க. பொ. த. ப. உயர்தரம்

காவிகள்

G. C. E. Advanced Level

VECTORS

530

தத்துவங்களும், உத்திக் கணக்குகளும் மாதிரி விடைகளும், பயிற்சிகளும் உள்ளடங்கியுள்ளன.

510

530

தி. விசுவலிங்கம் B. Sc.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

510

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4241

100/=

க. பொ. த. ப. உயர்தரம்

காவிகள்

G. C. E. Advanced Level
VECTORS

தத்துவங்களும், உத்திக்கணக்குகளும், மாதிரி விடைகளும், பயிற்சிகளும் உள்ளடங்கியுள்ளன.

பல்கலைக் கழக முதலாம் வருடப் பாடத்திட்டத்திற்கும் உபயோகமானது.

Including Worked Examples and Model Answers
Useful for First Year University Course.

4241

ஆக்கியோன்:

தி. விசுவலிங்கம் B. Sc.

முன்னாள் சிரேட்ட கணித, பௌதிக ஆசிரியர், புனித பெனடிக்ற் கல்லூரி, கொழும்பு-13.
முன்னாள் சிரேட்ட கணித ஆசிரியர், புனித பரியோவான் கல்லூரி, யாழ்ப்பாணம்.
சிரேட்ட கணித விரிவுரையாளர், போர்னோ கல்லூரி, மைடுக்குரி, நைஜீரியா.
இயக்குநர்; திருவள்ளுவர் கழகம்

சகல உரிமைகளும் ஆசிரியருக்கே உரியது

விலை ரூ 100/.

திருவள்ளுவர் கழகம்,

திருவள்ளுவரகம், அராலி தெற்கு, வட்டுக்கோட்டை, இலங்கை.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

முதற் பதிப்பு (ஆங்கிலம்) ஜனவரி 1974.

இரண்டாம் பதிப்பு (தமிழ்) செப்ரெம்பர் 1974.

மூன்றாம் பதிப்பு ஜனவரி 1976.

நான்காம் பதிப்பு ஏப்பிரல் 1977.

ஐந்தாம் பதிப்பு நவம்பர் 1978.

ஆறாம் பதிப்பு யூலை 1982.

சமர்ப்பணம்

இந் நூலை

எனது தந்தையார் அமரர் திரு. க. சி. தில்லையம்பலம், எனது மாமனார் அமரர் திரு. வி. பொ. நவரத்தினம் ஆகியோருக்கு அவர்களின் நினைவாக பக்தியுடன் சமர்ப்பிக்கின்றேன்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

க. பொ. த. ப. உயர்தரம் கணித நூல்கள்

புதிய, பழைய பாடத்திட்டங்களுக்கு அமைய ஆக்கப்பட்டவை.

ஆக்கியோன்:

ஆசிரியர் திரு. தி விசுவலிங்கம் B. Sc. அவர்கள்

தூய கணித நூல்கள்

	ரூ. ச.
* தூய கணிதம் I (முழு நூல்) மீட்டல் தொகுதி	70–00
முதலாம் பகுதி: அட்சரகணிதம், சிக்கலெண்கள்	40–00
இரண்டாம் பகுதி: நுண் கணிதம்	35–00
* தூய கணிதம் II (முழு நூல்) மீட்டல் தொகுதி	55–00
முதலாம் பகுதி: தள, திண்மக் கேத்திர கணிதம், திரிகோண கணிதம்	27–50
இரண்டாம் பகுதி: ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதம்	32–50
* மாதிரி விடைகளும் புள்ளிவழங்கல் திட்டமும் உள்ளடங்கிய தூய கணிதம் I & II மீட்டல் வினாத்தாள்கள்	10–00

பிரயோக கணித (பொறியியல்) நூல்கள்

* பிரயோக கணிதம் I மீட்டல் தொகுதி	
முதலாம் பகுதி: காவிகள் (6ம் பதிப்பு)	30–00
இரண்டாம் பகுதி: நிலையியல்	30–00
மூன்றாம் பகுதி: நீர் நிலையியல்	20–00
* பிரயோக கணிதம் II மீட்டல் தொகுதி: இயக்கவியல்	60–00
* மாதிரிவிடைகளும் புள்ளிவழங்கல் திட்டமும் உள்ளடங்கிய பிரயோக கணிதம் (பொறியியல்) I & II மீட்டல் வினாத்தாள்கள்	10–00

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இந்நூல்களில் உள்ளடங்கியிருப்பவை:

- ❊ தேவையான முழுத் தத்துவங்கள்
- ❊ எடுத்துக் காட்டும் உத்திக் கணக்குகள்
- ❊ கடந்த பரீட்சை வினுக்களின் மாதிரி விடைகள்
- ❊ பயிற்சிகள் ❊ மீட்டல் வினுத்தாள்கள்

G. C. E. Advanced Level Mathematics Books (In English)

by T. Visuvalingam B. Sc.

✱ VECTORS (2nd Edn. & 5th Impression)	Rs. 17-50
✱ PURE MATHEMATICS – I (Full Book) Revision Course	Rs. 52-50
First Part: ALGEBRA	Rs. 25-00
Sccond Part: COMPLEX NUMBERS & CALCULUS	Rs. 28-50
✱ PURE MATHEMATICS – II (Full Book) Revision Course (PLANE, SOLID GEOMETRY TRIGNOMETRY & COORDINATE GEOMETRY.)	Rs. 40-00
✱ Revision Test Papers in PURE MATHEMATICS I & II with MODEL ANSWERS & SCHEME OF CORRECTION	Rs. 7-50

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

முகவுரை

இந்நூல் இலங்கை, இலண்டன் கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர உயர்தரத்திற்குப் பாடநூலாக இயற்றப்பட்டுள்ளது. பல்கலைக்கழக முதலாண்டுப் பாடத்திட்டதிற்கும் உபயோகமானமுறையில் எண்ணிப்பெருக்கம், குறுக்குப்பெருக்கம் என்பன சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. தொழில்நுட்ப பொறியியற்றுறைப் பாடத்திட்டங்களுக்கும் ஏற்றமுறையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டின் நடுப்பகுதியில் காவிப்பகுப்பாய்வு (Vector Analysis) உதயமானது. சமீபகாலமாகக் காவியானது, பொறியியலாளர், பௌதிகவியலாளர், தொழில்நுட்பப்பகுதியினர், கணிதவியலாளர் ஆகியோருக்கும், ஏனைய விஞ்ஞானிகட்கும் தேவையான கணிதப்பின்னணிக்கு இன்றியமையாத பகுதியாகக் கொள்ளப்பட்டு வருகிறது. கணிதச்சூத்திரங்களாலும், பௌதிக, கேத்திர கணக்குகளாலும் உருவாக்கப்படுகின்ற தத்துவச்சமன்பாடுகளைக் காவிகள் சுருக்கமாகவும், எளிமையாகவும் விளக்கமாகவும் தருகின்றன.

இந்நூலிலடங்கிய ஒவ்வொரு அத்தியாயங்களிலும் தெளிவான வரைவிலக்கணங்களும், தத்துவங்களும் அவற்றினை விரிவாய் விளக்கும் உதாரணங்களும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உள்ளன. அத்தியாயம் 6இல் க.பொ.த.ப.உயர்தரம்(இலங்கை) 1968-1978 வினாக்கட்கு மாதிரி விடைகள் விளக்கமாகத் தரப்பட்டுள்ளன. அத்தியாயம் 8இல் பலவின உத்திக்கணக்குகளும், பலவினக்கணக்குகளும் விடைகளும் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

உயர்தரப்பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்கட்கு நீண்டகாலமாக ஆசிரியராகவிருந்த அனுபவத்தைக் கொண்டு எழுதிய இந்நூலானது மாணவர் கட்கும் ஆசிரியர்கட்கும் பெரிதும் பயன்படுமென நம்புகிறேன். இந்நூலினை மேலும் சிறப்புடன் வெளியிட இந்நூலிற்குத் தரப்படும் திருத்தங்களையும், ஆலோசனைகளையும் நன்றியுடன் வரவேற்பேன்.

நூலின் ஐந்தாம் பதிப்பினைப்வெளியிட பெரிதும் உதவிய என்பாரி யாருக்கும், ஆக்கபூர்வமாகப் பல ஆலோசனைகள் தந்த பேராசிரியர் கட்கும், ஆசிரியர்கட்கும் பெரிதும் நன்றியுடையேன்.

இந்நூலில் பரீட்சை வினாக்களை இணைப்பதற்கு அனுமதியளித்த இலங்கைக் கல்வித்திணைக்களப் பரீட்சைப்பகுதி ஆணையாளருக்கும், இலங்கைப் பல்கலைக்கழகம், இலண்டன பல்கலைக்கழகம் ஆகியவற்றிற்கும் எனது நன்றி

"வள்ளுவர் வாசம்"

அராலி தெற்கு, வட்டுக்கோட்டை,
நவம்பர் 1978.

தி. விசுவலிங்கம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆறாம் பதிப்பின் முகவுரை

நூலின் ஆறாம் பதிப்பாகிய இதனை நான் நைஜீரியாவிலிருந்து வந்திருந்த விடுமுறையிலே விரைவாய்ப் போடவேண்டி ஏற்பட்டதால், முந்திய பதிப்பில் மாற்றமின்றிப் போட்டுள்ளேன். புதிதாக 1979-81 ஆண்டுகளில் நடைபெற்ற பரீட்சை வினாக்களைப் பின்னிணைப்பாகச் சேர்த்துள்ளேன்.

இப்பதிப்பை விரைவாய் வெளியிட ஒத்துழைப்பும், ஊக்கமும் அளித்த அனைவருக்கும் பெரிதும் நன்றியுடையேன்.

சி. விசுவலிங்கம்.

"திருவள்ளுவரகம்"
அராலி தெற்கு,
வட்டுக்கோட்டை.
யூலை 1982

பொருளடக்கம்

****

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 1

எண்ணிகளும் காவிகளும்.

1.1 எண்ணி: எண்ணி என்பது வெளியில் திசையில்லாததும், பருமனையுடையதுமான கணியமாகும். உ.ம்: திணிவு, கனவளவு, அடர்த்தி, நீளம், நேரம், வெப்பநிலை, வேலை .

வெப்பக்கணியம், யாதாயினுமொரு உண்மை எண் என்பன.

ஆரம்ப அட்சரகணிதத்தில் உள்ள எழுத்துக்கள் போலவே எண்ணிகள் குறிப்பிடப்படுவனவாகும். எண்ணிகளுடன் உள்ள செய்கைகளுக்குரிய விதிகள், ஆரம்ப அட்சர கணித விதிகளைப் போலவே இருப்பனவாகும்.

1.2 காவி: காவி என்பது வெளியில் திசையுடையதும் பருமனுடையதுமான கணியமாகும். உ.ம்: இடப்பெயர்ச்சி, வேகம், ஆர்முடுகல், உந்தம், விசை, மின்செறிவு, காந்தச்செறிவு என்பனவாகும்.

1.3 காவியொன்றின் வகைக்குறிப்பு: துணிக்கையொன்றின் இடப்பெயர்ச்சி காவியின் எளிய வகையாகும். துணிக்கையொன்று A இலிருந்து B இற்கு இடம் பெயர்க்கப்பட்டால் காவி $\overrightarrow{AB}$ இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கும்.

$$A \longrightarrow B$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

AB என்னும் சோடுபோல, எல்லாக்காவிகளும் வகைக் குறிப்பிடப் படலாம். ஆயினும் காவியொன்றை $\underset{\sim}{a}$ போன்ற தனியெழுத்தொன்றால் குறிப்பிடுவது வசதியானதாகும். $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a}$, $A \xrightarrow{\underset{\sim}{a}} B$

ஏதாயினும் காவி $\overrightarrow{AB}$ இன் பருமன் AB ஆகும். அல்லது அதன் மட்டின் பெறுமதியால் குறிப்பிடலாம். $|\overrightarrow{AB}|$

அ.து. காவி $\underset{\sim}{a}$ இன் பருமன் a அல்லது $|\underset{\sim}{a}|$

1.4 <u>சம காவிகள் :</u> ஒரே பருமனையும், ஒரே திசையையும் கொண்டுள்ள இரு காவிகள் சம காவிகளெனப்படும்.

(i) $|\underset{\sim}{a}| = |\underset{\sim}{b}|$ ஆயும் (ii) $\underset{\sim}{a}$ உம் $\underset{\sim}{b}$ உம் வெளியில் ஒரே திசையை நோக்கியுமிருப்பின் காவிகள் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன சமனானவையாகும்.

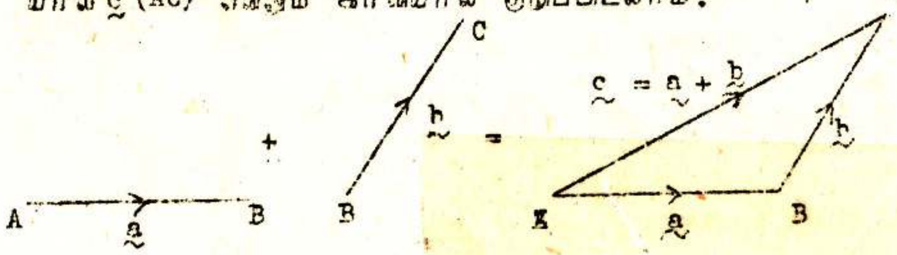
இவ்விரு நிபந்தனைகளையும் திருப்தியாக்கின்

$\boxed{\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{b}}$ என எழுதப்படும்.

1.5 <u>சயக் (கழித்தற்) குறி:</u> காவி $-\underset{\sim}{a}$ காவி $\underset{\sim}{a}$ இன் எதிர்த் திசையில் உள்ளது. மேலும் $|\underset{\sim}{a}| = |-\underset{\sim}{a}|$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

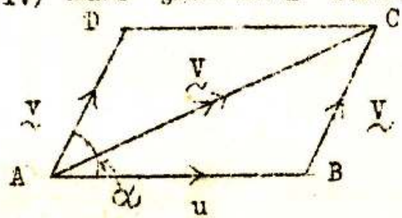
1.6 <u>காவிக் கூட்டல் :</u> காவிகள் $\underset{\sim}{a}$ $(\overrightarrow{AB})$, $\underset{\sim}{b}$ $(\overrightarrow{BC})$ என்பவற்றின் கூட்டுத் தொகை $(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$ என எழுதப்படும். இதனை முக்கோணக் கூட்டல் விதியால் $\underset{\sim}{c}$ $(\overrightarrow{AC})$ என்னும் காவியால் குறிப்பிடலாம்.



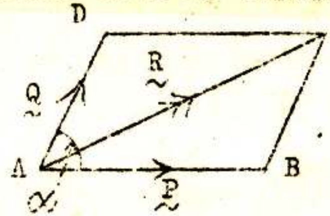
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c}$

குறிப்பு :- $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c}$ ஆயின், $|\underset{\sim}{a}| + |\underset{\sim}{b}| \neq |\underset{\sim}{c}|$

(i) வேக இணைகரம், (ii) விசை இணைகரம், (iii) வேக முக்கோணி (iv) விசை முக்கோணி என்பவற்றால், காவிக் கூட்டலை எடுத்துக் காட்டலாம்.



$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}$



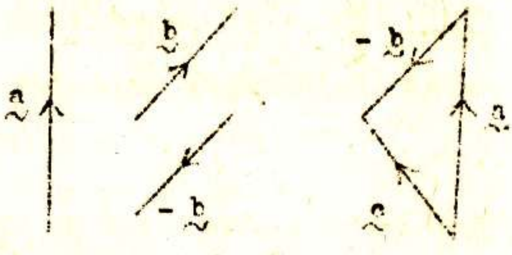
$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$

$V^2 = u^2 + v^2 + 2uv$ கோசை $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$ கோசை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

1.7 காவிக்கழித்தல்

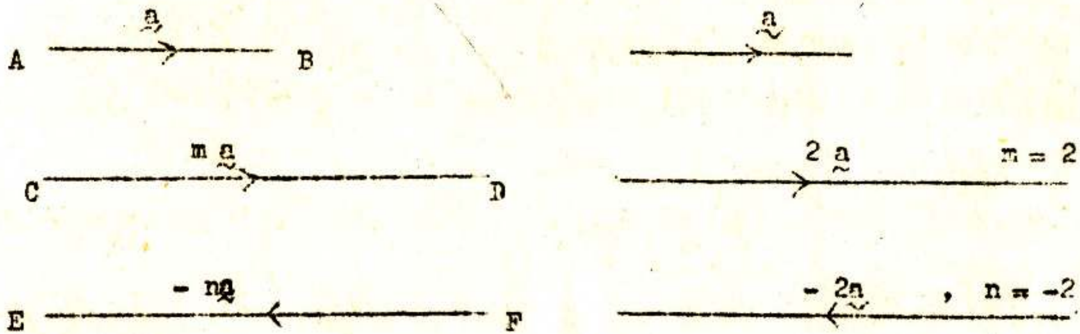
காவி $\underset{\sim}{a}$ இலிருந்து காவி $\underset{\sim}{b}$ யைக் கழிப்பதனை $(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})$ என எழுதப்படும். இதனை $\underset{\sim}{a} + (-\underset{\sim}{b})$ எனவும் எழுதலாம். இதனை முக்கோண விதிக்கூட்டல் முறையால் $\underset{\sim}{c}$ எனப் பெறலாம்.



$$\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} + (-\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}$$

1.8 காவியொன்றினதும் எண்ணியொன்றினதும் பெருக்குத்தொகை

காவி a இனதும் எண்ணி m இனதும் பெருக்குத்தொகை m a என எழுதப்படும். m a என்பது காவி a இன் திசையில் உள்ளதும் பருமன் m a



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

1.9 காவி அட்சரகணித விதிகள்

$\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ என்பன காவிகளாயும் m, n என்பன எண்களாயுமிருப்பின்,

(1) $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$ கூட்டற் பரிவர்த்தனை விதி. (Commutative law for addition)

(2) $\underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c}$ கூட்டற் தொகுப்பு (சேர்த்தி) (Associative law for addition)

(3) $m\,\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}\,m$ பெருக்கற் பரிவர்த்தனை விதி (Commutative law for product)

(4) $m(n\,\underset{\sim}{a}) = (mn)\,\underset{\sim}{a}$ பெருக்கற் தொகுப்பு விதி. (Assosiative law for product)

(5) $(m + n)\,\underset{\sim}{a} = m\,\underset{\sim}{a} + n\,\underset{\sim}{a}$ பரம்பல் விதி (Distributive law)

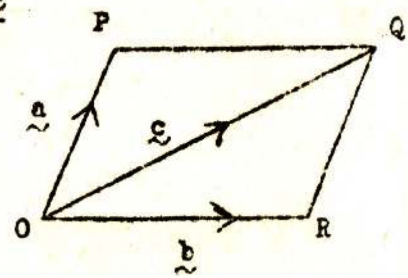
(6) $m(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = m\,\underset{\sim}{a} + m\,\underset{\sim}{b}$ பரம்பல் விதி. (Distributive law)

சாதாரண அட்சரகணிதச் சமன்பாடுகளைப்போல், காவிச் சமன்பாடுகளையும் செயற்படுத்த இவ்விதிகள் உதவுகின்றன.

உதாரணமாக $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c}$ ஆயின், இடமாற்றலினால் $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}$ எனலாம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

1.10 கூட்டற் பரிவர்த்தனை விதி $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$



நிறுவல்

$\triangle$ OPQ இல் $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

$$\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$$

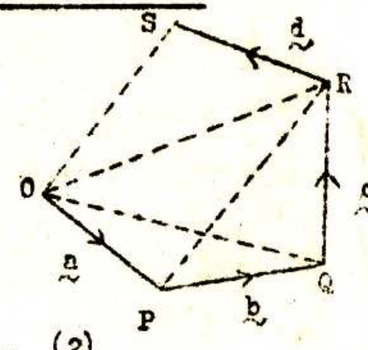
$\triangle$ ORQ இல் $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ}$

$$\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$$

$\therefore$ (1) உம் (2) உம் தருவது $\boxed{\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}}$

குறிப்பு :- $OP + PQ \geqslant OQ$, $OR + RQ \geqslant OQ$

1.11 கூட்டற்தொகுப்பு (சேர்த்தி) விதி $\underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c}$



நிறுவல் $\triangle$ OPQ இல் $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

$$= \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$$

$\triangle$ OQR இல் $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR}$

$$= (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c} \; \ldots\ldots \; (1)$$

$\triangle$ PQR இல் $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}$

$\triangle$ OPR இல் $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) \; \ldots\ldots \; (2)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

∴ (1) உம் (2) உம் தருவது $\boxed{\underset{\sim}{a} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{c}}$

எந்த ஒழுங்கில் காவிகளைக் கூட்டினாலும், கூட்டுத்தொகை மாறாது என்பதை இது காட்டுகின்றது. எனவே அடைப்புக்கள் தேவையற்றன.

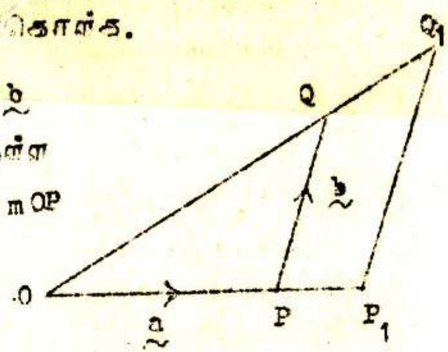
எனவே காவிகளின் கூட்டுத்தொகையை

$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d} + \ldots\ldots\ldots$ என எளிதாக எழுதலாம்.

பரிவர்த்தனை விதி மூலம் காவிகளை எந்த ஒழுங்கில் எழுதினும் மாற்றமிராது.

1.12 காவிகளின் பரம்பல் விதி $m(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = m\underset{\sim}{a} + m\underset{\sim}{b}$

$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{b}$ எனக்கொள்க.



$\triangle$ OPQ இல் $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$

P_1, Q_1 என்பன OP, OQ என்பன நீட்டப்பட்டுள்ளவற்றிலுள்ள புள்ளிகளாயிருக்கையில் $OP_1 = m\,OP$ ஆகவும் $OQ_1 = m\,OQ$ ஆகவுமுள்ளன.

இங்கு m ஒரு எண்ணியாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சாதாரண கேத்திர கணிதத்திலும் $P_1Q_1 // PQ$ ஆகவும்,

$\triangle$ கள் OPQ , OP_1Q_1 என்பன ஒத்தனவாயுமுள்ளன. $P_1Q_1 = mPQ$

$\triangle$ OP_1Q_1 இல், $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1}$

$$m\overrightarrow{OQ} = m\overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{PQ}$$

$$\boxed{m(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = m\underset{\sim}{a} + m\underset{\sim}{b}}$$

1.13 அலகுக்காவி (Unit Vector) அலகுப்பருமனுடைய காவி அலகுக்காவி எனப்படும். $\underset{\sim}{a}$ என்பதும் $a \neq 0$ பருமனுடையதாயின், $\frac{\underset{\sim}{a}}{a}$ என்பது காவி $\underset{\sim}{a}$ இன் திசையில் உள்ள அலகுக்காவி எனப்படும்.

இதனை $\boxed{\hat{\underset{\sim}{a}} = \frac{\underset{\sim}{a}}{a}}$ அல்லது $\boxed{\hat{\underset{\sim}{a}} = \frac{\underset{\sim}{a}}{|\underset{\sim}{a}|}}$, $\boxed{|\hat{\underset{\sim}{a}}| = 1}$

1.14 சூனியக் (அல்லது பூச்சியக்) காவி (The null or zero Vector)

பருமனற்றதும், குறிப்பிட்ட திசையற்றதுமான காவி சூனிய அல்லது பூச்சியக்காவி எனப்படும். $|\underset{\sim}{d}| = 0$ ஆகில் மட்டும் தான், $\underset{\sim}{d}$ என்ற காவி பூச்சியக் காவி எனப்படும்.

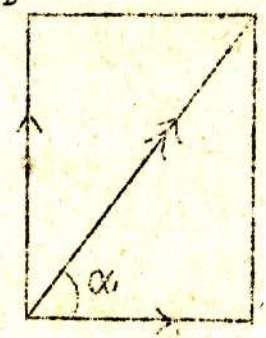
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{b}$ ஆயின், காவி $(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})$ என்பது சூனியக் (பூச்சியக்) காவி எனப்படும். பூச்சியக் காவி 0 இனால் குறிப்பிடப்படும்.

அ.து. $\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$, $\boxed{\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}}$

உதாரணம் 1

இரு விசைகள், ABCD என்னும் செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் AB = 30 மி.மீ, AD = 40 மி.மீ. என்பவற்றால் பருமனிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. அளவிடை 10 மி.மீ = 15 நியூட்டன். விளையுளின் பருமனையும், திசையையும் காண்க. Sagu படத்திலிருந்து விளையுள் விசை



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (அல்லது $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$)

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 30^2 + 40^2$

$AC^2 = 50^2 \Longrightarrow AC = 50$ மி.மீ

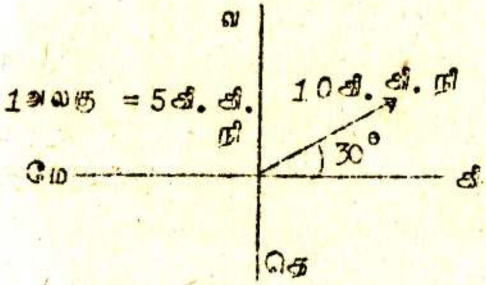
$\therefore$ விளையுள் விசை $\overrightarrow{AC} = \frac{50}{10} \times 15$ N,

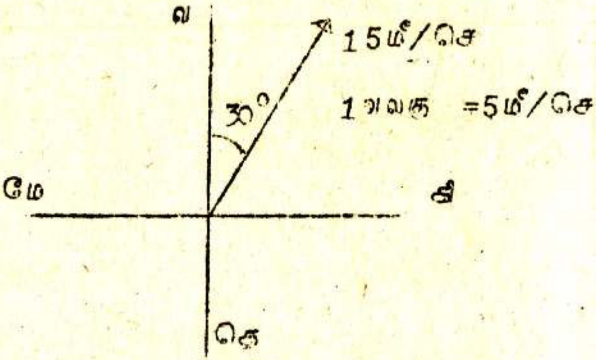
$= 75$ N

திசை AB உடன் α = தான்$^{-1}$ (4/3)

உதாரணம் 2

வரைபால் குறிப்பிடுக. (a) 10 கிலோகிராம் நி விசையானது 30° கிழக்கிற்கு வடக்காயுள்ளது. (b) 15மீ/செக். வேகத்துடன் வடக்கிற்கு 30° கிழக்காக காற்று வீசுகின்றது.





உதாரணம் 3.

சிற்றூர்ந்தொன்று (காரொன்று) 30 மீட்டர்கள் வடக்காகவும், பின்னர் 50 மீட்டர்கள் வடகிழக்காகவும் செல்கின்றது. இடப்பெயர்ச்சிகளை வரைபால் குறிப்பிட்டு, விளையுள் இடப்பெயர்ச்சியை (a) வரைபு (b) பகுப்பு முறையால் காண்க.

விடை காவி $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$ என்பது வடக்கு நோக்கியுள்ள இடப்பெயர்ச்சி 30 மீட்டர்களைக் குறிக்கின்றது. காவி $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{b}$ என்பது வடகிழக்கு நோக்கியுள்ள இடப்பெயர்ச்சி 50 மீட்டர்களைக் குறிக்கின்றது.

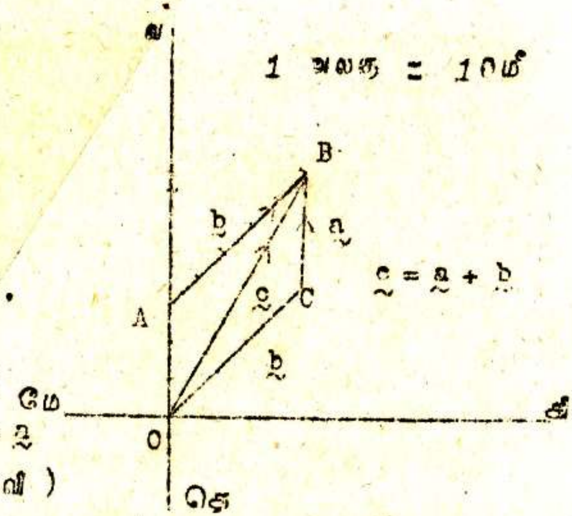
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

காவி $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{c}$ என்பது விளையுள் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கின்றது. அல்லது $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றின் கூட்டுத் தொகை எனவும் சொல்லலாம்.

அ.து. $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$

இது முக்கோணக் கூட்டல் விதியாகும்.

விளையுள் $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{c}$ என்பதை இணைகரம் OABC இன் மூலைவிட்டத்தை அமைப்பது மூலமும் பெறலாம். $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$ ஆயும் $\overrightarrow{OC} = \underset{\sim}{b}$ ($\overrightarrow{AB}$க்குச் சமமானகாவி) ஆயும் உள்ள பக்கங்களைக்கொண்ட இணைகரம். இது காவிக்கூட்டலின் இணைகர விதியாகும்.



<u>விளையுளைக் காணல்</u>

(a) <u>வரைபுமுறை</u>:- $\overrightarrow{OB}$ என்னும் காவியில் ஒரு அலகு 10 மீட்டர்கள் எனக் கொள்க. $|\overrightarrow{OB}| = 74$ மீட்டர்கள் பாகைமானி மூலம் $\angle EOB = 61.5^\circ$

எனவே காவி $\overrightarrow{OB}$ இன் பருமன் 74 மீட்டர்கள் திசை கி. 61.5° வ.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(b) <u>பகுப்பு முறை</u> :- $\triangle$ OAB இல் கோசைன் விதிப்படி,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ கோசை } \angle OAB$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \text{ கோசை } 135^\circ$$
$$= 30^2 + 50^2 - 2.30.50.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 10^2 (34 + 15\sqrt{2})$$
$$= 10^2 \times 55.21$$
$$c = 74.3 \text{ மீட்டர்கள்}$$

அல்லது இணைகரம் OABC இல்

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ கோசை AOC}$$
$$c^2 = 30^2 + 50^2 + 2.30.50 \text{ கோசை } 45^\circ$$
$$= 10^2 \times 55.21$$
$$c = \underline{74.3 \text{ மீ}}$$

<u>திசை</u>

$\triangle$ OAB இல் சைன் விதிப்படி,

$$\frac{c}{\text{சைன் } 135} = \frac{a}{\text{சைன் } \angle OBA} \quad ; \text{சைன் } \angle OBA = \frac{30}{74.3 \times \sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{ சைன் } \angle OBA = \frac{a \text{ சைன் } 45}{c} \qquad = 0.2855$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சைன்: $\angle OBA = 16^\circ 35'$

$\therefore \angle EOB = 45^\circ + 16^\circ 35' = 61^\circ 35'$

அல்லது இணைகரம் OABC இல்,

$$\text{தான் } EOB = \frac{a + b \text{ சைன் } 45^\circ}{b \text{ கோசை } 45^\circ} = \frac{30 + 50 \text{ சைன் } 45^\circ}{50 \text{ கோசை } 45^\circ}$$

$\angle EOB = 61^\circ 35'$

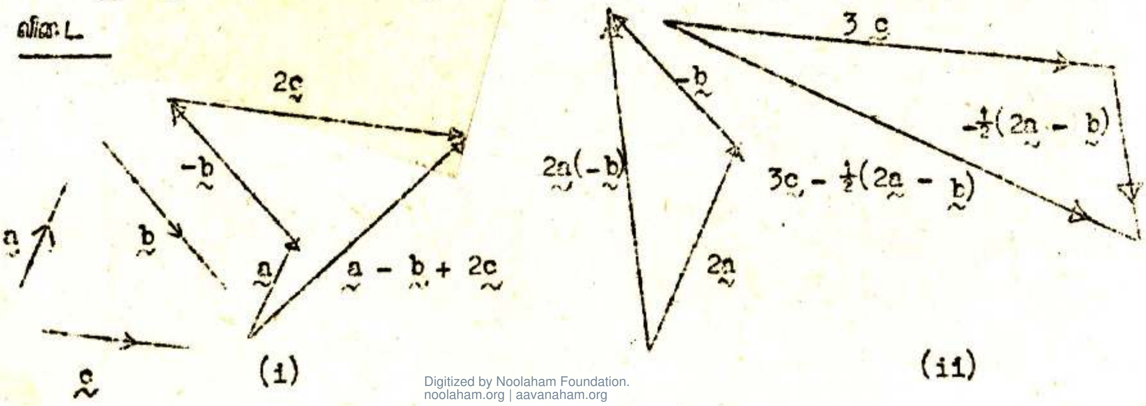
$\therefore$ காவி $\overrightarrow{OB}$ இன் பருமன் 74.3 மீ. திசை கி 61'35' வ

<u>உதாரணம் 4.</u>

$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ என்னும் காவிகள் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} + 2\underset{\sim}{c}$ (ii) $3\underset{\sim}{c} - \frac{1}{2}(2\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})$ என்பவற்றை அமைக்குக.

<u>விடை</u>



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உதாரணம் 5

$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன ஒரேகோட்டில் கிடவாதன வாயின் $m\underset{\sim}{a} + n\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$ ஆகும்.

ஆயின் அறிவது $m = n = 0$ என நிறுவுக.

விடை

$m \neq 0$ என்க. ஆயின் $m\underset{\sim}{a} + n\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$,

$$m\underset{\sim}{a} = -n\underset{\sim}{b} \Longrightarrow \underset{\sim}{a} = -\frac{n}{m}\underset{\sim}{b}.$$

$\therefore$ $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன ஒரேகோட்டிற்குச் சமாந்தரமாகும். (ஒரேகோட்டில்)

இது தரவுக்கு முரணானது.

$\therefore$ $m = 0$ ஆகும். ஆயின் $n\underset{\sim}{b} = 0$ எனவே $n = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad m = n = 0$$

உதாரணம் 6

$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன ஒரு கோட்டில் கிடவாத காவிகளாயும்

$m_1\underset{\sim}{a} + n_1\underset{\sim}{b} = m_2\underset{\sim}{a} + n_2\underset{\sim}{b}$ ஆயுமிருப்பின் $m_1 = m_2$ எனவும்

$n_1 = n_2$ எனவும் நிறுவுக.

$m_1\underset{\sim}{a} + n_1\underset{\sim}{b} = m_2\underset{\sim}{a} + n_2\underset{\sim}{b}$ என்பதனை $m_1\underset{\sim}{a} + n_1\underset{\sim}{b} - (m_2\underset{\sim}{a} + n_2\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{0}$ என எழுதலாம்.

$$(m_1 - m_2)\underset{\sim}{a} + (n_1 - n_2)\underset{\sim}{b} = 0$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன ஒரு கோட்டில் கிடவாதவைகளாகையால் ,

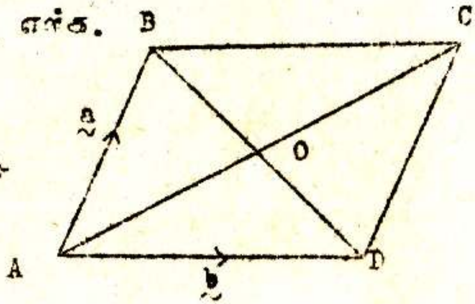
உ.ம். 5 இன்படி $m_1 - m_2 = 0$ · $n_1 - n_2 = 0$

$$\underline{\underline{m_1 = m_2}} \qquad \underline{\underline{n_1 = n_2}} .$$

கேத்திர கணிதப்பிரயோகங்கள்

உதாரணம் 7

காவிமுறையிலும் இணைகரமொன்றின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடுகின்றன என நிறுவுக.



AC = BD என்பன O வில் வெட்டுகின்றன எனக.

$\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a}$, & $\overrightarrow{AD} = \underset{\sim}{b}$ என்க.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$

$\overrightarrow{AO} = AO. \dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \dfrac{AO}{AC} \overrightarrow{AC} = m.\overrightarrow{AC}$.

இங்கு $m = \dfrac{AO}{AC}$ $= m(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$

மேலும் , $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}$

$\overrightarrow{OB} = OB . \dfrac{\overrightarrow{DB}}{DB} = \dfrac{OB}{DB} . \overrightarrow{DB} = n.\overrightarrow{DB} = n(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})$ இங்கு $n = \dfrac{OB}{DB}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\underset{\sim}{a} = m(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) + n(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}) \Longrightarrow \underset{\sim}{a} = (m+n)\underset{\sim}{a} + (m-n)\underset{\sim}{b}$

இரு பக்கமும் குணகங்களை (எண்களை)ச் சமன்படுத்துகையில் ,

$$\left.\begin{array}{l} m - n = 0 \\ m + n = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} m = n \\ 2m = 1 , \ m = \tfrac{1}{2} , \ m = n = \tfrac{1}{2} \end{array}$$

அ.து $m = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad n = \dfrac{OB}{DB} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன.

__உதாரணம் 8__

நாற்பக்கலொன்றின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை முறையே இணைக்கும் பொழுது உருவாகும் உருவம் இணைகரமெனகாவி முறைமூலம் நிறுவுக.

__விடை__

தரப்பட்டுள்ள நாற்பக்கல ABCD என்க. P,Q,R,S என்பன முறையே பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும்.

$\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a} , \ \overrightarrow{BC} = \underset{\sim}{b} , \ \overrightarrow{CD} = \underset{\sim}{c} , \ \overrightarrow{DA} = \underset{\sim}{d}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$,

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

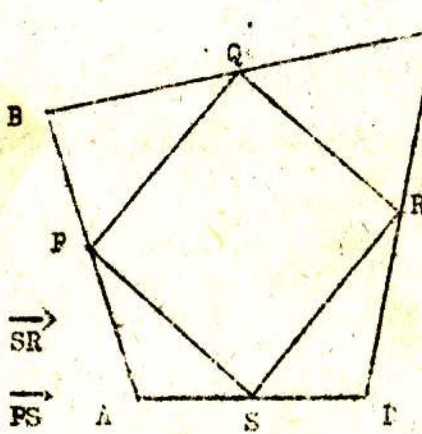
$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d})$

$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{a})$

மூடிய பல்கோணிக் காவிகளின்

கூட்டுத் தொகை $= \underset{\sim}{0}$

$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{0}$



எனவே $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = -\frac{1}{2}(\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d}) = \overrightarrow{SR}$

$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = -\frac{1}{2}(\underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{a}) = \overrightarrow{PS}$

∴ நாற்பக்கல் PQRS இன் எதிர்ப்பக்கங்கள்

PQ, SR உம் QR, PS உம் சமனும் சமாந்தரமுமாகும்.

PQRS ஓர் இணைகரமாகும்.

பயிற்சி 1

1. பின்வருவனவற்றுள் எவை காவிகள், எவை எண்ணிகள் எனக் கூறுக.

(a) நிறை (b) திணிவு (c) தன்வெப்பம் (d) அடர்த்தி (e) கனவளவு (f) கதி (g) கலோரி (h) உந்தம் (i) சக்தி (j) தூரம் (k) இடப்பெயர்ச்சி (l) காந்தமண்டலச் செறிவு (m) மின்மண்டலச்செறிவு (n) வேலை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(o) மின்னழுத்தம்

(விடை:- காவிகள் :- a,h,k,l,m . எண்கள் :- b,c,d,e,f,g,i,j ,n,o)

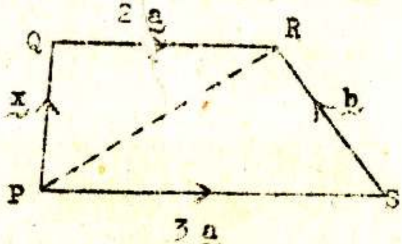
2. பின்வரும் இடப்பெயர்ச்சிகளின் கூட்டுத்தொகையை அல்லது விளையுளைக் காண்க.

$\underset{\sim}{a}$, 10 மீ வடமேற்கு; $\underset{\sim}{b}$ 20மீ கி 30° வ, $\underset{\sim}{c}$ 35மீ தெற்கு நோக்கி.

(விடை:- விளையுள் $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}$ = 20.5மீ கி 60° தெ)

3. உருவிலிருந்து $\underset{\sim}{x}$ இனை $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றில் காண்க.

(விடை:- $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$)

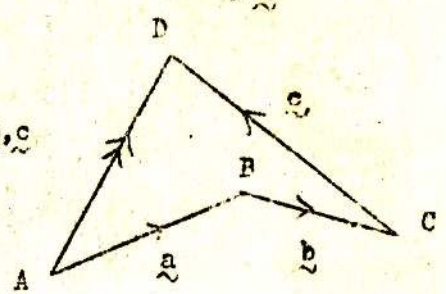


4. (i) உருவில் AD ஐ $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ இல்காண்க.

(விடை:- $\overrightarrow{AD} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}$)

(ii) உருவில் DC வழியே $\underset{\sim}{c}$ இருப்பின் AD ஐ $\underset{\sim}{a}$,$\underset{\sim}{b}$,$\underset{\sim}{c}$ இல் காண்க.

(விடை:- $\overrightarrow{AD} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}$)



5. இணைகரம் ABCD இல் $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a}$; $\overrightarrow{BC} = \underset{\sim}{b}$ ஆயின் மூலைவிட்டங்கள் $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ என்னும் காவிகளை $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ இல் எழுதுக. $\overrightarrow{DB}$ என்ன?
(விடை :- $\overrightarrow{AC} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{BD} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{DB} = \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}$)

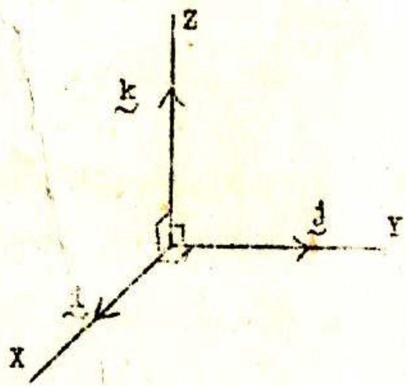
6. சாய்சதுரமொன்றின் மூலைவிட்டங்கள் செங்கோணத்தில் இடைவெட்டுகின்றன என நிறுவுக.

7. $\triangle$ ABC இன் பக்கங்கள் BC, CA, AB இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F ஆகும். $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ Same எனக்காட்டுக. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underset{\sim}{0}$ எனவும், இடையங்கள் ஒரு பொதுப்புள்ளியில் முக்கூறிடுகின்றன எனவும் காட்டுக.

****

அத்தியாயம் 2 தானக்காவிகள்

2.1 செங்கோண அலகுக்காவிகள் $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$



மூன்று பரிமாண செங்கோண அச்சுத்தொகுதியில் X, Y, Z அச்சுக்களின் நேர்த்திசைகளிலுள்ள அலகுக்காவிகள் முக்கியமான அலகுத்தொடைக் காவிகளாகும். அவை படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள படி முறையே $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படும்.

இம்மூன்று காவிகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. இவற்றினை வலக்கை செங்கோண ஒள்சுற்றுத் தொடை எனக் கூறப்படும். இப்பெயருக்குரிய காரணம் வலது திருகைப்புரி ஒன்றினை $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ தளத்தில் $\underset{\sim}{i}$ இலிருந்து $\underset{\sim}{j}$ யை நோக்கிச் சுற்றுகையில், புரியானது $\underset{\sim}{k}$ இன் திசையில் முன்னேறும்.

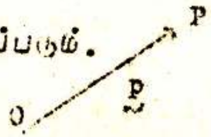
குறிப்பு :- $\underset{\sim}{i} \neq \underset{\sim}{j} \neq \underset{\sim}{k}$, ஆனால் $|\underset{\sim}{i}| = |\underset{\sim}{j}| = |\underset{\sim}{k}|$

2.2 தானக்காவி (Position Vector)

நிலையான புள்ளி O வினை உற்பத்தியாகக்கொண்டு எப்புள்ளி P இனதும் தான நிலை ஒரு காவியாய் $\overrightarrow{OP}$ என்னும் காவியால் குறிக்கப்படும்.

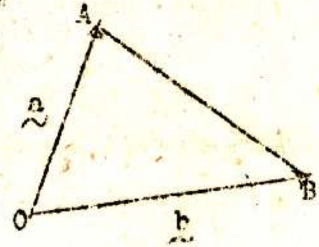
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இதனை O தொடர்பான P இன் தானக்காவி என்று கூறப்படும்.



$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{p}$

A,B,C, ... Z என்னும் தானக்காவிகளை முறையே அவற்றின் சிறிய எழுத்துக்கள் a,b,c,....z என்பவற்றால் குறிப்பிடுவது வசதியானது.

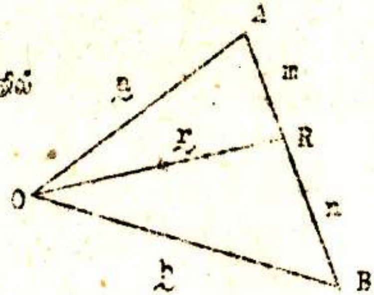


இக்குறியீட்டின்படி காவி $\overrightarrow{AB}$ ஆனது ,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underline{\underline{\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}}}$

2.3 தரப்பட்ட இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியினைக் காவி .

R என்ற புள்ளி AB இனை m : n என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது . $\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{m}{n}$



$\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}, \ \overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}, \ \overrightarrow{OR} = \underset{\sim}{r}, \ n\overrightarrow{AR} = m\overrightarrow{RB}$

$n\,(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OR}) = m\,(\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OB})$

$n(-\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{r}) = m\,(-\underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{b})$

$$\boxed{(m + n)\underset{\sim}{r} = n\,\underset{\sim}{a} + m\,\underset{\sim}{b}} \quad ....(1)$$

$\therefore$ R இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OR} = \boxed{\underset{\sim}{r} = \dfrac{n\,\underset{\sim}{a} + m\,\underset{\sim}{b}}{n + m}} \qquad m + n \neq 0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மேலுள்ள முடிபானது, $m : n$ ஆனது நேராக அல்லது எதிராக இருப்பினும் உண்மையானது. எதிராயிருப்பின் R ஆனது, துண்டம் AB இற்கு வெளியேயிருக்கும். விகிதமானது 0 இற்கும் -1 இற்குமிடையே இருப்பின் R ஆனது AB இற்குப் புறத்தேயும் அதுவும் A இற்கு அணித்தாயுமிருக்கும். விகிதமானது -1 இற்கும் $-\infty$ இற்குமிடையே இருப்பின் R ஆனது AB இற்கு வெளியேயும் B இற்கு அணித்தாயுமிருக்கும். ஒரு குறிப்பிட்ட வகைக்கு, $m = n$ ஆயின் R, AB இன் நடுப்புள்ளியாகும். எனவே $\underline{r} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

<u>மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டுப் புள்ளிகளாயிருப்பதற்குரிய நிபந்தனை :</u>

மேலேயுள்ள சமன்பாடு (1) இனை $(m+n)\, r - na - mb = 0$ .... (2) என்னும் வடிவில் எழுதும்போது r, a, b என்பவற்றின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். R ஆனது A,B என்பவற்றிலிருந்து வேறானதாயும், தூரவுமிருப்பின், (2) இலுள்ள எண்கள் ஒன்றும் பூச்சியமாகா.

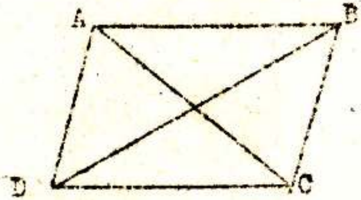
<u>எனவே மூன்று வேறு வேறான புள்ளிகள் R,A,B என்பன ஒரு கோட்டுப் புள்ளிகளாயிருப்பதற்கு பூச்சியமற்ற எண்கள் l, m, n இருப்பின் அவை</u> $\boxed{l\underline{r} + n\underline{a} + m\underline{b} = \underline{0}}$ ஆயும், $\boxed{l + m + n = 0}$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும். <u>மாறுநிலையாக</u>, இத்தொடர்புகளிருப்பின், மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டிலுள்ளனவாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சேத்திர கணிதப் பிரயோகங்கள்

உ.ம். 9 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ஆயின், ABCD ஓர் இணைகரமென நிறுவுக. மேலும் மூலைவிட்டங்கள் இருசமகூறிடுகின்றன என நிறுவுக.

விடை: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (தரவு) அ.து. $\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{d}$ .... (1)



$\therefore \underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b} \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ABCD ஒரு இணைகரமாகும். DB இன் நடுப்புள்ளி $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{b})$, AC இன் நடுப்புள்ளி $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c})$

ஆனால் (1) இன்படி $\underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c}$ ஆகும்.

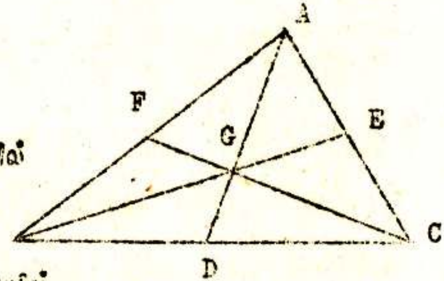
∴ DB, AC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஒன்றுடனொன்று பொருந்தும்.

∴ மூலைவிட்டங்கள் இருசமகூறிடுகின்றன.

உ.ம் (10) முக்கோணியொன்றின் இடையங்கள் முக்கூறிடும் புள்ளியில் சந்திப்பன என நிறுவுக.

விடை AD, BE என்ற இடையங்களை எடுத்துக்கொள்க அவை G இல் சந்திக்கின்றன.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



$\underset{\sim}{d} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$ .... (1)

$\underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c})$ ...... (2)

(1) இலும் (2) இலிருந்து c யை நீக்குகையில்

$$\underset{\sim}{d} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{e} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{a}$$

இரு பக்கமும் 2/3 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டுகையில்,

$$(1/3)(\underset{\sim}{a} + 2\underset{\sim}{d}) = (1/3)(\underset{\sim}{b} + 2\underset{\sim}{e})$$

∴ புள்ளி G ஆனது AD, BE என்பவற்றை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

இதேபோல, $(1/3)(\underset{\sim}{a} + 2\underset{\sim}{d}) = (1/3)(\underset{\sim}{c} + 2\underset{\sim}{f})$ ..(4) எனக்காட்டலாம்.

∴ G ஆனது CF இனையும் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

∴ G ஆனது மூன்று இடையங்களினதும் பொதுப்புள்ளியாயும், அவற்றினை 2 :1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதாயுமுள்ளது.

$\underset{\sim}{d}$, $\underset{\sim}{e}$ என்பவற்றிற்கு (3) இல் (1) இலும், (2) இலும் இருந்து பிரதியிடுகையில் புள்ளி G என்பதின் தானக்காவி,

$$\underset{\sim}{g} = (1/3)(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4241

உ.ம். 11
மெனிலோசின் தேற்றம்

குறுக்கோடியொன்று முக்கோணியொன்றின் பக்கங்கள் BC,CA,AB என்பவற்றை முறையே P,Q,R என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுமாயின் அப்புள்ளிகள் பக்கங்களைப் பிரிக்கும் விகிதங்களின் பெருக்குத்தொகை -1இற்குச் சமனாகும்.

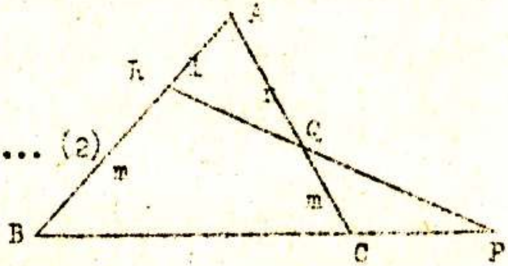
விடை:

Q, CA ஐ m:n என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதெனக்க.

அ.து $\frac{CQ}{AQ} = \frac{m}{n}$

ஆயின், $(m+n)\underset{\sim}{q} = n\underset{\sim}{c} + m\underset{\sim}{a}$ .... (1)

R, AB ஐ l : m என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் வண்ணம் l என்னும் எண்ணைத்தெரிவு செய்வோம்



அ.து $\frac{AR}{BR} = \frac{l}{m}$

ஆயின், $(l+m)\underset{\sim}{r} = l\underset{\sim}{b} + m\underset{\sim}{a}$ .... (2)

(1) - (2) என்பதால் $\underset{\sim}{a}$ ஐ நீக்குகையில்

$(m+n)\underset{\sim}{q} - (l+m)\underset{\sim}{r} = n\underset{\sim}{c} - l\underset{\sim}{b}$ ...(3)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(3) இனை $(n - l)$ ஆல் பிரிக்குகையில் ,

$$\frac{(m+n)\underset{\sim}{q} - (l+m)\underset{\sim}{r}}{n - l} = \frac{n\underset{\sim}{c} - l\underset{\sim}{b}}{n - l} = \underset{\sim}{p} \quad \ldots\ldots (A)$$

எனவே BC, RQ என்பன P இல் வெட்டுகின்றன. இங்கு P ஆனது BC இனை $n : -1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது . அ.து $\frac{BP}{CP} = \frac{-n}{l}$

எனவே, மூன்று விகிதங்களின் பெருக்கத்தொகை,

$$\frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} \cdot \frac{BP}{CP} = \frac{m}{l} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{-n}{l} = -1$$

<u>மாறுநிலை</u> :- மேலுள்ள விகிதங்கள் -1 ஆயின் P, Q, R என்பன ஒரு கோட்டிலுள்ளன. சமன்பாடு (4) இனை

$(n - l)\underset{\sim}{p} - (m + n)\underset{\sim}{q} + (l + m)\underset{\sim}{r} = 0$ என எழுதலாம்

மேலும் , $(n - l) + (-m - n) + (l + m) = 0$ ஆகும்.

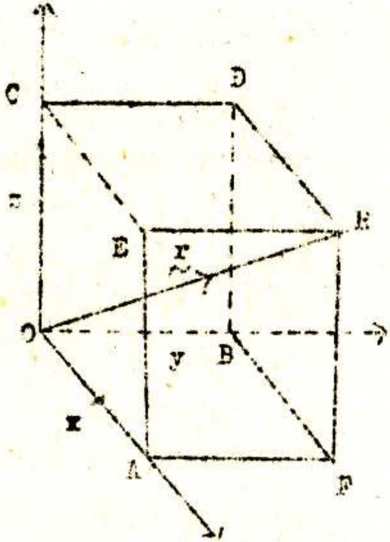
$\therefore$ P, Q, R என்பன ஒரு கோட்டிலுள்ளன.

