கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர உயர் தரத்
தொழினுட்பவியற் பாடத் துறை

தொழினுட்பவியலிற்கான விஞ்ஞானம்

கணிதம்
பகுதி I

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர உயர் தரத்
தொழினுட்பவியற் பாடத் துறை

தொழினுட்பவியலிற்கான விஞ்ஞானம்

கணிதம்

பகுதி I

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

பதிப்புரிமை பெற்றது
முதற் பதிப்பு - 2014

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால்
சிசாரா பிரின்வே பிரைவட் லிமிட்டட் அச்சகத்தில்
அச்சிட்டு வெளியிடப்பட்டது.

முன்னுரை

வாண்மைத் தொழிற் கல்விக்கான பிரவேசமாக 2013 ஆம் ஆண்டு தொடக்கம் நடைமுறைப்படுத்தப்பட்டு வரும் தொழினுட்பவியற் பாடத் துறை இலங்கைக் கல்வித் துறையில் ஒரு புதிய அம்சமாகும்.

அப்பாடத் துறைக்குரிய தமிழ் நூல்கள் மிகக் குறைந்த அளவில் உள்ளன. இவ்விடயத்திற் கவனஞ் செலுத்திய கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம் தொழினுட்பவியற் பாடப் துறையின் முக்கிய பாடங்களின் பாடத்திட்டங்களை உள்ளடக்கும் மேலதிக வாசிப்பு நூல்களைத் தயாரிப்பதற்கு நடவடிக்கைகளை மேற்கொண்டுள்ளது. இந்நூல் அம்முயற்சியின் ஒரு பிரதிபலனாகும்.

க.பொ.த. (உ.த.) தொழினுட்பவியலைக் கற்கும் மாணவர்களுக்கும் தொழினுட்பவியல் துறைகளில் ஆர்வமுள்ள வாசகர்களுக்கும் இத்தகைய ஒரு நூல் தமிழ் மொழியிற் கிடைத்தல் பெரும் பாக்கியமாகும்.

இந்நூலை மிகவும் துரிதமாகத் தயாரிப்பதற்குப் பணியாற்றிய எழுத்தாளர்கள், பதிப்பாசிரியர்கள், எனது பணியாளர் குழு ஆகியோர்க்கு எனது நன்றி உரியது.

திஸ்ஸ ஹேவாவிதான
ஆணையாளர் நாயகம்,
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
இசுருபாய.
2014.04.25

கண்காணிப்பும் மேற்பார்வையும்

திரு. திஸ்ஸ ஹேவாவிதான — ஆணையாளர் நாயகம்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

வழிகாட்டல்

திருமதி கே.வீ.நந்தனி ஶ்ரீயாலதா — ஆணையாளர் (அபிவிருத்தி)
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

இணைப்பாக்கம்

திருமதி அ.குலரத்தினம் — உதவி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

எழுத்தாளர், பதிப்பாசிரியர் குழு

திரு. கே. ஜு.பி. சில்வா — சிரேட்ட விரிவுரையாளர்
ஶ்ரீ ஜயவர்த்தனப்புரப் பல்கலைக்கழகம்.

திரு பீ. டயஸ் — சிரேட்ட விரிவுரையாளர்
ஶ்ரீ ஜயவர்த்தனப்புரப் பல்கலைக்கழகம்.

திருமதி இறேஷா ரத்நாயக்க — விரிவுரையாளர்
தேசிய கல்வி நிறுவனம்.

திருமதி தனுஜா மைத்திரி விதாரண — உதவி ஆணையாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்.

மொழிபெயர்ப்பு

திரு என். வாகீசமூர்த்தி — ஓய்வு பெற்ற கல்விப் பணிப்பாளர்

கணினி வடிவமைப்பு

திரு முத்தையை காந்தரூபன் — கணினி வடிவமைப்பாளர்
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

பொருளடக்கம்

நூலாக்கக் குழுவினரின் செய்தி

2013 ஆம் ஆண்டு அறிமுகஞ்செய்யப்பட்ட க.பொ.த.(உ.த.) தொழினுட்பவியற் பாடப்பிரிவைக் கற்கும் எல்லா மாணவர்களுக்கும் கட்டாய பாடமாகிய ''தொழினுட்பவியலுக்கான விஞ்ஞானம்'' என்னும் பாடத்தின் ஒரு கூறாகிய கணிதப் பாடத்திற்கு அதன் பாடத் திட்டத்தை அடிப்படையாய்க் கொண்டு இந்நூல் எழுதப்பட்டுள்ளது. இங்கு கணித எண்ணக்கருக்கள் மிக எளிய சந்தர்ப்பங்களில் ஆரம்பித்து பாடத்திட்டத்தின் எதிர்பார்த்த மட்டம் வரையுள்ள சிக்கலான நிலைக்குச் செல்லுமாறு அமைந்துள்ளன.

கணித எண்ணக்கருக்களைப் பிரயோகித்தலும் பயன்படுத்தலும் பற்றிய விளக்கத்தை வழங்குவதற்காக இங்கு பயிற்சிகள் கணித எண்ணக்கருக்கள் நடைமுறைக்காகப் பிரயோகிக்கப்படும் சந்தர்ப்பங்களைக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு பிரசினங்களுக்குரிய விடைகளை வழங்குவதன் மூலம் மாணவர்கள் கணிதப் பயிற்சிகளைச் செய்வதற்குத் தூண்டப்பட்டுள்ளனர்.

பிள்ளைகள் வாசித்து எளிதாக விளங்கிக் கொள்ளத்தக்கதாக இந்நூல் எளிய நடையில் எழுதப்பட்டுள்ளது.

நூலாக்கக் குழுவினர்

1

பைதகரசின் தொடர்புடைமை

- பைதகரசின் தேற்றம்
  - இருபரிமாணத் தளத்தில்
  - முப்பரிமாணத் தளத்தில்

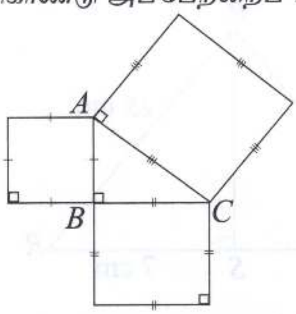
பிரசினங்களைத் தீர்த்தல்

ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு பைதகரசின் தேற்றம் எனப்படும். கி.மு. 569 - 500 இல் வாழ்ந்த பைதகரஸ் என்ற கணிதவியலாளரின் பெயர் இத்தொடர்புக்கு இடப்பட்டுள்ளது. எனினும், இக்காலத்திற்கு முன்னர் பபிலோனியர், சீனர், இந்தியர் ஆகியோரும் இத்தொடர்பை அறிந்திருந்தனர் என்பதற்குச் சான்றுகள் உள்ளன. பைதகரஸ் வாழ்ந்த காலத்திற்கு 300 ஆண்டுகளுக்குப் பின்னர் வாழ்ந்த யூக்கிளிட்டு என்ற கணிதவியலாளர் தாம் எழுதிய "The Elements of Geometry" என்னும் நூலில் பைதகரசின் தொடர்பை நிறுவிக் காட்டியிருக்கின்ற போதிலும் இங்கு இதற்கு முன்னரும் இது பயன்படுத்தப்பட்டமைக்குச் சான்றுகள் உள்ளன.

1.1 பைதகரசின் தேற்றம்

தேற்றம்: ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட சதுரத்தின் பரப்பளவானது எஞ்சியிருக்கும் இரு பக்கங்கள் மீதும் வரையப்பட்ட சதுரங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

ஓர் உருவைக் கொண்டு அப்பேற்றைப் பின்வருமாறு வகைகுறிக்கலாம்.



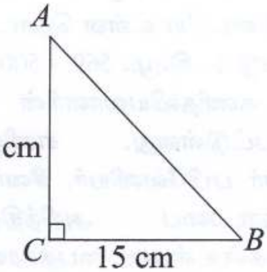
மேற்குறித்த முக்கோணி ABC இற்குப் பைதகரசின் தொடர்பைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

இப்போது நாம் பைதகரசின் தொடர்புடைமையைப் பயன்படுத்திப் பிரசினங்கள் தீர்க்கப்படும் விதம் பற்றிப் பார்ப்போம் .

உதாரணம் 1

உருவில் தரப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணியின் செம்பக்கம் AB யின் நீளத்தைக் காண்க.



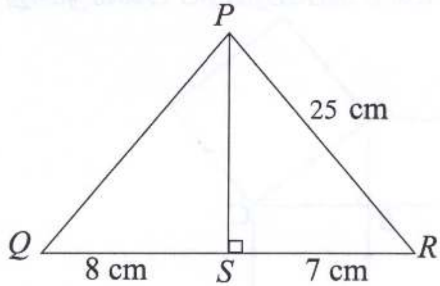
பைதகரசின் தேற்றத்திற்கேற்ப,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AB^2 = 8^2 + 15^2$$
$$= 64 + 225$$
$$= 289$$
$$\therefore AB = \sqrt{289}$$
$$AB = 17$$

$\therefore AB$ இன் நீளம் 17 cm ஆகும்.

உதாரணம் 2

உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப PQ வின் நீளத்தைக் காண்க.



இதற்காக முதலில் PS இன் நீளத்தைக் காண வேண்டும்.
செங்கோண முக்கோணி PSR இற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$\begin{aligned} PR^2 &= PS^2 + SR^2 \\ \Rightarrow PS^2 &= PR^2 - SR^2 \\ \therefore\ PS^2 &= 25^2 - 7^2 \\ &= 576 \\ PS &= \sqrt{576} \\ \therefore\ PS &= 24 \end{aligned}$$

இப்போது முக்கோணி PSQ இற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது,

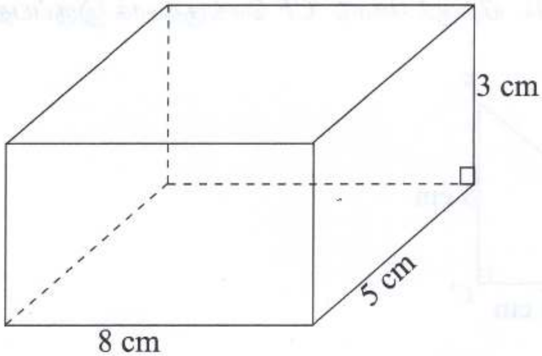
$$\begin{aligned} PQ^2 &= PS^2 + QS^2 \\ \Rightarrow PQ^2 &= 24^2 + 8^2 \\ \therefore\ PQ^2 &= 576 + 64 \\ &= 640 \\ \therefore\ PQ &= \sqrt{640} \\ PQ &= 8\sqrt{10} \end{aligned}$$

அதாவது , PQ வின் நீளம் $8\sqrt{10}$ cm ஆகும்.

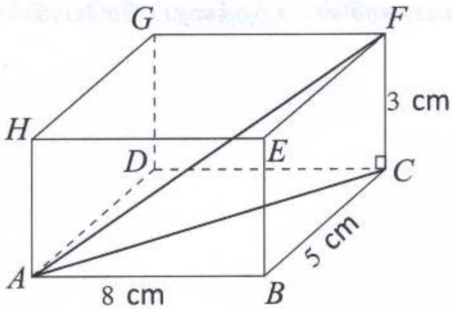
சதுரமுகி, கனவுரு ஆகியவற்றின் மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் காணும்போதும் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம். இதனை ஓர் உதாரணத்தைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 3

உருவில் 8 cm நீளமும் 5 cm அகலமும் 3 cm உயரமும் உள்ள ஒரு கனவுரு காணப்படுகின்றது.
அதன் இரு எதிர் உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

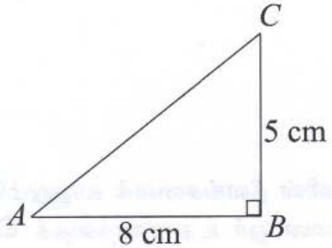


பின்வருமாறு கனவுருவின் உச்சிகளைப் பெயரிடுவோம்.



எதிர் உச்சிகளுக்கிடையேயான தூரத்தைக் காண்பதற்காக AF க்கு இடையேயான தூரத்தைக் காண வேண்டும்.

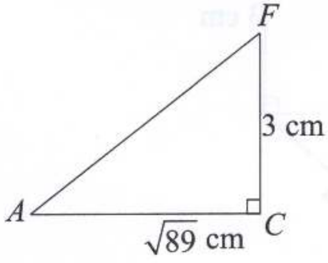
அதற்காக முதலில் செங்கோண முக்கோணி ABC யைக் கருதுவோம்.
இப்போது AC யின் நீளத்தைக் காண்போம்.



பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 8^2 + 5^2$$
$$AC^2 = 64 + 25$$
$$AC^2 = 89$$ (AC^2 ஐக் கணிப்பது போதுமானது)

இப்போது முக்கோணி ACF ஐக் கருதுவோம். இது ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும். அதற்குக் காரணம் கோடு CF ஆனது தளம் $ABCD$ யிற்குச் செங்குத்தாக அத்தளத்தின் மீது இருக்கும் கோடு AC யிற்குக் கோடு CF செங்குத்தாக இருப்பதாகும். இதற்கேற்ப $A\hat{C}F = 90^\circ$ ஆகும்.



இப்போது முக்கோணி ACF இற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$AF^2 = AC^2 + CF^2$$

$$AF^2 = \sqrt{89}^2 + 3^2$$

$$= 89 + 9$$

$$= 98$$

$$\therefore \quad AF = \sqrt{2 \times 49}$$

$$AF = 7\sqrt{2}$$

அதாவது இக்கனவுருவின் இரு எதிர் உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $7\sqrt{2}$ cm ஆகும்.

உதாரணம் 4

4 cm, 8 cm, 10 cm என்னும் நீளங்களை உடைய கோட்டுத் துண்டத் திரிதத்தைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணி இருக்க முடியுமா எனத் துணிக.

மேற்குறித்த பக்கங்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களெனின் நீளங் கூடிய பக்கம் செம்பக்கமாக இருக்க வேண்டும். ஆகையால் அது 10 cm ஆக இருத்தல் வேண்டும். எஞ்சிய இரு பக்கங்களாகிய 4 cm உம் 8 cm உம் அம்முக்கோணியின் இரு பக்கங்களாக இருத்தல் வேண்டும்.

இம்மூன்று பக்கங்களும் ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களெனின் பைதகரசின் தொடர்புக்கேற்ப $4^2 + 8^2$ இன் பெறுமானம் 10^2 இற்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

இப்போது $4^2 + 8^2$

$= 16 + 64$

$= 80$ உம்

$10^2 = 100$ உம் ஆகும்.

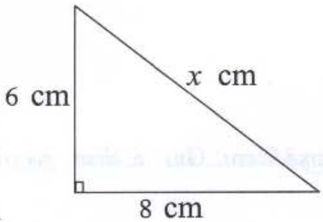
இதற்கேற்ப $4^2 + 8^2 \neq 10^2$ ஆகையால் இக்கோட்டுத் துண்டத் திரிதம் ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களாக அமைவதில்லை.

பயிற்சி 1.1

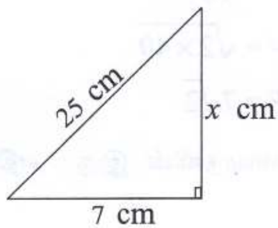
பகுதி A

1. பின்வரும் உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்ப x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

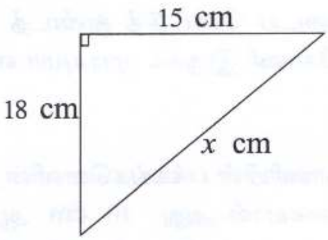
(i)



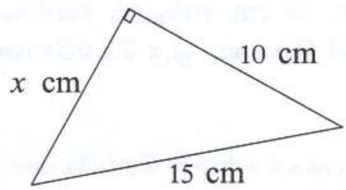
(ii)



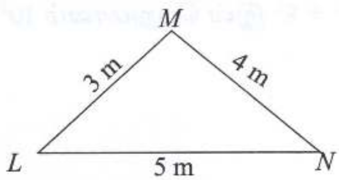
(iii)



(iv)



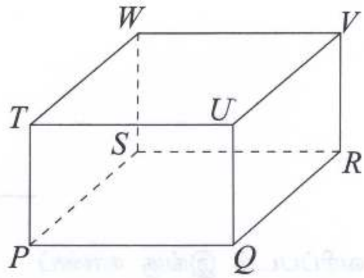
2. உருவில் உள்ள முக்கோணியின் உச்சிக் கோணம் M இன் பெறுமானத்தைப் பைதகரசின் தேற்றத்தைக் கொண்டு துணிக.



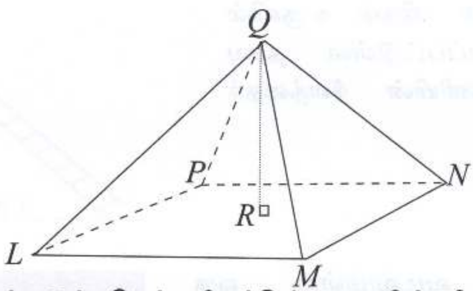
3. பின்வரும் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களாக அமையும் தொகுதியைத் தெரிந்தெடுக்க. உங்கள் விடையைக் கணிப்பின் மூலம் விளக்குக.

(i) $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 6$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC
(ii) $PQ = 17$ cm, $PR = 8$ cm, $RQ = 10$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி PQR
(iii) $LM = 17$ cm, $MN = 15$ cm, $NL = 8$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி LMN
(iv) $XY = 24$ cm, $YZ = 10$ cm, $XZ = 26$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி XYZ
(v) $CA = 20$ cm, $AT = 15$ cm, $CT = 18$ cm ஆகவுள்ள முக்கோணி CAT

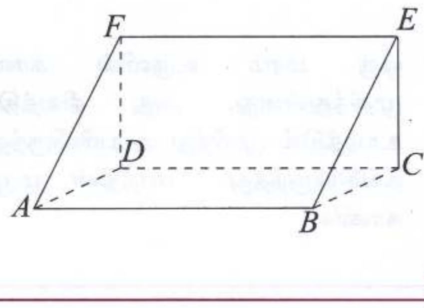
4. உருவில் உள்ள கனவுருவில் $PQ = 12$ cm, $QR = 8$ cm, $RV = 9$ cm ஆகும்.
   (i) SQ வின் நீளம்,
   (ii) QW வின் நீளம்
   ஆகியவற்றைக் காண்க.



5. உருவில் காணப்படும் சதுர அடியுள்ள ஒழுங்கான செங்கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 8 m ஆகும். சாய்விளிம்பின் 10 m எனின்,
   (i) LN இன் நீளம்
   (ii) QR இன் நீளம்
   ஆகியவற்றைக் காண்க.

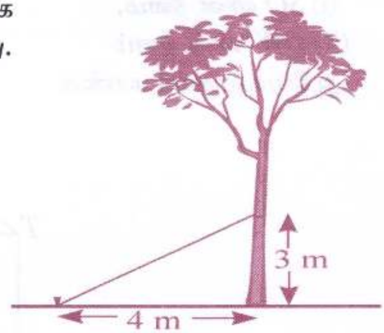


6. உருவில் காணப்படும் செவ்வரியத்தின் அடியின் நீளமும் அகலமும் முறையே 4.5 cm, 2 cm ஆகும். EC யின் உயரம் 1.5 cm ஆகும்.
   (i) AB யிற்கு நீளத்தில் சமமான பக்கங்கள் யாவை ?
   (ii) CE யிற்கு நீளத்தில் சமமான பக்கங்கள் யாவை ?
   (iii) BE யின் நீளத்தைக் காண்க.
   (iv) முகம் $ABEF$ ஏன் செவ்வக வடிவமாகக் காணப்படுகின்றது.
   (v) AEயின் நீளத்தைக் காண்க.



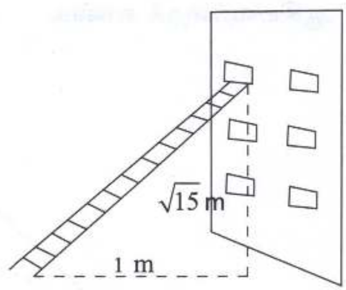
பகுதி B

7. ஒரு மரத்தை நிலைக்குத்தாக நிறுத்துவதற்காக உருவில் உள்ளவாறு ஒரு கயிறு கட்டப்பட்டுள்ளது. கயிற்றின் நீளத்தைக் காண்க

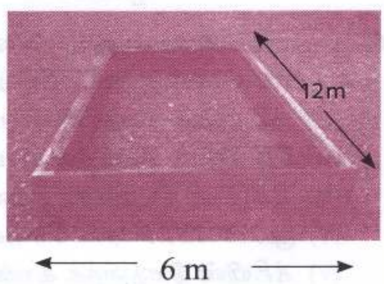


8. ஒரு பாய்மரக் கப்பலின் வரிப்படம் இங்கு காணப் படுகின்றது. தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப பாய் மரக் கப்பலின் பாய்மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

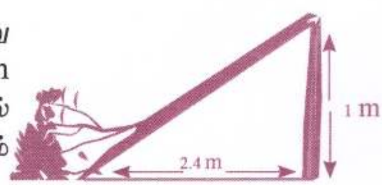
9. ஒரு கட்டடத்தில் தீந்தை பூசுவதற்காக ஏணி வைக்கப்பட்டுள்ள விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. தரப்பட்டுள்ள தரவு களைக் கொண்டு ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க.



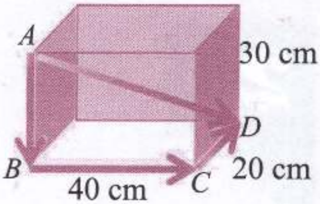
10. உருவில் செவ்வக வடிவமுள்ள ஒரு மரச் சட்டப்படல் உள்ளது. அதன் செவ்வக வடிவத்தைச் சரியாகப் பேணுவதற்கு ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தினதும் நீளம் யாதாக இருத்தல் வேண்டும்.



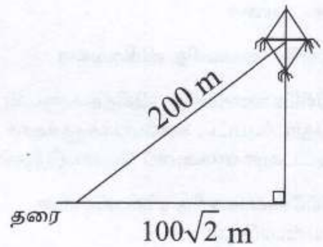
11. ஒரு மரம் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு முறிந்துள்ளது. அது நிலத்திலிருந்து 1 m உயரத்தில் முறிந்து அடியிலிருந்து 2.4 m நிலத்தில் தங்கியிருந்தது. மரத்தின் முழு உயரத்தையும் காண்க.



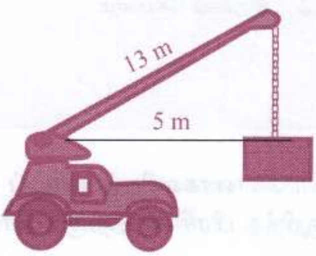
12. உருவில் ஒரு வெறிதான கனவுரு மீன்தொட்டி உள்ளது. அதில் A,D ஆகிய உச்சிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் யாது?



13. உருவில் உள்ள தகவல்களுக்கேற்பப் பட்டம் நிலத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ள தெனக் காண்க.

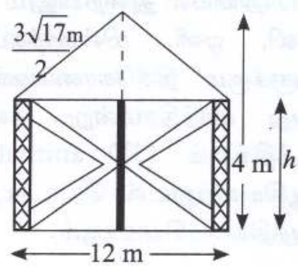


14. ஒரு கிரேனைப் பயன்படுத்தி ஒரு கொங்கிறீற்றுக் குற்றி உயர்த்தப்படும் விதம் உருவில் காணப்படுகின்றது. கொங்கிறீற்றுக் குற்றி தொங்கவிடப்பட்டுள்ள சங்கிலியின் நீளத்தைக் காண்க.



15. குழந்தைகளின் விளையாட்டு மைதானத்தில் குழந்தைகள் விளையாடுவதற்கு அமைக் கப்பட்ட ஓர் உபகரணம் உருவில் காணப்படு கின்றது. தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்பப் பிள்ளை சறுக்கிச் செல்லும் தூரத்தைக் காண்க.

