும் சிறியதான ஒரு கோணத்தை அமைக்கின்றதெனக் காட்டுக. A இலும் C இலுமுள்ள உராய்வுக் குணகங்கள் ஒவ்வொன்றும் μ இற்குச் சமமெனக் கொண்டு, θ அதிகரிக்கப்படுமிடத்து C இல் நழுவலேற்படுமென்றும்,

$$\mu = \text{தான்}\ \alpha(W + W')/(W + 3W')$$

என்றும் காட்டுக. இங்கு α, நழுவல் முதலில் ஏற்படும்போது θ இன் பெறுமானம் (H.S.D.)

4. ஒரே நிறை W ஐ உடைய AB, BC என்னும் இரு சீர்ச் சமகோல்கள் B இற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அவை அவற்றின் முனைகள் A உம் C உம் α சாய்வுள்ள முரடான தளமொன்றிற் பொருந்துமாறும் கோல் BC கிடையாக இருக்குமாறும் தளத்தின் அதியுயர் சரிவுகோட்டின்மீது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருக்கின்றன. புள்ளிகள் A இலும் C இலும் தளத்தின் மீதான அமுக்கங்களையும், இப்புள்ளிகளிலுள்ள உராய்வையும் காண்க. கோசை$^2\alpha > \frac{1}{3}$ ஆக இருக்கவேண்டுமெனவும், கோசை$^2\alpha <$ அல்லது $> \frac{2}{3}$ என்பதற்கிணங்க C இலுள்ள உராய்வு தளத்தின் மேனோக்கியோ கீழ்நோக்கியோ செயற்படுமெனவும் காட்டுக. $\alpha = 30^\circ$ ஆகவும் A, C என்னும் புள்ளிகளில் எதிலேனும் உராய்வு எல்லை உராய்வாகவுமிருப்பின், இவற்றுள் எதில் உராய்வு எல்லையுராய்வாகின்றதென்பதைக் கண்டு உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

5. B இல் ஒப்பமாக மூட்டிய இரு சீர்ச் சமகோல்கள் AB உம் BC உம் முனை C முரடான இடைத் தளமொன்றின்மீது பொறுத்திருக்கப்பெற்றும் முனை A தளத்தின் மேலாகத் தாங்கப்பட்டும் சமநிலையி

லுள்ளன. கிடையுடன் CB, BA என்பனவற்றின் சாய்வுகள் முறையே α, β ஆயின், உராய்வுக் குணகம்

$$\frac{2}{\text{தான் } \beta - 3 \text{ தான் } \alpha}$$

இற்கு மேற்படக்கூடாதெனக் காட்டுக. (I.S.)

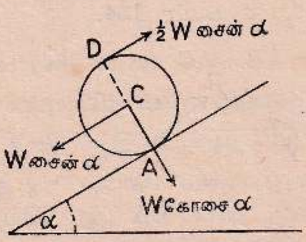
6. ஒரு படியேணியின் இரு பகுதிகளும் சமநீளமானவை ; சமமில்லாத நிறையுடையவை. அவை உச்சியில் ஒருமிக்கச் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. ஏணி முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது நிற்கும்போது அதைப் படிப்படியாக விரிக்குமிடத்து, பாரம் குறைந்த பகுதி முதலில் நழுவ நாடுமெனவும் ஒவ்வொரு பகுதியினதும் நிலைக்குத்துடனுன சாய்வு

$$\text{தான்}^{-1} \frac{(3w_1 + w_2)\,\mu}{w_1 + w_2}$$

ஆக இருக்கும்போது இது நிகழுமெனவும் நிறுவுக. இங்கு, w_1, w_2 முறையே இரு பக்கங்களினதும் நிறை $(w_1 < w_2)$; μ, ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் நிலத்தின் மீதுள்ள உராய்வுக் குணகம். (C.W.B.)

§115. உதாரணம் (i).

ஒரு சீர்க் கோளம் அதன் பரிதியின் தொடலி வழியே பிரயோகிக்கப்படும் $\frac{1}{2}$W சைன் α பருமனுள்ள விசையொன்றினுற் சமநிலையில் α சாய்வுடைய முரடான தளமொன்றின்மீது பேணப்படுகின்றது. இங்கு W, கோளத்தின் நிறை. அவ்விசை தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகச் செயற்பட வேண்டுமெனவும் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ தான் α இலும் குறையலாகாதெனவும் நிறுவுக.



படம் 163.

கோளத்தின் தொடுகைப் புள்ளியை A (படம் 163) எனவும் அதன் மையத்தை C எனவும், அதன் ஆரையை a எனவும் கொள்க. பின்பு, கோளம் A பற்றிச் சுழலாதாயின், விசை $\frac{1}{2}$W சைன் α இன் A பற்றிய திருப்புதிறன் நிறையின் A பற்றிய திருப்புதிறன், அ–து. Wa சைன் α இற்கு சமனுகவேண்டும்.

எனவே விசை $\frac{1}{2}$W சைன் α, A இலிருந்து $2a$ தூரத்திலிருக்க வேண்டும். ஆகவே அது தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக D இற் செயற்பட வேண்டும். D, A ஊடான விட்டத்தின் மறுமுனையாகும்.

நழுவலேதும் நிகழாதிருக்கவேண்டின், தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் துணிக்க,

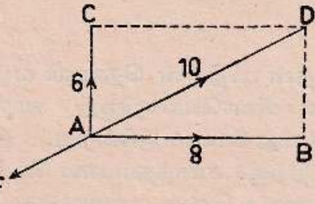
$$\mu W \text{ கோசை } \alpha + \tfrac{1}{2} W \text{ சைன் } \alpha \nless W \text{ சைன் } \alpha,$$

$$\therefore \mu \nless \tfrac{1}{2} \text{ தான் } \alpha.$$

உதாரணம் (ii).

முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது தங்கிநிற்கும் 30 இரு. நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை 6 இரு., 8 இரு. நிறையுள்ள செங்குத்தான கிடை விசைகளினுலே தாக்கப்படுமிடத்து, இயங்குந் தறுவாயிலுள்ளது. அத் துணிக்கைக்கும் தளத்துக்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகத்தையும் உராய்வு செயற்படும் திசையையும் காண்க.

இத்தகைய பிரசினங்களில் துணிக்கையை இயக்க நாடும் **விளையுள்** விசையைக் காணவேண்டும்; துணிக்கை இவ்விளையுளின் திசையில் இயங்க நாடும். அதோடு, உராய்வு முரண்திசையிற் செயற்படும்.



படம் 164.

விசைகளின் திசைகளை AB, AC (படம் 164) எனவும் துணிக்கையை A எனவும் கொள்க. இவ்விசைகளின் விளையுள்

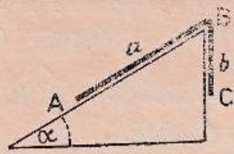
$$\sqrt{36+64} = 10 \text{ இரு. நிறை.}$$

இது 8 இரு. விசையுடன் கோணம் கோசை$^{-1}\,\frac{4}{5}$ ஐ ஆக்கி AD வழியே செயற்படுகின்றது. உராய்வு, திசை DA இற் செயற்படுகிறது. தளத்தின் மீதான அமுக்கம் R ஆயின், எல்லை உராய்வு $= \mu R$ என்பதனால்,

$$10 = 30\,\mu, \text{ அல்லது } \mu = \tfrac{1}{3}.$$

உதாரணம் (iii).

ஒரு பாரமான சங்கிலி கிடையுடன், உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமான கோணம் α இற் சாய்ந்திருக்கும் முரடான தளமொன்றின்மீது, சங்கிலியின் a நீளப் பாகம் அதியுயர் சரிவுகோடு வழியே இருக்குமாறும் எஞ்சிய b நீளப்பாகம் தளத்தின் உச்சிக்கு மேலாக நிலைக்குத்தாய்த் தொங்குமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. சங்கிலி நழுவுந் தறுவாயிலிருப்பின், b பூச்சியமாகவோ, $2a$ சைன் α ஆகவோ இருக்குமெனக் காட்டுக.



படம் 165.

சங்கிலியை ABC (படம் 165) குறிப்பதாகக் கொள்க. அதன் ஓரலகு நீளத்தின் நிறையை w எனக. AB மீதான உராய்வு μaw கோசை $\alpha = aw$ சைன் α, $\mu =$ தான் α என்பதனால்.

A கீழ்நோக்கி இயங்கும் தறுவாயிலிருப்பின்

$$wa \text{ சைன் } \alpha - wa \text{ சைன் } \alpha = bw, \therefore b = 0.$$

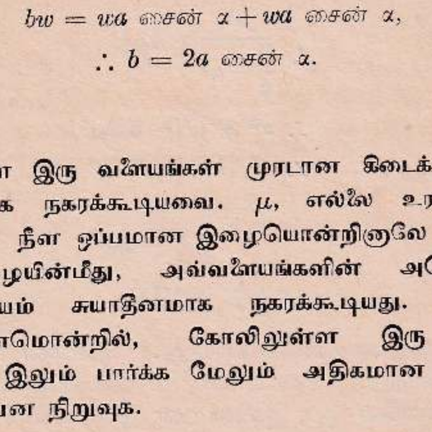
A மேனோக்கி இயங்கும் தறுவாயிலிருப்பின்,

$$bw = wa \text{ சைன் } \alpha + wa \text{ சைன் } \alpha,$$

$$\therefore b = 2a \text{ சைன் } \alpha.$$

உதாரணம் (iv).

சம நிறையுள்ள இரு வளையங்கள் முரடான கிடைக் கோலொன்றின் மீது சுயாதீனமாக நகரக்கூடியவை. μ, எல்லை உராய்வுக் குணகம். அவ்வளையங்கள் l நீள ஒப்பமான இழையொன்றினுலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விழையின்மீது, அவ்வளையங்களின் அதே நிறையுள்ள வேருெரு வளையம் சுயாதீனமாக நகரக்கூடியது. இத்தொகுதியின் சமநிலைத் தானமொன்றில், கோலிலுள்ள இரு வளையங்களும் $2\mu(1+4\mu^2)^{-\frac{1}{2}} l$ இலும் பார்க்க மேலும் அதிகமான இடைத்தூரத்தில் அமையமாட்டாவென நிறுவுக.



படம் 166.

ஒவ்வொரு வளையம் A, B (படம் 166) இனதும் நிறையை W எனவும் C இனது நிறையை 2W எனவும் கொள்க.

C இழைமீது சுயாதீனமாக வழுகிச்செல்லக் கூடியதாதலின் இழையெங்கும் இழுவை சமமாகும். அதோடு, C ஊடான நிலைக்குத்து CD, கோணம் ACB ஐ இருகூறிடுகிறது. $\widehat{DCB} = \theta$ என்க.

C இற்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$2T \text{ கோசை } \theta = 2W.$$

A இற்கும் கோலிற்குமிடையேயான அமுக்கம் $W + T$ கோசை $\theta = 2W$ உம், A இலுள்ள உச்ச உராய்வு $2\mu W$ உமாகும்.

சமநிலையின் பொருட்டு,

$$T \text{ சைன் } \theta \ngtr 2\mu W,$$

அல்லது
$$W \text{ தான் } \theta \ngtr 2\mu W,$$

அல்லது
$$\text{தான் } \theta \ngtr 2\mu.$$

$DB = x$ ஆயின், $DC^2 = \frac{l^2}{4} - x^2$ உம், தான் $\theta = \frac{x}{DC}$ உம் ஆகும்.

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{l^2}{4} - x^2} \ngtr 4\mu^2,$$

$$\therefore x^2 \ngtr \mu^2 l^2 - 4x^2\mu^2,$$

$$\therefore x^2 (1 + 4\mu^2) \ngtr \mu^2 l^2,$$

$$\therefore x \ngtr \frac{\mu l}{\sqrt{1 + 4\mu^2}}.$$

பயிற்சி XXIV.

1. a நீளப் பாரமான பலகையொன்று, முரடான கிடைத்தளமொன்றின்மீது இருக்கின்றது. கிடையுடன் α சாய்வுகோணத்தை ஆக்கும் கயிறொன்று பலகையின் ஒரு முனையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பலகையின் இம்முனை மெல்ல உயர்த்தப்படுகிறது. கோதா $\alpha > \mu$ ஆக இருக்கும் அதேநேரத்திலேயே மற்றமுனை நழுவுமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம். அதோடு, நழுவலேற்படும்போது μ தான் α ஒன்றிற்கு மேற்படின், கயிற்றின் இழுவையும் பலகையின் நிறையும் என்ன விகிதத்திலுள்ளன ? (I.E.)

2. W நிறையுள்ள பொருளொன்று கிடைத் தளமொன்றின்மீது தங்கியிருக்கின்றது. μ, அதனுடனான உராய்வுக் குணகம். nW என்னுமொரு கிடைவிசை அந்நிறைக்குப் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது ; $nW < \mu W$. W இற்குச் செங்குத்தான வேறொரு கிடைவிசை P உம் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. நிறையை மட்டுமட்டாக இயங்கச் செய்யும் P இன் ஆகக்குறைந்த பெறுமானத்தையும், P இன் திசையுடன் இயக்கத்திசையின் சாய்வையும் காண்க. (I.E.)

3. பாரமான சீர்க் கம்பியினாலாய ஒரு விறைப்புச் சதுரச்சட்டப்படல், a ஆரையுள்ள முரடான கிடையுருளையொன்றின்மீது அப்படலின் இரு பக்கங்கள் உருளையைத் தொடுமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலே தங்கியிருக்கிறது. நிலைக்குத்துடன் மூலைவிட்டமொன்றினது சாய்வின் எல்லைக் கோணம்

$$b \text{ சைன் } \theta = a\sqrt{2} \text{ சைன் } \epsilon \text{ கோசை } (\theta + \epsilon)$$

என்னும் சமன்பாட்டினாலே தரப்படுகிறதெனக் காட்டுக. இங்கு ϵ, உராய்வுக் குணகம்; b, உருளையின் அச்சிலிருந்து சதுரத்தினது மையத்தின் தூரம். (I.S.)

4. கம்பியினாலாயதொரு சமபக்க முக்கோணி அதன் ஒரு பக்கம் கிடையாகுமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் W நிறையுள்ள ஒரு மணி தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இழுவையிலுள்ளதும் முக்கோணியின் மூலைகளிலுள்ள சிறிய ஒப்பமான வளையங்களூடாகச் செல்வதுமான ஒரு முடிவற்ற இழையினால் மணிகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. கிடைப் பக்கத்திலுள்ள மணிக்குப் படிப்படியாகக் கூடும் கிடை விசையொன்று பிரயோகிக்கப்படின், இவ்விசை $2\mu W$ இற்குச் சமமாக இருக்குமிடத்து அத்தொகுதி இயங்க ஆரம்பிக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, மணிகளுக்கும் கம்பிக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம். (I.S.)

5. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, CD என்னுமிரு சீர்ச் சமகோல்கள் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளிற் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவை முனைகள் A, C என்பன μ உராய்வுக் குணகமுள்ள முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது பொருந்துமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. ஓர் இழையின் இரு நுனிகளுக்கும் ஒவ்வொன்றும் W இற்குச் சமமான நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விழை B இற்கும் D இற்கும் மேலாகச் செல்லவிடப்படுகிறது. சமநிலையின் எல்லைத் தானத்தில் கிடையுடன் கோல்கள்

$$\text{தான்}^{-1}\frac{3}{1+2\mu}$$

என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமென நிறுவுக. (H.S.C.)

6. முரடான நிலத்தின்மீது இருக்கும் W நிறையுள்ள ஓர் ஆப்பு அதன் சரிவான முகம் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றுடன் கோணம் 2θ ஐ ஆக்குமாறு ஆப்பின் மெல்லிய முனை சுவரில் இறுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. W_1 நிறையுள்ள ஒப்பமான செவ் வட்டவுருளையொன்று சுவருக்கும் ஆப்புக்குமிடையே இருக்கின்றது. ஆப்பு வழுகும் தறுவாயிருக்கும்போது W இற்கும் W_1 இற்குமிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க. μ, நிலத்துக்கும் ஆப்புக்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம். (H.S.D.)

7. AD என்னுமோர் இலேசான கோல் B இலுள்ள முரடான முளையொன்றின் மீதும் ஒரே கிடைக் கோட்டில் C இலுள்ள இன்னொரு முரடான முளையின் கீழேயும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A, D என்பவற்றுடன் முறையே

15 இரு., 9 இரு. நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB, BC, CD என்பன முறையே 3, 2, 1 அடி நீளமானவை. கோலினை இயக்கும் மிகக் குறைவான கிடை விசை 6 இரு. நிறையாயின் முனைகள் சம முரடானவை எனக் கொண்டு உராய்வுக் குணகத்தினைக் காண்க. (I.S.)

8. α சாய்வு கோணத்தை ஆக்கும் முகங்களையுடையதும் M திணிவுள்ளதுமான ஓர் ஆப்பு அதன் ஒரு முகம் கிடைத் தளமொன்றைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றைய முகத்தைத் தொடுமாறு வைத்த m திணிவுள்ள ஒரு சிறு பொருள் தளத்தின் கீழ்நோக்கி வழுவும் தறுவாயிலுள்ளது. அப்பொருளிற்கும் ஆப்பிற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆயின், ஆப்பு ஓய்வுநிலையில் நிற்பதற்கு ஆப்பிற்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகத்தின் மிகக்குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

9. d விட்டமுள்ள ஒரு முரடான வட்ட உருளை சம முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. $2l$ நீளச் சீர்க் கோலொன்று அதன் ஒருமுனை முரடான தளத்திற் பொருந்துமாறு உருளையின் அச்சிற்குச் செங்குத்தானதொரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உருளையின்மீது தொடலி வழியே சாய்ந்திருக்கிறது. கோலின் இரு முனைகளிலும் உராய்வு எல்லை உராய்வாகின், கோல் நிலைக்குத்துடன் 30° இற் சாய்ந்திருக்கும்போது, உராய்வுக் கோணம்

$$\frac{1}{2}\text{ சைன்}^{-1}\left(\frac{l}{d}\right)$$

என நிறுவுக. (H.S.D.)

10. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள இரு சமதுணிக்கைகள் முரடான கிடை மேசையொன்றில் வைக்கப்பட்டும் உறுதியான நீளா இழையொன்றினாலே தொடுக்கப்பட்டுமுள்ளன. அவை இரண்டையும் இயங்கும் தறுவாயில் இருக்கச் செய்வதற்கு இழையுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கும் திசையில் அவற்றிலொன்றிற்குப் பிரயோகிக்கவேண்டிய மிகக் குறைந்த கிடை விசை $2\mu W$ கோசை θ என நிறுவுக. இங்கு μ, மேசைக்கும் துணிக்கைகளில் எதற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம். (H.S.C.)

11. படம் 167, மணலால் நிரப்பியுள்ளதும் C இற் பிரயோகிக்கப்படும் கிடை விசையொன்றினால் இழுக்கப்படுவதுமான ஒரு சிறிய பெட்டியின் மைய வெட்டு ABCD ஐக் குறிக்கின்றது. இரு குறுக்குச் சட்டங்கள் இப்பெட்டிக்கு A இலும் B இலும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. முரடான நிலமொன்றிற்குக் குறுக்கே முழுவதும் இழுக்கப்படுகின்றது. A இலும் B இலுமுள்ள குறுக்குச் சட்டங்களுடன் அந்நிலத்தின் உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும்.

படம் 167.

AB = l எனவும், BC = h எனவும் பெட்டியினதும் மணலினதும்

நிறை W எனவும் தரப்பட்டிருப்பின், A இலும் B இலுமுள்ள மறு தாக்கங்கள் முறையே

$$\frac{l-2\mu h}{2l}W,$$

$$\frac{l+2\mu h}{l}W$$

என நிறுவுக. (H.S.D.)

12. ஒரு பாரமான சீர்க் கோல், நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் இருக்குமாறு A இலுள்ள முரடான முளையொன்றின் மேலும், A இலும் உயர்ந்த மட்டத்திலிருக்கும் B இலுள்ள இன்னொரு முரடான முளையின் கீழும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிலையிலே தங்கும் மிகக் குறுகிய கோல் நீளம்

$$a(1 + \text{தான்}\ \alpha\ \text{கோதா}\ \lambda)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு a, முளைகளின் இடைத்தூரம்; α, முளைகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கும் கிடையிற்கும் இடைக்கோணம்; λ, உராய்வுக் குணகம்.

13. ஒரு சீர்த் திண்ம அரைக்கோளம் அதன் குவிவுப்பரப்பு முரடான சாய்தளமொன்றிற் பொருந்துமாறு தங்கியிருக்கிறது; கிடையுடன் தளத்தின் இயன்றளவு மிகக்கூடிய சாய்வு சைன்$^{-}\frac{3}{8}$ எனக் காட்டுக.

14. ஒரு சீர்த் திண்ம அரைக்கோளம் அதன் குவிவுப்பரப்பு, கிடையுடன் கோணம் சைன்$^{-1}\frac{1}{8}$ இற் சாய்ந்திருக்கின்ற முரடான தளமொன்றிற் பொருந்துமாறு சமநிலையிலே தங்கியிருப்பின், கிடையுடன் அரைக் கோளத்தின் தட்டையான அடியின் சாய்வைக் காண்க.

15. நிலைக்குத்தூத் தளமொன்றிலிருக்கும் ஒரு சில்லு அதன் மையம் C பற்றிச் சுயாதீனமாகச் சுழலக்கூடியது. C இன் அதே மட்டத்திலிருக்கும் A இல் ஒப்பமாகப் பிணைத்த W நிறையுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் AB, சில்லை D இலே தொட்டுக் கொண்டிருக்கின்றது. சில்லைச் சுற்றுவதற்கு

$$\frac{\mu W.AB.CD}{2.AC}$$

இலும் அதிகமான திருப்புதிறனுள்ளதோர் இணை தேவையென நிறுவுக. μ, கோலிற்கும் சில்லிற்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம். கோலின் தொடுகைப் புள்ளி D ஆனது B ஐ நோக்கி நகருமாறு சில்லுச் சுற்றும் போது, கிடையுடன் கோலின் சாய்வு தான்$^{-1}\mu$ ஆயின், A இலுள்ள மறுதாக்கம் நிலைக்குத்தாக இருக்கு மென்பதையும் நிறுவுக. (H.C.)

16. W நிறையுள்ள ஒரு வட்ட உருளை, அதன் அச்சு கிடையாக, முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றைத் தொடுமாறு ஓர் இழையினாலே தாங்கப்படுகின்றது. இவ்விழை உருளையில் அரைகுறையாகச் சுற்றப்பட்டும் அச்

சுவருடன் கோணம் α ஐ ஆக்குமாறு சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டுமுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் கோசீ α இலும் குறையலாகா தெனவும், சுவரின் மீதான செவ்வனமுக்கம் W தான் $\frac{\alpha}{2}$ எனவும் காட்டுக. (H.C.)

17. கிடையுடன் 45° இற் சாய்ந்திருக்கும் முரடான தளமொன்றின்மீது வைத்த W நிறையுள்ள கோளமொன்று அதன் உச்சிப்புள்ளியில் பிர யோகிக்கப்படும் ஒரு கிடைவிசை P இனல், இயலுமாயின், சமநிலையிற் பேணப்படுகிறது.

(1) தளத்திற்கும் கோளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ $\sqrt{2}-1$ இலும் குறைவாகின் சமநிலை அசாத்தியமெனக் காட்டுக.

(2) μ, $\sqrt{2}-1$ இற்குச் சமமாகவோ அதிகமாகவோ இருப்பின் சமநிலை சாத்தியமெனக்காட்டுக ; P இன் பெறுமானத்தைக் கண்டு, μ, $\sqrt{2}-1$ இலும் அதிகமாக இருக்கும்போது சமநிலை எல்லைச் சமநிலையோ இல்லையோ என் பதைக் காண்க. (H.C.)

18. ஒரு மெல்லிய அரைக்கோள ஓடு அதன் வளைபரப்பு உராய்வுக் குணகம் μ ஐ உடைய முரடான கிடைத் தளமொன்றிலும் குணகம் μ' ஐ உடைய முரடான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலும் பொருந்துமாறு தங்கி யிருக்கிறது. ஓட்டினது விளிம்பின் தளம் கிடையுடன் 30° ஐ ஆக்கும் போது ஓடு நழுவுந் தறுவாயிலிருப்பின், μ, μ' ஐ இணைக்கும் தொடர் பைக் கண்டு, $\mu' < \frac{1}{3}$ ஆயின், μ, $\frac{1}{5}$ இற்கும் $\frac{1}{4}$ இற்குமிடையே அமைய வேண்டுமெனக் காட்டுக. (ஒரு மெல்லிய அரைக்கோள ஓட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் ஆரையை இருகூறிடுகிறது.) (H.C.)

19. ஒரு மெல்லிய சீரரைக்கோளக் கிண்ணம் அதன் வளைபரப்பு ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தில் (உராய்வுக் குணகம் μ) பொருந்துமாறு தங்கியும் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற் சாய்ந்துமிருக்கின்றது. கிண்ணம் நழுவுந் தறுவாயிலிருப்பின் நிலைக்குத்துடன் கிண்ணத்தினது அச்சின் சாய்வு சைன்$^{-1}$ 2μ என நிறுவுக. (H.S.D.)

20. ஒரு சீர்க் கோல் AB கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்திருக்கின்ற முரடான தளமொன்றில் முனை A பொருந்துமாறு தங்கியிருக்கிறது ; கோல் தளத் தின் மேன்முகத் திசையுடன் கோணம் 45° ஐ ஆக்கி அதியுயர் சரிவு கோட்டினூடான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் இருக்கிறது. மற்றமுனை B உடன் இணைத்துள்ளதும் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக இழுக்கப்படுவது மான ஓர் இழையினல் அக்கோல் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது.

A இலுள்ள உராய்வுக் கோணம் தான்$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)$ இற்குக் கிட்டத்தட்ட இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக. (H.S.D.)

21. ஒரு சீர்ச் சட்டம் கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமாறு ஒரே மட்டத்தில் அமையாத இரு முளைகளின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டத்திற்கும் மேல் முளைக்குமிடையே உராய்வுக் கோணம் λ_1 உம், சட்டத்திற்கும் கீழ் முளைக்குமிடையே உராய்வுக் கோணம் λ_2 உம் ஆகும். இங்கு $\lambda_2 > \theta > \lambda_1$. சட்டத்தின் திணிவுமையத்திலிருந்து முறையே கீழ், மேல் முனைகளின் தூரங்களிடையேயான விகிதம்

$$\frac{\text{சைன்}\,(\lambda_2-\theta)\ \text{கோசை}\,\lambda_1}{\text{சைன்}\,(\theta-\lambda_1)\ \text{கோசை}\,\lambda_2}$$

ஆக இருக்கும்போது சட்டம் முளைகளின்மேல் எழும்புந் தறுவாயிலிருக்குமெனக் காட்டுக. (I.E.)

22. ஒரு செவ்வக அடர் ABCD இன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் முரடான சுவரொன்றுக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ளது. AB, இச்சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கின்றது. AK, $\frac{1}{2}$AD ஆக இருக்குமாறு D உடனும் A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரில் ஒரு புள்ளி K உடனும் ஓர் இழை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வடர் இந்நிலையிலே தங்கியிருக்குமாறு அடருக்கும் சுவருக்குமிடையே உராய்வுக் குணகத்தின் மிகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க.

23. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச்சட்டம் AB, அதன் முனை A முரடான கிடைநிலமொன்றிற் பொருந்துமாறு நிலைக்குத்தாக நிற்கிறது. A இலிருந்து a தூரத்திலுள்ள C என்னும் புள்ளியில் நிலத்தில் நிலைப்படுத்திய ஒரு சிறு கப்பியின் கீழாகச் செல்லும் இலேசான கயிறொன்று B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முனை B, AC இன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் C இற்கப்பாலுள்ள பக்கம் நோக்கித் தாழ்த்தப்படுகிறது. இந்நேரத்தில் கயிறு BC உறுதியாக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டத்திற்கும் கிடையிற்குமிடையேயான சாய்வு θ,

கோசை θ $(a + 2l\ \text{கோசை}\,\theta) = 2\mu$ சைன் θ $(a + l\ \text{கோசை}\,\theta)$ இனாலே தரப்படும்போது சட்டம் நழுவுமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, சட்டத்திற்கும் நிலத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம். (H.S.D.)

24. W நிறையுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் AB, கிடையுடன் 45° கோணங்களிற் சாய்ந்திருக்கும் இரு தளங்களின்மீது அதன் முனைகள் பொருந்துமாறு கிடைச் சமச்சீர் நிலையிலே தங்கியிருக்கிறது. A பொருந்தும் தளம் ஒப்பமானது. P என்னும் மாறும் விசை கோலின் வழியே திசை AB இற் செயற்படுகின்றது. நழுவலேதும் இல்லாதிருக்கும் போதெல்லாம் A இலுள்ள மறுதாக்கம் மாறாதிருக்குமென நிறுவி, B இலுள்ள உராய்வு விசையைக் காண்க. நழுவலேதுமில்லையாயின், P இற்கும் W இற்கும் B இலுள்ள உராய்வுக் குணகத்திற்குமிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க. (N.U.3.)

25. r ஆரையுள்ள அரைக் கோளமொன்று அதன் தட்டையான அடி ஒரு முரடான கிடைமேசை மீது பொருந்துமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. $2a$ நீளமும் W நிறையுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் ABC, முனை A மேசையிற் பொருந்துமாறு அரைக்கோளத்தின் ஒப்பமான வளைபரப்பில் புள்ளி B இற் சாய்ந்திருக்கிறது.; முனை C சுயாதீனமானது. கோல் மேசையுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கின் A இல் உராய்வு விசையைக் காண்க. A இல் உராய்வுக் கோணம் λ ஆயின், எல்லைச் சமநிலைத் தானத்தில் கோணம் θ,

$$a \text{ சைன் } \theta \text{ கோசைன் } (\theta + \lambda) = r \text{ சைன் } \lambda$$

என்னும் சமன்பாட்டினை நிறைவாக்குகிறதெனக் காட்டுக. (N.U.3.)

26. l நீளமும் lw நிறையுமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச் சங்கிலி ஒரு நுனியிலிருந்து தொங்குகிறது. மற்ற நுனியுடன் W நிறையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மேல் நுனியிலிருந்து x தூரத்தில் சங்கிலியிலுள்ள இழுவையைக் காண்க. சங்கிலியின் மேல் நுனி நிலைப்படுத்தப் பட்டிருத்தற்குப் பதிலாக முரடான சாய்தளமொன்றின் வழியே அதன் நீளத்தின் மேற்பாதி இருக்கும்போது அதன் கீழ் நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளதும் தளத்திற்குக்கீழே சுயாதீனமாகத் தொங்குவது மான W நிறை காரணமாகச் சமநிலையிலிருப்பின், சங்கிலிக்கும் தளத் திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம்

$$\frac{2W}{wl} \text{ சீக } \alpha + \text{ தான் } \alpha + \text{ சீக } \alpha$$

இலும் குறையலாகாதென நிறுவுக. இங்கு α, தளத்தின் கோணம். (N.U.3.)

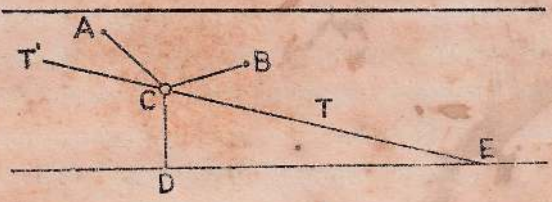
27. $(n+1)a$ நீளமுள்ள ஓர் இலேசான முடிவற்ற இழை a அகல முள்ள முரடான மேசையொன்றின் குறுக்கே சென்று மேசையின் கீழே தொங்குகிறது. மேசையின்மீதுள்ள இழையின் பாகத்துடன் W நிறையும் மேசையின்கீழுள்ள பாகத்துடன் $\frac{W}{n}$ நிறையும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. மேசையின் மீதான உராய்வுக் கோணம் λ ஆயின், n தான் $\lambda < 1$ எனக் கொண்டு, எல்லைச் சமநிலையில் மேசையின் கீழுள்ள இழையின் பாகங்கள் 2λ வித்தியாசத்தையுடைய கோணங்களை நிலைக்குத்துடன் ஆக்குகின்றன என நிறுவுக. (H.S.D.)

§116. பின்வரும் உதாரணங்கள் கடினமானவை.

உதாரணம் (i).

நிறையற்ற இழையொன்றிற் கோர்த்ததொரு மணி கிடையுடன் $\alpha°$ இற் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு முரடான தளத்தின்மீது தங்கியிருக்கிறது; இழையின் நுனிகள், ஒரே கிடைக்கோட்டில் அமைந்துள்ள A, B என்னுமிரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. உராய்வுக் குணகம் μ ஆனது

தான் α இலும் குறைவாயின், எல்லைச் சமநிலையின் தானத்தில் உராய்வு கிடையுடன் கோணம் சைன் $^{-1}$ (μ கோசை α) இலுள்ளதெனக் காட்டுக.



படம் 168.

மணி, A இலும் B இலும் (படம் 168) குவியங்களைக் கொண்டுள்ள ஒரு நீள்வளையத்தில் நகரவேண்டும். C மணியைக் குறிக்கின், அது C இல் நீள்வளையத்திற்கான தொடலி வழியே நகரவேண்டும். இத் தொடலி CA உடனும் CB உடனும் சமமாகச் சாய்ந்துள்ளது.

C இலுள்ள தொடலியை CT எனவும், C ஊடான அதியுயர் சரிவு கோட்டினை CD எனவும், $\widehat{DCT} = \beta$ எனவும் கொள்க.

இழையெங்கும் இழுவை ஒரேயளவானது. எனவே தொடலி CT வழியே கூறுகள் சமமாவும் முரணுகவும் இருக்கும்.

எனவே CT வழியே நிறையின் கூறு உராய்வு μW கோசை α இனல் முற்றுகச் சமப்படுத்தப்படுகிறது.

$$\therefore W \text{ சைன் } \alpha \text{ கோசை } \beta = \mu W \text{ கோசை } \alpha.$$

அல்லது
$$\text{கோசை } \beta = \mu \text{ கோதா } \alpha.$$

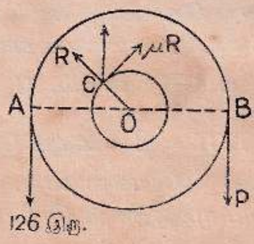
படம் 169.

CT, தளத்தின் கீழ்முனையை E (படம் 169) இற் சந்திப்பின், அதோடு கிடைத்தளமீது C இன் எறியம் F ஆயின், உராய்விற்கும் கிடையிற்குமிடைக் கோணம் CEF ஆகும்.

இப்போது
$$CF = CD \text{ சைன் } \alpha,$$
$$CE = CD \text{ சீக } \beta,$$
$$\therefore \text{சைன் } CEF = \frac{CF}{CE} = \frac{\text{சைன் } \alpha}{\text{சீக } \beta} = \text{சைன் } \alpha \text{ கோசை } \beta$$
$$= \mu \text{ சைன் } \alpha \text{ கோதா } \alpha = \mu \text{ கோசை } \alpha.$$

உதாரணம் (ii).

12 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு பற்சில்லு 3 அங்குல ஆரையுள்ள நிலைத்த அச்சாணியொன்றின்மீது சுழலக்கூடியது. சில்லுக்கும் அச்சாணிக்குமிடையே உராய்வுக் கோணம் 30° ஆயின், சில்லின் மேலாகச் செல்லுமொரு சங்கிலியின் நுனியொன்றிற் பிரயோகிக்கப்பட்டு, சங்கிலியின் மறுநுனியுடன் இணைத்த 126 இரு. நிறையொன்றை மட்டுமட்டாகத் தாங்கவல்ல ஆகவும் குறைந்த நிலைக்குத்து விசையைக் காண்க. சில்லுக்கும் அச்சாணிக்குமிடையேயுள்ள விளையுளமுக்கத்தின் தாக்கக் கோட்டினை ஒரு படத்திலே கவனமாகக் குறிக்க.



படம் 170.

சில்லு, புள்ளி C இனூற் குறிக்கப்படும் வெட்டினையுடைய ஒரு தனிக் கிடைக்கோட்டின் வழியே மட்டும் அச்சாணியைத் தொடுவதாகக் கொள்வோம் (படம் 170). இப்புள்ளி 126 இரு. நிறையினதும் P இனதும் (பற்சில்லின் நிறையைத் தவிர்த்து) விளையுளின்மீது அமைய வேண்டும்.

C இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் (P + 126) இற்குச் சமமான ஒரு நிலைக்குத்து விசையாக வேண்டும். இது அச்சாணியின் ஆரை OC வழியேயுள்ள ஓர் அமுக்கம் R ஐயும் C இல் அச்சாணியின் தொடலி வழியே உராய்வு விசை μR ஐயும் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore\ R^2(1+\mu^2) = (126+P)^2,$$

$$\therefore\ R^2\ \text{சீக}^2\lambda = (126+P)^2,$$

$$\therefore\ R\ \text{சீக}\lambda = 126+P,$$

$$\therefore\ R = \frac{\sqrt{3}}{2}(126+P).$$

O பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$12\,P + 3\mu R = 12 \times 126\,;$$

$$\therefore\ 12P = 12 \times 126 - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(126 + P),$$

$$= 12 \times 126 - 189 - \frac{3}{2}P,$$

$$\therefore\ \frac{27}{2}P = 1512 - 189 = 1323,$$

$$\therefore\ P = \frac{1323 \times 2}{27} = \frac{147 \times 2}{3} = 49 \times 2$$

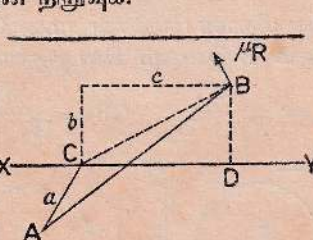
$= 98$ இரு.

உதாரணம் (iii).

ஒரு சீரான நேர்க் கம்பம் AB ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிற் சாய்ந்திருக்கிறது. கீழ்முனை A சுவரிலிருந்து a அடியில் கிடை நிலத்தின் மீதுள்ளது ; மேல் முனை B சுவரில் நிலத்திற்குமேலே b அடியிலும், சுவருக்குச் செங்குத்தாக A ஊடான நிலைக்குத்துத் தளத்திலொரு பக்கத்தில் c அடியிலுமுள்ளது. A இல் நழுவலைத் தடுக்கக்கூடிய விதமாக நிலம் முரடானதெனக் கொண்டு, B இல் நழுவலைத் தடுக்க கம்பத்திற்கும் சுவரிற்குமிடையே உராய்வுக் குணகம்

$$\frac{c}{ab}\sqrt{b^2+c^2}$$

இலும் குறையலாகாதெனநிறுவுக.



படம் 171.

சுவரின் அடியை XY எனவும் (படம் 171), AC சுவருக்குச் செங்குத்தானதெனவும் கொள்க.

கம்பம், A இல் உச்சியையுடைய ஒரு கூம்பினை அமைத்தியங்கவேண்டும். அல்லது B, C ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டத்தைச் சுவரில் அமைத்தியங்க வேண்டும்.

எனவே உராய்வு CB இற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படுகிறது.

B இலுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம் R ஆகவும் $\widehat{CBD} = \theta$ ஆகவும் இருப்பின், உராய்வுக் கூறுகள்

$$\mu R \text{ சைன் } \theta \text{ நிலைக்குத்தாக,}$$

$$\mu R \text{ கோசை } \theta \text{ கிடையாக.}$$

சமநிலையின் பொருட்டு, A ஊடான நிலைக்குத்தச்சொன்றினைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mu Ra \text{ கோசை } \theta \not< Rc,$$

அல்லது

$$\mu \not< \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\text{கோசை } \theta} \not< \frac{c}{a} \cdot \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}.$$

உதாரணம் (iv).

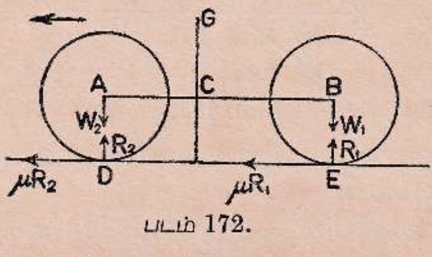
மோட்டர் லொறியொன்றின் பின், முன் அச்சாணிகளின் மீதான பாரங்கள் முறையே W_1, W_2 ஆகும். h, புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் ; a, அச்சாணிகளின் இடைத்தூரம் ; μ, சில்லுகளுக்கும் நிலத்துக்குமிடையே உராய்வுக் குணகம். (i) பின்னச்சின்மீதும், (ii) முன்னச்சின்மீதும் ஓட்டுமிடத்து லொறியை இயக்க ஆரம்பிக்கும்போதுள்ள உச்ச இழுப்பு விசையைக் காண்க. முதற் சந்தர்ப்பத்தில், லொறி இயங்க ஆரம்பிக்குந் தறுவாயில் பின்சில்லுகளுக்கும் நிலத்துக்குமிடையேயுள்ள மறுதாக்கம் விகிதம் $a : a - \mu h$ இற் கூட்டப்படுகிறதெனக் காட்டுக.

(ந.க.—இழுப்புவிசை = நிலத்துக்கும் செலுத்தும் சில்லுகளுக்கு மிடையே உராய்வு.)

முன், பின் அச்சாணிகளை முறையே A, B (படம் 172) எனவும், புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும் கொள்க.

A, B என்பனவற்றின் மீதான பாரங்கள் முறையே G, AC, CB என்பவற்றிலிருந்து A இனதும் B இனதும் இடைத்தூரங்களைத் தருகின்றன.

$$AC = \frac{aW_1}{W_1 + W_2}, \quad CB = \frac{aW_2}{W_1 + W_2}.$$



படம் 172.

எஞ்சின் தொழிற்படாதிருக்கும்போது சில்லுகளின் தொடுகைப் புள்ளிகள் D, E என்பவற்றிலுள்ள அமுக்கங்கள் முறையே பாரங்கள் W_2, W_1 என்பனவற்றிற்குச் சமம்.

(i) எஞ்சின் செயற்பட ஆரம்பித்து, பின்சில்லைச் சுழலச் செய்ய நாடும்போது E இல் முன்முக உராய்வு விசையொன்று செயற்பட வைக்கப்படுகிறது. இதன் உச்சப்பெறுமானம் μR_1 ஆகும். இங்கு R_1, E இலுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கம். எனினும், இம்மறு தாக்கம் மேலும் W_1 இற்குச் சமனாகவிராது. சில்லைச் சுழலாது தடுத்தலினால் E இலுள்ள உராய்வு μR_1 லொறி முழுவதின்மீதும் G பற்றித் திருப்புதிறனொன்றைக் கொண்டிருப்பதோடு, D இலுள்ள அமுக்கத்தைக் குறைக்கவும் நாடும். D இலுள்ள உராய்வு முன் சில்லைச் சுழலுமாறு மட்டுமே செய்யப்பார்க்கிறது ; லொறி முழுவதின் மீதும் தாக்கமெதையும் கொண்டிராது. D இலுள்ள செவ்வன் மறு தாக்கம் R_2 ஆயின், G பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$R_1 . CB = \mu R_1 . h + R_2 . AC,$$

அதோடு
$$R_1 + R_2 = W_1 + W_2,$$

$$\therefore R_1 . CB = \mu R_1 . h + (W_1 + W_2 - R_1) AC,$$

$$\therefore \frac{aR_1W_2}{W_1 + W_2} = \mu R_1 . h + aW_1 - \frac{aR_1W_1}{W_1 + W_2}.$$

அல்லது
$$R_1 = \frac{a}{a - \mu h} W_1.$$

எனவே மறுதாக்கம் விகிதம் $a : a - \mu h$ இல் கூட்டப்படுகின்றது.

இழுப்பு விசை $= \dfrac{\mu a W_1}{a - \mu h}$.

முன்னச்சாணியிற் செலுத்தப்படும்போது, D இல் முன்முக உராய்வுவிசை μR_2 இருக்கும். இப்போது E இலுள்ள உராய்வு பின்சில்லைத் திருப்ப மட்டுமே நாடும்.

G பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mu R_2 . h + R_2 . AC = R_1 . CB = (W_1 + W_2 - R_2) CB,$$

$$\therefore \mu R_2 . h + \frac{R_2 a W_1}{W_1 + W_2} = aW_2 - \frac{aR_2W_2}{W_1 + W_2},$$

$$\therefore \mu R_2 . h + aR_2 = aW_2,$$

$$\therefore R_2 = \frac{a}{a + \mu h} W_2.$$

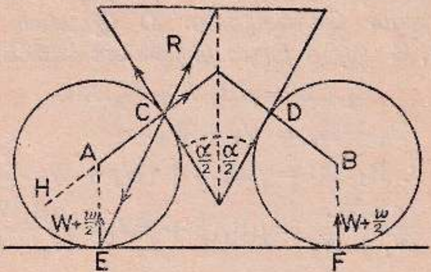
இப்போது இழுப்பு விசை $= \dfrac{\mu a W_2}{a + \mu h}$.

இவ்விழுப்பு விசைகளின் தொடர்புப் பெறுமானங்கள் W_1 இலும் W_2 இலும் சார்ந்திருக்கும்.

$W_1 = W_2$ ஆயின், கூடியவிசையொன்று பின்சில்லுகளிற் செலுத்திப் பெறப்படுகிறது.

உதாரணம் (v).

இரு சம உருளைகள் சமாந்தரமான நிலைகளில் கிடைத் தளமொன்றின் மீது தங்கியிருக்கின்றன. உச்சிக்கோணம் α ஐ உடைய இரு சமபக்க முக்கோணியரியமொன்று, அதன் அடி கிடையாக அமையுமாறு, அவற்றி னிடையே சமச்சீர்த் தானமொன்றிலே தங்கியிருக்கிறது. பரப்புக்கள் யாவும் சமமுரடானவையாயின், உராய்வுக் குணகம் தான் $\frac{1}{4}(\pi - \alpha)$ இற்கு மேற் படின் சமநிலை பேணப்படுமெனக் காட்டுக.



படம் 173.

நிலைக்குத்து வெட்டொன்றை (படம் 173) எடுத்துநோக்குக. உருளைகளி னது அச்சுக்களின் நிலையங்களை A, B *எனவும், நிலத்துடன் அவற்றின் தொடுகைப் புள்ளிகளை* E, F *எனவும், உருளையுடன் அரியத்தின் தொடுகைப் புள்ளிகளை* C, D *எனவும் கொள்க. உருளையொவ்வொன்றினதும் நிறையை* W *என்க ; அரியத்தின் நிறையை* w *என்க.*

இத்தகைய பிரசினங்களில் சமநிலை எவ்வாறு குழப்பப்படலாம் என்பதைத் தெளிவாகப் பார்க்கவேண்டும்.

இவ்வுதாரணத்தில், சமநிலை குழப்பப்படின், அரியம் நிலைக்குத்தாக இறங்கும். இவ்வாறு நிகழச் செய்வதற்கு உருளைகள் (i) *அரியம்* C *இலும்* D *இலும் நழுவுமாறு தொடுகைப் புள்ளிகள்* E *ஐயும்* F *ஐயும் குறித்து உருளவோ,* (ii) *உள்நோக்கி உருண்டு அரியத்தைக் கீழே அழுத்துமாறு* E *இலும்* F *இலும் வழுக்கவோ வேண்டும்.*

உருளை A *இன் சமநிலையின் பொருட்டு,* C *இலுள்ள விளையுள் மறு தாக்கம், நிறையும்* E *இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கமும் சந்திக்கும் புள்ளி* E *ஊடாகச் செல்லவேண்டும். பின்பு உருளை* E *பற்றி உருள மாட்டாது. எனவே* C *இலுள்ள உராய்வுக் கோணம் கோணம்* ACE *இற்கு மேற்படின் உருளுதலேதும் இருக்காது.*

ஆனால் கோணம்

$$\mathrm{HAE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\therefore\ \mathrm{ACE} = \tfrac{1}{2}\mathrm{HAE} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4},$$

$\therefore$ தான் λ, தான் $\frac{1}{4}(\pi - \alpha)$ இற்கு மேற்பட வேண்டும்.

அல்லது μ, தான் $\frac{1}{4}(\pi - \alpha)$ இற்கு மேற்பட வேண்டும்.

இந்நிபந்தனை, E இற்கும் F இற்குமிடையே உருளுவதனால் சமநிலை குழப்பப்படா தென்பதையே உறுதியாக்குகிறது. இனி E இலும் F இலும் நழுவலேதும் இல்லாதிருத்தற்குரிய நிபந்தனையைக் காணவேண்டும்.

நிறையையும் C இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கத்தையும் சமன்செய்ய, E இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் EA இற்கும் EC இற்குமிடையே ஒரே கோட்டிற் செயற்படவேண்டும், அ-து. E இலுள்ள உராய்வுக் கோணம் சிறியதாக இருக்கவேண்டும்.

இக்கோணத்தின் பெறுமானத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

E இல் செவ்வன் மறுதாக்கம் $= \mathrm{W} + \dfrac{w}{2}$.

C இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கத்தின் பெறுமானம் R ஆகும்.

இங்கு $$2\mathrm{R}\ \text{கோசை}\, \frac{\pi - \alpha}{4} = w,$$

(அரியத்திற்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க.)

R இன் கிடைக்கூறு

$$= \frac{w}{2} \cdot \frac{\text{சைன்}\,\dfrac{\pi - \alpha}{4}}{\text{கோசை}\,\dfrac{\pi - \alpha}{4}},$$

அதோடு $$\mu\left(\mathrm{W} + \frac{w}{2}\right) > \tfrac{1}{2}w\ \text{தான்}\ \frac{\pi - \alpha}{4}\ \text{ஆயின்},$$

அ-து. $\mu >$ C இலுள்ள குணகத்தின் $\dfrac{w}{2\mathrm{W} + w}$ மடங்கு ஆயின், E இல் நழுவலேதும் ஏற்படாது. இங்கு μ, E இலுள்ள உராய்வுக் குணகம்.

உதாரணம் (vi).

கிடையுடன் தான்$^{-1}\sqrt{2}$ இலும் அதிகமான கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள ஒரு தளத்திற்கும், ஒரு சீர்த் திண்மக் கனத்திற்குமிடையே உராய்வுக் குணகத்தின் பெறுமானம் 1 இற்கும் $\sqrt{2}$ இற்குமிடையேயுள்ளது. கனம் தளத்தின்மீது, தளத்தைத் தொடும் முகத்தின் மூலைவிட்டம் தளத்தின்

அதியுயர் சரிவுகோணொன்றின் வழியே அமையுமாறு வைக்கப்பட்டிருப்பின், அது கவிழாது தளத்தைக் கீழ்நோக்கி வழுக்குமெனக் காட்டுக; ஆனால், கனம் தளத்தின்மீது, தளத்தைத் தொடும் முகத்தின் விளிம்பொன்று அதியுயர் சரிவுகோடு வழியே அமையுமாறு வைக்கப்பட்டிருப்பின், அது கவிழும் அதோடு வழுக்குமெனக் காட்டுக (H.C.)

தளத்தினது சாய்வுகோணத்தின் தான்சன் உராய்வுக் குணகத்திலும் அதிகமானதாதலின், கனம் தளத்தின்மீது நேரே வைக்கப்படும்போது இருவகையிலும் வழுக்கும். ஆனால் வழுக்குதலையும் கவிழுதலையும் தவிர வேறேதும் ஏற்பட இடமில்லை.

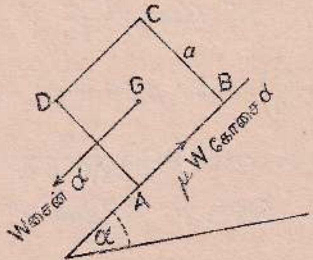
கனத்தின் கீழ்மூலை அல்லது விளிம்பு இயங்குவதனால் தொடக்கச் சமநிலையுடன் தொடர்புடைய ஒரு தனி நிலையியற் கணக்கிற்போல விளிம்பைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்து கவிழுதலுக்கான நிபந்தனையைப் பெறமுடியாது.

கனத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க வேண்டும்.

ABCD (படம் 174) கனத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஊடான வெட்டினைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. இவ்வெட்டு, தளத்தின் அதியுயர் சரிவுகோட்டினூடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளது. கனத்தின் பக்கத்தை a என்க; அதன் நிறையை W என்க.

தளம் கனத்தின்மீது உஞற்றும் விசைகள் (கனம் கவிழ நாடின்) A இற் செயற்படும் செவ்வன் மறுதாக்கம் W கோசை α உம் AB வழியே செயற்படும் உராய்வு μW கோசை α உமாம்.

G பற்றி μW கோசை α இன் திருப்புதிறனானது W கோசை α இன் G பற்றிய திருப்புதிறனிலும் கூடுதலாயின், கனம் கவிழும்.



படம் 174.

இப்போது, AB, முகமொன்றின் மூலைவிட்டமொன்றைக் குறிப்பின், $AB = \sqrt{2}a$ ஆகும். பின்பு கவிழ்வதற்கு,

$$\mu W \text{ கோசை } \alpha . \frac{a}{2} > W \text{ கோசை } \alpha . \frac{\sqrt{2}a}{2},$$

அல்லது $$\mu > \sqrt{2},$$

அதோடு $\mu < \sqrt{2}$ ஆக ஆகக் கனம் கவிழ முடியாது.

AB, விளிம்பொன்றிற்குச் சமாந்தரமானதொரு கோட்டினைக் குறிப்பின், $AB = a$ ஆகும். பின்பு, சமநிலையின் பொருட்டு

$$\mu W \text{ கோசை } \alpha . \frac{a}{2} > W \text{ கோசை } \alpha . \frac{a}{2},$$

அல்லது $$\mu > 1.$$

எனவே $\mu > 1$ ஆகத் தரப்பட்டிருக்கின்றமையால் கனம் கவிழும் அதோடு வழுக்கும்.

பயிற்சி XXV.

1. முரடான நிலமொன்றின் மீதிருக்கும் பாரமான செவ்வகக் குற்றியொன்றின் மேல்விளிம்பின் நடுப்புள்ளியில், குற்றியை மேற்பக்கத்துடன் $\theta (< 90^\circ)$ என்னும் கோணத்தில் மேனோக்கி இழுக்குமாறு விசையொன்று மைய நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. இந்நிலைக்குத்து வெட்டுமுகத்தின் கிடைப்பக்கங்கள் நீளம் b ஐ உடையவை; நிலைக்குத்துப் பக்கங்கள் நீளம் a ஐ உடையவை.

$$\text{தான் } \theta > \frac{\text{தான் } \alpha - 2\mu}{\mu \text{ தான் } \alpha}$$

ஆயின், குற்றி அடிவிளிம்பொன்றைக் குறித்துத் திரும்பத் தொடங்குமெனக் காட்டுக. இங்கு, தான் $\alpha = \frac{b}{a}$; μ, உராய்வுக் குணகம். (H.S.C.)

2. கிடைத்தளமொன்றின் மீதிருக்கும் $2a$ நீளமான ஒரு சீர்க் கோல் AB, முனை A உடன் இணைத்துள்ளதும் B இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே $2h$ உயரத்திலிருக்கும் ஒரு கப்பியின் மேலாகச் செல்வதுமான கயிறொன்றினால் உயர்த்தப்படுகிறது. முனை B தளத்தின்மீது நழுவவில்லையெனக் கொண்டு கோல் நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ ஐ ஆக்கும்போது தளத்தின் மறுதாக்கத்திற்கும் B இலுள்ள நிலைக்குத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க. எனவே,

$$h > \frac{a}{\mu}$$

ஆக இருப்பின், முனை B நழுவாது கோல் நிலைக்குத்தாக உயர்த்தப்படலாமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம். (H.S.C.)

3. முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது இருக்கும் W நிறையும் $2a$ பக்கமுமுள்ள சீர்க் கனக்குற்றியொன்றை ஒரு மனிதன் அதன் முகங் களுள் ஒன்றிற்குச் செங்குத்தாகத் தள்ளுகிறான். அதை இயக்கும் ஆகக் குறைந்த தள்ளுவிசை,

$$\frac{Wa}{h}, \mu W$$

ஆகிய இரண்டிலும் சிறியதற்குச் சமமெனை நிறுவுக. இங்கு, h, நிலத்துக் கும் மனிதனின் கைகளுக்குமிடையேயுள்ள தூரம். μ, குற்றிக்கும் நிலத்துக்கு மிடையேயான உராய்வுக் குணகம். மனிதனுக்கும் நிலத்துக்கும் இடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ' ஆயின், அவன் குற்றியை நகர்த்து மாறு அவனது மிகக் குறைந்த நிறை யாது ? (H.C.)

4. முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது சீர்க் கோல் AB தங்கியிருக் கிறது. B இற்கு அப்பால் நீட்டிய கோடு AB இலிருக்கும் ஒரு புள்ளி C இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள புள்ளி D இல் நிலைப்படுத்திய ஒரு சிறிய கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் நாணொன்று முனை B உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. படிப்படியாக அதிகரிக்கும் ஒரு விசையினால் அந் நாண் இழுக்கப்படும்போது, கோலுக்கும் நிலத்துக்கு மிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ, கோதா DBC இலும் குறைவாயின், கோல் நிலத்தின் வழியே வழுக்கத்தொடங்குமெனை நிறுவுக ; இல்லையாயின், முனைப்புள்ளி A ஐக் குறித்துத் திரும்பத் தொடங்குவதோடு, μ (தான் $\beta - 2$ தான் α) $= 1$ ஆகும்வரை A நழுவாதெனை நிறுவுக. இங்கு, α, β ஆகியன கிடையுடன் முறையே AB, BD என்பன பின்பு ஆக்கும் கோணங்கள். (H.C.)

5. ஒரு சீர்த் திண்மக்கனம் ஒரு முரடான கிடைத்தளத்தின் மீதுள் ளது. இத்தளத்தின்மீது வடிவொத்த ஒரு கனம் அவற்றின் முகங்கள் முற்றிலும் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இரு கனங்களுக்கு மிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ' (<1) ஆகும். கீழ்க் கனத்திற்கும் தளத்திற்குமிடையேயான குணகம் μ ஆகும். படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடை விசையொன்று மேலுள்ள கனத்தின் ஒரு முகத்திற்குச் செங்குத் தாக அம்முகத்தின் மையத்திற் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சமநிலை குழப்பப் படுமிடத்து, 2μ, μ' இலும் கூடவோ குறையவோ இருப்பதற் கிணங்க மேற் கனம் கீழ்க் கனத்தின்மீது வழுக்குமதே சமயத்தில் கீழ்க் கனம் தங்கியிருக்கும், அல்லது இரண்டும் ஒரு தனி விறைப்புப் பொருளாக ஒருங்கே இயங்குமெனை நிறுவுக. (H.C.)

6. முரடான தரையின்மீது நிற்கும் l நீளமுள்ள சீர்ப் பலகையொன் றுடன் P இல் இணைத்த கயிறொன்று பலகை நிலைக்குத்தான நிலையி லிருந்து இறங்குமாறு நிலத்தலொரு புள்ளி Q இலிருந்து இளக்கப்படு கின்றது. தொடக்கத்தில் பலகையின் மேன்முனை, Q உடன் ஒன்று படுகிறது ; μ, தரையுடனான உராய்வுக் குணகம். பலகையின் மையத் திற்கு மேலே P இருப்பின், பலகை புரளாதெனக் காட்டுக ; இந்நிபந்

தனை நிறைவேற்றப்பட்டதும், $\mu < 1$ ஆயின் பலகை நழுவவேண்டுமெனக் காட்டுக; $\mu > 1$ ஆக இருக்கும்போது, சுயாதீன முனையிலிருந்து P இன் தூரம்,

$$\frac{\mu-1}{2\mu-1}\,l$$

இனும் குறைவாக இருந்தாலன்றி பலகை நழுவுமெனக் காட்டுக. (H.C.)

7. ஒவ்வொன்றும் W நிறையான இரு சீர்ச் சமகோல்கள் AB, BC என்பன B இற் சுயாதீனமாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இவை முனைகள் A உம் C உம் முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது பொருந்துமாறும் கோணம் ABC செங்கோணமாகுமாறும் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலே தங்கியிருக்கின்றன. BC இன் நடுப்புள்ளியுடன் இணைத்ததோர் இழை படிப்படியாக அதிகரிக்கும் கிடை விசையொன்றினால் AC இற்குச் சமாந்தரமாக AB இற்கு அப்பால் இழுக்கப்படுகின்றது. கோல்களுக்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $1\frac{1}{3}$ ஆயின், விசையானது 2W இற்கு மேற்பட்டதும் A ஓய்விலிருக்குமதே சமயத்தில் C நழுவுவதனாற் சமநிலை குழம்புமெனவும், ஆனால் உராய்வுக் குணகம் $1\frac{2}{3}$ இற்குச் சமமாயின், விசையானது $3\frac{1}{4}$W இற்கு மேற்பட்டதும் C ஓய்விலிருக்கும் அதே சமயத்தில் A நழுவுவதனாற் சமநிலை குழம்புமெனவும் நிறுவுக. (H.C.)

8. ஒவ்வொன்றும் 10 இறா. நிறையுள்ளதும் a ஆரையுடையதுமான இரு உருளைகள் அவற்றின் அச்சுக்கள் கிடையாகவும் சமாந்தரமாகவும் $3a$ இடைத் தூரத்தில் அமையுமாறு முரடான மேசையொன்றின்மீது தங்கியிருக்கின்றன; ஒரே ஆரையும் நிறையுமுடைய மூன்றாம் உருளையொன்று அவற்றினிடையே தங்கியுள்ளது. இங்கு, சமநிலையைப் பேண உராய்வு மட்டுமட்டாகப் போதுமானது. மேல், கீழ் உருளைகளிடையேயும், கீழ் உருளைகளுக்கும் மேசைக்குமிடையேயும் இருக்க வேண்டிய உராய்வுக் குணகங்களின் இயன்றளவு மிகக் குறைவான பெறுமதியையும் தொடலி ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள மொத்த மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் காண்க. (H.S.C.)

9. W நிறையும் 2α உச்சிக் கோணமுமுடைய கூம்பொன்றின் அச்சினூடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ளனவும் கூம்பின் கீழ்ச்சாய்வுகளுடன் β கோணங்களிற் செயற்படுவனவும் ஒவ்வொன்றும் P இறா. ஆனதுமான அமுக்கங்கள் கூம்பின் எதிர்ப் பக்கங்களுக்குச் சமச்சீராகப் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. $\mu >$ கோதா $\beta >$ தான் α ஆக இருந்தாலன்றி இவ்வமுக்கப் பிரயோகத்தினாற் கூம்பை உயர்த்தமுடியாதெனநிறுவுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம்; μ, தான் α இனும் கூடுதலாயின், இவ்வாறு கூம்பினை உயர்த்துதற்குத் தேவையான P இன் ஆகக் குறைந்த பெறுமானத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

10. a ஆரையுள்ள நிலைத்த கிடை அச்சாணியொன்றின்மீது சில்லொன்று சுழலும்போது இவை ஒன்றையொன்று தனிக் கிடைக் கோடொன்றின் வழியேயே தொடுமாறு தொடுகை போதுமானளவு தளர்ந்

திருப்பின் அவற்றினிடையேயான விளையுளமுக்கமானது அச்சாணியுடன் ஒரேமையமுள்ளதும் ஆரை a சைன் λ உடையதுமான வட்டமொன்றின் தொடலி வழியேயிருக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, சில்லுக்கும் அச் சாணிக்குமிடையேயான உராய்வுக் கோணம். சில்லின் நிறை W ஆகவும், அதன் ஆரை b ஆகவும் பிரயோகித்த விசை X ஆகவும் இருப்பின், X, கிடை ஆரையொன்றின் முனையில் கீழ்நோக்கிப் பிரயோகிக்கப்படும் போது சில்லைச் சுழற்றுமாறு X இன் மிகக் குறைவான பெறுமானத்தைக் காண்க. X சில்லின் உச்சியிற் கிடையாகப் பிரயோகிக்கப்படுமாயின்,

$$X = W \text{ தான் } \theta$$

எனக் காட்டுக. இங்கு b சைன் $\theta = a$ சைன் λ. (H.S.D.)

11. M திணிவுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச் சட்டம் AB இன் முனை A உடன் இணைத்ததோர் இலேசான இழை ஒப்பமான கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்கின்றது. இழையின் சுயாதீன நுனியில் m திணி வொன்று தொங்குகிறது. சட்டத்தின் மற்றையமுனை B ஒரு முரடான கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ளது. தளத்திற்கும் சட்டத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும்.

$$\mu < \frac{M}{\sqrt{M^2 - m^2}} \text{ உம் } \quad m < \frac{M}{\sqrt{2}} \text{ உம்}$$

ஆயின், சட்டம் கிடையுடன் ஆக்கும் சாய்வு கோணம்

$$\text{தான்}^{-1}\left[\frac{M^2 - 2m^2 \pm M\sqrt{m^2 - \mu^2(M^2 - m^2)}}{2\mu(M^2 - m^2)}\right]$$

ஆகிய பெறுமானங்களிலொன்றை உடையதாயிருக்கும்போது சட்டம் நழுவுந் தறுவாயிலுள்ளதெனக் காட்டுக. (H.S.C.)

12. M திணிவும் $2l$ நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்ப் பலகையின் நடுப்புள்ளி C ஆகும். இப்பலகை, R ஆரையுள்ளதொரு முரடான கிடையுருளையின் மேலே பலகையின் நீளம் உருளையின் பிறப்பாக்கிகளுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு, கிடையாக வைக்கப்பட்டுள்ளது ; பின்பு பலகையின் O என் னும் புள்ளி உருளையைத் தொடும். பலகை படிப்படியாகச் சாயுமாறு செய்யப்படுகின்றது. $OC < R\lambda$ ஆயின், பலகை உருளையின்மீது நழுவாது சமநிலையிலே தங்கியிருக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, உராய்வுக் கோணம். பலகையின் முனையொன்றுடன் m திணிவொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பலகை மெதுவாக நகருமாறு செய்யப்படின், சமநிலைத் தானமொன்றை அடையுமாறு O இன் நிலையங்கள் எவ்வெல்லைகளுக்கு இடையில் இருக்க இயலும் ? (H.S.D.)

13. இரு சீர்ச் சமச்செவ்வட்ட உருளைகள் அவற்றின் அச்சுக்கள் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது தங்கி யிருக்கின்றன. ஒரு சமபக்க முக்கோணியரிய வடிவச் சீர் ஆப்பு அதன் இரு முகங்கள் நிலைக்குத்துடன் சமகோணங்களிற் சாய்ந்திருக்குமாறும்

ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வோர் உருளையைத் தொடுமாறும் அவ்வுருளைக ளிடையே சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆப்பின் எப்பகுதியேனும் கிடைத் தளத்தைத் தொடவில்லை. தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் பரப்புகள் யா வற்றிற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் ஒரே தன்மையது. ஆப்பின் நிறை எதுவெனினும் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ இற்கு மேற்படின் அத் தொகுதி சமநிலையிலிருக்குமெனவும், இல்லையாயின் மிக இலேசான ஆப்பொன்று உருளைகளைத் தளத்தின்மீது உருண்டு பிரியுமாறு செய்யு மெனவுங் காட்டுக.

14. முறையே $2a$, $2b$ நீளமும் W, W′ நிறையுமுள்ள AC, BD என்னுமிரு சீர்ப் பலகைகள் அவற்றின் நீளங்களுக்குச் செங்குத்தாக A இலும் B இலும் நிலைப்பட்டுள்ள பிணைச்சல்களைப் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக் கூடியவை. இப்பிணைச்சல்கள் சமாந்தரமானவை ; ஒரே கிடைத் தளத்திலுள்ளவை ; அதோடு $BD > AB > AC$. முதற் பலகையானது முனை C இல் இரண்டாம் பலகையை அழுத்தும் நிலையிலும் கோணம் ACB விரிகோணமாக இருக்கும் நிலையிலும் எல்லைச் சமநிலைத் தானத்தில்

$$Wa \text{ சைன் } 2\alpha \text{ கோசை } \lambda + W'b \text{ சைன் } 2\beta \text{ கோசை } (\alpha+\beta+\lambda) = 0$$

எனக் காட்டுக. இங்கு $\alpha = CAB, \beta = CBA$; λ, எல்லையுராய்வுக் கோணம்.

15. a ஆரையுள்ள ஓர் உருளை அதன் வளைபரப்பு கிடைத் தரை யொன்றின்மீது பொருந்துமாறு தங்கியிருக்கிறது. நேரானதொரு $2l$ நீளச் சீர்ப் பலகை உருளையை அதன் மையத்திற் தொடுமாறும் அதன் கீழ் முனை தரையின்மீது தங்குமாறுமுள்ள ஒரு நிலையில் உருளைக்குக் குறுக்கே சமச்சீராகவுள்ளது. தொடுகைப் புள்ளிகள் மூன்றிலும் உராய்வுக் குணகங் கள் சமம். இப்புள்ளிகளிலொன்றில் உராய்வு எல்லையுராய்வாகும். இத்தகைய புள்ளி உருளையின் நிலத்துடனை தொடுகைப் புள்ளியாக ஒருபோதும் இராதெனவும், ஆனல் $3a^2 \lesseqgtr l^2$ என்பதற்கிணங்க தரை யுடன் அல்லது உருளையுடன் பலகையின் தொடுகைப் புள்ளியாகுமெனவும் காட்டுக. (C.S.)

16. W நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது இருக்கின்றது. μ, தளத்தின் உராய்வுக் குணகம். முனையொன்றுடன் இணைத்த ஓர் இழை இழுவை படிப்படியாகக் கூடுமாறு கோலிற்குச் செங்குத்தாகக் கிடையாய் இழுக்கப்படுகின்றது. நிலைக்குத்து மறுதாக்கம் கோலின் வழியே சமச்சீராகப் பங்கிடப்பட்டுள்ள தெனக் கொண்டு, இழை இணைத்த முனையிலிருந்து $\frac{l}{\sqrt{2}}$ இலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறித்துக் கோல் திரும்பத் தொடங்குகிறதெனவும், பின்பு இழையின் இழுவை $(\sqrt{2}-1)\mu W$ எனவும் காட்டுக. (C.S.)

17. W நிறையுள்ள ஒரு சீரேணி தரையுடன் θ கோணத்திற் சுவரொன்றிற் சாய்ந்திருக்கிறது. தரைக்கும் சுவருக்குமான உராய்வுக் கோணங்கள் முறையே ϵ, λ ஆகும். ஏணியின் முனைகளில் மறுதாக்கங்களை நிர்ணயிப்பது பொதுவாக ஏன் இயலாதென விளக்குக. w நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியில் மெதுவாக ஏறும்போது,

$$\frac{1}{2}\frac{W}{W+w} > \frac{\text{கோசை}\ \lambda\ \text{கோசை}\ (\epsilon+\theta)}{\text{கோசை}\ (\lambda-\epsilon)\ \text{கோசை}\ \theta}$$

ஆகின், அவன் ஏணி உச்சிக்குப் போகலாமெனக் காட்டுக. (C.S.)

18. சீரான வட்டவளையமொன்றின் விளிம்பில் ஒரு புள்ளியுடன் அவ் வளையத்தின் நிறைக்குச் சமமான ஒரு நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ் வளையம் முரடான கிடை முளையொன்றின் மேலாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் $\frac{1}{6}\pi$ இலும் கூடுதலாயின் வளையத்தின் புள்ளியெதுவும் முளையைத் தொடுமாறு அத்தொகுதி தங்கலாமென நிறுவுக. (C.S.)

19. a ஆரையும் λ உராய்வுக் கோணமுமுடைய முரடான கோளமொன்றில் ஒரு சீர்க் கோல் கிடையுடன் அதியுயர் சாய்வு

$$\text{தான்}^{-1}\ \frac{a^2\ \text{சைன்}\ \lambda\ \text{கோசை}\ \lambda}{c^2-a^2\ \text{சைன்}^2\ \lambda}$$

இலேயே தங்கமுடியுமெனக் காட்டுக. இங்கு c, கோளத்தின் மையத்திலிருந்து கோலின் தூரம். (C.S.)

20. முரடான கிடைத் தண்டவாளமொன்றின் மேலே வைத்த தொரு சீர்க் கோல் முரடான கிடைச் சுவரொன்றில் ஒரு முனையிற் சாய்ந்து தங்கியிருக்கிறது. தண்டவாளம் சுவருக்குச் சமாந்தரமானது; கோலிற்குச் செங்குத்தானது. கோல் சுவரில் மேனோக்கி நழுவுந் தறுவாயிலிருப்பின், அது கிடையுடன் θ கோணத்தை ஆக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு

$$a\ \text{கோசை}^2\ \theta\ \text{கோசை}\ (\theta+\lambda+\lambda')=c\ \text{கோசை}\ \ \lambda\ \text{கோசை}\ \lambda'.$$

λ, λ' முறையே தண்டவாளத்திலும் சுவரிலுமுள்ள உராய்வுக் கோணங்கள். கோல் அவ்வாறான சமநிலைத் தானத்திலிருப்பது சாத்தியமாகுமாறு போதிய ளவு நீண்டதெனக் கொள்ளப்பட்டது. கோலின் நீளம் $2a$ ஆகும். தண்டவாளம் சுவரிலிருந்து c கிடைத் தூரத்திலுள்ளது. (C.S.)

21. இரு உருளைகள் ஒன்றையொன்று தொடும்படியாகவும் அவற்றின் அச்சுக்கள் கிடையாக இருக்குமாறும் முரடான சாய்தளமொன்றின்மீது சமநிலையிலிருக்கின்றன. a ஆரையுள்ள மேலுருளை பாரமானது. ஆனால், b ஆரையுள்ள கீழுருளை தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ளது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு α ஆயின், $b > \frac{1}{4}a$ தான்^{2} α என நிறுவுக; பாரமான உருளைக்கும் தளத்திற்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம்,

$$\frac{1}{2\ \text{கோதா}\ \alpha-\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

ஆகவாவது இருக்கவேண்டும் எனவும் மற்றைய உராய்வுக் குணகங்கள் $\sqrt{\frac{b}{a}}$ இற்குச் சமமாகவாவது இருக்கவேண்டும் எனவும் நிறுவுக. (C.S.)

22. நிலைத்தொரு முரடான வட்டவுருளையின் வெளிப்பரப்பின் மேற்பாகத்தின்மீது W நிறையுள்ள பாரமான துணிக்கையொன்று $\frac{W}{2}$ இற்குச் சமமான குறித்த விசையொன்றினாலே தாங்கப்படவேண்டியிருக்கிறது. உராய்வுக்குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ இற்குச் சமமாயின், துணிக்கையைச் சமநிலையிற் பேணுமாறு, உருளையின் உச்சிப் பிறப்பாக்கியிலிருந்து துணிக்கை அமைந்திருக்கும் மிகக் கூடிய கோண தூரத்தைக் காண்க. (C.S.)

23. ஒரு சீர்க் கோல் அதன் உச்சப்புள்ளி முரடான நிலைக்குத்து வட்டமொன்றின் மையத்துடன் ஒரே மட்டத்தில் அமையுமாறு அவ்வட்டத்தின் உட்புறத்திலே தங்கியிருக்கின்றது. உராய்வு வழுக்குதலைத் தடுக்க மட்டுமட்டாகப் போதுமானதாயின், உராய்வுக் கோணம்,

$$\tfrac{1}{2}[\alpha - \text{சைன்}^{-1}\ (\text{சைன்}\ \alpha\ \text{கோசை}\ 2\alpha)]$$

இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. இங்கு α, கிடையுடன் கோலின் சாய்வு. (C.S.)

24. ஒரு சீர்ச் சட்டம் AB புள்ளிகள் A இலும் C இலுமிருக்கும் இரு முரடான சமாந்தரத் தண்டவாளங்களின்மீது கிடையாக இருக்கின்றது. B இல் AB இற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்பட்டு, சட்டத்தினை இயக்கக்கூடிய மிகக் குறைந்த கிடை விசை,

$$\mu W \frac{b-a}{2a-b},\ \tfrac{1}{2}\mu W$$

ஆகிய இரு விசைகளிற் சிறியதாகுமென நிறுவுக. இங்கு $AB = 2a$, $AC = b$; W, சட்டத்தின் நிறை ; μ, தொடுகைப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள உராய்வுக் குணகம். (C.S.)

25. ஒரு கதிரையின் ஆசனம் 18 அங்குலப் பக்கச் சதுரமாகும். அதன் பிறபக்கமும் கால்களும் நிலைக்குத்தானவை. கால்கள் 18 அங்குல நீளமானவை. புவியீர்ப்பு மையம் பிறபக்கத்திலிருந்து 6 அங்குலத்திலுள்ளது. நிலத்திலிருந்து 3 அடி 6 அங்குல தூரத்தில் கதிரையின் பிறபக்கத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியுடன் இணைத்த கிடையிழையொன்றினாற் கதிரை இழுக்கப்படுகின்றது. μ, $\frac{2}{7}$ இலும் குறைவாகவோ கூடுதலாகவோ இருத்தற்கிணங்க கதிரை வழுவவோ கவிழவோ பார்க்குமெனக் காட்டுக. இத்தானத்தில் கதிரை மட்டுமட்டாக வழுவின், ஆசனத்தின் மையத்தில் கதிரையின் நிறைக்குச் சமமான ஒரு நிறை தங்கும்போது, இழை தான்$^{-1}\ \frac{7}{10}$ இலும் குறைவான எக்கோணத்தினூடாகவும் தாழ்த்தப்படுமாயின் அந்நிறை முன்னேக்கி இன்னும் வழுக்குமெனக் காட்டுக. (C.S.)

26. ஒரு புகையிரதப் பாரவண்டியின் அச்சாணிகளின் இடைத் தூரம் $2a$ ஆகும். புவியீர்ப்பு மையம் அவற்றினிடையே நடுவிலும் தண்டவாளங்களிலிருந்து h தூரத்திலும் உள்ளது. கீழ்ச் சில்லுகள் பூட்டப்படுமிடத்து, பாரவண்டி தங்கும் அதியுயர் சாய்வு α ஆகும். சில்லுகளுக்கும் தண்டவாளங்களுக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம்

$$\mu = \frac{2a \text{ தான் } \alpha}{a + h \text{ தான் } \alpha}$$

இனுல் தரப்படுகிறதெனக் காட்டுக. (C.S.)

27. ஏகவினக் கனமொன்று அதன் தட்டையான முகமொன்று முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற் சாய்ந்திருக்குமாறும் நான்கு விளிம்புகள் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும், சுவரைச் சந்திக்காத கீழ் விளிம்பின் நடுப் புள்ளியில் இவ்விளிம்பிற்குச் செங்குத்தானதொரு தளத்தில் பிரயோகிக்கப்படும் விசை P இனுலே தாங்கப்படுகின்றது. $\mu(=\text{தான் } \epsilon)$, உராய்வுக் குணகமாயின், (i) $\epsilon > \frac{1}{4}\pi$, (ii) $\frac{\pi}{4} > \epsilon > \frac{\pi}{8}$ அல்லது (iii) $\epsilon < \frac{1}{8}\pi$ என்பதற்கிணங்க P இன் மிகக் குறைந்த பெறுமானம் (i) $\frac{1}{2}$ W கோசீ ϵ, (ii) W கோசை ϵ, அல்லது (iii) W கோசை ϵ சீக $\left(\text{தான்}^{-1} \frac{1}{\mu+2} - \epsilon\right)$ ஆக இருக்குமெண நிறுவுக. (C.S.)

28. 15 அங்குல ஆரையுள்ள சர்வசமமான இரு உருளைகள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு 54 அங்குல ஆரையுள்ள உருளைக் கோப்பையொன்றில் சமச்சீராக இருக்கின்றன. 10 அங்குல ஆரையுள்ள மூன்றாமுருளையொன்று அவ்விரு சமவுருளைகளின்மீதும் இருக்கின்றது. உருளைகள் யாவற்றினதும் அச்சுக்கள் கிடையானவை ; சமாந்தரமானவை. பரப்புக்கள் ஒப்பமானவையாயின் மேலுருளையின் நிறை மற்றைய உருளைகளிலொன்றினது நிறையின் $\frac{5}{2}$ இலும் அதிகமாக இருந்தாலன்றி சமநிலை சாத்தியமெனக் காட்டுக. மேலுருளையின் நிறை எவ்வாறு அதிகமாக இருப்பினும், பரப்புக்கள் யாவும் முரடாகவும் உராய்வுக் குணகமேதும் $\frac{1}{8}$ இலும் குறைவாக அமையாமலும் இருப்பின் சமநிலை இன்னும் சாத்தியமெனக் காட்டுக. (C.S.)

29. W நிறையான ஒரு மோட்டர்க் கார் தடுப்புக்களின் பிரயோகத்தினுல் f வீதத்தில் அமர்முடுகுகின்றது. பின் சில்லுகளுக்கு மட்டுமே தடுப்புக்கள் பிரயோகிக்கப்படும்போதும் சில்லுகளின் திணிவுகள் தவிர்க்கத்தக்கனவாக அமையும்போதும் சில்லுகளுக்கும் பாதைக்குமிடையேயான மறுதாக்கங்களைக் காண்க. காரின் புவியீர்ப்பு மையம் பாதையிலிருந்து h உயரத்திலும் பின் சில்லுகளிலிருந்து a கிடைத் தூரத்திலும் முன்

சில்லுகளிலிருந்து a' இனுமுள்ளது. பின் சில்லுகளில் மட்டுமே தடுப்புள்ள ஒரு காரினும் பார்க்க நாற்சில்லுகளினும் தடுப்புள்ள ஒரு காரினிடத்து, யாதுமொரு சில்லும் சறுக்காது பெறக்கூடிய உச்ச அமர்முடுகல்,

$$\frac{a + a' + h\mu}{a'}$$

என்னும் காரணியால் அதிகரிக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு μ, தயர்களுக்கும் பாதைக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம். உதாரணமாக, $a' = a = 2h$ உம் $\mu = 0{\cdot}9$ உம் ஆயின் நாற்சில்லுத் தடுப்பு $2{\cdot}45$ என்னும் காரணியில் நயத்தையுடையது. $a = a'$ ஆகவிருக்கும்போது இக்காரணி, 2 இனும் அதிகமாக இருக்கமுடியும் என எவ்வாறு அறியப்படுகிறதென்பதைப் பொதுப்படையாக விளக்குக. (C.S.)

30. w நிறையுள்ள இரு சீர்ச் சம ஏணிகள் பலகையொன்றின்மீது நிற்குமொரு படியேணியாக அமையுமாறு முனையொன்றில் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றினிடையேயான கோணம் 2α ஆகும். W நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் உச்சியில் நிற்கிறன். பலகை மெதுவாக முனையொன்றைக் குறித்து ஒருச்சரிகிறது. கிடையுடன் பலகையின் சாய்வு β ஆயின், தான் β,

$$\frac{\mathrm{W} + 2w}{\mathrm{W} + w}\text{ தான் } \alpha$$

வை அடையும்போது இவ்வமைப்பு கவிழுமெனவும், தான் β, உராய்வுக் குணகம் μ வை அடையும்போது நழுவுமெனவும் காட்டுக. (C.S.)

31. முரடான கிடைத் தளமொன்றின்மீது A, A′, A″ என்னும் புள்ளிகளில் முறையே W, W′, W″ (W < W′) என்னும் நிறைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவை AA′, A′A″ என்னும் இலேசான நீளா இழைகளினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AA′A″ விரிகோணம். இது $\pi - \alpha$ இற்குச் சமம். நிறைகள் யாவும் இயங்குந் தறுவாயிலிருக்குமாறு W″ இற்குப் பிரயோகிக்கக் கூடிய மிகக் குறைவான விசை $\mu(\mathrm{W}''^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ என நிறுவுக. இங்கு, $x = \mathrm{W}$ கோசை $\alpha + \sqrt{\mathrm{W}'^2 - \mathrm{W}^2\text{ சைன்}^2\, \alpha}$; μ, உராய்வுக் குணகம். (C.S.)

32. ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது மூன்று சம கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு தங்கியிருக்கின்றன. அதே பொருளினுலான சம கோளமொன்று அவற்றின்மீது சமச்சீராகத் தங்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் குணகம் μ, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ இனும் அதிகமாகவும் பரப்புக்கள் யாவும் சம முரடாகவும் இருப்பின் சமநிலை பேணப்படுமெனக் காட்டுக. (C.S.)

33. $2a$ நீளச் சீர்க் கோல் ACB அதன் நடுப்புள்ளி C உடன் இணைத்த இலேசானதொரு நீளா இழை OC இனுல் முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற் சாய்ந்திருக்குமாறு தாங்கப்படுகிறது. இழையின் மறு நுனி

சுவரில் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சுவரிலிருந்து செங்குத்துத் தூரங்கள் a இலும் a கோசை λ இலும் முனைப்புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வட்டவில்லின் யாதுமொரு புள்ளியில் C ஐ அமையப்பெற்றுக் கோல் தங்கலாமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, உராய்வுக் கோணம். (C.S.)

34. கிடையுடன் $45°$ இற் சாய்ந்துள்ளதொரு முரடான தளம் $\left(\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ மீது தங்கியிருக்கும் W நிறையுடன், தளத்தின் உச்சியில் நிலைப்பட்ட ஒப்பமான வளையம் A இனூடாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மறு நுனியில் நிலைக்குத்தாகத் தொங்குமொரு $\frac{W}{3}$ நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை AW, தளத்தில் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குகிறது. சமநிலையின் பொருட்டு θ இன் இயன்றளவு அதிகமான பெறுமானம் சைன் $^{-1}\frac{1}{3}$ என நிறுவுக. (C.S.)

35. ஒரு சீர்க் கோல் அதன் நுனிகள் ஒரு முரடான வட்டத் தகட்டு வளையத்தின்மீது பொருந்துமாறு எல்லைச் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கிறது. இவ்வளையத்தின் தளம் நிலைக்குத்தானது. நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வு,

$$\text{சைன் } \lambda \ \text{ சைன் } (\theta + \lambda) = \text{கோசை } \theta \ \text{ கோசை}^2\ \alpha$$

என்னும் சமன்பாட்டினாலே தரப்படுகிறதென நிறுவுக. இங்கு λ, உராய்வுக் கோணம்; 2α, கோல் வட்டத்தின் மையத்தில் எதிரமைக்கும் கோணம். (C.S.)

36. $2b$ அகலமும் $2c$ தடிப்புமுள்ள பலகையொன்று a ஆரையுள்ள கிடையுருளையொன்றின் உட்புறத்தில், பலகையின் நீண்ட விளிம்புகள் உருளையின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு, நழுவி விழக்கூடிய உயரத்தில் தங்கியிருக்கிறது. பலகை கிடையுடன் கோணம் θ ஐ ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக. இங்கு,

a சைன் λ கோசை $(\theta - \lambda) = (a$ கோசை $\alpha - c)$ சைன் θ கோசை α ; $\lambda =$ உராய்வுக் கோணம் ; சைன் $\alpha = \frac{b}{a}$. (C.S.)

37. W நிறையும் $2a$ விளிம்புமுள்ள ஒரு சீர்க் கனம் முரடான தளமொன்றின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தளத்தில் W′ நிறையும் $2a$ விட்டமுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோளம், கனத்தின் ஒரு முகம் F இன் மையத்தில் தொட்டுக் கொண்டு தளத்திலே தங்கியிருக்கின்றது. தளம் கனத்தின் முகம் F இற்குச் சமாந்தரமாகத் தளத்திலிருக்கும் கோடொன்றைக் குறித்துப் படிப்படியாக ஒருச்சரிக்கப்படுகின்றது. தொடுகையொவ்வொன்றுக்குமான உராய்வுக் குணகம் $\mu < 1$ ஆயின், கிடையுடன் தளத்

தின் சாய்வு α ஆகவிருக்கும்போது கனம் நழுவுவதனுலும் கோளம் தளத்தில் கீழ்நோக்கி உருளுவதனுலும் சமநிலை குழம்பும் எனக் காட்டுக. இங்கு,

$$\text{தான் } \alpha = \frac{\mu W}{W + (1-\mu)W'}. \qquad \text{(C.S.)}$$

38. B இற் சுயாதீனமாக ஒருமிக்க மூட்டியுள்ளனவும் சமநிறையும் வெவ்வேறு நீளங்களுமுடையனவுமான இரு சீர்க் கோல்கள் AB, BC என்பன கிடைக் கோட்டிலிருக்கும் நிலைப்பட்ட, சமமுரடான இரு முளைகளின் மேலே ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கிடையுடன் அக்கோல்களின் சாய்வுகள் முறையே α, β ஆகும். அவையிரண்டும் நழுவுந் தறுவாயிலிருக்கின்றன. கிடையுடன் அப்பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் சாய்வு θ,

$$2 \text{ தான் } \theta = \text{கோதா } (\beta + \lambda) - \text{கோதா } (\alpha - \lambda)$$

என்பதினுலே தரப்படுகிறதென நிறுவுக. இங்கு λ, முளைகளிலுள்ள உராய்வுக் கோணம். (C.S.)

39. சீர்க் கம்பித்துண்டொன்று இருசமபக்க முக்கோணி ABC வடிவில் வளைக்கப்பட்டுள்ளது. இம்முக்கோணியில், AB = AC. BC முரடான முளையொன்றினைத் தொடுமாறு நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் இக்கம்பி தொங்குகிறது. உராய்வுக் குணகம்,

$$2 \text{ தான் } \tfrac{1}{2}A\ (1 + \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}A)$$

இலும் அதிகமாயின், BC இன் புள்ளி எதுவும் முளையைத் தொடினும் அம்முக்கோணி சமநிலையிலே தங்கியிருக்கும் என நிறுவுக. (C.S.)

40. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமுள்ள இரு பாரமான சீர்க் கோல்கள் AB, AC என்பன A இற் செங்குத்தாகவும் விறைப்பாகவும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவை c ஆரையுள்ள ஒரு நிலைத்த முரடான உருளையின்மீது தங்கியிருக்கின்றன. கோல்களின் தளம் உருளையின் அச்சிற்குச் செங்குத்தானது. $c < \frac{a}{2}$ ஆகவும் தான் ϵ, கோல்களுக்கும் உருளைக்கு மிடையேயான உராய்வுக் குணகமாகவும் α, எல்லைச் சமநிலையில் நிலைக்குத்துடன் கோணம் BAC இன் இருகூறுக்கி அமைக்கும் கோணமாகவும் இருப்பின்,

$$c \text{ சைன் } (\alpha + 2\epsilon) = (a - c) \text{ சைன் } \alpha$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

41. ஒரு வட்டத்தட்டின் ஆரை OA ஐ விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. இவ்வட்டம் உள்ளடக்கும் தட்டு நீக்கப்படுகின்றது. எஞ்சியிருக்கும் திண்மம், மையம் O இல் 2α என்னும் கோணத்தை எதிரமைப்பனவும் கிடைத் தளமொன்றில் இருப்பனவுமான இரு முரடான

முனைகளின்மீது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே தங்கியிருப்பின், OA, நிலைக்குத்துடன் ஆக்கக்கூடிய அதியுயர்ந்த கோணம்,

$$\text{சைன்}^{-1}\,(3\ \text{சைன்}\ 2\lambda\ \text{சீக}\ \alpha)$$

எனக் காட்டுக. இங்கு λ, முனைகளிலுள்ள உராய்வுக் கோணம். (C.S.)

42. W நிறையுள்ள ஒரு மெல்லிய சீர் நேர்கோல் PQ அதனொரு பகுதி, கிடை மேசையொன்றின் மீதிருக்கும் 4W நிறையுள்ள ஒரு சீர் உளைச்சாடியின் உட்புறத்திலும், மற்றைய பகுதி வெளிப்புறத்திலும் இருக்குமாறு தங்கியிருக்கிறது. கோல் அதன் முனை P சாடியின் முரடான வளைபரப்பை அழுத்துமாறு சாடியின் ஒப்பமான விளிம்பைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்கிறது. ஒரே நேரத்தில் கோல் நழுவுந் தறுவாயிலும் சாடி கவிழுந் தறுவாயிலுமிருப்பின், கோல் நிலைக்குத்துடன்,

$$\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\ \text{கோசை}^{-1}\,(\tfrac{1}{3}\ \text{கோசை}\ \lambda)$$

என்னும் கோணத்தை ஆக்குகிறதென நிறுவுக. இங்கு λ, உராய்வுக் கோணம். (C.S.)

43. உச்சியிற் பிணைத்த இரு சம ஏணிகள் முரடான தரையொன்றின்மீது, 2θ உச்சிக் கோணமுள்ள இருசமபக்க முக்கோணி யொன்றைத் தரையுடன் அமைக்குமாறு தங்கியிருக்கின்றன. அவற்றிலொன்றின் நிறையின் n மடங்கு நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் அவற்றிலொன்றில் மெதுவாக ஏறுகிறான். அவன் உச்சியிலிருந்து x தூரத்திலிருக்கும் போது தரையிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கணக்கிட்டு,

$$\frac{nx}{l} = \frac{2\mu - \text{தான்}\ \theta}{\mu - \text{தான்}\ \theta} + n$$

ஆக இருக்கும்போது ஏணி நழுவத் தொடங்குகிறதெனக் காட்டுக. (C.S.)

44. கிடைக் கோடொன்றில் செங்கோணங்களில் ஒன்றையொன்று வெட்டும் முரடான இரு தளங்கள் கிடையுடன்

$$\alpha,\ \frac{\pi}{2} - \alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{4}\right)$$

என்னும் கோணங்களை ஆக்குகின்றன. ஒரே கிடைத் தளத்தில் அமைந்திருக்கும் அச்சுக்களையுடைய முரடான இரு சமவுருளைகள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டும் ஒவ்வொன்றும் தளமொன்றைத் தொட்டுக் கொண்டும் தங்கியிருக்கின்றன. பரப்புக்கள் யாவும் சமமுரடானவையாயின், உராய்வுக் குணகம்,

$$\frac{\text{கோசை}\ 2\alpha}{\text{சைன்}\ \alpha + \text{கோசை}\ \alpha + \text{சைன்}\ 2\alpha}$$

இலும் குறைவானதன்றென நிறுவுக. (C.S.)

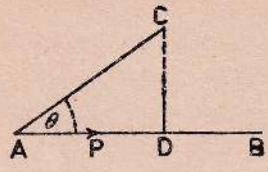
45. ஒரே கிடைத் தளத்தில் 3 அடி தூரத்திலுள்ள P, Q என்னுமிரு தாங்கிகள் மீதிருக்கும் 8 அடி நீளச் சீர்ப் பலகை APQB சமநிலையிலுள்ளது. A இல் பலகையின் நீளத்திற்குச் செங்குத்தாகப் பலகையிற் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு கிடை விசை சீராகப் பருமனிற் கூட்டப்படுகிறது. அத்தாங்கிகள் சமமுரடானவையாயின், நீளம் AP, 1 அடிக்கும் 3 அடிக்குமிடையே இருக்குமானல், பலகை P இல் நழுவுவதனுல் சமநிலை குழம்புமென நிறுவுக. (H.S.D.)

அதிகாரம் VI.

வேலை — பொறிகள்.

§117. வேலை.

விசையொன்று அதன் பிரயோகப் புள்ளியை இயக்கும்போது வேலை செய்வதாகச் சொல்லப்படுகிறது. **மொத்த வேலை, விசையினதும் பிரயோகப் புள்ளி விசையின் திசையிற் செல்லுந் தூரத்தினதும் பெருக்கத்திஞல் அளவிடப்படுகிறது.**



படம் 175.

இவ்வாருக, A இலுள்ளதொரு துணிக்கையின்மீது திசை AB (படம் 175) இலே தாக்குமொரு விசை P யானது துணிக்கையை A இலிருந்து B இற்கு இயக்கின், இவ்விசையிஞற் செய்யப்பெறும் வேலை $P \times AB$ இஞல் அளவிடப்படுகின்றது.

எனினும், துணிக்கை A இலிருந்து C இற்கு இயங்கின், செய்த வேலை $P \times AC$ அன்று, P இனதும் AB மீது AC இன் எறியத்தினதும் பெருக்கம், அ–து. $P \times AD$ அல்லது $P \times AC$ கோசை θ ஆகும். இங்கு $BAC = \theta$.

P தாஞக தன் சொந்தத் தாக்கக் கோட்டின் திசையில் மட்டுமே இயக்கத்தை உண்டுபண்ணலாமாதலின், திசை DC இல் ஏற்படும் இயக்கத் திற்கு வேறேதாவதொரு காரணம் இருக்க வேண்டுமென்பது தெளிவு.

$$P \times AC \text{ கோசை } \theta = P \text{ கோசை } \theta \times AC,$$

அ—து. P இஞற் செய்யப்பெற்ற வேலை, திசை AC இல் P இன் துணித்த பகுதியிஞற் செய்யப்பெற்ற வேலைக்குச் சமமென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

இடப்பெயர்ச்சியின் திசை விசையினது துணித்த பகுதியின் திசைக்கு முரணுனதாயின், விசை மறைவேலை செய்வதாகக் கூறலாம். அல்லது விசைக்கு எதிராக வேலை செய்யப்படுவதாகக் கூறலாம். எனவே, புவியீர்ப் பின் தாக்கம் காரணமாக நிறையொன்று இறங்கின் புவியீர்ப்பிஞல் வேலை செய்யப்படுகிறது ; அந்நிறை உயர்த்தப்படும்போது புவியீர்ப் பிற்கெதிராக வேலை செய்யப்படுகிறது.

§118. **வேலையின் அலகுகள்.**

விசை இரு. நிறையிலும் தூரம் அடியிலுமிருப்பின், வேலை **அடி யிருத்தலில்** (அடி இரு.) இருக்கும்.

விசை இருத்தலியிலும் தூரம் அடியிலுமிருப்பின், வேலை **அடியிருத் தலியில்** இருக்கும்.

விசை தைனிலும் தூரம் சதம மீற்றரிலுமிருப்பின், வேலை **ஏக்கில்** இருக்கும்.

எனவே, 1 அடி இரு. ஆனது 1 இரு. நிறை விசையொன்றினால் அதன் பிரயோகப் புள்ளியை **அதன் திசையில் 1 அடியினூடாக** இயக்கச் செய்த வேலையாகும். 1 இருத்தலை 1 அடியினூடாய் நிலைக்குத்தாக உயர்த்துதலே இவ்வேலையாகும்.

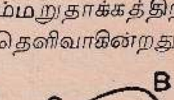
§119. **சக்தி.**

ஒரு பொருளின் சக்தி அதன் வேலை செய்யும் திறமையாகும். அதோடு இது பொருள் செய்யக்கூடிய மொத்த வேலையினால் வேலையலகுகளில் அளவிடப்படுகின்றது. இயக்கவியலில், இரு வகைச் சக்திகளுடன் நாம் தொடர்புகொள்ள வேண்டும்.

(i) **இயக்கச் சக்தி.**—பொருளின் இயக்கம் காரணமான இச்சக்தி பொருள் ஓய்வுநிலைக்குக் கொண்டுவரப்படுமுன் தடையிற்கெதிராக அது செய்யக் கூடிய வேலையினால் அளவிடப்படுகிறது.

(ii) **நிலைச் சக்தி.**—பொருள் யாதுமொரு நியமத் தானத்திலிருந்து இடம்பெயர்க்கப்படுவதன் காரணமான இச்சக்தி அந்நியமத் தானத்திற்குத் திரும்புதற்குப் பொருளினால் செய்யப்படக்கூடிய வேலையினால் அளவிடப் படுகிறது, உ—ம். உயர்த்தியவொரு நிறை. நிலையியலில் பின் சொல்லிய வகையைப் பற்றியே நாம் ஆராயவேண்டும். இனி இவ்வகையினை முற்றாக எடுத்துநோக்குவோம்.

§120. துணிக்கையொன்றின்மீது செயற்படும் ஒருவிசை துணிக்கை விசை யின் திசையில் இயங்கும்போது மட்டுமே வேலையைச் செய்வதனால், துணிக்கையொன்று **ஒப்பமான** பரப்பொன்றின் வழியே இயங்கும்போது துணிக்கைமீது அப்பரப்பின் மறுதாக்கத்தினாலோ அம்மறுதாக்கத்திற் கெதிராகவோ வேலையேதும் செய்யப்படவில்லை என்பது தெளிவாகின்றது.



படம் 176.

குறித்த சில விசைகளுக்குட்பட்ட ஒரு துணிக்கையை எண்ணுக. இத்துணிக்கை யாதுமொரு தானம் A (படம் 176) இலிருந்து இன்னொரு தானம் B இற்கு, ஒரு குறித்த பாதை ACB வழியே செல்லுமாறு **ஒப்பமான** விகாரப் படைகளினால் வழிப்படுத்தப்படுவதாகக் கொள்க. குறித்த இவ்விசைகளினால் ஒரு குறித்தளவு வேலை செய்யப்படும். பொதுவாக, இந்த அளவு எண்ணப்பட்ட பாதையின்மீது சார்ந்திருக்கும்,

அ—து. A இலிருந்து B இற்குப் பாதை ADB வழியே போக விசைகளினுற் செய்த வேலை பாதை ACB இற்கானதிலும் மாறுபட்டது.

இப்போது ADB இற்கான வேலை ACB இற்கான வேலையிலும் கூடுதலாயின், துணிக்கையை B இலிருந்து A இற்குப் பாதை BCA இனுற் செல்லுமாறு கட்டாயப்படுத்தியும் குறித்த விசைகளினுலே தாக்கப்பட்டு பாதை ADB இற் திரும்புமாறுவிட்டும், குறித்த விசைகளுக்கு எதிராகச் செய்த வேலையிலும் மிகுதியான வேலையை அவ்விசைகள் செய்யுமாறு செய்யலாம். அல்லது அத்தொகுதி சக்தியின் நிலையான பிறப்பிடமாக இருக்கும்.

புவியீர்ப்புப் போன்ற இயற்கை விசைகளுடன் இது இயலாததென நெடுங்கால அனுபவத்திலிருந்து எமக்குத் தெரியும். எனவே இவ்விசைகளுடன், ஒரு தானத்தில் ஓய்விலிருக்கும் துணிக்கையொன்றை வேருெரு தானத்தில் ஓய்விருக்குமாறு கொண்டுவருவதற்குத் தேவையான வேலை கணிக்கப்பட்ட பாதையுடன் சார்பற்றதாக இருக்கவேண்டும் என முடிவு செய்கிருேம்.

A, ஒரு நியமத் தானமாக எடுக்கப்படின், துணிக்கை யொன்றை A இலிருந்து B இற்கு இயக்குதற்குத் தேவையான வேலை ஒரு குறித்த அளவினதாகவும் பாதையுடன் சார்பற்றதாகவுமிருக்கும். இத்துணிக்கை A இற்கு மீளும்போது இந்த அளவு வேலையை மட்டுமட்டாகச் செய்ய முடியும். இவ்வேலை அளவு B இலே துணிக்கையின் நிலைச் சக்தியாகும்.

எனவே, W நிறையுள்ள ஒரு பொருள் புவியீர்ப்பின் தாக்கத்தின்கீழ் நிலைக்குத்துத் தூரம் h இனூடாக இறங்கும்போது புவியீர்ப்பினுற் செய்யப்படும் வேலை Wh ஆகும். அப்பொருளை h என்னும் உயரத்தினூடாக நிலைக்குத்தாக உயர்த்தத் தேவையான வேலையின் அளவும் இதுவேயாகும்.

தேவையான வேலையும் அப்பொருள் ஒப்பமான சாய்தளமொன்றின் சரிவுவழியே மேனேக்கி இயக்கப்படுமிடத்து, தளத்தின் நிலைக்குத்துயரம் h ஆயின், செய்யப்படும் வேலையும் ஒன்றுகும். தளம் வளைவாக இருப்பினும் மாற்றமேதும் எற்படாது.

உயர்த்திய நிறைகளிடத்து நியமத் தானம், எடுத்துநோக்கிய வகையின் நிபந்தனைகளுக்குக் கீழ்ப்பட அடையக்கூடியதும் நிலத்துடன் சார்பானதுமான கீழ்மட்டமாகும்.

ஈர்த்த மீள்தன்மை நாண் அல்லது வில் நிலைச் சக்தியின் இன்னேர் உதாரணமாகும். அதை நீட்ட வேலை செய்யப்படவேண்டும். அதோடு அது தனது இயற்கை நீளத்திற்குத் திரும்பும்போதும் அவ்வேலைக்குச் சமமான அளவு வேலை செய்யப்படும்.

§121. மீள்தன்மை இழையில் இழுவை.

மீள்தன்மை இழையொன்றின் இழுவை இழையின் இயற்கை நீளத்திற்கு அப்பால் அதன் நீட்சி மாற மாறுகிறதெனப் பரிசோதனை மூலமாகக் காணப்பட்டிருக்கிறது. ஹூக் (Hooke) என்பவரால் வெளிப்படுத்தப்பட்ட இவ்வுண்மை **ஹூக்கின்** விதி என வழக்கமாகக் கூறப்படுகின்ற விதியின் வாயிலாக வெளியிடப்படும்.

இவ்விதி விளக்கமாகப் பின்வருமாறு கூறப்படலாம் :—

மீள்தன்மையிழையொன்றின் இயற்கை நீளம் l ஆகவும் ஈர்த்த நீளம் l' ஆகவும் இருப்பின், இழுவை T,

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E}}{l}(l' - l)$$

இனலே தரப்படுகிறது. இங்கு E, இழையின் தடிப்பின்மீதும் ஆக்கப் பொருளின்மீதும் சார்ந்துள்ள ஒரு மாறிலி.

வழக்கமாக E, இழையின் **மீள்தன்மை மட்டு** எனப்படும். இது பொதுவாக λ இனற் குறிக்கப்படும்.

இழையின் இயற்கை நீளத்தை இரட்டிக்க இழையை ஈர்ப்பதற்குத் தேவையான இழுவை E ஆகும் என்பது தெளிவு.

§122. மீள்தன்மையிழையை ஈர்க்குமிடத்துச் செய்த வேலை.

குணகம் E உம் இயற்கை நீளம் l உம் ஆயின், பின்பு x என்னும் நீட்சிக்கு,

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E}}{l}x.$$

இழையை மேலும் தூரம் dx ஊடாக ஈர்க்குமிடத்துச் செய்த வேலை

$$\mathrm{T}dx \text{ அல்லது } \frac{\mathrm{E}}{l}x\,dx$$

ஆகும். இங்கு, dx சிறிதாக இருப்பதனல் T, dx எங்கும் மாறிலியாகவுள்ளது எனக் கொள்ளப்பட்டது.

எனவே, நீட்சியை x_1 இலிருந்து x_2 இற்குக் கூட்டுமிடத்துச் செய்த வேலை

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{E}}{l}x\,dx = \frac{\mathrm{E}}{l}\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{E}}{l}\frac{x_2 + x_1}{2}(x_2 - x_1).$$

இங்கு, இறுதி இழுவை $\frac{E}{l}x_2$ உம் தொடக்க இழுவை $\frac{E}{l}x_1$ உம் ஆகும்.

$$\therefore \frac{E}{l}\frac{x_2+x_1}{2}$$

தொடக்க, இறுதி இழுவைகளின் சராசரி.

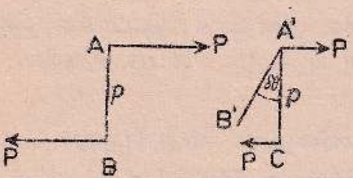
அதோடு (x_2-x_1), உண்டாக்கிய நீட்சி.

எனவே, **செய்த வேலை தொடக்க, இறுதி இழுவைகளின் சராசரியின தும் நீட்சியினதும் பெருக்கமாகும்.**

இதை இழுவையையும் நீட்சியையும் கொண்ட ஒரு வரைபு மூலமாகவும் காட்டலாம். இவ்வாறு பெற்ற வரைபு ஒரு நேர்கோடாகும். அதோடு, செய்த வேலை வரைபினுள்ளடங்கிய பரப்பாகும்.

§123. ஓர் இணையாற் செய்யப்படும் வேலை.

இணையின் விசைகளொவ்வொன்றையும் P எனவும் புயம் AB (படம் 177) p நீளமானதெனவும் கொள்க.



படம் 177.

AB, நிலை A'B' இற்கு இயங்குவதாகக் கொள்க. இங்கு, AB இற்கும் A'B' இற்கும் இடைக்கோணம் $\delta\theta$ என்னும் சிறிய கோணமாகும்.

AB இன் இயக்கம் இரு கட்டங்களில் நடைபெறுவதாக நாம் எண்ண லாம்.

முதலில், AB, A'C என்னும் நிலைக்கு வருமாறு விசைகள் தமக்குச் சமாந்தரமாக இயங்குவதாகக் கொள்க. இப்பெயர்ச்சியின் போது P என்னும் சம, முரண் விசைகளினாற் செய்யப்படும் வேலை பூச்சியமாகும்.

இப்போது விசைகள், A' பற்றிக் கோணம் $\delta\theta$ ஊடாகத் திரும்புவ தாகக் கொள்க.

A' இலுள்ள விசை P அதன் பிரயோகப் புள்ளி இயங்காமல் இருத்தலி னால் வேலையெதையும் செய்வதில்லை. C இல் உள்ள P என்னும் மற்றைய விசையினது பிரயோகப்புள்ளியின் பெயர்ச்சி $p\delta\theta$ ஆகும். ஏனெனில் $\delta\theta$ மிகச் சிறியது. ஆகையால் செய்த மொத்தவேலை $Pp\delta\theta$, அ–து. **இணையின் திருப்புதிறனினதும் திரும்பிய மூலகக் கோணத்தினதும் பெருக்கம்.**

இணையின் திருப்புதிறன் M மாருதிருப்பின் கோணம் θ இனூடாகத் திரும்பும்போது செய்த வேலை

$$\int_0^\theta \mathrm{M}d\theta = \mathrm{M}\theta,$$

அ—து. இணையின் திருப்புதிறனினதும் திரும்பிய கோணத்தினதும் பெருக்கம்.

பயிற்சி XXVI.

1. W நிறையுள்ள ஒப்பமான சீர்க் கனமொன்று நான்கு விளிம்புகள் கிடையாகவும் அவற்றிலிரண்டு ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்திலு மிருக்குமாறு இலேசான சீர் மீள்தன்மை வாரொன்றினுலே தாங்கப்படுகிறது. வார் குறித்த இரு விளிம்புகளிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே கிடைக் கோடொன்றின் வழியே தாங்கப்பட்டுள்ளது. வாரின் இயற்கை நீளம் கனத்தின் ஒரு விளிம்பிலும் நான்கு மடங்கானது. சமநிலையில் வாரின் மேற்பாகங்கள் தத்தமக்கிடையே 60° கோணத்தை ஆக்குகின்றன. மீள்தன்மை மட்டு கிட்டத்தட்ட 2·8 W என நிறுவுக. (N.U.4.)

2. 3 அடி இயற்கை நீளமுள்ள மீள்தன்மை இழையொன்று 10 இரு. நிறையொன்றினுல் 4 அடிக்கு ஈர்க்கப்படக்கூடியது. அதன் இரு நுனிகளும் ஒரே கிடைக் கோட்டில் 3 அடி 9 அங்குல தூரத்திலிருக்கும் A,B என்னு மிரு புள்ளிகளில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அதன் நடுப்புள்ளியுடன் 15 இரு. திணிவொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அந்நிறை சமநிலையிருக்கும் போது AB இற்குக் கீழாகவுள்ள ஆழத்தைக் காண்க. (C.W.B.)

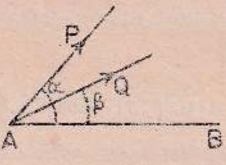
3. w நிறையும் a நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் அதன் ஒரு முனையிலிருக்கும் ஒரு கிடைப் பிணையலைப் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக் கூடியது. மற்றைய முனை, b இயற்கை நீளமுள்ள இலேசான மீள்தன்மையிழையொன்றினுல் அப்பிணையலுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே a தூரத்திலிருக்கும் புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழை w இற்குச் சமமான விசையொன்றினுல் ஈர்க்கப்படும்பொழுது அதன் நீளம் a ஆகுமாறு இழையின் மீள்தன்மை அமைந்துள்ளது. சமநிலையின் தானத்தில் நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வைக் கண்டு, இழையிலேற்படும் இழுவை பின்பு

$$\frac{wb}{a+b}$$

இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. (H.S.D.)

4. வில்லொன்றை அமுத்தத் தேவையான விசை, அமுக்கம் அல்லது நீட்சியின் அளவு மாற மாறுகிறது. ஒரு வில்லினை 1 அங்குலத்திற்கு அமுக்குதற்குத் தேவையான விசை 20 இரு. நிறையாயின் அதனை மேலும் 1 அங்குலம் அமுத்தத் தேவையான இரு. நிறை வேலையைக் காண்க. (H.S.C.)

§124. துணிக்கையொன்றைத் தாக்குவனவும் பருமனிலும் திசையிலும் மாறுதிருப்பனவுமான இரு விசைகளின் விளையுளினுற் செய்யப்பெறும் வேலை, அவ்விசைகள் தனித்தனியாகச் செய்த வேலையளவுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.



படம் 178.

A (படம் 178) இலுள்ள துணிக்கையைப் படத்திற் காட்டியவாறு தாக்கும் இரு விசைகளையும் P, Q என்க. அத்துணிக்கை B இற்குப் பெயர்க்கப் பட்டிருப்பதாகக் கொள்க.

AB உடன் P, Q என்பன ஆக்கும் கோணங்களை முறையே α, β என்க.

P உம் Q உம் செய்யும் வேலையளவுகளின் கூட்டுத்தொகை,

$$P \text{ கோசை } \alpha . AB + Q \text{ கோசை } \beta . AB = (P \text{ கோசை } \alpha + Q \text{ கோசை } \beta) AB.$$

ஆனல் P கோசை α + Q கோசை β, AB வழியே P, Q என்பவற்றினது துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். அதோடு, இது AB வழியே P இனதும் Q இனதும் விளையுளின் துணித்த பகுதிக்குச் சமன்.

[illegible], மொத்த வேலை (P கோசை α + Q கோசை β) AB, விளையுளி [illegible]யப்பெற்ற வேலையுமாகும்.

இம்முடிவு ஒரு துணிக்கையின்மீது செயற்படும் விசைகளின் எத்தகைய எண்ணிக்கைக்கும் பொருந்தும் என்பது தெளிவு.

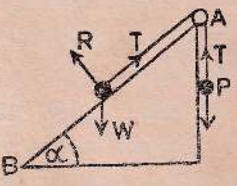
§125. மாயவேலை.

பல விசைகளினுலே தாக்கப்படுமிடத்து துணிக்கையொன்று சமநிலையி லிருப்பினும், விசைகள் பருமனிலும் திசையினும் மாறுதிருக்குமிடத்து அத்துணிக்கை யாதுமொரு திசையிற் பெயர்க்கப்படினும், அவ்விசைகளின் விளையுள் பூச்சியமாகையால் அவ்விசைகளினுற் செய்யப்பெறும் மொத்த வேலை பூச்சியமாகு மென்பது முன்னைய பந்தியிலிருந்து தெரியவருகின்றது.

ஒய்வு நிலையிலுள்ள பொருளொன்று **சிறிய** தூரமொன்றினூடாகப் பெயர்க்கப்படுவதாகக் கொண்டு, இதன் விளைவாக அப்பொருளின்மீது செயற் படும் விசைகள் இயங்கும் சிறிய தூரங்களைக் கண்டும், அவ்விசைகளினுற் செய்யப்பெறும் மொத்த வேலையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்தியும் நிலை யியலில் முடிவுகளை எளிதாக உய்த்தறியலாம். இப்பெயர்ச்சி **மெய்யான** தன்றுகையால் இம்முறையிற் பயன்படுத்தப்படும் கோட்பாடு **மாய வேலைக் கோட்பாடு** எனப்படும்.

A_1 என்னும் புள்ளியிலிருக்கும் துணிக்கையொன்றின்மீது செயற்படும் ஒரு விசை P, அதை A_2 இற்குப் பெயர்ப்பின், அதோடு dp, P இன் திசைமீது A_1A_2 இன் எறியமுமாயின், P இன் மாயவேலை Pdp ஆகும்.

§126. ஓர் ஒப்பமான சாய்தளம் AB (படம் 179) இன் உச்சியிலுள்ள ஒப்பமான கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையினால் சுயாதீனமாக தொங்கும் P என்னும் நிறைக்கு இணைக்கப்பட்டு, W நிறையொன்று தளத்தின்மீது தங்குகிறதெனவும், நிறைகள் ஓய்வு நிலையிலிருக்கு மாறு P இற்கும் W இற்குமிடையேயான தொடர் பைக் காணவேண்டு மெனவும் கொள்க.



படம் 179.

தளத்தின் சாய்வை α எனவும், இழையின் இழுவையை T எனவும், தளத்தின் மறுதாக்கத்தை R எனவும் கொள்க. நிறைகளின்மீது செயற் படும் விசைகள் காட்டப்பெற்றவாறாகும்.

P கீழ்நோக்கி x என்னும் தூரம் இடம்பெயரின், W அதே தூரத்திற்கு அகன்று செல்லும்.

இழுவை T, W மீது நேர்வேலை Tx ஐயும் P மீது மறை வேலை Tx ஐ யும் செய்கின்றது. அதோடு இவை சமப்படுகின்றன.

R, W இனது பெயர்ச்சியின் திசைக்குச் செங்குத்தானதால் அது வேலை யெதையும் செய்வதில்லை.

எனவே அவ்விரு நிறைகளின்மீதும் புவியீர்ப்பினாற் செய்யப் பெறும் மொத்த வேலை பூச்சியமாகும். இன்னும் விளக்கமாகக் கூறுமிடத்து, புவி யீர்ப்பினால் P மீது செய்யப்பெறும் வேலை புவியீர்ப்புக்கெதிராக W மீது செய்யப்பெறும் வேலைக்குச் சமமாகும்.

W செல்லும் நிலைக்குத்துத் தூரம் x சைன் α ஆகும்.

$$\therefore\ Px = Wx \text{ சைன் } \alpha,$$

$$\therefore\ P = W \text{ சைன் } \alpha.$$

§127. இனிப் பொறிகள் எனப்படுவனவற்றின் சில எளிய உதாரணங் களைப் பார்ப்போம். இவ்வகைகளில் உராய்வேதுமில்லாதபோது விசைகளி னிடையேயான தொடர்பைக் காணும் பொருட்டும் மாயவேலைக் கோட்பாட் டைப் பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகள் பற்றிய பொது வகையினிடத்து இக்கோட்பாட்டின் பயன் பின் அதிகாரமொன்றில் ஆரா யப்படும்.

§128. பொறி என்பது ஓர் உபகரணம். இவ்வுபகரணத்தில், ஒரு பகுதியில் **வலு அல்லது எத்தனம்** எனப்படும் விசையொன்றைப் பிரயோ

கித்துப் பொறியின்மீது வேலையும், இன்னொரு பகுதியில் **நிறை** அல்லது **தடை** எனப்படும் யாதுமொரு விசையை வெல்லுமிடத்துப் பொறியினால் வேலையும் செய்யப்படுகிறது.

மிகப்பலவிடங்களில், ஒரு சிறிய விசையையோ எத்தனத்தையோ பிரயோகித்துப் பெரிய விசையொன்றை வெல்லுமாறு பொறி அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எனவே, பந்தி **126** இல் எடுத்துநோக்கிய சாய்தளம் ஓர் எளிய பொறியாகக் கருதப்படலாம். இப்பொறியில், எத்தனம் **P**, **W** என்னும் நிறையை உயர்த்தப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. **W** ஐச் சமநிலையிற் பேணத் தேவையான விசை **P**, **W** சைன் α எனக் காணப்பட்டுள்ளது ; இதிலும் சிறிது மிகுதியான யாதுமொரு விசை, **W** ஐத் தளத்தின் மேனோக்கி இயக்கும்.

P, x என்னும் தூரம் செல்லும்போது, **W**, நிலைக்குத்தாக மதிப்பிடப் படும் சிறிய தூரம் x சைன் α இற்கூடாகச் செல்லுமென்பதை நாம் கவனிக்கிறோம். இந்நிலைக்குத்துத் தூரமே நமக்குத் தேவை.

எத்தனம் நிறையிலும் குறைவாகவிருக்கும் எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களிலும் அது எப்பொழுதும் அதிகத் தூரம் செல்லவேண்டும்.

இடையிடையே, கூடிய அசைவினைத் தருமாறு பொறியொன்று அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விடத்து எத்தனம் அசைந்த நிறையிலும் அதிகமாக இருக்கவேண்டும்.

§129. **P** என்னும் விசை ஒரு பொறியிற் பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து, அதனை **W** என்னும் விசையை உஞற்றுமாறு செய்யின், விகிதம் $\frac{W}{P}$ பொறியின் **பொறிமுறை நயம்** எனப்படும். எத்தனம் **P** செல்லுந் தூரத்திற்கும் நிறை **W** செல்லுந் தூரத்திற்குமிடையேயான விகிதம் **வேக விகிதம்** எனப்படும்.

உராய்வேதுமில்லையாயின், அதோடு பொறியின் பகுதிகள் நிறையற்றனவாயின், வேலைக் கோட்பாட்டின்படி,

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P} \text{ இயங்கும் தூரம்}$$

$$= \mathbf{W} \times \mathbf{W} \text{ இயங்கும் தூரம்},$$

$$\therefore \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P} \text{ இயங்கும் தூரம்}}{\mathbf{W} \text{ இயங்கும் தூரம்}} = \text{வேக விகிதம்},$$

அ–து. நிறையற்ற பகுதிகளையுடையதும் உராய்வேதுமில்லாததுமான ஓர் இலட்சியப் பொறியினிடத்து,

$$\text{பொறிமுறை நயம்} = \text{வேக விகிதம்}.$$

உராய்வற்ற நடைமுறைப் பொறிகளிடத்து, எத்தனம் P இவ்வுராய்வினை வெல்ல யாதுமொரு வேலையைச் செய்யவேண்டும், அ–து. P இனுற் செய்யப்படும் வேலை W மீது செய்யப்பெறும் வேலையைவிட அதிகமாகும்.

§1ⁿ7. பொறியொன்றின் **திறன்.**

$$\frac{\text{பொறியினுற் செய்யப்பெறும் பயனுள்ள வேலை}}{\text{பொறிக்கு வழங்கப்படும் வேலை}}$$

எனும் விகிதத்தினுல் மதிப்பிடப்படுகிறது,

எனவே, ஒப்பமான இலட்சியப் பொறியொன்றினிடத்து திறன் ஒன்றுகும். திறனைத் தரும் விகிதம் நூற்றுவீதமாக அடிக்கடி எடுத்துரைக்கப்படுவதனுல், ஒப்பமான பொறியொன்றின் திறன் 100 சத வீதமாகும்.

ஒரு நிறை W ஐ உயர்த்தத் தேவையான எத்தனம் P ஐயும், முறையே P இனுலும் W இனுலும் செல்லப்பெறும் தூரங்கள் x, y ஐயும் அளந்து பரிசோதனைமூலமாகத் திறன் காணப்படவேண்டும்.

$$\text{திறன்} = \frac{\mathrm{W}y}{\mathrm{P}x},$$

$$= \frac{\text{பொறிமுறை நயம்}}{\text{வேக விகிதம்}}.$$

மிகப்பலவிடங்களில் திறன் சுமைக்கு நேர் விகிதசமன்.

பொறியுடன் தொடர்புடையதும் அதன் பரிமாணங்களிலிருந்து **கணிக்கக்** கூடியதுமான கணியம் வேகவிகிதமேயாகுமென்பது கவனிக்கப்படத்தக்கது.

ஒப்பமான இலட்சியப் பொறியைத்தவிர ஏனைய இடங்களில் பொறிமுறை நயமும் திறனும் பரிசோதனைமூலமாகக் காணப்படவேண்டும்.

உண்மைப் பொறிகளிடத்து

$$\mathrm{P} = a + b\mathrm{W}$$

வடிவ ஏகபரிமாணத் தொடர்பொன்றினுல் W, P ஆகியன இணைக்கப்பட்டுள்ளன எனக் காணப்பட்டிருக்கிறது. இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகள்.

இத்தொடர்பு அடிக்கடி " பொறி விதி " எனப்படும்.

$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{W}}{a + b\mathrm{W}} = \frac{1}{\frac{a}{\mathrm{W}} + b}.$$

W கூட, பகுதியெண் குறையும் ; $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{P}}$ கூடும், அ–து. திறன் சுமையுடன் கூடுகிறது.

11—R 13456 (10/63)

உதாரணம்.

பாரமான நிறைகளைத் தூக்குதற்குரிய ஒரு பொறியின் வேகவிகிதம் 16 ஆகும். இதைக் கொண்டு 56 இரு., 112 இரு. சுமைகளைத் தூக்குதற்கு முறையே 11 இரு., 19 இரு. எத்தனங்கள் தேவையெனக் காணப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் திறன் யாது ? சுமைக்கும் எத்தனத்துக்கும் வரைந்த வரைபு ஒரு நேர்கோடாகுமெனக் கொண்டு, 224 இருத்தலைத் தூக்கத் தேவையான எத்தனத்தைக் காண்க.

முதற் சந்தர்ப்பத்தில் பொறிமுறை நயம் $\frac{56}{11}$; இரண்டாம் சந்தர்ப்பத்தில் $\frac{112}{19}$.

$$\text{திறன்} = \frac{\text{பொறிமுறை நயம்}}{\text{வேகவிகிதம்}} \text{ என்பதனால்,}$$

திறன்கள்
$$\frac{56}{11 \times 16} \text{ உம், } \frac{112}{19 \times 16} \text{ உம் ஆகும்,}$$

அல்லது,
$$\frac{7}{22} \text{ உம், } \frac{7}{19} \text{ உம் ஆகும்.}$$

சதவீதமாக எடுத்துரைக்குமிடத்து, இவை 31·8 சதவீதமும் 36·8 சதவீதமுமாகும்.

W, P ஆகியவற்றினிடையேயான தொடர்பு ஏகபரிமாணமானதென்பதால்,

$$P = a + bW \text{ (இங்கு } a, b \text{ ஆகியன மாறிலிகள்)}$$

எனக் கொண்டு,

$$11 = a + 56\,b,$$
$$19 = a + 112\,b.$$
$$\text{இதிலிருந்து } b = \frac{1}{7}, \quad a = 3.$$
$$\therefore P = 3 + \frac{W}{7},$$
$$W = 224 \text{ ஆகும்போது,}$$
$$P = 3 + 32$$
$$\therefore P = 35 \text{ இரு. நிறை.}$$

§131. ஒரேயொரு இழையுடன் கூடிய கப்பித் தொகுதி.

இத்தொகுதியில் கப்பிகளையுடைய இரு கப்பிதாங்கிகளுள்ளன ; மேற் கப்பிதாங்கி ஒரு தாங்கியில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அசையக்கூடியதான கீழ்க் கப்பிதாங்கியுடன் நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

படம் 180A கப்பிதாங்கியொவ்வொன்றிலும் சம எண்ணிக்கைக் கப்பிகளிருக்கும் ஒரு தொகுதியைக் காட்டுகின்றது ; படம் 180B, மேற் கப்பிதாங்கியி

ளுள்ள கப்பிகளின் எண்ணிக்கை கீழ்த்தாங்கியிலுள்ளனவற்றின் எண்ணிக்கையிலும் அதிகமாக இருக்குமொரு தொகுதியைக் காட்டுகின்றது.

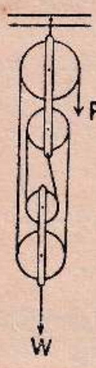
இழையின் நுனியொன்று, முதற் சந்தர்ப்பத்தில் மேற் கப்பிதாங்கியுடனும் இரண்டாம் சந்தர்ப்பத்தில் கீழ்த் தாங்கியுடனும் இணைக்கப்படவேண்டும்.

P இற்கும் W இற்குமிடையேயான தொடர்பை,

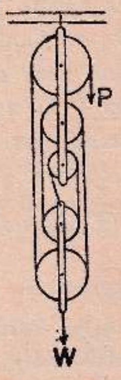
(i) கீழ்க் கப்பிதாங்கியின்மீது செயற்படுவனவும் இழைகளிலுள்ளனவுமான இழுவைகளை எடுத்துநோக்கி, அல்லது

(ii) வேலைக் கோட்பாட்டின் மூலமாக, இரு வழிகளிற் பெறலாம். கீழ்க் கப்பிதாங்கியின் நிறையை w என்க. அதோடு உராய்வினைத் தவிர்க்க.