2.4 <u>காவியொன்றின் துணிப்பு</u> :- எந்த ஒரு காவி $\underset{\sim}{r}$ இனை ஒரு தளத்தில் கிடவாத மூன்று காவிகளின் திசைகட்கு சமாந்திரமாயுள்ள மூன்று காவிகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகக் கோவைப்படுத்தலாம் .

O உற்பத்தியென்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு தளத்தில் கிடையாதனவாயும் O வினூடு செல்லும் மூன்று திசைகளிலுள்ள அலகுக்காவிகள் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ ஆகும்.



$\overrightarrow{OA} = x\underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{OB} = y\underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{OC} = z\underset{\sim}{c}$ என்க.

OA, OB, OC என்பன விளிம்புகளாகவுடைய இணைகரப் பரவளையை பூரணப்படுத்துக. O விற்கு எதிராயுள்ள மூலை R என்க.

ஆயின் $\underset{\sim}{r} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$x\underset{\sim}{a} + y\underset{\sim}{b} + z\underset{\sim}{c}$ என்ற மூன்று காவிகளின் விளையுள் $\underset{\sim}{r}$ எனப்படும். x, y, z என்பன தரப்பட்டுள்ள திசைகளில் $\underset{\sim}{r}$ இன் கூறுகளாகும்.

குறிப்பு :- $\underset{\sim}{r}$ இன் தனிப்பு ஒரு தனியானதாகும்.

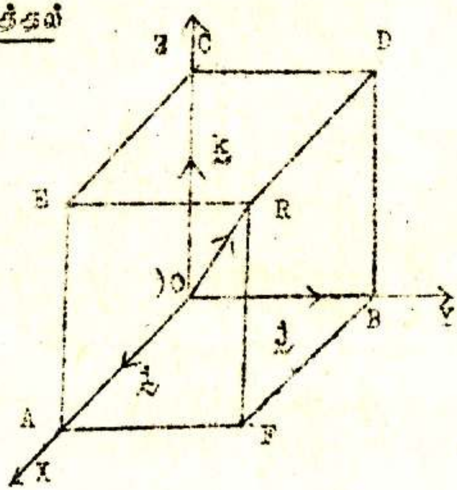
$\overrightarrow{OR}$ உம் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ ஆகியவற்றின் திசைகளும் தரப்படின், ஒரேயொரு இணைகரப்பரவளைமட்டும் தான் OR ஐ விட்டமாகவும் OA, OB, OC என்பவற்றை விளிம்புகளாகவும் அமைக்க முடியும்.

∴ இரு காவிகள் சமமெனின் முறையே எடுக்கப்பட்ட அவற்றின் ஒத்த கூறுகளும் சமமாகும்.

இதன் மாறுநிலையும் உண்மையாகும்.

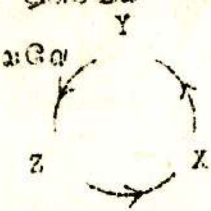
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

2.5 காவியொன்றினை செங்கோணத்திசைகளில் துணித்தல்



காவிகளை ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத்திசைகளில் அமைந்துள்ள மூன்று அச்சுக்களின் வழியே துணித்தல் மிக முக்கியமானதாகும். OX, OY, OZ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. வலக்கைத் தக்கைத் திருகுவிதி உபயோகிக்கப்படும். தக்கைத் திருகானது OX இலிருந்து OY இற்குத் திருப்பப்படின், தக்கையானது OZ வழியே இயங்கும். OY இலிருந்து OZ இற்குத் திருப்புகையில் தக்கையானது OX வழியே இயங்கும். OZ இலிருந்து OX இற்குத் திரும்புகையில் தக்கையானது OY வழியே இயங்கும். $\overrightarrow{OA} = x\underset{\sim}{i}$, $\overrightarrow{OB} = y\underset{\sim}{j}$, $\overrightarrow{OC} = z\underset{\sim}{k}$

x ஆனது நேர் அல்லது எதிராயிருப்பது, OA ஆனது $\underset{\sim}{i}$ இன் திசையில் அல்லது எதிர்த்திசையில் இருப்பதற்கு ஏற்பவாகும். இது போலவே y, z என்பனவுமிருப்பன.



எனவே தரப்பட்ட காவியானது $\overrightarrow{OR} = \underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$

$$\boxed{\overrightarrow{OR} = \underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

காவிக்கூறுகள் $x\underset{\sim}{i}, y\underset{\sim}{j}, z\underset{\sim}{k}$ என்பன $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ திசைகளில் $\underset{\sim}{r}$ இன் நிமிர் கோண எறியங்களாகும். இத்திசைகளில் x, y, z என்பன r இன் செங்கோண கூறுகளாகும். x, y, z என்பன $\underset{\sim}{r}$ இன் குறிச்சல்கள் அல்லது குறித்த பகுதிகள் என்று பொதுவாகக் கூறப்படும்.

2.6 <u>திசைக்கோசைன்கள்</u>:- OR ஆனது OX, OY, OZ திசைகளுடன் அமைக்கும் கோணங்கள் α, β, γ ஆயின் கோசை α, கோசை β, கோசை γ என்பன $\overrightarrow{OR}$ இன் திசைக்கோசைன்கள் எனப்படும். அவற்றினை முறையே l, m, n என்பவற்றால் குறிக்கப்படும்.

$\therefore\ x = r$ கோசை $\alpha = rl$, $y = r$ கோசை $\beta = rm$, $z = r$ கோசை $\gamma = rn$.

பைதாகரசின் தேற்றப்படி,

$$OR^2 = OA^2 + AR^2 = OA^2 + AP^2 + PR^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$$

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 + z^2} \implies r^2 = r^2l^2 + r^2m^2 + r^2n^2$$

$\therefore\ r^2$ ஆல் வகுக்கையில் $\boxed{1 = l^2 + m^2 + n^2}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அ.கு. $\boxed{\text{கோசை}^2\alpha + \text{கோசை}^2\beta + \text{கோசை}^2\gamma = 1}$

∴ திசைக்கோசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை ஒன்றாகும்

2.7 பலகாவிகளின் கூட்டுத்தொகை

பலகாவிகள் $\underset{\sim}{r}_i$ (i = 1,2,3 ....) என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகையை

$$\sum \underset{\sim}{r}_i = \left(\sum x_i\right)\underset{\sim}{i} + \left(\sum y_i\right)\underset{\sim}{j} + \left(\sum z_i\right)\underset{\sim}{k}$$

என்ற வடிவில் கோவைப்படுத்தலாம். எனவே $\underset{\sim}{i}$ என்னும் திசையில் $\sum \underset{\sim}{r}_i$ துணிசல் $\sum x_i$ ஆகும். $\underset{\sim}{i}$ இன் திசை எதேச்சையாகத் தெரிவு செய்யப்படலாமாகையால் முதலிலே, பின்வருமாறு கூறலாம்.

எந்தவொரு திசையிலும் காவிகளின் கூட்டுத்தொகையின் துணிசல், அத்திசையில் அவற்றின் தனித்தனி துணிசல்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

YOZ என்னும் தளத்தில் $\underset{\sim}{r}$ இன் நிமிர்கோண எறியம் $\overrightarrow{OD}$

$$\overrightarrow{OD} = y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$$

∴ இத்தளத்தில் $\sum \underset{\sim}{r}_i$ இன் எறியம் $\left(\sum y_i\right)\underset{\sim}{j} + \left(\sum z_i\right)\underset{\sim}{k}$

$$= \sum \left(y_i\underset{\sim}{j} + z_i\underset{\sim}{k}\right) \text{ ஆகும்.}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ என்னும் மூவகை (triad) யின் திசையமைவினை (Orientation) எதேச்சையாகத் தெரிவு செய்யலாம். முடிபினை பின்வருமாறு கூறலாம்.

எந்த ஒரு தளத்திலும் காவிகளின் கூட்டுத்தொகையின் எறியமானது, அத்தளத்தில் தனித்தனிக் காவிகளின் எறியத்தின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

R_1, R_2 என்பவற்றின் தானக்காவிகள் $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ Say ஆகும். ஆயின்

$$\boxed{R_1R_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

மேலும் A (a_1, a_2, a_3) B (b_1, b_2, b_3) என்னும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை $m:n$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி R இன் தானக்காவியானது,

$$\boxed{\mathbf{r} = \frac{na_1 + mb_1}{n+m}, \frac{na_2 + mb_2}{n+m}, \frac{na_3 + mb_3}{n+m}}$$

உ.ம். (12) $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ என்பன தரப்பட்டிருப்பின் (i) $\mathbf{F}_3$, (ii) $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$, (iii) $2\mathbf{F}_1 - 3\mathbf{F}_2 - 5\mathbf{F}_3$ என்பவற்றின் பருமன்களைக் காண்க.

விடை.

(i) $|\mathbf{F}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

(ii) $|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3| = |(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})| = |4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}|$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore \left| F_1 + F_2 + F_3 \right| = \left| 4i - 4j \right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

(iii) $2F_1 - 3F_2 - 5F_3 = 2(3i - 2j + k) - 3(2i - 4j - 3k) - 5(-i + 2j + 2k)$

$$= 5i - 2j + k$$

$$\left| 2F_1 - 3F_2 - 5F_3 \right| = \left| 5i - 2j + k \right| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

உ. ம் 13

$a = 2i - j + k,\ b = i + 3j - 2k,\ c = -2i + j - 3k,\ d = 3i + 2j + 5k$

ஆயின் $d = m_1 a + m_2 b + m_3 c$ ஆக இருப்பதற்கு m_1, m_2, m_3 என்பவற்றைக் காண்க.

விடை

$$3i + 2j + 5k = m_1(2i - j + k) + m_2(i + 3j - 2k) + m_3(-2i + j - 3k)$$

$$= (2m_1 + m_2 - 2m_3)\,i + (-m_1 + 3m_2 + m_3)\,j + (m_1 - 2m_2 - 3m_3)\,k$$

i, j, k என்பன ஒரு தளத்தில் கிடவாதவையாகையால் .

$2m_1 + m_2 - 2m_3 = 3$; $-m_1 + 3m_2 + m_3 = 2$; $m_1 - 2m_2 - 3m_3 = 5$.

தீர்க்கையில், $m_1 = -2,\ m_2 = 1,\ m_3 = -3$

$$\therefore d = -2a + b - 3c$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>குறிப்பு</u> :- காவி d ஆனது a, b, c என்னும் காவிகளில் ஏகபரிமாணமுறையாகச் சார்ந்தது. (linearly dependent) எனப்படும். பொதுவாக பூச்சியத்திற்குச் சமனில்லாத m_1, m_2, m_3 .... என்ற தொடை எண்களைக் காண முடியுமாயின் a, b, c....... என்ற காவிகள் ஏகபரிமாண முறையாச் சார்ந்தன எனப்படும்.

ஆயின் $m_1a + m_2b + m_3c + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$

அல்லாவிட்டால் ஏகபரிமாண முறையாச் சாராதன எனப்படும்.

<u>உ.ம் 14</u>

$F_1 = 2i + 4j - 5k$, $F_2 = i + 2j + 3k$ என்ற விளையுட் காவிக்குச் சமாந்தரமாயுள்ள அலகுக்காவியைக் காண்க.

<u>விடை.</u>

$$\text{விளையுள் } R = F_1 + F_2 = (2i + 4j - 5k) + (i + 2j + 3k)$$
$$= 3i + 6j - 2k$$

$$R = |R| = |3i + 6j - 2k| = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = \underline{\underline{7}}$$

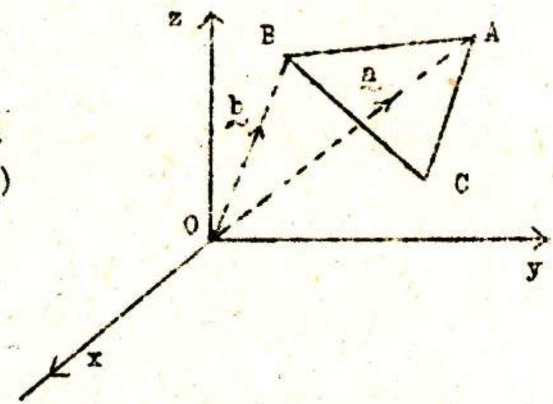
$\therefore$ R இற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள அலகுக்காவி $= \dfrac{R}{R} \quad \dfrac{3i + 6j - 2k}{7}$

$$= \underline{\underline{(3i + 6j - 2k)/7}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>உ.ம் 15</u> முக்கோணியொன்றின் உச்சிகளாவன A (2,-1,-3), B(4, 2, 3) C (6, 3,4) ஆகும். காவிகள் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ என்பன முறையே (2,3,6),(4,4,7) எனவும், நீளங்கள் 7, 9 எனவும் அவற்றின் திசைக்கோசைன்கள் (2/7,3/7,6/7), (4/9,4/9, 7/9) எனவும் காட்டுக.

BC என்பதை $\pm$ 3 :2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் P, Q இன் தானக்காவிகள் முறையே (26,13,18) /5 உம் (10,5,6) உம் ஆகும். AQ என்ற காவியின் திசைகோசைன்கள் 8,6,9 என்பவற்றுக்கு விகிதமுடையன. என்றும் காட்டுக.



<u>விடை</u> :-

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$$

$$= (4\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) - (2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k})$$

$$= 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k} = (2,3,6)$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = |2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}|$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c} = -(2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}) + (6\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k})$$

$$= 4\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} + 7\underset{\sim}{k} = (4, 4, 7)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|4\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} + 7\underset{\sim}{k}\right| = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = \underline{\underline{9}}$$

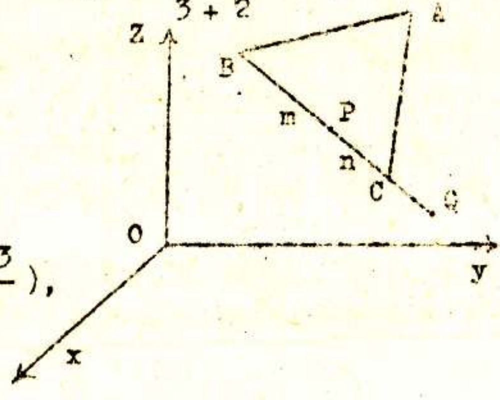
$\overrightarrow{AB}$ இன் திசைக்கோசைன்கள் $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ //

$\overrightarrow{AC}$ இன் திசைக்கோசைன்கள் $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$ //

$$\underset{\sim}{b} = 4\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k} \quad , \quad \underset{\sim}{c} = 6\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{p} = \frac{n\underset{\sim}{b} + m\underset{\sim}{c}}{n + m} = \left(\frac{nb_1 + mc_1}{n + m}\right), \left(\frac{nb_2 + mc_2}{n + m}\right), \left(\frac{nb_3 + mc_3}{n + m}\right)$$

$$= \left(\frac{2 \times 4 + 3 \times 6}{3 + 2}\right), \left(\frac{2 \times 2 + 3 \times 3}{3 + 2}\right), \left(\frac{2 \times 3 + 3 \times 4}{3 + 2}\right)$$



$$= (26, 13, 18)/5$$

$$\underset{\sim}{p} = \underline{\underline{\frac{26}{5}\underset{\sim}{i} + \frac{13}{5}\underset{\sim}{j} + \frac{18}{5}\underset{\sim}{k}}}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \underset{\sim}{q} = \left(\frac{2 \times 4 - 3 \times 6}{2 - 3}\right), \left(\frac{2 \times 2 - 3 \times 3}{2 - 3}\right), \frac{2 \times 3 - 3 \times 4}{2 - 3}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$= (10,5,6) \qquad \therefore \quad \underset{\sim}{q} = 10\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{q} = -(2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}) + (10\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k})$$

$$= 8\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + 9\underset{\sim}{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AQ}\right| = \left|8\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + 9\underset{\sim}{k}\right| = \sqrt{64 + 36 + 81} = \sqrt{181}$$

$\overrightarrow{AQ}$ வின் திசைக்கோசைன்கள் $= \dfrac{8}{\sqrt{181}}, \dfrac{6}{\sqrt{181}}, \dfrac{9}{\sqrt{181}}$

$$\therefore \quad l : m : n = 8 : 6 : 9$$

பயிற்சி 2

1. முக்கோணியொன்றின் பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F என்பனவாகும். $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ எனவும், $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ என்ற காவிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் எனவும், இடையங்கள் முக்கூறிடும் பொதுப்புள்ளி ஒன்றற்கு எனவும் நிறுவுக.

2. நாற்பக்கல் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் இருசமகூறிடுமாயின், அவ்வுருவம் ஓர் இணைகரமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. ஏதாய நாற்பக்கலின் எதிர்விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன எனக்காட்டுக.

4. ABCD என்னும் இணைகரத்தில், P, Q என்பன முறையே AB, BC என்னும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும். AC, DP என்பன முக்கூறிடும் பொதுப்புள்ளி ஒன்றில் சந்திக்கின்றனவெனக்காட்டுக. அதுபோல AC, DQ என்பனவுமெனக்காட்டுக.

5. D, E, F என்னும் புள்ளிகள் BC, CA, AB என்னும் முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களை முறையே 1 : 4, 3 : 2, 3 : 7 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ என்னும் காவிகளின் கூட்டுத்தொகை $\overrightarrow{CK}$ என்ற காவிக்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக. இங்கு k, AB ஐ 1:3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

6. A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ என்பனவாகும். இங்கு $\underset{\sim}{a} = a_1\underset{\sim}{i} + a_2\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{b} = b_1\underset{\sim}{i} + b_2\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{c} = c_1\underset{\sim}{i} + c_2\underset{\sim}{j}$ AB, BC, CA என்பவற்றின் நீளங்களைக் காண்க.

<u>விடை</u> :-

$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$; $BC^2 = (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2$;

$CA^2 = (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. $\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{b} = 3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{c} = -2\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$ ஆயின் (i) $(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$, (ii) $2\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b} + 3\underset{\sim}{c}$ (iii) $\underset{\sim}{a} + 2\underset{\sim}{b} - 7\underset{\sim}{c}$ (iv) $\hat{\underset{\sim}{a}}$, $\hat{\underset{\sim}{b}}$, $\hat{\underset{\sim}{c}}$ என்ற அலகுக்காவிகள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

<u>விடை</u> (i) $3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$, (ii) $-5\underset{\sim}{i} + 25\underset{\sim}{j}$, (iii) $22\underset{\sim}{i} - 40\underset{\sim}{j}$

(iv) $\dfrac{2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}}{\sqrt{13}}$, $\dfrac{3\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}}{5}$, $\dfrac{-2\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}}{\sqrt{29}}$

8. முக்கோணியொன்றின் உச்சிகள் A (2,4,−1), B (4,5,1), C (3,6, −3) ஆகும். முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீளங்களைக் காண்க. முக்கோணியானது செங்கோணத்தையுடையது என்றும் காட்டுக. AB இன் திசைக் கோசைன்களைத் தருக.

<u>விடை</u> (3 ,3 , $\sqrt{18}$) ; (2/3 ,1/3 ,2/3)

****

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 3

பொறியியற் பிரயோகங்கள், மையப்போலிகள் (CENTROIDS)

3.1 தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் மையப்போலி அல்லது இடைமையம்

உற்பத்தி O தொடர்பாக n புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{r_1}, \underset{\sim}{r_2}, \underset{\sim}{r_3}, \ldots + \underset{\sim}{r_n}$ ஆயின், தானக்காவி $\frac{1}{n}(\underset{\sim}{r_1} + \underset{\sim}{r_2} + \underset{\sim}{r_3} + \ldots + \underset{\sim}{r_n})$ உடைய புள்ளி தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகளின் மையப்போலி அல்லது இடைமையம் எனப்படும்.

இது பின்வரும் பொதுவரைவிலக்கணத்தின் ஒரு குறிப்பான வகையாகும். $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்னும் n புள்ளிகள் $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ என்ற n உண்மை எண்களுடன் சேர்ந்திருக்கையில், அவற்றின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாயில்லாதிருக்கையில், புள்ளி G இன் தானக்காவி

$$\overrightarrow{OG} = \frac{p_1\underset{\sim}{a_1} + p_2\underset{\sim}{a_2} + p_3\underset{\sim}{a_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots p_n\underset{\sim}{a_n}}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n}$$

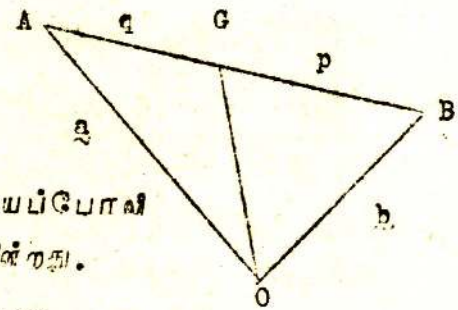
என்பது $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ என்னும் எண்களுடன் முறையே சேர்ந்துள்ள தரப்பட்ட புள்ளிகளின் மையப்போலி எனப்படும்.

உ.ம் 16

p, q என்னும் எண்களுடன் சேர்ந்துள்ள A, B என்னும் எண்களின் மையப்போலி AB என்னும் கோட்டினை $q : p$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\overrightarrow{OG} = \frac{p\underset{\sim}{a} + q\underset{\sim}{b}}{p + q}$$ ஆகும்.

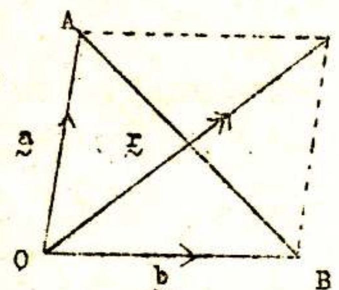


இது கூற்றினை நிறுவுகின்றது .

உ.ம் 17

முக்கோணியொன்றின் உச்சிகளின் மையப்போலியானது ஒவ்வொரு இடையத்தையும் முக்கூறிடுகின்றது.

உற்பத்தி O வினை ஒரு உச்சியாயும், A, B என்பன மறு உச்சிகளாயும் கொள்க. வரைவிலக்கணப்படி மையப்போலியானது $\frac{1}{3}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$ ஆகும் (O உற்பத்தியாகையால்)



இணைகரம் OAPB இனைப் பூர்த்தி செய்கையில்,

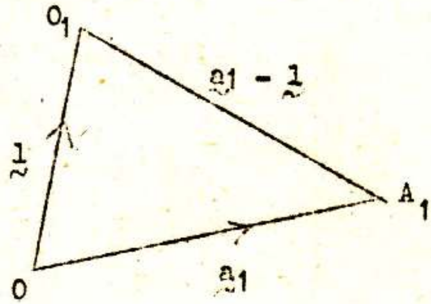
$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$ ஆகும்.

∴ மையப்போலியின் தானம் $\frac{1}{3}\underset{\sim}{r}$

$\frac{1}{3}\underset{\sim}{r}$ ஆனது $\overrightarrow{OP}$ வழியே மூன்றில் ஒன்றாகும் அல்லது இடையத்தின் வழியே மூன்றில் இரண்டாகும். உற்பத்தியாக, வேறு எந்த உச்சியையும் எடுத்திருக்குமாகையால், எல்லா இடையங்களும் உச்சியிலிருந்து இடையத்தின் வழியே மூன்றில் இரண்டு பங்கு தூரத்தில் சந்திக்கின்றன.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3.2 <u>தேற்றம்:</u> தரப்பட்ட புள்ளிகளின் மையப்போலியானது காவிகளின் உற்பத்தியைச் சாராதது .



O உற்பத்தியாகும். O தொடர்பாக O' என்னும் புள்ளியின் தானக்காவி l எனக. O^1 என்னும் புள்ளியை உற்பத்தியாகக் கொள்ளின், $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே

$(\underset{\sim}{a}_1 - \underset{\sim}{l}), (\underset{\sim}{a}_2 - \underset{\sim}{l}), (\underset{\sim}{a}_3 - \underset{\sim}{l}), \ldots\ldots\ldots (\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{l})$ ஆகும். மையப் போலி G' இன் தானக்காவி,

$$\overrightarrow{OG^1} = \frac{p_1(\underset{\sim}{a}_1 - \underset{\sim}{l}) + p_2(\underset{\sim}{a}_2 - \underset{\sim}{l}) + p_3(\underset{\sim}{a}_3 - \underset{\sim}{l}) + \ldots\ldots p_n(\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{l})}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n}$$

$$= \frac{p_1\underset{\sim}{a}_1 + p_2\underset{\sim}{a}_2 + p_3\underset{\sim}{a}_3 + \ldots\ldots p_n\underset{\sim}{a}_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n} - \frac{(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n)\underset{\sim}{l}}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots + p_n}$$

$$= \overrightarrow{OG} - \underset{\sim}{l} = \overrightarrow{O^1G}$$

$\therefore G^1 \equiv G$ எனவே G, G^1 என்பன ஒன்றுடனொன்று பொருந்துகின்றன. ஆகவே மையப்போலியானது, காவிகளின் உற்பத்தியைச்சாராததாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3.3 <u>தேற்றம்</u>: $p_1, p_2, p_3 \ldots$ என்னும் எண்களைச் சேர்ந்த $A_1, A_2, A_3 \ldots$ என்னும் புள்ளிகளின் மையப்போலி G_1 ஆயும், $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots$ என்னும் எண்களைச் சேர்ந்த $B_1, B_2, B_3 \ldots$ என்னும் புள்ளிகளின் மையப்போலி G_2 ஆயுமிருப்பின், எல்லாப் புள்ளிகளின் மையப்போலியானது, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ என்னும் எண்களையும் $q_1, q_2, q_3 \ldots$ என்னும் எண்களையும் சேர்ந்த இரு புள்ளிகள் G_1, G_2 இனது மையப்போலியாகும்.

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{p_1\underset{\sim}{a}_1 + p_2\underset{\sim}{a}_2 + p_3\underset{\sim}{a}_3 + \ldots\ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots} = \frac{\sum p\underset{\sim}{a}}{\sum p}$$

இதுபோல்,

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{q_1\underset{\sim}{b}_1 + q_2\underset{\sim}{b}_2 + q_3\underset{\sim}{b}_3 + \ldots\ldots}{q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots} = \frac{\sum q\underset{\sim}{b}}{\sum q}$$

எனவே $\sum p$, $\sum q$ என்னும் எண்களுடன் முறையே சேர்ந்துள்ள G_1, G_2 இன் மையப்போலி G இன் தானக்காவி,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{(\sum p)\overrightarrow{OG_1} + (\sum q)\overrightarrow{OG_2}}{\sum p + \sum q} = \frac{\sum p\underset{\sim}{a} + \sum q\underset{\sim}{b}}{\sum p + \sum q}$$

ஆகவே G ஆனது சேர்ந்த தொகுதிப்புள்ளிகளின் மையப் போலியாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3.4 <u>திணிவு மையம்</u> :- ஒரு தொகுதித் துணிக்கைகளின் திணிவுகள் $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ என்பன முறையே $\underset{\sim}{r}_1, \underset{\sim}{r}_2, \underset{\sim}{r}_3, \ldots\ldots \underset{\sim}{r}_n$ என்னும் புள்ளிகளில் இருப்பின், அவற்றின் திணிவு மையம் $\underset{\sim}{r}$ ஆனது, $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ என்பவற்றுடன் சேர்ந்துள்ள இப்புள்ளிகளின் மையப்போலியாகும்.

$$\text{அ.து } \bar{\underset{\sim}{r}} = \frac{m_1 \underset{\sim}{r}_1 + m_2 \underset{\sim}{r}_2 + m_3 \underset{\sim}{r}_3 + \ldots + m_n \underset{\sim}{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m\underset{\sim}{r}}{\sum m}$$

ஒரு தொகை அச்சுக்களை, அலகுக்காவிகள் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ என்பவற்றுக்குச் சமாந்திரமாக எடுக்க. (அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயுள்ள அச்சுக்களாயிருக்க வேண்டியதில்லை)

அப்பொழுது, $\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{a} + y\underset{\sim}{b} + z\underset{\sim}{c}$; $\bar{\underset{\sim}{r}} = \bar{x}\underset{\sim}{a} + \bar{y}\underset{\sim}{b} + \bar{z}\underset{\sim}{c}$

$$\bar{\underset{\sim}{r}} = \frac{\sum m\underset{\sim}{r}}{\sum m} = \frac{\sum m(x\underset{\sim}{a} + y\underset{\sim}{b} + z\underset{\sim}{c})}{\sum m} = \bar{x}\underset{\sim}{a} + \bar{y}\underset{\sim}{b} + \bar{z}\underset{\sim}{c}$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \frac{\sum mx}{\sum m} ; \bar{y} = \frac{\sum my}{\sum m} ; \bar{z} = \frac{\sum mz}{\sum m}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5.5 சடப்பொருளின் தொடர்ச்சியான பரம்பலின் திணிவு மையம்

(The centre of mass of a continuous distribution of matter)

பரம்பல்பரப்பு அல்லது கனவளவாயினும் வரைவிலக்கணம் பின்வருமாறு

பரம்பலானது பெரிய எண்ணிக்கை n உடைய சிறு மூலகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. n புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்க. ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு மூலகத்துடன் உள்ளன. இவற்றுடன் மூலகங்களின் திணிவுகளுக்கு விகிதமான எண்கள் சேர்ந்துள்ளன. சேர்ந்துள்ள எண்களுடன் கூடிய தொகுதி n புள்ளிகளின் மையப்போலி ஆகும். இப்பொழுது n ஆனது முடிவிலியை (∞) அணுக ஒவ்வொரு மூலகத்திணிவும் ஒவ்வொரு துணிக்கையாக ஒருங்குகின்றது. எனலாம். G இன் எல்லை நிலையே தொடர்ச்சியான பரம்பலின் திணிவு மையம் எனப்படும்.

பரம்பலின் அடர்த்தி சீரானதாயின் திணிவுமையமானது, பரம்பல் சேர்ந்துள்ள கேத்திரகணித வடிவத்தின் மையப்போலியுடன் பொருந்தும்.

உ.ம் 18

உற்பத்தி O தொடர்பாக உள்ள தானக்காவிகள் $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3 \dots \underline{r}_n$ உடைய புள்ளிகளில் முறையே $m_1, m_2, m_3, \dots m_n$ திணிவுகளையுடைய n துணிக்கைகளின் திணிவு மையத்தை வரைவிலக்கணப்படுத்துக. திணிவு மையமானது உற்பத்தியின் தெரிவில் சாராதது எனக்காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடை

திணிவு மையம் $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2 + m_3\underset{\sim}{r}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots m_n\underset{\sim}{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots m_n}$

O^1 என்னும் புள்ளி O தொடர்பாக $\underset{\sim}{1}$ தானக்காவியுடை யதெனக. O^1 ஆனது உற்பத்தியாகக் கொள்ளின் தானக்காவிகளானவை

$(\underset{\sim}{r}_1 - \underset{\sim}{1}), (\underset{\sim}{r}_2 - \underset{\sim}{1}), (\underset{\sim}{r}_3 - \underset{\sim}{1})\ldots\ldots\ldots(\underset{\sim}{r}_n - \underset{\sim}{1})$ புவியீர்ப்பு மையம் G^1 (என்க)

$$\overrightarrow{O^1G^1} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots m_n}\; m_1(\underset{\sim}{r}_1 - \underset{\sim}{1}) + m_2(\underset{\sim}{r}_2 - \underset{\sim}{1}) + \ldots\ldots \ldots\ldots + m_n(\underset{\sim}{r}_n - \underset{\sim}{1})$$

$$= \frac{m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2 + m_3\underset{\sim}{r}_3 + \ldots\ldots m_n\underset{\sim}{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots m_n} - \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n}\,\underset{\sim}{1}$$

$$= \overrightarrow{OG} - \underset{\sim}{1} = \overrightarrow{O^1G}$$

∴ புள்ளிகள் G, G^1 என்பன ஒன்றுடனொன்று பொருந்தும். மேலும் திணிவு மையமானது காவிகளின் உற்பத்தியைச் சாராதது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் 19

$\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ என்னும் புள்ளிகளில் முறையே 4, 3, 2, 3 அலகுத் திணிவுத் துணிக்கைகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் திணிவு மையத்தைக் காண்க.

ஒவ்வொரு திணிவும், உற்பத்தியிலிருந்து அதற்குரிய தூரத்திற்கு விகிதமாயுள்ள விசையினால் உற்பத்தியை நோக்கித் தாக்கப்படுகின்றனவாயின் அவற்றின் திணிவு மையத்தின் ஆரம்ப ஆர்முடுகலைக் காண்க.

விடை

திணிவுமையம் $\mathbf{r} = \dfrac{4(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) + 2(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 3(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{(4 + 3 + 2 + 3)}$

$$= \frac{20\mathbf{i} + 12\mathbf{j}}{12} = \frac{5}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

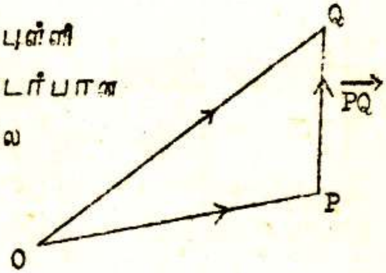
விளையுள் விசை $= -m(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}),\ m > 0$
$= -m(7\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

∴ திணிவுமையத்தின் ஆரம்ப ஆர்முடுகலின் திசை $= \underline{-7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}$

3.6 தொடர்பு வேகம் (Relative Velocity)

தொடர்பு வேகத்தின் எண்ணக்கரு அடிப்படையில் எளிமையானது. P, Q என்னுமிரு புள்ளிகளும் இயங்குவன என்க. P தொடர்பான Q இன் தானநிலை

$\overrightarrow{PQ}$ என்றும் காவியாகும். O என்றும் மூன்றும் புள்ளி தொடர்பாக Q வின் தானநிலையானது P தொடர்பான Q இன் நிலையினதும் O தொடர்பான P இன் நிலையினதும் காவிக்கூட்டுத்தொகையாகும்.

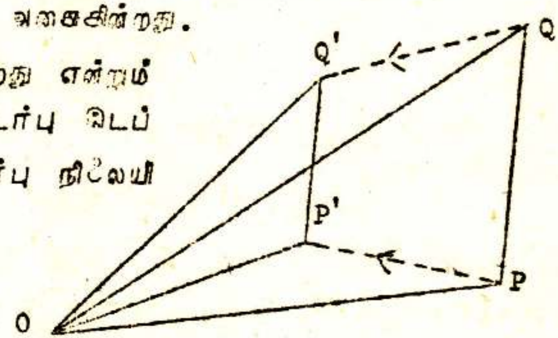


அ.து. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$

தொடர்பு இடப்பெயர்ச்சி (RELATIVE DISPLACEMENT)

எந்தவொரு ஆயிடையிலும் P தொடர்பான Q இன் தொடர்பு இடப்பெயர்ச்சியானது அவ்வாயிடையில் ஏற்பட்டுள்ள தொடர்பு நிலைமாற்றமாகும்.

t நேரத்தின் பின் P ஆனது P^1 இற்கு அசைகின்றது. என்றும், Q ஆனது Q^1 இற்கு அசைகின்றது என்றும் கொள்க. t நேரத்தில் உள்ள தொடர்பு இடப்பெயர்ச்சியானது, அவற்றின் தொடர்பு நிலையிலுள்ள மாற்றமாகும்.



$\overrightarrow{P^1Q^1} - \overrightarrow{PQ}$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>தொடர்பு வேகம்</u> P தொடர்பாக Q வின் தொடர்புவேகமானது,

P தொடர்பாக அதன் தானநிலைமாற்று விகிதமாகும். ஆகவே அது சீராயிருப்பின் ஒவ்வொரு செக்கனுக்கும் அதன் தொடர்பு இடப்பெயர்ச்சி விகிதமாகும். O என்னும் நிலையான புள்ளியை எடுக்க .

வேகங்கள் எல்லாம் சீராயிருப்பின், ஒரு செக்கனில் P ஆனது P' இற்கு அசைந்தும், Q ஆனது Q' இற்கு அசைந்தும் கொள்ளும்.

தொடர்பு வேகமானது ஒரு அலகு நேரத்தில் தானநிலைமாற்று விகிதமாகும். அ.து.

$$\overrightarrow{P'Q'} - \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{OQ^1} - \overrightarrow{OP^1}) - (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$$
$$= (\overrightarrow{OQ^1} - \overrightarrow{OQ}) - (\overrightarrow{OP^1} - \overrightarrow{OP})$$
$$= \overrightarrow{QQ^1} - \overrightarrow{PP^1} = \underline{v' - u}$$

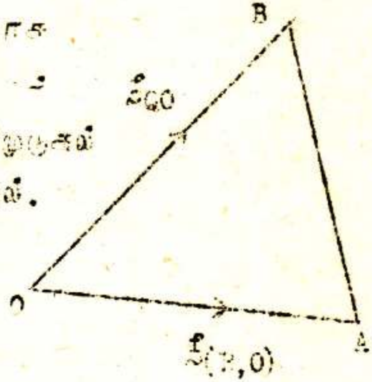
இங்கு $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{u}$ என்பன முறையே O, P என்பவற்றின் O தொடர்பான வேகங்களாகும்.

எனவே P தொடர்பான Q வின் தொடர்பு வேகமானது O என்னும் புள்ளி தொடர்பாக, P இனதும் Q இனதும் வேகங்களின் காவி வித்தியாசமாகும்.

3.7 <u>தொடர்பு ஆர்முடுகல்</u> (RELATIVE ACCELERATION) எக்கணநேரத்திலும் P இனதும் Q இனதும் ஆர்முடுகல்கள் OA, OB என்பவற்றால் முறையே குறிப்பிட

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

படுமாயின், மற்றொன்று தொடர்பாக ஒன்றின் தொடர்பு ஆர்முடுகலானது $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ என்பவற்றின் காவி வித்தியாசமாகும். எனவே Q இன் ஆர்முடுகல் தொடர்பாக



P இன் ஆர்முடுகல் = O தொடர்பாக P இன் ஆர்முடுகல்

— O தொடர்பாக Q வின் ஆர்முடுகல்.

$$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\boxed{\underset{\sim}{f}_{P,Q} = \underset{\sim}{f}_{P,O} - \underset{\sim}{f}_{Q,O}}$$

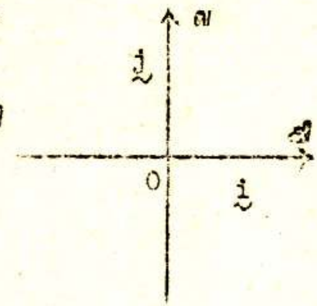
தொடர்புவேகம் காண்பதுபோல, தொடர்பு ஆர்முடுகலானது OAB என்னும் முக்கோணியை வரைந்து காணலாம்.

இரு துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல்கள் பருமனிலும் திசையிலும் சமமாயின், அவற்றின் தொடர்பு ஆர்முடுகல் பூச்சியமாகும். எனவே அவற்றின் தொடர்பு இயக்கமானது, அவை ஒன்றிற்கொன்று ஆர்முடுகல் இல்லாதது போல் கருதப்படும்.

உ.ம் 20

மனிதனொருவன் மேற்கு நோக்கி மணித்தியாலத்திற்கு 3 கிலோமீற்றர் தூரம் நடப்பாராயின், காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவது போலத் தோன்றும் அவன் தனது கதியை மணித்தியாலத்திற்

4 கிலோமீற்றர்களாக அதிகரிப்பதாயின், காற்றானது வடமேற்கிலிருந்து வீசுவது போலத்தோன்றும். காற்றின் வேகம் என்ன?



<u>விடை</u>

$\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ என்பன முறையே கிழக்கு வடக்கு நோக்கியிருக்கும், 1 கி. மீ. ம$^{-1}$ என்னும் வேகங்களாகும் என்க. மனிதனின் ஆரம்பவேகம் $-3\underset{\sim}{i}$ காற்றின்வேகம் $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$ என்க.

மனிதன் தொடர்பாக காற்றின் வேகம் = புவி தொடர்பாக காற்றின் வேகம் - புவி தொடர்பாக மனிதனின் வேகம்.

$$= x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} - (-3\underset{\sim}{i}) = (x+3)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$$

ஆனால், இது வடக்கிலிருந்து வீசுவதால், இது $-\underset{\sim}{j}$ இற்குச் சமாந்தரமாகும்.

$\therefore \; (x+3)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} = -m\underset{\sim}{j}$ இங்கு m ஒரு ஒருமை.

அ. து $x + 3 = 0, \; x = -3, \quad y = -m$

மனிதன் தனது கதியைக் கூட்டுகையில், மனிதன் தொடர்பாகக் காற்றின் வேகம்,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} - (-4\underset{\sim}{i}) = (x+4)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$$

ஆனல் இது வடமேற்கிலுள்ளது. ∴ இது $\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ இற்குச் சமாந்தரமானது

$$\therefore \quad (x+4)\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} = n(\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j})$$

$$\therefore \quad x + 4 = n \; ; \qquad y = -n$$

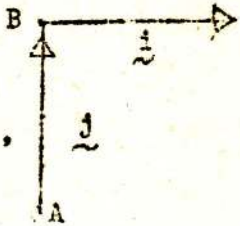
$$x + 4 = -y, \quad \text{ஆனல் } x = -3$$

∴ $\underline{y = -1}$ ∴ காற்றின் வேகம் $= -3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$

அ.து $\sqrt{10}$ கி.மீ.ம$^{-1}$ என்னும் வேகத்தை வ.தான்$^{-1}$ 3.கி. உடையது.

<u>உ.ம் 21</u>

இரு துணிக்கைகள், A, B என்பன ஒரு கணத்தில் 10 மீ. தூரத்திலுள்ளன. ஒன்று 5மீ செக்$^{-1}$ வேகத்துடன் B யை நோக்கியும், மற்றையது 4மீ செக்$^{-1}$ வேகத்துடன் AB இற்குச் செங்குத்தாயும் நேராக செல்கின்றன. அவற்றின் தொடர்பு வேகத்தையும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கிட்டிய தூரத்தையும் காண்க.



<u>விடை</u>

$\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$ என்பன முறையே AB இற்குச் செங்குத்தாயும், AB இற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள அலகு வேகிகளாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

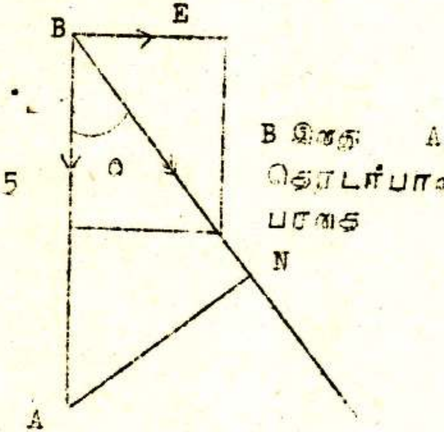
$$\underset{\sim}{V}_{B,A} = \underset{\sim}{V}_{B,E} - \underset{\sim}{V}_{A,E} = 4\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j} = \sqrt{41} \text{ மீ செக்}^{-1}$$

என்னும் வேகத்தை AB உடன் தான்$^{-1}$ (4/5) கோணத்திலுள்ளது. கிட்டிய தூரம் AN ...

$= 10$ சைன் θ

$= 10\dfrac{4}{\sqrt{41}} = \dfrac{40}{\sqrt{41}}$ மீ.

E,A 5



பயிற்சி 3

1. மனிதனொருவன் கிழக்கு நோக்கி 8 மைல்/மணி வேகத்தில் செல்கையில் காற்றானது வடக்கிலிருந்து வீசுவது போல் காண்கிறான். அவன் தனது கதியை இரட்டிக்கையில் காற்றானது வடகிழக்கிலிருந்து வீசுவது போல் காண்கிறான். காற்றின் வேகத்தைக் காண்க.

(விடை : வ. மே. இருந்து $8\sqrt{2}$ மைல்/ம)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

2. O விலிருந்து, $36\,\underline{i} + 15\,\underline{j}$ மீ. செக்.$^{-1}$ எனும் தொடக்க வேகத்துடன் துணிக்கையொன்று எறியப்பட்டுள்ளது. இங்கு $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்பன கிடை, நிலைக்குத்துத் திசைகளிலுள்ள அலகுக்காவிகள். துணிக்கையானது O விலிருந்து $18\,\underline{i} + 6.25\,\underline{j}$ மீட்டர்கள் உள்ள புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

($g = 10$ மீ. செக்$^{-2}$ என எடுக்க)

3. நீர் தொடர்பாக வள்ளத்தின் வேகம் $5\,\underline{i} + 6\underline{j}$ புமி தொடர்பாக நீரின் வேகம் $(\underline{i} - 4\underline{j})$ $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்பன 1 கி.மீ ம$^{-1}$ வேகத்துடன் முறையே கிழக்கு வடக்குத் திசைகளில் குறிப்பிடப்படின், புமி தொடர்பாக வள்ளத்தின் வேகம் என்ன?

(விடை: வட. தான்$^{-1}$ 3கி. இல் $2\sqrt{10}$ கிமீ/மணி.)

4. தூரங்கள் கடல் மைல்களிலும், கதிகள் நொட்டுகளிலும் (Knots) அளக்கப்படுகின்றன. மு.ப. 11 மணிக்கு கட்டப்படும் மிதவை தொடர்பாய் மோட்டார் வள்ளமொன்று $-6\underline{i} - 2\underline{j}$ என்னும் தானநிலையிலிருந்து புறப்படுகின்றது. அது $\sqrt{53}$ பருமனுடைய உறுதியான கதியுடன் கப்பலொன்றைச் சந்திக்கக்கூடியதாக நேரடிப் பாதையில் செல்கின்றது. கப்பலானது $3\underline{i} + 4\underline{j}$ என்னும் உறுதியான வேகக்காவியுடன் செல்கின்றது. நண்பகல் 12 மணிக்கு மிதவையிலிருந்து கப்பலின் தானநிலை $3\underline{i} - \underline{j}$ ஆகும். மிதவையிலிருந்து அவை சந்திக்கும் தானக்காவியையும், மோட்டார்வள்ளத்தின் வேகக்காவியையும், சந்திக்க எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க. விடை: சந்திக்கும் தானக்காவி $(4\frac{1}{2}\,\underline{i} + \underline{j})$; $(7\underline{i} + \underline{j})$ பி.ப12.30

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. உற்பத்தி O விலிருந்து, Ox, Oy, Oz அச்சுக்கள் வழியே முறையே அலகுக்காவி $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{k}$ என்பன வரையப்பட்டுள்ளன. m_1, m_2, m_3 திணிவுகள் முறையே $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{k}$ என்னும் புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இம்மூன்று திணிவுகளையுடைய தொகுதியின் திணிவுமையத்தை எழுதுக. O வை மையமாகவுடைய, சீரான திண்மக்கோளத்தின் அரை a O தொடர்பாக (a) x நேராயுள்ள அரைக்கோளத்தின், (b) x, y, z நேராயுள்ள எண்முகி, என்பவற்றின் திணிவுமையங்களின் தானக்காவிகளைக் காண்க.

விடை : (a) $(3a/8)\underset{\sim}{i}$; (b) $(3a/8)(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k})$

6. உற்பத்தி O தொடர்பாக தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{r}_1$, $\underset{\sim}{r}_2$, ... $\underset{\sim}{r}_n$ என்பவற்றை உடைய புள்ளிகளில் முறையே திணிவுகள் $m_1, m_2, \ldots m_n$ உடைய n துணிக்கைகளின் திணிவுமையத்தை வரைவிலக்கணப்படுத்துக. திணிவுமையமானது, உற்பத்தியைச் சாராதது எனக்காட்டுக. $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$, $2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$, $2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$, $2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$ என்னும் புள்ளிகளில் ஒய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ள துணிக்கைகளின் திணிவுகள் முறையே 4, 3, 2, 3 அலகுகளாயின் திணிவுமையத்தின் தானக்காவியைக் காண்க. ஒவ்வொரு திணிவிலும் அவை உற்பத்தியிலிருந்து இருக்கும் தூரத்திற்கு விகிதசமமான விசைகள் ஒவ்வொரு துணிக்கையிலும் தாக்கின் திணிவுமையத்தின் ஆர்முடுகலையும், திசையையும் காண்க. விடை : $(5/3)\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$; $-7\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}$ என்னும் காவியின் திசையில்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. மனிதனொருவன் u என்னும் கதியுடன் துவிச்சக்கரவண்டியை ஓட்டுகையில் தனது வேகம் $u\underline{j}$ ஆயிருக்கையில் காற்றின் வேகம் $\frac{1}{2}v_1(\underline{i} - \sqrt{3}\underline{j})$ எனத்தோற்றுவதாகக் காண்கிறான். இங்கு $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்பன முறையே கிழக்கு, வடக்கு திசைகளிலுள்ள அலகுக்காவிகளாகும். ஆனால் அவனின் வேகம் $\frac{1}{2}u(-\sqrt{3}\underline{j} + \underline{j})$ ஆக இருக்கையில் காற்றின் வேகம் $v_2\,\underline{i}$ ஆக இருப்பதாகத் தோன்றுகின்றது. காற்றின் உண்மை வேகம் $\sqrt{3}u(\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j})/6$ என நிறுவுக. u_1, u_2 என்பவற்றை u இல் காண்க.

(விடை : $u_1 = \sqrt{3}u/3$, $u_2 = 2\sqrt{3}\,u/3$)

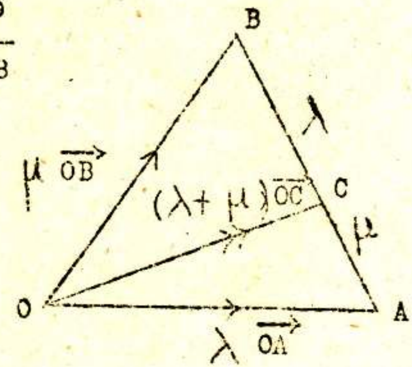
****

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 4

இரு விசைகளின் விளையுள் $\lambda - \mu$ தேற்றம்

4.1 **$\lambda - \mu$ தேற்றம்**



ஒரு புள்ளியில் OA, OB என்னும் திசைகளில் தாக்கமுறும் விசைகள் பருமனில் $\lambda \overrightarrow{OA}$, $\mu \overrightarrow{OB}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப் படினன், அவற்றின் விளையுளானது பருமனிலும் திசையிலும் $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$ என்பதால் தரப்படும் இங்கு C என்பது AB இலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். ஆயின் $\lambda CA = \mu CB$ ம.

அ.து $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = (\lambda+\mu)\overrightarrow{OC} \Rightarrow \boxed{\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = (\lambda+\mu)\underline{c}}$

__விடை__ :- $\lambda\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{CA}$

$\mu\overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CB}$

$\therefore \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = (\lambda+\mu)\overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ என்பன எதிர்த்திசைகளில் உள்ளவையாகையாலும்

$\lambda CA = \mu CB$ எனத்தரப்பட்டுள்ளதாலும், $\lambda\overrightarrow{CA} + \mu\overrightarrow{CB} = \underline{0}$

$\therefore \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = (\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

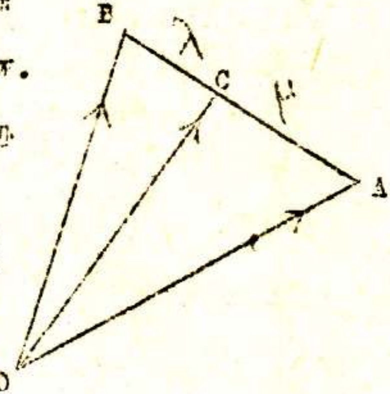
குறிப்பாக, $\lambda = \mu = 1$ ஆயின், $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2.\overrightarrow{OC}$

இங்கு C என்பது AB இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

நான்கு வகைகள் உள்ளன.

$(i)\ \frac{\mu}{\lambda} > 0, \quad (ii)\ \frac{\mu}{\lambda} < 0, \quad (iii)\ \lambda \neq 0,\ \mu = 0$

$(iv)\ \lambda = 0,\ \mu \neq 0$



<u>வகை (i)</u> $\mu / \lambda > 0$, AB என்னும் துண்டத்தினுள் C உள்ளது. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ என்பன ஒரே திசையையுடையன.

$\therefore$ AC, & $\frac{\mu}{\lambda}\ \overrightarrow{CB}$ என்பன ஒரே திசையும், பருமனுமுடையன.

$\therefore AC = \frac{\mu}{\lambda}\ \overrightarrow{CB} \qquad \therefore -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c} = \frac{\mu}{\lambda}(-\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b})$

$-\lambda \underset{\sim}{a} + \lambda \underset{\sim}{c} = -\mu \underset{\sim}{c} + \mu \underset{\sim}{b}$

$\therefore (\lambda + \mu)\underset{\sim}{c} = (\lambda \underset{\sim}{a} + \mu \underset{\sim}{b})$

<u>வகை (ii)</u> $\frac{\mu}{\lambda} < 0$

C ஆனது AB என்னும் துண்டத்திற்கு வெளியேயுள்ளது,

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ என்பன எதிர்த் திசைகளையுடையன.