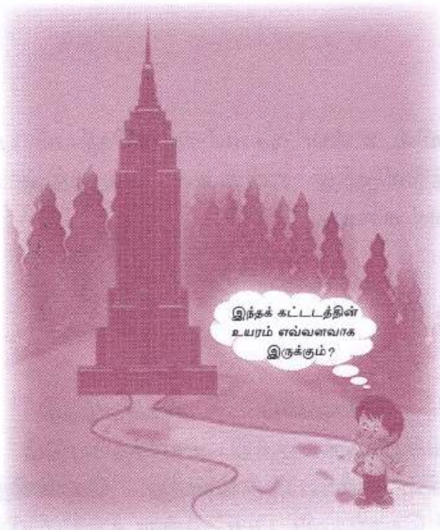
16. உருவில் மரத்தினால் அமைக்கப்பட்டிருக்கும் ஊர்திச்சாலையின் கதவின் உயரத்தைக் காண்க.



2

திரிகோணகணிதம்

- கோணம்
  - ஆரையன்
  - பாகை
- திரிகோணகணித விகிதங்கள்
- திரிகோணகணித விகிதங்களுடன் தொடர்புபட்ட கணிப்புக்களுக்காக அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தல்.
- திரிகோணகணித விகிதங்களின் பயன்பாடுகள்
  - ஏற்றக் கோணம்
  - இறக்கக் கோணம்

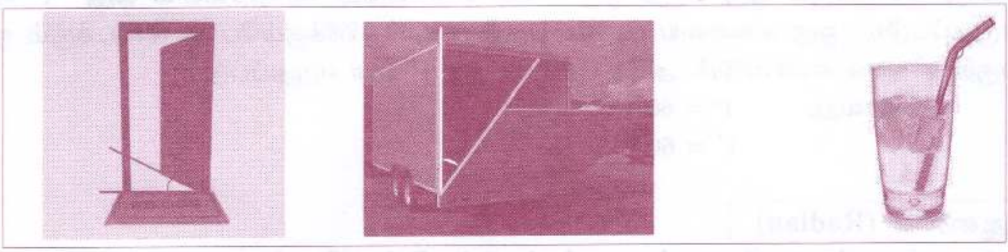


திரிகோணகணிதப் பாடப் பகுதியில் நாம் கற்ற விடயங்களைப் பயன்படுத்தி மேற் குறித்த பிரசினத்திற்குத் தீர்வைக் காணலாம்.

திரிகோணகணிதத்தில் முக்கோணியின் கோணங்களின் அளவீடுகளுக்கும் பக்கங்களின் அளவீடுகளுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமைகள் பற்றிக் கற்கப்படும். செங்கோண முக்கோணிகளுக்குத் திரிகோணகணித விகிதங்கள் வரையறுக்கப் படுகின்றன. அவ்வரைவிலக்கணத்தைப் பயன்படுத்தி எந்தவொரு முக்கோணியினதும் பக்கங்களுக்கும் கோணங்களுக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமைகளை எளிதாகக் காணலாம். திரிகோணகணித விகிதங்களிடையே அடிப்படைத் திரிகோணகணித விகிதங்களும் அவற்றின் பயன்பாடுகளும் இவ்வத்தியாயத்தில் உள்ளன.

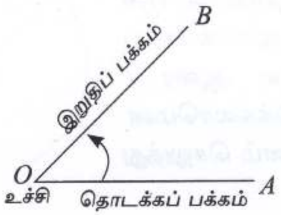
நில அளவையீட்டுத் துறையிலும் கப்பற் போக்குவரத்திலும் விசேடமாகப் பொறியியல் துறையிலும் கேத்திரகணிதம் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. ஒலி, ஒளி, மின்காந்தம் ஆகிய அதிர்வலைகளுடன் தொடர்புபட்ட கற்கை களுக்கும் திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பயன்படுத்தல் அத்தியாவசியமாகும். அது மாத்திரமன்று. கணினித் தொழினுட்பவியல் முப்பரிமாண அசைவூட் டத்திற்கும் (3D animation) கோண அளவீட்டுத் துறையிலும் அலை, காவி ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபட்ட பாடப் பகுதிகளைக் கற்பதற்கும் திரிகோணகணிதம் அத்தியாவசியமாகும்.

2.1 கோணம்

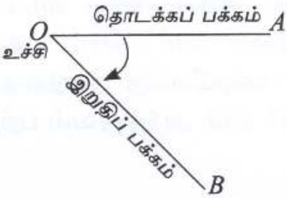


ஒரு கோடு ஒரு புள்ளியைப் பற்றிச் சுற்றும்போது கோணம் உண்டாகும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.

கோடு OA ஆனது புள்ளி O பற்றிச் சுற்றும்போது கோணம் AOB பிறப்பிக்கப் படுகின்றது.



உரு 1



உரு 2

புள்ளி O பற்றி இடஞ்சுழியாகச் சுற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் கோணம் நேர்க் கோணம் (உரு 1) எனவும்

புள்ளி O பற்றி வலஞ்சுழியாகச் (கடிகாரத்தின் முட்கள் சுற்றும் திசை) சுற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் கோணம் மறைக் கோணம் (உரு 2) எனவும் அழைக்கப்படும்.

கோணம் அளக்கப்படும் அலகுகள்

ஒரு கோடு ஒரு புள்ளியைப் பற்றி ஒரு முழுமையான சுற்றுச் சுற்றும்போது உண்டாகும் கோணம் 360° ஆகும். ஒரு பாகையை (1°) 60 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் போது கிடைக்கும் ஒரு பகுதி ஒரு கலை எனப்படும். அதேவேளை அது $1'$ என எழுதப்படும். ஒரு கலையை 60 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும்போது கிடைக்கும் ஒரு பகுதி விகலை எனப்படும். அதே வேளை அது $1''$ என எழுதப்படும்

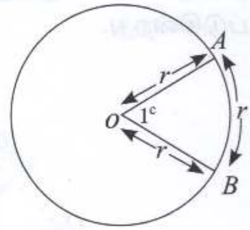
அதாவது, $1^\circ = 60'$

$1' = 60''$

ஆரையன் (Radian)

ஆரையன் என்பது கோணம் அளக்கப்படும் இன்னுமோர் அலகாகும். பின்வரும் உருவைப் பார்க்க. அதில் ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டம் வரையப்பட்டுள்ளது. அதன் ஆரைக்குச் சமமான நீளமுள்ள ஒரு நீளம் வட்டத்தின் பரிதி மீது குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமமான வில் நீளத்தினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் ஓர் ஆரையன் என வரையறுக்கப்படும். இக்கோணம் வட்டத்தின் ஆரைக்கேற்ப மாறுவதில்லையெனக் காட்டலாம். அதற்கமைய ஆரை r இற்குப் பதிலாக எந்தவொரு நீளத்தையும் எடுக்கலாமென நிறுவலாமெனினும் நாம் அந்நிறுவல் பற்றிக் கவனம் செலுத்துவதில்லை.



ஓர் ஆரையனின் அலகுப் பெறுமானம், 1^c அல்லது 1 rad எனக் குறிபிடப்படும். இப்போது நாம் ஆரையனுக்கும் பாகைக்குமிடையே உள்ள தொடர்புடைமையைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

தொடக்கத்தில் ஆரை r ஐ உடைய வட்டத்தின் பரிதியின் நீளம் s ஐ உடைய ஒரு விற் பகுதியினால் எதிரைமைக்கப்படும் கோணத்தின் பருமன் $\frac{s}{r}$ ஆரையன் என்பதை உறுதிப்படுத்துக.

இதற்கேற்ப ஆரை r ஐ உடைய வட்டத்தின் பரிதி $2\pi r$ ஆகையால், முழுப் பரிதியினாலும் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $2\pi\frac{r}{r} = 2\pi$ ஆகும். எனினும் பாகையில் இக்கோணத்தின் பெறுமானம் 360° ஆகையால்,

$$360^\circ = \left(\frac{2\pi r}{r}\right)^c$$

$$360^\circ = 2\pi^c$$

அதாவது, $2\pi^c = 360^\circ$

$$\pi^c = 180^\circ$$

$$\boxed{\pi^c = 180^\circ}$$

இத்தொடர்புடைமையைப் பயன்படுத்திப் பாகையில் அறியப்பட்ட ஒரு கோணத்தின் பெறுமானத்தை ஆரையனாகவும் ஆரையனில் தரப்பட்ட ஒரு கோணத்தின் பெறுமானத்தைப் பாகையாகவும் மாற்றலாம்.

உதாரணம் 1

90° ஐ ஆரையனில் எழுதுக.

$$180^\circ = \pi^c \quad \text{ஆகையால்,}$$

$$\frac{180^\circ}{2} = \frac{\pi^c}{2}$$

$$\therefore\ 90^\circ = \frac{\pi^c}{2}$$

உதாரணம் 2

75° ஐ ஆரையனில் எழுதுக.

$$180^\circ = \pi^c \quad \text{ஆகையால்,}$$

$$75^\circ = \frac{\pi^c}{180^\circ} \times 75^\circ$$

$$= \frac{5\pi^c}{12}$$

உதாரணம் 3

கோணம் $\frac{\pi^c}{3}$ ஐப் பாகையில் எழுதுக.

$$\pi^c = 180^\circ \quad \text{ஆகையால்,}$$

$$\frac{\pi^c}{3} = \frac{180^\circ}{3}$$

$$= 60^\circ$$

உதாரணம் 4

கோணம் $\frac{5\pi^c}{6}$ ஐப் பாகையில் எழுதுக.

$$\pi^c = 180^\circ \quad \text{ஆகையால்,}$$

$$\frac{5\pi^c}{6} = 180^\circ \times \frac{5}{6}$$

$$= 150^\circ$$

பயிற்சி 2.1

1. பின்வரும் பாகையில் தரப்பட்டுள்ள கோணங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஆரையனில் எழுதுக.

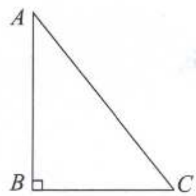
   (i) 30° (ii) 120° (iii) 165°

2. பின்வரும் ஆரையனில் தரப்பட்டுள்ள கோணங்கள் ஒவ்வொன்றையும் பாகையில் எழுதுக.

   (i) $\frac{\pi^c}{8}$ (ii) $\frac{3\pi^c}{4}$ (iii) $\frac{11\pi^c}{9}$

2.2 திரிகோணகணித விகிதங்கள்

கோணம் ABC செங்கோணமாக இருக்கும் முக்கோணி ABC ஐக் கருதுவோம்.



செங்கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம் செம்பக்கம் எனப்படும்.

கோணம் A பற்றி
BC ஆனது எதிர்ப் பக்கம் எனவும்
AB ஆனது அயற் பக்கம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

அவ்வாறே கோணம் C பற்றி
AB ஆனது எதிர்ப் பக்கம் எனவும்
BC ஆனது அயற் பக்கம் என்வும் அழைக்கப்படும்.
AC ஆனது முக்கோணியின் செம்பக்கம் ஆகும்.

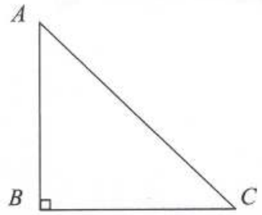
அதாவது, பக்கம் AB ஆனது $\hat{C}$ இற்கு எதிர்ப் பக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை $\hat{A}$ யின் அயற் பக்கம் ஆகும். அதாவது, நாம் கருதும் கோணத்திற்கேற்ப அயற் பக்கமும் எதிர்ப் பக்கமும் மாறும் என்பது உங்களுக்குத் தெளிவாக இருக்கும்.

மேலும், ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் செங்கோணத்தின் எதிரே உள்ள பக்கமாகிய செம்பக்கம் அம்முக்கோணியின் நீண்ட பக்கமும் ஆகும். ஒரு செங்கோண முக்கோணியின் (செங்கோணம் தவிர்ந்த) கோணத்திற்கு மூன்று அடிப்படைத் திரிகோணகணித விகிதங்கள் உள்ளன. அவை சைன் (sine), கோசைன் (cosine), தான்சன் (tangent) எனப்படும்.

ஒரு கோணத்தின் சைன் $=$ $\dfrac{\text{அக்கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$

ஒரு கோணத்தின் கோசைன் $=$ $\dfrac{\text{அக்கோணத்தின் அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}}$

ஒரு கோணத்தின் தான்சன் $=$ $\dfrac{\text{அக்கோணத்திற்கு எதிரேயுள்ள பக்கம்}}{\text{அக்கோணத்தின் அயற் பக்கம்}}$ எனப்படும்.



A கோணத்தின் சைன் விகிதமே $\sin A$ எனப்படும். இதற்கேற்ப இப்போது முக்கோணி ABC யிற்கு அடிப்படைத் திரிகோணகணித விகிதங்களை எழுதுவோம்.

கோணம் A இற்கு,

$$\sin A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{BC}{AC},$$

$$\cos A = \frac{\text{அயற் பக்கம்}}{\text{செம்பக்கம்}} = \frac{AB}{AC},$$

$$\tan A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அயற் பக்கம்}} = \frac{BC}{AB}$$

அதேபோல் கோணம் C யிற்கு ,

$$\sin C = \frac{AB}{AC},$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC},$$

$$\tan C = \frac{AB}{BC}.$$

இத்திரிகோணகணித விகிதங்களாக வரையறுக்கப்படும் பெறுமானம் முக்கோணியிலிருந்து முக்கோணிக்கு வேறுபடுகின்றதாவென நீங்கள் சந்தேகிக்கலாம் எனினும் அது அவ்வாறன்று. திரிகோணகணித விகிதங்களின் பெறுமானம் கோணத்தின் பெறுமானத்தை மாத்திரம் சார்ந்தது எனவும் அப்பெறுமானம் பக்கங்களின் நீளத்தைச் சார்ந்ததன்று எனவும் காட்டலாம்.

இப்போது அடிப்படைத் திரிகோணகணித விகிதங்கள் பற்றி அறிந்துள்ளீர்கள். அடுத்ததாக அவ்விகிதங்களைக் கொண்டு ஒரு முக்கிய பேறைப் பெறுவோம்.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (ஒரு முக்கோணியின் அகக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை) ஆகவும்

$\hat{B} = 90^\circ$ ஆகவும் இருப்பதால்

$$\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$$

$\hat{C} = 90^\circ - \hat{A}$ ஆகும்.

அப்போது $\cos\hat{C} = \cos\,(90^\circ - \hat{A})$ ஆகும். ——— ①

மேலும் மேற்குறித்த முக்கோணி ABC யில்

$\cos C = \dfrac{BC}{AC}$ உம்

$\sin A = \dfrac{BC}{AC}$ ஆகும். ——— ②

அதற்கேற்ப $\cos C = \sin A$

சமன்பாடுகள் ① இற்கும் ② இற்கும் ஏற்ப

$$\boxed{\cos\,(90^\circ - A) = \sin A}$$

அத்தகைய சுருக்கலிலிருந்து

$\sin\,(90^\circ - A) = \cos A$ எனக் காட்டலாம்.

இப்போது தான்சனுக்கு ஒரு தொடர்பை உருவாக்குவோம் .
முக்கோணி ABC யிற்கேற்ப

$\tan A = \dfrac{BC}{AB}$ உம்

$\tan C = \dfrac{AB}{BC}$ உம் ஆகும்.

$\therefore\ \tan A = \dfrac{1}{\tan C}$.

$\hat{C} = 90^\circ - A$ ஆகையால்

$$\tan A = \frac{1}{\tan\,(90^\circ - A)}$$

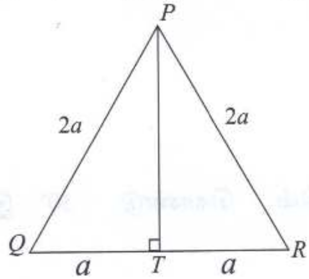
திரிகோணகணிதத்தில் உங்களுக்கு மிகவும் பயன்படும் மூன்று பேறுகளைப் பெற்றுள்ளீர்கள்.

ஆகவே,
$$\boxed{\begin{aligned} \cos(90^\circ - A) &= \sin A \\ \sin(90^\circ - A) &= \cos A \\ \tan(90^\circ - A) &= \frac{1}{\tan A} \end{aligned}}$$
ஆகும்.

இப்போது 30°, 60°, 45°, 0°, 90° போன்ற கோணப் பெறுமானங்களுக்கு அடிப்படைத் திரிகோணகணிதப் பெறுமானங்களைப் பெறுவோம்.

30°, 60° திரிகோணகணித விகிதங்கள்

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி PQR ஐக் கருதுவோம்.



இங்கு ஒவ்வொரு கோணத்தின் பெறுமானமும் 60° ஆகும்.
P யிலிருந்து QR இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடி T எனக் கொள்வோம்.

இங்கு முக்கோணிகள் PQT, PTR ஆகியவற்றைப் பற்றி நீங்கள் யாது கூறலாம்? அவ்விரு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசைகின்றனவென இவ்வாறு நிறுவுவோம்.

ΔPQT, ΔPTR இல்

$PQ = PR$ (ஒரு செம்பக்க முக்கோணி ஆகையால்)

PT (பொதுப் பக்கம்)

$P\hat{R}Q = P\hat{T}R = 90^\circ$

$\therefore \Delta PQT \equiv \Delta PTR$ (செ.ப. ப) ஆகும்.

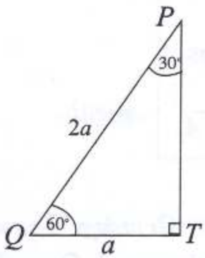
ஒருங்கிசையும் முக்கோணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகும்.

$\therefore Q\hat{P}T = T\hat{P}R.$

இதற்கேற்ப $Q\hat{P}T = T\hat{P}R = 30^\circ$ ($Q\hat{P}R = 60^\circ$ ஆகையால்)

முக்கோணி QPT யிற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$QP^2 = PT^2 + QT^2$$
$$(2a)^2 = PT^2 + a^2$$
$$\therefore PT^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$
$$PT = \sqrt{3}a$$



அதற்கேற்ப முக்கோணி PQT யைக் கருதுவதன் மூலம் பின்வரும் வெற்றிடங்களைப் பொருத்தமாக நிரப்புக.

$$\sin 60^\circ = \frac{PT}{PQ} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{QT}{PQ} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....} = \sqrt{3}$$

மேற்குறித்த உருவைக் கருத்தில் கொண்டு 30° இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்களை எழுதுக.

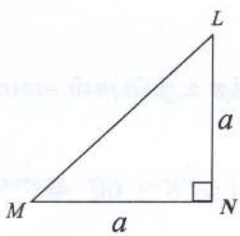
$$\sin 30^\circ = \frac{QT}{PQ} = \frac{...}{...}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{PT}{PQ} = \frac{...}{...}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{QT}{PT} = \frac{...}{...}$$

45° இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்கள்

சம பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் நீளம் a யை உடைய ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியைக் கருதுவோம்.

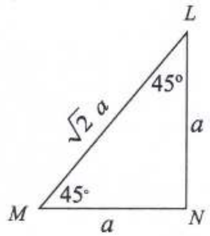


முக்கோணி LMN இற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கும்போது

$$\begin{aligned} LM^2 &= MN^2 + LN^2 \\ &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2 \\ \therefore LM &= \sqrt{2}a \end{aligned}$$

LMN ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி ஆகையால் $\hat{L} = \hat{M} = 45^\circ$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப,



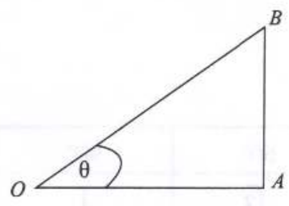
$$\sin 45^\circ = \frac{LN}{LM} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

பின்வரும் வெற்றிடங்களைப் பூர்த்திசெய்து 45° இற்கு cos, tan திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பெறுக.

$$\cos 45^\circ = \frac{MN}{LM} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

0° இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்கள்



கோணம் θ ஆனது மிகச் சிறிதாக இருக்கும்போது புள்ளி B ஆனது A யை அணுகுகின்றது. அதற்கேற்ப 0° இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்களைப் பெறுவோம்.

கோணம் 0° ஐ அணுகும்போது,
OB ஆனது OA யை அணுகுகின்றது.
எதிர்ப் பக்கம் BA ஆனது 0 ஐ அணுகுகின்றது.

அப்போது, $\sin 0^\circ = 0$
$\cos 0^\circ = 1$
$\tan 0^\circ = 0$

90° இற்கான திரிகோணகணித விகிதங்கள்

நாம் பெற்ற திரிகோணகணிதப் பேறுகளுக்கேற்ப,
$\sin 90^\circ = \cos (90^\circ - \theta^\circ)$.

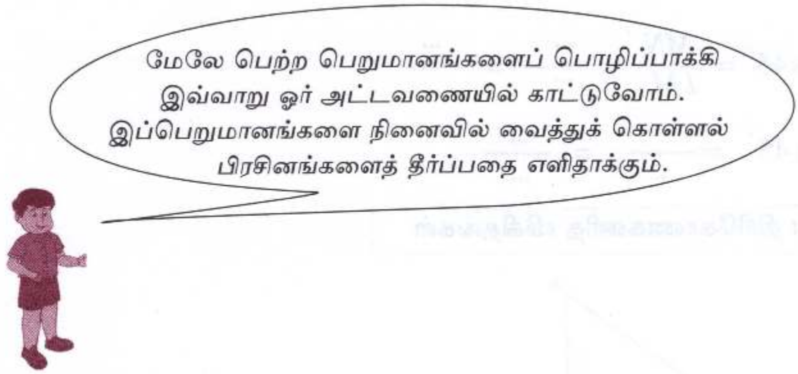
θ வின் பெறுமானம் 90° ஆக இருக்கும்போது,

$$\sin 90^\circ = \cos (90^\circ - 90^\circ) = \cos 0^\circ = 1.$$

$$\cos 90^\circ = \sin(90^\circ - 90^\circ) = \sin 0^\circ = 0.$$

$$\tan 90^\circ = \frac{1}{\tan (90^\circ - 90^\circ)} = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$$

வரையறுக்கப்படுவதில்லை.
அப்பெறுமானத்தை முடிவிலி எனவும் கருதலாம்.



	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப் படுவதில்லை.

2.3 திரிகோணகணித விகிதங்களுடன் தொடர்புபட்ட கணிப்புகளுக்கு அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தல்

மேற்குறித்த அட்டவணையில் முன்வைக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களுக்கு மேலதிகமாக ஏனைய கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்களைக் காண்பதற்குத் திரிகோணகணித அட்டவணைகள் அல்லது கணிப்பான்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திக் கோணங்களின் திரிகோணகணித விகிதங்கள் பெறப்படும் விதத்தைப் பார்ப்போம். அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்தும்போது கோணம் பாகையில் இருத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 1

$\sin 44^\circ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ප්‍රකෘති සයින இயற்கைச் சைன்கள் NATURAL SINES

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									මධ්‍යන අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	.6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	.6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6884	.6905	.6926	.6947	46	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	$\boxed{.6947}$	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	.7071	45	2	4	6	8	10	12	15	17	19
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

$\sin 44^\circ = 0.6947$

உதாரணம் 2

$\sin 67^\circ\ 15'$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ප්‍රකෘති සයින இயற்கைச் சைன்கள் NATURAL SINES

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									මධ්‍යන අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194	.9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	.9205	$\boxed{.9216}$	.9228	.9239	.9250	.9261	.9272	22	1	2	3	[illegible]	$\boxed{6}$	7	8	9	10
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325	.9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387	.9397	20°	1	2	3	4	5	6	7	8	9

அதாவது, $\sin 67^\circ\ 15' = 0.9216 + 0.0006 = 0.9222$

உதாரணம் 3

கோசைன் பெறுமானங்களைப் பெறும்போது இயற்கைச் சைன் அட்டவணை பயன்படுத்தப்படுகின்றது. கோசைன் பெறுமானத்தைப் பெறும்போது கீழ் நிரலையும் வலக் கைப்பக்க நிரலையும் பயன்படுத்த வேண்டும். $18^\circ\ 22'$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறும் விதத்தைப் பின்வரும் அட்டவணையைக் கொண்டு பார்ப்போம்.