(i) கப்பிகள் ஒப்பமானவையாகையால் இழையெங்கும் இழுவை ஒரேயளவினது. இது P இற்குச் சமன்.



படம் 180A.



படம் 180B.

கீழ்த் தாங்கியில் n பாக இழையிருப்பின், இத்தாங்கியின் மீதான மொத்த மேன்முக விசை nP ஆகும்.

$$\therefore \ W + w = nP.$$

கப்பியைத் தொடாத இழையின் பாகங்களெல்லாம் நிலைக்குத்தானவை என ஏற்றுக்கொண்டோம். இல்லையாயின், கப்பிகளிலொன்றைச் சுற்றிச் செல்லுமோர் இழையின் காரணமான P என்னுமிரு இழுவைகளின் விளையுள் 2P ஆகவிராது. ஆனால் இது இரு பாகங்களுக்குமிடையேயான சாய்வு கோணத்தின்மீது சார்ந்திருக்கும்.

நடைமுறையில் அவ்விழைகள் சரிசமாந்தரமாக இருக்கமாட்டா. ஆனால் அவை வழக்கமாக ஏறத்தாழச் சமாந்தரமாக இருக்கும்.

(ii) சுமை W உம் கீழ்த்தாங்கிமுழுவதும் x என்னும் தூரம் உயர்த்தப்படின், முதற் படத்தில் இழையின் $2x$ நீளம் கீழ்த்தாங்கியிலுள்ள

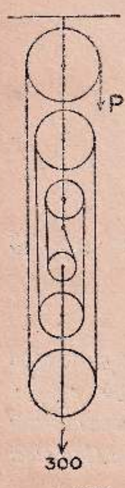
மேற் கப்பியைச் சுற்றியிருக்கும்; மேலும் $2x$ நீளம் கீழ்க் கப்பியைச் சுற்றியிருக்கும். கீழ்த் தாங்கியிலுள்ள கப்பிகளின் எவ்வெண்ணிக்கைக்கும் இவ்வாறேயாம்.

எனவே, இழையை உறுதியாக வைத்திருப்பதற்கு P ஆனது, $2x$ இனதும் கீழ்த் தாங்கியிலுள்ள கப்பிகளின் எண்ணிக்கையினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமான தூரத்தை அடையவேண்டும்.

P இயங்கும் தூரம் nx ஆக இருக்குமாறு கப்பியொவ்வொன்றிற்கும் இழையின் இரு பாகங்களுள்ளன. இங்கு n, கீழ்த் தாங்கியிலுள்ள இழையினது பாகங்களின் எண்ணிக்கை. எனவே வேகவிகிதம் n ஆகும்.

$$(W + w)\ x = Pnx,$$
$$\therefore\ (W + w) \quad = nP.$$

இரண்டாம் படத்தில் இழையின் $3x$ நீளம் கீழ்த் தாங்கியிலுள்ள மேற் கப்பியைச் சுற்றியும், மற்றைய கப்பியொவ்வொன்றையும் சுற்றி கூடுதலான நீளம் $2x$ உம் இருக்கும். கப்பிகளின் எண்ணிக்கை p ஆயின், P, $(2p + 1)\ x$ ஐ அடைவேண்டும். ஆனல் $2p + 1 = n$, இழைகளின் எண்ணிக்கை. அதோடு முதலிற்போல W, w, P, இடையே அதே தொடர்பேயுள்ளது.



படம் 181.

இத்தொகுதி அடிக்கடி " தாங்கியுங் கயிறும் " எனப்படும்.

உதாரணம்.

ஆறு கப்பிகளையுடைய ஒரு கப்பித்தொகுதியில் மேற்கப்பிகளிலொன்றுடன் இணைத்த ஒரே இழை எல்லாக் கப்பிகளையும் சுற்றிச் செல்கின்றது. இயங்குந் தறுவாயில், இழை கப்பியொவ்வொன்றின் மேலாகவும் செல்லுமிடத்து அதன் இழுவை 25 சதவீதத்தாற் கூட்டப்பெறுகிறது. கப்பிகளின் நிறைகளை மட்டும் தவிர்த்து, 300 இரு. நிறையொன்றை மட்டுமட்டாகத் தூக்கும் விசையைக் காண்க. செய்த பயனுள்ள வேலை செலவு செய்யப்பட்டதிலும் அரைப்பங்காக இருக்குமெனவும் காட்டுக. (H.S.D.)

அவ்வொழுங்கமைப்பு படம் 181 இற் காட்டப்பெற்றுள்ளது.

மேற் தாங்கியுடன் இணைத்த இழையின் நுனியிலுள்ள இழுவையை T என்க. முதற் கீழ்க்கப்பியின் மேலாகச் சென்றதும் இழுவை $\frac{5}{4}$T ஆகும். அதோடு முதல் மேற் கப்பியின் மேற் சென்றதும் $\frac{5^2}{4^2}$T ஆகின்றது. மற்றைய போதும் இவ்வாறேயாகும்.

சுயாதீன நுனியில் இழுவை $\frac{5^6}{4^6}T$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{5^6}{4^6}T = P.$$

300 இறு. நிறையின் சமநிலையின் பொருட்டு,

$$T\left(1+\frac{5}{4}+\frac{5^2}{4^2}+\frac{5^3}{4^3}+\frac{5^4}{4^4}+\frac{5^5}{4^5}\right) = 300,$$

$$\therefore T\frac{\frac{5^6}{4^6}-1}{\frac{1}{4}} = 300,$$

$$\therefore \frac{4^6}{5^6}\left(\frac{5^6}{4^6}-1\right)P = 75,$$

$$\therefore \left(1-\frac{4^6}{5^6}\right)P = 75,$$

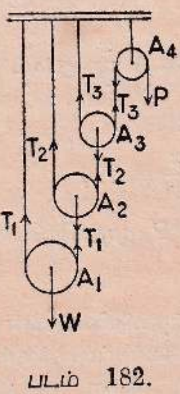
$$\therefore P = \frac{5^6 \times 75}{61 \times 189} = 101{\cdot}6 \text{ இறு. நிறை.}$$

கீழ்த் தாங்கி x என்னும் தூரம் செல்லின், P, $6x$ தூரம் செல்லும்.

செலவான வேலை $= 101{\cdot}6 \times 6x = 609{\cdot}6x$,

பயனுள்ள வேலை $= 300x$.

§132. இழையொவ்வொன்றும் தாங்கியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள கப்பித்தொகுதி.



படம் 182.

இவ்வொழுங்கமைப்பு படம் 182 இல் காட்டப்பெற்றவாறுகும். நிறை கீழ்க்கப்பியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது.

நிலைத்த கப்பி A_4 ஆனது எத்தனம் P கீழ்முகத் திசையொன்றில் பிரயோகிக்கப்படுமாறு வழக்கமாக இடைப்புகுத்தப்படும். இது பொறி முறை நயத்தினைப் பாதிப்பதில்லை.

முதலிற்போல கப்பிகளைத் தொடாத இழையின் பாகங்களெல்லாம் நிலைக்குத்தானவையெனவும் உராய்வேதுமில்லையெனவும் கொள்வோம். கப்பிகளின் நிறையைத் தவிர்ப்போம்.

(i) A_1, A_2, . . . ஐச் சுற்றிச் செல்லும் இழைகளிலுள்ள இழுவைகளை முறையே T_1, T_2, . . . என்க.

கப்பிகள் A_1, A_2, . . . இற்கான சமநிலையிலிருந்து,

$$W = 2\,T_1,$$
$$T_1 = 2\,T_2,$$
$$T_2 = 2\,T_3,$$
$$\therefore\ W = 2^3T_3 = 2^3P,$$

எனவே இயங்கக்கூடிய n கப்பிகளுக்கு,

$$W = 2^nP.$$

(ii) P, x தூரம் செல்லின், இயங்கக்கூடிய மேற்கப்பி $\frac{x}{2}$ தூரம் செல்லும்.

அடுத்தது $\frac{x}{2^2}$ செல்லும். இவ்வாறே மற்றையவையும்.

எனவே இயங்கக்கூடிய n கப்பிகளுடன் கீழ்க்கப்பி $\frac{x}{2^n}$ தூரம் செல்கின்றது. ஆகையால் நிறை $\frac{x}{2^n}$ தூரம் செல்கின்றது.

வேலைக் கோட்பாட்டிலிருந்து,

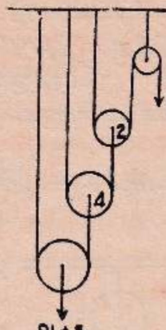
$$W.\ \frac{x}{2^n} = Px,$$

$$\therefore\ W = 2^nP, \text{ முதலிற்போல.}$$

உதாரணம்.

ஒவ்வொரு கப்பியும் தனித்தனியிழையின் தடத்திலே தொங்குமாறுள்ள ஒரு தொகுதியில் அமைக்கப்பட்டிருக்கும் மூன்று இயங்கக்கூடிய கப்பிகளின் மூலமாக 10 கல் நிறை மனிதனொருவன் 91 இரு. நிறையொன்றைத் தாங்குகிறான். அக்கப்பிகளின் நிறை முறையே 2, 4, 5 இரு. ஆகும். நிலத்தின்மீது மனிதனின் உதைப்பினைக் காண்க.

மனிதன் இழுக்கும் இழை நுனி கீழ்நோக்கி இழுக்கப்படுமாறு படம் 183 இற்போல நிலைத்த கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்லவிடப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். நிலத்தின்மீது அவனின் உதைப்பு அவனது நிறைக்கும் அவன் உஞற்றும் இழுப்புக்குமிடையேயான வித்தியாச மாகும்.



படம் 183.

P, x தூரம் செல்லின், இயங்கக்கூடிய மேற்கப்பி $\frac{x}{2}$ தூரம் செல்லும்.

அதோடு, செய்த வேலை $2.\frac{x}{2}$ ஆகும்.

அடுத்தகப்பி $\frac{x}{4}$ தூரம் செல்லும். செய்த வேலை, இங்கு, $4.\frac{x}{4}$ ஆகும்.

கீழ்க்கப்பி $\frac{x}{8}$ தூரம் செல்லும். இங்கு, செய்த வேலை $96.\frac{x}{8}$.

எனவே, வேலைக் கோட்பாட்டிலிருந்து,

$$Px = \left(1 + 1 + \frac{96}{8}\right)x = 14x,$$

$\therefore$ P = 14 இரு. நிறை.

எனவே நிலத்தின் மீதான உதைப்பு 9 கல்.

பயிற்சி XXVII.

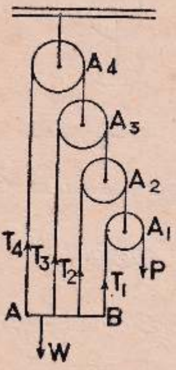
1. நான்கு இயங்கக்கூடிய கப்பிகளின் நிறை, கீழ்க் கப்பியிலிருந்து ஆரம்பித்து, முறையே 4, 3, 2, 1 இரு. ஆயின், அரைத் தொன் நிறையைத் தாங்கும் விசையாது ?

2. மூன்று இயங்கக்கூடிய கப்பிகளின் நிறை, கீழ்க் கப்பியிலிருந்து ஆரம்பித்து, முறையே 4, 4, 2 இரு. ஆயின், 56 இரு. நிறையைத் தாங்கும் விசையாது ?

3. நான்கு இயங்கக்கூடிய கப்பிகள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை w உம் எத்தனம் P உம் ஆயின், தாங்கியின் மீதான தகைப்பு $15P-11w$ எனக் காட்டுக (P மேனேக்கித் தாக்குகிறதெனக் கொள்ளப்பட்டது ; அது பிரயோகிக்கப்படும் இழை நிலைத்த கப்பியொன்றின் மேலாகச் செல்வதில்லை).

4. நான்கு இயங்கக்கூடிய கப்பிகளினிடத்து, கப்பிகளின் நிறைகளைத் தவிர்த்து, 400 இரு. நிறையொன்றைத் தாங்கத் தேவையான எத்தனத்தைக் காண்க. தாங்கிமீது இழையொவ்வொன்றினதும் இழுப்பையும் காண்க ; அதோடு, நிறைக்குக் கூட்டுத்தொகை சமமாக இராவிடின், இவ்வேறுபாட்டினை விளக்குக.

§133. ஒவ்வோரிழையும் நிறையுடன் இணைந்திருக்குமாறுள்ள கப்பித் தொகுதி.



படம் 184.

இவ்வொழுங்கமைப்பு படம் 184 இற் காட்டப்பெற்றுள்ளது. இழையொவ்வொன்றும் இணைத்த சட்டம் AB இலிருந்து நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது.

இழையின் சுயாதீனமான பாகங்கள் சமாந்தரமானவையெனக் கொள்ளப்பட்டது. அதோடு, கப்பிகளின் நிறைகளைத் தவிர்ப்போம்.

(1) கப்பிகள் A_1, A_2, . . . ஐச் சுற்றிச் செல்லும் இழைகளிலுள்ள இழுவைகளை T_1, T_2, . . . என்க.

$$T_1 = P,$$
$$T_2 = 2T_1 = 2P,$$
$$T_3 = 2T_2 = 2^2P,$$
$$T_4 = 2T_3 = 2^3P,$$ இவ்வாறே பிறவுமாம்.

கப்பிகளின் எண்ணிக்கை n ஆயின்,

$$\begin{aligned} W &= T_1 + T_2 + \ldots + T_n \\ &= P(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) \\ &= P\frac{2^n - 1}{2 - 1} = P(2^n - 1). \end{aligned}$$

(2) AB, x தூரம் உயர்த்தப்படின் இழையின் x நீளம் உச்சக் கப்பி A_4 மேலாகச் செல்லும். இதனுல் அடுத்த கப்பி A_3, x தூரம் கீழ்நோக்கிச் செல்கின்றது. இக்கப்பி x தூரம் இறங்குவதனுலும் சட்டம் x தூரம் எழுவதனுலும், இக்கப்பியையும் சட்டத்தையும் தொடுக்கும் இழை $2x$ இனுற் குறுகுகிறது. எனவே, அடுத்த கப்பி A_2, $2x + x = 3x$ தூரம் இறங்குகிறது. A_2 ஐயும் சட்டத்தையும் தொடுக்கும் இழை $4x$ இனுற் குறுகுகிறது. அதோடு அடுத்த கப்பி A_1, $4x + 3x = 7x$ தூரம் இறங்குகிறது.

எனவே A_1 ஐயும் சட்டத்தையும் தொடுக்கும் இழை $8x$ இனுற் குறுகுகிறது. அதோடு, நிறை P, $8x + 7x = 15x$ தூரம் இறங்குகிறது.

மேற்காட்டப்பெற்ற வகையில் நான்கு கப்பிகள் உள்ளன. இவ்விடத்து நிறை P இயங்கும் தூரம் $(2^4 - 1)x$. கப்பிகளின் எண்ணிக்கை n ஆயின், இத்தூரம் $(2^n - 1)x$. அதோடு வேலைக் கோட்பாட்டிலிருந்து

$$Wx = P(2^n - 1)x,$$

$$\therefore W = P(2^n - 1).$$

நடைமுறையில் நிறைகளை உயர்த்த இக்கப்பித்தொகுதி பயன்படுத்தப் படுவதில்லை. நிலைப்படுத்திய சட்டம் AB மீது ஒரு சிறிய, பலமான இழுப்பு விசையைப் பிரயோகிக்கவே இது பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்விடத்து, இழுப்பு விசை உஞற்றப்படவேண்டிய ஒரு கம்பத்தின் உச்சிபோன்ற பொருளுடன் உச்சக் கப்பி இணைக்கப்பட்டிருக்கும். சட்டத் துடன் இணைத்துள்ள இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் சமமற்றவையாக இருப்பதனுல், சட்டம் படத்திற் காட்டியவாறு சுயாதீனதாக இருப்பின், அந்நிறை ஒரு குறித்த புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டாலொழிய சட்டம் கிடை யாகவிராது என்பது தெளிவாகும்.

கப்பிகள் சமபருமனை உடையவையாயின் இழைகளின் இணைப்புப் புள்ளிக ளிடையேயுள்ள தூரங்கள் சமமாகும். அதோடு சட்டம் கிடையாக இருத்தற்குரிய நிபந்தனை முனையொன்றைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்துப் பெறப்படுகின்றது.

மேற்கூறப்பெற்ற வகையில், $T_4 = 8P$, $T_3 = 4P$, $T_2 = 2P$, $W = 15P$.

இழைகளினிடையேயான தூரம் a ஆயின், B பற்றித் திருப்புதிறன் களின் கூட்டுத்தொகை

$$24Pa + 8Pa + 2Pa = 34Pa.$$

எனவே, சட்டத்தினைக் கிடையாகப் பேண, W, B இலிருந்து x தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் இணைக்கப்படவேண்டும்.

இங்கு, $$15Px = 34Pa,$$

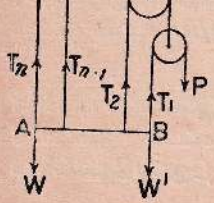
அல்லது, $$x = \frac{34}{15}a.$$

உதாரணம்.

சமமான, நிறையற்ற n கப்பிகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியில் $(n-1)$ இயங்கக்கூடிய கப்பிகளும் நிலைத்ததொரு கப்பியுமுள்ளன. இங்கு, யாதுமொரு கப்பியைச் சுற்றிச் செல்லும் ஓர் இழையின் ஒரு நுனி AB என்னும் ஒரு நிறையற்ற சட்டத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது ; நிலைத்த கப்பியைச் சுற்றியிருக்கும் இழை சட்டத்துடன் A இலும், இயங்கக் கூடிய கடைசிக் கப்பியைச் சுற்றியிருக்கும் இழை சட்டத்துடன் B இலும் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. B இல் இணைத்த இழையின் மற்றைய நுனியுடன் ஒரு P நிறை இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. A இல் இணைத்த W நிறையினுலும் B இல் இணைத்த இன்னெரு நிறையினுலும் சட்டம் AB கிடைச் சமநிலையிற் பேணப்படுகிறது ;

$$W = \frac{(n-2)\ 2^n + 2}{n-1}P$$

என நிறுவுக. (H.S.C.)


படம் 185.

அவ்வொழுங்கமைப்பு படம் 185 இலுள்ளவாறாகும்.

கப்பிகள் சம பருமனையுடையனவாதலின், AB உடன் இழைகளின் இணைப்புப் புள்ளிகள் சமதூரத்தில் இருக்கும் ; இவற்றின் இடைத் தூரம் a என்க.

இழைகளிலுள்ள இழுவைகளை $T_1, T_2, \ldots T_n$ எனவும் B இலிருந்து அவற்றின் தூரங்களை முறையே $0, a, 2a \ldots (n-1)a$ எனவும் கொள்க.

அதோடு, $$T_2 = 2T_1 = 2P,$$
$$T_3 = 2T_2 = 2^2T_1 = 2^2P$$
$$\cdots\cdots$$
$$T_n = 2^{n-1}P.$$

எனவே, B பற்றிச் சட்டத்திற்குத் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$W(n-1)a = 2P.a + 2^2P.2a + 2^3P.3a \ldots + 2^{n-1}P(n-1)a$$
$$= Pa\,[2 + 2^2.2 + 2^3.3 + \ldots + 2^{n-1}(n-1)\,].$$

அடைப்புக்குள் உள்ள தொடரைக் கூட்டும்பொருட்டு,

$$S = 2 + 2^2.2 + 2^3.3 + \ . \ . \ . + 2^{n-1}(n-1) \quad \text{எனக.}$$

$$\therefore \ 2S = 2^2.1 + 2^3.2 + \ . \ . \ . + 2^{n-1}(n-2) + 2^n(n-1),$$

$$\therefore \ -S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ . \ . \ . + 2^{n-1} - 2^n(n-1)$$

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{1} - 2^n(n-1),$$

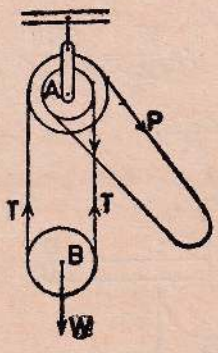
$$\therefore \ S = 2^n(n-2) + 2,$$

$$\therefore \ W = \frac{2^n(n-2)+2}{n-1}P.$$

§134. வெஸ்ற்றன் வேற்றுமைக் கப்பி.

இக்கப்பித் தொகுதியின் மேற் தாங்கி A (படம் 186) அருகருகே யிருக்கும் இரு தவாளிப்புக்களையுடையது. இவற்றில் ஒன்று விட்டத்தில் மற்றையதை விடப் பெரியது.

நிறை கீழ்க்கப்பி B உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. மேற் தாங்கியின் பெரிய தவாளிப்பினைச் சுற்றியும், பின்பு கீழ்க் கப்பியையும் மேற் தாங்கியின் சிறிய தவாளிப்பினையும் சுற்றியும் செல்லுமொரு முடிவற்ற சங்கிலியின் எஞ்சிய பகுதி தொய்ந்திருக்கிறது.



படம் 186.

தவாளிப்பிலுள்ள சிறிய எறியங்கள் அல்லது ஓரங்களினால் சங்கிலி நழுவாது தடுக்கப்படுகின்றது.

படத்திலுள்ளவாறு எத்தனம் P பிரயோகிக்கப்படுகின்றது.

(1) கீழ்க் கப்பியையும் நிறை W ஐயும் தாங்கும் சங்கிலியின் பகுதிகளின் இழுவை T ஆயின், (இப்பகுதிகள் நிலைக்குத்தானவை எனக் கொள்ளுமிடத்தும் சங்கிலியினதும் கீழ்க் கப்பியினதும் நிறையைத் தவிர்க்குமிடத்தும்),

$$2T = W.$$

பெரிய, சிறிய தவாளிப்புக்களின் ஆரைகள் முறையே R ஆகவும் r ஆகவும் இருப்பின், மேற்தாங்கியின் மையத்தைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$P.R + T.r = T.R,$$

$$\therefore\ P = T\frac{R-r}{R} = W\frac{R-r}{2R}.$$

$$\therefore\ \frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r}.$$

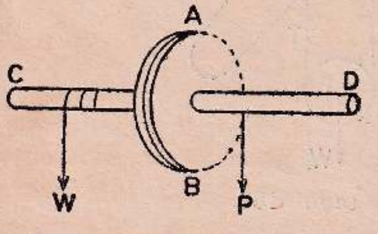
R ஐயும் r ஐயும் கிட்டத்தட்டச் சமமாக்கி அதிக பொறிமுறை நயத்தினைப் பெறலாம்.

(2) P கீழ்நோக்கி இயங்குமாறு மேற் தாங்கி கோணம் θ ஊடாகத் திருப்பப்படுகிறதெனக் கருதின், P, Rθ தூரம் செல்லும். B இன் இடது புறத்திலுள்ள இழை Rθ இனால் குறுக்கப்படுகின்றது. ஆனால் A இனது சிறிய தவாளிப்பு திரும்புவதனால் B இன் வலதுபுறத்தில் மேலதிக நீளம் $r\theta$ கீழே இளக்கிவிடப்படுகின்றது. எனவே W, $\frac{1}{2}(R\theta - r\theta)$ இனால் உயர்கின்றது. வேலைக் கோட்பாட்டின்படி,

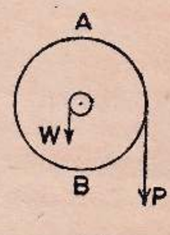
$$\frac{W}{2}(R-r)\theta = PR\theta,$$

$$\therefore\ \frac{W}{P} = \frac{2R}{R-r}.$$

§135. சில்லும் அச்சாணியும்.



படம் 187A.



படம் 187B.

இது, படம் 187A இலுள்ளவாறு ஒரே அச்சினைப் பற்றி ஒன்றாகச் சுழலக்கூடிய சில்லு AB ஐயும் அச்சாணி CD ஐயும் உடையது. படம் 187B இலுள்ளது இதனொரு வெட்டுத்தோற்றம்.

சில்லிலே சுற்றிய இழையில் எத்தனம் P பிரயோகிக்கப்படுகிறது. அச்சாணியில் முரண் திசையிற் சுற்றிய இழையுடன் நிறை W இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

சில்லினதும் அச்சாணியினதும் ஆரைகளை முறையே a, b என்க.

(1) பொது அச்சைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Pa = Wb.$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{a}{b}.$$

(2) P இறங்குமாறு சில்லுமச்சாணியும் கோணம் θ (ஆரையனில்) ஊடாகச் சுற்றப்படின், P, $a\theta$ தூரம் செல்லும் அதேசமயத்தில் W, $b\theta$ தூரம் மேனோக்கிச் செல்லும்.

எனவே, வேலைக் கோட்பாட்டின்படி,

$$Wb\theta = Pa\theta,$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{a}{b}.$$

a மிக அதிகமாக இருப்பின் பொறியை எளிதிற் கையாளமுடியாது ; அதே சமயத்தில் b மிகச் சிறியதாக இருப்பின் அச்சாணி உடையப் பார்க்கும். இக்காரணங்களினால் நடைமுறையில் பொறிமுறை நயம் ஓர் எல்லைக்குட்பட்டது.

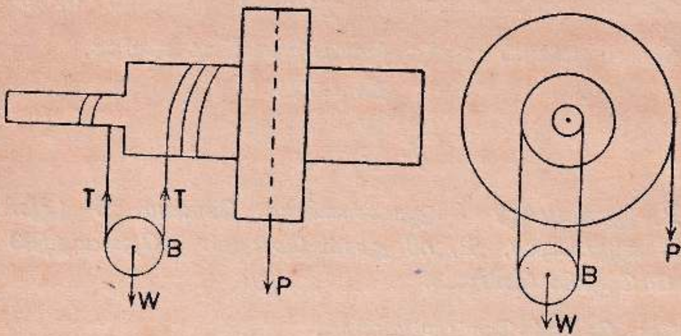
ஒஞ்சியும் பாரஞ்சாம்பியும் செயலில் ஒத்தவை. இவற்றில் அச்சாணிக்கு ஒப்பாக ஓர் உருளையேயிருக்கும். எத்தனம் சட்டங்களின் முனைகளிலோ அச்சாணிக்குச் செங்குத்தான நீண்ட கைபிடியொன்றின் நுனியிலோ பிரயோகிக்கப்படும்.

§136. வேற்றுமைச் சில்லும் அச்சாணியும்.

இது சில்லுமச்சாணியும் என்பதின் மாற்றுவடிவாகும். இங்கு, அச்சாணி வெவ்வேறான ஆரைகளையுடைய இரு பகுதிகளினாலானது ; நிறை ஒரு கப்பியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இதனைத் தாங்கும் கயிறு அச்சாணியின் இரு பகுதிகளிலும் முரண் திசைகளிற் சுற்றப்பட்டிருக்கும். அக் கப்பி இரு பகுதிகளினிடையேயுமுள்ள தடத்தில் படம் 188 இற்போலத் தொங்கும்.

P இறங்கும்போது கப்பி B ஐச் சுற்றியுள்ள கயிறு பெரிய அச்சாணியின்மீது சுற்றப்படும் ; அதோடு சிறிய அச்சாணியின் மீதுள்ள சுற்றுக் குலையும்.

சில்லு, அச்சாணியின் பெரியபகுதி, சிறியபகுதி ஆகியவற்றின் ஆரைகளை முறையே a, b, c என்க. B ஐத் தாங்கும் கயிற்றிலுள்ள இழுவையை T என்க.



படம் 188.

B ஐச் சுற்றியுள்ள கயிற்றின் பகுதிகளிரண்டும் நிலைக்குத்தானவை என நாம் கொள்வோம். அதோடு கயிற்றினதும் கப்பியினதும் நிறைகளைத் தவிர்ப்போம்.

(1) W இன் சமநிலையிலிருந்து,

$$2T = W, \text{ அல்லது } T = \tfrac{1}{2} W.$$

பொது அச்சைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$P.a + T.c = T.b,$$

$$\therefore P = T\frac{b-c}{a} = W\frac{b-c}{2a},$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2a}{b-c}.$$

b ஐயும் c ஐயும் கிட்டத்தட்டச் சமமாக்கி, சில்லைப் பெரிதாகவோ, அச்சாணியை மிக மெல்லியதாகவோ செய்யாது அதிக பொறிமுறை நயத்தினைப் பெறலாம்.

(2) P இறங்குமாறு சில்லு θ ஆரையன் கோணத்தூடாகச் சுற்றின் P, $a\theta$ தூரம் கீழ்நோக்கிச் செல்லும்.

பெரிய அச்சாணியில் கயிற்றின் $b\theta$ நீளம் சுற்றப்படும் அதேசமயத்தில், சிறிய அச்சாணியிலிருந்து $c\theta$ நீளம் குலையும்.

எனவே, நிறையானது $\frac{1}{2}(b-c)\theta$ என்னுந் தூரம் உயருகிறது. வேலைக் கோட்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{W}{2}(b-c)\theta = Pa\theta,$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{2a}{b-c}.$$

§137. பின்னடித்தல்

(பாரமான நிறைகளை உயர்த்துதல் போன்ற) பல இடங்களில் எத்தனம் நீக்கப்படுமிடத்து சுமை பின்னோக்கிச் செல்லாதிருப்பது அவசியம்.

இவ்வாறு நடைபெறின் பொறி " பின்னடிப்பதாகக் " கூறப்படும்.

பின்னடித்தலைத் தடுப்பதற்குப் பொறியின் பற்பல பகுதிகளிலுமுள்ள உராய்வானது சுமை அதை வெல்லாதிருக்குமாறு அதிகமாக இருக்கவேண்டும். திறன் அதிகமாகவிருக்கமாட்டாது என்பதே இதன் கருத்தாகும்.

P என்னும் எத்தனம் W சுமையொன்றை மட்டுமட்டாக உயர்த்துவதாகவும், P நீக்கப்படுமிடத்து W ஓய்விலிருப்பதாகவும் கொள்க.

P, W ஐ உயர்த்தும்போது உராய்வானது P இற்கெதிராகச் செயற்படுகிறது. P நீக்கப்படும்போது அது W ஐ மட்டுமட்டாகத் தாங்குகிறது.

P இனதும் W இனதும் x, y, என்னும் சிறிய பெயர்ச்சிகளின்போது உராய்வினுற் செய்யப்பெறும் வேலையை F எனக் கொள்ளின், பொறி தொழிற்படுத்தப்படுமிடத்து,

$$Px = Wy + F.$$

F, W ஐத் தாங்கும்போது W அவ்வாறுகவே பெயர்க்கப்படின்,

$$Wy = F.$$

எனவே F, Wy இலும் குறையலாகாது,

ஆகவே,

$$Px \nless 2Wy,$$

$$\therefore \frac{Wy}{Px} \ngtr \frac{1}{2},$$

அ–து, திறனுனது $\frac{1}{2}$ அல்லது 50 சதவீதத்திலும் அதிகமாக இருக்கக் கூடாது.

50 சதவீதத்திலுங் குறைவான திறனுடைய எப்பொறியும் பின்னடிக்கமாட்டாது. வெஸ்ற்றன் கப்பியின் வேகவிகிதம் பெரிதாக இருப்பதோடு மட்டுமன்றி அதன் திறன் 50 சதவீதத்திலும் குறைவாய் வழக்கமாக இருப்பதனுல் அது பெரிதும் பயன்படுகிறது.

பயிற்சி XXVIII.

1. பாரஞ்சாம்பியொன்றிலுள்ள உருளை 4 அங்குல விட்டமானது. எத்தனம் அச்சிலிருந்து 2 அடி தூரத்தில் கைபிடியிற் பிரயோகிக்கப்படுகிறது. 120 இரு. நிறையொன்றைத் தாங்குதற்குத் தேவையான எத்தனத்தைக் காண்க.

2. ஒரு 50 இரு. சுமையை உயர்த்த ஒரு சில்லுமச்சாணியும் பயன் படுத்தப்படுகிறது. சில்லின் ஆரை 20 அங்குலம். இச்சில்லு ஏழு முறை சுற்றும்போது சுமை 11 அடி உயருகிறது. சுமையைத் தாங்கும் மிகச் சிறிய விசை யாது ?

3. ஒரு தொன் நிறையுள்ள ஒரு நங்கூரம் 9 அங்குல விட்ட ஒஞ்சி யிற் சுற்றிய அதன் சங்கிலியினால் உயர்த்தப்படுகிறது. இவ்வோஞ்சி அதன் 5 அடி பயன்படு நீளச் சட்டங்களின் முனைகளில் வேலை பார்க்கும் ஆறு மனிதராற் செயற்படுத்தப்படுகிறது. அவர்கள் ஒவ்வொரு வரும் ஒரே எத்தனத்தை உஞற்றுகிறார்களெனக்கொண்டு, திறன் 56 சதவீதமாயின், அவ்வெத்தனம் யாதெனக் காண்க (சங்கிலியின் நிறை யைத் தவிர்க்க). (N.U.)

4. ஒரு வேற்றுமைக் கப்பி 10 அந்தர் நிறையொன்றை உயர்த்தப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இக்கப்பியின் இரு பகுதிகளும் முறையே இருபத்து நான்கு, இருபத்தைந்து பற்களையுடையவை. இக்கருவி எவ்வாறு பயன் படுத்தப்படுகிறதென்பதை ஒரு வரைபின் மூலமாகக் காட்டி, அதன் வேக விகிதத்தைக் காண்க. திறன் 60 சதவீதமாயின் உஞற்றப்படவேண்டிய எத்தனத்தையும் காண்க. (N.U.)

§138. திருகு.

ஒரு திருகு, வட்டவெட்டு அச்சாணியொன்றை உடையது. இவ்வச்சாணி யைச் சுற்றி ஒரு சுருளிவளையியின் வழியே நீட்டியிருக்கும் **புரி**யொன்று செல்லும். எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அச்சாணியின் அச்சிற்குச் செங்குத் தானதொரு தளத்துடன் திருகுப்புரியின் சாய்வு ஒரேமாதிரியானது.

அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக அளக்கப்படும் அடுத்துவருகின்ற இரு புரி களிடையேயான தூரம் திருகுப் **புரியிடை** எனப்படும்.

திருகானது ஒரு சுமை அல்லது நிலைத்த தாங்கியிற் செயற்படுகிறது. இதன் உட்புறவழியே வெட்டப்பெற்றுள்ளதும் திருகுப்புரி வடிவிலுள்ளது மான ஒரு பொட் தவாளிவழியே திருகுப்புரி நகர்கின்றது.

திருகு அதன் அச்சினைப்பற்றிச் சுற்றியே இயங்க வல்லது. திருகு சுற்றும் அதே நேரத்தில் புரி அதன் தவாளியில் நகருவதன் காரணமாக அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக ஓர் இயக்கம் ஏற்படும்.

முழுச் சுழற்சியொன்றின்போது திருகு அதன் அச்சிற்குச் சமாந் தரமாக புரியிடைக்குச் சமமான தூரம் செல்லும்.

புரியும் தவாளியும் ஒப்பமாகவும், திருகினச்சு இடையுடன் சாய்ந்தும் இருப் பின் அதன் நிறை அதனைச் சுற்றவும் கீழ்நோக்கி இயங்கவும் செய்யும்.

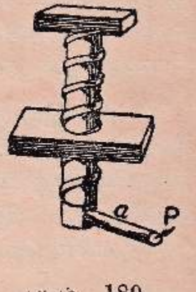
எனினும் நடைமுறையில் இதைத் தடுக்க உராய்வு போதுமானது. **திருகழுத்தி** அல்லது **திருகுத்தூக்கி** யொன்றில் அதன் ஒரு முனை விசை உஞற்றப்படவேண்டிய பொருளின்மீது வைக்கப்படும்.

திருகு அதன் மற்றைய முனையுடன் இணைத்தநொரு சட்டத்தினால் அதன் தாங்கியில் முன்னோக்கிச் செலுத்தப்படுகிறது.

எத்தனம் P பிரயோகிக்கப்படும் புயத்தின் நீளத்தை a எனவும் திருகுப்புரியிடையை p எனவும் கொள்க.

ஒரு சுழற்சியின்போது P, $2\pi a$ தூரமும் திருகானது முன்னோக்கி p தூரமும் செல்லும்.

$$\therefore \text{ வேகவிகிதம்} = \frac{2\pi a}{p}.$$

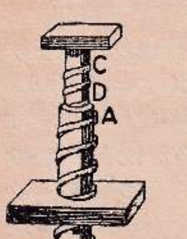


படம் 189.

திருகு ஒப்பமானதாயின் இது பொறிமுறை நயமுமாகும். a ஐ அதிகமாக்கியும் p ஐ மிகச் சிறிதாக்கியும் கொள்கையளவில் வேகவிகிதத்தினை அதிகமாக்கலாம். எனினும், முன்னையது பொறியினை எளிதிற் கையாள முடியாததாக்குகிறது. அதே சமயத்தில் மிகச்சிறிய புரியிடை என்பது மெல்லிய புரியாகும். எனவே, இதன் விளைவாகப் பொறியிலே தளர்ச்சி ஏற்படுகிறது.

§139. வேற்றுமைத் திருகு.

இப்பொறி மிகநீளமான புயம் அல்லது சிறிய இடைத்தூரத்தின் குறைகளின்றி அதிக வேகவிகிதத்தினைத் தருகின்றது.



படம் 190.

ஒரு திருகு AB (படம் 190), நிலைத்த குற்றியிற் செயற்படுகிறது.

இத்திருகின் உட்புறம் பொள்ளானது. இதன் உட்புறத்தில் சிறிய புரியிடையுள்ள DC என்னும் இரண்டாம் திருகொன்று செயற்படுகிறது. சிறிய திருகு சுற்றுதவாறு ஒரு குற்றியுடன் C இல் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆனால் இது அதன் நீளத்தின் திசையிலேயே இயங்கமுடியும்.

எத்தனப் புயம் ஒருமுறை சுழன்றதும், திருகு AB அதன் புரியிடை p_1 இற்குச் சமமான தூரம் செல்லும். அதே சமயத்தில் சிறிய திருகுப் புரியிடை p_2 இற்குச் சமமான தூரம் AB இனுட் செல்லும்.

எனவே சிறிய திருகு $p_1 - p_2$ தூரம் முன்னேறியிருக்கிறது. ஆகையால் நிறை இத்தூரத்தால் முன்னேறியிருக்கிறது.

எத்தனப் புயத்தின் நீளம் a ஆயின், வேகவிகிதம்,

$$\frac{2\pi a}{p_1 - p_2} \text{ ஆகும்.}$$

p_1 ஐயும் p_2 ஐயும் கிட்டத்தட்டச் சமமாக்கி இதை அதிகமாக்கலாம்.

பயிற்சி XXIX.

1. ஓர் இழையுடன் மட்டும் கூடிய கப்பித் தொகுதியினிடத்து, 5 இரு., 6 இரு. நிறைகள் கீழ்க் கப்பிதாங்கியில் முறையே 18 இரு., 22 இரு. நிறைகளைத் தாங்கக் கூடியவையெனக் காணப்பட்டுள்ளது. இழைகளின் எண்ணிக்கையையும் கீழ்க் கப்பிதாங்கியின் நிறையையும் காண்க.

2. ஓர் இழையுடன் மட்டும் கூடிய கப்பித்தொகுதியினிடத்து 3 இரு. நிறையொன்று 15 இரு. நிறையொன்றைத் தாங்குகிறதெனவும் 5 இரு. நிறையொன்று 27 இரு. நிறையொன்றைத் தாங்குகிறதெனவுங் காணப் பட்டுள்ளது. கீழ்க் கப்பிதாங்கியின் நிறையையும் இக்கப்பிதாங்கி நிறை யற்றதாயின் பொறிமுறை நயம் யாது எனவும் காண்க.

3. ஓர் இழையுடன் மட்டும் கூடிய கப்பித் தொகுதியினிடத்து கீழ்த் தாங்கியில் இழையின் ஐந்து பாகங்களுள்ளன. வேகவிகிதமென்ன? இக்கருவியின் திறன் 50 சதவீதமாயின், 60 இரு. நிறையொன் றைத் தாங்கத் தேவையான விசை யாது ?

4. வேகவிகிதம் 60 உடைய பொறியொன்றைக் கொண்டு 400, 800, 1200 இரு. சுமைகளைத் தூக்க முறையே 21, 35, 49 இரு. நிறை எத்தனங்கள் தேவையெனக் காணப்பட்டுள்ளது. வரைபு மூலமாகவோ, வேறு விதமாகவோ ஒரு தொன்னைத் தூக்கத் தேவையான எத்தனத் தைக் கண்டு, சுமையொவ்வொன்றிற்கும் பொறியின் திறனைக் காண்க.

5. கப்பித்தொகுதி யொன்றினிடத்து நிறைவையத் தாங்கும் சட்டத் துடன் இழையொவ்வொன்றும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தொகுதி இயங் கக்கூடியனவும் ஒவ்வொன்றும் w நிறையுள்ளதுமான மூன்று கப்பிகளை யுடையது தென்றும், எத்தனம் P ஆகுமென்றும், நான்கு இழைகளும் இணைத்த சட்டத்தின் நிறை (இணைத்த நிறையுட்பட) W ஆகுமெனவும் கொண்டு, இத்தொகுதியின் சமநிலை நிபந்தனையைக் காண்க. நிலைத்த கப்பியுட்பட, கப்பியொவ்வொன்றினதும் ஆரை a ஆகின், சட்டம் கிடையாக வும் இழைகள் நிலைக்குத்தாகவும் இருப்பதற்கு, சட்டத்தினதும் நிறையின தும் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் நீண்ட இழையின் இணைப்புப் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள கிடைத்தூரம் $\frac{11P + 5w}{W}a$ இற்குச் சமமாயிருக்கவேண்டு மெனக் காட்டுக.

6. நான்கு கப்பிகளைக் கொண்ட தொகுதியில் இழையொவ்வொன்றும் நிறையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஒவ்வொரு கப்பியினதும் நிறை 2 இரு. ஆயின், 20 இரு. நிறை எத்தனத்தினால் எந்நிறை உயர்த்தப் படலாம்?

7. ஒவ்வோர் இழையும் தாங்கியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள கப்பித் தொகுதியொன்று ஒவ்வொன்றும் 1 இரு. திணிவுள்ள இயங்கக்கூடிய மூன்று கப்பிகளையுடையது. ஒரு குறித்த நிறையைத் தாங்கத் தேவை யான எத்தனம் இக்கப்பிகள் நிறையற்றனவாக இருக்குமிடத்துத் தேவை யான எத்தனத்தின் இருமடங்கு. அந்நிறையைக் காண்க.

8. கப்பியொவ்வொன்றும் தனித்தனி இழையின் தடத்திலே தொங்கும் கப்பித் தொகுதிக்குரிய சமநிலை நிபந்தனையைக் காண்க. இங்கு, இழை கள் சமாந்தரமானவை. அதோடு, இழையொவ்வொன்றும் சட்டத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கப்பிகளின் நிறை கணக்கிடப்படும். இத்தொகுதி யில் ஒவ்வொன்றும் 1 இரு. நிறையான ஐந்து கப்பிகளிருப்பின், 5 இரு. நிறை விசையொன்று தாங்கக்கூடிய நிறையையும், சட்டத்தின் மீதான மொத்த இழுப்பு விசையையும் காண்க. (I.S.)

9. n கப்பிகளையுடைய தொகுதியொன்றில் ஒரே இழை எல்லாக் கப்பிகளையும் சுற்றிச் செல்கின்றது. இத்தொகுதியில் கப்பிகளின் நிறை தவிர்க்கப்படுமிடத்துப் பொறிமுறை நயம் n எனக் காட்டுக. 160 இரு. நிறையான ஒரு மனிதன் ஒவ்வொன்றும் 3 இரு. நிறையுள்ள ஏழு கப்பிகளைக் கொண்ட அதைப்போன்ற தொகுதியொன்றை 400 இரு. நிறையொன்றை உயர்த்தப் பயன்படுத்துகிறான். அவன் நிலைக்குத் தாகக் கீழ்நோக்கி இழுப்பின், அவன் நிலத்தின்மீது உஞற்றும் அமுக்கத்தைக் காண்க. (H.S.D.)

10. ஒரு நிலைத்த புள்ளி A உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் இழை யொன்று ஒரு பாரமான கப்பி P இன் கீழாகவும் ஒரு நிலைத்த கப்பி B இன் மேலாகவும் ஒரு பாரமான கப்பி Q இன் கீழாகவும் செல்கின் றது. அதன் மற்றை நுனி கப்பி P இன் மையத்துடன் இணைக்கப்பெற் றுள்ளது. இழையின் தொங்கும் பாகங்களெல்லாம் நிலைக்குத்தானவை. மாயவேலைக் கோட்பாடு மூலமாகவோ, வேறுவிதமாகவோ, இக்கப்பித் தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்போது நிறைகள் P இனதும் Q இனதும் விகி தத்தினைக் காண்க. (H.S.D.)

11. ஒரு வெஸ்ற்றன் வேற்றுமைக்கப்பி கீழே ஒரு கப்பிதாங்கியையும் பற்களையுடைய இரு தவாளிகளைக் கொண்ட ஒரு மேற் கப்பிதாங்கியையும் உடையது. இத்தவாளிகளில் ஒன்று 5 அங்குல ஆரையுள்ளது; மற் றையது $4\frac{1}{2}$ அங்குல ஆரையுள்ளது; பொறியின் திறன் 40 சதவீத மாகும். 300 இரு. சுமையொன்றை உயர்த்தத் தேவையான எத்தனத் தைக் கணக்கிடுக. (H.S.D.)

12. ஒரு வேற்றுமைச் சில்லோடச்சாணியில் சில்லு 1 அடி ஆரையுள்ளது. அச்சாணி முறையே 2, 3 அங்குல ஆரையுள்ளது. இதற்கு ஒரு தொன்னைத் தூக்க 144 இரு. நிறை எத்தனமொன்று தேவைப்படுகின்றது. இச் சுமைக்குப் பொறியின் திறனைக் கணக்கிடுக. (I.E.)

13. ஒரு வேற்றுமைச் சில்லோடச்சாணியில் முறையே 15, 12 அங்குல ஆரையுள்ள இரு உருளைகளில் முரண் திசைகளிற் சுற்றிய ஒரு கயிற்றின் இரு சமாந்தரப் பாகங்களினுலும் தாங்கப்படும் ஒப்பமான கப்பியொன்றிலிருந்து தொங்கவிட்ட 14 இரு. நிறையுள்ள ஆசனமொன்றில் 130 இரு. நிறையுள்ள மனிதனொருவன் இருக்கிறன். ஒரு பக்கத்துக் கயிற்றை இழுத்து அவன் தானுகவே உயருகிறன்; அப்பக்கம் எதுவெனக் கூறி, அவன் தானுகவே உயருவதற்கு 16 இரு. நிறையிலும் மிகுந்த இழுப்பு விசையை உஞற்ற வேண்டுமெனக் காட்டுக. (I.E.)

14. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள மூன்று இயங்கக்கூடிய கப்பிகளை, இயங்கக்கூடிய கப்பி ஒவ்வொன்றும் தனித்தனி இழையின் தடத்திலே தொங்கும் கப்பித்தொகுதியிற் பேணத் தேவையான விசையைக் காண்க. இங்கு, இழைகளின் தொங்கும் பாகங்கள் நிலைக்குத்தானவை. அதோடு, இழை ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு நுனி நிலைத்தவொரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. A, B என்பன இவைபோன்ற இரு இயங்கக்கூடிய கப்பிகள். A, B, ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ளது; W நிறையுள்ள மூன்றும் கப்பியொன்று A இன் அச்சாணியையும் B இன் அச்சாணியையும் இணைக்கும் ஓர் இழையின் தடத்திலே தொங்குகிறது. A இற்கு மேலே B அமையின், சமநிலையைப் பேண B இற்குக் கீழாகச் செல்லும் இழையின் சுயாதீன நுனிக்குப் பிரயோகிக்கவேண்டிய விசையைக் காண்க. (I.A.)

15. வெஸ்ற்றன் வேற்றுமைக் கப்பிதாங்கியொன்றின் நிலைத்த கப்பிகள் முறையே பத்து, பதினெரு பற்களை உடையவை. இப்பொறியில் உராய்வின் விளைவு சுமையின் ஒரு நிலைத்த விகிதசமமென்னும் அளவினுல் எத்தனத்தைக் கூட்டுதலேயாயின், திறன் $\frac{1}{3}$ ஆக இருக்கும்போது அவ் விகிதசமத்தைக் காண்க. (I.E.)

16. 35 இரு. நிறை இணையொன்று அங்குலமொன்றிற்கு ஐந்து புரிகளையுடைய ஒரு திருகிற் பிரயோகிக்குமிடத்து 15 அந்தர் அமுக்கத்தினை உண்டாக்கக் கூடியது. திருகின் திறனென்ன? (H S.D.)

17. பதிவழுத்தி யொன்றின் 20 அங்குல நீள நெம்பு அதன் மையத்தில், ஓர் அங்குல நீளத்திற்கு மூன்று முறை சுற்றும் புரியையுடைய ஒரு திருகுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. 12 இரு. நிறைக்குச் சமமான (முரண் திசைகளினுள்ள) விசைகள் நெம்பின் இரு முனைகளிலும் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன; மாயவேலைக் கோட்பாடு மூலமாகவோ, வேறு விதமாகவோ இவ்வழுத்தி உஞற்றும் அமுக்கத்தினைக் காண்க. (I.A.)

18. 2 அடி நீளப் புயமொன்றின் முனையிற் செயற்படும் 10 இரு. நிறை எத்தனமொன்று திருகழுத்தியொன்றில் 1 தொன் நிறை உதைப்பினை உண்டாக்கின், திருகுப் புரியிடையைக் காண்க.

19. ஒரு வேற்றுமைத் திருகிலுள்ள இரு திருகுகளும் முறையே அங்குலமொன்றிற்கு இரண்டு, மூன்று புரிகளையுடையவை; பெரிய திருகிற் பிரயோகிக்கப்படும் 20 இரு. நிறை அடி திருப்புதிறனுடைய இணையொன்று அரைத் தொன்னிற்குச் சமமான உதைப்பினை உண்டாக்கின், பொறியின் திறனைக் கணிக்க. (I.S.)

20. ஒரு பாரஞ்சாம்பியையும் கப்பியையும் கொண்டு கிணற்றுள் ஒரு வாளி இறக்கப்படுகிறது. பாரஞ்சாம்பியின் (வழக்கமாக வாளியுடன் இணைக்கப்படும்) கயிற்றின் நுனி இவ்விடத்தில் பாரஞ்சாம்பியின் சட்டகத்துடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதோடு, வாளியுடன் இணைத்த கப்பி கயிற்றின் தடத்தில் வழுவுகின்றது; கயிற்றின் தொங்கும் பகுதிகள் நிலைக்குத்தானவை. உராய்வையும் கயிற்றின் நிறையையும் தவிர்த்து, மாயவேலைக் கோட்பாடு மூலமாகவோ வேறுவிதமாகவோ வாளியைச் சமநிலையிற் பேணப் பாரஞ்சாம்பியின் புயத்தில் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசையினைக் காண்க. வாளியினதும் அதன் சுமையினதும் நிறை W உம், பாரஞ்சாம்பியின் பீப்பாவின் விட்டம் b உம், புயத்தின் நீளம் a உம் தரப்பட்டிருக்கின்றன. நடைமுறைப் பொறியொன்றினிடத்து உராய்வு தவிர்க்கத்தக்கதன்று. வாளியை மட்டுமட்டாக உயர்த்தும் விசை nW ஆயின் இப்பொறியின் **திறன்** என்ன?. (I.S.)

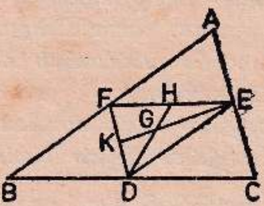
21. ஒரு சோடி கப்பிதாங்கியினிடத்து, ஒவ்வொரு தாங்கியும் மூன்று கப்பிகளையுடையது. ஒவ்வொரு தாங்கியும் 25 இரு. நிறையுள்ளது. கீழ்த் தாங்கியிலிருந்து 245 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. திறன் 60 சதவீதமாகும். கயிற்றின் நிறையைத் தவிர்த்து, அந்நிறையை உயர்த்தத் தேவையான எத்தனத்தையும் கருவியைத் தாங்கும் கொளுக்கியின் மீதுள்ள அமுக்கத்தையும் காண்க. (H.S.C.)

அதிகாரம் VII.

புவியீர்ப்பு மையம்.

§140. அதிகாரம் III இல் சில எளிய வடிவப் பொருட்களிற்குப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையத்தினைக் கண்டோம். இனி, வேறு சில இடங்களில் இம்மையத்தின் நிலையத்தினை எவ்வாறு காணலாமெனவும், மேலும் கடினமான இடங்களில் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண உதவும் சூத்திரங்களை எவ்வாறு பெறலாமெனவும் காட்டுவோம்.

§141. முக்கோணியொன்றை உருவாக்கும் மூன்று கோல்கள்.



படம் 191.

முக்கோணி ABC ஐ (படம் 191) உருவாக்குவனவும் ஒரே தடிப் புள்ளனவுமான மூன்று சீர்க் கோல்களை AB, BC, CA என்க.

BC, CA, AB ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை முறையே D, E, F என்க.

DE, EF, FD என்பவற்றை இணைக்க.

கோல்களின் புவியீர்ப்பு மையங்கள் முறையே D, E, F இலுள்ளன. கோல்களின் நீளங்களாகிய a, b, c இற்கு விகிதசமமான அவற்றின் நிறைகள் இப்புள்ளிகளிற் செயற்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே கோல்கள் AB இனதும் AC இனதும் புவியீர்ப்பு மையம் EF இல் H என்னும் புள்ளியிலுள்ளது.

பின்பு, $$c.\mathrm{FH} = b.\mathrm{HE},$$

அல்லது $$\frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HE}} = \frac{b}{c}.$$

ஆனால் $b = 2\mathrm{DF}$ உம் $c = 2\mathrm{DE}$ உம் ஆகும்.

$$\therefore \frac{\mathrm{FH}}{\mathrm{HE}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DE}},$$

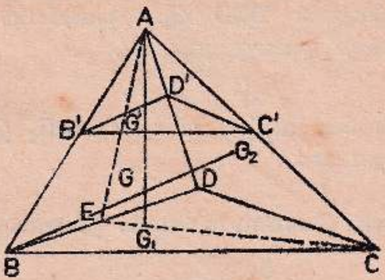
∴ DH கோணம் FDE ஐ இருகூறிடுகிறது.

அன்றியும் D இலுள்ள நிறை a இனதும் H இலுள்ள $b+c$ இனதும் புவியீர்ப்பு மையமானது DH மீது அமையவேண்டும்.

எனவே மூன்று கோல்களினதும் புவியீர்ப்பு மையம் DH மீது அமைய வேண்டும். இதே மாதிரியாக, கோணம் DEF ஐ இருகூறிடும் EK இலும் புவியீர்ப்பு மையம் அமையவேண்டும்.

ஆகவே புவியீர்ப்பு மையம் G இலாகும். இப்புள்ளியில் இவ்விருகூறுக்கிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன. அதோடு முக்கோணி DEF இல் உள்வரைந்த வட்டத்தின் மையமும் இதுவேயாகும்.

§142. நான்முகி.



படம் 192.

ஒரு சீரான சடப்பொருளினுலான ஒரு நான்முகியை ABCD என்க (படம் 192). BD இன் நடுப்புள்ளியை E எனவும் அடி BCD இன் புவியீர்ப்பு மையத்தினை G_1 எனவும் கொள்க.

நான்முகியின் யாதுமொரு வெட்டாகிய B′C′D′, BCD இற்குச் சமாந்தரமென்க. பின்பு சில தெரிந்த கேத்திரகணித முடிபுகளிலிருந்து, AE என்பது B′D′ இன் நடுப்புள்ளியினூடாகச் செல்கிறதென்றும், AG_1 ஆனது முக்கோணி B′C′D′ இனது இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியூடாக, அ–து. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G′ ஊடாகச் செல்கிறதென்றும் நாம் அறிகிறேம்.

எனவே, நான்முகியானது BCD இற்குச் சமாந்தரமான முக்கோணிக் கீலங்களினுலானதெனக் கொள்ளின், ஒவ்வொரு கீலத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம் AG_1 இல் அமைவதனுல், முழு நான்முகியினதும் புவியீர்ப்பு மையம் AG_1 இல் அமைகிறதென்பது தெளிவாகின்றது.

இதே மாதிரியாக, புவியீர்ப்பு மையமானது B ஐயும் எதிர் முகம் ACD இன் புவியீர்ப்பு மையம் G_2 ஐயும் இணைக்கும் கோட்டில் அமைகிறதெனக் காட்டலாம்.

இக்கோடுகள் G என்னும் புள்ளியில் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன வென்றும் இப்போது தெரிகின்றது.

எனவே
$$G_1G = \tfrac{1}{4}G_1A,$$
$$G_2G = \tfrac{1}{4}G_2B.$$

ஆகவே புவியீர்ப்பு மையம், யாதுமொரு முகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் எதிர்க்கோணப் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டில் அம்முகத்திலிருந்து இக்கோட்டின் காற்பங்கு தூரத்திலமைகிறது.

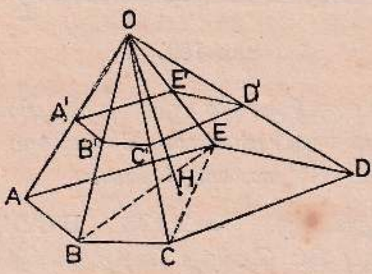
குறிப்பு.—ஒரு நான்முகியின் புவியீர்ப்பு மையமும் அதன் உச்சிகளில் வைத்திருக்கும் நான்கு சம துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றாகும்.

எனெனில், முக்கோணி **BCD** இன் உச்சிகளில் வைத்திருக்கும் w என்னும் சம நிறைகள் **BCD** இன் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 இல் $3w$ என்னும் நிறைக்குச் சமவலுவுடையன.

அன்றியும்
$$G_1G = \tfrac{1}{4}G_1A.$$

என்பதனால், G_1 இல் $3w$, A இல் w என்பன G_1 இல் $4w$ என்னும் நிறைக்குச் சமவலுவுடையன.

§143. எவ்வடியையுங் கொண்ட கூம்பகம். திண்மக் கூம்பு.



படம் 193.

OABCDE என்பது (படம் 193) **ABCDE** என்னும் யாதுமொரு நேர்கோட்டு அடியையுடைய ஒரு கூம்பகத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. அவ்வடியின் புவியீர்ப்பு மையத்தை **H** எனவும் கூம்பகத்தின் உயரத்தை h எனவும் கொள்க.

அடிக்குச் சமாந்தரமான எத்தளமும் கூம்பகத்தினை அவ்வடிக்கு ஒப்பான **A′B′C′D′E′** என்னும் பரப்பில் வெட்டும். இதே மாதிரியாக அதன் புவியீர்ப்பு மையமும், அடியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கு ஒப்பாக வைக்கப்பட்டும் **OH** இல் அமைந்துமிருக்கும்.

கூம்பகம் அடிக்குச் சமாந்தரமான மெல்லிய கிலங்களினாலான தெனக் கருதி, இக்கிலங்கள் எல்லாவற்றினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் **OH** இன்

மீது அமைந்திருப்பதனால் முழுக் கூம்பகத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம் OH இன் மீது அமைய வேண்டும்.

அடியை ABE, BEC, CED போன்ற முக்கோணிகளாகப் பிரித்து, கூம்பகத்தினை நான்முகிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

இவை ஒவ்வொன்றினதும் புவியீர்ப்பு மையம் அடிக்கு மேலே உயரம் $\frac{h}{4}$ இலிருப்பதனால், முழுக் கூம்பகத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம் அடிக்கு மேலே உயரம் $\frac{h}{4}$ இலிருக்கின்றது.

எனவே உச்சியையும் அடியின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டில் புவியீர்ப்பு மையம் கோட்டின் கீழிருந்து காற்பங்கு தூரம் மேலே இருக்கும்.

கூம்பகமொன்றின் அடி ஒழுங்கான பல்கோணியாகுமாறு பக்கங்கள் வரையறையின்றிக் கூட்டப்படும்போது ஏற்படும் எல்லைநிலையிற் பெறப்படுவது செவ்வட்டக் கூம்பாகையால், சற்றுமுன் பெற்ற முடிபு திண்மக் கூம்பிற்கும் பொருந்துகிறது.

செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பொன்றின் புவியீர்ப்பு மையமானது, உச்சியையும் அடியின் மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டில், அடியிலிருந்து கூம்பின் உயரத்தின் காற்பங்கிற்குச் சமமான தூரத்தில் இருக்கின்றது.

யாதுமொரு திண்மக் கூம்பினிடத்துப் புவியீர்ப்பு மையமானது, உச்சியையும் அடியின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டில் கீழிருந்து கோட்டின் காற் பங்கு தூரத்திலுள்ளது.

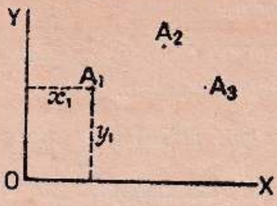
§144. செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் வளைபரப்பு.

அடியின் விளிம்பில் அதிநெருக்கமாக இருக்கும் புள்ளிகளுடன் உச்சியை இணைத்து, பரப்பினை மிகவும் அண்ணளவான முக்கோணி அடர்களாக (lamina) முடிவற்ற பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம். இம்முக்கோணிகளெல்லாவற்றினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் அடிப்பாகத்திற்குச் சமாந்தரமான தளமொன்றில் உச்சியிலிருந்து கூம்பின் உயரத்தின் மூன்றில் இரண்டிற்குச் சமமான தூரத்தில் இருக்கின்றன. எனவே, முழுப்பரப்பினதும் புவியீர்ப்பு மையம் இத்தளத்தின்மீது இருக்கவேண்டும்.

சமச்சீர்ப்படி, புவியீர்ப்பு மையம் கூம்பின் அச்சில் அமையவேண்டும் என்று தெரிகின்றது.

எனவே, வளைபரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் உச்சியிலிருந்து உயரத்தின் மூன்றிலிரண்டு தூரத்தில் அச்சிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

§145. பல துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையம்.



படம் 194.

w_1, w_2, w_3 முதலிய நிறையுள்ள பல துணிக்கைகள் ஒரே தளத்தில் A_1, A_2, A_3 முதலிய புள்ளிகளில் (படம் 194) வைக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. அத்தளத்தில் OX, OY என்னும் இரு செங்கோண அச்சுக்களைக் குறித்து இப்புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) முதலியன என்க.

நிறைகள் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படுமாறு, அ-து. படத்தில் கடதாசியின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படுமாறு அத்தளம் கிடையாக வைக்கப்பட்டுள்ளதென்க.

அந்நிறைகளின் விளையுள் $w_1 + w_2 + w_3 + \ . \ . \ .$ அல்லது Σw என்னும் நிறையாகும். அதோடு அச்சுக்கள் OX, OY இல் ஏதேனுமொன்றைக் குறித்து இவ்விளையுளின் திருப்புதிறன் அவ்வச்சினைக் குறித்துத் தனித்தனி நிறைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

OY பற்றி நிறைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$w_1x_1 + w_2x_2 + \ . \ . \ .$ அல்லது Σwx ஆகும்.

எனவே, OY இலிருந்து விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் தூரம் $\bar{x}$ ஆயின்,

$$\bar{\mathrm{x}}\Sigma \mathrm{w} = \Sigma \mathrm{wx},$$

$$\therefore \ \bar{\mathrm{x}} = \frac{\Sigma \mathrm{wx}}{\Sigma \mathrm{w}}.$$

இதே மாதிரியாக, OX இலிருந்து விளையுளின் தூரம் $\bar{y}$ ஆயின்,

$$\bar{\mathrm{y}} = \frac{\Sigma \mathrm{wy}}{\Sigma \mathrm{w}}.$$

ஆகவே, விளையுள் நிறையின் தாக்கக் கோடு தளத்தில் ஆள்கூறுகள் $\bar{x}$, $\bar{y}$ ஐயுடைய G என்னும் புள்ளியூடாகச் செல்கின்றது. துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையம் இத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியாகையால் இப்புள்ளி அவைகளின் புவியீர்ப்பு மையமாகவேண்டும்.

A_1, A_2, முதலியவற்றில் புவியீர்ப்பு மையங்களைக் கொண்டுள்ளனவும் w_1, w_2, முதலிய நிறைகளுடையனவுமான பொருள்களுக்கும் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையத்திற்கான இச்சூத்திரம் பொருந்தும்.

$w = mg$ என்பதனுல், மேற்கூறப்பெற்ற சூத்திரங்கள்

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma my}{\Sigma m},$$

ஆகவும் எழுதப்பெறலாம். இங்கு m, துணிக்கையின் **திணிவு**.

துணிக்கைகளின் நிறைகளுக்குப் பதிலாகத் **திணிவுகளை** எடுத்துநோக்கி இவ்வாறு பெற்ற புள்ளி **திணிவு மையம்** எனப்படும். வழக்கமாக, திணிவு மையமும் புவியீர்ப்பு மையமும் (புவியுடன் ஒப்பிடுகையிற்சிறிய பொருள்களிடத்து அவை உள்ளது போன்று) ஒன்றென எண்ணப்படும். ஆனுல், திணிவு மையம் ஒரு திட்டமான புள்ளியாகும். அதன் நிலையம் பொருளின் பருமனுடன் சார்பற்றது.

§146. தெரிந்த நிறையும் நிலையமும் வரையறுக்கத்தக்க எண்ணிக்கையுமுடைய துணிக்கைகள் தரப்பட்டிருக்கும்போது Σwx, Σwy ஆகியனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்பதுடன் சம்பந்தப்பட்ட கூட்டல்களைச் சாதாரணக் கூட்டலைப்போற் கூட்டலாம்.

விறைப்பான பொருளொன்றினிடத்து துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கை எல்லையற்றது. எனவே, அப்பொருள் தெரிந்த புவியீர்ப்பு மைய நிலையங்களை உடைய கோலங்கள் அல்லது கீற்றுகளினுலானதென எண்ணலாம். இதற்கு முன்னே எடுத்துநோக்கிய வகைகளைப்போன்ற சில தனியிடங்களில், வெவ்வேருன இரு திசைகளில் கோலங்கள் அல்லது கீற்றுகளையெடுத்து, முழுப் பொருளினதும் புவியீர்ப்பு மையம் இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியில் அமையவேண்டுமெனக் காட்டலாம்.

எனினும், பல இடங்களில், புவியீர்ப்பு மையம் இருக்கவேண்டிய ஒரு கோட்டினை எளிதாகப் பார்க்க முடியினும், சூத்திரம்

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w},$$

ஐப் பயன்படுத்தி இக்கோட்டில் அதன் நிலையத்தை நிர்ணயிக்கவேண்டும். இங்கு w, ஒரு கோலம் அல்லது கீற்றின் நிறையைக் குறிக்கின்றது; x, அக்கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து அக்கோலத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம். நாம் எண்ணற்ற பல கீற்றுக்களுடன் தொடர்பு கொள்வதனுல், Σwx இன் பெறுமானம் தொகையிடலாற் பெறப்படவேண்டும்.

பரப்பொன்றினிடத்து, அதன் பரப்பளவின் யாதுமொரு மூலகம் δA இலிருந்து நிலைத்த இரு அச்சுக்களின் தூரங்கள் முறையே x, y ஆயின்,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x\delta A}{A}, \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma y\delta A}{A}$$

என்னும் சூத்திரங்கள் அப்பரப்பின் **மையப்போலியின்** நிலையத்தைத் தருகின்றன.

(திணிவு பரப்பினுக்கு விகிதசமனுக இருக்கும்) ஒரு மெல்லிய **சீரான** அடரினிடத்து, மையப்போலியும் திணிவு மையமும் ஒன்றுகும். அடர் சீராய் **இல்லா**விடின், இப்புள்ளிகள் ஒன்றுகமாட்டா.

வழக்கமாய்ப் புவியீர்ப்பு மையம், திணிவு மையம், மையப்போலி ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுகும். இவ்வுறுப்புக்கள் ஒரே புள்ளியைக் குறித்தாற் போல் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படுகின்றன. எனினும், துணிக்கைகளின் நிறைகள் சமாந்தரமானவையென்று எண்ணத்தக்க சீர்ப் பொருட்களைத் தவிர மற்றைய இடங்களில் இது உண்மையன்று என்பது நினைவுகூரத்தக்கது.

பயிற்சி XXX.

1. நேர்கோடு AB இல் A இலிருந்து 1, 2, 3, 4 அங்குல தூரங்களில் முறையே 2, 3, 6, 9 இரு. நிறைத் துணிக்கைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவற்றினது புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து A இன் தூரத்தைக் காண்க.

2. 4 அடி நீளமும் 6 இரு. நிறையுமுள்ள சீர்க் கோல் AB உடன் பின்வருமாறு நிறைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன : A இல் 1 இரு., A இலிருந்து 1 அடியில் 2 இரு., A இலிருந்து 2 அடியில் 3 இரு., A இலிருந்து 3 அடியில் 4 இரு., B இல் 5 இரு. இத்தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து A இன் தூரம் யாது ?

3. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியின் மூலைகள் A, B, C இல் முறையே 3, 4, 5 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இம்முக்கோணியில் $AB = AC = 12$ அங்குலம், $BC = 8$ அங்குலம். A இலிருந்து BC இற்கு வரைந்த செங்குத்து AD இலிருந்தும், BC இலிருந்தும் நிறைகளினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரங்களைக் காண்க.

4. 8 அங்குல பக்கச் சதுரம் ABCD இன் மூலைகள் A, B, C D இல் முறையே 1, 2, 3, 4 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. AB, AD ஆகியவற்றிலிருந்து அத்தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

5. 9 அங்குல பக்கச் சமபக்க முக்கோணியொன்றின் மூலைகளில் முறையே 1, 2, 3 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து முதல்நிறையின் தூரத்தைக் காண்க.

6. 27 அங்குல பக்கச் சதுரமொன்றின் மூலைகள் A, B, C, D இல் முறையே 5, 6, 9, 7 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. A இலிருந்து அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

7. ABC, ஒரு 4 அடி பக்கச் சமபக்க முக்கோணி. A, B, C இல் முறையே 5, 1, 3 இரு. நிறைகளும் BC, CA, AB இன் நடுப்புள்ளிகளில் முறையே 2, 4, 6 இரு. நிறைகளும் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. B இலிருந்து அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

8. ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றில் வரிசைக்கிரமமாக எடுத்த கோணப் புள்ளிகளில் முறையே 1, 5, 3, 4, 2, 6 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக் கின்றன. அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் அறுகோணி மையத்தில் இருக்கிற தெனக் காட்டுக.

9. ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றில் வரிசைக்கிரமமாக எடுத்த கோணப் புள்ளிகளில் முறையே 5, 1, 3, 2, 4, 15 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட் டிருக்கின்றன. 15 இரு. நிறையிலிருந்து அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத் தின் தூரத்தைக் காண்க.

10. ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றில் வரிசைக்கிரமமாக எடுத்த கோணப்புள்ளிகளில் முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அதன் பக்கம் 14 அங்குல நீளமானது. அறு கோணியின் மையத்திலிருந்து அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத் தைக் காண்க.

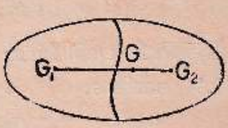
11. இருசமபக்க முக்கோணியடர் ABC இன் மூலைகள் A, B, C இல் முறையே 6, 6, 4 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அடர் 24 இரு. நிறையுள்ளது. $AB = AC = 15$ அங்குலம்; $BC = 24$ அங்குலம். BC இலிருந்து அத்தொகுதியினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

12. ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைகள் A, B, C, D இல் முறையே 1, 2, 3, 4 இரு. நிறைகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன; $AB = 6$ அடி, $BC = 12$ அடி. AB, BC ஆகியவற்றிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் செங்குத்துத் தூரங் களைக் காண்க.

§147. ஒரு கூட்டுப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம்.

ஒரு பொருளின் இரு பகுதிகளினதும் புவியீர்ப்பு மையங்களும் நிறை களும் தெரிந்திருப்பின், முழுப்பொருளினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.

W_1, W_2 நிறையுள்ள அவ்விரு பகுதிகளினதும் புவியீர்ப்பு மையங்களை முறையே G_1, G_2 என்க (படம் 195).



படம் 195.

இந்நிறைகள் G_1, G_2 ஆகியவற்றிற் செயற்படும் நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளாகும். $W_1 + W_2$ இற்குச் சமமான இவற்றின் விளையுள், G_1G_2 இல் G என்னும் புள்ளியிற் செயற்படுகிறது.

பின்பு,
$$W_1 . GG_1 = W_2 . GG_2.$$
$$\therefore \frac{G_1G}{W_2} = \frac{GG_2}{W_1} = \frac{G_1G_2}{W_1 + W_2},$$
$$\therefore G_1G = \frac{W_2}{W_1 + W_2} G_1G_2 \text{; அதோடு } GG_2 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} G_1G_2.$$

இம்முடிபை பொதுச் சூத்திரத்தினையோ, சூத்திரத்தினை நிறுவுமிடத்துப் பயன்படுத்தத்பெறுவதும் திருப்புதிறன் தத்துவத்தின் பிரயோகமுமடங்கிய முறையையோ பிரயோகித்து மிக எளிதாகப் பெறலாம்.

G_1 இல் W_1, G_2 இல் W_2 ஆகியவற்றின் விளையுளாகிய W_1+W_2, G_1G_2 இல் G என்னும் ஒரு புள்ளியிற் செயற்படுகிறதென்பது நமக்குத் தெரியும்.

G_1 ஐ உற்பத்தியாகக் கொண்டு, இப்புள்ளி பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$(W_1+W_2)\,G_1G = W_2 . G_1G_2,$$

$$\therefore\ G_1G = \frac{W_2}{W_1+W_2}G_1G_2.$$

§148. மீதியின் புவியீர்ப்பு மையம்.

ஒரு பொருளினது நிறையும் புவியீர்ப்பு மையமும், அதனின்றும் நீக்கிய ஒரு பகுதியின் நிறையும் புவியீர்ப்பு மையமும் நமக்குத் தெரிந்திருப்பின், மீதியின் புவியீர்ப்பு மையம் பின்வருமாறு பெறப்படுகிறது.

இறுதிப் பந்தியின் படத்தில் முழுப்பொருளினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், அதன் நிறையை W எனவும், நீக்கிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தினையும் நிறையையும் முறையே G_2, W_2 எனவும் கொள்க.

மீதியின் புவியீர்ப்பு மையம் G_2, G ஆகியவற்றுடன் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டும் என்பது தெளிவாகின்றது.

அன்றியும் அக்கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியைப் பற்றி அவ்விரு பகுதிகளினதும் நிறைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை அப்புள்ளியைப் பற்றி முழுதினதும் நிறையின் திருப்புதிறனைச் சமனாக்கவேண்டும்.

எனவே மீதியின் திருப்புதிறன் முழுப்பொருளினதும், நீக்கிய பகுதியினதும் திருப்புதிறன்களின் வித்தியாசம்.

மீதியின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 ஆயின், G_2 பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$(W-W_2)\,G_2G_1 = W . G_2G,$$

$$\therefore\ G_2G_1 = \frac{W}{W-W_2}G_2G.$$

§149. கூட்டுப்பொருளொன்று பல பகுதிகளினால் ஆக்கப்பட்டிருப்பின், அல்லது ஒரு பொருளிலிருந்து பல பகுதிகள் நீக்கப்பட்டிருப்பின், இரு அச்சுக்களையெடுத்துப் பொதுச் சூத்திரங்களைப் பெறுதல்போற் செல்லலாம்.

சூத்திரங்களைத் தொடர்புகாட்டுதலிலும் பார்க்கத் திருப்புதிறன் தத்துவத்தை நேராகப் பயன்படுத்தலே நலம்.

பல பகுதிகளினுலான பொருளொன்றினிடத்து, அச்சுக்களெதனையும் பற்றி,

முழுப்பொருளினதும் திருப்புதிறன் = பகுதிகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

இதே மாதிரியாக, ஒரு பொருளின் பகுதிகளை நீக்கியதும் மீதியினிடத்து,

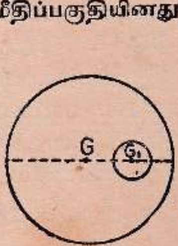
மீதியின் திருப்புதிறன் = முழுவதினதும் திருப்புதிறன் – நீக்கிய பகுதிகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

இத்தகைய முறைகள் பின்வரும் உதாரணங்களில் எடுத்துக்காட்டப் பட்டுள்ளன.

புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையம் நிறைகளின் **தொடர்புப்** பெறுமானங்களி லேயே தங்கியிருக்கிறது என்பது கவனிக்கப்படத்தக்கது. உண்மையான நிறை களைவிட இந்நிறைகளுக்கு **விகிதசமமுன** கணியங்களைப் பயன்படுத்துதல் பொதுவாக மிக வசதியானதாகும்.

§150. உதாரணம் (i).

18 அங்குல விட்டமுள்ள வட்டத் தட்டொன்றில் 6 அங்குல விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரம் வெட்டப்பட்டுள்ளது. இத்துவாரத்தின் மையம் தட்டின் மையத்திலிருந்து 4 அங்குலத்திலுள்ளது. தட்டின் மீதிப்பகுதியினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையத்தைக் காண்க.



படம் 196.

தட்டினதும் துவாரத்தினதும் மையங்களை முறையே G, G_1 (படம் 196) என்க. மீதியின் புவியீர்ப்பு மையமானது G_1G இல் G_1 எதிரே G இன் பக்கத்தில் அமைய வேண்டும் என்பது தெளிவு.

இவ்விடத்து, G பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்தல் வசதியானதாகும்; பின்பு முழுத்தட்டினதும் திருப்புதிறன் பூச்சியமாக இருப்பதோடு, நீக்கிய பகுதியினதும் மீதியினதும் திருப்புதிறன்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனுகவும் முரணுகவும் இருக்கும்.

திணிவுகளையும் தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	நிறை.	G இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.
தட்டு	81	.. 0
நீக்கிய பகுதி ..	9	.. 4
மீதி	72	.. x

G பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

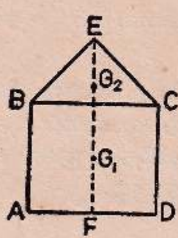
$$72x = 36,$$

$$\therefore x = \tfrac{1}{2} \text{ அங்.}$$

குறிப்பு.—ஆரைகளின் வர்க்கங்கள் திணிவுகளைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இதனால் π ஐப் புகுத்தலும் தட்டின் அடர்த்தியும் தவிர்க்கப்படுகின்றன.

உதாரணம் (ii).

பக்கம் BC மீது ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியைக் கொண்டுள்ள சதுரம் ABCD வடிவில் உலோகத் தகடொன்று உள்ளது. சதுரம் 12 அங்குலப் பக்கமுடையது ; முக்கோணி 9 அங்குல உயரமானது. கோடு AD இலிருந்து தகட்டினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.



படம் 197.

தகட்டினை ABECD (படம் 197) எனக. EF ஐ AD இற்குச் செங்குத்தாக வரைக. சதுரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 இலுள்ளது. இங்கு, $FG_1 = 6$ அங்குலம். முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையம் EF இல் G_2 இலுள்ளது. இங்கு, $EG_2 = \frac{2}{3}.9 = 6$ அங்குலம். பின்பு $FG_2 = 15$ அங்குலம். பரப்புகளுக்கு, அ–து. 144, 54 ஆகியவற்றிற்கு நிறைகள் விகிதசமமாகும். அந்நிறைகளையும், அச்சுக்களுக்கும் புவியீர்ப்பு மையங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	நிறை.	AD இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.
சதுரம் ..	.. 144	.. 6 அங்.
முக்கோணி	.. 54	.. 15 ,,
முழு உருவம்	.. 198	.. x

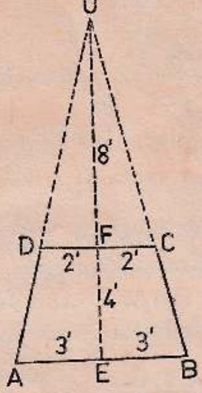
AD பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$198x = 144 \times 6 + 54 \times 15$$
$$= 93 \times 18,$$
$$\therefore x = 8\tfrac{5}{11} \text{ அங்.}$$

உதாரணம் (iii).

ஒரு கூம்பின் அடித்துண்டொன்றின் முகங்கள் முறையே 2 அடி, 3 அடி ஆரையுள்ளவை. அவ்வடித்துண்டு 4 அடித் தடிப்பானது. பெரிய முகத்திலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

அவ்வடித்துண்டின் அச்சு EF ஊடான அதன் வெட்டொன்றை ABCD (படம் 198) என்க.



படம் 198.

AD, BC, EF ஆகியவற்றை, அவ்வடித்துண்டு வெட்டிய கூம்பின் உச்சி O இற் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

இயல்பொத்த முக்கோணிகள் OFC, OEB இலிருந்து,

$$\frac{OE}{OF}=\frac{EB}{FC}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore\ \frac{OF+4}{OF}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore\ \frac{4}{OF}=\frac{1}{2},\ \text{அல்லது}\ OF=8\ \text{அடி}.$$

இயல்பொத்த திண்மவுருவங்களின் கனவளவுகள் ஒத்த பரிமாணங்களின் கனத்திற்கு விகிதசமமாணவை.

$$\therefore\ \frac{\text{கூம்பு ODC இன் கனவளவு}}{\text{கூம்பு OAB இன் கனவளவு}}=\frac{8^3}{12^3}=\frac{8}{27}.$$

ஆகவே முழுக்கூம்பு, நீக்கிய மேற்கூம்பு, அடித்துண்டு ஆகியவற்றின் நிறைகள் முறையே 27, 8, 19 இற்கு விகிதசமம்.

இம்மூன்றினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் OE இல் அமைகின்றன.

நிறைகளையும், புவியீர்ப்பு மையங்களிற்கும் O இற்கும் இடையேயுள்ள தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	நிறை.	O இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.
முழுக் கூம்பு	27	.. 9 அடி
நீக்கிய பகுதி	8	.. 6 ,,
அடித்துண்டு	19	.. x

12—R 13456 (10/63)

O பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$19x = 27 \times 9 - 48 = 195,$$

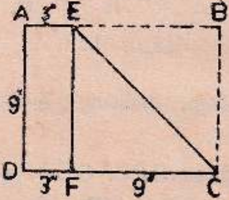
$$\therefore\ x = \frac{195}{19} \text{ அடி.}$$

எனவே, E இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம்,

$$12 - \frac{195}{19} = \frac{33}{19} \text{ அடி.}$$

உதாரணம் (iv).

9 அங்குல அகலமும் 12 அங்குல நீளமுமுடைய ஒரு செவ்வக வடிவத் தாளின் குறுகிய பக்கங்களிலொன்று நீண்ட பக்கமொன்றின் வழியே முற்றுக அமையுமாறு மடிக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்வாறு மடித்த முழுத்தாளினதும் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க.



படம் 199.

முக்கோணிப்பகுதி EFC இருமடியாக இருக்குமாறு மடித்த தாளினை AECFD (படம் 199) குறிப்பதாகக் கொள்க.

DC, DA ஐ முறையே x, y அச்சுக்களாக எடுப்பது வசதியானதாகும். ADFE இன் திணிவு 27 இற்கும், EFC இன் திணிவு 81 இற்கும் விகிதசமம்.

திணிவுகளையும், புவியீர்ப்பு மையங்களுக்கும் அச்சுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	திணிவு.	DA இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.	DC இலிருந்து.
ADFE ..	27 ..	$\frac{3}{2}$ அங். ..	$\frac{9}{2}$ அங்.
EFC ..	81 ..	$3+3 = 6$ அங்.	3 அங்.
முழு உருவம்	108 ..	x ..	y

DA பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$108x = 486 + \frac{81}{2} = \frac{1053}{2},$$

$$\therefore\ x = \frac{1053}{216} = 4\tfrac{7}{8} \text{ அங்.}$$

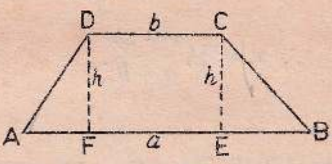
DC பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$108y = 243 + \frac{243}{2} = \frac{729}{2},$$

$$\therefore\ y = \frac{729}{216} = 3\tfrac{3}{8} \text{ அங்.}$$

உதாரணம் (v).

ABCD ஒரு சரிவகம். அதில் AB, CD ஆகியவை சமாந்தரமானவை ; முறையே a, b நீளமானவை. திணிவு மையத்திற்கும் AB இற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் $\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$ என நிறுவுக. இங்கு h, AB இற்கும் CD இற்கும் இடையேயான தூரம்.



படம் 200.

(a) CE, DF ஆகியவற்றினை AB (படம் 200) இற்குச் செங்குத்தாக வரைக. பின்பு,

	பரப்பு.	AB இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.
ABCD ..	$\frac{1}{2}(a+b)h$ ..	x
DCEF ..	bh ..	$\frac{h}{2}$
ADF ..	$\frac{1}{2}\text{AF}.h$ ..	$\frac{h}{3}$
CEB ..	$\frac{1}{2}\text{EB}.h$ ..	$\frac{h}{3}$

எனவே, AB பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\tfrac{1}{2}(a+b)hx = b.\frac{h^2}{2} + \frac{1}{2}.\text{AF}.\frac{h^2}{3} + \frac{1}{2}.\text{EB}.\frac{h^2}{3}$$

$$= \frac{h^2}{2}\left(b + \frac{\text{AF}+\text{EB}}{3}\right).$$

ஆனால்,

$$\text{AF} + \text{EB} = a - b,$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b)hx = \frac{h^2}{2}\left(b + \frac{a-b}{3}\right) = \frac{h^2}{2}.\frac{2b+a}{3}.$$

$$\therefore\ x = \tfrac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}.$$

(b) சரிவகம் முறையே $\frac{1}{2}bh$, $\frac{1}{2}ah$ என்னும் பரப்புக்களுள்ள ADC, ACB என்னுமிரு முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கொண்டும் அவற்றிற்குப் பதிலாக உச்சிகளில் முறையே $\frac{1}{6}bh$, $\frac{1}{6}ah$ திணிவுள்ள துணிக்கைகளை இட்டும் திணிவு மைய நிலையத்தைக் காணலாம்.

இது A இலும் C இலும் $\frac{1}{6}(a+b)h$ ஐயும், B இல் $\frac{1}{6}ah$ ஐயும், D இல் $\frac{1}{6}bh$ ஐயும் தருகின்றது.

AB பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

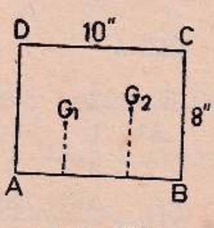
$$\frac{1}{2}(a+b)hx = \left[\frac{1}{6}bh + \frac{1}{6}(a+b)h\right]h$$

$$= \frac{1}{6}\left[a+2b\right]h^2,$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}.$$

உதாரணம் (vi).

சீர்ச் செவ்வகப் பலகை ABCD இல் AB = 10 அங்குலம், AD = 8 அங்குலம். இப்பலகையில் ஒவ்வொன்றும் 2 அங்குல பக்கமுள்ள இரு சதுரத் துவாரங்கள் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. இவை பலகையின் தடிப்புக்கு மட்டும் உலோகத்தினால் நிரப்பப்பட்டுள்ளன. இவ்வுலோகத்தின் தன்னீர்ப்பு பலகையினது ஆக்கப்பொருளின் தன்னீர்ப்பின் ஒன்பது மடங்காகும். முறையே AB, AD ஆகிய x, y அச்சுக்களைச் சார்ந்துள்ளனவும் அங்குலத்தில் அளக்கப்படுவனவுமான துவாரங்களினது மையங்களின் ஆள்கூறுகள் (4, 3), (7, 4) ஆயின், சுமையேற்றிய பலகையினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



படம் 201.

துவாரங்களின் மையங்களை G_1, G_2 என்க (படம் 201).

துவாரம் ஒவ்வொன்றினதும் பரப்பு **4** சது. அங்குலமும், அதன் தொடர்புத் திணிவு 36 உம் ஆகும். சுமையேற்றிய பலகையானது G_1 இலும் G_2 இலும் கூட்டிய நிறைகள் 32 ஐ உடைய சீர்ப் பலகையினுலானது என எண்ணுதல் வசதியானதாகும். பின்பு,

	நிறை.	AD இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.	AB இலிருந்து.
சுமையேற்றுப் பலகை	80	5 அங்.	4 அங்.
G_1 இலுள்ள சுமை	32	4 ,,	3 ,,
G_2 ,, ,,	32	7 ,,	4 ,,
சுமையேற்றிய பலகை	144	x	y

AD பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$144x = 400 + 128 + 224 = 752,$$

$$\therefore\ x = \frac{752}{144} = 5\tfrac{2}{9} \text{ அங்.}$$

AB பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$144y = 320 + 96 + 128 = 544,$$

$$\therefore\ y = \frac{544}{144} = 3\tfrac{7}{9} \text{ அங்.}$$

பயிற்சி XXXI.

1. பக்கம் BC இல் இருசமபக்க முக்கோணியொன்றைக் கொண்டுள்ள செவ்வகம் ABCD வடிவத் தாளின் பரிமாணங்கள் பின்வருவன : AB = 12 அங்குலம், AD = 8 அங்குலம், முக்கோணி உயரம் 12 அங்குலம். AD இலிருந்து தாளினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

2. 12 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தட்டில் 2 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரம் ஆக்கப்படுகிறது. இத்துவாரத்தின் மையம் தட்டின் மையத்திலிருந்து 6 அங்குலத்திலுள்ளது. தட்டின் மீதிப்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க.

3. 12 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத் தட்டில் 2 அங்குல ஆரையுள்ள இரு வட்டத் துவாரங்கள் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் மையங்கள் தட்டின் இரு செங்குத்தான விட்டங்களில் தட்டின் மையத்திலிருந்து 6 அங்குல தூரத்திலுள்ளன. தட்டின் மீதிப்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க.

4. செவ்வகம் ABCD வடிவத் தாளில் AB = 12 அங்குலம், AD = 8 அங்குலம். E, AD இன் நடுப்புள்ளி. முக்கோணி CED நீக்கப்படுகின்றது. AD, AB ஆகியவற்றிலிருந்து தாளின் மீதிப்பகுதியினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரங்களைக் காண்க.

5. ABCD, 12 அங்குலப் பக்கமுள்ள ஒரு சதுரப்பலகை. E என்னும் புள்ளி D இலிருந்து 3 அங்குல தூரத்தில் AD இலுள்ளது. முக்கோணி CED நீக்கப்படுகிறது. AB, AD ஆகியவற்றிலிருந்து பலகையின் மீதிப்பகுதியினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரங்களைக் காண்க.

6. முக்கோணி ABC இல் D, BC இன் நடுப்புள்ளி. முக்கோணியின் திணிவு மையத்தூடாய் BC இற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்படும் நேர்கோடு பக்கங்கள் AB, AC ஐ முறையே, E, F இல் வெட்டுகின்றது. நாற்பக்கல் BEFC இன் திணிவு மையமானது D இலிருந்து $\frac{7}{45}$ AD தூரத்தில் AD இல் அமைகிறதென நிறுவுக. (I.A.)

7. ABCD ஒரு 9 அங்குல பக்கச் சதுர அடர். EC, CF ஒவ்வொன்றும் 3 அங்குலமாகுமாறு E, F என்னும் புள்ளிகள் முறையே BC, CD இலுள்ளன. அவ்வடரின் பகுதி ABEFDA இனது மையப்போலியைக் காண்க. (I.A.)

8. ABCDEF ஒழுங்கான அறுகோணிவடிவிலுள்ள ஒரு மெல்லிய அட்டைத்தாள். முக்கோணி ABC ஐ வெட்டி முக்கோணி DEF மீது பொருத்தின், முழுவதினதும் புவியீர்ப்பு மையம் $\frac{2}{9}a$ தூரம் நகர்த்தப்படுகிறதென நிறுவுக. இங்கு a, அறுகோணியின் பக்கம். (I.S.)

9. ABCD ஒரு செவ்வகத் தட்டு. AB = 8 அங்குலம், BC = 12 அங்குலம்; E, BC இன் நடுப்புள்ளி. முக்கோணிப்பகுதி ABE தட்டிலிருந்து நீக்கப்பெற்றும் மீதிப்பகுதி A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டும் இருப்பின், நிலைக்குத்துடன் பக்கம் AD இன் சாய்வைக் காண்க. (I.E.)

10. ABCD ஒரு செவ்வக அடர் ; $AB = CD = 2a$, $AD = BC = 2b$; P, Q என்பன முறையே BC, CD என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். முக்கோணிப்பகுதி PCQ நீக்கப்பெறுகிறது. பக்கங்கள் AD, AB ஆகியவற்றிலிருந்து மீதியினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் செங்குத்துத் தூரங்கள் முறையே $\frac{19a}{21}, \frac{19b}{21}$ என நிறுவுக. (H.S.D.)

11. ஒரு முக்கோணித்தட்டு இரு உலோகங்களினுலானது. அவற்றின் பிரிவுகோடு பக்கமொன்றிற்குச் சமாந்தரமாக அப்பக்கத்தின் இடையத்தில் மேனேக்கி மூன்றிலிரண்டு தூரத்திலுள்ளது, முக்கோணி, சரிவகப்போலிப் பகுதிகளின் அடர்த்திகளின் விகிதம் 5 : 4 ஆகும். கூட்டுத் தட்டின் திணிவு மைய நிலையத்தைக் காண்க. (I.E.)

12. 2 அடி × 2 அங்குலம், 3 அடி × 2 அங்குலம், 1 அடி × $1\frac{1}{2}$ அங்குலம் என்னும் முச்செவ்வகப் பரபுக்கள் T என்னும் உருவத்திற் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றன. இங்கு, மீக நீண்ட பரப்பும் மிகக் குறுகிய பரப்பும் குறுக்குத் துண்டுகளாக அமைகின்றன. இவ்வுருவத்தின் மையப்போலிக்கும் மிகச்சிறிய பரப்பின் வெளி விளிம்பிற்குமிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க. (I.E.)

13. ஓர் அடி பக்கமுள்ள சீர்ச் சதுரத்தட்டொன்றில் இரு வட்டத் துவாரங்கள் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் ஒன்று 1 அங்குல ஆரையுள்ளது. தட்டின் இரு அயற் பக்கங்களாகிய அச்சுக்களைச் சார்ந்து இதன் மையத்தின்

ஆள்கூறுகள் (4, 5) அங்குலமாகும. மற்றைய துவாரம் $\frac{1}{2}$ அங்குல ஆரையுள்ளது. இதன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் (8, 1) அங்குலமாகும். இத்தட்டினது மீதியின் திணிவு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. (I.S.)

14. ABCD ஒரு சரிவகம். இதன் பக்கங்கள் AB, CD சமாந்தரமானவை. இதன் புவியீர்ப்பு மையமானது, AB, CD ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை விகிதம் $AB + 2CD : 2AB + CD$ இற் பிரிக்கிறதெனக் காட்டுக. (I.S.)

15. முக்கோணி ABC இல் $AB = AC$; BC, CA, AB இன் நடுப் புள்ளிகள் முறையே D, E, F, ஆகும். G, முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையம். பகுதி AFGE நீக்கப்படின், முக்கோணியின் மிகுதிப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் A இலிருந்து எத்தூரத்தில் உள்ளது? இங்கு $AD = 3$ அடியெனத் தரப்பட்டுள்ளது. (I.S.)

16. ABCD ஒரு சீர்ச் செவ்வகத்தட்டு. CB, CD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளூடான ஒரு நேர்வெட்டினால் அதன் முக்கோணிப் பகுதியொன்று நீக்கப்படுகின்றது. மீதிப்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் செவ்வக மையத்திலிருந்து $\frac{1}{21}$ AC தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக. (I.S.)

17. இரு செவ்வட்டக் கூம்புகள் ஒரே அடியை உடையவை. அவற்றின் அச்சுக்கள் முரண் திசைகளிலுள்ளன. இக்கூம்புகளினால் உருவாக்கப்படும் கதிர்க்கோல் வடிவத் திண்மத்தின் மையப்போலி அவற்றின் அடியின் மையத்திற்கும் உச்சிகளின் இடைத்தூரத்தினை இரு கூறிடும் புள்ளிக்குமிடையே நடுவிலுள்ளதெனக் காட்டுக. (I.S.)

18. ABC ஒரு சீர்ச் சமபக்க முக்கோணியடர். இது 20 சமீ. பக்கமுடையது; 240 கி. திணிவுள்ளது. மூலைகள் A, B, C இல் முறையே 30, 40, 50 கி. திணிவுகள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. பக்கம் BC இலிருந்து முழுத்தொகுதியினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க. (H.S.D.)

19. ஒரு வட்டத் திண்மக்கூம்பின் அடித்துண்டொன்றின் வட்ட நுனிகளினது ஆரைகள் விகிதம் 2 : 3 இலுள்ளன. அடித்துண்டின் மையப்போலியிலிருந்து இந்நுனிகளின் தூரங்கள் விகிதம் 43 : 33 இலுள்ளன என நிறுவுக. (H.S.D.)

20. அட்டைத்தாட் துண்டொன்று செவ்வகம் ABCD வடிவுள்ளது. $AB = 5$ அங்குலம், $BC = 8$ அங்குலம். AB ஐ அடியாகக் கொண்டுள்ள சமபக்க முக்கோணி வடிவுள்ள ABE என்னும் பகுதி இவ்வட்டைத் தாளில் வெட்டப்பட்டுள்ளது. இத்தாளின் மீதிப்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் DC இற்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தை அங்குலத்தில் ஒரு தசமதானத்திற்குச் சரியாகக் காண்க. (H.S.D.)

21. ஒரு வைக்கோற் போர் வட்டவுருளையொன்றின்மீது நிற்கும் செவ்வட்டக் கூம்பு வடிவுள்ளது. இதன் அடி 30 அடி விட்டமானது.

உருளையின் உயரம் 16 அடி. கூம்பின் சாய்பக்கம் 20 அடி நீளமானது. வைக்கோற் போரின் புவியீர்ப்பு மையம் நிலத்திலிருந்து எவ்வுயரத்திலுள்ளது ? (I.E.)

22. ஒரு மூடிய ஒழுங்கான நான்முகி இலேசான உலோகத் தகட்டினாலானது. இது (i) வெறிதாக இருக்கும்போதும், (ii) நான்முகியின் நிறையின் மும்மடங்கு நிறையுள்ள திரவத்திஞல் நிரப்பும்போதும், புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க. (I.E.)

23. ஒரு கூம்பின் அடித்துண்டொன்றின் r_1, r_2 ஆரையுள்ள வட்ட நுனிகளின் இடைத்தூரம் h ஆகும். அதன் **வளைபரப்பு** மெல்லிய சீர்ச் சடப்பொருளினுல் மூடப்பட்டிருக்கிறது. இச்சடப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் r_2 ஆரையுள்ள நுனியிலிருந்து,

$$\frac{h(2r_1+r_2)}{3(r_1+r_2)}$$

உயரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக. (H.S.D.)

24. இருசமபக்க முக்கோணி வடிவச் சீர் முக்கோணிப் பலகையடரொன்றின் பக்கங்கள் முறையே 12, 8, 12 அங்குலமாகும். இதைச் சுற்றி மெல்லிய உலோகப் பட்டையொன்று உள்ளது. இப்பட்டையின் நிறை அடரினது நிறையின் இரு மடங்காயின், அடர், பட்டை ஆகிய இரண்டினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

25. முக்கோணி ABC வடிவில் வளைத்த சீர்க் கம்பியானது A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A இலிருந்து தொங்கவிடும் குண்டுநூல் புள்ளி D இல் BC ஐக் கடக்குமென நிறுவுக. இங்கு,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{a+b}{a+c};$$

a, b, c, ஆகியன முக்கோணியின் பக்கங்கள். (H.S.D.)

26. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டொன்றின் தட்டை நுனிகள் முறையே 1 அடி, 3 அடி விட்டமுடையவை ; அடித்துண்டு 26 அங்குல உயரமானது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் பெரிய தட்டை நுனியிலிருந்து 9 அங்குலத்தில் உள்ளதென நிறுவுக. (I.S.)

27. ஒரு முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையத்தூடாய் அதன் பக்கங்களிலொன்றிற்குச் சமாந்தரமாக ஒரு கோடு வரையப்பட்டுள்ளது. நாற்பக்கற் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் முக்கோணியின் இடையத்தை விகிதம் 7 : 38 இற் பிரிக்கிறதென நிறுவுக. (H.S.D.)

28. 30° அரையுச்சிக் கோணமுள்ள செவ்வட்டக் கூம்புவடிவுள்ளதும் அடியுடன் கூடியதுமான ஓர் உலோகக் குவளை மெல்லிய சீர் உலோகத் தாளினுலானது. அது திரவத்திஞல் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது. நிரப்பிய

திரவத்தின் நிறை குவளையின் நிறையிலும் இருமடங்கானது. அடிக்கு மேலாகப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரத்திற்கும் கூம்பின் உயரத்திற்கும் இடையேயான விகிதத்தினைக் காண்க. (H.S.D.)

29. சீர்க் கூம்பொன்றின் திண்ம அடித்துண்டொன்று h தடிப்பானது. அதன் நுனிமுகங்கள் முறையே a, b $(a > b)$ ஆரை உடையவை. இவ்வடித்துண்டில் உருளைவடிவத் துவாரமொன்று குடையப்பெற்றுள்ளது. இத்துவாரத்தின் அச்சு கூம்பின் அச்சுடன் ஒன்றுபடுகிறது. துவாரத்தின் ஆரை அடித்துண்டின் சிறிய முகத்தின் ஆரைக்குச் சமம். இவ்வாறு பெற்ற திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அடித்துண்டின் பெரிய முகத்திலிருந்து

$$\frac{h(a+3b)}{4(a+2b)}$$

என்னும் தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

30. ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பினது அடித்துண்டொன்றின் ஒரு தட்டை நுனிமுகத்தின் ஆரை மற்றைய நுனிமுகத்தின் ஆரையின் n மடங்காயின், புவியீர்ப்பு மையம் அடித்துண்டினை விகிதம்

$$(3n^2 + 2n + 1) : (n^2 + 2n + 3)$$

இற் பிரிக்கிறதென நிறுவுக.

31. வட்ட அடியுடன் கூடிய பொட் செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. இவ்வட்ட அடி வளைபரப்பின் அதே சடப்பொருளினாலானது. உயரமும் அடியின் விட்டமும் சமமாயின், கூம்பை அடியின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடும்போது அச்சு நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

32. மெல்லிய உலோகத் தாளினாலாய பொட் கூம்புவடிவப் பாத்திரமொன்று அதன் அடியில் மூடப்பெற்றுள்ளது; அதனடிக்குச் சமாந்தரமான தளமொன்றினால் செங்குத்துயரத்தின் அரைவாசியில் அது குறுக்கே வெட்டப்பட்டு மேற்கூம்பு நீக்கப்படின், பாத்திரத்தின் மீதிப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து,

$$\frac{2}{3}\,\frac{lh}{3l+4r}$$

என்னும் தூரத்திலுள்ளது என நிறுவுக. இங்கு h, தொடக்கத்தில் பாத்திரத்தின் செங்குத்துயரம்; l, அதன் சாயுயரம்; r, அடியின் ஆரை. (I.S.)

33. ∟-வடிவச் சீர் அடரொன்றின் நிலைக்குத்துப் புயத்தின் வெளிப்புற உயரமும் அகலமும் முறையே 10 அங்குலமும் 1 அங்குலமுமாகும். கிடைப் புயத்தின் வெளிப்புற நீளமும் அகலமும் முறையே 6 அங்குலமும் 2 அங்குலமுமாகும். அடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. (I.A.)

34. ஒரு மரத் திண்மக்கனத்தின் ஒரு மூலை இம்மூலையிற் சந்திக்கும் விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளூடான அரிவாள் வெட்டினால் வெட்டப்படுகிறது. இக்கனத்தின் மீதிப்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து, வெட்டப்படாத மூன்று முகங்களினதும் செங்குத்துத் தூரங்களைக் காண்க. (H.S.D.)

35. விளிம்பு a உடைய ஓர் ஒழுங்கான நான்முகி அதன் செங்குத்து உயரத்தை இருகூறிடுவதும் அடிக்குச் சமாந்தரமானதுமான ஒரு தளத்தினால் வெட்டப்படுகிறது. இவ்வாறு வெட்டிய அடித்துண்டின் திணிவுமைய நிலையத்தைக் காண்க. (I.S.)

36. தட்டையான நாற்பக்க அடரொன்று செவ்வகம் ABCD வடிவுள்ளது. இதன் மேல் BEC என்னும் முக்கோணிப் பகுதியொன்றுள்ளது. பக்கம் BE, AB இன் நீடிப்பாகும். AB, AD, BE முறையே a, b, c, நீளமாயின், AB, AD ஆகியவற்றிலிருந்து அடரின் புவியீர்ப்பு மையம் எத்தூரத்திலுள்ளது ? $c = a\sqrt{3}$ ஆயின், புவியீர்ப்பு மையம் BC இல் அமையுமெனவும் நிறுவுக.

37. ஓர் அடுக்கில் ஒவ்வொன்றும் 12 அடி நீளமான நான்கு ஒத்த பலகைகள் உள்ளன. இரண்டாம் பலகை முதலாவதற்கப்பால் 2 அடி நீட்டியும், மூன்றுவது இரண்டாவதற்கப்பால் 3 அடி நீட்டியும், நான்காவது மூன்றுவதற்கப்பால் 6 அடி நீட்டியுமுள்ளன. அவற்றின் பக்கங்களெல்லாம் நிலைக்குத்தானவை. இந்நான்கு பலகைகளினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. (I.A.)

38. உலோகத் தாளினாலான தாங்கியொன்று a பக்கமுள்ள கனவடிவுள்ளது. அதனடியின் மையத்தில் விட்டம் $\frac{a}{4}$ உள்ள வட்டத் துவாரமொன்றுள்ளது ; அத்துவாரத்தின் விளிம்பிற்கு வெளிப்புறமாக இணைத்த $\frac{a}{4}$ உயரமுள்ள ஓர் உருளை ஒரு வட்டத் தட்டினால் மூடப்பட்டுள்ளது. கனம், உருளை, தட்டு ஆகிய மூன்றும் ஒரே தாளிலிருந்து வெட்டப்பெற்றுள்ளன. திணிவு மையத்தைக் காண்க. (I.E.)

39. M திணிவும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு திண்மவுருளையின் நுனிகளில் ஒவ்வொன்றும் m திணிவுள்ள பாரமான சிறிய தட்டுகளிரண்டு, அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு உருளையின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக அதனிலிருந்து c தூரத்திலிருக்குமாறு இறுக்கப்பட்டுள்ளன. உருளையின் அச்சிற்குச் சமாந்தரமான அச்சினையுடையதும் b ஆரையுள்ளதுமான உருளையினொரு பகுதி, மீதிப்பகுதியினதும் தட்டுகளினதும் புவியீர்ப்பு மையம் உருளையின் அச்சில் அமையுமாறு எங்கு வெட்டப்பட வேண்டும் ? இத்தீர்வு சாத்தியமாகுமாறு விகிதம் $\frac{m}{M}$ இன் மிகக்கூடிய பெறுமானம் யாது ? (I.E.)

40. ஒரு நான்முகிவடிவச் சட்டப்படல் ஆறு சீர்க் கோல்களினாலானது. ஒவ்வொரு கோலும் அதன் எதிர்க் கோலிற்குச் சமம். நான்முகி திண்மமாயிருக்கும்போது புவியீர்ப்பு மையம் ஒரே புள்ளியில் இப்போதும் அமையுமெனக் காட்டுக. (I.A.)

41. ஓர் உலோகத்தாள் இருசமபக்க முக்கோணி ABC வடிவுள்ளது. AB = AC = 20 அங்குலம், BC = 32 அங்குலம். மூலை A, BC இன் நடுப்புள்ளியில் அமையுமாறு மடிக்கப்பட்டுள்ளது. இம்மடிப்பானது BC இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு உலோகம் கிழே தட்டையாக்கப்பட்டுள்ளது. மடித்த தாளின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. (N.U.3)

42. ABC ஒரு முக்கோணியடர். BD : DC = CE : EA = AF : FB என்றவாறு D, BC இலும் E, CA இலும் F, AB இலும் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. முக்கோணி DEF இன் புவியீர்ப்பு மையமும் தொடக்கத்திலுள்ள முக்கோணி ABC இன் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றென நிறுவுக. (I.S.)

43. (i) ABC, கோல்களாலாய ஒரு முக்கோணி. கோல்கள் யாவும் சீரானவை, சமநிறையுள்ளவை. ஆனால் அவை சமநீளமானவையாக இருக்கவில்லை. புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(ii) ஓர் இரச வெப்பமானியின் குமிழ் 1 சமீ. உள்விட்டமுள்ள கோளமாகும். இவ்வெப்பமானியின் குழாய் $\frac{1}{4}$ மிமீ. உள்விட்டமுடைய வட்டவுருளையாகும். உறைவெப்பநிலையில் குழாயின் 2 சமீ. உம் குமிழும் இரசத்தினால் நிரப்பப்படுகின்றன. நீரின் கொதிநிலையில் இதேயளவு இரசத்தினால் குழாயின் 20 சமீ. உம் குமிழும் நிரப்பப்படுகின்றன. வெப்பமானியின் தன்விரிவைத் தவிர்த்து, உறை வெப்பநிலைக்கும் கொதி வெப்பநிலைக்கு மிடையில் இரசத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் எவ்வளவால் உயருகிறதென்பதைக் காண்க. (H.S.D.)

44. அடியில் திறந்திருக்கும் ஒரு தடிப்பான கூம்புவடிவ ஓடு ஒவ்வொன்றும் α அரையுச்சிக் கோணமுடைய இரு செவ்வட்டக் கூம்புகளினால் எல்லைப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் அடியின் ஆரை முறையே r, $r-t$ ஆகும். அடிக்கு மேலாகத் திணிவு மையத்தின் உயரம் $\frac{1}{6}(2r-t)$ கோதா α எனக் காட்டுக. இங்கு $\frac{t}{r}$ இன் வர்க்கம் தவிர்க்கப்பட்டுள்ளது. (H.S.D.)

45. ABCD ஒரு சீர்ச் சதுரத்தட்டு. இதன் விளிம்புகள் 8 அங்குல நீளமானவை.

$$BQ = CR = 2 \text{ அங்குலம்,}$$

என்றவாறு BC, CD என்பனவற்றில் முறையே Q, R என்னும் புள்ளிகள் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. தட்டின் பகுதி CQR வெட்டப்படுகின்றது. AB, BC ஆகியவற்றிலிருந்து மீதியின் திணிவு மையத்தின் தூரங்களைக் காண்க. (N.U.3.)

46. ஒரு சீர்த் தட்டு ABCD, AC இன் இருமருங்கிலும் இரு ஒருங்கிசை முக்கோணிகளையுடையது. இவை ஒவ்வொன்றும் C இல் ஒரு விரிகோணத்தை உடையன. B, D ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டிலிருந்து 3 அங்குல தூரத்தில் C இருப்பின், அடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது C உடன் ஒன்றுபடுமிடத்துத் தூரம் AC ஐக் காண்க. (N.U.3.)

47. ABC ஒரு சீரடர். C, செங்கோணம்; $AC = b$, $BC = a$. AC, BC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, D ஆகும். AB இற்குச் செங்குத்தான EK, DH என்னும் வெட்டுகளினுல் முக்கோணிகள் வெட்டப்பெற்றுள்ளன. மீதி CEKHD இன் புவியீர்ப்பு மையம் KH இலிருந்து,

$$\frac{7}{18}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

என்னுந் தூரத்திலுள்ளதெனை நிறுவுக. (N.U.3.)

48. ABCD என்னுமொரு சீர்க் கம்பி, BA உம் CD உம் ஒரே போக்கிலிருக்குமாறு B இலும் C இலும் செங்குத்தாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது. பகுதிகள் AB, BC, CD முறையே 6, 4, 2 அங்குல நீளமானவை. கம்பியின் புவியீர்ப்பு மையம் AB, BC ஆகியவற்றிலிருந்து எத்தூரத்திலுள்ளது ? கம்பி, அதன் பகுதியொவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் சம கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமாறு P என்னும் புள்ளியுடன் இணைத்த ஓர் இழையினுல் தொங்கவிடப்படலாமெனக் காட்டுக. BP இன் நீளத்தையுந் தருக. (H.C.)

49. பலகணியைச் சுத்தம் செய்யுமேணி எணி, முனையொன்றில் இணைக்கப்பட்டிருப்பனவும் சமவெளியுள்ள பத்துப் படிகளினுலே தொடுக்கப்பட்டிருப்பனவுமான இரு சம பக்கத்துண்டுகளால் ஆக்கப்பெற்றுள்ளது. அடியிலுள்ள படியின் நீளம் ஒவ்வொரு பக்கத்தினதும் நீளத்தின் எட்டிலொன்று. ஏணியின் ஓர் அடியின் நிறை பக்கங்களின் ஓர் அடியின் நிறையின் மூன்றிலொன்று. முழுவதினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. இவ்வேணி சமநிலையின் எல்லைத் தானத்தில் நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு முனையிலும் உராய்வுக் குணகம் ஐந்திலொன்றுயின் அத்தானத்தைக் காண்க. (I.E.)

50. ஒழுங்கான கூம்பகமொன்று மெல்லிய சீர் உலோகத் தாளினுலானது. இதனடி ஒழுங்கான அறுகோணியாகும். a, இவ்வடியின் சுற்றுவட்ட ஆரையும், $2a$, சாய்வான விளிம்புகளின் நீளமுமாயின் கூம்பகத்தின் மொத்தப் பரப்பினதும் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் கண்டு, அடியிலிருந்து அதன் தூரத்தையுந் தருக. (N.U.3 உம் 4 உம்.)

51. மெல்லிய சீர்ச் சடப்பொருளினுலான திறந்த செவ்வகத் தொட்டியொன்றின் நீளம் $3a$ அடி, அகலம் $2b$ அடி, உயரம் $2c$ அடி. $2b$ அடி நீளமான மேல் விளிம்புகளொவ்வொன்றின் வழியேயும்

பிணைத்த முறையே a, $2a$ அடி நீளமான இரு மூடிகளைக் கொண்டு இத்தொட்டியை மூடலாம். மூடியொவ்வொன்றும் 30° கோணத்தூடாகத் திறக்குமிடத்து, புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க. (C.W.B.)

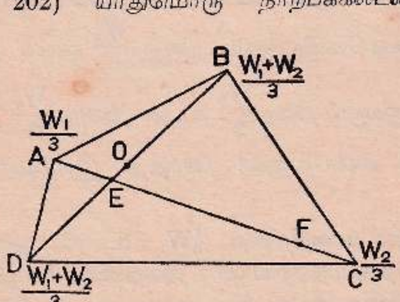
52. $2n$ பக்கங்களுள்ள ஒழுங்கான பல்கோணி வடிவில் ஒரு மெல்லிய சீர்க் கம்பி வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இப்பல்கோணியின் ஒரு பாதியின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க. இதினின்றும், ஓர் அரை வட்டச் சீர்க் கம்பியின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தினை உய்த்தறிக அல்லது வேறு விதமாகப் பெறுக. (C.W.B.)

§151. நாற்பக்கலடர்.

ஒரு நாற்பக்கலின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையம் மூலைவிட்டங்களிலொன்றை வரைந்து நாற்பக்கலை இரு முக்கோணிகளாகப் பிரித்தும், இம்முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றும் அதன் மூன்று உச்சிகளில் வைக்கப்படுவனவும் அதன் நிறையின் மூன்றிலொன்றிற்குச் சமமானவையுமான மூன்று துணிக்கைகளினூற் பதிலிடப்படுகிறதெனக் கருதியும் மிக எளிதாகப் பெறப்படுகிறது.

இப்புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையத்தைப் பல வழிகளில் எடுத்துரைக்கலாம். இவற்றிலிரண்டு கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளன.

ABCD (படம் 202) யாதுமொரு நாற்பக்கலடரைக் குறிப்பதாகக்



படம் 202.

கொள்க. இதன் மூலைவிட்டங்கள் AC உம் BD உம் E இற் சந்திக்கின்றன.

முழு நாற்பக்கலினதும் நிறையை W எனவும், முக்கோணிகள் ABD இனதும் BCD இனதும் நிறைகளை முறையே W_1, W_2 எனவும் கொள்க.

ABD, BCD ஆகியவற்றின் பரப்புகள் AE, EC ஆகியவற்றினிடையேயான விகிதத்தில் இருப்பதனால்,

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{AE}{EC}.$$

ABD இற்குப் பதிலாக A, B, D ஆகியவற்றில் $\frac{W_1}{3}$ என்னும் சம துணிக்கைகளேயும், BCD இற்குப் பதிலாக B, C, D ஆகியவற்றில் $\frac{W_2}{3}$ என்னும் சம துணிக்கைகளேயும் இட, மூலைகள் B, D ஒவ்வொன்றிலும்,

$$\frac{W_1 + W_2}{3} \text{ உம், A இல் } \frac{W_1}{3} \text{ உம், C இல் } \frac{W_2}{3} \text{ உம் இருக்கும்.}$$

(i) A இலுள்ள $\frac{W_1}{3}$ இனதும் C இலுள்ள $\frac{W_2}{3}$ இனதும் புவியீர்ப்பு மையமானது AC இல் F என்னும் புள்ளியிலுள்ளது.

$$\text{பின்பு } W_1 . AF = W_2 . CF,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{AE}{EC},$$

ஆகவே,
$$CF = AE.$$

A, C என்பவற்றிலுள்ள நிறைகள் F இல் $\frac{1}{3}W$ இற்குச் சமம்.

B, D என்பனவற்றிலுள்ள நிறைகள் BD இன் நடுப்புள்ளி O இல் $\frac{2}{3}W$ இற்குச் சமம். ஆகவே, முழுநாற்பக்கலினதும் புவியீர்ப்பு மையம் OF இல் G இலுள்ளது. இங்கு, $2OG = GF$.

(ii) நான்கு மூலைகளிலும் உள்ள நிறைகள் ($\frac{1}{3}W$ ஆக) சமமாகுமாறு A இல் ஏற்கெனவேயிருக்கும் நிறை $\frac{W_1}{3}$ உடன் நிறை $\frac{W_2}{3}$ ஐயும் C இல் ஏற்கெனவேயிருக்கும் நிறை $\frac{W_2}{3}$ உடன் நிறை $\frac{W_1}{3}$ ஐயும் சேர்ப்பின், ($W_2 . AE = W_1 . EC$ என்பதனுல்) சேர்த்த இந்நிறைகள் E இல் $\frac{1}{3}W$ இற்குச் சமம்.

இப்போது E இல் **மறை**நிறை $\frac{1}{3}W$ உள்ள ஒரு துணிக்கையைச் சேர்க்கின், இது, சேர்த்த மற்றைய இரு நிறைகளேயும் சமன்செய்யும். பின்பு முழுத் துணிக்கைகளினதும் புவியீர்ப்பு மையமும் நாற்பக்கலின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றுகும்.

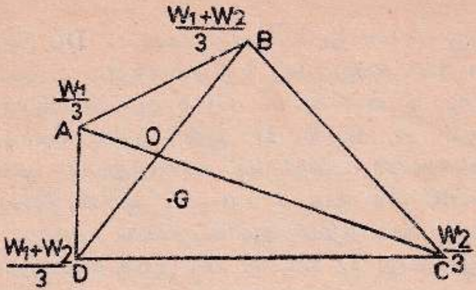
ஆகவே, **யாதுமொரு நாற்பக்கற் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையமும், அதன் கோணப் புள்ளிகளில் வைத்திருக்கும் நான்கு சம துணிக்கைகளினதும் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியில் வைத்திருக்கும் மறைத் திணிவுள்ள இன்னெரு சம துணிக்கையினதும் புவியீர்ப்பு மையமுமொன்றுகும்.**

உதாரணம்.

G, ஒரு சீரான நாற்பக்கற்றட்டின் புவியீர்ப்பு மையம். G′, அதன் மூலைகளில் வைத்திருக்கும் நான்கு சமதுணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையம். O,

அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி. O, G, G′ ஆகிய மூன்றும் ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளனவென்றும், $OG' = 3GG'$ என்றும் நிறுவுக. (H.S.D.)

அந்நாற்பக்கலை ABCD என்க (படம் 203).



படம் 203.

முக்கோணிகள் ABD, BCD இன் நிறைகளை முறையே W_1, W_2 என்க. ABD இற்குப் பதிலாக A, B, D ஆகியவற்றில் நிறைகள் $\frac{W_1}{3}$ ஐயும், BCD இற்குப் பதிலாக B, C, D ஆகியவற்றில் நிறைகள் $\frac{W_2}{3}$ ஐயும் இடுக.

ஆகவே G, இத்துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமாகும். மொத்த நிறை $W_1 + W_2$ அதிற் செயற்படுகிறது.

G′, இத்துணிக்கைகளினதும் $\left(\frac{W_1}{W_2} = \frac{AO}{OC}\right.$ என்பதனால்$\left.\right)$ O இல் $\frac{W_1 + W_2}{3}$ இற்குச் சமமான, A இலுள்ள $\frac{W_2}{3}$, C இலுள்ள $\frac{W_1}{3}$ என்னுந் துணிக்கைகளினதும் புவியீர்ப்பு மையம்.

ஆகவே G′, G இலுள்ள $W_1 + W_2$ இனதும் O இலுள்ள $\frac{1}{3}(W_1 + W_2)$ இனதும் புவியீர்ப்பு மையமாகும். எனவே, இது OG இல் அமையவேண்டும். அதோடு $OG' = 3GG'$.

பயிற்சி XXXII.

1. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் புவியீர்ப்பு மையமும் முறையே AO, OC, 2AC ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமமான திணிவுடையவையும் A, C, BD இன் நடுப்புள்ளி ஆகியவற்றில் வைத்திருப்பனவுமான மூன்று துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒன்றெனக் காட்டுக. இங்கு O, AC உம் BD உம் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி. (I.S.)

2. ABCD, ஒரு சீரான தட்டை நாற்பக்கல். அதன் மூலைவிட்டங்கள் L இற் சந்திக்கின்றன. AC இலும் BD இலும் முறையே M, N என்னும் புள்ளிகளுள்ளன. $AM = CL$, $BN = DL$. இந்நாற்பக்கலின் திணிவு மையம் முக்கோணி LMN இன் திணிவுமையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறதெனக் காட்டுக. (H.S.C.)

3. ABCD ஒரு சீரான தட்டை நாற்பக்கலடர். DC இற்கு AB சமாந்தரமானது. AB, a நீளமானது ; DC, b நீளமானது. அவ்வடரின் புவியீர்ப்பு மையம், முறையே a, $a+b$, b, $a+b$ ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமமான திணிவுடையனவும் A, B, C, D ஆகியவற்றில் வைத்துள்ளனவுமான நான்கு துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறதெனக் காட்டுக. $AD = BC = c$ உம், $b > a$ உம் ஆயின், செவ்வக அச்சுக்களைச் சார்ந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. இவ்வச்சுக்களில் ஒன்று DA ; மற்றையது D ஊடாய் DA இற்கு வரைந்த செங்குத்து.

4. கோணப் புள்ளிகள் (5, 0), (3, 7), (−2, 5), (−5, 0) ஐ உடைய நாற்பக்கலடரினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆள்கூறுகளை, இரு தசம தானங்களுக்குக் கணிக்க. (Ex.)

5. (i) சீரான முக்கோணித் தட்டு ABC இன் புவியீர்ப்பு மையம் BC, CA, AB ஆகிய பக்கங்களில் முறையே X, Y, Z என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள மூன்று சமதுணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறதென நிறுவுக. இங்கு $BX : XC = CY : YA = AZ : ZB$.

(ii) ABCD ஒரு சரிவகம். அதன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் AB, DC ஆகியன முறையே a, b நீளமானவை ; E, F என்பன முறையே AB, DC இன் நடுப்புள்ளிகள் ; H, EF இன் நடுப்புள்ளி. இச்சரிவகத்தின் மையப்போலியும், E, F, H ஆகியவற்றில் உள்ளனவும் முறையே a, b, $2a+2b$ ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமமானவையுமான திணிவுகளின் மையப்போலியும் ஒன்றாகுமென நிறுவுக. (H.S.C.)

6. நாற்பக்கல் ABCD வடிவுள்ள ஒரு சீர்த்தகட்டின் மூலைவிட்டங்கள் AC உம், BD உம் செங்குத்தாகப் புள்ளி O இல் வெட்டுகின்றன. $AO = 2$ அங்குலம், $OC = 4$ அங்குலம், $BO = 1$ அங்குலம், $OD = 3$ அங்குலம். மூலைவிட்டங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் இருந்து நாற்பக்கலினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.

7. முக்கோணி ABC இன் இடையங்கள் AD, BE, CF என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி G ஆகும். AFGE என்னும் பகுதி நீக்கப்படின், மீதியின் புவியீர்ப்பு மையமானது D இலிருந்து $\frac{7}{12}$ GD தூரத்தில் GD இலுள்ளதெனக் காட்டுக. (N.U.3.)

8. ABCD ஒரு நாற்பக்கல். இது வழக்கமான அமைப்பினால் சம பரப்புள்ள முக்கோணி ABX ஆகக் “குறைக்கப்படுகிறது” (C, கோடு BX இலுள்ளது). ABCD இனதும் ABX இனதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் AC இலிருந்து ஒரே தூரத்திலுள்ளனவென நிறுவுக. (Ex.)

9. ABCD ஒரு தட்டையான நாற்பக்கலடர். தன் மூலைவிட்டங்கள் O இற் சந்திக்கின்றன. AO, OC இலும் DO, OB இலும் குறைவானது. S, BD இன் நடுப்புள்ளி. T, AC இன் நடுப்புள்ளி. OSKT, ஓர் இணைகரம். அடர் ABCD இன் புவியீர்ப்பு மையமானது S, T, K ஆகியவற்றிலுள்ள மூன்று சமதுணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறதென நிறுவுக. (Ex.)

10. நாற்பக்கலொன்றின் a, b நீளமான இரு சமாந்தரப் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். நாற்பக்கலின் மையப்போலி G, XY ஐ விகிதம் $2b+a : 2a+b$ இற் பிரிக்கிறதெனக் காட்டுக. ஒழுங்கானதும் சீரானதும் a பக்கமுள்ளதுமான அறுகோணிப் பரப்பொன்றில் இதன் பக்கங்களொன்றிற்குச் சமாந்தரமாக இப்பக்கத்திலிருந்து $\frac{1}{2}ka\sqrt{3}$ தூரத்தில் வெட்டி ஒரு பகுதி நீக்கப் பெற்றுள்ளது. இங்கு, $k < 1$. மீதிப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் நிறைவான பரப்பின் மையத்திலிருந்து

$$\frac{k(3-k^2)}{3(6-2k-k^2)}a\sqrt{3}$$

தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக. (C.W.B.)

11. சீரான முக்கோணித் தட்டு ABC இன் திணிவு மையம் G ஆகும். இத்தட்டிலிருந்து, GA, GB, GC ஆகியவற்றினை அதே விகிதத்தில் வெட்டுமாறு BC, CA, AB ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரக் கோடுகள் வரைந்து முக்கோணித் துண்டுகள் வெட்டப்பட்டுள்ளன. திணிவு மையம் மாறாதுள்ளதென நிறுவுக. (C.W.B.)

12. 3W நிறையுள்ள பாரமான நாற்பக்கல் அடரொன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியில் W நிறைத் துணிக்கையொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு மூலையிலும் ஒவ்வொன்றாக நான்கு சம நிலைக்குத்து விசைகள் தாக்கின் அது கிடையாகச் சமநிலையிலிருக்குமென நிறுவுக. (Ex.)