$\overrightarrow{AC}$ உம் $\mu/\lambda\ \overrightarrow{CB}$ உம் ஒரேதிசையும் பருமனுமுடையன.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

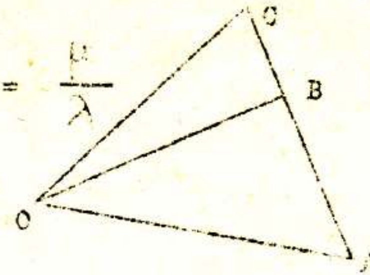
$$\overrightarrow{AC} = \frac{\mu}{\lambda}\ \overrightarrow{CB}$$

$$-\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c} = \frac{\mu}{\lambda}\ (-\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b})$$

$$-\lambda\underset{\sim}{a} + \lambda\underset{\sim}{c} = -\mu\underset{\sim}{c} + \mu\underset{\sim}{b}$$

$$(\lambda+\mu)\underset{\sim}{c} = \lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\mu}{\lambda}$$



வகை (iii) $\lambda \neq 0, \ \mu = 0$

$\therefore$ C ஆனது A இலுள்ளது. $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} = \dfrac{\lambda\underset{\sim}{a}}{\lambda} = \dfrac{\lambda\underset{\sim}{a} + 0\underset{\sim}{b}}{\lambda + 0}$

$$= \frac{\lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b}}{\lambda + \mu}$$

வகை (iv) $\lambda = 0, \mu \neq 0$

$\therefore$ C ஆனது B இலுள்ளது.

$$\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{b} = \frac{\mu\underset{\sim}{b}}{\mu} = \frac{0\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b}}{0 + \mu} = \frac{\lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b}}{\lambda + \mu}$$

உ.ம். 22 ABC என்னும் முக்கோணியின் பக்கங்கள் வழியே $2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}$ என்னும் விசைகள் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் விளையுள் $6\ \overrightarrow{DE}$ எனக்காட்டுக. இங்கு D ஆனது BC யின் நடுப்புள்ளியாகும். E ஆனது CA இல் $CE = \frac{1}{3}\ CA$ ஆக உள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடை :-

$$2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$$

$$= \overrightarrow{CA} + (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$$

$$(\because 2CE = EA)$$

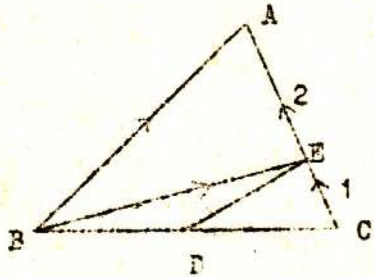
$$= \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BE}$$

$$= (3\overrightarrow{CE} + 3\overrightarrow{BE})$$

$$= 3(\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BE})$$

$$= 3.2\overrightarrow{DE} \quad (\because D \text{ ஆனது } BC \text{ இன் நடுப்புள்ளி})$$

$$= 6\,\overrightarrow{DE}$$



உ.ம் 23 ABC என்னும் முக்கோணியில், பக்கம் AC ஐ முக்கூறிடும் புள்ளி M, A இற்கு அண்மையிலுள்ளது. B இற்கு அண்மையிலுள்ள புள்ளி N, AD ஐ முக்கூறிடுகின்றது. $\overrightarrow{MN}$ ஆல் பருமனிலும் திசையிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விசையினை முக்கோணியின் பக்கங்களின் வழியே மூன்று விசைகளாகத் தருக.

விடை: $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

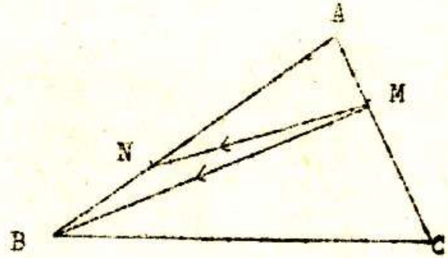
$\because AN : NB = 2:1$

$AM : MC = 1:2$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

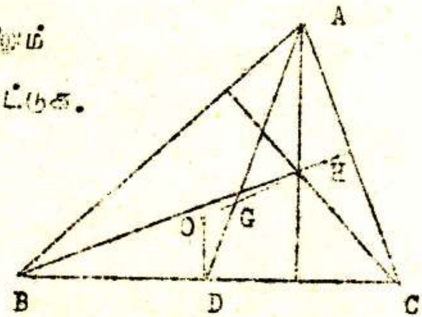


$$= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{CA}$$

∴ விசை $\overrightarrow{MN}$ ஆனது $\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}, \frac{2}{9}\overrightarrow{CB}, \frac{1}{9}\overrightarrow{CA}$ எனும் விசைகட்குச்சமமாக பக்கங்கள் வழியே முறையே தாக்குகின்றன.

<u>உ.ம் 24</u> முக்கோணி ABC யின் சுற்றுமையம் O ஆயும் நிமிர்மையம் H ஆயுமிருப்பின் $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விசைகளின் விளையுளானது பருமனிலும் திசையிலும் $\overrightarrow{2HO}$ ஆல் குறிப்பிடப்படும் எனக்காட்டுக.



<u>விடை</u> கேத்திர கணிதப்படி சுற்றுமையம் O மையப்போலி G நிமிர்மையம் H என்பன ஒரேகோட்டில் கிடப்பன.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

G ஆனது OH ஐ OG : GH = 1 : 2 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\,\overrightarrow{HD} \qquad (D \text{ ஆனது } BC \text{ இன் நடுப்புள்ளி})$$

$\triangle HAD$ இல்

$$2\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HA} = 3\overrightarrow{HG} \quad \because AG : GD = 2 : 1$$

கூட்டுகையில்,

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 3 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{HO} = 2\overrightarrow{HO}$$

<u>உ.ம் 25</u>

பருமனிலும், திசையிலும் தாக்குக்கோட்டிலும் $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\mu\overrightarrow{AC}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இருவிசைகட்குச் சமனான விசையொன்று $(\lambda + \mu)\overrightarrow{AD}$ இனால் குறிப்பிடப்படும் எனக்காட்டுக. இங்கு D ஆனது BC ஐ $\mu : \lambda$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

A, B, C என்பன முக்கோணியொன்றின் உச்சிகளாகும். BC இன் நடுப்புள்ளி D. ஒரு தொகுதிச் சமவிசைகள் முறையாக $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. அவற்றுடன் ABC என்னும் போக்கிலமைவதும், முக்கோணியின் பரப்பின் இருமடங்கு பருமனுடையதுமான இணையொன்றுமுள்ளது. இத்தொகுதி விசைகளின் விளையுள் $6\overrightarrow{PQ}$ ஆகும். என நிறுவுக. இங்கு P, Q என்பன AB, BC என்பவற்றில் $\frac{AP}{PB} = 2$, $\frac{BQ}{QC} = \frac{1}{3}$ ஆகும்வண்ணம் உள்ள புள்ளிகளாகும்.

(B.U.C 1961)

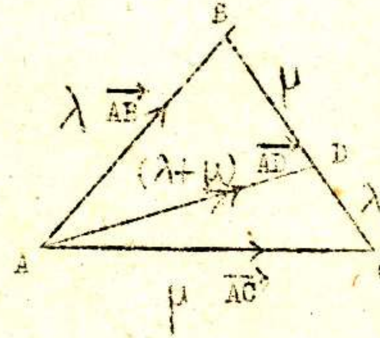
<u>விடை</u> :-

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \mu(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aayanaham.org

$$= (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{AD} + \lambda\,\overrightarrow{DB} + \mu\,\overrightarrow{DC} = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{AD}$$

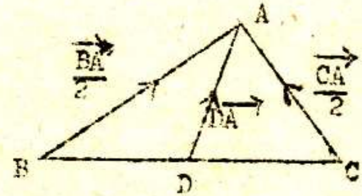
$$\because\ \frac{BD}{DC} = \frac{\mu}{\lambda}\ ,\quad \lambda\,\overrightarrow{DB} + \mu\,\overrightarrow{DC} = \underline{0}$$



ABC என்னும் போக்கிலுள் முக்கோணி ABC இன் பரப்பின் இரட்டிக்கப் பருமனுடைய இடை

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

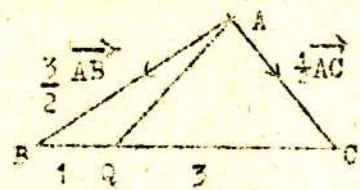
$\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA}$



$\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$ + ABC என்னும் போக்கிலும் முக்கோணியின் பரப்பின் இரட்டிப்புப்பருமனுடைய இடையும்.

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{2AC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

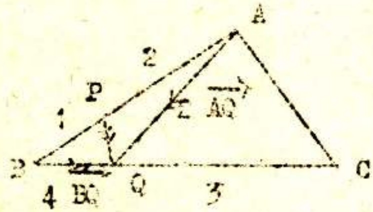


$= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BC} \qquad \left[\frac{BQ}{QC} = \frac{1}{3}\right.$

$= 2\,\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BC}$

$= 2\,\overrightarrow{AQ} + 4\,\overrightarrow{BQ} \qquad \left[\overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{BQ}\right]$

$= 6\,\overrightarrow{PQ} \qquad \left[\because AP/PB = 2/1\right]$

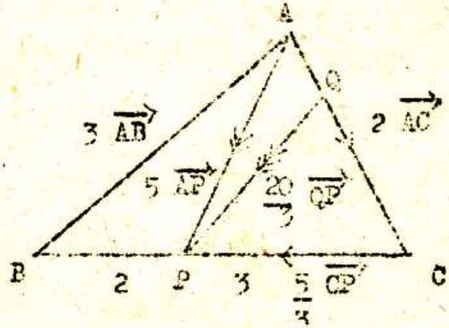


Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் 26

விசைகள் $\lambda\,\overrightarrow{OA}$, $\mu\,\overrightarrow{OB}$ என்பன முறையே OA, OB என்னும் கோடுகள் வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் விசை $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$ என்பதற்குச் சமம் எனக்காட்டுக. இங்கு C ஆனது AB யை AC : CB = $\mu : \lambda$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது. விசைகள் $3\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ என்பன முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் AB, AC, CB வழியே முறையே தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் BC யைப் P இலும், AC யைக் Q இலும் சந்திக்கின்றது. அதன் பருமன் KPQ. BP : PC; AQ : QC : k என்பவற்றைக் காண்க.

விடை முதற் பகுதி புத்தகத்தில் முன்னைய கணக்குகளிலும் செய்யப்பட்டுள்ளது.



$3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$= (3+2)\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CB}$ (இங்கு $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{3}$)

$= 5\overrightarrow{AP} + \frac{5}{3}\overrightarrow{CP}$

$= \left(5 + \frac{5}{3}\right)\overrightarrow{QP}$ இங்கு AQ/QC $= \frac{5}{3}/5 = \frac{1}{3}$

$= \frac{20}{3}\overrightarrow{QP}$; $\frac{20}{3}$ QP = K PQ

K = 20/3

எனவே BP: PC = 2:3; AQ : QC = 1:3; K = 20/3.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

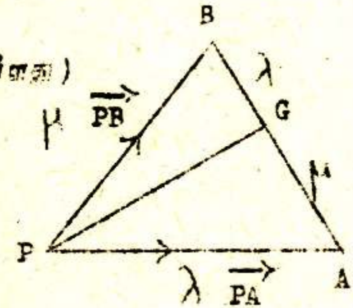
<u>உ.ம் 27</u>

$\lambda \overrightarrow{PA}, \mu \overrightarrow{PB}, \ (\lambda + \mu \neq 0)$ என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும். விசைகளின் விளையுள் $(\lambda + \mu)\ \overrightarrow{PG}$ என்பதாற் குறிக்கப்படுமென நிறுவுக. இங்கு G ஆனது AB ஐ $\mu : \lambda$ என்னும் விகிதத்திலே பிரிக்கின்றது. இதிலிருந்து $\lambda PA, \ \mu PB, \ \nu PC, (\lambda, \mu, \nu > 0)$ என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும். விசைகளின் விளையுள் $(\lambda + \mu + \nu)\ \overrightarrow{PG}$ என்னும் வடிவத்திற் குறிக்கப்படலாமெனக்காட்டுக. G இனது நிலையை எவ்வாறு துணியலாமெனத் திட்டமாகக் கூறுக.

P என்பது, O என்பதை மையமாகக் கொண்டுள்ள ஒர் ஒழுங்கான அறுகோணி A B C D E F இனது தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியெனின், $\overrightarrow{PA}, \ \overrightarrow{PB}, \ \overrightarrow{PC}, \ \overrightarrow{PD}, \ \overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PF}$ என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் 6 $\overrightarrow{PO}$ என்பதாற் குறிக்கப்படுமென உய்த்தறிக அல்லது வேறுவிதமாகக் காட்டுக.

<u>விடை:</u>

(விரிவான விளக்கம் தத்துவத்தில் தரப்பட்டுள்ளது)

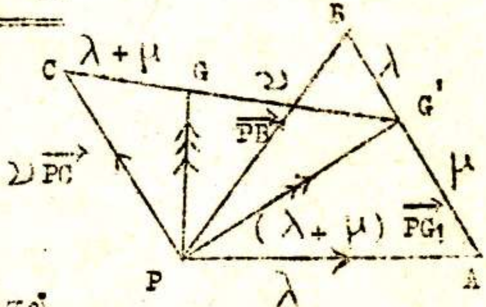


$$\lambda \overrightarrow{PA} + \mu \overrightarrow{PB}$$
$$= \lambda(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}) + \mu(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB})$$
$$= (\lambda + \mu)\ \overrightarrow{PG} + \lambda \overrightarrow{GA} + \mu \overrightarrow{GB}$$
$$= (\lambda + \mu)\ \overrightarrow{PG}$$

$\left[\because \text{தரவின்படி } AG/GB = \mu/\lambda \quad \therefore \lambda \overrightarrow{GA} = -\mu \overrightarrow{GB} \right]$

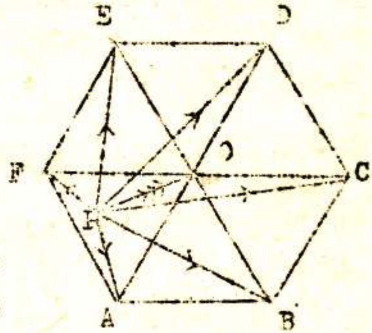
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\lambda \overrightarrow{PA} + \mu \overrightarrow{PB} + \nu \overrightarrow{PC}$$
$$= (\lambda + \mu)\overrightarrow{PG_1} + \nu \overrightarrow{PC} = (\lambda + \mu + \nu)\overrightarrow{PG}$$



இங்கு $G_1G/GC = (\nu/\lambda) + \mu$

ஒழுங்கான அறுகோணியின் உச்சிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அலகுத்திணிவு வைக்கப் பட்டுள்ளது. ஒழுங்கான அறுகோணியாகையால் இத்திணிவுகளின் புவியீர்ப்பு மையமானது அறுகோணியின்மையம் O விலேயே இருக்கும். எனவே G அலகுத்திணிவுகளும் O வினூடாகத் தாக்கும். எனவே முந்திய பகுதிகளின்படி,



$$1.\overrightarrow{PA} + 1.\overrightarrow{PB} + 1.\overrightarrow{PC} + 1.\overrightarrow{PD} + 1.\overrightarrow{PE} + 1.\overrightarrow{PF}$$
$$= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)\overrightarrow{PO} = 6\overrightarrow{PO}$$

மறுமுறை

மறுமுறை

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$; $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{PO}$; $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{PO}$

$\therefore \quad \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = 6\overrightarrow{PO}$

($\because$ AD, BE, CF என்பவற்றின் நடுப்புள்ளி O ஆகும்.)

பயிற்சி 4

1. ABCDEF ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணி. O ஏதாவதொரு புள்ளி. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப்படும் விசைகளின் விளையுள் விசை $6\overrightarrow{OP}$ என நிறுவுக. இங்கு P என்பது அறுகோணியின் சுற்றுவட்டத்தின் மையமாகும்.

2. ABCDEF ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணி வடிவத்தை உடைத்து. A, B என்பவற்றிலிருந்து மற்றைய உச்சிகளை நோக்கி, அவற்றிலிருந்துள்ள தூரத்திற்கு விகிதசமமான பருமனுள்ள விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுள் 6 AE இற்கு விகிதசமமென நிறுவுவதோடு, தாக்கக்கோட்டினையும் காண்க.

3. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் BC, DA என்னும் பக்கங்கள் முறையே F, H என்பவற்றால் இருகூறிடப்படுகின்றன. AB, DC என்பவற்றிற்குச் சமமான, சமாந்திரமான இருவிசைகள் ஒரு புள்ளியிலே தாக்கின், அவற்றின் விளையுளானது

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

HF இற்குச் சமாந்தரமாகவும், 2HF இற்குச் சமமாகவுமிருக்குமெனக் காட்டுக.

4. ABC ஒரு முக்கோணி. G அதன் மையக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும்புள்ளி. O அம்முக்கோணியின் தளத்திலிருக்கும் ஏதாவதொரு புள்ளியாயின், $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ என்பவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகளினது விளையுள் $3\overrightarrow{OG}$ இனாற் குறிக்கப்படும் என நிறுவுக.

5. A B C D ஒரு நாற்பக்கல். O அதன் தளத்திலிருக்கும் ஏதாவதொரு புள்ளி. E, F, G, H என்பன முறையே AB, BC, CD, DA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ என்பன குறிக்கும் விசைகளினது விளையுள் $4\overrightarrow{OK}$ குறிக்குமென நிறுவுக. இங்கு EG யை K இரு கூறிடுகின்றது.

6. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ என்பவற்றுக்குச் சமமான விசைகள் முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் வழியே தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் ED வழியேயும், விளையுள் 4 ED இற்குச் சமமெனவும் நிறுவுக. D, E என்பன முறையே BC, CA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளியாகும்.

7. ஒரு நாற்பக்கல் ABCD இன் பக்கங்கள் வழியே முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}$ என்பனவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகள் செயற்படுகின்றன. அவற்றின் விளையுள் $4\overrightarrow{HK}$ இனால் முற்றாகக் குறிக்கப்படுகின்றதென நிறுவுக. இங்கு H, K

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

என்பன முறையே AC, BD என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள்.

8. விசைகள், பருமனிலும், திசையிலும், தாக்கக்கோட்டிலும் $3\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{AC}$, $7\overrightarrow{BA}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. விளையுளின் தாக்கக்கோடானது AB இனை F இலும், AC இனை E இலும் வெட்டுகின்றது. 2AF = 3FB எனவும் 7AE = 3EC எனவும் காட்டுக. விளையுளானது பருமனிலும் திசையிலும் $\frac{50}{3}\overrightarrow{FE}$ ஆல் தரப்படும் எனக்காட்டுக.

9. AD, BE என்பன முக்கோணி ABC இன் இடையங்களாயின், $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CB}$, $3\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DA}$ என்னும் ஐந்து விசைகளை பருமனிலும், திசையிலும், தாக்கக்கோட்டிலும் குறிப்பிடப்பட்டால், அவற்றின் விளையுளானது பருமனாக $5\overrightarrow{CH}$ இனால் குறிப்பிடப்படுமெனக்காட்டுக. இங்கு H என்னும் புள்ளி AB இனை உட்புறமாக 3 : 7 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

10. D என்பது BD/DC = $\frac{1}{2}$ ஆகுமாறு முக்கோணி ABC இன் பக்கம் BC இலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். $2\overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{AC}, 3\overrightarrow{BA}, 3\overrightarrow{AD}$ ஆகிய விசைகள் முறையே BC, AC, BA, AD ஆகிய பக்கங்களின் வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத்தொகுதியின் விளையுள் AB ஐ R இலும் AC யை S இலும் சந்திக்குமானால், AR/RB, AS/SC ஆகிய விகிதங்களைக் காண்க. மேலும் இத்தொகுதியின் விளையுள் RS இன் வழியே $\frac{15}{2}\overrightarrow{RS}$ எனக் காட்டுக. (AL.1987)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

11. $\lambda \overrightarrow{OA}$, $\mu \overrightarrow{OB}$ இனால் குறிக்கப்படும் இரண்டு விசைகளின் விளையுள் $(\lambda + \mu)\overrightarrow{OC}$ எனக்காட்டுக. இங்கு C என்னும் புள்ளி, AB இல் $AC : CB = \mu : \lambda$ ஆகும் வண்ணமுள்ளது. G என்பது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியாகும். $3\overrightarrow{BG}$, $3\overrightarrow{CG}$, $3\overrightarrow{GA}$, $2\overrightarrow{CB}$ ஆகிய விசைகள் முறையே BG, CG, GA, CB வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் CA க்கு சமாந்தரமென நிறுவுக. அதன் பருமனையும் தாக்கக் கோட்டையும் காண்க. (AL 1958)

12. D, E, F ஆகியவை முறையே முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களான BC, CA, AB இல், $BD/DC = p$, $\frac{CE}{EA} = q$, $\frac{AF}{FB} = r$ ஆக உள்ள புள்ளிகளாகும். பருமனிலும் திசையிலும் $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ இனால் கொடுக்கப்படும் மூன்று விசைகளும்

(1) $p = q = r = 1$ என்னும் ஒரேயொரு சமன்பாட்டுக்கு அமையுமாயின் மட்டும் சமநிலையிலிருக்குமெனவும், (ii) $p = q = r \neq 1$ என்னும் ஒரேயொரு தொடர்பிற்கு அமையுமாயின் மட்டும் ஓர் இணைக்குத் தாழ்த்தப்படலாமெனக் காட்டுக. (AL. 1959)

13. O, A, B, C என்பன நான்கு ஒருதளப்புள்ளிகளாகும். திசையிலும், பருமனிலும், தாக்கக்கோட்டிலும் $l\,\overrightarrow{OA}$, $m\,\overrightarrow{OB}$, $n\,\overrightarrow{OC}$ என்பவற்றால் கொடுக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $(l + m + n)\,\overrightarrow{OG}$ இனால் கொடுக்கப்படுமென

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

காட்டுக. இங்கு G என்பது முறையே A, B, C ஆகியவற்றில் வைக்கப்பட்ட l, m, n ஆகிய திணிவுகளின் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

$$\frac{l}{\text{தான்}\,A} = \frac{m}{\text{தான்}\,B} = \frac{n}{\text{தான்}\,C}$$

ஆயின், விளையுள் முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையத்தினூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக. O இல் எல்லா நிலைகளுக்கும் விளையுள், முக்கோணி ABC இன் சுற்றுமையத்தினூடாகச் செல்லுமாயின் l:m:n என்ற விகிதத்தைக் காண்க. (AL.1962)

விடை

$$\frac{l}{\text{சைன்}\,2A} = \frac{m}{\text{சைன்}\,2B} = \frac{n}{\text{சைன்}\,2C}$$

14. A_1, A_2, A_3, A_4 என்பன ஒரே தளத்திலுள்ள நான்கு நிலைத்த புள்ளிகள். P என்பது அதே தளத்திலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி. $\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PA_2}$, $\overrightarrow{PA_3}$, $\overrightarrow{PA_4}$ ஆகியவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு $\underset{\sim}{R}$ என்னும் ஒரு விசையாகும். $\underset{\sim}{R}$ இன் பருமனை மாறாததாய் வைத்தால், P இன் ஒழுக்கு ஒரு வட்டமெனக் காட்டுக. ஆனால் R இன் திசையை மாறாததாய் வைத்தால், P இன் ஒழுக்கு ஒரு நேர்கோடெனவும் காட்டுக. $\lambda\overrightarrow{OA}$, $\mu\overrightarrow{OB}$ என்னும் விசைகளின் விளைவு $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இங்கு C என்பது AB ஐ $\mu : \lambda$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாகும்.

15. ABC என்பது ஒரு முக்கோணி. P என்பது அதன் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $3\overrightarrow{PG}$ ஆற் குறிக்கப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு G என்பது முக்கோணி ABC இனது மையப் போலியாகும். a, b, c என்பன முறையே BC, CA, AB என்பனவற்றின் நீளங்களாயிருக்க, I என்பது முக்கோணி ABC இனது உள்மையமாயிருந்தால் $a\overrightarrow{PA}$, $b\overrightarrow{PB}$, $c\overrightarrow{PC}$ என்பவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளையுள் $(a + b + c)\overrightarrow{PI}$ ஆற் குறிக்கப்படுமெனவும் காட்டுக. (AL. 1966)

16. xyz என்னும் முக்கோணியின் மையப்போலி G ஆயும், $\overrightarrow{GX}$, $\overrightarrow{GY}$, $\overrightarrow{GZ}$ என்பன விசைகள் பருமமாய் குறிக்கப்பட்டிருப்பின், $\overrightarrow{GX} + \overrightarrow{GY} + \overrightarrow{GZ} = \overrightarrow{0}$ என நிறுவுக. ABC, DEF என்பன இரு தள முக்கோணிகளாகும். அவற்றின் மையப்போலிகள் முறையே P, Q என்பனவாகும். $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ இனாற் பூரணமாகக் குறிக்கப்படும் விசைகளானவை, $3\overrightarrow{PQ}$ இனாற் பூரணமாகக் குறிப்பிடப்படும் தனிவிசையொன்றுக்கும், ஒரிணைக்கும் சமமெனக்காட்டுக.

(AL. 1962)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

17. ABC என்னும் முக்கோணியொன்றில், BC, CA, AB என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே O, P, Q ஆகும். $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ என்பதை $\overrightarrow{OP}$ இல் கோவைப்படுத்துக. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OQ}$ எனக்காட்டுக

ஒரு தள நாற்பக்கல் EFGH இல் EG, FH என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே X, Y ஆகும். $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{GH}$ என்பவற்றால் பருமனாகக் குறிப்பிடப்படும் விசைகளின் விளையுள் $4\,\overrightarrow{XY}$ இனால் பருமனாகக் குறிப்பிடப்படும் என நிறுவுக.

(AL. 1972)

18. ஒரு △ ABC யின் செங்குத்துமையம் H. சுற்றுமையம் O. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறுவுக.

(i) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB} + 2\,\overrightarrow{OC}$

(ii) $\overrightarrow{AH}$ தான் A + $\overrightarrow{BH}$ தான் B + $\overrightarrow{CH}$ தான் C = $\underline{0}$

(iii) $\overrightarrow{AO}$ சைன் 2A + $\overrightarrow{BO}$ சைன் 2B + $\overrightarrow{CO}$ சைன் 2C = $\underline{0}$

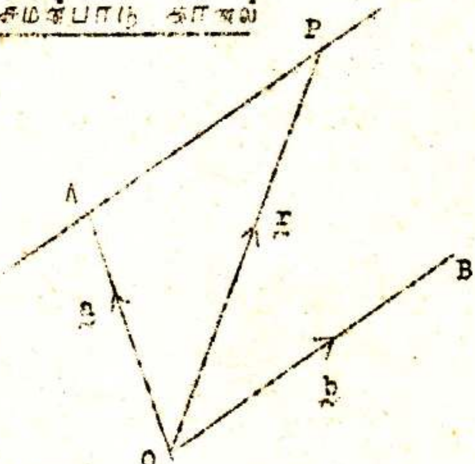
****

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 5

...... காவிச் சமன்பாடுகள்

5.1 தரப்பட்டுள்ள புள்ளி A இனூடாக, தரப்பட்ட காவி $\underset{\sim}{b}$ இற்குச் சமாந்திரமாகவுள்ள நேர்வரையொன்றின் காவிச் சமன்பாடு காணல்



$\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}$ ஆகவும், A இனூடாக OB இற்குச் சமாந்திரமாகச் செல்லும் கோடொன்றில் P ஏதாவது ஒரு புள்ளியாயின் P இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{r}$ தரப்படுவது ,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \Longrightarrow \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + t\,\underset{\sim}{b}.$$

இங்கு $t = AP/OB$ ஒரு எண்கணியமாகும்.

சமன்பாடு $\boxed{\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + t\,\underset{\sim}{b}}$ என்பது A இனூடாகச் செல்வதும் காவி $\underset{\sim}{b}$ இற்குச் சமாந்திரமானதுமான கோட்டின் காவிச் சமன்பாடாகும்.

உற்பத்தி O யினூடாகச் செல்லும் செவ்வக அச்சுக்கள் தொடர்பாக P, A என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே (x, y, z) உம் (a_1, a_2, a_3) உம் $\underset{\sim}{b} = (b_1, b_2, b_3)$ உம் ஆயின் சமன்பாட்டிலே

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(b_1, b_2, b_3)$ என எழுதலாம். ஒத்த கூறுகளைச் சமன் செய்வதன் மூலம் வரும் தொடர்பு

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3} = t$$

இவை ஆள்கூற்றுக் கேத்திர கணிதத்தில், புள்ளி (a_1, a_2, a_3) இனூடாகச் செல்வதும் (b_1, b_2, b_3) இந்த விகிதமுடைய திசைக்கோசைன்களை உடையதுமான நேர்வரையின் சாதாரணச் சமன்பாடுகளாகும்.

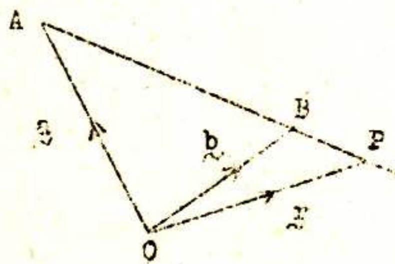
5.2 <u>தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ இனை உடைய புள்ளிகள் A, B இனூடாகச் செல்வதும் நேர்வரையொன்றின் காவிச்சமன்பாடு காணல்.</u>

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + (AP/AB)\,\overrightarrow{AB}$$

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + t(-\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$$

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = (1 - t)\underset{\sim}{a} + t\,\underset{\sim}{b}} \qquad t = AP/AB$$



இச்சமன்பாடு $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்னும் இரு தானக்காவிகளின் ஊடாகச் செல்லும் AB என்னும் கோட்டின் காவிச்சமன்பாடாகும்.

$t = 0$ ஆயின், $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a}$ ஆகும். புள்ளி A இனைக் குறிக்கும்.

$t = 1$ ஆயின், $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{b}$ ஆகும். புள்ளி B இனைக் குறிக்கும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

குறிப்பான ஒரு பெறுமதிக்கேற்ப பெறப்படும்.

AB இலும் அல்லது நீட்டப்பட்ட AB இலும், வேறெந்த ஒரு புள்ளியும் t இன் / $t = \frac{1}{2}$ ஆயின், AB இன் நடுப்புள்ளியைக் குறிக்கும். (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) என்பன புள்ளிகள் A, B என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளாகவும் $r = (x, y, z)$ ஆகவுமிருப்பின் மேலேயுள்ள AB இன் சமன்பாடு

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} = t$$

என எழுதப்படும். இவை

இரூடாகச் செல்லும் நேர்வரையின் தெக்காட்டின் சமன்பாடுகளாகும். (Cartesian equations)

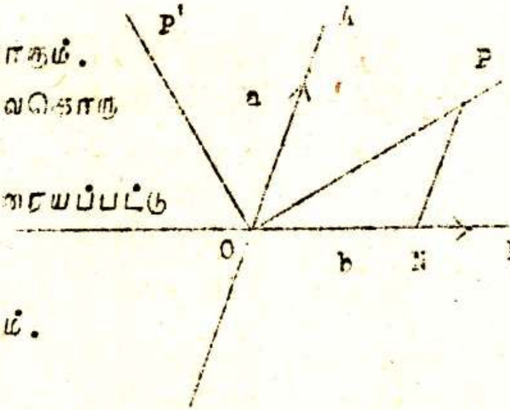
A, B, P என்பன ஒரே கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளாயும், அவற்றின் தானக் காவிகளை தொடர்புபடுத்தும் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு, எல்லா உறுப்புக்களையும் ஒரு பக்கத்தில் கொண்டிருக்க எழுதுகையில் $(1 - t)\underset{\sim}{a} + t\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$ எனப்படும்.

இச்சமன்பாட்டில் காவிகளின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். இதுவே மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் கிடப்பதற்குரிய தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையாகும்.

5.3 இரு நேர்கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் நிகரக்கியின் சமன்பாடு

$\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவை அலகுக்காவிகட்குச் சமாந்தரமாக முறையே OA, OB என்னும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



இரு நேர்கோடுகள் உள்ளன. O உற்பத்தியாகும். கோணம் AOB இன் இருகூறாக்கியில் P ஏதாவதொரு புள்ளியாகும்.

PN ஆனது AO விற்குச் சமாந்தரமாக வரையப்பட்டு OB இனை N இல் வெட்டுகின்றது.

கோணம் OPN = கோணம் NOP ஆகும்.

எனவே ON = NP

ஆனால் இவை $\underset{\sim}{b}$ இற்கும் $\underset{\sim}{a}$ இற்கும் சமாந்தரமானவை.
ஆகவே $\overrightarrow{ON} = t\,\underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{NP} = t\,\underset{\sim}{a}$ இங்கு t என்பது ஒரு உண்மை எண்ணாகும்.
எனின் $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \Longrightarrow \underset{\sim}{r} = t\,\underset{\sim}{b} + t\,\underset{\sim}{a} \Longrightarrow \boxed{\underset{\sim}{r} = t(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})}$

இதுவே இருகூறாக்கியின் சமன்பாடாகும். t இன் பெறுமானம் P கோட்டின் வழியே இயங்கிச் செல்வதற்கேற்ப வேறுபடும்.

$\underset{\sim}{a}$, $-\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றின் திசைகளிலுள்ள இருகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள மிகை நிரப்புக்கோணம் B^1OA இன் இருகூறாக்கி OP^1

OP^1 இன் சமன்பாடு $\boxed{\underset{\sim}{r} = t(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})}$

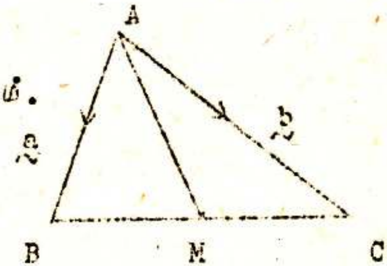
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பன அலகுக்காவிகளல்லாதவனவாயின், மேலேயுள்ள இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளாவன,

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = t\left(\frac{\underset{\sim}{a}}{a} \pm \frac{\underset{\sim}{b}}{b}\right)}$$

உ.ம் 28

ABC என்பது ஏதாவதொரு முக்கோணியாகும். கோணம் BAC இன் இருகூறாக்கி BC யை M இல் சந்திக்கின்றது. காவிமுறையில் AB/AC = BM/MC என நிறுவுக.



விடை $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{AC} = \underset{\sim}{b}$ எனக. A உற்பத்தியாகும். கோணம் BAC இன் உள்ளிருகூறாக்கியானது,

$$\underset{\sim}{r} = t\left(\frac{\underset{\sim}{b}}{b} + \frac{\underset{\sim}{a}}{c}\right)$$

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = t\left(\frac{c\underset{\sim}{b} + b\underset{\sim}{a}}{bc}\right)}$$

$t = \dfrac{bc}{b+c}$ ஆகையில், உள்ளிருகூறாக்கியானது M இன் ஊடாகச்செல்கின்றது.

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{c\underset{\sim}{b} + b\underset{\sim}{a}}{b+c}$ M ஆனது B , C என்னும் புள்ளிகளின் மையப்போலியாகும். B, C ஆனவை முறையே b, c என்னும் எண்களுடன் சேர்ந்துள்ளன. M ஆனது BC யை c : b என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அ.து. $\boxed{AB/AC = BM/MC}$

இது போன்று, கோணம் A இன் வெளியிருகூறாக்கி

$$\underline{r} = t\left(\frac{\underline{c}}{c} - \frac{\underline{b}}{b}\right) = t\left(\frac{b\underline{c} - c\underline{b}}{bc}\right)$$

இது M இனூடாகச் செல்கின்றது. $M = \dfrac{b\underline{c} - c\underline{b}}{b - c}$ ஆகும்.

இங்கு $t = \dfrac{bc}{b - c}$ ஆகும். இப்புள்ளி M ஆனது b, − c என்னும் எண்களுடன் சேர்ந்துள்ள B, C என்பவற்றின் மையப்போலியாகும். இப்புள்ளி BC யை வெளிப்புறமாக AB : AC என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

அ.து. $\boxed{AB/AC = BM/MC}$

<u>மறுமுறை</u> :-

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(1 - \frac{BM}{BC}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

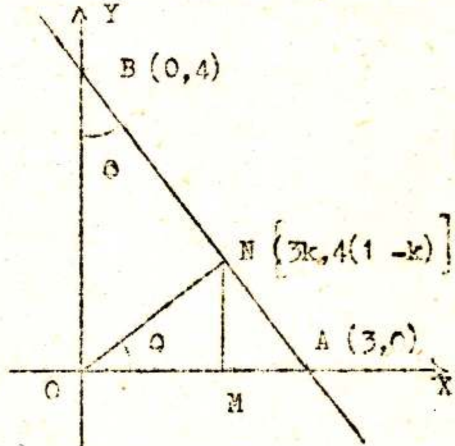
$$= \frac{BC - BM}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இவை $\overrightarrow{AM}$ இன் கூறுகளை $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ வழியே தருகின்றன. AM ஆனது கோணம் BAC இன் இருகூறாக்கியாதலால் AB, AC வழியேயுள்ள கூறுகள் பருமனில் சமனாகும்.

$$\frac{MC}{BC} \cdot AB = \frac{BM}{BC} \cdot AC \Longrightarrow \boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}}$$

<u>உ.ம் 20</u> $\underset{\sim}{r} = 3k\underset{\sim}{i} + 4(1-k)\underset{\sim}{j}$ என்னும் கோட்டிற்கு உற்பத்தியிலிருந்துள்ள செங்குத்தின் பாதப்புள்ளியைக் காண்க.



<u>விடை</u>

கோட்டின் காவிச்சமன்பாடு

$$\underset{\sim}{r} = 3k\,\underset{\sim}{i} + 4\,(1 - k)\,\underset{\sim}{j}$$

$k = 0$ ஆயிருக்கையில் $\underset{\sim}{r} = 4\underset{\sim}{j} \equiv B\,(0,4)$

$k = 1$ ஆயிருக்கையில் $\underset{\sim}{r} = 3\underset{\sim}{i} \equiv A\,(3,0)$

முக்கோணி ONM இல் தான் $\theta = \dfrac{NM}{OM} = \dfrac{4(1-k)}{3k}$

முக்கோணி OBA இல் தான் $\theta = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{3}{4}$

ஆகவே $\dfrac{4(1-k)}{3k} = \dfrac{3}{4}$

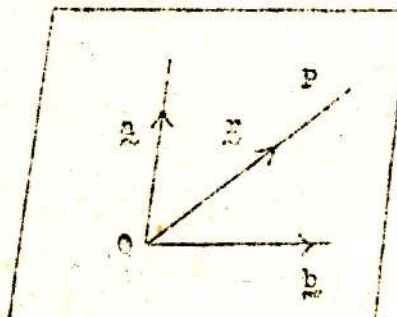
$$16 - 16k = 9k \Longrightarrow 25k = 16 \Longrightarrow k = 16/25$$

ஆகவே N இன் தானக்காவி $\underline{\underline{\frac{48}{25}\underset{\sim}{i} + \frac{36}{25}\underset{\sim}{j}}}$. தெக்காட்டின் பாசப் அச்சுகளில் செங்குத்தின் பாதப்புள்ளி $\underline{\underline{\left(\frac{48}{25}, \frac{36}{25}\right)}}$ ஆகும்.

5.4 <u>தளமொன்றின் காவிச்சமன்பாடு</u>

(i) <u>உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமான தளமொன்றின் காவிச் சமன்பாடு காணல்</u>

தளத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி P எனக. அதன் தானக்காவி $\overrightarrow{OP}$ ஆனது $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்னும் காவிகளுடன் ஒரு தளத்திலுள்ளன. $\overrightarrow{OP}$ என்னும் காவியானது $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்னும் காவிகட்குச் சமாந்தரமாகக் கூறுபடுத்தப்பட்டுள்ளது. $\overrightarrow{OP}$ இனை $\boxed{\underset{\sim}{r} = s\,\underset{\sim}{a} + t\,\underset{\sim}{b}}$ ..(1)



என்னும் அமைப்பில் கோவைப்படுத்தலாம்.

இங்கு s,t என்பன P ஆனது தளத்தில் இயங்குகையில் மாறுபடக்கூடிய எண்களாகும். தளத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியும், s, t என்பவற்றின் குறிப்பிட்ட மாறிகளுக்கேற்ப சமன்பாடு (1) இனால் தரப்படும்.

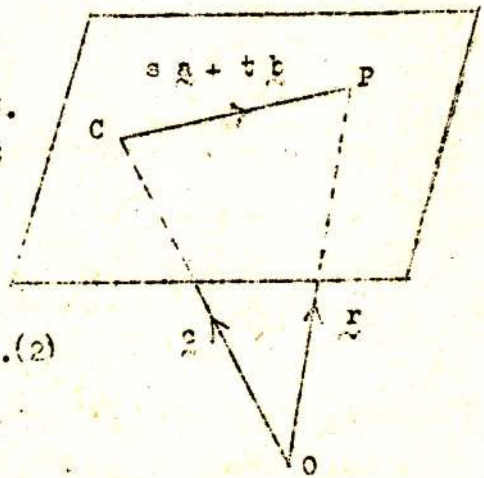
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

s,t என்னும் மாறிகளின் எல்லாப் பெறுமானங்கட்கும் புள்ளி, $s\underset{\sim}{a} + t\underset{\sim}{b}$ தரப்பட்ட தளத்திலிருக்கும். எனவே

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = s\underset{\sim}{a} + t\underset{\sim}{b}} \quad ..... (1).$$

என்பது தரப்பட்ட தளத்தின் காவிச்சமன்பாடாகும்.

(ii) <u>புள்ளி c இனூடாகச் செல்வதும், $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமுமான தளமொன்றின் காவிச்சமன்பாடு காணல்.</u>



C இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{c}$ எனக. தளத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி P இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{r}$ எனக. காவி $\overrightarrow{CP}$ ஆனது a, b என்பவற்றுடன் ஒரு தளத்திலுள்ளன. ஆயின் $\overrightarrow{CP} = s\underset{\sim}{a} + t\underset{\sim}{b}$

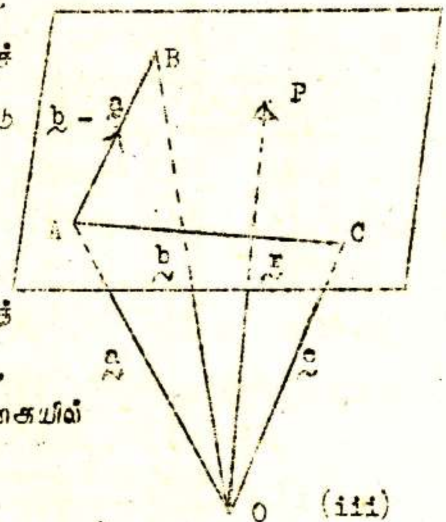
எனவே $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{c} + s\underset{\sim}{a} + t\underset{\sim}{b}} \quad ....(2)$$

இதுவே தளத்தின் சமன்பாடாகும். P தளத்தில் இயங்குகையில் s, t என்பன மாறும் எண்களாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ என்னும் தானக்காவிகளை முறையே கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் A, B, C இனூடாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல்



படம் (iii) இல் $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$ $\overrightarrow{AC} = \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a}$

A இனூடாக $(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}), (\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a})$ என்பவற்றுக்குச் சமாந்திரமாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + s(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}) + t(\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{a})$

$\boxed{\underset{\sim}{r} = (1 - s - t)\underset{\sim}{a} + s\underset{\sim}{b} + t\underset{\sim}{c}}$ ....(3)

படம் (iii) இல் A, B, C, P என்பன ஒரு தளத்தன. (3) இலுள்ள ஏகபரிமாணத் தொடர்பிலே, எல்லா உறுப்புகளும் ஒருபக்கத்திலிருக்க எழுதுகையில்

$(1 - s - t)\underset{\sim}{a} + s\underset{\sim}{b} + t\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$

காவிகளின் குணகங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

இதுவே நான்கு புள்ளிகள், ஒரு தளத்தனவாயிருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைகளாகும். சமன்பாடு (3) இல் $1 - s - t = l$ எனவும், $s = m$ எனவும் $t = n$ எனவும் கொள்ளும் பொழுது $l + m + n = 1$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவே சமன்பாடு (3) இனை பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$\underset{\sim}{r} = \frac{(1 - s - t)\underset{\sim}{a} + s\underset{\sim}{b} + t\underset{\sim}{c}}{1} \qquad \boxed{r = \frac{l\underset{\sim}{a} + m\underset{\sim}{b} + n\underset{\sim}{c}}{l + m + n}}$$

5.5 உற்பத்தியைச் சாராத ஏகபரிமாணத் தொடர்பு

எத்தொகை நிலையான புள்ளிகளின் தானக்காவிகளையும் இணைக்கும் ஒரு ஏகபரிமாணத் தொடர்பானது உற்பத்தியைச் சாராதிருப்பதற்கு, அக்காவிகளின் குணகங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாவது வேண்டிய போதிய நிபந்தனையாகும்.

உற்பத்தி 0 தொடர்பாக நிலையான புள்ளிகள் $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \underset{\sim}{a}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \underset{\sim}{a}_n$ என்க.

ஏகபரிமாணத் தொடர்பினை

$$\lambda_1 \underset{\sim}{a}_1 + \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2 + \lambda_3 \underset{\sim}{a}_3 + \ldots\ldots + \lambda_n \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{0} \quad \ldots\ldots (1)$$

என எழுதலாம்.

D என்பது d தானக்காவியுடைய பிறிதோர் புள்ளி என்க. D என்பதை காவிகளின் உற்பத்தியெனக் கொண்டால் A_n என்பது

$$\overrightarrow{DA_n} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA_n} = (-\underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{a}_n = \underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{d})$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தொடர்பு (1), புதிய உற்பத்தியுடன் இணைக்கும்

$$\lambda_1(\underset{\sim}{a}_1 - \underset{\sim}{d}) + \lambda_2(\underset{\sim}{a}_2 - \underset{\sim}{d}) + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n(\underset{\sim}{a}_n - \underset{\sim}{d}) = \underset{\sim}{0}$$

$$(\lambda_1 \underset{\sim}{a}_1 + \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2 + \lambda_3 \underset{\sim}{a}_3 + \ldots\ldots + \lambda_n \underset{\sim}{a}_n) - (\lambda + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \lambda_n)\underset{\sim}{d} = 0 \ \ldots(2)$$

சமன்பாடு (1) உண்மையாகையால், சமன்பாடு (2) ஆனது

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n)\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{0}$ ஆக ஒடுக்கப்படுகிறது.

ஆனால் $\underset{\sim}{d} \neq 0$ என்பதால்

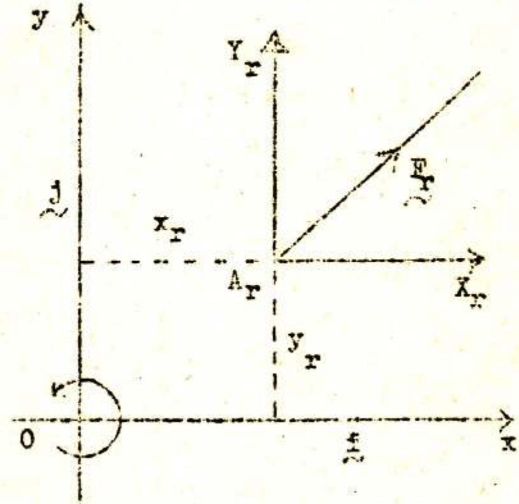
$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n = 0}$$

5.6 **ஒரு தள விசைகளின் விளையுள்**

ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தாக்கும் ஏதாவதோர் தளவிசைத்தொகுதிக்குப்பதிலாக, அதன் தளத்திலிருக்கும் ஓர் எதேச்சையான புள்ளியிலே தாக்கும் ஒரு தனிவிசையை ஓர் இணையுடன் பொதுவாக இடலாம்.

விசைகள் $\underset{\sim}{F}_1, \underset{\sim}{F}_2 \ldots \underset{\sim}{F}_r \ldots \underset{\sim}{F}_n$ என்பன $A_1, A_2, \ldots\ldots A_r \ldots\ldots A_n$ என்னும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன எனக.

விசைகள் உள்ள தளத்தில் 0 ஏதாவதொரு புள்ளி எனக. 0 வினை அச்சுகளின் உற்பத்தி யாக எடுக்க. $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$ என்பன முறையே Ox ,Oy வழியேயுள்ள அலகுக்காவிகளாகும்.

A_r இன் தானக்காவி $(x_r \underset{\sim}{i} + Y_r \underset{\sim}{j})$

விசை $\underset{\sim}{F_r} = (X_r \underset{\sim}{i} + Y_r \underset{\sim}{j})$

$y_r X_r$ என்னும் திருப்புத்திறன் உடைய ஓர் இணையைப் புகுத்தி X_r ஐத் தனக்குத் தானே சமாந்திரமாக 0 இல தாக்குமாறும் $x_r Y_r$ என்னும் ஓர் இணையைப் புகுத்தி Y_r ஐத் தனக்குத்தானே சமாந்திரமாக 0 இலே தாக்குமாறும் இடமாற்றலாம்.

இவ்விணைகள் எதிர்ப்போக்கில் இருக்கின்றன. அவற்றின் திருப்புத்திறன்களினது அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை $Y_r x_r - X_r y_r$ ஆகும்.

இதே மாதிரியாக எல்லா விசைகளுக்கும் கொள்ளலாம். இணைகள் யாவும் கூட்டப்பட்டு தனியொரு இணையாக்கப்படலாம். விளையுள் இணையின் திருப்புத்திறன் G ஆனது எல்லா இணைகளினதும் திருப்புத்திறன்களினதும்

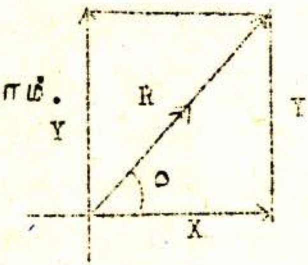
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கட்டுத்தொகையாகும். எனவே

$$G = \sum_{r=1}^{n} (Y_r x_r - X_r y_r)$$

x - அச்சு வழியே தாக்குமாறு இடமாற்றிய எல்லா விசைகளினதும் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை X எனவும், y - அச்சு வழியே தாக்குவன வற்றின் கூட்டுத்தொகையை Y எனவும் கொள்க. என்ன

$$X = \sum_{r=1}^{n} X_r \quad , \quad Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r$$



இவற்றை O இலே தாக்கும் ஒரு தனிவிசை R ஆகக் காட்டலாம்.

$$R = X\underline{i} + Y\underline{j} \qquad R^2 = X^2 + Y^2$$

விளையுள் x - அச்சுடன் θ கோணத்தை ஆக்குகின்றது.

இங்கு தான் $\theta = \frac{Y}{X}$ ஆகும்.

ஆகவே தொகுதியானது தனியொரு விசை R இனாலும், சுழலிணை G இனாலும் மாற்றீடு செய்யப்பட்டுள்ளன.

குறிப்பு :-

(i) R, θ என்பவற்றின் பெறுமதிகள் புள்ளி O வின் தான நிலையில் சாராதன. ஏனெனில் அவை $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்பவற்றின் ஆள்கூறுகளைக் கொண்டிருக்கவில்லை. உண்மையில் R இன் பருமனும் திசையும் $F_1, F_2, F_3, \ldots\ldots F_n$ என்னும் விசைகளின் காவிக்கூட்டலால்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தரப்பட்டுள்ளது. $\underset{\sim}{R} = \sum_{r=1}^{n} \underset{\sim}{F_r}$

(ii) O பற்றிய எல்லா விசைகளினதும் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை G என்பது தெளிவானது. அதன் பெறுதி O இன் தானநிலையில் சார்ந்துள்ளது.

5.7 ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்றிற்கான சமநிலை நிபந்தனைகள்

விசைகளை யாதுமோர் எதேச்சையான புள்ளி O இல் ஒரு தனிவிசை $\underset{\sim}{R}$ ஆகவும், ஓர் இணை G ஆகவும் சுருக்கலாம். பின்பு சமநிலையின் பொருட்டு

$\underset{\sim}{R} = 0$ ஆகவும், $\underset{\sim}{G} = 0$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும்.

$\underset{\sim}{R} = 0$ ஆயின், $X = 0$ ஆகவும், $Y = 0$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும்.

இது பின்வரும் மூன்று நிபந்தனைகளைத் தருகின்றது.

சமாந்திரமாக இல்லாத எவையேனும் இரு திசைகளில் அவ்விசைகளினது துணித்த பகுதிகளின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகைகள் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\text{(i)}\ X = \sum X_r = 0 ; \quad \text{(ii)}\ Y = \sum Y_r = 0$$

யாதுமோர் எதேச்சையான புள்ளிபற்றி விசைகள் அனைத்தினதும் திருப்புத்திறன்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகைகள் பூச்சியமாக வேண்டும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(iii) $\overset{\curvearrowleft}{O}\; G = 0$

5.8 <u>அடிமாற்றம் (Change of base)</u> உற்பத்திக்குப்பதிலாக ஒருபுள்ளி $O^1(x_c, y_c)$ யை அடியாக எடுப்பின், G இன் பெறுமானத்தில், (x,y) என்பவற்றிற்குப்பதிலாக, முறையே $(x_r - x_c), (y_r - y_c)$ என்பவற்றை எழுதி உற்பத்தி O வின் இணையிலிருந்து அவ்வடியின் இணையைப் பெறலாம்.

$$G' = \sum Y_r (x_r - x_c) - \sum X_r (y_r - y_o)$$

$$= \sum (Y_r x_r - X_r y_r) - x_o \sum Y_r + y_o \sum X_r$$

$$\boxed{G^1 = G - x_c Y + y_o X}$$

இங்கு (x_c, y_c) என்பன அடியின் ஆள்கூறுகளாகையால் அவை ஒருமைகளாகும். G - உற்பத்தியைப்பற்றித் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை X, Y என்பன அச்சுக்களுக்குச் சமாந்திரமான விசைகளின் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகைகளாகும்.

5.9 <u>விளையுளின் தாக்கக்கோடு</u> (Line of action of the resultant)

விசைத்தொகுதி சமநிலையிலிராயினும், அதொரு தொடைப்புள்ளி (x_c, y_o) இல்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு விசை R ஆகவும், ஓர் இணை G' ஆகவும் சுருக்கின்

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad , \quad G' = G - x_0 Y + y_0 X$$

<u>வகை (i)</u> $R = 0$ ஆயும், $G \neq 0$ ஆயுமிருப்பின் $X = 0$ உம் $Y = 0$ உம் ஆகும். அத்துடன் அத்தொகுதி ஓர் இணை G இற்குச் சுருங்குகின்றது.

<u>வகை (ii)</u> $R \neq 0$ ஆயின், அமையத் தகுந்தவாறு தேர்ந்தெடுத்து அத் தொகுதி தனிவிசை R இற்குச் சுருங்குமாறு இணை G' ஐ மறையச்செய்யலாம். $G - xY + yX = 0$ என்னும் சமன்பாட்டினை, அமையின் ஆள்கூறுகள் (x_0, y_0) பூர்த்தி செய்யும்போது இந்நிலையே ஏற்படுகின்றது. (அ.து அமை இக் கோட்டின் மீது அமைய வேண்டும்.)