ප්‍රකෘති සයින இயற்கைச் சைன்கள் **NATURAL SINES**

									මධ්‍යන්‍ය අන්තර இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
70°	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	.9511	18		2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	.9563	17	1	2	3	4	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

இங்கு வலக் கைப் பக்கத்தில் உள்ள நிரலிலிருந்து 18° ஐத் தெரிந்தெடுத்துக் கீழ் நிரையிலிருந்து $20'$ தெரிந்தெடுக்கப்படும். அப்போது $\cos 18^\circ\ 20' = 0.9492$ கிடைக்குமென நீங்கள் காண்பீர்கள்.

கோசைனை வாசிக்கும்போது இடை வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வேண்டும். ஆகவே இடை வித்தியாசத்திலிருந்து $2'$ இற்குரிய பெறுமானமாகிய 0.0002 ஐ 0.9492 இலிருந்து கழித்து $\cos 18^\circ\ 22'$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறவேண்டும்.

அதாவது,
$$\begin{array}{r} 0.9492 \\ -\ 0.0002 \\ \hline 0.9490 \\ \hline \end{array}$$

இதற்கேற்ப $\cos 18^\circ\ 22' = 0.9490$ எனப் பெறப்படுகின்றது.

கோசைன் பெறுமானத்தைக் காண்பதற்குச் சர்வசமன்பாடு $\cos A = \sin (90^\circ - A)$ ஐக் கொண்டும் செய்யலாம்.

$$\cos A = \sin (90^\circ - A)$$

அதாவது , $\cos 18^\circ\ 22' = \sin (90^\circ - 18^\circ\ 22')$

$90^\circ \approx 89^\circ\ 60'$ ஆகையால்

$$\begin{array}{r} 89^\circ 60' \\ -\ 18^\circ 22' \\ \hline 71^\circ 38' \\ \hline\hline \end{array}$$

இதற்கேற்ப $\cos 18^\circ 22' = \sin 71^\circ 38' = 0.9483 + 0.0007$
$= 0.9490$

அதாவது, $\cos 18^\circ 22' = 0.9490$ ஆகும்.

கோசைன் பெறுமானங்களைக் காண்பதுக்கு மேற்குறித்த முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

உதாரணம் 4

$\tan 72^\circ 15'$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ප්‍රකෘති ටැංජන இயற்கைத் தான்சன்கள் **NATURAL TANGENTS**

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44°	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	23
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	$\boxed{3.108}$	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17	3	6	10	[illegible]	$\boxed{16}$	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	16	4	7	11	14	18	22	25	29	32

இதற்கேற்ப, $\tan 72^\circ 15' = 3.108 + 0.0016$
$= 3.1096$

இப்போது ஒரு திரிகோணகணித விகிதம் பெறப்படும்போது அதற்குரிய கோணத்தைக் காணும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

உதாரணம் 5

$\sin \theta = 0.5327$ எனின், θ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ප්‍රකෘති සයින இயற்கைச் சைன்கள் **NATURAL SINES**

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடைவித்தியாசங்கள் Mean Differences								
0°	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	.0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	.0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
30°	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	.5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	$\boxed{.5324}$	.5348	.5373	.5398	.5422	.5446	57	$\boxed{2}$	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22

அட்டவணையில் 0.5327 இருக்கின்றதாவெனப் பார்க்க அட்டவணையை அவதானிக்கும்போது அதில் 0.5327 இல்லை. ஆகவே 0.5327 இற்குக் கிட்டிய குறைந்த பெறுமானத்தை எடுப்போம். அது 0.5324 ஆகும். அதற்கேற்ப 0.5324 இற்குரிய கோணம் $32^\circ 10'$ ஆகும்.

இப்போது 0.5324 இற்கும் 0.5327 இற்குமிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைப் பார்ப்போம்.

$$
\begin{array}{r}
0.5327 \\
-\underline{0.5324} \\
\underline{\underline{0.0003}}
\end{array}
$$

0.5324 இருந்த அதே நிரையில் இடை வித்தியாச நிரலில் 0.0003 இருக்கின்றதாவெனப் பார்க்க. (இடைவித்தியாச நிரலில் 0.0003 ஆனது 10 000 இனால் பெருக்கப்படும்போது கிடைக்கும் பெறுமானமாகக் காணப்படுகின்றது. அதாவது, தசமப் புள்ளியை நீக்கும்போது கிடைக்கும் பெறுமானமாகும். இதற்கேற்ப 0.0003 ஆனது 3 ஆகக் காணப்படுகின்றது.) அங்கு 3 இல்லாவிட்டால் அதற்குக் கிட்டிய பெறுமானமாகிய 2 ஐ ஒத்த இடை வித்தியாசமாகிய $1'$ ஐ எடுப்போம். அதனை $32^\circ\ 10'$ உடன் கூட்டும்போது

அதாவது , $\sin\theta = 0.5327$ ஆக இருக்கும்போது

$\theta = 32^\circ\ 11'$ எனப் பெறலாம்.

உதாரணம் 6

$\cos\theta = 0.9435$ எனின் θ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க..

ප්‍රකෘති සයින   இயற்கைச் சைன்கள்   **NATURAL SINES**

	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		மධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
70°	0.9397	0.9407	0.9417	$\boxed{0.9426}$	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	$\boxed{9}$
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	.9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	.9563	17	1	2	3	4	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

அட்டவணையில் 0.9435 இல்லை ஆகையால் அதற்குக் கிட்டிய குறைந்த பெறுமானத்தை எடுக்க வேண்டும். அது 0.9426 ஆகும். 0.9426 இற்கு உரிய கோணம் $19^\circ\ 30'$ ஆகும்.

0.9435 இற்கும் 0.9426 இற்குமிடையே உள்ள வித்தியாசமாகிய 0.0009 ஐ ஒத்த இடை வித்தியாசம் $9'$ ஐ $19^\circ\ 30'$ இலிருந்து கழிக்கும்போது $\theta = 19^\circ\ 21'$ எனக் கிடைகின்றது.

உதாரணம் 7

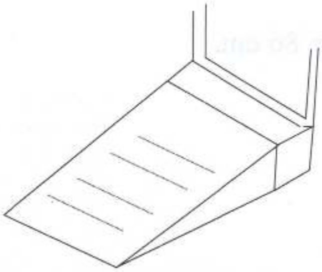
$\tan\beta = 0.3589$ எனின் β வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

ප්‍රකෘති ටැංජන இயற்கைத் தான்சன்கள் NATURAL TANGENTS									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495	.0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670	.0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217	.3249	72	3	6	10	13	15	19	22	26	29
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411	.3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	.3443	.3476	.3508	.3541	$\boxed{.3574}$	.3607	.3640	70°	3	7	10	13	$\boxed{16}$	20	23	26	29
20°	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30

$\tan\ \beta = 0.3589$ எனின்

$\beta = 19^\circ\ 45'$

உதாரணம் 8

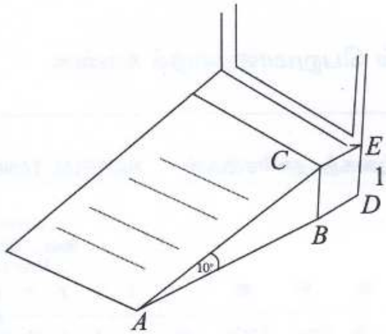


ஒரு கட்டடத்திற்குச் சக்கர நாற்காலியில் வந்த ஒருவர் அக்கட்டடத்திற்குள்ளே பிரவேசிப்பதை எளிதாக்குவதற்கு உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சாய்வைப் (ramp) பொருத்த வேண்டியுள்ளது. கட்டடத்தினுள்ளே பிரவேசிக்கும் இடத்தில் உள்ள படியின் உயரம் 15 cm ஆகவும் கிடையுடன் சாய்தளத்தின் சாய்வு 10° ஆகவும் இருப்பின்,

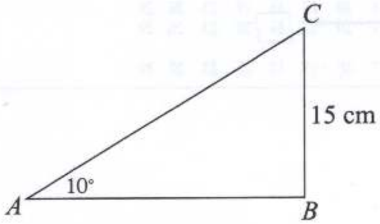
(i) சாய்தளத்தின் வழியே செல்லவேண்டிய தூரம் யாது?

(ii) சாய்தளம் கட்டடத்தினுள்ளே பிரவேசிக்கும் இடத்திலிருந்து எவ்வளவு கிடைத் தூரத்தில் இருத்தல் வேண்டும்? (விடையைக் கிட்டிய முழுவெண்ணிற்கு எடுத்துரைக்க.)

மேற்குறித்த உருவில் ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணியாக இருக்கும் அதே வேளை $BC = DE$ ஆகும். அதாவது $BC = 15$ cm.



இப்போது நாம் எளிமைக்காகப் பின்வருமாறு ஓர் உருவை வரைவோம்.



$$\text{(i)} \sin 10^\circ = \frac{BC}{AC}.$$

$$\sin 10^\circ = \frac{15}{AC}$$

$$AC = \frac{15}{\sin 10^\circ}$$

$$AC = 86.38$$

இதற்கேற்பப் பாதையின் நீளம் = 86 cm.

$$\text{(ii)} \tan 10^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 10^\circ = \frac{15}{AB}$$

$$AB = \frac{15}{\tan 10^\circ}$$

$$AB = 85.07$$

இதற்கேற்பப் பாதையில் பிரவேசிக்கும் இடத்தில் கட்டடத்தினுள்ளே பிரவேசிக்கும் கிடைத்தூரம் 85 cm ஆகும்.

உதாரணம் 9

சதுர அடியை உடைய ஒரு செங்கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்க நீளம் 100 m ஆகும். கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 50 m ஆகும்.

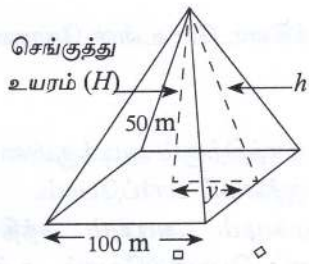
(i) அடியின் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் நீளம்

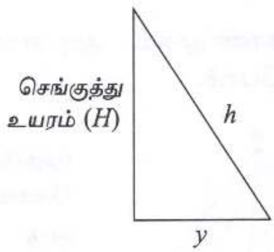
(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம்

(iii) ஒரு முக்கோண முகத்திற்கும் அடிக்குமிடையே உள்ள கோணம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

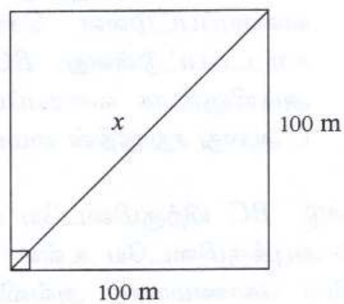
தொடக்கத்திலே தரப்பட்டுள்ள தரவுகளை ஒரு வரிப்படத்தில் குறிப்போம்.





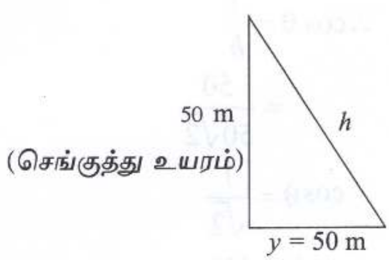
(i) இங்கு அடி சதுரமாகும்.

$$x = \sqrt{100^2 + 100^2}$$
$$= 100\sqrt{2}$$



அதாவது அடியின் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $100\sqrt{2}$ m ஆகும்.

(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் h எனின், பின்வரும் முக்கோணியைக் கருதும்போது

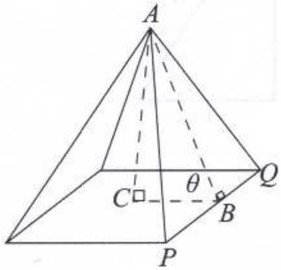


$$y = \frac{\text{சதுரத்தின் ஒரு பக்க நீளம்}}{2}$$
$$= 50 \text{ m}$$

$$h^2 = 50^2 + 50^2$$
$$h^2 = 2 \times 50^2$$
$$h = 50\sqrt{2}$$

அதாவது, ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் $50\sqrt{2}$ m ஆகும்.

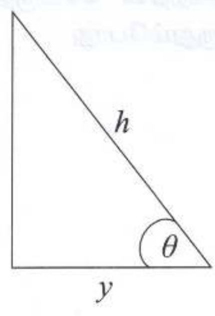
(iii) முக்கோண முகம் , அடி என்னும் தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்போம்.



முதலில் முக்கோண முகத்திற்கும் அடிக்குமிடையே உள்ள கோணம் என்பதன் கருத்தைப் பார்ப்போம். ஒரு முக்கோண முகமும் அடியும் சந்திக்கும்போது விளிம்பை PQ எனப் பெயரிடுவோம். உச்சியிலிருந்து விளிம்பு PQ இற்கு முக்கோண முகத்தின் வழியே வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்துக் கோடு AB யினால் காட்டப்பட்டுள்ளது. BC ஆனது விளிம்பு PQ இற்கு அடியினூடாக வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தெனின், C ஆனது சதுரத்தின் மையமாகும்.

கோடு AB இற்கும் கோடு BC யிற்குமிடையே உள்ள கோணம் $A\hat{B}C$ ஆனது முக்கோண முகத்திற்கும் அடிக்குமிடையே உள்ள கோணமாகும். பொதுவாக இரு தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணமானது அவ்விரு தளங்களும் இடைவெட்டும் போது விளிம்பின் மீதுள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளியில் அப்போது விளிம்புக்குச் செங்குத்தாக ஒவ்வொரு தளத்தின் மீதும் இருக்கும் இரு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணமாகும். அது உருவில் θ இன் மூலம் காட்டப்படுகின்றது.

$$\therefore \cos\theta = \frac{y}{h}$$
$$= \frac{50}{50\sqrt{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore \theta = 45^\circ$$



பயிற்சி 2.2

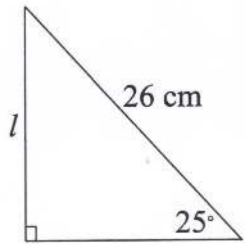
1. அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றையும் காண்க.

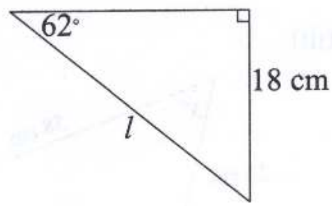
(i) $\sin 38^\circ$ (ii) $\sin 45^\circ 13'$ (iii) $\cos 72^\circ$
(iv) $\cos 48^\circ 20'$ (v) $\tan 85^\circ$ (vi) $\tan 52^\circ 64'$

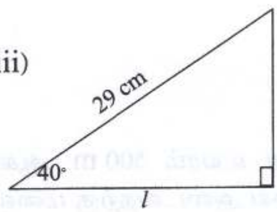
2. அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திக் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றையும் காண்க.

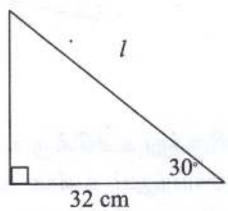
(i) $\sin \alpha = 0.6862$ (ii) $\sin \beta = 0.3010$ (iii) $\cos \alpha = 0.9848$
(iv) $\cos \beta = 0.9050$ (v) $\tan \alpha = 0.034$ (vi) $\tan \beta = 1.771$

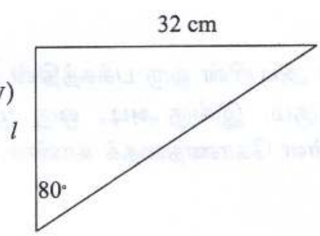
3. கீழே தரப்பட்டுள்ள முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றிலும் 'l' இனால் காட்டப்படும் பக்கத்தின் நீளத்தைக் கணிக்க (உங்கள் விடைகளை கிட்டிய முதலாந் தசம தானத்தில் கூறுக).

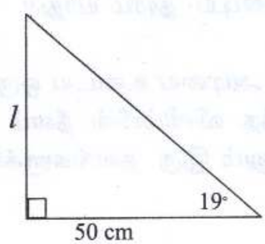
(i)


(ii)


(iii)


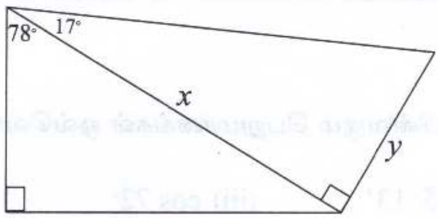
(iv)


(v)


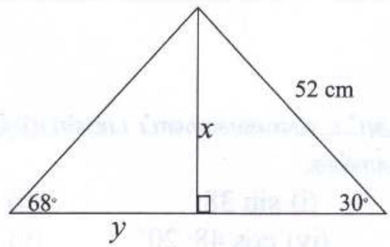
(vi)


4. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப x, y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i)

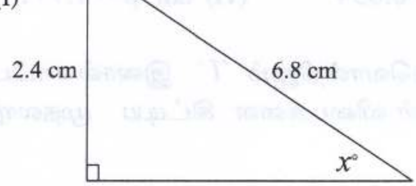


(ii)

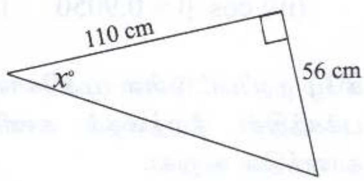


5. x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

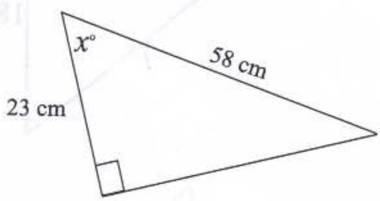
(i)



(ii)



(iii)



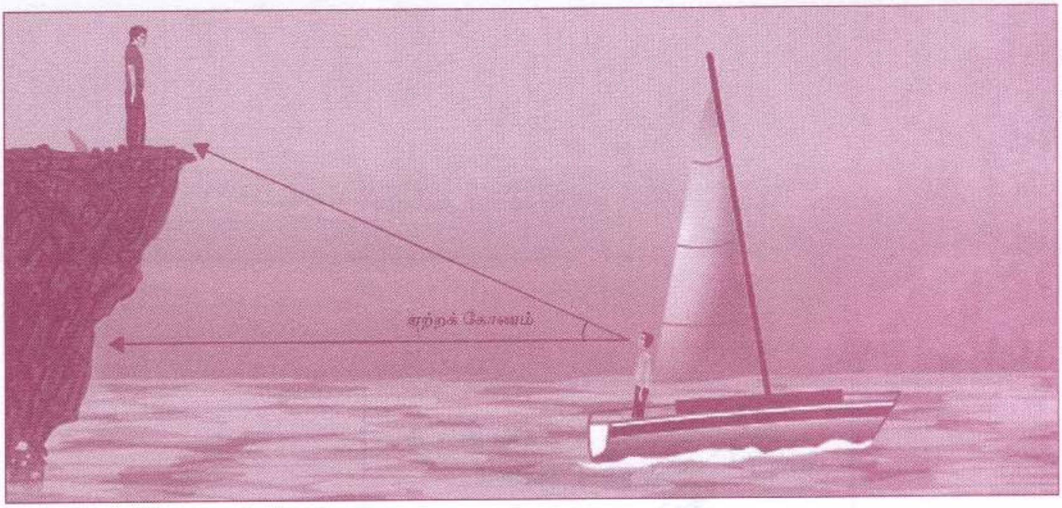
6. தரையிலிருந்து உச்சிக்கு உள்ள நிலைக்குத்து உயரம் 500 m ஆகவும் கிடையுடன் 10° இற் சாய்ந்தும் உள்ள மலையின் உச்சியை அடைவதற்கு மலை வழியே செல்ல வேண்டிய தூரம் யாது?

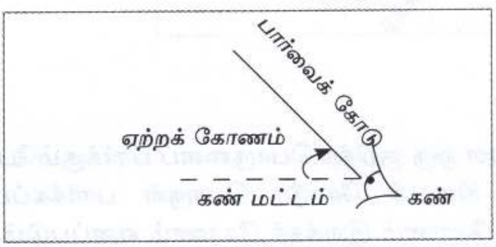
7. சதுர அடியை உடைய ஒரு கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 60 m உம் சாய்ந்த விளிம்பின் நீளம் 50 m உம் ஆகும். இங்கு அடி, ஒரு முக்கோண முகம் என்னும் இரு தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

2.4 திரிகோணகணித விகிதங்களின் பயன்பாடு

இப்போது நாம் இதுவரைக்கும் கற்ற திரிகோணகணித விகிதங்களை இருபரிமாண, முப்பரிமாணச் சந்தர்ப்பங்கள் தொடர்பான கணிதப் பிரசினங்களைத் தீர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்தும் விதத்தைப் பார்ப்போம்.

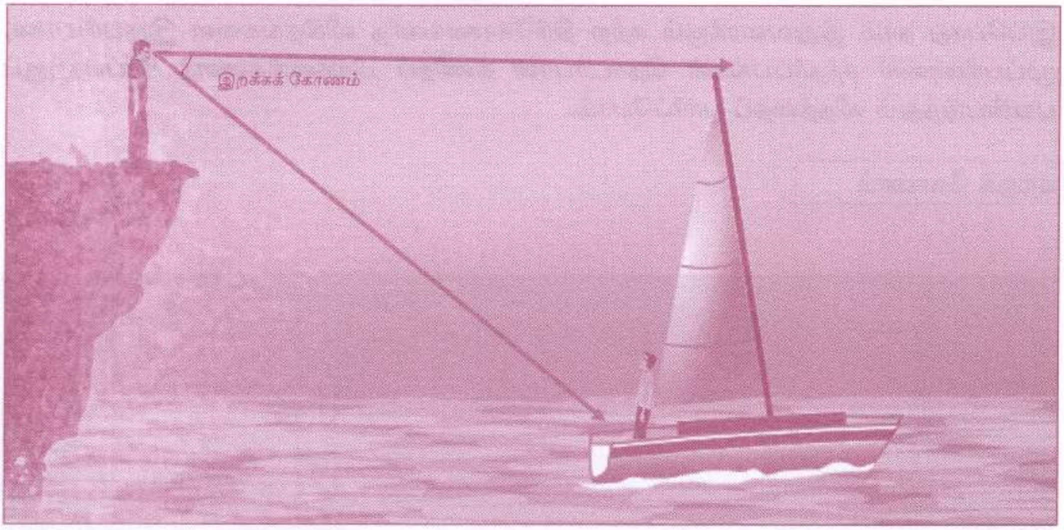
ஏற்றக் கோணம்

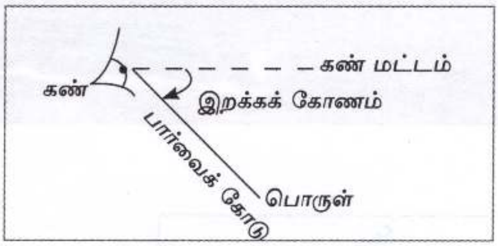




கண் மட்டத்திற்கு மேலே உள்ள ஒரு குறித்த பொருளைப் பார்க்கும்போது நோக்குநரின் கண் மட்டத்திற்கும் (ஒரு கிடைக் கோடு) பொருள் பார்க்கப்படும் பார்வைக் கோட்டுக்குமிடையே உள்ள கோணம் ஏற்றக் கோணம் எனப்படும்.

இறக்கக் கோணம்





கண் மட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள ஒரு குறித்த பொருளைப் பார்க்கும்போது நோக்குநரின் கண் மட்டத்திற்கும் (ஒரு கிடைக் கோடு) பொருள் பார்க்கப்படும் பார்வைக் கோட்டுக்குமிடையே உள்ள கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும்.