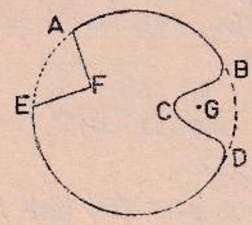
§152. ஒரு பொருள் அதனடி (சாய்ந்துள்ளவிடத்து சறுக்குதலைத் தடுக்கக்கூடியவாறு முரடான) தளமொன்றைத் தொடுமாறு வைக்கப்படும்போது, அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தூடான நிலைக்குத்துக் கோடு அடிப் பரப்பினுள் தளத்தைச் சந்திப்பின் அப்பொருள் சமநிலையிலிருக்கும்.

அப்பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகள் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தூடாய் நிலைக்குத்தாகச் செயற்படும் அதன் நிறையும், தளத்தின் மறுதாக்கமுமாகும். தளம் கிடையாக இருப்பின், அடியின் வெவ்வேறு பகுதிகளின்மீது தளத்தின் மறுதாக்கங்கள் எல்லாம் நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளாகும். அவற்றின் விளையுள் அடியின் பரப்பினிலுள்ள புள்ளியொன்றிற் செயற்படவேண்டும் என்பது தெளிவு.

அத்தளம் சாய்ந்திருப்பின் அடியின் வெவ்வேறு பகுதிகளின் மீதான உராய்வு விளையுளும் தளத்தின் செவ்வன் அமுக்கங்களும் அடியின் பரப்பிலுள்ள புள்ளியொன்றிற் செயற்படும் ஒரு விளையுளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களிலும் தளத்தின் விளையுள் மறு தாக்கம் நிறையைச் சமன்செய்ய வேண்டின் புவியீர்ப்பு மையமூடான நிலைக் குத்து அடியின் பரப்பினுள் இருக்கவேண்டும்.

அடி, படம் 204 இற்போல உள்ளூறு கோணங்களைக் கொண்டிருப்பின் அடியின் பரப்பு படத்தில் அடக்கப்பெற்ற பரப்பினைக் குறிப்பதாகக் கருதப் பட வேண்டும் என்பது கவனிக்கத்தக்கது. இப்பரப்பு படத்தின் வழியே ஒரு துண்டு நூலை இறுக்கமாக நீட்டிப் பெறப்படுகின்றது. இவ்வாறு,

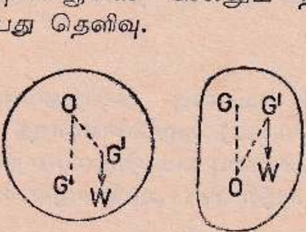


படம் 204.

G போன்ற புள்ளியொன்று அடியின் பரப்பினுள் அமையும்.

§153. சமநிலையுறுதிப்பாடு.

விறைப்பான பொருள் ஒன்று அதன் ஒரு புள்ளி மட்டுமே நிலைப் படுத்தப்பட்டிருக்கும்போது சமநிலையிலிருப்பின், அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் அந்நிலைத்த புள்ளியூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டில் அமையவேண்டும் என்பது தெளிவு.



(i) (ii)

படம் 205.

நிலைத்த புள்ளியை O (படம் 205) எனவும், அப்பொருளின் புவி யீர்ப்பு மையத்தை G எனவும் கொள்க.

பொருளின்மீது செயற்படும் விசைகள், G ஊடாய் நிலைக்குத்தாகச் செயற்படும் அதன் நிறையும் புள்ளி O இலுள்ள மறுதாக்கமுமேயாகும்.

இவை சமமாகவேண்டின் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டும், அ–து. G, O ஊடான நிலைக்குத்தில் இருக்கவேண்டும்.

இந்நிபந்தனை, (i) G, O இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருத்தல், (ii) G, O இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே இருத்தலாகிய இரு சந்தர்ப்பங்களிலும் பூர்த்தியாக்கப்படுகின்றது.

இவ்விரு தானங்களும் சமநிலைத் தானங்கள் ஆனால், இவ்விருவகைகளிலும் ஒரு வேறுபாடு உண்டு.

முதற் சந்தர்ப்பத்தில், பொருள் சிறிது பெயர்க்கப்படின் அது அதன் சமநிலைத் தானத்திற்குத் திரும்ப நாடும்; பெயர்ந்த புவியீர்ப்பு மையம் G′ ஊடான நிறையின் O பற்றிய திருப்புதிறனானது G ஐ அதன் தொடக்கத் தானத்திற்குத் திரும்பக் கொண்டுவர நாடும். இவ்விடத்து, சமநிலை **உறுதியானது.**

இரண்டாம் சந்தர்ப்பத்தில், பொருள் சிறிது பெயர்க்கப்படுமிடத்து, G′ (ii) ஊடாகச் செயற்படும் நிறையின் O பற்றிய திருப்புதிறனானது பெயர்ச்சியை அதிகரிக்க நாடும். அதோடு, பொருள் அதன் தொடக்கத் தானத்திற்குத் திரும்ப நாடாது. இவ்விடத்து சமநிலை **உறுதியில்லாதது.** ஒரு பொருள் ஒரு **சிறிய** பெயர்ச்சியின் பின் அதன் தொடக்கத் தானத்திற்குத் திரும்பின் அப்பொருள் உறுதிச் சமநிலையிலுள்ளது. அதைப் புரட்டாது பெயர்க்கக் கூடிய அளவு, அதன் உறுதிநிலையின் **அளவு** அல்லது தொகையின் அளவீடாகும். இதை நாம் எடுத்துநோக்கத் தேவையில்லை.

§154. அடியைக் கிடைத்தளமொன்றின்மீது பொருந்தப்பெற்றுத் தங்கும் ஒரு செவ் வட்டக்கூம்பு உறுதிச் சமநிலையிலுள்ளது; சிறிது பெயர்க்கப்படின் அது அதன் தொடக்கத் தானத்திற்குத் திரும்ப நாடும்.

அதன் உச்சி கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுமாறும் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவிருக்குமாறும் வைக்கப்படின், அது உறுதியில் சமநிலையிலிருக்கும்; சிறிது பெயர்க்கப்படுமிடத்து விழும்.

செவ்வட்டவுருளையொன்று அதன் ஒரு தட்டையான முனை கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுமாறு கொண்டு உறுதிச் சமநிலையிலுள்ளது. அதன் வளைபரப்பு ஒரு கிடைத்தளத்தினைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டிருப்பின், அது **எந்நிலையிலும்** தங்கும்.

இவ்விடத்து, சமநிலை **நடுநிலையான** தெனப்படும்.

கிடைத்தளமொன்றின்மீது தங்கும் ஒரு சீர்க் கோளமும் நடுநிலைச் சமநிலையிலுள்ளது.

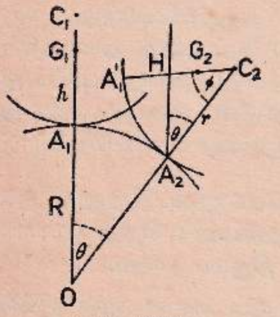
மிகப்பலவிடங்களில் சமநிலைத் தானம் உறுதியானதா உறுதியில்லாததா என்பதை அறிதல் மிக எளிதாகும். எனினும் குறித்த சில இடங்களில்

சமநிலைத் தானத்திலிருக்கும் ஒரு பொருள் சிறிது பெயர்க்கப்படுமிடத்து இத் தானத்திற்குத் திரும்புமா என்பதை நிர்ணயிப்பது கணிசமானளவு கடின மானது.

ஒரு பொருளின் வளைபரப்பின்மீது இன்னொரு பொருளின் வளைபரப்பு தங்குதல் போன்ற இடங்களில் இத்தகைய இக்கட்டான நிலைகள் தோன்று கின்றன. இவ்வகையின் ஓர் எளிய உதாரணத்தை இனிப் பார்ப்போம்.

§155. ஒரு பொருள் இன்னொரு பொருள்மீது சமநிலையிலே தங்கி யிருக்கிறது. இங்கு, தொடுகைப் புள்ளிக்கு அண்மையிலுள்ள பரப்புப் பகுதி கள் கோளவடிவிலும் வழுக்குதலைத் தடுக்கக்கூடியளவு முரடாகவும் உள்ளன. இவ்விருகோளங்களினதும் மையங்களை இணைக்கும் கோடு நிலைக் குத்தானது. சமநிலை உறுதியாக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனைகளைக் காணல்.

நிலைத்த பொருளின் பரப்பு மையத்தை O (படம் 206) எனவும் மேலுள்ள பொருளின் மையத்தை C_1 எனவும் கொள்க. பரப்புக்கள் கோளவடிவானவையாகையால் OC_1 தொடுகைப் புள்ளி A_1 ஊடாகச் செல் கிறது. அதோடு, சமநிலையிருப்பதனால் மேலுள்ள பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1, A_1 இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயிருக்கவேண்டும் ; ஆகவே, A_1C_1 இல் இருக்கவேண்டும்.



படம் 206.

$OA_1 = R$ எனவும், $A_1C_1 = r$ எனவும், $A_1G_1 = h$ எனவும் கொள்க.

மேலுள்ள பொருள் ஒரு சிறிய கோணத் தூடாகப் பெயர்க்கப்படுவதாக எண்ணுக. பின்பு, A_2, புதிய தொடுகைப் புள்ளியாயின், கோணம் $A_1OA_2 = \theta$.

A_1, C_1, G_1 இன் புதிய நிலையங்களை முறையே A_1', C_2, G_2 என்க.

O, A_2, C_2 ஆகியவை நேர்கோடொன்றில் அமையும். அதோடு வில் $A_2A_1' =$ வில் A_1A_2.

எனவே, கோணம் $A_2C_2A_1' = \phi$ ஆயின்,

$$\phi = \frac{R}{r}\theta \text{ ஆகும்.}$$

G_2, A_2 ஊடான நிலைக்குத்தின் இடப்பக்கத்திலிருப்பின், சமநிலை இப் போது உறுதியாக இருக்கும் ; $A_1'C_2$ இந்நிலைக்குத்தினை H இல் வெட்டுவ தாகக் கொள்க.

முக்கோணி A_2HC_2 இல்,

$$\frac{C_2H}{r} = \frac{\text{சைன் } \theta}{\text{சைன் } (\theta + \phi)} = \frac{\theta}{\theta + \phi}, \text{ ஏறத்தாழ,}$$

கோணங்கள் θ, ϕ என்பன சிறிதாக இருப்பதனால்.

$$\text{எனவே } A_1'H = r - C_2H = r\left(1 - \frac{\theta}{\theta+\phi}\right) = \frac{r\phi}{\theta+\phi} = \frac{Rr}{R+r},$$

அதோடு,

$$h < \frac{Rr}{R+r},$$

அல்லது

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \text{ ஆயின்,}$$

சமநிலை உறுதியானதாகும்.

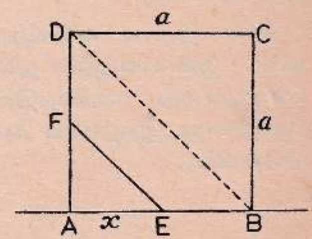
$\frac{1}{h} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R}$ ஆக இருக்கும்போது, சமநிலை நடுநிலைச் சமநிலையாகுமெனத் தோன்றும். எனினும், உறுதிப்பாட்டுக்கான நிபந்தனையைப் பெறுமிடத்து சைன்$\theta = \theta$, சைன் $(\theta+\phi) = \theta+\phi$ என்ற அண்ணளவுகளைப் பயன்படுத்தினோமென்பது ஞாபகத்தில் வைக்கத்தக்கது. A_2 ஊடான நிலைக்குத்தில் G_2 அமைதல் பற்றிய அவதி வகையில் இவ்வண்ணளவுகள் போதுமான அளவு செம்மையாகமாட்டா. இவ்விடத்து, சமநிலை உண்மையாக உறுதியற்றதென்பதைக் காட்டலாம்.

ஒரு பொருளின் உறுதிப்பாட்டைக் காண்பதற்குரிய இன்னொரு முறை அதிகாரம் IX இலே தரப்பெறும்.

§156. உதாரணம் (i).

விளிம்பு a உள்ள ஒரு கனக்குற்றி கிடைத்தளமொன்றின்மீது தங்குகிறது. கிடையுடன் 45° சாய்ந்திருக்கும் கிடை விளிம்பொன்றிற்குச் சமாந்தரமான தளங்களினுற் கிலங்களை வெட்டி அக்குற்றி படிப்படியாக அரியப்படுகிறது. நான்கு விளிம்புகளில் ஒவ்வொன்றிலுமிருந்து x நீளம் நீக்கப்படுமிடத்து எஞ்சிய பகுதியின் திணிவு மையத்தைக் கண்டு, ஏறத்தாழ $9x = 5a$ ஆகும்போது குற்றி விழுமெனக் காட்டுக. (I.S.)

ABCD (படம் 207) கனக்குற்றியின் மையத்தூடான நிலைக்குத்து வெட்டொன்றைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. பின்பு, வெட்டுந்தளமானது DB இற்குச் சமாந்தரமாகும்.



படம் 207.

வெட்டுந்தளமானது ABCD ஐச் சந்திக்கும் கோட்டினை EF என்க. AE $= x$ என்க. நீக்கப்பெற்ற அரியத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் முக்கோணி AEF இன் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருக்கும்.

கனக்குற்றியினதும் நீக்கிய பகுதியினதும் நிறைகள் முறையே வெட்டுக்களின் பரப்புக்கள் a^2, $\frac{1}{2}x^2$ ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமம்.

நிறைகளையும் BC, AB ஆகியவற்றிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	நிறை.	BC இலிருந்து பு. மை. இன் தூரம்.	AB இலிருந்து.
கனம் . .	a^2	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$
அரியம் AFE . .	$\frac{1}{2}x^2$	$a-\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}x$
மீதி . . .	$a^2-\frac{1}{2}x^2$	X	Y

BC பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$(a^2-\tfrac{1}{2}x^2)\mathrm{X} = \tfrac{1}{2}a^3 - \tfrac{1}{2}x^2(a-\tfrac{1}{3}x),$$

$$\therefore\ \mathrm{X} = \frac{a^3 - x^2(a-\frac{1}{3}x)}{2a^2-x^2}.$$

AB பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$(a^2-\tfrac{1}{2}x^2)\,\mathrm{Y} = \tfrac{1}{2}a^3 - \tfrac{1}{6}x^3,$$

$$\therefore\ \mathrm{Y} = \frac{a^3-\frac{1}{3}x^3}{2a^2-x^2}.$$

புவியீர்ப்பு மையம் E இன் இடப்பக்கத்தில் அமையின், அ-து. $\mathrm{X} > a-x$ ஆயின், குற்றி விழும். ஆகவே

$$a^3 - x^2(a-\tfrac{1}{3}x) = (2a^2-x^2)\,(a-x),$$

அல்லது $$a^3 - ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3 = 2a^3 - 2a^2x - ax^2 + x^3,$$

அல்லது $$\tfrac{2}{3}x^3 - 2a^2x + a^3 = 0$$

ஆக இருக்கும்போது அது விழுந் தறுவாயிலிருக்கும்.

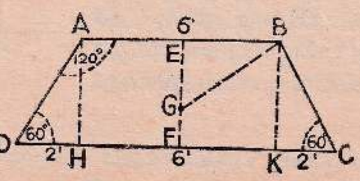
$x = \frac{5}{9}a$ என இட, இதன் இடப்பக்கம்

$$\frac{250}{2187}a^3 - \frac{10}{9}a^3 + a^3 = \frac{250}{2187}a^3 - \tfrac{1}{9}a^3 \text{ ஆக}$$

அமைகின்றது. இது கிட்டத்தட்டப் பூச்சியமாகும்.

உதாரணம் (ii).

சீர்த் திண்ம அரியமொன்றின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தை நிர்ணயிக்க. இவ்வரியத்தின் தலைமைக் குறுக்குவெட்டு படம் 208 இற் காட்டப் பெற்றுள்ளது. அரியத்தின் முகம் BC ஆனது கிடைத் தளமொன்றைத் தொடுமாறு இத்தகைய அரியமொன்று தங்கியிருக்க முடியுமா என்பதை நிர்ணயிக்க. (I.S.)



படம் 208.

இவ்வெட்டில் (இது தலைமை வெட்டு எனப்படுவதனால்) புவியீர்ப்பு மையம் அமைகிறது. சமச்சீரின்படி, AB, DC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு EF இல் இது அமையுமென்பது தெளிவு.

AH, BK ஆகியவற்றை DC இற்குச் செங்குத்தாக வரைக.

பின்பு $DH = 2$ அடி, $AH = 2$ தான் $60^\circ = 2\sqrt{3}$ அடி.

இவ்வரியம் மூன்று அரியங்களினுலானது எனக் கருதலாம். இவற்றின் தலைமை வெட்டுகள் படத்திலுள்ள இரு முக்கோணிகளும் செவ்வகமு மாகும். முழுவதினதும் பகுதிகளினதும் நிறைகள் முறையே ABCD, முக்கோணிகள், செவ்வகம் ஆகியவற்றின் பரப்புகளுக்கு விகிதசமம். பரப்புக்களையும் DC இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	பரப்பு.	DC இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம்.
ABCD	$16\sqrt{3}$	x
ABKH	$12\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
ADH	$2\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
BCK	$2\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

DC பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$16\sqrt{3}x = 36 + 4 + 4 = 44,$$

$$\therefore x = \frac{44}{16\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{12}.$$

ஆகவே, புவியீர்ப்பு மையம் EF இல் G இலுள்ளது. இங்கு $FG = \frac{11}{12}\sqrt{3}$,

$$\therefore EG = 2\sqrt{3} - \frac{11}{12}\sqrt{3} = \frac{13}{12}\sqrt{3}.$$

$\angle CBG$ செங்கோணத்திலும் குறைவாகில், அ-து. $\angle EBG$ 30° இலும் அதிகமாகில், அரியம் முகம் BC மீது தங்கியிருக்கக் கூடியது.

இப்போது $$\text{தான் } EBG = \frac{EG}{EB} = \frac{13\sqrt{3}}{36},$$

அதோடு $$\text{தான் } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}}{36},$$

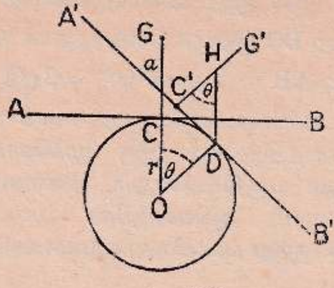
$$\therefore EBG > 30^\circ,$$

$\therefore$ அரியம் முகம் BC மீது தங்கியிருக்கக் கூடியது.

உதாரணம் (iii).

ஒரு சீர்க் கனம் அதனொரு முகம் நிலைப்பட்ட முரடான கோளமொன்றின் உச்சிப்புள்ளியைத் தொடுமாறு தங்கியிருக்கின்றது. அடிப்படைக் கோட்

பாடுகளிலிருந்து, கனத்தின் விளிம்பு கோளத்தின் விட்டத்திலும் குறை வாயின் சமநிலை உறுதியானதென நிறுவுக.



படம் 209.

AB (படம் 209) கனத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஊடான நிலைக் குத்து வெட்டையும், C, தொடுகைப் புள்ளியையும், O, கோளத்தின் (ஆரை r) மையத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்க.

கோளம் வழுக்குதலைத் தடுக்கக்கூடியளவு முரடானதெனக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது. அதோடு நாம் ஒருச்சரிதலிற்கான உறுதிப்பாட்டைப் பற்றியே சிந்திப்போம்.

கனத்தின் விளிம்பை $2a$ என்க. θ என்னும் **சிறிய** கோணத்தூடாக ஒருச்சரிந்தபின்பு A, C, B, G இன் நிலையங்களை முறையே A′, C′, B′, G′ என்க. D, புதிய தொடுகைப் புள்ளி.

இப்போது, G′, D ஊடான நிலைக்குத்தின் இடப்பக்கத்திலிருப்பின் கனம் அதன் தொடக்க நிலையத்திற்குத் திரும்ப நாடும்.

C′G′ இந்நிலைக்குத்தினை H இல் வெட்டுகிறதென்க.

நழுவலேதும் இல்லையாகையால்,

$$C'D = \text{வில்}\ CD = r\theta.$$

அதோடு கோணம் $\quad C'HD = \theta,$

$$C'H = C'D\ \text{கோதா}\ \theta = r\frac{\theta}{\text{தான்}\ \theta}.$$

ஆகவே,

$$r\frac{\theta}{\text{தான்}\ \theta} > C'G' \text{ ஆயின்},$$

சமநிலை உறுதிச் சமநிலையாகும்.

இவ்விடத்து, θ மிகச் சிறிதாக இருப்பின், θ, தான் θ ஆகியவற்றினிடையேயான விகிதம் ஒன்றாகும். அதோடு $C'G' = a$ என்பதனால்,

$$r > a$$

ஆயின், அ-து. கனத்தின் விளிம்பு கோளத்தின் விட்டத்திலும் குறை வாயின் சமநிலை உறுதிச் சமநிலையாகும்.

உதாரணம் (iv).

ஒரு செவ் வட்டத் திண்மக் கூம்பின் அடித்துண்டொன்றின் தட்டை முனைகளின் பெரிய, சிறிய ஆரைகள் முறையே R, r ஆகும். H, அதன் நிலைக்குத்துயரம். பெரிய தட்டை முனைமையத்திலிருந்து அக்கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம்.

$$\frac{H}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

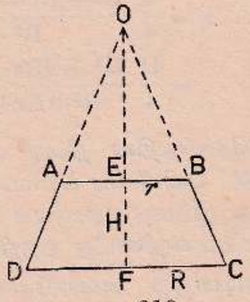
எனக் காட்டுக.

மேலுள்ளதுபோன்ற ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு அதன் பெரிய தட்டை முனையில் ஓர் அரைக்கோளத்தைக் கொண்டிருக்கும்போது அதன் அடித் துண்டின் அதே வடிவிலுள்ளது ஒரு திண்மம். அது ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது எந்நிலையிலும் வைக்கப்பட்டிருக்குமிடத்து,

$$3R^4 = H^2(R^2 + 2Rr + 3r^2)$$

ஆயின், சமநிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

(திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து ஆரையின் $\frac{3}{8}$ தூரத்திலுள்ளது.) (Ex.)



படம் 210.

ABCD (படம் 210), அடித்துண்டின் அச்சு EF ஊடாக அதன் வெட்டொன்றைக் குறிப்பதாகக் கொள்க ; $EB = r$, $FC = R$, $EF = H$.

DA, CB ஆகியவற்றை O இற் சந்திக்குமாறு நீட்டி கூம்பு முற்றுக்கப் படுவதாக எண்ணுக.

இயல்பொத்த முக்கோணிகள் OEB, OFC இலிருந்து,

$$\frac{OF}{OE} = \frac{R}{r},$$

அல்லது
$$\frac{H + OE}{OF} = \frac{R}{r},$$

இவற்றிலிருந்து, $OE = \dfrac{Hr}{R - r}$, $OF = \dfrac{HR}{R - r}$.

உச்சிக் கூம்பினதும் முழுவதினதும் கனவளவுகள் (நிறைகளும் கூட) முறையே OE^3, OF^3 என்பனவற்றிற்கும், அடித்துண்டின் கனவளவு $OF^3 - OE^3$ இற்கும் விகிதசமம். F இலிருந்து இக்கூம்புகளின் புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்கள்

$$\tfrac{1}{4}OE + H \text{ உம் } \tfrac{1}{4}OF \text{ உம் ஆகும்.}$$

எனவே, அடித்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையமானது F இலிருந்து x தூரத்திலிருப்பின், F பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$(OF^3 - OE^3)x = \tfrac{1}{4}.OF^4 - OE^3(\tfrac{1}{4}OE + H),$$

$$\therefore \left(\frac{R^3}{r^3}OE^3 - OE^3\right)x = \tfrac{1}{4}.\frac{R^4}{r^4}OE^4 - \tfrac{1}{4}.OE^4 - H.OE^3.$$

$$\therefore \frac{R^3 - r^3}{r^3}x = \tfrac{1}{4}.\frac{R^4 - r^4}{r^4}.OE - H$$

$$= \tfrac{1}{4}.\frac{R^4 - r^4}{r^4}.\frac{Hr}{R - r} - H$$

$$= \frac{H}{4}.\left[\frac{(R^2 + r^2)(R + r) - 4r^3}{r^3}\right],$$

$$\therefore x = \frac{H}{4}.\frac{R^3 + Rr^2 + R^2r - 3r^3}{R^3 - r^3}$$

$$= \frac{H}{4}.\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

R ஆரையுள்ள அரைக்கோளத்தின் நிறை அதன் கனவளவு $\frac{2}{3}\pi R^3$ இற்கு விகிதசமம். அதன் புவியீர்ப்பு மையம் நீட்டப்பெற்ற EF இல் F இற்கு $\frac{3}{8}R$ கீழேயுள்ளது. இணைந்த உருவம் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் F இலிருப்பின் கிடைத்தளமொன்றின்மீது எந்நிலையிலும் தங்கும்.

இவ்விடத்து அடித்துண்டினதும் அரைக்கோளத்தினதும் நிறைகளின் F பற்றிய திருப்புதிறன்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

இப்போது முழுக்கூம்பினதும் கனவளவு $\frac{1}{3}\pi R^2.OF$ ஆகும். அதோடு, அடித்துண்டின் கனவளவு இதன் $\dfrac{OF^3 - OE^3}{OF^3}$ ஆகும்.

அத்துடன் $$\frac{OF^3 - OE^3}{OF^3} = \frac{H^3(R^3 - r^3)}{(R - r)^3}.\frac{1}{OF^3},$$

$$\therefore \text{அடித்துண்டின் கனவளவு} = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2 H^3(R^3 - r^3)}{(R - r)^3}.\frac{1}{OF^2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi R^2 H^3(R^3 - r^3)}{(R - r)^3}.\frac{(R - r)^2}{H^2R^2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi H(R^3 - r^3)}{R - r}.$$

எனவே, F பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\frac{2}{3}\pi R^3 . \frac{3}{8}R = \frac{1}{3}\pi\frac{H(R^3 - r^3)}{R - r} . \frac{H}{4} . \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

$$= \frac{1}{12}\pi H^2(R^2 + 2Rr + 3r^2),$$

$$\therefore 3R^4 = H^2(R^2 + 2Rr + 3r^2).$$

பயிற்சி XXXIII.

1. ஒரு சதுரத்திலிருந்து மூலைவிட்டமொன்றிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டினால் ஒரு முக்கோணிப் பகுதி வெட்டப்படுகிறது. வெட்டிய பக்கம் எதுவாயினும் மீதி அப்பக்கத்தின் 0·5 ஆயின் அதில் தங்கி நிற்குமெனவும் அப்பக்கத்தின் 0·4 ஆயின் தங்கிநிற்காதெனவும் காட்டுக. (I.S.)

2. ABCD, ஒரு செவ்வகக் குற்றியின் நிலைக்குத்து முகம். BC ஐ ஒரு விளிம்பாகக் கொண்ட கிடைமுகம் நிலத்தைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது ; BC = 40 அங்குலம், CD = 25 அங்குலம் ; E என்னும் புள்ளி BC இல் B இலிருந்து 15 அங்குலத்திலுள்ளது. அக்குற்றியிலிருந்து முகம் ABCD இற்குச் செங்குத்தாக EF வழியே வெட்டி ஓர் அரியம் வெட்டப்படுமிடத்துக் குற்றி கவிழ்ந்து விழுந் தறுவாயிலிருக்குமாறு CD இலுள்ள புள்ளி F இன் நிலையத்தைக் காண்க. (H.C.)

3. ABCD, ஒரு சீர்த் தட்டை நாற்பக்கலடர். AB என்பது DC இற்குச் சமாந்தரமாகும். AB, a நீளமானது ; DC, b நீளமானது. இவ்வடரின் புவியீர்ப்பு மையமானது A, B, C, D என்பவற்றில் வைக்கப் பட்டுள்ளனவும் முறையே $a,\ a+b,\ b,\ a+b$ இற்கு விகிதசமனான திணிவுடையவைகளுமான நான்கு துணிக்கைகளின் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறதென நிறுவுக. $AD = BC = c$ உம் $b > a$ உம் ஆயின், இரு செவ்வக அச்சுக்களைச் சார்ந்து இதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆள் கூறுகளைக் காண்க. இவ்வச்சுக்களில் ஒன்று DA. மற்றையது D ஊடாக DA இற்கு வரைந்த செங்குத்து. அதோடு, $2c^2(a+2b),\ b^3 - a^3$ இலும் குறைவாயின் அத்தகைய நாற்பக்கலைக் குறுக்கு வெட்டாகக் கொண்ட ஒரு சீரரியம் கிடைத்தளமொன்றின்மீது BC அல்லது AD இற்கு இசைவான முகங்கள் அத்தளத்தைத் தொடுமாறு தங்கமுடியாதெனவும் காட்டுக. (H.C.)

4. ABC, ஒரு நிலைக்குத்து உலோகத் தாள். இங்கு A செங்கோணம். AC கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுகின்றது. D என்பது AC இன் நடுப் புள்ளி. முக்கோணி ABD வெட்டப்படுகிறது. தாளின் மீதிப்பகுதி விழுந் தறுவாயிலுள்ளதெனக் காட்டுக.

5. இருசமபக்க முக்கோணி BAC ஐக் குறுக்குவெட்டாகக் கொண்ட ஒரு சீர்ச் செவ்வரியம் ஒரு மேசைமீது, BC ஐக் கொண்டுள்ள முகம்

கிடையாக மேசையைத் தொடுமாறு இருக்கிறது ; C ஊடான விளிம்பில் ஆரம்பித்து, AB அமையும் முகத்திற்குச் சமாந்தரமாகக் கீற்றுக்களே வெட்டி அவ்வரியம் படிப்படியாக நறுக்கித் தள்ளப்படுகிறது. மீதி கவிழ்ந்து விழாதவாறு முழு அரியத்தினதும் எப்பின்னம் வெட்டப்படலாம் ? AB உம் AC உம் சமபக்கங்கள். (H.S.C.)

6. ABCD, சனக்குற்றியொன்றின் மையத்தூடான வெட்டு. E, AD இலுள்ள ஒரு புள்ளி. அவ்வெட்டுக்குச் செங்குத்தாக, EC ஊடான தளத்திலை வெட்டிய பகுதி நீக்கப்படுமிடத்து, AB, AE ஆகியவற்றிலிருந்து மீதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க. இடைத்தளமொன்றின் மீது அக்குற்றி வைக்கப்படின், குற்றி கவிழாதிருக்க AE இன் ஆகக் குறைந்த நீளத்தைக் காண்க.

7. ஒரு சீரரியத்தின் குறுக்குவெட்டு BDEC ஆகும். இங்கு, ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி; D, E என்பன முறையே AB, AC இன் நடுப்புள்ளிகள். கிடையுடன் 30° கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதும் சறுக்குதலைத் தடுக்கக் கூடியளவு முரடானதுமான ஒரு தளத்தை அரியத்தின் ஒரு முகம் தொடுமாறு அது தங்க எத்தனை நிலைகள் சாத்தியமானவை என்பதை நிர்ணயிக்க ; இங்கு, குறுக்குவெட்டுகளெல்லாம் சாய்தளத்தின் அதியுயர் சரிவுக்கோடுகளினூடான நிலைக்குத்துத் தளங்களிலுள்ளவை. (H.S.C.)

8. கிடையுடன் α கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதும் நழுவுதலைத் தடுக்கக் கூடியளவு முரடானதுமான ஒரு தளத்தினை அதன் ஒரு முகம் தொடுமாறு ஓர் ஒழுங்கான நான்முகி தங்கியிருக்கின்றது. அம்முகத்தின் ஒரு விளிம்பு கிடையாக எதிர் உச்சிக்கு மேலுள்ளது. தான் $\alpha < 2\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

9. ஒரு திண்ம அரைக்கோளமும் திண்மவுருளையும் ஒரே ஆரையையுடையவை ; ஏகவினப் பொருளினாலானவை. உருளையின் ஒரு நுனி அரைக்கோளத்தின் அடியுடன் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. உருளையின் உயரம் அதன் ஆரையின் $\frac{2}{3}$. முழுத் திண்மத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையம் பொதுத் தளத்திலிருந்து ஆரையின் $\frac{1}{48}$ இலுள்ளதெனக் காட்டுக. (I.E.)

10. சீரான மெல்லிய பொருளொன்றினாலான ஒரு பொட் பாத்திரம் வட்டக் கூம்பொன்றின் அடித்துண்டு வடிவுள்ளது. இப்பாத்திரத்தின் அடி தட்டையானது. இதன் வாயின் ஆரை அடியின் ஆரையின் இரு மடங்கு. கூம்பின் அரையுச்சிக் கோணம் 30° ஆயின், அப்பாத்திரம் அதன் வளைபரப்பு கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுமாறு தங்கியிருக்க முடியுமாவென்பதை நிர்ணயிக்க. (H.S.C.)

11. வட்டத்திண்மக் கூம்பொன்றின் உயரம் அதனடியினது ஆரையின் மும்மடங்காகும். கூம்பின் அடியைத் தள வரைப்பாடாகக் கொண்டதும் அரைக் கோளவடிவுள்ளதுமான இன்னொரு திண்மம் கூம்புடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சேர்ந்த திண்மம் கிடை மேசையொன்றின்மீது அரைக்

கோளப்பரப்பு மேசையைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டிருக்குமிடத்து அது கவிழ்க்கப்படாதாயின், அரைக்கோளத்தினதும் கூம்பினதும் ஆக்கப்பொருள் களினது தன்னீர்ப்புக்களின் மிகச் சிறிய விகிதத்தைக் காண்க. (I.E.)

12. எங்கும் ஒரே தடிப்புள்ள சடப்பொருளினாலான ஒரு பொட் பாத்திரம் பொட் கூம்பொன்றினையுடையது. இதன் அடிமீது அமைத்த பொள் ளரைக்கோளமொன்றினால் இக்கூம்பு மூடப் பெற்றுள்ளது. அரைக்கோளப் பரப்பு கிடைமேசையொன்றைத் தொடுமாறு அப்பாத்திரம் உறுதிச் சமநிலையில் தங்கியிருக்கமுடியின், கூம்பின்உயரத்திற்கும் அதனடியின் ஆரைக்கும் இடையேயான விகிதத்தின் இயன்றளவு அதிகமான பெறுமானத்தைக் காண்க. (ஒரு பொள்ளரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து ஆரையின் அரைவாசி தூரத்தில் இருக்கும்.) (H.S.C.)

13. ஒரு படிக்கட்டு வடிவிலுள்ள ஓர் அடுக்கு a விளிம்புள்ள சமமான n சீர்க் கனக்குற்றிகளை உடையது. ஒவ்வொரு குற்றியும் கீழுள்ள குற்றியின் தொடர்பில் c என்னும் சிறிய தூரம் பெயர்க்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வடுக்கின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் கண்டு, $(n-1)c > a$ ஆயின் அடுக்கு கவிழவேண்டுமென்பதை உய்த்தறிக. (H.C.)

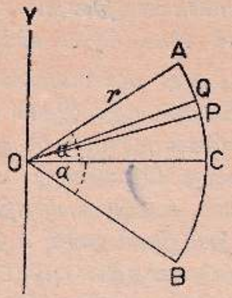
14. நான்கு சம கோல்களினாலான, ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றின் ஒரு பகுதியாகிய விறைப்பான சட்டப்படல் ABCDE ஆனது A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நிலைக்குத்துடன் AB ஆக்கும் கோணம் தான்$^{-1}$ $\left(4\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$ எனக் காட்டுக. (H.C.)

15. சீர்ச் சடப்பொருளினாலான ஒரு பொருள் r ஆரை உள்ள ஒரே வட்டமான அடியின் எதிர்ப்பக்கங்களிலும் ஒரு செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பையும் திண்ம அரைக்கோளத்தையுமுடையது. கூம்பு மேலாக இருக்குமாறு அப்பொருள் கிடைத்தளமொன்றின்மீது உறுதிச் சமநிலையில் தங்கமுடியுமாயின், கூம்பின் உயரத்தின் இயன்றளவு மிக அதிகமான பெறுமானத்தைக் காண்க. (C.S.)

16. ஒரு மேசை 2 அடி சதுரமான $\frac{1}{2}$ அங்குலப் பலகையொன்றை உடையது. அதன் மூலைகளிலுள்ள கால்கள் ஒரே சடப்பொருளினாலானவை. 1 அங்குலச் சதுர வெட்டுள்ள இக்கால்கள் 27 அங்குல நீளமானவை. புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரத்தைக் கண்டு, மேசை கவிழாது இரு கால்களின்மீது மிகக் கூடிய எக்கோணத்தினூடாக ஒருச்சரிக்கப்படலாமென்பதை நிர்ணயிக்க. (I.A.)

17. ABCD ஒரு பாரமான சீர்ச் சதுரத்தட்டு. இதிலிருந்து பகுதி CBH நீக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு H, AB இலுள்ள ஒரு புள்ளி. மீதி அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும் AH ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுமாறும் வைக்கப்பட்டுள்ளது. AH : AB, $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ இலும் அதிகமாக இருந்தாலொழிய சமநிலை சாத்தியமில்லையெனக் காட்டுக. (C.W.B.)

§157. ஒரு சீர்வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம்.



படம் 211.

r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டவில்லை ACB (படம் 211) என்க. இது இதன் மையம் O இல் கோணம் 2α ஐ எதிரமைக்கிறதென்க. C, வில்லின் நடுப்புள்ளியென்க.

சமர்சீரின்படி, புவியிர்ப்பு மையம் OC இல் அமையும் என்பது தெளிவு OC ஐ x – அச்சாகவும் OC இற்கான செங்குத்து OY ஐ y – அச்சாக. வும் எடுக்க.

$\widehat{POC} = \theta$, $\widehat{POQ} = d\theta$ என அமையுமாறு அவ்வில்லில் PQ ஒரு மூலக மாக உள்ளதென்க. வில் PQ இன் நீளம் $rd\theta$ உம், நிறை $wrd\theta$ உம் ஆகும். இங்கு w, ஓர் அலகு நீளத்தின் நிறை.

PQ, OY இலிருந்து r கோசை θ தூரத்திலிருப்பதனுல் OY பற்றி அதன் நிறையின் திருப்புதிறன் r கோசை θ. $wrd\theta$ அல்லது wr^2 கோசை $\theta . d\theta$ ஆகும்.

வில்லின் மூலகங்கள் யாவற்றினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகை $\theta = -\alpha$, $\theta = +\alpha$ என்னும் எல்லைகளிடையேயான இதன் தொகையீடு, அ-து. $\int_{-\alpha}^{+\alpha} wr^2$ கோசை $\theta d\theta$ ஆகும். முழு வில்லினதும் திணிவு $2wr\alpha$ ஆகும். அதன் புவியீர்ப்பு மையம் OY இலிருந்து $\bar{x}$ தூரத்தி லிருப்பின், OY பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$2wr\alpha\bar{x} = wr^2\int_{-\alpha}^{+\alpha} \text{கோசை } \theta d\theta = wr^2\Big[\text{சைன் } \theta\Big]_{-\alpha}^{+\alpha} = 2wr^2\text{சைன் } \alpha.$$

$$\therefore\ \bar{x} = r\frac{\text{சைன் } \alpha}{\alpha}.$$

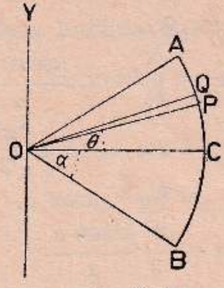
$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ எனவுள்ள ஓர் அரைவட்ட வில்லினிடத்து, இது $\dfrac{2r}{\pi}$ ஆகும்.

§158. ஒரு வட்டத்தின் ஓர் ஆரைச்சிறையின் புவியீர்ப்பு மையம்.

O ஐ மையமாகக் கொண்ட r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் ஆரைச்சிறை யொன்றை **AOB** (படம் 212) என்க. $\angle AOB = 2\alpha$ என்க. வில் AB இன் நடுப்புள்ளியை C எனவும் கோணம் **AOB** இன் இருகூறுக்கியை **OC** எனவும் கொள்க.

புவியீர்ப்பு மையம் **OC** இல் அமைகிறதென்பது சமச்சீர்ப்படி தெளிவு. **OC** ஐ x – அச்சாகவும் **OC** இற்கான செங்குத்து **OY** ஐ y – அச்சாகவும் எடுக்க.

$\angle POC = \theta$ எனவும் $\angle POQ = d\theta$ எனவும் அமையுமாறுள்ள **POQ** என்னும் மூலக ஆரைச்சிறையினைக் கருதுக.



படம் 212.

இவ்வாரைச்சிறையின் பரப்பு $\frac{1}{2}r^2d\theta$ உம், அதன் நிறை $\frac{1}{2}wr^2d\theta$ உம் ஆகும். இங்கு w ஓர் அலகுப் பரப்பின் நிறை.

PQ மிகச் சிறிதாக இருப்பதனால், **OPQ** அண்ணளவாக ஒரு முக்கோணியாகும். அதன் புவியீர்ப்பு மையமானது **O** இலிருந்து $\frac{2}{3}r$ தூரத்திலுள்ளது. எனவே **OY** இலிருந்து இப்புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம்

$$= \frac{2}{3}r \text{ கோசை } \theta.$$

OY பற்றி **POQ** இனது நிறையின் திருப்புதிறன்,

$$\frac{2}{3}r \text{ கோசை } \theta . \frac{1}{2}wr^2d\theta = \frac{1}{3}wr^3 \text{ கோசை } \theta d\theta.$$

மூலக ஆரைச்சிறைகள் யாவற்றினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{3}wr^3 \text{ கோசை } \theta d\theta = \frac{1}{3}wr^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \text{கோசை } \theta d\theta.$$

முழு ஆரைச்சிறையினதும் நிறை $= wr^2\alpha$. இதன் புவியீர்ப்பு மையம் **OY** இலிருந்து $\bar{x}$ தூரத்திலிருப்பின், **OY** பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$wr^2\alpha . \bar{x} = \frac{1}{3}wr^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \text{கோசை } \theta d\theta = \frac{2}{3}wr^3 \text{ சைன் } \alpha,$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2r}{3} . \frac{\text{சைன் } \alpha}{\alpha}.$$

ஒரு முற்றிய அரைவட்டத்தினிடதது, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. அதோடு, அரைவட்டத்தின் விட்டத்திலிருந்து புவியீர்ப்பு மையம் இருக்கும் தூரம் $= \frac{4r}{3\pi}$.

கடைசிப்பந்தியின் முடிவைப் பயன்படுத்தியும் இச்சூத்திரங்களைப் பெறலாம். அப்பரப்பளவு dx அகலமுள்ள ஒரே மையக் கீலங்களாகப் பிரிக்கப் பட்டிருப்பதாக எண்ணுக. x ஆரையுள்ள ஒரு கீலத்தின் நிறை $2wx\alpha dx$ ஆகும். இதன் புவியீர்ப்பு மையம் OY இலிருந்து $x\,\frac{\text{சைன்}\ \alpha}{\alpha}$ தூரத்திலிருக்கின்றது.

ஆகவே, OY பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$wr^2\alpha\bar{x} = \int_0^r 2wx\alpha . x\frac{\text{சைன்}\ \alpha}{\alpha}dx$$

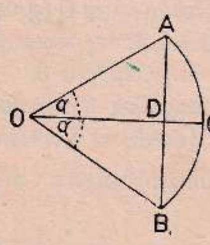
$$= 2w\ \text{சைன்}\ \alpha\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^r,$$

$$= \tfrac{2}{3}wr^3\ \text{சைன்}\ \alpha,$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{2r}{3}\frac{\text{சைன்}\ \alpha}{\alpha}.$$

§159. வட்டத்திஞெரு துண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்.

இத்துண்டம் ஒரு வட்டத்தின் ஆரைச்சிறையொன்றினதும், முக்கோணியொன்றினதும் வித்தியாசமெனக் கொண்டு இத்துண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை மிக எளிதாகக் காணலாம்.



படம் 213.

r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் துண்டமொன்றை ACB (படம் 213) எனவும், மையத்தை O எனவும் கொள்க.

இத்துண்டம் ஆரைச்சிறை OAB இனதும் முக்கோணி OAB இனதும் வித்தியாசமாகும்.

$\angle AOB = 2\alpha$ எனவும், இக்கோணத்திணை OC இருகூறிடுகிறதெனவும் கொள்க.

சமச்சீரின்படி, புவியீர்ப்பு மையம் OC இல் அமையவேண்டும்.

ஓரலகுப் பரப்பின் நிறை w ஆயின், ஆரைச்சிறையின் நிறை $wr^2\alpha$ உம், முக்கோணியின் நிறை $\frac{1}{2}wr^2$ சைன் 2α உம் ஆகும்.

பரப்புக்களையும் O இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த,

	நிறை.	O இலிருந்து பு.மை. இன் தூரம்.
ஆரைச்சிறை	.. $wr^2\alpha$,	$\frac{2r}{3}\frac{\text{சைன் }\alpha}{\alpha}$.
முக்கோணி	.. $\frac{1}{2}wr^2$ சைன் 2α,	$\frac{2}{3}r$ கோசை α.
துண்டம்	.. $wr^2(\alpha - \frac{1}{2}\text{சைன் } 2\alpha)$,	x.

ஆகவே O பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$wr^2(\alpha - \tfrac{1}{2}\text{சைன் } 2\alpha)x = \tfrac{2}{3}wr^3 \text{ சைன் } \alpha - \tfrac{1}{3}wr^3\text{சைன் } 2\alpha \text{ கோசை } \alpha,$$

$$\therefore\ x = \frac{2r}{3}\,\frac{\text{சைன் } \alpha - \text{கோசை }^2\alpha \text{ சைன் } \alpha}{\alpha - \frac{1}{2}\text{சைன் } 2\alpha}$$

$$= \frac{4r}{3}\,\frac{\text{சைன்}^3\alpha}{2\alpha - \text{சைன் } 2\alpha}.$$

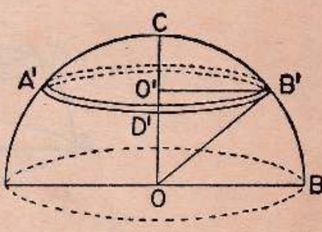
வட்டத்தின் ஆரையும் துண்டத்தின் உயரம் CD உம் தரப்பட்டிருப்பின், மேற்கூறியவாறு சென்று α, சைன் α, முதலியனவற்றை CD, r ஆகியன வற்றின் சார்பாக எடுத்துரைத்தலே நலம்.

இத்துண்டம் அரைவட்டமாகவும், $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ஆகவுமிருக்குமிடத்து, மேலுள்ள முடிவானது இறுதிப் பந்தியிற் பெற்ற முடிவு $\frac{4r}{3\pi}$ ஆகச் சுருங்குகிறது.

§160. ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்.

O ஐ மையமாகவும் AB ஐ விட்டமாகவும் கொண்ட அரைக்கோளத்தின் தட்டையான அடிக்குச் செங்குத்தான ஒரு வெட்டினை ACB (படம் 214) குறிப்பதாகக் கொள்க.

அரைக்கோளத்தின் ஆரையை r எனவும், ஓரலகுக் கனவளவின் நிறையை w எனவும், AB இற்கு OC செங்குத்தாக இருக்குமாறுள்ள உச்சப் புள்ளியை C எனவும் கொள்க.



படம் 214.

இவ்வரைக்கோளம் தட்டையான அடிக்குச் சமாந்தரமான நுண்ணிய கீற்றுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறதெனக் கருதுக.

இக்கீற்றுக்களெல்லாவற்றினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் OC இல் அமையும் என்பது சமச்சீரிலிருந்து தெளிவாகின்றது. ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் OC இல் இருக்கும்.

A′D′B′, dx தடிப்புள்ள கீற்றுக்களிலொன்றைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. O′, அதன் மையம். பின்பு $OO' = x$ ஆயின்,

$$O'B' = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

ஆகவே, அக்கீற்றின் கனவளவு

$$= \pi\,(r^2 - x^2)\,dx.$$

அதன் நிறை

$$= w\pi(r^2 - x^2)dx.$$

இந்நிறை O′ இற் செறிந்துள்ளதாக எண்ணப்படலாம். O பற்றி இந்நிறையின் திருப்புதிறன்

$$= w\pi x(r^2 - x^2)dx.$$

இவ்வாறுகக் கீற்றுக்களெல்லாவற்றையும் எடுத்துநோக்குமிடத்து, O பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$\int_0^r w\pi(r^2x - x^3)dx = w\pi\left[\tfrac{1}{2}r^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^r$$

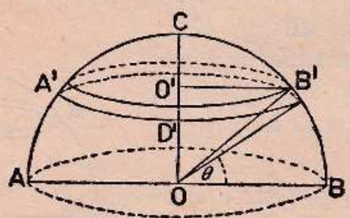
$$= \tfrac{1}{4}w\pi r^4.$$

முழு அரைக்கோளத்தினதும் நிறை $\frac{2}{3}\pi w r^3$ ஆகும். இதன் புவியீர்ப்பு மையம் O இலிருந்து $\bar{x}$ தூரத்திலிருப்பின்,

$$\tfrac{2}{3}\pi w r^3 \bar{x} = \tfrac{1}{4}w\pi r^4,$$

$$\therefore\ \bar{x} = \tfrac{3}{8}r.$$

§161. ஒரு மெல்லிய பொள்ளரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்.



படம் 215.

O ஐ மையமாகவும் AB ஐ விட்டமாகவும் கொண்ட ஓர் அரைக்கோளத்தின் தட்டையான அடிக்குச் செங்குத்தான வெட்டொன்றை ACB என்க (படம் 215).

அப்பரப்பினது ஓர் அலகுப் பரப்பளவின் நிறையை w எனவும், ஆரையை r எனவும், AB இற்கு OC செங்குத்தாக இருக்குமாறு C ஐ உச்சப் புள்ளியாகவும் கொள்க.

பரப்பு அடிக்குச் சமாந்தரமான தளங்களினால் A′D′B′ போன்ற மிக்க ஒடுக்கமான பட்டைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனை எண்ணுக.

A′D′B′ இன் மையம் O′ உம், $\angle BOB' = \theta$ உம் ஆயின், பட்டை O′B′ இன் ஆரை r கோசை θ இற்குச் சமமாகும்.

சமச்சீர்ப்படி, இப்பட்டைகளெல்லாவற்றினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் OC இல் அமையவேண்டும் என்பது தெளிவு.

பட்டையின் வில் O இல் எதிரமைக்கும் கோணம் $d\theta$ ஆகவே, அதன் அகலம் $rd\theta$.

ஆதலால், அப்பட்டையின் முழுப்பரப்பும் $2\pi r$ கோசை $\theta . rd\theta$ ஆகும். அதன் நிறை $2\pi wr^2$ கோசை $\theta d\theta$.

இந்நிறை O′ இற் செயற்படுவதாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, O பற்றி அதன் திருப்புதிறன்

$$= r \text{ சைன் } \theta . 2\pi wr^2 \text{ கோசை } \theta d\theta.$$

பட்டைகளெல்லாவற்றினதும் O பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= 2\pi wr^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta d\theta,$$

$$= 2\pi wr^3 \left[\frac{\text{சைன்}^2 \theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi wr^3.$$

முழுப் பரப்பினதும் நிறை $2\pi r^2 w$ ஆகும். அதன் புவியீர்ப்பு மையம் O இலிருந்து $\bar{x}$ தூரத்திலிருப்பின்,

$$2\pi r^2 w . \bar{x} = \pi wr^3,$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{r}{2}.$$

§162. அடிக்குச் சமாந்தரமாக, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ என்ற நிலையங்களிலுள்ள இரு தளங்களின் இடைப்பரப்பினது பகுதியின் அல்லது வலயத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை, இறுதிப் பந்தியின் நிறை, திருப்புதிறன் தொகையீடுகளை $0, \frac{\pi}{2}$ என்ற எல்லைகட்குப் பதிலாக எல்லைகள் α, β இடையே பெறுமானங்கணித்துப் பெறலாம்.

மூலக வலயமொன்றின் நிறை $= 2\pi wr^2$ கோசை $\theta d\theta$.

$\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ ஆகியவற்றினிடையே வலயத்தின் நிறை

$$2\pi wr^2\int_{\alpha}^{\beta}\text{கோசை }\theta d\theta = 2\pi wr^2\ (\text{சைன் }\beta - \text{சைன் }\alpha).$$

ஆனல் r(சைன் $\beta -$ சைன் α), வெட்டும் தளங்களின் இடைத்தூரமாகும், அ–து. h, அவ்வலயத்தின் உயரம்.

$$\therefore\ \text{நிறை} = 2\pi wrh.$$

மூலக வலயமொன்றினது நிறையின் O பற்றிய திருப்புதிறன் $2\pi wr^3$ சைன் θ கோசை $\theta d\theta$ ஆகும்.

இத்தகைய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$2\pi wr^3\int_{\alpha}^{\beta}\text{சைன் }\theta\ \text{கோசை }\theta d\theta = \pi wr^3\ (\text{சைன்}^2\beta - \text{சைன்}^2\alpha),$$

$$= \pi wr^2h(\text{சைன் }\beta + \text{சைன் }\alpha).$$

ஆகவே, O இலிருந்து அவ்வலயத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் x தூரத்திலிருப்பின்,

$$x = \frac{\pi wr^2h(\text{சைன் }\beta + \text{சைன் }\alpha)}{2\pi wrh},$$

$$= \tfrac{1}{2}r(\text{சைன் }\beta + \text{சைன் }\alpha).$$

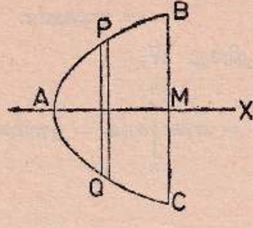
r சைன் $\beta + r$ சைன் α என்பது அடியிலிருந்து வெட்டுக்களின் தூரங்களினது கூட்டுத்தொகையாகும். ஆகவே, $\frac{1}{2}r$(சைன் $\beta +$ சைன் α) என்பது அவற்றினிடையே நடுவிலுள்ள தளத்தின் தூரம்.

எனவே, அவ்வலயத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அநேனக் கோளத்திலிருந்து வெட்டும் தளங்களினிடையே நடுவில் உள்ளது.

§163. ஒரு முற்றிய அரைக்கோளப் பரப்பினதும், அடிக்குச் சமாந்தரமான தளங்கள் வரைப்படுத்தும் ஒரு வலயத்தினதும் புவியீர்ப்பு மையத் தானத்தினை, அடிக்குச் சமாந்தரமான தளங்களினல் வெட்டப்படும் ஒவ்வோர் மூலகப் பட்டையினதும் அல்லது வலயத்தினதும் பரப்பானது சுற்றிவரையும் உருளையிலிருந்து அத்தளங்கள் வெட்டும் ஒத்த பட்டைக்குச் சமமென்ற தெரிந்த கேத்திரகணித உண்மையிலிருந்து உய்த்தறியலாம். ஆகவே, கோளப் பரப்புகளின் புவியீர்ப்பு மையமானது சுற்றிவரையும் உருளையின் அதே உயரத்தில் உள்ளது, அ–து. முற்றிய அரைக்கோளத்தினிடத்து அடிக்கும் உச்சிக்கும் இடையே நடுவிலும், வலயமொன்றினிடத்து வரைப்படுத்தும் தளங்களுக்கிடையே நடுவிலுமுள்ளது.

§164. உதாரணம் (i).

வளையி $y^2 = ax$ ஐயும் கோடு $x = b$ ஐயும் வரைப்பாடாகக் கொண்ட ஒரு சீர்ப் பரவளைவுத் தட்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தினைக் காண்க. x – அச்சைப் பற்றி மேலுள்ள பரப்புச் சுற்றப்படுமிடத்து உருவாக்கப்படும் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தையும் காண்க.



படம் 216.

ABMC (படம் 216), தட்டினையும் AX, பரவளைவின் அச்சினையும் (x அச்சையுங்கூட) குறிப்பதாகவும், $AM = b$ எனவும் கொள்க.

சமச்சீர்ப்படி புவியீர்ப்பு மையம் AM இல் அமைகிறதென்பது தெளிவு. A இலிருந்து x தூரத்திலுள்ளதும் dx அகலமானதும் BC இற்குச் சமாந்தரமானதுமான PQ என்னும் கீலத்தின் பரப்பு $2ydx$ அல்லது $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$ ஆகும். அதன் நிறை $2wa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$. இங்கு w, ஓரலகுப் பரப்பின் நிறை.

இவ்விடத்து முழுத்தட்டினதும் நிறையை நாம் எழுத இயலாது. ஆனால் அதன் பெறுமதியானது $x = 0$, $x = b$ ஆகியவற்றினிடையே $2wa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$ ஐத் தொகையிட்டுப் பெறப்படுகின்றது. தட்டின் நிறை W ஆயின்,

$$W = 2wa^{\frac{1}{2}}\int_0^b x^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{4}{3}wa^{\frac{1}{2}}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^b = \tfrac{4}{3}wa^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.$$

ஒவ்வொரு கீலத்தினதும் நிறை அக்கீலத்தின் நடுப்புள்ளியிற் செயற்படுகின்றது. PQ இனது நிறையின் A பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= 2wa^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx.$$

A பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$2wa^{\frac{1}{2}}\int_0^b x^{\frac{3}{2}}dx = \tfrac{4}{5}wa^{\frac{1}{2}}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^b = \tfrac{4}{5}wa^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}}.$$

புவியீர்ப்பு மையம் A இலிருந்து $\bar{x}$ தூரத்திலிருப்பின்,

$$\tfrac{4}{3}wa^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.\bar{x} = \tfrac{4}{5}wa^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{2}},$$

$$\therefore\ \bar{x} = \tfrac{3}{5}b.$$

அப்பரப்பு AX பற்றிச் சுற்றப்படுமிடத்துப் பெறப்படும் திண்மத்தில் AX இற்குச் செங்குத்தான ஒரு தளத்திஞற் பெறப்படும் வெட்டு வட்டமானதாகும். AX இற்குச் செங்குத்தான தளங்களிஞல் அத்திண் மத்தை வட்டக் கீற்றுகளாக வெட்டுமிடத்து, A இலிருந்து x தூரத்தி லுள்ள ஒரு கீற்றின் கனவளவு,

$$\pi y^2 dx = \pi a x dx.$$

அதன் நிறை $\qquad = \pi w a x dx.$

முழுத்திண்மத்தினதும் நிறை W,

$$W = \pi w a \int_0^b x dx = \tfrac{1}{2}\pi w a b^2$$

இஞல் தரப்படுகின்றது.

ஒவ்வொரு கீற்றினதும் நிறை அக்கீற்றின் மையத்திற் செயற்படுகிறது. A இலிருந்து x தூரத்திலிருக்கும் ஒரு கீற்றினது நிறையின் A பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= \pi w a x^2 dx.$$

எனவே, A பற்றிய திருப்புதிறன்களினது கூட்டுத்தொகை,

$$\pi w a \int_0^b x^2 dx = \tfrac{1}{3}\pi w a b^3.$$

A இலிருந்து புவியீர்ப்பு மையம் $\bar{x}$ தூரத்திலிருப்பின்,

$$\tfrac{1}{2}\pi w a b^2 \cdot \bar{x} = \tfrac{1}{3}\pi w a b^3,$$

$$\therefore \ \bar{x} = \tfrac{2}{3} b.$$

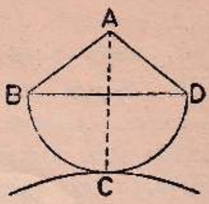
உதாரணம் (ii).

r ஆரையுள்ள ஓர் ஏகவின வட்டத்திண்மவுருளை அதன் அச்சினூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்திஞல் இருகூறிடப்படுகிறது. ஒரு பாதியை அடியாகக் கொண்டு அதே பதார்த்தத்திஞலான இருசமபக்கவெட்டு முக்கோணியரிய மொன்று அமைக்கப்பட்டுள்ளது ; இவை முழுவதும் அச்சுக் கிடையாக இருக்குமாறு $2r$ ஆரையுள்ள ஒரு நிலைத்த வட்டவுருளையின் உச்சிமீது சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு, உருளைகளின் அச்சுக்கள் சமாந் தரமானவை ; வளைபரப்புக்கள் தொடுகையிலுள்ளன. ஒரு சிறு உருளும் பெயர்ச்சியின் போது உறுதிப்பாட்டுடன் இசைவுள்ள அரியத்தின் அதியுயர் உயரம்

$$\left[\sqrt{9-2\pi}-1\right]\frac{r}{2}$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

பாதியுருளையினதும் அரியத்தினதும் வெட்டொன்றை ABCD குறிக்கிறதெனக் (படம் 217). நிலைத்த உருளையுடன் அதன் தொடுகைப் புள்ளி C ஆகும். H, அரியத்தினுயரம் எனக.



படம் 217.

உருளையினதும் அரியத்தினதும் நிறைகள் முறையே BCD, ABD ஆகியவற்றின் பரப்புகளுக்கு, அ–து.

$\frac{\pi r^2}{2}, \frac{2rH}{2}$ இற்கு விகிதசமம்.

BCD இன் புவியீர்ப்பு மையம் BD இலிருந்து $\frac{4r}{3\pi}$ தூரத்திலும், C இலிருந்து $r-\frac{4r}{3\pi}$ தூரத்திலுமுள்ளது.

அரியத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் C இலிருந்து $r+\frac{H}{3}$ தூரத்திலுள்ளது.

சேர்ந்த திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் C இலிருந்து h உயரத்திலிருப்பின், C பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$h\left[\frac{\pi r^2}{2}+\frac{2rH}{2}\right]=\frac{\pi r^2}{2}\left(r-\frac{4r}{3\pi}\right)+rH\left(r+\frac{H}{3}\right).$$

$$\frac{1}{h}>\frac{1}{r}+\frac{1}{2r}, \text{ அல்லது } h<\frac{2}{3}r$$

ஆயின் சமநிலை உறுதியாக இருக்கும்.

எனவே உறுதிப்பாட்டின் பொருட்டு,

$$\frac{\pi r^2}{2}\left(r-\frac{4r}{3\pi}\right)+rH\left(r+\frac{H}{3}\right)<\frac{2}{3}r\left(\frac{\pi r^2}{2}+rH\right).$$

$$\therefore\ \pi r^3-\frac{2}{3}r^3+Hr^2+\frac{H^2r}{3}<\frac{1}{3}\pi r^3+\frac{2}{3}Hr^2,$$

$$\therefore\ \frac{H^2r}{3}+\frac{Hr^2}{3}<\frac{2r^3}{3}-\frac{\pi r^3}{6},$$

$$\therefore\ H^2+rH<2r^2-\frac{\pi}{2}r^2,$$

$$\therefore\ \left(H+\frac{r}{2}\right)^2<r^2\left(\frac{9-2\pi}{4}\right),$$

$$\therefore\ H+\frac{r}{2}<\frac{r}{2}\sqrt{9-2\pi}.$$

$$\therefore\ H<\frac{r}{2}\left[\sqrt{9-2\pi}-1\right].$$

பயிற்சி XXXIV.

1. அரைவட்டத் தட்டொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

2. சீரான தடிப்புள்ள ஓர் உலோகத் துண்டு, AC ஐ விட்டமாகக் கொண்ட அரைவட்டப் பகுதி ABC ஐயும் AD = CD என்றவாறுள்ள முக்கோணிப் பகுதி ACD ஐயுமுடையது. தளம் ABCD நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றின்மீது வைக்கப்படுமிடத்து, உலோகம் வட்டவில்லின் எப்புள்ளியும் கிடைத்தளத்தைத் தொடுமாறு சமநிலையிலே தங்கியிருப்பதற்கு முக்கோணியின் உயரத்திற்கும் அரை வட்டத்தின் ஆரைக்குமிடையேயான விகிதத்தைக் காண்க. (Ex.)

3. வட்டவில் வடிவுள்ள ஒரு மெல்லிய கம்பியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. சீரான அகலமும் தடிப்புமுள்ள ஒரு மெல்லிய உலோகத் துண்டின் ஒரு பகுதி r ஆரையுள்ள ஒரு பாதியுருளை வடிவில் வளைக்கப் பட்டுள்ளது. எஞ்சிய பகுதி பாதியுருளையின் ஒரு விளிம்பின் வழியே அதற்குத் தொடலியாயுள்ள l நீளமான தட்டைத் துண்டாகும். l, $2r$ இலும் அதிகமாயின், அப்பொருளானது தட்டையான துண்டு கிடைத் தளமொன்றைத் தொடுமாறு தங்கியிருக்கக்கூடியதெனக் காட்டுக. (I.E.)

4. ஒரு திண்மப்பொருள் ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின்மீது அதே ஆரையுள்ள ஓர் உருளை பொருந்தப்பெற்றுள்ளது. இவ்வுருளையினுயரம் அதனடியின் ஆரையின் மும்மடங்கு. அது அதன் தட்டையான முகம் முரடான தளமொன்றைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தளத்தின் கிடையுடனான சாய்வு படிப்படியாக அதிகரிக்கப்படுகின்றது. அப்பொருளிற்கும் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{44}{81}$ இலும் குறைவாகின், அது கவிழ்ந்து விழாது தளத்தின் கீழ்நோக்கி வழுக்கிச் செல்லுமென நிறுவுக. (I.E.)

5 ஒரு சீர்வட்டத் திண்மவுருளை அதன் அச்சினூடான தளமொன்றினால் இரண்டாக வெட்டப்பட்டுள்ளது. ஒரு பாதி, நழுவுதலைத் தடுக்கக் கூடியளவு முரடான சாய்தளமொன்றை அதன் வளைபரப்பு தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. தொடுகைக் கோடு அதியுயர் சரிவுக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தானது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வின் பெறுமானம் சைன் $^{-1}\left(\frac{4}{3\pi}\right)$ இற்கும் தான் $^{-1}\left(\frac{4}{3\pi}\right)$ இற்குமிடையே இருக்கும்போது இரு சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமெனவும், அது பின்னைய கோணத்திலும் குறைவாயின் ஒரு சமநிலைத் தானமிருக்குமெனவும் காட்டுக. (H.C.)

6. ஒருமையக் கோளப் பரப்புகளினால் வரைப்படுத்திய ஒரு பொள்ளோட்டிலிருந்து இரு சமாந்தரத் தளங்களினால் பொள் வளையம் வெட்டப்பட்டுள்ளது. வளையத்தின் கனவளவினதும் அதன் தளப்பரப்பு, வளைபரப்பு ஆகிய முழுப்பரப்பினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் ஒன்றுபடுகின்றவெனக் காட்டுக. (C.S.)

7. செங்கற்களாலான, 18 அங்குலத் தடிப்புள்ள ஒரு புகைபோக்கியின் அடிப்பாகம் 13 அடி வெளி விட்டமுடையது ; உச்சி 9 அடி வெளி விட்டமுடையது. உச்சி அடியிலிருந்து 100 அடி உயரத்திலுள்ளது. இப் புகைபோக்கியின் புவியீர்ப்பு மையம் அச்சின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து 3·5 அடி கீழேயுள்ளதெனக் காட்டுக. (C.S.)

8. ஒரு சீர் அரைவட்டக்கோலின் புவியீர்ப்பு மையமானது அதன் மையத்தி லிருந்து, ஆரையின் $\frac{2}{\pi}$ இற்குச் சமமான தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக.

ஒரு வட்டத்தட்டு ஒரு விட்டத்தினால் இரண்டாக வெட்டப்படுகின்றது. இதன் ஓரலகுப் பரப்பின் திணிவு σr. இங்கு σ, ஒரு மாறிலி ; r, மையத்தி லிருந்துள்ள தூரம். பாதி எதினதும் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. (C.S.)

9. ஒரு சீர் அரைவட்டத் தட்டின் விட்டம் AB இல் யாதுமொரு புள்ளி P ஐ எடுத்து, AP, BP ஆகியவற்றை விட்டமாகக் கொண்டுள்ள அரை வட்டங்களை நீக்குமிடத்து எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க. P இன் வெவ்வேறு நிலையங்களுக்குப் புவியீர்ப்பு மையமானது P இற்கும் குறித்த ஒரு நிலைத்த புள்ளிக்குமிடையே பாதிவழியில் இருக்கிற தெனக் காட்டுக. (C.S.)

10. சீர்த் திண்ம அரைக்கோளமொன்றின் திணிவு மையத்தைக் காண்க. ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான வளையத்தூடாகச் செல்வதும் தட்டையான முகத்தின் விளிம்பில் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளிலுள்ள இரு புள்ளி களுடன் இணைத்திருப்பதுமான இழையொன்றிலிருந்து அவ்வரைக்கோளம் தொங்கவிடப்பட்டிருப்பின், தட்டையான முகம் இடையுடன் சாய்ந்திருக்கு மாறுள்ள சமநிலையின்போது 8 தான் $\theta = 3$ எனக் காட்டுக. இங்கு 2θ, இழையின் இரு பகுதிகளினதும் இடைக் கோணம். (C.S.)

11. ஒரு சீர்ச் செவ் வட்டத் திண்மக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத் தைத் தொகையிடலாற் காண்க.

12. r ஆரையுள்ள மெல்லிய சீரரைக்கோளக் கிண்ணமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் மையத்திலிருந்து $\frac{r}{2}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

இத்தகைய கிண்ணமொன்று இக்கிண்ணத்தின் அதே சடப்பொருளினா லானதும் அதே தடிப்பும் ஆரையுமுள்ளதுமான ஒரு வட்ட அடியின்மீது நிற்கின்றது. இவற்றினிடைப்படும் தண்டின் நீளம் கிண்ணத்தின் ஆரைக் குச் சமம். அதன் நிறை அரைக்கோளத்தின் நிறையின் காற் பங்கு. புவியீர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து எவ்வுயரத்தில் உள்ளது ? (I.S.)

13. r ஆரையுள்ள ஓர் அரைவட்ட அடரின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\frac{4r}{3\pi}$ தூரத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக. செவ்வட்டத் திண்ம

வுருளையொன்று அதன் அச்சினூடான ஒரு தளத்தினால் இரு சம பகுதிகளாக வெட்டப்படுகின்றது. கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ள முரடான தளமொன்றின்மீது ஒரு பாதியின் வளைபரப்புப் பொருந்துமாறும் அதன் பிறப்பாக்கிகள் கிடையாக இருக்குமாறும் அப்பாதி வைக்கப்பட்டுள்ளது. தளம் நழுவலைத் தடுக்கக்கூடியளவு முரடானதெனக் கொண்டு, திண்மம் சமநிலையிலே தங்கும்போது அதன் தட்டையான செவ்வக முகம் கிடையுடன் எக்கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதென்பதைக் காண்க. **(H.S.D.)**

14. ஒரு சீர்க் கோள ஓட்டில் இரு சமாந்தரத் தளங்கள் வரைப்படுத்தும் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. ஒரு கோள ஓட்டிலிருந்து, கோளத்தின்மீது ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் தளங்களினால் இரு துண்டங்கள் வெட்டப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் ஆரைச்சிறைகளின் கோணம் $120°$. ஓட்டின் எஞ்சிய பகுதியின் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தைக் காண்க. **(I.E.)**

15. a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தின் மையத்தில் கோணம் 2θ ஐ எதிரமைக்கும் ஒரு சீர் வட்டவில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து $\dfrac{a \text{ சைன் } \theta}{\theta}$ தூரத்திலுள்ளதெனக் கொண்டு, அவ்வில்லும் அதன் முனைப்புள்ளிகளுக்கான ஆரைகளும் வரைப்படுத்தும் சீரான ஆரைச்சிறையின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. ஆரைக்குச் சமமான ஒரு நாண் வெட்டும் துண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. **(I.E.)**

16. ஓர் அரைக்கோளப் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க. **W** நிறையுள்ள ஓர் அரைக்கோளக் கிண்ணம் அதன் கோளப்பரப்பு ஒப்பமான கிடைத்தளமொன்றைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது; கிண்ணம் அதன் தட்டையான பரப்பு கிடையுடன் $\alpha°$ இற் சாய்ந்திருக்குமாறு தங்கியிருக்க விளிம்பில் எந்நிறை வைக்கப்படவேண்டும்? **(H.S.D.)**

17. ஒரு கனத்தின் உச்சிகளிலேந்தில் 5, 4, 3, 2, 1 என்னும் நிறைகள், நிறை 5 இனூடான விளிம்புகளின் மறுமுனைகளில் நிறைகள் 4, 3, 2 உம் நிறை 5 ஊடான மூலைவிட்டத்தின் மறுமுனையில் நிறை 1 உம் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன. முழுத் தொகுதியினதும் புவியீர்ப்பு மையம் கனத்தின் மையத்தில் அமையுமாறு, எஞ்சிய மூன்று உச்சிகளிலும் எந்நிறைகள் வைக்கப்படவேண்டும்? **(Ex.)**

18. வெவ்வேறான அடர்த்திகளுள்ள சீர்க் கோல்களினாலாய ஒரு முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் சுற்றுவட்டத்தின் மையத்திலுள்ளது. அக்கோல்களின் நிறைகள் எதிர்க் கோணங்களின் தான்சன்களுக்கு விகிதசமமெனை நிறுவுக. **(H.S.D.)**

19. ஆரை $(a+x)$ உள்ள ஒரு சீரான அரைவட்டத் தட்டிலிருந்து a ஆரையுள்ள ஒரு மைய அரைவட்டப் பகுதியை நீக்கி, அதே சடப்பொருளினுலானதும் $2(a+x)$ நீளமும் x அகலமுமுள்ளதுமான ஒரு செவ்வகத் தட்டினை வளைவான கிலத்தின் இரு முனைகளின் குறுக்கேயும இணைத்து D என்னும் எழுத்து ஆக்கப்படுகின்றது. இவ்வாறு பெறப்படும் நிறைவான எழுத்து படம் 218 இலுள்ளதனைப் போன்றது. இத்தட்டின் மையப்போலியினது நிலையத்தைக் கண்டு, x சிறியதாக இருக்குமிடத்து இந்நிலையம் வட்டங்களின் மையத்திலிருந்து கிட்டத்தட்ட $\frac{2a}{\pi+2}$ தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக.

படம் 218

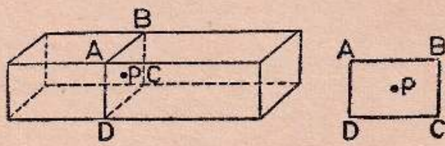
20. ஒரு சீரான கூருள்ள வட்டமரச் சட்டம் 50 அடி நீளமானது. தடித்தமுனை 15 அங்குல விட்டமானது. உச்சி 10 அங்குல விட்டமானது. மரத்தின் ஒரு கன அடி 40 இரு. நிறையானதெனக் கொண்டு, அச்சட்டத்தின் நிறையையும் புவியீர்ப்பு மைய நிலையத்தையும் காண்க.

அதிகாரம் VIII.

கொய்வுவிசையும் வளையற்றிருப்புதிறனும் — தொங்கு பாலங்கள் — சங்கிலியம்

§165. முன்னைய அதிகாரங்களில் ஓர் இலேசான கோல் தவிர்ந்த ஏனைய இடங்களில் விறைப்பான பொருளொன்றின்மீது வெளிவிசைகள் செயற்படுமிடத்து அப்பொருளின் சடப்பொருளில் இவ்விசைகள் காரணமாக ஏற்படும் தகைப்புக்களைப் பற்றியெண்ணாது இவற்றின் சமநிலையை ஆராய்ந்தோம். அவ்விலேசான கோலில் விசைகள் முனையிற் செயற்படுவதுடன் கோலின் வழியேயான தகைப்பு ஓர் உதைப்பாகவோ இழுவையாகவோ இருக்கும்.

கோலின்மீது செயற்படும் வெளிவிசைகள் அதன் நீளவழியே அமையாமலும் முனைகளைத் தவிர்ந்த ஏனைய புள்ளிகளில் பிரயோகிக்கக் கூடியனவாகவுமிருக்கும் மற்றைய இடங்களில் தகைப்புக்கள் மிகச் சிக்கலாக இருக்கும். எனினும், கோலின் யாதுமொரு பாகத்தை எடுக்க, அப்பாகம் கோலின் அடுத்துள பாகங்கள் அதன் முனைகள்மீது உஞற்றும் தகைப்புக்கள் காரணமாகவும் அதன் மீது செயற்படக்கூடிய வெளிவிசைகள் (நிறையுடன்) காரணமாகவும் சமநிலையிலிருக்குமென்று எமக்குத் தெரியும்.



படம் 219.

§166. ஒரு செவ்வகச் சட்டத்தின் (படம் 219) நீளத்திற்குச் செங்குத்தான அதன் யாதுமொரு தளவெட்டுமுகம் ABCD ஐ எடுத்து நோக்குமிடத்து, அவ்வெட்டின் யாதுமொரு மூலகம் P இல் வெட்டினது ஒவ்வொரு பக்கத்திலுமுள்ள சட்டத்தின் பாகங்கள் மீது சம, முரண் விசைகள் செயற்படுமென்பது தெளிவாகின்றது.

அவ்வெட்டினொரு பக்கத்தின்மீது செயற்படும் விசைகளைப் பற்றியே நாம் சிந்திப்பின், P இலுள்ள விசையை அவ்வெட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் அதன் தளத்திலுள்ளதுமான இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம். அவ்வெட்டுக்குச் செங்குத்தாய் P போன்ற வெவ்வேறு மூலகங்களின் மீதுள்ள விசைகளெல்லாம் சமாந்தரமானவையாகையால் அவற்றை ஒரு தனி விசை

T ஆகக் கூட்டலாம். பின்பு இவ்விசைக்குப் பதிலாக வெட்டுக்குச் செங்குத்தான தளத்தையுடைய இணை M உடன் சமவிசை T யை, வெட்டு மையத்தில் இடலாம்.

சட்டத்தின் நீள வழியேயுள்ள விசை T இழுவை (அல்லது உதைப்பு) ஆகும்.

இணை M ஆனது **வளையற்றிருப்புதிறன்** எனப்படும்.

T, M எதுவும் பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

எனினும் அவ்வெட்டின் மறுபக்கத்திலுள்ள சட்டத்தின்மீது சம முரண் விசை T உம் எதிர்ப் போக்குள்ள ஓர் இணை M உம் செயற்படும்.

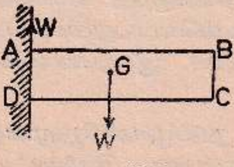
அவ்வெட்டின் தளத்திற் செயற்படும் கூற்றுவிசைகளைக் கணிப்பின், இவற்றை வெட்டுமையத்திற் செயற்படும் ஒரு தனிவிசை S இனாலும் சட்டத்தினை அதன் அச்சைப் பற்றித் திருக நாடும் இணை N இனாலும் பதிலிடலாம். S, **கொய்வுவிசை அல்லது தகைப்பு எனப்படும்.**

N, **முறுக்கலிணை எனப்படும்.**

இத்தகைப்புக்கள் சட்டத்தைத் திரிக்கவும், T அதனை அதன் நீள வழியே ஈர்க்கவோ அழுத்தவோ செய்யவும், M அதனை வளைக்கவும், S அதனைக் குறுக்கே உடைக்கவும், N அதனை அதன் அச்சினைப் பற்றித் திருகவும் நாடும்.

சட்டம் இத்திரிவுகளைத் தடுக்கத்தக்களவு விறைப்பானதென நாம் கொள்வோம். ஆனால் தகைப்புக்களின் பருமனைக் கணிக்கக் கூடியதாக இருத்தல் முக்கியம். ஏனெனில், இதிலிருந்து, சட்டம் யாதுமொரு புள்ளியில் உடைய அல்லது வளைய எவ்வாறு நாடுகின்றதென்பதை அறியலாம்.

இந்நூலில் சட்டத்தின்மீது செயற்படும் விசைகள் அதன் நீளத்தை அடக்கும் நிலைக்குத்துத் தளத்திலமைதல் பற்றிய சந்தர்ப்பங்களையே சிந்திப்போம். CD இற்குச் சமாந்தரமான விளையுள் விசையேதுமிராது, அ–து. கொய்வுவிசை AB அல்லது CD இற்குச் செங்குத்தாகும். அதோடு முறுக்கலிணை எதுவுமிராது.

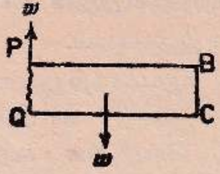


படம் 220.

§167. ABCD (படம் 220) ஒரு சுவரில் கிடையாக A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு W நிறைச் சட்டத்தினைக் குறிக்கிறதென்க. அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G என்க.

நிறை W அச்சுவரினால் தாங்கப்படுவதனால் A இல் மேன்முகவிசை W செயற்பட வேண்டுமென்பது தெளிவாகின்றது.

இது நிறை W உடன் ஓர் இணையை உருவாக்குகின்றது. இதனைச் சமன்செய்ய, சட்டம் சுவரைச் சந்திக்கும் வெட்டு AD இன் குறுக்கே பிரயோகிக்கப்படும் சம முரண் இணையொன்று இருக்கவேண்டும்.



படம் 221.

சட்டத்தின் (படம் 221) யாதுமொரு பாகம் PBCQ ஐ எடுத்து நோக்குக.

இப்பகுதி நடுப்புள்ளியில் அதன் நிறை w இனால் தாக்கப்பட்டும், PQ இன் இடப்பக்கத்திலுள்ள சட்டத்தின் பகுதியினால் தாங்கப்பட்டு முள்ளது. ஆகவே இது QP வழியே w இற்குச் சமமான மேன்முக விசையொன்றை உஞற்ற வேண்டும்.

வெட்டு PQ இலுள்ள கொய்வுவிசை இதுவேயாகும்.

PQ இன் வலப்பக்கமாக வேறு நிலைக்குத்து விசைகள் பிரயோகிக்கப் படின், கொய்வுவிசை இவற்றையும் தாங்கவேண்டும். அதோடு இதன் பருமன் வெட்டு PQ இன் வலப்புறமாகவுள்ள நிலைக்குத்து விசைகள் எல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் என்பதுந் தெளிவு.

சட்டத்தின் இடக்கைப் பகுதியை எடுத்துநோக்கி PQ இலுள்ள கொய்வு விசை PQ இன் இடப்புறமாகவுள்ள நிலைக்குத்து விசைகள் எல்லா வற்றினதும் கூட்டுத்தொகைக்கும் சமமென்பதை அறியலாம். (அவை இடக்கைப் பகுதியின் நிறையையும் சுவரினால் உஞற்றப்படும் நிலைக்குத்து விசையையும் உள்ளடக்கும்.) ஆகவே யாதுமொரு வெட்டின் இரு பக்கம் எதன்மீதும் செயற்படும் நிலைக்குத்து விசைகள் யாவற்றினதும் கூட்டுத் தொகையைக் கணித்து அவ்வெட்டிலுள்ள கொய்வு விசையின் பருமனைக் காணலாம். அக்கொய்வுவிசை இவ்விசைகளின் விளையுளின் திசையின் எதிர்த் திசையிலிருக்கும்.

QP இலும் PB இன் நடுப்புள்ளியிலுமுள்ள w என்னும் விசைகள் ஓர் இணையை உருவாக்குகின்றன. இதனைச் சட்டத்தின் இடக்கைப் பகுதி யின் காரணமாகவுள்ள சம முரண் இணை சமன்செய்ய வேண்டும். இதுவே வெட்டு PQ இலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறன் இணை. PBCQ இன் மையம் PQ இலிருந்து x தூரத்திலிருப்பின், இந்த இணையின் திருப்புதிறன் wx ஆகும்.

எனவே PQ இல் வளையற்றிருப்புதிறன் wx ஆகும்.

சட்டத்தின் இப்பகுதிமீது அதன் நிறையுடன் அதன் தளத்திலமையும் வேறு விசைகளும் செயற்படின், பின்பு சமநிலையின் பொருட்டு சட்டத்தின் இடக்கைப் பகுதியின் காரணமாகவுள்ள இணையின் திருப்புதிறனானது விசைகளின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான PQ இன் மையத்தூடான அச்சினைப் பற்றி இவ்விசைகளெல்லாவற்றினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகைக் குச் சமமாகவும் மறுதலையாகவும் இருக்கவேண்டும். அவ்வச்சினைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க இது தெரியவரும்.

அச்சட்டத்தின் தடிப்பினை நாம் புறக்கணிப்பின், யாதுமொரு புள்ளியில் வளையற்றிருப்புதிறன் அப்புள்ளியின் பக்கமெதிலும் சட்டத்தின்மீது செயற் படும் விசைகளெல்லாவற்றினதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமெனக் கூறலாம். இடக்கைப் பகுதியின் சமநிலையின் பொருட்டு, அது வும் வலக்கைப்பகுதியும் இணையும் புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை வலக்கைப் பகுதி காரணமாக அப்புள்ளியிலுள்ள இணை யையும் சமன்செய்யவேண்டுமென்பது தெளிவு.

ஆகவே, யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறன் அப்புள்ளி யின் பக்கமெதிலும் சட்டத்தின்மீது செயற்படும் விசைகளெல்லாவற்றி னதும் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டு பெறப்படுகின்றது. இவ்விசைகள் சட்டத்தின் அப்பகுதியின் நிறை, யாதாயினும் இணைத்த நிறை கள், தாங்கிகளின் தொடுகை காரணமாகவுள்ள யாதாயினும் மறுதாக் கங்கள், என்பனவற்றை அடக்குகின்றன.

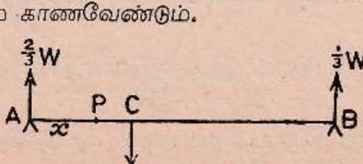
§168. உதாரணம் (i).

6 அடி நீளமான இலேசான கோல் AB, A இலும் B இலும் தாங்கப் படுகின்றது. இதற்கு C இல் W என்னும் நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது, இங்கு AC = 2 அடி.

இக்கோலின் யாதுமொரு புள்ளியில் கொய்வு விசையையும் வளையற்றிருப்பு திறனையும் காண்க.

அக்கோலில் A இலிருந்து x தூரத்தில் P (படம் 222) என்னும் யாதுமொரு புள்ளியிருப்பதாகக் கொள்க.

P இலுள்ள கொய்வு விசை P இன் இருமருங்கிலும் செயற்படும் விசை களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம். ஆகவே, A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்களை நாம் காணவேண்டும்.



படம் 222.

B இல் மறுதாக்கம் R ஆயின், A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$6R = 2W,$$
$$\therefore\ R = \tfrac{1}{3}W.$$

எனவே A இல் மறுதாக்கம் $\frac{2}{3}W$ ஆகும்.

ஆகையால், P இன் இடதுபக்கமீதுள்ள விசைகளின் கூட்டுத்தொகை மேன்முகமாக $\frac{2}{3}W$ ஆகும். அதோடு, P இலுள்ள வெட்டின் இடப்பக்க மீதுள்ள கொய்வு விசை கீழ்முகமாக $\frac{2}{3}W$ ஆகும். A இலிருந்து C வரையுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

P இன் வலப்பக்கமீதுள்ள விசைகளைக் கூட்டுமிடத்து $\frac{2}{3}W$ ஐக் கீழ் முகமாகப் பெறுகின்றோம், அ-து. P இலுள்ள வெட்டின் வலப்பக்க மீதுள்ள கொய்வுவிசை மேன்முகமாக $\frac{2}{3}W$ ஆகும். இது அவ்வெட்டின் இடது புறமாகவுள்ளதின் எதிர்த் திசையில் அமையவேண்டும். அவ்வாறே இது இங்கு அமைகின்றது.

விசைகளை எப்பக்கத்திற் கூட்டுகின்றோம் என்பதைப் பற்றிக் கவனிக்கத் தேவையில்லை. ஆனால், **கோலின் நீளம் எங்கும் ஒரே பக்கத்திலேயே கூட்டவேண்டும்.**

P, கோலின் வழியே B ஐ நோக்கிச் செல்ல நாம் P இன் இடப்புற மாகக் கூட்ட, C ஐ அடையுமட்டும் கூட்டுத்தொகை மேன்முகமாக $\frac{2}{3}W$ ஆகும்.

P, C இன் வலப்பக்கத்திற்கு நேராகச் செல்லுமிடத்துக் கூட்டுத்தொகை **கீழ்முகமாக** $\frac{1}{3}W$ ஆகும். இப்போது கொய்வு விசை மேன்முகமாக $\frac{1}{3}W$ ஆகும், அ-து. C இலுள்ள கொய்வு விசையின் பருமனிலும் திசையிலும் சடுதியான மாற்றமொன்று ஏற்பட்டுள்ளது. இது C இல் தொங்கும் நிறை W காரணமாகும். நிறை இணைக்கப்படும் புள்ளியில் எப்பொழுதும் கொய்வு விசையின் பெறுமானத்தில் ஏற்படும் இதேபோன்ற தொடர்ச்சியின்மை யொன்று நிகழுகின்றது. இருமருங்கிலுமுள்ள பெறுமானங்களின் வித்தி யாசம் இந்நிறைக்குச் சமம்.

இனி P இலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறனை எடுத்துநோக்குக.

A இற்கும் C இற்குமிடையே P இருக்கும்போது P இன் இடதுபுறமாகவுள்ள விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கணிக்கப் பெறு மானம் (வழக்கமாக மறையானதெனக் கருதப்படும்) வலஞ்சுழித்திசையில் $\frac{2}{3}Wx$ ஆகும்.

ஆகவே வளையற்றிருப்புதிறன் இடஞ்சுழியாக $\frac{2}{3}Wx$ ஆகும். அதோடு

$$M = +\tfrac{2}{3}Wx \qquad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(i)}$$

C இன் வலப்பக்கமாகத் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \tfrac{2}{3}Wx - W(x-2) \text{ வலஞ்சுழியாக},$$
$$= W(2 - \tfrac{1}{3}x) \text{ வலஞ்சுழியாக}.$$

ஆகவே வளையற்றிருப்புதிறன்

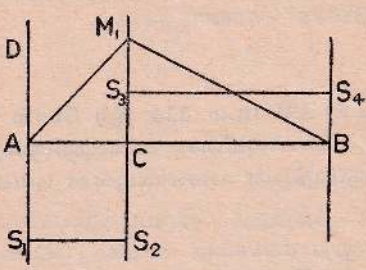
$$M = W(2 - \tfrac{1}{3}x) \text{ இடஞ்சுழியாக} \quad . \quad \text{(ii)}$$

$x = 2$ ஆக இருக்கும்போது, M இற்குரிய இவ்விரு கோவைகளும் ஒரே பெறுமானம் $\frac{4}{3}W$ ஐத் தருகின்றன. C இல் திருப்புதிறனின் பெறுமானம் இதுவேயாகும்.

கொய்வு விசையிற் போல C இல் தொடர்ச்சியின்மையேதுமில்லை.

வெவ்வேறு புள்ளிகளிலுள்ள கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் ஆகியனவற்றின் மாறல் பின்வருமாறு வரைபுமூலமாய் விளக்கமாகக் காட்டப்படுகின்றது.

அக்கோலினையும் புள்ளி C ஐயும் குறிக்கக் கிடைக் கோடு ACB (படம் 223) ஐ வரைக. அதற்குச் செங்குத்தாக AD ஐ வரைக.



படம் 223.

AB, AD ஆகியவற்றை அச்சுக்களாக எடுத்துத் தூரங்களை AB வழியேயும் A இலிருந்து இத்தூரங்களிலிருக்கும் கொய்வு விசையினதும் வளையற்றிருப்புதிறனினதும் பெறுமானங்களை AD இற்குச் சமாந்தரமாக யாதுமொரு வசதியான அளவுத்திட்டத்திற்கும் குறிக்க.

C இன் இடதுபுறமாகவுள்ள கொய்வு விசை மாறிலியாகவும் கீழ்முகமாக $\frac{2}{3}W$ இற்குச் சமமாகவுமுள்ளது தென்பதை நாம் கண்டோம். இதன் காரணமாக AB இற்குக் கீழே S_1S_2 என்னும் கிடைக் கோடொன்றுள்ளது. S_1, S_2 என்பன இக்கோடானது கீழ்முகமாக நீட்டப்பெற்ற AD ஐயும் C இல் AB இற்குச் செங்குத்தாக வரைந்த கோட்டினையும் வெட்டும் புள்ளிகள்.

C இன் வலப்புறத்தில் கொய்வுவிசை மேன்முகமாக $\frac{1}{3}W$ ஆகும். இதன் காரணமாக, C, B ஆகியவற்றிலுள்ள நிலைக்குத்துக்களை முறையே S_3, S_4 இல் வெட்டும் S_3S_4 என்னும் கிடைக் கோடு AB இன் மேலாகவுள்ளது. அன்றியும் $CS_3 = \frac{1}{2}CS_2$.

C இன் இடப்புறமாக வளையற்றிருப்புதிறன்

$$M = +\tfrac{2}{3}Wx.$$

A இனூடாகச் செல்வதும் C ஊடான நிலைக்குத்தினை வெட்டும் புள்ளியில் AB இற்கு மேலாக $\frac{4}{3}W$ என்னும் உயரத்திற்கு உயருவதுமான ஒரு நேர்கோடு இதிலிருந்து வரும்.

CM_1, $\frac{4}{3}W$ ஐ அளவுத்திட்டத்திற்குக் குறிப்பதாகக் கொள்ளின், AM_1, A இற்கும் C இற்குமிடையேயுள்ள வளையற்றிருப்புதிறனைக் குறிக்கின்றது.

C இன் வலப்புறமாக $$M = W(2 - \tfrac{1}{3}x).$$

இதிலிருந்து இன்னொரு நேர்கோடு வருகின்றது. ஆனால் x கூடப் பெறுமானம் குறையும். எனவே அக்கோடு M_1 (இங்கு $x = 2$, $M = \frac{4}{3}W$) இலிருந்து B வரை சாய்ந்திருக்கும். B இல் $x = 6$, $M = 0$.

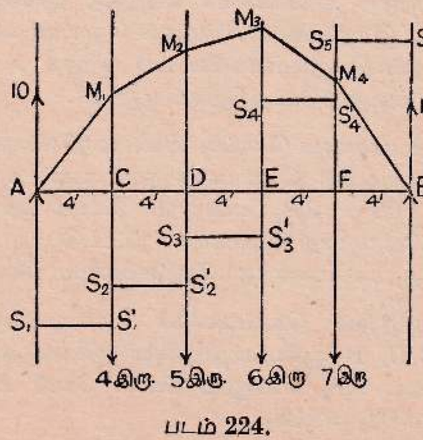
ஆகவே கொய்வு விசை வளையியானது AB இற்குச் சமாந்தரமான S_1S_2, S_3S_4 என்னும் இரு தனித்தனி நேர் கோடுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

வளையற்றிருப்புதிறன் வளையியானது M_1 இற் சந்திக்கும் AM_1, M_1B என்னும் இரு நேர்கோடுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

உதாரணம் (ii).

ஓர் இலேசான சட்டம் AB படம் 224 இற் போல் தாங்கப்பட்டும் சுமை யேற்றப்பட்டுமுள்ளது. கொய்வுவிசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படத்தை வரைந்து, வளையற்றிருப்புதிறன் உச்சமாகவுள்ள புள்ளியைக் காண்க.

முதலில் முழுச்சட்டத்திற்கும் திருப்புதிறன்களைக் கணித்து, A, B ஆகியவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கணிக்க வேண்டும். அவை A இல் 10 இரு. நிறையெனவும் B இல் 12 இரு. நிறையெனவும் காணப்பட்டிருக்கின்றன.



படம் 224.

நிறைகள் இணைத்த புள்ளிகளில் நிலைக்குத்துக்களுள்ளனவெனக் கொண்டு ஓர் அளவுத்திட்டத்திற்கு இப்படம் வரையப்படவேண்டும்.

A இலிருந்து C வரை கொய்வுவிசை கீழ்முகமாக 10 இரு. நிறை (இடப்புறமாகவுள்ள விசைகளைக் கணிக்க). இது படத்தில் AB இற்குக் கீழே 10 ஐ ஒரு வசதியான அளவுத்திட்டத்திற்குக் குறிக்கும் தூரத்திலுள்ள S_1S_1' என்னும் கிடைக் கோட்டினுற் குறிக்கப்படுகின்றது. C இலிருந்து D வரை கொய்வு விசை 6 இரு. நிறை, கீழ்முகமாக. இது S_2S_2' இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது. D இலிருந்து E வரை அது கீழ்முகமாக 1 இரு. நிறையாகும். இது S_3S_3' இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது. E இலிருந்து F வரை அது மேன்முகமாக 5 இரு. நிறையாகும். இது S_4S_4' இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது. F இலிருந்து B வரை அது மேன்முகமாக 12 இரு. நிறையாகும். இது S_5S_5' இனுற் குறிக்கப்படுகின்றது. ஆகவே, கொய்வுவிசை வளையி 5 வெவ்வேருன கோடுகளைக் கொண்டுள்ளது.

P என்னும் புள்ளி A இலிருந்து x தூரத்திலிருப்பின், A இற்கும் C இற்கும், C இற்கும் D இற்கும், இடையேயான வளையற்றிருப்புதிறன்கள் பின்வருமாருகும் :—

A இலிருந்து C வரை, $M = 10x$ . . . . . . (i)

C இலிருந்து D வரை, $M = 10x - 4(x-4) = 16 + 6x$ . . (ii)

D இலிருந்து E வரை, $M = 10x - 4(x-4) - 5(x-8) = 56 + x$ (iii)

E இலிருந்து F வரை, $M = 10x - 4(x-4) - 5(x-8) - 6(x-12)$
$= 128 - 5x$ (iv)

F இலிருந்து B வரை, $M = 10x - 4(x-4) - 5(x-8) - 6(x-12)$
$- 7(x-16) = 240 - 12x$. (v)

இவையெல்லாம் இடஞ்சுழி அல்லது நேரானவை. இவை 5 நேர் கோடுகளினுற் குறிக்கப்படுகின்றன.

(i) இனுல் தரப்பெறும் A இலுள்ள பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.

(i) இனுலும் (ii) இனுலும் தரப்பெறும் C இலுள்ள பெறுமானம் 40 இற்குச் சமம்.

(ii) அல்லது (iii) இனுல் தரப்பெறும் D இலுள்ள பெறுமானம் 64 இற்குச் சமம்.

(iii) அல்லது (iv) இனுல் தரப்பெறும் E இலுள்ள பெறுமானம் 68 இற்குச் சமம்.

(iv) அல்லது (v) இனுல் தரப்பெறும் F இலுள்ள பெறுமானம் 48 இற்குச் சமம்.

(v) இனுல் தரப்பெறும் B இலுள்ள பெறுமானம் பூச்சியமாகும்.

ஆகவே வளையற்றிருப்புதிறன் வளையியானது AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4B ஆகிய நேர்கோட்டுத் தொடராகும்.

வளையற்றிருப்புதிறன் உச்சமாகவிருக்கும் புள்ளி **E** எனப் படத்தி லிருந்து எளிதாகக் காணலாம். அதில் அதன் பெறுமானம் **68** இரு.—அடி.

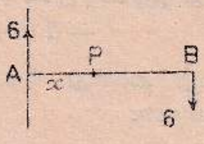
§169. சட்டம் இலேசாகவும் சில குறித்த புள்ளிகளில் மட்டும் சுமை யேற்றப்பட்டுமிருக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வளையிகள் முன்னைய உதாரணத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளவாறே எப்போது மிருக்கும்.

கொய்வு விசை வளையி, தொடர்ச்சியாக இல்லாத நேரான கிடைக் கோடு களின் தொடராகவிருக்கும். அதே நேரத்தில் வளையற்றிருப்புதிறன் வளையி யானது சுமைகள் வைக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் ஒன்றை மற்றொன்றின் மீது இணைக்கும் சாய்கோடுகளின் தொடராக இருக்கும்.

சட்டம் பாரமாக, அல்லது சுமை சட்டத்தின் நீளம் முழுவதும் அல்லது நீளத்தின் பகுதி வழியே பரம்பியிருத்தல் போன்ற சந்தர்ப்பங்கள் பந்தி **172** இல் ஆராயப்படும்.

§170. **உதாரணம் (i).**

6 அங்குல நீளமும் தவிர்க்கத்தக்க நிறையுமுள்ள கிடைக் கோல் AB ஒரு சுவரினுள் A இல் வைத்துக் கட்டப்பட்டுள்ளது. B இலிருந்து 6 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்படுமிடத்து A இலிருந்து x அங்குல தூரத் தில் கொய்வு விசையினதும் வளையலிணையினதும் பருமன்களைக் காண்க.



படம் 225.

A இலிருந்து x அங்குல தூரத்திலிருக்கும் அப்புள்ளியை **P** (படம் 225) என்க.

அந்நிறையைத் தாங்க **A** இல் பருமன் **6** ஐ உடைய மேன்முக நிலைக் குத்து விசையொன்று இருக்கவேண்டும். அதோடு **A** இலும் **B** இலும் செயற்படும் இவ்விரு விசைகள் உருவாக்கும் இணையைச் சமன்செய்யச் சுவரும் 6×6 அங்.—இரு. இணையை உஞற்றவேண்டும். **P** இற்கு இடதுபுறமாகத் திருப்புதிறன்களைக் கணிப்பின், இவ்விணையையும் உட் படுத்தவேண்டும்.

ஆகவே **P** இன் இடப்புறமாகவுள்ள விசைகள் யாவற்றினதும் திருப்பு திறன்களின் கூட்டுத்தொகை $= 6x - 36$.

$$\text{அதோடு } M = 6x - 36.$$

இதே முடிபு (எதிர்க் குறியுடன்), வலப்புறமாகத் திருப்புதிறன்களைக் கணித்துப் பெறப்படுகின்றது. ஏனெனில்,

$$PB = (6 - x),$$
$$M = 6(6 - x).$$

இக்கோவைகளில் எதுவும் P இலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறனைத் தரும்.

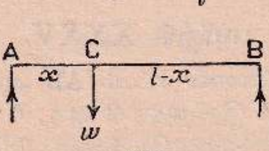
கொய்வு விசை 6 இரு. நிறைக்குச் சமம் என்பது வெளிப்படையாய்த் தெரிகின்றது.

உதாரணம் (ii).

தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள l நீளக் கோலொன்று அதன் முனைகளிலே தாங்கப்பட்டுத் தங்கியிருக்கிறது. இயங்கும் நிறை w இக்கோலுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது ; யாதுமொரு புள்ளியில் வளையற்றிருப்புதிறன் L ஆயின் அக்கோல் உடையும். கோலினை உடைக்கக்கூடிய w இன் ஆகக் குறைந்த பெறுமானம் $\frac{4L}{l}$ என நிறுவுக. (I.A.)

அக்கோலினை AB (படம் 226) குறிப்பதாகக் கொள்க. w இன் நிலையத்தை C என்க. இங்கு $AC = x$. B இல் அமுக்கம் R_1 ஆயின், A ஐப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$lR_1 = wx,$$
$$\therefore R_1 = w.\frac{x}{l}.$$



படம் 226.

ஆகவே A இல் மறுதாக்கம்

$$= w\frac{l-x}{l}.$$

A இலிருந்து y தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளி P இல் வளையற்றிருப்புதிறன் M பின்வருமாறு :—

A இலிருந்து C வரை, $$M = w\frac{l-x}{l}y,$$

அதோடு C இலிருந்து B வரை, $$M = w\frac{l-x}{l}y - w(y-x)$$
$$= w\left(x - \frac{x}{l}y\right).$$

இக்கோவைகளில் முன்னையது $y = x$ வரைக்கும் y அதிகரிக்க அதிகரிக்கின்றது. இரண்டாவது, y அதிகரிக்கக் குறைகின்றது.

இவையிரண்டும் $y = x$ இற்கு ஒரே பெறுமானம், அ-து. $wx\left(\frac{l-x}{l}\right)$ ஐத் தருகின்றன. உச்சத் திருப்புதிறனுன இது C இல் ஏற்படுகின்றது.

இது உச்சமாயிருத்தற்கு C இன் நிலையத்தை நாம் காணவேண்டும். எனெனில், ஒரு குறித்த திருப்புதிறனை ஆக்கத் தேவையான w இன் பெறுமானம் இப்புள்ளியில் ஆகவும் குறைவாக இருக்கும்.

வகையிட்டு, பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்த,

$$w\left(1-\frac{2x}{l}\right)=0,$$

$$\therefore x=\frac{l}{2}.$$

எனவே C, கோலின் நடுப்புள்ளியில் அமையும்போது வளையற்றிருப்பு திறன் உச்சமாக இருக்கும்.

$x=\frac{l}{2}$ ஆக இருக்கும்போது, $\mathrm{M}=w\frac{l}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=w\frac{l}{4}$,

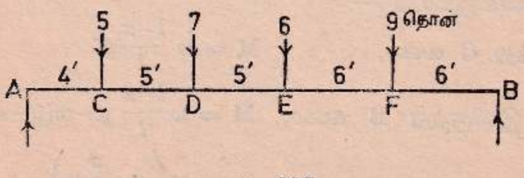
$$\therefore w\frac{l}{4}=\mathrm{L},$$

$$\therefore w=\frac{4\mathrm{L}}{l}.$$

பயிற்சி XXXV.

1. 10 அடி நீள இலேசான சட்டம் AB அதன் முனைகளில் தாங்கப் பட்டுள்ளது. இக்கோல் A இலிருந்து 2 அடி, 6 அடி தூரங்களிலிருக்கும் C, D என்னும் புள்ளிகளில் முறையே 4 இரு., 7 இரு. நிறைச் சுமையேற்றப் பட்டுள்ளது. கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களை வரைந்து வளையற்றிருப்புதிறன் எங்கே அதிகமாகவுள்ளதென்பதைக் காண்க.

2. ஒரு சட்டம் அதன் முனைகளிலே தாங்கப்பட்டும் படம் 227 இற் போற் சுமையேற்றப்பட்டுமுள்ளது. கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களைப் பருமபடியாக வரைக. A, B ஆகியவற்றிலுள்ள மறு



படம் 227.

தாக்கங்களையும், EF இன் நடுப்புள்ளியிலுள்ள கொய்வு விசையையும் வளையற்றிருப்புதிறனையும் கணிக்க. (I.C.)

3. தவிர்க்கத்தக்க திணிவுள்ள ஒரு கிடைச் சட்டம் ஒரே மட்டத்தில் 20 அடி தூரத்திலுள்ள இரு தாங்கிகளின்மீது தங்கியிருக்கிறது. இச்சட்டத்தின்மீது இடக்கை முனையிலிருந்து 3, 7, 9, 15 அடியிலிருக்கும் புள்ளிகளில் முறையே 5, 2, 3, 7 தொன் நிலைக்குத்துச் சுமைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களைப் பரும்படியாக வரைக. அதோடு, இடக்கை முனையிலிருந்து 12 அடியிலிருக்கும் புள்ளியில் கொய்வு விசையையும் வளையற்றிருப்புதிறனையும் கணிக்க. (I.C.)

4. ஒரு சட்டம் ஒரே மட்டத்தில் அதன் முனைகளிற் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்படுகின்றது. இடக்கை முனையிலிருந்து 3, 6, 10 அடி தூரத்திலிருக்கும் புள்ளிகளில் முறையே 5, 4, 8 தொன் நிலைக்குத்துச் சுமைகளுள்ளன. சட்டம் 12 அடி நீளமானது. கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களைப் பரும்படியாக வரைக. இடக்கை முனையிலிருந்து 7 அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் கொய்வு விசையையும் வளையற்றிருப்புதிறனையும் கணிக்க. (I.C.)

5. கிடைச் சட்டமொன்றின் வழியே A, B, C, D, E என்னும் புள்ளிகள் வரிசைக்கிரமமாக எடுக்கப்பட்டுள்ளன. AB = 6 அடி, BC = 4 அடி, CD = 4 அடி, DE = 5 அடி. இச்சட்டம் A இலும் D இலும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்படுகின்றது. இதற்கு B, C, E இல் முறையே 3, 7, 5 தொன் நிலைக்குத்து நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டத்திற்குக் கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களை எவ்வாறு வரையலாம் என்பதை நிறுவலுடன் காட்டுக. வளையற்றிருப்புதிறன் பூச்சியமாகவிருக்கும் புள்ளியானது D இலிருந்து எத்தூரத்திலுள்ளது? (I.C.)

6. ஒரு 12 அடி நீள இலேசான கிடைச் சட்டம் ஒரு முனையிலிருந்து 1 அடியிலும் மற்றைய முனையிலிருந்து 2 அடியிலுமிருக்கும் இரு தாங்கிகளினாலே தாங்கப்பட்டும், அதன் நடுப்புள்ளியில் 36 இறுத்தற் சுமை யேற்றப்பட்டுமுள்ளது. இச் சட்டத்திற்கான கொய்வு விசையையும், வளையற்றிருப்புதிறனையும் குறிக்க வரிப்படங்கள் வரைக.

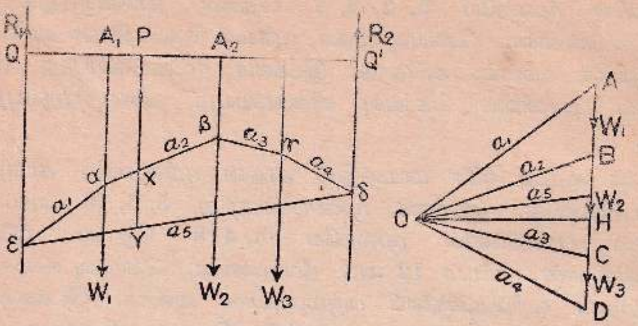
§171. வளையற்றிருப்புதிறனிற்கான வரைபு அமைப்பு.

செறிசுமைகளைத் தாங்கும் சட்டமொன்றினிடத்து சுமைகளுக்கான இழைப் பல்கோணி வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படமாகப் பயன்படுத்தப்படலாம்.

QQ′ (படம் 228) என்பது Q, Q′ ஆகியவற்றில் தாங்கப்பட்டும் A_1, A_2, A_3 ஆகியவற்றில் முறையே W_1, W_2, W_3 நிறைச் சுமையேற்றப்பட்டுமுள்ள ஒரு சட்டமென்க.

வலக்கைப் படத்திலுள்ளவாறு விசைப் பல்கோணியையும் இதற்கிசைவான இழைப் பல்கோணியையும் வரைக. இங்கு $\epsilon\delta$, இழைப் பல்கோணியின் மூடுபக்கம்.

QQ' இல் A_1 இற்கும் A_2 இற்கும் இடையேயுள்ள யாதுமொரு புள்ளியை P என்க. இழைப் பல்கோணியை X இலும் Y இலும் சந்திக்குமாறு PXY ஐ நிலைக்குத்தாக வரைக.



படம் 228.

P இல் வளையற்றிருப்புதிறன் XY இற்கு விகிதசமமெனக் காட்டுவோம்.

விசைப் படத்திலிருந்து,

W_1, $\alpha\epsilon$ வழியே a_1 இற்கும் αX வழியே a_2 இற்கும் சமவலுவுடைத்து,

R_1, $\epsilon\alpha$ வழியே a_1 இற்கும் $Y\epsilon$ வழியே a_5 இற்கும் சமவலுவுடைத்து எனக் காண்கின்றோம்.

ஆகவே W_1, R_1 ஆகிய இரண்டும் αX வழியே a_2 இற்கும் $Y\epsilon$ வழியே a_5 இற்கும் சமவலுவுடையன.

எனவே P பற்றிய அவற்றின் திருப்புதிறன்களினது கூட்டுத்தொகை இவ்விசைகளின் P பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

இப்போது αX வழியேயுள்ள a_2 ஆனது XP வழியே ஒரு நிலைக்குத்துக் கூற்றிற்கும் ஒரு கிடைக்கூறு h (இங்கு h, விசைப்படத்தில் OH இன் நீளம்) இற்கும் சமவலுவுடைத்து. இந்நிலைக்குத்துக் கூறு P பற்றித் திருப்புதிறனைதையும் கொண்டிருக்கவில்லை. கிடைக்கூற்றின் P பற்றிய திருப்புதிறன் $h.PX$ ஆகும். இதேமாதிரியாக $Y\epsilon$ வழியேயான a_5 இன் திருப்புதிறன் $h.PY$ இற்குச் சமம்.

எனவே P இன் இடப்புறமாகவுள்ள விசைகளினது P பற்றிய மொத்தத் திருப்புதிறன்

$$hPY - hPX = hXY,$$

அ–து. P இலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறன் XY இற்கு விகிதசமமாகவும், இந்நீளத்தினதும் விசைப் பல்கோணியிலிருந்து முனைவு O இன் தூரம் குறிக்கும் விசையினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமாகவும் உள்ளது.

§172. பின்வரும் உதாரணங்கள் சட்டம் பாரமாக, அல்லது சுமை முழுச் சட்டம் அல்லது சட்டத்தினெரு பகுதி வழியே பரம்பியிருத்தல் போன்ற சந்தர்ப்பங்களை விளக்குகின்றன.

உதாரணம் (i).

$2l$ நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச் சட்டம் அதன் இரு முனைகளிலும் தாங்கப்பட்டும் சுமையேற்றப்படாமலுமுள்ளது. இதன் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை w ஆகும். கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களை எவ்வாறு பெறலாமெனக் காட்டுக.

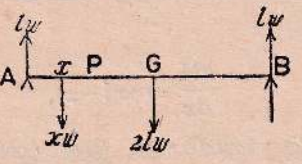
அச்சட்டத்தினை AB (படம் 229) என்க. அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினை G என்க.

சட்டத்தின் மொத்த நிறை G இற் செயற்படும் $2lw$ ஆகும்.

ஒவ்வொரு முனையிலும் மறுதாக்கம் lw என்பது வெளிப்படையாய்த் தெரிகின்றது.

அச்சட்டத்தில் A இலிருந்து x தூரத்திலிருக்கும் யாதுமொரு புள்ளியை P என்க.

P இன் இடப்புறமாகவுள்ள விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத் தொகையை எடுக்குமிடத்து AP இன் நடுப்புள்ளியிற் செயற்படும் பகுதி AP இனது நிறை xw ஐயும் உள்ளடக்கவேண்டும்.



படம் 229.

ஆகவே P இன் இடதுபுறமாகவுள்ள விசைகளினது திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= lwx - xw\frac{x}{2}, \text{ வலஞ்சுழியாக.}$$

எனவே, வளையற்றிருப்புதிறன் M,

$$M = w\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \qquad . \quad . \quad . \quad . \text{ (i)}$$

இனலே தரப்படுகின்றது.

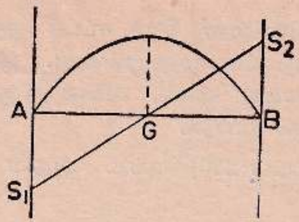
எப்புள்ளியிலும் சுமையேதும் தொங்கவிடாதிருத்தலினல் இம்முடிபு A இலிருந்து B வரையுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்துகிறது.

$$S = lw - xw \text{ (கீழ்முகமாக)} \quad . \quad . \quad . \quad . \text{ (ii)}$$

இனல் P இலுள்ள கொய்வு விசை S தரப்படுகின்றது.

இங்கு வளையற்றிருப்புதிறன் வளையி படம் 230 இற் காட்டப்பெற்ற வாறுள்ள ஒரு பரவளைவாகும்.

A இல் M இன் பெறுமானம் பூச்சியம். B இலும் அது பூச்சியம். B இல் $x = 2l$.



படம் 230.

$x = l$ ஆகக் கொண்டுள்ள நடுப்புள்ளியில், பெறுமானம் $w\frac{l^2}{2}$ ஆகும். இந்நடுப்புள்ளியில் AB இற்கான செங்குத்தைப் பற்றி வளையி சமச்சீராயிருக்குமென அறியவரும். அப்புள்ளியில் வளையற்றிருப்புதிறன் உச்சமாக இருக்கும்.

$\frac{dM}{dx}$ ஐப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தி உச்சவளையற்றிருப்புதிறன் புள்ளி கணிக்கப்படலாம்.

இப்போது $$\frac{dM}{dx} = w(l-x),$$

அதோடு $x = l$ ஆக இருக்கும்போது, இது பூச்சியம்.

அன்றியும் இப்புள்ளியில் $\frac{d^2M}{dx^2}$ மறையானது. எனவே, உச்ச வளையற்றிருப்புதிறன் புள்ளியின் நிலையத்தை $x = l$ தருகின்றது.

$\frac{dM}{dx}$, கொய்வுவிசைக் கோவைக்குச் சமமென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

மற்றைய இடங்களிலும் இது இவ்வாறே என்று காணப்படும்; யாதுமொரு புள்ளியில் வளையற்றிருப்புதிறன் வளையிச் சரிவுவிகிதம் அப்புள்ளியிலுள்ள கொய்வு விசைக்குச் சமம்.

(ii) இனல் தரப்பெறும் கொய்வுவிசை வளையி ஒரு நேர்கோடாகும். $x = 0$ ஆக இருக்கும்போது, $S = lw$ (கீழ்முகமாக),

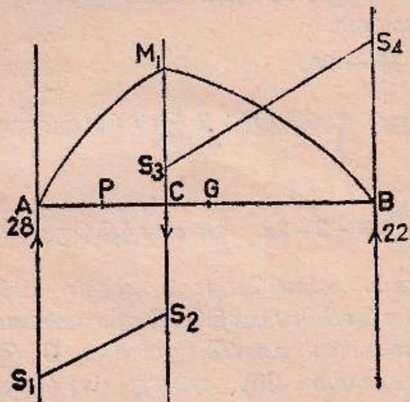
இது புள்ளி S_1 இனற் குறிக்கப்படுகின்றது.

$x = l$ ஆக இருக்கும்போது, $S = 0$, புள்ளி G இனற் குறிக்கப்படுகின்றது.

$x = 2l$ ஆக இருக்கும்போது, $S = -lw$, அ—து. wl (மேன்முகமாக). இது புள்ளி S_2 இனற் குறிக்கப்படுகின்றது.

உதாரணம் (ii).

10 அடி நீளமான ஒரு சீர்ச் சட்டம் அதனிரு முனைகளிலும் கிடையாகத் தாங்கப்படுகின்றது. இதனோர் அடியோட்டம் 2 இரு. நிறையுள்ளது. முனை யொன்றிலிருந்து 4 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் இச்சட்டத்துடன் 30 இறுத்தற் சுமை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சட்டத்தின் யாதுமொரு புள்ளிக்குக் கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வளையிகளை வரைந்து, வளையற்றிருப்புதிறன் எங்கு மிக்க அதிகமானதென்பதைக் காண்க. (I.E.)



படம் 231.

AB (படம் 231) அச்சட்டத்தினைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. 30 இறுத்தற் சுமை இணைத்த புள்ளியை C என்க.

A, C, B, ஆகியவற்றில் சட்டத்திற்குச் செங்குத்துகளை வரைக.

முதலில் A இனும் B இனுமுள்ள மறுதாக்கங்களைக் கணிக்க வேண்டும்.

B இல் மறுதாக்கம் R_1 ஆயின், A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$10R_1 = 120 + 100 = 220,$$

$$\therefore\ R_1 = 22 \text{ இரு. நிறை},$$

$$\therefore\ R_2 = 28 \text{ இரு. நிறை}.$$

அச்சட்டத்தில் A இலிருந்து x தூரத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியை P என்க.

A இலிருந்து C வரை கொய்வு விசை S,

$$S = 28 - 2x \quad (\text{கீழ்முகமாக}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

இனால் தரப்படுகின்றது.

C இலிருந்து B வரை, $S = 28 - 30 - 2x = 2 + 2x$ (மேன்முகமாக) . . (ii)

A இலிருந்து C வரை வளையற்றிருப்புதிறன் M,

$$M = 28x - x^2 \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

இனல் தரப்படுகின்றது.

C இலிருந்து B வரை, $M = 28x - 30\ (x - 4) - x^2$

$$= 120 - 2x - x^2 \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

(iii) இலிருந்து $\dfrac{dM}{dx} = 28 - 2x$. அதோடு ஓர் உச்சத்திற்கு $x = 14$. இக் கோவை $x = 4$ வரைக்கும் மட்டுமே பொருந்துகின்றமையால் இப்பெறுமானம் அசாத்தியமாகும்.

இப்புள்ளியில் $M = 96$.

$\dfrac{dM}{dx}$ உம் (i) இனல் தரப்பெறும் S இன் பெறுமானமும் ஒன்றென்பது கவனிக்கத்தக்கது.

(iv) இலிருந்து $\dfrac{dM}{dx} = -2 - 2x$. ஓர் உச்சத்திற்கு $x = -1$. இதுவுமோர் இயலாப் பெறுமானம். வளையியெதுவும் அதன் உச்சிவரை நிறைவாக இல்லாதிருப்பதனுல் வளையியின் பகுதியெதிலும் உண்மையான உச்சப்புள்ளி யேதுமிராது. உண்மையான உச்சப்பெறுமானம் C இலாகும். C இல் $M = 96$. இப்பெறுமானம் (iii) அல்லது (iv) இனல் $x = 4$ இற்குத் தரப்படுகின்றது.

(M இன் பெறுமானமானது $x = 10$ இல் பூச்சியமாகும் வரைக்கும், x இன் பெறுமானம் அதிகரிக்கக் குறைவதனுல் (iv) இனல் தரப்பெறும் உச்சம் இதுவேயாகுமென்பது தெளிவாகின்றது.)

$\dfrac{dM}{dx}$ உம் (ii) இனல் தரப்பெறும் S இன் பெறுமானமும் ஒன்று என்பது மீண்டும் கவனிக்கத்தக்கது.

கொய்வுவிசை வளையியை வரைய, (i) இலிருந்து,

$x = 0$ ஆக இருக்கும்போது, $S = 28$ (கீழ்முகமாக), S_1

$x = 4$ ஆக இருக்கும்போது, $S = 20$ (கீழ்முகமாக), S_2,

அதோடு (ii) இலிருந்து,

$x = 4$ ஆக இருக்கும்போது, $S = -10$ (மேன்முகமாக), S_3

$x = 10$ ஆக இருக்கும்போது, $S = -22$ (மேன்முகமாக), S_4.

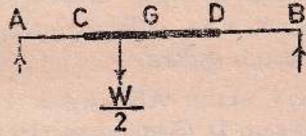
வளையற்றிருப்புதிறன் வளையிற்கு,

சமன்பாடு (iii) வளையி AM_1 ஐத் தருகின்றது,

சமன்பாடு (iv) வளையி M_1B ஐத் தருகின்றது.

உதாரணம் (iii).

W நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு புகைவண்டி அதன் நீளத்தின் இருமடங்கு நீளமுள்ள ஒரு பாலத்தின் மையத்திலுள்ளது. இப்புகை வண்டியின் நிறை அதன் நீளமெங்கும் சீராகப் பரம்பியுள்ளதெனக் கொண்டு, பாலத்தின் மையத்தில் வளையற்றிருப்புதிறனைக் கணித்து, அதனைப் புகைவண்டியின் ஒரு முனை பாலத்தின் கரைகளிலொன்றை அடையுந் தறுவாயிலிருக்குமிடத்துள்ள பெறுமானத்துடன் ஒப்பிடுக. (I. S.)



படம் 232.

AB (படம் 232) பாலத்தையும், CD, புகைவண்டியையும் குறிப்பதாகக் கொள்க.

A இலும் B இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{W}{2}$ ஆகும்.

G இன் இப்புறமாகவுள்ள புகைவண்டியின் நிறை $\frac{W}{2}$. இது CG இன் நடுப்புள்ளியிற் செயற்படுகின்றது.

$$M = \frac{W}{2}.l - \frac{W}{2}.\frac{l}{4} = \frac{3}{8}Wl.$$

புகைவண்டி AG என்னும் நிலையிலிருப்பின், A, B என்பவற்றிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் மாறறப்படும். A இலுள்ள மறுதாக்கம் $\frac{3}{4}W$ ஆகும்.

புகைவண்டியின் மொத்த நிறை இப்போது C இற் செயற்படுகின்றது. G இலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறன் M,

$$M = \frac{3}{4}W.l - W.\frac{l}{2} = \frac{1}{4}Wl$$

இனல் தரப்படுகின்றது.

ஆகவே இரு வளையற்றிருப்புதிறன்களினதும் விகிதம் 3 : 2 ஆகும்.

பயிற்சி XXXVI.

1. 20 அங்குல நீளமும் 10 இரு நிறையுமுள்ள ஒரு விறைப்பான சீர்க் கோல் LM முனைகள் L இலும் M இலும் தாங்கப்பெற்றுக் கிடையாகத் தங்குகிறது. இக்கோலில் L இலிருந்து 8 அங்குல தூரத்திலிருக்கும் புள்ளி C

இல் 12 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. M இலிருந்து 7 அங்குலத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் கொய்வுவிசை, வளையலிணை ஆகியனவற்றைக் கணிக்க. (I. E.)

2. 32 அடி நீளச் சீர்ச் சட்டம் AC அதன் முனைகளில் ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் தாங்கிகளில் தங்குகின்றது. B, இச்சட்டத்தின் நடுப் புள்ளி. இதன் பாதி AB வழியே சீராகப் பரம்பியுள்ள 4 தொன் சுமையொன்று இதனுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. சட்டத்தின் சொந்த நிறை தவிர்க்கத்தக்கதெனக் கொண்டு, ஒரு வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படத்தினை வரைந்து இப்படத்தில் உச்ச வளையற்றிருப்புதிறனின் பருமனையும் அது செயற்படும் புள்ளியையும் குறிக்க. (I. E.)

3. இலேசான 12 அடிச் சட்டம் AB அதன் முனைகளிற் தாங்கப்படுகின்றது. இதனுடன் C இலும் D இலும் முறையே 2, 4, தொன் நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு AC = 4 அடி, DB = 2 அடி. கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படங்களை வரைக. சுமை C இலும் D இலும் செறிந்திராது, சட்டத்தின் மேலே சீராகப் பரம்பியிருக்குமிடத்து இயைந்த வரிப்படங்களை வரைக. (I. E.)

4. W நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்ச் சட்டம் அதன் நடு வெட்டுமுகத்திலிருந்து ஒவ்வொன்றும் a தூரத்திலிருக்கும் இரு தாங்கிகளின்மீது தங்கியிருக்கிறது. நடுவிலும் ஒரு தாங்கியிலும் வளையற்றிருப்பு திறன்களைக் கண்டு, இவ்விரு வளையற்றிருப்புதிறன்களும் பருமனிற் சமமாகவும் குறியில் எதிராகவும் இருப்பின் a ஐ l இன் சார்பாகக் காண்க. (I. E.)

5. 32 இரு. நிறையும் 16 அங்குல நீளமுமுள்ள ஒரு சீர் உருக்குச் சட்டம் அதன் முனைகளிலுள்ள இரு தாங்கிகளின்மீது கிடையாகத் தங்கியிருக்கின்றது. சட்டத்தில் ஒருமுனையிலிருந்து 4 அங்குலத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் 8 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சட்டத்தின் எப்புள்ளியில் கொய்வு விசை பூச்சியமென்பதைக் கணித்தலினூற் கண்டு, இப்புள்ளியில் வளையற்றிருப்புதிறனை மதிப்பிடுக. சட்டத்தின் வழியே கொய்வு விசையின் பரம்பலைக் காட்டி ஒரு வரிப்படம் வரைக. (I. E.)

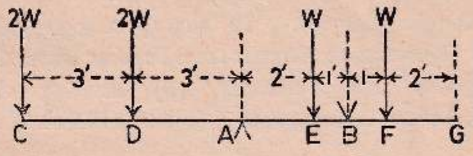
6. ஒரு பாரமான சீர்க் கிடைச் சட்டம் தன் முனைகள் A இலும் B இலும் தாங்கப்பட்டுள்ளது. இதற்கு C இல் W நிறை இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இங்கு, AC = 2CB. A இலிருந்து x தூரத்தில் கோலிலிருக்கும் புள்ளி P இலுள்ள வளையற்றிருப்புதிறனிற்கு விகிதசமனாக y என்னும் நிலைக்கூறு வரையப்படின், பின்பு பெறப்படும் வளையி நிலைக்குத்தான அச்சுக்களையுடைய இரு சம பரவளைவுப் பகுதிகளையுடையதாயிருக்குமெனக் காட்டுக. AB = l உம் சட்டத்தின் நிறை W உம் ஆகின், பரவளைவுகளின செவ்வகலத்தைக் காண்க. (C.S.)

7. 3W நிறையுள்ள பாரமான சீர்ச் சட்டம் AB, A இலும் முக்கூறிடும் புள்ளி D இலும் சமநிறைகள் W இனற் சுமையேற்றப்பட்டு, B இலும் முக்கூறிடும் புள்ளி C இலுமுள்ள இரு தாங்கிகளின்மீது கிடையாகத்

தங்குகிறது. இங்கு AC = CD = DB. சட்டத்தின் வழியே கொய்வு விசையினதும் வளையற்றிருப்புதிறனினதும் பரம்பலைக் காட்டும் வரிப்படங்களைப் பரும்படியாக வரைக. (C.S.)