இப்போது x − அச்சுடன் இக்கோடு தான்$^{-1} \frac{Y}{X}$ என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்றது. ஆகவே இது R இற்குச் சமாந்தரமாகும்.

R, அமை (x_0, y_0) இலே தாக்குவதனால், இந்நேர்கோடு R இன் தாக்கக்கோடாகும். எனவே விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\boxed{G - xY + yX = 0}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$-Y = -\sum Y_r = a$ எனவும், $X = \sum X_r = b$ எனவும் $G = c$ எனவும் எழுதின், சமன்பாட்டை

$\boxed{ax + by + c = 0}$ என்னும் வடிவில் எழுதலாம்.

<u>உ.ம் 30</u>

ஒரு தொகுதி n ஒரு தளவிசைகளின், r ஆவது விசையின் கூறுகள் (X_r, Y_r) என்பன ஒரு நிலையான செவ்வக அச்சுக்கள் வழியேயுள்ள. அதன் பிரயோகப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x_r, y_r), $(r = 1,2,3,\ldots n)$ ஆகும். தொகுதியானது தனியொரு விசையால் மாற்றீடு செய்யப்படலாமெனக் கொண்டு அத்தனிவிசையின் தாக்கக்கோடு $ax + by + c = 0$ என நிறுவுக.

இங்கு $a = \sum Y_r$, $b = -\sum X_r$, $c = \sum (Y_r x_r - Y_r x_r)$ ஆகும்.

ABCD என்னும் நாற்பக்கலொன்றின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே (0,0),(2,0),(3,2),(-1,4) என்பனவாகும். $\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{CD}$, $4\overrightarrow{DA}$ என்பன் பூரணமாகக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விசைகள், நாற்பக்கலின் பக்கங்கள் வழியே

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும், தாக்குக்கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

விடை.

(முதற்பகுதி தத்துவத்தில் செய்யப்பட்டுள்ளது)

விசைகள் :

$\overrightarrow{AB} = 2\,\underset{\sim}{i} + 0\,\underset{\sim}{j}$

$2\overrightarrow{BC} = 2\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= 2\,(-2\underset{\sim}{i} + 0\,\underset{\sim}{j}) + (3\,\underset{\sim}{i} + 2\,\underset{\sim}{j})$

$= 2\,\underset{\sim}{i} + 4\,\underset{\sim}{j}$

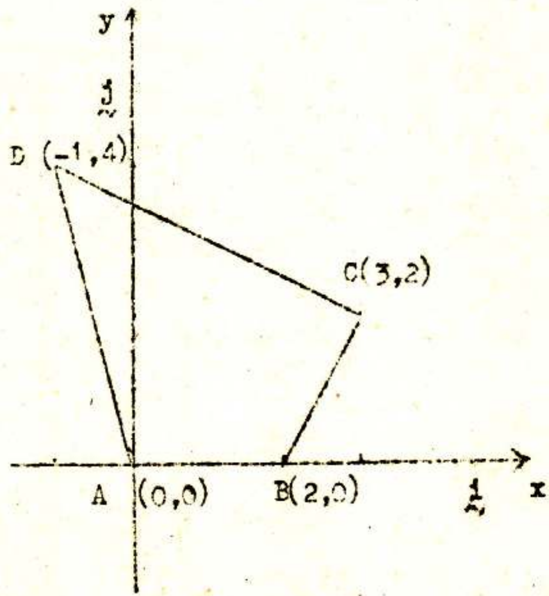
$3\overrightarrow{CD} = 3\,(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$

$= 3\,(-3\,\underset{\sim}{i} - 2\,\underset{\sim}{j}) + (-\underset{\sim}{i} + 4\,\underset{\sim}{j})$

$= -12\,\underset{\sim}{i} + 6\,\underset{\sim}{j}$

$\overrightarrow{4\,DA} = 4\,(\underset{\sim}{i} - 4\,\underset{\sim}{j}) = 4\,\underset{\sim}{i} - 16\,\underset{\sim}{j}$

$X = \sum X_r = -4\,,\ Y = \sum Y_r = -6$



விசைகள்	$\underset{\sim}{F}_r = X_r \underset{\sim}{i} + Y_r \underset{\sim}{j}$		தானக் காவி $x_r i + y_r j$	
	X_r	Y_r	x_r	y_r
$\overrightarrow{AB}$	2	0	0	0
$2\overrightarrow{BC}$	2	4	2	0
$3\overrightarrow{CD}$	− 12	− 16	3	2
$4\overrightarrow{DA}$	4	− 16	− 1	4

விளையுள்

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{52}$$

$$c = G = \sum (X_r y_r - Y_r x_r) = \left(\sum X_r y_r\right) - \left(\sum Y_r x_r\right)$$

$$= (2 \times 0 + 2 \times 0 - 12 \times 2 + 4 \times 4) - (0 \times 0 + 4 \times 2 + 6 \times 3 + - 16 \times -1)$$

$$= -8 - 42 = -50$$

$$b = -\sum X_r = -(-4) = 4 \qquad a = \sum Y_r = -6$$

∴ விசையின் தாக்கக்கோடு $ax + by + c = 0$ ஆகும்.

அ. து. $-6x + 4y - 50 = 0 \Longrightarrow 3x - 2y + 25 = 0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 5

1. $\underset{\sim}{r} = 10\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$ என்பதனை காவிகள் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ என்பவற்றிலுள்ள ஏகபரிமாணச் சார்பாகக் கோவைப்படுத்துக. $\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{b} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{c} = -\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}$ என்பன தரப்பட்டுள்ளன.

   விடை :- $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + 2\underset{\sim}{b} - 2\underset{\sim}{c}$

2. $\underset{\sim}{r} = k\underset{\sim}{i} + 2(1-k)\underset{\sim}{j}$, $r = 3(1-m)\underset{\sim}{i} - m\underset{\sim}{j}$ என்னும் காவிச் சமன்பாடுகளையுடைய கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியினைக் காண்க. இக்கோடுகளை ஒரு வரைப்படத்தில் வரைந்து அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க. மேலும் இக்கோடுகளாலும், X- அச்சினாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

   விடை :- $\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$, தான்$^{-1}$ 7, $\frac{4}{7}$

3. (1, 2, 3); (4, - 1, 5) என்னும் ஆள்கூறுகளையுடைய புள்ளிகளின் ஊடாகச் செல்லும் கோடொன்றின் காவிச்சமன்பாட்டினைக் காண்க. இக்கோடானது (X, Y) தளத்தினைச் சந்திக்கும் புள்ளியினைக் காண்க.

   விடை :- $\underset{\sim}{r} = (1 + 3m)\underset{\sim}{i} + (2 - 3m)\underset{\sim}{j} + (3 + 2m)\underset{\sim}{k}$, $(-3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. A,B,C,D என்னும் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு தளத்தில் கிடப்பதற்கு அவற்றின் தானக்காவிகளான $\underset{\sim}{r}_1$, $\underset{\sim}{r}_2$, $\underset{\sim}{r}_3$, $\underset{\sim}{r}_4$ என்பன $m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2 + m_3\underset{\sim}{r}_3 + m_4\underset{\sim}{r}_4 = \underset{\sim}{0}$ என்பதாகவும் $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0$ என்பதாகவுமிருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக. (i) ABCD ஓர் இணைகரமாக (ii) D, BC இன் நடுப்புள்ளியாக (iii) D ஆனது முக்கோணி ABC இன் மையப்போலியாக இருக்கையில் m_1 , m_2 , m_3 , m_4 என்பவற்றைக் காண்க. $\underset{\sim}{r}_1$, $\underset{\sim}{r}_2$, $\underset{\sim}{r}_3$ என்னும் தானக்காவிகளைக் கொண்டுள்ள புள்ளிகளினூடாகச் செல்லும் தளமொன்றின் சமன்பாடானது $\underset{\sim}{r} = m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2 + (1 - m_1 - m_2)\underset{\sim}{r}_3$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படுமெனக் காட்டுக.

5. A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் $(2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k})$; $(3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k})$; $(-\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k})$ ஆயின்

(i) A யினூடாகச் செல்வதும் BC க்குச் சமாந்திரமுமான கோட்டின் சமன்பாட்டினையும்

(ii) உற்பத்தியினூடாகவும், AB என்பவற்றினூடாகவும் செல்லும் தளத்தினதும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடை :- (i) $(2-4m)\underset{\sim}{i} + (m-1)\underset{\sim}{j} + (3+2m)\underset{\sim}{k}$
(ii) $(2m_1 + 3m_2)\underset{\sim}{i} + (2m_2 - m_1)\underset{\sim}{j} + (3m_1 - 4m_2)\underset{\sim}{k}$

6. உற்பத்தி O விலிருந்து, A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ ஆயின், AB என்னும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\underset{\sim}{r} = t\underset{\sim}{a} + (1-t)\underset{\sim}{b}$ என்பதால் குறிப்பிடப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு t ஒரு பரமானம். BC இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

OA இன் நடுப்புள்ளி L ஐயும், BC இன் நடுப்புள்ளி M ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. OB இன் நடுப்புள்ளியையும் AC இன் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டினை LM சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக் காவியைக் காண்க.

விடை:- $\underset{\sim}{r} = \frac{1}{2}t\underset{\sim}{a} + \frac{1}{2}(1-t)(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$, $\underset{\sim}{r} = \frac{1}{4}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$

7. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் B,C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $8\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k}$, $6\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} + 9\underset{\sim}{k}$ ஆகும். இரு விசைகள் $3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$, $4\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$ என்பன AB, AC வழியே முறையே தாக்குகின்றன. தொகுதி விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் (a) விசை F இன் பருமனை (b) A இன் தானக்காவியை (c) F இன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டினை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

காவி வடிவத்தில் தருக.

விடை:- (a) $7\sqrt{3}$ (b) $2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ (c) $\underset{\sim}{r} = (s+2)\underset{\sim}{i} + (s-1)\underset{\sim}{j} + (s+3)\underset{\sim}{k}$

8. $\sqrt{6}$ ஐத் பருமனுடைய விசையானது கோடு $\underset{\sim}{r} = (s-4)\underset{\sim}{i} + (s+1)\underset{\sim}{j} + (2s+3)\underset{\sim}{k}$ வழியே தாக்கியும் $\sqrt{14}$ ஐதன் பருமனுடைய இரண்டாம் விசையானது கோடு $\underset{\sim}{r} = (t-7)\underset{\sim}{i} + (2t-3)\underset{\sim}{j} + (2-3t)\underset{\sim}{k}$ வழியே தாக்குகின்றது. இவ்விரு கோடுகளும் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக. அவை வெட்டும் புள்ளி P இன் தானக்காவியைக் காண்க.

இவ்விரு விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் அதன் தாக்கக்கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டையும் காண்க. இவ்விரு விசைகளும் 2 கிராம் திணிவுள்ள துணிக்கையில் தாக்குகின்றன. இத்துணிக்கை P இல் ஆரம்பத்தில் ஓய்விலுள்ளது. 4 செக்கன்களின் பின்னர் இத்துணிக்கையின் வேகக்காவியையும், அதன் தானக்காவியையும் காண்க.

விடை:-($-6\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$; $\sqrt{14}$; $\underset{\sim}{r} = (2u-6)\underset{\sim}{i} + (3u-1)\underset{\sim}{j} - (u+1)\underset{\sim}{k}$;
$\underset{\sim}{r} = 4\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{r} = 2\underset{\sim}{i} + 11\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k}$)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

9. விசைகள் $\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$, $-2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j}$ என்பன முறையே $2\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$, $4\underset{\sim}{j}$, $-\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{j}$ எனும் தானக்காவிகளையுடைய புள்ளிகளினூடாகத் தாக்குகின்றன. இத்தொகுதி விசைகள் ஓர் இணைக்குச் சமனென நிறுவுக. இவ்விணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

விடை (கடிகாரத்திசைக்கு எதிர்ப்போக்கில் 10)

10. மூன்று விசைகளைக் கொண்டுள்ள ஒரு தொகுதி விசைகளில் $\underset{\sim}{F}_1 = \underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{F}_2 = \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$ என்பன முறையே $5\underset{\sim}{i} - 10\underset{\sim}{j} + 10\underset{\sim}{k}$, $4\underset{\sim}{i} - 7\underset{\sim}{j} + 7\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவிகளையுடைய புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. மூன்றாவது விசை $\underset{\sim}{F}_3$ ஆகும். (a) தொகுதியானது சமநிலையிலிருப்பின் $\underset{\sim}{F}_3$ இன் பருமனையும் அதன் தாக்கக்கோட்டின் காவிச் சமன்பாட்டையும் காண்க.

(b) $\underset{\sim}{F}_3$ உற்பத்தியினூடாகத் தாக்குவதாயும், தொகுதி ஒரு இணைக்கு ஒடுங்குவதாயுமிருப்பின் அதன் பருமனைக் காண்க.

விடை :- (a) $\sqrt{21}$, $\underset{\sim}{r} = 4\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j} + 9\underset{\sim}{k} + t(-\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k})$,
(b) $\sqrt{798}$

11. (i) திணிவுகள் 5m, 3m, 2m என்பன முறையே $2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{k}$, $-8\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k}$, $7\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 7\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவிகளையுடைய புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. இப்புள்ளித்திணிவுகளின் திணிவு மையத்தின் தானக்காவியினைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) ஆதானக்காவியுடைய துணிக்கையொன்று பின்வரும் ஐந்து விசைகளால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. $\underset{\sim}{P} = 7\underset{\sim}{i} - 15\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{Q} = 5\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j} - 7\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{R_1}$ என்பது கோடு $\underset{\sim}{r} = 2\underset{\sim}{i} + a(3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{k})$ வழியேயும்

$\underset{\sim}{R_2}$ என்பது கோடு $\underset{\sim}{r} = 2\underset{\sim}{i} + b(2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})$ வழியேயும்

R_3 என்பது கோடு $r = 2i + c(-3i + 4j)$ வழியேயும்

தாக்குகின்றன. $\underset{\sim}{R_1}, \underset{\sim}{R_2}, \underset{\sim}{R_3}$ என்பவற்றின் பருமன்களைக் காண்க.

விடை:- (i) $(-8\underset{\sim}{i} - 30\underset{\sim}{j} + 39\underset{\sim}{k})/10$; (ii) 15, 9, 25)

****

அத்தியாயம் 6

மாதிரி விடைகள்

டிசம்பர் 1968 தொடக்கம் ஏப்ரில் 78 வரையுள்ள பரீட்சை வினாக்களின் விடைகள்

6.1 வினா (1/டிசம்பர் 1968)

காவி என்றால் என்ன? $\underset{\sim}{a}$ காவியொன்றினைக் குறிப்பின், காவி $\lambda \underset{\sim}{a}$ இனை வரைவிலக்கணப்படுத்துக. இங்கு λ ஓர் எண்.

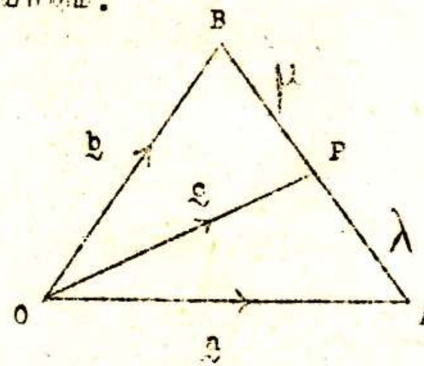
உற்பத்தி தொடர்பாக, A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானநிலைகள் காவிகள் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றால் முறையே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன. AB இனை $\lambda : \mu \ (\lambda + \mu \neq 0)$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P இன் தானநிலை, காவி $\dfrac{\mu \underset{\sim}{a} + \lambda \underset{\sim}{b}}{\lambda + \mu}$ என்பதால் குறிப்பிடப்படுமெனக் காட்டுக.

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ஆயும் $\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b} + \gamma \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ ஆயுமிருப்பின் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ என்பவற்றால் குறிப்பிடப்படும் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன என உய்த்தறிக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>விடை:-</u>

<u>ஒரு காவி</u>   ஒரு காவி என்பது பருமனும், வெளியில் திசையுமுள்ள ஒரு கணியமாகும். $\lambda \underset{\sim}{a}$ என்பது λ மடங்கு $\underset{\sim}{a}$ இன் பருமன் கொண்ட பருமனைக் கொண்டதும் λ நேராய் அல்லது எதிராய் இருக்கற்கேற்ப $\underset{\sim}{a}$ இன் திசையில், அல்லது எதிர்த்திசையில் திசை கொண்டதுமான காவியாகும்.



$\lambda - \mu$ தேற்றம்:-   விரிவான விளக்கம்

4.1 இல் தரப்பட்டுள்ளது. உய்த்தறிதல்:-

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\mu \underset{\sim}{a} + \lambda \underset{\sim}{b}}{\lambda + \mu}$$

P இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{c}$ எனக் குறிப்பிடுக.

$$\underset{\sim}{c} = \frac{\mu \underset{\sim}{a} + \lambda \underset{\sim}{b}}{\lambda + \mu}$$

எல்லாம் ஒரு பக்கத்தில் கொண்டு வரப்படுகையில்

$$\mu \underset{\sim}{a} + \lambda \underset{\sim}{b} - (\lambda + \mu) \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$$

$\mu = \alpha$ எனவும் $\lambda = \beta$ எனவும் $-(\lambda + \mu) = \gamma$ எனவும் எடுக்கையில்

$\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b} + \gamma \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ மேலும் $\alpha + \beta + \gamma = \mu + \lambda - (\lambda + \mu) = 0$

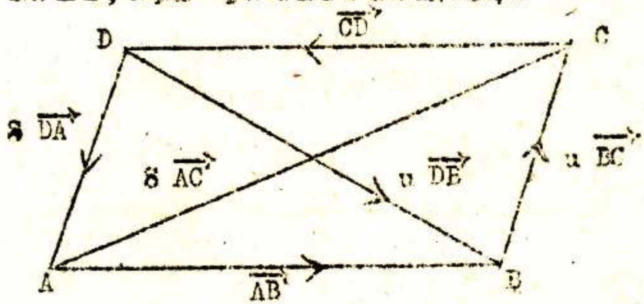
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

C ஆனது AB ஐ $\alpha : \beta$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

$\therefore$ புள்ளிகள் A, B, C என்பன ஒரே கோட்டிலுள்ளன.

6.2 வினா (2/டிசம்பர் 1968)

ABCD என்பது ஓர் இணைகரம், ஒரு விசைத்தொகுதி பருமனிலும் திசையிலும், நிலையிலும் $\lambda \overrightarrow{AB}, \mu \overrightarrow{BC}, \nu \overrightarrow{CD}, \delta \overrightarrow{DA}, \mu \overrightarrow{DB}, \delta \overrightarrow{AC}$ என்
$+ \delta = 0$
பவற்றாலே குறிக்கப்படுகின்றன. $\lambda+\mu \; \nu/\delta$ எனின், அவ்விசைத்தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக. $\lambda + \mu - \nu + \delta \neq 0$ எனின் அத்தொகுதி ஒரு தனிவிசைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி, அதன் தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.



விடை:-

$\delta \overrightarrow{AC} = \delta \overrightarrow{AB} + \delta \overrightarrow{BC}$

$\mu \overrightarrow{DB} = \mu . \overrightarrow{DC} + \mu . \overrightarrow{DA}$

தரப்பட்ட தொகுதிவிசைகள் $\underset{\sim}{R}$ இற்குச் சமமாகும்.

$$\underset{\sim}{R} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC} + \nu \overrightarrow{CD} + \delta \overrightarrow{DA} + \mu \overrightarrow{DB} + \delta \overrightarrow{AC}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{BC} + \nu\,\overrightarrow{CD} + \delta\,\overrightarrow{DA} + \mu\,\overrightarrow{DC} + \mu\,\overrightarrow{DA} + \delta\,\overrightarrow{AB} + \delta\,\overrightarrow{BC}$$

$$= (\lambda + \mu + \delta)\overrightarrow{AB} + (\mu - \delta - \mu + \delta)\,\overrightarrow{BC} + \nu\,\overrightarrow{CD}$$

$$= (\lambda + \mu + \delta)\,\overrightarrow{AB} + \nu\,\overrightarrow{CD}$$

$$= (\lambda + \mu + \delta - \nu)\,\overrightarrow{AB}$$

$(\lambda + \mu + \delta - \nu) = 0$ ஆயின் $\;.\; \underset{\sim}{R} = 0\,(\overrightarrow{AB}) = \underset{\sim}{0}$

A பற்றிய தொகுதியின் திருப்புத்திறன் G ஆனது பூச்சியமல்ல எனக் கொள்க. அப்படியாயின் தொகுதியானது ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குகின்றது. அல்லது

$\lambda + \mu + \delta - \nu = 0$ ஆயின் $\lambda + \mu + \delta = \nu$ ஆகும். தொகுதியானது $\nu\,\overrightarrow{AB}$ என்னுமொரு விசைக்கும் $\overrightarrow{CD}$ என்னும் விசைக்கும் ஒடுங்குகின்றது. இவை பருமனில் சமமானவை, ஆனால் சமாந்தரக்கோடுகள் வழியே எதிர்த்திசைகளில் தாக்குகின்றன. எனவே தொகுதியானது ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குகின்றது.

$\lambda + \mu + \delta - \nu \neq 0$ ஆயின் விளையுளானது $(\lambda + \mu + \delta - \nu)\,\overrightarrow{AB}$ ஆகும்.

$$= (\lambda + \mu + \delta - \nu)\,\overrightarrow{XY}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

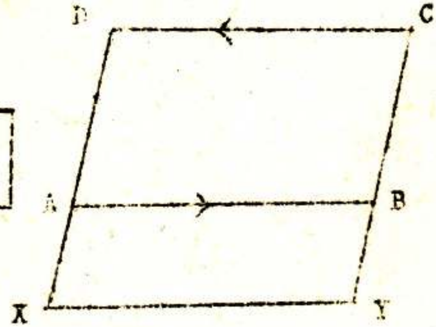
இங்கு $\overrightarrow{XY}$ ஆனது $\overrightarrow{AB}$ இற்குச் சமனும் சமாந்தரமுமாகும்.

∴ விளையுளின் தாக்கக்கோடு XY ஆனது

நீட்டப்பட்ட DA, CB என்பவற்றை

$$\boxed{\frac{AX}{DX} = \frac{BY}{CY} = \frac{\nu}{\lambda + \mu + \delta}}$$

என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.



6.3 <u>வினா (1/டிசம்பர் 1969)</u>

λ, μ என்பன எண்ணிப்பரமானங்களாயும், $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பன பூச்சியமல்லாத யாதொரு சோடிக் காவிகளாயுமிருந்தால் $\lambda \underset{\sim}{a} + \mu \underset{\sim}{b}$ என்பது பூச்சியக் காவி 0 இற்கு எந்நிபந்தனைகளின் கீழ் ஒருங்குமெனக் கூறுக.

OACB என்பது ஓர் இணைகரம். D என்பது பக்கம் AC இன் நடுப் புள்ளி; E என்பது மூலைவிட்டம் AB இனையும், கோடு OD இனையும் வெட்டும் புள்ளி. $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$ ஆயும், $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}$ ஆயுமிருந்தால், $\overrightarrow{OD}$ ஐ $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ இல் ஒரு கோவையாக உணர்த்தி, AE = 1/3 AB எனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

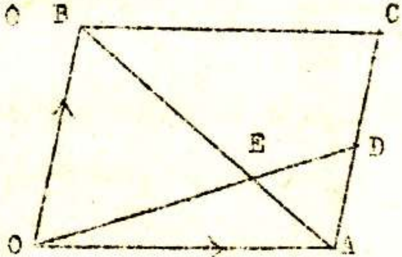
<u>விடை</u>:- $\lambda \underset{\sim}{a} + \mu \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$ ஆவதற்கு நிபந்தனைகளானவை :-

(i) $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன சமாந்திரமாகவும், $\underset{\sim}{a} = K \underset{\sim}{b}$ ஆகவுமிருப்பின்

$$\lambda K \underset{\sim}{b} + \mu \underset{\sim}{b} = (\lambda K + \mu) \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$$

$\underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$ என்பதால் $\lambda K + \mu = 0$ $\quad \therefore \underline{\underline{K = -\dfrac{\mu}{\lambda}}}$

(ii) $\lambda = 0$ ஆயின் எந்தவொரு $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ இற்கும் $\mu = 0$



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}/2$$

$BE/EA = \lambda/1$ எனவாயின்

$$OE = \frac{\lambda \underset{\sim}{a} + 1.\underset{\sim}{b}}{\lambda + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

மேலும் $\overrightarrow{OE} = \dfrac{OE}{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = \mu \overrightarrow{OD}$

$$= \mu (\underset{\sim}{a} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{b}) \ldots (2)$$

இங்கு $\mu = \dfrac{OE}{OD}$

(1) இலும் (2) இலுமிருந்து $\dfrac{\lambda \underset{\sim}{a} + \mu \underset{\sim}{b}}{\lambda + 1} = \mu (\underset{\sim}{a} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{b})$, $\underset{\sim}{a}$ இனதும் $\underset{\sim}{b}$ இனதும் குணகங்களைச்சமன்செய்கையில் $\dfrac{\lambda}{\lambda + 1} = \mu$ .... (3)

$$\frac{1}{\lambda + 1} = \frac{\mu}{2} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(3)/(4) \quad \lambda = 2 \; ; \; \mu = 2/3$

$\therefore$ BE/AE = 2 எனவே $\boxed{\overrightarrow{AE} = (1/3)\overrightarrow{AB}}$

6.4 வினா (2/டிசம்பர் 1969)

ஒரு செங்கோண அச்சுத்தொகுதியின் அச்சுக்கள் OX, OY இற்குச் சமாந்தரமான அலகுக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ ஆல் குறிக்கப்படுகின்றன. $-6\underset{\sim}{i}, -\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}, 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$ என்பவற்றைக் காவிகளாகக் கொண்டுள்ள புள்ளிகளிலே முறையே $3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$, $2\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$, $P\underset{\sim}{i} + Q\underset{\sim}{j}$ என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. பின்வரும் வகைகளிலே P, Q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(அ) அவ்விசைத்தொகுதி ஓர் இணை G இற்கு ஒடுங்கும்.

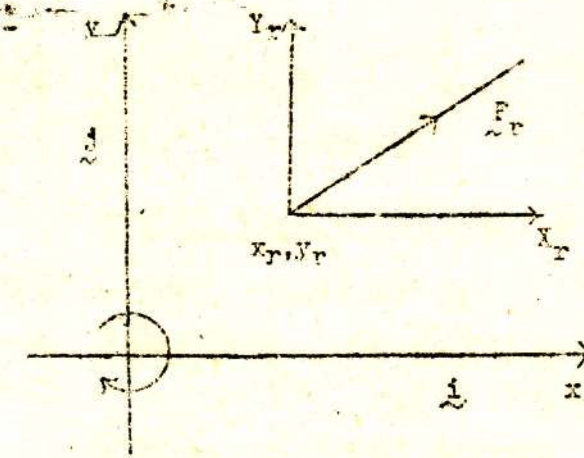
(ஆ) அவ்விசைத்தொகுதி புள்ளி $\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ இலே ஒரு தனிவிசை $Y\underset{\sim}{j}$ இற்கு ஒடுங்கும். G, Y ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

விடை:-

விசைத்தொகுதியில் r ஆவது விசை $\underset{\sim}{F_r} = X_r\underset{\sim}{i} + Y_r\underset{\sim}{j}$ என்பது $(x_r\underset{\sim}{i} + Y_r\underset{\sim}{j})$ என்னும் காவப்புள்ளியிலே தாக்குகின்றது. இங்கு r = 1, 2, 3, 4 ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

X_r	Y_r	x_r	y_r
3	1	-6	0
2	4	-1	-4
1	5	1	2
P	Q	2	3



விசைகள் தனி விசை $\underset{\sim}{F} = X\underset{\sim}{i} + Y\underset{\sim}{j}$ இற்கும், இணை G இற்கும் ஒருங்குகின்றன.

$$X = \sum X_r = P + 6 \; ; \quad Y = \sum Y_r = Q + 10$$

O

$$G = \sum (X_r y_r - Y_r x_r)$$

$$= \sum X_r y_r - \sum Y_r x_r$$

$$= (3 \times 0 + 2 \times -4 + 1 \times 2 + P \times 3) - (1 \times -6 + 4 \times -1 + 5 \times 1 + Q \times 2)$$

$$= (3P - 6) - (-5 + 2Q) = \underline{\underline{3P - 2Q - 1}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>வகை (a)</u> தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குவதற்கு

$X = 0$, அ.து. $P + 6 = 0$

$\therefore \underline{\underline{P = -6}}$

$Y = 0$, அ.து $Q + 10 = 0$; $\underline{\underline{Q = -10}}$

இங்கு $G = 3P - 2Q - 1 = 3\times -6 - 2\times -10 - 1 = 1$ //

எனவே $\boxed{P = -6,\ Q = -10,\ G = 1}$

<u>வகை (b)</u> தொகுதியானது, $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ என்னும் புள்ளியில். அ.து ($C \equiv 1, 1$) தனிவிசை $Y\underset{\sim}{j}$ இற்கு ஒடுங்குகையில்,

$X = P + 6 = 0 \qquad Y = Q + 10$

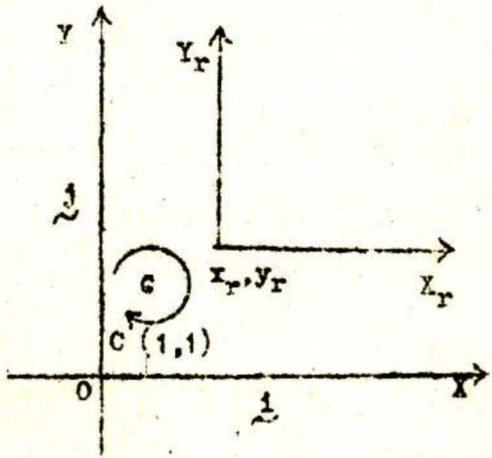
$\underline{\underline{P = -6}}$

$C(1, 1)$ பற்றிய திருப்புத்திறன்

$$= \sum \left\{ X_r (y_r - 1) - Y_r (x_r - 1) \right\}$$

$$= \sum \left[X_r y_r - Y_r x_r + Y_r - X_r \right]$$

$$= \sum (X_r y_r - Y_r x_r) + \sum Y_r - \sum X_r$$



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$= G + Y - X = 0$ (ஏனெனில் தொகுதியானது சவ்விசைக்கு ஒடுங்குவதாகும்)

$$3P - 2Q - 1 + Q + 10 = 0$$

$$3x - 6 - Q + 9 = 0$$

$$Q = -9 \therefore Y = Q + 10 = -9 + 10 = 1$$

$$\boxed{P = -6, \quad Q = -9, \quad Y = 1}$$

6.5 <u>வினா:-</u> <u>(3/டிசம்பர் 1969)</u>

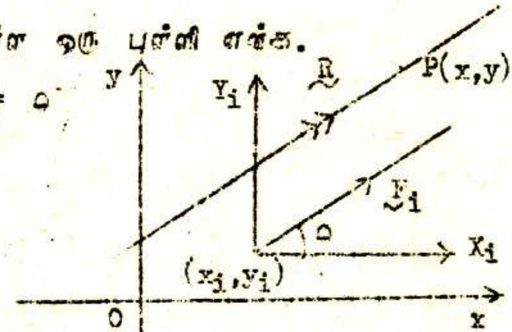
ஒரு தளத்திலுள்ள செங்கோண அச்சுக்கள் OX, OY குறித்து ஆள் கூறுகள் (x_1, y_1) உடைய புள்ளிகள் P_i இலே பருமன்கள் F_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ ஐக் கொண்டுள்ள சமாந்திரவிசைகள் அத்தளத்திலே தாக்குகின்றன. ஒவ்வொருவிசையும் Ox உடன் θ என்னும் அதே கோணத்திலே சாய்ந்துள்ளது. அவ்விசைகளின் விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக. θ ஆனது மாறும்பொழுது, அத்த விளையுளானது அத்தளத்திலே நிலைத்த ஒரு புள்ளி G இனூடாகச் செல்லுமென உய்த்தறிக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு தந்த தள வடரின் புவியீர்ப்பு மையத்தினை ~~டைக்காந்தத்~~ இம்முடிவை ஆதாரமாகக் கொண்ட எளிய பரிசோதனையொன்றை, சுருக்கமான ஒரு விளக்கத்துடன் விவரிக்குக.

<u>விடை:-</u>

P(x,y) என்பது விளையுள் $\underset{\sim}{R}$ இலே உள்ள ஒரு புள்ளி என்க.



$Y_i = F_i$ சைன் θ; $X_i = F_i$ கோசைன் θ

$$\overset{\curvearrowleft}{P}\ \sum \Big[F_i \text{ கோசை } \theta\ (y - y_i) - F_i \text{ சைன் } \theta\ (x - x_i) \Big] = 0$$

முழுவதையும் $\sum \underset{\sim}{F}_i$ இனால் பிரிக்கையில்

$$\left[Y - \frac{\sum F_i\ Y_i}{\sum F_i} \right] \text{ கோசை } \theta - \left[x - \frac{\sum F_i\ x_i}{\sum F_i} \right] \text{ சைன் } \theta = 0$$

இதுவே தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடாகும். இக்கோடானது நிலைத்த புள்ளி

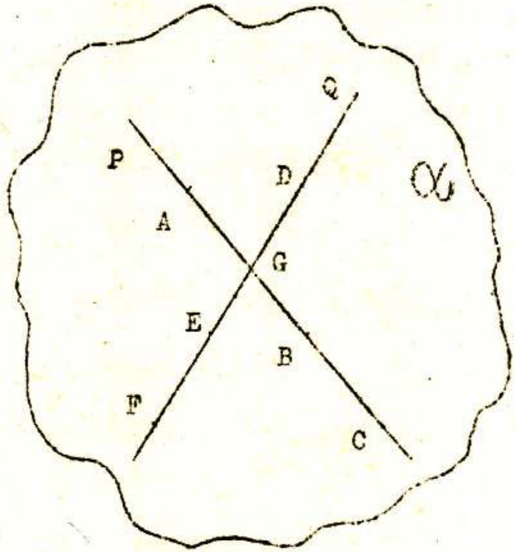
$$G \equiv \left[\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i},\quad \bar{y} = \frac{\sum F_i\ y_i}{\sum F_i} \right]$$

இனூடாக θ இன் எப்பெறுமானங்கட்கும் செல்வதாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எளிய பரிசோதனை:

அடர் α வுடன் குண்டு நூலொன்றையும் P இல் கட்டி, சுயமாக நிலைக்குத்துக் களத்தில் இயங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் ஓய்வு நிலையில் குண்டுநூலின் கான நிலையை A, B, C என்னும் புள்ளிகளால் குறிப்பிடுக. இம்முறையையே, பிறிதோர் புள்ளி Q வில் கட்டி அவற்றின் ஓய்வு நிலையில் குண்டுநூலின் கானநிலையை D, E, F என்னும் புள்ளிகளால் குறிப்பிடுக. புள்ளிகள் A, B, C என்பவற்றையும், D, E, F என்பவற்றையும் இணைக்கவும். ABC, DEF என்னும் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி G தான், அடரின் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.



விளக்கம்:-

அடரின் நிறையானது ஒரு புவியீர்ப்பு விசையாகும். α விலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள நிலைக்குத்தான சமாந்திர விசைத்தொகுதியாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

சமநிலைக்கு விளையுளானது நிலைக்குத்து விசையாயும் P ஊடாகச் செல்வதாயும் இருக்கும். அ.து புவியீர்ப்புமையமானது P ஊடாகச்செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ளது. அதுபோன்றே அடரானது Q வினூடு தொங்கவிடப்படுகையிலும், விளையுளானது ஒரு நிலைக்குத்து விசையாயும் Q வினூடு செல்வதாயுமிருக்கும். அ.து. புவியீர்ப்பு மையமானது Q வினூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டில் கிடக்கும். எனவே, P,Q ஊடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி G தான் அடரின் புவியீர்ப்பு மையமாகும்.

6.6 வினா:- (1/டிசம்பர் 1970)

(i) அலகுக்காவி $\underset{\sim}{I}$ ஒன்றிற்கும், (ii) $\lambda \underset{\sim}{I}$ இற்கும் வரைவிலக்கணம் கூறுக. இதில் λ ஆனது ஒரு நேரெண்ணியாகும். செங்கோண அச்சுத் தொகுதியொன்றின் ox, oy எனும் அச்சுகளிற்குச் சமாந்தரமான அலகுக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$ ஆகும். தளம் oxy இலிருக்கும் A எனும் புள்ளியொன்றின் தானக்காவி $\overrightarrow{OA}$ ஐ $\underset{\sim}{r} = a$ (கோசை $\alpha\, \underset{\sim}{i}$ + சைன் $\alpha\, \underset{\sim}{j}$) என எழுதல் முடியுமெனக் காட்டுக. இங்கே $a = OA$, $A\hat{O}X = \alpha$ ஆகும்.

OA ஐ தளம் oxy மீது புள்ளி O பற்றி 90° ஆல் இடஞ்சுழியாகத் திருப்பி OA' என்பது பெறப்படுகின்றது. A' இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OA'}$ ஐ பெறுக.

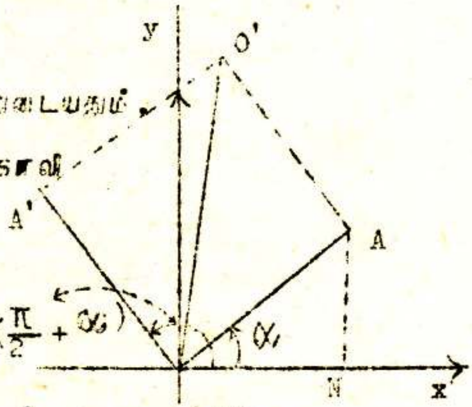
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இதிலிருந்து சதுரம் OAO'A' இனுடைய உச்சி O' இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OO'}$ ஐக் காண்க.

விடை :-

(1) அலகுக்காவி I என்பது ஒரு அலகுப்பருமனைக் கொண்ட காவியாகும். $|\underset{\sim}{I}| = 1$

(11) காவி $\lambda \underset{\sim}{I}$ $(\lambda > 0)$ என்பது λ பருமனுடையதும், அலகுக்காவி $\underset{\sim}{I}$ இன் திசையையுடையதுமான காவியாகும்



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NA}$

$$\underset{\sim}{r} = a \text{ கோசை } \alpha \, \underset{\sim}{i} + a \text{ சைன் } \alpha \, \underset{\sim}{j}$$

$$r = a(\text{கோசை } \alpha \, \underset{\sim}{i} + \text{சைன் } \alpha \, \underset{\sim}{j})$$

Ox உடன் OA' ஆனது $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ என்னும் கோணத்தை அமைக்கின்றது.

$$\overrightarrow{OA'} = a \text{ கோசை}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \underset{\sim}{i} + \text{சைன் } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \underset{\sim}{j}$$

$$= a\left[-\text{சைன் } \alpha \, \underset{\sim}{i} + \text{கோசை } \alpha \, \underset{\sim}{j}\right]$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\overrightarrow{OO'}$ என்றும் காவியானது $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}$ a என்ற பருமனைக்கொண்டதும், Ox உடன் கோணம் $O'Ox = (45^\circ + \alpha)$ அமைப்பதுமாகும்.

எனவே $\overline{OO^1}$ இனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\overrightarrow{OO'} = \sqrt{2}\,a \left[\text{கோசை}(45^\circ + \alpha)\underset{\sim}{i} + \text{சைன்}(45^\circ + \alpha)\underset{\sim}{j} \right]$$

$$= \sqrt{2}\,a \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{கோசை}\alpha - \text{சைன்}\alpha)\underset{\sim}{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{கோசை}\alpha + \text{சைன்})\underset{\sim}{j} \right]$$

$$= a \left[(\text{கோசை}\alpha - \text{சைன்}\alpha)\underset{\sim}{i} + (\text{கோசை}\alpha + \text{சைன்}\alpha)\underset{\sim}{j} \right]$$

<u>மாற்றுமுறை</u> $\overrightarrow{OO^1}$ ஆனது பின்வருமாறு கண்டு கொள்ளலாம்.

$$\overrightarrow{OO^1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO'}$$

$$= \overline{OA} + \overline{OA^1}$$

$$= a\,(\text{கோசை}\alpha\,\underset{\sim}{i} + \text{சைன்}\alpha\,\underset{\sim}{j}) + a(-\text{சைன்}\alpha\,\underset{\sim}{i} + \text{கோசை}\alpha\,\underset{\sim}{j})$$

$$= a\,(\text{கோசை}\alpha - \text{சைன்}\alpha)\underset{\sim}{i} + (\text{கோசை}\alpha + \text{சைன்}\alpha)\underset{\sim}{j}$$

6.7 <u>வினா (2/டிசம்பர் 1970)</u>

m_1, m_2 எனும் திணிவுகளுடைய P_1, P_2 எனும் துணிக்கைகளின் திணிவுமையமானது P_1P_2 ஐ $m_2 : m_1$ என்னும் விகிதப்படி பிரிக்கிறதெனக்காட்டுக.

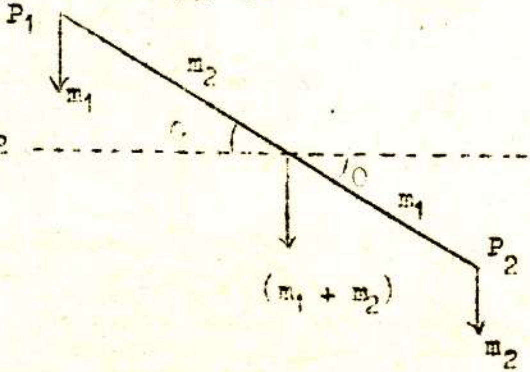
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

O எனும் புள்ளியொன்றைக் குறித்து P_1, P_2 என்பவற்றின் தானக் காவிகள் $\underset{\sim}{r}_1, \underset{\sim}{r}_2$ ஆயின் திணிவுமையத்தின் தானக்காவியை $\underset{\sim}{r} = (m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2)/(m_1+m_2)$ என எழுதல் முடியுமெனக் காட்டுக.

தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டால் அல்லது வேறுமுறையால் n எனும் எண்ணிக்கையுடைய துணிக்கைகளின் திணிவுமையம் G இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{r}$ ஐ

$$\underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

எனும் தொடர்பால் தருதல் முடியுமெனக் காட்டுக. இதிலிருந்து $\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{P_iG} = \underset{\sim}{0}$ ஆகுமென உய்த்தறிக.



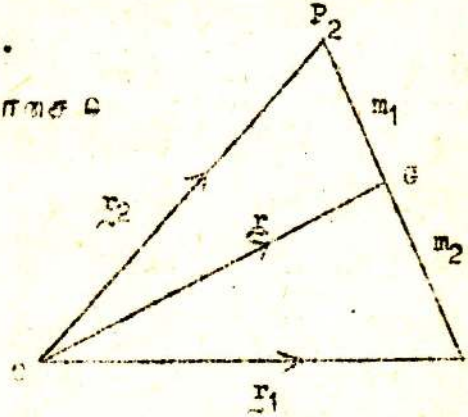
விடை:-

P_1 இலுள்ள m_1 உம், P_2 இலுள்ள m_2 உம் இரு சமாந்தர விசைகளாகும்.

அவற்றின் விளையுள் $(m_1 + m_2)$ G இல் இருக்குமாயின் $\frac{P_1G}{GP_2} = \frac{m_2}{m_1}$ ஆகும்.

எனவே திணிவுமையம் G ஆனது P_1P_2 ஐ $m_2 : m_1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



<u>மறுமுறை:</u>

G ஆனது திணிவுமையமெனக்.

$$\circlearrowleft G \quad m_2 \, GP_2 \text{ கோசை } \theta = m_1 \, P_1G \text{ கோசை } \theta$$

கோசை $\theta \neq 0$, $m_2 \cdot GP_2 = m_1 \cdot P_1G$

$$\therefore \boxed{\frac{P_1G}{P_2G} = \frac{m_2}{m_1}}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2} = -\underset{\sim}{r}_1 + \underset{\sim}{r}_2$$

$$\overrightarrow{P_1G} = \frac{P_1G}{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (-\underset{\sim}{r}_1 + \underset{\sim}{r}_2)$$

$$\therefore \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1G} \; ; \quad \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(-\underset{\sim}{r}_1 + \underset{\sim}{r}_2)$$

$$\therefore \underset{\sim}{r} = \frac{m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_1 - m_2\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\underset{\sim}{r}_1 + m_2\underset{\sim}{r}_2}{m_1 + m_2}$$

<u>n துணிக்கைகளின் திணிவுமையம் G இன் தானக்காவியானது</u>

$$\underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i\underset{\sim}{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$ <u>என்பதால் தரப்படுமென நிறுவுக.</u>

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தொகுத்தறி முறை நிறுவல் :-

$$i = 1 \text{ ஆயின் } \underset{\sim}{r} = \frac{m_1 \underset{\sim}{r}_1}{m_1} = \underset{\sim}{r}_1$$

ஒரு துணிக்கைக்கு, திணிவுமையத்தின் தானநிலையும், துணிக்கையின் தானநிலையும் ஒன்றாகும்.

$$i = 1, 2 \text{ ஆயின் } \underset{\sim}{r} = \frac{m_1 \underset{\sim}{r}_1 + m_2 \underset{\sim}{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ ஆகும்.}$$

இது உண்மையாகும். முதற் பகுதியில் நிறுவப்பட்டுள்ளது.

$$i = n \text{ ஆயிருக்கையில் } \underset{\sim}{r} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underset{\sim}{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ உண்மையெனக்கொள்க.}$$

இப்பொழுது $i = n+1$ ஆயிருக்கையில், $(n+1)$ துணிக்கைகளின் திணிவுமையம் $\underset{\sim}{r}'$ என்னும் தானக்காவியில் உள்ளதெனக் கொள்வோமானால், அ.து $\underset{\sim}{r}_{n+1}$ இலுள்ள m_{n+1} இற்கும் $\underset{\sim}{r}$ இலுள்ள $\sum_{i=1}^{n} m_i$ இற்குமுள்ள திணிவுமையம்

$$\underset{\sim}{r}^1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \underset{\sim}{r} + m_{n+1} \underset{\sim}{r}_{n+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) + m_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i + m_{n+1} r_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} m_i + m_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இது தரப்பட்ட முடிவைப் போன்றதாகும். ∴ தரப்பட்டதொடர்பு $i = n+1$ இருக்கையிலும் உண்மையாகும். ∴ தொகுத்தறிவு முறையால் இம்முடிவு n இன் எல்லாப் பெறுமானங்கட்கும் உண்மையாகும்.

உய்த்தறிதல் $\overrightarrow{P_i G} = \overrightarrow{P_i O} + \overrightarrow{OG} = -\underset{\sim}{r_i} + \underset{\sim}{r}$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{P_i G} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{r_i}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \underset{\sim}{r} - \sum_{i=1}^{n} m_i \underset{\sim}{r_i}$$

$$= \underset{\sim}{r} \sum_{i=1}^{n} m_i - \underset{\sim}{r} \sum_{i=1}^{n} m_i = \underset{\sim}{0} \qquad \boxed{\sum m_i \overrightarrow{P_i G} = \underset{\sim}{0}}$$

அல்லது G ஐ உற்பத்தியாகக் கொள்க. ஆயின் $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$

$$\underset{\sim}{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \underset{\sim}{r_i}}{\sum_{i=1} m_i} = 0 \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} m_i \underset{\sim}{r_i} = \underset{\sim}{0}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{P_i G} = \underset{\sim}{0}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6.8 வினா (3/டிசம்பர் 1970)

Ox, Oy எனும் அச்சுகளுக்குச் சமாந்தரமாக முறையே X, Y எனும் விசைக் கூறுகளைக்கொண்ட விசையொன்றை $\underset{\sim}{F} = X\underset{\sim}{i} + Y\underset{\sim}{j}$ எனும் காவியால் குறித்தல் முடியும். இதில் $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$ என்பவை Ox, Oy இற்குச் சமாந்தரமான அலகுக்காவிகளாகும்.

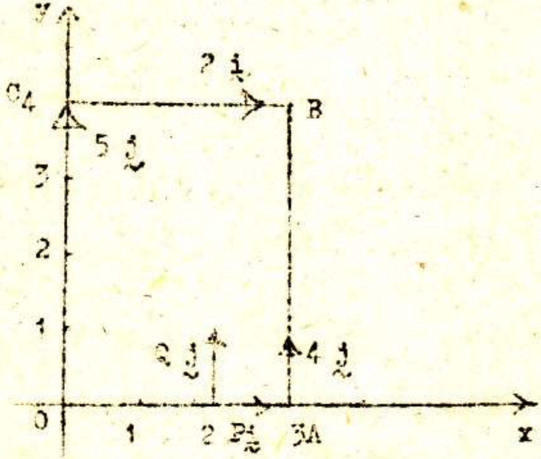
ஒரு விசைத்தொகுதியானது ஒரு செவ்வகத்தின் (0,0), (3,0), (3,4), (0,4) எனும் உச்சிகளிலே முறைப்படி தாக்குபவையான $3\underset{\sim}{i}$, $4\underset{\sim}{j}$, $2\underset{\sim}{i}$, $5\underset{\sim}{j}$ எனும் விசைகளையும் புள்ளி (a,0) இல் ா தாக்கும் $P\underset{\sim}{i} + Q\underset{\sim}{j}$ எனும் ஐந்தாம்விசை ஒன்றையும் கொண்டதாகும். உச்சிகள் (0,0), (3,0), (3,4) ஆனவைபற்றி இவ் விசைத்தொகுதியின் இடஞ்சுழியான திருப்பங்கள் முறையே m_1, m_2, m_3 ஆகும். P, Q, a என்பவற்றை m_1, m_2, m_3 ஆனவை சார்பாகக் காண்க.

(a) (i) $m_1 - m_2 = 27$ ஆயிருக்கும்போது ஐந்தாம்விசையானது அச்சு Ox வழியேயிருக்குமெனக் காட்டுக. (ii) $m_3 - m_2 = 20$ ஆயிருக்கும்போது ஐந்தாம்விசையானது அச்சு Oy இற்குச் சமாந்தரமாயிருக்குமெனக்காட்டுக.

(b) இவ்விசைத்தொகுதியானது சமநிலையிலிருக்கும்போது ஐந்தாம்விசையின் பருமனையும் திசையையும் தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$F = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$		உச்சிகளின் ஸ்தானநிலை	
X	Y	x	y
3	0	0	0
0	4	3	0
2	0	3	4
0	5	●	4
P	Q	a	0



● $\quad m_1 = Q.a + 4.3 - 2.4 \Longrightarrow m_1 = aQ + 4 \quad \ldots\ldots (1)$

A $\quad m_2 = -2.4 - 5.3 - Q.(3-a) \Longrightarrow m_2 = (a-3)Q - 23 \quad \ldots (2)$

B $\quad m_3 = -5.3 + 3.4 - Q(3-a) + P.4 \quad = 4P + (a-3)Q - 3 \quad \ldots (3)$

(1), (2), (3) என்பவற்றைத்தீர்க்கையில்

$$P = \frac{m_3 - m_2}{4} - 5 \; ; \; Q = \frac{m_1 - m_2}{3} - 9 \; ; \; a = \frac{3m_1 - 12}{m_1 - m_2 - 27}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(a)(i) $m_1 - m_2 = 27$ ஆயிருக்கையில் $Q = 0$

∴ ஐந்தாம்விசை $\underset{\sim}{F}$, 0x வழியே தாக்கும்.

(ii) $m_3 - m_2 = 20$ ஆயிருக்கையில் $P = 0$

∴ $\underset{\sim}{F}$ ஆனது Oy இற்குச் சமாந்திரமாகும்.

சமநிலைக்கு, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ஆகும்.

அ.து $aQ + 4 = 0$ .... (4)

$(a-3)Q - 23 = 0$ .... (5)

$4P + (a-3)Q - 3 = 0$ ... (6)

(4), (5), (6) என்பவற்றைத்தீர்க்கையில் ,

$P = -5$, $Q = -9$, $a = 4/9$. ∴ $\underset{\sim}{F} = -5\underset{\sim}{i} - 9\underset{\sim}{j}$

$\underset{\sim}{F}$ இன் பருமன் $= |\underset{\sim}{F}| = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$

$\underset{\sim}{F}$ இன் திசையானது Ox உடன் கோணம் $(\pi + \tan^{-1} 9/5)$ ஐ ஆக்குகின்றது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

F இன் காக்கக்கோடு Ox ஐ $(\frac{4}{9}, 0)$ என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகின்றது.

காக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - 0 = \frac{9}{5}\left(x - \frac{4}{9}\right); \quad y = \frac{9}{5}x - \frac{4}{5}$$

அ.கு $\boxed{5y = 9x - 4}$

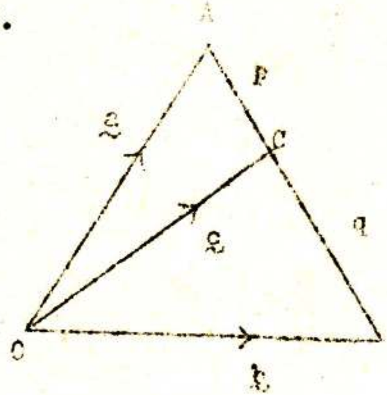
6.9 வினா: (1/ஏப்பிறல் 1972)

O எனும் உற்பத்தியொன்று பற்றி A, B எனும் புள்ளிகள் இரண்டின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$ உம் $\underset{\sim}{b}$ உம் ஆகும். AB ஐ p : q என்னு விகிதத்திற் பிரிக்கின்ற C எனும் புள்ளியின் தானக்காவியைக் காண்டு, அதை $\lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b}$ என்ற வடிவத்திலும் எழுதல் முடியுமெனக் காட்டுக. இதில் $\lambda + \mu = 1$. A, B, C, D எனும் நான்கு தளப்புள்ளிகளின் தானக்காவிகளாகிய $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}$ என்பவை $\underset{\sim}{d} = \lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b} + \nu\underset{\sim}{c}$ ஐத் திருப்திசெய்கின்றன. இதில் $\lambda + \mu + \nu = 1$. AB, DC என்பன E இல் சந்திக்குமால், E இன் தானக்காவி $\frac{1}{\lambda + \mu}(\lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b})$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>விடை</u> :

$\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}$; $\overrightarrow{OC} = \underset{\sim}{c}$ எனக.