உதாரணம் 1

2.5 m உயரமுள்ள ஒரு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 2 m தூரத்தில் அதே கிடைத் தளத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

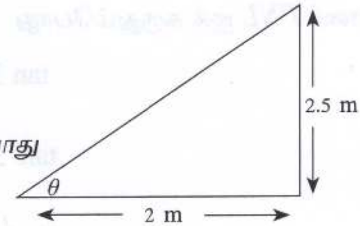
மேற்குறித்த உருவைக் காட்டுவதற்கு ஒரு பரும்படி உருவை வரைவோம்.

$$\tan\theta = \frac{2.5}{2}$$

$$\tan\theta = 1.25$$

அட்டவணையைப் பார்க்கும் போது

$$\theta = 51^\circ \quad 20'$$

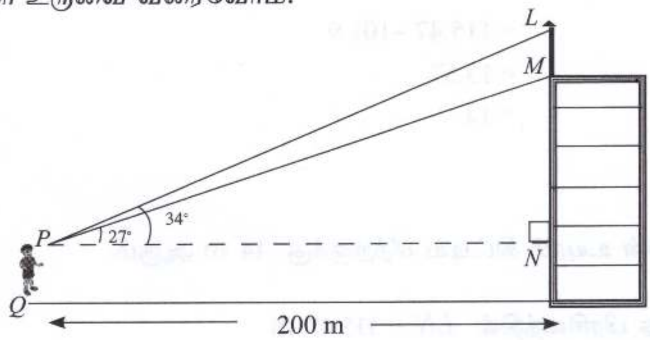


கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 51° $20'$ ஆகும்.

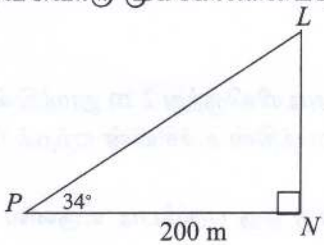
உதாரணம் 2

ஒரே கிடைத் தரையில் உள்ள மாடிக் கட்டடம் ஒன்றின் அடியிலிருந்து 200 m தூரத்தில் நிற்கும் முரளிக்குக் கட்டடத்தின் ஆகவும் மேலே உள்ள கூரையும் கூரை மீது உள்ள மின்னற் கடத்தியின் உச்சியும் முறையே 27°, 34° ஏற்றக் கோணங்களில் இருப்பதாகத் தோன்றின. மின்னற் கடத்தியின் உயரத்தைக் கிட்டிய மீற்றருக்குக் காண்க.

இதற்காக ஓர் உருவை வரைவோம்.



இப்போது வசதிக்காக ஒவ்வொரு முக்கோணியையும் வேறுவேறாக வரைவோம்.



முக்கோணி PNL ஐக் கருதும்போது

$$\tan 34^\circ = \frac{LN}{PN}$$

$$\tan 34^\circ = \frac{LN}{200}$$

$$\therefore\ LN = 200 \times \tan 34^\circ$$

$$\Rightarrow LN = 115.47\text{ m}$$

முக்கோணி PMN ஐக் கருதும்போது

$$\tan 27^\circ = \frac{MN}{PN}$$

$$\tan 27^\circ = \frac{MN}{200}$$

$$\therefore\ MN = 200 \times \tan 27^\circ$$

$$\Rightarrow MN = 101.9\text{ m}$$

மின்னற் கடத்தியின் உயரம் $= LM = LN - MN$

$$= 115.47 - 101.9$$

$$= 13.57$$

$$= 14$$

$\therefore$ மின்னற் கடத்தியின் உயரம் கிட்டிய மீற்றருக்கு 14 m ஆகும்.

குறிப்பு : மேற்குறித்த பிரசினத்தில் $LN = 115.47$ m

கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு $LN \simeq 115$ m

$MN = 101.9$ m

கிட்டிய முழுவெண்ணுக்கு

$MN \simeq 102$ m

$LM = LN - MN$

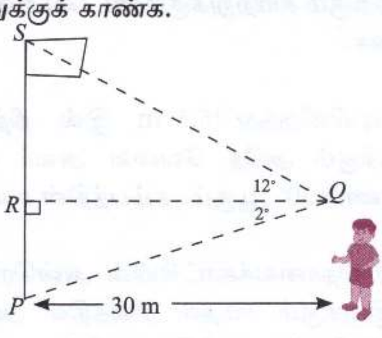
$LM = 115\text{ m} - 102\text{ m}$

$= 13$ m.

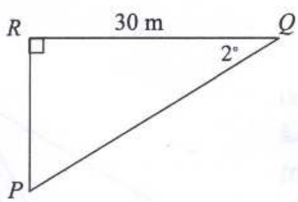
இத்தகைய பிரசினங்களின் இறுதி விடை வரைக்கும் தசம தானங்களுடன் சுருக்கி இறுதி விடையை மாத்திரம் மட்டந்தட்ட வேண்டும் என்பதை நினைவில் வைத்துக்கொள்க. இறுதி விடையைப் பெறத் தேவையான மற்றைய விடைகளை மட்டந்தட்டி இறுதி விடையைப் பெற்றால், சரியான விடை பெரும்பாலும் கிடைக்காமல் இருக்கலாம்.

உதாரணம் 3

ஒரு கொடிக் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து சம தூரத்தில் 30 m தூரத்தில் நிற்கும் ஒரு பிள்ளைக்குக் கொடிக் கம்பத்தின் உச்சி தோற்றும் ஏற்றக் கோணம் 12° ஆகவும் அடி தோற்றும் இறக்கக் கோணம் 2° ஆகவும் இருப்பின் கொடிக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் கிட்டிய முழுவெண்ணுக்குக் காண்க.



செங்கோண முக்கோணி PQR ஐக் கருதும்போது



$$\tan 2^\circ = \frac{PR}{QR}$$

$$\tan 2^\circ = \frac{PR}{30}$$

$$\therefore \; PR = 30 \tan 2^\circ$$

$$\Rightarrow PR = 1.05$$

செங்கோண முக்கோணி QSR ஐக் கருதும்போது

$$\tan 12^\circ = \frac{SR}{QR}$$

$$\tan 12^\circ = \frac{SR}{30}$$

$$SR = 30 \tan 12^\circ$$

$$\Rightarrow SR = 6.38 \text{ m}$$

$$PS = PR + RS$$

$$= 1.05 + 6.38$$

$$= 7.43$$

$$\simeq 7$$

கொடிக் கம்பத்தின் உயரம் அண்ணளவாக 7 m ஆகும்.

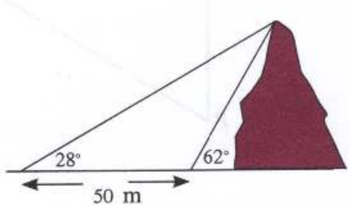
பயிற்சி 2.3

1. ஒரு கம்பத்தின் உச்சியில் கட்டப்பட்ட ஒரு கயிற்றின் மற்றைய நுனியைக் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 10 m தூரத்தில் கம்பம் இருக்கும் சமதளத் தரையில் உள்ள ஒரு முளைக்குற்றியில் கட்டுவதன் மூலம் அக்கம்பம் நிலைக்குத்தாகப் பேணப்படுகின்றது. கம்பத்திற்கும் கயிற்றுக்குமிடையே உள்ள கோணம் 26° எனின் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

2. ஒருவர் கம்பம் ஒன்றின் அடியிலிருந்து 15.5 m இல் நிற்கின்றார். அவருடைய உயரம் 1.5 m ஆக இருக்கும் அதே வேளை அவர் கம்பத்தின் உச்சியைப் பார்க்கும்போது ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகும். கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

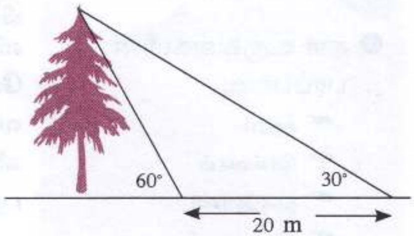
3. ஒரு கட்டடத்தின் உச்சியில் தொலைக்காட்சியின் அன்ரெனா ஒன்று பொருத்தப் பட்டுள்ளது. கட்டடம் இருக்கும் சமதள நிலத்தில் அடியில் இருந்து 12 m தூரத்தில் இருக்கும் புள்ளியிலிருந்து அன்ரெனாவின் அடியினதும் உச்சியினதும் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 40°, 45° ஆகும். அன்ரெனாவின் உயரத்தைக் காண்க.

4. ஓர் இடத்திலிருந்து மலை ஒன்றின் உச்சியை நோக்கும் ஒருவருக்கு மலையுச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 28° ஆகும். மலையை நோக்கி 50 m சமதள நிலத்தில் சென்று மலையுச்சியைப் பார்க்கும்போது அதன் ஏற்றக் கோணம் 62° ஆகும் . மலையின் உயரத்தைக் காண்க.

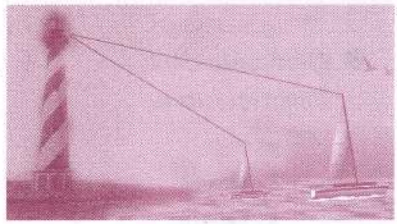


5. ஒரு மரத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு கட்டடத்தைப் பார்க்கும் ஒருவருக்குக் கட்டடத்தின் உச்சி தோற்றும் ஏற்றக் கோணம் 60° ஆகும். அவர் மரத்தில் ஏறி நிலத்திலிருந்து 8 m உயரத்தில் உள்ள ஓர் இடத்தில் கட்டடத்தின் உச்சியைப் பார்க்கும்போது அதன் ஏற்றக் கோணம் 45° ஆகும். கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க

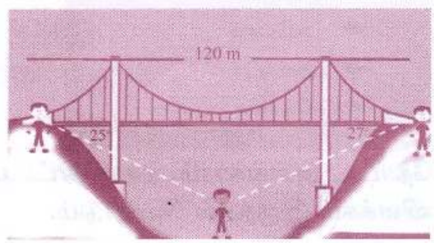
6. ஒரு மரத்தின் உச்சியைப் பார்க்கும் சிறுவன் ஒருவனுக்கு மரத்தின் உச்சி தோற்றும் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகும். அவன் மரத்தை நோக்கி 20 m சென்று மரத்தின் உச்சியை மீண்டும் பார்க்கின்றான். அப்போது உச்சி தோற்றும் ஏற்றக் கோணம் 60° ஆகும். சிறுவனின் உயரத்தைப் புறக்கணித்து மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



7. ஒரு கலங்கரைவிளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும் ஒருவனுக்கு இரு கப்பல்கள் காணப்படும் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30°, 45° ஆகும். கலங்கரைவிளக்கத்தின் உயரம் 30 m எனின் இரு கப்பல்களுக்குமிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க



8. ஒரு பாலத்திலிருந்து கீழே உள்ள ஆற்றில் பாலத்தின் இரு கரைகளில் உள்ள இரு மனிதர்கள் ஒரு குத்துமலையில் உள்ள ஒருவரைப் பார்க்கும்போது அவர் 25°, 27° இறக்கக் கோணங்களில் இருப்பதாகத் தோன்றுகின்றார். குத்துமலையின் ஆழத்தைக் காண்க. மனிதனின் உயரத்தைப் புறக்கணிக்க.



9. 50 m உயரமுள்ள ஒரு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து அதற்கு எதிரேயுள்ள ஒரு கம்பத்தின் உச்சியைப் பார்க்கும்போது அதன் ஏற்றக் கோணம் 10° ஆகும். இரண்டாம் கம்பத்திலிருந்து முதற் கம்பத்தின் உச்சியைப் பார்க்கும்போது ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகும்.
   (i) இரு கம்பங்களுக்குமிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.
   (ii) இரண்டாம் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

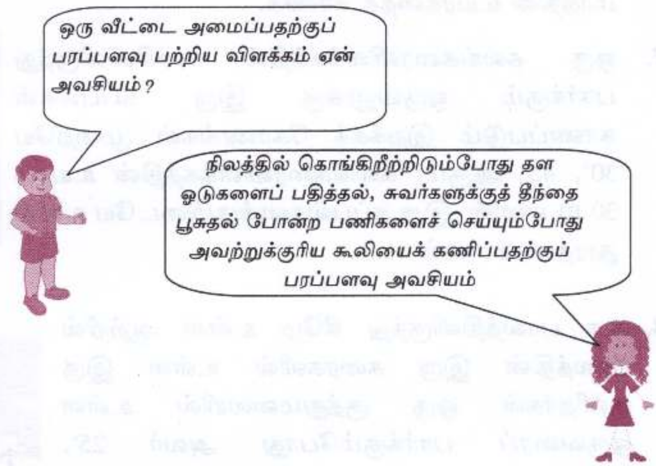
10. ஒரு செவ்வக மைதானத்தின் எதிர் உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 90 m ஆகும். எதிர் உச்சிகளைத் தொடுக்கும் கோடு ஓர் விளிம்புடன் 40° சாய்வைக் கொண்டுள்ளது. மைதானத்தின் நீளத்தையும் அகலத்தையும் கிட்டிய மீற்றருக்குக் காண்க. மைதானத்தின் ஒரு மூலையில் ஒரு கமுகு உள்ளது. எதிர் உச்சியிலிருந்து அதன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 8° எனின், கமுகின் உயரத்தைக் கிட்டிய மீற்றருக்குக் காண்க.

3

பரப்பளவு

- தள உருவங்களின் பரப்பளவு
  - சதுரம்
  - செவ்வகம்
  - முக்கோணி
  - இணைகரம்
  - சரிவகம்
  - ஆரைச்சிறை
- திண்மங்களின் மேற்பரப்பளவு
  - அரியம்
    - ★ சதுரமுகி
    - ★ கனவுரு
    - ★ முக்கோண அரியம்
  - உருளை
  - கூம்பகம்
  - கூம்பு
  - கோளம்

தினசரி வாழ்வில் வெளியை உத்தம மட்டத்தில் பயன்படுத்துவதற்குப் பரப்பளவு பற்றிய விளக்கம் இருத்தல் முக்கியமானது. ஓர் உதாரணமாக ஒரு வீடு அமைக்கப்படும் சந்தர்ப்பத்தைக் கருது வோம். வீட்டின் அடிப்படைத் திட்டப்படத்தை வரையும்போது வீட்டுக் கட்டடம் தொடக்கம் வீட்டு அலங்காரம் வரைக்கும் பரப்பளவு பற்றிய விளக்கம் மிகவும் முக்கியமானதாகும்.



தோட்ட அலங்காரம், நகரத் திட்டமிடல் போன்ற பணிகளிற்கூடப் பரப்பளவு பற்றிய விளக்கம் இருத்தல் வேண்டும்.

தள உருவங்களின் பரப்பளவு, திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு ஆகிய தலைப்புகளினூடாகப் பரப்பளவு பற்றி ஆராயலாம். தொடக்கத்தில் நாம் தள உருவங்களின் பரப்பளவு பற்றிக் கருதுவோம்.

3.1 ➡ தள உருவங்களின் பரப்பளவு

நேர்கோட்டு அல்லது வளைகோட்டுத் துண்டங்களினால் உள்ளடைக்கப்பட்ட அடைத்த ஒரு தளத்தில் வரையப்பட்ட உருவங்கள் மேற்குறித்த உருவங்களில் காணப்படுகின்றன. இவை தள உருவங்கள் எனப்படும்.

ஒரு குறித்த தள உருவத்திற்குத் தேவையான மேற்பரப்பின் இட அளவானது அத்தள உருவத்தின் பரப்பளவாகும் என்பதை இப்போது நீங்கள் அறிவீர்கள்.

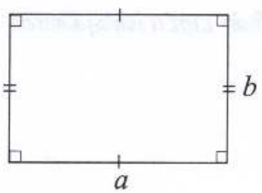
பரப்பளவின் அலகுகள் "சதுர அலகுகள்" ஆகும்.

அதாவது பரப்பளவின் அலகுகளாகச் சதுரக் கிலோமீற்றர் (km^2), சதுர மீற்றர் (m^2), சதுர சென்ரிமீற்றர் (cm^2), சதுர மில்லிமீற்றர் (mm^2) ஆகியன பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

மேலும் ஹெக்ரெயர், எயர், ஏக்கர், பேர்ச்சு போன்ற அலகுகளிலும் பரப்பளவை அளக்கலாம். சதுர மீற்றர் (m^2) ஆனது பரப்பளவின் நியம அலகாகக் கருதப்படுகின்றது. ஆகவே இயன்ற போதெல்லாம் பரப்பளவைச் சதுர மீற்றரில் எடுத்துரைத்தல் உகந்தது.

இப்போது சதுரம், செவ்வகம், முக்கோணி, இணைகரம், சரிவகம், வட்டம் போன்ற கேத்திரகணித வடிவங்களின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான முறைகளை நினைவுகூர்வோம் .

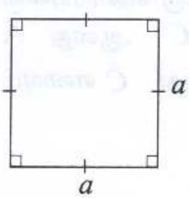
செவ்வகம்



$$
\begin{aligned}
\text{பரப்பளவு} &= \text{நீளம்} \times \text{அகலம்} \\
&= a \times b \\
&= ab
\end{aligned}
$$

ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு விசேட சந்தர்ப்பமாகிய நீளமும் அகலமும் சமமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தை அதாவது சதுரத்தைக் கருதுவோம்.

சதுரம்

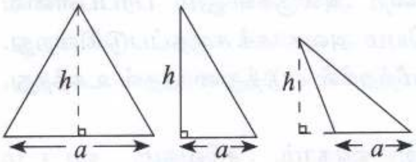


$$
\begin{aligned}
\text{பரப்பளவு} &= \text{ஒரு பக்கத்தின் நீளம்} \times \text{ஒரு பக்கத்தின் நீளம்} \\
&= a \times a \\
&= a^2
\end{aligned}
$$

முக்கோணி

முக்கோணிகளைக் கூர்ங்கோண முக்கோணி, செங்கோண முக்கோணி, விரிகோண முக்கோணி என வகைப்படுத்தத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை எந்தவொரு முக்கோணியினதும் பரப்பளவு $\frac{1}{2}$ × அடி × செங்குத்து உயரம் என்பதனால் தரப்படும்.

இங்கு அடியாக எந்தவொரு பக்கத்தையும் தெரிந்தெடுக்கத்தக்கதாக இருக்கும் அதே வேளை அப்போது செங்குத்து உயரம் அந்த அடியாகத் தெரிந்தெடுத்த பக்கத்திற்கு எதிர் உச்சியில் இருந்துள்ள செங்குத்துத் தூரம் ஆகும். இதற்கேற்ப



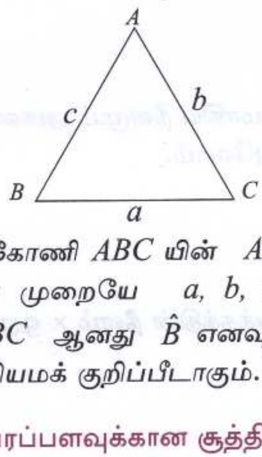
பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ அடி $\times$ செங்குத்து உயரம்

$$= \frac{1}{2} \times a \times h$$

$$= \frac{1}{2} ah$$

* திரிகோணகணித விகிதங்களைக் கொண்டும் ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவுக்கான ஒரு கோவையைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

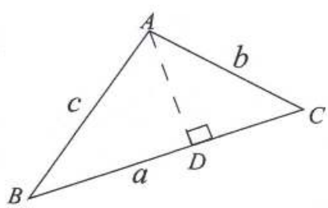
எந்தவொரு முக்கோணி ABC யிற்குரிய நியமக் குறிப்பீடு



யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC யின் A, B, C ஆகிய உச்சிகளுக்கு எதிரேயுள்ள பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a, b, c எனவும் கோணம் BAC ஆனது $\hat{A}$ எனவும் கோணம் ABC ஆனது $\hat{B}$ எனவும் கோணம் ACB ஆனது $\hat{C}$ எனவும் எழுதப்படுகின்றமை நியமக் குறிப்பீடாகும்.

ஒரு முக்கோணியின் பரப்பளவுக்கான சூத்திரம் (திரிகோணகணித விகிதங்களைக் கொண்டு)

ஒரு முக்கோணி ABC யைக் கருதுவோம்.



நியமக் குறிப்பீட்டுக்கேற்ப $BC = a, AC = b, AB = c$ ஆகும். A யிலிருந்து பக்கம் BC யிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் அடி D எனக் கொள்வோம்.

அடுத்ததாகச் செங்கோண முக்கோணி ABD யைக் கருதும்போது,

$$\sin B = \frac{AD}{AB}$$
$$\Rightarrow AD = c \sin B$$

இப்போது ΔABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

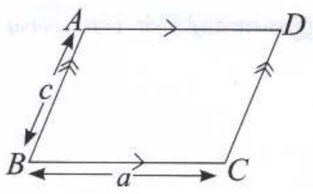
$$= \frac{1}{2} \times a \times c \sin B$$
$$= \frac{1}{2} ac \sin B. \qquad \because AD = c \sin B$$

இவ்வாறே B, C ஆகிய உச்சிகளிலிருந்து எதிர்ப் பக்கங்களுக்குச் செங்குத்துகளை வரையும்போது கிடைக்கும் செங்கோண முக்கோணியைக் கருதும்போது

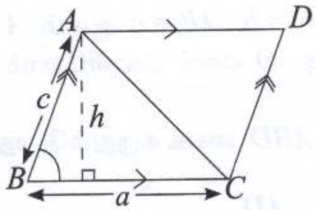
ΔABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ab \sin C$ எனவும் காட்டலாம்.

அதாவது ΔABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ab \sin C$.

இணைகரம்



மேற்குறித்த இணைகரத்தின் பரப்பளவை முக்கோணிகளின் பரப்பளவுகளிலிருந்து பெறலாம். அதற்காக இவ்விணைகரத்தை இரு சம முக்கோணிகள் கிடைக்குமாறு வேறுபடுத்துவோம். இதற்காக மூலைவிட்டம் AC யை வரைந்து, A யிலிருந்து BC யிற்கு ஒரு செங்குத்தை வரைவோம்.



இணைகரம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு $= 2 \times$ முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவாகும்.

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவைக் காண்போம்.

$$\sin B = \frac{h}{c} \text{ ஆகையால்}$$
$$h = c \sin B$$

முக்கோணி ABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2} ac \sin B$

இதற்கேற்ப,

$$\text{இணைகரம் } ABCD \text{ யின் பரப்பளவு } = \frac{1}{2} \times ac \sin B \times 2$$
$$= ac \sin B$$
$$= ah$$

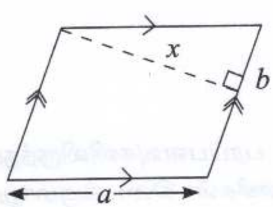
இணைகரத்தின் பரப்பளவு = அடி × சமாந்தரக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத் தூரம்

பரப்பளவு $= a \times h$

$= ah$

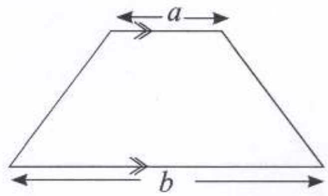
குறிப்பு

அடி b ஆகும்போது செங்குத்து உயரம் x ஆகும். அப்போது இணைகரத்தின் பரப்பளவு பின்வருமாறு

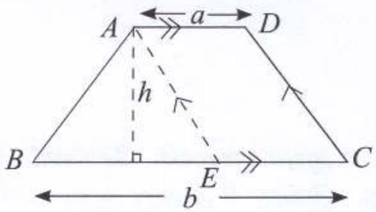


பரப்பளவு $= bx$

சரிவகம்



சரிவகத்தைப் பின்வருமாறு ஒரு முக்கோணியாகவும் இணைகரமாகவும் வேறுபடுத்தி அதன் பரப்பளவைக் காண்போம்.