8. 10 அடி நீளமுள்ள ஓர் இலேசான கிடை முனைநெம்பின் மையத்திலும் அதன் சுயாதீன முனையிலும் ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{2}$ தொன் நிறையான செறிசுமைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இதற்கான வளையற்றிருப்புதிறன், கொய்வு விசை வரைபுகளை வரைக. (C.S.)

9. படம் 233 இல் காட்டப்பெற்றவாறு சுமையேற்றப்பட்டும் A இலும்

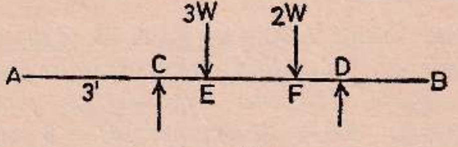


படம் 233.

B இலும் தாங்கப்பட்டுமுள்ள சட்டத்திற்கு கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்பு திறன் வரைபுகள் வரைக. சட்டத்தின் ஓர் அடி W நிறையானது. (C. S.)

10. ஒரு 16 அடி நீளச் சீர்ப் பலகை முனைகளிலிருந்து 4 அடி தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளில் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டுள்ளது. பலகை நிறையின் பாதி நிறையுள்ள ஒரு பாரமான துணிக்கை பலகையின்மீது (*a*) ஒரு முனையில், (*b*) நடுப்பகுதியில் வைக்கப்படுமிடத்து பலகையிலுள்ள கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் ஆகியனவற்றைக் குறிக்க இரு சோடி படங்கள் வரைக. (C.S.)

11. W நிறையுள்ள ஒரு சீர்ச் சட்டம் AB படம் 234 இற் காட்டப் பட்டுள்ளவாறு C, D என்னும் இரு தாங்கிகள் மீது கிடையாகத் தங்குகிறது.



படம் 234.

E, F இல் முறையே 3W, 2W நிறைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு AC = 3 அடி, EF = DB = 2 அடி, CE = FD = 1 அடி. C, D ஆகியவற்றினிடையே நடுவிலுள்ள புள்ளி H இல் வளையற்றிருப்புதிறனைக் காண்க. அச்சட்டம் அல்லது நிறைகள் நழுவாது, தாங்கு புள்ளி D ஆனது C இன் மட்டத்திற்கு மேலாக 6 அங்குலம் உயர்த்தப்படின், H இல் வளையற்றிருப்புதிறன் கூடிவிட்டதோ குறைந்துவிட்டதோவெனக் காண்க. (C.S.)

12. a நீளமுள்ள AB, BC என்னும் இரு சீர்ச் சமச்சட்டங்கள் B இல் ஒப்ப மாகப் பிணைக்கப்பட்டும் A, D ஆகியவற்றிலுள்ள தாங்கிகளினூற் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டுமுள்ளன. இங்கு, $BD = \frac{1}{2}DC$. இவற்றின் ஓரலகு நீளம் w நிறையானது. ஒவ்வொரு சட்டத்திலும் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் ஆகியனவற்றிற்குக் கோவைகளைக் கண்டு, அவற்றின் பெறுமதிகளில் ஏற்படும் மாறல்களைக் குறிக்க வரைபுகள் வரைக.

13. 18 அடி நீளச் சட்டமொன்று 12 அடி இடைத்தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளில் தாங்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு தாங்கி சட்டத்தின் இடக்கை முனையிலிருந்து 3 அடியிலுள்ளது. சட்டத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலும் 3 தொன் சுமை செயற்படுகின்றது. 12 அடி இடைத்தூரத்தின் மீது 1 அடியோட்டத்துக்கு 1 தொன்னுகச் சீராகப் பரம்பியுள்ள சுமை செயற்படுகின்றது. (i) தாங்கிகளினுள்ள மறுதாக்கங்கள், (ii) கொய்வு விசை வரிப்படம், (iii) அச்சட்டத்திற்கான வளையற்றிருப்புதிறன் வரிப்படம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

14. ஒரு சட்டம் கிடையாகத் தாங்கப்படுமிடத்து கொய்வுவிசை (F), வளையற்றிருப்புதிறன் (M) ஆகியன,

$$\frac{dF}{dx} = -w, \quad \frac{dM}{dx} = -F$$

என்னும் சமன்பாடுகளினூலே தரப்படுகின்றனவென நிறுவுக. இங்கு w, சட்டத்தின் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை. ஒரு சுவரிலிருந்து கிடையாக நீட்டும் ஒரு l நீள முனைநெம்பின் வெட்டுமுகப் பரப்பானது $(l^2 - x^2)$ மாற மாறுகின்றது. இங்கு x, சுவரிலிருந்துள்ள தூரம். வளையற்றிருப்புதிறன்,

$$M = \frac{w_0}{12l^2}(l-x)^3(3l+x)$$

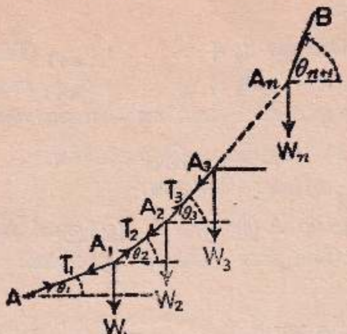
என்னும் சமன்பாட்டினுல் தரப்படுகிறதென நிறுவுக. இங்கு w_0, சுவரில் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை. (C.W.B.)

15. ஒரு சீர்ச் சட்டம் ABC, A இலும் B இலுமுள்ள இரு தாங்கிகளின்மீது தங்குகிறது. சட்டத்தின் ஓரலகு நீளம் w நிறையானது. சட்டத்திற்கு C இல் இதன் நிறையின் காற்பங்கிற்குச் சமமான ஒரு நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB = 10 அடியும், BC = 6 அடியுமாகவும் ABC கிடையாகவுமிருப்பின், கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் வரைபுகளைக் கவனமாக வரைக. (C.W.B.)

§173. ஓர் இழையினுல் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் துணிக்கைகள்.

ஓர் இலேசான இழையின் நுனிகள் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டும் இவ்விழையுடன் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுமிருப்பின், இவ்விழையினுல் உருவாக்கப்படும் உருவம் இழை அல்லது கயிற்றுப் பல்கோணி எனப்படும். இதற்கிசைவான பல்கோணிக்கு வரைபு நிலையியலிற் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெயரின் பிறப்பிடம் இதுவேயாகும்.

இழையின் நுனிகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகளை A, B (படம் 235) என்க. W_1, W_2, . . . W_n நிறைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகளை முறையே A_1, A_2, . . . A_n என்க.



படம் 235.

இழையின் பாகங்கள் AA_1, A_1A_2, . . . A_nB முறையே a_1, a_2, . . . a_{n+1} நீளமானவையெனவும் அவை, கிடையுடன் θ_1, θ_2 . . . θ_{n+1} கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளன வெனவும் கொள்க. அவற்றிலுள்ள இழுவைகளை முறையே T_1, T_2 . . . T_{n+1} என்க. வெவ்வேறு அடுத்துவரும் நிறைகளுக்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = T_2 \text{ கோசை } \theta_2,$$
$$T_2 \text{ கோசை } \theta_2 = T_3 \text{ கோசை } \theta_3, \quad \text{இன்னபிறவும்.}$$

$$\therefore T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = T_2 \text{ கோசை } \theta_2 = \ldots = T_{n+1} \text{ கோசை } \theta_{n+1} = H \text{ (என்க)} \qquad \text{(i)}$$

ஆகவே, இழுவையின் கிடைக்கூறு எங்கும் ஒரேமாதிரியானது.

அடுத்துவரும் வெவ்வேறான நிறைகளுக்கும் நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$T_2 \text{ சைன் } \theta_2 - T_1 \text{ சைன் } \theta_1 = W_1,$$
$$T_3 \text{ சைன் } \theta_3 - T_2 \text{ சைன் } \theta_2 = W_2,$$
$$\cdots \cdots \cdots$$
$$T_{n+1} \text{ சைன் } \theta_{n+1} - T_n \text{ சைன் } \theta_n = W_n \quad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

இச்சமன்பாடுகளில் T_1, T_2 முதலானவற்றிற்குச் சமன்பாடுகள் (i) இலிருந்து பிரதியிட,

$$\text{தான் } \theta_2 - \text{தான் } \theta_1 = \frac{W_1}{H},$$
$$\text{தான் } \theta_3 - \text{தான் } \theta_2 = \frac{W_2}{H},$$
$$\cdots \cdots \cdots$$
$$\text{தான் } \theta_{n+1} - \text{தான் } \theta_n = \frac{W_n}{H}.$$

14——R. 13456 (10/63)

எனவே, நிறைகளெல்லாம் சமமாயின், இழையின் பற்பல பகுதிகளின சாய்வுகளின் தான்சன்கள் கூட்டல் விருத்தியிலிருக்கும். இப்போது, A இற்கும் B இற்கும் இடையேயான கிடை, நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே h, k ஆயின்.

$$a_1 \text{ கோசை } \theta_1 + a_2 \text{ கோசை } \theta_2 + \ldots a_{n+1} \text{ கோசை } \theta_{n+1} = h \quad \text{(iii)}$$

$$a_1 \text{ சைன் } \theta_1 + a_2 \text{ சைன் } \theta_2 + \ldots a_{n+1} \text{ சைன் } \theta_{n+1} = k \quad \text{(iv)}$$

$2_n + 2$ சமன்பாடுகளுக்குச் சமமான சமன்பாடுகள் (i), (ii), (iii), (iv) ஆகியன $(n+1)$ தெரியா இழுவைகளையும், $(n+1)$ தெரியாச் சாய்வுகளையும் காண வழிவகுக்கின்றன.

பலவிடங்களில் முறையே A இற்கும் A_1 இற்கும், A_1 இற்கும் A_2 இற்கும், போன்றனவற்றிற்கிடையேயுள்ள கிடைத் தூரங்கள் $h_1, h_2, \ldots$ தரப் பட்டிருக்கும். பின்பு,

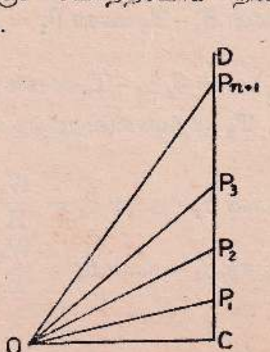
$$h_1 \text{ தான் } \theta_1 + h_2 \text{ தான் } \theta_2 \ldots + h_{n+1} \text{ தான் } \theta_{n+1} = k.$$

A_1, A_2 முதலானவற்றிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் AA_1, $A_1 A_2$, முதலான இலேசான வளையங்களைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு சங்கிலி யினால் இவ்விழை பதிலிடப்படலாம். பந்தி **175** இன் உதாரணம் (iii) இலுள்ளவாறு மூட்டுகளுடன் நிறைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கும்.

§174. வரைபு அமைப்பு.

இழையின் வெவ்வேறு பாகங்களின் சாய்வுகள் தரப்பட்டிருப்பின், W_1, W_2, $\ldots W_n$ இன் விகிதங்களை வரைபு மூலமாக எளிதாகப் பெறலாம். முன்னைய பந்தியின் படத்தினைப் பயன்படுத்தி, யாதுமொரு புள்ளி O ஐ எடுத்து OC ஐக் கிடையாக வரைக (படம் 236). C இல் CD என்னும் நிலைக்குத்தை வரைக.

P_1OC, P_2OC, முதலான கோணங்கள் முறையே θ_1, θ_2, முதலான வற்றிற்குச் சமமாகுமாறு, OP_1, $OP_2 \ldots OP_{n+1}$ ஐப் பாகங்கள் AA_1, A_1A_2, $\ldots A_nB$ இற்குச் சமாந்தரமாக நிலைக்குத்தை P_1, $P_2 \ldots$ இல் வெட்டுமாறு வரைக.



படம் 236.

$$\text{இப்போது } \frac{W_1}{H} = \text{தான் } \theta_2 - \text{தான் } \theta_1 = \frac{CP_2}{OC} - \frac{CP_1}{OC} = \frac{P_1P_2}{OC},$$

$$\frac{W_2}{H} = \text{தான் } \theta_3 - \text{தான் } \theta_2 = \frac{CP_3}{OC} - \frac{CP_2}{OC} = \frac{P_2P_3}{OC},$$

மற்றவயும் இவ்வாறே.

எனவே, $H, W_1, W_2 \ldots W_n$ முறையே $OC, P_1P_2, \ldots P_nP_{n+1}$ இற்கு விகிதசமம். ஆகவே அவற்றின் விகிதங்கள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன.

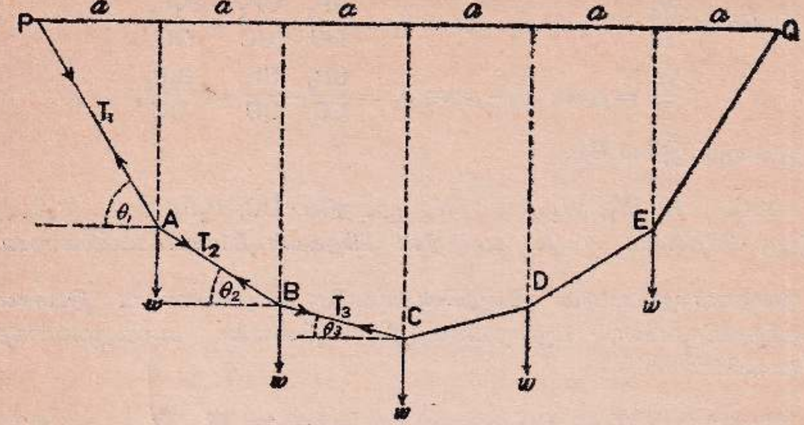
நிறைகள் தரப்பட்டும் இழையின் எவ்விரு பாகங்களினதும் திசைகள் தெரிந்துமிருப்பின், மற்றையனவற்றின் திசைகளை வரைபுமூலமாகத் தீர்மானிக்கலாம்.

நிலைக்குத்துக் கோடு CD ஐ வரைந்து அதன்மீது $W_1, W_2 \ldots$ ஐ ஓர் அளவுத்திட்டத்திற்குக் குறிக்குமாறு முறையே $P_1P_2, P_2P_3 \ldots$ ஐக் குறிக்க. A_1A_2 இனதும் A_3A_4 இனதும் திசைகள் தரப்பட்டிருப்பின், P_1O, P_3O ஆகியவற்றினை முறையே A_1A_2, A_3A_4 ஆகியவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக O இற் சந்திக்குமாறு வரையுமிடத்து, P_1OP_3 என்பது W_2, W_3, ஆகியவற்றிலிருந்துள்ள இழையின் பாகங்களிற்கான ஒரு விசை முக்கோணியாகும். எஞ்சிய பாகங்களின் திசைகள் P_2, P_4, முதலானவற்றை O உடன் இணைத்துப் பெறப்படுகின்றன.

§175. உதாரணம் (1).

ஒரே கிடைக் கோட்டில் அமைந்திருக்கும் P, Q என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கும் ஓர் இலேசான இழையுடன் ஐந்து சம நிறைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சமநிலையில் இழையின் ஆறு இடைவெளிகளினதும் கிடையெறியமெல்லாம் a இற்குச் சமம். அடியிலுள்ள நிறை PQ இற்குக் கீழே $3a$ ஆழத்திலுள்ளது. கிடையுடன் இழைப் பகுதிகளின் சாய்வுகள் தான்$^{-1}$ $(\frac{1}{3})$, $\frac{\pi}{4}$, தான்$^{-1}$ $(\frac{5}{3})$ எனக் காட்டுக. அந்தப் பல்கோணியின் புறக்கோணங்கள் தான்$^{-1}$ $(\frac{1}{4})$, தான்$^{-1}$ $(\frac{1}{2})$, தான்$^{-1}$ $(\frac{3}{4})$ என்பனவாமென நிறுவுக. (H.C.)

நிறைகள் இணைக்கப்பெற்றுள்ள புள்ளிகளை A, B, C, D, E (படம் 237) எனவும், கிடையுடன் PA, AB, BC ஆகியனவற்றின் சாய்வுகளை முறையே θ_1, θ_2, θ_3 எனவும், இழையின் இப்பாகங்களிலுள்ள இழுவைகளை T_1, T_2, T_3 எனவும் கொள்க.



படம் 237.

இடையாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = T_2 \text{ கோசை } \theta_2 = T_3 \text{ கோசை } \theta_3 = H \text{ (என்க)} \quad . \quad \text{(i)}$$

A, B, C ஆகியவற்றிலுள்ள நிறைகளுக்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க, முறையே

$$T_1 \text{ சைன் } \theta_1 - T_2 \text{ சைன் } \theta_2 = w$$
$$T_2 \text{ சைன் } \theta_2 - T_3 \text{ சைன் } \theta_3 = w,$$
$$2T_3 \text{ சைன் } \theta_3 = w \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

PQ இலிருந்து C இன் ஆழம் $a(\text{தான் } \theta_1 + \text{தான் } \theta_2 + \text{தான் } \theta_3)$ ஆகையால்,

$$\text{தான் } \theta_1 + \text{தான் } \theta_2 + \text{தான் } \theta_3 = 3 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

சமன்பாடுகள் (ii) இல் T_1, T_2, T_3 ஆகியவற்றிற்கு (i) இலிருந்து பிரதியிட,

$$\text{தான் } \theta_1 - \text{தான் } \theta_2 = \frac{w}{H},$$

$$\text{தான் } \theta_2 - \text{தான் } \theta_3 = \frac{w}{H},$$

$$2 \text{ தான் } \theta_3 = \frac{w}{H};$$

$\therefore$ தான் $\theta_2 = 3$ தான் θ_3, அதோடு தான் $\theta_1 = 5$ தான் θ_3.

ஆகவே, (iii) இலிருந்து, 9 தான் $\theta_3 = 3$, அல்லது தான் $\theta_3 = \frac{1}{3}$,

$\therefore$ தான் $\theta_2 = 1$, அதோடு தான் $\theta_1 = \frac{5}{3}$.

C இல் பல்கோணியின் புறக் கோணம் $= 2\theta_3$. அதோடு

$$\text{தான் } 2\theta_3 = \frac{2 \text{ தான் } \theta_3}{1 - \text{தான் }^2\theta_3} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

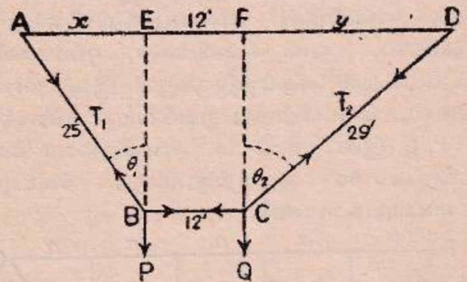
B இல் புறக் கோணம் $= \theta_2 - \theta_3$, அதோடு

$$\text{தான்}\ (\theta_2 - \theta_3) = \frac{\text{தான்}\ \theta_2 - \text{தான்}\ \theta_3}{1 + \text{தான்}\ \theta_2\ \text{தான்}\ \theta_3} = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

இதே மாதிரியாக A இல் புறக் கோணம் $= \theta_1 - \theta_2$. இதன் தான்சன் $\frac{1}{4}$.

உதாரணம் (ii).

A, D என்பன ஒரே கிடைக் கோட்டில் 48 சமீ. தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள். அவற்றுடன் ஒரு 66 சமீ. நீள இலேசான நாண் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நாணில் புள்ளி B ஆனது A இலிருந்து 25 சமீ. இலும், புள்ளி C ஆனது D இலிருந்து 29 சமீ. இலுமுள்ளது. B இலிருந்து P கிராம் திணிவொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நாணின் பகுதி BC கிடையாக இருக்குமாறு C இலிருந்து தொங்கவிடப்படவேண்டிய Q இன் திணிவைக் காண்க. (I.A.)



படம் 238.

வரிப்படத்தினை படம் 238 இற்போல வரைக. B, C ஆகியவற்றினூடான நிலைக்குத்துக்கள் AD ஐ முறையே E, F இல் வெட்டுவதாகக் கொள்க.

ABE $= \theta_1$ எனவும், FCD $= \theta_2$ எனவும், AE $= x$ எனவும், ED $= y$ எனவும் கொள்க.

BE = CF என்பதால்,

$$25^2 - x^2 = 29^2 - y^2,$$

$$\therefore\ y^2 - x^2 = 29^2 - 25^2 = 54 \times 4.$$

AE + FD = 48 − 12 = 36 என்பதால்,

$$y + x = 36,$$

$$\therefore\ y - x = 6,$$

$$\therefore\ y = 21,\ x = 15.$$

AB, CD ஆகியவற்றிலுள்ள இழுவைகளை முறையே T_1, T_2 என்க.

B இற்கும் C இற்கும் கிடையாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ சைன் } \theta_1 = T_2 \text{ சைன் } \theta_2,$$

$$\therefore \frac{T_1}{T_2} = \frac{\text{சைன் } \theta_2}{\text{சைன் } \theta_1} = \frac{21}{29} \times \frac{25}{15}.$$

B இற்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க;

$$T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = P,$$

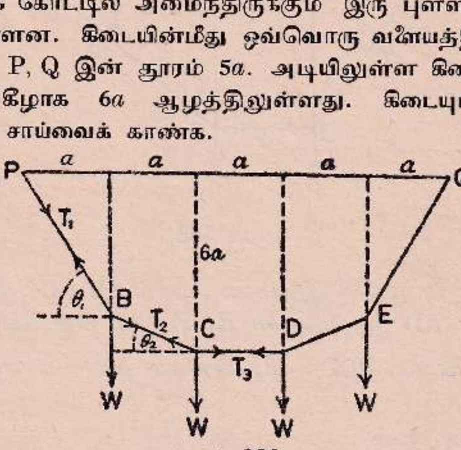
அதோடு C இற்கு, $$T_2 \text{ கோசை } \theta_2 = Q,$$

$$\therefore \frac{Q}{P} = \frac{T_2}{T_1}\frac{\text{கோசை } \theta_2}{\text{கோசை } \theta_1} = \frac{29 \times 15}{21 \times 25} \times \frac{25}{29} = \frac{5}{7}.$$

$$\therefore Q = \frac{5}{7} P.$$

உதாரணம் (iii).

ஒப்பமாக இணைக்கப்பட்டிருக்கும் ஐந்து இலேசான நேர்வளையங்களைக் கொண்டுள்ள ஒரு சங்கிலியின் இணைப்புக்களிலிருந்து சம நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. நுனி வளையங்கள், ஒப்பமான இணைப்புக்களினுல் ஒரே கிடைக் கோட்டில் அமைந்திருக்கும் இரு புள்ளிகள், P, Q இற் கொளுவப்பட்டுள்ளன. கிடையின்மீது ஒவ்வொரு வளையத்தினதும் எறியம் a இற்குச் சமம். P, Q இன் தூரம் $5a$. அடியிலுள்ள கிடையான வளையம் P, Q இற்குக் கீழாக $6a$ ஆழத்திலுள்ளது. கிடையுடன் ஒவ்வொரு வளையத்தினதும் சாய்வைக் காண்க. (C.S.)



படம் 239.

PBCDEQ (படம் 239) சங்கிலியைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

இணைப்பு B இற்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = T_2 \text{ கோசை } \theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

இணைப்பு B இற்கு நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ சைன் } \theta_1 = W + T_2 \text{ சைன் } \theta_2,$$

அதோடு C இற்கு, $$T_2 \text{ சைன் } \theta_2 = W,$$

$$\therefore T_1 \text{ சைன் } \theta_1 = 2\, T_2 \text{ சைன் } \theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(ii) ஐ (i) ஆற் பிரிக்க, தான் $\theta_1 = 2$ தான் θ_2.

அன்றியும் PQ இற்குக் கீழாக B இன் ஆழம் a தான் θ_1 உம், C இன் ஆழம் a தான் $\theta_1 + a$ தான் θ_2 உம் ஆகும்.

$$\therefore a \text{ தான் } \theta_1 + a \text{ தான் } \theta_2 = 6a,$$
$$\therefore \text{ தான் } \theta_1 + \text{ தான் } \theta_2 = 6,$$
$$\therefore 3 \text{ தான் } \theta_2 = 6,$$
$$\therefore \text{ தான் } \theta_2 = 2,$$

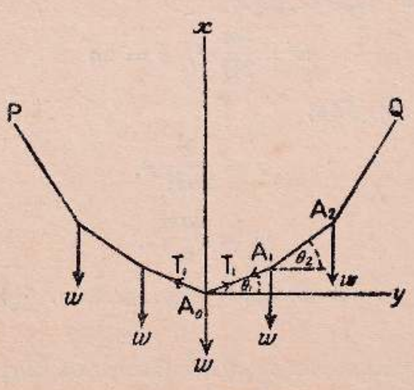
அதோடு
$$\text{தான் } \theta_1 = 4.$$

§176. ஒரேமட்டத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப் பட்டுள்ள ஓர் இலேசான இழையின் புள்ளிகளிற்குப் பல சம நிறைகள், நிறைகளிடையேயுள்ள கிடைத் தூரங்கள் சமமாக இருக்குமாறு, இணைக்கப் பட்டுள்ளன.

நிறைகளின் இணைப்புப் புள்ளிகளும் தொங்கற் புள்ளிகளும் ஒரு பரவளைவி லிருக்குமெனக் காட்டுதல்.

நிறைகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றையானதென முதலிற் கருதுவோம். பின்பு நடுநிறை படம் 240 இற் போல இழையின் அடிப்புள்ளி A_0 இலிருக்கும்.

ஒவ்வொரு நிறையும் w இற்குச் சமமெனக்க. கிடையுடன் A_0A_1, A_1A_2, முதலானவற்றின் சாய்வுகளை முறையே θ_1, θ_2, முதலானவையெனவும் அவற்றிலுள்ள இழுவைகளை T_1, T_2, முதலானவையெனவும் கொள்க. தான் θ_1, தான் θ_2, முதலானவை கூ. வி. இலுள்ளனவெனக் கண்டோம். பொது வித்தியாசம் $\frac{w}{H}$ ஆகும். இங்கு H, கிடையிழுவை.



படம் 240.

அன்றியும் $$T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = H.$$

அதோடு, $$2T_1 \text{ சைன் } \theta_1 = w,$$

$$\therefore \text{ தான் } \theta_1 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{H}.$$

A_0 இற்கும் A_1 இற்கும், A_1 இற்கும் A_2 இற்கும் . . . இடையேயுள்ள கிடைத் தூரத்தினை a என்க.

A_0 ஐ உற்பத்தியாகவும், A_0 இல் நிலைக்குத்தையும் கிடையையும் முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் எடுக்க.

A_1, A_2, முதலானவற்றின் y ஆள்கூறுகள் a, $2a$ . . . na ஆகும்.

A_1 இன் x ஆள்கூறு $= a$ தான் θ_1.

A_2 இன் x ஆள்கூறு $= a$ தான் $\theta_1 + a$ தான் $\theta_2 = 2a$ தான் $\theta_1 + a\frac{w}{H}$.

A_3 இன் x ஆள்கூறு, a தான் θ_3 ஐக் கூட்டிப் பெறப்படுகின்றது.

அதோடு, a தான் $\theta_3 = a$ தான் $\theta_1 + 2a\frac{w}{H}$.

A_4 இன் x ஆள்கூறு a தான் θ_4 ஐக் கூட்டிப் பெறப்படுகின்றது. அதோடு, a தான் $\theta_4 = a$ தான் $\theta_1 + 3a\frac{w}{H}$.

ஆகவே A_n இன் x ஆள்கூறு,

$$na \text{ தான் } \theta_1 + a\left\{1 + 2 + \ . \ . \ . \ + (n-1)\right\}\frac{w}{H}$$
$$= \frac{1}{2}na\frac{w}{H} + \frac{n-1}{2}na\frac{w}{H} = \frac{n^2a}{2}\cdot\frac{w}{H}.$$

எனவே A_n இன் ஆள்கூறுகள்

$$x = \frac{wa}{2H}n^2, \ \ y = na.$$

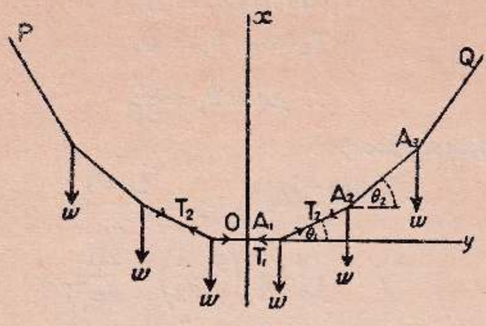
இவற்றிலிருந்து n ஐ நீக்க,

$$x = \frac{w}{2aH}y^2,$$

அல்லது $$y^2 = \frac{2aH}{w}x,$$

இது உச்சியை A_0 இற் கொண்டுள்ள ஒரு பரவளைவு. இதன் அச்சு நிலைக்குத்தானது.

இரட்டையெண்ணிக்கை நிறைகளுடன் இழையின் அடிப்பகுதி படம் 241 இற் போலக் கிடையானது.



படம் 241.

அடிப்பகுதியின் நடுப்புள்ளி O ஐ உற்பத்தியாகவும், O இல் நிலைக்குத் திலையும் கிடையையும் முறையே x, y அச்சுக்களாகவும் எடுக்க.

$A_1, A_2 \ . \ . \ . \ A_n$ இன் y ஆள்கூறுகள்.

$$\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, \ . \ . \ . \ \frac{2n-1}{2}a \text{ ஆகும்.}$$

A_2 இன் x ஆள்கூறு a தான் θ_1 ஆகும்.

A_3 இன் x ஆள்கூறு,

$$a \text{ தான் } \theta_1 + a \text{ தான் } \theta_2 = 2a \text{ தான் } \theta_1 + a\frac{w}{\mathrm{H}}.$$

A_4 இன் x ஆள்கூறு, a தான் θ_3 ஐக் கூட்டிப் பெறப்படுகின்றது.

அதோடு, $$a \text{ தான் } \theta_3 = a \text{ தான் } \theta_1 + 2a\frac{w}{\mathrm{H}}.$$

A_5 இன் x ஆள்கூறு, a தான் θ_4 ஐக் கூட்டிப் பெறப்படுகின்றது.

அதோடு, $$a \text{ தான் } \theta_4 = a \text{ தான் } \theta_1 + 3a\frac{w}{\mathrm{H}}.$$

எனவே A_n இன் x ஆள்கூறு

$$(n-1)a \text{ தான் } \theta_1 + \left\{1 + 2 + \ . \ . \ . (n-2)\right\} a\frac{w}{\mathrm{H}}$$

$$= (n-1)\, a \text{ தான் } \theta_1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} a\frac{w}{\mathrm{H}}.$$

இவ்விடத்து,
$$T_2 \text{ கோசை } \theta_1 = H,$$
$$T_2 \text{ சைன் } \theta_1 = w,$$
$$\therefore \text{ தான் } \theta_1 = \frac{w}{H},$$

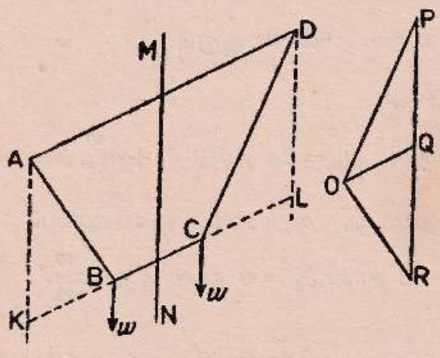
$\therefore A_n$ இன் ஆள்கூறுகள்,

$$x = \frac{n(n-1)}{2} a \frac{w}{H}; \quad y = \frac{2n-1}{2} a.$$

n ஐ நீக்க,
$$\left(\frac{y}{a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{a}-\frac{1}{2}\right) = \frac{2H}{aw}x,$$
$$\therefore y^2 = \frac{2aH}{w}x + \frac{a^2}{4},$$

இது நிலைக்குத்தான அச்சினையுடைய ஒரு பரவளைவு. இதன் உச்சியானது O இலிருந்து $\frac{wa}{8H}$ ஆழத்திலுள்ளது.

§177. சம கிடைத் தூரங்களிலிருக்கும் சம நிறைகளுக்கு இழைப் பல கோணியின் உச்சிகள் ஒரு பரவளைவாகுமென்ற உண்மைப்பொருளை வரைபுமூலமாகவும் உய்த்துணரலாம்.



படம் 242.

அடுத்துவரும் உச்சிகளை A, B, C, D, E, . . . (படம் 242) என்க. B, C ஆகியவற்றிலுள்ள நிறைகளுக்கான விசைப் பல்கோணியின் பகுதி PQR என்க. நிலைக்குத்துக் கோடு PR இலிருந்து முனைவு O இன் தூரம் அடுத்துவரும் நிறைகளுக்கிடையேயுள்ள கிடைத் தூரத்திற்குச் சமமாக எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பின்பு CD, BC, AB ஆகியவற்றிலுள்ள இழுவைகளை முறையே குறிக்கும் OP, OQ, OR ஆகிய கோடுகள் இழைப் பல்கோணியின் பக்கங்களுக்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவும் இருக்கும்.

AK, DL ஆகியன நீட்டப்பெற்ற BC ஐ முறையே K, L இற் சந்திக்குமாறு நிலைக்குத்தாக வரையப்படின், AKB ஆனது (OQR ஐப் போல). B இற்குரிய விசை முக்கோணியாகும். அதோடு AK, w ஐக் குறிக்கின்றது. அதே மாதிரியாக DL, w ஐக் குறிக்கின்றது. எனவே, AK, ஆனது DL இற்கு சமமாகவும் சமாந்தரமாகவுமுள்ளது. ஆகையால், AD, BC இற்குச் சமாந்தரமாகும்.

அன்றியும், A இற்கும் B இற்கும், B இற்கும் C இற்கும், C இற்கும் D இற்குமிடையேயான கிடைத் தூரங்கள் சமமாயிருப்பதனால், BC ஐ இரு கூறிடும் நிலைக்குத்துக் கோடு MN ஆனது AD ஐயும் இருகூறிடும். எனவே A, B, C, D ஆகியன ஒரு பரவளைவில் அமையும். இதன் அச்சு நிலைக்குத்தானது. MN இதனொரு விட்டம்.

இதே மாதிரியாக B, C, D, E ஆகியன ஒரு பரவளைவில் அமையும்.

ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடு,

$$y = a + bx + cx^2$$

என்னும் வடிவத்திலிருப்பதனால், அவ்வளையியிலுள்ள **மூன்று** புள்ளிகளானவை a, b, c ஐ அ-து, வளையியின் உருவையும் பருமனையும் காண்பதற்குப் போதுமானவை. அச்சின் திசை தெரிந்திருப்பினும் வளையியை முற்றாக நிர்ணயிக்கலாம்.

எனவே அடுத்துவரும் பரவளைவுகள் ABCD, BCDE, . . . ஒன்றுபட வேண்டும். அதோடு எல்லா அச்சுக்களும் ஒரு பரவளைவின் மீதிருக்கும்.

§178. தொங்கற் பாலங்கள்.

இப்பாலங்களில், கிடையான பாதைவழி பல நிலைக்குத்தான கந்துகளினால் ஒரு வடத்திலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும். வடத்தின் நுனிகள் விறைப்பான வளைவு தாங்கிகளின் உச்சிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டோ, இத்தாங்கிகளின் மேலாகச் சென்று மற்றைய பக்கத்தில் தரையுடன் இணைக்கப்பட்டோ இருக்கும்.

நிலைக்குத்தான கந்துகளிடையேயுள்ள வெளிகள் குடாக்கள் எனப்படும். இவை பொதுவாகச் சமமாயிருக்கும், அ-து. கந்துகள் சம வெளி உடையவையாக இருக்கும். அன்றியும் பாதைவழியின் சுமை சீராகப் பரம்பியிருக்கும்.

பின்பு பாதைவழி கந்துகளின்மீது செயற்படும் பல சம நிறைகளினாற் பதிலிடப்படுகிறதெனக் கருதலாம். அதோடு, வடத்தின் மீதுள்ள விளைவும் ஓர் இழையுடன் பல நிறைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கு மிடத்து ஏற்கெனவே ஆராயப்பட்ட விளைவுமொன்றாகும்.

இரட்டையெண்ணிக்கைக் கந்துகளில் வடத்தின் அடிப்பாகம் கிடையாகவிருக்குமென்பது சமச்சீர்ப்படி தெளிவாகின்றது. ஒற்றையெண்ணிக்கையில் வடத்தின் அடிப்புள்ளி நடுக் கந்திலிருக்கும்.

ஒருங்கே இணைக்கப்பட்டிருக்கும் இலேசான வளையங்களைக் கொண்டுள்ள ஒரு சங்கிலியை வடத்திற்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தலாம். கந்துகள் இணைப்புக்களுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும்.

உதாரணம்.

ஒரு தொங்கற் பாலம் 60 அடி அகல்வுள்ளது. இதன் பாதைவழியின் மொத்தப் பாரம் சீராகப் பரம்பியுள்ள 60 தொன். சம வெளியுள்ள ஐந்து நிலைக்குத்துக் கந்துகள் தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு சங்கிலியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு முனையிலுமுள்ள பாதைவழியின் 5 அடி கந்துகளிலல்லாமல் வளைவு தாங்கிகள் மீதுள்ளது.

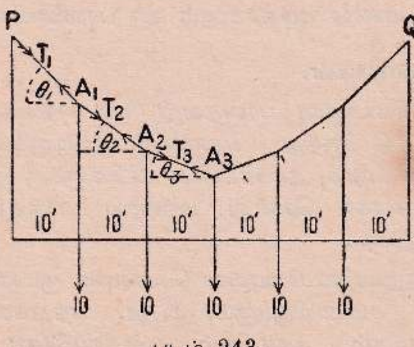
பாதைவழியின் முனையொவ்வொன்றின் மேலாகவும் 30 அடியில் கோபுரங்களிலிருக்கும் புள்ளிகளிலிருந்து சங்கிலி தொங்குகிறது. நடுக் கந்து 10 அடி நீளமானது. அச்சங்கிலியின் உருவையும் ஒவ்வொரு வளையத்திலுமுள்ள இழுவையையும் எவ்வாறு பெறலாமெனக் காட்டுக.

கந்துகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றையானதாகையால் நடுக் கோல் படம் 243 இற் போல சங்கிலியின் அடிப் புள்ளியிலிருக்கும்.

சாய்வுகளும் இழுவைகளும் காட்டப்பெற்றவாறுகும்.

அடுத்துவரும் A_1, A_2, A_3 ஆகிய புள்ளிகளுக்குக் கிடையாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ கோசை } \theta_1 = T_2 \text{ கோசை } \theta_2 = T_3 \text{ கோசை } \theta_3 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$



படம் 243.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ சைன் } \theta_1 - T_2 \text{ சைன் } \theta_2 = 10,$$
$$T_2 \text{ சைன் } \theta_2 - T_3 \text{ சைன் } \theta_3 = 10,$$
$$2T_3 \text{ சைன் } \theta_3 = 10 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$
$$\therefore T_2 \text{ சைன் } \theta_2 = 15, \text{ அதோடு } T_1 \text{ சைன் } \theta_1 = 25,$$
$$\therefore \frac{T_2 \text{ சைன் } \theta_2}{T_3 \text{ சைன் } \theta_3} = 3.$$

(i) ஐப் பயன்படுத்த,

கோதா θ_3 தான் $\theta_2 = 3$, அல்லது தான் $\theta_2 = 3$ தான் θ_3.

அதோடு $$\frac{T_2 \text{ சைன் } \theta_2}{T_1 \text{ சைன் } \theta_1} = \frac{3}{5},$$

$\therefore$ (i) ஐப் பயன்படுத்த,

கோதா θ_1 தான் $\theta_2 = \frac{3}{5}$, அல்லது தான் $\theta_1 = \frac{5}{3}$ தான் θ_2

$= 5$ தான் θ_3.

A_3, PQ இற்குக் கீழாக 20 அடி ஆழத்திலுள்ளது,

$\therefore$ 10 (தான் θ_1 + தான் θ_2 + தான் θ_3) = 20,

$\therefore$ 9 தான் $\theta_3 = 2$, அல்லது தான் $\theta_3 = \frac{2}{9}$.

எனவே தான் $\theta_1 = \frac{10}{9}$, தான் $\theta_2 = \frac{2}{3}$, தான் $\theta_3 = \frac{2}{9}$.

இப்பெறுமதிகளிலிருந்து சைன் θ_1, போன்றனவற்றைக் கணித்துச் சமன்பாடுகள் (ii) இலிருந்து இழுவைகளைப் பெறலாம், உ—ம். சைன் $\theta_3 = \frac{2}{\sqrt{85}}$,

$$\therefore T_3 = \frac{5\sqrt{85}}{2} \text{ தொன் நிறை.}$$

பயிற்சி XXXVII.

1. ABCD என்பது A, D என்னும் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான இழை. இதற்கு B இலும் C இலும் நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB நிலைக்குத்துடன் 30° சாய்ந்தும், BC நிலைக்குத்துடன் 60° சாய்ந்தும், CD கிடையாகவுமிருக்குமிடத்து, இந் நிறைகளின் விகிதத்தினை நிர்ணயிக்க.

2. ABCD என்பது A, D என்னும் இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் இலேசான இழை. இதற்கு B இலும் C இலும் இரு சம நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த இழை AB, CD ஆகிய பாகங்கள் நிலைக்குத்துடன் முறையே 30°, 60° சாய்ந்திருக்குமாறு தங்குகின்றது. பாகம் BC இலுள்ள இழுவை நிறையெதற்கும் சமமெனவும், BC, நிலைக்குத்துடன் 60° சாய்ந்துள்ளதெனவும் நிறுவுக.

3. ஒரு தொங்கற் பாலத்தின் கிடையான அடிப்பாதை அதன் வழியே சம இடைவெளிகளில் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் நிலைக்குத்தான சட்டங்களினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இச்சட்டங்களின் மேன்முனைகள் ஓர் இலேசான வடத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. நிலைக்குத்துச் சட்டங்களெல்லாவற்றிலுமுள்ள இழுவைகள் சமமானவை. வடத்துடனான இணைப்புப் புள்ளிகள் ஒரு பரவளைவிலிருக்கும் எனக் காட்டுக. (C S.)

4. $PA_1A_2 \ . \ . \ . \ A_{2n}Q$ ஒரு தொங்கற் பாலத்தின் சங்கிலி. நிலைக்குத்துச் சட்டங்கள் $A_1B_1, \ A_2B_2, \ . \ . \ . \ A_{2n}B_{2n}$ ஒவ்வொன்றும் வீதிவழியின் நிறையின் சம பகுதியைத் தாங்குகின்றது. P, Q ஆகியன வளைவுதாங்கிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. வீதிவழியின் முனைகள் B_0 உம் B_{2n+1} உம் முறையே P, Q இற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழேயுள்ளன. $B_0B_1, \ B_1B_2, \ . \ . \ . \ B_{2n}B_{2n+1}$ ஆகிய தூரங்கள் எல்லாம் சமமானவை. வீதிவழியின் நிறையுடன் ஒப்பிடுமிடத்துச் சங்கிலிகளினதும் சட்டங்களினதும் நிறைகள் தவிர்க்கத்தக்கவை. ஒரு விசைப் படமூலமாகவோ, வேறுவிதமாகவோ $P, \ A_1, \ A_2, \ . \ . \ . \ A_{2n}, \ Q$ ஆகிய புள்ளிகள் நிலைக்குத்தான அச்சினையுடைய ஒரு பரவளைவின் மீதிருக்குமெனக் காட்டுக. சட்டங்களினால் தாங்கப்படும் வீதிவழியின் மொத்த நிறை W உம், PQ இற்குக் கீழாக $A_n \ A_{n+1}$ (நடு வளையம்) இன் ஆழம் d உம், பாலத்தின் மொத்த அகல்வு l உமாயின், P அல்லது Q இல் சங்கிலியில் இழுவை,

$$\frac{W}{2}\sqrt{1+\frac{(n+1)^2l^2}{4\,(2n+1)^2d^2}}.$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

5. 70 அடி அகல்வுள்ள ஒரு தொங்கற் பாலத்தில் ஆறு நிலைக்குத்துக் கந்துக் கோல்களிருக்கின்றன. வீதிவழி கிடையானது. இதன்மீது ஒரு அடியோட்டத்துக்கு ஒரு தொன் வீதம் பாரமுள்ளது. முனைகளிலுள்ள கோபுரங்கள் ஒவ்வொன்றும் 20 அடி உயரமானது. சங்கிலி வீதிவழியின் மையத்தில் வீதியில் இறங்குகிறது. சங்கிலியின் நடு வளையத்திலுள்ள இழுவையைக் கண்டு, சங்கிலியின் உருவத்தினை எவ்வாறு நிர்ணயிக்கலாமென்பதைக் காட்டுக. வீதிவழியின் ஒவ்வொரு முனையிலும் கந்துக் கோல்களினாலல்லாது வளைவுத் தாங்கிகளினால் 5 தொன் தாங்கப்படுகிறதெனக் கொள்க. (I.C.)

6. 80 அடி அகல்வுள்ள தொங்கற் பாலமொன்றின் மருவுசுவர்களிலுள்ள கோபுரங்கள் முறையே 50 அடி, 10 அடி உயரமானவை. சங்கிலி சமவெளியுள்ள ஏழு நிலைக்குத்தான கந்துக் கோல்களைத் தாங்குகின்றது. பதிந்த கோபுரத்திற்கு ஒன்றை விட்டடுத்துள்ள குடாவிலுள்ள வளையம் கிடையானது. கிடையான வீதிவழியில் பாரம் சீராகப் பரம்பியுள்ள 80 தொன்னாகும். சங்கிலியினதும் கந்துக் கோல்களினதும் நிறையைத் தவிர்த்து, சங்கிலியின் வடிவினை எவ்வாறு நிர்ணயிக்கலாமெனக் காட்டுக. வீதிவழிக்கு மேலாக இடை வளையத்தின் உயரத்தினைக் கணிக்க. (I.E.)

7. ஓர் இழையின் A, E என்னும் நுனிகள் நிலைத்த தாங்கிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இதன் புள்ளிகள் B, C, D ஆகியவற்றில் முறையே 2, 4, 3 இரு. நிறைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இழையின் பாகங்கள் BC, CD ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் 25° கோணத்தை ஆக்கின், AB உம் DE உம் கிடையுடன் முறையே ஏறத்தாழ 43°, 49°23′ கோணங்களை ஆக்குகின்றனவென நிறுவுக. (Q.E.)

8. கிடையாகச் சமதூரத்திலிருக்கும் இரட்டையெண்ணிக்கை $2n$ ஆன W என்னும் சம நிறைகள் ஓர் இழையினால் தாங்கப்படுகின்றன. நிறைகள் தொங்கவிட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு பரவளைவின் மீதிருக்குமெனக் காட்டி, இழையின் நடுவிலும் நுனிப் பகுதிகளிலுமுள்ள இழுவைகளைக் கணிக்க. அடுத்துவரும் நிறைகளிடையேயான கிடைத் தூரம் a உம், ஆகக் கீழேயுள்ள தொங்கற் புள்ளிக்கு மேலாக அதியுயர் தொங்கற் புள்ளியின் உயரம் k உம் தரப்பட்டுள்ளன. (Ex.)

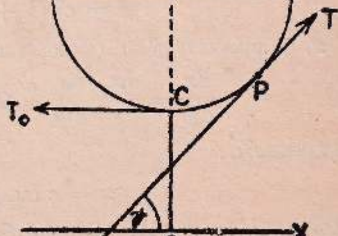
9. ஒரு தெருவின் எதிர்ப் பக்கங்களிலிருக்கும் கம்பங்களிற்கு நுனிகள் A இலும் F இலும் ஒரே மட்டத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் ஓர் இழையின் B, C, D, E என்னும் புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள இழைகளினால் $\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ள நான்கு விளக்குகள் 50 அடி அகலமான இத்தெருவின் குறுக்கே தொங்க விடப்படவேண்டியுள்ளன. விளக்குகளைத் தாங்கும் இழைகள் 10 அடி இடைத்தூரத்திலும், கரைகளிலுள்ள விளக்குகள் கம்பங்களிலிருந்து 10 அடியிலுமிருக்கவேண்டும்; CD கிடையாகக் கோடு AF இற்குக் கீழே 12 அடியில் இருக்கவேண்டும். AB, BC ஆகிய இழைகளின் நீளங்களையும் இழுவைகளையும் (1 சத வீதத்திற்குக்) காண்க. (C.W.B.)

§179. இனி, ஒரு பாரமான வளையத்தக்க சீர் நாண் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்படுமிடத்து ஏற்படும் வளையியின் வடிவத்தினை ஆராய்வோம். இதுகாறும் ஆராயப்பட்டனவற்றில் இணைக்கப்பெற்ற நிறைகள் மீதான வெளிப் புவியீர்ப்பு விசை சீராய்க் கிடையாகப் பரம்பியிருந்தது. அந்நிறைகள் அந்நாணின் உண்மையான துணிக்கைகளாக இருக்குமிடத்து இது மேற்கூறியவாறிராது என்பது தெளிவாகின்றது. நாணின் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை மாறிலியாகும். ஆனால், அடிப் புள்ளியில் தவிர வேறைய இடங்களில் நாண் கிடையாயிராது.

ஒரு பாரமான நாண் தொங்கும் வளையி **சங்கிலியம்** எனப்படும். இதன் சமன்பாடு பின்வரும் பந்தியிற் பெறப்படுகின்றது. இவ்விடத்து நாம் எண்ணற்ற பல துணிக்கைகளுடன் தொடர்புகொள்வதனால் நுண் கணிதமுறை நமக்குத் தேவைப்படுகின்றது.

§180. சங்கிலியம்.

ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பாரமான வளையத்தக்க சீர் நாணினை ACB (படம் 244) என்க. C, நாணின் அடிப் புள்ளி.



படம் 244.

CO ஐ நிலைக்குத்தாகவும் OX ஐக் கிடையாகவும் வரைக. OX ஐ x அச்சாகவும், OC ஐ y அச்சாகவும் எடுக்க. யாது

மொரு புள்ளி P இலுள்ள தொடலியானது OX உடன் ஆக்கும் கோணத்தை ψ என்க. நாணின் பாகம் CP இன் சமநிலையை எடுத்து நோக்குக. வில் CP இன் நீளம் s இற்குச் சமமாகவும், நாணின் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை w ஆகவுமிருப்பின், CP இன் நிறை ws ஆகும்.

CP மீது செயற்படும் மற்றைய விசைகள் C, P ஆகிய புள்ளிகளில் இவற்றிலுள்ள தொடலிகள் வழியேயான இழுவைகளாகும். அதோடு C இலுள்ள தொடலி கிடையானது.

C இலும் P இலுமுள்ள இழுவைகளை முறையே T_0, T என்க. கிடையாகத் துணிக்க,

$$\text{T கோசை } \psi = T_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

நிலைக்குத்தாத் துணிக்க,

$$\text{T சைன் } \psi = ws \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

$T_0 = wc$ என இட்டு, (ii) ஐ (i) ஆற் பிரிக்க,

$$\text{தான் } \psi = \frac{s}{c}, \quad \text{அல்லது } s = c \text{ தான் } \psi \;. \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

இங்கு c, யாதுமொரு மாறிலி.

இச் சமன்பாடு சங்கிலியத்தின் "உள்ளீட்டுச்" சமன்பாடு எனப்படும். இது அடிப் புள்ளியிலிருந்து வளையியின் மீதுள்ள யாதுமொரு புள்ளி வரையுள்ள அதன் வில் நீளத்திற்கும் பின்னைய புள்ளியிலுள்ள தொடலியின் சாய்விற்குமிடையேயான தொடர்பினைத் தருகின்றது.

இங்கு, $\quad \text{தான் } \psi = \dfrac{dy}{dx}, \quad \text{அதோடு சைன் } \psi = \dfrac{dy}{ds},$

$$\therefore \; \frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = \text{சைன் } \psi . \, c \text{ சீக}^2 \psi = c \text{ சீக } \psi \text{ தான் } \psi.$$

தொகையிட, $\quad y = c \text{ சீக } \psi + \text{மாறிலி}.$

$\psi = 0$ ஆக இருக்கும்போது $y = c$ ஆயின், இம்மாறிலி மறைகின்றது. அதோடு,

$$y = c \text{ சீக } \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

(iii) இலும் (iv) இலுமிருந்து

$$y^2 = c^2 (1 + \text{தான்}^2 \psi) = c^2 + s^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(v)}$$

x, ψ ஆகியவற்றின் இடையேயான தொடர்பைப் பெறுதற்கு,

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = \text{கோசை } \psi . \, c \text{ சீக}^2 \psi = c \text{ சீக } \psi.$$

தொகையிட,

$$x = c \text{ மட } (\text{சீக } \psi + \text{தான் } \psi) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(vi)}$$

இங்கு, $\psi = 0$ ஆக இருக்குமிடத்து $x = 0$ என்பதனால் தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சியமாகும்.

தெக்காட்டின் சமன்பாட்டினைப் பெறுவதற்கு நேர்வர்க்க மூலத்தினை எடுக்குமிடத்து,

$$\frac{dy}{dx} = \text{தான் } \psi = \frac{s}{c} = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}, \qquad \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{dx}{c},$$

$$\therefore \text{அகோசை}^{-1} \frac{y}{c} = \frac{x}{c} + \text{A}.$$

$x = o$, $\text{A} = o$ ஆக இருக்குமிடத்து $y = c$ என்பதனால்,

$$y = c \text{ அகோசை } \frac{x}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(vii)}$$

s இற்கும் x இற்கும் இடையேயும் ஒரு தொடர்பினைப் பெறலாம்,

$$\frac{ds}{dx} = \text{சீக } \psi = \sqrt{1 + \text{தான்}^2 \psi}$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 + s^2}}{c},$$

$$\therefore \frac{ds}{\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{dx}{c},$$

$$\therefore \text{அசைன்}^{-1} \frac{s}{c} = \frac{x}{c} + \text{B}.$$

$s = o$, $\text{B} = o$ ஆக இருக்குமிடத்து $x = o$ என்பதனால்,

$$s = c \text{ அசைன் } \frac{x}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(viii)}$$

(i) இலும் (ii) இலுமிருந்து,

$$\text{T கோசை } \psi = wc,$$

$$\text{T சைன் } \psi = ws,$$

இச்சமன்பாடுகளை வர்க்கித்துக் கூட்ட,

$$\text{T}^2 = w^2(c^2 + s^2) = w^2y^2,$$

$$\therefore \text{T} = wy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ix)}$$

மாறிலி c, வளையியின் பரமானம் எனப்படும்.

x அச்சானது அடிப் புள்ளி C இற்குக் கீழாக c ஆழத்தில் எடுக்கப்படுமிடத்து (நாம் எடுத்தது போல)ச் **செலுத்தலி** எனப்படும்.

சமன்பாடு (ix) இலிருந்து, யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள இழுவை சங்கிலியின் ஓரலகு நீளத்தின் நிறையினதும் செலுத்தலிக்கு மேலாக அப் புள்ளியின் உயரத்தினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமென்று தெரிகின்றது.

AB இற்குக் கீழாக அடிப் புள்ளி C இன் ஆழம் தொய்யல் ஆகும்.

$wc =$ கிடையிழுவை T_0 என்பதனுல், இழுவை பெரிதாக இருக்கும்போது, அ—து விளயி மிதப்பாகவும் நடுவில் தொய்யல் சிறிதாகவுமிருக்கும்போது, c இன் பெறுமதி அதிகமாகும்.

§181. c பெரிதாக இருக்குமிடத்து சங்கிலியத்தின் அண்ணளவான சமன்பாடுகள்.

$$y = c \text{ அகோசை } \frac{x}{c} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

இதை விரிக்க,

$$y = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \ . \ . \ . + 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \ . \ . \ .\right)$$
$$= \frac{c}{2}\left(2 + \frac{x^2}{c^2} + \ . \ . \ .\right) = c + \frac{x^2}{2c},$$

ஏனெனில் c பெரிதாயிருக்குமிடத்து $\frac{x^4}{c^3}$ ஐயும் உயரிய உறுப்புக்களையும் தவிர்க்கலாம்.

இவ்விடத்து விளயி ஏறத்தாழ செவ்வகலம் $2c$ உடைய ஒரு பரவளைவாகும்.

விளயி தட்டையாக இருக்கும்போது பாரம் கிட்டத்தட்டச் சீராகப் பரம்பியிருக்கும் என்பதனுல் இது எதிர்ப்பார்க்கப்பட்டிருக்கலாம்.

k, அகல்வின் அரைவாசியாயின், சங்கிலியின் அரைவாசியின் நீளம் பின்வரும் சமன்பாட்டினுல் ஏறத்தாழத் தரப்படுகின்றது.

$$s = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{k}{c} + \frac{k^2}{2c^2} + \frac{k^3}{6c^3} \ . \ . \ . -1 + \frac{k}{c} - \frac{k^2}{c^2} + \frac{k^3}{6c^3} \ . \ . \ .\right)$$
$$= \frac{c}{2}\left(\frac{2k}{c} + \frac{k^3}{3c^3}\right)$$
$$= k + \frac{k^3}{6c^2},$$

$$\therefore \ s - k = \frac{k^3}{6c^2}.$$

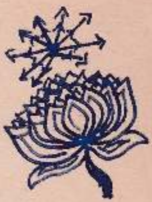
நடுவில் h தொய்யலாயின், $x = o$, $x = k$ ஆகியவற்றிற்கு y இன் பெறுமதியின் வித்தியாசம் h ஆகும்.

$x = 0$ இற்கு $y = c$ ஆகும். $x = k$ இற்கு, y ஏறத்தாழ $c + \frac{k^2}{2c}$ ஆகும்.

$$\therefore\ h = \frac{k^2}{2c},$$

$$\therefore\ \frac{1}{c^2} = \frac{4h^2}{k^4},$$

$$\therefore\ s - k = \frac{k^3}{6} \times \frac{4h^2}{k^4} = \frac{4h^2}{6k}.$$



அவ்வகல்வு $2k$ ஆகும். அதோடு,

$$2(s-k) = \frac{8}{3}.\frac{h^2}{2k},$$

$\therefore$ நீளத்திற்கும் அகல்விற்குமிடையேயான வித்தியாசம்

$$= \frac{8}{3}.\frac{(\text{தொய்யல்})^2}{\text{அகல்வு}}.$$

§182. உதாரணம் (i).

யாரொன்றிற்கு 0·15 இரு. நிறையுள்ளதும் 100 அடி கிடையகல்வில் 1 அடித் தொய்யலுடன் தொங்குவதுமான ஒரு கம்பியில் உச்ச இழுவை ஏறக்குறைய $62\frac{1}{2}$ இரு. எனக் காட்டுக.

சங்கிலியம் மிதப்பாக இருப்பதனுல், c பெரிதாகும். அதோடு ஏறத்தாழ,

$$y - c = \frac{x^2}{2c}.$$

உச்ச இழுவை உச்சியிலாகும். உச்சியில் $y - c = 1$, $x = 50$,

$$\therefore\ 1 = \frac{2500}{2c} \quad \text{அல்லது} \quad c = 1250,$$

$$\therefore\ y = 1251 \ \text{உச்சியில்}\ ;\ w = 0{\cdot}05 \ \text{இரு.} / \text{அடி},$$

$$\therefore\ T = wy = 0{\cdot}05 \times 1251,$$

$$= 62{\cdot}55 \ \text{இரு.}$$

உதாரணம் (ii).

$2a(1+k)$ நீளமான வளையத்தக்க சீர்ச் சங்கிலியொன்றின் நுனிகள் ஒரே மட்டத்தில் $2a$ தூரத்திலிருக்கும் இரு புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. k இன் இரண்டாம் வலுவிற்கு மேற்பட்டவை தவிர்க்கத்தக்கவாறு k மிகச் சிறியதாக இருப்பின், சங்கிலியின் தொய்யல்

$$\frac{a}{2}\sqrt{6k}\left(1 + \frac{7k}{20}\right)$$

என நிறுவுக. (H.C.)

ஏறத்தாழ,

$$s = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} + \frac{x^5}{120c^5} + \ldots \right.$$
$$\left. -1 + \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} - \frac{x^4}{24c^4} + \frac{x^5}{120c^5}\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{6c^2} + \frac{x^5}{120c^4},$$

$$\therefore\ a + ak = a + \frac{a^3}{6c^2} + \frac{a^5}{120c^4},$$

அல்லது
$$\frac{a^4}{120c^4} + \frac{a^2}{6c^2} - k = 0.$$

அதாவது
$$\frac{a^4}{c^4} + 20\frac{a^2}{c^2} - 120\ k = 0,$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{c^2} = \frac{-20 + \sqrt{400 + 480k}}{2} = -10 + 10\left(1 + \frac{6k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 6k - \frac{9k^2}{5},$$

$$\therefore\ \frac{a}{c} = \sqrt{6k}\left(1 - \frac{3k}{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6k}\left(1 - \frac{3k}{20}\right),\ \text{ஏறத்தாழ}.$$

அன்றியும்,
$$\frac{a^3}{c^3} = 6k\sqrt{6k},\ \text{ஏறத்தாழ}.$$

இப்போது,

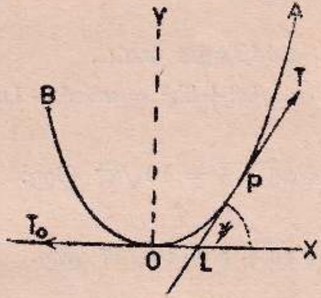
$$y = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} + \ldots + 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} \ldots\right)$$
$$= c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3}.$$

$x = 0$, $x = a$ ஆக இருக்கும்போது y இன் பெறுமதிகளுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் தொய்யலாகும்,

$$\therefore\ \text{தொய்யல்} = \frac{a^2}{2c} + \frac{a^4}{24c^3},$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{6k}\left(1 - \frac{3k}{20}\right) + \frac{a\sqrt{6k}\cdot 6k}{24},$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{6k}\left(1 - \frac{3k}{20} + \frac{k}{2}\right),$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{6k}\left(1 + \frac{7k}{20}\right).$$

உதாரணம் (iii).

A, B என்னும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு பாரமான சங்கிலியின் அடிப் புள்ளி O ஆகும். O ஊடான கிடை, நிலைக்குத் தச்சுக்களைச் சார்ந்து A, B, ஆகியவற்றின் ஆள்கூறுகள் (6,18) உம் (−4,8) உம் ஆகும். சங்கிலியின் மூலகம் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை அதன் கிடையெறியம் மாற மாறின், சங்கிலி தொங்கும் வளையி ஒரு பரவளைவென நிறுவுக. சங்கிலியின் மொத்த நிறை 100 இரு. ஆயின், முடிவு இழுவைகளையும் மிக்க குறைவான இழுவையையும் காண்க. (Ex.)



படம் 245.

$(x,\ y)$ என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய யாதுமொரு புள்ளி P வரை சங்கிலியின் பாகம் OP (படம் 245) யின் சமநிலையை எடுத்துநோக்குக. கிடையெறியத்தின் ஓரலகு நீளம் w நிறையுள்ளதாயின், OP இன் நிறை wx ஆகும்.

அதன்மீது செயற்படும் மற்றை விசைகள் O இலுள்ள கிடையிழுவை T_0 உம், P இல் தொடலி LP வழியே செயற்படும் இழுவை T உமாகும்.

$\angle PLX = \psi$ என்க.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க, T சைன் $\psi = wx$ . . . . (i)

கிடையாகத் துணிக்க, T கோசை $\psi = T_0$ . . . . (ii)

$$\therefore \text{ தான் } \psi = \frac{w}{T_0}x,$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\frac{w}{T_0}x^2 + c.$$

இதுவொரு பரவளைவு. இது உற்பத்தியூடாகச் செல்கையில், $c = 0$ ஆகும். பின்பு இதன் சமன்பாடு,

$$y = \frac{1}{2}\frac{w}{T_0}x^2 \text{ ஆகும்.}$$

இது (6, 18), (–4, 8) என்னும் புள்ளிகளூடாகச் செல்வதனுல்,

$$\frac{y}{x^2}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ w=T_0,$$

சங்கிலியின் மொத்த நிறை 100 இரு. ஆயின்,

$$10w=100,\ \text{அல்லது}\ w=10\ \text{இரு.}$$

$T_0 = w$ என்பதனுல், இதுவும் ஆகக்குறைந்த இழுவையின் பெறுமானமாகும்.

(i) ஐயும் (ii) ஐயும் வர்க்கித்துக் கூட்ட,

$$T^2=w^2x^2+T_0{}^2=w^2(x^2+1).$$

இதிலிருந்து A இல்,

$$T=10\sqrt{36+1}=10\sqrt{37}\ \text{இரு. நிறையெனவும்,}$$

B இல்,

$$T=10\sqrt{16+1}=10\sqrt{17}\ \text{இரு. நிறையெனவும்.}$$

பெறுகிறேம்.

பயிற்சி XXXVIII.

1. புவியீர்ப்பில் தொங்கும் ஒரு சீர்ச் சங்கிலியின் வளையிக்குச் சமன்பாடு $y = c$ அகோசை $\frac{x}{c}$ ஐப் பெறுக. இச்சங்கிலி ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் A, B, என்னும் இரு புள்ளிகளில் இருந்து தொங்க விடப்படுமிடத்து AB இற்குக் கீழாக நடுப்பகுதியின் ஆழம் $\frac{l}{n}$ ஆயின், கிடையகல்வு AB, $l\left(n-\frac{1}{n}\right)$ மட $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. இங்கு $2l$, சங்கிலி நீளம். n பெரிதாக இருக்குமிடத்து வில் AB இற்கும் அகல்வு AB இற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசத்தை அண்ணளவாகக் கணிக்க. (C.S.)

2. ஒரு நுனியில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு சீர்ச் சங்கிலியின் மற்றைய நுனி முரடான கப்பியொன்றின் மேலாகத் தொங்குகிறது. இக்கப்பியிற் செயற்படுத்தப்பெறும் உராய்வானது சங்கிலியால் உருவாக்கப்படும் சங்கிலியத்தின் செலுத்தலிக்கும் தொய்ந்த நுனிக்கும் இடையேயுள்ள சங்கிலிநீளத்தின் நிறையென நிறுவுக. (C.S.)

3. இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச் சங்கிலி தொங்கும் வளையியின் உள்ளீட்டு, தெக்காட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. l நீளமுள்ள முரடான சீர்ச் சங்கிலியொன்றின் ஒரு

நுனி தரைக்கு மேலாக நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றில் h உயரத்தில் ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. மட்டமான தரைமீது சங்கிலி யின் சுயாதீன நுனி தங்கும் சுவரிலிருந்துள்ள மிக்க அதிகமான தூரம்,

$$u\left\{1+\mu \text{ மட}\left(\frac{h+l}{\mu u}+1-\frac{1}{\mu}\right)\right\}$$

என்னும் கோவையினால் தரப்படுகிறதெனக் காட்டுக. இங்கு,

$u = l+\mu h-\left\{(\mu^2+1)\,h^2+2\mu lh\right\}^{\frac{1}{2}}$; μ, உராய்வுக் குணகம். (C.S.)

4. புவியீர்ப்பில் தங்கியிருக்கும் சீர்ச் சங்கிலியொன்றினிடத்து, யாது மொரு புள்ளியிலுள்ள இழுவை குறித்த ஒரு மட்டத்திற்கு மேலான உயரத்திற்கு விகிதசமமெனக் காட்டுக. ஒரு l நீளச் சீர்ச் சங்கிலி யின் நுனி வளையம் ஒப்பமான நிலைக்குத்துக் கம்பியொன்றின்மீது சுயாதீனமாய் வழுகிச் செல்லக் கூடியது. இச்சங்கிலி கம்பியிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள ஓர் ஒப்பமான முளை மேலாகச் செல்கின்றது. மற்றைய நுனி சங்கிலியினது a நீளத்தின் நிறையின் n மடங்கிற்குச் சமமான ஒரு நிறையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலை சாத்தியமாகவேண்டின், $n+\dfrac{l}{a}$, e (மடக்கையடி) இலும் குறைவாக இருக்கலாகாதெனக் காட்டுக. (C.S.)

5. பூரணமாக வளையத்தக்க ஒரு சீரற்ற இழை (அதன் நுனிகள் நிலைப் படுத்தப்பட்டு) ஒரு வட்டத்தின் வில் வடிவில் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது. அவ்வட்டத்தின் மையம் O உம், அடிப் புள்ளி A உம், யாதுமொரு புள்ளி P இலுள்ள தொடலியானது நிலைக் குத்து OA ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி T உமாயின், (i) இழையின் பாகம் AP இன் நிறையானது TP மாற மாறுகிறதெனவும், (ii) P இலுள்ள இழு வையானது TO மாற மாறுகிறதெனவும், (iii) P இல் இழையின் ஓரலகு நீளத்தின் நிறை TO^2 மாற மாறுகிறதெனவும் காட்டுக. (Ex.)

6. ஒரே கிடையிலிருக்கும் இரு புள்ளிகளிலிருந்து 30 அடி நீளமான ஒரு சங்கிலி தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. நடுவில் தொய்யல் 10 அடி. மட$_e 5 = 1{\cdot}6094$ ஆயின், அகல்வு $20{\cdot}12$ அடியெனவும் தாங்குப் புள்ளிகளில் இழுவை சங்கிலியின் $16{\cdot}25$ அடியின் நிறையெனவும் காட்டுக. (H.C.)

7. ஒரு $64a$ நீளச் சீரிழை ஒரே மட்டத்திலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகள் மேலாகச் சமச்சீராகத் தங்கியிருக்கின்றது. இம்முளைகளி னிடையே இழையின் வளைவான பாகத்தின் அடிப் புள்ளி முளைகளின் மட்டத் திற்குக் கீழாக a ஆழத்திலுள்ளது. முறையே நிலைக்குத்தாகவும் சங் கிலிய வடிவிலும் தொங்கும் அவ்விழையின் பாகங்களின் நீளங்களையும் முளைகளின் இடைத்தூரத்தையும் காண்க. முளையெதன் மீதுமுள்ள அமுக்கம் இழையின் $40a$ நீளத்தின் நிறைக்குச் சமமென்றும் நிறு வுக. (H.C.)

8. மாறும் அடர்த்தியுள்ள ஒரு பாரமான வளையத்தக்க நாண் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலில்லாத இருபுள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. தொடலிகள் கிடையுடன் $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$ என்னும் சாய்வுகளைக் கொண்டிருக்கும் A, B, C, என்னும் புள்ளிகளில் இழுவைகள் முறையே T_1, T_2, T_3 ஆகவும் நாணின் AB, BC என்னும் பாகங்களின் நிறைகள் முறையே w_1, w_2 ஆகவும் இருப்பின்,

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_3} = \frac{2 \text{ கோசை } \beta}{T_2}\,;\ T_1 : T_3 = w_1 : w_2$$

என நிறுவுக. (H.S.D.)

அதிகாரம் IX.

மாய வேலை — பலவின உதாரணங்கள்.

§**183.** அதிகாரம் VI இல் மாயவேலைக் கோட்பாட்டைத் துணிக்கையொன்றின்மீது செயற்படும் விசைகளுக்கு நிறுவினோம். இனி இக் கோட்பாட்டை மேலும் முழுமையாக ஆராய்ந்து இது ஒருதள விசைத் தொகுதியெதற்கும் பொருந்துமெனக் காட்டுவோம். பொது மாயவேலைக் கோட்பாடு பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கப்படலாம்.

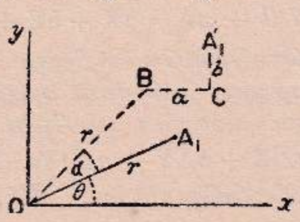
தொடர்பியக்கத்திற்கு இடங்கொடுக்குமாறு அல்லது அதைத் தவிர்க்குமாறு எப்படியாவது ஒருங்கே இணைக்கப்பட்டிருக்கும் பொருட்களின் தொகுதி அல்லது பொருளொன்றின் A_1, A_2, முதலிய புள்ளிகளிலே தாக்கும் P_1, P_2, முதலிய விசைகளின் தொகுதி சமநிலையிலிருக்குமிடத்து, பின்பு இத்தொகுதி இதன் கேத்திரகணிதத் தொடர்புகளுக்கு இசைவாக எவ்வாறுகச் சிறிது பெயர்க்கப்படினும், மாய வேலைகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

இது என்னவெனின், A_1, A_2, முதலிய புள்ளிகள் A'_1, A'_2, முதலியவற்றிற்குச் செல்வதோடு P_1, P_2, முதலியனவற்றின் திசைகள்மீது $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, முதலிய பெயர்ச்சிகளின் எறியங்கள் dp_1, dp_2, முதலியனவாயின், பின்பு

$$P_1dp_1 + P_2dp_2 \ . \ . \ . = 0.$$

மறுதலையாக $\Sigma P.\, dp$ பூச்சியமாயின், இத்தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்.

§**184. சமநிலையிலிருக்கும் ஒருதள விசைத் தொகுதியொன்றின் மாய வேலைகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.**



படம் **246.**

விசைகளின் தளத்தில் Ox, Oy (படம் 246) என்னும் எவ்விரு செங்கோண அச்சுக்களையும் எடுக்க. விசைகள் தாக்கும் பொருள் சிறிது பெயர்க்கப் படுவதாகக் கொள்க.

இப்பொருளை ஒரு தகுந்த சிறிய கோணம் α (ஆரையன்) ஊடாக O பற்றித் திருப்பியும் பின்பு முறையே Ox, Oy ஆகியவற்றிற்குச்

சமாந்தரமாகத் தகுந்த தூரங்கள் a, b என்பனவற்றினூடாக அதை அசைத்தும் மேற்கூறப்பெற்றவாறு செய்யலாமென்பது தெளிவு.

அவ்விசைகளிற் P என்னுமொன்றினது பிரயோகப் புள்ளியின் தொடக்கத் தானத்தை A_1 என்க. A_1 இனது தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளை (x, y) எனவும் முனைவாள்கூறுகளை (r, θ) எனவும் கொள்க. பின்பு $OA_1 = r$, $xOA_1 = \theta$.

O பற்றிக் கோணம் α ஊடாக, B இல் A_1 அமையுமாறு மேற்கூறப்பெற்ற முறையிற் சுழற்றி, ஏற்படும் பெயர்ச்சியின்பின் A இன் தானத்தை A'_1 என்க. எனின், Ox இற்குச் சமாந்தரமாக a என்னும் தூரத்தினூடான ஒரு பெயர்ச்சி அதனை C இற்கும், இறுதியாக Oy இற்குச் சமாந்தரமான b என்னும் பெயர்ச்சி அதனை A'_1 இற்கும் கொண்டுவரும்.

A'_1 இனது தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகள்

$$r \text{ கோசை } (\theta + \alpha) + a \text{ உம்}, \; r \text{ சைன் } (\theta + \alpha) + b \text{ உம்},$$

அல்லது r கோசை $\theta - \alpha . r$ சைன்$\theta + a$ உம் r சைன்$\theta + \alpha . r$ கோசை$\theta + b$ உம் ஆகுமென்பது தெளிவு. இக்கூறுகள் சிறிய கோணம் α இன் முதல் வலுவையே கொண்டிருக்கும்.

ஆகவே அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாக A_1 இன் பெயர்ச்சிகள்,

$$a - \alpha . r \text{ சைன் } \theta, \; b + \alpha . r \text{ கோசை } \theta,$$

அல்லது
$$a - \alpha y, \; b + \alpha x$$

என்பனவாகும்.

எனவே, அவ்வச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாக P இன் கூறுகள் முறையே X, Y ஆயின், P இன் கூறுகளின் மாய வேலைக்குச் சமமான அதன் மாய வேலை,

$$X (a - \alpha y) + Y (b + \alpha x) = aX + bY + \alpha (Yx - Xy).$$

அத்தொகுதியின் விசையொவ்வொன்றிற்கும் a, b, α ஆகியன ஒரேயளவினதாக இருப்பதனால், இக்கோவை அவ்விசைகள் எதெனினதும் மாயவேலையைக் குறிக்கும். அவற்றின் மாயவேலைகளின் கூட்டுத்தொகை

$$= a\Sigma X + b\Sigma Y + \alpha \Sigma (Yx - Xy).$$

ஆனால், விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதனால், ΣX, ΣY ஆகியன தனித் தனியாகப் பூச்சியமாகும்.

அன்றியும், $\Sigma (Yx - Xy)$ அவ்விசைகளினது O பற்றிய திருப்பு திறன்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம். ஆகவே இது பூச்சியம்.

எனவே விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் மாய வேலைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம்.

கண்டிப்பாகக் கூறுமிடத்து, இக்கூட்டுத்தொகை பூச்சியமன்று ஆனால், இரண்டாம் வரிசையிலுள்ள ஒரு சிறிய கணியமெனக் கூறவேண்டும்.

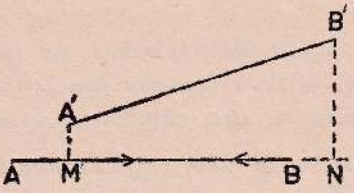
§185. மாய வேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துமிடத்துத் தவிர்க்கப் படக்கூடிய விசைகள்.

ஒரு பொருள் தானுக தானாக இயங்காது, குறித்த சில விகாரப்படைகளினுல் இயக்கப்பட்டு அல்லது மற்றைய விறைப்பான பொருட்களின் தாக்கத்திற்குட் பட்டு இயங்குமிடத்து, மாய வேலைச் சமன்பாட்டினை எழுதும்போது எத் தாக்கங்களும் மறுதாக்கங்களும் தவிர்க்கப்படக்கூடியவை என்பதை அறிதல் முக்கியமாகும்.

பின்வருவன சாதாரணமாகத் தோன்றுவன :

(i) இத்தொகுதி உட்படுவதென நாம் கருதும் பெயர்ச்சி ஒரு நீளா இழை நீளத்தின் ஒரு மாற்றத்துடன் சம்பந்தப்படாதிருக்குமிடத்து இவ் விழையின் இழுவை.

ஏனெனில், இழுவை T ஐ உடைய அத்தகைய இழையொன்றை AB (படம் 247) என்க. இழையின் பெயர்ந்த தானத்தை A'B' என்க. A'M, B'N ஆகியவற்றை AB இற்குச் செங்குத்தாக வரைக.



படம் 247.

AB உடன் A'B' ஆக்கும் கோணம் மிகச் சிறியதாகையால், முதல் வரிசைக்கு $A'B' = MN$.

எனவே $AB = A'B'$ என்பதனுல், $AM = BN$ ஆகும்.

T இன் மாய வேலை,

$$T.\ AM + T\ (-BN) = 0.$$

(ii) பொருள் தொடும் யாதுமொரு ஒப்பமான பரப்பின் மறுதாக்கம் R.

ஏனெனில், அப்பரப்பு ஒப்பமாக இருப்பதனுல் R மீதான மறுதாக்கம் தொடுகைப் புள்ளியில் பரப்புக்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும். ஆகவே அது இப்புள்ளியின் பெயர்ச்சிக்குச் செங்குத்தாகும். எனவே R இன் மாயவேலை பூச்சியம். இது ஒப்பமான பிணையலொன்றின் மறுதாக்கத்தினையும் உட் படுத்துகிறது.

(iii) பொருள் வழுவாது உருளும் நிலைத்த பரப்பொன்றில் யாதுமொரு தொடுகைப் புள்ளியிலுள்ள மறுதாக்கம்.

ஏனெனில், தொடுகைப் புள்ளி கணநேரத்தில் ஓய்வுநிலையிலுள்ளது. எனவே, இப்புள்ளியில் செவ்வன் மறுதாக்கமும் உராய்வும் பூச்சியப் பெயர்ச்சியுடையவையாய் இருக்கும்.

(iv) எடுத்துநோக்கப்பெற்ற தொகுதியின் எவ்விரு பொருள்களுக்கு மிடையே மறுதாக்கங்கள்.

இரு பொருள்களுக்கிடையேயான தாக்கமும் மறுதாக்கமும் ஒன்றுக் கொன்று சமமாகவும் முரணுகவும் இருப்பதனலாகும். எனவே மாய வேலைச் சமன்பாட்டினை எழுதுமிடத்து இரு பொருட்களையும் எடுத்து நோக்குவோமாயின் சம, முரண் மறுதாக்கங்களின் மாய வேலைகள் ஒன்றையொன்று நீக்கும்.

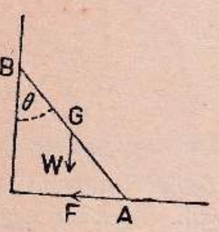
எனினும், இரு பொருட்களினதும் தொடுகைப் புள்ளி இயங்குவதாகவும் பொருட்கள் முரடானவையாகவுமிருக்கும் சந்தர்ப்பத்திற்கு இது பொருந்துவதில்லை. உ-ம் ஒரு முரடான பிணையல்.

§186. மாய வேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தும் முறை பின்வரும் உதாரணங்களில் எடுத்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

உதாரணம் (i).

ஒரு சீரான ஏணி அதன் மேன்முனையை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற் பொருந்தியும், அடியை முரடான கிடைத் தரையிற் பொருந்தியும் தங்கியுள்ளது. தரையில் உராய்வு விசையைக் காணல்.

இவ்வேணியை AB (படம் 248) குறிப்பதாகக் கொள்க. l, அதன் நீளமெனவும், θ நிலைக்குத்துடன் அதன் சாய்வெனவும், G அதன் புவியீர்ப்பு மையமெனவும், W அதன் நிறையெனவும், F தரையிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறெனவும் கொள்க.



படம் 248.

தரைக்கு மேலாக G இன் உயரம் $\frac{l}{2}$ கோசை θ உம் சுவரடியிலிருந்து A இன் தூரம் l சைன் θ உம் ஆகும்.

ஏணி சுவரையும் தரையையும் தொடுமாறும் G இறங்குமாறும் அது சிறிது பெயர்க்கப்படுவதாகக் கொள்க. A இலும் B இலும் உள்ள மறுதாக்கங்கள் வேலையேதும் செய்வதில்லை. அதோடு மாய வேலைச் சமன்பாடு பின்வருமாறு சுருங்குகிறது.

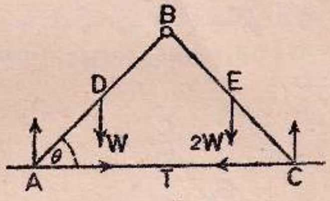
$$Wd\left(\frac{l}{2}\text{ கோசை }\theta\right) + Fd\,(l\text{ சைன் }\theta) = o,$$

$$\therefore\ -\frac{Wl}{2}\text{ சைன் }\theta\,d\theta + Fl\text{ கோசை }\theta\,d\theta = o,$$

$$\therefore\ F = \frac{W}{2}\text{ தான் }\theta.$$

உதாரணம் (ii).

முறையே W, 2W நிறையுள்ள AB, BC என்னும் இரு சமநீளக் கோல்கள் B இல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. முனைகள் A உம் C உம் ஒப்பமான கிடைத் தளமொன்றின்மீது பொருந்துமாறும், ஒன்று மற்றதுடன் 90° இற் சாய்ந்திருக்குமாறும் அவை நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. முனைகள் A ஐயும் C ஐயும் ஒரு நீளா இழை இணைக்கின்றது. இவ்விழையில் இழுவையைக் காண்க.



படம் 249.

D, E (படம் 249) என்பன அக்கோல்களின் நடுப் புள்ளிகளெனவும், l ஒவ்வொன்றினதும் நீளமெனவும், T இழையிலுள்ள இழுவையெனவும் கொள்க.

AC இன் நீளம் சிறிது கூடுமாறு இத்தொகுதி சிறிது பெயர்க்கப்படுவதாகக் கொள்க.

A, C ஆகியவற்றிலுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கங்களும், பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கங்களும் வேலையேதும் செய்வதில்லை.

$\angle BAC = \theta$ ஆயின், AC இற்கு மேலாக D இனதும் E இனதும் உயரம் $\frac{l}{2}$ சைன் θ உம், AC இன் நீளம் $2l$ கோசை θ உம் ஆகும்.

ஆகவே மாய வேலைச் சமன்பாடு,

$$-3Wd\left(\frac{l}{2}\text{ சைன் }\theta\right) + Td\,(2\,l\text{ கோசை }\theta) = o,$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}\,Wl\text{ கோசை }\theta\,d\theta - 2Tl\text{ சைன் }\theta\,d\theta = o,$$

$$\therefore\ T = \frac{3}{4}\,W\text{ கோதா }\theta.$$

ஆனால், சமநிலைத் தானத்தில் $\theta = 45°$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

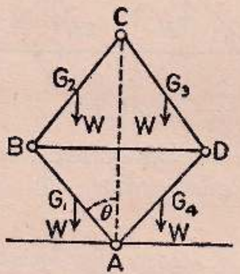
$$\therefore\ T = \frac{3}{4}\,W.$$

குறிப்பு.—இழைகளின் எல்லா நீளங்களும் நிறைகளின் உயரங்களும் **ஒரு மாறியில் மட்டும் எடுத்துரைக்கப்படவேண்டும்** என்பது முக்கியமாக ஞாபகத்தில் வைக்கத்தக்கது.

அன்றியும் உயரங்கள் ஒரு **நிலைத்த மட்டம்,** அ–து, அத்தொகுதி உட்படுவதாக நாம் பாவனை செய்யும் பெயர்ச்சியுடன் மாருதிருக்கும் ஒரு மட்டத்திலிருந்து அளக்கப்படவேண்டும்.

உதாரணம் (iii).

ஒரு சாய்சதுரம் ABCD வடிவில் ஒப்பமாக மூட்டியிருக்கும் நான்கு சீர்ச் சமக் கோல்கள் AC நிலைக்குத்தாகவும் A கிடைத் தளமொன்றின்மீது தங்குமாறும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. B ஐயும் D ஐயும் இணைக்கும் ஓர் இலேசான இழையினுல், கோணம் BAC ஐ θ இற்குச் சமமாகக் கொண்டு சாய்சதுர வடிவு பேணப்படுகின்றது. இழையில் இழுவையைக் காண்க.



படம் 250.

G_1, G_2, G_3, G_4 (படம் 250) என்பன கோல்களின் நடுப் புள்ளிகளெனவும், W ஒவ்வொரு கோலினதும் நிறையெனவும், $2l$ ஒவ்வொன்றினதும் நீளமெனவும், T இழையிலுள்ள இழுவை எனவும் கொள்க.

A இற்கு மேலாக G_1 அல்லது G_4 இன் உயரம் l கோசை θ உம், A இற்கு மேலாக G_2 அல்லது G_3 இன் உயரம் $3l$ கோசை θ உம் ஆகும்.

BD இன் நீளம் $= 4l$ சைன் θ.

θ, $d\theta$ இனற் கூடுமாறும், C, நிலைக்குத்துத் திசை CA இல் இறங்குமாறும் சாய்சதுரம் பெயர்க்கப்படுவதாகக் கொள்க.

G_1 இலும் G_4 இலுமுள்ள நிறைகள் செய்யும் வேலை $= -2\mathrm{W}d(l\text{ கோசை}\,\theta)$,
G_2 இலும் G_3 ,, ,, ,, ,, $= -2\mathrm{W}d(3l\text{கோசை}\,\theta)$,
இழுவை ,, ,, $= -\mathrm{T}d(\,4l\text{ சைன் }\theta\,)$,

பிணையல்களிலும் A இலுமுள்ள மறுதாக்கங்கள் செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\ -2\ \mathrm{W}d\ (l\text{ கோசை }\theta) - 2\mathrm{W}d\ \ (3l\text{ கோசை }\theta) - \mathrm{T}d\ (4l\text{ சைன் }\theta) = 0,$$

$$\therefore\ +2\mathrm{W}l\text{ சைன் }\theta d\theta + 6\mathrm{W}l\text{ சைன் }\theta\, d\,\theta - 4\mathrm{T}l\text{ கோசை }\theta\, d\,\theta = 0,$$

$$\therefore\ 4\mathrm{T}\text{ கோசை }\theta = 8\mathrm{W}\text{ சைன் }\theta,$$

$$\therefore\ \mathrm{T} = 2\mathrm{W}\text{ தான் }\theta.$$

பயிற்சி XIII இலுள்ள பல பிரசினங்கள் மாய வேலை முறையினால் மிக எளிதாகத் தீர்க்கப்படலாம்.

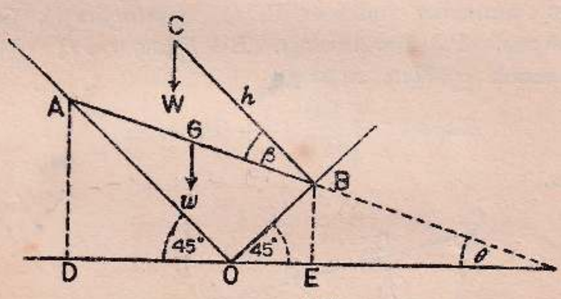
மேலுள்ள உதாரணங்கள் (ii) இலும் (iii) இலும்போல், மூட்டப்பெற்ற சட்டப்படலொன்றின் வடிவைப் பேணும் ஓர் இலேசான இழை அல்லது கோலிலுள்ள இழுவையோ உதைப்போ நமக்குத் தேவைப்படும் இடங்களில் இம்முறை சிறப்பாகப் பயன்படுகிறது.

உதாரணம் (iv).

கிடையுடன் 45° இற் சாய்ந்துள்ளனவும் அவற்றின் ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோட்டைக் கிடையாகக் கொண்டுள்ளனவுமான இரு ஒப்பமான தளங்களின்மீது w நிறையும் $2l$ நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோலின் நுனிகள் தங்கியிருக்கின்றன. கோணம் ABC, β ஆகவும், BC, AB இற்கு மேலாகவும் அமையுமாறு h நீள இலேசான கோல் BC ஆனது B இல் நிலைப்பட்டுள்ளது. C இல் W நிறையொன்று இணைக்கப்படுகின்றது. அதோடு சட்டப்படல் ABC ஒப்பமான தளங்கள் இரண்டிற்கும் செங்குத்தான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் எப்பொழுதும் தங்குகின்றது. AB கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருப்பின், சமநிலைத் தானத்தில்,

$$\text{தான் } \theta = \frac{\mathrm{W}\ (h \text{ கோசை } \beta - l)}{wl + \mathrm{W}l + \mathrm{W}h \text{ சைன் } \beta}$$

எனக் காட்டுக.



படம் 251.

தளங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியை O (படம் 251) என்க. AB இன் மையத்தை G எனவும், கிடைத்தளமீதுள்ள செங்குத்துக்களை AD, BE எனவும் கொள்க.

$$\mathrm{AD} = \mathrm{DO}. \quad \text{அதோடு } \mathrm{BE} = \mathrm{OE},$$

$$\mathrm{AD} + \mathrm{BE} = \mathrm{DE} = \mathrm{AB} \text{ கோசை } \theta.$$

எனவே OE இற்கு மேலாக G இன் உயரம் $= \frac{1}{2}$ AB கோசை $\theta = l$ கோசை θ.

OE இற்கு மேலாக B இன் உயரம்,

$$\frac{OB}{\sqrt{2}} = \frac{2l \text{ சைன் } (45 - \theta)}{\sqrt{2}} = l \text{ (கோசை } \theta - \text{சைன் } \theta),$$

அதோடு B இற்கு மேலாக C இன் உயரம் $= h$ சைன் $(\beta + \theta)$.

$\therefore$ O இற்கு மேலாக C இன் உயரம் $= l$ கோசை $\theta - l$ சைன் $\theta +$ h சைன் $(\beta + \theta)$.

ஒரு சிறிய பெயர்ச்சி $d\theta$ இடத்து,

w செய்யும் வேலை $= -wl$ சைன் $\theta\, d\theta$,

W செய்யும் வேலை $= -$ Wl சைன் $\theta\, d\theta -$ Wl கோசை $\theta\, d\theta +$ Wh கோசை $(\beta + \theta)\, d\theta$.

$\therefore -wl$ சைன் $\theta -$ Wl சைன் $\theta -$ Wl கோசை $\theta +$ Wh கோசை β கோசை θ $-$ Wh சைன் β சைன் $\theta = o$.

$\therefore wl$ தான் $\theta +$ Wl தான் $\theta +$ Wh சைன் β தான் $\theta =$ W(h கோசை $\beta - l$),

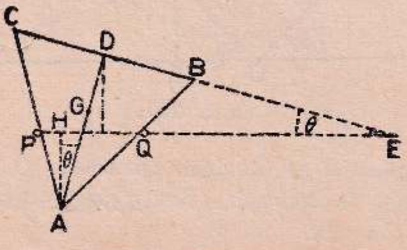
$$\therefore \text{தான் } \theta = \frac{W(h \text{ கோசை } \beta - l)}{wl + Wl + Wh \text{ சைன் } \beta}.$$

உதாரணம் (v).

ஒரு சீரான இருசமபக்க முக்கோணி ABC அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும் அதன் AB, AC என்னும் இரு சம பக்கங்கள் இரு நிலைத்த ஒப்பமான முளைகள் P, Q ஆகியவற்றைத் தொடுமாறும் தங்கியிருக்கின்றது. PQ கிடையானது. BC இற்கும் PQ இற்கும் இடையேயான கோணம் பூச்சியம் அல்லது

$$\text{கோசை}^{-1}\left[\frac{BC}{6PQ}(1 + \text{கோசை } A)\right]$$

என நிறுவுக.



படம் 252.

நீட்டப்பெற்ற CB (படம் 252) கிடை PQ ஐ E இற் சந்திப்பதாகவும், BEQ $= \theta$ எனவும் கொள்க.

இம்முக்கோணி சிறிது பெயர்க்கப்படுமிடத்து, P இலும் Q இலுமுள்ள மூளைகள் ஒப்பமானவையாகையால் அதன் நிறையினுல் மட்டுமே வேலை செய்யப்படுகின்றது.

ஆகவே நாம் PQ இற்கு மேலாகப் புவியீர்ப்பு மையம் G இன் உயரத்தைக் கண்டு, அதன் வகையீட்டினைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துகிறோம்.

A இலிருந்து PQ இற்குரிய செங்குத்து AH ஆயின்,

$$AH = AQ \text{ சைன் } AQH = AQ \text{ சைன் } (B - \theta).$$

அன்றியும்
$$\frac{AQ}{\text{சைன் } APQ} = \frac{PQ}{\text{சைன் } A},$$

அல்லது
$$AQ = \frac{PQ}{\text{சைன் } A} \text{ சைன் } (B + \theta),$$

$$\therefore AH = \frac{PQ}{\text{சைன் } A} \text{ சைன் } (B + \theta) \text{ சைன் } (B - \theta),$$

$$= \frac{PQ}{2 \text{ சைன் } A} (\text{கோசை } 2\theta - \text{கோசை } 2B).$$

A இற்கு மேலாக G இன் உயரம் $\frac{2}{3}$ AD கோசை θ ஆகவே PQ இற்கு மேலாக G இன் உயரம்

$$\frac{2}{3} AD \text{ கோசை } \theta - \frac{PQ}{2 \text{ சைன் } A} (\text{கோசை } 2\theta - \text{கோசை } 2B), \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \; AD \text{ சைன் } \theta \, d\theta + \frac{PQ}{\text{சைன் } A} \text{ சைன் } \; 2\theta \, d\theta = o,$$

$$\therefore \frac{PQ}{\text{சைன் } A} \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC}{2} \text{ கோதா } \frac{A}{2} \text{ சைன் } \theta.$$

எனவே சைன் $\theta = 0$, ஆகவே $\theta = 0$, அல்லது,

$$\text{கோசை } \theta = \frac{BC}{6PQ} \text{ சைன் } A \text{ கோதா } \frac{A}{2},$$

$$= \frac{BC}{6PQ} \cdot 2 \text{ கோசை}^2 \frac{A}{2},$$

$$= \frac{BC}{6PQ} (1 + \text{கோசை } A).$$

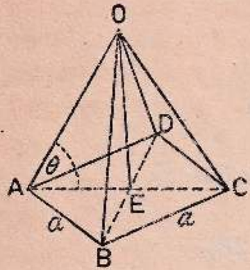
உதாரணம் (vi).

ஒவ்வொன்றும் w நிறையுள்ள நான்கு சீர்ச் சமக் கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு நுனியில் ஒப்பமான மூட்டினுல் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஒப்பமான மேசையொன்றின்மீது தங்கும் மற்றைய நுனி

கள் சம இழைகளினால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. மூட்டிலிருந்து W நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழைகளில் இழுவை

$$\left(\frac{W+2w}{4}\right)\frac{a}{\sqrt{4l^2-2a^2}}$$

எனக் காட்டுக இங்கு l, ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளம் ; a, ஒவ்வோர் இழையினதும் நீளம். (C.S.)



படம் 253.

OA, OB, OC, OD (படம் 253) என்பன கோல்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்க.

ABCD ஒரு சதுரமாகும். E அதன் மையமாயின், OE நிலைக்குத்தாகும்.

$\angle OAE = \theta$ எனின், $AE = l$ கோசை θ. அதோடு, சதுரத்தின் பக்க மொன்றின் நீளம் $\sqrt{2}\,l$ கோசை θ ஆகும்.

O இன் உயரம் l சைன் θ உம், கோல்களினது நடுப் புள்ளிகளின் உயரம் $\frac{l}{2}$ சைன் θ உம் ஆகும்.

இழைகள் சமமான சிற்றளவுகளினால் அகலுமாறு இத்தொகுதி பெயர்க்கப்படுமிடத்து O உம் கோல்களின் நடுப் புள்ளிகளும் இறங்குகின்றன.

இழையொவ்வொன்றிலும் இழுவை T ஆயின், மாய வேலைச் சமன்பாடு,

$$-4T\sqrt{2}l \text{ சைன் } \theta \,.\, d\theta + Wl \text{ கோசை } \theta \,.\, d\theta + 4w.\frac{l}{2} \text{ கோசை } \theta \,.\, d\theta = 0,$$

$$\therefore T = \frac{W+2w}{4}\cdot\frac{\text{கோசை } \theta}{\sqrt{2} \text{ சைன் } \theta}.$$

ஆனால்

$$\sqrt{2}l \text{ கோசை } \theta = a,$$

$$\therefore \text{ கோசை } \theta = \frac{a}{\sqrt{2}l} = \frac{\sqrt{2}a}{2l},$$

$$\text{சைன் } \theta = \frac{\sqrt{4l^2-2a^2}}{2l},$$

$$\therefore T = \frac{W+2w}{4} \times \frac{a}{2l} \times \frac{2l}{\sqrt{4l^2-2a^2}}$$

$$= \left(\frac{W+2w}{4}\right)\frac{a}{\sqrt{4l^2-2a^2}}.$$

பயிற்சி XXXIX.

1. நான்கு பாரமான சீர்ச் சமக் கோல்கள் சாய்சதுரம் ABCD வடிவில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இச்சாய்சதுரம் A இலிருந்து சுயாதீன மாகத் தொங்கவிடப்பட்டும் A ஐயும் C ஐயும் இணைக்கும் நீளா இழை யொன்றினால் ஒரு சதுர வடிவிற் பேணப்பட்டுமுள்ளது. இவ்விழையில் இழுவையைக் காண்க.

2. ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ளதும் சுயாதீனமாய் ஒருமிக்க மூட்டப்பட்டுள்ளனவுமான ஆறு சீர்ச் சமக் கோல்களை உடையது. இவ்வறுகோணி ஒரு இடை மேசை யை AB தொடுமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றது. ஓர் இலேசான இழையினால் C உம் F உம் இணைக்கப்பட்டிருப்பின், அவ் விழையின் இழுவை $W\sqrt{3}$ என நிறுவுக.

3. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, BC, CD, DE, EF, FA, என்னும் ஆறு சீர்ச் சம கோல்கள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல் AB இடையாக நிலைப்படுத்தப் பட்டுள்ளது. அறுகோணி வடிவம் C ஐயும் F ஐயும் இணைக்கு மோர் இலேசான கோலினாற் பேணப்படுகின்றது. இக்கோலில் உதைப் பினைக் காண்க.

4. ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ABCDE ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள தும் நுனிகளில் சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டுள்ளனவுமான ஐந்து சீர்க் கோல்களினால் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. இது A இல் சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டும் B ஐயும் E ஐயும் இணைக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் அதன் ஐங்கோணிவடிவிற் பேணப்பட்டுமுள்ளது. இக்கோலில் தகைப்பு W′ கோதா 18° என நிறுவுக. (C.S.)

5. a பக்கச் சமபக்க முக்கோணி ABC வடிவச் சீர் அடரொன்றின் உச்சிகள், AA′, BB′, CC′ என்னும் சம இழைகளினால் b பக்கமுள்ள நிலைத்த இடைச் சமபக்க முக்கோணியொன்றின் உச்சிகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்வடரின்மீது ஒரு இடைத் தளத்திற் செயற்படும் திருப்புதிறன் M உள்ள ஓர் இணை காரணமாக அடர் அதன் கலையா நிலையிலிருந்து θ கோணத்தூடாகத் திரும்பியிருக்கின்றது.

$$\text{சைன் } \theta = \frac{3hM}{abW}$$

என நிறுவுக. இங்கு W, அடரின் நிறை; h, (கலைந்த நிலையில்) ABC, A′ B′ C′ ஆகிய தளங்களின் இடைத்தூரம். (C.S.)

6. உச்சியில் ஒப்பமாக மூட்டிய l என்னும் சமநீளமுள்ள மூன்று கால்களைக் கொண்டுள்ள ஒரு நிறையற்ற முக்காலி ஒப்பமான இடைத்

தளமொன்றின்மீது நிற்கின்றது. உச்சியிலிருந்து நிறை W தொங்கு கின்றது. கால்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒவ்வொன்றும் $\frac{l}{2}$ நீளமான மூன்று நீளா இழைகள் இம்முக்காலியை விழாது தடுக் கின்றன. ஒவ்வோர் இழையிலும் இழுவை,

$$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,W$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

7. நுனிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் நான்கு இலேசான கோல்கள், ABCD என்னும் சாய்சதுரத்தை உருவாக்குகின்றன. BC இலுள்ள புள்ளி P ஐயும் AD இலுள்ள புள்ளி Q ஐயும் PQ என்னும் இலேசான கோல் ஒப்பமாக இணைக்கின்றது. ஒவ்வொன்றும் F இற்குச் சமமான இரு விசைகள் முரண் திசைகளில் AC வழியே A இலும் C இலும் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. PQ இல் தகைப்பு

$$\frac{F\,.\,AB\,.\,PQ}{AC(AQ \sim BP)}$$

என நிறுவுக. (C.S.)

8. ஒருமிக்கச் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் W நிறையுள்ள பார மான ஆறு சம கோல்களைக் கொண்டுள்ள அறுகோணி ABCDEF, AB கிடையாக இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தொங்கு கின்றது. CD, EF ஆகிய கோல்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் இச்சட்டப்படல் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணிவடிவிற் பேணப்படுகின்றது. இவ்விலேசான கோலில் தகைப்பினை நிர்ணயிக்க. (C.S.)

9. ஓர் இணைகர வடிவச் சீர் அடர், ஒரே கிடைக் கோட்டில் c இடைத் தூரத்திலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகள் மீது அதனிரு அடுத்துள பக்கங்கள் அமையுமாறு தங்கியிருக்கின்றது. $2h$, இவ்விரு பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியூடான மூலைவிட்ட நீளம். α, β, θ என்பன இம்மூலைவிட்டம் இப்பக்கங்களுடனும் நிலைக்குத்துடனும் ஆக்கும் கோணங்கள் $(\alpha > \beta)$.

$$h \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } (\alpha + \beta) = c \text{ சைன் } (2\theta - \alpha + \beta),$$

என நிறுவுக. (C.S.)

10. W, W′ நிறைகளுள்ள AB, BC என்னும் இரு பாரமான சீர்ச் சட்டங்கள் B இல் ஒரு முரடான முளையாணியால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. இவ்வாணியில் ஒரு சிறிய உராய்விணை G உள்ளது. சட்டம் AB, A இலுள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையாணிபற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் திரும்பவல்லது. சட்டம் BC இன் முனை C ஆனது,

A ஊடாகச் செல்லும் திசையையுடைய ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தவாளிப்பில் வழுக்கிச் செல்லக்கூடியது. சமநிலையைப் பேணும் C இலுள்ள ஆகவும் குறைவான கிடை விசை,

$$\frac{(W + W') \text{ கோசை } A \text{ கோசை } C}{2 \text{ சைன் } B} - \frac{G.\ AC}{AB.\ BC \text{ சைன் } B}$$

என நிறுவுக. (N.U.)

11. ஆறு பாரமான சமச் சட்டங்கள் ஓர் அறுகோணி வடிவில் அவற்றின் நுனிகளிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இவை ஒரு சட்டம் கிடைத் தளமொன்றின்மீது தங்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கும் இரு சாய்ந்த மேற் சட்டங்களின் நடுப் புள்ளிகளை ஓர் இலேசான நாண் இணைக்கின்றது. இந்நாணின் இழுவை $6W$ கோதா θ எனக் காட்டுக. இங்கு W, ஒவ்வொரு சட்டத்தினதும் நிறை. (C.S.)

12. ஒவ்வொன்றுடனும் நுனிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் இலேசான கோல்கள் யாதுமொரு வடிவுள்ள ஒரு முக்கோணி ABC ஐ உருவாக்குகின்றன. இது, A கீழ்முகமாக இருக்குமாறும் AB, AC, என்னும் கோல்கள் ஒரே கிடைக் கோட்டிலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகளின்மீது தங்குமாறும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. A இல் W நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது ; கோல் BC இல் தகைப்பு,

$$\frac{1}{2}\frac{Wl}{p} \text{ கோசீ}^2 \tfrac{1}{2}A$$

என நிறுவுக. இங்கு $2l$, முளைகளின் இடைத்தூரம் ; p, A இலிருந்து BC மீதுள்ள செங்குத்து. (C.S.)

13. உச்சியிலே தளர்வாக ஒருமித்து மூட்டப்பட்டிருக்கும் மூன்று இலேசான l நீளச் சமகோல்களையுடைய ஒரு முக்காலி ஓர் ஒப்பமான மேசையின்மீது தங்குகின்றது. இக்கோல்களின் கீழ் முனைகள் இவற்றைச் சோடியாக இணைக்கும் a நீளமான மூன்று சம இடையிழைகளினால் ஒருமிக்கத் தாங்கப்படுகின்றன. உச்சியிலிருந்து நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழைகளில் இழுவைகளைக் காண்க. (C.S.)

14. ஆறு சீர்ச் சமகோல்கள் ஒரு நான்முகி வடிவில் அவற்றின் நுனிகளிலே சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டுள்ளன. இந்நான்முகி இதனொரு முகம் ஒப்பமான கிடை மேசையொன்றின் மீதிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டிருப்பின், கிடைக் கோலொன்றின் வழியே உதைப்பு $\frac{w}{2\sqrt{6}}$ என நிறுவுக. இங்கு w, ஒரு கோலின் நிறை. (C.S.)

15. ஒப்பமாக மூட்டிய கோல்களாலாய சாய்சதுரம் ABCD ஓர் ஒப்பமான மேசைமீது தங்கியிருக்கின்றது. கோல் BC உரியதானத்தில் நிலைப்படுத்தப் பட்டுள்ளது. AD, DC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் ஓர் இழை, கோல் AB இற் பிரயோகிக்கப்படும் L என்னும் ஓர் இணையால் இறுக்கமாகப் பேணப்பட்டுள்ளது. இவ்விழையில் இழுவை

$$\frac{2L}{AB\text{ கோசை }(\frac{1}{2}\,ABC)}$$

என நிறுவுக.

(C.S.)

16. ஒவ்வொன்றும் w நிறையுள்ள மூன்று சம கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றின் ஒரு நுனியில் முக்காலி வடிவில் ஒருமித்துச் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இவை, இவற்றின் மற்றைய நுனிகள் ஒப்பமான கிடைத் தளமொன்றின்மீது பொருந்துமாறு தங்கியிருக்கின்றன. ஒவ்வொரு கோலும் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கின்றது. இங்கு, கீழ்நுனிகளைச் சோடியாக இணைக்கும் மூன்று இலேசான சம இழைகளினாற் சமநிலை பேணப்படுகின்றது. மாய வேலைக் கோட்பாடு மூலமாகவோ வேறு விதமாகவோ இழையொவ்வொன்றிலும் இழுவை $\frac{W\text{ தான் }\theta}{2\sqrt{3}}$ என நிறுவுக.

(H.C.)

17. ஒரு சீர் இருசமபக்க முக்கோணியடர் அதனுச்சி கீழ்முகமாக, ஒரே கிடைக் கோட்டில் அமைந்திருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகளின்மீது அமையுமாறு நிலைக்குத்தாகத் தாங்கப்படுகின்றது. p, உச்சியிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரமும், α, உச்சிக் கோணமும், q, முளைகளின் இடைத் தூரமுமாயின், $p >$ அல்லது $< 2q$ கோசீ α என்பதற்கிணங்க ஒன்று அல்லது மூன்று சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமென நிறுவுக. (C.S.)

18. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள இரு சம பாதிகளையுடைய ஒரு படியேணியின் உச்சியில் சுமை W′ வைக்கப்படுமிடத்து, நாணில் இழுவை $\frac{(W+W')b^2}{2ah}$ எனக் காட்டுக. இங்கு $2a$, நாணின் நீளம்; h, ஏணியின் உயரம்; $2b$ அதன் நுனிகளின் இடைத்தூரம். இந்நாண் உச்சியிலிருந்து சம தூரங்களில் இவ்விருபாதிகளுக்கும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

19. ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ள நான்கு இலேசான a நீளச் சமக் கோல்களினாலாய ஒரு சாய்சதுரத்தின் எதிர் மூலைகள், ஒரே சடப்பொருளினாலானவையும் $a\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$ என்னும் இயற்கை நீளமுடையனவுமான மீள்தகவிழைகளினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சாய்சதுரம் கிடைத் தளமொன்றின்மீது தங்கியிருக்கின்றது. சமநிலையில் சாய்சதுரத்தின் ஒரு கோணம் 30° எனக் காட்டுக.

20. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள AB, BC, CD, DE, என்னும் நான்கு சீர்ச் சம கோல்கள் ஒரே கிடைக் கோட்டில் நிலைப்பட்டிருக்கும் A, E என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. BC, CD ஆகிய வற்றின் நடுப் புள்ளிகளை ஓர் இழை இணைக்கின்றது. AB உம் BC உம் கிடையுடன் முறையே α, β, கோணங்களை ஆக்கின், இழையின் இழுவை W(3 கோதா α – கோதா β) எனக் காட்டுக.

21. சுயாதீனமாய் மூட்டப்பெற்றுள்ள நான்கு சட்டங்கள் இணைகரம் ABCD வடிவச் சட்டப்படலொன்றை உருவாக்குகின்றன. B, C, ஆகிய புள்ளிகள் இழைகளினுல் முறையே சட்டம் AD இன் X, Y என்னும் புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. இத்தொகுதி சமநிலையிலிருக்குமிடத்து, மாய வேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, கோணம் DCY இற்குக் கோணம் ABX சமமாயின் இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் சமமாயிருக்குமென நிறுவுக.

22. W நிறையுள்ள நான்கு சீர்ச் சமகோல்கள் ஒரு சதுரம் ABCD வடிவிற் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இது, A இலிருந்து தொங்க விடப்பட்டும் AB, BC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் ஒரு நீளா இழையினுல் விழாது தடுக்கப்பட்டுமுள்ளது. இழையின் இழுவை 4W என நிறுவி, B இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. (C.S.)

23. நுனிப் புள்ளிகளில் சுயாதீனமாக மூட்டிய பாரமான சீர்க் கோல்கள் ஓர் இணைகரம் ABCD ஐ உருவாக்குகின்றன. AB கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்டுத் தாங்கப்படுகின்றது. A ஐ DC இலுள்ள ஒரு புள்ளி P உடன் இணைக்கும் ஓர் இழையினுல் இவ்விணைகரம், ADC ஒரு கூர்ங்கோணம் α ஆக இருக்குமாறு அதன் வடிவிற் பேணப்பட்டுள்ளது. இழையின் இழுவை $\frac{W \,.\, AP \text{ கோதா } \alpha}{DP}$ என நிறுவுக. இங்கு W, இணைகரத்தின் நிறையின் அரைவாசி. (C.S.)

24. ஒவ்வொன்றுடனும் நுனிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டிருக்கும் நான்கு சீர்க் கோல்கள் உருவாக்கும் நாற்பக்கல் ABCD, மூட்டு A இலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. AB, AD ஆகிய கோல்கள் சமமானவை. அதோடு BC, CD ஆகியனவும் சமமானவை. ஓர் இழை, A ஐ C உடன் இணைக்கின்றது. மாய வேலைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, இவ்விழையில் இழுவை

$$W_2 + (W_1 + W_2)\frac{EC}{AC}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு W_1, மேற் கோலின் நிறை ; W_2, கீழ்க் கோலின் நிறை; E, மூலைவிட்டங்கள் AC, BD ஆகியன ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி. (H.S.C.)

25. ஒப்பமான இடைப் பரப்பொன்றில் கீழ் நுனியைக் கொண்டுள்ள, W நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு சீர் ஏணி ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. W′ நிறையுள்ள ஒரு மனிதன் ஏணியின் அடியிலிருந்து l' தூரத்தில் அதன்மீது நிற்கின்றான். இவ்வேணி ஓர் இணையினாற் சறுக்காது தடுக்கப்படின், இவ்விணையின் திருப்புதிறன்

$$(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{W}l + \mathrm{W}'l')\ \text{சைன்}\ \theta$$

இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. இங்கு θ, நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் சாய்வு. இவ்விணையின் போக்கினைக் காட்ட ஒரு படம் வரைக. (H.C.)

§187. சமநிலையுறுதிப்பாடு.

ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும் (ஒப்பமான விகாரப்படைகளின் மறுதாக்கங்களை விட மற்றைய) விசை புவியீர்ப்பேயாயின், மாய வேலைச் சமன்பாட்டில் தோன்றும் ஓரே விசை பொருளின் நிறையாகும்.

எனவே, ஏதாவதொரு நிலைத்த மட்டத்திற்கு மேலாகப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் z ஆயின்,

$$\mathrm{W}dz = 0.$$

இதிலிருந்து, z ஐ ஏதாவதொரு மாறி θ இன் சார்பாக எடுத்துரைக்குமிடத்து,

$$\frac{dz}{d\theta} = 0$$

என்பதும் z நிலையானதாக இருக்கவேண்டுமென்பதும் தெரிகின்றது.

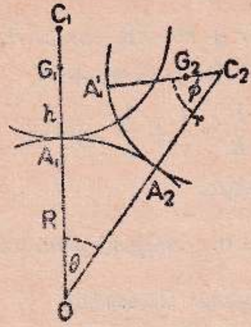
இப்போது, பொருளின் நிலைச் சக்தி z இன் பெறுமானத்திற் சார்ந்திருக்கின்றது. இது, z, உயர்வாகவோ இழிவாகவோ இருப்பதற்கிணங்க உயர்வாகவோ இழிவாகவோவிருக்கும். இப்பொருள் சமநிலைத் தானமொன்றிலிருந்து சிறிது பெயர்க்கப்படின், **இது, நிலைச் சக்தி குறையுமாறு இயங்க ஆரம்பிக்குமென்பதும்** நமக்குத் தெரியும்.

எனவே, நிலைச் சக்தி (ஆகவே z) **உயர்வு** ஆயின், பொருள் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து நகர ஆரம்பிக்கும். ஆகவே இங்கு சமநிலை **உறுதியற்றது.**

மறுபுறம் நோக்குமிடத்து, நிலைச் சக்தி இழிவாயின் அப்பொருள் சமநிலைத் தானத்திற்குத் திரும்பும். இங்கு சமநிலை **உறுதியானதாகும்.** ஆகவே புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் ஓர் உண்மையான இழிவாகவோ உண்மையான உயர்வாகவோ இருத்தற்கிணங்க, சமநிலை உறுதியாகவோ உறுதியற்றதாகவோ இருக்கும். $\dfrac{d^2z}{d\theta^2} = 0$ ஆகவும், z, (ஆகவே நிலைச் சக்தி) **உண்**மையான உயர்வாகவோ இழிவாகவோ அமையாமலும் இருப்

பின், சமநிலை நடுநிலையானதெனத் தோன்றும். எனினும், இத்தகைய சந்தர்ப்பங்கள் மேலும் ஆராயப்படத்தக்கவை. அவை பெரும்பாலும் உறுதியற்றவையாக இருக்கும்.

§188. பந்தி **155** இலுள்ள பிரசினம் பின்வரும் முறையாலும் விடையளிக்கப்படலாம்.



படம் 254

O (படம் 254), நிலைத்த பொருளினது பரப்பின் மையமெனவும், C_1 மேலுள்ள பொருளினது பரப்புமையமெனவும், G_1 அதன் புவியீர்ப்பு மையமெனவும், A_1 தொடுகைப் புள்ளியெனவும் கொள்க.

$$OA_1 = R,\ A_1C_1 = r,\ A_1G_1 = h.$$

C_2, G_2, A'_1 என்பன C_1, G_1, A_1 என்பனவற்றின் பெயர்ந்த தானமெனவும், A_2 புதிய தொடுகைப் புள்ளியெனவும் கொள்க. $A_1OA_2 = \theta$, $A_2\,C_2\,A'_1 = \phi$. எனின் முதலிற்போல,

$$\phi = \frac{R}{r}\,\theta.$$

O இற்கு மேலாக G_2 இன் உயரம்,

$$z = (R + r) \text{ கோசை } \theta - (r - h) \text{ கோசை } (\theta + \phi)$$

$$= (R + r) \text{ கோசை } \theta - (r - h) \text{ கோசை } \left(\frac{R + r}{r}\right)\theta,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -\,(R + r) \text{ சைன் } \theta + \frac{(r - h)\ (R + r)}{r} \text{ சைன் } \left(\frac{(R + r)}{r}\right)\theta.$$

$$\text{அதோடு } \frac{d^2z}{d\theta^2} = -\,(R+r) \text{ கோசை } \theta + \frac{(r - h)\,(R + r)^2}{r^2} \text{ கோசை } \left(\frac{(R + r)}{r}\right)\theta.$$

$\theta = 0$ ஆயின், $\dfrac{dz}{d\theta} = 0$ ஆகுமென்பது தெளிவு. ஆகவே இது சமநிலைத் தானமொன்றைத் தருகின்றது.

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} \text{ நேராயின், அ–து.}$$

$$\frac{(r-h)\,(\mathrm{R}+r)^2}{r^2} > (\mathrm{R}+r),$$

அல்லது $$\mathrm{R}r + r^2 - h\mathrm{R} - hr > r^2,$$

அல்லது $$\mathrm{R}r > h\,(\mathrm{R}+r),$$

அல்லது $$\frac{1}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{\mathrm{R}} \text{ ஆயின்,}$$

சமநிலை உறுதியாக இருக்கும்.

$\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{\mathrm{R}}$ ஆயின், $\dfrac{d^2z}{d\theta^2} = 0.$ அதோடு நாம் உயரிய வகையீட்டுக் குணகங்களின் பெறுமானத்தை ஆராய வேண்டும்.

$$\frac{d^3z}{d\theta^3} = (\mathrm{R}+r) \text{ சைன் } \theta - \frac{(r-h)\,(\mathrm{R}+r)^3}{r^3} \text{ சைன் } \left(\frac{\mathrm{R}+r}{2}\right)\theta.$$

$\theta = 0$ ஆகுமிடத்து, இது மறைகின்றது.

$$\frac{d^4z}{d\theta^4} = (\mathrm{R}+r) \text{ கோசை } \theta - \frac{(r-h)\,(\mathrm{R}+r)^4}{r^4} \text{ கோசை } \left(\frac{\mathrm{R}+r}{r}\right)\theta.$$

$\theta = 0$ ஆகவிருக்கும்போது, இது,

$$(\mathrm{R}+r)\left[1 - \frac{(r-h)\,(\mathrm{R}+r)^3}{r^4}\right]$$

$$= \left(\frac{\mathrm{R}+r}{r^4}\right)\left[r^4 - \left(r - \frac{r\mathrm{R}}{\mathrm{R}+r}\right)(\mathrm{R}+r)^3\right]$$

$$= \frac{(\mathrm{R}+r)}{r^4}\left[r^4 - r^2\,(\mathrm{R}+r)^2\right] \text{ ஆகின்றது.}$$

அதோடு, இது மறையானது, எனவே, z உயர்வாகவும், சமநிலை உறுதியற்றதாகவுமுள்ளது.

§189. உதாரணம்.

ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமான AB, BC, CD, என்னும் மூன்று சீர்ச் சம சட்டங்கள் B இலும் C இலும் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இவை, BC கிடையாக இருக்குமாறும், AB, CD ஒவ்வொன்றும் ஒரே மட்டத்தில் $2(a+b)$ இடைத்தூரத்தில் இருக்கும் சிறிய ஒப்பமான முளைகள் மீது அமையுமாறும் தங்கியிருக்கின்றன.

$2a > 3b$ ஆயின், இரு சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமெனக் காட்டி, அவற்றுள் எது உறுதியான தென்பதைத் தீர்மானிக்க.

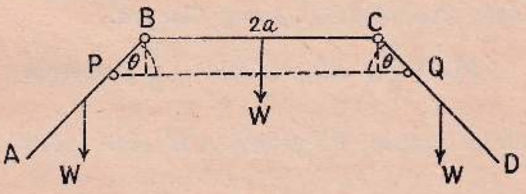
$2a = 3b$ ஆயின், ஒரு சமநிலைத் தானமே இருக்குமெனவும் அத்தானம் உறுதியற்றதெனவும் காட்டுக. (N.U.)

P, Q (படம் 255) என்பன மூளைகளின் தானங்களெனவும், $\angle$ BPQ $= \theta$ எனவும் கொள்க.

PQ இற்கு மேலாக AB, CD ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம்

$$= b \text{ தான் } \theta - a \text{ சைன் } \theta.$$

அதோடு, BC இன் இவ்வுயரம் b தான் θ ஆகும்



படம் 255.

$d\theta$ என்னும் ஒரு சிறிய பெயர்ச்சியின் போது,

$$2\text{W}d\left(\frac{b}{\text{கோசை } \theta} - a\right) \text{சைன் } \theta + \text{W}d\,(b \text{ தான் } \theta) = 0,$$

$$\therefore\ 2b \text{ சீக}^2\,\theta - 2a \text{ கோசை } \theta + b \text{ சீக }^2\theta = 0,$$

$$\therefore\ 2a \text{ கோசை } \theta = 3b \text{ சீக}^2\,\theta,$$

$$\therefore\ \text{கோசை}^3\,\theta = \frac{3b}{2a}, \text{ அல்லது கோசை } \theta = \sqrt[3]{\frac{3b}{2a}}.$$

எனவே, சமநிலை சாத்தியமாகவேண்டின், $2a > 3b$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

θ இற்கு இரு பெறுமானங்கள் சாத்தியம். ஒன்று α ஆயின், மற்றது $-\alpha$ ஆகும்.

எது உறுதியானதென்பதைக் காண, நாம் இத்தொகுதியினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரத்தினை இருதரம் வகையிடுகின்றோம்.

இவ்வுயரம்,

$$z = \frac{2b \text{ தான் } \theta - 2a \text{ சைன் } \theta + b \text{ தான் } \theta}{3},$$

$$\therefore\ 3\frac{dz}{d\theta} = 2b \text{ சீக}^2\theta - 2a \text{ கோசை}\theta + b \text{ சீக}^2\theta,$$

$$\therefore\ 3\frac{d^2z}{d\theta^2} = +\frac{6b}{\text{கோசை}^3\theta}\text{சைன் } \theta + 2a \text{ சைன்}\theta = \text{சைன்}\theta\,(4a + 2a).$$

θ மறையாயின், இது மறையாகும். அதோடு, சமநிலை உறுதியானதாகும்.

θ நேராயின், இது நேராகும். அதோடு, சமநிலை உறுதியற்றதாகும்.

படத்திற் காட்டப்பெற்ற தானம், உறுதியற்ற தானமேயாகும்.

$2a = 3b$ ஆயின், கோசை $\theta = 1$, $\theta = 0$. அதோடு, ஒரு சமநிலைத் தானமே இருக்கும் ; கோல்களெல்லாம் கிடையானவை.

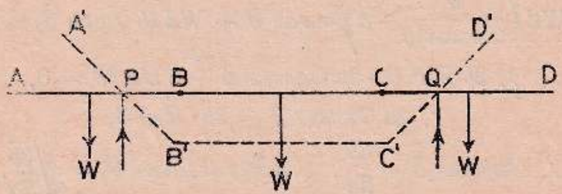
இவ்விடத்து, $\dfrac{d^2z}{d\theta^2} = 0$. அதோடு, ஓர் உயர்வு அல்லது இழிவிற்கான வழக்கமான சோதனை இங்கு தவறுகிறது.

இத்தொகுதி நிலை A′B′C′D′ (படம் 256) இற்கு θ என்னும் சிறிய கோணத்தூடாகப் பெயர்க்கப்படுவதாகக் கொள்க.

$$\text{PB} = \frac{2}{3}a, \text{ அதோடு } \text{BB}' = \frac{2}{3}\, a \text{ தான் } \theta.$$

$\text{PB}' = \dfrac{2}{3}\, a$ சீகθ ஆகவே, P இலிருந்து A′B′ இன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம்

$$= a - \frac{2}{3}a \text{ சீக}\theta.$$



படம் 256.

ஆகவே, AB இனதும் CD இனதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள்,

$$a \text{ சைன் } \theta - \frac{2}{3}a \text{ தான் } \theta$$

தூரம் உயர்ந்துவிட்டன.

BC இன் புவியீர்ப்பு மையம் $\dfrac{2}{3}\, a$ தான் θ தூரம் இறங்கிவிட்டது.

எனவே, நிலைச்சக்தி நட்டம்,

$$\frac{2}{3}\text{ W}a \text{ தான் } \theta - 2\text{W}a \text{ சைன் } \theta + \frac{4}{3}\text{ W}a \text{ தான் } \theta$$

$$= 2\text{ W}a\ (\text{தான் } \theta - \text{சைன் } \theta).$$

இக்கோணவை θ இன் சிறிய பெறுமானங்கள் யாவற்றிற்கும் எப்பொழுதும் நேரானதாக இருக்கும்.

எனவே, இப்பெயர்ச்சியின்போது நிலைச் சக்தி குறைவதோடு, சமநிலை உறுதியற்றதாகவுமிருக்கின்றது.

பயிற்சி XL.

1. ஒரு சீர்த் திண்ம அரைக்கோளம் அதன் விட்டத்திற்குச் சமமான நீளமுள்ள ஓர் இழையினால் தொங்கவிடப்பட்டு அதன் தட்டையான முகம் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றை நோக்குமாறு தொங்குகின்றது. இவ்விழையின் ஒரு நுனி சுவருடனும், மற்றைய நுனி அரைக்கோள விளிம்புடனும் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. சமநிலையில், சுவருடன் இழையின் சாய்வைக் கண்டு, சமநிலை உறுதியானதா இல்லையாவென்பதைக் காண்க. (C.S.)

2. $2l$ நீளமுள்ள பாரமான ஒரு சீர்க் கோல் அதன் நுனிகள், நிலைக்குத்தான அச்சையும் கீழ்முகமான உச்சியையும் (செவ்வகலம் $= 4a$) உடைய ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான பரவளைவின்மீது அமையுமாறு தங்கியிருக்கின்றது. $l > 2a$ ஆயின், மூன்று சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமெனவும், அப்போது, கிடைத் தானம் உறுதியற்றதாயிருக்குமெனவும், ஆனால், $l \leq 2a$ ஆயின், சமநிலைத் தானம் கிடையேயாகுமெனவும் காட்டுக. (C.S.)

3. $2l$ நீளமுள்ள விறைப்பான சீர்க் கோலொன்றின் A, B என்னும் நுனிகள் OA, OB என்னும் இரு செங்குத்தான, ஒப்பமான நிலைத்த கம்பிகள்மீது நகருமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கம்பிகள் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்துடன் $45°$ இற் சாய்ந்துள்ளது. O, உச்சப் புள்ளி. கோல் கிடையாக இருக்கும்போது சமநிலை உறுதியானதென நிறுவுக. (C.S.)