$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{p}{q}$

C ஆனது வெளிவெட்டுப்புள்ளியாயின் AC

அல்லது CB எதிராயிருக்கும்.

$$q\,\overrightarrow{AC} = p\,\overrightarrow{CB}$$

$$q\,(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) = p\,(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

$$q\,(-\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c}) = p\,(-\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b})$$

$$\therefore (p+q)\,\underset{\sim}{c} = q\,\underset{\sim}{a} + p\,\underset{\sim}{b} \quad \underset{\sim}{c} = \frac{q\underset{\sim}{a}}{p+q} + \frac{p\underset{\sim}{b}}{p+q}$$

$\dfrac{q}{p+q} = \lambda$ எனவும் $\dfrac{p}{p+q} = \mu$ எனவும் எடுக்கையில்

$$\lambda + \mu = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = 1 \quad \text{ஆகும்.}$$

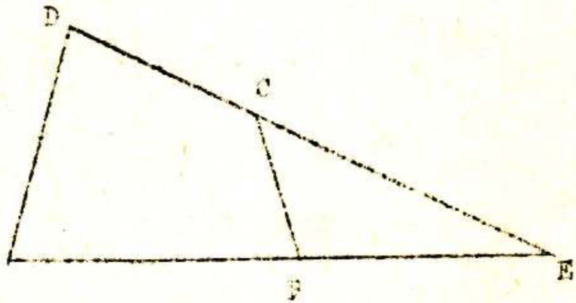
எனவே $\boxed{\underset{\sim}{c} = \lambda\underset{\sim}{a} + \mu\underset{\sim}{b}}$ இங்கு $\lambda + \mu = 1$

E இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{e}$ எனக. A , B, C என்பன ஒரு கோட்டில் கிடவாதன. முதற்பகுதியைக் கொண்டு $\underset{\sim}{e}$ பின்வரும் வகையில் எழுதலாம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\underset{\sim}{e} = p\,\underset{\sim}{a} + q\,\underset{\sim}{b}$ .... (1) இங்கு $p + q = 1$ & $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{q}{p}$

மேலும் $\underset{\sim}{e} = r\,\underset{\sim}{d} + s\,\underset{\sim}{c}$ ...(2) " $r + s = 1$ & $\dfrac{DE}{CE} = \dfrac{s}{r}$



தரவின்படி, $\underset{\sim}{d} = \lambda\,\underset{\sim}{a} + \mu\,\underset{\sim}{b} + \nu\,\underset{\sim}{c}$

இங்கு $\lambda + \mu + \nu = 1$ ஆகும்.

$\therefore \underset{\sim}{d} = \lambda\,\underset{\sim}{a} + \mu\,\underset{\sim}{b} + (1 - \lambda - \mu)\underset{\sim}{c}$

$\therefore \underset{\sim}{d} + (\lambda + \mu - 1)\underset{\sim}{c} = \lambda\,\underset{\sim}{a} + \mu\,\underset{\sim}{b}$

$$\therefore \frac{1}{\lambda+\mu}\underset{\sim}{d} + \frac{\lambda+\mu-1}{\lambda+\mu}\underset{\sim}{c} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\underset{\sim}{a} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\underset{\sim}{b} \quad \text{..... (3)}$$

(3) இன் இடது பக்கமும் வலது பக்கமும், (1) ஐயும் (2) ஐயும் திருப்தியாக்குகின்றன.

$$\therefore \boxed{\underset{\sim}{e} = \frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda\,\underset{\sim}{a} + \mu\,\underset{\sim}{b})}$$

6.10 வினா: (2/ஏப்பிரல் 1972)

புள்ளியொன்றில் தாக்குகின்ற எத்தனை விசைகளையும் பருமனிலும், திசையிலும், பல்கோணியொன்றின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால்

குறிக்க முடியுமெனின், விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமெனக் காவிமுறை யாகக் காட்டுக.

$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_n$ என்பது n பக்கங்களைக் கொண்ட பல்கோணி யொன்றாகும். O எனும் புள்ளியொன்றில் A_1A_2, $2A_2A_3$, $3A_3A_4$, $\ldots\ldots(n-1)A_{n-1}A_n$

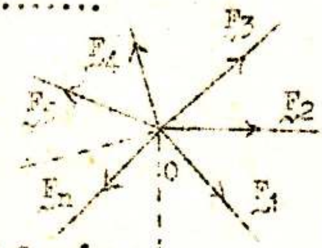
$A_nA_1 = (n-1)GA_1$ என்பனவற்றைச் சமாந்தரமும் விகித சமமும் உடையதெனக் காட்டுக. இதில் G ஆனது $A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ என்ற புள்ளிகளின் மையப்போலியாகும்.

<u>விடை</u> :-

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$; ....

....

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 + \underset{\sim}{F}_3 + \ldots\ldots\ldots + \underset{\sim}{F}_n = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XA} = \underset{\sim}{0}$

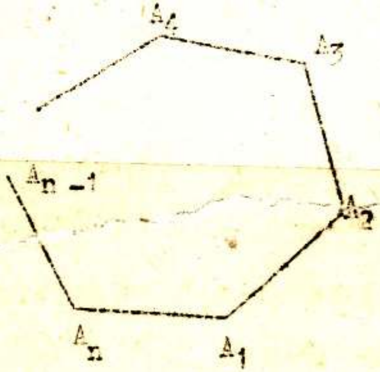


∴ விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன.

$A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots A_n$ என்பவற்றின் மையப்போலி G எனக.

$\overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{GA_n} = \underset{\sim}{0}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{GA_2}$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_2G} + \overrightarrow{GA_3}$$

$$\overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_3G} + \overrightarrow{GA_4}$$

....

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_{n-1}G} + \overrightarrow{GA_n}$$

$$\overrightarrow{A_nA_1} = \overrightarrow{A_nG} + \overrightarrow{GA_1}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} + 2\overrightarrow{A_2A_3} + 3\overrightarrow{A_3A_4} + \ldots\ldots\ldots (n-1)\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} + n$$

$$= \overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{GA_2} + 2\overrightarrow{A_2G} + 2\overrightarrow{GA_3} + 3\overrightarrow{A_3G} + 3\overrightarrow{GA_4} + \ldots\ldots$$

$$+ (n-1)\overrightarrow{A_{n-1}G} + (n-1)\overrightarrow{GA_n} + n\overrightarrow{A_nG} + n\overrightarrow{GA_1}$$

$$= \overrightarrow{A_1G} + (\overrightarrow{A_2G} + \overrightarrow{A_3G} + \ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{A_nG}) + n\overrightarrow{GA_1}$$

$$= (n-1)\overrightarrow{GA_1}$$

6.11 வினா: (1/ஏப்பிரல் 1973)

ஒரு காவியை வரையறுத்து கூட்டல் விதியைக் கூறுக. ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகளை ஏன் காவிகளால் வகை குறிக்க முடியுமென்பதற்குக் காரணம் தருக. காவியினால் வகை குறிக்கப்படக்கூடிய பௌதிக கணியங் களில் வேறொன்றை உதாரணமாகத் தருக.

காவிகளின் முறையை உபயோகித்து

(i) விசை முக்கோணித் தேற்றத்தையும்

(ii) (a) $\lambda > 0$, $\mu > 0$ ஆயிருக்கும்போதும்

(b) $\lambda\mu < 0$, $\lambda + \mu \neq 0$ ஆயிருக்கும்போதும் விசைகளுக்கான $\lambda - \mu$ தேற்றத்தையும் நிறுவுக.

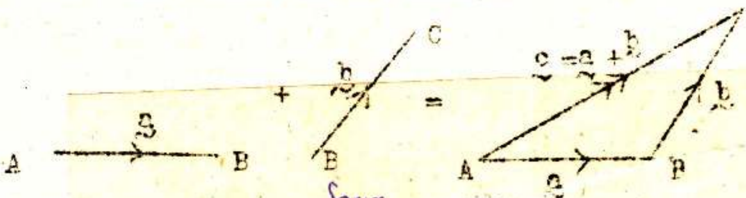
விடை:-

காவி என்பது வெளியில் திசையுடையதும் பருமனுடையதுமான கணியமாகும். இது கணிதத்திலுள்ள திசைகொண்ட கோட்டுத் துண்டத்தினால் (directed line segment) குறிப்பிடப்படும்.

கூட்டல் விதி: $\underset{\sim}{a}(\overrightarrow{AB})$, $\underset{\sim}{b}(\overrightarrow{BC})$ என்னும் இரு காவிகளின் கூட்டுத்தொகை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$ என எழுதப்படும். இதனை முக்கோண விதியால் காவி $\underset{\sim}{c}$ $(\overrightarrow{AC})$ என வரைவிலக்கணப்படுத்தலாம்.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{c}$

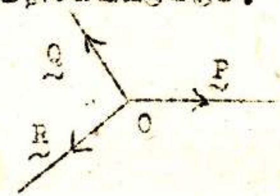
Same

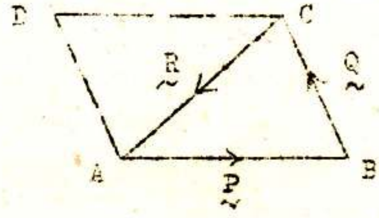
ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள் (i) பருமன்களும் (ii) திசைகளும் கொண்டவை. காவி என்பது பருமனும் திசையும் கொண்டதாகையால், விசைகள் காவியால் வகைகுறிக்க முடியும்.

வேகம், அல்லது உந்தம், அல்லது மின்செறிவு என்பதனை காவியால் வகை குறிக்கக்கூடிய வேறொரு உதாரணமாகக் கொள்ளலாம்.

(i) விசை முக்கோணித் தேற்றம்

ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள் ஒரொழுங்கில் எடுத்த ஒரு முக்கோணிப்பக்கங்களாற் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்பட்டால் அவை சமநிலையிலிருக்கும்.





Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

• O வில் தாக்குகின்ற விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதற்கு

$\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{0}$; $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} = -\underset{\sim}{R}$

$\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{P}$, $\overrightarrow{BC} = \underset{\sim}{Q}$ இணைகரம் ABCD யைப் பூர்த்திசெய்க.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \underset{\sim}{Q}$. விசையிணைகர விதிப்படி,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CA}$, என்பது $\underset{\sim}{R}$ என்னும் விசையினைப் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்பட்டால்

$\overrightarrow{CA} = \underset{\sim}{R}$; $\overrightarrow{AC} = -\underset{\sim}{R}$ $\quad \therefore \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} = -\underset{\sim}{R}$

$\therefore \underline{\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{0}}$

(ii) $\lambda - \mu$ தேற்றம்-4.1 இல் விரிவாகச் செய்யப்பட்டுள்ளது.

6.12 <u>வினா</u> <u>(2/ஏப்பிரல் 1973)</u>

$\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{q}$, $\underset{\sim}{r}$ எனும் மூன்று காவிகள் ஒரு தளத்திலிருப்பதற்கு வேண்டிய ஒரு போதிய நிபந்தனை $\lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q} + \nu \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$ ஆகுமாறு எல்லாம் பூச்சியமாக இல்லாத λ, μ, ν எனும் எண்கள் இருப்பதாகும் என்று நிறுவுக. $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{k}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயிருக்கும் மூன்று அச்சுக்கள் வழியே அமைந்துள்ள அலகுக்காவிகளாகும்.

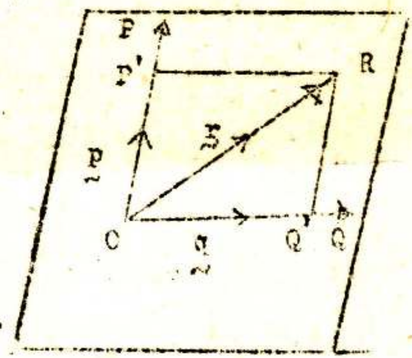
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மூன்று காவிகளாவன, $\underset{\sim}{p} = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{q} = 3\underset{\sim}{i} + 7\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$: $\underset{\sim}{r} = 16\underset{\sim}{i} + 14\underset{\sim}{j} + \alpha\underset{\sim}{k}$

என்பவற்றால் தரப்பட்டுள்ளன. அவை ஒரு தளத்திலிருந்தால் α இன் பெறுமானத்தைக் காண்க, அதிலிருந்து அவற்றின் கூட்டுத்தொகையான $\underset{\sim}{R}$ ஐக் காண்க. மூன்று அச்சுக்களுடன் $\underset{\sim}{R}$ ஆக்கும் கோணங்களையும் காண்க.

<u>விடை:</u> வேண்டிய நிபந்தனை :-



p, q என்பன ஒரு கோட்டில் கிடவாதனவாயும் அவை ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பனவாயுமிருப்பின் இவ்விரு காவிகளும் ஒரு தளத்தை வரையறைப்படுத்துகின்றன.

$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{p}$ எனவும், $\overrightarrow{OQ} = \underset{\sim}{q}$ எனவும் கொள்க.

P^1, Q^1 என்பன முறையே OP, OQ இல் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆயின் $\overrightarrow{OP^1} = \lambda \overrightarrow{OP} = \lambda \underset{\sim}{p}$

$\overrightarrow{OQ^1} = \mu \overrightarrow{OQ} = \mu \underset{\sim}{q}$

இங்கு λ, μ என்பன தெரிவுசெய்யப்பட்ட எண்ணிகள் ($\lambda, \mu \neq 0$) இணைகரம் OQ^1RP^1 என்பது பூரணப்படுத்தப்பட்டது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவே $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR}$ $\qquad \underset{\sim}{r} = \mu \underset{\sim}{q} + \lambda \underset{\sim}{p}$

பொதுவாக இம்முடிபானது, இருகாவிகள் ஒரு கோட்டில் கிடவாதனவாய்ப் பெறப்படின், இவற்றினுள் கிடக்கும் ஏனைய காவிகள், இவ்விரு காவிகளாலும் வரைவிலக்கணப்படுத்தப்படும். இவ்விரு காவிகளும் ஒரு கோட்டில் கிடப்பனவாயின், இம்முடிபு சரியாகாது. $\lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$

$$\lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q} + \nu \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0} \text{ (இங்கு } \nu = -1)$$

<u>போதிய நிபந்தனை</u>

$$\lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q} + \nu \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0} \qquad \underset{\sim}{r} = -(\lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q})$$

$\lambda \nu \mu \neq 0$ ஆயின், $\lambda p + \mu q$ என்பது p, $\underset{\sim}{q}$ என்பன வரைபுபடுத்தும் தளத்தில் உள்ளது. ∴ அ.தி $\frac{1}{\nu} \tilde{r}$ என்பது $\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}$ என்பன வரைபுபடுத்தும் தளத்திலுள்ளது. எனவே $\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{r}$ என்பன ஒரு தளத்தன.

λ, μ, ν என்பவற்றில் ஏதாவதொன்று பூச்சியமாயின், λ எனக்கொண்டால் $\underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{r}$ என்பன ஒரே திசையிலுள்ளன.

∴ $\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{r}$ என்பன ஒரே தளத்தன.

எனவே $\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{r}$ எனும் மூன்று காவிகள் ஒரு தளத்திலிருப்பதற்கு வேண்டிய

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு போதிய நிபந்தனை. $\therefore\ \lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q} + \nu \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$

ஆகுமாறு எல்லாம் பூச்சியமாக இல்லாத λ, μ, ν எனும் எண்கள் இருப்பதாகும். $p = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{q} = 3\underset{\sim}{i} + 7\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{r} = 16\underset{\sim}{i} + 14\underset{\sim}{j} + \alpha\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}, \underset{\sim}{r}$ என்பன ஒரு தளத்தனவாதற்கு, λ, μ, ν என்னும் எல்லாம் பூச்சியமல்லாத எண்களைத் தெரிவு செய்கையில் $\lambda \underset{\sim}{p} + \mu \underset{\sim}{q} + \nu \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$

எனவே $(2\lambda + 3\mu + 16\nu)\underset{\sim}{i} + (3\lambda + 7\mu + 14\nu)\underset{\sim}{j} + (5\lambda + \mu + \alpha\nu)\underset{\sim}{k}$
$= 0\underset{\sim}{i} + 0\underset{\sim}{i} + 0\underset{\sim}{k}$

குணகங்களைச் சமன்செய்கையில்,

$$2\lambda + 3\mu + 16\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$3\lambda + 7\mu + 14\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$5\lambda + \mu + \alpha\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1), (2), (3), என்பவற்றைத் தீர்க்கையில் $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{r}$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{R} = {} & 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k} \\ & 3\underset{\sim}{i} + 7\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k} \\ & 16\underset{\sim}{i} + 14\underset{\sim}{j} + 66\underset{\sim}{k} \end{aligned} \quad = 21\underset{\sim}{i} + 24\underset{\sim}{j} + 72\underset{\sim}{k}$$

$\alpha = 66$

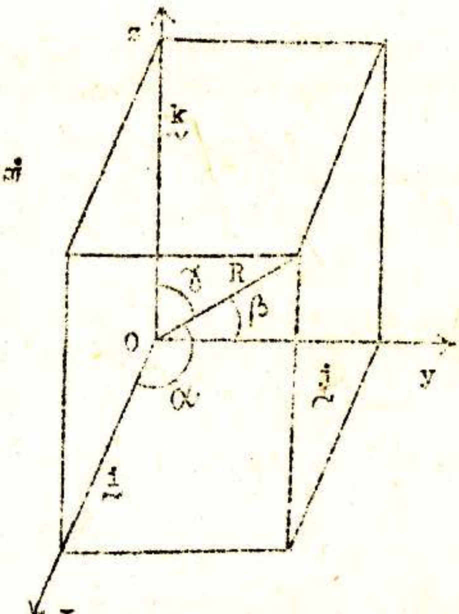
$$\left|\underset{\sim}{R}\right| = (21^2 + 24^2 + 72^2)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{689}$$

விசை $\underset{\sim}{R}$ அச்சுக்களுடன் உருவாக்கும் கோணங்கள் α, β, γ என்பனவாகும். ஆயின்

$$\alpha = \text{கோசை}^{-1}\frac{21}{3\sqrt{689}} = \text{கோசை}^{-1}\frac{7}{\sqrt{689}}$$

$$\beta = \text{கோசை}^{-1}\frac{24}{3\sqrt{689}} = \text{கோசை}^{-1}\frac{8}{\sqrt{689}}$$

$$\gamma = \text{கோசை}^{-1}\frac{72}{3\sqrt{689}} = \text{கோசை}^{-1}\frac{24}{\sqrt{689}}$$



6.13 **வினா (3/ஏப்பிரல் 1973)**

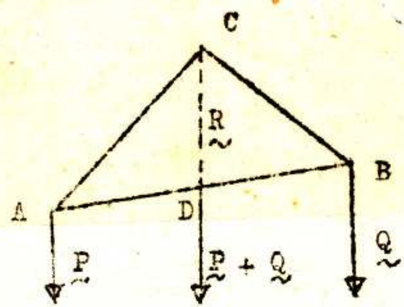
ஒரு தளவிசைத் தொகுதியை ஒரு தனிவிசையாக அல்லது ஒரு விசை இணையாக ஒடுக்க முடியுமெனக் காட்டுக. ஒரு தளவிசைத் தொகுதியொன்று சமநிலையிலிருப்பதற்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனைத் தொடைகளிரண்டைக் கூறி அவை சமவலுவானவை எனக் காட்டுக.

(அ) ஒரே தளத்திலமையாத சமாந்திரமான மூன்று விசைகளைக்கொண்ட தொகுதியின் விளையுள் பெறுவது எவ்வாறு எனக்கூறுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ஆ) ஒரே சீரான முக்கோண அடரின் ஈர்ப்பு மையமானது அம்முக்கோணியின் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்ட மூன்று சமமான திணிவுகளின் ஈர்ப்புமையமேயாகும் எனக் காட்டுக.

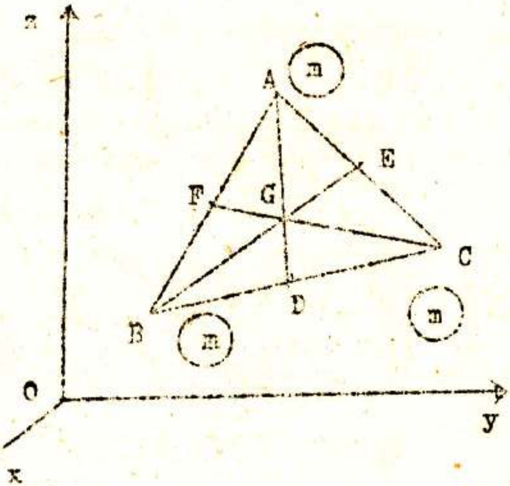
<u>விடை</u>:-
முதற்பகுதி 5.6, 5.7 இல் விடையாகத் தரப்பட்டுள்ளது.



(அ) $\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{R}$ என்பன ஒரு தளத்தில் கிடவாத மூன்று சமாந்திர விசைகளாகும். $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} \neq \underset{\sim}{0}$ ஆயின், $\underset{\sim}{P}, \underset{\sim}{Q}$ என்பவற்றின் விளையுள் $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$ ஆகும். இது D இல் $\frac{AD}{DB} = \frac{Q}{P}$ என்னும் விகிதத்தில் தாக்கும். $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R} \neq \underset{\sim}{0}$ ஆயின், விளையுளானது ஒரு தனிவிசை $(\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R})$ ஆயும் E இல் தாக்குவதாயுமிருக்கும். இங்கு E ஆனது $CE/ED = \frac{P + Q}{R}$, $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} \neq \underset{\sim}{0}$ உம் $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{0}$ உம் ஆயுமிருப்பின், தொகுதியானது CD இன் ஊடாகச் செல்லும். தளத்தில் கிடக்கும் ஓர் இணையாக ஒடுங்கும். மேலும் $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{0}$ ஆயும் $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R} \neq \underset{\sim}{0}$ ஆயுமிருப்பின் தொகுதி ஒரு தனிவிசைக்கு ஒடுங்குகின்றது.

(ஆ) முக்கோண அடரின் ஈர்ப்புமையம் (மையப்போலி) முக்கோணியின்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



இடையங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். G

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{3}$$

இங்கு A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ ஆகும். முக்கோணியின் உச்சிகளில் சமதிணிவுகள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. B இலும் C இலுமுள்ள சமதிணிவுகளின் விளையுள் D இல் 2 m இனால் தரப்படும். $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{2}$

இப்பொழுது D இலுள்ள 2 m இனையும், A இல் உள்ள திணிவு m இனையும் விளையுள் AD இலுள்ள G^1 இல் 3 m இனால் தரப்படும். இங்கு G^1 ஆனது $AG^1/G^1D = 2m/m = 2/1$ ஆகும் வண்ணமுள்ள புள்ளியாகும்.

$$\text{அ.து} \quad \overrightarrow{OG^1} = \frac{\underset{\sim}{a} + 2\left(\dfrac{\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{3}$$

$$\text{ஆனால்} \quad \overrightarrow{OG^1} = \frac{\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{3} \quad \therefore \quad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG^1}, \therefore G \equiv G^1$$

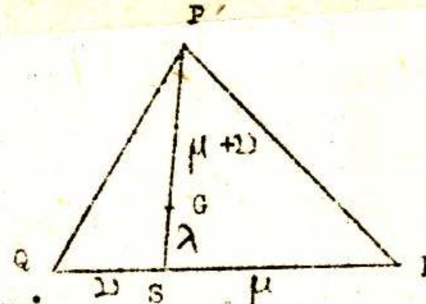
∴ ஒரு சீரான முக்கோண அடரின் ஈர்ப்புமையமானது அம்முக்கோணியின் உச்சிகளில் வைக்கப்பட்ட மூன்று சமனான திணிவுகளின் ஈர்ப்புமையமுமாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6.14 வினா (1/ஏப்பிரல் 1974-1)

P,Q, R என்பன ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகளாகும். S ஆனது QR ஐ $\nu : \mu$ எனும் விகிதப்படி பிரிக்கின்றது. G ஆனது SP ஐ $\lambda : (\mu + \nu)$ எனும் விகிதப்படி பிரிக்கின்றது. இங்கு λ, μ, ν என்பன நேர் எண்கணியங்களாகும். $\lambda \overrightarrow{GP} + \mu \overrightarrow{GQ} + \nu \overrightarrow{GR} = \underset{\sim}{0}$ ஆகுமெனக்காட்டுக.

ஒரு முக்கோணி ABC இன் உள்மையமானது I எனின் $a\, \overrightarrow{IA} + b\, \overrightarrow{IB} + c\, \overrightarrow{IC} = 0$ ஆகுமென உய்த்தறிக. இங்கு a, b, c என்பன முறையே $\triangle$ ABC இன் பக்கங்களான BC, CA, AB என்பவற்றின் நீளங்களாகும்.



விடை:-

P.Q.R என்பன ஒரு கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகளாகும். $QS/SR = \nu/\mu$ ஆயும் $SG/GP = \lambda/(\mu + \nu)$ ஆயுமுள்ளன.

$\lambda \overrightarrow{GP} + \mu \overrightarrow{GQ} + \nu \overrightarrow{GR} = \underset{\sim}{0}$ என நிறுவவேண்டும்.

$QS/SR = \nu/\mu$ என்பதால் $\mu \overrightarrow{GQ} + \nu \overrightarrow{GR} = (\mu + \nu) \overrightarrow{GS}$ ஆகும்.

மேலும் $GS/GP = \dfrac{\lambda}{\mu + \nu}$ என்பதால் $(\mu + \nu)\, GS = \lambda\, GP$

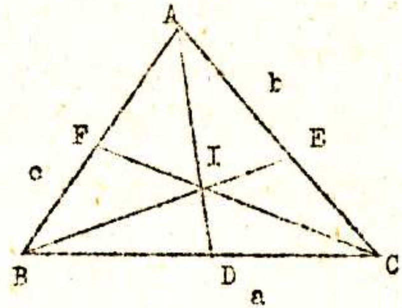
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore (\mu + \nu)\,\overrightarrow{GS} = \lambda\,\overrightarrow{PG}$$

$$\therefore \lambda\,\overrightarrow{GP} + \mu\,\overrightarrow{GQ} + \nu\,\overrightarrow{GR} = \lambda\,\overrightarrow{GP} + (\mu + \nu)\,\overrightarrow{GS} = \lambda\,\overrightarrow{GP} + \lambda\,\overrightarrow{PG}$$

$$= \underline{\overrightarrow{0}}$$

சேத்திரகணிதப்படி AD ஆனது $\underline{\angle BAC}$ இனை இரு கூறாக்கியாகையால்



$BA/AC = BD/DC$ ஆகும். $BD/DC = c/b$

மேலும் $DC/BD = b/c,\quad \dfrac{DC + BD}{BD} = \dfrac{b + c}{c}$

$$BC/BD = \frac{b + c}{c} \qquad BD = \frac{c + a}{b + c}$$

BI ஆனது கோணம் DBA இன் இருகூறாக்கியாகையால்,

$$\frac{DB}{BA} = \frac{DI}{IA}, \quad \frac{ca/(b + c)}{c} = \frac{DI}{IA}, \quad DI/IA = \underline{\underline{a/(b + c)}}$$

$$\therefore a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = a\,\overrightarrow{IA} + (b + c)\,\overrightarrow{ID} \qquad (\because \text{D ஆனது } BD/DC = c/b)$$

$$= a\,\overrightarrow{IA} + a\,\overrightarrow{AI} \quad (\because (b + c)\,\overrightarrow{ID} = a\,\overrightarrow{AI})$$

$$= \underline{\underline{\overrightarrow{0}}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6.15 வினா (2/ஏப்பிரல் 1974-1)

ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களான BC, CA, AB என்பவற்றில் முறையே D, E, F என்னும் புள்ளிகள் BD : DC = λ : 1, CE : EA = μ : 1, AF : FB = ν : 1 ஆகுமாறு அமைந்துள்ளன. இங்கு λ, μ ஆகியவை நேர் ஒருமைகளாகும். $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ என்பவை மூன்று விசைகளை பருமன், திசை நிலையும் ஆகியவற்றில் வகை குறிக்கின்றன. (i) $\lambda = \mu = \nu = 1$ எனின், எனின் மட்டும் இம்மூன்று விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன எனக் காட்டுக. (ii) $\lambda = \mu = \nu \neq 1$ எனின், எனின் மட்டும் இம்மூன்று விசைகள் ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

விடை

$$(\lambda + 1)\,\overrightarrow{AD} = \lambda\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

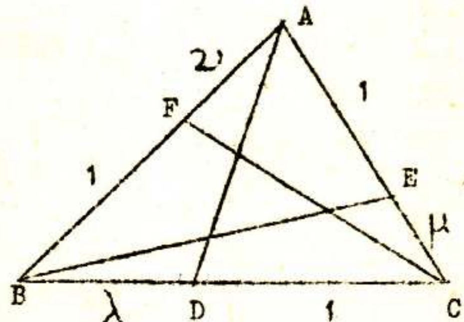
$$(\mu + 1)\,\overrightarrow{BE} = \mu\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$(\nu + 1)\,\overrightarrow{CF} = \nu\,\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{\lambda+1}\,\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{\mu}{\mu+1}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{\mu+1}\,\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\nu}{\nu+1}\,\overrightarrow{CB} + \frac{1}{\nu+1}\,\overrightarrow{CA}$$



$\therefore$ + +

$$\therefore\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{\mu}{\mu+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{\mu+1} - \frac{\nu}{\nu+1}\right)\overrightarrow{BC} + \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\overrightarrow{CA}$$

(i) $\lambda = \mu = \nu = 1$ ஆயின்

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC} + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$$

$\therefore$ விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன.

(ii) $\lambda = \mu = \nu \neq 1$ ஆயின், $\mu = \nu = \lambda$ என எடுக்கையில்

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{BC} + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{CA}$$

$$= \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) x$$

(ABC என்னும் போக்கில், முக்கோணி ABC இன் இரட்டிக்கப் பருமன் கொண்ட திருப்புதிறனையுடைய இணையாகும்.)

$\therefore$ விசைகள் இணையாக ஒடுங்குகின்றன.

<u>குறிப்பு</u>:- அத்தியாயம் 4 இல் - பயிற்சியிலுள்ள 12 ம் கணக்குடன் ஒப்பு நோக்கிப் பார்க்கவும்.

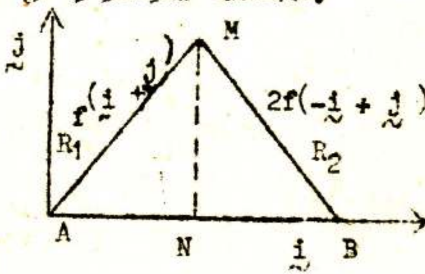
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6.16 வினா (1/ஏப்பிரல் 1974-11)

A, B என்பவவை ஒரு நிலையங்களாகும். $\underset{\sim}{i}$ என்பது A யிலிருந்து B க்குத் திசைகொண்ட ஓர் அலகுக்காவியாகும். $\underset{\sim}{j}$ என்பது AB இற்குச் செங்குத்தான ஓர் அலகுக்காவியாகும். நேரம் t = 0 இல் R_1 எனும் ஒரு வாகனம் A யிலிருந்து மெதுவாகப் புறப்பட்டு $f(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$ எனும் ஒரு சீரான ஆர்முடுகலுடன் செல்கிறது. நேரம் t_0 செக்கன்கள் பின்னர் R_2 எனும் வாகனம் B யிலிருந்து புறப்பட்டு $2f(-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$ எனும் ஆர்முடுகலுடன் R_1 ஐ சந்திக்கும்முகமாகவே செல்கிறது. நேரம் $(t_n + t_0)$ செக்கன்களில் வாகனங்கள் ஒன்றையொன்று மோதுகின்றன. ஒரே வரைப்படத்திலே R_1, R_2 என்பவற்றின் கதிநேரம் வளையிகளை வரைந்து $t_n = t_0(1 + \sqrt{2})$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

AB யிலிருந்து மோதுகல் நடைபெற்ற புள்ளியின் தூரத்தைக் காண்க.

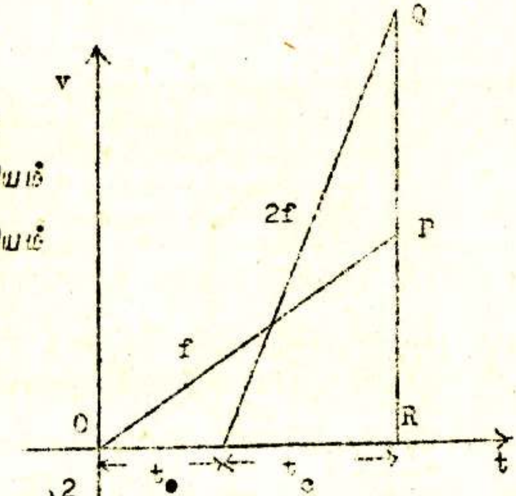
விடை:



R_1 இன் ஆர்முடுகல் $f(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$

R_2 இன் ஆர்முடுகல் $2f(-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$

R_1 ஆனது AN (அல்லது NM) செல்ல எடுத்த நேரம் $(t_0 + t_n)$, R_2 ஆனது BN (அல்லது NM) செல்ல எடுத்த நேரம் t_n



இரு வாகனங்களும் AB இற்குச் செங்குத்தாய்ச் சென்ற தூரம் NM = △ORP இன் பரப்பின் கணியம்

= △TRQ இன் பரப்பின் கணியம்

△OPR இல் $f = \dfrac{RP}{t_o + t_c}$, $\therefore RP = f(t_o + t_c)$

△TRQ இல் $2f = \dfrac{RQ}{t_c} \Longrightarrow RQ = 2ft_c$

$\triangle ORP = \triangle TRQ, \quad \frac{1}{2}OR.RP = \frac{1}{2}TR.RQ.$

$\frac{1}{2}(t_o + t_c)f(t_o + t_c) = \frac{1}{2}\, t_c.\, 2f\, t_c \;:\; \dfrac{(t_o + t_c)^2}{2} = t_c^2$

$\therefore \dfrac{t_o + t_c}{\sqrt{2}} = t_c \Longrightarrow t_o + t_c = \sqrt{2}\, t_c$

$t_c(\sqrt{2} - 1) = t_o, \; \therefore t_c = \dfrac{1}{(\sqrt{2} - 1)}\, t_o = (\sqrt{2} + 1)t_o \;:\; \underline{\underline{t_c = (1 + \sqrt{2})t_o}}$

AB இலிருந்து இரண்டு வாகனங்களும் மோதுதல் நடைபெற்ற புள்ளியின் தூரம்

$NM = \frac{1}{2}\, t_c\, .\, 2ft_c = \underline{\underline{f\, t_c^2}}$

அல்லது $NM = f(1 + \sqrt{2})^2\, t_o^2 = (3 + 2\sqrt{2})\, f\, t_o^2$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6.17 <u>வினா (1/ஏப்பிரல் 1975)</u>

$\overrightarrow{pOA}$, $\overrightarrow{qOB}$ என்பவற்றினால் குறிக்கப்பட்ட இரு விசைகளின் விளையுள் $(p + q)\ \overrightarrow{OC}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு C ஆனது $\overrightarrow{pAC} = q\ \overrightarrow{CB}$ ஆகுமாறு AB யிலுள்ள புள்ளியொன்றாகும்.

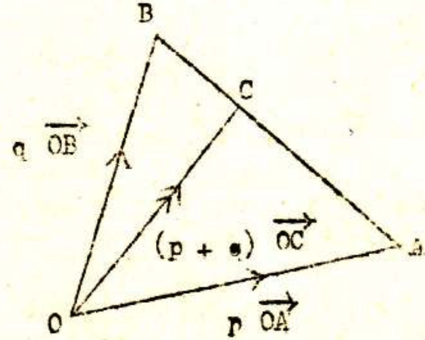
ஒரு முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி G ஆகும். $3\ \overrightarrow{BG}, 3\ \overrightarrow{CG}, 3\ \overrightarrow{GA}, 6\ \overrightarrow{CB}$ எனும் விசைகள் முறையே BG, CG, GA, CB எனும் வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் CG இற்கு சமாந்தரமாயமைந்துள்ளது. எனக்காட்டி அதன் தாக்குக் கோட்டைக் காண்க.

<u>விடை</u>

$$p.\overrightarrow{OA} = p\ .\ \overrightarrow{OC} + p\ .\overrightarrow{CA}$$

$$q.\overrightarrow{OB} = q.\ \overrightarrow{OC} + q.\ \overrightarrow{CB}$$

$$p.\ \overrightarrow{OA} + q.\ \overrightarrow{OB} = (p + q)\ \overrightarrow{OC} + p.\ \overrightarrow{CA} + q.\ \overrightarrow{CB}$$



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

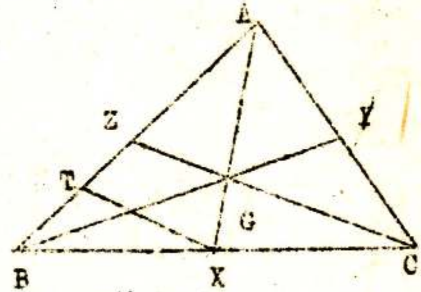
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தரவின்படி $\quad p.\overrightarrow{AC} = q.\overrightarrow{CB}$

$$\therefore \quad -p.\overrightarrow{AC} + q.\overrightarrow{CB} = p.\overrightarrow{CA} + q.\overrightarrow{CB} = \underline{0}$$

$$\therefore \quad p.\overrightarrow{OA} + q.\overrightarrow{OB} = (p+q)\overrightarrow{OC}$$

$\therefore$ $p.\overrightarrow{OA} + q.\overrightarrow{OB}$ இன் விளையுள் $(p+q)\overrightarrow{OC}$ ஆகும். இங்கு C ஆனது AB இல் $p.\overrightarrow{AC} = q.\overrightarrow{CB}$ ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.



$$3\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{CG} + 3\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{CB}$$

$$= (3+3)\overrightarrow{XG} + 3\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{CB}$$

$$= 6.\frac{1}{3}.\overrightarrow{XA} + 3.\frac{2}{3}\overrightarrow{XA} + 6\overrightarrow{CB}$$

$$= 4\overrightarrow{XA} + 12\overrightarrow{XB}$$

$= (4+12)\overrightarrow{XT}$, இங்கு $BT/TA = 4/12 = 1/3$

$= \underline{\underline{16\overrightarrow{XT}}}$ $\qquad \therefore$ T ஆனது BZ இன் நடுப்புள்ளி

$\therefore$ XT // CZ $\quad$ அ.கு. $\underline{\underline{XT \ // \ CZ}}$

∴ விளையுளானது CG இற்குச் சமாந்தரமாகும். அதன் தாக்கக்கோடு XT ஆகும்.

18. <u>வினா (2/ஏப்பிரல் 1975)</u>

ஒரு சோடி நிலைத்த செங்கோண அச்சுக்களின் திசைகளிலே n எண்ணிக்கை கொண்ட ஒரு தள விசைத்தொகுதி ஒன்றினது i ஆவது விசையின் கூறுகள் (X_i , Y_i) ஆகும். இவ்விசையினது தாக்கப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(x_i ,y_i),(i = 1,2..n)$ ஆகும். விசைத்தொகுதியானது விசையொன்றுக்கு ஒடுங்குமாயின் இவ்விசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

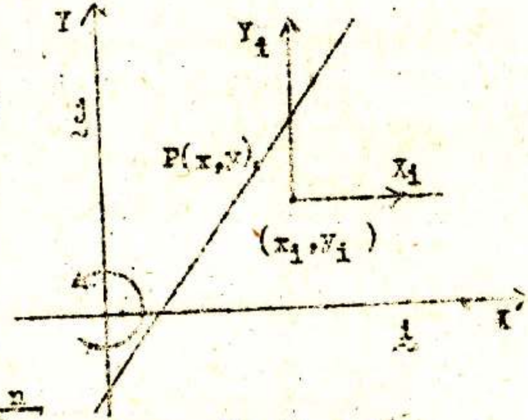
$ax + by + c = 0$ ஆகுமெனக்காட்டுக.

இங்கு $a = -\sum Y_i,\ b = \sum X_i,\ c = \sum (x_i Y_i - y_i X_i)$ ஆகும்.

ஒரு நாற்பக்கலொன்றின் உச்சிகள் A, B, C, D என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே (1,4) (3,3) (4,7), (-7,-2) ஆகும். $\overrightarrow{AB}, 2\overrightarrow{BC}, 3\overrightarrow{CD}, 4\overrightarrow{DA}$ என்பவற்றால் முறைமையாகக் குறிக்கப்பட்ட விசைகள் நாற்பக்கலின் பக்கங்கள் வழியே தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளினது பருமனையும் அதன் தாக்குக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>விடை</u> (அத்தியாயம் 5 இல் 5.6, 7.8, 9 இனையும் உ..ம் 30 ஐயும் மீட்டுப் பார்க்கவும்)



விடையுளின் தாக்கக்கோட்டிலுள்ள புள்ளி P (x,y) என்க.

விடையுள் விசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\sum \left[Y_i (x_i - x) - X_i (y_i - y) \right] = 0$$

அ.து $$x\left[-\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] + y\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] + \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i) = 0$$

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ இங்கு $a = -\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$c = \sum_{i=1}^{n} (Y_i x_i - X_i y_i)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விசை	$\underset{\sim}{F}_i = X_i \underset{\sim}{i} + Y_i \underset{\sim}{j}$		தானக்காவி $= x_i \underset{\sim}{i} + y_i \underset{\sim}{j}$		உச்சிகள்
	X_i	Y_i	x_i	y_i	
$\overrightarrow{AB}$	2	-1	1	4	A
$2\,\overrightarrow{BC}$	2	8	3	3	B
$3\,\overrightarrow{CD}$	-33	-27	4	7	C
$4\,\overrightarrow{DA}$	32	24	-7	-2	D
	$X = \sum X_i = 3$	$Y = \sum y_i = 4$			

$$\sum (x_i Y_i - y_i X_i) = -1 + 24 - 108 - 168 - 8 - 6 + 231 + 64$$

$$= 28$$

$\therefore$ விளையுள் $= \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\therefore$ விளையுளின் பருமன் 5. அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

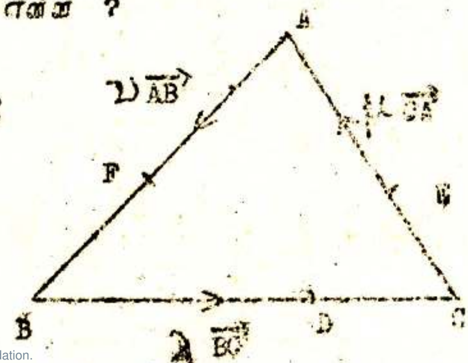
$$\underline{\underline{-4x + 3y + 28 = 0}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

19. [illegible] (1/ஏப்ரல் 1976)

$\lambda\overrightarrow{OA}$, $\mu\overrightarrow{OB}$ என்பவற்றினால் குறிக்கப்படும் இரு விசைகளின் விளையுளானது $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு C ஆனது AC : CB = $\mu : \lambda$ ஆகுமாறு, AB இலுள்ள புள்ளியாகும்.

$\lambda\overrightarrow{BC}$, $\mu\overrightarrow{CA}$, $\nu\overrightarrow{AB}$ என்பவற்றினால் முழுமையாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஒரு முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள்வழியே தாக்குகின்றன. மூன்று விசைகளும் பொதுவாக ஒரு தனிவிசைக்குச் சமவலுவானவை எனக்காட்டுக. R இன் தாக்கக்கோடானது முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களைப் பிரிக்கும் விகிதங்களையும் காண்க. மூன்று விசைகளும் ஓர் இணையிற்குச் சமவலுவாய் இருப்பதற்கான நிபந்தனை என்ன ?



விடை

முதலாம் பகுதி- λ-μ தேற்றம் 4.1 இல் செய்யப்பட்டுள்ளது.

$$\underline{R} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{CA} + \nu\overrightarrow{AB}$$
$$= \lambda(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \mu\overrightarrow{CA} + \nu\overrightarrow{AB}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$= (\nu - \lambda)\overrightarrow{AB} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{AC}$

$= (\nu - \lambda + \lambda - \mu)\overrightarrow{AD}$, இங்கு D ஆனது BC யில்

$BD/CD = (\lambda - \mu)/(\nu - \lambda)$ ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்

$\therefore \quad \underset{\sim}{R} = (\nu - \mu)\overrightarrow{AD}$ (இங்கு $\nu \neq \mu$)

மேலும் $\underset{\sim}{R}$ இனை, $\underset{\sim}{R} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{CA} + \nu\overrightarrow{AB}$

$= \lambda\overrightarrow{BC} + \mu(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \nu\overrightarrow{AB}$

$= (\lambda - \mu)\overrightarrow{BC} + (\mu - \nu)\overrightarrow{BA}$

இங்கு $\lambda \neq \mu$, $\mu \neq \nu$, $\lambda > \mu > \nu$ ஆகும்

$\therefore \quad \underset{\sim}{R} = (\lambda - \mu + \mu - \nu)\overrightarrow{BE}$, இங்கு E ஆனது CA இல்

$CE/AE = (\mu - \nu)/(\lambda - \mu)$ ஆக உள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

எனவே $\underset{\sim}{R} = (\lambda - \nu)\overrightarrow{BE}$ இங்கு $\lambda > \nu$, $\lambda \neq \nu$.

மேலும் $\underset{\sim}{R}$ இனை

$$\underset{\sim}{R} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{CA} + \nu \overrightarrow{AB}$$

$$= \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{CA} + \nu (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$= (\mu - \nu) \overrightarrow{CA} + (\nu - \lambda) \overrightarrow{CB}$, இங்கு $\mu \neq \nu$, $\nu \neq \lambda$.

$\mu > \nu > \lambda$

$= (\mu - \nu + \nu - \lambda) \overrightarrow{CF}$, இங்கு F ஆனது AB இல்

$AF/BF = (\nu - \lambda) / (\mu - \nu)$ ஆகவுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

$\therefore \underset{\sim}{R} = (\mu - \lambda) \overrightarrow{CF}$ இங்கு $\mu > \lambda$, $\mu \neq \lambda$

$\therefore \underset{\sim}{R}$ இன் தாக்கக்கோடானது $\triangle$ ABC இன் பக்கங்களை முறையே

D, E, F என்னும் புள்ளிகளில் சந்திப்பதால் ,

$\nu > \lambda > \mu$ ஆயிருக்கையில் , $BD/CD = (\lambda - \mu)/(\nu - \lambda)$

$\lambda > \mu > \nu$ ஆயிருக்கையில் , $CE/AE = (\mu - \nu)/(\lambda - \mu)$

$\mu > \nu > \lambda$ ஆயிருக்கையில் . $AF/BF = (\nu - \lambda)/(\mu - \nu)$

மூன்று விசைகளும் ஓர் இணைக்குச் சமனாகுவதற்குரிய நிபந்தனை $\lambda = \mu = \nu \neq 0$

எனவே இணையானது, $G = \lambda(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \lambda$ ($\triangle$ ABC இன் இருமடங்கு பரப்பின் பருமனையும்) BCA என்னும் போக்கில் உள்ளதுமான இணையாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

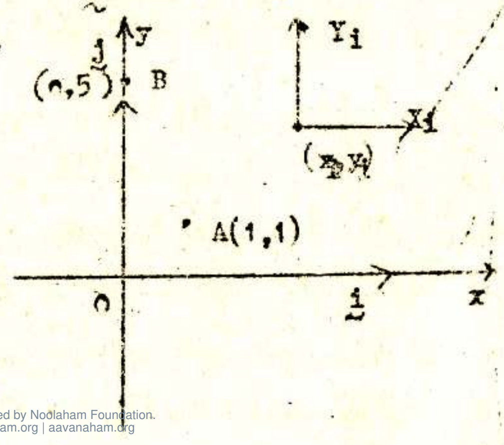
20. <u>வினா (2/ஏப்பிரல் 1976)</u>

(0,0)(1,1),(0.5) எனும் புள்ளிகள் பற்றி ஒரு தளவிசைத்தொகுதியொன்றின் திருப்பங்கள் முறையே -45, -39, 0 அலகுகளாகும். விளையுளின் பருமனையும், அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க. இவ்விசைகள் முறையே, $4y = 3x + 20$, $y = 5$ எனும் கோடுகள் வழியே தாக்கும் P, Q எனும் விசைகளுக்குச் சமவலுவாயின், P, Q என்பவற்றின் பருமன்களையும் காண்க.

<u>விடை</u>

ஒரு தளவிசை விளையுள் $\underset{\sim}{R} = X\underset{\sim}{i} + Y\underset{\sim}{j}$, $D(x,y)$ அதன் விளையுளின் தாக்கக்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

தாக்கப் புள்ளிகள்	காவிகள் $r = x_i\underset{\sim}{i}+y_i\underset{\sim}{j}$		திருப்புத் திறன்கள்
	x_i	y_i	
0	0	0	- 45
A	1	1	- 39
B	0	5	0



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

0) திருப்புத்திறன் எடுக்கையில், $Yx - Xy = -45$ .... (1)

A) திருப்புத்திறன் எடுக்கையில் $Y(x-1) - X(y-1) = -39$

$$Yx - Xy - Y + X = -39 \quad \ldots\ldots (2)$$

B) திருப்புத்திறன் எடுக்கையில், $Yx - X(y-5) = 0$

$$Yx - Xy + 5X = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

$\therefore (3) - (1) \Longrightarrow \quad 5X = 45 \therefore x = 9$

$(3) - (2) \Longrightarrow \quad 4X + Y = 39$

$$4 \times 9 + Y = 39 \Longrightarrow Y = 3$$

$\therefore$ விளையுள் $\boxed{\underset{\sim}{R} = 9\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}}$

$\therefore$ விளையுளின்பருமன் $\left|\underset{\sim}{R}\right| = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$

$x = 9$, $y = 3$ என்பதை (1) இல் உபயோகிக்க, விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு, $3x - 9y = -45$

அ.து, $x - 3y + 15 = 0$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$

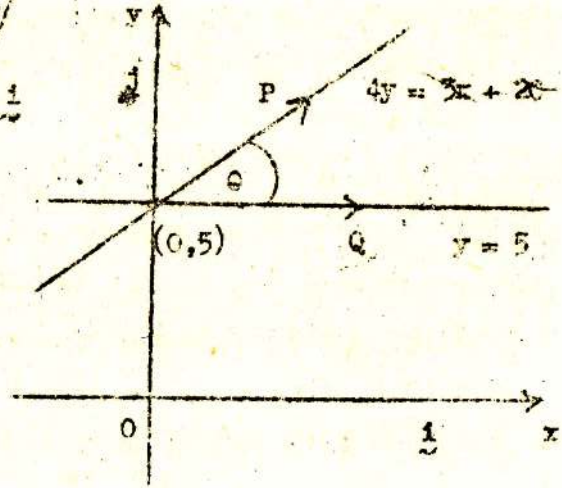
$9\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} = P.\frac{3}{5}\underset{\sim}{j} + Q\underset{\sim}{i} + P.\frac{4}{5}\underset{\sim}{i}$

$= \left(\frac{4P}{5} + Q\right)\underset{\sim}{i} + \frac{3P}{5}\underset{\sim}{j}$

$\therefore \frac{3P}{5} = 3 \Longrightarrow P = 5$

$\frac{4P}{5} + Q = 9$

$\frac{4}{5}\cdot 5 + Q = 9 \Longrightarrow Q = \underline{\underline{5}}$



∴ விசைகள் $\underset{\sim}{P}$ இனதும் $\underset{\sim}{Q}$ இனதும் பருமன்கள் முறையே

$|\underset{\sim}{P}| = P = \underline{\underline{5}}$, $|\underset{\sim}{Q}| = Q = \underline{\underline{5}}$

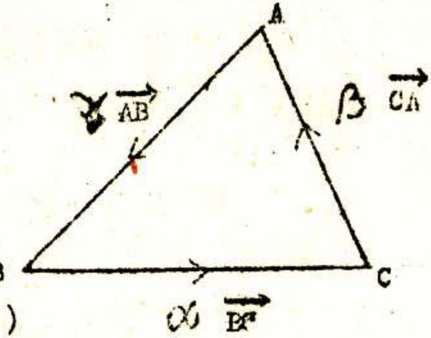
21. <u>விடை (1/ஏப்பிரல் 1977)</u>

(1) A, B, C என்பன ஒரேகோட்டிலில்லாத மூன்று புள்ளிகளாகும். விசைத்தொகுதியொன்று $\alpha\overrightarrow{BC}$, $\beta\overrightarrow{CA}$, $\gamma\overrightarrow{AB}$ என்பவற்றினால் பருமனிலும் திசையிலும், நிலையிலும் குறிக்கப்படுகின்றது. $\alpha = \beta = \gamma$ ஆயிருந்தால் மட்டுமே இத்தொகுதி ஓர் இணையிற்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) ஒரே தளத்தில் உள்ள ABCD எனும் நாற்பக்கலின் பக்கங்களான AB, BC, CD, DA வழியே தாக்கும் $p\overrightarrow{AB}$, $q\overrightarrow{CB}$, $r\overrightarrow{CD}$, $s\overrightarrow{AD}$ எனும் விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின், $pr = qs$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

விடை



(i) உற்பத்தி குறித்து A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே, a , b , c என்பன என்க. ஆயின் தொகுதி விசைகளின் விளையுள் R

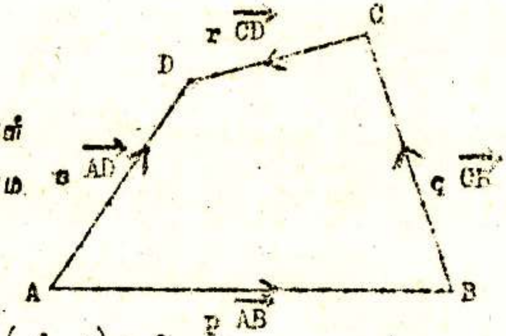
$$R = \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{CA} + \gamma \overrightarrow{AB}$$
$$= \alpha(\underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}) + \beta(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{c}) + \gamma(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})$$
$$= (\beta - \gamma)\underset{\sim}{a} + (\gamma - \alpha)\underset{\sim}{b} + (\alpha - \beta)\underset{\sim}{c}$$

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{0}$ ஆயின் தொகுதி இணையாக ஒடுங்கும். அ.து.