சரிவகம் $ABCD$ யின் பரப்பளவு = முக்கோணி ABE யின் பரப்பளவு + இணைகரம் $AECD$ யின் பரப்பளவு

முக்கோணி ABE யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}(b-a)h$

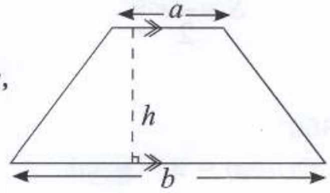
இணைகரம் $AECD$ யின் பரப்பளவு $= ah$

இதற்கேற்பச் சரிவகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}(b-a)h + ah$

$= \frac{1}{2}(a+b)h$

அதாவது, சரிவகத்தின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$ × இரு சமாந்தர பக்கங்களினதும் கூட்டுத்தொகை × சாமாந்தரப் பக்கங்களுக்குகிடையே உள்ள செங்குத்து உயரம்

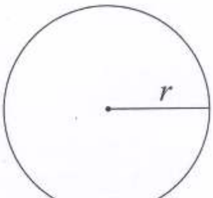
அதாவது,



பரப்பளவு $= \frac{1}{2}(a+b)h$

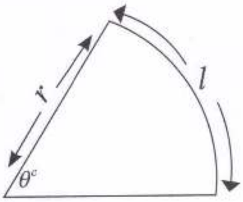
வட்டம்

ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு



பரப்பளவு $= \pi r^2$

ஆரைச்சிறை



மேற்குறித்த உருவில் ஆரை r ஐயும் மையக் கோணம் θ வையும் உடைய ஓர் ஆரைச்சிறை காணப்படுகின்றது. இங்கு θ ஆனது ஆரையனில் அளக்கப்பட்டுள்ளது.

கோணம் θ வின் மூலம் வட்டத்தின் மீது எதிரமைக்கப்படும் விற் பகுதியின் நீளம் l எனின், $l = r\theta^c$

ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்திற்கு மையக் கோணம் 2π ஆகும். அப்போது பரப்பளவு πr^2 ஆகும்.

மையக் கோணம் 1^c ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \dfrac{\pi r^2}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2$

மையக் கோணம் θ^c ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2} r^2 \times \theta^c$

$= \dfrac{1}{2} r^2 \theta^c$

இங்கு θ ஆரையனில் அளக்கப்பட்டுள்ளது.

அப்போது $S = \dfrac{1}{2} r^2 \theta^c$

கோணம் பாகையில் தரப்படும்போது,

π ஆரையன் $= 180^\circ$ ஆகையால் 2π ஆரையன் $= 360^\circ$.

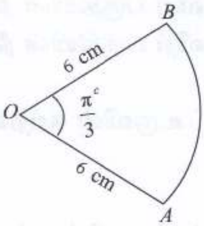
அப்போது ஆரை r ஐ உடைய ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2$ ஆகும்.

மையக் கோணம் 1° ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \dfrac{\pi r^2}{360^\circ}$

மையக் கோணம் θ ஆகவுள்ள ஓர் ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு $= \dfrac{\pi r^2}{360^\circ} \times \theta$

உதாரணம் 1

ஆரை 6 cm ஆகவுள்ளதும் மையத்தில் கோணம் $\dfrac{\pi^c}{3}$ ஐ எதிரமைப்பதுமான ஒரு வட்ட வில்லின் நீளத்தைக் கணிக்க.



விற்பகுதி AB யின் நீளம் $= r\theta$

$$= 6 \times \frac{\pi}{3}$$
$$= 2\pi$$

$\therefore$ விற்பகுதி AB யின் நீளம் 2π cm ஆகும்.

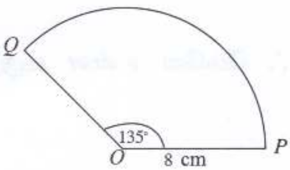
உதாரணம் 2

தரப்பட்டுள்ள உருவில்

(i) சுற்றளவு

(ii) பரப்பளவு

ஆகியவற்றைக் கணிக்க.



உரு OPQ வின் சுற்றளவைக் காண்பதற்கு வில் PQ வின் நீளத்தைக் காண வேண்டும்.

விற் பகுதியின் நீளம் $= r\theta$.

எனினும், இங்கு θ வின் பெறுமானத்தை ஆரையனில் பிரதியிட வேண்டும் ஆகையால், முதலில் கோணத்தை ஆரையனில் எழுதுவோம்.

$180^\circ = \pi^c$

$135^\circ = \dfrac{\pi^c}{180^\circ} \times 135^\circ$

$= \dfrac{3}{4}\pi^c$ ஆகையால்,

விற் பகுதியின் நீளம் $r\theta$ ஆகையால்

விற் பகுதியின் நீளம் $= 8 \times \dfrac{3\pi}{4} = 6\pi$

$\therefore$ உருவின் சுற்றளவு $= 6\pi + 8 + 8$

$= (16 + 6\pi)\,\text{cm}$

$\therefore$ உருவின் சுற்றளவு $(16 + 6\pi)$ cm ஆகும்.

மேலே தரப்பட்டுள்ள உருவின் பரப்பளவு $= \dfrac{1}{2} r^2\theta$

$= \dfrac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \dfrac{3\pi}{4}$

$= 24\pi$

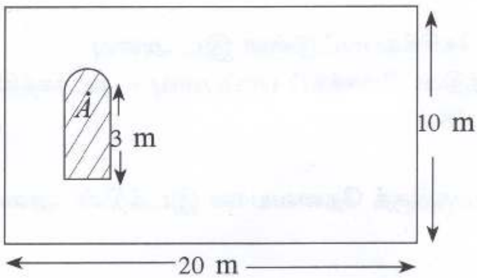
$\therefore$ மேலே உள்ள உருவின் பரப்பளவு $24\pi\ \text{cm}^2$ ஆகும்.

3.2 தள உருவங்களுடன் தொடர்புபட்ட பிரயோகங்கள்

இரண்டு அல்லது பல விசேட தள உருவங்களுடன் தொடர்புபட்ட தள உருவங்களின் பரப்பளவுகள் காணப்படும் விதத்தைப் பின்வரும் உதாரணங்களைக் கொண்டு ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 1

ஒரு செவ்வகத் தோட்டத்தின் கிடைப்படம் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதில் அமைப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தடாகத்தின் பரும்படிப் படம் உள்ளது. அது 140 cm ஆரையுள்ள ஓர் அரைவட்டப் பகுதியையும் ஒரு செவ்வகப் பகுதியையும் கொண்டுள்ளது (π யின் பெறுமானம் ஏறத்தாழ $\dfrac{22}{7}$ எனக் கொள்க).



(i) அமைப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்ட தடாகத்திற்குத் தேவையான இட அளவைக் காண்க.

(ii) தோட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதியில் புல்லை வளர்ப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. புல்லை வளர்ப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ள இடத்தின் அளவு யாது?

(i) அரைவட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 = 3.08$$

அதாவது அரைவட்டப் பகுதியின் பரப்பளவு 3.08 m^2 ஆகும் .

செவ்வகப் பகுதியின் அகலம் வட்டப் பகுதியின் விட்டத்திற்குச் சமமாகையால்,

செவ்வகப் பகுதியின் அகலம் $= 1.4 \times 2 = 2.8$

செவ்வகப் பகுதியின் பரப்பளவு $= 2.8 \times 3$

$= 8.4$

முழுத் தடாகத்திற்கும் தேவையான இட அளவு $= 8.4 + 3.08$

$= 11.48$

அதாவது முழுத் தடாகத்திற்கும் தேவையான இடத்தின் அளவு 11.48 m^2 ஆகும்.

(ii) தோட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு $= 20 \times 10$

$= 200$

அதாவது, தோட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு 200 m^2 ஆகும்.

புல்லை வளர்ப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ள இட அளவு

= தோட்டத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு − தடாகத்தின் பரப்பளவு

$= 200 - 11.48$

$= 188.52$

∴ புல்லை வளர்ப்பதற்குத் தேவையான இடத்தின் அளவு 188.52 m^2 ஆகும்.

பயிற்சி 3.1

1. இடைவெளி நிரப்புக.

(i) 60 m^2 = ... cm^2

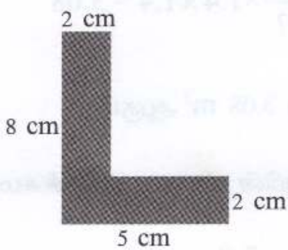
(ii) 170 cm^2 = ... m^2

(iii) 5 mm^2 = ... cm^2

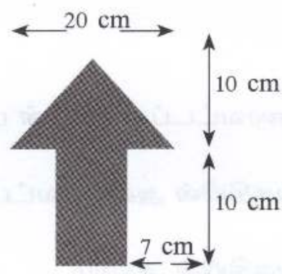
(iv) 16 cm^2 = ... mm^2

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள உருக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் நிறந்தீட்டப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.

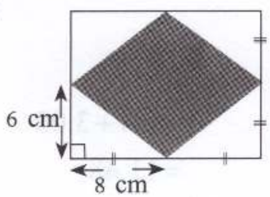
(i)



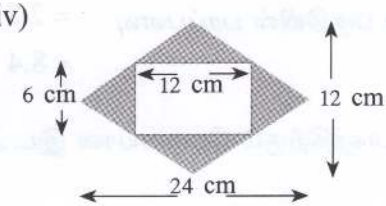
(ii)



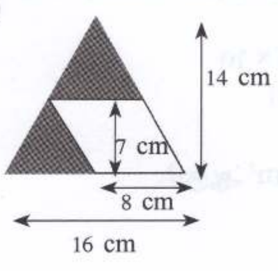
(iii)



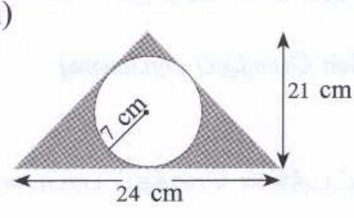
(iv)



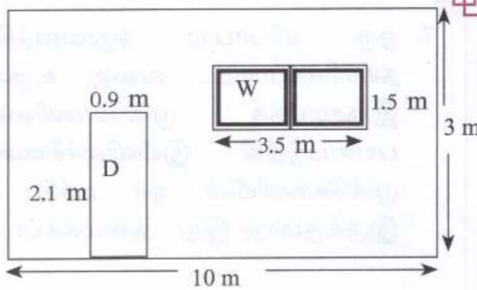
(v)



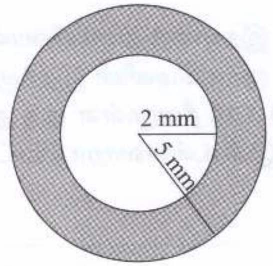
(vi)



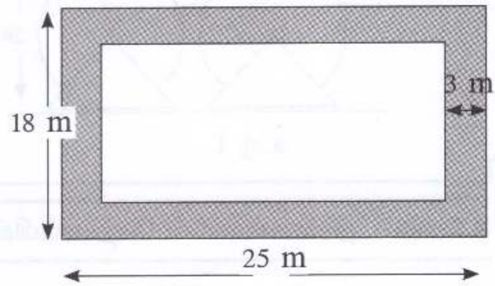
3. ஒரு வீட்டின் முற்பக்கச் சுவரின் பரும்படிப் படம் உருவில் காணப்படுகின்றது. சுவருக்குத் தீந்தை பூசப்பட வேண்டியுள்ளது. தீந்தை பூசப்பட வேண்டிய பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க. D,W ஆகியவற்றின் மூலம் முறையே கதவும் யன்னலும் காட்டப்பட்டுள்ளன.



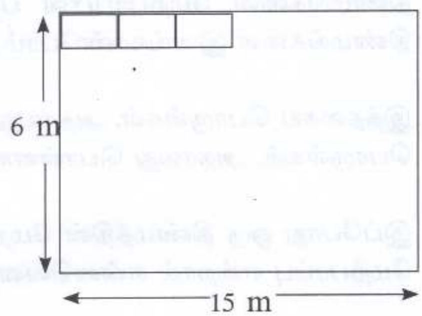
4. உலோகத்தால் செய்யப்பட்ட ஒரு மெல்லிய வளையம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



5. தரப்பட்டுள்ள உருவில் ஒரு வயலைச் சுற்றியுள்ள பாதை காட்டப்பட்டுள்ளவாறு நிழற்றப்பட்டுள்ளது. அதன் பரப்பளவைக் காண்க.



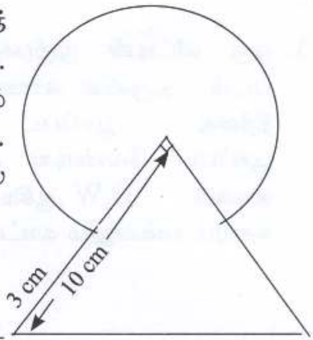
6. ஒரு கட்டடத்தின் முன்னால் உள்ள காணித் துண்டின் பரும்படிப் படம் உருவில் காணப்படுகின்றது.



(i) அதனை முற்றாக மூடுமாறு 200 mm × 100 mm அலங்காரத் தளக் கற்களை உருவில் காணப்படுகின்றவாறு நீளப்பாட்டிற்குச் சமாந்தரமாகவும் கற்கள் ஒவ்வொன்றும் தொடுகையுடன் இருக்குமாறும் பதித்து அலங்கரிப்பதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்கு எத்தனை கற்கள் தேவைப்படும்?

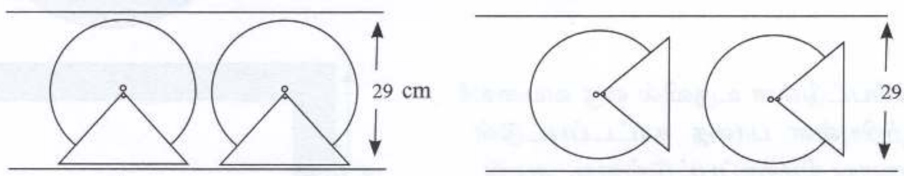
(ii) ஒரு தளக் கல்லின் விலை ரூ. 850.00 எனின், அதற்காகச் செலவாகும் பணத்தைக் காண்க.

7. ஒரு வியாபார நிறுவனத்தின் இலச்சினைக்காகத் தயாரிக்கப்பட்ட வலை உருவில் காணப்படுகின்றது. இருசமபக்க முக்கோணியையும் வட்டத்தையும் பயன்படுத்தி இவ்விலச்சினை செய்யப்பட்டுள்ளது. முக்கோணியின் ஓர் உச்சி வட்டத்தின் மையத்தில் இருக்குமாறு இது அமைக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) இதனைத் துணியினால் செய்வதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டிருக்குமெனின் இதற்கு எவ்வளவு துணி தேவை?

(ii) 3 m நீளமுள்ள ஒரு துணி நாடாவிலிருந்து உரு 1 இல் உள்ளவாறா, உரு 2 இல் உள்ளவாறா வெட்டினால் கூடுதலான அளவு இலச்சினைகளைப் பெறலாம்?



உரு 1 உரு 2

3.2 திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

நாம் தள உருவங்களின் பரப்பளவுபற்றி மேலே ஆராய்ந்தோம். இப்போது நாம் திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு பற்றி ஆராய்வோம். அதற்காக முதலில் திண்மங்களை இனங்காண்போம்.

இத்தகைய பொருள்கள், அதாவது செங்கல், தோடம்பழம், குண்டு போன்ற அடைத்த பொருள்கள், அதாவது **பொள்ளாக** இராத பொருள்கள் திண்மங்கள் எனப்படும்.

இப்போது ஒரு திண்மத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்குத் திண்மத்தின் மேற்பரப்பு என்றால் என்னவென இனங்காணல் வேண்டும்.

ஒரு திண்மத்திற்கு ஒரு மேற்பரப்பு மாத்திரம் உண்டு. ஒரு திண்மத்தின் மேற்பரப்பை அமைத்துள்ள தள மேற்பரப்புகள் இருப்பின், அவை முகம் எனப்படும். கீழே உள்ள திண்மங்களின் மேற்பரப்புகளை அவதானிக்க.

செங்கல்

ஆறு முகங்கள். அவை செவ்வகமாக இருக்கும் அதே வேளை எதிர் முகங்கள் அளவில் சமம்.

தாயக்கட்டை

ஆறு முகங்கள். அவை சதுரமாக இருக்கும் அதே வேளை அளவில் சமம்.

மரக்கம்பு

இங்கு மேற்பரப்பு இரு வட்ட முகங்களினாலும் ஒரு வளைபரப்பினாலும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

குண்டு

இங்கு தள மேற்பரப்புகள் அல்லது முகங்கள் இல்லை. ஆனால் ஒரு வளைபரப்பு உண்டு.

கண்ணாடி அரியம்

இங்கு மேற்பரப்பு இரு முக்கோண முகங்களையும் மூன்று செவ்வக முகங்களையும் கொண்டுள்ளது.

பரிதி வட்டம்

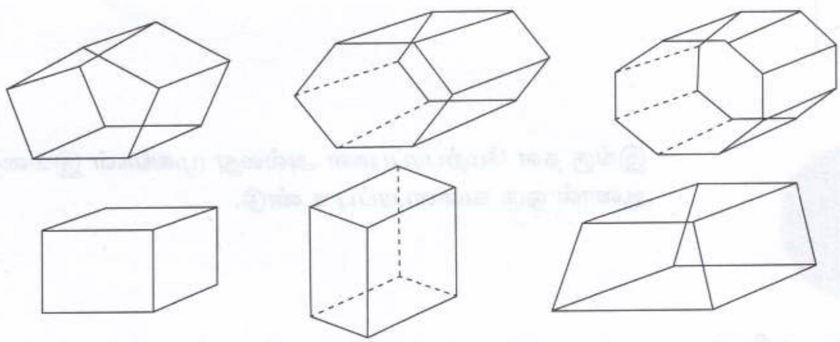
பரிதி வட்டத்தை அமைக்கும் மேற்பரப்பின் பகுதிகள் பற்றிச் சிந்தித்துப் பார்க்க.

சில திண்மங்கள் முகங்களினால் மாத்திரம் அமைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை வேறு சில திண்மங்களின் மேற்பரப்புகள் முகங்கள், வளைமேற்பரப்புகள் ஆகியவற்றின் சேர்மானத்தினால் அமைக்கப்பட்டிருப்பது உங்களுக்குத் தெளிவாக இருக்கும். மேலும் குண்டு, பரிதி வட்டம் போன்ற திண்மங்களின் மேற்பரப்பில் முகங்கள் இராத அதே வேளை அவை வளைபரப்புப் பகுதிகளினால் மட்டும் ஆக்கப்பட்டுள்ளன.

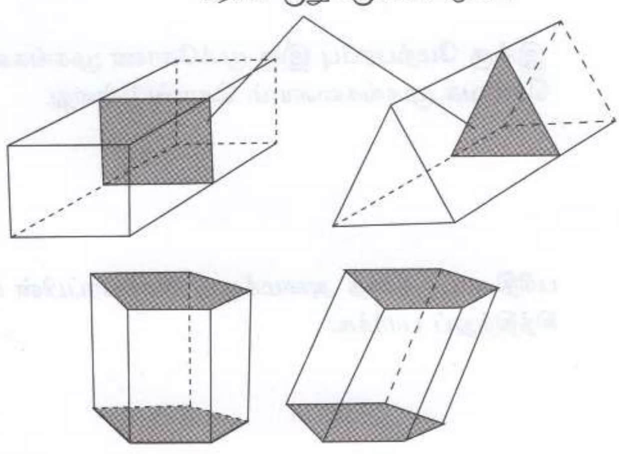
இப்போது ஒரு திண்மத்தின் மேற்பரப்புப் பற்றிய விளக்கத்தைப் பெற்றிருப்பீர்கள். திண்மத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கு அத்திண்மத்தின் மேற்பரப்பை அமைத்துள்ள மேற்பரப்புப் பகுதிகளின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையை எடுத்தல் வேண்டும். திண்மங்களைப் போன்ற வடிவமுள்ள பொள்ளான பொருள்களும் உள்ளன. அத்தகைய திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணும்போதும் அதே எண்ணக்கருவைப் பயன்படுத்தலாம். நாம் அறிந்த நியமத் திண்மங்கள் சிலவற்றின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல் பற்றி இப்போது பார்ப்போம்.

அரியங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

அரியம்



சீரான குறுக்குவெட்டுகள்

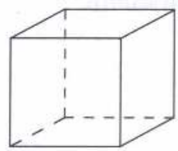


மேற்குறித்த உருக்களில் சீரான குறுக்குவெட்டு உள்ள திண்மங்கள் உள்ளன.

அத்திண்மங்களிலே இரு அந்தங்களிலும் உள்ள முகங்கள் பல்கோணி வடிவங்களாக இருக்கும் அதே வேளை அத்தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாகும். அத்தகைய திண்மங்கள் அரியங்கள் எனப்படும். ஓர் அரியத்தின் குறுக்குவெட்டுக்குச் சதுரம், செவ்வகம், முக்கோணி, ஐங்கோணி, அறுகோணி என்னும் பல்கோணி வடிவங்கள் இருக்கலாம்.

* இதற்கேற்பச் சதுரமுகி, கனவுரு என்னும் திண்மங்களும் அரியங்கள் என்பதை நீங்கள் விளங்கிக்கொள்வீர்கள்.

ஒரு சதுரமுகியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

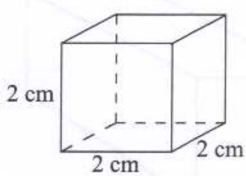


மேற்குறித்த உருவில் ஒரு சதுரமுகி காணப்படுகின்றது. இது ஆறு சம சதுர முகங்களைக் கொண்டுள்ளது.

எனின், சதுரமுகியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு = ஒரு சதுர முகத்தின் பரப்பளவு × 6.

உதாரணம் 1

கீழே தரப்பட்டுள்ள சதுரமுகியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2 \times 2 \times 6$

$= 24$

$\therefore$ மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $24\ cm^2$ ஆகும்.

ஒரு பக்கத்தின் நீளம் l cm ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

ஒரு சதுர முகத்தின் பரப்பளவு $= l \times l \text{ cm}^2$

$= l^2 \text{cm}^2$

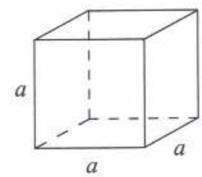
முழு மேற்பரப்பினதும் பரப்பளவு $= 6 \times l^2 \text{cm}^2$

$= 6l^2 \text{cm}^2$

உதாரணம் 2

ஒரு சதுரமுகியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 54 cm^2 ஆகும். அதன் அளவீடுகளைக் காண்க.

சதுரமுகியின் ஒரு பக்க நீளம் a எனக் கொள்வோம்.



அப்போது, $6a^2 = 54$

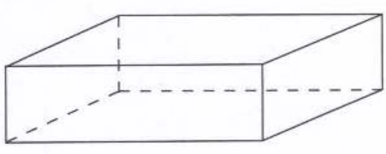
$$a^2 = \frac{54}{6}$$

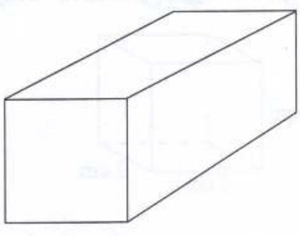
$$a^2 = 9$$

$$a = \pm 3$$

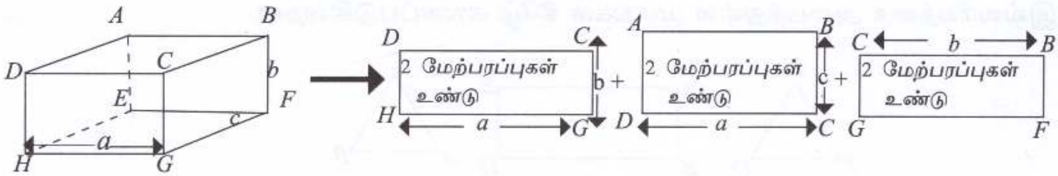
ஒரு சதுரமுகியின் அளவீடுகள் மறையாக இருக்க முடியாது ஆகையால், ஒவ்வோர் அளவீடும் 3 cm வீதம் இருத்தல் வேண்டும்.