4. உருளையொன்று ஒரு மேசையின்மீது சமநிலையில் தங்கியிருக்கின்றது. அதன் தொடுகைப் புள்ளியில், எதாவதொரு குறுக்குவெட்டின் வளைவாரை புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரத்திலும் அதிகமாயின், சமநிலை உறுதியானதெனக் காட்டுக. $e > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆயின், பிறப்பாக்கிகளைக் கிடையாகக்கொண்டு ஒரு மேசைமீதிருக்கும் நீள்வளையவுருளை யொன்றின் உறுதிச் சமநிலை, இவ்வுருளைமீது உச்சியிற் பாரமேற்றி உறுதியற்றதாக்கப்படாதெனக் காட்டுக. (C.S.)

5. பாரமான சம கோல்களாலாய ஒரு விறைப்பான முக்கோணிச் சட்டப்படல், ஒரே கிடைக் கோட்டில் அமைந்திருக்கும் ஒப்பமான முளைகளை மேலுள்ள இரு கோல்களும் தொடுமாறு சமநிலையிலே தொங்குகின்றது. முளைகளின் இடைத்தூரம், ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளத்தின் காற்பங்கிலும் அதிகமாயின், உறுதிச் சமநிலையின் தானம் சரியானதென நிறுவுக. (C.S.)

6. ஒப்பமான வட்டக் கம்பியொன்றின் மேற்பகுதியின்மீது நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் வழுக்கக்கூடிய P, Q என்னும் இரு சிறிய வளையங்கள் சமநீள இழைகளினால், வட்டத்தின் நிலைக்குத்து விட்டம் வழியே சுயாதீனமாய் வழுக்கக்கூடிய ஒரு மூன்றாம் வளையம் R உடன் இணைக்கப் பெற்றுள்ளன. மூன்று வளையங்களும் சம நிறையுள்ளன. இழைகளின் நீளங்கள் அவ்வட்டத்தின் ஆரையிலும் குறைவாயின், முக்கோணி POQ இன் மையப்போலியில் R ஐக் கொண்டிருக்கும் சமநிலையின் உறுதியான தானமொன்றிருக்குமென நிறுவுக. இங்கு, O, அவ்வட்டத்தின் மையம். (C.S.)

7. நிலைக்குத்தான தளத்திணையுடைய ஒரு வட்டக் கம்பியின் கிடை விட்டம் AB ஆகும். இக்கம்பிமீது வழுக்கக்கூடியதும் அடிப் புள்ளி C இலுள்ளதுமான M திணிவுள்ள ஒரு சுமை A இலும் B இலும் நிலைப்பட்டுள்ள சிறிய வளையங்களூடாகச் செல்லும் இரு இழைகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விழைகளின் மறு நுனிகளில், சுயாதீனமாய்த் தொங்கும் m என்னும் சம துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. M இற்கான ஆரை, நிலைக்குத்துடன் θ என்னும் ஒரு கோணத்தை ஆக்குமாறு இத்தொகுதி பெயர்க்கப்படுமிடத்து, இதன் நிலைச் சக்தியைக் காண்க. $m < M\sqrt{2}$ ஆயின், C இலுள்ள, M உடனான சமநிலை உறுதியானதென்பதை உய்த்தறிக. (C.S.)

8. $2a$ நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நெம்பு AOB, அதன் நடுப் புள்ளி O பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பவல்லது. நுனி A இலிருந்து நிறை $2w$ தொங்குகிறது. b நீளமுள்ள BC என்னும் ஓர் இலேசான கோல், AB உடன் B இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளது. w நிறையைத் தாங்கும் முனை C ஆனது, O ஊடான கீழ்முக நிலைக்குத்தில் இயங்குமாறு ஓர் உராய்வற்ற விகாரப்படையினால் கட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. a, b இலும் அதிகமாக, b இற்குச் சமமாக, b இலும் குறைவாக இருப்பதற்கிணங்க, எல்லைச் சமநிலைத் தானங்களையும் அவற்றின் உறுதிப்பாட்டையும் ஆராய்க. $b > a$ ஆக இருக்குமிடத்து, மூட்டு B இல் திரும்புதல், F என்னும் மாறா உராய்விணையால் தடுக்கப்படின், நெம்பு நிலைக்குத்துடன்

$$4wa^3\mathrm{F}\text{ சைன் }\theta\text{ கோசை}^2\theta=(b^2-a^2)\ (wa\text{ சைன் }\theta-\mathrm{F})^2$$

இனால் தரப்படும் கோணம் θ ஐ ஆக்குவதாகக் கொண்ட எல்லைச் சமநிலைத் தானமொன்று இருக்கிறதெனவும் காட்டுக. (C.S.)

9. நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலிருக்கும் ஒரு வட்ட வடிவுள்ள மெல்லிய கம்பியின் மையம் C இலுள்ளது. C ஊடான கீழ்முக நிலைக்குத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களில் α என்னும் கோணங்களை முறையே CA உம் CB உம் ஆக்குமாறு A, B என்னும் முளைகள் கம்பியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. இக்கம்பிமீது, M திணிவுள்ள ஒரு சிறு வளையம் வழுக்கக்கூடியது. இவ்வளையம் முளைகளின் மேலாகச் செல்லும் இரு இழைகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழைகளின் நுனிகளில் m என்னும் திணிவுகள் தொங்கு

கின்றன. M இற்கான ஆரையானது நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை ஆக்கு மிடத்து, இத்தொகுதியின் நிலைச் சக்தி யாது ? இதிலிருந்து,

$$M \gtrless m \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}\alpha$$

ஆகிய சந்தர்ப்பங்களில், சமநிலைத் தானங்களின் உறுதிப்பாட்டை ஆராய்க. (C.S.)

10. $2h$ உயரமுள்ள ஒரு செவ்வகக் குற்றி, இரு முகங்கள் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும் அதனடி, கிடையான அச்சும் a ஆரையுமுள்ள நிலைத்த முரடான உருளையொன்றைத் தொடுமாறும் தங்கியிருக்கின்றது. குற்றியின் அடி கிடைத் தளத்துடன் α கோணத்தை ஆக்குகின்றது. இக்குற்றி, உருளைமீது ஒரு சிறிய கோணம் θ இனூடாக உருட்டப்படுமிடத்து நிலைச் சக்தியிலேற்படும் மாற்றத்தைக் காண்க. அதோடு, $h = a$ கோசை$^2\alpha$ ஆயின், இக்குற்றி முதற் கிட்டமானத்திற்கு நடுநிலைச் சமநிலையிலிருப்பினும், உண்மையாக உறுதியில் சமநிலையிற்றான் இருக்குமெனக் காட்டு. (C.S.)

11. W நிறையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு வட்டவுருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் அச்சிலிருந்து c தூரத்திலுள்ளது. இவ்வுருளை, கிடைத் தளமொன்றின்மீது உறுதிச் சமநிலையில் தங்கியிருக்கின்றது. w நிறையும் $2b$ தடிப்புமுள்ள ஒரு சீர்ப் பலகை, அதன் நீளத்தை உருளையின் அச்சிற்குச் செங்குத்தாகக் கொண்டு கிடையாகத் தங்குமாறு உருளைமீது வைக்கப்பட்டுள்ளது.

$$a - b > \frac{wa^2}{Wc}$$

ஆயின், சிற்றுருட் பெயர்ச்சிகளின்போது இத்தொகுதி உறுதிச் சமநிலையிலிருக்குமென நிறுவுக. (C.S.)

12. $2l\sqrt{3}$ நீளமுள்ள ஒரு சீர்க் கோலின் நுனிகளுடன், ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறு ஒப்பமான வளையத்தூடாகச் செல்லும் $4l$ நீள இழையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலின் ஒரு நுனி சுவரில் ஊன்றிநிற்கும் சமநிலைத் தானமொன்று இருக்கிறதெனவும், பின்பு, சுவரைத் தொடும் இழைநீளம் l எனவும் நிறுவுக. சமநிலைத் தானம் உறுதியில்லாததெனவும் காட்டுக. (H.C.)

13. ஏகவினச் சீர் அரியமொன்றின் குறுக்கு வெட்டானது செவ்வகம் ABCD ஆகும். ஒரு பொதுக் கிடை நேர் கோட்டினை உடையனவையும் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் α கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதுமான இரு தளங்களினிடையே, A ஊடான விளிம்பு ஒரு தளத்தையும் B ஊடான விளிம்பு மற்றதையும் தொடுமாறு அவ்வரியம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB ஆனது கிடையுடன் θ இற் சாய்ந்திருப்பின், தளங்களின் பொதுக் கோட்டிற்கு மேலாக அரியத்தினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் $\frac{1}{2}$(AB தான் α + BC) கோசை θ

என நிறுவுக. எனவே, இத்தளங்கள் ஒப்பமானவையாயின், AB கிடையாக இருக்கும் தானம் உறுதியில் சமநிலைத் தானமெனக் காட்டுக. முகம் ABCD நிலைக்குத்தாகத் தளங்களினிடையே இருக்கும் அரியத்தின் மற்றைய சமநிலைத் தானங்கள் எவையெனவும், இவற்றுள் எவையாவது உறுதியாக இருப்பின் எவை உறுதியானவையெனவும் காண்க. (H.S.C).

14. W நிறையும் $2b$ தடிப்புமுள்ள ஒரு முரடான சீர்ப் பலகை a ஆரையுள்ள நிலைத்த முரடான உருளையொன்றின் குறுக்கே கிடையாகச் சமநிலையில் தங்கியிருக்கிறது. w நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை உருளையின் அச்சிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே பலகையில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. $(\mathrm{W}+w)a > b(\mathrm{W}+2w)$ ஆயின், சமநிலை உறுதியானதெனவும், $(\mathrm{W}+w)a < b\,(\mathrm{W}+2w)$ ஆயின், அது உறுதியற்றதெனவும் நிறுவுக. முன்னைய சந்தர்ப்பத்தில், உராய்வு, சறுக்குதலைத் தடுக்கக்கூடியளவு அதிகமாக இருக்குமாயின், இரு சரிவான உறுதியற்ற சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமெனக் காட்டுக. (C.S.)

15. சமநிலைத் தானமொன்றின் உறுதிப்பாடு என்பதை விளக்குக. இது எவ்வாறு நிர்ணயிக்கப்படலாம்? ஒரு நிலைத்த கோளப் பரப்பின்மீது தங்கியிருக்கும் ஒரு சீர்ச் செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பினை எடுத்துநோக்கி, உமது விடையை விளக்குக. இங்கு எடுத்துநோக்கப்படும் பரப்புக்கள் முரடானவை. (C.S.)

16. ஓர் ஒழுங்கான சீர் அறுகோணியடர் ABCDEF, ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் நிலைத்த இரு ஒப்பமான சமாந்தரக் கிடைக் கோல்களை அடரின் AB, CD என்னும் பக்கங்கள் தொடுமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றது. BC கிடையாக இருக்கும் தானமே சமநிலைத்தானமெனவும் இத்தானம் உறுதியானதெனவும் காட்டுக. (C.S.)

17. W நிறையும் a ஆரையுமுடைய ஒரு சீர் அரைக்கோளம் b ஆரையுள்ள ஒரு நிலைத்த கோளத்தினுச்சிமீது சமச்சீராய் வைக்கப்பட்டுள்ளது. வழுக்குதலைத் தடுக்கப் போதுமானளவு முரடான இவற்றின் வளைபரப்புக்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன. இவ்வரைக்கோளம் θ என்னும் சிறிய கோணத்தூடாக உருட்டப்படின், நிலைச் சக்தி நயம் ஏறத்தாழ

$$\frac{1}{16}\,\frac{\mathrm{W}(3b-5a)a\theta^2}{(a+b)}$$

எனக் காட்டி, உறுதிப்பாட்டுக்குரிய நிபந்தனையை உய்த்தறிக. (C.S.)

18. w நிறையும் l நீளமுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோலின் இரு முனைகளும், இயற்கை நீளம் l உம் மட்டு E உமுள்ள ஓர் இலேசான மீள் தன்மையிழையின் இரு நுனிகளுடனும் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. அக் கோல், இழையை ஒப்பமான ஆணியொன்றின் மேலாகத் தொங்கவிட்டுக் கிடையாகத் தாங்கப்படுகின்றது. இழையின் இரு பாகங்களும் கோலுடன்

θ கோணத்தை ஆக்கின், இத்தொகுதிக்குரிய நிலைச்சக்தியை எழுதி, சமநிலைத் தானத்தில்

$$\text{தான் } \theta - \text{சைன் } \theta = \frac{lw}{2E}$$

என நிறுவுக. (N.U.)

19. $2a$ நீளப் பக்கங்களுள்ள ஒரு கனவடிவப் பெட்டி, அதன் அடுத்துள பக்கங்களிரண்டு, ஒரே மட்டத்தில் $c(<2a)$ இடைத்தூரத்திலிருக்கும் ஒப்பமான இரு சமாந்தரக் கிடைத் தாங்கிகளில் ஒன்றின்மீது ஒரு பக்கமாகத் தங்கியிருக்கப்பெற்றுச் சமநிலையிலிருக்கின்றது. $a^2 > 2c^2$ ஆயின், சமச்சீரான தானம் என்னும் ஒரு சமநிலைத் தானமே இருக்குமெனக் காட்டுக. $a^2 < 2c^2$ ஆயின், $2c$ கோசை $\theta = a\sqrt{2}$ இனால் நிர்ணயிக்கப்படும் வேறு சமநிலைத் தானங்கள் இருக்கின்றனவென மேலும் காட்டுக. இங்கு θ, பெட்டியின் மையத்தை அடிவிளிம்புடன் இணைக்கும் தளம் நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம். (H.S.C.)

20. இரு சீர்ச் சமகோல்கள் ஒவ்வொன்றுடனும் ஒரு பொது நுனியில், இந்நுனி மேலே அமையுமாறு, செங்குத்தாக இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. இவை, செவ்வட்டவுருளைகள் வடிவுள்ளவையும், சம ஆரை a உடையவையும், ஒரே கிடைத் தளத்தில் c இடைத்தூரத்தில் இருக்கும் சமாந்தர அச்சுக்களையுடையவையுமான இரு ஒப்பமான சிராதிகளில் ஒன்றை ஒருகோல் தொடுமாறு வழுக்கக்கூடியவை. இக்கோல்கள் எதினதும் நீளம் $4(a+c)$ இற்கும் $4(a+c\sqrt{2})$ இற்கும் இடையே இருப்பின், கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் சமமாகச் சாய்ந்திருக்குமிடத்து ஒன்று உறுதியானதாகவும், மற்றவிரண்டும் உறுதியற்றதாகவுமிருக்கும் மூன்று சமநிலை உருவமைப்புக்கள் இருக்குமென நிறுவுக. (C.S.)

21. கோல்களாலாய ஒரு விறைப்பான சதுரச் சட்டப்படல், ஒரே கிடைக் கோட்டிலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகளின் மேலாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. முளைகளின் இடைத்தூரமானது $\frac{1}{4}$ (மூலைவிட்டம்) இற்கு அதிகமாகவும் சதுரத்தின் $\frac{1}{2}$(பக்கம்) இற்குக் குறைவாகவுமிருப்பின், சமச்சீரல்லாத சமநிலைத் தானம் ஒன்றிருக்கிறதென நிறுவி, இது உறுதியானதெனக் காட்டுக. (H.C.)

22. W நிறையும் a நீளமுமுள்ள ஒரு சீரான கோல் AB, அதன் நிலைத்த முனை A பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியது. B உடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஒரு நுண்ணிழை, A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே, A இலிருந்து $h(>a)$ தூரத்திலிருக்கும் ஓர் ஒப்பமான கப்பிமேலாகச் சென்று நிறை w ஐத் தாங்குகின்றது.

$$\frac{h+a}{h} > \frac{2w}{W} > \frac{h-a}{h}$$

ஆயின், AB நிலைக்குத்தாக இருக்கும் இரு தானங்கள் சமநிலையின் உறுதித் தானங்கள் எனக் காட்டுக. (H.C.)

23. W நிறையுள்ள ஒரு சீரான சதுரப் பொறிக்கதவு ABCD, கிடையான விளிம்பு AB பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியது. $\frac{1}{2}$BC நீளமும் $\frac{1}{2}$W மீள்தன்மை மட்டுமுடைய ஒரு மீள்தன்மை நாணின் ஒரு நுனி, AB இன் நடுப் புள்ளிக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே, BC இற்குச் சமமான உயரத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு வளையத்துடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. மற்றைய நுனி, CD இன் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கப் பெற்றுள்ளது. இக்கதவு நிலைக்குத்துடன் 60° கோணத்திற் சமநிலையிற் தங்கக்கூடியதெனவும் இச்சமநிலை உறுதியானதெனவும் நிறுவுக. (H.C.)

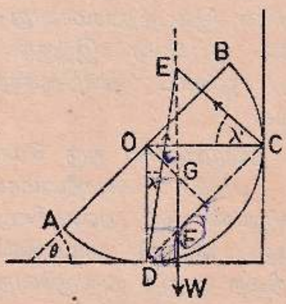
§190. பின்வரும் உதாரணங்கள் இவ்வதிகாரத்திலும் முன்னைய அதிகாரங்களிலும் கையாளப்பெற்ற முறைகளை எடுத்துக்காட்டுகின்றன. இவற்றுட்சில, ஏற்கெனவே எடுத்து நோக்கப்பெற்றவையிலும் பார்க்க மிகக் கடினமானவை.

உதாரணம் (i).

ஒரு திண்ம அரைக்கோளம், அதனடி கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாயுமாறு தங்கியிருக்கின்றது. இதன் வளைபரப்பு கிடைத் தளமொன்றில் (உராய்வுக் குணகம் μ) தங்கியும், நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் (உராய்வுக் குணகம் μ') சாய்ந்துமிருக்கின்றது. இவ்வரைக்கோளம் நழுவும் தறுவாயிலிருப்பின், $\dfrac{c \text{ சைன்}\theta}{a} = \dfrac{\mu(1+\mu')}{1+\mu\mu'}$ எனக் காட்டுக.

இங்கு a, அரைக்கோளத்தின் ஆரை ; புவியீர்ப்பு மையம் மையத்திலிருந்து c தூரத்தில் சமச்சீரச்சிலுள்ளது.

$\mu = \mu'$ ஆகவும் $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{8}$ ஆகவுமிருக்குமிடத்து, $5\mu > \sqrt{31} - 4$ ஆயின், அரைக்கோளத்திற்கு எல்லைச் சமநிலைத் தானமேதும் இராதெனக் காட்டுக. (C.S.)



படம் 257.

அரைக்கோளத்தின் மையத்தை O (படம் 257) எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், நிலம், சுவர் ஆகியவற்றுடனான

தொடுகைப் புள்ளிகளை முறையே C, D எனவும் கொள்க. நிலம், சுவர் ஆகியவற்றிலுள்ள உராய்வுக் கோணங்களை முறையே λ, λ' என்க.

C இலும் D இலுமுள்ள செவ்வன்கள் O இனூடாகச் செல்கின்றன. அதோடு (CO, DO என்பனவற்றுடன் முறையே கோணங்கள் λ', λ வை ஆக்கும்) C இலும் D இலுமுள்ள விளையுள் மறுதாக்கங்கள், G இனூடான நிலைக்குத்தின்மீது E இற் சந்திக்கவேண்டும்.

G இனூடான நிலைக்குத்தானது DC ஐ F இற் சந்திக்கின்றதென்க.

OD இலிருந்து G, F, ஆகியவற்றின் தூரம் c சைன் θ ஆகும். அதோடு, $\angle ODF = 45°$ என்பதனால்,

$$DF = \sqrt{2}\,c \text{ சைன் } \theta,\quad FC = \sqrt{2}\,a - \sqrt{2}\,c \text{ சைன் } \theta.$$

முக்கோணி DEC இல்,

$$\sqrt{2}\ a \text{ கோதா } 45° = \sqrt{2}\ c \text{ சைன் } \theta \text{ கோதா } \lambda$$
$$-\sqrt{2}\ (a - c \text{ சைன் } \theta) \text{ தான் } \lambda',$$

$$\therefore\ a = c \text{ சைன் } \theta \ (\text{கோதா } \lambda + \text{தான் } \lambda') - a \text{ தான் } \lambda',$$

$$\therefore\ \frac{c \text{ சைன் } \theta}{a} = \frac{1 + \text{தான் } \lambda'}{\text{கோதா } \lambda + \text{தான்} \lambda'} = \frac{\mu(1+\mu')}{1+\mu\mu'}.$$

$\mu = \mu'$ ஆகவும், $\frac{c}{a} = \frac{3}{8}$ ஆகவும் இருக்குமிடத்து,

$$\text{சைன் } \theta = \frac{8\,\mu\,(1+\mu)}{3\,(1+\mu^2)}.$$

எனவே, சமநிலை எல்லைச்சம நிலையாக இருக்கவேண்டின்,

$$8\mu + 8\mu^2 < 3 + 3\mu^2,$$

அல்லது
$$5\mu^2 + 8\mu - 3 < 0,$$

அல்லது
$$(\mu + \tfrac{4}{5})^2 < \tfrac{31}{25},$$

அல்லது
$$5\mu < \sqrt{31} - 4.$$

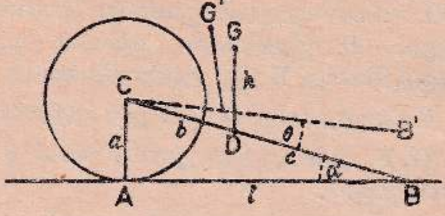
உதாரணம் (ii).

தரைமீது தங்கும் ஒரு வானூர்தி, முற்பக்கத்தில் a ஆரையுள்ள ஒரு சோடி சில்லுகளினாலும், பிற்பக்கத்தில் ஒரு வால் தாங்கியினாலும் தாங்கப் பட்டுள்ளது. இவ்வால் தாங்கி, சில்லுகளின் தொடுகைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிலிருந்து l தூரத்தில் தரையைத் தொடுகின்றது. வானூர்தி θ என்னும் கோணத்தினூடாக ஒருச்சாய்க்கப்படுமிடத்து, வால் தாங்கியைத் தாங்கத் தேவையான நிலைக்குத்து விசை தரைமீதுள்ள தொடக்க அமுக்கத்தின் அரைவாசியெனக் காணப்பட்டுள்ளது. வானூர்தி,

$$\text{கோதா}^{-1}\tfrac{1}{2}\left(\text{கோதா } \theta - \frac{a}{l}\right)$$

இலும் அதிகமான மொத்தக் கோணத்தூடாக ஒருச்சாய்க்கப்படின், அது மூக்கில் தரையைத் தொடுமென நிறுவுக. (C.S.)

படம் 258, வானூர்தி மையத்தினூடான நிலைக்குத்து வெட்டொன்றையும், C, அச்சாணியையும், A, சில்லுகளின் தொடுகைக் கோட்டினையும், B, வால் தாங்கியின் தொடுகைப் புள்ளியையும் குறிக்கின்றன.



படம் 258.

புவியீர்ப்பு மையத்தினை G என எடுக்க. G இனூடான நிலைக்குத்தானது CB ஐ D இற் சந்திக்கிறதெனக. இங்கு $CD = b$, $DB = c$; அதோடு $GD = h$, $\angle ABC = \alpha$.

B இல் தரைமீதுள்ள அமுக்கம் R ஆயின், A பற்றித் திருப்பு திறன்களைக் கணிக்க,

$$Rl = Wb \text{ கோசை } \alpha.$$

கோணம் θ இனூடாக ஒருச்சாய்க்க G இனூடான நிலைக்குத்திலிருந்து A இன் தூரம் b கோசை $(\alpha-\theta)-h$ சைன் θ ஆகின்றது ; B இனூடான நிலைக்குத்திலிருந்து A இன் தூரம் $(b+c)$ கோசை $(\alpha-\theta)$ ஆகின்றது.

A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\frac{R}{2}(b+c) \text{ கோசை } (\alpha-\theta) = W\left[b \text{ கோசை } (\alpha-\theta) - h \text{ சைன் } \theta\right],$$

$$\therefore h \text{ சைன் } \theta = b \text{ கோசை } (\alpha-\theta) - \frac{b \text{ கோசை } \alpha}{2l}(b+c) \text{ கோசை } (\alpha-\theta),$$

$$= b \text{ கோசை } (\alpha-\theta)\left[1-\frac{(b+c) \text{ கோசை } \alpha}{2l}\right] = \tfrac{1}{2} b \text{ கோசை } (\alpha-\theta).$$

C இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே G அமையுமாறு கோணம் ϕ இனூடாக ஒருச்சாய்க்கப்படும்போது, அ–து. b கோசை $(\alpha-\phi) = h$ சைன் ϕ ஆக இருக்கும் போது வானூர்தி தரையைத் தொடும்.
எனவே,

$$b \text{ கோசை } (\alpha-\phi) = \frac{b \text{ கோசை } (\alpha-\theta) \text{ சைன் } \phi}{2 \text{ சைன் } \theta}$$

இனால் ϕ தரப்படுகின்றது.

$\therefore$ கோசை α கோதா ϕ + சைன் $\alpha = \frac{1}{2}$ கோசை α கோதா $\theta + \frac{1}{2}$ சைன் α,

$$\therefore \text{ கோதா } \phi = \tfrac{1}{2} \text{ கோதா } \theta - \tfrac{1}{2} \text{ தான் } \alpha = \tfrac{1}{2}\left(\text{கோதா } \theta - \frac{a}{l}\right).$$

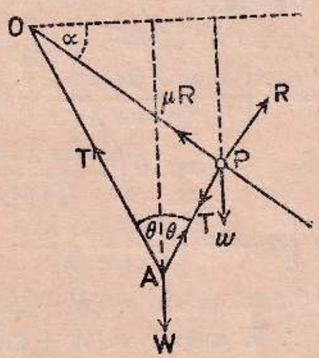
✓ உதாரணம் (iii).

l நீளமுள்ள ஓர் இலேசான இழையில், W நிறையுடைய பாரமுள்ள ஒப்பமான வளையமொன்று கோக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் ஒரு நுனி, கிடையுடன் α கோணத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு முரடான கோலின் மேன்முனை O இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டும், மற்றைய நுனி, இக்கோலின் வழியே வழுவவல்ல w நிறையுள்ள P என்னும் இன்னொரு வளையத்துடன் இணைக்கப்பெற்றுமுள்ளது. OP $= x$ ஆகவும், இழையின் இரு பாகங்களும் 2θ கோணத்திற் சாய்ந்துமிருப்பின், எல்லைச் சமநிலைத் தானங்கள்,

$x = \dfrac{l \text{ சைன் } \theta}{\text{கோசை } \alpha}$ இனாலே தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக. இங்கு θ,

$$W \text{ தான் } \theta = (2w + W) \text{ தான் } (\alpha \pm \lambda)$$

இனாலே தரப்படும் பெறுமதிகள் எதையும் கொண்டிருக்கும்; λ, உராய்வுக் கோணம்.



படம் 259.

நிறை W இன் தானத்தை A (படம் 259) எனவும், இழையை OAP எனவும், கோலில் வளையம் w இன் தானத்தை P எனவும் கொள்க.

W ஒப்பமாகவும் இழைமீது சுயாதீனமாய் நகரக்கூடியதாகவும்இருப்பதனால், AO, AP ஆகியன நிலைக்குத்துடன் θ என்னும் சமகோணங்களை ஆக்குகின்றன.

கிடைமீது OA, AP ஆகியனவற்றின் எறியங்களிரண்டும் சேர்ந்து l சைன் θ இற்குச் சமம்; OP இன் எறியம் OP கோசை α ஆகும்.

$$\therefore \ x \text{ கோசை } \alpha = l \text{ சைன் } \theta.$$

P இல் செவ்வன் மறுதாக்கத்தை R எனவும், இழையில் இழுவையை T எனவும், உராய்வுக் குணகத்தினை μ எனவும் கொள்க.

நிலைக்குத்தாக W இற்குத் துணிக்க,

$$2T \text{ கோசை } \theta = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

கோலின் வழியாக w இற்குத் துணிக்க,

$$\mu R = w \text{ சைன் } \alpha + T \text{ கோசை } \left[90 - (\alpha - \theta)\right]$$

$$= w \text{ சைன் } \alpha + T \text{ சைன் } (\alpha - \theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

கோலிற்குச் செங்குத்தாக w இற்குத் துணிக்க,

$$R = w \text{ கோசை } \alpha + T \text{ கோசை } (\alpha - \theta) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

$\therefore\ \mu w \text{ கோசை } \alpha + \mu T \text{ கோசை } (\alpha - \theta) = w \text{ சைன் } \alpha + T \text{ சைன் } (\alpha - \theta)$,

$\therefore$ (i) ஐப் பயன்படுத்த,

$$\mu w \text{ கோசை } \alpha + \frac{\mu W \text{ கோசை } (\alpha - \theta)}{2 \text{ கோசை } \theta} = w \text{ சைன் } \alpha + \frac{W \text{ சைன் } (\alpha - \theta)}{2 \text{ கோசை } \theta},$$

$$\therefore\ 2w\left(\text{சைன் } \alpha - \frac{\text{சைன் } \lambda \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \lambda}\right) = W\,(\mu \text{ கோசை } \alpha$$

$$+ \mu \text{ சைன் } \alpha \text{ தான் } \theta - \text{சைன் } \alpha + \text{கோசை } \alpha \text{ தான் } \theta).$$

$$\therefore\ 2w\,\frac{\text{சைன் } (\alpha - \lambda)}{\text{கோசை } \lambda} = W\left[\frac{\text{சைன் } \lambda \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \lambda} - \text{சைன் } \alpha\right.$$

$$\left. + \text{ தான் } \theta\left(\frac{\text{சைன் } \lambda \text{ சைன் } \alpha}{\text{கோசை } \lambda} + \text{கோசை } \alpha\right)\right],$$

$$= W\left[\text{தான் } \theta\,\frac{\text{கோசை } (\alpha - \lambda)}{\text{கோசை } \lambda} - \frac{\text{சைன் } (\alpha - \lambda)}{\text{கோசை } \lambda}\right],$$

$$\therefore\ W \text{ தான் } \theta \text{ கோசை } (\alpha - \lambda) = (W + 2w) \text{ சைன் } (\alpha - \lambda),$$

$$\therefore\ W \text{ தான் } \theta = (W + 2w) \text{ தான் } (\alpha - \lambda).$$

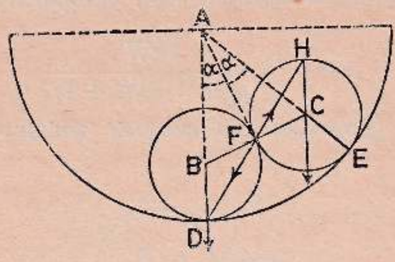
α, λ இனும் சிறியதாகவிருப்பின், OP உடன் AP ஆக்கும் கோணம் விரிகோணமாகும். அதோடு, மேலுள்ள முடிபிலிருக்கும் கோணம் $(\alpha - \lambda)$, $(\alpha + \lambda)$ ஆகின்றது.

உதாரணம் (iv).

ஓர் உருளை, இடையான அச்சினையுடையதும் இவ்வச்சில் 2α கோணத்தை எதிரமைப்பதுமான ஒரு நிலைத்த பொள்ளுருளையின் உட்புறத்தில் தங்கியிருக்கின்றது முன்னைய உருளைக்குச் சமமான வேறோர் உருளை, முன்னைய உருளையைக் குழப்பாது இரண்டும் தொடுகையுடன் தங்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. பரப்புக்கள் சமமுரடானவையாயின், $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, α ஆகிய இரண்டிலும் பார்க்க உராய்வுக் கோணம் அதிகமானதாக இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக.

(C.S.)

உருளைகளின் மையங்களை A, B, C (படம் 260) எனவும் தொடுகைப் புள்ளிகளை D, E, F எனவும் கொள்க.



படம் 260.

கீழுருளையின் சமநிலையை எடுத்துநோக்குக.

D இலுள்ள நிறை, விளையுள் மறுதாக்கம் ஆகிய இரண்டும் இப் புள்ளியிற் செயற்படுகின்றன. எனவே, சமநிலையின் பொருட்டு F இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கமும் D இனூடாகச் செல்லவேண்டும்.

ஆகவே, F இலுள்ள உராய்வுக் கோணமானது $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ இற்குச் சமமான BFD இலும் குறையலாகாது.

(D இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் DB, DF ஆகியவற்றினிடையே செயற்படுகின்றது.)

மேலுருளையின் சமநிலையை எடுத்துநோக்குக.

F இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் C இனூடான நிலைக்குத்தினைப் பரிதியின்மீது H இற் சந்திக்கின்றது. எனவே, E இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கமும் H இனூடாகச் செல்ல வேண்டும்.

இங்கு, $\angle HCA = \angle BAC = 2\alpha,$

அதோடு, $\angle HEC = \frac{1}{2} \angle HCA = \alpha.$

எனவே, E இலுள்ள உராய்வுக் கோணம் α இலும் குறையலாகாது. பரப்புக்கள் சம முரடானவையாகையால், உராய்வுக் கோணமானது $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ அல்லது α இலும் குறையலாகாது.

உதாரணம் (v).

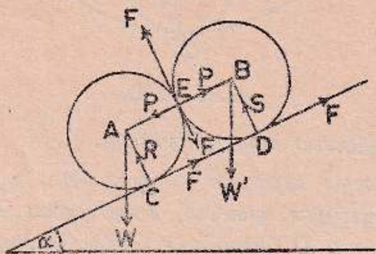
சம ஆரையும், W′, W என்னும் சமமில்லாத நிறைகளுமுடைய இரு உருளைக் குற்றிகள், அவற்றின் அச்சுக்கள் கிடையாகவும், பாரமான குற்றியானது மேலேயும் இருக்குமாறு ஒரு சாய்தளத்தின்மீது ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு தங்கியிருக்கவேண்டின், (ஒவ்வொரு தொடு

கைக் கோட்டிலும் ஒரேயளவினதெனக் கருதப்படும்) உராய்வுக் குணகம் μ, $\dfrac{W'+W}{W'-W}$ இற்கு மேற்படவேண்டுமென்றும், தளத்தின் சாய்வு,

$$\text{தான்}^{-1} \frac{2\mu W'}{(\mu+1)(W'+W)}$$

இலும் குறைவாக இருக்கவேண்டுமென்றுங் காட்டுக. இங்கு $W' > W$.

(C.S.)



படம் 261.

குற்றிகளின் மையங்களை A, B (படம் 261) எனவும், தளத்துடன் அவற்றின் தொடுகைப் புள்ளிகளை C, D எனவும், அவை ஒற்றையொன்று தொடும் புள்ளியை E எனவுங் கொள்க.

C, D, E ஆகியவற்றிலுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கங்களை முறையே R, S, P என்க.

மையங்களைப் பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க, ஒவ்வொரு தொடுகைப் புள்ளியிலுமுள்ள உராய்வு விசைகள் சமமாக இருக்கவேண்டுமென்பது தெளிவாகின்றது. இவை ஒவ்வொன்றும் F இற்குச் சமமென்க.

E இல் சறுக்குதல் ஏற்படமுடியுமாயின், தளத்தின் சாய்வு எதுவெனினும் கீழுருளை கீழ்நோக்கி உருளும்.

கீழுருளை, C பற்றி உருளாது தடுக்க,

$$Fa = Pa + Wa \text{ சைன் } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

ஆக இருக்கவேண்டும். அதோடு, மேலுருளை D பற்றி உருளாது தடுக்க,

$$Fa + Pa = W'a \text{ சைன் } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (ii)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலுமிருந்து,

$$F = \tfrac{1}{2}(W+W') \text{ சைன் } \alpha,$$
$$P = \tfrac{1}{2}(W'-W) \text{ சைன் } \alpha.$$

அதோடு μP, F இலும் குறையலாகாது,

$$\therefore \mu \nless \frac{W'+W}{W'-W}.$$

μ, இப்பெறுமதியிலும் அதிகமாக இருப்பின், **E** இல் சறுக்குதலேதும் நிகழாது. எனினும், இவ்விடத்து **D** இலுள்ள தொடுகைப் புள்ளி கீழ் நோக்கிச் சறுக்கும் அதே நேரத்தில் இரு உருளைகளும் ஒன்றன்மீது ஒன்று **E** இல் உருளுமாறு மேலுருளை உருளுவதும் கீழுருளை **C** பற்றி உருளுவதும் சாத்தியமாகும்.

D இலுள்ள உராய்வு போதாமலிருப்பின் இது நிகழும்,

மேலுருளைக்கு **E** பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Sa = W'a \text{ கோசை } \alpha - Fa,$$

$$\therefore S = W' \text{ கோசை } \alpha - \tfrac{1}{2}(W + W') \text{ சைன் } \alpha,$$

அதோடு, **D** இல் கீழ்நோக்கும் சறுக்குதலேதும் ஏற்படாதிருக்க வேண்டின்,

$$\mu S + P \nless W' \text{ சைன் } \alpha,$$

$\therefore \mu W' \text{ கோசை } \alpha - \frac{1}{2}\mu\ (W + W') \text{ சைன் } \alpha + \frac{1}{2}\ (W' - W) \text{ சைன் } \alpha \nless$ W' சைன் α,

$$\therefore \text{ தான் } \alpha\left[W' - \tfrac{1}{2}(W' - W) + \tfrac{1}{2}\mu(W + W')\right] \ngtr \mu W',$$

$$\therefore \text{ தான் } \alpha\ (W + W')\frac{1+\mu}{2} \ngtr \mu W',$$

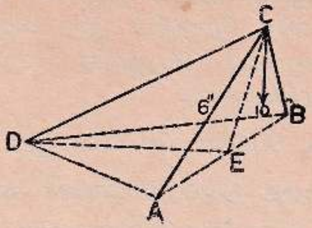
$$\therefore \text{ தான் } \alpha \ngtr \frac{2\mu W'}{(W + W')\,(1+\mu)}.$$

W′, W இலும் அதிகமாக இருந்தாலொழிய, சமன்பாடுகள் (i) உம் (ii) உம் பொருந்தாதிருப்பதுடன், சமநிலை சாத்தியமாகா தென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

உதாரணம் (vi).

ஒவ்வொன்றும் 6 அங்குல நீளமான AC, BC என்னும் இரு இலேசான கோல்கள், ஒரே கிடைத் தளத்தில் 6 அங்குல இடைத்தூரத்திலிருக்கும் A, B என்னும் நிலைத்த புள்ளிகளுடன் சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டுள்ளன ; C இல் 10 இரு. நிறையொன்று தொங்குகிறது. தளம் ABC நிலைக்குத்துடன் சாய்ந்திருக்குமாறு, இத்தொகுதி A, B, ஆகியவற்றின் அதே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் D என்னும் ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள 9 அங்குல நீளமுள்ள ஓர் இழை CD இனூற் சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது ; முக்கோணி ABD சமபக்கமுள்ளது. கோல்களிலுள்ள உதைப்புக்களையும் இழையிலுள்ள இழுவையையுங் காண்க. (Ex.)

AB இன் நடுப்புள்ளியை E (படம் 262) என்க.



படம் 262.

$$DE = CE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{ கோசை } DEC = \frac{27+27-81}{2\times 27} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle DEC = 120^\circ.$$

சமச்சீர்ப்படி, BC, AC, ஆகியவற்றிலுள்ள உதைப்புக்கள் EC வழியே ஓர் உதைப்பிற்குச் சமவலுவுள்ளன. இவ்வுதைப்பினை R என்க ; இழையிலுள்ள இழுவையை T என்க.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$R \text{ கோசை } 30^\circ - T \text{ கோசை } 60^\circ = 10 \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

கிடையாகத் துணிக்க,

$$R \text{ கோசை } 60^\circ = T \text{ கோசை } 30^\circ \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore R = \sqrt{3}\ T,$$

அதோடு, (i) இலிருந்து $3T - T = 20$,

$$\therefore T = 10 \text{ இரு. நிறை.}$$

$$\therefore R = 10\sqrt{3} \text{ இரு. நிறை.}$$

AC இலும் BC இலுமுள்ள உதைப்பு T′ ஆயின்,

$$2T' \text{ கோசை } 30^\circ = R = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore T' = 10 \text{ இரு. நிறை.}$$

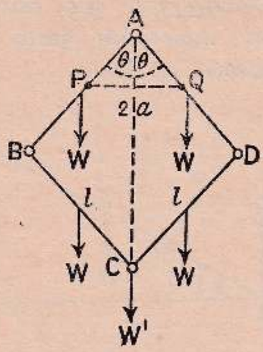
உதாரணம் (vii).

W நிறையும் l நீளமுமுள்ள கோல்களை ஒப்பமான மூட்டுக்களைக் கொண்டு இணைத்து உருவாக்கப்பெற்றுள்ள ஒரு சாய்சதுரம், அதனிரு மேற் பக்கங்கள், ஒரே மட்டத்தில் $2a$ இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகளைத் தொடுமாறு சமச்சீராகத் தங்கியிருக்கின்றது. அடிப்

புள்ளியில் W′ நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் நிலைக்குத்துடன் θ என்னும் கோணத்தை ஆக்கின்,

$$\text{சைன்}^3\theta = \frac{a\,(4W + W')}{l(4W + 2W')}$$

எனக் காட்டுக. C.S.



படம் 263.

சாய்சதுரத்தினை ABCD (படம் 263) உம், மூளைகளின் தானங்களை P, Q, என்பனவும் குறிப்பதாகக் கொள்க.

PQ இற்குக் கீழாக, AB அல்லது AD இன் புவியீர்ப்பு மைய ஆழம், $\frac{l}{2}$ கோசை $\theta - a$ கோதா θ ஆகும். அதோடு, PQ இற்குக் கீழாக, BC அல்லது AD இன் புவியீர்ப்பு மைய ஆழம், $\frac{l}{2}$ கோசை $\theta - a$ கோதா $\theta +$ l கோசை θ, அல்லது $\frac{3l}{2}$ கோசை $\theta - a$ கோதா θ ஆகும்.

C இன் ஆழம், $\frac{l}{2}$ கோசை $\theta - a$ கோதா $\theta + \frac{3l}{2}$ கோசை θ, அல்லது $2l$ கோசை $\theta - a$ கோதா θ ஆகும்.

ஒரு சிறிய பெயர்ச்சி $d\theta$ இற்குரிய மாயவேலைச் சமன்பாடு,

$$2Wd\left(\frac{l}{2}\text{கோசை }\theta - a\text{ கோதா }\theta\right) + 2Wd\left(\frac{3l}{2}\text{கோசை }\theta - a\text{ கோதா }\theta\right) + W'd(2l\text{ கோசை }\theta - a\text{ கோதா }\theta) = 0,$$

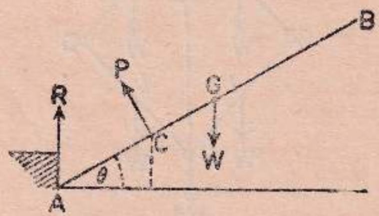
$$\therefore -Wl\text{ சைன் }\theta + 2\,Wa\text{ கோசீ}^2\theta - 3Wl\text{ சைன் }\theta + 2Wa\text{ கோசீ}^2\theta - 2W'l\text{ சைன் }\theta + W'a\text{ கோசீ}^2\theta = 0,$$

$$\therefore \text{சைன்}^3\theta(4Wl + 2W'l) = 4Wa + W'a,$$

$$\therefore \text{சைன்}^3\theta = \frac{a(4W + W')}{l\,(4W + 2W')}.$$

உதாரணம் (viii).

ஒரு மனிதன் சீரான பலகையொன்றை ஒரு நிலைக்குத்துத் தானத்திலிருந்து தரைக்குத் தாழ்த்துகின்றான். இம்மனிதன் பலகையின் கீழ் முனையை ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துப் படிக்கெதிராக வைத்து, தரைக்கு மேலாக எப்பொழுதும் 6 அடியிலிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் பலகைமீது அதன் நீளத்திற்குச் செங்குத்தாக ஒரு விசையினை உஞற்று மாறு பின்னோக்கி நடக்கின்றான். பலகையின் நீளம் $18\sqrt{3}$ அடியிலும் அதிகமாயின், அது நழுவுமெனக் காட்டுக. (C.S.)



படம் 264.

பலகை தரையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கும் போது அதனை AB (படம் 264) குறிக்கிறதெனக. அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G எனவும், மனிதன் விசையைப் பிரயோகிக்கும் புள்ளியை C எனவுங் கொள்க.

A இல், தரையின் நிலைக்குத்து மறுதாக்கம் R ஆயின், R மறையுமிடத்துப் பலகை நழுவும்.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$P \text{ கோசை } \theta + R = W.$$

A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$P \frac{6}{\text{சைன்}\theta} = wl \text{ கோசை } \theta \text{ ; இங்கு, } 2l = AB \text{ இன் நீளம்.}$$

$$\therefore\ R = W - W \frac{l \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை}^2\theta}{6}.$$

எனவே $\frac{l}{6}$ சைன் θ கோசை$^2\theta = 1$ ஆகவிருக்கும்போது, R மறையும்.

$$\therefore\ l \ngtr \frac{6}{\text{சைன் } \theta \text{ கோசை}^2\theta}.$$

சைன் θ கோசை$^2\theta$ இன் உயர்வுப் பெறுமதியை அறிய வகையிட,

$$\text{கோசை}^3\theta - 2 \text{ சைன்}^2\theta \text{ கோசை } \theta = 0,$$

$$\therefore\ \text{கோசை } \theta = 0, \text{ அல்லது தான் } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

முன்னைய பெறுமதி சாத்தியமாகாதது. அதோடு, பின்னைய பெறுமதியிலிருந்து,

கோசை $\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ உம், சைன் $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ உம் ஆகும். இப்பெறுமதிகளிலிருந்து,

$$\frac{6}{\text{சைன் } \theta \text{ கோசை}^2\theta} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = 9\sqrt{3}.$$

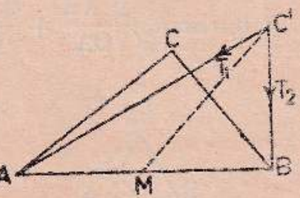
அன்றியும், l, இவ்விழிவுப் பெறுமதியிலும் அதிகரிக்கலாகாது. ஆகவே, உயர்வு நீளம் $18\sqrt{3}$ அடியாகும்.

உதாரணம் (ix).

ஒரே மீள்தன்மை மட்டுள்ள CA, CB என்னும் இரு இலேசான மீள் தன்மை இழைகளுடன் C என்னும் ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. C இன் அதே கிடைத் தளத்தில் இருக்கும் A, B என்னும் புள்ளிகளுடன் முறையே இணைக்கப்பெற்றுள்ள இவ்விழைகள் மட்டுமட்டாக இறுக்கப்பட்டுள்ளன. அத்துணிக்கை, அதனை C′ என்னும் புதிய தானத்திற்கு நகர்த்தும் ஒரு விசையினுல் AB இன் நடுப்புள்ளி M இலிருந்து தள்ளப்படுகின்றது.

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AC'} = \frac{1}{BC} - \frac{1}{BC'}$$

என நிறுவுக. (N.U.)



படம் 265.

படம் 265 தொடக்க, பெயர்ந்த தானங்களைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. AC′, BC′, என்பனவற்றிலுள்ள இழுவைகளை முறையே T_1, T_2, என்க.

மீள்தன்மை மட்டு E ஆயின்,

$$T_1 = E\frac{AC' - AC}{AC}, \; T_2 = E\frac{BC' - BC}{BC}.$$

MC′ இற்குச் செங்குத்தாகத் துணிக்க,

$$T_1 \text{ சைன் } AC'M = T_2 \text{ சைன் } BC'M.$$

ஆனல்,

$$\frac{\text{சைன் } BC'M}{\text{சைன் } AC'M} = \frac{AC'}{BC'},$$

$$\therefore \frac{AC'-AC}{AC} = \frac{BC'-BC}{BC} \cdot \frac{AC'}{BC'},$$

$$\therefore \frac{1}{AC} - \frac{1}{AC'} = \frac{1}{BC} - \frac{1}{BC'}.$$

உதாரணம் (x).

ஒரு குறுக்கோடி, சமநிலையிலுள்ள P, Q, R என்னும் மூன்று விசைகளின் OA, OB, OC என்னும் தாக்கக் கோடுகளை முறையே புள்ளிகள் A, B, C என்பனவற்றில் வெட்டின், குறி வழக்கினைக் கொண்டு,

$$\frac{P}{OA.BC} = \frac{Q}{OB.CA} = \frac{R}{OC.AB}$$

என நிறுவி,

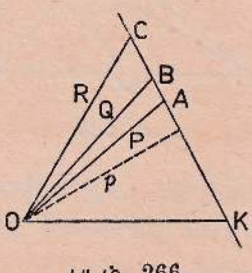
$$\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} + \frac{R}{OC} = 0$$

என்பதை உய்த்தறிக.

ஒரு புள்ளியில் முறையே OA, OB, OC. . .என்னும் கோடுகளில் தாக்கும் P, Q, R முதலான விசைகள் சமநிலையிலிருக்குமாயினும், K என்னும் ஏதாவதொரு புள்ளி அக்கோடுகளை A, B, C . . . இல் வெட்டும் குறுக்கோடியொன்றின் மீதிருக்குமாயினும், பின்பு

$$\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} + \frac{R}{OC} \ldots = 0 \text{ எனவும், } \frac{P.AK}{OA} + \frac{Q.BK}{OB} + \frac{R.CK}{OC} + \ldots = 0$$

எனவுங் காட்டுக. (Ex.)



படம் 266.

விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதனல் P, R ஆகியன முறையே OA, OC ஆகிய திசைகளிற் செயற்படின், Q என்பது B இலிருந்து O இற் செயற் படவேண்டுமென்று படம் 266 இலிருந்து தெளிவாகின்றது. லாமியின் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{P}{\text{சைன் BOC}} = \frac{Q}{\text{சைன் AOC}} = \frac{R}{\text{சைன் AOB}}.$$

அன்றியும், முக்கோணி OBC இல்,

$$\frac{\text{சைன் OCB}}{OB} = \frac{\text{சைன் BOC}}{BC},$$

அதோடு, முக்கோணி OAC இல்,

$$\frac{\text{சைன் OCA}}{OA} = \frac{\text{சைன் AOC}}{AC},$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\text{சைன் BOC}}{\text{சைன் AOC}},$$

$$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{\text{சைன் BOC}}{\text{சைன் AOC}} = \frac{OA.BC}{OB.AC},$$

$$\therefore \frac{P}{OA.BC} = \frac{Q}{OB.AC} = \frac{Q}{OB.CA},$$

இங்கு, P இற்கு எதிரான திசையில் Q இருப்பதனுல், BC இற்கு எதிரான திசையில் CA இருக்கின்றது, அ-து. CA மறையானது. இதே மாதிரியாக மற்றைய சமன்பாட்டிற்கும். ஒவ்வொரு பின்னத்தையும் k இற்குச் சமனுக்க, அத்துடன் CA = − AC என்பதனுல்,

$$\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} + \frac{R}{OC} = k(BC + CA + AB) = 0.$$

O இலிருந்து குறுக்கோடிமீது வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தினை p என்க. இக்குறுக்கோடிக்குச் செங்குத்தாக விசைகளினது துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

எனவே, P சைன் $A + Q$ சைன் $B + R$ சைன் $C \; . \; . \; . = 0.$

$$\therefore \frac{Pp}{OA} + \frac{Qp}{OB} + \frac{Rp}{OC} + \; . \; . \; . = 0,$$

$$\therefore \frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} + \frac{R}{OC} + \; . \; . \; . = 0.$$

குறுக்கோடியிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியை K என்க. OK ஐ இணைக்க.

$$\frac{\text{சைன் AOK}}{\text{சைன் K}} = \frac{AK}{OA}, \quad \frac{\text{சைன் BOK}}{\text{சைன் K}} = \frac{BK}{OB},$$ இவ்வாறே மற்றவையும்.

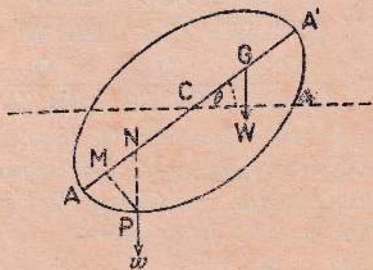
OK இற்குச் செங்குத்தாக விசைகளினது துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

$$\therefore P \text{ சைன் AOK} + Q \text{ சைன் BOK} + \; . \; . \; . = 0,$$

$$\therefore \frac{P.AK}{OA} + \frac{Q.BK}{OB} + \frac{R.CK}{OC} + \; . \; . \; . = 0.$$

உதாரணம் (xi).

$2a$, $2b$ ($a > b$) ஆகியவற்றை அச்சுக்களாகக் கொண்ட ஒரு மெல்லிய ஒப்பமான நீள்வளையக் குழாய், இதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தானதும் இந்நீள்வளையத்தின் மையத்தினூடாகச் செல்வதுமான ஒரு கிடையச்சுடன் இலேசான ஆரைக்கால்களினால் இணைக்கப்பெற்றுளது. இக்குழாய் W நிறையுள்ளது. இதன் புவியீர்ப்பு மையம் பேரியச்சில், மையத்திலிருந்து d தூரத்திலுள்ளது ; w நிறையுள்ள துணிக்கையொன்று குழாயினுள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. $d >$ அல்லது $< \dfrac{w(a^2-b^2)}{aW}$ என்பதற்கிணங்க, 2 அல்லது 4 சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமென நிறுவுக. (C.S.)



படம் 267.

நீள்வளையத்தின் பேரியச்சினை ACA′ (படம் 267) எனவும், அதன் மையத்தினை C எனவும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத் தானத்தினை G எனவும், அச்சு ACA′ கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருப்பதாகவுங் கொள்க.

துணிக்கை w, இந்நீள்வளையத்திற்குரிய செவ்வன் நிலைக்குத்தாக இருக்கும் P என்னும் ஒரு புள்ளியிலேயே தங்கவல்லது.

இச்செவ்வன், AA′ ஐ N இற் சந்திக்கிறதெனக. அதோடு, (நீள்வளைய அச்சுக்களைச் சார்ந்து) P இன் ஆள்கூறுகளை முறையே a கோசை ϕ, b சைன் ϕ என்க.

. P இலுள்ள செவ்வனின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - a \text{ கோசை } \phi}{\dfrac{\text{கோசை } \phi}{a}} = \frac{y - b \text{ சைன் } \phi}{\dfrac{\text{சைன் } \phi}{b}},$$

$$\therefore \text{ CN} = a \text{ கோசை } \phi - \frac{b^2 \text{ கோசை } \phi}{a} = \frac{(a^2-b^2) \text{ கோசை } \phi}{a},$$

AA′ இற்கு PM செங்குத்தாயின்,

$$\mathrm{MN} = \mathrm{PM}\ \text{தான்}\ \theta,$$

$$\therefore a\ \text{கோசை}\ \phi - \mathrm{CN} = b\ \text{சைன்}\ \phi\ \text{தான்}\ \theta,$$

$$\therefore \frac{b^2\ \text{கோசை}\ \phi}{a} = b\ \text{சைன்}\ \phi\ \text{தான்}\ \theta,$$

$$\therefore \text{தான்}\ \phi = \frac{b}{a}\text{கோதா}\ \theta,$$

அதோடு, $$\text{கோசை}\ \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2\ \text{கோதா}\ ^2\theta}}.$$

C பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mathrm{W}.\, d = w.\ \mathrm{CN},$$

$$\therefore \mathrm{W}.\, d = w\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2\ \text{கோதா}\ ^2\theta}},$$

$$\therefore a^2 + b^2\ \text{கோதா}\ ^2\theta = \left[\frac{w\,(a^2 - b^2)}{\mathrm{W}d}\right]^2,$$

$$\therefore b\ \text{கோதா}\ \theta = \frac{\sqrt{[w\,(a^2 - b^2) - a\mathrm{W}d]\,[w(a^2 - b^2) + a\mathrm{W}d]}}{\mathrm{W}d}.$$

இப்பொழுது, $d > \dfrac{w(a^2 - b^2)}{a\mathrm{W}}$ ஆயின், மூலக்குறியுள் அடங்கிய கோவை மறையாக இருப்பதுடன், θ இற்கு மெய்யான பெறுமானமேதுமிராது.

எனினும், அக்குழாய், பேரியச்சு நிலைக்குத்தாகவும் G ஆனது C இற்கு மேலாக அல்லது கீழாகவும் இருக்குமாறு தங்கியிருக்கக்கூடியது என்பது தெளிவு.

இவ்விடத்து, இரு சமநிலைப் பகுதிகள் இருக்கின்றன.

$d < \dfrac{w\,(a^2 - b^2)}{a\mathrm{W}}$ ஆயின், b கோதா θ இற்கு இரு மெய்ப் பெறுமானங்கள் இருக்கின்றன ; ஒன்று நேர்ப் பெறுமானம், மற்றது மறைப் பெறுமானம்.

எனவே, இவ்விடத்து, பேரியச்சு நிலைக்குத்தாகவிருக்கும் இரு தானங்களைத் தவிர பேரியச்சு நிலைக்குத்து, கிடை ஆகிய இரண்டினுடனும் சாய்ந்திருக்கும் வேறு இரண்டு தானங்களும் இருக்கின்றன.

ஒரு தானத்தில் G என்பது C இன் வலப்புறமாகவும் மற்றையதில் அதன் இடதுபுறமாகவும் (θ ஒரு விரிகோணம்) இருக்கின்றது.

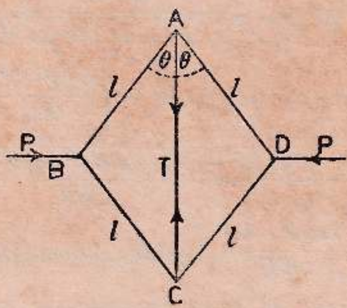
16—R 13456 (10/63)

உதாரணம் (xii) .

மூலைகளிலே சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டுள்ள, ஒவ்வொன்றும் l நீளமுள்ள நான்கு சம கோல்கள் சாய்சதுரம் ABCD ஐ உருவாக்குகின்றன. எதிர் மூலைகள் A, C என்பனவற்றை ஒரு மீள்தன்மை இழை இணைக்கின்றது. ஈர்க்கப்படாதவிடத்து இந்த இழையின் நீளம் $b\ (<2l)$ ஆகும். கோடு BD வழியே B, D ஆகியவற்றில் உட்புறமாகச் செயற்படும் விசைகளினால் இத்தொகுதி சமநிலையிற் பேணப்படுகின்றது.

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} = \frac{\left(\dfrac{b}{2l}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left[1-\left(\dfrac{b}{2l}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

ஆக இருக்கும்போது இவ்விசைகள் உயர்வுப் பெறுமானமொன்றை உடையனவாயிருக்குமெனக் காட்டுக. (C.S.)



படம் 268.

இழையிலுள்ள இழுவையை T எனவும் B, D ஆகியவற்றிற் செயற்படும் விசைகளெவற்றதும் பெறுமதியை P எனவும், கோணம் DAC (படம் 268) ஐ θ எனவுங் கொள்க.

$$\mathrm{AC} = 2l \text{ கோசை } \theta,$$

$$\mathrm{BD} = 2l \text{ சைன் } \theta,$$

$$\mathrm{T} = \frac{2l \text{ கோசை } \theta - b}{b}.$$

மாய வேலைச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$-2\mathrm{T}l \text{ சைன் } \theta + 2\mathrm{P}l \text{ கோசை } \theta = 0$$

எனப் பெறுகின்றேம். ஏனெனில் P என்னும் ஒவ்வொரு விசையும் சாய்சதுர மையத்திற்குக் கிட்டவாக l கோசை $\theta\, d\theta$ தூரம் நகர்ந்திருக்கின்றது.

$$\therefore \mathrm{P} = \mathrm{T} \text{ தான் } \theta = \frac{(2l \text{ கோசை } \theta - b) \text{ தான் } \theta}{b}.$$

$2l$ கோசை $\theta - b$ சீக $^2\theta = 0$ ஆக இருக்கும்போது இது உயர்வாகும்.

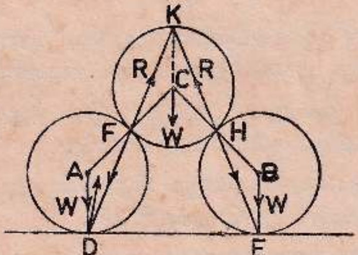
$$\therefore \text{ கோசை } \theta = \left(\frac{b}{2l}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\therefore \text{ சைன் } \theta = \left[1 - \left(\frac{b}{2l}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

அதோடு
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} = \frac{\text{கோசை } \theta}{\text{சைன் } \theta} = \frac{\left(\frac{b}{2l}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left[1 - \left(\frac{b}{2l}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

உதாரணம் (xiii).

ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கும் மூன்று சம தட்டுக்களில் இரண்டு இடை மேசையொன்றின்மீதும் மற்றையது முதலிரண்டின்மீதும் தங்கியிருக்கின்றன. முதலிரண்டு தட்டுக்களும் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருக்கத் தேவையில்லை. தட்டுக்களில் இரண்டின் இடையே சாத்தியமாகக்கூடிய உராய்வுக் குணகத்தின் மிகக் குறைவான பெறுமதி மேசைக்கும் தட்டொன்றுக்கும் இடையே சாத்தியமாகக்கூடிய மிகக் குறைவானதின் மும்மடங்கெனக் காட்டுக. இத்தட்டுக்களைப் போல மூன்று நாணயங்கள் தங்கியிருக்க முடியுமா ? இரு நாணயங்களின் விளிம்புகளிடையே உராய்வுக் குணகம் கிட்டத்தட்ட $\frac{1}{5}$; நாணயமொன்றிற்கும் மேசைக்குமிடையே குணகம் கிட்டத்தட்ட $\frac{1}{4}$. (C.S.)



படம் 269.

தட்டுக்களின் மையங்களை A, B, C (படம் 269) என்க ; நிலத்துடனும் தட்டுக்கள் ஒவ்வொன்றுடனுமான தொடுகைப் புள்ளிகளை D, E, F, H என்க.

தட்டு A ஆனது D பற்றி உருளாதிருக்கவேண்டின் F இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கமானது A இன் நிறையும் A மீதுள்ள நிலத்தின் விளையுள் மறுதாக்கமும் சந்திக்கும் புள்ளி D இனூடாகச் செல்ல வேண்டும்.

பின்பு D இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் DA, DF இடையே எங்கேனும் செயற்படும்.

F இலுள்ள உராய்வுக் குணகம் AFD இலும் குறைவாக இருக்கலாகாது. இந்நிபந்தனை பொருந்தின் F இல் நழுவலேதும் ஏற்படாது.

F இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் C இனூடான நிலைக்குத்தினை மேற் தட்டின் பரிதியின்மீது K இற் சந்திக்கிறது. அதோடு, இப்புள்ளியினூடாக H இலுள்ள மறுதாக்கமும் செல்கின்றது.

$\angle AFD = \theta$ உம், ஒவ்வொரு தட்டினதும் நிறை W உம், F அல்லது H இலுள்ள விளையுள் மறுதாக்கம் R உம் ஆயின்,

$$2\,R \text{ கோசை } \theta = W.$$

F இல் நழுவலேதும் ஏற்படாதிருப்பினும் மேற் தட்டு கீழ்த்தட்டுக்களின் மீது கீழ் **உருளுமாறு** கீழ்த்தட்டுக்கள் D இலும் E இலும் நழுவக்கூடுமென்பது சாத்தியம்.

D இல் செவ்வன் மறுதாக்கம் $\frac{3W}{2}$ உம், உயர்வுராய்வு $\mu \frac{3W}{2}$ உம் ஆகும்.

இது R இன் கிடைக் கூற்றினைச் சமன்செய்யப் போதுமானதாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \mu \frac{3W}{2} = R \text{ சைன் } \theta = \frac{W}{2} \text{ தான் } \theta,$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{3} \text{ தான் } \theta.$$

எனவே தட்டுக்களில் இரண்டினிடையேயுள்ள குணகம் ஒரு தட்டுக்கும் மேசைக்குமிடையேயுள்ள குணகத்தின் மும்மடங்காக இருக்கவேண்டும்.

கீழ்த் தட்டுக்கள் இன்னுங் கூடிய இடைத்தூரத்திலிருக்குமிடத்து கோணம் θ அதிகமாகவிருக்குமென்பது தெளிவு.

கீழ்த் தட்டுக்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமிடத்து θ இன் பெறுமதி மிகக்குறைவாக இருக்கும். இப்பெறுமதி 15°.

பின்பு இரு தட்டுக்களிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் தான் 15° $(2-\sqrt{3}$ அல்லது 0·2679) இலும் குறைவாக இருக்கலாகாது.

ஆகவே சமநிலை சாத்தியமாக வேண்டின் இரு தட்டுக்களிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகத்தின் மிகக் குறைவான பெறுமதி 0·2679 ஆகும்.

குணகம் $\frac{1}{5}$ அல்லது 0·2 ஆயின் சமநிலை அசாத்தியம்; கீழ் நாணயங்கள் உருளும்.

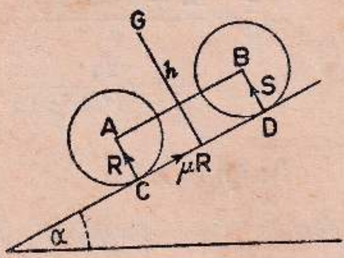
உதாரணம் (xiv).

இருப்புப்பாதைப் பாரவண்டியொன்றின் அச்சாணிகளின் இடைத்தூரம் a ஆகும். புவியீர்ப்பு மையம் இவற்றினிடையே நடுவழியிலும் தண்டவாளங்களிலிருந்து h என்னும் செங்குத்துத் தூரத்திலுமுள்ளது. கீழ்ச்

சில்லுகள் பூட்டப்பட்டிருக்குமிடத்து பாரவண்டி தங்கியிருக்கக்கூடிய அதியுயர் சாய்வு α ஆகும். சில்லுகளுக்கும் தண்டவாளங்களுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம்

$$\frac{2a}{a\ \text{கோதா}\ \alpha + 2h}$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)



படம் 270.

அச்சாணிகளை A, B (படம் 270) எனவும், புவியீர்ப்பு மையத்தினை G எனவும், சில்லுகளினதும் நிலத்தினதும் தொடுகைப் புள்ளிகளை C, D எனவுங் கொள்க.

C, D இலுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கங்களை முறையே R, S எனவும் பாரவண்டியின் நிறையை W எனவுங் கொள்க. பிற்சில்லு சுயாதீனமாய் இருப்பதனால் D இலுள்ள உராய்வு முழுவண்டியின்மீதும் விளைவெதையும் கொண்டிராது. அது பிற்சில்லைச் சுழற்றவே நாடும்.

சாய்வுக்குச் செங்குத்தாகத் துணிக்க,

$$R + S = W\ \text{கோசை}\ \alpha.$$

G பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$\mu Rh + S\frac{a}{2} = R\frac{a}{2},$$

$$\therefore 2\mu R\frac{h}{a} + S = R,$$

$$\therefore R - \frac{2\mu h}{a}R = W\ \text{கோசை}\ \alpha - R,$$

$$\therefore 2R\left(1 - \frac{\mu h}{a}\right) = W\ \text{கோசை}\ \alpha.$$

சாய்வுக்குச் சமாந்தரமாகத் துணிக்க,

$$\mu R = W \text{ சைன் } \alpha,$$

$$\therefore \frac{2W \text{ சைன் } \alpha}{\mu}\left(1 - \frac{\mu h}{a}\right) = W \text{ கோசை } \alpha,$$

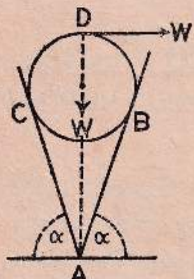
$$\therefore \frac{2}{\mu} - \frac{2h}{a} = \text{கோதா } \alpha,$$

$$\therefore \frac{2}{\mu} = \frac{2h + a \text{ கோதா } \alpha}{a},$$

$$\therefore \mu = \frac{2a}{2h + a \text{ கோதா } \alpha}.$$

பயிற்சி XLI.

1. ஒரு சீருருளை நிலைத்த இரு தளங்களின் மீது படம் 271 இற் போலத் தங்குகின்றது ; தளம் AB ஒப்பமானது. உருளைக்கும் தளம் BC இற்கும் இடையே உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். உருளையின் அதியுயர் பிறப்பாக்கியின் நடுப்புள்ளி D இல் உருளையின் நிறைக்குச் சமமான கிடை விசையொன்று செயற்படுகின்றது. $\frac{\pi}{4}$ இலும் α அதிகமாக இருந்தாலொழிய சமநிலை அசாத்தியமெனவும், $\frac{4}{7}$ இலும் குறைவாக μ இராதவிடத்து



படம் 271.

$$\alpha = \text{தான்}^{-1}\, 2{\cdot}4$$

ஆயின் சமநிலையிருக்குமெனவுங் காட்டுக. (C.S.)

2. சம ஆரையுள்ள இரு வட்டச் சீருருளைகள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு அவற்றின் அச்சுக்கள் கிடையாக இருக்குமாறு சாய்தளமொன்றின்மீது இருக்கின்றன. மேலுருளையின் நிறை கீழுருளை நிறையின் மும்மடங்கு ; பரப்புச் சோடிகளெல்லாம் ஒரே உராய்வுக் குணகம் μ ஐ உடையவை. $\mu < 2$ ஆக இருக்குமிடத்து, கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு எதுவெனினும் சமநிலை அசாத்தியமெனவும், $\mu > 2$ ஆக இருக்குமிடத்து

$$\text{தான்}^{-1} \frac{3\mu}{2(\mu + 1)}$$

இலும் குறைவான சாய்வுகள் எல்லாவற்றிற்கும் சமநிலை சாத்தியமெனவுங் காட்டுக. (C.S.)

3. கிடைப் பேரியச்சிணையுடைய ஒப்பமான நீள்வளைய வில்லொன்றில் ஒரு நுனி பொருந்தியுள்ள c நீளமுள்ள சீர்க் கோலொன்று, இவ்வில்லின் மையத்திலிருந்து h தூரத்தில் ஒப்பமான நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் மற்றைய நுனியிற் சாய்ந்து தங்கியுள்ளது. இந்நீள்வளைய வில்லும் கோலும் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலிருக்கின்றன. கோல் கிடையுடன் θ கோணத்தை ஆக்குமாயின், $2a$, $2b$ நீள்வளைய அச்சுக்களாயிருக்க,

$$2b \text{ தான் } \theta = a \text{ தான் } \phi$$

என நிறுவுக.

$$\text{இங்கு, } a \text{ கோசை } \phi + h = c \text{ கோசை } \theta.$$

$a = 2b = c$, $h = o$ என்னும் சிறப்பு வகையினிடத்து, எண்ணற்ற சம நிலைத்தானங்கள் இருக்குமென நிறுவுக. (C.S.)

4. W நிறையுள்ள AB என்னும் ஒரு சீர்க் கோல் A இலும் C இலும் உள்ள இரு சமமுரடான தாங்கிகளின்மீது கிடையாகத் தங்குகின்றது. BA இற்குச் செங்குத்தானதொரு திசையில் B இல் பிரயோகிக்கப்படுவதும், கோலை அசைக்க வல்லதுமான மிகக் குறைவான கிடை விசை, $4a$ இலும் அதிகமாகவோ குறை வாகவோ $3b$ இருத்தற்கிணங்க, $\frac{1}{2}\mu W$ அல்லது $\mu W \dfrac{b-a}{2a-b}$ ஆக இருக்குமென நிறுவுக. இங்கு $AB = 2a$, $AC = b$, μ உராய்வுக் குணகம். (C.S.)

5. a, b என்னும் அரையச்சுக்களையுடைய நீள்வளைய வடிவச் சீர்க் கம்பியொன்று முளையொன்றின் மேலாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இக் கம்பி இதன் எப்புள்ளியும் முளையைத் தொடுமாறு சமநிலையிலே தங்கி யிருப்பின், உராய்வுக் குணகம் $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$ இலும் குறையலாகாதெனக் காட்டுக. (C.S.)

6. ஒரு சீர்ச் சங்கிலியின் நுனி வளையங்கள், நிலைத்த முரடான கிடைக் கோலொன்றின்மீது வழுக்கிச் செல்லக்கூடியவை. கோலின்மீதுள்ள முளையகல்விற்கும் சங்கிலி நீளத்திற்கும் இடையே விகிதம்,

$$\mu \text{ அசைன் }^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

என நிறுவுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம். (C.S.)

7. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீர்க் கோல், a ஆரையுள்ள ஒரு முரடான நிலைக்குத்து வட்டவளையத்தின் உட்புறத்தில் எல்லைச் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கின்றது. கோல் கிடையுடன்

$$\text{கோதா}^{-1}\left[\frac{a^2 - l^2 - l^2\mu^2}{a^2\mu}\right]$$

என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதென நிறுவுக. இங்கு μ, உராய்வுக் குணகம். (C.S.)

8. 2 அங்குல விட்டமுள்ள மையப் போதிகைகளைப் பற்றிச் சுழலவல்ல 3 அடி விட்டமுள்ள நான்கு நிறையற்ற சம சில்லுகளின்மீது ஒரு கார் தங்கக்கூடியது. ஒவ்வொரு சில்லுக்கும் அதன் போதிகைக்குமிடையே யுள்ள உராய்வுக் கோணம் 18° ஆயின், ஒரு சில்லும் அதன் போதிகை களும் ஒருதனிப் பிறப்பாக்கி வழியே தொடுகையுடனிருப்பதாக மேற்கொண்டு, கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வு ஏறத்தாழ 1° இலும் அதிகமாக இருப்பின். கார் முரடான சாய்தளமொன்றின்மீது தங்கியிருக்காதெனக் காட்டுக.

(C.S.)

9. ஒரு வட்ட உலோகத் தட்டிலிருந்து, இத்தட்டின் OA என்னும் ஆரையை விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டம் துளைக்கப்பட்டுள்ளது. பின்பு இத்தட்டு ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் முரடான இரு சமாந்தரக் கம்பிகளின்மீது தங்குமாறு நிலைக்குத்தாக வைக்கப்பட்டுள்ளது ; தட்டின் தளம் கம்பிகளுக்குச் செங்குத்தாகும். தொடுகை நாண் தட்டின் மையத்தில் 2α என்னும் கோணத்தை எதிரமைக்கின்றது. நிலைக்குத்துடன் OA ஆக்கும் கோணம்

$$\text{சைன்}^{-1}\left(\frac{3\ \text{சைன்}\ 2\epsilon}{\text{கோசை}\ \alpha}\right)$$

இலும் அதிகமாக இருப்பின், தட்டு நழுவுமெனக் காட்டுக. இங்கு ϵ உராய்வுக் கோணம். (C.S.)

10. (பின்புறமிருந்து முன்புறம் வரை) b ஆழமுள்ள ஓர் இலாச்சி முன்புற மையத்திலிருந்து c தூரத்திலுள்ள கைபிடியில் இழுத்து இறுக்கப்படுகின்றது. உராய்வுக் குணகம் $\dfrac{b}{2c}$ ஆகவாவது இருக்க வேண்டு மென நிறுவுக. (C.S.)

11. ஒரு சீர்ச் செவ்வகப் பலகை, அதன் நிலைக்குத்து விளிம்புகளில் ஒவ்வொன்றுகவிருக்கும் இரு புள்ளிகளில் பிரயோகிக்கப்படும் அமுக்கங் களினுல் பலகையின் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் a நீளமான இரு விளிம்புகள் கிடையாகவும் இருக்குமாறு தாங்கப்படுகின்றது. இவ்விரு புள்ளிகளிலும் உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். தாங்கு புள்ளிகளிடையேயுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரம் μa இற்கு மேற்படலாகாதென நிறுவுக. (C.S.)

12. l நீளமும் $2h$ தடிப்புமுள்ள ஒரு சீர்ப் பலகை, a ஆரையுள்ள நிலைத்த முரடான உருளையொன்றின் குறுக்கே சமச்சீராகத் தங்கி யிருக்கின்றது. இவற்றிற்கிடையேயுள்ள உராய்வுக் கோணத்தினை λ எனக் கொண்டு, பலகையை மெல்ல ஒருச்சரிக்குமிடத்து இன்னெரு சமநிலைத் தானத்தினை அடையமுடியுமாறு λ, a, h ஆகியவற்றினிடையேயுள்ள தொடர் பினைக் கண்டு, h இலும் a குறைவாயின் எவ்வளவு உராய்வும் இதனைச் சாத்தியமாக்காதெனக் காட்டுக. (C.S.)

13. ஒரு பலத்த கம்பி AOB, கோணம் $2\alpha^\circ$ ஐ ஆக்குமாறு அதன் நடுப்புள்ளி O இல் வளைக்கப்பெற்றுள்ளது. OA, OB ஆகிய இரு பகுதிகளும் நேரானவை. இக்கம்பி O இலே தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. OA, OB ஆகியவற்றின்மீது வழுக்கிச் செல்லும் இரு வளையங்களுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள (a நீளமுள்ள) இரு சம இழைகளில் W நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இவ்வளையங்களின் நிறை தவிர்க்கத்தக்கதாகவும் வளையங்களுக்கும் கம்பிக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் தான் λ ஆகவுமிருப்பின், W இனது சமநிலையின் அதியுயர் தானத்தினைக் காண்க. இவ்வளையங்கள் பாரமாகவும் ஒவ்வொன்றும் P நிறையுள்ளதாகவும் இழையொன்றிற்கும் கம்பியின் அடுத்துள கீழ்நுனிக்குமிடையேயுள்ள கோணம் θ ஆகவுமிருப்பின், வளையங்களின் அதியுயர் சமநிலைத் தானத்தினிடத்து

$$\text{தான்}\,(\theta + \lambda) = -\frac{W + 2P\,\text{கோசை}^2\,(\alpha + \lambda)}{P\,\text{சைன்}\,(2\alpha + 2\lambda)}$$

என நிறுவுக. (Ex.)

14. W நிறையுள்ள ABCD என்னும் ஒரு சீர்ச் செவ்வகப் பெயர்ப் பலகை, AB மேற் கிடை விளிம்பாகவும், AD நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு, தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள AP, AQ, DR என்னும் மூன்று சம கோல்களினால் ஒரு சுவருக்குச் செங்குத்தாகத் தாங்கப்படுகின்றது. இக்கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது; AQ, DR என்பன சமாந்தரமாகவும் சுவரின் கீழ்நோக்கிச் சரிந்துமுள்ளன; AP மேனோக்கிச் சரிந்துள்ளது. ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் P, Q, R என்னும் புள்ளிகளில் இக்கோல்கள் சுவருடன் பிணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. AB $= a$ அடி, AD $= b$ அடியாயின், அக்கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களையும், AQ இலுள்ள தகைப்பு (i) இழுவை, (ii) நெருக்கல், (iii) பூச்சியமாக இருக்குமிடத்து எந்நிபந்தனைக்குட்பட வேண்டுமென்பதையும் தீர்மானிக்க. (Ex.)

15. சுயாதீனமாய் ஒருங்கே மூட்டப்பெற்றிருக்கும் மூன்று கோல்களினால் உருவாக்கப்படும் ஒரு முக்கோணி ABC, கிடைத் தளமொன்றின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது; B ஆனது AC இலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி Q உடன் ஓர் இறுக்கமான இழையினால் இணைக்கப்பெற்றும், C ஆனது AB இலுள்ள ஒரு புள்ளி R உடன் இணைக்கப்பெற்றுமுள்ளது. இவ்விழைகள் E இற் சந்திக்கின்றன. A இலுள்ள தகைப்பு BC இற்குச் சமாந்தரமாயின், BQ, CR ஆகியவற்றிலுள்ள இழுவைகள் முறையே BE, CE இற்கு விகிதசமமென நிறுவுக. (Ex.)

16. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமானதும் W நிறையுள்ளதுமான சுயாதீனமாய் மூட்டப்பெற்றுள்ள நான்கு சீர்க் கோல்களைக் கொண்டு ABCD என்னும் சாய்சதுரம் உருவாக்கப்பெற்றுள்ளது. இது, AC நிலைக்குத்தாகவும் A உயர்வாகவும் இருக்குமாறும் BC, CD ஆகியன ஒரே மட்டத்தில் $2c$ இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகள் மீது ஒவ்வொன்று

கத் தங்குமாறும் சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சாய்சதுரம், B ஐயும் D ஐயும் இணைக்கும் ஒரு தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள கோலினுல் விழாது தடுக்கப்படுகின்றது. கோணம் BCD, 2θ ஆக இருக்கும்போது கோலி லுள்ள தகைப்பினைக் காண்க. $2c = a$ ஆக இருப்பினும் அச்சட்டப்படல் கோல் BD இல்லாது மூலைகளின்மீது ஒரு சதுர வடிவிலே தாங்கப்பட்டுப் பின்பு விடுவிக்கப்படினும் அது எவ்வாறு நகர ஆரம்பிக்கும்? (H.S.C.)

17. வெவ்வேருன நிறையும் பருமனுமுள்ள இரு ஒப்பமான குண்டு கள், ஒப்பமான மேசையொன்றின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கும் ஓர் ஒப்ப மான அரைக்கோளக் கிண்ணத்தின் உட்புறத்தில் தங்கியிருக்கின்றன. இக்கிண்ணத்தின் விளிம்பின் தளம் இடையுடன் சாய்ந்திருக்குமாயின் கிண்ணம் சமநிலையிலே தங்கியிருக்க முடியாதெனை நிறுவுக. a, b என்னும் ஆரையுள்ள இக்குண்டுகள் ஒரே பொருளினுல் ஆக்கப்பட்டும் கிண்ணத்தின் ஆரை R ஆகவுமிருப்பின்,

$$\mathrm{R} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{(a^2-ab+b^2)}$$

ஆக இருக்குமிடத்து, குண்டுகளின் மையங்களை இணைக்கும் கோடு கிடையான தென நிறுவுக. (Ex.)

18. ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள ஐந்து சமச் சீர்க் கோல்கள் AB, BC, CD, DE, EA, அவற்றின் நுனிப் புள்ளிகளில் ஒருங்கே சுயாதீனமாய் மூட்டப்பெற்றுள்ளன. இவை, கோல்கள் AB, AE என்பன நிலைக்குத் துடன் θ என்னும் ஒரே கோணத்தினையும் கோல்கள் BC, ED என்பன நிலைக்குத்துடன் ϕ என்னும் ஒரே கோணத்தினையும் ஆக்குமாறு மூட்டு A இலிருந்து தொங்குகின்றன. இவ்வுருவமைப்பு B ஐயும் E ஐயும் இணைக் கும் தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு கோலினுற் பேணப்படுகின்றது. மூட்டு C இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்து, கிடைக் கூறுகள் முறையே $\frac{1}{2}$W, W தான் ϕ என நிறுவி, கோல் BE இல் தகைப்பு W(2 தான் θ + தான் ϕ) எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

19. ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழி யாக எழுத்து ஒழுங்குமுறையினுற் காட்டப்பெறும் போக்கில் முறையே விசைகள் lBC, mCA, nAB என்பன செயற்படுகின்றன. இங்கு l, m, n நேரானவை. அவற்றின் தாக்கக் கோடானது BC, CA, AB என்பனவற்றை முறையே $m : n$, $n : l$, $l : m$ என்னும் விகிதங்களில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கிறதெனக் காட்டுக. $l = m = n$ ஆக இருத்தல் பற்றிய சந்தர்ப்பத்தினை ஆராய்க. (H.S.C.)

20. ஓர் அடைத்த நாற்பக்கல் ABCD யின் பக்கங்கள் வழியாக ஒரே போக்கில் அவற்றிற்கு விகிதசமனுகச் செயற்படும் விசைகள் ஓர் இணையை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக. பின்வரும் நிபந்தனைகள் பூர்த்தி

யாக்கப்படின், pAB, qBC, rCD, sDA என்னும் விசைகளும் ஓர் இணையை உருவாக்குமெனக் காட்டுக :—

$\mathrm{AK}_1 = \frac{p}{s}\mathrm{AB}, \mathrm{K}_2\mathrm{C} = \frac{q}{s}\mathrm{BC}, \mathrm{K}_3\mathrm{D} = \frac{r}{s}\mathrm{CD}$ என்றவாறு AB, BC, CD ஆகிய வற்றை முறையே K_1, K_2, K_3 இற் பிரிக்கும் மடங்குகள் p, q, r, s என்பனவற்றிற் பெரியது s ஆயின், $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$ என்பது $\mathrm{K}_3\mathrm{C}$ இற்குச் சமமாகவும் சமாந்தரமாகவுமிருக்குமிடத்து அவ்விசைகள் இணையொன்றை உருவாக்கும். (H.S.C.)

21. ஒரு கால்வாய் வழியாக ஒரே வீதத்தில் ஒன்றின்பின் ஒன்றாக இரு படகுகள் ஒழுங்காகச் செல்கின்றன. இரண்டாம் படகு அதன் முன் புறத்தில் A உடனும் முதற்படகின் பின்பகுதியில் B உடனும் இணைக்கப் பட்டிருக்கும் ஒரு கயிற்றினால் இழுக்கப்படுகின்றது. புள்ளிகள் A, B ஒரே மட்டத்திலுள்ளன. அக்கயிற்றின் நிறை 5 இரு ; நீளம் 30 அடி. AB இற்குக் கீழாகக் கயிற்றின் நடுவிலுள்ள தொய்யல் அல்லது இறக்கம் 6 அங்குலமாகும். அதோடு A இலும் B இலுமுள்ள இழுவை தொய்ய லிற்குச் சமமான நீளக் கயிற்றின் நிறை (அ—து. $\frac{1}{12}$ இரு.) இனல் அடிப் புள்ளியிலுள்ள இழுவையை அதிகரிக்கிறதென்றும் அறியப்பட்டுள்ளது. A அல்லது B இலுள்ள இழுவையின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளை எடுத்து நோக்கி, இரண்டாம் படகினிடத்து நீரின் தடை விசையினை (R இரு.) கிட்டிய $\frac{1}{2}$ இருத்தலுக்குக் காண்க. (H.S.C.)

22. கூர்ங் கோணமுடைய இருசமபக்க முக்கோணியரியமொன்று ஒரு முரடான கிடைத் தளத்தின்மீது நிற்கின்றது. அதன் பக்கமுகங்களிலொன்று அதிகரிக்கும் சீர்ச் செவ்வனமுக்கத்திற்கு உட்பட்டது. 60° இலும் குறை வானதெனக் கருதப்படும் அரியத்தின் உச்சிக் கோணத்திலும் குறைவாக வோ அதிகமாகவோ உராய்வுக் கோணம் இருத்தற்கேற்ப வழுக்கியோ விழுத்தியோ சமநிலை குழப்பப்படுமெனக் காட்டுக. (C.S.)

23. $2a$ விளிம்புள்ள ஒரு பாரமான கனவடிவக் குற்றி முரடான மேசை யொன்றின்மீது, குற்றியின் ஒரு முகம் மேசையின் விளிம்பிற்குச் சமாந்தர மாகவும் அதிலிருந்து a கோதா α தூரத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட் டுள்ளது ; இம்முகத்தின் மையத்துடன் ஓர் இலேசான l நீளமுள்ள ஒப்பமான கோல் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளது ; இக்கோல் மேசையின் ஒப்பமான விளிம்பின் மேலாகச் சென்று அதன் முனையில் W என்னும் நிறையைச் சுமக்கின்றது.

$$\mu > \frac{l \text{ கோசை } \alpha \text{ சைன் }^2\alpha}{a + l \text{ சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha\,(\text{சைன் } \alpha - \text{கோசை } \alpha)}$$

ஆயின், W ஐ அதிகரிக்குமிடத்து ஒரு விளிம்பினைப் பற்றிக் குற்றியை ஒருச்சாய்த்து அதன் சமநிலையைக் குழப்பலாமெனக் காட்டுக. (C.S.)

24. ஒரு வட்டத்தின் PA, PB, CP என்னும் நாண்களின் வழியாக முறையே செயற்படும் விசைகள் $l.$ PA, $m.$ PB, $n.$ PC என்பன சமநிலையிலிருப்பின்,

$$l.\,\mathrm{PA} : m.\,\mathrm{PB} : n.\,\mathrm{PC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB}$$

எனக் காட்டுக.

அதோடு

$$l\mathrm{PA}^2 + m\mathrm{PB}^2 = n\mathrm{PC}^2 \text{ எனவும்,}$$

$$n(l + m - n)\,\mathrm{PC}^2 = lm\mathrm{AB}^2 \text{ எனவுங்}$$

காட்டுக. (Ex.)

25. O, ஒரு முக்கோணி ABC இன் சுற்றுமையம்; H அதன் நிமிர்மையம்; D, E, F முறையே A, B, C இலிருந்து எதிர்ப் பக்கங்களுக்குள்ள செங்குத்துக்களின் அடிகள். OA, OB, OC வழியே செயற்படும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், அவை முக்கோணி DEF இன் பக்கங்களுக்கு விகித சமமெனக் காட்டுக. OA, OB, OC என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் சம விசைகள் O இற் செயற்படின், அவற்றின் விளையுள் OH இனுற் குறிக்கப்படுகிறதென நிறுவுக. (Ex.)

26. நுனிகளில் A, B என்னும் ($2a$ இடைத்தூரத்திலிருக்கும்) இரு முளைகளினுல் இறுக்கப்பட்டுள்ள $2a$ நீளமான ஈர்க்கப்படாத இழையொன்றின் நடுப்புள்ளி C உடன் a நீளமுள்ள இன்னெரு மீள் தன்மை இழை CD இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த இழையின் மறு நுனி D ஆனது C, $\frac{a}{10}$ தூரம் பெயர்க்கப்படும் வரை AB இற்குச் செங்குத்தாக இழுக்கப்படுகின்றது. இழைகள் ஒரே மீள்தன்மை மட்டுடையனவையென மேற்கொண்டு D இன் பெயர்ச்சியைக் காண்க. (N.U.)

27. முரடான சாய்தளமொன்றின்மீது இருக்கும் w நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை, இத்தளத்தின் ஒரு துவாரத்தினூடாகச் செல்லும் மீள்தன்மை இழையொன்றின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி, தளத்தின்மீதுள்ள துணிக்கை துவாரத்தின் தானத்திலிருக்கும் போது இழை மட்டுமட்டாக இறுக்கமாகவிருக்குமாறு உள்ள தூரத்தில் தளத்திற்குக் கீழே இருக்கும் ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. கிடையுடன் தளத்தின் சாய்வை α எனவும் தளத்தின் மீதுள்ள துணிக்கையினிடத்து உராய்வுக் குணகத்தை μ எனவுங் கொண்டு, துணிக்கையின் சாத்தியமான சமநிலைத் தானங்களின் ஒழுக்கினைக் காண்க. (N.U.)

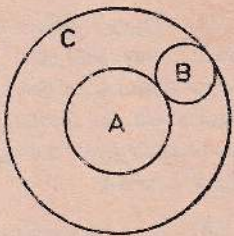
28. ஒரு பாரமான சீர்க் கோல் அதன் முனைகளுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள, ஒரே மீள்தன்மை மட்டுள்ள இரு மீள்தன்மை இழைகளினுலே தாங்கப்படுகின்றது. இழையின் மற்றைய நுனிகள் ஒரு முளையுடன்

இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. இழைகளின் இயற்கை நீளங்கள் l_1, l_2 உம், சமநிலைத் தானத்தினிடத்து அவற்றின் நீட்சிகள் x_1, x_2 உம் ஆயின்,

$$\frac{l_2 x_1}{l_1+x_1}=\frac{l_1 x_2}{l_2+x_2}$$

என நிறுவுக. (N.U.)

29. A, B, C (படம் 272) என்னும் மூன்று பற்சில்லுகள் அவற்றின் விளிம்புகளிலே தொட்டுக் கொண்டு சுழலுகின்றன. A, C ஆகிய இரண்டும் அவற்றின் பொது மையத்தைப் பற்றிச் சுயாதீனமாய்ச் சுழலக் கூடியன. C இன் பற்கள், B இன் பற்களைக் கவ்வுமாறு நீட்டியிருக்கும் விளிம்பொன்றிலிருந்து உட்புறமாகத் திரும்பியிருக்கின்றன. சில்லு B சில்லுகள் A ஐயும் C ஐயும் தொடுமாறு சுயாதீனமாய்ச் சுற்றி இயங்கும் போது K_a, K_b, K_c என்னும் இணைகள் அவற்றின் அச்சுக்களின் வழியாக ஒரே போக்கில் அவற்றிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன.



படம் 272.

$$\frac{K_a}{a}=\frac{K_b}{2b}=-\frac{K_c}{c}$$

ஆயின், அச்சில்லுகள் சமநிலையிலிருக்குமென நிறுவுக. (N.U.)

30. ஒவ்வொன்றும் w நிறையுள்ள இரு சம கோல்கள் ஒரு செங்கோணத்தின் இரு புயங்களாகுமாறு ஒருங்கே விறைப்பாக மூட்டப்பெற்றுள்ளன. இக்கோணம், அதன் ஓர் அடியை முரடான கிடை நிலமொன்றின் மீதும் மற்றைய அடியை ஒரு முரடான நிலைக்குத்துச் சுவரிலுங் கொண்டு தங்கியிருக்கின்றது. அக்கோணத்தின் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் சுவரின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ளது ; சுவரிற் சாய்ந்திருக்கும் புயம் சுவருடன் θ என்னுங் கோணத்தினை ஆக்குகின்றது. சுவரின் மீதுள்ள அடியிற்கும் சுவரிற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வு இந்நிலையில் எல்லையுராய்வாயின் (குணகம் μ), நிலத்தினால் மற்றைய அடிமீது உஞற்றப்படும் உராய்வு விசை

$$\frac{w(\text{சைன் }\theta+3\text{ கோசை }\theta)}{2[(\mu+1)\text{ சைன் }\theta+(\mu-1)\text{கோசை }\theta]}$$

என நிறுவுக. (C.W.B.)

31. w நிறையும் a ஆரையுமுள்ள ஒரு வட்டத் தட்டு, ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிற்கும் கிடை நிலத்திற்குமிடையே, அத்தட்டின் தளம் சுவர், நிலம் ஆகியவற்றின் தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு ஒரு மூலையில் நிற்கின்றது. தட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் உருவமையத்திலிருந்து c தூரத்திலுள்ளது. இம்மையங்களை இணைக்கும் கோடு உருவமையத்தின் சுவர்ப் பக்கத்திலுள்ள நிலைக்குத்துடன் θ என்னும்

கோணத்தை ஆக்குகின்றது. இத்தானத்தில் தட்டிற்கும் சுவரிற்குமிடையே யுள்ள உராய்வு எல்லையுபாய்வாயின் (குணகம் μ), தட்டிற்கும் நிலத்திற்கு மிடையேயுள்ள உராய்வு விசை

$$\frac{wc \text{ சைன் } \theta}{(1+\mu)a}$$

என நிறுவுவதோடு இப்புள்ளியிலுள்ள செவ்வன் மறுதாக்கதிணையுங் காண்க. (C.W.B.)

32. ஆறு இலேசான சம கோல்கள் ஓர் ஒழுங்கான நான்முகியின் விளிம்புகளாகின்றன. இது ஒரு முகம் கிடை மேசையொன்றைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. உயர உச்சியிலிருந்து 1 இரு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கிடைக் கோலிலுமுள்ள உதைப்பு சாய் கோலொன்றின் உதைப்பில் மூன்றிலொன்றென நிறுவி இந்த உதைப்புக் களைக் கணிக்க. (H.S.D.)

33. சம அடர்த்தியும் a, b என்னும் ஆரையுமுடைய இரு ஒப்பமான கோளங்கள் l நீளமுள்ள ஓர் இலேசான இழையினால் இணைக்கப் பெற்றுள்ளன ; இழையின் நுனிகள் கோளப் பரப்புக்களிலுள்ள புள்ளிகளுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இந்த இழை ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான முளையின் மேலாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றன. சமநிலையில் முளை இழையின் நீளத்தினை

$$b^3(b+l)-a^4 : a^3(a+l)-b^4$$

என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கிறதெனக் காட்டுக. (H.S.D.)

34. ஒவ்வொன்றுடனும் அவற்றின் நுனிகளிலே சுயாதீனமாக மூட்டப் பெற்றிருக்கும் ஆறு பாரமான சீர்ச் சம கோல்கள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி **ABCDEF** ஐ உருவாக்குகின்றன. இது கோணப் புள்ளி **A** இலிருந்து சுயாதீனமாய்த் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இதன் ஒழுங்கான அறுகோண அமைப்பு, **BC** இலுள்ள புள்ளி **P** ஐயும் **FE** இலுள்ள புள்ளி **Q** ஐயும் இணைக்கும் ஓர் இலேசான கிடைக் கோல் **PQ** இனாற் பேணப்படுகின்றது.

$$BP : PC = FQ : QE = 1 : 5.$$

என நிறுவுக. (C.S.)

35. ஒரு துரொலிக் கம்பி **1,200** அடி ஆரையுள்ள வளையியொன்றைச் சுற்றி, **40** யார் இடைத்தூரத்தில் இருக்கும் கம்பங்களுடன் இணைக்கப் பெற்றுள்ளது. ஒவ்வோர் அகல்வின் நடுவிலும் கம்பி தாங்கு புள்ளிகளுக்குக் கீழாக **6** அங்குலம் தொய்கின்றது. இக்கம்பியின் ஓர் அடி $\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளதாயின், ஒவ்வொரு கம்பத்தின் மீதுமுள்ள விளையுட் கிடையிழுப்பு ஏறக்குறைய **180** இரு. எனக் காட்டுக. (C.S.)

36. a நீளமுள்ள நான்கு சம சீர்க் கோல்கள் ஒரு சதுர வடிவில் மூட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரே மட்டத்தில் **2c** இடைத்தூரத்திலிருக்கும் இரு ஒப்பமான முளைகளை இரு அடுத்துள பக்கங்கள் தொட்டுக்கொண்டு இருக்கின்றன. எதிர் மூலைகளிடையே கட்டப்பட்டிருக்கும் இரு இழைகளினுல் இச்சதுரம் விறைப்பாகப் பேணப்படுகின்றது. சமநிலைத் தானத்தில் இவ்விரு இழைகள் முறையே கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கின்றன. இவ்விரு இழைகளிலுமுள்ள இழுவைகள் T_1, T_2 உம் ஒவ்வொரு கோலினதும் நிறை **W** உம் ஆயின்,

$$T_1 - T_2 = 4\,w\left(\frac{c\sqrt{2}}{a} - \frac{1}{2}\right)$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

37. ஒப்பமாக மூட்டப்பெற்றுள்ள கோல்களாலாய **ABCD** என்னும் சாய்சதுரம் ஒப்பமான கிடை மேசையொன்றின்மீது தங்கியிருக்கின்றது. மேசை மீது CD நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. AB இன் நடுப்புள்ளியில் **AB** இற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை **F** இனுல் இறுக்கமாகப் பேணப்படும் ஒரு மீள்தன்மையின்றிய இழை, புள்ளிகள் **A** ஐயும் **C** ஐயும் இணைக்கின்றது. கோல்கள் **BC**, **AD** வழியாகவுள்ள விசைகள் சைன் α : சைன் 3α என்னும் விகிதத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக. இங்கு கோணம் $CAB = \alpha$. (C.S.)

38. சம நிறையும் சமமற்ற ஆரை a, b உமுள்ள இரு சீர்க் கோளங்கள், ஒவ்வொரு பரப்பின் மீதுமுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றிருக்கும் l நீள நாணினுலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவை ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டு தங்கியிருக்கின்றன. நாண் ஓர் ஒப்பமான முளையின் மேலாகத் தொங்குகின்றது. நிலைக்குத்துடன் நாணின் இரு பாகங்களும்

$$\text{சைன்}^{-1}\frac{a+b}{a+b+l}$$

என்னும் சம கோணங்களை ஆக்குகின்றனவெனக் காட்டுக. (C.S.)

39. ஒருமிக்கப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் ஐந்து சம சீர்க் கோல்கள் **AB, BC, CD, DE, EA** என்பனவற்றுலான சட்டப்படல், **AB, BC** ஆகிய இரண்டும் ஒரே கிடைக் கோட்டில் இருக்குமாறும் இரு ஒப்பமான முளைகள் மீது தங்குமாறும் தாங்கப்பட்டுள்ளது. **DE** உம் கிடையாகவுள்ளது. முளைகளின் இடைத்தூரம் கோலொன்றின் நீளத்தின் $1\frac{3}{5}$ மடங்கெனக் காட்டுக. (C.S.)

40. ஒப்பமாக மூட்டப்பெற்றுள்ள கோல்களாலாய ஒரு சாய்சதுரம், அதன் இரு பக்கங்கள் ஓர் ஒப்பமான வட்டத் தட்டைத் தொடுமாறு தங்கியிருக்கின்றது. இவை யாவும் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. தட்டின்

விட்டம் ஒரு கோலின் நீளத்தின் ஐந்திலொன்றுயின் உச்ச, அடிப் புள்ளிகளிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் 15 : 1 என்னும் விகிதத்திலுள்ளன வெனக் காட்டுக. (C.S.)

41. பல நிறைகள் அவற்றினூடாக வரையப்படும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் சம கிடை இடைத்தூரங்களிலிருக்குமாறும் துணிக்கைகள் $a^2y = x^3$ வடிவிலுள்ள ஒரு வளையியின்மீது அமையுமாறும் ஓர் இலேசான இழையில் தொங்கவிடப்படவேண்டியுள்ளன. இங்கு Ox ஒரு கிடை அச்சும் Oy ஒரு மேன்முக நிலைக்குத்து அச்சுமாகும் (x இன் நேர்ப் பெறுமதிகள் மட்டுமே எடுத்துநோக்குதற்குரியன). அத்துணிக்கைகளின் நிறைகள் கூட்டல் விருத்தியில் அமைய வேண்டுமெனக் காட்டுக. (C.S.)

42. h உயரமும் தவிர்க்கத்தக்க திணிவுமுள்ளதும் சிறிது நெருக்கத்தகுவியல்புடையதுமான (நெருக்கத்தகவு மட்டு μ) நிலைக்குத்துக் கோல் OA அதன் அடிப்புள்ளி O இல் சுயாதீனமாகச் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்பது l இயற்கை நீளமுள்ள சிறிது நீளவல்ல ஒரு நாண் (மட்டு λ). B என்பது O இனூடான கிடைத் தளத்தில் O இலிருந்து a தூரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளி. இங்கு $a^2 = l^2 - h^2$. P என்னும் ஒரு கிடை விசை, A இல் திசை BO இற் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. A இனது பெயர்ச்சியின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் (x^2, y^2 ஐத் தவிர்த்து) ஏறத்தாழ

$$x = \frac{P}{a^2}\left(\frac{h^3}{\mu} + \frac{l^2}{\lambda}\right), \quad y = \frac{Ph^2}{a\mu}$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

43. சமமான ஆறு விறைப்பான நிறையற்ற சட்டங்கள் ஓர் ஒழுங்கான நான்முகி ABCD வடிவில் அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டுள்ளன. இந்நான்முகி A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொன்றும் W இற்குச் சமமான மூன்று நிறைகள் முறையே B, C, D ஆகியவற்றிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. சட்டங்கள் எல்லாவற்றிலுமுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. (C.S.)

44. W நிறையும் a ஆரையுமுள்ள ஓர் அரைக்கோளம், அதன் வளைபரப்பு ஒப்பமான கிடை மேசையொன்றின் மீது இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. l ($l < a$) நீளமுள்ள ஓர் இழை, அதன் விளிம்பின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் மேசைமீதுள்ள ஒரு புள்ளியுடனும் இணைக்கப் பெற்றுள்ளது. இழையிலுள்ள இழுவை

$$\frac{3}{8}W\frac{a-l}{\sqrt{2al-l^2}}$$

என நிறுவுக. (C.S.)

45. $2a$ நீளமும் W நிறையுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் $2l$ ($l > a$) நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீளா இழையினாலே தாங்கப்பட்டுச் சாய்ந்து தொங்குகின்றது ; இழை ஒரு சிறிய முளைமேலாகச் செல்கின்றது. இழை

யின் நுனிகள் கோலின் முனைகளுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. கோலில் நடுப் புள்ளியிலிருந்து d தூரத்தில் w என்னும் நிறை இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. முனையின் இரு மருங்கிலுமுள்ள இழை நீளங்கள்

$$l\left(1-\frac{d}{an}\right),\ l\left(1+\frac{d}{an}\right)$$

என நிறுவுக ; இங்கு $nw = W + w$. (C.S.)

46. ஒரு படம், $2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$ இடைத்தூரத்திற் சமச்சீராக அமைக்கப்பட்டுள்ள இரு வளையங்களுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கும் $2a$ நீள நாணொன்றினால் ஓர் ஒப்பமான ஆணியிலிருந்து நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலே தொங்குகின்றது. வளையங்களின் கோட்டிற்குக் கீழாகப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $\frac{c^2}{b}$ இலும் அதிகமாயின், சமநிலைக்குச் சமச்சீர்த் தானமே ஒரேயொரு தானமாகு மெனவும் அது உறுதியானதெனவுங் காட்டுக. அவ்வாழம் $\frac{c^2}{b}$ ஆயின், சமச்சீர்த் தானம் உறுதியற்றனதென நிறுவுக. (C.S.)

47. a பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி வடிவில் ஒருமிக்கச் சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டிருக்கும் BC, CA, AB என்னும் மூன்று கோல்களாலாய ஓர் இலேசான சட்டப்படல், ஒவ்வொன்றும் l நீளமுள்ள OA, OB, OC என்னும் மூன்று இழைகளினால் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. A, B, C உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளனவும் ஒவ்வொன்றும் l' நீளமுள்ளதுமான மூன்று சம இழைகளினால் W என்னும் நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு கோலிலுமுள்ள உதைப்பு

$$\frac{Wa}{3\sqrt{3}}\left[\left(3l^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(3l'^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

48. $2c$ விளிம்புள்ள ஒரு சீர்த் திண்மக் கனம், அதன் ஒரு முகத்தின் கீழ் அம்முகத்தின் விளிம்புகளுக்குச் சமாந்தரமாக அதன் மையத்திலிருந்து b தூரங்களில் வைக்கப்பட்டுள்ள இரு சமாந்தரக் கிடைச் சட்டங்களின்மீது தங்கியிருக்கின்றது. சட்டங்களைக் கொண்டுள்ள தளம் கிடையுடன் θ என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்றது. சமநிலை இருப்பின், $b > \mu c$ ஆகவும் இருப்பின்,

$$\text{தான் } \theta < \frac{(\mu' + \mu)b}{2b + (\mu' - \mu)c}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு μ, μ' முறையே கனத்திற்கும் கீழ், மேற் சட்டங்களுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகங்கள். (C.S.)

49. w நிறையும் a ஆரையுமுள்ள மூன்று ஒப்பமான சம உருளை களின் அச்சுக்கள் சமாந்தரமாகவும் கிடையாகவுமுள்ளன. அவற்றில் இரு உருளைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசைமீதும் மற்றைய உருளை அவற்றி னிடையேயும் இருக்கின்றன. மூன்று உருளைகளையும் சுற்றி எங்கும் அவற்றின் அச்சுக்களின் திசைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் $(2\pi a + l)$ நீள இழையொன்றினுற் சமநிலை பேணப்படுகின்றது. $l < 8a$ ஆயின், இழை யில் இழுவை

$$\frac{w(l-4a)}{2[l(8a-l)]^{\frac{1}{2}}}$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

50. w நிறையும் l நீளமுமுள்ள மூன்று சமமான சீர்க் கோல் கள் ஒரு முக்கோணி ABC வடிவில் ஒப்பமாக ஒருங்கே மூட்டப் பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணி மூட்டு A இனலே தொங்கவிடப்பட்டுள் ளது. B, C ஆகியவற்றுடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளனவும் ஒவ்வொன் றும் $\frac{l}{\sqrt{2}}$ நீளமானதுமான இரு இழைகளினுல் W என்னும் நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இத்தொகுதி புவியீர்ப்பிலே தொங்குகின்றது. கோல் BC இலுள்ள தகைப்பு

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[w + \frac{W}{2}(1+\sqrt{3})\right]$$

எனக் காட்டுக. (C.S.)

51. ஓர் ஒப்பமான கோளம் அதன் ஆரைக்குச் சமமான நீளமுள்ள ஓர் இழையினுல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இதே புள்ளியுடன் இணைக்கப் பெற்றுள்ள ஓர் இரண்டாம் இழை கோளத் திற்கு மேலாகச் சென்று கோளத்தின் நிறைக்குச் சமமான ஒரு நிறையைத் தாங்குகின்றது. பின்பு முதலாம் இழை நிலைக்குத்துடன் சைன் $^{-1}(\frac{1}{4})$ என்னும் கோணத்தினை ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக. (C.S.)

52. ABCD என்னுமொரு நாற்முகி, நுனிகளில் ஒப்பமாக மூட்டப் பெற்றுள்ள இலேசான கோல்களாலாயது. AB, CD என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் X ஐயும் Y ஐயும் ஓர் இழை இணைக்கின்றது. இவ் விழையில் T என்னும் இழுவை இருக்கின்றது. AB இலுள்ள இழுவை $\frac{1}{4}\mathrm{T}\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{XY}}$ என நிறுவி, மற்றைய கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களை, ஒவ்வோரிடத்திலும் உதைப்பு ஓர் இழுவையோ உதைப்போவெனக் கூறி எழுதுக. (C.S.)

53. AB, BC, DE, EF என்பன நான்கு சம கோல்கள்; B இலுள்ள ஒரு பிணையல் AB ஐயும் BC ஐயும், E இலுள்ள ஒரு பிணையல் DE ஐயும் EF ஐயும் இணைக்கின்றன ; அன்றியும் AB, DE ஆகியன அவற்றின்

நடுப்புள்ளிகளில் ஒருமிக்கப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன ; BC உம் EF உம் அவற்றின் நடுப்புள்ளிகளில் ஒருமிக்கப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. A,D என்பனவற்றில் AB, DE என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்படும் சம விசைகளை C இலும் F இலும் பிரயோகிக்கப்படும் விசைகள் சமன்செய்கின்றன. இவ்விசைகள் சமமாக இருப்பதுடன்,

$$\text{கோநா } \theta = 4 \text{ தான் } \alpha + \text{கோதா } \alpha$$

என்றமைய இவற்றின் திசைகள் CF உடன் θ என்னும் கோணங்களை ஆக்கவேண்டு மெனவுங் காட்டுக. இங்கு 2α, கோல்கள் AB இனதும் DE இனதும் இடைக்கோணம்.

54. ஒரே பருமனுடைய $(n+1)$ செங்கற்கள் ஒன்றின் மேலொன்றாக, மேலுள்ளது கீழுள்ளதில் இயன்றளவு நன்றாக மேவிநிற்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு செங்கல் $2a$ நீளமுள்ளதாயின், அடியிலுள்ள கல்லினை விட மற்றையது அடிக்கல்லின் மீது $\frac{a}{n}$ என்னும் நீளத்தினால் மேவிநிற்கிறதென நிறுவுக. ஒவ்வொரு செங்கல்லும் அதற்குக் கீழே அடுத்துளதின்மீது $\frac{a}{n}$ என்னும் நீளத்தினால் மேவிநிற்பின், அடுக்கக்கூடிய செங்கற்களின் ஆகக் கூடிய எண்ணிக்கை $(2n-1)$ எனக் காட்டுக. (C.S.)

55. ஒரு முக்காலி, ஒவ்வொன்றும் மற்றதிற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு O இல் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ள AO, BO, CO என்னும் சமமான மூன்று சீர்க் கோல்களை உடையது. இம்முக்காலி புள்ளி A இலிருந்து தொங்கவிடப்படின், தளம் ABC கிடையுடன் தான்$^{-1}\, 2\sqrt{2}$ என்னும் கோணத்தை ஆக்குகிறதெனக் காட்டுக. (C.S.)

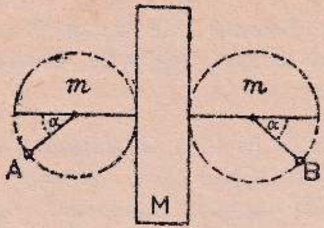
56. c ஆரையுள்ள இரு ஒப்பமான சம வட்டவுருளைகள், அவற்றின் அச்சுக்கள் சமாந்தரமாக ஒரே கிடைத் தளத்தில் b இடைத்தூரத்திலிருக்குமாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. $2a$ பக்கமுள்ள ஒரு கனம் அதன் இரு அடுத்துள முகங்கள் இவ்வுருளைகளைத் தொடுமாறு தங்கியிருக்கின்றது. $a + c < \sqrt{2b}$ ஆகவும் $a^2 + c^2 > b^2$ ஆகவுமிருப்பின், கனத்தின் உச்சி, அடிவிளிம்புகளினூடான தளம் நிலைக்குத்துடன் கோசை$^{-1}\left[\frac{a+c}{\sqrt{2}b}\right]$ என்னும் கோணத்தினை ஆக்குமாறுள்ள இரு சமநிலைத் தானங்கள் இருக்குமெனக் காட்டுக. இத்தானங்கள் உறுதியில்லாதனவெனவுங் காட்டுக. (C.S.)

57. படம் 273 இலுள்ளவாறு A இலும் B இலும் நிலைத்த தாங்கிகளிற் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் இரு உருளைகளினால் ஒரு தகடு இறுகப் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. இதில் அவை சாய்ந்திருக்கின்றன. ஒவ்வோர் உருளைக்கும் தகட்டிற்

கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும். திணிவுகள் படத்திலுள்ளவாறு m, M ஆகும்.

$$\frac{M}{m} < \frac{2\mu \text{ கோசை } \alpha}{\text{சைன் } \alpha - \mu(1 + \text{கோசை } \alpha)}$$

ஆயின் தகடு நழுவாதெனக் காட்டுக. (C.S.)



படம் 273.

58. ABC ஒரு முக்கோணி. O அதன் சுற்றுவட்ட மையம். விசைகள் P, Q, R முறையே BC, CA, AB வழியாகவும் விசைகள் P′, Q′, R′ முறையே OA, OB, OC வழியாகவும் செயற்படுகின்றன. இவ்விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின்

$$\text{P கோசை A} + \text{Q கோசை B} + \text{R கோசை C} = 0 \text{ எனவும்,}$$

$$\frac{PP'}{\text{சைன் A}} + \frac{QQ'}{\text{சைன் B}} + \frac{RR'}{\text{சைன் C}} = 0 \text{ எனவுங்}$$

காட்டுக. (C.S.)

59. a நீளமுள்ள இரு சம செவ்வகக் குற்றிகள் b பக்கச் சதுர முனைகளையுடையவை. இக்குற்றிகள் இரு சதுர முகங்கள் தொடுகையுடன் இருக்குமாறு கிடை மேசையொன்றின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. அதே பருமனுள்ள மூன்றாங் குற்றியொன்று இவற்றின் மேலே சமச்சீராக வைக்கப்பட்டுள்ளது. பின்பு கீழ்க் குற்றிகளின் முனைமுகங்களின் மையங்களில் சம விசைகள் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. இவ்விசைகளின் கிடைக் கூறுகள் $\frac{3Wa}{2b}$ இலும் அதிகமாக இருப்பின் சமநிலையைக் கலைக்காது மேசையை அகற்றலாமென நிறுவுக. W ஒவ்வொரு குற்றியினதும் நிறை. (C.S.)

60. A, B, C, D இற் சுயாதீனமாய் மூட்டப்பட்டுள்ள நான்கு இலேசான சமநீளக் கோல்களாலாய ஒரு சட்டப்படல், A இல் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. B, D ஆகியவற்றிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் l நீளமுள்ள இரு இழைகளினால் m திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. AC என்னும் ஓர் இழையினால் இச்சட்டப்படல் விழாது

தடுக்கப்படுகின்றது. இவ்விழையிலுள்ள இழுவை $\frac{1}{2}mg\frac{AP}{PN}$ இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. இங்கு P துணிக்கை. N, சாய்சதுரம் ABCD இன் மையம். (C.S.)

61. அரையுச்சிக் கோணம் α உடைய ஒப்பமான செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உச்சி மேலேயுமுள்ளது. W நிறையும் மீள்தன்மை மட்டு λ உம் இயற்கை நீளம் $2\pi l$ உமுள்ள ஒரு பாரமான மீள்தன்மையிழை அதைச்சுற்றி வைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த இழை படிப்படியாக ஒய்வு நிலையில் ஆழுமாறு விடப்படுகின்றது. சமநிலைத் தானத்தினைக் காண்க. கூம்பினைச் சுற்றி, சமநிறையும் சம இயற்கை நீளமும் ஆனால் மட்டு $\lambda'(<\lambda)$ உமுடைய ஓர் இரண்டாம் இழை ஈர்க்கப்படாது வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஓய்வுநிலையிற் படிப்படியாக ஆழுமாறு இவ்விரு இழைகளும் விடப்படுகின்றன.

$$\pi(\lambda + \lambda')(h \text{ தான் } \alpha - l) \text{ தான் } \alpha = Wl$$

ஆயின் சமநிலைத் தானத்தில் இரு இழைகளும் உச்சிக்குக் கீழாக h ஆழத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக. (C.S.)

62. நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலிருக்கும் நிலைத்த வட்டக் கம்பி (ஆரை r) ஒன்றின்மீது ஒவ்வொன்றும் W நிறையுள்ள இரு சிறிய ஒப்பமான வளையங்கள் வழுக்கிச் செல்கின்றன. இவ்வளையங்கள் $2a\,(<2r)$ நீளமுள்ள இலேசான நீளா இழையினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விழையில் P நிறையுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான வளையம் வழுக்கிச் செல்கின்றது. சமநிலைக்கு இழையின் இரு பகுதிகளும் நிலைக்குத்தாக இருக்கவேண்டும், அல்லது P கம்பி மையத்திலிருந்து

$$\left[\frac{W(r^2-a^2)}{W+P}\right]^{\frac{1}{2}}$$

இற்குச் சமமான தூரத்திலிருக்க வேண்டுமென நிறுவுக. (C.S.)

63. l நீளமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல் AB, நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலிருக்கும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதிமீது A உம் நிலைக்குத்து விட்டம் (நீட்டப்படாத) மீது B உம் நகருமாறு உராய்வின்றி விகாரப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. a, அவ்வட்டத்தின் ஆரை. l இன் பெறுமானம் $\frac{1}{2}a$ இற்கும் a இற்குமிடையே உள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத் தானங்களைக் கண்டு, மேற், கீழ்த் தானங்களின் உறுதிப்பாட்டைத் தனித்தனியாக ஆராய்க. l, $\frac{1}{2}a$ இலும் குறைவாயின் என்ன நிகழும் ? (C.S.)

64. ஒரே பொருளினாலானவையும் ஒரே தடிப்புள்ளனவுமான சீர்க் கோல்களினாலான முக்கோணி ABC, கிடையான அச்சினையுடையதும் முக்கோணியின் உள்வட்டத்தினை வெட்டுமுகமாகக் கொண்டதுமான ஓர் ஒப்பமான வட்டவுருளையை ஒவ்வொரு கோலும் தொடுமாறு நிலைக்

குத்துத் தளமொன்றிலே தங்கியிருக்கின்றது. சமநிலையில் முக்கோணி ABC இன் இடையங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி உருளையின் அச்சினூடான நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக. (C.S.)

65. ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமான பல சமமான சீர்ச் செவ்வகக் குற்றிகள் ஒவ்வொரு குற்றியும் அதன் கீழுள்ள குற்றியின் முனைமேலாக நீட்டுமாறு அடுக்கப்பட்டுள்ளன. அடிக்குற்றி நிலைத்த கிடைத் தளமொன்றின் மீதுள்ளது. குற்றிகளின் எண்ணிக்கை n ஆகவும், ஒவ்வொரு குற்றியும் அதன் கீழுள்ளதின்மேலாக நீட்டும் தூரம், முழு மேற்கவிவுத் தூரம் (உயர, அடிக் குற்றிகளின் நிலைக்குத்து முனைகளின் இடைக் கிடைத்தூரம்) உயர்வாக இருக்குமாறு சீராக்கப்பட்டுமிருப்பின், இக்கவிவுத் தூரம்

$$a\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

என நிறுவுக. எனினும், ஒவ்வொரு குற்றியும் கீழுள்ள குற்றிமேலாக நீட்டும் தூரங்கள் எல்லாம் சமமாயின் அதியுயர் மேற்கவிவுத் தூரம்

$$\frac{2a\,(n-1)}{n}$$

என நிறுவி, இது உச்ச மேற்கவிவுத்தூரத்தினை ஒருபோதும் அதிகரிக்காதெனச் சரிபிழைபார்க்க. (H.C.)

66. a ஆரையுள்ள மூன்று சமமான சீர்க் கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமாறு b ஆரையுள்ள நிலைத்த கோளக் கிண்ணமொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின்மீது நான்காம் சம கோளமொன்று மெதுவாக வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. $a(1 + 2\sqrt{11})$ இலும் b, குறைவாயின் கீழுள்ள மூன்று கோளங்களும் பிரிந்து போகமாட்டாவென நிறுவுக. (H.C.)

67. முனைகளிலே தாங்கப்படும் ஒரு கிடைப் பாலச் சட்டகம், முனையொன்றிலிருந்து 1, 2, 3 . . . என வரிசையாக எண்ணிடப்பட்டுள்ள பல ஒருங்கிசை பலகைகளை உடையது. ஒவ்வொரு பலகையும் ஒரு மூலைவிட்டத்திலுற் பிணைக்கப்பட்டுள்ள செவ்வகவுறுப்புக்களை உடையது. இத்தகைய மூலைவிட்டங்களெல்லாம் சமாந்தரமானவை. அடிமூட்டு ஒவ்வொன்றிலும் சம பாரங்கள் வைக்கப்படின், மூலைவிட்ட உறுப்புக்களிலுள்ள தகைப்புக்கள் கூட்டல் விருத்தியொன்றை உருவாக்கும் அதே நேரத்தில் மேலுறுப்புக்களிலுள்ளவை பலகையின் வரிசை r கொண்ட இருபடிச் சூத்திரமொன்றிற்கேற்ப மாறுமென நிறுவுக. (N.U.4.)

68. நான்கு சம சில்லுகளையுடைய ஒரு கார், a என்னும் சில்லடியை உடையது (அ-து. a, முண், பிற்சில்லுகளின் தரையுடனான தொடுகைப் புள்ளிகளின் இடைத் தூரம்) ; அதன் புவியீர்ப்பு மையம்

நான்கு சில்லுகளிலிருந்தும் சமதூரத்திலும் தரைக்கு மேலாக h உயரத்திலுமுள்ளது. கார் அதன் பிற்சில்லுகள் பூட்டப்பட்டு α சரிவில் (i) மேட்டினையும் (ii) இறக்கத்தையும் நோக்கித் தங்கியிருக்குமிடத்து, சில்லுகளின் மீதுள்ள அமுக்கங்களைக் காண்க. இச்சரிவு வழுக்கலானதாக இருப்பின், கார் நிலை (i) இலே தங்கமுடியும், ஆனால் நிலை (ii) இலே தங்கமுடியாதெனக் காட்டுக. $a = 10$ அடியும், $h = 2$ அடியுமாயின், $10°$ சரிவொன்றின் மீது அந்நிலைகளில் எதிலேனும் தங்கியிருக்குமாறு சில்லுகளுக்கும் பாதைக்குமிடையேயுள்ள ஆகக் குறைந்த உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க. (H.C.)

69. சமபக்க முக்கோணியொன்றின் ஒரு பாதியின் வடிவுள்ள ஓர் இலேசான சட்டப்படல் ABC, ஒரு சுவருடன் A இலே சுயாதீனமாய்ப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோணங்கள் A, B, C முறையே $30°$, $60°$, $90°$ இற்குச் சமம். இச்சட்டப்படல் B இல் ஓர் இலேசான இழையினால் A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலிருக்கும் D என்னும் புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. AD = AB எனவும் கோணம் $DAB = 30°$ எனவுந் தரப்பட்டுள்ளது. C இல் W என்னும் நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு விசைப் படத்தின் மூலமாக BD இலுள்ள இழுவையைக் காண்க. கோணம் $DAB = \alpha$ என்றவாறு இழை நீளம் மாற்றப்படின், இழையிலுள்ள இழுவை,

$$\frac{W\sqrt{3}\,\text{கோசை}(60° - \alpha)}{2\,\text{கோசை}\,\frac{\alpha}{2}}$$

எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

70. A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளனவும் ஒவ்வொன்றும் w நிறையுள்ளதுமான பாரமுள்ள சமமான இரு சீர்க் கோல்கள், ஓர் ஒப்பமான கிடையுருளையின் குறுக்கே தங்கியிருக்கின்றன. A இல் W நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. $2l$, ஒவ்வொரு கோலினதும் நீளமும், r, உருளையின் ஆரையும், θ, ஒவ்வொரு கோலினதும் கிடையுடனான சாய்வுமாயின்,

$W r$ சீக θ தான் $\theta = 2w\,(l$ கோசை $\theta - r$ சீக θ தான் $\theta)$ எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

71. ஒரு பலகை, தரையின்மீது இருப்பனவும் சமாந்தரமான அச்சுக்களை உடையனவுமான இரு உருளைகளின் குறுக்கே சமச்சீராகத் தங்கியிருக்கின்றது. இப்பலகை உருளைகளின் அச்சுக்களுக்குச் செங்குத்தாகவும் தரையுடன் α கோணத்தினை ஆக்குவதாகவுமுள்ளது. பலகைத் திணிவு மையம் உருளைகளிடையேயுள்ள அதன் பகுதியை $p : q$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றது. பெரிய உருளை தரையுடன் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. தரை

யுடன் சிறிய உருளையின் தொடுகைப் புள்ளியில் நிலைக்குத்திற்கும் மொத்தத் தடை விசைக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ ஆயின்,

$$\text{தான்}\ \theta = \frac{\text{தான்}\ \dfrac{\alpha}{2}}{1 + \dfrac{p+q}{q}\ \text{சீக}\ \alpha \cdot \dfrac{W}{w}}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு W, சிறிய உருளையின் நிறை ; w, பலகை நிறை. (H.S.C.)

72. 5 அங்குல ஆரையும் 12 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு கோளம், ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் மூன்று ஒப்பமான முளைகள் A, B, C என்பவற்றின்மீது தாங்கப்பட்டுள்ளது ; BC = 4 அங்குலம், AB = AC, கோணம் BAC = 30°. ஒவ்வொரு முளைமீதுமுள்ள அமுக்கத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

73. ஒரு நேரான சீர்க் கோல், முரடான கிடை மேசையொன்றின் மீதுள்ளது. இக்கோலிற்குச் செங்குத்தாக இதன் ஒரு முனையில் ஒரு சிறிய கிடை விசை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. சமநிலை குலையும்வரை இவ்விசை செறிவிற் படிப்படியாகக் கூட்டப்படுகின்றது. அக்கோல் அதன் நீளத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளி பற்றித் திரும்பியே சமநிலை குலைக்கப்படுமென நிறுவி, கோல் முதலிலே திரும்பும் குறிப்பிட்ட புள்ளியைத் தீர்மானிக்க. (N.U. 4.)

74. l நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர் இழை ஒரு நிலைத்த நுனியிலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்றது. இதன் ஓரலகு நீளம் w நிறையுள்ளது. கீழ் நுனியில் W என்னும் நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. மேல் நுனியிலிருந்து இழையில் x தூரத்திலிருக்கும் புள்ளியிலுள்ள இழுவை T இற்குரிய கோவையைக் காண்க. ஓரலகு நீளத்தின் நிறை சீராக இருத்தற்குப் பதிலாக உச்சியில் w இலிருந்து அடியில் $2w$ வரை சீராக மாறின்,

$$T = w\,(l-x) + \frac{w}{2l}(l^2 - x^2) + W$$

இனால் இழுவை T தரப்படுமென நிறுவுக. (C.W.B.)

75. வளைபரப்பினை முரடான கிடைத் தளம் (உராய்வுக் குணகம் μ) ஒன்றின் மீது கொண்டுள்ள ஒரு மெல்லிய சீர் அரைக்கோளக் கிண்ணம், ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிற் சாய்ந்திருக்கின்றது. இக்கிண்ணம் நழுவும் தறுவாயிலிருக்கும்போது, நிலைக்குத்துடன் கிண்ண அச்சின் சாய்வு சைன்$^{-1}$ 2μ என நிறுவுக. (H.S.D.)