$\beta - \gamma = \gamma - \alpha = \alpha - \beta$ ஆயின், ஆயின் மட்டும் $\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma$

$\therefore$ தொகுதியானது $\alpha = \beta = \gamma$ ஆயினல் மட்டும் , மட்டுமே ஓர் இணையாக ஒடுங்கும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



(ii) A, B, C, D என்பனவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$ என்க. விசைகள் சமநிலையிலிருப்பதால்,

$$p.\overrightarrow{AB} + q\,\overrightarrow{CB} + r\,\overrightarrow{CD} + s\,\overrightarrow{AD} = \underset{\sim}{0}$$

$$p.(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}) + q(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}) + r(\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{c}) + s(\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{0}$$

$$-(p+s)\underset{\sim}{a} + (p+q)\underset{\sim}{b} - (q+r)\underset{\sim}{c} + (r+s)\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{0}$$

$$\therefore\ p+s = p+q = q+r = r+s = 0$$

அ. து $p = -s,\ p = -q,\ q = -r,\ r = -s$

$$\therefore\ pr = (-q)(-s) = qs$$

22. <u>வினா (2/ஏப்பிரல் 1977)</u>

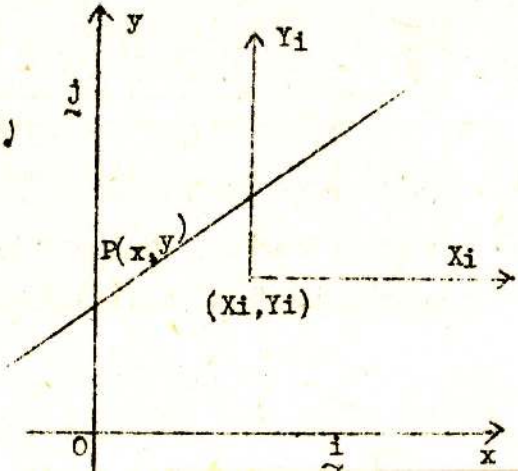
நிலைத்த ஒருசோடி செங்கோண அச்சுகளின் திசைகளிலே, n எண்ணிக்கையுள்ள விசைத்தொகுதியொன்றின் i ஆம் விசையின் கூறுகள் (X_i, Y_i) ஆகும். இவ்விசை பிரயோகிக்கப்படும் புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x_i, y_i) ஆகும். $i = 1, 2, \ldots n$ இவ்விசைத்தொகுதியானது, ஒரு தனிவிசையிற்கு பிரதியீடு

செய்யப்படக்கூடுமாயின், இவ்விசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$ax + by + c = 0$ ஆகுமெனக் காட்டுக. இங்கு

$$a = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad b = -\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad c = \sum_{i=1}^{n} (y_i X_i - x_i Y_i)$$

(0,0), $(a, a/\sqrt{3})$, (2a,2a) எனும் புள்ளிகள் பற்றி ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்றின் திருப்பங்கள் முறையே $\sqrt{3}\,aF$, $2aF/\sqrt{3}$, aF ஆகும். இத்தொகுதியானது F பருமனுடைய ஒரு தனி விசைக்குச் சமவலுவானது. எனக்காட்டி இவ்விசையின் தாக்கக்கோடானது x- அச்சை எங்கே வெட்டுகின்றது என்பதையும் காண்க.



விடை

(வினா-விடை 17 இனையும் பார்க்கவும்)

n ஒருதள விசைகளின் விளையுள்

$$\underset{\sim}{R} = \sum_{i=1}^{n} (X_i \underset{\sim}{i} + Y_i \underset{\sim}{j})$$

விளையுளின் தாக்கக்கோட்டில் உள்ள புள்ளி P(x,y) என்க. விளையுள் விசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\sum_{i=1}^{n}\left[X_i\,(y_i - y) - Y_i\,(x_i - x) \right] = 0$$

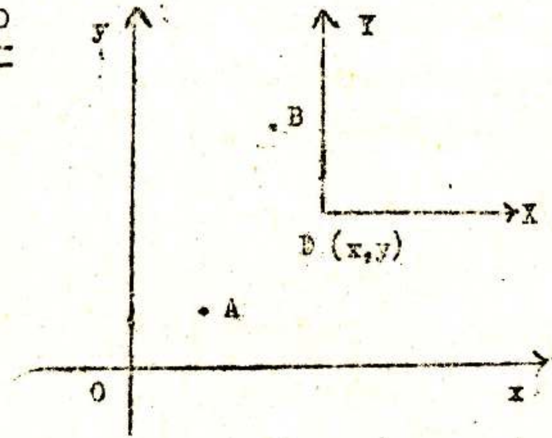
$$\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) x + \left(-\sum_{i=1}^{n} X_i\right) y + \sum_{i=1}^{n} (X_i y_i - Y_i x_i) = 0$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} Y_i \,, \quad b = -\sum_{i=1}^{n} X_i \,, \quad c = \sum_{i=1}^{n} (X_i y_i - Y_i x_i)$$

எளப்போடின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$ax + by + c = 0$$

புள்ளிகள்	தானக்காவி $\underline{r} = x_i\underline{i} + y_i\underline{j}$		திருப்புத்திறன்
	x_i	y_i	
O	0	0	$\sqrt{3}\, aF$
A	a	$a/\sqrt{3}$	$2aF/\sqrt{3}$
B	2a	2a	aF



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு தளவிசைத்தொகுதியின் விளையுள் விசை $\underset{\sim}{R} = X\underline{i} + Y\underline{j}$ எனக.

$D(x, y)$ என்னும் புள்ளி தாக்கக்கோட்டில் உள்ளதெனக.

O குறித்துத் திருப்புத்திறன் எடுக்கையில் $\circlearrowleft O \quad Xy - Yx = \sqrt{3}\,aF \;\ldots\ldots (1)$

A குறித்துத் திருப்புத்திறன் எடுக்கையில் $\circlearrowleft A \quad X(y - a/\sqrt{3}) - Y(x-a) = 2aF/\sqrt{3}$

$$(Xy - Yx) - (a/\sqrt{3})X + aY = 2aF/\sqrt{3} \;\ldots\ldots (2)$$

B குறித்துத் திருப்புத்திறன் எடுக்கையில் $\circlearrowleft B \quad X(y-2a) - Y(x-2a) = aF$

$$(Xy - Yx) - 2aX + 2aY = aF \;\ldots\ldots (3)$$

$(3)-(1) \Longrightarrow$
$$-2aX + 2aY = aF - a\sqrt{3}F$$
$$\therefore \quad -X + Y = (1 - \sqrt{3})F/2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$(3)-(2) \Longrightarrow$
$$-2aX + 2aY + (a/\sqrt{3})X - aY = aF - 2aF/\sqrt{3}$$
$$(-2 + 1/\sqrt{3})X + Y = (1 - 2/\sqrt{3})F \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$(5)-(4) \Longrightarrow$
$$(-1 + 1/\sqrt{3})X = \left[1 - 2/\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})/2\right]F$$
$$(-\sqrt{3} + 1)X/\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} + 3)F/2\sqrt{3}$$
$$X = \frac{\sqrt{3} - 1}{2(-\sqrt{3} + 1)}F = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}F}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(4) இல் $X = -\frac{1}{2}F$ எனப்போடுகையில்,

$$\frac{1}{2}F + Y = \frac{1}{2}F - \frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$\therefore Y = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$$

$$\therefore \underset{\sim}{R} = -\frac{1}{2}F\underset{\sim}{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}F\underset{\sim}{j}$$

$$\therefore \left|\underset{\sim}{R}\right|^2 = \frac{F^2}{4} + \frac{3F^2}{4} = \frac{4F^2}{4} = F^2$$

∴ தனிவிசையின் பருமன் $\left|\underset{\sim}{R}\right| = F$

(1) இல் $X = -\frac{1}{2}F$ எனவும் $Y = -\sqrt{3}F/2$ எனவும் போடுகையில் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடானது,

$$-\frac{1}{2}Fy - \frac{\sqrt{3}}{2}Fx = \sqrt{3}\,aF$$

அ.து. $y + \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}a = 0$

மேலுள்ள சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனப்போடுகையில் $x = -2a$

∴ தாக்கக்கோடானது x அச்சினை $(-2a, 0)$ என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வினா (1/ஏப்பிரல் 1978)

P, Q எனும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{q}$ ஆகும். PQ ஐ $\lambda : \mu$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி R இன் தானக்காவியைக் காண்க.

A, B, C, D எனும் நான்கு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$ ஆகும். பின்வருவனவற்றின் தானக்காவிகளைக் காண்க.

(i) BC யின் நடுப்புள்ளி L, (ii) AL ஐ 2:1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி M, (iii) DM ஐ 3:1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி G

இதிலிருந்து (i) ஒரு முக்கோணியின் இடையங்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனவும், (ii) ஒரு நான்முகியின் உச்சிகளையும் எதிர்முகங்களின் மையப்போலிகளையும் தொடுக்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனவும் நிறுவுக.

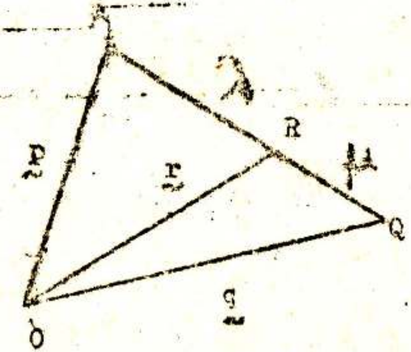
விடை

(அத்தியாயம் 4 இல் $\lambda - \mu$ தேற்றத்தையும் பார்க்கவும்)

$$\overrightarrow{PR} = PR \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{PQ} = \frac{PR}{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,(\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{p})$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



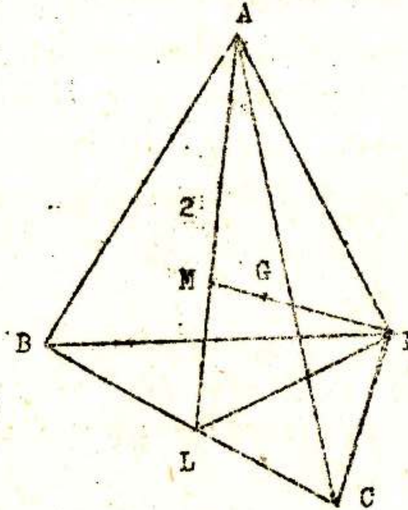
$$\therefore \quad \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$

$$= \underset{\sim}{p} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{p})$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)\,\underset{\sim}{p} + \lambda(\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{p})}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)\;\underset{\sim}{p} + \lambda\,(\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{p})}{\lambda+\mu}$$

$$\underset{\sim}{r} = \frac{\mu\underset{\sim}{p} + \lambda\underset{\sim}{q}}{\lambda+\mu}$$



A, B, C, D என்னும் நான்கு புள்ளிகளின்

தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$

BC இன் நடுப்புள்ளி L இன் தானக்காவி

$$\overrightarrow{OL} = \underset{\sim}{l} = \frac{\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

M இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OM} = \underset{\sim}{m} = \dfrac{2\underset{\sim}{l} + 1.\underset{\sim}{a}}{2+1}$

இங்கு M ஆனது AL இனை LM/AM = 1/2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

$$\therefore \quad \underset{\sim}{m} = \frac{2 \cdot \frac{\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}}{2} + \underset{\sim}{a}}{3} = \frac{1}{3}\left(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}\right)$$

G இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OG} = \underset{\sim}{g}$, இங்கு G ஆனது DM இனை MG/DG = 1/3 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

$$\therefore \quad \underset{\sim}{g} = \frac{3\underset{\sim}{m} + 1.\underset{\sim}{d}}{3+1}$$

$$= \frac{1}{4}\left[3 \cdot \frac{1}{3}\left(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}\right) + \underset{\sim}{d}\right] = \frac{1}{4}\left(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d}\right)$$

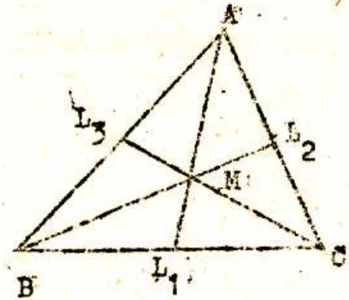
(i) M ஆனது AL_1 இல் கிடக்கின்றது. BL_2 இனை 2 : 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $\frac{1}{3}\left(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}\right)$ ஆகும். இதுவே M.

∴ M ஆனது BL_2 இல் கிடக்கின்றது. இது போலவே

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

M , CL_3 இலும் கிடக்கும். எனவே

$\triangle$ ABC இன் இடையங்கள் AL_1 , BL_2 CL_3 என்பன ஒரு புள்ளி M இல் சந்திப்பனவாகும்.

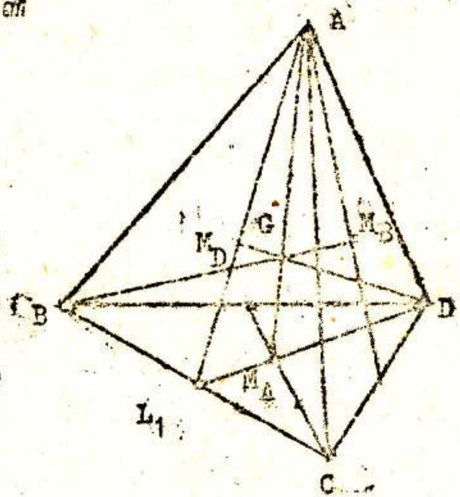


(ii) G ஆனது DM_D இல் கிடக்கின்றது. BM_B ஐ 3 : 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

$\frac{1}{4}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d})$ - இதுவே G

$\therefore$ G ஆனது BM_B இல் கிடக்கின்றது.

இதுபோலவே G ஆனது AM_A , CM_C என்பவற்றிலும் கிடக்கும். எனவே நான்முகியின் உச்சிகளையும், அவற்றின் எதிர்முகங்களின் மையப்போலிகளையும் இணைக்கும் கோடுகள் புள்ளி G இற் சந்திப்பனவாகும்.



23. விடை (2/ஏப்பிரல் 1978)

(அ) P, Q எனும் ஒரு சோடிச்சமாந்திர விசைகளின் விளையுளைக் காண்க. இவ்விசைகள் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கும் பொழுது

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

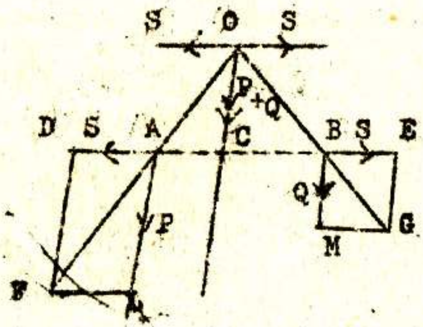
~~உமது நிறுவல் குலைந்து விடுகிறதா~~ ?

ஓர் இணையைத் தனி விசையொன்றினலன்றி, மற்றோர் இணையினலே சமப்படுத்தலாமெனக் காட்டுக. இணையானது ஒரு விசையிலும் வேறாகத் தன்னளவிலே ஒரு சாரிபற்ற தனிப்பொருளாகுமென நீர் கருதுவீரா?

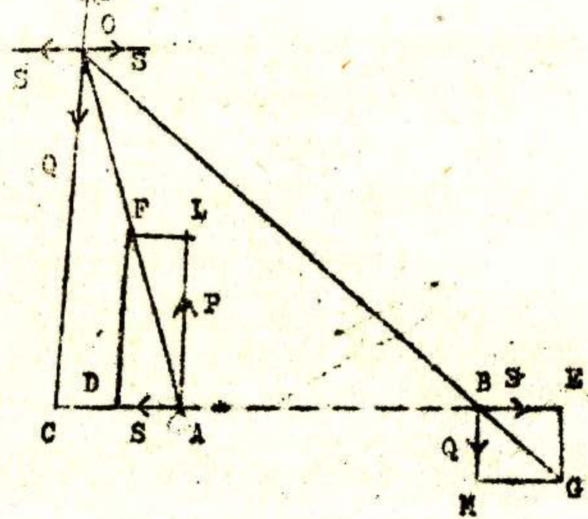
(ஆ) Ox, Oy என்னும் செவ்வக அச்சுகள் குறித்து (x_i, y_i) எனும் ஆள்கூறுகளை உடைய P_i எனும் புள்ளிகளில், முறையே F_i, $(i = 1, 2, .. n)$ எனும் பருமன் கொண்ட ஒருதளச் சமாந்தர விசைகள் தாக்குகின்றன. ஒவ்வொரு விசையும் Ox இற்கு θ எனும் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது. θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் விளையுளானது நிலைத்த ஒரு புள்ளியினூடாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

<u>விடை</u>

(அ) வரை (1) இன் உருவில் P, Q என்பன A, B இல் தாக்கும் நிகர்த்த சமாந்திர விசைகள். A இலும் B இலும் (s, −s) என்னும் விசைகளைச் சேர்க்க. இதனால், விளையுள் விசை C வில் அல்லது C இல் (P + Q) ஆக ஒருமிக்கின்றது. இங்கு C ஆனது AB ஐ AC/BC = Q/P ஆகப் பிரிக்கின்றது.



வகை (i) நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள்

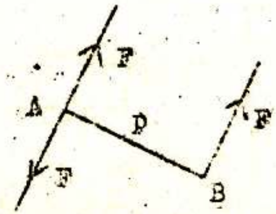


வகை (ii) நிகராச் சமாந்தர விசைகள்.

வகை (ii) இன் உருவில் P, Q என்பன நிகராச்சமாந்தர விசைகள் A இலும் B இலும் (s, -s) என்னும் விசைகளைச் சேர்க்க. இதனால் விளையுள்விசை O வில் அல்லது C யில் (P - Q) ஆக ஒருங்குகின்றது. இங்கு C ஆனது AB ஐ $AC/BC = Q/P$ ஆகப் பிரிக்கின்றது.

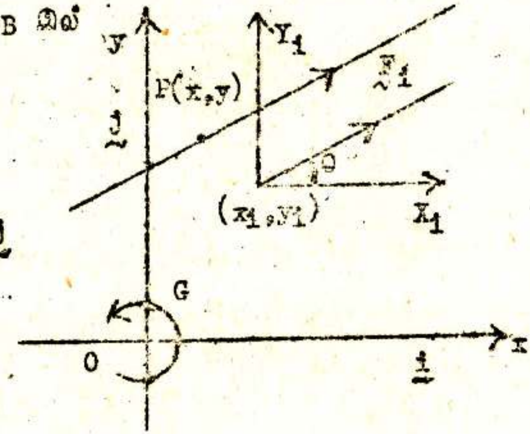
<u>ஆம்</u>

இரு இணைகளின் கூட்டுத்தொகை ஓரிணையாகும். திருப்புத்திறன் பூச்சியமாயின், தொகுதி சமநிலையிலுள்ளது. ∴ ஓரிணையானது பிறிதோர் இணையினால் சமநிலைப்படுத்தப்படும். G இனை இணை Fp இனால் மாற்றுக. தொகுதியானது B யில் F இற்கு ஒடுங்குகின்றது.



ஆம்

(ஆ)



$$\underset{\sim}{F_i} = F_i \text{ கோசை } \theta \, \underset{\sim}{i} + F_i \text{ சைன் } \theta \, \underset{\sim}{j}$$

$$= X_i \underset{\sim}{i} + Y_i \underset{\sim}{j}$$

இங்கு $X_i = F_i$ கோசை θ

$Y_i = F_i$ சைன் θ

∴ விசையின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு P

$$\sum X_i (y - y_i) - \sum Y_i (x - x_i) = 0$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore \sum F_i \text{ கோசை}\theta\,(y - y_i) - \sum F_i \text{ சைன்}\theta\,(x - x_i) = 0$$

$\sum F_i$ ஆல் வகுக்கையில்,

$$\left(y - \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}\right) \text{ கோசை } \theta - \left(x - \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}\right) \text{ சைன்}\theta = 0$$

இதுவே தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடாகும். இக்கோடு நிலையான புள்ளி $\left[\bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \; \bar{y} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}\right]$ இனூடாக θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் செல்லும்.

[குறிப்பு:- அத்தியாயம் 6 இல் உ.ம் 5 (3/டிசம்பர் 69) ஐயும் பார்க்க.]

****

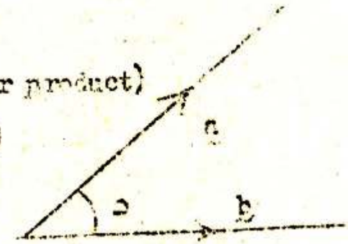
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 7

குற்றுப்புள்ளிப் பெருக்கமும் குறுக்குப் பெருக்கமும்

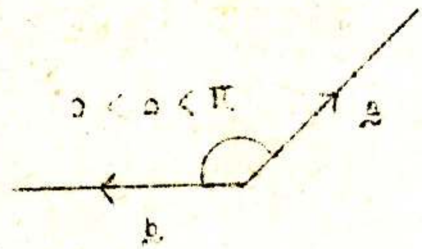
(The Dot Product and Cross Product)

7.1 குற்று அல்லது எண்ணிப் பெருக்கம் (The dot or Scalar product)



$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்னும் இரு காவிகளின் குற்று (அல்லது எண்ணி) பெருக்கம் என்பது அவற்றின் பருமன்களினதும் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் கோசைன் விகிதத்தினதும் பெருக்கமாகும். இதனை $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}$ எனக் குறிப்பிடப்படும். குறியீட்டு முறையில்

$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = ab$ கோசை θ



குறிப்பு: $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}$ என்பது ஒரு எண்ணி. காவியல்ல.

7.2 எண்ணிப் பெருக்கத்தின் இயல்புகள்:

1. $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{a}$ குற்றுப்பெருக்கத்தின் பரிவர்த்தனை விதி.

$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = ab$ கோசை θ, என்பதாலும் $\underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{a} = ba$ கோசை θ என்பதாலும் ab கோசை $\theta = ba$ கோசை θ. $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{a}$.
(இங்கு ஒவ்வொரு குற்றுப் பெருக்கத்திற்கும் ஒரே கோணமாகும்) எனவே பரிவர்த்தனை விதி ஏற்றுக்கொள்ளப்படும். அதாவது எண்ணிப்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பெருக்கமானது காவிகளின் ஒழுங்கில் சாராதது.

2. $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன செங்குத்தாயின், $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} = 0$ ஆகும். மறுதலையாக $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} = 0$ ஆயும், $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன பூச்சியமல்லனவாயுமிருப்பின் காவிகள் செங்குத்தானவையாகும். $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன சமாந்திரமாயும் ஒரே திசையிலுமிருப்பின், $\theta = 0$, $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} = ab$

$\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன சமாந்திரமாயும் எதிர்த்திசை களிலும் மிருப்பின் $\theta = \pi$, $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} = -ab$

இதிலிருந்து அறிவது $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{a} = a^2$, $\hat{\underset{\sim}{a}}.\hat{\underset{\sim}{a}} = 1$

3. தம்முட் செங்குத்தாயுள்ள அச்சுகள் Ox, Oy, Oz என்பவற்றுக்குச் சமாந்திரமாக $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ என்பன அலகுக்காவிகளாயின். $\underset{\sim}{i}.\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{j}.\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{k}.\underset{\sim}{k} = 1$ ஆகவும் $\underset{\sim}{i}.\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{j}.\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}.\underset{\sim}{i} = 0$ ஆகவுமிருக்கும்.

4. எண்ணிகளால் எண்ணிப் பெருக்கத்தைப் பெருக்கல்

m, n என்பன எண்ணிகளாயின்

$$m\underset{\sim}{a} . n\underset{\sim}{b} = (ma)(nb) \text{ கோசை } \theta$$

$$= mn\,(ab \text{ கோசை } \theta)$$

$$= mn\,(\underset{\sim}{a} . \underset{\sim}{b})$$

$$= mn\, \underset{\sim}{a} . \underset{\sim}{b} = \underline{\underline{\underset{\sim}{a} . mn\underset{\sim}{b}}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. $\underset{\sim}{a} = a_2\underset{\sim}{i} + a_2\underset{\sim}{j} + a_3\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{b} = b_1\underset{\sim}{i} + b_2\underset{\sim}{j} + b_3\underset{\sim}{k}$

$$\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} = (a_1\underset{\sim}{i} + a_2\underset{\sim}{j} + a_3\underset{\sim}{k}).(b_1\underset{\sim}{i} + b_2\underset{\sim}{j} + b_3\underset{\sim}{k})$$

$$= a_1b_2\underset{\sim}{i}.\underset{\sim}{i} + a_2b_1\underset{\sim}{j}.\underset{\sim}{i} + a_3b_1\underset{\sim}{k}.\underset{\sim}{i} + a_1b_2\underset{\sim}{i}.\underset{\sim}{j} + a_2b_2\underset{\sim}{j}.\underset{\sim}{j} + a_3b_2\underset{\sim}{k}.\underset{\sim}{j}$$

$$+ a_1b_3\,\underset{\sim}{i}.\underset{\sim}{k} + a_2b_3\underset{\sim}{j}.\underset{\sim}{k} + a_3b_3\underset{\sim}{k}.\underset{\sim}{k}$$

$$= \underline{\underline{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}}$$

இதிலிருந்து

$$ab \text{ கோசை } \theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\boxed{\text{கோசை}\,\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{ab}}$$

மேலும் $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$

$\underset{\sim}{b}.\underset{\sim}{b} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b^2$

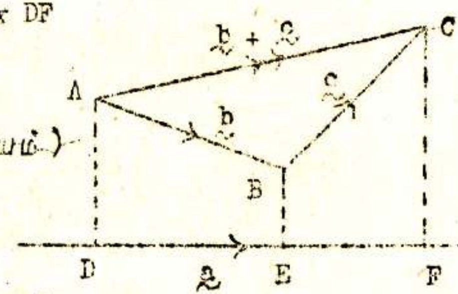
<u>குறிப்பு</u> : $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன செங்குத்துகளாயின், $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ஆகும். மறுதலையாக, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ ஆயின் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

6. $\underset{\sim}{a}.(\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{c}$ பரம்பல் விதி (Distributive Law) உருவத்திலிருந்து,

$\underset{\sim}{a}.(\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a} \times (\underset{\sim}{a}$ இல் $(\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c})$ இன் எறியம்$) = \underset{\sim}{a} \times DF$

$= \underset{\sim}{a} \times (DE + EF) = \underset{\sim}{a} \times DE + a . EF$



$= a \times (\underset{\sim}{a}$ இல் $\underset{\sim}{b}$ இன் எறியம்$) + a \times (\underset{\sim}{b}$ இல் $\underset{\sim}{c}$ இன் எறியம்$)$

$= \underline{\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{c}}$

இதிலிருந்து பெறுவது,

$\underset{\sim}{a}.(\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{d}+\underset{\sim}{e}+ \ldots\ldots) = \underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{d}+\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{e}+\ldots\ldots$

மேலும், $(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}).(\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{d}) = (\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}).\underset{\sim}{c}+(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}).\underset{\sim}{d}$

$= \underline{\underline{\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{b}.\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{d}+\underset{\sim}{b}.\underset{\sim}{d}}}$

7.3 <u>உம் (1)</u>

$\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$ இற்கும் $\underset{\sim}{b} = 6\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ இற்குமிடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

<u>விடை</u> : $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} = ab$ கோசை θ

கோசை $\theta = \dfrac{\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}}{ab} = \dfrac{2.6+2(-3)+(-1).2}{\sqrt{4+4+1}\ \sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{4}{3.7} = \underline{\underline{\dfrac{4}{21}}}$

$\therefore \underset{\sim}{a}$ இற்கும் $\underset{\sim}{b}$ இற்குமிடையேயுள்ள கோணம் $\theta =$ கோசை$^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் (2)

$\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} + \lambda \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$ உம் $\underset{\sim}{b} = 4\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}$ உம் செங்குத்தாயின் λ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

விடை : $\underset{\sim}{a}$ உம் $\underset{\sim}{b}$ உம் செங்குத்தாகையால் $\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = 0$

$$(2\underset{\sim}{i} + \lambda \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}) \cdot (4\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}) = 0$$

$$8 - 2\lambda - 2 = 0 \; ; \quad 2\lambda = 6 \Longrightarrow \underline{\underline{\lambda = 3}}$$

உ.ம் (3) $\underset{\sim}{r} = 3\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ என்னும் காவியின் திசைக்கோசைன்களைக் காண்க.

விடை :- $r = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

$$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{i} = r.1 \text{ கோசை } \alpha$$

$$(3\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}) \cdot \underset{\sim}{i} = 7 \text{ கோசை } \alpha \Longrightarrow 3 = 7 \text{ கோசை } \alpha$$

$$\text{கோசை } \alpha = 3/7$$

$$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{j} = r \text{ கோசை } \beta \Longrightarrow (3\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}) \cdot \underset{\sim}{j} = 7 \text{ கோசை } \beta$$

$$-6 = 7 \text{ கோசை } \beta \therefore \quad \text{கோசை } \beta = -6/7$$

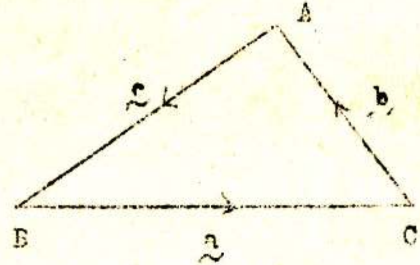
$$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{k} = r \text{ கோசை } \gamma \Longrightarrow (3\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}) \cdot \underset{\sim}{k} = 7 \text{ கோசை } \gamma$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>உ-ம் (4)</u>

எண்ணிப் பெருக்க வரைவிலக்கணத்தை உபயோகித்து, எந்த ஒரு முக்கோணத்திலும் கோசைன் விதியைப் பெறுக.

<u>விடை</u> :



$\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0} \qquad \underset{\sim}{a} = -(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{a} &= (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}).(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) \\
&= (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}).\underset{\sim}{b} + (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}).\underset{\sim}{c} \\
&= \underset{\sim}{b}.\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}.\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}.\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{c}.\underset{\sim}{c}
\end{aligned}$$

$a^2 = b^2 + 2bc$ கோசை$(180 - A) + c^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ கோசை } A}$

<u>உ.ம் (5)</u>

$\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}, \ \underset{\sim}{b} = 4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$ என்பவற்றின் காவிகளுக்குச் செங்குத்தான அலகுக்காவியைக் காண்க.

<u>விடை</u> :

$\underset{\sim}{r} = r_1\underset{\sim}{i} + r_2\underset{\sim}{j} + r_3\underset{\sim}{k}$ என்பது $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ இன் காவிகளுக்குச் செங்குத்தானது என்க.

$$\therefore \quad \underset{\sim}{r}.\underset{\sim}{a} = (r_1\underset{\sim}{i} + r_2\underset{\sim}{j} + r_3\underset{\sim}{k}).(2\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}) = 0$$

$$2r_1 - 6r_2 - 3r_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\underset{\sim}{r}.\underset{\sim}{b} = (r_1\underset{\sim}{i} + r_2\underset{\sim}{j} + r_3\underset{\sim}{k}).(4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}) = 0$$

$$4r_1 + 3r_2 - r_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

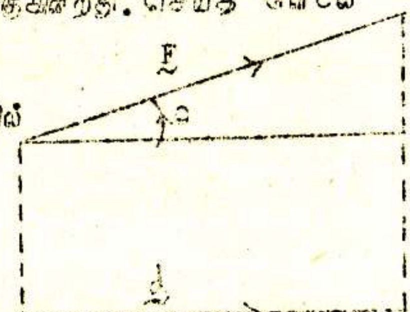
(1) இலும் (2) இலுமிருந்து

$$r_1 = \frac{r_3}{2},\ r_2 = \frac{-r_3}{3};\ \underset{\sim}{r} = \frac{r_3}{2}\underset{\sim}{i} - \frac{r_3}{3}\underset{\sim}{j} + r_3\underset{\sim}{k} = r_3\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{i} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}\right)$$

r இன் திசையிலுள்ள அலகுக்காவி

$$\underset{\sim}{\hat{r}} = \frac{\underset{\sim}{r}}{r} = \frac{r_3\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{i} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}\right)}{\sqrt{r_3^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1\right)}} = \pm\frac{3}{7}\underset{\sim}{i} - \frac{2}{7}\underset{\sim}{j} + \frac{6}{7}\underset{\sim}{k} \qquad \boxed{\underset{\sim}{\hat{r}} = \pm\frac{1}{7}(3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k})}$$

உ.ம் (6)
விசை $\underset{\sim}{F} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$ என்னும் விசை துணிக்கையொன்றில் பிரயோகிக்கப் பட, $\underset{\sim}{d} = (3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k})$ என்னும் காவி வழியே இயங்குகின்றது. செய்த வேலையைக் காண்க.



விடை : செய்யப்பட்ட வேலை = இயங்கும் திசையில் பருமன் x இயங்கிய தூரம்

$= F$ கோசைன் $\theta \times d. \; : = \underset{\sim}{F}.\underset{\sim}{d}$

$= (2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}).(3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k})$

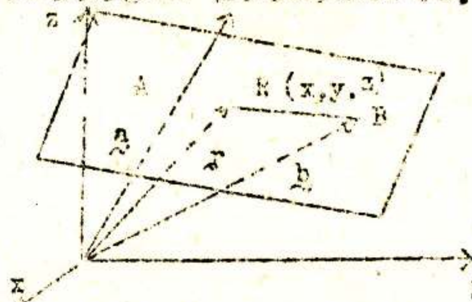
$= 6 - 2 + 5 = \underline{\underline{9}}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் (7)

(a) $\underset{\sim}{n} = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$ என்னும் காவிக்குச் செங்குத்தாகவும் $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ என்னும் காவியின் முடிவுப்புள்ளியினூடாகச் செல்வதுமான தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (b) உற்பத்தியிலிருந்து தளத்திற்குரிய தூரத்தைக் காண்க.

விடை:



தளத்திலுள்ள எந்தவொரு புள்ளி R இனதும் தானக்காவி $\underset{\sim}{r}$ என்க. $\underset{\sim}{b}$ இன் முடிவுப்புள்ளி B என்க. $\overrightarrow{BR}$ தளத்திலுள்ள காவியாகும்.

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$$

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OR} = -\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{b}$$

$$= (x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}) - (\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) = (x-1)\underset{\sim}{i} + (y-5)\underset{\sim}{j} + (z-3)\underset{\sim}{k}$$

தளமானது $\underset{\sim}{n}$ இற்குச் செங்குத்தாகையால், தளத்திலுள்ள எந்தக்காவியும் $\underset{\sim}{n}$ இற்குச் செங்குத்தாகும். ∴ $\overrightarrow{BR}$ என்பது $\underset{\sim}{n}$ இற்குச் செங்குத்தாகும்.

$$\therefore \overrightarrow{BR}.\underset{\sim}{n} = 0, (\underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{b}).\underset{\sim}{n} = 0$$

$$\left[(x-1)\underset{\sim}{i} + (y-5)\underset{\sim}{j} + (z-3)\underset{\sim}{k}\right] (2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}) = 0$$

$$2(x-1) + 3(y-5) + 6(z-3) = 0$$

$\underline{2x + 3y + 6z = 35}$ என்பது வேண்டிய தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(b) உற்பத்தியிலிருந்து தளத்தின் தூரமானது $\underset{\sim}{a}$ இல் $\underset{\sim}{b}$ இன் எறியமாகும். = OA

$\underset{\sim}{a}$ இன் திசையில் உள்ள அலகுக்காவி

$$\hat{\underset{\sim}{a}} = \frac{2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{1}{7}\left(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}\right)$$

$\underset{\sim}{a}$ இல் $\underset{\sim}{b}$ இன் எறியம் $= \underset{\sim}{b} \cdot \hat{\underset{\sim}{a}} = \left(\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}\right) \cdot \frac{1}{7}\left(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}\right)$

$$= \frac{1}{7}(2 + 15 + 18) = \frac{1}{7} \times 35 = 5$$

$\therefore$ வேண்டிய தூரம் $OA = 5$

7.4 காவி அல்லது குறுக்குப் பெருக்கம் (The Vector or Cross Product)

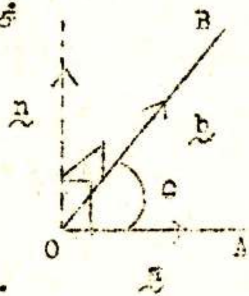
இரு காவிகள் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பவற்றின் காவி அல்லது குறுக்குப்பெருக்கம் என்பது $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பவற்றின் பருமன்களின் பெருக்கத்தொகையை, அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சைன் விகிதத்தால் பெருக்கிவரும் பருமனைக் கொண்டதும் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பவற்றுக்குச் செங்குத்தாகவும் $\underset{\sim}{a}$ இலிருந்து $\underset{\sim}{b}$ ஐ நோக்கிச் சுற்றுகையில் நேர் எனக்கொள்ளும் திசையைக் கொண்டதுமான காவியாகும். காவிப்பெருக்கத்தை எழுதும் முறை

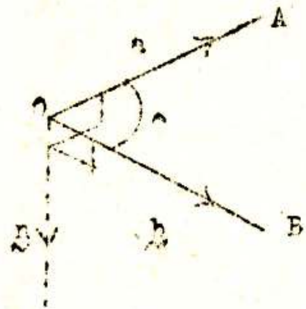
$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \text{ (அல்லது } \underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}) = |\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}| \text{ சைன் } \theta\, \underset{\sim}{n} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

இங்கு $\underset{\sim}{n}$ ஆனது $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்பன கொண்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தான அலகுக்காவி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இக்காவி, $\underset{\sim}{a}$ இலிருந்து $\underset{\sim}{b}$ யை நோக்கிச் செல்கையில், வலக்கைப்புரியின் பெயர்ச்சியின் திசையைப் போன்றதாகும்.





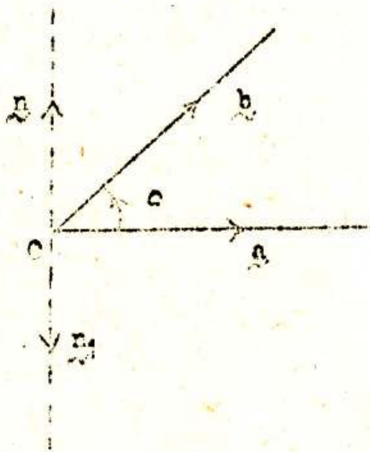
குறிப்பு :-

$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ என்பது ஒரு காவி, எண்ணியல்ல.

7.5 காவிப்பெருக்கத்தின் இயல்புகள்

(1) $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = -\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a}$ (காவிப்பெருக்கத்திற்குப் பரிவர்த்தனை விதி சரியாகாது.)

$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ இற்கும் $\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a}$ இற்குமிடையேயுள்ள ஒரேயொரு வித்தியாசம் அதன் திசையாகும்.



$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ = ab சைன் $\theta.\underset{\sim}{n} = |\underset{\sim}{a}||\underset{\sim}{b}|$ சைன் $\theta.\underset{\sim}{n}$

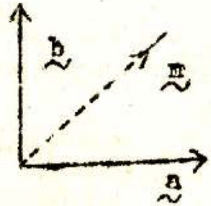
$\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a} = |\underset{\sim}{b}||\underset{\sim}{a}|$ சைன் $\theta\ \underset{\sim}{n}_1$ = ba சைன் $\theta\ \underset{\sim}{n}_1$

ஆனால் $|\underset{\sim}{n}| = |\underset{\sim}{n}_1| = 1 \therefore \underset{\sim}{n} = -\underset{\sim}{n}_1$

$\therefore \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a} = -$ ab சைன் $\theta\ \underset{\sim}{n}$ $\quad \therefore \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{a}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவே $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = - b \times a$ குறுக்குப்பெருக்கத்திற்கு பரிவர்த்தனை விதி
Sanja
வலிதானதல்ல. (not valid)



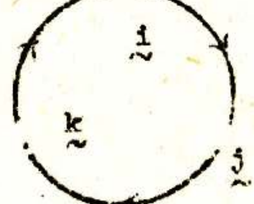
(2) $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பன செங்குத்தாயின் ($\theta = 90^\circ$) $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = ab\,\underset{\sim}{n}$
இங்கு $\underset{\sim}{n}$ ஆனது $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்னும் காவிகளைக் கொண்டுள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. $\underset{\sim}{a}$ உம் $\underset{\sim}{b}$ உம் சமாந்திரமாயும் ($\theta = 0^\circ$ அல்லது 180°) பூச்சியமற்றனவாயுமிருப்பின் $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$

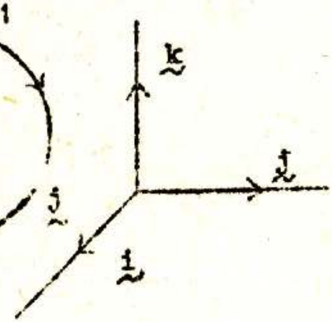
(3) $\left|\underset{\sim}{i} \times \underset{\sim}{j}\right| = \left|\underset{\sim}{i}\right| \times \left|\underset{\sim}{j}\right|$ சைன் 90 $= 1.1.1 = 1$

$\underset{\sim}{i} \times \underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{k}$ $\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{i} = -\underset{\sim}{k}$

$\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{i}$ $\underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{j} = -\underset{\sim}{i}$

$\underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{j}$ $\underset{\sim}{i} \times \underset{\sim}{k} = -\underset{\sim}{j}$





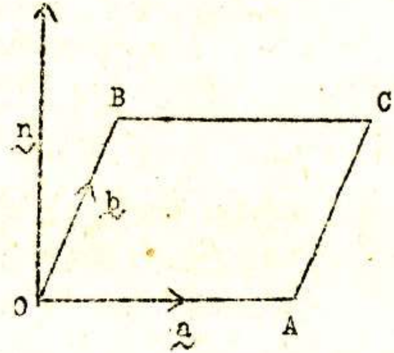
$\left|\underset{\sim}{i} \times \underset{\sim}{i}\right| = \left|\underset{\sim}{i}\right| \times \left|\underset{\sim}{i}\right|$ சைன் $0 = 1 \times 1 \times 0$

$\underset{\sim}{i} \times \underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{k} \times \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0}$

(4) $\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ என்பதன் பருமன் $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ என்பவற்றைப் பக்கங்களாகக்கொண்ட இணைகரமொன்றின் பரப்பிற்குச் சமனாகும்.

$\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



OACB இன் பரப்பு OA x OB சைன் θ

$$= |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OB}| \text{ சைன் } \theta$$

$$= |\underset{\sim}{a}| \times |\underset{\sim}{b}| \text{ சைன் } \theta = ab \text{ சைன் } \theta$$

ஆகவே $|\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}| = |\underset{\sim}{a}| \cdot |\underset{\sim}{b}|$ சைன் $\theta = ab$ சைன் θ

எனவே $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$ என்னும் காவியானது $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ இன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயுள்ளதும் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ யைப் பக்கங்களாக உடைய இணைகரத்தின் பருமனை உடையதுமான காவியாகும்.

(5) $p\underset{\sim}{a} \times q\underset{\sim}{b} = (pa)(qb)$ சைன் $\theta\, \underset{\sim}{n}$ இங்கு θ. காவிகள் $p\underset{\sim}{a}$ இற்கும் $q\underset{\sim}{b}$ இற்குமிடையேயுள்ள கோணம். ஆகவே $\underset{\sim}{a}$ இற்கும் $\underset{\sim}{b}$ இற்குமிடையேயுள்ள கோணமாகும். $p\underset{\sim}{a} \times q\underset{\sim}{b} = pq\,(ab$ சைன் $\theta\, \underset{\sim}{n})$

$$= pq\,(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) = pq\,\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \underline{\underline{\underset{\sim}{a} \times pq\,\underset{\sim}{b}}}$$

(6) $\underset{\sim}{a} = a_1\underset{\sim}{i} + a_2\underset{\sim}{j} + a_3\underset{\sim}{k}$ உம் $\underset{\sim}{b} = b_1\underset{\sim}{i} + b_2\underset{\sim}{j} + b_3\underset{\sim}{k}$

$$\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} = \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

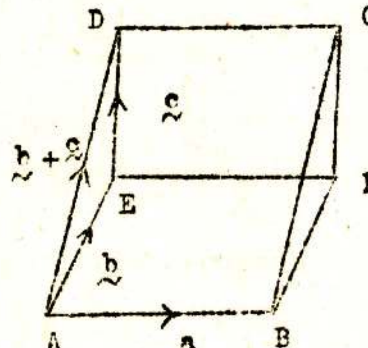
$$= a_1b_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j}$$

$$+ a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_3\mathbf{k} \times \mathbf{k}.$$

$$= a_1b_1 . 0 + a_1b_2\mathbf{k} + a_1b_3(-\mathbf{j}) + a_2b_1(-\mathbf{k}) + a_2b_2\mathbf{0} + a_2b_3\mathbf{i}$$

$$+ a_3b_1(-\mathbf{j}) + a_3b_2(-\mathbf{i}) + a_3b_3\mathbf{0}$$ (7.5 (3) ஐப் பாவிக்க)

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$



இம்முடிபை துணிகோவை முறையாக எழுதலாம்.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(7) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ பரம்பல் விதி

வகை (i) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ என்பன ஒரு தளக்காவிகள்

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{ED} = \mathbf{c}$ என்க.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

ABFE , EFCD , ABCD என்னும் இணைகரங்களைப் பூர்த்திசெய்க.

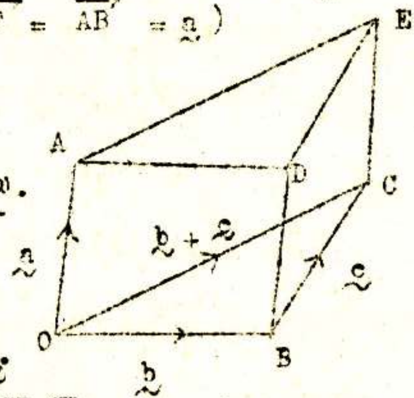
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

காவின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அலகுக்காவி $\mathbf{n}$ என்க.

ABCD இன் பரப்பு = = ABFE இன் பரப்பு + EFCD இன் பரப்பு

ABCD இன் பரப்பு . $\mathbf{n}$ = ABFE இன் பரப்பு . $\mathbf{n}$ + EFCD இன் பரப்பு x $\mathbf{n}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{ED}$ $\quad (\because \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a})$



$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

<u>வகை</u> (ii)

<u>$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்பன ஒரு தளக்காவிகளல்ல.</u>

$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$ என்க.

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$

$\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்பவற்றுடன் ஒரு தளத்தில் கிடவாவண்ணம் OA ஆனது, $\mathbf{a}$ யைக் குறிக்க வரைக. பின்னர் BD, CE என்பன OA இற்குச் சமமும் சமாந்தரமுமாக இருக்க வரைக. ஆயின் $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE} = \mathbf{a}$

அடைத்த பரப்பொன்றின் வகைக்குறிப்புக்காவி பூச்சியமாகையால் OBC, EDA என்னும் அரியத்தின் முகிகளின் பரப்புகளின் காவிகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும். ஆகவே $\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore \quad \cancel{\left[(b + c) \times a = b \times a + c \times a\right]}, \; -(b + c) \times a = -b \times a - c \times a$$

$$\therefore \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

7.6 உதாரணங்கள்

(1) $a = 2i - 3j - k$ உம் $b = i + 4j - 2k$ உம் ஆயின், (i) $a \times b$ (ii) $b \times a$,

(iii) $(a + b) \times (a - b)$ என்பவற்றைக் காண்க.

விடை (i) $a \times b = (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$= i \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\underline{10i + 3j + 11k}}$$

(ii) $b \times a = (i + 4j - 2k) \times (2i - 3j - k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$$= i \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-10i - 3j - 11k}}$$

(iii) $a + b = (2i - 3j - k) + (i + 4j - 2k) = 3i + j - 3k$

$a - b = (2i - 3j - k) - (i + 4j - 2k) = i - 7j + k$

ஆகவே,

$(a + b) \wedge (a - b) = (3i + j - 3k) \times (i - 7j + k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$

$= i \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$ = [illegible]

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$-20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$

(2) வினா $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k},\ \mathbf{b} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ என்பவற்றால் அமைக்கப்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அலகுக்காவியினைக் காண்க.

விடை

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ என்பவற்றால் அமைக்கப்படும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான காவி $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ஆகும்.

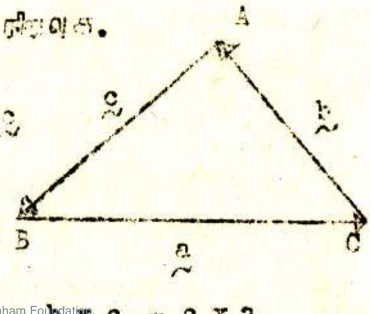
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\therefore \text{வேண்டிய அலகுக்காவி} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

(3) வினா :

தள முக்கோணிகட்குச் சைன் விதியை நிறுவுக.



விடை முக்கோணி ABC இன் பக்கங்களை $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ என்பன முறையே குறிக்கின்றன. ஆகவே

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$\mathbf{a} \times (1)$ தருவது $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{b} \times (1)$ தருவது $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ $\quad \therefore \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

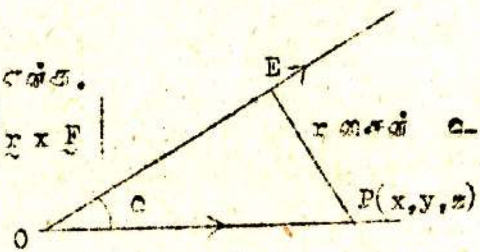
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அஃது $\quad ab$ சைன் $c = bc$ சைன் $A = ca$ சைன் B

$$\boxed{\frac{\text{சைன் } A}{a} = \frac{\text{சைன் } B}{b} = \frac{\text{சைன் } C}{c}}$$

(4) <u>பொறியியலிற் பிரயோகம்</u> <u>திருப்பங்கள்</u>

<u>வினா</u> P என்னும் புள்ளி பற்றி விசை F இன் திருப்பத்தைத்தரும் கோவை ஒன்றினைக் காண்க.



<u>விடை</u> புள்ளி P பற்றி F இன் திருப்பம் M என்க.

$$|\underset{\sim}{M}| = |\underset{\sim}{F}|\, r \text{ சைன் } \theta = rF \text{ சைன் } \theta = |\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}|$$

$$\boxed{\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}}$$

O வினூடாகச் செல்லும் அச்சுக்களுக்குத் தொடர்பாக P இன் ஆள்கூறுகள் (x, y, z) ஆயும், அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாக F இன் கூறுகள் (X, Y, Z) ஆயுமிருப்பின் O பற்றி $\underset{\sim}{F}$ இன் திருப்பம் M எனின்,

$$\underset{\sim}{M} = (x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}) \times (X\underset{\sim}{i} + Y\underset{\sim}{j} + Z\underset{\sim}{k})$$

$$= \underline{\underline{(yZ - zY)\underset{\sim}{i} + (zX - xZ)\underset{\sim}{j} + (xY - yX)\underset{\sim}{k}}}$$

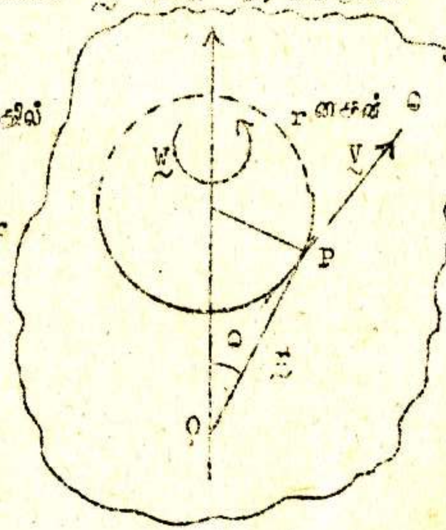
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கவனிக்கத்தக்கது, $\underset{\sim}{i}\cdot\underset{\sim}{M} = yZ - zY$ = Ox பற்றி F இன் திருப்பம்

$\underset{\sim}{j}\cdot\underset{\sim}{M} = zX - xZ$ = Oy பற்றி F இன் திருப்பம்

$\underset{\sim}{k}\cdot\underset{\sim}{M} = xY - yX$ = Oz பற்றி F இன் திருப்பம்.

(5) <u>வினா:</u> O என்னும் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் அச்சு பற்றி, ஒரு விறைப்பான உடல் W என்னும் கோணக்கதியுடன் சுழலுகிறது. உடலில் உள்ள புள்ளி P இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{r}$ ஆயிருப்பின், அதன் ஏகபரிமாண வேகம் $\underset{\sim}{V}$ ஆனது தரப்படுவது $\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{r}$ என நிறுவுக.



<u>விடை</u> P ஆனது r சைன் θ ஆரையுடைய வட்டத்தில் இயங்குவதால், ஏகபரிமாண வேகம் $\underset{\sim}{V}$ இன் பருமன் w r சைன் θ = $|\underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{r}|$ மேலும் $\underset{\sim}{V}$ ஆனது w, r என்பவற்றுக்குச் செங்குத்தானது. அதனால் $\underset{\sim}{r}, \underset{\sim}{w}, \underset{\sim}{V}$ என்பன ஒரு வலக்கைத் தொகுதியை உண்டாக்குகின்றன. $\therefore \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{r}$
காவி $\underset{\sim}{w}$ என்பது கோணவேகம் எனப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 7

1. O தொடர்பாக A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{b} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{c} = -\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}$ ஆயின், ABC என்னும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயுள்ள அலகுக்காவி n இனை (i) குற்றப்பெருக்கம் (ii) குறுக்குப்பெருக்கம் என்னும் முறைகளால் காண்க. (விடை $\underset{\sim}{n} = (\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}) / \sqrt{6}$)

2. $(\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}) \times (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = 2\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}$ என நிறுவி, கேத்திரகணித முறையால் விளக்குக.