ஒரு கனவுருவின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு



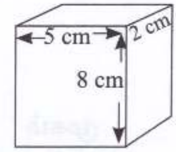


மேற்குறித்த உருக்களில் கனவுருக்களின் இரு வடிவங்கள் காணப்படுகின்றன. அவற்றின் முகங்கள் சதுரங்கள் அல்லது செவ்வகங்கள் ஆக இருப்பதைக் காண்பீர்கள். இவற்றின் எதிர் முகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமம். இதற்கேற்பக் கனவுருவின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு எல்லா முகங்களினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்.



உதாரணம் 3

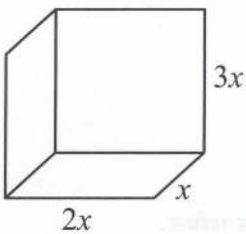
கனவுரு வடிவமுள்ள ஒரு மரக் குற்றி கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



$$\text{மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} = 2\times(5\times8)+2\times(5\times2)+2\times(8\times2)$$
$$=(80+20+32)$$
$$=132$$

$\therefore$ மரக் குற்றியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $132\ cm^2$ ஆகும்.

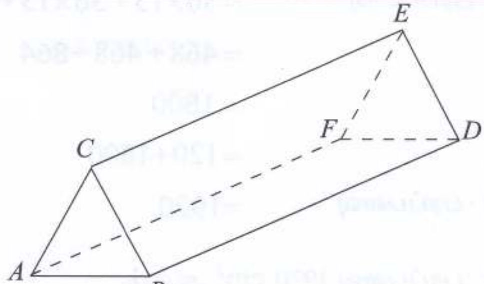
கனவுரு வடிவமுள்ள ஓர் உலோகக் குற்றியின் அடியின் நீளம் அதன் அகலத்தின் இரு மடங்காகும். கனவுருவின் உயரம் அடியின் அகலத்தின் மூன்று மடங்காகும். அடியின் அகலம் x சென்ரிமீற்றரெனக் கொண்டு அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



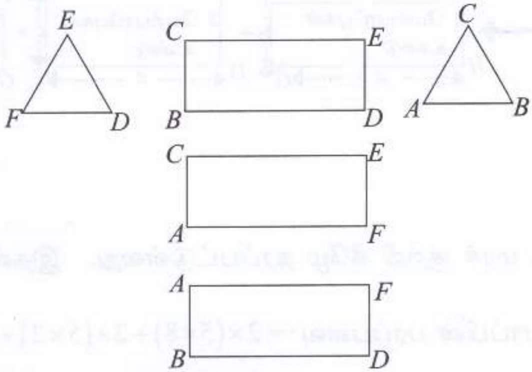
$$\text{மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} = 2\times(2x\times x)+2(3x\times2x)+2(3x\times x)$$
$$=4x^2+12x^2+6x^2$$
$$=22x^2$$

$\therefore$ உலோகக் குற்றியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $22\ x^2\ cm^2$ ஆகும்.

முக்கோண அரியத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு



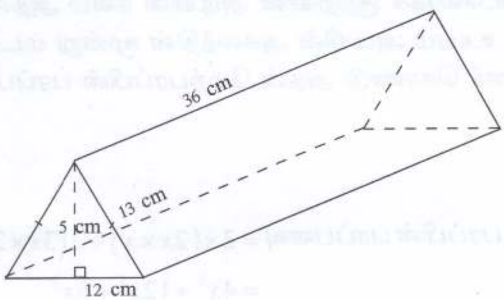
இவ்வரியத்தை அமைத்துள்ள முகங்கள் கீழே காணப்படுகின்றன.



முக்கோணி அரியத்தின் மேற்பரப்பின்

பரப்பளவு = முகம் ABC யின் பரப்பளவு + முகம் DEF இன் பரப்பளவு + முகம் $BCED$ யின் பரப்பளவு + முகம் $AFEC$ யின் பரப்பளவு + முகம் $ABDF$ இன் பரப்பளவு

உதாரணம் 4



மேலே தரப்பட்டுள்ள அரியத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

இரு முக்கோணி முகங்களின் பரப்பளவு $= 2\times\left(\frac{1}{2}\times 24\times 5\right)$

$= 120$

மூன்று செவ்வக முகங்களின் பரப்பளவு $= 36\times 13 + 36\times 13 + 36\times 24$

$= 468 + 468 + 864$

$= 1800$

$= 120 + 1800$

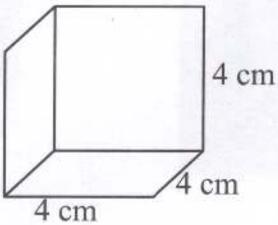
$\therefore$ அரியத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 1920$

அரியத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1920 cm^2 ஆகும்.

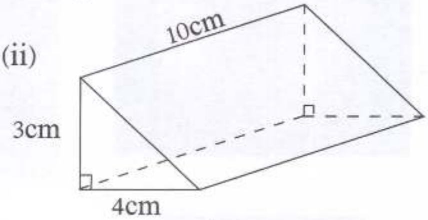
பயிற்சி 3.2

1. தரப்பட்டுள்ள உருவங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மேற்பரப்பளவைக் காண்க.

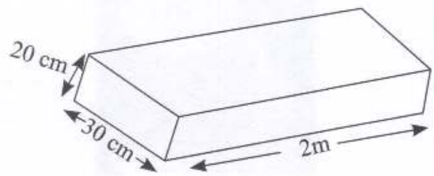
(i)



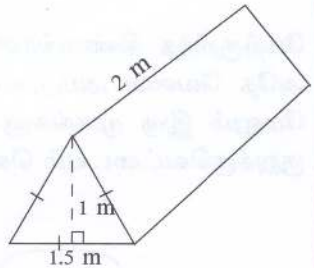
(ii)



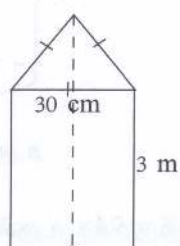
2. மரத்தினால் செய்யப்பட்ட ஒரு சிலீப்பர்க் கட்டை உருவில் காணப்படுகின்றது. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.



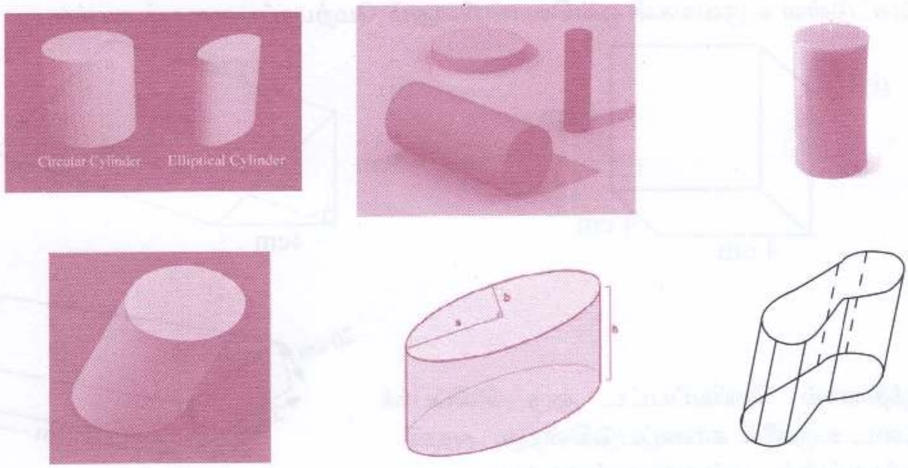
3. துணியினால் செய்யப்பட்ட ஒரு கூடாரம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதிலே துணி மறைப்பு இல்லை. இக்கூடாரத்திற்குத் தேவையான துணியின் அளவு யாது?



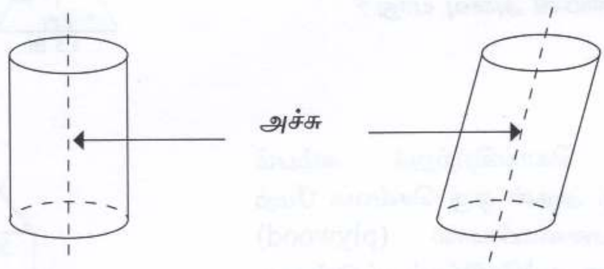
4. உருவில் ஒரு கொங்கிறீற்றுக் கம்பம் காணப்படுகின்றது. அதன் ஒரு செவ்வக மேற் பரப்பை ஒட்டுப்பலகையினால் (plywood) மூடி ஒட்டுவதற்கு உத்தேசிக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்குத் தேவையான ஒட்டுப்பலகையின் அளவைக் காண்க. 1 m^2 ஒட்டுப்பலகையை வாங்கி ஒட்டுவதற்கு ரூ. 3000 செலவு செய்யப்படுமெனின், செலவிடப்படும் மொத் தப் பணத்தைக் காண்க.



பின்வரும் உருக்களில் உள்ள திண்மங்களை அவதானிக்க.



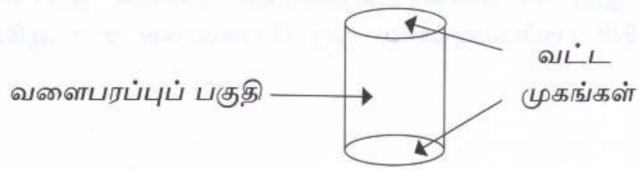
மேற்குறித்த திண்மங்களின் இரு முகங்களும் ஒரே வடிவத்தைக் கொண்டிருக்கும். அதே வேளை அம்முகங்களின் ஓரம் எளிய அடைத்த ஒப்பமான வளையியாகும். மேலும் இரு முகங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாகும். இத்திண்மங்கள் சீரான குறுக்குவெட்டையும் கொண்டவை. இத்தகைய திண்மங்கள் உருளைகள் எனப்படும்.



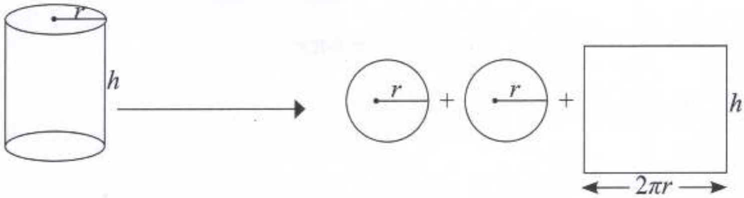
உரு (i) உரு (ii)

மேற்குறித்த உருக்களில் தரப்பட்டுள்ள உருளைகள் ஒவ்வொன்றிலும் குறுக்குவெட்டு வட்டவடிவமுள்ளது. அத்தகைய உருளைகள் வட்ட உருளைகள் எனப்படும். மேற்குறித்த உருக்களிலும் முறிந்த கோடுகளினால் அவற்றின் அச்சு காட்டப்பட்டுள்ளது. உரு (i) இல் அச்சு முகங்களுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை உரு (ii) இல் அச்சு முகங்களுக்குச் செங்குத்தானதன்று. இதற்கேற்ப உரு (ii) இல் ஒரு வட்டச் செவ்வுருளை காணப்படுகின்றது. உரு (ii) இல் காணப்படும் உருளை ஒரு செவ்வுருளையன்று. வட்டச் செவ்வுருளைகளின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணும் விதம் பற்றிப் பார்போம்.

ஒரு செவ்வட்ட உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல்



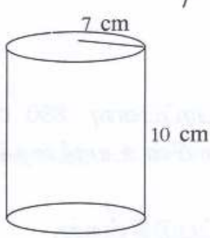
ஓர் உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு = இரு வட்ட முகங்களின் பரப்பளவு + வளைபரப்பின் பரப்பளவு



மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

உதாரணம் 5

கிழே தரப்பட்டுள்ள செவ்வட்ட உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க (π யின் பெறுமானம் ஏறத்தாழ $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).



மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10$$

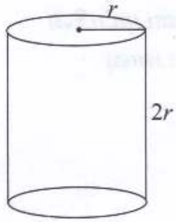
$$= (308 + 440)$$

$$= 748$$

$\therefore$ உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 748 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 6

ஆரை r ஐயும் அதன் இரு மடங்கான உயரத்தையும் உடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவுக்கான ஒரு கோவையை π, r ஆகியவற்றின் சார்பில் உருவாக்குக.



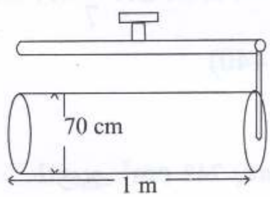
$$\text{மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} = 2\pi r^2 + 2\times\pi\times r\times 2r$$
$$= 2\pi r^2 + 4\pi r^2$$
$$= 6\pi r^2$$

பயிற்சி 3.3

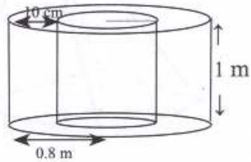
1. அடியின் ஆரை 7 cm ஆகவும் உயரம் 20 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு திண்மச் செவ்வுருளையின்
   (i) வளைப்பரப்பின் பரப்பளவு
   (ii) மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு
   ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. ஒரு திண்மச் செவ்வுருளையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 880 cm^2 ஆகும். அதன் அடியின் ஆரை 10 cm ஆகும். அச்செவ்வுருளையின் உயரத்தைக் காண்க.

3. ஓர் உருளை வடிவக் கல் உருளி உருவில் காணப்படுகின்றது.
   (i) ஒரு சுற்றைப் பூர்த்திசெய்யும்போது மட்டமாக்கப்படும் பரப்பளவைக் காண்க.
   (ii) 1320 m^2 ஐ மட்டமாக்குவதற்குக் கல் உருளியினால் எத்தனை சுற்றுகளைச் சுற்ற வேண்டும்?

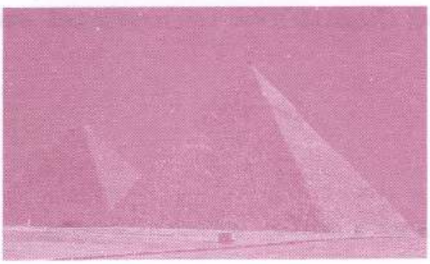


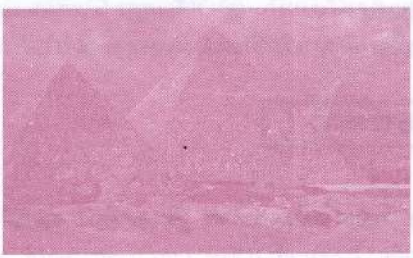
4. உருவில் ஒரு நீர்த் தாங்கி காணப்படுகின்றது. அதன் உட்பக்கத்தில் நீர் வெளியேறுவதைத் தடுப்பதற்கு $1\ m^2$ இற்கு ரூ. 2 400 செலவிடப்படுகின்றது. நீர் வெளியேறுவதைத் தடுப்பதற்குச் செலவிடப்படும் பணத்தைக் காண்க.

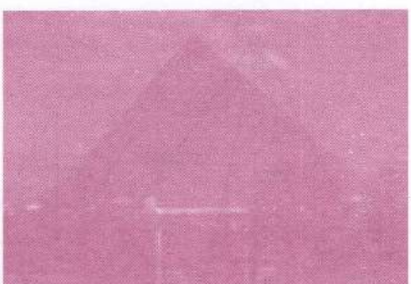


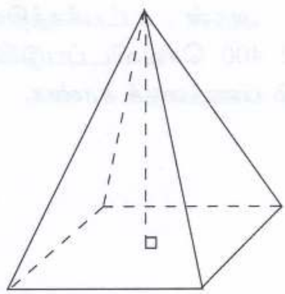
5. ஒரு மண்டபத்தில் 16 சமச் செவ்வுருளைத் தூண்கள் உள்ளன. ஒரு தூணின் ஆரை 70 cm உம் உயரம் 3.5 m உம் ஆகும். அவற்றின் வளைபரப்பில் $1\ m^2$ இற்குத் தீந்தை பூசுவதற்கு ரூ. 1200 செலவிடப்படுவதாக மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது. எல்லாத் தூண்களிலும் தீந்தையைப் பூசுவதற்கு எவ்வளவு பணம் தேவைப்படும்?

கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

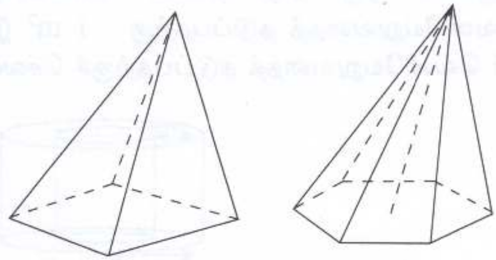








உரு (i)



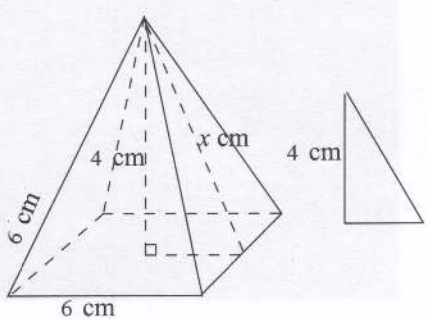
உரு (ii)

மேலே சில கூம்பகங்கள் காணப்படுகின்றன. அவற்றின் அடியானது முக்கோணி, நாற்பக்கல், ஐங்கோணி, அறுகோணி போன்ற பல்கோணிகளாக இருக்கலாம் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். நாம் இப்பாடத்தில் அடி ஒழுங்கான பல்கோணிகளாக இருக்கும் கூம்பகங்கள் பற்றியே கருதுவோம். அடி சமபக்க முக்கோணியாக உள்ள கூம்பகம் நான்முகி எனப்படும். ஒரு கூம்பகத்தின் அடிக்கு உரியதாக அமையாத உச்சி கூம்பகத்தின் அடியின் நடுப் புள்ளிக்கு மேலே இருக்கும் கூம்பகம் செங்கூம்பகம் எனப்படும். அதற்கேற்ப உரு (i) இன் மூலம் சில செங்கூம்பகங்கள் காட்டப்படுகின்றன. அவ்வாறு அமையாத சில கூம்பகங்கள் உரு (ii) இன் மூலம் காட்டப்பட்டுள்ளன.

கூம்பகத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவானது எல்லா முகங்களினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து கிடைக்கும் செங்கூம்பகத்தில் மாத்திரம் எமது கவனத்தைச் செலுத்துவோம். இப்போது செங்கூம்பகங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணல் பற்றிய சில பிரசினங்களைத் தீர்ப்போம்.

உதாரணம் 7

அடி சதுர வடிவமாக இருக்கும் ஒரு செங்கூம்பகம் உருவில் காணப்டுகின்றது. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணக.



$$x^2 = 4^2 + 3^2$$
$$x = \sqrt{16+9}$$
$$x = \sqrt{25}$$
$$x = 5\text{ cm}$$

சதுர அடியின் பரப்பளவு $= 6 \times 6$

$= 36$

நான்கு முக்கோண முகங்களினதும் பரப்பளவு $= 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5$

$= 60$

கூம்பகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு $= (36 + 60)$

$= 96$

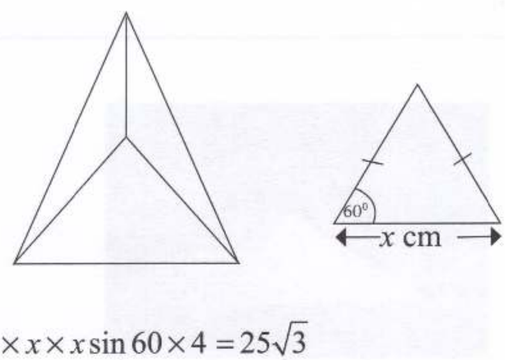
∴ கூம்பகத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு 96 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 8

சமபக்க முக்கோணிகளாலான ஒரு நான்முகி உருவில் காணப்படுகின்றது. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $25\sqrt{3}$ cm^2 ஆகும். அதன் ஒரு முகத்தின் நீளத்தைக் காண்பதற்கு

(i) x இன் சார்பில் ஒரு கோவையை எழுதுக.

(ii) x ஐக் காண்க.



$$\frac{1}{2} \times x \times x \sin 60 \times 4 = 25\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 25\sqrt{3}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

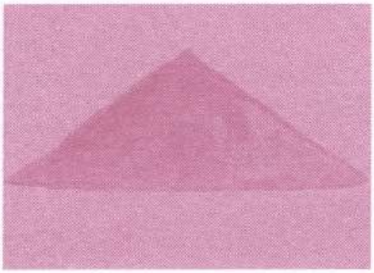
நான்முகியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 5 cm ஆகும்.

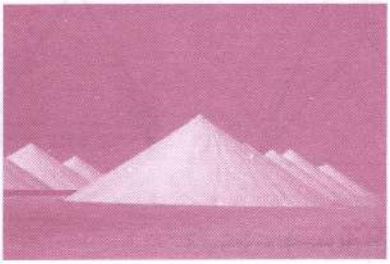
பயிற்சி 3.4

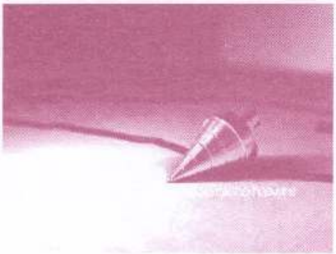
1. உருவில் ஒரு கூம்பகக் கூரை காணப்படுகின்றது. அதன் அடி சதுரமாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 12 m ஆகும். கூரையின் செவ்வுயரம் 8 m ஆகும். கூரையின் மேற்பரப்பில் தீந்தையின் 4 l இனால் 14 m^2 பரப்பளவைப் பூசலாம். கூரையின் மேற்பரப்பில் தீந்தையைப் பூசுவதற்கு எத்தனை லீற்றர் தீந்தை தேவை?

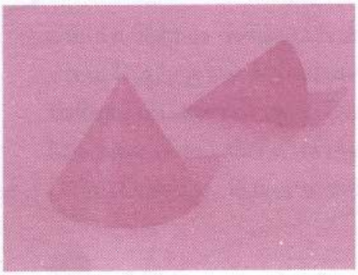
2. சாரணர்களால் அமைக்கப்பட்ட ஒரு கூம்பகக் கூடாரம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட துணியின் அளவைக் கணிக்க. அதன் அடி சதுர வடிவமுள்ளதாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 6 m உம் உயரம் 5 m உம் ஆகும்.

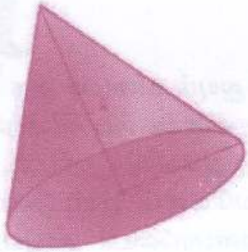
கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

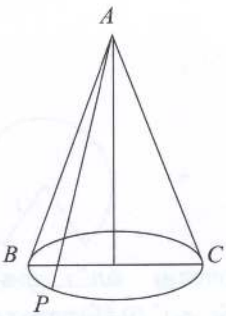




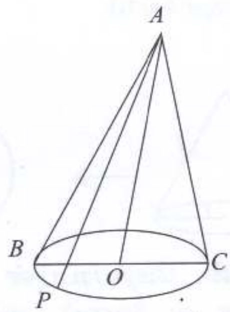






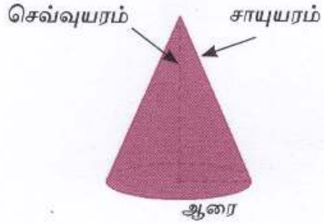


உரு (i)

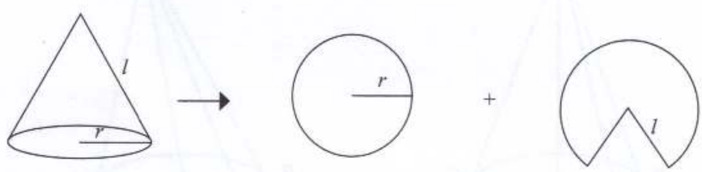


உரு (ii)

மேற்குறித்த உருக்களில் இருக்கும் திண்மங்கள் கூம்புகள் எனப்படும். அதில் உரு (i) இனாலும் உரு (ii) இனாலும் காட்டப்படும் கூம்புகளை அவதானிக்க. அவற்றின் அடி வட்டவடிவமுள்ளது. உரு (i) இன் மையத்திற்கு மேலே உச்சி இருப்பதைப் பார்க்கிறீர்களா? இத்தகைய கூம்புகள் செங்கூம்புகள் எனப்படும்.