நீர்நிலையியல்.

அதிகாரம் X.

பாயி அமுக்கம் — ஒரு தளப் பரப்பின்மீதுள்ள உதைப்பு.

§191. இதுகாறும் ஒரு விறைப்பான பொருள், அ—து. அதன்மீது செயற்படும் விசைகளினாற் பாதிக்கப்படாத பருமனையும் வடிவையுமுடைய ஒரு பொருளின் சமநிலையை ஆராய்ந்தோம்.

நீர்நிலையியலில், **பாயி** எனப் பொதுப்படையாகக் கூறப்பெறும் திரவம், வாயு ஆகிய பொருட்களின் சமநிலையை ஆராய்வோம்.

பாயிகள் வடிவமாற்றத்திற்கு மிக்க சிறிய தடையை ஏற்படுத்துவதோ தடையெதையும் ஏற்படாதிருத்தலோ உண்டு என்ற அவ்வியல்பு அவற்றைத் திண்மங்களிலிருந்து பிரித்துக் காட்டுகின்றது.

§192. ஒரு **பூரண பாயி**யினிடத்து அதற்கு எத்தகைய விசைகளைப் பிரயோகிக்குமிடத்தும், தொடுகையுடனிருக்கும் அதன் எவையேனும் இரு துணிக்கைகளிடையே உராய்வேதுமிராது. அதன் துணிக்கைகளினிடையேயுள்ள தாக்கம் அவற்றின் தொடுகைப் பரப்பிற்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படும் ஒரு விசையையே கொண்டிருக்கும். அதோடு வடிவமாற்றத்திற்குத் தடையேதுமிராது.

உண்மையான பாயியெதுவும் பூரணமானதன்று. ஆனால் நீர், மிகப் பல திரவங்கள், வாயுக்கள் ஆகியன கிட்டத்தட்டப் பூரணமான பாயிகளாகும். இவற்றைப் பூரணமான பாயிகளாகவே பின்வருவனவற்றிற் கருதுவோம்.

ஒரு திரவமென்பது நெருக்கமுடியாத, அல்லது மிகப் பெரிய விசையைப் பிரயோகித்தே நெருக்கக்கூடிய ஒரு பாயி.

ஒரு வாயுவென்பது எளிதாக நெருக்கக்கூடிய ஒரு பாயியாகும்.

§193. ஒரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம்.

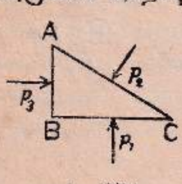
ஒரு பாயியைக் கொண்டுள்ள ஒரு பாத்திரத்தினது சுவரின் A என்னுமொரு சிறிய பரப்பின்மீதுள்ள அமுக்கத்தினை ஆராய்க. இப் பாயி பூரணமானதெனநாம் மேற்கொள்வதனால் அது A மீது உஞற்றும் விசையானது A இற்குச் செங்குத்தான ஓர் உதைப்பாக இருக்கவேண்டும். A இன் மூலகம் ஒவ்வொன்றின்மீதும் இவ்வுதைப்பு ஒரேயளவினதாக இருப்பின், உதைப்பு A இற்கு மேலாகச் சீரானதெனப் படும். அதோடு எதாவதொரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம் அப்புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள பரப்பலகின் மீதுள்ள உதைப்பாகும்.

உதைப்பு சீராற்றதாக இருப்பின், ஏதாவதொரு புள்ளி P இலுள்ள அமுக்கம், P ஐச் சுற்றியுள்ள ஓரலகுப் பரப்பின் மேலே இவ்வமுக்கம் சீராகவும் இதன் பெறுமதி இது P இலுள்ள பரப்பின் ஒரு மூலகத்தின் மீதுள்ளவிடத்துப் போன்ற அதே பெறுமதியாகவும் இருப்பின் அவ் வலகுப் பரப்பின்மீது பாயி உஞற்றும் உதைப்பாகும்.

ஒரு பாயியின் அகத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கத்தினைப் பற்றிப் பேசுமிடத்து அப்புள்ளியிலிருக்கும் ஒரு சிறிய தளப் பரப்பின் ஓரலகுப் பரப்புமீது உஞற்றப்படும் அமுக்கத்தினையே கருதுகின்றோம்.

ஒரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம் வழக்கமாக ஒரு சதுர அடிக்கு ஓர் இறு. நிறையிலோ ஒரு சதுர அங்குலத்திற்கு ஓர் இறு. நிறையிலோ எடுத்துரைக்கப்படும். இவ்வமுக்கம் பெரும்பாலும் **அமுக்கச் செறிவு** எனப்படும்.

§194. ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பாயியின் ஏதாவதொரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கச் செறிவு எல்லாத் திசைகளிலுஞ் சமமாகும்.



படம் 274.

ABC (படம் 274) என்னும் செங்கோண முக்கோணியை மையக் குறுக்குவெட்டாகக் கொண்டுள்ள ஒரு சிறிய முக்கோணியரியத்தினை எடுத்துநோக்குக. இம்முக்கோணியில் BC கிடையாகவும் BA நிலைக்குத்தாகவுமுள்ளன. நமக்குப் புள்ளி P இலுள்ள அமுக்கம் தேவைப்படுகின்றது. இப்புள்ளி AC இன் நடுப்புள்ளியிலுள்ளது.

இவ்வரியத்தினை உருவாக்கும் பாயியினது ஓரலகுக் கனவளவின் நிறை w எனவும் BC, CA, AB ஆகியவற்றுற் குறிக்கப்படும் முகங்களில் ஓரலகுப் பரப்பின்மீதுள்ள அமுக்கங்கள் முறையே p_1, p_2, p_3 எனவும் அரியத்தின் நீளம் l எனவுங் கொள்க.

முகங்களின் மீதுள்ள உதைப்புக்கள் அவற்றிற்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும். அதோடு, ஒவ்வொரு முகத்தின் மேலும் உதைப்பு சீராக இருக்குமாறு அம்முகங்கள் சிறியனவாகக் கணிக்கப்படலாமாகையால் BC, CA, AB ஆகியவற்றின் மீதுள்ள உண்மையான உதைப்புக்கள் முறையே $p_1\text{BC} \,.\, l$, $p_2\text{CA} \,.\, l$, $p_3\text{AB} \,.\, l$ ஆகும்.

அவ்வரியத்தினை ஆக்கும் பாயியின் நிறை $\frac{1}{2}w.\ \text{AB}.\ \text{BC}.\ l$.

கிடையாகத் துணிக்க,

$$p_3\text{AB} \,.\, l = p_2\text{AC} \,.\, l \text{ கோசை A} = p_2\text{AB} \,.\, l,$$

$$\therefore p_3 = p_2.$$

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$p_1\text{BC} \,.\, l = p_2\text{AC} \,.\, l \text{ கோசை C} + \tfrac{1}{2}w \,.\, \text{AB} \,.\, \text{BC} \,.\, l$$

$$= p_2\text{BC} \,.\, l + \tfrac{1}{2}w\text{AB} \,.\, \text{BC} \,.\, l,$$

$$\therefore p_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}w.\ \text{AB}.$$

அரியத்தின் பருமன் வரையறையின்றிக் குறைக்கப்படும்போது இறுதிச சமன்பாடு

$$p_1 = p_2$$

என அமைகின்றது.

$$\therefore\ p_2 = p_3 = p_1.$$

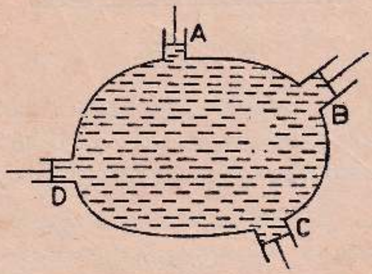
AC எத்திசையைக் கொண்டிருப்பினும், p_1 நிலைக்குத்தாகவும் ஆகையால் திசையில் நிலைப்பட்டுள்ளதாகவும் மாறிலியாகவுமுள்ளது.

எனவே யாதுமொரு திசையில் அமுக்கச் செறிவு p_1 இற்குச் சமம் ஆகையால் இது எல்லாத் திசைகளிலுஞ் சமம்.

§195. பாயியமுக்கம் ஊடுகடத்தல்.

A, B, C, D (படம் 275) என்பவற்றிலுள்ள உருளைக் குழாய்களில் உராய்வு எதுவுமின்றி இயங்கும் வெவ்வேறு பரப்புக்களையுடைய பல நிறையற்ற முசலங்கள் பொருத்தப் பெற்றுள்ள யாதுமொரு வடிவப் பாத்திரத்தினைக் கருதுக. இது ஒரு திரவத்தினால் நிரப்பப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.

இத்திரவத்தினைச் சமநிலையிற் பேண ஒவ்வொரு முசலமும், (i) முசலத்தின் பரப்பு, (ii) முசலம் இயங்கும் உருளையின் தானம் ஆகியவற்றின் மீது சார்ந்திருக்கும் பருமனையுடையதாகிய விசையுடன் அழுத்தப்பட வேண்டும் எனக் காண்போம்.



படம் 275.

A, B, C, D ஆகியவற்றிலுள்ள முசலங்களின் மீது பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய விசைகள் முறையே P, Q, R, S ஆகவும் இம்முசலங்களின் பரப்புக்கள் a, b, c, d ஆகவும் இருப்பின், A, B, C, D ஆகியவற்றிலுள்ள அமுக்கச் செறிவுகள்

$$\frac{P}{a},\ \frac{Q}{b},\ \frac{R}{c},\ \frac{S}{d}$$

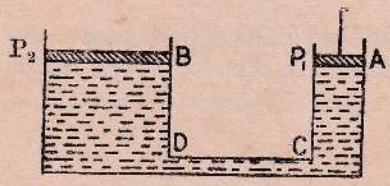
ஆகும்.

அம்முசலங்களில் A என்னுமொன்றைத் தள்ளுமாறு அதன்மீது F என்னுமொரு மேலதிக விசையை இப்போது பிரயோகிக்கின், மற்றைய முசலம் ஒவ்வொன்றிற்கும் அதனை உட்புறமாகப் பேண ஒரு மேலதிக விசை தேவைப்படுமெனவும், A இன் மீதுள்ள மேலதிக விசையின் அமுக்கச் செறிவு $\frac{F}{a}$ இனை f இனாற் குறிக்குமிடத்து மற்றைய முசலங்களின் மீதுள்ள மேலதிக விசைகள் bf, cf, df ஆகுமெனவும் அறியலாம்.

எனவே A இற் பிரயோகிக்கப்படும் அமுக்கச் செறிவு சேதமேதுமில்லாமல் B, C, D ஆகிய மற்றைய புள்ளிகளிற்குச் செலுத்தப்படுகின்றது.

ஒரு பாயியின் யாதுமொரு புள்ளியிற் பிரயோகிக்கப்படும் அமுக்கச் செறிவு பாயியின் மற்றைய புள்ளிகள் எல்லாவற்றிற்கும் சேதமின்றிச் செலுத்தப்படுகிறதென்ற முடிவுக்கு வரலாம். இம்முடிவு **பஸ்காலின் கோட்பாடு** எனப்படும்.

§196. நீரியலமுத்தி அல்லது பிரமாவின் அமுத்தி.



படம் 276.

இது CD என்னும் குழாயினுலே தொடுக்கப்பட்டுள்ள A, B என்னும் இரு உருளைகளாலாயது. இவற்றின் வெட்டுமுகம் படம் 276 இற் காட்டப்பெற்றுள்ளது. ஓர் உருளையின் குறுக்குவெட்டு மற்றையதனிலும் மிகப் பெரியது.

இவ்விரு உருளைகளும் நீர் கொண்டுள்ளன. இவற்றில் நீர் இறுக்கமான முசலங்கள் P_1, P_2 என்பன பொருத்தப்பட்டுள்ளன. இம்முசலங்களின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்புக்கள் முறையே a, b ஆகும். சிறிய முசலம் A இல் ஓரலகுப் பரப்பிற்கு w இரு. நிறையென்னும் அமுக்கம், அதற்குப் பிரயோகிக்கப்படும் மொத்த விசை wa இரு. நிறையாக இருக்குமாறு பிரயோகிக்கப்படுகிறதெனக் கொள்க.

ஓரலகுப் பரப்பிற்கு w இரு. நிறையென்னும் அமுக்கம் நீரெங்கும் செலுத்தப்படுகின்றது. எனவே நீரினுல் முசலம் B மீது உஞற்றப்பெறும் உதைப்பு wb இரு. நிறை.

இவ்வுதைப்பு, wb இரு. நிறையுள்ள ஒரு பொருளை B இன்மீது தாங்கும்.

எனவே $\dfrac{\text{தாங்கப்படும் பொருளின் நிறை}}{\text{பிரயோகிக்கப்படும் விசை}} = \dfrac{wb}{wa} = \dfrac{b}{a}.$

ஆகவே சிறிய முசலத்திற்குப் பிரயோகிக்கப்படும் விசை இரண்டு முசலங் களினதும் பரப்புக்களின் விகிதத்திற் பெருக்கப்படுகின்றது.

இம்முடிவு வேலைக் கோட்பாட்டுடன் ஒத்திருக்கின்றது.

ஏனெனில், P_1 ஐ x தூரம் தாழ்த்தின் B இனுட் செலுத்தப்படும் நீரின் கனவளவு xa ஆகும். இதன் காரணமாக P_2, $\dfrac{xa}{b}$ என்னும் தூரம் உயருகின்றது.

P_2 மீதுள்ள நிறை W_2 ஆயின், செய்யப்பட்ட வேலை $W_2\dfrac{xa}{b}$ ஆகும். அதே சமயத்தில் விசை W_1 இனற் P_1 மீது செய்யப்பட்ட வேலை $W_1\,x$ ஆகும்,

ஆனல் $$W_2 = W_1\frac{b}{a},$$

$$\therefore\ W_2\frac{xa}{b} = W_1x = W_1 \text{ இனற் செய்யப்பட்ட வேலை.}$$

பேருருளையிலுள்ள நீரின் மீதான பேரமுக்கம் முசலத்திற்கும் உருளை யின் பரப்பிற்குமிடையே நீரினைச் செலுத்த நாடுகின்றது. இக்குறை காரண மாக இத்தகைய ஆய்கருவியானது பிரமா என்பவர் பேருருளையின் மேற் பகுதியைச் சுற்றி ஒரு தவாளியிற் பொருத்தப்பட்டுள்ளதும் வெளிவரும் நீர் எதையும் தடுப்பதுமான ஒரு தோற் பட்டையைப் புதிதாகக் கண்டு பிடிக்கும் வரை பெரிதும் பயன்படமுடியாமற் போயிற்று.

§197. அடர்த்தியும் தன்னீர்ப்பும்.

ஒரு பதார்த்தத்தின் **அடர்த்தி** அப்பதார்த்தத்தின் ஓரலகுக் கனவளவின் திணிவாகும்.

(i) நிறையுடன் அடர்த்தி தொடர்பற்றதென்பதும், (ii) ஒரு பதார்த் தத்தின் அடர்த்தியின் பெறுமதியைக் கூறுமிடத்துப் பயன்படுத்தப்படும் திணிவினதும் கனவளவினதும் அலகுகளை நன்கு தெரியப்படுத்த வேண்டு மென்பதும் குறிப்பிடத்தக்கவை. இதற்கு உ–ம். க.சமீ. இற்கு ஒரு கிராம், அல்லது கன அடிக்கு ஓர் இரு. ஒரு பதார்த்தத்தின் அடர்த்தி 8 என்ற கூற்றில் தெளிவான கருத்தேதுமில்லை.

நீரின் அடர்த்தி மிகக் கிட்டத்தட்ட க.சமீ. இற்கு 1 கி., அல்லது கன அடிக்கு $62\frac{1}{2}$ இரு. அதோடு பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்பெறும் பெறுமதி கள் இவையேயாகும். அடர்த்தி வெப்பநிலையுடன் மாறுகின்றதெனினும் இம்மாறுபாடு பொதுவாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுவதில்லை.

ஒரு பதார்த்தத்தின் **தன்னீர்ப்பு** அப்பதார்த்தத்தின் யாதுமொரு கனவளவின் திணிவுக்கும் அல்லது நிறைக்கும் யாதுமொரு நியமப் பதார்த்தத்தின் சமகனவளவின் திணிவுக்கும் அல்லது நிறைக்குமுள்ள **விகிதம்** ஆகும்.

திண்மங்களுக்கும் திரவங்களுக்கும் நியமப் பதார்த்தம் 4°ச. இலுள்ள தூய நீராகும்.

வாயுக்களுக்கு நியமம் ஐதரசன் அல்லது வளியாக இருக்கலாம்.

தன்னீர்ப்பு வெறுமனே ஒரெண்ணாகும். இது அலகுகளுடன் சார்பற்றது. s ஒரு பதார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பும், w நியமப் பதார்த்தத்தினது ஓரலகுக் கனவளவின் நிறையுமாயின், அப்பதார்த்தத்தின் ஒரு கனவளவு V இன் நிறை

$$W = Vsw$$

இனாலே தரப்படுகின்றது.

நீர்நிலையியலில் திரவங்களின் நிறை காரணமான அவற்றின் உதைப்புக்களைப் பற்றி ஆராயவேண்டும். இங்கு, திரவத்தின் ஓரலகுக் கனவளவின் **நிறையே** முக்கியமாகும்.

இதைக் குறிக்கப் பயன்படும் அடர்த்தி என்ற சொல் தவறான கருத்தைத் தருகின்றது. "**தன்னிறை**" இதிலும் பார்க்க ஒரு சிறந்த சொல்லாகும்.

தன்னீர்ப்பு, அடர்த்தி ஆகியவற்றினிடையேயுள்ள குழப்பத்தைத் தவிர்க்கக் கவனமாக இருக்கவேண்டும்.

ச.கி.செ. அலகுகளில், 1 க.சமீ. நீர் 1 கி. திணிவுடையதாகையால், பதார்த்தத்தின் அடர்த்தியை கிராம்/க.சமீ. இற் குறிக்கும் எண்ணும் அதன் தன்னீர்ப்பைக் குறிக்கும் எண்ணும் ஒன்றாகும்.

மற்றைய அலகுகளில் இவ்வெண்கள் சமமாவதில்லை.

ஒரு பதார்த்தத்தின் அடர்த்தி அதன் தன்னீர்ப்பினதும் நீரின் அடர்த்தியினதும் பெருக்கமாகும். நீரின் அடர்த்தி ஒன்றிற்கு எண்ணளவாகச் சமமாக இருக்குமிடத்தேயே அடர்த்தியினதும் தன்னீர்ப்பினதும் பெறுமதிகள் சமமாக இருக்கும்.

உதாரணம்.

படிகம், பொன் ஆகியவற்றின் தன்னீர்ப்பு முறையே 2·64, 19·35 ஆகும். படிகம், பொன் ஆகியவற்றினாலாய ஒரு கட்டியின் நிறை 12 அவுன்சும் அதன் தன்னீர்ப்பு 6·25 உமாகும். இக்கட்டியிலுள்ள பொன்னின் நிறை யாது ? (I.S.)

இக்கட்டியிலுள்ள பொன்னும் படிகமும் முறையே w_1, w_2 அவு. நிறையுள்ளன எண்க. நீரினது தன்னிறை w அவு. எண்க.

கட்டி 12 அவு. நிறையுள்ளதாகையால்,

$$w_1 + w_2 = 12 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

பொன்னின் ஓரலகுக் கனவளவு $19{\cdot}35w$ நிறையுள்ளதாகையால் அதன் நிறை w_1 இன் கனவளவு $\dfrac{w_1}{19{\cdot}35w}$ ஆகும்.

படிகத்தின் w_2 என்னும் நிறையின் கனவளவு $\dfrac{w_2}{2{\cdot}64w}$.

எனவே கட்டியினது ஓரலகுக் கனவளவின் நிறை

$$\frac{12}{\dfrac{w_1}{19{\cdot}35w}+\dfrac{w_2}{2{\cdot}64w}}.$$

இது $6{\cdot}25w$ இற்குச் சமம்.

$$\therefore \frac{w_1}{19{\cdot}35}+\frac{w_2}{2{\cdot}64}=\frac{12}{6{\cdot}25},$$

$$\therefore \frac{2{\cdot}64w_1}{19{\cdot}35}+w_2=\frac{12\times 2{\cdot}64}{6{\cdot}25} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(i) இலிருந்து (ii) ஐக் கழிக்க,

$$\frac{16{\cdot}71}{19{\cdot}35}w_1 = \frac{12\times 3{\cdot}61}{6{\cdot}25},$$

$$\therefore w_1 = \frac{12\times 3{\cdot}61\times 19{\cdot}35}{16{\cdot}71\times 6{\cdot}25}$$

$$= 8{\cdot}024 \text{ அவு.}$$

பயிற்சி XLII.

1. $1{\cdot}3$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தின் ஐந்து லீற்றர் $0{\cdot}78$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தின் ஏழு லீற்றருடன் கலக்கப்படுகின்றது. கலக்கப்படுமிடத்துத் திரவத்தின் கனவளவு 1 சதவீதம் குறையின், இக்கலவையின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க. (I.S.)

2. $0{\cdot}9$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தின் நாற்பது கிராம் $1{\cdot}2$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தின் 60 க.சமீ. உடன் கலக்கப்படுமிடத்துக் கனவளவில் மாற்றமேதும் ஏற்படாதாயின், இக்கலவையின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

3. இரும்பின் தன்னீர்ப்பு $7{\cdot}8$; நீரினது அடர்த்தி $62\frac{1}{2}$ இரு./கன அடி ஆயின், இரும்பின் அடர்த்தியை (i) கன அடிக்கு இத்தனை இருத்தலெனவும், (ii) கன அங்குலத்திற்கு இத்தனை அவுன்செனவுங் காண்க.

4. 1·08 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தின் 54 கிராமுடன் நீர் கலக்கப் படுமிடத்து இக்கலவையின் தன்னீர்ப்பு 1·05 ஆகுமாறு எவ்வளவு நீர் சேர்க்கப்படவேண்டும் ?

5. முறையே 7, 8·5 தன்னீர்ப்புள்ள நாகம், செம்பு ஆகியவற்றி னலாய ஒரு கலப்புலோகத்தின் கனவளவு 62 க. சமீ. உம் அதன் தன்னீர்ப்பு 8 உமாயின் அது கொண்டுள்ள நாகம், செம்புக் கனவளவுகள் யாவை ?

§198. இனி, புவியீர்ப்பின்கீழ் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பாயியில் வெவ்வேறு புள்ளிகளிலுள்ள அமுக்கச் செறிவுடனும் பாயியின் சுயாதீனப் பரப்பின் வடிவுடனும் தொடர்புள்ள சில தேற்றங்களை நிறுவுவோம்.

இவ்வாறு செய்யுமிடத்து, பாயி ஏகவினமானது, அ–து. பாயியின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் எடுக்கப்படும் அதன் சம கனவளவுகள் எத்துணைச் சிறியவையெனினும், சம நிறையுடையவையென மேற்கொள்வோம்.

பற்பல துணிக்கைகளினதும் நிறைகளைச் சமாந்தர நிலைக்குத்து விசை களாகக் கொள்ளுமாறு, எடுத்துநோக்கப்பெற்ற பாயியின் அளவு புவியின் பருமனுடன் ஒப்பிடுமிடத்துச் சிறியதாகும் எனவும் நாம் மேற் கொள்வோம். புவியீர்ப்பு மையங்களைக் காணுமிடத்து நாம் ஏற்படுத்திய எடுகோளும் இதுவும் ஒன்றுகும்.

§199. புவியீர்ப்பின்கீழ் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பாயியினிடத்து, ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் எந்தவிரு புள்ளிகளிலும் அமுக்கச் செறிவு சம மாகும்.

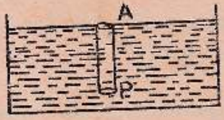
படம் 277.

P, Q (படம் 277) என்பன பாயியில் ஒரே கிடைத் தளத்தில் இருக்கும் இரு புள்ளிகள் என்க.

PQ ஐ அச்சாகவும் அதன் தள முனைகளை நிலைக்குத்தாகவுங் கொண்டுள்ள பாயியின் சிற்றுருளையொன்றை எடுத்துநோக்குக. இதன் ஒரு முனை P ஐயும் மற்றைய முனை Q ஐயுங் கொண்டுள்ளது. இவ்வுருளையின்மீது அச்சு PQ இன் திசையிற் செயற்படும் கிடை விசைகள் உருளையின் தள முனைகளின் மீதுள்ள உதைப்புக்களேயாகும். எனவே சமநிலையின் பொருட்டு இவ்வுதைப்புக்கள் சமமாகவும் முரணுகவுமிருக்கவேண்டும். தள முனைகள் மிகச் சிறியவாக இருக் கும்போது அவற்றின் ஓரலகுப் பரப்பின்மீதுள்ள அமுக்கங்கள் சீராகவும் P இலும் Q இலுமுள்ள அமுக்கச் செறிவுகட்குச் சமமாகவுமிருக்கும். எனவே

P, Q ஆகியனவற்றில் திசை PQ இலுள்ள அமுக்கச் செறிவுகள் சமமாகும். ஒவ்வொரு புள்ளியிலுமுள்ள அமுக்கச் செறிவு எல்லாத் திசைகளிலுஞ் சமமாகையால், P இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு Q இலுள்ளதற்குச் சமமாகும்.

§200. புவியீர்ப்பின்கீழ் ஓய்விலிருக்கும் ஏகவினத் திரவமொன்றில் அமுக்கச் செறிவு ஆழத்துடன் சீராகக் கூடுகின்றது.



படம் 278.

திரவத்தில் P (படம் 278) என்னும் யாதுமொரு புள்ளியை எடுத்து P ஐ உட்படுத்துமாறும் திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பினை A இற் சந்திக்குமாறும் a பரப்புள்ள அடியையுடைய ஒரு நிலைக்குத்து உருளையை வரைக.

இவ்வுருளையினுள் உள்ள திரவம் அதன் சொந்த நிறை, அதன் பரப்பின் மீது செயற்படும் விசைகள், என்பவை காரணமாகச் சமநிலையிலுள்ளது.

ஆழம் AP ஐ z என்க ; திரவத்தின் தன்னிறையை w என்க.

உருளையினுள் உள்ள திரவத்தின் நிறை waz ஆகும்.

வளிமண்டலம் காரணமாக A இன் மீதுள்ள அமுக்கச் செறிவு p_0 ஆகவும், P இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு p ஆகவுமிருப்பின், மேன்முனைமீது p_0a என்னும் கீழ்முக விசையும் கீழ்முனைமீது pa என்னும் மேன்முகவுதைப்பும் இருக்கும்.

வளைபரப்பு மீதுள்ள உதைப்பு கிடையானது. இதற்கும் திரவத்தைத் தாங்குவதற்கும் சம்பந்தமேதுமில்லை.

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க,

$$pa = p_0a + waz,$$

$$\therefore\ p = p_0 + wz.$$

ஆகவே அமுக்கச் செறிவானது ஆழம் z உடன் சீராகக் கூடுகின்றது.

வளிமண்டல அமுக்கம் தவிர்க்கப்படின்,

$$p = wz.$$

§201. வளிமண்டல அமுக்கம்.

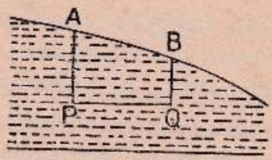
வளிமண்டல அமுக்கத்தைப் பொருட்படுத்துமிடத்து அதைச் சதுர அங்குலத்திற்கு இரு. நிறைகளில் (அல்லது பரப்பளவலகிற்கு யாதுமொரு நிறையில்) எடுத்துரைக்கலாம். அதோடு இவ்வமுக்கச் செறிவானது திரவத்தின் புள்ளி ஒவ்வொன்றிற்கும் செலுத்தப்படும்.

17—R 13456 (10/63)

வளிமண்டலம் நீரின் சமான ஆழத்திலூற் பதிலிடப்படுகிறதெனக் கருதி அமுக்கத்தினை உரைத்தல் பலமுறையும் வசதியானதாகும். இரசப் பாரமானி உயரத்தின் சார்பாக வளிமண்டல அமுக்கத்தை உரைத்தலாகிய பொதுவான முறை வளிமண்டலம் காரணமான அமுக்கச் செறிவும் எதாவதொரு குறித்த உயரம் (வழக்கமாக ஏறக்குறைய 30 அங்குலம்) உள்ள இரசநிரல் காரணமான அமுக்கச் செறிவுமொன்றென உரைத்தலை ஒத்தது.

ஒரு நீர்ப் பாரமானியின் உயரம் ஏறக்குறைய 33 அடியாக இருக்கும், அ—து. வளிமண்டல அமுக்கச் செறிவு 33 அடியுயர நீர் நிரல் காரணமான அமுக்கச் செறிவிற்குச் சமமாகும்.

§202. புவியீர்ப்பின்கீழ் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பாரமான திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பு ஒரு கிடைத் தளமாகும்.



படம் 279.

அத்திரவத்தில் ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் P, Q என்னும் இரு புள்ளிகளை எடுக்க.

சுயாதீனப் பரப்பை A, B என்பனவற்றிற் சந்திக்கும்படி PA, QB (படம் 279) என்னும் நிலைக்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

A, B ஆகியனவற்றில் வளிமண்டலம் காரணமாகவுள்ள அமுக்கச் செறிவினை p_0 என்க ; திரவத்தின் தன்னிறையை w என்க.

பின்பு P இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு = Q இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு.

$$\therefore\ p_0 + w\mathrm{PA} = p_0 + w\mathrm{QB},$$

$$\therefore\ \mathrm{PA} = \mathrm{QB}.$$

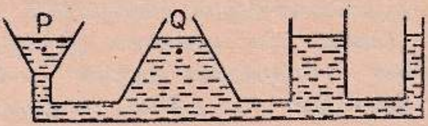
∴ AB கிடையானதாகும்.

P, Q என்பன ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் எவையேனுமிரு புள்ளிகளாகையால், பரப்பிலுள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் யாதுமொரு கோடு AB கிடையாக இருக்க வேண்டும் என்பது விளங்குகின்றது.

இம்முடிவு, திரவத்தின் துணிக்கைகளின் நிறைகளெல்லாம் சமாந்தரமானவையென்ற எடுகோளிற் சார்ந்துள்ளதென்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

கடல் போன்ற ஒரு நீர்ப் பேரளவில், பரப்பு ஒரு கிடைத் தளமாகாது. கடற்பரப்பு அண்ணளவாகக் கோளமாக இருப்பதனால் அது வளைவானதென்பது நன்கு தெரிந்துள்ளது.

§203. இறுதிப் பந்தியின் தேற்றமானது திரவம், படம் 280 இற் போல, வெவ்வேறு வடிவும் பருமனுமுள்ள பல தொடுக்கப்பட்டுள்ள பாத்திரங் களிற் கொள்ளப்பட்டிருக்குமிடத்தும் பொருந்துகிறது.



படம் 280.

பாத்திரங்களெல்லாவற்றிலும் திரவம் ஒரே மட்டத்திலிருக்கும்.

ஒரே கிடைத் தளத்திலிருக்கும் எல்லாப் புள்ளிகளும் P, Q என்பன வற்றைப் போல வெவ்வேறு பாத்திரங்களிலிருப்பினும் இப்புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அமுக்கச் செறிவு சமமாகும்.

§204. ஒன்றோடொன்று கலவாதனவும் வெவ்வேறு அடர்த்தியுள்ளன வுமான இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பு ஒரு கிடைத் தளமாகும்.

w_1, w_2 அத்திரவங்களின் தன்னிறைகளென்க ($w_1 > w_2$). கீழுள்ள திரவத்தில் ஒரே கிடைத் தளத் திலிருக்கும் P, Q (படம் 281) என்னுமிரு புள்ளி களை எடுத்து, பொதுப் பரப்பினை A, B ஆகியவற்றி லும் மேலுள்ள திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பினை A′, B′ ஆகியவற்றிலுஞ் சந்திக்கும்படி PAA′ ஐயும் QBB′ ஐயும் நிலைக்குத்தாக வரைக.

படம் 281.

மட்டங்கள் A′B′, PQ ஆகியவற்றிலுள்ள அமுக்கச் செறிவை முறையே p_0, p என்க.

PA′, QB′ என்பனவற்றை அச்சுக்களாகக் கொண்ட சிறிய நிலைக்குத்து உருளைகளின் சமநிலையை எடுத்துநோக்க,

$$p - p_0 = w_1 \mathrm{PA} + w_2 \mathrm{AA'},$$

$$p - p_0 = w_1 \mathrm{QB} + w_2 \mathrm{BB'},$$

$$\therefore\ w_1(\mathrm{PA'} - \mathrm{AA'}) + w_2 \mathrm{AA'} = w_1(\mathrm{QB'} - \mathrm{BB'}) + w_2 \mathrm{BB'}. \qquad \text{(i)}$$

ஆனால் PQ, A′B′ ஆகியன கிடையானவை.

$$\therefore\ \mathrm{PA'} = \mathrm{QB'}.$$

∴ (i) பின்வருமாறு ஆகின்றது :—

$$(w_2 - w_1)\mathrm{AA'} = (w_2 - w_1)\mathrm{BB'},$$

அதோடு $w_2 - w_1$ பூச்சியமன்றென்பதனால்,

$$\mathrm{AA'} = \mathrm{BB'}.$$

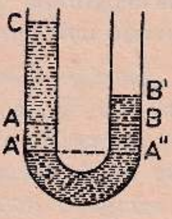
ஆகவே AB கிடையானதாகும். இதே மாதிரியாக, பொதுப் பரப்பில் வரையப்படும் எந்தக்கோடும் கிடையானதாகும்.

§205. திரவத்தின் சமநிலை நிரல்கள்.

ஒரு திரவம் U–குழாயொன்றினுள் வைக்கப்படுமிடத்து, இக்குழாயின் குறுக்குவெட்டுகள் (அவை மிக ஒடுக்கமாக இருக்குமிடத்துத் திரவப் பரப்பிற்கும் குழாயின் பரப்பிற்குமிடையேயுள்ள தாக்கம் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவிற்கு திரவத்தின் மட்டத்தினைப் பாதிக்குமாகையால், இவ்வாறிருந்தாலொழிய) சமமாகவோ சமமற்றனவாகவோ இருப்பினும் இரு கால்களிலுமுள்ள திரவத்தின் பரப்புக்கள் ஒரே மட்டத்திலிருக்கும்.

ஒரு U–குழாயினுள் இரசம் போன்ற ஒரு திரவம் இருப்பதாகக் கருதுக. A, B (படம் 282) ஆகியவற்றில் இரு கால்களிலும் பரப்புக்கள் ஒரே மட்டத்திலுள்ளன என்க.

இப்பொழுது முதற் திரவத்துடன் கலவாத (நீரைப் போன்ற) ஓர் இலேசான திரவம் A இற்குள் ஊற்றப்படுகின்றது. B இலுள்ள திரவத்தின்



படம் 282.

மட்டம் B′ இற்கு உயருகிறது. மட்டம் A, A′ இற்கு இறங்குகிறது. இது இரு திரவங்களினதும் பொதுப் பரப்பாகும். இலேசான திரவத்தின் உயர்பரப்பு C இப்போது மட்டம் B′ இற்குக் கணிசமான அளவு மேலேயிருக்கும். ஏனெனில், A′ இன் மட்டத்தில் மற்றைய காலிலிருக்கும் A″ என்னும் புள்ளியும் முதற் திரவத்திலிருப்பதனுல் இப்புள்ளிகளிலுள்ள அமுக்கச் செறிவுகள் சமமாகும். இப்போது A′ இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு இலேசான திரவத்தினது A′C என்னும் ஆழம் காரணமாகும். அதே சமயத்தில் A″ இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு பாரமான திரவத்தின் A″B′ என்னும் ஆழத்தினுலாகும்.

$$\therefore\ A'C > A''B'.$$

அன்றியும் இலேசான, பாரமான திரவங்களின் தன்னிறைகள் முறையே w_1, w_2 ஆயின்,

$$w_1 . A'C = w_2 . A''B',$$

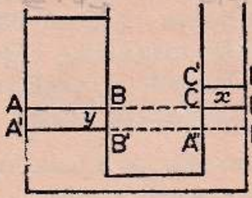
அல்லது

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{A''B'}{A'C} \text{ ஆகும்.}$$

அ-து. ஓரலகுக் கனவளவிற்கான நிறைகள் பொதுப் பரப்பு மட்டத்திற்கு மேலே நிரல்களின் உயரங்களினது நேர்மாறு விகிதத்திலுள்ளன. இம்முறை ஓரலகுக் கனவளவிற்கான நிறைகளை ஒப்பிடப் பயன்படுத்தலாம். ஆகையால் கலவாத இரு திரவங்களின் அடர்த்திகளையும் தன்னீர்ப்புக்களையும் ஒப்பிடப் பயன்படுத்தலாம்.

உதாரணம்.

முறையே 1, 0·4 அங்குல விட்டமுடைய இரு நிலைக்குத்துக் குழாய் களின் கீழ் முனைகள் ஒரு குழாயினுலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இக்



படம் 283.

குழாய்கள் 13·6 தன்னீர்ப்புள்ள இரசத்தினைக் கொண்டுள்ளன. பெருங் குழாய்க்குள் 28 கன அங்குல நீர் ஊற்றப்படின், சிறு குழாயில் இரசம் எவ்வளவு உயரத்திற்கு ஏறும் ? (I.S.)

நீர் ஊற்றப்படுமுன் இரசப் பரப்பு மட்டங்களை AB, CD (படம் 283) என்க.

இரு குழாய்களினதும் பரப்பளவுகள் $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{25}$ சதுர அங்குலம்.

28 கன அங்குல நீர் தங்கும் குழாய் நீளம் $\frac{112}{\pi}$ அங்குலம்.

பெருங் குழாயிலுள்ள இரச மட்டமானது A′B′ இற்கு இறக்கப்படுகின்றது ; சிறு குழாயிலுள்ள மட்டம் C′D′ இற்கு உயர்த்தப்படுகின்றது.

$BB' = y$ எனவும், $DD' = x$ எனவும், A′B′ இன் அதே மட்டத்தில் A″B″ இருப்பதாகவுங் கொள்க.

A″B″ இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு = A′B′ இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு,

$$\therefore\ 13{\cdot}6\,(x+y) = \frac{112}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

அன்றியும் AB இற்கும் A′B′ இற்குமிடையேயுள்ள திரவத்தின் கனவளவு ஒடுங்கிய குழாயிற்குட் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகையால் இக்கனவளவு CD இற்கும் C′D′ இற்குமிடையேயுள்ள கனவளவிற்குச் சமம்.

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}y = \frac{\pi}{25}x.$$

$$\therefore\ y = \frac{4}{25}x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

எனவே, (i) இலிருந்து,

$$x+\frac{4}{25}x=\frac{112}{13\cdot 6\pi},$$

$$\therefore\ x=\frac{25\times 112\times 7}{29\times 13\cdot 6\times 22}=2\cdot 258 \text{ அங்.}$$

பயிற்சி XLIII.

1. ஒரு U–குழாய், திறந்த 1 சதுர அங்குல வெட்டுமுக முனைகளை உடையது. இதன் நிலைக்குத்தான பகுதிகள் 33 அங்குல உயரமுள்ளன. இப்பகுதிகளில் 6·8 அங்குல உயரத்திற்கு இரசமுள்ளது. இரசத்தின் தன்னீர்ப்பு 13·6 எனக் கொண்டு, இப்பகுதிகளில் ஒன்றினிற்குள் ஊற்றக்கூடிய நீரின் அதியுயர் அளவினைக் காண்க. (I.S.)

2. ஒரு குழாயினால், முறையே A, a வெட்டுமுகப் பரப்புகளுள்ள அகலமான நிமிருருளையும் ஒடுக்கமான நிமிருருளையும் இணைக்கப்பெற்றுள்ளன. அகலமான உருளையில் W நிறையுள்ள ஓர் ஒப்பமான காற்றிறுக்கமான பாரமுள்ள முசலம் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. ஒடுங்கிய உருளைக்குள் நீர் ஊற்றப்பட்டு, முசலம் உயர்த்தப்படுகின்றது; ஒடுங்கிய உருளைக்குள் முசலத்திற்கு மேலாக நீரின் உயரத்தினைக் காண்க. இவ்வுருளையின் z நீளத்தினை நிரப்பும் நீரளவு நீர் அதற்குள் ஊற்றப்படின், முசலம் மேலும் எவ்வளவு தூரம் உயர்த்தப்படும்? (H.S.C.)

3. சீர்க் குறுக்குவெட்டுள்ள ஒரு குழாய் இரு நிலைக்குத்துப் பகுதிகளை உடையது. இவை இவற்றின் கீழ் முனைகளில் 5 சமீ. நீளக் கிடைப் பகுதியொன்றினாலே தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. குழாயின் 20 சமீ. ஐக் கொள்ளக்கூடிய போதியளவு நீர் ஒரு பகுதிக்குள்ளும் 20 சமீ. ஐக் கொள்ளும் 0·82 தன்னீர்ப்புள்ள போதியளவு எண்ணெய் மற்றைய பகுதிக்குள்ளும் ஊற்றப்படுகின்றது. இத்திரவங்களின் பொதுப் பரப்புத் தானத்தைக் காண்க.

§206. முழுவமுக்கம் அல்லது உதைப்பும் விளையுளுதைப்பும்.

பாயியில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் ஒரு பரப்பினது ஒவ்வொரு மூலகத்தின் மீதுமுள்ள (இம்மூலகத்திற்குச் செங்குத்தான) அமுக்கம் காணப்பட்டிருப்பின், இத்தகைய அமுக்கங்களெல்லாவற்றினதும் கூட்டுத்தொகை அமிழ்த்திய பரப்பின்மீதுள்ள முழுவமுக்கம் அல்லது உதைப்பு எனப்படும்.

பரப்பு தளப் பரப்பாயின் மூலகங்கள் எல்லாவற்றின் மீதுமுள்ள உதைப்புக்கள் சமாந்தரமாகும். அதோடு மேலுள்ளவாறு வரைவிலக்கணங் கூறப்பெற்ற முழுவுதைப்பானது பரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பிற்குச் சமமென்பது தெளிவாகின்றது. இது, யாவேனும் பல நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளின் விளையுள் அவற்றின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமென்ற உண்மையிலிருந்து தெரிகின்றது.

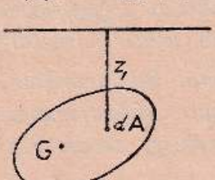
அப்பரப்பு வளைவாக இருக்குமாயின், மூலகங்களின் மீதுள்ள உதைப்புக்கள் சமாந்தரமாக இருக்கமாட்டா. அதோடு அவற்றின் விளையுள் இனியும் அவற்றின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்காது. மேலுள்ளவாறு வரைவிலக்கணங் கூறப்பெற்ற முழுவுதைப்பு இவ்விடத்து எவ்விதப் பௌதிகக் கருத்தையுங் கொண்டிராது. ஏனெனில், சமாந்தரமல்லாத இரண்டு அல்லது இதற்கு மேற்பட்ட விசைகளின் பருமன்களைக் கூட்டுதல் பொறிமுறை முக்கியத்துவமெதையுந் தராது.

ஒரு வளைபரப்பினது மூலகங்களின் மீதுள்ள உதைப்புக்கள் விளையுளொன்றை உடையனவாயினும், அவற்றைக் கூட்டி இதைக் காணமுடியாது.

ஒரு வளைபரப்பின் மீதுள்ள உதைப்பின் பருமனையும் திசையையும் காணும் முறை பின்பு ஆராயப்படும்; தற்போது ஒரு தளப் பரப்பு மீதுள்ள விளையுளுதைப்பையே ஆராய்வோம்.

§207. திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் யாதுமொரு தளப் பரப்புமீதுள்ள விளையுளுதைப்பை, வளிமண்டல அமுக்கத்தைத் தவிர்த்துக் காணுதல்.

பரப்பின் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் மீதுமுள்ள உதைப்புக்கள் பரப்பிற்குச் செங்குத்தானவையென்பதும் ஆகையால் ஒவ்வொன்றிற்கும் சமாந்தரமானவையென்பதும் நமக்குத் தெரியும். அன்றியும் யாதுமொரு மூலகத்தின் மீதுள்ள உதைப்பின் பருமனனது திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழாக அம்மூலகத்தின் ஆழத்திலேயே சார்ந்துள்ளது.



படம் 284.

தளப் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினை G (படம் 284) எனவும், திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழாக G இன் ஆழத்தினை z எனவும், தளப் பரப்பின் பரப்பளவினை A எனவுங் கொள்க.

அப்பரப்பின் யாதுமொரு மூலகம் δA மீதுள்ள உதைப்பினை எடுத்துநோக்குக.

அதன் பருமன் $wz_1\delta A$ ஆகும். இங்கு w, திரவத்தின் தன்னிறை; z_1, திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழாக அம்மூலகத்தின் ஆழம்.

ஆகவே விளையுளுதைப்பு $\Sigma wz_1\delta A$. இங்கு Σ, அமிழ்த்திய பரப்பின் மூலகங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் கூட்டலைக் குறிக்கின்றது. ஆனால், அமிழ்த்திய

பரப்பின் புவியீர்ப்பு மைய ஆழத்தைக் காணற்குரிய சூத்திரத்திலிருந்து,

$$z = \frac{\Sigma z_1 \delta A}{A}$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ \Sigma z_1 \delta A = zA,$$

$$\therefore\ w\Sigma z_1 \delta A = wzA.$$

இங்கு wz, G இல் ஓரலகுப் பரப்பிற்கான அமுக்கமாகும், அ—து. விளையுள் உதைப்பானது, அமிழ்த்திய பரப்பின் பரப்பளவிற்குச் சமமான அடியையும் திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழாக அவ்வமிழ்த்திய பரப்பினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்திற்குச் சமமான உயரத்தையுமுடைய திரவ நிரலொன்றின் நிறைக்குச் சமம்.

இம்முடிவு,

உதைப்பு = அமிழ்த்திய பரப்பளவு × பு.மை. ஆழம் × திரவத்தின் தன்னிறை, என்ற வடிவில் எளிதாக நினைவு கூரப்படலாம்.

இம்முடிவு விளையுளுதைப்பின் **பருமனையே** தருகிறதென்பது கவனிக்கப்படத்தக்கது ; அமிழ்த்திய பரப்பினை விளையுள் சந்திக்கும் புள்ளியை நாம் காணவில்லை. அப்பரப்பினை விளையுளுதைப்பு சந்திக்கும் பரப்பின் புள்ளியானது பரப்பின் **அமுக்க மையம்** எனப்படும். **அவ்விளையுளானது புவியீர்ப்பு மையத்திற் செயற்படுகிறதெனக் கொள்ளுதலாகிய சற்றுப் பொதுவான பிழையை விடாதிருக்கக் கவனமாக இருக்கவேண்டும்.**

அமிழ்த்திய பரப்பானது கிடையாக இருந்தாலொழிய இது நடைபெறாது. இல்லையாயின் அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து வேறானதாகும்.

அமிழ்த்திய பரப்பின் தளம் கிடையாகவோ, நிலைக்குத்தாகவோ, சாய்வாகவோ எவ்வாறிருப்பினும் விளையுளுதைப்பின் பருமனைக் காணற்குரிய விதி பொருந்துகிறதென்பது கவனிக்கப்படத்தக்கது.

ஒரு தளப் பரப்பினது அமுக்க மையத்தின் தானத்தினை நிர்ணயிக்கும் முறை பின்பு ஆராயப்படும்.

§208. உதாரணம் (i).

சமமான ஒரு சோடிப் பூட்டுக்கதவுகள் 14 அடி ஆழமுள்ள நீரின் உதைப்பினுல் மூடப்பெற்றுள்ளவாறு பேணப்படுகின்றன. கதவுகள் செவ்வகமாகவும் மட்டமாகவுமுள்ளன என்றும், ஒவ்வொன்றும் 18 அடி நிலைக்குத்தளவும் 12 அடி கிடையளவுமுள்ள தென்றும், அவை 20 அடி இடைத்தூரத்திலிருக்கும் வெளிவிளிம்புகளில் நிலைக்குத்துப் பிணையல்களினுலே தாங்கப்பட்டுள்ளனவென்றுங் கொண்டு, அக்கதவுகள் சார்ந்திருக்கும் கோட்டின் குறுக்கே அவற்றினிடையேயுள்ள மறுதாக்கம் பிணையல்களின் மீதுள்ள விளையுள் மறுதாக்கங்களுக்குச் சமமெனக் காட்டி, அதன் பெறுமதியைக் காண்க. (I.S.)

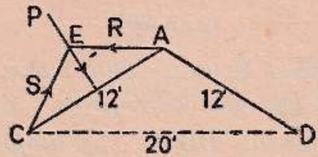
கதவுகளை AC உம் AD உம் (படம் 285), அவை ஒன்றோடொன்று முட்டும் புள்ளியை A உம், பிணையல்களை C உம் D உம் குறிப்பதாகக் கொள்க.

ஒவ்வொரு கதவின் மீதுமுள்ள விளையுளுதைப்பு பருமனில்

$$14\times 12\times 7\times 62\tfrac{1}{2} \text{ இரு. நிறைக்குச் சமம்.}$$

(அமிழ்த்திய பரப்பளவானது 18×12 அன்று, 14×12 ஆகும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. புவியீர்ப்பு மைய ஆழமும் 9 அன்று 7 ஆகும்.)

இவ்விளையுளுதைப்பானது கதவின் பரப்பை இருகூறிடும் நிலைக்குத்துக் கோட்டில் எங்கேனும் செயற்படுமெனச் சமச்சீர்ப்படி தெரிகின்றது. கதவுகளிடையேயுள்ள மறுதாக்கம் R, CD இற்குச் சமாந்தரமாகும்.



படம் 285.

அதோடு ஒவ்வொரு பிணையல் மீதுமுள்ள மறுதாக்கம் S ஆனது அதன் தாக்கக் கோட்டினை, இக்கோடு கதவின் மீதுள்ள நீரமுக்கத்தினுலான உதைப்பு P இன் தாக்கக் கோட்டினை வெட்டும் E இற் சந்திக்க வேண்டும். P இன் தாக்கக் கோடானது AC ஐச் செங்குத்தாக இருகூறிடுவதனுல், R உம் S உம் அதற்குச் சமமாகச் சாய்ந்திருக்கும். ஆகவே இவை பருமனிற் சமம்.

ஒவ்வொரு கதவிற்கும் பிணையல்களின் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தின் கோசைன் $\frac{10}{12}$ அல்லது $\frac{5}{6}$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ கோசை } EAC = \frac{5}{6}, \text{ அதோடு சைன் } EAC = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

அன்றியும் $2R$ சைன் $EAC = P$,

$$\therefore R = \frac{6P}{2\sqrt{11}} = \frac{6\times 14\times 12\times 7\times 125}{4\sqrt{11}} \text{ இரு. நிறை}$$

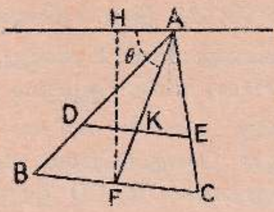
$$= \frac{84\times 21\times 125}{2240\sqrt{11}} \text{ தொன் நிறை}$$

$$= 29{\cdot}7 \text{ தொன் நிறை.}$$

உதாரணம் (ii).

ABC என்னுமொரு முக்கோணியடர் ஒரு திரவத்தில், உச்சி A திரவப் பரப்பிலிருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. BC இற்குச் சமாந்தரமான கோடு DE ஆனது, பரப்பு ADE மீதுள்ள அமுக்கம் பரப்பு DBCE

மீதுள்ளதிற்குச் சமமாகவிருக்குமாறு முக்கோணியை வெட்டுமிடத்து கோடு DE இன் தானத்தைக் கண்டு, அடர்மீது இக்கோட்டின் தானமானது அடரினது தளம் நிலைக்குத்துடன் கொண்டுள்ள சாய்வில் சார்பற்றதெனக் காட்டுக. (I.S.)



படம் 286.

BC இன் நடுப்புள்ளியை **F** *(படம் 286) என்க.* **F** *இனூடான நிலைக் குத்தானது பரப்பை* **H** *இல் வெட்டுகிறதென்க.* $\angle FAH = \theta$ *என்க.*

ADE *மீதுள்ள அமுக்கம்* DBCE *மீதுள்ளதிற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமாகையால்,* ADE *மீதுள்ள அமுக்கம்* ABC *மீதுள்ளதின் அரைவாசியாகும்.*

ADE, ABC *ஆகிய பரப்பளவுகள்* $AD^2 : AB^2$ *என்னும் விகிதத்திலுள்ளன.*

ADE, ABC *ஆகியவற்றின் புவியீர்ப்பு மைய ஆழங்கள் முறையே* $\frac{2}{3}AK$ *சைன்* θ, $\frac{2}{3}$ AF *சைன்* θ *ஆகும்.*

$$\therefore \frac{ADE \text{ மீதுள்ள அமுக்கம்}}{ABC \text{ மீதுள்ள அமுக்கம்}} = \frac{AD^2 . \frac{2}{3}AK \text{ சைன்}\theta}{AB^2 . \frac{2}{3}AF \text{ சைன்}\theta} = \frac{AD^2 . AK}{AB^2 . AF}.$$

அதோடு
$$\frac{AK}{AF} = \frac{AD}{AB},$$

∴ அமுக்கங்களின் விகிதம்
$$= \frac{AD^3}{AB^3},$$

$$\therefore \frac{AD^3}{AB^3} = \frac{1}{2},$$

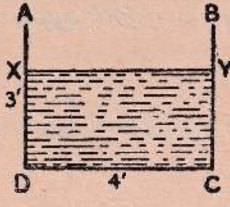
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

θ *இன் (பூச்சியத்தைத் தவிர ஏனைய) பெறுமதி எதுவெனினும் மேலுள்ள நியாயம் பொருந்துகிறது. அதோடு அம்முடிவானது நிலைக்குத்துடன் அடரினது தளத்தின் சாய்விற் சார்பற்றது.*

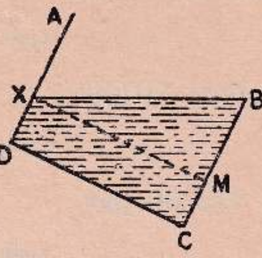
உதாரணம் (iii).

4 அடி நீளமும், 4 அடி அகலமும், 3 அடி ஆழமுமுள்ள ஒரு திறந்த தாங்கியில் 2 அடி ஆழத்திற்கு நீருள்ளது. நீர் வெளியேறும் நிலையிலிருக்

கும் வரையில் அது அதன் கீழ்விளிம்புகளிலொன்றினைப் பற்றி ஒருச்சாய்க்கப் படின், அதனடிமீதும் நிலைக்குத்தாக இல்லாத பக்கங்கள் மீதுமுள்ள உதைப்புக்கள் எவ்விகிதங்களில் மாறும்? (H.S.C.)



படம் 287A.



படம் 287B.

ABCD (படம் 287A) தாங்கியின் ஒரு வெட்டுமுகத்தைக் குறிக்க. XY நீரின் பரப்பு.

w, நீரின் தன்னிறையாயின், உதைப்புக்கள் பின்வருமாறு :—

அடிமீதுள்ள உதைப்பு $= 4 \times 4 \times 2w = 32w$.

நிலைக்குத்துப் பக்கம் ஒவ்வொன்றின் மீதுமுள்ள உதைப்பு

$$= 4 \times 2 \times 1w = 8w.$$

நீரானது B இன் அதே மட்டத்தில் படம் 287B இற் போல இருக்குமாறு தாங்கி ஒருச்சாய்க்கப்படும்போது, DXBC இன் பரப்பு ஆரம்ப நிலையில் XDCY நீன் பரப்பிற்குச் சமம்.

XM ஐ BC இற்குச் செங்குத்தாக அதனை M இற் சந்திக்கும்படி வரைக.

DXBC இன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}.4.\mathrm{BM} + 4.\mathrm{MC} = 2\mathrm{BM} + 4\mathrm{MC},$$

$$\therefore \; 2\mathrm{BM} + 4\mathrm{MC} = 8,$$

அதோடு $\mathrm{BM} + \mathrm{MC} = 3,$

$\therefore \; 2\mathrm{MC} = 2$, அல்லது $\mathrm{MC} = 1$ அடி,

$\therefore$ தான் $\mathrm{BXM} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ கோசை $\mathrm{BXM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, அதோடு சைன் $\mathrm{BXM} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

பரப்பிற்குக் கீழாக D இன் ஆழம் $= 1 \times \frac{2}{\sqrt{5}}$,

பரப்பிற்குக் கீழாக C இன் ஆழம் $= 3 \times \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\therefore$ பரப்பிற்குக் கீழாக DC இன்

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= \frac{4}{\sqrt{5}}$ அடி,

பரப்பிற்குக் கீழாக XD இன்

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= \frac{1}{\sqrt{5}}$ அடி,

பரப்பிற்குக் கீழே BC இன்

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $= \frac{3}{\sqrt{5}}$ அடி.

இக்கோடுகளினூற் குறிக்கப்பெறும் பக்கங்களின் பரப்பளவுகள் 16, 4, 12 சதுர அடியாகும்.

எனவே உதைப்புக்கள்,

$$\text{அடி DC மீது } \frac{64}{\sqrt{5}}w,$$
$$\text{பக்கம் AD மீது } \frac{4}{\sqrt{5}}w,$$
$$\text{பக்கம் BC மீது } \frac{36}{\sqrt{5}}w.$$

ஆகவே அடிமீதும் நிலைக்குத்தாகவில்லாத பக்கங்கள் மீதுமுள்ள உதைப்புக்கள்,

$$\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{2\sqrt{5}},\ \frac{9}{2\sqrt{5}}$$

என்னும் விகிதங்களில் மாற்றப்படுகின்றன.

உதாரணம் (iv).

ஒரு செவ்வகத் தொட்டியிலுள்ள நீரின் ஆழம் 4 அடி ஆகும். $\frac{1}{2}$ அங்குல நீர் ஆவியாகின் பாரமானியினது உயரத்தின் எந்த அதிகரிப்பு தொட்டியின் ஒரு பக்கத்தின் மீதுள்ள அமுக்கத்தின் பருமனை அதன் முதற் பெறுமதிக்குச் சமனுக்கும் ? (இரசத்தின் தன்னீர்ப்பு 13·5; பாரமானியின் தொடக்கவுயரம் 30 அங்குலம்.)

வளிமண்டலம் அதற்குச் சமானமான நீரினுழத்தினுற் பதிலிடப்படுகிறதென்று நாம் கருதின், தொட்டியில் பரப்பிலிருந்து $\frac{1}{2}$ அங்குல நீர் ஆவியாகல் இந்நீரினை $\frac{1}{2}$ அங்குலத்தினுல் தாழ்த்தும்.

பக்கங்கள் மீதுள்ள தொடக்க அமுக்கங்களைத் திரும்ப ஏற்படுத்துவதற்கு மேற்பக்கத்தில் $\frac{1}{2}$ அங்குல நீர் சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

இது $\dfrac{1}{2 \times 13\cdot5}$ அங்குல இரசத்தினைச் சேர்ப்பதற்குச் சமானமாகும்.

ஆகவே தேவையான பாரமானி உயர்ச்சி $= \dfrac{1}{27} = 0\cdot037$ அங்குலம்.

பயிற்சி XLIV.

1. ஒரு சீர்த் திரவத்திலுள்ள அமுக்கச் செறிவானது ஆழத்துடன் எவ்வாறு மாறுகிறதென்பதைக் காட்டும் ஒரு சூத்திரத்தினைப் பெறுக. ஒரு கப்பற் றுறையின் பரப்பளவு 60,000 சதுர யார். நீர்மட்டத்தின் 20 அடி உயர்வினால் துறையின் தரைமீதுள்ள மொத்தவுதைப்பில் எவ்வளவு அதிகரிப்பு ஏற்படும் ? (H.S.D.)

2. ஒரு நீர்த்தேக்கத்தின் செவ்வக அணை 40 அடி அகலமும் 10 அடி ஆழமுமுடையது ; 36 கனவடி நீர் ஒருதொன் நிறையுள்ளதெனக்கொண்டு, அணைமீதுள்ள உதைப்பைக் கணிக்க ; நீர்ப் பரப்பு அணையுச்சியிலிருந்து 1 அடி கீழேயுள்ளது. (I.S.)

3. ஒரு முக்கோணியடரின் பக்கம் AB ஒரு பாரமான ஏகவினத் திரவப் பரப்பிலுள்ளது. பரப்புக்கள் ABD, DBC மீதுள்ள உதைப்புக்கள் சமமாகுமாறு AC இல் D என்னும் புள்ளி எடுக்கப்பட்டுள்ளது. $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ என நிறுவுக. (I.S.)

4. ஒரு நீர்த்தேக்கம், 7 அடி அகலமும் 10 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு மடைக்கதவினால் அடைக்கப்பெற்றுள்ளது. ஒரு கன அடி நீர் 1000 அவு. நிறையுள்ளதெனவும் கதவின் உச்சியானது நீர்ப் பரப்பிலுள்ளதெனவும் கொண்டு, கதவின் மீதுள்ள நீரின் அமுக்கத்தைத் தொன் நிறையிற் காண்க. (I.S.)

5. ஒரு செவ்வகப் பாத்திரத்தில் ஒன்றோடொன்று கலவாத மூன்று திரவங்களுள்ளன. இவற்றின் தன்னீர்ப்புக்கள் முறையே 1·0, 1·2, 1·6 உம் தடிப்புக்கள் 4, 3, 2 அங்குலமுமாகும். பாத்திரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் மீது திரவங்களின் மொத்தச் செவ்வனுதைப்புக்களை ஒப்பிடுக. (I.S.)

6. ABCD என்னும் ஒரு செவ்வக அடர் ஒரு சீர்த் திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. AB கிடையாகவும் உச்சமாகவுமுள்ளது ; BC, AD ஆகிய இரண்டும் நிலைக்குத்தானவை, h நீளமுள்ளவை ; E, AB இன் நடுப்புள்ளி. இச்செவ்வகம் DE, EC என்பவற்றினால் பிரிக்கப்பட்டு வரும் மூன்று முக்கோணிகள் மீதுள்ள உதைப்புக்கள் 1 : 1 : 3 என்னும் விகிதத்திலிருப்பின், பரப்புக்குக் கீழே AB இன் ஆழத்தைக் காண்க. வளிமண்டல அமுக்கம் தவிர்க்கப்படவேண்டியது. (H.S.D.)

7. சீர்க் குறுக்குவெட்டும் 8 அடி நீளமுங் கொண்ட ஒரு கல், அதன் அடியை 25 அடி ஆழமுள்ள ஓர் ஏரியின் கிடையான அடிமீது கொண்டு தங்குகிறது. கல்லின் நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டு ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணி ABC வடிவுள்ளது. இம்முக்கோணியில், AB = BC, B = 90°, அடி AC = 3 அடி. கல்லின் நீணுந்த நான்கு முகங்கள் ஒவ்வொன்றின் மீதுமுள்ள மொத்த அமுக்கத்தைக் கணிக்க. (1 கன அடி நீர் 64 இரு. நிறையுள்ளதெனவும், ஏரியின் பரப்புமீதுள்ள வளிமண்டல அமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. நிறையெனவுந் தரப்பட்டுள்ளது.) (H.S.D.)

8. 3 அடி நீளமும் 2 அடி அகலமும் 2 அடி ஆழமுமுடைய ஒரு செவ்வகத் தொட்டியில் அதன் விளிம்பிற்குக் கீழே 9 அங்குல மட்டத்திற்கு நீருள்ளது. 300 இரு. நிறையும் 4 கன அடி கனவளவுமுள்ள ஒரு பொருள் பின்பு நீரிற் போடப்படுகின்றது. இது நீரினுல் முற்றுக மூடப்பெற்று தொட்டியின் அடியிலே தங்குகின்றது. சுவரொவ்வொன்றின்மீதும் தொட்டியின் அடியின் மீதுமுள்ள உதைப்பினைக் கணிக்க. (ஒரு கன அடி நீர் 62·5 இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.D.)

9. ஒரு சதுரத்தட்டு, a நீள விளிம்பொன்று நீர் பரப்பிலிருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது ; இச்சதுரத்தை மூன்று செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கும் இரு கிடைக் கோடுகளின் தானங்களைக் காண்க. இச் செவ்வகங்களொவ்வொன்றின் மீதுமுள்ள மொத்த நீரமுக்கம் சமமாகும். (I.S.)

10. 3 அடி நீளமும் 5 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு வட்ட அடியுமுடைய ஒரு திறந்த வட்டவுருளையில் $2\frac{1}{2}$ அடி ஆழத்திற்கு நீருள்ளது. இவ்வுருளையானது நீர் வெளியேறும் தறுவாயிலிருக்கும் வரை அதன் அடியின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றி ஒருச்சாய்க்கப்படுகின்றது ; அவ்வடி மீதுள்ள உதைப்பைக் காண்க. (I.S.)

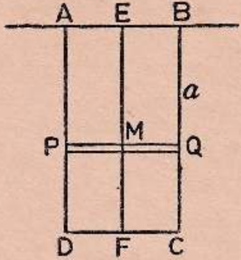
11. 4 அடி பக்கமும் 3 அடி உயரமுமுடைய சதுர அரிய வடிவுள்ள ஒரு மூடிய தொட்டியில் நீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. தொட்டி இதன் சதுரமுகங்களிலொன்று ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீது பொருந்துமாறு தங்கியிருக்கின்றது. அதன் மேல்விளிம்பொன்றில் ஒரு சிறிய துவாரமுள்ளது. அது, ஒரு செவ்வகமுகம் அத்தளத்தின்மீது பொருந்தப்பெற்றுத் தங்கும்வரை அதனெதிர்க் கீழ்விளிம்பு பற்றி மெதுவாக ஒருச்சாய்க்கப்படுகின்றது. தொட்டி ஒருச்சாய்க்கப்படும்போது இச்செவ்வக முகத்தின் மீதுள்ள அதியுயர் உதைப்பைக் காண்க. (1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.D.)

12. a பக்கமுள்ள ஒரு கனவடிவப் பாத்திரத்தில், ஒன்றோடொன்று கலவாத திரவங்களிரண்டு உள்ளன. பாரமான திரவத்தின் கனவளவும் நிறையும் முறையே a^2b, Wa^2b ஆகும். இலேசான திரவத்தின் கனவளவும் நிறையும் முறையே a^2c, wa^2c ஆகும். இங்கு $b + c$, a இலுங் குறைவானது. வளிமண்டல அமுக்கத்தைத் தவிர்த்து, பாத்திரத்தின் பக்கமொன்றின் மீதுள்ள மொத்த அமுக்கத்தைக் காண்க.

அதிகாரம் XI.

அமுக்க மையம்.

§209. ஒரு திரவத்திற்குள்ளே, ஒரு பக்கம் திரவத்தின் பரப்பிலிருக்கும்படி அமிழ்த்தப்பட்ட ஒரு செவ்வக அடரின் அமுக்க மையம்.



படம் 288.

ABCD என்பது பக்கம் AB (படம் 288) ஐத் திரவப் பரப்பிற் கொண்டுள்ள செவ்வகமாகுக. $AB = b, BC = a$ எனக. w, திரவத்தின் தன்னிறையெனக.

செவ்வகத்தை, AB இற்குச் சமாந்தரமானதும் dx அகலமுள்ளதுமான PQ போன்ற மூலகக் கீலங்களாகப் பிரிக்க.

ஒரு கீலத்தின் மூலகங்கள் யாவும் ஒரே ஆழத்திலிருக்கும். எனவே எல்லா மூலகங்களின்மீதுமுள்ள உதைப்புக்கள் சமமாகும். அதோடு ஒவ்வொரு கீலத்தின்மீதுமுள்ள விளையுளுதைப்பு அதன் நடுப்புள்ளியிற் செயற்படும்.

ஆகவே கீலங்கள் யாவற்றின்மீதுமுள்ள உதைப்புக்களின் விளையுளானது, AB ஐயும் DC ஐயும் செங்குத்தாக இருகூறிடும் கோடு EMF இல் யாதுமொரு புள்ளியிலே தாக்கும்.

PQ இன் பரப்பளவு bdx ஆகும். அதோடு $EM = x$ ஆயின், செவ்வகம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமிடத்து அதன் புவியீர்ப்பு மைய ஆழம் x ஆகவோ, அதன் தளம் கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமிடத்து அவ்வாழம் x சைன் θ ஆகவோ இருக்கும்.

ஆகவே PQ மீதுள்ள அமுக்கம் wbx சைன் $\theta\ dx$ (செவ்வகம் நிலைக்குத்தாயிராத பொதுவகையில்).

விளையுளுதைப்பு $x = o$, $x = a$ என்னும் எல்லைகட்கிடையே இக்கோவையின் தொகையீடாகும், அ–து.

$$\int_o^a wbx \text{ சைன் } \theta\, dx = \frac{wba^2}{2} \text{ சைன் } \theta.$$

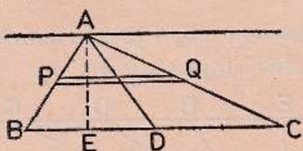
PQ மீதுள்ள உதைப்பின் AB பற்றிய திருப்புதிறன்
$$= wbx^2 \text{ சைன் } \theta\, dx.$$
அதோடு எல்லாக் கீலங்கள் மீதுமுள்ள உதைப்புக்களினது திருப்புதிறன் களின் கூட்டுத்தொகை,
$$\int_0^a wbx^2 \text{ சைன் } \theta dx = \frac{wba^3}{3} \text{ சைன் } \theta.$$
விளையுளுதைப்பானது AB இலிருந்து $\bar{x}$ தூரத்திற் செயற்படின், விளையுளின் AB பற்றிய திருப்புதிறனானது கூற்றுதைப்புக்களின் AB பற்றிய திருப்புதிறன்களினது கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகையால்,
$$\bar{x}\, \frac{wba^2}{2} \text{ சைன் } \theta = \frac{wba^3}{3} \text{ சைன் } \theta.$$
$$\therefore\ \bar{x} = \tfrac{2}{3}a, \text{ சைன் } \theta = o \text{ ஆக இருந்தாலொழிய.}$$
ஆகவே அமுக்க மையமானது, பரப்பிலுள்ள பக்கத்தையும் எதிர்ப் பக்கத்தையும் இருகூறிடும் கோட்டில், பரப்பிற்குக் கீழே இக்கோட்டினது நீளத்தின் மூன்றிலிரண்டிற்குச் சமமான ஆழத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் இருக்கின்றது.

செவ்வகத்தின் தளம் உண்மையாகக் கிடையாய் இருத்தலைத் தவிர, ஏனைய சந்தர்ப்பங்களில் கிடையுடனான அதன் சாய்வுடன் அமுக்க மையத் தானமும் சார்பற்றதாகும்.

இதைப்போன்ற ஒரு முடிவு ஒரு பக்கத்தைப் பரப்பிற்கொண்டுள்ள ஓர் இணைகரத்துக்கும் பொருந்தும்.

அச்செவ்வகத்தின் அல்லது இணைகரத்தின் தளம் கிடையானதாயின், விளையுளுதைப்பு பூச்சியமாகும்.

§210. ஒரு திரவத்தில் ஓர் உச்சி திரவப் பரப்பிலிருக்க, எதிர்ப் பக்கம் கிடையாய் இருக்கும்படி அமிழ்த்தப்பட்ட ஒரு முக்கோணியடரின் அமுக்க மையம்.



படம் 289.

ABC (படம் 289) என்பது A ஐப் பரப்பிலும் பக்கம் BC ஐக் கிடையாகவுங் கொண்டுள்ள முக்கோணி என்க.

அம்முக்கோணியின் குத்துயரம் AE ஐ h எனவும், A இலிருந்து BC இற்குள்ள இடையத்தை AD எனவும், BC $= a$ எனவுங் கொள்க.

முக்கோணியை AE இற்குச் சமாந்தரமாக அளக்கப்படும் அகலம் dx உடைய PQ போன்ற மூலகக் கீலங்களாகப் பிரிக்க.

PQ இன் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் மீதுமுள்ள உதைப்பு சமமாகும். ஆகவே விளையுளுதைப்பு அதன் நடுப்புள்ளி, அ–து. அதை AD வெட்டும் புள்ளியிற் செயற்படும்.

எனவே முழு முக்கோணியின் மீதுமுள்ள விளையுளுதைப்பு AD இல் எதாவதொரு புள்ளியிற் செயற்படும்.

A இலிருந்து PQ இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் x ஆயின், PQ இன் நீளம் $\frac{x}{h}a$ உம் அதன் பரப்பு $\frac{xa}{h}dx$ உம் ஆகும். அதன் புவியீர்ப்பு மைய ஆழம் x சைன் θ. இங்கு θ, கிடையுடன் முக்கோணித் தளத்தின் சாய்வு.

$$\text{PQ மீதுள்ள உதைப்பு} = \frac{wx^2a \text{ சைன் } \theta}{h}dx.$$

அதோடு, முக்கோணியின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு $x = o$, $x = h$ ஆகிய எல்லைகட்கிடையே இதன் தொகையீடு, அ–து.

$$\int_o^h \frac{wx^2a \text{ சைன் } \theta}{h}dx = \tfrac{1}{3}\,wah^2 \text{ சைன் } \theta.$$

PQ மீதுள்ள உதைப்புக்களின், A இனூடானதும் BC இற்குச் சமாந்தரமானதுமான பரப்பிலுள்ள கோட்டினைப்பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$\int_o^h \frac{wx^3a \text{ சைன் } \theta}{h}dx = \tfrac{1}{4}\,wah^3 \text{ சைன் } \theta.$$

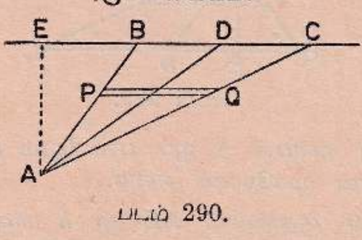
பரப்பிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையம் $\bar{x}$ தூரத்திலிருக்கிறதென்க.

$$\therefore\ \bar{x}\tfrac{1}{3}\,wah^2 \text{ சைன் } \theta = \tfrac{1}{4}\,wah^3 \text{ சைன் } \theta,$$

$$\therefore\ \bar{x} = \tfrac{3}{4}h, \quad \text{சைன் } \theta = 0 \text{ ஆக இருந்தாலொழிய.}$$

எனவே, அமுக்க மையமானது இடையம் AD இல் மேலிருந்து முக்காற் பங்குதூரத்திலிருக்கும்.

§211. ஒரு திரவத்தில், ஒரு பக்கம் திரவப் பரப்பிலிருக்கும்படி அமிழ்த்தப் பட்ட ஒரு முக்கோணியடரின் அமுக்க மையம்.



படம் 290.

முக்கோணியை ABC (படம் 290) எனவும், பரப்பிலிருக்கும் பக்கத்தை BC எனவும், குத்துயரம் AE ஐ h எனவும், BC இற்குரிய இடையத்தை AD எனவுங் கொள்க.

BC $= a$ என்க; திரவத்தின் ஓரலகுக் கனவளவிற்கான நிறையை w என்க. முக்கோணியை, BC இற்குச் சமாந்தரமான மூலகக் கீலங்களாகப் பிரிக்க, AE இற்குச் சமாந்தரமாக அளக்கப்படும் ஒரு கீலத்தின் அகலம் dx ஆகும்.

PQ இன் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் மீதுமுள்ள உதைப்பு சமமாகும். ஆகவே அதன் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு நடுப்புள்ளியில், அ-து. அதனை AD வெட்டும் புள்ளியிற் செயற்படும்.

எனவே முழு முக்கோணியின் மீதுமுள்ள விளையுளுதைப்பு, AD இல் ஏதாவதொரு புள்ளியிற் செயற்படும்.

PQ இற்கும் BC இற்குமிடையேயுள்ளதும் AE இற்குச் சமாந்தரமாக அளக்கப்படுவதுமான தூரம் x ஆயின், PQ இன் நீளம் $\frac{h-x}{h}a$ உம் அதன் பரப்பு $\frac{h-x}{h}adx$ உம் ஆகும்.

PQ இனது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் x சைன் θ. இங்கு θ கிடையுடன் முக்கோணித் தளத்தின் சாய்வு.

PQ மீதுள்ள உதைப்பு $wa\frac{h-x}{h}x$ சைன் $\theta\, dx$ ஆகும். அதோடு முக்கோணியின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு $x = 0$, $x = h$ ஆகியவற்றிற்கிடையே இதன் தொகையீடு, அ-து.

$$wa \text{ சைன் } \theta\int_0^h\left(x-\frac{x^2}{h}\right)dx = wa \text{ சைன் } \theta\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{3}\right)=\frac{1}{6}wah^2 \text{ சைன் } \theta.$$

PQ மீதுள்ள உதைப்பின் BC பற்றிய திருப்புதிறன்

wa சைன் $\theta\frac{h-x}{h}x^2dx$; அதோடு திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$wa \text{ சைன் } \theta\int_0^h\left(x^2-\frac{x^3}{h}\right)dx = wa \text{ சைன் } \theta\left(\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{4}\right)=\frac{1}{12}wah^3 \text{ சைன் } \theta.$$

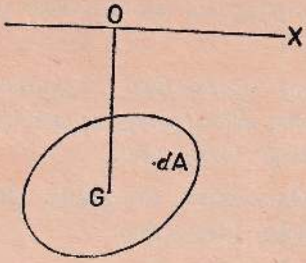
EA இற்குச் சமாந்தரமாக அளக்கப்படுவதும் BC இலிருந்துள்ளதுமான அமுக்க மையத்தின் தூரம் $\bar{x}$ ஆயின்,

$$\bar{x}\tfrac{1}{6}wah^2 \text{ சைன் } \theta = \tfrac{1}{12}wah^3 \text{ சைன்}\theta.$$

$$\therefore\ \bar{x} = \tfrac{1}{2}h, \quad \text{சைன்}\theta = 0 \text{ ஆக இருந்தாலொழிய.}$$

எனவே அமுக்க மையம் இடையம் AD இன் நடுப்புள்ளியிலாகும். $\theta = 0$ ஆயின், முக்கோணியின்மீது உதைப்பேதுமிராது. ஆகவே அமுக்க மையம் எதுமிராது.

§212. ஒரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்ட யாதுமொரு தளப் பரப்பின் அமுக்க மையம்.



படம் 291.

அப்பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தை G (படம் 291) எனவும், அடரின் தளம் பரப்பைச் சந்திக்கும் கோட்டினை OX எனவுங் கொள்க. G இலிருந்து அக்கோட்டிற்குள்ள செங்குத்து அதனைச் சந்திக்கும் புள்ளி O ஆகும். OX, OG ஆகியவற்றை முறையே x, y அச்சுக்களாக எடுக்க. இடையுடன் அடரினது தளத்தின் சாய்வை θ எனவும், G இனது y ஆள்கூற்றினை h எனவும், திரவத்தின் தன்னிறையை w எனவுங் கொள்க.

x, y என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய யாதுமொரு மூலகம் dA ஐ அப்பரப்பிற் கருதுக. அமுக்க மையத்தின் y ஆள்கூறு $\bar{y}$ ஆயின்.

விளையுளுதைப்பு$\times\bar{y} = d$A போன்ற மூலகங்களெல்லாவற்றின் மீதும் தாக்கும் தனித்தனி உதைப்புக்கள் யாவற்றினதும் OX பற்றிய திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை.

இப்போது dA இன் ஆழம் y சைன் θ. அப்பரப்பிற்குச் செங்குத் தான, அதன் அடிமீதுள்ள உதைப்பு wy சைன் θdA உம் ஆகும்.

அப்பரப்பின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு whA சைன் θ.

$$\therefore\ wh\text{A சைன் }\theta.\bar{y} = \Sigma wy^2\text{ சைன் }\theta.d\text{A}$$
$$= w\text{ சைன் }\theta\Sigma y^2 d\text{A},$$
$$\therefore\ \bar{y} = \frac{\Sigma y^2 d\text{A}}{h\text{A}},$$

சைன் $\theta = 0$ ஆக இருந்தாலொழிய.

$\Sigma y^2 d$A அப்பரப்பளவினது OX பற்றிய இரண்டாம் திருப்புதிறனாகும். G இனூடான ஒரு சமாந்தர அச்சைப்பற்றிச் சுழிப்பாரை k^2 ஆயின்,

$$\Sigma y^2 d\text{A} = \text{A}(k^2 + h^2),$$
$$\therefore\ y = \frac{k^2}{h} + h.$$

G இலிருந்து OG வழியே அ.மை. இன் தூரம் $\frac{k^2}{h}$ ஆகும்.

பரப்பு நிலைக்குத்தானதாயின், G இன் நிலைக்குத்தாழம் h ஆகும். G இற்குக் கீழாக அ.மை இன் ஆழம் $\frac{k^2}{h}$ ஆகும்.

அப்பரப்பு எளிய உதாரணங்களெல்லாவற்றிலும் போல OG பற்றிச் சமச்சீராக இருப்பின், அமுக்க மையம் OG இல் அமையும், அ—து. அதன் x ஆள்கூறு பூச்சியமாகும்.

§213. பரப்பளவானது OG பற்றிச் சமச்சீராக இராவிடின், OG பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணித்து அமுக்க மையத்தின் x ஆள்கூற்றைக் காணலாம்.

இதிலிருந்து,

whA சைன் $\theta . \bar{x} = \Sigma wxy$ சைன்$\theta . dA = w$ சைன் $\theta \Sigma xydA$ என வரும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma xydA}{hA},$$

சைன் $\theta = 0$ ஆக இருந்தாலொழிய.

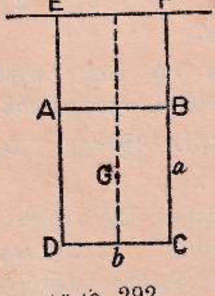
இக்கோவையில் $\Sigma xydA$ என்பது OX, OG ஆகிய அச்சுக்கள் பற்றிய சடத்துவப் பெருக்கம்.

சைன் $\theta = 0$ ஆயின், அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறது.

மற்றை இடங்களெல்லாவற்றிலும் அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையத்தின் கீழேயுள்ளதாகும். ஆனால் அது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் அதிகரிக்குமிடத்து அதை நெருங்கி வரும்.

§214. உதாரணம் (i).

a, b ஆகிய பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகப் பரப்பின் a நீளப் பக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவை. அதன் மையம் அது அமிழ்த்தப்பட்ட நீரின் பரப்பிற்குக் கீழே h ஆழத்திலுள்ளது. அமுக்க மையம் மையத்துக்குக் கீழே $\frac{a^2}{12h}$ ஆழத்திலுள்ளதென நிறுவுக. (I.S.)



படம் 292.

ABCD (படம் 292) அச்செவ்வகமெனவும், AB $= b$ எனவும், BC $= a$ எனவுங் கொள்க. G அதன் மையமென்க.

(a) இறுதிப் பந்தியின் சூத்திரம் முடிவினை உடனேயே தருகின்றது. எனெனில், செவ்வகத்தின், G இனூடான தளத்தில் ஒரு கிடையச்சு பற்றிய அதன் சுழிப்பாரை $\frac{a^2}{12}$ ஆகும்.

$\therefore$ G இற்குக் கீழே அமுக்க மையத்தின் ஆழம் $\frac{a^2}{12h}$.

(b) பொதுச் சூத்திரத்தினை மேற்கோள் காட்டாது, விளிம்பொன்று பரப்பிலிருக்கும்போதுள்ள நிலையிலிருந்து அமுக்க மைய நிலையத்தை உய்த்தறியலாம்.

DA, CB ஆகியவற்றினை, பரப்பை முறையே E, F, இற் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

செவ்வகம் EDCF இன் பரப்பளவு $b\left(h + \frac{a}{2}\right)$ ஆகும். அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $\frac{1}{2}\left(h + \frac{a}{2}\right)$. அதன்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு $= w\frac{b}{2}\left(h + \frac{a}{2}\right)^2$;

இவ்வுதைப்பானது EF இற்குக் கீழே $\frac{2}{3}\left(h + \frac{a}{2}\right)$ ஆழத்திலிருக்கும் அமுக்க மையத்திற் செயற்படுகின்றது.

செவ்வகம் ABFE இன் பரப்பளவு $b\left(h - \frac{a}{2}\right)$. அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் $\frac{1}{2}\left(h - \frac{a}{2}\right)$. அதன் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு $= w\frac{b}{2}\left(h - \frac{a}{2}\right)^2$;

இவ்வுதைப்பானது EF இற்குக் கீழே $\frac{2}{3}\left(h - \frac{a}{2}\right)$ ஆழத்திலிருக்கும் அமுக்க மைத்திற் செயற்படுகின்றது.

ABCD இன் பரப்பளவு ab உம், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் h உம், அதன்மீதுள்ள உதைப்பு $wabh$ உம் ஆகும்.

EF இற்குக் கீழே ABCD இனது அமுக்க மையத்தின் ஆழம் x என்க.

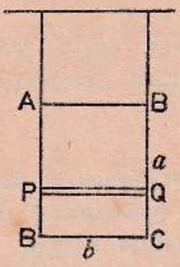
ABCD மீதுள்ள உதைப்பின் EF பற்றிய திருப்புதிறனானது EDCF, EABF ஆகியவற்றின்மீதுள்ள உதைப்புக்களினது அக்கோட்டினைப் பற்றிய திருப்புதிறன்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore\ wabhx = \frac{1}{3}wb\left(h+\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}wb\left(h-\frac{a}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{3}wba\left(h^2+\frac{a^2}{4}+h^2-\frac{a^2}{4}+h^2+\frac{a^2}{4}\right),$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3h}\left(3h^2+\frac{a^2}{4}\right) = h+\frac{a^2}{12h}.$$

(c) (b) இலுள்ள முறை நீளமானது. அதோடு பொதுவான சூத்திரத்தை மேற்கோள் காட்டாது அத்தானத்தைக் காணவேண்டின், அதை நேராகத் தொகையிடலாற் பின்வருமாறு பெறுதலே நலம்.



படம் 293.

AB ஆனது பரப்பிலிருக்குமிடத்துப் போன்று PQ (படம் 293) எனப் பல இடைக் கீலங்களாகப் பிரிக்க. AB இற்குக் கீழே x ஆழத்தில் PQ இருப்பின், பரப்பிற்குக் கீழே அதன் ஆழம் $(h-\frac{a}{2}+x)$ ஆகும். அதன்மீதுள்ள உதைப்பு $= wb\,(h-\frac{a}{2}+x)\,dx$.

இவ்வுதைப்பின் AB பற்றிய திருப்புதிறன்,

$$= wb\left(hx-\frac{ax}{2}+x^2\right)dx.$$

இத்திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$wb\int_0^a\left(hx-\frac{ax}{2}+x^2\right)dx = wb\left(\frac{ha^2}{2}-\frac{a^3}{4}+\frac{a^3}{3}\right) = wb\left(\frac{ha^2}{2}+\frac{a^3}{12}\right).$$

விளையுளுதைப்பு $wabh$ ஆகும். AB இற்குக் கீழே அமுக்க மையம் $\bar{x}$ ஆழத்திலிருப்பின், $wabh\bar{x} = wb\left(\frac{ha^2}{2}+\frac{a^2}{12}\right)$.

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{a}{2}+\frac{a^2}{12h},$$

$\therefore$ மையத்திற்குக் கீழேயுள்ள ஆழம் $= \frac{1}{12}\frac{a^2}{h}$.

குறிப்பு(i).—வளிமண்டல அமுக்கம் எடுத்தாளப்படவேண்டின் காற்று சம ஆழ நீரினுற் பதிலிடப்படுகிறதென வெறுமனே கற்பனே செய்கிறேம். இது பரப்பிற்குக் கீழே புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்தினை வெறுமனே அதிகரிக்கின்றது. அமுக்க மையத்தின் தானம் மேலுள்ள உதாரணத்திற் போன்றும் அடுத்துவரும் உதாரணத்திற் போன்றும் காணப்படுகின்றது.

குறிப்பு(ii).—செவ்வகத்தின் தளம் கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்திருப்பின், அமுக்க மையத்திற்கும் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் இடையேயுள்ளதும் செவ்வகத்தின் தளத்தில் அளக்கப்படுவதுமான தூரம்

$$= \frac{a^2}{12h} \text{ சைன் } \theta.$$

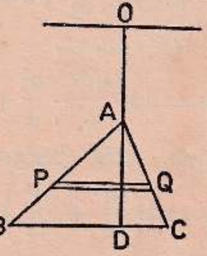
$\theta = 0$ ஆக இருக்கும்போது இது பூச்சியமாகும். அதோடு அமுக்க மையம் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடுகிறது.

உதாரணம் (ii).

ஓர் உச்சி பரப்பிலிருக்க, எதிர்ப்பக்கம் கிடையாய் இருக்கும்படி நிலைக்குத்தாக அமிழ்த்தப்பட்ட ஒரு முக்கோணிப் பரப்பினது அமுக்கமையத்தின் தானத்தைக் காண்க. இப்பரப்புச் சுற்றுது, முக்கோணியின் உயரத்திற்குச் சமமான ஒரு தூரத்தினூடாகத் தாழ்த்தப்படின் புதிய அமுக்கமையத்தைக் காண்க. (I.S.)

இவ்வினவின் முதற் பகுதி பந்தி **210** இற் செய்யப்பெற்றுள்ளது. அமுக்க மையமானது, கிடைப் பக்கத்தை இருகூறிடும் இடையத்தில் மேலிருந்து முக்காற் தூரத்திலுள்ளதென்பதாம்.

ஒரு முக்கோணியின் சுழிப்பாரைக்கு நன்கு தெரிந்த சூத்திரமேதுமில்லை. அதனுல் அவ்வினவின் இரண்டாம் பகுதியை தொகையிடலால் முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து செய்தலே நலம். இத்தகைய முறை உச்சியானது பரப்பிலிருக்குமிடத்துள்ள முறைக்கு உண்மையாக ஒத்தது.



படம் 294.

கிடைப் பக்கத்தினை BC (படம் 294) எனவும், அதன் நீளத்தினை a எனவும், குத்துயரத்தினை h எனவுங் கொள்க.

PQ எனக் கிடைக் கீலங்களாகப் பிரிக்க.

A இலிருந்து PQ இன் செங்குத்துத் தூரம் x ஆயின், PQ இன் நீளம் $\frac{x}{h}a$ உம், அதன் பரப்பு $\frac{ax}{h}dx$ உம், அதன்மீதுள்ள உதைப்பு $\frac{wa}{h}(h+x)xdx$ உம் ஆகும்.

இவ்வுதைப்பின் A இனூடான கிடையச்சு பற்றிய திருப்புதிறன்

$$= \frac{wa}{h}\ (hx^2 + x^3)dx.$$

திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை,

$$\frac{wa}{h}\int_o^h (hx^2 + x^3)\, dx = \frac{wa}{h}\left(\frac{h^4}{3} + \frac{h^4}{4}\right) = \frac{7}{12}\, wah^3.$$

விளையுளுதைப்பு $= \frac{1}{2}wah\ (h + \frac{2}{3}h) = \frac{5}{6}wah^2$.

எனவே A இற்குக் கீழே அமுக்க மையத்தின் நிலைக்குத்து ஆழம் $\bar{x}$ ஆயின்,

$$\bar{x}\tfrac{5}{6}\ wah^2 = \tfrac{7}{12}wah^3,$$

$$\therefore\ \bar{x} = \tfrac{7}{10}h.$$

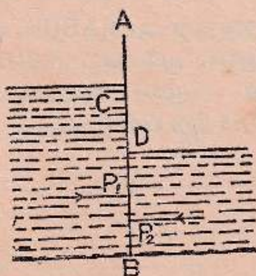
ஆகவே அமுக்க மையமானது, BC ஐ இருகூறிடும் இடையத்தில் மேலிருந்து அதன் $\frac{7}{10}$ வழியிலுள்ளது.

உதாரணம் (iii).

ஒரு பூட்டுக்கதவின் இருமருங்கிலும் h_1, h_2 ஆழங்களுக்கு நீருள்ளது. இக் கதவின்மீதுள்ள விளையுளமுக்கமானது, பரப்பின் சராசரி மட்டத்திற்குக் கீழே

$$\frac{h_1{}^2 + h_2{}^2 + 4h_1h_2}{6(h_1 + h_2)}$$

ஆழத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிற் செயற்படுகிறதென நிறுவுக. (I.S.)



படம் 295.

கதவின் ஒரு பகுதியை AB (படம் 295) உம், இருமருங்கிலுமுள்ள நீர் மட்டங்களை C, D, ஆகியனவும், கதவின் அகலத்தை a உம், நீரின் தன்னிறையை w உம் குறிப்பதாகக் கொள்க.

$BC = h_1$ எனவும், $BD = h_2$ எனவுங் கொள்க.

$$BC \text{ மீதுள்ள உதைப்பு } = \tfrac{1}{2}wah_1^2.$$

இது P_1 இற் செயற்படுகின்றது. இங்கு $BP_1 = \tfrac{1}{3}h_1$.

$$BD \text{ மீதுள்ள உதைப்பு } = \tfrac{1}{2}wah_2^2.$$

இது P_2 இற் செயற்படுகின்றது. இங்கு $BP_2 = \tfrac{1}{3}h_2$.

P_1, P_2 ஆகியன நிகராச் சமாந்தர விசைகள். இவற்றின் விளையுளானது P_1 இற்கு மேலே P என்னுமொரு புள்ளியிற் செயற்படும்.

B பற்றிய திருப்புதிறன்களைக் கணித்து P இன் தானத்தைக் காணலாம்.

$$\text{விளையுளுதைப்பு } = \tfrac{1}{2}wa(h_1^2 - h_2^2),$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}wa(h_1^2 - h_2^2)\,BP = \tfrac{1}{2}wah_1^2 \cdot \frac{h_1}{3} - \tfrac{1}{2}wah_2^2 \cdot \frac{h_2}{3},$$

$$BP = \frac{1}{3}\cdot\frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} = \frac{1}{3}\,\frac{h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2}{h_1 + h_2}.$$

$$B \text{ இற்கு மேலே சராசரி மட்டத்தின் உயரம் } = \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

எனவே சராசரி மட்டத்திற்குக் கீழே P இன் ஆழம்

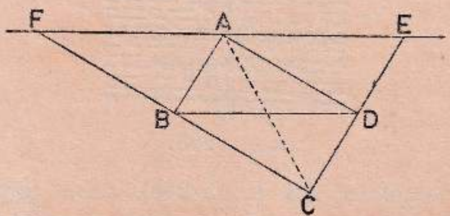
$$= \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2}{3(h_1 + h_2)}$$

$$= \frac{3h_1^2 + 6h_1h_2 + 3h_2^2 - 2h_1^2 - 2h_2^2 - 2h_1h_2}{6(h_1 + h_2)}$$

$$= \frac{h_1^2 + h_2^2 + 4h_1h_2}{6(h_1 + h_2)}.$$

உதாரணம் (iv).

ஓர் இணைகர வடிவுள்ள ஒரு தள அடர் ABCD, ஏகவினத் திரவமொன்றிற் குள்ளே, மூலை A பரப்பிலும், மூலைவிட்டம் BD இடையாகவும் இருக்கும் படி அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அமுக்க மையமானது மூலைவிட்டம் AC இல் அமைந்து அதை விகிதம் 7 : 5 இற் பிரிக்கிறதென நிறுவுக. (H.S.D.)



படம் 296.

பரப்பை முறையே E, F (படம் 296) இற் சந்திக்கும்படி CD, CB ஆகியவற்றை நீட்டுக.

$$AF = AE = BD = l \text{ என்க.}$$

பரப்பிற்குக் கீழே B இன் ஆழம் h எனவும், திரவத்தின் தன்னிறை w எனவுங் கொள்க.

முக்கோணி FCE இன் பரப்பளவு $2hl$ உம், அதன்மீதுள்ள உதைப்பு $2hl.\frac{2h}{3}w$ உம் ஆகும்; அதன் அமுக்க மையம் h ஆழத்திலுள்ளது.

முக்கோணி ABF அல்லது ADE இன் பரப்பு $\frac{1}{2}hl$. இவை ஒவ்வொன்றின் மீதுமுள்ள உதைப்பு $\frac{1}{2}hl.\frac{h}{3}w$. இதன் அமுக்க மையம் $\frac{h}{2}$ ஆழத்திலுள்ளது.

இணைகரம் ABCD இன் பரப்பளவு $= hl$. அதன்மீதுள்ள உதைப்பு $hl.hw$ ஆகும். இதன் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் நமக்குத் தேவைப் படும் பெறுமதி $\bar{x}$ ஆகும்.

ABCD மீதுள்ள உதைப்பின் FE பற்றிய திருப்புதிறனனது, FCE மீதுள்ள உதைப்பின் திருப்புதிறனிலிருந்து FBA, ADE ஆகிய வற்றின் மீதுள்ள உதைப்புக்களினது திருப்புதிறன்களைக் கழித்துப் பெற்ற பெறுமதிக்குச் சமமாகும்.

$$\therefore\ h^2lw\bar{x} = \frac{4h^2l}{3}wh - 2.\frac{1}{6}h^2lw.\frac{h}{2},$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{4h}{3} - \frac{h}{6} = \frac{7}{6}h.$$

இணைகரத்தை BD இற்குச் சமாந்தரமான கீலங்களாகப் பிரிக்கு மிடத்து, ஒவ்வொன்றின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு அதன் நடுப்புள்ளியில், அ—து. AC இற் செயற்படுகின்றது. எனவே இணைகரத்தின் அமுக்க மையம் AC இல் இருக்கவேண்டும்.

அமுக்க மையத்தின் ஆழம் $\frac{7}{6}h$ ஆகையால் அது AC இல், A இலிருந்து AC இன் $\frac{7}{12}$ தூரத்திலிருக்கவேண்டும், அ—து. அது AC ஐ 7 : 5 இன் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றது.

உதாரணம் (v).

r ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தினது பரப்பின் ஒரு விட்டம் பற்றிய சடத்துவத் திருப்புதிறன் $\frac{1}{4}\pi r^4$ எனக் காட்டுக.

நீர் கொண்டுள்ள ஒரு தாங்கியின் ஒரு நிலைக்குத்துப் பக்கத்திலிருக்கும் வட்டத் துவாரமொன்று ஒரு கதவினால் மூடப்படிருக்கின்றது. இத்துவாரத்தின் ஆரை 1 அடியாகவும், இதன் மையம் நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழே 5 அடி ஆழத்திலுமிருப்பின், கதவின்மீது நீரின் விளையுளுதைப்பைக் காண்க. அதோடு அமுக்க மையத்தையுங் காண்க. (வளிமண்டல அமுக்கத்தைத் தவிர்க்க.) (I.E.).

இவ்வினாவின் முதற் பகுதி இயக்கவியலைச் சார்ந்தது. இதற்கு இங்கு விடை காணப்படமாட்டாது. இவ்வினாவின் இரண்டாம் பகுதியிற் கேட்கப்பட்ட முடிவானது புவியீர்ப்பு மையத்திற்குக் கீழே அமுக்க மையத்தின் ஆழத்திற்குரிய பொதுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் காணப்படவேண்டுமாகையால் முதற் பகுதி கொடுக்கப் பெற்றுள்ளது.

$$\left(\bar{x} = \frac{k^2}{h}, \text{ பந்தி } 212\right),$$

இங்கு $r = 1$ அடி என்பதனால் $h = 5$ அடி, $k^2 = \frac{1}{4}$.

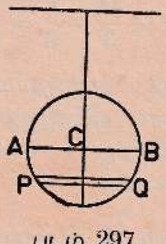
$$\therefore\ \bar{x} = \text{மையத்திற்குக் கீழே } \tfrac{1}{20} \text{ அடி.}$$

விளையுளுதைப்பு சாதாரண விதியினாற் பெறப்படுகின்றது.

$$\text{இது, } \pi \times 5 \times 62\tfrac{1}{2} \text{ இரு. நிறை}$$

$$= 982 \text{ இரு. நிறை (கிட்டத்தட்ட).}$$

§215. தன் மையம் h ஆழத்திலிருக்கும்படி அமிழ்த்தப்பட்டுள்ள a ஆரையுள்ள ஒரு நிலைக்குத்து வட்டப்பரப்பின் அமுக்க மையத்தினது ஆழம் தொகையிடலை நேரடியாகப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு காணப்படலாம் :—



படம் 297.

வட்டத்தின் மையத்தை C (படம் 297) எனவும், கிடை விட்டத்தை AB எனவுங் கொள்க. அப்பரப்பினை dx அகலமுள்ள PQ போன்ற கிடைக் கீலங்களாகப் பிரிக்க. AB இலிருந்து x தூரத்தில் PQ இருப்பின் அதன் பரப்பளவு $2\sqrt{a^2 - x^2}dx$ உம், அதன்மீதுள்ள உதைப்பு $2\sqrt{a^2 - x^2}\ (h + x)wdx$ உம் ஆகும்.

AB பற்றி இவ்வுதைப்பின் திருப்புதிறன்

$$= 2w\,(hx + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையானது $x = -a$, $x = +a$ ஆகியவற்றிற்கிடையே இதன் தொகையீடு, அ–து.

$$2wh\int_{-a}^{+a} x\sqrt{a^2-x^2}dx + 2w\int_{-a}^{+a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

இங்கு $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$. இது இரு எல்லைகளிலும் மறைகின்றது.

இரண்டாம் தொகையீட்டின் பெறுமதியைப் பெற, $x = a$ சைன் θ என இடுகின்றோம். பின்பு $dx = a$ கோசை $\theta d\theta$, $\sqrt{a^2-x^2} = a$ கோசைθ. அதோடு எல்லைகள் $-\frac{\pi}{2}$ ஆகவும், $+\frac{\pi}{2}$ ஆகவும் அமைகின்றன.

$$\therefore \int_{-a}^{+a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a^2 \text{ சைன்}^2\,\theta . a \text{ கோசை } \theta . a \text{ கோசை } \theta d\theta$$

$$= a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \text{சைன்}^2\theta \text{ கோசை}^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\text{சைன் } 2\theta)^2 d\theta = \frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1-\text{கோசை } 4\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{a^4}{8}\left[\theta - \frac{\text{சைன் } 4\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^4}{8}.$$

எனவே திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{\pi a^4}{4}w$.

விளையுளுதைப்பு $\pi a^2 hw$. AB இற்குக் கீழே அமுக்க மையத்தின் ஆழம் $\bar{x}$ ஆயின்,

$$\bar{x}\pi a^2 hw = \frac{\pi a^4}{4}w,$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{a^2}{4h}.$$

பயிற்சி XLV.

1. ஓர் அடி விளிம்புள்ள ஒரு திறந்த கனவடிவப் பாத்திரத்தில் நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது. ஒரு நிலைக்குத்துப் பக்கம், அதன் மேல் விளிம்பின் வழியே பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. இது அதனைப்பற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பக்கூடியது. இது திறவாமலிருக்கும்படி இப்பக்கத்தின் கீழ்விளிம்பில் எவ்விசை பிரயோகிக்கப்படவேண்டும்? (நீரின் ஒரு கன அடி $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (I.S.)

2. மூலைவிட்டம் BD பற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பவல்ல ஒரு செவ்வகத் தளப் பரப்பு ABCD இன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் அதன் ஒரு பக்கம் நீரமுக்கத்துக்கு உட்பட்டுமுள்ளது. AB பரப்பிலுள்ளது. $AB = 3$ அடியும் $BC = 4$ அடியுமாயின், BD பற்றிச் சுழற்சியைத் தடுக்க, 600 இரு. அடி திருப்புதிறனுள்ள ஓர் இணை பிரயோகிக்கப்பட வேண்டுமென நிறுவுக. (1 கன அடி நீர் 1,000 அவு. நிறையுள்ளதென எடுக்க.) (I.S.)

3. ஒரு செவ்வகப் பூட்டுக்கதவின் ஒரு பக்கத்தில் 12 அடி ஆழத்திற்கும் மற்றப் பக்கத்தில் 4 அடி ஆழத்திற்கும் நீருள்ளது. கதவு 10 அடியகலமானது. கதவின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பின் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டினையுங் காண்க. (1 கனவடி நீர் 62·5 இரு. நிறையுள்ளது.) (I.S.)

4. ஒரு சீரான நீர்த்தேக்கத்தின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திலிருக்கும் ஒரு செவ்வகக் கதவு அதன் கீழ் விளிம்பு பற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பவல்லது. இக்கதவு அதன் இரு மேல்மூலைகளில் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. கதவு 3 அடியகலமும் 6 அடி உயரமுமுடையது. இதன் மேல்விளிம்பு நீர்மட்டத்திற்கு 5 அடி கீழேயுள்ளது. மேல்மூலைகளிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் சமமானவை என ஏற்றுக்கொண்டு அவற்றைக் கணிக்க. (1 கனவடி நீர் 1,000 அவு. நிறையுள்ளதென எடுக்க.) (I.S.)

5. 12 அடி அகலமுள்ள ஒரு பூட்டுக்கதவின் ஒரு பக்கத்தில் 10 அடி ஆழத்திற்கு (1 கனவடிக்கு 62·5 இரு. நிறையுள்ள) நன்னீரும் மற்றைய பக்கத்தில் 6 அடி ஆழத்திற்கு (1 கனவடிக்கு 64 இரு. நிறையுள்ள) கடல் நீருமுள்ளது. கதவின்மீதுள்ள விளையுளமுக்கத்தைக் கணித்து, அது செயற்படும் புள்ளியைக் காண்க. (H.S.D.)

6. நிறைய நீருள்ள ஒரு திறந்த வடிகால் ஒரு கதவினால் மூடப்பெற்றுள்ளது. இவ்வடிகாலின் வெட்டுமுகம், 6 அடி ஆழமும் 4 அடி அதியுயர் அகலமுமுடைய ஓர் இருசமபக்க முக்கோணியாகும். கதவு மீதுள்ள விளையுளமுக்கத்தை இரு. நிறையிலும், கதவு அதன் மேல்மூலைகளிலுள்ள ஒப்பமான பிணையல்கள்பற்றி அசையவல்லதெனக் கருதி, அக்கதவினை மூடியவாறு பேணக்கூடியதும் அதன் அடிப் புள்ளியில் அதற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்படுவதுமான விசையையுங் காண்க. (1 கனவடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.D.)

7. ஒரு நிலைக்குத்துச் செவ்வகக் கப்பற்றுறைக்கதவு ABCD, மேற் இடை விளிம்பு AB பற்றி இயங்குமாறு பிணைக்கப்பட்டும் கீழ் விளிம்பு CD இன் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றுமுள்ளது. AB = 20 அடியும், BC = 15 அடியுமாயின், CD இலுள்ள இணைப்புமீதுள்ள தகைப்பைத் தொன் நிறையிற் கணிக்க. கப்பற்றுறையில் நிறைய நீருள்ள தெனத் தரப்பட்டுள்ளது. (H.S.D.)

8. நீரிற்குள், ஓர் உச்சி நீர்ப் பரப்பிலும் இவ்வுச்சியினூடான ஒரு பக்கம் நிலைக்குத்தாகவுமிருக்குமாறு முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்ட ஒரு சமபக்க முக் கோணிப் பரப்பின் அமுக்க மையத்தினது தானத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

9. $2a$, $2b$ பக்கங்களுள்ள ஒரு செவ்வக அடர் ஒரு பாயிக்குள், $2a$ நீளமுள்ள ஒரு பக்கம் சுயாதீனப் பரப்பிலிருக்குமாறு அமிழ்த் தப்பட்டுள்ளது. இவ்வடர் ஒரு மூலைவிட்டத்தினூற் பிரிக்கப்படும் இரு முக் கோணிகளின் அமுக்க மையங்களின் இடைத்தூரம் $\frac{1}{4}\sqrt{(9a^2+4b^2)}$ எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

10. 1·5 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திண்ம அரியம், ABC என்னும் ஒரு முக்கோணி வெட்டுமுகத்தையுடையது. இங்கு $A = 30°$, $B = 60°$, $C = 90°$, $CA = 8$ அடி. B இனூடான கிடை விளிம்புபற்றித் திரும்ப வல்ல இவ்வரியம், BC இனூடான முகம் ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீது இருக்குமாறு தங்கியிருக்கிறது. நிலைக்குத்து முகம் CA ஒரு செவ்வகத் தாங்கியின் ஒரு பக்கத்தினை அமைக்கின்றது; அரியம் திரும்ப ஆரம்பிக்கு முன் தாங்கியில் எவ்வளவு தூரத்திற்கு நீர் உயரமுடியும்? (Ex.)

11. ஒரு சதுரம் ABCD இல், A ஐயும் BC இன் நடுப்புள்ளி யையும் இணைக்கும் கோட்டின் வழியே வெட்டி உருவாக்கப்படும் ஒரு சரிவகமானது நீரில், AD நீர்ப் பரப்பிலிருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. AD, DC ஆகியவற்றிலிருந்து அமுக்கமையத்தின் தூரங்களைக் காண்க. (I.S.)

12. கீழ்ப்பாதியில் நீரினையும் மேற்பாதியில் 0·9 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தினையும் கொண்டுள்ள ஒரு பொட் கனத்தினது பக்க மொன்றின் அமுக்கமையத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

13. ABC என்னும் முக்கோணி வெட்டுமுகமுள்ள ஒரு வரம்பு, நிலைக்குத்தான முகம் AB மீது நீரமுக்கத்தைத் தாங்குகிறது. அவ் வரம்பு கவிழ்க்கப்படாது அல்லது பெயர்க்கப்படாதிருக்க வேண்டின், அடி BC ஆனது $\frac{AB}{\sqrt{2s}}$ ஐயும், உராய்வுக் குணகமானது $\frac{AB}{BC.s}$ ஐயும் அதிகரிக்க வேண்டுமென நிறுவுக. இங்கு s, வரம்புத் தன்னீர்ப்பு. (Ex.)

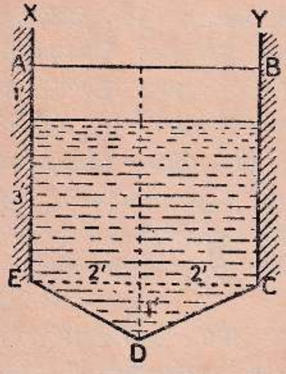
14. வெவ்வேறு மட்டங்களுக்கு நீரைக் கொண்டுள்ள இரு நீர்த் தேக்கங்களைப் பிரிக்கும் சுவரினுள்ள ஒரு நிலைக்குத்து மடைக்கதவின்

மீதுள்ள விளையுளுதைப்பின் தாக்கக் கோடானது மடைக்கதவு இருமருங்கிலும் நீரினுல் முற்ருக மூடப்பட்டிருக்கும்போது ஒரே புள்ளியினூடாக என்றும் செல்லுமெனக் காட்டுக. (H.S.C.)

15. ABCD என்பது 7 அங்குல உயரச் சரிவகவடிவத் தட்டு. இதன் சமாந்தரப் பக்கங்கள் AB, DC முறையே 2, 6 அங்குல நீள முள்ளவை. நீரிற்குள், AB நீர்ப் பரப்பிலிருக்குமாறு இத்தட்டு நிலைக் குத்தாக அமிழ்த்தப்படுமிடத்துத் தட்டின் ஒரு பக்கத்தின் மீதுள்ள உதைப் பையும் அமுக்க மையத்தின் ஆழம், தானம் ஆகியவற்றையுங் காண்க. (ஒரு கனவடி நீர் 62·5 இரு. நிறையுள்ளது.) (வளிமண்டல அமுக்கத் தைத் தவிர்க்க.) (H.S.D.)

16. ஒரு நீர்த்தாங்கியின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திலிருக்கும் ஒரு முக் கோணிக் கதவின் இடையான மேல்விளிம்பு BC ஆனது நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழ் h ஆழத்திலும், உச்சி A ஆனது $h+a$ ஆழத்திலுமுள்ளன. அகலம் $BC = b$. கதவின் மீதுள்ள உதைப்பையும், அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தையுங் காண்க. (H.S.C.)

17. படம் 298, ஒரு கொங்கிறீற்று வடிகாலினை அடைக்கும் ஒரு வழிநீர்க் கதவைக் குறிக்கின்றது. இக்கதவு EAX, CBY ஆகிய நிலைக்குத்தான நெடுந் தொளை களில் வழுகிச் செல்கின்றது. இதன் சதுரப் பகுதியின் அளவு 4 அடி×4 அடி; முக்கோணிப் பகுதியின் குத்துயரம் 1 அடி. வடிகாலிலுள்ள நீர் மட்டமானது AB இற் குக் கீழ் 1 அடியாக இருக்குமிடத்து ஒவ் வொரு நெடுந்தொளை மீதுமுள்ள விளை யுளுதைப்பையும் இவ்வுதைப்பின் பிரயோ கப் புள்ளியையுங் காண்க. (H.S.C.)



படம் 298.

18. 3 அடி விளிம்புள்ள ஒரு சதுரமுகியில் நிறைய நீருள்ளது. இது, இரு முகங்கள் நிலைக்குத்தாகவும் நாண்கு முகங்கள் நிலைக் குத்துடன் 45° ஐ ஆக்குமாறும் வைக்கப் பட்டுள்ளது. மேலுள்ள சாய்முகமொன்றின் மீதுள்ள உதைப்பையும், சதுரமுகியின் அதியுயர் விளிம்பு பற்றி இவ்வுதைப்பின் திருப்புதிறனையுங் காண்க. (1 கனவடி நீர் 62·5 இரு. நிறையுள்ளது.) (I.S.)

19. ஒரு வடிகால் ஒரு சரிவக வடிவ நிலைக்குத்துக் கதவினுல் மூடப்பெற்றுள்ளது. இதனுயரம் $2\frac{1}{2}$ அடி. இதனகலம் அடியில் 4 அடி, உச்சியில் 6 அடி. நீரானது கதவினுச்சியின் ஒரே மட்டத்திலிருக்குமிடத்து, கதவின் மீதுள்ள மொத்தவுதைப்பையும் அதன் பிரயோகப் புள்ளி யையுங் காண்க. (சரிவகத்தின் சாய்பக்கங்கள் சமமானவை.) (H.S.D.)

20. ஒரு கனவடிவப் பெட்டியின் ஒரு முகம் ஒரு விளிம்பு பற்றிப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. இது நீரால் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது. பிணைத்த முகம் நிலைக்குத்தாகவும், இம்முகத்தின் மேற்கிடைப் பக்க வழியே பிணையல்களின் கோடு அதன் அரைப்பகுதி வேறொரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப் பட்டிருக்குமாறும் இப்பெட்டி பேணப்படுகின்றது. பிணைத்த முகம் சமநிலையில் மட்டுமட்டாக இருப்பின் இத்திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க. (H.S.D.)

21. 12 அடி அகலமுள்ள ஒரு கப்பற்றுறைக் கதவின் ஒரு பக்கத்தில் 10 அடி உயரத்திற்கும் மற்றப் பக்கத்தில் 4 அடி உயரத்திற்கும் நீருள்ளது. 1 கனவடி நீர் 62·5 இறா. நிறையுள்ளதெனக் கொண்டு, கதவின் மீதுள்ள நீரின் கிடை விளையுளுதைப்பைத் தீர்மானிக்க. அதன் தாக்கக் கோட்டினையுங் காண்க.

22. ஒரு தள அடர், நீரினுள் முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழ் இதன் மையப்போலியின் ஆழம் h ஆக இருக்கும்போது இம்மையப்போலிக்குக்கீழ் அமுக்க மையத்தின் ஆழம் d ஆகும். அவ்வடருக்குமேல் நீரின் ஆழம் யாதெனினும், hd ஒரு மாறிலியென நிறுவுக. ஒரு தாங்கியின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்தில் 2 அடி பக்கச் சமபக்க முக்கோணிவடிவத் துவாரமொன்றுள்ளது. இதன் ஒரு பக்கம் உச்சமாகவும் கிடையாகவுமுள்ளது. நீர் மட்டம் கிடைப் பக்கத்திற்கு மேல் 5 அடியாக இருக்குமிடத்து அத்துவாரத்தை மூடும் ஒரு தட்டின் மீதுள்ள மொத்த அமுக்கத்தையும் அமுக்க மையத்தின் தானத்தையுங் காண்க. (1 கனவடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இறா. நிறையுள்ளதென எடுக்க.)

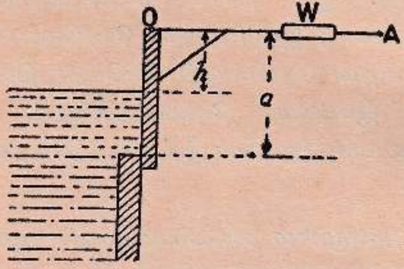
23. 12 அடி அகலமுள்ள ஒரு செவ்வகப் பூட்டுக்கதவு 100 தொன் நிறை விளையுள் விசையொன்றை மட்டுமட்டாகத் தாங்கவல்லது. கீழ்ப் பக்கத்தில் 10 அடி ஆழத்திற்கு நீரானது இருப்பின் மற்றப் பக்கத்தில் நீர் எவ்வளவு ஆழத்திற்கு உயரவிடலாம்? ஆழம் இயன்றளவு அதிகமாக இருக்கும்போது, கதவின் அடிக்குமேல் எவ்வுயரத்தில் விளையுளுதைப்பு செயற்படும்? (1 கன அடி நீர் 62·5 இறா. நிறையுள்ளதென எடுக்க.) (I.E.)

24. a ஆரையுள்ள ஒரு கால்வட்ட வடிவ அடரானது திரவத்திற்குள், ஒரு வரைப்புறுமாரை திரவப் பரப்பிலிருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அமுக்க மையம் இவ்வாரையிலிருந்து $\frac{3\pi a}{16}$ தூரத்திலுள்ளதென நிறுவுக.

(H.S.C.)

18—R 13456 (10/63)

25. படம் 299, O என்னுமொரு கிடையச்சு பற்றிச் சுயாதீன



படம் 299.

மாய்த் திரும்பும் b அகலமான ஒரு செவ்வக மடைக்கதவின் வெட்டு முகத்தைக் குறிக்கின்றது. ஒரு கிடைச் சட்டம் **OA** மீது வழுகிச்செல்லும் ஒரு நிறை **W** இனல் நீர் மட்டம் ஒழுங்காக்கப்படுகின்றது. A இல் **W** இருக்கும்போது, நீர் மட்டம் O இற்கு மட்டுமட்டாக உயரக்கூடியது. நீர் மட்டம் O இற்குக் கீழ் h தூரத்திற் பேணப்படவேண்டின், W நிறையை A இலிருந்து $\frac{1}{2}\frac{wbh(a^2-\frac{1}{3}h^2)}{W}$ தூரம் பின்னியக்கவேண்டுமென நிறுவுக. இங்கு w, ஓரலகுக் கனவளவு நீரின் நிறை. (N.U. 3.)

26. யாதுமொரு வடிவுள்ள ஒரு தளப் பரப்பானது நீரில் முற்றுக அமிழ்த்தப்பட்டு நிலைக்குத்தாகப் பேணப்படுகின்றது. நீர் கொண்டுள்ள பாத்திரத்திற்குள் மேலும் நீரூற்றி h என்னும் அளவினல் நீர்ப் பரப்பு மட்டம் உயர்த்தப்படுகின்றது. பரப்பளவின்மீதுள்ள நீரின் அமுக்க மையம் $\frac{h(x-y)}{h+y}$ உயரம் உயர்த்தப்படுமென நிறுவுக. இங்கு x, y என்பன நீர்ப் பரப்பிற்குக்கீழ், முறையே அமுக்க மையத்தினதும் பரப்பளவின் மையப்போலியினதும் ஆரம்ப தூரங்கள். (N.U. 3.)

27. ஒரு வெள்ளக்கதவின் ஒரு பக்கத்தில் கதவின் பாதிக்குச் சமமான ஆழத்திற்கும், மறுபக்கத்தில் கதவின் காற்பகுதிக்குச் சமமான ஆழத்திற்கும் நீருள்ளது. கதவு அதன் மூலைகளிலுள்ள கிடை விசைகளினலே தாங்கப்படின், (வளிமண்டல அமுக்கத்தைத் தவிர்த்து) கீழ்மூலைகளிலும் மேல்மூலைகளிலுமுள்ள விசைகளிடையேயுள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

(N.U. 3 உம் 4 உம்)

28. ஒரு தாழியின் மூன்று பக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவை. இவை 4 அடி உயரமானவை. தாழியின் கிடையான அடி ஒரு 4 அடி பக்கச் சதுரமாகும். அடியிற் பிணைக்கப்பட்டுள்ள நான்காம் பக்கம் நிலைக்குத்துடன் 30° கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது. தாழியில் 2 அடி ஆழத்திற்கு நீர் இருக்கும் போதும் வளிமண்டல அமுக்கம் தவிர்க்கப்படுமிடத்தும்

நான்காம் பக்கத்தின்மீதுள்ள மொத்த அமுக்கத்தினைக் கண்டு, இப்பக்கத்தினைச் சமநிலையிற் பேண எங்கே, எத்திசையில் விசையொன்று பிரயோகிக்கப்பட வேண்டுமென்பதைக் கூறுக. பிணைத்த பக்கம் இரு அடுத்துள்ள பக்கங்களுடன் நீர் இறுக்கமான இணைப்புக்களை ஆக்குவதாகக் கொண்டு, அதை ஒரு நிலைக்குத்துத் தானத்திற்கு இயக்கத் தேவையான வேலையைக் காண்க. (N.U. 3.)

29. ஒரு திரவத்தில், ஒரு மூலைவிட்டம் திரவப் பரப்பிலிருக்குமாறு ஓர் ஒழுங்கான அறுகோண வடிவ அடரின் பாதி, ஆழ்த்தப்பட்டுள்ளது. ஆழ்ந்த பகுதியின் அமுக்க மையம் $\frac{5}{8}r$ ஆழத்திலுள்ளதென நிறுவுக. இங்கு r, உள்வட்டத்தின் ஆரை. (C.W.B.)

30. ஓர் அணை அடைப்பின் உட்பக்கத்தில் 4 அடி ஆழத்திற்கும் வெளிப் பக்கத்தில் 7 அடி ஆழத்திற்கும் நீருள்ளது. இதன் சதவுகள் அடைக்கப்பெற்றுள்ளன. கதவு 4 அடி அகலமுள்ளதாயின், இதன்மீதான விளையுளுதைப்பையும் அது செயற்படும் புள்ளியையுங் காண்க. கதவைத் திறக்க 6 அடி நீளப் புயமொன்றிற்குச் செங்குத்தாக எவ்விசை (உராய்வினைத் தவிர்த்து) பிரயோகிக்கப்பட வேண்டும்? (C.W.B.)

31. a, b நீளப் பக்கங்களுள்ள ஒரு செவ்வகப் பரப்பு ஒரு திரவத்திற்குள், அதன் தளம் நிலைக்குத்துடன் α கோணத்திற் சாய்ந்தும் அதன் a நீளமான மேல் விளிம்பு கிடையாகத் திரவப் பரப்பிற்குக்கீழ் h ஆழத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. செவ்வகப் பரப்பின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க. ஒரு செவ்வக இணைகரப்பாவை ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீது இருக்கின்றது. இதற்குள் அரைவாசிக்குமேல் h ஆழத்திற்கு நீரூற்றப்பட்டுள்ளது. அத்தளத்தின் அடி a, b பக்கமுள்ள ஒரு செவ்வகமாகும், அதனுச்சி திறந்துள்ளது. இணைகரப்பாவையானது முதலில் நிலைக்குத்தாக இருந்த அதன் விளிம்புகள் நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தை ஆக்கும் வரை விளிம்பு a பற்றி இப்போது ஒருச்சாய்க்கப்படின், நீர் எதும் சிந்தவில்லையெனக் கொண்டு, அடிமீதுள்ள அமுக்கத்தின் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டினையுங் காண்க. (C.W.B.)

32. ஒரு திரவத்தில், a ஆரையுள்ள ஒரு வட்டப் பரப்பு அதன் மையமானது திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக்கீழ் h $(>a)$ ஆழத்திலிருக்கும்படி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இவ்வட்டப் பரப்பின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க. இப்பரப்பளவானது ஒரு தாங்கியின் நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றிலுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரத்தை மூடுதற்குரிய ஒரு பொறிக் கதவை அமைப்பதும் அதன் மேற் கிடைத் தொடலிபற்றிப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளதும் அதன் அடிப்புள்ளியில் அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகப் பிரயோகிக்கப்படும் P என்னும் விசையினுல் உறுதியாகப் பேணப்படுவதுமான ஒரு தட்டின் பரப்பளவாயின், கதவின் பிணையல்மீதுள்ள கிடை மறுதாக்கத்தைக் காண்க. (C.W.B.)

அதிகாரம் XII.

யாதுமொரு பரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு.

§216. ஒரு வளைபரப்பு பாரமான திரவமொன்றினுள் அமிழ்த்தப்படு மிடத்து, அதன்மீதுள்ள திரவத்தின் விளையுளுதைப்பை நிர்ணயிப்பதில் சிறிது இடர்ப்பாடு ஏற்படுகின்றது. அதன் வெவ்வேறு மூலகங்களின்மீதுள்ள உதைப்புக்கள் இப்போது சமாந்தரமாக இல்லாதிருப்பதோடு, அவற்றைக் கூட்டி அவற்றின் விளையுளைப் பெறவும் முடியாது.

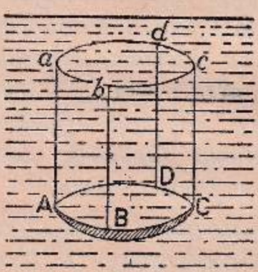
ஆகிலும், நிலைக்குத்துத் திசை, செங்குத்தான இரு கிடைத் திசைகள் ஆகிய ஒவ்வொன்றிற்கும் செங்குத்தான மூன்று வெவ்வேறு திசைகளில் விளையுளுதைப்பைக் காணின், பின்பு X, Y, Z என்னும் மூன்று செங்குத்துக் கூற்றுதைப்புக்கள் இருக்கும். அவற்றின் விளையுள் R,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

இனுலே தரப்படுகின்றது.

இனி, யாதுமொரு தந்த திசையில் விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பையும் விளையுட் கிடையுதைப்பையும் எவ்வாறு காணலாமென்பதைச் சிந்திப்போம்.

§217. ஒரு பாரமான திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்ட ஒரு பரப்புமீது விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பு.



படம் 300.

ஒரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்ட ABCD (படம் 300) என்னுமொரு பரப்பின் ஒரு பகுதியை எடுத்துநோக்குக.

இப்பரப்பினது வரைப்புறும் விளிம்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியூடாகவும் ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடு வரையப்படுவதாக எண்ணுக. திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பினை இந்நிலைக்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிகள் *abcd* என்னும் வளையியை உருவாக்குவதாகக் கொள்க.

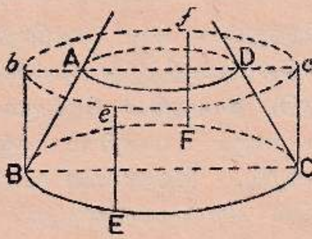
இந்நிலைக்குத்துக் கோடுகளும் பரப்புக்கள் ABCD, *abcd* உம் உள்ளடக்கும் திரவத்தின் சமநிலையை எடுத்துநோக்குக.

ABCD மீதுள்ள விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பு மேனோக்கிச் செயற்பட்டு இத்திரவநிரலின் நிறையைச் சமன்செய்ய வேண்டும் என்பது தெளிவாகின்றது. இன்னும் அதன் தாக்கக் கோடு இந்நிரலின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாகச் செல்லவேண்டும்.

ஆகவே பின்வரும் முடிவை நாம் பெறுகிறோம் :—

ஒரு பாரமான திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்ட யாதுமொரு பரப்பின்மீதான விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பானது, மேலே கிடக்கும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமாய் இத்திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாய்ச் செயற்படுகின்றது.

§218. இறுதிப் பந்தியில் எடுத்துநோக்கப்பெற்ற வகையில் அமிழ்ந்த பரப்பின் மேற்பக்கத்தின்மீதுள்ள திரவத்தின் விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பானது கீழ்முகமான திசையொன்றிலுள்ளதென்பது தெளிவு.



படம் 301.