3. $\underset{\sim}{a} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{b} = 4\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{c} = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ ஆயின்
$\underset{\sim}{a}.(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{c}$; $\underset{\sim}{a} \times (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{c}$

4. $3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவியுள்ள புள்ளியினூடாக விசை $\underset{\sim}{F} = 2\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} - 6\underset{\sim}{k}$ செல்கின்றது. $6\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} - 7\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவியுள்ள புள்ளிபற்றி F இன் திருப்பத்தைக்காண்க. மேலும் இப்புள்ளியினூடாகவும், $4\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ என்ற காவிக்குச் சமாந்திரமாகவும் செல்லும் கோடு பற்றி $\underset{\sim}{F}$ இன் திருப்பத்தைக் காண்க.

விடை : $54\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + 15\underset{\sim}{k}$; $255/\sqrt{26}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. xy தளத்தில் $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ என்பன அலகுக்காவிகளாயும், நேர் x-அச்சுடன் α, β என்னும் கோணங்களையும் முறையே அமைக்கின்றன.

(i) $\mathbf{r}_1$ = கோசை $\alpha\, \mathbf{i}$ + சைன் $\alpha\, \mathbf{j}$

$\mathbf{r}_2$ = கோசை $\beta\, \mathbf{i}$ + சைன் $\beta\, \mathbf{j}$ என நிறுவுக.

(ii) $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ என்பதைக்கொண்டு திரிகணிதச் சூத்திரங்கள் கோசை $(\alpha - \beta)$ = கோசை α கோசை β + சைன் α சைன் β ; கோசை $(\alpha + \beta)$ = கோசை α கோசை β − சைன் α சைன் β என்பவற்றை நிறுவுக.

(iii) $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ என்பதைக்கொண்டு திரிகணிதச் சூத்திரங்கள்.

சைன் $(\alpha - \beta)$ = சைன் α கோசை β − கோசை α சைன் β

சைன் $(\alpha + \beta)$ = சைன் α கோசை β + கோசை α சைன் β

என நிறுவுக.

6. சுழற்சி அச்சொன்று பற்றி, சுழலும் உடலொன்றின் கோணவேகமானது $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ஆகும். சுழற்சியச்சிலுள்ள புள்ளியொன்று பற்றி உடலிலுள்ள புள்ளி P இன் தானக்காவி $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ஆகும். P இன் ஏகபரிமாண வேகத்தினைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. காவிகள் $\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{b} = 4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$ என்பவற்றைக் கொண்டுள்ள தளத்திற்குச் செங்குத்தாயுள்ள அலகுக்காவியைக் காண்க.

விடை: $\pm (3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k})/7$

8. முக்கோணியொன்றின் உச்சிகளின் தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ ஆயிருக்க, முக்கோணியின் பரப்புக்காவியினை $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{b} \times \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{c} \times \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b})$ என எழுதலாமென நிறுவுக.

9. $\underset{\sim}{r} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k}$ என்னும் காவி வழியே பொருளொன்றை, பிரயோகவிசை $\underset{\sim}{F} = 2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$ இனால் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

விடை : 9

10. முக்கோணியொன்றின் உச்சிகள் P (1,3,2); Q (2,-1,1) ; R (-1,2,3) ஆயின் குறுக்குப்பெருக்கம் மூலம் △ PQR இன் பரப்பைக் காண்க.

விடை : $\frac{1}{2}\sqrt{107}$

****

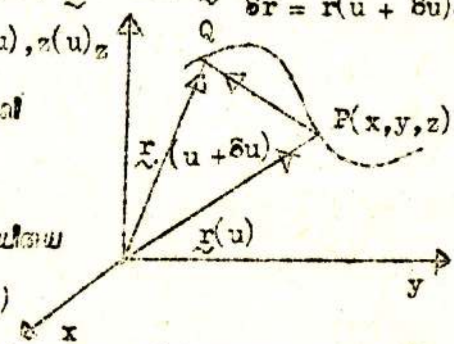
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 8

வெளிவளையிகளும் காவி வகையீடுகளும் (Space Curves & Vector Differentiation)

8.1 வெளிவளையி

தானக்காவி $\underset{\sim}{r}(u)$ இனை $\underset{\sim}{r}(u) = x(u)\,\underset{\sim}{i} + y(u)\,\underset{\sim}{j} + z(u)\,\underset{\sim}{k}$ எனக் கூறலாம். இங்கு u மாறுபட $x(u), y(u), z(u)$ என்பன மாறுபடுகின்றன. ஆகவே தானக்காவி $\underset{\sim}{r}(u)$ மாறுபடுகின்றது.



P இன் நிலை மாறுபட, P ஒரு வெளிவளையியை உருவாக்குகின்றது. (உருவில் உள்ளது போல்)

மாறி ஒரு பரமானம் எனப்படும். வெளிவளையியை $\underset{\sim}{r}(u)$ இனால் குறிப்பிடுதல் பரமான வகைக்குறிப்பு எனப்படும்.

காவி வகையிடல் (Vector Differentiation)

u மாறுகையில் $\underset{\sim}{r}$ இன் முடிவுப்புள்ளி ஒரு வெளிவளையியை வரைகின்றது. அதன் பரமானச் சமன்பாடுகள் $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனவே $\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta u} = \frac{\mathbf{r}(u + \delta u) - \mathbf{r}(u)}{\delta u}$ என்பது ஒரு காவியாகும்

அ.து $\delta \mathbf{r}$ இன் திசையிலிருக்கும். (உருவைப் பார்க்க)

எல்லை $\lim_{\delta u \to 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta u} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$ ஆக இருக்கையில், எல்லையானது ஒரு காவியாகவும் அதன் திசையானது, வெளிவளையியின் புள்ளி (x, y, z) இலுள்ள தொடலியின் திசையில் இருப்பதாகவும் இருக்கும். அதனை

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

என எழுதலாம்.

8.3 <u>வேகம் $\mathbf{v}$</u> $\mathbf{r}$ என்பது நேரம் t இல் ஆயின், $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ என்பது $\mathbf{r}$ இன் முனைப்புள்ளி வளையியை வரையும் வேகம் $\mathbf{v}$ இனைக் குறிக்கும். $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$

8.4 <u>ஆர்முடுகல்</u>

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

8.5 <u>வகையிடல் சூத்திரங்கள்</u> (Differentiation Formulas)

u என்னும் எண்ணியால் வகையிடத்தக்க காவிச்சார்புகள் $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ஆயும், ϕ என்பது வகையிடத்தக்க, u வைக் கொண்டுள்ள எண்ணிச் சார்பாயுமிருப்பின்

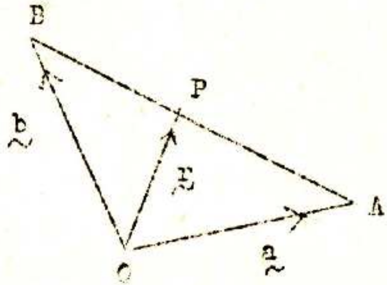
Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(1) $\frac{d}{du}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = \frac{d}{du}\underset{\sim}{a} + \frac{d}{du}\underset{\sim}{b}$ (3) $\frac{d}{du}(\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \times \frac{d\underset{\sim}{b}}{du} + \frac{d\underset{\sim}{a}}{du} \times \underset{\sim}{b}$

(2) $\frac{d}{du}(\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \cdot \frac{d\underset{\sim}{b}}{du} + \frac{d\underset{\sim}{a}}{du} \cdot \underset{\sim}{b}$ (4) $\frac{d}{du}(\phi \underset{\sim}{a}) = \phi \cdot \frac{d\underset{\sim}{a}}{du} + \frac{d\phi}{du} \cdot \underset{\sim}{a}$

8.6 சில வெளிவளையிகளை வரைவிலக்கணப்படுத்தும் காவிக்கோவைகள்

(1) நேர்வரை $\overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$



AB வழியேயுள்ள அலகுக்காவி $= \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

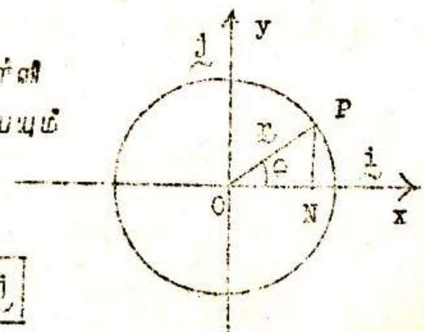
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{AP}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{a} + \lambda(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})$ [இங்கு $\lambda = AP/AB$]

$\underset{\sim}{r} = \lambda b + (1 - \lambda)\underset{\sim}{a}$

இங்கு λ என்பது ஒரு எண்ணிப்பரமானம்.

λ மாறுவதால் நேர்கோட்டிலுள்ள எந்தப்புள்ளியையும் தெரிவு செய்யலாம். λ எப்பெறுமதியையும் எடுக்கும்.



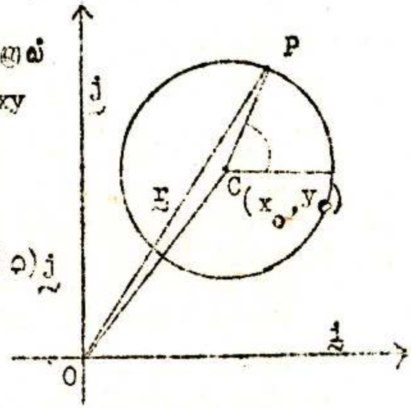
(2) வட்டம் (Circle)

(1) $\boxed{\underset{\sim}{r} = r \text{ கோசை } \theta\, \underset{\sim}{i} + r \text{ சைன் } \theta\, \underset{\sim}{j}}$

θ மாறுபட, $\underset{\sim}{r}$ உம் மாறுபடும். எனவே புள்ளி P ஆனது வட்டத்தைக் கவரு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வரையும். இதனை முப்பரிமாண வெளியில் எடுப்போமானால் $\underset{\sim}{r} = r$ கோசைθ$\underset{\sim}{i}$ + r சைன்θ$\underset{\sim}{j}$ + $0\underset{\sim}{k}$ ஆகும். இது oxy தளத்தில் O மையமாகவும், r ஆரையாகவும் உடைய வட்டமாகும்.

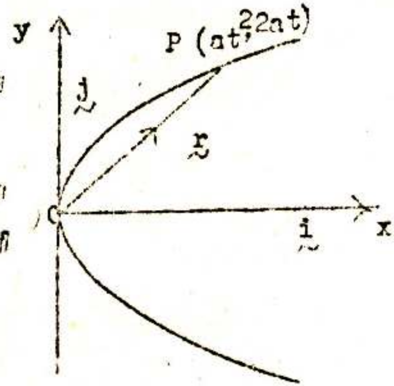


(ii) $\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{r} = (x_0 + a$ கோசைθ$)\underset{\sim}{i} + (y_0 + a$ சைன்θ$)\underset{\sim}{j}$ என்பது (x_0, y_0) மையமாகவும், a ஆரையாகவும் உடைய வட்டமாகும்.

(3) <u>பரவளைவு</u> (Parabola)

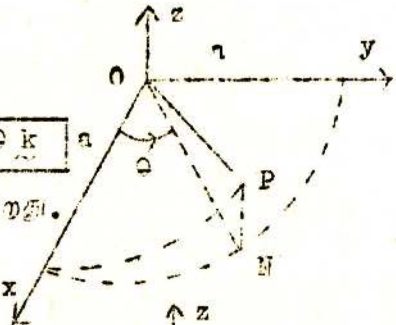
$$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{r} = at^2\,\underset{\sim}{i} + 2at\,\underset{\sim}{j}$$

இங்கு a என்பது ஒரு எண் ஒருமை. t மாற, $\underset{\sim}{r}$ மாறுவதால், P ஒரு பரவளைவின் சுவடு வரையும்.



(4) <u>சுரி</u> (Helix) சுரியானது ஒரு வட்ட வில்லல்லது சுருள் போன்றிருக்கும். உருவில் உள்ளது போல், புள்ளி N oxy தளத்தில், a ஆரையுடைய வட்டத்தை சுவடு வரைய P ஆனது N தொடர்பாக $b\theta\,\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவியை உடையது. (அ.து $\overrightarrow{NP} = b\theta.\underset{\sim}{k}$)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

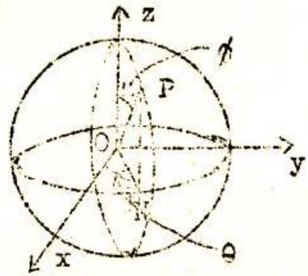


எனவே, P இன் தானக்காவியானது $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$

$$\boxed{\underset{\sim}{r} = a\,\text{கோசை}\,\theta\,\underset{\sim}{i} + a\,\text{சைன்}\,\theta\,\underset{\sim}{j} + b\,\theta\,\underset{\sim}{k}}$$

θ மாற, $\underset{\sim}{r}$ இன் முடிவுப்புள்ளி, சுருளியைச் சுவடு வரைகின்றது.

(5) <u>கோளம்</u> (Sphere) உருவிலுள்ளது போல், கோளமானது O வை மையமாகவும் a யை ஆரையாகவும் உடையதெனக். Oxy தளத்தில் N கிடக்கின்றது.



ON = a சைன் φ P இன் ஆள்கூறுகள்

(a சைன் φ கோசை θ, a சைன் φ சைன் θ, a கோசை φ)

∴ தானக்காவி $\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{r}$ = a சைன் φ கோசை θ $\underset{\sim}{i}$ + a சைன் φ சைன் θ $\underset{\sim}{j}$ + a கோசை φ $\underset{\sim}{k}$; φ, θ என்பன மாற, P ஆனது கோளமொன்றின் பரப்பினைச் சுவடு வரைகின்றது.

<u>உதாரணங்கள்</u> உ.ம் (1)

<u>வினா</u> 3 கிலோகிராம் திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று $\underset{\sim}{F}_1 = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{F}_2 = 3\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ நியூட்டன்கள் விசைகளாற் தாக்கப்படுகின்றது. ஆரம்பத்தில் அது $(\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k})$ என்னும் புள்ளியில் ஓய்விலுள்ளது. 2 செக். பின்னர் அதன்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தானத்தையும், துணிக்கையின் உந்தத்தையும் காண்க. இந்நேரத்தில் துணிக்கையில் செய்யப்பட்ட வேலையையும் காண்க.

விடை : விளையுள் விசை $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 + \underset{\sim}{F}_3$

$= 3\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$ நியூட்டன்கள். $\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{f}$

$\therefore \underset{\sim}{f} = \frac{\underset{\sim}{F}}{m} = \frac{3\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}}{3} = \underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ மீ. செக். $^{-2}$

$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{u}\, t + \frac{1}{2}\underset{\sim}{f}\, t^2$ என்பதை உபயோகிக்கையில்

$\underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}) \quad \overrightarrow{AB} = \underset{\sim}{S} = 0 \times 2 + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})\, 2^2$

$= 2(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\,;\ \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{s} = (\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}) + 2(\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})$

$= 3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ மீட்டர்கள்

2 செக்கன்களின் பின்னர் துணிக்கையின் நிலை$=3(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k})$ மீட்டர்கள்

B இல் துணிக்கையின் வேகம் $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{f}\, t = \underset{\sim}{0} + 2(\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})$

$= 2(\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})$ மீ. செக்$^{-1}$

$\therefore$ 2 செக்கன்களின் பின்னர் துணிக்கையின் உந்தம் $m\underset{\sim}{v} = 3.2(\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k})$

கி. மீ. செக். $^{-1}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

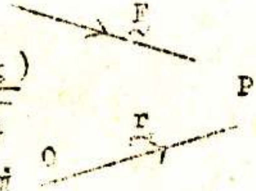
$$= \underline{\underline{6(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}} \text{ கி.மீ.செக்.}$$

2 செக்கன்களில் செய்த வேலை $= \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) . 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$$= 6\,(1 + 4 + 4) = \underline{\underline{54}} \text{ யூல்கள்}$$

<u>உ.ம் (2)</u>

ஆள்கூறுகள் (0, 1, 3) உள்ள P என்னும் துணிக்கையில் (1, −1, 2) என்னும் திசையில் 6 நியூட்டன்கள் பருமன் கொண்ட விசை தாக்குகின்றது. O பற்றிய விசையின் திருப்பத்தையும், அதன் தளத்தையும், இத்திருப்பம் உள்ள திசையையும் காண்க.

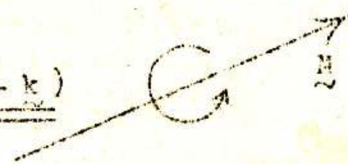


<u>விடை</u> : $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; விசை $\mathbf{F} = \dfrac{6(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{1 + 1 + 4}}$

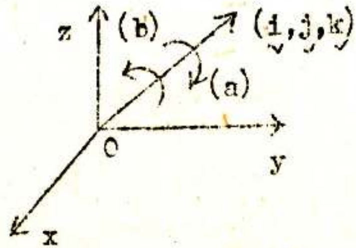
$$= \sqrt{6}\,(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ நியூட்டன்கள்}$$

O பற்றிய விசையின் திருப்பம், $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times \sqrt{6}\,(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$$= \sqrt{6} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\sqrt{6}\,(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})}}$$



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org



$M = \sqrt{6}\sqrt{35} = \sqrt{210}$ நியூட்டன் - மீட்டர்கள்

உரு $\underset{\sim}{M}$ இற்குச் செங்குத்தாயுள்ள தளத்தையும், சுழற்சித் திசையையும் காட்டுகின்றது.

உ.ம் (3) வினா

$(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k})$ என்னும் காவிக்குச் சமாந்திரமாயுள்ள அச்சுபற்றி துணிக்கை P, கோணவேகம் $\underset{\sim}{w}$ உடன் சுழல்கிறது. அதன் தானப்புள்ளி $(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k})$ இப்புள்ளியில் P இன் வேகத்தைக் காண்க.

விடை:

உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளது போல் துணிக்கை P ஆனது (a) அல்லது (b) என்னும் திசையில் சுழலக் கூடியது.

(a) இன் திசையில் சுழலுகையில்

P இன் தானக்காவி $\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{r} = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$

கோணவேகம் $\underset{\sim}{w} = (\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}) \left[\dfrac{1}{(1+1+1)^{\frac{1}{2}}}\right] w$

$= \dfrac{w}{\sqrt{3}} (\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k})$

P இன் வேகம் $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{w} \times \underset{\sim}{r} = \dfrac{w}{\sqrt{3}} (\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}) \times (2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k})$

$$= \frac{w}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \underset{\sim}{i} & \underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{w}{\sqrt{3}} (-4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k})$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(b) இன் திசையில் சுழலுகையில் கோணவேகம் $\mathbf{w} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\frac{1}{\sqrt{3}}w$

$$\therefore \text{ வேகம் } \mathbf{v} = -\frac{w}{\sqrt{3}}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

உ.ம் (4) வினா: $\sqrt{6}$ நியூட்டன்கள் பருமனுடைய விசையொன்று கோடு $\mathbf{r} = (s-4)\mathbf{i} + (s+1)\mathbf{j} + (2s+3)\mathbf{k}$ வழியே தாக்குகின்றது. $\sqrt{14}$ நியூட்டன்கள் பருமனுடைய இரண்டாவது விசையொன்று கோடு $\mathbf{r} = (t-7)\mathbf{i} + (2t-3)\mathbf{j} + (2-3t)\mathbf{k}$ இவ்விரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று சந்திக்குமெனவும் அவை வெட்டும் புள்ளி P இன் தானக்காவியைக் காண்க.

இவ்விரு விசைகளின் விளையுளையும், அதன் தாக்கக்கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டையும் காண்க. இவ்விரு விசைகளும் 2 கி.கி. திணிவுள்ள துணிக்கையில் தாக்குகின்றன. ஆரம்பத்தில் P இல் ஓய்விலுள்ள துணிக்கையின் வேகக்காவியினையும், தான நிலையையும் 4 செக்கன்களின் பின் காண்க.

விடை இரு கோடுகளும் P இல் சந்திப்பின், $\mathbf{p} = \mathbf{r}$

$$= (s-4)\mathbf{i} + (s+1)\mathbf{j} + (2s+3)\mathbf{k} = (t-7)\mathbf{i} + (2t-3)\mathbf{j} + (2-3t)\mathbf{k}$$

குணகங்களைச் சமன் செய்கையில்,

$$s-4 = t-7; \quad s+1 = 2t-3; \quad 2s+3 = 2-3t.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

முதலிரு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்கையில் $t = 1, s = -2$

எனப்பெறப்பட்டது. இப்பெறுமதிகளை மூன்றாவது சமன்

பாட்டில் பிரதியிடுகையில் $2(-2) + 3 = 2 - 3(1)$

$\therefore$ இவ்விரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று சந்திக்கின்றன.

வெட்டும் புள்ளி P இன் தானக்காவி

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{p} = -6\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$$

இரு கோடுகளையும் பின்வருமாறு கோவைப்படுத்தலாம்

Sa.

$$\underset{\sim}{r} = (-4\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}) + s(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}) = \underset{\sim}{a} + s\underset{\sim}{F_1}$$

$$\underset{\sim}{r} = (-7\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}) + t(\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}) = \underset{\sim}{b} + t\underset{\sim}{F_2}$$

$$F_1 = \left|1^2 + 1^2 + 2^2\right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} \qquad F_2 = \left|1^2 + 2^2 + 3^2\right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$$

விளையுள் விசை $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} = (\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}) + (\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k})$

$$= 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$$

விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் காவிச்சமன்பாடு $r = \underset{\sim}{p} + m\underset{\sim}{F}$

$$= (-6\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}) + m(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}) = (2m - 6)\underset{\sim}{i} + (3m - 1)\underset{\sim}{j} - (m + 1)\underset{\sim}{k}$$

இங்கு m ஒரு எண்ணி மாறியாகும். $\underset{\sim}{F} = M\underset{\sim}{f}$; $\underset{\sim}{f} = \frac{\underset{\sim}{F}}{M} = \frac{1}{M}(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k})$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4 செக்கன்களின் பின் $\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{f}\,t = 0 + \frac{1}{2}(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}).4$

$$= \underline{\underline{4\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}}}$$

∴ 4 செக்கன்களின் பின்னுள்ள வேகக்காவி $\underline{\underline{\underset{\sim}{V} = 4\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}}}$

$$s = \underset{\sim}{u}t + \frac{1}{2}\underset{\sim}{f}\,t^2 = 0 \times 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k})\,4^2$$

$$= \underline{\underline{8\underset{\sim}{i} + 12\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}}}$$

∴ 4 செக்கன்களின் பின்னர் தானக்காவி $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{s}$

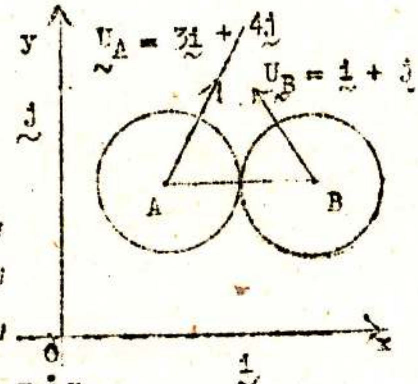
$$\underset{\sim}{d} = (-6\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}) + (8\underset{\sim}{i} + 12\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}) = \underline{\underline{2\underset{\sim}{i} + 11\underset{\sim}{j} - 5\underset{\sim}{k}}}$$

<u>உ.ம்) (5) விறு</u>

இரு சர்வசமமான ஒப்பக்கோளங்கள் ஒரு கிடை மேசையில், $(3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j})$, $(-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$ என்னும் வேகக் காவிகளுடன் இயங்குகின்றன. அவற்றின் மையக்கோடு $\underset{\sim}{i}$ என்னும் காவிக்குச் சமாந்தரமாயிருக்கையில், மோதுகின்றன. கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆயின் மோதலையின் பின் கோளங்களின் வேகக்காவிகளைக் காண்க. மொத்துகையில் முன்பும் பின்பும் கோளங்கள் ஒன்றிற்கொன்று தொடர்பான வேகங்களின் பருமன்களின் விகிதங்களைக் காண்க. மொத்துகையின் கணத்தில் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

2 அலகுகளாயின், ஒரு அலகு நேரத்தின் பின்னர் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க.



<u>விடை</u> :- A, B என்பவற்றின் திணிவு m என்க.

$\underset{\sim}{u}_A = 3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$; $u_B = -\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$

கோளங்கள் ஒப்பமானவையாகையால் Oy வழியேயுள்ள $\underset{\sim}{u}_A$, $\underset{\sim}{u}_B$ என்பவற்றின் கூறுகள் மொத்துகையில் மாறுபடாதனவாகும். மொத்துகையின் பின்னர் Ox வழியே A, B என்பவற்றின் வேகக்கூறுகள் முறையே V_A^*, V_B^* என்க.

நியூட்டனின் மீளமைவு விதிப்படி, $V_A^* - V_B^* = -\frac{1}{2}\left\{3 - (-1)\right\} = -2$ .... (1)

Ox திசைவழியே உந்தக்காப்புத் தத்துவத்தை உபயோகிக்கையில், $mV_A^* - mV_B^* = m.3 + m(-1)$; $V_A^* + V_B^* = 2$ ...(2)

(1) உம் (2) உம் தீர்க்கப்படுகையில், $V_A^* = 0$, $V_B^* = 2$

மொத்துகையின் பின் A இன் வேகம் $V_A = 0\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$

மொத்துகையின் பின் B இன் வேகம் $V_B = 2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$

<u>மொத்துகையின் முன்</u> B தொடர்பாக A இன் வேகம் $= (3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}) - (-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$

$= \underline{\underline{4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}}}$

மொத்துகையின் பின் B தொடர்பாக A இன் வேகம் $= (0\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}) - (2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})$

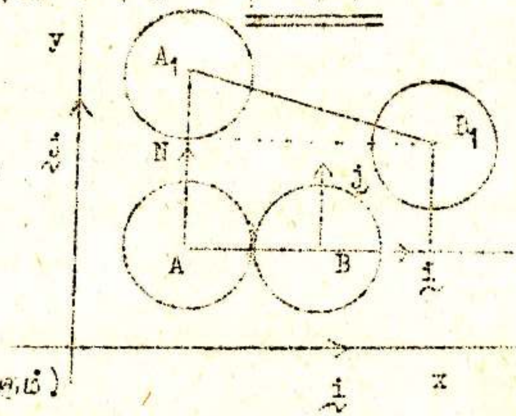
$$= -2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$$

∴ இவ்விரு தொடர்பு வேகங்களின் பருமன்களின் விகிதம்

$$= \sqrt{25} : \sqrt{13} = \underline{\underline{5 : \sqrt{13}}}$$

$NA_1 = 4 - 1 = 3$; $NB_1 = 2 + 2 = 4$

$A_1B_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



∴ ஒரு அலகு நேரத்தின் பின்னர் மையங்களை

கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $= \underline{\underline{5}}$

<u>மாற்றுவழி</u> $\overrightarrow{BA} = \underset{\sim}{r}$ ஆயின், $\underset{\sim}{r} = -2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$

(B தொடர்பாக A இன் தானக்காவி $\overrightarrow{BA}$ ஆகும்)

ஆதலால் $\dfrac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = 2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$

$$\int_{r = -2\underset{\sim}{i} + 0\underset{\sim}{j}}^{r = a} dr = \int_{t=0}^{t=1} (-2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j})\, dt$$

$\underset{\sim}{a} - (-2\underset{\sim}{i} + 0\underset{\sim}{j}) = -2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$

$\underset{\sim}{a} = -4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}$, $|\underset{\sim}{a}| = |-4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j}|$

$$= \sqrt{16 + 9} = 5$$

∴ 1 செக்கனின் பின்னர், கோளங்களின் மையங்கள் A, B இற்கிடையேயுள்ள

தூரம் $= \underline{\underline{5}}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் (6) வினா துணிக்கை P இன் பாதையின் சமன்பாடு $\mathbf{r} = \mathbf{i}t + \mathbf{k}t^2$

இங்கு t நேரமாகும். P இன் ஆர்முடுகல் ஓர் ஒருமையெனக்காட்டுக.

P தொடர்பாக Q இன் வேகம் $(\mathbf{i} - \mathbf{j})$. $t = 0$ ஆயிருக்கையில் $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{j}$. Q இன்

பாதையின் சமன்பாட்டையும் P இற்கு மிக அருகில் Q இருக்க எடுக்கும்

நேரத்தையும் காண்க.

விடை: $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + 0.\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + 0.\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$

$\mathbf{f} = \ddot{\mathbf{r}} = 0\mathbf{i} + 0.\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (t ஐச்சாராதது)

∴ P இன் ஆர்முடுகல் ஓர் ஒருமையாகும்.

$\mathbf{V}_{Q,P} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

ஆனால் $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$

$= -\mathbf{r} + \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$

$\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k})$

$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

$\int d\mathbf{q} = \int (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k})\,dt$; $\mathbf{q} = 2t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}$

$t = 0$ ஆயிருக்கையில் $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{r} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ & $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

∴ $t = 0$ ஆயிருக்கையில், $\mathbf{c} = 0\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

∴ Q இயங்கும் வெளிவட்டையின் சமன்பாடு $\underset{\sim}{q} = 2t\,\underset{\sim}{i} + (1-t)\underset{\sim}{j} + t^2\underset{\sim}{k}$

$$\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{r} = \left\{ t\underset{\sim}{i} + (1-t)\underset{\sim}{j} + 0\,\underset{\sim}{k} \right\}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left\{ t^2 + (1-t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = (2t^2 - 2t + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2t-1}{(2t^2-2t+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{d}{dt}\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 0$ ஆகையில் $t = \frac{1}{2}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{(2t^2-2t+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 - (2t-1)\frac{1}{2}\,\frac{(4t-2)}{(2t^2-2t+1)^{\frac{1}{2}}}}{(2t^2-2t+1)}$$

$$= \frac{4(2t^2-2t+1) - 2t^2 - 8t + 2}{2(2t^2-2t+1)^{3/2}} \qquad \left[\frac{d^2\left|\overrightarrow{PQ}\right|}{dt^2}\right]_{t=\frac{1}{2}} = 1/\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3/2} > 0$$

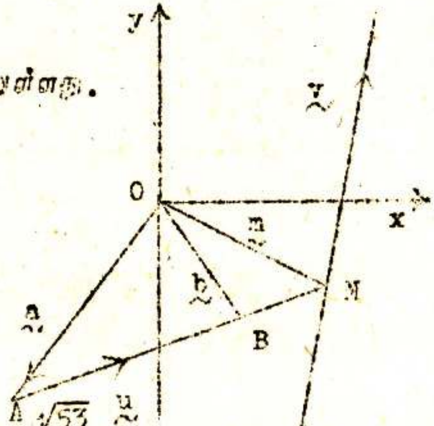
$$= \frac{2}{2(2t^2-2t+1)^{3/2}} = \frac{1}{(2t^2-2t+1)^{3/2}}.$$

∴ $t = \frac{1}{2}$ ஆயிருக்கையில், PQ என்பது ஒரு இழிவாகும். P இற்கு மிக அருகிலிருக்க எடுக்கும் நேரம் $\frac{1}{2}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் (7) வினா

தூரங்கள் கடல் மைல்களிலும், கதிகள் நொட்டுக்களிலும் அளக்கப்படுகின்றன. மு.ப 11 மணிக்கு காப்பிடும் மிதவை தொடர்பாய் மோட்டார் வள்ளமொன்று $-6\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j}$ என்னும் தானநிலையிலிருந்து புறப்படுகின்றது. அது $\sqrt{53}$ பருமனுடைய உறுதியான கதியுடன் கப்பலொன்றைச் சந்திக்கு முகமாக நேர்ப்பாதையிற் செல்கின்றது. கப்பலானது $3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$ என்னும் உறுதியான வேகக்காவியுடன் செல்கின்றது. நண்பகல் 12 மணிக்கு மிதவையிலிருந்து கப்பலின் தானநிலை $3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ ஆகும். மிதவையிலிருந்து அவை சந்திக்கும் தானக்காவியையும், மோட்டார் வள்ளத்தின் வேகக்காவியையும், சந்திக்க எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.



விடை:

மு.ப 11 மணியில் மோட்டார் வள்ளம் A இலுள்ளது.

$\underset{\sim}{a} = -6\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j}$ அதன் கதி $\sqrt{53}$ நண்பகல் 12 மணியில் கப்பல் $\underset{\sim}{b}$ இலுள்ளது. $\underset{\sim}{b} = 3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$

அதன் வேகக்காவி $\underset{\sim}{v} = 3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$ வள்ளத்தின் வேகக் காவி $= x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{u}$ என்க.

மு.ப 11 மணிக்கு t மணித்தியாலங்களின் பின்னர் வள்ளத்தின் தானநிலை $= -6\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} + t(x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j})$

$= (tx - 6)\underset{\sim}{i} + (ty - 2)\underset{\sim}{j}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கப்பலின் தானக்காவி $= 3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + (t - 1)(3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}) = 3t\underset{\sim}{i} + (4t - 5)\underset{\sim}{j}$

வள்ளமும் கப்பலும் சந்திக்கையில், தானக்காவிகள் சமமாகும்.

$t\,x - 6 = 3t\ ,\ t(x - 3) = 6$

$t\,y - 2 = 4t - 5\ ,\ t(y - 4) = -3$

இவற்றிலிருந்து $\dfrac{x - 3}{y - 4} = -2 \qquad x + 2y = 11$ .... (1)

ஆனால் வள்ளத்தின் கதி $\sqrt{53}$ $\quad \therefore x^2 + y^2 = 53$ .... (2)

(2)இல் (1)ஐப் பிரதியிட

$(11 - 2y)^2 + y^2 = 53\ ; \qquad 5y^2 - 44y + 68 = 0$

$(5y - 34)(y - 2) = 0; \quad \therefore\ \underline{\underline{y = 34/5,\ 2.}}$

$\therefore$ இப்பொழுது $t = \dfrac{-3}{y - 4} > 0,$ அ.து $y < 4$

$\therefore\ y = 2,$என்பது நிபந்தனையைத் திருப்தியாக்குகின்றது. $x = 11 - 2 \times 2 = 7$

வள்ளத்தின் வேகம் $\underline{\underline{\underset{\sim}{u} = 7\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}}}$

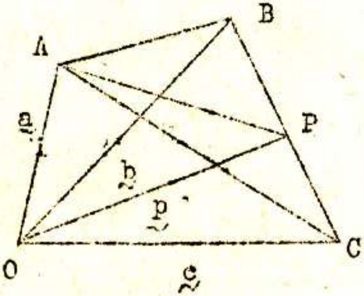
$y = 2,$ ஆக இருக்கையில் $t = \dfrac{-3}{2 - 4} = \dfrac{3}{2}$ $\quad \therefore$ சந்திக்கும் நேரம்

பி.ப 12.30 அவை சந்திக்கும் தானக்காவி $\underset{\sim}{m}$

$\underset{\sim}{m} = \dfrac{9}{2}\underset{\sim}{i} + (4 \cdot \dfrac{3}{2} - 5)\underset{\sim}{j} = \underline{\underline{4\tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}.}}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் (8) வினா: நிலையான புள்ளி O தொடர்பாக மூன்று புள்ளிகள் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $i + j + k$, $i + 2k$, $3i + 2j + 3k$, ஆகும். நேரத்தில் B இலிருந்து, துணிக்கை P 1 அலகு/செக். என்னும் மாறாக்கதியுடன் C யை நோக்கி BC வழியே செல்கின்றது. t செக்கன்களின் பின்னர், P இன் தானக்காவியை, (a) O தொடர்பாய், (b) A தொடர்பாய்க் காண்க. கோணம் PAB = θ ஆயின், கோசை θ விற்கு t இல் ஒரு கோவையைப் பெறுக.



விடை:
$$a = i + j + k$$
$$b = i + 2k$$
$$c = 3i + 2j + 3k \;;\; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = c - b$$
$$= 2i + 2j + k$$

BC வழியேயுள்ள அலகுக்காவி

$$n = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{2i + 2j + k}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{1}{3}(2i + 2j + k)$$

P இன் கதி ஒரு அலகு/செக் ஆகையால், அதன் வேகம் $v = 1\,n$ t செக்கன்களின் பின்னர் $\overrightarrow{BP} = vt = \frac{1}{3}(2i + 2j + k)t$

(a) t செக்கன்களின் பின் O தொடர்பாய் P இன் தானக்காவி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}; \quad \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{b} + \overrightarrow{BP}$$

$$= \underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{k} + \frac{t}{3}(2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}) = (1 + \frac{2t}{3})\underset{\sim}{i} + \frac{2t}{3}\underset{\sim}{j} + (2 + \frac{t}{3})\underset{\sim}{k}$$

A தொடர்பாய் P இன்தானக்காவி $\overrightarrow{AP}$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{p} = \frac{2}{3}t\,\underset{\sim}{i} + (\frac{2t}{3} - 1)\underset{\sim}{j} + (1 + \frac{t}{3})\underset{\sim}{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} = 0\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$AP = \sqrt{\frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{9}t^2 - \frac{4t}{3} + 1 + 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}t^2}$$

$$= \sqrt{t^2 - \frac{2}{3}t + 2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AP}| \text{ கோசை } \theta$$

$$\therefore \text{ கோசை } \theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AP}|}$$

$$= \frac{(0\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k})\left[\frac{2}{3}t\,\underset{\sim}{i} + (\frac{2}{3} - 1)\underset{\sim}{j} + (1 + \frac{t}{3})\underset{\sim}{k}\right]}{\sqrt{2}.\ \sqrt{t^2 - (2/3)t + 2}}$$

$$= \frac{\left[1 - (2/3).t + 1 + (1/3)t\right]\sqrt{3}}{\sqrt{2}\ \sqrt{3t^2 - 2t + 6}} = \frac{6 - t}{\left[6(3t^2 - 2t + 6)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ.ம் (9) வினா:

ϕ ஒரு பரமானமாகவும், α ஒரு ஒருமையாயும் $0 < \alpha < \pi/2$ ஆகவுமிருப்பின், வளையிகள் $\underset{\sim}{r} = b$ கோசை $\phi\ \underset{\sim}{i} + b$ சைன் $\phi\ \underset{\sim}{j} + b$ கோசை ϕ தான் $\alpha\ \underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{r} = b$ கோசை $\phi\ \underset{\sim}{i} +$ b சைன் $\phi\ \underset{\sim}{j} + (2h - b$ கோசை ϕ தான் $\alpha)\underset{\sim}{k}$ என்பன இரண்டும் சைன் α ஐ மையவகற்சித்திறனாகவுடைய நீள்வளையங்கள் என நிறுவுக.

$h^2 < b^2$ தான் $^2\alpha$ ஆயின், நீள்வளையங்கள் $2(b^2 - h^2$ கோதான் $^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ என்னும் இடைத்தூரங்கள் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றனவெனக்காட்டுக.

விடை :

$\underset{\sim}{r} = b$ கோசை $\phi(\underset{\sim}{i} +$ தான் $\alpha\ \underset{\sim}{k}) + b$ சைன் $\phi\ \underset{\sim}{j}$

$= b$ சீக் α கோசை ϕ (கோசை $\alpha\ \underset{\sim}{i} +$ சைன் $\alpha\ \underset{\sim}{k}) + b$ சைன் $\phi\ \underset{\sim}{j}$

$= b$ சீக் α கோசை $\phi\ \underset{\sim}{n} +$ b சைன் $\phi\ \underset{\sim}{j}$

இங்கு $\underset{\sim}{n} =$ கோசை $\alpha\ \underset{\sim}{i} +$ சைன் $\alpha\ \underset{\sim}{k}$ என்பதொரு அலகுக்காவியாகும்.

r ஆனது, $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{j}$ அலகுக்காவிகளைக் கொண்டுள்ள தளத்தில் ஒரு நீள்வளையத்தை குறிப்பிடுகின்றது. அ.து

$$\frac{x^2}{b^2 \text{ சீக்}^2\alpha} + \frac{y^2}{b^2} = \text{கோசை}^2\phi + \text{சைன்}^2\phi = 1$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

நியமச்சூத்திரப்படி, $b^2 = a^2(1-e^2)$; $b^2 = b^2$ சீக் $^2\alpha\,(1-e^2)$

கோசை $^2\alpha = 1 - e^2$; $e^2 = 1 -$ கோசை $^2\alpha$ $=$ சைன் $^2\alpha$

மையகவற்சித்திறன் e $=$ சைன் α

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலே

$\underset{\sim}{r} - 2h\underset{\sim}{k} = b$ கோசை $\phi\,(\underset{\sim}{i} -$ தான் $\alpha\,\underset{\sim}{k}) + b$ சைன் $\phi\,\underset{\sim}{j}$

$\underset{\sim}{R} = b$ கோசை ϕ சீக் α (கோசை $\alpha\,\underset{\sim}{i} -$ சைன் $\alpha\,\underset{\sim}{k}) + b$ சைன் $\phi\,\underset{\sim}{j}$

$\underset{\sim}{R} = b$ கோசை ϕ சீக் $\alpha\,\underset{\sim}{m} + b$ சைன் $\phi\,\underset{\sim}{j}$

இங்கு $\underset{\sim}{m} =$ (கோசை $\alpha\,\underset{\sim}{i} -$ சைன் $\alpha\,\underset{\sim}{k}$) என்னுமொரு அலகுக்காவி

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{r} - 2h\underset{\sim}{k}$

எனவே m, j அலகுக்காவிகளையுடைய தளத்தில் வளையி ஒரு நீள்வளையமாகும்.

$$\frac{x^2}{b^2 \text{ சீக்}^2\alpha} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ மையம் $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{0}$ அ.து $\underset{\sim}{r} = 2h\,\underset{\sim}{k}$

மையவகற்சித்திறன் முன்பு போல e $=$ சைன் α ஆகும். ஒரு நீள்வளையங்கட்குழ் மையவகற்சித்திறன் e $=$ சைன் α ஆகும். ஒரு நீள்வளையங்களும் வெட்டும்பொழுது, b கோசை $\phi\underset{\sim}{i} + b$ சைன் $\phi\underset{\sim}{j} + b$ கோசை ϕ தான் $\alpha\,\underset{\sim}{k}$

$= b$ கோசை ϕ $\underset{\sim}{i} + b$ சைன் $\phi\,\underset{\sim}{j} + (2h - b$ கோசை ϕ தான் $\alpha)$k

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}$ என்பவற்றின் குணகங்களைச் சமஞ்செய்கையில்,

$= b$ கோசை ϕ தான் $\alpha = 2h - b$ கோசை ϕ தான் α

$2b$ கோசை ϕ தான் $\alpha = 2h \Longrightarrow$ கோசை $\phi = \dfrac{h}{b \text{ தான் } \alpha}$

ϕ என்பதற்கு $\phi_1, (2\pi - \phi_1)$ என்னும் தீர்வுகள் உள்ளன. இது இருநீளிவிட்ளிங்களும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன என்பதைக்காட்டுகின்றது. இரு புள்ளிகளிலும் கோசை ϕ ஒன்றாகையால், முதலாவது சமன்பாட்டிலிருந்து பெறுவது

$$b \text{ சைன் } \phi_1 - b \text{ சைன் } (2\pi - \phi_1) = 2b \text{ சைன் } \phi_1$$

$$= 2b \sqrt{1 - \text{கோசை}^2 \phi_1} = 2b \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2 \text{ தான் }^2 \alpha}}$$

$$= 2\sqrt{b^2 - h^2 \text{ கோதான்}^2 \alpha} = \underline{\underline{2 (b^2 - h^2 \text{ கோதான்}^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}}$$

<u>உ. ம் (10) வினா</u> இரு சுரிகள் (helices) $\underset{\sim}{r_1} = a$ கோசை $\theta \underset{\sim}{i} + a$ சைன் $\theta \underset{\sim}{j} + a\theta \underset{\sim}{k}$,

$\underset{\sim}{r_2} = a$ கோசை $n\theta \underset{\sim}{i} - a$ சைன் $n\theta \underset{\sim}{j} + a\theta \underset{\sim}{k}$ (இங்கு $n > 0$)

என்பன அடுத்தடுத்துள்ள புள்ளிகள் P_1, P_2, P_3 என்பவற்றில் வெட்டுகின்றன. $P_1P_2 = 2a ($ சைன்$^2 \phi + \phi^2)^{\frac{1}{2}}$ என நிறுவுக.

இங்கு $\phi = \pi / (n + 1)$. $P_1 P_3$ ஐ a, ϕ என்பவற்றில் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

<u>விடை:</u> ~~இரு சுரிகளும் வெட்டும் தானங்களில்~~ $\underset{\sim}{r_1} = \underset{\sim}{r_2}$

$\therefore$ a கோசை $\theta\, \underset{\sim}{i}$ + a சைன் $\theta\, \underset{\sim}{j}$ + a $\theta\, \underset{\sim}{k}$ = a கோசை $n\theta\, \underset{\sim}{i}$ − a சைன் $n\theta\, \underset{\sim}{j}$ + a $\theta\, \underset{\sim}{k}$ கூறுகளைச் சமன்செய்கையில்,

a கோசை θ = a கோசை $n\theta$; a சைன் θ = − a சைன் $n\theta$

கோசை θ − கோசை $n\theta = 0$; சைன் θ + சைன் $n\theta = 0$

எனவே, 2 சைன் $\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta$ சைன் $\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta = 0$

2 சைன் $\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta$ கோசை $\left(\frac{n-1}{2}\right)\theta = 0$

வெட்டும் புள்ளிகளில், $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ கூறுகளைச் சமன்செய்வதால் பெறும் பொதுத் தீர்வு, சைன் $\left[(n+1)/2\right]\theta = 0$

$\therefore \left(\frac{n+1}{2}\right)\theta = 0, \quad , 2 \quad , \ldots\ldots$ அல்லது, $- \quad , -2 \quad , \ldots$

$\therefore \quad \theta = \left(\frac{2}{n+1}\right)(0, \pi, 2\pi,$ அல்லது $-\pi, -2\pi, \ldots\ldots)$

P_1, P_2, P_3 என்பன முறையே $\theta = \frac{-2}{n+1}, 0, \frac{2}{n+1} = -2\phi, 0, 2\phi$
(இங்கு $\phi = \dfrac{\pi}{n+1}$) என எடுக்கலாம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

P_1, P_2, P_3 என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{p}_1$, $\underset{\sim}{p}_2$, $\underset{\sim}{p}_3$ ஆயின் $\underset{\sim}{r}_1$ இல் பிரதி செய்வதன் மூலம்,

$$\underset{\sim}{p}_1 = (\underset{\sim}{r}_1)_{\theta = -2\phi} = a \text{ கோசை}(-2\phi)\, \underset{\sim}{i} + a \text{ சைன்}(-2\phi)\, \underset{\sim}{j} - 2a\phi\, \underset{\sim}{k}$$

$$\underset{\sim}{p}_2 = (\underset{\sim}{r}_1)_{\theta = 0} = a\, \underset{\sim}{i}$$

$$\underset{\sim}{p}_3 = (\underset{\sim}{r}_1)_{\theta = 2\phi} = a \text{ கோசை } 2\phi\, \underset{\sim}{i} + a \text{ சைன் } 2\phi\, \underset{\sim}{j} + 2a\phi\, \underset{\sim}{k}$$

எனவே $\overrightarrow{P_1P_2} = \underset{\sim}{p}_2 - \underset{\sim}{p}_1 = a\,(1 - \text{கோசை } 2\phi)\, \underset{\sim}{i} + a \text{ சைன் } 2\phi\, \underset{\sim}{j} + 2a\phi\, \underset{\sim}{k}$

$$\therefore\ P_1P_2 = a\sqrt{(1 - \text{கோசை } 2\phi)^2 + (\text{சைன் } 2\phi)^2 + (2\phi)^2}$$

$$\therefore\ \quad = 2a\sqrt{\text{சைன்}^2\phi + \phi^2}$$

மேலும், $\overrightarrow{P_1P_3} = \underset{\sim}{p}_3 - \underset{\sim}{p}_1 = 2a \text{ சைன் } 2\phi\, \underset{\sim}{j} + 4a\phi\, \underset{\sim}{k}$

$$\therefore\ P_1P_3 = 2a\sqrt{\text{சைன்}^2\, 2\phi + 4\phi^2}$$

$$= 4a\sqrt{(\text{சைன்}^2\phi \text{ கோசை}^2\phi + \phi^2)}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பலவினக் கணக்குகள்

1. நிலையான புள்ளி O தொடர்பாக மூன்று புள்ளிகள் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{k}$, $3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$, $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் B யிலிருந்து துணிக்கை P 1 அலகு/செக் என்னும் மாறாக் கதியுடன் C ஐ நோக்கி BC வழியே இயங்குகின்றது. t செக்கன்களின் பின்னர் P இன் தானக்காவியை, (a) O தொடர்பாய் (b) A தொடர்பாய்க் காண்க. கோணம் PAB = θ ஆயின் கோசை θ ஐ t இல் ஒரு கோவையைப் பெறுக.

விடை:- (a) $(1 + 2t/3)\underset{\sim}{i} + (2t/3)\underset{\sim}{j} + (2 + t/3)\underset{\sim}{k}$

(b) $(2t/3)\underset{\sim}{i} + (2t/3 - 1)\underset{\sim}{j} + (t/3 + 1)\underset{\sim}{k}$

$$\theta = (6 - t)/\sqrt{6}\,(3t^2 - 2t + 6)$$

2. ϕ ஒரு பரமானமாகவும், α ஒரு ஒருமையாகவும் $0 < \alpha < \pi/2$ ஆகவுமிருப்பின் வளையிகள் $\underset{\sim}{r} = b$ கோசை $\phi\,\underset{\sim}{i}$ + b சைன் $\phi\,\underset{\sim}{j}$ + b கோசை ϕ தான் $\alpha\,\underset{\sim}{k}$; $\underset{\sim}{r}$ = b கோசை $\phi\,\underset{\sim}{i}$ + b சைன் $\phi\,\underset{\sim}{j}$ + (2h − b கோசை ϕ தான் α) $\underset{\sim}{k}$ என்பன இரண்டும் சைன் α வை மையவகற்சித்திறனாகவுடைய நீள்வளையங்களென நிறுவுக. $h^2 < b^2$ தான்$^2\alpha$ ஆயின் நீள்வளையங்கள் $2(b^2 - h^2$ கோதான்$^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ என்னும் இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக்காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $2m, m$ திணிவுகளை முறையேயுடைய இரு ஒப்புரவான கோளங்கள் A, B என்பன முறையே வேகக்காவிகள் $3u\underset{\sim}{i} + 4u\underset{\sim}{j}$, $-4u\underset{\sim}{i} + 3u\underset{\sim}{j}$ என்பவற்றை உடையனவாய் அவை மொத்துகையில் அவற்றின் மையங்களின் இணைகோடு அலகுக்காவி $\underset{\sim}{i}$ இற்குச் சமாந்திரமாயுள்ளது. மொத்துகையானது கோளம் B இனது ஆரம்ப இயக்கச்சக்திக்குச் சமனான சக்தி இழப்பை உண்டாக்குமாயின் இரு கோளங்களுக்குமிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகமானது $\sqrt{(23/98)}$ என நிறுவுக.

4. ஒரே நேரத்தில் இரு துணிக்கைகள் நிலைக்குத்துத்தளத்தில் எறியப்பட்டுள்ளன. $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ என்பன அத்தளத்திலுள்ள கிடை, நிலைக்குத்து அலகுக்காவிகளாகும். முதலாவது துணிக்கை உற்பத்தியிலிருந்து வேகக்காவி nV கோசை $\alpha\,\underset{\sim}{i} + nV$ சைன் $\alpha\,\underset{\sim}{j}$ என்பதுடன் எறியப்பட்டுள்ளது. இரண்டாவது துணிக்கையானது $h\underset{\sim}{i} + k\underset{\sim}{j}$ (இங்கு $h > 0, k > 0$) என்னும் நிலையிலிருந்து $-V$ கோசை $\beta\,\underset{\sim}{i} + V$ சைன் $\beta\,\underset{\sim}{j}$ என்னும் வேகக்காவியுடன் எறியப்பட்டுள்ளது. t நேரம் சென்ற பின்னர் ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் தானக்காவிகளை எழுதுக.

துணிக்கைகளானவை சைன் $\beta < n$ சைன் α ஆயின் மட்டும் ஒன்றுடனொன்று மொத்துமெனக்காட்டுக. அவை மொத்துமாயின் சைன் $(\beta + \gamma) =$ n சைன் $(\alpha - \gamma)$ என நிறுவுக. இங்கு தான் $\gamma = k/h$ உற்பத்தியில் நிலைக்கு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மேலாக மொத்தாகப்புள்ளி இருக்குமாயின் என்ற நிபந்தனை $\underset{\sim}{v}$ இற்குக் கொடுக்கப்படவேண்டுமெனக் காட்டுக.

விடை:- $S_1 = (nV \text{ கோசை } \alpha\, t)\underset{\sim}{i} + (nV \text{ சைன் } \alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2)\underset{\sim}{j}$

$S_2 = (h - V\text{கோ } \beta t)i + (k + V + \text{சைன் } \beta t - \frac{1}{2}gt^2)\underset{\sim}{j}$

$V^2 > gk/2n \text{ சைன் } \alpha(n \text{ சைன் } \alpha - \text{சைன் } \beta)$

5. திணிவு m உடைய துணிக்கையானது விசையொன்றின் தாக்கத்தில் இயங்குகின்றது. உற்பத்தித் தொடர்பாக t நேரத்தில் அதன் தானக் காவி $\underset{\sim}{r} = a \text{ சைன் } p\,t\,\underset{\sim}{i} + 2a \text{ கோசை } p\,t\,\underset{\sim}{j} + a \text{ கோசை } p\ t\underset{\sim}{k}$ ஆகும். துணிக்கையானது தளமொன்றில் இயங்குகின்றதெனக்காட்டி, அத்துணிக்கையில் தாக்கும் விசையிற்கு ஒரு கோவை பெறுக. வேறொரு துணிக்கையானது $\frac{2\pi}{p}$ காலமுடைய எளிமை இசை இயக்கத்தை $\pm a\,\underset{\sim}{j}$ இற்கிடையில் உண்டாக்குகின்றது. $t = 0$ ஆயிருக்கையில் அதன் ஆர்முடுகல் $-ap^2\,\underset{\sim}{j}$. இரு துணிக்கைகளினதும் தொடர்பு வேகமானது உயர்வாயிருப்பது அவையிரண்டும் மிக அண்மையிலேயே இருக்கையில் எனக்காட்டுக. (விடை: விசை = $-mp^2r$)

6. புள்ளி P இன் தானக்காவி $\underset{\sim}{u} = 3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} + 5\underset{\sim}{k}$ ஆயின் $\underset{\sim}{u}$ வின் பருமனைக்கண்டு, $\underset{\sim}{u}$ ஆனது $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{k}$ என்னும் அலகுக்காவிகளுடன் அமைக்கும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கோணங்களைக் கிட்டிய நிமிடங்களிற் காண்க. u வின் திசையிலுள்ள அலகுக் காவியையும் காண்க. $r = 4(\underset{\sim}{i}$ கோசை $p + \underset{\sim}{j}$ சைன் $p)$, என்னும் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. எனக்காட்டுக. இங்கு p ஒரு பர Sar மானமாகும். இவ்வட்டத்திலுள்ள புள்ளிகளில், புள்ளி p இற்கு மிக அண்மையிலும் மிகத்தூரத்திலுமுள்ள புள்ளிகளைக் காண்க.