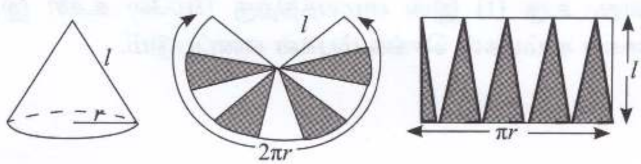


பின்வரும் உருக்களில் ஆரை r ஐயும் சாயுயரம் l ஐயும் உடைய ஒரு கூம்பு உள்ளது. மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதன் வசதிக்காக அக்கூம்பு மெல்லிய அடரினால் செய்யப்பட்ட ஒரு பொட் கூம்பெனக் கருதுவோம். தொடக்கத்தில் அது செய்யப்பட்டுள்ள மேற்பரப்புப் பகுதிகள் எவையெனப் பார்ப்போம். அதன் அடி வட்ட முகமாக இருக்கும் அதே வேளை வளைபரப்பைச் சாயுயரத்தின் வழியே விரிக்கும்போது ஓர் ஆரைச்சிறை வடிவமுள்ள அடராகும். அவற்றைப் பின்வருமாறு தனித்தனியாகக் கருதுவோம்



அதாவது, கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவானது வட்டமுகத்தினதும் ஆரைச் சிறை வடிவமுள்ள அடரினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். இப்போது இப்பரப்பளவுகளைத் தனித் தனியாகக் காண்போம்.

முதலில் ஆரைச்சிறை வடிவமுள்ள அடரைக் கருதுவோம்.



ஆரைச்சிறையின் வளைந்த ஓரத்தின் நீளம் $2\pi r$ அல்லது அடியின் வட்டத்தின் பரிதி என்பதை விளங்கிக்கொள்ளலாம். இதற்கேற்ப ஆரைச்சிறையின் அளவீடுகள் பின்வருமாறாகும்.

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஆரைச்சிறையின் கீற்றுகளை வெட்டி ஒட்டும்போது தரப்பட்டுள்ளவாறு செவ்வக வடிவத்தைப் பெறுவோம்.

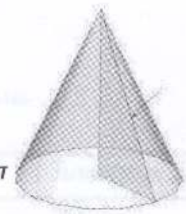
செவ்வகத்தின் நீளம் πr உம் அகலம் l உம் ஆகுமெனக் காணலாம். அதன் பரப்பளவு ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவுக்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது ஆரைச்சிறையின் பரப்பளவு πrl இனால் தரப்படுகின்றது.

இரண்டாவதாக அடியின் வட்டவடிவத்தைக் கருதுவோம்.

வட்ட வடிவ அடியின் பரப்பளவு $= \pi r^2$
கூம்பின் முழு மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl + \pi r^2$

உதாரணம் 9



உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது அடியின் விட்டம் 14 cm ஆகவும் சாயுயரம் 20 cm ஆகவும் உள்ள செங்கூம்பாகும். அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்போம்.

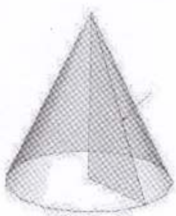
வட்ட முகத்தின் பரப்பளவு $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \quad = 154$

வளைமேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl = \frac{22}{7} \times 7 \times 20 \;=440$

கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl + \pi r^2$

$\therefore$ கூம்பின் மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 594 cm^2 ஆகும்.

உதாரணம் 10



உருவில் அடியின் ஆரை 7 cm ஆகவும் செங்குத்துயரம் 15 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செங்கூம்பு காணப்படுகின்றது. அதன் வளைபரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

முதலில் இதன் சாயுயரத்தைக் காண வேண்டும். அதற்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்போம்.

சாயுயரம் l எனக் கொள்வோம். அப்போது

$$l^2 = 15^2 + 7^2$$
$$l^2 = 225 + 49$$
$$l^2 = 274$$
$$l = \sqrt{274}$$

வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{274}$$
$$= 22\sqrt{274}\ \text{cm}^2$$

$\therefore$ வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= 22\sqrt{274}\ \text{cm}^2$ ஆகும்.

உதாரணம் 11

ஒரு கூம்பின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1496 cm^2 ஆகும். அதன் சாயுயரம் 16 cm எனின் அடியின் ஆரையைக் காண்க.

வளைபரப்பின் பரப்பளவு $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times r \times 20$$

வட்ட அடியின் பரப்பளவு $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} r^2$$

மொத்தப் பரப்பளவு $= 1496$

$$\frac{22}{7}r^2+\frac{22}{7}\times r\times 20=1496$$

$$\frac{22}{7}\left(r^2+20r\right)=1496$$

$$r^2+20r=1496\times\frac{7}{22}$$

$$r^2+20r=476$$

$$r^2+20r-476=0$$

$$(r-14)(r+34)=0$$

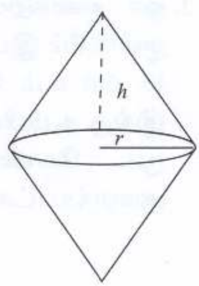
$$r-14=0 \qquad r+34=0$$

$$r=14 \qquad r=-34$$

$\therefore$ கூம்பின் அடியின் ஆரை 14 cm ஆகும்.

உதாரணம் 12

ஆரை r ஐயும் செவ்வுயரம் h ஐயும் உடைய இரு கூம்பு களைச் சேர்த்து அமைக்கப்பட்ட ஒரு திண்மம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்போம்.



ஒரு வளைபரப்பின் சாயுயரம் l எனக் கொள்வோம்.

$$l^2=h^2+r^2$$

$$l=\sqrt{h^2+r^2}$$

வளைபரப்பின் பரப்பளவு $=\pi rl$

$=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$

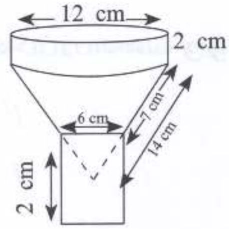
மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $=2\pi r\sqrt{h^2+r^2}$

பயிற்சி 3.5

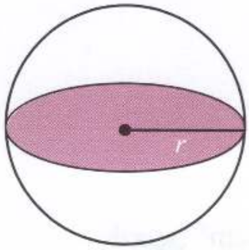
1 விழாக்காலங்களில் குழந்தைகள் அணிவதற்குத் தயாரிக் கப்பட்ட தொப்பியின் படம் உருவில் உள்ளது. தலையின் சுற்றளவு 44 cm எனக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட இத் தொப்பியின் செங்குத்து உயரம் 24 cm ஆகும். ஒரு தொப்பிக்குப் பயன்படுத்தப்படும் அட்டைத்தாளின் அளவைக் காண்க.

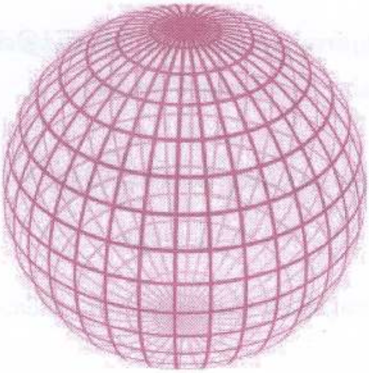
2. மணற் குவியல் ஒன்று உருவில் தரப்பட்டுள்ளது. அதன் சாயுயரம் 2.5 m ஆகும். அடியின் பரிதி 4.4 m ஆகும். இம்மணற் குவியலில் அடங்கும்
   (i) நிலத்தின் பரப்பளவு யாது?
   (ii) மணற் குவியலின் செங்குத்து உயரம் யாது?

3. ஓர் ஐஸ்கிறீம் உருவில் காணப்படுகின்றது. இங்கு ஐஸ்கிறீம் இடப்பட்டுள்ள கூம்புப் பகுதியின் சாயுயரம் 13 cm உம் செங்குத்து உயரம் 12 cm உம் ஆகும். இங்கு கூம்பின் முழு மேற்பரப்பையும் ஒரு தாளினால் மூட வேண்டும். இதற்காகச் செலவிடப்படும் குறைந்தபட்சத் தாளின் அளவைக் காண்க.



4. தகட்டினால் செய்யப்பட்ட ஒரு புனல் உருவில் காணப்படுகின்றது. தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளைப் பயன்படுத்தி இப்புனலைச் செய்வதற்குப் பயன் படுத்தப்படும் தகட்டின் பரப்பளவைக் காண்க.



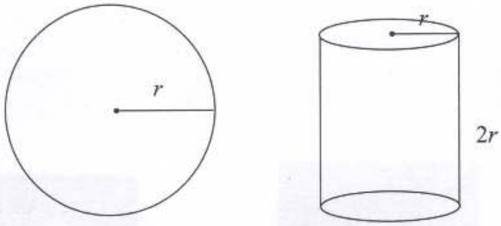


கோளத்தின் மேற்பரப்பளவானது வளைபரப்பினால் மட்டும் ஆனது. ஆகவே, அதனைத் தள முகங்களாக வேறுபடுத்தி அதன் பரப்பளவைக் காண முடியாது.

அதன் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான ஒரு முறை ஆக்கிமிடீஸ் என்ற கிரேக்க கணிதவியலாளரினால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமமான ஆரையுள்ள ஒரு வட்டக் குறுக்குவெட்டும் ஆரையின் இருமடங்கான உயரமும் உள்ள ஓர் உருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவானது கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவுக்குச் சமம் என்பதே அம்முறையாகும்.

அம்முறை



கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $=$ உருளையின் வளைபரப்பின் பரப்பளவு

$$= 2\pi r \times 2r$$

$$= 4\pi r^2$$

உதாரணம் 13

ஆரை 14 cm ஆகவுள்ள ஒரு திண்மக் கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க (π யின் பெறுமானம் $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்க).

மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $= 4 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{14}^{2} \times 14$

$= 2464$

$\therefore$ கோளத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 2464 cm^2 ஆகும்.

பயிற்சி 3.6

1. ஆரை $21\sqrt{3}$ cm ஐ உடைய திண்மக் கோளத்தின் மேற்பரப்பளவைக் காண்க.

2. ஒரு கோளத்தின் மேற்பரப்பளவு 616 cm^2 எனின் அதன் ஆரையைக் காண்க.

3. ஆரை 3.5 cm ஐ உடைய ஒரு திண்ம அரைக் கோளக் கண்ணாடி நிறையின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. மொத்த மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 1848 cm^2 ஆகவுள்ள ஓர் அரைக் கோளத்தின் ஆரையைக் காண்க.

4

கனவளவு

- **சீரான குறுக்குவெட்டை உடைய திண்மங்களின் கனவளவு**
  - அரியம்
    - ★ கனவுரு
    - ★ சதுரமுகி
    - ★ முக்கோண அரியம்
    - ★ உருளை
- **திண்மங்களின் கனவளவுடன் தொடர்புபட்ட பிரயோகங்கள்**
- **சீரான குறுக்குவெட்டு இல்லாத திண்மங்களின் கனவளவு**
  - கூம்பகம்
  - கூம்பு
  - கோளம்

முப்பரிமாணமுள்ள பொள்ளாக அமையாத பொருள்கள் திண்மங்கள் எனப்படும் என்று முன்னர் கற்றோம். திண்மங்களின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் காணும் விதம் பற்றியும் ஆராய்ந்தோம். இப்போது நாம் திண்மங்களின் கனவளவு என்பதன் கருத்தை ஆராய்வோம்.

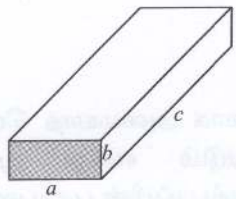
ஒரு திண்மம் வெளியில் கொள்ளும் இட அளவானது அத்திண்மத்தின் கனவளவு எனப்படும்.

கனவளவு = குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு × நீளம்

அதற்கேற்பச் சீரான குறுக்குவெட்டுள்ள சில திண்மங்களாகிய சதுரமுகி, கனவுரு, முக்கோண அரியம், உருளை போன்ற சில திண்மங்களின் கனவளவு பற்றி ஆராய்வோம்.

4.1 ➡ சீரான குறுக்குவெட்டை உடைய திண்மங்களின் கனவளவு

1. கனவுரு

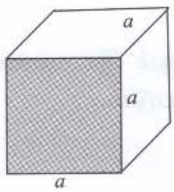


கனவளவு $= \text{குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு} \times \text{நீளம்}$

$= ab \times c$

$= abc$

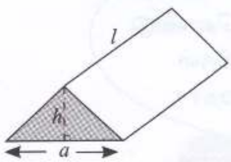
2. சதுரமுகி



கனவளவு $= a^2 \times a$

$= a^3$

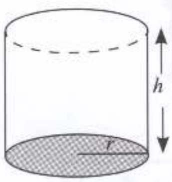
3. முக்கோண அரியம்



கனவளவு $= \frac{1}{2}ah \times l$

$= \frac{1}{2}ahl$

4. உருளை



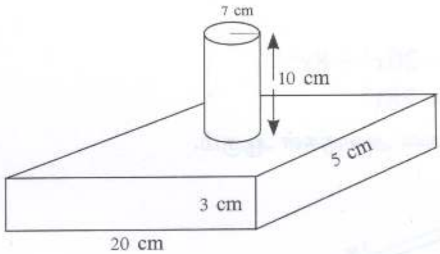
கனவளவு $= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

பல சந்தர்ப்பங்களில் கணிப்பதன் வசதிக்காக π யின் பெறுமானம் ஏறத்தாழ $\frac{22}{7}$ எனக் கருதப்படும்.

4.2 திண்மங்களின் கனவளவுடன் தொடர்புபட்ட பிரயோகங்கள்

இரு திண்மங்களைச் சேர்த்து அமைக்கப்பட்டுள்ள திண்மம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அத்தகைய பொருள்களின் கனவளவைக் காண்பதற்கு ஒவ்வொரு திண்மத்தினதும் கனவளவைக் கண்டு அக்கனவளவைக் கூட்டுதல் வேண்டும்.



கனவுருவின் கனவளவு $= 20 \times 5 \times 3$
$= 300$

உருளையின் கனவளவு $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10$$

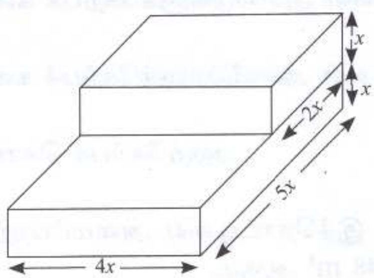
$= 1540$

$\therefore$ மொத்தக் கனவளவு $= 300 + 1540$
$= 1840$

அதாவது, சேர்த்திப் பொருளின் கனவளவு 1840 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 1

உருவில் உள்ள திண்மம் வெவ்வேறு அளவுடைய இரு கனவுருக்களைச் சேர்த்து அமைக்கப்பட்ட அதே வேளை அதன் அளவீடுகள் x அலகுகளின் சார்பில் தரப்பட்டுள்ளன. அதன் கனவளவை x இன் சார்பிற் காண்க.



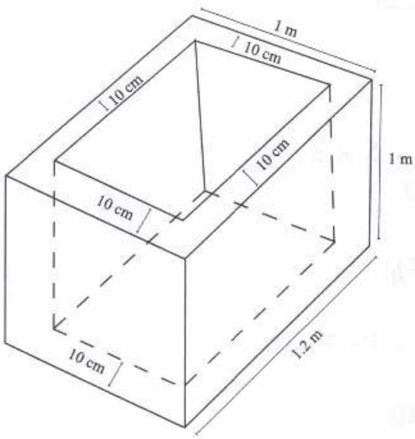
பெரிய கனவுருவின் கனவளவு $= 5x \times 4x \times x$
$= 20x^3$

சிறிய கனவுருவின் கனவளவு $= 4x \times 2x \times x$
$= 8x^3$

∴ உருவில் உள்ள திண்மத்தின் கனவளவு $= 20x^3 + 8x^3$
$= 28x^3$

∴ திண்மத்தின் கனவளவு $28x^3$ கன அலகுகள் ஆகும்.

உதாரணம் 2



மேற்குறித்த உருவில் கொங்கிறீற்றினால் அமைக்கப்பட்ட நீர்த் தொட்டி ஒன்று காட்டப்பட்டுள்ளது. அதனைச் செய்வதற்குப் பயன்படுத்தியுள்ள கொங்கிறீற்றின் அளவைக் காண்க.

இங்கு வெளி அளவீடுகளைக் கொண்ட கனவுருவின் கனவளவிலிருந்து உட்கன வுருவின் கனவளவைக் கழித்துக் கொங்கிறீற்றின் அளவைக் காணலாம்.

வெளி அளவீடுகளுக்கேற்பக் கனவுருவின் கனவளவு $= 1.2 \times 1 \times 1$
$= 1.2$

உள் அளவீடுகளுக்கேற்பக் கனவுருவின் கனவளவு $= 1 \times 0.8 \times 0.9$
$= 0.72$

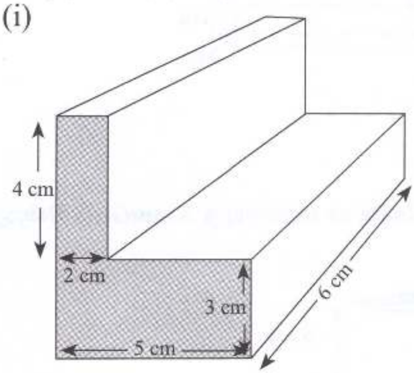
அதற்கேற்பக் கொங்கிறீற்றுக் கனவளவு $= 1.2 - 0.72$
$= 0.48$

∴ இத்தொட்டியை அமைப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட கொங்கிறீற்றின் கனவளவு $0.48\ m^3$ ஆகும்.

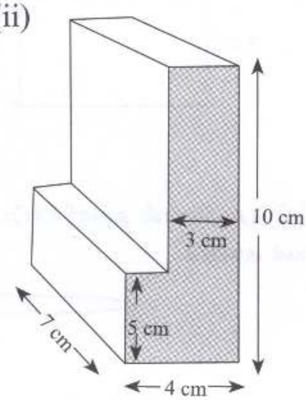
பயிற்சி 4.1

1. சீரான குறுக்குவெட்டுள்ள சில திண்மங்கள் பின்வரும் உருக்களில் காணப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு திண்மத்தினதும் கனவளவைக் காண்க.

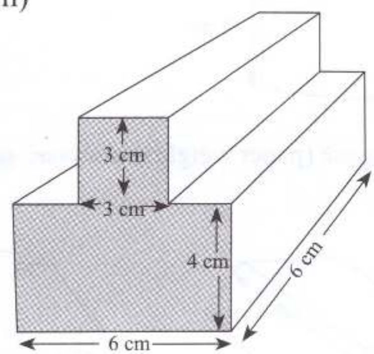
(i)



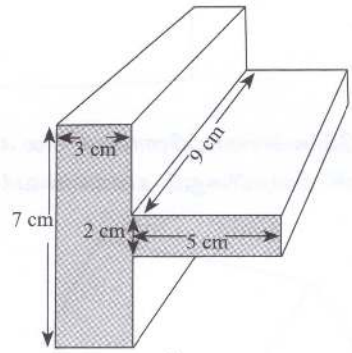
(ii)



(iii)

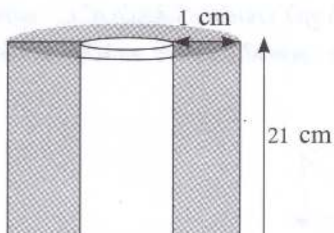


(iv)

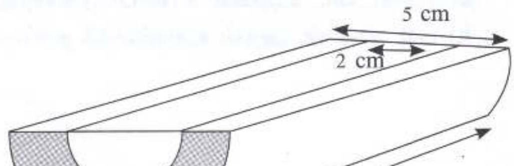


2. பின்வரும் உருக்கள் ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவைக் காண்க.

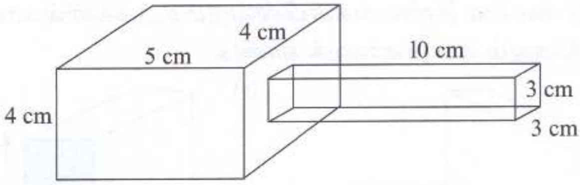
(i)



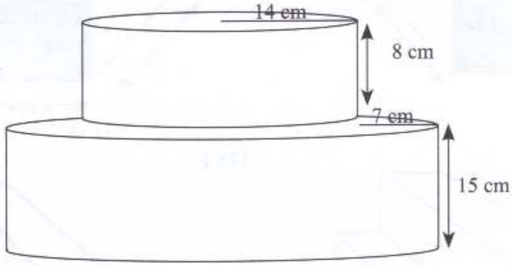
(ii)



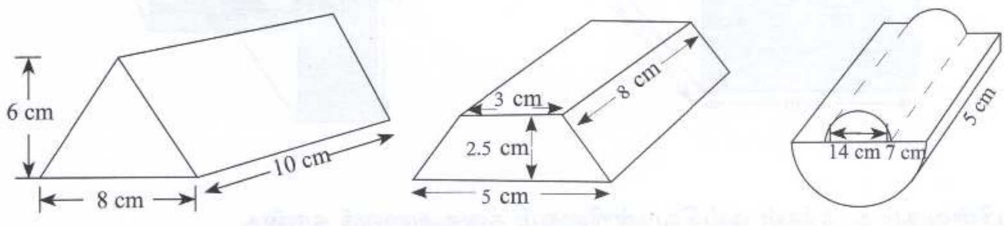
3. ஒரு தச்சனிடம் இருந்த மரத்தினால் செய்யப்பட்ட ஒரு தட்டும்பொல்லு பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கனவளவைக் காண்க.



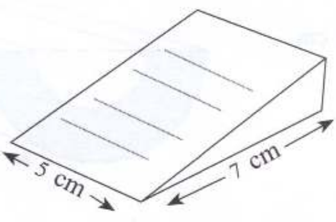
4. உருவில் றிஜிபோமினால் தயாரிக்கப்பட்ட கேக்கின் மாதிரியுரு காணப்படுகின்றது. அதன் கனவளவைக் காண்க.



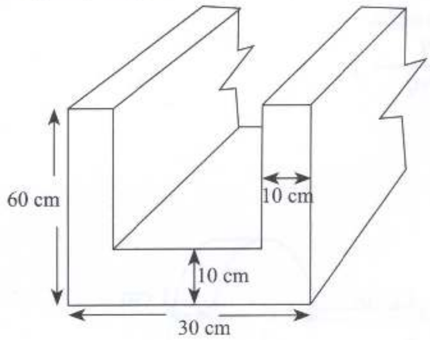
5. உருவில் கண்ணாடியினாலான சில கடதாசி நிறைகள் (paper weights) உள்ளன. ஒவ்வொரு கடதாசி நிறையினதும் கனவளவைக் காண்க.



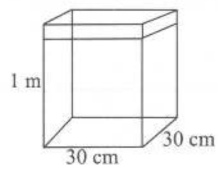
6. ஒரு கதவைச் சார்த்தி வைக்கப் பயன்படுத்தப்படும் அரியத்தின் வடிவமுள்ள ஒரு மரத் தடைக்கட்டை உருவில் காணப்படுகின்றது. அதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரக் கனவளவு 70 cm^3 எனின், அதன் உயரத்தைத் தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளின் சார்பிற் காண்க.



7. ஒரு கட்டடத்தைச் சுற்றிக் கொங்கிறீற்றினால் அமைக்கப்பட்ட கானின் ஒரு பகுதி உருவில் காணப்படுகின்றது. கானின் நீளம் 30 m ஆகும். கானை அமைப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட கொங்கிறீற்றின் அளவு யாது?