படம் 301 இற் போலத் திரவத்தைக் கொண்டுள்ள ஒரு பாத்திரத்தை எடுத்துநோக்குக. இப்பாத்திரம் கூம்பு வடிவானதென எளிமைக்காகக் கருதப்படுகின்றது. இதே நியாயம் யாதுமொரு வடிவுள்ள ஒரு பாத்திரத்திற்கும் பொருந்துகிறது.

இவ்விடத்து வளைபரப்பின் மீதுள்ள விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பு மேன்முகமானது என்பது தெளிவு.

இப்போது பரப்பின் யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள உதைப்பானது சுயாதீனப் பரப்பிற்குக்கீழ் அப்புள்ளியின் ஆழத்திலேயே சார்ந்திருக்கின்றது.

எனவே வளைபரப்பின்மீது யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள உதைப்பானது, உட்புறமாகவுள்ள திரவம் நீக்கப்பெற்று இத்திரவம் சுயாதீனப் பரப்பின் மட்டத்திற்கு வெளிப்புறமாக வைக்கப்படுமித்து, அ—து. அவ்வளைபரப்பு, அடியின் விளிம்பினூடாக வரையப்பெற்ற B*b*, E*e*, C*c*, F*f* என்னும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள், இந்நிலைக்குத்துக் கோடுகள் AD இனூடான கிடைத் தளத்தைச் சந்திக்கும் வளையி உள்ளடக்கும் பரப்பு *becf* ஆகியவற்றினிடையேயுள்ள வெளியை நிரப்புமாறு வைக்கப்படுமிடத்து, உதைப்பிற்குப் பருமனிற் சமமாகவும் திசையில் முரணாகவும் இருக்கும்.

வளைபரப்புமீதுள்ள நிலைக்குத்துதைப்பு இப்பரப்புக்கள் கொள்ளும் நீரின் நிறைக்குச் சமம். ஆனால் இது மேனோக்கிச் செயற்படும். அடி மீதுள்ள நிலைக்குத்துதைப்பு, அக்கூம்பின் அடிக்குச் சமமான அடியையும் அடியிலிருந்து சுயாதீனப் பரப்பின் உயரத்துக்குச் சமமான உயரத்தையு முடைய ஓர் உருளையை நிரப்பும் நீரின் நிறைக்குச் சமம். இது பாத்திரம் கொள்ளும் திரவத்தின் நிறையிலும் அதிகமானதென்பது தெள்ளிது. திரவத்தின்மீது வளைபரப்பின் கீழ்முகமான உதைப்பானது அடிக்குச் செலுத்தப்படுவதன் காரணமாகவே இது இவ்வாறுள்ளது. இக்கீழ்முகவுதைப்பின் பருமனானது, வளைபரப்பின் வெளிப்புறமாகவுள்ள வெளியை AD இன் மட்டத்திற்கு நிரப்பும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமம். இக்கனவளவும் பாத்திரத்தில் உண்மையாகக் கொள்ளப்படும் கனவளவும் BECF, *becf* ஆகிய முனைகளையுடைய உருளையின் கனவளவிற்குச் சமம். ஆகவே இவ்வுருளையின் நிறையே அடிமீதுள்ள உதைப்பைத் தருகின்றது.

§219. உச்சியிலே திறந்துள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் திரவம் நிரப்பி அதை ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீது கவிழ்த்து வைப்பின், (திரவமேதும் வெளியேறவில்லை எனக் கருதி) திரவத்தின் மேன்முகவுதைப்பானது பாத்திரத்தினை உயர்த்தப் பார்க்கும். பாத்திரம் ஒரு குறித்த நிறையை உடையதாக இருந்தாலொழிய, இந்நிலையில் சமநிலை அசாத்தியம். இது பின்வரும் உதாரணத்தில் விளக்கப்படுகின்றது.

உதாரணம்.

ஓர் உவைன் கண்ணாடிக் குவளை நிரப்புமிடத்து ஒரு பைந்தின் $\frac{1}{8}$ ஐக் கொள்ளுகின்றது (ஒரு பைந்து நீர் 20 அவு. நிறையுள்ளது) ; அதன் விளிம்பு $2\frac{1}{4}$ அங்குல விட்டமுள்ள ஒரு வட்டம். கொள் திரவத்தின் அதியுயர் ஆழம் $2\frac{2}{3}$ அங்குலம். நீர் நிரப்பப்பெற்ற குவளை ஒரு கிடைத் தளத்திற் கவிழ்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. குவளை வெறிதாக இருக்குமிடத்து அதன் நிறை 2·13 அவு. இலுங் குறைவாயின், இந் நிலையிற் சமநிலை அசாத்தியமென நிறுவுக. ($\pi = 3{\cdot}1416$ என எடுக்க.)

மேன்முகவுதைப்பானது, கண்ணாடிக் குவளையின் விளிம்பை அடியாகவும், $2\frac{2}{3}$ அங்குல உயரத்தையுமுடைய உருளைக்கும் குவளையின் உயர் பரப்புக்கும் இடையேயுள்ள வெளியை நிரப்பும் நீரின் நிறையாகும்.

1 கன அடி நீர் 1000 அவு. நிறையுள்ளதெனக் கொண்டு, இவ்வுருளை கொள்ளும் நீரின் நிறை

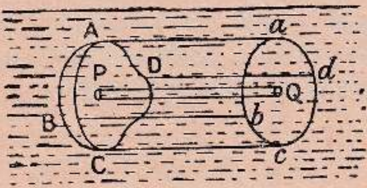
$$= \pi \frac{81}{64} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1000}{1728} \text{ அவு.}$$

குவளையிலுள்ள நீரின் நிறை $= 4$ அவு.

மேன்முகவுதைப்பு $$= \left(\pi \frac{81}{64} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1000}{1728} - 4\right) \text{ அவு.}$$
$$= \left(\frac{125 \times 3 \cdot 1416}{64} - 4\right)$$
$$= \frac{136 \cdot 7}{64} = 2 \cdot 136 \text{ அவு.}$$

எனவே குவளையின் நிறை 2·13 அவுன்சிலுங் குறைவாயின் சமநிலை அசாத்தியம்.

§220. ஒரு பாரமான திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்ட யாதுமொரு பரப்பின்மீது ஒரு குறித்த திசையிலுள்ள விளையுட் கிடையுதைப்பு.



படம் 302.

பரப்பை ABCD (படம் 302) என்க. ABCD இன் சுற்றளவின் ஒவ்வொரு புள்ளியினூடாகவும், குறித்த திசையில் இத்திசைக்குச் செங்குத்தான யாதுமொரு நிலைக்குத்துத் தளத்தை *abcd* என்னும் வளையியிற் சந்திக்குமாறு A*a*, B*b*, முதலிய கிடைக் கோடுகளை வரைக.

பரப்பு ABCD இன்மீது P இல் யாதுமொரு பரப்பளவு மூலகத்தை எடுத்து, P இலுள்ள மூலகத்தை முனைகளாகக் கொண்டுள்ளதும் தன் எறியம் Q இனை தளம் *abcd* இற் கொண்டுள்ளதுமான ஒரு சிறிய கிடையுருளையை எடுத்து நோக்குக.

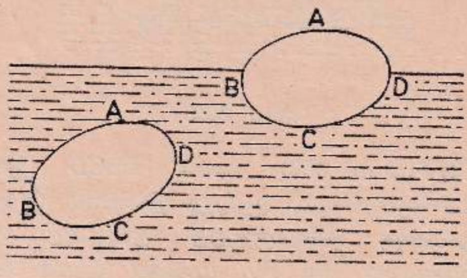
P இலுள்ள பரப்பின் மூலகத்தின்மீதுள்ள கிடையுதைப்பானது Q இலிருக்கும் பரப்பின் ஒத்த மூலகமீதுள்ள கிடையுதைப்பினைச் சமமாக்க வேண்டுமென்பது உருளை கொள்ளும் நீரினது சமநிலையிலிருந்து அறியக் கிடக்கின்றது. பரப்பு ABCD இன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் இது பொருந்துவதனால் இப்பரப்பின் மீதுள்ள விளையுட் கிடையுதைப்பானது நிலைக்குத்துத் தளம் *abcd* மீது அதன் எறியத்தின்மீதுள்ள கிடையுதைப்பிற்குச் சமம். இன்னும், இவ்வுதைப்பின் தாக்கக் கோடுகள் எறியம் *abcd* இன் அமுக்க மையத்தினூடாகச் செல்ல வேண்டும்.

யாதுமொரு பரப்பின்மீது தரப்பட்ட எத்திசையிலுமுள்ள விளையுட் கிடையுதைப்பானது அத்திசைக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தின்மீது அப்பரப்பின் எறியத்தின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பிற்குச் சமமாய் அவ்வெறியத்தின் அமுக்க மையத்தினூடாய்ச் செயற்படுகின்றது.

§221. ஒரு வளைபரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பைக் காண்பதற்கு இரு செங்குத்தான திசைகளில் விளையுட் கிடையுதைப்புக்களையும், விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பையும் காணவேண்டும். பின்பு இம்மூவிசைகளை ஒரு தனி விசையாகக் கூட்டலாம்.

ஒரு பரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பை எளிதாகப் பெறும் ஒரு மிகமுக்கியமான வகையுண்டு. இவ்விடத்துப் பரப்பானது அடைக்கப்பெற்றுள்ளதாகும்.

§222. **ஒரு பாரமான திரவத்தில் முற்றுகவோ அரைகுறையாகவோ அமிழ்த்தப்பட்ட ஓர் அடைத்த பரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பானது, அப்பரப்பின் அமிழ்ந்த பகுதி உள்ளடக்கும் வெளியை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமாய் இத்திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாய்ச் செயற்படும் ஒரு நிலைக்குத்து விசையாகும்.**



படம் 303.

ABCD (படம் 303) அப்பரப்பெண்க. முதற் சந்தர்ப்பத்தில் முழுப் பரப்பும் அமிழ்ந்துள்ளது. இரண்டாம் சந்தர்ப்பத்தில் பகுதி BCD மட்டுமே அமிழ்ந்துள்ளது.

அமிழ்ந்த பரப்பின்மீதுள்ள உதைப்பு அது உள்ளடக்கும் வெளியை நிரப்பும் பதார்த்தத்தின் தன்மையாற் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

ஆகவே இவ்வெளி திரவத்தினுலேயே நிரப்பப்படுவதாக நாம் கருதலாம். இத்திரவத்தின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குமிடத்து, சூழும் திரவம் காரணமாக யாதுமொரு திசையிலுள்ள விளையுட் கிடையுதைப்பு பூச்சியமாக வேண்டும் அதே சமயத்தில் விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பானது, உள்ளடக்கும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமனுய் இத்திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாய்ச் செல்லவேண்டும் என்பது தெளிவாகும்.

ஆகவே அவ்வடைத்த பரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பானது அப பரப்பின் அமிழ்ந்த பகுதியை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமான ஒரு நிலைக்குத்து விசையாகும். அது இத்திரவத்தின் புவி யீர்ப்பு மையத்தினூடாய்ச் செயற்படுகின்றது.

இம்முடிவு **ஆக்கிமீடிசின் கோட்பாடு** எனப்படும். இது வாயுக்களுக்கும் திரவங்களுக்கும் பொருந்துமென்பது தெளிவாகும். இக்கோட்பாடானது வாயுக்களையும் திரவங்களில் பொருட்களின் மிதப்பையும் (அதிகாரம் XIII) பற்றிப் பார்க்குமிடத்துப் பெரிதும் பயன்பெறும்.

§223. பின்வரும் உதாரணங்கள் முன்னைய பந்திகளின் முடிவுகளை விளக்குகின்றன.

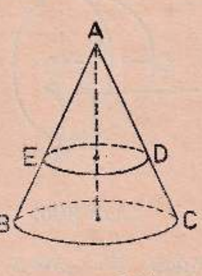
உதாரணம் (i).

ஒரு கூம்பு வடிவப் பாத்திரத்தில் அதன் பாதியாழத்திற்குச் சமமான ஆழத்திற்கு அதை நிரப்புதற்குப் போதுமான பாயி உள்ளது. இப் பாத்திரம் ஒரு கிடை மேசைமீது கவிழ்த்து வைக்கப்படுமிடத்துப் பாயி யேதும் வெளியேறுமாறு செல்ல விடப்படாதாயின், பாத்திரத்தின் வளைபரப்பின்மீதுள்ள விளையுளுதைப்பானது $(23 - 12 \times 7^{\frac{1}{3}}) : 1$ இன் விகிதத்தில் மாற்றப்படுகிறதெனக் காட்டுக. (H.S.C.)

இவ்வினாவில் பாத்திரம் ஒரு கிடை மேசைமீது **கவிழ்த்து** வைக்கப் பட்டுள்ளதெனக் கூறப்பட்டிருப்பதனால், தொடக்கத்தில் உச்சி கீழ்முகமாக இருந்ததென நாம் கொள்ளலாம்.

ஆகவே பாத்திரத்திலுள்ள திரவத்தின் கனவளவு கூம்பினது கனவளவின் எட்டிலொன்றாகும்.

இத்திரவத்தின் நிறையை W எனக. எனின், வளைபரப்புமீதுள்ள விளையுளுதைப்பு நிலைக்குத்தாய் W இற்குச் சமமாகும்.



படம் 304.

கவிழ்த்து வைக்கப்படுமிடத்துத் திரவம் தங்கும் அடித்துண்டு BCDE (படம் 304) இன் கனவளவு கூம்பினது கனவளவின் எட்டிலொன்றாகும். ஆகவே கூம்பு ADE இன் உயரம் $= \dfrac{\sqrt[3]{7}}{2} h$. இங்கு h, முழுக்கூம்பினதும் உயரம்.

அடித்துண்டின் உயரம் $= h\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right)$.

இப்போது அவ்வளைபரப்புமீதுள்ள விளையுளுதைப்பானது, BC ஐ அடியாக வும் அடித்துண்டின் உயரத்திற்குச் சமமான உயரத்தையுமுடைய உருளையை நிரப்பும் பாயியின் நிறையினதும் அடித்துண்டை நிரப்பும் பாயியின் நிறையினதும் வித்தியாசமாகும் (W).

இப்பொழுது r அடியின் ஆரையாயின் உருளையின் கனவளவு

$$= \pi r^2 h\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right).$$

W ஆனது பாயியின் கனவளவு $\frac{1}{24}\pi r^2 h$ இனது நிறை.

எனவே உருளையிலுள்ள பாயியின் நிறை

$$= 24\left(1-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}\right) \text{ W}.$$

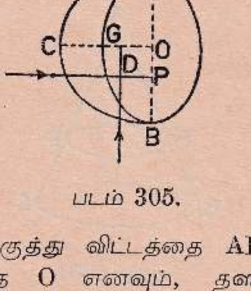
அதோடு அவ்வளைபரப்புமீதுள்ள உதைப்பு

$$= (24-12\times 7^{\frac{1}{3}})\text{W} - \text{W}$$

அல்லது $$= (23-12\times 7^{\frac{1}{3}})\text{W}.$$

உதாரணம் (ii).

a ஆரையுள்ள ஓர் அரைக்கோளம், அதன் தள முகம் நிலைக்குத் தாக இருக்கும்படி நீரிற்குள் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இம்முகத்தின் மையம் திரவப் பரப்பிற்குக்கீழ் a ஆழத்திலுள்ளது. வளைபரப்பு மீதுள்ள விளையுளுதைப்பின் பருமனையும் திசையையுங் காண்க.



படம் 305.

தள முகத்தின் நிலைக்குத்து விட்டத்தை AB (படம் 305) எனவும், இம்முகத்தின் மையத்தை O எனவும், தள முகத்திற்குச் செங்குத் தான இடை ஆரையை OC எனவுங் கொள்க.

வளைபரப்பின்மீது திசை CO இலுள்ள விளையுட் கிடையுதைப்பானது பருமனில் தள முகமீதுள்ள கிடையுதைப்பிற்குச் சமனாய் இம்முகத்தின் அமுக்க மையத்தினூடாகச் செயற்படுகின்றது.

தள முகத்தின்மீதுள்ள உதைப்பு $= \pi a^3 w$. இங்கு w, நீரின் தன்னிறை.

தள முகத்தின் அமுக்க மையம் AB இல் P இலுள்ளது.

இங்கு, $$OP = \frac{a}{4} \text{ (பந்தி 215).}$$

OC இற்குச் செங்குத்தான விளையுட் கிடையுதைப்பு பூச்சியமாகும்.

தள முகம் நிலைக்குத்தாக இருப்பதனல், வளைபரப்புக்களின் மீதுள்ள விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பானது முழு அரைக்கோளத்தினதும் உதைப்பிற்குச் சமம். நிலைக்குத்துதைப்பின் பருமன்

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 w.$$

அது அரைக்கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G இனூடாய்ச் செயற்படுகிறது. ஆகவே வளைபரப்புமீதுள்ள விளையுளுதைப்பானது D இற் செயற்படும் முறையே $\pi a^3 w$, $\frac{2}{3}\pi a^3 w$ என்னும் கிடை, நிலைக்குத்து விசைகளின் விளையுளாகும். இங்கு,

$$GD = OP = \frac{a}{4},$$

$$DP = OG = \frac{3a}{8}.$$

இவ்விளையுள் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணத்தின் தான்சன் $\frac{2}{3}$ ஆகும். இது $\frac{OP}{DP}$ இற்குச் சமம்.

ஆகவே விளையுள் O இனூடாய்ச் செல்கின்றது.

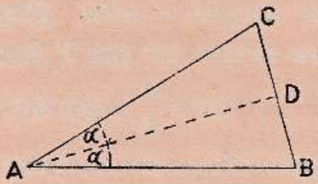
விளையுளின் பருமன்

$$= \pi a^3 w\sqrt{1+\frac{4}{9}} = \pi a^3 w\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

குறிப்பு.—பரப்பிற்குச் செங்குத்தான, ஒவ்வொரு மூலகத்தின் மீதுமுள்ள உதைப்பு O இற்கூடாகச் செல்ல வேண்டுமென்ற உண்மையிலிருந்து, வளைபரப்பின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு O இற்கூடாகச் செல்லவேண்டுமென உய்த்துணர்ந்திருக்கலாம்.

உதாரணம் (iii).

2α உச்சிக் கோணமுள்ள ஒரு கூம்பின் அடிப் பிறப்பாக்கி கிடையானது. அதில் திரவம் நிரப்பப்பட்டுள்ளது ; வளைபரப்புமீதுள்ள விளையுளமுக்கம் அத்திரவத்தினது நிறையின் $\sqrt{1 + 15 \text{ சைன்}^2\alpha}$ மடங்கென நிறுவுக.



படம் 306.

கூம்பின் மையவெட்டுமுகத்தை ABC (படம் 306) குறிக்க. D, அடியின் மையம். கூம்பின் ஆரை, உயரம் முறையே r, h எனக. w, திரவத்தின் தன்னிறையெனக.

C இற்குக்கீழ் D இன் ஆழம் $= r$ கோசை α.

அடிமீதுள்ள விளையுளுதைப்பு

$$= \pi r^2 rw \text{ கோசை } \alpha.$$

இது அடிக்குச் செங்குத்தாகச் செயற்படுகின்றது.

அடிமீதுள்ள உதைப்பின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே

$$\pi r^3 w \text{ கோசை}^2 \alpha, \ \pi r^3 w \text{ கோசை } \alpha \text{ சைன் } \alpha.$$

அவ்வளைபரப்புமீதுள்ள கிடையுதைப்பு அடிமீதுள்ள கிடையுதைப்பிற்குச் சமம்.

அடியானது திரவத்தின்மீது அழுத்துதலினுல், வளைபரப்புமீதுள்ள நிலைக்குத்துதைப்பானது திரவத்தின் நிறையினதும் அடிமீதுள்ள நிலைக்குத்துதைப்பினதும் கூட்டுத்தொகையாகும்.

திரவத்தின் நிறை W ஆகும். இங்கு,

$$W = \tfrac{1}{3}\pi r^2 hw.$$

அதோடு வளைபரப்புமீதுள்ள கிடையுதைப்பு H உம் நிலைக்குத்துதைப்பு V உம் பின்வருமாறு தரப்படுகின்றன.

$$H = \pi r^3 w \text{ கோசை}^2\alpha = \tfrac{1}{3}\pi r^2 hw \frac{3r}{h}\text{கோசை}^2\alpha$$

$$= W\frac{3r}{h} \text{ கோசை}^2\alpha.$$

$$V = W + \pi r^3 w \text{ கோசை } \alpha \text{ சைன் } \alpha$$
$$= W\left(1+\frac{3r}{h} \text{ கோசை } \alpha \text{ சைன் } \alpha\right).$$

$\frac{r}{h} =$ தான் α என்பதனுல்,

$H = 3W$ சைன் α கோசை α,

$V = W(1 + 3$ சைன்$^2\alpha)$

விளையுளுதைப்பு

$$= W\sqrt{9 \text{ சைன்}^2\alpha \text{ கோசை}^2\alpha + 1 + 9 \text{ சைன்}^4\alpha + 6 \text{ சைன்}^2\alpha},$$

$$= W\sqrt{1 + 15 \text{ சைன்}^2\alpha}.$$

1 — 12

பயிற்சி XLVI.

1. செவ் வட்டக் கூம்பு வடிவுள்ள ஒரு மூடிய பாத்திரம் அதன் தட்டையான அடிமீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. உச்சியிலுள்ள ஒரு சிறு துவாரத்திற்கூடாக, கூம்பின் உயரத்தின் மூன்றிலொன்றின் ஆழத்தில் திரவமிருக்குமாறு திரவம் ஊற்றப்படுகின்றது. கூம்பை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறை W ஆயின், அடி, வளைபரப்பு ஆகியவற்றின் மீதுள்ள அமுக்கங்கள் முறையே W, $\frac{8W}{27}$ எனக் காட்டுக. (I.S.)

2. கிடையுடன் $30°$ கோணத்தில், அடியிலிருந்து ஒரு கடற்சுவர் 30 அடிக்குச் சாய்ந்துள்ளது. பின்பு நிலைக்குத்தாக மேனோக்கித் தொடரப்பட்டுள்ளது. இங்கு, 15 அடி ஆழ நீர் இருப்பின் அதன்மீதுள்ள விளையுட் கிடை, நிலைக்குத்தமுக்கங்களை அதன் யார் நீளத்திற்குத் தொன் நிறையிற் காண்க. (1 கன அடி கடல் நீர் 64 இரு. நிறையுள்ளதென எடுக்க.) (I.S.)

3. ஒரு கடற்சுவர் 10 அடிக்கு (கீழ்முகமாக) நிலைக்குத்தாகவும் 16 அடிக்கு கிடையுடன் $30°$ கோணத்திற் சரிந்துமுள்ளது. கடலின் ஆழம் 16 அடியாக இருக்கும்போது சுவரின் ஒரு யார் நீளத்தின் மீதுள்ள அமுக்கத்தின் இடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளைக் கிட்டிய தொன்னிற் காண்க. (1 கன அடி கடல் நீர் 64 இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.C.)

4. நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ளதும் h உயரமும் r ஆரையுமுடையதுமான ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பு அதனச்சுக் கிடையாகவும் அடி நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளது. வளைபரப்பின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பின் பருமனையும் திசையையுங் காண்க. (I.S.)

5. ஒரு பொட் கூம்பக வடிவுள்ள மூடிய பாத்திரத்தின் உச்சி, அடியின் மையத்திலிருந்து 10 சமீ. மேலுள்ளது. இவ்வடி 10 சமீ. பக்கச் சதுரமாகும். இப்பாத்திரம் முற்றுக நீர் நிரப்பப்பெற்று, அதன் அச்சும் அதன் அடியின் இரு பக்கங்களும் கிடையாக இருக்கும்படி வைக்கப்படுகின்றது. அதன் முகங்கள் ஒவ்வொன்றின் மீதுமுள்ள உதைப்பைத் தீர்மானிக்க. (H.S.D.)

6. 6 அங்குல ஆரையுள்ள ஒரு மூடிய அரைக்கோளக் கிண்ணத்தில் நீர் நிரப்பப் பெற்றுள்ளது. அது அதன் தள முகம் கிடையுடன் $50°$ கோணத்தை ஆக்குமாறும் வளைபரப்பு இம்முகத்திற்கு மேலே இருக்குமாறுந் தாங்கப்படுகின்றது. வளைபரப்பின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பைத் தொகையிலுந் திசையிலுங் காண்க. (H.S.D.)

7. ஒரு a ஆரையுள்ள வட்டத் தட்டு, ஒரு பாயியின் பரப்பை அதன் உச்சிப் புள்ளியில் மட்டுமட்டாகத் தொடுமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில்

அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. வளிமண்டல அமுக்கந் தவிர்க்கப்படின், அத்தட்டின் அமுக்க மையம் அதன் மையத்திற்கு $\frac{1}{4}a$ கீழேயுள்ளதென நிறுவுக. நீரின் பரப்பை மட்டுமட்டாகத் தொடுவதும் தள முகத்தை நிலைக்குத்தாகக் கொண்டதுமான ஓர் அரைக்கோளத்தினது வளைபரப்பின்மீதுள்ள மொத்த அமுக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும் தாக்கக் கோட்டினையுங் காண்க. (N.U.4.)

8. h உயரமும் α அரைக் கோணமுமுள்ள ஒரு செவ் வட்டப் பொட்கூம்பின் அடி ஒரு கிடை மேசைமீதுள்ளது. இக்கூம்பு நீர் நிரப்பப்பெற்றும் வெறுங் கூம்பின் நிறை அது கொண்டுள்ள நீரின் நிறைக்குச் சமமாகவும் இருப்பின், கூம்பின் அடிமீதுள்ள நீரின் உதைப்பையும் மேசைமீதுள்ள கூம்பின் அமுக்கத்தையுங் காண்க. இவற்றைக் காணுமிடத்து இரண்டாம் முடிவு ஏன் முதலாம் முடிவின் இரு மடங்காயிராதென்பதைச் சுருக்கமாக விளக்குக. (N.U.3.)

9. ஒரு கோளத்தின் ஒரு விட்டத்தினூடான இரு செங்குத்துத் தளங்களினால் வரைப்புறும் அக்கோளத்தின் காற்பகுதி வடிவுள்ள ஒரு மூடிய பாத்திரத்தில் மட்டுமட்டாக நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது. இந்தப் பாத்திரத்தின் ஒரு தள முகம் ஒரு மேசைமீதுள்ளது. ஒவ்வொரு தள முகத்தின் மீதுமுள்ள விளையுட் பாயி அமுக்கத்தின் பருமனையுந் தானத்தையுங் கண்டு, வளைபரப்பு மீதுள்ள விளையுளுதைப்பின் பருமனையுந் திசையையும் (தானமன்று) உய்த்தறிக. (N.U.4.)

10. கிடையான நீளத்தையும் தட்டையான முனைகளையும் வட்டமான வெட்டுமுகத்தையுமுடைய ஓர் உருளைவடிவக் கொதிகலத்தில் நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது ; அவ்வளைபரப்பின் மேற், கீழ்ப் பாதிகளின்மீதுள்ள நிலைக்குத்தமுக்கங்களின் விகிதத்தைக் காண்க. (C.W.B.)

11. நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ளதும் 6 அங்குல விட்டமுள்ளதுமான ஒரு திறந்த அரைக்கோள ஓடு ஒரு கண்ணாடித் தகட்டினால் மூடப்பெற்றுள்ளது. பின்பு இவ்வோடு ஒரு மேசையின்மீது கவிழ்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. கொண்டுள்ள நீரின் அமுக்கத்தினால் அவ்வோடு உயர்த்தப்படாது தடுக்கும் ஓட்டின் ஆகக் குறைந்த நிறையை இறுத்தலிற் காண்க. (ஒரு கன அடி நீரின் நிறை = 62·43 இரு.) (C.W.B.)

12. நீரில் அமிழ்த்தப்பெற்ற a ஆரையுள்ள ஒரு சீர்த் திண்ம அரைக் கோளத்தின் மையம் h ஆழத்திலுள்ளது. மேலாகவுள்ள அதன் தள அடி கிடையுடன் θ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது. அவ்வளைபரப்பின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பைக் கண்டு, அது கிடையுடன் ϕ கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதென நிறுவுக.

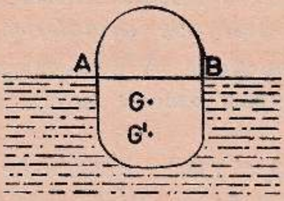
இங்கு

$$\text{தான் } \phi = \frac{2a + 3h \text{ கோசை } \theta}{3h \text{ சைன் } \theta}. \qquad \text{(C.W.B.)}$$

அதிகாரம் XIII.

மிதக்கும் பொருட்களின் சமநிலே.

§224. ஒரு திரவத்தில் சுயாதீனமாய் மிதக்கும் ஒரு பொருளின் சமநிலேக்குரிய நிபந்தனேகள்.



படம் 307.

படம் 307 இற் காட்டப்பெற்ற வெட்டுமுகத்தையுடைய பொருளினே எடுத்துநோக்குக.

அப்பரப்பின் அமிழ்ந்த பகுதிமீது யாதுமொரு திசையிலுள்ள விளேயுட் கிடையுதைப்பானது பூச்சியம், அ—து. திரவத்தின் கிடையுதைப்புக்கள் தமக்கிடையே சமப்படுகின்றனவென்பதை நாம் அறிந்துள்ளோம்.

பொருளின்மீது செயற்படும் மற்றைய விசைகள் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G இனூடாய் நிலேக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் நிறை, திரவத்தின் மேன்முக நிலேக்குத்துதைப்பு என்பனவேயாம். இந்த நிலேக்குத்துதைப்பானது, அப்பொருளின் அமிழ்ந்த பகுதி தங்கும் வெளியை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமாகும். இத்திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G′ இனூடாகச் செயற்படுகின்றது.

புள்ளி G′ ஆனது **மீயுந்தல் மையம்** எனப்படும்.

சமநிலேக்கு இவ்விசைகள் சமமாகவும் முரணுகவும் இருப்பதோடு ஒரே நேர் கோட்டிலும் செயற்படவேண்டும்.

எனவே தேவையான நிபந்தனேகள் பின்வருவனவாம் :—

(i) அப்பொருளின் அமிழ்ந்த பகுதி கொள்ளும் வெளியை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறையானது பொருளின் நிறைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) இத்திரவத்தினதும் பொருளினதும் புவியீர்ப்பு மையங்கள் ஒரே நிலேக்குத்துக் கோட்டில் அமையவேண்டும்.

சமநிலேயின் **உறுதிப்பாடு** பற்றி ஆராயப்படமாட்டாது.

§225. முன்னைய பந்தியிற் பெறப்பட்ட நிபந்தனைகளிலிருந்து, அப் பொருளின் நிறை அதன் சொந்தக் கனவளவிற்குச் சமமான அது வைக்கப்பட்டுள்ள திரவத்தின் நிறையினும் குறைவாயின் அது மிதக்கு மென்று தெரியவருகின்றது. அது அதன் சொந்தக் கனவளவிற்குச் சமமான திரவத்தின் நிறையினும் பாரமாயின் அது தாழும்.

நீரினிடத்து ஒன்றினுங் குறைவான தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு பொருள் மிதக்கும் ; அதன் தன்னீர்ப்பு ஒன்றிலும் அதிகமாயின் அது தாழும்.

அதன் தன்னீர்ப்பானது ஒன்றிற்குச் சமமாயின், அது முற்றாக அமிழ்த்தப் பட்டுள்ளதாகக் கருதுமிடத்து, அது எதாவதோர் ஆழத்தில் மிதக்கும்.

ஒரு பொருளின் கனவளவை V எனவும், **ஓரலகுக் கனவளவிற்கு** w **நிறையுள்ள ஒரு திரவத்தின் சார்பாக** அதன் தன்னீர்ப்பை s எனவுங் கொள்க.

அப்பொருளின் நிறை $= Vsw$. அப்பொருளை, எடுத்துநோக்கப்பெற்ற திரவத்தில் வைக்குமிடத்து $s < 1$ ஆயின் அது மிதக்கும்.

இவ்விடத்து அப்பொருள் அதன் v என்னுங் கனவளவு அமிழ்ந் திருக்குமாறு தாழும். எனவே,

$$vw = Vsw,$$

$$\therefore \ \frac{v}{V} = s.$$

அ–து. முழுக் கனவளவிற்கு அமிழ்ந்த கனவளவின் விகிதம், அப் பொருளின் அடர்த்தியினதும் திரவத்தின் அடர்த்தியினதும் விகிதத்திற்குச் சமம்.

$0{\cdot}5$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு மரத் துண்டு அதன் பாதிக் கனவளவானது நீரில் அமிழுமாறு மிதக்கும்.

2 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் அது அதன் கனவளவின் $\dfrac{0{\cdot}5}{2}$ அல்லது $\frac{1}{4}$ அமிழ்ந்திருக்குமாறு மிதக்கும்.

§226. தன் கனவளவின் ஒரு பகுதி ஒரு திரவத்திலும் மீதி வேறொரு திரவத்திலும் அமிழ்த்தப்பட்டதாய் மிதக்கும் ஒரு பொருளின் சமநிலை.

இப்பொருளின் நிறை, இரு திரவங்களினதும் மேன்முக உதைப்புக் களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டுமென்பது தெளிவா கின்றது. ஒவ்வொரு திரவத்தினதும் மேன்முக உதைப்பு அதனுள் அமிழ்த்தப்பட்ட பொருளின் கனவளவை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமன்.

s, s_1, s_2 ஆகியன முறையே பொருளினதும் இரு திரவங்களினதும் தன்னீர்ப்புகளும், w நீரின் தன்னிறையும், v_1, v_2 ஆகியன முறையே s_1, s_2 ஆகிய திரவங்களில் அத்திண்மத்தின் கனவளவுகளுமாயின்,

$$\text{திண்மத்தின் நிறை} = (v_1 + v_2)\, sw,$$

v_1 கனவளவுள்ள திரவம் s_1 இன் நிறை $= v_1 s_1 w$,

v_2 கனவளவுள்ள திரவம் s_2 இன் நிறை $= v_2 s_2 w$,

$$\therefore\ (v_1 + v_2)s = v_1 s_1 + v_2 s_2.$$

§227. ஒரு பாத்திரத்திற் கொள்ளப்பெற்ற திரவத்தில் ஒரு பொருளை மிதப்பிக்குமிடத்து அது திரவம் உஞற்றும் உதைப்பிற்குச் சமமான, முரணுன ஓர் உதைப்பினைத் திரவத்தின்மீது உஞற்றும்.

இவ்வுதைப்பு திரவத்தைக் கொண்டுள்ள பாத்திரத்தின் அடிக்கும் பக்கங்களுக்கும் செலுத்தப்படுகின்றது.

பாத்திரம் நிலைக்குத்தான பக்கங்களைக் கொண்டிருப்பின் அதன் அடி மீதுள்ள உதைப்பின் மொத்த மிகுதிப்பாடு அப்பொருளின் நிறைக்குச் சமம்.

அப்பக்கங்கள் நிலைக்குத்தாக இருப்பினும் அவ்வாறு இல்லாதிருப்பினும் பக்கங்கள் மீதுள்ள உதைப்பில் ஏற்படும் மிகுதிப்பாடானது பாத்திரத்தில் திரவம் உயரும் அளவிற் சார்ந்திருப்பதனுல் அதைக் கணிப்பது மிகக் கடினமாகும்.

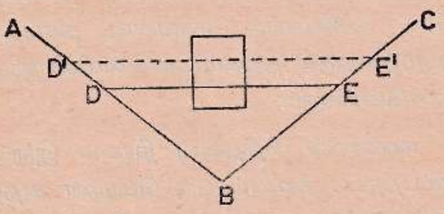
இது பின்வரும் உதாரணத்தில் விளக்கப்பெற்றுள்ளது.

உதாரணம்.

கீழ்முகமாக உச்சியைக் கொண்டுள்ள ஒரு முக்கோணி வெட்டுமுகத்தை யுடைய ஒரு தாழியில் அரைகுறையாக W நிறையுள்ள நீர் நிரப்பப் பெற்றுள்ளது. அதனுள் வைக்கப்படும் W′ நிறையுள்ள ஒரு மரத் துண்டு நீரில் மிதக்கின்றது. தாழியின் நிலைக்குத்துத் தள முகங்களெதிலேனும் உள்ள அமுக்கம்,

$$\left(\frac{W + W'}{W}\right)^{\frac{3}{2}}$$

என்னும் விகிதத்திற் கூட்டப்பெறுகிறதெனக் காட்டுக. (H.S.D.)



படம் 308.

ABC (படம் 308), தாழியின் ஒரு நிலைக்குத்து வெட்டுமுகத்தையும், DE, B இற்கு மேல் h உயரத்திலுள்ள தொடக்க நீர் மட்டத்தையும் குறிப்பாகக் கொள்க.

குற்றியை நீரில் மிதப்பிக்கும்போது நீர்ப் பரப்பானது மட்டம் D'E' இற்கு உயருகின்றது. பின்பு இம்மட்டத்திற்கும் பழைய மட்டத்திற்குமிடையே யுள்ள கனவளவு v ஆனது அமிழ்ந்த குற்றியின் கனவளவிற்குச் சமம்.

V நீரின் கனவளவும், w அதன் தன்னிறையுமாயின்,

$$Vw = W,$$

அதோடு

$$vw = W'.$$

$$\therefore \frac{V+v}{V} = \frac{W+W'}{W}.$$

h' ஆனது B இற்கு மேலாக புதிய பரப்புயரமாயின், DBE, D'BE' ஆகிய முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகள் $h^2 : h'^2$ என்னும் விகிதத்திலுள்ளன. V, $V + v$ ஆகிய கனவளவுகளும் அதே விகிதத்திலுள்ளன.

இப்பொழுது,

$$\frac{\text{D'BE' மீதுள்ள அமுக்கம்}}{\text{DBE மீதுள்ள அமுக்கம்}} = \frac{h'^2\frac{1}{3}h'}{h^2\frac{1}{3}h} = \frac{h'^3}{h^3} = \left(\frac{V+v}{V}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{W+W'}{W}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

§228. ஒரு திரவத்தில் மிதக்குமொரு பொருளின் சமநிலைக்கான நிபந்தனைகளில் முதலாவது பின்வருமாறு கூறப்படும் :—

அப்பொருளினுற் பெயர்க்கப்படும் நீரின் நிறையானது பொருளின் நிறைக்குச் சமமாய் இருக்கவேண்டும்.

ஆகிலும், "பெயர்க்கப்படும் திரவம்" என்ற கோவை தவருன கருத்தைத் தரக்கூடியதாக இருக்கின்றது. ஒரு பொருள் தன்னிலும் அதிகமான அடர்த்தியுள்ள ஒரு கணிசமான கனவளவு திரவத்தில் வைக்கப்படு மிடத்து அதன் அமிழ்ந்த பகுதி தங்கும் கனவளவிலிருந்து அது உண்மை யாகத் திரவத்தைப் பெயர்க்கும்.

ஆயினும், ஓர் உருளையில் சிறிதளவு திரவம் இருப்பதாகக் கருதுக. இவ்வுருளையைக் கிட்டத்தட்ட நிரப்பும் ஒரு பொருள் அதற்குள் தாழ்த்தப் படுகின்றது. பொருளுக்கும் உருளைக்கும் இடையேயுள்ள வெளிக்குள் திரவம் பாய்ச்சப்படும். பொருளானது அடியைத் தொடுமுன் திரவம் ஒரு குறித்த உயரத்தை அடையுமாயின் பொருள் மிதக்க முடியும். இது படம் 309 இல் விளக்கப்பெற்றுள்ளது.

படம் 309.

சுயாதீனப் பரப்பின் மட்டத்திற்குக்கீழ் அப்பொருளின் கனவளவு இங்கு இருக்கும் திரவத்தின் மொத்தக் கனவளவிலும் கணிசமான அளவு அதிகமாக இருக்கலாம். பின்பு, தன் சொந்த நிறைக்குச் சமமான திர வத்தைப் பொருள் " பெயர்க்கின்ற" தென்ற கேள்வியே கிடையாது.

மேண்முக நிலைக்குத்துதைப்பைத் தரும் திரவத்தினது நிறை, அப் பொருள் தங்கும் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழாகவுள்ள வெளியை நிரப்பும் கனவளவின் நிறையாம்.

இத்திரவக் கனவளவின் சமநிலையை எடுத்துநோக்கி, சூழ்ந்துள்ள திரவம் காரணமாகப் பொருளின் பரப்புமீதுள்ள விளையுள் நிலைக்குத் துதைப்பின் பெறுமதியைப் பெறுகின்றோம். அதற்கும் " பெயர்ச்சிக்கும்" தொடர்பேதுமில்லை.

" பெயர்க்கப்பெற்ற திரவ நிறை " அல்லது " பெயர்க்கப்பெற்ற திரவக் கன வளவு " என்ற சொற்றொடர்களைப் பயன்படுத்தும்போது அவை சுயாதீனப் பரப்பிற்குக்கீழ் இருக்கும் பொருளின் பகுதி தங்கும் வெளியை நிரப்பும் திரவ அளவினைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளப்பட வேண்டும்.

கப்பல்களிடத்து " பெயர்ச்சி " என்ற சொல் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. அது பொதுவாக **நிறை** எனத் தரப்படுகின்றது.

இங்கு நிறை அது பெயர்க்கும் நீரின் நிறையைக் குறிக்கின்றது. எனினும், இது கப்பலின் நிறைக்குச் சமம்.

§229. நீரமானிகள்.

நீரமானியென்பது ஒரு திரவத்தில் மிதப்பிக்குமிடத்து அத்திரவத் தின் தன்னீர்ப்பை நிர்ணயிக்க உதவும் ஒரு கருவியாகும். நீரமானிகள் இரு வகைப்பட்டவை :—

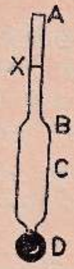
(i) **பொது நீரமானி.** இது மாறு நிறையுடையது. இது தாழும் ஆழத் தைக் கொண்டு திரவத் தன்னீர்ப்பு நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது.

(ii) **நிக்கல்சனின் நீரமானி.** இதனிடத்து ஒரு தராசுத் தட்டில் நிறை கள் வைத்து மொத்த நிறை மாற்றப்படுகின்றது. எனவே அமிழ்ந்த இக்கருவியின் **கனவளவு** எப்பொழுதும் ஒரேயளவினதாயிருக்கும்.

இவ்வகையை ஒரு சிறு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பை நிர்ணயிக்கவும் பயன்படுத்தலாம்.

§230. பொது நீரமானி.

இது இரு குமிழ்களுடன் தொடுக்கப்பெற்றுள்ள, சீர் வெட்டுமுகமுள்ள ஒரு நேர்க் கண்ணுடித் தண்டைக் கொண்டுள்ளது. இக்கருவி அதன் தண்டு நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி மிதக்குமாறு கீழ்க் குமிழ் இரசத்தினுற் பாரமேற்றப்பட்டுள்ளது.



படம் 310.

படம் 310 இல் தண்டு AB ஆகும். C, இக்கருவியின் பெயர்ச்சியை அதிகரிக்கும் குமிழ் ; D, இரசத்தைக் கொண்டுள்ள குமிழ்.

W இக்கருவியின் நிறையெனவும், V அதன் மொத்தக் கனவளவென வும், a தண்டின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவெனவும், X இக்கருவி நீரில் மிதக்குமிடத்து நீர்ப் பரப்பில் தண்டிலிருக்கும் புள்ளியெனவும் கொள்க.

பின்பு அமிழ்ந்த கனவளவு $= V - a.AX$. w நீரின் தன்னிறையாயின்,

$$(V - a.AX)w = W.$$

s_1 (>1) தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் அமிழ்ந்த கனவளவு குறைவாக இருக்கும். இவ்விடத்து திரவப் பரப்பில் தண்டின் மீதுள்ள புள்ளி X_1 ஆயின்,

$$(V - a.AX_1)s_1w = W,$$

$$\therefore \quad \frac{(V - a.AX_1)s_1}{V - a.AX} = 1,$$

$$\therefore s_1 = \frac{V - a.AX}{V - a.AX_1}.$$

நடைமுறையில், இக்கருவி விற்கப்படுமுன் அளவுகோடிடப்பட்டிருக்கும். தண்டின்மீது வெவ்வேறு புள்ளிகளிலுள்ள குறிகள், கருவியானது இப்புள்ளிகளுக்குத் தாழும் திரவங்களின் தன்னீர்ப்புக்களைத் தருகின்றன.

தன்னீர்ப்புக்களை ஒரு பெரிய அளவிற்குக் காட்ட அக்கருவியின் தண்டு நீளமாக இருக்கவேண்டும். இதன் காரணமாகவே அவை வழக்க மாக, நீரிலும் இலேசான திரவங்களிற்கு இரண்டு அல்லது மூன்று சோடிகளாகவும், நீரிலும் பாரமான திரவங்களிற்கு இரண்டு அல்லது மூன்றுகவும் ஆக்கப்பட்டுள்ளன.

§231. பொது நீரமானியில் அளவுகோடிடல்.

அதன் தண்டு அறிமுறையாகப் பின்வருமாறு அளவுகோடிடப்பட லாம் :—

படம் 311.

O (படம் 311) என்பது அத்தண்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியெனக. தண்டி னது நீளம் AO இன் கனவளவானது நீரமானியின் மொத்தக் கன வளவு V இற்குச் சமமாக இருக்குமாறு புள்ளி O அமைந்துள்ளது. வேண்டின் இதை நீட்டலாம்.

அதை நீரில் மிதப்பிக்குமிடத்து நீர்ப் பரப்பிலுள்ள புள்ளியை X என்க. பின்பு முதலிற் போல,

$$(V - a.AX)w = W,$$

$$\therefore\ a(AO - AX)w = W,$$

$$\therefore\ a.OXw = W.$$

s_1 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் மிதப்பிக்கப்படும்போது X_1 ஆனது திரவப் பரப்பிலுள்ள புள்ளியாயின்,

$$a.OX_1.s_1w = W,$$

$$\therefore\ \frac{OX_1s_1}{OX} = 1,$$

$$\therefore\ s_1 = \frac{OX}{OX_1},$$

இதே மாதிரியாக s_2 த. ஈ. உள்ள ஒரு திரவத்தில்,

$$s_2 = \frac{OX}{OX_2}.$$

எனவே s_1, s_2 முதலானவை கூட்டல் விருத்தியில் இருப்பின் OX_1, OX_2, முதலானவை இசை விருத்தியிலிருக்கும்.

இதே மாதிரியாக OX_1, OX_2, முதலானவை கூ. வி. இல் இருப்பின் இவற்றை ஒத்த தன்னீர்ப்புக்கள் இசை விருத்தியிலிருக்கும்.

§232. நிக்கல்சனின் நீரமானி.

இது, நிறைகள் வைக்கப்படக்கூடிய ஒரு தராசுத் தட்டு A ஐ ஒரு மெல்லிய தண்டினுலே தாங்கும் ஒரு பொள்ளுலோக உருளை C (படம் 312) ஐக் கொண்டுள்ளது. C இற்குக்கீழ் ஒரு பாரமான கிண்ணம் B இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. அதன் நிறைகாரணமாக நீரமானி நிலைக்குத்தாக மிதக்கும்.

அத்தண்டில் X என்னும் குறியுள்ளது. இக்கருவியைப் பயன்படுத்தும் போது அக்குறியானது பரப்பிலிருக்குமாறு இதை மிதக்கவிட வேண்டும்.

படம் 312.

ஏற்கெனவே குறிப்பிட்டவாறு இக்கருவியை ஒரு திரவத்தின் அல்லது சிறு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பை நிர்ணயிக்கப் பயன்படுத்தலாம்.

(i) ஒரு திரவத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

W, நீரமானியின் நிறையென்க.

இக்கருவியானது நீரில் X என்னுக் குறிக்குத் தாழுமாறு தட்டு A இல் வைக்கப்படவேண்டிய நிறையை w என்க.

இக்கருவியானது s_1 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் அக்குறிக்குத் தாழுமாறு வைக்கப்படவேண்டிய நிறையை w_1 என்க.

இவ்விரு சந்தர்ப்பங்களிலும் அமிழ்ந்த கனவளவுகள் சமமாகும். எனவே, இந்த நீர், திரவக் கனவளவுகளின் நிறைகள் முறையே $W + w$, $W + w_1$ என்பனவற்றுக்குச் சமம்.

$$\therefore\ s_1 = \frac{W + w_1}{W + w}.$$

(ii) ஒரு திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காணல்.

அக்கருவியானது நீரில் குறி **X** இற்குத் தாழுமாறு தட்டில் வைக்கப்பட வேண்டிய நிறை w என்க.

w ஐ அகற்றிப் பொருளை A இல் வைக்க. இப்பொழுது கருவியை அக்குறிக்குத் தாழ்த்தத் தேவையான நிறை w_1 ஐக் காண்க.

ஆகவே அப்பொருளின் நிறை $= w - w_1$.

அப்பொருளைக் கிண்ணம் B இல் நீரிற்குள் வைக்க. கருவியை அக்குறிக்குத் தாழ்த்துமாறு A இல் வைக்கவேண்டிய நிறை w_2 என்க.

காற்றில் அத்திண்மத்தின் நிறையும் w_1 உம் சேர்ந்து நீரில் அத் திண்மத்தின் நிறையுடன் w_2 இற்கும் சமம்.

$\therefore$ காற்றில் நிறை $+ w_1 =$ நீரில் நிறை $+ w_2$,

காற்றில் நிறை $-$ நீரில் நிறை $= w_2 - w_1$.

ஆனல், காற்றில் நிறை $-$ நீரில் நிறை $=$ அத்திண்மத்தின் கனவளவிற்குச் சமமான நீரின் நிறை ; அதோடு

$$\text{திண்ம நிறை} = w - w_1,$$

$$\therefore \text{ தன்னீர்ப்பு} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1}.$$

திண்மத்தின் தன்னீர்ப்பு < 1 ஆயின், அதனைக் கிண்ணம் B இனுள் நுண்ணிழையினற் கட்டலாம். அல்லது சில கருவிகளிடத்து B ஒரு வகைக் கூடாக அமையும் வலை மூடியினல் மூடப்பெற்றிருக்கும்.

§233. உதாரணம் (i).

ஒரு பொது நீரமானி, தெரிந்த தன்னீர்ப்புள்ள மூன்று திரவங்களில் ஒன்றின் பின்னென்றுக வைக்கப்படுகின்றது. முதலாம், இரண்டாம் திரவங்களுக்கு இசைவாகத் தண்டின் அளவுகோடுகளிடையேயுள்ள தூரம் தரப்பட்டுள்ளது ; இரண்டாம், மூன்றும் திரவங்களுக்கு அளவு கோடுகளிடையேயுள்ள தூரத்தினைக் காண்க. இத்திரவங்களிடத்து அளவுகோடுகள் கூ.வி. யில் இருப்பின் அவற்றின் தன்னீர்ப்புக்களின் நிமர்மாற்றுக்கள் கூ. வி. யில் இருக்கும் எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

தண்டின் உச்சியை A எனவும், கனவளவை V எனவும், நீரமானியின் நிறையை **W** எனவுங் கொள்க.

திரவங்களின் தன்னீர்ப்புக்களை s_1, s_2, s_3 என்க. அக்கருவி மூன்று திரவங்களிலும் மிதக்குமிடத்துத் தண்டில் திரவப் பரப்பிலுள்ள புள்ளிகளை X_1, X_2, X_3 என்க.

$$(V - a.AX_1)s_1w = W, \text{ அல்லது } V - a.AX_1 = \frac{W}{w}\cdot\frac{1}{s_1},$$

$$(V - a.AX_2)s_2w = W, \text{ அல்லது } V - a.AX_2 = \frac{W}{w}\cdot\frac{1}{s_2},$$

$$(V - a.AX_3)s_3w = W, \text{ அல்லது } V - a.AX_3 = \frac{W}{w}\cdot\frac{1}{s_3}.$$

$$\therefore\ a.X_1X_2 = \frac{W}{w}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right),$$

அதோடு $$a.X_2X_3 = \frac{W}{w}\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}\right).$$

எனவே, X_1, X_2, s_1, s_2 ஆகியவை தெரிந்திருப்பின், $\frac{W}{aw}$ இன் பெறுமதியை அறியலாம். பின்பு இரண்டாம் சமன்பாட்டிலிருந்து X_2X_3 ஐக் காணலாம்.

அவ்வளவுகோடுகள் கூ. வி. யில் இருப்பின்,

$$AX_2 - AX_1 = AX_3 - AX_2,$$

$$\therefore\ \frac{W}{aw}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) = \frac{W}{aw}\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}\right),$$

$$\therefore\ \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}.$$

$\therefore$ தன்னீர்ப்புக்களின் நிகர்மாற்றுக்கள் கூ. வி. யில் உள்ளன.

உதாரணம் (ii).

12 அங்குல நீளமும் 0·95 தன்னீர்ப்புமுள்ள ஓர் உருளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி எண்ணெய், நீர் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள ஒரு பாத்திரத்தில் மிதக்கின்றது. இது முற்றுக அமிழ்ந்துள்ளது. எண்ணெயின் தன்னீர்ப்பு 0·84 ஆயின் உருளையின் எந்த நீளம் எண்ணெயிலுள்ளது? (H.S.C.)

V உருளையின் கனவளவெனவும், v_1, v_2 ஆகியன முறையே நீர், எண்ணெய் ஆகியவற்றில் அமிழ்ந்த கனவளவுகளெனவும், w நீரின் தன்னிறையெனவுங் கொள்க.

உருளையின் நிறை $= V(0{\cdot}95)w$.

நீரின் மேன்முகவுதைப்பு $= v_1w$.

எண்ணெயின் மேன்முகவுதைப்பு $= v_2(0{\cdot}84)w$,

$$\therefore\ v_1w + v_2(0{\cdot}84)w = V(0{\cdot}95)w$$

$$\therefore\ v_1 + 0{\cdot}84v_2 = 0{\cdot}95V.$$

இன்னும்
$$v_1 + v_2 = V,$$
$$0{\cdot}16v_2 = 0{\cdot}05V,$$
$$\therefore\ v_2 = \tfrac{5}{16}V.$$

$\therefore$ எண்ணெயில் அமிழ்ந்த நீளம் மொத்த நீளத்தின் $\frac{5}{16}$, அ–து. $3\frac{3}{4}$ அங்குலம்.

உதாரணம் (iii).

ஒரு மரக் கனக் குற்றியின் (த.ஈ. 0·83) உட்புறத்தில் ஓர் ஈயத் துண்டு (த.ஈ. 11·35) உள்ளது. அது அதன் கனவளவின் பத்திலொன்று அமிழ்ந்திராதவாறு நீரில் மிதக்கின்றது. அதன் உயர்பரப்பில் 100 கி. நிறையை வைத்து அதனை மட்டுமட்டாக அமிழ்த்தலாம். அக்குற்றியின் ஒரு விளிம்பினது நீளத்தையும் ஈயத் துண்டின் கனவளவையுங் கணிக்க. (I.S.)

அவ்விளிம்பு a சமீ. நீளமுள்ளதெனவும் ஈயத் துண்டு v க.சமீ. கனவளவுள்ளதெனவுங் கொள்க.

1 க.சமீ. நீர் 1 கி. நிறையுள்ளதென்பதனால் குற்றியின் நிறை $0{\cdot}83(a^3 - v)$ கிராமும் ஈயத்தின் நிறை $11{\cdot}35v$ கிராமுமாகும்.

கனவளவின் $\frac{9}{10}$ ஆழ்ந்திருக்கும்போது மேன்முகவுதைப்பு $\frac{9}{10}a^3$ கிராம்.

$$\therefore\ 0{\cdot}83(a^3 - v) + 11{\cdot}35v = \tfrac{9}{10}a^3 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

முழுக்கனவளவும் அமிழ்ந்திருக்குமிடத்து, மேன்முகவுதைப்பு a^3 கிராம்.

$$\therefore\ 0{\cdot}83(a^3 - v) + 11{\cdot}35v + 100 = a^3 \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

(i) இலிருந்து $0{\cdot}07a^3 - 10{\cdot}52v = 0,$

(ii) இலிருந்து $0{\cdot}17a^3 - 10{\cdot}52v = 100,$

$$\therefore\ 0{\cdot}1a^3 = 100,$$
$$\therefore\ a^3 = 1000,$$
$$\therefore\ a = 10 \text{ சமீ.}$$

எனவே
$$10{\cdot}52v = 70,$$
$$\therefore\ v = \frac{70}{10{\cdot}52} = 6{\cdot}6 \text{ க.சமீ.}$$

உதாரணம் (iv).

0·45 தன்னீர்ப்புள்ள ஓர் உருளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு நீரில் மிதக்கின்றது. அதன் உயரம் 12 அங்குலமும் அதன் ஆரை 2 அங்குலமுமாயின், அதன் ஓரங்குலம் மட்டுமே நீரிற்குமேல் வெளிப்படுமாறு அதன் கீழ்முகத்தின் மையத்திலிருந்து எக்கனவளவு ஈயம் (த. ஈ. 11·4) தொங்கவிடப்பட வேண்டும்? (I.S.)

w, கன அங்குலத்திற்கு இருத்தலில் நீரின் தன்னிறை என்க. உருளை யின் நிறை$=48\pi(0{\cdot}45)w$ இரு.

ஈயத்தின் கனவளவு v கன அங்குலமாயின், அதன் நிறை $11{\cdot}4vw$ இரு. ஆகும். உருளையின் 1 அங். மட்டுமே நீரின்மேலே வெளிப்படுமிடத்து அமிழ்ந்த கனவளவு 44π கன அங்குலமாகும்.

$$\text{மேன்முகவுதைப்பு} = (44\pi + v)w \text{ இரு.}$$

$$\therefore\ 48(0{\cdot}45)\pi w + 11{\cdot}4vw = (44\pi + v)w.$$

$$\therefore\ 21{\cdot}6\pi + 11{\cdot}4v = 44\pi + v,$$

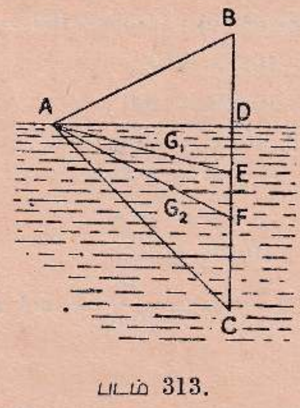
$$\therefore\ 10{\cdot}4v = 22{\cdot}4\pi,$$

$$\therefore\ v = \frac{22{\cdot}4\pi}{10{\cdot}4} = 6{\cdot}77 \text{ கன அங்குலம்.}$$

உதாரணம் (v).

ஒரு முக்கோணி ABC வடிவச் சீர் உலோகத் தாளானது ρ அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில், உச்சி A திரவப் பரப்பிலும் AB பரப்பிற்குமேலேயும் AC முற்றுக அமிழ்ந்தும் இருக்கும்படி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீன மாய் மிதக்கக்கூடியது. அவ்வுலோகத்தின் அடர்த்தி ρ கோசீ A சைன் B கோசை C என நிறுவுக.

இதே நிலையில் அத்தாள் $k\rho$ அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்குமாறு A, C என்னும் உச்சிகளில் இணைக்கப்படவேண்டிய நிறைகளைக் காண்க. இங்கு $k > 1$. (H.S.D.)



படம் 313.

தட்டானது பரப்பை AD (படம் 313) இற் சந்திக்கிறதென்க. E, F முறையே BC, DC இன் நடுப்புள்ளிகளென்க.

முக்கோணி ABC இன் புவியீர்ப்பு மையமானது AE இல் G_1 இலுள்ளது. எனவே $G_1E = \frac{1}{3}AE$. முக்கோணி ACD இன் புவியீர்ப்பு மையம் AF

இல் G_2 இலுள்ளது. எனவே $G_2F = \frac{1}{3}AF$. அம்முக்கோணியின் நிறை G_1 இலும் திரவத்தின் மேன்முகவுதைப்பு G_2 இலும் செயற்படுகின்றன. இவை சமநிலையிலிருப்பதனால் G_1G_2 நிலைக்குத்தாக இருக்க வேண்டும். அதோடு,

$$\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF}$$

என்பதனால், G_1G_2 இற்கு EF சமாந்தரமாகும்.

எனவே BC நிலைக்குத்தாக இருக்கவேண்டும்.

தட்டின் பகுதிகளின் கனவளவுகளும் நிறைகளும் அவற்றின் பரப்பளவுகளுக்கு விகிதசமம்.

அவ்வுலோகத்தின் அடர்த்தி s ஆயின், ABC இன் நிறையும் உதைப்பும் முறையே ABC இன் பரப்பளவு$\times s$, ADC இன் பரப்பளவு$\times \rho$ ஆகியவற்றிற்கு விகிதசமம்.

$$\therefore \frac{s}{\rho} = \frac{\triangle ADC}{\triangle ABC} = \frac{CD}{BC} = \frac{AC \text{ கோசை } C}{BC},$$

அதோடு
$$\frac{BC}{AC} = \frac{\text{சைன் } A}{\text{சைன் } B},$$

$$\therefore \frac{s}{\rho} = \text{கோசீ } A \text{ சைன் } B \text{ கோசீ } C.$$

பாரமான திரவத்தில் மேன்முகவுதைப்பு இன்னும் G_2 இற் செயற்படுகின்றது. ஆகவே கூட்டப்பெற்ற நிறைகளின் புவியீர்ப்பு மையமானது G_1 இனூடான நிலைக்குத்தில், அ-து. AC இல் A இலிருந்து மூன்றிலிரண்டு தூரத்தில் இருக்கவேண்டும்.

w_1, w_2 ஆகியன முறையே A, C இலுள்ள நிறைகளாயின்,

$$2w_1 = w_2.$$

அன்றியும்

$$w_1 + w_2 + (\triangle ABC)s = (\triangle ADC)k\rho.$$

ஆனால்
$$(\triangle ABC)\, s = (\triangle ADC)\, \rho,$$

$$\therefore w_1 + w_2 = (\triangle ADC)\,(k-1)\rho$$
$$= \tfrac{1}{2}\, AC^2 \text{ சைன் } C \text{ கோசை } C\,(k-1)\rho,$$
$$\therefore w_2 = \tfrac{1}{3}\, AC^2 \text{ சைன் } C \text{ கோசை } C\,(k-1)\rho,$$
$$\therefore w_1 = \tfrac{1}{6}\, AC^2 \text{ சைன் } C \text{ கோசை } C(k-1)\rho.$$

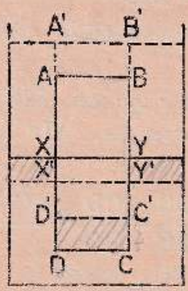
உதாரணம் (vi).

s அடர்த்தியும் h உயரமும் A குறுக்குவெட்டுமுள்ள ஓர் உருளை, B குறுக்குவெட்டுள்ள ஓர் உருளைவடிவப் பாத்திரத்தில் கொள்ளப்பெற்ற ρ_1 அடர்த்தி

யுள்ள திரவத்தில் மிதக்கின்றது. மிதக்கும் உருளையின் உச்சியை அடையும் வரைக்கும் அதனுள் ρ_2 ($<s$) தன்னீர்ப்புள்ள திரவம் ஊற்றப்படுகின்றது. மிதக்கும் உருளை அதன் தொடக்கத் தானத்திற்குமேல்

$$h\left(1-\frac{A}{B}\right)\frac{\rho_2\ (\rho_1-s)}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)}$$

என்னும் உயரத்திற்கு உயர்ந்திருக்குமென நிறுவுக. (திரவங்கள் கலக்க மாட்டா.) (Ex.)



படம் 314.

ABCD (படம் 314) தன் தொடக்கத் தானத்தில் மிதக்கும் உருளையின் ஒரு வெட்டுமுகத்தையும் XY ஆனது திரவம் ρ_1 இனது பரப்பின் தொடக்க மட்டத்தினையுங் குறிப்பதாகக் கொள்க.

இரண்டாம் திரவம் ஊற்றப்படுமிடத்து அவ்வுருளை முதலாம் திரவத்திலிருந்து வெளியே தானம் A'B'C'D' இற்கு ஒரு பகுதி உயருகின்றது. இப்போது முதலாம் திரவ மட்டம் X'Y' இற்குத் தாழும்.

இரு உருளைகளுக்கும் X, X' ஆகிய மட்டங்களுக்கும் இடையேயுள்ள வெளியைத் தொடக்கத்தில் கொண்டிருந்த திரவம் இப்போது மிதக்குமுருளை விட்டு நீங்கிய வெளி DCC'D' ஐ நிரப்பும்.

$$\therefore\ (B-A)XX' = A.DD' \qquad . \quad . \quad . \qquad \text{(i)}$$

சமநிலைக்கான தொடக்க நிபந்தனையிலிருந்து,

$$\frac{XD}{h} = \frac{s}{\rho_1} \text{ அல்லது } XD = h\frac{s}{\rho_1}. \qquad . \quad . \qquad \text{(ii)}$$

இரண்டாம் திரவம் ஊற்றியபின் சமநிலையின்பொருட்டு,

$$A'X'.\rho_2 + X'D'.\rho_1 = h.s,$$

$$\therefore\ (h-X'D')\rho_2 + X'D'\rho_1 = hs,$$

$$\therefore\ X'D' = h\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} \qquad . \quad . \qquad \text{(iii)}$$

(i) இலிருந்து,

$$\mathrm{A.DD'} = (\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{XD}-\mathrm{X'D'}-\mathrm{DD'}),$$

$$\therefore \mathrm{B.DD'} = (\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{XD}-\mathrm{X'D'}).$$

எனவே (ii) ஐயும் (iii) ஐயும் பயன்படுத்த,

$$\mathrm{DD'} = \left(1-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\left(h\frac{s}{\rho_1}-h\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\right).$$

$$\therefore \mathrm{DD'} = h\left(1-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\left(\frac{s\rho_1-s\rho_2-s\rho_1+\rho_1\rho_2}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)}\right)$$

$$= h\left(1-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)\frac{\rho_2(\rho_1-s)}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)}.$$

இங்கு DD′, அவ்வுருளை உயர்ந்துள்ள தூரம்.

உதாரணம் (vii).

நிறுதிட்டமாக மிதக்குமாறு ஒரு நுனியிற் பாரமேற்றப்பட்டுள்ள ஒரு சீர்க் கோல், s_1 த.ஈ. உள்ள ஒரு திரவத்தில் அதன் a நீளம் அமிழ்ந்திராத வாறும் s_2 த.ஈ. உள்ள ஒரு திரவத்தில் b நீளம் அமிழ்ந்திராதவாறும் மிதக்கின்றது. அக்கோல் s த.ஈ. உள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும்போது, அமிழ்ந்திராத நீளம்,

$$\frac{as_1(s-s_2)-bs_2(s-s_1)}{s(s_1-s_2)}$$

எனக் காட்டுக. (I.S.)

இணைத்த பாரத்தின் கனவளவை v எனவும் நீரின் தன்னிறையை w எனவும் கோலினதும் பாரத்தினதும் நிறையை W எனவும் கோலின் நீளத்தை l எனவும் அதன் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பை A எனவுங் கொள்க.

ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் திரவத்தின் மேன்முகவுதைப்பு W இற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே திரவம் s இல் அமிழாத நீளம் x ஆயின்,

$$vs_1w+(l-a)\mathrm{A}s_1w = \mathrm{W} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

$$vs_2w+(l-b)\mathrm{A}s_2w = \mathrm{W} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

$$vsw+(l-x)\mathrm{A}sw = \mathrm{W} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

(i) ஐ s_2 இனாலும் (ii) ஐ s_1 இனாலும் பெருக்கி, (ii) இலிருந்து (i) ஐக் கழிக்க,

$$a\mathrm{A}s_1s_2w-b\mathrm{A}s_1s_2w = \mathrm{W}(s_1-s_2) \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

(ii) ஐ s இனாலும் (iii) ஐ s_2 இனாலும் பெருக்கி, (ii) இலிருந்து

(iii) ஐக் கழிக்க,

$$x\mathrm{A}ss_2w - b\mathrm{A}ss_2w = \mathrm{W}\,(s - s_2) \quad . \quad . \quad (\mathrm{v})$$

(v) ஐ (iv) ஆற் பிரிக்க,

$$\frac{s\,(x-b)}{s_1(a-b)} = \frac{s\ - s_2}{s_1 - s_2},$$

$$\therefore\ sx(s_1 - s_2) = as_1(s - s_2) - bs_1(s - s_2) + bs(s_1 - s_2),$$

$$= as_1(s - s_2) - bs_2(s - s_1),$$

$$\therefore\ x = \frac{as_1(s - s_2) - bs_2(s - s_1)}{s(s_1 - s_2)}.$$

உதாரணம் (viii).

10 அடி உயரமும் 0·7 தன்னீர்ப்பும் 2 தொன் நிறையுமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துருளையைத் திறந்த நீரில் முற்றாக அமிழ்த்தத் தேவையான வேலையைக் காண்க. (H.S.C.)

அத்தொகுதியின் நிலைச் சக்தியில் ஏற்படும் மாற்றங்களை எடுத்து நோக்கி இவ்வகை உதாரணங்கள் நன்கு செய்யப்படுகின்றன.

அவ்வுருளை தாழ்த்தப்படுவதனால் நிலைச் சக்தி இழக்கப் படுகின்றது. அதே சமயத்தில் பரப்பிற்கு உயரும் அமிழ்ந்த உருளையினாலே தற்போது கொள்ளப்பெற்ற வெளியிலே தங்கியிருந்த நீரின் நிலைச் சக்தி கூடுகின்றது. இச்சக்தி அளவுகளிடையேயான வித்தியாசமானது உருளையை அமிழ்த்தத் தேவையான வேலையாகும்.

நீர் "திறந்து" இருப்பதனால் அதன் மட்டம் மாறாதுள்ளதென நாம் கருதலாம். அன்றியும், உருளையின் தன்னீர்ப்பு 0·7 என்பதனால் அது அதன் 7 அடி நீளம் அமிழ்ந்திருக்குமாறு மிதக்கும்.

ஆகவே அவ்வுருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் 3 அடி இறங்குகின்றது.

$\therefore$ நிலைச் சக்தி இழப்பு $= 4480 \times 3$ அடி இரு.

நீரில் மூழ்கிய உருளை நிரப்பும் மேலதிகமான வெளியைத் தொடக்கத்தில் நிரப்பிய நீரின் நிறையானது உருளையினது நிறையின் $\frac{3}{10}$ ஐ அதன் தன்னீர்ப்பினாற் பிரித்துப் பெறப்படுகின்றது. இந்நிறை $= \dfrac{448 \times 3}{0{\cdot}7}$ இரு. இந்நீரின் புவியீர்ப்பு மையமானது பரப்பிற்கு $8\frac{1}{2}$ அடி கீழேயுள்ள ஒரு மட்டத்திலிருந்து பரப்புமட்டத்திற்கு உயருகின்றது.

$$\therefore\ \text{நிலைச் சக்தி அதிகரிப்பு} = \frac{448 \times 3 \times 17}{1{\cdot}4}.$$

அவ்வுருளையை அமிழ்த்தத் தேவையான வேலை

$$= 448\left(\frac{51}{1{\cdot}4} - 30\right)$$

$$= \frac{448 \times 9}{1{\cdot}4}$$

$$= 2880 \text{ அடி இரு.}$$

உதாரணம் **(ix).**

2 அடிச் சதுர அடியுள்ள ஓர் உயரமான செவ்வகத் தாங்கியில் 4 அடி ஆழத்திற்கு நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது. 1 அடிச் சதுர அடியும் 2 அந்தர் நிறையும் 2 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு பாரமான பெட்டி, பாத்திரத்தின் அடியில் நிற்குமாறு நீரினுள்ளே தாழ்த்தப்படுகின்றது. அதனை நீரிற்கு வெளியே மட்டுமட்டாக உயர்த்தத் தேவையான மிகக் குறைவான அளவு வேலையைக் காண்க. (I.S.)

ABCD (படம் 315) அத்தாங்கியின் ஒரு வெட்டுமுகத்தைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. AB, நீர்ப் பரப்பின் தொடக்க மட்டம்.

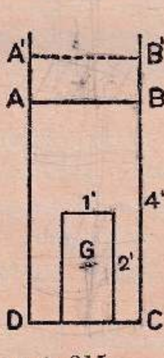
பெட்டியானது நீரிலே தாழ்த்தப்படுமிடத்து பரப்பு மட்டம் A′B′ இற்கு உயருகின்றது. இங்கு AB, A′B′ ஆகியவற்றினிடையேயான கனவளவானது பெட்டியின் கனவளவு, அ–து. 2 கன அடிக்குச் சமம்.

ஆகவே AA′, $\frac{2}{4}$ அல்லது $\frac{1}{2}$ அடி உயரமானது.

பெட்டியானது நீரிற்கு வெளியே உயர்த்தப்படுமிடத்து நீர்ப் பரப்பு அதன் தொடக்க மட்டத்திற்கு இறங்குகிறது. எனவே பெட்டியை 4 அடி மட்டுமே உயர்த்தவேண்டும்.

நிலைச் சக்தி அதிகரிப்பு $= 224 \times 4$ அடி இரு.

AB இற்கும் A′B′ இற்குமிடையேயுள்ள நீரின் புவியீர்ப்பு மையமானது, அடிமீது தங்கியிருக்குமிடத்துப் பெட்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் G இன் மட்டத்துக்கு, அ–து. $3\frac{1}{4}$ அடிக்கு இறங்குகின்றது.



படம் 315.

இந்நீரின் நிறை $= 2\times 62\cdot5 = 125$ இரு.

$\therefore$ நிலைச் சக்தி இழப்பு $= 125\times 3\frac{1}{4}$ அடி இரு.

பெட்டியை நீரிற்கு வெளியே தெளிவாக உயர்த்தத் தேவையான வேலை இவற்றினிடையேயான வித்தியாசமாகும்.

$$\therefore \text{ தேவைப்படும் வேலை} = 224\times 4 - \frac{125\times 13}{4} = 896 - 406\tfrac{1}{4}$$

$$= 489\tfrac{3}{4} \text{ அடி. இரு.}$$

பயிற்சி XLVII.

1. s அடர்த்தியுள்ள ஒரு சீர்ச் செவ்வகக் குற்றி, அதன் இரு முகங்கள் s_1, s_2 அடர்த்தியுள்ள இரு (கலவாத்) திரவங்களில் இடையாக இருக்கும்படி முற்றுக அமிழ்த்தப்பட்டு மிதக்கின்றது. இங்கு $s_1 < s < s_2$. இரு திரவங்களினதும் பொதுப் பரப்பானது குற்றியின் நிலைக்குத்து முகங்களை என்ன விகிதத்திற் பிரிக்கின்றது? (H.S.D.)

2. 10 அங்குல உயரமும் 10 அங்குல அடிவிட்டமுமுடைய ஒரு திண்மக் கூம்பு, நீரில் அதனுச்சி கீழ்முகமாகவும் அதனச்சின் 8 அங்குலம் அமிழ்ந்தும் இருக்குமாறு மிதக்கின்றது. அதனடியின் மையத்தில் வைக்கப்படும் எந் நிறை அதை முற்றுக நீரில் அமிழ்த்தும்? (1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.C.)

3. 6 அங்குல விட்டமும் 12 அங்குல நீளமுமுடையதும் தள முனைகளையுடையதுமான ஒரு செவ்வட்டவுருளை, அதனச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி நீரில் மிதக்கின்றது. இவ்வுருளையின் நிறை 6 இரு. ஆயின் (i) நீரிற்குமேல் இருக்கும் உருளையின் நீளம், (ii) உருளை மேலும் 1 அங்குலம் தாழ்ந்திருக்குமாறு பேணப் பிரயோகிக்கப்படும் விசை, ஆகிய வற்றைக் கணிக்க. (1 கன அடி நீர் 64 இரு. நிறையுள்ளதெனக் கணிக்கலாம்.) (H.S.D.)

4. 14 இரு. நிறையுள்ள ஒரு கனவடிவ மரக்குற்றி நீரில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் விளிம்புகள் ஒவ்வொன்றும் 8 அங்குலமாகும். அது எவ்வாழத்திற்கு அமிழ்ந்திருக்குமென்பதைக் கணிக்க. (1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.D.)

5. சரிவகம் ABCD ஒரு மரக்குற்றியைக் குறிக்கின்றது. AB ($= 16$ அங்குலம்), CD ($= 6$ அங்குலம்) ஆகியன சமாந்தரப் பக்கங்கள். இவற்றினிடையேயான செங்குத்துத் தூரம் 10 அங்குலம்; AD $=$ BC. தன்னீர்ப்பு $\frac{3}{5}$. இக்குற்றி, AB நீரில் அமிழ்ந்தும் கிடையாகவும் இருக்கும்படி மிதக்கின்றது. AB இன் ஆழம் ஏறக்குறைய $4\cdot86$ அங்குல மென நிறுவுக. (I.S.)

6. நீர்க்கோட்டின் அண்மையில் ஏறத்தாழ நிலைக்குத்தான பக்கங்களையுடைய ஒரு கப்பல், கடல் நீரில் 400 தொன் பாரமேற்றப்படுமிடத்து

13·8 அங்குல ஆழம் தாழுகின்றதெனக் காணப்பட்டுளது ; கடல் நீர் கண அடிக்கு 64 இரு. அடர்த்தியுள்ளதெனக் கொண்டு நீர்க்கோட்டுப் பரப்பளவைக் காண்க. கப்பலின் பெயர்ச்சி 4500 தொன். கடல் நீரிலிருந்து, கண அடிக்கு 62·5 இரு. அடர்த்தியுள்ள நன்னீருக்குச் செல்லுமிடத்து அது எவ்வளவு ஆழத்திற்குத் தாழுகிறதென்பதைக் காண்க. (I.S.)

7. ஒரு கப்பல் 1·025 தன்னீர்ப்புள்ள கடல் நீரிலிருந்து நன்னீருக்குச் சென்று $2\frac{1}{2}$ அங்குலம் தாழுகின்றது. 200 இரு. நிறையுள்ள ஒரு மனி தன் வெளியேறியதும் கப்பல் அதன் தொடக்க நீர்க்கோட்டிற்கு உயரு கின்றது. கப்பலின் நிறையைக் காண்க. (H.S.C.)

8. கடலிலிருந்து ஓர் ஆற்றிற்குச் செல்லும் ஒரு கப்பல் 4 அங்குலம் தாழுகின்றது. அதனிலுள்ள சரக்கின் 40 தொன் இறக்கப்பெற்றதும் கப்பல் 1 அங்குலம் உயருகின்றது. நன்னீர் சார்பாகக் கடல் நீரின் தன்னீர்ப்பு 1·025 எனவும் நீர்க்கோட்டிற்கு அண்மையில் கப்பலின் பக்கங்கள் நிலைக் குத்தானவை யெனவுங் கொண்டு கப்பலினதும் சரக்கினதும் மொத்த நிறையைக் காண்க. (H.S.D.)

9. 4 அங்குல விட்டமும் 3 அங்குல உயரமும் $\frac{3}{4}$ தன்னீர்ப்புமுள்ள ஓர் உருளைவடிவ மரக்குற்றி, நீர் கொண்டுள்ளதும் 6 அங்குல விட்டமுடையது மான ஓர் உருளையில் அதனடி கிடையாக இருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது; (அவ்வுருளைக்குற்றி மிதக்குமாறு பேணப் போதிய நீருள்ளது என எற்றுக்கொண்டு) நீர் மட்டம் எவ்வளவு உயரத்திற்கு உயருமென்பதை யும் குற்றியின் அமிழ்ந்த பகுதியின் நீளத்தையுங் கணிக்க. (I.S.)

10. 10 அங்குல உயரமும் 2 அங்குல ஆரை அடியுமுடைய ஒரு திண்ம மரக்கூம்பு, அதன் உயரத்தின் 6 அங்குலம் நீரில் அமிழ்ந்திருக்குமாறு அதனச்சை நிலைக்குத்தாகவும் உச்சியைக் கீழ்முகமாகவும் கொண்டு நீரில் மிதக்கின்றது. கூம்பினது உயரம் மேலும் 2 அங்குலம் தாழுமாறு கூம் பினது அடியின் மையத்திற் பிரயோகிக்க வேண்டிய நிலைக்குத்து விசையை அவுன்சு நிறையிற் காண்க. (1 கண அடி நீர் 1000 அவு. நிறை யுள்ளது.) (I.S.)

11. மிதக்கும் மரக்கலமொன்றின் பெயர்ச்சி W ஆகும். பெயர்க்கப்பெற்ற நீரின் புவியீர்ப்பு மையம் கலத்தின் புவியிர்ப்பு மையத்திற்குக்கீழ் h ஆழத் திலுள்ளது. அதன் தளத்தில் நீர்க்கோட்டிற்குக்கீழ் b ஆழத்தில் w நிறையுள்ள சரக்கு வைக்கப்பட்டுள்ளது. மரக்கலத்தின் நீரில் அமி ழும் அளவானது d இனால் அதிகரிக்கப்படுகின்றது. இப்பொழுது பெயர்க்கப் பெற்ற நீரின் புவியீர்ப்பு மையம் பாரமேற்றப்பட்ட கப்பலின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்குக்கீழ்

$$h-\frac{w}{W+w}\left(h+b+\frac{d}{2}\right)$$

ஆழத்திலுள்ளதெனக் காட்டுக. நீர்க்கோட்டிற்கு அண்மையில் கப்பலின் பக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவையெனக் கொள்ளப்பெற்றது. (I.S.)

19—R 13456 (10/63)

12. ஒரு செவ்வக அடர் ABCD, நீரில் AC நீர்ப் பரப்பிலும், D நீரிற்கு வெளியேயும் இருக்குமாறு கொண்டு, தவிர்க்கத்தக்க கனவளவுள்ள ஒரு நிறை B இல் இணைக்கப்பெற்று நிறுதிட்டமாக மிதக்கின்றது. அவ் வடரினது ஆக்கப்பொருளின் தன்னீர்ப்பை நிர்ணயிக்க. (H.S.D.)

13. ஒரு மெல்லிய பொள்ளுருளை, நீரில் h ஆழத்தில் அமிழ்ந்திருக்குமாறு நிலைக்குத்தாக மிதக்கின்றது. இதனுள் ஒரு திரவத்தை h_1 ஆழத்திற்கு ஊற்றுமிடத்து இவ்வாழம் h' இனால் அதிகரிக்கின்றது. வெறும் உருளை திரவத்தில் மிதக்கும்போது அமிழ்ந்துள்ள ஆழம் $\frac{hh_1}{h'}$ எனக் காட்டுக. (I.S.)

14. ஒரு சீர்க் கோல் திரவத்தில் நிறுதிட்டமாக மிதக்குமாறு அதனொரு நுனியுடன் ஒரு நிறை இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. நீரில் மிதக்குமிடத்து அக்கோலின் 3 அங்குலமும் 0·9 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும் போது அதன் 3·5 அங்குலமும் தாழ்ந்துள்ளனவாயின், அது 1·2 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்குமிடத்து அதன் எந்நீளம் அமிழ்ந்திருக்கும் ? (I.S.)

15. ஓர் உருளைவடிவக் கோலின் மேற்பாதியின் தன்னீர்ப்பு $\frac{3}{8}$ ஆகும். இக்கோல் நீரில் நிறுதிட்டமாக மிதக்கக் கூடியதாயின் கீழ்ப்பாதியின் தன்னீர்ப்பு $\frac{5}{8}$ இற்கும் $\frac{13}{8}$ இற்குமிடையே இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக. முழு நீளத்தினதும் மிக்க அதிகமான எப்பின்னம் நீரிற்கு மேலாக இருக்கும் ? (I.S.)

16. நேரான நீண்ட கழுத்தையுடைய ஒரு போத்தல், நீரில் அதன் கழுத்தினொரு பகுதி மட்டுமே வெளிப்படுமாறு நிறுதிட்டமாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் மிதக்கின்றது. பின்பு அது 1·12 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு கரைசலில் வைக்கப்படுகின்றது. அப்பொழுது கழுத்தின் மேலும் 3 அங்குலம் திரவப் பரப்பிற்கு மேலுள்ளது. (வட்டமான குறுக்குவெட்டுள்ளதாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்) கழுத்தின் விட்டம் 1 அங்குலமாயின், 1 கன அடி நீர்=1000 அவு. எனக்கொண்டு, போத்தலின் நிறையைக் காண்க. (I.S.)

17. பொட் கோள ஓடுவடிவ மிதவையொன்று 3 அடி வெளி விட்டமும் சீர்த் தடிப்புமுள்ளது. இது இதன் கனவளவின் பாதி அமிழ்ந்திருக்கும்படி நீரில் மிதக்கின்றது. அவ்வோடு 8 தன்னீர்ப்புள்ள பொருளினால் ஆக்கப்பட்டிருப்பின் அதன் தடிப்பைக் காண்க. (I.S.)

18. சீர்க் குறுக்குவெட்டும் l அங்குல நீளமுமுடைய ஒரு நேர் மரக்கோல், திரவங்களில் நிறுதிட்டமாக மிதக்குமாறு அதன் ஒரு நுனியில் σ_1 தன்னீர்ப்புள்ள ஓர் உலோகத் துண்டு இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. நீரில் வைக்கப்படுமிடத்து கோலின் a அங்குல நீளமும் σ_2 தன்னீர்ப்புள்ள திரவமொன்றில் வைக்கப்படுமிடத்து அதன் b அங்குலமும் அமிழ்ந்திருக்கும். கோலினது ஆக்கப்பொருளின் தன்னீர்ப்பு,

$$\frac{b\sigma_2(\sigma_1-1)-a(\sigma_1-\sigma_2)}{l(\sigma_2-1)}$$

எனக் காட்டுக. (I. S.)

19. 10 அங்குல அடிவிட்டமும் 13 அங்குல நீளச் சாய்பக்கமுமுடைய ஒரு செவ் வட்டத் திண்மக் கூம்பு, அதன் சாய்பக்கத்தின் முக்காற் பகுதி நீரில் அமிழ்ந்திருக்குமாறு அதனச்சை நிலைக்குத்தாகவும் அதன் உச்சியைக் கீழ்முகமாகவும் கொண்டு மிதக்கின்றது. கூம்பின் நிறையைக் கணிக்க. கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. கூம்பை மட்டுமட்டாக முற்றுக அமிழ்த்தக் கூம்பின் உயர் பரப்பிற்குப் பிரயோகிக்கவேண்டிய நிலைக்குத்து விசையைக் காண்க. (H.S.D.)

20. முழுமையாக நீரில் அமிழ்ந்து மிதக்குமாறுள்ள பருமன் கொண்டதாக 7·8 தன்னீர்ப்பும் $\frac{1}{4}$ அங்குலத் தடிப்புமுள்ள இரும்பினுலாய பொட் கோளமொன்று அமைக்கப்படவேண்டியிருக்கின்றது. அதன் வெளிவிட்டத்தை நிர்ணயிக்க. (H.S.C.)

21. 6 அடி விட்டமுள்ளதோர் அரைக்கோள இரும்போட்டில் 3·6 அடி சாயுயரமுள்ள ஒரு செவ்வட்டக் கூம்பை ஏற்றிய வடிவுள்ளது ஒரு மிதவை; இந்த இரும்பு 1 அங்குலத் தடிப்பும் 7·5 தன்னீர்ப்புமுள்ளது. இம்மிதவை அதன் அரைக்கோளப் பகுதி கிட்டத்தட்ட நீரில் அமிழ்ந்திருக்குமாறு மிதக்குமென நிறுவுக. (H.S.D.)

22. ஒரு கடற்பஞ்சு, நீரில் முற்றுக நனையுமிடத்து உறைந்த திண்மமாக அமைந்து நீரில் 55 கன அங்குலத்தைப் பெயர்த்து முற்றுக அமிழ்ந்து மட்டுமட்டாக மிதக்கின்றது. பனிக்கட்டியை உருக்குமிடத்துப் பஞ்சை நீரிலே தாங்க அதற்கு 2 அவு. நிறை விசையொன்று தேவைப்படுகின்றது. கடற்பஞ்சை அமைக்கும் பொருளின் கனவளவையும் தன்னீர்ப்பையுங் காண்க. பனிக்கட்டியின் தன்னீர்ப்பு $= 0·918$. 1 கன அடி நீர் 62·5 இரு. நிறையுள்ளது. (H.S.)

23. நிலைக்குத்தான பக்கங்களையும் கிடைக் குறுக்குவெட்டு A ஐயும் உடைய ஒரு பாத்திரத்தில் நீருள்ளது. இந்நீரில், கிடைக் குறுக்குவெட்டு B உம் உயரம் h உம் தன்னீர்ப்பு s உம் உள்ள ஒரு சீர் வட்டவுருளை அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி மிதக்கின்றது. நீருடன் கலவாத $s'(<s)$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவம், உருளையின் உச்சி அதனுல் மட்டுமட்டாக மூடப்படுமாறு நீரினுள் ஊற்றப்படுகின்றது. அத்திரவத்தின் மேற்படையின் ஆழம்,

$$\frac{h(1-s)}{1-s'}$$

என நிறுவி உருளை எத்தூரத்தினூடாக உயருகிறது என்பதைக் காண்க.

24. 6 அங்குல ஆரையுள்ள ஓர் உருளைவடிவப் பாத்திரத்தில் 18 அங்குல உயரத்திற்கு நீருள்ளது. அடிமீதுள்ள அமுக்கத்தையும் வளை

பரப்புமீதுள்ள மொத்த அமுக்கத்தையும் காண்க. நீர்ப் பரப்பில் 0·6 தன்னீர்ப்பும் 1 இரு. நிறையுமுள்ள ஒரு பொருள் மிதக்கும்போது இவ்வமுக்கங்கள் எவ்வளவினால் அதிகரிக்கப்படும் ? (H.S.C.)

25. 5 அடி உயரமும் 4 அடி அடிவிட்டமுமுடைய ஓர் ஏகவினத் திண்மக் கூம்பு, 6 அடி குறுக்குவெட்டு விட்டமுள்ள ஓர் உருளைவடிவப் பாத்திரம் கொண்டுள்ள நீரில் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உச்சி கீழ்முகமாகவும் இருக்கும்படி மிதக்கின்றது. கூம்பின் தன்னீர்ப்பு $\frac{8}{9}$ ஆயின், நீரில் கூம்பை வைக்குமிடத்து நீர்ப் பரப்பு எவ்வளவு தூரம் உயருகிறதென் பதையும் கூம்பினது அச்சின் எவ்வளவு பகுதி நீரில் அமிழ்ந்திருக்கிற தென்பதையும் காண்க.

26. ஒரு கூம்பு 4 அங்குல ஆழத்திற்கு நீரில் அமிழ்ந்து உச்சி கீழ்முக மாக இருக்குமாறு மிதக்கின்றது ; ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும்போது அது 4·3 அங்குல ஆழத்திற்கு அமிழ்ந்திருக்கின்றது. இத்திரவத்தின் தன் னீர்ப்பை நிர்ணயிக்க.

27. முனையொன்றிலே திறந்திருக்கும் ஒரு பொள் வட்ட உருளையின் வெளி, உள் ஆரைகள் முறையே r_1, r_2 ஆகும். அதன் அடியின் தடிப்பு d ஆகும். அது அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு நீரில் மிதக்கும் போது H என்னும் உயரம் அமிழ்ந்திருக்கும். ஒரு துவாரத்தி னூடாக நீர் உட்செல்லின், உட்புறத்தில் h ஆழத்திற்கு நீர் இருக்குமிடத்து உருளையின் எவ்வுயரம் நீரில் அமிழ்ந்திருக்கும் ? அவ்வுருளையின் மொத்த நீளம்,

$$\frac{(r_1{}^2\mathrm{H} - r_2{}^2 d)}{r_1{}^2 - r_2{}^2}$$

இலும் அதிகமாயின் இறுதியாக உருளை மிதந்துகொண்டே இருக்குமெனக் காட்டுக. (I.E.)

28. 25 சமீ. விட்டமும் 10 சமீ. உயரமுமுள்ள ஓர் இரும்பு உருளை 30 சமீ. விட்டமுள்ள ஓர் உருளைச் சாடியில் நிற்கின்றது. இப்பொழுது உருளை மட்டுமட்டாக மிதக்கத் தொடங்கும் வரை இரசம் சாடியில் ஊற்றப்படு கின்றது. இரசத்தின் ஆழத்தைக் கணிக்க. உருளையின் உயர் முகமானது எண்ணெயின் பரப்புடன் மட்டுமட்டாக ஒரே மட்டத்திலிருக்கும்வரை இர சத்திற்குமேல் எண்ணெய் இப்பொழுது ஊற்றப்படுகின்றது. தேவையான எண்ணெய்க் கனவளவையும் சாடியின் அடிக்குமேல் உருளையினது அடி யின் உயரத்தையுங் காண்க. (இரும்பு, இரசம், எண்ணெய் ஆகியவற் றின் தன்னீர்ப்புக்கள் முறையே 7·9, 13·6, 0·9 என எடுக்க.) (I.E.)

29. ஒரு மனிதன் தனது உடம்பின் ஒருபகுதியானது கடல் நீரில் அமிழ்ந் திருக்குமாறே மிதக்கமுடியும். நன்னீரில் உடம்பின் அதேயளவு அமிழ்ந் திருக்குமாறு அவனை மிதக்கச் செய்ய 4 இரு. நிறை மேன்முக விசை யொன்று தேவைப்படுகின்றது. 1 கன அடி கடல் நீர் 64 இரு. நிறையும்

1 கண அடி நன்னீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுமுடையனவென ஏற்றுக்கொண்டு மனிதனின் நிறையைக் காண்க. அந்த 4 இரு. நிறைத் தாங்கு விசையை அகற்றுமிடத்து அம்மனிதன் இப்பொழுதும் மிதப்பின், கூடுதலான எக்கனவளவு அமிழ்ந்திருக்கும்? (N.U.3)

30. ஒரு கப்பலினதும் அதன் சரக்கினதும் நிறை W ஆகும். பெயர்க்கப் பெற்ற நீரின் புவியீர்ப்பு மையம் நீர்க் கோட்டிற்குக்கீழ் h அடியிலுள்ளது. சரக்கின் w நிறை அகற்றப்படுகின்றது. கப்பல் நீரிலே தாழும் ஆழம் d அடியினுற் குறைவதாகக் காணப்படுகிறது. இப்போழுது பெயர்ந்த நீரின் புவியீர்ப்பு மையம் புதிய நீர்க் கோட்டிற்குக்கீழ் h' அடியிலிருப்பின்,

$$\frac{w}{W}=\frac{d+h'-h}{h'+\frac{1}{2}d}$$

எனக் காட்டுக. நீர்க் கோட்டிற்கண்மையில் கப்பலின் பக்கங்கள் நிலைக்குத் தானவையென ஏற்றுக்கொள்ளப்பெற்றது. (C.W.B.)

31. 4 அடி நீளமும் 2 அடி அகலமுமுள்ள ஒரு செவ்வகப் பெட்டி, அதன் அடி கிடையாக இருக்குமாறு நீரில் மிதக்கின்றது. இப்பெட்டியினதும் அது கொண்டுள்ளவற்றினதும் மொத்த நிறை 45 இரு. பக்கங்களின் மீதுள்ள அமுக்கங்களைக் காண்க. (1 கன அடி நீர் 62·5 இரு. நிறையுள்ளது.) பெட்டியில் ஏற்றவாறு வைக்கப்படும் 5 இரு. மேலதிக நிறையொன்று பெட்டியின் அடியின் ஒரு நீண்ட விளிம்பானது பரப்பிலிருக்குமாறு அதனை மிதக்கச் செய்கின்றது. அடியின்மீதுள்ள மொத்தப் பாயி அமுக்கம் ஏறத்தாழ 49·8 இரு. நிறை எனக் காட்டுக. (C.W.B.)

32. ஒரு பொது நீரமானி, s தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும்போது அதன் தண்டின் a சமீ. உம் s' தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும்போது நீளம் b உம் திரவத்திற்குமேல் இருப்பின், முன்னைய திரவங்களின் சம நிறைகளைக் கலந்து பெறப்படும் ஒரு திரவத்தில் அது மிதக்கும்போது பரப்பிற்குமேல் தண்டின் நீளத்தைக் காண்க. (EX.)

33. ஒரு பொது நீரமானியின் தண்டு, மேலிருந்து கீழ்முகமாக 100 சம பகுதிகளாக அளவுகோடிடப்பட்டுள்ளது. இவ்வளவுத்திட்டத்தின் பூச்சியம் எல்லாவற்றிலும் மேலாகவுள்ளது; முழுக் கருவியினதும் கனவளவு அளவு கோடிடப்பெற்ற தண்டினது கனவளவின் மும்மடங்காகும். இந்நீரமானி நீரில் புள்ளி 20 இற்குத் தாழுகின்றது. இது முறையே 0 இற்கும் 60 இற்கும் தாழும் திரவங்களின் தன்னீர்ப்புக்களைக் காண்க. இந்நீரமானி 0·85 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் வைக்கப்படும் போது என்ன செய்யும்? (H.S.D.)

34. ஒரு பொருள் ஒரு திரவத்தில் அரைகுறையாக அமிழ்ந்து மிதக்கின்றது. வளியின் அடர்த்தி ρ_1, ρ_2, ρ_3 ஆக இருக்கும் வேளைகளில்

இப்பொருள் அவதானிக்கப்படுகின்றது. இவ்வேளைகளில் அப்பொருள் திரவப் பரப்பிற்குமேல் முறையே V_1, V_2, V_3 என்னும் கனவளவுகளைக் கொண்டுள்ளது.

$$\frac{\rho_2-\rho_3}{V_1}+\frac{\rho_3-\rho_1}{V_2}+\frac{\rho_1-\rho_2}{V_3}=0$$

என நிறுவுக. (Ex.)

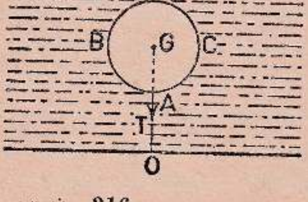
§234. அதன் தன்னடர்த்தியிலும் கூடுதலான அடர்த்தியுள்ள ஒரு பாரமான திரவத்தில் முழுமையாக அமிழ்த்தப்பெறும் ஒரு பொருளின் சமநிலை.

இவ்விடத்து அப்பொருளில் உள்ள திரவத்தின் மேன்முக நிலைக் குத்துதைப்பு பொருளின் நிறையிலும் அதிகமாக இருப்பதனால் அதை அமிழ்த்தியவாறு பேண, கீழ்முக விசையொன்று அதற்குப் பிரயோகிக்கப்பட வேண்டும் என்பது தெளிவாகின்றது.

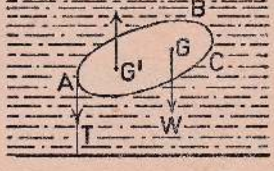
அப்பொருளின் நிறையும் அதன்மீது திரவத்தின் விளையுளுதைப்பும் நிலைக்குத்து விசைகளாகையால் சமநிலையைப் பேணப் பிரயோகிக்கப்படும் கீழ்முக விசை நிலைக்குத்தாக இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.

ABC (படம் 316) என்பது ஒன்றிலுங் குறைவான தன்னீர்ப்புள்ளதும் அடியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஓர் இழை OA இனால் நீரினுள் பேணப் படுவதுமானதொரு பொருள் என்க.

அப்பொருள் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G, அதே வெளியை நிரப்பும் நீரினது புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒன்றுபடும்படி வகைவினமாக இருப்பின், பொருளின் நிறையும் நீரினது விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பும் ஒரே புள்ளி G இனூடாய்ச் செல்கின்றன. அதோடு இழையின் கோடும் G இனூடாய்ச் செல்ல வேண்டும். இவ்விடத்தில் படம் 316A இற் காட்டப் பெற்றவாறு ஒரு சமநிலைத் தானமே இருக்கும்.



படம் 316A.



படம் 316B.

எனினும் புவியீர்ப்பு மையம் G அதே வெளியை நிரப்பும் நீரின் புவியீர்ப்பு மையம் G′ உடன் ஒன்றுபடாவிடின், இன்னொரு சமநிலைத் தானம் இருக்கக்கூடும். இதில் படம் 316B இற்போல GG′ ஆனது நிலைக்

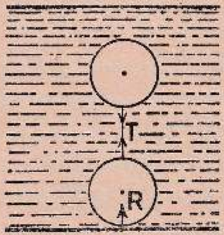
குத்துடன் சாய்ந்திருக்கக்கூடும். இழை OA, அதன் இழுவை T உம் நிறை W உம் G′ இனூடான மேன்முகவுதைப்பை மட்டுமட்டாகச் சமன் செய்வதோடு இன்னும் நிலைக்குத்தாகவே இருக்கின்றது.

OG′G ஐ நிலைக்குத்தாகக் கொண்டுள்ள தானமும் ஒரு சமநிலைத் தானமாகும். இதுவே வழக்கமாக எடுத்துநோக்கப்படுகின்றது.

இச்சந்தர்ப்பமெதிலும் நீரின் மேன்முகவுதைப்பினதும் பொருளின் நிறையினதும் வித்தியாசம் T ஆகும்.

உதாரணம்.

1 அடி விட்டமும் தன்னீர்ப்பு $1\frac{1}{2}$ உம் உள்ள ஒரு கோளம் நீர் நிரப்பப்பெற்றுள்ள ஒரு தாங்கியின் அடியிலே தங்கியிருக்கிறது. இக்கோளம் 1 அடி விட்டமும் தன்னீர்ப்பு $\frac{2}{3}$ உமுள்ள ஒரு கோளத்துடன் ஓர் இலேசான இழையினால் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இக்கோளம் முதற் கோளத்துக்குமேல் மிதக்கின்றது. இது முழுமையாக அமிழ்ந்துமுள்ளது. இழையிலுள்ள இழுவை ஏறக்குறைய 10·9 இரு. எனவும் கீழுள்ள கோளமீது தாங்கியினது அடியின் மறுதாக்கம் இதன் பாதியெனவும் நிறுவுக. (1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (H.S.D.)



படம் 317.

கோளம் ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவு

$$=\frac{4}{3}\pi\frac{1}{8}$$

$$=\frac{\pi}{6} \text{ கன அடி.}$$

மேற்கோளத்தின் நிறை $$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\frac{125}{2} \text{ இரு.}$$

அதன்மீது நீரின் மேன்முகவுதைப்பு

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2} \text{ இரு.}$$

எனவே, T என்பது இழையிலுள்ள இழுவையாயின்,

$$T = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2},$$

$$= \frac{\pi}{18}\cdot\frac{125}{2} = \frac{11\times125}{18\times7} = 10{\cdot}9 \text{ இரு. நிறை.}$$

கீழுள்ள கோளத்தின் நிறை

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2} \text{ இரு.}$$

அதன் மீது நீரின் மேன்முகவுதைப்பு

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2} \text{ இரு. நிறை.}$$

R தாங்கியின் அடியின் மறுதாக்கமாயின்,

$$R + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2} + T = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2}.$$

$$\therefore R + T = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\frac{125}{2} = \frac{3}{2}T \text{ (மேலிருந்து).}$$

$$\therefore R = \tfrac{1}{2}T.$$

பயிற்சி XLVIII.

1. 12 அங்குல நீளமும் 8 அங்குலக் குறுக்குவெட்டு ஆரையுமுடைய ஒரு செவ் வட்டவுருளைவடிவ மரத்துண்டு, நீரில் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் அதன் நீளத்தின் 3 அங்குலம் நீரிற்கு மேலாகவும் இருக்குமாறு மிதக்கின்றது. மரத்தினது அடர்த்தியைக் கணிக்க. இப்பொழுது ஓர் இழை, உருளையின் கீழ்வெட்டுமுகத்தின் மையத்தையும் நீர் கொண்டுள்ள பாத்திரத்தின் அடியையும் இணைக்கின்றது. இவ்விழை, உருளை மட்டுமட்டாக அமிழ்ந்திருக்கும் வரை குறுக்கப்படுகின்றது. இழையிலுள்ள இழுவையைக் கணிக்க. (1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (I.E.)

2. ஒவ்வொன்றும் 4 அங்குல ஆரையுள்ள இரு சீர்த் திண்மக் கோளங்கள் ஓர் இலேசான இழையினால் இணைக்கப்பெற்று ஒரு நீர்த் தாங்கியில் முற்றுக அமிழ்த்தப்படுகின்றன. இக்கோளங்களின் தன்னீர்ப்புக்கள் 0·4 உம் 1·8 உம் ஆயின், இழையின் இழுவையையும் தாங்கியின் அடிக்கும் பாரமான கோளத்திற்கும் இடையேயுள்ள அமுக்கத்தையும் காண்க. ($\pi = 3{\cdot}1416$. 1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.) (I.S.)

3. ஒரு செவ் வட்டக் கூம்புவடிவ மிதவையின் உச்சி ஒரு சங்கிலியினால் கடலடியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இம்மிதவை வற்றின்போது சங்கிலி தொய்வாயிருக்க மிதக்கின்றது. கூம்பின் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் அதன் $\frac{2}{3}$ அமிழ்ந்துமுள்ளன. அடி விட்டம் 9 அடியும், உயரம் 12 அடியுமாயின், 1 கன அடி நீர் 64 இரு. நிறையுள்ளதெனவும் சங்கிலி

நிறை தவிர்க்கத்தக்கதெனவும் ஏற்றுக்கொண்டு, மிதவையின் நிறையைக் கணிக்க. மிதவை முற்றாக அமிழ்ந்திருக்குமிடத்து பெருக்கின்போது சங்கிலி மீதுள்ள இழுப்பையும் கணிக்க. (I.E.)

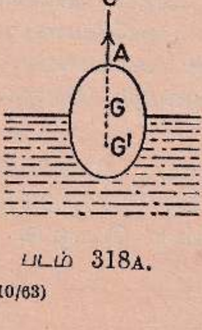
4. $\frac{1}{8}$ அங்குலத் தடிப்புள்ள தாள் இரும்பினாலாய ஒரு கோளவடிவ மிதவையின் பாதியானது நீரில் அமிழ்ந்துள்ளது. இதன் வெளி ஆரை 18 அங்குலம். 1 கன அடி நீர் 62·3 இரு. நிறையும் 1 கன அடி இரும்பு 450 இரு. நிறையுமுள்ளதெனக் கொண்டு, மிதவையைக் கீழ்முகமாகத் தாங்கும் சங்கிலியிலுள்ள இழுவையைக் காண்க. (I.S.)

5. மூடிய முனைகளுள்ள ஒரு செவ் வட்டவுருளை வடிவுள்ள ஒரு பொட் பாத்திரத்தின் வெளியளவுகள் 8 அடி விட்டமும் 20 அடி நீளமுமாகும். இப்பாத்திரம் தன்னீர்ப்பு 8 உம் $\frac{1}{2}$ அங்குலச் சீர்த் தடிப்புமுள்ள இரும்பினாலாயது. இது நீரில் முற்றாக அமிழ்த்தப்பெற்று ஒரு சங்கிலியினால் அடியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. பாத்திரம் வெறிதாக இருக்கும்போது சங்கிலியிலுள்ள இழுவையைத் தொன் நிறையிற் கணிக்க. (1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளது.)

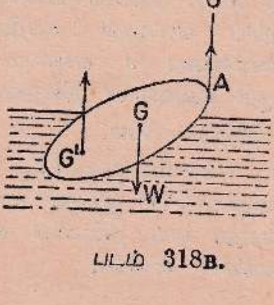
6. ஒரு செவ்வகப் பலகை ABCD, நீரில் மூலைவிட்டம் AC நீர்ப் பரப்பிலிருக்குமாறு மிதக்கின்றது. ஆகத் தாழ்ந்த மூலை B ஓர் இழையினால் அடியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. இச்செவ்வகம் ஒரு சதுரமாக இருந்தாலொழிய, பலகையின் தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{3}$ ஆக இருப்பின் மட்டுமே இத்தானம் சாத்தியமாகுமெனா நிறுவுக. (C.W.B.)

235. ஒரு பொருளின் யாதுமொரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஓர் இழையினால் அரைகுறையாகத் தாங்கப்பெற்றுத் திரவமொன்றில் மிதக்கும் அப்பொருளின் சமநிலை.

அப்பொருளின் நிறையும் அதன்மீது திரவத்தின் விளையுளுதைப்பும் நிலைக்குத்து விசைகளாகும். ஆகவே, சமநிலையின் பொருட்டு இழையின் இழுவையும் ஒரு நிலைக்குத்து விசையாக, அ—து. இழை நிலைக்குத்தாக, இருக்க வேண்டும். இதன் காரணமாகத் தோன்றும் இரு வகைகளும் படம் 318 A இலும் B இலும் விளக்கப்பெற்றுள்ளன.



படம் 318A.



படம் 318B.

20—R 13456 (10/63)

முதல் வகை மிகவும் முக்கியமானதன்று. இதில் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G இழையின் கோட்டிலுள்ளது. அதோடு அக்கனவளவின் அமிழ்ந்த பகுதியை நிரப்பும் நீரின் புவியீர்ப்பு மையமும் இக்கோட்டில் இருக்க வேண்டும்.

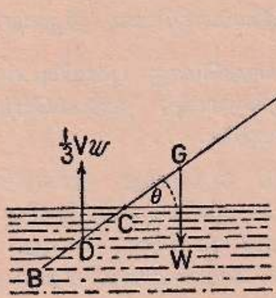
இழையிலுள்ள இழுவை அப்பொருளின் நிறைக்கும் திரவத்தின் மேன்முகவுதைப்புக்கும் இடையேயான வித்தியாசமாகும். அது பூச்சியமாக வும் இருக்கலாம்.

இரண்டாம் வகையில் இழையின் இழுவை மீண்டும் பொருளின் நிறைக்கும் திரவத்தின் மேன்முகவுதைப்புக்கும் இடையேயுள்ள வித்தி யாசமாகும். எனினும், சாய் நிலையில் சமநிலைக்கான மேலுமொரு நிபந் தனையைக் காணவேண்டும். இழையின் இணைப்புப் புள்ளி A பற்றி நிறையினதும் மேன்முகவுதைப்பினதும் திருப்புதிறன்கள் சமமாகவும் முரணாகவும் இருக்க வேண்டியமையே இந்நிபந்தனையாகும்.

பின்வரும் உதாரணங்களில் இது விளக்கப்படுகின்றது :—

உதாரணம் (1).

ஒரு சீர்க் கோல் நிலைக்குத்துடன் சாய்ந்திருக்கின்றது. இதன் நீளத்தின் $\frac{1}{3}$ பகுதி நீரிலுள்ளது. இதன் மேன்முனை ஓர் இழையினாலே தாங்கப் படுகின்றது. இக்கோலின் தன்னீர்ப்பு $\frac{5}{9}$ என நிறுவுக.



படம் 319.

AB (படம் 319), அக்கோலெனவும், G அதன் நடுப்புள்ளியெனவும், C அது நீர்ப் பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளியெனவும் கொள்க. அதன் தன்னீர்ப்பை s எனவும் அதன் கனவளவை V எனவும் நீரின் ஓரலகுக் கனவளவு நிறையை w எனவும் கொள்க.

கோலின் நிறை $= Vsw$.

அமிழ்ந்த கனவளவு $= \frac{1}{3}V$. எனவே கோலின்மீது நீரின் மேன்முகவுதைப்பு $\frac{1}{3}Vw$ இற்குச் சமமாய் BC இன் நடுப்புள்ளி D இற் செயற்படுகின்றது. சாய் நிலையில் சமநிலையின் பொருட்டு, A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Vsw.\mathrm{AG}\ \text{கோசை}\ \theta = \tfrac{1}{3}Vw.\mathrm{AD}\ \text{கோசை}\ \theta,$$

ஆனல் $\mathrm{AG} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$. அதோடு $\mathrm{AD} = (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})\mathrm{AB} = \frac{5}{6}\mathrm{AB}$.

$$\therefore \mathrm{V}\frac{\mathrm{AB}}{2}s = \frac{1}{3}\mathrm{V}.\frac{5\mathrm{AB}}{6}.$$

$$\therefore s = \frac{5}{9}.$$

உதாரணம் (ii).

A இனூடான ஒரு கிடை அச்சினைப்பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுயாதீனமாய் இயங்குமோர் ஏகவினச் செவ்வக அடர் ABCD ஆனது நீரில், மூலைவிட்டம் BD நீர்ப் பரப்பிலும் A அதற்கு மேலாகவுமிருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பெற்றுள்ளது. அவ்வடரின் தன்னீர்ப்பு $\frac{2}{3}$ என நிறுவுக. (H.S.D.)

மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியை G (படம் 320) எனவும் செவ்வகத்தின் கனவளவை V எனவும் அதன் தன்னீர்ப்பை s எனவும் நீரின் ஓரலகுக் கனவளவின் நிறையை w எனவும் கொள்க.

அடரின்மீது செயற்படும் விசைகள் பின்வருவனவாம் :—

(i) G இனூடாய் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் நிறை Vsw;

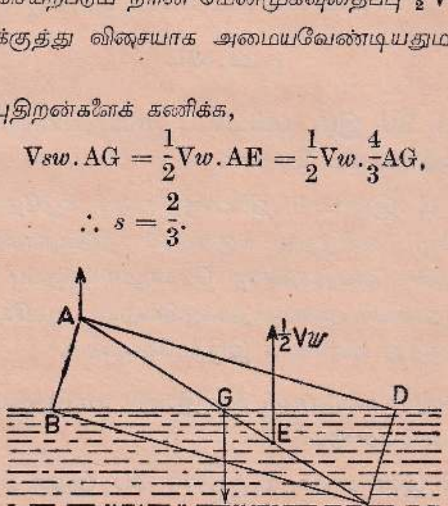
(ii) முக்கோணி BCD இன் புவியீர்ப்பு மையம் E இனூடாய் மேனோக்கி நிலைக்குத்தாகச் செயற்படும் நீரின் மேன்முகவுதைப்பு $\frac{1}{2}Vw$, $(\mathrm{GE} = \frac{1}{3}\mathrm{GC})$;

(iii) ஒரு நிலைக்குத்து விசையாக அமையவேண்டியதுமான A இலுள்ள மறுதாக்கம்.

A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$Vsw.\mathrm{AG} = \frac{1}{2}Vw.\mathrm{AE} = \frac{1}{2}Vw.\frac{4}{3}\mathrm{AG},$$

$$\therefore s = \frac{2}{3}.$$



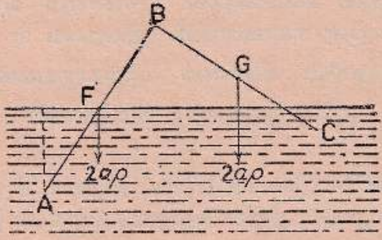
படம் 320.

உதாரணம் (iii).

ஒவ்வொன்றும் $2a$ நீளமும் அடர்த்தி ρ உம் உடைய AB, BC என்னும் இரு சமமான சீர்க் கோல்கள் B இல் சுயாதீனமாய்ப் பொருத்தப்பெற்றுள்ளன. இவை அடர்த்தி σ உள்ள ஒரு சீர்த் திரவத்தின் பரப்பிற்குக் கீழ் ஒரு குறித்த ஆழத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள A பற்றிச் சுயாதீனமாய் இயங்கக் கூடியவை. இரு கோல்களும் அரைகுறையாக அமிழ்த்தப் பெற்றுச் சமநிலையிலிருப்பின், பரப்பிற்குக்கீழ் BC இன் நீளம்

$$2a\left[1-\sqrt{1-\frac{\rho}{\sigma}}\right]$$

எனவும், $\frac{\rho}{\sigma}<\frac{5}{9}$ ஆயின்; சமநிலைத் தானம் சாத்தியமெனவும் காட்டுக.



படம் 321.

G, (படம் 321) BC இன் புவியீர்ப்பு மையமெனவும், x, பரப்பிற்குக் கீழ் BC இன் நீளமெனவும் கொள்க.

BC இன்மீது, G இனூடாய் நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயற்படும் அதன் நிறை $2a\rho$, அமிழ்ந்த பகுதியின் நடுப்புள்ளியினூடாய் நிலைக்குத்தாக மேனோக்கிச் செயற்படுகின்ற மேன்முகவுதைப்பு $x\sigma$, B இலுள்ள பிணையலின் மறுதாக்கம், என்பன தாக்குகின்றன. ஆகவே, இம்மறுதாக்கம் மேன்முக நிலைக்குத்து விசையாக இருக்கவேண்டும்.

[குறிப்பு.—நிறையும் உதைப்பும் $2a\rho$ இற்கும் $x\sigma$ இற்கும் விகிதசமனுகவே கண்டிப்பாக இருக்கவேண்டும்.]

கிடையுடன் BC இன் சாய்வு α ஆயின், BC இற்கு B பற்றித் திருப்பு திறன்களைக் கணிக்க,

$$2a\rho . a \text{ கோசை } \alpha = x\sigma\left(2a-\frac{x}{2}\right) \text{ கோசை } \alpha,$$

$$\therefore\ 2a\sigma x - \frac{x^2}{2}\sigma = 2a^2\rho,$$

$$\therefore\ x^2\sigma - 4a\sigma x + 4a^2\rho = 0,$$

$$\therefore\ x = \frac{4a\sigma \pm \sqrt{16a^2\sigma^2 - 16a^2\rho\sigma}}{2\sigma} = 2a\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\sigma}}\right],$$

ஏனெனில், நேர்க் குறி அசாத்தியமாகும்.

AB இன் அமிழ்ந்திய நீளத்தை y என்க.

AB ஆனது B இல் $2a\rho - x\sigma$ என்னும் கீழ்முக மறுதாக்கம், அதன் நிறை $2a\rho$, அமிழ்ந்த பகுதியின் நடுப்புள்ளியில் நீரின் மேன்முக வுதைப்பு $y\sigma$, A இலுள்ள பிணையலின் மறுதாக்கம் ஆகியவற்றினல் தாக்கப்படுகின்றது.

β, கிடையுடன் AB இன் சாய்வாயின், AB இற்கு A பற்றித் திருப்புதிறன்களைக் கணிக்க,

$$(2a\rho - x\sigma)\ 2a \text{ கோசை } \beta + 2a\rho . a \text{ கோசை } \beta = y\sigma . \frac{y}{2}\text{கோசை } \beta,$$

$$\therefore\ 4a^2\rho - 4a^2\sigma\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\sigma}}\right] + 2a^2\rho = \frac{y^2}{2}\sigma,$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{12a^2\rho}{\sigma} - 8a^2\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\sigma}}\right].$$

ஆனல் $2a$ இலும் அதிகமாக y இருக்கக்கூடாது.

$$\therefore\ \frac{12\rho}{\sigma} - 8\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\sigma}}\right] \ngtr 4,$$

$$\therefore\ 2\sqrt{1 - \frac{\rho}{\sigma}} \ngtr 3 - 3\frac{\rho}{\sigma},$$

$$\therefore\ 4\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) \ngtr 9 + 9\frac{\rho^2}{\sigma^2} - 18\frac{\rho}{\sigma},$$

$$\therefore\ 9\frac{\rho^2}{\sigma^2} - 14\frac{\rho}{\sigma} + 5 \nless 0.$$

$$\left(9\frac{\rho}{\sigma} - 5\right)\left(\frac{\rho}{\sigma} - 1\right) \nless 0,$$

$$\therefore\ \frac{\rho}{\sigma} < \frac{5}{9}.$$

பயிற்சி XLIX.

1. $2a$ நீளமும் $\frac{3}{4}$ தன்னீர்ப்புமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீர்க் கோல் முனையொன்றில், நீர்ப் பரப்பிற்குமேல் $\frac{1}{2}a$ உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிற் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றைய முனை நீரில் அமிழ்ந்துள்ளது. சமநிலையின் சாய்ந்த தானத்தைக் காண்க. (I.S.)

2. ABC ஒரு முக்கோணி. AB = 20 அங்குலம், BC = 15 அங்குலம், AC = 25 அங்குலம். ABC ஐ மையக் குறுக்கு வெட்டாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணி அரியம் ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் பிணைக்கப்பட்டுள்ள, A இனூடாய்ச் செல்லும் விளிம்பினைப் பற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பவல்லது. இவ்வாறு தாங்கப்பெற்று, AB இன் ஒரு பாதியும் BC இன் ஒரு பாதியும் அமிழ்ந்திருக்குமாறு இவ்வரியம் நீரில் மிதக்கின்றது. A, நீர்ப் பரப்பிற்கு மேலாகவுள்ளது. இவ்வரியத்தின் ஆக்கப் பொருளின் தன்னீர்ப்பு $\frac{89}{328}$ என நிறுவுக. (H.S.D.)

3. சமமற்ற பக்கமுடைய செவ்வகக் குறுக்கு வெட்டுமுகமுள்ள ஒரு சீர் அரியம் நீரில், நீரிற்கு வெளியேயுள்ள விளிம்புடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஓர் இழையினாலே தாங்கப்பெற்று, இரு எதிர் விளிம்புகள் நீர்ப் பரப்பிலிருக்குமாறு மிதக்கின்றது. இவ்வரியத்தின் தன்னீர்ப்பு $\frac{2}{3}$ எனவும் இழை நிலைக்குத்தானதெனவும் அதனிலுள்ள இழுவை அரிய நிறையின் நாண்கிலொன்றெனவும் காட்டுக. (I.S.)

1994

4. தன்னீர்ப்பு 0·64 உள்ள ஒரு நேரான மெல்லிய சீர்க் கோல் நீரில் மிதக்கின்றது. இதனொரு முனை அதனுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஓர் இழையினால் வெளியே தூக்கப்படுகின்றது. கோல் நிலைக்குத்தாக வரும் வரையும் அதன் ஐந்திலிரண்டு பகுதி அமிழ்த்தப்பெற்றிருக்குமென நிறுவுக. இதற்குப் பதிலாக, இம்முனையைக் கீழ்நோக்கி இழுக்குமாறு அவ்விழை நீரிற்குள்ளே தாங்கப்படின், இக்கோலின் ஐந்திலொரு பகுதியானது நீரிற்கு மேலாகத் தெரியுமென நிறுவுக. (I.S.)

5. சீர்த் தடிப்பும் அடர்த்தியுமுள்ள ஒரு செவ்வக அடர் ABCD அரைகுறையாக நீரில் அமிழ்ந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியிருக்கின்றது. இதன் உச்சிப் புள்ளி A, அது சுழலக்கூடிய ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த சுழற்சித் தானத்தினாலே தாங்கப்பெற்றுள்ளது. அது அதன் AB, AD என்னும் பக்கங்கள் நீர்ப் பரப்பினால் ஒரே விகிதம் 3 : 2 இல் உட்புறமாகப் பிரிக்கப்பெற்றுச் சமநிலையிலே தங்கியிருக்கின்றது. அவ்வடரின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க. அதன் நிறையின் எப்பின்னம் அந்தச் சுழற்சித் தானத்தினாலே தாங்கப்படுகின்றது? (Ex.)

6. ஒரு மெல்லிய சீர்க் கோல் அதன் நீளத்தின் பாதியானது நீரில் அமிழ்ந்திருக்கும்படி சாய்வாக மிதக்கின்றது. இதன் மேன்முனை ஓர் இழையினால் தாங்கப்படுகின்றது. இந்த இழை நிலைக்குத்தானதெனவும் கோலின் அடர்த்தி நீரின் அடர்த்தியின் முக்காற்பங்காக இருக்கவேண்டுமெனவும் நிறுவுக. (I.S.)

7. அடர்த்தி ρ உள்ள ஒரு சீர் மரக்கோல் அதன் முனை A இனூடான ஒரு கிடை அச்சைப்பற்றிச் சுயாதீனமாய் இயங்கவல்லது. இதன் மறுமுனை B ஆனது அடர்த்தி ρ' $(\rho<\rho')$ உள்ள ஒரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப் பெற்றுள்ளது. A இனூடான அச்சு திரவத்திற்குமேலாக எவ்வுயரத்தில்

வைக்கப்படினும், அது நிலைக்குத்தாகவிராது சாய்வாக மிதக்கும் வரை கோலின் அமிழ்ந்த பகுதியின் நீளம் மாறாதிருக்குமென நிறுவுக. கோல் சாய்வாக மிதக்குமாறு, திரவத்திற்குமேலாக A இனூடான அச்சு வைக்கப் படும் உயரமானது $l\sqrt{1-\frac{\rho}{\rho'}}$ இலும் குறைவாக இருக்கவேண்டுமென நிறுவுக. இங்கு l கோல் நீளம் (H.S.D.)

8. ஒரு சீர்ச் சதுரத் தட்டானது மூலையொன்றினூடான ஒரு கிடை அச்சைப் பற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பக்கூடியது. இவ்வச்சு, தட்டினது தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. இவ்வச்சானது ஒரு நீர்த் தாங்கியின் பரப்பிலிருப்பதோடு, தட்டினது பாதியிலும் குறைவான பகுதி அமிழ்ந்துமிருப்பின், தட்டின் தன்னீர்ப்பு

$$\frac{\text{தாண்}^3\theta + 2\ \text{தாண்}\ \theta}{3(1+\text{தாண்}\ \theta)}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு θ, அச்சினூடாகவுள்ள அமிழ்ந்த பக்கம் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம். (I.E.)

9. B இற் செங்கோணமுடைய ஓர் இருசமபக்க முக்கோணிவடிவச் சீரான தட்டைத் தாள் ABC, அதன் உச்சி A நீர்ப் பரப்பில் சுழலுமாறு அமைக்கப்பெற்று, அரைகுறையாக அமிழ்ந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் மிதக்கின்றது. உச்சி B, நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழாகவுள்ளது. பக்கம் AC கிடையுடன் 15° கோணத்திற் சாய்ந்திருப்பின், இத்தட்டினது ஆக்கப் பொருளின் தன்னீர்ப்பு ஏறக்குறைய 0·52 எனக் காட்டி, பிணையலிலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

10. தன்னீர்ப்பு s உள்ள ஒரு மெல்லிய செவ்வகப் பலகை அதன் குறுகிய பக்கவழியே தாங்கியின் தட்டையான அடியுடன் பிணைக்கப் பெற்றுள்ளது. இதற்குள் h ஆழத்திற்கு நீர் ஊற்றும்போது பலகையின் நிலையைக் காண்க. h, பலகை நீளத்தின் $\sqrt{s}$ மடங்கிற்குச் சமமாகுமிடத்துப் பலகை நிலைக்குத்தான நிலையிலிருக்குமென நிறுவுக. (N.U.3.)

11. l நீளமும் தன்னீர்ப்பு s உமுள்ள ஒரு சீர்க் கோல், நீர்ப் பரப்பிற்குமேல் h $(<l)$ உயரத்தில் நிலைப்பட்டிருக்கும் அதன் மேன் முனைபற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பக்கூடியது. $h<l\sqrt{1-s}$ ஆயின், நிலைக்குத்துத் தானம் உறுதியற்றதென நிறுவி, சமநிலையின் சாய்வான தானத்தைக் காண்க. (C.W.B.)

§236 ஒரு திரவத்தில் முற்றாக அமிழ்த்தப்பெற்றும் ஓர் இழையினால் தாங்கப்பெற்றுமிருக்கும் ஒரு பொருளின் சமநிலை.

இவ்விடத்துப் பொருளின் தன்னீர்ப்பு திரவத்தினதிலும் மிகுதியானதாக இருக்கவேண்டும்.

இப்பொருளின்மீதுள்ள திரவத்தின் மேன்முகவுதைப்பானது பொருள் தங்கும் வெளியை நிரப்பும் திரவத்தின் நிறைக்குச் சமமாக இருப்பதோடு, பொருளின் நிறையிலுங் குறைவாகும்.

இழையிலுள்ள இழுவை = பொருள் நிறை – மேன்முகவுதைப்பு.

பொருளைத் தாங்கும் இழை ஒரு தராசின் புயமொன்றுடன் இணைக்கப்படின், இப்பொருள் காற்றில் சுயாதீனமாய்த் தொங்கும்போதிலும் பார்க்க அத்திரவத்தில் அமிழ்த்தப்படுமிடத்துக் குறைவான நிறை உடையதாகத் தோற்றுமென்பது தெளிவு, அ-து. பொருளைப் போன்ற அதே கனவளவையுடைய திரவத்தின் நிறைக்குத் தொகையிற் சமமான தோற்ற நிறை நட்டமொன்றுண்டு.

V அப்பொருளின் கனவளவெனவும், s அதன் தன்னீர்ப்பெனவும், ρ திரவத்தின் தன்னீர்ப்பெனவும், w ஓரலகுக் கனவளவு நீரின் நிறையெனவும் கொள்க.