(<u>விடை</u>: $\pm(12\underset{\sim}{i} + 16\underset{\sim}{j})/5$)

7. துணிக்கை P இன் பாதையின் சமன்பாடு $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{i}t + \underset{\sim}{k}t^2$ இங்கு t நேரமாகும். P இன் ஆர்முடுகல் ஓர் ஒருமையெனக்காட்டுக. P தொடர்பாக Q என்னும் வேறொரு துணிக்கையின் வேகம் $(\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j})$ ஆகும். $t = 0$ ஆயின், $\overrightarrow{PQ} = \underset{\sim}{j}$ ஆகும். Q இன் பாதையின் சமன்பாட்டையும், P இற்கு Q அண்மையிலிருக்க எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

<u>விடை</u> :- $\underset{\sim}{r} = 2t\underset{\sim}{i} + (1 - t)\underset{\sim}{j} + t^2\underset{\sim}{k}$, $t = \frac{1}{2}$

8. t நேரத்தில், P இன் தானக்காவியானது a தான் $t\,\underset{\sim}{i} + a$ சீக் $t\,\underset{\sim}{k}$ ஆகும். இங்கு $0 \leqslant t < \pi/2$ ஆயும், a ஒரு நேர் ஒருமையுமாகும். $t = 0$ ஆயிருக்கையில், வேகமும் ஆர்முடுகலும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையென நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

A இன் தானக்காவி $a\mathbf{j}$ ஆயின், t நேரத்தில் நேர்கோடு AP இன் காவிச்சமன்பாட்டைப் பெறுக. Q என்னும் புள்ளி AP இனை உட்புறமாக, கோசை t : (1 − கோசை t) இற்கும் விகிதமாகப் பிரிக்கின்றது. புள்ளி Q இன் ஆர்முடுகல் பருமனில் ஒருமையெனவும் அது எப்போதும் நிலையான புள்ளி ஒன்றிற்கு நோக்கிய திசையில் இருக்குமெனவும் காட்டுக.

(விடை: $\mathbf{r} = \lambda$ a கோசை t $\mathbf{i} + (1 - \lambda) a\mathbf{j} + a$ சைன் t $\mathbf{k}$)

9. துணிக்கைகள் P_1, P_2 என்பவற்றின் வேகக்காவிகள் முறையே $u_1\mathbf{i} + v_1\mathbf{j}$, $u_2\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ அவற்றின் தொடர்பு வேகமானது துணிக்கை P_1 இன் வேகத்தின் பருமனுக்குச் சமனானது. துணிக்கையொன்றின் வேகமானது அதன் மறுதிசை திருப்பப்படின் தொடர்பு வேகத்தின் பருமன் இரட்டிப்பாகும். P_1, P_2 என்பவற்றின் கதிகளின் விகிதத்தையும் அவற்றின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சைன் விகிதத்தையும் காண்க.

(விடை: $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$)

10. ஆரம்பத்தில் $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ என்னும் புள்ளியில் ஓய்விலுள்ள 3 அலகுத்திணிவுடைய துணிக்கை விசைகள் $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{F}_2 = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

என்பன தாக்குகின்றன. 2 செக்கன்களின் பின்னர் அதன் தானநிலையையும் அதிலுள்ள உந்தத்தையும் காண்க. அந்நேரத்தில் தாக்கையில் செய்யப்பட்டுள்ள வேலையையும் காண்க.

(விடை :- $3\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$; $6\underset{\sim}{i} + 12\underset{\sim}{j} + 12\underset{\sim}{k}$; 54 அலகுகள்)

11. $2u\underset{\sim}{i} + u\underset{\sim}{j}$ என்னும் வேகத்துடன் இயங்கும் ஒப்பரவான கோளமொன்று ஓய்விலுள்ள சமமான கோளமொன்றை மொத்துகின்றது. கோளங்களுக்கிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e ஆயின் மொத்துகையின்போது மையங்களின் இடை கோடு $\underset{\sim}{i}$ என்னும் காவிக்குச் சமாந்தரமாகவுள்ளது. மொத்துகையின் பின் உடனடியாக ஒவ்வொரு கோளத்தின் வேகத்தையும் காண்க.

மொத்துகையின் பின் எத்திசையில் இரு கோளங்களும் சம உந்தத்தையுடையனவாக இருக்குமெனக் காண்க. மேலும் அவற்றின் இறுதி இயக்கசக்திகள் சமமாய் இருப்பதற்கு e இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

விடை :- $(1-e)u\underset{\sim}{i} + u\underset{\sim}{j}, (1+e)u\underset{\sim}{i}$; $\underset{\sim}{i} + 2e\underset{\sim}{j}$ என்னும் காவியின் திசையில் ; $e = \frac{1}{4}$

12. நான்முகி ABCD இன் உச்சிகள் A,B,C,D இன் தானக்காவிகள் முறையே உற்பத்தி O தொடர்பாய் $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{d}$ என்பனவாகும். விசைகள் $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda\overrightarrow{AC}$, $\lambda\overrightarrow{AD}$, $\mu\overrightarrow{OB}$, $\mu\overrightarrow{OC}$, $\mu\overrightarrow{OD}$ என்பன முறையே விளிம்புகள் AB,AC,AD,OB, OC,OD

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வழியே தாக்குகின்றன. இங்கு λ, μ என்பன ஒருமைகளாகும். இத் தொகுதி விசைகளின் விளையுளைக் காண்க. $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\underset{\sim}{a} = 15\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j}$; $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{c} = 3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{d} = -4\underset{\sim}{i} - 8\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ ஆயின், நான்முகியொன்று விளிம்பு வழியே ஒப்பரவாய்ப் பிணைக்கப்பட்டிருப்பின் சமநிலையைப் பேணுவதற்கு வேண்டிய சுழலிணையின் திருப்பத்தைக் காண்க.

விடை:- $\triangle$ BCD இன் மையப்போலி G இனூடாக $(\mu + \lambda)(\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{d}) - 3\lambda\underset{\sim}{a}$
அல்லது $3(\lambda + \mu)\overrightarrow{PG}$ இங்கு P ஆனது AO ஐ AP:PO = $\mu : \lambda$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது. $\omega\sqrt{21}$

13. நேரம் $t = 0$ ஆயிருக்கையில், இரு துணிக்கைகள் A, B என்பன $\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து விலகுகின்றன. A இன் வேகக்காவி $\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$. B யின் வேகக்காவி A தொடர்பாக $\sqrt{90}$ என்னும் பருமனையுடையது. மூன்றாவது துணிக்கை C ஆனது நேரம் $t = 0$ இல் புள்ளி $4\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ இலே வேகக்காவி $2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ என்பதுடன் விலகுகின்றது. துணிக்கைகள் ஒருமை வேகத்துடன் செல்லுகையில் B ஆனது C உடன் மோதுமாயின் B இன் ஆரம்பவேகக்காவியினைக் காண்க. மோத்துகை நடைபெறும் போதுள்ள t இன் பெறுமதியைக் காண்க. மோத்துகையின்போது துணிக்கைகள் B யும் C யும் கூட்டிச்சேர்ந்து A இன் வேகத்திசைக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லுகின்றனவாயின் துணிக்கைகள் B, C என்பவற்றின் திணிவுகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

(விடை:- $5\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$, $t = 1$; 1:1)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

14. துணிக்கைகள் A,B என்பன ஒரேநேரத்தில் $-11\underset{\sim}{i} + 17\underset{\sim}{j} - 14\underset{\sim}{k}$, $-9\underset{\sim}{i} + 9\underset{\sim}{j} - 32\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவியையுடைய புள்ளிகளிலிருந்து முறையே புறப்படுகின்றன. A, B என்பவற்றின் வேகங்கள் ஒருமையாகும். அவற்றின் $6\underset{\sim}{i} - 7\underset{\sim}{j} + 8\underset{\sim}{k}, 5\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} + 17\underset{\sim}{k}$ என்பவற்றால் முறையே குறிப்பிடப்படுகின்றன. A யும் B யும் மொத்துமெனக்காட்டுக. Sanjee மூன்றாவது துணிக்கை C ஆனது A தொடர்பாக அதன் வேகக்காவி $2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ என்பதற்குச் சமாந்தரமாகவும், B தொடர்பாக அதன் வேகக்காவி $\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ என்பதற்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ளது. C இன் வேகத்தைக் காண்க. மூன்று துணிக்கைகளும் ஒரே நேரத்தில் மொத்துகின்றனவாயின் C இன் ஆரம்ப தானநிலையைக் காண்க.

(விடை :- $-6\underset{\sim}{i} - 25\underset{\sim}{j} - 16\underset{\sim}{k}$, $13\underset{\sim}{i} + 53\underset{\sim}{j} + 34\underset{\sim}{k}$)

15. இரு ஒரே மாதிரியான ஒப்புரவான கோளங்கள் கிடைமேசையொன்றில் $3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$, $-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ என்னும் வேகக்காவிகளுடன் இயங்குகின்றன. அவற்றின் மையங்களின் இடைக்கோடு காவி $\underset{\sim}{i}$ சமாந்திரமாக இருக்கையில் மொத்துகின்றன. கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆயின் மொத்துகையின் பின்னர் கோளங்களின் வேகக்காவிகளைக் காண்க. மொத்துகையின் முன்பும் ,பின்பும் கோளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பாகவுள்ள வேகங்களின் பருமன்களின் விகிதத்தையும் காண்க. மொத்துகையின்போது கோளங்களின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 2 அலகுகளாயின் ஒரு அலகு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

நேரத்தின் பின்னர் அவற்றின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க.
(விடை :- $4j$, $2i + j$; $5 : 1/\sqrt{13}$; 5)

16. செவ்வக பிலியட்டு மேசை OABC இல் சிவப்புப் பந்தொன்று நிலையாக இருக்கின்றது. சமதிணிவும், சமஆரையுமுள்ள வெள்ளைப்பந்தொன்று அதனை $u(-2i + 11j)$ என்னும் வேகத்தில் அடிக்கின்றது. இங்கு i , j என்பன முறையே OA , OC வழியேயுள்ள அலகுக்காவிகளாகும். மோத்துகையின் பின்னர் சிவப்பு வெள்ளைப்பந்துகளின் வேகங்கள் முறையே $-3i + 4j$, $2i + 4j$ என்னுங்காவிகட்குச் சமாந்தரமாயுள்ளன. இருபந்துகட்கிடையேயுள்ள மீளமைவுக்குணகம் $\frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

17. $r = 2$ கோசை $p\,i + 2$ சைன் $p\,j$, $r = qi + (q^2 + c)\,j$ என்னும் சமன்பாடுகட்குரிய வளையிகளை பருமட்டாக வரைக. இங்கு c ஓர் எண்ணி ஒருமையாகும். வளையிகள் நன்கு தெளிவாக உண்மைப்புள்ளிகளிற் சந்திப்பதற்குரிய c யின் பெறுமான வீச்சைக் காண்க. வெட்டும் புள்ளி ஒன்றின் தானக் காவி $r = 2i$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. இரு சமாந்தர நேர்கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் நான்கு வெட்டும்புள்ளிகளில் இரண்டொடாகச் செல்வதாயின் காவி வடிவத்தில் அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(விடை :- $-17/4 < c < -2$; $r = t\,i$; $r = ti - j$)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

18. (i) $5\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k},\ 2\underset{\sim}{i} - 7\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவிகளையுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. இக்கோடு தளம் $\underset{\sim}{r} = -\underset{\sim}{i} + p\underset{\sim}{j} + q\underset{\sim}{k}$ என்பதனைச் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக்காவியினைக் காண்க.

(ii) $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ என்னும் தானக்காவிகளையுடைய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு $m:l$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் தானக்காவி Sanju $(l\underset{\sim}{a} + m\underset{\sim}{b})/(l + m)$ என நிறுவுக. முக்கோணி ABC இன் பக்கங்கள் BC, CA, AB இல் முறையே P, Q, R என்னும் புள்ளிகள் அவற்றினை உட்புறமாக $BP:PC = 2:3$, $CQ:QA = 3:4$, $AR:RB = 2:1$ எனும் விகிதங்களில் பிரிக்கின்றன. காவிமுறைமூலம் AP, BQ, CR ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றனவென நிறுவுக.

(விடை:- (i) $\underset{\sim}{r} = -\underset{\sim}{i} - 12\underset{\sim}{j} - 9\underset{\sim}{k}$)

19. $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k},\ 4\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$ ஆகும். துணிக்கைகள் முறையே $2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$, $-4\underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$ என்னும் ஒருமைவேகக்காவிகளையுடையன. P தொடர்பாக Q இன் தானக்காவி $t = T$ ஆக இருக்கையில் காண்க. இரு துணிக்கைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் இழிவாயிருப்பது $t = 14/15$ ஆயிருக்கையில் எனக் காட்டுக. இழிவுத்தூரத்தையும் காண்க. இந்நேரத்தில் P தொடர்பாக Q இன் தானக்காவியையும் காண்க.

விடை:- $(3 - 2T)\underset{\sim}{i} + (4 - 5T)\underset{\sim}{j} + (-2 + T)\underset{\sim}{k}$; 1.693, $\frac{17\underset{\sim}{i}}{15} - \frac{2\underset{\sim}{j}}{3} - \frac{16\underset{\sim}{k}}{15}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

20. வட்டம் $\underset{\sim}{r} = (1 - \text{கோசை}\,\theta)\,\underset{\sim}{i} + \text{சைன்}\,\theta\,\underset{\sim}{j}$ என்பதும், நேர்வரை $\underset{\sim}{r} = p\sqrt{3}\,\underset{\sim}{i} + p\,\underset{\sim}{j}$ என்பன உற்பத்தி 0 இல் சந்திக்கின்றன. வென்றும், வேறோர் புள்ளி P இல் சந்திக்கின்றனவென்றும் காட்டுக. P இன் தானக்காவியைக் காண்க. இரு துணிக்கைகள் A, B என்பன 0 விலிருந்து ஒரே நேரத்தில் புறப்பட்டு P இனை ஒரேநேரத்தில் அடைகின்றன. துணிக்கை A ஆனது ஒருமைவேகம் b உடன் வட்டப்பாதை வழியேயும் துணிக்கை B ஆனது 0 இலிருந்து P ஐ நோக்கி சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் ஒரு நேர்ப்பாதை வழியே செல்கின்றன.

A ஆனது 0 இலிருந்து P இற்குக் கிட்டிய பாதை வழியாகச் சென்றால் a இனை b இல் காண்க. இரு துணிக்கைகளின் கதிகளின் விகிதம் ஒரே திசையில் செல்கையில் $2\pi : 3\sqrt{3}$ இற்குமுள்ள விகிதமெனக்காட்டுக.

விடை :- $(3/2)\,\underset{\sim}{i} + (\sqrt{3}/2)\,\underset{\sim}{j}$

21. நேரம் $t = 0$ இல் $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ தளத்தில் இயங்கும் m திணிவுள்ள துணிக்கையின் தானக் காவி $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{0}$ ஆயும் வேகம் $\underset{\sim}{v} = v\,\underset{\sim}{i}$ அத்துணிக்கையானது $mue^{-t}\,\underset{\sim}{j}$ என்னும் விசையினால் அதனியக்கம் முழுவதும் தாக்கப்படுமாயின் $t = $ மட 2 எனின் $\underset{\sim}{v} = v\underset{\sim}{i} + (u/2)\,\underset{\sim}{j}$ எனவும் காட்டுக. மேலும் துணிக்கையின் பாதையானது $\underset{\sim}{r} = vt\,\underset{\sim}{i} + u\,(t - 1)\,\underset{\sim}{j}$ என்பதற்கு அணுகுகோடாயுள்ளதெனக் காட்டுக.

22. சம ஆரைகளையுடைய இரு ஒப்பமான கோளங்களின் திணிவுகள் m, λ m

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆகும். அவை ஒப்பமான மேசையில் முறையே $3\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ என்னும் வேகக்காவிகளுடன் வழுக்குகின்றன. அவற்றின் மையங்களின் இணைகோடு காவி $\underset{\sim}{i}$ இற்குச் சமாந்தரமாயிருக்கையில் ஒன்றுடனொன்று மோதுகின்றன. அவற்றிற்கிடையேயுள்ள மீளமைவுக்குணகம் e ($\leqslant 1$) மொத்துகையின் பின்னர் கோளங்கள் சமாந்தர திசைகளில் இயங்கின் $\lambda \geqslant 1/3$ எனக் காட்டுக.

23. இரு துணிக்கைகள் A, B என்பன முறையே $u_1 = 5\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - \underset{\sim}{k}$; $u_2 = 3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}$ என்னும் ஒருமை வேகக்காவிகளுடன் இயங்குகின்றன. B தொடர்பாக A இன் வேகக்காவியைக் காண்க. $t = 0$ ஆயிருக்கையில் துணிக்கை A ஆனது $-4\underset{\sim}{i} + 7\underset{\sim}{j} - 6\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக் காவியையுடைய புள்ளியிலுள்ளது. $t = 5$ ஆயிருக்கையில் A, B உடன் மொத்தின் $t = 0$ ஆயிருக்கையில் B இன் தானக்காவியைக் காண்க. மூன்றாவது இயங்கும் துணிக்கை C உடன் A இன் வேகம் தொடர்பு படுத்துகையில் அதன் திசை $2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} - 2\underset{\sim}{k}$ எனும் காவியின் திசையாயின் C தொடர்பாக B இன் வேகம் $2\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - 6\underset{\sim}{k}$ எனும் காவியின் திசையிலுமுள்ளது. C இன் வேகத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

விடை :- $2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$, $6\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 3\underset{\sim}{k}$, $\sqrt{11}$

24. $\underset{\sim}{r}$ = (2 கோசைθ) $\underset{\sim}{i}$ + (2a சைன்θ) $\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{r} = 3ap^2\underset{\sim}{i} + 3ap\,\underset{\sim}{j}$ எனும் வளையிகளை பருமட்டாக வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளியின் தானக்காவியைக்காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

0 = w t ஆக இருக்க துணிக்கையொன்று முதல் வளையியை வரைகின்றது. இங்கு w - ஒரு ஒருமை, t- நேரமாகும். இரண்டாவது வளையியை வேறோர் துணிக்கையொன்று p =kt ஆயிருக்க வரைகின்றது. இங்கு k ஒரு ஒருமை. ஒவ்வொரு துணிக்கையின் ஆர்முடுகலும் பருமனில் ஒருமையெனக் காட்டுக. எந்நேரங்களில் இவ் ஆர்முடுகல் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாகும்.

விடை :- $\pm (a \sqrt{3})\, \underset{\sim}{j}$; $(2n+1)\pi / 2w$)

28. காவிகள் $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ என்பன ஒவ்வொன்றும் ஒரு கலவர் மைல் நீளத்தையும்; திசைகள் முறையே கிழக்கு, வடக்கு நோக்கியுமுள்ளது. போர்க்கப்பல்கள் D உம், C உம் 10 நொட்டுகள் வேகத்துடன் $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ என்னும் திசையில் செல்கின்றன. நடுப்பகல் C இலிருந்து D இன் திசையும் தூரமும் $2\underset{\sim}{i}$ ஆகும். 1300 மணித்தியாலங்களில் D ஆனது தனது பாதையின் திசையை $-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ ஆக மாற்றி தன் கதியை 5 நொட்டுகளாகக் குறைக்கின்றது. அப்பொழுது C தொடர்பாக D பாதையின் திசை $-3\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ இலுள்ளதெனக்காட்டுக. அவை ஒன்றுக்கொன்று அண்மையிலிருக்கையில் இரு கப்பல்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தையும், இது நடைபெறுகையில் எடுத்த நேரத்தையும் கிட்டிய நிமிடத்தில் காண்க. கப்பல் C நேர்பின்புறமாக D இருக்க எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

(விடை 0.63 n மைல், 1310 மணி, 1317 மணி)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

26. P_1, P_2 என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $2\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$, $-8\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ ஆயும் Q_1, Q_2 என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $-13\underset{\sim}{i} + 5\underset{\sim}{k}$, $4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}$ ஆயுமிருப்பின் கோடுகள் $P_1 P_2$ உம், $Q_1 Q_2$ உம் ஒன்றையொன்று செங்கோணங்களில் வெட்டுவன என நிறுவுக. அவை வெட்டும் புள்ளியின் தானக்காவியினைக் காண்க. $\underset{\sim}{F}$ என்னும் பருமனுடைய விசையானது $P_1 Q_2$ என்னும் திசை Sanja வழியே தாக்கி துணிக்கையொன்றினை P_2 இலிருந்து Q_2 இற்கு இயக்குகின்றது. இவ்விசையால் செய்யப்பட்ட வேலையினைக் காண்க.

(விடை:- $2\underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$; $f\sqrt{84}$

27. அலகுத்திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று t நேரத்தில் $4\underset{\sim}{i} + 12t^2\underset{\sim}{j}$ என்னும் விசையால் தாக்கப்படுகின்றது. $t = 0$ ஆயிருக்கையில் துணிக்கையானது புள்ளி $-\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ என்பதில் ஓய்விலுள்ளது. $t = T$ ஆயிருக்கையில் துணிக்கையின் தானக்காவியினைக் காண்க. அதிலிருந்து துணிக்கையின் பாதை ஒரு பரவளைவு என உய்த்தறிக. பரவளைவின் உச்சி $-\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ ஆகும். நேரம் $t = 1$ ஆயிருக்கையில் துணிக்கையில் தாக்கும் விசை $4\underset{\sim}{i}$ ஆகின்றது. $t = 2$ ஆயிருக்கையில் துணிக்கையின் தானக்காவியினைக் காண்க.

விடை :- $\underset{\sim}{r} = (2T^2 - 1)\,\underset{\sim}{i} + (T^4 + 1)\,\underset{\sim}{j}$; $7\underset{\sim}{i} + 6\underset{\sim}{j}$

28. A, B, C, D என்னும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{k}$, $-2\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ஆகும். AC, BD என்னும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காவி வடிவில் காண்க. இவ்விரு கோடுகளும் புள்ளி P இல் சந்திக்குமென நிறுவுக. நாற்பக்கல் ABCD ஒரு செவ்வகமென நிறுவுக. P இனூடாக தளம் ABCD இற்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டினைக் காண்க.

விடை :- $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 3\mathbf{k} + s(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k})$, $\mathbf{r} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} + t(-5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$;
$2\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} + p(18\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 15\mathbf{k})$

29. $\mathbf{r} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ என்னும் காவிச்சமன்பாடுடைய கோடானது $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்னும் தானக்காவிகளையுடைய புள்ளிகள் P, Q இனூடாகச் செல்கின்றதெனக் காட்டுக. தானக்காவிகள் $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ என்பவற்றை முறையே கொண்டுள்ள புள்ளிகள் R, S என்பவற்றினூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் காவிச்சமன்பாட்டைக் காண்க. PQ, RS என்பன ஒன்றுக்கொன்று 60° இல் சாய்ந்துள்ளன எனக் காட்டுக. காவி $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ என்பது PQ, RS என்பன இரண்டிற்கும் செங்குத்தாயுள்ளதெனக் காட்டுக. $\overrightarrow{PR}$ உடன் $\mathbf{a}$ இன் குற்றுப் பெருக்கத்தைக் காண்க. இதிலிருந்து PQ இற்கும், RS இற்குமிடையேயுள்ள மிகக்குறுகிய தூரத்தைக் காண்க. (விடை:- $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t(\mathbf{i} + \mathbf{k})$; $1/\sqrt{3}$)

30. ஆரைக்காவி OP, a ஒருமை நீளமுடையது உற்பத்தி O பற்றி ஒருமைக்கோண வேகம் w உடன் ஒரு தளத்தில் சுழல்கின்றது. t நேரத்தில் P இன் தானக்காவி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

யிலைக் காண்க. $t = 0$ ஆயிருக்கையில் அது $a\underset{\sim}{j}$ ஆகும். t நேரத்தில் P இன் வேகத்தையும் ஆர்முடுகலையும் காவிமுறையில் கோவைப்படுத்துக.

t நேரத்தில் P தொடர்பாக Q என்னும் புள்ளியின் வேகம் $(aw$ சைன் $wt)\,\underset{\sim}{i}$ $+ (aw$ கோசை $wt)\,\underset{\sim}{j}$ ஆகும். $t = 0$ ஆயிருக்கையில் Q ஆனது உற்பத்தியிலுள்ளது. PQ இனது நடுப்புள்ளி M இன் தானக்காவியினைக் காண்க. M இன் ஆர்முடுகல் P இன் ஆர்முடுகலுக்குச் சமாந்தரமாயிருப்பின் t இன் பெறுமதிகளைக்காண்க.

விடை :- $n\pi/2w$ இங்கு n ஆனது ஒரு முழுவெண் அல்லது பூச்சியம்.

31. திணிவுகள் 2, 2, 3 அலகுகள் கொண்ட மூன்று துணிக்கைகள் ஒப்பமான கிடைத் தளமொன்றில் முறையே $3\underset{\sim}{i} + 4\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j}$ என்னும் தானக்காவிகளைக் கொண்டு ஓய்விலுள்ளன. அவற்றின் திணிவுமையம் G இன் தானக்காவியினைக்காண்க.

ஒவ்வொரு திணிவும் ஒரு ஒருமைவிசை உற்பத்தியிலிருந்து வெளிநோக்கியிருக்கும் திசைகளில் அவற்றின் விசைகளின் பருமன்கள் முறையே 5, 1, 7 அலகுகள் ஆகும் வண்ணமுள்ளன. G இன் ஆர்முடுகலின் பருமனைக் காண்க. விசைகளினால் செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை 150/7 ஆயிருக்கையில் துணிக்கைகளின் விளையுள் ஏகபரிமாண உந்தத்தினைக் காண்க.

விடை :- $(11/7)\,\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$; $(5\sqrt{3})/7$; $(3 + 4\sqrt{2})\,\underset{\sim}{i} + (4 - 3\sqrt{2})\,\underset{\sim}{j}\,(15/\sqrt{154})$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

32. நான்முகி ABCD இன் உச்சிகளின் தானக்காவிகள் முறையே a, b, c, d ஆகும். இங்கு $a = 3i - 4j + k$, $b = 4i + 4j - 2k$, $c = 4i + k$, $d = i - 2j + k$. 30, $3\sqrt{13}$ அலகுகள் பருமன்களையுடைய விசைகள் முறையே CB, CD வழியே தாக்குகின்றன. மூன்றாவது விசையொன்று A இல் தாக்குகின்றது. தொகுதியானது ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமாயின் இவ்விணையின் பருமனையும் A இலுள்ள விசையினையும் காண்க. இவ்விணையின் அச்சுவழியேயுள்ள அலகுக்காவியினைக் காண்க.

விடை :- $18\sqrt{26}$, $F_A = 9i - 18j + 18k$, $(-4i + j + 3k)/\sqrt{26}$

33. முக்கோணியொன்றின் உச்சிகள் ABC இன் தானக்காவிகள் முறையே $4i + 2j + 2k$, $2i + j + 4k$, $-3i + 6j - 6k$ ஆகும். முக்கோணியின் மையப்போலி G இன் தானக்காவியினைக் காண்க. விசைகள் $3\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AC}$ என்பன AB, AC வழியே தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளைக் காண்க. இவ்விளையுளின் தாக்கக்கோடு BC ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி P இன் தானக்காவியினைக் காண்க. முக்கோணி GAP இன் பரப்பு $\sqrt{5}/2$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து G இனூடாகத் தளம் ABC இற்குச் செங்குத்தான அச்சுபற்றி விளையுளின் திருப்பத்தைக் காண்க.

விடை :- $i + 3j$, $5\sqrt{21}$, $3j$; $5\sqrt{5}$

34. m கி.கி. திணிவுள்ள துணிக்கையொன்று ஒருமை விசை 21 நியூட்டன்கள், காவி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$3\underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j}$ - ~~$6\underset{\sim}{k}$ என்பதன் திசையால் தாக்கப்படுகின்றது. ஆரம்பத்தில் துணிக்கை~~ யானது உற்பத்தியில் 18 மீ/செக். என்னும் கதியில் $7\underset{\sim}{i} - 4\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ என்னும் காவியின் திசையில் இயங்குகின்றது. 4 செக்கன்களின் பின்னர் துணிக்கையின் தானக் காவியைக் காண்க. 4 செக்கன்களின் விசையினால் செய்யப்பட்ட வேலையையும் காண்க.

விடை :- $128\,\underset{\sim}{i} + 16\,\underset{\sim}{j} - 112\,\underset{\sim}{k}$, 3264 m யூல்கள்

35. துணிக்கையொன்று $3\,\underset{\sim}{j}$ தானக்காவியுடைய புள்ளியொன்றிலிருந்து ஆரம்பவேகம் $4w\underset{\sim}{i}$ உடன் புறப்படுகின்றது. இங்கு $\underset{\sim}{w}$ ஓர் ஒருமையாகும். எக்கணமும் அதன் ஆர்முடுகல் $-w^2(x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j})$ ஆகும். இங்கு $x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j}$ ஆனது t நேரத்தில் துணிக்கையின் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காவி, தெக்காட்டின் வடிவங்களில் காண்க.

நேரம் $t=0$ ஆயிருக்கையில் இரண்டாவது துணிக்கையொன்று உற்பத்தியிலிருந்து வேகக்காவி $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}$ உடன் எறியப்படுகின்றது. இத்துணிக்கைக்கு ஒருமை ஆர்முடுகல் $(\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j})/5$ ஆயின் மொத்துகை நடைபெறுவதற்குச் சாத்தியமான t இன் இழிவுப்பெறுமதியைக் காண்க.

விடை : $\underset{\sim}{r} = (4$ சைன் $wt)\underset{\sim}{i} + (3$ கோசை $wt)\,\underset{\sim}{j}$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ தான்$^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, 2

36. துணிக்கை A இன் வேகக்காவி $4\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ உம் மறுதுணிக்கை B இன் வேகக் காவி $2\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ உம் ஆகும். மூன்றாவது துணிக்கை C இன் A தொடர்பான

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வேகம் $4\underset{\sim}{j} - 10\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ ஆகும். C இன் வேகக்காவியினைக் காண்க. அத்துடன் B தொடர்பான C இன் வேகத்தையும் காண்க. A ஆனது உற்பத்தியிலிருக்கையில் B ஆனது $8\underset{\sim}{i} + 16\underset{\sim}{j} - 8\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவியுடைய புள்ளியிலிருக்குமாயின் A உம் B உம் மொத்துமெனக் காட்டுக. மொத்துகை நடைபெறும் புள்ளியின் தானக் காவியினைக் காண்க.

விடை :- $8\underset{\sim}{i} - 7\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$; $6\underset{\sim}{i} - 6\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$; $16\underset{\sim}{i} + 12\underset{\sim}{j} + 8\underset{\sim}{k}$

37. A, B, C என்பன ஒரு கோட்டில் கிடவாத மூன்று புள்ளிகளாயின் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ என்னும் விசைகளின் விளையுள் $(\lambda + \mu)\overrightarrow{AE}$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு E ஆனது BC இல் $BE:EC = \mu:\lambda$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளியாகும்.

என்பன ஒருமைகளாகும். விசைகள் $\lambda\overrightarrow{AB}$, $\mu\overrightarrow{AC}$, $\nu\overrightarrow{AD}$ என்பன நான்முகி ABCD இன் விளிம்புகள் வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுளானது $(\mu + \lambda + \nu)\overrightarrow{AF}$ என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக. இங்கு $\underset{\sim}{F}$ ஆனது BCD என்னும் தளத்தில் $(\lambda\underset{\sim}{b} + \mu\underset{\sim}{c} + \nu\underset{\sim}{d})/(\lambda + \mu + \nu)$ எனும் தானக்காவியுடைய புள்ளியாகும். இங்கு $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$ என்பன நிலையான உற்பத்தி தொடர்பாக B, C, D என்பவற்றின் தானக்காவியாகும்.

A யினை உற்பத்தியாகக்கொண்டு B, C, D என்பவற்றின் தானக்காவிகள் $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{i} + 2\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{c} = 2\underset{\sim}{i} - 3\underset{\sim}{j} + 6\underset{\sim}{k}$, $\underset{\sim}{d} = 3\underset{\sim}{j} - 4\underset{\sim}{k}$ ஆகும். 12, 14, 15 அலகுகள் பருமன்களையுடைய விசைகள் முறையே AB, AC, AD என்பவற்றின் வழியே ர

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளை $\lambda\overrightarrow{AB}, \mu\overrightarrow{AC}, \nu\overrightarrow{AD}$ என்பவற்றின் வடிவங்களில் கோவைப்படுத்துக. (a) இவ்விசைகளின் விளையுள் $n\overrightarrow{AF}$ என்னும் வடிவிலுள்ளதெனவும், இங்கு n ஒரு ஒருமை (b) $\underset{\sim}{F}$ இன் தானக்காவியினையும் காண்க.

விடை:- $\lambda = 4$, $\mu = 2$, $\nu = 3$ (a) $n = 9$ (b) $(8\underset{\sim}{i} + 11\underset{\sim}{j} + 8\underset{\sim}{k})/9$

38. A என்னும் துணிக்கையொன்று $a\underset{\sim}{i} + 3\underset{\sim}{j} + 2\underset{\sim}{k}$ என்னும் தானக்காவியுடைய புள்ளி P இலிருந்து ஒருமை வேகக்காவி $\underset{\sim}{i} - \underset{\sim}{j} + \underset{\sim}{k}$ உடன் புறப்படுகின்றது. அதே நேரத்தில் இரண்டாம் துணிக்கை B ஆனது தானக்காவி $7\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ உடைய Q எனும் புள்ளியிலிருந்து $-2\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j} + 4\underset{\sim}{k}$ என்னும் வேகக்காவியுடன் புறப்படுகிறது. இயக்கத்தின் t நேரத்தின் பின்னர் B தொடர்பாக A இன் வேகக்காவியினையும் B தொடர்பாக A இன் தானக்காவியினையும் காண்க. இந்நேரத்தில் A இற்கும் B இற்குமிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க. t = 2 ஆயிருக்கையில் AB இன் தூரம் இழிவாயின் a இன் பெறுமதியைக் காண்க.

விடை:- $3\underset{\sim}{i} - 2\underset{\sim}{j} - 3\underset{\sim}{k}$, $(a - 7 + 3t)\underset{\sim}{i} + (5 - 2t)\underset{\sim}{j} - (2 + 3t)\underset{\sim}{k}$;

$$\left\{(a - 7 + 3t)^2 + 5(-2t)^2 + (2 + 3t)^2\right\}^{\frac{1}{2}}; \; a = -19/3$$

39. நேரம் t இன் பின்னர் இருதுணிக்கைகள் A, B என்பவற்றின் தானக்காவிகள் A: $\underset{\sim}{r}$ = (a கோசை wt) $\underset{\sim}{i}$ + (aசைன் wt) $\underset{\sim}{j}$; B : $\underset{\sim}{r} = a(1 - w^2t^2)\underset{\sim}{i} - (aw^2t^2)\underset{\sim}{j}$ ஆகும். இங்கு a, w என்பன ஒருமைகள், அவற்றின் பாதைகளின் இயல்பினை

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விபரித்து அவற்றின் சமன்பாடுகளை தெக்காட்டின் வடிவத்தில் தருக. பாதைகள் வெட்டும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகளைக் காண்க. A யின் பாதையை B கடக்கும் நேரங்களைக் காண்க. துணிக்கைகள் ஒன்றுக்கொன்று (a) சமாந்தரமாக (b) செங்குத்தாக இயங்குகையில் t இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

விடை :- $x^2 + y^2 = a^2$, $x - y - a = 0$, $a\underset{\sim}{i} - a\underset{\sim}{j}$; 0, $\pm$ 1/10

(a) $\pi(4n + 3)/4\omega$ (b) $\pi(4n + 1)/4\omega$

40. ஒழுங்கான நான்முகி OABC இல் ஒவ்வொரு விளிம்பும் 1 நீளமுடையது. முக்கோணி ABC இன் மையப்போலி G ஆயும், OG இன் நடுப்புள்ளி M ஆயுமுள்ளன. O உற்பத்தியாயிருக்க, A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$ ஆகும். விசைகள் $\lambda\overrightarrow{MA}$, $\lambda\overrightarrow{MB}$, $\lambda\overrightarrow{MC}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையெனக் காட்டுக. இவ்விசைகளின் விளையுள் $\frac{1}{2}\lambda(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})$ எனவும் காட்டுக. இவ்விளையுளின் தாக்கக்கோடு தளம் ABC ஐச் சந்திக்கும் புள்ளியின் தானநிலையைக் காண்க.

விடை :- $(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c})/3$.

****

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

காவிகள். - பின்னிணைப்பு   ஏப்பிரல் 1979

1. (i) ABC என்னுமோர் சீரான முக்கோண அடரானது A, B எனும் உச்சிகளுடன் இணைக்கப்பட்ட OA, OB என்னும் இரு இழைகளினாலே O விலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. இவ்விழைகளிலுள்ள இழுவையானது அவற்றின் நீளங்களுக்கு விகித சமமாயுள்ளதெனில், O வை C யுடன் இணைக்கும் நேர்கோடானது AB இன் நடுப்புள்ளியினூடாகச் செல்லவேண்டுமெனக்காட்டுக.

(ii) ABCD என்னுமோர் நாற்பக்கலின் மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்பன O வில் இடைவெட்டுகின்றன. ஒரு விசைத்தொகுதியானது $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$ என்பவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. AC இற்குச் சமாந்தரமாக B, D என்பவற்றுக் கூடாகச் செல்லும் இரு விசைகளுக்கு இவை சமவலுவானவை எனக்காட்டுக. இவ்விரு விசைகளும் $\overrightarrow{AC}$ என்பதால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசையினை விளையுளாகக் கொண்டிருப்பதற்கான நிபந்தனையானது AOB, DOC என்னும் முக்கோணிகள் பரப்பளவிலே சமனாதல் வேண்டுமென்பதாகும் என மேலும் காட்டுக.

2. n ஒரு தள விசைத்தொகுதியொன்றின் வகைமாதிரியான ஓர் உறுப்பு (x_r, y_r) என்னும் புள்ளியிலே தாக்குகின்றது. செவ்வக அச்சுக்களின் திசைகளிலே அதன் கூறுகள் (X_r, Y_r) ஆகும். தனியொரு விசைக்கு இத்தொகுதி சமவலுவுடையதெனில்,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அதன் தாக்கக்கோடானது

$$\left(\sum_{r=1}^{n} Y_r\right) x - \left(\sum_{r=1}^{n} X_r\right) y = \sum_{r=1}^{n} (x_r Y_r - y_r X_r)$$

ஆகுமெனக்காட்டுக.

தரப்பட்டுள்ள விசைத்தொகுதியொன்றின், (2,0), (0,2), (2,2) என்னும் புள்ளிகள் பற்றிய திருப்பங்கள் முறையே 1, 15, 7 அலகுகளாகும். இத் தொகுதியின் விளையுள் விசையின் பருமனைக்கண்டு அது $4x - 3y = 9$ எனுங் கோட்டிலே தாக்குகின்றது எனக்காட்டுக.

ஆகஸ்ட் 1979

3. ABC எனும் முக்கோணியின் தளத்திலே O என்பது ஒரு புள்ளி. D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளாகும். $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ எனில் $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ என்பவற்றை $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகியவற்றின் சார்பாகக் காண்க. இதிலிருந்து $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ என்பவற்றுக்குச் சமனும் சமாந்தரமுமான பக்கங்களையுடைய முக்கோணியொன்று உண்டெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. ஒழுங்காக எடுக்கப்படும் முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களினால் பருமனிலும் திசையிலும், நிலையிலும் குறிக்கப்படும் மூன்று விசைகள் இணையொன்றிற்குச் சமவலுவுடையனவாகுமென நிறுவுக. Sorj

ABCD என்பது ஓர் இணைகரமாகும். விசைத்தொகுதியொன்று $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ என்பவற்றினால் பருமனிலும், திசையிலும், நிலையிலும் குறிக்கப்படுகின்றது. தொகுதியின் விளையுளானது பருமனிலும் திசையிலும் $2\overrightarrow{AB}$ என்பதனால் குறிக்கப்படுமெனவும், இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியினூடாகச் செல்கின்றதெனவுங் காட்டுக.

5. ஒவ்வொரு அச்சின் வழியேயும் உள்ள அளவீட்டலகு 1cm ஆயிருக்க, செங்கோணத்தெக்காட்டின் அச்சுத்தொகுதியொன்று குறித்து O, A, B, C எனும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே (0,0), (1,0), (2,1), (0,1) ஆகும். OA, AB, BC வழியாக எழுத்துகளின் ஒழுங்கு குறிக்கும் திசைகளில் முறையே $\underset{\sim}{P}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{R}$ கிராம் நிறையுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுளானது

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$x - y - 5 = 0$ எனுங் கோட்டின் வழியே கிடக்கின்றது. விளையுளின் பருமன் 2 ஆகுமெனக்காட்டுக. தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படும்போது விளையுளை $x - y - 3 = 0$ எனுங் கோட்டிற்கு இடமாற்றும் இணையின் திருப்பத்தை யும் காண்க.

6. Oxy என்பது ஒரு செங்கோண தெக்காட்டின் மாட்டேற்றச்சட்டமா கும். $\underset{\sim}{i}$, $\underset{\sim}{j}$ என்பன முறையே Ox, Oy எனும் அச்சுகளுக்குச் சமாந்தரமான அலகுக் காவிகளாகும். θ என்பது எண்ணி t யின் ஒரு சார்பாயிருக்க, $\underset{\sim}{I}$ = கோசை θ $\underset{\sim}{i}$ + சைன் θ $\underset{\sim}{j}$, $\underset{\sim}{m}$ = − சைன் θ $\underset{\sim}{i}$ + கோசை θ $\underset{\sim}{j}$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படும். $\underset{\sim}{I}$, $\underset{\sim}{m}$ என்பன தம்முள் செங்குத்தான அலகுக்காவிகளாகுமெனக்காட்டுக.

$$\frac{d\underset{\sim}{I}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\underset{\sim}{m}, \quad \frac{d\underset{\sim}{m}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\underset{\sim}{I}$$ எனவுங்காட்டுக.

உற்பத்தி O தொடக்கக்கோடு Ox என்பன குறித்து நேரம் t யில் துணிக்கை P யின் தளமுனைவாள்கூறுகள் (r,θ) எனின் $\overrightarrow{OP} = r\underset{\sim}{I}$ என மேலுங்காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

யின் ஆர்முடுகள்,

$$\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\underset{\sim}{I} + \left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}\underset{\sim}{m}$$ ஆகுமென உய்த்தறிக.

<u>ஏப்ரில் 1980</u>

7. α எனுமோர் எண்ணியினதும் $\underset{\sim}{a}$ எனுமோர் காவியினதும் பெருக்கமான $\alpha\underset{\sim}{a}$ என்பதை வரையறுக்க. $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$ எனும் வேறுவேறான, பூச்சியமல்லாத மூன்று காவிகள் பருமனிலும் திசையிலும் முறையே $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ என்பனவற்றால் குறிக்கப்படுகின்றன. A,B,C என்பன ஒரேகோட்டிலிருந்தால் - அவ்வாறிருந்தால் மாத்திரமே

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{ஆயும்}$$

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \quad \text{ஆயும் இருக்கும்}$$

வண்ணம் பூச்சியமல்லாத α, β, γ எனும் எண்ணிகள் உளவெனக்காட்டுக.

8. ABCD எனும் செவ்வகமொன்றில் AB = 8 m, BC = 6m; P, Q, R, S என்பன முறையே AB, BC, CD, DA என்பனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

PQ, QR, RS, SP, AC, BD வழியாக எழுத்துகளின் ஒழுங்கு குறிக்கும் திசைகளில் முறையே 5, 10, 15, 20, λ, μ நியூற்றன் பருமன்களையுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) இவ்விசைத் தொகுதியானது சமநிலையிலிருக்க முடியாதெனவும்

(ii) இத்தொகுதியானது ஒரு இணையாக ஒடுங்குமெனில், அப்பொழுது

$\lambda = 10 = \mu$ எனவும்

(iii) இத்தொகுதியானது C ஊடாகச் செயற்படுகின்ற தனியொரு விசையாக ஒடுங்குமெனில் அப்பொழுது $\mu = 35$ எனவும் தனிவிசையின் மிகச்சிறிய பருமன் 24 நியூற்றன் எனவும் காட்டுக.

<u>ஆகஸ்ட் 1980</u>

9. ABCD ஒரு தள நாற்பக்கல் O என்பது இந்த நாற்பக்கலின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி. E, F, G, H என்பன முறையே பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாயும் $\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underset{\sim}{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underset{\sim}{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underset{\sim}{d}$ ஆயுமிருப்பின் $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OH}$ ஆகியனவைகளை $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$ என்னும் உறுப்புகளில் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எதிர்ப்பங்களின் நடுப்புள்ளிகளின் தொடுப்புகளும், குலைவிட்டங்களின் மையங்களின் தொடுப்புகளும், சந்திக்கும் என்பதை உய்த்தறிக.

10. $\lambda \overrightarrow{OA}, \mu \overrightarrow{OB}$ ஆகியவை குறிக்கும் விசைகள் $(\lambda+\mu)\overrightarrow{OG}$ குறிக்கும் தனிவிசைக்குச் சமவலுவாக அமையும் என்று காட்டுக. இங்கே AB ஐ $\mu : \lambda$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியாக G ஆனது AB இல் அமைந்துள்ளது.

புள்ளிகள் D,E,F ஆகியவை முக்கோணம் ABC இன் பக்கங்களான $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ இல் இப்பங்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் $\mu : \lambda$ எனும் விகிதத்தில் அதே போக்கில் பிரிக்கும் வகையிலுள்ளன. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ ஆகியன குறிக்கும் விசைகள் ABC இன் போக்கில் $2\left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right)\Delta$ எனும் இணைத்திருப்பத்திற்குச் சமவலுவாகுமெனக்காட்டுக. இங்கே Δ என்பது முக்கோணம் ABC இன் பரப்பு.

11. ஒரு தொகுதி ஒரு தளமான விசைகள் (0,0),(1,0),(2,1) ஆகிய புள்ளிகளைப்பற்றி, முறையே 5, 1, 0 ஆகிய இடஞ்சுழியான திருப்பங்களைக்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கொண்டுள்ளன. x - அச்சின் நேர்த்திசையில், விசைகளின் துலிசல்களின் கூட்டுத்தொகை $\underset{\sim}{X}$ ஆகவும் y - அச்சுக்கான ஒத்த கூட்டுத்தொகை $\underset{\sim}{Y}$ ஆகவும் இருப்பின், X =3 என்றும் Y =4 என்றும் காட்டுக. இதிலிருந்து இத்தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும், தாக்கக்கோட்டுக்குரிய சமன்பாட்டையும் காண்க.

ஏப்பிரில் 1981

12. O எனும் உற்பத்தி குறித்து A,B எனும் இரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ ஆகும். P எனும் புள்ளி AB யை n : m எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது. $\overrightarrow{OP} = \dfrac{(m\underset{\sim}{a} + n\underset{\sim}{b})}{(m + n)}$ எனக்காட்டுக.

OABC என்பது ஒரு இணைகரமாகும். M என்பது OA யின் நடுப்புள்ளியாகும். காவிகளைப் பயன்படுத்தி OB, CM என்பன ஒன்றையொன்று முக்கூறிடுமெனக் காட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. தளமொன்றிலே தாக்குகின்ற, சமமும் எதிருமான திருப்பங்களையுடைய இரு இணைகள் சமநிலையில் உள்ளன எனக்காட்டுக. PQ, PR எனும் இரு நேர்கோடுகள் P யில் இடைவெட்டுகின்றன. A, A', B, B' என்பன $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ ஆகுமாறு, PQ மீதுள்ள புள்ளிகளாகும். C, C', D, D' என்பன $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ ஆகுமாறு PR மீதுள்ள புள்ளிகளாகும். $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{D'B'}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{A'D'}$

என்பனவற்றால் முற்றாகக் குறிக்கப்படும் விசைகள் சமநிலையிலுள்ளன எனக்காட்டுக.

14. ABC எனும் முக்கோணியின் பக்கங்களான BC, CA, AB வழியாக, எழுத்துகளின் ஒழுங்கு குறிக்கும் போக்கில் முறையே P, Q, R எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன. BC, CA, AB எனும் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $x = 0, y = 0$, x கோசை $\theta + y$ சைன் $\theta = p$ ஆகும்.

(i) P சீக் θ = Q கோசீ θ = R என இருப்பின், இத்தொகுதியானது ஒரு இணைக்குச் சமவலுவுடையதெனக் காட்டி, அதன் திருப்பத்தையும் காண்க.

(ii) தொகுதியானது தனியொரு விசைக்குச் சமவலுவுடையதெனில், அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டைச் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

15. $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{w}$ என்பன ஒருமைகளாகவும் $\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}$ என்பன xOy தளத்திலுள்ள Ox, Oy எனும் திசைகள் வழியேயான அலகுக் காவிகளாகவும் இருக்க, நேரம் t யில் P, Q எனும் இரு துணிக்கைகளின் தானக் காவிகள்

$$\underset{\sim}{r}_1 = ut\underset{\sim}{i} + vt\underset{\sim}{j}$$

$$\underset{\sim}{r}_2 = (a + ut + a\,\text{கோசை}\,wt)\underset{\sim}{i} + (vt + a\,\text{சைன்}\,wt)\underset{\sim}{j}$$

என்பவற்றால் தரப்படுகின்றன.

நேரம் t யில் P, Q என்பனவற்றின் வேகங்கள், ஆர்முடுகல்கள் ஆகியவற்றை காண்க.

P தொடர்பாக Q ஒரு வட்டத்தை வரைகிறதெனவும் P, Q என்பனவற்றின் தானங்கள் ஆவர்த்தன முறையில் பொருந்துகின்றனவெனவும் நிறுவுக.

P, Q ஆகியவை பொருந்தும்போது அவற்றின் இயக்கத்திசைகளுக்கு இடையிலான கோணத்தைக் காண்க.

ஆகஸ்ட் 1981

16. $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ ஆகியன முறையே A, B ஆகிய இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் எனின் AB ஐ m:n எனும் விகிதத்தில் உட்கூறாக்கும் P எனும் புள்ளி

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$(n\underset{\sim}{a}+m\underset{\sim}{b})/(m+n)$ ஆகிய தானக்காவியைக் கொண்டுள்ளது எனக் காட்டுக. P ஆனது AB ஐ வெளிப்பிரிப்புச் செய்தாலும் இக்கோவை பொருத்தமானது எனக்காட்டுக. தரப்பட்ட யாதேனுமோர் முக்கோணியின் இடையங்களுக்குச் சமாந்தரமான சமமான பக்கங்களையுடைய முக்கோணியொன்று உண்டு என்பதைக் காவிமுறைகளை உபயோகித்துக்காட்டுக.

17. $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}$ ஆகிய இரு காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கமான $\underset{\sim}{a}.\underset{\sim}{b}$ ஐயும் காவிப் பெருக்கமான $\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{b}$ ஐயும் வரையறுக்க.

$|\underset{\sim}{a}.(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{c})|$ என்பது a,b,c ஆகியவற்றை அடுத்துள்ள ஓரங்களாகக்கொண்ட இணைகரப்பரவையின் கனவளவுக்குச் சமமெனக்காட்டுக.

$\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}$ ஆகிய காவிகள் ஒரு தளமானவையாக இருப்பதற்கு $\underset{\sim}{a}.(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{c})=0$ என்பது தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை என்பதை உய்த்தறிக.

18. $\alpha\overrightarrow{BC}, \beta\overrightarrow{CA}, \gamma\overrightarrow{AB}$ ஆகிய மூன்று விசைகள் ABC எனும் முக்கோணியின் BC CA, AB ஆகிய பக்கங்களின் வழியாக முறையே தாக்குகின்றன $\alpha=\beta=\gamma$ என அமைந்தால், அமைந்தால் மாத்திரமே இவை ஓர் இணையாக ஒடுங்கு

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மெனக்காட்டுக. ABC எனும் முக்கோணியில் P, Q, R என்பன முறையே, பக்கங்கள் BC, CA, AB ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$

$\lambda\overrightarrow{QR}$, $\lambda\overrightarrow{RP}$, $\lambda\overrightarrow{PQ}$ ஆகியவற்றால் பருமன் திசை, தாளம் ஆகியவை குறிப்பிடப் படும். விசைகள் சமநிலையிலிருப்பின் $\lambda = -4$ எனக்காட்டுக.

19. ABCD எனும் நாற்பக்கலின் உச்சிகளின் ஆள்கூறுகள் முறையே (0,0), (0,2), (-2, 3), (-4, -1) ஆகும். $\overrightarrow{AB}$, 3 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ ஆகியவற்றால் முற்றாகக் குறிப்பிடப் படும் விசைகள் நாற்பக்கலின் பக்கங்களின் வழியே தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுள் விசையின் பருமனையும் அதன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டையுமை யும் காண்க.

******

end

***

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org