8. பாடசாலைப் பிள்ளைகளுக்குக் கஞ்சியை வழங்கும் செயற்றிட்டத்திற்கேற்பக் கஞ்சியை இடுவதற்குப் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு பாத்திரங்களைப் பயன்படுத்துவதற்குத் தீர்மானிக்கப்பட்டது. இத்தகைய ஒரு பாத்திரத்தில் வாய் மட்டத்திற்கு 10 cm கீழே உள்ள ஒரு மட்டம் வரைக்கும் கஞ்சியை இடும்போது தரப்பட்டுள்ள அளவீடுகளைப் பயன்படுத்திப் பாத்திரத்தில் உள்ள கஞ்சியின் மொத்தக் கனவளவைக் காண்க. மேலும் ஒரு பிள்ளைக்கு 250 ml ஐக் கொள்ளும் குவளையின் மூலம் ஒரு குவளை வீதம் கஞ்சி வழங்கப்படுமெனின், இவ்வளவு கஞ்சி எத்தனை பிள்ளைகளுக்குப் போதுமெனக் கணிக்க.



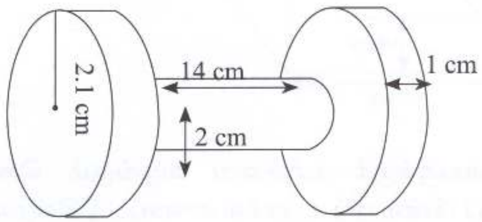
9. குழந்தைகளைக் குளிப்பாட்டுவதற்கு அமைக்கப்பட்ட ஓர் உருளைத் தொட்டி உருவில் காணப்படுகின்றது. அத்தொட்டியின் ஆரை 70 cm ஆக இருக்கும் அதே வேளை 40 cm உயரத்திற்கு நீர் இடப்பட்டுள்ளது.

(i) தொட்டியில் உள்ள நீர்க் கனவளவைக் காண்க.

(ii) தொட்டியில் நீரை இடுவதற்கு 4 l கொள்ளளவுள்ள ஒரு பாத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் தொட்டியில் முற்றாக நீர் நிரப்புவதற்கு எத்தனை தடவைகள் நீரை இடுதல் வேண்டும்?

10. மூன்று உலோக உருளைப் பகுதிகளை ஒன்றோடொன்று இணைப்பதன் மூலம் அமைக்கப்பட்ட, பாரந் தூக்கும் நிகழ்ச்சிக்காகத் தயாரிக்கப்பட்ட ஓர் உபகரணம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதன் திணிவு 500 g எனின் அது செய்யப்பட்டுள்ள உலோகத்தின் அடர்த்தியைக் காண்க.

(சாடை : அடர்த்தி $= \dfrac{\text{திணிவு}}{\text{கனவளவு}}$)



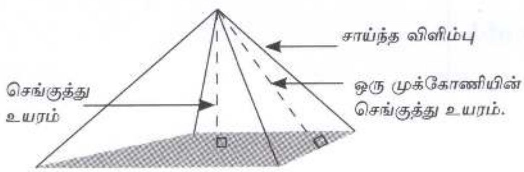
11. இரும்பினால் செய்யப்பட்ட அடியின் ஆரை r அலகுகள் ஆகவும் உயரம் அதன் மூன்று மடங்காகவும் உள்ள ஒரு செவ்வுருளை உள்ளது. அதனை முற்றாக உருக்கி அடியின் ஆரை r அலகுகள் ஆகவும் சம உயரமும் உள்ள மூன்று செவ்வுருளைகள் செய்யப்படுகின்றன (உலோகம் விணாவதில்லையெனக் கொள்க.) புதிதாகச் செய்யப்பட்ட ஓர் உருளையின் உயரத்தை r இன் சார்பில் காண்க.

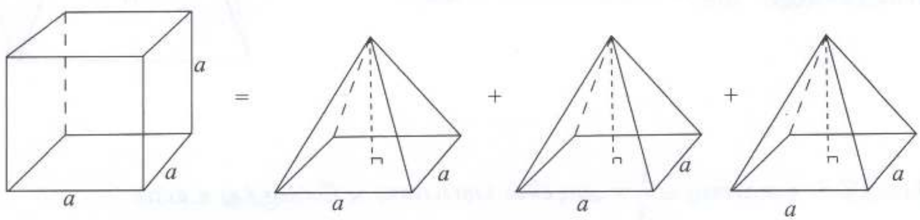
4.3 ➡ சீரான குறுக்குவெட்டு இல்லாத திண்மங்களின் கனவளவு

சீரான குறுக்குவெட்டு இல்லாத திண்மங்களாகிய கூம்பகம், கூம்பு, கோளம் போன்ற திண்மங்களின் கனவளவைக் காண்பதற்குரிய சூத்திரங்களைப் பெறுவோம்.

கூம்பகம்

முதலில் நாம் ஒரு கூம்பகத்தின் கனவளவைக் காணல் பற்றி ஆராய்வோம்.





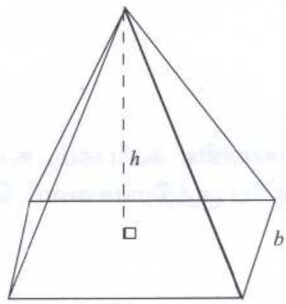
ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a ஆகவுள்ள சதுர அடியை உடைய, உயரம் a ஆகவுள்ள மூன்று கூம்பகங்களின் கனவளவு ஒரு பக்கத்தின் நீளம் a ஆகவுள்ள ஒரு சதுரமுகியின் கனவளவுக்குச் சமம்.

அதாவது, 3 × கூம்பகத்தின் கனவளவு = சதுரமுகியின் கனவளவு

கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times$ சதுரமுகியின் கனவளவு

கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3}a^3$

அடி ஒரு செவ்வகமாக இருக்கும் சந்தர்ப்பம்:

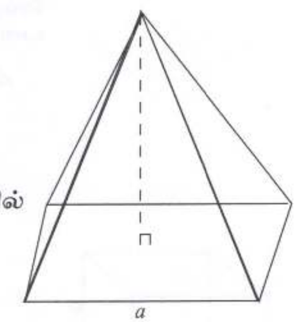


அடியின் நீளம் a ஆகவும் அகலம் b ஆகவும் உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஒரு கூம்பக்கத்தின் கனவளவு V எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $V = \frac{1}{3} \times$ நீளம் × அகலம் × உயரம்

$$\boxed{\therefore \quad V = \frac{1}{3} \times abh}$$

உதாரணம் 1



சதுர அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 4 cm ஆகவும் செங்குத்துயரம் 3 cm ஆகவும் உள்ள செங்கூம்பகம் உருவில் காணப்படுகின்றது. அதன் கனவளவைக் காண்க.

கூம்பகத்தின் கனவளவு $= \frac{1}{3} \times$ அடியின் பரப்பளவு $\times$ செங்குத்து உயரம்

$\therefore$ கனவளவு $= \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 3$

$= 16$

$\therefore$ கூம்பகத்தின் கனவளவு $16\ \text{cm}^3$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

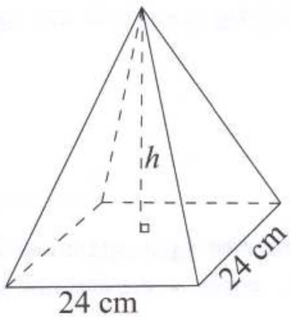
சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் அடியின் ஒரு பக்க நீளம் 24 cm உம் கனவளவு 960 cm^3 உம் ஆகும். அதன்

(i) செங்குத்து உயரம்

(ii) ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம்

ஆகியவற்றைக் காண்க.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களை ஒரு வரிப்படத்தில் காட்டுவோம். கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் h எனக் கொள்வோம்.



உருவிற்கேற்பக்

$$\text{கூம்பகத்தின் கனவளவு} = \frac{1}{3} \times \text{அடியின் பரப்பளவு} \times \text{செங்குத்து உயரம்}$$

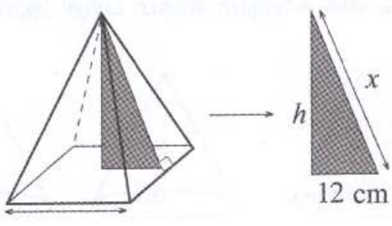
$$960 = \frac{1}{3} \times 24 \times 24 \times h$$

$$h = \frac{960 \times 3}{24 \times 24}$$

$$\therefore h = 5$$

அதாவது, கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 5 cm ஆகும்.

இப்போது ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் x எனக் கொள்வோம்.



x ஐக் காண்பதற்கு மேற்குறித்த முக்கோணிக்குப் பைதகரசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிப்போம்.

$$h^2 + 12^2 = x^2$$
$$\therefore \quad x^2 = 5^2 + 12^2$$
$$x^2 = 25 + 144$$
$$= 169$$
$$x = \sqrt{169}$$
$$= 13$$

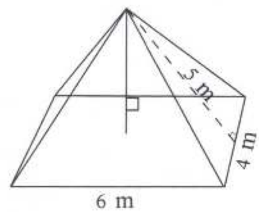
ஒரு முக்கோண முகத்தின் செங்குத்து உயரம் 13 cm ஆகும்.

பயிற்சி 4.2

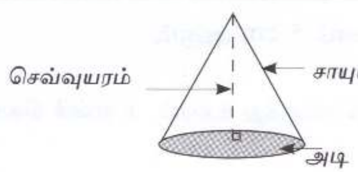
1. ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 10 cm ஆகவுள்ள சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் செங்குத்து உயரம் 15 cm ஆகும். அதன் கனவளவைக் காண்க.

2. சதுர அடியைக் கொண்ட ஒரு கூம்பகத்தின் கனவளவு 676 cm^3 ஆகும். அதன் செங்குத்து உயரம் 3 cm ஆக இருக்கும்போது அடியின் ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

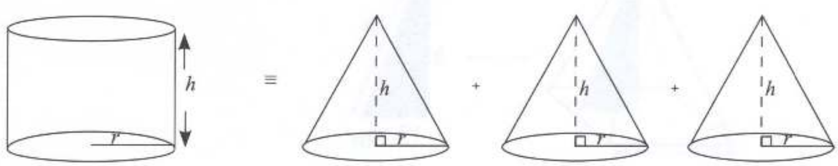
3. ஒரு பாதையை அமைப்பதற்குக் கொண்டு வரப்பட்ட கருங்கல் இருப்பு ஒன்று உருவில் காணப்படுகின்றவாறு குவிக்கப்பட்டது. அதில் இருந்த கருங்கற்களின் கனவளவைக் காண்க.



கூம்பு



இப்போது நாம் ஒரு கூம்பின் கனவளவைக் காணும் விதம் பற்றி ஆராய்வோம்.



அடியின் ஆரை r ஆகவும் செங்குத்து உயரம் h ஆகவும் உள்ள மூன்று கூம்புகளின் கனவளவானது அடியின் ஆரை r ஆகவும் உயரம் h ஆகவும் உள்ள ஓர் உருளையின் கனவளவுக்குச் சமம்.

அதாவது,

$$3\times \text{ கூம்பின் கனவளவு} = \text{உருளையின் கனவளவு}$$

$$\text{கூம்பின் கனவளவு} = \frac{1}{3}\times \text{ உருளையின் கனவளவு}$$

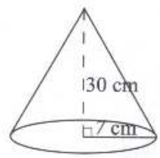
$$= \frac{1}{3}\times \text{ அடியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} \times \text{ உயரம்}$$

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\times\pi r^2\times h}$$

உதாரணம் 1

அடியின் ஆரை 7 cm ஆகவும் உயரம் 30 cm ஆகவும் உள்ள கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

முதலில் தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப உருவை வரைவோம்



$$\text{கூம்பின் கனவளவு} = \frac{1}{3}\times \text{ அடியின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவு} \times \text{ உயரம்}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 30$$

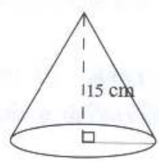
$$=1540$$

கூம்பின் கனவளவு 1540 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஒரு கூம்பின் அடியின் பரிதி 44 cm ஆகும். செங்குத்து உயரம் 15 cm ஆகும். இக் கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

தரப்பட்டுள்ள தகவல்களுக்கேற்ப உருவை வரைவோம்.



வட்ட அடியின் அடரின் பரிதி 44 cm எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

அடியின் ஆரை r எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore 2\pi r = 44$$

$$\therefore 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

$$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$$

$$= 7$$

$$\text{கூம்பின் கனவளவு} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 15$$

$$= 770$$

$\therefore$ கூம்பின் கனவளவு 770 cm^3.

பயிற்சி 4.3

1. அடியின் ஆரை 14 cm ஆகவும் செங்குத்து உயரம் 24 cm ஆகவும் உள்ள ஒரு செங்கூம்பின் கனவளவைக் காண்க.

2. ஆரை 14 cm ஆகவுள்ள ஒரு கூம்பின் கனவளவு 1232 cm^3 ஆகும். அதன் செங்குத்து உயரத்தைக் காண்க.

3. ஆரையும் சாயுயரமும் முறையே,

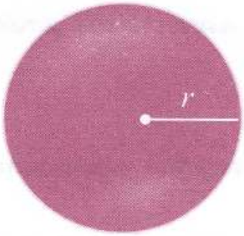
(i) 20 cm, 29 cm

(ii) $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{51}$ cm

ஆகவுள்ள செங்கூம்புகள் ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவைக் காண்க.

4. அடியின் பரிதி 22 m ஆகவுள்ள மணற் குவியல் ஒன்றின் உயரம் 1 m ஆகும். மணற் குவியலில் உள்ள மணலின் கனவளவைக் காண்க.

கோளம்



ஆரை r ஐ உடைய கோளத்தின் கனவளவை $\frac{4}{3}\pi r^3$ இன் மூலம் பெறலாம்.

அதாவது, $\boxed{\text{ஒரு கோளத்தின் கனவளவு } = \frac{4}{3}\pi r^3}$

உதாரணம் 1

4.2 cm ஆரையுள்ள கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

$$\text{கோளத்தின் கனவளவு } = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ஆகும்.}$$

$$r = 4.2 \text{ ஆகையால்}$$

$$\text{கோளத்தின் கனவளவு} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$= 310.464 \text{ cm}^3$$

$\therefore$ கோளத்தின் கனவளவு 310.464 cm^3 ஆகும்.

உதாரணம் 2

ஒரு கோளத்தின் கனவளவு 38 808 cm^3 ஆகும். அதன் ஆரையைக் காண்க.

$$\text{கோளத்தின் கனவளவு} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$$

$$\therefore 38\,808 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$$

$$r^3 = \frac{38808 \times 3 \times 7}{4 \times 22}$$

$$r = 21$$

$\therefore$ கோளத்தின் ஆரை 21 cm ஆகும்.

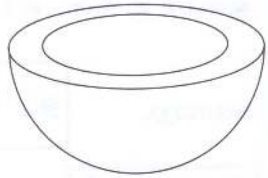
பயிற்சி 4.4

1. பின்வரும் கோளங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவைக் காண்க .
   (i) ஆரை 14 cm (ii) விட்டம் 35 cm
   (iii) ஆரை 3.5 cm (iv) விட்டம் 8.4 cm

2. 0.7 cm ஆரையுள்ள ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

3. 6 cm ஆரையுள்ள 8 திண்ம இரும்புக் கோளங்களை உருக்கி ஒரு கோளம் செய்யப்படுகின்றது. அதன் ஆரையைக் காண்க.

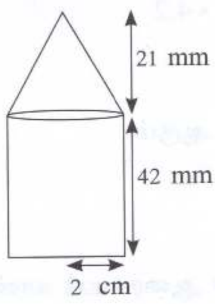
4. உருவில் ஓர் அரைக்கோள இரும்புப் பாத்திரம் உள்ளது. அதன் உள்ளாரை 42 cm உம் வெளியாரை 56 cm உம் ஆகும். பாத்திரத்தின்
   (i) இரும்பின் கனவளவைக் காண்க.
   (ii) 1 cm^3 இன் திணிவு 7.9 g எனின் பாத்திரத்தின் மொத்தத் திணிவைக் காண்க.



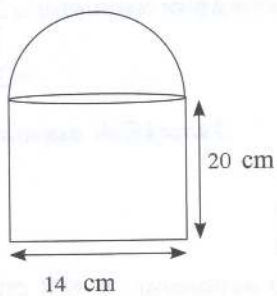
5. மேற்பரப்பின் பரப்பளவு 616 cm^2 ஆகவுள்ள ஒரு திண்மக் கோளத்தின் கனவளவைக் காண்க.

6. பின்வரும் திண்மங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவைக் காண்க.

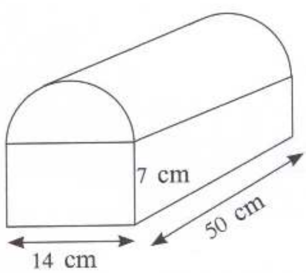
(i)



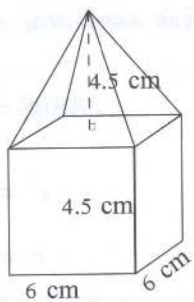
(ii)



(iii)



(iv)



கலைச் சொற்கள்

அக	Interior
அகலம்	Breadth
அடர்	Lamina
அடி	Base
அடுத்துள்ள	Adjacent
அடைத்த உருவம்	Closed figure
அரியம்	Prism
ஆரை	Radius
ஆரைச்சிறை	Sector
ஆரையன்	Radian
இணைகரம்	Parallelogram
இருசமபக்க	Isosceles
இறக்கக் கோணம்	Angle of depression
உச்சி	Vertex
உயரம்	Height
உருளை	Cylinder
எதிரமைத்த	Subtended
எதிரான	Opposite
ஏற்றக் கோணம்	Angle of elevation
ஒத்த	Corresponding
ஒருங்கிசைதல்	Congruent
கண் மட்டம்	Eye level
கனவளவு	Volume
கனவுரு	Cuboid
குறுக்குவெட்டு	Cross-section
கூட்டுத் தொகை	Sum
கூம்பகம்	Pyramid
கூம்பு	Cone
கோசைன்	Cosine
கோணம்	Angle
கோளம்	Sphere
சதுரமுகி	Cube
சமபக்க	Equilateral
சரிவகம்	Trapezium
சாயுயரம்	Slant height
செங்குத்து	Perpendicular
செம்பக்கம்	Hypotenuse
செவ்வகம்	Rectangle
சைன்	Sine
தள உருவம்	Plane figure
திண்மம்	Solid
திரிகோணகணிதம்	Trigonometry
தொடர்புடைமை	Relationship
தொடலி	Tangent
நீளம்	Length
நேர்கோடு	Straight line
பரப்பளவு	Area
பரப்பு	Surface
பரிதி	Circumference
பாகை	Degree
பார்வைக் கோடு	Vision line
முக்கோணி	Triangle
முகம்	Face
மையக் கோணம்	Angle at the centre
மையம்	Centre
வட்டம்	Circle
வர்க்கம்	Square
வளைகோடு	Curved line
விகிதம்	Ratio
வில்	Arc

விடைகள்

பயிற்சி 1.1

1. (i) $x = 10$ cm (ii) $x = 24$ cm

(iii) $x = 3\sqrt{61}$ cm (iv) $x = \sqrt{125}$ cm

2. $\hat{M} = 90^\circ$

3. (i), (iii), (iv)

4. (i) $SQ = 4\sqrt{13}$ cm

(ii) $QW = 17$ cm

5. $LN = 8\sqrt{2}$ cm

$OR = 2\sqrt{17}$ cm

6. (i) DC உம் FE உம்

(ii) DF

(iii) $BE = 2.5$ cm

(iv) செவ்வரியம் என்பதால்

(v) $AE = \sqrt{26.25}$

7. 5 m

8. 8 m

9. 4 m

10. $6\sqrt{5}$ m

11. 3.6 m

12. $10\sqrt{29}$ m

13. $100\sqrt{2}$ m

14. 12 m

15. $\sqrt{10.25}$ m

16. 2.5 m

பயிற்சி 2.1

1. (i) $\frac{\pi^c}{6}$ (ii) $\frac{2\pi^c}{3}$ (iii) $\frac{11\pi^c}{12}$

2. (i) 22.5° (ii) 135° (iii) 220°

பயிற்சி 2.2

1. (i) 0.6157 (ii) 0.7098 (iii) 0.3090
(iv) 0.6648 (v) 11.43 (vi) 1.3301

2. (i) $43^\circ 20'$ (ii) $17^\circ 31'$ (iii) 10°
(iv) $25^\circ 11'$ (v) 2° (vi) $60^\circ 33'$

3. (i) 11.0 cm (ii) 20.4 cm (iii) 22.2 cm
(iv) 37.0 cm (v) 5.6 cm (vi) 17.2 cm

4. (i) $x = 18.4$ cm $y = 5.6$ cm
(ii) $x = 26$ cm $y = 10.5$ cm

5. (i) $x = 20^\circ 40'$ (ii) $x = 26^\circ 59'$
(iii) $x = 66^\circ 38'$

6. 2879.4 m

7. $41^\circ 24'$

பயிற்சி 2.3

1. 20.5 m
2. 10.4 m
3. 1.9 m
4. 37.1 m
5. 18.9 m
6. 17.3 m
7. 22 m
8. 29 m
9. (i) 86.6 m
(ii) 15.2 m
10. (i) நீளம் 69 m
(ii) அகலம் 57.8 m
(iii) மரத்தின் உயரம் 12.6 m

பயிற்சி 3.1

2. (i) 22 cm^2 (ii) 160 cm^2
   (iii) 96 cm^2 (iv) 72 cm^2
   (v) 56 cm^2 (vi) 98 cm^2
3. 22.86 cm^2
4. 66 mm^2
5. 222 m^2
6. (i) 4500 m^2
   (ii) ரூ. 3 825 000

பயிற்சி 3.2

1. (i) 96 cm^2 (ii) 132 cm^2
2. 21200 cm^2
3. 6.5 m^2
4. ரூ. 8100

பயிற்சி 3.3

1. (i) 880 cm^2 (ii) 1188 cm^2
2. 4 cm
3. (i) 2.2 m^2 (ii) 600 m^2
4. ரூ. 14 256
5. ரூ. 295 680

பயிற்சி 3.4

1. 68.6 l
2. 84m^2

பயிற்சி 3.5

1. 550 cm^2
2. (i) 1.54 m^2 (ii) 2.4 m
3. 204.2 cm^2

பயிற்சி 3.6

1. 16 632 cm^2
2. 7 cm
3. 115.5 cm^2
4. 14 cm

பயிற்சி 4.1

1. (i) 138 cm^3 (ii) 245 cm^3
   (iii) 198 cm^3 (iv) 279 cm^3
2. (i) 198 cm^3 (ii) 115.5 cm^3
3. 170 cm^3
4. 25718 cm^3
5. (i) 240 cm^3 (ii) 80 cm^3
   (iii) 1925 cm^3
6. 4 cm
7. 3.9 cm^3
8. 324
9. (i) 616 l (ii) 154 தடவைகள்
10. 9.6 gcm^{-3}
11. r

பயிற்சி 4.2

1. 500 cm^3
2. 26 cm
3. 32 m^3

பயிற்சி 4.3

1. 4928 cm^3
2. 6 cm
3. (i) 8800 cm^3 (ii) $14\frac{2}{3}$ cm^3
4. $12\frac{5}{6}$ m^3

பயிற்சி 4.4

1. (i) 11 498.7 cm^3
   (ii) 22 458.3 cm^3
   (iii) 179.7 cm^3
   (iv) 310.4 cm^3
2. 0.718 cm^3
3. 12 cm^3
4. (i) 212 725.3 cm^3
   (ii) 3 361 kg
5. 1 437.33 cm^3
6. (i) 61600 mm^3
   (ii) 3798.7 cm^3
   (iii) 8750 cm^3
   (iv) 316 cm^3

තාක්ෂණවේදය සඳහා විද්‍යාව - ගණිතය I කොටස (දෙ)

2015/T/අති-06/02/7,000

E.P.D. (SALES DIVISION)
P01
3020008
SCIENCE FOR TECH: MATHS (T) I
Rs. 185.00