பொருளின் நிறை $= Vsw$. பொருளின் அதே கனவளவையுடைய திரவத்தின் நிறை $= V\rho w$.

ஆகவே இழையிலுள்ள இழுவை T ஆயின்,

$$T = Vsw - V\rho w = Vw\,(s-\rho).$$

இத்திரவம் நீராயின், $\rho = 1$. அதோடு,

$$T = Vw\,(s-1).$$

§237. ஒரு பொருளின் தன்னீர்ப்பைத் தீர்மானித்தற்குரிய மிகப் பொதுவான முறைகளிலொன்று முன்னைய பந்தியின் முடிவிற் சார்ந்துள்ளது.

ஒரு தராசின் புயத்திலிருந்து காற்றில் தொங்குமிடத்துப் பொருள் நிறுக்கப்படுகின்றது. பின்பு அது நீரில் அமிழ்த்தப்பெற்று, அதன் தோற்ற நிறை தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. நிறையிலேற்படும் தோற்ற நட்டம் திண்மத்தின் அதே கனவளவுள்ள நீரின் நிறைக்குச் சமம்.

$$\therefore \text{தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{பொருளின் நிறை}}{\text{சம கனவளவு நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{\text{பொருளின் நிறை}}{\text{தோற்ற நிறை நட்டம்}}.$$

காற்றில் தொங்கும் ஒரு பொருளின் நிறை கண்டிப்பாக அதன் உண்மையான நிறையன்று. சூழ்ந்துள்ள காற்று அதன்மீது, பொருளின் அதே கனவளவுடைய காற்றின் நிறைக்குச் சமமான மேன்முகவுதைப்பை உஞற்றுகின்றது.

எனினும் பொருள் பெரிதாக இருந்தாலொழிய இக்கனவளவுக் காற்றின் நிறை மிகச் சிறியதாகும். இது வழக்கமாகத் தவிர்க்கப்படும்.

ஒரு வாயுவை நிறுக்குமிடத்து அதனைக் கொண்டுள்ள பாத்திரம் பெரிதாக இருக்கவேண்டும். இத்தகைய சந்தர்ப்பங்களில் காற்றின் மீயுந்தலும் கணிக்கப்பட வேண்டும்.

§238. பின்வரும் உதாரணங்கள், காற்றிலும் திரவத்திலும் ஒரு பொருளின் நிறைகளிலிருந்து முடிபுகளைக் கணிக்கும் முறையை விளக்குகின்றன.

உதாரணம் (i).

ஒரு கண்ணாடித் துண்டு காற்றில் 5 கி. நிறையும் நீரில் 3·2 கி. நிறையும் சல்பூரிக்கமிலத்தில் 1·7 கி. நிறையுமுள்ளது. கண்ணாடியினதும் சல்பூரிக்கமிலத்தினதும் தன்னீர்ப்பைக் காண்க. (I.S.)

இக்கண்ணாடியானது நீரில் அமிழ்த்தப்படும்போது அதன்மீது நீரின் மேன்முக உதைப்பு, கண்ணாடியின் அதே கனவளவுள்ள நீர்க் கனவளவின் நிறைக்குச் சமம். இந்நிறை $= 5 - 3{\cdot}2 = 1{\cdot}8$ *கி.*

$$\text{கண்ணாடியின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{கண்ணாடியின் நிறை}}{\text{சம கனவளவு நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{5}{1{\cdot}8} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}.$$

இதனைப் போல, கண்ணாடியின் அதே கனவளவுள்ள சல்பூரிக்கமில நிறை $= 5{\cdot}0 - 1{\cdot}7 = 3{\cdot}3$ *கி.*

$$\text{சல்பூரிக்கமிலத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{\text{சல்பூரிக்கமில நிறை}}{\text{சம கனவளவு நீரின் நிறை}}$$

$$= \frac{3{\cdot}3}{1{\cdot}8} = 1\tfrac{5}{6}.$$

உதாரணம் (ii).

ஒரு மரக் குற்றி காற்றில் 2·75 இரு. நிறையுள்ளது ; ஓர் உலோகத் துண்டு நீரில் 1·65 இரு. நிறையுடையதாகத் தோற்றுகிறது ; இவையிரண்டும் ஒருமிக்கச் சேர்க்கப்படுமிடத்து நீரில் 0·85 இரு. நிறையுள்ளனவாகத் தோற்றுகின்றன. மரத்தின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க. (I.S.)

மரம், உலோகம் ஆகிய இரண்டும் நீரில் $2{\cdot}75 + 1{\cdot}65 = 4{\cdot}40$ *இரு. நிறை உடையனவாக இருக்க வேண்டும். இந்நிறைக்கும் தோற்ற நிறைக்குமுள்ள வித்தியாசமானது மரத்தின்மீது நீரினது மேன்முகவுதைப்பினலாகும்.*

$$\therefore \text{மேன்முகவுதைப்பு} = 4{\cdot}40 - 0{\cdot}85 = 3{\cdot}55 \text{ இரு.}$$

இது மரத்திற்குச் சமமான கனவுள்ள நீரின் நிறையாகும்.

$$\therefore \text{மரத்தின் தன்னீர்ப்பு} = \frac{2{\cdot}75}{3{\cdot}55} = \frac{55}{71}.$$

உதாரணம் (iii).

முறையே தன்னீர்ப்புக்கள் 1·5, 2·3 உடைய இரு பொருட்களினுலாய சேர்வையானது நீரில் 480 கி. நிறையும், தன்னீர்ப்பு 1·3 உள்ள ஒரு திரவத்தில் 240 கி. நிறையுமுள்ளது. இச்சேர்வையிலுள்ள பொருளொவ் வொன்றினதும் கனவளவைத் தீர்மானிக்க. (I.S.)

அலகுகள் ச.கி.செ. என்பதனுல், 1 கன சமீ. நீரின் நிறை 1 கி.

முறையே 1·5, 2·3 தன்னீர்ப்புள்ள பொருட்களின் கனவளவுகளை v_1, v_2 கன சமீ. என்க.

திண்ம நிறை $= (1{\cdot}5\, v_1 + 2{\cdot}3\, v_2)$ *கி.*

நீரில் நிறை $= (1{\cdot}5\, v_1 + 2{\cdot}3\, v_2) - (v_1 + v_2) = 480 \quad . \quad . \quad \text{(i)}$

திரவத்தில் நிறை $= (1{\cdot}5\, v_1 + 2{\cdot}3\, v_2) - (v_1 + v_2)1{\cdot}3 = 240 \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$

$$\therefore\ 0{\cdot}5\, v_1 + 1{\cdot}3\, v_2 = 480$$

$$\text{அதோடு}\quad 0{\cdot}2\, v_1 + v_2 = 240,$$

$$\therefore\ v_1 + 2{\cdot}6\, v_2 = 960$$

$$\text{அதோடு}\quad v_1 + 5\, v_2 = 1200,$$

$$\therefore\ 2{\cdot}4\, v_2 = 240,$$

$$\therefore\ v_2 = 100 \text{ கன. சமீ.},$$

$$\therefore\ v_1 = 700 \text{ கன சமீ.}$$

பயிற்சி L.

1 — 10

1. *26·65 கி. நிறையுள்ள ஒரு மெழுகுத் துண்டு ஒரு செம்புத் துண்டு டன் கட்டப்பெற்றுள்ளது ; நீரில் இவ்விணைப்பின் நிறை 9·16 கி. நீரிற் செம்பு 10·10 கி. நிறையுடையதாயின், மெழுகினது தன்னீர்ப்பைத் தீர்மானிக்க.* (I.S.)

2. *ஒரு மரத் துண்டு காற்றில் 144 கி. நிறையுள்ளது. ஓர் உலோகத் துண்டு நீரில் 36 கி. நிறையுள்ளது. ஒருமிக்க இணைக்கப்படும்போது இவை நீரில் 24 கி. நிறையும் தன்னீர்ப்பு 1·1 உள்ள ஒரு கரைசலில் 8 கி. நிறையு முள்ளன. மரத்தினதும் உலோகத்தினதும் தன்னீர்ப்புக்களைக் காண்க.* (I.S.)

3. *ஒரு சீர்த் திண்மப் பொருள் நீரில் 40 கி. நிறையும் தன்னீர்ப்பு 0·8 உள்ள திரவமொன்றில் 50 கி. நிறையுமுடையது. அதன் கனவளவையும் தன்னீர்ப்பையும் காண்க. (1 கன சமீ. நீர் 1 கி. நிறையுள்ளதாகக் கருதப்படலாம்.)* (I.S.)

4. *ஒரு பொருள் முறையே தன்னீர்ப்புக்கள் 1·5, 4 உடைய A, B என்னும் இரு பதார்த்தங்களைக் கொண்டுள்ளது.* **வெற்றிடத்தில்** *நிறுக்கப் படுமிடத்து இதன் நிறை 11 இரு. நீரில் இதன் நிறை 6 இரு. இப் பொருளிலுள்ள இரு பதார்த்தங்களினதும் (i) நிறை, (ii) கனவளவு ஆகியவற்றின் விகிதசமன்களைக் காண்க.* (I.S.)

5. இரு சிர்ப் பதார்த்தங்களின் கலவையானது நீரில் 25 கி. நிறையும் தன்னீர்ப்பு 0·8 உள்ள திரவமொன்றில் 28 கி. நிறையுமுள்ளது. இக் கலவையின் நிறைக்குச் சமமான திணிவுள்ள அப்பதார்த்தத்திலொன்று இரண்டாம் திரவத்தில் 30 கி. நிறையுள்ளது. கலவையின் நிறைக்குச் சமமான திணிவுள்ள மற்றைய பதார்த்தம் நீரில் 15 கி. நிறையுள்ளது. ஒவ்வொரு பதார்த்தத்தினதும் தன்னீர்ப்பையும் கலவையில் அவற்றின் கனவளவுகளையும் காண்க. (1 கன சமீ. நீர் 1 கி. நிறையுள்ளது.) (I.S.)

6. 156 இரு. நிறையும் தன்னீர்ப்பு 6·7 உமுள்ள ஒரு பொருள் நீரில் அமிழ்த்தப்படுமிடத்து 115 இரு. நிறையுள்ளது. இப்பொருளில் பொன் வெள்ளிகளுள்ளனவென்று காட்டி, அவற்றின் மொத்தக் கனவளவைக் காண்க. (H.S.C.)

7. தன்னீர்ப்பு 7·5 உம் நிறை 150 இரு. உம் உள்ள ஓர் உலோகக் குற்றி நீரில் 120 இரு. நிறையுடையதாகக் காணப்பட்டுளது. இக்குற்றியின் உட்புறத்தில் ஒரு பொந்து உள்ளதெனக் காட்டி, இப்பொந்தின் கனவளவிற்கும் உலோகத்தின் தோற்றக் கனவளவிற்கும் இடையேயான விகிதத்தைக் கணிக்க. (I.S.)

8. நீரினும் இலேசான, 1 இரு. நிறையுள்ள ஒரு பொருள் அதன் தன்னீர்ப்பைக் காண்பதற்காக ஓர் ஈயத் திணிவுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ளது. நீரில் இத்திணிவின் தோற்ற நிறை 5 இரு. இவையிரண்டும் ஒன்ருக அமிழ்த்தப்படுமிடத்து இவற்றின் தோற்ற நிறை $4\frac{1}{2}$ இரு. அப்பொருளின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க. (H.S.C.)

9. படிகம், பொன் ஆகியவற்றைக் கொண்ட ஒரு கட்டி காற்றில் 13 அவு. நிறையும் நீரில் 9 அவு. நிறையுமுள்ளது. படிகம், பொன் ஆகியவற்றின் தன்னீர்ப்புக்கள் முறையே 2·6, 19·5 எனக் கொண்டு, இக்கட்டியில் பொன்னின் நிறையைக் காண்க. (I.S.)

10. முறையே 11·4, 7·3 தன்னீர்ப்புடைய இரு உலோகங்களினாலாய ஒரு கலப்புலோகம் காற்றில் 10 இரு. நிறையும் நீரில் 9 இரு. நிறையுமுள்ளது. ஒவ்வோர் உலோகத்தின் நிறையையும் அவற்றினது கனவளவுகளின் விகிதத்தையும் காண்க. (H.S.C.)

11. ஒரு பொருள் மூன்று வெவ்வேறு திரவங்களில் முற்ருக அமிழ்த்தப்படுமிடத்து W_1, W_2, W_3 என்னும் தோற்ற நிறைகளை உடையது. இத்திரவங்களின் தன்னீர்ப்புக்கள் σ_1, σ_2, σ_3 ஆகும்.

$$(\sigma_2-\sigma_3)\,W_1+(\sigma_3-\sigma_1)\,W_2+(\sigma_1-\sigma_2)W_3=0$$

என நிறுவுக. ஒரு பொருள் நீரிலும் தன்னீர்ப்பு 2·5 உள்ள ஒரு திரவத்திலும் முற்ருக அமிழ்த்தப்படுமிடத்து முறையே 5 கி., 2 கி. நிறை

உடையது. இப்பொருள் அதன் கனவளவின் பாதி மட்டுமே அமிழ்ந் திருக்கும்படி மிதக்குமாறுள்ள திரவமொன்றின் **தன்னீர்ப்பைக் காண்க.** வளிமண்டல அடர்த்தி தவிர்க்கப்படுகின்றது. (N.U.3 உம் 4 உம்)

12. ஒரு பொருள் s_1, s_2 தன்னீர்ப்புள்ள திரவங்களில் அமிழ்ந்து மிதக்குமிடத்து முறையே $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ என்னும் தோற்ற நிறைகளையுடையது. (i) அதன் உண்மையான நிறையையும், (ii) தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ உள்ள ஒரு திரவத்தில் அமிழ்ந்து மிதக்குமிடத்து அதன் தோற்ற நிறையையும் காண்க. (Ex.)

அதிகாரம் XIV.

வாயுக்கள்.

§239. திரவங்கள் நடைமுறையில் நெருக்கத்தகாதவை. அதே சமயத்தில் வாயுக்கள் எளிதாக நெருக்கத்தக்கவை. இதுவே வாயுக்களுக்கும் திரவங்களுக்கும் இடையேயான முக்கிய வேறுபாடாகும்.

ஒரு வாயு விரிந்து அது இடப்பெற்றுள்ள யாதுமொரு வெளியை நிரப்பும். ஆகவே அதற்குச் சுயாதீனப் பரப்பெதுவுமிராது.

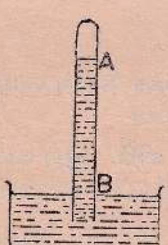
வளிமண்டலத்தினிடத்து ஒரு மேலெல்லை இருக்கும். ஆனால் அதனிடத்து ஒரு திரவத்தைப் போன்று திட்டமான சுயாதீனப் பரப்பேதுமிராது. குத்துயரம் அதிகரித்துக் கொண்டு போக, வளி மேலும் ஐதாகிக் கொண்டே போகின்றது. அதோடு வளியேதுமில்லாத வெளிக்கு நிலை மாறல் படிப்படியாக இருக்கும்.

வளிமண்டலத்தைத் தவிர மற்றையவிடங்களில் ஒரு வாயு உட்பட்ட வெளியமுக்கமானது அதன் அமுக்கத்தின் பருமனைத் தீர்மானிக்கும் முக்கிய காரணமாகும்.

§240. வளிமண்டலம் காரணமான அமுக்கம்.

வளிமண்டலம் புவிப் பரப்பிற்கு மேல் பல மைல் உயரத்திலிருப்பதனால், ஒரு பாரமான திரவம் அதன் பரப்பிற்குக் கீழேயுள்ள புள்ளிகளில் அமுக்கத்தை உண்டாக்குதல் போல வளியின் நிறை ஓர் அமுக்கத்தை உண்டாக்கப் போதுமானதாக இருக்கின்றது.

வளிமண்டல அமுக்கச் செறிவு ஒரு சதுர அங்குலத்துக்கு $14\frac{1}{2}$ இரு. ஆகும். இது ஏறக்குறைய 33 அடி. நீர் ஆழத்திற்கு அல்லது 30 அங்குல இரசத்திற்குச் சமானம்.



படம் 322.

ஏறக்குறைய 3 அடி நீளமுள்ளதும் முனையொன்றில் மூடப்பெற்றது மான ஒரு குழாயானது இரசம் நிரப்பப்பெற்று, திறந்த முனை ஒரு பாத்திரத்தி

லுள்ள இரசத்தினுள் படம் 322 இற் போலக் கவிழ்த்து வைக்கப்படின், குழாயினுள்ள இரசம் அதன் மட்டம் குழாய்க்கு வெளிப்புறமாய் B இலுள்ள இரச மட்டத்திற்கு மேலாக ஏறக்குறைய 30 அங்குல உயரத்தி லுள்ள புள்ளி A இலிருக்குமாறு இறங்கும்.

குழாயின் உட்புறமாக மட்டம் B இலுள்ள அமுக்கச் செறிவானது இரச ஆழம் AB இன் காரணமானதாகும். வெளிப்புறமாக B இலுள்ள அமுக்கச் செறிவு வளிமண்டலத்தினலாகும். குழாயின் உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் மட்டம் B இலுள்ள அமுக்கச் செறிவுகள் சமமாக இருப்பதனால், வளிமண்டலம் காரணமான அமுக்கச் செறிவும் AB உயர முள்ள இரச நிரல் உண்டுபண்ணும் அமுக்கச் செறிவும் ஒன்றாகும்.

இதுவே வளிமண்டல அமுக்கத்தை அளக்கப் பெரிதும் பயன்படும் இரசப் பாரமானியின் தத்துவமாகும்.

A இலுள்ள இரச நிரலின் உயர்பரப்பின்மீது அமுக்கமேதுமிராதென நாம் மேற்கொண்டோம். A இற்கு மேலாகவுள்ள வெளி சிறிதளவு இரச ஆவியை மட்டும் கொண்டுள்ளதாகையால் இவ்வெடுகோள் கிட்டத் தட்ட உண்மையானதாகும்.

A இற்கு மேலாகவுள்ள வெளியில் சிறிதளவு காற்று அல்லது வேறு ஏதாவது வாயு அல்லது ஆவி இருப்பின், அது இரசத்தின்மீது ஓர் அமுக்கத்தை உஞற்றி அந்நிரலைத் தாழ்த்தும்; இவ்விடத்து நிரலின் உயரம், வெளிப்புறமாகவுள்ள வளிமண்டல அமுக்கச் செறிவின் அளவீடாக மேலும் இராது.

வளிமண்டல அமுக்கச் செறிவு=இரச நிரல் காரணமான அமுக்கச் செறிவு + A இற்கு மேலேயுள்ள வாயு காரணமான அமுக்கச் செறிவு.

§241. போயிலின் விதி.

மாரு வெப்பநிலையுள்ள ஒரு குறித்த திணிவு வாயுவின் அமுக்கச் செறிவானது அதன் கனவளவிற்கு நேர்மாறய் மாறுகின்றது.

இது ஒரு பரிசோதனைமுறை விதி. இது உண்மையான வாயுக்களினிடத்து சில குறித்த எல்லைகளுக்குள்ளேயே உண்மையானதாகும்.

வளி, ஐதரசன், ஒட்சிசன் போன்ற வாயுக்கள் ஒரு பெரிய அமுக்க வீச்சிற்கு இவ்விதிக்குக் கீழ்ப்படிகின்றன. இவை இவ்விதிக்கு முற்றுகக் கீழ்ப்படியும் **பூரண வாயு**வினிடத்து கிட்டத்தட்டச் சரியாக அமைகின்றன.

பின்வருவதில், எடுத்து நோக்கப்பெறும் வாயுக்கள் பூரணமானவை என மேற்கொள்வோம்.

இதைப் போன்ற ஒரு வாயுவினிடத்து, p அமுக்கச் செறிவும் v கனவளவுமாயின்,

$$p \propto \frac{1}{v},$$

$$\therefore p = \frac{c}{v};$$ இங்கு c, யாதுமொரு மாறிலி.

$$\therefore pv = c.$$

எனவே போயிலின் விதி பின்வருமாறும் கூறப்படலாம் :—

மாறு வெப்பநிலையுள்ள ஒரு குறித்த திணிவு வாயுவின் அமுக்கச் செறிவினதும் கனவளவினதும் பெருக்கம் மாறுதிருக்கும்.

இவ்வாயுவின் திணிவு அதன் கனவளவினதும் அடர்த்தியினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமமாகையால், ρ இவ்வடர்த்தியாயின்,

$$v\rho = \text{மாறிலி},$$
$$\therefore \frac{p}{\rho} = \text{மாறிலி}.$$

அ—து. அடர்த்தியானது அமுக்கத்துடன் அதிகரிக்கின்றது; அமுக்கத்தினதும் அடர்த்தியினதும் விகிதம் மாறுதிருக்கின்றது.

§242. உதாரணம் (i).

ஒரு தவறுன பாரமானி 29·4 அங்குலம், 30·3 அங்குலம் என்னும் உண்மையான அளவீடுகளை முறையே 29·2 அங்குலம், 30 அங்குலமாகக் காட்டுகின்றது. குழாயிலுள்ள வளியானது 30 அங்குல அமுக்கத்திற்கு உட்பட்டிருப்பின் இவ்வளி, குழாயின் எந்நீளத்தை நிரப்பும்?
(H.S.C.)

அளவீடு 29·2 அங்குலமாக இருக்குமிடத்து வளி தங்கும் குழாய் நீளத்தை l அங்குலமெனக்.

பின்பு வளியமுக்கம் $= 29{\cdot}4 - 29{\cdot}2 = 0{\cdot}2$ அங். வளியின் கனவளவு அது தங்கும் குழாய் நீளத்திற்கு விகிதசமமென மேற்கொள்ளலாம்.

அளவீடு 30 அங்குலமாக இருக்குமிடத்து வளி தங்கும் குழாய் நீளம் $l - 0{\cdot}8$ ஆகும். வளியமுக்கம் $= 30{\cdot}3 - 30{\cdot}0 = 0{\cdot}3$ அங்குலம்.

$$\therefore 0{\cdot}2l = 0{\cdot}3(l - 0{\cdot}8),$$

$$\therefore 0{\cdot}1\, l = 0{\cdot}24.$$

$$\therefore l = 2{\cdot}4 \text{ அங்.}$$

வளி அதன் அமுக்கம் 30 அங்குலமாக இருக்குமிடத்து x நீளத்தில் தங்கின்,

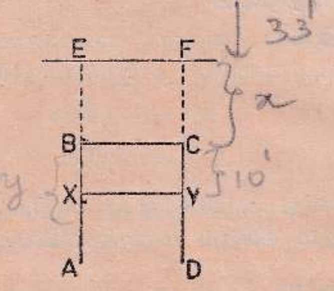
$$x \times 30 = 2{\cdot}4 \times 0{\cdot}2,$$

$$\therefore x = \frac{2{\cdot}4 \times 0{\cdot}2}{30} = 0{\cdot}016 \text{ அங்.}$$

உதாரணம் (ii).

20 அடி நீளமுள்ள ஒரு கவிழ்ந்துள்ள பொட் பாத்திரமானது நீரில், நீர் அதன் கனவளவின் பாதியைக் கொள்ளுமாறு உட்புறமாக உயரும் வரை தாழ்த்தப்படுகின்றது. நீர்ப் பாரமானி உயரம் 33 அடியெனக் கொண்டு, நீர்ப் பரப்பிற்குக்கீழ் பாத்திரத்தின் உச்சியின் ஆழத்தைக் காண்க.

வளிமண்டல அமுக்கத்தில் பாத்திரத்தை நிரப்பும் ஓர் அளவு காற்று உள்ளே இறைக்கப் பெறின், பாத்திரத்திலிருந்து எவ்வளவு நீர் வெளி யேற்றப்படும் ? (H.S.C.)



படம் 323.

ABCD, (படம் 323) பாத்திரத்தின் ஒரு வெட்டுமுகத்தையும், XY அதற்கு உட்புறமாகவுள்ள நீர்ப் பரப்பு மட்டத்தையும், EF சுயாதீன நீர்ப் பரப்பு மட்டத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்க.

x, பரப்பிற்குக்கீழ் உச்சி BC இன் ஆழமெனவும், w, நீரின் தன் னிறையெனவும் கொள்க.

பரப்பிலுள்ள அமுக்கச் செறிவு $33w$ உம், காட்டப்பெற்ற தானத்தி லுள்ளது $(33 + x + 10)w$ உம் ஆகும்.

பின்னைய அமுக்கத்தின்கீழ் கனவளவு பாதியாகின்றது.

எனவே, போயிலின் விதியிலிருந்து,

$$33w = \tfrac{1}{2}(43 + x)\,w,$$

$$\therefore\ 66 = 43 + x,$$

$$\therefore\ x = 23 \text{ அடி}.$$

மேலதிகமான காற்று உள்ளே இறைக்கப்படுமிடத்து, உருளையில் நீர்ப் பரப்பானது BC இற்குக் கீழாக y ஆழத்தில் இருக்கிறதென்க.

இப்பொழுது அமுக்கம் $(33 + 23 + y)\,w$ ஆகும். அதோடு கனவளவு y இற்கு விகிதசமம்.

பரப்பில் அமுக்கம் 33 w. அதோடு கனவளவு 40 இற்கு விகிதமாக இருக்கும்.

$$\therefore (56+y)\,w\times y = 40\times 33\,w,$$

$$\therefore y^2+56y-1320=0.$$

$$\therefore y = \frac{-56+\sqrt{56^2+4\times 1320}}{2} = 17{\cdot}86 \text{ அடி}.$$

எனவே 7·86 அடி ஆழம் வெளியேற்றப்படுகின்றது.

உதாரணம் (iii).

10 அங்குல உயரமுள்ள ஒரு கிண்ணம் நிலைக்குத்தான பக்கங்களையும் தவிர்க்கத்தக்க தடிப்புள்ள தட்டையான அடியையுமுடையது. இதன் வாய் கீழ்முகமாய் இருக்க, இது நீரில் நிலைக்குத்தாக இறக்கப்படுகின்றது. சுயாதீனமாக இருக்குமிடத்து நீரின் வெளிப் பரப்பிற்கு மேலாக 5·9 அங்குல உயரம் இருக்குமாறு மிதக்கின்றது. நீர்ப் பாரமானி 33 அடி உயரமுள்ளதாயின், கிண்ணத்தில் நீர் எவ்வளவிற்கு உயர்ந்துள்ளதெனக் காண்க. கிண்ணத்தினுள் இருக்கும் வளியின் வெப்பநிலை மாறுதுள்ளதெனக் கொண்டு, கிண்ணத்தின் வாயானது நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழ் 50 அடி ஆழத்திற்கு அமிழ்த்தப்படின் கிண்ணம் அதன் சொந்த நிறையின்கீழ் மீண்டும் சமநிலையில் மிதக்குமெனக் நிறுவுக. (Ex.)

கிண்ணத்திலுள்ள நீர்ப் பரப்பானது அடிக்குக்கீழே x அங்குல ஆழத்திலிருக்கிறதெனக.

அது கொண்டுள்ள வளியின் அமுக்கச் செறிவு

$$= \left(33+\frac{x-5{\cdot}9}{12}\right) \text{ அடி நீர்}.$$

கொள்ளப் பெற்ற வளியின் தொடக்கக் கனவளவும் புதிய கனவளவும் முறையே 10 இற்கும் x இற்கும் விகிதசமம்.

எனவே, போயிலின் விதியிலிருந்து,

$$x\left(33+\frac{x-5{\cdot}9}{12}\right) = 10\times 33,$$

$$\therefore x^2+390{\cdot}1\,x-3960=0.$$

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து, $x = 9{\cdot}9$ அங்குலம்.

வளியின் அமுக்கச் செறிவு $= \left(33+\frac{4}{12}\right)$ அடி நீர்.

இவ்வமுக்கச் செறிவினதும் வெளிப்புற அமுக்கச் செறிவினதும் வித்தியாசம் $\frac{4}{12}$ அடியாகும். எனவே, இவ்வமுக்கச் செறிவானது கிண்ண நிறையைத் தாங்கப் போதுமானதாகும். (5·9 அங்குல வளி காரணமான அமுக்கம் தவிர்க்கப்பெற்றுள்ளது.) திரவப் பரப்பிற்கு 50 அடி கீழே

அதன் வாய் இருக்குமிடத்து, அதனடி $49\frac{1}{6}$ அடி கீழே இருக்கும். அதோடு, உட்புறத்தில் நீர்ப் பரப்பானது அடிக்குக் கீழே மீண்டும் x ஆழத்திலிருப்பின், அமுக்கச் செறிவு $= \left(82\frac{1}{6} + \frac{x}{12}\right)$ அடி நீர்.

ஆகவே, போயிலின் விதியிலிருந்து,

$$x\left(82\tfrac{1}{6} + \frac{x}{12}\right) = 10 \times 33,$$

$$\therefore\ x^2 + 986\,x - 3960 = 0,$$

$$\therefore\ x = 4.$$

அடிமீது உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவுமுள்ள அமுக்கச் செறிவுகளின் வித்தியாசம் மீண்டும் $\frac{4}{12}$ அடியாகும். ஆகவே கிண்ணம் அதன் சொந்த நிறையின் கீழ் மீண்டும் சமநிலையிலுள்ளது.

பயிற்சி LI.

1. ஒரு பாரமானியின் உச்சியில் சிறிதளவு காற்று உள்ளடக்கப்படுவதனுல் அது பழுதுள்ளதாக இருக்கின்றது. வளிமண்டல அமுக்கம் 30 அங்குலமாக இருக்குமிடத்து அது 29·8 அங்குலத்தையே காட்டினும், அமுக்கம் 29 அங்குலமாக இருக்குமிடத்து 28·85 அங்குலத்தையே பதிவு செய்யினும், வளிமண்டல அமுக்கம் 30 அங்குலமாக இருக்குமிடத்து உச்சியிலுள்ள காற்றுல் நிரப்பப்பெற்ற வெளியின் நீளம் யாது ? (H.S.C.)

2. இரசத்தின் தன்னீர்ப்பு 13·6. புவிப் பரப்பின்மீதுள்ள வளியமுக்கம் சதுர அங்குலத்திற்கு 14·7 இரு. நிறை. பாரமானியிலுள்ள இரச நிரலின் உயரத்தைக் கணிக்க. 1 கன அடி நீர் $62\frac{1}{2}$ இரு. நிறையுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. (H.S.D.)

3. ஒரு சீரான U – குழாய், ஒவ்வொன்றும் 3 அடி நீளமுள்ள சம நிலைக்குத்துப் புயங்களை உடையது. ஒரு புயம் அதன் மேன்முனையில் அடைக்கப்பெற்றுள்ளது. இரு புயங்களும் தவிர்க்கத்தக்க நீளமுள்ள ஒரு குழாயினுல் அடியில் தொடுக்கப்பெற்றுள்ளன. இரசம் குழாயின் 2 அங்குல நீளத்திலே தங்கும்வரை உள்ளே ஊற்றப்படுகின்றது. மூடிய புயத்திலிருந்து காற்றேதும் வெளியேறவில்லையென மேற்கொண்டு, ஒவ்வொரு புயத்திலுமுள்ள இரச நீளத்தைக் காண்க. இரசப் பாரமானி உயரம் 30 அங்குலம். (I.S.)

4. 8 அடி உட்புற ஆழமும் 1000 கன அடி கொள்ளளவுமுள்ள ஓர் ஆழ்மணி அதன் கீழ்விளிம்பு 51 அடி கீழே இருக்கும் வரையினும் அமிழ்த்தப்படுகின்றது. வளிமண்டல அமுக்கம் 34 அடி நீராகும். நீர் உள்ளேறுமற் பேண வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள காற்றின் எந்த அளவு உள்ளிறைக்கப்பட வேண்டும் ? காற்றேதும் இறைக்கப்படாவிடின், ஆழ்மணியில் நீர் எவ்வளவு உயரத்திற்கு உயரும் ? (H.S.C.)

5. காற்று நிரப்பப்பெற்றுள்ள ஒரு குடுவை நிறுநிட்டமாய் இருக்கின்றது. இது ஒரு தக்கையினால் மூடப்பெற்றுள்ளது. தக்கையினூடாக சீரான துளையுள்ள ஒரு நிலைக்குத்தான குழாய் செல்கின்றது. இதனுள் h நீள இரச இழை உள்ளது. முழுவதும் குழாய் கிடையாக இருக்குமாறுள்ள நிலைக்குக் கொண்டுவரப்படின், இரச இழை x தூரம் செல்லும். குழாய் மீண்டும் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு அது கவிழ்த்து வைக்கப்படின், இரசம் மேலும் y தூரம் செல்லும். இரசப் பாரமானியின் உயரம்

$$h\frac{y+x}{y-x}$$

எனக் காட்டுக. (H.S.C.)

6. முனையொன்றிலே திறந்துள்ள $2a$ நீளமுள்ள ஓர் உருளை அதன் பாதியானது நீரில் இருக்குமாறும் மேற்பாதியில் வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள வளி தங்குமாறும், திறந்தமுனை கீழ்முகமாயிருக்க, நீரில் நிலைக்குத்தாகத் தாழ்த்தப்படுகின்றது. அவ்வுருளை அதன் கீழ்முனையானது பரப்பிற்குக்கீழே b ஆழத்திலிருக்கும் வரையில் நகர்த்தப்படுகின்றது. இப்போது உருளையிலுள்ள நீர் அதன் $a+x$ நீளத்தில் தங்கியிருக்கின்றது. x இற்கான சமன்பாட்டினை எழுதுக. நீர்ப் பாரமானி உயரம் h ஆகும். a, b ஆகியன h (h, ஏறக்குறைய 1000 சமீ.) உடன் ஒப்பிடுமிடத்துச் சிறியனவாயின், x ஏறத்தாழ

$$\frac{a(b-a)}{h+b}$$

இற்குச் சமமெனக் காட்டுக. (H.S.C.)

7. சீரான ஒடுங்கிய துளையையுடையதும் 32 அங்குல நீளமானதுமான ஒரு கிடைக் குழாயினது மையப் பகுதியில் 8 அங்குல நீளத்திற்கு மையத்தின் இருமருங்கிலும் இரசம் நிரப்பப்பெற்றுள்ளது. பின்பு குழாயின் இரு முனைகளும் மூடப்படுகின்றன. ஒரு முனை இறுக்கமாகப் பொருந்தும் ஒரு முசலத்தினால் மூடப்பெறுகின்றது. இதனுள் உள்ள வளியானது வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ளது. பாரமானி உயரம் 30 அங்குலம். இப்பொழுது குழாய் நிலைக்குத்தாகப் பேணப்பட்டு, முசலம் 8 அங்குலம் கீழே தள்ளப்படுகின்றது. வளியேதும் இரசத்தினூடாகச் செல்லவில்லையெனவும் வெப்பநிலையில் மாற்றமேதுமில்லையெனவும் மேற்கொண்டு, இப்பொழுது வளி தங்குவதும் குழாயினது இரசத்தின் மேலும் கீழுமுள்ளதுமான நீளத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

8. நிலைக்குத்தான அச்சையுடையதும் 7 அடி உயரமுள்ளதுமான ஓர் உருளையில் நிறைய வளிமண்டல அமுக்கத்தில் காற்றுள்ளது. இது 20 இறு. நிறையுள்ள இறுக்கமாகப் பொருந்துமொரு முசலத்தினால் அதனுச்சியில் அடைக்கப்பெற்றுள்ளது; இம்முசலம் அதன் சொந்த நிறையின்கீழ் 3 அடி தாழின், முசலம் மேலும் 3 அடி கீழே செல்லுமாறு அதற்குப் பிரயோகிக்க வேண்டிய அமுக்கத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

9. முனையொன்றில் மூடியுள்ள ஒரு சீர்க் குழாய் அதன் திறந்தமுனை கீழ்முகமாயிருக்கத் திரவத்தில் நிலைக்குத்தாக அமிழ்த்தப்படுகின்றது. குழாய் நீளம் l ஆகும். இத்திரவம் சார்பாக பாரமானி உயரம் h ஆகும். குழாயின் கீழ்முனையானது பரப்பிற்குக்கீழே y ஆழத்திலிருக்குமிடத்துத் திரவம் குழாயினுட் சென்ற தூரம் x ஆயின்,

$$y = x + \frac{x}{l-x}h$$

என நிறுவுக. (H.S.D.)

10. தொடக்கத்தில் நிறைய வளிமண்டல அமுக்கத்தில் காற்றுக் கொண்டுள்ள ஒரு 8 அடி உயர உருளைவடிவ ஆழ்மணி, நீர் உட்புறமாக 3 அடி உயரும் வரை தாழ்த்தப்படுகின்றது. நீர்ப் பரப்பிற்குக்கீழ் மணியினது உச்சி எவ்வாழத்திலுள்ளது? (நீர்ப் பாரமானி உயரம் 33 அடி.) உட்புறத்திலிருந்து நீர் வெளியேற்றப்படுமாறு வளிமண்டல அமுக்கத்திலிருக்கும் காற்றின் எவ்வளவு கன அடி உள்ளிறைக்கப்படவேண்டும் என்பதைத் தீர்மானிக்க. மணியின் வெட்டுமுகப் பரப்பளவு 12 சதுர அடி.

11. ஒரு சுற்றற் பரவளைவுருவை அதன் அச்சிற்குச் செங்குத்தானதும் உச்சியிலிருந்து h தூரத்திலிருப்பதுவுமான ஒரு தளத்தினால் வெட்டிப்பெற்ற வடிவுள்ளது ஓர் ஆழ்மணி. இங்கு h, நீர்ப் பாரமானி உயரம். இவ்வாழ்மணி அதன் உச்சியானது நீர்ப்பரப்பிற்குக்கீழே $\frac{5h}{2}$ ஆழத்திலிருக்குமாறு தாழ்த்தப்படின், மணியில் நீர் எவ்வளவினால் உயரும் என்பதைக் காண்க. (C.W.B.)

12. 0·4 சதுர அங்குலச் சீர் வெட்டுமுகமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துக் குழாயின் உச்சியில் 36 கன அங்குலக் கொள்ளளவுள்ள குழாய் உள்ளது; திறந்துள்ள கீழ்முனை அகன்ற இரசத் தொட்டியில் அமிழ்ந்துள்ளது. இக்குழாயினுள் தொட்டியிலுள்ள மட்டத்திற்கு 20 அங்குலம் மேலே இரசமுள்ளது. இரசத்திற்கு மேலாகவுள்ள குழாயின் பகுதி 10 அங்குல நீளமுள்ளது. பாரமானி உயரம் 30 அங்குலமாயின், குழாய் நிலைக்குத்தாய் 10 அங்குலம் தாழ்த்தப்படுமிடத்து இரச மட்டம் எங்கிருக்கும்? (C.W.B.)

13. மெல்லிய பொருளினாலாயதும் h உயரமும் a குறுக்கு வெட்டுமுடையதுமான ஓர் உருளை, முனையொன்றில் அடைக்கப்பெற்றுள்ளது. இதனுள் தொடக்கத்தில் வளிமண்டல அமுக்கத்தில் நிறையக் காற்றுள்ளது. இவ்வுருளையானது திறந்த முனை கீழ்முகமாயிருக்க, அதனுச்சி நீர்ப் பரப்பிலிருந்து d ஆழத்திலிருக்கும் வரையில் நிலைக்குத்தாக அமிழ்த்தப்படுகின்றது. உருளையில் நீர் எந்த உயரத்திற்கு உயரும் என்பதையும் அதனை மேன்முகமாக மிதக்கச் செய்யும் வாயு அமுக்கம் காரணமான விளையுள் விசையையும் காண்க. (C.W.B.)

14. மெல்லிய உலோகத்தினுலாய l நீளமுள்ள ஒரு மூடிய உருளை வடிவக் குவளை, அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி நீரில் மிதக்கின்றது. இதன் பிறப்பாக்கிகளின் c நீளம் அமிழ்ந்துள்ளது. இக் குவளையின் அடியில் ஒரு மிகச் சிறிய துவாரம் ஆக்கப்படுகின்றது. இதனூடாக நீர் உட்புகும். ஆனுல் காற்றேதும் வெளியேருது. குவளையில் தொடக்கத்திலே வளிமண்டல அமுக்கத்தில் நிறையக் காற்றிருப்பின், குவளையில் நீர் $\frac{cl}{c+H}$ என்னும் ஆழம் உயர்ந்ததும் குவளை சமநிலையிலிருக்குமெனவும், $H > \frac{c^2}{l-c}$ ஆக இருந்தாலொழிய குவளை அமிழுமெனவும் காட்டுக. இங்கு, H நீர்ப் பாரமானி உயரம். (N.U.4)

15. தன்னீர்ப்பு s உள்ள ஒரு கோளம், மூடிய கீழ்முனையையுடைய ஒரு நிலைக்குத்துருளையிற் பொருந்துகின்றது. இக்கோளம் வளியமுக்கத்திலுற் சமநிலையிற் பேணப்படும் வரையில் மெதுவாக விழவிடப்படுகின்றது. இங்குப் பொசிவேதுமில்லை. கோளத்தின் விட்டம் d ஆகவும், உருளை நீளம் l ஆகவும், நீர்ப் பாரமானி உயரம் h ஆகவும் இருக்குமிடத்துள்ள தானத்தைக் காண்க. (H.S.C.)

16. நிறையக் காற்றுள்ள ஒரு கூம்புவடிவப் பாத்திரம் அதனுச்சியிலுள்ள ஒரு சிறிய துவாரத்திற்குக் காற்றுப்புகவிடாத் தடையாகவுள்ளது. இது உச்சி கீழ்முகமாயிருக்க, நீரில் வைக்கப்பட்டு மிதக்கின்றது. கூம்பினுள் நீர் 3 அடி உயருகின்றது. நீர்ப் பாரமானி உயரம் 34 அடியாக இருப்பின், அது நீரில் எவ்வாழத்திலிருக்கும் ? கூம்பின் நிலைக்குத்துயரம் 10 அடி ; அதன் அரையுச்சிக் கோணம் 30° ஆகும். கூம்பு வெறிதாக இருக்கும்போது அதன் நிறையையும் காண்க. (Ex.)

17. ஓர் ஆழ்மணியின் உட்புறப் பரிமாணங்கள் 10 அடி உயரமும் 5 அடி விட்டமுமாகும். இந்த ஆழ்மணி அதன் வாயானது நீர்ப் பரப்பிற்குக் கீழே 50 அடி ஆழத்திலிருக்கும் வரை நீரில் அமிழ்த்தப்படுகின்றது. வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 100 கன அடி நீரைக் கொள்ளும் காற்றின் ஓர் அளவு, மணிக்குள் இறைக்கப்படுகின்றது மணியின் வாய்க்கு மேலாக மணியினுள்ள நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க. நீர்ப் பாரமானி உயரம் 33 அடியாகும். மணியின் நிறை 9000 இரு. ஆகவும் அதன் தன்னீர்ப்பு 7·5 ஆகவுமிருப்பின், அது கொண்டுள்ள காற்றின் நிறையையும் அதன் சங்கிலியின் நிறையையும் தவிர்த்துச் சங்கிலியின் இழுவையைக் காண்க. (Ex.)

18. மேலே அடைக்கப்பெற்றும் கீழே திறந்துமுள்ள இரு சம உருளை வடிவ ஆழ்மணிகள் நீரில் மட்டுமட்டாக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளன. உட்புறத்தில், வெளிப்புறமாகவுள்ள மட்டத்திற்கு முறையே 4 அடிக்கும் 7 அடிக்கும் கீழே நீருள்ளது. இம்மணிகள் உட்புறத்தில் ஒரு குழாயினுல் தொடுக்கப்பட்டிருப்பின், புதிய நீர் மட்டத்தைக் காண்க. (நீர்ப் பாரமானி உயரம்=33 அடி.)

19. பூரணமின்றிய வெற்றிடமுள்ள ஒரு பாரமானி, உண்மையான அளவீடுகள் $a+\alpha$, $b+\beta$ ஆகியவற்றை முறையே a, b எனக் காட்டுகின்றது. தவருன இப்பாரமானியின் அளவீடு c ஆக இருக்கும் போது உண்மையான அளவீடு யாது ?

20. ஒரு பொள் வட்டவுருளைவடிவ ஆழ்மணி, W நிறையும் h உயரமும் $\pi a^2 h$ கனவளவுமுள்ளது. இது நீரின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக்கீழ் k ஆழத்திலிருக்கும் இதன் மூடிய மேல்வட்டமுனை மையத்துடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஒரு சங்கிலியினுலே தாங்கப்படுகின்றது. இவ்வுருளையில் தொடக்கத்திலே வளிமண்டல அமுக்கம் l இல் காற்று நிரப்பப்பட்டிருப்பின், உருளையிலுள்ள காற்றின் கனவளவு

$$\tfrac{1}{2}\pi a^2\left[\sqrt{(k+l)^2+4lh}-(k+l)\right]$$

எனக் காட்டி, சங்கிலியின் இழுவையைக் காண்க. இங்கு, l நீர்ப் பாரமானி உயரம்.

§243. ஒரு வாயுவைக் கொண்டிருக்கும் ஓர் உருளைவடிவப் பாத்திரத்தின் சுவர்களிலுள்ள இழுவை.

ஒரு வாயுவினிடத்து உட்புறமாகவுள்ள முழு உட்பரப்பின்மீதும் அமுக்கச் செறிவு சீராக இருக்கின்றது. வட்டமான குறுக்குவெட்டு முகத்திலிருந்து திரிவுக்கிடமேதுமில்லை.

உள்ளமுக்கச் செறிவு p ஆயின், அவ்வுருளையின் ஆக்கப் பொருளில் ஒரு பரிதி வழி இழுப்பும் ஒரு நெட்டாங்கிழுப்பும் ஏற்படுத்தப்படும்.

இவ்விழுப்புக்களை ஓரலகு நீளத்திற்கு T, T′ என்க.

T ஐத் தீர்மானிப்பதற்கு, உருளையின் l நீளம் ஒரு விட்டத் தளத்திஞல் இரு பாதிகளாகப் பிரிக்கப்படுவதாகக் கருதலாம். இப்பாதி எதினதும் சமநிலையை எடுத்துநோக்குக.

ஆரை r ஆயின், ஒரு பாதியின் வளைபரப்பு மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு, தள அடியின் குறுக்கேயுள்ள உதைப்பிற்கு, அ–து. $2plr$ இற்குச் சமம். இது விட்டத் தளத்தின் விளிம்பொவ்வொன்றின் வழியேயுமுள்ள இழுப்பு $\mathrm{T}l$ இனுற் சமன்செய்யப்படுகின்றது.

$$\therefore\ 2\mathrm{T}l = 2plr,$$

$$\therefore\ \mathrm{T} = pr.$$

அந்நெட்டாங்கிழுப்பானது தள முனைகளிலொன்றின் சமநிலையை எடுத்துநோக்கிப் பெறப்படுகின்றது.

ஒரு தள முனைமீதுள்ள விளையுளுதைப்பு $\pi r^2 p$ ஆகும். இது வட்டமான முனையின் பரிதியைச் சுற்றிச் செயற்படும் நெட்டாங்கிழுப்பு $2\pi r\mathrm{T}'$ இனுற் சமன் செய்யப்படுகின்றது.

$$\therefore 2\pi r T' = \pi r^2 p,$$
$$\therefore T' = \tfrac{1}{2} r p.$$

எனவே நெட்டாங்கிழுவை பரிதிவழி இழுவையின் பாதியாகும்.

ஓர் உருளைவடிவக் கொதிகலனில் பரிதிவழி இழுப்பிணைத் தடுக்கும் மூட்டுக்களும் தறையல்களும் சேர்ந்து நெட்டாங்கிழுப்பிணைத் தடுக்கும் அவைகளின் வலிமையினும் இருமடங்கு வலிமையுடையனவையாக இருக்க வேண்டும்.

244. வாயுவைக் கொண்டுள்ள ஒரு கோளப் பாத்திரத்திலுள்ள இழுவை.

அமுக்கச் செறிவை p எனவும் கோளத்தின் ஆரையை r எனவும் கொள்க. அக்கோளம் ஒரு விட்டத் தளத்தினுல் இரு பாதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கருதுக. இப்பாதியெதினதும் சமநிலையை எடுத்து நோக்குக.

இவ்வரைக்கோளங்களிலொன்றின் மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு அதன் தள அடிக்குக் குறுக்கேயுள்ள விளையுளுதைப்பிற்கு, அ-து. $\pi r^2 p$ இற்குச் சமம்.

இது அடியின் பரிதியைச் சுற்றி ஓரலகு நீளத்திற்கு T ஆகச் செயற்படும் இழுவையினுற் சமன்செய்யப்படுகின்றது.

$$\therefore T 2\pi r = \pi r^2 p,$$
$$\therefore T = \tfrac{1}{2} r p.$$

இவ்விழுவை உருளையினுள்ள பரிதிவழி இழுவையின் பாதியாகும். எனவே ஓர் உருளைவடிவக் கொதிகலனனது அரைக்கோள முனைகளை உடையதாகவிருப்பின், இம்முனைகள் உருளைவடிவப் பகுதியினது பாதித் தடிப்புள்ளனவாகவே இருக்கவேண்டும்.

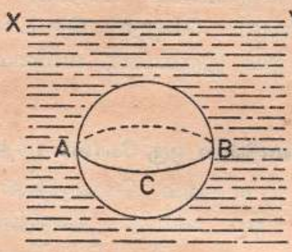
உதாரணம்.

தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ள ஒரு பொட் கோளம் ஒரு மத்திய கோட்டு வட்டவழியே ஒருமிக்கப் பொருந்தும் இரு அரைக்கோளங்களை உடையது. இது தவிர்க்கத்தக்க நிறையுள்ளதும் n வளிமண்டலங்கள் அமுக்கமுள்ளதுமான ஒரு வாயுவினுல் நிரப்பப்பெற்று, விளிம்புகள் கிடைத் தளமொன்றிலிருக்குமாறு நீரில் அதிக ஆழத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அக்கோளத்தின் கீழ்ப்பாதியில் ஒரு விசையைப் பிரயோகித்து அதனை நீரினூடாகப் படிப்படியாக உயர்த்தின், அவ்விரு அரைக்கோளங்களும் அவற்றின் விளிம்புகளின் தளம் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழே

$$(n-1) H + \tfrac{2}{3} a$$

ஆழத்திலிருக்குமிடத்துப் பிரியுமெனக் காட்டுக. வளிமண்டல அமுக்கம் H உயரமுள்ள நீர் நிரலினுலாகும்.

ABC, (படம் 324) மத்திய கோட்டு வட்டமெனவும், XY நீர்ப் பரப்பெனவும், x பரப்பிற்குக்கீழாக ABC இன் ஆழமெனவும், கொள்க. w நீரின் தன்னிறையாயின், மேலுள்ள அரைக்கோளமீதுள்ள விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பு $= \pi a^2(x+\mathrm{H})w - \frac{2}{3}\pi a^3 w$.



படம் 324.

உள்ளடக்கப்பெற்ற காற்றின் மேன்முக நிலைக்குத்துதைப்பு $= \pi a^2 n\mathrm{H}w$.

$$\pi a^2(x+\mathrm{H})\,w - \tfrac{2}{3}\pi a^3 w = \pi a^2 n\mathrm{H}w,$$

அல்லது
$$x + \mathrm{H} - \tfrac{2}{3}a = n\mathrm{H},$$

அல்லது
$$x = (n-1)\mathrm{H} + \tfrac{2}{3}a$$

ஆக இருக்கும்போது அவ்வரைக்கோளங்கள் பிரியும்.

§245. குத்துயரம் அதிகரிக்குந்தோறும் வளிமண்டல அமுக்கச் செறிவு குறைதல்.

வளிமண்டலத்தில் யாதுமொரு மட்டத்திற்கு மேலே காற்றுக் குறைவாக இருப்பதனால், அம்மட்டத்திலிருக்கும் புள்ளிகளிலுள்ள அமுக்கச் செறிவானது கீழ் மட்டமொன்றிலிருக்கும் புள்ளிகளிலுள்ளதிலும் குறைவாகும். எனினும், வளிமண்டலம் அடர்த்தியில் ஏகவினமாய் இல்லாதிருப்பதனால் இக்குறைவானது ஒரு திரவத்திலுள்ளதைப் போன்று சீரற்றது.

மிக்க ஆழங்களைத் தவிர மற்றவைகளினிடத்து திரவங்கள் சிறிதளவாகவே நெருக்கப்படக்கூடியவை. இதனால், நெருக்கத்தையும் இதன் விளைவாகத் திரவத்தின் மேற்படைகளின் அமுக்கத்தினால் அடர்த்தியிலேற்படும் மிகுதிப்பாட்டையும் புறக்கணித்து, எல்லா ஆழங்களிலும் அடர்த்தி சமமாகுமென மேற்கொள்கின்றோம்.

ஒரு வாயுவினிடத்து இந்நெருக்கத்தைப் புறக்கணிக்க முடியாது.

p_0, ρ_0 ஆகியன முறையே தரையிலும், p, ρ ஆகியன z உயரத்திலும் உள்ள அமுக்கச் செறிவும் அடர்த்தியுமாயின்,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(i)}$$

($p = \frac{1}{2}p_0$ ஆயின், $\rho = \frac{1}{2}\rho_0$ ஆகும். எனவே இவ்வடர்த்தியானது தரையிலுள்ளதின் பாதியேயாகும்.)

குத்துயரம் மேலும் dz ஆல் அதிகரிக்கின், அமுக்கம் dp இனல் மாறும். அதோடு இச்சிறிய தூரம் dz எங்கும் அடர்த்தி ρ மாருதுள்ளதென மேற்கொள்ள, வித்தியாசம் dp ஆனது காற்றின் ஆழம் dz இன் நிறையின் வித்தியாசத்திற்கு, அ-து. $g\rho dz$ இற்குச் சமம்.

$$\therefore dp = -g\rho\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

இங்கு, அமுக்கம் குறைகின்றமையாற் சயக் குறி உபயோகப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

எனவே, (i) ஐப் பயன்படுத்த

$$dp = -\frac{gp\rho_0}{p_0}dz,$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}dz.$$

தொகையிட,
$$\text{மட}\ p = -\frac{g\rho_0}{p_0}z + c.$$

$z = o,\ p = p_0$ என்பதனல்,

$$c = \text{மட}\ p_0,$$

$$\therefore \text{மட}\frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0}z,$$

$$\therefore p = p_0 e^{-\frac{g\rho_0}{p_0}z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

வளிமண்டலம் ஏகவினமானதாய், அ-து. அதன் அடர்த்தியானது எங்கும் ஓரேயளவினதாகவும் தரையிலுள்ளதிற்குச் சமமாகவுமிருப்பின், வளிமண்டத்தின் உயரம் H என்பது,

$$p_0 = \mathrm{H}g\rho_0,$$

அல்லது
$$\mathrm{H} = \frac{p_0}{g\rho_0}$$

இனலே தரப்படும். இங்கு, p_0 தரையிலுள்ள அமுக்கம்.

இவ்வுயரம் H ஆனது **ஏகவின வளிமண்டலத்தின் உயரம்** எனப்படும்.

இக்கணியத்தைச் சமன்பாடு (iii) இற் பயன்படுத்த,

$$p = p_0 e^{-\frac{z}{\mathrm{H}}}.$$

தரையில் சதுர அடிக்கு இரு. நிறையில் p_0 இன் பெறுமதி $14\frac{1}{2}\times 144$ ஆகும்.

தரையில் கன அடிக்கு இருத்தலில் ρ_0 இன் பெறுமதி $0{\cdot}0013\times 62\frac{1}{2}$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ H} = \frac{14\frac{1}{2} \times 144g}{0{\cdot}0013 \times 62\frac{1}{2}g} = \frac{29}{0{\cdot}0026} \times \frac{288}{125} \text{ அடி}$$

$$= \frac{29 \times 288}{0{\cdot}0026 \times 125 \times 5280} \text{ மைல்}$$

$$= 4{\cdot}9 \text{ மைல்.}$$

பயிற்சி LII.

h உயரமுள்ள ஓர் உருளையில், மாறு வெப்பநிலையில் வாயு நிரப்பப் பெற்றுள்ளது. அதனடியில் வாயுவின் அடர்த்தியும் அமுக்கமும் முறையே ρ_0 உம் p_0 உம் ஆயின், அதனுச்சியில் அடர்த்தி

$$\rho_0 \, e^{-kh}$$

என நிறுவுக. இங்கு $k = g\,\frac{\rho_0}{p_0}$. (C.W.B.)

பயிற்சி விஞக்களுக்கு விடைகள்

பயிற்சி I. (ப. 11)

(1) (i) 15 ; (ii) 12 ; (iii) 13 ; (iv) 10 ; (v) கோசை$^{-1}$ $(-\frac{2}{5})$; (vi) $\sqrt{58}$.

(3) (i) 120° ; (ii) 60°.

(4) $Q = \sqrt{3}P$.

(5) 15 இரு. நிறை, 9 இரு. நிறை, கோசை$^{-1}$ $(-\frac{3}{5})$.

(6) ஒவ்வொரு முனைமீதும் 20 இரு. நிறை.

(7) மேல் முனைமீது $10\sqrt{3}$ இரு. நிறை ; கீழ் முனைமீது 10 இரு. நிறை.

(8) கோசை$^{-1}$ $(\frac{7}{15})$.

(10) 120°.

(11) 4 இரு. நிறை, கோசை$^{-1}$ $(-\frac{3}{5})$.

(12) $\sqrt{76}$ இரு. நிறை.

(13) 10·3 இரு. நிறை.

(14) $4\sqrt{3}$ இரு. நிறை, 4 இரு. விசைக்குச் செங்குத்தாக.

பயிற்சி II. (ப. 21)

(1) 7·7 இரு. நிறை, 29°.

(2) 10 இரு. நிறை, 4 இரு. விசையோடு தான்$^{-1}$ $(\frac{3}{4})$ இல்.

(3) 7 இரு. நிறை, 13 இரு. விசைக்கும் 10 இரு. விசைக்கும் இடையே 13 இரு. விசையோடு தான்$^{-1}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{11}\right)$இல்

(4) 9·198 இரு. நிறை.

(5) 63·5 இரு. நிறை, 13° 57′ மே. இன் தெ.

(6) 20 இரு. நிறை, AB உடன் 60° இல்.

(7) 57·2 இரு. நிறை, 49° 39′ கி. இன் தெ.

(8) A மீது 23·9 இரு. நிறை, B மீதும் C மீதும் 10 இரு. நிறை, D மீது $10\sqrt{3}$ இரு. நிறை.

(9) $\sqrt{3}$ F ; தான்$^{-1}(3-2\sqrt{2})$.

(10) 112·8 இரு. நிறை, தான்$^{-1}$ $3(\sqrt{2}-1)$ கி. இன் தெ.

(11) 12·17 இரு. நிறை, $25\frac{1}{4}°$.

(12) 6·3 இரு. நிறை, 2 இரு. விசையோடு தான்$^{-1}\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)$ இல்.

(13) $\sqrt{281}$ இரு. நிறை, AB உடன் தான்$^{-1}\left(\dfrac{16}{5}\right)$இல்.

(14) 8 இரு. நிறை, GA வழியே.

பயிற்சி III. (ப. 27)

(1) 16 இரு. நிறையும் 12 இரு. நிறையும்.

(2) 72 இரு. நிறையும் 54 இரு. நிறையும்.

(3) 24 இரு. நிறையும் 10 இரு. நிறையும்.

(5) 7·8 இரு. நிறையும் 6·6 இரு. நிறையும்.

(6) 96 இரு. நிறையும் 28 இரு. நிறையும்.

(7) (*a*) $5\sqrt{3}$ இரு. நிறை ; (*b*) $10\sqrt{3}$ இரு. நிறை.

(8) $W = 6$, $6\sqrt{3}$ இரு. நிறை.

(9) 8·1 இரு. நிறையும் 5·5 இரு. நிறையும்.

(10) AC இல் 9·03 இரு. நிறை ; BC இல் 7·1 இரு. நிறை.

(12) (i) $7\frac{1}{2}$ இரு. நிறை, 6 இரு. நிறை ; (ii) 60 இரு. நிறை, 36 இரு. நிறை ; (iii) 2·89 தொன் நிறை, $2\frac{1}{2}$ தொன் நிறை.

(13) 10 இரு. நிறை, $10\sqrt{3}$ இரு. நிறை.

(14) முதலிழைக்குச் செங்குத்தாக ; $5\sqrt{3}$ இரு. நிறையும் 5 இரு. நிறையும்.

(15) 60·2 இரு. நிறை.

(16) $5\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ இரு. உம் $10(\sqrt{3}-1)$ இரு. உம்.

(17) $6\frac{1}{4}$ இரு. நிறை, $P = 5$ இரு. நிறை.

(18) $7\frac{8}{31}$ இரு. நிறை.

பயிற்சி IV. (ப. 34)

(1) 10 இரு. நிறை, 8·96 இரு. நிறை.
(2) 0·25.
(3) 4·85 இரு. நிறை.

பயிற்சி V. (ப. 38)

(1) $\frac{1}{4}$.
(2) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ இரு. நிறை.
(3) (*a*) 8·8 இரு. நிறை ; (*b*) 15·2 இரு. நிறை.
(4) $\frac{\sqrt{3}}{15}$.
(5) 12 இரு. நிறை, 213 இரு. நிறை.
(6) 73·57 இரு. நிறை.
(9) தளத்துடன் தான்$^{-1}$ $(\frac{1}{4})$; 112 இரு. நிறை.
(10) சைன் α = சைன் $\beta + \mu$ கோசைβ.
இங்கு, μ உராய்வுக் குணகம் ; α ஒப்பமான தளத்தின் சாய்வு.
(12) (i) 0·53 ; (ii) 34·9 இரு. நிறை.
(13) $P = W\frac{\text{சைன் } \alpha + \mu \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \beta + \mu \text{ சைன் } \beta}$;
$Wl \text{ கோசை } \beta\frac{\text{சைன் } \alpha + \mu \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை } \beta + \mu \text{ சைன் } \beta}$;
4537 அடி இரு.
(14) கோசை $\lambda = \frac{PW}{Q\sqrt{P^2 + W^2}}$.
(15) 52° 30′, 7° 30′, தளத்துடன் $7\frac{1}{2}$° இல் $\frac{W}{\sqrt{2}}$.
(16) $2R\alpha$ (α, ஆரையனில்).
(17) 0·3535 ; 2·192 இரு. நிறை.
(18) 20 இரு. நிறை, 28·66 இரு. நிறை.

பயிற்சி VI. (ப. 48)

(1) 11 இரு. நிறை, 14 அங்குலம் A இலிருந்து ; 3 இரு. நிறை, B இற்கப்பால் $51\frac{1}{3}$ அங். A இலிருந்து.
(2) 21 இரு. நிறை, 24 அங். A இலிருந்து ; 3 இரு. நிறை, B இற்கப்பால் 168 அங். A இலிருந்து.
(3) 4 இரு. நிறை, நீட்டப்பெற்ற BA இல் 24 அங். A இலிருந்து.
(4) 12 இரு. நிறை, 8 இரு. விசையிலிருந்து 10 அங்.
(5) 15 இரு. நிறை, 5 இரு. நிறை ; 15 இரு. விசையானது விணையுளிலிருந்து 1 அடியிலுள்ளது.

பயிற்சி VII. (ப. 54)

(1) A, B, C ஐக் குறித்து முறையே 32 இரு. அங்., 64 இரு. அங்., 16 இரு. அங்.
(2) 180 இரு. அங்., 180 இரு. அங்.
(3) $5\sqrt{3}$ இரு. அடி.
(4) 18 இரு. அடி, பூச்சியம்.
(5) 5 இரு. அடி, 3 இரு. அடி.
(6) $21\sqrt{3}$ இரு. அடி, $21\sqrt{3}$ இரு. அடி.

பயிற்சி VIII. (ப. 58)

(1) 3 இரு. நிறைக்குக் கிட்டிய தாங்கிமீது 7 இரு. நிறை ; மற்றதன்மீது 6 இரு. நிறை.
(2) A இல் 20 இரு. நிறை ; மற்றதன்மீது 40 இரு. நிறை.
(3) கிட்டவுள்ளதின்மீது 140 இரு. நிறை ; மற்றதன்மீது 84 இரு. நிறை.
(4) 75 இரு.
(5) A இல் $7\frac{1}{3}$ இரு. நிறை ; B இல் $10\frac{2}{3}$ இரு. நிறை.
(6) தூரங்கள் அளக்கப்படும் முனையிலிருந்து $2\frac{25}{26}$ அடி.
(7) 5 இரு. நிறை, நீட்டப்பெற்ற DA இல் A இலிருந்து 14 அடியில்.
(8) A இலிருந்து $7\frac{7}{12}$ அடி.
(9) 2 அடி.

(10) C இல் $14\frac{7}{10}$ இரு. நிறை ; D இல் $9\frac{3}{10}$ இரு. நிறை ; 41·2 இரு.-அங்.

(11) மையத்தின் பக்கமெதிலும் $\frac{15}{17}$ அடி .

(13) இழையெதற்கும் 7 அங். இலும் இட்ட வன்று.

(14) திருப்புதிறன் 37 இரு.-அடி உள்ள ஓர் இணை; 10 இரு. நிறை, -3·7 அடி O இலிருந்து.

(16) 4 இரு. நிறையிலிருந்து தொலைவி லுள்ள ஊன்று கோல்மீது $9\frac{1}{3}$ இரு. நிறை ; இட்டவுள்ளதன்மீது $14\frac{2}{3}$ இரு. நிறை.

(17) 26 இரு. உம் 14 இரு. உம்.

(18) 25 இரு.

(19) $p+q$.

(20) AC = 2 அடி, DB = 1 அடி.

(21) 20 இரு., 6 அடி.

(22) B இல், $\frac{48+9W_1-3W_2}{7}$;

C இல், $\frac{36+10W_2-2W_1}{7}$;

ஒவ்வொன்றும் 6 இரு. இற்குச் சமன்.

(23) $1\frac{8}{17}$ அடி.

(24) 60°.

(25) தூரங்கள் அளக்கப்படும் முனையிலிருந்து 8 அடியில் 25 இரு. நிறை ; இம்முனை யில் 15 இரு. நிறை, மற்றயை முனை யில் 10 இரு. நிறை.

பயிற்சி IX. (ப. 69)

(1) $\frac{1}{20}$.

(3) M இலிருந்து A ஐ நோக்கி a, $2a$, முத லிய தூரங்களைக் குறிக்க. a, C இலி ருந்து BD இன் நடுப்புள்ளியின் தூரம்.

(5) x, 14 இரு. இலும் குறையலாகாது. $x = 14\sqrt{2}$ இரு.

(7) 28 இரு., மையத்திலிருந்து $\frac{5}{7}$ அடி.

(9) $\frac{1}{4}$ அங். ; $W_0 = 4W_1$.

பயிற்சி X. (ப. 82)

(1) 241·4 இரு.

(2) A, B, C மீது முறையே

$\left(\frac{80}{3}+12\sqrt{3}\right)$ இரு. நிறை,

$\left(\frac{80}{3}+20\sqrt{3}\right)$ இரு. நிறை,

$\left(\frac{440}{3}-32\sqrt{3}\right)$ இரு. நிறை.

(3) மேசையின் நிறைக்குச் சமமான ஒரு நிறை.

(5) 40 இரு.

(6) $33\frac{1}{3}$ இரு. ; 200 இரு.

(7) 29·86 இரு.

பயிற்சி XI. (ப. 97)

(1) 45°.

(2) தான்$^{-1}$ $(\frac{3}{2})$; கிடையுடன் தான்$^{-1}(\frac{4}{3})$ இல் கோலின் நிறையின் $1\frac{1}{4}$ மடங்கு.

(4) W சைன் 15° ; W கோசை 15°, நிலைக் குத்தோடு 15° இல்.

(8) $4\frac{3}{8}$ இரு. நிறை.

(9) 5 தான் 40°=4·2 இரு. நிறை கிட்டத் தட்ட.

10·8 இரு. நிறை, கிடையுடன் 67° 14′ இல்.

(10) $\frac{1}{6}$W ; $\frac{\sqrt{37}}{6}$W; கிடையுடன் தான்$^{-1}$ 6 இல்.

(11) $\frac{\sqrt{3}}{3}$W ; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$W ; கிடையுடன் 60° இல்.

(12) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$W ; $\frac{\sqrt{3}}{3}$W.

(15) $7\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

(16) 154·27 இரு. நிறை ; 358·3 இரு. நிறை, கிடையுடன் 65° 31′ இல்.

(18) ஒவ்வொன்றும் 1·23 அடி.

(19) ACB = 90°, அதோடு C இற்குக் கீழே B உள்ளது.
மிகக் குறைவான அமுக்கம் = W சைன் α.

(21) $3\frac{1}{8}$ இரு. நிறை.

(22) 41 இரு. நிறை, 9 இரு. நிறை.

(24) தான் $^{-1}(\frac{1}{3})$.

(25) AB இற்குச் செங்குத்தாக ;
$$\frac{w}{2}\sqrt{4-3\text{ சைன்}^2\theta}.$$

(26) 2 இரு. நிறை ; $\sqrt{3}$ இரு. நிறை.

(27) 20 $\sqrt{3}$ இரு. நிறை, 30° தளத்தின்மீது ; 20 இரு. நிறை, 60° தளத்தின்மீது ; கிடையுடன் 30° இல்.

(28) தான் $^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

(29) $\sqrt{\frac{7}{12}}$ W.

பயிற்சி XII. (ப. 113)

(1) 66 இரு. நிறை ; 61 இரு. நிறை, கிடையோடு தான் $^{-1}\frac{25}{56}$ இல்.

(2) 3 இரு. நிறை ; கிட்டத்தட்ட $18\frac{1}{4}$ இரு. நிறை, கிடையோடு தான் $^{-1}$ 6 இல்.

(4) $22\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

(6) 30° தளத்தின்மீதுள்ள முனேயிலிருந்து சட்டத்தினது நீளத்தின் $\frac{1}{8}$.

(8) $10\frac{1}{2}$ இரு. நிறை, 14 இரு. நிறை, நிலேக்குத்தாக.

(9) $R_1 = \frac{67}{56}$ W ; $R_2 = \frac{45}{56}$ W.

(10) சைன் $^{-1}\left(\frac{m+n}{m}\text{ சைன் }\theta\right)$; 0·73.

(11) உருளே மையத்தையும் ஒரக் கல் விளிம்பையும் இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக.

(12) உருளே மையத்தையும் படி விளிம்பையும் இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக, 1 : 2. படியில் தவிர தரையில் நழுவ இடமில்லே.

(14) 328 இரு. நிறை, 75° கி. இன் தெ.; 978 இரு. நிறை.

(15) $(8-\sqrt{3})$ இரு.

பயிற்சி XIII. (ப. 126)

(1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ W, அடிக்கோட்டில் கிடையானது ;
ஒவ்வொரு மேல் மூட்டிலும் $\frac{\sqrt{39}}{6}$ W, கிடையுடன் தான் $^{-1}\,2\sqrt{3}$ இலுள்ளது.

(2) AC இல் 2W ; $\frac{W}{2}$, B இலும் D இலும் கிடையானது.

(3) இழையில் இழுவை = 2W. B இலும் D இலும் மறுதாக்கம் = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ W கிடையாக.

(4) W ; W, A இலும் C இலும் நிலேக்குத்தானது ; W, B இற் கிடையானது.

(5) $\frac{3}{4}$W.

(6) மறுதாக்கங்களின் கிடை, நிலேக்குத்துக் கூறுகள் முறையே B இல்,
$$\frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}W,\ \frac{a^3-b^3}{2(a^2+b^2)}W;$$
C இல்,
$$\frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}W,\ \frac{a^3+2a^2b+b^3}{2(a^2+b^2)}W;$$
A இல்,
$$\frac{ab(a+b)}{2(a^2+b^2)}W,\ \frac{a^3+2ab^2+b^3}{2(a^2+b^2)}W.$$

(7) $W\left(1+\frac{b}{2a}\right)$; $W\left(2-\frac{b}{2a}\right)$;
$$\frac{c(a+b)}{2a\sqrt{a^2-c^2}}W.$$

(9) 2W ; பிணையலிலுள்ள தாக்கத்தின் இடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் 2W உம் $\frac{5}{3}$ W உம்.

(12) B அல்லது E இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் இடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே

$$\frac{W}{4\ \text{கோசை}\ 18}\ \text{உம்},\ W\left(\frac{1}{4\ \text{சைன்}\ 18}-\frac{1}{2}\right)\text{உம்}.$$

(13) A இலும் D இலும் $\frac{\sqrt{7}}{2}w$;

B இலும் C இலும் $\frac{\sqrt{19}}{2}w$.

(14) B இற்குக் கிட்டிய பக்கத்தில் $\frac{1}{2}$ அங். தகைப்புக்களின் இடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் முறையே :—

A இல், $\frac{84}{10}$ அவு. நிறையும் $\frac{187}{10}$ அவு. நிறையும்;

B இல் $\frac{84}{10}$ அவு. நிறையும் $\frac{163}{10}$ அவு. நிறையும்;

C இல், $\frac{84}{10}$ அவு. நிறையும் $\frac{37}{10}$ அவு. நிறையும்;

(15) W கோதா α ; W கோசீ α.

(16) $\frac{W}{2}\left(\text{தான்}\ \alpha+\frac{a}{c}\ \text{கோசீ}^2\ \alpha\right)$.

(17) 2 இரு. நிறை, 2 இரு. நிறை.

(20) W மட்டுமே தொடும் தளத்தின் மறுதாக்கம் $\frac{1}{2}(W+W')$ சீக α ; W இற்கும் மற்றைய தளத்திற்குமிடையே $\frac{1}{2}(W-W')$சீகα ; W′ இற்கும் தளத்திற்குமிடையேW′ சீக α ; உருளைகளுக்கிடையேW′ தான் α.

(23) 23·48 இரு. நிறை.

(25) (i) 4·03 இரு. நிறை இடையாக ;
(ii) 10 இரு. நிறை நிலைக்குத்தாக ;
(iii) 4·03 இரு. நிறை.

(26) Wa கோசை θ (1 − கோசை θ சைன் θ − கோசை $^2\ \theta$).

(30) P = (3 கோசை $\theta+\sqrt{3}$ சைன் θ) இரு. நிறை.
(i) 30° ; (ii) 120°.

(31) D, B இரண்டிலும் 400 இரு. நிறை இடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவுமுள்ளது.

(32) $\frac{1}{4}(W_1+W_2)$ தான் α.

(33) B இலிருந்து 2 அடி ; 5 இரு. நிறை.

(34) கீழுருளைகள் பிரியும், மேலுருளை இறங்கும்.

(35) 5 இரு. நிறை இடையாக.

(36) கோசை$^{-1}\left(\frac{M}{2M+m}\right)$.

பயிற்சி XIV (ப. 140)

(1) B இற்கு எதிரேயுள்ள பக்கத்தில் A இலிருந்து 0·74 a.

(2) ஒவ்வொன்றும் $\frac{12P}{5}$ இற்குச் சமமான ஓர் இணையை அமைக்கும் 2 விசைகள்.

(3) $2\frac{1}{2}$ அடி.

(4) சதுரத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கத்தில் AB உடன் 70° 42′ இல் 6·05.

(5) BC ஐ விகிதம் 1 : 2 இற் பிரிக்கின்றது.

(6) $24\sqrt{2}$ இரு. நிறை.

(7) 30 இரு. நிறை.

(8) 57·6.

(9) 2·37 P, அது B இலிருந்து $\frac{7}{8}$ BC இல் BC ஐ வெட்டுவதோடு, BC உடன் தான்$^{-1}\frac{\sqrt{15}}{5}$ கோணத்தினை அமைக்கின்றது.

(10) C இலிருந்து D வரை 1, C இலிருந்து B வரை 1, A இலிருந்து D வரை 1.
(i) BC வழியே 2 ; (ii) சதுரத்தினது பக்கத்தின் இரு மடங்கு திருப்பு திறன் கொண்ட இணை.

(11) B இலிருந்து A வரை விசை 36 ; 53 இரு. நிறை, கிட்டத்தட்ட.

(13) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ அடி ; $5\sqrt{2}$ இரு. நிறை.

(14) 2 இரு. நிறை, D இலிருந்து A வரை.

(16) 2P, BD இற்குச் செங்குத்தாக D இலிருந்து $\frac{BD}{2}$ தூரத்தில்.

(18) 6F, AB உடன் தான்$^{-1}\frac{5\sqrt{5}-9}{8}$;
A இற்கப்பால் AB இன் 3·17 ;
C இற்கப்பால் BC இன் 0·27.

(20) DA உடன் ஏறக்குறைய 83° இல் 34·8 இரு. நிறை. இது அதனை D இலிருந்து 0·45AD இல் வெட்டுகிறது.

(22) 1 : 0·27 : 1 : 1·55.

(23) DA இற்குச் சமாந்தரமாக 2 இரு. நிறை. இது நீட்டப்பெற்ற BA ஐ A இலிருந்து 3AB தூரத்தில் வெட்டுகிறது.

(24) $\sqrt{3}$ இரு. நிறை ; 5 அடி.

(25) 2 அங்.

(26) P = Q ஆக இருக்கும் போது, அவை ஓர் இணைக்குச் சமானம்.

(27) C இல்.

(28) 7·6 இரு. நிறை ; 28·5 அங்.

பயிற்சி XV. (ப. 148)

(8) இன்னொரு வட்டம்.

(9) 6DG. இங்கு D, AB இன் நடுப்புள்ளி ; G, C இற்குக் கிட்டவுள்ள BC இன் முக்கூறிடும் புள்ளி.

(10) AC ஐச் செங்குத்தாக இருகூறிடும் கோடு, இங்கு C, AB இன் நடுப்புள்ளி.

(11) மையமானது, நாற்பக்கலினது எதிர்ப் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி G இலுள்ளது; ஆரை, PG.

(12) CF = AE.

(13) பூச்சியம்.

(16) AB உடன் தான்$^{-1}\frac{1}{3}$ இல் $\sqrt{10}$ இரு. நிறை. இது நீட்டப்பெற்ற AB ஐ A இலிருந்து 1·36AB இல் வெட்டுகின்றது.

பயிற்சி XVI. (ப. 159)

(2) 13 இரு. நிறை ; $\sqrt{173}$ இரு. நிறை.

(3) $2\frac{1}{2}$.

(4) $\frac{21\sqrt{3}}{2}a$. இங்கு a, அறுகோணியின் ஒரு பக்கம் ; 6, விசை 5 இற்குச் சமாந்தரம்.

(5) $\sqrt{\frac{G_1^2+G_2^2+G_3^2-G_2G_3-G_3G_1-\overline{G_1G_2}}{3a^2}}$.

(6) $N-xY+yX=o$.

(7) 50 ; நீட்டப்பெற்ற BA மீது 0·047 அடி, A இற்கும் D இற்குமிடையே 0·094 அடி.

(8) 2P, AB இற்குச் சமாந்தரமாக AD ஐ இருகூறிடுகிறது.

(10) 1 இரு. நிறை ; $\sqrt{3x}-y-\sqrt{3}a=o$.

(11) $3\frac{3}{4}$; 5.

(12) AB உடன் தான்$^{-1}$ $(-\frac{7}{5})$ இல் $\sqrt{74}$ இரு. நிறை ; 36 அலகுகள் இடஞ்சுழியாக.

(13) சதுரத்தின் இடைப் பக்கங்களுடன் 1° 36′ இல் 19·05 இரு. நிறை ; 23·11 அங்.-இரு. இடஞ்சுழியாக.

(14) திசை CO இல் 6 இரு. நிறை ; 36·37 அங்.-இரு. நிறை.

(15) 10, $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$.

(16) BC வழியே $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ இரு. நிறை,

AC வழியே $\frac{16\sqrt{5}}{15}$ இரு. நிறை,

AB வழியே $\frac{8\sqrt{5}}{15}$ இரு. நிறை.

(17) AB உடன் 180° + தான்$^{-1}$ $(\frac{7}{2})$ இல் $\sqrt{53}$; 5.

(18) BC இன் நடுப்புள்ளியில் உட்புறமாக 6 இரு. நிறை ; AC இன் நடுப் புள்ளியில் வெளிப்புறமாக 8 இரு. நிறை.

(20) (i) AB உடன் தான் $^{-1}$ (3) இல் $\sqrt{10}$ இரு. நிறை ; 18 இரு. நிறை அடி இடஞ்சுழியாக.

(ii) B இல் $\sqrt{160}$ இரு. நிறை ; C இல் $\sqrt{90}$ இரு. நிறை.

(23) 7·07 இரு. நிறை அடி.

பயிற்சி XVII. (ப. 172)

(1) 3·4 ; நீட்டப்பெற்ற BA உடன் 55°இல். A இலிருந்து 10·6 அங். இல் இது BA ஐ வெட்டுகின்றது.

(2) 29 இரு. நிறை ; BC உம் CD உம், +24·4 ; AB உம் AD உம், +16·9.

(3) 180 இரு. நிறை ; DB உடன் 100° 36′ இல் 128 இரு. நிறை.

(5) AB, $-w$; BC, $-w$; CD, $-0·62w$; DE, $-0·38w$; EA, $-0·62w$; BE, $+0·62w$; BD, $+0·62w$.

(6) 4·38 இரு. நிறை ; 9·6 இரு. நிறை.

(7) P = 50 இரு. நிறை ; AB, +86·6 ; AC, −100 ; BC, +173.

(8) நீட்டப்பெற்ற DA உடன் 37° 3′இல் 5·97 இரு. நிறை.

(9) AB உம் DC உம், −0·38 ; AD உம் BC உம், −0·76 ; BD, +0·66.

(10) AB உம் AD உம், +18·75 ; BC உம் CD உம், +25 ; AE, −22·5 ; BE உம் ED உம், −31·25.

(11) AB, −3 ; BC, −1·8 ; CD, −1·1 ; AC, +1·85.

(12) BD, +10 ; BC உம் AD உம், −8·3 ; AB உம் CD உம், −5·5.

(13) 5·9, 3 இரு. விசையுடன் 13°இல்.

(14) YD உம் YC உம், −1·73 ; AD உம் BC உம், −1·5 ; XD உம் XC உம், +0·86 ; XA உம் XB உம், −1·15; AB, −0·86.

(15) ஒவ்வொரு விசையும் = 10 இரு. நிறை, AB, BC, CD, DE, + 20 ; AC உம் CE உம், −11·55 ; AE, +5·77.

(16) BC உடன் 76° 6′ இல் 6·2 இரு. நிறை. இது BC ஐ B இற்கும் C இற்கு மிடையே B இலிருந்து $\frac{6}{7}$ அங். இல் வெட்டுகின்றது.

(17) தாங்கும் ஒவ்வோர் இழையினும் 21·21 இரு. நிறை ; AB இலும் AC இலும் 17·32 இரு. நிறை ; BC இல் 6·34 இரு. நிறை.

பயிற்சி XVIII. (ப. 178)

(1) 5, 4 இரு. நிறை விசைகளிடையே ; முன்னையதிலிருந்து 0·08 அடி.

(2) இடக்கை எல்லையில் 9·7 இரு. நிறை ; மற்றைய எல்லையில் 9·3 இரு. நிறை.

(3) 7, 4 இரு. நிறை விசைகளிடையே, முன்னையதிலிருந்து 0·24 அங் இல்.

(4) முனையிலிருந்து 3·6 அடி.

(5) தூரங்கள் அளக்கப்படும் முனையிலிருந்து 7·2 இரு. நிறை, மற்றைய முனையிலிருந்து 7·8 இரு. நிறை.

(6) 10·5 இரு. நிறையும் 8·5 இரு. நிறையும்.

(7) 2 இரு. நிறை விசையிலிருந்து 2·66அடி.

(8) முதலாம் 10 தொன் பாரத்திலிருந்து 16 அடி.

(9) 4 இரு. நிறைக்குக் கிட்டிய முனையிலிருந்து 6·3 அடி ; 4 இரு. நிறைக்குக் கிட்டிய முனையிலிருந்து 8·2 இரு. நிறை, மற்றைய முனையிலிருந்து 13·8 இரு. நிறை.

(10) 18·2 அடி .

(11) A இல் 88·75 இரு. நிறை ; B இற்குக் கிட்டிய தாங்கியில் 211·25 இரு. நிறை.

பயிற்சி XIX. (ப. 188)

(1) AE, +358 ; AD, −320 ; EC, +134 ; ED, +223 ; CD, −150 ; CF, +268 ; FD, +56 ; FB, +324 ; DB, −145. மறுதாக்கங்கள், A இல் 160, B இல் 290.

(2) மறுதாக்கங்கள், A இல் 27·7, B இல் 22·3 ; AC, −28·3 ; AD, −7·7 ; CD, +20 ; AB, −20 ; BD, +3·6; DE, +17·3 ; BE, −15 ; BF, −20 ; EF, +17·3.

(3) மறுதாக்கம், A இல் 27·5, B இல் 22·5 ; AC, +55 ; AF, −48 ; CD, +25 ; CF, +30 ; DF, −25 ; DE, +25 ; EF, +20 ; EB, +45 ; FB, −38·2.

(4) D இல் மறுதாக்கம் = 1·12 ; A இல்= 1·0 ; AB, −1 ; BD, +0·7 ; BC, −0·7 ; DC, +0·5.

(5) AB, +11·5 ; BD, + 34·5 ; DE, + 11·5; DF, +23·0 ; CB, +11·5 ; EF, −11·5 ; CE, −11·5 ; AC, −23 ; CD, −11·5.

(6) OB, −60 ; AB, +42·3 ; AC, +30 ; BD, −20 ; BC, −14·2 ; CD, +14·2 ; CE, +10 ; DE, −14·2. A இல் மறுதாக்கம் = 66·9.

(7) AF, −40 ; AB, −20 ; BC, +20 ; BF, +28·3 ; FE, −20 ; CE, +14·1 ; CD, +10 ; ED, −14·1 ; CF, −20.

(8) A இல் மறுதாக்கம் = 126 ; AC, + 56·5 ; BC, −120 ; AD, + 80 ; CD, −56·5 ; CE, −40 ; DE, +28·2 ; DF, +20 ; EF, −28·2.

(9) AB, −0·5 W ; AC, +1·12 W ; BC, +W ; EB, −1·12 W ; CD, +3·3W ; EC, −1·4 W.

(10) TB, 1·03 ; TC, 1·10 ; TD, 1·25 ; TE, 1·4.

(11) AC, −4·62 ; BC, + 2·3 ; BD, +5·63 ; CD, −4.

(12) AB, +18 ; BF, +18 ; BG, −11·3; FG, −18 ; CG, +15.

(13) AF உம் BG உம் பூச்சியம் ; AD, +0·66 ; DF, −0·94 ; DE, +0·66 ; FE, −0·37 ; EG, +0·37 ; FG, −0·5 ; EC, +0·34 ; CG, −0·47 ; BC, +0·34.

(14) மறுதாக்கம், A இல் 0·6, B இல் 0·72 ; AD, −1·1 ; AC, + 1·32 ; DE, −1 ; CD, −0·20 ; EC, −0·20 ; BC, +0·5 ; EB, −1·1.

(15) CE, 2 ; EF பூச்சியம். AD, +14 ; DC, +10 ; AE, −12·1 ; DE, +4 ; EB, −8·7 ; CF, +10 ; BF, +10.

(16) 33°, +2·6.

(17) AB, +4 ; AF, −5·6 ; BC, +5 ; BE, −1·4 ; FE, −4 ; CD, +5 ; ED, −7 ; CE, பூச்சியம். BF, +1.

(18) AC, + 4·18 ; AE, + 14·26 ; ED, + 15·7 ; CD, − 11·83 ; BC, −16·01 ; CE, −3·53.

(19) மறுதாக்கங்கள், A இல் 1·87, B இல் 1·12 ; AC, + 2·16 ; AD, −1·08 ; CE, + 1·25 ; CD, −0·5 ; DE, +1 ; DB, −1·94 ; EB, +2·25.

(20) QR, −25·8 ; RS, + 27·5 ; QS, −28·5 ; PQ, −13·5 ; PS, + 19·6.

(21) AB உம் BC உம், −0·35 W ; AD உம் CD உம், + 0·35 W ; BD, −0·5 W.

(22) AB, −3·06 ; AD, −5·13 ; BC, −1·71 ; CD, −1·02 ; BD, + 3·61.

(23) 4 அந். உம் 12 அந். உம் ; AB, −2 ; AC, −6·9 ; BC, +3·5 ; CD, +6 ; AD, −10·4.

(24) AC, +433 ; BC, +750 ; AD, −1000 ; CD, +866.

(25) AC, +10·9 ; AD, −7·5 ; DC, −15·7 ; DB, −14·3 ; BC, +15·2.

(26) A இல் மறுதாக்கம் = 25·5 அந் ; AB, + 7 ; AD, + 20 ; BC, −20 ; BE, −35·4 ; BD, −30 ; CD, +28·2.

(27) AE, −10·4 ; AD, + 46·2 ; AB, + 11·5 ; AC, −26.

(28) AB, −12·5 ; AD, +60·6 ; BC, − 52; BD, +25 ; CD, +60.

(29) A இல் நிலைக்குத்தாய்க் கீழ்முகமாக 32 இரு. நிறை. AB, +60 ; AC, −68 ; BC, +32 ; BD, +100 ; CD, −60.

(30) AC, −43·2 ; BC, +30 ; BD, + 28·2 ; CD, −20 ; CE, −14·1 ; DE +10.

(31) AB, +17·3 ; AC, −8·6 ; BC, −5·8 ; BD, +11·5 ; CD, −11·5 ; CE, −5·8 ; DE, +11·5.

(32) AB, +20 ; AC, +7·0 ; BC, −10 ; BD, +14·1 ; CE, −7·0 ; DE, +10 ; CD, பூச்சியம்.

(33) தாங்கும் விசைகள், A இல் 25, B இல் 75 ; AB, +14·5 ; AD, −28·9 ; BD, +50 ; CD, −57·8 ; BC, −115·6.

(34) 10 இரு.

(35) D மீது 25·2 அந்., F மீது 29·8 அந். AD, +26 ; DE, −5·5 ; AE, −16·2 ; AB, +22·4 ; BE, +12·5 ; BC, +22·4 ; EC, −15·5 ; EF, −6·1 ; CF, +30·5.

(36) AC உம் BE உம், +7·1 ; AD உம் BD உம், +20 ; CD உம் DE உம், +5 ; AB, −22·3.

பயிற்சி XX. (ப. 204)

(1) CD, $+1\cdot75$; GD, $+0\cdot56$; GH, -2.

(2) AB, $+W$; AF, $+0\cdot52W$; AD, $-1\cdot5W$; BF, $+0\cdot57W$; DF, $+0\cdot57$ W; DE, $-1\cdot15$ W; இங்கு 2W, B இலே தாங்கப்படும் நிறை.

(3) AB, $+28$; AE, -25; BE, $-13\cdot5$; ED, $-15\cdot0$.

பயிற்சி (ப. 207)

AE, $+12\cdot3$; AF, $-8\cdot9$; EC, $+11\cdot3$; EF, $+1\cdot7$; FC, $-4\cdot8$; FG, $-4\cdot4$; CG, $-9\cdot5$; CD, $+14\cdot7$; GD, $+3\cdot6$; BD, $+15\cdot8$; BG, $-13\cdot6$.

B இல் மறுதாக்கம், 6·3 நிலைக்குத்தாக. A இல் மறுதாக்கங்கள், 5·1 நிலைக்குத்தாக, 2 கிடையாக.

பயிற்சி XXI. (ப. 221)

(1) தான் $^{-1}$ $(\frac{3}{2})$.

(3) எணி நிறையின் $\frac{2}{5}$.

(11) $6\frac{2}{3}$ இரு.

(12) பூச்சியம்; $\frac{1}{6}$W. சுவர், தரை இரண்டிலும் உராய்வு எல்லையுராய்வு.

(13) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ W; 100 இரு.

(15) பதின்மூன்றும் படி..

பயிற்சி XXII. (ப. 226)

(1) 2 தான் $^{-1}$ $(\frac{1}{16})$.

(4) $\frac{a}{2h} < \mu$.

(9) (i) வழுக்குதலால்;

(ii) உருச்சாய்த்தலால்.

(11) $\mu \not< \frac{1}{2}\frac{w}{W}$; $\sqrt{2\frac{a}{b}}$.

பயிற்சி XXIII. (ப. 229)

(1) $\frac{30}{59}$; நீளக் கோல் நழுவும்.

(2) $\frac{1}{2}$.

(4) A இல், $\frac{W\ (3+\text{கோசை } 2\alpha)}{4 \text{ கோசை } \alpha}$.

C இல், $\frac{W(3 \text{ கோசை } 2\alpha+1)}{4 \text{ கோசை } \alpha}$;

A இல், $\frac{5\sqrt{3}}{7}$.

பயிற்சி XXIV. (ப. 234)

(1) $\frac{\mu}{\text{கோசை } \alpha + \mu \text{ சைன் } \alpha}$.

(2) $P = W\sqrt{\mu^2 - n^2}$, தான் $^{-1}\frac{n}{\sqrt{\mu^2-n^2}}$.

(6) $\frac{W_1}{W} = \frac{\mu}{\text{கோதா } 2\theta - \mu}$.

(7) $\frac{1}{7}$.

(8) $\frac{m \text{ கோசை } \alpha\ (\text{சைன் } \alpha - \mu \text{ கோசை } \alpha)}{M + m}$.

(14) சைன் $^{-1}$ $(\frac{1}{3})$.

(17) $P = W(\sqrt{2}-1)$; இல்லை.

(18) $\mu = \frac{1}{3\mu' + 4}$.

(22) $\frac{1}{2}$.

(24) $\frac{\sqrt{2}}{2}P$; $\mu \not< \frac{P}{P+W}$.

(25) $\frac{Wa}{r}$ சைன்$^2\ \theta$.

(26) $(l - x)w + W$.

பயிற்சி XXV. (ப. 249)

(2) தான் $^{-1}\left(\dfrac{a \text{ சைன் } \theta}{a \text{ கோசை } \theta + h}\right)$.

(3) $\dfrac{\mu}{\mu'}W, \dfrac{a}{\mu' h}W$ ஆகியவற்றிற் சிறியது.

(8) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}; \dfrac{4-\sqrt{7}}{9}$.

(9) $\dfrac{W}{2 \text{ சைன் } \beta\,(\mu \text{ கோசை } \alpha - \text{சைன் } \alpha)}$.

(10) $X = \dfrac{Wa \text{ சைன் } \lambda}{b - a \text{ சைன் } \lambda}$.

(12) $R\lambda \pm \dfrac{m}{M+m}l$, C இன் இரு பக்கமீதும். $+$ குறி m தொங்கவிடப் பெற்றுள்ள பக்கத்தின் மீது.

(22) $60°$.

(29) பிற்பக்கத்தின்மீது $\dfrac{W}{g}\left(\dfrac{a'g - fh}{a+a'}\right)$, முற்பக்கமீது $\dfrac{W}{g}\left(\dfrac{ag+fh}{a+a'}\right)$. $a = a'$ ஆக இருக்குமிடத்து, பின் சில்லுத் தடுப்புக்கான உச்ச அமர் முடுகும் விசை $\dfrac{\mu a W}{2a+\mu h}$. முன் சில்லுத் தடுப்புக்கானது, $\dfrac{\mu a W}{2a - \mu h}$. முதல் விசை, $\frac{1}{2}\mu W$ இலும் குறைவானது, அ-து. முழுத் தடுப்பு விசையின் பாதியிலும் குறைவானது.

(43) ஒவ்வோர் ஏணியினதும் நீளம் $2l$ ஆகவும் நிறை w ஆகவுமிருக்கும் போது, $w + \dfrac{nw}{4}\left(2 - \dfrac{x}{l}\right)$ உம், $w + \dfrac{nw}{4}\left(2 + \dfrac{x}{l}\right)$ உம்.

பயிற்சி XXVI. (ப. 267)

(2) 1·18 அடி எறத்தாழ.

(3) $2 \text{ சைன் }^{-1}\left(\dfrac{b}{a+b}\right)$.

(4) $2\frac{1}{2}$ அடி-இரு.

பயிற்சி XXVII. (ப 277)

(1) $71\frac{5}{8}$ இரு. நிறை.

(2) $9\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

(4) 25 இரு. நிறை, 25 இரு. நிறை, 50 இரு. நிறை, 100 இரு. நிறை, 200 இரு. நிறை. வித்தியாசமானது 25 இரு. நிறை எத்தனமாகும்.

பயிற்சி XXVIII. (ப. 285)

(1) 10 இரு. நிறை.

(3) $7\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

(3) 50 இரு. நிறை.

(4) 50 ; $37\frac{1}{3}$ இரு. நிறை.

பயிற்சி XXIX. (ப. 288)

(1) 4 இழைகள் ; 2 இரு.

(2) 3 இரு. பொ. ந. = 6.

(3) 5 ; 24 இரு. நிறை.

(4) 85·4 இரு. நிறை, 31·74 சத வீதம், 38·09 சத வீதம், 40·82 சத வீதம்.

(5) $W = 15\,P + 11\,w$.

(6) 672 இரு.

(7) 11 இரு.

(8) 129 இரு., 129 இரு.

(9) $101\frac{4}{7}$ இரு. நிறை.

(10) $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{1}{2}$.

(11) $37\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

(12) 64·8 சத வீதம், கிட்டத்தட்ட.
(13) 12 அங். உருளையின்மீது சுற்றப்பெற்ற பக்கம்.
(14) $\frac{9}{8}$W.
(15) $\frac{1}{11}$.
(16) $12\frac{8}{11}$.
(17) 4525 இரு. நிறை வறத்தாழ.
(18) $\frac{33}{49}$ அங்.
(19) $\frac{1}{8}$ கிட்டத்தட்ட.
(20) $\frac{Wb}{4a}$; $\frac{b}{4an}$.
(21) 75 இரு. நிறை, 370 இரு. நிறை.

பயிற்சி XXX. (ப. 298)

(1) 3·1 அங்.
(2) 2·5 அடி.
(3) 2·828 அங். BC இலிருந்து ; $\frac{1}{3}$ அங். AD இலிருந்து
(4) 5·6 அங். ; 4 அங்.
(5) $\frac{\sqrt{171}}{2}$ அங்.
(6) 21·9 அங். கிட்டத்தட்ட.
(7) $2\frac{2}{3}$ அடி.
(9) 15, 3 இரு. நிறைகளை இணைக்கும் கோட்டில் ஒரு பக்க நீளத்தின் பாதி.
(10) 5, 2 இரு. நிறைகளை இணைக்கும் கோட்டில் 5 இரு. நிறையை நோக்கி 4 அங்.
(11) 3·375 அங்.
(12) 8·4 அடி ; 3 அடி.

பயிற்சி XXXI. (ப. 307)

(1) $9\frac{5}{12}$ அங்.
(2) துவாரத்தினூடான விட்டமீது. $\frac{6}{35}$ அங்.
(3) துவார மையங்களை இணைக்கும் கோட்டினை இருகூறிடும் விட்டமீது மையத்திலிருந்து $\frac{3\sqrt{2}}{17}$ அங்.
(4) $6\frac{2}{3}$ அங். ; $3\frac{1}{9}$ அங்.
(5) $5\frac{2}{7}$ அங். ; $6\frac{2}{7}$ அங்.
(7) AC மீது A இலிருந்து 6·07 அங்.
(9) தான்$^{-1}$ $(\frac{16}{33})$.
(11) இடையத்தின் மேன்முகமாக அதன் நீளத்தின் $\frac{16}{45}$.
(12) 18·6 அங்.
(13) 6·03 அங். ; 6·05 அங்.
(15) 29 அங்.
(18) $\frac{55\sqrt{3}}{18}$ சமீ.
(20) 2·0 அங்.
(21) 10·4 அடி.
(22) ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் உச்சியையும் அடியின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டில் மேன்முகமான வழியின் $\frac{1}{4}$.
(24) 8 அங். பக்கத்திற்கு வரையப் பெற்ற இடையத்தில் மேன்முகமாக $\frac{26\sqrt{2}}{9}$ அங்.
(28) 13 : 54.
(31) தான்$^{-1}[\frac{3}{10}(5+\sqrt{5})]$.
(33) வெளி விளிம்புகளை அச்சுக்களாகக் கொண்டு எடுக்கப்பெற்ற புள்ளி (2, 3).
(34) ஒரு விளிம்பின் $\frac{19}{40}$.
(35) அடியிலிருந்து $\frac{11}{56}\sqrt{\frac{2}{3}}a$.
(36) $\frac{1}{3}b\,\frac{3a+c}{2a+c}$; $\frac{3a^2+3ac+c^2}{3(2a+c)}$.
(37) முதற் பலகையின் சுயாதீன முனையிலிருந்து, இரண்டாம் பலகையின் உயர் பரப்பின் உயரத்தில் $10\frac{1}{2}$ அடி.
(38) உச்சியிலிருந்து $0{\cdot}52a$.
(39) அச்சிலிருந்து $\frac{2mca^2}{Mb^2}$ தூரத்தில்.
$$\frac{m}{M} \ngtr \frac{b^2(a-b)}{2a^2c}.$$
(41) BC இலிருந்து 3 அங்.
(43) (i) ABC இன் இடையங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியில்.
(ii) 1·9 மிமீ.
(45) $\frac{110}{29}$ அங். ; $\frac{126}{29}$ அங்.
(46) AC=3 அங்.
(48) $\frac{4}{3}$ அங். ; $\frac{5}{3}$ அங். ; 3 அங்.
(49) அடியிலிருந்து உயரத்தின் $\frac{513}{1070}$. நிலைக்குத்துடன் தான்$^{-1}$ $(\frac{2675}{6134})$ இல்.

(50) அடியிலிருந்து $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{12}a$.

(51) அடியிலிருந்து

$$c+\frac{5a^2b}{8(3ab+3ac+2bc)}.$$

a நீளமுள்ள மூடி இணைக்கப் பெற்றுள்ள மூலையிலிருந்து

$$\frac{3}{2}a+\frac{3a^2b(2-\sqrt{3})}{8(3ab+3ac+2bc)}.$$

(52) $\frac{a}{n}$ கோசை $\frac{\pi}{2n}\left[\text{சைன் }\frac{\pi}{2n}+\text{சைன் }\frac{3\pi}{2n}+\cdots\right]$.

இங்கு, a சுற்றுவட்ட ஆரை.

பயிற்சி XXXII. (ப. 317)

(3) DA இலிருந்து

$$\frac{(a^2+ab+b^2)\sqrt{4c^2-(b-a)^2}}{6c(a+b)};$$

மற்றைய அச்சிலிருந்து

$$\frac{4ac^2+2bc^2-a^3+b^3}{6c(a+b)}.$$

(4) 0·50, 2·69.

(6) ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்திலிருந்தும் $\frac{2}{3}$ அங்.

பயிற்சி XXXIII. (ப. 329)

(2) C இலிருந்து 24 அங்.

(3) DA இலிருந்து

$$\frac{(a^2+ab+b^2)\sqrt{4c^2-(b-a)^2}}{6c(a+b)};$$

மற்ற அச்சிலிருந்து

$$\frac{4ac^2+2bc^2-a^3+b^3}{6c(a+b)}.$$

(5) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(6) $\frac{a^2+ax+x^2}{3(a+x)}$; $\frac{a(2a+x)}{3(a+x)}$.

இங்கு $x=$ AE.

$\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$ இலும் AE குறைவானதன்று.

(7) BC அல்லது DE தளத்தைத் தொடுவதுடன்; DE, BC இற்கு மேலே இருப்பின், BD அல்லது EC அதைத் தொடுவதுடன்.

(10) ஆம்.

(11) 3 : 1 இலும் குறைவாக அன்று.

(12) 1·59.

(13) அடிக் கப்பி மையத்திலிருந்து, $\frac{na}{2}$

நிலைக்குத்துயரத்தில் $\frac{(n-1)c}{2}$.

(15) $\sqrt{3}\,r$.

(16) $23\frac{1}{2}$ அங். ; 27°.

பயிற்சி XXXIV. (ப. 342)

(2) $\sqrt{2}:1$.

(8) நடுவாரை வழியே மையத்திலிருந்து $\frac{3a}{2\pi}$. a தட்டின் ஆரை.

(9) AB இலிருந்து $\frac{AB}{\pi}$; A ஊடாக AB இற்கான செங்குத்திலிருந்து $\frac{AB}{4}+\frac{AP}{2}$.

புள்ளி இவ்வச்சுகளிலிருந்து $\frac{2AB}{\pi}$, $\frac{AB}{2}$ தூரத்தில்.

(12) $\frac{13}{14}$

(13) சைன்$^{-1}$ ($\frac{3}{4}\pi$ சைன் θ).

(14) தளங்கள் கோளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியை மையத்துடன் இணைக்கும் கோட்டினில், மையத்திலிருந்து ஆரையின். $\frac{3(4\sqrt{3}+3)}{104}$ தூரத்தில்.

(15) மையத்திலிருந்து $\frac{a}{2\pi-3\sqrt{3}}$ இல்.

(16) $\frac{1}{2}$W தான் α.

(17) 6 உம் 7 உம் 8 உம்.

(19) வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{2 \quad 6a^2+3ax-x^2}{3\pi(2a+x)+4(a+x)}$.

(20) 1728 இரு., தடிப்பான முனையிலிருந்து $21\frac{27}{38}$ அடி.

பயிற்சி XXXV. (u. 356)

(1) வ. தி. A இற் பூச்சியத்திலிருந்து C இல் 12 இற்கும், பின்பு D இல் 20 இற்கும் அதிகரிக்கின்றது. D இல் உச்சம்; அது பின்பு B இற் பூச்சியத்திற்குக் குறைகின்றது.

(2) A இல் 13·6 உம் B இல் 13·3 உம்; 4·4 உம் 93·1 உம்.

(3) கொய்வு விசை = 1·05.
வளையற்றிருப்புதிறன் = 43·4.

(4) கொய்வு விசை = 1·91.
வளையற்றிருப்புதிறன் = 25·6.

(5) C இற்கும் D இற்குமிடையே D இலிருந்து $\frac{102}{113}$ அடியில்.

(6) கொய்வு விசை முதலாந் தாங்கியிலிருந்து மையத்திற்கு மேன்முகமாக 16, மையத்திலிருந்து இரண்டாம் தாங்கிக்குக் கீழ்முகமாக 20. வளையற்றிருப்புதிறன் முதலாம் தாங்கியில் பூச்சியத்திலிருந்து மையத்தில் 80 இற்குச் சீராக அதிகரித்துப் பின்பு இரண்டாம் தாங்கியில் சீராகப் பூச்சியத்திற்குக் குறைகின்றது.

பயிற்சி XXXVI. (u. 363)

(1) கொய்வு விசை = 6·3.
வளையற்றிருப்புதிறன் = 56·35.

(2) A இலிருந்து 12 அடியில உச்சம். இங்கு அதன் பெறுமதி 18. B இற் பெறுமதி 16. அது அங்கேயிருந்து சீராக C இல் பூச்சியமாகக் குறைகின்றது.

(3) கொய்வு A இலிருந்து C வரை + 2, C இலிருந்து D வரை பூச்சியம், D இலிருந்து B வரை − 4. வ.தி. A இல் பூச்சியத்திலிருந்து C இல் 8 இற்கு அதிகரித்துப் பின்பு D வரை மாறிலியாக இருந்து, B இல் பூச்சியமாகக் குறைகின்றது. இரண்டாம் வகைகளில் கொய்வு வளையி A இல் +3 இலிருந்து B இல் − 3 வரை ஒரு நேர்கோடாகும். வ.தி. வளையி நடுப்புள்ளியில் உயர் பெறுமதி 9 உடைய ஒரு பரவளைவு.

(4) $\frac{W}{2}\left(\frac{l}{4}-a\right)$, $+\frac{W}{2l}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$;
$a=l\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(5) 8 இரு. நிறைக்குக் கிட்டிய முனையிலிருந்து 7 அங். ; 81.

(6) $\frac{2l}{W}$.

(7) கொய்வு விசை A இலிருந்து C வரை, +W இலிருந்து + 2 W இற்கு, C இலிருந்து D வரை, $-\frac{9}{4}$W இலிருந்து $-\frac{5}{4}$W இற்கு ;
D இலிருந்து B வரை, $-\frac{1}{4}$W இலிருந்து $-\frac{3}{4}$W இற்கு. A இலிருந்து x இல் வ. தி. பெறுமதிகள்.

A இலிருந்து C வரை, $W\left(x+\frac{x^2}{2a}\right)$;

C இலிருந்து D வரை,
$$W\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{13}{4}x+\frac{17}{4}a\right);$$

D இலிருந்து B வரை,
$$W\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}a\right).$$

(8) வ.தி. நிலைத்த முனையில் $7\frac{1}{2}$, மையத்தில் $2\frac{1}{2}$, சுயாதீன முனையில் பூச்சியம்.

(9) C இலிருந்து x அளக்கப்படின், CD, DA முதலிய வெட்டுமுகங்களிற்கான கொய்வு விசை, வளையற்றிருப்புதிறன் பெறுமதிகள் :

$x+2$; $\frac{x^2}{2}+2x$.

$x+4$; $\frac{x^2}{2}+4x-6$;

$x-18$; $\frac{x^2}{2}-18x+126$;

$x-17$; $\frac{x^2}{2}-17x+118$;

$x-13$; $\frac{x^2}{2}-13x+82$;

$x-12$; $\frac{x^2}{2}-12x+72$.

(11) $\frac{35}{36}$W. குறைக்கப் பெற்றுள்ளது.

(12) கொய்வு விசை AB இற்கு $xw-\frac{1}{2}xw$. BC இற்கு B இலிருந்து D வரை $xw+\frac{1}{2}aw$, D இலிருந்து C வரை $xw-\frac{1}{2}aw$. வளையற்றிருப்புதிறன், AB இற்கு $\left(\frac{x^2}{2}-xa\right)w$. BC இற்கு, B இலிருந்து D வரை $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ax\right)w$, D இலிருந்து C வரை $\left(\frac{x^2}{2}-ax+\frac{a^2}{2}\right)w$. x கோல் முனையிலிருந்து அளக்கப்பட்டது.

(13) ஒவ்வொரு தாங்கிமீதும் 9 தொன். கொய்வு விசை வளையி, முனைகளுக்கும் தாங்கிகளுக்கு மிடையே $y=\pm 3$, தாங்கிகளிடையே $y=x-6$ ஆகிய மூன்று நேர் கோடுகளை உடையது. வளையற்றிருப்புதிறன் வளையிகள்,

$y-3x$, $y=\frac{x^2}{2}-6x+9$, $y=9-3x$.

(15) கொய்வு விசை A இல் $-0{\cdot}8w$ இலிருந்து B இல் $9{\cdot}2w$ இற்கும், பின்பு $-10w$ இலிருந்து C இல் $-4w$ இற்கும் மாறுகின்றது. வளையற்றிருப்புதிறன், A இலிருந்து B வரை $\left(\frac{x^2}{2}-0{\cdot}8x\right)w$, B இலிருந்து C வரை $\left(\frac{x^2}{2}-20x+192\right)w$.

பயிற்சி XXXVII. (ப. 379)

(1) 2 : 1.

(5) 30 தொன் நிறை. நடுவளையத்திலிருந்து ஆரம்பித்துச் சங்கிலியின் பகுதிகள் கிடையுடன் கோணங்கள் தான் $^{-1}(\frac{1}{3})$, தான் $^{-1}$ $(\frac{2}{3})$, 45° இற் சாய்ந்துள்ளன.

(6) 8 அடி, பாதைவழி மேலாக. அடி வளையத்திலிருந்து ஆரம்பித்துள்ள வளையங்களின் சாய்வு விகிதங்கள் :
தான் $^{-1}$ $(\frac{1}{5})$, தான் $^{-1}$ $(\frac{2}{5})$, தான் $^{-1}$ $(\frac{3}{5})$, தான் $^{-1}$ $(\frac{4}{5})$, தான் $^{-1}$ (1), தான் $^{-1}$ $(\frac{6}{5})$.

(8) நடுவே $\frac{an(n-1)}{2k}$ W.

முனையில், $\frac{n\sqrt{4k^2+a^2(n-1)^2}}{2k}$W,

(9) 1·66 இரு. நிறை ; 1·35 இரு. நிறை ; 12·81 அடி ; 10·77 அடி.

பயிற்சி XXXVIII. (ப. 388)

(1) $\frac{2l}{3n^2}$.

(7) $50a$ உம் $14a$ உம்.
$48a$ அசைன் $^{-1}$ $(\frac{7}{24})$.

பயிற்சி XXXIX. (ப. 401)

(1) 2W.

(3) $\sqrt{3}$W.

(8) $2\sqrt{3}$W.

(13) $\frac{\sqrt{3}a}{9\sqrt{3l^2-a^2}}$W.

(22) கிடையுடன் தான் $^{-1}$ 4 இல் $\frac{\sqrt{17}}{2}$W

பயிற்சி XL. (ப. 411)

(1) தான்$^{-1}$ $(\frac{1}{8})$: உறுதியானது.

(7) Mga (1 − கோசை θ)

$$-2\sqrt{2}mga\left(1-\text{கோசை}\frac{\theta}{2}\right).$$

(9) Mga (1 − கோசை θ)

$$-4\,mga\ \text{சைன்}\frac{\alpha}{2}\left(1-\text{கோசை}\frac{\theta}{2}\right).$$

(13) BC இடையானது, உறுதியற்றது ; AC இடையானது, உறுதியற்றது ; AB ஒரு தளத்தினைத் தொடுகின்றது, உறுதியானது.

(17) $3b > 5a$.

(18) $\frac{El}{2}\left(\frac{1-\text{கோசை}\ \theta}{\text{கோசை}\ \theta}\right)^2-\frac{wl}{2}$ தான் θ.

பயிற்சி XLI. (ப. 436)

(14) DR இல், $\frac{Wa}{2b\ \text{கோசை}\theta}$; AP இல், $\frac{W}{2\ \text{சைன்}\ \theta}$; AQ இல், $\frac{W}{2}\left(\frac{1}{\text{சைன்}\theta}-\frac{a}{b\text{கோசை}\theta}\right)$.

(i) தான் $\theta > \frac{b}{a}$;

(ii) தான் $\theta < \frac{b}{a}$;

(iii) தான் $\theta = \frac{b}{a}$;

(16) $\frac{W(2a\ \text{சைன்}\ \theta - c\ \text{கோசை}^2\theta)}{a\ \text{கோசை}\ \theta}$,

B உம் D உம் வெளிப்புறமாக நகருகின்றன.

(21) $37\frac{1}{2}$ இரு. நிறை.

(26) $\frac{1}{10}a\left(3-\frac{20}{\sqrt{101}}\right)$.

(27) துவாரத்தை உற்பத்தியாகவும் அதியுயர் சரிவுக் கோட்டினைத் தொடக்கக் கோடாகவும் எடுக்க, $E^2r^2 =$

$2WElr$ சைன் α கோசை θ

$+ W^2$ (μ^2 கோசை^{2} α − சைன்^{2} α).

(31) $\frac{w(a+a\mu+c\mu\ \text{சைன்}\ \theta)}{a(1+\mu)}$.

(32) $\frac{W}{\sqrt{6}}$ உம் $\frac{W}{3\sqrt{6}}$ உம்.

(43) AB, AC, AD இல் $\frac{\sqrt{6}}{2}W$.

BC, CD, DB இல் $\frac{\sqrt{6}}{6}W$.

(52) ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{1}{4}$ T. $\frac{AB}{XY}$.

இழுவை CD இல், உதைப்புக்கள் மற்றவையில்.

(61) உச்சிக்குக் கீழ் ஆழம்

l கோதா $\alpha\left(1+\frac{W\ \text{கோதா}\ \alpha}{\lambda\pi}\right)$ இல்.

(63) வட்டத்தின் மையத்தையும் B ஐயும் இணைக்கும் கோடு கோணம்

கோசை$^{-1}\left(\frac{3a^2-4l^2}{3a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ஐ

மேற்முனத்தில் மேன்முக நிலைக்குத்துடனும், கீழ்த் தானத்தில் கீழ்முக நிலைக்குத்துடனும் ஆக்குகின்றது.

(68) (i) பிற்பக்கத்தில் $\frac{1}{2}W\left(\frac{2h}{a}\ \text{சைன்}\ \alpha + \text{கோசை}\ \alpha\right)$,

முற்பக்கத்தில் $\frac{1}{2}W\left(\text{கோசை}\ \alpha - \frac{2h}{a}\ \text{சைன்}\ \alpha\right)$.

(ii) அதே பெறுமதிகள் மாற்றப்பட்டுள்ளவாறு, 0·38.

(69) $\frac{3}{2}$ W.

(72) B மீதும் C மீதும் 5·36 இரு. நிறை ; A மீது 9·28 இரு. நிறை.

(73) விசை பிரயோகிக்கப்படும் முனையிலிருந்து கோல் நீளத்தின் $\frac{\sqrt{2}}{2}$ மடங்கிலுள்ள ஒரு புள்ளி.

(74) $W+(l-x)w$.

பயிற்சி XLII. (ப. 461)

(1) 1·01.
(2) 1·072.
(3) (i) $487\frac{1}{2}$; (ii) 4·511.
(4) 30 ௐ.
(5) $20\frac{2}{3}$ கன சமீ. ; $41\frac{1}{3}$ கன சமீ.

பயிற்சி XLIII. (ப. 468)

(1) 27·2 கன அங்.
(2) $\frac{W}{Aw}$. இங்கு, w நீரின் தன்னிறை.
$\frac{az}{a + A}$.
(3) எண்ணெயைக் கொண்டுள்ள நிலைக்குத்துக் கிளையிலிருந்து 0·77 சமீ.

பயிற்சி XLIV. (ப. 475)

(1) $308571\frac{3}{7}$ தொன் நிறை.
(2) 45 தொன் நிறை.
(4) 9·77 தொன் நிறை.
(5) 40 : 87 : 92.
(6) $\frac{1}{3}\, h$.
(7) செவ்வக, முக்கோணி முகங்கள் மீது முறையே 62252, 8290·8 இரு. நிறை.
(8) நீண்ட பக்கங்கள் மீது 344·3 இரு. நிறை, குறுகிய பக்கங்கள் மீது 229·5 இரு. நிறை, அடிமீது 768·75 இரு. நிறை.
(9) பரப்பிற்குக்கீழ்,
$\frac{\sqrt{3}}{3}\, a$ உம் $\frac{\sqrt{6}}{3}\, a$ உம்.
(10) 54·56 இரு. நிறை.
(11) 3204 இரு. நிறை.
(12) $a\left[\frac{b^2}{2}W + cw\left(b + \frac{c}{2}\right)\right]$.

பயிற்சி XLV. (ப. 492)

(1) $20\frac{5}{6}$ இரு. நிறை.
(3) 40,000 இரு. நிறை ; அடிக்குமேல் $4\frac{1}{3}$ அடி.
(4) $1968\frac{3}{4}$ இரு. நிறை.
(5) 23,676 இரு. நிறை ; அடிப் பக்கத்திற்கு மேலே 4·11 அடி.
(6) 1500 இரு. நிறை ; 750 இரு. நிறை.
(7) 41·8 தொன் நிறை.
(8) $\frac{7}{12}a$ நிலைக்குத்து ஆழத்திலும் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திலிருந்து இடைத் தூரம் $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ இலும். இங்கு, a முக்கோணியின் ஒரு பக்கம்.
(10) A இற்கு.
(11) AD இலிருந்து $\frac{5}{8}a$ உம் DC இலிருந்து $\frac{11}{32}a$ உம். இங்கு, a சதுரத்தின் பக்கம்.
(12) மேல் விளிம்பிற்குக்கீழ் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தின் $\frac{149}{222}$.
(15) AB இற்குக் கீழ் 5 அங். ஆழத்தில் $7145\frac{5}{6}$ இரு. நிறை.
(16) $\frac{ab(3h + a)}{6}w$ இரு. நிறை. இங்கு, w நீரின் தன்னிறை.
BC இற்குக் கீழே $\frac{a(2h + a)}{2(3h + a)}$.
(17) $770\frac{5}{6}$ இரு. நிறை ; பரப்பிற்குக் கீழே 2·36 அடி.
(18) 596·5 இரு. நிறை ; 1193 இரு. நிறை அடி.
(19) 911·46 இரு. நிறை ; பரப்பிற்கு $1\frac{17}{28}$ அடி கீழ்.
(20) $3\frac{1}{5}$.
(21) 31,500 இரு. நிறை ; அடிப்பக்கத்திற்கு $3\frac{5}{7}$ அடி மேலே.

(22) 603·75 இரு. நிறை; இடைப் பக்கத்திற்கு 0·6 அடி கீழே.

(23) 26·4 அடி ; அடிப்பக்கத்திற்கு 9·7 அடி மேலே.

(27) 29 : 7.

(28) 577·3 இரு. நிறை ; அமுக்க மையம் கீழ் விளிம்பிலிருந்து 0·77 அடியில்; 234 அடி. – இரு.

(30) 4125 இரு. நிறை, அடிப்பக்கத்தின் மேல் $2\frac{9}{11}$ அடியில் ; 1375 இரு. நிறை.

(31) செவ்வகத்தின் மேல்விளிம்பிலிருந்து $\dfrac{b(3h + 2b \text{ கோசை } \alpha)}{3(2h + b \text{ கோசை } \alpha)}$.

$wabh$ கோசை θ. இங்கு, w நீரின் தன்னிறை. அடியின் மேல்விளிம்பிலிருந்து

$$\frac{b(6h \text{ கோசை } \theta + b \text{சைன் } \theta)}{12 \text{ கோசை } \theta}.$$

(32) நிலைக்குத்து விட்டத்தில் மையத்திற்குக் கீழே $\dfrac{a^2}{4h}$ ஆழத்தில் ;

$\dfrac{4h-a}{4h+a}$ P.

பயிற்சி XLVI. (ப. 507)

(2) இடை, 9·64 தொன். நிலைக்குத்து, 16·7 தொன்.

(3) இடை, 11 தொன். நிலைக்குத்து 14 தொன்.

(4) இடையுடன் தான் $^{-1}\left(\dfrac{h}{3r}\right)$ இல்

$$\pi r^2 w \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{9}}.$$

(5) அடிமீது 500 இ. நிறை, நிறுதிட்டமான முக்கோணி முகங்கள் மீது $125\sqrt{5}$ இ. நிறை, கீழேயும் மேலேயுமுள்ள முக்கோணி முகங்கள் மீது முறையே

$$\frac{625\sqrt{5}}{3}, \frac{125\sqrt{5}}{3}$$

இ. நிறை.

(6) இடையுடன் 1° 47′ இல் 18·82 இரு. நிறை.

(7) $\pi a^3 w$ இடை, $\frac{2}{3}\pi a^3 w$ நிலைக்குத்து ; மையத்தூடாகச் சென்று இடையுடன் தான் $^{-1}(\frac{2}{3})$ இற் சாய்ந்துள்ளது.

(8) $\pi h^3 w$ தான்$^2\alpha$; $\frac{2}{3}\pi h^3 w$ தான் $^2\alpha$.

(9) நிலைக்குத்து முகமீது $\dfrac{\pi r^3 w}{2}\left(1 - \dfrac{4}{3\pi}\right)$

இடைமுகமீது $\dfrac{\pi r^3 w}{2}$.

இடையுடன் தான் $^{-1}\left(\dfrac{\pi}{3\pi - 4}\right)$ இல்

$$\frac{\pi r^2 w}{6}\sqrt{10 - \frac{24}{\pi} + \frac{16}{\pi^2}}.$$

(10) $\dfrac{4 - \pi}{4 + \pi}$.

(11) 1·022 இரு.

(12) $\dfrac{\pi a^2 w}{3}\sqrt{9h^2 + 4a^2 + 12ah \text{ கோசை } \theta}$.

பயிற்சி XLVII. (ப. 526)

(1) $\dfrac{s_2 - s}{s - 1}$.

(2) 4·62 இரு.

(3) (i) 6·269 அங்.; (ii) 1·05 இரு.

(4) 6·04 அங்.

(6) 12174 சதுர அடி ; 3·73 அங்.

(7) 8200 இரு.

(8) 6560 தொன்.

(9) 1 அங். ; $2\frac{1}{2}$ அங்.

(10) 7·17 அவு.

(12) $\frac{1}{3}$.

(14) $2\frac{1}{4}$ அங்.

(15) $\frac{1}{4}$.

(16) $12\frac{3}{4}$ அவு.

(17) 0·37 அங்.

(19) 4·79 இரு. ; 6·57 இரு. நிறை.

(20) 11·14 அங்.

(22) 12·85 கன அங். ; 1·27.

(23) $\dfrac{hs'(1-s)(A-B)}{A(1-s')}$.

(24) 73·62 இரு. நிறை ; 220·9 இரு. நிறை; 1 இரு. இறுலும் 6·04 இரு. இறுலும்.

(25) $\frac{160}{729}$ அடி ; $3\frac{1}{3}$ அடி.
(26) 0·8.
(27) $\dfrac{Hr_1^2 + hr_2^2}{r_1^2}$.
(28) 5·8 சமீ. ; 969·2 கன சமீ. ; 0·09 சமீ.
(29) $170\frac{2}{3}$ இரு. நிறை ; $\frac{8}{125}$ கன அடி.
(31) $1\frac{1}{80}$ இரு. நிறையும் $\frac{81}{160}$ இரு. நிறையும்.
(32) $\dfrac{a+b}{2}$.
(33) $\frac{14}{15}$ உம் $\frac{7}{6}$ உம் ; அது தாழ்கின்றது.

பயிற்சி XLVIII. (ப. 534)

(1) $46\frac{7}{8}$ இரு./ கன அடி; 21·81 இரு. நிறை.
(2) 5·82 இரு. நிறை ; 1·94 இரு. நிறை.
(3) 14,470 இரு. நிறை ; 34,390 இரு. நிறை.
(4) 394·7 இரு. நிறை.
(5) 22·53 தொன். நிறை.

பயிற்சி XLIX. (ப. 539)

(1) இடையுடன் 30° இல்.
(5) $\frac{116}{125}$; $\frac{27}{232}$.
(9) தான் நிறையின் 0·11.
(10) இடையுடன் சைன் $^{-1}\left(\dfrac{h}{l\sqrt{s}}\right)$ கோணத்தில்.
(11) இடையுடன் சைன் $^{-1}\left(\dfrac{h}{l\sqrt{1-s}}\right)$ கோணத்தில்.

பயிற்சி L. (ப. 544)

(1) 0·966.
(2) $\frac{12}{13}$; 10.
(3) 50 கன. சமீ. ; 1·8.
(4) (i) 27 : 28 ; (ii) 18 : 7.
(5) 1·6, 10 கன சமீ. ; 3·2, 5 கன சமீ.
(6) 0·28 கன அடி.
(7) 1 : 3.
(8) $\frac{2}{3}$.
(9) 3 அலு.
(10) 7·5 இரு. உம் 2·5 இரு. உம் ; 27 : 14.
(11) 7.
(12) $\dfrac{W_1s_2 - W_2s_1}{s_2 - s_1}$; $\dfrac{W_1 + W_2}{2}$.

பயிற்சி LI. (ப. 552)

(1) 2·85 அங்.
(2) 29·88 அங்.
(3) 9·57 அங். ; 20·43 அங்.
(4) 1500 கன அடி ; 4·6 அடி.
(6) $x^2 - x(h+b) + a(b-a) = o$.
(7) 4·52 அங். ; 3·48 அங்.
(8) 140 இரு. நிறை.
(10) 14·8 அடி ; 66·3 கன அடி.
(11) $\dfrac{h}{2}$.
(12) 19 அங்.
(13) $\dfrac{2h+H+d-\sqrt{d^2+H^2+2H(2h+d)}}{2}$. இங்கு, H நீர்ப் பாரமானி உயரம்.
$\dfrac{\sqrt{d^2+H^2+2H(2h+d)}-H-d}{2}\,\alpha w$.
இங்கு, w நீரின் தன்னிறை.
(15) அடிக்கு மேலே $\dfrac{9lh+2sd^2}{3(3h+2ds)}$.
(16) 3·94 அடி ; 1421 இரு.
(17) 3·72 அடி ; 91 இரு.
(18) வெளிப்புறமட்டத்திற்கு 5·5 அடி கீழே.
(19) $c + \dfrac{\alpha\beta(a-b)}{a\alpha - b\beta - c(\alpha-\beta)}$.
(20) $W - \frac{1}{2}\pi a^2[\sqrt{(k+l)^2+4lh} - (k+l)]w$.
இங்கு, w நீரின் தன்னிறை.